ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

# ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Δ', Ε', ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1975

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

# ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΤΜΗΜΑ ΤΟΣ ΠΡΟΓΡ. Μ.Ε. & ΜΕΛΕΤΩΝ
Αριθμ. Εἰσαγωγῆς 3893
Ἡμερομηνία 31-10-75

17571

ΔΩΡΕΑΝ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

## ΕΚ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι


§1. Κατασκευαί.
§2. Βασικαὶ κατασκευαί.
§3. Ἡμιεφαπτομένη τόξου.
§4. Κατασκευὴ τόξου ἐκ τῆς χορδῆς καὶ τῆς ἡμιεφαπτομένης του.
§5. Τόξον ἱκανὸν γωνίας φ.
§6. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.
§7. Ἡ γενικὴ μέθοδος.
§§8 - 15. Παραδείγματα τῆς Ἀναλυτικῆς μεθόδου.
§16. Μεταφορὰ σχήματος κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$.
§17. Γεωμετρικὸς τόπος.
§18. Στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ τόποι.
§19. Εὕρεσις γεωμετρικῶν τόπων.
§20. Χρῆσις τῶν γ.τ. εἰς γεωμετρικὰς κατασκευάς.


### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ


§21. Ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν κυρτῶν πολυγώνων
§22. Ἐγγράψιμον τετράπλευρον.
§23. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες.
§24. Τέσσαρα ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.
§25. Γωνία ὕψους καὶ διαμέτρου.
§§26,27,28. Ἰδιότητες τοῦ ὀρθοκέντρου.
§29. Εὐθεῖα Euler τριγώνου.
§30. Κύκλος τῶν ἐννέα σημείων τριγώνου.
§31. Εὐθεῖα Simson.
§32. Εὐθεῖα Steiner.
§33. Γωνία δύο ἡμιευθειῶν τεμνουσῶν περιφέρειαν.


### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ


§34. Πολλαπλασιασμὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.
§34α. Ἀκολουθίαι.
§35. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου ἀκολουθίας.
§36. Ἀξίωμα τοῦ Dedekind.
§37. Ὅριον μονοτόνου ἀκολουθίας.
§38. Θεώρημα τοῦ ἐγκιβωτισμοῦ.
§39. Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους.
§40. Μέτρον ἑνὸς τμήματος.
§41. Θεωρήματα ἐπὶ τοῦ μέτρου τῶν τμημάτων.
§42. Ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς μονάδος μετρήσεως ἐπὶ τῶν μηκῶν.
§43. Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.
§44. Δεύτερος ὁρισμὸς τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.
§45. Μέτρον γωνίας.
§46. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ.
§47. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.
§48. Συνέπεια τοῦ (Θ) τοῦ Θαλοῦ.
§49. Διαίρεσις τμήματος εἰς μέρη ἀνάλογα δύο δοθέντων τμημάτων.
§50. Τέταρτον ἀνάλογον.
§§51 - 54. Ὅμοια τρίγωνα.
§55. Τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον μιᾶς εὐθείας.
§56. Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν.
§57. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τμημάτων.
§§ 58, 59. Ἰδιότητες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου.
§60. Διαίρεσις διανύσματος εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.


Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§61. Διαίρεσις διανύσματος εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ.
§62. Ἁρμονικὴ τετράς σημείων.
§§63,64. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες τῆς ἁρμονικῆς τετράδος.
§65. Συμβατικὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα.
§66. Ἀπολλώνιος κύκλος.
§67. Περιοχαὶ τοῦ ἐπιπέδου καθοριζόμεναι ὑπὸ μιᾶς ἀπολλωνίου περιφερείας.
§68. Παρατήρησις.
§69. Θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου.
§70. Πυθαγόρειον θεώρημα.
§§71,72,73,74. Μετρικαὶ σχέσεις ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ.
§§75,76. Κατασκευαὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.
§77. Κατασκευὴ τοῦ x ἐκ τῆς $x^2/a^2=\mu/\nu$.
§78. Ἡ ἀλγεβρικὴ μέθοδος εἰς Γεωμετρικὰς κατασκευάς.
§79. Ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα.
§80. Κριτήριον τοῦ ἂν γωνία τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.
§81. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ ἐπεκτεταμένου πυθαγορείου θεωρήματος.
§82. Πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου.
§83. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου.
§84. Θεώρημα περὶ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν τριγώνου.
§85. Σχέσις τοῦ Stewart.
§86. Γενικευμένη σχέσις τοῦ Stewart.
§§87,88. Μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου.
§89. Ἐφαρμογαὶ τοῦ πρώτου θεωρήματος τῆς διαμέσου.
§90. Τόπος : $MA^2-MB^2=c^2$.
§91. Ὑπολογισμὸς τῶν ὑψῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.
§92. Ἐμβαδὸν τριγώνου.
§93. Ἰδιότητες τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν τριγώνων.
§94. Ἡ προσθετικὴ ἰδιότης τοῦ ἐμβαδοῦ.
§95. Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου.
§96. Ὑπολογισμὸς τῶν ρ, $\rho_\alpha$, R συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.
§97. Σύγκρισις τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων. Ἐφαρμογή.
§98. Ἰσοδύναμα τρίγωνα.
§99. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου.
§100. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.
§101. Ἐμβαδὸν τραπεζίου.
§102. Ἐμβαδὸν τετραπλεύρου μὲ καθέτους διαγωνίους.
§103. Πολύγωνα ἰσοδύναμα.
§104. Κατασκευὴ τριγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν πολύγωνον
§105. Ἐφαρμογὴ τῆς §104.
§106. Πᾶν κυρτὸν πολύγωνον τετραγωνίζεται.
§107. Ὅμοια πολύγωνα.
§§108,109. Κατασκευαὶ ὁμοίων πολυγώνων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

§110. Θεώρημα τῶν τεμνομένων χορδῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.
§111. Θεώρημα τῶν τεμνουσῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.
§112. Θεώρημα τεμνούσης καὶ ἐφαπτομένης καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.
§113. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τῶν μετρικῶν σχέσεων ἐν κύκλῳ.
§114. Μεταφορὰ ἑνὸς γινομένου.
§115. Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῶν ριζῶν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως
§116. Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῶν ριζῶν διτετραγώνου ἐξισώσεως.
§117. Διαίρεσις τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.
§118. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον.
§119. Θεώρημα Euler καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.
§120. Ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων.
§121. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.
§122. Κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύο κύκλων.
§123. Τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους.
§124. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων.
§125. Ὀρθογωνιότης δύο κύκλων.
§126. Περιφέρεια τεμνομένη ψευδοορθογωνίως ὑπὸ ἑτέρας περιφερείας.
§127. Δέσμη περιφερειῶν.
§128. Ἰδιότητες τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης.
§129. Ὀρθογώνιοι δέσμαι περιφερειῶν.
§130. Πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

§131. Θεώρημα τοῦ Μενελάου.
§132. Θεώρημα τοῦ Céva.
§133. 1ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου.
§134. 2ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

§135. Κανονικὸν πολύγωνον.
§136. Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν κανονικῶν πολυγώνων.
§137. Γενικὰ σύμβολα.
§138. Ἐγγραφὴ τετραγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.
§139. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ὀκταγώνου.
§140. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου.
§141. Ἐγγραφὴ ἰσοπλεύρου τριγώνου.
§142. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ δωδεκαγώνου.
§143. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ δεκαγώνου.
§144. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ πενταγώνου.
§145. Κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.
§146. Ἱστορικόν.
§147. Ἀστεροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα.
§§148 - 151. Λήμματα.
§152. Ὁρισμὸς τοῦ μήκους τῆς περιφερείας.
§153. Ὁρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ π.
§§154, 155. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ π.
§156. Μῆκος κυκλικοῦ τόξου.
§157. Ἀκτίνιον.
§158. Αἱ θεμελιώδεις τριγωνομετρικαὶ ἀνισότητες.
§159. Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.
§160. Κυκλικὸς τομεύς.
§161. Ἕτερα καμπυλόγραμμα χωρία.
§162. Ἱστορικὸν τοῦ ἀριθμοῦ π.

# ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

# ΕΚ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

§163. Ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου.
§164. Καθορισμὸς ἑνὸς ἐπιπέδου ἐν τῷ χώρῳ.
§165. Εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον.
§166. Ζεῦγος εὐθειῶν ἐν τῷ χώρῳ.
§167. Τεμνόμενα ἐπίπεδα.
§167α. Διαμερισμὸς τοῦ χώρου ὑπὸ ἐπιπέδου.
§168. Τόπος εὐθειῶν.
§169. Κανὼν σχεδιάσεως.
§170. Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ ἐν τῷ χώρῳ.
§171. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον.
§172. Κατασκευὴ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ εὐθεῖαν.
§173. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον εἰς δοθὲν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.
§174. Εὐθεῖα πλαγία ὡς πρὸς ἐπίπεδον
§175. Κάθετος καὶ πλάγιαι.
§176. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον.
§§177, 178. Θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων.
§179. Τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον.
§180. Παράλληλοι εὐθεῖαι ἐν τῷ χώρῳ.
§181. Ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι τοῦ χώρου.
§182. Ὀρθαὶ προβολαὶ ἐπὶ ἐπίπεδον.
§183. Προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον.
§184. Γωνία κλίσεως.
§§185, 186. Παραλληλία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.
§§187, 188. Κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.
§189. Περίπτωσις συμβατῶν εὐθειῶν.
§§190 - 195. Παράλληλα ἐπίπεδα.
§196. Γωνίαι τοῦ χώρου μὲ πλευρὰς ἀντιστοίχως παραλλήλους.
§197. Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.
§198. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἐν τῷ χώρῳ.
§199, 200. Ἐφαρμογαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.
§201. Προβολὴ τμήματος ἐπὶ εὐθεῖαν τοῦ χώρου.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

§§202 - 204. Δίεδροι γωνίαι.
§205. Ἄνισοι δίεδροι.
§206. Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ δύο διέδρων.
§207. Τὸ διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδον διέδρου.
§208. Μέτρον διέδρου.
§209. Λόγος δύο διέδρων.
§210. Συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαὶ δίεδροι.
§211. Διευθυνόμεναι δίεδροι.
§212. Δεξιόστροφοι καὶ ἀριστερόστροφοι διευθυνόμεναι δίεδροι.
§§213, 214. Κάθετα ἐπίπεδα.
§215. Σημειακὸς μετασχηματισμός.
§§216, 217. Στροφὴ περὶ ἄξονα.
§218. Μεταφορά.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

§219. Συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα (ἐν τῷ χώρῳ).
§220. Συμμετρία ὡς πρὸς ἐπίπεδον.
§221. Συμμετρία ὡς πρὸς κέντρον (ἐν τῷ χώρῳ).
§222. Σύγκρισις τῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς κέντρον καὶ ὡς πρὸς ἐπίπεδον.
§§223 - 228. Στοιχεῖα συμμετρίας ἁπλῶν τινων σχημάτων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

§229. Ἡ τρίεδρος καὶ τὰ 6 κύρια στοιχεῖα αὐτῆς.
§230. Παραπληρωματικαὶ τρίεδροι.
§231. Δυασμὸς τῶν θεωρημάτων.
§§232 - 235. Θεωρήματα ἰσότητος τριέδρων.
§236. Ἡ ἰσοσκελὴς τρίεδρος.
§237. Αἱ κατὰ κορυφὴν τρίεδροι.
§238. Τρίεδροι ἴσαι καὶ τρίεδροι κατοπτρικαί.
§239. Ἡ «τριγωνικὴ συνθήκη» μεταξὺ τῶν ἑδρῶν τριέδρου.
§240. Τρισορθογώνιος τρίεδρος.
§§241, 242. Πολύεδρος στερεὰ γωνία.
§ 243. Ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας
§244. Ἀναγκαῖαι συνθῆκαι μεταξὺ τῶν τριῶν ἑδρῶν τριέδρου.
§245. Προσκείμεναι τρίεδροι.
§246. Κατασκευὴ τριέδρου ἐκ τῶν τριῶν ἑδρῶν της.
§247. Ἀναγκαῖαι συνθῆκαι μεταξὺ τῶν τριῶν διέδρων πάσης τριέδρου.
§ 248. Κατασκευὴ τριέδρου ἐκ τῶν τριῶν διέδρων της.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

§249. Κυρτὰ πολύεδρα.
§250. Μὴ κυρτὸν πολύεδρον.
§§251 - 255. Τὸ τετράεδρον.
§256. Κατηγορίαι τινὲς τετραέδρων.
§257. Πυραμίς.
§258. Θεώρημα τῶν παρ)λων τομῶν πυραμίδος.
§259. Πόρισμα.
§260. Κόλουρος πυραμίς.
§261. Πρῖσμα.
§262. Ἀπέραντος πρισματικὴ ἐπιφάνεια.
§263. Κάθετος τομὴ πρίσματος.
§264. Ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος.
§265. Παραλληλεπίπεδον.
§266. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.
§267. Κύβος καὶ στοιχεῖα συμμετρίας αὐτοῦ.
§268. Κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα.
§269. Κολοβὸν πολυγωνικὸν πρῖσμα.
§270. Κολοβὸν παραλληλεπίπεδον.
§271. Ὄγκος τετραέδρου.
§272. Ἰδιότητες τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.
§273. Σύγκρισις τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων.
§274. Ἰσοδύναμα τετράεδρα.
§§275 - 283. Ὄγκος πολυέδρου.
§284. Ἰσοδύναμα πολύεδρα.
§285. Πολύεδρα ἰσοδιαμερίσιμα.
§286. Πολύεδρα κατοπτρικά.
§287. Ὄγκος πυραμίδος.
§§288, 289. Ὄγκος κολούρου πυραμίδος.
§290. Ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος.
§291. Ὄγκος τυχόντος πρίσματος.
§292. Ὄγκος ὀρθογωνίου παρ)δου.
§293. Καθορισμὸς τῆς σταθερᾶς κ.
§294. Ἰσοδυναμία πλαγίου πρίσματος πρὸς ὀρθὸν ἔχον βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου....
§§295, 296, 297. Ὄγκος κολοβοῦ πρίσματος.
§§298, 299. Πρισματοειδὲς καὶ ὄγκος αὐτοῦ.
§300. Ἴσα πολύεδρα.
§301. Ὅμοια πολύεδρα.
§302. Ὅμοιαι πυραμίδες.
§§303, 304, 305. Ἰδιότητες τῶν ὁμοίων πολυέδρων.
§306. Ἀντιρρόπως ὅμοια πολύεδρα.
§307. Θεώρημα τοῦ Euler διὰ τὰ κυρτὰ πολύεδρα.
§308. Κανονικὰ πολύεδρα.
§§309, 310. Τὰ 5 Πλατωνικὰ στερεά.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

§311. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.
§312. Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι μὲ ὁδηγὸν περιφέρειαν.
§313. Ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι.
§314. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.
§315. Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι μὲ ὁδηγὸν περιφέρειαν.
§316. Ἐκ περιστροφῆς κωνικὴ ἐπιφάνεια.
§317. Σχῆμα ἐκ περιστροφῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§318. Ἡ μεταξὺ δύο παρ/λων ἐπιπέδων περιοχὴ τοῦ χώρου.
§319. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος.
§320. Πλάγιος κυκλικὸς κύλινδρος.
§321. Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος.
§322. Πλάγιος κυκλικὸς κῶνος.
§323. Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς.
§324. Εὐθύγραμμον τμῆμα στρεφόμενον περὶ ἄξονα.
§325. Ἐπιφάνεια γραφομένη ὑπὸ τεθλασμένης γραμμῆς στρεφομένης περὶ ἄξονα.
§326. Τρίγωνον στρεφόμενον περὶ μίαν πλευράν του.
§327. Τρίγωνον στρεφόμενον περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς του.
§328. Τρίγωνον στρεφόμενον περὶ τυχόντα ἄξονα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

§329. Σφαῖρα.
§330. Συμμετρίαι τῆς σφαίρας.
§331. Ἡ σφαῖρα ὡς σχῆμα περιστροφῆς.
§332. Γεωμετρικοὶ τόποι.
§333. Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ σφαίρας.
§334. Ἐπίπεδοι τομαὶ σφαίρας.
§335. Σχετικαὶ θέσεις σφαίρας καὶ ἐπιπέδου.
§336. Ἄξων κύκλου.
§337. Προσδιορισμὸς μιᾶς σφαίρας.
§338. Πόλοι κύκλων μιᾶς σφαίρας.
§339. Πρακτικαὶ ἐφαρμογαὶ (διὰ τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου).
§340. Γεωγραφικαὶ συντεταγμέναι.
§341. Σφαῖρα περιγεγραμμένη, σφαῖρα ἐγγεγραμμένη.
§342. Τόπος τῶν διὰ σημείου ἐφαπτομένων εὐθειῶν πρὸς σφαῖραν καὶ περιβάλλουσα τῶν διὰ σημείου ἐφαπτομένων ἐπιπέδων σφαίρας.
§343. Θέσεις δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας.
§344. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς σφαῖραν.
§345. Ριζικὸν ἐπίπεδον δύο σφαιρῶν.
§346. Ριζικὸς ἄξων τριῶν σφαιρῶν.
§347. Ριζικὸν κέντρον τεσσάρων σφαιρῶν.
§348. Ὀρθογώνιοι σφαῖραι.
§349. Σφαῖρα τεμνομένη ψευδοορθογωνίως ὑπὸ ἄλλης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

§350. Ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης καὶ σφαίρας.
§351. Σφαιρικὴ ἄτρακτος.
§352. Ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως καὶ σφαίρας.
§353. Σφαιρικὸς δακτύλιος.
§354. Σφαιρικὸν τμῆμα.
§355. Σφαιρικὸς ὄνυξ.
§356. Σφαιρικὸν τρίγωνον.
§357. Συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα.
§358. Πολικὰ τρίγωνα.
§359. Σφαιρικὸν πολύγωνον.
§360. Ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ τριγώνου.
§361. Ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ πολυγώνου.

# ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

# ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

§362. Ἁπλοῦς ἢ μερικὸς λόγος.
§363. Διπλοῦς λόγος τετράδος σημείων εὐθείας.
§364. Διπλοῦς λόγος τεσσάρων ἀκτίνων.
§365. Ἁρμονικὴ δέσμη εὐθειῶν.
§366. Ἀξιοσημείωτος περίπτωσις ἁρμονικῆς δέσμης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

§367. Σημεῖα συζυγῆ ὡς πρὸς δύο εὐθείας.
§368. Πολικὴ σημείου ὡς πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας.
§369. Πολικὴ σημείου ὡς πρὸς δύο παραλλήλους εὐθείας
§370. Θεώρημα.
§371. Κατασκευὴ τῆς πολικῆς ἑνὸς σημείου ὡς πρὸς δύο εὐθείας.
§372. Θεμελιῶδες θεώρημα τῶν ἁρμονικῶν τετράδων.
§373. Σημεῖα συζυγῆ ὡς πρὸς κύκλον.
§374. Πολικὴ σημείου ὡς πρὸς κύκλον.
§375. Πόλος μιᾶς εὐθείας.
§376. Θέσις τῆς πολικῆς.
§377. Πολικὴ ἀντιστοιχία.
§378. Κατασκευὴ τῆς πολικῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

§379. Προσανατολισμέναι γωνίαι.
§380. Γωνίαι ἄξονος μὲ δύο συμμετρικὰς πρὸς αὐτὸν ἡμιευθείας.
§381. Διευθυνόμεναι γωνίαι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἄξονα.
§382. Μονοσήμαντος ἀπεικόνισις.
§383. Ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις.
§384. Σύνθεσις ἀπεικονίσεων.
§385. Ὁρισμοὶ ἐπὶ τῶν σημειακῶν μετασχηματισμῶν.
§386. Γινόμενον μετασχηματισμῶν.
§387. Ἐνελικτικὸς μετασχηματισμός.
§388. Ὁμὰς μετασχηματισμῶν.
§389. Ἐπίπεδοι σημειακοὶ μετασχηματισμοί.
§390. Ἐπίπεδοι καὶ μὴ ἐπίπεδοι μετατοπίσεις.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVIII

§391. Μεταφορά.
§392. Ἐπίπεδος στροφή.
§393. Προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου στροφῆς.
§394. Ἡ ὁμὰς στροφῶν - μεταφορῶν.
§395. Ἀξονικὴ συμμετρία.
§396. Γινόμενον ἀξονικῶν συμμετριῶν.
§397. Κέντρον τοῦ γινομένου δύο στροφῶν ἢ στροφῆς καὶ μεταφορᾶς.
§398. Ὁμὰς τῶν ἐπιπέδων καὶ μὴ ἐπιπέδων κινήσεων.
§399. Ὁμοιοθεσία.
§400. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ὁμοιοθεσίας.
§401. Ὁμοιόθετα πολύγωνα.
§402. Ὁμοιόθετα τρίγωνα.
§403. Γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν.
§404. Εἰδικὴ περίπτωσις.
§405. Συνέπειαι.
§406. Τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοθεσιῶν.
§407. Τὰ δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας μεταξὺ δύο κύκλων.
§408. Διάφοροι παρατηρήσεις.
§409. Ὁμοιοθεσίαι εἰς τρεῖς κύκλους.
§410. Κύκλοι ἐφαπτόμενοι δοθέντος κύκλου καὶ δοθείσης εὐθείας.
§411. Κύκλοι ἐφαπτόμενοι δύο κύκλων.
§412. Ἐπίπεδος ὁμοιότης ὁμόρροπος.
§413. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης.
§414. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός.
§415. Κέντρον μιᾶς ὁμοιότητος.
§416. Ἰδιότης τοῦ κέντρου ὁμοιότητος.
§417. Κατασκευὴ τοῦ κέντρου μιᾶς ὁμοιότητος.
§418. Ἀντιμεταθετικότης μιᾶς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς στροφῆς.
§419. Ὁμὰς τῶν ὁμοιοτήτων.
§420. Μεταβαλλόμενον σχῆμα καὶ σταθερὸν κέντρον ὁμοιότητος.
§421. Ἀντιστροφή.
§422. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἀντιστροφῆς.
§423. Περιφέρεια ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον.
§424. Ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων ἀντιστρόφων πρὸς δύο δοθέντα.
§425. Γινόμενον δύο ἀντιστροφῶν τοῦ ἰδίου πόλου.
§426. Διευθύνουσα περιφέρεια.
§427. Τὸ ἀντίστροφον εὐθείας.
§428. Τὸ ἀντίστροφον περιφερείας.
§429. Διατήρησις τῶν γωνιῶν κατὰ τὴν ἐπίπεδον ἀντιστροφήν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

# ΕΚ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΚΑΙ ΤΟΠΟΙ

**1. Κατασκευαί.** α') Μολονότι τὰ γεωμετρικὰ σχήματα εἶναι ἀπολύτως ἰδεατά, ἐν τούτοις χαράσσονται (ἢ σχεδιάζονται) κατὰ λίαν ἱκανοποιητικὸν τρόπον ἐπὶ ἐπιπέδου σχεδίου. Διὰ τὴν χάραξιν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων χρησιμοποιοῦμεν τὸν **κανόνα,** διὰ τοῦ ὁποίου σχεδιάζομεν εὐθύγραμμα τμήματα, καὶ τὸν **διαβήτην,** διὰ τοῦ ὁποίου σχεδιάζομεν περιφερείας ἢ τόξα καθὼς καὶ ἴσα τμήματα. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν δύναται νὰ χρησιμοποιῆται «τυφλὸς» διαβήτης μὲ δύο ἀκίδας, χωρὶς γραφίδα. (Μεταφορεύς).

Κάθε γεωμετρικὸν θεώρημα ἀνταποκρίνεται εἰς ἓν **σχῆμα,** τὸ ὁποῖον ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ κατασκευάζῃ μόνος του χρησιμοποιῶν τ' ἀνωτέρω ὄργανα, καθὼς καί τινα βοηθητικὰ «διαφανῆ» ὀρθογώνια τρίγωνα, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιταχύνεται ἡ κατασκευὴ καθέτων ἢ παραλλήλων. Ἡ ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ μελετητοῦ κατασκευὴ τῶν σχημάτων διαφωτίζει αὐτὸν ἀσυγκρίτως περισσότερον ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ἑνὸς ἤδη σχεδιασμένου εἰς τὸ βιβλίον σχήματος.

β') Εἰς τὴν γεωμετρίαν τίθενται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ συγκροτηθῇ ἓν σχῆμα, ὅταν δίδωνται **ὡρισμένα στοιχεῖα** αὐτοῦ. Ὁ θεωρητικὸς προσδιορισμὸς καὶ ἡ μετ' ἀκριβείας χάραξις ἑνὸς σχήματος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πληροῦντος ὡρισμένους ὅρους (ἐπιτάγματα) καλεῖται εἰς τὴν γεωμετρίαν «κατασκευή».

Ὅταν τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς ἑνὸς σχήματος λύεται διὰ τῆς χρήσεως **μόνον** τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου, τότε λέγομεν (ἀκολουθοῦντες τὸν Πλάτωνα) ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται **γεωμετρικὴν λύσιν** ἢ *«λύεται γεωμετρικῶς»*· καὶ ἡ κατασκευὴ ἡ ἐπιτυγχανομένη μόνον διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου λέγεται **γεωμετρικὴ κατασκευή.**

γ') Ὑπάρχουν προβλήματα κατασκευῶν μὴ δυνάμενα νὰ λυθοῦν διὰ τῆς χρήσεως κανόνος καὶ διαβήτου μόνον. Ταῦτα λέγονται προβλήματα **μὴ λυόμενα γεωμετρικῶς.** Οὕτω π.χ. ἔχει ἀποδειχθῆ διὰ τὰ κάτωθι 10 προβλήματα ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθοῦν διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου (δηλ. δὲν λύονται γεωμετρικῶς).

**Προβλήματα τινὰ μὴ ἐπιδεχόμενα γεωμετρικὴν λύσιν:**

*1. Νὰ διαιρεθῆ δοθεῖσα γωνία διάφορος τῆς ὀρθῆς εἰς τρία ἴσα μέρη.*

*2. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ δύο ἄλλων τεμνομένων εὐθειῶν περιεχόμενον τμῆμα νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα. (Τὸ δοθὲν σημεῖον νὰ μὴ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζουν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι).*

*3. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς διχοτόμους.*

*4. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος μέτρου α, νὰ κατασκευασθῆ δεύτερον, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἰσοῦται πρὸς* $\alpha\sqrt[3]{2}$.

*5. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδονται οἱ πόδες τῶν διχοτόμων.*

*6. Νὰ διαιρεθῆ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη.*

*7. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδονται τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς.*

*8. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδεται μία διάμεσος, μία διχοτόμος καὶ ἓν ὕψος ἀγόμενα ἐκ τριῶν διαφόρων κορυφῶν.*

*9. Διὰ δοθέντος σημείου κειμένου ἐντὸς δοθείσης γωνίας νὰ ἀχθῆ τμῆμα περατούμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν καὶ ἔχον τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν μῆκος.*

*10. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας χορδὰς ἐχούσας διαφορὰν δεδομένην.*

*Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ πραγματευθῶμεν μόνον προβλήματα ἐπιδεχόμενα γεωμετρικὴν λύσιν.*

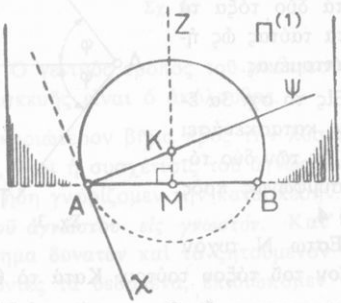
**2. Βασικαὶ κατασκευαί.** Αἱ ἁπλαῖ, βασικαὶ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ εἶναι ἤδη γνωσταὶ εἰς τὸν μαθητὴν ἀπὸ τὴν προηγουμένην τάξιν. (Ἐπ' αὐτῶν βλέπε ἀσκήσεις 1 ἕως 10). Θὰ προσθέσωμεν μερικὰς ἀκόμη καθὼς καὶ παραδείγματα συνθετωτέρων κατασκευῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**3. Ἡμιεφαπτομένη τόξου.** Κάθε τόξον $\widehat{AB}$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ ευθΑΒ. Καλεῖται **ἡμιεφαπτομένη** ἑνὸς τόξου $\widehat{AB}$ εἰς τὸ ἄκρον Α ἡ ἡμιευθεῖα Ax ἡ φερομένη ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Α ἐφαπτομένης καὶ κειμένη ὡς πρὸς τὴν ευθ ΑΒ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον, τὸ **μὴ περιέχον** τὸ τόξον $\widehat{AB}$.

**4. Νὰ κατασκευασθῇ τόξον, ὅταν δίδεται ἡ χορδὴ τοῦ ΑΒ καὶ ἡ ἡμιεφαπτομένη του ΑΧ.**

**Ἀνάλυσις.** Τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου τόξου κεῖται ἀφ' ἑνὸς ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 1) καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΧ.



Σχ. 1

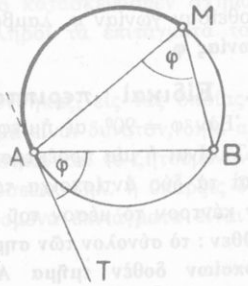
**Σύνθεσις.** Φέροντες τὰς δύο ἀνωτέρω εὐθείας ΜΖ καὶ ΑΨ (σχ. 1) προσδιορίζομεν διὰ τῆς ἀλληλοτομῆς των, τὸ κέντρον Κ τοῦ ζητουμένου τόξου. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράφομεν τόξον $\widehat{AB}$ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου Π(1) τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς ευθ ΑΒ καὶ μὴ περιέχοντος τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΧ. (Τόξον μὴ περιεχόμενον ἐντὸς τῆς γωνίας $B\widehat{A}X$). Προφανῶς τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν (ἐφ' ὅσον βεβαίως αἱ εὐθεῖαι ΑΧ, ΑΒ δὲν ταὐτίζονται).

## ΤΟΞΟΝ ΙΚΑΝΟΝ ΓΩΝΙΑΣ φ

**5. α') Πρόβλημα. «Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, ἀπὸ τῶν ὁποίων δοθὲν τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν κυρτὴν γωνίαν ($\neq 0$ καὶ $\neq 180^0$)».**

Ἔστω Μ ἓν σημεῖον τοῦ συνόλου, δηλαδὴ τοιοῦτον, ὥστε :

$A\widehat{M}B = \varphi$ (δοθεῖσα κυρτὴ γωνία) (σχ. 2).



Σχ. 2

Τὸ σημεῖον Μ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ (θὰ εἴχομεν τότε $\varphi = 180^0$) οὔτε ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς του (θὰ εἴχομεν $\varphi = 0$)· συνεπῶς διὰ τῶν Α, Μ, Β διέρχεται περιφέρεια. Θεωροῦμεν τώρα τὸ τόξον $A\widehat{M}B$ τὸ περιέχον τὸ Μ καὶ τὴν ἡμιεφαπτομένην αὐτοῦ ΑΤ κατὰ τὸ ἄκρον Α (§ 3). Τότε ἡ ὑπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τῆς ἡμιεφαπτομένης ΑΤ σχηματιζομένη γωνία $T\widehat{A}B$ ἰσοῦται μὲ

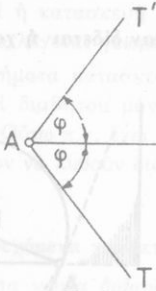
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν $A\widehat{M}B$, δηλ. $T\widehat{A}B = \varphi$. Ὥστε ἡ ἡμιευθεῖα AT εἶναι **σταθερὰ** (δηλ. ἡ αὐτὴ διὰ κάθε σημεῖον M τοῦ συνόλου).

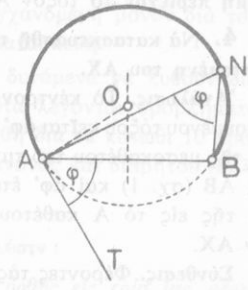
Ἑπομένως καὶ τὸ τόξον $A\widehat{M}B$ εἶναι **σταθερὸν** καὶ κατασκευάσιμον (§ 4).

**Ἀντίστροφον.** Ἂς χαράξωμεν τὰς δύο ἡμιευθείας AT καὶ AT′ τοιαύτας, ὥστε $T\widehat{A}B = T'\widehat{A}B = \varphi$ (σχ. 3) καὶ ἂς κατασκευάσωμεν τὰ δύο τόξα τὰ ἔχοντα ταύτας ὡς ἡμιεφαπτομένας.

Εἰς τὸ σχ. 3α ἔχομεν κατασκευάσει τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο τόξων συμφώνως πρὸς τὴν § 4.



Σχ. 3



Σχ. 3α

Ἔστω N τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου τούτου. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένης γωνίας αἱ δύο γωνίαι $T\widehat{A}B$ καὶ $A\widehat{N}B$ εἶναι ἴσαι (ἑκάστη ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου AOB) καὶ ἐπειδὴ $T\widehat{A}B = \varphi \Rightarrow A\widehat{N}B = \varphi$. Δηλ. τὸ N ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ συνόλου. Ὁμοία ἀπόδειξις γίνεται καὶ διὰ τὸ δεύτερον τόξον, συμμετρικὸν τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὴν AB.

β′) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τὸ θεώρημα:

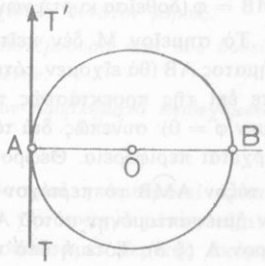
**«Τὸ σύνολον τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δοθὲν τμῆμα AB φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν κυρτὴν γωνίαν φ, σύγκειται ἀπὸ δύο τόξα ἔχοντα ἄκρα τὰ A καὶ B καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἡμιεφαπτόμεναι εἰς τὸ A σχηματίζουν μετὰ τῆς AB γωνίαν φ».**

γ′) Τόξον $\widehat{AB}$, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ σημεῖα βλέπουν τὸ τμῆμα AB ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ, λαμβάνει τὸ ὄνομα: **τόξον ἐπὶ χορδῆς AB, ἱκανὸν γωνίας φ.**

## 6. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.

i) Ἐὰν $\varphi = 90^0$, αἱ ἡμιεφαπτόμεναι AT, AT′ εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης καὶ τὰ δύο ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν κοινὸν κέντρον τὸ μέσον τοῦ AB.

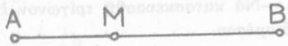
**Ὅθεν: τὸ σύνολον τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δοθὲν τμῆμα AB φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, εἶναι περιφέρεια διαμέτρου AB. Τὰ A καὶ B δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον.**



Σχ. 4

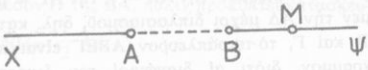
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ii) Ἐὰν $\varphi = 180^0$, ἡ γωνία $A\widehat{M}B$ εἶναι πεπλατυσμένη, τὸ Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ τὸ σημειοσύνολον εἶναι τὸ τμῆμα ΑΒ (σχ. 5).



Σχ. 5

iii) Ἐὰν $\varphi = 0^0$, τὸ σημειοσύνολον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἡμιευθείας ΑΧ, ΒΨ, προεκτάσεις τοῦ τμήματος ΑΒ.



Σχ. 5α

**7. Ἡ γενικὴ μέθοδος.** Ὁ γενικὸς τρόπος τοῦ σκέπτεσθαι διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος κατασκευῆς εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

i) **Ἀνάλυσις.** Τὸ πρῶτον καὶ κυριώτερον βῆμα πρὸς τὴν λύσιν εἶναι ἡ ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος, ἤτοι ἡ συσχέτισις τοῦ ἀγνώστου σχήματος μὲ ἄλλο σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἤδη γνωρίζομεν τὴν κατασκευήν. Ἀνάλυσις λοιπὸν εἶναι *ἡ ἀναγωγὴ τοῦ ἀγνώστου εἰς γνωστόν*. Κατ' αὐτὴν ὑποθέτομεν προσωρινῶς τὸ πρόβλημα **δυνατὸν** καὶ τὸ ζητούμενον σχῆμα **κατεσκευασμένον.** Κατόπιν μελετῶντες τὰ δεδομένα, ἐπιδιώκομεν νὰ φέρωμεν καταλλήλους γραμμάς, διὰ τῶν ὁποίων, χρησιμοποιοῦντες τὰ δεδομένα (δηλ. τὰ γνωστὰ στοιχεῖα), νὰ δημιουργήσωμεν δεύτερον σχῆμα, κατασκευάσιμον καὶ ἀλληλένδετον μὲ τὸ ζητούμενον. Ὥστε κατασκευασθέντος τοῦ δευτέρου νὰ προκύπτῃ καὶ τὸ πρῶτον.

ii) **Σύνθεσις.** Βάσει τῶν συμπερασμάτων τῆς ἀναλύσεως προσπαθοῦμεν νὰ ἀνασυγκροτήσωμεν (κατασκευάσωμεν) τὸ ζητούμενον σχῆμα διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου. Ἡ ἐργασία αὐτὴ εἶναι ἡ **ἀντίστροφος** τῆς ἀναλύσεως, διότι τώρα μεταβαίνομεν ἀπὸ γνωστοῦ σχήματος εἰς τὸ ζητούμενον.

iii) **Ἀπόδειξις.** Ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ κατασκευασθὲν σχῆμα ἀνταποκρίνεται πλήρως πρὸς τὰ δεδομένα (πληροῖ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος).

iv) **Διερεύνησις.** Ἀναζητοῦμεν τὰς συνθήκας, εἰς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ὑπόκεινται τὰ δεδομένα, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, δηλ. αἱ ἐνδεικνυόμεναι κατασκευαὶ εἶναι πραγματοποιήσιμοι καὶ τὸ ζητούμενον σχῆμα ὄντως ὑπάρχῃ. Τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν λύσεων, δηλ. ἡ ὕπαρξις διαφορετικῶν σχημάτων πληρούντων τὰ ἴδια δεδομένα ἐπιτάγματα εἶναι ἐπίσης ἀντικείμενον τῆς διερευνήσεως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

**8.** —**Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης διαμέσου.**

i) *Ἀνάλυσις.* Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον κατεσκευάσθη καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 6). Γνωρίζομεν τὴν ΑΒ = γ, τὴν ΑΓ = β καὶ τὴν διάμεσον ΑΔ = μ. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΑΔ μέχρι διπλασιασμοῦ, δηλ. κατὰ τμῆμα ΔΕ = ΑΔ, ἑνώσωμεν δὲ τὸ Ε μὲ τὰ Β καὶ Γ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται. Ὥστε καὶ ΓΕ = ΑΒ = γ. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὰ μήκη ΑΓ = β, ΓΕ = γ, ΑΕ = 2μ εἶναι δεδομένα, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΓ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ προκύπτει τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν ἑνώσωμεν τὸ Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΕ, προεκτείνωμεν τὴν ΓΔ κατὰ μῆκος ΔΒ = ΓΔ καὶ φέρωμεν τὴν ΑΒ.

Σχ. 6

ii) *Σύνθεσις.* Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΕΓ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ νὰ ἔχουν μήκη ΑΓ = β, ΓΕ = γ, ΕΑ = 2μ. Ἑνοῦμεν τὸ Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΕ, προεκτείνομεν τὴν ΓΔ κατὰ ΔΒ = ΓΔ καὶ φέρομεν τὴν ΑΒ. Τὸ τρ.ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

iii) *Ἀπόδειξις.* Λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου, εἶναι ΑΒ = ΓΕ = γ, δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν γ, ἔχει προφανῶς καὶ τὴν β καὶ ἔχει καὶ διάμεσον ΑΔ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν μ, καθ' ὅσον $\text{ΑΔ} = \frac{\text{ΑΕ}}{2} = \frac{2\mu}{2} = \mu$.

iv) *Διερεύνησις.* Τὸ τρ.ΑΒΓ ὑπάρχει, ἂν ὑπάρχῃ τὸ τρ.ΑΕΓ. Ἡ κατασκευὴ τοῦ τελευταίου τούτου εἶναι δυνατὴ μόνον, ἂν

$$|\beta - \gamma| < 2\mu < \beta + \gamma \quad \text{(Συνθῆκαι δυνατότητος).}$$

**Σημείωσις.** Αἱ κατάλληλοι γραμμαὶ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εἶναι ἡ προέκτασις ΔΕ = ΑΔ καὶ αἱ ΕΓ, ΕΒ, διότι δι' αὐτῶν δημιουργεῖται τὸ κατασκευάσιμον τρίγωνον ΑΓΕ.

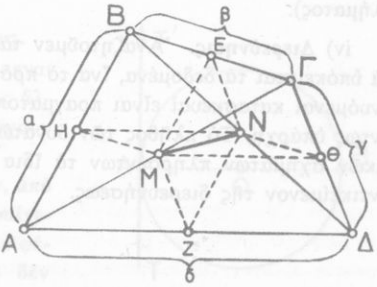
**9.** **Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν δύο διαγωνίων του.**

i) *Ἀνάλυσις.* Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον τετράπλευρον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 7).

Ἂν Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ, ἡ ΜΝ εἶναι κατὰ μέγεθος γνωστή. Ὁμοίως καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Ἐὰν τώρα τὸ μέσον Μ τῆς ΑΓ ἑνωθῇ μὲ τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ, ἡ ΜΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ καὶ ἑπομένως γνωστή.

Ὁμοίως ἡ $\text{ΝΕ} = \frac{1}{2}\,\text{ΓΔ}$, ἄρα ἡ ΝΕ γνωστή. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΜΕΝ εἶναι



Σχ. 7

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατασκευάσιμον. Ὁμοίως, ἂν Ζ τὸ μέσον τῆς ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΜΝΖ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι πάλιν γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του:

$$MN,\ MZ = \frac{1}{2}\ \Gamma\Delta,\ \ NZ = \frac{1}{2}\ AB.$$

Ἐπίσης, ἂν ἑνώσωμεν τὰ Μ καὶ Ν μὲ τὸ μέσον Η τῆς ΒΑ, πάλιν προκύπτει κατασκευάσιμον τρίγωνον ΜΗΝ, διότι $MH = \frac{1}{2}\ B\Gamma$, $NH = \frac{1}{2}\ A\Delta$.

Τέλος, ἂν Θ τὸ μέσον τῆς ΓΔ, τότε τὸ τρίγωνον ΜΘΝ ἔχει γνωστὰς πλευράς, ἄρα κατασκευάζεται.

Τῶν τεσσάρων τούτων τριγώνων κατασκευασθέντων, εὐκόλως προκύπτει τὸ ζητούμενον τετράπλευρον. Διότι ἡ εὐθ ΒΓ θὰ διέρχεται διὰ γνωστοῦ σημείου Ε καὶ θὰ εἶναι //ΜΗ (τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ).

Ὁμοίως ἡ ΑΒ//ΜΕ, ἡ ΑΔ//ΗΝ καὶ ΓΔ//ΝΕ.

ii) *Σύνθεσις*. Λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ ἴσον πρὸς τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων καὶ ἐπ' αὐτοῦ ὡς βάσεως κατασκευάζομεν τρίγωνον ΜΕΝ ἔχον τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ΜΕ καὶ ΝΕ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς $\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\frac{\gamma}{2}$ (ὅπου α, β, γ, δ τὰ δοθέντα μήκη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ). Κατόπιν φέροντες τὴν ΝΖ// ΜΕ καὶ ΜΖ// ΕΝ κατασκευάζομεν τὸ τρ.ΜΝΖ ἔχον πλευρὰς $MZ = EN = \frac{\gamma}{2}$, $NZ = EM = \frac{\alpha}{2}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζομεν τὰ τρίγωνα ΜΝΗ, ΜΝΘ ἔχοντα τὴν $MH = N\Theta = \frac{\beta}{2}$, $NH = M\Theta = \frac{\delta}{2}$.

Τέλος φέρομεν ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῇ ΝΘ, ἐκ τοῦ Η παράλληλον τῇ ΜΕ, ἐκ τοῦ Ζ παράλληλον τῇ ΗΝ καὶ ἐκ τοῦ Θ παράλληλον τῇ ΕΝ.

Αἱ τέσσαρες αὗται παράλληλοι σχηματίζουν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

iii) *Ἀπόδειξις*. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΒΕΜ ἔχομεν ὅτι:

$$HB = ME = \frac{\alpha}{2} \quad \text{καὶ ἐκ τοῦ } AHNZ, \text{ ὅτι } AH = NZ = \frac{\alpha}{2}.$$

Ὥστε $AB = HB + HA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, δηλ. τὸ ΑΒΓΔ ἔχει τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν διὰ τῶν παραλληλογράμμων, ὅτι $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $A\Delta = \delta$. Μένει ἀκόμη ν' ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

Πράγματι τὸ μέσον τῆς ΑΓ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὸ Μ, καθ' ὅσον $EM // = \frac{1}{2}\ BA$. Ὁμοίως τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΔ, διότι $EN // = \frac{1}{2}\ \Gamma\Delta$.

iv) Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάζωνται τὰ τρίγωνα ΕΜΝ, ΗΜΝ. Αἱ συνθῆκαι δυνατότητος εἶναι:

$$\frac{|\alpha-\gamma|}{2} < MN < \frac{\alpha+\gamma}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{|\beta-\delta|}{2} < MN < \frac{\beta+\delta}{2}.$$

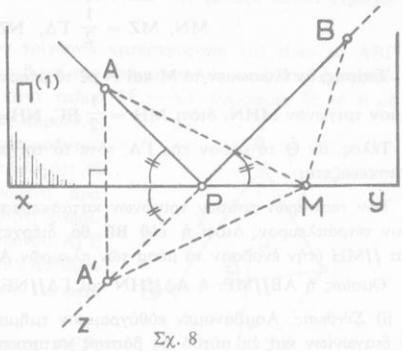
**10. Δίδεται εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ xy. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ρ τῆς xy τοιοῦτον, ὥστε:**

$$x\widehat{P}A = y\widehat{P}B.$$



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

i) *Ἀνάλυσις.* Ἔστω Ρ τὸ ζητούμενον σημεῖον (σχ. 8). Ἐπειδὴ $y\widehat{PB} = x\widehat{PA}$, διὰ τοῦτο ἡ προέκτασις (Ρ, Ζ) τῆς ἀκτῖνος (Ρ, Β) (δηλ. τῆς ἡμιευθείας ΡΒ ἀρχομένης ἐκ τοῦ Ρ καὶ περιεχούσης τὸ Β) εἶναι συμμετρικὴ τῆς ἀκτῖνος (Ρ, Α) ὡς πρὸς τὴν xy καὶ περιέχει καὶ τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α. Ὥστε τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς γνωστῆς εὐθείας Α′Β.



Σχ. 8

ii) *Σύνθεσις.* Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν xy καὶ τὸ συνδέομεν μὲ τὸ Β. Ἡ τομὴ τοῦ τμήματος Α′Β μετὰ τῆς xy εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον Ρ.

iii) *Ἀπόδειξις.* Τὸ Α′ καὶ τὸ Α κεῖνται ἐπὶ δύο ἀντιθέτων ἡμιεπιπέδων ὡς πρὸς τὴν xy, ἄρα καὶ τὸ Α′ μὲ τὸ Β. Διὰ τοῦτο τὸ τμῆμα Α′Β τέμνει τὴν xy εἰς σημεῖον Ρ, μεταξὺ Α′ καὶ Β. Ἔχομεν δέ: $y\widehat{PB} = x\widehat{PZ}$ (κατὰ κορυφήν) καὶ $x\widehat{PZ} = x\widehat{PA}$ (συμμετρικαί), ἄρα $x\widehat{PA} = y\widehat{PB}$.

iv) *Διερεύνησις.* Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἀποδείξεως, τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

**11. Δοθείσης εὐθείας xy καὶ δύο σημείων Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν xy, ὁ συντομώτερος δρόμος ὁ ἄγων ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β καὶ ἐγγίζων τὴν xy εἶναι μία τεθλασμένη ΑΡΒ τοιαύτη, ὥστε:**

$$x\widehat{PA} = y\widehat{PB}. \qquad (P \in xy)$$

*Ἀπόδειξις.* Ἀπὸ τὸ προηγούμενον πρόβλημα γνωρίζομεν ὅτι τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος Α′Β (σχ. 8) καὶ ὅτι

(1) $PA + PB = A'B$ (διότι $PA = PA'$).

Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν ἄλλο σημεῖον τῆς xy, τότε, ἐπειδὴ $MA = MA'$ (λόγῳ συμμετρίας), διὰ τοῦτο:

(2) $MA + MB = MA' + MB$.

Τέλος ἐκ τοῦ τριγώνου Α′ΜΒ εἶναι

(3) $A'B < MA' + MB$.

Βάσει τῶν (1) καὶ (2) ἡ (3) δίδει: $PA + PB < MA + MB$, ἤτοι ὁ δρόμος ΑΡΒ εἶναι συντομώτερος οἱουδήποτε ἄλλου δρόμου ΑΜΒ τῆς αὐτῆς οἰκογενείας.

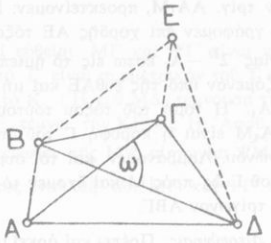
(Ἂν $M \in xy$, τότε $MA + MB = \text{minimum}$, ὅταν $x\widehat{MA} = y\widehat{MB}$).

**12. Μεταφορὰ τμήματος.** Λέγομεν ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒ μεταφέρεται εἰς τὸ τμῆμα ΚΛ, ὅταν ΚΛ//= ΑΒ καὶ ΑΚΛΒ παρ/μον.

**— Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗτινος δίδονται αἱ διαγώνιοι, δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἡ γωνία ω τῶν διαγωνίων ἡ περιέχουσα τὴν ΓΔ.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀνάλυσις*. Ἐὰν χαράξωμεν τὸ τμῆμα ΒΔ (σχ. 9), τότε μένει νὰ προσδιορισθοῦν τὰ Α καὶ Γ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τμῆμα ΑΓ εἶναι τότε, ὄχι μόνον κατὰ μέγεθος, ἀλλὰ καὶ κατὰ διεύθυνσιν, γνωστὸν (λόγῳ τῆς δοθείσης γωνίας $\widehat{\omega}$), διὰ τοῦτο τὸ μεταφέρομεν εἰς ΒΕ, δηλ. ΒΕ//= ΑΓ, ὁπότε προκύπτουν **κατασκευάσιμα** τρίγωνα. Τὸ τρ.ΔΒΕ κατασκευάζεται ἐκ τῶν πλευρῶν ΒΔ καὶ ΒΕ ( = ΑΓ) καὶ τῆς περιεχομένης γωνίας $\widehat{ΕΒΔ}$ =ω καὶ τὸ ΔΕΓΔ ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν: ΕΓ = ΒΑ, ΓΔ καὶ ΕΔ (γνωστὴ ἐκ τοῦ τρ.ΕΒΔ).Ἡ σύνθεσις καὶ ἀπόδειξις εἶναι εὔκολοι.

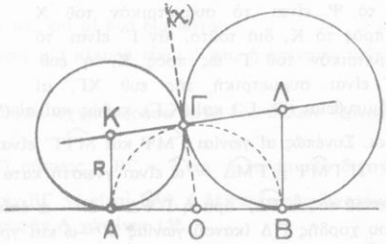


Σχ. 9

*Διερεύνησις*. Τὸ τρ.ΕΒΔ κατασκευάζεται πάντοτε. Τὸ σημεῖον Γ προσδιορίζεται, ἐφ' ὅσον |ΓΔ — ΓΕ|<ΕΔ≦ΓΔ + ΓΕ (ὅπου ΓΕ = ΑΒ). Ἐπειδὴ ἐν γένει τὸ Γ δύναται νὰ τοποθετηθῇ εἰς δύο θέσεις, συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν ΕΔ, διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, τὸ πολύ, λύσεις.

**13. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ περιφέρεια (Κ, R) ἐφαπτομένη τῆς ευθ ΑΒ εἰς Α. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Κ, R) καὶ τῆς ευθ ΑΒ εἰς Β.**

Θὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ προβλήματος. Ἔστω (Λ, ΛΒ) ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν. Ἐφ' ὅσον αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται εἰς Γ, θὰ ἔχουν καὶ μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην (χ) εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῆς (χ) μετὰ τοῦ ΑΒ. Τότε θὰ εἶναι: ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΓ = ΟΒ (ἐφαπτόμενα τμήματα ἐκ σημείου πρὸς περιφέρειαν). Ὥστε τὸ Ο εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν Α, Γ, Β. Τὸ Γ λοιπὸν ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς (Κ,R) καὶ τῆς μὲ διάμετρον ΑΒ γραφομένης. Τὸ Λ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ευθ ΚΓ καὶ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Β καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 10

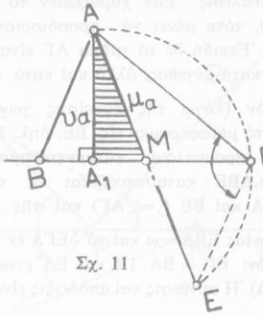
**14. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τοῦ ὕψους $AA_1 = \upsilon_\alpha$ καὶ τῆς διαμέσου ΑΜ = $\mu_\alpha$.**

*Ἀνάλυσις*. (σχ. 11). Τὸ τρ.$AA_1M$ κατασκευάζεται. Ἂς διπλασιάσωμεν τὴν διάμεσον: ΑΜ=ΜΕ. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου παρ|μου ΑΓΕΒ συνάγεται ὅτι $\widehat{AΓE}=2^D-\widehat{A}$ (*). Τὸ Γ βλέπει τὸ γνωστὸν τμῆμα ΑΕ ὑπὸ γωνίαν γνωστήν, ἄρα κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΑΕ καὶ ἱκανοῦ γωνίας $2^D - \widehat{A}$, ἐπίσης τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς γνωστῆς εὐθείας $A_1M$, ἄρα προσδιορίζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τούτων γραμμῶν.

(*) Διὰ τὸν συμβολισμὸν τῆς ὀρθῆς γωνίας μεταχειριζόμεθα συνήθως τὸ σύμβολον $1^D$, ἀλλ' ἐπίσης καὶ τὰ σύμβολα 1ορθ ἢ 90°

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

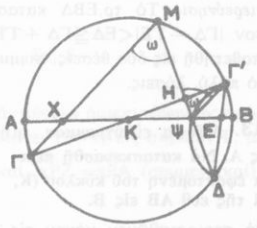
*Σύνθεσις.* Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγ. $AA_1M$, προεκτείνομεν: $ME=MA$ καὶ γράφομεν ἐπὶ χορδῆς AE τόξον ἱκανὸν γωνίας $2^D-\widehat{A}$, ἔστω εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ευθAE καὶ μὴ περιέχον τὸ $A_1$. Ἡ τομὴ τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς ευθ$A_1M$ εἶναι ἡ κορυφὴ Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Λαμβάνομεν καὶ τὸ συμμετρικὸν B τοῦ Γ ὡς πρὸς M καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 11

*Διερεύνησις.* Πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\upsilon_\alpha \leqq \mu_\alpha$.

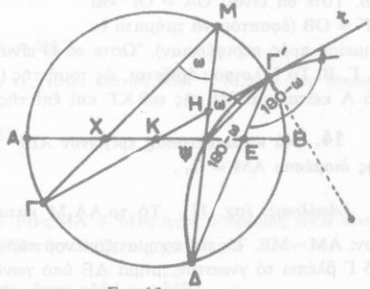
**15. Δίδεται περιφέρεια (K), διάμετρος αὐτῆς AB καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν ἡμιπεριφερειῶν, τὰς ὁποίας ὁρίζει ἡ AB. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον M ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἡμιπεριφερείας τοιοῦτον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι MΓ καὶ MΔ νὰ τέμνουν τὴν AB εἰς δύο σημεῖα X καὶ Ψ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον K. (σχ. 12).**



Σχ. 12

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω $AΓ < AΔ$. Ἐπειδὴ τὸ Ψ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ X ὡς πρὸς τὸ K, διὰ τοῦτο, ἂν Γ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς K, ἡ ευθ ΨΓ' εἶναι συμμετρικὴ τῆς ευθ XΓ, αἱ δὲ ἡμιευθεῖαι (Ψ, Γ') καὶ (X,Γ), καθὼς καὶ αἱ (Ψ,Γ') καὶ (M, Γ) παράλληλοι καὶ ἀντίροποι. Συνεπῶς αἱ γωνίαι $\widehat{ΓMΨ}$ καὶ $\widehat{MΨΓ'}$ εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων. Ἡ $\widehat{ΓMΨ} \equiv \widehat{ΓMΔ} = \widehat{\omega}$ εἶναι γνωστὴ κατὰ μέγεθος ὡς ἐγγεγραμμένη βαίνουσα ἐπὶ γνωστοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΓΔ}$, ἄρα ἡ $\widehat{Γ'ΨΔ} = 2^D - \omega$ ἐπίσης γνωστή. Ἑπομένως τὸ Ψ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς Γ'Δ ἱκανοῦ γωνίας $2^D-\omega$ καὶ γραφομένου πρὸς τὸ μέρος τοῦ K. (Ἡ ευθ ΓΓ', τέμνουσα τὴν πλευρὰν XΨ καὶ μὴ τέμνουσα τὴν MX τοῦ τριγMXΨ, τέμνει τὴν πλευρὰν MΨ εἰς σημεῖον H (Pasch)(*)

Τὸ H ἀνῆκον εἰς τὸ MΨ, κεῖται ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου AMB, ἑπομένως δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος KΓ, ἀλλ' ἐπὶ τῆς KΓ'. Ἡ ευθ MΔ, τέμνουσα τὴν πλευρὰν KΓ' τοῦ τριγ. KΓ'E καὶ μὴ τέμνουσα τὴν πλευρὰν Γ'E, τέμνει τὴν πλευρὰν $\boxed{KE}$· ἄρα τὸ Ψ κεῖται μεταξὺ K καὶ E).



Σχ. 13

*Σύνθεσις.* (σχ. 13). Γράφομεν τόξον μὲ χορδὴν Γ'Δ καὶ ἡμιεφαπτομένην Γ't (προέκτασιν τοῦ ΓΓ'). Τοῦτο εἶναι ἱκα-

(*) **Ἀξίωμα τοῦ Pasch - «Ἐὰν εὐθεῖα κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὴ διερχομένη διὰ τινος κορυφῆς αὐτοῦ τέμνῃ μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, τότε τέμνει μίαν καὶ μόνον μίαν ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν».**

**Πόρισμα. Εὐθεῖα τέμνουσα μίαν πλευρὰν τριγώνου καὶ μὴ τέμνουσα μίαν δευτέραν πλευρὰν αὐτοῦ τέμνει τὴν τρίτην πλευράν.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὸν γωνίας $\widehat{\Delta\Gamma't} = 180^0 - \widehat{\Gamma\Gamma'\Delta} = 180^0 - \omega$ καὶ τέμνει τὸ τμῆμα ΚΕ εἰς σημεῖον Ψ. Ἡ ευθ ΔΨ ὁρίζει τὸ Μ.

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Χ ἡ τομὴ τῆς ΜΓ καὶ ΑΒ.

Ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma M\Psi} = \widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{M\Psi\Gamma'} = \widehat{\omega}$, διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖαι ΜΓ καὶ Ψ΄Γ΄ εἶναι παράλληλοι καὶ μάλιστα συμμετρικαὶ ὡς πρὸς Κ, ἀφοῦ τὸ Γ΄ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς Κ. Ἄρα τὰ Χ καὶ Ψ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Κ. (Ἡ ευθ ΜΔ τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΚΕ τοῦ τριγ ΚΓΕ καὶ μὴ τέμνουσα τὴν Γ΄Ε, τέμνει τὴν ΚΓ΄ εἰς Η. Ἀφοῦ τὸ τμῆμα ΓΓ΄ τέμνει τὴν ευθ ΜΨ, τὰ Γ καὶ Γ΄ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΨ, αἱ γωνίαι $\widehat{\Psi M\Gamma}$ καὶ $\widehat{M\Psi\Gamma'}$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΨ, ἄρα εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν ΜΓ καὶ Ψ΄Γ΄ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΜΨ).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς δύο μέρη, ὧν ἡ διαφορὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς ἄλλο δοθὲν τμῆμα.

2. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ + ΑΓ = ΜΒ + ΒΓ.

3. Δοθεισῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ σχηματισθῇ ἡ τρίτη.

4. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον, οὗ δίδονται δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία.

5. Ὁμοίως παρ|μον, οὗ δίδονται αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν

6. Ὁμοίως, ὅταν δίδεται μία πλευρά του καὶ αἱ δύο διαγώνιοι.

7. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος μία πλευρὰ εἶναι 5 cm, ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία 75° καὶ μία ἄλλη γωνία του 22°,5.

8. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ δύο ἄλλων τεμνομένων εὐθειῶν τρίγωνον ἰσοσκελές.

9. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ἡ ΒΓ = 7 cm, ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἡ περιέχουσα τὴν ΒΓ νὰ εἶναι 120°, ἡ δὲ γωνία τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α νὰ εἶναι 15°.

10. Διὰ δύο δεδομένων σημείων Α, Β νὰ ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι τοιαῦται, ὥστε μετὰ τρίτης δοθείσης νὰ σχηματίζουν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

11. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου.

12. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ διαφορὰ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου.

13. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται μία πλευρὰ καὶ δύο ὕψη, ἐξ ὧν τὸ ἓν ἄγεται ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

14. Δοθέντων τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εὐθεῖα ἀπέχουσα ἰσάκις ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα.

15. Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἔχον μίαν κορυφὴν εἰς τυχὸν δοθὲν σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ πρώτου.

16. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις, μία τῶν παρ' αὐτὴν γωνιῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

17. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ περίμετρος καὶ αἱ γωνίαι.

18. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ δίδεται σημεῖον Δ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΔΕ νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τῆς ΑΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

19. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον, οὐτινος δίδεται μία πλευρὰ α καὶ τὰ δύο ὕψη $υ_1$ καὶ $υ_2$.

20. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, οὗ δίδονται αἱ τέσσαρες πλευραί.

21. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, οὗ δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ διαγώνιοι.

22. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος ἡ βάσις νὰ κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας, αἱ ἴσαι πλευραί του ἢ αἱ προεκτάσεις των νὰ διέρχωνται διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ τὸ ἐπὶ τὴν βάσιν ὕψος νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα (βλ. § **10**).

23. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται αἱ τρεῖς διάμεσοι (βλ. §**8**).

24. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ πλευρὰ α, ἡ ἀπέναντι γωνία $\widehat{A}$ καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐπὶ μίαν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

25. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, μιᾶς τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν καὶ τοῦ ὕψους τοῦ ἀγομένου ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας.

26. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ περίμετρος, μία γωνία καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

27. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδονται τὰ ὕψη.

28. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ δύο κύκλους χορδὰς ἐχούσας δεδομένα μήκη.

29. Νὰ ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι κύκλου παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

30. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον ἔχον δύο διαδοχικὰς κορυφὰς δεδομένας καὶ τὰς δύο ἄλλας κειμένας ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.

31. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον ἔχον δύο ἀπέναντι κορυφὰς δεδομένας καὶ τὰς δύο ἄλλας κειμένας ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.

32. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ χορδὴ νὰ εἶναι παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ.

33. Δοθέντων δύο ἴσων κύκλων (Κ, R), (Λ, R) ἐκτὸς ἀλλήλων, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα // ΚΛ, τέμνουσα κατὰ σειρὰν τὰς περιφερείας εἰς Α, Β, Γ, Δ οὕτως, ὥστε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ.

34. Δοθείσης περιφερείας (Κ, R) καὶ σημείου Λ ζητεῖται νὰ γραφῇ μὲ κέντρον τὸ Λ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε τὸ μῆκος τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς καὶ τῆς (Κ, R) νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος *l*.

35. Ἔστω ΑΒ χορδὴ περιφερείας (Κ, R). Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διαιρουμένη ὑπὸ τῆς ΑΒ εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

36. Δίδεται ταινία καὶ δύο σημεῖα Ο καὶ Α μὴ κείμενα ἐπὶ τῶν παρ|λων τῶν ὁριζουσῶν τὴν ταινίαν. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ο εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παρ|λους εἰς Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε : ΑΜ = ΑΝ.

**Μεταφορά.**

37. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τῇ βάσει ΒΓ καὶ τέμνουσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε ΑΜ = ΓΝ.

(Ὑποδ. : Ἂν μεταφέρωμεν (§ **12**) τὸ ΝΓ εἰς ΜΔ, τὸ Δ, (ἐπὶ τῆς ΒΓ), προσδιορίζεται).

38. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τμῆμα ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ περατούμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τοιαῦτα, ὥστε ΑΜ = ΓΝ.

(Ὑποδ.: Ἂν μεταφέρωμεν τὸ ΝΓ εἰς ΜΔ, τὸ Δ προσδιορίζεται).

39. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, οὗτινος δίδονται τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο ἀπέναντι πλευραί του προεκτεινόμεναι.

40. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ἡ βάσις ΒΓ νὰ κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy καὶ νὰ ἔχῃ δεδομένον μῆκος, ἐνῷ αἱ ἴσαι πλευραί του ΑΒ, ΑΓ νὰ διέρχωνται διὰ δύο δεδομένων σημείων Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(Ὑποδ.: Ἂν μεταφέρωμεν τὸ ΒΓ εἰς ΔΟ, ἡ εὕρεσις τοῦ Γ ἀνάγεται εἰς §10).

**Συμμετρία.**

41. Δοθεισῶν τριῶν εὐθειῶν (α), (β), (γ) νὰ εὑρεθῇ ἓν σημεῖον Α ἐπὶ τῆς (α) καὶ ἓν σημεῖον Β ἐπὶ τῆς (β) οὕτως, ὥστε ἡ (γ) νὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

42. Δίδονται δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καὶ ἓν σημεῖον Μ, ἐπὶ οὐδεμιᾶς τούτων κείμενον. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Μ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέρος νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τοῦ Μ.

43. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἔχον δοθὲν μέσον, τὰ δὲ ἄκρα του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας τὸ ἓν καὶ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας τὸ ἄλλο.

44). i) Κατασκευάσατε τὸ συμμετρικὸν περιφερείας ὡς πρὸς δοθὲν κέντρον συμμετρίας. ii) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἔχον δοθὲν μέσον, τὰ δὲ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

45) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ βάσις του, ἡ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίας καὶ δύο σημεῖα, δι' ὧν διέρχονται ἑκάστη ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (ἐν ἀνάγκῃ προεκτεινομένη).

46. i) Κατασκευάσατε τὸ συμμετρικὸν περιφερείας ὡς πρὸς δοθέντα ἄξονα συμμετρίας. ii) Δίδεται ἡ εὐθεῖα xy καὶ δύο περιφέρειαι κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς xy σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε ἂν ἀχθοῦν ἐκ τοῦ Ρ δύο εὐθεῖαι ΡΖ, ΡΤ ἐφαπτόμεναι ἀντιστοίχως τῶν δύο περιφερειῶν, νὰ εἶναι: $\widehat{xPZ} = \widehat{yPT}$.

47. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἄνισον ἀπέχοντα ἀπὸ ταύτης. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε) τὸ σημεῖον ἐκεῖνο Μ, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ $|MA - MB|$ εἶναι ἡ μεγίστη δυνατή.

48. Ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται σημεῖον Ε. Ζητεῖται ποῖον δρόμον πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ ὑλικὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ ἐκσφενδονισθῇ ἐκ τοῦ Ε καὶ ἀνακλασθῇ ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (κατὰ τοὺς νόμους τῆς ἀνακλάσεως τοῦ φωτὸς), νὰ διέλθῃ πάλιν διὰ τοῦ Ε.

**Διάφορα ἄλλα προβλήματα κατασκευῶν.**

49. i) Γνωρίζοντες τὴν $\widehat{A}$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὑψῶν $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma = c$ τριγώνου ΑΒΓ, κατασκευάσατε τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma$.

ii) Ἐκ τῆς $\widehat{A}$ καὶ τῆς διαφορᾶς $\upsilon_\gamma - \upsilon_\beta = c$ δείξατε ὅτι δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἡ διαφορὰ $\beta - \gamma$.

iii) Ἐκ τῶν $\beta + \gamma$ καὶ $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma$ κατασκευάσατε τὴν $\widehat{A}$.

iv) Ἐκ τῶν $\upsilon_\gamma - \upsilon_\beta$ καὶ $\beta - \gamma$ δείξατε ὅτι ὁρίζεται ἡ $\widehat{A}$.

50). Δίδεται ὀξεῖα γωνία $x\widehat{O}y$, ἡ διχοτόμος αὐτῆς Ot, σημεῖον Α ἐντὸς τῆς $x\widehat{O}t$ καὶ σημεῖον Β ἐντὸς τῆς $t\widehat{O}y$. Ἔστωσαν Α' καὶ Β' τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς τὰς εὐθείας Ox, Oy ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τμῆμα Α'Β' τέμνει τὰς ἡμιευθείας Ox, Oy εἰς σημεῖα $\Gamma_0$ καὶ $\Delta_0$ ἀντιστοίχως καὶ ὅτι ὁ δρόμος $A\Gamma_0\Delta_0B$ εἶναι συντομώτερος παντὸς ἄλλου ΑΓΔΒ, ὅπου ΓΕOx καὶ ΔΕOy.

51. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μέσα τριῶν πλευρῶν.

52. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον, οὗτινος δίδονται τὰ δύο ὕψη καὶ μία διαγώνιος.

53. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ὅταν δίδονται αἱ μεσοκάθετοι δύο πλευρῶν του καὶ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

54. Ἐντὸς δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο οὕτως, ὥστε τὰ δύο τρίγωνα νὰ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν.

55. Ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΗ ὀξυγωνίου τριγ ΑΒΓ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε $A\widehat{P}B = B\widehat{P}\Gamma$.

56. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται τὰ μήκη τῶν ΒΓ (ὑποτεινούσης) καὶ ΒΔ, ὅπου Δ ἡ τομὴ τῆς ΑΒ μετὰ τῆς διχοτόμου τῆς ὀξείας γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

57. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδονται οἱ πόδες Β′, Γ′ τῶν ἴσων ὑψῶν καὶ ἓν σημεῖον Σ τῆς βάσεως.

58. Νὰ κατασκευασθῇ τριγ ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται τὸ ἔγκεντρον Ο καὶ οἱ πόδες Β′, Γ′ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$.

59. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἔχον τρεῖς πλευρὰς ἴσας, ὅταν δίδωνται τὰ μέσα τῶν τριῶν ἴσων πλευρῶν.

60. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ὅταν δίδεται τὸ μέσον τῆς βάσεώς του, ἡ κορυφὴ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

61. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων $\mu_\alpha$, $\upsilon_\beta$, $\upsilon_\gamma$.

62. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος γνωρίζομεν δύο σημεῖα Π καὶ Κ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν δύο διαγωνίων του καὶ δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

**16. Μεταφορὰ σχήματος κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$.** α′) Ἐὰν δοθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἓν σχῆμα F καὶ ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}$ καὶ ἀπὸ **κάθε** σημεῖον Μ τοῦ F φέρωμεν διάνυσμα $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$, τότε τὰ πέρατα Μ′ τῶν διανυσμάτων τούτων ἀποτελοῦν ἓν νέον σχῆμα (σημειοσύνολον) F′, τὸ ὁποῖον λέγομεν ὅτι **προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος F διὰ μεταφορᾶς** κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$. Τὸ σχῆμα F′ λέγεται καὶ «μετεσχηματισμένον τοῦ F διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$», τὰ δὲ σημεῖα Μ′ τοῦ F′ λέγονται καὶ «εἰκόνες» τῶν ἀντιστοίχων σημείων τοῦ σχήματος F.

β′) Ἀπὸ τὰ ἀξιώματα κινήσεως (ἢ μετατοπίσεως) τοῦ χώρου προκύπτει ὅτι ὑπάρχει μία κίνησις Η μεταφέρουσα ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$. Ἡ κίνησις αὐτὴ Η (καλουμένη «μεταφορὰ») φέρει κατὰ συνέπειαν τὸ σχῆμα F εἰς τὸ F′, ἄρα τὰ σχήματα F καὶ F′ προκύπτοντα τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ κινήσεως εἶναι ἴσα. Ὥστε **διὰ τῆς μεταφορᾶς σχήματος κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει σχῆμα ἴσον.**

γ′) Εἶναι φανερὸν ὅτι **διὰ τῆς μεταφορᾶς εὐθείας κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει εὐθεῖα παράλληλος καὶ διὰ τῆς μεταφορᾶς ἡμιευθείας προκύπτει ἡμιευθεῖα ὁμόρροπος πρὸς τὴν ἀρχικὴν.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

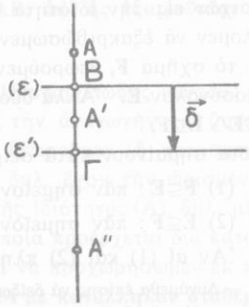
δ') (Θ) — Ἂν ὁ ἄξων συμμετρίας (ε) μεταφερθῇ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ κάθετον ἐπ' αὐτόν, τότε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου ὑφίσταται μεταφορὰν κατὰ διάνυσμα $2\vec{\delta}$.

Ἔστωσαν Α' καὶ Α'' τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ὡς πρὸς δύο παραλλήλους εὐθείας (ε) καὶ (ε').

Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 14 καὶ θεωροῦντες τὰ σημεῖα Α, Β, Α', Γ, Α'' ἐπὶ ἄξονος, βλέπομεν ὅτι (Θεώρημα Chasles)

$$\overline{A'A''} = \overline{A'A} + \overline{AA''} = 2\overline{BA} + 2\overline{A\Gamma} = 2(\overline{BA} + \overline{A\Gamma}) = 2\overline{B\Gamma}$$

ἄρα καὶ $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{B\Gamma} = 2\vec{\delta}$.



Σχ. 14

*ε') Ἑπομένως καὶ τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας μεταφέρεται εἰς ἡμιευθεῖαν παρ|λον καὶ ὁμόρροπον, ὅταν ὁ ἄξων συμμετρίας μεταφερθῇ κατὰ* $\vec{\delta}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

63. Νὰ γραφῇ τμῆμα ἴσον καὶ παρ|λον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

64. Εὕρετε τὸ μετεσχηματισμένον περιφερείας (K, R) διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$.

65. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ δοθείσης περιφερείας.

66. Νὰ γραφῇ τμῆμα παρ|λον καὶ ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

67. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, οὗτινος δίδονται τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς τὴν τετάρτην πλευράν.

68. Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν καὶ εὐθείας (ε) ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ||(ε) καὶ ἀποκόπτουσα ἴσας χορδὰς ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας.

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

**17. Γεωμετρικὸς τόπος.—α') Καλεῖται «γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων μίαν δεδομένην ἰδιότητα (Α)»** *(ἢ πληρούντων μίαν συνθήκην (Α))* **τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν δεδομένην ἰδιότητα (Α).**

Κατὰ κανόνα ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα κατέχοντα τὴν ἰδιότητα (Α) καὶ ταῦτα συνιστοῦν σχῆμά τι Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ γεωμετρικός των τόπος. (Συντόμως γ.τ. ἢ «τόπος»).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β') Συνθῆκαι, ἵνα ἓν δεδομένον σχῆμα F εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων δεδομένην τινὰ ἰδιότητα (A).** Ἔστω **E** τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν ἰδιότητα (A) (δηλαδὴ ὁ γ.τ. ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν ἰδιότητα (A)) καὶ ἔστω **F** ἓν δοθὲν σχῆμα, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐξακριβώσωμεν, ἂν εἶναι ὁ γ.τ. **E**. Διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει τὸ σχῆμα **F**, θεωρούμενον ὡς σημειοσύνολον, νὰ ταυτίζεται μὲ τὸ σημειοσύνολον **E**. Ἀλλὰ δύο σύνολα **F** καὶ **E** ταυτίζονται, ὅταν συγχρόνως: $F \subseteq E \wedge E \subseteq F$.

Ταῦτα σημαίνουν κατὰ σειρὰν ὅτι:

(1) $F \subseteq E$: πᾶν σημεῖον τοῦ **F** ἔχει τὴν ἰδιότητα (A).

(2) $E \subseteq F$: πᾶν σημεῖον ἔχον τὴν ἰδιότητα (A) ἀνήκει εἰς τὸ **F**.

Ἂν αἱ (1) καὶ (2) πληροῦνται, τότε: $F \equiv E$.

— Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ F εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν ἰδιότητα (A), ἂν δείξωμεν ὅτι:

1ον) πᾶν σημεῖον τοῦ F ἔχει τὴν ἰδιότητα A καὶ

2ον) πᾶν σημεῖον μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ F δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα (A).

Διότι τὸ 1ον) ἐξασφαλίζει ὅτι $F \subseteq E$ καὶ τοῦτο συνεπάγεται:

(3) $$F' \supseteq E'$$

ὅπου $F'$, $E'$ τὰ συμπληρωματικὰ τῶν F, E ὡς πρὸς τὸ ὅλον ἐπίπεδον.

Τὸ 2ον) σημαίνει:

(4) $$F' \subseteq E'$$

Ἐκ τῶν (3) $\wedge$ (4) $\Rightarrow F' \equiv E' \Rightarrow F \equiv E$.

## ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

**18. i) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων M τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα A καὶ B εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AB.**

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι πᾶν σημεῖον M τῆς μεσοκαθέτου ἔχει τὴν ἰδιότητα: MA = MB καὶ ὅτι πᾶν σημεῖον P ἔχον τὴν ἰδιότητα PA = = PB κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου. Ἀλλὰ ταῦτα ὡς γνωστὸν συμβαίνουν.

**ii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων M τοιούτων, ὥστε MA > MB, ὅπου A,B δύο δεδομένα σημεῖα, εἶναι τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὑπὸ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AB ὁριζόμενον καὶ περιέχον τὸ B.**

**iii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐντὸς δοθείσης γωνίας καὶ ἰσαπεχόντων ἀπὸ τὰς πλευρὰς εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας.**

**iv) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας εἶναι ζεῦγος εὐθειῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας, ἃς σχηματίζουν αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι.**

**v) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων δεδομένην ἀπόστασιν d ἀπὸ δοθείσης εὐθείας (ε) εἶναι τὸ ζεῦγος τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν (ε), ὧν ἑκάστη ἀπέχει τῆς (ε) ἀπόστασιν d.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**vi) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων δεδομένην ἀπόστασιν d ἀπὸ σταθεροῦ σημείου K εἶναι περιφέρεια (K, d).**

**vii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν τμῆμα AB φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, εἶναι ἡ περιφέρεια διαμέτρου AB, ἀφ' ἧς ἐξαιροῦνται τὰ A καὶ B (§ 6).**

**19. Εὕρεσις γεωμετρικῶν τόπων.** Ἡ στοιχειώδης μέθοδος εὑρέσεως ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου συνίσταται εἰς τὴν ἀναγωγὴν τοῦ ζητουμένου τόπου εἰς ἄλλον γνωστόν. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν (ἢ κατασκευάζομεν) **τυχὸν** σημεῖον M τοῦ ζητουμένου γ.τ., δηλ. ἔχον τὴν ὡρισμένην ἰδιότητα (A) καὶ ἀναζητοῦμεν μίαν συνέπειαν τῆς ἰδιότητος (A), δηλ. μίαν **νέαν ἰδιότητα** τοῦ σημείου M, ἔστω τὴν (B), ἡ ὁποία προέρχεται διὰ καταλλήλου χρησιμοποιήσεως τῆς ἰδιότητος (A). Διὰ νὰ προχωρήσωμεν ἐκ τῆς (A) εἰς τὴν (B), συνδέομεν συνήθως τὸ σημεῖον M μὲ **κατάλληλον σταθερὸν σημεῖον ἢ σταθερὰ σημεῖα** ἢ φέρομεν ἄλλας καταλλήλους γραμμὰς οὕτως, ὥστε νὰ ἀξιοποιηθῇ ἡ ἰδιότης (A), δηλ. νὰ δώσῃ μίαν συνέπειαν (B). Πολλάκις ἡ ἰδιότης (B) ἔχει γνωστὸν γεωμετρικὸν τόπον (γ). Ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ, τότε **κάθε** σημεῖον M τοῦ τόπου, ὡς ἔχον τὴν ἰδιότητα (A), θὰ ἔχῃ καὶ τὴν συνέπειαν αὐτῆς (B) καὶ ἑπομένως θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν (B), δηλ. ἐπὶ γνωστῆς γραμμῆς (ἢ σχήματος) (γ). Οὕτω εὑρίσκομεν σταθερὸν σχῆμα (γ), ἐφ' οὗ κεῖνται ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου, καὶ μένει νὰ ἐξετάσωμεν βάσει τῆς ἰδιότητος (A), εἰς ποίαν περιοχὴν τοῦ (γ) εὑρίσκονται τὰ σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου καὶ ἂν καὶ πᾶν σημεῖον τῆς περιοχῆς ταύτης ἔχῃ τὴν ἰδιότητα (A).

Μία ἀπὸ τὰς δυσκολίας τῆς μεθόδου ἔγκειται εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῶν **σταθερῶν** σημείων, πρὸς τὰ ὁποῖα συσχετίζομεν τὸ τυχὸν (ἢ «τρέχον») σημεῖον M τοῦ τόπου (μὲ τὸν σκοπὸν τὴν ἀνακάλυψιν μιᾶς νέας ἰδιότητος (B) ἀπορρεούσης ἐκ τῆς (A)). Ὡς σταθερὰ σημεῖα ἐκλέγομεν πολλάκις δύο **ἄκραῖα** σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου ἢ καὶ σταθερὸν σημεῖον μὴ ἀνῆκον εἰς τὸν τόπον, τὸ ὁποῖον ὅμως, ἂν συνδεθῇ μὲ τὸ τρέχον σημεῖον M, δίδει τὴν δυνατότητα νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἰδιότης (A) τοῦ M, ὥστε νὰ προκύψῃ νέα ἰδιότης (B) τοῦ M.

Εἰς τὴν ἀκριβεστέραν εὕρεσιν γεωμετρικῶν τόπων βοηθοῦν οὐσιωδῶς οἱ σημειακοὶ μετασχηματισμοὶ καὶ αἱ διευθυνόμεναι γωνίαι, περὶ ὧν γίνεται λόγος εἰς τὸ τρίτον μέρος τοῦ βιβλίου.

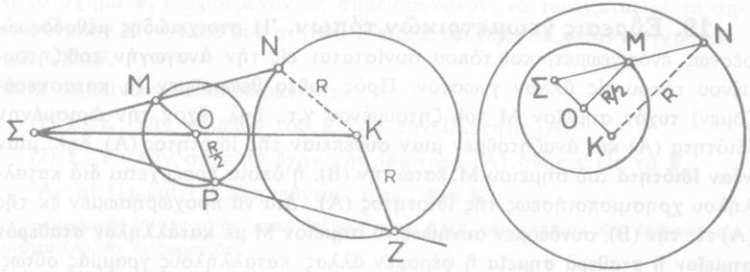
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ I. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τ. (ἢ σύνολον) τῶν μέσων ὅλων τῶν τμημάτων, τῶν ὁποίων τὸ ἓν ἄκρον εἶναι σταθερὸν σημεῖον Σ, τὸ δὲ ἄλλο εὑρίσκεται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας (K. R).**

i) Ἔστω M σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. τὸ μέσον κάποιου τμήματος ΣN ἔχοντος τὸ ἄκρον N ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας (K, R) (σχ. 15 ἢ 15(α)).

ii) Ἐπειδὴ τὸ NΕ (K, R), εἶναι KN = R καὶ ἐπειδὴ τὸ M εἶναι μέσον πλευρᾶς τριγώνου ΣNK, ἂς τὸ ἑνώσωμεν μὲ τὸ μέσον O τῆς σταθερᾶς πλευρὰς ΣK τοῦ τριγώνου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τότε θά εἶναι MO = NK/2, ἤτοι MO = R/2 = σταθερά ἀπόστασις καὶ ἑπομένως τὸ κάθε σημεῖον M τοῦ ζητουμένου τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς σταθερᾶς περιφερείας $\left(O, \frac{R}{2}\right)$. (Τὰ ἐπὶ τῆς ευθΣΚ κείμενα δύο σημεῖα τοῦ τόπου ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὴν (O,R/2)).




Σχ. 15 Σχ. 15(α)

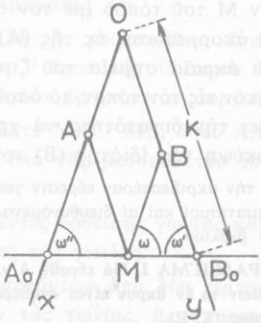
Ἀντίστροφον. Ἔστω P σημεῖον τῆς $\left(O, \frac{R}{2}\right)$. Τότε εἶναι OP = R/2. Ἂν τώρα φέρωμεν ἀκτῖνα KZ τῆς (K, R) παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῆς OP, θὰ εἶναι: $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{KZ}$. Ἑπομένως τὸ P εἶναι κατ' ἀνάγκην τὸ μέσον τοῦ ΣZ, δηλ. μέσον τμήματος ἔχοντος ἄκρα τὸ Σ καὶ σημεῖον Z τῆς (K, R). Δηλ. τὸ P εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ μέσον O τοῦ ΣK καὶ ἀκτῖνα R/2.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ II. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox, Oy γωνίας $x\hat{O}y$ θεωροῦμεν ζεῦγος σημείων A καὶ B (A∈Ox καὶ B∈Oy) τοιοῦτον, ὥστε OA + OB = K = δοθὲν τμῆμα καὶ κατασκευάζομεν παρ/μον OAMB. Ζητεῖται ὁ γ.τ. (τὸ σύνολον) τῶν κορυφῶν M τῶν παρ/μων τούτων.**

i) Ἔστω M σημεῖον τὸ τόπου, δηλ. ἡ τετάρτη κορυφὴ παρ|μου AOBM ἀντιστοιχοῦντος εἰς τυχὸν ζεῦγος σημείων A, B μὲ OA + OB = K.

ii) **Ἀκρικὸν σημεῖον.** Ἐὰν τὸ A πέσῃ ἐπὶ τοῦ O,δηλ. τὸ OA μηδενισθῇ, τότε πρέπει τὸ B νὰ ἔλθῃ εἰς σημεῖον $B_0$ τῆς Oy τοιοῦτον, ὥστε $OB_0$ = K. Ἂς ἑνώσωμεν τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου μὲ τὸ ἀκρικὸν σημεῖον $B_0$ καὶ ἂς προεκτείνωμεν τὸ $B_0M$, μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν Ox, ἔστω εἰς $A_0$.




Σχ. 16

Παρατηροῦμεν ὅτι $BB_0$ = OA (διότι OA + OB = K καὶ $BB_0$ + OB = K).

Ἐπειδὴ $BB_0$ = OA καὶ OA = BM ⇒ BM = $BB_0$ ⇒ ω = ω' (1).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ $MB//A_0O \Rightarrow \omega = \omega''$ (2).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2): $\Rightarrow \omega'' = \omega' \Rightarrow OA_0 = OB_0 = K$.

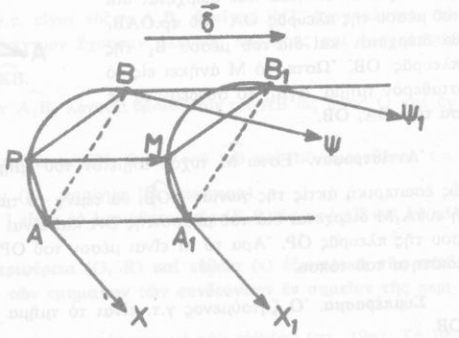
Βλέπομεν ὅτι πᾶν σημεῖον M τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως σταθεροῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $OA_0B_0$ μὲ ἴσας πλευρὰς $OA_0 = OB_0 = K$.

**Ἀντίστροφον.** Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως $A_0B_0$ τοῦ σταθεροῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $OA_0B_0$ μὲ $OA_0 = OB_0 = K$ (σχ. 16).

Φέροντες τὰς $MA//Oy$ καὶ $MB//Ox$ σχηματίζομεν τὸ παρ/μον OAMB. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων, $\omega = \omega''$ καὶ $\omega'' = \omega' \Rightarrow \omega = \omega'' \Rightarrow BM = BB_0$. Ἀλλὰ $BM = OA$ καὶ συνεπῶς $OA = BB_0$. Ἑπομένως $OA + OB = BB_0 + OB = K$, δηλ. τὸ M εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ παρ|μου OAMB μὲ $OA + OB = K$, δηλ. τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα.** **Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι ἡ βάσις $A_0B_0$ τοῦ ἰσοσκελοῦς $\Delta OA_0B_0$ μὲ $OA_0 = OB_0 = K$.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΙΙΙ. (Μεταφορὰ τόξου). Δίδεται κυκλικὸν τόξον $\widehat{AB}$ καὶ σταθερὸν διάνυσμα $\vec{\delta}$. Ἀπὸ κάθε σημεῖον P τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ φέρομεν διάνυσμα $\vec{PM} = \vec{\delta}$. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν περάτων M τῶν διανυσμάτων τούτων $\vec{PM}$.**




Σχ. 17

i) Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου (σχ. 17). Ἂν μεταφέρωμεν τὰ A καὶ B εἰς εἰς $A_1$ καὶ $B_1$ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$, δηλ. φέρωμεν: $\vec{AA_1} = \vec{\delta}$, $\vec{BB_1} = \vec{\delta}$ καὶ ἑνώσωμεν τὸ M μὲ τὰ $A_1$, $B_1$, τότε, ἐπειδὴ καὶ $\vec{PM} = \vec{\delta}$, τὰ τετράπλευρα $PMB_1B$ καὶ $PMA_1A$ εἶναι παρ/μα καὶ συνεπῶς αἱ γωνίαι $A_1\widehat{M}B_1$ καὶ $\widehat{APB}$ ἴσαι ὡς ἔχουσαι τὰς πλευράς των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους.

Τὸ M βλέπει τὸ τμῆμα $A_1B_1$ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ἴσην πρὸς $\widehat{APB}$ καὶ συνεπῶς κεῖται ἐπὶ τόξου $\widehat{A_1B_1}$ ἱκανοῦ γωνίας $\widehat{APB}$, δηλ. ἐπὶ τόξου $\widehat{A_1B_1} = \widehat{AB}$. Ὅταν τὸ P τείνῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ A, τότε καὶ τὸ M τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ $A_1$. Ἀλλὰ τότε ἡ ἡμιευθεῖα (P,A) τείνει νὰ γίνῃ ἡμιεφαπτομένη AX τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ (§ 3) καὶ ἡ $(M, A_1)$ τείνει νὰ γίνῃ ἡμιεφαπτομένη $A_1X_1$ τοῦ τόξου $\widehat{A_1B_1}$. Ἐπειδὴ δὲ πάντοτε αἱ ἡμιευθεῖαι (P, A) καὶ $(M,A_1)$ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, διὰ τοῦτο καὶ αἱ ὁριακαί των θέσεις AX, $A_1X_1$ εἶναι παρ|λοι καὶ ὁμόρροποι.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ἡμιεφαπτομένη $A_1X_1$ τοῦ τόξου $A_1\widehat{M}B_1$ εἶναι γνωστή, ἄρα τὸ $A_1\widehat{M}B_1$ ὡρισμένον καὶ κατασκευάσιμον (βλ. § 4).

ii) **Ἀντίστροφον.** Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{A_1B_1}$ προκύπτοντος ἐκ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ διὰ μεταφορᾶς κατὰ $\vec{\delta}$ (§ 16). Ἐπειδὴ ἡ μεταφορὰ εἶναι κίνησις, θὰ ὑπάρχη

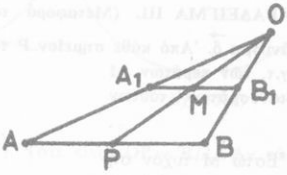
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἡ ἀντίστροφος κίνησις ἡ φέρουσα τὸ $\widehat{A_1B_1}$ εἰς τὸ $\widehat{AB}$. Δηλ. διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $-\vec{\delta}$ τὸ τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ $\widehat{AB}$, ἄρα καὶ τὸ Μ ἔρχεται εἰς τι σημεῖον Ρ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν σημεῖον Ρ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τοιοῦτον, ὥστε $\vec{MP} = -\vec{\delta}$ ἄρα καὶ $\vec{PM} = \vec{\delta}$. Δηλ. τὸ Μ ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

**iii) Θεώρημα. Διὰ μεταφορᾶς τόξου $\widehat{AB}$ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἴσον πρὸς τὸ $\widehat{AB}$ καὶ ἔχον εἰς τὰ ἄκρα του ἡμιεφαπτομένας παρ/λους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἡμιεφαπτομένας τοῦ $\widehat{AB}$.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ IV. Δίδεται τμῆμα ΑΒ καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς τῆς ευθ ΑΒ. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ Ο καὶ περατουμένων εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τμήματος ΑΒ.**

Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. μέσον τοῦ τμήματος ΟΡ, ὅπου Ρ∈ΑΒ (σχ.18). Ἂν ἑνώσωμεν τὸ Μ μὲ τὸ (σταθερὸν) μέσον $A_1$ τοῦ ΟΑ, τότε ευθ$A_1$Μ//ΑΒ. Ἀφοῦ ἡ ευθ$A_1$Μ εἶναι //ΑΒ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΟΑ τοῦ τρ.ΟΑΒ, θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου $B_1$ τῆς πλευρᾶς ΟΒ. Ὥστε τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὸ σταθερὸν τμῆμα $A_1B_1$ τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν ΟΑ, ΟΒ.



Σχ. 18

Ἀντίστροφον. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τμήματος $A_1B_1$. Τότε ἡ ἀκτὶς (Ο,Μ), ὡς ἐσωτερικὴ ἀκτὶς τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$, θὰ τέμνῃ τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς τι σημεῖον Ρ. Ἐπειδὴ ἡ ευθ$A_1$Μ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΟΑ καὶ εἶναι //ΑΡ, θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΟΡ. Ἄρα τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ ΟΡ ὅπου Ρ∈τμ. ΑΒ, δηλ. πληροῖ τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα.** Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι τὸ τμῆμα τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ.

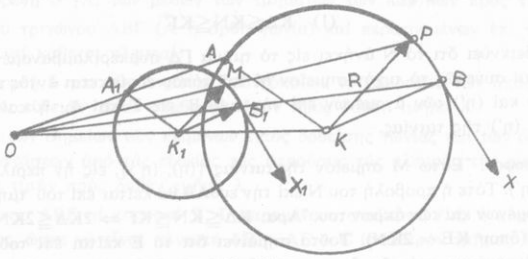
**Ὁρολογία.** Τὸ Μ λέγεται καὶ **ὁμοιόθετον** τοῦ Ρ ἐν λόγῳ 1/2 ὡς πρὸς κέντρον Ο. Τὸ τμῆμα $A_1B_1$ λέγεται ἐπίσης **ὁμοιόθετον** τοῦ ΑΒ ἐν λόγῳ 1/2 καὶ ὡς πρὸς κέντρον Ο.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ V.— Δίδεται τόξον $\widehat{AB}$ κέντρου Κ, ἀκτῖνος R, καὶ σημεῖον Ο. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ Ο καὶ περατουμένων εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.**

Ἔστω $\widehat{AKB}$ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$, Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ $\widehat{AB}$,Μ τὸ μέσον τοῦ ΟΡ,$A_1$ τὸ μέσον τοῦ ΟΑ, $B_1$ τὸ μέσον τοῦ ΟΒ, $K_1$ τὸ μέσον τοῦΟΚ (σχ. 19). Ἐπειδὴ $\vec{K_1A_1} = \frac{1}{2}\vec{KA}$ καὶ $\vec{K_1B_1} = \frac{1}{2}\vec{KB}$, διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι $\widehat{AKB}$ καὶ $\widehat{A_1K_1B_1}$ ἔχουν τὰς πλευράς των παρ|λους καὶ ὁμορρόπους. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτὶς $\vec{KP}$ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{AKB}$, διὰ τοῦτο ἡ ὁμόρροπος ἀκτὶς $\vec{K_1M}$ (ὅπου $K_1M = R|2$) θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{A_1K_1B_1}$, ἄρα τὸ σημεῖον τοῦ τόπου, τὸ Μ, ἀνήκει εἰς τὸ τόξον $\widehat{A_1B_1}$ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν $\widehat{A_1K_1B_1}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Ἀντίστροφον.** Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{A_1B_1}$. Τότε ἡ ἀκτὶς $\overrightarrow{K_1M}$ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας $A_1\widehat{K_1}B_1$, ἄρα ἡ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος ἀκτὶς $\overrightarrow{KP}$ θὰ εὑρίσκε-




Σχ. 19

ται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{AKB}$, δηλ. τὸ $P \in \widehat{AB}$. Ἐπειδὴ $KP = R$, $K_1M = R/2$ δηλ. $\overrightarrow{K_1M} = \overrightarrow{KP}/2$, διὰ τοῦτο τὸ Μ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ ΟΡ, δηλ. ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα.** **Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἀκτῖνος R/2, ἔχον κέντρον τὸ μέσον τοῦ ΟΚ καὶ ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον ἔχουσαν πλευρὰς παρ/λους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς τῆς ἐπικέντρου γωνίας $\widehat{AKB}$.**

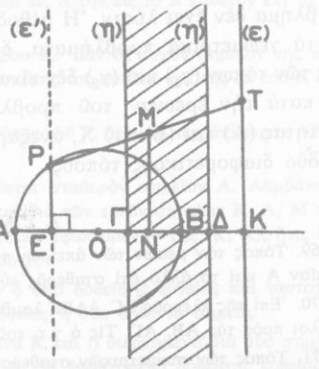
**Ὁρολογία.** Τὸ ἀνωτέρω τόξον $\widehat{A_1B_1}$ λέγεται **ὁμοιόθετον** τοῦ $\widehat{AB}$ ὡς πρὸς Ο καὶ ἐν λόγῳ 1/2.

**Παρατηρήσεις.** 1ον. Αἱ ἡμιεφαπτόμεναι ΒΧ, $B_1X_1$ τοῦ $\widehat{AB}$ καὶ τοῦ ὁμοιοθέτου του $\widehat{A_1B_1}$ εἶναι παρ/λοι καὶ ὁμόρροποι (βλ. παρ|γμα III, θεώρημα).

2ον. Ὁ γ.τ. τοῦ παραδείγματος Ι εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τῆς (Κ,R) ὡς πρὸς Σ καὶ ἐν λόγῳ 1/2.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ VI. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐξωτερικὴ τῆς περιφερείας. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας μὲ ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας.**

Ἔστω ΡΤ τυχὸν τμῆμα συνδέον τὴν περιφέρειαν μὲ τὴν εὐθεῖαν (σχ. 19α). Τὸ μέσον Μ αὐτοῦ εἶναι ἓν τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου. Ἂς φέρωμεν διάμετρον ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ Κ, ὅπου ΟΚ>R καὶ ΚΑ>ΚΒ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Ρ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Τ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Μ καὶ συνεπῶς, ἀφοῦ Τ∈(ε), τὸ Ρ ἀνήκει εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς (ε) εὐθεῖαν ὡς πρὸς Μ, ἔστω τὴν (ε′). Ἡ (ε′) πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχῃ ἓν τουλάχιστον σημεῖον Ρ κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας (Ο,R) καὶ ἐπειδὴ (ε′) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Ε κείμενον ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ ἢ, τὸ πολύ, συμπίπτον μὲ τὸ Α ἢ τὸ Β. Ἐντεῦθεν ἡ συνθήκη: $KB \leqq KE \leqq KA$ $\Longleftrightarrow \frac{KB}{2} \leqq \frac{KE}{2} \leqq \frac{KA}{2}$. Ἐπειδὴ τὸ Μ




Σχ. 19α

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

προβάλλεται εἰς τὸ μέσον N τοῦ KE, διὰ τοῦτο $KN = \frac{KE}{2}$ καὶ ἡ τελευταία συνθήκη γίνεται $\frac{KB}{2} \leqq KN \leqq \frac{KA}{2}$, ἤ, ἂν Δ καὶ Γ τὰ μέσα τῶν KB, KA, εἶναι τελικῶς:

$$(1) \quad K\Delta \leqq KN \leqq K\Gamma$$

Ἡ (1) δεικνύει ὅτι τὸ N ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα ΓΔ συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του καὶ συνεπῶς τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν καθέτων (η) καὶ (η′) τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὴν ευθAB εἰς Γ καὶ Δ, ἤ καὶ ἐπὶ τῶν συνόρων (η) καὶ (η′) τῆς ταινίας.

**Ἀντίστροφον.** Ἔστω M σημεῖον τῆς ταινίας {(η), (η′)}, εἰς ἣν περιλαμβάνομεν καὶ τὰς (η) καὶ (η′). Τότε ἡ προβολή του N ἐπὶ τὴν ευθAB θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΔ συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του. Ἄρα: $K\Delta \leqq KN \leqq K\Gamma \Rightarrow 2K\Delta \leqq 2KN \leqq 2K\Gamma \Rightarrow KB \leqq KE \leqq KA$ (ὅπου $KE = 2KN$). Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ E κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος AB συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του· ἄρα ἡ εἰς E ἀγομένη $\perp$AB ἔχει ἓν τουλάχιστον σημεῖον P κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας (O,R). Ἑνοῦμεν τὸ P μὲ τὸ M ,ὁπότε ἡ ευθ PM, τέμνουσα τὴν EP, τέμνει καὶ τὴν παρ/λον της (ε), ἔστω εἰς T. Ἐπειδὴ τὸ N εἶναι μέσον τοῦ KE, διὰ τοῦτο καὶ τὸ M εἶναι μέσον τοῦ PT, ἤτοι τὸ M ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα.** **Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι μία ταινία ὁριζομένη ὑπὸ τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων KA καὶ KB, εἰς ἣν περιλαμβάνονται καὶ τὰ σύνορα αὐτῆς.**

**20. Χρῆσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἰς γεωμετρικὰς κατασκευάς.**—Πολλάκις ἡ λύσις ἑνὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κατασκευὴν (προσδιορισμὸν) ἑνὸς σημείου X· δηλ. συμβαίνει ἡ εὕρεσις τῆς θέσεως τοῦ X νὰ συνεπάγεται τὴν ἄμεσον λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἐάν, τώρα, γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον X πληροῖ δύο συνθῆκας (A) καὶ (B), εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν **γνωστοὶ** γεωμετρικοὶ τόποι ($\gamma_1$) καὶ ($\gamma_2$), τότε τὸ X ὡς σημεῖον ἀνῆκον εἰς ἀμφοτέρους τοὺς τόπους ($\gamma_1$) καὶ ($\gamma_2$) (διότι ἔχει ἀμφοτέρας τὰς ἰδιότητας (A) καὶ (B)) κατασκευάζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τόπων. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν θὰ ἔχῃ τόσας λύσεις, ὅσα σημεῖα ἔχει τὸ σύνολον ($\gamma_1$) $\cap$ ($\gamma_2$). Ἐὰν ($\gamma_1$) $\cap$ ($\gamma_2$) $= \varnothing$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. Ἡ μέθοδος αὐτὴ δὲν εἶναι πάντοτε ἐφαρμόσιμος εἰς τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα, διότι ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ ἀμφοτέρων τῶν τόπων ($\gamma_1$) καὶ ($\gamma_2$) δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή. Παρατηρητέον ἀκόμη ὅτι κατὰ τὴν ἔρευναν τοῦ προβλήματος δέον νὰ καταλήξωμεν εἰς δύο ἰδιότητας (A) καὶ (B) τοῦ X, ἀνεξαρτήτους ἀλλήλων, διὰ νὰ ὁδηγοῦν αὐταὶ εἰς δύο διαφορετικοὺς τόπους.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

69. Τόπος τῶν μέσων τῶν ἀπείρων τμημάτων τῶν ἐχόντων ἓν ἄκρον εἰς σταθερὸν σημεῖον A καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ σταθερᾶς εὐθείας (ε).

70. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BΓ ΔABΓ λαμβάνεται τυχὸν σημεῖον M καὶ ἐκ τοῦ M ἄγονται παρ/λοι πρὸς τὰς AB, AΓ. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ σχηματιζομένου παρ/μου;

71. Τόπος τῶν συμμετρικῶν σταθεροῦ σημείου A πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας (τοῦ ἐπιπέδου) τὰς διερχομένας δι' ἑτέρου σταθεροῦ σημείου B.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

72. Ἐκ δεδομένου σημείου περιφερείας (K, R) ἄγομεν χορδὰς καὶ τὰς προεκτείνομεν μέχρι διπλασιασμοῦ. Τόπος τῶν ἄκρων τῶν προεκτάσεων.

73. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν παρ/λων πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}$ ἡ ὀρθὴ γωνία) καὶ περατουμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ κάθετοι πλευραί.

74. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι σταθερόν, ἴσον πρὸς δοθὲν τμῆμα λ.

75. Τόπος τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐντὸς δοθείσης γωνίας καὶ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας τὰς φερούσας τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ἰσοῦται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν πρὸς δοθὲν τμῆμα λ.

76. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β, Γ παραμένουν σταθεραί, ἐνῷ ἡ κορυφὴ Α μετατοπίζεται οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε ΑΒ + ΑΓ = C (σταθερὸν τμῆμα>ΒΓ). Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$.

77. Ποῖος ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, καθὼς καὶ τὸ μῆκος τῆς ἐκ τῆς Β διαμέσου παραμένουν σταθερά;

78. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox, Oy γωνίας $x\widehat{O}y$ θεωροῦμεν ζεῦγος σημείων Α καὶ Β, τὸ Α ἐπὶ τῆς Ox, τὸ Β ἐπὶ τῆς Oy τοιοῦτον, ὥστε OA — OB = C (δοθὲν τμῆμα). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΑΒ.

79. Τόπος τῶν κέντρων βάρους τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ σταθερὰν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

80. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Β καὶ Δ. Ποῖος ὁ γ.τ. τῶν κορυφῶν Α τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ, τῶν ἐχόντων πάντοτε διάμεσον τὴν ΒΔ;

81. Δίδεται τρ.ΑΒΓ. Τόπος τῶν Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει συγχρόνως:

$$MA = MB \wedge MA < M\Gamma.$$

82. Δίδεται τρ.ΑΒΓ. Τόπος τῶν Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει συγχρόνως:

$$MA < MB \wedge MA < M\Gamma.$$

83. Ποῖος ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἵτινες ἐφάπτονται δύο δοθεισῶν τεμνομένων εὐθειῶν;

84. Σημεῖον Μ διατρέχει ἓν τμῆμα ΑΒ. Εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ Μ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΜΓ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἡμιεπιπέδων, ἅτινα ὁρίζει ἡ ευθΑΒ καὶ φέρομεν εἰς τὸ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΜ, ἥτις τέμνει εἰς Δ τὴν εἰς τὸ Β κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒ. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΔΒΓ;

85. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ καὶ κέντρου Κ. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, ποῖος ὁ γ.τ. τῆς τομῆς τῆς εἰς Μ ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ Κ ἀγομένης παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΜ;

86. Δίδεται περιφέρεια (γ) καὶ τμῆμα ΑΒ. Τόπος τοῦ Ρ, ὅταν τὸ τετράπλευρον ΑΒΜΡ εἶναι παρ/μον, τοῦ Μ ἀνήκοντος εἰς τὴν (γ).

87. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κύκλου (K, R) δίδεται σταθερὸν σημεῖον Α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας (K, R) τυχὸν σημεῖον Μ καὶ διὰ τῶν τριῶν σημείων Κ, Α, Μ γράφομεν περιφέρειαν, ἔστω τὴν (γ). Εἰς τὸ Μ φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς (K, R), ἥτις ἐπανατέμνει τὴν (γ) εἰς τὸ Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.

88. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον ἀπόστασιν δ ἀπὸ δοθείσης εὐθείας καὶ ταυτοχρόνως ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ δύο ἄλλας δοθείσας εὐθείας ἢ δύο δοθέντα σημεῖα.

89. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R καὶ i) διερχομένη διὰ δύο σημείων Α καὶ Β, ii) διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (ε) ἢ περιφερείας (Ο, α).



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

90. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ) κέντρων Κ καὶ Λ, τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ Α ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας (Κ) καὶ (Λ) εἰς $M_1$ καὶ $M_2$. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν τμημάτων $M_1M_2$.

91. Δίδεται κύκλος (Κ, R) καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του.

i) Τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς διέρχονται διὰ τοῦ Ρ. Δείξατε ὅτι ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια ἢ τόξον.

ii) Τόπος τοῦ Ρ, ὅταν ὁ ἀνωτέρω τόπος εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

92. Περιφέρεια (γ) σταθερᾶς ἀκτῖνος, ἀλλὰ μεταβλητῆς θέσεως, διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Α. Εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς ἄγονται ἐφαπτόμεναι παράλληλοι πρὸς σταθερὰν εὐθεῖαν. Τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

93. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, αἵτινες ἄγονται παραλλήλως πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὰς περιφερείας, αἵτινες ἐφάπτονται δεδομένης εὐθείας εἰς σταθερὸν σημεῖον αὐτῆς.

94. Ὀρθογωνίου παρ/μου ΑΒΓΔ ἡ κορυφὴ Α μένει σταθερά, αἱ δὲ Β καὶ Γ μένουν ἐπὶ δεδομένης περιφερείας. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ.

95. Σημεῖον Ρ διατρέχει τὴν προέκτασιν τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου (Κ, R). Ἀπὸ ἑκάστην θέσιν τοῦ Ρ φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΡΤ ἐφαπτομένην τοῦ (Κ, R). Ζητεῖται ὁ τόπος τῆς προβολῆς τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{KPT}$.

96. Τίς ὁ γ.τ. τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου μετὰ τῶν περάτων τῶν καθέτων πρὸς ἀλλήλας ἀκτίνων τούτου;

97. Δοθέντος ὀρθογωνίου τρ.ΑΒΓ, ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, τέμνουσαν εἰς Δ καὶ Ε τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν ΕΒ καὶ ΓΔ;

98. Δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ δύο διαμέτρων ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτων ἐπ' ἀλλήλας, φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΟΜ ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ε ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν Μ;

99. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ διάμετρος αὐτοῦ ΓΔ. Φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΓΔ. Τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ $^{\Delta}$ΟΑΒ κύκλου.

100. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ (ὀρθαὶ) προβολαὶ Ρ καὶ Σ ἐπὶ δύο σταθεράς, τεμνομένας εὐθείας ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) ὁρίζουν εὐθεῖαν ΡΣ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ).

101. Εἰς δοθέντα κύκλον ἄγομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΓΔ, παρ/λον πρὸς σταθερὰν διάμετρον ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Α, Δ) τμῆμα ΑΜ = ΑΓ. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν Μ;

102. Τετραπλεύρου ΑΒΓΜ κυρτοῦ καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ μένουν σταθεραί, ἐνῷ ἡ Μ μεταβάλλεται. Τίς ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

# ΟΜΟΚΥΚΛΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΩΝ

### 21. Ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν κυρτῶν πολυγώνων.

**α΄) Πολύγωνα.** Ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου μίαν διαδοχὴν ἐκ ν σημείων: $A_1$ τὸ πρῶτον, $A_2$ τὸ δεύτερον,..., $A_\nu$ τὸ τελευταῖον, ὅπου $\nu \geqq 3$, καθὼς καὶ τὴν διαδοχὴν τῶν ν τμημάτων $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_{\nu-1}A_\nu$, $A_\nu A_1$. Ἐφ' ὅσον δύο οἱαδήποτε ἐκ τῶν τμημάτων $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_\nu A_1$ δὲν ἀλληλοτέμνονται, τότε: τὰ ν ἀνωτέρω σημεῖα $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... $A_\nu$ μαζὶ μὲ τὰ τμήματα $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_\nu A_1$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἓν ἁπλοῦν πολύγωνον. Συντόμως: «πολύγωνον».

Ἐὰν τινα ἐκ τῶν τμημάτων $A_1A_2$, $A_2A_3$, ...$A_\nu A_1$ ἀλληλοτέμνωνται, τότε ὑπὸ τῶν σημείων $A_1$, ... $A_\nu$ καὶ τῶν τμημάτων $A_1A_2$, ... $A_\nu A_1$ ὁρίζεται **διεσταυρωμένον πολύγωνον.**

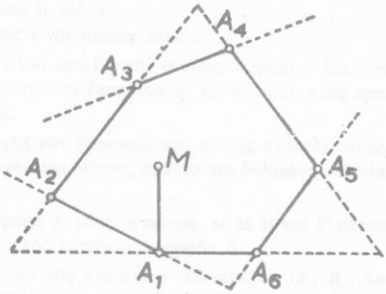
Δυνατὸν τὰ σημεῖα $A_1$, $A_1$, ...$A_\nu$, ἐνῷ ὁρίζουν ἁπλοῦν πολύγωνον, κατ' ἄλλην τάξιν λαμβανόμενα νὰ μὴ ὁρίζουν ἁπλοῦν πολύγωνον, ἀλλὰ διεσταυρωμένον πολύγωνον. Πάντως αἱ ν διαδοχαὶ («κυκλικαὶ μεταθέσεις» λεγόμεναι): $\{A_1, A_2, ...A_\nu\}$, $\{A_2, A_3,...A_\nu, A_1\}$, $\{A_3, A_4 ... A_\nu, A_1, A_2\}$ ... $\{A_\nu, A_1, ... A_{\nu-1}\}$ ὁρίζουν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πολύγωνον.

Τὰ σημεῖα $A_1$,$A_2$, ... $A_\nu$ καλοῦνται **κορυφαὶ** καὶ τὰ τμήματα $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_\nu A_1$ καλοῦνται **πλευραὶ** τοῦ πολυγώνου. Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι αἱ κορυφαὶ εἶναι **ἰσάριθμοι** πρὸς τὰς πλευράς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β΄) Κυρτὰ πολύγωνα. Ἐὰν ἑκάστη εὐθεῖα περιέχουσα (φέρουσα) μίαν πλευρὰν ἔχῃ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, τότε τὸ πολύγωνον καλεῖται κυρτὸν πολύγωνον.**

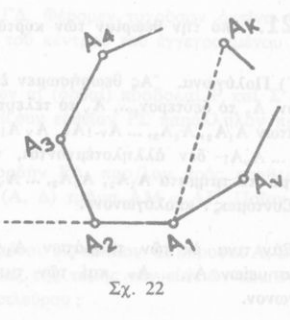
Ἐὰν π.χ. τὸ πολύγωνον $A_1 A_2 \ldots A_\nu$ εἶναι κυρτόν, τότε αἱ κορυφαὶ $A_3, A_4, \ldots A_\nu$ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμιεπιπέδου ἐκ τῶν δύο, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ εὐθ$A_1A_2$ κ.τ.λ.



Σχ. 21

Ἓν σημεῖον Μ λέγεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου, ἂν ὡς πρὸς τὸν φορέα ἑκάστης πλευρᾶς κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου (σχ. 21). Κατὰ συνέπειαν τὸ ἐσωτερικὸν σημεῖον δὲν κεῖται ἐπὶ πλευρᾶς τινος, διότι πᾶν σημεῖον ἀνῆκον εἰς ἓν ἡμιεπίπεδον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνορον (ἀρχικὴν εὐθεῖαν) τοῦ ἡμιεπιπέδου. **Ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου** καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων αὐτοῦ. Τὸ ἐσωτερικὸν εἶναι, ὡς λέγομεν, **τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ περικλειόμενον** ὑπὸ τοῦ πολυγώνου.

**Διαγώνιος** κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον ἄκρα δύο κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, *μὴ διαδοχικάς*. Δηλ. ἡ διαγώνιος συνδέει δύο κορυφάς, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά. *Κάθε διαγώνιος, π.χ.* ἡ $A_1 A_k$ (σχ. 22) *εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου*.. Διότι ὡς πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν φέρουσαν μίαν πλευρὰν τὸ τμῆμα $A_1 A_k$ εὑρίσκεται ὁλόκληρον εἰς τὸ αὐτὸ μέρος μὲ τὰς ἄλλας κορυφάς. Π.χ. ὡς πρὸς τὴν εὐθ$A_2A_3$ τὰ σημεῖα $A_1$, $A_k$ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἰς ὃ κεῖνται καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ $A_4, \ldots A_\nu$, $A_1$· ἄρα καὶ ὁλόκληρον τὸ τμῆμα $A_1 A_k$ εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον μὲ τὰς ἄλλας κορυφάς, ὡς πρὸς τὴν εὐθ$A_2A_3$. Ἐπειδὴ τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ μὲ ὅλας τὰς εὐθείας τὰς φερούσας μίαν πλευράν, διὰ τοῦτο κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ «ἐσωτερικοῦ» τὸ τμῆμα $A_1A_k$ ἀνήκει εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου.



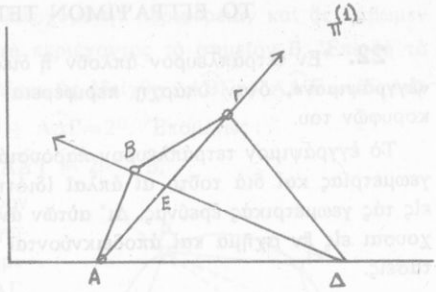
Σχ. 22

**γ΄) Κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ** (σχ. 23). Εἰς αὐτὸ διακρίνομεν δύο ζεύγη **ἀπέναντι** γωνιῶν : $(\widehat{A}, \widehat{\Gamma})$ καὶ $(\widehat{B}, \widehat{\Delta})$.

(Θ).— Ἐὰν αἱ διαγώνιοι (ὅηλ. τὰ τμήματα ΑΓ, ΒΔ) τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ. 23) τέμνωνται εἰς Ε, τότε τὸ ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν.

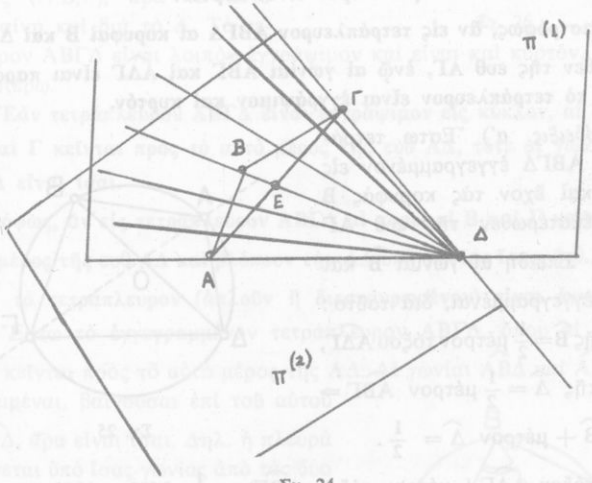
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρὸς ἀπόδειξιν, ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἡμιεπίπεδον $\Pi^{(1)}$ τὸ ὑπὸ τῆς ευθΑΔ καὶ τοῦ Ε ὁριζόμενον. Ἡ ἡμιευθεῖα (Α, Γ) ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ συνόρου τοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ καὶ περιέχουσα ἓν σημεῖον Ε τοῦ $\Pi^{(1)}$ κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ $\Pi^{(1)}$. Ἄρα τὸ $\Gamma\in\Pi^{(1)}$. Ὁμοίως τὸ $B\in\Pi^{(1)}$. Ἤτοι ἡ ευθΑΔ ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της τὰ Β καὶ Γ. Ὁμοίως ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της τὰς δύο ἄλλας κορυφάς. Ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι κυρτὸν (ἐδ. β΄).




Σχ. 23

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς σημεῖον Ε ἐσωτερικὸν τοῦ ΑΒΓΔ (σχ. 24). Διότι τὰ Β καὶ Γ κεῖνται




Σχ. 24

ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ τοῦ ἔχοντος σύνορον τὴν ευθΑΔ (δηλ. πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθΑΔ, ἀφοῦ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν). Ἀναλόγως τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ ἑτέρου ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(2)}$ ἔχοντος σύνορον τὴν ευθΔΓ. Ὥστε τὸ Β ἀνήκει εἰς ἀμφότερα τὰ ἡμιεπίπεδα $\Pi^{(1)}$ καὶ $\Pi^{(2)}$ δηλ. εἰς τὴν «τομὴν» αὐτῶν. Ἀλλ' ἡ τομὴ (τὸ κοινὸν μέρος) τῶν δύο ἡμιεπιπέδων $\Pi^{(1)}$ καὶ $\Pi^{(2)}$ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς γωνίας $A\widehat{\Delta}\Gamma$. Ἀφοῦ τὸ Β εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς $A\widehat{\Delta}\Gamma$, ἡ ἡμιευθεῖα (Δ,Β) τέμνει τὸ τμῆμα ΑΓ τὸ συνδέον τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας $A\widehat{\Delta}\Gamma$ εἴς τι σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τετραπλεύρου, ἀφοῦ τὸ ΑΓ κεῖται ἐντὸς τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου (ἐδαφ. γ΄). Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα (Γ,Α) τέμνει τὸ τμῆμα ΔΒ. ὁ.ἐ.δ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΤΟ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΝ

**22.** Ἓν τετράπλευρον ἁπλοῦν ἢ διεσταυρωμένον (§ 21, α') καλεῖται **«ἐγγράψιμον»**, ὅταν ὑπάρχῃ περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν τεσσάρων κορυφῶν του.

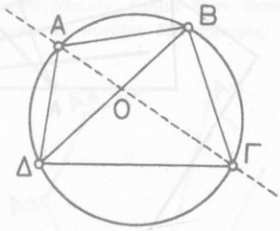
Τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον παρουσιάζεται εἰς πλεῖστα σχήματα τῆς γεωμετρίας καὶ διὰ τοῦτο αἱ ἁπλαῖ ἰδιότητές του εἶναι εὐρείας χρήσεως εἰς τὰς γεωμετρικὰς ἐρεύνας. Δι' αὐτῶν ἀνακαλύπτονται ἴσαι γωνίαι ὑπάρχουσαι εἰς ἓν σχῆμα καὶ ἀποδεικνύονται πολυάριθμοι γεωμετρικαὶ προτάσεις.

## 23. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες.

**Ι. Ἐὰν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον, αἱ δὲ κορυφαὶ Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ, τότε αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτόν.**

**Ἀντιστρόφως, ἂν εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ, ἐνῷ αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ εἶναι παραπληρωματικαί, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ κυρτόν.**

*Ἀπόδειξις.* α') Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ (σχ. 25). Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Δ}$ εἶναι ἐγγεγραμμέναι, διὰ τοῦτο: μέτρον τῆς $\widehat{Β} = \frac{1}{2}$ μέτρον τόξου $\widehat{ΑΔΓ}$, μέτρον τῆς $\widehat{Δ} = \frac{1}{2}$ μέτρον $\widehat{ΑΒΓ}$ ⇒ μέτρον $\widehat{Β}$ + μέτρον $\widehat{Δ} = \frac{1}{2}$.



Σχ. 25

(μέτρον τόξου $\widehat{ΑΔΓ}$ + μέτρον τόξου $\widehat{ΑΒΓ}$) $= \frac{1}{2} \cdot 360^0 = 180^0$.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ αἱ ἡμιευθεῖαι (Γ, Β), (Γ, Δ) κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς (Γ, Α), ἕπεται ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα (Γ, Α) εἶναι ἐσωτερικὴ ἀκτὶς τῆς γωνίας $\widehat{ΔΓΒ}$, ἄρα θὰ τέμνῃ τὸ τμῆμα ΔΒ εἰς σημεῖον Ο. Τὸ Ο ἀνῆκον εἰς τὴν χορδὴν ΔΒ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, ἄρα καὶ ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς χορδῆς ΑΓ. Ἀφοῦ αἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ τέμνονται, τοῦτο εἶναι κυρτόν.

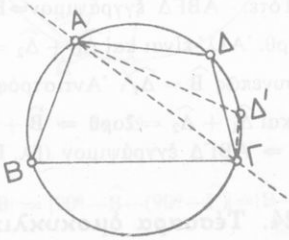
β') Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχον τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ καὶ τὰς γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ παραπληρωματικάς. Ἂς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γράψωμεν τὴν διὰ τῶν Α, Β, Γ διερχομένην περιφέρειαν καὶ ἂς λάβωμεν σημεῖον Δ΄ τοῦ τόξου $\widehat{ΑΓ}$ τοῦ **μὴ** περιέχοντος τὸ σημεῖον Β. Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ΄ εἶναι ἐγγεγραμμένον, θὰ εἶναι, ὡς ἐδείχθη : $\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΑΔ'Γ} = 2^{D}$, ἐνῷ συγχρόνως, ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΑΔΓ} = 2^{D}$. Ἑπομένως :

$$\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΑΔ'Γ} = 2^{D} - \widehat{Β}.$$

Τὰ δύο σημεῖα Δ καὶ Δ΄ βλέπουν τὸ τμῆμα ΑΓ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἡμιεπιπέδου ὡς πρὸς τὴν ευθ ΑΓ, τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ Β. Ἄρα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἰδίου τόξου, ἱκανοῦ γωνίας $180^{0} - \widehat{Β}$. Ἐπειδὴ τὸ Δ΄ κεῖται ἐκ κατασκευῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας (Α,Β,Γ), ἄρα τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὸ Δ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι λοιπὸν ἐγγράψιμον καὶ εἶναι καὶ κυρτόν, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.



Σχ. 26

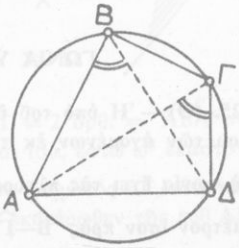
**ΙΙ. Ἐὰν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, αἱ δὲ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΑΔ, τότε αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΔ}$ καὶ $\widehat{ΑΓΔ}$ εἶναι ἴσαι.**

**Ἀντιστρόφως, ἂν εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΑΔ καὶ βλέπουν τὴν ΑΔ ὑπὸ γωνίας ἴσας, δηλ. $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΓΔ}$, τὸ τετράπλευρον (ἁπλοῦν ἢ διεσταυρωμένον) εἶναι ἐγγράψιμον.**

α΄) Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ὅπου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΔ. Αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΔ}$ καὶ $\widehat{ΑΓΔ}$ εἶναι ἐγγεγραμμέναι, βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου $\widehat{ΑΔ}$, ἄρα εἶναι ἴσαι. Δηλ. ἡ πλευρὰ ΑΔ φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντί της κορυφὰς Β καὶ Γ.

β΄) Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ μὲ $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΓΔ}$, ὡς εἰς σχ. 27.

Τότε τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΑΔ, βλέπουν τὸ τμῆμα ΑΔ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. Ἄρα τὰ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου τόξου, χορδῆς ΑΔ καὶ ἱκανοῦ γωνίας $\widehat{ΑΒΔ}$. Τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι **ὁμοκυκλικά.**

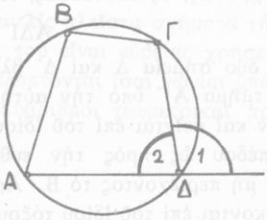


Σχ. 27

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**III. Ἐὰν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον, τότε πᾶσα ἐξωτερικὴ γωνία αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικήν· καὶ ἀντιστρόφως.**

Ἔστω $\widehat{\Delta_1}$ μία ἐξωτερικὴ γωνία, $\widehat{B}$ ἡ ἀπέναντί της ἐσωτερικὴ καὶ $\widehat{\Delta_2}$ ἡ ἐσωτερικὴ γωνία τοῦ ἐγγραψίμου ΑΒΓΔ, ἡ προσκειμένη τῆς $\widehat{\Delta_1}$.



Σχ. 28

Τότε: ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον $\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{\Delta}_2 = 2$ορθ. Ἀλλ' εἶναι καὶ $\widehat{\Delta_1}+\widehat{\Delta_2} = 2$ορθ καὶ συνεπῶς $\widehat{B} = \widehat{\Delta_1}$. Ἀντιστρόφως: $\widehat{\Delta_1} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta_1}+\widehat{\Delta_2} = 2$ορθ $\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{\Delta_2} = 2$ορθ $\Rightarrow$ ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον (βλ. Ι).

**24. Τέσσαρα ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.** — Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων Ι καὶ ΙΙ (τῆς § 23) γίνεται φανερὸν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

**Τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά, ὅταν**

**i) Τὰ Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ εἶναι παραπληρωματικαὶ**

**ἢ ὅταν**

**ii) Τὰ Β καὶ Δ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΑΓ, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ εἶναι ἴσαι**

**ἤ, τέλος, ὅταν**

**iii) $\widehat{ΑΒΓ} = 1$ ὀρθὴ καὶ $\widehat{ΑΔΓ} = 1$ ὀρθή, ἀδιακρίτως διατάξεως τῶν σημείων.** (Ἀσκήσεις: 103 - 117)

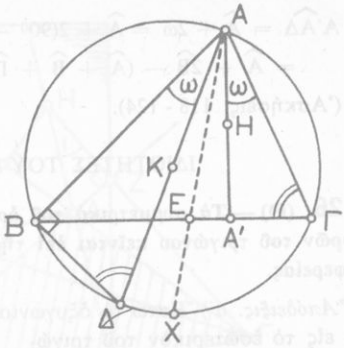
## ΓΩΝΙΑ ΥΨΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ

**25. (Θ) — Ἡ ὑπὸ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ σχηματιζομένη κυρτὴ γωνία ἔχει τὰς πλευράς της συμμετρικὰς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$ καὶ μέτρον ἴσον πρὸς $\widehat{B}-\widehat{Γ}$.**

*Ἀπόδειξις.* α') Ἔστωσαν αἱ $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{Γ}$ ὀξεῖαι (σχ. 29). Τότε τὸ περίκεντρον Κ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{ΒΑΓ}$, ἄρα καὶ τὸ Δ. Συνεπῶς τὰ Δ καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ μέρος τῆς ευθΑΒ καὶ συνεπῶς:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

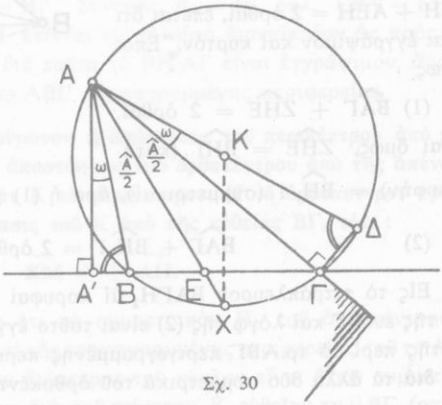
$A\widehat{\Delta}B = A\widehat{\Gamma}B = \widehat{\Gamma}$. Τὸ Α′ κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ, ἄρα καὶ τὸ ΑΑ′ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$. Τέλος, ἐπειδὴ αἱ ἡμιευθεῖαι (Α, Δ) καὶ (Α, Α′) εἶναι ἐσωτερικαὶ τῆς γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$ καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὰς πλευράς, δηλ.: $B\widehat{A}\Delta = 90^0 - \Delta = 90^0 - \widehat{\Gamma}$ καὶ $\Gamma\widehat{A}A' = 90^0 - \widehat{\Gamma}$, διὰ τοῦτο εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΧ τῆς $B\widehat{A}\Gamma$.



Σχ. 29

Εἶναι ἐπίσης $A'\widehat{A}\Delta = |A'\widehat{A}B - \Delta\widehat{A}B| = |90^0 - \widehat{B} - (90^0 - \widehat{\Gamma})| = |\widehat{B} - \widehat{\Gamma}|$.

β′) Ἔστω ἡ $\widehat{B}$ ἀμβλεῖα (σχ. 30). Τότε τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ $\widehat{B}$, εἶναι μεῖζον τόξον καὶ ἡ διάμετρος ΑΔ περατοῦται εἴς τι σημεῖον Δ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μεῖζον τόξον $A\widehat{\Delta}\Gamma$ καὶ τὸ ἔλασσον $A\widehat{B}\Gamma$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς χορδῆς ΑΓ, διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι $A\widehat{\Delta}\Gamma$ καὶ $A\widehat{B}\Gamma$ εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 23).



Σχ. 30

Ἐξ ἄλλου τὸ Α′ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β. Ἔχομεν λοιπὸν $A\widehat{B}A' + A\widehat{B}\Gamma = 2$ ὀρθαί, $A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Delta}\Gamma = 2$ ὀρθ. $\Rightarrow A\widehat{B}A' = A\widehat{\Delta}\Gamma$ καὶ συνεπῶς καὶ τὰ συμπληρώματα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἔστω $\omega^0$ ἕκαστον. Ἂν Ε ἡ τομὴ τῆς διχοτόμου ΑΧ τῆς $B\widehat{A}\Gamma$ μετὰ τοῦ τμήματος ΒΓ, τότε τὰ Ε καὶ Α′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Β, τὰ δὲ Ε καὶ Δ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ. Διὰ τοῦτο: $A'\widehat{A}X = \omega + \frac{A}{2}$ καὶ $X\widehat{A}\Delta = \frac{A}{2} + \omega$, δηλ. αἱ ἀκτῖνες (Α, Α′) καὶ (Α,Δ) εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΧ. Τέλος ἡ γωνία

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

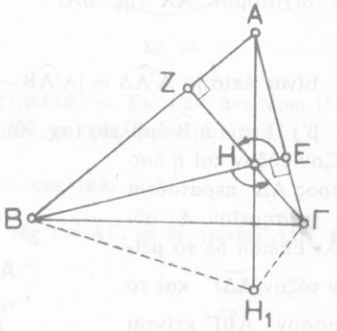
$$A'\widehat{A\Delta} = \widehat{A} + 2\omega = \widehat{A} + 2(90^0 - (180^0 - \widehat{B})) = \widehat{A} + 2\widehat{B} - 180^0 =$$
$$= \widehat{A} + 2\widehat{B} - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = |\widehat{B} - \widehat{\Gamma}|.$$

(Ἀσκήσεις: 118 - 124).

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟΥ

**26. (Θ) — Τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον περιφερείας.**

*Ἀπόδειξις.* α') Ἔστω τὸ ὀξυγώνιον τρ.ΑΒΓ. Τὸ ὀρθόκεντρον Η κεῖται τότε εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Ἔστω $H_1$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν ευθ ΒΓ. Τὰ Η καὶ Α κεῖνται ὡς πρὸς τὴν ευθ ΒΓ εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον, τὸ μὴ περιέχον τὸ $H_1$. Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΖΗΕ τὰ Ζ καὶ Ε κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΗ καὶ ἐπειδὴ $A\widehat{ZH} + A\widehat{EH} = 2$ ὀρθαί, ἕπεται ὅτι εἶναι ἐγγράψιμον καὶ κυρτόν. Ἑπομένως



Σχ. 31

(1) $B\widehat{A\Gamma} + Z\widehat{HE} = 2$ ὀρθαί.

Εἶναι ὅμως, $Z\widehat{HE} = B\widehat{H\Gamma}$ (κατὰ κορυφὴν) $= B\widehat{H_1}\Gamma$ (συμμετρικαί), ἄρα ἡ (1) γίνεται:

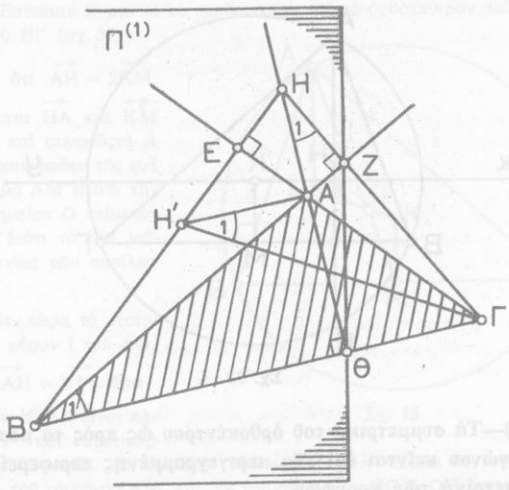
(2) $$B\widehat{A\Gamma} + B\widehat{H_1}\Gamma = 2 \text{ ὀρθαί}.$$

Εἰς τὸ τετράπλευρον $BA\Gamma H_1$ αἱ κορυφαὶ Α καὶ $H_1$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθΒΓ καὶ λόγῳ τῆς (2) εἶναι τοῦτο ἐγγράψιμον. Ἄρα τὸ $H_1$ κεῖται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ ἄλλα δύο συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η.

β') Ἔστω τὸ τρ.ΑΒΓ ἔχον τὴν $\widehat{A}$ ἀμβλεῖαν. Τότε τὸ ὀρθόκεντρον Η κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς ἀμβλείας γωνίας. Ἔστω δὲ Η΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν ευθ ΑΓ. (σχ. 32).

Ἐπειδὴ $H\widehat{ZB} = H\widehat{\Theta B} = 1$ ὀρθὴ $\Rightarrow$ ΗΖΘΒ ἐγγράψιμον καὶ μάλιστα τὰ Η, Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΖΘ, δηλ. εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $\Pi^{(1)}$ τὸ περιέχον τὸ Α (διότι, ἀφοῦ τὸ Α κεῖται μεταξὺ Ζ καὶ Β $\Rightarrow B \in \Pi^{(1)}$, ὁμοίως καὶ τὸ Η). Διὰ τοῦτο $Z\widehat{H\Theta} = Z\widehat{B\Theta}$, ἤτοι $\widehat{H_1} = \widehat{B_1}$. Ἀλλὰ καὶ $\widehat{\Gamma HA} = \widehat{\Gamma H'A}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής




Σχ. 32

ὡς συμμετρικαί, δηλ. $\widehat{H_1} = \widehat{H_1'}$. Συνεπῶς, $\widehat{B_1} = \widehat{H'}$, δηλ. $\widehat{\Gamma BA} = \widehat{\Gamma H'A}$. Ἐπειδή, ἀκόμη, τὰ B καὶ H′ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν ευθΑΓ (τὸ περιέχον τὸ B), διὰ ταῦτα τὸ BH′AΓ εἶναι ἐγγράψιμον, ἄρα τὸ H′ κεῖται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.

**27. (Θ) — Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ ἀπόστασις τοῦ περικέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς. Ἀκριβέστερον: ἐὰν K τὸ περίκεντρον, H τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ KM ἡ ἀπόστασις τοῦ K ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΓ, τότε:**

$$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.$$

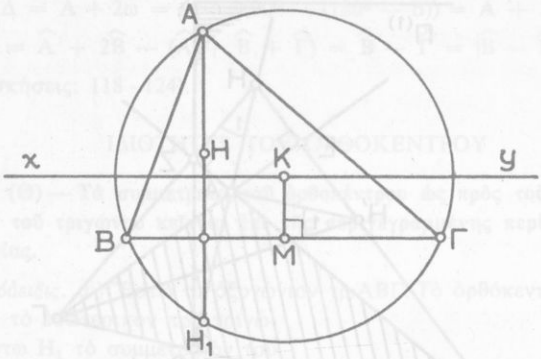
*Ἀπόδειξις*. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν $H_1$ τοῦ ὀρθοκέντρου H ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τρ.ΑΒΓ. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι πᾶσα διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν διὰ τοῦ κέντρου K εὐθεῖαν xy // ΒΓ (σχ 33), τότε:

1ον) Τὸ συμμετρικὸν τοῦ $H_1$ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἶναι τὸ H.

2ον) Τὸ συμμετρικὸν τοῦ $H_1$ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy εἶναι τὸ A. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἄξων συμμετρίας ΒΓ μετατοπισθῇ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta} = \overrightarrow{MK}$ κάθετον ἐπ' αὐτόν, τότε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου μετατοπίζεται κατὰ διάνυσμα $2\vec{\delta}$ (§ **16** δ').

Ἑπομένως, $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MK} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{KM} \Rightarrow \overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



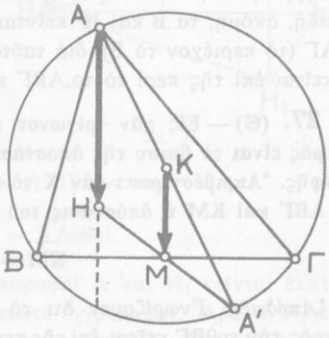

Σχ. 33

**28. (Θ)—Τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ εἶναι καὶ ἀντιδιαμετρικὰ τῶν κορυφῶν.**

Διότι, ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΑΑ′ (σχ. 34) καὶ θεωρήσωμεν τὸ τρ.ΑΗΑ′, τότε, ἐπειδὴ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{KM}$ ἀρχόμενον ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΑ′ τοῦ τρ.ΑΗΑ′ ἔχει τὴν ἰδιότητα:

$$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH},$$

διὰ τοῦτο περατοῦται εἰς τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς ΗΑ′. Ἀφοῦ τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ ΗΑ′, τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἶναι τὸ Α′, δηλ. κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.




Σχ. 34

*Ἄλλη ἀπόδειξις*: Εἶναι $\widehat{A'\Gamma A} = 1^{D}$ συνεπῶς Α′Γ ⊥ ΑΓ. Εἶναι καὶ εὐθ ΒΗ ⊥ ΑΓ, ἑπομένως Α′Γ||ΒΗ. Ὁμοίως Α′Β||ΓΗ. Ὅθεν ΒΗΓΑ′ εἶναι παρ|μον καὶ συνεπῶς αἱ ΗΑ′ καὶ ΒΓ ἔχουν κοινὸν μέσον.

(Ἀσκήσεις: 125 - 131).

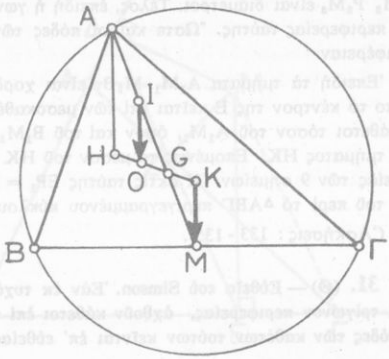
**29. (Θ) Εὐθεῖα τοῦ Euler — Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ περίκεντρον Κ, τὸ βαρύκεντρον G καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ μάλιστα:**

$$\overrightarrow{KG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν Κ καὶ Η τὸ περίκεντρον καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ Μ τὸ μέσον τοῦ ΒΓ (σχ. 35).

Γνωρίζομεν ὅτι $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{KM}$, ἄρα τὰ διανύσματα $\overrightarrow{HA}$ καὶ $\overrightarrow{KM}$ εἶναι ἀντίρροπα καὶ συνεπῶς τὰ Α καὶ Μ κεῖνται ἐκατέρωθεν τῆς ευθ ΗΚ, ἄρα τὸ τμῆμα ΑΜ τέμνει τὴν ευθ ΗΚ εἰς τι σημεῖον G κείμενον μεταξὺ Η καὶ Κ, διότι τὸ ΑΜ κεῖται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν παρ|λων ΑΗ, ΚΜ.



Σχ. 35

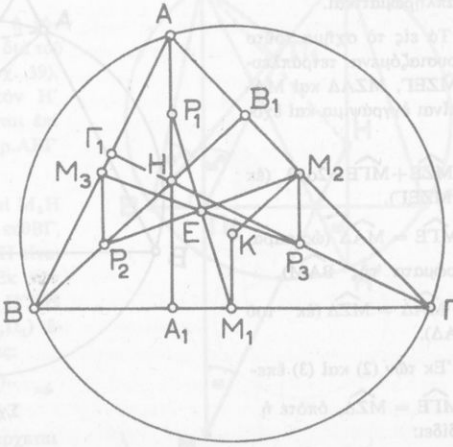
Ἂς ἑνώσωμεν τώρα τὸ μέσον Ο τοῦ ΗG μὲ τὸ μέσον Ι τοῦ ΑG. Ἔχομεν $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{KM}$, ἄρα τὸ τετράπλευρον ΙΟΜΚ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς: KG = GO καὶ MG = GI. Ἐκ τοῦ ὅτι: MG = GI = IA ἕπεται ὅτι τὸ G εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι KG = GO = OH ἕπεται.

$$\overrightarrow{KG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KH}$$

**30. (Θ)—Εἰς πᾶν τρίγωνον τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τὰς κορυφὰς κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τοῦ περικέντρου ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου, ἡ δὲ ἀκτὶς της ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας.** (Κύκλος τῶν ἐννέα σημείων ἢ τοῦ EULER).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν $A_1$, $B_1$, $Γ_1$ οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ (σχ. 36), $M_1$, $M_2$, $M_3$, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, $P_1$, $P_2$, $P_3$ τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, ὅπου Η τὸ ὀρθόκεντρον καί, τέλος, Κ τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\overrightarrow{M_3P_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{M_2P_3}$ καὶ ὅτι $M_3P_2 \perp M_3M_2$ καὶ συνάγομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον $P_2M_3M_2P_3$ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Ἑπομένως τὰ τμήματα $P_3M_2$ καὶ $M_3P_2$ εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν καὶ κοινὸν μέσον, ἔστω τὸ Ε. Ἐντελῶς ὁμοίως τὸ $M_3P_1P_3M_1$ εἶναι ὀρθογώνιον παρ|μον καὶ τὰ τμήματα $M_3P_3$ καὶ $P_1M_1$ εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν κοινὸν μέσον (τὸ Ε).



Σχ. 36

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε τὰ $P_2$, $M_3$, $P_1$, $M_2$, $P_3$ $M_1$ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, τῆς ὁποίας τὰ τμήματα $P_1M_1$, $P_2M_2$ $P_3M_3$ εἶναι διάμετροι. Τέλος, ἐπειδὴ ἡ γωνία $P_1\widehat{A_1}M_1$ εἶναι ὀρθή, τὸ $A_1$ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης. Ὥστε καὶ οἱ πόδες τῶν ὑψῶν περιλαμβάνονται εἰς τὴν ἰδίαν περιφέρειαν.

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα $A_1M_1$, $M_2B_1$ εἶναι χορδαὶ τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων, διὰ τοῦτο τὸ κέντρον της Ε κεῖται ἐπὶ τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων τούτων. Ἀλλ' αἱ μεσοκάθετοι τόσον τοῦ $A_1M_1$, ὅσον καὶ τοῦ $B_1M_2$, διέρχονται ἀμφότεραι διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΗΚ. Ἑπομένως τὸ μέσον τοῦ ΗΚ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον Ε τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων. Ἡ ἀκτὶς ταύτης $EP_1 = KA/2$, δηλ. πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ τοῦ περὶ τὸ ΔΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου.

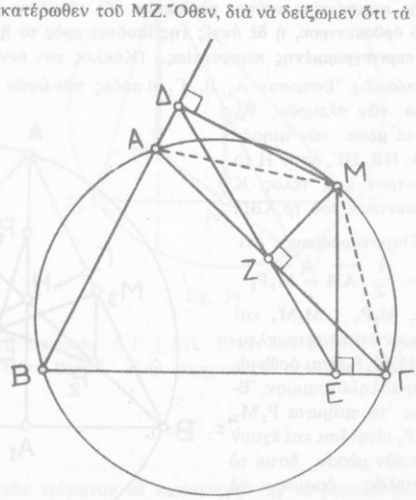
(Ἀσκήσεις: 133 - 135).

**31. (Θ) — Εὐθεῖα τοῦ Simson. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Μ, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τρίγωνον περιφερείας, ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.**

**Ἀντιστρόφως: ἂν αἱ προβολαὶ σημείου Μ ἐπὶ τρεῖς εὐθείας ὁριζούσας τρίγωνον κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι.**

α') *Ἀπόδειξις βάσει ἑνὸς σχήματος.* Ἔστωσαν Μ σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας, ὡς εἰς τὸ σχ. 37.

Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο τὸ Μ προβάλλεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ εἰς ἐσωτερικὰ σημεῖα τούτων Ε καὶ Ζ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ προβάλλεται εἰς σημεῖον Δ κείμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΑ, αἱ δὲ γωνίαι $\Delta\widehat{ZM}$ καὶ $M\widehat{ZE}$ ἐμφανίζονται ὡς διαδοχικαί, δηλ. τὰ τμήματα ΖΔ καὶ ΖΕ ἑκατέρωθεν τοῦ ΜΖ. Ὅθεν, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ Δ, Ζ, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ἐφεξῆς γωνίαι $\Delta\widehat{ZM}$ καὶ $M\widehat{ZE}$ εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 37

Τὰ εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο παρουσιαζόμενα τετράπλευρα ΜΖΕΓ, ΜΖΑΔ καὶ ΜΑΒΓ εἶναι ἐγγράψιμα καὶ ἔχομεν:

(1) $M\widehat{ZE}+M\widehat{\Gamma E}=2$ορθ. (ἐκ τοῦ ΜΖΕΓ).

(2) $M\widehat{\Gamma E} = M\widehat{A\Delta}$ (ὡς παραπληρώματα τῆς $B\widehat{AM}$).

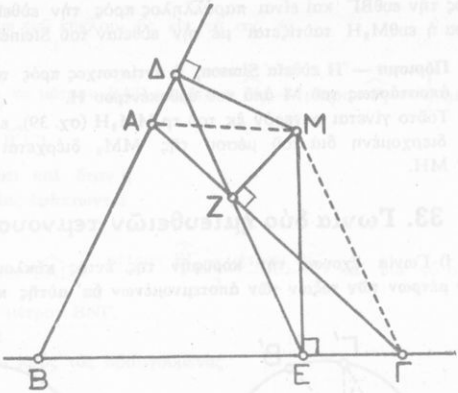
(3) $M\widehat{A\Delta} = M\widehat{Z\Delta}$ (ἐκ τοῦ ΜΖΑΔ).

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἕπεται $M\widehat{\Gamma E} = M\widehat{Z\Delta}$, ὁπότε ἡ (1) δίδει:

$$M\widehat{ZE} + M\widehat{Z\Delta} = 2\text{ορθ.} \Rightarrow \Delta, Z, E \text{ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β') Ἀντίστροφον. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὡς ἐν σχήματι 38, ὅτι αἱ προβολαὶ Δ, Ε, Ζ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Τότε ἔχομεν βάσει τοῦ σχ. 38, $\widehat{\Delta A M} = \widehat{\Delta Z M}$ (ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου ΜΖΑΔ) καὶ $\widehat{\Delta Z M} = \widehat{M\Gamma E} \equiv \widehat{M\Gamma B}$ (ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου ΜΖΕΓ). Ἕπεται: $\widehat{\Delta A M} = \widehat{M\Gamma B} \Rightarrow$ ΜΓΒΑ ἐγγράψιμον $\Rightarrow$ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς διὰ τῶν ΑΒ Γ, διερχομένης περιφερείας.




Σχ. 38

**32. (Θ) Εὐθεῖα τοῦ Steiner. — Παντὸς σημείου Μ τῆς περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου. Ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται εὐθεῖα Steiner ἀντίστοιχος πρὸς τὸ Μ καὶ εἶναι παρ/λος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ Simson τὴν ἀντίστοιχον πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ.**

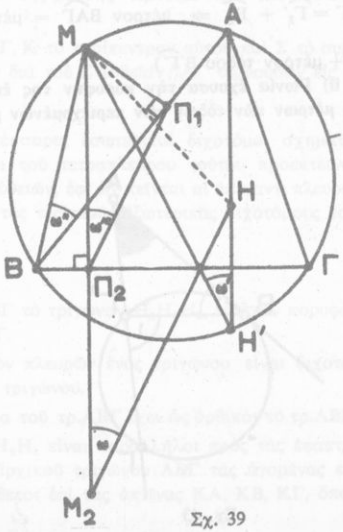
*Ἀπόδειξις.* α') Ἐὰν $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως καὶ $M_1$, $M_2$ $M_3$ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς ἰδίας εὐθείας, τότε $M_1M_2 // \Pi_1\Pi_2$ καὶ $M_1M_3 // \Pi_1\Pi_3$ καὶ ἐπειδὴ τὰ $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας Simson, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι $M_1M_2$ καὶ $M_1M_3$ εἶναι παρ/λοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$, ἄρα ταὐτίζονται καὶ τὰ $M_1$, $M_2$, $M_3$ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας // πρὸς τὴν εὐθεῖαν Simson τοῦ σημείου Μ.

β') Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἡ εὐθεῖα Steiner $M_1M_2M_3$ διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ ΔΑΒΓ (σχ. 39). Γνωρίζομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν Η' τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας.

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΜΗ' καὶ $M_2H$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ, διὰ τοῦτο τὸ τραπέζιον $MM_2H'H$ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα ἐγγράψιμον. Ἐκ τῶν ὁμοκυκλικῶν τετράδων ($M_2$, Η', Η Μ), (Α,Η',Β,Μ) καὶ (Μ,Β,$\Pi_2$,$\Pi_1$) ἔχομεν κατὰ σειρὰν τὰς ἰσότητας:

$\widehat{\omega} = \widehat{\omega'} = \widehat{\omega''} = \widehat{\omega'''} \Rightarrow \widehat{\omega} = \widehat{\omega'''} \Rightarrow M_2H // \Pi_2\Pi_1$.

Ὥστε ἡ εὐθεῖα $M_2H$ διέρχεται διὰ τοῦ συμμετρικοῦ $M_2$ τοῦ Μ ὡς




Σχ. 39

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

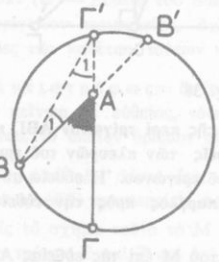
πρὸς τὴν ευθΒΓ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν Simson, δηλ. τὴν ευθ $\Pi_2\Pi_1$. Ἄρα ἡ ευθ$M_2H$ ταὐτίζεται μὲ τὴν εὐθεῖαν τοῦ Steiner.

**Πόρισμα — Ἡ εὐθεῖα Simson, ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὸ Μ, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως τοῦ Μ ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου Η.**

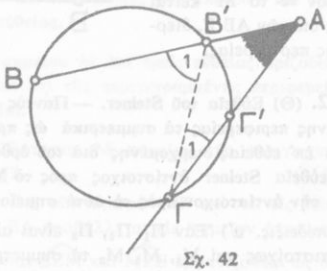
Τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ τρ.$MM_2H$ (σχ. 39), εἰς ὃ ἡ εὐθεῖα $\Pi_2\Pi_1$ εἶναι//$M_2H$ καὶ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τῆς $MM_2$ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΜΗ.

## 33. Γωνία δύο ἡμιευθειῶν τεμνουσῶν περιφέριαν.

**i) Γωνία ἔχουσα τὴν κορυφήν της ἐντὸς κύκλου ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς κατὰ κορυφήν της.**




Σχ. 41

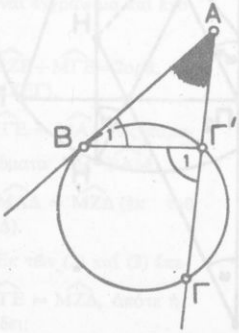



Σχ. 42

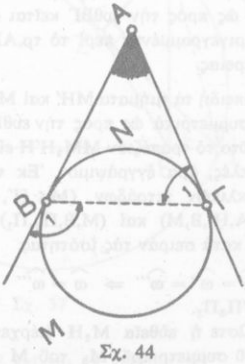
Ἔστω ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$, ὡς εἰς τὸ σχ. 41. Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma_1'} + \widehat{B_1} \Rightarrow$ μέτρον $\widehat{BA\Gamma}$ = μέτρον $\widehat{\Gamma'_1}$ + μέτρον $\widehat{B_1} = \frac{1}{2}$ (μέτρον τόξου $\widehat{B\Gamma}$ + μέτρον τόξου $\widehat{B'\Gamma'}$).

**ii) Γωνία ἔχουσα τὴν κορυφήν της ἐκτὸς κύκλου ἔχει μέτρον τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μέτρων τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.**




Σχ. 43




Σχ. 44

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ μὲ Α ἔξω τοῦ κύκλου, ὡς εἰς τὸ σχ. 42.

Ἔχομεν ὅτι:

$\widehat{B'_1} = \widehat{A} + \widehat{\Gamma_1} \Rightarrow \widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'_1} - \widehat{\Gamma_1} \Rightarrow$ μέτρον $\widehat{BA\Gamma}$ = μέτρον $\widehat{B'_1}$ — μέτρον $\widehat{\Gamma_1} = \frac{1}{2}$ (μέτρον τόξου $\widehat{B\Gamma}$ — μέτρον τόξου $\widehat{B'\Gamma'}$).

**iii) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ μία ἢ καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς γωνίας ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου.**

Δηλ. εἰς σχ. 43 ἰσχύει: μέτρον $\widehat{BA\Gamma} = \frac{\text{μέτρον } \widehat{B\Gamma} - \text{μέτρον } \widehat{B\Gamma'}}{2}$ καὶ διὰ τὸ σχ. 44 μέτρον $\widehat{BA\Gamma} = \frac{\text{μέτρον } \widehat{BM\Gamma} - \text{μέτρον } \widehat{BN\Gamma}}{2}$.

Αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προηγουμένας.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

103. Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα δύο χορδῶν κύκλου καθέτως καὶ ἐντὸς τοῦ κύκλου τεμνομένων ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, τὸ ὑπὸ τούτων σχηματιζόμενον τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.

104. Ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπεζίου καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν φερουσῶν τὰς μὴ παρ/λους πλευρὰς τοῦ τραπεζίου.

105. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Γ χορδῆς ΑΒ ἢ τῆς προεκτάσεως της ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένην ἀκτῖνα, τὸ μέρος τῆς καθέτου ταύτης τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς τέμνεται δίχα ὑπὸ τοῦ σημείου Γ.

106. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρ.ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ, Κ τὸ περίκεντρον αὐτοῦ καὶ Σ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Κ ὡς πρὸς τὴν ευθΑΒ. Φέρομεν διὰ τοῦ Σ εὐθεῖαν //ΑΓ τέμνουσαν εἰς Δ τὴν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\widehat{\Sigma K\Delta} = 1$ ὀρθή.

107. Εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον, αἱ τέσσαρες ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι σχηματίζουν ἐγγράψιμον τετράπλευρον. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τούτου προεκτεινόμεναι διέρχονται διὰ τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου. Τὰ ὅμοια ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς τέσσαρας ἐξωτερικὰς διχοτόμους τοῦ τετραπλεύρου.

**Τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον.**

108. Καλεῖται *ὀρθικὸν* τρίγωνον τοῦ τρ.ΑΒΓ τὸ τρίγωνον $H_1H_2H_3$, τὸ ἔχον κορυφὰς τοὺς πόδας $H_1$, $H_2$, $H_3$ τῶν ὑψῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ.

Ἰδιότητες: i) Οἱ φορεῖς τῶν ὑψῶν καὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι διχοτόμοι ἐσωτερικαὶ ἢ ἐξωτερικαὶ τοῦ ὀρθικοῦ του τριγώνου.

ii) Τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τὰ παράκεντρα τοῦ τρ.ΑΒΓ ἔχει ὡς ὀρθικὸν τὸ τρ.ΑΒΓ.

iii) Αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου $H_1H_2H_3$ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὰς ἀγομένας εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, αὐτοῦ (καὶ ἑπομένως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ὅπου Κ τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ).



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Σημεῖον τοῦ Miquel.**

109. i) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τυχόντα σημεῖα Ε, Ζ, Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ περὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΒΕΖ, ΓΖΗ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ. (Σημεῖον τοῦ Miquel ὡς πρὸς τὰ Ε, Ζ, Η).

ii) Ἰσχύει ἡ σχέσις: $\widehat{AMΓ} = \widehat{B} + \widehat{EHZ}$, ἂν τὸ Μ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ τρ.ΑΒΓ.

110. Δοθέντος τρ.ΑΒΓ καὶ σημεῖου Μ ἐντὸς αὐτοῦ ὑπάρχουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ ἄπειροι τριάδες σημείων Ε, Ζ, Η ἔχουσαι σημεῖον Miquel τὸ Μ, ὅλα δὲ τὰ τρίγωνα ΕΖΗ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

111. i) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας $x\widehat{O}y$ κινοῦνται δύο σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα ΟΑ + ΟΒ νὰ ἰσοῦται πάντοτε μὲ δοθὲν (σταθερὸν) τμῆμα S. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περὶ τὸ τρ.ΟΑΒ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου τῆς διχοτόμου τῆς $x\widehat{O}y$. ii) Ἐὰν ΟΑ — ΟΒ = S (σταθ.), τότε τὸ σταθερὸν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς $x\widehat{O}y$.

112. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΒ τριγ. ΑΒΓ τέμνουν τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς Π καὶ Ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Β, Γ, Π, Ρ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ περικέντρου τοῦ τριγ. ΑΒΓ.

113. Ἔστω ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ//ΔΓ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη διαγώνιος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων. Ἐὰν Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, ΑΔ, ΒΓ καὶ αἱ προβολαὶ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς μὴ παρ|λους πλευρὰς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

114. Ἐὰν εἰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπεζίου ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ τούτων σχηματιζομένη γωνία ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰς κορυφὰς τῶν δύο τούτων γωνιῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

115. Ἡ μὲ διάμετρον τὴν βάσιν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ γραφομένη περιφέρεια τέμνει τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{Γ}$ εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας μὲ τὰς ἐπαφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ,

116. Ἐὰν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι τὰ ὕψη τρ.ΑΒΓ καὶ ΒΒ'', ΓΓ'' εἶναι ὕψη τῶν τριγώνων ΒΑ'Γ' καὶ ΓΑ'Β', νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τῆς Β''Γ'' διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

117. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνωνται καθέτως εἰς τὸ Ε, τότε 1ον) ἡ κάθετος ἐκ τοῦ Ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ 2ον) αἱ προβολαί τοῦ Ε ἐπὶ τὰς πλευρὰς εἶναι κορυφαὶ ἐγγραψίμου καὶ περιγραψίμου συγχρόνως τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

**— Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ :**

118. Ἐκ τῶν R, $υ_α$, $δ_A$.

119. Ἐκ τῶν $υ_α$, $μ_α$, $δ_A$.

120. Ἐκ τῶν R, $υ_α$, $\widehat{B} - \widehat{Γ} = ω$,
ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ περικύκλου, $υ_α$, $μ_α$, $δ_A$, τὸ ὕψος ἡ διάμεσος καὶ ἡ διχοτόμος τὰ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀγόμενα.

121. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται τὸ μέσον καὶ ἡ διεύθυνσις μιᾶς πλευρᾶς ΒΓ, ἡ διαφορὰ τῶν παρ' αὐτὴν γωνιῶν καὶ ἡ κορυφὴ Α.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

122. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογ. τρίγ., οὗτινος δίδονται τρία σημεῖα ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς ὑποτεινούσης, τὰ ὁποῖα εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ πόδες τῆς διαμέσου, τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους.

123. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται: ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν καὶ οἱ πόδες τοῦ ὕψους, τῆς διαμέσου καὶ τῆς διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

124. Ἐὰν τριγώνου μία γωνία εἶναι $60^0$, τότε τὸ ἔγκεντρον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὸ περίκεντρον καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον.

125. i) Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν ἴδιον κύκλον καὶ ἔχουν κοινὴν βάσιν, τότε τὸ τμῆμα τὸ συνδέον τὰ ὀρθόκεντρά των εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ συνδέον τὰς κορυφάς των (βλ. § **27**).

ii) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ ὁμοκυκλικὰ καὶ $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ, ΑΒΓ, δείξατε ὅτι τὰ τέσσαρα τμήματα $AH_1$, $BH_2$, $ΓH_3$, $ΔH_4$ ἔχουν κοινὸν μέσον.

126. Ἐὰν Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΔΑΒΓ, τότε αἱ περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι εἶναι ἴσαι.

127. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται μία κορυφὴ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

128. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται τὸ μέσον Μ καὶ ὁ φορεὺς xy τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τοιοῦτον, ὥστε Β — Γ = 1 ὀρθή.

129. Τριγώνου ΑΒΓ μεταβλητοῦ ἡ κορυφὴ Α μένει σταθερά, τὸ ὀρθόκεντρον Η ἐπίσης καὶ ἡ εὐθεῖα (ε) ἡ φέρουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ ἐπίσης σταθερά. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

130. Δίδονται δύο εὐθεῖαι $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ τεμνόμεναι εἰς Ο. Ἐπὶ τῆς $(ε_1)$ λαμβάνομεν σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς $(ε_2)$ σημεῖον Β τοιαῦτα, ὥστε $AB = l$ (= δεδομένον τμῆμα). Ποῖον τὸ σύνολον τῶν περικέντρων τῶν τριγώνων ΟΑΒ;

131. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν ὀρθοκέντρων τῶν τριγώνων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως;

132. Ἐὰν Ο, $O_1$, $O_2$, $O_3$ τὸ ἔγκεντρον καὶ τὰ παράκεντρα τριγώνου ΑΒΓ, τότε τὰ μέσα τῶν 6 τμημάτων τῶν συνδεόντων τὰ ἀνωτέρω τέσσαρα σημεῖα ἀνὰ δύο κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας.

133. Δείξατε ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὁ κύκλος Euler ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχῃ τὸ κέντρον του ἐπὶ τῆς ΒΓ, εἶναι:

$$\left|\widehat{B} - \widehat{\Gamma}\right| = 90^0$$

134. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ πόδες Β′, Γ′ τῶν ὑψῶν ΒΒ′, ΓΓ′ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συμμετρικοὶ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου, τὴν διερχομένην διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ.

135. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται δύο κορυφαὶ καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων.

136. Ἔστω Ρ σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τριγ. ΑΒΓ περιφερείας. Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ Ρ διάμετρος τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Α′, δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ Α′ ἐπὶ τὴν ΡΑ ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν Simson τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

137. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α δεδομένου ἰσοσκελοῦς τρ.ΑΒΓ, ὅπου ΑΒ = ΑΓ, γράφομεν περιφέρειαν ἀφήνουσαν τὰ Β, Γ ἐκτὸς αὐτῆς καὶ ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πτομένας τῆς περιφερείας ταύτης μή συμμετρικάς ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$. Ἐὰν Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ Ο τὸ μέσον τῆς ΒΓ, i) νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Ο, Ε,Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ii) νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τοῦ ΕΖ, ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς γραφείσης περιφερείας μεταβάλλεται.

138. Μεταβλητὴ περιφέρεια ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς βάσεως ΒΓ δεδομένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α τέμνει τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε. Τόπος τοῦ μέσου τῆς ΔΕ.

139. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ ὀρθοκέντρου Η καὶ τῆς εὐθείας Simson (s) τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{BΓ}$, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ $\widehat{A}$.

140. i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων τοῦ τρ.ΑΒΓ εἶναι ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τὸ ὀρθόκεντρον Η μὲ τὰ σημεῖα τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας.

ii) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι Simson αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὸ τρ.ΑΒΓ συναντοῦν τὴν περιφέρειαν τῶν 9 σημείων τοῦ τρ.ΑΒΓ.

141. Ἔστω εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τριγώνου ΑΒΓ. i) Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφ. (ΑΒΓ) ἔχον τὴν εὐθεῖαν (ε) ὡς εὐθεῖαν Steiner (ἀναφορικῶς πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ). ii) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ συμμετρικὰ τῆς (ε) ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς περιφερείας (ΑΒΓ).

142. Ἐὰν Κ τὸ περίκεντρον τρ.ΑΒΓ καὶ $M_1$, $M_2$ δύο σημεῖα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοιαῦτα, ὥστε $\widehat{M_1KM_2} = θ$, ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν τῶν δύο εὐθειῶν Simson τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰ σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$.

Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα δύο εὐθεῖαι Simson εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

(**Ὑπόδειξις.** Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, ἣν σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι Steiner αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ $M_1$ καὶ $M_2$ (§ 32). Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν συμμετρικῶν τῶν δύο εὐθειῶν Steiner ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ).

**Σημεῖον Miquel τετραπλεύρου.**

143. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνὰ δύο τεμνόμεναι καὶ ἀνὰ τρεῖς μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Νὰ δειχθῇ ὅτι:

i) Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι λαμβανόμεναι ἀνὰ τρεῖς, ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν. (Σημεῖον Miquel τοῦ τετραπλεύρου.).

ii) Τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων, ἀνωτέρω, τριγώνων κεῖνται ἀπ' εὐθείας.

(**Ὑπόδειξις.** i) Ἔστω Μ τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν δύο περιγεγραμμένων περιφερειῶν. Τότε (§ 31) αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς τέσσαρας ἀνωτέρω εὐθείας κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Συνεπῶς τὸ Μ ἀνήκει καὶ εἰς τὰς δύο ἄλλας περιγεγραμμένας περιφερείας. ii) Τὸ Μ ἔχει ὡς πρὸς τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν Steiner (§ 32).

144. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν προεκτάσεων τῶν διχοτόμων του μετὰ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

145. Ἔστωσαν Ο καὶ $O_1$ τὸ ἔγκεντρον καὶ τὸ παράκεντρον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον.

Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{BΓ}$ (ἐφ' οὗ βαίνει ἡ $\widehat{A}$) εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν Β, Ο, Γ, $O_1$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

146. Εἰς πᾶν τρ.ΑΒΓ τὸ παράκεντρον $O_1$ (τὸ ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$) βλέπει τὴν μὲν πλευρὰν ΑΓ ὑπὸ γωνίαν $\widehat{B}/2$, τὴν δὲ ΑΒ ὑπὸ γωνίαν $\widehat{\Gamma}/2$.

147. Ἔστω ΑΒΓΔ τετράπλευρον κυρτὸν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ $O_1$, $O_2$ τὰ ἔγκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ. Ἐὰν Η καὶ Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἐλασσόνων τόξων $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $O_1O_2$//ΗΘ (βλ. ἀσκ. 145). Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι τὰ ἔγκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ κορυφαὶ λαμβανόμεναι ἀνὰ τρεῖς, εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου παρ|μου.

**Βέλος τόξου.**

Καλεῖται βέλος τόξου $\widehat{AB}$ ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Μ τοῦ τόξου ἀπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ αὐτοῦ.

148. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρ.ΑΒΓ τὸ βέλος τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ τοῦ περιέχοντος τὸ Α ἰσοῦται μὲ $(\rho_\beta + \rho_\gamma)/2$, ἐνῶ τὸ βέλος τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ Α τόξου $\widehat{B\Gamma}$ τοῦ περικύκλου ἰσοῦται μὲ $(\rho_\alpha - \rho)/2$. Ὡς ἐφαρμογή, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma = 4R + \rho$. (R ἀκτὶς περιγεγγραμμένου, ρ, $\rho_\alpha$, $\rho_\beta$, $\rho_\gamma$ αἱ ἀκτῖνες ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων)

149. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν R, ρ, $\rho_\alpha$ (Ὑπόδ. Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $(\rho_\alpha - \rho)|2$ ἰσοῦται μὲ τὸ βέλος τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ $\widehat{A}$. Βλέπε καὶ ἀσκ. 145).

**Ὀρθοκεντρικὴ τετράς.**

Τέσσαρα σημεῖα λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα, ὅταν ἕκαστον εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν τριῶν ἄλλων. Οὕτως αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ τριγώνου καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα. Ἐπίσης τὸ ἔγκεντρον Ο καὶ τὰ παράκεντρα $O_1$, $O_2$, $O_3$ τυχόντος τριγώνου.

150. Διὰ τοῦ ἑνὸς κοινοῦ σημείου Κ δύο ὀρθογωνίως τεμνομένων περιφερειῶν (Ο) καὶ (Ο΄) (δηλαδὴ ΚΟ⊥ΚΟ΄) φέρομεν δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας εὐθείας, ἐξ ὧν ἡ πρώτη ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας (Ο) καὶ (Ο΄) εἰς Α καὶ Α΄, ἡ δὲ δευτέρα εἰς Β καὶ Β΄ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Α, Α΄, Β, Β΄ ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

151. Τὰ τέσσαρα τρίγωνα μιᾶς ὀρθοκεντρικῆς τετράδος ἔχουν τὸ αὐτὸ ὀρθικὸν τρίγωνον καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον κύκλου τῶν 9 σημείων. Τὰ περίκεντρα δὲ τῶν τεσσάρων τούτων τριγώνων ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΦ' ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΥΛΗΣ

**Ὁμὰς Α (Σχετικῶς ἁπλαῖ ἀσκήσεις)**

152. Τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ δύο ἐφαπτομένων κύκλου καὶ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν ἀπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.

153. Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον παρ|μον εἶναι ὀρθογώνιον.

154. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, αἱ εἰς τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς καὶ τῶν περιφερειῶν ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι.

155. Αἱ κορυφαὶ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου χωρίζουν τὴν περιφέρειαν εἰς διαδοχικὰ τόξα ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν: 5 : 7 : 8 : 6 : 4. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ πενταγώνου.

156. Ἐὰν σημεῖον προβάλλεται εἰς Α, Β, Γ ἐπὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, τότε ἡ ΓΑ = ΓΒ.

157. Ἐὰν Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου, τότε τὰ κέντρα τῶν περὶ τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ περιγεγραμμένων κύκλων κεῖνται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

158. Ἐντὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΖΓ ἔχοντα τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ ὡς ὑποτεινούσας καὶ ΑΕ//ΓΖ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθ. ΕΖ εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος εἰς ἀμφότερα τὰ τρίγωνα.

159. Δοθέντος τετραγώνου ΑΒΓΔ φέρομεν διὰ τοῦ Α δύο εὐθείας Ax,Ay καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ὧν ἡ Ax τέμνει τὴν ευθΓΔ εἰς Ε καὶ ἡ Ay τὴν ευθΒΓ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέσον Μ τῆς ΕΖ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΔ.

160. Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΖΓ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραγώνου ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΕ. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

161. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ἔχον μίαν πλευράν του ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἑνοῦσα τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου εἶναι διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας.

162. Ἔστω Ο τὸ κέντρον ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Φέρομεν τὴν ΒΕ⊥ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς $O\widehat{B}E$ τέμνει τὴν ΔΓ εἰς Ζ οὕτως, ὥστε ΓΖ = ΓΒ.

163. Σημεῖον Α κείμενον εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γωνίας $x\widehat{O}y$ προβάλλεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἰς Β καὶ Γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΒΓ καὶ ΟΑ εἶναι ⊥ΒΓ.

164. Περὶ δοθὲν ὀξυγώνιον τρίγωνον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον οὕτως, ὥστε τὰ δύο σχήματα νὰ ἔχουν μίαν κορυφὴν κοινήν.

165. Διὰ δοθέντος σημείου περιφερείας νὰ ἀχθῇ χορδὴ διπλασία τοῦ ἀποστήματός της.

166. Δίδεται τρ.ΑΒΓ καὶ εὐθεῖα (ε). Ἐπὶ τῆς (ε) λαμβάνεται τυχὸν σημεῖον Δ καὶ ἔστω Δ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ ΒΓ. Τόπος τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως ΑΔ', ὅταν τὸ Δ διατρέχῃ τὴν (ε).

167. Τόπος τῶν ἐντὸς δοθέντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου σημείων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς βάσεως ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς.

168. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Β καὶ κατασκευάζομεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΜΒ μὲ ΜΑ = ΜΒ ἔχον ἀκτῖνα περιγεγραμμένου κύκλου ἴσην πρὸς δοθὲν τμῆμα R. Ζητεῖται i) ὁ γ.τ τοῦ Μ καὶ ii) ὁ γ.τ. τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ ΔΑΜΒ, ὅταν τὸ Β μεταβάλλεται.

169. Ἡ βάσις ΒΓ καὶ ὁ περίκυκλος τρ.ΑΒΓ εἶναι σταθερά. Τὶς ὁ γτ. τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰς τομὰς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τρ.ΑΒΓμετὰ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας;

170. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἔστω ΤΤ' μία κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, ὅπου Τ,Τ' τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

i) Ἡ εἰς τὸ Α κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ι τοῦ ΤΤ'.

ii) Τὰ τρίγωνα ΤΑΤ' καὶ ΚΙΛ εἶναι ὀρθογώνια.

iii) Ὁ κύκλος διαμέτρου ΤΤ' ἐφάπτεται τῆς ΚΛ.

iv) Ὁ κύκλος διαμέτρου ΚΛ ἐφάπτεται τῆς ΤΤ'.

171. Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν διάκεντρον δύο περιφερειῶν διέρχεται διὰ τῶν σημείων, καθ' ἃ αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τέμνουν τὰς ἐσωτερικὰς τοιαύτας.

172. Ἐὰν διὰ δύο κύκλους (Κ, R), (Λ, ρ) ὑφίσταται ἡ σχέσις $(K\Lambda)^2 = R^2 - 2R\rho$, τότε ὁ εἷς κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

173. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ), κέντρων Κ καὶ Λ, τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ Α ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας (Κ) καὶ (Λ)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τὰ σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$ ἀντιστοίχως. Εὑρίσκομεν τώρα τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ Α εἰς τοὺς κύκλους (Κ) καὶ (Λ), ἔστω τὰ $A_1$ καὶ $A_2$.

i) Τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὀρθογωνίου τραπεζίου $A_1M_1M_2A_2$ νὰ δειχθῇ ὅτι $M_1M_2 \leqq A_1A_2$ καὶ ὅτι τὸ μέγιστον τοῦ $M_1M_2$ λαμβάνει χώραν, ὅταν ἡ τέμνουσα (ε) εἶναι παρ|λος πρὸς τὴν διάκεντρον ΚΛ.

ii) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῆς (ε), διὰ τὴν ὁποίαν τὸ τμῆμα $M_1M_2$ ἔχει δεδομένον μῆκος.

iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέσον τοῦ $A_1A_2$ εἶναι τὸ κοινὸν κέντρον δύο κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται ἀμφοτέρων τῶν κύκλων (Κ) καὶ (Λ).

174. Περὶ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ τὸ μέγιστον δυνατὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

175. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Β. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ ταύτης δύο σημεῖα Γ, Δ συμμετρικὰ πρὸς τὸ Β καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\widehat{\Gamma A \Delta}$ = δοθείσῃ.

176. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ νὰ διέρχωνται διὰ δύο δεδομένων σημείων, ἐνῶ ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας.

177. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ=α καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρ.AGB κύκλου, ὅπου G τὸ κέντρον βάρους τοῦ τρ.ΑΒΓ.

178. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἔχον δεδομένας πλευρὰς καὶ μία διαγώνιος τοῦ ὁποίου νὰ διχοτομῇ μίαν γωνίαν του.

179. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ Α′,Β′,Γ′ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Ἔστωσαν Α″, Β″, Γ″ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: i) τρ.ΑΒΓ = τρ.Α″Β″Γ″. ii) Τὰ τμήματα ΑΑ″, ΒΒ″, ΓΓ″ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ εἶναι καὶ κοινὸν μέσον αὐτῶν.

180. Εἰς τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ ὑψοῦμεν κάθετα τμήματα ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας καὶ πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου, τὰ ΕΘ=ΑΒ/2καὶ ΖΙ=ΑΓ/2. Ἐὰν Δ τὸ μέσον τῆς ΒΓ, δείξατε ὅτι τὸ τριγ. ΘΔΙ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές.

181. Ἔστω τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ αἱ ἀγόμεναι ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ καὶ ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΑΔ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

182. Ἐὰν διὰ σημείου Α κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς διαμέτρου ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ, ἧς τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα, τότε ἐκ τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τεμνούσης καὶ διαμέτρου τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

183. Δείξατε ὅτι, ἂν εὐθεῖα διέρχεται διὰ σημείου κειμένου ἐντὸς κύκλου, τότε τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα.

184. Εἰς τρ.ΑΒΓ ὁ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{B}$ παρεγγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται τῆς ευθ ΒΓ εἰς Ζ, ὁ δὲ ἐντὸς τῆς $\widehat{\Gamma}$ παρεγγεγραμμένος ἐφάπτεται τῆς ευθ ΒΓ εἰς Ζ′. Δείξατε ὅτι τὰ Ζ καὶ Ζ′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

185. Νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι ἔχουσαι κέντρα τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου καὶ ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἀνὰ δύο ἐξωτερικῶς.

186. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν οἱ δύο κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ χωρίζεται κυρτὸν τετράπλευρον ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου του, ἐφάπτωνται τῆς διαγωνίου ταύτης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον. Νὰ διατυπωθῇ καὶ ἀποδειχθῇ ἡ ἀντίστροφος πρότασις. (*Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ περιγραψίμου τετραπλεύρου*).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

187. Δύο περιφέρειαι κέντρων Κ καὶ Λ τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Α ἄγονται δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$), ἐξ ὧν ἡ ($\varepsilon_1$) τέμνει τὰς περιφερείας (Κ) καὶ (Λ) εἰς Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως, ἡ δὲ ($\varepsilon_2$) τέμνει ταύτας εἰς $\Gamma_1$ καὶ $\Delta_1$. Ἐὰν Μ τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα $\text{ΑΓΔ}_1$, $\text{ΑΓ}_1\text{Δ}$, δείξατε ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ σταθερᾶς περιφερείας, ἐχούσης κέντρον τὸ μέσον Ο τοῦ ΚΛ καὶ ἀκτῖνα ΟΑ.

188. Ἔστω Α σημεῖον κείμενον ἐντὸς κύκλου (Ο, R), Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ ΝΝ′ χορδὴ αὐτῆς μεσοκάθετος τοῦ ΑΜ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ περὶ τὸ τρ.ΑΝΝ′ περιγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (Α, 2R).

189. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται τὰ κέντρα $O_1$, $O_2$, $O_3$ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

190. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται οἱ πόδες $H_1$, $H_2$, $H_3$ τῶν ὑψῶν.

191. Τετραπλεύρου δίδονται αἱ τρεῖς κορυφαί. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῆς τετάρτης, ἵνα τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον.

192. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, τὸ σημεῖον Δ, καθ' ὃ ἡ ἐκ τῆς Α διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τέμνει (ἐν ἀνάγκῃ προεκτεινομένη) τὴν ευθΒΓ καὶ ἡ γωνία $\widehat{B}$.

193. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ κορυφὴ Α, τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, μόνον ὅταν ἡ γωνία $\widehat{AMH}$ εἶναι ὀξεῖα.

194. Δοθέντων δύο ὁμοκέντρων κύκλων, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον χορδὴν διπλασίαν ἐκείνης, ἣν ἀποτέμνει ἀπὸ τὸν μικρότερον. —Διερεύνησις.

195. Ἐὰν Κ τὸ περίκεντρον ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ $K_1$, $K_2$, $K_3$ τὰ περίκεντρα τῶν τριγώνων ΚΒΓ, ΚΓΑ, ΚΑΒ, ὑπολογίσατε συναρτήσει τῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ τὰς γωνίας τοῦ ἑξαγώνου $\text{ΒΚ}_1\text{ΓΚ}_2\text{ΑΚ}_3\text{Β}$ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ $\widehat{2A}$, $\widehat{2B}$, $\widehat{2\Gamma}$ εἶναι ἀμβλεῖαι.

196. Προεκτείνομεν τὴν βάσιν ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ κατὰ ΓΔ = ΑΒ καὶ τὴν ΑΒ κατὰ ΒΕ = ΒΓ/2. Ἡ ευθ ΕΗ, ὅπου Η τὸ μέσον τῆς ΒΓ, τέμνει τὴν ευθ ΑΔ εἰς Ζ. Ἐὰν $\widehat{BA\Gamma} = 58^0$, ὑπολογίσατε εἰς μοίρας τὴν $\widehat{AZH}$.

197. Ἐντὸς ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ εἶναι ἐγγεγραμμένος κύκλος (Κ) ἐφαπτόμενος τῆς Ox εἰς Γ. Ἀφοῦ πρῶτον κατασκευασθῇ τέμνουσα ΟΑΒ τοιαύτη, ὥστε τὸ τόξον $\widehat{A\Gamma}$ νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\widehat{\Gamma B}$, νὰ ὑπολογισθοῦν κατόπιν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΚΑΓΒ.

198. Ὀρθὴ γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ στρέφεται περὶ τὴν σταθερὰν κορυφήν της, αἱ δὲ πλευραί της τέμνουν δύο δεδομένας καθέτους μεταξύ των εὐθείας εἰς Β καὶ Γ. Τόπος τοῦ βαρυκέντρου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

199. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α δεδομένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας ταύτης, μὴ συμμετρικὰς πρὸς τὸ ἐκ τοῦ Α ὕψος. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς Μ τῶν ἐφαπτομένων τούτων;

200. Διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΧ (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου) καὶ ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς ΑΧ ἐκλέγομεν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ. Ἂν Μ εἶναι τοῦτο, ποῖον τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ;

201. Ἐν κύκλῳ δίδονται αἱ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας διάμετροι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Διὰ τοῦ Α ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα, τέμνουσα εἰς Γ τὴν περιφέρειαν καὶ εἰς Δ τὴν ευθΒΒ′, ὅπου Γ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ Δ διάφορα ἀλλήλων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῆς εἰς τὸ Γ ἐφαπτομένης καὶ τῆς εἰς τὸ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν ευθΒΒ′.

202. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν α, $\widehat{A}$, μα.

203. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ R, ἡ δΑ καὶ τὸ μῆκος λ=ΑΤ ἐπὶ τῆς εἰς Α ἐφαπτομένης τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α μέχρι τοῦ σημείου Τ, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν ευθΒΓ.

204. Ἐπὶ περιφερείας (Ο) διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὴν ευθΜΑ τέμνουσαν τὴν μεσοκάθετον τῆς ΑΒ εἰς Γ. Ζητεῖται: i) Ὁ γ.τ. τοῦ ὀρθοκέντρου καὶ ii) τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΟΜΓ.

205. Δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Α ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα ἐπανατέμνουσα τὰς περιφερείας εἰς Γ καὶ Δ καὶ εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἄγονται αἱ ἀντίστοιχοι ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν, τεμνόμεναι ἔστω εἰς τὸ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΓΕΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

206. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὑψῶν του (προεκτεινομένων ἐν ἀνάγκῃ) μετὰ τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ περιφερείας.

207. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τυχοῦσα περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Β καὶ Γ ἐπανατέμνει τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ εἰς Β′ καὶ Γ′. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Α διάμεσος τοῦ τρ.ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Β′Γ′.

208. Ἔστωσαν τὰ Α, Β, Γ, Δ ὁμοκυκλικά, Β′, Δ′ αἱ προβολαὶ τῶν Β, Δ ἐπὶ τὴν ευθ ΑΓ καὶ Α′, Γ′ αἱ προβολαὶ τῶν Α, Γ ἐπὶ τὴν ευθ ΒΔ. Δείξατε ὅτι τὰ Α′, Β′, Γ′, Δ′ εἶναι ὁμοκυκλικά.

209. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΘ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΖΘ τέμνονται ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τρ.ΑΒΓ.

**Ὁμὰς Β** (Συνθετώτεραι ἀσκήσεις).

210. Εἰς ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ, προεκτείνομεν τὸ ΒΡ κατὰ ΡΜ = ΒΡ καὶ προβάλλομεν τὸ Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΔΓ εἰς Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Ε, Ρ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

211. Ἔστω ΑΗ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγ. ΑΒΓ καὶ Ε καὶ Δ αἱ προβολαὶ τοῦ Η ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

i) ΔΕ⊥ΑΜ, ὅπου Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ.

ii) Ἐὰν Η′ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ ΒΧ εὐθεῖα //ΕΔ, τότε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΜΗ′, ΒΧ, ΑΗ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.

iii) Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΗΔ καὶ ΒΧ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

212. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως ΔΖ.

213. Ἐὰν μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα ΑΓ, ΓΒ διαμέτρου ΑΒ περιφερείας γραφοῦν δύο περιφέρειαι καὶ ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ τυχοῦσα εὐθεῖα, τὰ τμήματα αὐτῆς τὰ μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς περιφερείας καὶ τῶν δύο ἄλλων εἶναι ἴσα.

214. Ἔστω ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου τέμνονται προεκτεινόμεναι εἰς Ε καὶ ὁμοίως αἱ δύο ἄλλαι ἀπέναντι πλευραὶ ΒΓ καὶ ΔΑ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{AE\Delta}$ καὶ $\widehat{BZA}$ τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου κατὰ τὰς κορυφὰς ἑνὸς ρόμβου. Νὰ διατυπωθῇ μία ἀντίστροφος πρότασις καὶ νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ἀληθεύῃ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

215. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τοῦ ΑΔ. Διὰ τοῦ Ε φέρομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν παρ|λον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Η καὶ ἀφ' ἑτέρου κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΕ, ἥτις τέμνει τὴν ευθΑΓ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΖ = ΓΗ.

216. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ $\widehat{A} = 90^0$, ἔστω ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος του καὶ $K_1$, $K_2$, Κ τὰ ἔγκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ καὶ ΑΒΓ ἀντιστοίχως Νὰ δειχθῇ.

i) Τὸ Κ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.$AK_1K_2$.

ii) Τὸ ΑΔ διέρχεται διὰ τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.$AK_1K_2$.

iii) Τὸ τετράπλευρον $BK_1K_2Γ$ εἶναι ἐγγράψιμον.

217. Διὰ τυχόντος σημείου Μ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΒΓ φέρομεν παρ|λους πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου ΔΕ τοῦ σχηματιζομένου παρ/μου διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὴν βάσιν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ευθ ΔΕ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

218. Ἐπὶ σταθεροῦ τμήματος ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ γράφομεν δύο ἡμιπεριφερείας μὲ διαμέτρους ΜΑ καὶ ΜΒ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ. Ἔστωσαν Δ καὶ Ε τὰ μέσα τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὸ ΑΒ.

219. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox,Oy ὀρθῆς γωνίας κινοῦνται τὰ σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε ΟΑ + ΟΒ = Κ (σταθ.). Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ΟΑΔΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Δ⊥ἐπὶ τὴν ΑΒ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

220. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σταθερὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Διὰ τοῦ Γ φέρομεν εὐθεῖαν (ε) ⊥ ΑΓ. Διὰ τῶν Α καὶ Β διέρχονται δύο κάθετοι μεταξύ των εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν (ε) εἰς Δ καὶ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια (ΑΔΕ) διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου διαφόρου τοῦ Α.

221. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἓν σημεῖον Δ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τρ.ΔΕΖ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δυνατή. Ἀκολούθως νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον ἐξ ὅλων τῶν εἰς τὸ τρ.ΑΒΓ ἐγγεγραμμένων τριγώνων.

(Ὑπόδ. Νὰ ληφθοῦν τὰ συμμετρικὰ τοῦ Δ ὡς πρὸς τὰς ευθ ΑΒ, ΑΓ).

222. Ἐὰν ἐπίπεδον σχῆμα ἔχῃ δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους ἐπ' ἀλλήλους, τότε ἔχει καὶ κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἀξόνων τούτων.

223. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας οὕτως, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα.

224. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ ἀκτὶς $\boxed{\rho}$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἡ ἀκτὶς $\boxed{\rho_\alpha}$ τοῦ ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$ παρεγγεγραμμένου καὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς α.

225. Ὁμοίως, ὅταν δίδωνται: ρ, $\rho_\alpha$, καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

226. Ὁμοίως, ἐκ τῶν στοιχείων α, $\widehat{A}$ καὶ $\rho_\alpha$.

227. Ὁμοίως, ἐκ τῶν στοιχείων α, ρ καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

228. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ ρ, ἡ α καὶ ἡ ἀπόστασις $OO_1 = \lambda$ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου ἀπὸ τὸ κέντρον $O_1$ τοῦ ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$ παρεγγεγραμμένου κύκλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ :

229. Ἐκ τῶν $\widehat{A}$, $\mu_\beta$, $\mu_\gamma$.

230. Ἐκ τῶν $\widehat{A}$, ρ, $\upsilon_\alpha$.

231. Ἐκ τῶν α, $\beta - \gamma = d$, ρ.

232. Ἐκ τῶν β, γ, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

233. Ἐκ τῶν α, $\beta + \gamma = k$, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

234. Ἐκ τῶν α, $\beta - \gamma = d$, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

235. Ἐκ τῶν R, α, $\upsilon_\beta$.

236. i) Ἑκατέρωθεν εὐθείας (ε) δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Τὸ ΑΒ τέμνει τὴν (ε) εἰς Ο. Τὸ Ο χωρίζει τὴν (ε) εἰς δύο ἡμιευθείας ΟΧ, ΟΨ, ἐξ ὧν ἡ ΟΧ σχηματίζει ὀξεῖαν γωνίαν μὲ τὸ ΟΑ. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς ΟΧ ἰσχύει $A\widehat{M}X > B\widehat{M}\Psi$ καὶ νὰ ὁρισθῇ τὸ Μ οὕτως, ὥστε $A\widehat{M}X - B\widehat{M}X = \widehat{\theta}$ (δοθεῖσα). ii) Ἐὰν τὰ Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΧΨ, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ΧΨ τοιοῦτον, ὥστε $A\widehat{M}X - B\widehat{M}\Psi = \widehat{\theta}$.

237. Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ) νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε δύο ἐξ αὐτοῦ ἀγόμενα ἐφαπτόμενα τμήματα τῶν περιφερειῶν (ἓν πρὸς ἑκάστην) νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ νὰ εἶναι ἴσα.

238. Ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$ δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ($OA < OB$). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $A\widehat{M}B = 2A\widehat{B}M$.

Ἐὰν $(OA) = \alpha$, $(OB) = \beta$, ποία ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν α καὶ β, διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν;

239. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν ἀκτίνων $R_1$, $R_2$ τῶν περιγεγραμμένων κύκλων τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ, ὅπου Δ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ.

240. Δοθεισῶν δύο παραλλήλων καὶ σημείου Α ἐκτὸς τῆς ταινίας αὐτῶν νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὰς παραλλήλους καὶ περατούμενον εἰς αὐτάς, τὸ ὁποῖον

i) νὰ φαίνεται ἀπὸ τοῦ Α ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν θ,

ii) νὰ φαίνεται ἐκ τοῦ Α ὑπὸ τὴν μεγίστην δυνατὴν γωνίαν.

241. Δίδεται γωνία $\widehat{A}$ καὶ σημεῖον Σ κείμενον ἐντὸς τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν $\widehat{A}$ γωνίας. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας $\widehat{A}$ εἰς σημεῖα Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AB + A\Gamma = S$ (δοθὲν τμῆμα).

(Ὑπόδ: βλ. ἄσκ. 111).

242. Ἔστω $A_1A_2A_3A_4A_5$ ἓν πεντάγωνον καὶ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_5$ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_4A_5$, $A_5A_1$ ἀντιστοίχως καὶ τέλος Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ἂς εἶναι $P_1$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ρ ὡς πρὸς $M_1$, $P_2$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $P_1$ ὡς πρὸς $M_2$ ... καί, τέλος, $P_5$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $P_4$ ὡς πρὸς $M_5$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κορυφὴ $A_1$ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος $PP_5$.

Γενίκευσις διὰ τυχὸν πολύγωνον περιττοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν.

*Ἐφαρμογή*. Νὰ κατασκευασθῇ πεντάγωνον, οὗτινος δίδονται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν.

243. Δίδονται δύο παράλληλοι καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς σημεῖον Α. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν εἰς Β τὴν ἄλλην παράλληλον. Εἰς τὸ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν ΑΒ, τέμνουσαν εἰς Γ τὴν πρώτην παράλληλον. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΓΧ οὕτως, ὥστε ἡ ΓΧ καὶ τὸ Β νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθΑΓ καὶ νὰ εἶναι $\widehat{\text{ΑΓΧ}} = 2\widehat{\text{ΓΑΒ}}$. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ Α ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΓΧ.

244. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ δύο σταθεραὶ διευθύνσεις ($\delta_1$), ($\delta_2$). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς (Ο) φέρομεν παρ|λους πρὸς τὰς ($\delta_1$) καὶ ($\delta_2$) τεμνούσας εἰς Β καὶ Γ τὴν (Ο). Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν ἐγκέντρων τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

245. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον παρ|μον, οὗτινος δίδονται αἱ ἀποστάσεις μιᾶς κορυφῆς ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφήν.

Διερεύνησις.

246. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΧ, ΟΨ γωνίας $\widehat{\text{ΧΟΨ}}$ κινοῦνται ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε ΟΑ + ΟΒ = $l$ (σταθ. τμῆμα). Ποῖον τὸ σύνολον τῶν περικέντρων τῶν τριγώνων ΟΑΒ;

247. Δοθείσης γωνίας $\widehat{\text{ΧΟΨ}}$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παρ|λος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) καὶ τέμνουσα εἰς Α καὶ Β τὰς ΟΧ, ΟΨ οὕτως, ὥστε ΟΑ + ΟΒ = $l$ (δοθέν). (Ὑποτίθεται ὅτι ἡ (ε) τέμνει τὰς πλευρὰς ΟΧ, ΟΨ).

**Σημεῖα συζυγῆ—ἰσογώνια ὡς πρὸς ἓν τρίγωνον.**

248. i) Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τρ.ΑΒΓ μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἰσογώνιοι τῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ ὡς πρὸς τὰς γωνίας $\widehat{\text{Α}}$, $\widehat{\text{Β}}$, $\widehat{\text{Γ}}$ ἀντιστοίχως συντρέχουν ἐπίσης εἰς ἓν σημεῖον Μ′. (Ὑποδ. Ἔστωσαν Δ, Ε, Ζ αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Ἡ Περιφ. (ΔΕΖ) ἐπανατέμνει τὰς ὡς ἄνω εὐθείας εἰς Δ′, Ε′, Ζ′. Αἱ εἰς Δ′, Ε′,Ζ′ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον Μ′ συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Κ τῆς περιφ. (ΔΕΖ). Ἀποδεικνύομεν ἀκολούθως ὅτι ἡ ΑΜ′ εἶναι ἡ ἰσογώνιος τῆς ΑΜ ὡς πρὸς τὴν γωνίαν $\widehat{\text{Α}}$. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν περιφ. (ΑΔΖ) καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς Ο. Εἶναι ΑΜ′//ΟΚ$\wedge$ΟΚ$\perp$ΔΖ $\Rightarrow$ ΑΜ′$\perp$ΔΖ. Ἤτοι ἡ ΑΜ′ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐκ τοῦ Α ὕψους καὶ ἡ ΑΜ τὴν τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τρ.ΑΔΖ, ἄρα ΑΜ′ καὶ ΑΜ εἶναι ἰσογώνιοι ὡς πρὸς τὴν $\widehat{\text{Α}}$ (§25). Ὁμοίως διὰ τὰ δύο ἄλλα ζεύγη (ΒΜ′, ΒΜ), (ΓΜ′, ΓΜ)).

ii) **Ὁρισμός.** Τὰ δύο ἀνωτέρω σημεῖα Μ καὶ Μ′ καλοῦνται συζυγῆ — ἰσογώνια ὡς πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ.

iii) Αἱ ἐξ προβολαὶ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ δύο συζυγῶν ἰσογωνίων σημείων Μ,Μ′ ὡς πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. (Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν τοῦ σημείου Μ′ συζυγοῦς — ἰσογωνίου τοῦ Μ).

iv) **Παρατήρησις.** Εἰς τὸ i) ἐδείχθη ὅτι:

*«Ἡ ἰσογώνιος τῆς ΑΜ ὡς πρὸς τὴν $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἑνοῦσαν τὰς προβολὰς τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ».*

249. Ἔστω Ρ σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγ. ΑΒΓ περιφερείας. Ἐὰν αἱ ἐκ τοῦ Ρ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἐπανατέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς Α·, Β′, Γ′, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα.

250. Δίδονται τρεῖς κύκλοι (Α), (Β), (Γ) ἔχοντες κέντρα τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ καὶ κείμενοι ἐκτὸς ἀλλήλων ἀνὰ δύο. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρα τρίγωνα, τῶν ὁποίων μία πλευρὰ ἐφάπτεται τοῦ (Α), μία τοῦ (Β) καὶ ἡ τρίτη τοῦ (Γ) καὶ τὰ ὁποῖα περιέχουν τοὺς κύκλους (Α), (Β), (Γ) ἐντὸς αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων τούτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

251. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων α, $υ_α$, $\widehat{B} - \widehat{Γ} = \widehat{ω}$

(Ὑποδ. Ἂν λάβωμεν τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τῆς ΒΓ, ἀνάγεται εἰς τὴν ἄσκησιν 175).

252. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων 2τ, $υ_α$, $δ_Α$.

(Ὑποδ. Ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην).

253. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\widehat{B}$, $δ_Α$ καὶ τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{BΑΓ}$.

254. Δοθέντος τρ.ΑΒΓ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον Α′Β′Γ′ ἔχον τὰς κορυφάς του Α′, Β′, Γ′ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ δοθέντος καὶ ἴσον πρὸς ἄλλο δοθὲν τρίγωνον Α″Β″Γ″.

255. Ἡ διάκεντρος ΚΛ δύο ἴσων κύκλων ἀκτῖνος R ἔχει μῆκος ΚΛ = 2α>2R. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΜ′ σταθεροῦ μήκους λ κινεῖναι, ὥστε τὰ ἄκρα του νὰ μένουν ἐπὶ τῶν περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ).

i) Ποίας συνθήκας πρέπει νὰ πληροῖ τὸ λ, διὰ νὰ ὑπάρχουν σημεῖα Μ καὶ Μ′;

ii) Δοθέντος τοῦ λ νὰ κατασκευασθοῦν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα διανύουν τὰ Μ καὶ Μ′.

iii) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ περιφέρειαι διαγράφονται ὁλόκληροι ἀπὸ τὰ Μ καὶ Μ′;

256. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων.

$$δ_Α,\ γ,\ \left|\widehat{B} - \widehat{Γ}\right| = ω$$

257. Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον κυρτὸν τετράπλευρον ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν του καὶ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων του τῆς περιεχούσης τὴν τετάρτην πλευράν.

258. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδονται κατὰ θέσιν, τὸ περίκεντρον Κ καὶ οἱ πόδες Η καὶ Δ τοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψους ΑΗ καὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

259. Εἰς δοθέντα κύκλον χαράσσεται χορδὴ ΑΓ. Ζητεῖται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἔχον τὴν ΑΓ ὡς διαγώνιον, ἔχον τὴν ἑτέραν διαγώνιον ΒΔ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι συγχρόνως καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον.

260. Περὶ δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραὶ νὰ διέρχωνται διὰ τῶν Α καὶ Γ καὶ αἱ δύο ἄλλαι διὰ τῶν Β καὶ Δ.

261. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται αἱ κορυφαὶ Β, Γ, ὁ ποῦς Δ τοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψους καὶ ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνιῶν.

262. Ἐντὸς δοθείσης γωνίας δίδεται σημεῖον Ο, μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια, κέντρου Ο, ἀποτέμνουσα ἀπὸ τὰς εὐθείας, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας, χορδὰς ἐχούσας δοθὲν ἄθροισμα.

263. Νὰ κατασκευασθῇ $^{\Delta}$ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων $μ_β$, $υ_β$.

264. Ἔστω Β τὸ ἓν σημεῖον τομῆς δύο δοθεισῶν τεμνομένων περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ) καὶ Α σταθερὸν δοθὲν σημεῖον. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια (γ) μὲ κέντρον τὸ Α καὶ τέμνουσα τὰς δοθείσας οὕτως, ὥστε τὸ Β, τὸ ἓν σημεῖον τομῆς τῆς (Κ) καὶ (γ) καὶ ἓν σημεῖον τομῆς τῆς (Λ) καὶ (γ) νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

265. Διὰ τοῦ ἑνὸς κοινοῦ σημείου δύο τεμνομένων περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ τοὺς κύκλους χορδὰς ἀντιστοιχούσας εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας.

266. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

267. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται κατὰ θέσιν ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος, τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ ἓν σημεῖον τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{\Gamma}$.

268. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν $\alpha$, $\upsilon_\alpha$, $\delta_A$.

269. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν R, $\mu_\alpha$, Β — Γ.

270. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ ΒΓ, ἡ $\widehat{B}$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ δύο διχοτόμοι τῆς $\widehat{B}$ νὰ εἶναι ἴσαι ($\delta_B = \delta'_B$).

271. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τοῦ ἐγκέντρου Ο καὶ τῶν παρακέντρων $O_2$, $O_3$.

272. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἀπόστασις $2l$ τοῦ ἐγκέντρου Ο ἀπὸ τὸ παράκεντρον $O_1$, τὸ ἄθροισμα $\rho + \rho_\alpha$ καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περικύκλου.

273. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἴχνη τοῦ ὕψους, διαμέσου καὶ διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς.

274. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\alpha$, $\widehat{A}$ καὶ τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως $l$ τῶν προβολῶν τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς $\widehat{A}$.

275. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διχοτόμος γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι ἀπρόσιτος (ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως).

276. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δοθεῖσαν ἀκτῖνα ἐγγεγραμένου κύκλου καὶ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ ὁποίου νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου.

277. Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγ.ΑΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ τοῦ Γ κινοῦνται δύο σημεῖα Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε ΒΜ = ΓΝ. Τόπος τοῦ μέσου Ρ τοῦ τμήματος ΜΝ.

278. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β, Γ καὶ τὸ μέγεθος τῆς $\widehat{A}$ μένουν σταθερά. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ μέσου τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$.

279. Δίδεται κύκλος κέντρου Ο, ἀκτὶς αὐτοῦ ΟΑ, κύκλος διαμέτρου ΟΑ καὶ κέντρου Ο' καὶ σταθερὰ εὐθεῖα ΑΓΔ τέμνουσα εἰς Γ τὴν (Ο') καὶ εἰς Δ τὴν (Ο). Θεωροῦμεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Ο, τέμνουσαν τὴν (Ο') εἰς Μ καὶ τὴν (Ο) εἰς Ν καὶ Ν'. Τόπος τῶν σημείων Ρ καὶ Ρ', καθ' ἃ ἡ ευθ ΓΜ τέμνει τὰς ευθ ΔΝ καὶ ΔΝ'.

280. Δίδεται περιφέρεια (Κ) καὶ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Σ. Διὰ τοῦ Σ ἄγεται ἐφαπτομένη ΣΑ τῆς περιφερείας καὶ μεταβλητὴ τέμνουσα ΣΒΓ. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ ποδὸς Δ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ τοῦ τρ.ΑΒΓ;

281. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν προβολῶν ἐπὶ δύο δεδομένας εὐθείας τεμνομένας εἰς Ο εἶναι σταθερά;

282. Δίδεται περιφέρεια (Κ), ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α καὶ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Σ. Διὰ τοῦ Σ φέρομεν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΣΒΓ τῆς περιφερείας μὴ διερχομένην διὰ τοῦ Α. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τρ.ΑΒΓ;

283. Μὲ κέντρον σταθερὸν σημεῖον Γ τῆς διχοτόμου δεδομένης γωνίας γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὰς εὐθείας, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας, εἰς Α καὶ Β τὴν μίαν καὶ εἰς Α' καὶ Β' τὴν ἄλλην. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τοῦ Γ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ' καὶ Α'Β ὄχι καθέτους ἐπὶ τὴν διχοτόμον.

284. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β,Γ μένουν σταθεραὶ καὶ ἡ διαφορὰ $|AB - A\Gamma| = k$ σταθερά. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$.

285. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ σημεῖον Δ. Ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ καὶ φέρομεν τὴν περιφέρειαν (ΑΒΓ). Ζητεῖται ὁ γ.τ. τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν διὰ τοῦ Γ διερχομένην διάμετρον τῆς περιφερείας (ΑΒΓ).

286. Σημεῖον Ρ κινεῖται ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς βάσεως ΒΓ δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν Δ καὶ Ε αἱ προβολαὶ τοῦ Ρ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ ποδὸς Η τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ.

287. Εἰς τυχὸν σημεῖον Μ περιφερείας διαμέτρου ΑΑ′ ἄγομεν ἐφαπτομένην, ἥτις τέμνει τὴν ευθ ΑΑ′ εἰς τὸ σημεῖον Τ. Ἂν Κ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ζητεῖται i) ὁ τόπος τοῦ ἐγκέντρου τοῦ τρ.ΚΜΤ, ii) οἱ γ.τ. τῶν παρακέντρων τοῦ τρ.ΚΜΤ, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν.

288. Δοθέντος ὀρθογωνίου παρ|μου ΑΒΓΔ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου του, τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

289. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ′ καὶ ΑΓΒ′ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τρίτον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΟ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον Γ′ΟΒ′Α εἶναι παρ|μον.

ii) Τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΑΓ, Β′Γ′ εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

iii) Ἐὰν ἡ κορυφὴ Α μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε τὸ μῆκος τῆς ἐκ τοῦ Β διαμέσου τοῦ τρ.ΑΒΓ νὰ μένῃ σταθερόν, ἴσον μὲ $l$, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ Β′Γ′.

iv) Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς ΒΓ ἕτερον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΑ′ πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.

290. Εἰς πᾶν τρ.ΑΒΓ αἱ προβολαὶ τοῦ ὀρθοκέντρου ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν καὶ ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ μέσον τῆς ΒΓ μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων.

291. Πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τὸ τετράπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ λαμβανομένας ἀνὰ τρεῖς εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρον.

292. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου οἱουδήποτε ὕψους τοῦ τρ.ΑΒΓ.

293. Μὲ κέντρα δύο δοθέντα σημεῖα νὰ γραφοῦν δύο ἴσοι κύκλοι, ὧν μία κοινὴ ἐφαπτομένη νὰ ἐφάπτεται δεδομένου κύκλου.

294. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν δεδομένων

$$\alpha,\ \beta-\gamma,\ \upsilon_\gamma$$

295. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΒ καὶ $\widehat{BΓ}$, $\widehat{ΓΔ}$ δύο ἴσα τόξα αὐτῆς. Ἐὰν αἱ ΓΑ καὶ ΡΒ τέμνωνται εἰς Ε καὶ αἱ ΑΔ, ΡΓ εἰς Ζ, νὰ δειχθῇ ὅτι ΕΖ⊥ΑΔ.

296. Εἰς τὰ ἄκρα Α, Β διαμέτρου κύκλου φέρομεν ὁμορρόπους ἡμιεφαπτομένας ΑΧ, ΒΨ. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΧ, ΒΨ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΜ, ΒΜ τεμνούσας ἀντιστοίχως τὰς ΒΨ, ΑΧ εἰς Γ καὶ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εἰς Μ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιπεριφερείας διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

**Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀσκήσεως 49.** Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

297. $\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma,\ \widehat{B},\ \widehat{Γ}$.

298. $\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma,\ \beta,\ \gamma$.

299. $\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma,\ \beta,\ \widehat{A}$.

300. $\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma,\ \beta+\gamma,\ \widehat{B}-\widehat{Γ}$.

301. $\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma,\ \beta-\gamma,\ \widehat{A}$.

302. $\upsilon_\gamma-\upsilon_\beta,\ \widehat{B},\ \widehat{Γ}$.

303. $\upsilon_\gamma-\upsilon_\beta,\ \beta,\ \gamma$.

304. $\upsilon_\gamma-\upsilon_\beta,\ \beta-\gamma,\ \widehat{B}-\widehat{Γ}$.

305. $\upsilon_\gamma-\upsilon_\beta,\ \widehat{A},\ \beta+\gamma$.

306. $R,\ \beta-\gamma,\ \upsilon_\gamma-\upsilon_\beta$.

307. **Ἐφαρμογὴ τῆς ἀσκήσεως 148.** Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων: i) $\alpha,\ R,\ \rho_\beta$. ii) $\upsilon_\alpha,\ \mu_\alpha,\ \rho_\alpha-\rho$. iii) $R,\ \alpha,\ \rho+\rho_\alpha$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

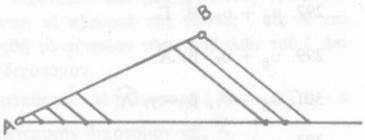
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

# ΜΕΤΡΟΝ ΤΜΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

## 34. Πολλαπλασιασμὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.

**α') Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμόν.** Καλοῦμεν γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν ν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς ΑΒ. Γράφομεν : ΓΔ = ν . ΑΒ.

**β') Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ.** Εἶναι γνωστὸν ὅτι δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς ν ἴσα μέρη (ν φυσικός) (σχ. 45). Ἕκαστον ἐκ τῶν ν τούτων ἴσων τμημάτων παρίσταται μὲ $\frac{AB}{\nu}$ ἢ $\frac{1}{\nu} \cdot AB$.



Σχ. 45

**γ') Πολλαπλασιασμὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ρητὸν ἀριθμὸν** μ/ν. Καλοῦμεν γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὸν θετικὸν ρητὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀριθμὸν μ/ν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα μ εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς $\frac{AB}{ν}$. Γράφομεν:

$$ΓΔ = \frac{μ}{ν} \cdot AB$$

δ') Ἐξ ὁρισμοῦ τὸ γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ μηδὲν εἶναι τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα. (Ὡς γνωστὸν εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων περιλαμβάνομεν καὶ τὸ μηδενικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ἐσωτερικὰ σημεῖα καὶ τοῦ ὁποίου τὰ δύο ἄκρα συμπίπτουν).

ε') Τὸ γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $λ = ψ_0, ψ_1ψ_2ψ_3$ ..... ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει καὶ εἶναι ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὸ AB, καθ' ὃν τρόπον ὁ ἀριθμὸς λ ἐκ τῆς ἀκολουθίας $ψ_0$, $ψ_0,ψ_1$, $ψ_0,ψ_1ψ_2$, $ψ_0$, $ψ_1ψ_2ψ_3$..... $ψ_0,ψ_1ψ_2$... $ψ_ν$,...

**στ') Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.** Καλοῦμεν λόγον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν λ, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον τὸ ΓΔ δίδει τὸ AB. Γράφομεν:

$$\frac{AB}{ΓΔ} = λ \Longleftrightarrow AB = λ \,.\, ΓΔ$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι δοθέντων τῶν AB καὶ ΓΔ ὑπάρχει πάντοτε ὁ λόγος αὐτῶν λ, ἤτοι θετικὸς ἀριθμὸς λ τοιοῦτος, ὥστε $λ \,.\, ΓΔ = AB$

ζ') **Μέτρον εὐθυγράμμου τμήματος.** Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ ἑτέρου τμήματος $ΓΔ = d_0$, καλοῦμεν **μέτρον τοῦ AB μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ** $d_0$ τὸν λόγον τοῦ AB πρὸς τὸ $d_0$. Τὸ μέτρον τοῦ AB, δηλ. ὁ λόγος $AB/d_0$, συμβολίζεται μὲ μ(AB) ἢ (AB) ἤ, ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον (βλ. § **57**), AB.

η') Τοὺς ἀνωτέρω ἁπλοῦς ὁρισμούς, καθὼς καὶ τὸ πρῶτον μέρος τῆς § 46, παραθέτομεν χάριν διδακτικῆς σκοπιμότητος. Πληρεστέραν θεωρίαν τοῦ μέτρου ἑνὸς τμήματος, τοῦ λόγου δύο τμημάτων καὶ τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν δίδομεν κατωτέρω εἰς τὰς §§ 40 - 44.

**θ') Σύμμετρα εὐθύγραμμα τμήματα.** Ἔστωσαν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ ΓΔ. Ἐὰν ὑπάρχῃ τρίτον εὐθύγραμμον τμῆμα $d_0$ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{AB}{d_0} = μ$ καὶ $\frac{ΓΔ}{d_0} = ν$, ὅπου μ καὶ ν **φυσικοὶ ἀριθμοί,** τότε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ ΓΔ λέγονται σύμμετρα πρὸς ἄλληλα καὶ τὸ $d_0$ **κοινὸν μέτρον** αὐτῶν.

Προφανῶς εἶναι τότε $AB = μ \,.\, d_0$ καὶ $d_0 = \frac{1}{ν} ΓΔ$. Ἑπομένως, $AB = μ.\frac{1}{ν} ΓΔ = \frac{μ}{ν} ΓΔ \Rightarrow \frac{AB}{ΓΔ} = \frac{μ}{ν}$. Ὁ λόγος λοιπὸν δύο συμμέτρων εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σύμμετρος ἀριθμός.

ι') **Ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα** λέγονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ὅταν οὐδὲν κοινὸν μέτρον αὐτῶν ὑπάρχῃ. (Δηλ. **δὲν** ὑπάρχει εὐθύγραμμον τμῆμα,



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ ὁποῖον ἐπαναλαμβανόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν νὰ δίδῃ τὸ ἓν τμῆμα καὶ συγχρόνως ἐπαναλαμβανόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν νὰ δίδῃ τὸ ἄλλο. Τὴν ὕπαρξιν ἀσυμμέτρων πρὸς ἄλληλα τμημάτων ἀνεκάλυψεν πρῶτος ὁ Πυθαγόρας ἀποδείξας ὅτι ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι τμήματα ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα).

## ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

**34α. Ἀκολουθίαι.** — α΄) Ἔστω F ἓν σύνολον ἐκ στοιχείων οἱασδήποτε φύσεως. Καλεῖται ἀκολουθία ἐκ στοιχείων τοῦ F μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ F.

Τὸ στοιχεῖον τοῦ F τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1 ἂς παρασταθῇ διὰ τοῦ $\alpha_1$. Τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν 2 ἂς παρασταθῇ μὲ $\alpha_2$ καὶ γενικῶς τὸ στοιχεῖον τοῦ F τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἂς παρασταθῇ μὲ $\alpha_\nu$. Ἔχομεν τότε τὴν ἀντιστοιχίαν (ἀπεικόνισιν):

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, \ldots \nu \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots & \alpha_\nu \ldots \end{array}\right|$$

Τὰ στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots$ τοῦ F (δηλ. αἱ εἰκόνες τῶν 1, 2, 3, ... ν ...) λέγονται **ὅροι** τῆς ἀκολουθίας καὶ δὲν εἶναι ἀναγκαίως ὅλα διαφορετικὰ μεταξύ των.

Τὸ στοιχεῖον $\alpha_\nu$ λέγεται **νυοστὸς ὅρος** τῆς ἀκολουθίας ἢ **ὅρος μὲ δείκτην ν.**

Ἡ ἀκολουθία (1) παρίσταται συντόμως μέ:

$$(2)\qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \text{ ἢ μὲ } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots) \text{ ἢ ἁπλῶς } \{\alpha_\nu\}.$$

Ἡ ἀκολουθία $\{\alpha_\nu\}$ λέγεται καὶ *ἀπέραντος* ἀκολουθία, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι *παντὸς ὅρου* ἕπονται πάντοτε καὶ ἄλλοι ὅροι, τὸ δὲ πλῆθος τῶν στοιχείων της εἶναι ἄπειρον.

**β΄) Ἀκολουθίαι ἀριθμῶν.** Ἐὰν τὸ F εἶναι ἓν ἀριθμοσύνολον, τότε κάθε ἀκολουθία ἐκ στοιχείων τοῦ F εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν ἢ ἀριθμοακολουθία.

γ΄) Εἰς τὰ ἑπόμενα μὲ τὴν λέξιν «*ἀκολουθία*» θὰ ἐννοοῦμεν *ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν*, διότι μόνον τοιαύτας ἀκολουθίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν.

δ΄) Ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία (1) δημιουργεῖ μίαν συνάρτησιν f(ν), τῆς ὁποίας ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ν διατρέχει τὰς ἀκεραίας τιμὰς 1, 2, 3, ... ν, ... (δηλ. τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν), ἐνῷ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ... ν, εἶναι οἱ ὅροι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ τῆς ἀκολουθίας. Ἀντὶ δὲ νὰ γράφωμεν τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας (2) ὡς τιμὰς μιᾶς συναρτήσεως f(1), f(2), f(3), ..., f(ν), ... μεταχειριζόμεθα δείκτας $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu \ldots$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Οὕτω π.χ. ἡ ἀκολουθία:

(3) $$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\nu}, \ldots \text{ ἢ συντόμως } \left\{\frac{1}{\nu}\right\}$$

δημιουργεῖται, ὅταν εἰς τὴν θέσιν ἑκάστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ γραφῇ ὁ ἀντίστροφός του. Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (3) εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $f(\nu) = \frac{1}{\nu}$ διὰ $\nu = 1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ ἐπ' ἄπειρον.

Δὲν εἶναι ὅμως πάντοτε εὔκολον νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $f(\nu)$, τῆς ὁποίας τιμαὶ εἶναι οἱ ὅροι ἀκολουθίας, οὔτε πάντοτε δυνατόν. Οὕτω π.χ., ἂν ὡς πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀκολουθίας ληφθῇ ὁ 1, ὡς δεύτερος ὁ 1, ἕκαστος δὲ ἄλλος ληφθῇ ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων του, ἡ ἀκολουθία εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη:

(5) $$\alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=2,\ \alpha_4=3,\ \alpha_5=5,\ \alpha_6=8,\ \alpha_7=13,\ \alpha_8=21 \ldots,$$

διότι κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ὅσους ὅρους θέλομεν, ἀλλ' ἡ ἔκφρασις τοῦ *νυοστοῦ ὅρου* δὲν εἶναι φανερά. (Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ ἡ μορφὴ τοῦ $\alpha_\nu$ διὰ καταλλήλου ἐρεύνης).

Ἡ (5) ὁρίζεται ἐκ τοῦ *νόμου*: $\boxed{\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}}$ (ἀναδρομικὴ σχέσις) καὶ τῶν *ἀρχικῶν συνθηκῶν*: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$.

Γενικῶς, ἂν δοθῇ εἷς νόμος, διὰ τοῦ ὁποίου ἕκαστος ὅρος τῆς ἀκολουθίας δημιουργεῖται ἐκ τῶν προηγουμένων του, δοθοῦν δὲ καὶ ὡρισμένοι πρῶτοι ὅροι αὐτῆς, τότε πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι τελείως καθωρισμένοι ἀριθμοί, χωρὶς ἡ ἔκφρασις τοῦ νυοστοῦ ὅρου νὰ εἶναι ἐν γένει γνωστή.

ε') Ἐνίοτε ὁ δείκτης ν τοῦ $\alpha_\nu$ λαμβάνεται οὕτως, ὥστε νὰ διατρέχῃ τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, ..., ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$, ὁ δὲ $\alpha_{\nu-1}$ εἶναι τότε ὁ νυοστὸς ὅρος.

στ') **Φράγματα.** Ἐὰν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς k **μικρότερος ὅλων τῶν ὅρων** τῆς ἀκολουθίας, δηλ. ἂν ἡ ἀνισότης $k < \alpha_\nu$ πληροῦται δι' ὅλα τὰ ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) τοῦ k μένοντος σταθεροῦ, τότε ὁ k λέγεται **κάτω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας.

Ὁμοίως, ἂν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς **μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὅρων** τῆς ἀκολουθίας, οὗτος λέγεται **ἄνω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας.

Ἂν ὑπάρχῃ καὶ κάτω καὶ ἄνω φράγμα, ἡ ἀκολουθία λέγεται **φραγμένη.**

ζ') **Μονότονοι ἀκολουθίαι.**

i) Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ βαίνουν αὐξανόμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ δι' ὅλα τὰ ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), τότε ἡ ἀκολουθία λέγεται **αὔξουσα.**

ii) Ἐὰν οἱ ὅροι βαίνουν μὴ σταθερῶς αὐξανόμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1}$, ὅπου τὸ = δὲν ἰσχύει δι' ὅλα τὰ ν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἡ ἀκολουθία λέγεται **αὔξουσα ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν** ἢ **μὴ φθίνουσα.** Εἰς τὴν μὴ φθί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νουσαν ἀκολουθίαν ἕκαστος ὅρος εἶναι μικρότερος, ἂν ὄχι τοῦ ἀμέσως ἑπομένου του, πάντως **κάποιου ἐκ τῶν ἑπομένων του ὅρων.**

iii) Ἐὰν ἡ ἰσότης $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+1}$ ἰσχύῃ ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν, ἡ ἀκολουθία ἂς λέγεται **τελικῶς σταθερά.**

iv) Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας βαίνουν ἐλαττούμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ δι' ὅλα τὰ ν, ἡ ἀκολουθία λέγεται **φθίνουσα.**

v) Ἐὰν οἱ ὅροι βαίνουν μὴ σταθερῶς ἐλαττούμενοι, δηλ. εἶναι $\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1}$, ὅπου τὸ = δὲν ἰσχύει δι' ὅλα τὰ ν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἡ ἀκολουθία λέγεται **φθίνουσα ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν ἢ μὴ αὔξουσα.**

Πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω ἀκολουθίαι λέγονται **μονότονοι.**

**35. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου ἀκολουθίας.** —α') **Ὅριον τὸ μηδέν.** Ἔστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1},\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_3 = \frac{1}{3},\ \ldots\ \alpha_\nu = \frac{1}{\nu},\ \ldots$$

Ταύτης οὐδεὶς ὅρος εἶναι μηδέν. Ὅσον ὅμως αὐξάνει τὸ ν, οἱ ὅροι της καθίστανται ὁλονὲν μικρότεροι, πλησιάζοντες ὁλονὲν καὶ περισσότερον πρὸς τὸ μηδέν. Συγκεκριμένως, ἂν δοθῇ ὁποιοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς ε, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι οὗτος, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι, ἀπὸ μιᾶς τάξεως (δείκτου) καὶ πέραν, μικρότεροι τοῦ ε. Πράγματι ἡ ἀνισότης $\alpha_\nu < \varepsilon$, ἤτοι $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$, ἀληθεύει, ὅταν $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ν δύναται νὰ ληφθῇ ἀρκετὰ μέγας, ὥστε νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 1/ε, διὰ τοῦτο ὑπάρχει ὅρος τῆς ἀκολουθίας μικρότερος τοῦ αὐθαιρέτως μικροῦ θετικοῦ ε **καὶ πάντες οἱ μετ' αὐτὸν ὅροι εἶναι ἐπίσης μικρότεροι τοῦ ε.** Τὴν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν χαρακτηρίζομεν ὡς τ ε ί ν ο υ σ α ν π ρ ὸ ς τ ὸ μ η δ ὲ ν ἢ ἔ χ ο υ σ α ν ὅ ρ ι ο ν μ η δ έ ν.

Ἔστω ἐπίσης ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_1 = \frac{-1}{1},\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_3 = \frac{-1}{3},\ \ldots\ \alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu},\ \ldots$$

Δι' αὐτὴν ἰσχύει ὅ,τι καὶ μὲ τὴν προηγουμένην, δηλ. ὅσον αὐξάνει ὁ ν, οἱ ὅροι της πλησιάζουν ὁλονὲν καὶ στενώτερον πρὸς τὸ μηδέν, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ταλαντεύονται ἑκατέρωθεν τοῦ μηδενός. Συνεπῶς θὰ εἴπωμεν δι' αὐτὴν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Γενικῶς **μία ἀκολουθία** $\{\alpha_\nu\}$ **λέγομεν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (ἢ τείνει πρὸς τὸ μηδέν), ὅταν δοθέντος οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε** (*ὁσονδήποτε μικροῦ καὶ ἂν θέλῃ τις*) **οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότεροι τοῦ ε, ἀπὸ τινος ὅρου καὶ πέραν.** Δηλαδή: Ἐάν, δοθέντος τοῦ αὐθαιρέτως μικροῦ θετικοῦ ε, εὑρίσκεται πάντοτε εἷς δείκτης N τοιοῦτος, ὥστε δι' ὅλους τοὺς δείκτας $\nu \geqq N$ νὰ εἶναι $|\alpha_\nu| < \varepsilon$, τότε ἡ $\{\alpha_\nu\}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γράφομεν τότε:

$$\boxed{\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0} \quad \text{(limes = ὅριον)}$$

ἤ $\alpha_\nu \underset{\nu\infty}{\to} 0$ ἤ $\lim\limits_{\nu=\infty} \alpha_\nu = 0$

(Μὲ χρῆσιν τῶν παραδεδεγμένων συμβόλων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = 0, \quad \text{ὅταν:}$$

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall\nu > N \Rightarrow |\alpha_\nu| < \varepsilon)$$

**Μηδενικὴ ἀκολουθία** λέγεται κάθε ἀκολουθία, ἡ ὁποία ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

β') *Θεώρημα.* Ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{2^\nu}, \ldots$ $\left(\text{συντόμως ἡ } \left\{\frac{1}{2^\nu}\right\}\right)$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν. (Μηδενικὴ ἀκολουθία).

*Ἀπόδειξις.* Θὰ δείξωμεν πρῶτον ὅτι δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ $\nu > 2$ ὑπάρχει δύναμις τοῦ 2, ἥτις τὸν ὑπερβαίνει. Τοῦτο φαίνεται ἐκ τῆς γνωστῆς ταυτότητος $(\chi^{\nu-1} - 1)/(\chi - 1) = \chi^{\nu-2} + \chi^{\nu-3} + \cdots + \chi + 1$, ἥτις διὰ $\chi = 2$ δίδει:

$$\frac{2^{\nu-1}-1}{2-1} = 2^{\nu-2} + 2^{\nu-3} + \cdots + 2 + 1 > 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots}_{\nu-1 \text{ φορὰς}} + 1 + 1 \Rightarrow 2^{\nu-1} - 1 >$$

$\nu - 1 \Rightarrow 2^{\nu-1} > \nu$.

Ἔστω τώρα ε τυχὼν θετικὸς (ὁσονδήποτε μικρός). Ἡ ἀνισότης $\frac{1}{2^\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow 2^\nu > \frac{1}{\varepsilon}$. Ἐπειδή, δοθέντος θετικοῦ, ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμός, ὅστις τὸν ὑπερβαίνει, διὰ τοῦτο ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς N τοιοῦτος, ὥστε $N > 1/\varepsilon$. Ἀρκεῖ λοιπὸν ὁ ν νὰ ἐκλεγῇ ἔτσι, ὥστε $2^\nu > N$, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $2^\nu > 1/\varepsilon$. Ἀλλ' ἡ σχέσις $2^\nu > N$ ἰσχύει, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅταν ὁ $\nu = N - 1$. Ἑπομένως καὶ ἡ ἀνισότης $2^\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ ἰσχύει ἀπό τινος ἐκθέτου $N - 1$ καὶ ἐφεξῆς, ἄρα καὶ ἡ $\frac{1}{2^\nu} < \varepsilon$. Ἄρα ἡ $\left\{\frac{1}{2^\nu}\right\}$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία (βλ. ἐδάφ. α').

γ') **Ὅριον πεπερασμένον. — Δοθείσης τῆς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ ἐὰν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς $l$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ ἀκολουθία $\alpha_1 - l, \alpha_2 - l, \alpha_3 - l, \ldots \alpha_\nu - l, \ldots$ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ ἔχει ὅριον τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν $l$ (ἢ τείνει πρὸς τὸν $l$). Γράφομεν δὲ τότε:**

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l \quad \text{ἤ} \quad \alpha_\nu \underset{\nu\infty}{\to} l \quad \text{ἤ} \quad \lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = l$$

Μὲ ἄλλας λέξεις, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha_\nu - l$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν διὰ $\nu = \infty$, τότε ἡ μεταβλητὴ $\alpha_\nu$ τείνει πρὸς τὴν σταθερὰν $l$ (ἔχει ὅριον τὴν $l$).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Οὕτω π.χ. ἡ ἀκολουθία $\left\{\frac{\nu+1}{\nu}\right\}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν $\nu \to \infty$, διότι ἡ διαφορὰ $\frac{\nu+1}{\nu} - 1 = \frac{1}{\nu}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = l \quad \text{ὅταν:}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall\nu>N \Rightarrow |\alpha_\nu - l| < \varepsilon$$

**δ') Ἡ μοναδικότης τοῦ ὁρίου (Θ).—Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu$, τότε τοῦτο εἶναι μοναδικόν.**

Θὰ δείξωμεν δηλ. ὅτι, ἂν (1) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l_1$ καὶ (2) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l_2$, τότε $l_1 = l_2$. Πράγματι, λόγῳ τῆς (1), δοθέντος θετικοῦ $\varepsilon/2$ ὑπάρχει δείκτης $N_1$ τοιοῦτος, ὥστε:

(3) $$|\alpha_\nu - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ διὰ κάθε } \nu>N_1 \text{ (βλ. ἐδάφ. γ').}$$

Ἐπίσης, λόγῳ τῆς (2), ὑπάρχει δείκτης $N_2$ τοιοῦτος, ὥστε:

(4) $$|\alpha_\nu - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ διὰ κάθε } \nu > N_2$$

Ἐὰν N ὁ μεγαλύτερος (ἢ μὴ μικρότερος) τῶν $N_1$, $N_2$ (ἄλλως: $N = \max(N_1, N_2)$), τότε διὰ κάθε $\nu>N$ συναληθεύουν αἱ (3) καὶ (4) δηλ.

(5) $$|\alpha_\nu - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ καὶ } |\alpha_\nu - l_2| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\nu> N.$$

Ἐκ τῶν (5) συνάγεται:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - \alpha_\nu + \alpha_\nu - l_2| = |\alpha_\nu - l_2 - (\alpha_\nu - l_1)|$$

$$\leqq |\alpha_\nu - l_2| + |\alpha_\nu - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ δηλ. } |l_1 - l_2| < \varepsilon \text{ διὰ κάθε } \varepsilon>0.$$

Ἐπειδὴ μόνον τὸ μηδὲν εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερον παντὸς θετικοῦ, θὰ εἶναι $|l_1 - l_2| = 0$ καὶ $l_1 = l_2$. (Ἐνταῦθα ἔγινε χρῆσις τοῦ θεωρήματος τῆς Ἀλγέβρας $|x - y| \leqq |x| + |y|$).

**ε') (Θ). Ἐὰν k πραγματικὸς $\neq 0$, τότε, ἂν $\lim\limits_{\nu\infty} \alpha_\nu = l$, θὰ εἶναι καὶ $\lim\limits_{\nu\infty}\{k\alpha_\nu\} = kl$.**

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $k\alpha_1 - kl$, $k\alpha_2 - kl$,...$k\alpha_\nu - kl$, ... εἶναι μηδενική. Ἤτοι δοθέντος $\varepsilon > 0$, ἰσχύει ἀπὸ τινος ν καὶ πέραν, $|k\alpha_\nu - kl| < \varepsilon$. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ: $|k(\alpha_\nu - l)| < \varepsilon \Longleftrightarrow |k| \cdot |\alpha_\nu - l| < \varepsilon \Longleftrightarrow \alpha_\nu - l < \varepsilon/|k|$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνει, ἀφοῦ ἡ ἀκολουθία $\{\alpha_\nu - l\}$ εἶναι μηδενικὴ (ἐδάφ. α')

## 36. Ἀξίωμα τοῦ Dedekind διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (ἀξίωμα τῆς συνεχείας).

**Ἐὰν πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χωρισθοῦν εἰς δύο μὴ κενὰς κλάσεις οὕτως, ὥστε**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**1) Ἕκαστος ἀριθμὸς νὰ ἀνήκῃ εἰς μίαν καὶ μόνον μίαν ἐκ τῶν δύο κλάσεων.**

**2) Πᾶς ἀριθμὸς τῆς πρώτης κλάσεως νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς δευτέρας**

**τότε ἢ ὑπάρχει εἰς τὴν πρώτην κλάσιν εἷς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὅλων τῶν ἄλλων ἀριθμῶν τῆς πρώτης κλάσεως ἢ ὑπάρχει εἰς τὴν δευτέραν κλάσιν εἷς ἀριθμὸς μικρότερος ὅλων τῶν ὑπολοίπων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας κλάσεως.**

**Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται τομὴ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν κατὰ Dedekind.**

## 37. Ὅριον μονοτόνου ἀκολουθίας

**α') Θεώρημα. «Ἐὰν μία ἀκολουθία εἶναι αὔξουσα καὶ ἔχῃ ἄνω φράγμα τὸ c (§ 34, στ'), τότε ἡ ἀκολουθία αὐτὴ τείνει πρὸς ἓν ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ c. Ἐὰν μία ἀκολουθία εἶναι φθίνουσα καὶ ἔχῃ κάτω φράγμα k, τότε ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ἓν ὅριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ k».**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω αὔξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν.

$$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots\alpha_{\nu-1}<\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}<\cdots=\{\alpha_\nu\}.$$

Δι' αὐτῆς πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χωρίζονται εἰς δύο κλάσεις A καὶ B ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὴν κλάσιν A ἀνήκει κάθε ἀριθμός, ὅστις εἶναι μικρότερος ἑνὸς οἱουδήποτε ὅρου τῆς $\{\alpha_\nu\}$. Εἰς τὴν B ἀνήκει κάθε ἀριθμός, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὅρων τῆς $\{\alpha_\nu\}$. Οὐδεμία τῶν δύο κλάσεων εἶναι κενή, διότι ἡ A περιέχει π.χ. ὅλους τοὺς ὅρους τῆς αὐξούσης ἀκολουθίας $\{\alpha_\nu\}$, ἡ δὲ B περιέχει τὸ ἄνω φράγμα καὶ πάντας τοὺς μεγαλυτέρους αὐτοῦ. Κάθε δὲ πραγματικὸς ἀριθμὸς x ἀνήκει ἢ εἰς τὴν A ἢ εἰς τὴν B κλάσιν. Διότι ἡ ἀνισότης $x<\alpha_\nu$ ἢ ἀληθεύει διά τινα τιμὴν τοῦ ν, ὁπότε $x\in A$ ἢ δι' **οὐδεμίαν** τιμὴν τοῦ ν ἀληθεύει. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὁ x δὲν εἶναι μικρότερος κανενὸς ὅρου τῆς ἀκολουθίας, ἀλλὰ οὔτε καὶ ἴσος, διότι τότε θὰ ἦτο μικρότερος τοῦ ἑπομένου ὅρου. Ἄρα ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας καὶ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν B.

Τέλος κάθε ἀριθμὸς α τῆς κλάσεως A εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ α' τῆς κλάσεως B. Διότι διὰ τὸν α ἰσχύει: $\alpha<\alpha_\nu$, ἐνῷ διὰ τὸν α' ἰσχύει $\alpha'>\alpha_\nu$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πρώτην κλάσιν A ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὅλων τῶν ἀριθμῶν τῆς A. Διότι, ἂν $x\in A$, τότε ὑπάρχει ὅρος $\alpha_\nu$ τῆς ἀκολουθίας τοιοῦτος, ὥστε $x<\alpha_\nu$. Ἐπειδὴ ὅμως $\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}\Rightarrow\alpha_\nu\in A$. Δηλ., ἂν $x\in A$, ὑπάρχει πάντοτε εἷς μεγαλύτερος του (ὁ $\alpha_\nu$) ἀνήκων πάλιν εἰς τὴν A.

Ἑπομένως κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦ Dedekind (§ 36) ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς τῆς κλάσεως B μικρότερος ὅλων τῶν ἄλλων ἀριθμῶν τῆς κλάσεως B. Ἔστω

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

οὗτος ὁ $l$. Ὁ $l$, ὡς εἴπομεν, εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὅρων τῆς $\{\alpha_\nu\}$. Δοθέντος τώρα θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ, ὁ ἀριθμὸς $l-\varepsilon$ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν Α, ἄρα ὑπάρχει δείκτης ν, δι' ὃν $l-\varepsilon<\alpha_\nu<l$ (1). Ἡ (1) ἰσχύει καὶ ὅταν ἀντὶ ν τεθῇ ν+1, ν+2,... Ἡ (1) συνεπάγεται $0<l-\alpha_\nu<\varepsilon$. Ἡ τελευταία διπλῆ ἀνισότης ἰσχύει διὰ ν, ν + 1, ν + 2...ἐπ' ἄπειρον καὶ δεικνύει ὅτι $\operatorname{op}_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l$. (§ 35, β').

Ἐντελῶς ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ πᾶσα φθίνουσα ἀκολουθία ἔχουσα κάτω φράγμα τείνει πρὸς ὅριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ κάτω φράγματος.

**β') (Θ). Ἐὰν μία ἀκολουθία $\{\alpha_\nu\}$ εἶναι αὔξουσα ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν (μὴ φθίνουσα, § 34, ζ') καὶ ἔχῃ ἄνω φράγμα τὸ c, τότε ἡ $\{\alpha_\nu\}$ τείνει πρὸς ἓν ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ c. Ἐὰν μία ἀκολουθία $\{\alpha_\nu\}$ εἶναι φθίνουσα ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν (μὴ αὔξουσα) καὶ ἔχῃ κάτω φράγμα k, τότε ἡ $\{\alpha_\nu\}$ τείνει πρὸς ὅριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ k.**

Διότι ἡ ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἐφαρμόζεται καὶ πάλιν.

γ') Ἐὰν μία ἀκολουθία εἶναι τελικῶς σταθερὰ (§34, ζ'), ἔστω ἡ $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ...c, c, c... (ἐπ' ἄπειρον), τότε ἔχει προφανῶς ὅριον τὸ c.

**38. Θεώρημα τοῦ ἐγκιβωτισμοῦ.** α') Οἱ ὑπολογισμοὶ μηκῶν, ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν, καθὼς καὶ ἀποδείξεις θεμελιωδῶν θεωρημάτων βασίζονται ἐπὶ ἑνὸς Ἀλγεβρικοῦ θεωρήματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται «*Θεώρημα τοῦ ἐγκιβωτισμοῦ*». Τὸ περιεχόμενον τοῦ θεωρήματος τούτου ἔχει ὡς ἑξῆς:

**Ὁρισμός. Μία αὔξουσα ἀκολουθία $\{x_\nu\}$ θετικῶν ἀριθμῶν καὶ μία φθίνουσα ἀκολουθία $\{y_\nu\}$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα ἐγκιβωτισμὸν, ὅταν πληροῦνται αἱ κάτωθι δύο συνθῆκαι:**

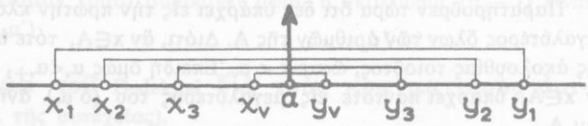
**1ον) Διὰ κάθε $\nu\in\Phi$, ἰσχύει $x_\nu<y_\nu$.**

**2ον) Δοθέντος οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε (ὁσονδήποτε μικροῦ) ἡ διαφορὰ $y_\nu - x_\nu$ εἶναι $<\varepsilon$ ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν.**

**Ὁ ἐγκιβωτισμὸς παρίσταται μὲ $(x_\nu | y_\nu)$.**

**Θεώρημα.— Κάθε ἐγκιβωτισμὸς $(x_\nu | y_\nu)$ ὁρίζει μονοσημάντως ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν α, ὅστις εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνουν ἀμφότεραι αἱ ἀκολουθίαι $\{x_\nu\}$ καὶ $\{y_\nu\}$.**

Σχηματικῶς:




Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι κάθε ὅρος τῆς $\{x_\nu\}$ εἶναι μία *κατ' ἔλλειψιν προσέγγισις* τοῦ ἀριθμοῦ τούτου α καὶ κάθε ὅρος τῆς $\{y_\nu\}$ εἶναι μία *καθ'*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*ὑπεροχὴν προσέγγισις τοῦ α.* Γενικῶς ὁ α εἶναι ὁ μόνος ἀριθμός, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν $x_\nu$ καὶ μικρότερος ὅλων τῶν $y_\nu$.

*Ἀπόδειξις.* i) Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν μὲ θετικοὺς ὅρους: $y_1 - x_1$, $y_2 - x_2$,... $y_\nu - x_\nu$,..., βλέπομεν, λόγῳ τῆς 2ας ὑποθέσεως, ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτὴ ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (§ 35,α'), ὥστε:

$$\lim_{\nu\infty} (y_\nu - x_\nu) = 0. \tag{1}$$

ii) Ἡ αὔξουσα ἀκολουθία $\{x_\nu\}$ ἔχει ἄνω φράγμα τὸν τυχόντα ὅρον τῆς $\{y_\nu\}$ λόγῳ τῆς 1ης ὑποθέσεως, ἑπομένως τείνει πρὸς κάποιο ὅριον, ἔστω τὸ α', μεγαλύτερον ὅλων τῶν ὅρων της (§ 37, α'). Ὥστε δοθέντος τυχόντος θετικοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ ἰσχύει ἀπὸ τινος δείκτου $\nu_1$ καὶ πέραν:

$$0<\alpha' - x_{\nu_1}<\varepsilon/2. \tag{2}$$

iii) Ἡ φθίνουσα ἀκολουθία $\{y_\nu\}$ ἔχουσα ὡς κάτω φράγμα οἱονδήποτε ὅρον τῆς $\{x_\nu\}$ (προϋπόθεσις 1η) τείνει πρὸς ἓν ὅριον α'' (§, 37α') προφανῶς μικρότερον ὅλων τῶν ὅρων της. Ἑπομένως ἀπὸ τινος δείκτου $\nu_2$ καὶ πέραν:

$$0<y_{\nu_2} - \alpha''<\varepsilon/2. \tag{3}$$

Ἐὰν ν ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν $\nu_1$ καὶ $\nu_2$ (ἢ μὴ μικρότερος τούτων), τότε αἱ (2) καὶ (3) δίδουν ἀπὸ τοῦ ν καὶ πέραν

$$0<\alpha' - x_\nu<\varepsilon/2 \tag{4}$$

$$0<y_\nu - \alpha''<\varepsilon/2. \tag{5}$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν $0<y_\nu - x_\nu - (\alpha'' - \alpha') < \varepsilon$, τὸ ὁποῖον σημαίνει:

$$\lim_{\nu\infty} (y_\nu - x_\nu) = \alpha'' - \alpha' \quad (\S\ 35, \beta'). \tag{6}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (6) $\Rightarrow \alpha'' - \alpha' = 0 \Longleftrightarrow \alpha' = \alpha''$. (§ 35,δ'). Ἄρα ἡ $\{x_\nu\}$ καὶ $\{y_\nu\}$ τείνουν πρὸς κοινὸν ὅριον.

**β') Ὁ ἐγκιβωτισμὸς $(x_\nu|y_\nu)$ ὑπάρχει καὶ ὁρίζεται ὁμοίως καὶ εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ἀκολουθία $\{x_\nu\}$ εἶναι μὴ φθίνουσα (ἀντὶ αὔξουσα), δηλ. $x_\nu \leqq x_{\nu+1}$ ἢ ἡ ἀκολουθία $\{y_\nu\}$ εἶναι μὴ αὔξουσα (ἀντὶ φθίνουσα), δηλ. $y_\nu \geqq y_{\nu+1}$ ἢ ὅταν συμβαίνουν ἀμφότερα.**

Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

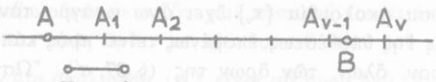
## ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

**39.** α') Ἡ δυνατότης τῆς μετρήσεως τῶν τμημάτων βασίζεται ἐπὶ τοῦ κατωτέρω διδομένου ἀξιώματος, τὸ ὁποῖον διετυπώθη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὡς ἐκ τούτου καλεῖται *ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐπιτρέπει, ὅπως δοθέντος ἑνὸς τμήματος - μονάδος νὰ ἀντιστοιχίζωμεν μονοτρόπως, εἰς ἕκαστον τμῆμα, ἕνα θετικὸν ἀριθμόν, ὅστις καὶ **μέτρον** τοῦ τμήματος καλεῖται.

**Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους. — «Ὑπάρχει πάντοτε φυσικὸς ἀριθμὸς ν τοιοῦτος, ὥστε ἓν δεδομένον τμῆμα ΓΔ ἐπαναλαμβανόμενον ν φορὰς ὑπερβαίνει ὁποιονδήποτε δεδομένον τμῆμα ΑΒ».**




Σχ. 45α

Ἡ ἔννοια τοῦ ἀξιώματος καταφαίνεται εἰς τὸ σχ. 45α.

**β΄) Λῆμμα. Ἔστωσαν ΓΔ καὶ ΑΒ δύο οἱαδήποτε τμήματα. Τότε δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐκλέξωμεν ἕνα ἀρκετὰ μεγάλον φυσικὸν ἀριθμὸν ν οὕτως, ὥστε, ἐὰν χωρίσωμεν τὸ ΓΔ εἰς $2^ν$ ἴσα τμήματα, ἕκαστον τούτων νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒ.**

*Ἀπόδειξις.* Ἕκαστον τμῆμα δύναται νὰ διχοτομηθῇ καὶ συνεπῶς ἐπαναλαμβανομένης τῆς διχοτομήσεως νὰ χωρισθῇ εἰς 2, $2^2$, $2^3$,...$2^ν$,...ἴσα μέρη. Ἂς παραστήσωμεν διὰ τοῦ $ΓΔ/2^ν$ ἓν ἐκ τῶν προκυπτόντων τμημάτων, ὅταν τὸ ΓΔ διαιρεθῇ εἰς $2^ν$ ἴσα μέρη.

Ἐὰν **διὰ κάθε ν** τὸ τμῆμα $ΓΔ/2^ν$ ἦτο μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ ΑΒ, τότε τὸ ΑΒ θὰ ἦτο μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ $ΓΔ/2^ν$ (διὰ κάθε ν). Ἐκ τούτου συνάγεται (διὰ προσθέσεως $2^ν$ ἀνισοτήτων $AB \leqq ΓΔ/2^ν$, $AB \leqq ΓΔ/2^ν$...κατὰ μέλη) ὅτι τὸ ΑΒ ἐπαναλαμβανόμενον $2^ν$ φορὰς δὲν ὑπερβαίνει τὸ ΓΔ. Δηλαδὴ τὸ ΑΒ ἐπαναλαμβανόμενον ἀπεριόριστον ἀριθμὸν φορῶν οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ ΓΔ. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὸ Ἀρχιμήδειον ἀξίωμα.

**Παρατήρησις.** Ἀνωτέρω ἐδείχθη ὅτι: **δὲν ὑπάρχει τμῆμα μικρότερον πάντων τῶν τμημάτων $ΓΔ/2^ν$, ὅπου τὸ ν αὐξάνεται ἀπεριορίστως.**

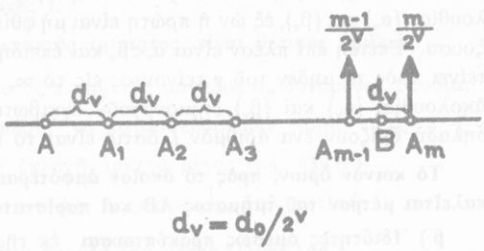
**40. Μέτρον ἑνὸς τμήματος.** α΄) Δίδεται ἓν τμῆμα $d_0$, τὸ ὁποῖον θὰ καλοῦμεν *μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν ἢ μοναδιαῖον τμῆμα.* Τότε εἰς κάθε τμῆμα τ ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀριθμὸς προκύπτων κατὰ ἕνα ὡρισμένον τρόπον καὶ ὅστις καλεῖται μέτρον τοῦ τμήματος τ (ἢ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ τμήματος τ, μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ $d_0$). Τὸ μέτρον τοῦ τμήματος τ θὰ παρίσταται μὲ $\boxed{μ(τ)}$ (τοῦ δὲ τμήματος ΑΒ μὲ μ(ΑΒ)).

Ὁ πρὸς τὸ τ ἀντιστοιχῶν ἀριθμός, μ(τ) ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὑποδιαιροῦντες τὸ μοναδιαῖον τμῆμα $d_0$ εἰς $2^ν$ ἴσα μέρη (ν, ἐπαρκῶς μέγας) κατασκευάζομεν ἓν τμῆμα $\boxed{d_ν = d_0/2^ν}$ μικρότερον τοῦ μετρητέου τμήματος τ = ΑΒ (βλ. **39** β΄).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀκολούθως κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B κατασκευάζομεν μίαν ἀκολουθίαν σημείων $A, A_1, A_2$...κατὰ τὴν διάταξιν: $A, A_1, A_2, A_3$..., τοιούτων, ὥστε $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{k-1}A_k = ... = d_\nu$ (σχ. 46).




Σχ. 46

Ἔστω $A_m$ τὸ πρῶτον σημεῖον τῆς ἀκολουθίας ταύτης, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα (πρῶτον ἐξωτερικὸν σημεῖον ἀντίστοιχον πρὸς τὸ $d_\nu$). Ἡ ὕπαρξις τοῦ σημείου τούτου ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους. Τότε προφανῶς τὸ σημεῖον $A_{m-1}$ θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ τμῆμα AB (τελευταῖον, ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς ὑποδιαιρέσεως εἰς τμήματα $d_\nu$). Τὸ τμῆμα $AA_m$ περιέχει m τμήματα $d_\nu$ καὶ εἶναι $AB \geqq$ (τὸ $A_m$ δυνατὸν νὰ συμπίπτῃ καὶ μὲ τὸ B, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ τμῆμα AB), ἐνῷ τὸ τμῆμα $AA_{m-1}$ περιέχει m-1 τμήματα $d_\nu$ καὶ εἶναι μικρότερον τοῦ AB (τὸ πλῆθος m ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ν). Δυνάμεθα συμβατικῶς νὰ γράψωμεν $AA_m = m \cdot d_\nu$, $AA_{m-1} = (m-1) \cdot d_\nu$, ὁπότε αἱ σχέσεις $AA_{m-1} < AB \leqq AA_m$ γράφονται $(m-1) \cdot d_\nu < AB \leqq m \cdot d_\nu$ ἢ καὶ

$$(1) \qquad (m-1) \cdot \frac{d_0}{2^\nu} < AB \leqq m \cdot \frac{d_0}{2^\nu} \qquad (d_0 \text{ ἡ μονάς}).$$

Θεωροῦμεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς

$$(2) \qquad \alpha_\nu = \frac{m-1}{2^\nu} \text{ καὶ } \beta_\nu = \frac{m}{2^\nu},$$

οἱ ὁποῖοι, δυνάμεθα νὰ εἴπωμέν, μετροῦν τὸ τμῆμα AB κατὰ προσέγγισιν $1/2^\nu$ καὶ δὴ ὁ πρῶτος κατ' ἔλλειψιν καὶ ὁ δεύτερος καθ' ὑπεροχήν.

Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν κατασκευάζονται, δι' ἕκαστον ν, τὰ σημεῖα $A_{m-1}$ καὶ $A_m$ γίνεται φανερὸν ὅτι αὐξάνοντος τοῦ ν ὁ (ἀντίστοιχος πρὸς τὸ $A_{m-1}$) ἀριθμὸς $\alpha_\nu$ δὲν ἐλαττοῦται, ἐνῷ ὁ $\beta_\nu$ δὲν αὐξάνει. Διότι, ὅταν ἀπὸ τὸ ν μεταβῶμεν εἰς τὸ ν + 1, ἤτοι ἀντὶ τῶν τμημάτων $d_\nu = d_0/2^\nu$ χρησιμοποιήσωμεν τὰ $d_{\nu+1} = d_0/2^{\nu+1}$, τὰ τμήματα $AA_1$, $A_1A_2$,...$A_{m-1}A_m$ διχοτομοῦνται. Ἐὰν τὸ μέσον M τοῦ $A_{m-1}A_m$ ἀνήκῃ εἰς τὸ τμῆμα AB, τότε τὸ τελευταῖον ἐσωτερικὸν σημεῖον $A_{m-1}$ μεταβαίνει εἰς τὸ M καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς $\alpha_{\nu+1}$ εἶναι, τώρα, ηὐξημένος κατὰ $1/2^{\nu+1}$, ἐνῶ τὸ πρῶτον ἐξωτερικὸν σημεῖον $A_m$ παραμένει, ἄρα $\beta_{\nu+1} = \beta_\nu$. Ἐὰν πάλιν τὸ M δὲν ἀνήκῃ εἰς τὸ τμῆμα AB, τότε τὸ $A_m$ μεταβαίνει εἰς τὸ M, ὁπότε ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\beta_{\nu+1}$ εἶναι, τώρα, ἠλαττωμένος κατὰ $1/2^{\nu+1}$, ἐνῷ $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$, διότι τὸ τελευταῖον ἐσωτερικὸν σημεῖον παραμένει.

Νοοῦντες, τώρα, τὸ ν αὐξάνον ἀπεριορίστως δημιουργοῦμεν δύο ἀκολουθίας $\{\alpha_\nu\}$ καὶ $\{\beta_\nu\}$, ἐξ ὧν ἡ πρώτη εἶναι μὴ φθίνουσα καὶ ἡ δευτέρα μὴ αὔξουσα. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $\alpha_\nu < \beta_\nu$ καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\beta_\nu - \alpha_\nu = 1/2^\nu$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν τοῦ ν τείνοντος εἰς τὸ $\infty$, (§ 35 β΄), ἕπεται ὅτι αἱ δύο ἀκολουθίαι $\{\alpha_\nu\}$ καὶ $\{\beta_\nu\}$ δημιουργοῦν ἐγκιβωτισμὸν $(\alpha_\nu|\beta_\nu)$ (βλ. §38, β΄), δηλαδὴ ὁρίζουν ἕνα ἀριθμὸν $l$, ὅστις εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον αὐτῶν.

**Τὸ κοινὸν ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον ἀμφότεραι αἱ ἀκολουθίαι (2) τείνουν, καλεῖται μέτρον τοῦ τμήματος AB καὶ παρίσταται μὲ μ(AB) ἢ μ(τ).**

**β΄) Ἰδιότητες ἀμέσως προκύπτουσαι** ἐκ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς τοῦ μέτρου ἑνὸς τμήματος τ εἶναι αἱ κάτωθι:

i) Ἐὰν $\tau = \tau'$, τότε $\mu(\tau) = \mu(\tau')$.

ii) Ἐὰν $\tau = m d_\nu$, τότε $\mu(\tau) = m/2^\nu$ $(m \in \Phi)$.

iii) Εἶναι: $\mu(d_0) = 1$.

Ἡ ἰδιότης i) εἶναι ἀμέσως φανερά, καθ' ὅσον αἱ ἀνωτέρω ἀριθμοακολουθίαι $\{\alpha_\nu\}$ καὶ $\{\beta_\nu\}$ αἱ καθορίζουσαι τὸ μέτρον προφανῶς συμπίπτουν διὰ τὰ ἴσα τμήματα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ii) παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τμῆμα $AB = \tau = m.d_\nu$ ἀποτελούμενον ἀπὸ m ἴσα πρὸς $d_\nu$ τμήματα τὸ σημεῖον $A_m$ (σχ. 46) συμπίπτει μὲ τὸ B καὶ συνεπῶς, τοῦ ν αὐξάνοντος ἐπ' ἄπειρον, θὰ ἔχωμεν πάντοτε τὸ ἴδιον $A_m \equiv B$ καὶ οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\{\beta_\nu\}$ θὰ διατηροῦν τὴν ἰδίαν τιμὴν $m/2^\nu$ ἀπὸ τῆς τιμῆς ν καὶ ἐφεξῆς. Ἑπομένως τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας $\{\beta_\nu\}$ (δηλ. τὸ μέτρον) θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $m/2^\nu$ (§ 37, γ΄).

Τέλος ἡ ἰδιότης iii) εἶναι συνέπεια τῆς ii), διότι $d_0 = 2^\nu . d_\nu$, ἄρα κατὰ τὴν ii) $\mu(d_0) = 2^\nu \frac{1}{2^\nu} = 1$.

## 41. Θεωρήματα ἐπὶ τοῦ μέτρου τῶν τμημάτων

**I. Τὸ μικρότερον τμῆμα ἔχει καὶ μικρότερον μέτρον, ἤτοι $\tau < \tau' \Rightarrow \mu(\tau) < \mu(\tau')$.**

**II. Ἐὰν τ καὶ τ΄ παριστοῦν δύο τμήματα, τότε**

$$\mu(\tau + \tau') = \mu(\tau) + \mu(\tau')$$

(Τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων. Τὸ θεώρημα ἰσχύει δι' ὁσουσδήποτε προσθετέους, λόγῳ τῆς προσεταιριστικότητος τοῦ ἀθροίσματος).

**III. Δοθείσης τῆς μονάδος $d_0$ μετρήσεως τῶν μηκῶν, τότε δοθέντος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ α ὑπάρχει ἓν τμῆμα τ ἔχον μέτρον ἴσον πρὸς α.**

Τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα εἶναι διαισθητικῶς λίαν εὐνόητα. Ἐν τούτοις αἱ ἀποδείξεις αὐτῶν εἶναι μακραὶ καὶ δυσχερεῖς. Διὰ τοῦτο κρίνομεν ὡς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀσύμφορον τὴν πραγμάτευσιν τῶν ἀποδείξεων τῶν θεωρημάτων τούτων, ἡ ὁποία θὰ κατηνάλωνε πολὺν χρόνον εἰς τὸν διδάσκοντα καὶ τοὺς μαθητάς.

**Πορίσματα τοῦ Θεωρήματος Ι.**

**Πόρισμα 1ον. Τὸ μέτρον παντὸς τμήματος εἶναι θετικὸς ἀριθμός.**

Διότι δοθέντος τοῦ τμήματος τ καὶ τῆς μονάδος $d_0$ δυνάμεθα, ὑποδιαιροῦντες τὴν $d_0$ εἰς $2^\nu$ ἴσα μέρη, νὰ κατασκευάσωμεν τμῆμά τι $d_\nu = \frac{d}{2^\nu}$ μικρότερον τοῦ τ, ὅταν ὁ ν ἐκλεγῇ ἀρκετὰ μέγας (βλ. §39,β΄)

Τότε θὰ εἶναι $\tau > d_\nu$, $\mu(\tau)>\mu(d_\nu)$ ἢ $\mu(\tau)> \frac{1}{2^\nu}$, δηλ. $\mu(\tau)>0$.

**Πόρισμα 2ον. Δύο τμήματα ἔχοντα ἴσα μέτρα εἶναι ἴσα.**

Ἔστω $\mu(\tau)=\mu(\tau')$. Τότε ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\tau<\tau'$, διότι θὰ εἴχομεν $\mu(\tau)<\mu(\tau')$. Ὁμοίως ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\tau'<\tau$. Μένει συνεπῶς, $\tau=\tau'$.

**Πόρισμα 3ον. Ἐκ δύο τμημάτων μικρότερον εἶναι τὸ ἔχον μικρότερον μέτρον.**

**42. Ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν μηκῶν.** Εἴδομεν εἰς τὴν § **40** ὅτι, διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν τμῆμα AB μὲ μονάδα τὸ τμῆμα $d_0$, τὸ περικλείομεν (βλ. σχ. 46) μεταξὺ δύο τμημάτων $AA_{m-1}$ καὶ $AA_m$, οὕτως, ὥστε

$$AA_{m-1}<AB\leqq AA_m\,, \tag{1}$$

ὅπου $AA_{m-1} = (m-1)\,.\,d_\nu$, $AA_m = m\,.\,d_\nu$ μὲ $d_\nu = d_0/2^\nu$. Ὅταν δὲ τὸ $\nu\to\infty$, εἶναι $\mu(AB) =$ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν $\left\{\frac{m-1}{2^\nu}\right\}$ καὶ $\left\{\frac{m}{2^\nu}\right\}$.

Ἂς λάβωμεν τώρα μίαν νέαν μονάδα μετρήσεως, τὸ τμῆμα $d_0'$ καὶ ἂς παριστάνωμεν μὲ $\mu'$ τὰ μέτρα τῶν τμημάτων, ἀναφορικῶς πρὸς τὴν νέαν μονάδα $d_0'$. Τὸ τμῆμα $d_0$ μετρηθὲν μὲ μονάδα τὸ $d_0'$ ἂς ἔχῃ μέτρον k, ἤτοι: $\boxed{\mu'(d_0)=k}$. Τότε θὰ εἶναι: $\mu'\left(\frac{d_0}{2^\nu}\right) = \frac{k}{2^\nu}$. Διότι, ἐὰν καλέσωμεν x τὸ μέτρον τοῦ $d_0/2^\nu$ ὡς πρὸς τὴν νέαν μονάδα, ἡ ἰσότης:

$$\underbrace{\frac{d_0}{2^\nu}+\frac{d_0}{2^\nu}+\ldots+\frac{d_0}{2^\nu}}_{2^\nu\ \text{φορὰς}}=d_0 \quad \text{δίδει (§ 41, II).}$$

$$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{2^\nu\ \text{φορὰς}}=\mu'(d_0)=k \Rightarrow x=\frac{k}{2^\nu}.$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἐπειδὴ τὸ τμῆμα $AA_{m-1}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ $m-1$ τμήματα ἴσα πρὸς $d_0/2^\nu$, θὰ ἔχῃ μέτρον: $\mu'(AA_{m-1}) =(m-1)\frac{k}{2^\nu}$ καὶ ὁμοίως διὰ τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τμῆμα $AA_m$ : $\mu'(AA_m) = m\frac{k}{2^\nu}$. Λαμβάνοντες τὰ μέτρα τῶν τριῶν μελῶν τῆς σχέσεως (1) ὡς πρὸς τὴν νέαν μονάδα (§ **41**, I) , ἔχομεν ὅτι

$$(2) \qquad k\frac{m-1}{2^\nu} < \mu'(AB) \leqq k\frac{m}{2^\nu}.$$

Ἡ (2), ἰσχύουσα δι' ὅλα τὰ ν ἀπό τινος καὶ ἔπειτα, δεικνύει ὅτι τὸ $\mu'(AB)$ εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν $k\left\{\frac{m-1}{2^\nu}\right\}$ καὶ $\left\{k\frac{m}{2^\nu}\right\}$, δηλ. τὸ $k.\mu(AB)$ (§ **35** ε'). Ὥστε $\mu'(AB) = k.\mu(AB)$. Ἐδείχθη λοιπὸν τὸ

**(Θ) — Ὅταν ληφθῇ νέα μονὰς μετρήσεως, τὸ μέτρον παντὸς τμήματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς παλαιᾶς μονάδος ὡς πρὸς τὴν νέαν.**

**43. Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.** α') **Ὁρισμός. Δοθέντων δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ καλεῖται λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ καὶ παρίσταται μὲ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ ΓΔ.** Φυσικὰ ὁ λόγος εἶναι εἷς θετικὸς ἀριθμὸς καθοριζόμενος πλήρως ἀπὸ τὰ δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ.

**β') (Θ) — Ὁ λόγος δύο τμημάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μέτρων των** (ὅταν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω λ ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ καὶ $d_0$ μία οἱαδήποτε μονὰς μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ἔστω k τὸ μέτρον τοῦ ΓΔ μὲ μονάδα $d_0$: $\boxed{\mu(\Gamma\Delta) = k}$. Τὸ ΑΒ μετρούμενον μὲ μονάδα τὸ ΓΔ ἔχει μέτρον λ, ἄρα μετρούμενον μὲ μονάδα $d_0$ θὰ ἔχῃ μέτρον τὸ λ, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς παλαιᾶς μονάδος ΓΔ ὡς πρὸς τὴν νέαν (βλ. (Θ), § **42**), δηλ. $\boxed{\mu(AB)=k.\lambda.}$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει:

$\frac{\mu(AB)}{\mu(\Gamma\Delta)} = \frac{k.\lambda}{k} = \lambda = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Ἑπομένως:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu(AB)}{\mu(\Gamma\Delta)} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

**44. Δεύτερος ὁρισμὸς τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.** Ἔστω τμῆμα ΑΒ καὶ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς α. **Καλεῖται γινόμενον τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν α ἓν τμῆμα Α'Β', τὸ ὁποῖον ἔχει λόγον πρὸς τὸ ΑΒ ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν α.**

Δηλ. $$AB \times \alpha = A'B' \Longleftrightarrow \frac{A'B'}{AB} = \alpha.$$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ Α'Β' πρὸς τὸ ΑΒ εἶναι α, ἕπεται ὅτι τὸ τμῆμα Α'Β' μετρούμενον μὲ μονάδα τὸ ΑΒ ἔχει μέτρον α. Κατὰ τὸ θεώρημαIII τῆς § **41** ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον τοιοῦτον τμῆμα. Δηλ. **τὸ γινόμενον ΑΒ×α ὑπάρχει καὶ εἶναι ἓν καὶ μόνον.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΜΕΤΡΟΝ ΓΩΝΙΑΣ

**45.** α') Ἐντελῶς ἀναλόγως πρὸς τὸ μῆκος τμήματος ὁρίζεται καὶ τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας καὶ ὅλα τὰ θεωρήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὸ μέτρον τμήματος ἔχουν τὰ ὅμοιά των εἰς τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν. Οὕτω διὰ τὰς γωνίας ἰσχύει τὸ κάτωθι βασικὸν θεώρημα τῆς μετρήσεως.

**(Θ)—Δίδεται μία γωνία $(h_0, k_0)$, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν. Τότε εἰς κάθε γωνίαν (h, k)(*) (κυρτὴν ἢ μή) ἀντιστοιχεῖ εἷς ὡρισμένος ἀριθμός, ἔστω θ(h, k), οὕτως, ὥστε νὰ πληροῦνται τὰ κάτωθι τέσσαρα ἐπιτάγματα:**

**1) Διὰ κάθε γωνίαν (h, k) εἶναι θ (h, k)>0.**
**2) Ἐὰν αἱ γωνίαι (h, k) καὶ (h', k') εἶναι ἴσαι, τότε θ(h, k)=θ(h,k').**
**3) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς *l* ἀνήκῃ εἰς τὴν γωνίαν (h, k), τότε: θ(h, *l*)+θ(*l*, k)=θ(h, k).**
**4) $\theta(h_0, k_0) = 1$.**

Ὁ ὡς ἄνω πρὸς τὴν γωνίαν (h, k) ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς θ(h,k) καλεῖται **μέτρον τῆς γωνίας** (h, k).

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀποδεικνύεται, ὅπως καὶ τὸ ἀντίστοιχον θεώρημα περὶ τοῦ μέτρου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ἀκολουθουμένης τῆς ἰδίας ἀκριβῶς σειρᾶς. (Ἡ μονὰς τῶν γωνιῶν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς 2, 4, 8, ..., $2^\nu$ ἴσας γωνίας, ἡ δὲ μετρητέα γωνία προσεγγίζεται κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν ἀπὸ δύο γωνίας, ὧν ἡ μία περιέχει m—1 γωνίας ἴσας πρὸς τὸ $1/2^\nu$ τῆς μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη περιέχει m γωνίας ἴσας πρὸς τὸ $1/2^\nu$ τῆς μονάδος καὶ τὸ μέτρον ὁρίζεται, ὡς τὸ κοινὸν ὅριον δύο ἀκολουθιῶν, ὅπως εἰς τὴν § 40).

β') **Ὁ λόγος δύο γωνιῶν** ὁρίζεται, ὅπως εἰς τὴν § 43 ὡρίσθη ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.

γ') **Ἡ ὕπαρξις γωνίας ἐχούσης δεδομένον μέτρον θ** (ὡς πρὸς δοθεῖσαν μονάδα γωνιῶν) ἀποδεικνύεται, καθ' ὃν τρόπον δεικνύεται ἡ ὕπαρξις τμήματος ἔχοντος δοθὲν μέτρον.

Ἐκ τούτου ἕπεται τέλος ἡ πρότασις:

**«Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστης γωνίας ὑπάρχουν ἀκτῖνες ἀρχόμεναι ἐκ τῆς κορυφῆς, αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς ν ἴσα μέρη».**

Πράγματι, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία $(\widehat{h, k})$ ἔχῃ μέτρον ἀριθμόν τινα θ, τότε θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν θ/ν. Ἐπειδὴ ὑπάρχει γωνία ἔχουσα δεδομένον μέτρον, θὰ ὑπάρχῃ καὶ γωνία ἔχουσα μέτρον θ/ν. Ἄρα ὑπάρχουν ἀκτῖνες $l_1, l_2, \ldots, l_{\nu+1}$ ἀνήκουσαι εἰς τὴν γωνίαν τοιαῦται, ὥστε αἱ γωνίαι (h, $l_1$), ($l_1$, $l_2$) ... ($l_{\nu-1}$, k) νὰ ἔχουν μέτρον θ/ν. Ἀλλὰ γωνίαι ἔχουσαι ἴσα μέτρα εἶναι ἴσαι.

**46. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ.(Κύριον θεώρημα τῶν μετρικῶν σχέσεων). — Ἔστωσαν (ε) καὶ (ε') δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου καὶ τρίτη εὐθεῖα (δ) τέμνουσα τὰς δύο πρώτας. Ἐὰν εἰς κάθε σημεῖον M τῆς (ε) ἀντιστοιχίζωμεν ἓν σημεῖον M' τῆς (ε') τοιοῦτον, ὥστε τὰ M καὶ M' νὰ κεῖνται ἐπὶ παραλ-**

---

(*) Τὰ h καὶ k συμβολίζουν δύο ἡμιευθείας μὲ κοινὴν ἀρχήν. Αὗται ὁρίζουν ἐν γένει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὴν κυρτὴν γωνίαν $(\widehat{h,k})$ μὲ πλευρὰς τὰς h, k καὶ τὴν μὴ κυρτὴν $(\overset{\smile}{h,k})$ ἐπίσης μὲ πλευρὰς h, k. Ἀνωτέρω, ὡς γωνία (h,k) νοεῖται εἴτε ἡ πρώτη εἴτε ἡ δευτέρα.

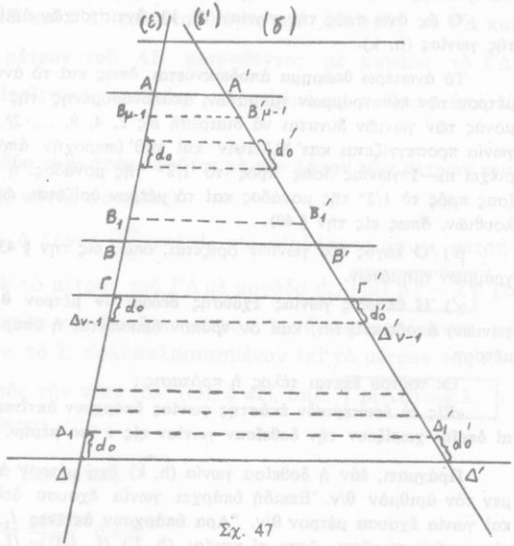
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**λήλου πρὸς τὴν (δ), τότε, κατὰ τὴν ἀντιστοιχίαν ταύτην, ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε τμημάτων κειμένων ἐπὶ τῆς (ε) ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων των τμημάτων ἐπὶ τῆς (ε΄).**

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τῆς (ε) καὶ Α΄Β΄, Γ΄Δ΄ τὰ ἀντίστοιχά των ἐπὶ τῆς (ε΄). Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$$

**Ι. Τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι σύμμετρα πρὸς ἄλληλα.** (σχ 47). Ἔστω $d_0$ τὸ κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, τὸ ὁποῖον χωρεῖ μ φορὰς εἰς τὸ ΑΒ καὶ ν φορὰς εἰς τὸ ΓΔ, ὅπου μ,ν φυσικοὶ ἀριθμοὶ (§34,θ΄). Τότε ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$ κατὰ τὴν § 34,θ΄. Ἂς χωρίσωμεν τώρα τὸ ΑΒ εἰς μ ἴσα μέρη διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων $B_1$, $B_2$, ...$B_{\mu-1}$ καὶ τὸ ΔΓ εἰς ν ἴσα μέρη διὰ τῶν $\Delta_1$,... $\Delta_{\nu-1}$, καὶ ἂς φέρωμεν διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων $\Delta_1$,...$\Delta_{\nu-1}$, $B_1$...$B_{\mu-1}$ παραλλήλους πρὸς τὴν (δ). Τότε ὡς γνωστὸν καὶ τὸ Α΄Β΄ καὶ τὸ Γ΄Δ΄ χωρίζονται ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων πάλιν εἰς ἴσα μέρη, $A'B'_{\mu-1}, = \ldots = B'_1B' = \Gamma'\Delta'_{\nu-1} = \ldots = \Delta'_1\Delta'$ ἴσα ἔστω πρὸς $d'_0$ ἕκαστον. Οὕτω τὸ Α΄Β΄ σύγκειται ἀπὸ μ τμήματα ἴσα πρὸς $d'_0$ καὶ τὸ Γ΄Δ΄ ἀπὸ ν ἴσα πρὸς $d_0'$ τμήματα. Ἑπομένως τὸ $d_0'$ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α΄Β΄ καὶ Γ΄Δ΄ καὶ χωρεῖ μ φορὰς εἰς τὸ Α΄Β΄ καὶ ν φορὰς εἰς τὸ Γ΄Δ΄. Κατὰ τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 34,θ΄ ὁ λόγος $\frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι πάλιν ἴσος πρὸς $\frac{\mu}{\nu}$, ὥστε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$.



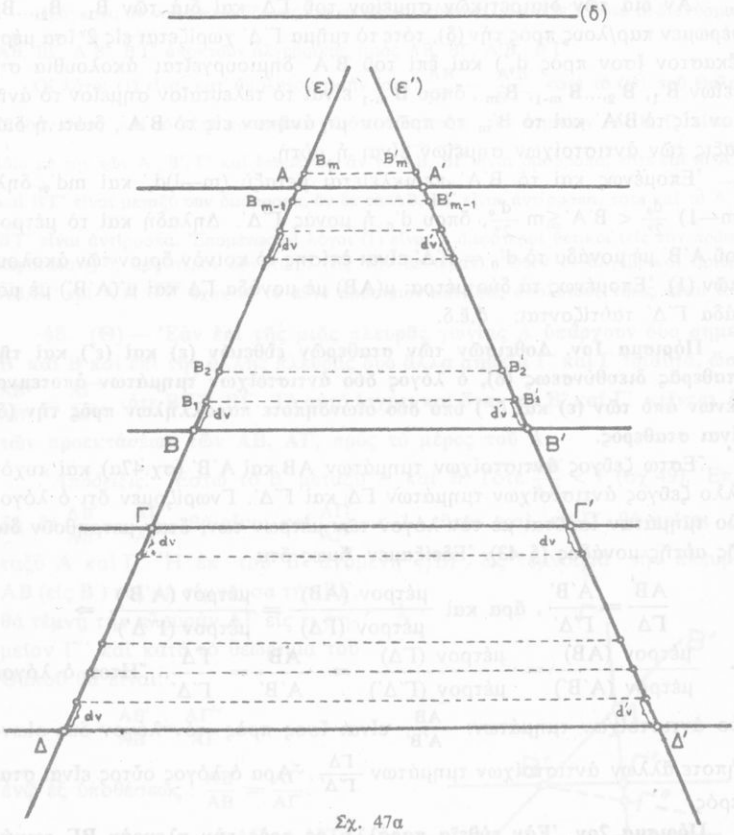
Σχ. 47

**ΙΙ. Τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι δύο τυχόντα τμήματα ἐπὶ τῆς (ε) (Γενικὴ ἀπόδειξις).** Τότε, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$ (βλ. § 43), ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ μετρηθέντος μὲ μονάδα ΓΔ (ἔστω τὸ μ(ΑΒ))

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἰσοῦται μὲ τὸ μέτρον τοῦ Α΄Β΄ μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ Γ΄Δ΄ (ἔστω τὸ μ΄(Α΄Β΄)).

Γνωρίζομεν ὅτι (βλ. § 40) πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέτρου τοῦ ΑΒ χωρίζομεν τὴν μονάδα ΓΔ = $d_0$ εἰς $2^\nu$ ἴσα μέρη (ν ἐπαρκῶς μέγας) καὶ κατασκευάζο-




Σχ. 47α

μεν ἓν τμῆμα $\boxed{d_\nu = d_0/2^\nu}$ μικρότερον τοῦ μετρητέου ΑΒ. Κατασκευάζομεν κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α μίαν ἀκολουθίαν σημείων $B_1, B_2, \ldots B_\rho, \ldots$ τοιούτων, ὥστε $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots B_\rho B_{\rho+1} = \cdots = d_\nu$ καὶ ἔστω $B_m$ τὸ πρῶτον σημεῖον τῆς ἀκολουθίας ταύτης, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ (βλ. §40). Τότε τὸ $B_{m-1}$ ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ καὶ ἔχομεν τότε: (βλ. § 40) $BB_{m-1} < BA \leq BB_m$ ἢ $(m-1)d_\nu < BA \leq md_\nu$ ἢ $(m-1)\frac{d_0}{2^\nu} < BA \leq$



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$m\,\frac{d_0}{2^\nu}$ (ὅπου $d_0$ ἡ μονάς). Διὰ ν τεῖνον εἰς ἄπειρον μέτρον τοῦ ΑΒ εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν:

$$(1)\qquad \left\{\frac{m-1}{2^\nu}\right\} \text{ καὶ } \left\{\frac{m}{2^\nu}\right\}$$

Ἂν διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων τοῦ ΓΔ καὶ διὰ τῶν $B_1$, $B_2$,...$B_m$ φέρωμεν παρ/λους πρὸς τὴν (δ), τότε τὸ τμῆμα Γ΄Δ΄ χωρίζεται εἰς $2^\nu$ ἴσα μέρη (ἕκαστον ἴσον πρὸς $d_\nu'$) καὶ ἐπὶ τοῦ Β΄Α΄ δημιουργεῖται ἀκολουθία σημείων $B'_1$, $B'_2$,...$B'_{m-1}$, $B'_m$, ὅπου $B'_{m-1}$ εἶναι τὸ τελευταῖον σημεῖον τὸ ἀνῆκον εἰς τὸ Β΄Α΄ καὶ τὸ $B'_m$ τὸ πρῶτον μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ Β΄Α΄, διότι ἡ διάταξις τῶν ἀντιστοίχων σημείων εἶναι ἡ αὐτή.

Ἑπομένως καὶ τὸ Β΄Α΄ περικλείεται μεταξὺ $(m-1)d_\nu'$ καὶ $md'_\nu$, δηλ. $(m-1)\,\frac{d_0'}{2^\nu} < B'A' \leqq m\,\frac{d'_0}{2^\nu}$, ὅπου $d'_0$ ἡ μονὰς Γ΄Δ΄. Δηλαδὴ καὶ τὸ μέτρον τοῦ Α΄Β΄ μὲ μονάδα τὸ $d'_0 = \Gamma'\Delta'$ εἶναι ἐπίσης τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν (1). Ἑπομένως τὰ δύο μέτρα: μ(ΑΒ) μὲ μονάδα ΓΔ καὶ μ΄(Α΄Β΄) μὲ μονάδα Γ΄Δ΄ ταὐτίζονται. ὅ.ἔ.δ.

**Πόρισμα 1ον. Δοθεισῶν τῶν σταθερῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄) καὶ τῆς σταθερᾶς διευθύνσεως (δ), ὁ λόγος δύο ἀντιστοίχων τμημάτων ἀποτεμνομένων ἀπὸ τῶν (ε) καὶ (ε΄) ὑπὸ δύο οἱωνδήποτε παραλλήλων πρὸς τὴν (δ) εἶναι σταθερός.**

Ἔστω ζεῦγος ἀντιστοίχων τμημάτων ΑΒ καὶ Α΄Β΄ (σχ.47α) καὶ τυχὸν ἄλλο ζεῦγος ἀντιστοίχων τμημάτων ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος δύο τμημάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μέτρων των, ὅταν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (§ **43**). Ἐδείξαμεν ὅμως ὅτι:

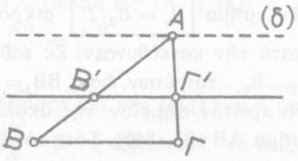
$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}, \text{ ἄρα καὶ } \frac{\text{μέτρον (ΑΒ)}}{\text{μέτρον (ΓΔ)}} = \frac{\text{μέτρον (Α΄Β΄)}}{\text{μέτρον (Γ΄Δ΄)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{μέτρον (ΑΒ)}}{\text{μέτρον (Α΄Β΄)}} = \frac{\text{μέτρον (ΓΔ)}}{\text{μέτρον (Γ΄Δ΄)}} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}.$$

Ἤτοι ὁ λόγος δύο ἀντιστοίχων τμημάτων: $\frac{AB}{A'B'}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον δύο οἱωνδήποτε ἄλλων ἀντιστοίχων τμημάτων $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$. Ἄρα ὁ λόγος οὗτος εἶναι σταθερός.

**Πόρισμα 2ον. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου τέμνῃ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Β΄ καὶ Γ΄, τότε** $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma}$. $\left(\text{Ἐπίσης, } \frac{AB'}{B'B} = \frac{A\Gamma'}{\Gamma'\Gamma}\right)$

Διότι ἄρκεῖ νὰ νοήσωμεν διὰ τῆς κορυφῆς Α εὐθεῖαν (δ)//ΒΓ//Β΄Γ΄ (σχ. 48) καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ.



Σχ. 48

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**47. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.**

**(Θ) — Ἐὰν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (ε) κεῖνται τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας (ε′) κεῖνται ἐπίσης τρία σημεῖα Α′, Β′, Γ′ οὕτως, ὥστε ΑΑ′//ΒΒ′//ΓΓ′, τότε ἰσχύει:**

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}} \tag{1}$$

Πράγματι, ἂν νοήσωμεν ἄξονας ἐπάνω εἰς τὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε′), τότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ ἀποκτοῦν ἀλγεβρικὰς τιμὰς $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'\Gamma'}$.

Οἱ λόγοι (1) εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσοι: $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ κατὰ τὸ (Θ) τοῦ Θαλοῦ. Ἔχουν ὅμως καὶ τὸ αὐτὸ πρόσημον· διότι ἡ διάταξις τῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν τῶν Α′, Β′, Γ′ καὶ ἑπομένως, ἂν τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι ὁμόρροπα, τότε καὶ τὰ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ εἶναι μεταξύ των ὁμόρροπα, ἂν δὲ τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι ἀντίρροπα, τότε καὶ τὰ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ εἶναι ἀντίρροπα. Ἑπομένως οἱ λόγοι (1) εἶναι ἢ ἀμφότεροι θετικοὶ (εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν) ἢ ἀμφότεροι ἀρνητικοὶ (εἰς τὴν δευτέραν). Ὅθεν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ $\overline{AB}/\overline{B\Gamma}$ καὶ $\overline{A'B'}/\overline{B'\Gamma'}$ ἔχοντες τὸ αὐτὸ πρόσημον καὶ ἴσας ἀπολύτους τιμὰς εἶναι ἴσοι.

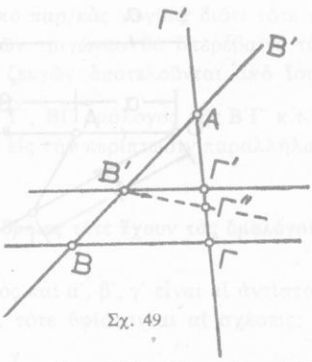
**48. (Θ) — Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας $\widehat{A}$ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Β′ καὶ Β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς δύο ἄλλα σημεῖα Γ′ καὶ Γ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma}$, τότε Β′Γ′//ΒΓ. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ Β′ καὶ Γ′ κεῖνται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΒ, ΑΓ, πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω τὸ Β′ μεταξὺ Α καὶ Β. Τότε $\frac{AB'}{AB} < 1$ (σχ.49). Ἐπειδὴ δὲ $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{A\Gamma'}{A\Gamma} < 1$, ἤτοι καὶ τὸ Γ′ θὰ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ. Ἡ ἐκ τοῦ Β′ ἀγομένη //ΒΓ, ὡς τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ (εἰς Β′) καὶ μὴ τέμνουσα τὴν ΒΓ, θὰ τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Γ″ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θὰ εἶναι:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma},$$

ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως: $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma}$.

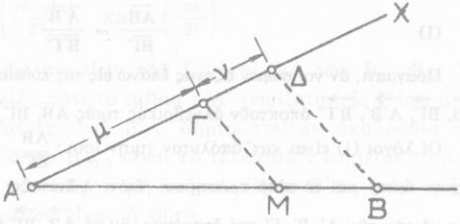
Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι $\frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma}$ $\Rightarrow A\Gamma' = A\Gamma''$. Ἐπειδὴ καὶ τὸ Γ′ καὶ τὸ Γ″ εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τμήματος ΑΓ, ἡ ἰσότης ΑΓ′ = ΑΓ″ συνεπάγεται τὴν σύμπτωσιν τῶν Γ′ καὶ Γ″. Ἄρα ἡ εὐθ Β′Γ′ συμπίπτει μὲ τὴν ἐκ τοῦ Β′ ἀγομένην παράλληλον πρὸς τὴν εὐθ ΒΓ, δηλ. Β′Γ″//ΒΓ. Ἀναλόγως δεικνύεται τὸ θεώρημα καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.



Σχ. 49

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**49. Διαίρεσις τμήματος εἰς μέρη ἀνάλογα δύο δοθέντων τμημάτων.** «Ἐπὶ δοθέντος τμήματος ΑΒ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ, ν δύο ἄλλα δοθέντα τμήματα».



Σχ. 50

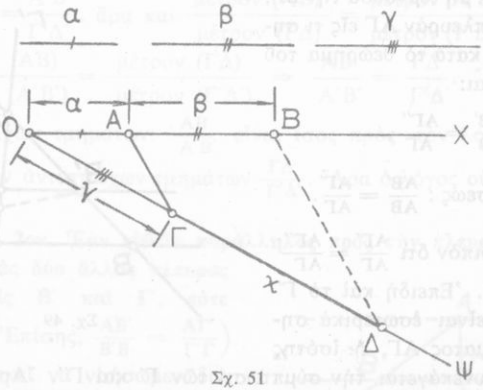
— Ἐπὶ τυχούσης ἡμιευθείας ΑΧ λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα μ καὶ ν, φέρομεν τὴν ΔΒ καὶ τὴν ἐκ τοῦ Γ παρ/λον πρὸς τὴν ΔΒ, ἥτις τέμνει τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ. Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θὰ ἔχωμεν:

$$AM/MB = A\Gamma/\Gamma\Delta \quad (\S 46 \text{ πόρισμα 2ον}).$$

**50. Κατασκευὴ τοῦ τετάρτου ἀναλόγου.** Δίδονται τρία τμήματα α, β, γ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τέταρτον τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε:

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}.$$

Ἐπὶ ἡμιευθείας ΟΧ κατασκευάζομεν τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΟΑ = α, ΑΒ = β καὶ ἐπὶ ἄλλης ἡμιευθείας ΟΨ, τὸ ΟΓ = γ (σχ. 51). Ἡ ἐκ τοῦ Β



Σχ. 51

ἀγομένη//ΑΓ συναντᾷ τὴν ΟΨ εἰς σημεῖον Δ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἔχομεν :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\Gamma\Delta}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον x, καλούμενον *τέταρτον ἀνάλογον* τῶν α, β, γ. (Ἀσκήσεις: 308, 309, 310, 311, 312, 322).

## ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

**51.** α)΄ Δύο τρίγωνα λέγονται **ὅμοια**, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας. Μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς καὶ μία τοῦ ἄλλου κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν λέγονται **ὁμόλογοι** πλευραί. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ἔχουν **τρία ζεύγη** ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐὰν π.χ. τὰ τρ.ΑΒΓ καὶ τρ.Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, τότε εἶναι ὅμοια μὲ ὁμόλογους πλευράς: ΒΓ→Β΄Γ΄, ΓΑ→Γ΄Α΄, ΑΒ→Α΄Β΄. Διὰ νὰ συμβολίσωμεν ὅτι τὰ τρ.ΑΒΓ καὶ τρ.Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοια γράφομεν:

$$\text{τρ.ΑΒΓ} \approx \text{τρ.Α΄Β΄Γ΄}.$$

β΄) Προφανῶς ἀρκεῖ διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο τριγώνων δύο γωνίαι τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο γωνίας τοῦ ἄλλου.

**γ΄) (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως παραλλήλους ἢ καθέτους, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας πλευραί.**

Ἔστω ὅτι εἰς τὰ $^{\Delta}$ΑΒΓ καὶ $^{\Delta}$Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ΑΒ⊥Α΄Β΄, ΒΓ⊥Β΄Γ΄, ΓΑ⊥Γ΄Α΄. Τότε αἱ γωνίαι $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{A'}$ ἔχουν τὰς πλευράς των μίαν πρὸς μίαν καθέτους, ἄρα εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ μὲ τὰς $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma'}$. Ἀποκλείεται ὅμως καὶ τὰ **τρία** ἢ τὰ **δύο** ζεύγη ἐκ τῶν ($\widehat{A}$, $\widehat{A'}$), ($\widehat{B}$, $\widehat{B'}$), ($\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma'}$) νὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ παρ/κὰς γωνίας, διότι τότε τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων θὰ ὑπερέβαινε τὰς 4ορθάς. Ἑπομένως δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω ζευγῶν ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσας γωνίας, δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, ΒΓ ὁμόλογος τῆς Β΄Γ΄ κ.τ.λ. Οἱ ἴδιοι συλλογισμοὶ ἀκριβῶς ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν παραλλήλων πλευρῶν.

**52.** α΄) **(Θ)—Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, τότε ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους.**

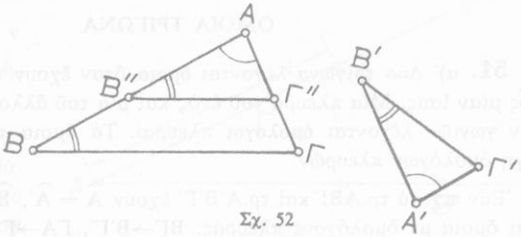
Δηλ, ἂν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς καὶ α΄, β΄, γ΄ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι **ὁμόλογοι** πλευραὶ (**§51**, α΄) τοῦ ἄλλου, τότε ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχοντα $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ (κατ' ἀνάγκην) $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$. Φέρομεν διὰ κινήσεως τὴν γωνίαν $\widehat{A'}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ τῆς ἴσης της $\widehat{A}$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ νὰ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Α, Β) καὶ ἡ πλευρὰ Α΄Γ΄ ἐπὶ τῆς (Α, Γ). Τότε τὸ τρ.Α΄Β΄Γ΄ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν ΑΒ΄΄Γ΄΄ (σχ. 52) μὲ ΑΒ΄΄ = Α΄Β΄ καὶ ΑΓ΄΄ = Α΄Γ΄. Ἡ γωνία $\widehat{B'}$ ἔρχεται εἰς τὴν γωνίαν $\widehat{AB''\Gamma''}$, ὁπότε, ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\widehat{B'}$



Σχ. 52

$= \widehat{B}$ καὶ $\widehat{B'} = \widehat{AB''\Gamma''} \Rightarrow \widehat{AB''\Gamma''} = \widehat{B} = \widehat{AB\Gamma}$ καὶ ἐκ τούτου $\Rightarrow$ Β΄΄Γ΄΄ // ΒΓ.

Ἑπομένως κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ Θαλοῦ:

$\frac{AB}{AB''} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma''}$ καὶ ἐπειδὴ ΑΒ΄΄ = Α΄Β΄, ΑΓ΄΄ = Α΄Γ΄, λαμβάνομεν:

(1) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον τοποθετοῦντες τὴν $\widehat{B'}$ ἐπὶ τῆς $\widehat{B}$ λαμβάνομεν

(2) $$\frac{BA}{B'A'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

(3) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$ ὅ.ἔ.δ.

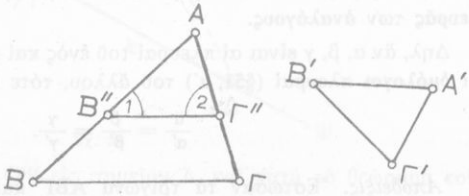
**β') Λόγος ὁμοιότητος.** Ἕκαστος ἐκ τῶν ἴσων λόγων (3) λέγεται **λόγος ὁμοιότητος** τοῦ τρ.ΑΒΓ πρὸς τὸ τρ.Α΄Β΄Γ΄.

**53. (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, τότε εἶναι ὅμοια.**

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ τοιαῦτα, ὥστε:

(1) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma'A'}.$$

Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Α, Β) τμῆμα ΑΒ΄΄ = Α΄Β΄ καὶ ἂς φέρωμεν Β΄΄Γ΄΄ // ΒΓ (σχ. 53). Τότε τὰ τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ καὶ ΑΒΓ εἶναι προφανῶς ὅμοια καὶ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν $\frac{AB}{AB''} = \frac{B\Gamma}{B''\Gamma''} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma''}$ ἢ ἐπειδὴ ΑΒ΄΄ = Α΄Β΄, ἔχομεν:



Σχ. 53

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(2) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B''\Gamma''} = \frac{\Gamma A}{A\Gamma''}.$$

Παραβάλλοντες τὰς (1) καὶ (2) βλέπομεν ἀμέσως ὅτι:

$$B'\Gamma' = B''\Gamma'' \text{ καὶ } \Gamma'A' = A\Gamma''.$$

Ὥστε τὰ $^{\Delta}AB''\Gamma''$ καὶ $^{\Delta}A'B'\Gamma'$ ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Ἑπομένως: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B_1''} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma_2''} = \widehat{\Gamma'}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{B_1''} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma_2''} = \widehat{\Gamma}$ (λόγῳ τῆς παραλληλίας τῶν $B''\Gamma''$, $B\Gamma$), ἕπεται: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, δηλ. τρ.$AB\Gamma \approx$ τρ.$A'B'\Gamma'$.

**Παρατήρησις.** Ἐκ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων προκύπτει ἡ ἰσοδυναμία:

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \wedge \widehat{B} = \widehat{B'} \wedge \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \longleftrightarrow \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma' A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

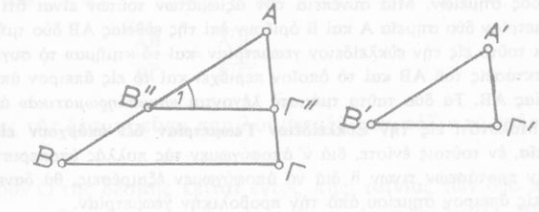
Ἑπομένως ὡς ὅμοια τρίγωνα δύνανται νὰ ὁρισθοῦν ἢ τὰ ἔχοντα τὰς γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας ἢ τὰ ἔχοντα τὰς πλευράς των ἀναλόγους (διότι ἑκάτερον συνεπάγεται τὸ ἕτερον).

**54. (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τότε εἶναι ὅμοια.**

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ τοιαῦτα, ὥστε:

(1) $$\widehat{A} = \widehat{A'} \text{ καὶ } \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}.$$

Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς (A, B) τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (τῆς ἴσης πρὸς τὴν $\widehat{A'}$) σημεῖον $B''$ τοιοῦτον, ὥστε $AB'' = A'B'$ καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς (A, Γ) τῆς γωνίας $\widehat{A}$ σημεῖον $\Gamma''$ τοιοῦτον, ὥστε $A\Gamma'' = A'\Gamma'$. Τότε θὰ εἶναι $^{\Delta}AB''\Gamma'' = {}^{\Delta}A'B'\Gamma'$ καὶ συνεπῶς $\widehat{B_1''} = \widehat{B'}$.



Σχ. 54

Ἡ ἐξ ὑποθέσεως ἰσχύουσα σχέσις $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ δίδει $\frac{AB}{AB''} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma''}$ καὶ τοῦτο συνεπάγεται $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$ (§ **48**). Ἄρα $\widehat{B} = \widehat{B_1''}$, ἀλλὰ $\widehat{B_1''} = \widehat{B'}$, συνεπῶς $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Ἐπειδὴ καὶ $\widehat{A} = \widehat{A'}$, τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοια.

(Ἀσκήσεις: 313 ἕως 324).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΔΕΣΜΗΣ ΕΥΘΕΙΩΝ

**55. Τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον μιᾶς εὐθείας.** Περὶ τὰ μέσα τοῦ 19ου αἰῶνος ἱδρύθη μία νέα γεωμετρία, λεγομένη «προβολικὴ», ἡ ὁποία δὲν περιέχει μετρικὰς σχέσεις, ἀλλ' ἐξετάζει μόνον τὰς ἰδιότητας τῆς πρὸς ἄλληλα θέσεως τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.

Ἡ προβολικὴ γεωμετρία ἐπιτυγχάνει ἀξιοθαύμαστα ἀποτελέσματα ἐπὶ ὡρισμένου κύκλου γεωμετρικῶν θεμάτων ἀναπτύσσουσα ἰδίας μεθόδους, βασίζεται δὲ ἐπὶ τριῶν ὁμάδων ἀξιωμάτων: *συνδέσεως, διατάξεως* καὶ *συνεχείας*.

Τὰ ἀξιώματα συνδέσεως διαφέρουν τῶν τῆς εὐκλειδίου μόνον εἰς δύο σημεῖα: τὸ ἀξίωμα: ἐπὶ ἑκάστης εὐθείας ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεῖα, τροποποιεῖται ὡς ἑξῆς: *ἐπὶ ἑκάστης εὐθείας ὑπάρχουν τρία τοὐλάχιστον σημεῖα*, προστίθεται δὲ καὶ ἕνατον ἀξίωμα, καθ' ὃ: *ἕκαστον ζεῦγος εὐθειῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχει ἓν κοινὸν σημεῖον*. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὑπὸ τὴν εὐκλείδειον ἔννοιαν ἔχουν εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται: **εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον** ἐπὶ ἑκάστης τούτων. Ἑπομένως ἑκάστη διεύθυνσις ὁρίζει ἓν εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον $M_\infty$, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται ὅλαι αἱ παράλληλοι αἱ ἀνήκουσαι εἰς τὴν διεύθυνσιν ταύτην. Ὅλα τὰ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀποτελοῦν τὴν **εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖαν** $\varepsilon_\infty$ **τοῦ ἐπιπέδου**. Δηλ. ἐπὶ ἑκάστου ἐπιπέδου ὑπάρχει μία καὶ μόνον εὐθεῖα $\varepsilon_\infty$, ἐφ' ἧς κεῖνται ὅλα τὰ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. (Διότι, ὡς δεικνύεται ἐκ τῶν ἀξιωμάτων συνδέσεως τῆς προβολικῆς γεωμετρίας, δύο ἐπίπεδα μὴ ταυτιζόμενα ἔχουν πάντοτε μίαν εὐθεῖαν κοινήν, ἐὰν δὲ τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα ὑπὸ τὴν εὐκλείδειον ἔννοιαν, ἡ κοινὴ εὐθεῖα τούτων εἶναι εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν ἡ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖα ἐπὶ ἑκάστου τούτων.).

Ἐνίοτε ἡ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖα λέγεται *κατ' ἐκδοχὴν* εὐθεῖα καὶ τὰ σημεῖα αὐτῆς *κατ' ἐκδοχὴν σημεῖα*, ἐνῷ τὸ κοινὸν σημεῖον δύο μὴ παραλλήλων εὐθειῶν λέγεται *καθ' ὑπόστασιν* σημεῖον.

Τὰ ἀξιώματα διατάξεως τῆς προβολικῆς γεωμετρίας διαφέρουν τῶν τῆς εὐκλειδείου, διότι ἑκάστη τῶν δύο κατευθύνσεων ἐπὶ τῆς εὐθείας ὁρίζεται ὑπὸ μιᾶς διατεταγμένης τριάδος σημείων. Μία συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων τούτων εἶναι ὅτι εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν δύο σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ δύο τμήματα: τὸ ΑΒ, ὡς ὁρίζεται τοῦτο εἰς τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν καὶ τὸ «τμῆμα» τὸ συγκείμενον ἀπὸ τὰς δύο προεκτάσεις τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ὁποῖον περιέχει καὶ τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ. Τὰ δύο ταῦτα τμήματα λέγονται «*συμπληρωματικά*» ἀλλήλων.

Μολονότι εἰς τὴν **Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν δὲν ὑπάρχουν εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα**, ἐν τούτοις ἐνίοτε, διὰ ν' ἀποφύγωμεν τὰς πολλὰς ὑποπεριπτώσεις κατὰ τὴν ἀπόδειξιν προτάσεών τινων ἢ διὰ νὰ ἀποφύγωμεν ἐξαιρέσεις, θὰ δανειζώμεθα τὴν ἔννοιαν τοῦ εἰς ἄπειρον σημείου ἀπὸ τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν.

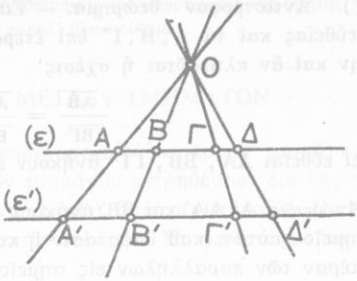
**56. α') Ὁρισμός. Καλεῖται ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν διερχομένων δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται «κέντρον τῆς δέσμης».**

(Δὲν ἀποκλείεται τὸ Ο νὰ εἶναι σημεῖον εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν).

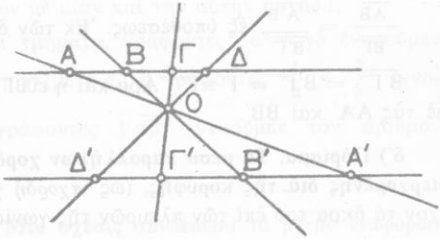
**β') (Θ) — Τρεῖς τυχοῦσαι εὐθεῖαι μιᾶς δέσμης ἀποτέμνουν ἀπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν διανύσματα ἀνάλογα.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω τὸ κέντρον Ο τῆς δέσμης καθ' ὑπόστασιν σημεῖον ἐκτὸς τῆς ταινίας τῶν παραλλήλων (ε) καὶ (ε΄) καὶ ἔστωσαν ΟΑΑ΄, ΟΒΒ΄, ΟΓΓ΄ τρεῖς εὐθεῖαι τῆς δέσμης (σχ. 55). Τὰ σημεῖα Β καὶ Β΄ κεῖνται τότε ἐπὶ τῆς ἰδίας ἡμιευθείας (Ο,Β), ἑπομένως πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΟΑΑ΄, ἄρα τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ὁμόρροπα. Ὁμοίως τὰ $\overrightarrow{B\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$. Ἄρα οἱ ἀλγεβρικοὶ λόγοι: $\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}}$ καὶ $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$ ἔχουν τὸ ἴδιον πρόσημον. Ἔχουν ὅμως καὶ τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν, διότι:




Σχ. 55




Σχ. 56

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$ (ἐκ τῶν ὁμοίων $^{\Delta}$OAB, OA΄B΄) $= \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ (ἐκ τῶν ὁμοίων $^{\Delta}$ΟΒΓ, ΟΒ΄Γ΄). Ἤτοι: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$. Ὥστε:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}.$$

Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῆς δέσμης εἶναι παρ/λοι μεταξὺ των, πάλιν τὸ θεώρημα προφανῶς ἰσχύει.

Ἐὰν τὸ κέντρον Ο τῆς δέσμης κεῖται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παρ/λῶν, τὰ σημεῖα Β καὶ Β΄ κεῖνται ἐπὶ δύο ἀντιθέτων ἡμιευθειῶν (Ο, Β) καὶ (Ο, Β΄), ἑπομένως κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΑ΄ καὶ ὡς ἐκ τούτου τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ἀντίρροπα. Ὁμοίως καὶ τὰ $\overrightarrow{B\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ εἶναι ἀντίρροπα (σχ. 56).

Ἄρα οἱ λόγοι: $\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}}$ καὶ $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$ ἔχουν πάλιν τὸ ἴδιον πρόσημον. Ἔχουν καὶ τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμὴν (ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω), ἄρα εἶναι πάλιν ἴσοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**γ') Ἀντίστροφον θεώρημα. — Ἐὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ τὰ Α', Β', Γ' ἐπὶ ἑτέρας εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν πρώτην καὶ ἂν πληροῦται ἡ σχέσις**

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}},$$

**τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην.**

*Ἀπόδειξις.* Αἱ ΑΑ' καὶ ΒΒ' ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμην Ο, ὅπου Ο τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν (καθ' ὑπόστασιν ἢ κατ' ἐκδοχήν). Ἡ εὐθεῖα ΟΓ τέμνει τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων εἰς σημεῖον Γ'' συμπίπτον μὲ τὸ Γ', διότι:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma''}}$ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ

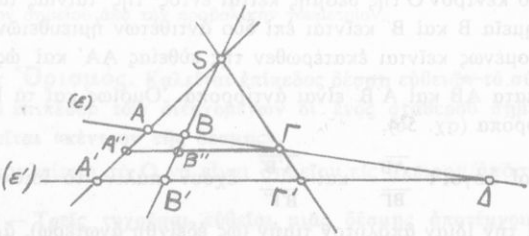
$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἐκ τῶν δύο τούτων ⇒

$\overline{B'\Gamma''} = \overline{B'\Gamma'} \Rightarrow \Gamma' \equiv \Gamma''$. Ἄρα καὶ ἡ εὐθ ΓΓ' ἀνήκει εἰς τὴν ἰδίαν δέσμην μὲ τὰς ΑΑ' καὶ ΒΒ'.

**δ') Πόρισμα. Τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν γωνίας κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς κορυφῆς,** (ὡς *«χορδὴ γωνίας»* θὰ νοῆται πᾶν τμῆμα ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας).

**ε') Θεώρημα. Τρεῖς εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου S (ὄχι εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν) τέμνονται ὑπὸ εὐθείας (ε) εἰς Α, Β, Γ καὶ ὑπὸ ἑτέρας εὐθείας (ε') εἰς Α',Β',Γ' ἀντιστοίχως. Ἐὰν εἶναι $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$, τότε αἱ (ε) καὶ (ε') εἶναι παράλληλοι.**

Διότι, ἂν αἱ (ε) καὶ (ε') ἐτέμνοντο εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν Δ, θὰ ὑπῆρχε διὰ τοῦ Γ παρ/λος τῇ (ε'), ἡ ὁποία τέμνουσα τὰς SB', SA' εἰς Β'' καὶ Α'' (σχ. 57) θὰ ἐσχημάτιζε τρίγωνον ΓΑΑ'', εἰς τὸ ὁποῖον θὰ εἴχομεν: $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma A''}}{\overline{\Gamma B''}}$, διότι $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\frac{\overline{\Gamma A''}}{\overline{\Gamma B''}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$ κατὰ τὸ (Θ) τῆς δέσμης. Συνεπῶς θὰ ἦτο (§ 48) ΑΑ''//ΒΒ'', ὅπερ ἐνάντιον τῇ ὑποθέσει.




Σχ. 57

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ θεώρημα τοῦτο λέγεται δεύτερον ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς δέσμης, κακῶς ὅμως, διότι δὲν ἰσχύει διὰ δέσμην τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

## ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

**57.** α΄) Καλεῖται γινόμενον ὁσωνδήποτε εὐθυγράμμων τμημάτων α,β, γ,...τ, τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν τμημάτων μετρηθέντων διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς μ(α). μ(β). μ(γ)...μ(τ), ὅπου μ(x) σημαίνει τὸ μέτρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος x. Διὰ τὴν ἁπλότητα θὰ παριστῶμεν τὸ γινόμενον τοῦτο μὲ α.β.γ...τ.

Γενικώτερον εἰς πᾶσαν Ἀλγεβρικὴν παράστασιν f(α,β,γ,...), ὅπου α, β, γ,...εἶναι **τμήματα,** νοοῦμεν εἰς τὴν θέσιν τῶν α,β,γ,..., τὰ μέτρα αὐτῶν (θετικοὺς ἀριθμούς), μετρηθέντων μὲ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Οὕτω π.χ., ἂν α,β,γ,δ εἶναι τμήματα, γράφοντες $3\alpha^2 + \gamma\delta$ ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν $3(\text{μετρ.}\,\alpha)^2 + (\text{μετρ.}\gamma)\,(\text{μετρ.}\delta.)$ ἢ γράφοντες $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ ἐννοοῦμεν $\frac{1}{\text{μετρ.}\alpha} + \frac{2}{\text{μετρ.}\beta}$ ἢ γράφοντες $\sqrt{\alpha\beta}$ ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{\text{μετρ.}\alpha.\text{μετρ.}\beta}$.

β΄) **Γεωμετρικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις συνδέουσα τὰ μέτρα διαφόρων τμημάτων (ἢ ἀποστάσεων), δηλ. μία «μετρικὴ σχέσις», λέγεται «γεωμετρικὴ σχέσις», ὅταν ἀληθεύῃ δι' οἱανδήποτε μονάδα μετρήσεως.** Διὰ νὰ συμβαίνῃ δὲ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἀνάγεται εἰς σχέσιν λόγων, διότι ὁ λόγος δύο τμημάτων εἶναι παντελῶς ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν μηκῶν.

Π.χ ἡ σχέσις $\alpha\beta\gamma + \delta^3 = \sqrt{2}\cdot\alpha^2\cdot\varepsilon$ εἶναι γεωμετρικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν τμημάτων α,β,γ,δ,ε, διότι ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2\varepsilon} + \frac{\delta^3}{\alpha^2\varepsilon} = \sqrt{2}$ ἢ $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon} = \sqrt{2}$ καὶ συνεπῶς, ἂν ἀληθεύῃ διὰ μίαν μονάδα μετρήσεως τῶν τμημάτων, ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην μονάδα μετρήσεως (ἀφοῦ οἱ λόγοι δὲν μεταβάλλονται μὲ τὴν ἀλλαγὴν τῆς μονάδος).

Μία μετρικὴ σχέσις f(α,β,γ,...)= 0 μεταξὺ τμημάτων α,β,γ,...,διὰ νὰ εἶναι γεωμετρική, πρέπει, ἂν τὸ f εἶναι πολυώνυμον, νὰ εἶναι **ὁμογενὲς** πολυώνυμον ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς α,β,γ... ἢ γενικώτερον ἡ f νὰ εἶναι ὁμογενὴς συνάρτησις.

γ΄) Εἰς τὰς μετρικὰς σχέσεις τῆς γεωμετρίας, **ἡ μονὰς εἶναι ἐπουσιώδης,** διότι πᾶσαι αἱ γεωμετρικαί, μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τμημάτων εἶναι ὁμογενεῖς (ἀνάγονται εἰς σχέσεις λόγων) καὶ συνεπῶς εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς μονάδος. Ἀπὸ οὐδὲν γεωμετρικὸν θεώρημα προκύπτει μὴ ὁμογενὴς σχέσις τμημάτων.

δ΄) **Μία μὴ ὁμογενὴς σχέσις** μεταξὺ τῶν μέτρων τμημάτων, π.χ. $\alpha^2 + \beta$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$= \gamma\sqrt{2}$ **δὲν εἶναι γεωμετρικὴ σχέσις** μεταξὺ τῶν τμημάτων, διότι δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ διὰ μίαν ὡρισμένην μονάδα μετρήσεως, ἀλλὰ δὲν θὰ ἰσχύῃ, ὅταν τὰ α,β,γ μετρηθοῦν μὲ ἄλλην μονάδα.

ε') Παράδειγμα. Ἔστωσαν δύο οἱαδήποτε τμήματα α καὶ β.

Δυνάμεθα τότε νὰ κατασκευάσωμεν μίαν μονάδα μετρήσεως d, διὰ τὴν ὁποίαν νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$.

Πράγματι ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τέταρτον ἀνάλογον τμῆμα d τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{d}$ (§50), ὁπότε μὲ μονάδα τὸ d ἡ ἀναλογία γράφεται $\frac{\text{μετρ}(\alpha)}{\text{μετρ}(\beta)} = \text{μετρ}(\beta)$ ἢ μετρ (α) = (μετρ. β)² ἢ μὲ τὴν ἁπλοποιημένην γραφήν, $\alpha = \beta^2$. Ὥστε διὰ δύο τυχόντα τμήματα πάντοτε ἰσχύει $\alpha = \beta^2$ μὲ κατάλληλον μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ἂν ἀλλάξῃ ἡ μονάς, ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$ παύει νὰ ἰσχύῃ, διότι $\alpha = \beta^2 \Longleftrightarrow \frac{\text{μετρ.}\alpha}{\text{μετρ.}\beta} = \text{μετρ. }\beta$ (μὲ μονάδα d) καὶ ὅταν ἀλλάξῃ ἡ μονάς, ὁ μὲν λόγος $\frac{\text{μετρ.}\alpha}{\text{μετρ.}\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ (§ 42) δὲν μεταβάλλεται, ἐνῷ τὸ μετρ. β ἀλλάζει (§ 42)). Ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$ **δὲν εἶναι** μετρικὴ—γεωμετρικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν τμημάτων α καὶ β.

ς') **Σταθερὸν γινόμενον.** Λέγομεν ὅτι δύο μεταβλητὰ τμήματα x καὶ y ἔχουν σταθερὸν γινόμενον, ὅταν ὑπάρχουν δύο σταθερὰ τμήματα α καὶ β τοιαῦτα, ὥστε διὰ πᾶν ζεῦγος (x, y) τῶν μεταβλητῶν τμημάτων νὰ ἰσχύῃ ἡ μετρικὴ σχέσις: $xy = \alpha\beta$.

ζ') **Τετράγωνον τμήματος α** καλοῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρου τοῦ τμήματος α καὶ τὸ παριστῶμεν ἁπλῶς μὲ $\alpha^2$. Ὡς εἴδομεν, εἰς τὰς γεωμετρικὰς σχέσεις ἡ ἐκλογὴ τῆς μονάδος δὲν ἔχει σημασίαν, διὰ τοῦτο καὶ ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν μηκῶν δὲν ἀναφέρεται.

η') Τμῆμα λ λέγεται **μέσον ἀνάλογον** δύο ἄλλων τμημάτων μ καὶ ν, ὅταν τὸ τετράγωνόν του ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων:

$$\boxed{\lambda^2 = \mu\nu.}$$

(Ἐπειδὴ $\lambda^2 = \mu\nu \Longleftrightarrow \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\lambda}{\nu}$, δηλ. τὸ λ ἵσταται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀναλογίας, ἡ ὀνομασία του ὡς μέσου ἀνάλογου δικαιολογεῖται).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

308. Τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα κυρτὸν τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

309. Ἂν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παρ|λων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ οὕτως, ὥστε αἱ διαγώνιοι ΒΓ, ΔΕ, ΖΗ νὰ εἶναι παρ|λοι, τότε θὰ εἶναι:

$$\Delta Z^2 = B\Delta.Z\Theta.$$

310. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς ΑΒ τὸ τμῆμα ΔΕ//ΑΓ (Ε ἐπὶ τῆς ΒΓ), κατόπιν ὁμοίως τὸ ΕΖ//ΑΒ, τὸ ΖΗ//ΒΓ, τὸ ΗΘ//ΑΓ, τὸ ΘΙ//ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΔΙ//ΒΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

311. Ἐν τῷ τραπεζίῳ ΑΒΓΔ, ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα Α καὶ Δ μιᾶς τῶν μὴ παρ|λων πλευρῶν μὲ τὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ δι' εὐθειῶν ΑΕ καὶ ΔΕ, αἱ πρὸς τὰς εὐθείας ταύτας ἀγόμεναι παρ|λοι ἐκ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Β ἀντιστοίχως συναντῶνται ἐπὶ τῆς ΑΔ.

312. Ἐὰν εὐθεῖα παρ|λος τῇ διαμέσῳ ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ, θὰ εἶναι : $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{A\Gamma}$.

313. Ἂν διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ε τῶν διαγωνίων τραπεζίου ἀχθῇ παρ|λος πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ἐν τῷ τραπεζίῳ τμῆμα τῆς παρ/λου διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Ε.

(Ὑποδ. Τὰ δύο μέρη, εἰς ἃ τὸ Ε χωρίζει τὸ ἐν λόγῳ τμῆμα, νὰ συγκριθοῦν πρὸς τὴν μίαν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου τῇ βοηθείᾳ ὁμοίων τριγώνων).

314. Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΑΒ συναντῶσα τὴν ΒΔ εἰς τὸ Ο καὶ ἐκ τοῦ Ο παράλληλος τῇ ΑΔ συναντῶσα εἰς τὸ Ε τὴν ἐκ τοῦ Β ἀγομένην παράλληλον τῇ ΓΔ, δείξατε ὅτι τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ.

(Ὑποδ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσοδύναμος πρότασις: ἂν ἐκ τοῦ Ο ἀχθῇ ||ΑΔ, τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς Ε, τότε ΒΕ||ΓΔ. Διὰ νὰ δειχθῇ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ΚΒ/ΚΔ=ΚΕ/ΚΓ, ὅπου Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων).

315. Δοθέντος ἡμικυκλίου φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου καὶ τρίτην ἐφαπτομένην εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον Ε τῶν διαγωνίων τοῦ σχηματιζομένου τραπεζίου τέμνει δίχα τὴν ἐκ τοῦ Μ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον.

(Ὑποδ. Ἐὰν ΑΒΓΔ τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον (ΒΓ⊥ΑΒ, ΑΔ⊥ΑΒ), δέον νὰ δειχθῇ πρῶτον ὅτι ΜΕ⊥ΑΒ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ: ΕΑ : ΕΓ = ΜΔ : ΜΓ. Χρησιμοποιοῦμεν τὴν ὁμοιότητα: τρ.ΕΔΑ ≈ τρ.ΕΓΒ).

316. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ περιφερείας ἀπὸ δύο ἐφαπτομένας αὐτῆς ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν.

{Ὑποδ. Ἂν ΜΓ, ΜΔ, ΜΕ αἱ τρεῖς ἀποστάσεις, ἡ ἀποδεικτέα σχέσις $ME^2 = M\Gamma \cdot M\Delta \iff \frac{ME}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{ME}$. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τρ.ΜΕΓ ≈ τρ.ΜΕΔ}.

317. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφερείας ἀπὸ τὰς πλευρὰς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς ταύτην ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας τὰς ἀγομένας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τούτου.

(Ὑποδ. Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ προηγουμένη ἄσκησις).

318. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφερείας ἀπὸ τοὺς φορεῖς δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τετραπλεύρου ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τοὺς φορεῖς τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν.

(Ὑποδ. Ἂν ΜΕ.ΜΖ = ΜΗ.ΜΘ ἡ ἀποδεικτέα σχέσις, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{ME}{MH} = \frac{M\Theta}{MZ}$ καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ΔΜΕΘ ≈ ΔΜΗΖ).

319. Ἂν γραφῇ ἡμιπεριφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸ μέσον Κ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἐφαπτομένη τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε, εἰς δὲ σημεῖον Μ τοῦ τόξου $\widehat{\Delta E}$ τῆς ἡμιπεριφερείας ἀχθῇ ἐφαπτομένη τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Ζ καὶ Η, τότε θὰ εἶναι: $BZ.\Gamma H = BK^2$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(Ὑποδ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ : $\frac{BZ}{BK} = \frac{K\Gamma}{\Gamma H}$ καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τρ. BZK $\approx$ τρ.ΚΗΓ).

320. Ἐπὶ περιφερείας δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶνΗ,Μ,Ν, τοῦ μὲν πρώτου ἐπὶ τὴν ευθΒΓ, τῶν δὲ δύο ἄλλων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ′. Νὰ δειχθῇ ὅτι: $AH^2 = AM.AN$.

(Ὑποδ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τρ.ΑΗΜ $\approx$ τρ.ΑΗΝ).

321. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἢ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν.

322. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ὀρθογ. τριγώνου γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἐκτὸς αὐτοῦ. Διὰ τοῦ Α ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα εἰς Δ καὶ Ε τὰς ἡμιπεριφερείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ διαιροῦντος τὸ τμῆμα ΔΕ εἰς σταθερὸν λόγον μ : ν, δηλ. τοιούτου, ὥστε $\frac{\Delta M}{ME} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ,ν δοθέντα τμήματα.

323. Ἐν ἐπιπέδῳ δίδονται δύο παράλληλοι (ε) καὶ (ε′) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς ταινίας αὐτῶν. Διὰ τοῦ Σ ἄγομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς (ε) καὶ (ε′) ἀντιστοίχως εἰς Α καὶ Α′ καὶ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Α′ καθέτου ἐπὶ τὴν ΣΑ′ λαμβάνομεν σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε Α′Μ = ΣΑ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν Μ.

324. Νὰ δειχθῇ ὅτι δύο τρίγωνα μὲ ἀναλόγους διαμέσους εἶναι ὅμοια.

325. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν βάσεων τραπεζίου διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ε τῶν διαγωνίων καὶ διὰ κοινοῦ σημείου Ζ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν προεκτεινομένων.

326. Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν τεμνομένων ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως ν' ἀχθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

327. Δοθέντος ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια, ὧν δύο κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν ὀρθογωνίων τούτων;

328. Δοθέντος κυρτοῦ τετραπλεύρου ὑπάρχουν ἄπειρα παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὰς κορυφάς των ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καὶ τὰς πλευράς των παρ|λους πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων τούτων;

329. Δίδεται περιφέρεια (Κ) καὶ δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (δ), ἐξ ὧν ἡ (ε) εἶναι ἐξωτερικὴ τῆς (Κ). Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ||(δ), τέμνουσα τὴν (Κ) εἰς Α καὶ Β καὶ τὴν (ε) εἰς Γ (κατὰ σειρὰν) οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ καὶ ν δοθέντα τμήματα.

330. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ὀρθαί. Ἡ ἐκ τοῦ Β ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΔ εἰς Ε καὶ ἡ ἐκ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Ζ. Ἐὰν Τ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Ε, Τ, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

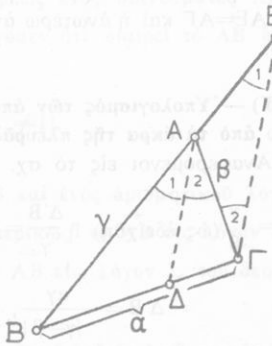
## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**58. α') Θεώρημα.— Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ συναντᾷ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ εἰς σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε**

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

**(χωρίζει τὴν ΒΓ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων πλευρῶν).**

*Ἀπόδειξις.* Ὁ λόγος ΔΒ/ΔΓ μεταφέρεται διὰ τῆς ΓΕ, παρ/λου τῇ ΔΑ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ (σχ. 58), εἰς ΒΑ/ΑΕ (θεώρ. τοῦ Θαλοῦ), ἤτοι, $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AE}$. Ἐπειδὴ ὅμως $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$ (ἐντὸς - ἐκτὸς τῶν παρ/λων) $= \widehat{A_2}$ (διότι ΑΔ διχοτόμος) $= \widehat{\Gamma_2}$ (ἐντὸς ἐναλλὰξ) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{\Gamma_2}$ $\Rightarrow$ ΑΕ = ΑΓ καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AE}$ καθίσταται $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.



Σχ. 58

**β') Συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα, εἰς ἃ χωρίζονται αἱ πλευραὶ ὑπὸ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων.—** Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 58 ἔχομεν:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \text{ (ὡς ἐδείχθη)} \Rightarrow \frac{\Delta B}{AB} = \frac{\Delta \Gamma}{A\Gamma} \text{ ἤ:}$$

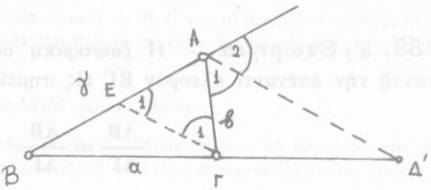
$$\frac{\Delta B}{\gamma} = \frac{\Delta \Gamma}{\beta} = \frac{\Delta B + \Delta \Gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \Rightarrow B\Delta = \frac{\alpha \gamma}{\beta + \gamma}, \quad \Delta \Gamma = \frac{\alpha \beta}{\beta + \gamma}.$$

**59. α') Θεώρημα.— Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ' τριγώνου ΑΒΓ, συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ εἰς σημεῖον Δ' τοιοῦτον, ὥστε**

$$\frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ὁ λόγος $\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma}$ μεταφέρεται διὰ τῆς ΓΕ παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΔ' ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ εἰς τὸν ἴσον λόγον $\frac{AB}{AE}$ (Θεώρ. Θαλοῦ), ἤτοι $\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{AE}$.



Σχ. 59

Ἐκ τῆς σειρᾶς ἰσοτήτων:

$\widehat{\Gamma_1} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{E_1} \Rightarrow \widehat{\Gamma_1} =$

$\widehat{E_1} \Rightarrow AE = A\Gamma$ καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία καθίσταται $\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

**β') — Ὑπολογισμὸς τῶν ἀποστάσεων τοῦ ποδὸς τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.**

Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 59 ἔχομεν:

$$\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \text{ (ὡς ἐδείχθη) ἢ } \frac{\Delta'B}{\gamma} = \frac{\Delta'\Gamma}{\beta} = \frac{\Delta'B - \Delta'\Gamma}{\gamma - \beta} = \frac{\alpha}{\gamma - \beta} \quad (\gamma > \beta)$$

$$\Rightarrow \Delta'B = \frac{\alpha\gamma}{|\gamma - \beta|}, \quad \Delta'\Gamma = \frac{\alpha\beta}{|\gamma - \beta|} \quad (\gamma \neq \beta).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

331. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ πλευρὰ α θέσει καὶ μεγέθει, τὸ σημεῖον τομῆς τῆς πλευρᾶς ταύτης μετὰ τῆς ἀπέναντι διχοτόμου καὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς β.

332. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν β, γ καὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου $\delta_A$.

333. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν β, γ καὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου $\delta'_A$.

334. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ΑΒ = 8 ἑκ., ἡ ἐκ τῆς Α διχοτόμος = = 5 ἑκ., ἡ δὲ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ κάθετος τῇ διχοτόμῳ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Π ἀπέχον τοῦ Β ἀπόστασιν ΠΒ = 2 ἑκ.

335. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ἡ ΑΒ = 10 ἑκ., ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ' = 7 ἑκ., ἡ δὲ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ταύτην νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Π τοιοῦτον, ὥστε ΠΒ = 8 ἑκ.

## 60. Διαίρεσις διανύσματος ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.

**α') Ὁρισμοί.** (Ι). **Σημεῖον Γ κεί-**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**μενον ἐπὶ τοῦ φορέως ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος *AB* λέγομεν ὅτι διαιρεῖ ἐσωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ, ὅταν**

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \lambda \qquad (\lambda > 0).$$

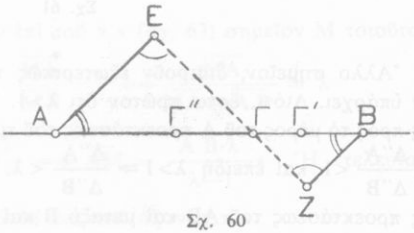
(Ἐὰν $\frac{\Gamma B}{\Gamma A} = \lambda$, τότε τὸ Γ διαιρεῖ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον λ, ὄχι τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἀλλὰ τὸ $\overrightarrow{BA}$).

**(II). Σημεῖον Δ κείμενον ἐπὶ τοῦ φορέως ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος AB λέγομεν ὅτι διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ, ὅταν**

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \lambda \qquad (\lambda > 0 \text{ καὶ } \neq 1).$$

**β') (Θ) — Δοθέντος διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ λόγου λ ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦν ἐσωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ καὶ ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦν ἐξωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ, τοῦ δευτέρου σημείου ὑπάρχοντος ἐφ' ὅσον λ≠1.**

*Ἀπόδειξις.* i) Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμητικὸς λόγος λ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον δύο δεδομένων τμημάτων, ἤτοι $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ, ν δεδομένα τμήματα. (Τοῦ ν ἐκλεγομένου αὐθαιρέτως, ὑπάρχει τμῆμα $\mu = \lambda \cdot \nu \Rightarrow \mu/\nu = \lambda$ (βλ. § 44)).



Σχ. 60

Ἐὰν φέρωμεν ἐκ τῶν A καὶ B δύο παράλληλα καὶ **ἀντίρροπα** τμήματα, τὰ AE=μ καὶ BZ=ν (σχ. 60), τότε τὸ τμῆμα EZ τέμνει τὸ τμῆμα AB εἰς τι σημεῖον Γ (ἐσωτερικὸν) καὶ τὰ τρίγωνα ΓAE, ΓBZ εἶναι ὅμοια μὲ ὁμολόγους πλευρὰς AΓ μὲ ΓB καὶ AE μὲ BZ. Ὅθεν:

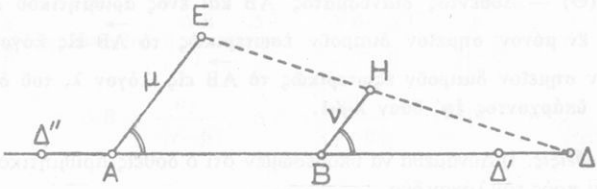
$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{AE}{BZ}$ ἢ $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu} = \lambda$. Ὥστε τὸ Γ διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον λ.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄλλο σημεῖον διαιροῦν ἐσωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ δὲν ὑπάρχει. Διότι, ἂν θεωρήσωμεν σημεῖον Γ′ μεταξὺ Γ καὶ Β, τότε $\frac{Γ'A}{Γ'B} > \frac{ΓA}{ΓB}$, διότι καὶ Γ′Α>ΓΑ καὶ Γ′Β<ΓΒ, δηλ. τὸ Γ′ διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς μεγαλύτερον τοῦ λ λόγον. Ἂν δὲ θεωρήσωμεν σημεῖον Γ″ μεταξὺ Α καὶ Γ, τότε $\frac{Γ''A}{Γ''B} < \frac{ΓA}{ΓB}$. Ἄρα τὸ Γ εἶναι μοναδικόν.

ii) Ἐὰν φέρωμεν ἐκ τῶν Α καὶ Β δύο παράλληλα καὶ **ὁμόρροπα** τμήματα (διανύσματα), τὰ ΑΕ=μ καὶ ΒΗ=ν ὅπου μ≠ν (διότι λ≠1), τότε ἡ εὐθεῖα ΕΗ τέμνει τὴν **προέκτασιν** τοῦ τμήματος ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ καὶ ἐκ τῶν προκυπτόντων ὁμοίων τριγώνων ΔΑΕ, ΔΒΗ ἔχομεν ὅτι : $\frac{ΔA}{ΔB} = \frac{AE}{BH}$ ἢ $\frac{ΔA}{ΔB} = \frac{μ}{ν}$. Ἤτοι τὸ Δ διαιρεῖ **ἐξωτερικῶς** τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.




Σχ. 61

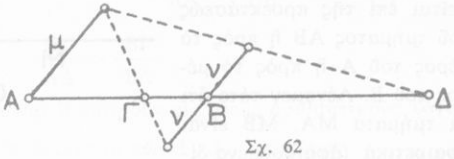
Ἄλλο σημεῖον, διαιροῦν ἐξωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς τὸν ἴδιον λόγον λ, δὲν ὑπάρχει. Διότι, ἔστω πρῶτον ὅτι λ>1. Τότε διὰ κάθε σημεῖον Δ″ ἐπὶ τῆς πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α προεκτάσεως τοῦ τμήματος ΑΒ θὰ εἶναι Δ″Α<Δ″Β ⇒ $\frac{Δ''A}{Δ''B} < 1$ καὶ ἐπειδὴ λ>1 ⇒ $\frac{Δ''A}{Δ''B} < λ$. Ἔστω τώρα σημεῖον Δ′ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΒ καὶ μεταξὺ Β καὶ Δ κείμενον. Τότε, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι $\frac{Δ'A}{Δ'B} = λ$, καταλήγομεν εἰς ἄτοπον. Διότι θὰ ἦτο : $\frac{ΔA}{ΔB} = \frac{Δ'A}{Δ'B} = \frac{ΔA-Δ'A}{ΔB-Δ'B} = \frac{ΔΔ'}{ΔΔ'} = 1$, δηλ. $\frac{ΔA}{ΔB} = 1$ ἢ ΔΑ = ΔΒ, ὅπερ ἄτοπον. Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι οὔτε πέραν τοῦ Δ ὑπάρχει σημεῖον διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ.

Ἐὰν πάλιν λ<1, τότε τὸ Δ ἔρχεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΒ πρὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ μέρος τοῦ Α καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς μοναδικότητος τοῦ Δ εἶναι ὁμοία.

γ') Τὸ σχ. 62 δεικνύει τὴν διαίρεσιν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον μ/ν.




Σχ. 62

## 61. Διαίρεσις διανύσματος εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ.

α') Ἔστω $\overrightarrow{AB}$ διάνυσμα κείμενον ἐπὶ ἄξονος xx' καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος. Λέγομεν ὅτι τὸ Μ διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς **ἀλγεβρικὸν λόγον** λ, ὅταν

Σχ. 63

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda \quad (\lambda \text{ σχετικὸς ἀριθμός}),$$

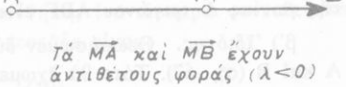
δηλ. ὅταν ὁ λόγος τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ἰσοῦται μὲ τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν λ.

**β') (Θ) — Ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς $\boxed{\text{ἀλγεβρικὸν}}$ λόγον λ δοθέντα καὶ $\neq 1$.**

*Ἀπόδειξις.* Ἂς ζητήσωμεν ἐπὶ τοῦ x'x (σχ. 63) σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda\ (\neq 1)$. Ἔχομεν $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda \Longleftrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MA} + \overline{AB}} = \lambda$

(Θ. Chasles) $\Longleftrightarrow \overline{MA} = \frac{-\overline{AB}\cdot\lambda}{\lambda - 1} \Longleftrightarrow \overline{AM} = \frac{\overline{AB}\cdot\lambda}{\lambda - 1}$. Ἡ τελευταία σχέσις ὁρίζει ἓν **μόνον** σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x'x.

γ') **Παρατηρήσεις**: 1ον) Ἐὰν λ<0, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ εἶναι ἀντίρροπα καὶ τὸ Μ κεῖται εἰς τὸ **ἐσωτερικὸν** τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 64).

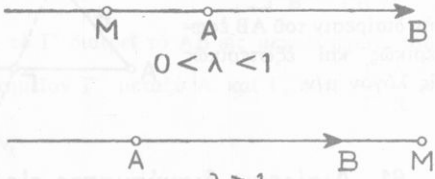



Τὰ τμήματα ΜΑ καὶ ΜΒ λέγονται τότε **προσθετικὰ** (ἀθροιζόμενα δίδουν τὸ ΑΒ).

Σχ. 64

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2ον) Ἐὰν $\lambda>0$, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ εἶναι ὁμόρροπα. Τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ τμήματος ΑΒ ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β. Λέγομεν τότε ὅτι τὰ τμήματα ΜΑ, ΜΒ εἶναι **ἀφαιρετικὰ** (ἀφαιρούμενα δίδουν τὸ ΑΒ). Τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὸ Α, ὅταν $\lambda<1$ καὶ πλησιέστερον πρὸς τὸ Β, ὅταν $\lambda>1$ (σχ. 65).



Σχ. 65

3ον) Ἂν $\overline{MA}/\overline{MB}=-1$, τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.

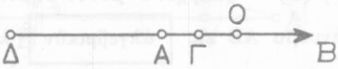
(Ἀσκήσεις: 336, 337, 338).

## ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

**62. α') Ὁρισμός. Δύο σημεῖα Γ καὶ Δ, τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς τὸν ἴδιον ἀριθμητικὸν λόγον, λέγομεν ὅτι εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β.**

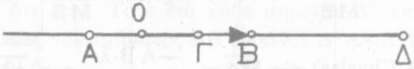
Τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο, ἔστω Γ, εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ, τὸ δὲ ἄλλο, τὸ Δ, εἶναι ἐξωτερικὸν (§ 60). Ἔχομεν δὲ

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}=\lambda.$$



Σχ. 66

Ἐὰν $\lambda<1$, τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται πλησιέστερον πρὸς τὸ Α παρὰ πρὸς τὸ Β (σχ. 66). Ἐὰν $\lambda>1$, τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται πλησιέστερον πρὸς τὸ Β παρὰ πρὸς τὸ Α (σχ. 67, $\lambda=2$).



Σχ. 67

**Εἰς πᾶσαν περίπτωσιν τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τοῦ ΑΒ, ἄρα καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Οἱ πόδες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Β καὶ Γ.**

β') **Ἰδιότης.** Θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β (σχ. 67). Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$(1)\qquad \frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐναλλάσσοντες τοὺς μέσους : $\frac{\Gamma A}{\Delta A} = \frac{\Gamma B}{\Delta B}$ ἢ

(2) $$\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}.$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι τὰ Α καὶ Β διαιροῦν εἰς ἴσους ἀριθμητικοὺς λόγους τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἤτοι ὅτι εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Γ, Δ. Ἑπομένως :

**«Ἐὰν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, τότε καὶ τὰ Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Γ καὶ Δ».**

γ') **Ἁρμονικὴ τετράς.** Ἀντὶ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

(3) $$\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = -\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}$$

δηλ. τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀλγεβρικοὺς λόγους ἀντιθέτους. Ἡ (3) γράφεται

(4) $$\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} : \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = -1.$$

Λέγομεν ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τὰ πληροῦντα τὴν (4) ἀποτελοῦν **ἁρμονικὴν τετράδα** καὶ γράφομεν συμβολικῶς

(5) $$\boxed{(A, B, \Gamma, \Delta) = -1}$$

**Παρατηρήσεις.** Ἂν πληροῦται ἡ (5), τότε πληροῦται καὶ ἡ

(6) $$(\Gamma, \Delta, A, B) = -1$$

ἀφοῦ καὶ τὰ Α, Β εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Γ, Δ (ἐδαφ. β'), δηλ. καὶ ἡ τετρὰς Γ,Δ, Α, Β εἶναι ἁρμονική. Ἐπίσης πληροῦται καὶ ἡ

(7) $$(B, A, \Gamma, \Delta) = -1$$

(Ἀρκεῖ νὰ ἀντιστρέψωμεν τὰ μέλη τῆς (1) τοῦ ἐδαφ. β').

δ') **Ἁρμονικὴ διαίρεσις.** Λέγομεν ὅτι τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ τμῆμα ΑΒ, ὅταν $(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$.

**63. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες τῆς ἁρμονικῆς τετράδος.** α') (Θ) — **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τέσσαρα συνευθειακὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα εἶναι :**

(1) $$\overline{O\Gamma} \cdot \overline{O\Delta} = OA^2 = OB^2$$

**ὅπου Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Ἀπόδειξις.** Ἐὰν τεθῇ : $\overline{OA}=\alpha$, $\overline{OB}=-\alpha$, $\overline{O\Gamma}=\gamma$, $\overline{O\Delta}=\delta$, ἔχομεν τὰς ἀντιστρεπτὰς συνεπαγωγὰς (ἢ ἰσοδυναμίας).

$$\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}}=-\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{\Gamma O}+\overline{OA}}{\overline{\Gamma O}+\overline{OB}}=-\frac{\overline{\Delta O}+\overline{OA}}{\overline{\Delta O}+\overline{OB}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-\gamma+\alpha}{-\gamma-\alpha}=-\frac{-\delta+\alpha}{-\delta-\alpha} \Longleftrightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}=\frac{\alpha-\delta}{\alpha+\delta} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\delta}=\frac{\gamma+\alpha}{\alpha+\delta} \Longleftrightarrow \frac{2\gamma}{2\alpha}=\frac{2\alpha}{2\delta} \Longleftrightarrow \gamma\delta=\alpha^2 \text{ ἤτοι } \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta}=OA^2 \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

β') (Θ) — **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τέσσαρα ἐπ' εὐθείας σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα, εἶναι :**

$$\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{A\Gamma}}+\frac{1}{\overline{A\Delta}}. \tag{2}$$

**Ἀπόδειξις.** Ἂν τεθῇ : $\overline{AB}=\beta$, $\overline{A\Gamma}=\gamma$, $\overline{A\Delta}=\delta$ τότε :

$$\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}}=-\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma A}+\overline{AB}}=-\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta A}+\overline{AB}} \Longleftrightarrow \frac{-\gamma}{-\gamma+\beta}=\frac{\delta}{-\delta+\beta}$$

$$\Longleftrightarrow \gamma\delta-\gamma\beta=-\gamma\delta+\beta\delta \Longleftrightarrow 2\gamma\delta=\beta(\gamma+\delta) \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2}{\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\gamma\delta} \Longleftrightarrow \dfrac{2}{\beta}=\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}$ (δηλ. ὁ ἀριθμὸς β εἶναι μέσος ἁρμονικὸς τῶν γ καὶ δ) ὅ.ἔ.δ.

γ') Ἑτέρα χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἁρμονικῆς τετράδος σημείων (εὐκόλως ἀποδεικνυομένη) δίδεται εἰς τὴν ἄσκ. 340.

**64. Ἕτεραι σχέσεις.** (Θ) — **Ἐὰν τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ, τότε τὸ μέσον Η τοῦ ΓΔ διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\lambda^2$.**

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\overline{A\Gamma}}+\dfrac{1}{\overline{A\Delta}}$ ἢ $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{A\Gamma}+\overline{A\Delta}}{\overline{A\Gamma}\,.\,\overline{A\Delta}}$. Ἀλλὰ $\overline{A\Gamma}+\overline{A\Delta}=2\overline{AH}$ συνεπῶς $\dfrac{2}{AB}=\dfrac{2\overline{AH}}{\overline{A\Gamma}\,.\,\overline{A\Delta}}$ ἤτοι :

$$\overline{A\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}=\overline{AH}\cdot\overline{AB}. \tag{1}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ καὶ τὰ Β, Α, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὰ Α καὶ Β εἰς τὴν σχέσιν (1), ὁπότε

$$(2) \qquad \overline{B\Gamma} \,.\, \overline{B\Delta} = \overline{BH} \,.\, \overline{BA}.$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$(3) \qquad \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}} \cdot \frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}} = -\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} \cdot \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = -\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}}.$$

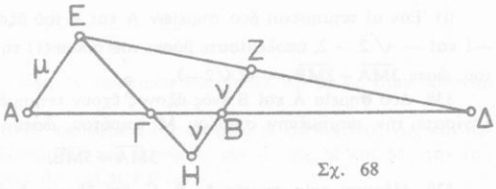
Ἐὰν π.χ. τὸ Γ εἶναι ἐσωτερικὸν καὶ τὸ Δ ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, τότε $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = -\lambda$, $\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = \lambda$ καὶ ἡ (3) γίνεται $(-\lambda) \cdot (\lambda) = -\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}}$ ἤτοι $\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \lambda^2$.

**Παρατήρησις.** Ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἐπίσης χαρακτηριστικὴ τῆς ἁρμονικῆς διαιρέσεως.

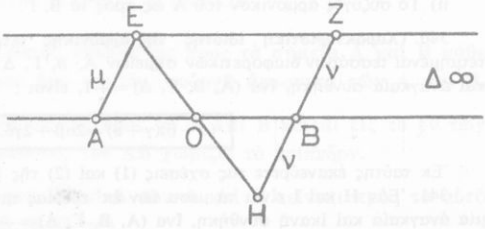
## 65. Συμβατικὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα.

**α') (Θ) — Τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον τῆς εὐθ ΑΒ.**

*Ἀπόδειξις.* Τὸ ΑΒ διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν Γ καὶ Δ διὰ τῆς κατασκευῆς ἐν σχήματι 68, ὅπου μ>ν. (ΓΑ:ΓΒ = ΔΑ : : ΔΒ = μ : ν). Ὅταν ὅμως εἶναι μ = ν (σχ. 69), τότε τὸ Γ μεταβαίνει εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ ΑΒ, ἐνῷ ἡ εὐθεῖα ΕΖ γίνεται παράλληλος πρὸς τὴν εὐθ. ΑΒ. Τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΑΒ, ἐνῷ κατὰ τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν δὲν ὑπάρχει, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν (μ = ν) δύναται νὰ νοηθῇ κατὰ τὴν προβολικὴν γεω-



Σχ. 68



Σχ. 69

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μετρίαν ὡς τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον $\Delta_\infty$ τῆς εὐθείας AB (ἢ τῆς EZ). (§ 55).

Θέτομεν : $$\boxed{\frac{\overline{\Delta_\infty A}}{\overline{\Delta_\infty B}}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = +1.$$

Ἤτοι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς ευθ. AB εἶναι, κατὰ σύμβασιν, τὸ μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\lambda = +1$.

β') **Σύμβασις.** Διὰ νὰ ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ευθ AB ἓν συζυγὲς ἁρμονικὸν ὡς πρὸς τὰ A καὶ B, ὁρίζομεν **ὡς συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ A αὐτὸ τοῦτο τὸ A καὶ ὡς συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ B αὐτὸ τοῦτο τὸ B,** διότι οὕτω πληροῦται ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἁρμονικῆς τετράδος τῆς § **63**, α'. Ἤτοι ἡ $\overline{O\Gamma} \cdot \overline{O\Delta} = OA^2 = OB^2$ ἰσχύει, ὅταν $\Gamma \equiv A \wedge \Delta \equiv A$ ἢ ὅταν $\Gamma \equiv B \wedge \Delta \equiv B$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

336. Ἐπ' εὐθείας δίδονται σημεῖα O, A, B. Κατασκευάσατε σημεῖον M μεταξὺ A καὶ B τοιοῦτον, ὥστε $4MA = 3MB$. Ὑπολογίσατε τὸν λόγον $\overline{MA} : \overline{MB}$. Δείξατε ὅτι $7\overline{OM} = 4\overline{OA} + 3\overline{OB}$.

337. Ἔστω ἄξων $(x'Ox, \overrightarrow{i})$ καὶ $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ δύο σημεῖα αὐτοῦ ἔχοντα τετμημένας $x_1$, $x_2$ ἀντιστοίχως. i) Δείξατε ὅτι

$$\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1. \tag{1}$$

ii) Ἐὰν αἱ τετμημέναι δύο σημείων A καὶ B τοῦ ἄξονος εἶναι ἀντιστοίχως, $-\sqrt{2} - 1$ καὶ $-\sqrt{2} + 2$, ὑπολογίσατε βάσει τοῦ τύπου (1) τὴν τετμημένην σημείου M τοιούτου, ὥστε $3\overline{MA} + 2\overline{MB} = -2\sqrt{2} - 3$.

338. Δύο σημεῖα A καὶ B ἑνὸς ἄξονος ἔχουν τετμημένας α καὶ β ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε τὴν τετμημένην σημείου M τοιούτου, ὥστε

$$3\overline{MA} = 5\overline{MB}.$$

339. Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ ἐπὶ ἄξονος ἔχοντα τετμημένας 3, (—2), (—1). Προσδιορίσατε διὰ τῆς τετμημένης του :

i) Τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰ A, B.

ii) Τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὰ B, Γ.

340. **(Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἁρμονικῆς τετράδος).** Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι αἱ τετμημέναι τεσσάρων διαφορετικῶν σημείων A, B, Γ, Δ ἑνὸς ἄξονος, δείξατε ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα $(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$, εἶναι :

$$\boxed{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = 2\alpha\beta + 2\gamma\delta.}$$

Ἐκ ταύτης ἐπανεύρετε τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) τῆς § 63.

341. Ἐὰν H καὶ I εἶναι τὰ μέσα τῶν ἐπ' εὐθείας τμημάτων AB καὶ ΓΔ, δείξατε ὅτι μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα $(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$, εἶναι :

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = 4HI^2.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

342. Κύκλος ἐφάπτεται τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Α, διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τοῦ Α καὶ τῆς ΒΓ.

343. Ἔστω τραπέζιον ΑΒΓΔ, Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ, Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων, Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΒΓ. Δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς τῶν σημείων Μ, Ν, Ε, Ζ εἶναι ἁρμονική.

344. Δύο μεταβλητὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ κινοῦνται ἐπὶ ἄξονος οὕτως, ὥστε αἱ τετμημέναι των x καὶ x′ νὰ συνδέωνται πάντοτε διὰ τῆς σχέσεως $xx'-3(x+x')=0$. i) Ὁρίσατε τὰς τετμημένας τῶν σημείων τοῦ ἄξονος, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ Μ καὶ Μ′ συμπίπτουν. Ἔστωσαν δὲ Α καὶ Β τὰ σημεῖα ταῦτα. ii) Δείξατε ὅτι $(A, B, M, M')=-1$.

345. Χορδὴ ΓΔ κύκλου (Ο) εἶναι κάθετος ἐπὶ διάμετρον ΑΒ. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΜΓ, ΜΔ τέμνουν τὴν εὐθ ΑΒ εἰς Ε καὶ Ζ, δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον ΟΕ·ΟΖ ἔχει σταθερὰν τιμήν.

346. Δείξατε ὅτι μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα $(A, B, \Gamma, \Delta)=-1$, εἶναι, τοῦ Η ὄντος μέσου τοῦ ΓΔ, νὰ πληροῦται ἡ σχέσις :

$$\overline{H\Gamma}\cdot\overline{H\Delta}+\overline{HA}\cdot\overline{HB}=0.$$

347. Ἔστωσαν Α′, Β′, Γ′ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ εἰς τρ. ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα Β′Γ′ τέμνει τὴν εὐθ ΒΓ ἔστω εἰς $A_1$ καὶ τὴν ἐκ τοῦ Γ παράλληλον τῇ ΑΒ εἰς Δ. Παρατηροῦντες ὅτι τὸ τρ. ΓΒ′Δ εἶναι ἰσοσκελὲς δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς $A_1$, Α′, Β, Γ εἶναι ἁρμονική.

348. Ἐὰν Ο τὸ κέντρον καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρ. ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου, $O_1$ καὶ $\rho_\alpha$ τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$ παρεγγεγραμμένου κύκλου καὶ Δ ὁ ποῦς τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{A}$

i) δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς $(A, \Delta, O, O_1)$ εἶναι ἁρμονική.

ii) χρησιμοποιοῦντες μίαν ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ ὕψους $AA'=\upsilon_\alpha$ δείξατε ὅτι

$$\frac{2}{\upsilon_\alpha}=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_\alpha}.$$

iii) Συναγάγετε κατασκευὴν ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων $\upsilon_\alpha$, ρ, $\rho_\alpha$, ὅταν δίδωνται τὰ δύο ἄλλα.

349. Ἔστω τετράγωνον ΑΒΓΔ, περιφέρεια (c) κέντρου Δ καὶ ἀκτῖνος ΔΑ καὶ περιφέρεια (c′) διαμέτρου ΔΑ. Εὐθεῖα διὰ τοῦ Δ τέμνει τὴν (c) εἰς Μ καὶ Μ′, τὴν (c′) εἰς Ρ καὶ τὴν ΑΒ εἰς Ρ′. Δείξατε ὅτι $(M,M'P,P')=-1$.

## ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

**66. α′) Καλεῖται ἀπολλώνιος κύκλος ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β κάθε κύκλος ἔχων ἄκρα διαμέτρου δύο σημεῖα, συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β.**

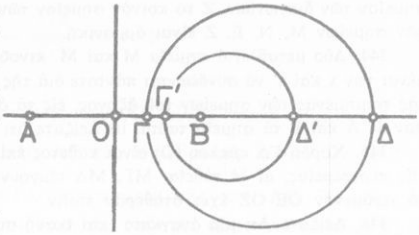
**β′) Πᾶς ἀπολλώνιος κύκλος ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β κεῖται εἰς τὸ ἓν τῶν ἡμιεπιπέδων, εἰς ἃ ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον.**

Διότι τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ Γ καὶ Δ τῶν Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τοῦ ΑΒ (§ **62**, α′).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**γ') Δύο ἀπολλώνιοι κύκλοι ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β, κείμενοι εἰς τὸ ἴδιον ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ, κεῖνται ὁ εἷς ἐντὸς τοῦ ἄλλου.**

Ἔστω Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ. Ἕνα ζεῦγος (Γ, Δ) συζυγῶν ἁρμονικῶν ὡς πρὸς τὰ Α, Β κεῖται μετὰ τοῦ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο, ὅταν $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} > 1$ (σχ. 70). Ἂς θεωρήσωμεν τώρα καὶ δεύτερον ζεῦγος (Γ΄, Δ΄) συζυγῶν ἁρμονικῶν ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β καὶ ἔστω ὅτι τὸ Γ΄ κεῖται μεταξὺ Γ καὶ Δ, δηλ.



Σχ. 70

(1) $$ΟΓ < ΟΓ' < ΟΔ.$$

Ἐπειδὴ $ΟΓ \cdot ΟΔ = ΟΓ' \cdot ΟΔ'$ (§ **63**, α΄), ἡ (1) γράφεται :

$$ΟΓ < \frac{ΟΓ \cdot ΟΔ}{ΟΔ'} < ΟΔ \Rightarrow 1 < \frac{ΟΔ}{ΟΔ'} \text{ καὶ } \frac{ΟΓ}{ΟΔ'} < 1 \Rightarrow$$

$ΟΔ' < ΟΔ$ καὶ $ΟΔ' > ΟΓ$, δηλ. $ΟΓ < ΟΔ' < ΟΔ$ δηλ. καὶ τὸ Δ΄ κεῖται ἐπίσης μεταξὺ Γ καὶ Δ· ἄρα ὁλόκληρον τὸ τμῆμα Γ΄Δ΄ κεῖται ἐντὸς τοῦ ΓΔ καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος διαμέτρου Γ΄Δ΄ κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ κύκλου μὲ διάμετρον ΓΔ.

**Πόρισμα.— Δύο ἀπολλώνιοι περιφέρειαι ὡς πρὸς τὸ ἴδιον ζεῦγος σημείων Α καὶ Β οὐδέποτε ἔχουν κοινόν τι σημεῖον.**

**δ') Τόπος τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων. (Θ) — Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι σταθερός, ἤτοι :**

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = λ \qquad (\text{σταθερὸν} \neq 1),$$

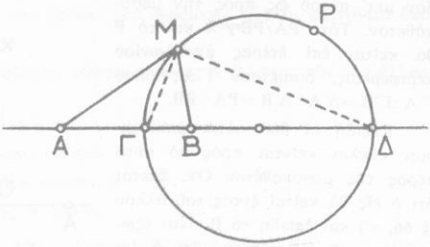
**εἶναι περιφέρεια μὲ ἄκρα διαμέτρου τὰ σημεῖα τὰ διαιροῦντα τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ (§60).**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω λ>1 καὶ Μ σημεῖον τοῦ τόπου μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ευθ ΑΒ. Διὰ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΜΓ τοῦ τρ. ΑΜΒ, ὁ λόγος ΜΑ/ΜΒ μεταφέρεται εἰς ΓΑ/ΓΒ. Δηλ. :

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{ΓΑ}{ΓΒ} \text{ καὶ ἐπειδὴ } \frac{ΜΑ}{ΜΒ} = λ \Rightarrow \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = λ.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε τὸ Γ εἶναι σταθερὸν σημεῖον, διότι διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ **ἐσωτερικῶς** εἰς λόγον λ. Ὁμοίως διὰ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου ΜΔ τοῦ τρ. ΑΜΒ ὁ λόγος λ = ΜΑ/ΜΒ μεταφέρεται εἰς ΔΑ/ΔΒ = λ. Ἄρα καὶ τὸ Δ εἶναι σταθερὸν σημεῖον, διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.



Σχ. 71

Ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma M \Delta} = 1$ ὀρθή, ἕπεται ὅτι τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΓΔ, ἥτις κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ περιέχον τὸ Β. Τὰ Γ καὶ Δ εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου.

Ἐὰν λ<1, τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α.

Ὥστε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ **ἀπολλωνίου περιφερείας** ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοιχούσης εἰς λόγον ΓΑ: ΓΒ = ΔΑ:ΔΒ = λ.

**Ἀντιστρόφως.** Ἔστω Ρ σημεῖον τῆς ἀπολλωνίου περιφερείας διαμέτρου ΓΔ (σχ. 71).

Ἐὰν ἦτο $\frac{PA}{PB} = \lambda'$, ὅπου $\lambda' \neq \lambda$, τότε τὸ Ρ θὰ ἔκειτο καὶ ἐπὶ ἑτέρας ἀπολλωνίου περιφερείας μὲ ἄκρα διαμέτρου Γ′ καὶ Δ′ τοιαῦτα, ὥστε Γ′Α : Γ′Β = Δ′Α : Δ′Β = λ′. Ἀλλὰ τότε αἱ δύο διαφορετικαὶ ἀπολλώνιοι περιφέρειαι θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον τὸ Ρ, ὅπερ ἀδύνατον (ἐδ. γ′, πόρισμα). Ἄρα $\frac{PA}{PB} = \lambda$. Συνάγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ ΡΓ καὶ ΡΔ εἶναι διχοτόμοι τῆς $\widehat{APB}$ (σχ. 71).

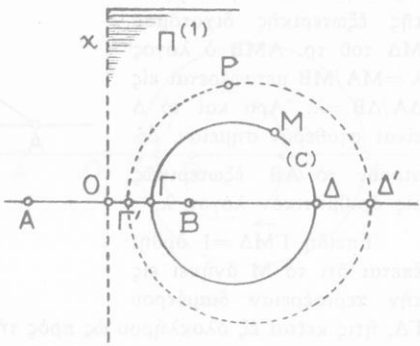
**Παρατήρησις.** Ἐὰν λ = 1, ὁ ἀντίστοιχος τόπος εἶναι προφανῶς ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

**67. Περιοχαὶ τοῦ ἐπιπέδου καθοριζόμεναι ὑπὸ τοῦ τόπου τῶν σημείων Μ τῶν ἐχόντων τὴν ἰδιότητα : ΜΑ : ΜΒ = λ ≠ 1.**

Ἂς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι λ>1, ὁπότε ὁ τόπος τῶν Μ : $\frac{MA}{MB} = \lambda$ εἶναι ἀπολλώνιος κύκλος (c) διαμέτρου ΓΔ (σχ. 72), κείμενος ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μέρος τοῦ Β (διότι ΜΑ>ΜΒ). Ἔστω Ρ σημεῖον κείμενον ἔξω τοῦ ἀπολλωνίου τούτου κύκλου, ἀλλ' εἰς τὸ ἴδιον ἡμιεπίπεδον μετ' αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον. Τότε ΡΑ/ΡΒ≠λ καὶ τὸ Ρ θὰ κεῖται ἐπὶ ἑτέρας ἀπολλωνίου περιφερείας, διαμέτρου Γ΄Δ΄, ὅπου Γ΄Α : Γ΄Β = Δ΄Α : Δ΄Β = ΡΑ : ΡΒ.



Σχ. 72

Ἐπειδὴ οἱ δύο οὗτοι ἀπολλώνιοι κύκλοι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς μεσοκαθέτου Ox, ἕπεται ὅτι ὁ εἷς θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου (§ 66, γ') καὶ ἐπειδὴ τὸ Ρ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ (c), ἕπεται ὅτι ὁ (c) κεῖται ἐντὸς τοῦ δευτέρου, δηλ. τοῦ μὲ διάμετρον Γ΄Δ΄. Ἄρα Γ΄Α < ΓΑ καὶ Γ΄Β > ΓΒ, ἐξ ὧν ἕπεται $\frac{Γ'Α}{Γ'Β} < \frac{ΓΑ}{ΓΒ}$ δηλ. $\frac{ΡΑ}{ΡΒ} < λ$.

Ἐὰν τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου, τότε ΡΑ : ΡΒ = 1, δηλ. πάλιν ΡΑ : ΡΒ < λ.

Ἐὰν τὸ Ρ κεῖται εἰς τὸ ἀντίθετον ἡμιεπίπεδον ἐκείνου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται ὁ (c), τότε ΡΑ < ΡΒ καὶ ΡΑ : ΡΒ < 1 < λ. Ἑπομένως :

**Δι' ὅλα τὰ σημεῖα Ρ τὰ ἔξω τοῦ ἀπολλωνίου κύκλου (c) ἰσχύει :**

$$\frac{ΡΑ}{ΡΒ} < λ.$$

Ἐντελῶς ἀναλόγως εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν τὸ Ρ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (c), τότε : $\frac{ΡΑ}{ΡΒ} > λ$. Ἑπομένως :

**Δοθείσης ἀπολλωνίου περιφερείας (c), ἧς τὰ σημεῖα Μ πληροῦν τὴν σχέσιν ΜΑ : ΜΒ = λ, ὅπου λ > 1, πᾶν σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου κείμενον ἐκτὸς τοῦ κύκλου (c) ἔχει τὴν ἰδιότητα: ΡΑ : ΡΒ < λ καὶ πᾶν σημεῖον Ρ΄ ἐντὸς τοῦ (c) ἔχει τὴν ἰδιότητα : Ρ΄Α : Ρ΄Β > λ.**

Τὰ ἀντίστροφα συμβαίνουν, ὅταν λ < 1.

**68. Παρατήρησις.** Ἔστω ΑΔ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τρ.ΑΒΓ καὶ α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Θὰ ἔχωμεν (§ **58**) :

$$\frac{ΒΔ}{ΒΑ} = \frac{ΔΓ}{ΓΑ} = \frac{ΒΔ+ΔΓ}{ΒΑ+ΓΑ} = \frac{α}{β+γ} \quad \text{ἤτοι :}$$

$$(1) \qquad \frac{ΒΔ}{ΒΑ} = \frac{α}{β+γ}, \quad \frac{ΓΔ}{ΓΑ} = \frac{α}{β+γ}.$$

Σχ. 73

Ἐκ τῶν (1) ἕπεται ὅτι τὰ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἰδίας ἀπολλωνίου περιφερείας ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Δ καὶ Α, τῆς ἐχούσης ἄκρα διαμέτρου τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ (σχ. 73) τοιαῦτα, ὥστε :

$$\frac{ΕΔ}{ΕΑ} = \frac{ΖΔ}{ΖΑ} = \frac{α}{β+γ}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

350. Τίς ὁ γ.τ. τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δύο δεδομένοι κύκλοι φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας;

351. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις α, ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καί :

i) Τὸ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν βάσιν ὕψος ἢ

ii) τὸ ἄθροισμα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἢ

iii) ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἢ

iv) ἡ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι τῆς α γωνίας.

352. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις ΒΓ = α, ὁ λόγος $\frac{AB}{A\Gamma} = \lambda > 1$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος νὰ εἶναι τὸ μέγιστον δυνατόν. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἀκολούθως τὸ ὕψος τοῦτο καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ συναρτήσει τῶν α καὶ λ.

353. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται τὸ ὕψος $\upsilon_\alpha$, ἡ διχοτόμος $\delta_A$ καὶ εἰς τὸ ὁποῖον νὰ πληροῦται ἡ σχέσις :

$$AB + A\Gamma = 2B\Gamma.$$

(**Ὑπόδ.** βλ. § **68**).

354. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς ΒΓ = α, τῆς διχοτόμου ΑΔ = δ καὶ τοῦ ἀθροίσματος ΑΒ + ΑΓ = k.

(**Ὑπόδ.** βλ. § **68**).

355. Διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο κύκλων ἄγομεν χορδὰς εὑρισκομένας εἰς δοθέντα λόγον μ : ν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῆς τομῆς τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους χορδάς.

356. Νὰ κατασκευασθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν δίδωνται αἱ τέσσαρες πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου.

(**Ὑπόδ.** Ἂν ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΔ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{\Delta\Gamma E} = \widehat{B\Gamma A}$, τότε τρ. ΓΔΕ≈τρ. ΑΒΓ. Τὸ τμῆμα ΔΕ ὁρίζεται, τὸ δὲ Γ κεῖται ἐπὶ ἀπολλωνίου περιφερείας γνωστῆς : ΓΑ : ΓΕ = ΓΒ : ΓΔ).

357. Ἔστωσαν Δ καὶ Δ′ οἱ πόδες τῶν διχοτόμων (ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς) τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ, Ε καὶ Ε′ οἱ πόδες τῶν διχοτόμων τῆς $\widehat{B}$ καὶ Ζ καὶ Ζ′ οἱ πόδες τῶν διχοτόμων τῆς $\widehat{\Gamma}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους ΔΔ′, ΕΕ′, ΖΖ′ ἔχουν κοινὴν χορδήν.

358. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς Oy γωνίας xOy δίδονται δύο σημεῖα Δ καὶ Α, ὅπου ΟΔ < ΟΑ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς Ox, σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς $\widehat{OMA}$ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Δ.

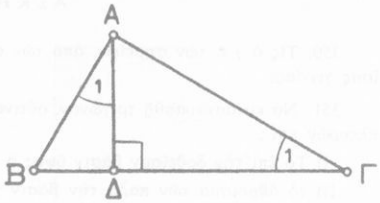
## ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

**69.** α′) **Θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἑκάστη κάθετος πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.**

Ἔστω ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΒΑΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα : $B\widehat{\Delta}A = B\widehat{A}\Gamma$ (ὀρθαὶ) καὶ $A\widehat{B}\Delta = \Gamma\widehat{B}A$ (κοινὴ) μὲ ὁμόλογους πλευράς :



Σχ. 74

ΑΒ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) ὁμόλογος τῆς ΒΓ (τοῦ τρ. ΑΒΓ)
ΒΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) » » ΑΒ (τοῦ τρ. ΑΒΓ).

Ἑπομένως : $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB}$. Δηλ. $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$, ὅπου ΒΔ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

β') **Πόρισμα 1ον. Τὸ τετράγωνον χορδῆς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς χορδῆς ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην.**

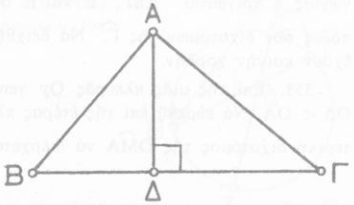
γ') **Πόρισμα 2ον. Τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν τούτων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.**

Διότι, εἰς τὸ σχ. 74 ἰσχύουν : $AB^2 = B\Gamma \times B\Delta$ καὶ $A\Gamma^2 = B\Gamma \times \Gamma\Delta$.

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη : $AB^2/A\Gamma^2 = B\Delta/\Gamma\Delta$.

## 70. Πυθαγόρειον θεώρημα — Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.

Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου ἔχομεν (σχ. 75) :
$AB^2 = B\Gamma \times B\Delta$ καὶ $A\Gamma^2 = B\Gamma \times \Delta\Gamma$ καὶ ἐκ τούτων : $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot (B\Delta + \Delta\Gamma) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2$.



Σχ. 75

Ἤτοι : $\boxed{AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2}$.

Προφανῶς εἶναι : $AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2$ καὶ $A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$.

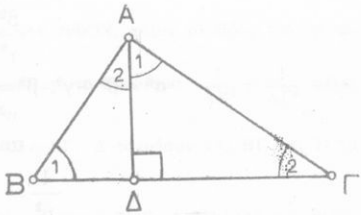
Τὸ **ἀντίστροφον** τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἰσχύει :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**«Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, τότε $\widehat{A}=90^o$».** Διότι, ἂν κατασκευάσωμεν τρ. Α΄Β΄Γ΄ ὀρθογώνιον εἰς Α΄ μὲ Α΄Β΄ $=\gamma$, Α΄Γ΄ $=\beta$, βλέπομεν ὅτι καὶ $\alpha^2=B'\Gamma'^2 \Rightarrow$ τρ. ΑΒΓ=τρ. Α΄Β΄Γ΄ $\Rightarrow \widehat{A}=90^o$. (Βλ. καὶ § **80**).

*Σημείωσις.* Εἰς τὰς διδασκαλίας τοῦ Πυθαγόρα (580 - 501 πρὸ Χριστοῦ), αἱ ὁποῖαι εἰσήγαγον εἰς τὰ μαθηματικὰ ἅπαξ διὰ παντὸς τὸ λογικὸν στοιχεῖον, τὴν ἀπαίτησιν τῆς ἀποδείξεως καὶ βασικὰς ἀρχάς, περιλαμβάνεται καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον εἰς τὰς μαθηματικὰς καὶ τεχνικὰς ἐρεύνας του διηνεκῶς καὶ αἰωνίως. Τὸ ἴδιον ἰσχύει καὶ διὰ τὸ Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ (Θαλῆς ὁ Μιλήσιος 640 - 548 πρὸ Χριστοῦ).

**71. (Θ) — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.**



Σχ. 76

*Ἀπόδειξις.* Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (σχ. 76) $\widehat{B_1}=\widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{A_2}=\widehat{\Gamma_2}$ ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια μὲ ὁμολόγους πλευράς :

ΑΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) ὁμόλογος τῆς ΔΓ (τοῦ τρ. ΑΔΓ)
ΒΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) » » ΑΔ (τοῦ τρ. ΑΔΓ)

καὶ συνεπῶς : $\dfrac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\dfrac{B\Delta}{A\Delta} \Rightarrow A\Delta^2=B\Delta\times\Delta\Gamma$. ὅ.ἔ.δ.

**72. (Θ) — Ἂν ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τότε ἰσχύει : ΒΓ·ΑΔ = ΑΒ·ΑΓ.**

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ (σχ. 74), ἐξ ὧν : $\dfrac{AB}{B\Gamma}=\dfrac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow AB\times A\Gamma=B\Gamma\times A\Delta$.

**73. (Θ) — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἀντίστροφον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν.**

Ἔστωσαν β, γ αἱ κάθετοι πλευραί, α ἡ ὑποτείνουσα καὶ υ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος. Ἔχομεν, αυ $=\beta\gamma$ (§ **72**)$\Rightarrow$

$$\alpha^2\upsilon^2=\beta^2\gamma^2 \Rightarrow (\beta^2+\gamma^2)\upsilon^2=\beta^2\gamma^2 \text{ (Πυθαγόρειον θεώρημα)} \Rightarrow$$

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2\gamma^2}=\frac{1}{\upsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2}=\frac{\beta^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\beta^2\gamma^2} \Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2}=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## 74. Σύνοψις τῶν ἀνωτέρω μετρικῶν σχέσεων.

Ἔστωσαν β, γ αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, α ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ, β′, γ′ αἱ προβολαὶ τῶν β καὶ γ ἐπὶ τὴν α καὶ υ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος. Μεταξὺ τῶν ἓξ τμημάτων

(1) α, β, γ, β′, γ′, υ

ὑφίστανται αἱ ἀνωτέρω δειχθεῖσαι μετρικαὶ σχέσεις, αἱ ὁποῖαι *ἐπιτρέπουν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τεσσάρων ἐκ τῶν τμημάτων (1), ὅταν δοθοῦν δύο ἐξ αὐτῶν.* Αἱ σχέσεις αὐταὶ συνοψίζονται ὡς κάτωθι :

$$\beta^2 = \alpha\beta', \quad \gamma^2 = \alpha\gamma'$$

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\beta'}{\gamma'}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \quad \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\upsilon^2 = \beta'\gamma'$$

$$\alpha\upsilon = \beta\gamma$$

$$\frac{1}{\upsilon^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εἰς τὰς ἑπομένας τέσσαρας ἀσκήσεις δίδονται δύο ἐκ τῶν 6 στοιχείων α, β, γ, β′, γ′, υ ὀρθογωνίου τριγώνου (βλ. § 74) καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τέσσαρα.

359. $\beta = 520$, $\gamma = 1248$.

360. $\beta = 5$, $\upsilon = 3$.

361. $\alpha = 9$, $\gamma' = 4$.

362. $\alpha = 5$, $\upsilon = 2{,}4$.

363. Εἰς ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB = 2R$ καὶ κέντρου O, αἱ εἰς A καὶ B ἐφαπτόμεναι συναντῶνται ὑπὸ τυχούσης τρίτης ἐφαπτομένης εἰς M καὶ M′.

i) Δείξατε ὅτι $M\widehat{O}M' = 1$ ὀρθή. ii) Ὑπολογίσατε τὸ γινόμενον $AM \cdot BM'$.

364. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου γνωρίζοντες τὰς καθέτους πλευράς, $\beta = 5$, $\gamma = 6$.

365. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ κύκλος (O, R). Εὐθεῖα τέμνει τὰς OX, OΨ εἰς A καὶ B οὕτως, ὥστε $OA = \alpha$, $OB = \beta$. Εὕρετε εἰς ποίαν συνθήκην δέον νὰ ὑπόκεινται τὰ α, β, R, ἵνα ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὸν κύκλον.

366. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν δύο καθέτων ἀκτίνων κύκλου ἐπὶ τυχοῦσαν διάμετρον ἢ καὶ ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σταθερόν.

367. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφερείας ἀπὸ τὰ ἄκρα χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διὰ τοῦ σημείου διερχομένην ἀκτῖνα εἶναι σταθερόν.

368. Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται καθέτως εἰς τι σημεῖον O ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενον, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων τμημάτων, εἰς ἃ διαιροῦνται αἱ χορδαὶ ὑπὸ τοῦ σημείου τομῆς των O ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

369. Ἐὰν διὰ σημείου O ἐκτὸς κύκλου κειμένου ἀχθοῦν δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν περιφέρειαν ἡ μία εἰς τὰ Α καὶ Β, ἡ δὲ ἄλλη εἰς τὰ Γ καὶ Δ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα :

$$OA^2+OB^2+O\Gamma^2+O\Delta^2 \text{ εἶναι σταθερόν.}$$

370. Ἂν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων.

371. Δοθείσης εὐθείας xy καὶ σημείου Α αὐτῆς, τίς ὁ γ.τ. σημείου Μ τοιούτου, ὥστε ἂν ἀχθῇ ἡ $M\Pi \perp xy$, νὰ εἶναι $(MA)^2=(A\Pi)k$, ἔνθα k δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα;

372. Δοθείσης εὐθείας xy καὶ σημείου Α αὐτῆς, τίς ὁ γ.τ. σημείου Μ τοιούτου, ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ΜΠ ἀπὸ τῆς xy καὶ ἡ ΜΑ νὰ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως : $(MA)^2=(M\Pi).k$, ὅπου k δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα;

373. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ δίδεται σταθερὸν σημεῖον Α. Μεταβλητὴ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς Ox εἰς Α καὶ τέμνει τὴν Oy εἰς Β καὶ Γ.

i) Τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.

ii) Ἂν Β′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ευθOX, ποῖον τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου Β′ΑΓ;

iii) Δείξατε ὅτι, μεταβαλλομένης τῆς περιφερείας, τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{A\Gamma^2}$ μένει σταθερόν.

374. Ἔστω ΑΒΓ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ ΑΒ=ΑΓ, Δ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ.

i) Δείξατε ὅτι $B\Delta^2=A\Delta\times H\Delta$.

ii) Θεωροῦμεν καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΟΓ μὲ $BO\perp O\Gamma$ καὶ ΒΟ= =ΟΓ κείμενον πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὴν ΒΓ. Ὑποτιθεμένου ὅτι τὰ Β καὶ Γ μένουν σταθερὰ καὶ ὅτι τὸ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΟΔ, δείξατε ὅτι τὸ $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OH}$ μένει σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $\frac{1}{O\Delta}$.

375. Δίδονται δύο παράλληλοι (ε) καὶ (η), ἐπὶ τῆς (η) σημεῖον Ο καὶ τρίτη εὐθεῖα (*l*) διερχομένη διὰ τοῦ Ο. i) Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν δύο κύκλοι ἔχοντες τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς (ε) καὶ ἐφαπτόμενοι, ἕκαστος, τῶν (*l*) καὶ (η). ii) Ἂν d ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων καὶ $P_1$, $P_2$ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο τούτων κύκλων μετὰ τῆς (*l*), δείξατε ὅτι : $OP_1\times OP_2=d^2$.

376. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$PA^2+P\Gamma^2=PB^2+P\Delta^2$$

377. Δύο κύκλοι ἀκτίνων $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν ΒΓ (Β, Γ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς), ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν $\rho_1$, $\rho_2$ :

i) Ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν ΒΓ.

ii) Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

## ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

**75. α′) Ἀντικατάστασις ἀθροίσματος τετραγώνων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου — i) Δοθέντων δύο τμημάτων α καὶ β νὰ κατασκευασθῇ τρίτον τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε** $\boxed{x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

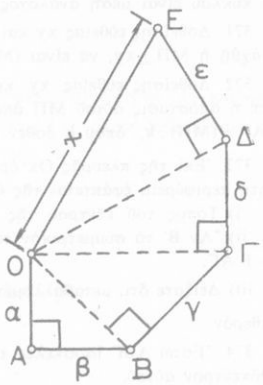


Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα x, α, β πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$, ἕπεται ὅτι τὸ x εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς α καὶ β.

**ii) Δοθέντων ὁσωνδήποτε τμημάτων, π.χ. α, β, γ, δ, ε, νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$$\boxed{x = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2}}\ .$$



Σχ. 77

*Λύσις.* Ἡ κατασκευὴ τοῦ x δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 77, ἐκ τοῦ ὁποίου: $x^2 = \varepsilon^2 + O\Delta^2 = \varepsilon^2 + \delta^2 + O\Gamma^2 = \varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + OB^2 = \varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2$.

**β΄) Ἀντικατάστασις ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τετραγώνων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου. iii) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε** $\boxed{x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$, **ὅπου α, β δεδομένα τμήματα καὶ α>β.**

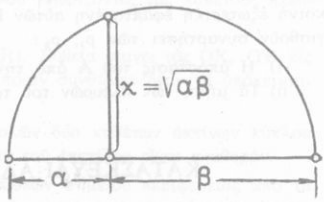
Ἐπειδὴ τὰ x, α, β πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν $x^2 = \alpha^2 - \beta^2$, ἕπεται ὅτι τὸ x ἰσοῦται πρὸς τὴν κάθετον πλευρὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ὑποτείνουσαν α καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν τὴν β.

**iv) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$$\boxed{x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}}\ .$$

*Λύσις.* Εὑρίσκομεν τμῆμα K τοιοῦτον, ὥστε $K^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2$ (βλ. σχ. 77) καὶ τμῆμα Λ τοιοῦτον, ὥστε $\Lambda^2 = \gamma^2 + \varepsilon^2$, ὁπότε $x = \sqrt{K^2 - \Lambda^2}$ καὶ ἐφ' ὅσον K>Λ, ἡ κατασκευὴ ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην.

**γ΄) Ἀντικατάστασις τοῦ γινομένου δύο τμημάτων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου. v) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ μέσον ἀνάλογον δύο δεδομένων τμημάτων α καὶ β (§ 57, η΄). Ἤτοι νὰ εὑρεθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε** $\boxed{x = \sqrt{\alpha\beta}}$ .



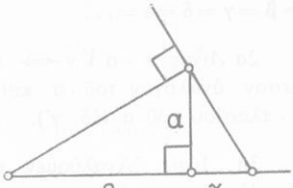
Σχ. 78

*Λύσις.* Ἐπειδὴ $x = \sqrt{\alpha\beta} \Longleftrightarrow x^2 = \alpha \cdot \beta$, διὰ τοῦτο, βάσει τοῦ θεωρήματος τῆς § **71**, ὡς x δύναται νὰ χρησιμεύσῃ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου, εἰς τὸ ὁποῖον α καὶ β εἶναι τὰ δύο τμήματα, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους. Ἐξ οὗ ἡ κατασκευὴ τοῦ σχ. 78.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**δ΄) Κατασκευὴ τοῦ $\alpha^2/\beta$. vi) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε $\boxed{x = \frac{\alpha^2}{\beta}}$, ὅπου α, β, δεδομένα τμήματα.**

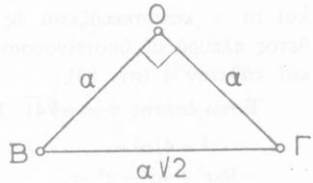
*Λύσις.* $x = \frac{\alpha^2}{\beta} \Longleftrightarrow \alpha^2 = \beta \cdot x$. Ἑπομένως, ἂν τὸ α εἶναι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ β τὸ ἓν ἐκ τῶν τμημάτων, εἰς ἃ τὸ ὕψος διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν, τότε τὸ x θὰ εἶναι τὸ ἕτερον ἐκ τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης (σχ. 79).



Σχ. 79

**ε΄) Κατασκευὴ τοῦ $\alpha\sqrt{\nu}$, ὅπου $\nu \in \Phi$. vii) Δοθέντος τμήματος α νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε $\boxed{x = \alpha\sqrt{2}}$.**

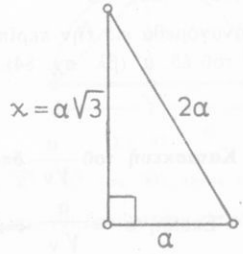
*Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{2} \Longleftrightarrow x^2 = \alpha^2 + \alpha^2$. Ὅθεν ὡς x δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς α, α (σχ. 80).



Σχ. 80

**viii) Δοθέντος τοῦ τμήματος α, νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε $\boxed{x = \alpha\sqrt{3}}$**

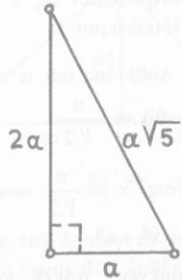
*Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{3} \Longleftrightarrow x^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 \Longleftrightarrow$
$x^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2$,
ὅθεν ἀναγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν iii τοῦ ἐδαφίου β΄ (βλ. σχ. 81).



Σχ. 81

**ix) Δοθέντος τοῦ τμήματος α νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε $\boxed{x = \alpha\sqrt{5}}$.**

*Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{5} \Longleftrightarrow x^2 = 4\alpha^2 + \alpha^2 \Longleftrightarrow$
$x = \sqrt{(2\alpha)^2 + \alpha^2}$.
Ἡ κατασκευὴ δεικνύεται εἰς τὸ (σχ.82).



Σχ. 82

**x) Δοθέντος τοῦ τμήματος α νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα $x = \alpha\sqrt{\nu}$, ὅπου ν φυσικὸς ἀριθμός.**

*1η Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{\nu} \Longleftrightarrow x = \sqrt{\nu\alpha^2} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x = \sqrt{\underbrace{\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^2}_{\nu \text{ φορὰς}}}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἑπομένως ἀναγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν (ii) τοῦ ἐδ. α΄ (σχ. 77) μὲ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \ldots$

2α *Λύσις*. $x = \alpha\sqrt{\nu} \Longleftrightarrow x^2 = \nu\alpha^2 \Longleftrightarrow x^2 = (\nu\alpha)\cdot\alpha$. Ἤτοι τὸ x εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ α καὶ τοῦ ν - πλασίου τοῦ α (ἐδ. γ΄).

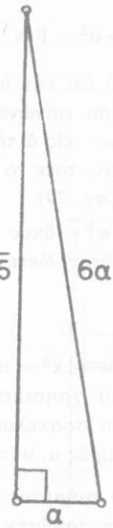
3η *Λύσις*. Ἀναλύομεν τὸ ν εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τετραγώνων.

Ἔστω π.χ. πρὸς κατασκευὴν τὸ τμῆμα $x = \alpha\sqrt{35}$. Τότε $x^2 = 35\alpha^2 = (6\alpha)^2 - \alpha^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{(6\alpha)^2 - \alpha^2}$ καὶ τὸ x κατασκευάζεται ὡς κάθετος πλευρὰ μὲ ὑποτείνουσαν 6α καὶ κάθετον α (σχ. 83).

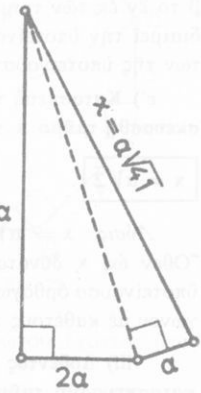
Ἔστω ἐπίσης $x = \alpha\sqrt{41}$. Τότε

$$x^2 = 41\alpha^2 = 36\alpha^2 + 4\alpha^2 + \alpha^2 = (6\alpha)^2 + (2\alpha)^2 + \alpha^2$$

ὁπότε ἀναγόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν (ii) τοῦ ἐδ. α΄ (βλ. σχ. 84).



Σχ. 83



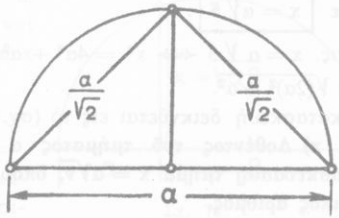
Σχ. 84

**ς΄) Κατασκευὴ τοῦ $\frac{\alpha}{\sqrt{\nu}}$ ὅπου $\nu \in \Phi$.**

Ἐπειδὴ $x = \frac{\alpha}{\sqrt{\nu}} \Longleftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{\nu}}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ $\alpha\sqrt{\nu}$ μὲ μίαν ἐκ τῶν προηγουμένων μεθόδων (κατασκευὴ x) καὶ κατόπιν νὰ τὸ διαιρέσωμεν εἰς ν ἴσα μέρη. Εἰδικώτερον :

**ix) Δοθέντος τοῦ α νὰ κατασκευασθῇ τὸ $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$.**

*Λύσις*. $x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow x^2 = \frac{\alpha^2}{2} \Longleftrightarrow \alpha^2 = x^2 + x^2$.



Σχ. 85

Ἑπομένως, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν α (σχ. 85).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**ζ') Δοθέντων τῶν τμημάτων α, β, γ νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$$\boxed{x = \frac{\alpha\beta}{\gamma}}$$

*Λύσις.* Φέρομεν τὸ x εἰς τὴν θέσιν τοῦ τετάρτου ἀναλόγου :

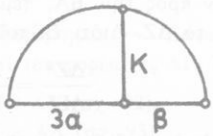
$$x = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \Longleftrightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} \Longleftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\boxed{x}}.$$

Τώρα τὸ x κατασκευάζεται ὡς τέταρτον ἀνάλογον (§ **50**).

**76.** ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. — **Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον ὥστε**

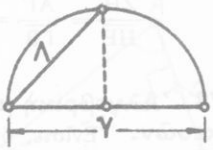
$$x = \frac{\alpha^2 + 3\beta^2}{\sqrt{3\alpha\beta + \frac{\gamma^2}{2}}}$$

**ὅπου α, β, γ δεδομένα τμήματα.**



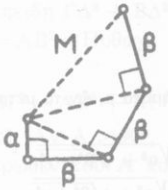

Σχ. 86

*Λύσις :* Ἀντικαθιστῶμεν τὸ 3αβ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $K^2 = 3\alpha\beta = (3\alpha)\cdot\beta$ (σχ. 86) καὶ τὸ $\frac{\gamma^2}{2}$ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $\Lambda^2 = \frac{\gamma^2}{2} \Longleftrightarrow \Lambda^2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ (σχ. 87).

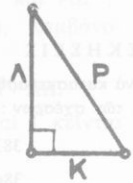



Σχ. 87

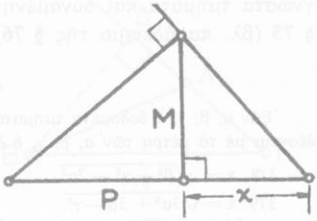
Ἐπίσης τὸ $\alpha^2 + 3\beta^2$ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $M^2 = \alpha^2 + 3\beta^2$ (σχ. 88), ὁπότε, $x = \frac{M^2}{\sqrt{K^2 + \Lambda^2}}$ Τέλος κατασκευάζομεν τμῆμα $P = \sqrt{K^2 + \Lambda^2}$ (σχ. 90), ὁπότε $x = \frac{M^2}{P}$ καὶ ἀναγόμεθα εἰς γνωστὴν κατασκευήν : $M^2 = P \cdot x$ (σχ. 90) βασιζομένην εἰς τὸ ἐδ. δ'.




Σχ. 88




Σχ. 89




Σχ. 90

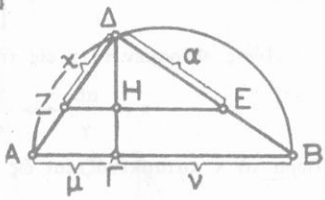
**77. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς δοθὲν τετράγωνον, ὃν λόγον ἔχουν δύο δοθέντα τμήματα.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἤτοι ζητεῖται τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε :

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}} \quad (\alpha,\ \mu,\ \nu,\ \text{δοθέντα τμήματα})$$

*Λύσις.* Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ =μ, ΓΒ =ν καὶ μὲ διάμετρον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μ + +ν=ΑΒ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν (σχ. 91). Εἰς τὸ Γ ὑψοῦμεν ⊥ΑΒ τέμνουσαν εἰς Δ τὴν ἡμιπεριφέρειαν καὶ φέρομεν τὰς ΔΒ καὶ ΔΑ.



Σχ. 91

Ἐπὶ τῆς ΔΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=α καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ, τέμνουσαν εἰς Ζ τὴν ΑΔ. Τὸ ζητούμενον τμῆμα x εἶναι τὸ ΔΖ. Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΖΔΕ ἔχομεν :

$$\frac{\Delta Z^2}{\Delta E^2}=\frac{ZH}{HE} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{ZH}{HE} \qquad (\S\ \mathbf{69},\ \gamma')$$

Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς δέσμης ἔχομεν :

$$\frac{\overline{ZH}}{\overline{HE}}=\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} \Rightarrow \frac{ZH}{HE}=\frac{\mu}{\nu}. \quad \text{Ἑπομένως :}\ \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}.$$

**78. Ἀλγεβρικὴ μέθοδος ἐκτελέσεως Γεωμετρικῶν κατασκευῶν.** Ἐνίοτε, ὅταν ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν εὕρεσιν ἑνὸς τμήματος, λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τοῦ προβλήματος τὸ μέτρον x τοῦ ἀγνώστου τμήματος καὶ ὑπολογίζμεν τὸ x βάσει μετρικῶν σχέσεων ἀπορρεουσῶν ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος. Δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ὡς τιμὴν τοῦ x μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν ἐξαρτωμένην ἀπὸ γνωστὰ τμήματα καὶ δυναμένην νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς βάσει τῆς § **75** (βλ. παράδειγμα τῆς § **76**).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ἐὰν α, β, γ, δ δεδομένα τμήματα, νὰ κατασκευασθοῦν τμήματα x, ὧν τὰ μέτρα συνδέονται μὲ τὰ μέτρα τῶν α, β, γ, δ διὰ τῶν σχέσεων :

378. $x=\sqrt{\beta^2+\gamma^2-2\alpha^2}$.

379. $x=\sqrt{3\alpha^2+3\beta^2-\gamma^2}$.

380. $x=\sqrt{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}}$.

381. $\dfrac{1}{x}=\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}}$.

382. $x=\alpha+\sqrt{\alpha\beta-\gamma\delta}$.

383. $x=\sqrt{\alpha^2+\sqrt{\beta^4-\gamma^4}}$.

384. $x=\sqrt{\alpha^2+\sqrt{\beta^4+\gamma^4}}$.

385. $x=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}$.

386. $x=\alpha\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

387. $x=\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

388. Δίδεται κύκλος (K, R) καὶ ἡ ἐφαπτομένη του εἰς τὸ A. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τοιοῦτον, ὥστε ἂν ἀχθῇ τὸ τμῆμα KΔ τέμνον εἰς E τὴν περιφέρειαν, νὰ εἶναι $\Delta E = \frac{A\Delta}{2}$.

(Ὑπόδ. Ἂς ληφθῇ ὡς ἄγνωστος x, τὸ μέτρον τοῦ τμήματος AΔ).

389. Ἐπὶ ἡμιπεριφερείας διαμέτρου AB νὰ εὑρεθῇ σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε $MA \times MB = c^2$, ὅπου c δοθὲν τμῆμα.

390. Ἔστω τρίγωνον OAB, ὀρθογώνιον εἰς τὸ O, ἔχον $\widehat{B} = 30^0$ καὶ $OA = a$. Νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον M ἐπὶ τοῦ τμήματος OB τοιοῦτον, ὥστε:

$$MB + 2MA = a(2 + \sqrt{3}).$$

(Ὑπόδ. Νὰ ληφθῇ ὡς ἄγνωστος τὸ (OM) = x).

## ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

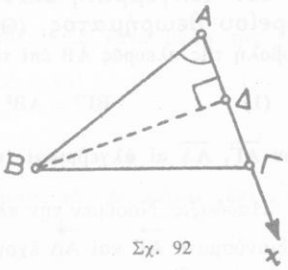
**79. Ἐπεκτεταμένον Πυθαγόρειον θεώρημα.— Ἔστω τρίγωνον ABΓ καὶ AΔ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς AB ἐπὶ τὸν φορέα τῆς AΓ. Τότε:**

**i) Ἐὰν $A < 90^0 \Rightarrow B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \times A\Delta$ (σχ. 92).**

**ii) Ἐὰν $A > 90^0 \Rightarrow B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \times A\Delta$ (σχ. 93).**

*Ἀπόδειξις.* i) Ἐὰν $A < 90^0$, τότε τὰ Δ καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ A (δηλ. ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας AX) καὶ συνεπῶς εἶναι πάντοτε:

$$\Gamma\Delta = |A\Gamma - A\Delta|.$$



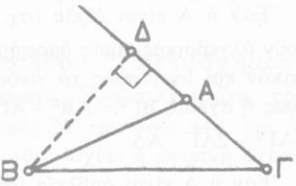
Σχ. 92

Τετραγωνίζοντες καὶ προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $\Delta B^2$ λαμβάνομεν:

$$\Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta + B\Delta^2$$

καὶ ἐπειδὴ $\Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 = B\Gamma^2$ καὶ $A\Delta^2 + B\Delta^2 = AB^2$ (Πυθαγ. θεώρ.), λαμβάνομεν:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta.$$



Σχ. 93

ii) Ἂν $A > 90^0$, τὰ Δ καὶ Γ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ A καὶ

$$\Gamma\Delta = A\Gamma + A\Delta, \text{ ὁπότε } \Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta, \text{ δηλ.: } B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta.$$

**Πόρισμα. Εἰς τρ. ABΓ:**

$$A < 90^0 \Rightarrow B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2$$
$$A > 90^0 \Rightarrow B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**80. Κριτήριον περὶ τοῦ ἄν γωνία τις τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.**

**(Θ) — Εἰς τὰ τρίγωνα ἰσχύουν αἱ λογικαὶ ἰσοδυναμίαι:**

$$A < 90^0 \Longleftrightarrow B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2$$
$$A = 90^0 \Longleftrightarrow B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$
$$A > 90^0 \Longleftrightarrow B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2.$$

*Ἀπόδειξις.* Ἐκ τοῦ προηγουμένου πορίσματος καὶ ἐκ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἰσχύουν προφανῶς αἱ συνεπαγωγαί:

$$A < 90^0 \Rightarrow B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2, \quad A = 90^0 \Rightarrow B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2,$$
$$A > 90^0 \Rightarrow B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2.$$

Ἐπειδὴ αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξαντλητικαί, ἰσχύουν καὶ τὰ ἀντίστροφα.

(Ἀσκήσεις: 391, 392, 373, 397, 427, 428).

**81. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ ἐπεκτεταμένου Πυθαγορείου θεωρήματος. (Θ) — Ἔστω τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΑΓ. Τότε ἰσχύει πάντοτε:**

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta} \tag{1}$$

**ὅπου $\overline{A\Gamma}$, $\overline{A\Delta}$ αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$.**

*Ἀπόδειξις.* Νοοῦμεν τὴν πλευρὰν ΑΓ κειμένην ἐπί τινος ἄξονος, ὁπότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{A\Delta}$ ἔχουν ἀλγεβρικὰς τιμὰς ἔστω τὰς $\overline{A\Gamma}$, $\overline{A\Delta}$.

Ἐὰν ἡ $\widehat{A}$ εἶναι ὀξεῖα (σχ. 92), τότε τὰ $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἔχουν ἀλγεβρικὰς τιμὰς ὁμοσήμους, ἑπομένως τὸ γινόμενον $\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$ εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν, $A\Gamma \cdot A\Delta$. Ἑπομένως ἡ σχέσις $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta$ (§ 79) καθίσταται $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$.

Ἐὰν ἡ $\widehat{A}$ εἶναι ἀμβλεῖα (σχ. 93), τότε τὰ $\overrightarrow{A\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι ἀντίρροπα καὶ ἔχουν ἀλγεβρικὰς τιμὰς ἑτεροσήμους. Ἑπομένως τὸ γινόμενον $\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἴσον πρὸς $-A\Gamma \cdot A\Delta$, δηλαδὴ $A\Gamma \cdot A\Delta = -\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$. Ἡ σχέσις λοιπὸν $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta$ καθίσταται, $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$.

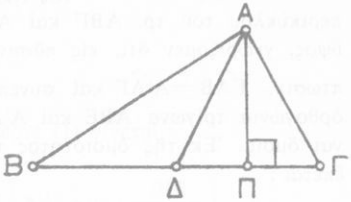
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν $\widehat{A}=90^o$, τότε $\overline{A\Delta}=0$ καὶ συνεπῶς πάλιν ἡ (1) ἰσχύει. Ὥστε ἡ μετρικὴ σχέσις (1) ἰσχύει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

## 82. Πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου. (Μετασχηματισμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου).

**(Θ) — Ἐὰν ΑΔ μία διάμεσος τοῦ τρ. ΑΒΓ, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις:**

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}.$$



Σχ. 94

*Ἀπόδειξις:* Ἔστω ΔΠ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΔ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Τότε τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα (§ **81**) ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ δίδει:

$$(1)\qquad \begin{cases} AB^2 = \Delta A^2 + \Delta B^2 - 2\overline{\Delta B}\,.\,\overline{\Delta\Pi} \\ A\Gamma^2 = \Delta A^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\overline{\Delta\Gamma}\,.\,\overline{\Delta\Pi} \end{cases}$$

Ἐπειδὴ $\overline{\Delta B}=-\overline{\Delta\Gamma}$, λαμβάνομεν προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1):

$$(2)\qquad AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 2B\Delta^2 \text{ ἢ καὶ}$$

$$(3)\qquad AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}.$$

**Αἱ σχέσεις (2) καὶ (3) ἰσχύουν καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς ευθ. ΒΓ.**

(Ἀσκήσεις: 394, 395, 403, 404).

## 83. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου. (Μετασχηματισμὸς τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου).

**(Θ) — Ἐὰν Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΔΠ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΔ ἐπὶ τὴν ευθ ΒΓ, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις:**

$$(1)\qquad AB^2 - A\Gamma^2 = 2\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Delta\Pi}.$$

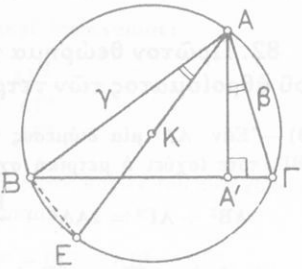
*Ἀπόδειξις.* Ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) τῆς προηγουμένης § **82** (ὅπου, $-2\overline{\Delta B}=-\overline{\Gamma B}$ καὶ $2\overline{\Delta\Gamma}=\overline{B\Gamma}$).

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι ἡ σχέσις (1) ἰσχύει καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς ευθ ΑΒ (συμπίπτει μὲ τὸ Π).

(Ἀσκήσεις: 402, 416).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**84. Μετασχηματισμὸς τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν τριγώνου.** (Θ) — **Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον εἰς τὴν τρίτην πλευράν.**



Σχ. 95

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν ΑΕ διάμετρος τοῦ περικύκλου τοῦ τρ. ΑΒΓ καὶ ΑΑ′ τὸ ὕψος, γνωρίζομεν ὅτι, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, $E\widehat{A}B = A'\widehat{A}\Gamma$ καὶ συνεπῶς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ Α′ΑΓ εἶναι ὅμοια. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων ἕπεται :

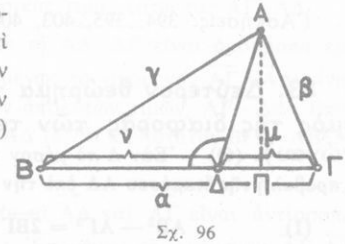
$$\frac{AB}{AA'} = \frac{AE}{A\Gamma} \text{ ἢ } \frac{\gamma}{\upsilon_\alpha} = \frac{2R}{\beta} \text{ καὶ τελικῶς, } \boxed{\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha}$$

(Ἀσκήσεις : 409, 410, 411, 412, 413, 426).

**85. Σχέσις τοῦ Stewart — (Ἁπλῆ μορφὴ) α′) (Θ) — Δοθέντος τρ. ΑΒΓ καὶ σημείου Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ (δηλ. Δ μεταξὺ Β καὶ Γ), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις :**

$$\textbf{(1)} \qquad AB^2 \cdot \Delta\Gamma + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = B\Gamma(A\Delta^2 + \Delta\Gamma \cdot B\Delta).$$

*Ἀπόδειξις.* Τὸ ΑΔ χωρίζει τὸ τρ. ΑΒΓ εἰς δύο τρίγωνα, τρ. ΑΔΒ καὶ τρ. ΑΔΓ, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι (ἐν γένει) ἀμβλυγώνιον εἰς Δ, τὸ δὲ ἄλλο ὀξυγώνιον. Ἂν ΔΠ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΔ ἐπὶ τὴν εὐθ ΒΓ (σχ. 96), τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ (§ 79) δίδει :



Σχ. 96

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2B\Delta \,.\, \Delta\Pi \quad \Big| \quad \Delta\Gamma$$
$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \,.\, \Delta\Pi \quad \Big| \quad B\Delta$$

Πολ/ντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ ΔΓ καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ ΒΔ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, ἐξαλείφομεν τὸ ΔΠ :

$$AB^2 \cdot \Delta\Gamma + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = A\Delta^2(\Delta\Gamma + B\Delta) + B\Delta^2 \cdot \Delta\Gamma + \Delta\Gamma^2 \cdot B\Delta =$$
$$= A\Delta^2 \cdot B\Gamma + B\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot (B\Delta + \Delta\Gamma) = A\Delta^2 \cdot B\Gamma + B\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot B\Gamma =$$
$$= B\Gamma(A\Delta^2 + B\Delta \,.\, \Delta\Gamma)$$ καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν (1).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β') Μετασχηματισμὸς τοῦ $\mu\cdot AB^2+\nu A\Gamma^2$, ὅπου μ, ν, δοθέντα τμήματα ἢ δοθέντες φυσικοὶ ἀριθμοί.** Διὰ τῆς σχέσεως Stewart δυνάμεθα νὰ δίδωμεν ἄλλην μορφὴν εἰς τὸ ἄθροισμα $\mu\cdot AB^2+\nu\cdot A\Gamma^2$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐξυπηρετεῖ εἰς διάφορα ζητήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφανίζεται ἄθροισμα τοιαύτης μορφῆς. Πρὸς μετατροπὴν τοῦ $\mu\cdot AB^2+\nu A\Gamma^2$, ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΓ, σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε :

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}=\frac{\mu}{\nu} \quad (\text{σχ. } 96)$$

ὁπότε $\dfrac{\Gamma\Delta}{\mu}=\dfrac{\Delta B}{\nu}=\dfrac{\Delta\Gamma+\Delta B}{\mu+\nu}=\dfrac{B\Gamma}{\mu+\nu}\Rightarrow$

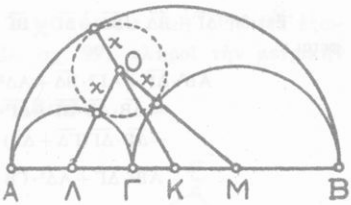
$\Delta\Gamma=\mu\cdot\dfrac{B\Gamma}{\mu+\nu}$, $\Delta B=\nu\cdot\dfrac{B\Gamma}{\mu+\nu}$ καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται :

$$AB^2\cdot\mu\cdot\frac{B\Gamma}{\mu+\nu}+A\Gamma^2\cdot\nu\frac{B\Gamma}{\mu+\nu}=B\Gamma\left\{A\Delta^2+\mu\nu\cdot\frac{B\Gamma^2}{(\mu+\nu)^2}\right\} \quad \text{ἢ}$$

$$(2)\qquad \boxed{\mu.AB^2+\nu\cdot A\Gamma^2=(\mu+\nu)A\Delta^2+\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}\cdot B\Gamma^2}\,,\quad \text{ὅπου } \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}=\frac{\mu}{\nu}.$$

γ') Ἡ σχέσις τοῦ Stewart ὑπὸ τὴν μορφὴν (1) συνδέει τὰ 6 τμήματα β, γ, α, μ, ν, ΑΔ (σχ. 96) ($\gamma^2\mu+\beta^2\nu=\alpha(A\Delta^2+\mu\nu)$) καὶ χρησιμοποιεῖται πρὸς ὑπολογισμὸν ἑνὸς τῶν ΑΔ ἢ β ἢ γ, ὅταν δίδωνται τὰ ἄλλα ἢ καὶ δι' ἄλλους σχετικοὺς ὑπολογισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς x τοῦ κύκλου Ο τοῦ ἐφαπτομένου τῶν τριῶν ἡμικυκλίων μὲ διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΓΒ (σχ. 97), ὅπου Α, Γ, Β ἐπ' εὐθείας, ΑΓ=α, ΓΒ=2α, ΑΒ=3α.**



Σχ. 97

*Λύσις.* Αἱ ἀκτῖνες τῶν τριῶν ἡμικυκλίων εἶναι ΑΛ=α/2, ΜΒ=α, ΚΒ=3α/2. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΛΜ ἔχομεν :

$O\Lambda=\dfrac{\alpha}{2}+x$ (οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Λ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς).

$OM=\alpha+x$ (οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Μ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς).

$OK=\dfrac{3\alpha}{2}-x$ (οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Κ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς).

$\Lambda K=KA-\Lambda A=\dfrac{3\alpha}{2}-\dfrac{\alpha}{2}=\alpha$

$KM=KB-MB=\dfrac{3\alpha}{2}-\alpha=\dfrac{\alpha}{2}$ καὶ $\Lambda M=\dfrac{3\alpha}{2}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ σχέσις τοῦ Stewart εἰς τὸ τρ. ΟΛΜ :

$$\text{ΟΛ}^2\cdot\text{ΚΜ}+\text{ΟΜ}^2\cdot\text{ΛΚ}=\text{ΛΜ}(\text{ΟΚ}^2+\text{ΛΚ}\cdot\text{ΚΜ})$$

καθίσταται :

$$\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)^2\cdot\frac{\alpha}{2}+(\alpha+x)^2\alpha=\frac{3\alpha}{2}\left(\left(\frac{3\alpha}{2}-x\right)^2+\alpha\cdot\frac{\alpha}{2}\right)\Longleftrightarrow 7x=3\alpha$$

$$\text{καὶ } x=\frac{3\alpha}{7}=\frac{\text{AB}}{7}.$$

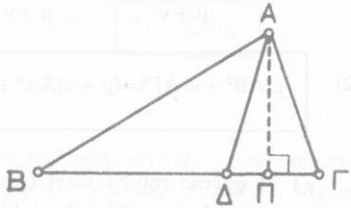
(Ἀσκήσεις : 405, 406, 407, 408, 421, 430).

**86. Γενικευμένη σχέσις τοῦ Stewart.** (Θ) — **Ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ τῆς φερούσης τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ληφθῇ τυχὸν σημεῖον Δ, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις :**

$$\text{(1)}\qquad \text{AB}^2\cdot\overline{\Delta\Gamma}+\text{A}\Delta^2\cdot\overline{\Gamma\text{B}}+\text{A}\Gamma^2\cdot\overline{\text{B}\Delta}+\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Gamma\text{B}}\cdot\overline{\text{B}\Delta}=0.$$

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν ΔΠ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΔ ἐπὶ τὴν ευθ ΒΓ (σχ. 98), τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα, ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ δίδει :

$$\text{AB}^2=\text{A}\Delta^2+\Delta\text{B}^2-2\overline{\Delta\text{B}}\cdot\overline{\Delta\Pi}\quad\Big\|\quad\overline{\Delta\Gamma}$$
$$\text{A}\Gamma^2=\text{A}\Delta^2+\Delta\Gamma^2-2\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Delta\Pi}\quad\Big\|\quad\overline{\text{B}\Delta}$$



Σχ. 98

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ $\overline{\Delta\Gamma}$, τῆς δευτέρας ἐπὶ $\overline{\text{B}\Delta}$ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, ἐξαλείφομεν τὸ $\overline{\Delta\Pi}$ :

$$\text{AB}^2\cdot\overline{\Delta\Gamma}+\text{A}\Gamma^2\cdot\overline{\text{B}\Delta}=\text{A}\Delta^2(\overline{\Delta\Gamma}+\overline{\text{B}\Delta})+\Delta\text{B}^2\cdot\overline{\Delta\Gamma}+\Delta\Gamma^2\cdot\overline{\text{B}\Delta}.$$

Ἐπειδὴ $\overline{\Delta\Gamma}+\overline{\text{B}\Delta}=\overline{\text{B}\Delta}+\overline{\Delta\Gamma}=\overline{\text{B}\Gamma}=-\overline{\Gamma\text{B}}$ (θεώρ. Chasles), ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται :

$$\begin{aligned}\text{AB}^2\cdot\overline{\Delta\Gamma}+\text{A}\Gamma^2\cdot\overline{\text{B}\Delta}+\text{A}\Delta^2\cdot\overline{\Gamma\text{B}}&=\overline{\Delta\text{B}}\cdot\overline{\Delta\text{B}}\cdot\overline{\Delta\Gamma}+\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\text{B}\Delta}=\\&=\overline{\Delta\text{B}}\cdot\overline{\Delta\text{B}}\cdot\overline{\Delta\Gamma}-\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Delta\text{B}}=\overline{\Delta\text{B}}\cdot\overline{\Delta\Gamma}(\overline{\Delta\text{B}}-\overline{\Delta\Gamma})=\\&=\overline{\Delta\text{B}}\cdot\overline{\Delta\Gamma}(\overline{\Gamma\Delta}+\overline{\Delta\text{B}})=\overline{\Delta\text{B}}\cdot\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Gamma\text{B}}=-\overline{\text{B}\Delta}\cdot\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Gamma\text{B}}\end{aligned}$$

ὁπότε :

$$\text{AB}^2\cdot\overline{\Delta\Gamma}+\text{A}\Delta^2\cdot\overline{\Gamma\text{B}}+\text{A}\Gamma^2\cdot\overline{\text{B}\Delta}+\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Gamma\text{B}}\cdot\overline{\text{B}\Delta}=0.$$

**Παρατηρήσεις. 1η.** Ἡ σχέσις τοῦ Stewart γράφεται :

$$\text{(2)}\qquad \text{AB}^2\cdot\overline{\Delta\Gamma}+\text{A}\Gamma^2\cdot\overline{\text{B}\Delta}=\overline{\text{B}\Gamma}\ (\text{A}\Delta^2+\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\text{B}\Delta})$$

Κατὰ τὰς θέσεις δὲ τοῦ Δ δύναται νὰ ἀπαλλαγῇ τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν. Ἂν π.χ. τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β, ὁρισθῇ δὲ θετικὴ φορὰ ἡ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ, ἡ (2) καθίσταται :

$$\text{AB}^2\cdot\Delta\Gamma-\text{A}\Gamma^2\cdot\text{B}\Delta=\text{B}\Gamma(\text{A}\Delta^2-\Delta\Gamma\cdot\text{B}\Delta)$$

**2α.** Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει καὶ διὰ τέσσαρα τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, κείμενα ἐπ' εὐθείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**3η. Συμμετρικὴ γραφὴ τῆς σχέσεως**: Ἐάν Α,Β,Γ τρία τυχόντα σημεῖα ἐπ' εὐθείας καὶ Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἰσχύει:

$$PA^2\cdot\overline{B\Gamma}+PB^2\cdot\overline{\Gamma A}+P\Gamma^2\cdot\overline{AB}+\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}\cdot\overline{AB}=0$$

**87. Μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου.** α') (Θ) **Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ** (Βλ. σχ. 58) **πληροῖ τὴν μετρικὴν σχέσιν:**

$$A\Delta^2=AB\cdot A\Gamma-\Delta B\cdot\Delta\Gamma$$

*Ἀπόδειξις.* Ἡ σχέσις Stewart δίδει εἰς τὸ τρ. ΑΒΓ:

(1) $$AB^2\cdot\Delta\Gamma+A\Gamma^2\cdot B\Delta=B\Gamma(A\Delta^2+B\Delta\cdot\Delta\Gamma).$$

Ἐπειδὴ ὅμως: $\dfrac{AB}{A\Gamma}=\dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$ (ὡς ἐδείχθη) $\Rightarrow AB\cdot\Delta\Gamma=A\Gamma\cdot\Delta B$ καὶ ἡ (1) δύναται τώρα νὰ γραφῇ:

$$AB\cdot A\Gamma\cdot\Delta B+A\Gamma\cdot AB\cdot\Delta\Gamma=B\Gamma\cdot(A\Delta^2+B\Delta\cdot\Delta\Gamma)$$

ἢ $$AB\cdot A\Gamma(\Delta B+\Delta\Gamma)=B\Gamma(A\Delta^2+B\Delta\cdot\Delta\Gamma)$$

ἢ ἐπειδὴ $\Delta B+\Delta\Gamma=B\Gamma\Rightarrow AB\cdot A\Gamma=A\Delta^2+B\Delta\cdot\Delta\Gamma\Rightarrow A\Delta^2=AB\cdot A\Gamma-B\Delta\cdot\Delta\Gamma.$

(Ἄλλην ἀπόδειξιν βλέπε εἰς τὰς μετρικὰς σχέσεις ἐν κύκλῳ).

**β') Μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.** Ἂν $A\Delta=\delta_A$, ἡ δειχθεῖσα σχέσις: $\Delta A^2=\beta\gamma-\Delta B\cdot\Delta\Gamma$ γράφεται, ἀντικαθιστωμένων τῶν ΔΒ, ΔΓ ὑπὸ τῶν εἰς τὴν § **58** β' εὑρεθεισῶν τιμῶν των:

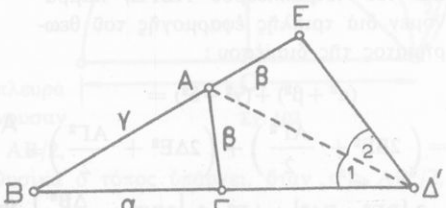
$$\delta_A^2=\beta\gamma-\frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\ \text{ἢ}$$

$$\delta_A^2=\beta\gamma\left\{1-\frac{\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2}\right\}.\ \text{Ὁμοίως,}\ \delta_B^2=\gamma\alpha\left\{1-\frac{\beta^2}{(\gamma+\alpha)^2}\right\},\ \delta_\Gamma^2=\alpha\beta\left\{1-\frac{\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2}\right\}.$$

**88. Μῆκος τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου.** α') (Θ). **Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ' τριγώνου ΑΒΓ** (βλ. σχ. 99) **πληροῖ τὴν μετρικὴν σχέσιν:**

$$A\Delta'^2=\Delta'B\cdot\Delta'\Gamma-AB\cdot A\Gamma.$$

*Ἀπόδειξις.* Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΑΒ (σχ. 99) ἂς λάβωμεν τμῆμα ΑΕ = ΑΓ. Τότε τρ. ΑΕΔ' = τρ. ΑΓΔ', συνεπῶς $\widehat{\Delta'_1}=\widehat{\Delta'_2}$ καὶ ἡ Δ'Α καθίσταται **ἐσωτερικὴ** διχοτόμος τοῦ τρ. ΒΔ'Ε. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα περὶ ἐσωτερικῆς διχοτόμου θὰ ἔχωμεν:




Σχ. 99

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\Delta'A^2 = \Delta'B \cdot \Delta'E - AB \cdot AE$ (§ **87**) ἤτοι $A\Delta'^2 = \Delta'B \cdot \Delta'\Gamma - AB \cdot A\Gamma$.

**β') Μῆκος τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.** Ἂν τεθῇ $A\Delta' = \delta'_A$, ἡ δειχθεῖσα σχέσις $\Delta'A^2 = \Delta'B \cdot \Delta'\Gamma - AB \cdot A\Gamma$ γράφεται βάσει τῶν τύπων τῆς § **59**, β':

$$\delta'^2_A = \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2} - \beta\gamma \Rightarrow$$

$$\delta'^2_A = \beta\gamma\left\{\frac{\alpha^2}{(\beta-\gamma)^2} - 1\right\},$$ ὅπου $\beta \neq \gamma$. Κυκλικῶς εὑρίσκομεν τὰ $\delta'^2_B$, $\delta'^2_\Gamma$.

(Ἀσκήσεις: 422, 423, 424, 425).

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ

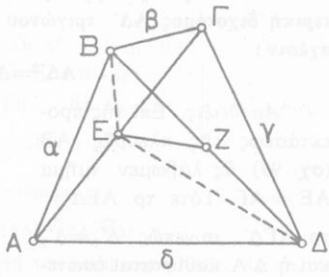
**89. α') Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων συναρτήσει τῶν πλευρῶν.**— Ἔστωσαν α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν τριγώνου καὶ $\mu_\alpha$, $\mu_\beta$, $\mu_\gamma$ τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοίχων διαμέσων. Τὸ θεώρημα τῆς § **82** δίδει: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}.$$

Κυκλικῶς λαμβάνομεν:

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4} \text{ καὶ } \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}.$$

**β') (Θ) — Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων του σὺν τῷ τετραπλασίῳ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του.**



Σχ. 100

Πράγματι ἀπὸ τὸ σχ. 100, ἂν Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, λαμβάνομεν διὰ τριπλῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου:

$$(\alpha^2 + \beta^2) + (\gamma^2 + \delta^2) =$$

$$= \left(2BE^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}\right) + \left(2\Delta E^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}\right) =$$

$$= 2\left\{BE^2 + E\Delta^2\right\} + A\Gamma^2 = 2\left\{2EZ^2 + \frac{\Delta B^2}{2}\right\} + A\Gamma^2 \text{ ἤτοι:}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2 + 4EZ^2.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**γ') (Θ) — Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του.**

**δ') Τόπος τῶν σημείων M, τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν**

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = c^2}$$

**ὅπου A, B σταθερὰ σημεῖα καὶ c δεδομένον τμῆμα.**

Ἐὰν O τὸ μέσον τοῦ AB καὶ M τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, τότε

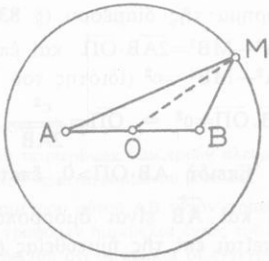
(1) $MA^2 + MB^2 = c^2$ (ἰδιότης τοῦ M)

(2) $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$

(θεώρ. διαμέσου) καὶ ἑπομένως:

$2\ MO^2 + \frac{AB^2}{2} = c^2$, ἐξ οὗ:

$$MO = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = \text{σταθερ. μῆκος}$$



Σχ. 101

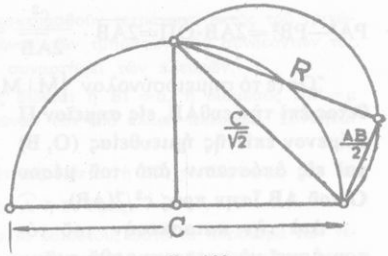
Ἑπομένως τὸ M ἀνήκει εἰς τὴν σταθερὰν περιφέρειαν $\left(O, \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}\right)$.

Ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον P τῆς περιφερείας ταύτης ἔχει τὴν ἰδιότητα: $PA^2 + PB^2 = c^2$, ὅπως εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

**Κατασκευὴ τῆς ἀκτῖνος τοῦ τόπου.**—Ἡ ἀκτὶς R τοῦ τόπου δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$R = \sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \quad \text{καὶ}$$

κατασκευάζεται ὡς κάθετος πλευρὰ ὀρθογ. τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν $c/\sqrt{2}$ καὶ ἑτέραν κάθετον τὴν $AB/2$, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχ. 102. Φυσικὰ ὁ τόπος ὑπάρχει, ὅταν $c^2 \geqq AB^2/2$, ἄλλως, εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.



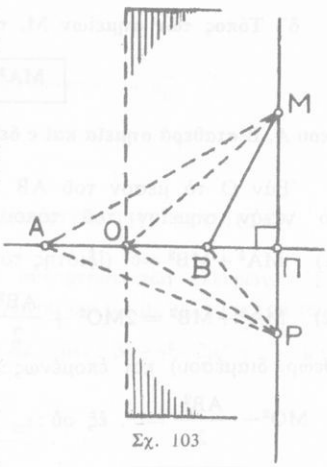
Σχ. 102

(Ἀσκήσεις: 399, 400, 401).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ

**90. α') Τόπος τῶν σημείων Μ τῶν πληρούντων τὴν μετρικὴν σχέσιν $MA^2-MB^2=c^2$, ὅπου Α, Β σταθερὰ σημεῖα καὶ c σταθερὸν τμῆμα.**



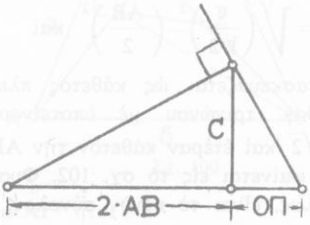
Σχ. 103

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, Π ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν εὐθ ΑΒ καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ. Τὸ δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου (§ **83**) δίδει: $MA^2-MB^2=2\overline{AB}\cdot\overline{O\Pi}$ καὶ ἐπειδὴ $MA^2-MB^2=c^2$ (ἰδιότης τοῦ Μ) $\Rightarrow$ $2\overline{AB}.\overline{O\Pi}=c^2 \Rightarrow \overline{O\Pi}=\dfrac{c^2}{2\overline{AB}}$.

Ἐπειδὴ $\overline{AB}\cdot\overline{O\Pi}>0$, ἕπεται ὅτι τὸ $\overrightarrow{O\Pi}$ καὶ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁμόρροπα, ἄρα τὸ Π κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Ο, Β) τῆς περιεχούσης ἐκεῖνο ἐκ τῶν δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β, τὸ ὁποῖον ἀπέχει, μονίμως, ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ Μ. Τὸ σημεῖον Π εἶναι πλήρως ὡρισμένον, διότι κεῖται ἐπὶ γνωστῆς ἡμιευθείας (Ο, Β) καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Ο αὐτῆς, ἀπόστασιν γνωστήν: $\dfrac{c^2}{2AB}$. Ἑπομένως τὰ σημεῖα Μ εὑρίσκονται ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Π.

Ἀντιστρόφως διὰ πᾶν σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ταύτης ἰσχύει (σχ. 103) $PA^2-PB^2=2\overline{AB}\cdot\overline{O\Pi}=2\overline{AB}\cdot\dfrac{c^2}{2\overline{AB}}=c^2$.

Ὥστε τὸ σημειοσύνολον $\{M \mid MA^2-MB^2=c^2\}$ **εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθΑΒ, εἰς σημεῖον Π κείμενον ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Ο, Β) καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ μέσου Ο τοῦ ΑΒ ἴσην πρὸς $c^2/2(AB)$.**



Σχ. 104

**Διὰ τὴν κατασκευὴν** τοῦ τόπου ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ΟΠ ἴσον πρὸς τὸ $\dfrac{c^2}{2(AB)}$. Τοῦτο γίνεται βάσει τῆς § **75**, δ' ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 104.

**β') Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις.** —

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα: $MA^2 - MB^2 = K$, ὅπου $K = c^2$ ἢ $K = -c^2$, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ευθ ΑΒ εἰς σημεῖον Π ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως**

$$2\overline{AB}\cdot\overline{O\Pi}=K$$

**ἔνθα Ο τὸ μέσον τοῦ σταθεροῦ τμήματος ΑΒ.**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

391. Ποῖον τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἰς τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα μήκη πλευρῶν:

i) 5, 12, 13.
ii) 4, 5, 6.
iii) 4, 5, 7.
iv) $\alpha$, $\beta$, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}$.

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐν λόγῳ γωνία.

392. Εἰς πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

393. Δοθέντος ἡμικυκλίου λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ΑΒ τυχὸν σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΓ, ὡς ἐπὶ διαμέτρων, γράφομεν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ δοθέντος, φέρομεν δὲ ἐκ τοῦ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο μέρη, εἰς ἃ χωρίζεται ὑπὸ τῆς καθέτου ἡ μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν ἐπιφάνεια, εἶναι ἴσοι.

394. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ διάμεσοι ἔχουν μήκη $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$.

395. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς τρίτης διαμέσου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

396. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν διαμέσων $\mu_\alpha$, $\mu_\beta$, $\mu_\gamma$, τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ πληροῦν τὴν σχέσιν: $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$;

397. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου κατασκευασθοῦν τετράγωνα ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τὰς γειτονικὰς κορυφὰς τῶν τετραγώνων τούτων, συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

398. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ $B\Gamma=\alpha$, ἡ διάμεσος $BM=\mu$ καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ $k^2$ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Συνθῆκαι δυνατότητος.

399. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ ΒΓ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἡ γωνία $\widehat{A}$ ἢ ἐν ὕψος.

400. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ τοιούτου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ Μ πρὸς δύο δεδομένας περιφερείας νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

401. Ὀρθὴ γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ στρέφεται περὶ τὴν σταθερὰν κορυφὴν της Α κειμένην ἐντὸς δοθέντος κύκλου. Ἐὰν αἱ πλευραί της τέμνουν εἰς Β καὶ Γ τὴν περιφέρειαν, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τῆς ΒΓ.

402. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς $\mu_\alpha$, τῆς $\beta^2-\gamma^2=k^2$ καὶ τῆς γωνίας τῆς διαμέσου $\mu_\alpha$ καὶ τῆς πλευρᾶς α.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

403. Συναρτήσει τῶν τεσσάρων πλευρῶν τραπεζίου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τοῦ συνδέοντος τὰ μέσα τῶν βάσεών του.

404. Τὸ ὡς ἄνω τμῆμα νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν βάσεων καὶ τῶν διαγωνίων.

405. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

406. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

407. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις τραπεζίου, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί.

408. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ τὰ τμήματα, ἅτινα ἀγόμενα ἐκ τῆς κορυφῆς Α χωρίζουν τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς ν ἴσα μέρη.

409. Ἐπὶ δοθέντος τόξου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

410. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ, οὗτινος ἡ κορυφὴ Α εἶναι σταθερά, αἱ δὲ Β καὶ Γ κινοῦνται ἐπὶ δοθείσης ἀπεράντου εὐθείας οὕτως, ὥστε $AB \cdot A\Gamma = \kappa^2$ (κ=δοθὲν τμῆμα).

411. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΓ τοῦ περὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ΜΔ ἡ ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, νὰ δειχθῇ πρῶτον ὅτι $MB = MA + M\Gamma$ καὶ κατόπιν ἡ σχέσις: $MB^2 = MA^2 + M\Gamma^2 + 4R \cdot M\Delta$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

412. Τριγώνου ΑΒΓ μένει σταθερὰ ἡ βάσις ΒΓ καὶ ἀκόμη, $\frac{\upsilon_\beta \cdot \upsilon_\gamma}{\upsilon_\alpha} = k$ (k=δοθὲν τμῆμα). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Α.

413. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος γνωρίζομεν τὴν γωνίαν $\widehat{A}$, τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τούτου ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ.

414. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ καὶ i) τὸ ἄθροισμα ἢ ii) τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἢ iii) ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων ἢ iv) τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων διαδοχικῶν πλευρῶν.

415. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗτινος δίδονται δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ.

(**Ὑπόδ.** Ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ Β παρ/λος πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Β′, τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒ′ΓΔ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς α καὶ β καὶ τὰς δύο ἄλλας διαδοχικὰς ἴσας πρὸς ΒΓ καὶ ΑΔ. Ὅθεν ἡ κατασκευή του ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην).

416. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι τὰ μέτρα τῶν διαδοχικῶν πλευρῶν ἁπλοῦ τετραπλεύρου δείξατε ὅτι:

i) Ἡ $|\alpha^2 + \gamma^2 - (\beta^2 + \delta^2)|$ ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον μιᾶς διαγωνίου ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης διαγωνίου ἐπὶ ταύτην.

ii) Ἡ σχέσις $\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \delta^2$ εἶναι χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῶν τετραπλεύρων τῶν ἐχόντων καθέτους διαγωνίους.

iii) Ἔστω ἀρθρωτὸν τετράπλευρον, δηλ. μεταβαλλόμενον τετράπλευρον, ἀλλὰ διατηροῦν σταθερὰ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του. Ἐὰν κατά τινα στιγμὴν τοῦτο ἔχῃ καθέτους διαγωνίους, τότε καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς μεταβολῆς του αἱ διαγώνιοί του παραμένουν κάθετοι.

417. Ἔστω ΑΔ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Δείξατε ὅτι, ἂν

$$A\Delta^2 = -\overline{\Delta\Gamma} \cdot \overline{\Delta B},$$

τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

418. **Ψευδοορθογώνιον** τρίγωνον ΑΒΓ καλεῖται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=90^{o}$. Ἂν ΑΔ τὸ ὕψος του, δείξατε ὅτι ἡ ἰδιότης

$$A\Delta^2=\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Delta B}$$

εἶναι χαρακτηριστικὴ διὰ τὰ ψευδοορθογώνια τρίγωνα.

Δείξατε ἐπίσης ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις: $AB^2+A\Gamma^2=4R^2$, ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρ. ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ὅτι ἡ σχέσις αὕτη δὲν εἶναι χαρακτηριστικὴ διὰ τὸ ψευδοορθογώνιον τρίγωνον.

419. Δίδεται ἄξων x'Ox, ἐπ' αὐτοῦ δύο σημεῖα A καὶ A' τοιαῦτα, ὥστε $\overline{OA}=-\overline{OA'}=\alpha>0$ καὶ ὀρθογώνιον παρ/μον A'ABB' μὲ $BA=B'A'=\beta$. Δύο μεταβλητὰ σημεῖα M καὶ M' κινοῦνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος οὕτως, ὥστε $\overline{AM}\cdot\overline{A'M'}=-\beta^2$. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν M'B' καὶ MB; Ποία ἡ θέσις τῆς περιφερείας διαμέτρου MM' ὡς πρὸς τὸν τόπον; Πῶς δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἓν ζεῦγος M, M' τῶν ἀνωτέρω σημείων, ὅταν δίδεται τὸ μέσον τοῦ MM';

420. Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\widehat{A}=90^{o}$ ἡ διχοτόμος $A\Delta=AB$, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις $B\Gamma^2=2\Gamma\Delta^2$.

421. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει σταθερὸν σημεῖον Σ ἀπέχον ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα M τοῦ ἐπιπέδου τὰ πληροῦντα τὴν μετρικὴν σχέσιν $MA^2+2MB^2+3M\Gamma^2=c^2$, ὅπου c δεδομένον τμῆμα. (Γενίκευσις). (**Ὑπόδ.** βλ. § **85**, β').

422. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 7, 12, 9 μέτρων.

423. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ β, γ καὶ ὅτι ἡ διάμεσος AM ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$ Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ διάμεσος AM συναρτήσει τῶν β καὶ γ. Νὰ γίνῃ ἐπίσης γεωμ. κατασκευὴ τοῦ τριγώνου.

424. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ k, τὸ μῆκος τῆς διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν δίδεται ὅτι $\beta\gamma=k^2$ καὶ ὅτι $\beta+\gamma=2\alpha$.

425. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ: $\delta^2_A+\delta^2_B+\delta^2_\Gamma\leqq\tau^2$.

426. Ἐὰν πολύγωνον μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ἀπὸ τὰς πλευρὰς περιττῆς τάξεως ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τάξεως ἀρτίας.

427. Ἐὰν O τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρ. ΑΒΓ κύκλου καὶ K τὸ τοῦ περιγεγραμμένου, νὰ δειχθῇ ὅτι $KO^2=R^2-2R\rho$.

(**Ὑπόδ.** Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἄσκ. 145 καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $KO^2$ ἐκ τοῦ τρ. KOM (M, μέσον τόξου $\widehat{B\Gamma}$) διὰ τοῦ ἐπεκτεταμένου Πυθαγορείου θεωρ.).

428. Ἐὰν K τὸ κέντρον τοῦ περὶ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου καὶ $O_1$ τὸ τοῦ παρὰ τὴν πλευρὰν α παρεγγεγραμμένου, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$KO^2_1=R^2+2R\rho_\alpha.$$

(**Ὑπόδ.** βλ. ἄσκ. 145. Ἡ $KO^2_1$ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τρ. $KO_1M$ (ἀμβλυγωνίου), ὅπου M τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$).

429. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα τὰ τριχοτομοῦντα τὴν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται πρὸ τὰ 5/9 τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης.

430. Ἐὰν G τὸ βαρυκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, νὰ δειχθῇ ὁ τύπος τοῦ Leibniz:

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2=3MG^2+GA^2+GB^2+G\Gamma^2$$

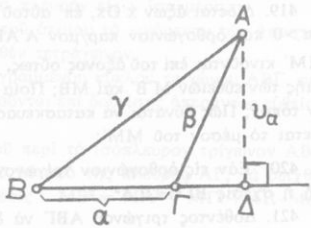
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

# ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

## Α' ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

### (Συνέχεια τῶν μετρικῶν σχέσεων ἐν τριγώνῳ)

**91. Ὑπολογισμὸς τῶν ὑψῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.—** Ἔστωσαν α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν τρ. ΑΒΓ καὶ $\upsilon_\alpha$ $\upsilon_\beta$, $\upsilon_\gamma$ τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους ΑΔ=$\upsilon_\alpha$ (σχ. 105) ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ προβολὴ ΓΔ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΒΓ. Τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα δίδει :



Σχ. 105.

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\overline{\Gamma B}\cdot\overline{\Gamma\Delta}\Rightarrow$$

$$\overline{\Gamma\Delta}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\overline{\Gamma B}}\Rightarrow\Gamma\Delta^2=\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}.$$

Τὸ πυθαγόρειον θεώρημα εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δίδει :

$$\upsilon_\alpha^2=\beta^2-\Gamma\Delta^2=\beta^2-\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}=$$

$$=\frac{(2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)(2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2}=\frac{\{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\}\{\gamma^2-(\alpha-\beta)^2\}}{4\alpha^2}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\gamma-\alpha+\beta)(\gamma+\alpha-\beta)}{4\alpha^2}\quad\text{καὶ}$$

$$(1)\qquad \upsilon_\alpha=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

Συνήθως θέτομεν : $\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ (ἡμιπερίμετρος), ὁπότε $\tau-\alpha=\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$, $\tau-\beta=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}$, $\tau-\gamma=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\upsilon_\alpha=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{2\tau\cdot2(\tau-\alpha)\cdot2(\tau-\beta)\cdot2(\tau-\gamma)}=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Τελικῶς :

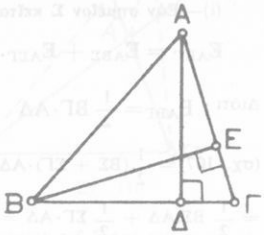
$$(2)\qquad \begin{aligned}\upsilon_\alpha&=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\\ \upsilon_\beta&=\frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\\ \upsilon_\gamma&=\frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.\end{aligned}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**92. Ἐμβαδὸν τριγώνου.** α΄) (Θ) — **Εἰς πᾶν τρίγωνον τὰ ὕψη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν πλευρῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἵστανται κάθετα.**

Ἤτοι, ἂν α, β, γ αἱ πλευραὶ καὶ $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη, τότε :

(1) $$\boxed{αυ_α = βυ_β = γυ_γ}$$



Σχ. 106

Ἔστωσαν ΑΔ καὶ ΒΕ δύο ὕψη τοῦ τρ. ΑΒΓ (σχ. 106) καὶ ἡ $\widehat{Γ}$ ὀξεῖα. Τότε προφανῶς τρ. ΑΔΓ≈τρ. ΒΕΓ

καὶ $$\frac{ΑΔ}{ΒΕ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \quad ἢ \quad \boxed{\frac{υ_α}{υ_β} = \frac{β}{α}} \Rightarrow αυ_α = βυ_β.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ δεικνύεται ὁμοίως καὶ ὅταν Γ>90°. Ὁμοίως, $βυ_β = γ \cdot υ_γ$. (Ἐξ ἄλλου οἱ τύποι (2) τῆς § **91** δεικνύουν τὸ θεώρημα).

β΄) **Ἐμβαδὸν τριγώνου.** Οἱ τύποι (1) δεικνύουν ὅτι δι' ἓν δεδομένον τρίγωνον τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῆς πλευρᾶς, δηλ. εἶναι μία σταθερὰ ποσότης διὰ τὸ θεωρούμενον τρίγωνον.

**Τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς οἱασδήποτε πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος καλοῦμεν «ἐμβαδὸν» τοῦ τριγώνου** (βλ. καὶ § **98** β΄).

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τρ. ΑΒΓ παριστῶμεν συνήθως μὲ Ε ἢ $Ε_{ΑΒΓ}$ δηλ.

(2) $$Ε_{ΑΒΓ} \underset{\text{ἐξ ὁρισμοῦ}}{=\!=} \frac{1}{2}αυ_α = \frac{1}{2}βυ_β = \frac{1}{2}γυ_γ = Ε_{ΒΓΑ} = Ε_{ΒΑΓ} \text{ κτλ.}$$

Οὕτω ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν f, ἡ ὁποία διὰ κάθε τρίγωνον Τ ἔχει μίαν ὡρισμένην θετικὴν τιμὴν f(T)=E, ἥτις ἐκφράζει τὸ (ἀνωτέρω ὁρισθὲν) ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου Τ. Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ταύτης f(T) εἶναι δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν τριγώνων καὶ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

Ὅπως θὰ δείξωμεν ἀμέσως κατωτέρω, ἡ συνάρτησις αὐτὴ f(T) $\left(= \frac{1}{2}\text{ βάσεως} \times \text{ὕψος}\right)$ εἶναι *προσθετική*, δηλ. ἂν ἓν τρίγωνον Τ διαμερισθῇ εἰς οἱονδήποτε πλῆθος τριγώνων $T_1$, $T_2$... $T_ν$, τότε

$$f(T) = f(T_1) + f(T_2) + ... + f(T_ν)$$

δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Τ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ Τ ἀναλύεται.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## 93. Ἰδιότητες τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν τριγώνων.

(i)—Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, τότε :

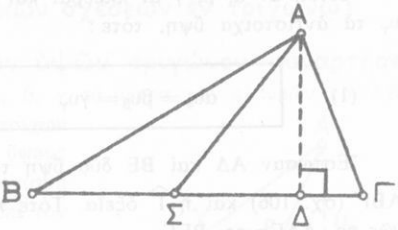
$$E_{ΑΒΓ} = E_{ΑΒΣ} + E_{ΑΣΓ}.$$

Διότι : $E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}\, ΒΓ \cdot ΑΔ$

(σχ. 107) $= \frac{1}{2}(ΒΣ + ΣΓ) \cdot ΑΔ =$

$= \frac{1}{2}\, ΒΣ . ΑΔ + \frac{1}{2}\, ΣΓ \cdot ΑΔ =$

$= E_{ΑΒΣ} + E_{ΑΣΓ}.$



Σχ. 107

**Πόρισμα.** Ἐὰν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ κεῖνται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Β, $Α_1$, $Α_2$, . . . $Α_ν$, Γ, τότε

$$E_{ΜΒΑΒΓ} = E_{ΜΒΑΒΑ_1} + E_{ΜΒΑΑ_1Α_2} + \ldots + E_{ΜΒΑΑ_νΓ}.$$

(ii)—Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τριγώνου ΑΒΓ, τότε :

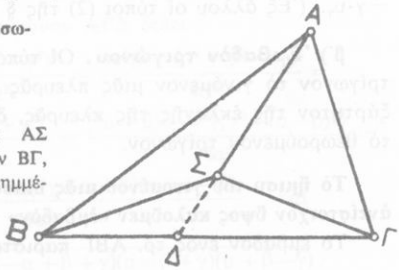
$$E_{ΑΒΓ} = E_{ΣΑΒ} + E_{ΣΒΓ} + E_{ΣΓΑ}.$$

Διότι ἡ προέκτασις τοῦ τμήματος ΑΣ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἔστω εἰς Δ, καὶ ἐφαρμόζοντες ἐπανειλημμένως τὸ προηγούμενον ἔχομεν

$$E_{ΑΒΓ} = E_{ΒΑΔ} + E_{ΓΔΑ} =$$

$$= \{E_{ΒΑΣ} + E_{ΒΣΔ}\} + \{E_{ΓΑΣ} + E_{ΓΣΔ}\}$$

$$= E_{ΒΑΣ} + E_{ΓΑΣ} + \{E_{ΒΣΔ} + E_{ΓΣΔ}\} = E_{ΣΑΒ} + E_{ΣΓΑ} + E_{ΣΒΓ}.$$



Σχ. 108

(iii)—Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ, ἀλλ' ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{Α}$, τότε :

$$E_{ΑΒΓ} = E_{ΣΑΒ} + E_{ΣΑΓ} - E_{ΣΒΓ}.$$

Διότι τὸ τμῆμα ΑΣ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἔστω εἰς Δ καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ (i) ἔχομεν :

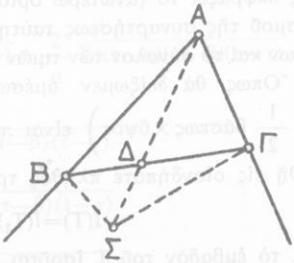
$$E_{ΣΑΒ} + E_{ΣΑΓ}$$

$$= (E_{ΑΒΔ} + E_{ΒΔΣ}) + (E_{ΑΔΓ} + E_{ΓΔΣ}) =$$

$$= \{E_{ΑΒΔ} + E_{ΑΔΓ}\} + \{E_{ΒΔΣ} + E_{ΓΔΣ}\} =$$

$$= E_{ΑΒΓ} + E_{ΣΒΓ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{ΣΑΒ} + E_{ΣΑΓ} - E_{ΣΒΓ} = E_{ΑΒΓ}.$$



Σχ. 109

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

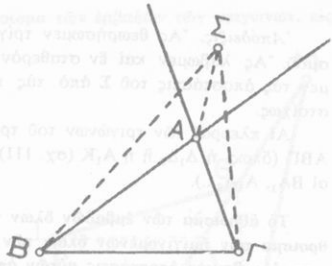
(iv) — **Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας, ἡ ὁποία εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ, τότε :**

$$E_{ΑΒΓ}=E_{ΣΒΓ}-E_{ΣΑΒ}-E_{ΣΑΓ}.$$

Διότι τότε τὸ Α εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τρ. ΣΒΓ (σχ. 110) καὶ συνεπῶς κατὰ τὸ (ii) ἰσχύει :

$$E_{ΣΒΓ}=E_{ΑΒΓ}+E_{ΣΑΒ}+E_{ΣΑΓ}.$$

ἐκ τούτου δὲ ἕπεται τὸ ἀποδεικτέον.



Σχ. 110

(v) — **Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ σημείου Σ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, καλοῦμεν ἀλγεβρικὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπό τινος πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τὸν φορέα τῆς πλευρᾶς, ἐφοδιασμένην μὲ τὸ πρόσημον + ἢ —, καθ' ὅσον τὸ Σ κεῖται ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸ ἴδιον ἡμιεπίπεδον μὲ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν ἢ εἰς τὸ ἀντίθετον. Τούτου τεθέντος, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν του πολλαπλασιασμένων ἐπὶ τὰς ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Σ.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν x, y, z αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ = α, ΓΑ = β, ΑΒ = γ ἀντιστοίχως.

Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου, τότε τὰ x, y, z εἶναι ὅλα θετικὰ καὶ ἴσα πρὸς τὰ ὕψη τῶν τριγώνων ΣΒΓ, ΣΓΑ, ΣΑΒ καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρ. (ii) δίδει :

$$E_{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\alpha x+\frac{1}{2}\beta y+\frac{1}{2}\gamma z. \tag{1}$$

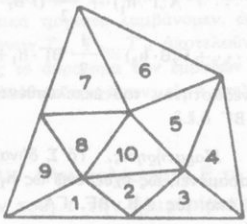
Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ, ἀλλ' ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$ (σχ. 109), τότε ἡ x εἶναι $<0$, ἐνῷ y καὶ z θετικαί. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ. ΣΒΓ εἶναι τότε $-\frac{1}{2}\alpha x$, ἐνῷ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τρ. ΣΑΒ, τρ. ΣΑΓ εἶναι $\frac{1}{2}\gamma z$, $\frac{1}{2}\beta y$ ἀντιστοίχως καὶ ἡ σχέσις τοῦ θεωρ. (iii) γίνεται

$$E_{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\gamma z+\frac{1}{2}\beta y+\frac{1}{2}\alpha x,$$ ἤτοι ἡ (1) πάλιν ἰσχύει.

Ἂν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς $\widehat{ΒΑΓ}$ (σχ. 110), τότε τὰ y καὶ z εἶναι ἀρνητικά, τὸ x θετικὸν καὶ ἡ σχέσις τοῦ θεωρ. (iv) ὁδηγεῖ πάλιν εἰς τὴν ἰσότητα (1).

Τέλος, ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τοῦ φορέως μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τρ. ΑΒΓ, τότε μία ἐκ τῶν ἀποστάσεων x, y, z εἶναι μηδὲν καὶ ὁ τύπος (1) ἰσχύει.

**94. Ἡ προσθετικότης τοῦ ἐμβαδοῦ.** α') Τριγωνισμός. — **Ἔστω εἰς διαμερισμὸς ἑνὸς ἁπλοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα οὕτως, ὥστε νὰ πληροῦνται αἱ ἑπόμεναι συνθῆκαι : τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ διεχωρίσθη τὸ πολύγωνον λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον μεταξύ των ἔχουν ἢ ἔχουν μίαν κορυφὴν κοινὴν ὡς μόνον κοινὸν σημεῖον ἢ ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ οὐδὲν ἕτερον σημεῖον κοινόν. Εἰς τεμαχισμὸς τοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα πληροῦντα τὰς ἀνωτέρω συνθήκας λέγεται «τριγωνισμὸς» τοῦ πολυγώνου σχ. 110α.**



Σχ. 110α

β') (Θ) — **Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ δοθὲν τρίγωνον διαμερίζεται δι' ἑνὸς οἱουδήποτε τριγωνισμοῦ.**

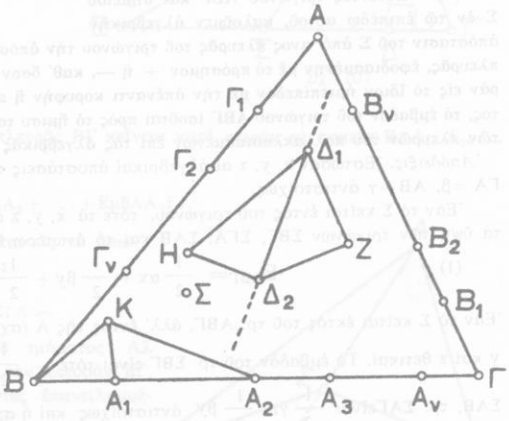
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ἂς θεωρήσωμεν τρίγωνον ΑΒΓ διῃρημένον εἰς τρίγωνα διὰ τριγωνισμοῦ. Ἂς λάβωμεν καὶ ἓν σταθερὸν σημεῖον Σ ἐντὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ καὶ ἂς καλέσωμεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ διὰ τῶν $h_1$, $h_2$, $h_3$ ἀντιστοίχως.

Αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων τοῦ τριγωνισμοῦ κεῖνται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ (ὅπως ἡ $\Delta_1\Delta_2$ ἢ ἡ $A_1K$ (σχ. 111)) ἢ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τρ. ΑΒΓ (ὅπως αἱ $BA_1$, $A_1A_2$...).

**Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ τριγωνισμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιγινομένων ὅλων τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Σ (§ 93, (ν), (1)).**

Θεωρήσωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα τοῦ τριγωνισμοῦ, ἔστω $\Delta_1\Delta_2$, κείμενον ἐντὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ. Τὸ τμῆμα τοῦτο ἀνήκει εἰς δύο τρίγωνα τοῦ τριγωνισμοῦ, τὰ $\Delta_1H\Delta_2$ καὶ $\Delta_1Z\Delta_2$, κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς $\Delta_1\Delta_2$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ Η καὶ Ζ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς $\Delta_1\Delta_2$, αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὴν $\Delta_1\Delta_2$ ἀναφορικῶς πρὸς τὰ τρίγωνα $H\Delta_1\Delta_2$ καὶ $Z\Delta_1\Delta_2$ εἶναι προφανῶς ἀντίθετοι: h ὡς πρὸς τὸ τρ. $\Delta_1H\Delta_2$ καὶ —h ὡς πρὸς τὸ τρ. $Z\Delta_1\Delta_2$ (ἂν δὲν εἶναι μηδενικαί). Ἑπομένως κατὰ τὴν ἄθροισιν ὅλων τῶν ἡμιγινομένων τὰ $\frac{1}{2}\Delta_1\Delta_2\cdot h$ καὶ $-\frac{1}{2}\Delta_1\Delta_2\cdot h$ θὰ ἐξαλειφθοῦν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ τμήματα, ὅπως τὸ $A_1K$. Οὕτω ὅλα τὰ ἡμιγινόμενα τὰ ἀφορῶντα τὰ ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τριγωνισμοῦ κατὰ τὴν ἄθροισιν ἐξαλείφονται καὶ μένουν μόνον τὰ ἡμιγινόμενα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ τμήματα τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς περιμέτρου. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ τριγωνισμοῦ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2}(BA_1\cdot h_1 + A_1A_2h_1 + \dots + A_\nu\Gamma\cdot h_1) + \frac{1}{2}(\Gamma B_1\cdot h_2 + B_1B_2\cdot h_2 + \dots + B_\nu A\cdot h_2) + \frac{1}{2}(A\Gamma_1\cdot h_3 + \Gamma_1\Gamma_2\cdot h_3 + \dots + \Gamma_\nu B\cdot h_3) = \frac{1}{2}B\Gamma\cdot h_1 + \frac{1}{2}\Gamma A\cdot h_2 + \frac{1}{2}AB\cdot h_3$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἐκτελεσθέντος τριγωνισμοῦ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 111

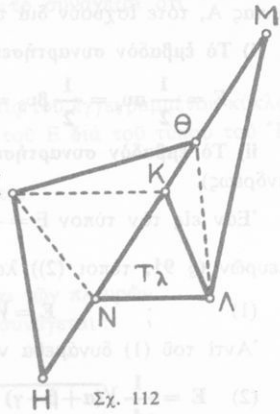
*Παρατήρησις.* Τὸ Σ δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ἐκτὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ, ὁπότε ἡ ἀπόδειξις παραμένει, ὡς ἔχει, ἐνῷ ὡς $h_1$, $h_2$, $h_3$ θὰ θεωροῦνται αἱ προσημασμέναι ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.

**γ') (Θ) —Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ ἀναλυθῇ καθ' οἱονδήποτε τρόπον εἰς ἕτερα τρίγωνα,**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ. ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τρίγωνον τοῦτο διεμερίσθη.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἀνελύθη εἰς σύστημα τριγώνων $T_1, T_2, \ldots T_\lambda, \ldots T_\nu$, τὰ ὁποῖα εἶναι μεταξύ των συνεχόμενα καὶ ἔχουν ὡς συνένωμα τὸ τρ. ΑΒΓ. Ἐὰν αἱ συνθῆκαι τοῦ τριγωνισμοῦ δὲν πληροῦνται, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὡρισμέναι κορυφαὶ τριγώνων $T_\lambda$ εὑρίσκονται εἰς ἐσωτερικὰ σημεῖα ὡρισμένων πλευρῶν ἄλλων τριγώνων. Ἂν ὅμως ἑνώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς ἐπὶ τῶν πλευρῶν γειτονικῶν τριγώνων κειμένας κορυφὰς τῶν $T_\lambda$ μὲ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τοῦ γειτονικοῦ τριγώνου (σχ. 112) (ἐστιγμέναι γραμμαί), λαμβάνομεν ἓν νέον σύστημα τριγώνων, $T'_1, T'_2, \ldots T'_\mu$ (ΙΗΝ, ΙΝΚ, ΙΚΘ, ΝΛΚ, ΚΘΛ, ΘΜΛ... καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς). Ὁ διαμερισμὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ εἰς τὰ τρίγωνα $T'_1, T'_2 \ldots T'_\mu$ εἶναι, τώρα, εἰς **τριγωνισμός.**



Σχ. 112

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων $T'_1, T'_2, \ldots T'_\mu$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $T_1, T_2, \ldots T_\nu$, διότι κατὰ τὸν διαμερισμὸν ἑνὸς τριγώνου $T_\rho$ (ὅπως τοῦ ΗΙΘ ἢ τοῦ ΚΛΜ) εἰς δύο ἢ τρία τρίγωνα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προκυπτόντων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $T_\rho$ (§ 93). Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $T'_1, T'_2, \ldots T'_\mu$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ. Ἄρα καὶ τὸ ἴσον ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $T_1, T_2, \ldots T_\nu$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ ὅ.ἔ.δ.

**δ') Ἐπέκτασις εἰς τὰ κυρτὰ πολύγωνα. (Θ)— Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλυθῇ κυρτὸν πολύγωνον εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπὶ μέρους τριγώνων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ** (δηλ. εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα).

*Ἀπόδειξις.* Ἂς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς κυρτὸν πολύγωνον διῃρημένον εἰς τρίγωνα διὰ τριγωνισμοῦ τινος (ἐδ. α'), ἂς λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Σ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου καὶ ἂς καλέσωμεν $h_1, h_2, h_3, \ldots h_\nu$ τὰς ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_\nu A_1$ τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$. Σκεπτόμενοι ἀκριβῶς, ὅπως εἰς τὸ ἐδάφ. β', εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ τριγωνισμοῦ εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{1}{2} A_1A_2 \cdot h_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot h_2 + \cdots + \frac{1}{2} A_\nu A_1 \cdot h_\nu$, δηλ. παντελῶς ἀνεξάρτητον τοῦ ἐκτελεσθέντος τριγωνισμοῦ.

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ πολύγωνον ἀνελύθη εἰς σύστημα τριγώνων $T_1, T_2 \ldots T_\lambda, \ldots T_\rho$, ὧν τὰ ἐσωτερικὰ εἶναι ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ των, ἀλλὰ τὸ σύστημα $T_1, T_2, \ldots T_\rho$ δὲν πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ τριγωνισμοῦ. Τότε φέροντες βοηθητικὰ τμήματα λαμβάνομεν, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐδάφ. γ', ἓν νέον σύστημα τριγώνων $T'_1, T'_2, \ldots T'_\mu$ ἀποτελούντων τριγωνισμὸν καὶ ἐχόντων ἄθροισμα ἐμβαδῶν ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $T_1, T_2, \ldots T_\rho$. Ἑπομένως καὶ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς ἃ ἀνελύθη τὸ πολύγωνον, εἶναι τὸ ἴδιον.

**95.—Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου.** Ἂν καλέσωμεν Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ.ΑΒΓ, α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν του, τ τὴν ἡμιπερίμετρον, ρ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ R τὴν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

του καὶ τέλος $\rho_\alpha$ τὴν ἀκτῖνα τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τοῦ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τότε ἰσχύουν διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε οἱ κάτωθι τύποι :

**i) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει βάσεως καὶ ὕψους**

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma \text{ (βλ. § 92)}$$

**ii) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῶν πλευρῶν.** (Τύπος **Ἥρωνος** τοῦ Ἀλεξανδρέως).

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ ἀντικατασταθῇ τὸ $\upsilon_\alpha$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν (§ 91, τύποι (2)) λαμβάνομεν

$$(1) \qquad E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Ἀντὶ τοῦ (1) δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸν

$$(2) \quad E = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

**iii) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῶν ρ καὶ τ.**

Τὸ ἔγκεντρον Ο χωρίζει τὸ τρ. ΑΒΓ εἰς τρία τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ ἔχοντα βάσεις τὰς α, β, γ καὶ ὕψη ἴσα πρὸς ρ. Ἑπομένως ἡ σχέσις $E_{ΑΒΓ} = E_{ΟΒΓ} + E_{ΟΓΑ} + E_{ΟΑΒ}$ (βλ. § 93, (ii)) δίδει :

$$E = \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\rho \text{ δηλ.}$$

$$E = \tau\rho.$$

**iv) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῶν $\rho_\alpha$ καὶ τ—α.**

Ἐὰν $O_1$ τὸ παράκεντρον τὸ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τότε (§93, iii) $E_{ΑΒΓ} = E_{O_1ΑΒ} + E_{O_1ΑΓ} - E_{O_1ΒΓ}$ καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $O_1ΑΒ$, $O_1ΑΓ$ καὶ $O_1ΒΓ$ ἔχουν ὕψη ἐκ τοῦ $O_1$ ἴσα πρὸς $\rho_\alpha$ καὶ βάσεις γ, β, α ἀντιστοίχως, ἔχομεν :

$$E = \frac{1}{2}\gamma\rho_\alpha + \frac{1}{2}\beta\rho_\alpha - \frac{1}{2}\alpha\rho_\alpha = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\rho_\alpha \text{ δηλ.}$$

$$E = (\tau-\alpha)\rho_\alpha.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν : $E = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma$.

**v) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῶν α, β, γ, R.**

Ἡ μετρικὴ σχέσις $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$ (§ 84) δίδει διὰ πολλ/σμοῦ ἐπὶ α : $\alpha\beta\gamma = 2R\alpha\upsilon_\alpha$. Ἀλλὰ $\alpha\upsilon_\alpha = 2E$, συνεπῶς

$\alpha\beta\gamma = 2R\cdot 2E$ ἢ $\boxed{\alpha\beta\gamma = 4RE}$. Ὥστε :

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**96. Ὑπολογισμὸς τῶν ρ, $ρ_α$, R συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.** Ἐκ τοῦ τύπου $E = τρ$ συνάγεται ὅτι

$$(1) \qquad ρ = \frac{E}{τ}.$$

Διὰ τοῦ (1) δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου συναρτήσει τῶν πλευρῶν, ἀντικαθιστωμένου τοῦ E διὰ τοῦ τύπου τοῦ Ἥρωνος.

—Ἐκ τοῦ τύπου $E = (τ - α)ρ_α$ συνάγεται :

$$(2) \qquad ρ_α = \frac{E}{τ - α}.$$

Ἐκ τοῦ (2) ὑπολογίζεται ἡ $ρ_α$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

—Ἐκ τοῦ τύπου $αβγ = 4RE$ (§ **95**, ν) συνάγεται :

$$(3) \qquad R = \frac{αβγ}{4E}.$$

Διὰ τοῦ (3) ὑπολογίζεται ἡ R συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

## 97. Σύγκρισις τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων.

**α') (Θ) — Ἐὰν ἡ κορυφὴ τριγώνου μετακινηθῇ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου δὲν βλάπτεται.**

Ἤτοι, ἂν $AA' // BΓ \Rightarrow ΕμβABΓ = ΕμβA'BΓ$.

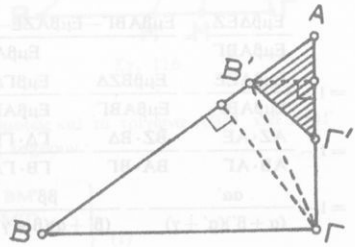
**β') (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἐμβαδὰ των εἶναι ἀνάλογα τῶν ὑψῶν των** (τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς ἴσας βάσεις). **Ἐὰν ἔχουν ἴσα ὕψη, τὰ ἐμβαδά των εἶναι ἀνάλογα τῶν βάσεων.**

$\left(\text{Ἄμεσος συνέπεια τοῦ τύπου } E = \frac{1}{2} αυ_α\right)$.

**γ') (Θ) — Ἐὰν μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς μίαν γωνίαν ἑνὸς ἄλλου, τότε τὰ ἐμβαδά των εἶναι ὡς τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας γωνίας.**

*Ἀπόδειξις.* Δυνάμεθα διὰ κινήσεως νὰ φέρωμεν τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ ἐφαρμόσουν. Τότε τὰ τρίγωνα λαμβάνουν τὴν θέσιν τοῦ σχ. 113, δηλ. τὸ ἓν εἶναι τὸ τρ. AB'Γ' καὶ τὸ ἄλλο τὸ τρ. ABΓ.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν AB'Γ' καὶ ABΓ μεταξύ των, ἀρκεῖ νὰ τὰ συγκρίνωμεν πρὸς ἓν τρίτον. Φέρομεν τὴν B'Γ, ὁπότε τὰ ἐμβαδὰ τοῦ AB'Γ' καὶ τοῦ βοηθητικοῦ τριγώνου



Σχ. 113

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΒ΄Γ συγκρίνονται, διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν ἐκ τῆς κορυφῆς Β΄ τὸ ἴδιο ὕψος (ἐδ. β΄). Ἐπίσης τὸ ἐμβαδὸν τοῦ βοηθητικοῦ ΑΒ΄Γ καὶ τοῦ ΑΒΓ συγκρίνονται, διότι τὰ τρίγωνα ἔχουν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ τὸ ἴδιον ὕψος. Ἑπομένως :

$$(1)\qquad \frac{\text{Εμβ}\Alpha\text{Β΄Γ΄}}{\text{Εμβ}\Alpha\text{Β΄Γ}}=\frac{\Alpha\text{Γ΄}}{\Alpha\text{Γ}} \quad \text{καὶ}$$

$$(2)\qquad \frac{\text{Εμβ}\Alpha\text{Β΄Γ}}{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΒΓ}}=\frac{\Alpha\text{Β΄}}{\Alpha\text{Β}}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

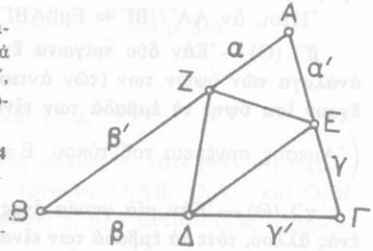
$$\frac{\text{Εμβ}\Alpha\text{Β΄Γ΄}}{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΒΓ}}=\frac{\Alpha\text{Β΄}\cdot\Alpha\text{Γ΄}}{\Alpha\text{Β}\cdot\Alpha\text{Γ}} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

**δ΄) (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας παραπληρωματικάς, τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας**

Ἀποδεικνύεται, ὅπως τὸ προηγούμενον.

**ε΄) Αἱ κορυφαὶ τοῦ ἑνὸς κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου.**

Πρὸς σύγκρισιν τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΔΕΖ καὶ ΑΒΓ τοῦ σχ. 114, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΖ=α, ΑΕ=α΄, ΒΖ=β΄, ΒΔ=β, ΓΔ=γ΄, ΓΕ=γ ἢ τοὺς λόγους, ΑΖ : ΖΒ, ΒΔ : ΔΓ, ΓΕ : ΕΑ.



Σχ. 114

Ἀπὸ τὰ θεωρήματα τῆς § 93 ἢ τῆς § 94 συνάγεται εὔκολα ὅτι ΕμβΑΒΓ=ΕμβΖΔΕ+ +ΕμβΑΖΕ+ΕμβΒΖΔ+ΕμβΓΔΕ.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων εἶναι ἡ ἀκόλουθος :

$$\frac{\text{Εμβ}\Delta\text{ΕΖ}}{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΒΓ}}=\frac{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΒΓ}-\text{Εμβ}\Alpha\text{ΖΕ}-\text{Εμβ}\text{ΒΖ}\Delta-\text{Εμβ}\Gamma\Delta\text{Ε}}{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΒΓ}}=$$

$$=1-\frac{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΖΕ}}{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΒΓ}}-\frac{\text{Εμβ}\text{ΒΖ}\Delta}{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΒΓ}}-\frac{\text{Εμβ}\Gamma\Delta\text{Ε}}{\text{Εμβ}\Alpha\text{ΒΓ}}=(\text{ἐδάφ. γ΄})$$

$$=1-\frac{\Alpha\text{Ζ}\cdot\Alpha\text{Ε}}{\Alpha\text{Β}\cdot\Alpha\text{Γ}}-\frac{\text{ΒΖ}\cdot\text{ΒΔ}}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΓ}}-\frac{\Gamma\Delta\cdot\Gamma\text{Ε}}{\Gamma\text{Β}\cdot\Gamma\Alpha}=$$

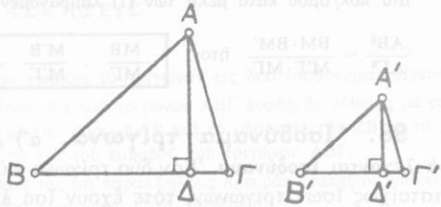
$$=1-\frac{\alpha\alpha'}{(\alpha+\beta')(\alpha'+\gamma)}-\frac{\beta\beta'}{(\beta'+\alpha)(\beta+\gamma')}-\frac{\gamma\gamma'}{(\gamma'+\beta)(\gamma+\alpha')}.$$

**ς΄) Λόγος ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων.** Ἔστω τρ. **ΑΒΓ≈τρ.Α΄Β΄Γ΄**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μὲ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$

$= \frac{\Gamma A}{\Gamma' A'} = \lambda$ καὶ ἔστωσαν ΑΔ καὶ Α΄Δ΄ δύο ὁμόλογα ὕψη αὐτῶν. Ὑποτιθεμένης τῆς $\widehat{B}$ ὀξείας ἔχομεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ, Α΄Β΄Δ΄:



Σχ. 115

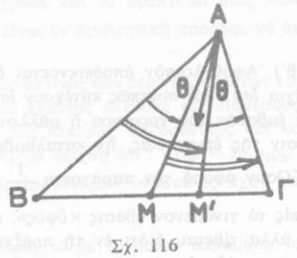
$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \quad \text{συνεπῶς} \quad \boxed{\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}}.$$

Ἑπομένως $\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{\frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta}{\frac{1}{2} B'\Gamma' . A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \cdot \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \cdot \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$.

Ὥστε: $\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{B\Gamma^2}{B'\Gamma'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{A\Gamma^2}{A'\Gamma'^2} = \lambda^2$.

**Τῶν ὁμοίων τριγώνων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν.** Ἡ *«ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν»*.

**ζ΄) Ἐφαρμογὴ εἰς τὰς ἰσογωνίους εὐθείας. (Θ)—Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ τριγώνου τέμνεται εἰς Μ καὶ Μ΄ ὑπὸ δύο εὐθειῶν ΑΜ καὶ ΑΜ΄ συμμετρικῶν ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$, τότε τὸ γινόμενον τῶν λόγων: $\frac{MB}{M\Gamma}$ καὶ $\frac{M'B}{M'\Gamma}$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$** (Αἱ ἀνωτέρω εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΜ΄ λέγονται *ἰσογώνιοι ὡς πρὸς τὴν γωνίαν* $\widehat{A}$).



Σχ. 116

*Ἀπόδειξις*. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΜ΄Γ ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην: $B\widehat{A}M = M'\widehat{A}\Gamma$ καὶ εἶναι καὶ ἰσοϋψῆ ἐκ τοῦ Α. Ὁμοίως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΜ΄ καὶ ΑΜΓ (σχ. 116). Συμφώνως πρὸς τὰ ἐδάφ. β΄ καὶ γ΄ θὰ ἰσχύουν:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{εμβ}\cdot ABM}{\text{εμβ}\cdot AM'\Gamma} &= \frac{AB\cdot AM}{AM'.A\Gamma} = \frac{BM}{M'\Gamma} \\ \frac{\text{εμβ}\cdot ABM'}{\text{εμβ}\cdot AM\Gamma} &= \frac{AB\cdot AM'}{AM\cdot A\Gamma} = \frac{BM'}{M\Gamma} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

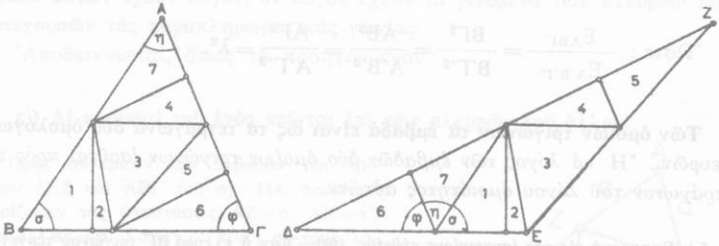
Διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) λαμβάνομεν:

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{BM \cdot BM'}{M'\Gamma \cdot M\Gamma} \quad \text{ἤτοι} \quad \boxed{\frac{MB}{M\Gamma} \cdot \frac{M'B}{M'\Gamma} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}} \quad \text{ὅ ἔ. δ.}$$

**98. Ἰσοδύναμα τρίγωνα.** α') **Δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδὰ λέγονται ἰσοδύναμα.** Ἐὰν δύο τρίγωνα σύγκειται ἀπὸ ἴσον πλῆθος ἀντιστοίχως ἴσων τριγώνων, τότε ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ (§ **94**, γ') καὶ ἑπομένως εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ἤτοι ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσα ἐμβαδά, τότε ἀναλύονται εἰς ἴσον πλῆθος τριγώνων ἀντιστοίχως ἴσων.

Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἰσοδύναμα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν: $E_{AB\Gamma} = E_{\Delta EZ}$ ἢ ΕμβΑΒΓ = ΕμβΔΕΖ.

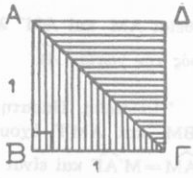
Τὸ σχ. 117 δεικνύει δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα (δηλ. βάσις × ὕψος τοῦ ἑνὸς = βάσις × ὕψος τοῦ ἄλλου), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀναλυθῆ εἰς ἴσα τρίγωνα (τὰ φέροντα τοὺς ἰδίους ἀριθμούς).




Σχ. 117

β') Ἀφοῦ λοιπὸν ἀποδεικνύεται ὅτι δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδὰ εἶναι *«κατὰ τεμάχια ἴσα»* καὶ συνεπῶς κατέχουν *ἴσην ἔκτασιν*, ἕπεται ὅτι τὸ εἰς τὰ προηγούμενα ὁρισθὲν ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἢ μᾶλλον τὸ γινόμενον «βάσις × ὕψος» χαρακτηρίζει τὴν ἔκτασιν τῆς ἐπιφανείας, ἣν καταλαμβάνει τὸ τρίγωνον.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν παράγοντα $\frac{1}{2}$, τὸν ὁποῖον συνάπτομεν εἰς τὸ γινόμενον «βάσις × ὕψος», οὗτος δὲν εἶναι οὐσιώδης, ἀλλὰ τίθεται, διότι ἐν τῇ πράξει εἶναι ἐπιθυμητὸν νὰ ἔχωμεν μονάδα ἐπιφανειῶν τὸ μοναδιαῖον τετράγωνον, δηλ. τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τῶν μηκῶν. Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 118) μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς (αὐθαιρέτως) ἐκλεγείσης μονάδος ἐπιφανειῶν ΑΒΓΔ, διὰ τοῦτο θέλομεν νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 1/2, δηλ. $\frac{1}{2}$ ΒΓ × ΑΒ.




Σχ. 118

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

431. Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου χωρίζει τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

432. Ἐὰν τὸ μέσον Ε τῆς διαμέσου ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἑνωθῇ δι' εὐθείας μὲ τὴν κορυφὴν Γ καὶ τὸ μέσον Ζ τῆς ΕΓ μὲ τὴν κορυφὴν Β καὶ τὸ μέσον Η τῆς ΖΒ μὲ τὸ Ε, τὸ τρίγωνον ΕΖΗ ἔχει ὡς ἐμβαδὸν τὸ 1/8 τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

433. Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς τραπεζίου καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων εἶναι ἰσοδύναμα.

434. Πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

435. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ προεκταθοῦν πᾶσαι κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν περιστροφῆς καὶ ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ τοιαῦτα, ὥστε ΒΑ΄ = λ·ΒΓ, ΓΒ΄ = μ.ΓΑ, ΑΓ΄ = ν.ΑΒ, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ.

436. Ἐὰν προεκτείνωμεν πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς ἑκάστην διάμεσον τριγώνου μέχρι διπλασιασμοῦ, τίς ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀρχικοῦ;

437. Συναρτήσει τοῦ μήκους α τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

438. Ἐὰν α, β δύο πλευραὶ τριγώνου, τότε, ἂν $\alpha > \beta$. θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \upsilon_\alpha \geqq \beta + \upsilon_\beta$.

439. Τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς διαμέσους ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰ 3/4 τοῦ τρ. ΑΒΓ.

440. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν τριῶν ὑψῶν του.

441. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν τριῶν διαμέσων του.

442. Συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀκτίνων ὅλων τῶν περιφερειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ διέρχεται διὰ δύο κορυφῶν τοῦ τριγώνου καὶ νὰ ἐφάπτεται μιᾶς πλευρᾶς.

443. Ἐὰν αἱ πλευραὶ α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, νὰ δειχθῇ ὅτι $6R\rho = \alpha\gamma$.

444. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ R, ρ, $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ἀντιστοίχως δοθέντος τριγώνου, τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς διαμέσους τοῦ δοθέντος καὶ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων αὐτοῦ, νὰ δειχθῇ ὅτι : $4R\rho^2 = 3\rho_1\rho_2\rho_3$.

445. Νὰ μετασχηματισθῇ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ἰσοδύναμον ἰσοσκελὲς ἔχον γωνίαν κορυφῆς ἴσην μὲ τὴν $\widehat{A}$.

446. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ μένει σταθερά, τὸ δὲ τρίγωνον παραμένει ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς μεταβλητῆς πλευρᾶς ΑΒ κατασκευαζόμενον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τίς ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Α;
(**Ὑπόδ.** βλ. ἄσκ. 372).

447. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται τὰ μήκη α, β, γ τῶν πλευρῶν του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τρ. ΑΒΓ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ. ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ἀκόμη ὅτι ὁ λόγος οὗτος οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ 1/4, ἰσοῦται δὲ μὲ 1/4 μόνον, ὅταν τὸ τρ. ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον.

448. Εἰς τὰς κορυφὰς Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τεμνομένας εἰς τὸ Α΄, ἐκ δὲ τοῦ Α΄ φέρομεν καθέτους Α΄Β΄ καὶ Α΄Γ΄ ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διάμεσος ΑΜ τοῦ τρ. ΑΒΓ εἶναι κάθετος τῇ Β'Γ' καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν (Α'Β'Γ') : (ΑΒΓ) συναρτήσει τῆς ΒΓ=α καὶ τῆς ἀκτῖνος R.

449. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν δύο εὐθείας ἰσογωνίους ὡς πρὸς τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ καὶ τεμνούσας εἰς Δ καὶ Ε τὴν πλευρὰν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι : αἱ προβολαὶ τῶν Δ καὶ Ε ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ εἶναι ὁμοκυκλικαί.

450. Εἰς τὸ ἀνωτέρω, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν Δ καὶ Ε ἀπὸ τῆς ευθ ΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τῆς ευθ ΑΓ.

451. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν μήκη 20, 51, 65.

452. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἀληθεύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}$$

$$E=\sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$$

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_\alpha}=\frac{2}{\upsilon_\alpha}.$$

453. Ἔστω τρ. ΑΒΓ. i) Νὰ δειχθῇ ὑπολογιστικῶς ἡ σχέσις :

$$\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma-\rho=4R$$

ii) Χρησιμοποιοῦντες τὴν i) κατὰ τὴν ἄσκ. 148 δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν βελῶν τῶν τριῶν τόξων $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$, $\widehat{AB}$ τοῦ περικύκλου (ἀντιστοίχων πρὸς τὰς ἐγγεγραμμένας $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$) ἰσοῦται μὲ 2R−ρ.

454. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας καὶ δύο παραπληρωματικάς, τότε αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὡς αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι τῶν παραπληρωματικῶν (βλ. θεωρ. § 97, γ' καὶ δ').

ii) Βάσει τοῦ προηγουμένου νὰ δειχθῇ τὸ θεώρημα τοῦ Newton : «Εἰς πᾶν κυρτὸν περιγράψιμον τετράπλευρον αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν διέρχονται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου». (Ὑπόδ. : Ἔστωσαν Ε, Θ, Ζ, Η τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Τότε ἡ ΕΖ διαιρεῖ τὴν διαγώνιον ΒΔ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον ΕΒ/ΖΔ καὶ ἡ ΗΘ διαιρεῖ τὴν αὐτὴν διαγώνιον εἰς τὸν ἴσον λόγον ΒΘ/ΔΗ· ὅθεν αἱ ΕΖ καὶ ΗΘ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΒΔ).

## Β' ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ — — ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

**99. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου.** Ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν **§ 94, δ', ἐὰν κυρτὸν πολύγωνον ἀναλυθῇ καθ' οἱονδήποτε τρόπον εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπὶ μέρους τούτων τριγώνων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό, δηλαδὴ εἶναι παντελῶς ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ὁ διαμερισμὸς τοῦ πολυγώνου. Τὸ σταθερὸν τοῦτο ἄθροισμα καλεῖται ἐμβαδὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου.**

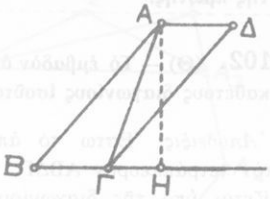
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**100. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.** Ἔστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, ΒΓ μία πλευρά του (βάσις) καὶ ΑΗ τὸ ἐπὶ ταύτην ὕψος (σχ. 119).

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμόν, εἶναι:

Εμβ ΑΒΓΔ = ΕμβΑΒΓ + Εμβ ΑΓΔ =

$= 2\text{Εμβ ΑΒΓ} = 2 \cdot \frac{1}{2}\text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΗ} = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΗ}.$

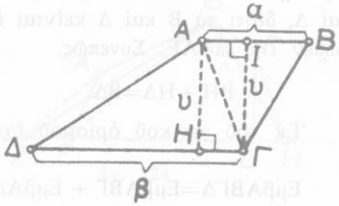


Σχ. 119

**Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.**

**Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου παρ/μου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο διαστάσεών του.**

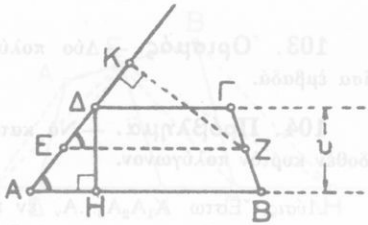
**101. Ἐμβαδὸν τραπεζίου.** Ἔστω ΑΒΓΔ τραπέζιον (σχ. 120) ἔχον βάσεις ΑΒ = α, ΓΔ = β καὶ ὕψος υ = ΑΗ = ΓΙ. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν εἶναι:



Σχ. 120

Εμβ ΑΒΓΔ = Εμβ ΑΔΓ +

$+ \text{Εμβ ΑΓΒ} = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon + \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon = \boxed{\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \upsilon}$. Ἐὰν τώρα καλέσωμεν **διάμεσον** τοῦ τραπεζίου τὸ τμῆμα ΕΖ τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν (σχ. 121), ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται: Εμβ ΑΒΓΔ = $\boxed{\text{ΕΖ} \times \upsilon}$. Τέλος, ἂν ΖΚ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Ζ τῆς ΓΒ ἀπὸ τῆς εὐθ ΑΔ, ἔχομεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΑΗ καὶ ΕΖΚ: $\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΖΚ}}{\text{ΔΗ}} \Rightarrow$



Σχ. 121

ΕΖ × υ = ΑΔ × ΖΚ καὶ ἑπομένως Εμβ ΑΒΓΔ = $\boxed{\text{ΑΔ} \times \text{ΖΚ}}$. Συνάγομεν λοιπὸν τρεῖς ἐκφράσεις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου:

**I. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.**

**II. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμεσον ἐπὶ τὸ ὕψος.**

**III. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ**

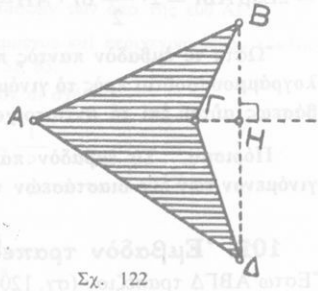


Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**παραλλήλων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπὸ τὸν φορέα τῆς πρώτης.**

**102.** (Θ) — **Τὸ ἐμβαδὸν ἁπλοῦ τετραπλεύρου κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ ἔχοντος καθέτους διαγωνίους ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῶν διαγωνίων του.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω τὸ ἁπλοῦν, μὴ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΔΓ, τὸ ὁποῖον χωρίζεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου του ΑΓ εἰς δύο τρίγωνα κείμενα ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ, κάθετος ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὸ τμῆμα ΒΔ, τέμνει τοῦτο εἰς σημεῖον Η κείμενον μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ, διότι τὰ Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθΑΓ. Συνεπῶς,



Σχ. 122

$$BH + H\Delta = B\Delta.$$

Ἐκ τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν:

$$\text{Εμβ}ABΓΔ = \text{Εμβ}ABΓ + \text{Εμβ}AΔΓ = \frac{1}{2}\,AΓ \times BH + \frac{1}{2}\,AΓ \times ΔH =$$

$$= \frac{1}{2}\,AΓ \cdot \{BH + ΔH\} = \frac{1}{2}\,AΓ \cdot BΔ \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

## ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

**103. Ὁρισμός.** — **Δύο πολύγωνα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν ἴσα ἐμβαδά.**

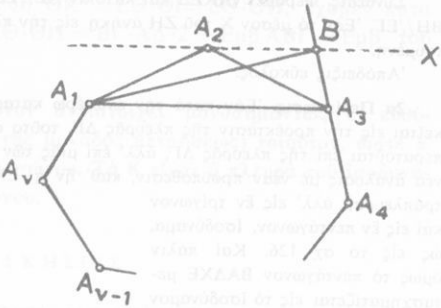
**104. Πρόβλημα.** — **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν κυρτὸν πολύγωνον.**

*Λύσις.* Ἔστω $A_1A_2A_3...A_\nu$ ἓν πολύγωνον. Θὰ ζητήσωμεν κατ' ἀρχὰς πολύγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν, ἀλλ' ἔχον μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος $A_1A_3$, χωρίζουσα τὸ δοθὲν πολύγωνον εἰς ἓν τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καὶ εἰς ἓν πολύγωνον $A_1A_3A_4...A_\nu$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κορυφὴ $A_2$ δύναται νὰ μετακινηθῇ ἐπὶ τῆς $A_2X$ παρ/λου τῇ $A_1A_3$ χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ. $A_1A_2A_3$ (§ **97**, α'), ἄρα οὔτε καὶ τοῦ ὅλου πολυγώνου (ἀφοῦ τὸ $A_1A_3A_4...A_\nu$ μένει ἀμετάβλητον). Ἐὰν λοιπὸν μεταφέρωμεν τὴν κορυφὴν $A_2$ εἰς τὸ σημεῖον Β, καθ' ὅ ἡ παράλληλος $A_2X$ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $A_4A_3$, τὸ τρίγωνον $A_1A_2A_3$ ἰσο-

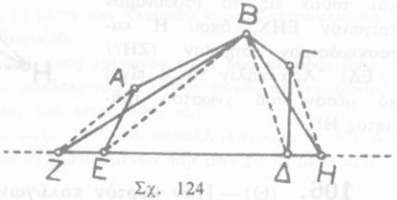
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δυναμεῖ πρὸς τὸ τρ. $A_1BA_3$ καὶ τὸ πολύγωνον $A_1A_2A_3A_4...A_\nu$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ πολύγωνον $A_1BA_4...A_\nu$ (διότι, ἁπλῶς, τὸ τρίγωνον $A_1A_2A_3$ ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἰσοδυνάμου του $A_1BA_3$). Οὕτω φθάνομεν εἰς πολύγωνον $A_1BA_4...A_\nu$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $A_1A_2A_3A_4...A_\nu$, ἀλλ' ἔχον μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.



Σχ. 123

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον πολύγωνον πρὸς τὸ $A_1BA_4...A_\nu$ καὶ ἔχον μίαν ἀκόμη πλευρὰν ὀλιγωτέραν. Ἑπομένως, ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν τὸ ἀρχικὸν πολύγωνον ἔχῃ, ἐλαττοῦντες διαδοχικῶς τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του διὰ τῆς ὡς ἄνω κατασκευῆς φθάνομεν εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον. Τὸ σχ. 124 δεικνύει τὴν κατασκευὴν τριγώνου ΒΖΗ ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ.

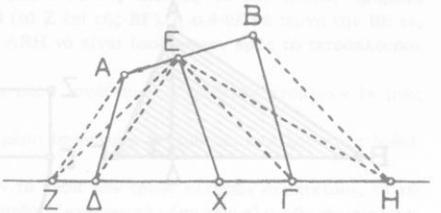


Σχ. 124

**105. Ἐφαρμογή.** — **Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας διερχομένης διὰ δεδομένου σημείου τῆς περιμέτρου του.**

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τετράπλευρον καὶ Ε τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ΕΧ, τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΔΓ εἰς Χ, ὁπότε πρέπει τὰ τετράπλευρα ΕΑΔΧ καὶ ΕΒΓΧ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἂς μετασχηματίσωμεν ταῦτα εἰς ἰσοδύναμα τρίγωνα. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὴν ΑΖ//ΕΔ καὶ ΒΗ//ΕΓ (σχ. 125), ὁπότε ( $\widehat{=}$δηλοῖ : ἰσοδύναμον),



Σχ. 125

$$ΕΑΔΧ \widehat{=} ΕΖΧ \text{ καὶ } ΕΒΓΧ \widehat{=} ΕΗΧ.$$

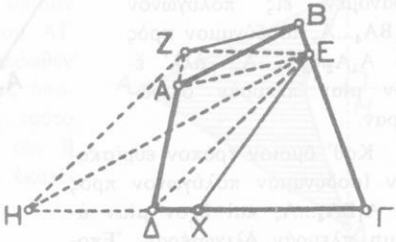
Ἐπειδὴ $ΕΑΔΧ \widehat{=} ΕΒΓΧ \Rightarrow ΕΖΧ \widehat{=} ΕΗΧ$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἰσοδύναμα τρίγωνα ΕΖΧ καὶ ΕΗΧ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐκ τοῦ Ε ὕψος, διὰ τοῦτο θὰ ἔχουν καὶ ἴσας βάσεις, δηλ. ΖΧ = ΧΗ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η εἶναι γνωστά, τὸ ζητούμενον σημεῖον Χ εἶναι τὸ μέσον τοῦ γνωστοῦ τμήματος ΖΗ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Σύνθεσις.** Φέρομεν τὴν ΕΔ καὶ κατόπιν ΑΖ//ΕΔ (σχ. 125). Ὁμοίως, τὴν ΕΓ καὶ τὴν ΒΗ//ΕΓ. Ἐὰν τὸ μέσον Χ τοῦ ΖΗ ἀνήκῃ εἰς τὴν πλευρὰν ΔΓ, τότε ἡ ευθΕΧ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις εὔκολος.

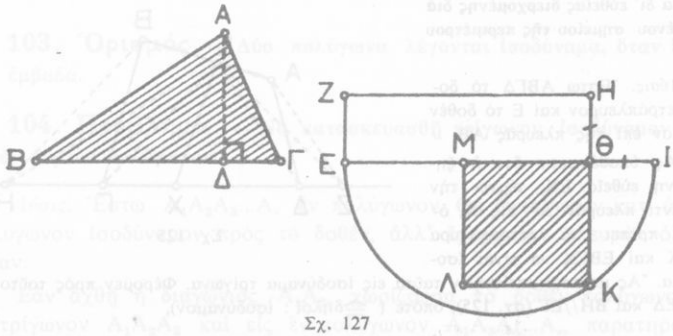
**2α Περίπτωσις.** Ἐὰν κατὰ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν συμβῇ τὸ μέσον τῆς ΖΗ νὰ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΔΓ, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα δὲν περατοῦται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΓ, ἀλλ' ἐπὶ μιᾶς τῶν δύο ἄλλων. Συνεπῶς πρέπει νὰ γίνῃ νέα ἀνάλυσις μὲ νέαν προϋπόθεσιν, καθ' ἣν ἡ ΕΧ δὲν διαιρεῖ τὸ ΑΒΓΔ εἰς δύο τετράπλευρα, ἀλλ' εἰς ἓν τρίγωνον καὶ εἰς ἓν πεντάγωνον, ἰσοδύναμα, ὡς εἰς τὸ σχ. 126. Καὶ πάλιν ὅμως τὸ πεντάγωνον ΒΑΔΧΕ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον τετράπλευρον ΕΖΔΧ (ΒΖ//ΕΑ) καὶ τοῦτο εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον ΕΗΧ, ὅπου Η κατασκευάσιμον σημεῖον (ΖΗ// // ΕΔ). Ἄρα πάλιν τὸ Χ εἶναι τὸ μέσον τοῦ γνωστοῦ τμήματος ΗΓ.



Σχ. 126

**106.** (Θ)— **Πᾶν κυρτὸν πολύγωνον τετραγωνίζεται.** Δηλ. διὰ πεπερασμένου πλήθους γεωμετρικῶν κατασκευῶν φθάνομεν εἰς τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν πολύγωνον.

*Ἀπόδειξις.* Τὸ δοθὲν πολύγωνον δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον ΑΒΓ διὰ τῆς μεθόδου τῆς § **104.** Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μετα-



Σχ. 127

σχηματίζεται εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παρ/μον ΕΖΗΘ (σχ. 127) ἔχον βάσιν ΕΘ=ΒΓ καὶ ὕψος ΕΖ, τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τρ. ΑΒΓ. Τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ μετασχηματίζεται εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον ΘΚΛΜ ἔχον πλευρὰν ΘΚ μέσην ἀνάλογον τῶν διαστάσεων ΕΘ καὶ ΘΗ (=ΘΙ)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ὀρθογωνίου (§ 75, γ'). Ἐπειδὴ $ΘΚ^2 = ΕΘ·ΘΙ = ΕΘ·ΘΗ$, ἔχομεν κατὰ σειράν: $ΕμβΘΚΛΜ = ΚΘ^2 = ΕΘ·ΘΗ = ΒΓ·ΑΔ/2 = Εμβ ΑΒΓ = Εμβ.$ τοῦ δοθέντος πολυγώνου.

**Πόρισμα. Εἰς κάθε πολύγωνον ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα Κ (ἀνεξάρτητον τῆς μονάδος μετρήσεως) τοιοῦτον, ὥστε $Ε = Κ^2$, ὅπου Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Τὸ Κ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ πολύγωνον τετραγώνου.**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

455. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς περὶ κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

456. Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ἔχει ἐμβαδὸν τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀρχικοῦ.

457. Πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τρίγωνον ἔχον δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς δύο διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

458. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Ε τῆς διαγωνίου ΑΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς πλευράς, ἐκ τῶν σχηματιζομένων παρ/μων τὰ κείμενα πρὸς τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ εἶναι ἰσοδύναμα.

459. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ὀξυγωνίου τριγώνου ἀχθοῦν αἱ διάμετροι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', τὸ ἑξάγωνον ΑΓ'ΒΑ'ΓΒ'Α ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

460. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ληφθοῦν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης:

$$ἐμβ. (ΑΒΓΔ) = 2ἐμβ. (ΑΕΖ) + ΒΕ·ΔΖ.$$

461. Ἐὰν ληφθοῦν ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τρ.ΑΒΓ τμήματα $ΜΔ = ΜΕ$, ἀχθῇ δὲ ἡ ΔΖ παρ/λος τῇ ΑΒ (τὸ Ζ ἐπὶ τῆς ΒΓ), ἡ ευθΑΖ θὰ τέμνῃ τὴν ΒΕ εἰς σημεῖον Η τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΗ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΗΖΓΕ.

462. Νὰ διαιρεθῇ παρ/μον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

463. Νὰ διαιρεθῇ παρ/μον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

464. Ἐὰν δύο κυρτῶν τετραπλεύρων τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν συμπίπτουν, τὰ τετράπλευρα εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐὰν δύο κυρτῶν ἑξαγώνων τὰ μέσα τῶν πλευρῶν συμπίπτουν, τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

465. Δοθέντος τριγώνου μὴ ἰσοπλεύρου νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό, ἀλλὰ μὲ μικροτέραν περίμετρον. Ὁμοίως διὰ πολύγωνον.

466. Ἐὰν διὰ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ἀχθῇ παρ/λος πρὸς τὴν ἄλλην καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν παρ/λων τούτων ἑνωθῇ μὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, τότε τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη.

467. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τυχὸν σημεῖον Ε τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ συνδέοντος τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$Εμβ ΕΑΒ + ΕμβΕΓΔ = Εμβ ΕΒΓ + Εμβ ΕΑΔ.$$

468. Εἰς δοθέντα κύκλον (Κ, R) ἐγγράφομεν τυχὸν ὀρθογώνιον παρ/μον καὶ εἰς τὰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κορυφάς του φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ὁριζομένου ρόμβου εἶναι σταθερόν.

469. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον παρ/μον, ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

470. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τραπέζιον, οὗτινος δίδεται τὸ ἐμβαδὸν $c^2$ καὶ ἡ μία τῶν μὴ παρ/λων πλευρῶν.

471. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς δύο μέρη, ὧν τὰ ἐμβαδὰ ἔχουν λόγον μ : ν (μ, ν δοθέντα τμήματα), δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις του.

472. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς μίαν διαγώνιον.

473. Δοθέντος τρ. ΑΒΓ καὶ σημείου Ι ἐντὸς αὐτοῦ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΙΔ νὰ διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη, ὧν τὰ ἐμβαδὰ νὰ ἔχουν λόγον μ : ν (μ, ν δοθέντα τμήματα).

474. Δοθέντος παρ/μου ἑνοῦμεν τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς μὲ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφάς. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματιζόμενον ὀκτάγωνον ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἓν ἕκτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου.

475. Εἰς κύκλον διαμέτρου d εἶναι ἐγγεγραμμένον κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχον ΑΒ = ΑΔ καὶ ΓΒ = ΓΔ. Ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζεται ὑπὸ τῆς ΒΔ εἰς λόγον 1 : 2. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τοῦ d, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

476. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τρ. ΑΒΓ, οὗτινος ΑΒ = γ, ΑΓ = β καὶ $\widehat{A} = 30^0$ ἢ $45^0$ ἢ $60^0$ ἢ $120^0$.

477. Δίδεται τρ. ΑΒΓ, οὗτινος $\widehat{A} = 90^0$, $\widehat{B} = 60^0$, ΒΓ = 5 m. Κατασκευάζομεν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἐπὶ μὲν τῆς ὑποτεινούσης του τετράγωνον ΒΓΔΕ, ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων πλευρῶν ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΓΗ καὶ ΑΒΖ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΕΔΗΖ.

478. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς μικροτέρας βάσεως ΔΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ προσδιορίσατε σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΜ νὰ διαιρῇ τὸ τραπέζιον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

479. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν σημεῖα Μ, Ν, Ρ, Κ τοιαῦτα, ὥστε : ΑΜ/ΜΒ = ΒΝ/ΝΓ = ΓΡ/ΡΔ = ΔΚ/ΚΑ = μ/ν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΜΝΡΚ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ.

480. Ἐὰν εἰς τρ. ΑΒΓ εἶναι ΒΓ = (ΑΒ + ΑΓ)/2, τότε παντὸς σημείου Μ τῆς διχοτόμου ΑΔ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερόν. (Τὸ Μ ἐσωτερικὸν τοῦ τρ. ΑΒΓ).

481. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν δοθῇ τὸ παρ/μον μὲ κορυφὰς τὰ περίκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων, εἰς ἃ χωρίζεται κυρτὸν τετράπλευρον ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, τότε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ὡρισμένον.

482. i) *Τύπος τοῦ τραπεζίου.* Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ βάσεις τραπεζίου ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ τὸ ἐντὸς τοῦ τραπεζίου μέρος εὐθείας παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις καὶ διαιρούσης τὰς μὴ παρ/λους πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς λόγον ΑΕ : ΕΔ = μ : ν. Νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ἰσχύει :

$$EZ = \frac{AB \cdot \nu + \Gamma\Delta \cdot \mu}{\mu + \nu}$$

ii) Διὰ τοῦ ἐγκέντρου τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται εὐθεῖα (ε) ἀφήνουσα τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της. Ἐὰν x, y, z αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἀπὸ τῆς (ε) καὶ α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου, νὰ δειχθῇ ὅτι βy + γz = αx.

iii) Εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου παρ/λον πρὸς τὴν (ε) καὶ ἀφήνουσαν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της τὰ Β καὶ Γ. Ἐὰν α′, β′, γ′ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν Α, Β, Γ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, νὰ δειχθῇ ὅτι 2Εμβ(ΑΒΓ) = ββ′ + + γγ′ — αα′.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

483. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α λαμβάνομεν σημεῖον Ζ τοιοῦτον, ὥστε ΑΖ=2α/3 καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ΒΕ=2α/3. Ἀφοῦ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΑΕ τέμνονται καθέτως εἰς Μ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβ (ΔΜΕΓ) συναρτήσει τοῦ α.

484. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ γωνίαι $\widehat{B}$, $\widehat{\Delta}$ εἶναι ὀρθαί, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου μὲ πλευρὰν ἴσην πρὸς ΒΔ.

485. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἔχοντος μέσον τὸ Ε, φέρομεν διὰ τῶν Α καὶ Β σταθερᾶς ἡμιευθείας παρ/λους καὶ ὁμορρόπους καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν σημεῖα Α΄, Β΄ τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΑ΄Β΄Β νὰ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $c^2$. Ποῖος ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ευθ Α΄Β΄;

486. Συναρτήσει τῶν ἀκτίνων R, ρ δύο κύκλων νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ἀπὸ τὰς δύο κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ μιᾶς ἐξωτερικῆς, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ δύο ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

487. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀξυγωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου ἐπὶ τὴν ἡμιπερίμετρον, τ', τοῦ ὀρθικοῦ του τριγώνου.

488. Νὰ δειχθῇ ὅτι δι' ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα τρίγωνα ΑΒΓ τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς δοθέντα κύκλον, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $O_1O_2O_3$ τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ παράκεντρα ἑκάστου ἐκ τῶν τρ. ΑΒΓ εἶναι σταθερόν.

(**Ὑπόδ.** Βλ. προηγουμένην ἄσκησιν).

489. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ τριῶν σημείων Μ, Ν, Ρ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοιούτων, ὥστε ΑΜ/ΑΒ=ΒΝ/ΒΓ=ΓΡ/ΓΑ=λ i) Εὕρετε τὸ Ἐμβ (ΜΝΡ) συναρτήσει τοῦ λ καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ τριγΑΒΓ. ii) Τὴν τιμὴν τοῦ λ, δι' ἣν τὸ ΕμβΜΝΡ καθίσταται ἐλάχιστον. iii) Ἂν ἀχθοῦν ἐκ τῶν Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ, εὕρετε τὸν τόπον τῆς τομῆς των, ὅταν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 1.

## ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

**107. α΄) Ὁρισμός.— Δύο κυρτὰ πολύγωνα, $A_1A_2A_3...A_\nu$ καὶ $B_1B_2B_3...B_\nu$ λέγονται ὅμοια, ὅταν ὑπάρχῃ μία ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν ὁμοταξίων κορυφῶν των: $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$... $A_\nu \to B_\nu$, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ μὲν πλευραὶ τοῦ πρώτου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ δευτέρου, αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους γωνίας τοῦ δευτέρου.**

(Ἤτοι, ὅταν $A_1A_2/B_1B_2 = A_2A_3/B_2B_3 = ... = A_\nu A_1/B_\nu B_1 = \lambda$ καὶ $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}, \widehat{A_2} = \widehat{B_2} ... \widehat{A_\nu} = \widehat{B_\nu}$. Συντόμως : ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους καὶ τὰς γωνίας των ἴσας).

Δύο οἱαδήποτε $\boxed{\text{ἀντίστοιχοι}}$ κορυφαί : $A_\rho$, $B_\rho$ ($\rho = 1...\nu$) ἢ πλευραί : $A_\rho A_{\rho+1}$, $B_\rho B_{\rho+1}$ ($\rho = 1...\nu-1$) ἢ γωνίαι : $\widehat{A_\rho} = \widehat{B_\rho}$ ($\rho = 1...\nu$) λέγονται **ὁμόλογοι.** Ὁ δὲ σταθερὸς λόγος λ τυχούσης πλευρᾶς τοῦ πρώτου πολυγώνου πρὸς τὴν ὁμόλογον τοῦ δευτέρου λέγεται **λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὸ δεύτερον.**

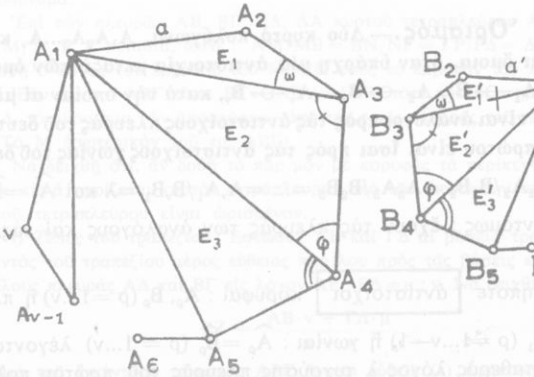
**β΄) (Θ) — Ἐὰν δύο κυρτὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ἐκ μιᾶς κορυφῆς τοῦ ἑνὸς ἀχθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ διαγώνιοι αὐτοῦ, ἐκ δὲ τῆς ὁμολόγου κο-**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**ρυφῆς τοῦ ἄλλου ἀχθοῦν ἐπίσης πᾶσαι αἱ δυναταὶ διαγώνιοι, τότε τὰ δύο πολύγωνα χωρίζονται εἰς ἴσον πλῆθος τριγώνων, ἀντιστοίχως ὁμοίων.**

*Ἀπόδειξις*. Ἔστωσαν τὰ ὅμοια κυρτὰ πολύγωνα $A_1A_2...A_\nu$ καὶ $B_1B_2...B_\nu$ ἔχοντα : $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_4}{B_3B_4}=\cdots=\frac{A_\nu A_1}{B_\nu B_1}$ καὶ $A_\nu\widehat{A_1}A_2=B_\nu\widehat{B_1}B_2$, $A_1\widehat{A_2}A_3=B_1\widehat{B_2}B_3,\cdots A_{\nu-1}\widehat{A_\nu}A_1=B_{\nu-1}\widehat{B_\nu}B_1$. Διὰ τῶν ἐκ τοῦ $A_1$ ἀγομένων διαγωνίων, χωρίζεται τὸ πρῶτον εἰς τὰ ν—2 τρίγωνα $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4\cdots A_1A_{\nu-1}A_\nu$ καὶ διὰ τῶν ἐκ τοῦ $B_1$ διαγωνίων, χωρίζεται τὸ δεύτερον εἰς ν—2 ἐπίσης τρίγωνα $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4\cdots B_1B_{\nu-1}B_\nu$. Βλέπομεν ὅτι τὰ δύο πρῶτα τρίγωνα $A_1A_2A_3$ καὶ $B_1B_2B_3$ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας. Ἑπομένως $A_2\widehat{A_3}A_1=B_2\widehat{B_3}B_1$ καὶ ἐπειδὴ $A_2\widehat{A_3}A_4=B_2\widehat{B_3}B_4 \Rightarrow A_1\widehat{A_3}A_4=B_1\widehat{B_3}B_4$ (σχ. 128).

Τὰ δεύτερα τρίγωνα : $A_1A_3A_4$ καὶ $B_1B_3B_4$ ἔχουν λοιπὸν μίαν γωνίαν ἴσην, ἀλλ' ἔχουν καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, διότι : $\frac{A_3A_4}{B_3B_4}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}$ (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ $\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_1}{B_3B_1}$ (ἐκ τῶν προηγουμένων ὁμοίων τριγώνων), δηλ. $\frac{A_3A_4}{B_3B_4}=\frac{A_3A_1}{B_3B_1}$. Ἑπομένως τρ.$A_1A_3A_4\approx$τρ.$B_1B_3B_4$.




Σχ. 128

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $A_1A_3A_4$ καὶ $B_1B_3B_4$ προκύπτει κατὰ τὸν ἴδιον, ὡς ἀνωτέρω, τρόπον ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων $A_1A_4A_5$ καὶ $B_1B_4B_5$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων προκύπτει ἡ ὁμοιότης τῶν ἑπομένων των κ.ο.κ. μέχρι τῶν τελευταίων :

$$A_1A_{\nu-1}A_\nu \text{ καὶ } B_1B_{\nu-1}B_\nu.$$

**γ') (Θ) — Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν των (ἢ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος τῶν δύο πολυγώνων).**

Δηλαδή, ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου καὶ α μία πλευρὰ αὐτοῦ, Ε' εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὁμοίου του καὶ α' ἡ πρὸς τὴν α ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ὁμοίου του, τότε :

$\frac{E}{E'} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \lambda^2$, ὅπου $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha'}$ = λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον.

*Ἀπόδειξις.* Τὰ δύο ὅμοια πολύγωνα χωρίζονται, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ἀντιστοίχως ὅμοια (σχ. 128). Ἐὰν καλέσωμεν $E_1, E_2, E_3 \cdots E_{\nu-2}$ κατὰ σειράν, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ πρῶτον καὶ $E'_1, E'_2, \cdots E'_{\nu-2}$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχως ὁμοίων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ δεύτερον (σχ. 128), τότε θὰ ἔχωμεν (§ 97) :

$$\frac{E_1}{E'_1} = \left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2 = \lambda^2, \frac{E_2}{E'_2} = \left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2 = \lambda^2, \cdots \frac{E_{\nu-2}}{E'_{\nu-2}} = \left(\frac{A_\nu A_1}{B_\nu B_1}\right)^2 = \lambda^2,$$

ἐξ ὧν ἕπεται (κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων) :

$$\lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \cdots = \frac{E_{\nu-2}}{E'_{\nu-2}} = \frac{E_1 + E_2 + \cdots + E_{\nu-2}}{E'_1 + E'_2 + \cdots + E'_{\nu-2}} = \frac{E}{E'}$$

(διότι $E_1 + E_2 + \cdots + E_{\nu-2} = E$ καὶ $E'_1 + E'_2 + \cdots + E'_{\nu-2} = E'$). Ἀλλὰ $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha'}$, συνεπῶς $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \lambda^2$. ὅ.ἔ.δ.

**δ') Γενικὴ θεωρία** τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων δίδεται εἰς τοὺς Σημειακοὺς μετασχηματισμούς.

## ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

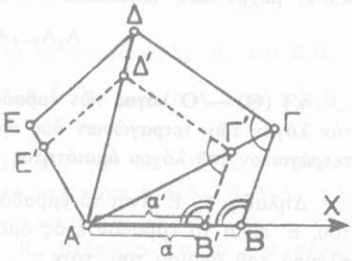
**108.** ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— **Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον δοθέντα λόγον ὁμοιότητος πρὸς τὸ δοθὲν ἢ ἔχον μίαν πλευρὰν δοθεῖσαν ὁμόλογον πρὸς μίαν ὡρισμένην πλευρὰν τοῦ δοθέντος.**

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ δοθὲν πολύγωνον καὶ $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$ (μ, ν δοθέντα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τμήματα) ὁ δοθεὶς λόγος ὁμοιότητος. Ἄς φέρωμεν ἐκ τοῦ Α πάσας τὰς δυνατὰς διαγωνίους τοῦ δοθέντος καὶ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος (Α, Β) (σχ. 129) σημεῖον Β′ τοιοῦτον, ὥστε :

$$AB'/AB = \mu/\nu.$$



Σχ. 129

Φέρομεν τώρα ἐκ τοῦ Β′ εὐθεῖαν //ΒΓ, τέμνουσαν τὴν ευθ ΑΓ εἰς Γ′, ἐκ τοῦ Γ′ παράλληλον τῇ ΓΔ τέμνουσαν τὴν ευθ ΑΔ εἰς Δ′ καὶ ἐκ τοῦ Δ′ εὐθεῖαν //ΔΕ τέμνουσαν τὴν ευθ ΑΕ εἰς Ε′. Τὸ πολύγωνον ΑΒ′Γ′Δ′Ε′ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ, διότι ἔχει κατὰ σειρὰν τὰς πλευράς του ἀναλόγους πρὸς τὰς τοῦ

$$ABΓΔE : \frac{AB'}{AB} = \frac{B'Γ'}{BΓ} = \frac{AΓ'}{AΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{AΔ'}{AΔ} = \frac{Δ'E'}{ΔE} \; \frac{AE'}{AE} = \frac{\mu}{\nu}$$

καὶ τὰς γωνίας του ἴσας πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τοῦ ΑΒΓΔΕ (ὡς ἐχούσας τὰς πλευράς των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους).

Καὶ πᾶν πολύγωνον ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ′Γ′Δ′Ε′ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν μὲ λόγον ὁμοιότητος $\lambda = \mu/\nu$.

—Ἂν δίδεται μία πλευρὰ α′ τοῦ ζητουμένου ,ὁμόλογος πρὸς τὴν $AB = α$ τοῦ δοθέντος, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος (Α, Β) τμῆμα $AB' = α'$ καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἰδίαν κατασκευήν.

**109**. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον δοθὲν ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς $c^2$.**

*Λύσις*. Τὸ δοθὲν πολύγωνον ἔχει γνωστὸν ἐμβαδόν, $k^2$, ὅπου k ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου του τετραγώνου, δυναμένη νὰ κατασκευασθῇ (§ **106**, πόρισμα). Ἔστω α μία πλευρὰ τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ ἔστω x ἡ πρὸς τὴν α ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ὁμοίου πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τούτων πολυγώνων εἶναι ἀντιστοίχως $k^2$ καὶ $c^2$ (γνωστά), θὰ ἔχωμεν (§ **107**, γ) :

$$\frac{k^2}{c^2} = \frac{α^2}{x^2} \Rightarrow \frac{k}{c} = \frac{α}{x}.$$

Ἑπομένως ἡ πλευρὰ x κατασκευάζεται ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν k, c, α. Γνωρίζοντες τώρα μίαν πλευρὰν x τοῦ ζητουμένου, ὁμόλογον πρὸς μίαν ὡρισμένην πλευρὰν α τοῦ δοθέντος, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ζητούμενον συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην κατασκευὴν τῆς § **108**.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

490. Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν πολυγώνων.

491. Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων νὰ κατασκευασθῇ τρίτον, ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ ἔχον ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο δοθέντων.

492. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον ἐμβαδὸν τὰ μ/ν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος, ὅπου μ, ν δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

493. Ἐὰν κυρτοῦ τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, νὰ δειχθῇ ὅτι πάντα τὰ ὀρθογώνια παρ/μα τὰ περιγεγραμμένα περὶ τὸ τετράπλευρον εἶναι ὅμοια μεταξύ των.

494. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς δύο ὅμοια τραπέζια δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

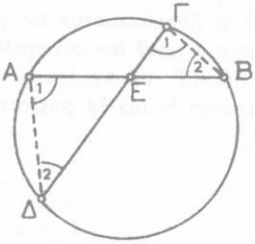
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

# ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΝ ΚΥΚΛΩ — ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ — ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

## ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ

**110. α') Θεώρημα τῶν τεμνομένων χορδῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. (Θ)—Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ Ε, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις: ΕΑ × ΕΒ=ΕΓ × ΕΔ (ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης).**

**Ἀντιστρόφως: Ἂν δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς Ε καὶ ἂν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης ΕΑ × ΕΒ = ΕΓ× ΕΔ, τότε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.**



Σχ. 130

*Ἀπόδειξις.* i) Ἀπὸ τὸ κυρτόν, ἐγγράψιμον, τετράπλευρον ΑΓΒΔ (σχ. 130) ἔχομεν ὅτι

$\widehat{A_1}=\widehat{\Gamma_1}$ καὶ $\widehat{\Delta_2}=\widehat{B_2} \Rightarrow$ τρ. ΕΑΔ≈τρ.ΕΒΓ

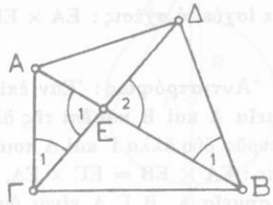
$\Rightarrow \frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{ΕΔ}{ΕΒ} \Rightarrow$ ΕΑ×ΕΒ=ΕΓ×ΕΔ.

ii) Τὸ τετράπλευρον ΑΓΒΔ (σχ. 131) εἶναι κυρτόν, διότι αἱ διαγώνιοί του τέμνονται, τὰ δὲ τρίγωνα ΕΑΓ καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΔΒ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην ($\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, δηλ.

$\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{ΕΔ}{ΕΒ}$ (λόγῳ τῆς ὑποθέσεως : ΕΑ×ΕΒ=ΕΓ×ΕΔ). Ἐπειδή : $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΕΓ}{ΕΒ}$, ἕπεται ὅτι αἱ ΕΑ καὶ ΕΔ εἶναι ὁμόλογοι πλευραὶ καὶ συνεπῶς αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι $\widehat{Γ_1}$ καὶ $\widehat{B_1}$ ἴσαι. Ἄρα τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΔΒΓ εἶναι ἐγγράψιμον.



Σχ. 131

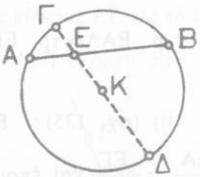
**β΄) Πόρισμα. — Ἐὰν διὰ σημείου Ε κειμένου ἐντὸς κύκλου (Κ, R) ἀχθῇ τυχοῦσα χορδὴ ΑΒ, ἰσχύει ἡ σχέσις :**

$$\boxed{ΕΑ \times ΕΒ = R^2 - ΕΚ^2}$$

(δηλ. τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων χορδῆς διὰ τοῦ Ε διερχομένης εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $R^2 - ΕΚ^2$).

Διότι, ἂν ἀχθῇ καὶ δευτέρα χορδὴ ΓΕΔΚ (σχ. 132), τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δίδει :

$$= ΕΑ \times ΕΒ = ΕΓ \times ΕΔ =$$
$$= (ΚΓ - ΚΕ)(ΚΔ + ΚΕ) =$$
$$= (R - ΚΕ)(R + ΚΕ) = R^2 - ΚΕ^2 = \text{σταθερόν.}$$



Σχ. 132

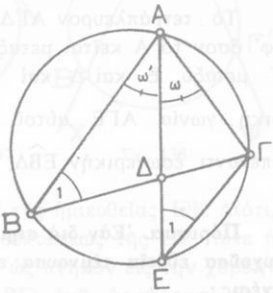
**γ΄) Ὑπολογισμὸς τῆς διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 133)**

Ἂν ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ε, τότε τρ. ΑΕΓ ≈ τρ. ΑΒΔ, διότι ω = ω΄ καὶ $\widehat{E_1} = \widehat{B_1}$. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος ταύτης ἔχομεν :

$$\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} \text{ ἢ } \frac{ΑΔ + ΔΕ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} \Rightarrow$$

$ΑΔ^2 + ΑΔ \cdot ΔΕ = ΑΒ \cdot ΑΓ$. Ἀπὸ τὸ (Θ) τῶν τεμνομένων χορδῶν : $ΑΔ \cdot ΔΕ = ΒΔ \cdot ΔΓ$ καὶ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται :

$$ΑΔ^2 + ΒΔ \cdot ΔΓ = ΑΒ \cdot ΑΓ \text{ ἢ}$$
$$ΑΔ^2 = ΑΒ \cdot ΑΓ - ΒΔ \cdot ΔΓ \text{ (βλ. § 87)}$$

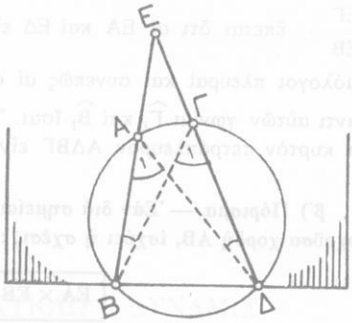


Σχ. 133

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**111. Θεώρημα τῶν τεμνουσῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.** (Θ) — **Ἐὰν ἐκ σημείου Ε κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθοῦν δύο ἡμιευθεῖαι, τέμνουσαι τὴν περιφέρειαν εἰς Α καὶ Β ἡ μία καὶ εἰς Γ καὶ Δ ἡ ἄλλη, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις : ΕΑ × ΕΒ = ΕΓ × ΕΔ.**

**Ἀντιστρόφως : Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας $X\widehat{E}\Psi$ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς δύο ἄλλα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε : ΕΑ × ΕΒ = ΕΓ × ΕΔ, τότε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.**



Σχ. 134

*Ἀπόδειξις.* i) Ἐὰν τὸ Α κεῖται μεταξὺ Ε καὶ Β καὶ τὸ Γ μεταξὺ Ε καὶ Δ, τότε τὰ Α καὶ Γ κεῖνται ὡς πρὸς τὴν χορδὴν ΒΔ εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον μὲ τὸ Ε καὶ ἑπομένως βλέπουν τὴν ΒΔ ὑπὸ ἴσας γωνίας $\widehat{A}_1$, $\widehat{\Gamma}_1$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι :

$$\text{τρ. } E\Lambda\Delta \approx \text{τρ. } E\Gamma B \Rightarrow \frac{E\Lambda}{E\Gamma} = \frac{E\Delta}{EB} \Rightarrow E\Lambda \times EB = E\Gamma \times E\Delta.$$

ii) (σχ. 135) : $E\Lambda \times EB = E\Gamma \times E\Delta \Rightarrow$

$\dfrac{E\Lambda}{E\Delta} = \dfrac{E\Gamma}{EB}$ καὶ ἑπομένως τρ. $E\Lambda\Gamma \approx$ τρ. $EB\Delta$

$\Rightarrow A\widehat{\Gamma}E = E\widehat{B}\Delta$ (κείμεναι ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν).

Σχ. 135

Τὸ τετράπλευρον ΑΓΔΒ εἶναι κυρτόν, ἐφ' ὅσον τὸ Α κεῖται μεταξὺ Ε καὶ Β καὶ τὸ Γ μεταξὺ Ε καὶ Δ καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία $A\widehat{\Gamma}E$ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικὴν $E\widehat{B}\Delta$, εἶναι ἐγγράψιμον.

**Πόρισμα. Ἐὰν διὰ σημείου Ε κειμένου ἐκτὸς κύκλου (Κ, R) ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα εἰς Α καὶ Β τὴν περιφέρειαν, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :**

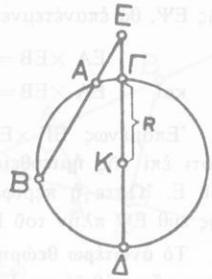
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\boxed{EA \times EB = EK^2 - R^2}$$

(δηλ. τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων ΕΑ, ΕΒ εἶναι **σταθερὸν** καὶ ἴσον πρὸς $EK^2 - R^2$).

Διότι, ἂν ἀχθῇ καὶ ἑτέρα τέμνουσα ΕΓΚΔ (σχ. 136), θὰ ἔχωμεν:

$$EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta =$$
$$= (KE - R)(KE + R) = KE^2 - R^2.$$



Σχ. 136

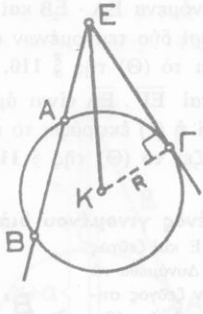
**112. Θεώρημα τεμνούσης καὶ ἐφαπτομένης καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. (Θ) — Ἐὰν διὰ σημείου Ε κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθοῦν δύο ἡμιευθεῖαι, ἐξ ὧν ἡ μία ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς Γ, ἡ δὲ ἄλλη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς Α καὶ Β, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:**

$$E\Gamma^2 = EA \cdot EB$$

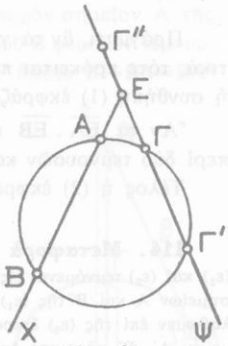
**Ἀντιστρόφως: Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας $X\hat{E}\Psi$ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἓν σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε $E\Gamma^2 = EA \times EB$, τότε ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΕΓ εἰς τὸ Γ.**

*Ἀπόδειξις.* i) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τρ. ΕΚΓ (σχ. 137) ἔχομεν $E\Gamma^2 = EK^2 - R^2$. Ἀπὸ τὸ πόρισμα τῆς § **111** ἔχομεν $EA \times EB = EK^2 - R^2$. Ἑπομένως $E\Gamma^2 = EA \times EB$.

ii) Ἂς ὑποθέσωμεν: $EA \times EB = E\Gamma^2$ (σχ. 138) καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν (ΑΒΓ). Τότε τὸ Ε εἶναι **ἐξωτερικὸν** σημεῖον τοῦ κύκλου (ΑΒΓ), διότι κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς χορδῆς ΒΑ αὐτοῦ. Ἐὰν λοιπὸν ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) δὲν ἐφήπτετο τῆς ΕΨ, θὰ ἐπανέτεμνε τὴν εὐθ ΕΨ εἰς σημεῖον Γ′ κείμενον ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΕΨ. Διότι, ἂν ἔτεμνε τὴν ευθ ΕΨ εἰς σημεῖον Γ″ τῆς προεκτάσεως τῆς ΕΨ, τότε ἡ ΓΓ″ θὰ ἦτο χορδὴ τοῦ κύκλου (ΑΒΓ) καὶ τὸ Ε ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν χορδὴν ΓΓ′ θὰ ἦτο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (ΑΒΓ), ἐνῷ, ὡς εἴπομεν, τὸ Ε εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ (ΑΒΓ). Ὥστε ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ), ἂν δὲν ἐφήπτετο



Σχ. 137



Σχ. 138

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς ΕΨ, θὰ ἐπανέτεμνε τὴν **ἡμιευθεῖαν** ΕΨ εἰς σημεῖον Γ΄ καὶ θὰ εἴχομεν :

ΕΑ ×ΕΒ = ΕΓ ×ΕΓ΄ (θεώρημα τῶν τεμνουσῶν)

καὶ ΕΑ ×ΕΒ = ΕΓ² (ἐξ ὑποθέσεως).

Ἑπομένως ΕΓ ×ΕΓ΄ = ΕΓ² ⇒ ΕΓ = ΕΓ΄. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἐπὶ τῆς **ἡμιευθείας** ΕΨ θὰ ὑπῆρχον δύο σημεῖα Γ, Γ΄ ἰσαπέχοντα τοῦ Ε. Ὥστε ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) δὲν ἔχει ἕτερον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ευθ ΕΨ πλὴν τοῦ Γ, ἄρα ἡ ΕΨ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (ΑΒΓ).

**Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα βοηθεῖ εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἰς τὸ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εὐθεῖά τις ΕΓ εἶναι ἐφαπτομένη ἑνὸς κύκλου (ΑΒΓ)** (βλ. σχ. 137).

**113. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τῶν μετρικῶν σχέσεων ἐν κύκλῳ.** Τὰ τρία προηγούμενα θεωρήματα δύνανται νὰ διατυπωθοῦν συντόμως εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα :

**(Θ)—i) Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) τεμνόμεναι εἰς τὸ Ε, δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς ($\varepsilon_1$) καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς ($\varepsilon_2$). Τότε μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά, εἶναι :**

**(1)** $$\overline{EA}\cdot\overline{EB}=\overline{E\Gamma}\cdot\overline{E\Delta}.$$

**ii) Ἐὰν τὸ Δ συμπίπτῃ μὲ τὸ Γ, τότε μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) ἐφάπτεται τῆς ($\varepsilon_2$), εἶναι :**

**(2)** $$\overline{EA}\cdot\overline{EB}=\overline{E\Gamma}^2.$$

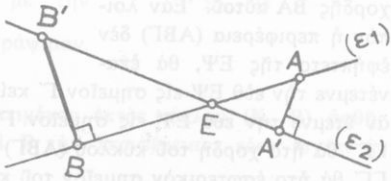
Πράγματι, ἂν τὰ $\overline{EA}\cdot\overline{EB}$ καὶ $\overline{E\Gamma}\cdot\overline{E\Delta}$ εἶναι ἀμφότερα ἀρνητικά, τότε πρόκειται περὶ δύο τεμνομένων εἰς Ε τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ συνθήκη (1) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς § **110.**

Ἂν τὰ $\overline{EA}\,.\,\overline{EB}$ καὶ $\overline{E\Gamma}\,.\,\overline{E\Delta}$ εἶναι ἀμφότερα θετικά, τότε πρόκειται περὶ δύο τεμνουσῶν καὶ ἡ (1) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς § **111.**

Τέλος ἡ (2) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς § **112.**

**114. Μεταφορὰ ἑνὸς γινομένου διὰ καθέτων.** Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) τεμνόμεναι εἰς Ε καὶ ζεῦγος σημείων Α καὶ Β τῆς ($\varepsilon_1$). Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς ($\varepsilon_2$) ἕτερον ζεῦγος σημείων Α΄, Β΄ φέροντες ἐκ τοῦ Α κάθετον ΑΑ΄ ἐπὶ τὴν ($\varepsilon_2$) καὶ εἰς τὸ Β κάθετον ΒΒ΄ ἐπὶ τὴν ($\varepsilon_1$) (σχ. 139) ἢ ἀντιθέτως (σχ. 140).

Τὸ ζεῦγος τῶν σημείων Α΄, Β΄, τὸ ὁποῖον οὕτω λαμβάνεται, ἔχει τὴν ἰδιότητα $\overline{EA'}\cdot\overline{EB'}=\overline{EA}\cdot\overline{EB}$, διότι τὰ Α, Α΄, Β, Β΄ εἶναι ὁμοκυκλικά.

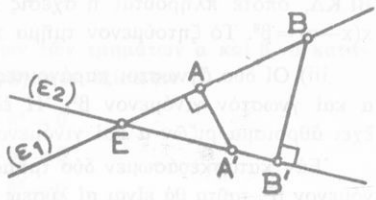


Σχ. 139

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ τῆς μεταφορᾶς ταύτης τοῦ γινομένου $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$ εἰς ἴσον γινόμενον $\overline{EA'} \cdot \overline{EB'}$ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας διευκολύνεται ἡ λύσις πολλῶν ζητημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσέρχεται ἓν σταθερὸν γινόμενον $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$.

**Γενικώτερον.** Ἐὰν γράψωμεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Α καὶ Β, τέμνουσαν τὴν $(\varepsilon_2)$ εἰς Α' καὶ Β', μεταφέρομεν καὶ πάλιν τὸ γινόμενον $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$ εἰς τὸ ἴσον γινόμενον $\overline{EA'} \cdot \overline{EB'}$.



Σχ. 140

## ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

**115. α') Κατασκευαί.** —**Δίδονται δύο τμήματα α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τρίτον τμῆμα x, τὸ ὁποῖον νὰ ἱκανοποιῇ τὴν ἐξίσωσιν**

$$\text{i)} \quad x(x+\alpha) = \beta^2$$

ἢ

$$\text{ii)} \quad x(x-\alpha) = \beta^2$$

ἢ

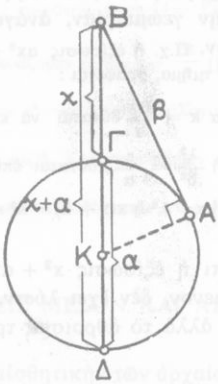
$$\text{iii)} \quad x(\alpha-x) = \beta^2$$

Ἐννοεῖται ὅτι εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις τὰ γράμματα x, α, β παριστοῦν τὰ μέτρα τῶν τμημάτων x, α, β.

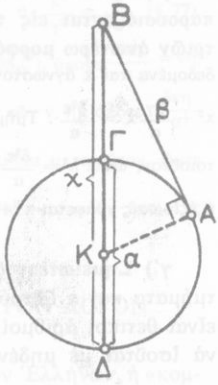
*Λύσις.* i) Μὲ διάμετρον τὴν γνωστὴν διαφορὰν α τῶν δύο ἀγνώστων παραγόντων x καὶ x + α γράφομεν κύκλον (Κ) καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας φέρομεν ἐφαπτόμενον τμῆμα ΑΒ=β. Διὰ τοῦ Β φέρομεν τέμνουσαν ΒΓΚΔ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου (σχ. 141), ὁπότε $B\Gamma \cdot B\Delta = BA^2$ (§ **111**). Τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΒΓ τῆς τεμνούσης εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα. Διότι, ἂν τεθῇ ΒΓ=x, τότε ΒΔ=x + α καὶ συνεπῶς πληροῦται ὑπὸ τοῦ x=ΒΓ ἡ ἐξίσωσις

$$x(x+\alpha) = \beta^2.$$

ii) Μὲ διάμετρον τὴν γνωστὴν διαφορὰν α τῶν δύο ἀγνώστων παραγόντων x καὶ x—α γράφομεν περιφέρειαν καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Α αὐτῆς φέρομεν ἐφαπτόμενον τμῆμα ΑΒ=β (σχ. 142).



Σχ. 141



Σχ. 142

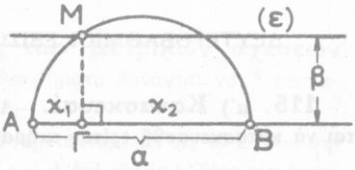


Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ τοῦ Β φέρομεν τέμνουσαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, τὴν ΒΓΚΔ, ὁπότε πληροῦται ἡ σχέσις $ΒΔ \cdot ΒΓ = ΒΑ^2$, ἥτις διὰ $ΒΔ = x$ γίνεται $x(x-α) = β^2$. Τὸ ζητούμενον τμῆμα x εἶναι τὸ ΒΔ.

iii) Οἱ δύο ἄγνωστοι παράγοντες x καὶ α—x ἔχουν γνωστὸν ἄθροισμα α καὶ γνωστὸν γινόμενον $β^2$. Ἡ ἐξίσωσις γράφεται $x^2 - αx + β^2 = 0$ καὶ ἔχει ἄθροισμα ριζῶν α καὶ γινόμενον ριζῶν $β^2$.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τμήματα $x_1$, $x_2$ ἔχοντα ἄθροισμα α καὶ γινόμενον $β^2$, ταῦτα θὰ εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως. Πρὸς τοῦτο γράφομεν ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ = α (σχ. 143) καὶ φέρομεν εὐθεῖαν (ε)//ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν β ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἐὰν ἡ (ε) τέμνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς Μ, φέρομεν ἐκ τοῦ Μ κάθετον ΜΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὁπότε τὰ δύο τμήματα $ΑΓ = x_1$ καὶ $ΓΒ = x_2$ εἶναι αἱ ζητούμεναι λύσεις, διότι $x_1 + x_2 = α$ καὶ $x_1 x_2 = β^2$ (ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΜΒ).



Σχ. 143

Ἐὰν $β < \frac{α}{2}$, ἡ ἐξίσωσις $x(α-x) = β^2$ ἔχει δύο λύσεις.

Ἐὰν $β = \frac{α}{2}$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν (διπλῆν) λύσιν.

Ἐὰν $β > \frac{α}{2}$, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν.

**β΄) Ὅλαι αἱ δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις μὲ ἓν ἄγνωστον τμῆμα, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἀνάγονται τελικῶς εἰς μίαν ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω μορφῶν.** Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $αx^2 + βγx - δ^2ε = 0$, ὅπου α, β, γ, δ, ε δεδομένα καὶ x ἄγνωστον τμῆμα, γράφεται :

$x^2 + \frac{βγ}{α}x = \frac{δ^2ε}{α}$. Τμῆμα $k = \frac{βγ}{α}$ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (§ 75 ζ΄) καὶ τμῆμα λ τοιοῦτον, ὥστε $λ^2 = \frac{δ^2ε}{α}$ ἢ $\frac{λ^2}{δ^2} = \frac{ε}{α}$, δύναται ἐπίσης νὰ κατασκευασθῇ (§ 77), ὁπότε ἡ ἐξίσωσις γράφεται $x^2 + kx = λ^2$ ἢ $x(x+k) = λ^2$ καὶ εἶναι τῆς ἀνωτέρω μορφῆς (i).

γ΄) **Σημειωτέον** ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2 + αx + β = 0$, ὅπου α, β δεδομένα τμήματα καὶ x ζητούμενον, **δὲν ἔχει λύσιν,** διότι τὰ μέτρα τῶν τμημάτων εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τριῶν θετικῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν.

(Ἀσκήσεις : 509 — 512).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**116.** α΄) **Κατασκευαί.** **Δοθέντων τῶν τμημάτων α καὶ β νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x πληροῦν τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν**

$$\text{i)}\quad x^4 + \alpha^2x^2 - \beta^4 = 0$$

$$\text{ἢ}\quad \text{ii)}\quad x^4 - \alpha^2x^2 - \beta^4 = 0$$

$$\text{ἢ}\quad \text{iii)}\quad x^4 - \alpha^2x^2 + \beta^4 = 0$$

*Λύσις.* Φανταζόμεθα ἓν τμῆμα y τοιοῦτον, ὥστε

$$(1)\qquad x^2 = \alpha y.$$

Προφανῶς, ἐὰν κατασκευασθῇ τὸ y, τότε καὶ τὸ x κατασκευάζεται ὡς μέσον ἀνάλογον τῶν α καὶ y. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ νέου ἀγνώστου y, ἡ $x^4 + \alpha^2x^2 - \beta^4 = 0$ καθίσταται $\alpha^2y^2 + \alpha^2\cdot\alpha y = \beta^4$ ἢ $y^2 + \alpha y = \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^2$. Κατασκευάζομεν τμῆμα $\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}$ (§ **75**, δ΄), ὁπότε : $y^2 + \alpha y = \gamma^2$ ἢ $y(y + \alpha) = \gamma^2$ καὶ τὸ y κατασκευάζεται (§ **115**, i).

Ἡ $x^4 - \alpha^2x^2 - \beta^4 = 0$ ἀνάγεται διὰ τῆς ἰδίας ἀντικαταστάσεως : $x^2 = \alpha y$ εἰς τὴν $y^2 - \alpha y = \gamma^2$ ἢ $y(y - \alpha) = \gamma^2$ καὶ ἡ $x^4 - \alpha^2x^2 + \beta^4 = 0$ ἀνάγεται εἰς τὴν $y(\alpha - y) = \gamma^2$.

β΄) Ὅλαι αἱ διτετράγωνοι ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἀνάγονται εἰς μίαν τῶν τριῶν ἀνωτέρω μορφῶν.

Ἔστω π.χ. ἡ $\alpha x^4 + \beta\gamma^2x^2 - \delta\eta\zeta^2 = 0$. Αὕτη γράφεται $x^4 + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}x - \frac{\delta\eta\zeta^2}{\alpha} = 0$. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τμῆμα λ τοιοῦτον, ὥστε $\lambda^2 = \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$ ἢ $\frac{\lambda^2}{\gamma^2} = \frac{\beta}{\alpha}$ (§ **77**), ὁπότε : $x^4 + \lambda^2x^2 = \frac{\delta\eta\zeta^2}{\alpha}$. Κατασκευάζομεν τμῆμα $\nu = \frac{\delta\varepsilon}{\alpha}$ (§**75**,ζ΄), ὁπότε $\frac{\delta\eta\eta}{\alpha} = \nu\eta$. Κατασκευάζομεν τμῆμα ρ τοιοῦτον, ὥστε $\rho^2 = \nu\eta$ (μέσον ἀνάλογον τῶν ν, η), ὁπότε $\frac{\delta\eta\eta}{\alpha} = \rho^2$. Ἔχομεν τώρα $\frac{\delta\eta\zeta^2}{\alpha} = \rho^2\zeta^2 = (\rho\zeta)^2$. Κατασκευάζομεν τμῆμα μ τοιοῦτον, ὥστε $\mu^2 = \rho\zeta$, ὁπότε $\frac{\delta\eta\zeta^2}{\alpha} = \mu^4$ καὶ ἡ ἐξίσωσις καθίσταται $x^4 + \lambda^2x^2 - \mu^4 = 0$, ἤτοι τῆς μορφῆς (i).

## ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΜΕΣΟΝ ΚΑΙ ΑΚΡΟΝ ΛΟΓΟΝ

**117.** α΄) Σύμφωνα μὲ τὴν αἰσθητικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἡ «κομψοτέρα» διαίρεσις ἑνὸς τμήματος ΑΒ εἰς δύο διακεκριμένα μέρη ΑΓ καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΒ (σχ. 144) εἶναι ἐκείνη καθ' ἥν, ὅν λόγον ἔχει τὸ ὅλον τμῆμα ΑΒ πρὸς τὸ μεγαλύτερον τεμάχιον αὐτοῦ, ΑΓ, νὰ ἔχῃ καὶ τὸ μεγαλύτερον τεμάχιον ΑΓ πρὸς τὸ μικρότερον, ΓΒ. Ὅταν τοῦτο συμβαίνῃ, λέγομεν ὅτι τὸ Γ **διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.** Ἡ τοιαύτη τομὴ ἑνὸς μήκους εἰς δύο μέρη ὠνομάσθη ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων *«χρυσῆ τομή»* καὶ χρησιμοποιεῖται καὶ σήμερον εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικήν.

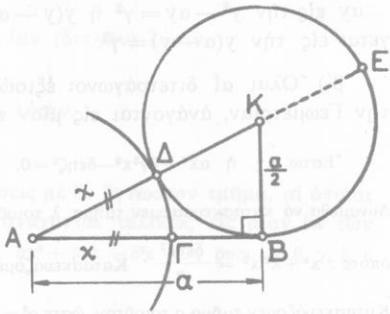
Σχ. 144

Ἐπειδὴ $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΑΓ}{ΓΒ} \Longleftrightarrow ΑΓ^2=ΑΒ\times ΓΒ$, διὰ τοῦτο πρακτικῶς λέγομεν ὅτι τὸ Γ διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ὅταν τὸ χωρίζῃ εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὅλου τμήματος ἐπὶ τὸ μικρότερον.

Ἐάν, λοιπόν, καλέσωμεν α τὸ τμῆμα ΑΒ καὶ x τὸ μεγαλύτερον μέρος αὐτοῦ διαιρεθέντος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τότε θὰ πληροῦται ἡ ἐξίσωσις :

$$x^2=\alpha(\alpha-x) \Longleftrightarrow x^2+\alpha x=\alpha^2 \Longleftrightarrow x(x+\alpha)=\alpha^2$$

Ὥστε τὸ x κατασκευάζεται γεωμετρικῶς συμφώνως πρὸς τὴν § **115**, α'. Γράφομεν δηλ. κύκλον ἀκτῖνος $\frac{\alpha}{2}$, ἐφαπτόμενον τοῦ ΑΒ εἰς Β, φέρομεν ἐκ τοῦ Α τέμνουσαν διὰ τοῦ κέντρου διερχομένην (σχ. 145) καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΑΔ τῆς τεμνούσης εἶναι ἴσον πρὸς x. Μεταφέρομεν τοῦτο ἐπὶ τοῦ ΑΒ εἰς τὴν θέσιν ΑΓ καὶ τὸ Γ διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.



Σχ. 145

β') Ἂν λύσωμεν Ἀλγεβρικῶς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν $x^2+\alpha x=\alpha^2$, εὑρίσκομεν (ἀπορρίπτοντες τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν) :

$$x=ΑΓ=\frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2} \Rightarrow \alpha-x=ΓΒ=\frac{\alpha(3-\sqrt{5})}{2}.$$

Συνάγομεν ὅτι τὸ Γ, τὸ διαιροῦν τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, διαιρεῖ ἐσωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{ΑΒ}$ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον :

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ συνέπειαν, *ἂν ἓν τμῆμα ΑΒ εἶναι διῃρημένον ὑπὸ τοῦ Γ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἓν ἄλλο τμῆμα Α'Β' διῃρημένον ὑπὸ τοῦ Γ' εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι καὶ αὐτὸ διῃρημένον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

γ') **Ἐπέκτασις.** Ἐὰν γεωμετρικόν τι μέγεθος (Α) δυνάμενον νὰ μετρηθῇ (ἐπιφάνεια ἢ στερεὸν κ.τ.λ.) καὶ ἔχον μέτρον Α χωρισθῇ εἰς δύο μέρη ἔχοντα μέτρα x καὶ Α—x, πληροῦται δὲ ἡ σχέσις $x^2 = A(A-x)$, λέγομεν ὅτι τὸ μέγεθος (Α) διῃρέθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον μὲ μεγαλύτερον μέρος τὸ x.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

495. Ἐὰν ἡ διάμεσος ΑΔ τριγ. ΑΒΓ προεκτεινομένη τέμνῃ εἰς Ε τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$2AE \cdot A\Delta = AB^2 + A\Gamma^2.$$

496. Ἐὰν ἀπὸ τυχόντος σημείου Μ περιφερείας ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΜΡΑ καὶ ΜΣΒ διερχόμεναι διὰ δύο σταθερῶν σημείων Ρ καὶ Σ συμμετρικῶν ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{MP}{PA} + \frac{M\Sigma}{\Sigma B}$ εἶναι σταθερόν.

497. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ἐκ σταθεροῦ σημείου Σ τῆς μικροτέρας φέρομεν χορδὴν ΣΑ τῆς μικροτέρας καὶ χορδὴν ΒΣΓ τῆς μεγαλυτέρας, καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Νὰ δειχθῇ ὅτι, τῆς ΣΑ στρεφομένης περὶ τὸ Σ, ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων : α') $\Sigma A^2 + \Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2$ καὶ β') $B\Gamma^2 + \Gamma A^2 + AB^2$ παραμένει σταθερόν.

498. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Διὰ τῶν Α καὶ Β γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἑνοῦμεν τὸ Γ μὲ τὸ ἓν σημεῖον Ε, καθ' ὃ ἡ εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΒ κάθετος τέμνει τὴν περιφέρειαν ταύτην. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῆς ΓΕ μετὰ τῆς διὰ τῶν Α καὶ Β διερχομένης μεταβλητῆς περιφερείας;

499. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπ' εὐθείας. Διὰ τῶν Α καὶ Β γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν ἐφαπτομένας ΓΜ καὶ ΓΝ πρὸς ταύτην. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν ΜΝ, ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς διὰ τῶν Α καὶ Β διερχομένης περιφερείας μεταβάλλεται.

500. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγ. ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\widehat{\alpha}$, Α καὶ τοῦ γινομένου $\beta(\gamma+\beta) = k^2$ (k = δοθὲν τμῆμα).

501. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγ. ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις α, ἡ γωνία $\widehat{A}$ καὶ τὸ γινόμενον $\gamma(\beta-\gamma) = k^2$ $(\beta > \gamma)$.

502. Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου Ο ἀχθῇ χορδὴ ΑΒ κύκλου δεδομένου καὶ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ταύτας εἶναι σταθερόν, ὅταν ἡ ΒΑ στρέφεται περὶ τὸ Ο, ὅπου τὸ Ο ὑποτίθεται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

503. Ἐὰν ἐκ δοθέντος σημείου Ο, κειμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου, ἀχθῇ χορδὴ ΓΔ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ τέμνουν τὴν κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένην εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, τὸ γινόμενον $AE \cdot AZ$ μένει σταθερόν, ὅταν ἡ ΓΔ στρέφεται περὶ τὸ Ο. Ἡ περιφέρεια δὲ (ΒΕΖ) διέρχεται καὶ δι' ἑτέρου σταθεροῦ σημείου, ὅταν ἡ ΓΔ στρέφεται περὶ τὸ Ο.

504. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

505. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ δοθείσης εὐθείας τμῆμα δοθέντος μήκους.

506. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ δεδομένου σημείου καὶ ἄλλης δεδομένης εὐθείας.

507. Δίδονται δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ Α ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ($\varepsilon_1$) καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ τῆς ($\varepsilon_2$) τμῆμα δεδομένου μήκους β.

508. Διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Α δύο περιφερειῶν ν' ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς περιφερείας εἰς Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = -K^2$ (Κ = δοθὲν τμῆμα).

509. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗτινος ἡ μία κάθετος πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα δ, ἡ δὲ ἄλλη νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς δ.

510. Νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἰς cm νὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 11x + 16 = 0$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἀλγεβρικῶς αὕτη.

511. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι (α), (β), (γ), διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ καὶ τρία τμήματα λ, μ, ν. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς (α) καὶ τέμνουσα τὴν (β) εἰς Α καὶ Β οὕτως, ὥστε $\overline{KA} \cdot \overline{KB} = \lambda\mu$ καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ τῆς (γ) χορδὴν μήκους ν.

512. Ἐὰν ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Μ, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$MB^2 = M\Gamma^2 = M\Delta \cdot MA.$$

Ἀντιστρόφως, ἂν εὐθεῖα ΑΔ τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τρ. ΑΒΓ εἰς Δ καὶ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Μ καὶ εἶναι $MB^2 = M\Delta \cdot MA$, τότε ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$.

513. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων α, Α, $\delta_A$ ($\delta_A$ ἐσωτερικὴ διχοτόμος). (Ὑπόδ. Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ προηγουμένη ἄσκησις).

514. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς διχοτόμου ΒΔ = δ καὶ τοῦ τμήματος ΓΔ = λ, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ διχοτόμος ΒΔ τῆς ὀξείας γωνίας $\widehat{B}$ ἐπὶ τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς.

515. Δοθέντος τοῦ μεγαλυτέρου μέρους ἑνὸς τμήματος διαιρεθέντος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον νὰ κατασκευασθῇ τὸ τμῆμα.

516. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος ΑΓ τμῆμα ΓΔ = ΓΒ, δείξατε ὅτι τὸ Δ διαιρεῖ τὸ ΑΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

517. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο ἄλλας δεδομένας εἰς σημεῖα Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε τὸ Β νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

518. Διὰ δοθέντος σημείου Α κειμένου ἐκτὸς δοθείσης περιφερείας νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε τὸ Β νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (δύο περιπτώσεις).

519. Νὰ δειχθῇ ὅτι μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, εἶναι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος νὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Ὡς ἐφαρμογὴ νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δοθεῖσαν περίμετρον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

520. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Δ καὶ Δ' συμμετρικὰ πρὸς σταθερὸν σημεῖον Σ τῆς ΒΓ. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΔ' τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ε καὶ Ε', νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα $A\Delta \cdot AE + A\Delta' \cdot AE'$ εἶναι σταθερόν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

521. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων α, $\widehat{A}$ καὶ τοῦ γινομένου $\overline{\Gamma\Delta} \times \overline{\Gamma A}$, ὅπου ΒΔ τὸ ἐπὶ τὴν ΑΓ ὕψος.

522. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ δίδεται σημεῖον Α. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{XO\Psi}$ καὶ τέμνουσα τὰς ἡμιευθείας ΟΧ, ΟΨ εἰς Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τρ. ΑΒΓ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα 2τ.

523. Δίδονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ Α, ἐξ ὧν ἡ ΑΨ κεῖται μεταξὺ τῶν ΑΧ, ΑΖ. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ δεδομένου σημείου Γ τῆς ΑΨ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς ΑΧ, ΑΖ εἰς Β καὶ Δ οὕτως, ὥστε :

$$\frac{A\Gamma^2}{B\Gamma \cdot \Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἔνθα μ καὶ ν δεδομένα τμήματα. Ἀκολούθως, ἂν δοθῇ τυχὸν σημεῖον Κ τοῦ ἐπιπέδου, ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Κ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς τρεῖς δεδομένας ἡμιευθείας εἰς Β′, Γ′, Δ′, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ ἰδία σχέσις :

$$A\Gamma'^2/B'\Gamma' \cdot \Gamma'\Delta' = \mu/\nu.$$

524. Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τρ.ΑΒΓ καὶ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τὰ ὕψη αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι

$$\overline{A'B} \cdot \overline{A'\Gamma} = -\overline{A'H} \cdot \overline{A'A} \quad \text{καὶ}$$

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{H\Gamma} \cdot \overline{H\Gamma'}.$$

525. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ (δύο περιπτώσεις).

526. Διὰ δοθέντος σημείου Σ κειμένου ἐντὸς δοθείσης γωνίας $x\widehat{O}y$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς $x\widehat{O}y$ εἰς Α καὶ Β οὕτως, ὥστε τὸ τρ.ΟΑΒ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ δοθὲν τετράγωνον.

527. Δίδεται κύκλος καὶ σταθερὰ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ ΜΑΒ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὸν κύκλον.

528. Διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς Μ καὶ τὴν πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς Ν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι :

$$\text{Εμβ ΟΜΒ} + \text{Εμβ ΟΝΓ} = \text{Εμβ ΑΒΓ}.$$

## ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ — ΡΙΖΙΚΟΙ ΑΞΟΝΕΣ

**118. α′) (Θ) — Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου Σ ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν σταθεροῦ κύκλου εἰς Α καὶ Β, τὸ γινόμενον $\overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B}$ εἶναι εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς σταθερὸς καλούμενος δύναμις τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον. Τὸ πρόσημον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χαρακτηρίζει τὴν θέσιν τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον.**

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν τὸ Σ εἶναι σημεῖον ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου (Κ, R), τότε γνωρίζομεν ὅτι (§ **111**, πόρισμα) $\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma K^2 - R^2$ (ἀκόμη καὶ ἂν τὰ Α καὶ Β συμπίπτουν). Ἐπειδὴ ὅμως τοῦ Σ κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου τὰ $\overrightarrow{\Sigma A}$ καὶ $\overrightarrow{\Sigma B}$ εἶναι ὁμόρροπα, ἔχομεν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην $\Sigma A \times \Sigma B = \overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B}$, ἑπομένως :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(1) $$\overline{\Sigma A}\times\overline{\Sigma B}=\Sigma K^2-R^2.$$

Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τότε ἓν ἐκ τῶν ΣΑ, ΣΒ εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως $\overline{\Sigma A}\times\overline{\Sigma B}=0=R^2-R^2=\Sigma K^2-R^2$ καὶ ἡ (1) πάλιν ἰσχύει.

Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, τότε γνωρίζομεν ὅτι (§ **110**, πόρισμα) $\Sigma A\times\Sigma B=R^2-\Sigma K^2$. Ἐπειδὴ ὅμως, τώρα, τὰ $\overrightarrow{\Sigma A}$ καὶ $\overrightarrow{\Sigma B}$ εἶναι ἀντίρροπα, διὰ τοῦτο $\overline{\Sigma A}\times\overline{\Sigma B}=-\Sigma A\times\Sigma B=-(R^2-\Sigma K^2)=\Sigma K^2-R^2$ καὶ ἡ (1) πάλιν ἰσχύει. Ἑπομένως εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\boxed{\overline{\Sigma A}\times\overline{\Sigma B}=\Sigma K^2-R^2}$$ =δύναμις τοῦ Σ πρὸς τὸν (K, R).

Τὸ σημεῖον τῆς «δυνάμεως τοῦ Σ», δηλ. τοῦ $\Sigma K^2-R^2=\overline{\Sigma A}\cdot\overline{\Sigma B}$ χαρακτηρίζει προφανῶς τὴν θέσιν τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον:

Ἐὰν $\Sigma K^2-R^2>0$, τότε τὸ Σ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου ($\Sigma K>R$).
Ἐὰν $\Sigma K^2-R^2=0$, τότε τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ($\Sigma K=R$).
Ἐὰν $\Sigma K^2-R^2<0$, τότε τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου ($\Sigma K<R$).

**β') Συμβολισμός.** Ἡ δύναμις τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (K, R) ἢ πρὸς τὴν περιφέρειαν (K, R) παρίσταται μὲ ΔυνΣ/(K,R) ἢ ΔυνΣ/(K).

**γ') Πόρισμα. Ἐὰν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, ἡ δύναμις αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν κύκλον ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον.**

**119. Θεώρημα τοῦ Euler καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.** α') (Θ)— **Ἐὰν εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες R καὶ ρ τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τυχόντος τριγώνου, τότε καὶ ἡ ἀπόστασις δ μεταξὺ τῶν κέντρων τῶν δύο τούτων κύκλων εἶναι ὡρισμένη καὶ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:**

$$\delta^2=R^2-2R\rho$$

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Ο τὸ ἔγκεντρον καὶ Κ τὸ περίκεντρον τοῦ τρ. ΑΒΓ καὶ Ι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς ΑΒ. Ἡ ευθ ΑΟ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ε τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ (σχ. 146), εἶναι δέ:

(1) ΕΟ=ΕΓ καὶ

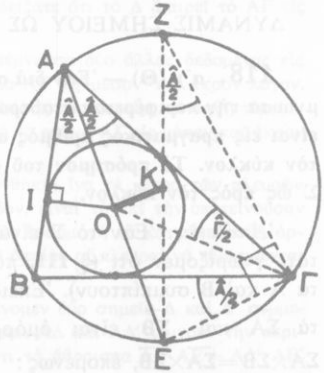
Ο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου.

Διότι $E\widehat{O}\Gamma=\frac{\widehat{A}}{2}+\frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ καὶ $O\widehat{\Gamma}E=$

$=O\widehat{\Gamma}B+B\widehat{\Gamma}E=\frac{\widehat{\Gamma}}{2}+\frac{\widehat{A}}{2}$.

Ὅθεν τὸ τρ. ΕΟΓ εἶναι ἰσοσκελές, μὲ ΕΟ=ΕΓ.

Ἡ (1) εἶναι μία *χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ ἐγκέντρου* Ο.



Σχ. 146

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐάν, τώρα, φέρωμεν τὴν διάμετρον ΕΖ τοῦ περικύκλου, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΙΟ καὶ ΖΕΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως :

$$\frac{OA}{EZ}=\frac{OI}{E\Gamma} \text{ ἢ λόγῳ τῆς (1), } \frac{OA}{2R}=\frac{\rho}{OE} \Rightarrow OA\cdot OE=2R\rho \Rightarrow$$

$$|\Delta\upsilon\nu\ O/(K)|=2R\rho \Rightarrow |OK^2-R^2|=2R\rho \Rightarrow R^2-OK^2=2R\rho \Rightarrow$$

$OK^2=R^2-2R\rho$, ἥτις εἶναι ἡ ἀποδεικτέα σχέσις.

**β') (Θ) — Ἐὰν ἡ διάκεντρος ΟΚ δύο κύκλων (Ο, ρ) καὶ (Κ, R) μὲ $R>\rho$ πληροῖ τὴν σχέσιν : $OK^2=R^2-2R\rho$, τότε ὑπάρχουν ἄπειρα τρίγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν (Κ, R) καὶ συγχρόνως περιγεγραμμένα περὶ τὸν (Ο, ρ).**

Ἐν πρώτοις, $OK^2=R^2-2R\rho \Rightarrow OK^2<(R-\rho)^2 \Rightarrow OK<R-\rho$, ἤτοι ὁ (Ο, ρ) κεῖται ἐντὸς τοῦ (Κ, R). Ἀπὸ τυχόντος σημείου Α τοῦ (Κ, R) ἂς φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ τοῦ (Ο, ρ) (σχ. 146). Ἡ εὐθ ΑΟ διχοτομεῖ τότε τὴν $B\widehat{A}\Gamma$, ἀπὸ δὲ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $\Rightarrow OK^2-R^2=-2R\rho \Rightarrow |\Delta\upsilon\nu.\ O/(K)|=2R\rho \Rightarrow OA\cdot EO=2R\rho$. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΙΟ καὶ ΕΖΓ ἕπεται : $OA\cdot E\Gamma=EZ\cdot OI$, δηλ. $OA\cdot E\Gamma=2R\rho$. Ἑπομένως $EO=E\Gamma$, ἥτις εἶναι, ὡς εἴδομεν προηγουμένως, χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ ἐγκέντρου Ο τοῦ τρ. ΑΒΓ. Δηλ. τὸ Ο εἶναι ἔγκεντρον τοῦ τρ. ΑΒΓ.

(Ἀσκήσεις : 589, 590, 591, 592).

## ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

**120. Ὁρισμός.—Καλεῖται «ριζικὸς ἄξων» δύο κύκλων τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.**

**(Θ) — Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν (Κ, R) καὶ (Κ', R') οἱ δύο κύκλοι καὶ Μ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν τοιοῦτον, ὥστε

$$\Delta\upsilon\nu M/(K)=\Delta\upsilon\nu M/(K'). \tag{1}$$

Ἐπειδὴ $\Delta\upsilon\nu M/(K)=MK^2-R^2$ καὶ $\Delta\upsilon\nu M/(K')=MK'^2-R'^2$, ἕπεται ὅτι **ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη,** ἵνα ἰσχύῃ ἡ (1), εἶναι

$$MK^2-R^2=MK'^2-R'^2 \quad \text{ἢ}$$

$$\boxed{MK^2-MK'^2=R^2-R'^2} \tag{2}$$

Ἀλλὰ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν πληρούντων τὴν (2) εἶναι, ὡς γνωστὸν (§ **90**, β'), εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων εἰς σημεῖον Π αὐτῆς τοιοῦτον, ὥστε

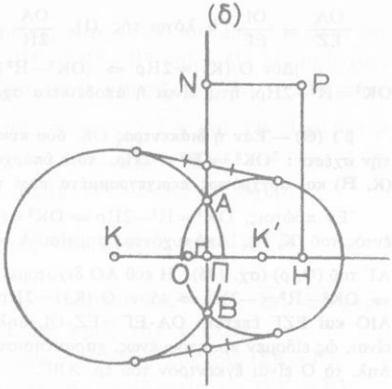
$$\boxed{2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi}=R^2-R'^2} \tag{3}$$

ἔνθα Ο τὸ μέσον τῆς διακέντρου.

Ἡ (3) ὁρίζει τὴν θέσιν τοῦ *«ποδὸς»* Π τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ἐπὶ τῆς δια-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κέντρου. Ὁ ποῦς Π τοῦ ριζικοῦ ἄξονος καὶ τὸ κέντρον τοῦ μικροτέρου κύκλου κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τῆς διακέντρου ΚΚ′. Διότι, ἂν R > R′, τότε ἐκ τῆς (3) ἕπεται $\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi}>0$, ἄρα $\overrightarrow{KK'}$ καὶ $\overrightarrow{O\Pi}$ ὁμόρροπα.



Σχ. 147

**121. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.** 1ον) Ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Κ′) **τέμνωνται** ἔστω εἰς Α καὶ Β, τότε ἕκαστον τῶν σημείων τούτων ἔχει μηδενικάς, ἄρα ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα, ἑπομένως, ριζικὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 147).

2ον) Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι (Κ) καὶ (Κ′) **ἐφάπτωνται** ἀλλήλων, τότε τὸ σημεῖον Α ἐπαφῆς ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα, ὅστις, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον, συμπίπτει ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ μὲ τὴν κοινὴν εἰς Α ἐφαπτομένην τῶν δύο κύκλων.

3ον) Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι εἶναι **ὁμόκεντροι,** δὲν ὑπάρχει ριζικὸς ἄξων. Διότι, ἂν εἰς τὸν τύπον $2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi}=R^2-R'^2$ (§ **120**) νοήσωμεν τὸ Κ′ τεῖνον νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Κ, ἡ ἀπόστασις $O\Pi=\frac{|R^2-R'^2|}{2KK'}$ τείνει εἰς ἄπειρον (ἐπειδὴ $KK'\to 0$) καὶ ὁ ριζικὸς ἄξων ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον. Κατὰ σύμβασιν λέγομεν ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν εἶναι ἡ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (§ **55**).

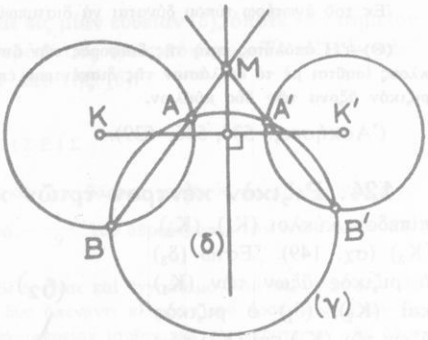
4ον) Ἀπὸ κάθε σημεῖον Ρ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος κείμενον **ἐκτὸς** τῶν δύο κύκλων ἄγονται **ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα** πρὸς τοὺς κύκλους. Διότι ἡ δύναμις τοῦ Ρ ὡς πρὸς ἕκαστον κύκλον ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ Ρ πρὸς τὸν κύκλον. Ἀντιστρόφως, ἂν ἐκ τοῦ Ρ ἄγωνται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρὸς τοὺς κύκλους, τὸ Ρ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν.

Κατὰ συνέπειαν, **ἐὰν οἱ δύο κύκλοι ἔχουν κοινὰς ἐφαπτομένας,** ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων (σχ. 147).

**122. Κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύο κύκλων.** α′) Ἐὰν διὰ σημείου Μ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (δ) δύο περιφερειῶν (Κ) καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(K′) φέρωμεν μίαν τέμνουσαν MAB τῆς (K) καὶ ἑτέραν τέμνουσαν MA′B′ τῆς (K′) (σχ. 148), τότε M∈(δ) ⇒ Δυν M/(K) =Δυν M/(K′) ⇒ $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MA'}\cdot\overline{MB'}$ ⇒ A, B, B′, A′ ὁμοκυκλικὰ (§ **113**), ἤτοι διὰ τῶν A, B, B′, A′ διέρχεται περιφέρεια (γ).



Σχ. 148

β′) **Ἀντιστρόφως:** Ἔστω περιφέρεια (γ) τέμνουσα τὴν (K) εἰς A καὶ B καὶ τὴν (K′) εἰς A′ καὶ B′ (σχ. 148). Αἱ εὐθεῖαι AB καὶ A′B′ τέμνονται ἐν γένει εἰς τὸ M. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MA'}\cdot\overline{MB'}$ (λόγῳ τῆς περιφερείας (γ)). Ἐπειδὴ ὅμως $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=$ = ΔυνM/(K) καὶ $\overline{MA'}\cdot\overline{MB'}=$ ΔυνM/(K′), ἕπεται ὅτι τὸ M ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (K) καὶ (K′), ἄρα τὸ M ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (δ). Ἑπομένως ριζικὸς ἄξων εἶναι ἡ διὰ τοῦ M ἀγομένη ⊥ KK′.

γ′) **Γενικὴ κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.** — Γράφομεν περιφέρειαν (γ) τέμνουσαν τὴν (K) εἰς A καὶ B καὶ τὴν (K′) εἰς A′ καὶ B′ (σχ. 148). Ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς M τῶν εὐθειῶν AB καὶ A′B′ φέρομεν τὴν κάθετον (δ) ἐπὶ τὴν διάκεντρον. Ἡ (δ) εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (K) καὶ (K′).

δ′) Εἰς τὰς εἰδικὰς περιπτώσεις τῆς § **121** ἡ κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύναται νὰ γίνῃ ἀκόμη εὐκολώτερον.

**123. Τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους.** Ἔστω P σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλων (K, R), (K′, R′) προβαλλόμενον εἰς N ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων καὶ εἰς H ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων KK′ (σχ. 147). Ἔστω δὲ O τὸ μέσον τοῦ KK′. Ἔχομεν:

$$\text{Δυν P/(K)}=PK^2-R^2,\quad \text{ΔυνP/(K′)}=PK'^2-R'^2 \text{ καὶ ἐξ αὐτῶν:}$$
$$\text{Δυν P/(K)}-\text{ΔυνP/(K′)}=PK^2-R^2-(PK'^2-R'^2)=PK^2-PK'^2-(R^2-R'^2).$$

Εἶναι ὅμως: $PK^2-PK'^2=2\overline{KK'}\cdot\overline{OH}$ (2ον θεώρ. τῆς διαμέσου § **83**) καὶ $R^2-R'^2=2\overline{KK'}.\overline{O\Pi}$ (ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ὁρίζοντος τὸν πόδα Π τοῦ ριζικοῦ ἄξονος § **120**). Ἑπομένως

$$\text{ΔυνP/(K)}-\text{ΔυνP/(K′)}=2\overline{KK'}\cdot\overline{OH}-2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi}=2\overline{KK'}(\overline{OH}-\overline{O\Pi})=2\overline{KK'}(\overline{\Pi O}+\overline{OH})$$

=(σχέσις τοῦ Chasles) $2\overline{KK'}\cdot\overline{\Pi H}=2\overline{KK'}\cdot\overline{NP}$. Ἐξ οὗ ὁ **«τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων»**

$$\boxed{\text{Δυν P/(K)}-\text{Δυν P/(K′)}=2\overline{KK'}\cdot\overline{NP}}$$

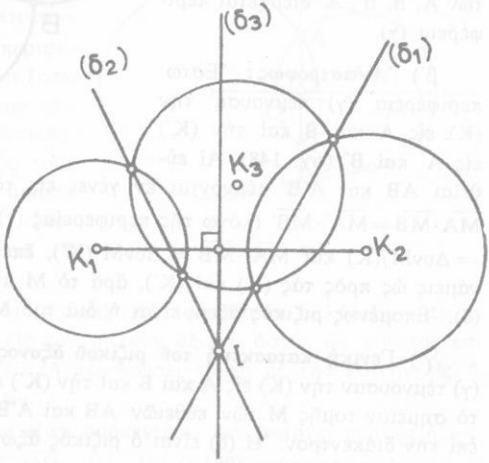
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου δύναται νὰ διατυπωθῇ τὸ κάτωθι θεώρημα.

**(Θ)—Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων ἑνὸς σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς διακέντρου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν δύο κύκλων.**

(Ἀσκήσεις: 534, 536, 539).

**124. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων.** Ἔστωσαν τρεῖς ὁμοεπίπεδοι κύκλοι $(K_1)$, $(K_2)$, $(K_3)$ (σχ. 149). Ἔστω $(\delta_3)$ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(K_1)$ καὶ $(K_2)$, $(\delta_1)$ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(K_2)$ καὶ $(K_3)$, $(\delta_2)$ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(K_3)$ καὶ $(K_1)$.



Σχ. 149

Ἐὰν οἱ $(\delta_3)$ καὶ $(\delta_1)$ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον I, τότε :

$I \in (\delta_3) \Rightarrow \Delta\upsilon\nu I/(K_1) =$
$= \Delta\upsilon\nu I/(K_2)$ καὶ
$I \in (\delta_1) \Rightarrow \Delta\upsilon\nu I/(K_2) =$
$= \Delta\upsilon\nu I/(K_3)$ ὁπότε :
$\Delta\upsilon\nu I/(K_1) = \Delta\upsilon\nu I/(K_3)$, δηλ. τὸ I ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν $(K_1)$ καὶ $(K_3)$, δηλ. εἰς τὸν $(\delta_2)$. Βλέπομεν ὅτι οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν τριῶν κύκλων λαμβανομένων ἀνὰ δύο συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον I. Τὸ I λέγεται **ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν κύκλων** καὶ εἶναι σημεῖον ἔχον ἴσας δυνάμεις καὶ ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους (καὶ ἑπομένως ἔχον τὴν ἰδίαν σχετικὴν θέσιν ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους). Εἰς ἥν περίπτωσιν τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι *ἐξωτερικὸν* καὶ τῶν τριῶν κύκλων, τότε εἶναι ἐκεῖνο τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον *ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα καὶ πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους.*

**Διερεύνησις.** Ἵνα οἱ $(\delta_3)$ καὶ $(\delta_1)$ τέμνωνται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ τρία κέντρα $K_1$, $K_2$, $K_3$ **νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.** Τότε θὰ ὑπάρχῃ ἓν ὡρισμένον ριζικὸν κέντρον.

Ἐὰν τὰ τρία κέντρα $K_1$, $K_2$, $K_3$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε δύο τινὰ δύνανται νὰ συμβαίνουν : 1ον) Οἱ $(\delta_1)$ καὶ $(\delta_3)$ δὲν ταυτίζονται, ὁπότε εἶναι παράλληλοι καὶ δὲν ὑπάρχει ριζικὸν κέντρον. Δυνάμεθα τότε, συμβατικῶς, νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διεύθυνσιν τοῦ $(\delta_1)$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2ον) Οἱ ($\delta_1$) καὶ ($\delta_3$) ταυτίζονται εἰς μίαν εὐθεῖαν (δ), ὁπότε πᾶν σημεῖον τῆς (δ) ἔχει ἴσας δυνάμεις καὶ ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους. Τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι, τότε, ἀπροσδιόριστον ἐπὶ τῆς (δ).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

529. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου βάρους τριγώνου ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν ἰσοῦται πρὸς τὸ $-\frac{1}{9}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

530. Ἐὰν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι καὶ ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον, ἡ δύναμις τοῦ σημείου τομῆς δύο ἀπέναντι πλευρῶν του προεκτεινομένων ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περὶ αὐτὸ περιφέρειαν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.

531. Ἔστωσαν Α΄, Β΄, Γ΄ τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τῶν Α΄, Β΄, Γ΄ ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον περιφέρειαν, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

532. Δύο περιφέρειαι (Κ, R), (Κ΄, R΄) τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

$$\Delta\upsilon\nu M/(K, R)+\Delta\upsilon\nu M/(K', R')=0$$

533. Εὐθεῖα παρ/λος τῇ βάσει ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τρ. ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους ΒΕ καὶ ΓΔ.

534. Τρεῖς περιφέρειαι ἔχουν κοινὴν χορδήν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς πρὸς τὰς δύο ἄλλας (ἓν πρὸς ἑκάστην) εἶναι σταθερός.

535. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Διὰ τοῦ Α διέρχεται μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) τέμνουσα τὴν (Ο, R) εἰς Μ καὶ Ν. Τόπος τῆς τομῆς τῆς ευθΜΝ καὶ τῆς εἰς τὸ Α ἐφαπτομένης τῆς (γ).

536. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου της. Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς (Ο, R) καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Α. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν δύο περιφερειῶν (Ο, R) καὶ (γ) ἐφάπτεται μιᾶς σταθερᾶς περιφερείας.

537. Ποῖον τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν περιφερειῶν τῶν γραφομένων μὲ διαμέτρους τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου;

538. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ. («μεσοτριγώνου»).

539. Ἐὰν (Ο, ρ) καὶ (Κ, R) εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος καὶ ὁ περιγεγραμμένος εἰς τρ.ΑΒΓ κύκλος, νὰ δειχθῇ ὅτι $\Delta\upsilon\nu O/(K, R)=-2R\rho$.

(Πρὸς τοῦτο ἂς χρησιμοποιηθῇ ὁ τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων (§ **123**) ὡς ἑξῆς. Ἔστω ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΟ τοῦ τρ.ΑΒΓ τέμνει τὴν (Κ, R) εἰς $A_1$. Ἡ περιφέρεια (ΒΟΓ) ἔχει κέντρον τὸ $A_1$. Ἂς ληφθῇ ἡ διαφορὰ δυνάμεων τοῦ Ο ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (Κ, R) καὶ (ΒΟΓ)).

540. Συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τῶν κορυφῶν τοῦ τρ. ΑΒΓ ὡς πρὸς τὸν κύκλον τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου.

541. Ἀπὸ τὸν πόδα τοῦ ὕψους ΑΑ΄ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς

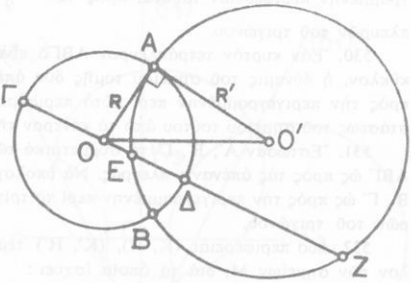
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, αἵτινες τέμνουν εἰς $B_1$ τὴν εὐθ ΑΒ καὶ εἰς $Γ_1$ τὴν ΑΓ, καθὼς καὶ καθέτους ἐπὶ τὰς ἰδίας πλευρὰς τεμνούσας εἰς $B_2$ τὴν ΑΒ καὶ $Γ_2$ τὴν ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΒΓ, $B_1Γ_1$, $B_2Γ_2$ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.

## ΚΥΚΛΟΙ ΤΕΜΝΟΜΕΝΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΣ — ΨΕΥΔΟΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΣ

**125. Ὀρθογωνιότης δύο κύκλων.** α') Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι (O, R) καὶ (O′, R′) τεμνόμεναι ὀρθογωνίως εἰς Α καὶ Β. Τότε αἱ ἀκτῖνες των ΟΑ καὶ Ο′Α′ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ τὸ τρίγωνον ΟΑΟ′ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἑπομένως, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, θὰ εἶναι :

(1) $(OO')^2 = R^2 + R'^2$.



Σχ. 150

Ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ ἡ (1), τότε ὑπάρχει ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΟ′ μὲ καθέτους πλευρὰς ΟΑ=R, Ο′Α=R′ καὶ οἱ κύκλοι (O, R) καὶ (O′, R′) τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται τό :

**ΘΕΩΡΗΜΑ Ι : Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς διακέντρου των νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.**

β') Ἐφ' ὅσον οἱ κύκλοι (O, R) καὶ (O′, R′) τοῦ σχ. 150 τέμνωνται ὀρθογωνίως, ἡ ἀκτὶς ΟΑ=R τοῦ ἑνὸς ἐφάπτεται εἰς Α τοῦ ἄλλου καὶ συνεπῶς ἔχομεν (§ **118**, γ') ὅτι :

(2) $ΔυνO/O' = R^2$.

Ἀντιστρόφως ἡ (2) συνεπάγεται ὅτι τὸ ἐκ τοῦ Ο ἀγόμενον ἐφαπτόμενον τμῆμα πρὸς τὸν (O′, R′) ἰσοῦται πρὸς R, ὁπότε οἱ κύκλοι τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἑπομένως ἰσχύει τὸ

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ : Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, εἶναι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου τῆς μιᾶς ὡς πρὸς τὴν ἄλλην νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἰδίας αὐτῆς ἀκτῖνος.**

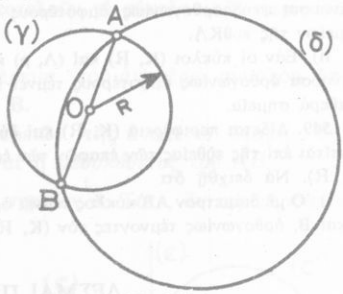
γ') Ἐὰν φέρωμεν διάμετρον ΓΔ τῆς (O, R), ἡ δὲ εὐθ ΓΔ τέμνῃ τὴν (O′, R′) εἰς Ε καὶ Ζ (σχ. 150), τότε ἡ σχέσις (2) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $\overline{OE} \cdot \overline{OZ} = R^2$ ἢ τὴν $\overline{OE} \cdot \overline{OZ} = OΓ^2 = OΔ^2$, ἥτις πάλιν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ ΓΔ (§ **63**, α'), δηλ. (Ε, Ζ, Γ, Δ) = —1. Ἑπομένως ἰσχύει τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ: Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, εἶναι μία διάμετρος τῆς μιᾶς περιφερείας νὰ χωρίζεται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῆς ἄλλης περιφερείας.**

**Πόρισμα. Πᾶσα περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων Α καὶ Β τέμνει ὀρθογωνίως πᾶσαν ἀπολλώνιον περιφέρειαν ἀναφερομένην εἰς τὰ Α καὶ Β.**

## 126. Περιφέρεια τεμνομένη ψευδοορθογωνίως ὑπὸ ἑτέρας περιφερείας. Ὁρισμός.—



Σχ. 151

**Λέγομεν ὅτι ἡ περιφέρεια (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τῆς περιφερείας (δ) (σχ. 151), ὅταν ἡ (δ) τέμνῃ τὴν (γ) εἰς δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα.**

Διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, **πρέπει καὶ ἀρκεῖ** ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (γ) καὶ (δ) νὰ εἶναι διάμετρος τῆς (γ), ἤτοι τὸ κέντρον Ο τῆς (γ) νὰ ἔχῃ ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς δύο περιφερείας. Ἀλλὰ

$\Delta\upsilon\nu O/(\gamma) = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = -R^2$

συνεπῶς καὶ $\boxed{\Delta\upsilon\nu O/(\delta) = -R^2}$ : Ἰσχύει λοιπὸν ἡ πρότασις :

**(Θ)— Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα περιφέρεια (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τῆς περιφερείας (δ), εἶναι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου τῆς (γ) ὡς πρὸς τὴν (δ) νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ τετραγώνου τῆς ἰδίας αὐτῆς ἀκτῖνος.**

**Πόρισμα. Ἵνα ἡ (Ο΄, R΄) τέμνῃ ψευδοορθογωνίως (διχοτομῇ) τὴν (Ο, R), πρέπει καὶ ἀρκεῖ :** $\boxed{(O'O)^2 = R'^2 - R^2}$.

**Παρατήρησις.** Ἡ σχέσις τῆς ὀρθογωνιότητος εἶναι συμμετρικὴ σχέσις μέσα εἰς τὸ σύνολον τῶν κύκλων τοῦ ἐπιπέδου, δηλ. ἂν ἡ περιφέρεια (γ) τέμνεται ὀρθογωνίως ὑπὸ τῆς (γ΄), τότε καὶ ἡ (γ΄) τέμνεται ὀρθογωνίως ὑπὸ τῆς (γ).

Ἡ σχέσις τῆς ψευδοορθογωνιότητος δὲν εἶναι συμμετρική, διότι ἡ διάμετρος ΑΒ τῆς (γ) (σχ. 151) εἶναι ἁπλῶς χορδὴ τῆς (δ) καὶ ὄχι διάμετρος. Ὡς ἐκ τούτου ἡ ἔκφασις : ἡ (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τῆς (δ).

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

542. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ψευδοορθογωνίως δύο δεδομένας περιφερείας εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δοθεισῶν ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς διακέντρου αὐτῶν.

543. Τίς ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν καὶ ψευδοορθογωνίως ἑτέραν δοθεῖσαν περιφέρειαν;

544. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια i) τέμνουσα ὀρθογωνίως τρεῖς δοθείσας περιφερείας ἢ ii) τέμνουσα ψευδοορθογωνίως ταύτας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

545. Νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα τὰ ἀγόμενα πρὸς αὐτὴν ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα νὰ ἔχουν μήκη δοθέντα.

546. Νὰ γραφῇ περιφέρεια i) διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν ἢ ii) διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα δύο δεδομένας περιφερείας.

547. Δοθεισῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν (O, R), (O, R′) καὶ τρίτης περιφερείας (c) νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως τὴν (O, R′) καὶ τῶν ὁποίων ὁ ριζικὸς ἄξων μετὰ τῆς (c) νὰ ἐφάπτεται τῆς ὁμοκέντρου (O, R). (βλ. § **123**).

548. i) Δοθέντων δύο κύκλων (K, R), (Λ, ρ) νὰ δειχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ περιφέρειαι αἱ τέμνουσαι ψευδοορθογωνίως ἀμφοτέρους τοὺς δοθέντας διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων τῆς ευθΚΛ.

ii) Ἐὰν οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τότε πᾶσα περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως ἀμφοτέρους τέμνει καὶ τὴν διάκεντρον ΚΛ· καὶ μάλιστα εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα.

549. Δίδεται περιφέρεια (K, R) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐξωτερικὰ αὐτῆς, ἐξ ὧν τὸ B κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἐπαφῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (K, R). Νὰ δειχθῇ ὅτι

i) Ὁ μὲ διάμετρον AB κύκλος τέμνει ὀρθογωνίως τὸν (K, R). ii) Οἱ κύκλοι μὲ κέντρα A καὶ B, ὀρθογωνίως τέμνοντες τὸν (K, R), τέμνονται καὶ μεταξύ των ὀρθογωνίως.

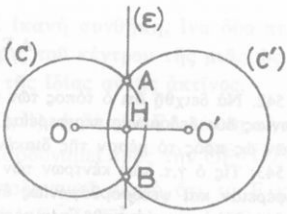
## ΔΕΣΜΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ

**127. Ὁρισμοὶ καὶ θεωρήματα.** α′) Κατ' ἀρχήν, **καλεῖται δέσμη περιφερειῶν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ μίαν περιφέρειαν (c) καὶ ἀπὸ ὅλας τὰς περιφερείας (c′), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα (ε).**

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι, δοθείσης μιᾶς περιφερείας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ε), ὑπάρχουν πάντοτε περιφέρειαι ἔχουσαι μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε).

**Παρατήρησις.** Ἐὰν ὑπάρχουν τοιαῦται περιφέρειαι, τὰ κέντρα των εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου O τῆς (c) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) (ἀφοῦ ὁ ριζικὸς ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον).

β′) Διακρίνομεν **τρεῖς περιπτώσεις,** ἀναλόγως τῆς σχετικῆς θέσεως τῆς εὐθείας (ε) μετὰ τῆς περιφερείας (c) καὶ θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ὑπάρχουν τρία διαφορετικὰ εἴδη δεσμῶν περιφερειῶν.



Σχ. 152

**I. Αἱ (c) καὶ (ε) τέμνονται εἰς A καὶ B.** Τότε, ἂν περιφέρεια (c′) ἔχῃ μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν (ε), θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην Δυν A/(c) = ΔυνA/(c′) = 0 καὶ ΔυνB/(c) = ΔυνB/(c′) = 0. Ἀφοῦ δὲ τὰ ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεῖα Α καὶ Β ἔχουν μηδενικὰς δυνάμεις ὡς πρὸς τὴν (c′), διὰ τοῦτο ἡ (c′) *διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β.*

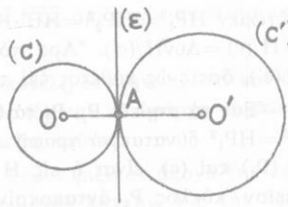
**Ἀντιστρόφως,** ἂν περιφέρεια (c′) διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β, τότε ἔχει μετὰ τῆς (c), ὡς ριζικὸν ἄξονα, τὴν ευθ ΑΒ, δηλ. τὴν (ε). Ἐξ αὐτῶν ἕπεται τὸ

**Θεώρημα. —Ἔστω περιφέρεια (c) καὶ εὐθεῖα (ε) τεμνόμεναι εἰς Α καὶ Β. Τότε ἡ περιφέρεια (c) καὶ αἱ περιφέρειαι (c′), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε), ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β.**

**Ὁρισμός.** Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ ἀνωτέρω συνόλου ἀποτελοῦν **δέσμην μὲ βασικὰ σημεῖα Α καὶ Β.**

Τὸ *σύνολον τῶν κέντρων* τῶν περιφερειῶν τῆς ἀνωτέρω δέσμης, δηλ. τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β, εἶναι ἡ *μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.*

II. **Αἱ (c) καὶ (ε) ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α.** Τότε, ἂν περιφέρεια (c′) ἔχῃ μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν (ε), θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ΔυνΑ/(c)= = ΔυνΑ/(c′) = 0, ἑπομένως ἡ (c′) διέρχεται διὰ τοῦ Α. Ἔχει καὶ τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ευθ ΟΑ (ἐδ. α′, παρατήρ.), ἄρα ἡ (c′) ἐφάπτεται τῆς (ε) εἰς Α.



Σχ. 153

**Ἀντιστρόφως,** ἂν περιφέρεια (c′) ἐφάπτεται τῆς (ε) εἰς Α, ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῆς καὶ τῆς (c) εἶναι ἡ εἰς Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ, δηλ. ἡ (ε). Ἐκ τούτων ἕπεται τό :

**Θεώρημα.— Ἔστω περιφέρεια (c) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Α. Τότε ἡ περιφέρεια (c) καὶ αἱ περιφέρειαι (c′), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε), ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) εἰς τὸ Α.**

Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ συνόλου τούτου ἀποτελοῦν **δέσμην ἐφαπτομένων περιφερειῶν.**

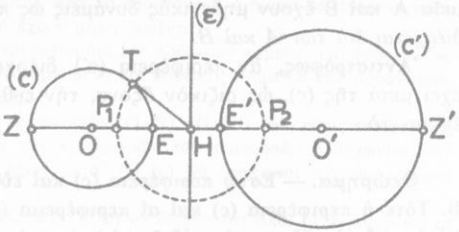
Τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῆς ἀνωτέρω δέσμης εἶναι ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα ΟΑ, ἂν δεχθῶμεν ὅτι τὸ σημεῖον Α εἶναι περιφέρεια μηδενικῆς ἀκτῖνος (σημεῖον - κύκλος) περιλαμβανομένη εἰς τὴν δέσμην.

III. **Αἱ (c) καὶ (ε) οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.** Τότε ἡ προβολὴ Η τοῦ κέντρου Ο τῆς (c) ἐπὶ τὴν (ε) εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς (c) καὶ ἑπομένως ἄγεται ἐκ τοῦ Η ἐφαπτόμενον τμῆμα ΗΤ πρὸς τὴν περιφέρειαν (c) (σχ. 154). Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΗ τὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$ τοιαῦτα,ὥστε : $HP_1 = HP_2 = HT \Rightarrow$



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(1) $HP_1^2 = HP_2^2 = HT^2$ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει περιφέρεια (c′) ἔχουσα μετὰ τῆς (c) ριζικὸν ἄξονα τὴν (ε). Τὸ κέντρον O′ τῆς (c′) θὰ κεῖται τότε ἐπὶ τῆς ευθ OH καὶ μία διάμετρος E′Z′ τῆς (c′) θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ευθ OH. Ἐπειδὴ τὸ H δέον νὰ ἔχῃ ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) καὶ (c′), θὰ εἶναι : $HT^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$ ἢ λόγῳ τῆς (1)



Σχ. 154

(2) $$HP_1^2 = HP_2^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}.$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι ἡ τετρὰς $P_1$, $P_2$, E′, Z′ εἶναι ἁρμονικὴ (§ **63**).

**Ἀντιστρόφως.** Ἔστωσαν δύο σημεῖα E′, Z′ συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὰ $P_1$, $P_2$ καὶ ἔστω (c′) περιφέρεια διαμέτρου E′Z′ καὶ κέντρου O′. Τότε θὰ ἔχωμεν $HP_1^2 = HP_2^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$ ἢ λόγῳ τῶν (1) : $HT^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$, δηλ. Δυν H/(c) = ΔυνH/(c′). Ἄρα τὸ H ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν (c) καὶ (c′), ὅστις ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν OO′ ταυτίζεται μὲ τὴν εὐθεῖαν (ε).

—Ἐὰν τὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$ τὰ θεωρήσωμεν ὡς σημεῖα - κύκλους, ἡ σχέσις $HT^2 = HP_1^2$ δύναται νὰ γραφῇ ΔυνH/(c) = ΔυνH/($P_1$), ἄρα ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν ($P_1$) καὶ (c) εἶναι ἡ εἰς H κάθετος ἐπὶ τὴν ευθ $OP_1$, δηλ. ἡ (ε). Τὸ σημεῖον - κύκλος $P_1$ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν ἀπαίτησιν τοῦ προβλήματος. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὸ $P_2$.

Ἐκ τούτων ἕπεται τό :

**Θεώρημα.** —**Ἔστω περιφέρεια (c) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐξωτερικὴ τῆς (c) καὶ ἔστω H ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου O τῆς (c) ἐπὶ τὴν (ε). Τότε ἡ περιφέρεια (c) καὶ πᾶσαι αἱ περιφέρειαι (c′), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε), ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους E′Z′ τοιαύτας, ὥστε τὰ E′ καὶ Z′ νὰ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν σταθερῶν σημείων $P_1$, $P_2$ τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς εὐθείας OH καὶ ὁριζομένων ὑπὸ τῆς σχέσεως : $HP_1^2 = HP_2^2 =$ Δυν H/(c).**

**Ὁρισμός.** Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ ἀνωτέρω συνόλου ἀποτελοῦν **δέσμην μὲ ὁριακὰ σημεῖα** $P_1$, $P_2$ (ἢ μὲ σημεῖα Poncelet, τὰ $P_1$, $P_2$).

γ′) **Σύνολον τῶν κέντρων μιᾶς δέσμης μὲ ὁριακὰ σημεῖα.** Ἐπειδὴ ἡ τετρὰς $P_1$, $P_2$, E′, Z′ εἶναι ἁρμονικὴ (σχ. 154), ἔχομεν $\overline{O'P_1} \cdot \overline{O'P_2} = O'E'^2 = O'Z'^2$. Ἄρα τὸ $\overline{O'P_1} . \overline{O'P_2}$ εἶναι θετικὸν καὶ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{O'P_1}, \overrightarrow{O'P_2}$ ὁμόρροπα. Ἑπομένως τὸ κέντρον O′ τυχούσης περιφερείας τῆς δέσμης εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος $P_1P_2$. Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης μὲ ὁριακὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$ εἶναι τὸ ἐκτὸς τοῦ τμήματος $P_1P_2$ μέρος τῆς εὐθείας.*

**Συμπέρασμα.** Μία περιφέρεια καὶ μία εὐθεῖα ὁρίζουν, πάντοτε, μίαν δέσμην περιφερειῶν. Ἔχομεν δὲ τρία εἴδη δεσμῶν περιφερειῶν.

**128. Ἰδιότητες τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης.** α΄) (Θ) **— Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο οἱωνδήποτε περιφερειῶν μιᾶς δέσμης ὁριζομένης ὑπὸ μιᾶς περιφερείας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ε) εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε).**

Ἔστω δέσμη περιφερειῶν ὁριζομένη ὑπὸ μιᾶς περιφερείας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ε) καὶ ἔστωσαν (c΄) καὶ (c΄΄) δύο τυχοῦσαι περιφέρειαι τῆς δέσμης ταύτης. Πᾶν σημεῖον Μ τῆς (ε) ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) καὶ (c΄) καὶ ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) καὶ (c΄΄). Ἄρα ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c΄) καὶ (c΄΄).

**β΄) (Θ) — Δύο μὴ ὁμόκεντροι περιφέρειαι ὁρίζουν μίαν δέσμην.**

Ἔστωσαν (c) καὶ (c΄) δύο μὴ ὁμόκεντροι περιφέρειαι. Αὗται ἔχουν ἕνα ριζικὸν ἄξονα (ε). Ἡ περιφέρεια (c) καὶ ἡ (ε) ὁρίζουν μίαν δέσμην περιφερειῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ ἡ (c΄).

**γ΄) (Θ) — Ἵνα σύνολον περιφερειῶν ἀποτελῇ δέσμην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ κέντρα των νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας τινὸς (δ) καὶ νὰ ὑπάρχῃ σημεῖον Μ ἔχον ἴσας δυνάμεις πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας ταύτας.**

Διότι δύο ἐκ τῶν περιφερειῶν τούτων ἔχουν ριζικὸν ἄξονα τὴν ἐκ τοῦ Μ κάθετον ἐπὶ τὴν (δ). Ἑπομένως ὁρίζουν μίαν δέσμην. Εἰς τὴν δέσμην αὐτὴν προφανῶς ἀνήκουν καὶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι περιφέρειαι τῆς ἀνωτέρω οἰκογενείας.

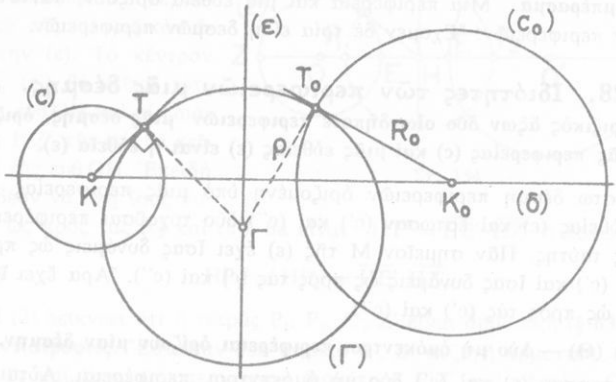
**129. Ὀρθογώνιοι δέσμαι περιφερειῶν.** α΄) Ἂς θεωρήσωμεν δέσμην περιφερειῶν F, μὲ εὐθεῖαν κέντρων τὴν (δ) καὶ ριζικὸν ἄξονα τὴν (ε), καθὼς καὶ δύο περιφερείας (c) καὶ ($c_0$) τῆς δέσμης ταύτης F, κέντρων K καὶ $K_0$ (σχ. 155). Ἔστω Γ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος κείμενον **ἐκτὸς** τῶν περιφερειῶν (c) καὶ ($c_0$). Ἐκ τοῦ Γ ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα ΓΤ καὶ $ΓΤ_0$ πρὸς τὰς (c) καὶ ($c_0$).

Ἐὰν λοιπὸν ἡ ($c_0$) μένῃ σταθερὰ καὶ ἡ (c) μεταβάλλεται, διατρέχουσα ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης F, τὸ ἐφαπτόμενον τμῆμα ΓΤ διατηρεῖ σταθερὸν μῆκος ($=ΓΤ_0$) καὶ ἑπομένως τὸ Τ κεῖται πάντοτε ἐπὶ σταθερᾶς περιφερείας (Γ, $ΓΤ_0$) τεμνούσης ὀρθογωνίως ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης.

Ἀντιστρόφως ἔστω (Γ, ρ) περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο περιφερείας (c) καὶ ($c_0$) τῆς δέσμης. Τότε $ΔυνΓ/(c)=ΔυνΓ/(c_0)=ρ^2$, ἤτοι τὸ Γ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (ε) τῆς δέσμης καὶ εἶναι καὶ ἐξωτερικὸν ὅλων τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης (διότι ἔχει ὡς πρὸς ὅλας τὴν ἰδίαν, θε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τικήν, δύναμιν $\rho^2$). Βλέπομεν ὅτι **«ὑπάρχουν ἄπειροι περιφέρειαι (Γ) ὀρθογώνιοι πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης F, τὸ δὲ σύνολον τῶν κέντρων**



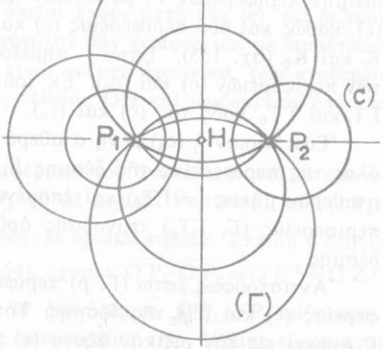

Σχ. 155

**τῶν (Γ) εἶναι τὸ μέρος τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῆς F, τὸ κείμενον ἐκτὸς τῶν περιφερειῶν τῆς F».**

Ἂς καλέσωμεν Φ τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τούτων (Γ), τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Μία σταθερὰ περιφέρεια ($c_0$) τῆς δέσμης F, κέντρου $K_0$ καὶ ἀκτῖνος $R_0$ (σχ. 155), τέμνει ὀρθογωνίως ὅλας τὰς περιφερείας (Γ), ἄρα $\Delta\upsilon\nu K_0/(\Gamma) = R_0^2$. Δηλ. ὑπάρχει σημεῖον $K_0$ ἔχον τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας (Γ) τοῦ συνόλου Φ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ κέντρα τῶν (Γ) κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε), διὰ τοῦτο αἱ (Γ) ἀποτελοῦν δέσμην μὲ ριζικὸν ἄξονα τὴν ἐκ τοῦ $K_0$ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) (§ **128,** γ΄).

Ἡ δέσμη αὐτὴ Φ λέγεται **ὀρθογώνιος** (ἢ *συζυγὴς*) πρὸς τὴν F καὶ **ἔχει εὐθεῖαν κέντρων τὸν ριζικὸν ἄξονα (ε) τῆς F καὶ ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν κέντρων $KK_0$ τῆς F.**

Κάθε περιφέρεια τῆς μιᾶς δέσμης τέμνει ὀρθογωνίως πάσας τὰς περιφερείας τῆς ἄλλης δέσμης.




Σχ. 156

β΄) **Τὰ εἴδη τῶν δύο ὀρθογωνίων δεσμῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δέσμη F εἶναι μὲ ὁριακὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$.

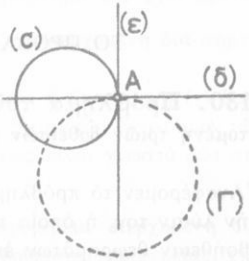
Ἂν νοήσωμεν περιφέρειαν (γ) διαμέτρου $P_1P_2$, αὕτη τέμνει

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὀρθογωνίως ὅλους τοὺς κύκλους (c) τῆς δέσμης F (ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν $P_1$, $P_2$), ἄρα ἡ (γ) ἀνήκει εἰς τὴν ὀρθογώνιον δέσμην Φ. Τὸ $P_1$ κείμενον ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῆς δέσμης Φ ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας (Γ) τῆς Φ, ἄρα $\Delta\upsilon\nu P_1/(\Gamma) = \Delta\upsilon\nu P_1/(\gamma) = 0$. Ἤτοι τὸ $P_1$ (καὶ ὁμοίως καὶ τὸ $P_2$) ἀνήκει εἰς τὴν (Γ). Ἡ δέσμη Φ δέχεται τὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$ ὡς βασικὰ σημεῖα.

Ἀντιστρόφως, ἂν θεωρήσωμεν ὡς ἀρχικὴν δέσμην τὴν Φ μὲ βασικὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$, ἡ ὀρθογώνιός της, δηλ. ἡ F, ἔχει τὰ $P_1$, $P_2$ ὡς σημεῖα Poncelet.

—Ἐὰν ἡ F εἶναι δέσμη περιφερειῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) εἰς A μὲ εὐθεῖαν κέντρων τὴν (δ), κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ A, τότε ἡ ὀρθογώνιος δέσμη Φ θὰ ἔχῃ εὐθεῖαν κέντρων τὴν (ε) (τὸν ριζικὸν ἄξονα τῆς F). Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα περιφέρεια (Γ) τῆς Φ τέμνει ὀρθογωνίως πᾶσαν περιφέρειαν (c) τῆς F, διὰ τοῦτο κατ' ἀνάγκην ἡ (Γ) ἐφάπτεται τῆς (δ) (σχ. 157). Ὥστε ἡ Φ εἶναι ἐπίσης δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν.



Σχ. 157

γ' Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τὸ θεώρημα :

**«Ἐκ δύο ὀρθογωνίων δεσμῶν περιφερειῶν, ἂν ἡ μία ἔχῃ βασικὰ σημεῖα A, B, ἡ ἄλλη ἔχει ὁριακὰ σημεῖα τὰ A καὶ B καὶ τανάπαλιν. Ἂν ἡ μία εἶναι δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν, ἡ ὀρθογώνιός της εἶναι πάλιν δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν».**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

550. Ἐὰν ὑπάρχουν δύο σημεῖα A, B ἔχοντα ἕκαστον ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας $(c_1)$, $(c_2)$,... $(c_\nu)$..., τότε αἱ περιφέρειαι αὗται ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην

551. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμην καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου M.

552. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμην καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (δ).

553. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμην καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (γ).

554. Τρεῖς περιφέρειαι $(O_1, R_1)$, $(O_2, R_2)$, $(O_3, R_3)$ ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπ' εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν ἀκτίνων καὶ τῶν ἀποστάσεων τῶν κέντρων, ἵνα αἱ τρεῖς περιφέρειαι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην.

555. Τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ψευδοορθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας ἀποτελεῖ δέσμην. Σχεδιάσατε μετ' ἀκριβείας τὴν δέσμην ταύτην.

556. Τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν ἑκάστη, τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως μίαν δοθεῖσαν περιφέρειαν καὶ ψευδοορθογωνίως μίαν ἄλλην, ἀποτελεῖ δέσμην. Σχεδιάσατε μετ' ἀκριβείας τὴν δέσμην ταύτην.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

557. Τὸ σύνολον τῶν ἀπολλωνίων περιφερειῶν τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀποτελεῖ δέσμην μὲ ὁριακὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ποία ἡ ὀρθογώνιος δέσμη;

558. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων: $B\Gamma=\alpha$, $\upsilon_\alpha=h$, $\delta_A=\delta$ $(\delta>h)$.

559. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς δύο δεδομένας περιφερείας εἶναι σταθερός, εἶναι περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς τὴν δέσμην, τὴν ὁποίαν αἱ δύο περιφέρειαι ὁρίζουν.

560. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμην καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν.

## ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

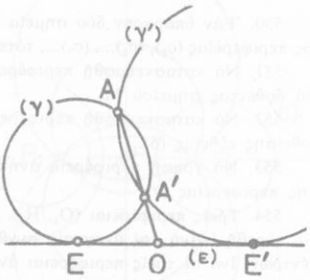
**130. Πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου: «Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν».**

Ἀναφέρομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πληροφοριακῶς χωρὶς νὰ προβῶμεν εἰς τὴν λύσιν του, ἡ ὁποία πράγματι ἐπιτυγχάνεται γεωμετρικῶς, ἀλλὰ μὲ τὴν βοήθειαν θεωρημάτων ἐκ τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ τῆς ἀντιστροφῆς.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δίδει γένεσιν εἰς ἐννέα ἄλλα προβλήματα, ὅταν μία ἢ περισσότεραι ἐκ τῶν περιφερειῶν ἀντικατασταθοῦν μὲ σημεῖα (ἀκτὶς μηδενικὴ) ἢ μὲ εὐθείας (ἀκτὶς ἄπειρος). Θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ ἐνδιαφερούσας τινὰς **εἰδικὰς περιπτώσεις** τοῦ γενικοῦ προβλήματος τοῦ Ἀπολλωνίου.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι.—Νὰ γραφῇ περιφέρεια (γ) διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Α′ καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (ε)**

1ον) Τὰ Α καὶ Α′ κεῖνται ἐπὶ ἡμιευθείας ἀρχομένης ἀπὸ σημείου Ο τῆς (ε) (σχ. 158). Τότε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε τῆς ζητουμένης περιφερείας (γ) μετὰ τῆς (ε) ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως $\overline{OE}^2=\overline{OA}\cdot\overline{OA'}$. Τὴν σχέσιν ταύτην πληροῦν δύο σημεῖα Ε, Ε′ τῆς (ε) ἀπέχοντα τοῦ Ο ἀπόστασιν, μέσην ἀνάλογον τῶν ΟΑ, ΟΑ′ καὶ ἑπομένως κατασκευάσιμα. Ἑκάστη τῶν περιφερειῶν (Α, Α′, Ε) καὶ (Α, Α′, Ε′) ἐφάπτεται τῆς εὐθείας (ε) (§ **112**). Τὸ πρόβλημα ἔχει **δύο λύσεις.**

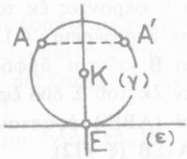


Σχ. 158

2ον) Ἐὰν ἓν ἐκ τῶν Α καὶ Α′ κεῖται ἐπὶ τῆς (ε), π.χ. τὸ Α′, τότε τὸ κέν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρον τῆς (γ) κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ Α΄Α καὶ ἐπὶ τῆς εἰς Α΄ καθέτου ἐπὶ τὴν (ε) καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν.**



Σχ. 159

3ον) ΑΑ΄//(ε). Τότε ἡ (γ) εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τῆς χορδῆς ΑΑ΄, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου καὶ ὁρίζεται μονοσημάντως. Τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν.**

4ον) Τὰ Α καὶ Α΄ ἑκατέρωθεν τῆς (ε).

Τότε πᾶσα περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Α΄ τέμνει τὴν (ε), πάντοτε εἰς δύο διακεκριμένα σημεῖα. Τὸ πρόβλημα **δὲν ἔχει λύσιν.**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια (γ) διερχομένη διὰ σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δύο εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$).**

Τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον, διότι ἡ ζητουμένη (γ) θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Α ὡς πρὸς μίαν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, ἅς σχηματίζουν αἱ ($ε_1$) καὶ ($ε_2$). Ἑπομένως εἶναι γνωστὰ δύο σημεῖα, δι' ὧν διέρχεται ἡ (γ).

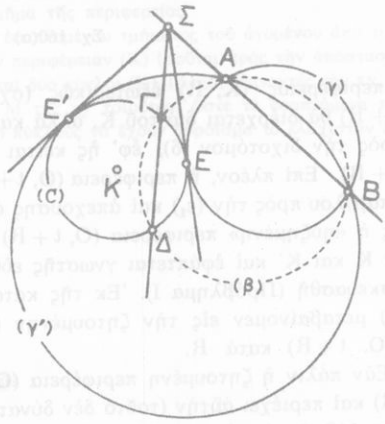
**ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (c).**

1ον) Ἂν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς (c), τότε ἡ ζητουμένη ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς Α καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Β. Τὸ κέντρον της ὁρίζεται μονοσημάντως (τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ καὶ τοῦ φορέως τῆς ἀκτῖνος ΚΑ τῆς (c)) καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν**

2ον) Τὸ ἓν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου (c) καὶ τὸ ἄλλο ἐκτός. Τότε προφανῶς τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, δηλ. **0 λύσεις.**

3ον) Τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἀμφότερα ἐκτὸς ἢ ἀμφότερα ἐντὸς τοῦ κύκλου (c). Τότε, ἔστω (γ) ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

Φέρομεν βοηθητικὴν περιφέρειαν (β) διερχομένην διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τέμνουσαν τὴν (c) εἰς Γ καὶ Δ (σχ. 160). Ἔστω Σ ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἂν ἡ ζητουμένη (γ) ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς Ε, τότε ἡ εἰς Ε κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν (γ) καὶ (c) ὡς ριζικὸς ἄξων τῶν (γ) καὶ (c) θὰ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς Σ τῶν δύο ἄλλων ριζικῶν ἀξόνων. Ὥστε εὑρίσκομεν



Σχ. 160

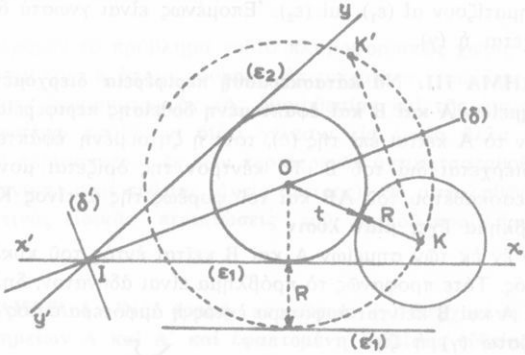
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ Ε φέροντες ἐκ τοῦ γνωστοῦ σημείου Σ ἐφαπτομένην πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν (c). Ἐπειδὴ τὸ Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (c), ὅταν τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἀμφότερα ἐκτὸς ἢ ἀμφότερα ἐντὸς τοῦ (c), διὰ τοῦτο ἔχομεν ἐκ τοῦ Σ δύο ἐφαπτομένας ΣΕ, ΣΕ'. Ἀμφότεραι αἱ περιφέρειαι (ΑΒΕ) καὶ (ΑΒΕ') ἐφάπτονται τῆς (c), διότι $ΣΕ^2 = ΣΓ \cdot ΣΔ = ΣΑ \cdot ΣΒ$ καὶ $ΣΕ'^2 = ΣΑ \cdot ΣΒ$ (§ **112**).

Ἂν ΓΔ//ΑΒ, τὸ Σ εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ ΑΒ καὶ τότε φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς (c) παρ/λους πρὸς τὴν ΑΒ καὶ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ε καὶ Ε'.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ δοθείσης περιφερείας.**

**Ἡ κεντρικὴ ἰδέα τῆς λύσεως.** Ἔστω (Ο, t) μία τῶν ζητουμένων περιφερειῶν ἐφαπτομένη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) καὶ τῆς δοθείσης περιφερείας (Κ, R) ἐξωτερικῶς (σχ. 160(α)). Τότε ἡ περιφέρεια (Ο, t+R) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Κ, ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ Κ' τοῦ Κ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον (δ), ἐφ' ἧς κεῖται τὸ κέντρον Ο τῆς περιφερείας (Ο, t+R). Ἐπὶ πλέον, ἡ περιφέρεια (Ο, t+R) ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας ($ε_1'$) παρ/λου πρὸς τὴν ($ε_1$) καὶ ἀπεχούσης ἀπόστασιν R ἀπὸ ταύτης. Ἑπομένως ἡ «ηὐξημένη» περιφέρεια (Ο, t+R) διέρχεται διὰ δύο γνωστῶν σημείων Κ καὶ Κ' καὶ ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας ($ε_1'$) καὶ οὕτω δύναται νὰ κατασκευασθῇ (Πρόβλημα Ι). Ἐκ τῆς κατασκευασθείσης περιφερείας (Ο, t+R) μεταβαίνομεν εἰς τὴν ζητουμένην (Ο, t) ἐλαττοῦντες τὴν ἀκτῖνα τῆς (Ο, t+R) κατὰ R.



Σχ. 160(α)

Ἐὰν πάλιν ἡ ζητουμένη περιφέρεια (Ο, t) ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς (Κ, R) καὶ περιέχει αὐτὴν (τοῦτο δὲν δύναται νὰ συμβῇ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 160 α), τότε ἡ περιφέρεια (Ο, t—R) διέρχεται διὰ δύο γνωστῶν ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μείων (K καὶ τοῦ συμμετρικοῦ του ὡς πρὸς τὴν (δ)) καὶ ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας //($\varepsilon_1$) καὶ ἀπεχούσης R ἀπὸ ταύτης. Κατασκευασθείσης τῆς «ἠλαττωμένης» (O, t—R) κατασκευάζεται καὶ ἡ (O, t) δι' αὐξήσεως τῆς ἀκτῖνος τῆς (O, t—R) κατὰ R.

Τέλος, ἂν ἡ ζητουμένη περιφέρεια (O, t) περιέχεται ἐντὸς τῆς (K, R) καὶ ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς αὐτῆς, τότε ἡ περιφέρεια (O, R—t) διέρχεται διὰ τοῦ K καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

561. Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι (K), (Λ), (O) ἐκτὸς ἀλλήλων ἀνὰ δύο καὶ ἐκ τῶν ὁποίων αἱ (K) καὶ (Λ) εἶναι ἴσαι.

Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη :

i) Ἐσωτερικῶς καὶ τῶν τριῶν δοθεισῶν.

ii) Ἐσωτερικῶς τῶν δύο ἴσων καὶ ἐξωτερικῶς τῆς τρίτης.

(Ὑπόδ. i). Ἐὰν R ἡ ἀκτὶς ἑκάστης τῶν (K), (Λ), τότε, ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης ἐλαττωθῇ κατὰ R, θὰ προκύψῃ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο γνωστῶν σημείων K, Λ καὶ ἐφαπτομένη τρίτης, γνωστῆς περιφερείας).

562. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, μία εὐθεῖα (ε), ἐφ' ἧς κεῖται ἡ τρίτη κορυφὴ Α καὶ

i) Τὸ ἄθροισμα k τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ΑΒ, ΑΓ.

ii) Ἡ διαφορὰ δ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

(Ὑπόδ. i) Ἂν ἡ ΑΒ προεκταθῇ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α κατὰ ΑΔ=ΑΓ, τότε ΒΔ=k καὶ τὸ Α εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τοῦ Γ, διὰ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν (ε) καὶ ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας (B, k)).

563. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται : αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων $\mu_\beta+\mu_\gamma=l$ καὶ ἓν ὕψος.

564. Δίδεται κύκλος (K) καὶ ἐξωτερικὴ αὐτοῦ εὐθεῖα xy. Προβάλλομεν τὸ κέντρον K ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy, ἔστω εἰς A, καὶ ἐπὶ τοῦ AK λαμβάνομεν τμῆμα AE ἴσον πρὸς τὸ ἐκ τοῦ A ἀγόμενον ἐφαπτόμενον τμῆμα τῆς περιφερείας.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἀπὸ τυχόντος σημείου M τῆς εὐθείας xy πρὸς τὴν περιφέρειαν (K) ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν ME.

ii) Ἔστω ὅτι δίδεται εὐθεῖα xy καὶ δύο κύκλοι (K), (Λ) μὴ τέμνοντες τὴν xy. Νὰ εὑρεθῇ, βάσει τοῦ ἀνωτέρω, σημεῖον M τῆς xy τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα τὰ ἀγόμενα ἐκ τοῦ M πρὸς τοὺς δύο κύκλους νὰ ἔχουν ἄθροισμα τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν ἢ ἴσον πρὸς δοθὲν τμῆμα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

# ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ — CÉVA — ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΝΕΛΑΟΥ

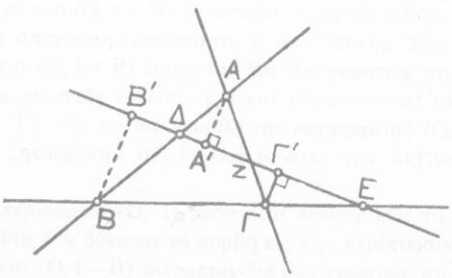
**131. Θεώρημα τοῦ Μενελάου — Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συνευθειακά, εἶναι :**

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = +1.$$

(Δηλαδὴ νὰ χωρίζουν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$ εἰς ἀλγεβρικοὺς λόγους ἔχοντας γινόμενον $+1$).

Ἡ εὐθεῖα δὲ ΔΕΖ, δι' οὐδεμιᾶς κορυφῆς τοῦ τρ. ΑΒΓ διερχομένη, λέγεται διατέμνουσα αὐτοῦ.

*Ἀπόδειξις.* Ἂς ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητικῶν λόγων, εἰς τοὺς ὁποίους ἡ διατέμνουσα ΔΖΕ (σχ. 161 καὶ 162) τέμνει τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τῶν κορυφῶν ἀπὸ τῆς δια-




Σχ. 161

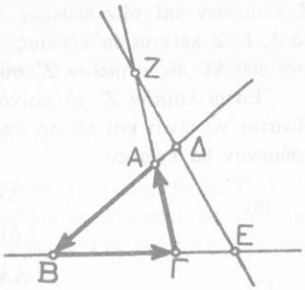
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τεμνούσης καὶ ἐκ τῶν σχηματιζομένων ὁμοίων τριγώνων (τρ. ΑΔΑ′≈τρ. ΒΔΒ′ κ.τ.λ.) λαμβάνομεν :

$$(1)\ \frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{AA'}{BB'},\ \frac{EB}{E\Gamma}=\frac{BB'}{\Gamma\Gamma'},\ \frac{Z\Gamma}{ZA}=\frac{\Gamma\Gamma'}{AA'}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(2)\qquad \frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=1.$$



Σχ. 162

Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι ἡ διατέμνουσα :

*ἢ τέμνει δύο πλευρὰς καὶ τὴν προέκτασιν τῆς τρίτης*
*ἢ τέμνει τὰς προεκτάσεις καὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἂν Δ, Ζ εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν καὶ Ε ἐξωτερικόν, θὰ εἶναι :

$$(3)\qquad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}=-\frac{\Delta A}{\Delta B},\ \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}=\frac{EB}{E\Gamma},\ \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}=-\frac{Z\Gamma}{ZA}.$$

Πολ/ντες τὰς (3) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (2) εὑρίσκομεν :

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{ZA}}=+1.$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν (σχ. 162) :

$$(4)\qquad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}=\frac{\Delta A}{\Delta B},\ \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}=\frac{EB}{E\Gamma},\ \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}=\frac{Z\Gamma}{ZA},$$

ὁπότε πάλιν διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη λαμβάνομεν, βάσει τῆς (2) :

$$(5)\qquad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}\cdot\frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}=+1.$$

**Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν,** καθ' ἣν ἡ εὐθ ΔΖ εἶναι παρ/λος πρὸς τὴν ΒΓ, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ Ε ὡς τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ ΒΓ (§ 65), ὁπότε ὁ λόγος $\frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}=1$, οἱ δὲ λόγοι $\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}$ καὶ $\frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}$ εἶναι ἀντίστροφοι (θεωρ. Θαλοῦ) καὶ ἡ σχέσις (5) **πάλιν ἰσχύει** $\left(\text{ὅπου τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον Ε πληροῖ συμβατικῶς : } \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}=1\right)$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Ἀντιστρόφως:** Ἔστω ὅτι ἡ (5) πληροῦται ὑπὸ τριῶν σημείων Δ, Ε, Ζ κειμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Πρὸς τοῦτο θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ευθ ΔΕ τέμνει τὴν ευθ ΑΓ εἰς σημεῖον Ζ′ συμπίπτον μὲ τὸ Ζ.

Ἔστω λοιπὸν Ζ′ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΑΓ (τὸ Ζ′ δύναται νὰ εἶναι καὶ εἰς τὸ ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ ΑΓ). Κατὰ τὸ προηγούμενον θὰ ἔχωμεν:

(6) $$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z'\Gamma}}{\overline{Z'A}} = +1 \text{ ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως}$$

(7) $$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = +1.$$

Ἐκ τῶν (6) καὶ (7) συνάγεται: $\frac{\overline{Z'\Gamma}}{\overline{Z'A}} = \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} \Rightarrow Z' \equiv Z$, διότι τὰ Ζ καὶ Ζ′ διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{\Gamma A}$ εἰς τὸν ἴδιον *ἀλγεβρικὸν λόγον* (§ **61**).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

565. Ἐὰν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε καὶ τὰ συμμετρικά των, Δ′, Ε′, Ζ′ ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κεῖνται, πάλιν, ἐπ' εὐθείας.

566. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν τριῶν τμημάτων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ τοὺς πόδας τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας. (**Υποδ.** βλ. § **64**).

567. Εἰς πᾶν τρίγωνον οἱ πόδες τῶν τριῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπίσης οἱ πόδες δύο ἐσωτερικῶν διχοτόμων καὶ τῆς τρίτης ἐξωτερικῆς κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

568. Διὰ τοῦ ἑνὸς κοινοῦ σημείου Ρ δύο τεμνομένων περιφερειῶν (Ο) καὶ (Ο′) ἄγονται δύο τέμνουσαι τῶν περιφερειῶν κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ὧν ἡ μία τέμνει τὰς (Ο), (Ο′) καὶ τὴν διάκεντρον εἰς Γ, Α, Δ, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἰδίας γραμμὰς εἰς Γ′, Α′, Δ′. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \frac{\overline{\Delta' A'}}{\overline{\Delta'\Gamma'}}$.

569. **Θεώρημα τοῦ Pascal.** i) Ἂς θεωρήσωμεν τυχὸν ἐξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἂς ἀριθμήσωμεν τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ μὲ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ Κ, Λ, Μ τῶν (1, 4), (2, 5), (3, 6) κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

(**Ὑπόδ.** Αἱ εὐθεῖαι 1, 3, 5 σχηματίζουν τρίγωνον $O_1O_2O_3$ ἐπὶ δὲ τῶν εὐθειῶν $O_1O_2$, $O_2O_3$, $O_3O_1$ κεῖνται τὰ Κ, Λ, Μ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις: $\frac{\overline{KO_1}}{\overline{KO_2}} \cdot \frac{\overline{\Lambda O_2}}{\overline{\Lambda O_3}} \cdot \frac{\overline{MO_3}}{\overline{MO_1}} = +1$. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸ (Θ) τοῦ Μενελάου εἰς τὸ τρ.$O_1O_2O_3$ μὲ διατεμνούσας ΚΕΔ, ΛΒΓ, ΜΖΑ, πολ/μεν κατὰ μέλη καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὸ θεώρημα τῶν τεμνουσῶν (§ **113**).

ii) Ὑποθέτοντες ὅτι αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β τείνουν νὰ συμπέσουν, συναγάγετε ἐν θεώρημα διὰ πεντάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

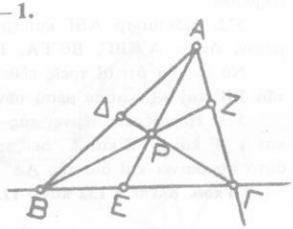
iii) Συναγάγετε ἐπίσης ἰδιότητα διὰ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ τέλος ἰδιότητα διὰ τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

570. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγ.ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ΔΒ/ΔΓ = =λ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ΕΑ/ΕΓ = μ. Τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΒΕ ἀλληλοτέμνονται εἴς τι σημεῖον Ο. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι ΟΑ/ΟΔ καὶ ΟΒ/ΟΕ συναρτήσει τῶν λ, μ.

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CÉVA

**132. Θεώρημα τοῦ Céva.— Ἔστωσαν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου ἀντιστοίχως. Τότε μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΓΔ, ΒΖ, ΑΕ** (σχ. 163) **διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι:**

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = -1.$$

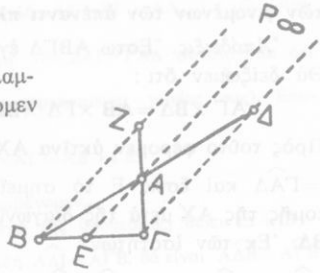



Σχ. 163

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω πρῶτον ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ συντρέχουν εἰς τὸ Ρ. Τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου ἐφαρμοζόμενον εἰς τὸ τρ. ΑΒΕ μὲ διατέμνουσαν ΔΡΓ καὶ εἰς τὸ τρ. ΑΕΓ μὲ διατέμνουσαν ΒΡΖ δίδει ἀντιστοίχως:

$$(1)\quad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{\Gamma B}}{\overline{\Gamma E}} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = +1 \text{ καὶ}$$

$$(2)\quad \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{B\Gamma}} = +1.$$




Σχ. 164

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\overline{\Gamma B} = -\overline{B\Gamma}$ εὑρίσκομεν

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{\Gamma E}} = -1 \text{ καὶ ἐπειδὴ}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{\Gamma E}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}, \text{ ἔχομεν τελικῶς}$$

$$(3)\quad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = -1.$$

**Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν,** καθ' ἣν τὸ Ρ εἶναι κατ' ἐκδοχὴν (εἰς ἄπειρον) σημεῖον, δηλ. αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι, αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἰσχύουν, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου $\left(\text{μὲ } \frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = +1, \frac{\overline{PA}}{\overline{PE}} = +1\right)$, ἄρα καὶ ἡ (3) **ἰσχύει.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Ἀντιστρόφως,** ἂν πληροῦται ἡ (3), αἱ δὲ ΓΔ καὶ ΒΖ τέμνωνται, ἔστω εἰς Ρ, ἀποδεικνύομεν (ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα) ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΡ τέμνει τὴν εὐθ ΒΓ εἰς σημεῖον Ε΄, ταυτιζόμενον μὲ τὸ Ε. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι αἱ ευθ ΑΕ, ΓΔ, ΒΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (κειμένου εἰς πεπερασμένην ἢ ἄπειρον ἀπόστασιν).

**Παρατήρησις.** Ἐὰν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν τρ. ΑΒΓ πληροῦν τὴν συνθήκην Céva, τότε τὰ συζυγῆ ἁρμονικά των ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς πληροῦν τὴν συνθήκην Μενελάου.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

571. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, ὧν ἑκάστη ἑνώνει μίαν κορυφὴν τριγώνου μὲ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

572. Δίδεται τρ. ΑΒΓ καὶ τρία τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ συντρέχοντα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπου, Α΄∈ΒΓ, Β∈΄ΓΑ, Γ΄∈ΑΒ.

Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι : τὰ μέσα τῶν ΑΑ΄ καὶ ΒΓ, τὰ μέσα τῶν ΒΒ΄ καὶ ΑΓ καὶ τὰ μέσα τῶν ΓΓ΄ καὶ ΑΒ συντρέχουν ἐπίσης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

573. Περιφέρεια τέμνει τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνὸς τρ.ΑΒΓ ἀντιστοίχως εἰς Δ καὶ Δ΄, Ε καὶ Ε΄, Ζ καὶ Ζ΄. Δείξατε ὅτι, ἂν αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ΑΔ΄ ,ΒΕ΄, ΓΖ΄.

(**Ὑπόδ.** Βλέπε § **132** καὶ § **113**).

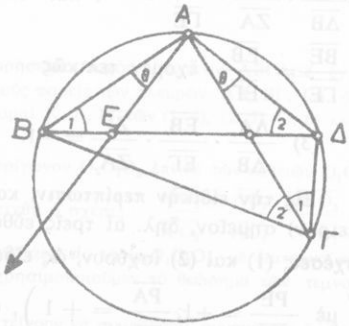
## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

**133. α΄) 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου.— Εἰς πᾶν (κυρτὸν) ἐγγράψιμον τετράπλευρον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον, κυρτὸν τετράπλευρον (σχ. 165). Θὰ δείξωμεν ὅτι :

$$ΑΓ \times ΒΔ = ΑΒ \times ΓΔ \times ΒΓ \times ΑΔ \qquad \text{(1ον θεώρ. Πτολεμαίου).}$$

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἀκτῖνα ΑΧ τῆς γωνίας $\widehat{ΒΑΔ}$ τοιαύτην, ὥστε $\widehat{ΒΑΧ} = \widehat{ΓΑΔ}$ καὶ ἔστω Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΑΧ μετὰ τῆς διαγωνίου ΒΔ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων :



Σχ. 165

$\widehat{ΒΑΕ} = \widehat{ΓΑΔ}$ καὶ $\widehat{Β_1} = \widehat{Γ_1} \Rightarrow$

$$\text{τρ.ΑΒΕ} \approx \text{τρ.ΑΓΔ} \Rightarrow \frac{ΒΕ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \Rightarrow$$

$$(1) \quad ΒΕ = \frac{ΑΒ \times ΓΔ}{ΑΓ}.$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων :

$\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΑΔ}$ καὶ $\widehat{Γ_2} = \widehat{Δ_2} \Rightarrow$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\text{τρ.ΑΒΓ} \approx \text{τρ.ΕΑΔ} \Rightarrow \frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}} \Rightarrow$$

$$\text{(2)} \qquad \text{ΕΔ} = \frac{\text{ΒΓ} \times \text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}}.$$

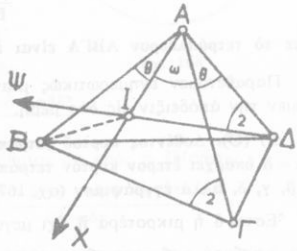
Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\text{ΒΕ} + \text{ΕΔ} = \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ} + \text{ΒΓ} \times \text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}}$$ καὶ ἐπειδὴ $\text{ΒΕ} + \text{ΕΔ} = \text{ΒΔ}$, λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\text{ΑΓ} \times \text{ΒΔ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ} + \text{ΒΓ} \times \text{ΑΔ}.$$

**β') Τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἰσχύει: Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τότε τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.**

Ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔστω μεγαλυτέρα (ἢ μὴ μικροτέρα) τῶν ἄλλων, ἡ $\widehat{\text{ΑΔΓ}}$. Ἂς φέρωμεν ἀκτῖνα ΔΨ αὐτῆς τοιαύτην, ὥστε $\widehat{\text{ΑΔΨ}} = \widehat{\Gamma_2}$ $(= \widehat{\text{ΑΓΒ}})$. Ἐπίσης, ἂς φέρωμεν ἀκτῖνα ΑΧ τῆς $\widehat{\text{ΒΑΔ}}$ τοιαύτην, ὥστε $\widehat{\text{ΒΑΧ}} = \widehat{\text{ΓΑΔ}}$.



Σχ. 166

Αἱ ἀκτῖνες ΑΧ καὶ ΔΨ τέμνονται, διότι $\widehat{\text{ΧΑΔ}} + \widehat{\text{ΨΔΑ}} = \widehat{\text{ΒΑΓ}} + \widehat{\text{ΒΓΑ}} < 2$ ὀρθ. Ἔστω Ι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀκτίνων ΑΧ καὶ ΔΨ.

Ἐπειδὴ τρ.ΙΑΔ ≈ τρ.ΒΑΓ $\Rightarrow \frac{\text{ΙΔ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}} \Rightarrow$ (1) $\text{ΙΔ} \times \text{ΑΓ} = \text{ΒΓ} \times \text{ΑΔ}$. Ἐκ τῶν ἰδίων τριγώνων ἕπεται: $\frac{\text{ΑΙ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}}$, τὸ ὁποῖον μαζὶ μὲ τὴν $\widehat{\text{ΒΑΙ}} = \widehat{\text{ΓΑΔ}}$ συνεπάγεται ὅτι τρ.ΒΑΙ ≈ τρ.ΓΑΔ (δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας ἴσας). Ἑπομένως:

$$\frac{\text{ΒΙ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} \Rightarrow \qquad \text{(2)} \quad \text{ΒΙ} \times \text{ΑΓ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ}.$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν: $\text{ΑΓ}.(\text{ΙΔ} + \text{ΙΒ}) = \text{ΒΓ} \times \text{ΑΔ} + \text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ}$, τὸ ὁποῖον, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως, δίδει $\text{ΙΔ} + \text{ΙΒ} = \text{ΒΔ}$. Ἄρα τὸ Ι κεῖται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{\text{ΑΔΙ}} = \widehat{\text{ΑΓΒ}}$, θὰ εἶναι $\widehat{\text{ΑΔΒ}} = \widehat{\text{ΑΓΒ}}$ ⇒ Α, Β, Γ, Δ ὁμοκυκλικά.

## 134. 2ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου

**α') Αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἀθροίσματα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὰ ἄκρα των, δηλαδή, ἂν ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον μὲ ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ, τότε ἰσχύει**

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις*. Τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΔΓΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα R περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν εἰς τὴν προφανῆ ἰσότητα τῶν ἐμβαδῶν (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΔΓΒ) χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον : ἐμβαδὸν τριγώνου = γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν διὰ 4R (§ **95**, V), λαμβάνομεν :

$$\frac{\alpha\beta\cdot A\Gamma}{4R}+\frac{\gamma\delta\cdot A\Gamma}{4R}=\frac{\alpha\delta\cdot B\Delta}{4R}+\frac{\beta\gamma\cdot B\Delta}{RR}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha\beta+\gamma\delta)\cdot A\Gamma=(\alpha\delta+\beta\gamma)\cdot B\Delta \Rightarrow \frac{A\Gamma}{B\Delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}.$$

**β') Τὸ ἀντίστροφον τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου ἰσχύει : Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης :**

$$\frac{A\Gamma}{B\Delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta},$$

**τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.**

Παραθέτομεν ἐνημερωτικῶς μίαν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Θὰ χωρίσωμεν τὴν ἀπόδειξιν εἰς δύο μέρη.

**α') (Θ). Δοθέντος κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰς ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ ὑπάρχει ἕτερον κυρτὸν τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' μὲ τὰς ἰδίας κατὰ σειρὰν πλευρὰς α, β, γ, δ, ἀλλὰ ἐγγράψιμον** (σχ. 167).

Ἔστω δ ἡ μικροτέρα ἢ ὄχι μεγαλυτέρα τῶν τριῶν ἄλλων πλευρῶν δηλ. :

(1) $\delta \leqq \alpha,\ \delta \leqq \beta,\ \delta \leqq \gamma$

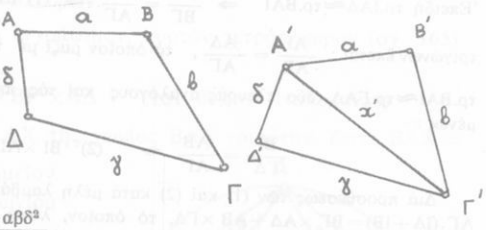
Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Α'Β'Γ'Δ' ὑπάρχει καὶ εἶναι κατεσκευασμένον καὶ ἂς καλέσωμεν x' τὴν διαγώνιον Α'Γ' αὐτοῦ. Τότε

$x'\cdot B'\Delta'=\alpha\gamma+\beta\delta$

$$\frac{x'}{B'\Delta'}=\frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{\alpha\beta+\gamma\delta},$$

ὁπότε διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη λαμβάνομεν

(2) $$x'^2=\frac{\alpha\beta\gamma^2+\beta^2\gamma\delta+\alpha^2\gamma\delta+\alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta+\gamma\delta},$$




Σχ. 167

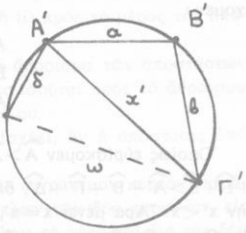
ἐξ ἧς κατασκευάζεται τὸ x'.

Θὰ δείξωμεν ὅτι μὲ πλευρὰς x', α, β κατασκευάζεται τὸ τρ. Α'Β'Γ'. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ : $x'<\alpha+\beta$ καὶ $x'>|\alpha-\beta|$. Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας $x'<\alpha+\beta \Longleftrightarrow x'^2<(\alpha+\beta)^2$ $\Longleftrightarrow \frac{\alpha\beta\gamma^2+\beta^2\gamma\delta+\alpha^2\gamma\delta+\alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta+\gamma\delta}<\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Longleftrightarrow \alpha\beta\gamma^2+\delta^2\alpha\beta<\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+2\alpha^2\beta^2+$ $+2\alpha\beta\gamma\delta \Longleftrightarrow$ (διὰ διαιρέσεως μὲ αβγδ) $\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\delta}{\gamma}<\frac{\alpha^2}{\gamma\delta}+\frac{\beta^2}{\gamma\delta}+\frac{2\alpha\beta}{\gamma\delta}+2 \Longleftrightarrow$ $\frac{(\gamma-\delta)^2}{\gamma\delta}<\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma\delta} \Longleftrightarrow |\gamma-\delta|<\alpha+\beta$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀληθές, διότι ἀπὸ τὸ ΑΒΓΔ ἔχομεν $|\gamma-\delta|<A\Gamma<\alpha+\beta$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι $x' > |\alpha-\beta|$, δηλ. $x'^2 > (\alpha-\beta)^2$. Ὥστε τὸ τρ.Α΄Β΄Γ΄ ὑπάρχει καὶ κατασκευάζεται. Περιγράφομεν κατόπιν κύκλον (Α΄Β΄Γ΄) καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{A'\Gamma'}$ τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ Β΄ λαμβάνομεν χορδὴν $A'\Delta' = \delta$. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, διότι ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\delta < x'$. Πράγματι, αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $\delta^2(\alpha\beta+\gamma\delta) < \alpha\beta\gamma^2+\beta^2\gamma\delta+\alpha^2\gamma\delta+$ $+\alpha\beta\delta^2$ (λόγῳ τῆς (2)), ἥτις γράφεται $\delta^2 < \alpha^2+\beta^2+\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta}$ καὶ ἀληθεύει λόγῳ τῶν (1).

*Σύνθεσις.* Κατασκευάζομεν τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ μὲ πλευρὰς α, β καὶ x΄ ὁρισθεῖσαν ἐκ τῆς (2). Τοῦτο εἶναι, ὡς εἴδομεν, δυνατόν. Περιγράφομεν κύκλον περὶ τὸ τρ.Α΄Β΄Γ΄ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{A'\Gamma'}$ τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ Β΄ λαμβάνομεν χορδὴν $A'\Delta' = \delta$. Τοῦτο, ὅπως εἴδομεν, εἶναι δυνατόν. Τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄ (σχ. 168) εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 168

*Ἀπόδειξις.* Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τετάρτη πλευρὰ ω ἰσοῦται μὲ γ. Ἔχομεν τὰς σχέσεις $\{x'\cdot B'\Delta' = \alpha\omega+\delta\beta$ καὶ $x'/B'\Delta' = (\alpha\delta+\beta\omega)/(\alpha\beta+\omega\delta)\}$, ἐξ ὧν

$$x'^2 = \frac{\alpha\beta\omega^2+\beta^2\omega\delta+\alpha^2\omega\delta+\alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta+\delta\omega} \tag{3}$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς ω ἐξίσωσιν:

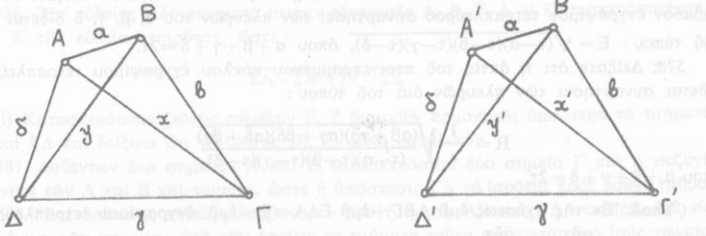
$$\frac{\alpha\beta\omega^2+\beta^2\omega\delta+\alpha^2\omega\delta+\alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta+\delta\omega} = \frac{\alpha\beta\gamma^2+\beta^2\gamma\delta+\alpha^2\gamma\delta+\alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta+\delta\gamma},$$

ἡ ὁποία ἔχει μίαν προφανῆ λύσιν: $\boxed{\omega=\gamma}$ Ἡ ἑτέρα λύσις της εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀπορρίπτεται, διότι ἡ ἐξίσωσις γράφεται τελικῶς $\alpha\beta(\alpha\beta+\gamma\delta)\omega^2+\delta(\alpha^2\beta+\alpha\beta^3-\alpha\beta\gamma^2-$ $\alpha\beta\delta^2)\omega+\alpha\beta\gamma\delta\left(\delta^2-\alpha^2-\beta^2-\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta}\right)=0$ καὶ ἔχει σταθερὸν ὅρον ἀρνητικόν, λόγῳ τῆς (1), ἄρα ρίζας ἑτεροσήμους.

β΄) Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 169) πλευρῶν α, β, γ, δ καὶ διαγωνίων x, ψ, εἰς τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{x}{\psi} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta} \tag{4}$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ἕτερον τετράπλευρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἐγγράψιμον (σχ. 169) καὶ ἔχον τὰς ἰδίας κατὰ σειρὰν πλευρὰς



Σχ. 169



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α, β, γ, δ. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως. Ἐὰν x′, ψ′ αἱ ἀντίστοιχοι διαγώνιοι τοῦ δευτέρου, τότε $\frac{x'}{\psi'}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$, ὁπότε, λόγῳ τῆς (4):

(5) $$\frac{x'}{\psi'}=\frac{x}{\psi}$$

Ἔστω ὅτι $x'>x$. Τότε ἐκ τῆς (5) θὰ εἶναι καὶ $\psi'>\psi$. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ B\Gamma=B'\Gamma' \\ A\Gamma>A'\Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B}>\widehat{B'}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\widehat{A}>\widehat{A'}$, $\widehat{\Gamma}>\widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta}>\widehat{\Delta'}$ καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}>\widehat{A'}+\widehat{B'}+\widehat{\Gamma'}+\widehat{\Delta'}$, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα δὲν εἶναι $x'>x$. Ὁμοίως ἀποκλείομεν καὶ τὴν $x'<x$. Ἄρα μένει $x=x'$, ὁπότε τρ.ΑΒΓ = τρ.Α′Β′Γ′ καὶ τρ.ΑΔΓ = τρ.Α′Δ′Γ′, ἐξ ὧν $\widehat{B}=\widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta'}$. Ἐπειδὴ $\widehat{B'}+\widehat{\Delta'}=2\text{ορθ}\Rightarrow\widehat{B}+\widehat{\Delta}=2\text{ορθ}\Rightarrow$ ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

574. **Θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν.** Ἐκ τῶν χορδῶν ΑΒ = α καὶ ΒΓ = β δύο διαδοχικῶν ἐλασσόνων τόξων καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων.

(**Ὑπόδ.** Νὰ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΒΒ′ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κοινοῦ ἄκρου τῶν γνωστῶν χορδῶν καὶ νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὸ ΑΒΓΒ′).

575. **Θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν.** Ἐκ τῶν χορδῶν δύο ἐλασσόνων τόξων καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων. (**Ὑπόδ.** Ἔστωσαν $\widehat{A\Gamma}<\widehat{AB}$ τὰ τόξα καὶ ΑΓ = α, ΑΒ = β αἱ γνωσταὶ χορδαί. Ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΑ′ = 2R τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ ἄκρου τῶν γνωστῶν χορδῶν καὶ ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως).

576. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων ἐγγραψίμου τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (βλ. 1ον καὶ 2ον θεώρ. Πτολεμαίου).

577. **Ἐμβαδὸν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου.** i) Ἔστωσαν α, β, γ, δ αἱ πλευραὶ καὶ x, y αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ τετραπλεύρου. Ἐὰν p ἡ προβολὴ τῆς y ἐπὶ τὴν x, τότε βάσει τῆς σχέσεως $|(\alpha^2+\gamma^2)-(\beta^2+\delta^2)|=2xp$ (ἄσκ. 416) δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)^2}$.

ii) Βάσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου καὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του α, β, γ, δ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$, ὅπου $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\tau$.

578. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐγγραψίμου τετραπλεύρου δίδεται συναρτήσει τῶν πλευρῶν διὰ τοῦ τύπου:

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}$$

ὅπου $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\tau$.

(**Ὑπόδ.** Ἐκ τῆς σχέσεως ἐμβ ΑΒΓ + ἐμβ ΓΔΑ = Ε = ἐμβ. ἐγγραψίμου τετραπλεύρου, λαμβάνομεν $\frac{\alpha\beta x}{4R}+\frac{\gamma\delta x}{4R}=E$, ὅπου x ἡ διαγώνιος ΑΓ. Τὸ Ε ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τύπου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως καὶ τὸ x ὑπολογίζεται συναρτήσει τῶν πλευρῶν συμφώνως πρὸς τὴν ἄσκ. 576).

579. Εἰς πᾶν μὴ ἐγγράψιμον κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

(**Ὑποδ.** Βλ. § **133**, β').

580. Συναρτήσει τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης i) ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου ἢ ii) πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

581. i) Νὰ δειχθῇ διὰ τοῦ (Θ) τοῦ Πτολεμαίου ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ περικέντρου ὀξυγωνίου τριγώνου ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου.

ii) Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον, τὸ ἀνωτέρω ἰσχύει, ἂν ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς ληφθῇ ἀρνητική.

iii) Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων προκύπτει ὅτι : εἰς πᾶν ἐγγράψιμον κυρτὸν τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων τῶν δύο τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ τετράπλευρον ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου, εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς δύο διαγωνίους.

582. Ἐὰν AB, BΓ, ΓΔ εἶναι τρεῖς διαδοχικαὶ χορδαὶ κύκλου, μήκους λ ἑκάστη, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν AB καὶ ΓΔ συναρτήσει τοῦ λ καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.

583. Ἐὰν A τὸ ἄκρον ἀκτῖνος καθέτου ἐπὶ τὴν διάμετρον BΓ καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ τεταρτημορίου $\widehat{A\Gamma}$, δείξατε ὅτι :

$$\frac{1}{\text{Εμβ}\,\text{MΑΓ}} - \frac{1}{\text{Εμβ}\,\text{MΑΒ}} = \frac{2}{\text{Εμβ}\,\text{MΒΓ}}.$$

584. Αἱ γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ εἶναι μεταβληταί, ἐνῶ τὰ μήκη τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του AB καὶ ΓΔ μένουν σταθερῶς ἴσα πρὸς α καὶ τὰ μήκη τῶν διαγωνίων του AΓ καὶ BΔ σταθερῶς ἴσα πρὸς β, (ἀρθρωτὸν τετράπλευρον). i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ABΓΔ εἶναι τραπέζιον. ii) Ἐὰν H, E, Z τὰ μέσα τῶν AB, AΓ, BΔ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον HE $\times$ HZ μένει σταθερόν.

585. Περὶ δοθὲν τετράγωνον ABΓΔ πλευρᾶς α περιγράφομεν κύκλον καὶ ἀκολούθως φέρομεν χορδὴν ΓE, μήκους $3\alpha/\sqrt{5}$, περατουμένην ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγώνου EAB καὶ τοῦ τετραγώνου ABΓΔ.

## ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ III, IV, V

586. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ. i) Κατασκευάσατε σημεῖον Σ τῆς εὐθείας τοιοῦτον, ὥστε :

$$\overline{\Sigma A} \cdot \overline{\Sigma B} = \overline{\Sigma \Gamma} \cdot \overline{\Sigma \Delta}$$

ii) Κατασκευάσατε ζεῦγος σημείων E, Z διαιροῦν ἁρμονικῶς ἀμφότερα τὰ τμήματα AB καὶ ΓΔ καὶ δείξατε ὅτι τὸ ζεῦγος (E, Z) εἶναι μοναδικόν.

587. Δοθέντων δύο σημείων A καὶ B κατασκευάσατε δύο σημεῖα Γ καὶ Δ συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν A καὶ B καὶ τοιαῦτα, ὥστε ἡ ἀπόστασις ΓΔ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα.

588. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας λαμβάνομεν δύο τμήματα AB καὶ ΓΔ σταθερά. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων τὰ τμήματα ταῦτα φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

(**Ὑπόδ.** βλ. § **97**, ζ').

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

589. Νὰ δειχθῇ ὅτι, εἰς πᾶν μὴ ἰσοσκελὲς τραπέζιον, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παρ/λων πλευρῶν, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων πρὸς τὴν διαφορὰν των.

590. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν, τέμνουσαι τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου (ἢ τὰς προεκτάσεις αὐτῶν) εἰς σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΚΛΜΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ.

591. Δοθείσης περιφερείας καὶ διαμέτρου αὐτῆς ΑΒ, γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Α, περιφέρειαν τέμνουσαν εἰς Γ καὶ Δ τὴν δοθεῖσαν καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς δευτέρας. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΒΜ, ΓΜ, ΔΜ ἐπανατέμνουν εἰς Ν, Ρ, Κ ἀντιστοίχως τὴν ἀρχικὴν περιφέρειαν, νὰ δειχθῇ ὅτι :

i) Τὸ ΜΡΒΚ εἶναι παρ/μον.

ii) Ἡ ΝΜ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΝΓ, ΝΔ.

592. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ 4R·ΑΠ, ὅπου ΑΠ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΜ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ′ (=2R) τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

593. Ἂν εἰς τρίγωνον ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ τῶν μέσων τῶν ΑΒ, ΑΓ διερχομένη περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΒΓ, ἔστω εἰς τὸ Δ, τότε ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ καὶ μέση ἀνάλογος τῶν ΒΔ, ΔΓ.

594. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο κάθετοι εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΨ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου. Τυχοῦσα ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) τέμνει τὰς ΟΧ, ΟΨ εἰς Α καὶ Β. Μὲ διάμετρον ΑΒ γράφομεν δευτέραν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν πρώτην εἰς Γ καὶ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν ΟΧ, ΟΨ τμῆμα τῆς ευθ ΓΔ ἔχει σταθερὸν μῆκος.

595. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τριγώνου ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τὰς κορυφὰς κατὰ $6(R^2-3GK^2)$, ὅπου Κ τὸ περίκεντρον, G τὸ βαρύκεντρον καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

596. Ἂν ΑΒ διάμετρος ἡμικυκλίου καὶ ΑΓ, ΒΔ χορδαὶ αὐτοῦ τεμνόμεναι εἰς σημεῖον Ρ ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις : $AB^2=A\Gamma\cdot AP+B\Delta.BP$.

597. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου φέρομεν τὸ ὕψος, τὴν διχοτόμον (ἐσωτερικὴν) καὶ εὐθεῖαν //ΒΓ. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ ἀχθῇ ⊥ ἐπὶ τὴν διχοτόμον τέμνουσα αὐτὴν εἰς Η, τὸ ὕψος εἰς Ε καὶ τὴν ἀχθεῖσαν παράλληλον εἰς τὸ Ζ, δείξατε ὅτι $BM^2=MH.ZE$.

598. Ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου κύκλου (Ο) λαμβάνονται δύο σημεῖα Α καὶ Β συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἐὰν ἀπὸ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΜΑ, ΜΟ, ΜΒ ἐπανατέμνουσαι τὴν περιφέρειαν εἰς Δ, Ε, Ζ, ἡ δὲ ευθ ΔΖ τέμνῃ τὴν ευθ ΑΒ εἰς σημεῖον Η, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΗΕ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (Ο).

599. Διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν // πρὸς τὴν διχοτόμον ΒΔ, τέμνουσαν εἰς Ζ καὶ Η τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΖ=ΓΗ.

600. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τῆς βάσεως τριγώνου ἀπὸ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ βάσις χωρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

601. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους τὰς διαμέσους τρ.ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ.

602. Ἔστω Α′Β′Γ′ τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ Α″, Β″, Γ″ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν Β′Γ′, Γ′Α′, Α′Β′ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ μετὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθικοῦ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α″Β″Γ″.

603. Δίδεται περιφέρεια (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτῆς καὶ σημεῖον Μ τῆς (Ο). Μὲ κέντρον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μ γράφεται περιφέρεια (γ) ἐφαπτομένη τῆς ΑΒ, ἔστω εἰς τὸ Ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν (γ) καὶ (Ο) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ ΜΡ.

604. Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ ὕψος ΑΗ ὀρθογωνίου τριγ.ΑΒΓ τέμνει τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Β′ καὶ Γ′. Φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας ταύτης εἰς Β′ καὶ Γ′, τεμνούσας εἰς Μ καὶ Ν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τραπέζιον ΜΒ′Γ′Ν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

605. Συνδέομεν ἑκάστην κορυφὴν τριγώνου μὲ τὰ σημεῖα τὰ τριχοτομοῦντα τὴν ἀπέναντι πλευράν. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν 6 τούτων εὐθειῶν σχηματιζόμενον κυρτὸν ἑξάγωνον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ 1/10 τοῦ τριγώνου.

606. Εἰς πᾶν τραπέζιον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον i) αἱ βάσεις χωρίζονται ὑπὸ τῶν σημείων ἐπαφῆς εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ ii) αἱ διαγώνιοι τέμνονται ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, τῆς καθέτου ἐπὶ τὰς βάσεις.

607. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν Κ τὸ περίκεντρον ἐγγραψίμου κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, τότε ἡ εἰς τὸ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΜ τέμνει τοὺς φορεῖς δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου εἰς σημεῖα, ἰσαπέχοντα τοῦ Μ.

608. Ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγ.ΑΒΓ λαμβάνονται ἀντιστοίχως σημεῖα Μ, Ν, Ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἰς Μ, Ν, Ρ ἀντιστοίχως διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι :

$$AM^2+BN^2+\Gamma P^2=MB^2+N\Gamma^2+PA^2$$

609. Ἐὰν ΑΑ′, ΒΒ′ ΓΓ′, ΔΔ′ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν διαδοχικῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ τετραγώνου ἀπὸ τυχούσης ἐφαπτομένης τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων $AA'\cdot\Gamma\Gamma'+BB'\cdot\Delta\Delta'$ εἶναι σταθερόν.

610. Διὰ τοῦ ἐγκέντρου Ο τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΟ καὶ ἔστωσαν Δ καὶ Ε τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἀχθείσης καθέτου μετὰ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια, ἥτις ἐφάπτεται τῶν ΑΒ, ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε, ἐφάπτεται ἐπίσης καὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.

611. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα, ὥστε ΑΕ=ΑΖ. Ἡ διάμεσος ΑΔ τοῦ τρ.ΑΒΓ τέμνει τὸ τμῆμα ΕΖ εἰς Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι : $\frac{EH}{HZ}=\frac{A\Gamma}{AB}$.

612. Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Ἔστω ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΑΒ καὶ ΓΔ, προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς Ε, αἱ δὲ ΒΓ καὶ ΑΔ, ἐπίσης προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐπὶ τοῦ τμήματος ΕΖ ὑπάρχει σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε : $EM\cdot EZ=EB\cdot EA$ καὶ συγχρόνως $ZM\cdot ZE=ZA\cdot Z\Delta$ καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$EZ^2=\Delta\upsilon\nu E/(O)+\Delta\upsilon\nu Z/(O).$$

613. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀξυγωνίου τριγώνου ὡς ὑποτεινουσῶν κατασκευάζομεν ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν τούτων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου.

614. Ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ γράφομεν δύο περιφερείας (Κ) καὶ (Λ), ἐξ ὧν ἡ (Κ) διέρχεται διὰ τῶν Μ καὶ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ, ἡ δὲ (Λ) διέρχεται διὰ τῶν Μ καὶ Γ καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

i) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν (Κ) καὶ (Λ) εἶναι σταθερόν.

ii) Ἡ μεσοκάθετος τῆς διακέντρου ΚΛ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

615. Ἐὰν Ο τὸ ἔγκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ $H_1$, $H_2$ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΟΑΓ καὶ ΟΑΒ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα $H_1H_2$ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΒΓ μετὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ΑΒΓ κύκλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

616. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ καὶ τοῦ ἐγκέντρου Ο τέμνει τὸ ἐκ τοῦ Α ὕψος εἰς σημεῖον Σ ἀπέχον τοῦ Α ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου. Ἡ αὐτὴ εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος τοῦ συνδέοντος τὸ Α μὲ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

617. Τμῆμα ΑΒ=3α διαιρεῖται διὰ σημείου Μ εἰς τὰ τμήματα ΑΜ=2α, ΜΒ=α. Κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΓΜ καὶ ΜΔΒ. i) Ἂν ΓΗ ὕψος τοῦ τρ.ΓΑΜ νὰ δειχθῇ : ΓΗ=ΓΔ. ii) Ἐμβαδὸν τοῦ ΑΓΔΒ συναρτήσει τοῦ α.

618. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Ε. Ὀρθὴ γωνία $x\widehat{E}y$ στρέφεται περὶ τὸ Ε. Αἱ πλευραί της Εx, Εy τέμνουν τὰς περιφερείας εἰς Α καὶ Β. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθ ΑΒ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

619. Μεταβλητὴ εὐθεῖα τέμνει τὰς πλευρὰς Ox, Oy δοθείσης γωνίας εἰς Α καὶ Β οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{c}$ (c=σταθ. τμῆμα). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθ ΑΒ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

620. Ἔστω Ο τὸ ἔγκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ Κ τὸ περίκεντρον αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι εἰς Ο ἐπὶ τὰς ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ τέμνουν τοὺς φορεῖς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τρία σημεῖα κείμενα ἐπὶ εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὸ περίκεντρον Κ μὲ τὸ ἔγκεντρον Ο.

621. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ ἡ ὁποία νὰ φαίνεται ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα ὑπὸ γωνίας $90^0$ καὶ $60^0$ ἀντιστοίχως.

622. Δίδεται διάμετρος ΑΒ καὶ χορδὴ ΑΓ περιφερείας. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΓ σημεῖον Κ τοιοῦτον, ὥστε ἡ περιφέρεια $\left(K, \frac{KB}{2}\right)$ νὰ τέμνεται ψευδοορθογωνίως (διχοτομῆται) ὑπὸ τῆς δοθείσης.

623. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ΑΒΓ ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ=δ καὶ τῶν τμημάτων ΒΔ=μ, ΔΓ=ν.

624. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ=δ καὶ τῶν διαφορῶν : ΑΒ—ΒΔ=$l$, ΑΓ—ΓΔ=m.

625. Δοθέντος κυκλικοῦ τόξου $\widehat{AB}$, νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη αὐτοῦ τοιαύτη ,ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καὶ Β ἀπὸ ταύτης νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

626. Δίδονται δύο παρ/λοι, σημεῖον Α ἐπὶ τῆς μιᾶς, σημεῖον Β ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ ἐκτὸς τῶν παρ/λων σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παρ/λους εἰς Α΄ καὶ Β΄ οὕτως, ὥστε ΑΑ΄/ΒΒ΄=μ/ν, ὅπου μ, ν δοθέντα τμήματα.

627. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Ο,Α, Β. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος ΜΑ.ΜΒ/$MO^2$ νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμήν.

628. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος ΜΑ·ΜΒ/$MΓ^2$ νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμήν.

629. Εἰς πᾶν τρίγωνον δείξατε τὰς σχέσεις :

$$KO^2+KO_1^2+KO_2^2+KO_3^2=12R^2$$
$$OO_1^2+OO_2^2+OO_3^2=8R(2R-\rho)$$
$$O_2O_3^2+O_3O_1^2+O_1O_2^2=8R(4R+\rho)$$

(Κ περίκεντρον, Ο ἔγκεντρον, $O_1$, $O_2$, $O_3$ παράκεντρα).

630. Εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ ἀνισοτικὴ σχέσις

$$R \geqq 2\rho$$

τὸ δὲ = ἰσχύει μόνον εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

631. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν ρ, R, $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$.

632. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται τὸ παράκεντρον $O_1$, ὁ φορεὺς τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ αἱ ἀκτῖνες ρ, R.

633. Περιφέρεια (c) εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας $x\widehat{O}y$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (c) σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας Ox, Oy νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἢ τὸ μέγιστον δυνατόν.

634. Θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ σταθερᾶς ὑποτεινούσης ΒΓ=α καὶ φέρομεν ἑκάστοτε τὰς καθέτους ΒΒ', ΓΓ' ἐπὶ τὴν διάμεσον ΑΔ. Ζητοῦνται αἱ γωνίαι ἐκείνου ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ ,διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παρ/μου ΒΒ'ΓΓ' καθίσταται μέγιστον. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ;

635. Διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογ. τριγ. ΑΒΓ φέρομεν ζεῦγος εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ὧν ἡ μία τέμνει τὴν ευθ ΑΒ εἰς Μ καὶ ἡ ἄλλη τὴν ευθ ΑΓ εἰς Ν. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ τὸ ζεῦγος ἐκεῖνο, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ. ΟΜΝ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

636. Δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ) τέμνονται εἰς Α καὶ Β, τὰ δὲ κέντρα αὐτῶν Κ καὶ Λ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΒ. Φέρομεν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν ἐπανατέμνουσαν τὰς περιφερείας εἰς σημεῖα Γ καὶ Δ κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ Α. Ἔστω Ο τὸ ἔγκεντρον καὶ $O_1$ $O_2$ τὰ παράκεντρα τοῦ τριγώνου ΒΓΔ τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς τὰς γωνίας $\widehat{\Delta}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τῆς τεμνούσης ΓΑΔ, καθ' ἣν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ. $OO_1O_2$ εἶναι τὸ μέγιστον δυνατόν.

637. Τραπεζίου ἡ μικροτέρα βάσις εἶναι τὸ 1/8 τῆς μεγαλυτέρας. Ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ τὸ τραπέζιον εἰς τρία ὅμοια τραπέζια διὰ δύο παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις.

638. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν ἓν σημεῖον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἓν σημεῖον Ν τῆς πλευρᾶς ΓΔ καὶ μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν δύο σημεῖα Π καὶ Κ, καθ' ἃ ἡ ΜΝ τέμνει τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς τὸ τετράγωνον περιφέρειαν.

639. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ εὐθεῖα (δ) ἀπέχουσα τοῦ κέντρου Ο κατὰ ΟΗ=2R.

i) Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἐφαπτομένη τῆς (δ) καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως τὴν (Ο, R). Συνθῆκαι δυνατότητος.

ii) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς (δ) εἰς δοθὲν σημεῖον καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα τὴν (Ο, R).

640. Δοθείσης τεμνούσης ΑΒΓ μιᾶς περιφερείας (c) νὰ κατασκευασθῇ δευτέρα τέμνουσα ΑΒ'Γ' τοιαύτη, ὥστε οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους ΒΓ καὶ Β'Γ',

i) νὰ ἐφάπτωνται,

ii) νὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως.

641. Νὰ κατασκευασθῇ τριγ ΑΒΓ ἐκ τῶν τριῶν ὑψῶν $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$. Συνθῆκαι δυνατότητος.

642. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ μὲ ΑΒ+ΑΓ=3ΒΓ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων $δ_A$ καὶ $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}$.

643. Διὰ δύο σημείων Α, Β κειμένων ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου ΓΔ δοθέντος κύκλου καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου νὰ ἀχθοῦν δύο ἴσαι χορδαὶ ἔχουσαι ἓν κοινὸν ἄκρον.

644. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου τῶν ἀγομένων ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν.

645. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ μῆκος λ τῆς διαγωνίου, ὁ λόγος μ/ν τῶν δύο βάσεων καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

646. Δύο κύκλοι (Ο, R) καὶ $\left(O', \frac{R}{2}\right)$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς. Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ ΑΒ τοῦ μεγαλυτέρου ἐφαπτομένη εἰς Γ τοῦ μικροτέρου οὕτως, ὥστε ΑΓ·ΓΒ $=c^2$ (c δοθὲν τμῆμα).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

647. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγ ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις ΒΓ, τὸ ὕψος ΑΗ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζει τὴν ΒΓ.

648. Περὶ δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ περιγραφῇ ὀρθογώνιον παρ/μον τοῦ μεγίστου δυνατοῦ ἐμβαδοῦ.

649. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

$$\alpha,\ \mu_\alpha,\ \widehat{B}-\widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}.$$

650. **Θεώρημα καὶ ἐφαρμογαί.** Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ τὰ παράκεντρα $O_2$, $O_3$ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον ΑΔ΄. Αἱ προβολαὶ τῶν $O_2$ καὶ $O_3$ ἐπὶ τὸν φορέα τοῦ ὕψους ΑΑ΄ $=\upsilon_\alpha$ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ ὕψος τοῦτο.

i) Συναγάγετε κατασκευὴν ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων $\upsilon_\alpha$, $\rho_\beta$, $\rho_\gamma$, ὅταν δίδωνται τὰ δύο ἄλλα.

ii) Δείξατε τὴν σχέσιν: $\dfrac{2}{\upsilon_\alpha}=\dfrac{1}{\rho_\beta}+\dfrac{1}{\rho_\gamma}$.

iii) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\beta+\gamma$, $\rho_\alpha$, $\rho_\beta$.

(Ὑποδ. $2/\upsilon_\gamma=1/\rho_\beta+1/\rho_\alpha$. Τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ ἀπέχει τῆς εὐθ$AB$, $\upsilon_\gamma/2$).

651. Αἱ τέσσαρες πλευραὶ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔχουν μήκη ΑΒ=30m, ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ=24m ἡ δὲ διαγώνιος ΔΒ=36m. i) Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον εἶναι τραπέζιον. ii) Ὅτι αἱ δύο γωνίαι ἃς σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

652. Δοθέντων δύο τεμνομένων κύκλων νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τέμνουσα τὰς δύο περιφερείας εἰς δύο ζεύγη σημείων, ὥστε τὸ ἓν ζεῦγος νὰ χωρίζῃ ἁρμονικῶς τὸ ἄλλο.

653. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῆς διὰ τοῦ Σ διερχομένης διαμέτρου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

654. Μεταβλητοῦ, ἰσοσκελοῦς τρ.ΑΒΓ (ΓΑ=ΓΒ) τὸ ἓν ἄκρον Α τῆς βάσεως ΑΒ εἶναι σταθερὸν καὶ ὁ φορεὺς αὐτῆς ΑΧ σταθερός. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του μένει σταθερόν;

655. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΣΧ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ Μ, ὅταν ἡ ΣΧ στρέφεται περὶ τὸ Σ;

656. Ἐπὶ περιφερείας, ἀκτῖνος ρ, λαμβάνομεν σταθερὸν σημεῖον Σ. Ἐνοῦμεν τὸ Σ μὲ τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας καὶ προεκτείνομεν τὸ ΑΣ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ κατὰ ΣΜ οὕτως, ὥστε $A\Sigma^2+\Sigma M^2=4\rho^2$. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

657. Δύο ἡμιπεριφέρειαι διαμέτρων ΑΒ καὶ ΑΒ΄ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς Α. Εὐθεῖα $\perp$ ΑΒ΄ τέμνει τὰς ἡμιπεριφερείας ἀντιστοίχως εἰς Ρ καὶ Ρ΄. Τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν ΒΡ καὶ Β΄Ρ΄.

658. Δίδεται περιφέρεια (c) καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς σημεῖον Α. Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς τὸ Μ. Τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς (γ) εἰς Α καὶ Μ.

659. Ἔστω ΑΒΓ ἰσόπλευρον τρίγωνον, Ο τὸ ἔγκεντρον αὐτοῦ καὶ (c) περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν ΟΒ, ΟΓ εἰς Β καὶ Γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν σημεῖον Μ τῆς (c) ἰσχύει: $MA^2=MB^2+M\Gamma^2$.

660. Ὀρθογωνίου παρ/μου ΑΒΓΔ ἡ κορυφὴ Α μένει σταθερά, ἡ δὲ διαγώνιος ΒΔ παραμένει χορδὴ δεδομένης περιφερείας. Τόπος τῆς κορυφῆς Γ.

661. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ=ΑΓ καὶ Ι τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β λαμβάνομεν σημεῖον Μ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σεως τῆς ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ σημεῖον Ν τοιαῦτα, ὥστε ΒΜ·ΓΝ=ΙΒ²=ΙΓ² (σταθερόν). Ζητοῦνται :

i) Ὁ τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΙΜΝ.

ii) Ὁ τόπος τοῦ ποδὸς Η τοῦ ὕψους ΙΗ τοῦ τρ.ΙΜΝ.

iii) Ὁ τόπος τοῦ ποδὸς Δ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΙΔ τοῦ τρ.ΙΜΝ.

662. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σταθερὰ σημεῖα Α, Δ, Β. Ἐπὶ τῆς εἰς Δ καθέτου ἐπὶ τὴν ευθ ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ καὶ ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ. ΑΒΓ. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τοῦ Γ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Η καὶ διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

663. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ κέντρου Ο. Ἐὰν ἀχθῇ τυχοῦσα διάμετρος ΠΚ τῆς (Ο), ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς τῶν περιφερειῶν (ΑΟΠ) καὶ (ΒΟΚ), ὅταν ἡ ΠΚ στρέφεται περὶ τὸ Ο;

664. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Διὰ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΒΒ', ΓΓ' ἐπὶ μεταβλητὴν εὐθεῖαν Ax διερχομένην διὰ τοῦ Α. Τόπος τῆς τομῆς τῶν ΒΓ' καὶ Β'Γ.

665. Δύο μεταβλητοὶ κύκλοι, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες ἔχουν σταθερὸν λόγον, ἐφάπτονται δοθείσης εὐθείας εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα καὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Εὕρετε τὸν τόπον τῆς τομῆς τῆς ἑτέρας ἐξωτερικῆς κοινῆς ἐφαπτομένης των μετὰ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων.

666. Θεωροῦμεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς Δ τετραγώνου ΑΒΓΔ καὶ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν (Δ, ΔΑ) κατὰ διάμετρον ΜΜ', τὸν φορέα τῆς διαγωνίου ΑΓ εἰς Ν καὶ τὴν ευθ ΑΒ εἰς Ρ.

i) Τόπος τοῦ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ Ν' τοῦ Ν ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Μ'.

ii) Τόπος τοῦ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ Ρ' τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Μ'.

667. Σημεῖον Μ προβάλλεται ἐπὶ τῶν ὑψῶν δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ εἰς Α',Β', Γ'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

668. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τετραγώνου ΑΒΓΔ ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Μ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς Ι. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AB^2}.$$

669. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ διάμετρος αὐτῆς ΑΒ. Προεκτείνομεν τὸ ΑΒ κατὰ ΒΓ=R. i) Νὰ κατασκευασθῇ τέμνουσα ΓΔΕ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε ΓΔ=ΔΕ. ii) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ.ΟΓΕ.

670. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΓ ⊥ ΓΒ, ΒΔ ⊥ ΑΔ, ΑΒ=65m, ΑΔ=39m, ΒΓ=25m. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 1344m².

671. Ἐὰν $R_1$, $R_2$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ χωρίζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ὑπὸ τῆς διαμέσου ΑΔ τῆς ἀγομένης πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ.ΑΒΓ ἰσοῦται πρός: $(2R_1R_2)^3/(R_1^2+R_2^2)^2$.

672. Τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουν μήκη α καὶ β. Ἂν Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγ. ΕΑΔ καὶ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

673. Ἐὰν εἰς τρ.ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A}+2\widehat{B}=3$ ὀρθ., δείξατε ὅτι τότε μεταξὺ τῶν στοιχείων του ὑφίσταται ἡ σχέσις $\beta^2-R\alpha=2R^2$.

674. Τὰ μήκη τῶν βάσεων ἰσοσκελοῦς τραπεζίου περιγραψίμου εἶναι α καὶ β. Ὑπολογίσατε τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τραπέζιον κύκλου.

675. Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ κύκλου (Ο) κατὰ ΑΒ=μ.ΟΑ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Β ἐφαπτόμενον τμῆμα ΒΓ πρὸς τὸν κύκλον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρ. ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου, συναρτήσει τοῦ μήκους ΑΓ=λ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

676. Τρεῖς παρ/λοι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τοὺς φορεῖς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἰς Α΄, Β΄, Γ΄. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\text{Εμβ}(\text{Α΄Β΄Γ΄}) : \text{Εμβ}(\text{ΑΒΓ}) = 2 : 1.$$

677. Ἐὰν Ε, $E_1$, $E_2$, $E_3$ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῆς εὐθείας ΒΓ, δείξατε ὅτι :

$$AE^2 + AE_1^2 + AE_2^2 + AE_3^2 = 3(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2.$$

678. Δείξατε ὅτι :

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\text{ΑΓ}} + \frac{1}{\text{ΑΔ}}\right) + \left(\frac{1}{\text{ΒΓ}} + \frac{1}{\text{ΒΔ}}\right) = 0.$$

679. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς $l$ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως, σημεῖα Ζ καὶ Ι τοιαῦτα, ὥστε ΑΖ = α, ΙΓ = β.

i) Ποία εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν α, β, $l$, ἵνα οἱ κύκλοι (Ι, β) καὶ (Ζ, α) τέμνωνται ὀρθογωνίως;

ii) Τῆς συνθήκης πληρουμένης, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΙΖ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου.

iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἀνωτέρω ὀρθογώνιοι περιφέρειαι ἔχουν τὸ ἓν κοινὸν σημεῖον των ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ καὶ τὸ ἕτερον ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τετράγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας.

680. Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἂς καλέσωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως μέ : α, β, γ, δ. Ἂς φέρωμεν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΑΑ΄}} = \overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ καὶ $\overrightarrow{\text{ΓΓ΄}} = \overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὸ παρ/μον ΑΓΓ΄Α΄, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ κορυφὴ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ Δ βλέπει τὰς πλευρὰς τοῦ παρ/μου ΑΓΓ΄Α΄ ὑπὸ γωνίας ἴσας πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ παραλληλογράμμου ἀποστάσεις ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου καὶ ὅτι, δοθέντος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΓ΄Α΄ καὶ τοῦ σημείου Δ ἐντὸς αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὡρισμένον. Βάσει τούτων νὰ κατασκευασθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗτινος δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν ἡ περιέχουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἀκόμη :

i) Δύο διαδοχικαὶ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

ii) Δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔ.

iii) Μία γωνία καὶ μία σχέσις μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν αὐτήν, ὅπως π.χ. ἡ $\widehat{B}$ καὶ ἡ σχέσις $\alpha + \beta = c$ ἢ $\alpha - \beta = c$ ἢ $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$ ἢ $\alpha^2 - \beta^2 = c^2$ ἢ $\alpha/\beta = \mu/\nu$ ἢ $\alpha\beta = c^2$.

681. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ ἡ ὁποία νὰ φαίνεται ἀπὸ τρίτου δοθέντος σημείου ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν.

682. Διὰ δύο δεδομένων σημείων δοθείσης περιφερείας νὰ ἀχθοῦν δύο ὁμόρροποι ἡμιευθεῖαι ἀποτέμνουσαι δύο χορδάς, αἱ ὁποῖαι νὰ πληροῦν ἓν ἐκ τῶν τεσσάρων ἑπομένων ἐπιταγμάτων :

i) Νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δοθὲν τμῆμα.

ii) Νὰ ἔχουν διαφορὰν ἴσην πρὸς δοθὲν τμῆμα.

iii) Νὰ ἔχουν γινόμενον δοθὲν ἴσον πρὸς $c^2$.

iv) Νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα.

683. Ἐὰν Π καὶ Κ εἶναι αἱ προβολαὶ σημείου Μ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ, ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Μ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ συναντᾷ τὴν ΠΚ εἰς σημεῖον Ε κείμενον ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΔ τοῦ τρ.ΑΒΓ.

684. Ἔστω παρ/μον ΑΒΓΔ, Ε σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ Ζ ἕτερον σημεῖον τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευρᾶς ΑΔ. Ἂν αἱ ΕΑ, ΖΒ τέμνωνται εἰς Η καὶ αἱ ΕΔ, ΖΓ εἰς Ι, δείξατε ὅτι ἡ ευθ ΗΙ διαιρεῖ τὸ παρ/μον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

685. Αἱ εὐθεῖαι ΑΛ, ΒΛ, ΓΛ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ μὲ σημεῖον Λ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου τέμνουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς Α′, Β′, Γ′. Αἱ διὰ τοῦ Α′ ἀγόμεναι παρ/λοι πρὸς τὰς ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς Π καὶ Κ καὶ αἱ ἐκ τοῦ Α′ ἀγόμεναι παρ/λοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΑΒ τέμνουν τὰς ΒΒ′, ΓΓ′ εἰς Ρ καὶ Τ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Π, Κ, Ρ, Τ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

686. Ἔστω ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ Π, Ρ, Σ, Κ τὰ περίκεντρα τῶν τριγώνων ΒΓΔ, ΒΑΔ, ΑΒΓ, ΑΔΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Π, Σ, Ρ, Κ εἶναι κορυφαὶ ρόμβου ὁμοίου πρὸς τὸν δοθέντα.

687. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ +ΑΓ=s, σταθερόν. Ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ παρ/λος πρὸς τὴν ΑΒ τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Γ παρ/λον πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον ΑΔ εἰς Ρ. Ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ Ρ.

688. Εἰς πᾶν τρ. ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$AO \cdot AO_1 = AB \cdot A\Gamma,$$

ὅπου Ο τὸ ἔγκεντρον, $O_1$ τὸ παράκεντρον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν $\widehat{A}$.

689. Δοθέντων τριῶν κύκλων νὰ κατασκευασθῇ τέταρτος τοιοῦτος, ὥστε οἱ ριζικοὶ ἄξονες αὐτοῦ καὶ τῶν τριῶν δοθέντων νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα.

690. Ἔστωσαν τρεῖς κύκλοι (Κ), (Λ), (Ο) ἐκτὸς ἀλλήλων. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ δύο ὁριακὰ σημεῖα τῆς δέσμης, ἣν ὁρίζουν οἱ (Κ) καὶ (Λ) καὶ τὰ τῆς δέσμης, ἣν ὁρίζουν οἱ (Κ) καὶ (Ο), εἶναι ὁμοκυκλικά.

691. Εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Δ καὶ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{1}{E\Delta} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{E\Gamma}.$$

692. Ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγ.ΑΒΓ καὶ διὰ τῶν σημείων Ο καὶ $O_1$ (ἔγκεντρον, παράκεντρον) ἐπανατέμνει τὴν ευθΑΔ εἰς Σ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΣ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

693. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ βαρύκεντρον τρ.ΑΒΓ μὲ τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας διχοτομεῖ τὸ τμῆμα τὸ ἔχον ἄκρα τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Ρ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

694. Ἐὰν Μ, Ν, Ρ, Κ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παρ/μου, τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΝ, ΒΡ, ΓΚ, ΔΜ ὁρίζουν παρ/μον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ἓν πέμπτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓΔ.

695. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέσους τοῦ τρ.ΑΒΓ τὰς ἀγομένας ἐκ τῶν Β, Γ, Α σχηματίζουν τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ ἔχον τὸ ἴδιον κ.β. μὲ τὸ τρ.ΑΒΓ.

696. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγ. ΑΒΓ ληφθοῦν ἀντιστοίχως σημεῖα $\Gamma_1$, $A_1$, $B_1$ τοιαῦτα, ὥστε: $A\Gamma_1/\Gamma_1B = BA_1/A_1\Gamma = \Gamma B_1/B_1A$, τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $A_1B_1\Gamma_1$ ἔχουν τὸ ἴδιον βαρύκεντρον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

# ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

## ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

**135. Ὁρισμοί.** α') **Καλοῦμεν κανονικὸν πολύγωνον κάθε κυρτὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας μεταξύ των καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας μεταξύ των.**

β') Καλοῦμεν **κανονικὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν** μίαν τεθλασμένην γραμμὴν $A_1A_2A_3...A_\nu$, ἥτις ἔχει $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{\nu-1}A_\nu$ καὶ γων. $(\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_3}) = (\overrightarrow{A_3A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}) = ... = (\overrightarrow{A_{\nu-1}A_{\nu-2}}, \overrightarrow{A_{\nu-1}A_\nu})$.

**136. Γενικαὶ ἰδιότητες.** I. **Ἐὰν περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς ν ἴσα τόξα, τὰ διαιρετικὰ σημεῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου.**

Ἔστω $\tau^o$ τὸ μέτρον ἑκάστου ἐκ τῶν ν ἴσων τόξων $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$...$\widehat{A_\nu A_1}$ ($\nu \geq 3$). Τότε πᾶσαι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3...A_\nu$ εἶναι ἴσαι ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι του ἴσαι ὡς ἐγγεγραμμέναι, βαίνουσαι ἑκάστη ἐπὶ τόξου ἴσου πρὸς $(\nu-2)\tau^o$. Ἄρα τὸ κυρτὸν πολύγωνον $A_1A_2...A_\nu$ εἶναι κανονικόν.

**Παρατήρησις.** Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς πλήρους γωνίας (4 ὀρθῶν) τῆς ἐχούσης κορυφὴν τὸ κέντρον ὑπάρχουν ν ἀκτῖνες σχηματίζουσαι ν ἴσας διαδοχικὰς γωνίας (βλ. § **45**, γ'), διὰ τοῦτο ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἀποδεικνύεται **ἡ ὕπαρξις κανονικῶν πολυγώνων.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

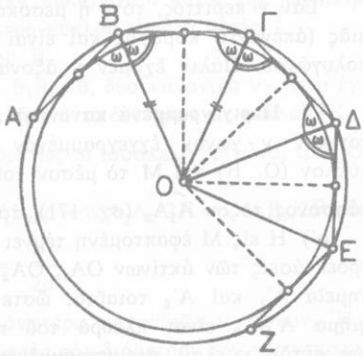
**II — Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ΑΒΓΔΕ... κανονικὸν πολύγωνον. Ἂν φέρωμεν τὰς διχοτόμους δύο διαδοχικῶν γωνιῶν του $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΒΓΔ}$, αὗται τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ο (διότι $\widehat{Β}/2 + \widehat{Γ}/2 < 2^D$).

Ἂν τώρα ἑνώσωμεν τὸ Ο μὲ τὴν ἑπομένην κορυφὴν Δ, τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΟΓΔ ἔχουν: ΒΓ=ΓΔ, ΟΒ=ΟΓ (διότι τὸ ΟΒΓ ἔχει τὰς παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίας ἴσας) καὶ $\widehat{ΟΒΓ}=\widehat{ΟΓΔ}$ (ὡς τὰ ἡμίση ἴσων γωνιῶν). Δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσας. Ἄρα: τρ. ΟΒΓ = τρ. ΟΓΔ. Ἑπομένως: $\widehat{ΟΓΒ}=\widehat{ΟΔΓ}$ (γωνίαι ἴσων τριγώνων κείμεναι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν), δηλ.

$$\widehat{ΟΔΓ}=\widehat{ΒΓΔ}/2=\widehat{ΓΔΕ}/2.$$

Ἑπομένως ἡ ΔΟ εἶναι καὶ αὐτὴ διχοτόμος τῆς $\widehat{ΓΔΕ}$ καὶ τὸ τρ.ΟΓΔ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελές. Ὥστε αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$, $\widehat{Δ}$ συντρέχουν εἰς τὸ Ο. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν $\widehat{Γ}$, $\widehat{Δ}$, $\widehat{Ε}$ συντρέχουν εἰς τὸ Ο κ.ο.κ. Ἑπομένως ἐδείχθη ὅτι αἱ διχοτόμοι ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ ΑΒΓΔΕ... συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε ΟΒ = ΟΓ=ΟΔ=ΟΕ=...=ΟΑ. Ἄρα τὸ Ο εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ κανον. πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ... εἶναι ἴσα, ἔχουν καὶ ἴσα ὕψη ἐκ τοῦ Ο, ἄρα τὸ Ο εἶναι καὶ κέντρον περιφερείας ἐφαπτομένης ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.



Σχ. 170

**Παρατήρησις.** Καὶ πᾶσα κανονικὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ εἶναι ἐγγράψιμος καὶ περιγράψιμος περὶ κύκλον. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἐντελῶς ὁμοία.

**III. Ἐπίκεντρος γωνία κανονικοῦ πολυγώνου. — Ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ κανονικὸν πολύγωνον ἐκ ν πλευρῶν, ἑκάστη πλευρὰ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν $\frac{360^0}{ν}$.**

Διότι αἱ ν ἐπίκεντροι διαδοχικαὶ γωνίαι $\widehat{ΑΟΒ}$, $\widehat{ΒΟΓ}$, ... (σχ. 170) εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν ἄθροισμα $360^0$.

**IV. Ὁμοιότης. — Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι μεταξύ των ὅμοια.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

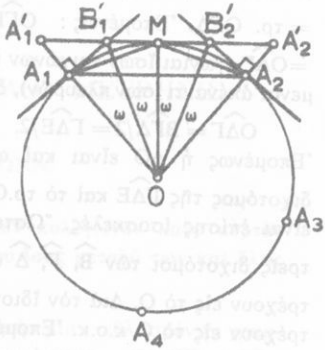
V. **Ἄξονες συμμετρίας. — Κανονικὸν πολύγωνον ἐκ ν πλευρῶν ἔχει ν ἄξονας συμμετρίας.**

Ἔστω ν ἄρτιος, ἴσος πρὸς 2ρ. Ἂν περιγράψωμεν κύκλον περὶ τὸ πολύγωνον τοῦτο, τότε αἱ κορυφαί του εἶναι ἀνὰ δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετοι. Οὕτω ἔχομεν ρ ζεύγη κορυφῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων ὁρίζει μίαν διάμετρον, ἥτις εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἀλλὰ καὶ ἡ μεσοκάθετος ἑκάστου ζεύγους ἀπέναντι παρ/λων πλευρῶν εἶναι ἄξων συμμετρίας. Ἑπομένως ἔχομεν 2ρ=ν ἄξονας συμμετρίας.

Ἐὰν ν περιττός, τότε ἡ μεσοκάθετος ἑκάστης πλευρᾶς διέρχεται διὰ μιᾶς (ἀπέναντι) κορυφῆς καὶ εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Πάλιν ἔχομεν ν ἄξονας συμμετρίας.

VI. **Περιγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα.** Ἐὰν $A_1A_2A_3...A_\nu$ εἶναι κανονικὸν ν-γωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R) καὶ M τὸ μέσον τοῦ ἐλάσσονος τόξου $\widehat{A_1A_2}$ (σχ. 171), τότε

α') Ἡ εἰς M ἐφαπτομένη τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν ἀκτίνων $OA_1$, $OA_2$ εἰς σημεῖα $A'_1$ καὶ $A'_2$ τοιαῦτα, ὥστε τὸ τμῆμα $A'_1A'_2$ εἶναι πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον **περιγεγραμμένου ν-γώνου.** Διότι τὸ τρ. $OA'_1A'_2$ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ πλευρὰ $A'_1A'_2$ φαίνεται ἀπὸ τοῦ κέντρου O ὑπὸ γωνίαν $360^o/\nu$.



Σχ. 171

β') Αἱ εἰς $A_1$ καὶ $A_2$ ἐφαπτόμεναι τέμνουν τὴν κατὰ τὸ M ἐφαπτομένην εἰς σημεῖα $B'_1$ καὶ $B'_2$ τοιαῦτα, ὥστε ἡ $B'_1B'_2$ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου **περιγεγραμμένου** περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ ἔχοντος **διπλάσιον πλῆθος πλευρῶν** ἤτοι 2ν πλευράς.

Διότι ἡ ἡμιευθεῖα $OB'_1$ εἶναι διχοτόμος τῆς $A'_1\widehat{O}M$ καὶ ἡ $OB'_2$ διχοτόμος τῆς $M\widehat{O}A'_2$. Τὸ τρίγωνον $B'_1OB'_2$ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ δὲ $B'_1B'_2$ φαίνεται ἀπὸ τοῦ O ὑπὸ γωνίαν $B'_1\widehat{O}B'_2$ ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς $A'_1\widehat{O}A'_2$, δηλ. ὑπὸ γωνίαν $360^o/2\nu$. Δηλ. ἡ $B'_1B'_2$ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἡμίσειαν ἐπίκεντρον ἐκείνης, εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἡ $A'_1A'_2$, διὰ τοῦτο καὶ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου διπλασίου πλήθους πλευρῶν.

γ') Τέλος ἡ χορδὴ $A_1M$ εἶναι προφανῶς πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ 2ν-γώνου.

δ') Εἰς τὸ σχ. 171 ἔχομεν: $A_1A_2 < A_1M + MA_2 < A_1B'_1 + B'_1B'_2 + B'_2A_2 < A'_1B'_1 + B'_1B'_2 + B'_2A'_2$ δηλ.: $A_1A_2 < 2A_1M < 2B'_1B'_2 < A'_1A'_2$ καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ ν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(1) $$\nu A_1A_2 < 2\nu A_1M < 2\nu B'_1B'_2 < \nu A'_1A'_2.$$

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν μὲ $\boxed{p_k}$ τὴν περίμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ k πλευρὰς καὶ $\boxed{p'_k}$ τὴν τοῦ ὁμοίου του περιγεγραμμένου, ἡ (1) γράφεται :

(2) $$\boxed{p_\nu < p_{2\nu} < p'_{2\nu} < p'_\nu}$$

VII. — **Εἰς ὅλα τὰ ὅμοια κανονικὰ πολύγωνα ὁ λόγος τῆς περιμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ὁ αὐτός,** δηλ. τὸ $p_\nu/2R$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ R.

Πράγματι ἔστωσαν $A_1A_2...A_\nu$ καὶ $B_1B_2...B_\nu$ δύο κανονικὰ ν - γωνα ἐγγεγραμμένα, τὸ πρῶτον εἰς κύκλον (O, R) καὶ τὸ δεύτερον εἰς κύκλον (K, ρ). Τότε $A_1\widehat{O}A_2 = B_1\widehat{K}B_2 = 360^o/\nu$ καὶ ἑπομένως τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τρ.$A_1OA_2$ καὶ τρ.$B_1KB_2$ εἶναι ὅμοια. Ἄρα :
$A_1A_2/OA_1 = B_1B_2/KB_1$ ἢ $A_1A_2/R = B_1B_2/\rho \Rightarrow \nu.A_1A_2/2R = \nu.B_1B_2/2R$ δηλ.

(3) $$\frac{p_\nu}{2R} = \frac{q_\nu}{2\rho}$$

ὅπου $p_\nu$, $q_\nu$ αἱ περίμετροι τῶν δύο ἀνωτέρω κανονικῶν ν - γώνων. Ἡ (3) δεικνύει ὅτι ὁ λόγος τῆς περιμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ διὰ τὰ δύο, ὅμοια, κανονικὰ πολύγωνα.

**137. Γενικὰ σύμβολα.** Παρίσταται μέ :

$\boxed{\lambda_\nu}$, τὸ **μῆκος τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου** εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

$\boxed{\alpha_\nu}$, τὸ **ἀπόστημα ἐγγεγραμμένου** εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου (δηλ. ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ οἱασδήποτε πλευρᾶς).

$\boxed{p_\nu}$, ἡ **περίμετρος ἐγγεγραμμένου** εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

$\boxed{E_\nu}$, τὸ **ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου** εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

$\boxed{\lambda'_\nu}$, τὸ **μῆκος τῆς πλευρᾶς περιγεγραμμένου** περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

$\boxed{p'_\nu}$, ἡ **περίμετρος περιγεγραμμένου** περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

$\boxed{E'_\nu}$, τὸ **ἐμβαδὸν περιγεγραμμένου** περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

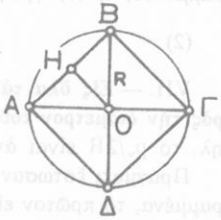
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΕΙΣ ΔΟΘΕΝΤΑ ΚΥΚΛΟΝ

**138. Ἐγγραφὴ τετραγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.**

Ἂς χαράξωμεν δύο καθέτους διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ κύκλου (Ο, R) (σχ. 172). Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι προφανῶς τετράγωνον, ἡ δὲ πλευρά του ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου - ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ. Ἑπομένως

$$\boxed{AB = \lambda_4 = R\sqrt{2}}$$

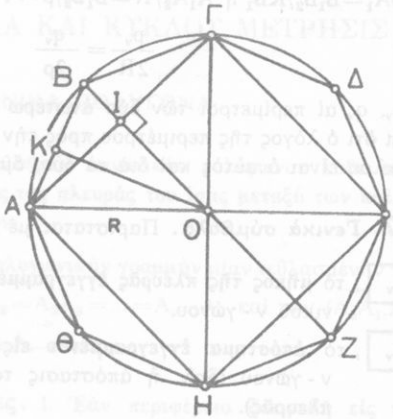


Σχ. 172

Τὸ ἀπόστημα ΟΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ, δηλ.

$$\boxed{OH = \alpha_4 = R\sqrt{2}/2}$$

**139. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ὀκταγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.** Ἐγγράφομεν πρῶτον τετράγωνον ΑΓΕΗ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον (Ο, R) καὶ ἀκολούθως διχοτομοῦμεν τὰ τόξα $\widehat{AΓ}$, $\widehat{ΓΕ}$, $\widehat{ΕΗ}$, $\widehat{ΗΑ}$, φέροντες τὰς διχοτόμους τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν $\widehat{ΑΟΓ}$. $\widehat{ΓΟΕ}$... τοῦ τετραγώνου.



Σχ. 173

Οὕτω λαμβάνομεν κανονικὸν ὀκτάγωνον ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 173).

**Ὑπολογισμὸς τῆς $\lambda_8$.** Ἡ πλευρὰ ΑΓ τοῦ τετραγώνου τέμνει καθέτως εἰς Ι τὴν ἀκτῖνα ΟΒ καὶ τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα (§ 79) δίδει : $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OB \cdot OI =$

$$= R^2 + R^2 - 2R \cdot R\sqrt{2}/2 = 2R^2 - R^2\sqrt{2} = R^2(2 - \sqrt{2}).$$

Ἑπομένως : $\boxed{AB = \lambda_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀποστήματος.** Ἐκ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος ὑπολογίζεται τὸ ἀπόστημα :

$$OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

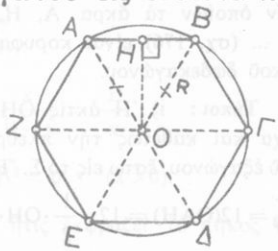
Ὥστε : $\boxed{\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

**Ἐμβαδόν.** Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ δὲν χρειάζεται ἡ πλευρά :

$$E_8 = 8(OAB) = 8 \cdot \frac{1}{2} OB \cdot AI = 4\, OB \cdot \frac{A\Gamma}{2} = 2\, OB \cdot A\Gamma = 2R \cdot R\sqrt{2}$$

δηλ. $\boxed{E_8 = 2R^2\sqrt{2}}$.

**140. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.** Ἐὰν AB εἶναι μία πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, τότε ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AOB} = 360^o/6 = 60^o$ καὶ τὸ τρ.OAB εἶναι ἰσόπλευρον. Ἄρα : AB = R. Ἑπομένως χαράσσοντες 6 διαδοχικὰς χορδὰς ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα κατασκευάζομεν κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

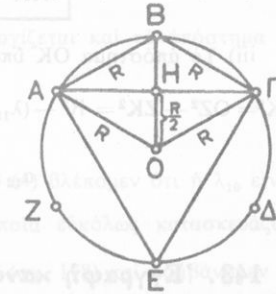


Σχ. 174

**Τύποι :** $\boxed{\lambda_6 = AB = R}$, $\boxed{\alpha_6 = OH = R\sqrt{3}/2}$.

**141. Ἐγγραφὴ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.** Ἀρκεῖ νὰ ἐγγράψωμεν πρῶτον κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ καὶ νὰ ἑνώσωμεν κατόπιν τὰς κορυφὰς περιττῆς τάξεως : Α, Γ, Ε (1ην, 3ην, 5ην). Λαμβάνομεν οὕτω τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (O,R) ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ (σχ. 175).

**Τύποι :** Ἐκ τοῦ ρόμβου ΟΑΒΓ ἔχομεν ὅτι OH = OB/2 = R/2, δηλ. : τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος :



Σχ. 175

$\boxed{\alpha_3 = R/2.}$



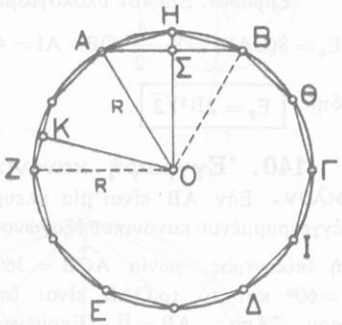
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΗ ἔχομεν :

$$AH = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2AH = R\sqrt{3} \Rightarrow A\Gamma = R\sqrt{3}.$$ Ὅθεν :

$$\boxed{\lambda_3 = R\sqrt{3}}$$

**142. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ δωδεκαγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.** Ἐὰν εἰς κύκλον (Ο, R) ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ καὶ διχοτομήσωμεν τὰ (ἐλάσσονα) τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$,... τὰ ὁποῖα ὑποτείνουν αἱ πλευραί του, τότε διαιρεῖται ἡ περιφέρεια εἰς 12 ἴσα τόξα, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα Α, Η, Β, Θ, Γ, ... (σχ. 176) εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ δωδεκαγώνου.



Σχ. 176

**Τύποι :** i) Ἡ ἀκτὶς ΟΗ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ ἑξαγώνου, ἔστω εἰς τὸ Σ. Ἔχομεν :

$$E_{12} = 12(OAH) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot OH \cdot A\Sigma = 6 \cdot OH \cdot \frac{AB}{2} = 3 \cdot OH \cdot AB = 3R \cdot R.$$

Ὥστε : $$\boxed{E_{12} = 3R^2}.$$

ii) Ἐκ τοῦ τρ.ΟΑΗ : $AH^2 = OA^2 + OH^2 - 2 \cdot OH \cdot O\Sigma = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\sqrt{3}/2 = 2R^2 - R^2\sqrt{3} = R^2(2 - \sqrt{3})$. Ἑπομένως :

$$\boxed{AH = \lambda_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

iii) Τὸ ἀπόστημα ΟΚ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος :

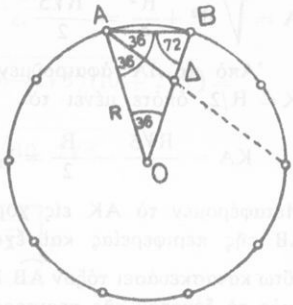
$$OK^2 = OZ^2 - ZK^2 = R^2 - (\lambda_{12}/2)^2 = R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{3})}{4} = \frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{4} \Rightarrow$$

$$\alpha_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

**143. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ δεκαγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.** Ἔστω ΑΒ μία πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸν κύκλον (O, R) σχ. 177. Τότε : $\widehat{AOB} = 360^o/10 = 36^o$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB ἰσοῦται πρὸς $72^o$. Ἐπειδή, λοιπόν, ἡ γωνία $\widehat{OAB}$ εἶναι διπλασία τῆς $\widehat{AOB}$, ἂν φέρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον AΔ τῆς $\widehat{OAB}$ τὸ τρ.OAΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἀλλὰ καὶ τὸ τρ. ABΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι $\widehat{A\Delta B} = 36^o + 36^o$ (ἐξωτερικὴ γωνία) $= 72^o = \widehat{AB\Delta}$. Ἑπομένως ἔχομεν :



Σχ. 177

(1) $$AB = A\Delta = \Delta O = x, \quad \Delta B = R - x,$$

ὅπου x ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου ἔχομεν :

$$\frac{O\Delta}{\Delta B} = \frac{OA}{AB} \text{ ἤ, λόγῳ τῶν (1), } \frac{x}{R-x} = \frac{R}{x} \Rightarrow$$

(2) $$x^2 = R(R-x) \text{ ἢ (3) } x^2 + Rx - R^2 = 0 \qquad (x > 0).$$

Ἡ (3) ἔχει μίαν μόνον θετικὴν λύσιν, ἥτις ἐκφράζει τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου :

$$\lambda_{10} = x = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{-R + R\sqrt{5}}{2}. \text{ Ὅθεν :}$$

(4) $$\boxed{\lambda_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).}$$

Ἐκ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος ὑπολογίζεται καὶ τὸ ἀπόστημα :

$$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + \sqrt{5}}.$$

**Γεωμετρικὴ κατασκευή.** Ἐκ τοῦ τύπου (4) βλέπομεν ὅτι ἡ $\lambda_{10}$ εἶναι διαφορὰ τῶν τμημάτων $\frac{R\sqrt{5}}{2}$ καὶ $\frac{R}{2}$, τὰ ὁποῖα εὐκόλως κατασκευάζονται. Φέρομεν δύο καθέτους ἀκτῖνας OA, OΓ (σχ. 178) καὶ λαμβάνομεν τὸ μέσον τῆς OΓ, ἔστω τὸ I. Τότε

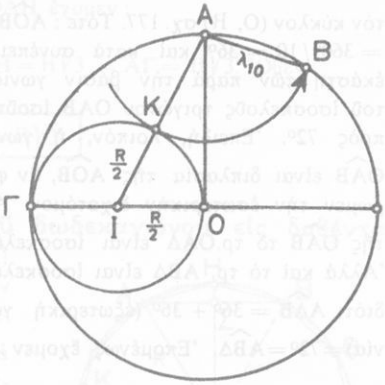
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$IA = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

Ἀπὸ τὸ IA ἀφαιροῦμεν τὸ $IK = R/2$, ὁπότε μένει τὸ

$$KA = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \lambda_{10}.$$

Μεταφέρομεν τὸ AK εἰς χορδὴν AB τῆς περιφερείας καὶ ἔχομεν οὕτω κατασκευάσει τόξον $\widehat{AB}$ ἴσον πρὸς τὸ δέκατον τῆς περιφερείας.



Σχ. 178

**Παρατηρήσεις:** 1ον) Ἡ ἐξίσωσις (2) δεικνύει ὅτι **ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.**

2ον) Ἡ ἐξίσωσις (2) γραφομένη: $x^2 + Rx - R^2 = 0$ ἐπιλύεται γεωμετρικῶς (§ **115**), ὁπότε φθάνομεν εἰς τὴν ἰδίαν ὡς ἄνω κατασκευήν.

**144. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ πενταγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.** Χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν εἰς 10 ἴσα μέρη (§ **143**), ὁπότε τὰ διαιρετικὰ σημεῖα περιττῆς τάξεως (1ον, 3ον, 5ον...) ὁρίζουν τὰς κορυφὰς κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ (σχ. 179).

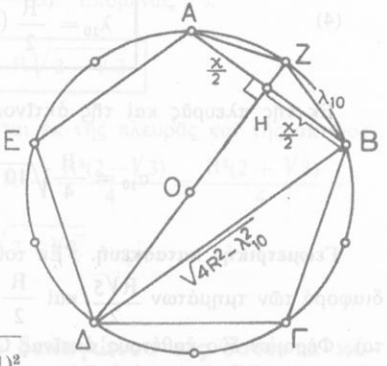
Ἐὰν Z τὸ μέσον τοῦ $\widehat{AB}$, ἡ OZ εἶναι μεσοκάθετος τῆς AB καὶ διέρχεται καὶ διὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς Δ τοῦ πενταγώνου (διότι τοξ$\widehat{ZB\Gamma\Delta} = 180^o$).

Ἐπίσης εἶναι $ZB = \lambda_{10}$. Τὸ μῆκος $x = (AB)$ τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου δυνάμεθα νὰ τὸ ὑπολογίσωμεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγ. ZBΔ βάσει τῆς σχέσεως:

$Z\Delta \cdot HB = ZB \cdot B\Delta$ (§ **72**), ἥτις γράφεται:

$$2R \cdot \frac{x}{2} = \lambda_{10}\sqrt{4R^2 - \lambda^2_{10}} =$$

$$= \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2}$$



Σχ. 179

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\Rightarrow x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$$

$$= \frac{R}{4}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(10+2\sqrt{5})} = \frac{R}{4}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{R}{4}\sqrt{40-8\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Δηλ. : $\boxed{\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$.

Τὸ ἀπόστημα $\alpha_5$ εὑρίσκεται ἴσον πρὸς $\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$.

**145. Κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.**—Ἡ ἀριθμητικὴ ἰσότης $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ δεικνύει ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἓν δέκατον πέμπτον τῆς περιφερείας, ἀρκεῖ ἀπὸ τὸ ἓν ἕκτον αὐτῆς νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἓν δέκατον αὐτῆς. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ χορδὴ ΑΒ τοῦ κύκλου (Ο, R) ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἑτέρα χορδὴ ΑΓ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ὅπου τὸ Γ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ (ἔλασσον) τόξον $\widehat{AB}$, τότε ἡ χορδὴ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Τὸ μῆκος $\lambda_{15}$ ὑπολογίζεται βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου (βλ. ὑπόδειξιν ἀσκ. 575) καὶ εὑρίσκεται :

$$\lambda_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$

**146. Ἱστορικόν.**— Πάντα τὰ ἀνωτέρω κανονικὰ πολύγωνα ἦσαν γνωστὰ ἀπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 19ου αἰῶνος ὁ μέγας Γερμανὸς μαθηματικὸς Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) ἀπέδειξεν ὅτι εἶναι Γεωμετρικῶς κατασκευάσιμον (δηλ. διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου) πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον πλῆθος πλευρῶν τῆς μορφῆς $\nu = 2^\lambda \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_\rho$, ὅπου $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ καὶ $p_1, p_2 \ldots p_\rho$ πρῶτοι ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $2^{2^k}+1$, ὅπου k ἀκέραιος μὴ ἀρνητικός. (Οἱ $p_1, p_2, \ldots p_\rho$ λέγονται ἀριθμοὶ τοῦ Fermat). Οὕτω, τὸ 17-γωνον εἶναι γεωμετρικῶς κατασκευάσιμον, διότι $17 = 2^0 \cdot (2^{2^2}+1)$. (Ἡ κατασκευὴ τούτου ἐπετεύχθη). Ἐπίσης τὸ κανονικὸν πολύγωνον μὲ 257 πλευρὰς κ.τ.λ.

**147. Ἀστεροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα.** — Ἂς διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓν πλῆθος ν ἴσων τόξων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἂς καλέσωμεν τ. ($\tau = 360^0/\nu$, $\nu\tau = 1$ περιφέρεια).

Ἔστω, τώρα, ἀκέραιος μ τοιοῦτος, ὥστε $2 \leqq \mu < \nu$ καὶ σχετικῶς πρῶτος πρὸς τὸν ν. Τότε, ἀφοῦ οἱ μ καὶ ν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι μν. (Διότι, ἂν Α τυχὸν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν μ καὶ ν, τὸ Α, διαιρούμενον ἀκριβῶς καὶ διὰ μ καὶ διὰ ν, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου μ.ν, ἄρα εἶναι τῆς μορφῆς $A = \lambda.\mu\nu$. Τὸ Α γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν $\lambda = 1$, δηλ. $A = \mu\nu =$ Ε.Κ.Π.). Ἀρχόμενοι ἀπὸ

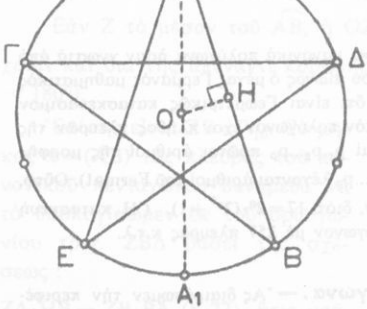
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἓν διαιρετικὸν σημεῖον π.χ. τὸ $A_1$ ἂς χαράξωμεν διαδοχικὰς χορδάς, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὑποτείνει τόξον $\boxed{(\mu \cdot \tau)}$ (δηλ. λαμβάνομεν τὰ τόξα τ, ἀνὰ μ). Ἡ ὑπὸ τῶν διαδοχικῶν τούτων χορδῶν σχηματιζομένη πολυγωνικὴ γραμμὴ θὰ κλείσῃ, ὅταν διὰ πρώτην φορὰν ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν ἀφετηρίαν $A_1$. Διὰ νὰ εὕρωμεν πότε θὰ συμβῇ τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν **μικρότερον** ἀκέραιον k, διὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει: $k(\mu\tau) =$ ἀκέραιον πολ/σιον τοῦ (ντ) (δηλ. τὰ k, τόξα τῶν ἀνωτέρω μ διαδοχικῶν χορδῶν, νὰ καλύψουν πολλαπλάσιον τῆς περιφερείας) ἢ $k\mu =$ ἀκέραιον πολ/σιον τοῦ ν. Ὁ ἀριθμὸς $k\mu$ εἶναι δηλ. τὸ μικρότερον πολ/σιον τοῦ μ, τὸ ὁποῖον εἶναι **καὶ** πολ/σιον τοῦ ν, δηλ. ὁ $k \cdot \mu$ εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν μ καὶ ν. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι, ὡς εἴπομεν, τὸ μν. Ὥστε $k\mu = \mu\nu \Rightarrow k = \nu$. Ὥστε χαράσσοντες **ν διαδοχικὰς χορδάς**, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὑποτείνει τόξον μτ, φθάνομεν **διὰ πρώτην φορὰν** εἰς τὴν ἀφετηρίαν $A_1$. Ἡ ὑπὸ τῶν ν τούτων χορδῶν σχηματιζομένη κλειστή, μὴ κυρτὴ γραμμὴ καλεῖται **«κανονικὸν ἀστεροειδὲς ν - γωνον»**, ἡ δὲ πλευρά του παρίσταται μὲ $\lambda_{\nu,\mu}$ (διότι ὑποτείνει τόξον ἴσον πρὸς τὰ μ νυοστὰ τῆς περιφερείας).

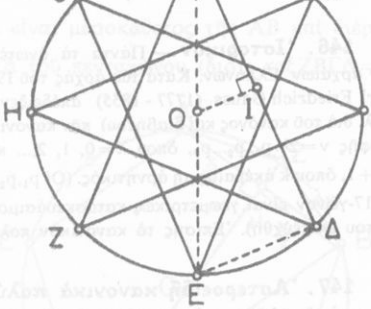
Παρατηροῦμεν, τώρα, ὅτι λαμβάνοντες τὰ τόξα τ ἀνὰ ν-μ εὑρίσκομεν τὸ ἴδιον ἀστεροειδὲς πολύγωνον, δηλ. μὲ τὰς ἰδίας πλευρὰς ($\lambda_{\nu,\mu} = \lambda_{\nu,\nu-\mu}$). Ἑπομένως διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀστεροειδοῦς πολυγώνου δυνάμεθα ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν μ καὶ ν—μ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν μικρότερον. Δηλ. δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $\mu < \nu - \mu$ ἢ $\mu < \frac{\nu}{2}$. (Ἀποκλείεται $\mu = \nu - \mu$, διότι τότε $\nu = 2\mu$ καὶ ὁ μ καὶ ν δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι ὁ μ διαιρεῖ τὸν ν).

**Συμπέρασμα. Δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, ὑπάρχουν τόσα ἀστεροειδῆ κανονικὰ ν - γωνα, ὅσοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι μ οἱ σχετικῶς πρῶτοι πρὸς τὸ ν καὶ μικρότεροι τοῦ ν/2. (Ἐννοεῖται, $\mu > 1$).**

**Παραδείγματα**: Ι. Ἐὰν $\nu = 5$, τότε $\mu = 2$ εἶναι ἡ μόνη δυνατὴ τιμὴ τοῦ μ· δηλ. ὑπάρχει ἓν **μόνον ἀστεροειδὲς κανονικὸν πεντάγωνον** (σχ. 180). Ἡ πλευρὰ τούτου συμ-




Σχ. 180




Σχ. 181

βολιζομένη μὲ $\lambda_{5,2}$ (διότι ἀντιστοιχεῖ εἰς $\nu = 5$ καὶ $\mu = 2$) ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγ. $ABA_1$, ὅπου $A_1B = \lambda_{10} = R(\sqrt{5}-1)/2$ καὶ $AA_1 = 2R$. Εὑρίσκεται δὲ

$$\lambda_{5,2} = AB = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad \text{καὶ ἀπόστημα: } \alpha_{5,2} = OH = \frac{A_1B}{2} = \frac{R}{4}(\sqrt{5}-1).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

II. Ἐάν $\nu=8$, τότε $\mu=3$, δηλ. ὑπάρχει ἓν μόνον ἀστεροειδὲς κανονικὸν ὀκτάγωνον προκῦπτον ἐκ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, ὅταν λαμβάνωμεν τὰ τόξα (ὀγδοημόρια) ἀνὰ τρία (σχ. 181). Ἡ πλευρὰ του ΑΔ$(=\lambda_{8,3})$ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, ὅπου $AE=2R$, $E\Delta=\lambda_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Τὸ ἀπόστημά του ΟΙ $(=a_{8,3})$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΕΔ. Εὑρίσκομεν: $\lambda_{8,3}=R\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_{8,3}=R\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$.

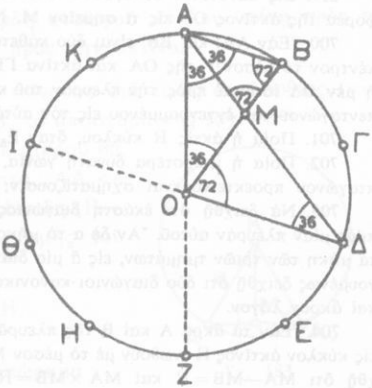
III. Ἐάν $\nu=10$, οἱ μόνοι ἀκέραιοι $\mu$ οἱ $<1$ καὶ $>5$, πρῶτοι πρὸς τὸν 10, εἶναι εἷς μόνον, ὁ $\mu=3$. Δηλ. ὑπάρχει ἓν μόνον ἀστεροειδὲς κανονικὸν δεκάγωνον (ΑΔΗΚΓΖΙΒΕΘΑ), προκῦπτον ἐκ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ΑΒΓ... ΚΑ, ὅταν διατρέχωμεν τὰ τόξα (δεκατημόρια) ἀνὰ τρία (σχ. 182). Ἡ πλευρὰ $\lambda_{10,3}$ τοῦ ἀστεροειδοῦς δεκαγώνου, ἴση πρὸς τὴν χορδὴν ΑΔ τοῦ σχ. 182, δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν ὁμοίων ἰσοσκελῶν τριγώνων ΟΑΔ καὶ ΟΑΜ:

$$A\Delta/OA = OA/AM \Rightarrow A\Delta/R = R/AM$$
$$\Rightarrow A\Delta\cdot AM = R^2.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τρ.ΑΜΒ εἶναι ἰσοσκελές, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς μελέτης τῶν γωνιῶν του, εἶναι $AM=AB=\lambda_{10}$ Συνεπῶς $A\Delta=R^2/\lambda_{10}$. Εὑρίσκομεν:

$$\lambda_{10,3}=A\Delta=\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1).$$

(Ἡ ΑΔ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τρ.ΑΖΔ συναρτήσει τῆς R καὶ τῆς πλευρᾶς $Z\Delta=\lambda_5$).



Σχ. 182

IV. Ἐάν $\nu=15$, ὑπάρχουν τρεῖς ἀκέραιοι $>1$ καὶ $<15/2$, σχετικῶς πρῶτοι πρὸς τὸ 15: $\mu=2$, $\mu=4$, $\mu=7$. Ἑπομένως ὑπάρχουν τρία ἀστεροειδῆ κανονικὰ δεκαπεντάγωνα μὲ πλευρὰς ἀντιστοίχως: $\lambda_{15,2}$, $\lambda_{15,4}$, $\lambda_{15,7}$.

Ἡ πλευρὰ $\lambda_{15,2}$ ὑπολογίζεται βάσει τῆς Ἀριθμητικῆς ἰσότητος $\frac{2}{15}=\frac{3}{10}-\frac{1}{6}$ (παράβαλε μὲ § 145). Ἐκ ταύτης διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου (βλ. ὑπόδ. ἀσκ. 575) εὑρίσκομεν:

$$\lambda_{15,2}=\frac{R}{4}\left\{\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}.$$

Ἡ $\lambda_{15,4}$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς $\frac{4}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{6}$, ἐκ τῆς ὁποίας διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου (βλ. ἄσκ. 574) εὑρίσκομεν:

$$\lambda_{15,4}=\frac{R}{4}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right\}.$$

Τέλος, ἡ $\lambda_{15,7}$ ὑπολογίζεται βάσει τῆς Ἀριθμητικῆς ἰσότητος $\frac{7}{15}=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}$, ἡ ὁποία συνεπάγεται ὅτι ἡ $\lambda_{15,7}$ εἶναι χορδὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων μὲ χορδὰς $\lambda_{10,3}$ καὶ $\lambda_6$. Εὑρίσκομεν:

$$\lambda_{15,7}=\frac{R}{4}\left\{\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

697. Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα ἰσοῦται πρὸς 5 m καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του ἰσοῦται πρὸς 18°. Ὑπολογίσατε τὰς ἄλλας πλευρὰς τῇ βοηθείᾳ τῶν κανονικῶν πολυγώνων. Ὁμοίως, ἂν ἡ μία κάθετος εἶναι 1 m καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι 15°.

698. Ἐὰν ΑΒΓΔΕΖ κανονικὸν ἑξάγωνον, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ, ΓΕ, ... ΖΒ σχηματίζουν ἐπίσης κανονικὸν ἑξάγωνον. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἑξαγώνων τούτων;

699. Εἰς κανονικὸν δεκάγωνον ΑΒΓΔ... ἡ πλευρὰ ΑΒ προεκτεινομένη τέμνει τὸν φορέα τῆς ἀκτῖνος ΟΓ εἴς τι σημεῖον Μ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΜ=ΑΔ.

700. Ἐὰν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἶναι δύο κάθετοι διάμετροι κύκλου (Ο), γραφῇ δὲ τόξον μὲ κέντρον τὸ μέσον Γ τῆς ΟΑ καὶ ἀκτῖνα ΓΒ, τέμνον εἰς Δ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ′, δείξατε ὅτι ἡ μὲν ΟΔ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ἡ δὲ ΔΒ πρὸς τὴν τοῦ πενταγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

701. Ποία ἡ ἀκτὶς R κύκλου, ὅταν $E_8 - E_6 = 1 m^2$;

702. Ποία ἡ μικροτέρα δυνατὴ γωνία, τὴν ὁποίαν δύο πλευραὶ κανονικοῦ δεκαεπταγώνου προεκτεινόμεναι σχηματίζουσιν;

703. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἑκάστη διαγώνιος κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ. Ἂν δὲ α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν τριῶν τμημάτων, εἰς ἃ μία διαγώνιος τέμνεται ὑπὸ τῶν ἄλλων, ἀφοῦ προηγουμένως δειχθῇ ὅτι δύο διαγώνιοι κανονικοῦ πενταγώνου τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

704. Ἐὰν τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς πλευρᾶς ΑΒ κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R ἑνωθοῦν μὲ τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου τῆς διαδοχικῆς πλευρᾶς, νὰ δειχθῇ ὅτι ΜΑ—ΜΒ=R καὶ ΜΑ×ΜΒ=$R^2$.

705. Νὰ δειχθῇ ἄνευ ὑπολογισμῶν ὅτι $\alpha_5 = (\lambda_{10} + \lambda_6)/2$ (βλ. § **137**).

706. Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ δύο κάθετοι ἀκτῖνες ΟΒ, ΟΒ′ αὐτοῦ. Ἡ περιφέρεια (Β, ΒΒ′) τέμνει τὴν εἰς τὸ Β ἐφαπτομένην τοῦ (Ο,R) εἰς δύο σημεῖα, ἐξ ὧν τὸ ἓν ἔστω τὸ Α. Ἡ περιφέρεια (Α,R) τέμνει τὴν (Ο,R) εἰς δύο σημεῖα, ἐξ ὧν τὸ ἓν ἔστω τὸ Γ. Ἡ ευθΑΓ ἐπανατέμνει τὴν (Ο,R) εἰς Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ τινος πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν (Ο, R).

707. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $E_{2\nu}$ συναρτήσει τῶν $E_\nu$ καὶ $E'_\nu$ (βλ. §§ **137, 136,** VI).

708. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $E'_{2\nu}$ συναρτήσει τῶν $E_\nu$ καὶ $E'_\nu$ (βλ. §§ **137, 136,** VI).

709. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $p_{2\nu}$ συναρτήσει τῶν $p_\nu$ καὶ $p'_\nu$.

710. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $p'_{2\nu}$ συναρτήσει τῶν $p_\nu$ καὶ $p'_\nu$.

711. Νὰ δειχθῇ ὅτι $E_{2\nu} = \frac{1}{2} \nu R \lambda_\nu$.

712. Εἰς κύκλον εἶναι ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἐν ὅλῳ 252 διαγωνίους. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου τούτου εἶναι ἴσον πρὸς $54\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $m^2$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

## ΛΗΜΜΑΤΑ

**148.** (Θ) — **Ἐὰν μεταβλητὴ ἐπίκεντρος γωνία σταθεροῦ κύκλου τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τότε καὶ ἡ ἀντίστοιχος χορδή της τείνει πρὸς τὸ μηδέν.**

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι, δοθέντος τμήματος ε ὁσονδήποτε μικροῦ, ἡ μεταβλητὴ χορδὴ $MM_\nu$ τῆς ἐπικέντρου $\widehat{MKM_\nu}$ καθίσταται μικροτέρα τοῦ ε. Πράγματι ὑπάρχει χορδὴ ΑΒ=ε, ἡ δὲ μεταβλητὴ ἐπίκεντρος $\widehat{MKM_\nu}$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀφοῦ τείνει διά τινος ἀκολουθίας πρὸς τὸ μηδέν, θὰ καθίσταται ἀπό τινος καὶ ἔπειτα μικροτέρα τῆς γωνίας $\widehat{AKB}$. Δηλ. ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν θὰ εἶναι $\widehat{MKM_\nu} < \widehat{AKB} \Rightarrow$

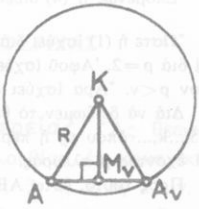
$$MM_\nu < AB \Rightarrow MM_\nu < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\nu \to \infty} MM_\nu = 0.$$

**149.** (Θ) — **Ἐὰν μεταβλητὴ χορδὴ σταθεροῦ κύκλου τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τότε τὸ ἀπόστημά της τείνει πρὸς τὴν ἀκτῖνα.**

Ἔστω ἡ μεταβλητὴ χορδὴ $AA_\nu$ τείνουσα διά τινος ἀκολουθίας ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) πρὸς τὸ μηδὲν καὶ $KM_\nu$ τὸ ἀπόστημά της (σχ. 183)

Δοθέντος τμήματος ε ὁσονδήποτε μικροῦ θὰ ἔχωμεν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ ἔπειτα : $AA_\nu < \varepsilon$ (ἐξ ὑποθέσεως), ἄρα καὶ $AM_\nu < \varepsilon$ καί, ἐπειδὴ $|R - KM_\nu| < AM_\nu$, θὰ ἔχωμεν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ ἔπειτα :

$$|R - KM_\nu| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\nu \to \infty} KM_\nu = R.$$



Σχ. 183

**150.** Ἀποδεικνύεται τὸ ἑξῆς θεώρημα :

**«Ἐκ δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τὸ ἔχον περισσοτέρας πλευρὰς ἔχει καὶ μεγαλυτέραν περίμετρον».**

Θὰ δείξωμεν πρῶτον τὴν ἑξῆς βοηθητικὴν πρότασιν.

**Λῆμμα. Ἐὰν ἔλασσον τόξον $\widehat{AA_{\nu+1}}$ διαιρεθῇ εἰς $\nu+1$ ἴσα τόξα διὰ τῶν σημείων $A_1, A_2, \ldots A_\rho, \ldots A_\nu$, τότε ἰσχύει :**

(1) $$(\rho+1) \cdot AA_\rho > \rho \cdot AA_{\rho+1}, \text{ διὰ } \rho = 1, 2, \ldots \nu.$$

*Ἀπόδειξις.* Ἂς θέσωμεν, χάριν εὐκολίας, $AA_1 = x_1$, $AA_2 = x_2, \ldots AA_k = x_k \ldots, AA_{\nu+1} = x_{\nu+1}$. Ἡ ἀποδεικτέα σχέσις γράφεται

(1) $$(\rho+1)x_\rho > \rho x_{\rho+1}, \text{ διὰ } \rho = 1, 2, \ldots \nu.$$

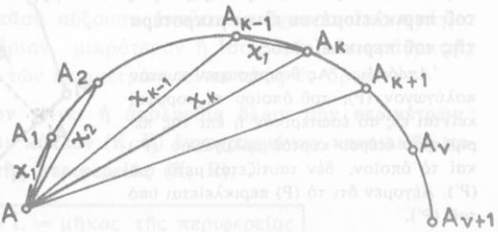
Διὰ $\rho = 1$ ἡ πρότασις ἰσχύει, διότι ἐκ τοῦ τρ. $AA_1A_2$ (σχ. 184) ἔχομεν $AA_2 < AA_1 + A_1A_2$ ἢ $x_2 < 2x_1$. Ὥστε ἰσχύει:

(2) $2x_1 > x_2$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ (1) ἰσχύει διὰ $\rho = k-1$, ὅπου $k \leqq \nu$, δηλ. ἂς ὑποτεθῇ ἰσχύουσα ἡ (3) $kx_{k-1} > (k-1)x_k$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι τότε ἡ (1) ἰσχύει καὶ διὰ $\rho = k$.

Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸ πτολεμαϊκὸν θεώρημα εἰς τὸ



Σχ. 184

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τετράπλευρον $AA_{k-1}A_kA_{k+1}$: $AA_{k+1}\cdot A_{k-1}A_k + AA_{k-1}\cdot A_kA_{k+1} = AA_k\cdot A_{k-1}A_{k+1}$. Τοῦτο γράφεται: $x_{k+1}\cdot x_1 + x_{k-1}\cdot x_1 = x_k\cdot x_2$ καὶ διὰ διαιρέσεως διὰ $x_1\cdot x_k$ δίδει:

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} + \frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow$$

$$(4) \qquad \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_{k-1}}{x_k}.$$

Ἐκ τῆς (2) ἕπεται: $\frac{x_2}{x_1} < 2$.

Ἐκ τῆς (3) ἕπεται: $\frac{x_{k-1}}{x_k} > \frac{k-1}{k} \Rightarrow -\frac{x_{k-1}}{x_k} < -\frac{k-1}{k}$ καὶ διὰ προσθέσεως:

$$\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_{k-1}}{x_k} < 2 - \frac{k-1}{k} = \frac{k+1}{k}.$$

Ἑπομένως ἡ (4) δίδει $\frac{x_{k+1}}{x_k} < \frac{k+1}{k}$, δηλ. $(k+1)x_k > kx_{k+1}$.

Ὥστε ἡ (1) ἰσχύει διὰ $\rho = k$. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ (1) ἰσχύει διὰ $\rho = 1$, ἕπεται ὅτι θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ $\rho = 2$. Ἀφοῦ ἰσχύει διὰ $\rho = 2$, θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ $\rho = 3$ καὶ τοῦτο ἐξακολουθεῖ, ἐφ' ὅσον $\rho < \nu$. Ἄρα ἰσχύει διὰ $\rho = 1, 2, \ldots \nu$ ὅ.ἔ.δ.

Διὰ νὰ δείξωμεν τὸ θεώρημα τῆς § **150**, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $p_\nu < p_{\nu+1}$ διὰ $\nu = 3, 4, 5, \ldots k, \ldots$ ὅπου $p_\rho$ ἡ περίμετρος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον καὶ ἔχοντος $\rho$ πλευράς.

Πρὸς τοῦτο, ἔστω $AB = \lambda_\nu$ πλευρὰ κανονικοῦ $\nu$-γώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον. Ἂς χωρίσωμεν τὸ ἔλασσον τόξον $\widehat{AB}$ εἰς $\nu+1$ ἴσα μέρη διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, ὁπότε ἕκαστον τῶν $\nu+1$ ἴσων τόξων $\widehat{AA_1}, \widehat{A_1A_2}, \ldots \widehat{A_\nu B}$ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $\widehat{AB}/(\nu+1)$. Θὰ ἔχωμεν:

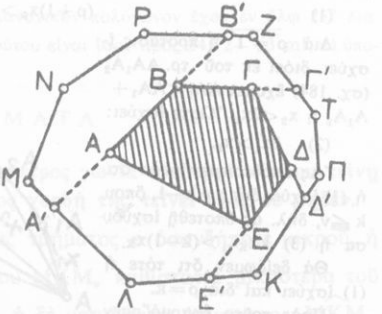
$$\widehat{AB} = \frac{360^0}{\nu}, \quad \widehat{AA_\nu} = \nu\widehat{AA_1} = \nu\cdot\frac{\widehat{AB}}{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu+1}\cdot\frac{360^0}{\nu} = \frac{360^0}{\nu+1}.$$

Ἐκ τῆς $\widehat{AA_\nu} = \frac{360^0}{\nu+1}$ ἕπεται ὅτι ἡ χορδὴ $AA_\nu$ εἶναι πλευρὰ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ $\nu+1$ πλευράς. Ἤτοι $AA_\nu = \lambda_{\nu+1}$. Κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδειχθὲν λῆμμα ἰσχύει.

$$(\nu+1)AA_\nu > \nu AB, \text{ δηλ. } (\nu+1)\lambda_{\nu+1} > \nu\lambda_\nu, \text{ δηλ. } p_{\nu+1} > p_\nu \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

**151.** (Θ)—**Ἐὰν κυρτὸν πολύγωνον περικλείεται ἐντὸς ἑτέρου κυρτοῦ πολυγώνου, ἡ περίμετρος τοῦ περικλειομένου εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ περικλείοντος.**

*Ἀπόδειξις.* Ἂς θεωρήσωμεν κυρτὸν πολύγωνον (P), τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ κεῖνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἢ ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἑτέρου κυρτοῦ πολυγώνου (P′) καὶ τὸ ὁποῖον, δὲν ταυτίζεται μετὰ τοῦ (P′). Λέγομεν ὅτι τὸ (P) περικλείεται ὑπὸ τοῦ (P′).



Σχ. 185

Ἔστω, τώρα πολύγωνον ΑΒΓΔΕ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περικλειόμενον ὑπὸ τοῦ ΚΛΜ... ΤΠ (σχ. 185). Ἡ εὐθ ΑΒ τέμνει τὴν περίμετρον τοῦ περικλείοντος εἰς δύο σημεῖα Α΄, Β΄ καὶ τὸ χωρίζει εἰς δύο κυρτὰ πολύγωνα κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς εὐθ ΑΒ καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕν, ἤτοι τὸ Α΄Β΄ΖΤ... Λ, περικλείει τὸ ΑΒΓΔΕ. Τὸ νέον τοῦτο κυρτὸν πολύγωνον Α΄Β΄Ζ...Λ τὸ περικλεῖον τὸ ΑΒΓΔΕ ἔχει περίμετρον μικροτέραν τῆς τοῦ ἀρχικοῦ περικλείοντος, διότι Α΄Β΄ < Α΄Μ + + ΜΝ + ΝΡ + ΡΒ΄. Ἡ ἡμιευθεῖα (Β, Γ) τέμνει τὴν περίμετρον τοῦ νέου περικλείοντος Α΄Β΄ΖΤ ... Λ εἰς Γ΄ καὶ τὸ χωρίζει εἰς δύο κυρτὰ πολύγωνα, ἐξ ὧν τὸ ΒΓ΄ΤΠΚΛΑ΄ περικλείει τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ ἔχει περίμετρον μικροτέραν τοῦ προηγουμένου περικλείοντος, διότι Β΄Γ΄ < ΒΒ΄ + Β΄Ζ + ΖΓ΄. Προεκτείνοντες τὴν πλευρὰν ΓΔ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Δ, δημιουργοῦμεν ὁμοίως νέον περικλεῖον πολύγωνον, τὸ ΒΓΔ΄ΚΛΑ΄, ἔχον ἀκόμη μικροτέραν περίμετρον. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω, μέχρι καὶ τῆς τελευταίας πλευρᾶς, φθάνομεν διὰ διαδοχικῶν ἐλαττώσεων εἰς τὴν περίμετρον τοῦ περικλειομένου ΑΒΓΔΕ· ἄρα, αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ περικλείοντος.

## ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ π

**152. Ὁρισμὸς τοῦ μήκους τῆς περιφερείας.** Ἂς θεωρήσωμεν περιφέρειαν (K, R) καὶ τὴν ἀπέραντον ἀκολουθίαν ἐκ κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτὴν καὶ ἐχόντων: 3, 4, 5, 6, .....ν, ... πλευράς. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων τούτων:

(1) $$p_3,\ p_4,\ p_5, \dots p_\nu,\ p_{\nu+1}, \dots$$

Ἡ (1) περιέχει ὅλας τὰς δυνατὰς περιμέτρους κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν (K, R). Ἐπειδή, ὡς εἴδομεν (§ **150**), εἶναι $p_\nu < p_{\nu+1}$ διὰ ν = 3, 4,... (ἐπ' ἄπειρον), διὰ τοῦτο ἡ (1) εἶναι **αὔξουσα ἀκολουθία** θετικῶν ἀριθμῶν:

$$p_3 < p_4 < p_5 < \dots < p_\nu < p_{\nu+1} < \dots$$

Ἡ (1) εἶναι καὶ φραγμένη ἄνωθεν, διότι ἡ περίμετρος τυχόντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τυχόντος περιγεγραμμένου (§ **151**). Ἑπομένως ἡ (1) ἔχει ἄνω φράγμα τὴν περίμετρον τυχόντος περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, π.χ. τὸ $p_3'$, δηλ. πάντες οἱ ὅροι τῆς (1) εἶναι μικρότεροι τοῦ $p'_3$.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι πᾶσα αὔξουσα ἀκολουθία ἔχουσα ἄνω φράγμα τείνει πρὸς ἓν ὡρισμένον ὅριον, μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ ἄνω φράγματος. Ἑπομένως ἡ ἀκολουθία (1) τῶν περιμέτρων τείνει πρὸς ἓν ὅριον.

**Τὸ ὅριον, εἰς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ ἀκολουθία ὅλων τῶν περιμέτρων: $p_3, p_4, \dots p_\nu, \dots$ τῶν εἰς τὸν κύκλον (K, R) ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας (K, R).**

Ἤτοι $$\boxed{\lim_{\nu \to \infty} p_\nu = L = \text{μῆκος τῆς περιφερείας}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, μήκους L, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τῆς περιμέτρου παντὸς ἐγγεγραμμένου καὶ μικρότερον τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον κανονικοῦ πολυγώνου, καλεῖται καὶ **ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας.**

**153. Ὁρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ π. Θεώρημα τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου.— Ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς ὅλους τοὺς κύκλους. Ὁ σταθερὸς οὗτος λόγος καλεῖται «ἀριθμὸς π».**

Ἔστωσαν δύο τυχοῦσαι περιφέρειαι (K, R) καὶ (O, ρ) ἔχουσαι ἀντιστοίχως μήκη L καὶ $l$. Ἔστω ἀκόμη $p_\nu$ ἡ περίμετρος κανονικοῦ ν-γώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν πρώτην περιφέρειαν καὶ $q_\nu$ ἡ περίμετρος ἑτέρου κανονικοῦ ν-γώνου (ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον) ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν δευτέραν. Ὅπως εἴδομεν προηγουμένως, εἶναι $\lim\limits_{\nu\to\infty} p_\nu = L$ καὶ $\lim\limits_{\nu\to\infty} q_\nu = l$. Ἑπομένως:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{p_\nu}{2R} = \frac{L}{2R} \text{ καὶ } \lim_{\nu\to\infty} \frac{q_\nu}{2\rho} = \frac{l}{2\rho}.$$

Γνωρίζομεν ὅμως (§ **136**, VII) ὅτι

$$\frac{p_\nu}{2R} = \frac{q_\nu}{2\rho}.$$

δηλ. αἱ δύο ἀκολουθίαι: $\left\{\frac{p_\nu}{2R}\right\}$ καὶ $\left\{\frac{q_\nu}{2\rho}\right\}$ (ν=3, 4, 5...) εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ τὰ ὅριά των εἶναι ἴσα. Δηλαδὴ $\frac{L}{2R} = \frac{l}{2\rho}$.

Ὥστε ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ὁ ἴδιος διὰ δύο τυχόντας κύκλους, ἄρα ὁ ἴδιος εἰς ὅλους τοὺς κύκλους. Ὁ σταθερὸς αὐτὸς λόγος παρίσταται διεθνῶς διὰ τοῦ γράμματος π τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου. Ἀφοῦ δὲ $L/2R = \pi$, ἕπεται ὅτι

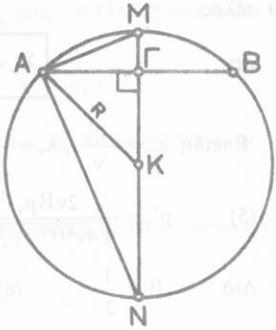
(1) $\boxed{L = 2\pi R}$ (τύπος παρέχων τὸ μῆκος τῆς περιφερείας).

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ π

**154.** α΄) ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι. **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $p_{2\nu}$ συναρτήσει τοῦ $p_\nu$ καὶ τοῦ R.** Ἔστω $AB = \lambda_\nu$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ν-γώνου ἐγγεγραμμένου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τὸν κύκλον (K, R) (σχ. 186). Ἄς ἀχθῇ ἡ διάμετρος MN, κάθετος ἐπὶ τὴν AB. Αὕτη θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Γ τῆς χορδῆς AB καὶ διὰ τοῦ μέσου M τοῦ ἐλάσσονος τόξου $\widehat{AB}$. Ἑπομένως ἡ χορδὴ AM θὰ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἐκ 2ν πλευρῶν, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Ἤτοι $AM = \lambda_{2\nu}$. Ἔχομεν κατὰ σειρὰν τὰς σχέσεις:



Σχ. 186

$$AM^2 = MN \cdot M\Gamma = 2R(KM - K\Gamma) = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - A\Gamma^2}\right) = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - 4A\Gamma^2}\right) = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - AB^2}\right)$$

ἤτοι: $\lambda^2_{2\nu} = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}\right)$ καὶ τελικῶς:

$$(1) \qquad \boxed{\lambda_{2\nu} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}\right)}} \quad \text{(Τύπος τοῦ Ἀρχιμήδους)}$$

Ἡ (1) ἐκφράζει τὴν πλευρὰν $\lambda_{2\nu}$ συναρτήσει τῆς $\lambda_\nu$. Ἐπειδὴ $\lambda_{2\nu} = \frac{p_{2\nu}}{2\nu}$ καὶ $\lambda_\nu = \frac{p_\nu}{\nu}$, ἡ (1) γράφεται καὶ

$$(2) \qquad \frac{p_{2\nu}}{2\nu} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \frac{p_\nu^2}{\nu^2}}\right)}.$$

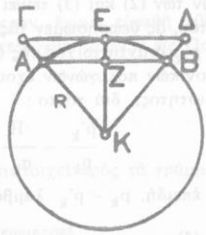
Ἐκ τῆς (2) εὑρίσκεται ἡ $p_{2\nu}$ συναρτήσει τῆς $p_\nu$.

Διὰ $R = \frac{1}{2}$ ἡ (2) δίδει:

$$(3) \qquad \boxed{p_{2\nu} = \sqrt{2\nu\left(\nu - \sqrt{\nu^2 - p_\nu^2}\right)}}.$$

**β') ΠΡΟΒΛΗΜΑ II. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $p'_\nu$ συναρτήσει τοῦ $p_\nu$ καὶ τοῦ R.**

Ἔστω $AB = \lambda_\nu$ ἡ πλευρὰ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ν-γώνου καὶ ΓΔ ἡ πλευρὰ $\lambda'_\nu$ τοῦ ὁμοίου του περιγεγραμμένου (σχ. 187). Ἐπειδὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ ἀντίστοιχα ὕψη, ἔχομεν:



Σχ. 187

$$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{KE}{KZ} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{\lambda_\nu^2}{4}}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τέλος

$$(4)\qquad \boxed{\lambda'_\nu = \frac{2R\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}}$$

Ἐπειδὴ $\lambda'_\nu = \frac{p'_\nu}{\nu}$, $\lambda_\nu = \frac{p_\nu}{\nu}$, ὁ τύπος (4) γίνεται

$$(5)\qquad p'_\nu = \frac{2\nu R p_\nu}{\sqrt{4\nu^2R^2-p_\nu^2}}.$$

Διὰ $R=\frac{1}{2}$: (6) $p'_\nu = \frac{\nu p_\nu}{\sqrt{\nu^2-p_\nu^2}}$

**155. Ὑπολογισμὸς τοῦ π.** Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν π, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος L περιφερείας ἀκτῖνος $R=1/2$. Διότι $L=2\pi R=2\pi(1/2)=\pi$. Τὸ L ὅμως εἶναι (§ **152**) τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ ἀκολουθία τῶν περιμέτρων ὅλων τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν περιφέρειαν, ἤτοι τὸ ὅριον τῆς ἀπεράντου ἀκολουθίας.

(1) $$p_3,\ p_4,\ p_5,\dots\ p_\nu\dots$$

Τὸ ὅριον λοιπὸν τῆς (1) εἶναι ὁ ἀριθμὸς π, ὅταν $R=1/2$.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁρίου τῆς (1) ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ὅριον, εἰς τὸ ὁποῖον τείνει μία ὁποιαδήποτε **ὑπακολουθία** τῆς (1), ὅπως π.χ. ἡ

(2) $$p_6,\ p_{12},\ p_{24},\ p_{48},\ p_{96}\dots$$

διότι αἱ (1) καὶ (2) τείνουν πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον. (Διότι, ἂν ἡ (1) ἔχῃ ὅριον τὸ $l$, τότε δοθέντος ἑνὸς $\varepsilon>0$, οἱουδήποτε, πάντες οἱ ὅροι τῆς (1) ἀπὸ τινος δείκτου N καὶ ἔπειτα, δηλ. οἱ $p_N, p_{N+1}\dots$, εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ διαστήματος $]l-\varepsilon[$. Ἀλλὰ μέσα εἰς τοὺς $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}$ ὑπάρχουν καὶ ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ὑπακολουθίας (2) ἀπό τινος δείκτου καὶ ἔπειτα, ἑπομένως καὶ ἡ (2) τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον).

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς π εἶναι τὸ ὅριον, εἰς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ αὔξουσα ἀκολουθία (2).

Ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὴν ἀντίστοιχον πρὸς τὴν (2) ἀκολουθίαν τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (ἀκτῖνος 1/2) κανονικῶν πολυγώνων·

(3) $$p'_6,\ p'_{12},\ p'_{24},\ p'_{48},\ p'_{96}\dots$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (3) εἶναι φθίνουσα (§ **136**, VI, (2)) καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀντιστοίχων ὅρων τῶν (2) καὶ (3) τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν $\nu\to\infty$. Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ τελευταίου τούτου, ἂς θεωρήσωμεν τὰς περιμέτρους $p_k$ καὶ $p'_k$, ὅπου $p_k$ ὅρος τῆς ἀκολουθίας (2) καὶ $p'_k$ ὁ ἀντίστοιχος τῆς (3) ($k=6\cdot 2^\nu$, $\nu=0, 1, 2, \dots$). Ἐπειδὴ αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν καὶ τὰ ἀποστήματα αὐτῶν (λόγος ὁμοιότητος), διὰ τοῦτο:

$$\frac{p'_k}{p_k}=\frac{R}{\alpha_k} \Rightarrow p'_k=\frac{Rp_k}{\alpha_k} \Rightarrow p'_k-p_k=p_k\left(\frac{R}{\alpha_k}-1\right)$$

καὶ ἐπειδὴ $p_k<p'_k$ λαμβάνομεν:

(4) $$0<p'_k-p_k<p'_k\cdot\frac{R-\alpha_k}{\alpha_k}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ $k \geqq 6$, διὰ τοῦτο $p_k \leqq p'_6 = 4R\sqrt{3}$ καὶ $\alpha_k \geqq \alpha_6 = R\sqrt{3}/2$. Ἑπομένως ἐκ τῆς (4) ἕπεται

$$(5) \qquad 0 < p'_k - p_k < \frac{4R\sqrt{3}}{R\sqrt{3}/2}(R - \alpha_k) = 8(R - \alpha_k).$$

Ἐπειδὴ $\alpha_k \underset{k=\infty}{\longrightarrow} R$ (§ **149**), διὰ τοῦτο $R - \alpha_k \underset{k=\infty}{\longrightarrow} 0$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἕπεται ἐκ τῆς

$$(5) \quad p'_k - p_k \underset{k=\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ἑπομένως αἱ ἀκολουθίαι (2) καὶ (3) ἀποτελοῦν ἐγκιβωτισμὸν (§ **38**) καὶ τείνουν πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον π τοιοῦτον, ὥστε :

$$\boxed{p_k < \pi < p'_k} \quad (k = 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96 \ldots).$$

Αἱ περίμετροι $p_k$ καὶ $p'_k$ ὑπολογίζονται βαθμηδὸν διὰ $k = 6, 12, 24, 48, 96, 192 \ldots$ διὰ τῶν τύπων (3) καὶ (6) τῆς § **154**. Ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς εὑρίσκομεν :

| ν | | p | | p′ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | ... | 3,00000 | ... | 3,46411 |
| 12 | ... | 3,10582 | ... | 3,21540 |
| 24 | ... | 3,13262 | ... | 3,15967 |
| 48 | ... | 3,13935 | ... | 3,14609 |
| 96 | ... | 3,14103 | ... | 3,14272 |
| 192 | ... | 3,14145 | ... | 3,14188 |

Ἑπομένως : $3{,}14145 < \pi < 3{,}14188$. Τὰ πρῶτα ἀκριβῆ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π εἶναι *τὰ κοινὰ ψηφία τῶν δύο προσεγγίσεων:* $\pi = 3{,}141\ldots$

**Χρησιμοποιούμεναι ἐν τῇ πράξει προσεγγιστικαὶ τιμαὶ τοῦ π.** Εἰς τοὺς πρακτικοὺς ὑπολογισμοὺς ἀρκούμεθα συνήθως εἰς τὰς ἑξῆς κατὰ προσέγγισιν τιμὰς τοῦ π·

$\pi \simeq 3{,}1416$ (καθ' ὑπεροχὴν προσεγγιστικὴ τιμή).

$\pi \simeq \dfrac{22}{7}$ (προσεγγιστικὴ τιμὴ δοθεῖσα ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους).

Ἂς σημειώσωμεν ἀκόμη τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν $\pi \simeq \sqrt{2} + \sqrt{3} \simeq 3{,}1416$, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει τὴν κατὰ προσέγγισιν γεωμετρικὴν κατασκευὴν τοῦ ἀναπτύγματος μιᾶς περιφερείας.

**Ἡ μεγίστη ἐπιτευχθεῖσα προσέγγισις.** Μέχρι σήμερον, ἔχουν εὑρεθῆ 10000 ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ἀριθμοῦ π. (Τοῦτο ἐπετεύχθη τὸ 1959 εἰς Παρισίους διὰ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ I.B.M.704).

Ἀναγράφομεν τὰ 20 πρῶτα :

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots$$

Σημειοῦμεν ἀκόμη ὅτι ἡ προσέγγισις $\pi = 3{,}14159\ldots$ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὰ γράμματα τῶν λέξεων τῆς φράσεως :

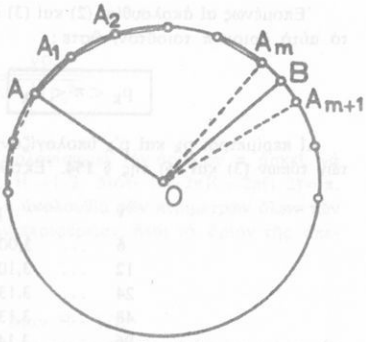
| ἀεὶ | ὁ | Θεὸς | ὁ | μέγας | γεωμετρεῖ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 9 |

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ

**156. α') Ὁρισμὸς τοῦ μήκους τόξου.** — Ἔστω $\widehat{AB}$ κυκλικὸν τόξον κέντρου Ο. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἂς συμπεριληφθοῦν εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τόξου.

Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον μὲ πλῆθος πλευρῶν k, ἀρκετὰ μέγα, ἔστω τὸ $AA_1A_2A_3...A_mA_{m+1}...A$ (σχ. 188) καὶ θεωροῦμεν ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τὰς εὑρισκομένας ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Ἔστωσαν αὗται αἱ A, $A_1$, $A_2$,... $A_m$. Ἡ κορυφὴ $A_{m+1}$ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$. Ἂς καλέσωμεν $s_m$ τὸ μῆκος τῆς κανονικῆς τεθλασμένης $AA_1A_2A_3...A_m$, δηλ. τὸ μῆκος τοῦ μέρους τῆς περιμέτρου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν διπλασιάζωμεν ἀπαύστως τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγραφέντος κανονικοῦ πολυγώνου, δηλ. ἂν ἐγγράφωμεν κανονικὰ πολύγωνα μὲ k, 2k, $2^2k$, ... $2^\nu \cdot k$, ... πλευράς, τὸ μῆκος $s_m$ τῆς ἑκάστοτε ἀντιστοίχου τεθλασμένης $AA_1... A_m$ βαίνει προφανῶς αὐξανόμενον, ἐνῷ τὸ $A_m$ μετατοπίζεται πρὸς τὸ Β. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τοῦ συνεχοῦς τούτου διπλασιασμοῦ, τὸ $s_m$, ἐνῷ βαίνει αὐξανόμενον, παραμένει μικρότερον τῆς περιμέτρου τυχόντος περιγεγραμμένου πολυγώνου (δηλ. ἔχει ἄνω φράγμα), διὰ τοῦτο τὸ $s_m$ τείνει πρὸς ἓν ὅριον s. **Τὸ ὅριον τοῦτο τοῦ $s_m = AA_1A_2...A_m$ καλοῦμεν μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.**



Σχ. 188

**β') Ὑπολογισμὸς τοῦ μήκους τόξου.** Ἔστω $N(=k\cdot 2^\nu)$ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου $AA_1A_2 ... A_mA_{m+1}... A$ καὶ $A_1 A_2...A_m$ τὸ μέρος τῆς περιμέτρου του τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$ (σχ. 188). Ἐπειδὴ $A_m\widehat{O}B < A_m\widehat{O}A_{m+1} = 360^0/N$, ἕπεται ὅτι $\lim\limits_{N\to\infty} A_m\widehat{O}B = 0$ καὶ συνεπῶς $\lim\limits_{N\to\infty} A\widehat{O}A_m = A\widehat{O}B$. Κατόπιν τούτων τὸ μῆκος $\boxed{s}$ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ ὑπολογίζεται ὡς κάτωθι :

$$s = \lim_{N\to\infty} (AA_1A_2...A_m) = \lim_{N\to\infty}(m\lambda_N) = \lim_{N\to\infty}\left(m\frac{p_N}{N}\right) = \lim_{N\to\infty} p_N \cdot \lim_{N\to\infty}\frac{m}{N}\cdot$$

Ἀλλά : $\lim\limits_{N\to\infty} p_N = 2\pi R$ (μῆκος τῆς περιφερείας) καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{m}{N} = \frac{m \cdot \widehat{AA_1}}{N \cdot \widehat{AA_1}} = \frac{\widehat{AOA_m}}{360^o} \quad \text{καὶ ἑπομένως :}$$

$$s = 2\pi R \lim_{N \to \infty} \frac{\widehat{AOA_m}}{360^o} = \boxed{2\pi R. \frac{\widehat{AOB}}{360^o}}. \text{ Ἤτοι :}$$

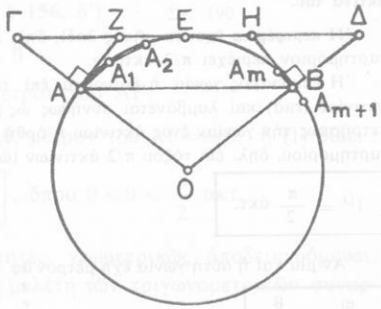
**Τὸ μῆκος κυκλικοῦ τόξου ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, ἐπὶ τὸν λόγον τῆς ἐπικέντρου γωνίας του πρὸς τὰς 360°.**

Τὰ ἀνωτέρω προφανῶς ἰσχύουν καὶ ὅταν ἡ γωνία AOB εἶναι μὴ κυρτή.

γ') Ὁ τύπος $s = 2\pi R \cdot (\widehat{AOB}/360^o)$ δεικνύει ὅτι τὸ ὡς ἄνω ὁρισθὲν μῆκος τοῦ τόξου εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἤρχισεν ἡ μετάβασις εἰς τὸ ὅριον.

**δ') (Θ) — Ἔστω ἔλασσον τόξον $\widehat{AB}$ καὶ ΓΔ τὸ μέρος τῆς εἰς τὸ μέσον του ἐφαπτομένης τὸ περιεχόμενον ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$** (σχ. 189).

**Τότε τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν μηκῶν AB καὶ ΓΔ.**



Σχ. 189

*Ἀπόδειξις.* Τὸ μῆκος s τοῦ $\widehat{AB}$ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ μήκους τῆς τεθλασμένης $AA_1A_2...A_m$, ὅταν τὸ $m \to \infty$ (βλ. ἐδ. α').

Ἐπειδὴ ὅμως προφανῶς $A_mB \underset{m \to \infty}{\to} 0$, διὰ τοῦτο τὸ s εἶναι ἐπίσης τὸ ὅριον τοῦ μήκους τῆς τεθλασμένης $AA_1A_2...A_mB$, ἤτοι :

$$(1) \qquad s = \lim_{m \to \infty} (AA_1 + A_1A_2 + ... + A_{m-1}A_m + A_mB).$$

Εἰς ἑκάστην διχοτόμησιν τῶν τόξων $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1A_2}$,...$\widehat{A_mA_{m+1}}$ προφανῶς τὸ μῆκος τῆς τεθλασμένης $AA_1A_2...A_mB$ αὐξάνεται, διότι προστίθενται καὶ νέα διαιρετικὰ σημεῖα, ἑπομένως τὸ ἄθροισμα $AA_1 + A_1A_2 + ... + A_mB$ τείνει πρὸς τὸ ὅριόν του s διαρκῶς **αὐξανόμενον,** ἄρα :

$$(2) \qquad s > AA_1 + A_1A_2 + ... + A_mB.$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $AA_1 + A_1A_2 + ... + A_mB > AB$, ἕπεται ἐκ τῆς (2) ὅτι :

$$(3) \qquad s > AB.$$

Ἐξ ἄλλου, ἂν ἀχθοῦν εἰς A καὶ B ἐφαπτόμεναι τέμνουσαι τὸ ΓΔ εἰς Z καὶ H, εἶναι :



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(4) $$AA_1 + A_1A_2 + \ldots + A_mB < AZ + ZH + HB$$

(διότι τὸ κυρτὸν πολύγωνον $AA_1A_2 \ldots A_mBA$ περικλείεται ὑπὸ τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου AZHBA). Ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν :

(5) $$\lim_{m \to \infty} (AA_1 + A_1A_2 + \ldots + A_mB) \leqq AZ + ZH + HB$$

καὶ λόγῳ τῆς (1) ἡ (5) γίνεται

(6) $$s \leqq AZ + ZH + HB.$$

Ἀλλὰ $AZ + ZH + HB < ΓZ + ZH + HΔ = ΓΔ$ καὶ ἡ (6) δίδει :

(7) $$s < ΓΔ.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι $\boxed{AB < s < ΓΔ}$.

**157. Ἀκτίνια. Καλεῖται «ἀκτίνιον» κυκλικὸν τόξον ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα του.**

**Ἡ περιφέρεια** ἔχουσα μῆκος $2\pi R$, δηλ. $2\pi$ ἀκτίνων, **περιέχει $2\pi$ ἀκτίνια** καὶ τὸ τεταρτημόριον περιέχει $\pi/2$ ἀκτίνια.

Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἡ βαίνουσα ἐπὶ τόξου ἑνὸς ἀκτινίου καλεῖται **γωνία ἑνὸς ἀκτινίου** (rad) καὶ λαμβάνεται συνήθως ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν. Μὲ μονάδα μετρήσεως τὴν γωνίαν ἑνὸς ἀκτινίου ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει μέτρον $\pi/2$, διότι βαίνει ἐπὶ τεταρτημορίου, δηλ. ἐπὶ τόξου $\pi/2$ ἀκτινίων (ὡς εἴδομεν προηγουμένως), ἄρα

$$\boxed{1^D = \frac{\pi}{2} \text{ ἀκτ.}}$$

Ἂν μία καὶ ἡ αὐτὴ γωνία ἔχῃ μέτρον ἀφ' ἑνὸς μὲν $\omega^0$ καὶ ἀφ' ἑτέρου θ ἀκτινίων, τότε:

$\boxed{\frac{\omega}{180} = \frac{\theta}{\pi}}$. Διότι $360^0 = 2\pi$ ἀκτ., ἄρα $1^0 = \frac{2\pi}{360}$ ἀκτ. καὶ $\omega^0 = \frac{\pi\omega}{180}$ ἀκτ. Ἑπομένως, ἂν ἡ γωνία $\omega^0$ ἐκφράζεται διὰ θ ἀκτινίων, εἶναι: $\theta = \frac{\pi\omega}{180}$ ἢ $\frac{\omega}{180} = \frac{\theta}{\pi}$. Ἐκ τούτου ὑπολογίζεται ὅτι ἡ γωνία ἑνὸς ἀκτινίου ($\theta = 1$) ἰσοῦται πρὸς $57^0 17' 45''$.

Ἐὰν τόξου ἀκτῖνος R ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι θ ἀκτινίων, τοῦτο σημαίνει ὅτι καὶ τὸ τόξον εἶναι θ ἀκτινίων, ἄρα τὸ μῆκός του s εἶναι ἴσον πρὸς θ ἀκτῖνας, ἤτοι :

(1) $$\boxed{s = R\theta.}$$

Δηλ. : **Τὸ μῆκος παντὸς κυκλικοῦ τόξου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἀκτῖνός του ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς ἐπικέντρου γωνίας του ἐκπεφρασμένης εἰς ἀκτίνια.**

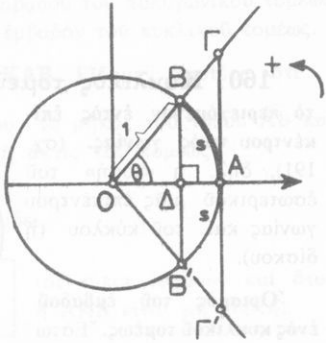
(Ὁ τύπος (1) προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ τύπου $s = 2\pi R \cdot \frac{\omega}{360} =$ (**§156, β'**), ὅπου ω τὸ μέτρον τῆς ἐπικέντρου γωνίας εἰς μοίρας. Διότι, ἂν ἡ γωνία $\omega^0$ ἐκφράζεται διὰ θ ἀκτινίων, τότε, ὡς εἴδομεν, $\frac{\pi\omega}{180} = \theta$ καὶ $s = 2\pi R \frac{\omega}{360} = R \cdot \frac{\pi\omega}{180} = R\theta$).

Τέλος, ἂν $R = 1$, τότε $s = \theta$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## 158. Αἱ θεμελιώδεις τριγωνομετρικαὶ ἀνισότητες.

Ἄς θεωρήσωμεν τριγωνομετρικὸν κύκλον (O, 1) (σχ. 190), τὸν ἄξονα $\{O, \overrightarrow{OA}\}$ τῶν συνημιτόνων καὶ θετικὸν τόξον $\widehat{AB}$, μικρότερον τεταρτημορίου καὶ ἔχον μέτρον θ ἀκτινίων. Τότε τὸ μῆκος s τοῦ τόξου τούτου ἰσοῦται μὲ θ (s = Rθ, § **157**, (1)).




Ἔστω B′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ B ὡς πρὸς τὴν OA καὶ Γ καὶ Γ′ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εἰς τὸ A ἐφαπτομένης μετὰ τῶν ἡμιευθειῶν (O, B) καὶ (O, B′). Ἔχομεν τότε :

BB′ < μῆκος τόξου BAB′ < ΓΓ′ (βλ. § **156**, δ′) Σχ. 190

ἢ 2ΔB < 2s < 2AΓ ἢ

(1) μέτρον τοῦ ΔB < s < μέτρον τοῦ AΓ.

Ἐπειδὴ s = θ, μέτρον τοῦ ΔB = ημθ, μέτρον τοῦ AΓ = εφθ, ἡ (1) δίδει :

(2) $\boxed{\text{ημθ} < \theta < \text{εφθ}}$, ὅπου $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ακτ.

Αἱ (2) εἶναι θεμελιώδεις ἀνισότητες, γεωμετρικῶς ἀποδεικνυόμεναι, ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται ἡ ἀναλυτικὴ μελέτη τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.

### ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ

**159. Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.** Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν $E_\nu$ κανονικοῦ ν-γώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του : $E_\nu = p_\nu \cdot \alpha_\nu / 2$.

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν δυνατῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον (K, R), δηλ. τὴν : $E_3, E_4, E_5, \ldots E_\nu, \ldots$, βλέπομεν ὅτι αὕτη τείνει πρὸς ἓν ὅριον. Διότι $E_\nu = p_\nu \alpha_\nu / 2 \Rightarrow$

$$\lim_{\nu \to \infty} E_\nu = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\nu \to \infty} p_\nu \cdot \lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

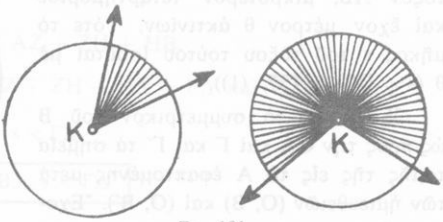
(βλ. § **149**, § **152**). **Τὸ ὅριον τοῦτο καλοῦμεν ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου. Ὅθεν: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐκφράζεται συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R αὐτοῦ**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διὰ τοῦ τύπου $\boxed{\pi R^2}$. Συναρτήσει δὲ τῆς διαμέτρου d ἐκφράζεται μὲ

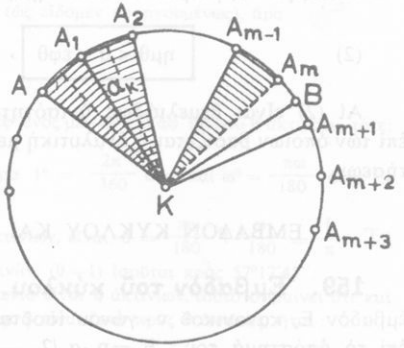
$$\boxed{\frac{\pi d^2}{4}}$$

**160. Κυκλικὸς τομεὺς** καλεῖται τὸ μέρος τοῦ κύκλου (δίσκου) **τὸ περιεχόμενον ἐντὸς ἐπικέντρου τινὸς γωνίας.** (σχ. 191), δηλ. ἡ «τομή» τοῦ ἐσωτερικοῦ μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας καὶ τοῦ κύκλου (ἢ δίσκου).



Σχ. 191

**Ὁρισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως.** Ἔστω $\widehat{AB}$ τόξον τοῦ τομέως KAB (σχ. 192). Θεωροῦμεν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν $AA_1A_2...A_m$, ἡ ὁποία εἶναι μέρος τῆς περιμέτρου ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου $AA_1...A_mA_{m+1}...A$ καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἄκρον $A_m$ εἶναι ἡ τελευταία κορυφὴ τοῦ πολυγώνου ἡ ἀνήκουσα εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$, ὅπως ἐπράξαμεν διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ μήκους τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ εἰς τὴν § **156.**



Σχ. 192

Ἔστω k τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου $AA_1A_2 ... A_m... A$ καὶ $\alpha_k$ τὸ ἀπόστημά του. Ὁρίζομεν ὡς ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου (ἢ «πολυγωνικοῦ τομέως») $KAA_1A_2... A_{m-1}A_mK$, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου $AA_1... A_m A_{m+1}...$ A νοῆται ἀπαύστως διπλασιαζόμενον. Ἔχομεν : Εμβ$(KAA_1 ... A_{m-1}A_mK)=$

$$= \frac{1}{2} AA_1 \cdot \alpha_k + \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot \alpha_k + \cdots + \frac{1}{2} A_{m-1}A_m \cdot \alpha_k =$$

$$= \frac{1}{2} (AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{m-1}A_m) \cdot \alpha_k \quad \text{καὶ}$$

$$\lim_{k\to\infty} \text{Εμβ}(KAA_1...A_{m-1}A_m K) = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} (AA_1 + A_1A_2 + ... + A_{m-1}A_m) \lim_{k\to\infty} \alpha_k$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$= \frac{1}{2} sR$, ὅπου s τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ (βλ. § **156**, α') καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ τομέως (βλ. § **149**). Ὥστε τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως $KAA_1...A_mK$ ὑπάρχει καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως.

**Τύποι ἐμβαδοῦ κυκλικοῦ τομέως ΚΑΒ.** Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι

(1) $\boxed{\text{Εμβ (τομ ΚΑΒ)} = \frac{1}{2} sR}$, ὅπου s τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ τομέως.

Ἐπειδὴ $s = 2\pi R \cdot \frac{\widehat{AKB}}{360^o}$, ὁ (1) δίδει:

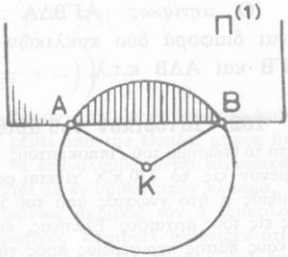
(2) $\boxed{\text{Εμβ (τομ ΚΑΒ)} = \pi R^2 \cdot \frac{\widehat{AKB}}{360^o}}$ (οἱ τύποι ἰσχύουν καὶ ὅταν ἡ ΑΚΒ εἶναι μὴ κυρτή).

Ἐπειδὴ $s = R\theta$, ὅπου θ τὸ μέτρον τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΒ εἰς **ἀκτίνια**, ὁ (1) δίδει:

(3) $\boxed{\text{Εμβ(τομ ΚΑΒ)} = \frac{1}{2} R^2\theta.}$

## ΕΤΕΡΑ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΧΩΡΙΑ

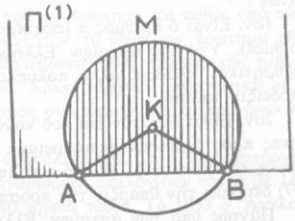
**161. Ι. Κυκλικὸν τμῆμα.** Τὸ κοινὸν μέρος ἑνὸς κύκλου καὶ ἑνὸς ἡμιεπιπέδου $Π^{(1)}$ ὁριζομένου ὑπὸ χορδῆς τινος ΑΒ καλεῖται *κυκλικὸν τμῆμα*. Ἐὰν τὸ κέντρον Κ δὲν ἀνήκῃ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $Π^{(1)}$ (σχ. 193), τότε τὸ κυκλικὸν τμῆμα, ὡς σημειοσύνολον θεωρούμενον, εἶναι διαφορὰ ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως ΚΑΒ καὶ ἑνὸς τριγώνου ΚΑΒ, τὸ δὲ ἐμβαδόν του *ὁρίζεται* ὡς **διαφορὰ** τῶν δύο τούτων ἐμβαδῶν:



Σχ. 193

Εμβ.(κυκλ. τμ. ΑΒ) =
= Εμβ(τομΚΑΒ)—Εμβ(τριγΚΑΒ).

Ἐὰν τὸ κέντρον Κ ἀνήκῃ εἰς τὸ $Π^{(1)}$, ὁπότε εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος (σχ. 194), τότε τὸ τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι μεῖζον τόξον καὶ τὸ κυκλικὸν τμῆμα εἶναι ἕνωσις ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως ΚΑΜΒ καὶ ἑνὸς τριγ. ΚΑΒ, ὁπότε τὸ ἐμβαδόν του *ὁρίζεται*



Σχ. 194

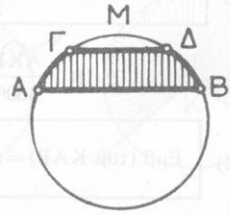
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὡς **ἄθροισμα** τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τούτων σχημάτων (σημειοσυνόλων).

Ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΒ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἶναι πλευρὰ ἑνὸς γνωστοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ὑπολογίζεται Γεωμετρικῶς.

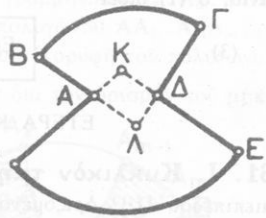
II. Γενικῶς, ἐὰν καμπυλόγραμμον ἐπίπεδον σχῆμα F προκύπτῃ δι' ἑνώσεων καὶ ἀφαιρέσεων ἄλλων σημειοσυνόλων (σχημάτων), τῶν ὁποίων ἔχει ὁρισθῆ τὸ ἐμβαδόν, τότε ὡς ἐμβαδὸν τοῦ F νοεῖται τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχημάτων, ἐξ ὧν προκύπτει τὸ F.

Οὕτω π.χ. τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ περιεχόμενον μέρος τοῦ κύκλου (σχ. 195), δηλ. ἡ τομὴ ταινίας καὶ κύκλου, εἶναι διαφορὰ δύο κυκλικῶν τμημάτων ΑΜΒ καὶ ΓΜΔ.



Σχ. 195

Τὸ ὑπὸ τῶν τόξων $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΕΖ}$ καὶ τῶν τεθλασμένων ΒΑΖ, ΕΔΓ περικλειόμενον μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ὡς ἐν σχήματι 196, εἶναι ἡ ἕνωσις δύο ξένων συνόλων: τῆς διαφορᾶς τοῦ τομέως ΛΒΓ καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΛΑΚΔ μετὰ τοῦ τομέως ΚΖΕ.



Σχ. 196

Ὁ *μηνίσκος* ΑΓΒΔΑ (σχ. 197) εἶναι διαφορὰ δύο κυκλικῶν τμημάτων ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ κ.τ.λ.

Σχ. 197

**162. Ἱστορικὸν τοῦ ἀριθμοῦ π.—** Ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Ἱπποκράτους (§ **153**) ἀναγόμενον εἰς τὸ 430 π.Χ. γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς π ἦτο γνωστὸς ἀπὸ τοῦ 5ου π.Χ. αἰῶνος εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας, ὡς μία παγκόσμιος σταθερὰ ἴση πρὸς τὸν λόγον τοῦ μήκους πάσης περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της.

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἤρχισεν ἡ ἔρευνα ἐπὶ δύο καθαρῶς θεωρητικῶν ἐρωτημάτων:

1ον. Εἶναι ὁ ἀριθμὸς π ἴσος πρὸς κάποιο ἀριθμητικὸν κλάσμα μ/ν; (μ καὶ ν φυσικοὶ ἀριθμοί). Ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν εἰκάζετο ὅτι ὁ π δὲν εἶναι ἀκριβὲς ἀριθμητικὸν κλάσμα, ἀλλὰ πολυπλοκώτερός τις ἀριθμός, πλὴν ὅμως δὲν ἐπέτυχον τὴν ἀπόδειξιν τούτου.

2ον. Εἶναι δυνατὸν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἰσόμηκες πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν: (Τοῦτο ἐκλήθη ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων «τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου»). Ἡ ὑπὸ τοῦ Ἱπποκράτους εὑρεθεῖσα ἰδιότης τῶν «μηνίσκων» (ἄσκ. 697) δεικνύει τὴν ὕπαρξιν τῆς προσπαθείας πρὸς λύσιν τοῦ δευτέρου τούτου ἐρωτήματος.

Πάντως ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν δὲν κατέστη δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπάντησις εἰς τὰ δύο ταῦτα ἐρωτήματα. Ἐχρειάσθη νὰ παρέλθουν πλέον τῶν 2000 ἐτῶν,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διὰ νὰ δοθῇ ὑπὸ Γερμανῶν μαθηματικῶν (Lambert καὶ Lindemann) ἡ ἀπάντησις εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω ἐρωτήματα, ἡ ὁποία ἀπάντησις εἶναι ἀρνητική.

**Ἡ μακρὰ ὁδὸς τῶν ὑπολογισμῶν.** — Ἡ πρώτη ἀποτίμησις τοῦ ἀριθμοῦ π ἐπετεύχθη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (287 - 212 π.Χ.), ὅστις ἀπέδειξεν ὅτι ἡ σταθερὰ π περιέχεται μεταξὺ $3+\frac{10}{71}$ καὶ $3+\frac{1}{7}$, ἐκ τοῦ ὁποίου, $\pi=3{,}14\ldots$ (μὲ δύο ἀκριβῆ δεκαδικὰ ψηφία). Ὁ Ἀρχιμήδης μετεχειρίσθη διὰ τὴν ἀπόδειξιν τούτου, τὸ κανονικὸν 96 - γωνον, ἡ δὲ μέθοδός του εἶναι μία σύγχρονος μαθηματικὴ μέθοδος.

Περὶ τὸ 150 μ.Χ. ὁ ἀστρονόμος Πτολεμαῖος εὗρε μᾶλλον προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π, τὴν 3,1416.

Ἔκτοτε ὁ ὑπολογισμὸς καὶ ἡ ἔρευνα τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ π ἔπαυσεν ἐπὶ 1400 περίπου ἔτη.

Κατὰ τὸ 1579 ὁ ἀστρονόμος Vieta ὑπελόγισε τὴν τιμὴν τοῦ π μὲ 10 ἀκριβῆ δεκαδικὰ ψηφία.

Κατὰ τὸ 1610 ὁ van Geulen ἔδωσε 33 δεκαδικὰ ψηφία.

Κατὰ τὸ 1621 ὁ Snell ὑπελόγισε τὸ π μὲ 35 ψηφία. Πρὸς τοῦτο ἔφθασε μέχρι τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου μὲ $2^{30}(=1073741824)$ πλευράς. Ἀσφαλῶς δὲ οἱ δύο τελευταῖοι ἐχρειάσθησαν σχεδὸν μίαν ὁλόκληρον ζωήν, διὰ νὰ ὑπολογίσουν τὰ ψηφία αὐτά. Μέχρι τοῦδε ἠκολουθήθη ἡ ἀρχιμήδειος μέθοδος. Ἐν τῷ μεταξὺ ἐνεφανίσθη νέος κλάδος τῶν μαθηματικῶν, ὁ ἀπειροστικὸς λογισμὸς καὶ αἱ ἀπέραντοι σειραὶ καὶ ὁ π ἐξεφράσθη διὰ διαφόρων σειρῶν, βάσει τῶν ὁποίων ὑπελογίσθη μὲ περισσότερα ψηφία.

Τὸ 1699 ὁ Sharp εὗρε τὴν τιμὴν τοῦ π μὲ 72 ψηφία.

$$\left(\text{Σειρὰ τοῦ Sharp}: \pi = 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^5}+\ldots\right)\right).$$

Τὸ 1706 ὁ Machin ὑπελόγισε 101 ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π.

$$\left(\text{Σειρὰ τοῦ Machin}: \pi = 16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{5\cdot 5^2}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\ldots\right)-\right.$$
$$\left.-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{3}{5\cdot 239^5}+\ldots\right)\right).$$

Ὅλοι οἱ ἀπιστεύτως μακροὶ οὗτοι ὑπολογισμοὶ ἐγένοντο ἐν μέρει ἀπὸ τὴν ἐπιθυμίαν τῆς γνώσεως καὶ ἐρεύνης τοῦ ἀριθμοῦ π καὶ ἐν μέρει ἀπὸ τὴν ἐλπίδα, μήπως ἀπό τινος καὶ ἔπειτα τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ π ἤρχιζαν νὰ ἐπαναλαμβάνωνται περιοδικῶς, ὁπότε τοῦτο θὰ ἦτο μία ἰσχυρὰ ἔνδειξις ὅτι τὸ π ἰσοῦται μὲ ἓν ἀριθμητικὸν κλάσμα.

Ἡ ἀναζήτησις ἀριθμητικοῦ κλάσματος παριστάνοντος ἀκριβῶς τὸν π ἐξηκολούθησε. Αὕτη ἔπαυσε τὸ 1761, ὁπότε ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lambert ἀπέδειξεν ὅτι ὁ π εἶναι εἷς ἀριθμὸς **ἀσύμμετρος** καὶ συνεπῶς πρὸς οὐδὲν ἀριθμητικὸν κλάσμα εἶναι ἴσος καὶ τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ του ἀναπτύγματος δὲν ἐπαναλαμβάνονται ἀπό τινος καὶ ἔπειτα περιοδικῶς. Οὕτω ἐδόθη ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ πρῶτον ἐρώτημα τὸ τεθὲν ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων [μαθηματικῶν. Ἔμενεν ὅμως ἀναπάντητον τὸ δεύτερον ἐρώτημα τῆς κατασκευῆς τοῦ ἀναπτύγματος τῆς περιφερείας. Διὰ νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς τμῆμα μήκους 2πR, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι ὁ π σύμμετρος. Ἀρκεῖ νὰ εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα συμμέτρου ἀριθμοῦ (βλ. § **75**, ε') ἢ νὰ εἶναι συνδυασμὸς συμμέτρων καὶ τετραγωνικῶν ριζῶν συμμέτρων.

Ὡς ἐκ τούτου ἡ μακρὰ ὁδὸς ὑπολογισμοῦ τοῦ π ἐξηκολούθησε. Τὸ 1794 ὁ ἀστρονόμος Vega, ὅστις κατεσκεύασε περιφήμους πίνακας λογαρίθμων, ὑπελόγισεν τὸν π μὲ 147 ψηφία. Τὸ 1844 ὁ Dase, βοηθὸς τοῦ Gauss, ἔδωσε 201 ψηφία τοῦ π. Τὸ 1853 ὁ Ἄγγλος Rutherford ὑπελόγισε 441 ψηφία τοῦ π καὶ τὸ 1873 ἕτερος Ἄγγλος, ὁ Stanks, ἔδωσε 527 ἀκριβῆ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἤδη περὶ τὰ μέσα τοῦ 19ου αἰῶνος ἔγινε γνωστὴ μία νέα ἔννοια, ἡ ἔννοια τοῦ «ὑπερβατικοῦ ἀριθμοῦ». Εἰς ἀριθμὸς λέγεται *ὑπερβατικός*, ὅταν δὲν εἶναι ρίζα οὐδεμιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, $a_0x^{\mu} + a_1x^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu} = 0$ οἱουδήποτε βαθμοῦ, μὲ συμμέτρους (ἢ ἀκεραίους) συντελεστάς. Ἐντεῦθεν προέκυψεν ἡ εἰκασία ὅτι ὁ π εἶναι ὑπερβατικός, δηλ. δὲν ὑπάρχει ἐξίσωσις ἀλγεβρικὴ μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, ἡ ὁποία νὰ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ π. Ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann ἀπέδειξε τελικῶς τὸ 1882 ὅτι ὁ π εἶναι **ὑπερβατικὸς** ἀριθμὸς καὶ κατόπιν τούτου ἐδείχθη ὁριστικῶς ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου εἶναι ἀδύνατον. Ἡ δυσχερεστάτη πορεία τῆς διαρκοῦς ἀναζητήσεως νέων ψηφίων τοῦ π ἐσταμάτησε.

**Κανονικοὶ ἀριθμοί.**— Κατὰ τὸ ἔτος 1909 ὁ Γάλλος μαθηματικὸς E. Borel ἔδωσε μίαν θεωρίαν περὶ *«κανονικῶν»* ἀριθμῶν. Εἰς ἀριθμὸς λέγεται κανονικός, ὅταν εἰς τὸ ἀπέραντον δεκαδικὸν ἀνάπτυγμά του ἕκαστον ἐκ τῶν ψηφίων 0, 1, 2, 3,...9 ἐμφανίζεται μὲ τὴν αὐτὴν πιθανότητα, ἴσην πρὸς 1/10. Δηλ. ὅταν μέσα εἰς τὴν ἀπέραντον, ἀλλὰ ἄτακτον διαδοχὴν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων του αἱ συχνότητες ἐμφανίσεως τῶν διαφόρων ψηφίων τείνουν νὰ ἐξισωθοῦν, ἤτοι εἰς μακρὰν σειρὰν ὅλα τὰ ψηφία τείνουν νὰ ἐμφανισθοῦν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν φορῶν.

Περὶ τὸ ἔτος 1950, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἐμφάνισις τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν ὑψηλῆς ταχύτητος καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ ἐπιθυμία τῆς *στατιστικῆς* μελέτης τῆς κατανομῆς τῶν ψηφίων τοῦ π ἔδωσεν ἀφορμὴν εἰς νέους ὑπολογισμοὺς τοῦ ἀριθμοῦ π.

Κατὰ τὸ ἔτος 1949 ὑπελογίσθη εἰς Ἀμερικὴν διὰ ὑπολογιστικῆς μηχανῆς ENIAC ὁ ἀριθμὸς π μὲ 2036 ψηφία καὶ κατὰ τὸ ἔτος 1959 ὑπελογίσθη εἰς Παρισίους ὁ ἀριθμὸς π μὲ 10000 δεκαδικὰ ψηφία δι' ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ ὀνομαζομένου I.B.M. 704. Ἡ στατιστικὴ μελέτη τῶν ψηφίων τοῦ π ἔδειξεν ὅτι ὁ π εἶναι «κανονικὸς» ἀριθμὸς ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ὁρισθεῖσαν ἔννοιαν.

## ΠΙΝΑΞ Ι. *Τέσσαρες χιλιάδες ψηφία τοῦ π.*

Ἀπόσπασμα ἐκ πίνακος περιέχοντος 10000 δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π, ὑπολογισθέντα δι' ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ IBM 704 τῆς ἑταιρείας IBM ἐν Γαλλίᾳ, εἰς τὸ Institut de Calcul Scientifique κατὰ τὸ ἔτος 1959.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3, | 14159 | 26535 | 89793 | 23846 | 26433 | 83279 | 50288 | 41971 | 69399 | 37510 |
| | 58209 | 74944 | 59230 | 78164 | 06286 | 20899 | 86280 | 34825 | 34211 | 70679 |
| | 82148 | 08651 | 32823 | 06647 | 09384 | 46095 | 50582 | 23172 | 53594 | 08128 |
| | 48111 | 74502 | 84102 | 70193 | 85211 | 05559 | 64462 | 29489 | 54930 | 38196 |
| | 44288 | 10975 | 66593 | 34461 | 28475 | 64823 | 37867 | 83165 | 27120 | 19091 |
| | 45648 | 56692 | 34603 | 48610 | 45432 | 66482 | 13393 | 60726 | 02491 | 41273 |
| | 72458 | 70066 | 06315 | 58817 | 48815 | 20920 | 96282 | 92540 | 91715 | 36436 |
| | 78925 | 90360 | 01133 | 05305 | 48820 | 46652 | 13841 | 46951 | 94151 | 16094 |
| | 33057 | 27036 | 57595 | 91953 | 09218 | 61173 | 81932 | 61179 | 31051 | 18548 |
| | 07446 | 23799 | 62749 | 56735 | 18857 | 52724 | 89122 | 79381 | 83011 | 94912 |
| | 98336 | 73362 | 44065 | 66430 | 86021 | 39494 | 63952 | 24737 | 19070 | 21798 |
| | 60943 | 70277 | 05392 | 17176 | 29317 | 67523 | 84674 | 81846 | 76694 | 05132 |
| | 00056 | 81271 | 45263 | 56082 | 77857 | 71342 | 75778 | 96091 | 73637 | 17872 |
| | 14684 | 40901 | 22495 | 34301 | 46549 | 58537 | 10507 | 92279 | 68925 | 89235 |
| | 42019 | 95611 | 21290 | 21960 | 86403 | 44181 | 59813 | 62977 | 47713 | 09960 |
| | 51870 | 72113 | 49999 | 99837 | 29780 | 49951 | 05973 | 17328 | 16096 | 31859 |
| | 50244 | 59455 | 34690 | 83026 | 42522 | 30825 | 33446 | 85035 | 26193 | 11881 |
| | 71010 | 00313 | 78387 | 52886 | 58753 | 32083 | 81420 | 61717 | 76691 | 47303 |
| | 59825 | 34904 | 28755 | 46873 | 11595 | 62863 | 88235 | 37875 | 93751 | 95778 |
| | 18577 | 80532 | 17122 | 68066 | 13001 | 92787 | 66111 | 95909 | 21642 | 01989 |

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38095 | 25720 | 10654 | 85863 | 27886 | 59361 | 53381 | 82796 | 82303 | 01952 |
| 03530 | 18529 | 68995 | 77362 | 25994 | 13891 | 24972 | 17752 | 83479 | 13151 |
| 55748 | 57242 | 45415 | 06959 | 50829 | 53311 | 68617 | 27855 | 88907 | 50983 |
| 81754 | 63746 | 49393 | 19255 | 06040 | 09277 | 01671 | 13900 | 98488 | 24012 |
| 85836 | 16035 | 63707 | 66010 | 47101 | 81942 | 95559 | 61989 | 46767 | 83744 |
| 94482 | 55379 | 77472 | 68471 | 04047 | 53464 | 62080 | 46684 | 25906 | 94912 |
| 93313 | 67702 | 89891 | 52104 | 75216 | 20569 | 66024 | 05803 | 81501 | 93511 |
| 25338 | 24300 | 35587 | 64024 | 74964 | 73263 | 91419 | 92726 | 04269 | 92279 |
| 67823 | 54781 | 63600 | 93417 | 21641 | 21992 | 45863 | 15030 | 28618 | 29745 |
| 55706 | 74983 | 85054 | 94588 | 58692 | 69956 | 90927 | 21079 | 75093 | 02955 |
| 32116 | 53449 | 87202 | 75596 | 02364 | 80665 | 49911 | 98818 | 34797 | 75356 |
| 63698 | 07426 | 54252 | 78625 | 51818 | 41757 | 46728 | 90977 | 77279 | 38000 |
| 81647 | 06001 | 61452 | 49192 | 17321 | 72147 | 72350 | 14144 | 19735 | 68548 |
| 16136 | 11573 | 52552 | 13347 | 57418 | 49468 | 43852 | 33239 | 07394 | 14333 |
| 45477 | 62416 | 86251 | 89835 | 69485 | 56209 | 92192 | 22184 | 27255 | 02542 |
| 56887 | 67179 | 04946 | 01653 | 46680 | 49886 | 27232 | 79178 | 60857 | 84383 |
| 82796 | 79766 | 81454 | 10095 | 38837 | 86360 | 95068 | 00642 | 25125 | 20511 |
| 73929 | 84896 | 08412 | 84886 | 26945 | 60424 | 19652 | 85022 | 21066 | 11863 |
| 06744 | 27862 | 20391 | 94945 | 04712 | 37137 | 86960 | 95636 | 43719 | 17287 |
| 46776 | 46575 | 73962 | 41389 | 08658 | 32645 | 99581 | 33904 | 78027 | 59009 |
| 94657 | 64078 | 95126 | 94683 | 98352 | 59570 | 98258 | 22620 | 52248 | 94077 |
| 26719 | 47826 | 84826 | 01476 | 99090 | 26401 | 36394 | 43745 | 53050 | 68203 |
| 49625 | 24517 | 49399 | 65143 | 14298 | 09190 | 65925 | 09372 | 21696 | 46151 |
| 57098 | 58387 | 41059 | 78859 | 59772 | 97549 | 89301 | 61753 | 92846 | 81382 |
| 68683 | 86894 | 27741 | 55991 | 85592 | 52459 | 53959 | 43104 | 99725 | 24680 |
| 84598 | 72736 | 44695 | 84865 | 38367 | 36222 | 62609 | 91246 | 08051 | 24388 |
| 43904 | 51244 | 13654 | 97627 | 80797 | 71569 | 14359 | 97700 | 12961 | 60894 |
| 41694 | 86855 | 58484 | 06353 | 42207 | 22258 | 28488 | 64815 | 84560 | 28506 |
| 01684 | 27394 | 52267 | 46767 | 88952 | 52138 | 52254 | 99546 | 66727 | 82398 |
| 64565 | 96116 | 35488 | 62305 | 77456 | 49803 | 55936 | 34568 | 17432 | 41125 |
| 15076 | 06947 | 94510 | 96596 | 09402 | 52288 | 79710 | 89314 | 56691 | 36867 |
| 22874 | 89405 | 60101 | 50330 | 86179 | 28680 | 92087 | 47609 | 17824 | 93858 |
| 90097 | 14909 | 67590 | 52613 | 65549 | 78189 | 31297 | 84821 | 68299 | 89487 |
| 22658 | 80485 | 75640 | 14270 | 47755 | 51323 | 79641 | 45142 | 37462 | 34364 |
| 54285 | 84447 | 95265 | 86782 | 10511 | 41354 | 73573 | 95231 | 13427 | 16610 |
| 21359 | 69536 | 23144 | 29524 | 84937 | 18711 | 01457 | 65403 | 59027 | 99344 |
| 03742 | 00731 | 05785 | 39062 | 19838 | 74478 | 08478 | 48968 | 33214 | 45713 |
| 86875 | 19435 | 06430 | 21845 | 31910 | 48481 | 00537 | 06146 | 80674 | 91927 |
| 81911 | 97939 | 95206 | 14196 | 63428 | 75444 | 06437 | 45123 | 71819 | 21799 |
| 98391 | 01591 | 95618 | 14675 | 14269 | 12397 | 48940 | 90718 | 64942 | 31961 |
| 56794 | 52080 | 95146 | 55022 | 52316 | 03881 | 93014 | 20937 | 62137 | 85595 |
| 66389 | 37787 | 08303 | 90697 | 92077 | 34672 | 21825 | 62599 | 66150 | 14215 |
| 03068 | 03844 | 77345 | 49202 | 60541 | 46659 | 25201 | 49744 | 28507 | 32518 |
| 66600 | 21324 | 34088 | 19071 | 04863 | 31734 | 64965 | 14539 | 05796 | 26856 |
| 10055 | 08106 | 65879 | 69981 | 63574 | 73638 | 40525 | 71459 | 10289 | 70641 |
| 40110 | 97120 | 62804 | 39039 | 75951 | 56771 | 57700 | 42033 | 78699 | 36007 |
| 23055 | 87631 | 76359 | 42187 | 31251 | 47120 | 53292 | 81918 | 26186 | 12586 |
| 73215 | 79198 | 41484 | 88291 | 64470 | 60957 | 52706 | 95722 | 09175 | 67116 |
| 72291 | 09816 | 90915 | 28017 | 35067 | 12748 | 58322 | 28718 | 35209 | 35396 |
| 57251 | 21083 | 57915 | 13698 | 82091 | 44421 | 00675 | 10334 | 67110 | 31412 |

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Συνέχεια τοῦ πίνακος I

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 67111 | 36990 | 86585 | 16398 | 31501 | 97016 | 51511 | 68517 | 14376 | 57618 |
| 35155 | 65088 | 49099 | 89859 | 98238 | 73455 | 28331 | 63550 | 76479 | 18535 |
| 89322 | 61854 | 89632 | 13293 | 30898 | 57064 | 20467 | 52590 | 70915 | 48141 |
| 65498 | 59461 | 63718 | 02709 | 81994 | 30992 | 44889 | 57571 | 28289 | 05923 |
| 23326 | 09729 | 97120 | 84433 | 57326 | 54893 | 82391 | 19325 | 97463 | 66730 |
| 58360 | 41428 | 13883 | 03203 | 82490 | 37589 | 85243 | 74417 | 02913 | 27656 |
| 18093 | 77344 | 40307 | 07469 | 21120 | 19130 | 20330 | 38019 | 76211 | 01100 |
| 44929 | 32151 | 60842 | 44485 | 96376 | 69838 | 95228 | 68478 | 31235 | 52658 |
| 21314 | 49576 | 85726 | 24334 | 41893 | 03968 | 64262 | 43410 | 77322 | 69780 |
| 28073 | 18915 | 44110 | 10446 | 82325 | 27162 | 01052 | 65227 | 21116 | 60396 |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

713. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται κύκλος ὑπὸ χορδῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον μιᾶς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

714. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἐγγεγραμμένου εἰς κυκλικὸν τομέα ἀκτῖνος R καὶ γωνίας $30^0$ ἢ $45^0$ ἢ $60^0$ ἢ $90^0$ ἢ $120^0$.

715. Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ἐπὶ τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΓΒ ὡς διαμέτρων γραφοῦν ἡμιπεριφέρειαι ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ, ἡ ὑπὸ τῶν ἡμιπεριφερειῶν τούτων σχηματιζομένη γραμμὴ νὰ διαιρῇ τὸν κύκλον εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον ἴσον μὲ μ : ν, ὅπου μ, ν δεδομένα τμήματα.

716. Δύο περιφέρειαι μὲ ἀκτῖνας ρ καὶ 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἂν ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΒΓ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου τριγώνου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῶν τόξων $\widehat{BA}$ καὶ $\widehat{A\Gamma}$.

717. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ=3α διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ καὶ μὲ κέντρα τὰ Γ καὶ Δ καὶ ἀκτῖνας α γράφονται δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι ἔστω εἰς Κ καὶ Λ. Ἀκολούθως μὲ κέντρα τὰ Κ καὶ Λ γράφονται τόξα ἐφαπτόμενα ἕκαστον καὶ τῶν δύο περιφερειῶν, ἔστω τὰ $\widehat{EZ}$ καὶ $\widehat{H\Theta}$. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ὠοειδοῦς σχήματος ΕΑΗΘΒΖΕ.

718. Ἔστω ΑΒ χορδὴ ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα, Ε τὸ μέσον αὐτῆς καὶ Ι τὸ μέσον τοῦ μικροτέρου τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ὑποτείνει. Ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸ Ι λαμβάνομεν τόξον $\widehat{I\Delta}=$ $=120^0$ καὶ φέρομεν τὴν ΔΕ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΔΖ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν κύκλον.

719. Αἱ πλευραὶ τριγώνου ἔχουν μήκη ΒΓ=α, ΓΑ=β καὶ ΑΒ= $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυκλικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένος κύκλος ὑπὸ τῆς ΑΒ.

720. Δύο παράλληλοι χορδαὶ κύκλου, ἀκτῖνος ρ, ἔχουν μήκη ρ καὶ $\rho\sqrt{3}$, τὸ δὲ κέντρον κεῖται ἐκτὸς τῆς ταινίας τούτων. Ζητεῖται ὁ λόγος τοῦ μεταξὺ τῶν δύο χορδῶν περιεχομένου μέρους τοῦ κύκλου πρὸς τὸν ὅλον κύκλον.

721. Ἂν ΑΒ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἐκ ν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Κ) καὶ ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΓ παράλληλος τῇ ΑΒ, ἐκ δὲ τοῦ μέσου Δ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ ἀχθῇ παράλληλος τῇ χορδῇ ΒΓ, δείξατε ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν δύο τούτων παραλλήλων περιεχόμενον μέρος τοῦ κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/ν αὐτοῦ.

722. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ=1 εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἑνοῦμεν τὴν Α μὲ τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, τὴν Β μὲ τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ κ.ο.κ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τεσσάρων εὐθειῶν σχηματίζεται τετράγωνον καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους τοῦ τετραγώνου τούτου.

723. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ $\widehat{A}=105^0$, $\widehat{B}=45^0$ καὶ τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος υ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς Β, Γ καὶ ἀκτῖνας ΒΑ, ΓΑ ἀντιστοίχως γράφομεν τόξα ΑΜ καὶ ΑΝ περιεχόμενα ἐν τῷ τριγώνῳ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν μερῶν, εἰς ἃ τὸ τρίγωνον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν τόξων τούτων.

724. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον ΑΒ ἡμικυκλίου εἰς τρία τυχόντα μέρη : ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ καὶ γράφομεν ἐπὶ τῶν ΑΓ καὶ ΔΒ ἡμιπεριφερείας ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου, ἐπὶ δὲ τοῦ ΓΔ ἡμιπεριφέρειαν ἐκτὸς αὐτοῦ. Ζητεῖται ὁ λόγος τῆς μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἡμιπεριφερειῶν περιεχομένης ἐπιφανείας πρὸς κύκλον ἔχοντα διάμετρον τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν ΑΔ καὶ ΓΒ.

725. Δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α γράφομεν περιφέρειαν, ἔχουσαν κέντρον τὸ τοῦ τετραγώνου καὶ ἀποτέμνουσαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου τμήματα ἴσα τῇ ἀκτῖνί της. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου ὀκταγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου καὶ ὑπὸ τῶν τόξων τῶν ἐντὸς τοῦ τετραγώνου;

726. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τετραγώνου καὶ ἀκτῖνας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ γράφομεν τόξα κείμενα ἐν τῷ τετραγώνῳ. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου τετραπλεύρου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν τόξων τούτων.

727. Ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμικύκλιον περιέχον τὸ τρίγωνον καὶ μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς γράφομεν δύο ἄλλα ἡμικύκλια ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μέρη τῶν δύο τούτων ἡμικυκλίων τὰ ἐκτὸς τοῦ πρώτου κείμενα *(μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους)* ἔχουν ἄθροισμα ἐμβαδῶν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

728. Ἐπ' εὐθείας κεῖνται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Γ, Β. Μὲ διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ ΓΒ γράφομεν ἡμιπεριφερείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθΑΒ. Ἂν ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο μικροτέρων περιφερειῶν ἐφάπτεται τούτων εἰς Δ καὶ Ε, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν περικλειόμενον ἐπίπεδον χωρίον *(«Ἄρβυλος»)* ἰσοδυναμεῖ πρὸς κύκλον διαμέτρου ΔΕ.

729. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ (κέντρου Ο) καὶ ἐπὶ τῆς ΟΑ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμικύκλιον ἐντὸς τοῦ τεταρτοκυκλίου. Εἰς τὸ σχηματιζόμενον μικτόγραμμον τρίγωνον ΟΑΒ (ΟΒ εὐθύγραμμος πλευρά, $\widehat{BA}$ καὶ $\widehat{AO}$ καμπυλόγραμμοι πλευραὶ) ἐγγράφομεν κύκλον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου τούτου καὶ τοῦ μικτογράμμου τριγώνου.

## ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ VI

730. Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἡμιπεριφερείας λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ, ὅπου ΑΓ<ΑΔ<ΑΒ καὶ γράφομεν ἐπὶ μὲν τῶν ΑΓ καὶ ΔΒ, ὡς διαμέτρων, ἡμιπεριφερείας ἐντὸς τοῦ ἀρχικοῦ ἡμικυκλίου, ἐπὶ δὲ τοῦ ΓΔ, ὡς διαμέτρου, ἡμιπεριφέρειαν ἐκτὸς τοῦ ἀρχικοῦ ἡμικυκλίου. Ἐὰν ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους ΑΓ καὶ ΔΒ τέμνῃ τὰς δύο ἄλλας ἡμιπεριφερείας εἰς Ε καὶ Ζ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἡμιπεριφερειῶν περικλειομένη ἐπιφάνεια ἰσοδυναμεῖ πρὸς κύκλον διαμέτρου ΕΖ.

731. Δοθέντος ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, γράφομεν ἐκτὸς αὐτοῦ ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, καθὼς καὶ τόξον μὲ χορδὴν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ κέντρον τὸ Α. Διὰ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὸ τόξον εἰς Ε καὶ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μικτόγραμμον τρίγωνον ΒΔΕ (ἔχον ὡς δύο πλευρὰς τὰ τόξα $\widehat{BD}$, $\widehat{BE}$) εἶναι τετραγωνίσιμον διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου καὶ νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ τετράγωνον.

732. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι (Ο, R), (Ο, 2R). Φέρομεν χορδὴν ΑΒ τῆς μεγαλυτέρας ἐφαπτομένην εἰς Μ τῆς μικροτέρας καὶ ἐκ τοῦ Α ἐφαπτομένην ΑΝ τῆς μικροτέρας. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐλασσόνων τόξων $\widehat{BA}$, $\widehat{NM}$ καὶ τῶν τμημάτων ΑΝ, ΜΒ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸν μικρότερον κύκλον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

733. Ἐντὸς κύκλου (O, R) δίδεται σταθερὸν σημεῖον A τοιοῦτον, ὥστε $OA = R/2$. Χορδὴ ΒΓ τοῦ κύκλου μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε : $AB^2 + A\Gamma^2 = R^2$. Ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν μέσων M τῶν χορδῶν ΒΓ.

734. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα AB, μήκους $l$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ AB, πρὸς τὸ μέρος τοῦ B, λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου BM κειμένην πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθ AB καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ A ἐφαπτομένην AΓ τῆς ἡμιπεριφερείας ταύτης. (Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς). Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον τομῆς P τῆς ΒΓ καὶ τῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{BA\Gamma}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων P.

735. Σταθερὸς κύκλος (O, R) ἐφάπτεται εἰς A δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB, μήκους $2R\sqrt{3}$. Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) ἐφαπτομένη τῆς AB εἰς B τέμνει τὴν (O,R). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς, ἥτις σχηματίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν κοινῶν χορδῶν τῶν περιφερειῶν (O, R) καὶ (γ).

736. Δίδεται περιφέρεια (O,R) καὶ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον A. Μὲ κέντρον τὸ A γράφομεν δύο ὁμοκέντρους περιφερείας (c) καὶ (c') ἐχούσας ἀκτῖνας x καὶ 2x. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ φορέως τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν περιφερειῶν (c) καὶ (O,R) μετὰ τῆς (c'). Τὸ σύνολον τῶν σημείων τούτων, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται, εἶναι μία γραμμή, τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ μῆκος.

737. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB = 2R$. Εὐθεῖα μεταβλητή, κάθετος ἐπὶ τὴν AB, τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ M. Ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης θεωροῦμεν ἑκάστοτε σημεῖα P τοιαῦτα, ὥστε $AP^2 = \frac{4}{3} AM^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν ἀπαρτίζει τὸ σύνολον τῶν σημείων P.

738. Δοθείσης περιφερείας (O, R) νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ἐξωτερικῶν τοῦ κύκλου (O, R) καὶ ἀπὸ τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθοῦν δύο κάθετοι πρὸς ἀλλήλας εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀμφότεραι τὴν περιφέρειαν. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς, ἣν καλύπτουν τὰ M;

739. Δίδεται περιφέρεια (O, R). Νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων M, ἐξωτερικῶν τῆς (O, R) καὶ ἀπὸ τὰ ὁποῖα δύναται νὰ ἀχθῇ τέμνουσα MAB τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε $MA^2 + MB^2 = 2R^2$. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς, ἣν καλύπτουν τὰ M;

740. Δίδονται δύο περιφέρειαι $(O_1, R_1)$ καὶ $(O_2, R_2)$ ἐκτὸς ἀλλήλων. Νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τὰς δύο περιφερείας. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς, ἣν καλύπτουν τὰ σημεῖα τοῦ συνόλου τούτου;

741. Εἰς κύκλον (O, R) εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ ΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν τοῦ τετραγώνου τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Φέρομεν διὰ τοῦ O παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἥτις τέμνει τὰς AB καὶ ΑΓ εἰς M καὶ N.

i) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου BMNΓ;

ii) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μέρους τοῦ κύκλου (O, R);

742. Τρεῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀκτῖνος R ἔχουν τὰ κέντρα των εἰς τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἓν κοινὸν σημεῖον ἐντὸς τοῦ τριγώνου. Τὰ κοινὰ μέρη τῶν τριῶν κύκλων σχηματίζουν ἓν τρίφυλλον. i) Συναρτήσει τῆς κοινῆς ἀκτῖνος R νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ τριφύλλου. ii) Συναρτήσει τῆς R καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ S τοῦ τρ. ΑΒΓ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριφύλλου.

743. Περὶ κύκλον ἀγνώστου ἀκτῖνος εἶναι περιγεγραμμένον κανονικὸν δωδεκάγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς εἶναι ἴσον πρὸς α. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δωδεκαγώνου;

744. Ἐὰν R καὶ α ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ τινος πολυγώνου ἔχοντος ν πλευράς, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς R' καὶ τὸ ἀπόστημα α' ἑτέρου κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος 2ν πλευρὰς καὶ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ πρῶτον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

# ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

# ΕΚ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

## ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

**163. Ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου.** Τὰ περὶ ἐπιπέδου καὶ τῶν ἀξιωμάτων αὐτοῦ εἶναι γνωστὰ ἀπὸ τὴν ἐπίπεδον γεωμετρίαν. Ἐπαναλαμβάνομεν ἐνταῦθα τὰ ἀξιώματα συνδέσεως τοῦ ἐπιπέδου:

**i) Δοθέντων τριῶν οἱωνδήποτε σημείων Α, Β, Γ ὑπάρχει ἐπίπεδον διερχόμενον καὶ διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων. Ἐπὶ ἑκάστου δὲ ἐπιπέδου ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον.**

**ii) Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας δὲν ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἐπίπεδα διερχόμενα καὶ διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων.**

**iii) Ἐὰν δύο σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (Π), τότε ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Β κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π).** {Συμβολικῶς: $A \in (\Pi) \wedge B \in (\Pi) \Rightarrow$ ευθ $AB \in (\Pi)$}.

**iv) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν, τότε ἔχουν ἓν ἀκόμη σημεῖον κοινόν.**

**v) Ὑπάρχουν τοὐλάχιστον τέσσαρα σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.** (Συνεπῶς: «δοθέντος ἐπιπέδου (Π) ὑπάρχει σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π)». Διότι, ἂν δὲν ὑπῆρχε, τότε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου θὰ ἔκειντο ἐπὶ τοῦ (Π)· τοῦτο δὲ ἀντιβαίνει πρὸς τὸ ἀξίωμα ν).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## 164. Καθορισμὸς ἑνὸς ἐπιπέδου ἐν τῷ χώρῳ.

**α΄) (Θ)— Τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον ἐν τῷ χώρῳ.**

Διότι, κατὰ τὸ ἀξίωμα **i** (§ **163**), ὑπάρχει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν Α, Β, Γ. Ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν Α, Β, Γ, τότε θὰ διήρχοντο διὰ τῶν Α, Β, Γ δύο ἐπίπεδα, πρᾶγμα ἀντιβαῖνον πρὸς τὸ ἀξίωμα **ii** (§ **163**).

Ἑπομένως ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον ὑπάρχει περιέχον τὰ τρία, μὴ ἐπ' εὐθείας, σημεῖα Α, Β, Γ .Τὸ μοναδικὸν τοῦτο ἐπίπεδον εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν τούτων σημείων ὁριζόμενον.

**Παρατήρησις.** Ἐνῷ μία εὐθεῖα ὁρίζεται ἐν τῷ χώρῳ ὑπὸ δύο σημείων, ἓν ἐπίπεδον ὁρίζεται ἐν τῷ χώρῳ ὑπὸ τριῶν σημείων (μὴ συνευθειακῶν).

**Πόρισμα. Δύο ἐπίπεδα ἔχοντα κοινὰ τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ταὐτίζονται.** Δηλ. πᾶν σημεῖον ἑκατέρου εἶναι καὶ σημεῖον τοῦ ἑτέρου.

**β΄) (Θ)— Εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α, μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς (ε), ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον ἐν τῷ χώρῳ.**

Διότι ἐπὶ τῆς (ε) ὑπάρχουν δύο σημεῖα Β, Γ, διὰ δὲ τῶν Β, Γ, Α διέρχεται ἓν ἐπίπεδον, περιέχον τὴν εὐθεῖαν (ε) (ἀξίωμα **iii**, § **163**). Ἄλλο ἐπίπεδον περιέχον τὴν (ε) καὶ τὸ Α δὲν ὑπάρχει, διότι, ἂν ὑπῆρχε θὰ διήρχοντο διὰ τῶν Α, Β, Γ δύο ἐπίπεδα. Ἑπομένως ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς (ε) καὶ τοῦ Α. Τὸ μοναδικὸν τοῦτο ἐπίπεδον εἶναι τὸ ὑπὸ τῆς (ε) καὶ τοῦ Α ὁριζόμενον.

**γ΄) (Θ)— Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον ἐν τῷ χώρῳ.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν (ε) καὶ (η) δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἰς τὸ Α. Ἐπὶ τῆς (ε) ὑπάρχει σημεῖον Β διάφορον τοῦ Α καὶ ἐπὶ τῆς (η) σημεῖον Γ διάφορον τοῦ Α. Τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Διότι, ἂν ἔκειντο ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (χ), τότε αἱ (ε) καὶ (η) θὰ συνέπιπτον μὲ τὴν (χ) καὶ δὲν θὰ ἦσαν διακεκριμέναι.

Διὰ τῶν Α, Β, Γ διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον (βλ. ἐδ. α΄), τὸ ὁποῖον καὶ περιέχει ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας (ε) καὶ (η) (ἀξίωμα **iii**, § **163**). Τὸ μοναδικὸν τοῦτο ἐπίπεδον, τὸ φέρον ἐπ' αὐτοῦ τὰς δύο τεμνομένας εὐθείας, εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν ὁριζόμενον.

**δ΄) (Θ) — Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον ἐν τῷ χώρῳ.**

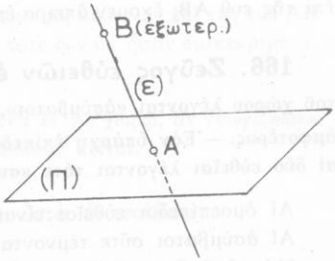
Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (η). Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν παραλλήλων, αὗται κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (Π). Ἕτερον ἐπίπεδον, ἔστω τὸ (Π΄), περιέχον ἀμφοτέρας τὰς παραλλήλους δὲν ὑπάρχει· διότι, ἂν ὑπῆρχε, θὰ περιεῖχε δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς (ε) καὶ ἓν σημεῖον Γ τῆς (η), προφανῶς μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ ἑπομένως διὰ τῶν Α, Β, Γ θὰ διήρ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χοντο δύο ἐπίπεδα, (Π) καὶ (Π΄). Τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὸ ἀξίωμα ii τῆς § **163.** Ἑπομένως ἓν μόνον ἐπίπεδον ὑπάρχει περιέχον τὰς δύο παραλλήλους. Τὸ μοναδικὸν τοῦτο ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῶν δύο παραλλήλων εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν δύο παραλλήλων ὁριζόμενον ἐπίπεδον.

ε΄) Κατὰ τὴν ἀναζήτησιν ἑνὸς ἐπιπέδου ἐν τῷ χώρῳ, εἶναι ἀρκετὸν νὰ προσδιορισθοῦν τρία σημεῖα τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας ἢ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι αὐτοῦ κ.τ.λ. ,ὁπότε κατὰ τ' ἀνωτέρω, τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον θεωρεῖται ὡς προσδιορισθὲν (ἢ εὑρεθέν).

**165. Εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον.** α΄) Ὁρισμός. — **Εὐθεῖα (ε) λέγομεν ὅτι τέμνει ἐπίπεδον (Π), ὅταν ἔχῃ μετὰ τοῦ (Π) ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον κοινόν.** Τὸ κοινὸν τοῦτο σημεῖον λέγεται καὶ ἴχνος τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 198

β΄) (Θ) — **Ἵνα εὐθεῖα τέμνῃ ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ ἓν σημεῖον της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἕτερον σημεῖον της ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.**

Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα ΑΒ τοιαύτη, ὥστε Α∈(Π) καὶ Β∉(Π) (σχ. 198). Τότε ἡ ευθΑΒ ἔχει μετὰ τοῦ (Π) ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ Α καὶ οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ (Π) ἔχει. Διότι, ἂν εἶχεν ἐκτὸς τοῦ Α καὶ ἕτερον σημεῖον κοινὸν μὲ τὸ (Π), θὰ ἔκειτο ὅλη ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ τὸ σημεῖον της Β θὰ ἔκειτο καὶ αὐτὸ ἐπὶ τοῦ (Π), πρᾶγμα ἀντιβαῖνον τὴν ὑπόθεσιν : Β∉(Π).

Ἀντιστρόφως, ἂν ἡ (ε) τέμνῃ τὸ (Π) εἰς Α, τότε ἔχει μετὰ τοῦ (Π), μόνον τὸ Α κοινόν. Συνεπῶς ἓν σημεῖον Β τῆς (ε), διάφορον τοῦ Α, δὲν ἀνήκει εἰς τὸ (Π).

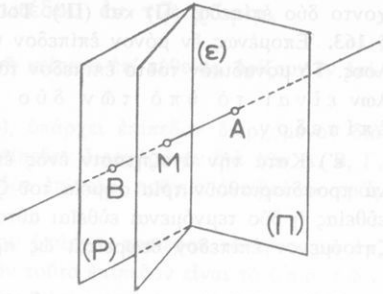
γ΄) **Τμῆμα τέμνον ἐπίπεδον.** Εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ λέγομεν ὅτι τέμνει ἐπίπεδον (Π), ὅταν ἓν καὶ μόνον ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τμήματος ἀνήκῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π). Ἵνα τμῆμα ΑΒ τέμνῃ ἐπίπεδον, ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ ἓν ἐσωτερικὸν σημεῖον του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ συγχρόνως νὰ ὑπάρχῃ σημεῖον τι τῆς ευθ ΑΒ, μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ ἐπίπεδον.

δ΄) (Θ) — **Δι' ἑκάστης εὐθείας (ε) διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα.**

Ἔστω εὐθεῖα (ε). Ὑπάρχει τότε σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς (ἀξίωμα τῆς εὐθείας), διὰ δὲ τῆς (ε) καὶ τοῦ Α διέρχεται ἓν ἐπίπεδον (Π) (§ **164,** β΄). Ὑπάρχει ἐπίσης σημεῖον Β ἐκτὸς τοῦ (Π) (ἀξίωμα V, § **163**), διὰ δὲ τοῦ Β καὶ τῆς (ε) διέρχεται ἐπίπεδον (Ρ) διάφορον τοῦ (Π), ἀφοῦ Β∉Π. Ἡ ευθΑΒ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τέμνει τὸ (Π), καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ (Ρ) (βλ. προηγούμενον θεώρημα), ἄρα μετὰ τοῦ (Π) ἔχει μόνον τὸ Α κοινὸν καὶ μετὰ τοῦ (Ρ) μόνον τὸ Β κοινόν.



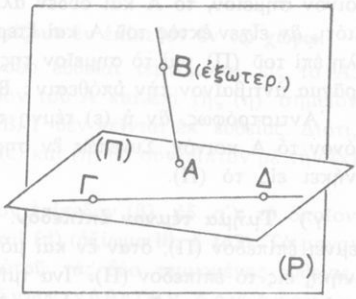
Σχ. 199

Ἑπομένως, τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ευθ ΑΒ, διάφορον τῶν Α καὶ Β, δὲν ἀνήκει οὔτε εἰς τὸ (Π) οὔτε εἰς τὸ (Ρ), ἄρα ὁρίζει μετὰ τῆς (ε) ἐπίπεδον {(ε), Μ} διάφορον τῶν (Π) καὶ (Ρ). Ἐπειδὴ τὸ Μ δύναται νὰ λάβῃ ἀπείρους θέσεις ἐπὶ τῆς ευθ ΑΒ, ἔχομεν ἄπειρα ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῆς (ε).

**166. Ζεῦγος εὐθειῶν ἐν χώρῳ.** α΄) Ὁρισμοί. — **Δύο εὐθεῖαι τοῦ χώρου λέγονται «ἀσύμβατοι», ὅταν** $\boxed{\text{δὲν}}$ **ὑπάρχῃ ἐπίπεδον περιέχον ἀμφοτέρας. — Ἐὰν ὑπάρχῃ ἐπίπεδον περιλαμβάνον ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας, αἱ δύο εὐθεῖαι λέγονται τότε «συμβαταὶ» ἢ «ὁμοεπίπεδοι».**

Αἱ ὁμοεπίπεδοι εὐθεῖαι εἶναι ἢ τεμνόμεναι ἢ παράλληλοι.
Αἱ ἀσύμβατοι οὔτε τέμνονται οὔτε παράλληλοι εἶναι.
(Δύο ἀσύμβατοι ἀνήκουν πάντοτε εἰς διαφορετικὰς διευθύνσεις).

**β΄) (Θ) — Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ ἐπίπεδον, τότε εἶναι ἀσύμβατος πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου μὴ διερχομένην διὰ τοῦ ἴχνους της.**



Σχ. 200

Ἔστω εὐθεῖα (ε) τέμνουσα τὸ (Π) εἰς Α, Β ἕτερον σημεῖον τῆς (ε), μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ (Π) καὶ ΓΔ εὐθεῖα τοῦ (Π) μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Α.

Θὰ δείξωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει ἐπίπεδον περιέχον ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον (Ρ) περιέχον τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΓΔ. Τότε τὸ (Ρ), ὡς ἔχον μετὰ τοῦ (Π) κοινὰ τὰ σημεῖα Α, Γ, Δ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, θὰ ἐταυτίζετο μετὰ τοῦ (Π) καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ (Ρ) θὰ ἦτο καὶ σημεῖον τοῦ (Π). Ἄρα τὸ Β θὰ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ (Π), πρᾶγμα ἀντιβαῖνον τὴν ὑπόθεσιν: Β∉(Π). Ὥστε οὐδὲν ἐπίπεδον ὑπάρχει, φέρον ἐπ' αὐτοῦ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Αὗται εἶναι δηλ. ἀσύμβατοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**167. Τεμνόμενα ἐπίπεδα.** α΄) (Θ) — **Ἐὰν δύο ἐπίπεδα, μὴ ταὐτιζόμενα, ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν, τότε ἔχουν καὶ μίαν εὐθεῖαν κοινήν, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται** $\boxed{\text{ὅλα}}$ **τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο ἐπιπέδων.**

Τὰ δύο ἀνωτέρω ἐπίπεδα λέγονται **τεμνόμενα** καὶ ἡ κοινὴ εὐθεῖα των λέγεται **κοινὴ τομὴ** ἢ **ἀλληλοτομὴ** αὐτῶν. Ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔξω τῆς εὐθείας τομῆς των δὲν ἔχουν τὰ τεμνόμενα ἐπίπεδα.

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν (Π) καὶ (Ρ) δύο ἐπίπεδα, ὅπου (Π)≠(Ρ) καὶ Α ἓν κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Τότε τὰ (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν καὶ ἕτερον σημεῖον Β κοινὸν (ἀξίωμα **iv**, § **163**). Διὰ τῶν Α καὶ Β διέρχεται μία εὐθεῖα, ἥτις ἀνήκει καὶ εἰς τὸ (Π) καὶ εἰς τὸ (Ρ), ὡς ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα μεθ' ἑκάστου τούτων (ἀξίωμα **iii**, § **163**). Κοινὸν σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ευθ ΑΒ δὲν δύνανται νὰ ἔχουν τὰ δύο ἐπίπεδα, διότι τότε δὲν θὰ ἦσαν διακεκριμένα, δηλ. θὰ ἐταυτίζοντο (§ **164** α΄, πόρισμα).

**β΄) Πόρισμα. Μία εὐθεῖα εἶναι ὡρισμένη ἐν τῷ χώρῳ, ἂν γνωρίζωμεν δύο διάφορα ἀλλήλων ἐπίπεδα, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖται.**

## 167α. Διαμερισμὸς τοῦ χώρου ὑπὸ ἐπιπέδου.

Ἀποδεικνύεται ὅτι : **Ἕκαστον ἐπίπεδον διαιρεῖ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου τῶν μὴ κειμένων ἐπ' αὐτοῦ εἰς δύο σύνολα, ἔστω Ι καὶ ΙΙ, ἔχοντα τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :**

**Τυχὸν σημεῖον τοῦ συνόλου Ι καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ συνόλου ΙΙ ὁρίζουν τμῆμα, τέμνον τὸ ἐπίπεδον· ἐνῷ δύο τυχόντα σημεῖα εἴτε τοῦ Ι εἴτε τοῦ ΙΙ ὁρίζουν τμῆμα, μὴ τέμνον τὸ ἐπίπεδον.**

Τὰ ἀνωτέρω σημειοσύνολα Ι καὶ ΙΙ καλοῦνται *«ἀντίθετοι ἡμίχωροι»*, ὁριζόμενοι ὑπὸ τοῦ (Π). Οὗτοι ἔχουν κοινὸν σύνορον τὸ (Π).

Δύο σημεῖα τοῦ χώρου κείμενα εἰς τὸν αὐτὸν ἡμίχωρον (Ι ἢ ΙΙ) λέγομεν ὅτι κεῖνται **πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Π)**, ἐνῷ δύο σημεῖα ἀνήκοντα εἰς δύο ἀντιθέτους ἡμιχώρους ὁριζομένους ὑπὸ τοῦ (Π) λέγομεν ὅτι κεῖνται **ἑκατέρωθεν τοῦ (Π)**. Τέλος, πᾶν σημεῖον τοῦ χώρου ἢ κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π) ἢ ἐπὶ τοῦ ἡμιχώρου Ι ἢ ἐπὶ τοῦ ἀντιθέτου ἡμιχώρου ΙΙ.

**168. Τόπος εὐθειῶν.** Ἔστω σύνολον εὐθειῶν τοῦ χώρου ἐχουσῶν κοινήν τινα ἰδιότητα, ἔστω τὴν (Α). Ἐὰν ὅλαι αἱ εὐθεῖαι τοῦ συνόλου κεῖνται ἐπὶ σταθεροῦ τινος ἐπιπέδου (Π) (ἢ ἐπιπέδου περιοχῆς) καὶ ἐὰν ἀπὸ ἕκαστον σημεῖον τοῦ σταθεροῦ ἐπιπέδου (ἢ τῆς περιοχῆς) διέρχεται εὐθεῖα ἔχουσα τὴν ἰδιότητα (Α), τότε τὸ σταθερὸν ἐπίπεδον (Π) (ἢ ἡ περιοχὴ) λέγεται **«τόπος τῶν εὐθειῶν τῶν ἐχουσῶν τὴν ἰδιότητα (Α)»**.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**169. Κανὼν σχεδιάσεως.** Κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν τῶν σχημάτων τοῦ χώρου ἐπὶ ἐπιπέδου ἀκολουθεῖται πάντοτε ὁ ἑξῆς κανών : παράλληλα διανύσματα τοῦ χώρου εἰκονίζονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ὡς παράλληλα καὶ μάλιστα **μὲ τὸν ἴδιον λόγον.** (Τὰ ὁμόρροπα, φυσικά, εἰκονίζονται ὡς ὁμόρροπα καὶ τὰ ἀντίρροπα ὡς ἀντίρροπα).

Συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι ἓν παρ/μον σχεδιάζεται ὡς παρ/μον, ἓν τραπέζιον ὡς τραπέζιον, τὸ μέσον ἑνὸς τμήματος σχεδιάζεται εἰς τὸ μέσον τῆς εἰκόνος τοῦ τμήματος, τὸ βαρύκεντρον ἑνὸς τριγώνου τοῦ χώρου σχεδιάζεται ὡς βαρύκεντρον τῆς εἰκόνος τοῦ τριγώνου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σχεδίου καὶ γενικῶς ὁ λόγος συγγραμμικῶν τμημάτων διατηρεῖται κατὰ τὴν σχεδίασιν.

**170. Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ ἐν τῷ χώρῳ.** — Εἰς τὴν θεωρητικὴν στερεομετρίαν, αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ ἐν τῷ χώρῳ ἁπλῶς νοοῦνται χωρὶς φυσικὰ νὰ πραγματοποιοῦνται ἐν τῷ χώρῳ. Εἰκονίζονται μόνον, ἐνδεικτικῶς, ἐπὶ ἐπιπέδου σχεδίου δεικνύοντος τὰ σημεῖα εὐθείας καὶ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν ἐν τῷ χώρῳ, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ ζητούμενον γεωμετρικὸν σχῆμα. Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα χρειαζόμεθα, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν κατασκευήν, θεωροῦμεν ὅτι ἔχουν κατασκευασθῆ, ὅταν εὕρωμεν ἕνα τρόπον, δι' οὗ ταῦτα ὁρίζονται (βλ. § **164**). Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς εὐθείας καὶ τὰ σημεῖα τοῦ χώρου. Μία εὐθεῖα νοεῖται κατασκευασθεῖσα, ὅταν π.χ. δείξωμεν ὅτι κεῖται ἐπὶ δύο γνωστῶν ἐπιπέδων ἢ ἓν σημεῖον τοῦ χώρου νοεῖται κατασκευασθὲν, ἂν π.χ. εἶναι τομὴ γνωστοῦ ἐπιπέδου καὶ γνωστῆς εὐθείας κ.τ.λ.

(Εἰς τὴν ἐφηρμοσμένην γεωμετρίαν ἡ πιστὴ ἀναπαράστασις τῶν σχημάτων τοῦ χώρου ἐπὶ ἐπιπέδου σχεδίου ἐπιτυγχάνεται δι' εἰδικῶν μεθόδων παρεχομένων ὑπὸ τῆς «παραστατικῆς Γεωμετρίας»).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

745. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν τρεῖς εὐθεῖαι τέμνωνται ἀνὰ δύο, χωρὶς νὰ κεῖνται καὶ αἱ τρεῖς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τότε διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

746. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄), δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς (ε) καὶ δύο σημεῖα Α΄ καὶ Β΄ τῆς (ε΄). Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ εἶναι ἀσύμβατοι.

747. Δείξατε ὅτι δύο ἴσαι περιφέρειαι ἔχουσαι τὸ αὐτὸ κέντρον καὶ μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔχουν κατ' ἀνάγκην δύο σημεῖα κοινά.

748. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι δὲν κεῖνται καὶ αἱ τρεῖς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐνῷ ἀνὰ δύο εἶναι ὁμοεπίπεδοι, τότε ἢ διέρχονται καὶ αἱ τρεῖς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

749. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ κεῖνται ἐπὶ διαφορετικῶν ἐπιπέδων καὶ συγχρόνως : ἡ ευθΑΒ καὶ ἡ ευθΑ΄Β΄ τέμνονται εἰς Κ, ἡ ευθ ΒΓ καὶ ἡ ευθ Β΄Γ΄ τέμνονται εἰς Λ καὶ τέλος ἡ ευθ ΓΑ καὶ ἡ ευθ Γ΄Α΄ τέμνονται εἰς Μ. Τότε :

i) Τὰ Κ,Λ,Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ii) Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

750. Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνὰ δύο τέμνωνται χωρὶς νὰ κεῖνται καὶ αἱ τέσσαρες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ,τότε διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

751. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐν τῷ χώρῳ. Ἂν σημεῖον Γ διατρέχῃ τὴν (ε), ποῖος ὁ γ. τόπος τοῦ βαρυκέντρου τοῦ τρ. ΑΒΓ;

752. Δοθεισῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) καὶ τρίτης εὐθείας ($ε_3$) τεμνούσης τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο πρώτων εἰς Α, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου, αἵτινες τέμνουν καὶ τὰς τρεῖς ταύτας εὐθείας. (βλ. § **168**).

753. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΨ ,σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ, διάφορον τοῦ Ο καὶ σημεῖον Β ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ. Σημεῖον Μ διατρέχει τὴν ευθ ΑΒ. Ζητεῖται ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΜΟΧ καὶ ΜΟΨ .

754. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἑκατέρωθεν τοῦ (Π). Ἔστω Ο **μεταβλητὸν** σημεῖον τοῦ χώρου καὶ ἂς ὑποτεθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ τέμνουν τὸ (Π) εἰς Α΄ καὶ Β΄.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ευθ Α΄Β΄ διέρχεται πάντοτε διὰ σταθεροῦ σημείου Ι.

ii) Ἔστω Γ, τρίτον σταθερὸν σημεῖον τοῦ χώρου μὴ κείμενον ἐπ' εὐθείας μὲ τὰ Α καὶ Β καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ τέμνουν τὸ (Π), ὑποτεθείσθω δὲ ὅτι ἡ ευθ ΟΓ τέμνει τὸ (Π) εἰς Γ΄. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι Α΄Γ΄ καὶ Β΄Γ΄ διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ δύο σταθερῶν σημείων Ι΄ καὶ Ι΄΄.

iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι Ι, Ι΄, Ι΄΄ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

755. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) περιέχον τὰς τεμνομένας εὐθείας ΟΧ, ΟΨ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς τοῦ (Π), κείμενα ἐπὶ εὐθείας ΑΒ τεμνούσης τὸ (Π) εἰς Ι, διάφορον τοῦ Ο. Μεταβλητὸν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ τέμνει τὴν ΟΧ εἰς Μ καὶ τὴν ΟΨ εἰς Ν.

i) Τόπος τοῦ σημείου τομῆς Τ τῶν ΑΝ καὶ ΒΜ.

ii) Τόπος τοῦ σημείου τομῆς Τ΄ τῶν ΑΜ καὶ ΒΝ.

iii) Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΤΤ΄ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

756. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ δοθεῖσαν περιφέρειαν ἐν τῷ χώρῳ.

757. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἔχον μέσον δοθὲν σημεῖον καὶ τὰ ἄκρα του ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου (Π) καὶ δοθείσης εὐθείας (ε) τεμνούσης τὸ (Π).

758. Δοθέντος ἐπιπέδου (Π) καὶ δύο σημείων Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ, κειμένων ἐπὶ εὐθείας ΑΒ τεμνούσης τὸ (Π), νὰ κατασκευασθοῦν ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῆς ΑΒ καὶ τῶν ὁποίων ἡ τομὴ μετὰ τοῦ (Π) νὰ ἀπέχῃ δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον τοῦ (Π).

759. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι παρ/μον οὔτε τραπέζιον καὶ ἐκτὸς τοῦ (Π) δίδεται σημεῖον S. Νὰ κατασκευασθοῦν διὰ χρήσεως εὐθειῶν μόνον : πρῶτον ἡ ἀλληλοτομὴ τῶν ἐπιπέδων SAB καὶ SΓΔ καὶ κατόπιν τῶν ἐπιπέδων SAΓ καὶ SΒΔ.

## ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΟΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

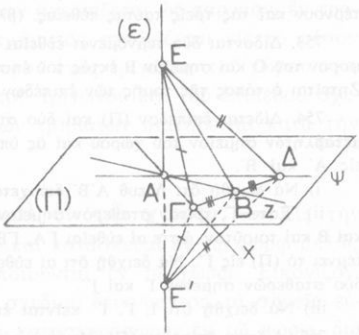
**171. Ὁρισμὸς καὶ ὕπαρξις τῆς καθέτου. α') Ὁρισμός. Μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον, ὅταν τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ἴχνους της.**

Ὅτι ὁ ὁρισμὸς οὗτος δὲν εἶναι κενὸς φαίνεται ἀπὸ τὰ δύο ἑπόμενα θεωρήματα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β') (Θ)— Ἐὰν εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου διερχομένας διὰ τοῦ ἴχνους της, τότε εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ἴχνους της.**

Ἔστω εὐθεῖα (ε) τέμνουσα εἰς Α ἐπίπεδον (Π) καὶ κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ (Π), τὰς ΑΧ καὶ ΑΨ (σχ. 201). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ (ε) εἶναι ⊥ ἐπὶ πᾶσαν τρίτην εὐθεῖαν ΑΖ τοῦ ἐπιπέδου διερχομένην διὰ τοῦ Α. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ευθΑΖ σημεῖον Β διάφορον τοῦ Α καὶ κατασκευάζομεν τμῆμα ΓΔ ἔχον μέσον τὸ Β καὶ τὰ ἄκρα του Γ καὶ Δ ἐπὶ τῶν ΑΧ καὶ ΑΨ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (ε) δύο σημεῖα Ε καὶ Ε΄ ἰσαπέχοντα τοῦ Α καὶ φέρομεν τὰ τμήματα ΕΓ, ΕΒ, ΕΔ, Ε΄Γ, Ε΄Β, Ε΄Δ. Τότε,



Σχ. 201

ἐπειδὴ ἡ ΑΧ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΕΕ΄ καὶ ἡ ΑΨ ἐπίσης (λόγῳ τῆς ὑποθέσεως), θὰ ἔχωμεν : ΓΕ = = ΓΕ΄, ΔΕ = ΔΕ΄. Ἐπειδὴ καὶ ΓΔ = ΓΔ, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΓΔ καὶ Ε΄ΓΔ εἶναι ἴσα. Ἄρα καὶ αἱ διάμεσοί των αἱ ἀγόμεναι πρὸς τὴν κοινὴν πλευρὰν εἶναι ἴσαι, δηλ. ΒΕ = ΒΕ΄. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΕΒΕ΄ μὲ ΒΕ = ΒΕ΄ ἕπεται ὅτι ἡ ΒΑ, οὖσα διάμεσος αὐτοῦ, εἶναι καὶ ὕψος. Δηλ. ΒΑ ⊥ ΕΕ΄ ἢ ΑΖ ⊥ ΕΕ΄ ὅ.ἔ.δ.

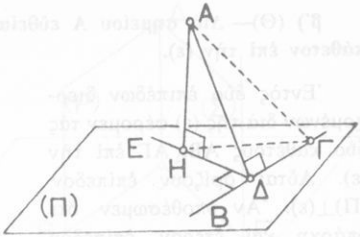
**γ') Πόρισμα. Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου, τότε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.**

**δ') Κατασκευὴ εὐθείας καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον. (Θ) — Δοθέντος ἐπιπέδου (Π) καὶ σημείου Α ἐκτὸς τοῦ (Π), δύναται νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) ὡς ἑξῆς : Χαράσσομεν εὐθεῖαν ΒΓ∈(Π), φέρομεν ἐκ τοῦ Α εὐθεῖαν ⊥ ΒΓ τέμνουσαν τὴν ΒΓ ἔστω εἰς Δ, φέρομεν ἐκ τοῦ Δ εὐθεῖαν ΔΕ κάθετον τῇ ΒΓ καὶ ἀνήκουσαν εἰς τὸ (Π) καὶ τέλος φέρομεν ἐκ τοῦ Α εὐθεῖαν ΑΗ ⊥ ΔΕ (σχ. 202). Ἡ τρίτη αὕτη κάθετος ΑΗ εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος. Ἑτέρα δὲ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) διερχομένη διὰ τοῦ Α δὲν ὑπάρχει.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Γ σημεῖον τῆς ευθ ΒΓ, διάφορον τοῦ Δ. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{\text{ΑΗΓ}} = 1^{\text{D}}$. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὸ πυθαγόρειον θεώρημα εἰς τὰ τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ, ΗΔΓ καὶ ΑΓΔ. Ἔχομεν : $\text{ΑΓ}^2 =$

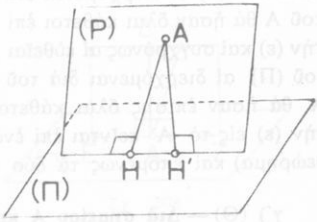
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$= A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = (AH^2 + H\Delta^2) + \Delta\Gamma^2 =$
$= AH^2 + (H\Delta^2 + \Delta\Gamma)^2 = AH^2 + H\Gamma^2.$
Ἐκ τῆς $A\Gamma^2 = AH^2 + H\Gamma^2 \Rightarrow AH \perp H\Gamma$.
Εἶναι καὶ $AH \perp H\Delta$, ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ ΑΗ οὖσα κάθετος πρὸς δύο εἶναι κάθετος καὶ πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ (Π) τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ἴχνους της Η. Κατὰ δὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐδ. α΄ ἡ ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Γράφομεν $\boxed{AH \perp (\Pi)}$.



Σχ. 202

Ἂν ὑπῆρχε καὶ ἑτέρα κάθετος ΑΗ΄ ἐπὶ τὸ (Π) (σχ. 203), τότε τὸ ἐπίπεδον ΑΗΗ΄ θὰ ἔτεμνε τὸ (Π) κατὰ τὴν ευθΗΗ΄ καὶ θὰ ἦτο: $AH \perp$ ευθΗΗ΄ (διότι $AH \perp (\Pi)$) καὶ $AH' \perp$ ευθΗΗ΄ (διότι $AH' \perp (\Pi)$). Ὥστε θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ Α δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ευθ ΗΗ΄, ὅπερ ἀδύνατον.

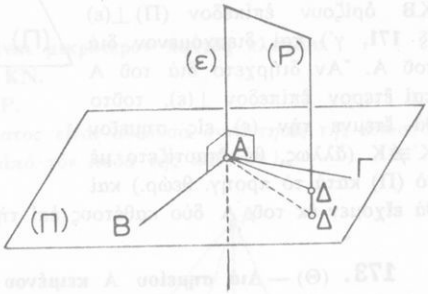


Σχ. 203

Ἑπομένως διὰ τοῦ Α ἄγεται μία καὶ μόνη κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).

**172. Κατασκευὴ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ εὐθεῖαν. α΄) (Θ) — Αἱ ἄπειροι κάθετοι ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) αἱ ἀγόμεναι εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α τῆς (ε) κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, καθέτου ἐπὶ τὴν (ε).**

*Ἀπόδειξις.* Διὰ τῆς (ε) διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα (§ **165**, δ΄) καὶ ἐν ἑκάστῳ τούτων ὑπάρχει μία κάθετος ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ Α. Ἑπομένως εἰς τὸ Α ἄγονται ἄπειροι κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε). Δύο ἐξ αὐτῶν, αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 204), ὁρίζουν ἐπίπεδον (Π), κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) (§ **171**, γ΄). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ (Π) κεῖται καὶ πᾶσα τρίτη εὐθεῖα $A\Delta \perp (\varepsilon)$. Διότι, ἂν ἡ ΑΔ δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ (Π), τότε τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ΑΔ καὶ τῆς (ε) θὰ ἔτεμνε τὸ (Π) κατὰ εὐθεῖάν τινα ΑΔ΄ διάφορον τῆς ΑΔ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) (ἀφοῦ $(\varepsilon) \perp (\Pi)$). Ὥστε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ρ) θὰ εἴχομεν δύο καθέτους ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α, ὅπερ ἀδύνατον.

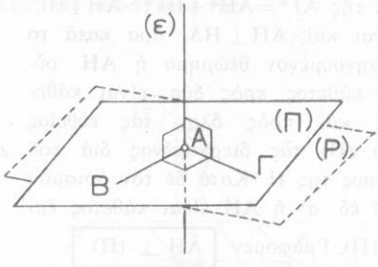


Σχ. 204

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β΄) (Θ)— Διὰ σημείου Α εὐθείας (ε) διέρχεται ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν (ε).**

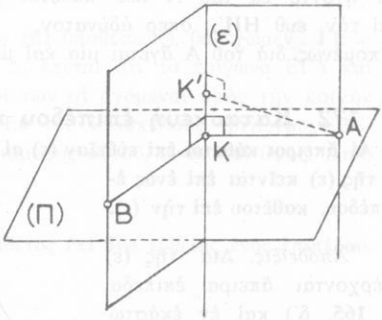
Ἐντὸς δύο ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς (ε) φέρομεν τὰς δύο καθέτους ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὴν (ε). Αὗται ὁρίζουν ἐπίπεδον (Π)⊥(ε). Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχῃ καὶ ἕτερον ἐπίπεδον (Ρ)⊥(ε) εἰς τὸ Α, τότε αἱ εὐθεῖαι τοῦ (Ρ) αἱ διερχόμεναι διὰ τοῦ Α θὰ ἦσαν ὅλαι κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε) καὶ συγχρόνως αἱ εὐθεῖαι τοῦ (Π) αἱ διερχόμεναι διὰ τοῦ Α θὰ ἦσαν ἐπίσης ὅλαι κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε). Ἀλλ' ὅλαι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ Α κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (προηγούμενον θεώρημα) καὶ ἑπομένως τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ταυτίζονται.



Σχ. 205

**γ΄) (Θ) — Διὰ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς εὐθείας (ε) διέρχεται ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν (ε).**

Ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς (ε) καὶ τοῦ Α εὐθεῖαν ΑΚ⊥(ε) καὶ ἐντὸς ἑτέρου ἐπιπέδου διαφόρου τοῦ προηγουμένου εὐθεῖαν ΚΒ⊥(ε) (σχ. 206). Αἱ ΚΑ, ΚΒ ὁρίζουν ἐπίπεδον (Π)⊥(ε) (§ **171**, γ΄) καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ Α. Ἂν διήρχετο διὰ τοῦ Α καὶ ἕτερον ἐπίπεδον ⊥(ε), τοῦτο θὰ ἔτεμνε τὴν (ε) εἰς σημεῖον Κ΄≢Κ (ἄλλως, θὰ ἐταυτίζετο μὲ τὸ (Π) κατὰ τὸ προηγ. θεώρ.) καὶ θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ Α δύο καθέτους ἐπὶ τὴν (ε), ὅπερ ἀδύνατον.



Σχ. 206

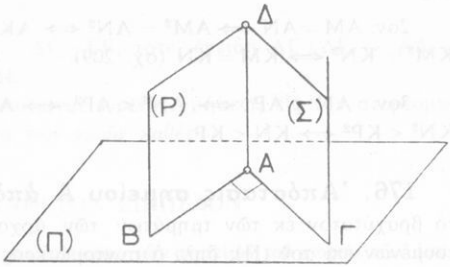
**173.** (Θ) — **Διὰ σημείου Α κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) διέρχεται μία καὶ μόνη κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).**

Ἂς φέρωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π) δύο εὐθείας ΑΒ, ΑΓ διερχομένας διὰ τοῦ Α καὶ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Α καὶ ⊥ ΑΓ θὰ περιέχῃ τὴν ΑΒ (§ **172**, α΄) καὶ τὸ ἐπίπεδον (Σ) τὸ διὰ τοῦ Α, κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ περιέχῃ τὴν ΑΓ. Τὰ (Ρ) καὶ (Σ) δὲν ταυτίζονται, διότι, ἂν ἐταυτίζοντο, θὰ συνέπιπτον μὲ τὸ (Π).

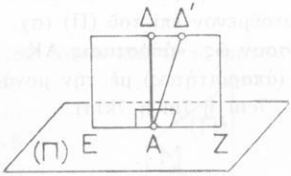
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ δὲ ἔχουν τὸ σημεῖον Α κοινόν, θὰ τέμνωνται κατὰ εὐθεῖάν τινα ΑΔ. Ἡ ΑΔ εἶναι ⊥ ΑΓ, ὡς ἀνήκουσα εἰς τὸ (Ρ) καὶ ⊥ ΑΒ ὡς ἀνήκουσα εἰς τὸ (Σ). Συνεπῶς ἡ ΑΔ εἶναι ⊥ (Π).

—Ἂν ὑπῆρχον δύο κάθετοι ΑΔ, ΑΔ΄ ἐπὶ τὸ (Π) (σχ. 208), τότε τὸ ἐπίπεδόν των ΔΑΔ΄ θὰ ἔτεμνε τὸ (Π) κατὰ εὐθεῖαν ΕΖ, ἐπὶ τὴν ὁποίαν αἱ ΑΔ καὶ ΑΔ΄ θὰ ἦσαν ἀμφότεραι κάθετοι εἰς τὸ Α, ὅπερ ἀδύνατον.



Σχ. 207



Σχ. 208

**174. Εὐθεῖα πλαγία ὡς πρὸς ἐπίπεδον.** Μία εὐθεῖα (ε) λέγεται *πλαγία* ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), ὅταν τέμνῃ τὸ (Π) εἴς τι σημεῖον Α καὶ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π), ἤτοι εἶναι διάφορος τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ (Π) τῆς ἀγομένης εἰς τὸ Α.

**175. Κάθετος καὶ πλάγιαι.** (Θ) — **Ἐὰν ἐκ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΚ ἐπὶ τὸ (Π), ὅπου Κ∈(Π) καθὼς καὶ οἱαδήποτε πλάγια τμήματα ΑΜ, ΑΝ, ΑΡ..., ὧν οἱ «πόδες» Μ, Ν, Ρ κεῖνται ἐπὶ τοῦ (Π), τότε :**

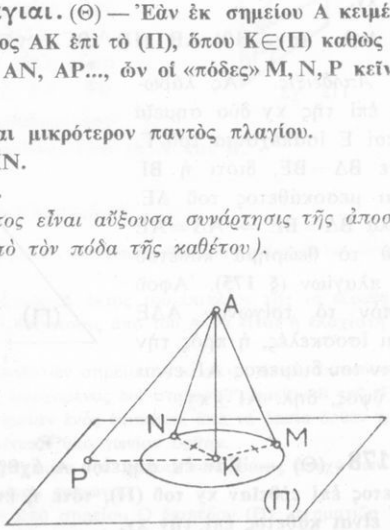
**1ον. Τὸ κάθετον τμῆμα εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου.**

**2ον. ΑΜ = ΑΝ ⟺ ΚΜ = ΚΝ.**

**3ον. ΑΝ < ΑΡ ⟺ ΚΝ < ΚΡ.**

(δηλ. : *τὸ μῆκος πλαγίου τμήματος εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς ἀποστάσεως τοῦ ποδὸς τοῦ τμήματος ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου*).

*Ἀπόδειξις.* 1ον. Ἔστω ΑΚ τὸ κάθετον καὶ ΑΜ τυχὸν πλάγιον τμῆμα μὲ Κ∈(Π) καὶ Μ∈(Π) (σχ. 209). Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρ. ΑΚΜ ἡ $\widehat{AKM} = 1$ ὀρθὴ ⇒ $\widehat{AMK} < 1$ ὀρθῆς. Ἀφοῦ $\widehat{AMK} < \widehat{AKM}$ ⇒ ΑΚ < ΑΜ (Ἀπέναντι μικροτέρας γωνίας, μικροτέρα πλευρά).



Σχ. 209

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2ον. $AM = AN \Longleftrightarrow AM^2 = AN^2 \Longleftrightarrow AK^2 + KM^2 = AK^2 + KN^2 \Longleftrightarrow KM^2 = KN^2 \Longleftrightarrow KM = KN$ (σχ. 209).

3ον. $AN < AP \Longleftrightarrow AN^2 < AP^2 \Longleftrightarrow AK^2 + KN^2 < AK^2 + KP^2 \Longleftrightarrow KN^2 < KP^2 \Longleftrightarrow KN < KP$.

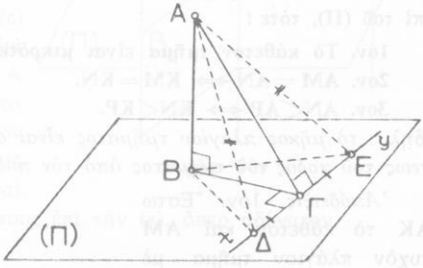
**176. Ἀπόστασις σημείου Α ἀπὸ ἐπίπεδον (Π)** καλεῖται τὸ βραχύτατον ἐκ τῶν τμημάτων τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ Α καὶ περατουμένων ἐπὶ τοῦ (Π), δηλ. ὁ συντομώτερος δρόμος ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὸ ἐπίπεδον. Συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τοῦ (Π) εἶναι τὸ κάθετον τμῆμα ΑΚ τὸ ἀγόμενον ἐκ τοῦ Α καὶ περατούμενον ἐπὶ τοῦ (Π) (σχ. 209). Ὅμως εἰς τὴν συνήθη γεωμετρικὴν γλῶσσαν ὡς «ἀπόστασις ΑΚ» νοεῖται τὸ μέτρον τοῦ ΑΚ συνοδευόμενον (ἀπαραιτήτως) μὲ τὴν μονάδα, δι' ἧς ἐγένετο ἡ μέτρησις αὐτοῦ (π.χ. ΑΚ = 7cm ἢ 7m ἢ 7km).

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ

**177.** (Θ) — **Ἐὰν ἐκ σημείου Α ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν xy τοῦ ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ ἑνοῦσα τὸ Α μὲ τὸν πόδα τῆς δευτέρας καθέτου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy.**

Δηλ.: (σχ. 210) $AB \perp (\Pi) \wedge B\Gamma \perp xy \in (\Pi) \Rightarrow A\Gamma \perp xy$.

*Ἀπόδειξις.* Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς xy δύο σημεῖα Δ καὶ Ε ἰσαπέχοντα τοῦ Γ. Τότε ΒΔ = ΒΕ, διότι ἡ ΒΓ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΔΕ. Ἀλλὰ ΒΔ = ΒΕ ⇒ ΑΔ = ΑΕ κατὰ τὸ θεώρημα καθέτου καὶ πλαγίων (§ **175**). Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ πρὸς τὴν βάσιν του διάμεσος ΑΓ εἶναι καὶ ὕψος, δηλ. $A\Gamma \perp xy$.



Σχ. 210

**178.** (Θ) — **Ἐὰν ἐκ σημείου Α ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καὶ κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν xy τοῦ (Π), τότε ἡ ἑνοῦσα τοὺς πόδας τῶν δύο καθέτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy.**

Δηλ.: (σχ. 210) $AB \perp (\Pi) \wedge A\Gamma \perp xy \in (\Pi) \Rightarrow B\Gamma \perp xy$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

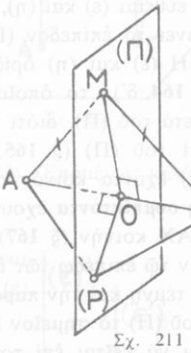
Διότι, ἂν λάβωμεν πάλιν : ΔΓ = ΓΕ, τότε, ἐπειδὴ ΑΓ⊥ΔΕ ⇒ ΑΔ = = ΑΕ ⇒ ΒΔ = ΒΕ ⇒ ΒΓ⊥ΔΕ.

Τὰ δύο ἀνωτέρω θεωρήματα εἶναι εὐρείας χρήσεως εἰς τὴν στερεομετρίαν καὶ λέγονται *θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων*.

## ΤΟ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

**179.** α΄) (Θ)—**Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ τμῆμα ΑΒ, εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΒ** (τὸ *«μεσοκάθετον ἐπίπεδον»* τοῦ ΑΒ).

*Ἀπόδειξις*. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 211). Ἡ ἰδιότης τοῦ Μ : ΜΑ = ΜΒ συνεπάγεται ὅτι ΜΟ⊥ΑΒ. Ὅλαι ὅμως αἱ εἰς τὸ Ο κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθ ΑΒ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ὡρισμένου ἐπιπέδου (Π) καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ο (§ **172**), ἄρα καὶ ἡ ΟΜ, ἄρα καὶ τὸ Μ. Δηλ. πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου ἀνήκει εἰς τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον (Π).



Σχ. 211

**Ἀντιστρόφως.** Ἔστω Ρ σημεῖον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π) (σχ. 211).

Τότε ΡΟ⊥ΑΒ, δηλ. ἡ εὐθ ΡΟ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ καὶ συνεπῶς ΡΑ = ΡΒ. Ἤτοι καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ Α καὶ Β.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

760. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου.

761. Δοθείσης περιφερείας καὶ σημείου Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου της νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ Α νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἢ ἡ μεγίστη δυνατή.

762. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν σημείου Α κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) ἐπὶ τὰς διαφόρους εὐθείας τοῦ (Π) τὰς διερχομένας διὰ σταθεροῦ σημείου Β τοῦ (Π).

763. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν τμῆμα ΑΒ μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν.

764. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ἑνὸς δεδομένου τριγώνου.

765. Ἐὰν ἡμιευθεῖα ΟΑ ἀρχομένη ἀπὸ σημείου Ο ἐπιπέδου (Π) σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τρεῖς ἡμιευθείας τοῦ (Π) διερχομένας διὰ τοῦ Ο, τότε ΟΑ⊥(Π).

766. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἐπίπεδα τὰ κάθετα εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

767. Δοθείσης εὐθείας (ε) πλαγίας ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) νὰ κατασκευασθῇ ἐντὸς τοῦ (Π) εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ ἴχνους τῆς (ε) καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν (ε).

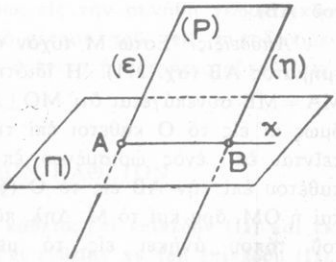
768. Ἐν ἐπιπέδῳ (Π) νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου τοῦ (Π) καὶ ἀπέχουσα δεδομένην ἀπόστασιν λ ἀπὸ σημείου Α ἐκτὸς τοῦ (Π).

769. Νὰ γραφῇ εὐθεῖα ἐν ἐπιπέδῳ (Π) ἀπέχουσα δεδομένας ἀποστάσεις α καὶ β ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς τοῦ (Π) κείμενα.

## ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ

**180. α΄) (Θ) — Πᾶν ἐπίπεδον τέμνον τὴν μίαν τῶν παραλλήλων τέμνει καὶ τὴν ἄλλην.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (η), ἐξ ὧν ἡ πρώτη τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς Α (σχ. 212). Ἡ (ε) καὶ (η) ὁρίζουν ἐπίπεδον (Ρ) (§ **164**, δ΄), τὸ ὁποῖον δὲν συμπίπτει μετὰ τοῦ (Π), διότι ἡ (ε) **δὲν** κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π) (§ **165**, β΄). Τὰ (Π) καὶ (Ρ) ἔχοντα κοινὸν σημεῖον τὸ Α καὶ **μὴ συμπίπτοντα** ἔχουν καὶ μίαν εὐθεῖαν ΑΧ κοινήν (§ **167**). Ἡ ΑΧ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο παραλλήλων καὶ τέμνουσα τὴν μίαν, δηλ. τὴν (ε), θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της (η) εἰς σημεῖον Β. Ἡ (η) ἔχει λοιπὸν μετὰ τοῦ (Π) τὸ σημεῖον Β κοινόν. Ἡ (η) μὴ ταυτιζομένη μετὰ τῆς ΑΧ δὲν δύναται νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π), διότι τότε τὰ (Π) καὶ (Ρ) θὰ συνέπιπτον. Ἄρα ἡ (η) τέμνει τὸ (Π) εἰς Β ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ (Π) τέμνει τὴν (η) εἰς Β.

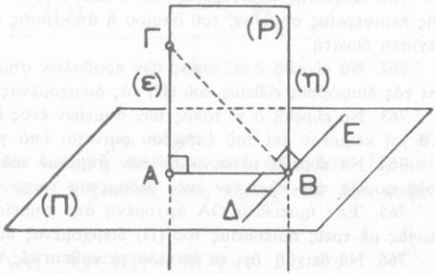


Σχ. 212

**β΄) (Θ) — Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ὅτι (ε)//(η)∧(ε)⊥Π (σχ. 213). Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ (η)⊥(Π). Κατὰ πρῶτον τὸ (Π), τέμνον τὴν (ε) ἔστω εἰς Α, θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της (η), ἔστω εἰς Β (προηγούμενον θεωρ.).

Ἡ ΑΒ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ρ) τῶν δύο παραλλήλων καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν (ε) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν (η), ἤτοι (η)⊥ΑΒ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ (η)



Σχ. 213

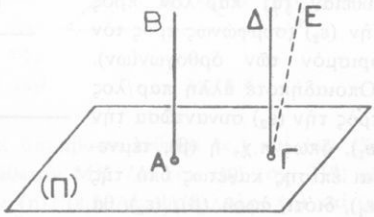
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκόμη εὐθεῖαν τοῦ (Π). Ἄς φέρωμεν εὐθεῖαν ΔΕ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς Β καὶ ἄς ἑνώσωμεν τὸ Β μὲ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς (ε). Τότε τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων (§ **177**) δίδει : ΓΒ⊥ΔΕ. Ἐκ τῶν : ΔΕ⊥ΑΒ∧ΔΕ⊥ΓΒ ⇒ ΔΕ⊥Επιπ. ΓΑΒ, ἤτοι ΔΕ⊥(Ρ), ὁπότε ΔΕ⊥(η) ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, (η)⊥ΔΕ. Ἐκ τῶν (η)⊥ΑΒ∧(η)⊥ΔΕ ⇒ ⇒ (η)⊥(Π).

**γ') (Θ) — Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ὅτι ΑΒ⊥(Π)∧ΓΔ⊥(Π) (σχ. 214).

Ἄν ἡ ΓΔ δὲν ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, τότε θὰ ὑπῆρχε μία ἄλλη εὐθεῖα ΓΕ διὰ τοῦ Γ διερχομένη καὶ //ΑΒ. Τότε τὸ (Π) ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ θὰ ἦτο κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΓΕ (προηγ. θεώρ.) καὶ θὰ εἴχομεν : ΓΔ⊥(Π)∧ΓΕ∧(Π), ὅπερ ἀδύνατον (§ **173**). Ἑπομένως κατ' ἀνάγκην ΓΔ//ΑΒ.



Σχ. 214

**δ') Ἡ παραλληλία εὐθειῶν ἐν τῷ χώρῳ εἶναι σχέσις μεταβατική.** Ἤτοι (ε)//(ε')∧(ε')//(ε'') ⇒ (ε) //(ε'') (σχ. 215).

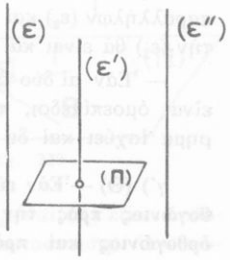
*Ἀπόδειξις.* Ἄς φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον (Π)⊥(ε').

Τότε (ε')⊥(Π)∧(ε')//(ε) ⇒ (ε)⊥(Π).

Ἐπίσης (ε')⊥(Π)∧(ε')//(ε'') ⇒ (ε'')⊥(Π).

Ἐκ τῶν (ε)⊥(Π)∧(ε'')⊥(Π) ⇒ (ε)//(ε'').

*(Αἱ πρὸς τρίτην παράλληλοι εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι).*



Σχ. 215

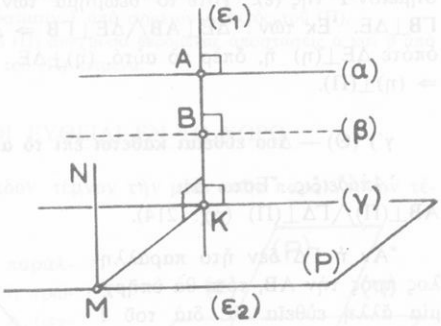
## ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

**181. Ὁρισμοὶ καὶ θεωρήματα. α') Ὁρισμός. — Δύο εὐθεῖαι ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) τοῦ χώρου ἀσύμβατοι ἢ συμβαταὶ λέγονται ὀρθογώνιοι πρὸς ἀλλήλας, ὅταν μία ἐξ αὐτῶν τέμνῃ καθέτως μίαν παράλληλον τῆς ἄλλης.** Γράφομεν τότε : ($ε_1$)ὀρθογ.($ε_2$). Ἐν ᾗ περιπτώσει αἱ ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) εἶναι ὁμοεπίπεδοι, ἡ σχέσις ($ε_1$) ὀρθογ.($ε_2$) ἰσοδυναμεῖ προφανῶς μὲ τὴν γνωστὴν ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας σχέσιν : ($ε_1$)⊥($ε_2$) (δηλ. αἱ δύο εὐθεῖαι τέμνονται καθέτως).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β΄) (Θ) — Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, τότε ἑκατέρα τέμνει καθέτως ὅλας τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ἑτέραν, τὰς ὁποίας συναντᾷ.**

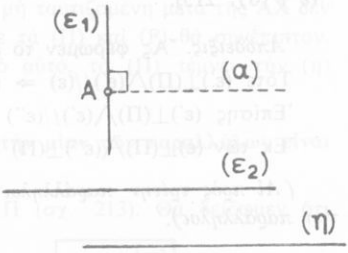
*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν δύο **ἀσύμβατοι** εὐθεῖαι $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ ὀρθογώνιοι πρὸς ἀλλήλας (σχ. 216). Τότε ἡ μία τούτων, π.χ. ἡ $(\varepsilon_1)$, τέμνει καθέτως, ἔστω εἰς Α, μίαν εὐθεῖαν (α) παρ/λον πρὸς τὴν $(\varepsilon_2)$ (συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῶν ὀρθογωνίων). Ὁποιαδήποτε ἄλλη παρ/λος πρὸς τὴν $(\varepsilon_2)$ συναντῶσα τὴν $(\varepsilon_1)$, ὅπως π.χ. ἡ (β), τέμνεται ἐπίσης καθέτως ὑπὸ τῆς $(\varepsilon_1)$, διότι, ἀφοῦ $(\beta)//(\varepsilon_2)$, θὰ εἶναι καὶ $(\beta)//(\alpha)$ (§ **180**,δ΄). Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι καὶ ἡ $(\varepsilon_2)$ τέμνει καθέτως πᾶσαν παράλληλον τῆς $(\varepsilon_1)$, τὴν ὁποίαν συναντᾷ, ὅπως π.χ. τὴν ΜΝ. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Μ τῆς $(\varepsilon_2)$ εὐθεῖαν $MK\perp(\varepsilon_1)$ καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς Κ εὐθεῖαν $(\gamma)//(\varepsilon_2)$. Τότε ἡ $(\varepsilon_1)$ ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΜΚ καὶ (γ) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τῶν παραλλήλων $(\varepsilon_2)$ καὶ (γ). Ἡ ἐκ τοῦ Μ λοιπὸν ἀγομένη παρ/λος ΜΝ πρὸς τὴν $(\varepsilon_1)$ θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ $\perp$(Ρ) (§ **180**, β΄), ἄρα κάθετος ἐπὶ τὴν $(\varepsilon_2)$, ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 216

— Ἐὰν αἱ δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι εἶναι ὁμοεπίπεδοι, προφανῶς τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ δι' αὐτάς.

**γ΄) (Θ) — Ἐὰν εὐθεῖα $(\varepsilon_1)$ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν $(\varepsilon_2)$, τότε εἶναι ὀρθογώνιος καὶ πρὸς πᾶσαν παράλληλον τῆς $(\varepsilon_2)$.**



Σχ. 217

Ἔστω $(\varepsilon_1)$ ὀρθογώνιος πρὸς $(\varepsilon_2)$ καὶ $(\eta)//(\varepsilon_2)$ (σχ. 217). Ἂν διὰ σημείου Α τῆς $(\varepsilon_1)$ ἀχθῇ εὐθεῖα $(\alpha)//(\varepsilon_2)$, τότε θὰ εἶναι $(\alpha)\perp(\varepsilon_1)$. Εἶναι ἐπίσης καὶ $(\alpha)//(\eta)$ (§ **180**, δ΄) καὶ ἀφοῦ $(\alpha)//(\eta)$ $\wedge(\alpha)\perp(\varepsilon_1) \Rightarrow (\varepsilon_1)$ καὶ (η) ὀρθογώνιοι.

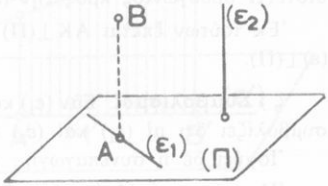
**Πόρισμα 1ον. Δύο εὐθεῖαι τοῦ χώρου παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς ὀρθῆς γωνίας εἶναι μεταξύ των ὀρθογώνιοι.**

**Πόρισμα 2ον. Ἐὰν γωνίας αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο ὀρθογωνίους εὐθείας, ἡ γωνία εἶναι ὀρθή.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

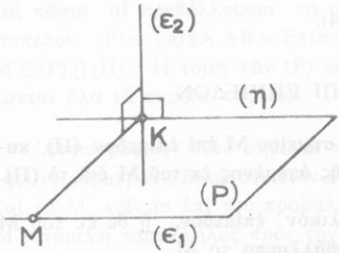
**δ') Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ ὀρθογωνίου ζεύγους εὐθειῶν.** (Θ) — **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι: μία ἐξ αὐτῶν νὰ κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ καθέτῳ πρὸς τὴν ἄλλην.**

i) Ἡ εὐθεῖα $(\varepsilon_1)$ κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ (Π) καθέτῳ πρὸς τὴν $(\varepsilon_2)$ (σχ. 218). Ἂν διὰ σημείου Α τῆς $(\varepsilon_1)$ φέρωμεν εὐθεῖαν $AB//(\varepsilon_2)$, τότε, ἀφοῦ $(\varepsilon_2)\perp(\Pi)$, θὰ εἶναι καὶ $AB\perp(\Pi)$ (§ **180**, β'). Ἑπομένως θὰ εἶναι $AB\perp(\varepsilon_1)$. Δηλ. ἡ $(\varepsilon_1)$ τέμνει καθέτως μίαν παράλληλον τῆς $(\varepsilon_2)$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ εἶναι ὀρθογώνιοι πρὸς ἀλλήλας.

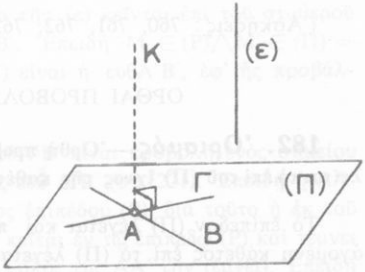


Σχ. 218

ii) Ἔστωσαν αἱ ὀρθογώνιοι καὶ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$. Διὰ σημείου Μ τῆς $(\varepsilon_1)$ ἂς φέρωμεν κάθετον ΜΚ ἐπὶ τὴν $(\varepsilon_2)$ (σχ. 219) καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς Κ ἂς φέρωμεν εὐθεῖαν $(\eta)//(\varepsilon_1)$. Αἱ παράλληλοι (η) καὶ $(\varepsilon_1)$



Σχ. 219



Σχ. 220

ὁρίζουν ἐπίπεδον (Ρ). Ἔχομεν: $(\varepsilon_2)\perp(\eta)$, διότι αἱ $(\varepsilon_2)$ καὶ $(\varepsilon_1)$ εἶναι ὀρθογώνιοι (βλ. (Θ) ἐδαφ. β'), καθὼς καὶ $(\varepsilon_2)\perp MK$ (ἐκ κατασκευῆς). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $(\varepsilon_2)\perp(P)$. Ἤτοι διὰ τῆς $(\varepsilon_1)$ διέρχεται ἐπίπεδον $(P)\perp(\varepsilon_2)$.

Τέλος, ἂν αἱ ὀρθογώνιοι $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$ εἶναι καὶ ὁμοεπίπεδοι, πάλιν προφανῶς τὸ θεώρημα ἰσχύει.

ε') Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

**Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, τότε εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου καί**

**ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, τότε δι' ἑκάστης τούτων διέρχεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.**

ς') **Καθετότης εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.** (Θ) — **Μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον, ἂν εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο** $\boxed{\text{τεμνομένας}}$ **εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου.** (Σχ. 220).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω εὐθεῖα (ε) ὀρθογώνιος πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἂν φέρωμεν ἐκ τοῦ Α εὐθεῖαν ΑΚ//(ε), τότε :

ΑΚ⊥ΑΒ, διότι ΑΒ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν (ε) (βλ. ἐδ. β΄) καὶ ΑΚ⊥ΑΓ, διότι ΑΓ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν (ε).

Ἐκ τούτων ἕπεται ΑΚ⊥(Π) καί, ἐπειδὴ ΑΚ//(ε), ἕπεται (§ **180**, β΄) ὅτι (ε)⊥(Π).

ζ΄) **Συμβολισμοί.** Ἐὰν $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ δύο εὐθεῖαι τοῦ χώρου, τότε: $(ε_1)⊥(ε_2)$ συμβολίζει ὅτι αἱ $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ **τέμνονται** καθέτως.

Ἰσχύει δὲ ἡ συνεπαγωγή : $(ε_1)⊥(ε_2) \Rightarrow (ε_1)$ὀρθογ.$(ε_2)$.

Ἡ σχέσις : $(ε_1)$ὀρθογ.$(ε_2)$ εἶναι γενικωτέρα τῆς $(ε_1)⊥(ε_2)$, διότι περιέχει καὶ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν αἱ $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ εἶναι ὁμοεπίπεδοι - ὀρθογώνιοι (κάθετοι) καὶ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν αἱ $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ εἶναι ἀσύμβατοι - ὀρθογώνιοι. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν αἱ $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ λέγονται καὶ *ἀσυμβάτως κάθετοι.* Πλὴν ὅμως, ὅταν ἐργαζώμεθα μὲ ὀρθογωνίους εὐθείας, ἡ διάκρισις αὐτὴ εἰς καθέτους καὶ ἀσυμβάτως καθέτους δὲν ὠφελεῖ καὶ δὲν χρειάζεται νὰ γίνεται.

(Ἀσκήσεις : 760, 761, 762, 763, 764).

## ΟΡΘΑΙ ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

**182. Ὁρισμός.—Ὀρθὴ προβολὴ σημείου Μ ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ ἐπὶ τοῦ (Π) ἴχνος τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ (Π).**

Τὸ ἐπίπεδον (Π) λέγεται καὶ **προβολικὸν ἐπίπεδον,** ἡ δὲ ἐκ τοῦ Μ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) λέγεται **προβάλλουσα** τὸ Μ.

Συνήθως ἀντὶ «ὀρθὴ προβολὴ» λέγομεν ἁπλῶς «προβολὴ» τοῦ Μ ἐπὶ τὸ (Π). Διότι ναὶ μὲν ὑπάρχουν καὶ πλάγιαι προβολαὶ (ἐπιτελούμεναι διὰ παραλλήλων πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν πλαγίαν ὡς πρὸς τὸ (Π)), ἀλλὰ κατὰ κανόνα δὲν θὰ κάμωμεν χρῆσιν αὐτῶν.

— **Προβολὴ σχήματος (σημειοσυνόλου) F ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ σύνολον F΄ τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ F ἐπὶ τὸ (Π).** Τὸ F΄ εἶναι ἓν ἐπίπεδον σχῆμα ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου.

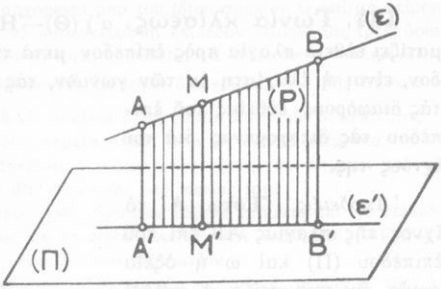
**183. Προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον.** α΄) Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, ἡ προβολή της εἶναι προφανῶς ἓν σημεῖον.

**β΄) (Θ) —Ἡ προβολὴ εὐθείας ὄχι καθέτου ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον εἶναι εὐθεῖα.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω (ε) εὐθεῖα καὶ (Π) ἐπίπεδον τοῦ χώρου. Ἐὰν ἡ (ε)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π), ἡ προβολή της ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι ἡ ἰδία ἡ (ε). Ἐὰν ἡ (ε) δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π), ἂς λάβωμεν ἓν σημεῖον αὐτῆς, τὸ Α (σχ. 221), μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ ἂς φέρωμεν τὴν προβολήν του Α΄. Ἡ προβάλλουσα ΑΑ΄ καὶ ἡ εὐθεῖα (ε) ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον (Ρ) ≡ ΕπιπΑ΄ΑΒ, ὅπου Β ἓν δεύτερον σημεῖον τῆς (ε).



Σχ. 221

Ἔστω τώρα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς (ε) καὶ Μ΄ ἡ προβολή του ἐπὶ τὸ (Π). Ἐπειδὴ αἱ προβάλλουσαι ΑΑ΄, ΜΜ΄ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (§ **180**, γ΄), διὰ τοῦτο ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον Α΄ΑΜΜ΄, τὸ ὁποῖον ὡς ἔχον μετὰ τοῦ (Ρ) κοινὰ τὰ σημεῖα Α΄, Α, Μ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας (διότι ΑΜ ὄχι⊥(Π)) συμπίπτει μὲ τὸ (Ρ). Ὥστε ἡ ΜΜ΄ καθὼς καὶ **πᾶσαι αἱ προβάλλουσαι** τὰ σημεῖα τῆς (ε) κεῖνται ἐπὶ τοῦ σταθεροῦ ἐπιπέδου (Ρ) ≡ ΕπιπΑ΄ΑΒ ≡ ΕπιπΑ΄ΑΒΒ΄. Ἐπειδὴ Μ΄ ∈ (Ρ)∧Μ΄ ∈ (Π) ⇒ Μ΄∈(Ρ) ∩ (Π). Ἡ τομὴ τῶν (Ρ) καὶ (Π) εἶναι ἡ ευθΑ΄Β΄, ἐφ' ἧς προβάλλονται ὅλα τὰ σημεῖα τῆς (ε).

**Ἀντιστρόφως** : Πᾶν σημεῖον τῆς ευθΑ΄Β΄ εἶναι προβολὴ ἑνὸς σημείου τῆς (ε). Πράγματι, ἔστω σημεῖον Μ΄ τῆς ευθ Α΄Β΄ (σχ. 221). Ἐπειδὴ ἡ ΑΑ΄ καὶ τὸ Μ΄ κεῖνται ἐπὶ τοῦ προβάλλοντος ἐπιπέδου (Ρ), διὰ τοῦτο ἡ ἐκ τοῦ Μ΄ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΑ΄ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ρ) καὶ τέμνει τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Μ (διότι ἡ παράλληλός της ΑΑ΄ τὴν τέμνει). Ἐπειδὴ ΑΑ΄⊥(Π) καὶ Μ΄Μ//ΑΑ΄ ⇒ ΜΜ΄⊥(Π). Ἤτοι τὸ Μ΄ εἶναι προβολὴ τοῦ Μ. Ὅθεν τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς (ε) ἀπαρτίζει τὴν εὐθεῖαν Α΄Β΄ (σχ. 221). ὅπου Α΄,Β΄ αἱ προβολαὶ τῶν Α καὶ Β.

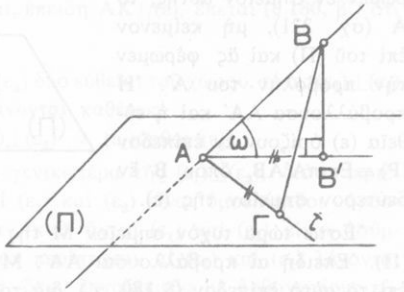
**Παρατήρησις 1η. Ἡ προβολὴ τμήματος ΑΒ ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι τμῆμα Α΄Β΄.**

**Παρατήρησις 2α. Κατὰ τὴν προβολὴν εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον ὁ λόγος δύο διανυσμάτων ἐπὶ τῆς εὐθείας διατηρεῖται καὶ εἰς τὴν προβολὴν καὶ εἰδικώτερον τὸ μέσον τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς.** Διότι μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ ἔχομεν (σχ. 221) :

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overrightarrow{M'A'}}{\overrightarrow{M'B'}}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**184. Γωνία κλίσεως.** α΄) (Θ)—**Ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἐπίπεδον μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας ἡ πλαγία σχηματίζει μὲ τὰς διαφόρους εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ἴχνους της.**



Σχ. 222

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Α τὸ ἴχνος τῆς πλαγίας ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ ω ἡ ὀξεῖα γωνία, ἣν σχηματίζει ἡ ευθΑΒ μετὰ τῆς προβολῆς της ΑΒ′ (σχ. 222).

Ἔστω At τυχοῦσα ἄλλη ἡμιευθεῖα τοῦ (Π). Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{\omega} < t\widehat{AB}$. Πρὸς τοῦτο ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας At τμῆμα ΑΓ=ΑΒ′ καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΒ′ καὶ ΑΒΓ. Δι' αὐτὰ ἰσχύουν:

{ΑΒ=ΑΒ, ΑΒ′=ΑΓ (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ ΒΒ′<ΒΓ (§ 175)}.

Ἑπομένως αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν ΒΒ′ καὶ ΒΓ γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι, ἤτοι $B'\widehat{AB} < \Gamma\widehat{AB}$, δηλ.: $\widehat{\omega} < t\widehat{AB}$ ὅ.ἔ.δ.

β΄) **Ὁρισμός. — Δοθέντος ἐπιπέδου (Π) καὶ εὐθείας (ε) πλαγίας πρὸς τὸ (Π), καλεῖται «γωνία κλίσεως τῆς (ε) πρὸς τὸ (Π)» ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ (ε) μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ (Π).**

Ἡ γωνία κλίσεως λέγεται καὶ «γωνία τῆς εὐθείας μετὰ τοῦ ἐπιπέδου» καὶ ἔχει μίαν «ἐλαχιστικὴν ἰδιότητα», ὅπως ἀπεδείχθη εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα. Ἐπίσης εἶναι καὶ **συμπληρωματικὴ** τῆς ὀξείας γωνίας, ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀγομένης εἰς τὸ ἴχνος Α.

γ΄) Εὐθεῖα λέγεται **ἴσον κεκλιμένη** πρὸς δύο ἐπίπεδα, ὅταν ἔχῃ ἴσας γωνίας κλίσεως πρὸς τὰ ἐπίπεδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

770. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν σταθεροῦ σημείου ἐπὶ τὰ διάφορα ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ δοθείσης εὐθείας.

771. Ἐὰν τριγώνου αἱ κορυφαὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ (Π) ἰσοῦται μὲ τὸν μέσον ὅρον τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ (Π).

772. Ἐὰν ὀρθῆς γωνίας αἱ πλευραὶ τέμνουν ἐπίπεδον (Π), νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ προβολή της ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι ἀμβλεῖα γωνία (ἢ πεπλατυσμένη).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

773. Δίδονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ ἰδίου σημείου Ο καὶ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον τέμνον τὰς τρεῖς δοθείσας ἡμιευθείας καὶ ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον αἱ τρεῖς ἡμιευθεῖαι νὰ εἶναι ἴσον κεκλιμέναι.

774. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρισθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ προβολὴ τῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ νὰ εἶναι ὀρθὴ γωνία. Συνθῆκαι δυνατότητος.

775. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ, ἀπέχοντα τοῦ (Π) ἀποστάσεις ΑΑ′ = α καὶ ΒΒ′ = β. Ζητεῖται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ (Π), ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ τμήματα ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ φαίνονται ὑπὸ γωνίας ἴσας.

776. Εἰς τὰς κορυφὰς Α,Β,Γ τριγ. ΑΒΓ ὑψοῦμεν κάθετα τμήματα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου του, τά : ΑΑ′ = ΒΓ, ΒΒ′ = ΑΓ, ΓΓ′ = = ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρ.Α′Β′Γ′ εἶναι πάντοτε ὀξυγώνιον.

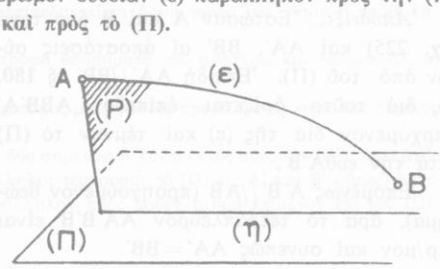
777. Ἐὰν εὐθεῖα, πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, σχηματίζῃ μετ' αὐτοῦ γωνίαν ω, τότε καὶ πᾶσα παράλληλός της ἔχει ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον γωνίαν κλίσεως ἴσην πρὸς ω.

## ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

**185. Ὁρισμὸς καὶ θεώρημα.** Ἐὰν εὐθεῖα οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχῃ μὲ ἓν ἐπίπεδον, τότε λέγεται **παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον.** Ἡ ὕπαρξις εὐθειῶν παρ/λων πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον δεικνύεται διὰ τοῦ κάτωθι θεωρήματος.

**(Θ) — Ἐὰν ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) χαράξωμεν εὐθεῖαν (η) καὶ ἐκ σημείου Α μὴ κειμένου ἐπὶ τοῦ (Π) φέρωμεν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον πρὸς τὴν (η), τότε ἡ (ε) εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ (Π).**

*Ἀπόδειξις.* Αἱ δύο παράλληλοι (ε) καὶ (η) (σχ. 223) ὁρίζουν ἐπίπεδον (Ρ) μὴ συμπῖπτον μὲ τὸ (Π), διότι Α∉(Π). Ἡ (η) ἀνήκουσα καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν. Ἡ (ε) δὲν δύναται νὰ τέμνῃ τὸ (Π) εἰς σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς (η), διότι (ε)//(η). Οὔτε δύναται ἡ (ε) νὰ τέμνῃ τὸ (Π) εἰς σημεῖον Β∉(η) (σχ. 223), διότι τότε τὰ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) θὰ εἶχον καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον Β, ἔξω τῆς εὐθείας τομῆς των, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ (ε) οὐδαμοῦ συναντᾷ τὸ (Π).



Σχ. 223

Γράφομεν : $\boxed{(\varepsilon)//(\Pi)}$.

Βλέπομεν ὅτι **διὰ τοῦ Α ἄγονται ἄπειροι παράλληλοι πρὸς τὸ (Π),** διότι δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν ἀπείρους εὐθείας (η) ἐπὶ τοῦ (Π).

**Παρατήρησις.** Ὅπως εἰς τὴν παραλληλίαν εὐθειῶν θεωροῦμεν *ὑπὸ γενικευμένην ἔννοιαν* ὅτι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι εἶναι παράλληλοι, ἔτσι



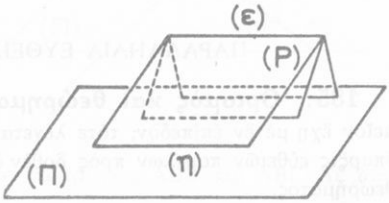
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐδῶ ἐπεκτείνομεν τὴν ἔννοιαν τῆς παραλληλίας θεωροῦντες πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π) ὡς παράλληλον πρὸς τὸ (Π). Τότε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι :

**Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν ἑνὸς ἐπιπέδου, τότε εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον.**

**186. Περαιτέρω ἰδιότητες.** α΄) (Θ) — **Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), τότε πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς (ε) καὶ τέμνον τὸ (Π) τὸ τέμνει κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν (ε).**

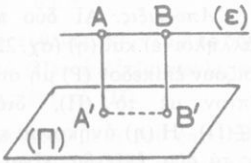
*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς (ε) καὶ τέμνον τὸ (Π) κατὰ εὐθεῖαν (η) (σχ. 224). Ἡ (ε) καὶ ἡ (η) εἶναι ὁμοεπίπεδοι καὶ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι (ε)//(Π), ἄρα αἱ (ε) καὶ (η) εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 224

β΄) (Θ) — **Ὅλα τὰ σημεῖα εὐθείας παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο τυχόντα σημεῖα εὐθείας (ε)//(Π) (σχ. 225) καὶ ΑΑ΄, ΒΒ΄ αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ (Π). Ἐπειδὴ ΑΑ΄//ΒΒ΄ (§ **180**, γ΄), διὰ τοῦτο ὁρίζεται ἐπίπεδον ΑΒΒ΄Α΄ διερχόμενον διὰ τῆς (ε) καὶ τέμνον τὸ (Π) κατὰ τὴν ευθΑ΄Β΄.

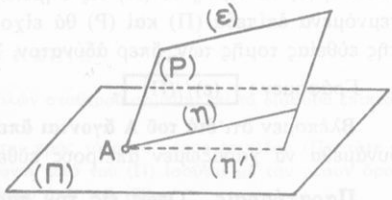


Σχ. 225

Ἑπομένως Α΄Β΄//ΑΒ (προηγούμενον θεώρημα), ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΑ΄Β΄Β εἶναι παρ/μον καὶ συνεπῶς ΑΑ΄=ΒΒ΄.

γ΄) (Θ) — **Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π) καὶ ἐκ σημείου Α τοῦ (Π) ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν (ε), τότε ἡ ἀχθεῖσα ἐκ τοῦ Α παράλληλος κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π).**

*Ἀπόδειξις.* Ἂν ἡ διὰ τοῦ Α ἀγομένη εὐθεῖα (η)//(ε) (σχ. 226) δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ (Π), τότε τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τῶν δύο παρ/λων θὰ ἔτεμνε τὸ (Π) κατὰ εὐθεῖάν τινα (η΄)≠(η) καὶ θὰ ἦτο (η΄) // (ε) κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφ. α΄).



Σχ. 226

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ Α δύο παραλλήλους πρὸς τὴν (ε), ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὸ ἀξίωμα τῶν παραλλήλων. Ἑπομένως (η)∈(Π).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

778. Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πρὸς εὐθεῖαν (ε), τότε καὶ ἡ τομή των εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν (ε).

779. Διὰ δοθείσης εὐθείας διέρχεται ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, ἀσύμβατον τῆς πρώτης.

780. Ἐὰν διὰ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἀχθοῦν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα, τότε ἡ τομή των εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς εὐθείας ταύτας.

781. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδονται δύο εὐθεῖαι Ox, Oy καὶ ἐκτὸς τοῦ (Π) δύο σημεῖα A καὶ B. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς AB καὶ τέμνον τὴν Ox εἰς M καὶ τὴν Oy εἰς N οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι AM//BN. Ποίαν συνθήκην πρέπει νὰ πληροῖ ἡ ευθ AB, ἵνα τὸ τετράπλευρον AMNB εἶναι παραλληλόγραμμον;

782. Δοθέντος ἐπιπέδου (Π), εὐθείας (ε) παραλλήλου πρὸς αὐτὸ καὶ σημείου A, νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ A εὐθεῖα τέμνουσα τὴν (ε) καὶ τὸ (Π) οὕτως, ὥστε τὸ μεταξὺ τῆς (ε) καὶ (Π) τμῆμα αὐτῆς νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθέν.

783. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι τέμνουσαι τὸ (Π). Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τμῆμα δεδομένου μήκους ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ παράλληλον πρὸς τὸ (Π).

784. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ δοθείσης εὐθείας καὶ ἰσάκις ἀπέχον ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα.

785. α') Ἐὰν ὀρθῆς γωνίας μία πλευρὰ εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ὀρθὴ γωνία (ἐφ' ὅσον ἡ προβολὴ εἶναι γωνία).

β') Διατυπώσατε τὰ δύο ἀντίστροφα θεωρήματα τοῦ ἀνωτέρω καὶ δείξατε ὅτι ἀληθεύουν.

786. Ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προβάλλεται κατὰ τὴν διχοτόμον τῆς προβολῆς τῆς γωνίας;

787. Δοθέντος ἐπιπέδου (Π) καὶ δύο σημείων A καὶ B ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένων, νὰ ἀχθοῦν διὰ τῶν A καὶ B δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνουσαι τὸ (Π) εἰς A' καὶ B' οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα A'B' νὰ εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς δοθὲν τμῆμα κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π).

## ΚΟΙΝΗ ΚΑΘΕΤΟΣ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

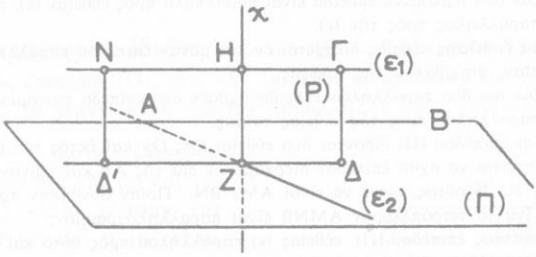
**187. Ὁρισμὸς καὶ Θεώρημα.** — **Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν καλεῖται «κοινὴ κάθετος» αὐτῶν μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει καὶ τὰς δύο ἀσυμβάτους καθέτως.**

Ἡ ὕπαρξις καὶ αἱ ἰδιότητες τῆς κοινῆς καθέτου ἐμφαίνονται εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

**(Θ) — Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. i) Ὑπάρχει κοινὴ κάθετος αὐτῶν. ii) Εἶναι μία καὶ μόνη. iii) Τὸ μεταξὺ τῶν δύο ἀσυμβάτων τμῆμα τῆς κοινῆς καθέτου εἶναι τὸ βραχύτατον τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τὰς δύο ἀσυμβάτους καὶ καλεῖται «ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν δύο ἀσυμβάτων».**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

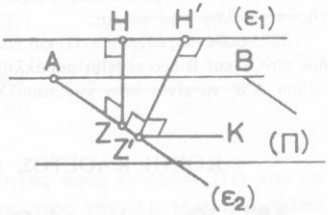
*Ἀπόδειξις.* i) Ἡ ὕπαρξις τῆς κοινῆς καθέτου δύο ἀσυμβάτων ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) ἀποδεικνύεται διὰ κατασκευῆς. Ἀπὸ τυχόντος σημείου Α τῆς ($\varepsilon_2$) φέρομεν ευθΑΒ//($\varepsilon_1$). Ἡ ΑΒ καὶ ἡ ($\varepsilon_2$) ὁρίζουν ἐπίπεδον (Π)//($\varepsilon_1$) (§ **185**). Ἐκ σημείου Γ τῆς ($\varepsilon_1$) φέρομεν τὴν ΓΔ⊥(Π), ὅπου Δ∈(Π). Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν ευθΔΔ΄//($\varepsilon_1$). Ἡ ΔΔ΄ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π) (§ **186**, γ΄) καὶ οὖσα




Σχ. 227

παράλληλος πρὸς τὴν ($\varepsilon_1$) δὲν εἶναι παρ/λος πρὸς τὴν ἀσύμβατον ($\varepsilon_2$). Ἄρα ἡ ΔΔ΄ τέμνει τὴν ($\varepsilon_2$), ἔστω εἰς Ζ. Ἐπειδὴ τὸ Ζ καὶ τὸ ΓΔ κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ρ) τῶν δύο παραλλήλων, διὰ τοῦτο, ἂν φέρωμεν ἐκ τοῦ Ζ εὐθεῖαν Ζx παρ/λον πρὸς τὴν ΓΔ, θὰ κεῖται καὶ αὐτὴ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ρ) καὶ ἐπειδὴ τέμνει τὴν ΔΔ΄, θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της ($\varepsilon_1$), ἔστω εἰς Η. Ἡ εὐθεῖα ΖΗ τέμνει λοιπὸν καὶ τὰς δύο ἀσυμβάτους ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) καὶ μάλιστα καθέτως. Διότι, ΓΔ⊥(Π)⋀ΗΖ//ΓΔ ⇒ ΗΖ⊥(Π) ⇒ ΗΖ⊥($\varepsilon_2$). Ἐπίσης ΗΖ⊥(Π) ⇒ ΗΖ⊥ΔΔ΄ καὶ ἐπειδὴ ΔΔ΄//($\varepsilon_1$) ⇒ ⇒ ΗΖ⊥($\varepsilon_1$). Ὑπάρχει λοιπὸν κοινὴ κάθετος, ἀφοῦ κατεσκευάσθη.

ii) Ἐκτὸς τῆς κατασκευασθείσης κοινῆς καθέτου ΗΖ (σχ. 227) δὲν ὑπάρχει ἄλλη κοινὴ ⊥ τῶν ἀσυμβάτων ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$). Ἂν ὑπῆρχε, δὲν θὰ διήρχετο διὰ τοῦ Η, διότι τότε θὰ εἴχομεν δύο καθέτους ἐκ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ($\varepsilon_2$). Οὔτε θὰ διήρχετο διὰ τοῦ Ζ. Ἑπομένως, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη κοινὴ κάθετος, ἔστω ἡ Η΄Ζ΄, θὰ ἔτεμνε τὰς ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) εἰς σημεῖα Η΄ καὶ Ζ΄ ἀντιστοίχως, διάφορα τῶν Η καὶ Ζ (σχ. 228). Ἂν φέρωμεν διὰ τοῦ Ζ΄ εὐθεῖαν Ζ΄Κ//($\varepsilon_1$), τότε ἡ Ζ΄Κ∈(Π) (§ **186**, γ΄). Ἐπειδὴ Ζ΄Η΄⊥($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_1$)//Ζ΄Κ ⇒ Ζ΄Η΄⊥Ζ΄Κ. Εἶναι ἐπίσης Η΄Ζ΄⊥($\varepsilon_2$) (ὡς κοινὴ κάθετος), ἄρα ἀφοῦ Η΄Ζ΄⊥($\varepsilon_2$) καὶ Η΄Ζ΄⊥ Ζ΄Κ ⇒ Η΄Ζ΄⊥(Π). Ἀφοῦ ΗΖ⊥(Π)⋀Η΄Ζ΄⊥(Π) ⇒ Η΄Ζ΄//ΗΖ.




Σχ. 228

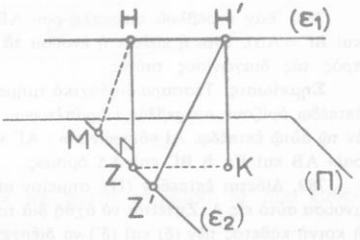
Δηλ. ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη κοινὴ κάθετος, θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην. Ἀλλὰ τότε θὰ ὥριζον ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ ἔκειντο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αἱ ΗΗ′ καὶ ΖΖ′, δηλ. αἱ ἀσύμβατοι ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) θὰ εὑρίσκοντο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ ἄτοπον.

iii) Τὸ τμῆμα ΗΖ εἶναι μικρότερον οἱουδήποτε ἄλλου τμήματος συνδέοντος ἓν σημεῖον τῆς ($ε_1$) μὲ ἓν σημεῖον τῆς ($ε_2$).

Κατὰ πρῶτον τὸ ΗΖ εἶναι μικρότερον παντὸς τμήματος ΗΜ συνδέοντος τὸ Η μὲ σημεῖον Μ τῆς ($ε_2$) διάφορον τοῦ Ζ, διότι τὸ ΗΖ εἶναι ⊥ ($ε_2$), ἐνῷ τὸ ΗΜ εἶναι πλάγιον πρὸς τὴν ($ε_2$) (σχ. 229). Ὁμοίως τὸ ΗΖ εἶναι μικρότερον παντὸς τμήματος συνδέοντος τὸ Ζ μὲ σημεῖον τῆς ($ε_1$) διάφορον τοῦ Η. Τέλος ἔστω τμῆμα Η′Ζ′ συνδέον σημεῖον Η′ τῆς ($ε_1$) διάφορον τοῦ Η μὲ σημεῖον Ζ′ τῆς ($ε_2$) διάφορον τοῦ Ζ. Τότε τὸ Η′Ζ′ εἶναι πλάγιον ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), διότι, ἂν ἦτο κάθετον, θὰ ὥριζεν, ὡς εἴδομεν προηγουμένως, μετὰ τοῦ ΗΖ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ θὰ ἔκειντο αἱ ἀσύμβατοι. Τὸ πλάγιον τμῆμα Η′Ζ′ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ καθέτου τμήματος Η′Κ (§ **175**). Ἐπειδὴ δὲ Η′Κ = ΗΖ (§ **186**, β′), διὰ τοῦτο Η′Ζ′ > ΗΖ. Ἤτοι ΗΖ < Η′Ζ′.



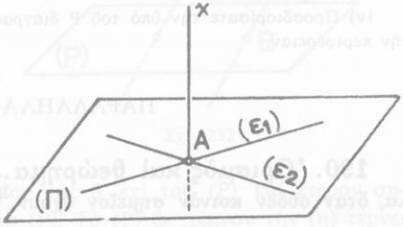
Σχ. 229

Τελικῶς, τὸ τμῆμα ΗΖ τῆς κοινῆς καθέτου εἶναι μικρότερον παντὸς ἄλλου τμήματος συνδέοντος τὰς δύο ἀσυμβάτους.

**188. Πόρισμα. Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου τῆς μιᾶς ἀπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ἄλλης καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν πρώτην.**

(βλ. σχ. 227, ὅπου ΓΔ = ΗΖ = ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$)).

**189. Περίπτωσις συμβατῶν εὐθειῶν.** Ἐὰν αἱ δύο εὐθεῖαι ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Α, τότε ὑπάρχει καὶ πάλιν μία καὶ μόνη εὐθεῖα τέμνουσα καθέτως ἀμφοτέρας (ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν), ἡ ὁποία εἶναι ἡ εἰς τὸ Α ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν (σχ. 230). Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μηδενική.



Σχ. 230

Ἐὰν αἱ δύο εὐθεῖαι ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) εἶναι παράλληλοι, τότε πᾶσα εὐθεῖα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ἐπιπέδου των, κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην, δηλ. εἶναι κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

Ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων εἶναι καὶ ἡ «ἐλαχίστη ἀπόστασις» αὐτῶν.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

788. Ἐὰν στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι (ΑΒ=ΓΔ καὶ ΒΓ=ΑΔ), τότε ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του εἶναι κοινὴ κάθετος πρὸς τὰς διαγωνίους ταύτας.

**Σημείωσις.** Τέσσαρα διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ μὴ κείμενα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὁρίζουν *«στρεβλὸν τετράπλευρον»* ΑΒΓΔ μὲ κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Αἱ «διαγώνιοι» : ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἀσύμβατοι καὶ αἱ «ἀπέναντι πλευραὶ» ΑΒ καὶ ΓΔ ἢ ΒΓ καὶ ΑΔ ὁμοίως.

789. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον αὐτοῦ Β καὶ εὐθεῖα (δ) πλαγία πρὸς τὸ (Π) τέμνουσα αὐτὸ εἰς Α. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Β εὐθεῖα (δ') τοῦ ἐπιπέδου (Π) τοιαύτη, ὥστε ἡ κοινὴ κάθετος τῶν (δ) καὶ (δ') νὰ διέρχεται i) διὰ τοῦ Α ἢ ii) διὰ τοῦ Β.

790. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) καὶ ὀρθογώνιος πρὸς ἄλλην εὐθεῖαν (η).

791. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ εὐθεῖα (ε) μὴ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τοῦ στρεβλοῦ ἐν γένει τετραπλεύρου ΑΒΓΔ νὰ εἶναι i) ὀρθογώνιον ἢ ii) ρόμβος.

792. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\text{ΑΒορθογ.ΓΔ} \iff \text{ΑΓ}^2-\text{ΑΔ}^2=\text{ΒΓ}^2-\text{ΒΔ}^2.$$

(Δύο τμήματα λέγονται *ὀρθογώνια πρὸς ἄλληλα*, ὅταν ἀνήκουν εἰς ὀρθογωνίους εὐθείας).

793. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ε) πλαγία ὡς πρὸς τὸ (Π). Νὰ δειχθῇ ὅτι δύο εὐθεῖαι τοῦ (Π) ὀρθογώνιοι πρὸς τὴν (ε) εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.

794. Εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς διαμέτρου ΑΒ περιφερείας ὑψοῦμεν τμῆμα ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας καὶ ἔστω Ρ ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ευθΓΜ. Ἔστω ἐπίσης Κ ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ευθΓΒ.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΡὀρθογ.ΜΒ.

ii) ΑΡ⊥Επιπ.ΓΜΒ.

iii) ΓΒ⊥Επιπ.ΑΡΚ.

iv) Προσδιορίσατε τὴν ὑπὸ τοῦ Ρ διαγραφομένην γραμμήν, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν.

## ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

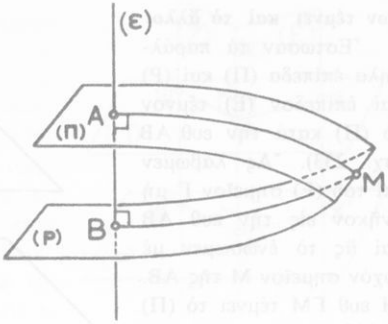
**190. Ὁρισμὸς καὶ θεώρημα.— Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ὅταν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.**

Ἡ ὕπαρξις παραλλήλων ἐπιπέδων ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ κάτωθι θεωρήματος.

**(Θ) — Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω εὐθεῖα (ε) καὶ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) κάθετα ἐπὶ τὴν (ε) εἰς Α καὶ Β ἀντιστοίχως (σχ. 231). Ἐὰν ταῦτα εἶχον κοινόν τι σημεῖον Μ, τότε ἡ ευθ ΜΑ θὰ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ ἡ ευθ ΜΒ ἐπὶ τοῦ (Ρ) (§ **163 iii**).



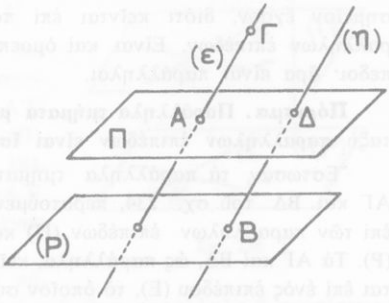
Σχ. 231

Ἡ (ε) ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ευθ ΜΑ καὶ ἡ (ε) ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ) θὰ ἦτο κάθετος καὶ καὶ ἐπὶ τὴν ευθ ΜΒ. Δηλαδὴ ΜΑ⊥(ε), ΜΒ⊥(ε), ἤτοι θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ δύο καθέτους ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἑπομένως τὰ (Π) καὶ (Ρ) οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν, δηλ. κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν εἶναι παράλληλα. Γράφομεν $\boxed{(\Pi) // (P)}$.

**191.** (Θ) — **Πᾶσα εὐθεῖα τέμνουσα τὸ ἓν ἐκ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ εὐθεῖα (ε) τέμνουσα τὸ (Π) εἰς Α (σχ. 232). Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ (Ρ) τυχὸν σημεῖον Β καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν εὐθεῖαν (η) παράλληλον πρὸς τὴν (ε). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ (η) τέμνει τὸ (Ρ) εἰς Β. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ (η) περιέχει σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ (Ρ) (§ **165**, β΄). Πράγματι τὸ ἐπίπεδον (Π) ὡς τέμνον τὴν (ε) τέμνει καὶ τὴν παράλληλόν της (η) (§ **180**, α΄), ἔστω εἰς Δ. Τὸ Δ κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π) δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ παραλλήλου πρὸς τὸ (Π) ἐπιπέδου (Ρ). Ἡ (η) ἔχουσα ἓν σημεῖόν της Β ἐπὶ τοῦ (Ρ) καὶ ἕτερον σημεῖόν της Δ ἐκτὸς τοῦ (Ρ) τέμνει τὸ (Ρ). Τὸ (Ρ) ὡς τέμνον τὴν (η) τέμνει καὶ τὴν παράλληλόν της (ε) ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ (ε) τέμνει τὸ (Ρ). ὅ.ἔ.δ.



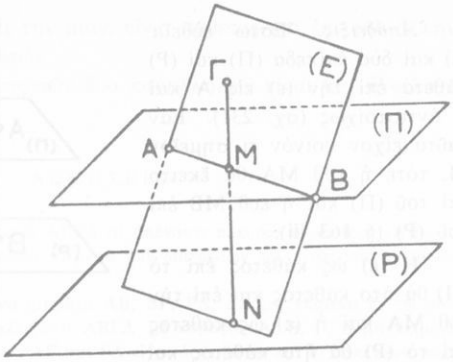
Σχ. 232

**192.** (Θ) — **Πᾶν ἐπίπεδον τέμνον τὸ ἓν ἐκ δύο παραλλήλων ἐπιπέ-**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**δων τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.**

Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ ἐπίπεδον (Ε) τέμνον τὸ (Π) κατὰ τὴν ευθ ΑΒ (σχ. 233). Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τοῦ (Ε) σημεῖον Γ μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν ευθ ΑΒ καὶ ἂς τὸ ἑνώσωμεν μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ΑΒ. Ἡ ευθ ΓΜ τέμνει τὸ (Π) (§ **165**, β΄), ἄρα τέμνει καὶ τὸ (Ρ) (§ **191**) εἴς τι σημεῖον Ν. Τὰ ἐπίπεδα (Ε) καὶ (Ρ) δὲν σύμπίπτουν, διότι τὸ (Ε) περιέχει σημεῖον Μ∉(Ρ) καὶ ἔχουν καὶ ἓν κοινὸν σημεῖον (τὸ Ν), ἄρα τέμνονται (§ **167**), ὅ.ἔ.δ.

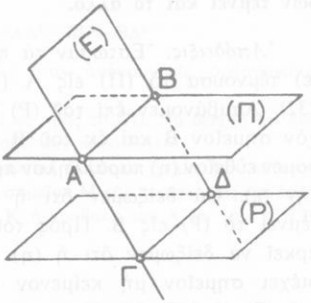


Σχ. 233

**193.** (Θ) — **Αἱ τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.**

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) ὑπὸ ἑνὸς τρίτου ἐπιπέδου (Ε) (σχ. 234).

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν, διότι κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων. Εἶναι καὶ ὁμοεπίπεδοι· ἄρα εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 234

**Πόρισμα. Παράλληλα τμήματα μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἴσα.**

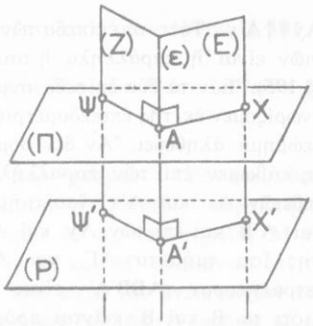
Ἔστωσαν τὰ παράλληλα τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ σχ. 234, περατούμενα ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ). Τὰ ΑΓ καὶ ΒΔ, ὡς παράλληλα, κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (Ε), τὸ ὁποῖον συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τέμνει τὰ (Π) καὶ (Ρ) κατὰ παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐπειδὴ ΑΓ//ΒΔ καὶ ΑΒ//ΓΔ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι παρ/μον καὶ συνεπῶς ΑΓ = ΒΔ.

**194.** (Θ) — **Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω (ε) ⊥ (Π) καὶ (Π)//(Ρ) (σχ. 235). Ἡ (ε) τέμνουσα τὸ (Π), ἔστω εἰς Α, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ (Ρ), ἔστω εἰς Α΄ (§ **191**).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂν φέρωμεν διὰ τῆς (ε) ἐπίπεδον (Ε), τοῦτο θὰ τέμνῃ τὸ (Π) κατά τινα εὐθεῖαν ΑΧ, ἄρα θὰ τέμνῃ καὶ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον (§ **192**) κατὰ εὐθεῖαν Α΄Χ΄ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΧ (§ **193**). Ἕτερον ἐπίπεδον (Ζ) διὰ τῆς (ε) διερχόμενον (βλ. § **165**, δ΄) θὰ τέμνῃ διὰ τοὺς ἰδίους λόγους τὰ (Π) καὶ (Ρ) κατὰ εὐθείας ΑΨ καὶ Α΄Ψ΄ παραλλήλους. Ἡ (ε) ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΧ ἀνήκουσαν εἰς τὸ (Π), ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον τῆς ΑΧ, τὴν Α΄Χ΄. Ὁμοίως ἡ (ε) ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΨ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της Α΄Ψ΄. Ἐκ τῶν : (ε)⊥Α΄Χ΄∈(Ρ), (ε)⊥Α΄Ψ΄∈(Ρ)⇒(ε)⊥(Ρ) (§ **171**,. γ΄), ὅ.ἔ.δ.

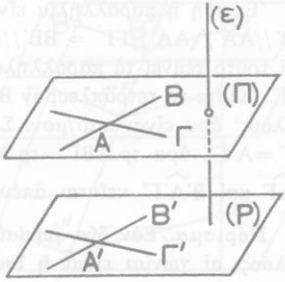


Σχ. 235

**Πόρισμα. Δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι παντοῦ ἰσαπέχοντα.**

Δηλ. ὅλα τὰ σημεῖα ἑκατέρου ἔχουν ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἑτέρου (βλ. § **193**, πόρισμα).

**195. Κριτήριον παραλληλίας δύο ἐπιπέδων.** (Θ) **Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα ἢ συμπίπτοντα, ἂν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας τοῦ ἄλλου.**



Σχ. 236

*Ἀπόδειξις.* Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 236) εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς Α΄Β΄, Α΄Γ΄ τοῦ (Ρ). Ἐὰν νοήσωμεν εὐθεῖαν (ε)⊥(Π), τότε (ε)ορθογ.ΑΒ∧(ε)ορθογΑΓ (§ **181**, ε΄). Ταῦτα συνεπάγονται, (ε)ορθογΑ΄Β΄ ∧(ε)ορθογ Α΄Γ΄ (§ **181** γ΄). Ἑπομένως (ε)⊥(Ρ) (§ **181**, ς΄).

Ἐπειδὴ τὰ (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ε), διὰ τοῦτο ἢ εἶναι παράλληλα ἢ συμπίπτουν.

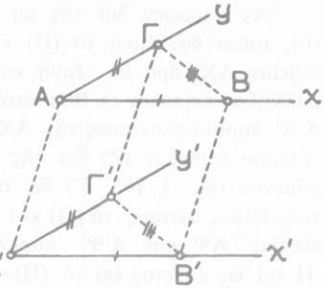
**Σημείωσις.** Ὑπὸ γενικευμένην ἔννοιαν τὰ συμπίπτοντα ἐπίπεδα δύνανται νὰ θεωροῦνται παρ/λα.

**196.** (Θ) — **Ἐὰν δύο γωνίαι τοῦ χώρου ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, τότε αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν αἱ γωνίαι $\widehat{xAy}$ καὶ $\widehat{x'A'y'}$ (σχ. 237) μὲ Αx↑↑Α΄x΄,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ay↑↑A′y′. Τότε τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο γωνιῶν εἶναι ἢ παράλληλα ἢ ταυτιζόμενα (§ **195**). Ἐὰν τὰ δύο ἐπίπεδα συμπίπτουν, γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας ὅτι τὸ θεώρημα ἀληθεύει. Ἂν δὲν συμπίπτουν, ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν Ax καὶ A′x′ ἴσα τμήματα AB καὶ A′B′ καὶ ἐπὶ τῶν Ay καὶ A′y′ ἐπίσης ἴσα τμήματα AΓ καὶ A′Γ′. Τὸ τετράπλευρον ABB′A′ εἶναι κυρτὸν. Διότι τὰ B καὶ B′ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ AA′ (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ A′AB′B), καθ' ὅσον αἱ Ax καὶ A′x′ εἶναι ὁμόρροποι. Ἐπίσης τὰ A καὶ A′ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ BB′, διότι καὶ αἱ ἀκτῖνες (B, A), (B′, A′) εἶναι ὁμόρροποι (ἀντίρροποι τῶν Ax, A′x′). Τὰ A καὶ B κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ A′B′, διότι ἄλλως τὸ τμῆμα AB θὰ ἔτεμνε τὴν ευθ A′B′, ἐνῷ εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτήν. Τέλος τὰ A′ καὶ B′ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ AB. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ABB′A′ ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους (AB//=A′B′), διὰ τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἑπομένως BB′//AA′. Διὰ τοὺς ἰδίους λόγους τὸ AΓΓ′A′ εἶναι παρ/μον καὶ συνεπῶς ΓΓ′//AA′.



Σχ. 237

Ἐπειδὴ ἡ παραλληλία εἶναι μεταβατικὴ σχέσις (§ **180**, δ′), διὰ τοῦτο BB′//AA′⋀AA′//ΓΓ′ ⇒ BB′//ΓΓ′. Ἄρα αἱ BB′ καὶ ΓΓ′ ὁρίζουν ἐπίπεδον καὶ τοῦτο τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατὰ εὐθείας παρ/λους, ἤτοι BΓ//B′Γ′. Ὥστε τὸ τετράπλευρον BΓΓ′B′ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους· ἄρα εἶναι παρ/μον. Συνεπῶς BΓ=B′Γ′. Εἶναι καὶ AB=A′B′ καὶ AΓ=A′Γ′, ἄρα τρ.ABΓ=τρ.A′B′Γ′. Εἰς τὰ ἴσα ταῦτα τρίγωνα αἱ γωνίαι $B\widehat{A}\Gamma$ καὶ $B'\widehat{A'}\Gamma'$ κεῖνται ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ἄρα εἶναι ἴσαι.

**Πόρισμα. Ἐὰν δύο γωνίαι τοῦ χώρου ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, αἱ γωνίαι εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.**

**197. Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.** — **Καλεῖται γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) μία ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) ἀγομένων ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου O τοῦ χώρου.**

Κατὰ κανόνα ἐκλέγομεν ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων γωνιῶν **τὴν ὄχι μεγαλυτέραν μιᾶς ὀρθῆς** (ἐκτὸς ἂν γίνεται μνεία περὶ τοῦ ἀντιθέτου).

Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἐκλογὴ τοῦ σημείου O δὲν ἐπηρεάζει τὴν γωνίαν τῶν δύο εὐθειῶν· οὔτε ἡ ἀντικατάστασις μιᾶς τούτων ὑπὸ μιᾶς παραλλήλου της (§ **180**, δ′). Προφανῶς ἡ γωνία

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δύο ἀσυμβάτων ὀρθογωνίων εὐθειῶν εἶναι ἴση πρὸς μίαν ὀρθὴν (§ **181**, γ΄ 2ον).

— Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζεται ἡ γωνία δύο *οἱωνδήποτε εὐθειῶν τοῦ χώρου.*

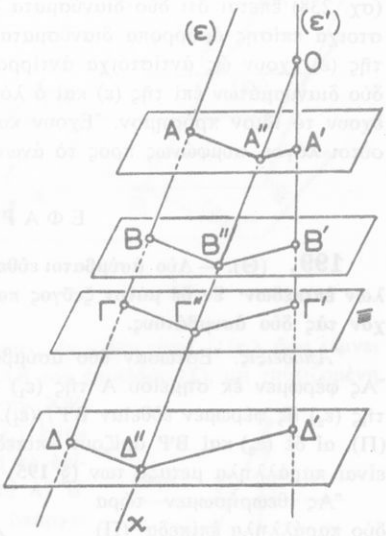
**198. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἐν τῷ χώρῳ.** —**Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄) τοῦ χώρου (ἀσύμβατοι ἢ μὴ) τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον ($\Pi_0$), ἀντιστοιχίσωμεν δὲ εἰς πᾶν σημεῖον Μ τῆς (ε) ἓν σημεῖον Μ΄ τῆς (ε΄) τοιοῦτον, ὥστε τὰ Μ καὶ Μ΄ νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου πρὸς τὸ ($\Pi_0$) ἐπίπεδου, τότε κατὰ τὴν ἀντιστοιχίαν ταύτην ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε τμημάτων κειμένων ἐπὶ τῆς (ε) ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων των τμημάτων ἐπὶ τῆς (ε΄).**

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄) εἶναι ὁμοεπίπεδοι, τὸ θεώρημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἀντίστοιχον τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, διότι αἱ τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν (ε) καὶ (ε΄) εἶναι παράλληλοι.

Ἔστωσαν τώρα δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄) τεμνόμεναι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἰς Α, Β, Γ, Δ ἡ πρώτη καὶ εἰς Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ ἀντιστοίχως ἡ δευτέρα (σχ. 238). Θὰ δείξωμεν ὅτι :

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}.$$

Πρὸς τοῦτο ἂς φέρωμεν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τῆς (ε΄) εὐθεῖαν Οx παράλληλον πρὸς τὴν (ε). Ἡ Οx θὰ τέμνῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα εἰς Α΄΄, Β΄΄, Γ΄΄, Δ΄΄, διότι καὶ ἡ παράλληλός της (ε) τὰ τέμνει. Θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 238

(1) $\quad A''B'' = AB$ καὶ $\Gamma''\Delta'' = \Gamma\Delta$ (§ **193**, πόρισμα).

Θὰ ἔχωμεν ἐπίσης

$$A''A' \,//\, B''B' \,//\, \Gamma''\Gamma' \,//\, \Delta''\Delta'$$

ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν Οx καὶ (ε΄). Ἑπομένως ἐν τῷ ἐπιπέδῳ {Οx, (ε΄)} ἐφαρμόζεται τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ τῆς ἐπιπεδομετρίας :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$(2) \qquad \frac{A''B''}{\Gamma''\Delta''} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}.$$

Ἡ (2), λόγῳ τῶν (1), καθίσταται : $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \dfrac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$, ὅ.ἔ.δ.

**Πόρισμα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τοῦ χώρου τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, ὁ λόγος δύο διανυσμάτων κειμένων ἐπὶ τῆς μιᾶς ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων των διανυσμάτων ἐπὶ τῆς ἄλλης.**

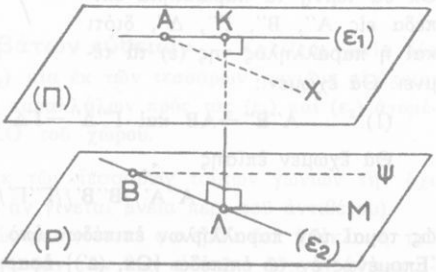
Διότι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν ἔχουν τὴν αὐτὴν διάταξιν. Οὕτω π.χ., ἂν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ (σχ. 238), τότε, ἐπειδὴ αἱ ΑΑ΄΄, ΒΒ΄΄, ΓΓ΄΄ εἶναι παρ/λοι, τὸ Β΄΄ κεῖται ἐπίσης μεταξὺ τῶν Α΄΄ καὶ Γ΄΄. Ἀφοῦ δὲ αἱ Α΄΄Α΄, Β΄΄Β΄, Γ΄΄Γ΄ εἶναι παρ/λοι καὶ τὸ Β΄΄ κεῖται μεταξὺ τῶν Α΄΄ καὶ Γ΄΄, διὰ τοῦτο καὶ τὸ Β΄ θὰ κεῖται μεταξὺ Α΄ καὶ Γ΄. Ἀφοῦ ἡ σχέσις διατάξεως τῶν Α, Β, Γ, Δ,... εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν τῶν Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄,... (σχ. 238) ἕπεται ὅτι δύο διανύσματα ὁμόρροπα ἐπὶ τῆς (ε) ἔχουν ὡς ἀντίστοιχα ἐπίσης ὁμόρροπα διανύσματα ἐπὶ τῆς (ε΄) καὶ δύο ἀντίρροπα ἐπὶ τῆς (ε) ἔχουν ὡς ἀντίστοιχα ἀντίρροπα ἐπὶ τῆς (ε΄). Ἑπομένως ὁ λόγος δύο διανυσμάτων ἐπὶ τῆς (ε) καὶ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων των ἐπὶ τῆς (ε΄) ἔχουν τὸ ἴδιον πρόσημον. Ἔχουν καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν οἱ δύο οὗτοι λόγοι, συμφώνως πρὸς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα· ἄρα εἶναι ἴσαι.

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**199. (Θ). — Δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι κεῖνται πάντοτε ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων· ἓν δὲ μόνον ζεῦγος παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπάρχει, περιέχον τὰς δύο ἀσυμβάτους.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) (σχ. 239). Ἂς φέρωμεν ἐκ σημείου Α τῆς ($\varepsilon_1$) εὐθεῖαν ΑΧ//($\varepsilon_2$) καὶ ἐκ σημείου Β τῆς ($\varepsilon_2$) ἂς φέρωμεν εὐθεῖαν ΒΨ//($\varepsilon_1$). Ἡ ($\varepsilon_1$) καὶ ἡ ΑΧ ὁρίζουν ἐπίπεδον (Π), αἱ δὲ ($\varepsilon_2$) καὶ ΒΨ ὁρίζουν ἐπίπεδον (Ρ). Τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα μεταξύ των (§ **195**) καὶ περιέχουν τὰς ἀσυμβάτους.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) περιέχοντα τὰς ἀσυμβάτους. Ἂς φέρωμεν τὴν κοινὴν κάθετον ΚΛ τῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) καὶ ἐκ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ ἡ ΛΜ//($\varepsilon_1$) (σχ. 239). Ἡ ($\varepsilon_1$) κειμένη ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) παραλλήλου πρὸς τὸ (Ρ) εἶναι καὶ αὐτὴ παράλληλος πρὸς τὸ (Ρ) (διό-



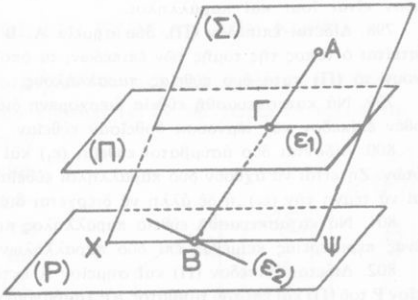
Σχ. 239

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον δύναται νὰ ἔχῃ μετὰ τοῦ (Ρ)). Ἄρα ἡ παράλληλός της ΛΜ ἀνήκει εἰς τὸ (Ρ) (§ **186**, γ΄). Ἡ κοινὴ κάθετος ΚΛ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ($\varepsilon_1$), εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΛΜ. Εἶναι ἐπίσης κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ($\varepsilon_2$), ἄρα ΚΛ⊥(Ρ) καὶ κατὰ συνέπειαν ΚΛ⊥(Π) (§ **194**). Ὥστε, ἂν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) περιέχουν τὰς ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$), τότε τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν κοινὴν κάθετον τῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$). Ἐπειδὴ μία μόνη κοινὴ κάθετος ὑπάρχει (§ **187**), διὰ τοῦτο ἓν μόνον ζεῦγος παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπάρχει, περιέχον τὰς ἀσυμβάτους.

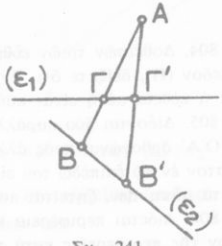
**200. Πρόβλημα. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) καὶ σημεῖον Α τοῦ χώρου. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ τέμνουσα τὰς δύο ἀσυμβάτους.**

*Λύσις.* Ἂς φέρωμεν τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), ἐφ' ὧν κεῖνται ἀντιστοίχως αἱ δύο δοθεῖσαι ἀσύμβατοι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) (§ **199**). Διακρίνομεν 3 περιπτώσεις :



Σχ. 240

**Ι. Τὸ Α∉(Π)∧Α∉(Ρ).** Τότε τὸ Α καὶ ἡ ($\varepsilon_1$) ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον (Σ). Τὸ (Σ), μὴ ταυτιζόμενον μὲ τὸ (Π), τέμνει τὸ (Π) κατὰ τὴν ($\varepsilon_1$), ἄρα τέμνει καὶ τὸ παράλληλόν του (Ρ) κατὰ εὐθεῖαν ΧΨ//($\varepsilon_1$) (§ **192** καὶ § **193**). Ἡ ΧΨ, οὖσα // ($\varepsilon_1$), δὲν εἶναι // ($\varepsilon_2$), ἄρα τέμνει τὴν ($\varepsilon_2$) εἴς τι σημεῖον Β. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου (Σ), μὴ ταυτιζομένη μὲ τὴν ΧΨ (διότι Α∉ΧΨ), τέμνει τὴν ΧΨ, ἄρα τέμνει καὶ τὴν παράλληλόν της ($\varepsilon_1$), ἔστω εἰς Γ. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΓΒ πληροῖ τὸ ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος. Ἄλλη εὐθεῖα ΑΓ΄Β΄ τέμνουσα τὰς δύο ἀσυμβάτους δὲν ὑπάρχει (σχ. 241). Διότι θὰ ὥριζεν μετὰ τῆς ΑΓΒ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ θὰ ἔκειντο ἀμφότεραι αἱ ἀσύμβατοι.



Σχ. 241

**ΙΙ. Τὸ Α∈(Π)∧Α∉($\varepsilon_1$).** Τότε τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν, διότι πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ Α διερχομένη καὶ τέμνουσα τὴν ($\varepsilon_1$) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), παρ/λου πρὸς τὸ (Ρ) καὶ συνεπῶς δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ($\varepsilon_2$).

**ΙΙΙ. Τὸ Α∈($\varepsilon_1$).** Τότε ὅλαι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὸ Α μὲ τὰ σημεῖα τῆς ($\varepsilon_2$) εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Συμπέρασμα.** Ἂν τὸ Α εἰς οὐδὲν τῶν παρ/λων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) τῶν περιεχόντων τὰς δύο ἀσυμβάτους ἀνήκῃ, τὸ πρόβλημα ἔχει **1 λύσιν.** Ἂν τὸ Α ἀνήκῃ εἰς τὸ (Π) χωρὶς νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν ($\varepsilon_1$) ἢ εἰς τὸ (Ρ) χωρὶς νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν ($\varepsilon_2$), τὸ πρόβλημα ἔχει **0 λύσεις.** Ἂν τὸ Α ἀνήκῃ εἰς τὴν μίαν τῶν ἀσυμβάτων, τὸ πρόβλημα ἔχει **ἀπείρους λύσεις.**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

795. Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ δοθέντος ἐπιπέδου δοθεῖσαν ἀπόστασιν h;

796. Δοθέντος ἐπιπέδου (Π) καὶ σημείου Α ἐκτὸς αὐτοῦ, τίς ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ τοῦ Α καὶ παραλλήλων πρὸς τὸ (Π);

797. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ ἴσων καὶ παραλλήλων τμημάτων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

798. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Α, Β αὐτοῦ καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ (Π). Ζητεῖται ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διερχόμενα διὰ τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ τέμνουν τὸ (Π) κατὰ δύο εὐθείας παραλλήλους.

799. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου, παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

800. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) καὶ δύο σημεῖα $O_1$ καὶ $O_2$ ἐκτὸς αὐτῶν. Ζητεῖται νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, ἐξ ὧν ἡ μία νὰ διέρχεται διὰ τοῦ $O_1$ καὶ νὰ τέμνῃ τὴν ($\varepsilon_1$) ,ἡ δὲ ἄλλη νὰ διέρχεται διὰ τοῦ $O_2$ καὶ νὰ τέμνῃ τὴν ($\varepsilon_2$).

801. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν καὶ τέμνουσα δύο δεδομένας περιφερείας κειμένας ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

802. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Θεωροῦμεν μεταβλητὸν σημεῖον Ρ τοῦ (Π) καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΡ λαμβάνομεν σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ΑΜ/ΑΡ = = μ/ν (δοθεὶς λόγος). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ Μ, ὅταν

i) τὸ Ρ διατρέχῃ τὸ ἐπίπεδον (Π),

ii) τὸ Ρ διατρέχῃ μίαν περιφέρειαν ἐπὶ τοῦ (Π).

803. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς τοῦ (Π). Διὰ τοῦ Β ἄγομεν εὐθεῖαν (ε)//(Π) καὶ προβάλλομεν τὸ Α ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. σημείου Μ διαιροῦντος τὸ τμῆμα ΒΓ εἰς λόγον

$$ΒΜ : ΜΓ = 2 : 5.$$

804. Δοθεισῶν τριῶν εὐθειῶν ἀσυμβάτων ἀνὰ δύο, ἀλλὰ παραλλήλων πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι, ἂν μία εὐθεῖα τέμνῃ τὰς τρεῖς ἀσυμβάτους ὑπὸ ἴσας γωνίας, τότε ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).

805. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Π΄) καὶ ἐπ' αὐτῶν δύο τμήματα ΟΑ καὶ Ο΄Α΄ ὀρθογώνια πρὸς ἄλληλα. Ἐὰν τὰ ΟΑ καὶ Ο΄Α΄ στρέφωνται περὶ τὰ Ο καὶ Ο΄ ἕκαστον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του εἰς τρόπον, ὥστε νὰ διαμένουν ὀρθογώνια καὶ νὰ διατηροῦν καὶ τὰ μήκη των, ζητεῖται ποῖος ὁ τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΑ΄.

806. Δίδεται περιφέρεια καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ΄), τέμνουσαι τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας κατὰ τὰ ἄκρα Α καὶ Β μιᾶς διαμέτρου. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν (χ), ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει καὶ τὴν περιφέρειαν καὶ τὰς δύο εὐθείας (δ) καὶ (δ΄), χωρὶς νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α ἢ τοῦ Β. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν ἰχνῶν τῶν εὐθειῶν (χ) ἐπὶ ἐπιπέδου σταθεροῦ, παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας.

807. Ἐὰν εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$), ($\varepsilon_2$), ($\varepsilon_3$)... τέμνουν δύο ἀσυμβάτους (δ) καὶ (δ΄) εἰς μέρη ἀνάλογα, τότε αἱ ($\varepsilon_1$), ($\varepsilon_2$), ($\varepsilon_3$)... εἶναι πᾶσαι παράλληλοι πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον.

808. Ἐπὶ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) λαμβάνομεν ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

($AB \in (\varepsilon_1)$, $\Gamma\Delta \in (\varepsilon_2)$). Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται. Ἐὰν δὲ (η) εἶναι ἡ τομή των, νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς (η) ἰσαπέχει τῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$).

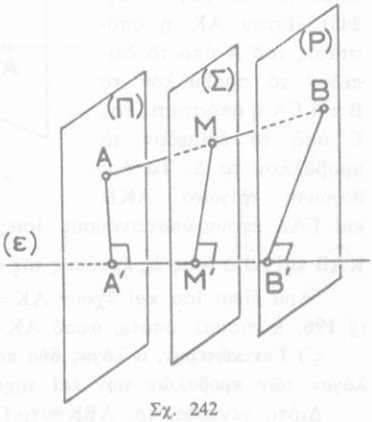
809. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$). Ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς ($\varepsilon_1$) φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ($\varepsilon_2$), συναντῶσαν αὐτὴν εἰς Κ. Τίς ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΜΚ;

810. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$), ($\varepsilon_2$) τέμνουσαι τὸ (Π). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν διαιρούντων εἰς δεδομένον λόγον μ : ν τὰ τμήματα τὰ παράλληλα πρὸς τὸ (Π) καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν δοθεισῶν ἀσυμβάτων ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$).

811. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἐπίπεδον (Π). Νὰ ὁρισθοῦν τέσσαρες εὐθεῖαι ΑΧ, ΒΨ, ΓΖ, ΔΤ παράλληλοι μεταξύ των καὶ τέμνουσαι τὸ (Π) ἀντιστοίχως εἰς Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τετράπλευρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

## ΠΡΟΒΟΛΗ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΕΥΘΕΙΑΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

**201. Ὁρισμοὶ καὶ θεωρήματα.** α΄) Αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ σημείων καὶ τμημάτων ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) ἐν τῷ χώρῳ ἐπιτελοῦνται δι' ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε). **Καλεῖται ὀρθὴ προβολὴ σημείου Α ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) τοῦ χώρου** (σχ. 242) **τὸ ἴχνος Α΄ τῆς (ε) ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Α καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν (ε).** (Εἶναι, βεβαίως, $AA' \perp (\varepsilon)$). Ὑπάρχουν καὶ προβολαὶ ἐπὶ εὐθεῖαν (ε), ἐπιτελούμεναι δι' ἐπιπέδων πλαγίων πρὸς τὴν (ε) καὶ παραλλήλων πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον. Ἐφ' ὅσον τοῦτο δὲν δηλοῦται, τότε διὰ τῆς λέξεως προβολὴ θὰ ἐννοοῦμεν τὴν ὀρθὴν προβολήν.



Σχ. 242

**Προβολὴ τμήματος ΑΒ ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) καλεῖται τὸ τμῆμα Α΄Β΄ τὸ ἔχον ἄκρα τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὴν (ε)** (σχ. 242).

**β΄) (Θ) — Ὁ λόγος δύο τμημάτων κειμένων ἐπ' εὐθείας ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν των ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ε).**

Τοῦτο εἶναι προφανὴς συνέπεια τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ ἐν τῷ χώρῳ (§ **198**). Οὕτω π.χ. εἰς τὸ σχ. 242, ἂν Α΄, Μ΄, Β΄ εἶναι προβολαὶ τῶν ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων Α, Μ, Β ἐπὶ τὴν (ε), ἐπειδὴ τὰ προβάλλοντα ἐπίπεδα (Π), (Σ), (Ρ) εἶναι παράλληλα, τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ δίδει : $AM/MB = A'M'/M'B'$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

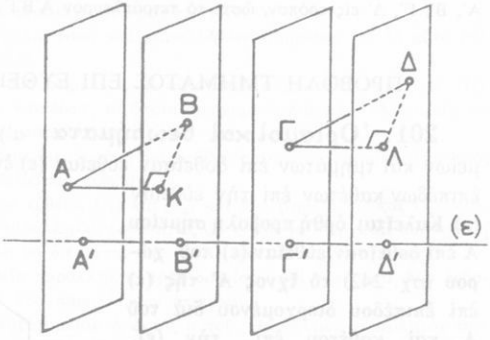
γ') Εἰδικώτερον κατὰ τὴν προβολὴν ἐπὶ εὐθείας **τὸ μέσον τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του.**

**δ') Παρατηρήσεις.** 1ον) Αἱ προβάλλουσαι ΑΑ΄, ΒΒ΄ (σχ. 242) δὲν εἶναι ἐν γένει παράλληλοι, διότι τὸ ΑΒ καὶ ἡ (ε) δὲν κεῖνται κατὰ κανόνα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ .(Δηλ. τὸ τετράπλευρον ΑΑ΄Β΄Β εἶναι ἐν γένει «στρεβλόν»).

2ον) Ἂν ΑΒορθογ(ε), τότε ἡ προβολὴ τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὴν (ε) εἶναι μηδενικὸν τμῆμα (σημεῖον).

3ον) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ πλαγίας προβολάς.

**ε') (Θ) — Παράλληλα καὶ ἴσα τμήματα ἔχουν ἴσας προβολὰς ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν.**



Σχ. 243

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν τὰ παράλληλα καὶ ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ Α΄Β΄ καὶ Γ΄Δ΄ ἀντιστοίχως αἱ προβολαί των ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) τοῦ χώρου (σχ. 243). Ἔστω ΑΚ ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τὸ προβάλλον τὸ Β καὶ ΓΛ ἡ ἀπόστασις τοῦ Γ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τὸ προβάλλον τὸ Δ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ ἔχουν ὑποτεινούσας ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς **ὀξείας** γωνίας $\widehat{ΚΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΛΓΔ}$ ἴσας ὡς ἐχούσας τὰς πλευράς των παρ/λους (§ **196**, πόρισμα).

Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν ΑΚ=ΓΛ. Ἀλλὰ ΑΚ=Α΄Β΄ καὶ ΓΛ=Γ΄Δ΄ (§ **196**, πόρισμα), ὁπότε, ἀφοῦ ΑΚ=ΓΛ ⇒ Α΄Β΄=Γ΄Δ΄, ὅ.ἔ.δ.

**ς') Γενικώτερον, ὁ λόγος δύο παραλλήλων τμημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν των ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν.**

Διότι, γενικῶς, τρ. ΑΒΚ≈τρ.ΓΔΛ (σχ. 243).

ζ') Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν καὶ διὰ πλαγίας προβολάς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

812. Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τυχὸν σημεῖον τῆς ($ε_1$) μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς ($ε_2$).

813. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ σταθεροῦ μήκους 2λ ὀλισθαίνει διὰ τῶν ἄκρων του ἐπὶ δύο σταθερῶν ὀρθογωνίων εὐθειῶν, ἀσυμβάτων πρὸς ἀλλήλας. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΓΔ.

814. Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$), δείξατε ὅτι δύο σημεῖα τῆς ($ε_1$) συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν κοινὴν κάθετον ἰσαπέχουν ἀπὸ τὴν ($ε_2$)· καὶ ἀντιστρόφως δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σημεῖα τῆς $(\varepsilon_1)$ ἰσαπέχοντα τῆς $(\varepsilon_2)$ εἶναι συμμετρικά πρὸς τὴν κοινὴν κάθετον τῶν δύο ἀσυμβάτων.

815. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β, ἐπίπεδον (Π), μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ τρίτον σημεῖον Σ ἐκτὸς τοῦ (Π). Διὰ τοῦ Σ διέρχεται εὐθεῖα ΣΧ μεταβλητὴ τοιαύτη, ὥστε τὰ Α καὶ Β νὰ ἰσαπέχουν πάντοτε αὐτῆς. Ζητεῖται ὁ τόπος τῶν ἰχνῶν τῆς ΣΧ ἐπὶ τοῦ (Π).

816. Ὑπὸ ποίας συνθήκας δύο τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ ἀρχόμενα ἀπὸ σημείου Ο ἐπιπέδου (Π) ἔχουν ἴσας προβολὰς ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ (Π) διερχομένην διὰ τοῦ Ο;

817. Ἐὰν δύο ἀπέναντι πλευραὶ στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τότε ἔχουν ἴσας προβολὰς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν μέσων τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν.



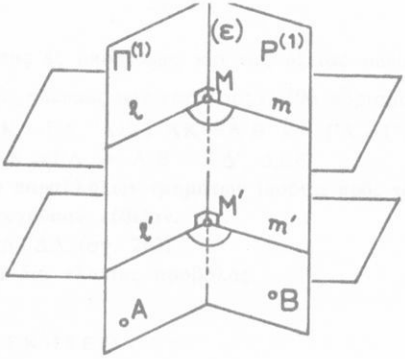
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

# ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

**202. Ὁρισμοί. Καλεῖται δίεδρος γωνία (ἢ ἁπλῶς «δίεδρος») τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ δύο ἡμιεπίπεδα ἐξερχόμενα ἐκ τῆς αὐτῆς εὐθείας (ε) καλουμένης «ἀκμῆς» τῆς διέδρου.**

Τὰ δύο ἡμιεπίπεδα (τὰ ἔχοντα κοινὸν σύνορον τὴν ἀκμὴν) λέγονται **ἕδραι** τῆς διέδρου. Πᾶν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ὡς πρὸς ἑκάστην ἕδραν εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου μὲ τὴν ἄλλην ἕδραν, λέγεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς διέδρου.**



Σχ. 244

Δίεδρος μὲ ἕδρας $\Pi^{(1)}$ καὶ $P^{(1)}$ ἀκμῆς (ε) (σχ. 244) παρίσταται μὲ $\Pi^{(1)}$—(ε)—$P^{(1)}$ ἢ μὲ A—(ε)—B, ὅπου A σημεῖον τῆς μιᾶς ἕδρας καὶ B σημεῖον τῆς ἄλλης ἢ τέλος μὲ $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$.

Καλεῖται **ἀντίστοιχος ἐπίπεδος** μιᾶς διέδρου ἡ γωνία, καθ' ἣν τέμνεται ἡ δίεδρος ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμήν. Δύο ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς αὐτῆς διέδρου, ὅπως αἱ $(\widehat{l, m})$ καὶ $(\widehat{l', m'})$ τοῦ σχήματος 244, σχηματι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ζόμεναι εἰς δύο τυχόντα σημεῖα Μ καὶ Μ΄ τῆς ἀκμῆς εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους.

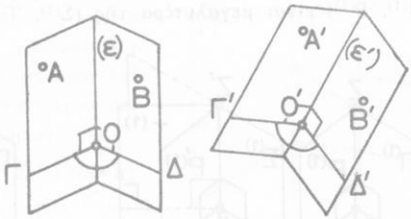
Ἡ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα δίεδρος νοεῖται σιωπηρῶς ὡς «**κυρτὴ**» καὶ ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον, ἐπίσης **κυρτήν.** Τὰ σημεῖα τοῦ χώρου τὰ **μὴ κείμενα ἐντὸς** τῆς κυρτῆς διέδρου ($\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}}$) οὔτε ἐπὶ τῶν ἑδρῶν $\Pi^{(1)}$, $P^{(1)}$ πληροῦν ἑτέραν δίεδρον, **μὴ κυρτήν,** ἔχουσαν τὰς αὐτὰς ἕδρας, $\Pi^{(1)}$, $P^{(1)}$ καὶ ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν $(\widehat{l, m})$.

Ἐὰν τὰ μὴ ταυτιζόμενα ἡμιεπίπεδα $\Pi^{(1)}$, $P^{(1)}$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π), ὁρίζουν **πεπλατυσμένην** δίεδρον, ἥτις ἔχει ἐσωτερικὸν, κατὰ σύμβασιν, τὸν ἕνα ἐκ τῶν δύο ἡμιχώρων, τοὺς ὁποίους ὁρίζει τὸ (Π).

**203. Ἴσαι δίεδροι. α΄) Δύο δίεδροι λέγονται ἴσαι, ὅταν ὑπάρχῃ κίνησις φέρουσα τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν.**

**β΄) (Θ) —Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο δίεδροι εἶναι ἴσαι, εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσαι.**

Ἔστωσαν αἱ δίεδροι Α—(ε)—Β καὶ Α΄—(ε΄)—Β΄ (σχ. 245). Ἐὰν εἶναι ἴσαι, ὑπάρχει κίνησις Η κομίζουσα τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, ἤτοι τὴν ἀκμὴν (ε) ἐπὶ τῆς ἀκμῆς (ε΄), τὴν ἕδραν Α—(ε) ἐπὶ τῆς Α΄—(ε΄) καὶ τὴν ἕδραν Β—(ε) ἐπὶ τῆς Β΄—(ε΄). Τότε ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος $\widehat{\Gamma O \Delta}$ τῆς πρώτης θὰ ἔλθῃ εἰς ἴσην τινὰ γωνίαν $\widehat{\Gamma' O' \Delta'}$ ἐπὶ τῆς δευτέρας καὶ θὰ εἶναι $O'\Gamma' \perp (\varepsilon')$ καὶ $O'\Delta' \perp (\varepsilon')$ (ἐπειδὴ κατὰ τὴν κίνησιν αἱ γωνίαι καὶ ἡ καθετότης διατηροῦνται), δηλ. θὰ γίνῃ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς δευτέρας. Ἑπομένως *αἱ ἴσαι δίεδροι ἔχουν ἴσας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους.*



Σχ. 245

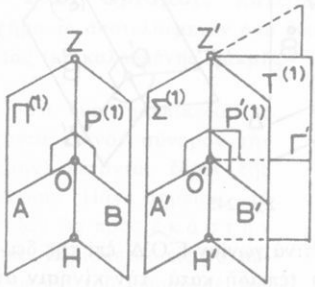
**Ἀντιστρόφως,** ἂν αἱ δύο ἀνωτέρω δίεδροι ἔχουν **ἴσας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους** $\widehat{\Gamma O \Delta}$ καὶ $\widehat{\Gamma' O' \Delta'}$, τότε ὑπάρχει κίνησις φέρουσα τὴν $\widehat{\Gamma O \Delta}$ ἐπὶ τῆς $\widehat{\Gamma' O' \Delta'}$. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην ἡ (ε) θὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν τινὰ (ε΄΄) συμπίπτουσαν μετὰ τῆς (ε΄), διότι θὰ εἶναι $(\varepsilon'') \perp O'\Gamma'$ καὶ $(\varepsilon'') \perp O\Delta'$, δηλ. $(\varepsilon'') \perp$ ΕπιπΓ΄Ο΄Δ΄, ἐνῷ εἶναι καὶ $(\varepsilon') \perp$ ΕπιπΓ΄ΟΔ΄. Ἀφοῦ θὰ συμπέσουν καὶ αἱ ἀκμαί, θὰ συμπέσουν καὶ αἱ ἕδραι. Δηλ. διὰ τῆς κινήσεως ταύτης ἡ πρώτη δίεδρος συμπίπτει μὲ τὴν δευτέραν. Ὥστε : *Διὰ νὰ εἶναι ἴσαι δύο δίεδροι, ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους των ἴσας.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

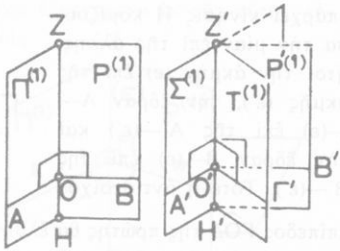
**204. Κατ' ἀκμὴν δίεδροι** λέγονται δύο δίεδροι ἔχουσαι κοινὴν ἀκμήν, ἐνῷ αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις (δηλ. ἀντίθετα ἡμιεπίπεδα) τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης. Ἐὰν φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμήν, λαμβάνομεν τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους τῶν δύο κατ' ἀκμὴν διέδρων, ὡς δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας. Ἄρα **αἱ κατ' ἀκμὴν δίεδροι εἶναι ἴσαι**, διότι ἔχουν ἴσας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους.

**205. Ἄνισοι δίεδροι.** α') Ἀποδεικνύεται ὅτι: **Δοθεισῶν δύο διέδρων ($\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}$) καὶ ($\Sigma^{(1)}, \widehat{T^{(1)}}$), ὑπάρχει κίνησις Η φέρουσα τὴν ἕδραν $\Pi^{(1)}$ ἐπὶ τῆς ἕδρας $\Sigma^{(1)}$, τὴν δὲ ἕδραν $P^{(1)}$ εἰς ἡμιεπίπεδον $P'^{(1)}$ κείμενον μετὰ τῆς ἕδρας $T^{(1)}$ εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας $\Sigma^{(1)}$** (σχ. 246 καὶ 247).

β') Ἐὰν κατὰ τὴν ἀνωτέρω κίνησιν Η, ἡ ἕδρα $P^{(1)}$ ἔλθῃ **ἐντὸς** τῆς διέδρου ($\Sigma^{(1)}, \widehat{T^{(1)}}$) (σχ. 246), τότε λέγομεν ὅτι ἡ δίεδρος ($\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}$) εἶναι **μικροτέρα** τῆς διέδρου ($\Sigma^{(1)}, \widehat{T^{(1)}}$). Ἐὰν ἡ $P^{(1)}$ ἔλθῃ εἰς ἡμιεπίπεδον $P'^{(1)}$ κείμενον **ἐκτὸς** τῆς διέδρου ($\Sigma^{(1)}, \widehat{T^{(1)}}$) (σχ. 247), τότε λέγομεν ὅτι ἡ δίεδρος ($\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}$) εἶναι **μεγαλυτέρα** τῆς ($\Sigma^{(1)}, \widehat{T^{(1)}}$).




Σχ. 246




Σχ. 247

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος $\widehat{AOB}$ ἔρχεται εἰς γωνίαν $\widehat{A'O'B'}$, ὅπου ἡ O'B' εἶναι ἐσωτερικὴ ἀκτὶς τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου $\widehat{A'O'\Gamma'}$, ἄρα $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'\Gamma'}$. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν (σχ. 247) εἶναι $\widehat{AOB} > \widehat{A'O'\Gamma'}$. Ἑπομένως:

**Δύο ἀνίσων διέδρων αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.**

γ') **Ἀντιστρόφως**, ἂν $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'\Gamma'}$ (σχ. 246), τότε ὑπάρχει κίνησις Η φέρουσα τὴν $\widehat{AOB}$ εἰς $\widehat{A'O'B'}$, ὅπου ἡ O'B' κεῖται μεταξὺ O'A' καὶ O'Γ'.

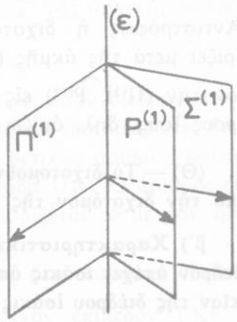
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ τὴν κίνησιν αὐτήν, ἡ ἀκμὴ ΖΗ ἔρχεται ἐπὶ τῆς Ζ΄Η΄ καὶ ἡ ἕδρα $P^{(1)}$ ἔρχεται ἐντὸς τῆς διέδρου $(\Sigma^{(1)}, \widehat{T^{(1)}})$, ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἡ $(\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}})$ εἶναι μικροτέρα τῆς $(\Sigma^{(1)}, \widehat{T^{(1)}})$. Ὁμοίως, βλέπομεν (σχ. 247) ὅτι, ἂν $\widehat{AOB} > \widehat{A'O\Gamma'}$, τότε καὶ ἡ $(\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}})$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς $(\Sigma^{(1)}, \widehat{T^{(1)}})$. Δηλαδή,

**ἂν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι δύο διέδρων εἶναι ἄνισοι, τότε καὶ αἱ δίεδροι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.**

**206. Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ δύο διέδρων.** Λέγομεν ὅτι δύο δίεδροι $\Pi^{(1)} - (\varepsilon) - P^{(1)}$ καὶ $P^{(1)} - (\varepsilon) - \Sigma^{(1)}$ εἶναι **διαδοχικαί,** ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμήν, μίαν ἕδραν κοινὴν καὶ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου τῆς κοινῆς ἕδρας. Αἱ δύο διαδοχικαὶ δίεδροι οὐδὲν κοινὸν ἐσωτερικὸν σημεῖον ἔχουν, διότι τὰ ἐσωτερικὰ των σημεῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) τῆς ἕδρας $P^{(1)}$ (σχ. 248).

Ἡ δίεδρος $(\Pi^{(1)}, \widehat{\Sigma^{(1)}})$, ἥτις ἔχει ἐσωτερικὰ σημεῖα τὴν ἕνωσιν τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῶν δύο διαδοχικῶν διέδρων $(\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}})$ καὶ $(P^{(1)}, \widehat{\Sigma^{(1)}})$ (πλέον τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς ἕδρας $P^{(1)}$), καλεῖται **ἄθροισμα** τῶν δύο διαδοχικῶν διέδρων. Αὕτη ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀντιστοίχων ἐπιπέδων τῶν δύο διαδοχικῶν διέδρων.



Σχ. 248

Ἐξ ἄλλου ἡ δίεδρος $(P^{(1)}, \widehat{\Sigma^{(1)}})$ τοῦ σχ. 248, ἥτις προστιθεμένη μὲ τὴν $(\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}})$ δίδει ὡς ἄθροισμα τὴν $(\Pi^{(1)}, \widehat{\Sigma^{(1)}})$, καλεῖται **διαφορὰ** τῶν δύο διέδρων $(\Pi^{(1)}, \widehat{\Sigma^{(1)}})$ καὶ $(\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}})$. Γράφομεν:

$$(P^{(1)}, \widehat{\Sigma^{(1)}}) = (\Pi^{(1)}, \widehat{\Sigma^{(1)}}) - (\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}).$$

Ἡ ἰδία σχέσις ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους.

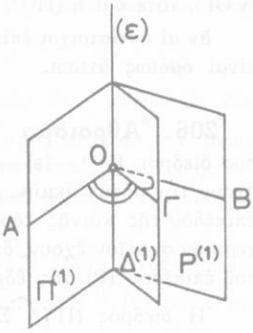
**Γενικώτερον:** Ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε διέδρων καλεῖται κάθε δίεδρος ἔχουσα ἀντίστοιχον ἐπίπεδον ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων τῶν δύο δοθεισῶν καὶ διαφορὰ κάθε δίεδρος ἔχουσα ἀντίστοιχον ἐπίπεδον ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων τῶν δύο δοθεισῶν.

**207. Διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδον διέδρου — α΄) Καλεῖται διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδον (ἢ ἁπλῶς «διχοτομοῦν») τῆς διέδρου $\Pi^{(1)} - (\varepsilon) - P^{(1)}$ ἓν ἡμιεπίπεδον $\Delta^{(1)}$ ἀρχόμενον ἀπὸ τῆς ἀκμῆς (ε), εὑρισκόμενον εἰς τὸ**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου καὶ χωρίζον αὐτὴν εἰς δύο ἴσας διαδοχικὰς διέδρους ($\Pi^{(1)}, \widehat{\Delta^{(1)}}$) καὶ ($\Delta^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}$) ἐχούσας ἄθροισμα τὴν ($\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}$).**

Ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν (ε) (σχ. 249) τὰ τρία ἡμιεπίπεδα $\Pi^{(1)}$, $\Delta^{(1)}$, $P^{(1)}$ τέμνονται κατὰ τρεῖς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΓ, ΟΒ, ὅπου $\widehat{AO\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma OB}$ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν ($\Pi^{(1)}, \widehat{\Delta^{(1)}}$) καὶ ($\Delta^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}$). Ἐὰν τὸ $\Delta^{(1)}$ εἶναι διχοτομοῦν καὶ ἑπομένως ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου, τότε ἡ ΟΓ εἶναι ἀκτὶς τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου $\widehat{AOB}$ τῆς ὅλης διέδρου καὶ αἱ γωνίαι $\widehat{AO\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma OB}$ εἶναι ἴσαι ὡς ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι ἴσων διέδρων. Ἄρα ἡ ΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$. Ἀντιστρόφως ἡ διχοτόμος ΟΓ τῆς $\widehat{AOB}$ ὁρίζει μετὰ τῆς ἀκμῆς (ε) ἡμιεπίπεδον χωρίζον τὴν ($\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}$) εἰς δύο διαδοχικὰς διέδρους ἴσας, δηλ. ὁρίζει τὸ διχοτομοῦν. Ἰσχύει λοιπὸν τὸ



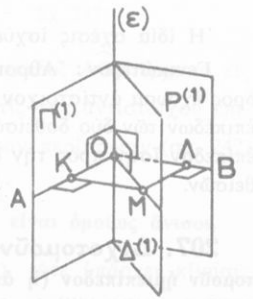
Σχ. 249

(Θ) — **Τὸ διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδον διέδρου ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἀκμὴν καὶ ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου.**

**β΄) Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης.— Πᾶν σημεῖον τοῦ διχοτομοῦντος μίαν δίεδρον ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου· καὶ πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς διέδρου ἰσάκις ἀπέχον ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ διχοτομοῦντος $\Delta^{(1)}$ τὴν δίεδρον ($\Pi^{(1)}, \widehat{P^{(1)}}$) (σχ. 250). Τὸ διὰ τοῦ Μ διερχόμενον ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν (ε), τέμνει τὰ $\Pi^{(1)}$, $\Delta^{(1)}$, $P^{(1)}$ κατὰ τρεῖς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΜ, ΟΒ, ὅπου ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$, διότι τὸ $\Delta^{(1)}$ εἶναι διχοτομοῦν. Ἄρα αἱ ἀποστάσεις ΜΚ, ΜΛ τοῦ Μ ἀπὸ τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ εἶναι ἴσαι, οἱ δὲ πόδες αὐτῶν Κ, Λ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν ΟΑ, ΟΒ ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ ΜΚ$\perp$ΟΑ καὶ ΜΚορθογ(ε) (διότι ἡ ΜΚ κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ καθέτῳ τῇ (ε)), διὰ τοῦτο ΜΚ$\perp\Pi^{(1)}$ (§ **181** στ΄).

Ὁμοίως, ΜΛ$\perp P^{(1)}$. Ἤτοι τὸ Μ ἰσαπέχει τῶν ἑδρῶν $\Pi^{(1)}$, $P^{(1)}$.



Σχ. 250

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ ἐσωτερικὸν ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεῖον τῆς διέδρου καὶ ἰσαπέχον τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ), ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ ἕδραι $Π^{(1)}$, $Ρ^{(1)}$. Τὸ διὰ τοῦ Μ ἀγόμενον κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) ἐπίπεδον τέμνει τὴν δίεδρον κατὰ τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον $\widehat{AOB}$ (σχ. 250). Ἂν φέρωμεν τώρα ΜΚ⊥ευθΟΑ, ΜΛ⊥ευθΟΒ, θὰ εἶναι, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ΜΚ⊥(Π) καὶ ΜΛ⊥(Ρ), ἑπομένως κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ΜΚ=ΜΛ. Ἀφοῦ τὸ Μ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς ΑΟΒ καὶ ἰσαπέχει τῶν εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ τῆς $\widehat{AOB}$, διὰ τοῦτο τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{AOB}$ καὶ μάλιστα προβάλλεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΑ, ΟΒ, δηλ. ἐπὶ τῶν ἡμιεπιπέδων $Π^{(1)}$, $Ρ^{(1)}$. Ἡ διχοτόμος ΟΜ μετὰ τῆς (ε) ὁρίζει τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον (βλέπε προηγούμενον θεώρημα), ἐφ' οὗ καὶ κεῖται τὸ Μ.

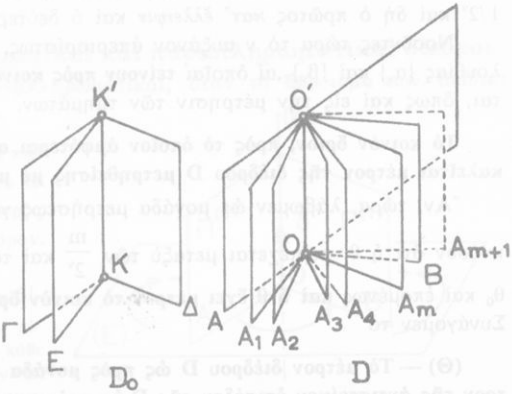
γ') Διχοτομοῦντες τὰς διέδρους ($Π^{(1)}$, $\widehat{Δ^{(1)}}$) καὶ ($Δ^{(1)}$, $Ρ^{(1)}$) χωρίζομεν τὴν ἀρχικὴν δίεδρον ($Π^{(1)}$, $Ρ^{(1)}$) εἰς τέσσαρας ἴσας διέδρους καὶ διὰ διχοτομήσεως αὐτῶν τὴν χωρίζομεν εἰς $2^3$ διέδρους κ.ο.κ.

Δυνάμεθα λοιπὸν βαθμηδὸν νὰ λάβωμεν τὸ $1/2^ν$ τῆς ἀρχικῆς διέδρου διὰ $ν = 2, 3, 4, \ldots$

**208. Μέτρον διέδρου.** — α') Ἂς ἐκλέξωμεν μίαν δίεδρον, ἔστω τὴν $D_0$ καὶ ἂς ὁρίσωμεν αὐτὴν ὡς «μονάδα μετρήσεως τῶν διέδρων». Τότε εἰς κάθε δίεδρον D ἀντιστοιχεῖ εἷς ὡρισμένος θετικὸς ἀριθμὸς καλούμενος «μέτρον τῆς διέδρου D μετρηθείσης μὲ μονάδα $D_0$». Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὁρίζεται διὰ τῆς ἰδίας μεθόδου, δι' ἧς προσδιορίζεται τὸ μέτρον τμήματος ἢ γωνίας :

Χωρίζομεν τὴν $D_0$ εἰς 2, 4, 8, ... $2^ν$ μέρη, ἕως ὅτου λάβωμεν δίεδρον $Γ—K'K—E = \frac{D_0}{2^ν}$ (σχ. 251) ἔχουσαν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον $\widehat{ΓKE} = \frac{\widehat{ΓKΔ}}{2^ν}$, μικροτέραν τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου $\widehat{AOB}$ τῆς μετρητέας D.

Ἂς καλέσωμεν ἐπίσης $θ_0$ τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον $\widehat{ΓKΔ}$ τῆς $D_0$ καὶ θ τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον $\widehat{AOB}$ τῆς D. Φέρομεν ἀκτῖνα $OA_1$ τῆς $\widehat{AOB}$ τοιαύτην, ὥστε $\widehat{AOA_1} = \widehat{ΓKE} =$



Σχ. 251

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$=\theta_0/2^\nu$ καὶ ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν ἀκολουθίαν ἀκτίνων $OA_2$, $OA_3$, $OA_4$,.... ἐν τῷ ἐπιπέδῳ AOB οὕτως, ὥστε : $\widehat{AOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4} = \cdots = \theta_0/2^\nu$ καὶ ἔστω $OA_{m+1}$ ἡ πρώτη ἀκτὶς τῆς ἀκολουθίας, ἥτις **δὲν εἶναι** ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$. Τότε ἡ $OA_m$ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{AOB}$ καὶ ἔχομεν :

$$\widehat{AOA_m} < \widehat{AOB} \leqq \widehat{AOA_{m+1}} \quad \text{ἢ}$$

$$(1) \qquad m \cdot \frac{\theta_0}{2^\nu} < \theta \leqq (m+1)\frac{\theta_0}{2^\nu}.$$

Ἐξ ἄλλου φέροντες τὰ ἡμιεπίπεδα $A_1OO'$, $A_2OO'$,...$A_mOO'$, $A_{m+1}OO'$ λαμβάνομεν ἀκολουθίαν διαδοχικῶν διέδρων $A—OO'—A_1$, $A_1—OO'—A_2$... ἴσων πρὸς τὴν $\Gamma—KK'—E = D_0/2^\nu$ καὶ προφανῶς ἔχομεν : $A—OO'—A_m < A—OO'—B \leqq A—OO'—A_{m+1}$, ἤτοι

$$(2) \qquad m\frac{D_0}{2^\nu} < D \leqq (m+1)\cdot\frac{D_0}{2^\nu} \quad (D_0 \text{ ἡ μονάς}).$$

Ἡ δίεδρος D περιέχεται δηλαδὴ μεταξὺ τῶν $\frac{m}{2^\nu}$ τῆς μονάδος καὶ τῶν $\frac{m+1}{2^\nu}$ τῆς μονάδος.

Θεωροῦμεν τώρα τοὺς ἀριθμούς :

$$(3) \qquad \alpha_\nu = \frac{m}{2^\nu} \text{ καὶ } \beta_\nu = \frac{m+1}{2^\nu},$$

οἱ ὁποῖοι δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι μετροῦν τὴν δίεδρον D κατὰ προσέγγισιν $1/2^\nu$ καὶ δὴ ὁ πρῶτος *κατ' ἔλλειψιν* καὶ ὁ δεύτερος *καθ' ὑπεροχήν*.

Νοοῦντες τώρα τὸ ν αὐξάνον ἀπεριορίστως, δημιουργοῦμεν δύο ἀκολουθίας $\{\alpha_\nu\}$ καὶ $\{\beta_\nu\}$ ,αἱ ὁποῖαι **τείνουν πρὸς κοινὸν ὅριον**. Τοῦτο δεικνύεται, ὅπως καὶ εἰς τὴν μέτρησιν τῶν τμημάτων.

**Τὸ κοινὸν ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον ἀμφότεραι αἱ ἀκολουθίαι (3) τείνουν, καλεῖται μέτρον τῆς διέδρου D μετρηθείσης μὲ μονάδα $D_0$.**

Ἂν, τώρα, λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως γωνιῶν τὴν $\theta_0$, αἱ (1) δεικνύουν ὅτι ἡ θ περιέχεται μεταξὺ τῶν $\frac{m}{2^\nu}$ καὶ τῶν $\frac{m+1}{2^\nu}$ τῆς μονάδος $\theta_0$ καὶ ἑπομένως **καὶ ἡ θ ἔχει μέτρον τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν (3).** Συνάγομεν τὸ

**(Θ) — Τὸ μέτρον διέδρου D ὡς πρὸς μονάδα τὴν $D_0$ ἰσοῦται μὲ τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου τῆς D ὡς πρὸς μονάδα τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τῆς $D_0$.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β') Μονάδες μετρήσεως τῶν διέδρων.** Ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ φυσικὴ μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν, διὰ τοῦτο λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν διέδρων ἡ **ὀρθὴ δίεδρος,** ἤτοι ἡ ἔχουσα ἀντίστοιχον ἐπίπεδον ὀρθὴν γωνίαν. Τότε πᾶσα δίεδρος μετρεῖται διὰ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου της ἐκπεφρασμένης εἰς ὀρθὰς γωνίας (βλ. προηγούμενον θεώρημα).

**Ἄλλαι μονάδες.** Τὸ ἓν ἐνενηκοστὸν τῆς ὀρθῆς διέδρου, ἤτοι δίεδρος μὲ ἀντίστοιχον ἐπίπεδον 1ο, λαμβάνεται ἐπίσης ὡς μονὰς (δίεδρος μιᾶς μοίρας). Τότε πᾶσα δίεδρος μετρεῖται διὰ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου της ἐκπεφρασμένης εἰς μοίρας.

Καθ' ὅμοιον τρόπον μία δίεδρος δύναται νὰ μετρηθῇ εἰς πρῶτα λεπτὰ τῆς μοίρας (′) ἢ εἰς δεύτερα λεπτὰ (″), ὅπου 1′=1/60 τῆς μοίρας καὶ 1″= =1/60 τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Ἐὰν ἡ ὀρθὴ δίεδρος διαιρεθῇ εἰς 100 ἴσα μέρη, λαμβάνεται δίεδρος ἑνὸς βαθμοῦ (1 grade) ἔχουσα ἀντίστοιχον ἐπίπεδον ἑνὸς βαθμοῦ. Μὲ μονάδα αὐτὴν αἱ δίεδροι μετροῦνται εἰς βαθμούς.

Γενικῶς, χάρις εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, πᾶσαι αἱ μονάδες μετρήσεως γωνιῶν καθίστανται καὶ μονάδες μετρήσεως διέδρων.

**209. Λόγος δύο διέδρων.** Καλεῖται λόγος τῆς διέδρου $D_1$ πρὸς τὴν δίεδρον $D_2$ ὁ ἀριθμὸς λ ὁ προκύπτων, ἂν ἡ $D_1$ μετρηθῇ μὲ μονάδα τὴν $D_2$. Ἀλλὰ ὁ ἴδιος ἀριθμὸς λ προκύπτει καὶ ἂν ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς $D_1$ μετρηθῇ μὲ μονάδα τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τῆς $D_2$ (βλ. θεώρ. τῆς § **208**), ἑπομένως ὁ λ εἶναι ἐπίσης ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων τῶν δύο διέδρων. Ἑπομένως :

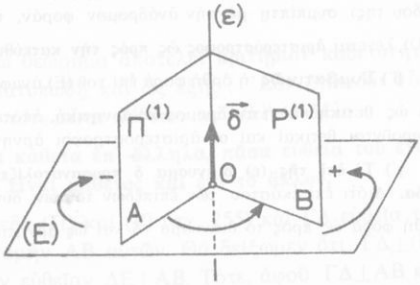
**Ὁ λόγος δύο διέδρων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων των.**

**210. Συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαὶ δίεδροι.**

**Δύο δίεδροι λέγονται συμπληρωματικαί, ὅταν τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται πρὸς μίαν ὀρθὴν δίεδρον.**

**Δύο δίεδροι λέγονται παραπληρωματικαί, ὅταν τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται πρὸς μίαν πεπλατυσμένην δίεδρον.**

**211. Διευθυνόμεναι δίεδροι.** — Ἂς θεωρήσωμεν εὐθεῖαν (ε) ἐν τῷ χώρῳ. Τότε κάθε δίεδρος ἔχουσα ἀκμὴν τὴν (ε) καὶ τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι ἀποτελοῦν διατεταγμένον ζεῦγος, δηλ.




Σχ. 252

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ μία ἕδρα ἔχει ὁρισθῆ ὡς **πρώτη (ἢ ἀρχική)**, ἡ δὲ ἄλλη ὡς **δευτέρα (ἢ τελική)**, λέγεται **διευθυνομένη δίεδρος.**

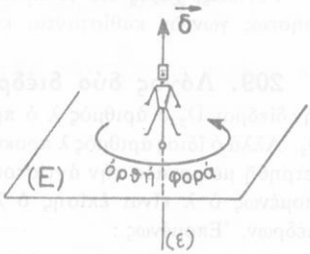
Ἂν ἡ $\Pi^{(1)}$ εἶναι ἡ ἀρχικὴ καὶ $P^{(1)}$ ἡ τελικὴ ἕδρα, τότε ἡ διευθυνομένη δίεδρος παρίσταται μὲ $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ (σχ. 252). Ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διευθυνομένης διέδρου εἶναι καὶ αὐτὴ διευθυνομένη γωνία $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ἐν τῷ καθέτῳ ἐπὶ τὴν ἀκμὴν (ε) ἐπιπέδῳ (Ε) (σχ. 252). Ὡς φορὰ δὲ τῆς διευθυνομένης διέδρου νοεῖται ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ε) φορὰ τῆς ἀντιστοίχου διευθυνομένης ἐπιπέδου γωνίας.

Ἐὰν προσανατολίσωμεν τὸ ἐπίπεδον (Ε) ὁρίζοντες ἐπ' αὐτοῦ θετικὴν καὶ ἀρνητικὴν φορὰν περιστροφῆς, τότε εἰς ἑκάστην διευθυνομένην δίεδρον ἀκμῆς (ε) ἀντιστοιχεῖ ἓν **ἀλγεβρικὸν μέτρον:** τὸ ἀλγεβρικὸν μέτρον τῆς ἀντιστοίχου διευθυνομένης ἐπιπέδου γωνίας (ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός, καθ' ὅσον ἡ φορὰ τῆς $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ συμπίπτει μὲ τὴν ὁρισθεῖσαν ἐν τῷ (Ε) θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀντιστοιχίας προκύπτει ὅτι εἰς τὰς διευθυνομένας διέδρους τὰς **ἐχούσας τὴν αὐτὴν ἀκμὴν** δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν διευθυνομένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου, ὡς π.χ. μέτρα κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 360^0$, τὴν σχέσιν τοῦ Chasles κ.τ.λ.

## 212. Δεξιόστροφοι καὶ ἀριστερόστροφοι διευθυνόμεναι δίεδροι.

α') Αἱ διευθυνόμεναι δίεδροι μὲ ἀκμὴν (ε) δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς *δεξιοστρόφους* καὶ *ἀριστεροστρόφους* τῇ βοηθείᾳ διανύσματος $\vec{\delta}$ συγγραμμικοῦ πρὸς τὴν (ε) (σχ. 252) (ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τῇ βοηθείᾳ μιᾶς ἐκ τῶν δύο κατευθύνσεων (φορῶν) ἐπὶ τῆς (ε)), διὰ τοῦ ἕξῆς (ἀνθρωπομετρικοῦ) ὁρισμοῦ: Νοοῦμεν παρατηρητὴν ἱστάμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ε) ὁμορρόπως πρὸς τὸ $\vec{\delta}$ (σχ. 253). Οὗτος βλέπει ἐπὶ τοῦ (Ε) δύο ἀντιθέτους φοράς, μίαν βαίνουσαν ἐκ δεξιῶν του πρὸς τ' ἀριστερά του, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **ὀρθὴν φορὰν** καὶ τὴν ἀντίθετον, βαίνουσαν ἐξ ἀριστερῶν του πρὸς τὰ δεξιά του, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **ἀνάδρομον φοράν.** Ἐὰν ἡ φορὰ τῆς διευθυνομένης διέδρου $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ εἶναι ἡ ὀρθὴ φορά, τότε ἡ $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ λέγεται **δεξιόστροφος ὡς πρὸς τὴν κατεύθυνσιν** (*φορὰν*) **τοῦ $\vec{\delta}$.** Ἐὰν ἡ φορὰ τῆς $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ (δηλ. ἡ φορὰ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου της) συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀνάδρομον φοράν, τότε ἡ διευθυνομένη δίεδρος $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ λέγεται **ἀριστερόστροφος ὡς πρὸς τὴν κατεύθυνσιν $\vec{\delta}$.**



Σχ. 253

β') **Συμβατικῶς** ἡ ὀρθὴ φορὰ ἐπὶ τοῦ (Ε) ἀναφορικῶς πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{\delta}$ λαμβάνεται ὡς **θετικὴ** καὶ ἡ ἀνάδρομος ὡς **ἀρνητική,** ὁπότε αἱ δεξιόστροφοι ὡς πρὸς $\vec{\delta}$ δίεδροι θεωροῦνται θετικαὶ καὶ αἱ ἀριστερόστροφοι ἀρνητικαί.

γ') **Τὸ ἐπὶ τῆς (ε) διάνυσμα $\vec{\delta}$ προσανατολίζει ὅλα τὰ ἐπὶ τὴν (ε) κάθετα ἐπίπεδα.** Διότι ἐπὶ ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων τούτων δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς θετικὴ φορὰ ἡ ὀρθὴ φορὰ ὡς πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{\delta}$ καὶ ὡς ἀρνητικὴ ἡ ἀνάδρομος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΚΑΘΕΤΑ ΕΠΙΘΕΤΑ

**213. Ὁρισμός. — Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) λέγονται κάθετα ἐπ' ἄλληλα, ὅταν μία ἐκ τῶν τεσσάρων διέδρων, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, εἶναι ὀρθὴ δίεδρος.** (Δηλ. ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον ὀρθήν).

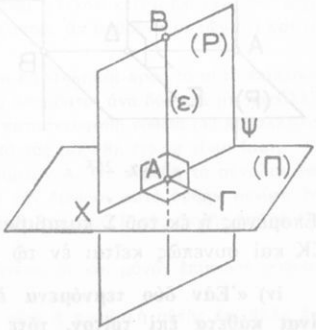
Εἶναι εὐνόητον ὅτι τότε, ὄχι μόνον ἡ μία, ἀλλὰ καὶ αἱ τέσσαρες σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν (Π) καὶ (Ρ) δίεδροι εἶναι ὀρθαί.

Ἡ σχέσις καθετότητος ἐπιπέδων συμβολίζεται διὰ τοῦ $\perp$ καί, ἐπειδὴ εἶναι σχέσις συμμετρική, διὰ τοῦτο $(\Pi)\perp(P) \Longleftrightarrow (P)\perp(\Pi)$.

## 214. Ἰδιότητες τῶν καθέτων ἐπιπέδων.

**i) «Δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, ἂν τὸ ἓν διέρχεται δι' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἄλλο».**

Ἔστω εὐθεῖα (ε) κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ (Ρ) τυχὸν διὰ τῆς (ε) διερχόμενον ἐπίπεδον (σχ. 254).



Σχ. 254

Ἔστω ΧΨ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν (Ρ) καὶ (Π), ΑΓ ἡμιευθεῖα τοῦ (Π) κάθετος ἐπὶ τὴν ΧΨ καὶ ΑΒ ἡμιευθεῖα ἐπὶ τῆς (ε). Ἐπειδὴ $AB\perp X\Psi$ (διότι $AB\perp(\Pi)$) καὶ $A\Gamma\perp X\Psi$ (ἐκ κατασκευῆς), διὰ τοῦτο ἡ $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου Β—ΧΨ—Γ. Ἀλλὰ ἡ $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ὀρθή, διότι ἡ ΒΑ ὡς $\perp$ (Π) εἶναι καὶ $\perp$ ΑΓ. Ἄρα καὶ ἡ δίεδρος Β—ΧΨ—Γ εἶναι ὀρθὴ (ὡς ἔχουσα ἀντίστοιχον ἐπίπεδον ὀρθὴν) καὶ ἑπομένως τὰ (Ρ) καὶ (Π) εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα ὡς σχηματίζοντα μίαν ὀρθὴν δίεδρον.

**Παρατήρησις.** Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀποτελεῖ **κριτήριον καθετότητος** δύο ἐπιπέδων· δύναται δὲ νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: *Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν ἑνὸς ἄλλου, τότε εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.*

**ii) «Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἑνός, κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομήν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο».**

Ἔστωσαν δύο κάθετα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 255) καὶ ΓΔ εὐθεῖα τοῦ (Π) κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ΑΒ αὐτῶν. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\Gamma\Delta\perp(P)$. Ἂς φέρωμεν ἐντὸς τοῦ (Ρ) τὴν εὐθεῖαν $\Delta E\perp AB$. Τότε, ἀφοῦ $\Gamma\Delta\perp AB$ καὶ $\Delta E\perp AB$, ἕπεται ὅτι ἡ $\widehat{\Gamma\Delta E}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου

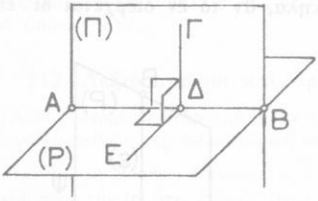
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ—ΑΒ—Ε καὶ ἐπειδὴ ἡ δίεδρος Γ—ΑΒ—Ε εἶναι ὀρθὴ (διότι (Π)⊥(Ρ) ἐξ ὑποθέσεως), ἔχει καὶ ἀντίστοιχον ἐπίπεδον ὀρθήν, δηλ. $\widehat{ΓΔΕ}=1^D$ ἢ ΓΔ⊥ΔΕ. Ἐκ τῶν ΓΔ⊥ΑΒ∧ΓΔ⊥ΔΕ ⇒ ΓΔ⊥(Ρ), ὅ.ἔ.δ.

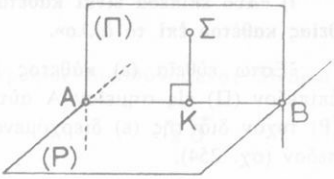
**iii) «Ἐὰν ἐπίπεδον (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ) καὶ ἐκ σημείου Σ τοῦ (Π) ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ), τότε ἡ ἀχθεῖσα κάθετος περιέχεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π)»** (σχ. 256).

Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν (Π) καὶ (Ρ). Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π) ἄς φέρωμεν ἐκ τοῦ Σ κάθετον ΣΚ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι ΣΚ⊥(Ρ).

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἐκ τοῦ Σ διέρχεται μία μόνη κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ).




Σχ. 255

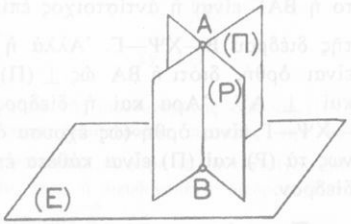



Σχ. 256

Ἑπομένως ἡ ἐκ τοῦ Σ καταβιβαζομένη κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ) συμπίπτει μὲ τὴν ΣΚ καὶ συνεπῶς κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π).

**iv) «Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τρίτον, τότε καὶ ἡ τομή των εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίτον».**

Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ε) καὶ ἔστω ΑΒ ἡ τομὴ τῶν (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 257). Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἐπειδὴ Α∈(Π) καὶ (Π)⊥(Ε), ἡ ἐκ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ (Ε) κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π). Ἐπίσης, ἐπειδὴ Α∈(Ρ) καὶ (Ρ)⊥(Ε), ἡ ἐκ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ (Ε) κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ρ). Ἡ ἐκ τοῦ Α λοιπὸν καταβιβαζομένη κάθετος ἐπὶ τὸ (Ε) ἀνήκει καὶ εἰς τὸ (Π) καὶ εἰς τὸ (Ρ), ἄρα συμπίπτει μὲ τὴν κοινὴν τομὴν ΑΒ τῶν (Π) καὶ (Ρ). Ὥστε, ΑΒ ⊥ (Ε). ὅ.ἔ.δ.




Σχ. 257

**Παρατήρησις**. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: *Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ δύο ἄλλα, τότε εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

818. Πᾶσα ἡμιευθεῖα ἀρχομένη ἀπὸ τῆς ἀκμῆς καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος μιᾶς διέδρου εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου.

819. Πᾶσα ἡμιευθεῖα ἀρχομένη ἀπὸ σημεῖον τῆς ἀκμῆς μιᾶς διέδρου, κειμένη ἐντὸς τῆς διέδρου καὶ ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας, κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τῆς διέδρου.

820. Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδον μιᾶς διέδρου εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας· καὶ ἀντιστρόφως.

821. Τίς ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἴσον κεκλιμένων πρὸς δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα;

822. Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα, τὰ ἴχνη της ἐπ' αὐτῶν ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

823. Ἵνα δύο σημεῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δοθείσης εὐθείας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀποστάσεις ἑκάστου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἄλλου νὰ εἶναι ἴσαι.

824. Δίδονται αἱ εὐθεῖαι (α), (β), (γ) ἀσύμβατοι ἀνὰ δύο καὶ μὴ παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν (γ) καὶ (α) ἰσοῦται πρὸς τὴν τῶν (γ) καὶ (β), εἶναι ἡ (γ) νὰ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τῶν διέδρων, αἵτινες σχηματίζονται, ἂν ἀχθοῦν διὰ τῶν (α) καὶ (β) ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὴν (γ).

Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ἂν αἱ (α), (β), (γ) εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον;

825. Δίδονται τέσσαρες εὐθεῖαι (α), (β), (γ), (δ) ἀσύμβατοι ἀνὰ δύο καὶ μὴ παράλληλοι ἀνὰ τρεῖς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα (χ) παράλληλος τῇ (δ) καὶ τῆς ὁποίας αἱ ἐλάχισται ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς (α), (β), (γ) νὰ εἶναι ἴσαι.

826. Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ὀρθῆς διέδρου δίδεται σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διερχόμενα διὰ τοῦ Α τέμνουν τὴν δίεδρον κατὰ ὀρθὴν γωνίαν. Νὰ εὑρεθῇ ἐπίσης τὸ σύνολον τῶν προβολῶν ἑνὸς ἄλλου σημείου Β τῆς ἀκμῆς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα.

827. Δι' εὐθείας πλαγίας πρὸς ἐπίπεδον (Π) ἄγεται ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

828. Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, τότε ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ ἄλλο ἐπίπεδον τέμνον τὸ δοθὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

829. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

830. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο εὐθεῖαι (α) καὶ (β) τέμνουσαι τὸ (Π), ἐξ ὧν (α)$\perp$(Π). Διὰ τῆς (α) ἄγεται τυχὸν ἐπίπεδον (Ρ) καὶ διὰ τῆς (β) ἄγεται ἐπίπεδον (Σ)$\perp$(Ρ). Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν τριῶν ἐπιπέδων (Π), (Ρ), (Σ).

831. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις ἀπὸ δοθείσης εὐθείας ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα λ.

832. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον ἀνίσους τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ ΑΔ ἡ διάμεσος αὐτοῦ. Ἐὰν εὐθεῖα ΔΧ εἶναι τοιαύτη, ὥστε Επιπ ΑΔΧ$\perp$Επιπ ΒΔΧ, τότε τὰ ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουν ἴσας προβολὰς ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΔΧ.

833. Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδων καθέτων, ἔχουν κοινὴν βάσιν ΓΔ=2χ καὶ ἴσας πλευρὰς ΑΓ=ΑΔ=α, ΒΓ=ΒΔ=α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ χ οὕτως, ὥστε ἡ δίεδρος γωνία Γ—ΑΒ—Δ νὰ εἶναι ὀρθή.

834. Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ πλευρᾶς α κεῖνται ἐπὶ καθέτων ἐπιπέδων. i) Ἐὰν Κ τὸ μέσον τοῦ ΖΔ καὶ Λ τὸ μέσον τοῦ ΔΕ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΕΚ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας διαμέτρου ΔΛ. ii) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν ΕΚ καὶ ΑΒ.

835. Ἐπὶ δύο καθέτων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) κεῖνται ἀντιστοίχως τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ. Σημεῖον μεταβλητόν, Ε, ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς $\overline{AE}$=χ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διαγράφει τὸ τμῆμα AB=2R. Εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ E θεωροῦμεν καὶ τὸ συμμετρικόν του Z ὡς πρὸς τὸ μέσον O τοῦ AB, καθὼς καὶ τὰ σημεῖα H ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ Θ ἐπὶ τῆς διαγωνίου AΓ τὰ προβαλλόμενα ἐπὶ τὴν AB, ἀντιστοίχως εἰς E καὶ Z.

i) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ HΘ.

ii) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ποσότης $y=\Theta H^2$ συναρτήσει τῶν x καὶ R καὶ νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαί της, ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ 0 ἕως 2R.

**215. Σημειακὸς μετασχηματισμὸς** καλεῖται πᾶσα ἀντιστοιχία, βάσει τῆς ὁποίας εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ (δι' ὡρισμένης τινὸς διαδικασίας) ἓν ἄλλο σημεῖον M′ τοῦ χώρου καὶ μόνον ἕν. Ἑπομένως ὁ σημειακὸς μετασχηματισμὸς εἶναι μία **μονοσήμαντος ἀπεικόνισις** τοῦ χώρου εἰς τὸν ἑαυτόν του. Τὸ M′, ἀντίστοιχον τοῦ M, λέγεται **εἰκὼν** τοῦ M ἢ **ὁμόλογον** τοῦ M κατὰ τὸν μετασχηματισμόν. Τὸ M λέγεται **ἀρχέτυπον** τοῦ M′. Ὁρισθέντος ἑνὸς σημειακοῦ μετασχηματισμοῦ T, τότε εἰς κάθε **σημειοσύνολον** (δηλ. σχῆμα) F τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕτερον σημειοσύνολον F′, ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰς εἰκόνας M′ τῶν σημείων M τοῦ F τὰς παρεχομένας διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ T. Τὸ σύνολον F′ τῶν εἰκόνων τῶν σημείων τοῦ F λέγεται τὸ **ὁμόλογον** ἢ τὸ **μετεσχηματισμένον** τοῦ F ἢ καὶ ἡ **εἰκὼν** τοῦ F κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν T. Ἐὰν συμβῇ τὸ σχῆμα F′ νὰ ταυτίζεται μὲ τὸ F, τότε λέγομεν ὅτι τὸ F παραμένει **ἀναλλοίωτον ὡς ἓν ὅλον** διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ T. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις $M_1M_2$ δύο σημείων $M_1$ καὶ $M_2$ τοῦ χώρου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν $M'_1M'_2$ τῶν εἰκόνων των $M'_1, M'_2$, τότε ὁ μετασχηματισμὸς λέγεται **ἰσομετρικός.** Οὗτος διατηρεῖ τὰ μήκη καὶ τὰς γωνίας.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἕτερος μετασχηματισμὸς T′ μεταφέρων τὸ M′ εἰς τὸ M (ἑκάστην εἰκόνα εἰς τὸ ἀρχέτυπόν της), τότε ὁ T′ λέγεται **ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς** τοῦ T (τοῦ μεταφέροντος τὸ M εἰς τὸ M′).

Τέλος ἡ **κίνησις** ἢ **μετατόπισις** τοῦ χώρου ἡ **μεταφέρουσα κάθε σχῆμα ἐπὶ ἴσου σχήματος** εἶναι μὲν μία μὴ ὁριζομένη ἔννοια, ἀλλὰ περιγράφεται ὑπὸ ἀξιωμάτων (ἀξιωμάτων τῆς κινήσεως), τὰ ὁποῖα δὲν ἀναφέρονται εἰς τὸ παρὸν βιβλίον καὶ εἶναι καὶ αὐτὴ εἰς σημειακὸς μετασχηματισμός.

## ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ

### Ι. ΣΤΡΟΦΗ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ

**216.** Ἀποδεικνύεται τὸ ἑξῆς θεώρημα:

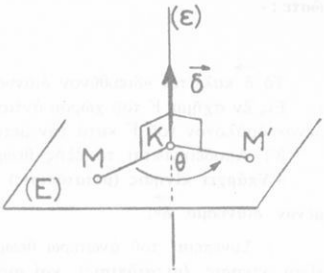
**«Δοθείσης εὐθείας (ε) ὑπάρχει κίνησις ἀφήνουσα τὰ σημεῖα τῆς (ε) ἀκίνητα καὶ στρέφουσα κάθε ἡμιεπίπεδον ἀρχόμενον ἀπὸ τῆς (ε) κατὰ δοθεῖσαν διευθυνομένην δίεδρον γωνίαν θ ($-180^0 \leqq \theta \leqq +180^0$)».**

Ἤτοι κίνησις, φέρουσα κάθε ἡμιεπίπεδον $P^{(1)}$ ἀπὸ τῆς (ε) ἀρχόμενον εἰς ἡμιεπίπεδον $P'^{(1)}$ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διευθυνομένη δίεδρος $(P^{(1)}, P'^{(1)})$ (βλ. § **211**) νὰ ἔχῃ ἀλγεβρικὸν μέτρον δοθὲν θ (μετρούμενον ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), ἧς τὰ σημεῖα μένουν ἀκίνητα).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**217. Ὁρισμὸς καὶ ἰδιότητες.** — α') **Δοθέντων μιᾶς εὐθείας (ε) ἐν τῷ χώρῳ, ἑνὸς προσανατολιστικοῦ διανύσματος $\vec{\delta}$ ἐπ' αὐτῆς (§ 212, γ') καὶ ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ θ, καλεῖται στροφὴ ὁ σημειακὸς μετασχηματισμός, καθ' ὃν εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ ἀντιστοιχεῖ σημεῖον Μ' κείμενον μετὰ τοῦ Μ ἐπὶ ἐπιπέδου (Ε) καθέτου ἐπὶ τὴν (ε), τέμνοντος αὐτὴν εἰς Κ καὶ τοιοῦτον, ὥστε** $KM = KM'$ **καὶ** $(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \theta$ (σχ. 258).

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος σημειοῦται : Στρ $\{(\varepsilon), \theta\}$.



Σχ. 258

Τὸ ἐπίπεδον (Ε) προσανατολίζεται ὑπὸ τοῦ διανύσματος $\vec{\delta}$, θεωρουμένης ὡς θετικῆς φορᾶς περιστροφῆς ἐν αὐτῷ τῆς ὀρθῆς ὡς πρὸς $\vec{\delta}$ φορᾶς (§ **212**, α'). Ἀλλὰ καὶ **ἄνευ τοῦ** $\vec{\delta}$, δύναται νὰ ληφθῇ ἐπὶ τοῦ (Ε) αὐθαίρετός τις προσανατολισμὸς ἰσχύων δι' ὅλα τὰ κάθετα ἐπὶ τὴν (ε) ἐπίπεδα. Παρατηροῦμεν ὅτι :

1ον. **Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς (ε) παραμένουν ἀναλλοίωτα κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον.** Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ.

2ον. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς εἶναι πάλιν στροφή, ἄξονος (ε), ἀλλὰ γωνίας —θ.

3ον. Ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου (Ε) τὸ Μ' εἶναι ὁμόλογον (ἀντίστοιχον) τοῦ Μ εἰς μίαν ἐπίπεδον στροφὴν (Κ, θ) (βλ. σημειακοὶ μετασχηματισμοί, μέρος Γ').

**β') (Θ)—Ἡ στροφὴ περὶ ἄξονα εἶναι κίνησις (μετατόπισις). Ἑπομένως τὸ μετεσχηματισμένον διὰ στροφῆς σχῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικόν.**

Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § **216** ὑπάρχει κίνησις Η ἀφήνουσα τὰ σημεῖα τῆς (ε) ἀκίνητα (σχ. 258) καὶ στρέφουσα ὅλα τὰ ἡμιεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῆς (ε) ἀρχόμενα κατὰ διευθυνομένην δίεδρον, ἀλγεβρικοῦ μέτρου δοθέντος θ. Ἡ κίνησις αὐτὴ Η φέρει τὸ ἡμιεπίπεδον $\{(\varepsilon), M\}$ εἰς ἕτερον ἡμιεπίπεδον $\{(\varepsilon), M'\}$ (σχ. 258), τὸ Κ εἰς τὸ Κ, τὸ Μ εἰς Μ' καὶ τὸ τμῆμα ΚΜ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΚΜ'. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν κίνησιν τὰ μήκη καὶ γωνίαι διατηροῦνται, θὰ εἶναι $KM = KM'$, ἀλλὰ καὶ $KM' \perp (\varepsilon)$ (ἀφοῦ $KM \perp (\varepsilon)$), ἄρα ἡ $(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \theta$ (ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διευθυνομένης διέδρου). Αἱ δύο σχέσεις : $KM = KM'$ καὶ $(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \theta$ δεικνύουν ὅτι τὸ Μ' εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ εἰς στροφὴν ἄξονος (ε) καὶ γωνίας θ. Ἄρα ἡ κίνησις Η συμπίπτει μὲ τὴν στροφὴν ταύτην, δηλ. εἶναι μετασχηματισμὸς ἰσοδύναμος πρὸς τὴν στροφήν.

γ') **Ἄξων ἐπαναφορᾶς. Λέγομεν ὅτι μία εὐθεῖα (ε) εἶναι ἄξων ἐπαναφορᾶς τοῦ σχήματος F, τάξεως ν, ὅταν τὸ σχῆμα F μένῃ ἀναλλοίωτον ὡς ἓν ὅλον κατὰ τὴν στροφήν :**

$$\text{Στρ.} \left\{(\varepsilon), \frac{360^0}{\nu}\right\}.$$

Ἤτοι, διὰ στροφῆς περὶ τὴν (ε) κατὰ γωνίαν $\frac{360^0}{\nu}$, τὸ σχῆμα F ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του. Οὕτω π.χ. ἡ εὐθεῖα (ε), ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου κανονικοῦ πενταγώνου καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πενταγώνου, εἶναι ἄξων ἐπαναφορᾶς τάξεως 5 τοῦ πενταγώνου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## II. ΜΕΤΑΦΟΡΑ

**218.** α΄) **Δοθέντος διανύσματος $\vec{\delta}$ καλεῖται μεταφορὰ ὁ σημειακὸς μετασχηματισμός, καθ' ὃν εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Μ΄ τοιοῦτον, ὥστε :**

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}.$$

Τὸ $\vec{\delta}$ καλεῖται «διευθῦνον διάνυσμα» καὶ ὁ μετασχηματισμὸς σημειοῦται : Μετ($\vec{\delta}$).

Εἰς ἓν σχῆμα F τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ διὰ τῆς μεταφορᾶς ἕτερον σχῆμα F΄ καλούμενον ὁμόλογον τοῦ F κατὰ τὴν μεταφοράν

β΄) Ἀποδεικνύεται τὸ ἑξῆς θεώρημα :

**«Ὑπάρχει κίνησις (μετατόπισις) μεταφέρουσα ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου κατὰ δεδομένον διάνυσμα $\vec{\delta}$».**

γ΄ Συνέπεια τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἶναι ὅτι : **«ἡ μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ εἶναι κίνησις (μετατόπισις) καὶ συνεπῶς τὸ διὰ μεταφορᾶς σχήματος F προκῦπτον σχῆμα F΄ εἶναι ἴσον μὲ τὸ F».**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

# ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΙ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ

## Ι. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

**219. Ἀξονικὴ συμμετρία.** α΄) — **Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ΄ λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν (ε), ὅταν ἡ (ε) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΜΜ΄.**

**β΄) Δοθείσης εὐθείας (ε) ἐν τῷ χώρῳ καλεῖται «ἀξονικὴ συμμετρία» ὡς πρὸς τὴν (ε) εἰς σημειακὸς μετασχηματισμὸς προσεταιρίζων εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ τὸ συμμετρικόν του Μ΄ ὡς πρὸς τὴν (ε).** (Σημειοῦται : Συμμ{(ε)}).

Ἡ (ε) λέγεται **ἄξων συμμετρίας.**

γ΄) Δύο σχήματα F καὶ F΄ λέγονται **συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα,** ὅταν τὸ ἓν εἶναι ὁμόλογον τοῦ ἄλλου εἰς μίαν ἀξονικὴν συμμετρίαν (τὸ F΄ εἶναι τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ F).

δ΄) Ἡ ἀξονικὴ συμμετρία **συμπίπτει μὲ στροφὴν** περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας κατὰ γωνίαν 180° ἢ —180° (βλέπε ὁρισμὸν τῆς στροφῆς § **217**). Ἐπειδὴ δὲ ἡ στροφὴ εἶναι κίνησις (§ **217** β΄), διὰ τοῦτο **δύο σχήματα τοῦ χώρου συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι ἴσα** (ἐφαρμόσιμα).

ε΄) **Ἄξων συμμετρίας σχήματος.** Λέγομεν ὅτι **μία εὐθεῖα (ε) εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος F, ὅταν πᾶν σημεῖον τοῦ F ἔχῃ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν (ε) πάλιν ἐπὶ τοῦ F.** Δηλαδή, ὅταν τὸ σχῆμα F μένῃ



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**ἀναλλοίωτον ὡς ἓν ὅλον** κατὰ τὴν ἀξονικὴν ὡς πρὸς (ε) συμμετρίαν, τότε ἡ (ε) εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ F. Ἤ ἄλλως : Ὅταν τὸ F ταυτίζεται μὲ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς (ε), ἡ (ε) εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ F.

ς΄) Ὁ ἄξων συμμετρίας σχήματος (ἂν ὑπάρχῃ τοιοῦτος) εἶναι καὶ **ἄξων ἐπαναφορᾶς τάξεως 2** (βλ. § **217**, γ΄).

## ΙΙ. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

**220. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες.** α΄) **Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ΄ λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), ὅταν τὸ (Π) εἶναι μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΜΜ΄.**

**β΄) Δοθέντος ἐπιπέδου (Π) καλεῖται συμμετρία ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημειακὸς μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ τοῦ χώρου προσεταιρίζει τὸ συμμετρικόν του Μ΄ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).** (Σημειοῦται : Συμμ {(Π)}).

Κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον καὶ τὸ Μ εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τοῦ Μ΄, πάντα δὲ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι **διπλᾶ σημεῖα** (ἀντιστοιχοῦν ἕκαστον εἰς ἑαυτό).

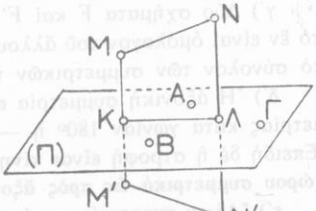
γ΄) Δύο σχήματα F καὶ F΄ λέγονται **συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π),** ὅταν τὸ ἓν εἶναι τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ ἄλλου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π). (Τὸ ἓν εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ ἄλλου κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π)).

Τὸ συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς (Π) λέγεται καὶ *«κατοπτρικὸν»* τοῦ σχήματος F ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

δ΄) **Ἐπίπεδον συμμετρίας ἑνὸς σχήματος.** Δοθέντος σχήματος F, ἐὰν ὑπάρχῃ ἐπίπεδον (Π) τοιοῦτον, ὥστε τὸ συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς (Π) νὰ εἶναι πάλιν τὸ F, τότε τὸ (Π) λέγεται **ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ σχήματος F.**

ε΄) (Θ) — **Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς ἐπίπεδον δὲν εἶναι κίνησις (μετατόπισις). Εἶναι ὅμως ἰσομετρικὸς μετασχηματισμός.**

*Ἀπόδειξις.* Κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς (Π) τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τοῦ (Π) μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας (σχ. 259) μένουν ἀναλλοίωτα (ἔχουν ἀντίστοιχα τοὺς ἑαυτούς των). Ἐὰν λοιπὸν ἡ Συμμ{(Π)} ἦτο κίνησις, τότε, ἀφοῦ διατηρεῖ τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, ἀκίνητα, θὰ ἦτο ἡ ταυτοτικὴ κίνησις, δηλ. καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου θὰ ἔπρεπε κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν αὐτὸν νὰ μένουν ἀκίνητα· (ὡς



Σχ. 259

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

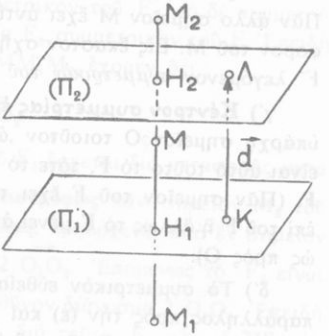
προκύπτει ἀπὸ τὰ ἀξιώματα τῆς κινήσεως). Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει. Ἄρα ἡ Συμμ{(Π)} δὲν εἶναι μετατόπισις τοῦ χώρου.

—Ἐξ ἄλλου τὸ συμμετρικὸν τμήματος ΜΝ ὡς πρὸς τὸ (Π) (σχ. 259) εἶναι τμῆμα Μ΄Ν΄ ἴσον πρὸς τὸ ΜΝ (διότι ΜΝ καὶ Μ΄Ν΄ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ευθΚΛ τὴν συνδέουσαν τὰ μέσα τῶν ΜΜ΄ καὶ ΝΝ΄). Δηλ. τὰ μήκη διατηροῦνται κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς ἐπίπεδον. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος εἶναι ἰσομετρικὸς *(«ἰσομετρία»)*. Ἀφοῦ διατηροῦνται τὰ μήκη, διατηροῦνται καὶ αἱ γωνίαι.

ς΄) **Παρατήρησις**. Εἰς τὸ σχ. 259 βλέπομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν τῆς ευθΜΝ ὡς πρὸς (Π) συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικὸν τῆς ευθΜΝ ὡς πρὸς τὴν ευθΚΛ. Ἄρα **τὸ συμμετρικὸν εὐθείας ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθεῖα** (ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὸ (Π)). Κατὰ συνέπειαν καὶ **τὸ συμμετρικὸν ἐπιπέδου (Ε) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἐπίπεδον (Ε΄).** Τέλος, ἀφοῦ αἱ γωνίαι διατηροῦνται, ἕπεται ὅτι καὶ **τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) εἶναι δίεδρος γωνία ἴση.**

ζ΄) (Θ) — **Τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ὡς πρὸς δύο διάφορα ἐπίπεδα ($(Π_1)$ καὶ $(Π_2)$ εἶναι ἴσα μεταξύ των.**

I. Ἔστω $(Π_1)//(Π_2)$ (σχ. 260). Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου, $M_1$ καὶ $M_2$ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς $(Π_1)$ καὶ $(Π_2)$ καὶ $H_1$, $H_2$ αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τὰ $(Π_1)$ καὶ $(Π_2)$. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{KΛ} = \vec{d}$ εἶναι σταθερόν, ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τοῦ Μ.

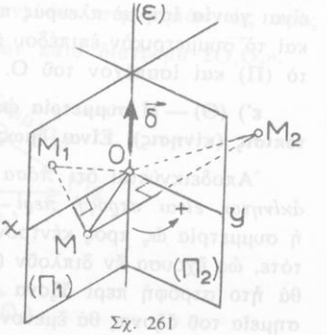


Σχ. 260

Ἔχομεν: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{H_1M} + 2\overrightarrow{MH_2} = 2(\overrightarrow{H_1M} + \overrightarrow{MH_2}) = 2\overrightarrow{H_1H_2} = 2\vec{d}$ (σταθερόν).

Ἂν τὸ Μ διαγράφῃ σχῆμά τι F, τότε τὰ $M_1$ καὶ $M_2$ διαγράφουν τὰ συμμετρικὰ $F_1$ καὶ $F_2$ τοῦ F ὡς πρὸς $(Π_1)$ καὶ $(Π_2)$. Ἐπειδὴ $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\vec{d}$, τὸ σχῆμα $F_2$ προέρχεται ἐκ τοῦ $F_1$ διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $2\vec{d}$, ἄρα $F_1 = F_2$.

II. Ἔστω ὅτι τὰ $(Π_1)$, $(Π_2)$ τέμνονται κατὰ τὴν (ε) (σχ. 261). Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ σχήματος F καὶ $M_1$ καὶ $M_2$ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς $(Π_1)$ καὶ $(Π_2)$. Ἐπειδὴ $MM_1$ορθογ(ε) καὶ $MM_2$ορθογ(ε), ἕπεται ὅτι τὸ Επιπ$MM_1M_2$ ⊥(ε) καὶ ἑπομένως τοῦτο τέμνει μίαν τῶν διέδρων, τὰς ὁποίας ὁρίζουν τὰ $(Π_1)$ καὶ $(Π_2)$ κατὰ τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον αὐτῆς $x\hat{O}y$. Προσανατολίζοντες τὸ ἐπίπεδον xOy διὰ διανύσματος $\vec{δ}$ ⊥(ε) (βλ. § **211**, γ΄) ἔχομεν: $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = 2\{(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) +$



Σχ. 261

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$+(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Oy})) = 2(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = 2\theta$ (σταθερά). Ἔχομεν καὶ $OM_1 = OM_2$, ἄρα τὸ $M_2$ προέρχεται ἐκ τοῦ $M_1$ διὰ στροφῆς περὶ τὴν (ε) κατὰ σταθερὰν γωνίαν 2θ. Ἑπομένως τὰ ὑπὸ τῶν $M_1$ καὶ $M_2$ διαγραφόμενα σχήματα $F_1$, $F_2$ προκύπτουν τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ στροφῆς περὶ ἄξονα· ἄρα εἶναι ἴσα, $F_1 = F_2$. (**Παρατήρησις.** Ἡ ἰσότης $F_1 = F_2$ προκύπτει ἀμέσως καὶ ἐκ τοῦ (Θ) τῆς § **222**).

## III. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟΝ

**221. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες.** — **α΄) Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ΄ τοῦ χώρου λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς τρίτον σημεῖον Ο, ὅταν τὸ Ο εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΜΜ΄.**

**β΄) Δοθέντος σταθεροῦ σημείου Ο ἐν τῷ χώρῳ, καλεῖται συμμετρία ὡς πρὸς κέντρον Ο ὁ σημειακὸς μετασχηματισμός, ὅστις εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ τοῦ χώρου προσεταιρίζει τὸ συμμετρικὸν Μ΄ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ Ο.** (Σημειοῦται : Συμμ(Ο)).

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος ἔχει **ἓν μόνον διπλοῦν σημεῖον**, τὸ Ο (δηλ. τὸ *«κέντρον συμμετρίας»*). Μόνον τὸ Ο ἔχει ἀντίστοιχον τὸν ἑαυτόν του. Πᾶν ἄλλο σημεῖον Μ ἔχει ἀντίστοιχον (συμμετρικὸν) ἓν σημεῖον Μ΄ διάφορον τοῦ Μ. Εἰς ἕκαστον σχῆμα F τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕτερον σχῆμα F΄ λεγόμενον *συμμετρικὸν τοῦ* F *ὡς πρὸς* Ο.

γ΄) **Κέντρον συμμετρίας ἑνὸς σχήματος.** Δοθέντος σχήματος F, ἐὰν ὑπάρχῃ σημεῖον Ο τοιοῦτον ,ὥστε τὸ συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς Ο νὰ εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ F, τότε τὸ Ο λέγεται **κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος F.** (Πᾶν σημεῖον τοῦ F ἔχει τότε τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς Ο πάλιν ἐπὶ τοῦ F ἢ ἄλλως τὸ F μένει ἀναλλοίωτον ὡς ἓν ὅλον κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς Ο).

δ΄) Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ε) ὡς πρὸς κέντρον Ο εἶναι εὐθεῖα (ε΄) παράλληλος πρὸς τὴν (ε) καὶ ἰσαπέχουσα τοῦ Ο, τὸ δὲ συμμετρικὸν διανύσματος ὡς πρὸς Ο εἶναι διάνυσμα ἀντίθετον. (Γνωστὰ ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας). Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι τὸ συμμετρικὸν γωνίας ὡς πρὸς κέντρον εἶναι **γωνία ἴση** μὲ πλευρὰς παρ/λους καὶ ἀντιρρόπους πρὸς τὴν ἀρχικὴν καὶ τὸ συμμετρικὸν ἐπιπέδου (Π) ὡς πρὸς Ο εἶναι ἐπίπεδον παρ/λον πρὸς τὸ (Π) καὶ ἰσαπέχον τοῦ Ο.

**ε΄) (Θ) — Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς κέντρον ἐν τῷ χώρῳ δὲν εἶναι μετατόπισις (κίνησις). Εἶναι ὅμως ἰσομετρικὸς μετασχηματισμός.**

Ἀποδεικνύεται ὅτι *πᾶσα κίνησις τοῦ χώρου ἀφήνουσα ἓν σημεῖον Ο ἀκίνητον εἶναι στροφὴ περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ Ο.* Ἐὰν λοιπὸν ἡ συμμετρία ὡς πρὸς κέντρον ἦτο μία κίνησις (μετατόπισις) τοῦ χώρου, τότε, ὡς ἔχουσα ἓν διπλοῦν (ἀκίνητον) σημεῖον (τὸ κέντρον συμμετρίας), θὰ ἦτο στροφὴ περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ Ο. Ἀλλὰ τότε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος θὰ ἔμενον ἀκίνητα καὶ ἑπομένως θὰ ὑπῆρχον ἄπειρα

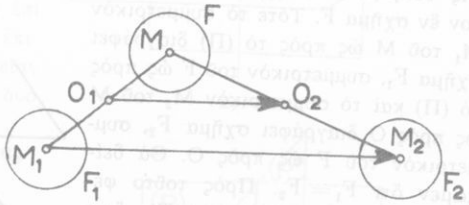
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διπλᾶ σημεῖα, ἐνῷ μόνον τὸ Ο εἶναι διπλοῦν κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς Ο.

—Ἐξ ἄλλου τὸ συμμετρικὸν τμήματος MN ὡς πρὸς Ο εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα M'N' ἴσον πρὸς MN. Συνεπῶς ἡ Συμμ(Ο) διατηρεῖ τὰ μήκη, εἶναι δηλ. μία ἰσομετρία (ἢ ἰσομετρικὸς μετασχηματισμός).

ς') (Θ) — **Τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ὡς πρὸς δύο διάφορα κέντρα εἶναι ἴσα μεταξύ των.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν $F_1$ καὶ $F_2$ τὰ συμμετρικὰ ἑνὸς σχήματος F ὡς πρὸς κέντρα $O_1$, $O_2$ ἀντιστοίχως (σχ. 262) καὶ $M_1$ τυχὸν σημεῖον τοῦ $F_1$. Τότε τὸ συμμετρικὸν M τοῦ $M_1$ ὡς πρὸς $O_1$ ἀνήκει εἰς τὸ σχῆμα F, συμμετρικὸν τοῦ $F_1$, τὸ δὲ συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς $O_2$ ἀνήκει εἰς τὸ σχῆμα $F_2$, συμμετρικὸν τοῦ F. Ἐπειδὴ τὰ $O_1$, $O_2$ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τρ. $MM_1M_2$, ἔχομεν ὅτι :

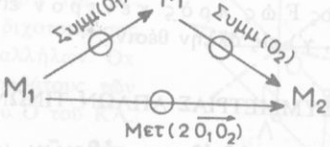


Σχ. 262

$$(1) \qquad \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Ἡ (1) δεικνύει ὅτι πᾶν σημεῖον $M_1$ τοῦ $F_1$ ἔρχεται διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $2.\overrightarrow{O_1O_2}$ εἰς σημεῖον τοῦ $F_2$. **Ἀντιστρόφως** πᾶν σημεῖον $M_2$ τοῦ $F_2$, ὡς βλέπομεν διὰ τῆς ἀντιστρόφου πορείας, προέρχεται ἀπὸ ἓν σημεῖον $M_1$ τοῦ $F_1$ διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $2.\overrightarrow{O_1O_2}$. Ἑπομένως τὸ $F_2$ εἶναι ὁμόλογον τοῦ $F_1$ εἰς μίαν μεταφορὰν μὲ διευθῦνον διάνυσμα $2.\overrightarrow{O_1O_2}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μεταφορὰ εἶναι μετατόπισις (κίνησις), διὰ τοῦτο $F_1 = F_2$ (§ **218**, γ').

ζ') **Τὸ γινόμενον δύο κεντρικῶν συμμετριῶν.** Τὸ σχ. 262 δεικνύει ὅτι **«ἡ ἀλλεπάλληλος ἐκτέλεσις (γινόμενον) δύο συμμετριῶν ὡς πρὸς κέντρα $O_1$ καὶ $O_2$ ἰσοδυναμεῖ μὲ μεταφορὰν κατὰ διάνυσμα $2\overrightarrow{O_1O_2}$».** Σχηματικῶς :



Σχ. 263

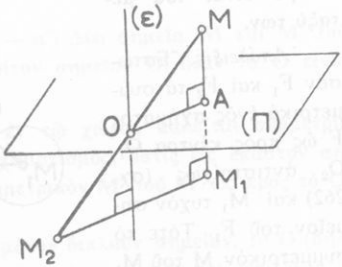
Συμβολικῶς : $\text{Συμμ}(O_2) \circ \text{Συμμ}(O_1) = \text{Μετ}(2\overrightarrow{O_1O_2})$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟΝ ΚΑΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

**222.** (Θ) — **Τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ὡς πρὸς τυχὸν ἐπίπεδον καὶ ὡς πρὸς τυχὸν κέντρον εἶναι ἴσα μεταξύ των.**

*Ἀπόδειξις.* **Ι. Τὸ κέντρον Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π)** (σχ. 264). Ἂς θεωρήσωμεν σημεῖον Μ διατρέχον ἓν σχῆμα F. Τότε τὸ συμμετρικὸν $M_1$ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ (Π) διαγράφει σχῆμα $F_1$, συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς τὸ (Π) καὶ τὸ συμμετρικὸν $M_2$ τοῦ Μ ὡς πρὸς Ο διαγράφει σχῆμα $F_2$, συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς Ο. Θὰ δείξωμεν ὅτι $F_1 = F_2$. Πρὸς τοῦτο φέρομεν εἰς τὸ Ο εὐθεῖαν (ε)⊥(Π), ἥτις διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς $MM_2$ τοῦ τρ.$MM_2M_1$ καὶ παρ/λος πρὸς τὴν $MM_1$ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος $M_1M_2$. Ἐὰν Α τὸ μέσον τοῦ $MM_1$, τότε Α∈(Π) καὶ $OA // M_1M_2$.



Σχ. 264

Ἐπειδὴ (ε)⊥ΟΑ ⇒ (ε)⊥$M_1M_2$. Ἑπομένως **ἡ σταθερὰ εὐθεῖα (ε) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ $M_1M_2$,** ἤτοι τὰ $M_1$ καὶ $M_2$ εἶναι συμμετρικὰ πάντοτε ὡς πρὸς τὴν (ε), ἄρα καὶ τὰ ὑπ' αὐτῶν διαγραφόμενα σχήματα $F_1$,$F_2$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (ε), ἄρα εἶναι ἴσα (§ **219,** δ').

**ΙΙ. Τὸ κέντρον Ο κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Π).** Ἂς λάβωμεν ἓν σταθερὸν σημεῖον $O_1$ ἐπὶ τοῦ (Π). Τότε κατὰ τὸ προηγούμενον :

(1) συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς (Π) = συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς $O_1$. Γνωρίζομεν ὅμως (§ **221,** ς') ὅτι

(2) συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς $O_1$ = συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς Ο.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι :

συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς (Π) = συμμετρικὸν τοῦ F ὡς πρὸς Ο, ὅ.ἔ.δ.

**Παρατήρησις.** Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος βλέπομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σχήματος F ὡς πρὸς κέντρον εἶναι τὸ «κατοπτρικὸν» τοῦ F (§ **220,** γ') εἰς ἄλλην θέσιν.

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΛΩΝ ΤΙΝΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

**223. Ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν** ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) (σχ. 265), ἀποτελεῖ σχῆμα ἔχον :

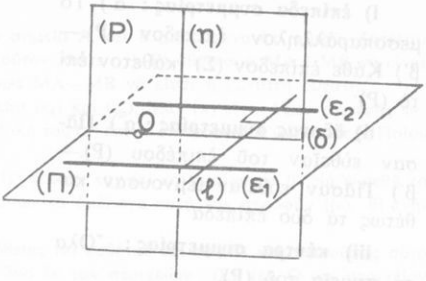
**i) ἐπίπεδα συμμετρίας:** α') Τὸ ὑπὸ τῶν δύο παραλλήλων ὁριζόμενον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπίπεδον (Π). — β΄) Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$). — γ΄) Τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τὸ διερχόμενον διὰ τῆς μεσοπαραλλήλου (δ) καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π)·

**ii) ἄξονας συμμετρίας :** α΄) Πᾶσαν εὐθεῖαν (η) κάθετον ἐπὶ τὴν (δ) καὶ κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ρ) — β΄) Πᾶσαν εὐθεῖαν (*l*) τέμνουσαν καθέτως τὰς δύο παραλλήλους·

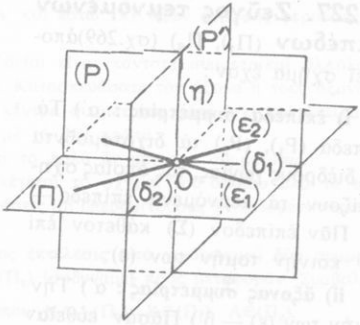
**iii) κέντρα συμμετρίας :** Κάθε σημεῖον Ο τῆς (δ).




Σχ. 265

**224. Ζεῦγος τεμνομένων εὐθειῶν** ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) (σχ. 266) ἀποτελεῖ σχῆμα ἔχον :

**i) ἐπίπεδα συμμετρίας :** α΄) Τὸ ὑπὸ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον (Π). — β΄) Τὰ ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Ρ΄) κάθετα ἐπὶ τὸ (Π) καὶ διερχόμενα διὰ τῶν εὐθειῶν ($\delta_1$) καὶ ($\delta_2$) τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας τῶν ($\varepsilon_1$), ($\varepsilon_2$)·

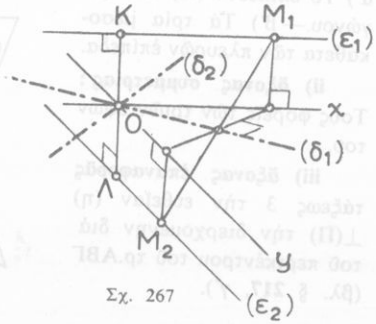



Σχ. 266

**ii) ἄξονας συμμετρίας :** α΄) Τὰς εὐθείας ($\delta_1$) καὶ ($\delta_2$). — β΄) Τὴν κοινὴν κάθετον (η) τῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$)·

**iii) κέντρον συμμετρίας :** Τὴν τομὴν των Ο.

**225. Ζεῦγος ἀσυμβάτων εὐθειῶν** ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) (σχ. 267) ἀποτελεῖ σχῆμα ἔχον **ἄξονας συμμετρίας :** α΄) Τὴν κοινὴν κάθετον ΚΛ τῶν δύο ἀσυμβάτων.— β΄) Τὰς εὐθείας ($\delta_1$) καὶ ($\delta_2$) τὰς διχοτομούσας τὰς γωνίας τῶν παραλλήλων Οx καὶ Οy πρὸς τὰς ἀσυμβάτους τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ μέσου Ο τοῦ ΚΛ.




Σχ. 267

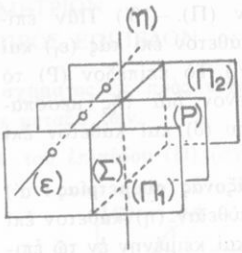
**226. Ζεῦγος παραλλήλων ἐπιπέδων** ($\Pi_1$), ($\Pi_2$) (σχ. 268) ἀποτελεῖ σχῆμα ἔχον :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**i) ἐπίπεδα συμμετρίας :** α΄) Τὸ μεσοπαράλληλον ἐπίπεδον (Ρ).— β΄) Κάθε ἐπίπεδον (Σ) κάθετον ἐπὶ τὸ (Ρ)·

**ii) ἄξονας συμμετρίας :** α΄) Πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Ρ).— β΄) Πᾶσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν καθέτως τὰ δύο ἐπίπεδα·

**iii) κέντρα συμμετρίας :** Ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Ρ).

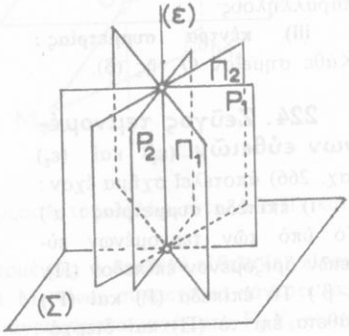


Σχ. 268

## 227. Ζεῦγος τεμνομένων ἐπιπέδων ($Π_1$), $Π_2$) (σχ.269)ἀποτελεῖ σχῆμα ἔχον :

**i) ἐπίπεδα συμμετρίας :** α΄) Τὰ ἐπίπεδα ($Ρ_1$), ($Ρ_2$) τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ τεμνόμενα ἐπίπεδα.— β΄) Πᾶν ἐπίπεδον (Σ) κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν των (ε)·

**ii) ἄξονας συμμετρίας :** α΄) Τὴν τομὴν των (ε).— β΄) Πᾶσαν εὐθεῖαν κειμένην ἐντὸς τοῦ ($Ρ_1$) ἢ τοῦ ($Ρ_2$) καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε)·



Σχ. 269

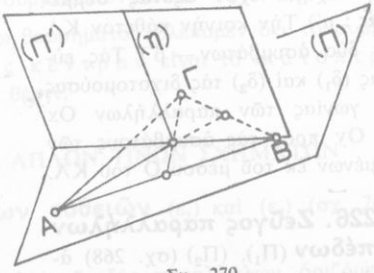
**iii) κέντρα συμμετρίας** : Τὰ σημεῖα τῆς (ε).

## 228. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 270) ἔχει :

**i) ἐπίπεδα συμμετρίας :** α΄) Τὸ ἐπίπεδον (Π) τοῦ τριγώνου.— β΄) Τὰ τρία μεσοκάθετα τῶν πλευρῶν ἐπίπεδα.

**ii) ἄξονας συμμετρίας :** Τοὺς φορεῖς τῶν τριῶν ὑψῶν του.

**iii) ἄξονας ἐπαναφορᾶς** τάξεως 3 τὴν εὐθεῖαν (η) ⊥(Π) τὴν διερχομένην διὰ τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΑΒΓ (βλ. § **217**, γ΄).



Σχ. 270

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

836. Δίδεται ἐπίπεδον (Ε) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β μὴ κείμενα ἐπ' αὐτοῦ. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τοῦ (Ε) σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε : i) Τὸ ἄθροισμα ΜΑ + ΜΒ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν. Ἢ ii) ἡ διαφορὰ ΜΑ—ΜΒ νὰ εἶναι ἡ μεγίστη δυνατή.

837. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$. Ἐὰν (x) εἶναι ἄξων στροφῆς φερούσης τὴν $(\varepsilon_1)$ ἐπὶ τῆς $(\varepsilon_2)$, ποία ἡ προβολὴ τοῦ (x) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$; Ποῖον τὸ σύνολον τῶν ἀξόνων (x);

838. Δίδεται εὐθεῖα (ε), ἐπίπεδον (Π) τέμνον τὴν (ε) καὶ μία γωνία θ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ (Π), τῶν ὁποίων τὰ ὁμόλογα κατὰ τὴν στροφὴν {(ε), θ} ἀνήκουν πάλιν εἰς τὸ (Π).

839. Δοθέντος ἐπιπέδου (Ε) καὶ εὐθείας (ε) καθέτου ἐπὶ τὸ (Ε) καὶ τεμνούσης αὐτὸ εἰς Ο νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν σχῆμα F ἔχῃ δύο ἐκ τῶν στοιχείων : (Ε), (ε), Ο, ὡς στοιχεῖον συμμετρίας, τότε θὰ ἔχῃ καὶ τὸ τρίτον ὡς στοιχεῖον συμμετρίας.

840. Νὰ μελετηθοῦν τὰ στοιχεῖα συμμετρίας ἑνὸς τετραγώνου.

841. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Α΄ καὶ ἔστω (x) ἄξων στροφῆς φερούσης τὸ Α εἰς τὸ Α΄. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν (x);

842. Δείξατε ὅτι δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι εἶναι πάντοτε συμμετρικαὶ ἀλλήλων ὡς πρὸς κατάλληλον ἄξονα συμμετρίας (x). Κατασκευάσατε τὸν ἄξονα ἢ τοὺς ἄξονας (x).

843. Ἐὰν σχῆμα ἔχῃ δύο διάφορα κέντρα συμμετρίας, τότε ἔχει καὶ ἄπειρα ἄλλα κέντρα συμμετρίας κείμενα ἐπ' εὐθείας μὲ τὰ δύο πρῶτα.

844. Πᾶν πεπερασμένον σχῆμα ἔχει τὸ πολὺ ἓν κέντρον συμμετρίας.

(*Σημείωσις*. Πεπερασμένον σχῆμα λέγεται τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον ἀποστάσεις μὴ ὑπερβαινούσας ἓν δεδομένον σταθερὸν τμῆμα).

845. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀλλεπάλληλος ἐκτέλεσις («τὸ γινόμενον») δύο συμμετριῶν ὡς πρὸς δύο παράλληλα ἐπίπεδα $(\Pi_1)$, $(\Pi_2)$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς μεταφοράν. Συμβολικῶς :

$$\text{Συμμ}\{(\Pi_2)\} \circ \text{Συμμ}\{(\Pi_1)\} = \text{Μετ}(2\overrightarrow{\text{ΚΛ}}), \text{ ὅπου } \text{ΚΛ} \perp (\Pi_1),\ \text{Κ} \in (\Pi_1),\ \Lambda \in (\Pi_2).$$

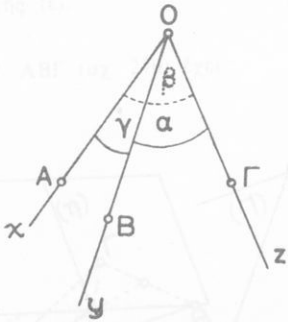
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

# ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

## I. ΤΡΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

**229. Ἡ τρίεδρος καὶ τὰ 6 κύρια στοιχεῖα αὐτῆς.** **Καλεῖται τρίεδρος στερεὰ γωνία (ἢ ἁπλῶς «τρίεδρος») τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τρεῖς ἡμιευθείας Ox, Oy, Oz ἀρχομένας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου O καὶ μὴ κειμένας εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καθὼς καὶ ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας τῶν κυρτῶν γωνιῶν $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}z$ καὶ $z\widehat{O}x$.**



Σχ. 271

Αἱ Ox, Oy, Oz λέγονται **ἀκμαί**, αἱ τρεῖς γωνίαι $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}z$ καὶ $z\widehat{O}y$ λέγονται **ἕδραι** καὶ τὸ O λέγεται **κορυφὴ** τῆς τριέδρου, ἥτις συμβολίζεται μὲ O, xyz. Ὁσάκις δὲν ὑπάρχῃ φόβος συγχύσεως, θὰ καλοῦμεν ἐπίσης **ἕδρας** τὰ ἐπίπεδα xOy, yOz, zOx.

Ἑκάστη ἀκμὴ λέγομεν ὅτι κεῖται **ἀπέναντι** τῆς ἕδρας, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν ἀνήκει.

Ἓν σημεῖον M λέγεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς τριέδρου,** *ὅταν ὡς πρὸς ἑκάστην ἕδραν κεῖται εἰς τὸ μέρος τοῦ χώρου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*καὶ ἡ ἀπέναντι ἀκμή*.—Ἡ τρίεδρος O,xyz φέρει ἐπ' αὐτῆς καὶ τρεῖς **διέδρους γωνίας :** y—Ox—z, x—Oz—y καὶ z—Oy—x. Ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz ἀντιστοίχως σημεῖα A, B, Γ (σχ. 271), τότε συμβολίζομεν τὴν δίεδρον B—OA—Γ διὰ τοῦ $\widehat{A}$, τὴν A—OB—Γ διὰ τοῦ $\widehat{B}$ καὶ τὴν B—OΓ—A διὰ τοῦ $\widehat{\Gamma}$, ἐνῷ τὴν ἀπέναντι τῆς $\widehat{A}$ ἕδραν $\widehat{BO\Gamma}$ μὲ $\widehat{\alpha}$, τὴν ἀπέναντι τῆς $\widehat{B}$ ἕδραν $\widehat{AO\Gamma}$ μὲ β καὶ τὴν ἀπέναντι τῆς $\widehat{\Gamma}$ ἕδραν $\widehat{AOB}$ μὲ γ. Αἱ 6 γωνίαι :

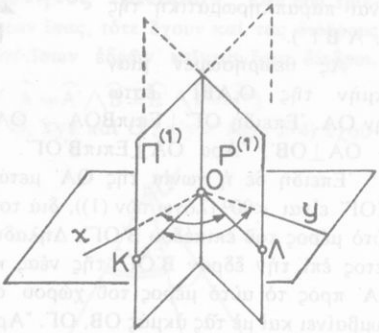
$$\begin{cases} \widehat{\alpha},\ \widehat{\beta},\ \widehat{\gamma} & \text{(ἕδραι)} \\ \widehat{A},\ \widehat{B},\ \widehat{\Gamma} & \text{(ἀπέναντι δίεδροι)} \end{cases}$$

ἀποτελοῦν **τὰ 6 κύρια στοιχεῖα τῆς τριέδρου**. Τὰ μέτρα αὐτῶν, ἐὰν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, παρίστανται μὲ

$$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ A,\ B,\ \Gamma\}$$

**230. Παραπληρωματικαὶ τρίεδροι.** α') **Λῆμμα.—Ἐὰν ἀπὸ σημείου O τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας ἀχθοῦν ἡμιευθεῖαι Ox, Oy κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου καὶ φερόμεναι ἑκάστη εἰς τὸ μέρος τοῦ χώρου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἑτέρα ἕδρα, τότε ἡ ὑπὸ τῶν ἡμιευθειῶν τούτων σχηματιζομένη γωνία εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου τῆς διέδρου** (συντόμως : *«παραπληρωματικὴ τῆς διέδρου»*).

*Ἀπόδειξις*. Ἔστω πρῶτον ὅτι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος $\widehat{KO\Lambda}$ τῆς διέδρου εἶναι ὀξεῖα (σχ. 272). Τότε περιέχεται καὶ ἐντὸς τῆς ὀρθῆς $\widehat{\Lambda Ox}$ καὶ ἐντὸς τῆς ὀρθῆς $\widehat{KOy}$. Ἔχομεν: $\widehat{xO\Lambda} + \widehat{KOy} = 2^D$ ἢ $\{\widehat{xOK} + \widehat{KO\Lambda}\} + \widehat{KOy} = 2^D$ ἢ $\widehat{KO\Lambda} + \{\widehat{xOK} + \widehat{KOy}\} = 2^D$ ἢ τέλος $\widehat{KO\Lambda} + \widehat{xOy} = 2^D$, δηλ. τὸ ἀποδεικτέον.



Σχ. 272

Ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος ἦτο ἀμβλεῖα, π.χ. ἐὰν ἦτο ἡ $\widehat{xOy}$, τότε αἱ κάθετοι πρὸς τὰς ἕδρας ἡμιευθεῖαι θὰ ἦσαν αἱ OK, OΛ (σχ. 272) καὶ θὰ ἴσχυε πάλιν ἡ ἰδία σχέσις $\widehat{KO\Lambda} + \widehat{xOy} = 2^D$. Τέλος, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος εἶναι ὀρθή, πάλιν, προφανῶς, τὸ θεώρημα ἰσχύει.

β') **Θεώρημα τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων.—Δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας μὲ στοιχεῖα α, β, γ (ἕδραι) καὶ A, B, Γ (ἀπέναντι δίεδροι)**

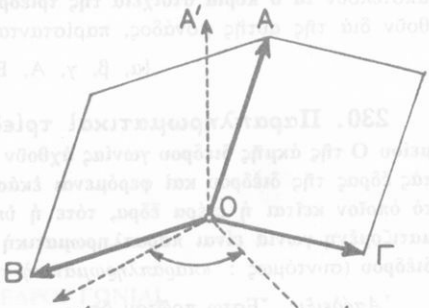
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**ὑπάρχει πάντοτε μία δευτέρα στερεὰ γωνία ἁρμοδίως κατασκευαζομένη μὲ στοιχεῖα $2_{ορ}$—Α, $2_{ορ}$—Β, $2_{ορ}$—Γ (ἕδραι) καὶ $2_{ορ}$—α, $2_{ορ}$—β, $2_{ορ}$—γ (ἀπέναντι δίεδροι), ἡ ὁποία λέγεται «παραπληρωματικὴ» τῆς πρώτης. Ἡ δὲ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο τούτων τριέδρων εἶναι συμμετρικὴ σχέσις.**

**Ι. Κατασκευὴ τῆς παραπληρωματικῆς.** Διὰ τῆς κορυφῆς Ο τῆς τριέδρου Ο, ΑΒΓ (σχ. 273) ἄς φέρωμεν ἡμιευθείας ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟΒ τῶν ἑδρῶν τῆς Ο, ΑΒΓ καὶ κειμένας ἑκάστη εἰς τὸ μέρος τοῦ χώρου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται καὶ ἡ τρίτη ἀκμή. Θὰ ἔχωμεν τότε :

(1) $0 \leqq \widehat{AOA'} < 90^o$, $0 \leqq \widehat{BOB'} < 90^o$, $0 \leqq \widehat{\Gamma O\Gamma'} < 90^o$

Ἡ ὑπὸ τῶν ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ ὁριζομένη τρίεδρος Ο, Α′Β′Γ′ εἶναι ἡ **παραπληρωματικὴ** τῆς Ο, ΑΒΓ.



Σχ. 273

**ΙΙ. Συμμετρία τῆς σχέσεως.** Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι καὶ ἡ Ο, ΑΒΓ προκύπτει ἐκ τῆς Ο, Α′Β′Γ′ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον (δηλ. εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Ο, Α′Β′Γ′).

Ἄς θεωρήσωμεν μίαν ἀκμὴν τῆς Ο,ΑΒΓ, ἔστω τὴν ΟΑ. Ἐπειδὴ ΟΓ′⊥ΕπιπΒΟΑ ⇒ ΟΑ⊥ΟΓ′ καὶ ἐπειδὴ ΟΒ′⊥ΕπιπΑΟΓ ⇒ ΟΑ⊥ΟΒ′. Ἄρα ΟΑ⊥ΕπιπΒ′ΟΓ′.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία τῆς ΟΑ′ μετὰ τῆς καθέτου ΟΑ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Β′ΟΓ′ εἶναι <90° (λόγῳ τῶν (1)), διὰ τοῦτο αἱ ΟΑ καὶ ΟΑ′ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Β′ΟΓ′. Δηλαδὴ ἡ ἀκμὴ ΟΑ τῆς ἀρχικῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Β′ΟΓ′ τῆς νέας καὶ φέρεται μετὰ τῆς τρίτης ἀκμῆς ΟΑ′ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὴν ἕδραν Β′ΟΓ′. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὰς ἀκμὰς ΟΒ, ΟΓ. Ἄρα καὶ ἡ ἀρχικὴ Ο, ΑΒΓ κατασκευάζεται ὡς παραπληρωματικὴ τῆς νέας Ο,Α′Β′Γ′. (*Συμμετρικὴ σχέσις*).

ΙΙΙ. **Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων.** Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὴν δίεδρον γωνίαν Β — ΟΑ — Γ ≡ $\widehat{A}$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ προηγούμενον λῆμμα, βλέπομεν ὅτι : $B'\widehat{O\Gamma'} + \widehat{A} = 2$ ορθ. Ἐντελῶς ὁμοίως θὰ ἔχωμεν $A'\widehat{O\Gamma'} + \widehat{B} = 2$ ορθ. καὶ $A'\widehat{OB'} + \widehat{\Gamma} = 2$ ορθ. Δηλ. : **Αἱ ἕδραι τῆς παραπληρωματικῆς εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων τῆς ἀρχικῆς.** Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἡ ἀρχικὴ Ο,ΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Ο,Α′Β′Γ′, διὰ τοῦτο αἱ ἕδραι της ὀφείλουν νὰ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων τῆς Ο,Α′Β′Γ′, δηλ.:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\widehat{BO\Gamma} + \widehat{A'} = 2$ ορθ., $\widehat{\Gamma OA} + \widehat{B'} = 2$ ορθ., $\widehat{AOB} + \widehat{\Gamma'} = 2$ ορθ. Ὥστε **αἱ δίεδροι τῆς παραπληρωματικῆς εἶναι παραπληρώματα τῶν ἑδρῶν τῆς ἀρχικῆς.**

Τελικῶς, ἐὰν μία τρίεδρος O, ΑΒΓ ἔχῃ κύρια στοιχεῖα :

$$\left.\begin{array}{lccc} \text{ἕδρας} : & \alpha, & \beta, & \gamma \\ \text{ἀπέναντι διέδρους} : & A, & B, & \Gamma \end{array}\right\},$$

ἡ παραπληρωματική της O, Α΄Β΄Γ΄ ἔχῃ κύρια στοιχεῖα :

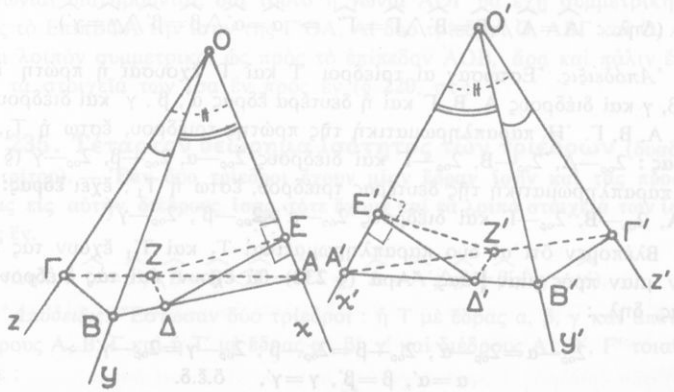
$$\left.\begin{array}{lccc} \text{ἕδρας} : & 2_{\text{ορ}}-A, & 2_{\text{ορ}}-B, & 2_{\text{ορ}}-\Gamma \\ \text{ἀπέναντι διέδρους} : & 2_{\text{ορ}}-\alpha, & 2_{\text{ορ}}-\beta, & 2_{\text{ορ}}-\gamma \end{array}\right\}.$$

**231. Δυασμὸς τῶν θεωρημάτων.** Κάθε θεώρημα ἰσχῦον διὰ τὰ κύρια στοιχεῖα πάσης τριέδρου, ἐφαρμοζόμενον εἰς τὴν παραπληρωματικὴν τῆς τυχούσης τριέδρου, δίδει ἓν **νέον θεώρημα** ἀφορῶν πάλιν τὰ στοιχεῖα τῆς τριέδρου καλούμενον θεώρημα *«δυαδικὸν»* τοῦ πρώτου. Ὡς ἐκ τούτου λέγομεν ὅτι ἡ ὕπαρξις τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου δημιουργεῖ ἕνα *δυασμὸν τῶν θεωρημάτων* τῶν ἀφορώντων εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς τριέδρου γωνίας. Τὰ θεωρήματα καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ τύποι διὰ τὰ κύρια στοιχεῖα τῶν τριέδρων διπλασιάζονται οὕτω ἀκόπως. Παραδείγματα δυαδικῶν θεωρημάτων δίδονται εἰς τὰς §§ **233, 235, 236,** δ΄.

**232. Πρῶτον θεώρημα ἰσότητος τριέδρων.** **Ἐὰν δύο τρίεδροι ἔχουν τὰς ἕδρας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας, τότε ἔχουν καὶ τὰς διέδρους των μίαν πρὸς μίαν ἴσας καὶ ἀπέναντι ἴσων ἑδρῶν κεῖνται ἴσαι δίεδροι.**

(Δηλ. : $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'} \wedge \widehat{\beta} = \widehat{\beta'} \wedge \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma'} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{A'} \wedge \widehat{B} = \widehat{B'} \wedge \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι O, xyz καὶ O΄, x΄y΄z΄ (σχ. 274) ἔχου-




Σχ. 274

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σαι $y\widehat{O}z = y'\widehat{O'}z'$, $z\widehat{O}x = z'\widehat{O'}x'$ καὶ $x\widehat{O}y = x'\widehat{O'}y'$. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν των 6 ἴσα τμήματα ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΑ′=ΟΒ′=ΟΓ′, ὁπότε δημιουργοῦνται 4 ζεύγη ἴσων τριγώνων: τρ.ΑΟΒ=τρ.Ο′Α′Β′, τρ.ΟΒΓ=τρ.Ο′Β′Γ′, τρ.ΟΓΑ=τρ.Ο′Γ′Α′, τρ.ΑΒΓ=τρ.Α′Β′Γ′. Ἂς λάβωμεν σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τρ.ΟΑΒ. Ἡ προβολὴ Ε τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ευθΟΑ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Α,Ο), διότι ἡ $\widehat{ΓΑΟ}$ (ὡς παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου) εἶναι ὀξεῖα. Ἡ εἰς τὸ Ε ἀγομένη ⊥ ΟΑ καὶ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΟΓ τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν (Α, Γ) (διότι ἡ $\widehat{ΓΑΟ}$ εἶναι ὀξεῖα), ἔστω εἰς Ζ. Ἡ $\widehat{ΔΕΖ}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου $\widehat{A}$.

Λαμβάνομεν τώρα ἐπὶ τῆς Α′Β′ τμῆμα Α′Δ′=ΑΔ καὶ παρουσιάζομεν καθ' ὅμοιον τρόπον τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον $\widehat{Δ'Ε'Ζ'}$ τῆς διέδρου Α′. Εὐχερῶς συνάγομεν κατὰ σειρὰν τὰς ἰσότητας:
τρ.ΔΕΑ=τρ.Δ′Ε′Α′, ΔΕ=Δ′Ε′, ΑΕ=Α′Ε′, τρ.ΑΕΖ=τρ.Α′Ε′Ζ′, ΕΖ=Ε′Ζ′, ΑΖ=Α′Ζ′, $\widehat{ΔΑΖ} = \widehat{Δ'Α'Ζ'}$, ΔΖ=Δ′Ζ′. Ἐκ τῶν ΔΕ=Δ′Ε′, ΕΖ=Ε′Ζ′, ΔΖ=Δ′Ζ′ ⇒ τρ.ΔΕΖ=τρ.Δ′Ε′Ζ′ ⇒ $\widehat{ΔΕΖ} = \widehat{Δ'Ε'Ζ'}$ ⇒ δίεδρος $\widehat{A}$=δίεδρος $\widehat{A'}$. Ἤτοι ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν $\widehat{ΒΟΓ}$ καὶ $\widehat{Β'Ο'Γ'}$ κεῖνται ἴσαι δίεδροι, Α καὶ $\widehat{A'}$.

Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἄλλας διέδρους, ὅ.ἔ.δ.

**233. Δεύτερον θεώρημα ἰσότητος τριέδρων.** (Τὸ δυαδικὸν τοῦ πρώτου). — **Ἐὰν δύο τρίεδροι ἔχουν τὰς διέδρους των μίαν πρὸς μίαν ἴσας, τότε ἔχουν καὶ τὰς ἕδρας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας· ἀπέναντι δὲ τῶν ἴσων διέδρων κεῖνται ἴσαι ἕδραι.**

(Δηλ.: $\widehat{A} = \widehat{A'} \wedge \widehat{B} = \widehat{B'} \wedge \widehat{Γ} = \widehat{Γ'} \Rightarrow \widehat{α} = \widehat{α'} \wedge \widehat{β} = \widehat{β'} \wedge \widehat{γ} = \widehat{γ'}$).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι Τ καὶ Τ′ ἔχουσαι ἡ πρώτη ἕδρας α, β, γ καὶ διέδρους Α, Β, Γ καὶ ἡ δευτέρα ἕδρας α′, β′, γ′ καὶ διέδρους πάλιν Α, Β, Γ. Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς πρώτης τριέδρου, ἔστω ἡ $T_1$, ἔχει **ἕδρας:** $2_{ορ}$—Α, $2_{ορ}$—Β, $2_{ορ}$—Γ καὶ διέδρους $2_{ορ}$—α, $2_{ορ}$—β, $2_{ορ}$—γ (§ **230**). Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς δευτέρας τριέδρου, ἔστω ἡ $T_1'$, ἔχει **ἕδρας:** $2_{ορ}$—Α, $2_{ορ}$—Β, $2_{ορ}$—Γ καὶ διέδρους $2_{ορ}$—α′, $2_{ορ}$—β′, $2_{ορ}$—γ′.

Βλέπομεν ὅτι αἱ δύο παραπληρωματικαὶ $T_1$ καὶ $T'_1$ ἔχουν τὰς ἕδρας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας. Ἄρα (§ **232**) θὰ ἔχουν καὶ τὰς διέδρους των ἴσας, δηλ.:

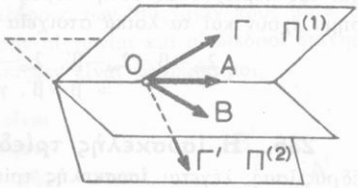
$$2_{ορ}-α = 2_{ορ}-α',\ 2_{ορ}-β = 2_{ορ}-β',\ 2_{ορ}-γ = 2_{ορ}-γ' \Rightarrow$$
$$α = α',\ β = β',\ γ = γ', \quad ὅ.ἔ.δ.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**234. Τρίτον θεώρημα ἰσότητος τῶν τριέδρων.** — **Ἐὰν δύο τρίεδροι ἔχουν μίαν δίεδρον ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν ἕδρας ἴσας, τότε ἔχουν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα των ἴσα ἓν πρὸς ἕν· ἀπέναντι δὲ ἴσων ἑδρῶν κεῖνται ἴσαι δίεδροι.**

(Δηλ.: $\widehat{A}=\widehat{A'}\wedge\widehat{\beta}=\widehat{\beta'}\wedge\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma'} \Rightarrow \widehat{B}=\widehat{B'}\wedge\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}\wedge\widehat{\alpha}=\widehat{\alpha'}$).

*Ἀπόδειξις.* Θεωρήσωμεν τὴν τρίεδρον O,ΑΒΓ τοῦ σχ. 275 καὶ ἑτέραν τρίεδρον $O_1$, $A_1B_1\Gamma_1$ (μὴ ἐμφανιζομένην εἰς τὸ σχῆμα) τοιαύτας, ὥστε: $B_1\widehat{O_1}A_1=B\widehat{O}A$, $A_1\widehat{O_1}\Gamma_1=A\widehat{O}\Gamma$ καὶ $B_1—O_1A_1—\Gamma_1=B—OA—\Gamma$. Φέρομεν διὰ κινήσεως τὴν $B_1\widehat{O_1}A_1$ ἐπὶ τῆς ἴσης της $B\widehat{O}A$ οὕτως, ὥστε νὰ ἔλθῃ ἡ $O_1A_1$ ἐπὶ τῆς OA καὶ ἡ $O_1B_1$ ἐπὶ τῆς OB. Τότε ἡ δίεδρος $B_1—O_1A_1—\Gamma_1$ ἢ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της διέδρου B—OA—Γ ἢ θὰ λάβῃ θέσιν B—OA—Γ′ συμμετρικὴν τῆς B—OA—Γ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον OAB. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ $O_1\Gamma_1$ θὰ ἔλθῃ ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ καὶ ἐπειδὴ $A_1\widehat{O_1}\Gamma_1=A\widehat{O}\Gamma$, ἡ $O_1\Gamma_1$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς OΓ καὶ αἱ τρίεδροι ἐφαρμόζουν, ἄρα ἔχουν τὰ στοιχεῖά των ἓν πρὸς ἓν ἴσα.



Σχ. 275

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ $O_1\Gamma_1$ θὰ ἔλθῃ ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(2)}$ (σχ. 275) συμμετρικοῦ τοῦ $\Pi^{(1)}$ ὡς πρὸς τὸ ΕπιπΒΟΑ εἰς θέσιν τινὰ ΟΓ′ καὶ θὰ εἶναι $\Gamma'\widehat{O}A=A\widehat{O}\Gamma$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς ἐπίπεδον αἱ γωνίαι διατηροῦνται, διὰ τοῦτο ἡ γωνία $A\widehat{O}\Gamma$ θὰ ἔχῃ συμμετρικὴν ὡς πρὸς τὸ ΕπιπΒΟΑ τὴν ἴσην της Γ′ΟΑ. Αἱ δύο τρίεδροι O, ΑΒΓ καὶ O, ΑΒΓ′ εἶναι λοιπὸν συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ, ἄρα καὶ πάλιν ἔχουν ὅλα τὰ στοιχεῖά των ἴσα ἓν πρὸς ἓν (§ **220**, στ′).

**235. Τέταρτον θεώρημα ἰσότητος τῶν τριέδρων** (**δυαδικὸν τοῦ τρίτου**). — **Ἐὰν δύο τρίεδροι ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν διέδρους ἴσας, τότε ἔχουν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖά των ἴσα ἓν πρὸς ἕν.**

(Δηλ.: $\widehat{\alpha}=\widehat{\alpha'}\wedge\widehat{B}=\widehat{B'}<\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'} \Rightarrow \widehat{A}=\widehat{A'}\wedge\widehat{\beta}=\widehat{\beta'}\wedge\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma'}$).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν δύο τρίεδροι: ἡ Τ μὲ ἕδρας α, β, γ καὶ ἀπέναντι διέδρους Α, Β, Γ καὶ ἡ Τ′ μὲ ἕδρας α′, β′, γ′ καὶ διέδρους Α′, Β′, Γ′ τοιαῦται, ὥστε:

(1) $\alpha=\alpha', \quad B=B', \quad \Gamma=\Gamma'.$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς Τ, ἔστω ἡ $T_1$, ἔχει

ἕδρας : $2_{ορ}-A$, $2_{ορ}-B$, $2_{ορ}-Γ$,

ἀπέναντι διέδρους : $2_{ορ}-α$, $2_{ορ}-β$, $2_{ορ}-γ$.

Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς Τ′, ἔστω ἡ $T'_1$, ἔχει

ἕδρας : $2_{ορ}-A'$, $2_{ορ}-B'$, $2_{ορ}-Γ'$,

ἀπέναντι διέδρους : $2_{ορ}-α'$, $2_{ορ}-β'$, $2_{ορ}-γ'$,

Ἐκ τῶν (1) ὅμως ἕπεται : $2_{ορ}-α=2_{ορ}-α'$, $2_{ορ}-B=2_{ορ}-B'$ $2_{ορ}-Γ=2_{ορ}-Γ'$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ $T_1$ καὶ $T'_1$ ἔχουν μίαν δίεδρον ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν ἕδρας ἴσας. Ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχουν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ἴσα :

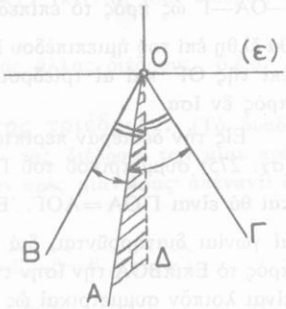
$$2_{ορ}-β=2_{ορ}-β',\ 2_{ορ}-γ=2_{ορ}-γ',\ 2_{ορ}-A=2_{ορ}-A'$$

$$\Rightarrow β=β',\ γ=γ',\ A=A',$$ ὅ.ἔ.δ.

**236. Ἡ ἰσοσκελὴς τρίεδρος.** — α′) Ἐὰν μία τρίεδρος ἔχῃ δύο ἕδρας ἴσας, λέγεται **ἰσοσκελὴς** τρίεδρος.

**β′) (Θ) — Εἰς τὴν ἰσοσκελῆ τρίεδρον ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν κεῖνται ἴσαι δίεδροι.**

Ἔστω ἡ τρίεδρος Ο, ΒΑΓ μὲ $\widehat{AOB}=\widehat{AOΓ}$. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς $\widehat{BOΓ}$, τότε αἱ δύο τρίεδροι Ο, ΒΑΔ καὶ Ο, ΓΑΔ ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Ἄρα (§ **232**) θὰ ἔχουν καὶ τὰς διέδρους των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· θὰ εἶναι δὲ $\widehat{B}=\widehat{Γ}$, διότι κεῖνται ἀπέναντι τῆς κοινῆς ἕδρας $\widehat{AOΔ}$, ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 276

**γ′) (Θ) — Εἰς τὴν ἰσοσκελῆ τρίεδρον Ο, ΑΒΓ, μὲ $\widehat{AOB}=\widehat{AOΓ}$, ἡ ἀκμὴ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι ἕδρας $\widehat{BOΓ}$.**

Εἰς τὸ σχ. 276, αἱ δίεδροι Α—ΟΔ—Β καὶ Α—ΟΔ—Γ εἶναι ἴσαι, ὡς κείμεναι ἀπέναντι ἴσων ἑδρῶν. Ἄρα ΕπιπΑΟΔ ⊥ ΕπιπΒΟΓ. Ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος (ε) τῆς $\widehat{BOΓ}$ εἶναι ⊥ ΟΔ, διὰ τοῦτο (ε) ⊥ ΕπιπΑΟΔ (§ **214 ii**), ἄρα (ε) ⊥ ΟΑ, ὅ.ἔ.δ.

**δ′) (Θ) — Ἐὰν τριέδρου δύο δίεδροι εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι εἶναι ἴσαι** (ἡ τρίεδρος εἶναι ἰσοσκελής).

Ἔστω τρίεδρος Τ μὲ στοιχεῖα $\widehat{α}$, $\widehat{β}$, $\widehat{γ}$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{Γ}$ καὶ ἔστω

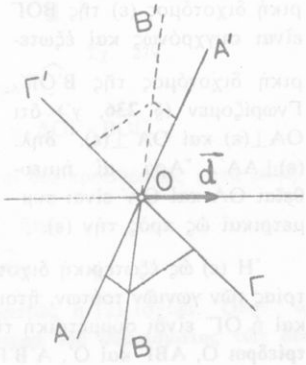
(1) $$\widehat{B}=\widehat{Γ}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ παραπληρωματική της ἔχει ἕδρας $2_{ορ}-A$, $2_{ορ}-B$, $2_{ορ}-Γ$ καὶ διέδρους $2_{ορ}-α$, $2_{ορ}-β$, $2_{ορ}-γ$. Λόγῳ τῆς (1) θὰ ἔχωμεν $2_{ορ}-B=2_{ορ}-Γ$, ἤτοι ἡ παραπληρωματικὴ ἔχει δύο ἕδρας ἴσας. Ἄρα θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ἀπέναντι διέδρους ἴσας, ἤτοι: $2_{ορ}-β=2_{ορ}-γ \Rightarrow β=γ$. Ὥστε $\widehat{B}=\widehat{Γ} \Rightarrow \widehat{β}=\widehat{γ}$.

**237. Αἱ κατὰ κορυφὴν τρίεδροι.** — α') Δύο τρίεδροι λέγονται **κατὰ κορυφήν,** ὅταν ἔχουν κοινὴν κορυφήν, αἱ δὲ ἀκμαὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις (ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι) τῶν ἀκμῶν τῆς ἄλλης (σχ. 277). Αἱ κατὰ κορυφὴν τρίεδροι, ὡς σχήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρον, ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς διέδρους των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, διότι κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς κέντρον αἱ γωνίαι καὶ αἱ δίεδροι διατηροῦν τὸ μέγεθός των. Ἐν τούτοις ἐν γένει δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμοι.

**β') (Θ) — Ἐὰν τρίεδρος δὲν εἶναι ἰσοσκελής, τότε δὲν ὑπάρχει κίνησις (μετατόπισις) φέρουσα αὐτὴν ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφήν της.**



Σχ. 277

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ἡ **μὴ** ἰσοσκελὴς τρίεδρος O, ΑΒΓ καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς O, Α΄Β΄Γ΄. Ἐὰν ὑπῆρχε κίνησις Η φέρουσα τὴν πρώτην ἐπὶ τῆς δευτέρας, τότε ἡ ἀκμὴ OA ἔπρεπε νὰ ἔλθῃ κατὰ τὴν κίνησιν Η ἐπὶ τῆς ἀκμῆς OA΄, διότι ἡ δίεδρος $\widehat{OA}$ μόνον μὲ τὴν δίεδρον $\widehat{OA'}$ (κατ' ἀκμὴν τῆς $\widehat{OA}$) δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ, καθ' ὅσον δὲν εἶναι ἴση μὲ καμμίαν ἄλλην ἐκ τῶν διέδρων τῆς O, Α΄Β΄Γ΄. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ κίνησις Η θὰ ἔφερε τὴν OB εἰς τὴν OB΄ καὶ τὴν OΓ εἰς τὴν OΓ΄. Ἀλλ' ἡ κίνησις αὐτὴ Η, ἔχουσα ἓν διπλοῦν σημεῖον O, θὰ ἦτο στροφὴ περί τινα ἄξονα $\vec{d}$ διερχόμενον διὰ τοῦ O. Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην ἡ (O, A) ἔρχεται, ὡς εἴδομεν, ἐπὶ τῆς (O, A΄), ὁ $\vec{d}$ ἐπὶ τοῦ $\vec{d}$ καὶ ἡ γωνία $(\widehat{\vec{OA}, \vec{d}})$ ἐπὶ τῆς $(\widehat{\vec{OA'}, \vec{d}})$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν στροφὴν αἱ γωνίαι διατηροῦνται: $(\widehat{\vec{OA}, \vec{d}})=(\widehat{\vec{OA'}, \vec{d}})$ καὶ ἐπειδὴ αἱ OA, OA΄ κεῖνται ἐπ' εὐθείας $\Rightarrow \vec{d} \perp \vec{OA}$.

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον ἔπρεπε $\vec{d} \perp \vec{OB}$, $\vec{d} \perp \vec{OΓ}$. Δηλ. θὰ ἔπρεπε νὰ ὑπάρχῃ ἄξων διερχόμενος διὰ τοῦ O καὶ κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς τρεῖς ἀκμὰς OA, OB, OΓ, ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς τρεῖς ἕδρας, ὅπερ ἀδύνατον (§ **173**).



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

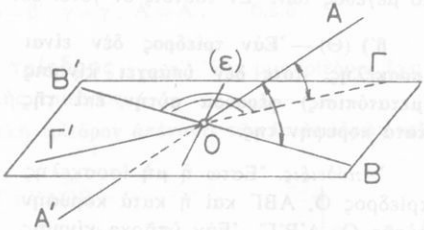
Ὥστε δύο μὴ ἰσοσκελεῖς κατὰ κορυφὴν τρίεδροι κατ' οὐδένα τρόπον δύνανται διὰ κινήσεως νὰ ἐφαρμόσουν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

**Πόρισμα.— Πᾶσα μὴ ἰσοσκελὴς τρίεδρος δὲν δύναται διὰ κινήσεως νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς κατοπτρικῆς της** (δηλ. τῆς συμμετρικῆς της ὡς πρὸς ἐπίπεδον).

Διότι ἡ κατοπτρικὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν κατὰ κορυφὴν (§ **222**).

**β') (Θ)—Πᾶσα ἰσοσκελὴς τρίεδρος δύναται διὰ κινήσεως νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφήν της.**

Ἔστω ἡ ἰσοσκελὴς τρίεδρος Ο, ΑΒΓ μὲ $\widehat{AOB}=\widehat{AO\Gamma}$ (σχ. 278). Ἡ κατὰ κορυφήν της Ο, Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελὴς μὲ Α΄ΟΒ΄=Α΄ΟΓ΄, ἡ δὲ ἐξωτερικὴ διχοτόμος (ε) τῆς $\widehat{BO\Gamma}$ εἶναι συγχρόνως καὶ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς $\widehat{B'O\Gamma'}$. Γνωρίζομεν (§ **236**, γ') ὅτι ΟΑ⊥(ε) καὶ ΟΑ΄⊥(ε), δηλ. (ε)⊥ΑΑ΄. Ἄρα αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΑ΄ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν (ε).



Σχ. 278

Ἡ (ε) ὡς ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῶν $\widehat{BO\Gamma}$ καὶ $\widehat{B'O\Gamma'}$ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν γωνιῶν τούτων, ἤτοι ἡ ΟΒ΄ εἶναι συμμετρικὴ τῆς ΟΓ ὡς πρὸς (ε) καὶ ἡ ΟΓ΄ εἶναι συμμετρικὴ τῆς ΟΒ ὡς πρὸς (ε). Ἑπομένως αἱ **ἰσοσκελεῖς τρίεδροι** Ο, ΑΒΓ καὶ Ο΄, Α΄Β΄Γ΄ **εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἄξονα** καὶ ἑπομένως ἡ μία ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ἄλλης διὰ στροφῆς 180° περὶ τὸν ἄξονα (ε).

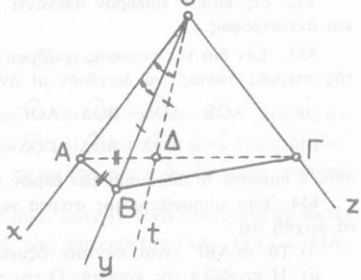
**238. Τρίεδροι ἴσαι καί τρίεδροι κατοπτρικαί.** Δύο μὴ ἰσοσκελεῖς *(«σκαληναὶ»)* τρίεδροι Ο,ΑΒΓ καὶ $O_1$,$A_1B_1\Gamma_1$ ἔχουσαι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, δυνατὸν νὰ εἶναι ἐφαρμόσιμοι (ἴσαι) ἢ μὴ ἐφαρμόσιμοι (κατοπτρικαί). Διότι, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρ. τῆς § **234**, ὅταν φέρωμεν τὴν $B_1\widehat{O_1}A_1$ ἐπὶ τῆς ἴσης της $\widehat{BOA}$, δυνατὸν ἡ τρίτη ἀκμὴ $O_1\Gamma_1$ νὰ πέσῃ μετὰ τῆς ΟΓ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΒΟΑ ἢ δυνατὸν ἡ $O_1\Gamma_1$ νὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν ΟΓ΄ τοιαύτην, ὥστε αἱ ΟΓ καὶ ΟΓ΄ νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου ΒΟΑ. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ τρίεδρος $O_1$, $A_1B_1\Gamma_1$ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Ο, ΑΒΓ, δηλ. αἱ δύο τρίεδροι εἶναι ἴσαι. Εἰς τὴν δευτέραν, ἡ $O_1$, $A_1B_1\Gamma_1$ ἔρχεται εἰς θέσιν Ο, ΑΒΓ΄ συμμετρικὴν τῆς Ο, ΑΒΓ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΒΟΑ καὶ συνεπῶς εἶναι κατοπτρικὴ τῆς Ο, ΑΒΓ καὶ μὴ ἐφαρμόσιμος πρὸς τὴν Ο, ΑΒΓ (§ **237**, β' πόρισμα).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**239. Ἡ «τριγωνικὴ συνθήκη» μεταξὺ τῶν ἑδρῶν τριέδρου.** (Θ) —**Αἱ τρεῖς ἕδραι** $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ **τυχούσης τριέδρου πληροῦν τὰς σχέσεις:**

(1) $\widehat{\alpha}<\widehat{\beta}+\widehat{\gamma},\ \widehat{\beta}<\widehat{\gamma}+\widehat{\alpha},\ \widehat{\gamma}<\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}$ (Τριγωνικὴ συνθήκη).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω τρίεδρος O, xyz καὶ ὑποτεθείσθω ὅτι $x\widehat{O}z>x\widehat{O}y$. Τότε ὑπάρχει ἀκτὶς Ot τῆς $x\widehat{O}z$ ἀποχωρίζουσα ἀπὸ ταύτης γωνίαν $x\widehat{O}t=x\widehat{O}y$ (σχ. 279). Ἡ Ot θὰ τέμνῃ τότε τυχὸν τμῆμα ΑΓ περατούμενον ἐπὶ τῶν Ox, Oz εἰς σημεῖον Δ. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς Oy τμῆμα OB=OΔ. Τότε θὰ εἶναι κατὰ σειράν: τρ.ΟΑΔ=τρ.ΑΟΒ, ΑΔ=ΑΒ, ΔΓ=ΑΓ—ΑΒ καὶ ἐπειδὴ ΑΓ—ΑΒ<ΒΓ, ἕπεται ΔΓ<ΒΓ.



Σχ. 279

Ἐπειδὴ εἰς τὰ τρίγωνα ΟΔΓ καὶ ΟΒΓ ἔχομεν

$$O\Delta=OB,\ O\Gamma=O\Gamma,\ \Delta\Gamma<B\Gamma \Rightarrow \widehat{\Delta O\Gamma}<\widehat{BO\Gamma}.$$

Ἐκ τῶν: $\widehat{AO\Delta}=\widehat{AOB}$ καὶ $\widehat{\Delta O\Gamma}<\widehat{BO\Gamma}$ ἕπεται διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη:

$$\widehat{AO\Gamma}<\widehat{AOB}+\widehat{BO\Gamma},\ \text{ἤτοι}$$

(2) $$x\widehat{O}z<x\widehat{O}y+y\widehat{O}z.$$

Ἐὰν πάλιν εἶναι $x\widehat{O}z\leqq x\widehat{O}y$, τότε προφανῶς ἡ (2) ἰσχύει. Ἄρα: **ὁποιαδήποτε ἕδρα τῆς τριέδρου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων,** ὅ.ἔ.δ.

**240. α΄) Τρισορθογώνιος τρίεδρος** καλεῖται ἡ ἔχουσα καὶ τὰς τρεῖς διέδρους της ὀρθάς. Αὕτη ἔχει καὶ τὰς τρεῖς **ἕδρας της ὀρθάς**· δηλ. αἱ ἀκμαί της εἶναι ἀνὰ δύο κάθετοι.

**β΄) Δισορθογώνιος τρίεδρος** καλεῖται ἡ ἔχουσα δύο διέδρους ὀρθάς Αὕτη ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ὀρθῶν διέδρων ἕδρας, ἐπίσης, ὀρθάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

846. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον αἱ διχοτόμοι δύο ἑδρῶν καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς τρίτης ἕδρας κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

847. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ ἑκάστης ἀκμῆς καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἀπέναντι ἕδρας διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

848. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς τρεῖς διέδρους διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας. (*Σημ.* Τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ διχοτομοῦν μίαν δίεδρον, θὰ λέγεται συντόμως διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

849. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν διχοτόμων τῶν ἑδρῶν καὶ κάθετα ἐπὶ τὰς ἕδρας ταύτας τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

850. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz τριέδρου ληφθοῦν σημεῖα A, B,Γ τοιαῦτα, ὥστε ABορθογΟΓ, ΒΓορθογΟΑ, τότε θὰ εἶναι καί : ΓΑορθογΟΒ.

851. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα δι' ἑκάστης ἀκμῆς καὶ κάθετα ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν (*«ὑψοεπίπεδα»*) ἀλληλοτομοῦσιν κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

852. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον ἀπέναντι μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται μεγαλυτέρα ἕδρα καὶ ἀντιστρόφως.

853. Ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς τριέδρου O, ΑΒΓ ἀχθῇ ἡμιευθεῖα ΟΔ περιεχομένη ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας, νὰ δειχθοῦν αἱ ἀνισότητες :

i) $\widehat{AOB} < \widehat{AO\Delta} + \widehat{BO\Delta} < \widehat{AO\Gamma} + \widehat{BO\Gamma}$

ii) $\frac{s}{2} < \widehat{AO\Delta} + \widehat{BO\Delta} + \widehat{\Gamma O\Delta} < s,$

ὅπου s παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου.

854. Ἐὰν τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου κατὰ τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι :

i) Τὸ τρ.ΑΒΓ εἶναι πάντοτε ὀξυγώνιον.

ii) Ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς O τῆς τρισορθογωνίου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ.

iii) Μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ ὑφίσταται ἡ σχέσις : $(AB\Gamma)^2 = (OAB)^2 + (OB\Gamma)^2 + (O\Gamma A)^2$.

855. Ἐὰν τριέδρου μία δίεδρος εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ ἕδραι $< 90^0$, τότε ἡ τομὴ τῆς στερεᾶς γωνίας ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ μίαν οἱανδήποτε ἀκμὴν της εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον.

856. Ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς τριέδρου ἀχθῇ ἐν ἑκάστῃ ἕδρᾳ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἀκμήν, αἱ τρεῖς αὗται κάθετοι κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

857. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν.

858. Διὰ τῆς κορυφῆς O τριέδρου O, ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ ἡμιευθεῖα ΟΔ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι ἴσον κεκλιμένη

i) πρὸς τὰς τρεῖς ἀκμὰς ἢ

ii) πρὸς τὰς τρεῖς ἕδρας.

859. Νὰ κατασκευασθῇ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία, τῆς ὁποίας δίδεται μία τριγωνικὴ τομή της.

860. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία, ἧς δίδονται αἱ διχοτόμοι τῶν ἑδρῶν της.

861. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ ἀρχόμεναι ἀπὸ σημείου O τοῦ (Π). Νὰ κατασκευασθῇ ἐντὸς τοῦ (Π) ἀκτὶς ΟΓ τοιαύτη ,ὥστε τὸ ἄθροισμα $\widehat{\Gamma OA} + \widehat{\Gamma OB}$ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

862. Νὰ κατασκευασθῇ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία, ἧς αἱ ἀκμαὶ νὰ ἔχουν προβολὰς ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου (Π) τρεῖς δοθείσας ἡμιευθείας Ox, Oy, Oz.

863. Δείξατε ὅτι εἰς μίαν τρίεδρον O,ΑΒΓ :

$$\widehat{A} = 90^0 \wedge \widehat{\beta} = 45^0 \wedge \widehat{\gamma} = 45^0 \Rightarrow \widehat{\alpha} = 60^0 \qquad \text{(βλ. § 229).}$$

864. Δείξατε ὅτι εἰς μίαν τρίεδρον O,ΑΒΓ :

$$\widehat{\alpha} = 90^0 \wedge \widehat{B} = 135^0 \wedge \widehat{\Gamma} = 135^0 \Rightarrow \widehat{A} = 120^0.$$

(*Ὑπόδ.* τῇ βοηθείᾳ τῆς παρ/κῆς τριέδρου ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

865. Δίδεται ὀξεῖα γωνία $x\widehat{O}y$. Εὐθεῖα Oz μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε Επιπ$xOz \perp$ Επιπ$yOz$. Τόπος τοῦ ἴχνους τῆς Oz ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καθέτου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς $\neq$ O.

866. Τριέδρου O, xyz αἱ ἀκμαὶ Ox, Oy εἶναι σταθεραί, ἐνῷ ἡ τρίτη, Oz, μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε $x\widehat{O}z + y\widehat{O}z = 180^0$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς Oz.

## II. ΠΟΛΥΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

**241. Ὁρισμοί.** α') **Ἂς θεωρήσωμεν ἐν τῷ χώρῳ μίαν διαδοχὴν ἐκ ν ἀκτίνων $OA_1$, $OA_2$, $OA_3$, ...$OA_\nu$ (ὅπου $\nu \geq 3$), αἱ ὁποῖαι ἀνὰ τρεῖς διαδοχικαὶ δὲν εἶναι ὁμοεπίπεδοι καὶ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ν διαδοχικὰς γωνίας $A_1\widehat{O}A_2$, $A_2\widehat{O}A_3$,...$A_\nu\widehat{O}A_1$ μὴ ἐχούσας, ἀνὰ δύο, κοινήν τινα ἐσωτερικὴν ἀκτῖνα. Τότε τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας $OA_1$, $OA_2$,... $OA_\nu$ καὶ ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας τῶν κυρτῶν γωνιῶν $A_1\widehat{O}A_2$, $A_2\widehat{O}A_3$...$A_\nu\widehat{O}A_1$ καλεῖται ν - εδρος στερεὰ γωνία.**

Αἱ ἀκτῖνες $OA_1$, $OA_2$,...$OA_\nu$ λέγονται **ἀκμαί,** αἱ κυρταὶ γωνίαι $A_1\widehat{O}A_2$. $A_2\widehat{O}A_3$...$A_\nu\widehat{O}A_1$ λέγονται **ἕδραι** καὶ ἡ κοινὴ ἀρχὴ O τῶν ἀκμῶν **κορυφὴ** τῆς ν-έδρου γωνίας, ἥτις συμβολίζεται O, $A_1A_2A_3...A_\nu$.

Ἡ ν-εδρος στερεὰ γωνία φέρει ἐπ' αὐτῆς ν διέδρους γωνίας $A_\nu$—$OA_1$—$A_2$, $A_1$—$OA_2$—$A_3$,... $A_{\nu-1}$—$OA_\nu$—$A_1$, τὰς ὁποίας συμβολίζομεν μὲ $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$... $\widehat{A}_\nu$.

β') **Κυρταὶ στερεαὶ γωνίαι.** — Μία ν-εδρος στερεὰ γωνία λέγεται **κυρτή,** ὅταν ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον **ἑκάστης** ἕδρας αἱ ὑπόλοιποι ν—2 ἀκμαὶ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου.

γ') **Τὸ ἐσωτερικὸν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.** — Ἓν σημεῖον M λέγεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τῆς κυρτῆς ν-έδρου O, $A_1A_2$... $A_\nu$, ὅταν ὡς πρὸς **ἑκάστην** ἕδραν κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται καὶ αἱ λοιπαὶ ν—2 ἀκμαί.

Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἀποτελεῖ **τὸ ἐσωτερικὸν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.**

**242.** Ἀποδεικνύεται τὸ ἑξῆς θεώρημα:

(Θ) — **Δοθείσης οἱασδήποτε κυρτῆς, πολυέδρου, στερεᾶς γωνίας ὑπάρχει ἐπίπεδον τέμνον πάσας τὰς ἀκμάς της. Ἡ δὲ τομὴ τῆς στερεᾶς γωνίας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶναι κυρτὸν πολύγωνον.**

**243.** (Θ) — **Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἑδρῶν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ἂς καλέσωμεν s τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν τῆς **κυρτῆς** στερεᾶς γωνίας O, $A_1A_2...A_\nu$ (σχ. 280), δηλ. :

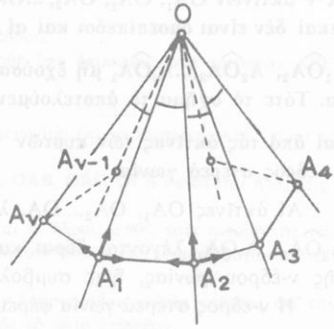
$$s = A_1\widehat{O}A_2 + A_2\widehat{O}A_3 + ... + A_\nu\widehat{O}A_1.$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι $s < 4$ ορθ.

Ἂς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον τέμνον πάσας τὰς ἀκμὰς τῆς ν-έδρου ταύτης γωνίας εἰς τὰ σημεῖα $A_1$, $A_2$,... $A_\nu$ κατὰ σειρὰν (§ **242**). Ἡ τομὴ τῆς ν-έδρου εἶναι τότε τὸ κυρτὸν πολύγωνον $A_1A_2...A_\nu$ (§ **242**).

Θεωροῦντες κατὰ σειρὰν τὰς τριέδρους $A_1A_\nu OA_2$, $A_2A_1OA_3$,... $A_\nu$, $A_{\nu-1}OA_1$ καὶ ἐφαρμόζοντες εἰς αὐτὰς τὸ θεώρημα τῆς § **239** λαμβάνομεν τὰς ν ἀνισότητας :

$$(1)\quad \begin{aligned} A_\nu\widehat{A_1}A_2 &< A_\nu\widehat{A_1}O + A_2\widehat{A_1}O \\ A_1\widehat{A_2}A_3 &< A_1\widehat{A_2}O + A_3\widehat{A_2}O \\ A_2\widehat{A_3}A_4 &< A_2\widehat{A_3}O + A_4\widehat{A_3}O \\ &\dots\dots\dots \\ A_{\nu-1}\widehat{A_\nu}A_1 &< A_{\nu-1}\widehat{A_\nu}O + A_1\widehat{A_\nu}O. \end{aligned}$$



Σχ. 280

Τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μελῶν τῶν (1) εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου $A_1A_2...A_\nu$ καὶ συνεπῶς ἰσοῦται μὲ 2ν—4 ορθ. Ἐξ ἄλλου τὰ δεύτερα μέλη περιέχουν ὅλας τὰς παρὰ τὰς βάσεις γωνίας τῶν ν παραπλεύρων τριγώνων $OA_1A_2$, $OA_2A_3$, $OA_3A_4$,...$OA_\nu A_1$. Τὸ ἄθροισμα ὅμως ὅλων τῶν παρὰ τὰς βάσεις $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_\nu A_1$ γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ O γωνιῶν ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ν τὸ πλῆθος, δηλ. ἀποτελεῖ 2ν ὀρθάς. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα μόνον τῶν παρὰ τὰς βάσεις γωνιῶν ἰσοῦται μὲ 2ν ορθ—(ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ O γωνιῶν) = 2ν ορθ—s. Κατόπιν τούτων προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1) λαμβάνομεν :

$$2\nu - 4 \text{ ορθ} < 2 \text{ ορθ} - s \Rightarrow s < 4 \text{ ορθ}, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

## III. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΕΔΡΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΔΙΕΔΡΩΝ ΤΡΙΕΔΡΟΥ ΣΤΕΡΕΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

**244. Ἀναγκαῖαι συνθῆκαι μεταξὺ τῶν τριῶν ἑδρῶν τριέδρου.** Τὸ γενικὸν θεώρημα διὰ τὰς ἕδρας ν-έδρου στερεᾶς γωνίας (§ **243**) ἰσχύει φυσικὰ καὶ διὰ τὰς ἕδρας τριέδρου. Ἂν λοιπὸν εἶναι α,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β, γ αἱ ἕδραι τυχούσης τριέδρου, αὗται ὑπόκεινται εἰς τὴν συνθήκην: $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}<4$ ορθ.

Αἱ $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ ὅμως ὑπόκεινται καὶ εἰς τὴν «τριγωνικὴν συνθήκην» (§ **239**): $\widehat{\alpha}<\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}$, $\widehat{\beta}<\widehat{\alpha}+\widehat{\gamma}$, $\widehat{\gamma}<\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}$.

Ἑπομένως αἱ τρεῖς ἕδραι $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ τυχούσης τριέδρου πληροῦν τὰς τέσσαρας σχέσεις:

$$(1)\quad \begin{cases} \widehat{\alpha}<\widehat{\beta}+\widehat{\gamma} \\ \widehat{\beta}<\widehat{\alpha}+\widehat{\gamma} \\ \widehat{\gamma}<\widehat{\alpha}+\widehat{\beta} \\ \widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}<4 \text{ ορθ.} \end{cases}$$

*(Ἀναγκαῖαι συνθῆκαι)*

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι αἱ (1) εἶναι καὶ ἱκαναί. Θὰ μᾶς χρειασθῇ πρὸς τοῦτο ὁ ἑπόμενος ὁρισμός.

**245. Ὁρισμός.—Δύο τρίεδροι λέγονται «προσκείμεναι», ὅταν ἔχουν δύο ἀκμὰς κοινάς, ἐνῷ αἱ τρίται ἀκμαί των εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης.**

Ἐὰν $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ εἶναι αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς καὶ $\widehat{\alpha}$ ἡ γωνία τῶν κοινῶν ἀκμῶν, τότε αἱ ἕδραι τῆς προσκειμένης της εἶναι προφανῶς $\widehat{\alpha}$, $2_{\text{ορ}}-\widehat{\beta}$, $2_{\text{ορ}}-\widehat{\gamma}$.

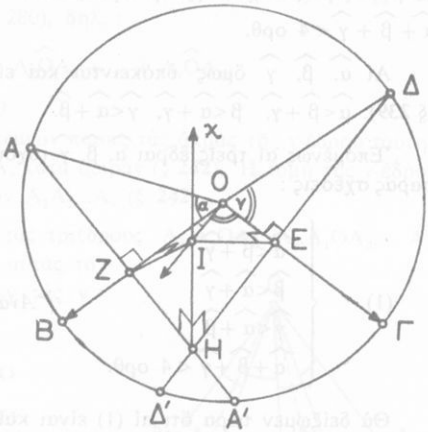
**246. Κατασκευὴ τριέδρου ἐκ τῶν τριῶν ἑδρῶν της.** (Θ)— **Δοθεισῶν τριῶν γωνιῶν ἐχουσῶν ἄθροισμα μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν καὶ ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ὑπάρχει (κατασκευάζεται) τρίεδρος δεχομένη ὡς ἕδρας τὰς τρεῖς δοθείσας γωνίας.**

*Ἀπόδειξις.* **Ι. Δύο ἐκ τῶν δοθεισῶν γωνιῶν εἶναι ὀξεῖαι, ἡ δὲ τρίτη οἱαδήποτε κυρτὴ γωνία.** Καθιστῶμεν τὰς δοθείσας γωνίας διαδοχικὰς καὶ ἐπικέντρους εἰς τυχόντα κύκλον (Ο) μὲ μεσαίαν γωνίαν τὴν μὴ μικροτέραν τῶν δύο ἄλλων (σχ. 281). Λαμβάνομεν οὕτω τὰς γωνίας $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς τρεῖς δοθείσας $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ καὶ εἶναι: $\widehat{AB}\leqq\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}\leqq\widehat{B\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}-\widehat{AB}<\widehat{\Gamma\Delta}$ (διότι $\widehat{B\Gamma}<\widehat{AB}+\widehat{\Gamma\Delta}$ ἐκ τῆς ὑποθέσεως). Ἐξ ἄλλου τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ δὲν καλύπτει τὴν περιφέρειαν καὶ ἑπομένως τὸ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{B\Delta}$ τοῦ **μὴ** περιέχοντος τὸ Γ.

Φέρομεν χορδὴν ΔΔ′⊥ΟΓ καὶ χορδὴν ΑΑ′⊥ΟΒ. Τότε, ἐπειδὴ ΓΔ′=ΓΔ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}\leqq\widehat{\Gamma B}\Rightarrow\widehat{\Gamma\Delta'}\leqq\widehat{\Gamma B}$, ἄρα τὸ Δ′ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{\Gamma B}$ (ἤ, τὸ πολύ, εἰς τὸ ἄκρον Β). Ὁμοίως τὸ Α′ κεῖται ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{\Gamma B}$ (ἤ, τὸ πολύ, εἰς Γ), Ἔχομεν ἐπίσης: $\widehat{\Gamma A'}=\widehat{\Gamma B}-\widehat{A'B}=\widehat{\Gamma B}-\widehat{AB}<\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{\Gamma\Delta'}$, ἤτοι, $\widehat{\Gamma A'}<\widehat{\Gamma\Delta'}$ καὶ συνεπῶς τὸ Α′ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{\Gamma\Delta'}$, ἄρα τὸ Α′ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐλάσσοντος τόξου $\widehat{\Delta\Gamma\Delta'}$ τοῦ περιέχοντος τὸ Γ. Τὸ Α

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κεῖται ἐπὶ τοῦ μείζονος τόξου $\widehat{Δ'BΔ}$, τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ Γ. Ἑπομένως τὰ Α καὶ Α' κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΔΔ', ἄρα ἡ χορδὴ ΑΑ' τέμνει τὴν ευθ ΔΔ' εἴς τι σημεῖον Η. Τὸ Η, ἀνῆκον εἰς τὴν χορδὴν ΑΑ', εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, ἄρα καὶ ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς χορδῆς ΔΔ'.



Σχ. 281

Εἰς τὸ Η ὑψοῦμεν ἡμιευθεῖαν Hx κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου Ο καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xHΔ γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Ε (μέσον τῆς ΔΔ') καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΕΔ. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν Hx, διότι ΕΔ = ΕΔ' > ΕΗ. Ἔστω Ι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς Hx καὶ τῆς (Ε, ΕΔ). Εἶναι τότε ΙΕ ⊥ ΟΕ καὶ ΙΖ ⊥ ΟΖ (θεώρημα τριῶν καθέτων). Ἡ τρίεδρος γωνία Ο, ΒΙΓ ἔχει ἕδρας ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας γωνίας $\widehat{α}$, $\widehat{β}$, $\widehat{γ}$. Διότι $\widehat{BOΓ} = \widehat{β}$ ἐκ κατασκευῆς. Ἡ $\widehat{IOE} = \widehat{EOΔ} = \widehat{γ}$, διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΙΕΟ καὶ ΔΕΟ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΟΕ κοινὴν καὶ ΕΙ = ΕΔ. Εἶναι ἐπίσης ΟΙ = ΟΔ = ΟΑ ⇒ ΟΙ = ΟΑ καὶ συνεπῶς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΙΖΟ καὶ ΑΖΟ εἶναι ἐπίσης ἴσα, ὡς ἔχοντα ΟΖ = ΟΖ, ΟΙ = ΟΑ. Ἄρα $\widehat{ZOI} = \widehat{BOI} = \widehat{AOB} = \widehat{α}$. Ἡ κατασκευὴ τῆς τριέδρου ἀποδεικνύει καὶ τὴν ὕπαρξιν αὐτῆς.

**ΙΙ. Μία ἐκ τῶν δοθεισῶν γωνιῶν εἶναι ὀξεῖα, αἱ δὲ δύο ἄλλαι οἱαιδήποτε κυρταὶ γωνίαι.** Ἔστω $α < 90^0$. Διακρίνομεν ὑποπεριπτώσεις :

i) Μία ἐκ τῶν δύο ἄλλων $\widehat{β}$, $\widehat{γ}$ εἶναι ὀξεῖα. Τότε εὑρισκόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

ii) Αἱ δύο ἄλλαι $\widehat{β}$, $\widehat{γ}$ εἶναι ἀμβλεῖαι. Τότε ἡ τρίεδρος μὲ ἕδρας $2_{ορ}-\widehat{β}$, $2_{ορ}-\widehat{γ}$ καὶ $\widehat{α}$ κατασκευάζεται (περίπτωσις Ι). Ἡ προσκειμένη της, μὲ κοινὴν ἕδραν τὴν $\widehat{α}$, εἶναι ἡ ζητουμένη (§ **245**).

iii) Εἶναι $\widehat{β} > 90^0$ καὶ $\widehat{γ} \geqq 90^0$. Τότε ἡ τρίεδρος μὲ ἕδρας $\widehat{α}$, $2_{ορ}-\widehat{β}$ καὶ $\widehat{γ}$ κατασκευάζεται (περίπτωσις Ι). Ἡ προσκειμένη δὲ αὐτῆς, μὲ κοινὴν ἕδραν τὴν α, εἶναι ἡ ζητουμένη.

iv) Εἶναι $\widehat{β} = 90^0$, $\widehat{γ} = 90^0$. Ἡ κατασκευὴ εἶναι προφανής.

**ΙΙΙ. Οὐδεμία τῶν δοθεισῶν γωνιῶν εἶναι ὀξεῖα.**

i) Εἶναι $\widehat{α} > 90^0$, $\widehat{β} > 90^0$, $\widehat{γ} = 90^0$. Τότε ἡ τρίεδρος μὲ ἕδρας $2_{ορ}-\widehat{α}$, $2_{ορ}-\widehat{β}$ καὶ γ κατασκευάζεται (περίπτωσις Ι), ἡ δὲ προσκειμένη αὐτῆς, μὲ κοινὴν ἕδραν τὴν γ, εἶναι ἡ ζητουμένη (§ **245**).

ii) Εἶναι $α > 90^0$, $\widehat{β} = 90^0$, $\widehat{γ} = 90^0$. Ἡ κατασκευὴ προφανής.

iii) Εἶναι $\widehat{α} = \widehat{β} = \widehat{γ} \geqq 90^0$. Ἡ κατασκευὴ προφανής.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Συμπέρασμα. Ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι, ἵνα τρεῖς γωνίαι $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ συγκροτοῦν ἕδρας τριέδρου, εἶναι αἱ ἑξῆς τέσσαρες :**

$$\widehat{\alpha}<\widehat{\beta}+\widehat{\gamma},\ \widehat{\beta}<\widehat{\gamma}+\widehat{\alpha},\ \widehat{\gamma}<\widehat{\alpha}+\widehat{\beta},\ \widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}<4\ \text{ορθ.}$$

**247. Ἀναγκαῖαι συνθῆκαι μεταξὺ τῶν τριῶν διέδρων πάσης τριέδρου. (Θ)— Εἰς πᾶσαν τρίεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων εἶναι μεγαλύτερον μὲν τῶν δύο, μικρότερον δὲ τῶν ἓξ ὀρθῶν· ἑκάστη δὲ δίεδρος, αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθάς, ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.**

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ δυαδικὸν τοῦ θεωρ. τῆς § **244**. Πράγματι ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ μέτρα τῶν διέδρων τυχούσης τριέδρου, Τ. Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς Τ ἔχει ἕδρας : $2_{\text{ορ}}-\text{Α}$, $2_{\text{ορ}}-\text{Β}$, $2_{\text{ορ}}-\Gamma$. Αἱ ἕδραι αὗται, $2_{\text{ορ}}-\text{Α}$, $2_{\text{ορ}}-\text{Β}$, $2_{\text{ορ}}-\Gamma$ ὡς ἀνήκουσαι εἰς τρίεδρον πληροῦν τὰς συνθήκας (1) τῆς § **244** :

$$\begin{aligned}
&0<2_{\text{ορ}}-\text{Α}+2_{\text{ορ}}-\text{Β}+2_{\text{ορ}}-\Gamma<4\ \text{ορθ} &&\Longleftrightarrow\ 2_{\text{ορ}}<\text{Α}+\text{Β}+\Gamma<6_{\text{ορ}}\\
&2_{\text{ορ}}-\text{Α}<2_{\text{ορ}}-\text{Β}+2_{\text{ορ}}-\Gamma &&\Longleftrightarrow\ \text{Α}+2_{\text{ορ}}>\text{Β}+\Gamma\\
&2_{\text{ορ}}-\text{Β}<2_{\text{ορ}}-\Gamma+2_{\text{ορ}}-\text{Α} &&\Longleftrightarrow\ \text{Β}+2_{\text{ορ}}>\text{Α}+\Gamma\\
&2_{\text{ορ}}-\Gamma<2_{\text{ορ}}-\text{Α}+2_{\text{ορ}}-\text{Β} &&\Longleftrightarrow\ \Gamma+2_{\text{ορ}}>\text{Α}+\text{Β},\ \text{ὅ. ἔ. δ.}
\end{aligned}$$

**248. Κατασκευὴ τριέδρου ἐκ τῶν τριῶν διέδρων της (Θ)— Δοθεισῶν τριῶν κυρτῶν διέδρων, ὧν τὰ μέτρα Α, Β, Γ πληροῦν τὰς τέσσαρας σχέσεις τῆς § 247, ὑπάρχει (κατασκευάζεται) τρίεδρος δεχομένη ὡς διέδρους τὰς τρεῖς δοθείσας.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τρεῖς δίεδροι γωνίαι, ὧν τὰ μέτρα Α, Β, Γ πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$\{2_{\text{ορ}}<\text{Α}+\text{Β}+\Gamma<6_{\text{ορ}},\ \text{Α}+2_{\text{ορ}}>\text{Β}+\Gamma,\ \text{Β}+2_{\text{ορ}}>\text{Α}+\Gamma,\ \Gamma+2_{\text{ορ}}>\text{Α}+\text{Β}\}.$$

Τότε τὰ Α, Β, Γ θὰ πληροῦν καὶ τὰς ἰσοδυνάμους σχέσεις (βλ. § **247**) :

$$(1)\quad \begin{cases} 0<2_{\text{ορ}}-\text{Α}+2_{\text{ορ}}-\text{Β}+2_{\text{ορ}}-\Gamma<4\ \text{ορθ.}\\ 2_{\text{ορ}}-\text{Α}<2_{\text{ορ}}-\text{Β}+2_{\text{ορ}}-\Gamma\\ 2_{\text{ορ}}-\text{Β}<2_{\text{ορ}}-\Gamma+2_{\text{ορ}}-\text{Α}\\ 2_{\text{ορ}}-\Gamma<2_{\text{ορ}}-\text{Α}+2_{\text{ορ}}-\text{Β}. \end{cases}$$

Ἂς θεωρήσωμεν τρεῖς ἐπιπέδους, κυρτὰς γωνίας ἐχούσας μέτρα :

$$(2)\quad \{\alpha'=2_{\text{ορ}}-\text{Α},\ \beta'=2_{\text{ορ}}-\text{Β},\ \gamma'=2_{\text{ορ}}-\Gamma\}.$$

Τότε αἱ γωνίαι αὐταί, α', β', γ', λόγῳ τῶν (2) καὶ (1) θὰ πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$(3)\quad \{\alpha'+\beta'+\gamma'<4\ \text{ορθ},\ \alpha'<\beta'+\gamma',\ \beta'<\gamma'+\alpha',\ \gamma'<\alpha'+\beta'\}.$$

Ἄρα κατασκευάζεται τρίεδρος Τ', δεχομένη ὡς ἕδρας τὰς γωνίας ταύτας α', β', γ' (§ **246**). Κατασκευασθείσης τῆς Τ', κατασκευάζομεν τὴν παραπληρωματικήν της Τ, ἥτις θὰ ἔχῃ διέδρους: $2_{\text{ορ}}-\alpha'$, $2_{\text{ορ}}-\beta'$, $2_{\text{ορ}}-\gamma'$, δηλ. λόγῳ τῶν (2) ἡ Τ θὰ ἔχῃ διέδρους μέτρων Α, Β, Γ, ὅ.ἔ.δ.

**Συμπέρασμα. Ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι, ἵνα τρεῖς δίεδροι γωνίαι $\widehat{\text{Α}}$, $\widehat{\text{Β}}$, $\widehat{\Gamma}$ ἀνήκουν εἰς μίαν τρίεδρον γωνίαν, εἶναι αἱ ἑξῆς τέσσαρες :** $\{2_{\text{ορ}}<\widehat{\text{Α}}+\widehat{\text{Β}}+\widehat{\Gamma}<6\ \text{ορθ},\ \widehat{\text{Α}}+2_{\text{ορ}}>\widehat{\text{Β}}+\widehat{\Gamma},\ \widehat{\text{Β}}+2_{\text{ορ}}>\widehat{\Gamma}+\widehat{\text{Α}},\ \widehat{\Gamma}+2_{\text{ορ}}>\widehat{\text{Α}}+\widehat{\text{Β}}\}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

867. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον μία τοὐλάχιστον ἕδρα εἶναι μικροτέρα τῶν $120^0$ καὶ μία δίεδρος εἶναι μεγαλυτέρα τῶν $60^0$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

868. Δύο ἕδραι μιᾶς τριέδρου εἶναι $68^0$ καὶ $119^0$. Μεταξὺ τίνων ὁρίων κεῖται ἡ τρίτη ἕδρα αὐτῆς;

869. Δύο δίεδροι μιᾶς τριέδρου εἶναι $115^0$ καὶ $75^0$. Μεταξὺ τίνων ὁρίων περιέχεται ἡ τρίτη δίεδρος;

870. Τρίεδρος ἔχει δύο ἕδρας ἴσας καὶ τὴν τρίτην, $135^0$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παραπληρωματική της ἔχει ὅλας τὰς διέδρους μικροτέρας τῶν $117^0,5$.

871. i) Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα τετράεδρος κυρτὴ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ii) Πότε μία τετράεδρος στερεὰ γωνία δύναται νὰ τμηθῇ κατὰ ὀρθογώνιον παρ/μον ἢ κατὰ ρόμβον;

iii) Ἐὰν ἡ τετράεδρος ὁρίζεται ὑπὸ τῆς κορυφῆς της Ο καὶ ὑπὸ μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς της ΑΒΓΔ, ἤτις δὲν εἶναι οὔτε παρ/μον οὔτε τραπέζιον, νὰ σχεδιασθῇ ἡ τομή της ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δοθέντος σημείου $A_1$ τῆς ἀκμῆς ΟΑ καὶ τέμνοντος τὴν τετράεδρον κατὰ παρ/μον.

872. Νὰ κατασκευασθοῦν Γεωμετρικῶς αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς τριέδρου, τῆς ὁποίας μία ἕδρα εἶναι $90^0$, αἱ δὲ ἄλλαι δύο δοθεῖσαι ὀξεῖαι γωνίαι.

873. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων μιᾶς τριέδρου, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι δοθεῖσαι ὀξεῖαι γωνίαι ἢ δοθεῖσαι ἀμβλεῖαι γωνίαι.

874. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων κυρτῆς ν-έδρου στερεᾶς γωνίας περιέχεται μεταξὺ 2ν—4 ορθ καὶ 6ν—12 ορθ.

875. Ἐὰν τετράεδρος, κυρτή, στερεὰ γωνία τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου (Π) κατὰ τετράπλευρον περιγράψιμον, ἡ δὲ κορυφή της προβάλλεται ἐπὶ τοῦ (Π) εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τῆς τομῆς ,τότε νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι ἑδρῶν τῆς τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι.

876. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις (ΑΒ)=(ΓΔ)=α, (ΒΓ)=(ΑΔ)=β. Εἰς τὸ Α ὑψοῦμεν κάθετον τμῆμα AS ἐπὶ τὸ (Π), μήκους AS=h. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ τῆς τετραέδρου στερεᾶς γωνίας S,ΑΒΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Α καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν SΓ εἶναι τετράπλευρον ἐγγράψιμον· νὰ ὑπολογισθῇ δὲ συναρτήσει τῶν α, β, h ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου.

877. Μεταβλητὸν ἐπίπεδον τέμνει τὰς ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ τετραέδρου στερεᾶς γωνίας Ο,ΑΒΓΔ εἰς Κ, Λ, Μ, Ν ἀντιστοίχως. Ἐὰν τὰ Κ καὶ Λ μένουν σταθερά, i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ευθ ΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. ii) Τόπος τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΚΝ καὶ ΛΜ.

878. Δίδεται πεντάεδρος στερεὰ γωνία ὁριζομένη ὑπὸ τῆς κορυφῆς της Ο καὶ ὑπὸ τῆς τομῆς της ΑΒΓΔΕ ὑπὸ δεδομένου ἐπιπέδου (Π). Ἐπὶ τοῦ (Π) δίδεται εὐθεῖα (δ) καὶ σημεῖον Ι καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΟΙ δίδεται σημεῖον Ι΄. Ζητεῖται νὰ σχεδιασθῇ, διὰ χρήσεως εὐθειῶν μόνον, ἡ τομὴ τῆς στερεᾶς γωνίας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς (δ) καὶ τοῦ Ι΄.

Ἐπίσης νὰ σχεδιασθῇ ἡ τομή της ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς (δ) καὶ διὰ δοθέντος σημείου $A_1$ τῆς ἀκμῆς ΟΑ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

# ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

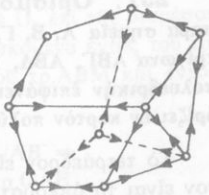
## ΚΥΡΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

**249. Ὁρισμοί.— α΄) Καλεῖται κυρτή, κλειστή, πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ ν κυρτὰ πολύγωνα (ν > 3), μὴ ὁμοεπίπεδα ἀνὰ δύο καὶ διατεταγμένα οὕτως, ὥστε 1ον) πᾶσα πλευρὰ ἑκάστου νὰ εἶναι συγχρόνως καὶ πλευρὰ ἑνὸς καὶ μόνον ἄλλου ἐκ τῶν ν - 1 ὑπολοίπων καὶ 2ον) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑκάστου νὰ κεῖνται τὰ ν - 1 ἄλλα πολύγωνα εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου.**

Τὰ ν ταῦτα πολύγωνα θεωροῦνται ὡς ἐπίπεδοι περιοχαὶ (τμήματα ἐπιπέδου) καὶ καλοῦνται **ἕδραι**, αἱ πλευραί των καλοῦνται **ἀκμαὶ** καὶ αἱ κορυφαί των **κορυφαὶ** τῆς ἀνωτέρω κυρτῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας.

β΄) Σημεῖον Μ λέγεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τῆς κυρτῆς κλειστῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, ὅταν κεῖται ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον **ἑκάστης** ἕδρας εἰς τὸ μέρος τοῦ χώρου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται καὶ αἱ λοιπαὶ ἕδραι (καὶ κορυφαί). Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἀποτελεῖ τὸ μέρος τοῦ χώρου **τὸ περικλειόμενον ὑπὸ τῆς κλειστῆς ταύτης ἐπιφανείας.**

γ΄) **Κυρτὸν πολύεδρον καλεῖται τὸ σημειοσύνολον τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰ σημεῖα μιᾶς κυρτῆς κλειστῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ἀπὸ τὰ ἐσωτερικὰ αὐτῆς σημεῖα.** Οὕτω πᾶν κυρτὸν πολύεδρον ἔχει μίαν **ἐπιφάνειαν** καὶ ἓν **ἐσωτερικόν.**



Σχ. 282

Αἱ ἕδραι, ἀκμαὶ καὶ κορυφαὶ τῆς περικλειούσης τὸ πολύεδρον ἐπιφανείας λέγονται ἐπίσης **ἕδραι, ἀκμαὶ** καὶ **κορυφαὶ τοῦ πολυέδρου.** Οὕτω π.χ. τὸ εἰς τὸ σχ. 282 εἰκονιζόμενον κυρτὸν πολύεδρον ἔχει 7 ἕδρας, 14 ἀκμὰς καὶ 9 κορυφάς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης** τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι ὅτι ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον **ἑκάστης** ἕδρας του ὅλαι αἱ λοιπαὶ ἕδραι καὶ κορυφαί του κεῖνται **εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου.**

δ') Πᾶσα ἀκμὴ τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι καὶ ἀκμὴ μιᾶς μόνον **διέδρου** γωνίας, ὁριζομένης ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ δύο ἕδραι αἱ συντρέχουσαι πρὸς τὴν ἀκμὴν ταύτην. Πᾶσα κορυφὴ δὲ τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι κορυφὴ μιᾶς καὶ μόνον **κυρτῆς στερεᾶς γωνίας,** ὁριζομένης ἀπὸ τὰς ἀκμὰς τὰς συντρεχούσας πρὸς τὴν κορυφὴν ταύτην, (βλ. σχ. 282).

ε') Ἡ **τομὴ** τῆς ἐπιφανείας κυρτοῦ πολυέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς εἶναι κατ' ἀνάγκην **κυρτὸν πολύγωνον,** διότι ὡς πρὸς ἑκάστην πλευράν του αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της.

ς') **Διαγώνιος** κυρτοῦ πολυέδρου καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα συνδέον δύο κορυφὰς **μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.** Πᾶσα διαγώνιος $A_\kappa A_\lambda$ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυέδρου, διότι τὰ $A_\kappa$, $A_\lambda$ κεῖνται ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον πάσης ἕδρας μὴ περιεχούσης τὰ $A_\kappa$, $A_\lambda$ πρὸς τὸ μέρος τῶν λοιπῶν κορυφῶν. Ὡς πρὸς πᾶσαν δὲ ἕδραν περιέχουσαν τὸ $A_\kappa$ ἢ τὸ $A_\lambda$ κεῖται πάλιν τὸ τμῆμα $A_\kappa A_\lambda$ πρὸς τὸ μέρος τῶν λοιπῶν κορυφῶν.

**250. Μὴ κυρτὸν πολύεδρον.** Ἐὰν θεωρήσωμεν διαδοχὴν κυρτῶν πολυέδρων $\Pi_1$, $\Pi_2$...$\Pi_\rho$, ἕκαστον τῶν ὁποίων συνέχεται μετὰ τοῦ ἑπομένου του διὰ μιᾶς κοινῆς ἕδρας ἢ ἀκμῆς ἢ κορυφῆς, ἐνῷ τὰ ἐσωτερικά των εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο, τότε ἡ ἕνωσις τῶν ἐσωτερικῶν ὅλων τῶν πολυέδρων τούτων, πλέον τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν κοινῶν ἑδρῶν, ἀποτελεῖ τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς νέου πολυέδρου, ἔχοντος ἐπιφάνειαν τὸ σύνολον τῶν μὴ κοινῶν ἑδρῶν τῶν πολυέδρων $\Pi_1$, $\Pi_2$,...$\Pi_\rho$. Ἐὰν ἡ νέα αὐτὴ ἐπιφάνεια **δὲν** εἶναι κυρτή, δηλ., ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἕδρας τινὸς δὲν κεῖται ὅλαι αἱ λοιπαὶ ἕδραι εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου, τότε τὸ ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν κυρτῶν πολυέδρων προκῦπτον πολύεδρον εἶναι ἓν **μὴ κυρτὸν πολύεδρον,** ἀναλυόμενον εἰς κυρτὰ (εἰς τὰ $\Pi_1$, $\Pi_2$.... $\Pi_\rho$). Θὰ περιορισθῶμεν ἐνταῦθα μόνον εἰς τὸ εἶδος τοῦτο τῶν μὴ κυρτῶν πολυέδρων (δηλ. τῶν ἀναλυομένων εἰς κυρτά).

## ΤΟ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΝ

**251. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα τοῦ τετραέδρου. — α') Τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὁρίζουν τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΒΓΔ, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν μίαν κλειστὴν κυρτὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν (§ 249), ἡ ὁποία μετὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ της (§ 249) ὁρίζει ἓν κυρτὸν πολύεδρον, ΑΒΓΔ, καλούμενον «τετράεδρον»** (σχ. 283).

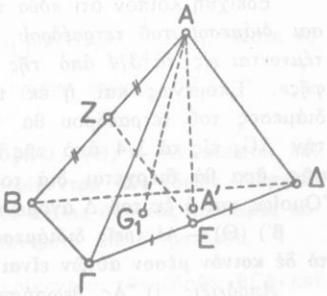
Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἁπλούστατον τῶν πολυέδρων, ὅπως τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἁπλούστατον τῶν πολυγώνων. Πολύεδρον μὲ ὀλιγωτέρας ἀπὸ τέσσαρας ἕδρας δὲν ὑπάρχει.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τετραέδρου ἀντιστοιχεῖ μία **ἀπέναντι ἕδρα,** ὁριζομένη ὑπὸ τῶν τριῶν ἄλλων κορυφῶν.

**Ἀπέναντι ἀκμαὶ** τοῦ τετραέδρου καλοῦνται δύο ἀσύμβατοι ἀκμαὶ αὐτοῦ. Τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ ἔχει τρία ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν: (ΑΒ, ΓΔ), (ΑΓ, ΒΔ), (ΑΔ, ΒΓ).

**Ὕψος τετραέδρου** καλεῖται ἡ ἀπόστασις (§ **176**) μιᾶς κορυφῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Τὸ τετράεδρον ἔχει τέσσαρα ὕψη, τὰ ὁποῖα ἐν γένει δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Μόνον εἰς μίαν ὡρισμένην κατηγορίαν τετραέδρων τὰ τέσσαρα ὕψη διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (βλ. § **256,** γ').



Σχ. 283

**Διάμεσος τετραέδρου** καλεῖται ἕκαστον τμῆμα συνδέον μίαν κορυφὴν μὲ τὸ βαρύκεντρον τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Τὸ τετράεδρον ἔχει, φυσικά, τέσσαρας διαμέσους. Αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (§ **252,** α').

**Διδιάμεσος τετραέδρου** καλεῖται τμῆμα συνδέον τὰ μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν. Τὸ τετράεδρον ἔχει τρεῖς διδιαμέσους, αἱ ὁποῖαι συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (§ **252,** β').

## ΑΞΙΟΛΟΓΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

**252. Κέντρον βάρους τετραέδρου.** α') (Θ) — **Εἰς πᾶν τετράεδρον αἱ τέσσαρες διάμεσοι συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστην κορυφήν, τὰ τρία τέταρτα τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου. Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται «βαρύκεντρον» ἢ «κέντρον βάρους» τοῦ τετραέδρου καὶ εὑρίσκεται πάντοτε εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραέδρου.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν $AG_1$ καὶ $BG_2$ δύο διάμεσοι τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Τὰ $G_1$ καὶ $G_2$, ὡς κέντρα βάρους τῶν τρ.ΒΓΔ καὶ τρ.ΑΓΔ ἀντιστοίχως, κεῖνται τὸ μὲν $G_1$ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΒΜ τοῦ τρ.ΒΓΔ, τὸ δὲ $G_2$ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΜ τοῦ τρ.ΑΓΔ. Ἄρα τὰ τμήματα $AG_1$ καὶ $BG_2$ εὑρισκόμενα ἐντὸς τοῦ τρ. ΑΒΜ τέμνονται εἴς τι σημεῖον G κείμενον ἐντὸς τοῦ τρ.ΑΒΜ καὶ ἐντὸς τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ $MG_1 : MB = MG_2 : MA = 1 : 3 \Rightarrow G_1G_2 // AB \Rightarrow$
τρ.$MG_1G_2 \approx$ τρ.ΜΒΑ καὶ τρ.$GG_1G_2 \approx$ τρ.GAB.

Ἐκ τῶν δύο τούτων ζευγῶν ὁμοίων τριγώνων λαμβάνομεν:

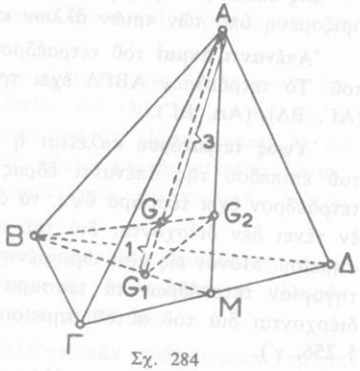
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{GG_1}{GA}=\frac{GG_2}{GB}=\frac{G_1G_2}{BA}=\frac{MG_1}{MB}=\frac{1}{3}.$$

Δηλ.: $\frac{GG_1}{GA}=\frac{1}{3}$, $\frac{GG_2}{GB}=\frac{1}{3}$ ἢ

καὶ $\frac{AG}{AG_1}=\frac{BG}{BG_2}=\frac{3}{4}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι *«δύο τυχοῦσαι διάμεσοι τοῦ τετραέδρου ἀλληλοτέμνονται εἰς τὰ 3/4 ἀπὸ τῆς κορυφῆς»*. Ἑπομένως καὶ ἡ ἐκ τοῦ Γ διάμεσος τοῦ τετραέδρου θὰ τέμνῃ τὴν $AG_1$ εἰς τὰ 3/4 ἀπὸ τῆς κορυφῆς, ἄρα θὰ διέρχεται διὰ τοῦ G. Ὁμοίως καὶ ἡ ἐκ τοῦ Δ ἀγομένη.



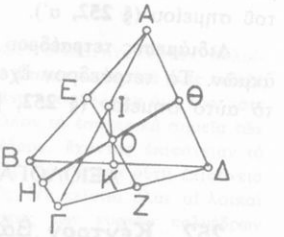
Σχ. 284

**β') (Θ) — Αἱ τρεῖς διδιάμεσοι παντὸς τετραέδρου ἔχουν κοινὸν μέσον, τὸ δὲ κοινὸν μέσον αὐτῶν εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου.**

*Ἀπόδειξις.* i) Ἂς θεωρήσωμεν δύο διδιαμέσους ΕΖ καὶ ΗΘ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 285). Ἐπειδὴ

$\overrightarrow{E\Theta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{HZ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Delta}$ ⇒

⇒ $\overrightarrow{E\Theta}=\overrightarrow{HZ}$ ⇒ ΕΘΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμον ⇒ τὰ τμήματα ΕΖ, ΘΗ ἔχουν κοινὸν μέσον Ο. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον καὶ ἡ τρίτη διδιάμεσος ΙΚ ἔχει κοινὸν μέσον μετὰ τῆς ΗΘ καὶ τῆς ΕΖ.

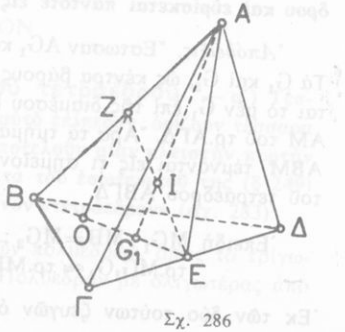


Σχ. 285

**Σημείωσις.** Ὅτι δύο διανύσματα τοῦ χώρου ὁμόρροπα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των ὁμόρροπα ἔχει οὐσιαστικῶς ἀποδειχθῆ εἰς τὸ θεώρ. τῆς **§ 196** (σχ. 237).

**Παρατηρητέον** ὅτι διὰ τῶν μέσων Ε, Ι, Θ, Η, Κ, Ζ τῶν ἀκμῶν δημιουργοῦνται **τρία παραλληλόγραμμα,** ΕΘΖΗ, ΙΘΚΗ, ΕΙΖΚ, **ἕκαστον τῶν ὁποίων κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου παρ/λου πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμὰς** τοῦ τετραέδρου.

ii) Μία διάμεσος $AG_1$ καὶ μία διδιάμεσος ΕΖ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 286) τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ι, διότι ἡ ευθΕΖ τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τριγ$ABG_1$ καὶ μὴ τέμνουσα τὴν



Σχ. 286

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$BG_1$ τέμνει τὴν πλευρὰν $AG_1$. (Ἀξίωμα Pasch). Ἐὰν Ο τὸ μέσον τοῦ $BG_1$, θὰ ἔχωμεν :

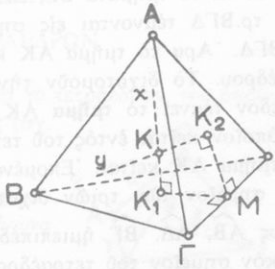
$$BO = OG_1 = G_1E.$$

Ἑπομένως, $G_1A // OZ$ καὶ ὡς διερχομένη ἡ $G_1A$ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΟΕ τοῦ τρ.ΖΟΕ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς ΖΕ. Ὥστε τὸ Ι εἶναι μέσον τῆς διδιαμέσου ΕΖ.

Ἐξ ἄλλου $G_1I = \frac{1}{2} OZ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AG_1\right) \Rightarrow IG_1 = \frac{1}{4} AG_1$. Ὥστε τὸ Ι εἶναι καὶ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου (προηγ. θεώρ.), ὅ.ἔ.δ.

**253. Περίκεντρον τοῦ τετραέδρου.** (Θ) — **Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας τετραέδρου αἱ ἀγόμεναι εἰς τὰ περίκεντρα τῶν ἑδρῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφάς· τὸ σημεῖον τοῦτο ἂς καλῆται «περίκεντρον» τοῦ τετραέδρου.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν $K_1$ καὶ $K_2$ τὰ περίκεντρα τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ καὶ ΑΓΔ τετραέδρου ΑΒΓΔ, $K_1x \perp BΓΔ$, $K_2y \perp AΓΔ$ (σχ. 287).



Σχ. 287

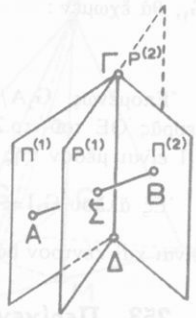
Ἐὰν Μ τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς ΓΔ, τότε $K_1M \perp ΓΔ$ καὶ $K_2M \perp ΓΔ$. Ἐπειδὴ $K_1$χορθογΓΔ καὶ $K_1M \perp ΓΔ \Rightarrow$ Επιπ $MK_1x \perp ΓΔ$ (βλ. § **181**, στ'). Ὁμοίως, $K_2y$ ορθογΓΔ$\diagdown K_2M \perp ΓΔ \Rightarrow$ ΕπιπΜ$K_2y \perp ΓΔ$. Ἄρα τὰ ἐπίπεδα $MK_1x$ καὶ $MK_2y$ ταυτίζονται ὡς μεσοκάθετα ἀμφότερα τῆς ΓΔ. Συνεπῶς αἱ $K_1x$ καὶ $K_2y$ εἶναι **ὁμοεπίπεδοι** καὶ ἐπειδὴ εἶναι κάθετοι ἐπὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα ΒΓΔ, ΑΓΔ, δὲν εἶναι παράλληλοι. Ἑπομένως τέμνονται εἴς τι σημεῖον Κ. Τὸ Κ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς Β, Γ, Δ, διότι $K_1B = K_1Γ = K_2Δ$. Τὸ Κ ἀπέχει ἴσον καὶ ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Γ, Δ, διότι $K_2A = K_2Γ = K_2Δ$ (§ **175**). Ἑπομένως τὸ Κ ἀπέχει ἴσον καὶ ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφάς. Ἀφοῦ, τώρα, ΚΑ = ΚΒ = ΚΔ, ἕπεται ὅτι τὸ Κ προβάλλεται εἰς τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΔ καὶ ἀφοῦ ΚΑ = ΚΓ = ΚΒ, ἕπεται ὅτι τὸ Κ προβάλλεται εἰς τὸ περίκεντρον τοῦ τρ. ΑΓΒ, ὅ.ἔ.δ.

**254. Ἔγκεντρον τοῦ τετραέδρου.** (Θ)—**Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραέδρου ὑπάρχει ἓν σημεῖον ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα τῶν τεσσάρων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου καὶ τὸ ὁποῖον προβάλλεται ὀρθῶς ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ τετραέδρου εἰς ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν ἑδρῶν. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κοι-**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**νὸν σημεῖον τῶν ἓξ διχοτομούντων τὰς διέδρους γωνίας τοῦ τετραέδρου καὶ θὰ καλῆται «ἔγκεντρον» τοῦ τετραέδρου.**

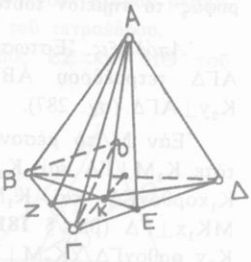
*Ἀπόδειξις.* Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι πᾶν ἡμιεπίπεδον $P^{(1)}$ ἀρχόμενον ἀπὸ τῆς ἀκμῆς ΓΔ διέδρου καὶ εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς τέμνει κάθε τμῆμα ΑΒ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου (σχ. 288).



Σχ. 288

Διότι τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) τοῦ φέροντος τὸ $P^{(1)}$, ἄρα τὸ τμῆμα ΑΒ τέμνει τὸ (Ρ) εἴς τι σημεῖον Σ. Τὸ τμῆμα ΑΒ ἀνήκει ὁλόκληρον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου, ἄρα καὶ τὸ σημεῖον Σ αὐτοῦ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου. Τὸ Σ ὡς ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου καὶ ἀνῆκον εἰς τὸ (Ρ) θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ μέρος τοῦ (Ρ) τὸ ἐντὸς τῆς διέδρου, ἤτοι εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $P^{(1)}$.

Ἔστω, τώρα, τετράεδρον ΑΒΓΔ (σχ. 289). Τὰ ἡμιεπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Delta}$ τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ΓΔ καὶ ΒΓ εἰς Ε καὶ Ζ, τὰ δὲ τμήματα ΒΕ, ΔΖ εὑρισκόμενα ἐντὸς τοῦ τρ.ΒΓΔ τέμνονται εἰς σημεῖον Κ ἐντὸς τοῦ τρ.ΒΓΔ. Ἄρα τὸ τμῆμα ΑΚ κεῖται ἐντὸς τοῦ τετραέδρου. Τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ΒΓ ἡμιεπίπεδον τέμνει τὸ **τμῆμα** ΑΚ εἴς τι σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ τετραέδρου, ἀφοῦ καὶ τὸ τμῆμα ΑΚ κεῖται. Ἑπομένως τὸ Ο εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν διχοτομούντων τὰς διέδρους $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Delta}$, $\widehat{B\Gamma}$ ἡμιεπιπέδων καὶ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τετραέδρου, ἄρα καὶ ἐσωτερικὸν καὶ τῶν ἓξ διέδρων αὐτοῦ. Τὸ Ο ἰσαπέχει τῶν ἑδρῶν ΒΑΔ, ΒΔΓ, ΑΓΔ, ΑΒΓ ὡς κείμενον ἐπὶ τῶν διχοτομούντων ἡμιεπιπέδων (§ **207**, β΄). Ἄρα τὸ Ο, ὡς ἀπέχον ἰσάκις ὅλων τῶν ἑδρῶν καὶ ὡς ἐσωτερικὸν σημεῖον ὅλων τῶν διέδρων τοῦ τετραέδρου, ἀνήκει καὶ εἰς τὰ 6 διχοτομοῦντα ἡμιεπίπεδα.



Σχ. 289

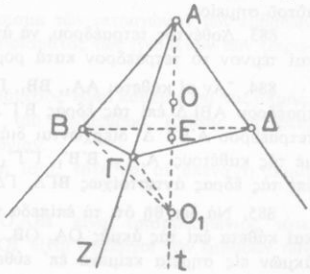
Τέλος τὸ Ο, ὡς ἀνῆκον εἰς τὸ διχοτομοῦν τὴν $\widehat{B\Gamma}$, προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου {ΒΓ—Α} (§ **207**, β΄ σχ. 250), ἤτοι ἡ προβολή του ἐπὶ τὸ ΕπιπΑΒΓ κεῖται ὡς πρὸς τὴν ΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α. Δι' ὅμοιον λόγον ἡ αὐτὴ προβολὴ κεῖται ὡς πρὸς τὴν ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ ὡς πρὸς τὴν ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ. Δηλ. ἡ προβολή του εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅ.Ἐ.δ.

**255. Παράκεντρον τοῦ τετραέδρου.** (Θ) — **Δοθέντος τετραέδρου ΑΒΓΔ, ὑπάρχει ἓν σημεῖον ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας Α, ΒΓΔ καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα τῶν τεσσά-**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**ρων έδρῶν τοῦ τετραέδρου. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἂς καλῆται «παράκεντρον» τοῦ τετραέδρου, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν στερεὰν γωνίαν Α.**

*Ἀπόδειξις.* Ἂν Ο τὸ ἔγκεντρον (§ **254**) τοῦ τετραέδρου ,τότε ἡ ἡμιευθεῖα (Α, Ο) κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν τριῶν διχοτομούντων τὰς διέδρους $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$, $\widehat{A\Delta}$ καὶ ἑπομένως πᾶν σημεῖόν της ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς ἕδρας ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΔ. Ἔστω Et τὸ μέρος τῆς ἡμιευθείας (Α, Ο) τὸ ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου (σχ. 290). Τὸ διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδον τὴν **ἐξωτερικὴν** δίεδρον Δ—ΒΓ—Ζ τοῦ τετραέδρου, κείμενον ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου, τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν Et εἴς τι σημεῖον $O_1$, τὸ ὁποῖον, προφανῶς, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς τέσσαρας ἕδρας, κεῖται ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας Α,ΒΓΔ καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

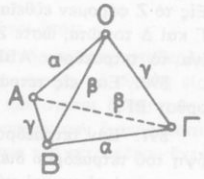


Σχ. 290

## ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΙ ΤΙΝΕΣ ΤΕΤΡΑΕΔΡΩΝ

**256.** α΄) **Ἰσοσκελὲς τετράεδρον** καλεῖται τὸ τετράεδρον, τοῦ ὁποίου **ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντί της** (σχ. 291).

**Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης** τοῦ ἰσοσκελοῦς τετραέδρου: *Αἱ τέσσαρες ἕδραι του εἶναι τρίγωνα ἴσα.*



Σχ. 291

β΄) **Κανονικὸν τετράεδρον** καλεῖται τὸ περικλειόμενον ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων. Τοῦτο **ἔχει τὰς 6 ἀκμάς του ἴσας.**

γ΄) **Ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον** καλεῖται τὸ τετράεδρον, τοῦ ὁποίου **κάθε ἀκμὴ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ἀπέναντί της.** Εἰς τὰ τετράεδρα τῆς κατηγορίας αὐτῆς καὶ μόνον αὐτῆς τὰ τέσσαρα ὕψη συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δηλ. τὰ τετράεδρα ταῦτα ἔχουν ὀρθόκεντρον (βλ. ἄσκ. 891).

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

879. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφὰς τετραέδρου εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

880. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τετράεδρον τὰ ἓξ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα ἕκαστον διὰ μιᾶς ἀκμῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν.

881. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς Α τετραέδρου ΑΒΓΔ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὰ διχοτομοῦντα τὰς ἐσωτερικὰς καὶ ἐξωτερικὰς διέδρους $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΓΔ}$, $\widehat{ΔΒ}$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

882. Τὰ 6 ἐπίπεδα τὰ κάθετα εἰς τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

883. Δοθέντος τετραέδρου, νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμὰς καὶ τέμνον τὸ τετράεδρον κατὰ ρόμβον.

884. Ἂν αἱ κάθετοι $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$, $ΓΓ_1$, $ΔΔ_1$ αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ, τετραέδρου ΑΒΓΔ ἐπὶ τὰς ἕδρας Β΄Γ΄Δ΄, Γ΄Δ΄Α΄, Δ΄Α΄Β΄, Α΄Β΄Γ΄ ἀντιστοίχως ἑνὸς ἄλλου τετραέδρου Α΄Β΄Γ΄Δ΄ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τότε τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ μὲ τὰς καθέτους $Α΄Α΄_1$, $Β΄Β΄_1$, $Γ΄Γ΄_1$, $Δ΄Δ΄_1$ τὰς ἀγομένας ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὰς ἕδρας ἀντιστοίχως ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ, ΑΒΓ τοῦ πρώτου.

885. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῆς κορυφῆς Ο τετραέδρου ΟΑΒΓ καὶ κάθετα ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τέμνουν τοὺς ἀντιστοίχους φορεῖς τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

886. Ἐὰν α ἡ ἀκμὴ κανονικοῦ τετραέδρου, δείξατε ὅτι τὸ ὕψος του ἰσοῦται μὲ $α\sqrt{\frac{2}{3}}$.

887. Εἰς πᾶν κανονικὸν τετράεδρον αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀρχόμεναι ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὕψους καὶ διερχόμεναι διὰ τῶν τριῶν ἄλλων κορυφῶν εἶναι ἀκμαὶ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας.

888. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κανονικὸν τετράεδρον ἔχει: ἐπίπεδα συμμετρίας τὰ 6 μεσοκάθετα τῶν ἀκμῶν του, ἄξονας συμμετρίας τὰς τρεῖς κοινὰς καθέτους μεταξὺ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του· ἕκαστον δὲ τῶν τεσσάρων ὑψῶν του εἶναι ἄξων ἐπαναφορᾶς τάξεως 3.

889. Εἰς τὸ μέσον Ι εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ = 2α φέρομεν κάθετον τμῆμα ΙΖ = h. Εἰς τὸ Ζ φέρομεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ ΕπιπΖΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε ΖΓ = ΖΔ = β. Ζητεῖται νὰ ὁρισθοῦν τὰ h καὶ β συναρτήσει τοῦ α, ἵνα τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι κανονικόν.

890. Ἐὰν εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ ορθογ ΓΔ ∧ ΑΓ ορθογ ΒΔ, τότε καὶ ΑΔ ορθογ ΒΓ.

891. Ἐὰν τετραέδρου αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἀνὰ δύο ὀρθογώνιοι, τότε τὰ τέσσαρα ὕψη τοῦ τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ σημείου διέρχονται καὶ αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

**Ἀντιστρόφως**, ἂν τὰ ὕψη ἑνὸς τετραέδρου διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τότε τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ὀρθογώνια ζεύγη. **(Ὀρθοκεντρικὰ τετράεδρα).**

892. Ἔστω ΜΑΒΓ τετράεδρον, οὗτινος ἡ βάσις ΑΒΓ μένει σταθερά, ἐνῷ ἡ κορυφὴ Μ εἶναι μεταβλητή. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ Η, Θ, Ι τῶν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, τίς ὁ γ. τόπος τοῦ Μ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ τετράπλευρα ΗΘΕΖ καὶ ΙΘΔΖ εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα; Ποῖον τότε τὸ εἶδος τοῦ τετραπλεύρου ΗΙΔΕ;

893. Ἐὰν τρία ὕψη τετραέδρου διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τότε καὶ τὸ τέταρτον ὕψος θὰ διέρχεται διὰ τοῦ ἰδίου σημείου.

894. Τὸ κέντρον βάρους παντὸς ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ μέσα ὅλων τῶν ἀκμῶν.

895. Εἰς πᾶν ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ τρία ζεύγη.

896. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αἱ ἀγόμεναι εἰς τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὑψῶν τοῦ τετραέδρου μὲ τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

897. Ἐὰν τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β ἀγόμενα ὕψη τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνωνται εἰς σημεῖον Κ, τότε καὶ τὰ ἐκ τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν Γ καὶ Δ ἀγόμενα ὕψη τοῦ τετραέδρου τέμνονται εἷς τι σημεῖον Λ, τὸ ὁποῖον κεῖται μετὰ τοῦ Κ ἐπὶ τῆς κοινῆς καθέτου τῶν ἀκμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

898. Εἰς πᾶν ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων ἑδρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/4 τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

899. Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τετράεδρον ἑκάστη διδιάμεσος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκμάς, τὰς ὁποίας συνδέει καὶ εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας τοῦ τετραέδρου. Ἐπίσης, αἱ τρεῖς διάμεσοι σχηματίζουν τρισορθογώνιον στερεὰν γωνίαν.

900. Ἐὰν τετραέδρου αἱ ἀπέναντι δίεδροι εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως.

901. Ἐὰν τετραέδρου ΟΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία Ο,ΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιος, τότε αἱ προβολαὶ τοῦ ὕψους ΟΗ ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ.

902. Ἐὰν τετραέδρου ΟΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία Ο,ΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιος, τότε τὸ ὕψος ΟΗ αὐτοῦ πληροῖ τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{O\Gamma^2}.$$

903. Ἐὰν διὰ σημείου Μ κειμένου ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒΓ τετραέδρου ΟΑΒΓ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τέμνουσαι τὰς ἕδρας ἀντιστοίχως εἰς Α′, Β′, Γ′, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{MA'}{OA}+\frac{MB'}{OB}+\frac{M\Gamma'}{O\Gamma}=1.$$

Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ τὸ Μ, διὰ νὰ εἶναι οἱ τρεῖς οὗτοι λόγοι ἴσοι;

904. i) Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης σταθερὸν τμῆμα ΑΒ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς δευτέρας ὁλισθαίνῃ τμῆμα ΓΔ σταθεροῦ μήκους, νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν θέσιν τοῦ ΓΔ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν (ΓΑΒ)+(ΔΑΒ) καθίσταται ἐλάχιστον ;

ii) Ἐὰν δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ τετραέδρου κινοῦνται ἐπὶ τῶν φορέων των διατηροῦσαι τὰ μήκη των, νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις αὐτῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου ἔχει τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

905. Ἐὰν εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἴσα (ΑΒ+ +ΓΔ=ΒΓ+ΑΔ=ΑΓ+ΒΔ), τότε :

i) Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αἱ ἀγόμεναι εἰς τὰ ἔγκεντρα τῶν ἑδρῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ ἰσαπέχοντος τῶν 6 ἀκμῶν.

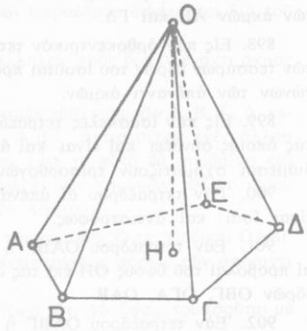
ii) Ἐφ' ὅσον τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ τετραέδρου, τότε καὶ διὰ τὰς ἀντιστοίχους διέδρους θὰ ἰσχύῃ ἡ ἰδία σχέσις, ἤτοι : $\widehat{AB}+\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{B\Gamma}+\widehat{A\Delta}=\widehat{A\Gamma}+\widehat{B\Delta}$.

## Η ΠΥΡΑΜΙΣ

**257. Ὁρισμοί. — α′) Πυραμὶς καλεῖται κυρτὸν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι τυχὸν κυρτὸν πολύγωνον, καλούμενον «βάσις» τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι τρίγωνα, ἅπαντα ἔχοντα μίαν κοινὴν κορυφὴν κειμένην ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ἥτις καλεῖται «κορυφὴ» τῆς πυραμίδος** (σχ. 292).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ εἰς τὴν κορυφὴν συντρέχουσαι ἀκμαὶ καλοῦνται **παράπλευροι ἀκμαὶ** τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ εἰς τὴν κορυφὴν συντρέχουσαι τριγωνικαὶ ἕδραι καλοῦνται **παράπλευροι ἕδραι** τῆς πυραμίδος. Ἡ ὑπὸ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν σχηματιζομένη πολυεδρικὴ ἀνοικτὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **παράπλευρος ἐπιφάνεια** τῆς πυραμίδος. Συνήθως ἡ ἐπιφάνεια ἡ περικλείουσα τὴν πυραμίδα λέγεται «**ὁλικὴ ἐπιφάνεια**» αὐτῆς. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν σὺν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καλεῖται **ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.**



Σχ. 292

Ἡ πυραμὶς λαμβάνει τὴν ὀνομασίαν της ἐκ τῆς βάσεώς της: **τριγωνική, τετραπλευρική, πενταγωνική . . .**, καθ' ὅσον ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον . . . Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ταυτίζεται μὲ τὸ τετράεδρον.

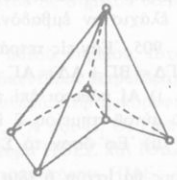
**Ὕψος τῆς πυραμίδος** καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς της ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως.

β') **Κανονικὴ πυραμὶς** καλεῖται πᾶσα πυραμὶς μὲ βάσιν κανονικὸν πολύγωνον καὶ τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ προβάλλεται ἐπὶ τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τῆς βάσεως.

Τὰ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς κανονικῆς πυραμίδος ἀγόμενα ὕψη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ἔχουν ἓν κοινὸν μῆκος $l$, καλούμενον **παράπλευρον ὕψος** τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

**Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος.**

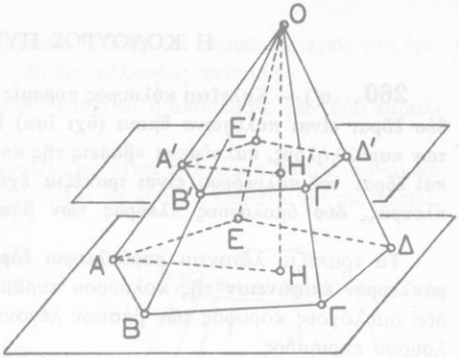
γ') Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν ὡς βάσιν μὴ κυρτὸν πολύγωνον ἀναλυόμενον εἰς κυρτά, λαμβάνομεν **μὴ κυρτὴν πυραμίδα** ἀναλυομένην εἰς κυρτὰς (σχ. 293).


Σχ. 293

**258. Θεώρημα τῶν παραλλήλων τομῶν.** — **Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ τομὴ εἶναι ὁμοία τῇ βάσει, τὰ δὲ ἐμβαδὰ τομῆς καὶ βάσεως εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων των ἀπὸ τῆς κορυφῆς.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω π.χ. ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν (σχ. 294). Ἔστω Η΄ ἡ τομὴ τοῦ ὕψους ΟΗ ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Ἔχομεν ὅτι : Η΄Α΄//ΗΑ, Α΄Β΄//ΑΒ, Β΄Γ΄//ΒΓ ... (τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου) καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων: ΟΗ΄Α΄ μὲ ΟΗΑ, ΟΑ΄Β΄, μὲ ΟΑΒ... λαμβάνομεν :




Σχ. 294

$$(1)\quad \frac{OH'}{OH}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{O\Gamma'}{O\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\dots$$

Αἱ ἐκ τῶν (1) προκύπτουσαι ἰσότητες : $\frac{OH'}{OH}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{O\Gamma'}{O\Gamma}=\dots$ δεικνύουν ὅτι αἱ ἀκμαὶ καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, αἱ δὲ ἐπίσης ἐκ τῶν (1) προκύπτουσαι : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\dots$ δεικνύουν ὅτι τὰ δύο πολύγωνα Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ καὶ ΕΒΓΔΕ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀνάλογους. Ἔχουν ὅμως καὶ τὰς γωνίας των ἴσας, ὡς ἐχούσας τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, ἄρα εἶναι ὅμοια. Τέλος ὁ λόγος ὁμοιότητος :

$\lambda=\frac{A'B'}{AB}$ ἰσοῦται (βάσει τῶν (1)) μὲ $\frac{OH'}{OH}$. Ἄρα :

$$\frac{\text{Εμβ}(A'B'\Gamma'\Delta'E')}{\text{Εμβ}(AB\Gamma\Delta E)}=\lambda^2=\frac{(OH')^2}{(OH)^2}=\frac{(OA')^2}{(OA)^2},\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

**259. Πόρισμα τοῦ ἀνωτέρω.** **«Ἐὰν θεωρήσωμεν σειρὰν παραλλήλων πολυγωνικῶν τομῶν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας ἐχούσης κορυφὴν Ο, καλέσωμεν δὲ $T_1$, $T_2$, $T_3$... τὰ ἐμβαδὰ τῶν τομῶν καὶ $A_1$,$A_2$,$A_3$... τὰς ἐπὶ μιᾶς ἀκμῆς κειμένας κορυφὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως, τότε ἰσχύουν αἱ ἰσότητες :**

$$(1)\quad \frac{T_1}{(OA_1)^2}=\frac{T_2}{(OA_2)^2}=\frac{T_3}{(OA_3)^2}=\dots$$

$$(2)\quad \frac{OA_1}{\sqrt{T_1}}=\frac{OA_2}{\sqrt{T_2}}=\frac{OA_3}{\sqrt{T_3}}=\dots\text{».}$$

*(αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῶν παραλλήλων τομῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν).*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## Η ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

**260.** **α΄) — Καλεῖται κόλουρος πυραμὶς κυρτὸν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι πολύγωνα ὅμοια (ὄχι ἴσα) ἔχοντα τὰς ὁμολόγους πλευράς των παραλλήλους, καλούμενα «βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος», ἐνῷ αἱ λοιπαὶ ἕδραι τοῦ πολυέδρου εἶναι τραπέζια ἔχοντα ἕκαστον, ὡς παραλλήλους πλευράς, δύο ὁμολόγους πλευρὰς τῶν βάσεων.**

Τὰ τραπέζια λέγονται **παράπλευροι ἕδραι** καὶ συναποτελοῦν τὴν **παράπλευρον ἐπιφάνειαν** τῆς κολούρου πυραμίδος. Αἱ ἀκμαὶ αἱ συνδέουσαι δύο ὁμολόγους κορυφὰς τῶν βάσεων λέγονται **παράπλευροι ἀκμαὶ** τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἡ κόλουρος πυραμὶς καλεῖται τριγωνική, τετραπλευρική, πενταγωνική . . ., καθ' ὅσον αἱ βάσεις της εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα . . .

**β΄) (Θ) — Αἱ προεκτάσεις τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν πάσης κολούρου πυραμίδος συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν $A_1A_2A_3$..., $B_1B_2B_3$... αἱ βάσεις κολούρου πυραμίδος. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, ἔχομεν :

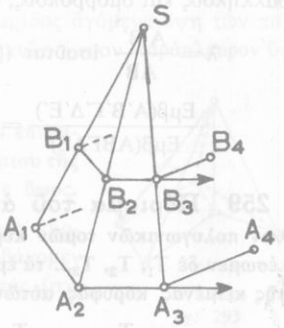
$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dots \tag{1}$$

Δύο διαδοχικαὶ ἀκμαὶ $A_1B_1$, $A_2B_2$ προεκτεινόμεναι τέμνονται, ἔστω εἰς S. Ἡ ἀκτὶς $SB_3$, τέμνουσα τὴν ἡμιευθεῖαν ($B_2$, $B_3$) (σχ. 295), τέμνει καὶ τὴν ὁμόρροπον αὐτῆς ($A_2$, $A_3$) εἴς τι σημεῖον $A_3'$, ταὐτιζόμενον μὲ τὸ $A_3$. Διότι :

$$\frac{A_2A_3'}{B_2B_3} = \frac{SA_2}{SB_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = (\text{λόγῳ τῶν (1)}) \frac{A_2A_3}{B_2B_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_2A_3'}{B_2B_3} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2A_3' = A_2A_3 \Rightarrow A_3' \equiv A_3.$$




Σχ. 295

Κατὰ συνέπειαν αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ ἀκμαὶ $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ συντρέχουν εἰς τὸ S. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ $A_2B_2$, $A_3B_3$, $A_4B_4$ συντρέχουν εἰς τὸ S.... καὶ τελικῶς ὅλαι συντρέχουν εἰς τὸ S.

**γ΄) Ἀντιστρόφως, ἂν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἡ τομὴ καὶ ἡ βάσις ὁρίζουν κόλουρον πυραμίδα.**

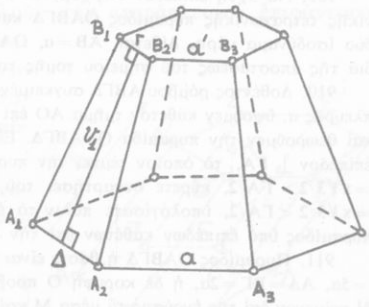
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἡ τομὴ εἶναι ὁμοία τῇ βάσει (§ **258**) καὶ συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐδαφ. α' ὁρίζεται ὑπ' αὐτῶν κόλουρος πυραμίς.

δ') **Ὕψος** κολούρου πυραμίδος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων βάσεων αὐτῆς.

ε') **Κανονικὴ κόλουρος πυραμὶς** καλεῖται ἡ ἔχουσα βάσεις κανονικὰ πολύγωνα, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὰς βάσεις. Αὕτη προκύπτει διὰ τομῆς μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος (§ **257**, β'), αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι της εἶναι ἰσοσκελῆ τραπέζια.

ς') (Θ). **Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιμέτρων τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος.**



Σχ. 296

Ἔστω π.χ. ἡ κόλουρος κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς $A_1A_2...B_1B_2,..$ τοῦ σχ. 296 καὶ $ΓΔ=υ_1$ τὸ ὕψος τοῦ παραπλεύρου τραπεζίου $A_1A_2B_1B_2$ (**παράπλευρον ὕψος**). Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς κολούρου ταύτης ἔχει ἐμβαδόν, ἔστω $E_Π$, ἴσον πρὸς τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου $A_1A_2B_2B_1$, δηλ. $E_Π = 6(A_1A_2B_2B_1) = 6 \cdot \frac{1}{2}(α + α')υ_1$ (σχ. 296) $= \frac{6α + 6α'}{2} \cdot υ_1 =$ ἡμιάθροισμα τῶν περιμέτρων τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος. Γενικῶς, ἂν αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ ν-γωνα, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια συγκειμένη ἀπὸ ν ἰσοσκελῆ τραπέζια ἔχει ἐμβαδὸν

$$(1) \qquad E_Π = \frac{να + να'}{2} \cdot υ_1.$$

Ὁ τύπος (1) ἐκφράζει τὸ ἀποδεικτέον θεώρημα.

ζ') Ἡ **ὁλικὴ ἐπιφάνεια** προκύπτει, ἂν εἰς τὴν παράπλευρον προστεθοῦν καὶ αἱ δύο βάσεις, ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς, ἔστω $E_{ολ}$, ἰσοῦται μὲ $ν(α + α')υ_1/2 + b + b'$, ὅπου α, α' αἱ πλευραὶ καὶ b, b' τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων, ἅτινα εἶναι βάσεις τῆς κανονικῆς κολούρου.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

906. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ ἔχουν μήκη γ, β. Εἰς τὸ Γ ὑψοῦμεν τμῆμα $ΓΔ = h$, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Ε τῆς πλευρᾶς ΓΑ φέρομεν ἐπίπεδον $\perp$ ΓΑ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ΔΓΑΒ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου συναρτήσει τῶν h, β, γ καὶ $ΓΕ = x$ καὶ ἡ θέσις τοῦ Ε, εἰς ἣν ἡ τομὴ ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

907. Κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἡ βάσις ἔχει πλευρὰν α, τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 2α. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς δέον νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια τῆς τομῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς ἀποκοπτομένης κολούρου πυραμίδος;

908. Πυραμὶς ΟΑΒΓ ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α, ἡ δὲ ἀκμὴ ΟΑ εἶναι ⊥ Επιπ ΑΒΓ καὶ ἔχει μῆκος α/2. Διὰ τοῦ Α ἄγεται ἐπίπεδον ⊥ ΟΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΟΒ εἰς τὸ Η καὶ τὴν ευθ ΒΓ εἰς τὸ Ι. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρ.ΑΗΙ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί του.

909. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ καὶ διαιροῦν τὴν ὁλικὴν αὐτῆς ἐπιφάνειαν εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη. Δίδεται, ΑΒ=α, ΟΑ=$l$, τὸ δὲ ζητούμενον ἐπίπεδον νὰ ὁρισθῇ διὰ τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τομῆς του μετὰ τῆς ΟΔ ἀπὸ τοῦ Ο.

910. Δοθέντος ρόμβου ΑΒΓΔ συγκειμένου ἀπὸ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ, πλευρᾶς α, ὑψοῦμεν κάθετον τμῆμα ΑΟ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ρόμβου, ἔχον μῆκος ΑΟ=α καὶ θεωροῦμεν τὴν πυραμίδα Ο, ΑΒΓΔ. Εἰς σημεῖον Μ κείμενον ἐπὶ τοῦ ΓΑ φέρομεν ἐπίπεδον ⊥ ΓΑ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν πυραμίδα κατὰ πολύγωνον F. α΄) Ἐὰν ΓΜ=$x\sqrt{3}/2$> ΓΑ/2, εὕρετε συναρτήσει τοῦ x τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς F. β΄) Ἐὰν ΓΜ=$x\sqrt{3}/2$ <ΓΑ/2, ὑπολογίσατε πάλιν τὸ ἐμβαδὸν τῆς F. γ΄) Ἐξ ὅλων τῶν τομῶν τῆς πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὴν ΓΑ, ποία εἶναι ἡ μεγίστη εἰς ἐμβαδόν;

911. Πυραμίδος ΟΑΒΓΔ ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον παρ/μον ΑΒΓΔ ἔχον ΑΒ=ΓΔ=5α, ΑΔ=ΒΓ=2α, ἡ δὲ κορυφὴ Ο προβάλλεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ εἰς σημεῖον Η κείμενον ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως. Εἶναι ἀκόμη ΜΗ=α, ΟΗ=2α. Τέμνομεν τὴν πυραμίδα ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΜΝ εἰς σημεῖον Κ αὐτῆς ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Μ ἀπόστασιν ΜΚ=x. Ἡ τομὴ εἶναι ἓν τετράπλευρον ἐμβαδοῦ y. Ἐκφράσατε τὸ y συναρτήσει τῶν x καὶ α καὶ παραστήσατε γραφικῶς τὰς μεταβολὰς τοῦ y, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 5α.

912. Κανονικῆς τετραγωνικῆς κολούρου πυραμίδος αἱ πλευραὶ τῶν βάσεων εἶναι ἀντιστοίχως α καὶ β καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος h. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαγωνίων τῶν ἑδρῶν τῆς δοθείσης. (Ἐὰν Κ, Λ, Μ, Ν εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαγωνίων τῶν τεσσάρων παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ $O_1$, $O_2$, τὰ κέντρα τῶν βάσεων, τὰ 8 τρίγωνα $O_1$ΚΛ, $O_1$ΛΜ, $O_1$ΜΝ, $O_1$ΝΚ, $O_2$ΚΛ, $O_2$ΛΜ, $O_2$ΜΝ, $O_2$ΝΚ περικλείουν ἓν ὀκτάεδρον, οὗτινος ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας).

913. Συναρτήσει τῶν ἐμβαδῶν β καὶ β΄ τῶν δύο βάσεων τῆς τυχούσης κολούρου πυραμίδος νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς της. Γενικώτερον νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τομῆς παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις καὶ διαιρούσης τὸ ὕψος εἰς λόγον μ/ν.

914. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος μὲ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τῆς ἑτέρας βάσεως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

915. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶσαν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ ἑκάστης κορυφῆς τῆς μιᾶς βάσεως καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τῆς ἄλλης βάσεως ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰ κέντρα βάρους τῶν δύο βάσεων.

916. Ἐὰν ἀχθοῦν δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς βάσεις τυχούσης κολούρου πυραμίδος καὶ διαιροῦντα τὸ ὕψος τῆς κολούρου εἰς τρία ἴσα μέρη, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τομῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο βάσεων.

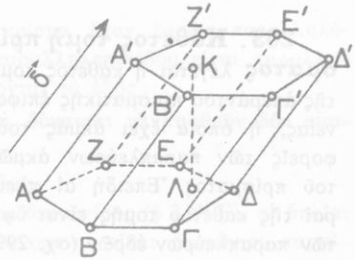
917. Κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος τὸ ἐμβαδὸν τῆς κάτω βάσεως εἶναι Ε καὶ τὰ μήκη δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν δύο βάσεων εἶναι α καὶ α΄. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῶν Ε, α, α΄ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαγωνίων τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ

**261. Ὁρισμοί.** — **α΄) Πρῖσμα καλεῖται κυρτὸν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι, καλούμεναι «βάσεις», προκύπτουν ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης διὰ μεταφορᾶς** (σχ. 297), **ἐνῷ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ἕδραι, καλούμεναι «παράπλευροι ἕδραι», εἶναι παραλληλόγραμμα ἔχοντα ἕκαστον ὡς δύο ἀπέναντι πλευράς, δύο ὁμολόγους πλευρὰς τῶν βάσεων.**

Αἱ παράπλευροι ἕδραι συναποτελοῦν τὴν **«παράπλευρον ἐπιφάνειαν»** τοῦ πρίσματος. Αἱ ἀκμαὶ αἱ συνδέουσαι δύο ὁμολόγους κορυφὰς τῶν βάσεων (παράλληλοι πρὸς τὸ διάνυσμα μεταφορᾶς) λέγονται **«παράπλευροι ἀκμαὶ»** τοῦ πρίσματος.



Σχ. 297

β΄) Τὸ πρῖσμα λαμβάνει τὴν ὀνομασίαν του ἐκ τῶν βάσεών του: *τριγωνικόν, τετραπλευρικόν, πενταγωνικόν...*

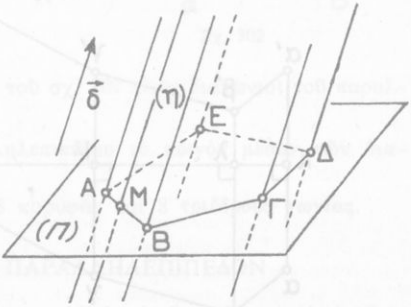
γ΄) Τὸ πρῖσμα καλεῖται **πλάγιον** ἢ **ὀρθόν,** καθ' ὅσον αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι πλάγιαι πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων ἢ κάθετοι ἐπ' αὐτά.

δ΄) **Ὕψος** πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ βάσεις.

ε΄) **Κανονικὸν πρῖσμα** καλεῖται ὀρθὸν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

**262. Ἀπέραντος πρισματικὴ ἐπιφάνεια** καλεῖται **τὸ σύνολον τῶν παραλλήλων εὐθειῶν τῶν τεμνουσῶν τὸ περίγραμμα ἑνὸς ἐπιπέδου πολυγώνου καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πολυγώνου.**

Αἱ διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε διερχόμεναι παράλληλοι λέγονται **ἀκμαὶ** τῆς ἐπιφανείας, ἐνῷ αἱ «ταινίαι» αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν λέγονται **ἕδραι** τῆς ἀπεράντου πρισματικῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 298

**Ἐπίπεδος τομὴ** μιᾶς ἀπεράντου πρισματικῆς ἐπιφανείας καλεῖται τὸ πολύγωνον τὸ προκῦπτον, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου πρὸς

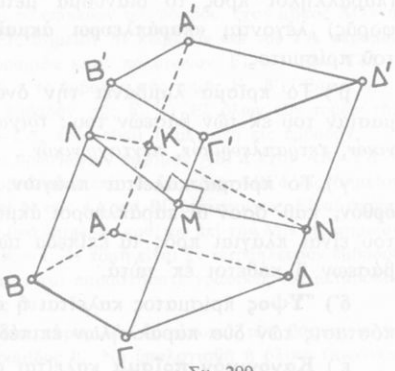
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὰς ἀκμάς της. Προφανῶς αἱ παράλληλοι ἐπίπεδοι τομαὶ (δηλ. αἱ προκύπτουσαι ἐκ παραλλήλων ἐπιπέδων τεμνόντων τὴν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν) **εἶναι ἴσαι,** διότι προκύπτουν ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης διὰ μεταφορᾶς.

**Κάθετος τομὴ** ἀπεράντου πρισματικῆς ἐπιφανείας λέγεται πᾶσα τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὰς ἀκμάς.

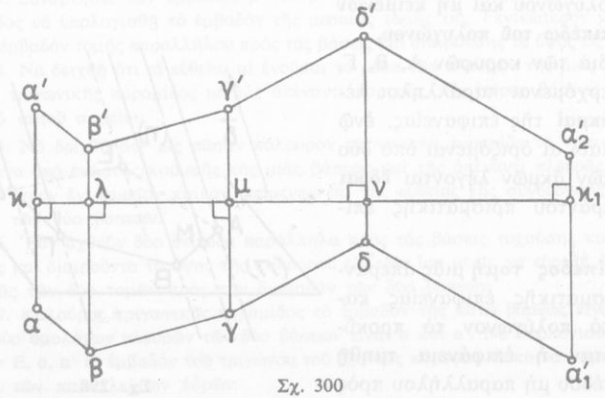
**Σημείωσις.** Συνήθως λέγομεν ὅτι ἡ ἀπέραντος πρισματικὴ ἐπιφάνεια *διαγράφεται (ἢ γεννᾶται) ὑπὸ εὐθείας (η) μεταβλητῆς* (σχ. 298) *παραλλήλου πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν* $\overrightarrow{\delta}$ *καὶ τεμνούσης εἰς Μ τὸ περίγραμμα ἑνὸς ἐπιπέδου πολυγώνου.* ($\overrightarrow{\delta}$ ὄχι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ΑΒΓΔΕ).

**263. Κάθετος τομὴ πρίσματος** λέγεται ἡ κάθετος τομὴ τῆς ἀπεράντου πρισματικῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκμὰς τοὺς φορεῖς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν τοῦ πρίσματος. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῆς καθέτου τομῆς εἶναι ὕψη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν (σχ. 299) συνάγομεν εὐχερῶς ὅτι **«τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς ἐπὶ τὴν περίμετρον μιᾶς καθέτου τομῆς».**



Σχ. 299

**264. Ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος.** — Ἂς θεωρήσωμεν πρῖσμα ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ καὶ μίαν κάθετον τομὴν αὐτοῦ ΚΛΜΝ (σχ. 299). Ἂς κατασκευάσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον αββ΄α΄ (σχ. 300) ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΒ΄Α΄ καὶ ἐν



Σχ. 300

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

συνεχείᾳ τὰ διαδοχικὰ παραλληλόγραμμα βγγ΄β΄, γδδ΄γ΄, δα$_1$΄α$_2$΄δ΄ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ΒΓΓ΄Β΄, ΓΔΔ΄Γ΄, ΔΑΑ΄Δ΄. Λαμβάνομεν οὕτω ἓν πολύγωνον (συνένωμα παραλληλογράμμων) τὸ αα΄β΄γ΄δ΄α$_2$΄α$_1$΄δγβ, τὸ ὁποῖον καλεῖται **«ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος»**. Εἰς τὰς κορυφὰς Λ, Μ, Ν τῆς καθέτου τομῆς ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ τοῦ ἀναπτύγματος τὰ σημεῖα λ, μ, ν τοιαῦτα, ὥστε : βλ=ΒΛ, γμ=ΓΜ, δν=ΔΝ καὶ εἰς τὰ τμήματα ΛΜ, ΜΝ ἀντιστοιχοῦν τὰ ὕψη λμ, μν τῶν παραλληλογράμμων βγγ΄β΄, γδδ΄γ΄. Εἰς τὸ Κ ἀντιστοιχοῦν δύο σημεῖα κ, κ$_1$ τοῦ ἀναπτύγματος κείμενα ἐπ' εὐθείας μὲ τὰ λ, μ, ν. Τέλος αἱ δύο ἀκραῖαι πλευραὶ αα΄, α΄$_1$α$_2$΄ τοῦ ἀναπτύγματος ὁρίζουν **ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον**, διότι εἶναι αα΄=α΄$_1$α΄$_2$ καὶ κα=κ$_1$α΄$_1$, κα΄=κ$_1$΄α$_2$΄.

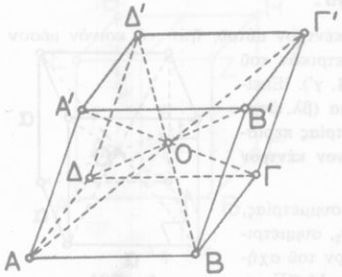
## ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

**265. Παραλληλεπίπεδον καλεῖται πρῖσμα ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα.** Συνεπῶς πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα (σχ. 301) καὶ ἐκ τούτου ἕπονται τὰ ἑξῆς :

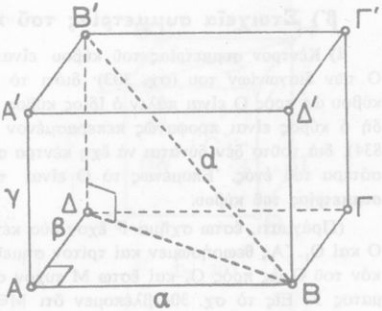
**i) Ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύνανται νὰ ληφθοῦν δύο οἱαιδήποτε ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ.**

**ii) Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ὕψη.**

Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει τέσσαρας διαγωνίους (§ **249**, ζ΄), αἱ ὁποῖαι **ἔχουν κοινὸν μέσον**, διότι ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι εἶναι διαγώνιοι παραλ-




Σχ. 301




Σχ. 302

ληλογράμμου (π.χ. αἱ Α΄Γ καὶ ΒΔ΄ τοῦ σχ. 301 εἶναι διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου Α΄Δ΄ΓΒ).

**Καλεῖται κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου τὸ κοινὸν μέσον τῶν διαγωνίων του.**

Τὸ παραλληλεπίπεδον φέρει 8 κορυφὰς καὶ 8 **τριέδρους γωνίας**.

## ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

**266. α΄) Καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου μία τρίεδρος εἶναι τρισορθογώνιος.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δηλ. τρεῖς ἀκμαὶ συντρέχουσαι εἰς μίαν κορυφὴν εἶναι ἀνὰ δύο κάθετοι. Κατὰ συνέπειαν *πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παρ/δου εἶναι ὀρθογώνια παρ/μα καὶ πᾶσαι αἱ στερεαὶ γωνίαι του τρισορθογώνιοι* (σχ. 302).

**β΄) Διαστάσεις** τοῦ ὀρθογωνίου παρ/δου λέγονται τὰ μήκη α, β, γ τριῶν ἀκμῶν συντρεχουσῶν εἰς μίαν κορυφήν.

γ΄) Πᾶσαι αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογ. παρ/δου εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι εἶναι διαγώνιοι ὀρθογ. παρ/μου. Ἐὰν d τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου, ἔχομεν ὅτι (σχ. 302):

$$d^2 = B'\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2$$

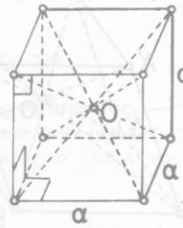
$$(1) \qquad \boxed{d^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \qquad d = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

## Ο ΚΥΒΟΣ

**267. α΄) Κύβος καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι.** Αἱ 12 ἀκμαὶ τοῦ κύβου ἔχουν κοινὸν μῆκος α, αἱ ἕδραι του εἶναι τετράγωνα καὶ ἡ διαγώνιός του ἔχει μῆκος $d = \alpha\sqrt{3}$.

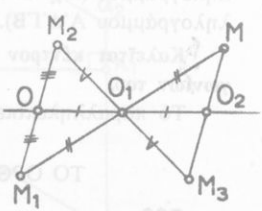
**β΄) Στοιχεῖα συμμετρίας τοῦ κύβου.**

**i) Κέντρον συμμετρίας** τοῦ κύβου εἶναι τὸ κέντρον αὐτοῦ, ἤτοι τὸ κοινὸν μέσον Ο τῶν διαγωνίων του (σχ. 303)· διότι τὸ συμμετρικὸν τοῦ κύβου ὡς πρὸς Ο εἶναι πάλιν ὁ ἴδιος κύβος (§ **221**, γ΄). Ἐπειδὴ ὁ κύβος εἶναι προφανῶς πεπερασμένον σχῆμα (βλ. ἄσκ. 834), διὰ τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἔχῃ κέντρα συμμετρίας περισσότερα τοῦ ἑνός. Ἑπομένως τὸ Ο εἶναι **τὸ μόνον κέντρον συμμετρίας τοῦ κύβου.**



Σχ. 303

(Πράγματι, ἔστω σχῆμα F ἔχον δύο κέντρα συμμετρίας, Ο καὶ $O_1$. Ἂς θεωρήσωμεν καὶ τρίτον σημεῖον $O_2$, συμμετρικὸν τοῦ Ο ὡς πρὸς $O_1$ καὶ ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ σχήματος F. Εἰς τὸ σχ. 304 βλέπομεν ὅτι $M \in F \Rightarrow M_1 \in F \Rightarrow M_2 \in F \Rightarrow M_3 \in F$. Δηλ., ἂν $M \in F$, τότε καὶ $M_3 \in F$. Ἀλλὰ τὸ $M_3$ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς $O_2$. Ἑπομένως τὸ F ἔχει καὶ τρίτον κέντρον συμμετρίας, τὸ $O_2$. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον θὰ ἔχῃ καὶ τέταρτον κέντρον συμμετρίας, συμμετρικὸν τοῦ $O_1$ ὡς πρὸς $O_2$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἤτοι τὸ F θὰ ἔχῃ ἄπειρα κέντρα συμμετρίας ἐπὶ τῆς εὐθ$OO_1$, ἀπέχοντα τοῦ Ο κατὰ $OO_1$, $2OO_1$, $3OO_1$ ... $\nu \cdot OO_1$ ... Κατὰ συνέπειαν, τὸ F θὰ ἔχῃ σημεῖα ἀπέχοντα ἑνὸς ὡρισμένου σημείου του ἀπόστασιν ὑπερβαίνουσαν οἱονδήποτε μῆκος, ὅσον μέγα καὶ ἂν εἶναι τοῦτο. Δηλ. τὸ F δὲν εἶναι πεπερασμένον σχῆμα, ὅταν ἔχῃ δύο κέντρα συμμετρίας. Ἄρα πᾶν πεπερασμένον σχῆμα ἔχει τὸ πολὺ ἓν κέντρον συμμετρίας).

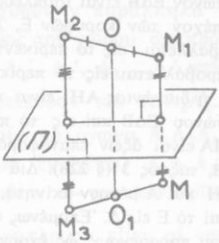


Σχ. 304

**ii) Ἐπίπεδα συμμετρίας.** Ἐὰν πεπερασμένον σχῆμα F ἔχῃ κέντρον συμμετρίας Ο, τότε διὰ τοῦ Ο θὰ διέρχεται (ἐφ'

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅσον ὑπάρχῃ) καὶ πᾶν ἐπίπεδον συμμετρίας (Π) τοῦ σχήματος. Διότι, ἂν τὸ (Π) δὲν διήρχετο διὰ τοῦ Ο, τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο ὡς πρὸς (Π), ἔστω τὸ $O_1$, θὰ ἦτο διάφορον τοῦ Ο καὶ θὰ ἦτο καὶ αὐτὸ κέντρον συμμετρίας (βλ. σχ. 305) : $M \in F \Rightarrow M_1 \in (F) \Rightarrow M_2 \in F \Rightarrow M_3 \in F$, ἀλλὰ $M_3$ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς $O_1$). Ἑπομένως τὸ F θὰ εἶχε δύο κέντρα συμμετρίας. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐφ' ὅσον τὸ F εἶναι πεπερασμένον. Πᾶν λοιπὸν ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ κύβου θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου του Ο. Κατὰ δὲ τὴν συμμετρίαν ταύτην, ἐπειδὴ ὁ κύβος μετασχηματίζεται εἰς ἑαυτόν, διὰ τοῦτο κάθε ἕδρα θὰ μετασχηματίζεται εἰς μίαν ἄλλην ἕδραν ἢ **παράλληλον** ἢ **κάθετον** ἐπ' αὐτήν.

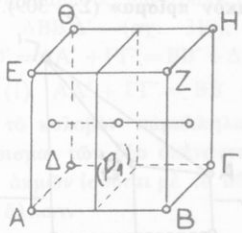


Σχ. 305

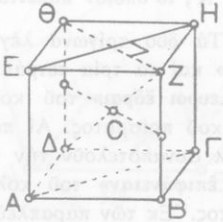
Ἀλλὰ διὰ τοῦ κέντρου Ο ἓν ἐπίπεδον διέρχεται, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον δύο παράλληλοι ἕδραι εἶναι συμμετρικαί : τὸ μεσοπαράλληλον τῶν ἑδρῶν (βλ. § **70**).

Οὕτω ἔχομεν ὡς ἐπίπεδα συμμετρίας τὰ μεσοκάθετα τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, ΑΕ ἐπίπεδα $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$ (σχ. 306).

Ἐπίσης διὰ τοῦ κέντρου Ο ἓν ἐπίπεδον διέρχεται, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον δύο κάθετοι ἕδραι εἶναι συμμετρικαί : τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον γωνίαν τῶν καθέτων τούτων



Σχ. 306



Σχ. 307

ἑδρῶν. Ἔχομεν λοιπὸν ἀκόμη ὡς ἐπίπεδα συμμετρίας τοῦ κύβου τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους τοῦ κύβου, ὅπως τὸ ΑΕΗΓ τοῦ σχ. 307, τὰ ὁποῖα περιέχουν δύο ἀπέναντι παραλλήλους ἀκμὰς (διαγώνια ἐπίπεδα).

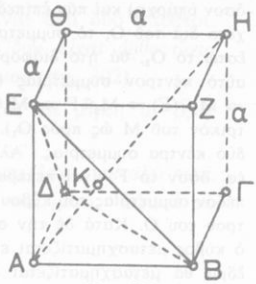
Ταῦτα εἶναι 6 τὸ πλῆθος.

**iii) Ἄξονες συμμετρίας.** Ἐὰν ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας σχήματος καὶ Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π), τότε ἡ εἰς Ο ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἑπομένως ἄξονες συμμετρίας τοῦ κύβου εἶναι αἱ διὰ τοῦ Ο ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἀνωτέρω 9 ἐπίπεδα συμμετρίας. Οἱ ἄξονες συμμετρίας συνδέουν τὰ κέντρα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν (σχ. 306) ἢ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι παραλλήλων ἀκμῶν (σχ. 307). Οἱ τρεῖς πρῶτοι εἶναι καὶ *ἄξονες ἐπαναφορᾶς τάξεως 4 τοῦ κύβου.*

**iv) Ἑκάστη διαγώνιος τοῦ κύβου εἶναι ἄξων ἐπαναφορᾶς, τάξεως 3** (§ **217** γ').

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

— Ἔστω ὁ κύβος ΑΒΓΔΕΖΗΘ ἀκμῆς α (σχ. 308). Τὸ τρίγωνον ΕΔΒ εἶναι ἰσόπλευρον, μὲ πλευρὰς $\alpha\sqrt{2}$. Τὸ Η ἰσαπέχον τῶν κορυφῶν Ε, Δ, Β (ΗΕ=ΗΔ=ΗΒ=$\alpha\sqrt{2}$) προβάλλεται εἰς τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΕΔΒ. Ἐπίσης τὸ Α προβάλλεται εἰς τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΕΔΒ. Ἑπομένως ἡ διαγώνιος ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΕΔΒ καὶ εἰς τὸ περίκεντρον, Κ, αὐτοῦ. Ἄρα ἡ ΗΑ εἶναι ἄξων ἐπαναφορᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΕΔΒ, τάξεως 3 (§ **228**). Διὰ στροφῆς 120° περὶ τὴν ΗΑ, τὰ Η καὶ Α μένουν ἀκίνητα, τὸ Δ ἔρχεται εἰς Β, τὸ Β εἰς Ε καὶ τὸ Ε εἰς Δ. Ἑπομένως αἱ κορυφαὶ Η, Α, Ε, Δ, Β τοῦ κύβου παραμένουν, ὡς ἔχουν καὶ ὁ κύβος ἐφαρμόζει ἐφ' ἑαυτοῦ.



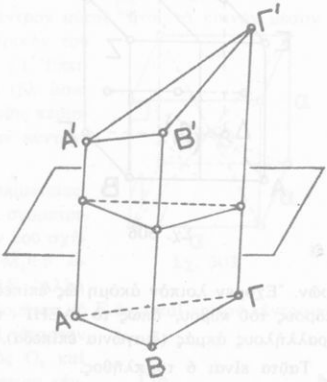
Σχ. 308

## ΤΟ ΚΟΛΟΒΟΝ ΠΡΙΣΜΑ

**268. Κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα.** — **Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ ἀχθοῦν τρία παράλληλα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ ὄχι ὅλα ἴσα μεταξύ των καὶ κείμενα εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ Επιπ ΑΒΓ, τότε ὁρίζεται κυρτὸν πολύεδρον ἔχον ἕδρας τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ καὶ τὰ τρία τετράπλευρα (τραπέζια ἐν γένει) ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄, ΑΓΓ΄Α΄, τὸ ὁποῖον καλεῖται «κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα»** (Σχ. 309).

Τὰ δύο τρίγωνα λέγονται «**βάσεις**» καὶ τὰ τρία τετράπλευρα «**παράπλευροι ἕδραι**» τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Αἱ παράπλευροι ἕδραι συναποτελοῦν τὴν «**παράπλευρον ἐπιφάνειαν**» τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Ἐκ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν **μόνον μία** δύναται νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Τὰ τρία παράλληλα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ λέγονται **παράπλευροι ἀκμαί.** Ὅταν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς μιᾶς τῶν βάσεων, τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα λέγεται **ὀρθόν.**



Σχ. 309

**Κάθετος τομὴ** τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος λέγεται ἡ κάθετος τομὴ τῆς ἀπεράντου πρισματικῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ αὐτοῦ προεκτεινόμεναι.

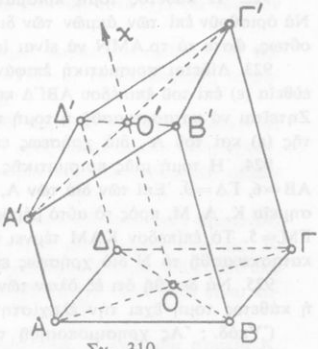
**Παρατήρησις.** *Τρία παράλληλα, ἄνισα, μὴ ὁμοεπίπεδα τμήματα ὁρίζουν ἐν τῷ χώρῳ ἓν κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**269. Κολοβὸν πολυγωνικὸν πρῖσμα.** — Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν κυρτοῦ ἐπιπέδου ν-γώνου $A_1A_2A_3...A_\nu$ ἀχθοῦν ν παράλληλα τμήματα $A_1A_1'$, $A_2A_2'$... $A_\nu A_\nu'$ κείμενα εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ν-γώνου καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα $A_1'$, $A_2'$, $A_3'$,...$A_\nu'$ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ $A_1A_2A_3...A_\nu$, τότε ὁρίζεται κυρτὸν πολύεδρον ἔχον ἕδρας τὰ δύο πολύγωνα $A_1A_2A_3...A_\nu$ καὶ $A_1'A_2'A_3'...A_\nu'$ καὶ τὰ ν τετράπλευρα (τραπέζια ἐν γένει) $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$,...$A_\nu A_1A_1'A_\nu'$, τὸ ὁποῖον καλεῖται «κολοβόν, ν-γωνικὸν πρῖσμα».

Τὰ δύο πολύγωνα εἶναι αἱ «βάσεις», τὰ ν τετράπλευρα εἶναι αἱ «παράπλευροι ἕδραι» καὶ τὰ ν παράλληλα τμήματα αἱ «παράπλευροι ἀκμαὶ» τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.

**270. Κολοβὸν παραλληλεπίπεδον** καλεῖται κολοβὸν πρῖσμα (§ 269) ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα (Σχ. 310).



Σχ. 310

Ἔστωσαν Ο καὶ Ο' τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων. Τότε ἡ ΟΟ' εἶναι κοινὴ διάμεσος τῶν τραπεζίων ΑΓΓ'Α' καὶ ΔΒΒ'Δ' (σχ. 310), ἑπομένως 2ΟΟ' = ΑΑ' + ΓΓ' = ΒΒ' + ΔΔ'. Ἤτοι:

(1) ΑΑ' + ΓΓ' = ΒΒ' + ΔΔ', δηλ. **εἰς τὸ κολοβὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι παραπλεύρων ἀκμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.**

**Ἀντιστρόφως,** ἂν ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ παραλληλογράμμου ἀχθοῦν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου παράλληλα τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' (σχ. 310) τοιαῦτα, ὥστε: ΑΑ' + ΓΓ' = ΒΒ' + ΔΔ', τότε σχηματίζεται κολοβὸν παρ/δον μὲ βάσεις ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ'.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ Α', Β', Γ', Δ' εἶναι ὁμοεπίπεδα. Πράγματι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ παρ/μου ΑΒΓΔ ἀγομένη παρ/λος πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τέμνει τὴν Α'Γ' εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ο' καὶ τὴν Δ'Β' εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ο''. Τὰ Ο' καὶ Ο'' ὅμως συμπίπτουν, διότι ΟΟ' = (ΑΑ' + + ΓΓ')/2 καὶ ΟΟ'' = (ΒΒ' + ΔΔ')/2. Ἄρα ἐκ τῆς ὑποθέσεως προκύπτει: ΟΟ' = ΟΟ''. Ἐπειδὴ τὰ Ο' καὶ Ο'' κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡμιευθείας Οx (εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου μὲ τὰ Α', Β', Γ', Δ') καὶ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ἀρχήν της Ο, διὰ τοῦτο συμπίπτουν. Ἀφοῦ τὰ τμήματα Α'Γ' καὶ Δ'Β' ἔχουν κοινὸν μέσον, ὁρίζουν παρ/μον Α'Β'Γ'Δ'.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Πρίσματα καὶ πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι.

918. Νὰ δειχθῇ ὅτι δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἔχοντα τὰς παραπλεύρους των ἕδρας ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας εἶναι ἴσα.

919. Ἐὰν ἡ βάσις πρίσματος εἶναι κυρτὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διέδρων γωνιῶν τοῦ πρίσματος.

920. Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν πρίσματος μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς μιᾶς βάσεως περιέχεται μεταξὺ 2 ὀρθῶν καὶ 2(ν—1) ὀρθῶν, ἂν ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ὑποτιθεμένης κυρτῆς.

921. Ἡ βάσις ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι τρ.ΑΒΓ μὲ $\widehat{A}=90^0$, ΑΓ=α, ΑΒ=2α, αἱ δὲ ἀκμαὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ἔχουν μήκη 2α ἑκάστη. Διὰ τυχόντος σημείου Μ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΓΕ φέρομεν τὴν ΜΚ⊥ΒΓ (Κ∈ΒΓ) καὶ τὴν ΜΡ⊥ΑΔ (Ρ∈ΑΔ). ἰ) Τόπος τοῦ μέσου τοῦ ΚΡ. ii) Κατασκευάσατε γεωμετρικῶς τὸ Μ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΜΡ=$l$ (δοθέν). iii) Κατασκευάσατε τὸ Μ, ὥστε νὰ εἶναι ΜΡ=ΜΓ. Ὑπολογίσατε εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ΜΓ.

922. Ἡ κάθετος τομὴ πρισματικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθοῦν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῶν διερχομένων διὰ τῶν Β καὶ Γ δύο σημεῖα Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε τὸ τρ.ΑΜΝ νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον εἰς Α.

923. Δίδεται πρισματικὴ ἐπιφάνεια, μία ἐπίπεδος τομή της ΑΒΓΔ (τετράπλευρον), εὐθεῖα (ε) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Α΄ ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Α διερχομένης ἀκμῆς. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου διὰ τῆς (ε) καὶ τοῦ Α΄, διὰ χρήσεως εὐθειῶν μόνον.

924. Ἡ τομὴ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας εἶναι τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ//ΓΔ ἔχον ΑΒ=6, ΓΔ=9. Ἐπὶ τῶν διὰ τῶν Α, Β, Γ διερχομένων ἀκμῶν δίδονται ἀντιστοίχως τρία σημεῖα Κ, Λ, Μ, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ τοιαῦτα ,ὥστε ΑΚ=9, ΒΛ=7, ΓΜ=5. Τὸ ἐπίπεδον ΚΛΜ τέμνει τὴν τετάρτην ἀκμὴν εἰς σημεῖον Ν. Ζητεῖται. ἰ) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ Ν διὰ χρήσεως εὐθειῶν μόνον. ii) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ΔΝ.

925. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐξ ὅλων τῶν ἐπιπέδων τομῶν ἀπεράντου πρισματικῆς ἐπιφανείας ἡ κάθετος τομὴ ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

(Ὑπόδ. : Ἂς χρησιμοποιηθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας).

926. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια ἔχει κάθετον τομήν, τετράγωνον ΑΒΓΔ. Νὰ ὁρισθοῦν ἐπίπεδα, τέμνοντα τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ ρόμβον.

927. Ἡ κάθετος τομὴ πρισματικῆς ἐπιφανείας εἶναι ρόμβος ΑΒΓΔ μὲ διαγωνίους ΒΔ=α, ΑΓ=2α. Τέμνομεν τὴν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν ὑπὸ ἐπιπέδου (Π)//ΑΓ καὶ σχηματίζοντος γωνίαν $60^0$ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ρόμβου. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι τετράγωνον.

928. Πρῖσμα ἔχει βάσεις τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄. Ἐὰν Κ ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων ΑΓ΄ καὶ Α΄Γ καὶ Λ ἡ τομὴ τῶν ΒΔ΄ καὶ Β΄Δ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πασῶν τῶν ἀκμῶν τοῦ πρίσματος ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του κατὰ $8\cdot KΛ^2$.

### Παραλληλεπίπεδα, κύβοι.

929. Δοθεισῶν τριῶν εὐθειῶν ἀσυμβάτων ἀνὰ δύο καὶ μὴ παραλλήλων πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων.

930. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων παρ/δου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πασῶν τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ.

931. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν διαγωνίων το-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μῶν παρ/δου (δηλ.. τῶν περιεχουσῶν δύο ἀπέναντι παρ/λους ἀκμάς) ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν πασῶν τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

932. Ἔστωσαν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τρεῖς συντρέχουσαι ἀκμαὶ παρ/δου καὶ ΟΔ διαγώνιος αὐτοῦ. Ἔστω (Π) ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Ο καὶ ἔχον τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Ἐὰν $υ_A$, $υ_B$, $υ_Γ$, $υ_Δ$ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀπὸ τοῦ (Π), δείξατε ὅτι $υ_Δ = υ_A + υ_B + υ_Γ$.

933. Δείξατε ὅτι τὸ τετράγωνον εὐθυγράμμου τμήματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν του ἐπὶ τρεῖς οἱασδήποτε εὐθείας τοῦ χώρου, ὀρθογωνίους ἀνὰ δύο.

934. Ἐὰν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι τρεῖς ἀκμαὶ παρ/δου καὶ ΟΔ διαγώνιος αὐτοῦ, δείξατε ὅτι ἡ ΟΔ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ ὅτι τέμνεται ὑπ' αὐτοῦ εἰς λόγον 1 : 2.

935. Ἂν παραλληλεπιπέδου αἱ διαγώνιοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι μεταξύ των, τότε τὸ παρ/δον εἶναι τρισορθογώνιον.

936. Δοθέντων δύο σταθερῶν σημείων Ο καὶ Α, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ Α ἀπὸ τὰς ἕδρας τυχούσης τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας ἐχούσης κορυφὴν τὸ Ο εἶναι σταθερόν.

937. Ἐὰν σχῆμα ἔχῃ τρία ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα ἀνὰ δύο, τότε ἔχει καὶ κέντρον συμμετρίας καὶ τρεῖς ἄξονας συμμετρίας.

938. Ἔστωσαν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τρεῖς συντρέχουσαι ἀκμαὶ παραλληλεπιπέδου καὶ ΟΔ διαγώνιος αὐτοῦ. Ἐὰν ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=α καὶ ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ=β, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΟΔ συναρτήσει τῶν μηκῶν α καὶ β.

939. Συναρτήσει τῶν τριῶν διαστάσεων α, β, γ ὀρθ. παρ/δου νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐλάχιστοι ἀποστάσεις μιᾶς διαγωνίου ἀπὸ τῶν ἀσυμβάτων πρὸς αὐτὴν ἀκμῶν τοῦ στερεοῦ.

940. Τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ μιᾶς διαγωνίου κύβου καὶ δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν σχηματίζουν δίεδρον γωνίαν $120^0$.

941. Νὰ τμηθῇ κύβος ὑπὸ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

942. Ἔστωσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ τρεῖς διαδοχικαὶ ἀκμαὶ κύβου μὴ κείμεναι ὅλαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ Μ, Ν, Ρ τὰ μέσα αὐτῶν. Ζητεῖται νὰ σχεδιασθῇ ἡ τομὴ τοῦ κύβου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝΡ διὰ χρήσεως εὐθειῶν μόνον καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ αὐτὴ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

943. Δίδεται ὀρθ. παρ/δον $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ (ὅπου $AA_1//BB_1$...) καὶ τρία σημεῖα Κ, Λ, Μ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν $AA_1$, ΒΓ, $Γ_1Δ_1$ ὁριζόμενα διὰ τῶν λόγων : $AK/KA_1=1/1$, $BΛ/ΛΓ=1/2$, $Γ_1M/MΔ_1=1/3$. Νὰ εὑρεθῇ ποίας ἄλλας ἀκμὰς τοῦ παρ/δου τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΚΛΜ καὶ εἰς ποίους λόγους χωρίζει ταύτας.

**Κολοβὰ πρίσματα.**

944. Εἰς πᾶν κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο βάσεων ἰσοῦται μὲ τὸν μέσον ὅρον τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν.

945. Εἰς πᾶν κολοβὸν παρ/δον ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κέντρων τῶν δύο βάσεων ἰσοῦται μὲ τὸν μέσον ὅρον τῶν τεσσάρων παραπλεύρων ἀκμῶν.

946. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ax, By, Γz ἡμιευθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ Επιπ.ΑΒΓ καὶ ὁμόρροποι μεταξύ των. i) Ποῖαι συνθῆκαι πρέπει νὰ πληροῦνται ὑπὸ τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τρ. ΑΒΓ, ἵνα ὑπάρχουν ἐπὶ τῶν Ax, By, Γz ἀντιστοίχως σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ τοιαῦτα, ὥστε αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι; ii) Τῶν συνθηκῶν τούτων πληρουμένων, νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ ἐπίπεδον Α΄Β΄Γ΄ μετατοπίζεται οὕτως, ὥστε πάντοτε αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ νὰ παραμένουν ἰσοδύναμοι, τότε τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, Α΄Β΄Γ΄, διέρχεται διὰ σταθερᾶς εὐθείας.

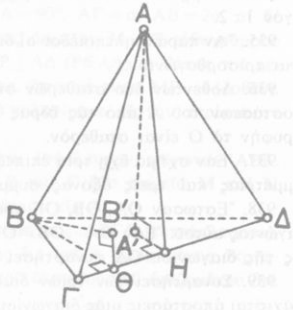


Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΟΓΚΟΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

**271. Ὄγκος τετραέδρου.** α΄) (Θ) — **Εἰς πᾶν τετράεδρον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας ἐπὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος εἶναι σταθερόν, ἤτοι εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς ἕδρας.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ δύο ὕψη τοῦ τυχόντος τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 311). Ἂν φέρωμεν τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τρ.ΑΓΔ καὶ τὸ ὕψος ΒΘ τοῦ τρ.ΒΓΔ, τότε θὰ εἶναι Α΄Η⊥ΓΔ καὶ Β΄Θ⊥ΓΔ (θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων) καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι $\widehat{\text{ΑΗΑ΄}}$ καὶ $\widehat{\text{ΒΘΒ΄}}$ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΗΑ΄ καὶ ΒΘΒ΄ ἔχουσαι τὰς πλευράς των παρ/λους εἶναι ἴσαι. Ἄρα, τρ.ΑΗΑ΄ ≈ τρ.ΒΘΒ΄ ⇒ $\frac{\text{ΑΑ΄}}{\text{ΒΒ΄}} = \frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΒΘ}}$. Ἀλλὰ $\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΒΘ}} = \frac{\text{εμβΑΓΔ}}{\text{εμβΒΓΔ}}$ καὶ συνεπῶς: $\frac{\text{ΑΑ΄}}{\text{ΒΒ΄}} = \frac{\text{εμβΑΓΔ}}{\text{εμβΒΓΔ}}$ ἢ εμβΒΓΔ×ΑΑ΄=εμβΑΓΔ ×ΒΒ΄.



Σχ. 311

Ἐντελῶς ὁμοίως, ἂν ΓΓ΄ καὶ ΔΔ΄ εἶναι τὰ δύο ἄλλα ὕψη τοῦ τετραέδρου, εὑρίσκομεν ὅτι ΓΓ΄ ×εμβΑΒΔ=ΔΔ΄ ×εμβΑΒΓ=ΑΑ΄ ×εμβΒΓΔ. Γράφοντες χάριν συντομίας (ΑΒΓ) ἀντὶ εμβΑΒΓ ἔχομεν τελικῶς

(1) (ΒΓΔ)×ΑΑ΄=(ΓΔΑ)×ΒΒ΄=(ΔΑΒ)×ΓΓ΄=(ΑΒΓ)×ΔΔ΄.

**β΄) Ὄγκος τετραέδρου καλεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς οἱασδήποτε ἕδρας του ἐπὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ἀγόμενον ὕψος ἐπὶ ἕνα ἀκόμη αὐθαίρετον σταθερὸν ἀριθμητικὸν συντελεστὴν k.**

Ὁ σταθερὸς συντελεστὴς k δύναται νὰ προσδιορισθῇ, ἐὰν ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως μίαν μονάδα τῶν ὄγκων, δηλ. ἐὰν ἐκλέξωμεν ἓν πολύεδρον, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἔχῃ ὄγκον 1. Συνήθως λαμβάνεται ὁ κύβος μὲ ἀκμὴν τὴν μονάδα τῶν μηκῶν ὡς μονὰς τῶν ὄγκων· δηλ. προσδίδομεν εἰς τὸν μοναδιαῖον αὐτὸν κύβον (αὐθαιρέτως) ὄγκον 1. Τότε (ὡς θὰ δείξωμεν εἰς τὴν § **293**) πρέπει k=1/3.

Τελικῶς θὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸν κάτωθι πρακτικὸν ὁρισμόν:

**Ὄγκος τετραέδρου καλεῖται τὸ ἓν τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.** Τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ παριστῶμεν μέ: Ογκ.ΑΒΓΔ ἢ $V_{\text{ΑΒΓΔ}}$ ἢ ἁπλῶς (ΑΒΓΔ). Θὰ ἰσχύῃ δὲ ἐξ ὁρισμοῦ:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\text{Ογκ.}\,\text{ΑΒΓΔ} = V_{\text{ΑΒΓΔ}} = (\text{ΑΒΓΔ}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\upsilon_{\Delta} = \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})\upsilon_{\text{Α}} = \frac{1}{3}(\text{ΓΔΑ})\upsilon_{\text{Β}} = \frac{1}{3}(\text{ΔΑΒ})\upsilon_{\Gamma},$$

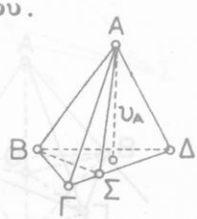
ὅπου $\upsilon_{\text{Α}}$, $\upsilon_{\text{Β}}$, $\upsilon_{\Gamma}$, $\upsilon_{\Delta}$ τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ ἀγόμενα ὕψη τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

## 272. Ἰδιότητες τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

**(i) —Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἀκμῆς, ἔστω τῆς ΓΔ, τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 312), τότε : (ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + + (ΣΑΒΔ).**

Διότι : $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ}) \times \upsilon_{\text{Α}} = \frac{1}{3}\{(\text{ΒΓΣ}) + (\text{ΒΣΔ})\}$

$\times \upsilon_{\text{Α}} = \frac{1}{3}(\text{ΒΓΣ}) \times \upsilon_{\text{Α}} + \frac{1}{3}(\text{ΒΣΔ})\upsilon_{\text{Α}} = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΒΔ}).$



Σχ. 312

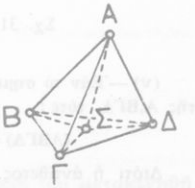
**(ii) —Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς μιᾶς ἕδρας, π.χ. τῆς ΒΓΔ, τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 313), τότε :**

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΓΔ}) + (\text{ΣΑΔΒ}).$$

Διότι $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})\upsilon_{\text{Α}} = \frac{1}{3}\{(\text{ΒΓΣ}) + (\text{ΓΣΔ}) +$

$+ (\text{ΔΣΒ})\}\upsilon_{\text{Α}} = \frac{1}{3}(\text{ΒΓΣ})\upsilon_{\text{Α}} + \frac{1}{3}(\text{ΓΣΔ})\upsilon_{\text{Α}} + \frac{1}{3}(\text{ΔΣΒ})\upsilon_{\text{Α}} =$

$= (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΓΔ}) + (\text{ΣΑΔΒ}).$

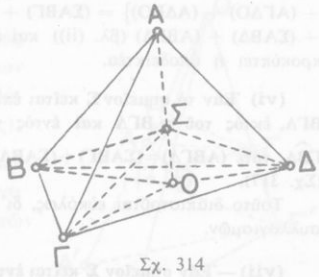


Σχ. 313

**(iii) — Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 314), τότε : (ΑΒΓΔ) = = (ΣΑΒΓ) + (ΣΒΓΔ) + (ΣΓΔΑ) + (ΣΔΑΒ).**

Διότι ἡ ἀκτὶς (Α, Σ) τέμνει τότε τὴν ἕδραν ΒΓΔ εἰς ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς Ο καὶ θὰ εἶναι

(ΑΒΓΔ) = (βλ. (ii)) (ΟΑΒΓ)
+ (ΟΑΓΔ) + (ΟΑΒΔ) = (βλ. (i))
= {(ΣΑΒΓ) + (ΣΒΓΟ)} +
+ {(ΣΑΓΔ) + (ΣΓΔΟ)} +
+ {(ΣΑΒΔ) + (ΣΒΔΟ)} =
= (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΒΔ) +
+ {(ΣΒΓΟ) + (ΣΓΔΟ) + (ΣΒΔΟ)} = (ΣΑΒΓ) +
(ΣΑΓΔ) + (ΣΑΒΔ) + (ΣΒΓΔ) (λόγῳ τοῦ (ii)).



Σχ. 314

**(iv) —Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας Α,ΒΓΔ, ἀλλ' ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, τότε :**

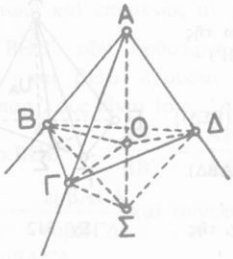
$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΓΔ}) + (\text{ΣΑΔΒ}) - (\text{ΣΒΓΔ})\ (\text{Σχ. 315}).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

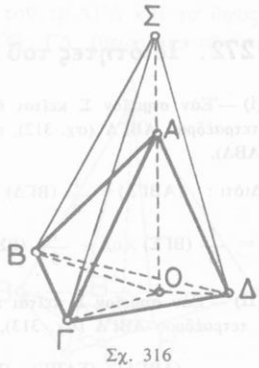
Διότι τότε ἡ ἀκτὶς (Α, Σ) τέμνει τὴν ἕδραν (ΒΓΔ) εἰς ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς Ο καὶ εἶναι

$$(\Sigma A B \Gamma) = (O A B \Gamma) + (O B \Gamma \Sigma) \quad (\text{βλ. (i)})$$
$$(\Sigma A \Gamma \Delta) = (O A \Gamma \Delta) + (O \Gamma \Delta \Sigma) \quad »$$
$$(\Sigma A B \Delta) = (O A B \Delta) + (O B \Delta \Sigma) \quad »$$
$$-(\Sigma B \Gamma \Delta) = -(O B \Gamma \Sigma) - (O \Gamma \Delta \Sigma) - (O B \Delta \Sigma) \quad (\text{βλ. (ii)}).$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἀνωτέρω καὶ βάσει τοῦ (ii) προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα.




Σχ. 315




Σχ. 316

**(v) —Ἐὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας, ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς Α,ΒΓΔ, τότε :**

$$(A B \Gamma \Delta) = (\Sigma B \Gamma \Delta) - (\Sigma A B \Gamma) - (\Sigma A \Gamma \Delta) - (\Sigma A B \Delta) \quad (\text{Σχ. 316}).$$

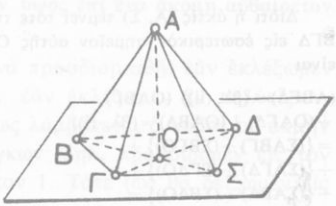
Διότι ἡ ἀντίθετος προέκτασις τῆς ἀκτῖνος (Α,Σ) τέμνει τότε τὴν ἕδραν ΒΓΔ εἰς ἐσωτερικὸν αὐτῆς σημεῖον Ο καὶ εἶναι :

$$(\Sigma B \Gamma \Delta) = (\Sigma O B \Gamma) + (\Sigma O \Gamma \Delta) + (\Sigma O \Delta B)$$

(βλ. (ii)) $= \{(\Sigma A B \Gamma) + (A B \Gamma O)\} + \{(\Sigma A \Gamma \Delta) + (A \Gamma \Delta O)\} + \{(\Sigma A B \Delta) + (A \Delta B O)\}$ (βλ. (i) $=$ $= (\Sigma A B \Gamma) + (\Sigma A \Gamma \Delta) + (\Sigma A B \Delta) + \{(A B \Gamma O) +$ $+ (A \Gamma \Delta O) + (A \Delta B O)\} = (\Sigma A B \Gamma) + (\Sigma A \Gamma \Delta) +$ $+ (\Sigma A B \Delta) + (A B \Gamma \Delta)$ (βλ. (ii)) καὶ ἐκ τούτων προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα.

**(vi) Ἐὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τοῦ Επιπ. ΒΓΔ, ἐκτὸς τοῦ τρ.ΒΓΔ καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma B \Delta}$, τότε $(A B \Gamma \Delta) = (\Sigma A B \Gamma) + (\Sigma A B \Delta) - (\Sigma A \Gamma \Delta)$** (Σχ. 317).

Τοῦτο διαπιστοῦται εὐκόλως, δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν.




Σχ. 317

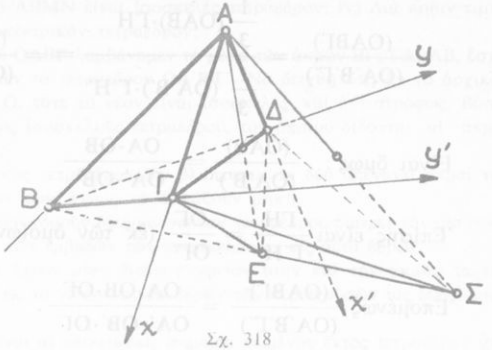
**(vii) —Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τῆς διέδρου $\widehat{AB}$ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ καὶ ἐντὸς τῆς διέδρου, ἥτις εἶναι κατ' ἀκμὴν τῆς ΓΔ (σχ. 318), τότε : $(A B \Gamma \Delta) = (\Sigma A B \Gamma) + (\Sigma A B \Delta) - (\Sigma \Gamma \Delta A) - (\Sigma \Gamma \Delta B)$**

Πράγματι, τὸ Σ ἀνῆκον εἰς τὴν δίεδρον x—ΓΔ — y κεῖται μετὰ τοῦ Β ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου xAx', ἄρα τὸ τμῆμα ΒΣ τέμνει τὸ ἐπίπεδον xAx' εἰς τι σημεῖον Ε. Τὸ Ε

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς διέδρου $\widehat{AB}$, διότι καὶ τὸ τμῆμα ΒΣ εἶναι. Ἄρα τὸ Ε κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας $x\widehat{A}x'$, διότι ἄλλως θὰ ἦτο ἐξωτερικὸν τῆς διέδρου ΑΒ. Τὸ Ε δὲν κεῖται ἐντὸς τοῦ τρ.ΑΓΔ, διότι τότε τὸ ΒΕ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ΒΣ θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς διέδρου xΓΔy.

Ἑπομένως τὸ Ε κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν xΓΔx'. Ἔχομεν τώρα



Σχ. 318

$$(ΑΒΓΔ) = (ΕΑΒΓ) + (ΕΑΒΔ) - (ΕΒΓΔ) \quad \text{(βλ. (vi))}$$

$$\left.\begin{array}{l} +1 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} (ΣΑΒΓ) = (ΕΑΒΓ) + (ΕΑΓΣ) & \text{(βλ. (i))} \\ (ΣΑΒΔ) = (ΕΑΔΣ) + (ΕΑΒΔ) & \text{»} \\ (ΣΓΔΑ) = (ΕΑΓΣ) + (ΕΑΔΣ) - (ΕΓΔΣ) & \text{(βλ. (vi))} \\ (ΣΓΔΒ) = (ΕΓΔΣ) + (ΕΒΓΔ) & \end{array}$$

Διὰ τοῦ δεικνυομένου γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν τεσσάρων τελευταίων ἰσοτήτων προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα σχέσις τῶν ὄγκων.

## 273. Σύγκρισις ὄγκων δύο τετραέδρων

**α') — Ὁ ὄγκος τετραέδρου δὲν βλάπτεται, ἂν μία κορυφή του μετακινηθῇ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ἀπέναντι ἕδραν.**

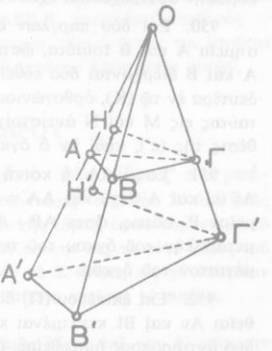
Εἰδικώτερον :

**Ὁ ὄγκος τετραέδρου ΑΒΓΔ δὲν βλάπτεται, ἂν ἡ κορυφὴ Α μετακινηθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν ΒΓ ἢ ΒΔ ἢ ΓΔ.**

**β') - Ἐὰν ἓν ὕψος τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς ἓν ὕψος ἑνὸς ἄλλου, οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων εἶναι, ὡς αἱ ἀντίστοιχοι βάσεις αὐτῶν.** («Βάσις» νοεῖται ἡ ἕδρα, ἐφ' ἧς ἄγεται τὸ ὕψος).

**γ') — Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν στερεὰν γωνίαν κοινήν, τότε οἱ ὄγκοι των, εἶναι ὡς τὰ γινόμενα τῶν ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν κοινὴν στερεὰν γωνίαν.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν τὰ τετράεδρα ΟΑΒΓ καὶ ΟΑ'Β'Γ' ἔχοντα κοινὴν τὴν στερεὰν γωνίαν Ο καὶ ἔστωσαν ΓΗ καὶ Γ'Η' δύο ὕψη τούτων. Ἔχομεν :



Σχ. 319

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{(\text{ΟΑΒΓ})}{(\text{ΟΑ΄Β΄Γ΄})} = \frac{\frac{1}{3}(\text{ΟΑΒ})\cdot\text{ΓΗ}}{\frac{1}{3}(\text{ΟΑ΄Β΄})\cdot\text{Γ΄Η΄}} = = \frac{(\text{ΟΑΒ})}{(\text{ΟΑ΄Β΄})}\cdot\frac{\text{ΓΗ}}{\text{Γ΄Η΄}}.$$

Εἶναι ὅμως : $\frac{(\text{ΟΑΒ})}{(\text{ΟΑ΄Β΄})} = \frac{\text{ΟΑ}\cdot\text{ΟΒ}}{\text{ΟΑ΄}\cdot\text{ΟΒ΄}}$

Ἐπίσης εἶναι $\frac{\text{ΓΗ}}{\text{Γ΄Η΄}} = \frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΓ΄}}$ (ἐκ τῶν ὁμοίων τριγ.ΟΗΓ, ΟΗ΄Γ΄).

Ἑπομένως $\frac{(\text{ΟΑΒΓ})}{(\text{ΟΑ΄Β΄Γ΄})} = \frac{\text{ΟΑ}\cdot\text{ΟΒ}\cdot\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ΄}\cdot\text{ΟΒ΄}\cdot\text{ΟΓ΄}}$, ὅ.ἔ.δ.

**Πόρισμα. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τετραέδρου ΟΑΒΓ, τὸ τετράεδρον ΟΔΕΖ ἔχει ὄγκον τὸ 1/8 τοῦ ὄγκου τοῦ ΟΑΒΓ.**

**274. Ἰσοδύναμα τετράεδρα** λέγονται δύο τετράεδρα ἔχοντα τὸν ἴδιον ὄγκον. Ἓν τετράεδρον λέγομεν ὅτι ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰ μ/ν ἑνὸς ἄλλου, ὅταν ἔχῃ ὄγκον ἴσον πρὸς τὰ μ/ν τοῦ ὄγκου τοῦ ἄλλου.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

947. Νὰ εὑρεθῇ ἐντὸς τετραέδρου σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε, ἂν τὸ ἑνώσωμεν μὲ τὰς κορυφάς, νὰ διαιρῆται τὸ τετράεδρον εἰς 4 ἄλλα ἰσοδύναμα.

948. Κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι α μέτρων, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι διπλασία τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

949. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τετραέδρου, τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμαὶ πρὸς τὴν αὐτὴν κορυφὴν συντρέχουσαι ἔχουν ἑκάστη μῆκος λ, αἱ δὲ τρεῖς ἄλλαι ἀκμαὶ ἔχουν μήκη α, β, γ.

950. Ἐπὶ δύο παρ/λων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Κ) δίδονται ἀντιστοίχως δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β τοιαῦτα, ὥστε ἡ ευθ ΑΒ νὰ εἶναι πλαγία πρὸς τὰ (Π) καὶ (Κ). Διὰ τῶν Α καὶ Β διέρχονται δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄), ἡ πρώτη μένουσα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π) καὶ ἡ δευτέρα ἐν τῷ (Κ), ὀρθογώνιοι πρὸς ἀλλήλας. Ἔστω ὅτι ἡ κοινὴ ⊥ τῶν (ε) καὶ (ε΄) τέμνει ταύτας εἰς Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως. i) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν Μ καὶ Ν. ii) Νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τῆς (ε΄), καθ' ἣν ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒΜΝ καθίσταται μέγιστος.

951. Ἔστω ΑΑ΄ ἡ κοινὴ ⊥ δύο ὀρθογωνίων ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄), ὅπου Α∈(ε) καὶ Α΄∈(ε΄) καὶ ΑΑ΄ = 2α. Ἐπὶ τῆς (ε) κινεῖται σημεῖον Ρ καὶ ἐπὶ τῆς (ε΄) σημεῖον Ρ΄ οὕτως, ὥστε ΑΡ + Α΄Ρ΄ = 2α. Ἐὰν τεθῇ ΑΡ = x, παραστήσατε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου ΑΑ΄Ρ΄Ρ, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται καὶ εὕρετε τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου.

952. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδεται τμῆμα ΑΒ = 2α. Διὰ τῶν Α καὶ Β ἄγονται δύο ἡμιευθεῖαι Αυ καὶ Βt κεκλιμέναι κατὰ 45° πρὸς τὸ (Π) καὶ προβαλλόμεναι ἐπὶ τοῦ (Π) κατὰ δύο ἀντιρρόπους ἡμιευθείας, ὧν οἱ φορεῖς (δ) καὶ (δ΄) ἀπέχουν ἀλλήλων κατὰ α. Ἐπὶ τῆς Αυ λαμβάνεται σημεῖον Μ καὶ ἐπὶ τῆς Βt σημεῖον Ν τοιαῦτα, ὥστε ΑΜ = ΒΝ = x. i) Τόπος τοῦ μέσου τῆς ΜΝ. ii) Ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒΜΝ συναρτήσει τῶν x καὶ α.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

iii) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x τὸ ΑΒΜΝ εἶναι ἰσοσκελὲς τετράεδρον; iv) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x τὸ ΑΒΜΝ εἶναι ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον;

953. Δοθέντος τετραέδρου ΟΑΒΓ λαμβάνομεν τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, ἔστω τὰ Α΄, Β΄, Γ΄ καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράεδρον ΟΑ΄Β΄Γ΄. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ ἀρχικὸν εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τὸ Ο, τότε τὸ νέον εἶναι ἰσοσκελές· καὶ ἀντιστρόφως. Βάσει τούτου νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἰσοσκελοῦς τετραέδρου, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ ἀκμαὶ α, α, β, β, γ, γ.

954. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τετραέδρου δὲν βλάπτεται, ἂν δύο ἀπέναντι ἀκμαί του μετακινηθοῦν ἐπὶ τῶν φορέων των, χωρὶς νὰ ἀλλάξουν μήκη.

955. Τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ διχοτομοῦν δίεδρον γωνίαν τετραέδρου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὰ ἑδρῶν.

956. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην καὶ τὴν ἀκμὴν ταύτης ἴσην, τότε οἱ ὄγκοι των εἶναι ὡς τὰ γινόμενα τῶν ἑδρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς δύο ταύτας διέδρους.

957. Ἐὰν $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ εἶναι αἱ ἀποστάσεις σημείου κειμένου ἐντὸς τετραέδρου ἀπὸ τὰς ἕδρας ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ, ΑΒΓ καὶ $\upsilon_1$, $\upsilon_2$, $\upsilon_3$, $\upsilon_4$ τὰ ἐπὶ τὰς ἕδρας ταύτας ὕψη τοῦ τετραέδρου, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις :

$$\frac{x_1}{\upsilon_1}+\frac{x_2}{\upsilon_2}+\frac{x_3}{\upsilon_3}+\frac{x_4}{\upsilon_4}=1.$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον ληφθῇ ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου, τότε ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἰσχύει ὑπὸ τὸν ὅρον, ὁ λόγος $\frac{x}{\upsilon}$ νὰ λαμβάνεται ἀρνητικός, ὅταν αἱ κάθετοι x καὶ υ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἕδρας, πρὸς τὴν ὁποίαν ἄγονται.

958. Ἐὰν Ο τὸ ἔγκεντρον τετραέδρου ΑΒΓΔ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΟ τέμνῃ τὴν ἕδραν ΒΓΔ εἰς Κ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἐμβαδὰ (ΚΒΓ), (ΚΓΔ), (ΚΔΒ) εἶναι ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου.

959. Ἐὰν τετραέδρου τρεῖς ἕδραι εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ κέντρον βάρους μὲ τὸ ἔγκεντρον τοῦ τετραέδρου διέρχεται διὰ τῆς κοινῆς κορυφῆς τῶν ἰσοδυνάμων τούτων ἑδρῶν.

960. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος παντὸς τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 μιᾶς ἀκμῆς του ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ τετραέδρου ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην.

961. Ἔστωσαν δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) καὶ ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν (Α∈($\varepsilon_1$), Β∈($\varepsilon_2$)). Σημεῖα $P_1$, $P_2$ κινοῦνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) οὕτως, ὥστε $AP_1+BP_2=P_1P_2$. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου $ABP_2P_1$ παραμένει σταθερός.

962. Ἐὰν τετραέδρου δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ὀρθογώνιοι, τότε ὁ ὄγκος του ἰσοῦται μὲ τὸ 1/6 τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀκμῶν τούτων ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν αὐτῶν.

## ΟΓΚΟΣ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ

**275. Ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις σημείου ἀπὸ τὰς ἕδρας τετραέδρου.** — **Δοθέντος τετραέδρου, καλεῖται «ἀλγεβρικὴ ἀπόστασις σημείου Σ ἀπὸ μιᾶς ἕδρας» τοῦ τετραέδρου ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας, ἐφωδιασμένη μὲ τὸ πρόσημον + ἢ —, καθ' ὅσον τὸ Σ κεῖται ὡς πρὸς τὴν ἕδραν ταύτην εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου μὲ τὴν τετάρτην κορυφὴν ἢ εἰς τὸ ἀντίθετον. Ἐὰν τὸ Σ ἀνήκῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας, ὡς ἀλγεβρικὴ του ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ἕδρας ταύτης νοεῖται τὸ μηδέν.**

**276.** Θὰ καλοῦμεν, χάριν συντομίας, «**γινόμενον μιᾶς ἕδρας ἐπὶ τὴν ἀλγεβρικήν της ἀπόστασιν ἀπὸ σημείου Σ**» τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἕδρας ἐπὶ τὴν ἀλγεβρικήν της ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Σ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**277. Θεμελιῶδες θεώρημα τῆς ὀγκομετρίας.** — Ὁ ὄγκος παντὸς τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἑδρῶν του πολλαπλασιασμένων ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ χώρου (βλ. §§ 275, 276).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ Σ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Ἂς καλέσωμεν:

a τὴν ἀλγεβρικὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τῆς ἕδρας ΒΓΔ
b » » » » Σ » » » ΓΔΑ
c » » » » Σ » » » ΔΑΒ
d » » » » Σ » » » ΑΒΓ.

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\cdot d + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})\cdot a + \frac{1}{3}(\text{ΓΔΑ})\cdot b + \frac{1}{3}(\text{ΔΑΒ}).c \qquad (1)$$

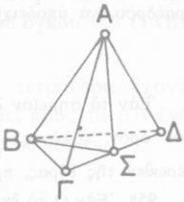
Διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις, ἀναλόγως τῆς θέσεως τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸ τετράεδρον.

**i) Τὸ Σ κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἀκμῆς,** ἔστω τῆς ΓΔ (σχ. 320). Τότε $d>0$, $c>0$, $a=0$, $b=0$. Ἑπομένως ἡ σχέσις (§ **272,** (i))

(ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΒΔ) δίδει:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})d + \frac{1}{3}(\text{ΔΑΒ})c =$$

$$= \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})d + \frac{1}{3}(\text{ΔΑΒ})c + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})a + \frac{1}{3}(\text{ΑΓΔ})b.$$



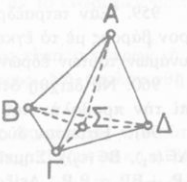
Σχ. 320

Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκμῆς ΓΔ, εὔκολα συνάγομεν ὅτι πάλιν ἡ σχέσις (1) ἰσχύει.

**ii) Τὸ Σ κεῖται ἐντὸς μιᾶς ἕδρας,** ἔστω τῆς (ΒΓΔ) (σχ. 321). Τότε $a=0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ καὶ ἡ σχέσις (§ **272,** (ii)): (ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΔΒ) δίδει:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})d + \frac{1}{3}(\text{ΑΓΔ})b +$$

$$+ \frac{1}{3}(\text{ΑΔΒ})c + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})a.$$

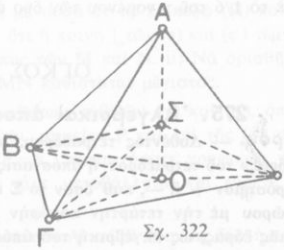


Σχ. 321

**iii) Τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ τετραέδρου** (σχ. 322).

Τότε $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ καὶ ἡ σχέσις (§ **272,** (iii)):

(ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΒΓΔ) + (ΣΓΔΑ) + (ΣΔΑΒ) δίδει ἀμέσως τὸν ἀποδεικτέον τύπον (1).



Σχ. 322

**iv) Τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας Α, ἀλλ' ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου** (σχ. 323). Τότε $a<0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ καὶ ἡ σχέσις (§ **272,** (iv)):

(ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΔΒ) — (ΣΒΓΔ) δίδει

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

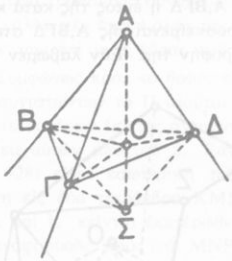
$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})d + \frac{1}{3}(\text{ΑΓΔ})b + \frac{1}{3}(\text{ΑΒΔ})c + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})a.$$

**ν) Τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς στερεᾶς γωνίας Α,ΒΓΔ** (σχ. 324).

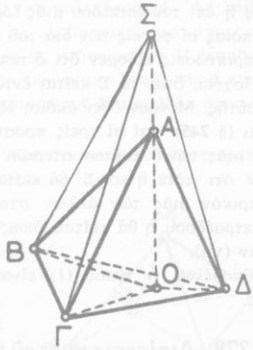
Τότε $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d < 0$ καὶ ἡ σχέσις (§ **272,** ν) :

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΒΓΔ}) - (\text{ΣΑΒΓ}) - (\text{ΣΑΓΔ}) - (\text{ΣΑΒΔ})$$

λαμβάνει τὴν μορφὴν τοῦ τύπου (1).




Σχ. 323




Σχ. 324

**vi) Τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓΔ, ἐκτὸς τοῦ τρ. ΒΓΔ,** ὡς εἰς σχ. 325.

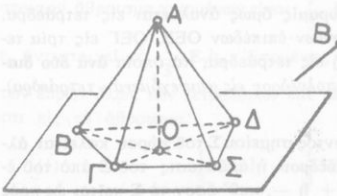
Τότε $a = 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$ καὶ ἡ σχέσις (§ **272,** vi) :

$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΒΔ}) - (\text{ΣΑΓΔ})$ δίδει :

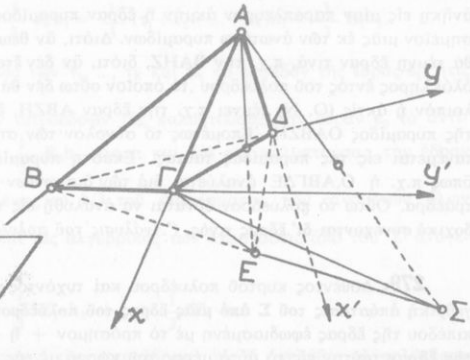
$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})d + \frac{1}{3}(\text{ΑΒΔ})c + \frac{1}{3}(\text{ΓΔΑ})b + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})a.$$

Καὶ διὰ τὰς ἄλλας θέσεις τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸ τρ.ΒΓΔ δεικνύεται δι' ὁμοίων συλλογισμῶν ὅτι ὁ (1) ἰσχύει.

**vii) Τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τῆς διέδρου $\widehat{\text{ΑΒ}}$ καὶ ἐντὸς τῆς κατ' ἀκμὴν τῆς $\widehat{\text{ΓΔ}}$ διέδρου** (Σχ. 326).




Σχ. 325




Σχ. 326

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

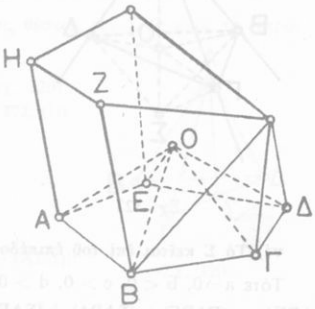
Τότε εἶναι $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$ καὶ ἡ σχέσις (§ **272**,(vii)) :

$$(ΑΒΓΔ)=(ΣΑΒΓ)+(ΣΑΒΔ)-(ΣΓΔΑ)-(ΣΓΔΒ) \text{ δίδει :}$$

$$(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{3}(ΑΒΓ)d+\frac{1}{3}(ΑΒΔ)c+\frac{1}{3}(ΓΔΑ)b+\frac{1}{3}(ΓΔΒ)a.$$

— Δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ Σ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλην θέσιν ὡς πρὸς τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ διὰ τοῦ ἑξῆς τρόπου. Τὸ Σ θὰ κεῖται ἢ ἐπὶ τοῦ φορέως μιᾶς ἀκμῆς ἢ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἕδρας ἢ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς τῶν 8 στερεῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας οἱ φορεῖς τῶν διὰ τοῦ Α διερχομένων ἀκμῶν σχηματίζουν. Εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις εἴδομεν ὅτι ὁ τύπος (1) ἰσχύει. Εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν εἴδομεν ὅτι ὁ (1) ἰσχύει, ὅταν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας Α,ΒΓΔ ἢ ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς. Μένουν ὅθεν ἀκόμη ἓξ περιοχαί : αἱ τρεῖς προσκείμεναι τῆς Α,ΒΓΔ στερεαὶ γωνίαι (§ **245**) καὶ αἱ τρεῖς προσκείμεναι τῆς κατὰ κορυφήν της. Ἐὰν λάβωμεν τὸ Σ ἐντὸς μιᾶς τῶν 6 τούτων στερεῶν γωνιῶν, βλέπομεν ὅτι τότε ἢ τὸ Σ θὰ κεῖται **καὶ** εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς τῶν ἄλλων στερεῶν γωνιῶν τοῦ τετραέδρου ἢ θὰ κεῖται, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν (vii).

Ἑπομένως ὁ τύπος (1) εἶναι γενικῆς ἰσχύος.



Σχ. 327

## 278. Διαίρεσις κυρτοῦ πολυέδρου εἰς τετράεδρα.

— Ἐὰν ἐσωτερικὸν σημεῖον Ο κυρτοῦ πολυέδρου ἑνωθῇ μὲ ὅλας τὰς κορυφάς, τότε τὸ πολύεδρον χωρίζεται εἰς πυραμίδας ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου (σχ. 327). Διότι· 1ον. Ἅπασαι αἱ πυραμίδες αὐταὶ κεῖνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυέδρου. Πράγματι, ἂν σημεῖον Μ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς πυραμίδος, π.χ. Ο,ΑΒΓΔΕ, τότε τὸ τμῆμα ΟΜ προεκτεινόμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦ Μ τέμνει τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ τῆς πυραμίδος εἴς τι σημεῖον Ι. Τὸ δὲ τμῆμα ΙΟ κεῖται τότε εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυέδρου, ἄρα καὶ τὸ ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον Μ. 2ον. Πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον Ν τοῦπολυέδρου, ἂν δὲν ἀνήκῃ εἰς μίαν παράπλευρον ἀκμὴν ἢ ἕδραν πυραμίδος τινός, τότε θὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον μιᾶς ἐκ τῶν ἀνωτέρω πυραμίδων. Διότι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἀκτῖνα (Ο, Ν), αὕτη θὰ τέμνῃ ἕδραν τινά, π.χ. τὴν ΒΑΗΖ, διότι, ἂν δὲν ἔτεμνε καμμίαν ἕδραν, τότε θὰ ἔκειτο ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ πολυέδρου ,τὸ ὁποῖον οὕτω δὲν θὰ ἦτο πεπερασμένον σχῆμα . Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἀκτὶς (Ο, Ν) τέμνει π.χ. τὴν ἕδραν ΑΒΖΗ, ἕπεται ὅτι τὸ Ν εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς πυραμίδος ΟΑΒΖΗ. Ἑπομένως τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου κατανέμεται εἰς τὰς πυραμίδας ταύτας. Ἑκάστη πυραμὶς ὅμως ἀναλύεται εἰς τετράεδρα, ὅπως π.χ. ἡ Ο,ΑΒΓΔΕ ἀναλύεται διὰ τῶν διαγωνίων ἐπιπέδων ΟΕΒ, ΟΕΓ εἰς τρία τετράεδρα. Οὕτω τὸ πολύεδρον δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τετράεδρα, τὰ ὁποῖα **ἀνὰ δύο διαδοχικὰ συνέχονται δι' ἕδρας τινός.** (*Ἀνάλυσις τοῦ πολυέδρου εἰς «συνεχόμενα» τετράεδρα*).

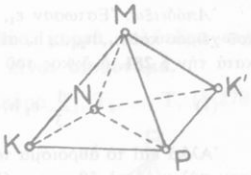
**279.** Δοθέντος κυρτοῦ πολυέδρου καὶ τυχόντος σημείου Σ τοῦ χώρου καλεῖται **ἀλγεβρικὴ ἀπόστασις τοῦ Σ ἀπὸ μιᾶς ἕδρας τοῦ πολυέδρου** ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ἐφωδιασμένη μὲ τὸ πρόσημον + ἢ —, καθ' ὅσον τὸ Σ κεῖται ὡς πρὸς τὴν ἕδραν ταύτην εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου μὲ τὰς λοιπὰς κορυφὰς τοῦ πολυέδρου ἢ εἰς τὸ ἀντίθετον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**280. Θεώρημα καὶ ὁρισμός.— Ἐὰν κυρτὸν πολύεδρον διαιρεθῇ καθ' οἱονδήποτε τρόπον εἰς τετράεδρα συνεχόμενα, τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων τούτων εἶναι σταθερόν, δηλ. πάντοτε τὸ αὐτό, ἀνεξαρτήτως τοῦ τρόπου τῆς ὑποδιαιρέσεως. Τὸ σταθερὸν τοῦτο ἄθροισμα καλεῖται «ὄγκος» τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου.**

*Ἀπόδειξις.* Ἂς καλέσωμεν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου **Π**. Ἂς λάβωμεν σταθερὸν σημεῖον Σ τοῦ χώρου καὶ ἂς καλέσωμεν $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ τὰς ἀντιστοίχους ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τούτων. Τέλος ἂς νοήσωμεν τὸ **Π** διῃρημένον κατά τινα τρόπον εἰς συνεχόμενα τετράεδρα (§ **278**). Ἐκ τῶν τετραέδρων, εἰς ἃ ἀνελύθη τὸ **Π**, ἄλλα μὲν ἔχουν ὅλας τὰς ἕδρας των εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ **Π** καὶ ἄλλα ἔχουν μίαν ἕδραν των ἐπὶ μιᾶς ἕδρας τοῦ **Π**.

Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρ. τῆς § **277**, τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων ὅλων τῶν τετραέδρων τῶν συνιστώντων τὸ Π ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἑδρῶν τῶν τετραέδρων ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Σ. Ἐὰν ὅμως μία ἕδρα MNP (σχ. 328) εἶναι ἐσωτερικὴ τοῦ πολυέδρου, τότε θὰ ἀνήκῃ εἰς δύο τετράεδρα KMNP καὶ K'MNP, ὅπου τὰ K καὶ K' κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ ἑπομένως, ἂν ἀναφορικῶς πρὸς τὸ MNPK ἡ ἕδρα MNP ἔχῃ ἀλγεβρικὴν ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ Σ, τότε ἀναφορικῶς πρὸς τὸ MNPK' θὰ ἔχῃ ἀλγεβρικὴν ἀπόστασιν —x (βλ. § **275**). Κατὰ τὴν ἄθροισιν λοιπὸν ὅλων τῶν ἀνωτέρω γινομένων, τὰ γινόμενα $\frac{1}{3}$(MNP) x καὶ $\frac{1}{3}$ (MNP)(—x) ἐξαλείφονται καὶ οὕτω ὅλα τὰ γινόμενα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰς ἐντὸς τοῦ Π ἕδρας τῶν τετραέδρων ἀλληλοαναιροῦνται καὶ μένουν μόνον τὰ γινόμενα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰς ἕδρας τῶν τετραέδρων τὰς κειμένας ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου.



Σχ. 328

—Ἂς θεωρήσωμεν, τώρα, τὰς ἕδρας $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ τῶν τετραέδρων τὰς καλυπτούσας μίαν ἕδραν, ἔστω $\varepsilon_1$, τοῦ πολυέδρου. Αὐταὶ ἔχουν ἀπὸ τοῦ Σ κοινὴν ἀλγεβρικὴν ἀπόστασιν καὶ δὴ τὴν ἀλγεβρικὴν ἀπόστασιν $h_1$ τῆς ἕδρας $\varepsilon_1$ ἀπὸ τοῦ Σ. Ἑπομένως διὰ τὰς ἕδρας $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ ἀντιστοιχεῖ ἄθροισμα γινομένων :

$$\frac{1}{3}\tau_1 h_1 + \frac{1}{3}\tau_2 h_1 + \ldots + \frac{1}{3}\tau_k h_1 = \frac{1}{3}(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k)h_1 = \frac{1}{3}\mathbf{E}_1 h_1.$$

ὅπου $\tau_1, \ldots, \tau_k$ σημαίνουν τὰ ἐμβαδὰ τῶν $\tau_1, \ldots, \tau_k$ καὶ $\mathbf{E}_1$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας $\varepsilon_1$, ἥτις καλύπτεται ἀπὸ τὰ $\tau_1, \ldots, \tau_k$.

—Ὁμοίως διὰ τὰς ἕδρας τῶν τετραέδρων τὰς καλυπτούσας τὴν ἕδραν $\varepsilon_2$ τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα γινομένων εἶναι $\frac{1}{3}\mathbf{E}_2 h_2$ κ.ο.κ. καὶ διὰ τὰς καλυπτούσας τὴν ἕδραν $\varepsilon_\nu$ ἀντιστοιχεῖ τὸ $\frac{1}{3}\mathbf{E}_\nu h_\nu$. Ἑπομένως τὸ 1/3 τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων ὅλων τῶν ἑδρῶν ὅλων τῶν τετραέδρων ἐπὶ τὰς ἀλγεβρικὰς των ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ Σ ἀνάγεται εἰς τὸ ἄθροισμα

$$(1) \qquad \frac{1}{3}\mathbf{E}_1 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\mathbf{E}_2 \cdot h_2 + \ldots + \frac{1}{3}\mathbf{E}_\nu \cdot h_\nu.$$

Δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, εἰς ἃ ἀνελύθη τὸ πολύεδρον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα (1). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι παντελῶς ἀνεξάρτητον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ τρόπου ὑποδιαιρέσεως τοῦ **Π**, δηλ. παραμένει τὸ ἴδιον, ἂν τὸ πολύεδρον ἀναλυθῇ εἰς συνεχόμενα τετράεδρα κατ' ἄλλον τρόπον, ὅ.ἔ.δ.

Συγχρόνως ὅμως καὶ τὸ ἄθροισμα (1) εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τοῦ σημείου Σ, διότι ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν συνιστώντων τὸ πολύεδρον τετραέδρων, δηλ. τὸν ὄγκον τοῦ πολυέδρου.

**281. Πόρισμα.** — Ὁ ὄγκος παντὸς κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς ἄθροισμα $\frac{1}{3}\varepsilon_1 h_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 h_2 + \ldots + \frac{1}{3}\varepsilon_\nu h_\nu$, ὅπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν του καὶ $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις (§ 279) αὐτῶν ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ χώρου.

**282.** (Θ)—**Ἐὰν κυρτὸν πολύεδρον Π ἀναλυθῇ εἰς κυρτὰ πολύεδρα συνεχόμενα τὸ ἓν μὲ τὸ ἑπόμενόν του δι' ἕδρας τινός, τότε ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου Π ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν συνιστώντων αὐτὸ πολυέδρων.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν τοῦ **Π**, Σ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου καὶ $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις τῶν ἑδρῶν τοῦ **Π** ἀπὸ τοῦ Σ. Τότε, κατὰ τὴν § **281**, ὁ ὄγκος τοῦ **Π** ἰσοῦται μέ :

$$(1) \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_1 h_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 h_2 + \ldots + \frac{1}{3}\varepsilon_\nu h_\nu.$$

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν κυρτῶν πολυέδρων, εἰς ἃ ἀνελύθη τὸ **Π**, εἶναι ἴσον πάλιν μὲ τὸ ἄθροισμα (1). Τοῦτο γίνεται φανερόν, ἄν, ἀκολουθοῦντες τὴν πορείαν τῆς § **280**, θεωρήσωμεν ἀντὶ τετραέδρων κυρτὰ πολύεδρα, ἐκφράσωμεν τοὺς ὄγκους τῶν συνιστώντων τὸ **Π** πολυέδρων διὰ τοῦ τύπου τῆς § **281**, παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ γινόμενα τῶν ἐσωτερικῶν εἰς τὸ **Π** ἑδρῶν ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις των ἀπὸ τοῦ Σ ἀλληλοαναιροῦνται καὶ ὅτι τὰ παραμένοντα γινόμενα συνιστοῦν τὸ ἄθροισμα (1).

**283. Ὄγκος μὴ κυρτοῦ πολυέδρου, ἀναλυομένου εἰς κυρτά.** Ὡς ὄγκον ἑνὸς τοιούτου μὴ κυρτοῦ πολυέδρου (§ **250**) δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν συνιστώντων αὐτὸ κυρτῶν πολυέδρων. Ἐξ ἄλλου δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν εὐχερῶς ὅτι ὁ οὕτως ὁριζόμενος ὄγκος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, εἰς ἃ ἀναλύεται τὸ μὴ κυρτὸν τοῦτο πολύεδρον, δηλαδὴ τετραέδρων εὑρισκομένων εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ καὶ συνεχομένων δι' ἕδρας τινός (βλ. § **280**).

**284. Ἰσοδύναμα πολύεδρα.** Δύο πολύεδρα λέγονται **ἰσοδύναμα**, ὅταν ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ἐξ ἄλλου, ἐὰν ἐκ δύο πολυέδρων τὸ ἓν ἔχῃ ὄγκον ἴσον πρὸς τὰ μ/ν τοῦ ὄγκου τοῦ ἄλλου, λέγομεν χάριν συντομίας ὅτι τοῦτο *ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰ μ/ν τοῦ ἄλλου.*

Τέλος **τὰ ἴσα πολύεδρα εἶναι καὶ ἰσοδύναμα.** Διότι, ἂν τὸ ἓν διαιρεθῇ εἰς τετράεδρα καὶ κατόπιν ἐφαρμόσῃ διὰ κινήσεως ἐπὶ τοῦ δευτέρου (τοῦ ἴσου του), τότε καὶ τὸ δεύτερον ἀναλύεται αὐτομάτως εἰς ἴσον πλῆθος τετραέδρων, ἀντιστοίχως ἴσων πρὸς τὰ τοῦ πρώτου. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ δευτέρου εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ πρώτου.

**285. Πολύεδρα «κατὰ τεμάχια ἴσα» (ἢ ἰσοδιαμερίσιμα)** λέγονται δύο πολύεδρα δυνάμενα νὰ ἀναλυθοῦν εἰς ἴσον πλῆθος ἀντιστοίχως ἴσων τετραέδρων ἤ, γενικώτερον, εἰς ἴσον πλῆθος ἀντιστοίχως ἴσων, κυρτῶν πολυέδρων. Μὲ ἄλλας λέξεις δύο ἰσοδιαμερίσιμα πολύεδρα σύγκεινται ἀπὸ τὰ ἴδια τεμάχια, ἀλλὰ κατὰ διαφορετικὸν τρόπον διατεταγμένα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

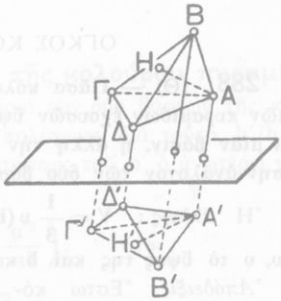
**Δύο ἰσοδιαμερίσιμα πολύεδρα εἶναι προφανῶς καὶ ἰσοδύναμα,** λόγῳ τῆς ἀθροιστικότητος τοῦ ὄγκου.

**Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει.** Ἤτοι, ἐὰν δύο πολύεδρα ἔχουν ἴσους ὄγκους, τότε δὲν ἕπεται ὅτι δύνανται νὰ ἀναλυθοῦν εἰς ἴσον πλῆθος ἀντιστοίχως ἴσων πολυέδρων, δηλ. *«δύο ἰσοδύναμα πολύεδρα δὲν εἶναι πάντοτε ἰσοδιαμερίσιμα»*. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἀπέδειξε πρῶτος ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Dehn κατὰ τὸ ἔτος 1902 διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος (Dehn, M., *«Ueber den Rauminhalt»*, *Mathematische Annalen*, τόμος 55 (1902), σελ. 465 - 478) :

*«Εἷς κύβος καὶ ἓν ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸν κανονικὸν τετράεδρον δὲν εἶναι ἰσοδιαμερίσιμα»*. Δηλ. εἶναι ἀδύνατον νὰ χωρισθοῦν εἰς ἴσον πλῆθος ἀντιστοίχως ἴσων τεμαχίων.

**286. Πολύεδρα κατοπτρικά.** (Θ) — **Δύο κυρτὰ πολύεδρα συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον (ἢ ὡς πρὸς κέντρον) εἶναι ἰσοδύναμα.**

Διότι, ἂν τὸ ἓν πολύεδρον ἀναλυθῇ εἰς τετράεδρα $T_1, T_2, ..., T_\nu$ (§ **278**), τότε καὶ τὸ συμμετρικόν του ἀναλύεται αὐτομάτως εἰς τετράεδρα συμμετρικὰ ἀντιστοίχως πρὸς τὰ πρῶτα : $T'_1, T'_2, ..., T'_\nu$. Ἀλλὰ δύο τετράεδρα συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον (ἢ κέντρον) εἶναι ἰσοδύναμα. Διότι, ἔστω ΑΒΓΔ τετράεδρον (σχ. 329) καὶ Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν του. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν συμμετρίαν τὰ μήκη καὶ αἱ γωνίαι διατηροῦνται, διὰ τοῦτο τρ.ΑΒΓ=τρ.Α΄Β΄Γ΄, ἀλλὰ καὶ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη ΑΗ καὶ Α΄Η΄ τῶν δύο συμμετρικῶν τετραέδρων εἶναι, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἴσα. Ἑπομένως (ΑΒΓΔ)=(Α΄Β΄Γ΄Δ΄). Ὅθεν τὰ δύο συμμετρικὰ πολύεδρα, ὡς ἀναλελυμένα εἰς ἴσον πλῆθος τετραέδρων ἀντιστοίχως **ἰσοδυνάμων**, εἶναι ἰσοδύναμα, δεδομένου ὅτι ὁ ὄγκος κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, εἰς ἃ ἀναλύεται.



Σχ. 329

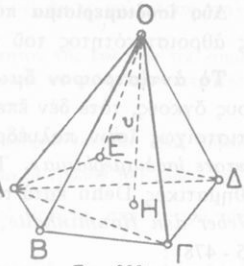
## ΟΓΚΟΙ ΣΥΝΗΘΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

### ΟΓΚΟΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

**287.** (Θ) — **Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι πᾶσα πυραμὶς ἀναλύεται διὰ τῶν διαγωνίων ἐπιπέδων (τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῆς κορυφῆς Ο καὶ τῶν διαγωνίων τῆς βάσεως) εἰς τετράεδρα. Οὕτω π.χ. ἡ πυραμὶς Ο, ΑΒΓΔΕ (σχ. 330) ἀναλύεται εἰς τὰ συνεχόμενα τετράεδρα ΟΑΒΓ, ΟΑΓΔ, ΟΔΕΑ ἔχοντα κοινὸν ὕψος υ τὸ τῆς πυραμίδος καὶ ἑπομένως κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν (§ **280**).



Σχ. 330

$$\text{ΟγκΟΑΒΓΔΕ} = \text{ΟγκΟΑΒΓ} + \text{ΟγκΟΑΓΔ} + \text{ΟγκΟΑΔΕ} =$$

$$= \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\cdot\upsilon + \frac{1}{3}(\text{ΑΓΔ})\cdot\upsilon + \frac{1}{3}(\text{ΑΔΕ})\cdot\upsilon =$$

$$= \frac{1}{3}\{(\text{ΑΒΓ}) + (\text{ΑΓΔ}) + (\text{ΑΔΕ})\}\upsilon = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓΔΕ})\upsilon = \boxed{\frac{1}{3}\,b\cdot\upsilon},$$

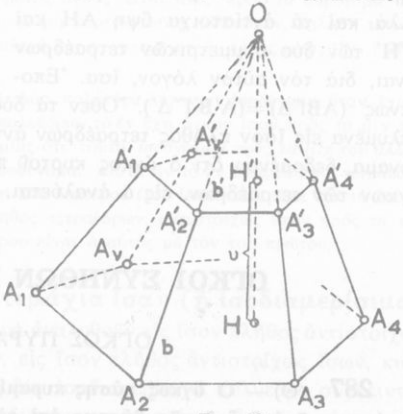
ὅπου b παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως.

## ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

**288**. (Θ) — **Πᾶσα κόλουρος πυραμὶς ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων ἐχουσῶν ὕψος τὸ ὕψος τῆς κολούρου, βάσεις δέ, ἡ μία τὴν μίαν βάσιν, ἡ ἄλλη τὴν ἄλλην βάσιν τῆς κολούρου καὶ ἡ τρίτη τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων.**

**Ἤ ἄλλως:** $V = \frac{1}{3}\upsilon(b + b' + \sqrt{bb'})$, **ὅπου V ὁ ὄγκος τῆς κολούρου, υ τὸ ὕψος της καὶ b καὶ b′ τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων τῆς κολούρου.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω κόλουρος πυραμὶς μὲ βάσεις τὰ ὅμοια πολύγωνα $A_1A_2A_3...A_\nu$ καὶ $A'_1A'_2A'_3...$ $...A'_\nu$ (σχ. 331). Γνωρίζομεν ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς κολούρου προεκτεινόμεναι συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον Ο (§ **260**, β′). Ἑπομένως ἡ κόλουρος πυραμὶς ἐνουμένη μὲ τὴν πυραμίδα $OA'_1A'_2...A'_\nu$ τὴν ἔχουσαν βάσιν τὴν μικροτέραν βάσιν ἀποτελεῖ πυραμίδα $OA_1A_2...A_\nu$ ἔχουσαν ὡς βάσιν τὴν με-



Σχ. 331

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γαλυτέραν βάσιν τῆς κολούρου. Ἑπομένως (§ **282**) : Ὄγκος τῆς κολούρου + + Ὄγκος τῆς πυραμίδος $OA'_1A'_2...A'_\nu$ = Ὄγκος τῆς πυραμίδος $OA_1A_2...A_\nu$ ⇒ (1) Ὄγκος V τῆς κολούρου = Ογκος$OA_1A_2...A_\nu$ — Ογκος$OA'_1A'_2...A'_\nu$.

Ἔστωσαν OH καὶ OH′ τὰ ὕψη τῶν δύο πυραμίδων. Τότε OH—OH′ = υ = ὕψος τῆς κολούρου. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν παρ/λων τομῶν (§ **259**) ἔχομεν

$$\frac{OH}{\sqrt{b}} = \frac{OH'}{\sqrt{b'}} = \frac{OH-OH'}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} = \frac{\upsilon}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OH = \frac{\upsilon\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}},\ OH' = \frac{\upsilon\sqrt{b'}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}$$ καὶ ἡ σχέσις (1) δίδει :

$$V = \frac{1}{3}\,b\cdot(OH) - \frac{1}{3}\,b'\cdot(OH') = \frac{1}{3}\,b\cdot\frac{\upsilon\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} - \frac{1}{3}\,b'\,\frac{\upsilon\sqrt{b'}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}$$

$$= \frac{1}{3}\,\upsilon\,\frac{(\sqrt{b})^3-(\sqrt{b'})^3}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} = \frac{1}{3}\,\upsilon\,\{(\sqrt{b})^2+\sqrt{b}\cdot\sqrt{b'}+(\sqrt{b'})^2\}$$ καὶ τέλος

$$V = \frac{1}{3}\,\upsilon\,(b+\sqrt{bb'}+b'),$$ ὅ.ἔ.δ.

**289. Δεύτερος τύπος τοῦ ὄγκου τῆς κολούρου πυραμίδος.** Ἔστωσαν α καὶ α′ δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου. Ἐπειδὴ αἱ δύο βάσεις εἶναι ὅμοια πολύγωνα, διὰ τοῦτο $b'/b = \alpha'^2/\alpha^2 \Rightarrow b' = b\alpha'^2/\alpha^2$, ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ b′ ὁ ἀνωτέρω τύπος τοῦ ὄγκου γίνεται :

$$V = \frac{1}{3}\,\upsilon\left(b+\sqrt{b^2\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}}+b\,\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right),$$ ἤτοι :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\,\upsilon\cdot b\left(1+\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right)} = \frac{1}{3}\,\upsilon b(1+\lambda+\lambda^2),$$

ὅπου λ ὁ λόγος ὁμοιότητος τῆς βάσεως ἐμβαδοῦ b′ πρὸς τὴν βάσιν ἐμβαδοῦ b.

## ΟΓΚΟΣ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

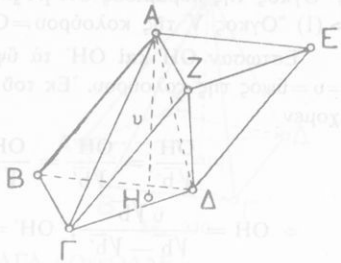
**290. (Θ)—Ὁ ὄγκος παντὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τριγωνικὸν πρῖσμα μὲ βάσιν τρ.ΒΓΔ καὶ ὕψος ΑΗ = υ (σχ. 332).

Τὸ πρῖσμα τοῦτο ἀναλύεται διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔ εἰς δύο πυραμίδας, ΑΒΓΔ καὶ Α, ΓΔΕΖ καὶ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΖΔ εἰς τρεῖς πυραμίδας ΑΒΔΓ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΖΓΔ, ΑΖΕΔ. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη ΑΒΓΔ καὶ ἡ τρίτη ΑΖΕΔ ≡ΔΑΖΕ εἶναι ἰσοδύναμοι ὡς ἔχουσαι ἴσας βάσεις ΒΓΔ καὶ ΑΖΕ καὶ ἴσα ὕψη. Ἐπίσης ἡ δευτέρα ΑΖΓΔ καὶ ἡ τρίτη ΑΖΕΔ εἶναι ἰσοδύναμοι ὡς ἔχουσαι ἴσας βάσεις ΖΓΔ καὶ ΖΕΔ καὶ τὸ αὐτὸ ἐκ τοῦ Α ὕψος. Ἑπομένως τὸ πρῖσμα ἀναλύεται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν ΑΒΓΔ. Ἄρα κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν (§ **280**) ὁ ὄγκος του εἶναι τριπλάσιος τοῦ ὄγκου τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ. Ὥστε :



Σχ. 332

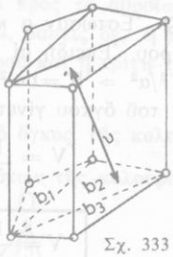
$$V_{\text{πρίσματος}} = 3V_{\text{ΑΒΓΔ}} = 3 \cdot \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})\cdot\upsilon = (\text{ΒΓΔ})\upsilon = b\cdot\upsilon,$$

ὅπου b τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

**Πόρισμα. Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα.**

**291**. (Θ) — **Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.**

Διότι διὰ διαγωνίων ἐπιπέδων χωρίζεται εἰς τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς αὐτὸ (σχ. 333) καὶ συνεπῶς ὁ ὄγκος του εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριγωνικῶν τούτων πρισμάτων (§ **282**). δηλ. $b_1\upsilon + b_2\upsilon + b_3\upsilon + \ldots = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)\upsilon = \boxed{b\upsilon}$, ὅπου b τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ υ τὸ ὕψος του.



Σχ. 333

**Πόρισμα. Ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ τὸ ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὴν ἕδραν ταύτην.**

Διότι τὸ παρ/δον εἶναι πρῖσμα καὶ πᾶσα ἕδρα τοῦ παρ/δου δύναται νὰ ληφθῇ ὡς βάσις του (§ **265, i**).

**292**. (Θ) — **Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων αὐτοῦ.**

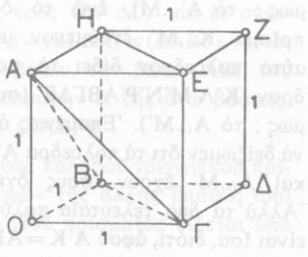
Διότι, ἂν α, β, γ αἱ τρεῖς διαστάσεις του, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι αβ, τὸ δὲ ὕψος του γ (§ **266**, σχ. 302).

**Πόρισμα. Ὁ ὄγκος κύβου ἀκμῆς α ἰσοῦται μὲ $\alpha^3$.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**293. Καθορισμὸς τῆς σταθερᾶς k.** Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλα τὰ γενικὰ περὶ ὄγκων ἀποδειχθέντα θεωρήματα ἰσχύουν καὶ ὅταν ὡς ὄγκος τοῦ τετραέδρου, ἀντὶ νὰ ληφθῇ τὸ γινόμενον $\frac{1}{3}$ b·υ, ὅπου b τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του καὶ υ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος, ληφθῇ τὸ kbυ, ὅπου k **αὐθαίρετος σταθερά.** Δηλαδὴ τὰ θεωρήματα τῶν §§ **272, 273, 277, 280, 281, 282** ἰσχύουν καὶ ὅταν ὁ παράγων 1/3 ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ αὐθαιρέτου σταθεροῦ παράγοντος k τοῦ ἀναφερομένου εἰς τὸν τυπικὸν ὁρισμὸν τοῦ ὄγκου, τὸν δοθέντα εἰς τὴν § **271,** β'. Πρακτικῶς εἴπομεν (§ **271,** β') ὅτι τὸ k λαμβάνεται ἴσον πρὸς 1/3. Τοῦτο διαφωτίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἂς θεωρήσωμεν τετράεδρον ΟΑΒΓ μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν Ο τρισορθογώνιον καὶ ἀκμὰς ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=1 (μονὰς μήκους). Ἂς σχηματίσωμεν καὶ τὸν μοναδιαῖον κύβον ΟΒΔΓΑΕΖΗ (σχ. 334). Οὗτος σύγκειται ἀπὸ δύο ἴσα ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΟΒΓΑΕΗ καὶ ΒΓΔΗΕΖ, ἄρα ἔχει ὄγκον διπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ ΟΒΓΕΗΑ.



Σχ. 334

Ἐξ ἄλλου τὸ ΟΒΓΕΗΑ ἀναλύεται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν ΑΟΒΓ (§ **290,** πόρισμα), ἄρα ἔχει ὄγκον τριπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ. Ἑπομένως ὁ μοναδιαῖος κύβος ἔχει ὄγκον ἑξαπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου ΑΟΒΓ. Ὁ ὄγκος ὅμως τοῦ ΑΟΒΓ συμφώνως μὲ τὸν τυπικὸν ὁρισμὸν εἶναι $k(ΟΒΓ)\cdot(ΟΑ) = k\cdot\frac{1}{2}\cdot$ $\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{k}{2}$. Πρέπει λοιπόν: Ὄγκος τοῦ μοναδιαίου κύβου $= 6\cdot\frac{k}{2} =$ $= 3k$. Ἐὰν ὅμως ἐπιθυμοῦμεν ὁ μοναδιαῖος κύβος νὰ ἔχῃ ὄγκον 1, τότε πρέπει $1 = 3k$, δηλ. $k = 1/3$.

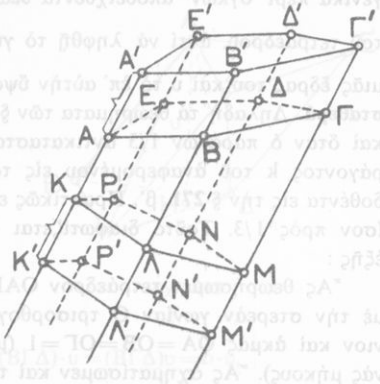
**294.** (Θ) — **Πᾶν πλάγιον πρῖσμα ἰσοδυναμεῖ πρὸς ὀρθὸν ἔχον βάσιν μίαν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος ἴσον πρὸς μίαν παράπλευρον ἀκμὴν τοῦ πλαγίου.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω πλάγιον πρῖσμα ΑΒΓΔΕ—Α'Β'Γ'Δ'Ε' (σχ. 335). Ἂς προεκτείνωμεν τὴν ἀκμὴν Α'Α πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ἂς λάβωμεν σημεῖον Κ, εἰς ἀρκετὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α, ὥστε ἡ διὰ τοῦ Κ διερχομένη κάθετος τομὴ ΚΛΜΝΡ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας οὐδεμίαν τῶν ὑπολοίπων ἀκμῶν τοῦ πλαγίου πρίσματος νὰ συναντᾷ, ἀλλὰ τὰς προεκτάσεις αὐτῶν. Ἂν λάβωμεν τώρα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν σημεῖα Κ', Λ', Μ', Ν', Ρ' τοιαῦτα, ὥστε $\overrightarrow{Α'Α}=$



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$= \overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{\Lambda\Lambda'} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{PP'}$ σχηματίζομεν τὸ ὀρθὸν πρῖσμα ΚΛΜΝΡ—Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄Ρ΄, τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ θεωρήματος.



Σχ. 335

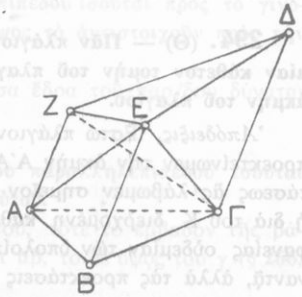
Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὸ πλάγιον πρῖσμα Α΄...Γ ἑνούμενον μὲ τὸ πολύεδρον (κολοβὸν πρῖσμα) ΚΛΜΝΡΑΒΓΔΕ δίδει τὸ πολύεδρον ΚΛΜΝΡΑ΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (συντόμως: τὸ Α΄...Μ), ἐνῷ τὸ ὀρθὸν πρῖσμα Κ...Μ΄ ἑνούμενον μὲ τὸ αὐτὸ πολύεδρον δίδει τὸ πολύεδρον Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄Ρ΄ΑΒΓΔΕ (συντόμως: τὸ Α...Μ΄). Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ πολύεδρα Α΄...Μ καὶ Α...Μ΄ ἔχουν ἴσους ὄγκους. Ἀλλὰ τὰ δύο τελευταῖα πολύεδρα εἶναι ἴσα, διότι, ἀφοῦ Α΄Κ = ΑΚ΄, Β΄Λ = ΒΛ΄, Γ΄Μ = ΓΜ΄, Δ΄Ν = ΔΝ΄, Ε΄Ρ = = ΕΡ΄, διὰ τοῦτο ἐφαρμόζει τὸ Α΄...Μ ἐπὶ τοῦ Α...Μ΄ διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{A'K}$. Ἀφοῦ τὰ Α΄...Μ καὶ Α...Μ΄ εἶναι ἴσα, ἔχουν ἴσους ὄγκους· ἄρα καὶ τὰ Α΄...Γ καὶ Κ...Μ΄ ἔχουν ἴσους ὄγκους, ὅ.ἔ.δ.

**Πόρισμα. Ἐὰν Τ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς πλαγίου πρίσματος, *l* τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του καὶ V ὁ ὄγκος του, τότε ἰσχύει:**

(1) $$V = T \cdot l.$$

## ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΒΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

**295**. (Θ) — **Πᾶν κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων ἐχουσῶν κοινὴν βάσιν, τὴν μίαν τῶν βάσεων τοῦ κολοβοῦ πρίσματος καὶ κορυφὰς τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς ἑτέρας βάσεως τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.**



Σχ. 336

*Ἀπόδειξις*. Τὸ κολοβὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ τοῦ σχ. 336 χωρίζεται διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΕΑΓ εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ καὶ τὴν τετραπλευρικὴν ΕΑΓΔΖ. Ἡ δευτέρα χωρίζεται πάλιν ὑπὸ τοῦ διαγωνίου ἐπιπέδου ΕΖΓ εἰς δύο τριγωνικάς: τὴν ΕΑΓΖ καὶ τὴν ΕΓΔΖ. Οὕτω, λοιπόν, τὸ ὅλον στερεὸν (δηλ. τὸ θεωρούμενον κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα) εἶναι ἕνωσις τριῶν πυραμίδων: τῆς ΕΑΒΓ, τῆς ΕΑΓΖ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

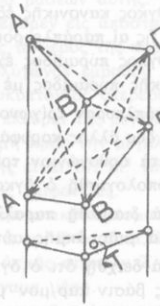
καὶ τῆς ΕΓΔΖ. Ἂν δὲ V ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ πρίσματος, ἔχομεν : V = (ΕΑΒΓ) + (ΕΑΓΖ) + (ΕΓΔΖ), συμφώνως πρὸς τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ ὄγκου πολυέδρου (§ **280**).

Ἡ πρώτη πυραμὶς ΕΑΒΓ ἔχει βάσιν τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ κολοβοῦ καὶ κορυφὴν μίαν κορυφὴν Ε τῆς ἄλλης βάσεως. Ἡ δευτέρα δὲν ἀλλάζει ὄγκον, ἂν ἡ κορυφή της Ε μετατεθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν ΖΑ καὶ ἔλθῃ εἰς Β (§ **273**, α΄). Ἑπομένως : (ΕΑΓΖ) = (ΒΑΓΖ) ≡ (ΖΑΒΓ), δηλ. ἡ δευτέρα, ΕΑΓΖ, ἰσοδυναμεῖ μὲ πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν κορυφὴν Ζ τῆς ἄνω βάσεως. Ἡ τρίτη, ΕΓΔΖ, δὲν ἀλλάζει ὄγκον, ἂν πρῶτον μὲν ἡ κορυφή της Ζ μετατεθῇ εἰς Α (παραλλήλως πρὸς τὴν ΔΓ) καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ Ε εἰς Β. Δηλ. ἔχομεν (ΕΓΔΖ) = (ΕΓΔΑ) = (ΒΓΔΑ) ≡ (ΔΑΒΓ). Ἤτοι καὶ ἡ τρίτη ἰσοδυναμεῖ μὲ πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν, τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος καὶ κορυφὴν τὴν τρίτην κορυφὴν Δ τῆς ἄνω βάσεως. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι V = (ΕΑΒΓ) + (ΔΑΒΓ) + (ΖΑΒΓ).

**Πόρισμα.** Ἂν b τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ $υ_1$, $υ_2$, $υ_3$ αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τῆς ἄλλης βάσεως ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς πρώτης, ὁ ὄγκος V τοῦ κολοβοῦ πρίσματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(1) \qquad \boxed{V = \frac{1}{3}\, b(υ_1 + υ_2 + υ_3)}$$

**296**. (Θ) — **Ὁ ὄγκος παντὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὸν μέσον ὅρον τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.**



Σχ. 337

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα (σχ. 337), Τ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του (δηλ. τῆς καθέτου τομῆς τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, ἣν ὁρίζουν οἱ φορεῖς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του) καὶ V ὁ ὄγκος του. Εἴδομεν ὅτι :

$$(1) \qquad V = (Α΄ΑΒΓ) + (Β΄ΑΒΓ) + (Γ΄ΑΒΓ)$$

Ἡ πυραμὶς Α΄ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος βάσιν ΑΒΓ καὶ παράπλευρον ἀκμὴν ΑΑ΄ (§ **290**, πόρισμα), τὸ δὲ πρῖσμα πάλιν τοῦτο ἔχει ὄγκον Τ·(ΑΑ΄) (§ **294**). Ἑπομένως : $(Α΄ΑΒΓ) = \frac{1}{3}$ Τ·ΑΑ΄. Ὁ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μοίως καὶ διὰ τὰς ἄλλας δύο πυραμίδας : (Β΄ΑΒΓ) $= \frac{1}{3}$ Τ·ΒΒ΄ καὶ (Γ΄ΑΒΓ) $= \frac{1}{3}$ Τ·ΓΓ΄. Ἑπομένως ἡ (1) γίνεται :

$$(2) \qquad V = T\frac{AA' + BB' + \Gamma\Gamma'}{3}, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

**Σημείωσις.** Εἰς τὴν πρᾶξιν ἐφαρμόζεται συνήθως ὁ τύπος (2) μᾶλλον παρὰ ὁ (1) τῆς § **295.**

**297.** — Διὰ τὸν ὄγκον **πολυγωνικοῦ** κολοβοῦ πρίσματος (μὲ πλῆθος πλευρῶν βάσεως > 3) **δὲν ἰσχύουν ἐν γένει** τὰ θεωρήματα τῶν δύο προηγουμένων παραγράφων (πλὴν ἐξαιρέσεών τινων). Διὰ νὰ ὑπολογισθῇ ὅθεν ὁ ὄγκος κολοβοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος, δέον τοῦτο νὰ διαιρεθῇ διὰ διαγωνίων ἐπιπέδων εἰς τριγωνικὰ κολοβὰ πρίσματα, νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑκάστου τούτων καὶ κατόπιν νὰ προστεθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν κολοβῶν τριγωνικῶν πρισμάτων, εἰς ἃ διῃρέθη τὸ ἀρχικόν.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

963. Ὄγκος κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος, ἧς ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι α, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμὴ β.

964. Ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, ἧς ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι 4 μέτρα, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια 15-πλασία τῆς βάσεως.

965. Ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος ἐχούσης ὁλικὴν ἐπιφάνειαν 10 τετρ. μέτρων καὶ ἧς αἱ παράπλευροι ἕδραι σχηματίζουν διέδρους γωνίας $60^0$ μετὰ τῆς βάσεως.

966. Ὄγκος πυραμίδος ἐχούσης κορυφὰς τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν κανονικῆς δωδεκαγωνικῆς πυραμίδος μὲ πλευρὰν βάσεως α καὶ ὕψος υ.

967. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΟΑΒ πλευρᾶς α ἔχει τὴν κορυφήν του Ο ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καὶ τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Π), προβάλλεται δὲ ἐπὶ τοῦ (Π) κατὰ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑ΄Β΄ ὑποτεινούσης Α΄Β΄ = β. Συναρτήσει τῶν α καὶ β νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΒ΄Α΄.

968. Νὰ διαιρεθῇ παραλληλεπίπεδον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' ἐπιπέδων διερχομένων διὰ μιᾶς ἀκμῆς αὐτοῦ.

969. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος παντὸς τετραέδρου ἰσοῦται μὲ τὸ 1/6 τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν παρ/μον μὲ πλευρὰς ἴσας καὶ παρ/λους πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμὰς τοῦ τετραέδρου καὶ ὕψος τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν ἀκμῶν τούτων.

970. Δοθέντος τριγωνικοῦ πρίσματος, νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε αἱ πυραμίδες μὲ κορυφὴν τὸ Μ καὶ βάσεις τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πρίσματος νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

971. Δοθέντος τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς 2, ὑψοῦμεν τὰ τμήματα ΔΕ = 6 καὶ ΒΖ = 9 κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τούτου. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΓΕΖ.

972. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ἑνὸς παρ/δου καὶ τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παρ/δου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

973. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ἑνὸς τετραέδρου καὶ τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου.

974. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ἑνὸς παρ/δου καὶ τοῦ τετραέδρου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκμαὶ εἶναι διαγώνιοι τῶν ἑδρῶν τοῦ παρ/δου.

975. Πλάγιον τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ παρ/λους ἀκμὰς κεκλιμένας κατὰ $60^0$ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του.

976. Δύο κανονικὰ πρίσματα ἔχουν ὕψη υ καὶ υ΄ καὶ βάσεις κανονικὰ ν-γωνα ἀποστημάτων α καὶ α΄. Δίδεται ἐπίσης ὅτι οἱ ὄγκοι των εἶναι ἀνάλογοι τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν των. Νὰ δειχθῇ ὅτι $1/\upsilon+1/\alpha=1/\upsilon'+1/\alpha'$.

977. Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδων παραλλήλων ἀπεχόντων κατὰ υ, αἱ δὲ προβολαὶ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δεκαέδρου, οὗτινος ἕδραι εἶναι τὰ δύο τετράγωνα καὶ τὰ ὀκτὼ τρίγωνα, ὅπως τὰ ΑΕΒ, ΕΒΖ, ΖΒΓ..., ἂν ἡ πλευρὰ ΑΒ=α.

978. Κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος ἡ μία βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 12 καὶ 5 μέτρα, ἡ μεσαία τομή της ἔχει ἐμβαδὸν 2430/169 τετρ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος τῆς κολούρου εἶναι 6 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της εἰς κυβικὰ μέτρα.

979. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολούρου, κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ὕψους υ, τῆς ὁποίας ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν $4k^2$ καὶ ἡ μεσαία τομή της ἔχει ἐμβαδὸν $c^2$.

980. Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα κόλουρος πυραμὶς ὑπὸ ἐπιπέδου παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις της οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο βάσεων. Ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ χωρίζεται ἡ κόλουρος πυραμὶς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου συναρτήσει τῶν ἐμβαδῶν b καὶ b΄ τῶν βάσεων τῆς κολούρου.

981. Ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς Α΄ κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος Α΄Β΄Γ΄ΑΒΓ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν Β΄Γ΄ΒΓ, τὸ μέρος τῆς κολούρου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο τούτων παραλλήλων ἐπιπέδων ἰσοδυναμεῖ πρὸς πρῖσμα ἔχον ὕψος τὸ τῆς κολούρου καὶ βάσιν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων αὐτῆς.

982. Δοθείσης πυραμίδος μὲ ἐμβαδὸν βάσεως b, φέρομεν εἰς ἀπόστασιν h ἀπὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον παρ/λον τῇ βάσει καὶ τέμνον τὰς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς προεκτάσεις τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν εἰς σημεῖα ὁρίζοντα πολύγωνον ἐμβαδοῦ b΄. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ διὰ τῆς ἑνώσεως τῶν δύο πυραμίδων προκύπτοντος στερεοῦ.

983. Κανονικῆς κολούρου ἑξαγωνικῆς πυραμίδος αἱ πλευραὶ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς καὶ ἴσαι ἀκόμη πρὸς τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον τῆς μικροτέρας βάσεως. Δεδομένου ὅτι ὁ ὄγκος της εἶναι 672 $m^3$ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκμαὶ τῆς κολούρου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς της ἐπιφανείας.

984. Ἐπὶ τῶν δύο παραπλεύρων ἀκμῶν ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ μὲ παράπλευρον ἀκμὴν ΑΑ΄=38m ὑπάρχουν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τοιαῦτα, ὥστε ΔΑ=15m καὶ ΕΒ=20m. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς τρίτης παραπλεύρου ἀκμῆς σημεῖον Ζ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖ νὰ διαιρῇ τὸ πρῖσμα εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

985. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος παντὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς βάσεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τῆς ἄλλης.

986. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ περικλειομένου ὑπὸ δύο ὀρθογωνίων παρ/μων καὶ τεσσάρων τραπεζίων. Αἱ πλευραὶ α, β τοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς α΄ καὶ β΄ τοῦ ἑτέρου, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο παρ/λων ἐπιπέδων εἶναι h.

987. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις ΑΒ=α, ΒΓ=β. Διὰ τῶν τεσσάρων πλευρῶν του ἄγονται ἡμιεπίπεδα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒΓΔ, σχηματίζοντα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὀρθογωνίου διέδρους γωνίας $\varphi=30^0$ καὶ τῶν ὁποίων πάντοτε ἡ μία ἕδρα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιέχει τὸ ὀρθογώνιον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ. Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ σχηματιζομένου διὰ $\varphi = 45^0$ ἢ $\varphi = 60^0$;

988. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ παρ/δου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων τῶν δύο βάσεων.

989. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ παρ/δου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς βάσεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἄλλης.

990. Ἡ βάσις ΑΒΓ καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος παραμένουν σταθερά, ἐνῷ αἱ κορυφαὶ Α΄, Β΄, Γ΄ τῆς ἑτέρας βάσεως μετατοπίζονται οὕτως, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ πρίσματος νὰ μένῃ σταθερός. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον Α΄Β΄Γ΄ διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου καὶ νὰ εὑρεθῇ πότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Α΄Β΄Γ΄ γίνεται ἐλάχιστον.

991. Διὰ μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διαιροῦν τὸ στερεὸν τοῦτο εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

992. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) κεῖται τετράγωνον ΚΛΜΝ πλευρᾶς $2l$ καὶ ἐκτὸς τοῦ (Π) ὑποτίθεται ὅτι εὑρίσκεται κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, οὗτινος αἱ κορυφαὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Π), τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον ἀπέχει ἀπόστασιν h (ὅπου $h > l$) ἀπὸ τοῦ (Π) καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α προβάλλεται ἐπὶ τὸ (Π) εἰς τὸ Κ, ἡ Β εἰς τὸ μέσον Ρ τῆς ΚΛ, ἡ Γ εἰς τὸ μέσον Σ τῆς ΛΜ, ἡ Δ εἰς τὸ Μ, ἡ Ε εἰς τὸ μέσον Τ τῆς ΜΝ καὶ ἡ Ζ εἰς τὸ μέσον Π τῆς ΝΚ. i) Ὑπολογίσατε συναρτήσει τῶν $l$ καὶ h τὸν ὄγκον τοῦ κολοβοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος ΚΡΣΜΤΠΑΒΓΔΕΖ. ii) Τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. iii) Δείξατε ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι κατ' ἀνάγκην παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ εὕρετε ἐκ τούτου τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. iv) Ὑπολογίσατε (συναρτήσει τῶν $l$ καὶ h) τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἀπὸ τοῦ (Π). v) Βάσει τῶν τελευταίων ὑπολογισμῶν, κατασκευάσατε τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἀποδεικνύοντες οὕτω τὴν ὕπαρξίν του (εἰς δύο δυνατὰς θέσεις).

993. Ἔστωσαν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ συντρέχουσαι ἀκμαὶ παρ/δου, ΟΔ ἡ διαγώνιος καὶ ΜΝ εὐθύγραμμον τμῆμα τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐπίπεδον ΟΜΝ νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Δείξατε ὅτι

$$(\text{ΜΝΟΑ}) + (\text{ΜΝΟΒ}) + (\text{ΜΝΟΓ}) = (\text{ΜΝΟΔ}).$$

994. Πολυέδρου μία ἕδρα εἶναι τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α, μία ἄλλη εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ΗΕΖ, οὗτινος ἡ κορυφὴ Η προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ εἰς Α, ἐνῷ αἱ Ε καὶ Ζ προβάλλονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως. Τὰ σημεῖα Η, Ε, Ζ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου παρ/λου πρὸς τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἀπέχοντος τούτου κατὰ h. Τέλος αἱ λοιπαὶ ἕδραι τοῦ πολυέδρου εἶναι τὰ τρίγωνα ΗΑΒ, ΗΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΖ, ΖΓΔ, ΖΔΗ καὶ ΗΔΑ.

Ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον τοῦ πολυέδρου τούτου.

995. Τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων, αἱ δὲ προβολαὶ τῶν κορυφῶν ἑκάστου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἄλλου ὁρίζουν μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ ἄλλου κανονικὸν ἑξάγωνον. Ἐὰν Ο καὶ Ο΄ εἶναι τὰ περίκεντρα τῶν δύο ἰσοπλεύρων τριγώνων, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο τετραέδρων ΟΑ΄Β΄Γ΄ καὶ Ο΄ΑΒΓ συναρτήσει τῶν μηκῶν (ΑΒ) = α καὶ (ΟΟ΄) = h.

996. Ἔστω τετράεδρον ΑΒΓΔ. i) Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Μ, Ρ, Ν ἀντιστοίχως, τότε θὰ τέμνῃ καὶ τὸ τμῆμα ΒΔ εἴς τι σημεῖον αὐτοῦ Σ, ἐνῷ τὰς ἀκμὰς ΒΓ καὶ ΑΔ δὲν θὰ τὰς τέμνῃ. ii) Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης $\frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΜΑ}} \cdot \frac{\text{ΑΡ}}{\text{ΡΓ}} \cdot \frac{\text{ΓΝ}}{\text{ΝΔ}} \cdot \frac{\text{ΔΣ}}{\text{ΣΒ}} = 1$. iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν τὰ Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, τότε τὸ ἐπίπεδον ΜΡΝΣ διαιρεῖ τὸ τετράεδρον εἰς δύο ἰσοδύναμα πολύεδρα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΤΟ ΠΡΙΣΜΑΤΟΕΙΔΕΣ

**298**. — **Πρισματοειδὲς** καλεῖται κυρτὸν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι καλούμεναι «βάσεις» κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει ἄλλας κορυφάς, ἐκτὸς τῶν κορυφῶν τῶν βάσεών του. Αἱ λοιπαὶ ἕδραι τοῦ πρισματοειδοῦς **(παράπλευροι ἕδραι)** εἶναι τρίγωνα ἢ τραπέζια (σχ. 338), συναποτελοῦντα ἐπιφάνειαν, ἧς ἡ τομὴ ὑπὸ ἐπιπέδου παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις εἶναι πολύγωνον δυνάμενον νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα μὲ βάσεις τὰς πλευράς του καὶ κορυφὴν ἓν ἐσωτερικὸν σημεῖον του.

**Ὕψος** τοῦ πρισματοειδοῦς καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο βάσεων καὶ **μεσαία τομὴ** τὸ πολύγωνον τὸ προκῦπτον, ὅταν τὸ στερεὸν τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχον ἀπὸ ταύτας.

Ἐὰν μία τῶν βάσεων καταντήσῃ εὐθύγραμμον τμῆμα (παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην) καὶ πάλιν τὸ στερεὸν θεωρεῖται πρισματοειδές, ἀκόμη δὲ καὶ ὅταν ἡ μία βάσις καταντήσῃ σημεῖον (πυραμίς). Τὸ κολοβὸν πρῖσμα τοῦ σχ. 336 (§ **295**) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρισματοειδές, τοῦ ὁποίου ἡ μία βάσις εἶναι τὸ ΑΒΕΖ, ἡ δὲ ἄλλη τὸ τμῆμα ΓΔ.

**299**. (Θ) — **Ὁ ὄγκος τοῦ πρισματοειδοῦς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἕκτον τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεών του προσαυξηθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς του. Ἤτοι :**

$$V = \frac{1}{6}\,\upsilon\,(b + b' + 4m),$$

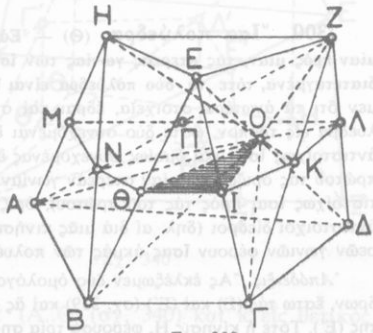
ὅπου V ὁ ὄγκος, υ τὸ ὕψος, b, b′, m τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων καὶ τῆς μεσαίας τομῆς.

Πρὸς ἀπόδειξιν συνδέομεν τυχὸν σημεῖον Ο τῆς μεσαίας τομῆς (σχ. 338) μὲ ὅλας τὰς κορυφὰς τῶν βάσεων, ὁπότε τὸ πρισματοειδὲς ἀναλύεται εἰς πυραμίδας, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι ἀθροιζόμενοι δίδουν τὸν ὄγκον τοῦ πρισματοειδοῦς.

Κατὰ πρῶτον αἱ πυραμίδες μὲ βάσεις τὰς δύο βάσεις τοῦ πρισματοειδοῦς ἔχουν ἄθροισμα ὄγκων :

$$\frac{1}{3}\,b\,\frac{\upsilon}{2} + \frac{1}{3}\,b'\,\frac{\upsilon}{2} = \frac{\upsilon}{6}\,(b + b').$$

Μένει λοιπὸν νὰ ἀθροίσωμεν τὰς ὑπολοίπους πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις τὰς παραπλεύρους ἕδρας καὶ κορυφὴν τὸ Ο. Ταύτας δυνάμεθα



Σχ. 338

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὰ θεωρήσωμεν ὡς τριγωνικάς, διότι, ἂν μία ἐξ αὐτῶν, π.χ. ἡ ΟΗΖΔΑ, δὲν εἶναι, ἀναλύεται εἰς τριγωνικὰς δι' ἑνὸς διαγωνίου ἐπιπέδου (π.χ. τοῦ ΟΖΑ).

Ἂς θεωρήσωμεν μίαν τυχοῦσαν ἐξ αὐτῶν π.χ. τὴν ΟΕΒΓ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μεσοπαράλληλον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῶν μέσων Θ καὶ Ι τῶν ἀκμῶν ΕΒ, ΕΓ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΕΘΙ εἶναι τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τρ.ΕΒΓ. Ἄρα ἡ πυραμὶς ΟΕΒΓ εἶναι τετραπλασία τῆς πυραμίδος ΟΕΘΙ. Αὕτη πάλιν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ μέρος ΟΘΙ τῆς μεσαίας τομῆς καὶ ὕψος υ/2. Ὥστε :

$$(\text{ΟΕΒΓ}) = 4(\text{ΟΕΘΙ}) = 4(\text{ΕΟΘΙ}) = \frac{4}{3}(\text{ΟΘΙ})\cdot\frac{\upsilon}{2} = 4\cdot\frac{\upsilon}{6}(\text{ΟΘΙ}).$$

Εἰς ἑκάστην παράπλευρον πυραμίδα ἀντιστοιχεῖ ἓν τριγωνικὸν τμῆμα τῆς μεσαίας τομῆς, ὅπως ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ΟΕΒΓ τὸ ΟΘΙ. Οὕτω π.χ. διὰ τὴν ΟΑΗΒ θὰ ἔχωμεν ὅτι (ΟΑΗΒ) = 4υ(ΟΝΜ)/6, διὰ τὴν ΟΗΖΑ θὰ ἔχωμεν (ΟΗΖΑ) = 4υ(ΟΜΠ)/6 κ.ο.κ.

Ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον τῆς μεσαίας τομῆς ≠Ο, ὡς ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ πολυέδρου, ἀνήκει εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς παραπλεύρου πυραμίδος (§ **278**) (ἂν δὲν κεῖται ἐπὶ ἕδρας παραπλεύρου τινὸς πυραμίδος). Ἑπομένως αἱ παράπλευροι πυραμίδες τέμνουν τὴν μεσαίαν τομὴν καὶ ἀναλύουν αὐτὴν εἰς τρίγωνα ΟΜΝ, ΟΝΘ, ΟΘΙ,... τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν εἶναι m. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων ὅλων τῶν παραπλεύρων πυραμίδων εἶναι :

$$4\cdot\frac{\upsilon}{6}\Big((\text{ΟΘΙ}) + (\text{ΟΙΚ}) + (\text{ΟΚΛ}) + \ldots + (\text{ΟΝΘ})\Big) = 4\cdot\frac{\upsilon}{6}\,\text{m}.$$

Συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ ὅλου στερεοῦ εἶναι :

$$V = \frac{\upsilon}{6}(b + b') + 4\,\frac{\upsilon}{6}\,m = \frac{\upsilon}{6}(b + b' + 4m).$$

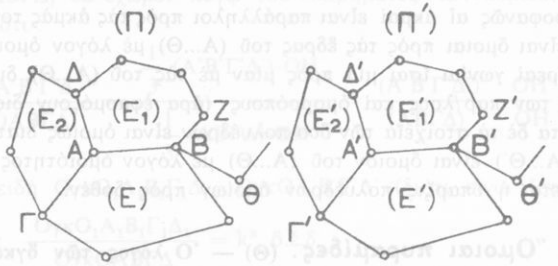
## ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

**300. Ἴσα πολύεδρα.** (Θ) — **Ἐὰν δύο πολύεδρα ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰς στερεὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ταῦτα πάντα ὁμοίως διατεταγμένα, τότε τὰ δύο πολύεδρα εἶναι ἴσα.** Διὰ τοῦ «ὁμοίως διατεταγμένα» ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ ἀνωτέρω στοιχεῖα, ἕδραι καὶ στεραὶ γωνίαι, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ δύο πολύεδρα εἰς τρόπον, ὥστε δύο συνεχόμεναι ἕδραι τοῦ πρώτου νὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο ἀντιστοίχως ἴσας καὶ ὁμοίως συνεχομένας ἕδρας τοῦ δευτέρου καὶ ὅτι εἰς τὰς ἕδρας τοῦ πρώτου τὰς ὁριζούσας μίαν στερεὰν γωνίαν αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦν ἕδραι τοῦ δευτέρου (ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ πρώτου), ὁρίζουσαι ἴσην στερεὰν γωνίαν καὶ τέλος ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι δίεδροι (δηλ. αἱ διὰ μιᾶς κινήσεως ἐφαρμόζουσαι) τῶν δύο τούτων ἴσων στερεῶν γωνιῶν φέρουν ἴσας ἀκμὰς τῶν πολυέδρων.

*Ἀπόδειξις.* Ἂς ἐκλέξωμεν δύο ὁμολόγους καὶ ἑπομένως ἴσας ἕδρας τῶν δύο πολυέδρων, ἔστω τὰς (Ε) καὶ (Ε΄) (σχ. 339) καὶ ἂς φέρωμεν διὰ κινήσεως Η τὴν (Ε) ἐπὶ τῆς ἴσης της (Ε΄). Τότε ἡ κίνησις Η, φέρουσα τρία σημεῖα Γ, Α, Β μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα ἐπὶ τριῶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

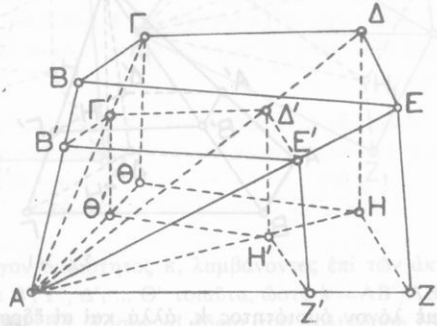
σημείων Γ΄, Α΄, Β΄, εἶναι μοναδική, ἄρα συμπίπτει μὲ τὴν κίνησιν τὴν φέρουσαν τὴν στερεὰν γωνίαν Α ἐπὶ τῆς ἴσης της Α΄. Ὅθεν διὰ τῆς ἰδίας κινήσεως τῆς φερούσης τὰ Γ, Α, Β εἰς τὰ Γ΄, Α΄, Β΄ ἔρχεται καὶ ἡ ἕδρα (Ε) ἐπὶ τῆς (Ε΄) καὶ ἡ στερεὰ γωνία Α ἐπὶ τῆς ἴσης της στερεᾶς γωνίας Α΄, ἄρα καὶ τὸ Δ εἰς Δ΄. Ἑπομένως καὶ αἱ ἴσαι ἕδραι ($E_1$) καὶ ($E'_1$) ἔρχονται εἰς σύμπτωσιν, ἀφοῦ τρεῖς ὁμόλογοι κορυφαί των ἔρχονται εἰς σύμπτωσιν. Καὶ γενικῶς προκύπτει διὰ τοῦ ἰδίου συλλογισμοῦ ὅτι *πᾶσαι αἱ συνορεύουσαι μὲ τὴν ἕδραν*




Σχ. 339

*(Ε) ἕδραι τοῦ (Π) ἐφαρμόζουν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ (Π΄) τῶν συνορευουσῶν μὲ τὴν (Ε΄).* Ἐφαρμόζοντες τὸ συμπέρασμα τοῦτο εἰς τὰς ἕδρας ($E_1$) καὶ ($E'_1$), αἵτινες ἔρχονται εἰς σύμπτωσιν, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ (Π) αἱ συνορεύουσαι μὲ τὴν ($E_1$) συμπίπτουν μὲ τὰς ἕδρας τοῦ (Π΄) τὰς συνορευούσας μὲ τὴν ($E'_1$). Προχωροῦντες οὕτω ἐξαντλοῦμεν ὅλας τὰς ἕδρας τῶν πολυέδρων καὶ συνάγομεν ὅτι διὰ τῆς κινήσεως Η τὰ πολύεδρα ἐφαρμόζουν. Ἄρα εἶναι ἴσα. (Συμφώνως πρὸς τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο σχημάτων).

**301. Ὅμοια πολύεδρα. — α΄) Δύο πολύεδρα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς ἕδρας των ὁμοίας μίαν πρὸς μίαν μὲ τὸν ἴδιον λόγον ὁμοιότητος, καλούμενον «λόγον ὁμοιότητος τῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων», τὰς στερεὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ πάντα τὰ στοιχεῖα ταῦτα ὁμοίως διατεταγμένα,** δηλαδὴ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ τρόπον ἐντελῶς ἀνάλογον ἐκείνου, καθ' ὃν ἀντιστοιχοῦν τὰ στοιχεῖα δύο ἴσων πολυέδρων (βλ. § **300**).




Σχ. 340

β΄) Δοθέντος πολυέδρου **Π** δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πολύεδρον **Ρ** ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ μὲ δοθέντα λόγον ὁμοιότητος. Ἔστω π.χ. τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕΖΗΘ συντόμως : (Α..Θ) (σχ. 340) καὶ k εἷς θετικὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀριθμός. Ἐπὶ τῶν ἀκτίνων (Α, Β), (Α, Γ), (Α, Δ)... (Α, Θ) ἂς λάβωμεν ἀντιστοίχως σημεῖα Β′, Γ′, Δ′,... Θ′ τοιαῦτα, ὥστε :

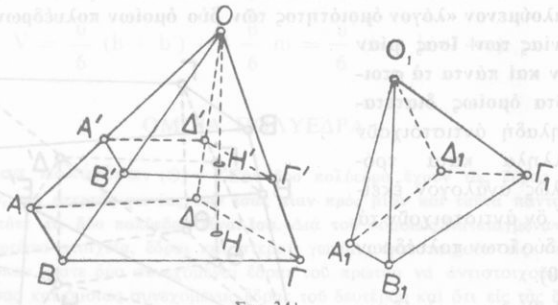
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{A\Delta'}{A\Delta} = \ldots = \frac{A\Theta'}{A\Theta} = k$$

καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὸ πολύεδρον ΑΒ′Γ′Δ′Ε′Ζ′Η′Θ′ (συντόμως : (Α...Θ′)). Τούτου προφανῶς αἱ ἀκμαὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἀκμὰς τοῦ (Α...Θ), αἱ ἕδραι εἶναι ὅμοιαι πρὸς τὰς ἕδρας τοῦ (Α...Θ) μὲ λόγον ὁμοιότητος k καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι μία πρὸς μίαν μὲ τὰς τοῦ (Α...Θ), διότι ἔχουν τὰς ἀκμάς των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους (ἄρα ἐφαρμόζουν διὰ μεταφορᾶς). Πάντα δὲ τὰ στοιχεῖα τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα. Ἄρα τὸ (Α...Θ′) εἶναι ὅμοιον τοῦ (Α...Θ) μὲ λόγον ὁμοιότητος k. Οὕτω ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξις πολυέδρων ὁμοίων πρὸς δοθέν.

**302. Ὅμοιαι πυραμίδες.** (Θ) — **Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πυραμίδων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.**

Ἔστωσαν π.χ. αἱ ὅμοιαι πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καὶ $O_1A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ (σχ. 341) μὲ λόγον ὁμοιότητος $k = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{O_1B_1}{OB} = \frac{O_1\Gamma_1}{O\Gamma} = \frac{O_1\Delta_1}{O\Delta}$. Ἂς κατασκευάσωμεν μίαν πυραμίδα ΟΑ′Β′Γ′Δ′ ὁμοίαν τῆς ΟΑΒΓΔ μὲ λόγον ὁμοιότητος k, λαμβάνοντες ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ τοιαῦτα, ὥστε $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma} = \frac{O\Delta'}{O\Delta}$ (βλ. **301**, β′).

Τότε αἱ ἕδραι τῆς πυραμίδος ΟΑ′Β′Γ′Δ′ εἶναι ὅμοιαι πρὸς τὰς τῆς ΟΑΒΓΔ




Σχ. 341

μὲ λόγον ὁμοιότητος k, ἀλλὰ καὶ αἱ ἕδραι τῆς $O_1A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὅμοιαι πρὸς τὰς τῆς ΟΑΒΓΔ μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος. Ἄρα αἱ ἕδραι τῆς ΟΑ′Β′Γ′Δ′ εἶναι μία πρὸς μίαν ἴσαι πρὸς τὰς ἕδρας τῆς $O_1A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$. Ἐπίσης αἱ στερεαὶ γωνίαι τῆς ΟΑ′Β′Γ′Δ′ εἶναι δι' ὅμοιον λόγον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσαι πρὸς τὰς στερεὰς γωνίας τῆς $O_1A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$. Τέλος τὰ στοιχεῖα τῶν δύο τούτων πυραμίδων ΟΑΒΓΔ καὶ $O_1A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς ΟΑΒΓΔ, ἄρα εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα καὶ μεταξύ των. Ἑπομένως αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καὶ $O_1A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, εἶναι πολύεδρα ἴσα.

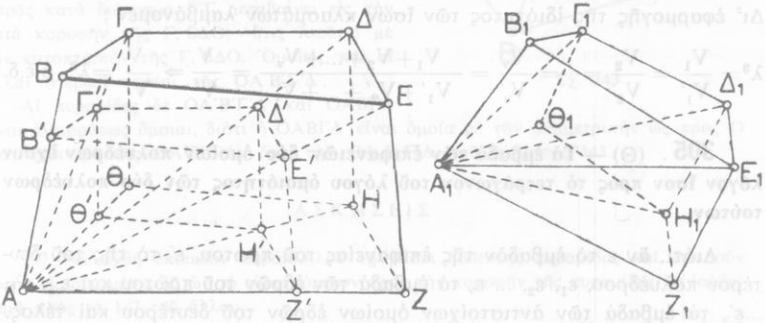
Ἂν φέρωμεν τώρα τὰ ὕψη ΑΗ καὶ ΑΗ τῶν πυραμίδων ΟΑΒΓΔ καὶ ΟΑΒΓΔ, θὰ ἔχωμεν λόγῳ τοῦ θεωρήματος τῶν παραλλήλων τομῶν (§ **258**) ὅτι :

$$\frac{\text{ΟγκΟΑΒΓΔ}}{\text{ΟγκΟΑΒΓΔ}} = \frac{\frac{1}{3}(\text{ΑΒΓΔ})\cdot\text{ΟΗ}}{\frac{1}{3}(\text{ΑΒΓΔ})\cdot\text{ΟΗ}} = \frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΑΒΓΔ})}\cdot\frac{\text{ΟΗ}}{\text{ΟΗ}} = k^2k = k^3.$$

Καὶ ἐπειδὴ $\text{ΟγκΟ}_1\text{Α}_1\text{Β}_1\Gamma_1\Delta_1 = \text{ΟγκΟΑΒΓΔ}$ (διότι εἶναι ἴσα πολύεδρα), ἔχομεν : $\dfrac{\text{ΟγκΟ}_1\text{Α}_1\text{Β}_1\Gamma_1\Delta_1}{\text{ΟγκΟΑΒΓΔ}} = k^3$, ὅ.ἔ.δ.

**303.** (Θ)—**Δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἴσον πλῆθος πυραμίδων ἀντιστοίχως ὁμοίων.**

Ἔστωσαν π.χ. τὰ ὅμοια πολύεδρα $\Pi \equiv (\text{Α}...\Theta)$ καὶ $\text{Ρ} \equiv (\text{Α}_1...\Theta_1)$ (§ **301**, α') μὲ ὁμολόγους κορυφὰς Α καὶ $\text{Α}_1$ καὶ λόγον ὁμοιότητος $k = \text{Α}_1\text{Β}_1/\text{ΑΒ} = ... = \text{Α}_1\Theta_1/\text{ΑΘ}$ (σχ. 342). Ἂς κατασκευάσωμεν πολύεδρον (Α...Θ')




Σχ. 342

ὅμοιον πρὸς τὸ (Α...Θ) μὲ λόγον ὁμοιότητος k, λαμβάνοντες ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ... ΑΘ σημεῖα Β', Γ', Δ', ... Θ' τοιαῦτα, ὥστε $k = \text{ΑΒ}'/\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}'/\text{ΑΓ} = ... = \text{ΑΘ}'/\text{ΑΘ}$ (§ **301**, β'). Τόσον αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου (Α... ...Θ'), ὅσον καὶ τοῦ $(\text{Α}_1...\Theta_1)$ εἶναι ὅμοιαι πρὸς τὰς ἕδρας τοῦ (Α...Θ) καὶ μὲ τὸν ἴδιον λόγον ὁμοιότητος. Ἄρα αἱ ἕδραι τοῦ (Α...Θ') εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ $(\text{Α}_1...\Theta_1)$. Ὁμοίως καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ (Α...Θ') εἶναι ἴσαι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρὸς τὰς στερεὰς γωνίας τοῦ (Α...Θ) καὶ αὐταὶ πάλιν πρὸς τὰς στερεὰς γωνίας τοῦ ὁμοίου του ($A_1$...$Θ_1$). Ἄρα τὰ (Α...Θ′) καὶ ($A_1$...$Θ_1$) ἔχουν καὶ τὰς στερεὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Τέλος τὰ στοιχεῖα τῶν δύο πολυέδρων (Α...Θ′) καὶ ($A_1$...$Θ_1$) εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ (Α...Θ), ἄρα καὶ μεταξύ των. Ἑπομένως εἶναι πολύεδρα ἴσα : (Α...Θ′) = =($A_1$...$Θ_1$). Ἀλλὰ τὸ (Α...Θ′) καὶ τὸ (Α...Θ) εἶναι διῃρημένα εἰς ὁμοίας πυραμίδας : ΑΒ′Γ′Δ′Ε′ ὁμοία τῇ ΑΒΓΔΕ (βλ. § **301**, β′), ΑΓ′Δ′Η′Θ′ ὁμοία τῇ ΑΓΔΗΘ καὶ ΑΔ′Ε′Ζ′Η′ ὁμοία τῇ ΑΔΕΖΗ. Ἐὰν λοιπὸν τὸ ($A_1$...$Θ_1$) ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μὲ τὸ ἴσον του (Α...Θ′), διαιρεῖται καὶ αὐτὸ εἰς πυραμίδας ἴσας πρὸς τὰς ΑΒ′Γ′Δ′Ε′, ΑΔ′Ε′Ζ′Η′, ΑΓ′Δ′Η′Θ′, ἄρα ὁμοίας πρὸς τὰς τοῦ πολυέδρου (Α...Θ).

**304.** (Θ)— **Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων πολυέδρων ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων τούτων.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν V καὶ V′ οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων πολυέδρων **Π** καὶ **Ρ** καὶ λ ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ **Π** πρὸς τὸ **Ρ**, δηλ. $λ = α/α'$, ὅπου α καὶ α′ δύο ὁμόλογοι ἀκμαὶ τῶν **Π** καὶ **Ρ** ἀντιστοίχως. Ἂς χωρίσωμεν τὰ πολύεδρα **Π** καὶ **Ρ** εἰς ἰσαρίθμους πυραμίδας ἀντιστοίχως ὁμοίας (§ **303**) καὶ ἔστωσαν $V_1, V_2, V_3, ...V_ν$ οἱ ὄγκοι τῶν πυραμίδων, εἰς ἃς ἀναλύεται τὸ πρῶτον καὶ $V'_1, V'_2, V'_3, ... V'_ν$ οἱ ὄγκοι τῶν ἀντιστοίχως ὁμοίων πυραμίδων, εἰς ἃς ἀναλύεται τὸ δεύτερον. Θὰ ἔχωμεν τότε (§ **302**) : $V_1/V'_1 = λ^3$, $V_2/V_2' = λ^3$..., $V_ν/V_ν' = λ^3$, καθὼς καὶ $V = V_1 + V_2 + ... + V_ν$, $V' = V'_1 + V'_2 + ... + V_ν'$. Δι᾽ ἐφαρμογῆς τῆς ἰδιότητος τῶν ἴσων κλασμάτων λαμβάνομεν :

$$λ^3 = \frac{V_1}{V_1'} = \frac{V_2}{V_2'} = ... = \frac{V_ν}{V_ν'} = \frac{V_1 + V_2 + ... + V_ν}{V_1' + V_2' + ... + V_ν'} = \frac{V}{V'} \Rightarrow \frac{V}{V'} = λ^3, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

**305.** (Θ) — **Τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος τῶν δύο πολυέδρων τούτων.**

Διότι, ἂν ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρώτου, ε′ τὸ τῆς τοῦ δευτέρου πολυέδρου, $ε_1, ε_2, ... ε_ν$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν τοῦ πρώτου καὶ $ε'_1, ε'_2, ...ε'_ν$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχων ὁμοίων ἑδρῶν τοῦ δευτέρου καὶ τέλος, ἂν λ ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον, τότε :

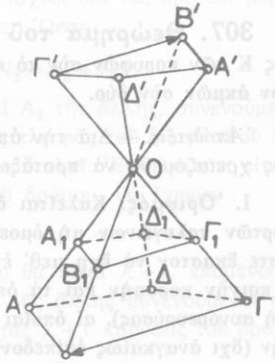
$$λ^2 = \frac{ε_1}{ε_1'} = \frac{ε_2}{ε_2'} = \frac{ε_3}{ε_3'} = ... = \frac{ε_ν}{ε_ν'} = \frac{ε_1 + ε_2 + ... + ε_ν}{ε_1' + ε_2' + ... + ε_ν'} = \frac{ε}{ε'}, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

**306. Ἀντιρρόπως ὅμοια πολύεδρα.** — **Δύο πολύεδρα Π καὶ Ρ λέγονται «ἀντιρρόπως ὅμοια», ὅταν τὸ ἓν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ κατοπτρικὸν (§ 220, γ′) τοῦ ἄλλου.** Ἐὰν **Ρ′** εἶναι τὸ κατοπτρικὸν τοῦ **Ρ**, τότε τὰ δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πολύεδρα **Ρ** καὶ **Ρ**′ ἔχουν τὰς ἀκμάς των καὶ τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ στερεὰς γωνίας των ὄχι ἐν γένει ἴσας, ἀλλὰ κατοπτρικὰς (ἢ «συμμετρικάς»)· καὶ ἐπειδὴ τὸ **Ρ**′ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ **Π**, ἕπεται ὅτι τὰ ἀντιρρόπως ὅμοια πολύεδρα **Ρ** καὶ **Π** ἔχουν τὰς ἕδρας των ὁμοίας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς στερεὰς των γωνίας συμμετρικὰς μίαν πρὸς μίαν. Ἔχουν ἑπομένως ἕνα λόγον ὁμοιότητος k, ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τοῦ **Ρ**′ καὶ τοῦ **Π**. Γνωρίζομεν ὅτι Ὄγκος τοῦ **Ρ** = Ὄγκος τοῦ **Ρ**′ (§ **286**). Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\text{Ὄγκος τοῦ } \mathbf{P}'}{\text{Ὄγκος τοῦ } \Pi} = k^3 \Rightarrow \frac{\text{Ὄγκος τοῦ } \mathbf{P}}{\text{Ὄγκος τοῦ } \Pi} = k^3$, δηλ. *ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ἀντιρρόπως ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.*

**Παράδειγμα.** Ἂς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ πυραμίδος ΟΑΒΓΔ (σχ. 343) καὶ τέμνον τὰς *προεκτάσεις* τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ εἰς Α′, Β′, Γ′, Δ′ ἀντιστοίχως. Αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καὶ ΟΑ′Β′Γ′Δ′ ἔχουν τὰς ἕδρας των ὁμοίας μίαν πρὸς μίαν, ἀλλὰ τὰς στερεὰς γωνίας των ὄχι (ἐν γένει) ἴσας, ἀλλὰ κατοπτρικάς. Διότι ἡ στερεὰ γωνία Ο, Α′Β′Γ′Δ′ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς Ο τῆς Ο, ΑΒΓΔ, ἄρα κατοπτρικὴ αὐτῆς. Ἡ στερεὰ γωνία Γ′, Β′Δ′Ο ἔχει τὰς ἀκμάς της παραλλήλους καὶ *ἀντιρρόπους* πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς Γ, ΒΔΟ καὶ ἑπομένως διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma'\Gamma}$ μεταβαίνει εἰς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς Γ, ΒΔΟ, ἥτις ἰσοῦται μὲ τὴν κατοπτρικὴν τῆς Γ, ΒΔΟ. Ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι στερεαὶ γωνίαι τῆς ΟΑ′Β′Γ′Δ′.



Σχ. 343

Αἱ πυραμίδες δὲ ΟΑ′Β′Γ′Δ′ καὶ ΟΑΒΓΔ εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοιαι, διότι ἡ ΟΑΒΓΔ εἶναι ὁμοία μὲ τὴν συμμετρικὴν ὡς πρὸς Ο (κατοπτρικὴν) τῆς ΟΑ′Β′Γ′Δ′, δηλ. τὴν $OA_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ τοῦ σχήματος 343.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

997. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει δοθείσης πυραμίδος καὶ διαιροῦν αὐτὴν εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ εὑρισκόμενον πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος νὰ ἰσοδυναμῇ πρὸς τὸ 1/7 τοῦ ἄλλου.

998. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἐπιφανειῶν των.

999. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράεδρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ βαρύκεντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἀντιστρόφως ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τούτων τετραέδρων.

1000. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν δύο τετράεδρα ἔχουν τὰς ἀκμάς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, τότε θὰ τὰς ἔχουν καὶ ἀναλόγους, ὁ δὲ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τετραέδρων θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων δύο παραλλήλων ἀκμῶν των.

1001. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶσα κόλουρος πυραμὶς δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ὁμοίας κολούρους πυραμίδας δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις τῆς κολούρου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1002. Δοθέντος τετραέδρου σχηματίζομεν ἄλλο φέροντες τὰ συμμετρικὰ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν τοῦ δοθέντος ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι κορυφάς. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ νέου τετραέδρου καὶ τοῦ ἀρχικοῦ.

1003. Ἔστω G τὸ βαρύκεντρον τετραέδρου ΑΒΓΔ. Φέρομεν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{GB'} = 3\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{G\Gamma'} = 3\overrightarrow{\Gamma G}$, $\overrightarrow{G\Delta'} = 3\overrightarrow{\Delta G}$, $\overrightarrow{GA'} = 3\overrightarrow{AG}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἑκάστη ἕδρα τοῦ τετραέδρου Α΄Β΄Γ΄Δ΄ διέρχεται διὰ μιᾶς κορυφῆς τοῦ ΑΒΓΔ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ταύτης ἕδραν τοῦ ΑΒΓΔ. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τετραέδρων;

Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι τὰ βαρύκεντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ EULER

**307. Θεώρημα τοῦ Euler.— Εἰς πᾶν κυρτὸν πολύεδρον τὸ πλῆθος Κ τῶν κορυφῶν σὺν τὸ πλῆθος Ε τῶν ἑδρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος Α τῶν ἀκμῶν σὺν δύο.**

*Ἀπόδειξις.*— Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀξιοσημειώτου τούτου θεωρήματος χρειαζόμεθα νὰ προτάξωμεν ἕνα ὁρισμὸν καὶ ἓν λῆμμα.

**Ι. Ὁρισμός. Καλεῖται ἁπλῆ, ἀνοικτή, πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια σύνολον κυρτῶν πολυγώνων μὴ ὁμοεπιπέδων ἀνὰ δύο καὶ διατεταγμένων οὕτως, ὥστε ἕκαστον νὰ ἔχῃ μεθ' ἑνὸς τοὐλάχιστον τῶν ἄλλων κοινὴν πλευρὰν ἢ κοινὴν κορυφὴν καὶ τὰ ὁποῖα, πολύγωνα, νὰ ἔχουν ἐλευθέρας πλευρὰς (μὴ συνορευούσας), αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν κλειστὴν τεθλασμένην γραμμὴν (ὄχι ἀναγκαίως ἐπίπεδον), μὴ διασταυρουμένην. Τὸ ἀνωτέρω σύνολον τῶν πολυγώνων δύναται νὰ ἀποτελῆται καὶ ἀπὸ ἓν μόνον κυρτὸν πολύγωνον.**

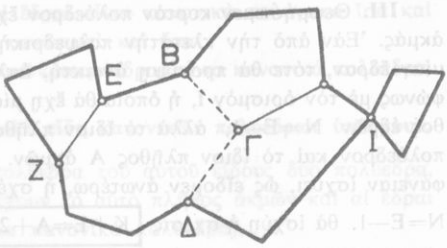
Δηλαδὴ δέον αἱ ἐλεύθεραι πλευραὶ νὰ εἶναι διαδοχικαὶ καὶ ἀνὰ δύο μὴ τεμνόμεναι. Ἡ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμή, ἣν σχηματίζουν, εἶναι τὸ «χεῖλος» τῆς ἀνοικτῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας.

**ΙΙ. Λῆμμα. Ἐὰν Ν τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν, Κ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ Α τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν ἀνοικτῆς, ἁπλῆς, πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, τότε ἰσχύει : Κ + Ν = Α + 1.**

*Ἀπόδειξις.* Διὰ Ν = 1 ἡ πρότασις ἰσχύει, διότι τότε Κ = Α, ὁπότε Κ + 1 = Α + 1, ἤτοι Κ + Ν = Α + 1. Ἔστω τώρα τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς Ν > 1 καὶ **ἂς παραδεχθῶμεν** ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει δι' ὅλας τὰς ἁπλᾶς ἀνοικτὰς πολυεδρικὰς ἐπιφανείας τὰς ἐχούσας πλῆθος ἑδρῶν μικρότερον τοῦ Ν. Τότε, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην, θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ πλῆθος ἑδρῶν Ν. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, θεωροῦμεν ἁπλῆν ἀνοικτὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ Ν ἕδρας, Κ κορυφὰς καὶ Α ἀκμὰς καὶ τὴν χωρίζομεν εἰς δύο ἐπιφανείας τοῦ αὐτοῦ εἴδους, συνδέοντες δύο κορυφὰς $A_\rho$ καὶ $A_\tau$ τοῦ χείλους διὰ δρόμου τινὸς περιέχοντος μόνον ἐσωτερικὰς ἀκμὰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(σχ. 344) καὶ ἑπομένως μὴ ἔχοντος κοινὴν πλευρὰν μετὰ τοῦ χείλους. Ὁ δρόμος οὗτος (ὅπως π.χ. ὁ ΒΓΔ) χωρίζει τὴν ἀρχικὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο ἐπίσης ἀνοικτὰς πολυεδρικὰς ἐπιφανείας, ἐξ ὧν ἡ μία ἔστω ὅτι ἔχει $N_1$ ἕδρας, $K_1$ κορυφὰς καὶ $A_1$ ἀκμάς, ἡ δὲ ἄλλη ἔχει $N_2$ ἕδρας, $K_2$ κορυφὰς καὶ $A_2$ ἀκμάς.



Σχ. 344

Ἐπειδὴ $N_1<N$ καὶ $N_2<N$, τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ τὰς δύο ἐπὶ μέρους ἐπιφανείας συμφώνως μὲ τὴν ὑπόθεσίν μας. Ὥστε :

$$(1) \qquad \{K_1+N_1=A_1+1,\ K_2+N_2=A_2+1\}.$$

Αἱ $A_1$ ἀκμαὶ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας καὶ αἱ $A_2$ τῆς ἄλλης, συνενούμεναι, συνιστοῦν τὰς Α ἀκμὰς τῆς ὅλης, πλέον τὰς πλευρὰς τοῦ διαιρετικοῦ δρόμου, αἵτινες λαμβάνονται κατὰ τὴν ἄθροισιν διπλαῖ. Ἐὰν λοιπόν, εἶναι λ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ διαχωριστικοῦ δρόμου, θὰ ἔχωμεν :

$$(2) \qquad A_1+A_2=A+\lambda.$$

Αἱ κορυφαὶ τοῦ διαχωριστικοῦ δρόμου θὰ εἶναι $\lambda+1$, ἑπομένως αἱ $K_1$ κορυφαὶ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας καὶ αἱ $K_2$ τῆς ἄλλης συνενούμεναι ἀποτελοῦν τὰς Κ κορυφὰς τῆς ἀρχικῆς, πλέον τὰς $\lambda+1$ κορυφὰς τοῦ δρόμου, αἵτινες λαμβάνονται διπλαῖ. Ἤτοι :

$$(3) \qquad K_1+K_2=K+\lambda+1.$$

Τέλος ἔχομεν ἀκόμη,

$$(4) \qquad N_1+N_2=N.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) λαμβάνομεν $(K_1+K_2)+(N_1+N_2)=(A_1+A_2)+2$, ἥτις γίνεται λόγῳ τῶν (2), (3), (4) :

$$K+\lambda+1+N=A+\lambda+2 \Rightarrow K+N=A+1.$$

Συμφώνως, τώρα, μὲ τὸν νόμον τῆς ἐπαγωγῆς τὸ θεώρημα, βάσει τῶν ἀνωτέρω προαποδειχθέντων, ἰσχύει δι' οἱονδήποτε πλῆθος ἑδρῶν Ν.

**Συμπληρωματικαὶ παρατηρήσεις.** Ὁ διαχωριστικὸς δρόμος δύναται νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ μίαν μόνον πλευρὰν (ὅπως π.χ. ἡ ΕΖ τοῦ σχ. 344) ἢ νὰ ἐκπίπτῃ εἰς ἓν σημεῖον (ὅπως π.χ. τὸ Ι τοῦ σχ. 344), δηλ. δυνατὸν $\lambda=1$ ἢ $\lambda=0$. Θὰ ὑπάρχῃ δὲ πάντοτε διαχωριστικὸς δρόμος, ὅταν $N>1$. Διότι, ἂν ὑπάρχῃ πολύγωνον ἔχον ὅλας τὰς πλευρὰς ἐλευθέρας, τοῦτο θὰ ἐπικοινωνῇ μετ' ἄλλου διὰ κορυφῆς (ἀφοῦ $N>1$), ἥτις θὰ ληφθῇ ὡς σημεῖον διαχωριστικὸν τῶν δύο ἐπὶ μέρους ἐπιφανειῶν. Ἂν πάλιν δὲν συμβαίνῃ τὸ ἀνωτέρω, τότε θὰ ὑπάρχῃ πολύγωνον ἢ πολύγωνα μὲ πλευρὰν ἢ πλευρὰς μὴ ἐλευθέρας (ἀφοῦ $N>1$), αἱ ὁποῖαι δίδουν τὸν διαχωριστικὸν δρόμον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**III.** Θεωρήσωμεν κυρτὸν πολύεδρον ἔχον Κ κορυφάς, Ε ἕδρας καὶ Α ἀκμάς. Ἐὰν ἀπὸ τὴν κλειστὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειάν του ἀφαιρέσωμεν μίαν ἕδραν, τότε θὰ προκύψῃ **ἀνοικτή**, ἁπλῆ, πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια συμφώνως μὲ τὸν ὁρισμὸν Ι, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ μίαν ἕδραν ὀλιγωτέραν, ἤτοι πλῆθος ἑδρῶν $N=E-1$, ἀλλὰ τὸ ἴδιον πλῆθος κορυφῶν Κ μὲ τὸ ἀρχικὸν πολύεδρον καὶ τὸ ἴδιον πλῆθος Α ἀκμῶν. Διὰ τὴν ἀνοικτὴν ταύτην ἐπιφάνειαν ἰσχύει, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ἡ σχέσεις $K+N=A+1$ καὶ ἐπειδὴ $N=E-1$, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\boxed{K+E=A+2}$ διὰ τὸ κυρτὸν πολύεδρον.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler.**

1004. Ἐὰν $E_3$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν, $E_4$ τῶν τετραπλευρικῶν, $E_5$ τῶν πενταγωνικῶν... ἑνὸς κυρτοῦ πολυέδρου ἔχοντος Α ἀκμὰς καὶ ἂν $K_3$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν τριέδρων γωνιῶν, $K_4$ τῶν τετραέδρων γωνιῶν, $K_5$ τῶν πενταέδρων (στερεῶν) γωνιῶν..., τὰς ὁποίας φέρει τὸ κυρτὸν πολύεδρον, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$2A=3E_3+4E_4+5E_5+\dots=3K_3+4K_4+5K_5+\dots$$

(Ἡ πρότασις αὐτή, ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρήματος Euler, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἑπομένων προτάσεων τῆς ὁμάδος αὐτῆς).

1005. Εἰς πᾶν κυρτὸν πολύεδρον μὲ Κ κορυφάς, Ε ἕδρας καὶ Α ἀκμὰς ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$A+6\leqq 3E\leqq 2A\leqq 6E-12$$
$$A+6\leqq 3K\leqq 2A\leqq 6K-12.$$

1006. Πᾶν κυρτὸν πολύεδρον ἔχει ἢ τοὐλάχιστον μίαν τριγωνικὴν ἕδραν ἢ τοὐλάχιστον μίαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν. Τὸ δὲ πλῆθος τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν αὐξηθὲν κατὰ τὸ πλῆθος τῶν τριέδρων γωνιῶν του δίδει ἄθροισμα, τοὐλάχιστον, ἴσον μὲ 8.

1007. Εἰς πᾶν κυρτὸν πολύεδρον εἶναι ἀδύνατον ὅλαι αἱ ἕδραι νὰ ἔχουν περισσοτέρας τῶν 5 πλευρῶν ἢ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι νὰ ἔχουν περισσοτέρας τῶν 5 ἑδρῶν.

1008. Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει κυρτὸν πολύεδρον ἔχον 7 ἀκμάς.

1009. Κυρτόν τι πολύεδρον ἔχει 5 ἕδρας. Πόσας κορυφὰς δύναται νὰ ἔχῃ τοῦτο; Πόσας ἀκμὰς δύναται νὰ ἔχῃ;

1010. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν κυρτοῦ ἐπιπέδου πολυγώνου ἔχοντος τὸ ἴδιον πλῆθος κορυφῶν μὲ τὸ πολύεδρον.

## ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

**308.** α΄) Ὀνομάζομεν **κανονικὴν στερεὰν γωνίαν** μίαν κυρτὴν στερεὰν γωνίαν ἔχουσαν πάσας τὰς ἕδρας της ἴσας **καὶ** πάσας τὰς διέδρους της ἴσας.

β΄) **Κανονικὸν πολύεδρον.** Καλεῖται κανονικὸν πολύεδρον ἓν κυρτὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πολύεδρον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ πολύγωνα ἴσα καὶ πᾶσαι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι κανονικαὶ καὶ ἴσαι.

Ὁ κύβος π.χ. καὶ τὸ κανονικὸν τετράεδρον εἶναι κανονικὰ πολύεδρα.

**309. α') (Θ) — Πέντε τὸ πολὺ εἴδη κανονικῶν πολυέδρων ὑπάρχουν.**

Θεωροῦνται ὡς κανονικὰ πολύεδρα τοῦ αὐτοῦ εἴδους δύο πολύεδρα, τῶν ὁποίων αἱ στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ἀκμῶν καὶ αἱ ἕδραι τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν (ὅμοια κανονικὰ πολύεδρα).

—Ἔστω ὅτι αἱ ἕδραι κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι κανονικὰ ν-γωνα καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι του μ-εδροι. Ἑκάστη γωνία τυχούσης ἕδρας τοῦ πολυέδρου θὰ εἶναι τότε $\omega = 2 - \frac{4}{\nu}$ ορθ. Τὸ δὲ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν μιᾶς στερεᾶς γωνίας τοῦ πολυέδρου θὰ εἶναι μω. Ἀλλὰ $\mu\omega < 4$ ορθ. καὶ ἑπομένως $\omega < \frac{4}{\mu}$ ορθ.

Συνάγομεν: $2 - \frac{4}{\nu} < \frac{4}{\mu}$ ἤτοι:

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} > \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ μ καὶ ν εἶναι τοὐλάχιστον ἴσοι πρὸς 3. Δὲν δύνανται ὅμως νὰ εἶναι ἀμφότεροι μεγαλύτεροι τοῦ 3, διότι $\mu \geqq 4 \wedge \nu \geqq 4 \Rightarrow 1/\mu + 1/\nu \leqq 1/2$, δηλ. ἡ (1) δὲν ἐπαληθεύεται. Ἑπομένως μόνον ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν δέον νὰ ἔχῃ τὴν τιμὴν 3. Ἔστω ὅτι $\mu = 3$. Τότε ἡ (1) δίδει $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2} \Rightarrow \nu < 6$. Ἑπομένως, ἂν $\mu = 3$, τότε $\nu = 5$ ἢ 4 ἢ 3. Ἔχομεν λοιπὸν διὰ τὴν (1) τρεῖς λύσεις:

$$(\mu = 3,\ \nu = 3),\ (\mu = 3,\ \nu = 4),\ (\mu = 3,\ \nu = 5).$$

Λόγῳ συμμετρίας τῆς (1) θὰ ἔχωμεν ἀκόμη δύο λύσεις:

$$(\mu = 4,\ \nu = 3) \text{ καὶ } (\mu = 5,\ \nu = 3).$$

Ὥστε ὑπάρχουν μόνον 5 δυνατότητες:

$(\nu = 3, \mu = 3,)$ $(\nu = 3, \mu = 4)$, $(\nu = 4, \mu = 3)$, $(\nu = 3, \mu = 5)$, $(\nu = 5, \mu = 3)$, ὅ.ἔ.δ.

**β') Προσδιορισμὸς τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν.** Ἔστω Ε τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν, Κ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν (καὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν) καὶ Α τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν κανονικοῦ πολυέδρου, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ν-γωνα καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι κανονικαὶ μ-εδροι. Ἔχομεν τότε:

(2) $\nu E = 2A$ (ἑκάστη ἀκμὴ ἀνήκει εἰς δύο ἕδρας).

(3) $\mu K = 2A$ (ἑκάστη ἀκμὴ ἀνήκει εἰς δύο στερεὰς γωνίας).

(4) $K + E = A + 2$ (Θεώρημα τοῦ Euler, § **307**).



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ (4) γίνεται λόγῳ τῶν (2) καὶ (3) :

$$\frac{2A}{\mu}+\frac{2A}{\nu}=A+2 \Rightarrow (5)\ \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}+\frac{1}{A}.$$

Γνωρίζοντες τὰ ν καὶ μ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (5) τὸ Α καὶ ἐκ τῶν (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν τὰ Ε καὶ Κ.

Ἔχομεν οὕτω :

i) Διὰ $\nu=\mu=3$ : $A=6$, $E=4$, $K=4$ (κανον. τετράεδρον)
ii) » $\nu=3$, $\mu=4$ : $A=12$, $E=8$, $K=6$ (κανον. 8-εδρον)
iii) » $\nu=4$, $\mu=3$ : $A=12$, $E=6$, $K=8$ (κανον. 6-εδρον)
iv) » $\nu=3$, $\mu=5$ : $A=30$, $E=20$, $K=12$ (κανον. 20-εδρον)
v) » $\nu=5$, $\mu=3$ : $A=30$, $E=12$, $K=20$ (κανον. 12-εδρον)

**310. Τὰ 5 Πλατωνικὰ στερεά.** Αἱ 5 λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου ἀντιστοιχοῦν πραγματικῶς εἰς πέντε εἴδη κανονικῶν πολυέδρων, τὰ ὁποῖα καλοῦνται «τὰ 5 Πλατωνικὰ στερεά» καὶ τὰ ὁποῖα ὄντως κατασκευάζονται.

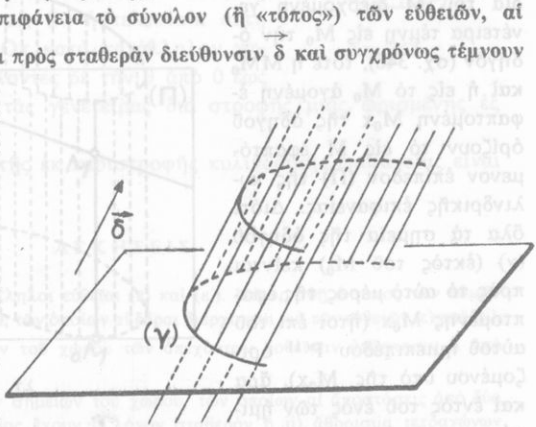
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

## ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ

**311. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.— Καλεῖται κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια τὸ σύνολον (ἢ «τόπος») τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς σταθερὰν διεύθυνσιν $\vec{\delta}$ καὶ συγχρόνως τέμνουν σταθερὰν γραμμὴν (γ) κειμένην ἐπὶ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν $\vec{\delta}$** (σχ. 345).



Σχ. 345

Ἡ γραμμὴ (γ) λέγεται **ὁδηγός.**

Ἑκάστη εὐθεῖα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας λέγεται **γενέτειρα.**

Συνήθως λέγομεν ὅτι ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια παράγεται (ἢ γεννᾶται) «ὑπὸ μεταβλητῆς εὐθείας κινουμένης παραλλήλως πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ τεμνούσης πάντοτε μίαν ὁδηγὸν γραμμήν».

Ἡ ὁδηγὸς δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ καὶ ὑπὸ μὴ ἐπιπέδου γραμμῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Ἐπίπεδος τομὴ** κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται τὸ σύνολον τῶν κοινῶν σημείων τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπιπέδου τέμνοντος τὰς γενετείρας. **Αἱ παράλληλοι τομαὶ μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσαι μεταξύ των,** διότι προκύπτουν ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης διὰ μεταφορᾶς κατὰ ἓν διάνυσμα.

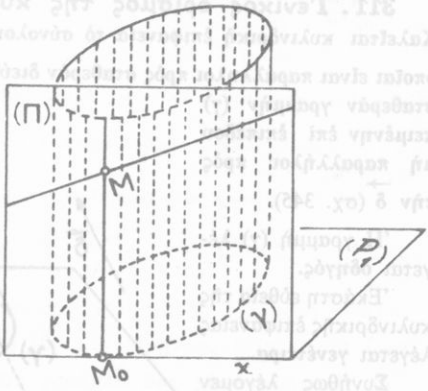
**Κάθετος τομὴ** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας λέγεται πᾶσα τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὰς γενετείρας.

## 312. Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι μὲ ὁδηγὸν περιφέρειαν.

α') Εἰς τὰ ἑπόμενα μόνον τοιαύτας κυλινδρικὰς ἐπιφανείας θὰ ἐξετάσωμεν. Ὡς ἐκ τούτου, ὅταν εἰς τὰ ἑπόμενα λέγομεν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, θὰ ἐξυπακούεται ὅτι αὕτη ἔχει ὁδηγὸν περιφέρειαν.

β') Σημεῖον Ρ λέγεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ὅταν ἡ διὰ τοῦ Ρ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὰς γενετείρας τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον τῆς ὁδηγοῦ περιφερείας εἰς σημεῖον ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἀποτελεῖ τὸ **ἐσωτερικὸν** αὐτῆς.

γ') **Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον Μ αὐτῆς καλεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ περιέχον τὴν διὰ τοῦ Μ διερχομένην γενέτειραν καὶ μὴ ἔχον ἐκτὸς αὐτῆς ἕτερον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ Μ διερχομένη γενέτειρα τέμνῃ εἰς $M_0$ τὴν ὁδηγὸν (σχ. 346), τότε ἡ $MM_0$ καὶ ἡ εἰς τὸ $M_0$ ἀγομένη ἐφαπτομένη $M_0x$ τῆς ὁδηγοῦ ὁρίζουν τὸ εἰς Μ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (Π) τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Διότι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ὁδηγοῦ (γ) (ἐκτὸς τοῦ $M_0$) κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης $M_0x$ (ἤτοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμιεπιπέδου Ρ[1] ὁριζομένου ὑπὸ τῆς $M_0x$), ἄρα καὶ ἐντὸς τοῦ ἑνὸς τῶν ἡμιχώρων, τοὺς ὁποίους ὁρίζει τὸ ἐπίπεδον $MM_0x$. Κατὰ συνέπειαν καὶ ὅλαι αἱ γενέτειραι, πλὴν τῆς $M_0M$, κεῖνται ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἡμιχώρου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον $MM_0x \equiv$ (Π), τὸ ὁποῖον οὕτω οὐδεμίαν ἄλλην γενέτειραν συναντᾷ καὶ οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔχει μετὰ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, πλὴν τῶν σημείων τῆς ευθ$MM_0$.



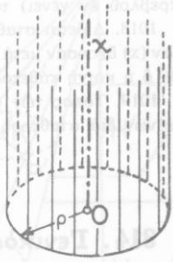
Σχ. 346

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Οἱονδήποτε ἄλλο ἐπίπεδον περιέχον τὴν $MM_0$ καὶ διάφορον τοῦ (Π) τέμνει τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν καὶ κατὰ δευτέραν γενέτειραν διάφορον τῆς $MM_0$, διότι τὸ ἴχνος του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ὁδηγοῦ τέμνει τὴν ὁδηγὸν περιφέρειαν καὶ εἰς ἕτερον σημεῖον, διάφορον τοῦ $M_0$. Ἑπομένως εἰς ἕκαστον σημεῖον M τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας **ἓν μόνον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ὑπάρχει. Κατὰ μῆκος δὲ μιᾶς γενετείρας τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον παραμένει τὸ αὐτό.**

δ') **Εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.** Πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (Π) διερχομένη διὰ τοῦ M δὲν ἔχει ἕτερον σημεῖον κοινὸν μετὰ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἀφοῦ ὅλαι αἱ γενέτειραι (πλὴν τῆς $MM_0$) κεῖνται, ὡς εἴδομεν, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Π). Πᾶσα τοιαύτη εὐθεῖα λέγομεν ὅτι **ἐφάπτεται** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M (σχ. 346).

**313. Ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι.** **Μία κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια μὲ ὁδηγὸν περιφέρειαν καὶ τῆς ὁποίας αἱ γενέτειραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ὁδηγοῦ περιφερείας, καλεῖται «κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς».** Διότι, ἂν καλέσωμεν **ἄξονα** τῆς κυλινδρικῆς ταύτης ἐπιφανείας τὴν εἰς τὸ κέντρον O τῆς ὁδηγοῦ ἀγομένην κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ὁδηγοῦ (σχ. 347), τότε ἡ τυχοῦσα γενέτειρα προκύπτει ἐκ μιᾶς ἄλλης σταθερᾶς γενετείρας, ἂν ἡ τελευταία αὕτη στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα Ox κατὰ κατάλληλον γωνίαν θ (§ **217**). Μεταβάλλοντες δὲ τὴν θ ἀπὸ 0 ἕως 360° λαμβάνομεν πάσας τὰς γενετείρας διὰ στροφῆς μιᾶς ὡρισμένης ἐξ αὐτῶν.



Σχ. 347

— Αἱ κάθετοι τομαὶ τῆς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι περιφέρειαι.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1011. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄). Νὰ ὁρισθῇ ὁ τόπος τῶν ἀκμῶν τῶν διέδρων μέτρου σταθεροῦ θ, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι διέρχονται διὰ τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄).

1012. Τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τῶν ἀπεχόντων δοθεῖσαν ἀπόστασιν α ἀπὸ δοθείσης εὐθείας (ε).

1013. Τίς ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δεδομένας παραλλήλους εὐθείας ἔχουν i) λόγον σταθερὸν ἢ ii) ἄθροισμα τετραγώνων σταθερόν.

1014. Δίδεται σταθερὰ εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῆς. Ποῖος ὁ τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Σ ἐπὶ τὰς εὐθείας τὰς τεμνούσας καθέτως τὴν (ε);

1015. Θεωροῦμεν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ ὁδηγὸν περιφέρειαν (c) καὶ γενετείρας παραλλήλους πρὸς εὐθεῖαν (δ) πλαγίαν πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς (c).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν (δ) εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

ii) Ἐπὶ τῆς θεωρουμένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἐκτὸς τῆς οἰκογενείας τῶν κυκλικῶν τομῶν τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν (c), ὑπάρχει καὶ δευτέρα οἰκογένεια περιφερειῶν.

iii) Νὰ εὑρεθῇ ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας διάφορον τῶν ἐπιπέδων τῶν εὑρεθέντων εἰς τὸ ἐρώτημα i).

1016. i) Δίδονται δύο κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς μὲ παραλλήλους ἄξονας. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον ἀμφοτέρων. Διερεύνησις. ii) Πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐφαπτομένου μιᾶς κυλινδρικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας ἔχει μετὰ τοῦ ἄξονος τῆς ἐπιφανείας ἐλαχίστην ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ὁδηγοῦ περιφερείας. iii) Δοθεισῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) τίς ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἔχουν ἐλαχίστην ἀπόστασιν ἀπὸ μὲν τῆς ($ε_1$) ἴσην πρὸς α, ἀπὸ δὲ τῆς ($ε_2$) ἴσην πρὸς β, ὅπου α, β δεδομένα τμήματα;

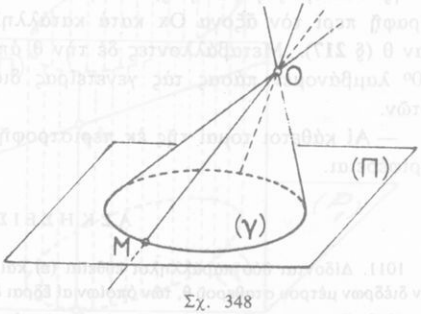
1017. Δοθέντων τριῶν σταθερῶν σημείων Α, Β, Γ μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ τοιούτου, ὥστε τὸ παρ)μον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τοῦ (στρεβλοῦ ἐν γένει) τετραπλεύρου ΜΑΒΓ νὰ ἔχῃ σταθερὸν ἐμβαδόν.

1018. Δίδεται σταθερὰ εὐθεῖα (ε) καὶ σταθερὸν τμῆμα α. Θεωροῦμεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν (x) ἔχουσαν μετὰ τῆς (ε) ἐλαχίστην ἀπόστασιν ἴσην πρὸς α καὶ ἔστω Μ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ κοινὴ κάθετος τῶν (ε) καὶ (x) τέμνει τὴν (x). Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν Μ.

1019. Τόπος τῶν ἀξόνων τῶν ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν τῶν διερχομένων διὰ σταθεροῦ σημείου Α καὶ ἐχουσῶν μίαν σταθερὰν γενέτειραν (ε).

## ΚΩΝΙΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ

**314. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Καλεῖται κωνικὴ ἐπιφάνεια τὸ σύνολον (ἢ ὁ τόπος) τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου Ο καὶ τέμνουν σταθερὰν γραμμὴν (γ) κειμένην ἐπὶ ἐπιπέδου μὴ περιέχοντος τὸ Ο** (σχ. 348).



Σχ. 348

Τὸ σημεῖον Ο λέγεται **κορυφὴ** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἡ γραμμὴ (γ) λέγεται **ὁδηγός.**

Ἑκάστη εὐθεῖα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας λέγεται **γενέτειρα.**

Συνήθως λέγομεν ὅτι ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια παράγεται (ἢ γεννᾶται) «ὑπὸ μεταβλητῆς εὐθείας διερχομένης διὰ σταθεροῦ σημείου καὶ τεμνούσης πάντοτε μίαν ὁδηγὸν γραμμήν».

Ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἔχει δύο **χώνας.** Ἡ μία χώνη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς **ἡμιευθείας** τὰς ἀρχομένας ἐκ τοῦ Ο καὶ τεμνούσας τὴν ὁδηγὸν (γ) ὑποτιθεμένην **κλειστὴν** γραμμὴν καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν πρώτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

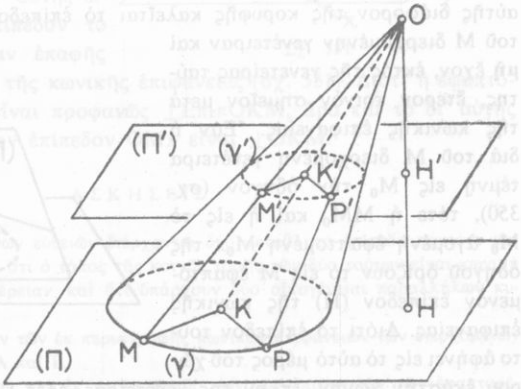
**Ἐπίπεδος τομὴ** κωνικῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἡ γραμμή, ἥτις εἶναι τὸ σύνολον τῶν κοινῶν σημείων τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπιπέδου τέμνοντος τὰς γενετείρας.

## 315. Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι μὲ ὁδηγὸν περιφέρειαν.

α΄) Εἰς τὰ ἑπόμενα μόνον τοιαύτας κωνικὰς ἐπιφανείας ἐξετάζομεν. Διὰ τοῦτο λέγοντες εἰς τὰ ἑπόμενα «κωνικὴ ἐπιφάνεια» θὰ ὑπονοοῦμεν κωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ ὁδηγὸν περιφέρειαν.

**β΄) Παράλληλοι τομαί. (Θ) — Πᾶσα τομὴ κωνικῆς ἐπιφανείας, παράλληλος πρὸς τὴν ὁδηγὸν περιφέρειαν, εἶναι ἐπίσης περιφέρεια.**

Ἔστω (γ΄) ἡ τομὴ κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου (Π΄)//πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) τῆς ὁδηγοῦ (γ). Ἡ εὐθεῖα OK ἡ συνδέουσα τὴν κορυφὴν O μὲ τὸ κέντρον K τῆς ὁδηγοῦ τέμνει τὸ (Π΄) εἰς σταθερόν τι σημεῖον K΄ (σχ. 349).



Σχ. 349

Ἂς λάβωμεν τυχὸν σημεῖον M΄ τῆς (γ΄). Ἡ διὰ τοῦ M΄ διερχομένη γενέτειρα τέμνει τὴν ὁδηγὸν περιφέρειαν εἰς M καὶ εἶναι K΄M΄//KM (τομαὶ παρ/λων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων OK΄M΄ καὶ OKM λαμβάνομεν:

(1) $\frac{K'M'}{KM} = \frac{OK'}{OK} = \frac{OH'}{OH}$, ὅπου OH΄ καὶ OH αἱ ἀποστάσεις τῶν σταθερῶν ἐπιπέδων (Π΄) καὶ (Π) ἀπὸ τοῦ O. Ἐπειδὴ KM=R=ἀκτὶς τῆς ὁδηγοῦ, συνάγομεν ἐκ τῶν (1) ὅτι $K'M' = R \cdot \frac{OH'}{OH}$ =σταθερὸν μῆκος. Ἑπομένως πᾶν σημεῖον τῆς γραμμῆς (γ΄) ἀπέχει τοῦ K΄ σταθερὰν ἀπόστασιν $M'K' = R \cdot \frac{OH'}{OH} = R'$, δηλ. πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς (γ΄) κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (K΄, R΄) εὑρισκομένης ἐντὸς τοῦ (Π΄). **Ἀντιστρόφως** πᾶν σημεῖον P΄ τῆς περιφερείας (K΄, R΄) ἀνήκει εἰς τὴν τομὴν (γ΄). Διότι ἡ εὐθεῖα OP΄ τέμνει τὸ (Π) εἰς σημεῖον P τοιοῦτον, ὥστε KP/K΄P΄ =OK/OK΄= =OH/OH΄, δηλ. :

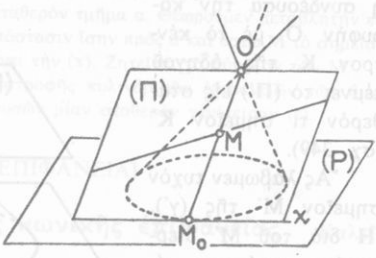
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$KP = K'P' \cdot \frac{OH}{OH'} = R \cdot \frac{OH'}{OH} \cdot \frac{OH}{OH'} = R$$ ἄρα τὸ P ἀνήκει εἰς τὴν ὁδηγὸν καὶ συνεπῶς τὸ P′ ἀνήκει εἰς μίαν γενέτειραν OP· ἀνήκει καὶ εἰς τὸ (Π′), ἄρα ἀνήκει καὶ εἰς τὴν τομὴν (γ′). Ὅθεν (γ′) ≡ (K′, R′).

Τὰ ἴδια ἰσχύουν καὶ ὅταν τὸ (Π′) τέμνῃ τὴν ἑτέραν χώνην, ὁπότε ἡ τομὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁδηγὸς τῆς ἑτέρας χώνης.

γ′) Σημεῖον N λέγεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** μιᾶς χώνης τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὅταν ἡ εὐθεῖα ON ἡ συνδέουσα τὸ N μὲ τὴν κορυφὴν O τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον τῆς ὁδηγοῦ τῆς χώνης εἰς ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς ὁδηγοῦ (τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν θεωρουμένην χώνην).

δ′) **Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** κωνικῆς ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον M αὐτῆς διάφορον τῆς κορυφῆς καλεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ περιέχον τὴν διὰ τοῦ M διερχομένην γενέτειραν καὶ μὴ ἔχον, ἐκτὸς τῆς γενετείρας ταύτης, ἕτερον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ M διερχομένη γενέτειρα τέμνῃ εἰς $M_0$ τὴν ὁδηγὸν (σχ. 350), τότε ἡ $MM_0$ καὶ ἡ εἰς τὸ $M_0$ ἀγομένη ἐφαπτομένη $M_0x$ τῆς ὁδηγοῦ ὁρίζουν τὸ εἰς M ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (Π) τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Διότι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἀφήνει εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου ἑκάστην χώνην (πλὴν τῆς γενετείρας $MM_0$) καὶ ἑπομένως δὲν ἔχει ἄλλο κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· εἶναι δὲ καὶ τὸ μόνον ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς $MM_0$ διερχόμενον καὶ οὐδεμίαν ἄλλην γενέτειραν τέμνον. Ταῦτα ἀποδεικνύομεν συλλογιζόμενοι, ὅπως καὶ διὰ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν (§ **312**, γ′).



Σχ. 350

Ἐπίσης εἶναι φανερὸν ὅτι **κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας παραμένει τὸ αὐτό.** Ἡ σταθερὰ δὲ γενέτειρα, τὴν ὁποίαν περιέχει, λέγεται *«γενέτειρα ἐπαφῆς»*.

Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ M, διάφορος τῆς $MM_0$ καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (Π) (σχ. 350), δὲν ἔχει ἕτερον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, διότι οὔτε τὸ (Π) ἔχει. Μία τοιαύτη εὐθεῖα λέγεται **ἐφαπτομένη τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας** εἰς τὸ σημεῖον M.

**316. Ἐκ περιστροφῆς κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται ἐκείνη, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ O προβάλλεται (ὀρθῶς) εἰς τὸ κέντρον K τῆς ὁδηγοῦ περιφερείας.** (Παράβαλε μὲ § **313**).

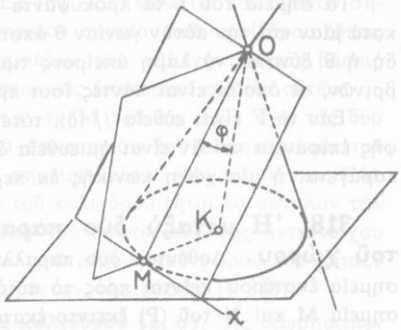
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ εὐθεῖα ΟΚ καλεῖται **ἄξων τῆς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας** (σχ. 351).

Ἡ γωνία ἑκάστης γενετείρας μετὰ τοῦ ἄξονος ἔχει σταθερὸν μέτρον φ (διότι τὸ τρ.ΟΜΚ ἔχει σταθεροῦ μήκους πλευράς, ὅταν ἡ γενέτειρα ΟΜ μετατοπίζεται).

Ἡ γωνία 2φ καλεῖται **«ἄνοιγμα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας»**.

Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον Μ αὐτῆς εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ περιέχον τὴν γενέτειραν ἐπαφῆς ΟΜ καὶ τὸν ἄξονα ΟΚ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (σχ. 351). Διότι ἡ ἐφαπτομένη Μx τῆς ὁδηγοῦ εἶναι προφανῶς ⊥ΕπιπΟΚΜ, ἄρα καὶ τὸ δι' αὐτῆς διερχόμενον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ΟΜx εἶναι ⊥ΟΚΜ.



Σχ. 351

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1020. Διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν διέρχονται δύο μεταβλητὰ ἐπίπεδα πάντοτε κάθετα ἐπ' ἄλληλα. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ τόπος τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο τούτων εἶναι κωνικὴ ἐπιφάνεια μὲ ὁδηγὸν περιφέρειαν καὶ ὅτι ὑπάρχουν δύο οἰκογένειαι παραλλήλων κυκλικῶν τομῶν ἐπ' αὐτῆς.

1021. Τόπος τῶν ἀξόνων τῶν ἐκ περιστροφῆς κωνικῶν ἐπιφανειῶν τῶν διερχομένων διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.

1022. Τόπος τῶν ἀξόνων τῶν ἐκ περιστροφῆς κωνικῶν ἐπιφανειῶν τῶν ἐφαπτομένων μὲ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα δοθέντα.

1023. Δίδεται κωνικὴ ἐπιφάνεια καὶ ἡ ὁδηγὸς αὐτῆς περιφέρεια. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ἐφαπτόμενα αὐτῆς ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ δοθέντος σημείου τοῦ χώρου· διερεύνησις.

1024. Κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς περιέχει τρεῖς γενετείρας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας ἀνὰ δύο. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀνοίγματος αὐτῆς.

## ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

**317.** Ἂς θεωρήσωμεν ἡμιεπίπεδον $Π^{(1)}$ ἔχον σύνορον (δ) καὶ ἐπίπεδον σχῆμα F, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ $Π^{(1)}$ ἢ καὶ ἐπὶ τοῦ συνόρου (δ). Τότε **τὸ σύνολον Σ τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἕκαστον τῶν ὁποίων προκύπτει διὰ στροφῆς ἑνὸς σημείου τοῦ F περὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) κατὰ οἱανδήποτε γωνίαν (§ 217), καλεῖται σχῆμα παραγόμενον ὑπὸ τοῦ F στρεφομένου περὶ τὴν (δ).**

Ἡ εὐθεῖα (δ) καλεῖται «ἄξων» τοῦ ἐκ περιστροφῆς σχήματος.

Ἐὰν τὸ F εἶναι γραμμή, τότε τὸ Σ λέγεται *ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐὰν τὸ F εἶναι ἐπίπεδος περιοχή, τὸ Σ λέγεται *στερεὸν ἐκ περιστροφῆς*.

Τὰ σημεῖα τοῦ Σ τὰ προκύψαντα ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ F διὰ στροφῆς κατὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν θ ἀποτελοῦν ἕνα **μεσημβρινὸν** τοῦ Σ. Ἐπειδὴ ἡ θ δύναται νὰ λάβῃ ἀπείρους τιμάς, ἔχομεν ἄπειρον πλῆθος μεσημβρινῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι πάντες ἴσοι πρὸς τὸ σχῆμα F (§ **217**, β').

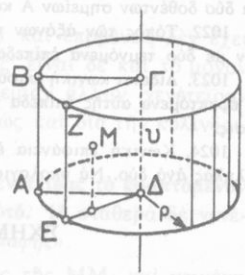
Ἐὰν τὸ F εἶναι εὐθεῖα // (δ), τότε παράγεται κυλινδρικὴ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια καὶ ἂν εἶναι ἡμιευθεῖα ἀρχομένη ἀπὸ σημεῖον τῆς (δ), τότε παράγεται ἡ μία χώνη κωνικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας.

**318. Ἡ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιοχὴ τοῦ χώρου.** Δοθέντων δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) ὅλα τὰ σημεῖα ἑκατέρου κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἑτέρου. Διότι, ἂν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τοῦ (Ρ) ἔκειντο ἑκατέρωθεν τοῦ (Π), τότε τὸ τμῆμα ΜΝ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ (Ρ) θὰ εἶχε κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ (Π).

Σημεῖον Α λέγομεν ὅτι *κεῖται* μεταξὺ τῶν (Π) καὶ (Ρ), ὅταν ὡς πρὸς τὸ (Π) κεῖται εἰς τὸ μέρος τοῦ χώρου τὸ περιέχον τὸ (Ρ) καὶ ὡς πρὸς τὸ (Ρ) κεῖται εἰς τὸ μέρος τοῦ χώρου τὸ περιέχον τὸ (Π). Τὸ σύνολον τῶν Α εἶναι ἡ περιοχὴ τοῦ χώρου μεταξὺ τῶν παρ/λων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ).

## ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

**319. α') Καλεῖται ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος ἢ κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ὑπὸ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου στρεφομένου περὶ τὸν φορέα μιᾶς τῶν πλευρῶν του** (§ **317**) (σχ. 352). Ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ ΓΔ εἶναι τὸ **ὕψος** τοῦ κυλίνδρου, ὁ δὲ φορεὺς αὐτῆς ὁ **ἄξων** τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 352

Οἱ κύκλοι οἱ γραφόμενοι ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τῶν καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα καλοῦνται **«βάσεις»** τοῦ κυλίνδρου καὶ τέλος ἡ ἐπιφάνεια ἡ γραφομένη ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τῆς παρ/λου πρὸς τὸν ἄξονα καλεῖται **παράπλευρος** (ἢ **κυρτὴ**) **ἐπιφάνεια** τοῦ κυλίνδρου. Αὕτη εἶναι τμῆμα τῆς ἀπεράντου κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἣν διαγράφει ἡ εὐθεῖα ΑΒ. Αἱ διάφοροι θέσεις, ἃς λαμβάνει τὸ ΑΒ κατὰ τὴν στροφήν, λέγονται **γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου.**

**Ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου** καλεῖται ἡ ἕνωσις τῶν δύο βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας, δηλ. ἡ περικλείουσα τὸν κύλινδρον ἐπιφάνεια.

Ὁ ἐκ περιστροφῆς κύλινδρος εἶναι μεγέθει ὡρισμένος ἐκ τῶν στοιχείων ρ καὶ υ : **ἀκτὶς βάσεως καὶ ὕψος.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β΄) Ἐσωτερικόν.** Πᾶν σημεῖον Μ τοῦ στερεοῦ κυλίνδρου ἀνῆκον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς μεσημβρινοῦ ΓΔΕΖ (σχ. 352) καλεῖται ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ. Βλέπομεν ὅτι πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κυλίνδρου (ὅπως τὸ Μ) κεῖται μεταξὺ τῶν παρ/λων ἐπιπέδων τῶν περιεχόντων τὰς βάσεις **καὶ** προβάλλεται (ὀρθῶς) ἐπὶ τῶν βάσεων εἰς ἐσωτερικὰ σημεῖα αὐτῶν.

**Ἀντιστρόφως,** ἂν ἓν σημεῖον (π.χ. τὸ Μ τοῦ σχ. 352) ἔχῃ τὰς δύο ταύτας ἰδιότητας, τότε κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ μεσημβρινοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου (καὶ τοῦ ἄξονος ΓΔ). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου (ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων αὐτοῦ) εἶναι τομὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς ἀντιστοίχου κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (§ **312,** β΄) καὶ τοῦ μέρους τοῦ χώρου τοῦ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν περιεχόντων τὰς βάσεις (§ **318**).

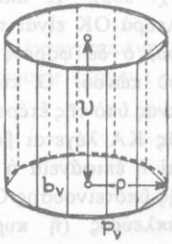
**γ΄) Ὄγκος τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου (ρ, υ).** Ἂς θεωρήσωμεν κανονικὸν πρῖσμα *ἐγγεγραμμένον* εἰς τὸν κύλινδρον (ρ, υ) (σχ. 353), δηλ. πρῖσμα, οὗτινος αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα ἐκ ν πλευρῶν ἐγγεγραμμένα εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ οὗτινος αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου. Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος τούτου θεωρεῖται ὡς μία κατ' ἔλλειψιν προσέγγισις τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, τόσον καλλιτέρα, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ ν. Ὡς ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου ὁρίζεται **τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ πρίσματος, ὅταν τὸ πλῆθος ν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος τούτου τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.** Ἐὰν δηλ. $b_\nu$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πρίσματος ἔχομεν

$$(1) \qquad V_{\text{κυλίνδρου}} = (\text{ἐξ ὁρισμοῦ}) \lim_{\nu\to\infty} (b_\nu \cdot \upsilon)$$

Ἀλλὰ $\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \pi\rho^2$, συνεπῶς

$$(2) \qquad V_{\text{κυλίνδρου}}(\rho, \upsilon) = \boxed{\pi\rho^2\upsilon} = (\text{ἐμβαδὸν βάσεως} \times \text{ὕψος}).$$

**δ΄) Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας:** Τὸ ἐμβαδὸν τῆς **παραπλεύρου ἐπιφανείας** τυχόντος κανονικοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν ἐκ περιστροφῆς κύλινδρον θεωρεῖται ὡς μία κατ' ἔλλειψιν προσέγγισις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τόσον καλλιτέρα, ὅσον περισσοτέρας πλευρὰς ἔχει ἡ βάσις τοῦ πρίσματος τούτου.



Σχ. 353

Ἐὰν $p_\nu$ ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, τότε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πρίσματος ἔχει ἐμβαδὸν $p_\nu \cdot \upsilon$. Ὡς ἐμβαδὸν δὲ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ὁρίζεται **τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν $p_\nu \cdot \upsilon$ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πρίσματος, ὅταν $\nu \to \infty$.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

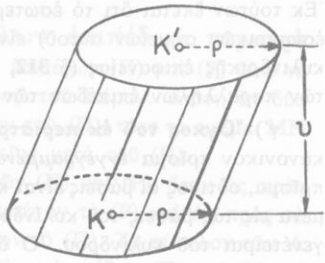
Ἤτοι $E_{\text{κυρτῆς ἐπιφ.}} = (\text{ἐξ ὁρισμοῦ}) \lim\limits_{\nu \to \infty}\{p_\nu \cdot \upsilon\}$.

Ἐπειδὴ $\lim\limits_{\nu \to \infty} p_\nu = 2\pi\rho$, διὰ τοῦτο :

$$E_{\text{κυρτῆς ἐπιφ.}} = E_{\text{κυρτ.}} = \boxed{2\pi\rho\upsilon} \ (= \text{περιφέρεια βάσεως} \times \text{ὕψος}).$$

ε΄) **Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας** τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο βάσεων καὶ τῆς παραπλεύρου (ἢ κυρτῆς) ἐπιφανείας : $\boxed{2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\upsilon}$.

**320. Πλάγιος κυκλικὸς κύλινδρος.** Δύο παράλληλοι **κυκλικαὶ** τομαὶ μιᾶς ὄχι ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ τὸ μεταξὺ τούτων μέρος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας περικλείουν στερεὸν καλούμενον *«πλάγιος κυκλικὸς κύλινδρος»*. **Βάσεις** τούτου εἶναι αἱ δύο κυκλικαὶ τομαὶ καὶ **ὕψος** αὐτοῦ ἡ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων ἀπόστασις υ (σχ. 354). Ὁ ὄγκος του ὁρίζεται ὡς ὅριον τοῦ ὄγκου ἐγγεγραμμένου **πλαγίου** πρίσματος μὲ βάσεις κανονικὰ πολύγωνα καὶ εὑρίσκεται μὲ τὴν ἰδίαν διαδικασίαν (τῆς § 319) ὅτι :

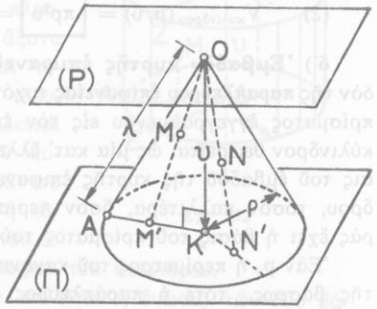


Σχ. 354

Ὄγκος πλαγίου κυκλικοῦ κυλίνδρου $= \pi\rho^2\upsilon$ (= ἐμβαδὸν βάσεως × ὕψος).

## ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

**321.** α΄) **Καλεῖται ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἢ κῶνος ἐκ περιστροφῆς τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ὑπὸ ὀρθογωνίου τριγώνου στρεφομένου (§ 317) περὶ μίαν κάθετον πλευράν του** (σχ. 355). Ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ ΟΚ εἶναι τὸ **ὕψος** τοῦ κώνου, ὁ δὲ φορεὺς αὐτῆς ὁ **ἄξων** τοῦ κώνου. Ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς ἑτέρας καθέτου πλευρᾶς ΚΑ λέγεται **βάσις** τοῦ κώνου καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ γραφομένη ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης ΟΑ καλεῖται **παράπλευρος** (ἢ **κυρτὴ**) ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Αὕτη εἶναι τμῆμα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἣν διαγράφει ἡ ἀκτὶς (Ο, Α), ἡ δὲ κορυφὴ τῆς κωνικῆς ταύτης ἐπιφανείας λέγεται καὶ **«κορυφὴ τοῦ κώνου»**. Αἱ διάφοροι θέσεις, ἃς λαμβάνει ἡ ὑποτείνουσα ΟΑ=λ κατὰ τὴν περιστροφήν, λέγον-



Σχ. 355

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ται **γενέτειραι** τοῦ κώνου. **Ὁλικὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κώνου καλεῖται ἡ ἕνωσις τῆς βάσεως καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

Ὁ ἐκ περιστροφῆς κῶνος εἶναι μεγέθει ὡρισμένος ἐκ τῶν στοιχείων ρ, υ : ἀκτὶς βάσεως καὶ ὕψος. Τρίτον στοιχεῖον τοῦ κώνου εἶναι ἡ **πλευρὰ** ἢ **γενέτειρα** λ αὐτοῦ συνδεομένη μὲ τὰ ρ καὶ υ διὰ τῆς σχέσεως $\lambda = \sqrt{\rho^2 + \upsilon^2}$.

**β') Ἐσωτερικὸν** σημεῖον τοῦ κώνου εἶναι πᾶν σημεῖον, τὸ ὁποῖον προέρχεται διὰ στροφῆς ἑνὸς ἐσωτερικοῦ σημείου τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΑ τοῦ παράγοντος τὸν κῶνον, δηλαδὴ πᾶν σημεῖον κείμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς μεσημβρινοῦ. Ἂν καλέσωμεν (Ρ) τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Ο καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) τῆς βάσεως, τότε πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον Μ τοῦ μεσημβρινοῦ ΟΚΑ κεῖται μεταξὺ τῶν (Π) καὶ (Ρ) **καὶ** εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἀντιστοίχου κωνικῆς ἐπιφανείας (§ **315**, γ'), ὅπως βλέπομεν ἀμέσως ἀπὸ τὸ σχ. 355.

**Ἀντιστρόφως,** πᾶν σημεῖον Ν πληροῦν τὰς δύο ταύτας προϋποθέσεις εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κώνου, διότι θὰ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ μεσημβρινοῦ, οὗτινος τὸ ἐπίπεδον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ Ν καὶ τὸν ἄξονα ΟΚ (σχ. 355). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κώνου (δηλ. τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων αὐτοῦ) εἶναι τομὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς ἀντιστοίχου κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ μέρους τοῦ χώρου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν παρ/λων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ).

**γ') Ὄγκος τοῦ κώνου ἐκ περιστροφῆς.** Ἂν θεωρήσωμεν κανονικὴν πυραμίδα *ἐγγεγραμμένην* εἰς τὸν κῶνον, δηλ. ἔχουσαν βάσιν κανονικὸν πολύγωνον ἐκ ν πλευρῶν ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς γενετείρας (σχ. 356), τότε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης θεωρεῖται ὡς μία κατ' ἔλλειψιν προσέγγισις τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου καὶ μάλιστα, τόσον καλλιτέρα, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ ν. Ὡς ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου **ὁρίζεται τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου τῆς ἐγγεγραμμένης κανονικῆς πυραμίδος διὰ ν→∞, ὅπου ν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος ταύτης.**

Ἐὰν λοιπὸν $b_\nu$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς ἐγγεγραμμένης κανονικῆς πυραμίδος καὶ υ τὸ ὕψος αὐτῆς (καὶ τοῦ κώνου), ἔχομεν :

$$(1) \qquad V_{\text{κώνου}} = (\text{ἐξ ὁρισμοῦ}) \lim_{\nu \to \infty} \left\{ \frac{1}{3} b_\nu \upsilon \right\}.$$

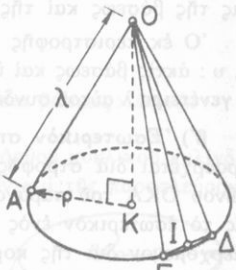
Ἀλλὰ $\lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu = \pi\rho^2$ καὶ συνεπῶς :

$$(2) \qquad V_{\text{κώνου}} = \boxed{\frac{1}{3} \pi\rho^2\upsilon} \; (= \text{τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως} \times \text{ὕψος}).$$

**δ') Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐκ περιστροφῆς κώνου.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ὁρίζεται ὡς **τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς ἐγγεγραμμένης κανονικῆς πυραμίδος** (βλ. γ'), **ὅταν τὸ πλῆθος ν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος ταύτης αὐξάνεται ἀπεριορίστως.** Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁρίου τούτου λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}\,p_\nu \cdot OI$, ὅπου $p_\nu$ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως καὶ OI τὸ παράπλευρον ὕψος (§ **257**, β'). Ἐκ τοῦ σχήματος 356 βλέπομεν ὅτι, ἂν ΓΔ εἶναι μία πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, θὰ ἔχωμεν $|OΔ—OI|<IΔ$ ἢ $|λ—OI|<ΓΔ/2$.



Σχ. 356

Ἐπειδὴ τοῦ ν αὐξάνοντος, τὸ $|ΓΔ|/2$ καθίσταται μικρότερον οἱουδήποτε θετικοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ, ἕπεται ὅτι διὰ κάθε $ε>0$ ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἰσχύει $|λ—OI|<ε \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} OI=λ$. Εἶναι ἐπίσης $\lim p_\nu = 2πρ$ καὶ ὡς ἐκ τούτου:

Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας = (ἐξ ὁρισμοῦ) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\,p_\nu \cdot OI\right\} =$

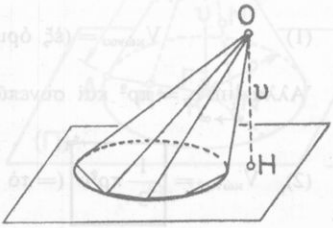
$= \frac{1}{2}\lim\limits_{\nu\to\infty} p_\nu \cdot \lim\limits_{\nu\to\infty} OI = \frac{1}{2}\cdot 2πρ\cdot λ = πρλ$. Ἂν διὰ $E_{κυρτ.}$ παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου μὲ ἀκτῖνα βάσεως ρ καὶ γενέτειραν λ, θὰ ἔχωμεν κατὰ τ' ἀνωτέρω $E_{κυρτ.} = \boxed{πρλ}$ (= ἥμισυ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.)

ε') **Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας** τοῦ ἐκ περιστροφῆς κώνου μὲ στοιχεῖα ρ, υ, λ (ἀκτίς, ὕψος, πλευρὰ) εἶναι προφανῶς,

$$\boxed{E_{ολ} = πρ^2 + πρλ.}$$

**322. Πλάγιος κυκλικὸς κῶνος.** Μία **κυκλικὴ** τομὴ κωνικῆς τινος, ὄχι ἐκ περιστροφῆς, ἐπιφανείας καὶ τὸ μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς τομῆς μέρος τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (σχ. 357) περικλείουν στερεὸν καλούμενον *«πλάγιος κυκλικὸς κῶνος»*.

Βάσις τούτου εἶναι ἡ κυκλικὴ τομὴ καὶ ὕψος ἡ ἀπόστασις υ τῆς κορυφῆς Ο τοῦ κώνου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου κυκλικοῦ κώνου ὁρίζεται ὡς τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου ἐγγεγραμμέ-



Σχ. 357

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νης εἰς αὐτὸν πυραμίδος μὲ βάσιν κανονικὸν πολύγωνον καὶ ὑπολογίζεται μὲ τὴν ἰδίαν διαδικασίαν, δι' ἧς ὑπελογίσθη ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κώνου (§ **319**, γ'):

Ὄγκος πλαγίου κυκλικοῦ κώνου $= \frac{1}{3}$ πρ²υ (δηλ. 1/3 τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος).

## ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

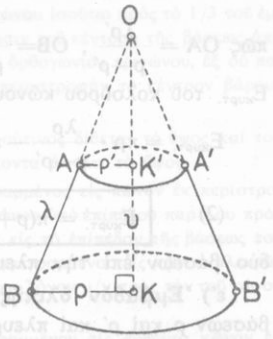
**323.** **α') Καλεῖται κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ὑπὸ ὀρθογωνίου τραπεζίου στρεφομένου περὶ τὴν πλευράν, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.**

Χάριν συντομίας, ὅταν εἰς τὰ ἑπόμενα λέγομεν «κόλουρος κῶνος», θὰ ἐννοοῦμεν «κόλουρον κῶνον ἐκ περιστροφῆς». Ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ ΚΚ' = υ τοῦ τραπεζίου ΚΚ'ΑΒ τοῦ διαγράφοντος τὸν κόλουρον κῶνον (σχ. 358) εἶναι τὸ **ὕψος** τοῦ κολούρου κώνου, ὁ δὲ φορεὺς αὐτῆς ὁ **ἄξων** τοῦ κολούρου κώνου. Οἱ κύκλοι οἱ διαγραφόμενοι ὑπὸ τῶν δύο βάσεων ΚΒ = ρ, Κ'Α' = ρ' τοῦ τραπεζίου ΚΚ'ΑΒ εἶναι αἱ δύο **βάσεις** τοῦ κολούρου κώνου καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ γραφομένη ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ = λ καλεῖται **παράπλευρος** ἢ **κυρτὴ** ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου. Αἱ διάφοροι θέσεις, ἃς λαμβάνει ἡ ΑΒ κατὰ τὴν περιστροφήν, λέγονται **γενέτειραι** ἢ **πλευραὶ** τοῦ κολούρου κώνου. **Ὁλικὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κολούρου κώνου καλεῖται ἡ ἕνωσις τῶν δύο βάσεων μετὰ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

Τὰ τρία στοιχεῖα: ρ, ρ', υ καθορίζουν, μεγέθει, τὸν κόλουρον κῶνον. Τὸ τέταρτον στοιχεῖον λ συνδέεται μὲ τὰ τρία προηγούμενα διὰ τῆς σχέσεως $\lambda = \sqrt{\upsilon^2 + (\rho - \rho')^2}$.

**β') Ἐσωτερικὸν** σημεῖον τοῦ κολούρου κώνου εἶναι πᾶν σημεῖον προερχόμενον διὰ στροφῆς (περὶ τὴν ΚΚ') ἑνὸς ἐσωτερικοῦ σημείου τοῦ τραπεζίου ΚΚ'ΑΒ τοῦ διαγράφοντος αὐτὸν ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, πᾶν σημεῖον κείμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς μεσημβρινοῦ.

Ἐὰν Ο εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΒΑ καὶ ΚΚ', τότε τὸ μὲν τραπέζιον εἶναι διαφορὰ τῶν δύο τριγώνων ΟΒΚ καὶ ΟΑΚ', ὁ δὲ κόλουρος κῶνος διαφορὰ τῶν δύο κώνων τῶν γραφομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων τούτων. Δηλ. πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κολούρου ἀνήκει εἰς τὸν μεγαλύτερον κῶνον ΟΒΒ' (σχ. 358), χωρὶς νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν μικρότερον ΟΑΑ'.



Σχ. 358

γ') **Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.** Ἐκ τῆς ἀπαιτήσεως, ὅπως ὁ ὄγκος εἶναι ἀθροιστικός, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου ἀθροιζόμενος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ μικροτέρου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κώνου ΟΑΑ΄ (σχ. 358) **δέον** νὰ δίδῃ τὸν ὄγκον τοῦ μεγαλυτέρου κώνου ΟΒΒ΄. Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν ὡς ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν δύο κώνων, οἱ ὁποῖοι (κῶνοι) ἔχουν διαφορὰν τὸν κόλουρον κῶνον. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΚ΄ καὶ ΟΒΚ ὑπολογίζομεν τὰ ὕψη τῶν δύο τούτων κώνων :

$$\frac{OK'}{\rho'}=\frac{OK}{\rho}=\frac{OK-OK'}{\rho-\rho'}=\frac{\upsilon}{\rho-\rho'}\Rightarrow OK'=\frac{\upsilon\rho'}{\rho-\rho'},\ OK=\frac{\upsilon\rho}{\rho-\rho'}.$$

Ἑπομένως ἔχομεν :

Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου=(ἐξ ὁρισμοῦ) Ογκ τοῦ ΟΒΒ΄—Ογκ τοῦ ΟΑΑ΄ $=\frac{1}{3}\pi\rho^2\cdot OK-\frac{1}{3}\pi\rho'^2\,OK'=\frac{1}{3}\pi\left(\rho^2\cdot\frac{\upsilon\rho}{\rho-\rho'}-\rho'^2\cdot\frac{\upsilon\rho'}{\rho-\rho'}\right)=$

$$=\frac{1}{3}\pi\upsilon\frac{\rho^3-\rho'^3}{\rho-\rho'}=\frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho^2+\rho\rho'+\rho'^2).$$

Τελικῶς ὁ τύπος

$$(1)\qquad \boxed{V=\frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho^2+\rho\rho'+\rho'^2)}$$

παρέχει τὸν ὄγκον V κολούρου κώνου μὲ ἀκτῖνας βάσεων ρ καὶ ρ΄ καὶ ὕψος υ.

**δ΄) Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.** Ἐπειδὴ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ΑΑ΄Β΄Β (σχ. 358) εἶναι διαφορὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο κώνων ΟΑΑ΄ καὶ ΟΒΒ΄, ὁρίζομεν ὡς ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας τὴν διαφορὰν τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο τούτων κώνων :

Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ΑΑ΄Β΄Β=(ἐξ ὁρισμοῦ) ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ΟΒΒ΄—ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ΟΑΑ΄ $=\pi\rho\cdot OB-\pi\rho'\cdot OA$. Ἀλλ' ἔχομεν : $\frac{OA}{\rho'}=\frac{OB}{\rho}=\frac{OB-OA}{\rho-\rho'}=\frac{\lambda}{\rho-\rho'}$ καὶ συνεπῶς $OA=\frac{\lambda\rho'}{\rho-\rho'}$, $OB=\frac{\lambda\rho}{\rho-\rho'}$. Ἑπομένως διὰ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν $E_{\kappa\upsilon\rho\tau.}$ τοῦ κολούρου κώνου ἰσχύει ὅτι :

$$E_{\kappa\upsilon\rho\tau.}=\pi\rho\cdot\frac{\lambda\rho}{\rho-\rho'}-\pi\rho'\frac{\lambda\rho'}{\rho-\rho'}=\pi\lambda\frac{\rho^2-\rho'^2}{\rho-\rho'}=\pi\lambda(\rho+\rho').$$ Ὅθεν :

$$(2)\qquad \boxed{E_{\kappa\upsilon\rho\tau.}=\pi(\rho+\rho')\lambda}$$ (=τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὴν πλευράν).

**ε΄) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας** τοῦ κολούρου κώνου μὲ ἀκτῖνας βάσεων ρ καὶ ρ΄ καὶ πλευρὰν λ :

$$(3)\qquad E_{o\lambda}=\pi\rho^2+\pi\rho'^2+\pi(\rho+\rho')\lambda.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ς') Εἰς τοὺς ἰδίους τύπους (1) καὶ (2) καταλήγομεν εὐχερῶς, ἂν ὁρίσωμεν ὡς ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτόν, τῆς ὁποίας τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ἑκάστης βάσεως αὐξάνεται ἀπεριορίστως, ὡς ἐμβαδὸν δὲ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ὁρίσωμεν τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς ὡς ἄνω κολούρου πυραμίδος.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1025. Ὁ ὄγκος κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι $3\sqrt{3}$ κυβ. μέτρα. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κυλίνδρου.

1026. Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἔχει ἐμβαδὸν $3\sqrt{3}$. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κυλίνδρου.

1027. Ἡ ἀκτὶς βάσεως ρ καὶ τὸ ὕψος υ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου πληροῦν τὴν σχέσιν $1/\rho + 1/\upsilon = 1/2$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας.

1028. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ διαγραφομένου ὑπὸ ὀρθογωνίου παρ/μου στρεφομένου παρὶ ἄξονα παράλληλον πρὸς μίαν πλευράν του καὶ μὴ τέμνοντα αὐτὸ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν διαγράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου κατὰ τὴν περιστροφήν.

Νὰ διατυπωθῇ καὶ ἀποδειχθῇ ἀνάλογον θεώρημα διὰ τὴν ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου διαγραφομένην ἐπιφάνειαν.

1029. Ποῖος ὁ ὄγκος κώνου, οὗτινος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι 15π (τετρ. μέτρα), ἡ δὲ ἀκτὶς βάσεως αὐτοῦ 3 μέτρα;

1030. Ποῖος ὁ ὄγκος κώνου περιγεγραμμένου περὶ κανονικὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα ἔχουσαν ὄγκον $2m^3$;

1031. Εἰς τὴν βάσιν ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ὕψους υ χαράσσεται χορδὴ ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν, εἰς ἃ διαιρεῖται ὁ κῶνος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου καὶ τῆς χορδῆς.

Ἀνάλογον πρόβλημα, ὅταν τὸ μῆκος τῆς χορδῆς εἶναι $\rho\sqrt{2}$ ἢ $\rho\sqrt{3}$.

1032. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπὸ μίαν γενέτειραν. Ἐπίσης ὅτι ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ παράγεται, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν διαγράφει κατὰ τὴν περιστροφὴν τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου τούτου.

1033. Νὰ κατασκευασθῇ κῶνος (ἐκ περιστροφῆς), οὗτινος δίδεται τὸ ὕψος καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἰσοδυναμεῖ πρὸς κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα τὸ ὕψος.

1034. i) Κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς κῶνον ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἡ μία βάσις τοῦ κυλίνδρου εἶναι τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου παρ/λου πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἄλλη βάσις του εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ii) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου εἰς κῶνον πλευρᾶς λ καὶ ὕψους υ, ὅταν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἔχῃ λόγον μ/ν πρὸς τὴν τοῦ κώνου τοῦ ἐδραζομένου ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου.

1035. Δοθέντος κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἐγγεγραμμένου εἰς δοθέντα κῶνον ἐκ περιστροφῆς, νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κῶνον καὶ δεύτερος κύλινδρος ἰσοδύναμος πρὸς τὸν



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρῶτον (δηλ. ἔχων τὸν αὐτὸν ὄγκον μὲ τὸν πρῶτον). Νὰ γίνῃ καὶ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῶν διαστάσεων τοῦ ζητουμένου κυλίνδρου.

1036. Περὶ δοθέντα κύλινδρον νὰ περιγραφῇ κῶνος τοῦ ἐλαχίστου δυνατοῦ ὄγκου.

1037. Ἐὰν ἀπὸ κολούρου κώνου (ἐκ περιστροφῆς) ἀφαιρεθῇ ὁ κῶνος ὁ ἔχων κορυφὴν τὸ κέντρον Κ τῆς μιᾶς βάσεως καὶ βάσιν τὴν ἑτέραν βάσιν, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀπομένοντος στερεοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ Κ ἀπὸ μιᾶς γενετείρας αὐτοῦ.

1038. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ΑΒ = 4 μέτρα καὶ ΑΓ = 3 μέτρα. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ τρίγωνον στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν, τὰς ὁποίας γράφουν τὰ τμήματα ΒΓ καὶ ΑΔ, ἔχουν λόγον 625 : 192.

1039. Εὐθεῖα (ε) ἐφάπτεται περιφερείας (Κ, ρ). Θεωροῦμεν διάμετρον ΒΓ τοῦ κύκλου (Κ, ρ) καὶ τὴν προβολὴν αὐτῆς, Β΄Γ΄, ἐπὶ τὴν (ε). Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τῆς ΒΓ οὕτως, ὥστε διὰ περιστροφῆς τοῦ σχήματος περὶ τὴν (ε) ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ τραπεζίου ΒΓΓ΄Β΄ κολούρου κώνου νὰ ἔχῃ λόγον λ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου (Κ, ρ). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ λ, διὰ τὰς ὁποίας ἔχει τὸ πρόβλημα λύσιν.

## ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ ΤΜΗΜΑ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΝ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ

**324.** (Θ)—**Ἔστω ὅτι δίδεται ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα (ε) καὶ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, μὴ τέμνον τὴν (ε). Τότε τὸ ἐμβαδὸν $E_{AB}$ τῆς ἐπιφανείας, ἣν διαγράφει τὸ τμῆμα ΑΒ στρεφόμενον περὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) ἐκφράζεται κατὰ τοὺς κάτωθι τρεῖς διαφορετικοὺς τρόπους :**

**i) $E_{AB} = \pi(\alpha + \beta) \cdot (AB)$, ὅπου α καὶ β αἱ ἀποστάσεις τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΒ ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.**

**ii) Τὸ $E_{AB}$ ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν διαγράφει τὸ μέσον τοῦ ΑΒ κατὰ τὴν περιστροφήν.**

**iii) Τὸ $E_{AB}$ ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὸ μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ τμῆμα μέχρι τοῦ ἄξονος (δηλ. ἀκτῖνα ΜΚ, ὅπου Μ μέσον τοῦ ΑΒ, ΜΚ⊥ΑΒ, Κ∈(ε)) ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς.** (Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑποτίθεται ὅτι τὸ ΑΒ δὲν εἶναι ⊥(ε)).

*Ἀπόδειξις.* i)—Ἐὰν τὸ ΑΒ δὲν εἶναι // (ε) καὶ οὐδὲν ἄκρον του εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς (ε), τότε διαγράφει κολουροκωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ ἀκτῖνας βάσεων α καὶ β καὶ γενέτειραν ΑΒ. Ἑπομένως ἐφαρμόζεται ὁ τύπος (2) τῆς § **323**,δ΄.

—Ἐὰν τὸ ἄκρον Α τοῦ ΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς (ε), τότε τὸ ΑΒ γράφει κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου ἐκ περιστροφῆς, ὁπότε $E_{AB} = \pi\beta \cdot AB = \pi(\alpha + \beta)AB$ (διότι $\alpha = 0$).

—Ἐὰν ΑΒ//(ε), ὁπότε $\alpha = \beta$, τότε ἐφαρμόζεται ὁ τύπος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου (§ **319**, δ΄) καὶ ὁ ἀποδεικτέος τύπος ἰσχύει.

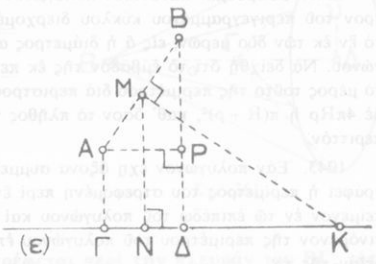
—Ἐὰν ΑΒ⊥(ε), τότε ἡ ἐπιφάνεια, ἣν διαγράφει τὸ ΑΒ, εἶναι κυκλικὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δακτύλιος, δηλ. διαφορὰ δύο κύκλων μὲ ἀκτῖνας α καὶ β καὶ εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι πάλιν ὁ ἀποδεικτέος τύπος ἰσχύει.

ii)—Ἐὰν MN ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου M τοῦ AB ἀπὸ τῆς (ε) (σχ. 359), τότε $MN=(\alpha+\beta)/2$ εἰς πᾶσαν περίπτωσιν καὶ ὁ τύπος $E_{AB}=\pi(\alpha+\beta)\,AB$ γίνεται $E_{AB}=\pi\cdot 2MN\cdot AB=AB\,(2\pi\cdot MN)$ καὶ ἐκφράζει τὸ ἀποδεικτέον.

iii)—Ἔστω ΓΔ ἡ προβολὴ τοῦ AB ἐπὶ τὴν (ε) (σχ. 359) καὶ MK τὸ μεσοκάθετον τοῦ AB τμῆμα μέχρι τοῦ ἄξονος (ε). Ἂν φέρωμεν τὴν $AP\perp B\Delta$, τὰ τρίγωνα MNK καὶ ABP εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των μίαν πρὸς μίαν καθέτους. Ἑπομένως: $\frac{MN}{AP}=\frac{MK}{AB}$ καὶ ἐπειδὴ $AP=\Gamma\Delta$, ἔχομεν:



Σχ. 359

$\frac{MN}{\Gamma\Delta}=\frac{MK}{AB}\Rightarrow MN\cdot AB=MK\cdot\Gamma\Delta$. Ἐκ ταύτης ὁ προηγούμενος τύπος $E_{AB}=2\pi(MN)\cdot(AB)$ γίνεται $E_{AB}=\{2\pi MK\}\cdot\Gamma\Delta=$ μῆκος περιφερείας ἀκτῖνος MK ×προβολὴ τοῦ AB ἐπὶ τὸν ἄξονα.

—Ἐὰν $AB//(\varepsilon)$, βλέπομεν ἀμέσως ὅτι τὸ ἀνωτέρω πάλιν ἰσχύει.

**325. Ἐπιφάνεια γραφομένη ὑπὸ τεθλασμένης γραμμῆς στρεφομένης περὶ ἄξονα.** Ἔστω ὅτι δίδεται ἐν ἐπιπέδῳ εἷς ἄξων περιστροφῆς (ε) καὶ τεθλασμένη γραμμὴ $A_1A_2A_3...A_\nu$ ἀνοικτὴ ἢ κλειστή, τῆς ὁποίας οὐδεμία πλευρὰ τέμνει τὸν ἄξονα.

Ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ τῆς $A_1A_2...A_\nu$ γραφομένη ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια εἶναι ἕνωσις τῶν ἐπιφανειῶν, τὰς ὁποίας διαγράφουν τὰ διαδοχικὰ τμήματα $A_1A_2$, $A_2A_3$,...$A_{\nu-1}A_\nu$, διὰ τοῦτο ὁρίζομεν ὡς ἐμβαδὸν αὐτῆς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὑπὸ τῶν τμημάτων διαγραφομένων ἐπιφανειῶν. Ἤτοι:

$$E_{A_1A_2A_3\ldots A_\nu}=E_{A_1A_2}+E_{A_2A_3}+\ldots E_{A_{\nu-1}A_\nu},$$

ὅπου αἱ ἐπιφάνειαι εἰς τὸ δεύτερον μέλος ὑπολογίζονται μὲ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν τύπων τῆς § **324**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1040. Ἐὰν ἰσόπλευρον τρίγωνον στρέφεται περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ μὴ τέμνοντα αὐτό, τότε ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια ἡ διαγραφομένη ὑπὸ τῆς τριγωνικῆς περιμέτρου ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν διαγράφει τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου κατὰ τὴν περιστροφήν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1041. Δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Ἂν ΒΓ εἶναι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, τὸ δὲ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΚΛ, νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῶν R καὶ ρ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τοῦ ΒΓ διαγραφομένης ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας. (Β, Γ, σημεῖα ἐπαφῆς).

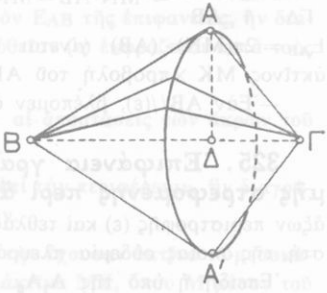
1042. Θεωροῦμεν κανονικὸν πολύγωνον ἀκτῖνος R καὶ ἀποστήματος ρ, μίαν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου διερχομένην διὰ μιᾶς κορυφῆς τοῦ πολυγώνου καὶ τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ ἡ διάμετρος αὕτη χωρίζει τὴν ὅλην περίμετρον τοῦ πολυγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ἀπὸ τὸ μέρος τοῦτο τῆς περιμέτρου διὰ περιστροφῆς περὶ τὴν θεωρηθεῖσαν διάμετρον ἰσοῦται μὲ $4\pi R\rho$ ἢ $\pi(R+\rho)^2$, καθ' ὅσον τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν.

1043. Ἐὰν πολύγωνον ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας εὐθεῖαν xy, τότε ἡ ἐπιφάνεια, ἣν διαγράφει ἡ περίμετρός του στρεφομένη περὶ ἕτερον ἄξονα x'y' παράλληλον πρὸς τὸν xy, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πολυγώνου καὶ μὴ τέμνοντα τὸ πολύγωνον, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν διαγράφει τυχὸν σημεῖον τῆς xy.

## 326. Τρίγωνον στρεφόμενον περὶ μίαν πλευράν του.

**α') (Θ) — Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τριγώνου βάσεως ΒΓ = α καὶ ὕψους ΑΔ = υ στρεφομένου περὶ τὴν βάσιν του ΒΓ ἰσοῦται μέ :**

$$\boxed{\frac{1}{3}\pi\upsilon^2\alpha}$$



Σχ. 360

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν ὁ ποὺς Δ τοῦ ὕψους εὑρίσκεται μεταξὺ Β καὶ Γ, τότε τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἕνωσις δύο ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ (σχ. 360), τὸ δὲ ἐκ περιστροφῆς στερεὸν εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν δύο κώνων τῶν διαγραφομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων τούτων. Λόγῳ τῆς ἀθροιστικότητος τοῦ ὄγκου, ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο τούτων κώνων, οἵτινες ἔχουν κοινὴν ἀκτῖνα βάσεως ΑΔ καὶ ὕψη ΒΔ, ΓΔ. Ἐὰν διὰ τοῦ $\boxed{V_{\text{στρ. ΑΒΓ}}}$ παραστήσωμεν τὸν ὄγκον τὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ προκύπτοντα, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

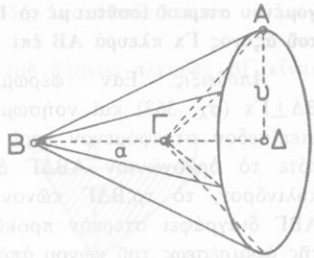
$$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = V_{\text{στρ. ΑΒΔ}} + V_{\text{στρ. ΑΓΔ}}. \quad \text{Ἑπομένως}$$

$$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = \frac{1}{3}\pi\text{ΑΔ}^2\cdot\text{ΒΔ} + \frac{1}{3}\pi\text{ΑΔ}^2\cdot\text{ΔΓ} = \frac{1}{3}\pi\cdot\text{ΑΔ}^2\cdot(\text{ΒΔ}+\text{ΔΓ}) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot\text{ΑΔ}^2\cdot\text{ΒΓ}, \quad \text{ἤτοι :} \quad V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2\alpha.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν τὸ Δ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως ΒΓ (σχ. 361), τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι διαφορὰ τῶν τριγώνων ΒΑΔ καὶ ΑΓΔ καὶ θὰ ἔχωμεν ὁμοίως



Σχ. 361

$$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = V_{\text{στρ. ΒΑΔ}} - V_{\text{στρ. ΓΑΔ}} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\text{ΑΔ}^2\cdot\text{ΒΔ} - \frac{1}{3}\pi\text{ΑΔ}^2\cdot\text{ΓΔ} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\text{ΑΔ}^2\cdot(\text{ΒΔ}-\text{ΓΔ}) =$$

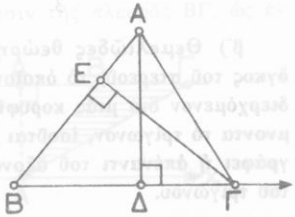
$$= \frac{1}{3}\pi\text{ΑΔ}^2\cdot\text{ΒΓ} = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2\alpha.$$

**β΄) (Θ)—Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὴν πλευράν του ΒΓ, τότε :**

$$V_{\text{στρ.ΑΒΓ}} = \frac{1}{3}E_{\text{ΑΒ}}\cdot\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}E_{\text{ΑΓ}}\cdot\upsilon_\beta$$

**ὅπου $E_{\text{ΑΒ}}$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἣν διαγράφει ἡ πλευρὰ ΑΒ καὶ $\upsilon_\gamma$ τὸ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ταύτην ὕψος.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ἡ $\widehat{\text{Β}}$ ὀξεῖα. Ἂν φέρωμεν τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΓΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε ἐκ τῆς σχέσεως πλευρῶν καὶ ὑψῶν ἔχομεν



Σχ. 362

(1) $\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΓ} = \text{ΓΕ}\cdot\text{ΑΒ}.$

Ἐξ ἄλλου, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, ἔχομεν :

$$V_{\text{στρ.ΑΒΓ}} = \frac{1}{3}\pi\text{ΑΔ}^2\cdot\text{ΒΓ} =$$

$$\frac{1}{3}\pi\cdot\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΔ} = (\text{ἐκ τῆς (1)})\ \frac{1}{3}\pi\cdot\text{ΓΕ}\cdot\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΔ} = \frac{1}{3}\{\pi\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΒ}\}\cdot\text{ΓΕ} =$$

$$\frac{1}{3}E_{\text{ΑΒ}}\cdot\text{ΓΕ}$$ (διότι $E_{\text{ΑΒ}} = \pi\cdot\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΒ}$ κατὰ τὴν § **321**, δ΄) καὶ ἡ ἀποδεικτέα πρότασις ἀληθεύει.

—Ἐὰν ἡ $\widehat{\text{Β}}$ εἶναι ἀμβλεῖα, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει.

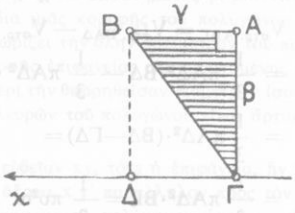
—Ἐὰν ἡ $\widehat{\text{Β}}$ εἶναι ὀρθή, πάλιν ἐλέγχομεν εὐχερῶς τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως.

**327. Τρίγωνον στρεφόμενον περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς του. α΄) Λῆμμα. Ἐὰν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**μὲ $\widehat{A}=90^{o}$ στρέφεται περὶ ἄξονα Γx//AB (σχ. 363), τότε ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ 1/3 τῆς ἐπιφανείας, ἣν διαγράφει ἡ ἀπέναντι τοῦ ἄξονος Γx πλευρὰ AB ἐπὶ τὸ ἐπὶ τὴν AB ὕψος τοῦ τριγώνου.**

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΔ⊥Γx (σχ. 363) καὶ νοήσωμεν τὸ ἡμιεπίπεδον στρεφόμενον περὶ τὴν ΔΓ, τότε τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΔΓ διαγράφει κύλινδρον, τὸ τρ.ΒΔΓ κῶνον καὶ τὸ ΑΒΓ διαγράφει στερεὸν προκῦπτον ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ κώνου ἀπὸ τὸν κύλινδρον. Συνεπῶς καὶ διὰ τοὺς ὄγκους τῶν τριῶν στερεῶν πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰδία σχέσις. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

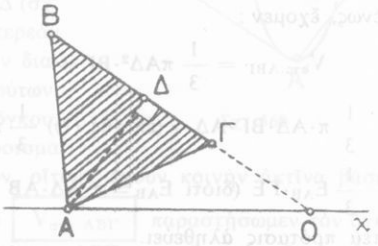


Σχ. 363

$$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = (\text{ἐξ ὁρισμοῦ})\ V_{\text{στρ. ΑΒΔΓ}} - V_{\text{στρ. ΓΒΔ}} =$$
$$= \pi A\Gamma^2\cdot AB - \frac{1}{3}\pi B\Delta^2\cdot\Delta\Gamma = \pi\beta^2\gamma - \frac{1}{3}\pi\beta^2\gamma = \frac{2}{3}\pi\beta^2\gamma =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot(2\pi\beta\gamma)\cdot\beta = \frac{1}{3}E_{AB}\cdot\Gamma A, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

**β΄) Θεμελιῶδες θεώρημα διὰ τοὺς ἐκ περιστροφῆς ὄγκους: Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον διαγράφει τρίγωνον στρεφόμενον περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς του, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ μὴ τέμνοντα τὸ τρίγωνον, ἰσοῦται μὲ τὸ 1/3 τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἣν διαγράφει ἡ ἀπέναντι τοῦ ἄξονος πλευρὰ ἐπὶ τὸ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ταύτην ὕψος τοῦ τριγώνου.**

*Ἀπόδειξις.* i) Ἔστω ὅτι ὁ φορεὺς τῆς ἀπέναντι τοῦ ἄξονος Ax πλευρᾶς ΒΓ (σχ. 364) τέμνει εἰς Ο τὸν ἄξονα Ax. Τότε τὸ τρ.ΑΒΓ καθίσταται διαφορὰ δύο τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΓΑ. Ὁρίζομεν δὲ ὡς ὄγκον τοῦ ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ παραγομένου ἐκ περιστροφῆς περὶ τὸν Ax στερεοῦ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν γραφομένων ὑπὸ τῶν δύο τριγώνων τούτων: ΟΑΒ καὶ ΟΑΓ. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν κατὰ σειράν,



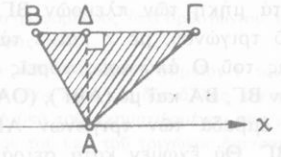
Σχ. 364

$$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = (\text{ἐξ ὁρισμοῦ})\ V_{\text{στρ. ΟΑΒ}} - V_{\text{στρ. ΟΑΓ}} = (\text{βλ. § 326, β΄})$$
$$= \frac{1}{3}E_{OB}\cdot A\Delta - \frac{1}{3}E_{O\Gamma}\cdot A\Delta = \frac{1}{3}\{E_{OB} - E_{O\Gamma}\}\cdot A\Delta = \frac{1}{3}E_{B\Gamma}\cdot A\Delta.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε ἰσχύει, $V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = \frac{1}{3} E_{\text{ΒΓ}} \cdot \text{ΑΔ}$, δηλ. τὸ ἀποδεικτέον.

ii) Ἔστω ὅτι ὁ φορεὺς τῆς ἀπέναντι τοῦ ἄξονος πλευρᾶς ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς Αx. Τότε, ἂν ἡ κορυφὴ Α προβάλλεται ἐπὶ τὴν ευθ ΒΓ εἰς σημεῖον Δ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ (σχ. 365), θὰ ἔχωμεν :



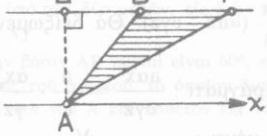
Σχ. 365

$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} =$ (ἐξ ὁρισμοῦ) $V_{\text{στρ. ΑΒΔ}} +$
$+ V_{\text{στρ. ΑΔΓ}} =$ (βλέπε λῆμμα)

$\frac{1}{3} E_{\text{ΒΔ}} \cdot \text{ΑΔ} + \frac{1}{3} E_{\text{ΔΓ}} \cdot \text{ΑΔ} =$

$= \frac{1}{3} (E_{\text{ΒΔ}} + E_{\text{ΔΓ}}) \cdot \text{ΑΔ} = \frac{1}{3} E_{\text{ΒΓ}} \cdot \text{ΑΔ}$. Ὥστε πάλιν ἰσχύει τὸ ἀποδεικτέον θεώρημα : $V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = \frac{1}{3} E_{\text{ΒΓ}} \cdot \text{ΑΔ}$.

— Ἐὰν τὸ Α προβάλλεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ὡς ἐν σχήματι 366, θὰ ἔχωμεν πάλιν :



Σχ. 366

$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} =$ (ἐξ ὁρισμοῦ) $V_{\text{στρ. ΑΔΓ}} -$

$- V_{\text{στρ. ΑΔΒ}} = \frac{1}{3} E_{\text{ΔΓ}} \cdot \text{ΑΔ} -$

$- \frac{1}{3} E_{\text{ΔΒ}} \cdot \text{ΑΔ} = \frac{1}{3} E_{\text{ΒΓ}} \cdot \text{ΑΔ}$.

Τέλος, ἂν τὸ Α προβάλλεται εἰς Β ἢ Γ, ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀνωτέρω λήμματος, καθ' ἣν πάλιν τὸ θεώρημα ἰσχύει.

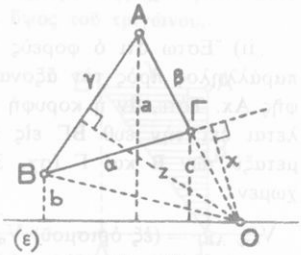
**328. Τρίγωνον στρεφόμενον περὶ τυχόντα ἄξονα. α')** (Θ) — **Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον διαγράφει τρίγωνον στρεφόμενον περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχοντα μετὰ τοῦ τριγώνου, ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν διαγράφει τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου κατὰ τὴν περιστροφήν.**

*Ἀπόδειξις.* Ἂν (ε) ὁ ἄξων καὶ Ο τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ (ε) μετὰ τοῦ φορέως πλευρᾶς τινος, π.χ. τῆς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 367), ὁρίζομεν πρὸς τὸ παρὸν ὡς ὄγκον τοῦ διαγραφομένου ὑπὸ τοῦ τρ.ΑΒΓ στερεοῦ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν τῶν διαγραφομένων ὑπὸ τῶν δύο τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΓΒ. Ἂς παραστήσωμεν διὰ τῶν a, b, c τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ d τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βάρους τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ ἰδίου ἄξονος. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$(1) \qquad d = \frac{a+b+c}{3}.$$



Σχ. 367

Ἂς παραστήσωμεν ἀκόμη μὲ α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου, μὲ x καὶ z τὰς ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΒΑ καὶ μὲ (ΑΒΓ), (ΟΑΒ), (ΟΒΓ) τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΟΑΒ, ΟΒΓ. Θὰ ἔχωμεν κατὰ σειράν :

$$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = V_{\text{στρ. ΟΑΒ}} - V_{\text{στρ. ΟΒΓ}} = \frac{1}{3} E_{AB}\cdot z - \frac{1}{3} E_{B\Gamma}\cdot x =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(a+b)\gamma z - \frac{1}{3}\pi(b+c)\alpha x = (\text{λόγῳ τῆς (1)})\ \pi\left(d - \frac{c}{3}\right)\gamma z -$$

$$-\pi\left(d - \frac{a}{3}\right)\alpha x = \pi d(\gamma z - \alpha x) + \frac{\pi}{3}\{\alpha\alpha x - c\gamma z\} =$$

$$= \pi d\left(2(OAB) - 2(OB\Gamma)\right) + \frac{\pi}{3}(\alpha\alpha x - c\gamma z) = 2\pi d\cdot(AB\Gamma) +$$

$$+ \frac{\pi}{3}(\alpha\alpha x - c\gamma z).$$ Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι $\alpha\alpha x - c\gamma z = 0$ ἢ ὅτι $\frac{\alpha\alpha x}{c\gamma z} = 1$.

Πράγματι : $\frac{\alpha\alpha x}{c\gamma z} = \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\alpha x}{\gamma z} = \frac{OA}{O\Gamma}\cdot\frac{(OB\Gamma)}{(OBA)} = \frac{OA}{O\Gamma}\cdot\frac{O\Gamma}{OA} = 1$. Ἑπομένως μένει :

$$V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = (AB\Gamma)\cdot 2\pi d, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

β΄) Ἀποδεικνύεται ἐπὶ πλέον ὅτι, **ἂν τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον ΑΒΓ ἀναλυθῇ εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τριγώνων ἐχόντων ὡς μίαν κορυφὴν ἓν τυχὸν σημεῖον Ρ τοῦ ἄξονος (ε), τότε τὸ ἀντίστοιχον ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων τούτων στρεφομένων περὶ τὸν (ε) εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ (ΑΒΓ)·2πd.**

Τὸ σταθερὸν τοῦτο ἄθροισμα **ὁρίζει** τὸν $V_{\text{στρ. ΑΒΓ}}$. Οὕτω π.χ., ἂν τὸ Ρ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (σχ. 367), ὁπότε :

$$(AB\Gamma) = (PAB) + (PA\Gamma) - (PB\Gamma), \text{ τότε } V_{\text{στρ. PAB}} + V_{\text{στρ. PAΓ}} - V_{\text{στρ. PBΓ}} =$$
$$= (AB\Gamma)\cdot 2\pi d = V_{\text{στρ. ΑΒΓ}}.$$

γ΄) **Γενίκευσις. Θεώρημα Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον διαγράφει πολύγωνον στρεφόμενον περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ μὴ διατέμνοντα αὐτό, ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ στρεφομένου πολυγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν διαγράφει τὸ κέντρον βάρους τοῦ πολυγώνου κατὰ τὴν περιστροφήν.**

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύεται εἰς τὴν θεωρητικὴν μηχανικὴν καὶ διὰ νὰ ἐφαρμοσθῇ, πρέπει πρῶτον νὰ προσδιορισθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ πολυγώνου, θεωρουμένου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὡς ἐπιπέδου ὁμογενοῦς πλακὸς ἀπειροελαχίστου πάχους, καθ' ὃν τρόπον διδάσκει ἡ μηχανική.

Τὸ θεώρημα τοῦ Πάππου ἰσχύει καὶ ὅταν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀνωτέρω πολυγώνου νοηθῇ οἱαδήποτε περιοχὴ τοῦ ἐπιπέδου περικλειομένη ὑπὸ ἁπλῆς κλειστῆς γραμμῆς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1044. Ποία σχέσις συνδέει τοὺς ὄγκους τοὺς διαγραφομένους ὑπὸ ὀρθογωνίου τριγώνου στρεφομένου διαδοχικῶς περὶ τὰς πλευράς του;

1045. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ἀχθοῦν αἱ ΡΔ, ΡΕ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς καὶ νοήσωμεν τὸ σχῆμα στρεφόμενον περὶ τὴν ΒΓ, ὁ ὑπὸ τοῦ σχηματιζομένου παρ/μου ΡΔΑΕ διαγραφόμενος ὄγκος νὰ εἶναι τὰ 2/3 τοῦ ὄγκου τοῦ ὑπὸ τοῦ τριγώνου διαγραφομένου.

1046. Ἐπὶ τῶν ἐφ' ἑξῆς τμημάτων ΑΒ = α, ΒΓ = β ἐπ' εὐθείας κειμένων κατασκευάζονται ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΒΕΓ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου, ὅταν τὸ τετράπλευρον ΑΔΕΓ στρέφεται περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒΓ.

1047. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ θεώρημα τῆς § **328** α' ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ ἄξων περιστροφῆς διέρχεται διά τινος κορυφῆς τοῦ τριγώνου (χωρὶς νὰ τέμνῃ αὐτό).

1048. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν διαγραφομένων ὑπὸ τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ τρίγωνον χωρίζεται ὑπὸ τῆς ἑνούσης τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ὅταν τὸ τρίγωνον στρέφεται περὶ τὴν τρίτην πλευράν του.

1049. Διὰ τοῦ κέντρου βάρους τριγώνου διέρχεται εὐθεῖα xy παρ/λος πρὸς μίαν πλευράν. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ὄγκοι οἱ διαγραφόμενοι ὑπὸ τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ ἡ xy χωρίζει τὸ τρίγωνον, ὅταν ταῦτα στρέφωνται περὶ τὴν xy.

1050. Ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΑΒ γωνίαι εἶναι 60°, προσέτι δὲ εἶναι ΑΔ = ΒΓ = ΓΔ = α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον διαγράφει τὸ τραπέζιον στρεφόμενον περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ Α καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ.

1051. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ πληροῦν αἱ πλευραὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, ἵνα τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον, ὅταν τὸ τραπέζιον στρέφεται περὶ τὴν μίαν τῶν βάσεών του, ἔχῃ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : ὁ ὄγκος του πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειάν του νὰ εἶναι ὡς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου πρὸς τὴν περίμετρον αὐτοῦ.

1052. Αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἔχουν μήκη 4 καὶ 7 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου στρεφομένου περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ.

1053. Δύο περιφέρειαι ἀκτίνων R καὶ ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἂν ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΒΓ τούτων, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὑπὸ τοῦ τρ.ΑΒΓ γραφόμενος ὄγκος, ὅταν τοῦτο στρέφεται περὶ τὴν διάκεντρον.

1054. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεῖα Αx ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ νὰ διαγράφουν ἴσους ὄγκους, στρεφόμενα περὶ τὴν Αx.

1055. Δοθέντος ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ζητεῖται νὰ καθορισθῇ εὐθεῖα Αx ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τρίγωνον στρεφόμενον περὶ τὴν Αx νὰ διαγράφῃ τὸν μέγιστον δυνατὸν ὄγκον.

1056. Δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου περιττοῦ πλήθους πλευρῶν, ἀκτῖνος R καὶ ἀποστήματος ρ, φέρομεν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου διερχομένην διὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μιᾶς κορυφῆς καὶ ἔστω Π τὸ μέρος τοῦ πολυγώνου τὸ κείμενον εἰς τὸ ἓν ἐκ τῶν ἡμιεπιπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ ἀχθεῖσα διάμετρος. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ Π στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον ταύτην ἰσοῦται μὲ $\pi\rho(R+\rho)^2/3$. Νὰ δοθῇ τύπος διὰ τὴν περίπτωσιν κανον. πολυγώνου μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν.

1057. Ἐὰν πολύγωνον ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας εὐθεῖαν xy, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον τοῦτο παράγει στρεφόμενον περὶ ἕτερον ἄξονα x′y′ παρ/λον πρὸς τὸν πρῶτον (καὶ μὴ τέμνοντα τὸ πολύγωνον), ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν διαγράφει στρεφόμενον τυχὸν σημεῖον τῆς xy.

1058. Ἐὰν M, N, P εἶναι τὰ μέσα τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ συγκριθοῦν οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι ὑπὸ τῶν τριγώνων MNP καὶ ΑΒΓ στρεφομένων περὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου των, μὴ τέμνουσαν ταῦτα. (Ὑπόδ. βλ. § 328).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

# Η ΣΦΑΙΡΑ

## Α'. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

**329.** α') **Ὁρισμοί.— Δοθέντος σταθεροῦ σημείου Κ καὶ τμήματος R καλεῖται : «στερεὸν - σφαῖρα» τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :** $\boxed{MK \leqq R}$ **· καὶ «ἐπιφάνεια - σφαῖρα» (ἢ «σφαιρικὴ ἐπιφάνεια») καλεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει** $\boxed{MK = R}$ **.**

Τὸ Κ λέγεται **κέντρον** καὶ τὸ R **ἀκτίς**, τόσον τοῦ στερεοῦ - σφαῖρα, ὅσον καὶ τῆς ἐπιφανείας - σφαίρας.

Χάριν συντομίας, *ὅταν εἰς τὰ ἑπόμενα λέγομεν «σφαῖρα», θὰ ἐννοοῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν - σφαῖραν.* Λέγοντες δὲ «σφαῖρα (K, R)» θὰ ἐννοοῦμεν σφαῖραν, κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος R.

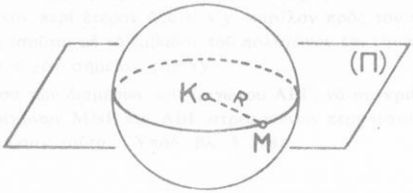
**Ἐσωτερικὸν** τῆς σφαίρας (K, R) λέγεται τὸ σημειοσύνολον $\{M | MK < R\}$. Τοῦτο ἀνήκει εἰς τὸ στερεὸν - σφαῖρα.

Σημεῖον Ν λέγεται **ἐξωτερικὸν σημεῖον** ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν (K, R), ὅταν $NK > R$.

β') **Ἄμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ.** i) Θεωρήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

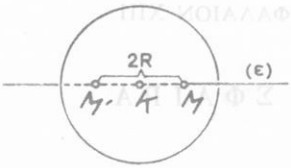
(Π) διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου Κ σφαίρας (Κ, R) (σχ. 368). Τὰ σημεῖα Μ τῆς σφαίρας, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), συνιστοῦν ἐπὶ τοῦ (Π) τὸν τόπον τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἀπὸ τοῦ Κ σταθερὰν ἀπόστασιν R, δηλ. **περιφέρειαν** κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος R.



Σχ. 368

Τὸ ἐπίπεδον (Π) λέγεται **διαμετρικὸν** ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ἐπ' αὐτοῦ κύκλος (Κ, R) λέγεται **μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας.**

ii) Θεωρήσωμεν εὐθεῖαν (ε) διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας (Κ, R) (σχ. 369). Ἐπ' αὐτῆς ὑπάρχουν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' ἀπέχοντα τοῦ Κ ἀποστάσεις ΚΜ=ΚΜ'=R· ταῦτα εἶναι ἑπομένως καὶ σημεῖα τῆς σφαίρας. Ἡ ἀπόστασις ΜΜ'=2R καλεῖται **διάμετρος** τῆς σφαίρας, τὰ δὲ σημεῖα Μ καὶ Μ', **ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα** (συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον). Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΜ' ἀποτελούμενον ἀπὸ σημεῖα ἀπέχοντα τοῦ κέντρου ὀλιγώτερον τῆς ἀκτῖνος κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας, ἐνῷ αἱ προεκτάσεις του κεῖνται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς σφαίρας.



Σχ. 369

**330. Συμμετρίαι.** (Θ) **—Εἰς κάθε σφαῖραν τὸ κέντρον εἶναι κέντρον συμμετρίας τῆς σφαίρας, πᾶσα διάμετρος εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς σφαίρας καὶ πᾶν διαμετρικὸν ἐπίπεδον εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς σφαίρας.**

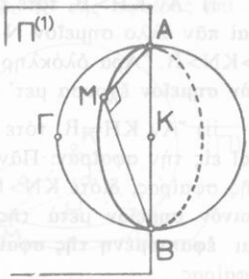
Βάσει τῶν προηγουμένων ὁρισμῶν ἡ πρότασις εἶναι προφανής.

**331. Ἡ σφαῖρα ὡς σχῆμα ἐκ περιστροφῆς.** — **Ἡ σφαῖρα παράγεται ὑπὸ ἡμιπεριφερείας στρεφομένης περὶ τὴν διάμετρον αὐτῆς. Τὸ δὲ στερεὸν - σφαῖρα παράγεται ὑπὸ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω σφαῖρα (Κ, R) (σχ. 370), μία οἱαδήποτε διάμετρος ΑΒ αὐτῆς καὶ $Π^{(1)}$ ἡμιεπίπεδον ἔχον σύνορον τὴν ευθ ΑΒ. Τὸ $Π^{(1)}$ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἡμιπεριφέρειαν $\widehat{ΑΓΒ}$, μεγίστου κύκλου. Ἐὰν ἡ $\widehat{ΑΓΒ}$ στραφῇ κατὰ οἱανδήποτε γωνίαν περὶ τὴν ευθ ΑΒ, θὰ εὑρεθῇ πάλιν ἐπὶ τῆς σφαίρας (Κ, R), διότι αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ Κ διατηροῦνται κατὰ τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στροφήν. **Ἀντιστρόφως** ἀπὸ κάθε σημεῖον Μ τῆς σφαίρας διέρχεται ἡμιπεριφέρεια $\widehat{AMB}$, τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου ΑΒΜ. Ἡ $\widehat{AMB}$ καὶ ἡ $\widehat{A\Gamma B}$ ἔχουν κοινὴν διάμετρον ΑΒ, ἄρα ἡ $\widehat{AMB}$ προέρχεται διὰ στροφῆς τῆς $\widehat{A\Gamma B}$ περὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 370

Ὁμοίως πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΒ, ὡς ἀπέχον τοῦ Κ ὀλιγώτερον τοῦ R, ἔρχεται διὰ στροφῆς περὶ τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας· ἀντιστρόφως δὲ πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον Ν τῆς σφαίρας εἶναι καὶ ἐσωτερικὸν σημεῖον ἡμικυκλίου τινὸς διαμέτρου ΑΒ.

**Πόρισμα. Πᾶν σημεῖον σφαίρας βλέπει ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν οἱανδήποτε διάμετρον αὐτῆς, μὴ διερχομένην δι' αὐτοῦ** (βλ. σχ. 370).

**332. Γεωμετρικοὶ τόποι. α') (Θ) — Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, εἶναι σφαῖρα διαμέτρου ΑΒ** (ἐξαιρουμένων τῶν Α καὶ Β).

Διότι, ἂν Μ σημεῖον τῆς σφαίρας διαμέτρου ΑΒ, τότε $\widehat{AMB}=1^D$ (σχ. 370). **Ἀντιστρόφως**, ἂν $\widehat{AMB}=1^D$ καὶ Κ τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, τότε ΜΚ=ΑΒ/2, ἄρα τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὴν σφαῖραν.

**β') (Θ) — Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ΜΑ, ΜΒ ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β ἔχουν σταθερὸν λόγον ΜΑ/ΜΒ=λ≠1, εἶναι σφαῖρα μὲ ἄκρα διαμέτρου τὰ σημεῖα τὰ διαιροῦντα τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ** *(ἀπολλώνιος σφαῖρα)*.

Διότι, ἂν Μ σημεῖον τοῦ τόπου, τότε **ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου** τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ Μ καὶ τῆς ευθΑΒ, τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ὡρισμένου ἀπολλωνίου κύκλου διαμέτρου ΓΔ, ὅπου τὰ Γ καὶ Δ εἶναι σταθερὰ σημεῖα τῆς ευθ ΑΒ, διαιροῦντα τὸ ΑΒ εἰς λόγον λ. Ἄρα θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς σφαίρας, διαμέτρου ΓΔ. Ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον Ν τῆς σφαίρας ταύτης θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΝΓΔ, δηλ. ἐπὶ ἀπολλωνίου περιφερείας, ἄρα ΝΑ/ΝΒ=λ.

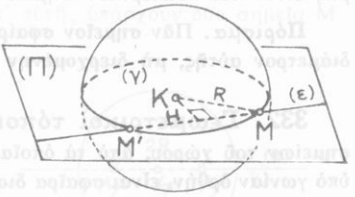
**333. Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ σφαίρας.** Ἂς θεωρήσωμεν σφαῖραν (Κ, R) καὶ εὐθεῖαν (ε) τοῦ χώρου ἀπέχουσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας ἀπόστασιν ΚΗ (ὅπου Η∈(ε)). Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

i) Ἂν $KH > R$, τότε τὸ Η εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον Ν τῆς (ε) εἶναι ἐξωτερικόν, διότι $KN > KH > R \Rightarrow$ $\Rightarrow KN > R$. Ἄρα ὁλόκληρος ἡ (ε) εἶναι ἐξωτερικὴ τῆς σφαίρας **οὐδὲν κοινὸν σημεῖον** ἔχουσα μετ' αὐτῆς.

ii) Ἂν $KH = R$, τότε τὸ Η, ἀνῆκον εἰς τὴν εὐθεῖαν (ε), ἀνήκει ἐπίσης καὶ εἰς τὴν σφαῖραν. Πᾶν ἄλλο ὅμως σημεῖον Ν τῆς (ε) εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς σφαίρας, διότι $KN > KH = R \Rightarrow KN > R$. Ἑπομένως ἡ (ε) **ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον** μετὰ τῆς σφαίρας. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ (ε) λέγεται **ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας**, τὸ δὲ Η **σημεῖον ἐπαφῆς** τῆς (ε) μετὰ τῆς σφαίρας.

iii) Ἂν $KH < R$ (σχ. 371), τότε θεωροῦμεν τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον (Π) τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ κέντρου Κ καὶ τῆς (ε). Τὸ (Π) τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ τὴν περιφέρειαν (γ) μεγίστου κύκλου καὶ ἐπειδὴ $KH < R$, ἕπεται ὅτι ἡ (ε) τέμνει τὴν περιφέρειαν (γ), ἄρα καὶ τὴν σφαῖραν, εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ'. Ἡ (ε) καὶ ἡ σφαῖρα ἔχουν τότε **δύο κοινὰ σημεῖα** Μ καὶ Μ'. Τὸ τμῆμα ΜΜ' λέγεται **χορδὴ** τῆς σφαίρας καὶ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Εἶναι δὲ $MM' \leqq 2R$ (τὸ $=$ ἀντιστοιχεῖ, εἰς ἣν περίπτωσιν $KH = 0$, δηλ. ἡ (ε) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Κ).



Σχ. 371

**Τὰ ἀντίστροφα ἀληθεύουν**, διότι αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξαντλητικαί Ἔχομεν δηλ. :

$KH > R \Longleftrightarrow$ Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχουν 0 κοινὰ σημεῖα
$KH = R \Longleftrightarrow$ » » » » » » 1 κοινὸν σημεῖον
$KH < R \Longleftrightarrow$ » » » » » » 2 κοινὰ σημεῖα

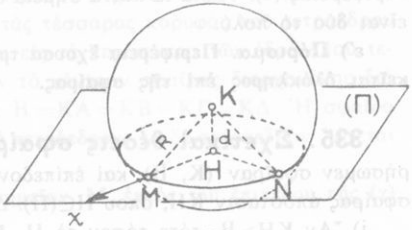
**Πορίσματα. 1ον) Πᾶσα εὐθεῖα ἐφαπτομένη σφαίρας εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος.**

**2ον) Τρία σημεῖα μιᾶς σφαίρας δὲν δύνανται νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.** Διότι εὐθεῖα καὶ σφαῖρα ἔχουν, τὸ πολύ, δύο κοινὰ σημεῖα.

**334. Ἐπίπεδοι τομαὶ σφαίρας.** α') (Θ) —**Ἐὰν ἐπίπεδον (Π) ἀπέχῃ τοῦ κέντρου Κ σφαίρας (Κ, R) ἀπόστασιν d, μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος R, τότε τὸ σύνολον τῶν κοινῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαίρας εἶναι περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τὴν προβολὴν τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ ἀκτῖνα $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$. Ἡ περιφέρεια αὕτη λέγεται «τομὴ» τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Η ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ (Π) (σχ. 372). Ἂς φέρωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π) τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν Hx ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ Η. Τότε ἐπὶ τῆς Hx ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ΜΚ = R, διότι R > ΚΗ ἐξ ὑποθέσεως. Ἑπομένως **ἐπὶ ἑκάστης** ἡμιευθείας Hx ὑπάρχει ἓν σημεῖον τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ Η ἀναχωροῦν ἄπειροι ἡμιευθεῖαι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π), διὰ τοῦτο τὸ (Π) ἔχει ἄπειρα κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς σφαίρας. Τὸ τυχὸν τούτων, ἔστω τὸ Μ, ἀπέχει τοῦ Η ἀπόστασιν σταθεράν: $MH = \sqrt{KM^2 - KH^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$. Ἄρα ὅλα τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ (Π) καὶ τῆς σφαίρας κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (γ) κέντρου Η καὶ ἀκτῖνος $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$. **Ἀντιστρόφως:** Ἔστω Ν σημεῖον τῆς περιφερείας (γ). Τότε $HN = \sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow HN^2 = R^2 - d^2$. Ἐκ τῆς $KN^2 = KH^2 + HN^2 \Rightarrow KN^2 = d^2 + R^2 - d^2 = R^2 \Rightarrow KN = R \Rightarrow$ τὸ Ν ἀνήκει εἰς τὴν σφαῖραν, ἄρα εἶναι κοινὸν σημεῖον τοῦ (Π) καὶ τῆς σφαίρας.



Σχ. 372

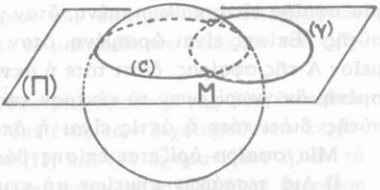
**β΄) Μικροὶ καὶ μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας.** Ἐὰν τὸ τέμνον τὴν σφαῖραν ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Κ (δηλ. $d \neq 0$), τότε ἡ τομὴ λέγεται **μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας.** Ἂν $d = 0$, τότε ἡ τομὴ ἔχει ἀκτῖνα R καὶ εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας. Ἐπὶ ἑκάστης λοιπὸν σφαίρας ὑπάρχουν ἄπειροι, μικροὶ καὶ μέγιστοι κύκλοι.

**γ΄) Πόρισμα. Διὰ τριῶν σημείων μιᾶς σφαίρας διέρχεται μία περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς τὴν σφαῖραν.**

Διότι τὰ τρία σημεῖα, ἔστω Α, Β, Γ, μὴ δυνάμενα, ὡς εἴδομεν, νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (§ **333**, 2ον), ὁρίζουν ἐπίπεδον, τέμνον τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Α, Β, Γ.

**δ΄) (Θ) — Μία περιφέρεια τοῦ χώρου μὴ κειμένη ἐπὶ τῆς σφαίρας δύναται νὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα.**

Διότι, ἂν ἡ περιφέρεια (γ) ἔχῃ ἓν κοινὸν σημεῖον Μ μετὰ τῆς σφαίρας (σχ. 373), τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π), ἐφ' οὗ κεῖται ἡ (γ), τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν (c). Τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς (γ) καὶ τῆς (c) εἶναι καὶ κοινὰ σημεῖα τῆς (γ) καὶ τῆς σφαίρας· καὶ **ἀντιστρόφως** πᾶν κοινὸν



Σχ. 373

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σημεῖον τῆς (γ) καὶ τῆς σφαίρας εἶναι καὶ κοινὸν σημεῖον τῆς (γ) καὶ τῆς περιφερείας (c). Ἀλλὰ τὰ κοινὰ σημεῖα δύο περιφερειῶν, μὴ συμπιπτουσῶν, εἶναι δύο τὸ πολύ.

**ε') Πόρισμα. Περιφέρεια ἔχουσα τρία κοινὰ σημεῖα μετὰ μιᾶς σφαίρας κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τῆς σφαίρας.**

**335. Σχετικαὶ θέσεις σφαίρας καὶ ἐπιπέδου.** Ἂς θεωρήσωμεν σφαῖραν (K, R) καὶ ἐπίπεδον (Π) ἀπέχον τοῦ κέντρου K τῆς σφαίρας ἀπόστασιν KH, ὅπου H∈(Π). Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

i) Ἂν KH> R, τότε τόσον τὸ H, ὅσον καὶ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τοῦ (Π), εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς σφαίρας (βλ. § **333**, i). Ἑπομένως, τὸ (Π) **οὐδὲν κοινὸν σημεῖον** ἔχει μετὰ τῆς σφαίρας.

ii) Ἂν KH= R, τότε τὸ H ἀνῆκον εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) ἀνήκει τώρα καὶ εἰς τὴν σφαῖραν, ἄρα τὸ H εἶναι κοινὸν σημεῖον τοῦ (Π) καὶ τῆς σφαίρας. Πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ (Π) εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς σφαίρας (βλ. § **333**, ii). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ (Π) ἔχει **ἓν μόνον** κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς σφαίρας καὶ καλεῖται **ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον H. Τὸ H εἶναι τὸ **σημεῖον ἐπαφῆς.**

iii) Ἂν KH< R, τότε τὸ ἐπίπεδον (Π) τέμνει τὴν σφαῖραν (§ **334**) καὶ ἔχει μετ' αὐτῆς **ἄπειρα κοινὰ σημεῖα.**

**Τὰ ἀντίστροφα** τῶν ἀνωτέρω ἀληθεύουν, διότι αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξαντλητικαί. Ἔχομεν δηλ. :

KH> R ⟺ Ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουν 0 κοινὰ σημεῖα
KH= R ⟺ » » » » » » 1 κοινὸν σημεῖον
KH< R ⟺ » » » » » » ἄπειρα κοινὰ σημεῖα.

**Πόρισμα. Πᾶν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον σφαίρας εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος.**

**336. Ὁρισμός.** **Ἄξων περιφερείας (ἢ κύκλου) καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας.**

**337. Προσδιορισμὸς μιᾶς σφαίρας.** Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ της μία σφαῖρα εἶναι καθωρισμένη, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς. Ἐπίσης εἶναι ὡρισμένη, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον K καὶ ἓν σημεῖον A τῆς σφαίρας, διότι τότε ἡ ἀκτίς της εἶναι τὸ KA. Ἐπίσης εἶναι ὡρισμένη, ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον της K καὶ ἓν ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον αὐτῆς· διότι τότε ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ K ἀπὸ τὸ (Π).

Μία σφαῖρα ὁρίζεται ἐπίσης βάσει τῶν κάτωθι προτάσεων :

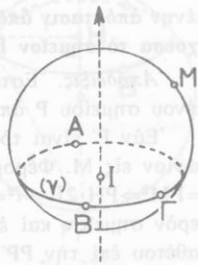
**i) Διὰ τεσσάρων σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου διέρχεται μία καὶ μόνη σφαῖρα.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι τὰ τέσσαρα σημεῖα ταῦτα, ἔστω τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὁρίζουν τετράεδρον. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον Κ (τὸ «περίκεντρον» τοῦ τετραέδρου) ἰσάκις ἀπέχον ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ τετραέδρου καὶ τὸ ὁποῖον, μάλιστα, προβάλλεται εἰς τὰ περίκεντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου (§ **253**). Τὸ Κ εἶναι λοιπὸν τὸ κέντρον σφαίρας διερχομένης διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ καὶ ἐχούσης ἀκτῖνα R = ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ = ΚΔ. Ἡ σφαῖρα αὕτη λέγεται **περιγεγραμμένη περὶ τὸ τετράεδρον,** τὸ δὲ τετράεδρον λέγεται **ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.**

**ii) Μία περιφέρεια (γ) καὶ ἓν σημεῖον Μ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς (γ) ὁρίζουν μίαν σφαῖραν** (σχ. 374).

Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τῆς (γ) καὶ νὰ θεωρήσωμεν τὴν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Μ διερχομένην σφαῖραν. Αὕτη θὰ περιέχῃ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν (γ) (§ **334,** ε') καὶ τὸ σημεῖον Μ. Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ταύτης θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς (γ) (βλ. § **336**) καὶ ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου μιᾶς τῶν ἀκμῶν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ.



Σχ. 374

**iii) Δοθέντος τετραέδρου, ὑπάρχει μία καὶ μόνη σφαῖρα εὑρισκομένη εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ καὶ ἐφαπτομένη τῶν τεσσάρων ἑδρῶν.**

Πράγματι τὸ **ἔγκεντρον** Ο τοῦ τετραέδρου (§ **254**) εἶναι τὸ μόνον σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ, ἰσάκις ἀπέχον τῶν ἑδρῶν καὶ ἑπομένως ἡ σφαῖρα μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ἴσων ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπὸ τὰς ἕδρας ἐφάπτεται τῶν τεσσάρων ἑδρῶν καὶ εἶναι μοναδική. Ἡ σφαῖρα αὐτὴ λέγεται **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὸ τετράεδρον, τὸ δὲ τετράεδρον λέγεται **περιγεγραμμένον** περὶ αὐτήν.

iv) Ἕκαστον **παράκεντρον** (§ **255**) ἑνὸς τετραέδρου ὁρίζει καθ' ὅμοιον μὲ τὸν ἀνωτέρω τρόπον μίαν **παρεγγεγραμμένην σφαῖραν** τοῦ τετραέδρου.

Τέλος διὰ τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς σφαίρας χρησιμεύουν αἱ ἑπόμεναι παρατηρήσεις.

**v) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν διερχομένων διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ εἶναι ὁ ἄξων** (§ **336**) **τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.**

**vi) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν διερχομένων διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β εἶναι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΑΒ.**

**vii) Ἵνα σημεῖον Κ εἶναι κέντρον σφαίρας ἐφαπτομένης δύο ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τῶν διέδρων, τὰς ὁποίας τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) σχηματίζουν ἤ, ἂν τὰ (Π) καὶ (Ρ), εἶναι παράλληλα, νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ μεσοπαραλλήλου ἐπιπέδου τῶν (Π) καὶ (Ρ).**



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**338. Πόλοι κύκλων μιᾶς σφαίρας.** α') **Ὁρισμός.— Καλοῦνται «πόλοι» περιφερείας (γ) κειμένης ἐπὶ σφαίρας τὰ σημεῖα τομῆς τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιφερείας (γ).**

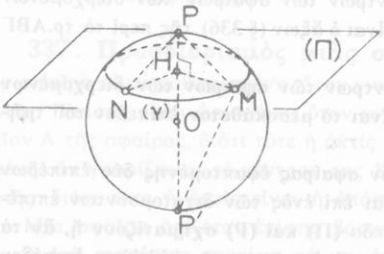
Ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος μιᾶς περιφερείας (§ 336) ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας, διὰ τοῦτο τὰ σημεῖα τῆς (γ) ἀπέχουν σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ ἑκάστου πόλου: *πολικὴ ἀπόστασις τῆς (γ) ἀπὸ τοῦ πόλου*. Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ὁ ἄξων τῆς περιφερείας διέρχεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἑπομένως οἱ δύο πόλοι τῆς περιφερείας (γ) εἶναι τὰ ἄκρα διαμέτρου τῆς σφαίρας, καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς (γ).

**β') (Θ) — Ὁ τόπος τῶν σημείων μιᾶς σφαίρας τῶν ἀπεχόντων δεδομένην ἀπόστασιν ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον Ρ τῆς σφαίρας εἶναι περιφέρεια ἔχουσα τὸ σημεῖον Ρ ὡς ἕνα ἐκ τῶν πόλων της.**

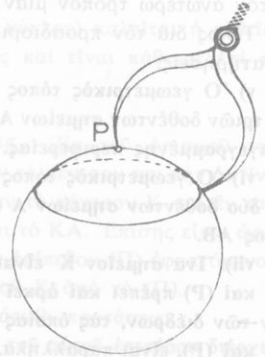
*Ἀπόδειξις*. Ἔστω Μ σημεῖον τῆς σφαίρας (Ο, R) ἀπέχον τοῦ δεδομένου σημείου Ρ ἀπόστασιν δοθεῖσαν $l<2R$ (σχ. 375).

Ἐὰν Ρ' εἶναι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Ρ, τότε τὸ τρ.ΡΜΡ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Μ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΜΗ τοῦ τρ.ΡΜΡ'. Θὰ ἔχωμεν $PH\cdot PP' = PM^2 \Rightarrow PH\cdot 2R = l^2 \Rightarrow PH = l^2/2R$ (σταθερόν). Ἑπομένως τὸ Η εἶναι σταθερὸν σημεῖον καὶ ἐπειδὴ $HM \perp PP'$, τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καθέτου ἐπὶ τὴν ΡΡ' εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Η αὐτῆς. Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου (Π), ἤτοι ἐπὶ περιφερείας (γ). Ἡ (γ) ἔχει τὸ Ρ ὡς πόλον· διότι ἡ εὐθ ΡΡ' εἶναι ἄξων τῆς (γ). **Ἀντιστρόφως:** Πᾶν σημεῖον Ν τῆς (γ) ἀπέχει τοῦ Ρ ἀπόστασιν $l$, διότι $NP^2 = PP'\cdot PH = 2R\cdot(l^2/2R) = l^2 \Rightarrow NP = l$.

**339. Πρακτικαὶ ἐφαρμογαί.** α') **Σφαιρικὸς διαβήτης** (σχ. 376). Διὰ νὰ χαράξωμεν περιφέρειαν ἐπὶ δοθείσης σφαίρας, χρησιμοποιοῦ-




Σχ. 375

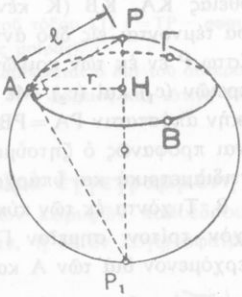



Σχ. 376

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεν διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπυλωμένα εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἀκίδες, εἰς ἃς καταλήγουν, νὰ εἶναι περίπου κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας (δηλ. κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τὸ ἀγόμενον εἰς τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀκὶς στηρίζεται). Ἂν τὸ ἄκρον τῆς μιᾶς ἀκίδος στηριχθῇ εἰς σημεῖον Ρ τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου παραμένῃ ἀμετάβλητον, τότε τὸ ἄκρον τῆς ἑτέρας ἀκὶδος (ἐφωδιασμένον διὰ γραφίδος) χαράσσει, ὁλισθαῖνον ἐπὶ τῆς σφαίρας, περιφέρειαν, πόλου Ρ.

**β') Προσδιορισμὸς τῆς ἀκτῖνος δοθείσης σφαίρας.** Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς σφαιρικοῦ διαβήτου ἂς χαράξωμεν ἐπὶ τῆς σφαίρας περιφέρειαν πόλου Ρ, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἀπέχουν τοῦ Ρ δεδομένην ἀπόστασιν $l$ (ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου) (σχ. 377).

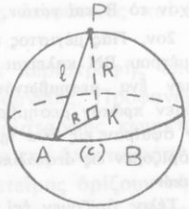


Σχ. 377

Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς χαραχθείσης περιφερείας τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Δυνάμεθα τότε τῇ βοηθείᾳ τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἴσον πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ. Εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα r τῆς περὶ τὸ τρ.Α΄Β΄Γ΄ περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ἔχομεν οὕτω καὶ τὴν ἀκτῖνα r τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας, δηλ. τὴν ΑΗ. Σχεδιάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον Α΄Ρ΄Η΄ ἴσον πρὸς τὸ ΑΡΗ (ὑποτεινούσης $l$ καὶ καθέτου πλευρᾶς ΑΗ=r) καὶ φέροντες κάθετον ἐπὶ τὴν Α΄Ρ΄ εἰς τὸ Α΄, λαμβάνομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἴσον πρὸς τὸ $APP_1$. Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τελευταίου τούτου εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον $PP_1$ τῆς δοθείσης σφαίρας.

**γ') Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος.**

*Λύσις.* Ἀφοῦ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκτῖνα R τῆς δεδομένης σφαίρας, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον ἐδαφ. β΄, ἀρκεῖ μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ πολικὴν ἀπόστασιν $PA=l=R\sqrt{2}$ (σχ. 378) νὰ γράψωμεν περιφέρειαν (c) ἐπὶ τῆς σφαίρας (διὰ τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου). Ὁ (c) εἶναι μέγιστος κύκλος, διότι, ἂν Κ εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ Α, Β, Γ τρία σημεῖα τῆς περιφερείας (c), τὰ τρίγωνα ΡΚΑ, ΡΚΒ, ΡΚΓ εἶναι ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ ὡς ἔχοντα πλευρὰς R, R, $R\sqrt{2}$ ἕκαστον. Ἑπομένως $KA\perp PK$, $KB\perp PK$, $K\Gamma\perp PK$, ἄρα τὰ Κ, Α, Β, Γ εἶναι ὁμοεπίπεδα, ἤτοι τὸ ἐπίπεδον (ΑΒΓ) τοῦ (c) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, συνεπῶς ὁ (c) εἶναι μέγιστος κύκλος.

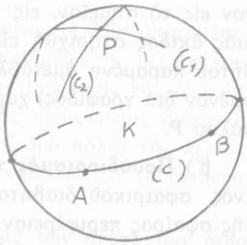


Σχ. 378

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**δ') Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.**

*Λύσις.* Ἡ ἀκτὶς R τῆς σφαίρας προσδιορίζεται (ἐδαφ. β'). α') Ὑποθέσωμεν ὅτι AB<2R. Μὲ πόλους Α καὶ Β καὶ πολικὰς ἀποστάσεις $R\sqrt{2}$ ἄς γράψωμεν δύο μεγίστους κύκλους ($c_1$) καὶ ($c_2$) ἐπὶ τῆς σφαίρας (σχ. 379). Οἱ ($c_1$) καὶ ($c_2$) δὲν ταυτίζονται, διότι τὰ ἐπίπεδά των εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς τεμνομένας εὐθείας ΚΑ, ΚΒ (Κ κέντρον τῆς σφαίρας), ἄρα τέμνονται εἰς δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα. Ἔστω Ρ ἓν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων τῶν περιφερειῶν ($c_1$) καὶ ($c_2$). Μὲ πόλον τὸ Ρ καὶ πολικὴν ἀπόστασιν PA = PB ($= R\sqrt{2}$) γράφομεν (μέγιστον) κύκλον (c), ὅστις εἶναι προφανῶς ὁ ζητούμενος. β') Ἂν AB=2R, τότε τὰ Α καὶ Β εἶναι ἀντιδιαμετρικὰ καὶ ὑπάρχουν ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι διερχόμενοι διὰ τῶν Α, Β. Τυχόντα ἐκ τῶν κύκλων τούτων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἐκλέγοντες τυχὸν τρίτον σημεῖον Γ τῆς σφαίρας καὶ γράφοντες μέγιστον κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν Α καὶ Γ.



Σχ. 379

**340. Γεωγραφικαὶ συντεταγμέναι.** Ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν ἓν σύστημα συντεταγμένων, βάσει τοῦ ὁποίου εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς σφαίρας νὰ ἀντιστοιχῇ διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν προσδιορίζον πλήρως τὴν θέσιν τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς σφαίρας. Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν ἐπὶ τῆς σφαίρας δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα Β καὶ Ν καλούμενα ἀντιστοίχως βόρειος καὶ νότιος πόλος. Ὡς πρὸς τὰ σημεῖα, ταῦτα :

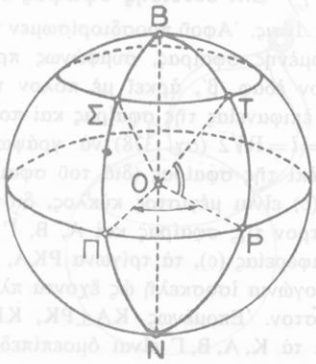
1ον. Ὁ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας, οὗτινος τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΝ, καλεῖται **ἰσημερινός,** ἐνῷ πᾶς μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας, οὗτινος τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΝ, καλεῖται **παράλληλος.**

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ χωρίζει τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἡμισφαίρια : *βόρειον*, τὸ περιέχον τὸ Β καὶ *νότιον*, τὸ περιέχον τὸ Ν.

2ον. Πᾶς μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας διαμέτρου ΒΝ καλεῖται **μεσημβρινός.** Ἐκλέγομεν ἕνα **μεσημβρινόν.** τὸν ὁποῖον καλοῦμεν **πρῶτον** μεσημβρινόν. Οὗτος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἡμισφαίρια, ἐξ ὧν τὸ ἓν ὁρίζομεν ὡς *ἀνατολικὸν* καὶ τὸ ἄλλο ὡς *δυτικόν.*

Τέλος ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ πρώτου μεσημβρινοῦ τὴν μίαν ἡμιπεριφέρειαν αὐτοῦ ΒΣΝ (σχ. 380), ὡς **πρῶτον - ἡμιμεσημβρινόν.** Οὗτος τέμνει τὸν ἰσημερινὸν εἴς τι σημεῖον Π.

Ἔστω τώρα Τ τυχὸν σημεῖον τῆς σφαίρας. Ὁ διὰ τοῦ Τ διερχόμενος ἡμιμεσημβρινὸς



Σχ. 380

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΤΝ τέμνει τὸν ἰσημερινὸν εἴς τι σημεῖον Ρ, ἐνῷ ὁ διὰ τοῦ Γ διερχόμενος παράλληλος τέμνει τὸν πρῶτον ἡμιμεσημβρινὸν εἴς τι σημεῖον Σ. Τὸ σημεῖον Ρ ὁρίζεται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ διὰ τῆς γωνίας $\widehat{\Pi O P}$, ἥτις ὀνομάζεται **γεωγραφικὸν μῆκος** τοῦ Τ καὶ μετρεῖται ἀπὸ 0° ἕως 180° χαρακτηριζόμενον ὡς *ἀνατολικὸν μῆκος* ἢ *δυτικὸν μῆκος*, καθ' ὅσον τὸ Τ (καὶ τὸ Ρ) κεῖται εἰς τὸ ἀνατολικὸν ἢ δυτικὸν ἡμισφαίριον ὡς πρὸς τὸν πρῶτον μεσημβρινόν. Τὸ σημεῖον Σ, ἡ εὕρεσις τοῦ ὁποίου καθορίζει τὸν παράλληλον, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ Τ, ὁρίζεται ὑπὸ τῆς γωνίας $\widehat{\Pi O \Sigma}$ ὀνομαζομένης **γεωγραφικὸν πλάτος** τοῦ Τ. Αὕτη μετρεῖται ἀπὸ 0° ἕως 90° καὶ χαρακτηρίζεται ὡς *βόρειον πλάτος* ἢ *νότιον πλάτος*, καθ' ὅσον τὸ Τ (καὶ τὸ Σ) κεῖται εἰς τὸ βόρειον ἢ τὸ νότιον ἡμισφαίριον.

Αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι, μῆκος καὶ πλάτος, καλοῦνται **γεωγραφικαὶ συντεταγμέναι** τοῦ Τ καὶ καθορίζουν τὴν θέσιν τοῦ Τ ἐπὶ τῆς σφαίρας. Αὗται δίδονται ἐπίσης ἀπὸ τὰ μέτρα τῶν τόξων $\widehat{\Pi P}$ (=μέτρον διέδρου γωνίας Σ—ΒΝ—Τ) καὶ τοῦ τόξου $\widehat{\Sigma \Pi}$ (=$\widehat{TP}$= **σφαιρικὴ ἀπόστασις** τοῦ Τ ἀπὸ τὸν ἰσημερινόν, μετρουμένη εἰς μοίρας).

Ἐπὶ τῆς γηΐνης σφαίρας, ὡς πρῶτος ἡμιμεσημβρινὸς λαμβάνεται ὁ διὰ τοῦ ἀστεροσκοπείου Greenwich (Ἀγγλία) διερχόμενος καὶ ὡς Β καὶ Ν ὁ βόρειος καὶ νότιος πόλος τῆς γῆς.

## 341. Σφαῖρα περιγεγραμμένη, σφαῖρα ἐγγεγραμμένη.

α') Ἐὰν ὑπάρχῃ σφαῖρα διερχομένη δι' ὅλων τῶν κορυφῶν πολυέδρου, τότε τὸ πολύεδρον λέγεται **ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν**, ἡ δὲ ἐν λόγῳ σφαῖρα **περιγεγραμμένη περὶ τὸ πολύεδρον.**

β') Ἐὰν ὑπάρχῃ σφαῖρα κειμένη εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κυρτοῦ πολυέδρου καὶ ἐφαπτομένη πασῶν τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, τὸ πολύεδρον λέγεται **περιγράψιμον περὶ σφαῖραν**, ἡ δὲ ἐν λόγῳ σφαῖρα **ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον.**

γ') Πᾶν τετράεδρον εἶναι καὶ ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον περὶ σφαῖραν καὶ πᾶσα κανονικὴ πυραμὶς ὁμοίως.

Τὸ ὀρθογώνιον παρ/δον εἶναι ἐγγράψιμον, ὁ δὲ κύβος ἐγγράψιμος καὶ περιγράψιμος περὶ σφαῖραν.

δ') Σφαῖρα λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς κυλινδρικὴν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαν, ὅταν ἐφάπτεται ὅλων τῶν γενετειρῶν. Προφανῶς τὸ κέντρον μιᾶς τοιαύτης σφαίρας εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἡ ἀκτίς της ἰσοῦται πρὸς τὴν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ κύκλος ἐπαφῆς εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ὁδηγόν.

ε') Σφαῖρα λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς κωνικὴν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαν, ὅταν ἐφάπτεται ὅλων τῶν γενετειρῶν τῆς ἐπιφανείας. Προφανῶς τὸ κέντρον της εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἀκτίς της εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου της ἀπὸ τυχούσης γενετείρας. Αἱ προβολαὶ τοῦ κέντρου της ἐπὶ τὰς γενετείρας ὁρίζουν τὴν περιφέρειαν (ἢ κύκλον) ἐπαφῆς τῆς σφαίρας καὶ κωνικῆς ἐπιφανείας. **Πάντα τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μέχρι τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσα.**

ς') Σφαῖρα λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον, ὅταν εὑρίσκεται ἐντὸς αὐτοῦ καὶ ἐφάπτεται τῆς βάσεως καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

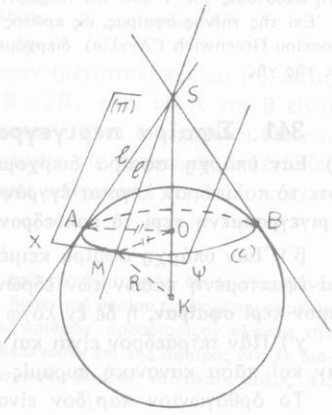
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐάν ὁ κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονός του, ὁ εἰς τὸ προκῦπτον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐγγεγραμμένος κύκλος εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

ζ') Ἀναλόγως ὁρίζομεν τὴν περὶ ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον περιγεγραμμένην σφαῖραν, καθὼς καὶ τὴν περὶ κύλινδρον ἢ κόλουρον κῶνον (ἐκ περιστροφῆς) περιγεγραμμένην σφαῖραν.

## 342. Τόπος τῶν διὰ σημείου ἐφαπτομένων εὐθειῶν πρὸς σφαῖραν καὶ περιβάλλουσα τῶν διὰ σημείου ἐφαπτομένων ἐπιπέδων σφαίρας.

Ἔστω S σημεῖον ἐξωτερικὸν τῆς σφαίρας (K, R) (σχ. 381). Διὰ τῆς SK διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα καὶ ἐν ἑκάστῳ τούτων ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμεναι τῆς (K, R). Ὅθεν διὰ τοῦ S ἄγονται ἄπειροι ἐφαπτόμεναι τῆς (K, R). Τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα SA, SM, SB,... ἔχουν ὅλα κοινὸν μῆκος $l=\sqrt{SK^2-R^2}$ καὶ κοινὴν προβολὴν SO ἐπὶ τῆς KS ὁριζομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως $\overline{SO}\cdot\overline{SK}=l^2$. Ὅθεν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς A, M, B... κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (c) κέντρου O καὶ συνεπῶς **τὸ σύνολον τῶν ἐκ τοῦ S ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας (K, R) ἀποτελεῖ κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς** μὲ ὁδηγὸν τὴν **περιφέρειαν ἐπαφῆς** (c). (§ **316**). Ἐάν εἰς τυχὸν σημεῖον M τῆς ὁδηγοῦ περιφερείας (c) ἀχθῇ ἐφαπτομένη XΨ τῆς (c), τότε τὸ ἐπίπεδον (Π) τὸ ὑπὸ τῶν XΨ καὶ SM ὁριζόμενον (σχ. 381) ἐφάπτεται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γενετείρας SM (§ **315**, δ'). Ἐπειδὴ ὅμως ἡ XΨ ἐφάπτεται συγχρόνως καὶ τῆς σφαίρας (K, R), διὰ τοῦτο εἶναι $KM\perp X\Psi$, ἀλλὰ καὶ $KM\perp SM$, ἑπομένως $KM\perp(\Pi)$, δηλ. τὸ ἐπίπεδον (Π) ἐφάπτεται **καὶ** τῆς σφαίρας (K, R). Ὅθεν, **πάντα τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (S) εἶναι καὶ ἐφαπτόμενα τῆς σφαίρας. Ἀντιστρόφως.** Ἔστω ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τοῦ S καὶ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας (K, R) εἰς M. Τοῦτο περιέχει μίαν γενέτειραν SM τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (S), καθὼς καὶ τὴν ἐφαπτομένην XΨ τοῦ κύκλου (c) τὴν ἀγομένην εἰς τὸ M. Διότι $X\Psi\perp OM$, XΨ ὀρθογ SK (διότι ἡ XΨ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς (c), ὅπερ εἶναι $\perp SK$) $\Rightarrow X\Psi\perp$ Επιπ SMK $\Rightarrow X\Psi\perp KM\Rightarrow X\Psi$ ἀνήκει εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας τὸ ἀγόμενον εἰς M. Ἑπομένως τὸ (Π) περιέχον τὴν SM καὶ τὴν εἰς M ἐφα-



Σχ. 381

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πτομένην τῆς ὁδηγοῦ (c) ἐφάπτεται **καὶ** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (S). Ἐδείχθη ὅτι **πάντα τὰ διὰ τοῦ S διερχόμενα ἐπίπεδα καὶ ἐφαπτόμενα τῆς σφαίρας ἐφάπτονται καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἣν ὁρίζει τὸ S καὶ ἡ σφαῖρα.**

**Ὁρισμός.** Μία ἐπιφάνεια (Ε) λέγεται **περιβάλλουσα** μιᾶς οἰκογενείας (συνόλου) ἐπιπέδων, ὅταν ἡ (Ε) ἐφάπτεται ὅλων τῶν ἐπιπέδων τῆς οἰκογενείας καὶ ὅταν πᾶν σημεῖον τῆς (Ε) εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς τῆς (Ε) μὲ ἓν ἐπίπεδον τῆς οἰκογενείας.

Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τούτου τὰ προαποδειχθέντα ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς: **Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τῶν διὰ τοῦ S διερχομένων καὶ ἐφαπτομένων μιᾶς σφαίρας (K, R) ἀποτελεῖ κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς, ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων τῶν διὰ τοῦ S διερχομένων καὶ ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας (K, R).**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1059. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον σφαίρας εἴς τι σημεῖον αὐτῆς M περιέχει τὰς εἰς M ἐφαπτομένας ὅλων τῶν κύκλων τῆς σφαίρας τῶν διερχομένων διὰ τοῦ M.

1060. Τόπος τῶν κέντρων τῶν τομῶν σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου.

1061. Τόπος τῶν κέντρων τῶν τομῶν σφαίρας (K, R) ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ δοθείσης εὐθείας (ε) ἀπεχούσης d ἀπὸ τοῦ κέντρου K.

1062. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος πολυέδρου περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ὡς ἐφαρμογὴ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς ρ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς ἰσοσκελὲς τετράεδρον σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ 1/4 τοῦ ὕψους του.

1063. Δίδεται τετράεδρον ΟΑΒΓ ἔχον τὴν στερεὰν γωνίαν Ο τρισορθογώνιον μὲ ἀκμὰς ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΟΓ=γ. Ὑπολογίσατε συναρτήσει τῶν α, γ, β i) τὴν ἀκτῖνα R τῆς περὶ τὸ ΟΑΒΓ περιγεγραμμένης σφαίρας, ii) τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ΟΑΒΓ σφαίρας.

1064. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος ρ.

1065. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ρ ἑνὸς κύκλου αὐτῆς καὶ τῆς πολικῆς ἀποστάσεώς του *l*. Ποία ἡ ἄλλη πολικὴ ἀπόστασις;

1066. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ρ ἑνὸς μικροῦ κύκλου αὐτῆς καὶ τῆς ἀποστάσεως d τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τούτου ἀπὸ τὸν ἕνα τῶν πόλων του.

1067. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν καὶ Ax, By δύο ἡμιευθεῖαι ἐπ' αὐτῶν. Ἐπὶ τῶν Ax καὶ By λαμβάνομεν ἀντιστοίχως σημεῖα Α′, Β′ τοιαῦτα, ὥστε ΑΑ′=ΒΒ′=λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τῆς διὰ τῶν Α, Β, Α′, Β′ διερχομένης σφαίρας,ὅταν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως ∞.

1068. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον σφαίρας i) παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον. ii) διερχόμενον διὰ δοθείσης εὐθείας.

1069. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον δοθεῖσαν σφαῖραν κατὰ κύκλον δοθείσης ἀκτῖνος.

1070. Νὰ γραφῇ σφαῖρα μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ i) διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων, ii) ἐφαπτομένη τριῶν ἐπιπέδων ἐχόντων ἓν μόνον σημεῖον κοινόν.

1071. Δίδεται κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν 6 ἀκμῶν αὐτοῦ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς r ταύτης. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κέν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρον τῆς σφαίρας ταύτης εἶναι συγχρόνως καὶ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθοῦν καὶ αἱ ἀκτῖνες ρ καὶ R τῶν σφαιρῶν τούτων. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν r, ρ, R;

1072. Δοθείσης τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας $\pi k^2$ ἑνὸς ἰσοπλεύρου κώνου (ἄνοιγμα κωνικῆς ἐπιφανείας, 60°), νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης καθὼς καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον τοῦτον σφαίρας.

1073. Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθεῖσαν σφαῖραν, ἀκτῖνος ρ, κόλουρος κῶνος ἔχων ὄγκον $k\pi\rho^2/3$ (k δοθεὶς ἀριθμός). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου τούτου κώνου καὶ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τοῦ k, διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν.

(**Σημείωσις.** Εἰς τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ «κατασκευασθῇ» κόλουρος κῶνος ἢ κύλινδρος ἢ κῶνος, ἡ λέξις «κατασκευασθῇ» ἔχει τὴν ἔννοιαν «νὰ ὑπολογισθοῦν καὶ εἰ δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς αἱ διαστάσεις τοῦ στερεοῦ, ἤτοι τὰ στοιχεῖα τὰ προσδιορίζοντα αὐτό»).

1074. Ἐὰν r ἡ ἀκτὶς τῆς εἰς ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον ἐγγεγραμμένης σφαίρας, νὰ δειχθῇ ὅτι $\rho = \frac{\rho h}{\lambda+\rho} = \rho\sqrt{\frac{\lambda-\rho}{\lambda+\rho}}$, ὅπου ρ, λ, h ἡ ἀκτίς, πλευρὰ καὶ ὕψος τοῦ κώνου.

1075. i) Ἐὰν x ἡ ἀκτὶς βάσεως καὶ y τὸ ὕψος οἱουδήποτε ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R, νὰ δειχθῇ ὅτι $x^2 = R^2y/(y-2R)$. ii) Περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ περιγραφῇ κῶνος ἔχων ὄγκον $\pi k^2/3$. Συνθῆκαι δυνατότητος τοῦ προβλήματος. Ἐλάχιστον τοῦ ὄγκου τοῦ περιγεγραμμένου κώνου.

1076. Περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ περιγραφῇ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἔχων κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ἐμβαδοῦ $\pi k^2$. Συνθῆκαι δυνατότητος τοῦ προβλήματος. Ἐλάχιστον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου κώνου.

1077. Ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφαπτομένων δοθείσης σφαίρας, λαμβάνομεν δύο σταθερὰ ἀσύμβατα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐὰν διὰ τυχόντος ἐπιπέδου παρ/λου πρὸς τὰ δύο πρῶτα τμήσωμεν τὴν σφαῖραν καὶ τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν εἶναι σταθερός.

1078. Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου τοιούτων, ὥστε ὁ λόγος τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ (στρεβλοῦ, ἐν γένει) τετραπλεύρου ΜΑΒΓ νὰ εἶναι σταθερός.

1079. Θεωροῦμεν ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον μὲ κορυφὴν Ο καὶ σταθερὰν γενέτειραν αὐτοῦ ΟΑ. Ἐὰν ΟΜ μεταβλητὴ γενέτειρα τοῦ κώνου, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρ.ΟΑΜ περιγεγραμμένου κύκλου, ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

1080. Θεωροῦμεν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἴσον ἀπέχον τούτων. Ποῖος ὁ γ. τόπος τοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κέντρου σφαίρας ἐφαπτομένης τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν;

1081. Δοθέντος κανονικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ ἀκμῆς α, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας μὲ κέντρον ἐντὸς τοῦ τετραέδρου καὶ ἐφαπτομένης τῆς ἕδρας ΒΓΔ καὶ τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ.

1082. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς τὸ κανονικὸν τετράεδρον τὸ κέντρον ἑκάστης παρεγγεγραμμένης σφαίρας κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον σφαίρας. Τὰ σημεῖα δὲ ἐπαφῆς τῆς παρεγγεγραμμένης σφαίρας μὲ τὰς προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν κεῖνται ἕκαστον ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τῆς οἰκείας ἕδρας.

1083. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶσα κανονικὴ πυραμὶς εἶναι ἐγγράψιμος καὶ περιγράψιμος περὶ σφαῖραν.

1084. Ποῖος ὁ γ. τόπος τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ Ἰσημερινοῦ ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς ὑδρογείου σφαίρας, τὰ ὁποῖα ἔχουν γεωγραφικὸν πλάτος ἴσον πρὸς τὸ γεωγραφικὸν μῆκος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1085. Διὰ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β διέρχονται δύο μεταβληταὶ εὐθεῖαι ΑΧ καὶ ΒΨ διαμένουσαι πάντοτε ὀρθογώνιοι πρὸς ἀλλήλας. Ἐὰν ΚΛ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν ΑΧ καὶ ΒΨ (Κ∈ΑΧ, Η∈ΒΨ), ποῖος ὁ γ. τόπος ἑκάστου τῶν σημείων Κ καὶ Λ;

1086. Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ κινοῦνται ἐπὶ δύο δοθεισῶν ὀρθογωνίων εὐθειῶν (ε) καὶ (ε′), ὧν ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εἶναι ΑΑ′ = 2h (Α∈(ε), Α′∈(ε′)). Ἐὰν ΑΜ = x, Α′Μ′ = = x′, ὑπολογίσατε συναρτήσει τῶν h, x, x′ τὴν ἀκτῖνα R τῆς περὶ τὸ τετράεδρον ΑΜΜ′Α′ περιγεγραμμένης σφαίρας. Ἀκολούθως, εὕρετε τὸν γ. τόπον τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ταύτης, ὅταν τὰ Μ καὶ Μ′ κινοῦνται οὕτως, ὥστε $x^2 + x'^2 = c^2$ (δοθέν).

1087. Κόλουρος, κανονική, ἑξαγωνικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας τὰ ἀποστήματα τῶν βάσεων εἶναι α καὶ α′ εἶναι περιγεγραμμένη περὶ σφαῖραν. i) Ποία ἡ ἀκτὶς R τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας : ii) Ποία ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ; iii) Ἐὰν α+α′ = 4R ἢ α—α′ = = 2R, ποία ἑκάστοτε ἡ κλίσις τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ὡς πρὸς τὴν μεγάλην βάσιν;

1088. Ἔστω ΔΑΒΓ τετράεδρον τρισορθογώνιον εἰς τὸ Δ ἔχον ΔΑ = α, ΔΒ = β, ΔΓ = = γ καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R. i) Συναρτήσει τῶν α, β, γ νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ R καὶ αἱ ἀποστάσεις a, b, d τῶν κορυφῶν Α, Β, Δ ἀπὸ τὴν διάμετρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Γ. ii) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ a, b, d δύνανται νὰ χρησιμεύσουν ὡς πλευραὶ τριγώνου. iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μὲ πλευρὰς a, b, d ἰσοῦται μὲ αβγ/4R.

1089. Πολύεδρον ΑΒΓΑ′Β′Γ′ περικλείεται ἀπὸ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ καὶ ἀπὸ τρία τετράπλευρα ΑΒΒ′Α′, ΒΓΓ′Α′, ΓΑΑ′Γ′. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν δύο ἐκ τῶν τετραπλεύρων τούτων εἶναι ἐγγράψιμα, τότε τὸ πολύεδρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν καὶ ὅτι τὸ τρίτον τετράπλευρον θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἐγγράψιμον.

1090. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα παρ/δον εἶναι περιγράψιμον περὶ σφαῖραν, εἶναι πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ παρ/δου νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

1091. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν παρ/δον ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν εἶναι ὀρθογώνιον παρ/δον.

1092. Δίδεται περιφέρεια (c) καὶ σταθερὰ εὐθεῖα (δ) τέμνουσα τὴν (c) καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς (δ) σημεῖον Β. Ἐὰν σημεῖον Γ διαγράφῃ τὴν (c), νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ γ. τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι περιφέρεια. Ἐὰν Ρ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης (δηλ. τὸ κέντρον τοῦ τόπου), νὰ εὑρεθῇ ἐπίσης ὁ γ. τόπος τοῦ Ρ, ὅταν τὸ Β διαγράφῃ τὴν (δ).

1093. Δίδεται κύβος ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ ἀκμῆς α. Ἐπὶ τῶν ἀσυμβάτων ἀκμῶν Δ′Γ′ καὶ ΒΓ (ὅπου Δ′Β διαγώνιος τοῦ κύβου) κινοῦνται δύο σημεῖα Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε πάντοτε ἡ σφαῖρα διαμέτρου ΜΝ νὰ ἐφάπτεται τῆς ἀκμῆς ΑΑ′. i) Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων Δ′Μ = x καὶ ΒΝ = y; ii) Ποία ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ταύτης; iii) Ποῖος ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ταύτης;

## ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

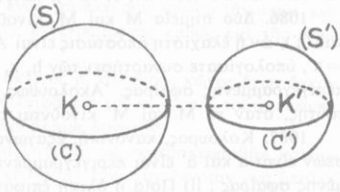
**343.** Ἂς θεωρήσωμεν δύο σφαίρας (S) καὶ (S′) κέντρων Κ καὶ Κ′ καὶ ἀκτίνων R καὶ R′. Τὸ τμῆμα ΚΚ′ = d καλεῖται **διάκεντρος** τῶν δύο σφαιρῶν.

α′) Ἐὰν τὰ Κ καὶ Κ′ συμπίπτουν, αἱ σφαῖραι λέγονται **ὁμόκεντροι.** Αὗται εἶναι διακεκριμέναι ἀλλήλων, ἂν R ≠ R′ ἢ συμπίπτουσαι, ἂν R = R′.

β′) Ἔστωσαν τὰ Κ καὶ Κ′ διάφορα ἀλλήλων. Τότε ἡ εὐθεῖα ΚΚ′ τῶν κέντρων εἶναι κοινὸς ἄξων συμμετρίας τῶν δύο σφαιρῶν καὶ πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ευθ ΚΚ′ τέμνει τὰς σφαίρας κατὰ δύο περιφερείας μεγίστων κύκλων (c) καὶ (c′), αἵτινες στρεφόμεναι περὶ τὴν ΚΚ′ παράγουν τὰς σφαίρας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

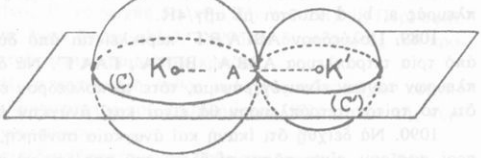
1ον. **Ἐὰν d>R+R′** (σχ. 382), αἱ δύο περιφέρειαι (c) καὶ (c′) εἶναι ἐξωτερικαὶ ἀλλήλων. Πᾶν σημεῖον τῆς (c) ἀπέχει τοῦ K′ ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς R′ καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν περιστροφὴν περὶ τὴν εὐθKK′ αἱ ἀποστάσεις διατηροῦνται, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς σφαίρας (S) εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς (S′).



Σχ. 382

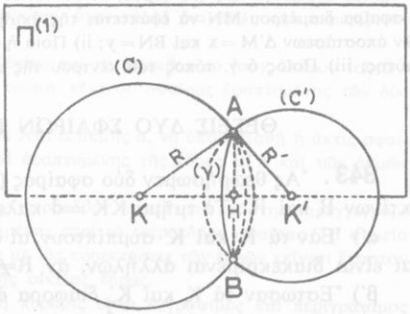
Ὁμοίως τὰ σημεῖα τῆς (S′) εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς (S). **Αἱ σφαῖραι εἶναι ἐξωτερικαὶ ἀλλήλων.**

2ον. **Ἐὰν d=R+R′** (σχ. 383), οἱ δύο μέγιστοι κύκλοι (c) καὶ (c′) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς A. Αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν ὡς μόνον κοινὸν σημεῖον τὸ A, ἕκαστον δὲ ἄλλο σημεῖον ἑκατέρας εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς ἑτέρας. Αἱ σφαῖραι εἶναι **ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς** καὶ ἔχουν εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς A αὐτῶν κοινὸν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον.



Σχ. 383

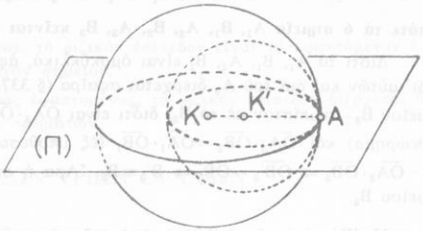
3ον. **Ἐὰν |R—R′|<d<R+R′** (σχ. 384), αἱ δύο περιφέρειαι μεγίστων κύκλων (c) καὶ (c′) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα A καὶ B συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν KK′. Τὸ μέσον H τῆς AB κεῖται ἐπὶ τῆς KK′ καὶ εἶναι AH⊥KK′. Ἔστω $Π^{(1)}$ ἓν τῶν ἡμιεπιπέδων, εἰς ἃ ἡ εὐθKK′ χωρίζει τὸ (Π). Τοῦ $Π^{(1)}$ στρεφομένου περὶ τὴν KK′, αἱ ἐπ' αὐτοῦ εὑρισκόμεναι ἡμιπεριφέρειαι τῶν (c) καὶ (c′) διαγράφουν τὰς δύο σφαίρας. Τὸ A διαγράφει περιφέρειαν (γ) κέντρου H καὶ ἀκτῖνος HA· ἡ (γ) ἀνήκει καὶ εἰς τὴν σφαῖραν (S) καὶ εἰς τὴν σφαῖραν (S′). Αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν **μίαν περιφέρειαν κοινὴν** (γ) καὶ λέγονται **τεμνόμεναι.** Τὸ ἐπίπεδον τοῦ κοινοῦ κύκλου **(κύκλος τομῆς)** εἶναι ⊥ εὐθKK′, τὸ κέντρον του κεῖται ἐπὶ τῆς KK′ καὶ ἡ ἀκτίς του εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ τρ. KAK′



Σχ. 384

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

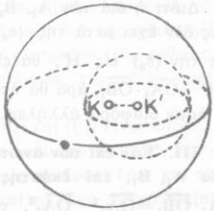
τὸ ἀγόμενον ἐκ τοῦ Α. Ἡ σφαῖρα (S) χωρίζει τὴν (S′) εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ ἓν κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τῆς (S), τὸ δὲ ἄλλο ἐξ ὁλοκλήρου ἐκτὸς τῆς (S), ὅπως συμβαίνει καὶ μὲ τὰς τεμνομένας περιφερείας.



Σχ. 385

4ον. **Ἐὰν d = |R — R′|** (σχ. 385), οἱ δύο μέγιστοι κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς Α. Αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν μόνον κοινὸν σημεῖον τὸ Α, ὅλα δὲ τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς μικροτέρας εἶναι ἐσωτερικὰ τῆς μεγαλυτέρας. Αἱ δύο σφαῖραι λέγονται τότε **ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς** εἰς Α καὶ ἔχουν εἰς τὸ Α κοινὸν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ⊥ ευθKK′.

5ον. **Ἐὰν d<|R—R′|** (σχ. 386), τότε ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο μεγίστων κύκλων εἶναι ἐσωτερικὸς τοῦ ἄλλου καὶ κατὰ συνέπειαν **ἡ μία τῶν σφαιρῶν κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης.**



Σχ. 386

γ′) **Τὰ ἀντίστροφα ἀληθεύουν** καὶ ἀποδεικνύονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὅπως γίνεται καὶ διὰ τὰς θέσεις δύο περιφερειῶν. Οὕτω π.χ., ἂν ἡ μία σφαῖρα κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης ⇒ d < |R—R′| κ.τ.λ.

## ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΦΑΙΡΑΝ

**344. α′) Θεώρημα καὶ ὁρισμός.** — **Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου P ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν σφαῖραν (K, R) εἰς δύο σημεῖα A καὶ B, τότε τὸ γινόμενον $\overline{PA} \times \overline{PB}$ εἶναι εἰς πραγματικὸς ἀριθμός, σταθερός, καλούμενος «δύναμις τοῦ P ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν». Τὸ πρόσημον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χαρακτηρίζει τὴν θέσιν τοῦ P ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν. Ἐὰν δὲ τὸ P εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς σφαίρας, ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἐκ τοῦ P ἀγομένου ἐφαπτομένου τμήματος πρὸς τὴν σφαῖραν.**

Διότι ἡ τέμνουσα PAB ὁρίζει μετὰ τοῦ κέντρου K ἐπίπεδον (Π) τέμνον τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν μεγίστου κύκλου (K, R) κειμένην ἐπὶ τοῦ (Π) διερχομένην διὰ τῶν A καὶ B. Ἑπομένως ἐφαρμόζονται τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας :

Δύναμις τοῦ P ὡς πρὸς τὴν (K, R) = ΔυνP/(K, R) = $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \boxed{PK^2 - R^2}$.

Ἐὰν δὲ ΔυνP/(K, R) > 0 ⇒ P ἐξωτερικὸν τῆς σφαίρας.

Ἐὰν ΔυνP/(K, R) = 0 ⇒ P ἐπὶ τῆς σφαίρας.

Ἐὰν ΔυνP/(K, R) < 0 ⇒ P ἐντὸς τῆς σφαίρας.

**β′) Ἀντίστροφα θεωρήματα. Ι. Ἐὰν ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν ($ε_1$), ($ε_2$), ($ε_3$) διερχομένων**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖνται ἀντιστοίχως τὰ ζεύγη τῶν σημείων $(A_1, B_1)$, $(A_2, B_2)$, $(A_3, B_3)$ τοιούτων, ὥστε :**

$$\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}=\overline{OA_2}\cdot\overline{OB_2}=\overline{OA_3}\cdot\overline{OB_3},$$

**τότε τὰ 6 σημεῖα $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, $A_3$, $B_3$ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας.**

Διότι τὰ $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ εἶναι ὁμοκυκλικά, ἀφοῦ $\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}=\overline{OA_2}\cdot\overline{OB_2}$ καὶ ἑπομένως δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ $A_3$ διέρχεται σφαῖρα (§ 337, ii). Αὕτη ἐπανατέμνει τὴν $(\varepsilon_3)$ εἰς σημεῖον $B_3'$ συμπίπτον μὲ τὸ $B_3$, διότι εἶναι $\overline{OA_3}\cdot\overline{OB_3'}=\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$ (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) καὶ $\overline{OA_3}\cdot\overline{OB_3}=\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$ (ἐξ ὑποθέσεως). Ἐκ τούτων ἕπεται : $\overline{OA_3}\cdot\overline{OB'_3}=$ $=\overline{OA_3}\cdot\overline{OB_3}\Rightarrow\overline{OB'_3}=\overline{OB_3}\Rightarrow B'_3\equiv B_3$. Ἄρα ἡ σφαῖρα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ 6ου σημείου $B_3$.

**II. Ἐὰν ἐπὶ τῶν $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος κεῖνται ἐπὶ ἑκάστης τῶν δύο πρώτων ἀνὰ ἓν ζεῦγος σημείων : $(A_1, B_1)$ καὶ $(A_2, B_2)$, ἐπὶ δὲ τῆς τρίτης ἓν σημεῖον Η οὕτως, ὥστε**

$$\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}=\overline{OA_2}\cdot\overline{OB_2}=\overline{OH}^2,$$

**τότε διὰ τῶν 5 τούτων σημείων διέρχεται σφαῖρα ἐφαπτομένη τῆς $(\varepsilon_3)$ εἰς Η.**

Διότι ἡ διὰ τῶν $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ διερχομένη περιφέρεια ὁρίζει μετὰ τοῦ Η σφαῖραν, ἥτις δὲν ἔχει μετὰ τῆς $(\varepsilon_3)$ ἕτερον κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ Η. Διότι, ἂν ἐπανέτεμνε τὴν $(\varepsilon_3)$ εἰς Η', θὰ εἴχομεν $\overline{OH}\cdot\overline{OH'}=\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$. Ἔχομεν ὅμως ἐξ ὑποθέσεως $\overline{OH}^2=\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$, ἄρα θὰ ἦτο $\overline{OH}\cdot\overline{OH'}=\overline{OH}^2\Rightarrow\overline{OH}=\overline{OH'}$, ὅπερ ἀδύνατον, ἂν τὰ Η καὶ Η' ἦσαν διάφορα ἀλλήλων.

**III. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$ κεῖνται ἐπὶ μὲν τῆς $(\varepsilon_1)$ δύο σημεῖα $A_1$, $B_1$, ἐπὶ ἑκάστης δὲ τῶν $(\varepsilon_2)$ καὶ $(\varepsilon_3)$ ἀνὰ ἓν σημεῖον $A_2$, $A_3$ οὕτως, ὥστε $\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}=\overline{OA_2}^2=\overline{OA_3}^2$, τότε ἡ περὶ τὸ τετράεδρον $A_1B_1A_2A_3$ περιγεγραμμένη σφαῖρα ἐφάπτεται τῶν $(\varepsilon_2)$ καὶ $(\varepsilon_3)$ εἰς $A_2$ καὶ $A_3$.**

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἐντελῶς ὁμοία μὲ τὴν προηγουμένην.

## ΡΙΖΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ

**345. α') Θεώρημα καὶ ὁρισμός.**— **Τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ἐχόντων ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς δύο σφαίρας (K, R) καὶ (K', R') εἶναι ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον KK' εἰς σημεῖον Π ἀπέχον ἀπὸ τοῦ μέσου Ο τῆς διακέντρου, ἀλγεβρικὴν ἀπόστασιν $\overline{O\Pi}$ διδομένην ὑπὸ τῆς :**

$$2\cdot\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi}=R^2-R'^2.$$

**Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλεῖται «ριζικὸν ἐπίπεδον» τῶν δύο σφαιρῶν.**

Διότι, ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου, (Ε) τὸ διὰ τοῦ Μ διερχόμενον ἐπίπεδον $\perp$KK' καὶ Π τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ (Ε) μετὰ τῆς εὐθKK'. Τότε :

$$\Delta\upsilon\nu M/(K)=\Delta\upsilon\nu M/(K')\Longleftrightarrow MK^2-R^2=MK'^2-R'^2\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow MK^2-MK'^2=R^2-R'^2\Longleftrightarrow 2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi}=R^2-R'^2 \text{ (2ον θεώρημα τῆς διαμέσου).}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἕπεται ὅτι τὸ Π εἶναι σταθερὸν καὶ ἑπομένως καὶ τὸ ἐπίπεδον (Ε), ἐφ' οὗ κεῖται τὸ Μ εἶναι σταθερόν. Πᾶν δὲ σημεῖον Ρ τοῦ (Ε) ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς δύο σφαίρας, διότι προβάλλεται εἰς τὸ Π καὶ ἑπομένως :

$$PK^2-PK'^2=2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi}=R^2-R'^2\Rightarrow PK^2-R^2=PK'^2-R'^2.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β') Εἰδικαὶ περιπτώσεις: 1ον. Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνωνται, τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς των εἶναι τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον αὐτῶν.** Διότι πᾶν κοινὸν σημεῖον τῶν δύο σφαιρῶν ἔχει μηδενικὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν σφαιρῶν, ἑπομένως ἡ κοινὴ περιφέρεια τῶν δύο σφαιρῶν ἀνήκει εἰς τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον αὐτῶν καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς ταυτίζεται μετὰ τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου.

**2ον. Ἐὰν δύο σφαῖραι ἐφάπτωνται, τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον εἶναι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῶν τὸ ἀγόμενον εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον.**

**3ον. Ἐὰν αἱ σφαῖραι ἔχουν κοινὰς ἐφαπτομένας, τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τμημάτων.**

## ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΩΝ ΤΡΙΩΝ ΣΦΑΙΡΩΝ

**346.** Ἔστωσαν $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$ 3 σφαῖραι κέντρων $K_1$, $K_2$, $K_3$ μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας. Τότε:

Τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον τῶν $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$ εἶναι τὸ $(E_3) \perp K_1K_2$.

Τὸ » » τῶν $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$ εἶναι τὸ $(E_1) \perp K_2K_3$.

Τὸ » » τῶν $(\Sigma_3)$, $(\Sigma_1)$ εἶναι τὸ $(E_2) \perp K_1K_3$.

Τὰ δύο ἐπίπεδα $(E_3)$ καὶ $(E_1)$ τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν $(\delta) \perp \text{Επιπ}K_1K_2K_3$ καὶ κάθε σημεῖον τῆς $(\delta)$ ἔχει ἴσας δυνάμεις καὶ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς σφαίρας. Ἑπομένως τὸ $(E_2)$ διέρχεται διὰ τῆς $(\delta)$. Τὰ τρία λοιπὸν ριζικὰ ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας $(\delta)$, ἥτις καλεῖται **«ριζικὸς ἄξων τῶν τριῶν σφαιρῶν».** Πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης ἔχει ἴσας δυνάμεις καὶ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς σφαίρας (ἑπομένως τὴν αὐτὴν σχετικὴν θέσιν καὶ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς).

Ἐὰν τὰ κέντρα $K_1$, $K_2$, $K_3$ εἶναι συνευθειακά, τότε ἢ τὰ $(E_3)$ καὶ $(E_1)$ εἶναι παράλληλα, ὁπότε δὲν ὑπάρχει ριζικὸς ἄξων ἢ τὰ $(E_3)$ καὶ $(E_1)$ ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦν ἓν ἐπίπεδον, πᾶν σημεῖον τοῦ ὁποίου ἔχει ἴσας δυνάμεις καὶ πρὸς τὰς τρεῖς σφαίρας. Τότε καὶ τὸ $(E_2)$ ταυτίζεται μὲ αὐτὰ καὶ αἱ τρεῖς σφαῖραι ἔχουν ἀνὰ δύο ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ριζικὸν ἐπίπεδον. (Πᾶσα δὲ εὐθεῖα αὐτοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ριζικὸς ἄξων τῶν τριῶν σφαιρῶν).

## ΡΙΖΙΚΟΝ ΚΕΝΤΡΟΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΣΦΑΙΡΩΝ

**347.** Ἔστωσαν $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$, $(\Sigma_4)$ τέσσαρες σφαῖραι κέντρων $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν τριῶν σφαιρῶν $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$ εἶναι εὐθεῖα $(\delta) \perp \text{Επιπ}K_1K_2K_3$. Τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον (Ε) τῶν $(\Sigma_4)$ καὶ $(\Sigma_1)$ εἶναι $\perp K_4K_1$, ἥτις δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $K_1K_2K_3$. Ἑπομένως τὸ (Ε) δὲν εἶναι $\perp \text{Επιπ}K_1K_2K_3$, ἄρα τέμνει τὴν $(\delta)$ εἴς τι σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας δυνάμεις καὶ ὡς πρὸς τὰς τέσσαρας σφαίρας καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται **ριζικὸν κέντρον τῶν τεσσάρων σφαιρῶν.**

Τὸ Ο ἔχει τὴν αὐτὴν σχετικὴν θέσιν καὶ ὡς πρὸς τὰς 4 σφαίρας.

—Ἐὰν τὰ $K_1$, $K_2$ $K_3$, $K_4$ εἶναι ὁμοεπίπεδα, τότε καὶ ἡ $(\delta)$ καὶ τὸ (Ε) εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $K_1K_2K_3K_4$. Ἑπομένως

ἢ ἡ $(\delta)$ καὶ τὸ (Ε) εἶναι παράλληλα, ὁπότε δὲν ὑπάρχει ριζικὸν κέντρον

ἢ ἡ $(\delta)$ περιέχεται εἰς τὸ (Ε), ὁπότε πᾶν σημεῖον της εἶναι ριζικὸν κέντρον τῶν τεσσάρων σφαιρῶν.

## ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΣΦΑΙΡΑΙ

**348. Δύο τεμνόμεναι σφαῖραι λέγονται ὀρθογώνιοι, ἐὰν τὰ ἐφαπτόμενα αὐτῶν ἐπίπεδα τὰ ἀγόμενα εἰς ἓν σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς των** (δηλ. τῆς κοινῆς περιφερείας) **εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.**

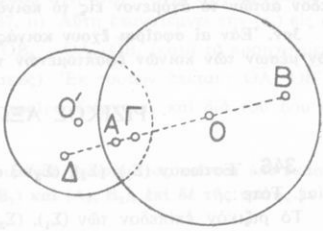
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ συμβαίνη τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν αἱ περατούμεναι εἰς ἓν κοινὸν σημεῖον τῶν σφαιρῶν νὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Δυνάμεθα ἐκ τούτου νὰ συναγάγωμεν τὰ δύο ἑπόμενα θεωρήματα.

**Θεώρημα I.— Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο σφαῖραι τέμνωνται ὀρθογωνίως, εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς διακέντρου νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.**

**Θεώρημα II.— Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο σφαῖραι τέμνωνται ὀρθογωνίως, εἶναι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου τῆς πρώτης ὡς πρὸς τὴν δευτέραν νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς πρώτης.**

—Ἂς φέρωμεν τώρα διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς μιᾶς σφαίρας εὐθεῖαν συναντῶσαν αὐτὴν μὲν εἰς τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα Α καὶ Β, τὴν δὲ ἄλλην εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ (σχ. 387).



Σχ. 387

Ἡ ἀνωτέρω ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\Delta\upsilon\nu O/(O') = OA^2 = OB^2 \Longleftrightarrow \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta} = OA^2 = OB^2 \Longleftrightarrow (A,B,\Gamma,\Delta) = -1.$$

Ἰσχύει δηλ. τὸ

**Θεώρημα III. Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο σφαῖραι εἶναι ὀρθογώνιοι, εἶναι μία διάμετρος τῆς μιᾶς νὰ διαιρῆται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῆς ἄλλης.**

**349.** Μία σφαῖρα (K, R) λέγομεν ὅτι **τέμνεται ψευδοορθογωνίως** ὑπὸ ἄλλης σφαίρας (K', R'), ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων σφαιρῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου K τῆς (K, R). Ὅταν τοῦτο συμβαίνη, ἡ (K', R') τέμνει τὴν (K, R) κατὰ μέγιστον κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον εἶναι $\perp$ KK', τὸ δὲ K εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς (K', R'). Εὐχερῶς συνάγεται ὅτι: **ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ σφαῖρα (K, R) τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τῆς (K',R'), εἶναι: $KK'^2 = R'^2 - R^2$.**

Ἡ συνθήκη αὐτὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν: $KK'^2 - R'^2 = -R^2$, ἤτοι:

$$\boxed{\Delta\upsilon\nu K/(K', R') = -R^2.}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1094. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κοινοῦ κύκλου δύο τεμνομένων σφαιρῶν συναρτήσει τῶν ἀκτίνων R, R' καὶ τῆς διακέντρου δ.

1095. Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου Ο κειμένου ἐντὸς σφαίρας (K, R) ἀχθοῦν τρία ἐπίπεδα κάθετα ἐπ' ἄλληλα ἀνὰ δύο, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι σταθερόν.

1096. Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου Ο κειμένου ἐντὸς σφαίρας (K, R) ἀχθοῦν τρεῖς χορδαὶ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας ἀνὰ δύο, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 6 τμημάτων, εἰς ἃ διαιροῦνται αἱ χορδαὶ ὑπὸ τοῦ Ο, εἶναι σταθερόν.

1097. Ἐὰν τὰ κέντρα δύο κύκλων τοῦ χώρου εἶναι προβολαὶ τοῦ ἰδίου σημείου Α ἐπὶ τὰ ἐπίπεδά των, τὰ δὲ ἐφαπτόμενα τμήματα τὰ ἀγόμενα πρὸς αὐτοὺς ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων των εἶναι ἴσα, τότε οἱ δύο κύκλοι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

1098. i) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς σταθεροῦ ἐπιπέδου μετὰ τῶν σφαιρῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ ἐφάπτονται αὐτοῦ. ii) Νὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁρισθῇ σφαῖρα διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου.

1099. Δείξατε ὅτι σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας καὶ διερχομένη διὰ σημείου Α διέρχεται καὶ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

1100. Ἐντὸς διέδρου γωνίας δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ ἐφαπτομένη τῶν ἑδρῶν.

1101. Ἐντὸς τριέδρου γωνίας δίδεται σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ ἐφαπτομένη τῶν ἑδρῶν.

1102. i) Τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν τεμνουσῶν ψευδοορθογωνίως δύο δοθείσας σφαίρας. ii) Τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν τεμνουσῶν ψευδοορθογωνίως τρεῖς δοθείσας σφαίρας.

1103. Τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως μίαν δοθείσαν σφαῖραν καὶ ψευδοορθογωνίως ἑτέραν δοθεῖσαν σφαῖραν.

1104. Δείξατε ὅτι πᾶσαι αἱ σφαῖραι αἱ τέμνουσαι ψευδοορθογωνίως δύο δοθεῖσας σφαίρας διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων.

1105. Δείξατε ὅτι πᾶσαι αἱ σφαῖραι αἱ τέμνουσαι ψευδοορθογωνίως τρεῖς δοθείσας σφαίρας ἔχουν μίαν περιφέρειαν κοινήν.

1106. Δείξατε ὅτι αἱ σφαῖραι αἱ τέμνουσαι ὀρθογωνίως δοθεῖσαν σφαῖραν καὶ ψευδοορθογωνίως ἑτέραν δοθεῖσαν διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων.

1107. Δίδεται σφαῖρα (Κ, R) καὶ ἐπίπεδον (Π) ἐξωτερικὸν αὐτῆς. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶσα σφαῖρα ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα τὴν (Κ, R) τέμνει καὶ τὴν ἐκ τοῦ Κ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π) εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα.

1108. Συναρτήσει τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ ὑπολογίσατε τὰς ἀκτῖνας τριῶν σφαιρῶν, αἵτινες ἐφάπτονται μεταξύ των ἀνὰ δύο καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου εἰς τὰ Α, Β, Γ.

1109. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε ΓΑ : ΓΒ = ΔΑ : ΔΒ. Θεωροῦμεν δύο περιφερείας ἐχούσας διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ κειμένας εἰς δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπ' ἄλληλα. Θεωροῦμεν δύο σφαίρας διερχομένας διὰ τῶν περιφερειῶν τούτων, μίαν δι' ἑκάστης. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ σφαῖραι αὗται τέμνονται ὀρθογωνίως.

1110. Ἐὰν πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι πολύγωνον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, τότε πᾶσα σφαῖρα διερχομένη διὰ τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως τέμνει τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ἐπιπέδου, ἐγγραψίμου πολυγώνου.

1111. Εὐθύγραμμον τμῆμα μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε νὰ μένῃ παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς δοθέν, ἐνῷ τὰ ἄκρα του μένουν πάντοτε ἐπὶ δύο δεδομένων σφαιρῶν. Τίς ὁ τόπος ἑκάστου τῶν ἄκρων τούτων;

1112. Τρεῖς ἴσαι σφαῖραι (Α), (Β), (Γ) ἀκτῖνος R ἔχουν τὰ κέντρα των Α, Β, Γ εἰς τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἐφάπτονται ὁριζοντίου ἐπιπέδου (Η). Τετάρτη σφαῖρα (Δ), κέντρου Δ καὶ τῆς ἰδίας ἀκτῖνος R, ἑδράζεται ἐπὶ τῶν τριῶν πρώτων.

i) Ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ σφαῖραι (Α), (Β), (Γ) ἐφάπτονται καὶ ἀλλήλων ἀνὰ δύο, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλικὸν ὕψος ὑπεράνω τοῦ (Η) τοῦ σωροῦ τοῦ ἀποτελουμένου ἀπὸ τὰς τέσσαρας σφαίρας.

ii) Ὑποτίθεται τώρα ὅτι αἱ σφαῖραι (Α), (Β), (Γ) κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων ἀνὰ δύο. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ R ἡ πλευρὰ x τοῦ τριγ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ σφαῖρα (Δ) νὰ ἐφάπτεται τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ. Ποία εἶναι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς σφαίρας (Δ) μετὰ τῶν τριῶν ἄλλων;

iii) Τοῦ x ἐχοντος τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν τιμήν, νὰ ὁρισθῇ τὸ κέντρον Ο καὶ ἡ ἀκτὶς r τῆς περὶ τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένης σφαίρας. Νὰ δειχθῇ δὲ ὅτι ὑπάρχουν δύο σφαῖραι κέντρου Ο ἐφαπτόμεναι πρὸς τὰς τέσσαρας σφαίρας (Α), (Β), (Γ), (Δ).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1113. Τρεῖς ἴσαι σφαῖραι (Α, x), (Β, x), (Γ, x) ἐφάπτονται ἀλλήλων ἀνά δύο καὶ ἐφάπτονται καὶ ἐσωτερικῶς κοίλου ἡμισφαιρίου (Ι, R) περατουμένου ὑπὸ περιφερείας (c).

i) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κοινὴ ἀκτὶς x τῶν τριῶν σφαιρῶν εἰς τρόπον, ὥστε αἱ σφαῖραι νὰ ἐφάπτωνται ἐπίσης καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας (c).

ii) Νὰ ὑπολογισθῇ ἀκολούθως ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν σφαιρῶν μετὰ τοῦ ἡμισφαιρίου.

1114. Ἐὰν δύο περιφέρειαι μὴ ὁμοεπίπεδοι τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β, τότε εἶναι ὁμοσφαιρικαί.

1115. Ἐὰν δύο περιφέρειαι μὴ ὁμοεπίπεδοι ἔχουν κοινὸν σημεῖον Α καὶ κοινὴν εἰς αὐτὸ ἐφαπτομένην ΑΧ, τότε εἶναι ὁμοσφαιρικαί.

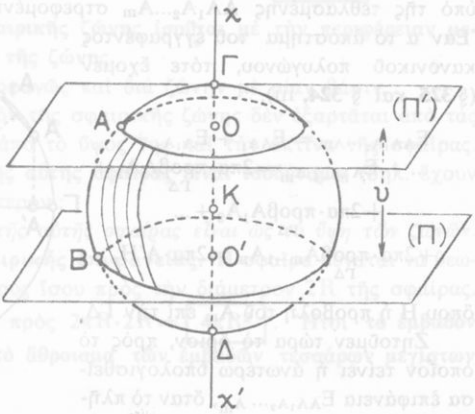
1116. Ἐὰν δύο περιφέρειαι κεῖνται εἰς ἐπίπεδα τεμνόμενα ἔστω κατὰ τὴν xψ, δύο δὲ σημεῖα τῆς xψ ἔχουν ἕκαστον ἴσας δυνάμεις πρὸς τὰς δύο περιφερείας, τότε αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμοσφαιρικαί (Ὑποδ. βλέπε καὶ ἄσκ. 1097).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

# ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

**350. Ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης καὶ σφαίρας.** α') **Ὁρισμοί.—Καλεῖται «σφαιρικὴ ζώνη» τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τεμνόντων τὴν σφαῖραν.** Ἡ ἀπόστασις υ μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων καλεῖται **ὕψος** τῆς ζώνης, αἱ δὲ τομαὶ τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν παραλλήλων τούτων ἐπιπέδων καλοῦνται **βάσεις** τῆς ζώνης (σχ. 388). Ἐὰν διὰ τοῦ κοινοῦ ἄξονος xx' τῶν δύο βάσεων τῆς ζώνης φέρωμεν ἐπίπεδον τέμνον τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, τότε τὸ τόξον $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου τούτου τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων τῆς ζώνης περιεχόμενον παράγει τὴν ζώνην στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα x'x. Τὸ Α διαγράφει, στρεφόμενον περὶ τὴν x'x, τὴν μίαν βάσιν, τὸ δὲ Β τὴν ἄλλην βάσιν τῆς ζώνης καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς ζώνης προέρχεται ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ $\widehat{AB}$ διὰ στροφῆς περὶ τὴν x'x.



Σχ. 388

Ἡ σφαιρικὴ λοιπὸν ζώνη εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια (§ 317) παραγομένη ὑπὸ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ μεγίστου κύκλου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον ΓΔ αὐτοῦ μὴ διατέμνουσαν τὸ τόξον $\widehat{AB}$.

**Ζώνη μὲ μίαν βάσιν** καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν σφαῖραν καὶ ἐπιπέδου ἐφαπτομέ-



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

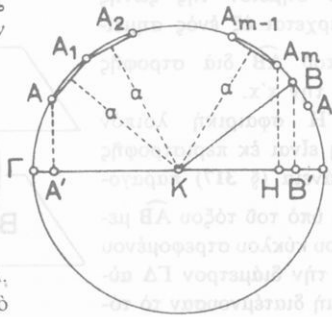
νου τῆς σφαίρας, παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων εἶναι τὸ ὕψος τῆς ζώνης. Ἡ ζώνη μὲ μίαν βάσιν παράγεται ὑπὸ τόξου μεγίστου κύκλου, π.χ. τοῦ $\widehat{\Gamma A}$, στρεφομένου περὶ διάμετρον τῆς σφαίρας διερχομένην διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου του (π.χ. περὶ τὴν ΓΔ τοῦ σχ. 388.)

*Πᾶν ἐπίπεδον τέμνον σφαῖραν διαιρεῖ τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο ζώνας μὲ μίαν βάσιν.*

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν καὶ ὑπολογίσωμεν τὸ **ἐμβαδὸν** τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν καὶ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ κυκλικοῦ τόξου στρεφομένου περὶ διάμετρον τοῦ κύκλου του, μὴ τέμνουσαν αὐτό.

**β') Τόξον στρεφόμενον.** Ἔστω ΓΔ διάμετρος κύκλου (K, R) καὶ $\widehat{AB}$ τόξον κείμενον εἰς τὸ ἓν τῶν ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἡ ΓΔ ὁρίζει. Ἔστω ἀκόμη Α΄Β΄ ἡ προβολὴ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ ἐπὶ τὴν ΓΔ (σχ. 389). Θεωροῦμεν κανονικὸν πολύγωνον μὲ ἀρκετὰ μέγα πλῆθος πλευρῶν, ν, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (K, R) καὶ ἔχον μίαν κορυφὴν τὸ Α· ἔστωσαν δὲ Α, $A_1$, $A_2$, ...$A_{m-1}$, $A_m$ αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ αἱ κείμεναι ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Αὗται ὁρίζουν μίαν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν $AA_1A_2...A_m$ ἀποτελοῦσαν τὸ μέρος τῆς περιμέτρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καὶ τὴν ὁποίαν, χάριν συντομίας, θὰ ὀνομάζωμεν *ἀπόκομμα τῆς περιμέτρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου* ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Ὑπολογίζομεν τώρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας $E_{AA_1A_2...A_m}$ τῆς διαγραφομένης ὑπὸ τῆς τεθλασμένης $AA_1A_2...A_m$ στρεφομένης περὶ τὴν διάμετρον ΓΔ. Ἐὰν α τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγραφέντος κανονικοῦ πολυγώνου, τότε ἔχομεν (§ **325** καὶ § **324,** iii).

$$E_{AA_1A_2...A_m} = E_{AA_1} + E_{A_1A_2} + ... + E_{A_{m-1}A_m} = 2\pi\alpha \cdot \underset{\Gamma\Delta}{\text{προβ}} AA_1 + 2\pi\alpha \cdot \underset{\Gamma\Delta}{\text{προβ}} A_1A_2 + ... + 2\pi\alpha \cdot \underset{\Gamma\Delta}{\text{προβ}} A_{m-1}A_m = 2\pi\alpha \cdot A'H,$$



Σχ. 389

ὅπου Η ἡ προβολὴ τοῦ $A_m$ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ζητοῦμεν τώρα τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσα ἐπιφάνεια $E_{AA_1A_2...A_m}$, ὅταν τὸ πλῆθος ν τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγραφέντος κανονικοῦ πολυγώνου αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, ἤτοι ὅταν $\nu \to \infty$.

Ἔχομεν κατὰ τ' ἀνωτέρω : $E_{AA_1A_2...A_m} = 2\pi\alpha \cdot A'H$ καὶ ἑπομένως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\lim_{\nu\to\infty} E_{AA_1\ldots A_m} = \lim_{\nu\to\infty}\{2\pi\alpha\cdot A'H\} = 2\pi\cdot(\lim_{\nu\to\infty}\alpha)\cdot(\lim_{\nu\to\infty} A'H).$$

Ἔχομεν ὅμως $\lim_{\nu\to\infty}\alpha = R$, $\lim_{\nu\to\infty} HB' = 0$, διότι $A_mB \to 0$ καὶ ἑπομένως $\lim_{\nu\to\infty} A'H = A'B'$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ὅριον εἶναι :

$$(1) \qquad \lim_{\nu\to\infty} E_{AA_1A_2\ldots A_m} = 2\pi R\cdot(A'B').$$

**Ὁρίζομεν τώρα ὡς ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον ΓΔ** τὸ ὅριον, εἰς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ τοῦ ἐντὸς τοῦ τόξου ἀποκόμματος $AA_1A_2\ldots A_m$ τῆς περιμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐξάνεται ἀπεριορίστως. Ἤτοι :

$$(2) \qquad E_{\widehat{AB}} = \lim_{\nu\to\infty} E_{AA_1A_2\ldots A_m}.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται :

$$(3) \qquad \boxed{E_{\widehat{AB}} = 2\pi R\cdot(A'B')} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{ὅπου } R \text{ ἡ ἀκτὶς καὶ } A'B' \\ \text{ἡ προβολὴ τοῦ } \widehat{AB} \text{ ἐπὶ τὸν} \\ \text{ἄξονα περιστροφῆς}\end{array}\right\}$$

γ') **Ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης.** Τὸ ὕψος υ τῆς σφαιρικῆς ζώνης (σχ. 388) ἰσοῦται μὲ τὴν προβολὴν OO' τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τοῦ διαγράφοντος αὐτὴν ἐπὶ τὴν διάμετρον περιστροφῆς. Συνεπῶς :

$$(4) \quad \text{ἐμβαδὸν τῆς ζώνης } \widehat{AB} = E_{\widehat{AB}} = 2\pi R\cdot(OO') = \boxed{2\pi R\cdot\upsilon}.$$

Ἤτοι : **τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.**

Τὸ ἀνωτέρω ἰσχύει προφανῶς καὶ διὰ ζώνην μὲ μίαν βάσιν.

Βλέπομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς βάσεις αὐτῆς, ἀλλὰ μόνον ἀπὸ τὸ ὕψος της καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Δηλ. **δύο ἰσοϋψεῖς ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδύναμοι** (δηλ. ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν). Γενικώτερον :

*Τὰ ἐμβαδὰ δύο ζωνῶν τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ὡς τὰ ὕψη τῶν ζωνῶν.*

δ') **Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.** Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σφαιρικὴ ζώνη ὕψους ἴσου πρὸς τὴν διάμετρον 2R τῆς σφαίρας. Συνεπῶς ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς $2\pi R\cdot 2R = \boxed{4\pi R^2}$. Ἤτοι **τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.**

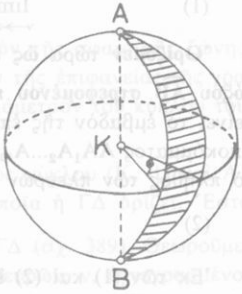
**351. Σφαιρικὴ ἄτρακτος.** α') Καλεῖται **ἄτρακτος** τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιεχόμενον ἐντὸς διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Αἱ ἕδραι τῆς διέδρου τέμνουν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν κατὰ δύο ἡμιπεριφερείας μεγίστων κύκλων, αἱ ὁποῖαι καὶ περικλείουν τὴν ἄτρακτον. Ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου λέγεται **γωνία τῆς ἀτράκτου.** Θὰ σημειοῦμεν τὴν ἄτρακτον γωνίας φ μὲ Ατρ.(φ). Σημειωτέον ὅτι ἓν ζεῦγος ἡμιεπιπέδων ἀρχομένων ἀπὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρου χωρίζει τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἀτράκτους μὲ γωνίας φ καὶ 360°—φ. Διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι :

i) *δύο ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι* **ἴσαι,** *ὅταν αἱ γωνίαι των, εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως*, διότι τότε ὑπάρχει κίνησις, διὰ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης,

ii) *τὸ τόξον μεγίστου κύκλου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο* **πλευρῶν** *τῆς ἀτράκτου, τὸ γραφόμενον μὲ πόλον μίαν τῶν* **κορυφῶν** *τῆς ἀτράκτου, ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὴν γωνίαν τῆς ἀτράκτου* (σχ. 390).



Σχ. 390

β') Δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν δύο ἀτράκτους τῆς ἰδίας σφαίρας, συγκρίνοντες τὰς ἀντιστοίχους διέδρους αὐτῶν. Ὁρίζομεν δηλαδὴ ὡς λόγον δύο ἀτράκτων τῆς αὐτῆς σφαίρας τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων διέδρων (§ **208,** § **209**).

Ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄτρακτος 360°, διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῆς Ατρ. (φ°) πρὸς τὴν σφαῖραν Σ, εἰς ἣν ἀνήκει, ἰσοῦται μὲ φ°/360°.

Ἐξ αὐτοῦ **ὁρίζεται** καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀτράκτου διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{\text{Ἐμβαδὸν Ατρ. } (\varphi^o)}{\text{Ἐπιφάνεια σφαίρας } \Sigma} = \frac{\varphi^o}{360^o} \Longleftrightarrow \text{Ἐμβ. Ατρ. } (\varphi^o) = \frac{\varphi^o}{360^o} \cdot 4\pi R^2.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1117. i) Τὸ ἐμβαδὸν ζώνης μὲ μίαν βάσιν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τόξου τοῦ διαγράφοντος τὴν ζώνην. ii) Ἐὰν S τὸ ἐμβαδὸν κύκλου σφαίρας καὶ $S_1$, $S_2$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας ὁ κύκλος οὗτος χωρίζει τὴν σφαῖραν, δείξατε ὅτι :

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$$

1118. Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου σφαίρας (K) διέρχεται μεταβλητὴ σφαῖρα (M), τέμνουσα τὴν K, τότε τὸ ἐντὸς τῆς πρώτης μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς δευτέρας ἔχει σταθερὸν ἐμβαδόν.

1119. Τὸ ἐμβαδὸν ζώνης μὲ μίαν βάσιν εἶναι 25πα², ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ εἰς τὴν ζώνην ἐγγεγραμμένου ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι 20πα². Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

1120. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἂν ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΒΓ αὐτῶν (Β, Γ σημεῖα ἐπαφῆς) καὶ τὸ σχῆμα νοῆται στρεφόμενον περὶ τὴν διάκεντρον, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῆς ἐπιφανείας, ἣν διαγράφει τὸ ΒΓ καὶ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπιφανείας, ἥν διαγράφει ἡ καμπύλη ΒΑΓ ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ τὰ δύο ἐλάσσονα τόξα $\widehat{BA}$ καὶ $\widehat{A\Gamma}$.

1121. Νὰ διαιρεθῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια εἰς ν ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδων i) παραλλήλων πρὸς δοθέν, ii) διερχομένων διὰ δοθείσης εὐθείας.

1122. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένου ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τῆς τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου (δηλ. ἔχοντος ἄνοιγμα $60^0$).

1123. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν γραφομένων ὑπὸ τῶν ἡμιπεριμέτρων δύο κανονικῶν πολυγώνων ὁμοίων, ἀρτίου πλήθους πλευρῶν, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς μέγιστον κύκλον, ὅταν ταῦτα στρέφωνται περὶ διάμετρον διερχομένην διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν.

1124. Ἐν ἐπιπέδῳ (Π) δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ μὲ διάμετρον ΑΜ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, ἔστω τὴν (ΑΜ), ἐν ἐπιπέδῳ καθέτῳ πρὸς τὸ (Π) καὶ κειμένην πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ (Π).

i) Ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν (ΑΒ), ποῖος ὁ τόπος τῆς μεταβλητῆς ἡμιπεριφερείας (ΑΜ);

ii) Ἐὰν τὸ Μ ὁρισθῇ οὕτως, ὥστε ΑΜ=c, ἡ δὲ ἡμιπεριφέρεια (ΑΜ) στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τῆς (ΑΜ) διαγραφομένης ἐπιφανείας;

1125. Τὸ κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος β κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος α, ὅπου α>β. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο μερῶν τῶν σφαιρῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ἰσοῦται μὲ $\pi(2\alpha+\beta)(2\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)/\alpha$.

1126. Δοθέντων δύο σημείων Ο καὶ Ο' ἀπεχόντων κατὰ ΟΟ'=2α θεωροῦμεν δύο μεταβλητὰς σφαίρας (S) καὶ (S') μὲ κέντρα Ο καὶ Ο' καὶ ἀκτῖνας R καὶ R'. i) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ R καὶ R' μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σφαιρῶν νὰ διατηρῇ σταθερὰν τιμήν, $k^2$, ποῖος ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν δύο σφαιρῶν; Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ k ὑπάρχει ὁ τόπος οὗτος;

Ἐὰν $k^2=16\pi a^2$, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ τόπος εἶναι σφαῖρα διαμέτρου ΟΟ', ἔστω ἡ (Σ) καὶ ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς (Σ) τέμνει τὰς σφαίρας (S) καὶ (S') τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Μ κατὰ ἴσους κύκλους.

1127. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν κῶνος ἐκ περιστροφῆς, οὗτινος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια νὰ ἰσοδυναμῇ πρὸς τὴν ἀντικειμένην πρὸς αὐτὸν ζώνην.

1128. Δοθέντος ἡμικυκλίου διαμέτρου ΑΒ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ἀχθῇ εἰς τὸ Μ ἐφαπτομένη συναντῶσα τὴν πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς σημεῖον Τ καὶ νοηθῇ τὸ σχῆμα περιστρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ, τὸ τόξον $\widehat{AM}$ καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΤ νὰ διαγράφουν ἰσοδυνάμους ἐπιφανείας.

1129. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς βάσεως καὶ τὸ ὕψος κώνου περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R, ὅταν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐπαφῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ζωνῶν, τὰς ὁποίας οὗτος ὁρίζει ἐπὶ τῆς σφαίρας.

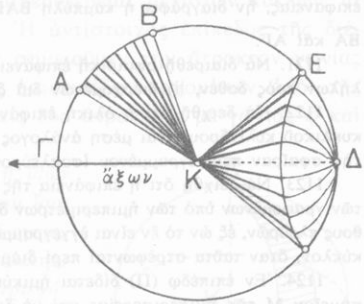
## ΣΤΕΡΕΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΜΙΑΝ ΣΦΑΙΡΑΝ

**352. Ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως καὶ σφαίρας. α') Ὁρισμοί. — Καλεῖται «σφαιρικὸς τομεὺς» τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ὑπὸ κυκλικοῦ τομέως στρεφομένου περὶ διάμετρον τοῦ κύκλου του, μὴ διατέμνουσαν αὐτόν.**

Ἔστω π.χ. κυκλικὸς τομεὺς ΚΑΒ (σχ. 391). Ἐὰν οὐδεμία τῶν ἀκραίων ἀκτίνων του ΚΑ, ΚΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ΓΔ, τότε ὁ ὑπὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ κυκλικοῦ τούτου τομέως παραγόμενος σφαιρικὸς τομεὺς περικλείεται μεταξὺ μιᾶς ζώνης γραφομένης ὑπὸ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καὶ δύο κωνικῶν ἐπιφανειῶν γραφομένων ὑπὸ τῶν ἀκραίων ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΚΒ. Ἐξ ἄλλου δυνατὸν μία τῶν ἀκραίων ἀκτίνων τοῦ κυκλικοῦ τομέως νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, ὁπότε ὁ παραγόμενος σφαιρικὸς τομεὺς περικλείεται ὑπὸ μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν βάσιν καὶ μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὅπως π.χ. ὁ ὑπὸ τοῦ τομέως ΚΔΕ τοῦ σχ. 391 γραφόμενος σφαιρικὸς τομεύς.



Σχ. 391

Ἡ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ἀνήκουσα σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται **βάσις** αὐτοῦ.

Προφανῶς πᾶς σφαιρικὸς τομεὺς ἀνήκει εἰς μίαν σφαῖραν καὶ ἀποτελεῖ μέρος τοῦ στερεοῦ - σφαῖρα.

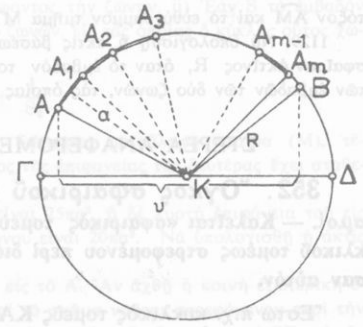
β΄) Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ὁρίζεται καὶ ὑπολογίζεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν ὁρίων. Ἔστω κυκλικὸς τομεὺς ΚΑΒ (σχ. 392). Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὸν κύκλον (Κ, R) κανονικὸν πολύγωνον ἱκανοῦ πλήθους πλευρῶν, ν, ἔχον μίαν κορυφὴν τὸ Α καὶ ἔστω $AA_1A_2...A_{m-1}A_m$ τὸ ἀπόκομμα τῆς περιμέτρου του τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ (βλ. § **350,** β΄). Ὁ κυκλικὸς τομεὺς προσεγγίζεται ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως (πολυγώνου) $KAA_1...A_mK$, ὁ δὲ σφαιρικὸς τομεὺς προσεγγίζεται ὑπὸ τοῦ στερεοῦ τοῦ γραφομένου ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως $KAA_1A_2...A_mK$ στρεφομένου περὶ τὴν ΓΔ. Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον $V_{KAA_1...A_mK}$ τὸν γραφόμενον διὰ περιστροφῆς τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως. Ἂν α τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, θὰ ἔχωμεν :

$$V_{KAA_1A_2...A_mK} = V_{KAA_1} + V_{KA_1A_2} + V_{KA_2A_3} ... + V_{KA_{m-1}A_m} =$$ (βλ. § **327,** β΄) $$\frac{1}{3} E_{AA_1} \cdot \alpha + \frac{1}{3} E_{A_1A_2} \cdot \alpha + ... + \frac{1}{3} E_{A_{m-1}A_m} \cdot \alpha =$$

$$= \frac{1}{3} \{E_{AA_1} + E_{A_1A_2} + ... + E_{A_{m-1}A_m}\} \cdot \alpha$$

ἢ τελικῶς

$$(1)\ V_{KAA_1A_2...A_mK} = \frac{1}{3} \alpha \cdot E_{AA_1A_2A_3...A_m}$$



Σχ. 392

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄς εὕρωμεν τώρα τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου τούτου, ὅταν $\nu \to \infty$. Ἔχομεν

$$\lim_{\nu\to\infty} V_{KAA_1 \dots A_m K} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \alpha \cdot \lim_{\nu\to\infty} E_{AA_1A_2 \dots A_m}.$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $\lim_{\nu\to\infty} \alpha = R$ καὶ ὅτι $\lim_{\nu\to\infty} E_{AA_1A_2 \dots A_m}$ = ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἣν διαγράφει τὸν τόξον $\widehat{AB}$ (§ **350** β΄, (2)).

Ἑπομένως λαμβάνομεν :

$$(2) \qquad \lim_{\nu\to\infty} V_{KAA_1 \dots A_m K} = \frac{1}{3} R \cdot E_{\widehat{AB}}.$$

Ὁρίζομεν ὡς ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου τοῦ γραφομένου ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω πολυγωνικοῦ τομέως, ἤτοι :

$$(3) \qquad V_{\text{σφ. τομ. } KAB} = (\text{ἐξ ὁρισμοῦ}) \lim_{\nu\to\infty} V_{AA_1A_2 \dots A_m K}.$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$(4) \qquad V_{\text{σφ. τομ. } KAB} = \frac{1}{3} E_{\widehat{AB}} \cdot R.$$

Ἤτοι : **ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ ἓν τρίτον τῆς ζώνης, ἥτις εἶναι βάσις αὐτοῦ, ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.**

γ΄) **Τελικὸς τύπος τοῦ ὄγκου.** Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (4) ἀντικατασταθῇ τὸ ἐμβαδὸν $E_{\widehat{AB}}$ τῆς σφαιρικῆς ζώνης διὰ τοῦ τύπου τῆς § **350**, ἤτοι τεθῇ $E_{\widehat{AB}} = 2\pi R \cdot \upsilon$, λαμβάνομεν :

$$(5) \qquad \boxed{V_{\text{σφ. τομ. } KAB} = \frac{2}{3} \pi R^2 \upsilon}$$ ὅπου υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης τοῦ τομέως

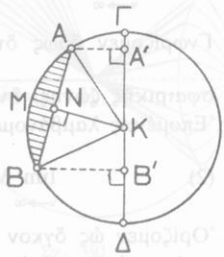
δ΄) **Ὄγκος σφαίρας.** Ὅταν ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΚΑΒ τοῦ σχ. 392 καταστῇ ἡμικύκλιον, τότε στρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΓΔ παράγει τὴν σφαῖραν. Ἑπομένως ὁ τύπος (5) γίνεται τότε : $V_{\text{σφαίρας}} = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot 2R$, διότι τὸ τόξον τοῦ τομέως γίνεται ἡμιπεριφέρεια $\widehat{ΓΔ}$ καὶ ἡ προβολὴ αὐτοῦ υ ἐπὶ τὴν διάμετρον γίνεται ἴση μὲ 2R. Ὅθεν :

$$(6) \qquad \boxed{V_{\text{σφαίρας}} = \frac{4}{3} \pi R^3}$$ (ὅπου R ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας)

$$(7) \qquad \boxed{V_{\text{σφαίρας}} = \frac{1}{6} \pi d^3}$$ (ὅπου d ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**353. Σφαιρικὸς δακτύλιος.** — **Καλεῖται σφαιρικὸς δακτύλιος τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον διὰ περιστροφῆς κυκλικοῦ τμήματος στρεφομένου περὶ διάμετρον τοῦ κύκλου του, μὴ διατέμνουσαν αὐτό.**



Σχ. 393

Ἔστω ΑΜΒ κυκλικὸν τμῆμα καὶ ΓΔ = 2R διάμετρος τοῦ κύκλου του μὴ τέμνουσα τοῦτο. (Ἡ διάμετρος δύναται νὰ διέρχεται διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α ἢ Β τῆς χορδῆς τοῦ τμήματος). Ἐπειδὴ τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒ εἶναι διαφορὰ ἑνὸς τομέως ΚΑΜΒ καὶ ἑνὸς τριγώνου ΚΑΒ, διὰ τοῦτο ὁ ὄγκος του ὁρίζεται ὡς διαφορὰ τῶν ὄγκων, τοὺς ὁποίους παράγουν ὁ κυκλικὸς τομεὺς καὶ τὸ τρίγωνον, στρεφόμενα περὶ τὴν ΓΔ. Ἂν εἶναι Α΄Β΄ ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον περιστροφῆς (σχ. 393), τότε θὰ ἔχωμεν κατὰ σειράν :

$$V_{\text{στρεφ. ΑΜΒ}} = V_{\text{στρεφ. τομ. ΚΑΜΒ}} - V_{\text{στρεφ. τριγ. ΚΑΒ}} = \frac{2}{3}\pi R^2 A'B' - \frac{1}{3} E_{AB} \cdot KN$$

(βλ. § **352** (5) καὶ § **327**, β΄) $= \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot A'B' - \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot KN \cdot A'B'$ KN (§ **324**, iii) $= \frac{2}{3}\pi \cdot A'B'\{R^2 - KN^2\} = \frac{2}{3}\pi \cdot A'B'(KA^2 - KN^2) =$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot A'B' \cdot AN^2 = \frac{2}{3}\pi \cdot A'B' \cdot \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{6}\pi \cdot AB^2 \cdot A'B'.$$ Ὥστε :

(1) $$\boxed{V_{\text{στρεφ. ΑΜΒ}} = \frac{1}{6}\pi \cdot AB^2 \cdot A'B'}$$ . Τοῦτο ἐκφράζει ὅτι :

*Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται μὲ τὸ 1/6 τοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς χορδῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον περιστροφῆς.*

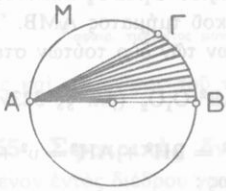
Ὅταν ΑΒ//ΓΔ (ὁπότε τὸ στερεὸν ὁμοιάζει πράγματι μὲ δακτυλίδιον), τότε Α΄Β΄ = ΑΒ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρ. δακτυλίου $= \pi(AB)^3/6$, ἄρα εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Ἔστω ΑΓ χορδὴ ἡμικυκλίου ΑΓΒ (σχ. 394(α)). Τὸ μικτόγραμμον τρίγωνον ΑΓΒ παράγει περιστρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ ὄγκον ἴσον πρὸς τὸν ὄγκον σφαίρας διαμέτρου ΑΒ μεῖον τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κυκλ. τμήματος ΑΜΓ.

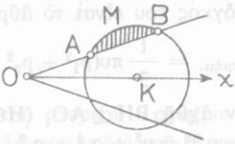
Γενικώτερον ἔστω (Κ) σφαῖρα ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τοῦ ἄξονος κωνικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας καὶ τέμνουσα τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην ὡς ἐν σχήματι 394(β). Τὸ ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μέρος τῆς στερεᾶς σφαίρας ἔχει ὄγκον ἴσον πρὸς τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διαφοράν τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὄγκου ἑνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου γραφομένου ὑπὸ τοῦ κυκλ. τμήματος ΑΜΒ τοῦ εἰκονιζομένου εἰς τὸ σχ. 394(β).




Σχ. 394(α)




Σχ. 394(β)

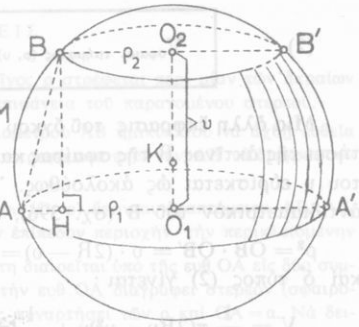
**354. Σφαιρικὸν τμῆμα. α΄) Δύο παράλληλοι κύκλοι σφαίρας καὶ ἡ μεταξὺ τούτων περιεχομένη ζώνη περικλείουν στερεὸν καλούμενον σφαιρικὸν τμῆμα.** Ἐσωτερικὸν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι τὸ μέρος τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς σφαίρας τὸ εὑρισκόμενον μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δύο κύκλων. Οἱ δύο οὗτοι κύκλοι λέγονται **βάσεις** καὶ ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν ἐπιπέδων των λέγεται **ὕψος** τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

**Εἰδικὴ περίπτωσις.** Εἰς κύκλος σφαίρας καὶ μία τῶν δύο σφαιρικῶν ζωνῶν, τὰς ὁποίας ὁρίζει, περικλείουν στερεὸν καλούμενον **σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν βάσιν.** Τὸ ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι καὶ **ὕψος** τοῦ σφαιρικοῦ τούτου τμήματος.

Πᾶν ἐπίπεδον τέμνον σφαῖραν χωρίζει τὸ στερεὸν - σφαῖρα εἰς δύο σφαιρικὰ τμήματα μὲ μίαν βάσιν ἕκαστον.

Ἓν σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι μεγέθει καθωρισμένον ἐκ τῶν στοιχείων ($\rho_1$, $\rho_2$, υ) : ἀκτῖνες βάσεων καὶ ὕψος, ὅπου ἡ μία τῶν ἀκτίνων $\rho_1$, $\rho_2$ δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδενική.

β΄) Ἔστω τώρα σφαιρικὸν τμῆμα μὲ βάσεις τοὺς κύκλους ($O_1$, $\rho_1$) καὶ ($O_2$, $\rho_2$) καὶ ὕψος $O_1O_2 = υ$ (σχ. 395). Ἔστωσαν $O_1A$ καὶ $O_2B$ δύο παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἀκτῖνες τῶν δύο τούτων κύκλων καὶ $\widehat{AB}$ τὸ τόξον μεγίστου κύκλου τὸ μεταξὺ τούτων. Ἐὰν τὸ μικτόγραμμον τραπέζιον $O_1AMBO_2$ (οὗτινος μία πλευρὰ εἶναι τὸ τόξον $\widehat{AMB}$) στρέφεται περὶ τὴν $O_1O_2$, τότε αἱ $O_1A$, $O_2B$ παράγουν τὰς βάσεις καὶ τὸ τόξον $\widehat{AMB}$ τὴν σφαιρικὴν ζώνην τὴν περικλείουσαν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, ἑπομένως τὸ μικτό-




Σχ. 395

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γραμμον τραπέζιον παράγει τὸ σφαιρικὸν τμῆμα. Ὥστε τὸ σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι στερεὸν ἐκ περιστροφῆς καὶ μάλιστα εἶναι ἕνωσις ἑνὸς κολούρου κώνου παραγομένου ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου τραπεζίου $O_1ABO_2$ καὶ ἑνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου, παραγομένου ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒ. Ἑπομένως ὁ ὄγκος του εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο τούτων στερεῶν :

$$V_{\text{σφαιρ. τμήμ.}} = \frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2) + \frac{1}{6}\pi AB^2 \cdot O_1O_2 \quad (\text{βλ. §§ } \mathbf{323}\gamma', \mathbf{353}).$$

Ἂν ἀχθῇ $BH \perp AO_1$ $(H \in AO_1)$, τότε $AB^2 = BH^2 + AH^2 = \upsilon^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 = \upsilon^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2$. Ἑπομένως :

$$V_{\text{σφαιρ. τμήματος}} = \frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2) + \frac{1}{6}\pi(\upsilon^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2)\upsilon =$$

$$= \frac{2}{6}\pi\upsilon(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2) + \frac{1}{6}\pi\upsilon(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 + \upsilon^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi\upsilon(2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 + \upsilon^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi\upsilon(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + \upsilon^2) = \frac{1}{6}\pi(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2)\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3. \text{ Τελικῶς}$$

$$(1) \qquad \boxed{V_{\text{σφαιρ. τμήματος } (\rho_1, \rho_2, \upsilon)} = \frac{1}{2}\pi(\rho_1^2 + \rho_2^2)\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3}$$

Τοῦτο ἐκφράζεται ὡς κάτωθι :

**Ὁ ὄγκος παντὸς σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων ἐχόντων βάσεις τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ ηὐξημένον κατὰ τὸν ὄγκον σφαίρας ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος του.**

γ') **Σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν βάσιν.** Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς βάσεως καὶ $\upsilon = OB$ τὸ ὕψος σφαιρ. τμήματος μὲ μίαν βάσιν (σχ. 396). Ὁ ὄγκος του παρέχεται ἐκ τοῦ τύπου (1), ὅπου $\rho_1 = \rho$ καὶ $\rho_2 = 0$, ἤτοι :

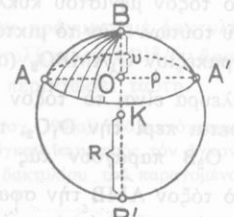
$$(2) \qquad \boxed{V_{\text{σφαιρ. τμήματος } (\rho, \upsilon)} = \frac{1}{2}\pi\rho^2\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3}$$

Μία ἄλλη ἔκφρασις τοῦ ὄγκου του συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὕψους του υ εὑρίσκεται ὡς ἀκολούθως. Ἐὰν Β' τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Β (σχ. 396), ἔχομεν :

$$\rho^2 = OB \cdot OB' = \upsilon \cdot (2R - \upsilon) = 2R\upsilon - \upsilon^2$$

καὶ ὁ τύπος (2) γίνεται :

$$V = \frac{1}{2}\pi(2R\upsilon - \upsilon^2)\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 =$$



Σχ. 396

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$= \pi R \cdot \upsilon^2 - \frac{1}{2}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 = \pi R\upsilon^2 - \frac{1}{3}\pi\upsilon^3 = \pi\upsilon^2\left(R - \frac{\upsilon}{3}\right).$$ Ὥστε

(3) $V_{\text{σφαιρ. τμήματος μονοβασικοῦ}} = \pi\upsilon^2\left(R - \frac{\upsilon}{3}\right)$, ὅπου R ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.

**355. Σφαιρικὸς ὄνυξ.** Τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ - σφαῖρα τὸ περιεχόμενον ἐντὸς διέδρου γωνίας, ἧς ἡ ἀκμὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καλεῖται «**σφαιρικὸς ὄνυξ**»· ἡ δὲ γωνία $\widehat{\varphi}$ ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου τῆς περιεχούσης τὸν ὄνυχα **γωνία τοῦ ὄνυχος.** Ἑπομένως ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ εἶναι στερεὸν περικλειόμενον ὑπὸ μιᾶς ἀτράκτου (§ **351**) καὶ δύο ἡμικυκλίων.

Δύο σφαιρικοὶ ὄνυχες τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι **ἴσοι,** ὅταν αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως. Διότι ὑπάρχει τότε κίνησις φέρουσα τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν δύο σφαιρικοὺς ὄνυχας τῆς αὐτῆς σφαίρας, συγκρίνοντες τὰς γωνίας φ καὶ $\varphi_1$ τῶν ὀνύχων. Ὁρίζομεν δηλ. ὡς λόγον τοῦ σφαιρ. ὄνυχος (φ) πρὸς τὸν σφαιρ. ὄνυχα ($\varphi_1$) τὸν λόγον $\varphi/\varphi_1$.

Ἐπειδὴ τὸ στερεὸν - σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σφαιρ. ὄνυξ $360^o$, διὰ τοῦτο ὁ λόγος τοῦ σφαιρ. ὄνυχος (φ) πρὸς τὸν ὄγκον V τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει, ἰσοῦται μὲ $\varphi^o/360^o$. Ἐξ αὐτοῦ ὁρίζεται καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ὄνυχος ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\frac{V_{\text{σφαιρ. ὄνυχος (φ)}}}{V_{\text{σφαίρας}}} = \frac{\varphi^o}{360^o} \Longleftrightarrow V_{\text{σφαιρ. ὄνυχος (φ}^o)} = \frac{\varphi^o}{360^o} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$ ὅπου R ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1130. Κυκλικὸς τομεὺς γωνίας $45^o$ καὶ ἀκτῖνος ρ στρέφεται περὶ μίαν τῶν ἀκραίων ἀκτίνων του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

1131. Διὰ σημείου Γ δεδομένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἡμικυκλίου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τὸ ἡμικύκλιον εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα στρεφόμενα περὶ τὴν ΑΒ νὰ διαγράφουν ἰσοδύναμα στερεά.

1132. Διὰ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς κύκλου (Ο, ρ) ἄγονται ἐφαπτόμεναι ΑΒ, ΑΓ, ὅπου Β, Γ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Θεωροῦμεν τὴν ἐπίπεδον περιοχὴν τὴν περικλειομένην ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ τοῦ μείζονος τόξου $\widehat{ΒΓ}$. Αὕτη διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ευθ ΟΑ εἰς δύο συμμετρικὰ μέρη, ἐξ ὧν τὸ ἓν στρεφόμενον περὶ τὴν ευθ ΟΑ διαγράφει στερεὸν (σφαιροκωνικὸν καλούμενον). Τούτου ζητεῖται ὁ ὄγκος συναρτήσει τῶν ρ καὶ ΟΑ = α. Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιροκωνικοῦ στερεοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς σφαίρας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1133. Ἐὰν κύβος ἀκμῆς α πληρωθῇ ὑπὸ ἴσων σφαιρῶν διαμέτρου α/ν (ν φυσικός), νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν τούτων εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ πλήθους αὐτῶν.

1134. Ἐὰν μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς παρ/δου γραφοῦν ἴσαι σφαῖραι μὲ διάμετρον μικροτέραν τῆς μικροτέρας ἀκμῆς, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν μερῶν τῶν σφαιρῶν τούτων τῶν περιεχομένων ἐντὸς τοῦ παρ/δου ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον μιᾶς τούτων.

1135. Δοχεῖον κωνικὸν ἀκτῖνος βάσεως α καὶ ὕψους 3α πληροῦται ὕδατος· τὸ περιεχόμενόν του μεταγγίζεται εἰς δοχεῖον κυλινδρικὸν ἀκτῖνος α, μετὰ ἡμισφαιρικοῦ πυθμένος. Ζητεῖται τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἐν αὐτῷ.

1136. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ γραφῇ ἡμιπεριφέρεια περιέχουσα τὸ τρίγωνον καὶ τὸ σχῆμα νοηθῇ στρεφόμενον περὶ τὴν ΒΓ, νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν τριῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τοῦ τριγώνου καὶ τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΒ, ΑΓ.

1137. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν κύλινδρος ἰσοδύναμος πρὸς τὸν σφαιρικὸν δακτύλιον, ὅστις τὸν περιβάλλει.

1138. Ἡ ἀκτὶς βάσεως ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι ρ καὶ τὸ ὕψος του 3ρ. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ χωρίζεται ὁ κῶνος ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῆς ἐχούσης μέγιστον κύκλον τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

1139. Ἐντὸς κωνικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας εἶναι ἐγγεγραμμέναι δύο σφαῖραι ἐφαπτόμεναι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κατὰ δύο περιφερείας (c) καὶ (c′) καὶ ἐφαπτόμεναι καὶ ἀλλήλων. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μέρους μιᾶς τρίτης σφαίρας διερχομένης διὰ τῶν (c) καὶ (c′) εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ περικλειομένου μεταξὺ τῶν δύο ἀρχικῶν σφαιρῶν καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

1140. Διὰ τοῦ ἄκρου Α τῆς διαμέτρου ΑΒ = 2α ἡμικυκλίου νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΑΓ τοιαύτη, ὥστε τοῦ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν ΑΒ ἡ χορδὴ ΑΓ καὶ τὸ τόξον $\widehat{\Gamma B}$ νὰ διαγράφουν ἰσοδυνάμους ἐπιφανείας. Ἀκολούθως νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ὁ διαγραφόμενος ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΓ στρεφομένου περὶ τὴν ευθΓΚ, ὅπου Κ τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου.

1141. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται πρὸς τὰ 2/3 τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς του.

1142. Σφαῖρα ἀκτῖνος α ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἑτέρας σφαίρας ἀκτῖνος 2α. Ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο (στερεῶν) σφαιρῶν.

1143. Ἐὰν αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουν μήκη 6α καὶ 8α, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ στερεοῦ τῶν δύο σφαιρῶν τῶν γραφομένων μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους ταύτας πλευράς.

1144. Ἐὰν ρ ἡ ἀκτὶς τῆς μεσαίας τομῆς σφαιρικοῦ τμήματος καὶ h τὸ ὕψος αὐτοῦ, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $V = \pi\rho^2 h - \frac{1}{12}\pi h^3$.

1145. Νὰ δειχθῇ ὅτι τόσον ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ὅσον καὶ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος παρέχονται ὑπὸ τοῦ ἰδίου τύπου : $V = \frac{h}{6} \cdot (b_1 + b_2 + 4m)$, ὅπου $b_1$, $b_2$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων, m τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς καὶ h τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ.

1146. Ἐὰν S ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἀμφικύρτου φακοῦ, d τὸ πάχος αὐτοῦ καὶ V ὁ ὄγκος του, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις : $12V = 3dS - \pi d^3$.

1147. Εἰς ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ = 2R χαράσσομεν χορδὴν ΑΓ = R καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμικύκλιον, ἔστω τὸ (ΑΓ), ἐν ἐπιπέδῳ καθέτῳ πρὸς τὸ ἐπί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

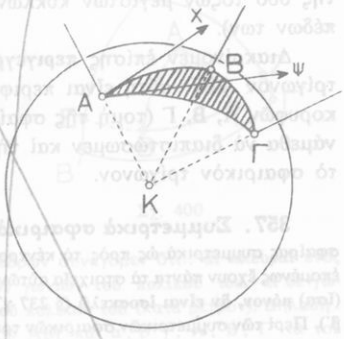
πεδον τοῦ ἡμικυκλίου. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ γραφομένου ὑπὸ τοῦ ἡμικυκλίου (ΑΓ) στρεφομένου περὶ τὴν ΑΒ.

1148. Στερεὰ σφαῖρα ἐφάπτεται ὅλων τῶν ἀκμῶν ἑνὸς κύβου. Ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο στερεῶν συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α τοῦ κύβου.

## ΤΟ ΣΦΑΙΡΙΚΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

**356.** α') Τρία σημεῖα Α, Β, Γ μιᾶς σφαίρας μαζὶ μὲ τὰ ἐλάσσονα τόξα μεγίστων κύκλων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ ἀποτελοῦν ἓν **σφαιρικὸν τρίγωνον**. Τὰ Α, Β, Γ καλοῦνται **κορυφαὶ** τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου καὶ ὑποτίθεται ὅτι **δὲν κεῖνται** ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ μεγίστου κύκλου. Τὰ τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ εἶναι αἱ **πλευραὶ** τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.

**Ἐσωτερικὸν** τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας Κ, ΑΒΓ τῆς ἐχούσης ὡς κορυφὴν τὸ κέντρον Κ τῆς σφαίρας καὶ τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ σφαιρ. τριγώνου (σχ. 397) *(ἀντίστοιχος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον στερεὰ γωνία)*.



Σχ. 397

β') Ὡς γωνία τῶν πλευρῶν $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ ὁρίζεται ἡ γωνία $X\widehat{A}\Psi$, ἣν σχηματίζουν αἱ ὁμόρροποι πρὸς τὰ τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ ἡμιεφαπτόμεναι ΑΧ, ΑΨ τῶν τόξων τούτων. Ἡ γωνία ὅμως $X\widehat{A}\Psi$ εἶναι προφανῶς ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου Β—ΑΚ—Γ, τῆς στερεᾶς γωνίας Κ,ΑΒΓ. Ἑπομένως: **αἱ γωνίαι $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦνται (κατὰ μέτρον) μὲ τὰς διέδρους γωνίας $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ τῆς ἀντιστοίχου τριέδρου Κ,ΑΒΓ.**

Τὰ μέτρα ἐξ ἄλλου τῶν πλευρῶν $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου (εἰς μοίρας) εἶναι ἴσα πρὸς τὰ μέτρα τῶν ἑδρῶν $A\widehat{K}B$, $B\widehat{K}\Gamma$, $A\widehat{K}\Gamma$ τῆς ἀντιστοίχου τριέδρου.

γ') **Κύρια στοιχεῖα** τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου καλοῦνται αἱ τρεῖς πλευραί: $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ καὶ αἱ τρεῖς ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου. Ταῦτα παριστῶμεν συνήθως μὲ α, β, γ (πλευραὶ) καὶ $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ (ἀπέναντι γωνίαι). Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, **τὰ 6 κύρια στοιχεῖα τοῦ σφαιρ. τριγώνου συμπίπτουν (κατὰ μέτρον) μὲ τὰ 6 κύρια στοιχεῖα τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ τριέδρου.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἑπομένως αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι, τὰς ὁποίας πληροῦν τὰ κύρια ταῦτα στοιχεῖα εἶναι ἤδη γνωσταὶ (§ **244**, (1), § **247**).

**Γενικώτερον** πᾶσα ἰδιότης τῶν τριέδρων γωνιῶν ἔχει ὡς ἀντίστοιχον μίαν ἰδιότητα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

Οὕτω π.χ. τὰ **τέσσαρα θεωρήματα ἰσότητος** τῶν στερεῶν γωνιῶν μεταφέρονται καὶ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα (τῆς ἰδίας σφαίρας).

δ') Ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι **ἰσοσκελὲς** ἢ **ἰσόπλευρον** ἢ **ὀρθογώνιον** ἢ **δισορθογώνιον** ἢ **τρισορθογώνιον**, ὅταν ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὸ τρίεδρος ἔχῃ δύο ἕδρας ἴσας ἢ τάς τρεῖς ἕδρας ἴσας ἢ μίαν δίεδρον ὀρθὴν ἢ δύο διέδρους ὀρθὰς ἢ καὶ τὰς τρεῖς διέδρους ὀρθάς.

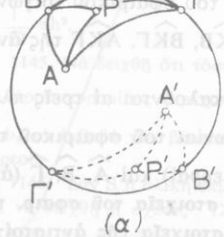
ε') **Δευτερεύοντα στοιχεῖα.** Εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον διακρίνομεν **ὕψη, διαμέσους, διχοτόμους, μεσοκαθέτους,** τὰ ὁποῖα πάντα εἶναι **τόξα** μεγίστων κύκλων ὁριζόμενα, ὅπως εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα. (Ἡ καθετότης δύο τόξων μεγίστων κύκλων ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν καθετότητα τῶν ἐπιπέδων των).

Διακρίνομεν ἐπίσης **περιγεγραμμένην περιφέρειαν** περὶ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ· αὕτη εἶναι περιφέρεια μικροῦ κύκλου διερχομένη διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ (τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ). Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν καὶ τὴν ὕπαρξιν περιφερείας **ἐγγεγραμμένης** εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον.

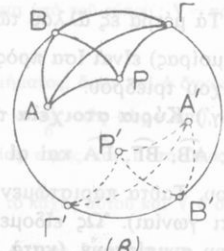
**357. Συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα.** Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς σφαίρας συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον ἔχουν ἀντιστοίχους τριέδρους συμμετρικὰς καὶ ἑπομένως ἔχουν πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα ἓν πρὸς ἕν (§ 237α΄). Ταῦτα εἶναι ἐφαρμόσιμα (ἴσα) **μόνον, ἂν εἶναι ἰσοσκελῆ** (§ 237 γ΄), εἰδ' ἄλλως δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν (§ 237, β΄). Περὶ τῶν συμμετρικῶν σφαιρικῶν τριγώνων μιᾶς σφαίρας ἰσχύει τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

**(Θ) — Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα συμμετρικὰ ἀναλύονται εἰς ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα ἴσων τριγώνων.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ΑΒΓ ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον καὶ Α΄Β΄Γ΄ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ἔστω Ρ ὁ πόλος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ ΑΒΓ (μικροῦ) κύκλου ὁ εὑρισκόμενος ἐντὸς τῆς μικροτέρας ζώνης, ἣν οὗτος ὁρίζει. Ἐὰν ὁ πόλος Ρ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ σφαιρ. τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 398), τότε τοῦτο ἀναλύεται εἰς




Σχ. 398



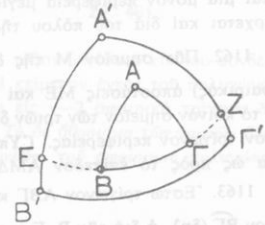

Σχ. 399

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρία ἰσοσκελῆ σφαιρικὰ τρίγωνα ΡΑΒ, ΡΒΓ, ΡΓΑ. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἀναλύεται ὑπὸ τοῦ Ρ΄, συμμετρικοῦ τοῦ Ρ, εἰς τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ τρία πρῶτα : Ρ΄Α΄Β΄ = ΡΑΒ, Ρ΄Β΄Γ΄ = ΡΒΓ, Ρ΄Γ΄Α΄ = ΡΓΑ, διότι, ὡς εἴπομεν, τὸ συμμετρικὸν ἰσοσκελοῦς σφαιρ. τριγώνου εἶναι τρίγωνον ἴσον. Ἑπομένως τὰ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα εἶναι κατὰ - τεμάχια ἴσα.

Ἐὰν ὁ πόλος Ρ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ σφαιρ. τριγώνου ΑΒΓ, ὡς εἰς τὸ σχ. 399, τότε τὸ ΑΒΓ προκύπτει, ἂν ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν δύο ἰσοσκελῶν σφαιρ. τριγώνων ΡΑΒ καὶ ΡΒΓ ἀφαιρεθῇ τὸ ἰσοσκελὲς ΡΑΓ. Συγχρόνως δὲ καὶ τὸ Α΄Β΄Γ΄ προκύπτει ἐκ τοῦ ἰδίου συνδυασμοῦ, $\{P'A'B' \cup P'B'\Gamma'\} - \{P'A'\Gamma'\}$, ἰσοσκελῶν τριγώνων, ἴσων ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τρία προηγούμενα, ὅ.ἔ.δ.

**358. Πολικὰ τρίγωνα. — Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ λέγονται πολικὰ ἀλλήλων, ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι τρίεδροι αὐτῶν Κ, ΑΒΓ καὶ Κ, Α΄Β΄Γ΄ εἶναι παραπληρωματικαὶ** (βλ. § 230).



Σχ. 400

Ἐπειδή, ὡς γνωρίζομεν ἀπὸ τὰς παραπληρωματικὰς τριέδρους, εἶναι ΚΑ΄ ⊥ Επιπ. ΚΒΓ, διὰ τοῦτο τὸ Α΄ εἶναι πόλος τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ καὶ μάλιστα εἶναι $\widehat{A'B} = \widehat{A'\Gamma} = 90^0$. Ὁμοίως καὶ τὸ Α εἶναι πόλος τοῦ τόξου $\widehat{B'\Gamma'}$, διότι ἡ σχέσις τῆς παραπληρωματικότητος εἶναι συμμετρική (§ 230, β΄, ΙΙ). Ἰσχύει λοιπὸν ὅτι : **ἂν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι πολικὰ ἀλλήλων, αἱ κορυφαὶ ἑκατέρου εἶναι πόλοι τῶν πλευρῶν τοῦ ἑτέρου.** Ἀπὸ δὲ τὰς 6 γνωστὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων δύο παραπληρωματικῶν τριέδρων συνάγομεν ὅτι : **αἱ πλευραὶ ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ πολικοῦ του, αἱ δὲ γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν πλευρῶν τοῦ πολικοῦ του** (κατὰ μέτρον). Δηλαδή : ἂν α, β, γ, Α, Β, Γ, εἶναι τὰ 6 κύρια στοιχεῖα τοῦ ΑΒΓ καὶ α΄, β΄ γ΄, Α΄, Β΄, Γ΄ τὰ τοῦ πολικοῦ του Α΄Β΄Γ΄, τότε :

$$\{\alpha + A' = \beta + B' = \gamma + \Gamma' = 180^0,\ A + \alpha' = B + \beta' = \Gamma + \gamma' = 180^0\}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1149. Τὰ ὕψη παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. (**Ὑποδ.** βλ. ἄσκ. 851).

1150. Αἱ διάμεσοι παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. (**Ὑποδ.** βλ. ἄσκ. 847).

1151. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. (**Ὑποδ.** βλ. ἄσκ. 848).

1152. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν σφαιρικοῦ τριγώνου συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. (**Ὑπόδ.** βλ. ἄσκ. 849).

1153. Εἰς πᾶν σφαιρικὸν τρίγωνον : i) Ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. ii) Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως τῆς περιμέτρου.

— Νὰ χαραχθῇ ἐπὶ σφαίρας :

1154. Σφαιρικὸν τρίγωνον, οὗτινος δίδονται αἱ τρεῖς πλευραί του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1155. Ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, οὗτινος δίδεται μία τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ ἡ ἑτέρα γωνία ἡ προσκειμένη πρὸς τὴν πλευρὰν ταύτην.

1156. Δύο πλευραὶ καὶ ἡ περιεχομένη γωνία.

1157. Σφαιρικὸν τρίγωνον, οὗτινος δίδονται αἱ τρεῖς γωνίαι.

1158. i) Τόξον μεγίστου κύκλου ἔχον δοθέντα πόλον. ii) Τὸ μέσον ἑνὸς δεδομένου τόξου μεγίστου κύκλου.

1159. Ἐὰν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου δύο πλευραὶ εἶναι παραπληρωματικαί, τότε αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἐπίσης παραπληρωματικαί, ἡ δὲ διάμεσος ἡ ἀγομένη πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν εἶναι τεταρτημόριον καὶ διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τῶν δύο παραπληρωματικῶν πλευρῶν.

1160. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\widehat{AB}=\widehat{A\Gamma}$ ἡ μεσοκάθετος τῆς $\widehat{B\Gamma}$ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ διχοτομεῖ καὶ τὴν $\widehat{A}$.

1161. Διὰ σημείου Μ διαφόρου τῶν πόλων περιφερείας (c) μεγίστου κύκλου διέρχεται μία μόνον περιφέρεια μεγίστου κύκλου κάθετος ἐπὶ τὴν (c). Ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται καὶ διὰ τοῦ πόλου τῆς (c).

1162. Πᾶν σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου $\widehat{A\Delta}$ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀπέχει ἴσας (σφαιρικὰς) ἀποστάσεις $\widehat{ME}$ καὶ $\widehat{MZ}$ ἀπὸ τὰς πλευρὰς $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$. Ἐντεῦθεν συναγάγετε ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν διχοτόμων εἶναι ὁ πόλος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον περιφερείας. (Ὑπόδ. Διὰ τὸ πρῶτον μέρος νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΔ).

1163. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ τὸ πολικὸν αὐτοῦ. Ἔστω ὅτι ὁ φορεὺς τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ (δηλ. ἡ διὰ τῶν Β, Γ περιφέρεια μεγίστου κύκλου) τέμνει τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν $\widehat{A'B'}$ καὶ $\widehat{A'\Gamma'}$ εἰς Ε καὶ Ζ (βλ. σχ. 400). i) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\widehat{BE}=\widehat{\Gamma Z}$. ii) Ἡ μεσοκάθετος τῆς $\widehat{B\Gamma}$ διέρχεται διὰ τοῦ Α΄ καὶ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν τόξων $\widehat{A'E}$ καὶ $\widehat{A'Z}$. iii) Συναγάγετε ὅτι ὁ πόλος Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι καὶ πόλος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας τοῦ πολικοῦ του. iv) Ἡ ἐκ τοῦ Ο κάθετος ἐπὶ τὴν $\widehat{A'B'}$ διέρχεται διὰ τοῦ Γ καὶ ὡς ἐκ τούτου αἱ σφαιρικαὶ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ Α΄Β΄Γ΄ καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ ΑΒΓ κύκλου εἶναι συμπληρωματικαί.

1164. Ἐὰν αἱ πλευραὶ $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ σφαιρικοῦ τριγώνου προεκτεινόμεναι τέμνωνται εἰς $A_1$, τότε, ἂν Ο ὁ πόλος τῆς περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ Μ τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{BA_1}$, τὸ τόξον $\widehat{OM}$ εἶναι τεταρτημόριον.

1165. Δύο πολικὰ ἀλλήλων σφαιρ. τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 400) ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον τομῆς ὑψῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι πόλος μεγίστου κύκλου διερχομένου διὰ τῶν σημείων τομῆς τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων (δηλ. διὰ τῶν τομῶν τῶν $\widehat{B\Gamma}$ μετὰ τῆς $\widehat{B'\Gamma'}$ κ.τ.λ.).

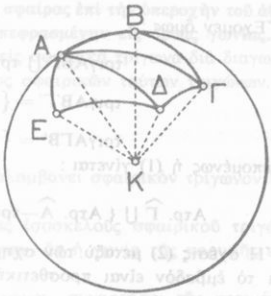
1166. Ἐὰν σφαιρ. τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β, Γ μένουν σταθεραί, ἡ δὲ κορυφὴ Α μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε $\widehat{A}=\widehat{B}+\widehat{\Gamma}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Α.

## ΣΦΑΙΡΙΚΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ

**359.** α΄) Ὅπως μία τρίεδρος στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀποτέμνει ἀπὸ ταύτης ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον, οὕτω καὶ μία πολύεδρος στερεὰ γωνία μὲ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀποτέμνει ἀπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἓν **σφαιρικὸν πολύγωνον**. Τοῦτο εἶναι κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν, καθ' ὅσον ἡ ἀντίστοιχος πολύεδρος στερεὰ γωνία εἶναι κυρτὴ ἢ μὴ κυρτή. Αἱ πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἰσοῦνται κατὰ μέτρον μὲ τὰς ἕδρας τῆς ἀντιστοίχου στερεᾶς γωνίας, αἱ δὲ γωνίαι του μὲ τὰς διέδρους γωνίας αὐτῆς, ὅπως συμβαίνει καὶ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα (σχ. 401).



Σχ. 401

β') **Ἐσωτερικὸν** κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ ἐντὸς τῆς ἀντιστοίχου κυρτῆς στερεᾶς γωνίας εὑρισκόμενον. Ἡ **περίμετρος** παντὸς κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου (βλ. § **243**).

γ') **Διαγώνιος** κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι τόξον μεγίστου κύκλου συνδέον δύο κορυφὰς μὴ ἀνηκούσας εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν καὶ κείμενον ἐντὸς τοῦ πολυγώνου. Κυρτὸν σφαιρικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευρὰς ἀναλύεται εἰς ν—2 σφαιρικὰ τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων τῶν ἐξερχομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του. *Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν τριγώνων τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου.* (Ὅπως συμβαίνει μὲ τὰ ἐπίπεδα πολύγωνα).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1167. Ἐὰν κυρτοῦ σφαιρικοῦ τετραπλεύρου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦν ἀλλήλας.

1168. Ἐὰν κυρτοῦ σφαιρικοῦ τετραπλεύρου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

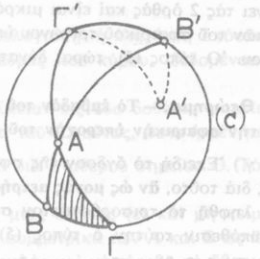
1169. Ἐὰν αἱ τέσσαρες γωνίαι σφαιρικοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τότε αἱ δύο διαγώνιοι εἶναι ἴσαι.

1170. Εἰς πᾶν κυρτὸν σφαιρικὸν τετράπλευρον, ἐγγεγραμμένον εἰς μικρὸν κύκλον, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι γωνιῶν.

1171. Ἐὰν αἱ τέσσαρες πλευραὶ κυρτοῦ σφαιρικοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται δίχα καὶ καθέτως.

## ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**360.** α') Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 402) καὶ (c) ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου ἡ περιέχουσα τὴν πλευρὰν $\widehat{ΒΓ}$. Ἂς καλέσωμεν (Η) τὸ ἡμισφαίριον τὸ ὑπὸ τῆς (c) ὁριζόμενον καὶ περιέχον τὴν κορυφὴν Α καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται κατὰ διάμετρον, διὰ τοῦτο τὰ συμμετρικὰ Β' καὶ Γ' τῶν Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας (c), ἐνῷ τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἀντιθέτου ἡμισφαιρίου. Τὸ ἡμισφαίριον (Η) ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 σφαιρικὰ τρίγωνα :



Σχ. 402



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(1) $\text{τριγ}AB\Gamma \cup \text{τριγ}AB\Gamma' \cup \text{τριγ}AB'\Gamma' \cup \text{τριγ}A\Gamma B' = (H).$

Ἔχομεν ὅμως :

$$\text{τριγ}AB\Gamma \cup \text{τριγ}AB\Gamma' = \text{Ατρ.}\ \widehat{\Gamma} \qquad (\text{βλ. § } \mathbf{351})$$

$$\text{τριγ}AB'\Gamma' = \{\text{Ατρ.}\ \widehat{A} - \text{τριγ}A'B'\Gamma'\}$$

$$\text{τριγ}A\Gamma B' = \{\text{Ατρ.}\ \widehat{B} - \text{τριγ}\ AB\Gamma\}$$

καὶ ἑπομένως ἡ (1) γίνεται :

(2) $\text{Ατρ.}\ \widehat{\Gamma} \cup \{\text{Ατρ.}\ \widehat{A} - \text{τριγ}A'B'\Gamma'\} \cup \{\text{Ατρ.}\ \widehat{B} - \text{τριγ}AB\Gamma\} = (H).$

Ἡ σχέσις (2) μεταξὺ τῶν σχημάτων δέον νὰ ἰσχύῃ καὶ μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν των, διότι τὸ ἐμβαδὸν εἶναι προσθετικὴ συνάρτησις, ἤτοι :

(3) $\text{Εμβ}(\text{Ατρ}\widehat{\Gamma}) + \text{Εμβ}(\text{Ατρ}\widehat{A} - \text{τρ.}A'B'\Gamma') + \text{Εμβ}(\text{Ατρ}\ \widehat{B} - \text{τρ}AB\Gamma) = \text{Εμβ}(H).$

Ἂν εἰς τὸ τρ.ΑΒΓ ἀποδώσωμεν ἓν ἐμβαδὸν $\mathscr{E}$, τότε εἰς τὸ συμμετρικόν του τρ.Α΄Β΄Γ΄ δέον νὰ ἀποδώσωμεν τὸ ἴδιον ἐμβαδὸν $\mathscr{E}$, διότι τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι κατὰ τεμάχια ἴσα ἢ εἶναι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα ἴσων τριγώνων (§ **357**). Ἑπομένως ἐκ τῆς (3) ὁρίζεται καὶ συγχρόνως ὑπολογίζεται τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ :

(4) $\text{Εμβ}(\text{Ατρ}\widehat{\Gamma}) + \text{Εμβ}(\text{Ατρ}\widehat{A}) - \mathscr{E} + \text{Εμβ}(\text{Ατρ}\widehat{B}) - \mathscr{E} = \text{Εμβ}(H) \Rightarrow \mathscr{E} = \frac{1}{2}\{\text{Εμβ}(\text{Ατρ}\widehat{A})$
$+ \text{Εμβ}(\text{Ατρ}\widehat{B}) + \text{Εμβ}(\text{Ατρ}\widehat{\Gamma}) - \text{Εμβ}(H)\}.$

Καλοῦντες Σ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς ὅλης σφαίρας καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀτράκτων καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Σ τῆς σφαίρας (§ **351**) λαμβάνομεν ἐκ τῆς τελευταίας :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\left\{\Sigma \cdot \frac{\widehat{A}}{4\text{ορθ}} + \Sigma \cdot \frac{\widehat{B}}{4\text{ορθ}} + \Sigma \cdot \frac{\widehat{\Gamma}}{4\text{ορθ}} - \frac{\Sigma}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\Sigma}{8}\left\{\frac{\widehat{A}}{1\text{ορθ}} + \frac{\widehat{B}}{1\text{ορθ}} + \frac{\widehat{\Gamma}}{1\text{ορθ}} - \frac{2\text{ορθ}}{1\text{ορθ}}\right\}. \text{ Τελικῶς :}$$

(5) $\text{Εμβ}(AB\Gamma) = \frac{\Sigma}{8} \cdot \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} - 2\text{ορθ}}{1\text{ορθ}}.$

**β΄) Σφαιρικὴ ὑπεροχή.** Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ὑπερβαίνει τὰς 2 ὀρθὰς καὶ εἶναι μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ὑπὲρ τὰς δύο ὀρθὰς καλεῖται **σφαιρικὴ ὑπεροχὴ** τοῦ τριγώνου. Ὁ τύπος (5), τώρα, δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

**Θεώρημα.— Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ὄγδοον τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν σφαιρικὴν ὑπεροχὴν τοῦ τριγώνου ἐκπεφρασμένην εἰς ὀρθὰς γωνίας.**

γ΄) Ἐπειδὴ τὸ ὄγδοον τῆς σφαίρας (Σ/8) εἶναι τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, διὰ τοῦτο, **ἂν ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν ἐμβαδῶν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων** μιᾶς σφαίρας ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον τῆς αὐτῆς σφαίρας, τότε ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην ὁ τύπος (5) διατυποῦται ὡς ἑξῆς :

**«Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν σφαιρικὴν ὑπεροχήν του ἐκπεφρασμένην εἰς ὀρθὰς γωνίας».**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**361. Ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ πολυγώνου.** (Θ) — **Τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἐκ ν πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ὄγδοον τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὰς 2(ν—2) ὀρθάς, ἐκπεφρασμένην εἰς ὀρθὰς γωνίας.**

Ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, εἰς σφαιρικὰ τρίγωνα διὰ διαγωνίων (§ 359) καὶ νὰ ἀθροίσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπὶ μέρους σφαιρικῶν τούτων τριγώνων.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1172. Τί μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καταλαμβάνει σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχον γωνίας $83^0$, $67^0$ καὶ $62^0$;

1173. Ὑπολογίσατε τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὰ 2/3 ἑνὸς τρισορθογωνίου τριγώνου, ἂν ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι $50^0$.

1174. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ τριγώνου, συναρτήσει τῆς περιμέτρου τοῦ πολικοῦ του.

1175. Ἐὰν εἰς σφαιρ. τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$, αἱ δὲ πλευραὶ $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ προεκτεινόμεναι πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α τέμνουν τὸν φορέα τῆς $\widehat{B\Gamma}$ εἰς Β′ καὶ Γ′, τότε τὸ σφαιρ.τρίγ. ΑΒ′Γ′ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς σφαίρας.

1176. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς δύο πλευρὰς $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ σφαιρ. τριγ. ΑΒΓ μέχρι συναντήσεώς των εἰς Α′ καὶ εἶναι Ρ ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ σφαιρ. τρίγ. Α′ΒΓ, τότε ἡ γωνία $\widehat{P\Beta\Gamma}$ ἔχει μέτρον $\left|1 - \frac{\mathscr{E}}{2}\right|$ ὅπου $\mathscr{E}$ ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχὴ τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ τόξον μεγίστου κύκλου $\widehat{PA}$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ τόξον μεγίστου κύκλου τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Gamma}$. Ὑποτίθεται ὁ πόλος Ρ ἐντὸς τοῦ ἑνὸς τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ ἢ Α′ΒΓ.

## ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

1177. Ἔστω (Π) τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον ἑνὸς τμήματος ΑΒ καὶ Γ σημεῖον τοῦ χώρου κείμενον μετὰ τοῦ Α πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Π). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ (Π) τοιούτων, ὥστε:

$$\widehat{A\Mu\Gamma} + \widehat{B\Mu\Gamma} = 180^0$$

1178. Ἐπὶ δύο διαδοχικῶν ἑδρῶν κύβου χαράσσομεν δύο διαγωνίους ἀσυμβάτους πρὸς ἀλλήλας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν ἀπόστασις συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α τοῦ κύβου.

1179. Συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α ἑνὸς κύβου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις μιᾶς διαγωνίου τοῦ κύβου καὶ μιᾶς διαγωνίου μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου, δεδομένου ὅτι αἱ δύο αὐταὶ διαγώνιοι εἶναι ἀσύμβατοι μεταξύ των.

1180. Δύο ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ) εἶναι κάθετα ἐπὶ εὐθεῖαν εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β. Σημεῖον Μ κινεῖται ἐπὶ τοῦ (Ρ) καὶ σημεῖον Ν ἐπὶ τοῦ (Σ) οὕτως, ὥστε ἡ μὲν γωνία $\widehat{N\Mu A}$ νὰ εἶναι πάντοτε ὀρθή, ἡ δὲ ευθ$\Mu\Nu$ νὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ο. Τόπος τοῦ Ν.

1181. Ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Β ἰσαπέχοντα μιᾶς εὐθείας (ε) καὶ μὴ κείμενα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς (ε). Ἐὰν Γ καὶ Δ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς τὴν (ε), νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἑδρῶν ἑκάστης στερεᾶς γωνίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τετραέδρου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1182. Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ//ΓΔ, ΑΔ=ΔΓ=ΓΒ=α καὶ ΑΒ=2α. Εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τραπεζίου ὑψοῦμεν κάθετα τμήματα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τοῦ τραπεζίου, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου, τά : ΑΑ'=2x, ΒΒ'=2y, ΓΓ'=y, ΔΔ'=x. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' καὶ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

1183. Ἐν ἐπιπέδῳ (Π) δίδονται δύο κάθετοι εὐθεῖαι Ox, Oy καὶ ἐκτὸς τοῦ (Π) σημεῖον Γ. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν Ox, Oy δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε τὸ μὲν τρίγωνον ΓΑΒ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Γ, τὸ δὲ τμῆμα ΑΒ νὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν μῆκος.

1184. Διὰ τῶν ἄκρων Α καὶ Β διαμέτρου ΑΒ κύκλου ἄγονται δύο εὐθεῖαι ΑΧ, ΒΨ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ ,ὄχι παράλληλοι μεταξύ των καὶ σχηματίζουσαι μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου γωνίαν $\theta^0 < 90^0$ ἑκάστη. Ἐὰν τρίτη εὐθεῖα (ε) τέμνῃ τὰς ΑΧ, ΒΨ καὶ τὴν περιφέρειαν, νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ἡ προβολὴ τῆς (ε) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ὅτι ἡ (ε) ἔχει κλίσιν ἐπίσης $\theta^0$ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

1185. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$, ὅπου $A\in(\varepsilon_1)$ καὶ $B\in(\varepsilon_2)$. Μεταβλητὴ εὐθεῖα τέμνει τὰς $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ εἰς Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε ΑΓ : ΒΔ = =μ : ν. Ἐὰν ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἰς τὸ Μ, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ.

1186. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$, ὅπου $A\in(\varepsilon_1)$, $B\in(\varepsilon_2)$. Τμῆμα ΓΔ σταθεροῦ μήκους ὀλισθαίνει διὰ τῶν ἄκρων του ἐπὶ τῶν $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ σφαίρας μένει σταθερά.

1187. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R καὶ δύο χορδαὶ αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ τεμνόμεναι εἰς Ε καὶ τοιαῦται, ὥστε $\widehat{BA\Gamma}=30^0$, $\widehat{AB\Delta}=45^0$. Τοῦ σχήματος στρεφομένου περὶ τὴν ΑΒ, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὑπὸ τοῦ μικτογράμμου τριγώνου ΕΔΓ γραφόμενος ὄγκος (καμπύλη πλευρά, τὸ τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$).

1188. Εἰς τετράεδρον ΟΑΒΓ τὸ Ο προβάλλεται εἰς τὸ κ. βάρους τοῦ τρ.ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $OA^2 - OB^2 = \frac{1}{3}(A\Gamma^2 - B\Gamma^2)$.

1189. Εἰς τὴν κορυφὴν Δ τριγώνου ΔΒΓ ὑψοῦμεν εὐθεῖαν Δx ⊥ επιπΔΒΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον Α. Ἐὰν ΔΕ, ΒΚ εἶναι ὕψη τοῦ τρ.ΔΒΓ, Ν τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΔΒΓ, ΒΖ ὕψος τοῦ τρ.ΑΒΓ, Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ, τότε. 1ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐπιπ.ΒΖΚ ⊥ ἐπιπΑΒΓ. 2ον) Τὸ Η εἶναι προβολὴ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ ἐπιπ.ΑΒΓ. 3ον) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Η, ὅταν τὸ Α διατρέχῃ τὴν εὐθ. ΑΧ. 4ον) Τὰ Γ, Ε, Η, Ζ, Κ, Ν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς σφαίρας.

1190. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι ἀνὰ δύο εὐθεῖαι (α), (β), (γ), μὴ παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς τρεῖς ἀσυμβάτους εἰς Α, Β, Γ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ : ΒΓ=λ (δοθεὶς λόγος).

1191. Δοθέντος σκαληνοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα τετράεδρα ΔΑΒΓ τοιαῦτα, ὥστε ΔΑ·ΒΓ=ΔΒ·ΑΓ=ΔΓ·ΑΒ. Εἰς τὰ τετράεδρα ταῦτα αἱ ἑνοῦσαι τὰς κορυφὰς μὲ τὰ ἔγκεντρα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἐπίσης, ἂν εἰς τετράεδρον τῆς ὡς ἄνω κατηγορίας γράψωμεν σφαῖραν διερχομένην διὰ τῶν Α, Β, Γ καὶ τέμνουσαν τὰς ἀκμὰς ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ εἰς Α', Β', Γ', τὸ τρ. Α'Β'Γ' εἶναι ἰσόπλευρον.

1192. Ἐπὶ τοῦ ὕψους ΟΚ κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος Ο,ΑΒΓ λαμβάνομεν σταθερὸν σημεῖον Σ. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν μεταβλητὸν ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ Σ καὶ τέμνῃ τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἰς Α', Β', Γ', τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{OA'}+\frac{1}{OB'}+\frac{1}{O\Gamma'}$$

μένει σταθερόν. Ἀνάλογον θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ κανονικὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1193. Ρόμβος ΑΒΓΔ ἔχει μίαν διαγώνιον ΒΔ ὁριζοντίαν, μήκους 2α. Ἡ ἑτέρα διαγώνιος ΑΓ, μήκους 4α, σχηματίζει γωνίαν $60^0$ μὲ ὁριζόντιον σταθερὸν ἐπίπεδον (Π) κείμενον κάτωθεν τοῦ τμήματος ΑΓ καὶ ἀπέχον, α, ἀπὸ τοῦ Α. Ἔστωσαν Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, αἱ προβολαὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ τὸ (Π) καὶ ἂς κληθῇ (Κ) τὸ κολοβὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄. i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι τετράγωνον καὶ ὅτι τὸ (Κ) ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας. ii) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ (Κ).

1194. Ἐπίπεδον (Π) ἐφάπτεται σφαίρας (Ο, R) εἰς τὸ σημεῖον Α. Θεωροῦμεν σημεῖον Ρ τοῦ (Π) καὶ διὰ τοῦ Α φέρομεν ἐπίπεδον ⊥ ΟΡ τέμνον τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν (c). Ἐὰν Μ τὸ κέντρον σφαίρας διερχομένης διὰ τῆς (c) καὶ τοῦ Ρ, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόποςτοῦ Μ, ὅταν τὸ Ρ διαγράφῃ εὐθεῖαν ἢ περιφέρειαν ἐπὶ τοῦ (Π) ἢ ὁλόκληρον τὸ (Π).

1195. Ἔστω Ο τὸ μέσον τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως ΑΒ δύο ὀρθογωνίων πρὸς ἀλλήλας ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΧ καὶ ΒΨ καὶ ΚΛ εὐθεῖα μεταβλητὴ τέμνουσα τὰς ΑΧ καὶ ΒΨ εἰς Κ καὶ Λ οὕτως, ὥστε ΟΠ = ΑΒ/2, ὅπου ΟΠ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ τῆς ευθΚΛ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΠΚ·ΠΛ = σταθερὸν καὶ ὅτι τὸ Π ἰσαπέχει τῶν ἐπιπέδων ΒΑΧ καὶ ΑΒΨ.

1196. Ἐντὸς σφαίρας (Κ, R) δίδεται σταθερὸν σημεῖον Σ. Τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς Σ, αἱ δὲ ἀκμαί της τέμνουν τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν εἰς Α, Β, Γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν ἡ τρισορθογώνιος στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Σ, τὸ κέντρον βάρους τοῦ τρ.ΑΒΓ παραμένει ἐπὶ σταθερᾶς τινος σφαίρας.

1197. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν φωτεινὴ ἀκτὶς ἀνακλασθῇ διαδοχικῶς ἐπὶ τριῶν ἐπιπέδων κατόπτρων, καθέτων ἀνὰ δύο, τότε ἐξέρχεται παραλλήλως πρὸς τὴν ἀρχικήν της διεύθυνσιν.

1198. Μὲ δοθεῖσαν γενέτειραν, νὰ κατασκευασθῇ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἔχων τὸν μέγιστον δυνατὸν ὄγκον.

1199. Ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἀνοικτοῦ ἄνωθεν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $πα^2$ (μὴ συμπεριλαμβανομένης τῆς ἐλλειποῦσης ἄνω βάσεως). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του, διὰ νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην χωρητικότητα.

1200. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶσαι αἱ σφαῖραι αἱ γραφόμεναι μὲ κέντρα τὰ διάφορα σημεῖα σταθεροῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσαι σταθερὰν σφαῖραν (Κ, R) μὴ ἔχουσαν κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ (Π), διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων.

1201. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἐντὸς δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας κειμένων σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς τριέδρου ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

1202. i) Ὑπολογίσατε τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας ἰσοσκελοῦς τετραέδρου, συναρτήσει τῶν ἀκμῶν α, α, β, β, γ, γ αὐτοῦ. ii) Ὑπολογίσατε τὰς ἀκμὰς ἰσοσκελοῦς τετραέδρου γνωρίζοντες ὅτι τὰ μήκη αὐτῶν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς περιγεγραμμένης του σφαίρας εἶναι 23 μέτρα καὶ ὅτι μία γωνία ἑκάστης τῶν ἑδρῶν του εἶναι $60^0$.,

1203. Εἰς τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α ὑψοῦμεν κάθετα τμήματα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου, τὰ ΑΑ΄ καὶ ΓΓ΄, τοιαῦτα, ὥστε Α΄Γ΄ = 2α καὶ Α΄Γ΄ ⊥ ἐπιπ.Α΄ΒΔ. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου Α΄Γ΄ΒΔ καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν Α΄Γ΄ καὶ ΒΔ.

1204. Δίδονται δύο εὐθεῖαι Ox, Oy. Τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου τοιούτων, ὥστε $προβ_{ox}ΟΜ + προβ_{oy}ΟΜ = l$, ὅπου $l$ δεδομένον τμῆμα.

1205. Ἔστω ΑΒΓΔ στρεβλὸν τετράπλευρον καὶ ΕΖΗΘ παρ)μον ἔχον τὰς κορυφάς του ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ παρ/μου εἶναι κατ' ἀνάγκην παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ στρεβλοῦ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων τούτων.

1206. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον αὐτοῦ Β καὶ εὐθεῖα (ε) ⊥ (Π). Μεταβλητὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει μίαν κορυφὴν σταθεράν, τὸ Β, τὴν κορυφὴν Α ἐπὶ τῆς (ε), τὴν κορυφὴν Γ ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ εἶναι πάντοτε ὅμοιον πρὸς δοθέν. Τόπος τοῦ Γ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1207. Τετραέδρου ΔΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία εἰς Α εἶναι τρισορθογώνιος καὶ ΑΔ = ΑΒ = = ΑΓ = α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΑΒ σημεῖον Μ καὶ θέτομεν ΑΜ = x. Διὰ τοῦ Μ φέρομεν ἐπίπεδον // ΑΔ καὶ // ΒΓ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΓ εἰς Ν, τὴν ΔΓ εἰς Π, τὴν ΔΒ εἰς Κ.

i) Δείξατε ὅτι διὰ τῶν Α, Μ, Ν, Π, Κ διέρχεται σφαῖρα καὶ ὑπολογίσατε τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς συναρτήσει τῶν x, α. ii) Τόπος τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ταύτης, ὅταν μεταβάλλεται τὸ x.

1208. Ἐὰν $M_1, M_2, \ldots M_6$ τὰ μέσα τῶν διαδοχικῶν πλευρῶν στρεβλοῦ ἑξαγώνου, δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα $M_1M_3M_5$ καὶ $M_2M_4M_6$ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.

1209. Δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ δύο σημείων Α καὶ Β μὴ κειμένων εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὴν (ε), νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς (ε) τὸ σημεῖον Μ, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ΜΑ + ΜΒ = min.

1210. Ἐάν εἰς τρίεδρον στερεὰν γωνίαν Ο,ΑΒΓ εἶναι διεδρ. $\widehat{O\Gamma}$ = διεδρ. $\widehat{OA}$ + + διεδρ. $\widehat{OB}$, ἀχθῇ δὲ ἡ διχοτόμος ΟΔ τῆς $\widehat{AOB}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\widehat{\Gamma O\Delta} = \widehat{AOB}/2$.

1211. Ἐντὸς ὀξείας διέδρου γωνίας δίδεται σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Γ καὶ Β κείμενα τὸ ἓν ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τρ.ΑΒΓ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δυνατή.

1212. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα $(\varepsilon_1)$//(Π) καὶ ἀπέχουσα h ἀπὸ τοῦ (Π) καὶ εὐθεῖα $(\varepsilon_2)$ ἐπὶ τοῦ (Π), ὀρθογώνιος πρὸς τὴν $(\varepsilon_1)$. Τόπος τῶν σημείων τοῦ (Π), ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ $c^2$.

1213. Ἐὰν τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία ἔχῃ τὴν κορυφήν της εἰς σταθερὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, αἱ δὲ ἀκμαί της τέμνουν τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν εἰς Α, Β, Γ, δείξατε ὅτι τὸ κ. βάρους τοῦ τρ. ΑΒΓ μένει σταθερόν, ὅταν ἡ στερεὰ γωνία στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της.

1214. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι παρ/μον οὔτε τραπέζιον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κορυφῶν Μ τῶν τετραέδρων στερεῶν γωνιῶν Μ,ΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ τμηθοῦν i) κατὰ ὀρθογώνιον παρ/μον ii) κατὰ ρόμβον.

1215. Ἐὰν εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ αἱ ἕδραι ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀκμῆς ΒΔ.

1216. Εἰς τὸ κέντρον Ο τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α φέρομεν εὐθεῖαν ⊥ ἐπιπ.ΑΒΓΔ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα, ὥστε ΕΟ = ΟΖ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολύεδρον ΕΑΒΓΔΖ εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον καὶ ὅτι τὸ Ο εἶναι κέντρον τριῶν σφαιρῶν: περιγεγραμμένης, ἐγγεγραμμένης καὶ ἐφαπτομένης πασῶν τῶν ἀκμῶν τοῦ καν. ὀκταέδρου. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τοῦ α αἱ ἀκτῖνες R, ρ, r τούτων.

1217. Ἔστω στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἐὰν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι: $\frac{AM}{MB} = \frac{\Delta N}{N\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$, τότε ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι ἴσον κεκλιμένη ὡς πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ.

1218. Τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα τεμνόμενα ἐπίπεδα ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

1219. (Θ) **Μενελάου διὰ στρεβλὸν τετράπλευρον**: Ἐὰν ἐπίπεδον μὴ διερχόμενον διὰ κορυφῆς στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνῃ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἰς τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ, Σ, τότε ἰσχύει ἡ (1) $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{N\Gamma}} \cdot \frac{\overline{P\Gamma}}{\overline{P\Delta}} \cdot \frac{\overline{\Sigma\Delta}}{\overline{\Sigma A}} = 1$,

**Ἀντιστρόφως**: ἡ (1) συνεπάγεται ὅτι τὰ Μ, Ν, Ρ, Σ εἶναι ὁμοεπίπεδα.

1220. Ἐὰν εὐθεῖα κινῆται οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ εἰς Α, Β, Γ, τρεῖς ἄλλας σταθερὰς εὐθείας ἀσυμβάτους ἀνὰ δύο, ἀλλὰ παρ/λους πρὸς ἓν ἐπίπεδον, τότε ὁ λόγος ΑΒ/ΒΓ μένει σταθερός, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒΓ διαμένει παράλληλος πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1221. Δοθείσης εὐθείας διαιρούσης εἰς μέρη ἀνάλογα δύο ἀπέναντι πλευράς στρεβλοῦ τετραπλεύρου, νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα καθέτως τὴν δοθεῖσαν καὶ διαιροῦσα εἰς μέρη ἀνάλογα τὰς δύο ἄλλας ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου.

1222. Τριέδρου στερεᾶς γωνίας αἱ ἕδραι εἶναι $60^0$ ἑκάστη. Ζητεῖται ὁ τόπος τῆς κορυφῆς της, i) ὅταν αἱ ἀκμαί της ἐφάπτωνται δοθείσης σφαίρας, ii) ὅταν αἱ ἕδραι της ἐφάπτωνται δοθείσης σφαίρας.

1223. Ἐὰν περὶ κύκλον περιγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ κανονικὸν πεντάγωνον, νοήσωμεν δὲ ἑκάτερον τούτων στρεφόμενον περὶ διάμετρον τοῦ κύκλου κάθετον ἐπὶ μίαν πλευράν του, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν παραγομένων ὄγκων ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, ἣν παράγει ὁ κύκλος.

1224. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κῶνον ἐκ περιστροφῆς κύλινδρος ἔχων δοθεῖσαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ποῖος ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων ἔχει τὴν μεγίστην δυνατὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

1225. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον δοθέντα κῶνον ἐκ περιστροφῆς κατὰ δύο γενετείρας σχηματιζούσας μεταξύ των δοθεῖσαν γωνίαν.

1226. Τίς ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας κανονικῆς πυραμίδος ἐχούσης βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ ὕψος 2α;

1227. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ χωρίζεται κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ ἔχουσα πλευρὰν βάσεως α καὶ ὕψος $\alpha\sqrt{3}/2$ ὑπὸ ἐπιπέδου διχοτομοῦντος μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν διέδρων γωνιῶν.

1228. Κανονικὸν τετράεδρον τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παρ/λου πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμάς του καὶ ἀπέχοντος ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ταύτας ἀποστάσεις ἐν λόγῳ μ/ν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διαιρεῖ τὸ τετράεδρον.

1229. Νὰ διαιρεθῇ κύβος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς ἀκμῆς του.

1230. Κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ τὸ ὕψος εἶναι $\alpha\sqrt{105}/6$, ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεως α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ χωρίζεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὴν πυραμίδα σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

1231. Τίς ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο ἴσων σφαιρῶν τεμνομένων, ἀκτῖνος α, ὅταν ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ στερεοῦ αὐτῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας μὲ διάμετρον τὴν διάκεντρον;

1232. Ἐπίπεδον διαιρεῖ σφαῖραν εἰς δύο μέρη ὄγκων V καὶ V′ καὶ ὁρίζει δύο σφαιρικὰς ζώνας ἐμβαδῶν Ε καὶ Ε′. Ἐὰν δίδεται ὅτι $E/E' = \lambda$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος V/V′.

1233. Τετραέδρου ΣΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία S εἶναι τρισορθογώνιος, τὸ ἐκ τῆς S ὕψος εἶναι h καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ S ἀπὸ τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ εἶναι *l*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου συναρτήσει τῶν h, *l*.

1234. i) Πᾶσαι αἱ ἕδραι παντὸς ἰσοσκελοῦς τετραέδρου εἶναι ὀξυγώνια τρίγωνα. ii) Ἑκάστη κορυφὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τετραέδρου προβάλλεται ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης ἕδρας εἰς τὸ συμμετρικὸν τοῦ ὀρθοκέντρου τῆς ἕδρας ὡς πρὸς τὸ περίκεντρον αὐτῆς. Ἀντιστρόφως, ἂν δύο κορυφαὶ ἑνὸς τετραέδρου ἔχουν τὴν ἰδιότητα ταύτην, τὸ τετράεδρον εἶναι ἰσοσκελές.

1235. Διὰ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὸ (Π) καὶ μίαν σταθερὰν πλαγίαν ΑΓ, (ΒΕ(Π), ΓΕ(Π)), θεωροῦμεν μεταβλητὴν πλαγίαν ΑΜ (ΜΕ(Π)) μήκους σταθεροῦ καὶ μεγαλυτέρου τοῦ ΑΓ. Νὰ καθορισθοῦν αἱ θέσεις τῆς ΑΜ, καθ' ἃς i) ἡ $\widehat{BM\Gamma}$ γίνεται μεγίστη ii) ἡ $\widehat{AM\Gamma}$ γίνεται μεγίστη.

1236. Δίδονται δύο εὐθεῖαι Ox, Oy καὶ τρίτη εὐθεῖα (ε) ἐν τῷ χώρῳ. Ζητεῖται νὰ κα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τασκευασθῇ εὐθεῖα ΟΜ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν (ε) καὶ τοιαύτη, ὥστε Επιπ.ΟΜx ⊥ Επιπ. ΟΜy (Ὑπόδ. βλ. ἄσκ. 1020).

1237. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ ≠ ΑΓ καὶ εὐθεῖα (ε) τοῦ χώρου. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς (ε) ἐπίπεδον (Π), ἐπὶ τοῦ ὁποίου αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ ἔχουν ἴσας προβολὰς (Ὑπόδ. Ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην).

1238. Κόλουρος κῶνος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος ρ = 1 καὶ ἐγγεγραμμένος εἰς ἄλλην, ἡς ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 7 - πλασία τῆς ἐπιφανείας τῆς πρώτης. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου.

1239. Δίδεται σφαῖρα καὶ κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτήν. Νὰ εὑρεθῇ πότε ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν σφαίρας καὶ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου παρ/λου πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου γίνεται μεγίστη.

1240. Ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῶν μέσων Μ καὶ Ν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου καὶ τέμνει δύο ἄλλας ἀπέναντι ἀκμὰς εἰς Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τμῆμα ΕΖ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ΜΝ.

1241. Τίς ὁ τόπος τῶν ἀξόνων τῶν ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τῶν τεσσάρων πλευρῶν παρ/μου ΑΒΓΔ;

1242. Τίς ὁ τόπος τῶν ἀξόνων τῶν ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν τεσσάρων κορυφῶν δεδομένου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ;

1243. **Σφαῖρα τῶν 12 σημείων ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου.** i) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὰ κέντρα βάρους καὶ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων ἑδρῶν καθὼς καὶ τὰ σημεῖα τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὸ ἓν τρίτον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τετραέδρου ἀπὸ τὰς κορυφὰς (καὶ ἐγγύτερα πρὸς τὸ ὀρθόκεντρον) κεῖνται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας.

ii) Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τετραέδρου, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τῶν 12 σημείων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1244. i) Εἰς πᾶν ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὸ ὀρθόκεντρον ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς σφαίρας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὰς ἀκμὰς καὶ πρὸς τὰς ἐχούσας διαμέτρους τὰ ὕψη τῶν ἑδρῶν.

ii) Ἔστω ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ. Ὑποθέσωμεν τὰς κορυφὰς Α καὶ Β σταθερὰς καθὼς καὶ τὸν φορέα (ε) τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ΓΔ. Ἐὰν τὰ Γ καὶ Δ κινοῦνται ἐπὶ τῆς (ε) οὕτως, ὥστε τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ νὰ παραμένῃ ὀρθοκεντρικόν, δείξατε ὅτι ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τετράεδρον σφαῖρα διέρχεται διὰ σταθερᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία καὶ νὰ καθορισθῇ.

1245. Ἔστω ΟΑΒΓ τυχὸν τετράεδρον καὶ Κ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Διὰ τῶν Α, Β, Γ φέρομεν παρ/λους πρὸς τὴν ΟΚ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν ἀντιστοίχως τὰ ἐπίπεδα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ι, Θ, Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΚΙΘΗ εἶναι τριπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

# ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

## ΔΙΠΛΟΥΣ ΛΟΓΟΣ

**362. Ἁπλοῦς ἢ μερικὸς λόγος διατεταγμένης τριάδος σημείων ἑνὸς ἄξονος.**

α') Ἔστω (A, B, M) διατεταγμένη τριὰς σημείων ἑνὸς ἄξονος. (Τὸ A θεωρεῖται πρῶτον, τὸ B δεύτερον, τὸ M τρίτον). Ὁ ἀλγεβρικὸς λόγος $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ καλεῖται καὶ **ἁπλοῦς λόγος** ἢ **μερικὸς λόγος** τῆς τριάδος (A, B, M) καὶ παρίσταται μὲ (ABM). Ὥστε (ABM) = λ σημαίνει : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda$.

Οὕτω π.χ., ἂν (ABM) = λ(≠0), τότε (BAM) = $\overline{MB}/\overline{MA} = 1/\lambda$,

$$(AMB) = \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BM}+\overline{MA}}{\overline{BM}} = 1 + \frac{\overline{MA}}{\overline{BM}} = 1 - \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1 - \lambda, \text{ κτλ.}$$

β') **Συμβατικαὶ τιμαὶ τοῦ μερικοῦ λόγου.** Ἐὰν τὸ M συμπίπτῃ μὲ τὸ A, τότε ὁ (ABM) = 0. Ἐὰν M ≡ B, ὁ μερικὸς λόγος (ABM) δὲν ὁρίζεται. Ἂν τὸ M καταστῇ τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ AB, τότε θέτομεν (ABM) = +1. Ἐξ αὐτοῦ καὶ τῆς § **61**, β' συνάγομεν ὅτι ὁ (ABM) διατρέχει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς, ὅταν τὸ M διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν AB ἐστερημένην τοῦ B.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**363. Διπλοῦς λόγος τετράδος σημείων μιᾶς εὐθείας.** α΄) Θεωροῦμεν τέσσαρα τυχόντα σημεῖα κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ μίαν ὡρισμένην τάξιν λαμβάνοντες ἓν ἐξ αὐτῶν, τὸ Α, ὡς πρῶτον, ἕτερον, τὸ Β, ὡς δεύτερον, ἓν ἐκ τῶν ὑπολοίπων δύο, τὸ Γ, ὡς τρίτον καὶ τὸ ἕτερον, Δ, ὡς τέταρτον. Τὸ $\overrightarrow{AB}$ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ Γ εἰς ἀλγεβρικόν τινα λόγον $\overline{ΓA}/\overline{ΓB}$ (βλ. § **61**) καὶ ὑπὸ τοῦ Δ εἰς ἕτερον ἀλγεβρικὸν λόγον $\overline{ΔA}/\overline{ΔB}$. **Καλεῖται διπλοῦς λόγος (ἢ ἀναρμονικὸς λόγος) τῆς διατεταγμένης τετράδος σημείων Α, Β, Γ, Δ καὶ παρίσταται μὲ (Α, Β, Γ, Δ) τὸ πηλίκον τῶν ἀλγεβρικῶν λόγων $\overline{ΓA}/\overline{ΓB}$ διὰ τοῦ $\overline{ΔA}/\overline{ΔB}$.**

$$(1)\qquad (A,\ B,\ Γ,\ Δ)=\frac{\overline{ΓA}}{\overline{ΓB}}:\frac{\overline{ΔA}}{\overline{ΔB}}=\frac{(ABΓ)}{(ABΔ)}$$

Ὁ διπλοῦς λόγος (Α, Β, Γ, Δ) ἔχει νόημα καὶ ὅταν τὸ ἓν τῶν σημείων εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον τῆς εὐθείας (§ **362**, β΄).

Γνωρίζομεν ὅτι 4 σημεῖα δύνανται νὰ διαταχθοῦν εἰς μίαν σειρὰν κατὰ 24 διαφορετικοὺς τρόπους (μεταθέσεις τεσσάρων πραγμάτων) καὶ ἑπομένως εἰς 4 σημεῖα εὐθείας ἀντιστοιχοῦν 24 διπλοῖ λόγοι. Ἀποδεικνύεται ὅμως ὅτι οἱ 24 οὗτοι διπλοῖ λόγοι εἶναι ἀνὰ τέσσαρες ἴσοι· καὶ τοῦτο προκύπτει εὐκόλως ἐκ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

**β΄) (Θ) — Ὁ διπλοῦς λόγος δὲν βλάπτεται, ὅταν ἐναλλάξωμεν δύο σημεῖα καὶ συγχρόνως ἐναλλάξωμεν καὶ τὰ δύο ἄλλα.**

Δηλ. θὰ εἶναι : (Α, Β, Γ, Δ) = (Β, Α, Δ, Γ) = (Γ, Δ, Α, Β) = (Δ, Γ, Β, Α).

Ἔχομεν π.χ. : $(B,\ A,\ Δ,\ Γ)=\dfrac{\overline{ΔB}}{\overline{ΔA}}:\dfrac{\overline{ΓB}}{\overline{ΓA}}=\dfrac{\overline{ΔB}\cdot\overline{ΓA}}{\overline{ΔA}\cdot\overline{ΓB}}=\dfrac{\overline{ΓA}}{\overline{ΓB}}:\dfrac{\overline{ΔA}}{\overline{ΔB}}=$
$=(A,\ B,\ Γ,\ Δ)$.

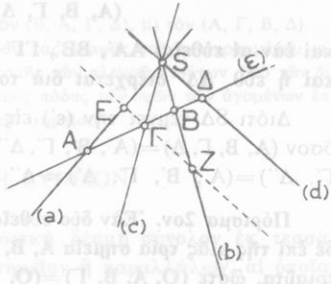
γ΄) Τῶν τριῶν (διαφόρων ἀλλήλων) σημείων Α, Β, Γ μενόντων σταθερῶν καὶ τοῦ τετάρτου Δ διατρέχοντος τὴν εὐθεῖαν ἐστερημένην τοῦ Β, ὁ λόγος $\overline{ΓA}:\overline{ΓB}$ εἶναι μία σταθερά, ἐνῷ ὁ λόγος $\overline{ΔA}:\overline{ΔB}$ διατρέχει ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμάς, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν § **362**, β΄. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ διπλοῦς λόγος (Α, Β, Γ, Δ) δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$. (Τὴν τιμὴν 1 λαμβάνει ὁ (Α, Β, Γ, Δ) μόνον, ὅταν $Δ \equiv Γ$).

δ΄) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν διπλοῦν λόγον (Α, Β, Γ, Δ) = λ καὶ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τότε τὸ τέταρτον σημεῖον Δ εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένον, διότι γνωρίζομεν τὸν ἀλγεβρικὸν λόγον $\overline{ΔA}/\overline{ΔB}$. Γενικώτερον, ἂν γνωρίζωμεν τὸν διπλοῦν λόγον καὶ τρία σημεῖα ἐκ τῶν τεσσάρων, τὸ τέταρτον εἶναι ὡρισμένον.

ε΄) Ἐὰν (ΑΒΓΔ) = —1, τότε τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ τμῆμα ΑΒ (§ **62**, 4).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**364. Διπλοῦς λόγος τεσσάρων ἀκτίνων.** α') (Θ) — **Μία διατεταγμένη τετρὰς ἀκτίνων μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης ὁρίζει ἐπὶ τυχούσης τεμνούσης τέσσαρα σημεῖα ἔχοντα σταθερὸν διπλοῦν λόγον.**



Σχ. 403

Ἔστω (a), (b), (c), (d) διατεταγμένη τετρὰς ἀκτίνων διερχομένων διὰ τοῦ S (σχ. 403) καὶ A, B, Γ, Δ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τομῆς τῶν ὑπὸ τυχούσης τεμνούσης (ε). Ἂς φέρωμεν ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖαν ΕΓΖ παράλληλον πρὸς τὴν (d), ὡς ἐν τῷ σχήματι.

Χρησιμοποιοῦντες ὅμοια τρίγωνα (τρ.ΑΕΓ≈τρ.ΑSΔ, τρ. ΓΒΖ≈τρ. SΒΔ) λαμβάνομεν κατὰ σειράν:

$$(A,B,\Gamma,\Delta)=\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}}:\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}=\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Delta A}}:\frac{\overline{\Gamma B}}{\overline{\Delta B}}=\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{\Delta S}}:\frac{\overline{\Gamma Z}}{\overline{\Delta S}}=\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{\Gamma Z}}.$$

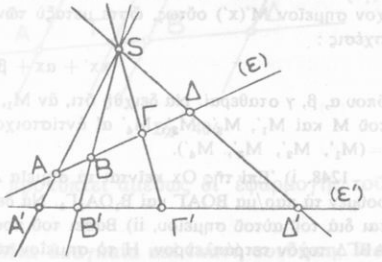
Ὁ λόγος ὅμως $\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{\Gamma Z}}$ εἶναι παντελῶς ἀνεξάρτητος τῆς τεμνούσης (ε). Διότι οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ Γ ἐπὶ τῆς (c), ἐπειδὴ ἡ διεύθυνσις τῆς ΕΖ εἶναι σταθερά, ὁ λόγος $\overline{\Gamma E}:\overline{\Gamma Z}$ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα τῆς δέσμης (§ **56**) σταθερός.

Ἂν τὸ S εἶναι εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον, πάλιν τὸ θεώρημα ἰσχύει βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.

**β') Καλεῖται διπλοῦς λόγος τῆς τετράδος ἀκτίνων: ((a), (b), (c), (d)) ὁ σταθερὸς διπλοῦς λόγος (A, B, Γ, Δ), τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ τετράς, ἐπὶ τυχούσης εὐθείας (ε), τὴν ὁποίαν τέμνει** (σχ. 403).

γ') **Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ διπλοῦ λόγου.** Ἐν ἐπιπέδῳ ἂς λάβωμεν σταθερὸν σημεῖον S καὶ εὐθεῖαν (ε').

Εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἔστω τὸ A, (≠S) ἀντιστοιχεῖ ἐπὶ τῆς (ε') ἓν σημεῖον A', τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἴχνος τῆς ἀκτῖνος SA ἐπὶ τῆς (ε'). Τὸ A' εἶναι ἡ **κεντρικὴ προβολὴ** τοῦ A ἐπὶ τὴν (ε'), ὡς πρὸς κέντρον S.



Σχ. 404

Ἔστω τώρα τετρὰς σημείων A, B, Γ, Δ ἐπὶ εὐθείας (ε). Ἡ κεντρικὴ προβολὴ τῆς τετράδος A, B, Γ, Δ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε') εἶναι ἑτέρα τετρὰς A', B', Γ', Δ' (σχ. 404). Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν (A, B, Γ, Δ)=(A', B', Γ', Δ'), ἤτοι

**Κατὰ τὴν κεντρικὴν προβολήν, ὁ διπλοῦς λόγος διατηρεῖται.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**δ΄) Πόρισμα 1ον. Ἐὰν ἐπὶ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄) κεῖνται ἀντιστοίχως αἱ τετράδες σημείων Α, Β, Γ, Δ καὶ Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ τοιαῦται, ὥστε :**

$$(A, B, \Gamma, \Delta) = (A', B' \Gamma', \Delta')$$

**καὶ ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου S, τότε καὶ ἡ εὐθ. ΔΔ΄ διέρχεται διὰ τοῦ S.**

Διότι SΔ τέμνει τὴν (ε΄) εἰς σημεῖον Δ΄΄ ταὐτιζόμενον μὲ τὸ Δ΄, καθ' ὅσον $(A, B, \Gamma, \Delta) = (A', B', \Gamma', \Delta'') \wedge (A, B, \Gamma, \Delta) = (A', B', \Gamma', \Delta') \Rightarrow (A', B', \Gamma', \Delta'') = (A', B', \Gamma', \Delta') \Rightarrow \Delta'' \equiv \Delta'$.

**Πόρισμα 2ον. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄) τέμνωνται εἰς Ο, ὑπάρχουν δὲ ἐπὶ τῆς μιᾶς τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἔτερα τρία Α΄, Β΄, Γ΄ τοιαῦτα, ὥστε (Ο, Α, Β, Γ) = (Ο, Α΄, Β΄, Γ΄), τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

Διότι αἱ ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ ὁρίζουν ἓν σημεῖον S (εἰς πεπερασμένην ἢ ἄπειρον ἀπόστασιν). Ἡ εὐθεῖα SΓ τέμνει τὴν (ε΄) εἰς σημεῖον Γ΄΄ συμπίπτον μὲ τὸ Γ΄, διότι ἐκ τῆς δέσμης (SO, SA, SB, SΓ) τεμνομένης ὑπὸ τῆς (ε΄) λαμβάνομεν (Ο, Α, Β, Γ) = (Ο, Α΄, Β΄, Γ΄΄). Ἔχομεν καὶ (Ο, Α, Β, Γ) = (Ο, Α΄, Β΄, Γ΄) ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα (Ο, Α΄, Β΄, Γ΄΄) = (Ο, Α΄, Β΄, Γ΄) ⇒ Γ΄ ≡ Γ΄΄.

**Παρατήρησις.** Τὸ ἀνωτέρω πόρισμα 2ον συμπληροῦται ὡς ἑξῆς : «Ἐὰν $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$, τότε, ἂν $A_2 \equiv B_2$, αἱ εὐθεῖαι $A_1B_1$, $A_3B_3$, $A_4B_4$ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον. Ἂν $A_3 \equiv B_3$, τότε αἱ $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_4B_4$ συντρέχουν. Ὁμοίως, ἂν $A_4 \equiv B_4$, αἱ $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ συντρέχουν». Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἐντελῶς ὁμοία μὲ τὴν εἰς τὸ πόρισμα 2ον δοθεῖσαν.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1246. Δύο ἄξονες ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν Ο. Ἐπὶ τοῦ ἑνὸς λαμβάνομεν τέσσαρα τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἀντίστοιχα σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ τοιαῦτα, ὥστε: $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{O\Gamma} \cdot \overline{O\Gamma'} = \overline{O\Delta} \cdot \overline{O\Delta'}$. Δείξατε ὅτι $(A, B, \Gamma, \Delta) = (A', B', \Gamma', \Delta')$. (Οἱ δύο ἄξονες δυνατὸν νὰ συμπίπτουν).

1247. Ἐπὶ ἄξονος θεωροῦμεν μεταβλητὸν σημεῖον M(x) καὶ ἐπὶ ἄλλου τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον M΄(x΄) οὕτως, ὥστε μεταξὺ τῶν τετμημένων των x καὶ x΄ νὰ πληροῦται ἡ σχέσις :

$$xx' + \alpha x + \beta x' + \gamma^2 = 0$$

ὅπου α, β, γ σταθεραί. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ εἶναι τέσσαρες τυχοῦσαι θέσεις τοῦ M καὶ $M_1'$, $M_2'$, $M_3'$, $M_4'$ αἱ ἀντίστοιχοι θέσεις τοῦ M΄, τότε $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M_1', M_2', M_3', M_4')$.

1248. i) Ἐπὶ τῆς Ox κεῖνται τὰ σημεῖα Α καὶ $A_1$ καὶ ἐπὶ τῆς Oy τὰ Β καὶ $B_1$. Θεωροῦμεν τὰ παρ/μα ΒΟΑΓ καὶ $B_1OA_1\Gamma_1$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AB_1$, $A_1B$, $\Gamma\Gamma_1$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ii) Βάσει τοῦ προηγουμένου ἢ ἄλλως πως νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν ΑΒΓΔ τυχὸν τετράπλευρον, Η τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, Θ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΒΓ καὶ ΑΔ, τότε τὰ μέσα τῶν ΑΓ, ΒΔ, ΗΘ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1249. Δέσμη τεσσάρων εὐθειῶν $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$, $(\varepsilon_4)$ διερχομένων διὰ τοῦ Ο, τέμνεται ὑπὸ εὐθείας εἰς Α, Β, Γ, Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$((\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\varepsilon_4)) = \frac{\eta\mu(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OA})}{\eta\mu(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})} : \frac{\eta\mu(\overrightarrow{O\Delta}, \overrightarrow{OA})}{\eta\mu(\overrightarrow{O\Delta}, \overrightarrow{OB})}$$

1250. Ἐάν (Α, Β, Γ, Δ) = λ, i) ὑπολογίσατε τὸν (Β, Α, Γ, Δ), ii) τὸν (Α, Γ, Β, Δ).

1251. Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰς ἐπαφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ δύο πλευρῶν ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν τούτων ὑπὸ τῶν διχοτόμων τῶν ἀπέναντι γωνιῶν καὶ ἡ συνδέουσα τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὰς δύο πλευρὰς ταύτας διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

## ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

**365. α') Ὁρισμός. — Καλεῖται ἁρμονικὴ δέσμη σύνολον ἐκ τεσσάρων εὐθειῶν συντρεχουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ παραλλήλων, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν τεσσάρων σημείων μιᾶς ἁρμονικῆς διαιρέσεως** (§ **62**, δ').

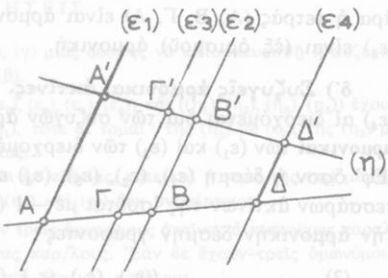
Αἱ εὐθεῖαι λέγονται καὶ *ἀκτῖνες τῆς δέσμης*.

**β') Θεμελιώδης ἰδιότης : Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν δέσμην, τότε τὰ τέσσαρα σημεῖα τομῆς των ὑπὸ τυχούσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$, $(\varepsilon_4)$ σύνολον τεσσάρων εὐθειῶν συντρεχουσῶν εἰς τὸ Ο καὶ διερχομένων ἀντιστοίχως διὰ τῶν τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ ἁρμονικῆς διαιρέσεως.

Ὁ διπλοῦς λόγος (Α, Β, Γ, Δ) ἰσοῦται μὲ —1.

Ἔστω (η) εὐθεῖα (μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Ο) τέμνουσα εἰς Α', Β', Γ', Δ' τὰς ἀκτῖνας $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$, $(\varepsilon_4)$ τῆς δέσμης. Τότε κατὰ τὸ (Θ) τῆς § **364** α' οἱ διπλοῖ λόγοι (Α, Β, Γ, Δ) καὶ (Α', Β', Γ', Δ') εἶναι ἴσοι. Ἐπειδὴ (Α, Β, Γ, Δ) = —1, ἕπεται καὶ (Α', Β', Γ', Δ') = —1, ἤτοι ἡ τετρὰς (Α', Β', Γ', Δ') εἶναι ἁρμονικὴ τετράς.



Σχ. 406

Ἐὰν πάλιν, αἱ τέσσαρες ἀκτῖνες τῆς δέσμης εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ τετρὰς Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἁρμονικὴ (σχ. 406), τότε καὶ ἡ Α', Β', Γ', Δ' εἶναι ἐπίσης ἁρμονική, ὡς προκύπτει ἀμέσως δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.

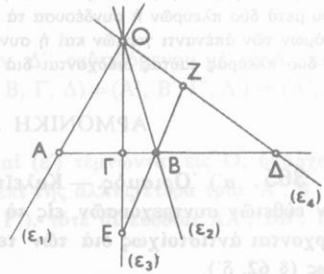
**γ') Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης : Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τέσσαρες συντρέχουσαι εὐθεῖαι ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν δέσμην, εἶναι ἡ παράλληλος ἡ ἀγομένη πρὸς μίαν τῶν εὐθειῶν τούτων νὰ τέμνῃ τὰς ἄλλας**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**τρεῖς εἰς τρία σημεῖα, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων.**

Ἔστωσαν $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$, $(\varepsilon_4)$ τέσσαρες εἰς Ο συντρέχουσαι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῶν τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ ἁρμονικῆς διαιρέσεως. Θὰ ἔχωμεν τότε :

(1) $$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$$



Σχ. 407

Ἡ διὰ τοῦ Β ἀγομένη παρ/λος πρὸς τὴν $(\varepsilon_1)$ τέμνει τὰς $(\varepsilon_3)$ καὶ $(\varepsilon_4)$ εἰς Ε καὶ Ζ καὶ δημιουργεῖ δύο ζεύγη ὁμοίων τριγώνων : τρ.ΓΑΟ μὲ τρ.ΓΒΕ καὶ τρ.ΔΟΑ μὲ τρ.ΔΖΒ, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν :

(2) $$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{OA}{EB} \text{ καὶ } \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{OA}{ZB}$$

Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) συνεπάγονται :

$$\frac{OA}{EB} = \frac{OA}{ZB} \Rightarrow EB = ZB \Longleftrightarrow \text{τὸ Β εἶναι μέσον τοῦ ΕΖ.}$$

**Ἀντιστρόφως,** ἂν ΕΒ = ΖΒ, αἱ ἰσότητες (2) δίδουν : $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$, ἄρα ἡ τετρὰς (Α, Β, Γ, Δ) εἶναι ἁρμονικὴ καὶ ἡ δέσμη τῶν $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$, $(\varepsilon_4)$ εἶναι (ἐξ ὁρισμοῦ) ἁρμονική.

δ΄) **Συζυγεῖς ἁρμονικαὶ ἀκτῖνες.** Εἰς τὸ σχ. 407 αἱ δύο εὐθεῖαι $(\varepsilon_3)$ καὶ $(\varepsilon_4)$ αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν συζυγῶν ἁρμονικῶν Γ καὶ Δ λέγονται **συζυγεῖς ἁρμονικαὶ** τῶν $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τανάπαλιν. Ἐφ' ὅσον ἡ δέσμη $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$, $(\varepsilon_4)$ εἶναι ἁρμονική, ὁ διπλοῦς λόγος τῶν τεσσάρων ἀκτίνων της ἰσοῦται μὲ —1 (βλ. § **364,** β΄). Διὰ τοῦτο παριστῶμεν τὴν ἁρμονικὴν δέσμην γράφοντες :

(3) $$((\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\varepsilon_4)) = -1 \text{ ἢ}$$

(4) $$(OA, OB, O\Gamma, O\Delta) = -1 \text{ (σχ. 407) ἢ}$$

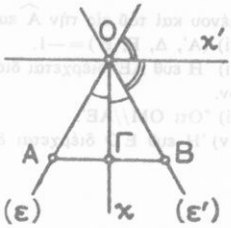
(5) $$O(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$$

ε΄) **Παρατήρησις. Εἰς τὴν ἁρμονικὴν δέσμην τμῆμα περιεχόμενον μεταξὺ δύο συζυγῶν ἀκτίνων καὶ παράλληλον πρὸς μίαν τρίτην ἀκτῖνα (ε) τῆς δέσμης διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς συζυγοῦς πρὸς τὴν (ε) ἀκτῖνος.** Τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου γ΄).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**366. Ἀξιοσημείωτος περίπτωσις ἁρμονικῆς δέσμης.** (Θ) — **Δύο συντρέχουσαι εὐθεῖαι καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν δέσμην. Ἀντιστρόφως, ἐὰν εἰς ἁρμονικὴν δέσμην συντρεχουσῶν εὐθειῶν δύο συζυγεῖς ἀκτῖνες εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε αὐταὶ εἶναι καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ δύο ἄλλαι ἀκτῖνες.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν αἱ συντρέχουσαι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε′) καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν των Ox καὶ Ox′ (σχ. 408). Ἂν διὰ σημείου Γ τῆς Ox ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν Ox′ τέμνουσα εἰς A καὶ B τὰς (ε) καὶ (ε′), τότε τὸ τρίγωνον OAB εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ AB εἶναι ⊥ τῇ διχοτόμῳ Ox. Συνεπῶς ΑΓ = =ΓΒ. Ἑπομένως (§ **365**, γ′) ἡ δέσμη {(ε), Ox, (ε′), Ox′} εἶναι ἁρμονική.



Σχ. 408

**Ἀντιστρόφως :** Ἔστω ἡ ἁρμονικὴ δέσμη {(ε), Ox, (ε′), Ox′} (σχ. 408), εἰς τὴν ὁποίαν δύο συζυγεῖς ἀκτῖνες (βλ. § **365**, δ′) Ox, Ox′ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Μία παράλληλος πρὸς τὴν ἀκτῖνα Ox′ τέμνει τότε τὰς τρεῖς ἄλλας : (ε), Ox, (ε′) εἰς A, Γ, B καὶ εἶναι ΑΓ = ΓΒ, ἀφοῦ ἡ δέσμη εἶναι ἁρμονικὴ (§ **365**, γ′). Ἀλλὰ τότε ἡ ΟΓ εἶναι εἰς τὸ τρίγωνον OAB καὶ διάμεσος καὶ ὕψος, ἄρα εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$ τοῦ ἰσοσκελοῦς τρ.OAB. Ἡ πρὸς αὐτὴν κάθετος ἀκτὶς Ox′ εἶναι ἡ ἑτέρα διχοτόμος.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1252. Δοθεισῶν τριῶν ἀκτίνων (α), (β), (γ) μιᾶς δέσμης νὰ κατασκευασθῇ ἡ συζυγὴς ἁρμονικὴ τῆς (γ) ὡς πρὸς τὰς (α) καὶ (β).

1253. i) Ἐὰν δύο ἁρμονικαὶ δέσμαι $((\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\varepsilon_4))$ καὶ $((\eta_1), (\eta_2), (\eta_3), (\eta_4))$ ἔχουν μίαν ὁμώνυμον ἀκτῖνα **κοινὴν** π.χ. $(\varepsilon_1) \equiv (\eta_1)$, τότε αἱ τομαί : τῆς $(\eta_2)$ μὲ $(\varepsilon_2)$, τῆς $(\eta_3)$ μὲ $(\varepsilon_3)$ καὶ τῆς $(\eta_4)$ μὲ $(\varepsilon_4)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ii) Ἐὰν αἱ τρεῖς ἀνωτέρω τομαὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε καὶ ἡ τομὴ τῆς $(\eta_1)$ μὲ $(\varepsilon_1)$ κεῖται ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας, ἐφ' ὅσον αἱ $(\eta_1)$ καὶ $(\varepsilon_1)$ δὲν συμπίπτουν.

1254. Ἐὰν δύο ἁρμονικαὶ δέσμαι ἔχουν τρεῖς ὁμωνύμους ἀκτῖνας ἀντιστοίχως παραλλήλους, θὰ ἔχουν καὶ τὰς τετάρτας ἀκτῖνας παρ/λους. Ἐὰν δὲ ἔχουν τρεῖς ὁμωνύμους ἀκτῖνας καθέτους, θὰ ἔχουν καὶ τὰς τετάρτας ἀκτῖνας καθέτους.

1255. Εἰς παρ/μον ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ καὶ αἱ ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἀγόμεναι παρ)λοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν δέσμην εὐθειῶν.

1256. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ τριγ ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Β, Α) λαμβάνομεν σημεῖα Ι καὶ Κ τοιαῦτα, ὥστε ΒΙ = 2·ΙΑ καὶ ΒΚ = 2·ΒΑ. Τὰ τμήματα ΑΜ καὶ ΓΙ τέμνονται εἰς Ο.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ δέσμη ΓΑ, ΓΒ, ΓΙ, ΓΚ εἶναι ἁρμονική.

ii) Τὸ Ο εἶναι μέσον τοῦ ΑΜ καὶ τὸ ΙΟ τὸ τέταρτον τοῦ ΙΓ.

1257. Δοθέντος τριγ ΑΒΓ καὶ σημείου Ρ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ Ρ εὐθεῖα τέμνουσα τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἰς Γ΄, Α΄, Β΄ ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε (Α΄, Β΄, Γ΄, Ρ)=—1.

1258. Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) ἰσοῦται πρὸς δοθέντα λόγον μ/ν εἶναι ζεῦγος εὐθειῶν συζυγῶν ἁρμονικῶν ὡς πρὸς τὰς ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$).

1259. Ἔστωσαν ΑΑ΄ ὕψος, ΑΔ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τρ.ΑΒΓ, Ο τὸ ἔγκεντρον, Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Ε καὶ Ε΄ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ εἰς τὴν $\widehat{A}$ παρεγεγραμμένου κύκλου τοῦ τρ.ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

i) (Α΄, Δ, Ε, Ε΄)=—1.

ii) Ἡ ευθ ΑΕ΄ διέρχεται διὰ τοῦ ἀντιδιαμετρικοῦ τοῦ Ε ὡς πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον.

iii) Ὅτι ΟΜ//ΑΕ΄.

iv) Ἡ ευθ Ε΄Ο διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ ὕψους ΑΑ΄.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

# ΠΟΛΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΑΙ

## ΠΟΛΙΚΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

**367. Σημεῖα συζυγῆ ὡς πρὸς δύο εὐθείας.**

Ἔστω M σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθειῶν $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$, ἐπὶ οὐδεμιᾶς τούτων κείμενον. Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ M εὐθεῖα τέμνουσα τὰς $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ εἰς $A_1$ καὶ $A_2$ ἀντιστοίχως καὶ ἔστω N τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὰ $A_1$, $A_2$, δηλ.:

$$(M, N, A_1, A_2) = -1.$$

**Λέγομεν ὅτι τὸ N εἶναι συζυγὲς τοῦ M ὡς πρὸς τὰς εὐθείας $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$.**

Ἐὰν αἱ $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ τέμνωνται, ἔστω εἰς O (σχ. 409), δυνάμεθα συμβατικῶς νὰ δεχθῶμεν καὶ τὸ O ὡς συζυγὲς τοῦ M.

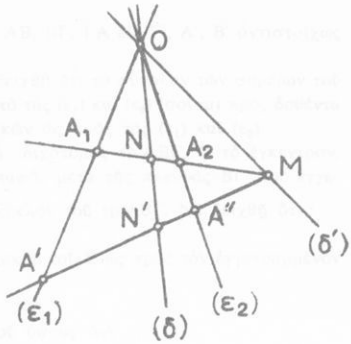
**368. Πολικὴ ἑνὸς σημείου ὡς πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας.** Ἂς ζητήσωμεν τὸν γ.τ. τῶν συζυγῶν ἑνὸς σταθεροῦ σημείου M ὡς πρὸς δύο εὐθείας $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$ τεμνομένας εἰς τὸ O.

Ἔστω N, ἓν σημεῖον συζυγὲς τοῦ M ὡς πρὸς τὰς $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ (σχ. 409). Τότε θὰ εἶναι $(A_1, A_2, N, M) = -1$ καὶ συνεπῶς, ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΟΜ, ΟΝ, ἡ δέσμη {$OA_1$, $OA_2$, ΟΝ, ΟΜ} εἶναι ἁρμονική· καὶ ἐπειδὴ αἱ τρεῖς ἀκτῖνες αὐτῆς εἶναι σταθεραί, ἡ τετάρτη, δηλ. ευθ ΟΝ ≡(δ), εἶναι καὶ αὐτὴ σταθερά, ὡς συζυγής ἁρμονικὴ τῆς ευθ ΟΜ ὡς πρὸς τὰς ($ε_1$), ($ε_2$).

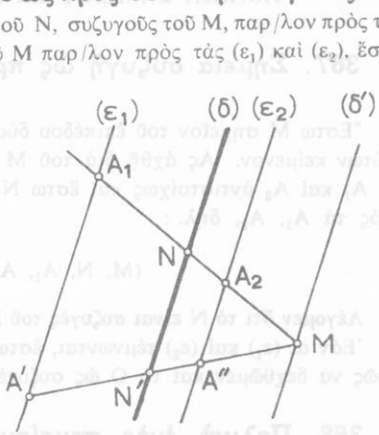


Σχ. 409

**Ἀντιστρόφως,** Ἔστω Ν΄, σημεῖον τῆς (δ) καὶ ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ευθ ΜΝ΄ τέμνει τὰς ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) εἰς Α΄ καὶ Α΄΄. Τότε ἐπειδὴ ἡ δέσμη τῶν εὐθειῶν εἶναι ἁρμονική, θὰ ἔχωμεν (Α΄, Α΄΄, Ν΄, Μ)=—1 ⇒ τὸ Ν΄ εἶναι συζυγὲς τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς ($ε_1$) καὶ ($ε_2$). Ἀλλὰ καὶ ἂν ἡ ευθ ΜΝ΄ εἶναι παρ/λος πρὸς μίαν τῶν ($ε_1$) ἢ ($ε_2$), π.χ. πρὸς τὴν ($ε_1$), τότε τὸ Α΄΄ θὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ Ν΄Μ (§ **365**, γ΄), ἐνῷ τὸ Α΄ θὰ εἶναι κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς ($ε_1$), ἔστω τὸ $A_\infty$, καὶ ἡ τετρὰς ($A_\infty$, Α΄΄, Ν΄, Μ) εἶναι πάλιν ἁρμονικὴ (§ **65**).

Ὁ τόπος τῶν συζυγῶν Ν εἶναι ἡ εὐθεῖα (δ) συζυγὴς τῆς ΟΜ ὡς πρὸς τὰς ($ε_1$), ($ε_2$). Ἡ (δ) καλεῖται **«πολικὴ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς δύο τεμνομένας εὐθείας ($ε_1$), ($ε_2$)»**.

**369. Πολικὴ ἑνὸς σημείου ὡς πρὸς δύο παραλλήλους εὐθείας.** (Σχ. 410). Ἂν φέρωμεν διὰ τοῦ Ν, συζυγοῦς τοῦ Μ, παρ/λον πρὸς τὰς ($ε_1$) καὶ ($ε_2$), ἔστω τὴν (δ) καὶ ἐκ τοῦ Μ παρ/λον πρὸς τὰς ($ε_1$) καὶ ($ε_2$), ἔστω τὴν (δ΄), τότε ἡ δέσμη τῶν τεσσάρων παραλλήλων εἶναι ἁρμονική· καὶ ἀφοῦ αἱ τρεῖς ἀκτῖνες της εἶναι σταθεραὶ καὶ ἡ τετάρτη, (δ), εἶναι ἐπίσης ὡρισμένη.



Σχ. 410

Ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον Ν΄ τῆς (δ) εἶναι συζυγὲς τοῦ Μ, διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ ευθΜΝ΄, αὕτη θὰ τέμνῃ τὰς ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) εἰς Α΄, Α΄΄ καὶ θὰ εἶναι (Α΄, Α΄΄, Ν΄, Μ)= =—1, ἀφοῦ ἡ δέσμη εἶναι ἁρμονική.

Ὁ τόπος τῶν Ν εἶναι ἡ εὐθεῖα (δ), ἥτις καλεῖται **«πολικὴ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς παρ/λους εὐθείας ($ε_1$) καὶ ($ε_2$)»**.

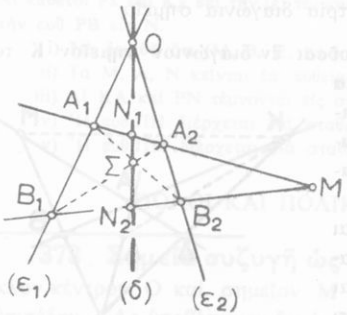
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Παρατήρησις.** Ἂν τὸ Μ μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς (δ΄), ἡ πολικὴ του (δ) παραμένει ἀμετάβλητος.

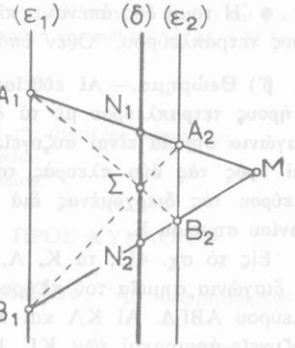
**370.** Ἐκ τῶν §§ **368, 369** συνάγεται τὸ θεώρημα:

**«Ὁ γ.τ. τῶν συζυγῶν ἁρμονικῶν ἑνὸς σταθεροῦ σημείου Μ ὡς πρὸς δύο δεδομένας εὐθείας ($\varepsilon_1$), ($\varepsilon_2$) τεμνομένας εἰς σημεῖον Ο κείμενον εἰς πεπερασμένην ἢ ἄπειρον ἀπόστασιν εἶναι εὐθεῖα (δ), σχηματίζουσα μετὰ τῶν ($\varepsilon_1$), ($\varepsilon_2$) καὶ ΟΜ ἁρμονικὴν δέσμην».** Ἡ (δ) εἶναι ἡ **πολικὴ τοῦ Μ** ὡς πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν εὐθειῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) (καὶ συζυγὴς ἁρμονικὴ τῆς ΟΜ ὡς πρὸς τὰς ($\varepsilon_1$), ($\varepsilon_2$)).

**371. Κατασκευὴ τῆς πολικῆς ἑνὸς σημείου Μ.** Δοθεισῶν τῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) καὶ τοῦ σημείου Μ (σχ. 411, 412), ἃς φέρωμεν δύο τεμνούσας $MA_1A_2$ καὶ $MB_1B_2$. Ἡ ζητουμένη πολικὴ διέρχεται διὰ τῶν σημείων $N_1$ καὶ $N_2$ τοιούτων, ὥστε: $(A_1, A_2, M, N_1) = -1$ καὶ $(B_1, B_2, M, N_2) = -1$,




Σχ. 411




Σχ. 412

καθὼς καὶ διὰ τοῦ σημείου ($\varepsilon_1$) ∩ ($\varepsilon_2$). Ἐὰν τώρα φέρωμεν καὶ τὰς εὐθείας $A_1B_2$ καὶ $A_2B_1$ τεμνομένας ἔστω εἰς τὸ Σ, τότε ἡ πολικὴ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς δύο ταύτας εὐθείας $A_1B_2$, $A_2B_1$ διέρχεται διὰ τοῦ Σ, ἀλλὰ καὶ διὰ τῶν $N_1$ καὶ $N_2$, διότι αἱ $MA_1A_2$ καὶ $MB_1B_2$ εἶναι ἐπίσης τέμνουσαι τοῦ ζεύγους τῶν εὐθειῶν $A_1B_2$, $A_2B_1$.

Ἡ πολικὴ αὐτή, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ Σ, ταυτίζεται λοιπὸν μὲ τὴν πολικὴν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς ($\varepsilon_1$), ($\varepsilon_2$). Ἑπομένως τὰ Σ, $N_1$, $N_2$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) (κειμένου εἰς πεπερασμένην ἢ ἄπειρον ἀπόστασιν).

**Κατασκευή.** Φέρομεν δύο τεμνούσας $MA_1A_2$, $MB_1B_2$ τοῦ δοθέντος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ζεύγους $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$ καὶ συνδέομεν τὸ σημεῖον τομῆς Σ τῶν $A_1B_2$ καὶ $A_2B_1$ μὲ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$.

Ἡ ευθΟΣ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$ καὶ συνεπῶς ἡ ΟΣ εἶναι **συζυγὴς ἁρμονικὴ** τῆς ΟΜ ὡς πρὸς τὰς $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$.

## 372. Θεμελιῶδες θεώρημα τῶν ἁρμονικῶν τετράδων. α') Ὁρισμοί. Πλῆρες τετράπλευρον καλεῖται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα — μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπ' εὐθείας — καὶ ἀπὸ ἓξ εὐθείας συνδεούσας τὰ σημεῖα ταῦτα ἀνὰ δύο.

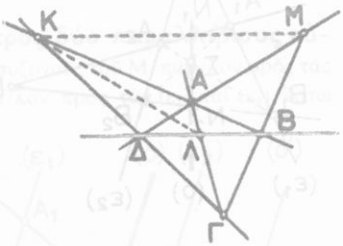
● Τὰ μνημονευθέντα τέσσαρα σημεῖα καλοῦνται **κορυφαὶ** τοῦ πλήρους τετραπλεύρου.

● Αἱ ἓξ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς ἀνὰ δύο καλοῦνται **πλευραὶ** τοῦ πλήρους τετραπλεύρου.

● Δύο πλευραὶ μὴ διερχόμεναι διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς καλοῦνται **ἀπέναντι πλευραί.** (Ὑπάρχουν ὅθεν τρία ζεύγη ἀπέναντι πλευρῶν).

● Ἡ τομὴ δύο ἀπέναντι πλευρῶν καλεῖται **διαγώνιον σημεῖον** τοῦ πλήρους τετραπλεύρου. Ὅθεν ὑπάρχουν τρία διαγώνια σημεῖα.

**β') Θεώρημα.— Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι ἓν διαγώνιον σημεῖον Κ τοῦ πλήρους τετραπλεύρου μὲ τὰ δύο ἄλλα διαγώνια σημεῖα εἶναι συζυγεῖς ἁρμονικαὶ πρὸς τὰς δύο πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου τὰς διερχομένας διὰ τοῦ διαγωνίου σημείου Κ.**



Σχ. 413

Εἰς τὸ σχ. 413, τὰ Κ, Λ, Μ εἶναι τὰ διαγώνια σημεῖα τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Αἱ ΚΛ καὶ ΚΜ εἶναι συζυγεῖς ἁρμονικαὶ τῶν ΚΓ, ΚΒ, διότι ἡ ΚΛ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΚΓ, ΚΒ, συμφώνως μὲ τὴν κατασκευὴν τῆς πολικῆς (§ **371**).

**Σημείωσις.** Ὀρθοτέρα ὀνομασία τοῦ «πλήρους τετραπλεύρου» εἶναι *«πλῆρες τετρακόρυφον»*. Ἔχει ὅμως ἐπικρατήσει ὁ ὅρος «πλῆρες τετράπλευρον», ἴσως διότι εἶναι συντομώτερος.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1260. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς κάθε πλῆρες τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 413) τὸ τμῆμα ΑΓ διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΔΒ καὶ ΚΜ.

1261. Δίδονται δύο εὐθεῖαι $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ τεμνόμεναι εἰς Ο καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ Ρ' κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰς $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, τότε ἡ πολικὴ τοῦ Ρ' διέρχεται διὰ τοῦ Ρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1262. Δίδεται ζεῦγος εὐθειῶν τεμνομένων εἰς Ο καὶ ἕτερον ζεῦγος εὐθειῶν τεμνομένων εἰς Ο', διάφορον τοῦ Ο. Νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον ἔχον τὴν ἰδίαν πολικὴν καὶ ὡς πρὸς τὰ δύο ζεύγη.

1263. Ἔστω ΑΑ' ὕψος τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ Σ τυχὸν σημεῖον τοῦ ὕψους. Ἡ εὐθεῖα ΒΣ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς Β' καὶ ἡ ευθ ΓΣ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς Γ' καὶ ὑποτεθείσθω ὅτι ἡ ευθ Β'Γ' τέμνει τὴν ευθ ΒΓ εἰς Τ.

i) Ποία ἡ πολικὴ τοῦ Τ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ;

ii) Συναγάγετε ὅτι ἡ ΑΑ' εἶναι μία διχοτόμος τῆς $\widehat{Γ'A'B'}$.

1264. Ἔστωσαν Α', Β', Γ' οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἔστω ὅτι ἡ ΓΓ' τέμνει τὴν Α'Β' εἰς Ε, ἡ ΒΒ' τέμνει τὴν Α'Γ' εἰς Δ καὶ ἡ ευθ Β'Γ' τέμνει τὴν ΒΓ εἰς $A_1$.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ $A_1$.

ii) Ἂν Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ, ἡ $A_1$Η εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμεσον ΑΜ τοῦ τρ.ΑΒΓ.

1265. Παρ/μου ΑΒΔΓ αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς Ο. Διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τρ.ΑΒΓ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ ἀντιστοίχως. Φέρομεν καὶ τὴν ευθ αΔ, ἥτις τέμνει τὰς ευθ ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς β' καὶ γ'. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι βγ' καὶ γβ' τέμνονται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

1266. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ τοιαῦτα, ὥστε ΑΒ = ΒΓ. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΑΒ καὶ τὴν κάθετον (ε) ἐπὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Γ. Σημεῖον Η διατρέχει τὴν γραφεῖσαν περιφέρειαν. Αἱ εὐθεῖαι ΑΗ καὶ ΒΗ τέμνουν τὴν (ε) καὶ Ρ εἰς Κ. Αἱ κάθετοι Ρx καὶ Κy ἐπὶ τὴν (ε) τέμνουν ἡ μὲν πρώτη τὴν ευθ ΚΒ εἰς Μ, ἡ δὲ δευτέρα τὴν ευθ ΡΒ εἰς Ν.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι (Μ, Β, Η, Κ) = —1.

ii) Τὰ Μ, Α, Ν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

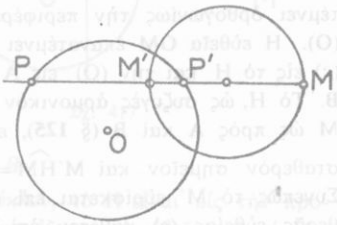
iii) Αἱ ΚΑ καὶ ΡΝ τέμνονται εἰς σημεῖον Π τῆς ἀνωτέρω περιφερείας.

iv) Ἡ ευθ ΠΗ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

v) Ἡ ευθ ΠΜ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

## ΠΟΛΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΑΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

**373. Σημεῖα συζυγῆ ὡς πρὸς κύκλον.** Ἂς θεωρήσωμεν κύκλον κέντρου Ο καὶ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Μ καὶ τέμνουσα τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς δύο σημεῖα Ρ καὶ Ρ'. Τὸ συζυγὲς ἁρμονικόν, Μ', τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰ Ρ καὶ Ρ' λέγεται *συζυγὲς τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸν κύκλον* (σχ. 414). Ἐκ τούτου εἰς πρῶτος ὁρισμός:



Σχ. 414

**Εἰδικὸς ὁρισμός. Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' λέγονται συζυγῆ ὡς πρὸς δοθέντα κύκλον (Ο), ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΜΜ' τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Ρ καὶ Ρ' τοιαῦτα, ὥστε ἡ τετρὰς (Μ, Μ', Ρ, Ρ') νὰ εἶναι ἁρμονική.**

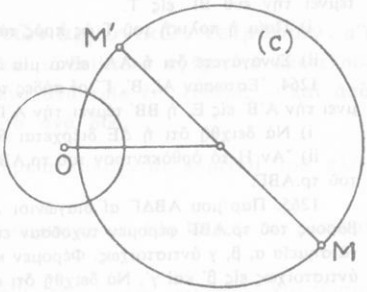
Παρατηροῦμεν ὅτι τότε ὁ κύκλος διαμέτρου ΜΜ' τέμνει ὀρθογωνίως τὸν κύκλον (Ο) (§ **125**, III).,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντιστρόφως, ἂν περιφέρεια διαμέτρου ΜΜ΄ τέμνῃ ὀρθογωνίως τὸν κύκλον (Ο), διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

i) Ἂν ἡ εὐθεῖα ΜΜ΄ **τέμνῃ** τὴν περιφέρειαν τοῦ (Ο) εἰς δύο σημεῖα Ρ, Ρ΄ (σχ. 414), τότε, ὡς γνωστὸν (§ **125**), τὰ Μ καὶ Μ΄ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Ρ, Ρ΄ καὶ συνεπῶς κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τὰ Μ καὶ Μ΄ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Ο).

ii) Ἂν ἡ εὐθεῖα ΜΜ΄ **δὲν τέμνῃ** τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (Ο) (σχ. 415), τότε συμφωνοῦμεν νὰ λέγωμεν, κατ' ἐπέκτασιν, ὅτι καὶ πάλιν τὰ Μ καὶ Μ΄ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Ο). Ἐξ αὐτοῦ ὁ *δεύτερος ὁρισμὸς* γενικώτερος :

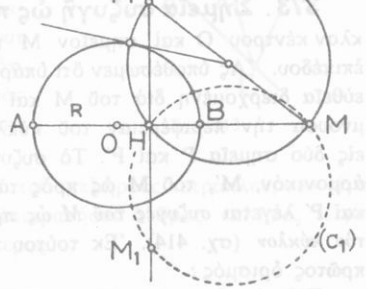


Σχ. 415

**Γενικὸς ὁρισμός. Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ΄ λέγονται συζυγῆ ὡς πρὸς κύκλον (Ο), ὅταν ὁ κύκλος διαμέτρου ΜΜ΄ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν (Ο).**

**374. Πολικὴ σημείου ὡς πρὸς κύκλον.** Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ σταθερὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου. Ἂς ζητήσωμεν τὸ σύνολον τῶν συζυγῶν, Μ΄, τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸν (Ο, R). *Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ὑπάρχει ἓν σημεῖον Μ΄ τοῦ ζητουμένου συνόλου.* Τότε, ἀφοῦ τὰ Μ καὶ Μ΄ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὸν (Ο), ἡ περιφέρεια (c) διαμέτρου ΜΜ΄ τέμνει ὀρθογωνίως τὴν περιφέρειαν (Ο). Ἡ εὐθεῖα ΟΜ ἐπανατέμνει τὴν (c) εἰς τὸ Η καὶ τὴν (Ο) εἰς Α καὶ Β. Τὸ Η, ὡς συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς Α καὶ Β (§ **125**), εἶναι σταθερὸν σημεῖον καὶ $\widehat{M'HM}=1^D$. Συνεπῶς τὸ Μ΄ εὑρίσκεται ἐπὶ σταθερᾶς εὐθείας (ε) καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΜ, εἰς σημεῖον Η τοιοῦτον, ὥστε :

$$\overline{OM}\cdot\overline{OH}=R^2.$$



Σχ. 416

*Ἀντιστρόφως*, ἔστω $M_1$ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης (ε), ἥτις ὑπάρχει, ἐφ' ὅσον τὸ $M\not\equiv O$. Ἡ περιφέρεια ($c_1$) διαμέτρου $MM_1$ διέρχεται διὰ τοῦ Η, ἐπειδὴ ἡ $M_1HM=1^D$. Ἡ διαίρεσις (Μ, Η, Α, Β) εἶναι ἁρμονικὴ ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ Η, ἑπομένως ἡ περιφέρεια ($c_1$) τέμνει ὀρθογωνίως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν (O) καὶ τὸ $M_1$ εἶναι ὡς ἐκ τούτου συζυγὲς τοῦ M ὡς πρὸς τὴν (O). Ἰσχύει λοιπὸν τὸ

**(Θ) — Δοθέντος κύκλου (O, R) καὶ σημείου M (διαφόρου τοῦ O), τὸ σύνολον τῶν συζυγῶν τοῦ M σημείων ὡς πρὸς τὸν κύκλον εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν OM εἰς σημεῖον H αὐτῆς τοιοῦτον, ὥστε :**

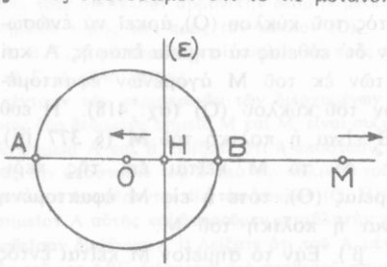
$$\overline{OH} \cdot \overline{OM} = R^2.$$

**Ὁρισμός. Ἡ ἀνωτέρω εὐθεῖα λέγεται πολικὴ τοῦ M ὡς πρὸς τὸν κύκλον (ἢ τὴν περιφέρειαν), (O, R).**

**375. Πόλος μιᾶς εὐθείας. (Θ) — Πᾶσα εὐθεῖα μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πολικὴ ἑνὸς σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ὁ «πόλος» τῆς εὐθείας.**

Πράγματι ἔστω H ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου(O, R) ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) (σχ. 416). Ἵνα, τώρα, ἓν σημεῖον M ἔχῃ πολικὴν τὴν (ε), πρέπει καὶ ἀρκεῖ (§ 374), (Θ)) νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ευθ OH καὶ νὰ πληροῖ τὴν σχέσιν : $\overline{OM} \cdot \overline{OH} = R^2$. Ἡ σχέσις αὕτη προσδιορίζει ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον M, ἐφ' ὅσον τὸ H δὲν συμπίπτει μὲ τὸ O.

**376. Θέσις τῆς πολικῆς.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ M μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς ευθ AB (σχ. 417). Τὸ σημεῖον H εἶναι τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὰ A καὶ B. Συνεπῶς :



Σχ. 417

i) Ἐὰν τὸ M *εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου*, τὸ H ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα AB καὶ *ἡ πολικὴ τέμνει τὴν περιφέρειαν.*

ii) Ἐὰν τὸ M εἶναι *ἐπὶ τῆς περιφερείας*, π.χ. εἰς τὸ B, τότε καὶ τὸ H εἶναι ἐπίσης εἰς τὸ B καὶ *ἡ πολικὴ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου εἰς B.*

iii) Ἐὰν τὸ M *εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου*, τὸ H εἶναι εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος AB καὶ *ἡ πολικὴ εἶναι ἐξωτερικὴ εὐθεῖα τοῦ κύκλου.*

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις τὰ H καὶ M εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου.

Ἐὰν τὸ M τείνῃ πρὸς τὸ O, τὸ H ἀπομακρύνεται τοῦ O ἀπεριορίστως. Ἐὰν τὸ M ἀπομακρύνεται τοῦ O ἀπεριορίστως, τὸ H τείνει πρὸς τὸ O καὶ ἡ πολικὴ τείνει νὰ γίνῃ διάμετρος τοῦ κύκλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**377. Θεμελιώδης ἰδιότης : πολικὴ ἀντιστοιχία.** α') (Θ) — **Ἐὰν ἡ πολικὴ ἑνὸς σημείου Μ ὡς πρὸς ἕνα κύκλον διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Μ΄, τότε καὶ ἡ πολικὴ τοῦ Μ΄ διέρχεται διὰ τοῦ Μ.**

Διότι, ἐὰν ἡ πολικὴ τοῦ Μ διέρχεται διὰ τοῦ Μ΄, τότε τὸ Μ΄ εἶναι συζυγὲς τοῦ Μ ὡς πρὸς κύκλον. Ἑπομένως καὶ τὸ Μ εἶναι συζυγὲς τοῦ Μ΄ ὡς πρὸς κύκλον (§ 373). Ἄρα ἡ πολικὴ τοῦ Μ΄ διέρχεται διὰ τοῦ Μ.

**β') Συνέπειαι.** i) **Ἐὰν σημεῖον κεῖται ἐπὶ εὐθείας (ε), τότε ἡ πολική του διέρχεται διὰ τοῦ πόλου τῆς (ε).**

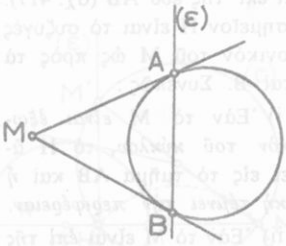
ii) **Ἐὰν εὐθεῖα διέρχεται διὰ σημείου Α, ὁ πόλος αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ Α.**

iii) **Ἡ πολικὴ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου εἶναι ἡ εὐθεῖα τῶν ἐπαφῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον.**

Διότι, ἂν Α καὶ Β εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐκ τοῦ Μ ἀγομένων πρὸς τὸν κύκλον ἐφαπτομένων, ἡ πολικὴ τοῦ Α εἶναι ἡ ἐφαπτομένη ΑΜ καὶ ἡ τοῦ Β ἡ ἐφαπτομένη ΒΜ. Ἐπειδὴ τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, αἱ πολικαί των διέρχονται διὰ τοῦ πόλου τῆς ευθ ΑΒ, ἤτοι ἡ τομὴ τῶν πολικῶν ΑΜ καὶ ΒΜ τῶν Α καὶ Β εἶναι ὁ πόλος τῆς ευθ ΑΒ.

**γ') Ὁρισμός.** Δύο εὐθεῖαι λέγονται *συζυγεῖς* (ὡς πρὸς κύκλον), ὅταν ἑκάστη διέρχεται διὰ τοῦ πόλου τῆς ἄλλης.

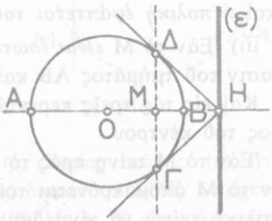
**378. Κατασκευὴ τῆς πολικῆς.** α') Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (Ο), ἀρκεῖ νὰ ἑνώσωμεν δι' εὐθείας τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Α καὶ Β τῶν ἐκ τοῦ Μ ἀγομένων ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (Ο) (σχ. 418). Ἡ ευθ ΑΒ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Μ (§ 377 iii). Ἂν τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο), τότε ἡ εἰς Μ ἐφαπτομένη εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Μ.



Σχ. 418

β') Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου (Ο), ἡ κάθετος εἰς Μ ἐπὶ τὴν ΟΜ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς Γ καὶ Δ (σχ. 419). Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ Γ καὶ Δ τέμνονται εἰς σημεῖον Η ἐπὶ τῆς ευθ ΟΜ. Ἡ ευθ ΓΔ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Η καὶ ἐπειδὴ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ, πολικῆς τοῦ Η, ἡ πολικὴ τοῦ Μ διέρχεται διὰ τοῦ Η.

Ἡ πολικὴ λοιπὸν τοῦ Μ εἶναι ἡ εἰς Η κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΗ.



Σχ. 419

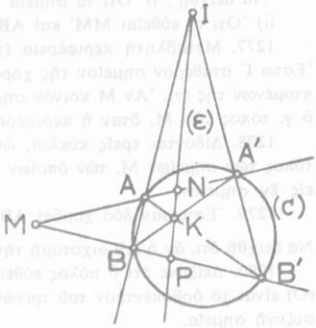
γ') **Γενικὴ κατασκευὴ** (σχ. 420).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Φέρομεν ἐκ τοῦ Μ δύο τεμνούσας ΜΑΑ′ καὶ ΜΒΒ′.

Ἡ πολικὴ (ε) τοῦ Μ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Ν καὶ Ρ τοιούτων, ὥστε: (Μ, Ν, Α, Α′) = −1 καὶ (Μ, Ρ, Β, Β′) = = −1.

Ἑπομένως ἡ (ε) εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ Α′Β′ καὶ κατασκευάζεται εὐκόλως μόνον διὰ τοῦ κανόνος: συνδέει τὰ σημεῖα Κ (τομὴν τῶν ΑΒ′, Α′Β) καὶ Ι (τομὴν τῶν ΑΒ, Α′Β′, § 371).



Σχ. 420

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1267. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ ≠ ΑΓ, Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καὶ Η τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ευθ ΕΖ μετὰ τῆς ευθ ΒΓ. Δείξατε ὅτι ἡ ευθ ΑΔ εἶναι ἡ πολικὴ

i) τοῦ Η ὡς πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον,

ii) τοῦ Η ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ.

1268. Ἔστω (Ο) σταθερὰ περιφέρεια, Α σταθερὸν σημεῖον εἰς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτῆς, ΑΜΝ μεταβλητὴ τέμνουσα τῆς (Ο). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς Τ τῶν εἰς Μ καὶ Ν ἀγομένων ἐφαπτομένων τῆς (Ο).

1269. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι συζυγεῖς ὡς πρὸς κύκλον (Ο) (§ 377, γ′) καὶ τέμνωνται εἰς σημεῖον εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου, τότε ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν δέσμην μετὰ τῶν ἐφαπτομένων, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου τομῆς των πρὸς τὸν κύκλον (Ο).

1270. Δοθέντων τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ, νὰ εὑρεθοῦν οἱ κύκλοι, ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους καὶ τὰ Α, Β εἶναι συζυγῆ καὶ τὰ Γ, Δ εἶναι ἐπίσης.

1271. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων διὰ σταθεροῦ σημείου Α καὶ ὡς πρὸς τὰς ὁποίας δύο δεδομένα σημεῖα Μ καὶ Μ′ εἶναι συζυγῆ.

1272. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν πολικὴν τοῦ Β ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ Β ἀπὸ τὴν πολικὴν τοῦ Α, ὃν λόγον ἔχει ἡ ΟΑ πρὸς τὴν ΟΒ (οἱ πολικαὶ ἀναφέρονται εἰς τὸν κύκλον (Ο, R)).

1273. Δίδεται σταθερὰ περιφέρεια, σημεῖον Α αὐτῆς καὶ θεωροῦμεν μεταβλητὴν χορδὴν ΒΓ κινουμένην παραλλήλως πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν. i) Δείξατε ὅτι τοῦ Α μένοντος σταθεροῦ ἡ πολικὴ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τρ.ΑΒΓ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ρ. ii) Εὕρετε τὸ σύνολον τῶν Ρ, ὅταν τὸ Α διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν.

1274. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν (Ο). Ἔστω τυχὸν σημεῖον Μ τῆς (Ο). Αἱ εὐθεῖαι ΜΒ καὶ ΜΓ τέμνουν τὰς εὐθ ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς Δ καὶ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ευθ ΔΕ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ὅταν τὸ Μ μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς (Ο).

1275. Αἱ εἰς Β καὶ Γ ἐφαπτόμεναι τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας τέμνονται, ἔστω εἰς τὸ Δ. Διὰ τοῦ Δ φέρομεν παρ/λον πρὸς τὴν εἰς τὸ Α ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέρος τῆς παραλλήλου ταύτης τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Δ.

1276. Δίδονται δύο ἄνισα τμήματα ΟΑ, ΟΒ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$ καὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τοιαῦτα, ὥστε:

$$OM^2 = OM'^2 = OA \cdot OB.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Νὰ δειχθῇ : i) Ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Μ, Μ΄ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, ἔστω (γ).
ii) Ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΜ΄ καὶ ΑΒ εἶναι συζυγεῖς (βλ. § 377, γ΄) πρὸς τὴν (γ).

1277. Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) διέρχεται διὰ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β. Ἔστω Γ σταθερὸν σημεῖον τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ Δ ἡ ἀλληλοτομὴ τῶν εἰς Α καὶ Β ἐφαπτομένων τῆς (γ). Ἂν Μ κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΓΔ καὶ τῆς περιφερείας (γ), ποῖος ὁ γ. τόπος τῶν Μ, ὅταν ἡ περιφέρεια (γ) μεταβάλλεται ;

1278. Δίδονται τρεῖς κύκλοι, ὧν τὰ κέντρα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων αἱ πολικαὶ ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.

1279. Ἔστωσαν δύο χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἑνὸς κύκλου καὶ Ρ καὶ Κ τὰ μέσα αὐτῶν. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν ἡ ΑΒ διχοτομῇ τὴν γωνίαν $\widehat{\Gamma P \Delta}$, τότε ἡ ΓΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\widehat{AKB}$.

1280. Δείξατε ὅτι ὁ πόλος εὐθείας συνδεούσης δύο σημεῖα συζυγῆ ὡς πρὸς κύκλον (Ο) εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὸ κέντρον Ο καὶ τὰ δύο συζυγῆ σημεῖα.

1281. Ἐὰν Σ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο πολικῶν ἑνὸς σημείου Ρ ὡς πρὸς δύο δεδομένους κύκλους, τότε ὁ κύκλος διαμέτρου ΡΣ τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς δύο δοθέντας κύκλους.

1282. Ἔστω Σ σταθερὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς διακέντρου $K_1K_2$ δύο δεδομένων κύκλων $(K_1, R_1)$, $(K_2, R_2)$. Διὰ τοῦ Σ διέρχεται τυχοῦσα εὐθεῖα (χ), τῆς ὁποίας οἱ πόλοι ὡς πρὸς τοὺς δεδομένους κύκλους ἔστωσαν Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ευθ ΕΖ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου τῆς διακέντρου, ὅταν ἡ (χ) στρέφεται περὶ τὸ Σ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

## 379. Προσανατολισμέναι γωνίαι.

**α') Προσανατολισμένον ἐπίπεδον.** Ἐπὶ ἑκάστου ἐπιπέδου ὑπάρχουν δύο ἀντίθετοι φοραὶ περιστροφῆς. Ὅταν ἡ μία τούτων ὁρισθῇ ὡς θετικὴ καὶ ἡ ἀντίθετός της ὡς ἀρνητική, τότε τὸ ἐπίπεδον καλεῖται *«προσανατολισμένον»*. (Δηλ. προσανατολισμένον ἐπίπεδον εἶναι ἐκεῖνο, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχει ἐκλεγῆ ἡ θετικὴ καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορὰ περιστροφῆς).

**β') Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας.** Ἂς θεωρήσωμεν ἐν ἐπιπέδῳ ἓν διατεταγμένον ζεῦγος ἡμιευθειῶν (ἢ «ἀκτίνων»), $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, ὅπου ἡ $\overrightarrow{OA}$ θεωρεῖται ὡς πρώτη ἢ ἀρχικὴ καὶ ἡ $\overrightarrow{OB}$ ὡς δευτέρα ἢ τελική. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ ἡμιευθεῖα $\overrightarrow{OA}$ νοηθῇ στρεφομένη περὶ τὸ O κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, μέχρις ὅτου συμπέσῃ διὰ νυοστὴν φοράν, μὲ τὴν τελικὴν $\overrightarrow{OB}$, τὸ σύνολον τῶν ἀκτίνων, τὰς ὁποίας ἡ στρεφομένη διατρέχει, καλεῖται **διευθυνομένη** ἢ **προσανατολισμένη γωνία** ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) **μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν** $\overrightarrow{OA}$ **καὶ τελικὴν πλευρὰν** $\overrightarrow{OB}$. **Τὸ περιεχόμενον** τῆς ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκτίνων, διὰ τῶν ὁποίων διῆλθε ἡ στρεφομένη ἀρχικὴ πλευρά. Τὸ σύνολον τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας τὰς ἐντὸς τῆς γεωμετρικῆς γωνίας AOB κυρτῆς ἢ μή, λαμβανομένας ἑκάστη ν φορὰς ($\nu=1, 2, \ldots$) **καὶ** ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας τὰς ἐκτὸς τῆς AOB, λαμβανομένας ἑκάστη $\nu-1$ φοράς. Ἤτοι αἱ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀκτῖνες (ἡμιευθεῖαι) αἱ συγκροτοῦσαι τὴν διευθυνομένην γωνίαν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ἔχουν βαθμοὺς πολλαπλότητος ν καὶ ν—1.

**γ΄) Προσημασμέναι διευθυνόμεναι γωνίαι.** Ἐὰν προσανατολίσωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς διευθυνομένης γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, τότε ἡ γωνία θεωρεῖται θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον ἡ φορὰ διαγραφῆς της συμπίπτει μὲ τὴν ὁρισθεῖσαν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φορὰν (ἔχει δὲ μέτρον α θετικὸν ἀριθμόν, ἂν εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὸν ἀριθμόν, ἂν εἶναι ἀρνητική).

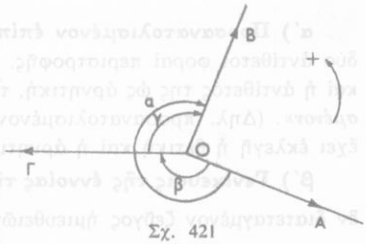
Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος ἡμιευθειῶν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ὁρίζει ἀπείρους γωνίας μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν $\overrightarrow{OA}$ καὶ τελικὴν $\overrightarrow{OB}$, διαφερούσας μεταξύ των ἀνὰ δύο κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 2π (ἢ 360°). Ἐὰν α εἶναι τὸ μέτρον μιᾶς καθωρισμένης διευθυνομένης γωνίας μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν $\overrightarrow{OA}$ καὶ τελικὴν $\overrightarrow{OB}$, τότε τὰ μέτρα τῶν ἀπείρων γωνιῶν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha + 2k\pi, \quad \text{ὅπου } k \text{ ἀκέραιος.}$$

Γράφομεν, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k\pi$ ἢ τὴν ἰσοδύναμον γραφὴν

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

**δ΄) Σχέσις τοῦ Chasles διὰ γωνίας.** Ἔστωσαν τρεῖς ἀκτῖνες $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ ἐν προσανατολισμένῳ ἐπιπέδῳ (σχ. 421). Ἂς θεωρήσωμεν τὴν διευθυνομένην γωνίαν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ μέτρου α, ἀπολύτως < 360°, τὴν περιέχουσαν ὡς ἀκτῖνα τὴν $\overrightarrow{O\Gamma}$. (Εἰς τὸ σχῆμα ἡ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ εἶναι μὴ κυρτὴ ἀρνητικὴ γωνία). Ἡ $\overrightarrow{O\Gamma}$ χωρίζει τότε τὴν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ εἰς δύο διευθυνομένας γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})$ καὶ $(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})$ ἐχούσας μέτρα β καὶ γ, ἀπολύτως μικρότερα τοῦ $|\alpha|$. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ β, γ, α εἶναι ὁμόσημοι (εἰς τὸ σχ. 421, πάντες ἀρνητικοί), βλέπομεν ὅτι :



Σχ. 421

$$\alpha = \beta + \gamma \tag{1}$$

Ἔστωσαν τώρα τρεῖς τυχοῦσαι διευθυνόμεναι γωνίαι : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})$ καὶ $(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})$. Δι' αὐτὰς θὰ ἔχωμεν βάσει τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου γ΄ :

$$\left.\begin{aligned} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= \alpha + 2k_1\pi \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) &= \beta + 2k_2\pi \\ (\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) &= \gamma + 2k_3\pi \end{aligned}\right\} \quad k_1, k_2, k_3 \text{ ἀκέραιοι} \tag{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Βάσει τῶν (2) ἡ (1) γράφεται :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})-2k_1\pi=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})-2k_2\pi+(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})-2k_3\pi \Longleftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})+(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})+2(k_1-k_2-k_3)\pi$$

καὶ ἐπειδὴ $k_1-k_2-k_3$ ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον $k$ $\Rightarrow$

(3) $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})+(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})+2k\pi \text{ ἢ}$$

(4) $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})+(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}.$$

Ἡ σχέσις (4) (ἢ (3)) εἶναι ἡ σχέσις τοῦ Chasles διὰ τρεῖς τυχούσας ἀκτῖνας τοῦ ἐπιπέδου, μὲ κοινὴν ἀρχήν.

**ε') Διευθυνομένη γωνία δύο διανυσμάτων.** Ἔστωσαν $\vec{\delta}_1$ καὶ $\vec{\delta}_2$ δύο διανύσματα ἐν προσανατολισμένῳ ἐπιπέδῳ. Καλεῖται **γωνία τοῦ διανύσματος $\vec{\delta}_1$ πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{\delta}_2$** κάθε διευθυνομένη γωνία ἔχουσα ἀρχικὴν πλευρὰν παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ $\vec{\delta}_1$ καὶ τελικὴν πλευρὰν παρ/λον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ $\vec{\delta}_2$. Ἤτοι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2)=(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\Psi}).\ \overrightarrow{OX}\uparrow\uparrow\vec{\delta}_1,\ \overrightarrow{O\Psi}\uparrow\uparrow\vec{\delta}_2.$$

Ἔστω $\vec{\delta}_3$ τρίτον διάνυσμα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Ἂν ἐκ τοῦ O ἀχθῇ ἡ $OZ\uparrow\uparrow\vec{\delta}_3$, τότε ἡ σχέσις τοῦ Chasles διὰ τὰς γωνίας :

$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\Psi})=(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ})+(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{O\Psi}) \pmod{2\pi} \Rightarrow$$

$$(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2)=(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_3)+(\vec{\delta}_3, \vec{\delta}_2) \pmod{2\pi},$$

δηλ. **σχέσιν τοῦ Chasles διὰ γωνίας διανυσμάτων.**

**ς') Πολικὴ γωνία ἑνὸς ἄξονος καὶ ἑνὸς διανύσματος.** Ἐκλέγομεν ἕνα ἄξονα x'x μὲ μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{i}$ καὶ καλοῦμεν τοῦτον **πολικὸν ἄξονα.** Καλοῦμεν τότε **πολικὴν γωνίαν ἑνὸς διανύσματος** $\vec{\delta}$ τὴν γωνίαν :

$$(\vec{i}, \vec{\delta}).$$

Ἡ πολικὴ γωνία τοῦ $\vec{\delta}$ λέγεται καὶ **«γωνία τοῦ ἄξονος x'x καὶ τοῦ διανύσματος $\vec{\delta}$»** καὶ συμβολίζεται :

$$(x'x, \vec{\delta}).$$

**ζ') Γωνία δύο ἀξόνων.** Ἔστωσαν δύο ἄξονες, $\overrightarrow{x'x}$ καὶ $\overrightarrow{y'y}$, ἐν προσανατολισμένῳ ἐπιπέδῳ. Ἔστω $\vec{i}$ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ $\overrightarrow{x'x}$ καὶ $\vec{j}$ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ $\overrightarrow{y'y}$.

**Ἐξ ὁρισμοῦ** ἡ γωνία $(\vec{i}, \vec{j})$ ἰσοῦται πρὸς τὴν γενικευμένην γωνίαν τῶν δύο ἀξόνων, τοῦ $\overrightarrow{x'x}$ πρὸς τὸν $\overrightarrow{y'y}$ :

$$(\vec{i}, \vec{j})=(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν α εἶναι ἓν ἐκ τῶν μέτρων τῆς $(\vec{i}, \vec{j})$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Ἐὰν $\overrightarrow{z'z}$ τρίτος ἄξων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, μὲ μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{k}$, ἔχομεν :

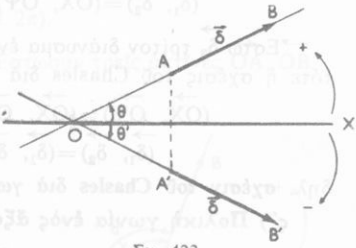
$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) + (\vec{k}, \vec{j}) \pmod{2\pi}$$

$$\Longleftrightarrow (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{z'z}) + (\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{y'y}) \pmod{2\pi}.$$

η') Τέλος ὡς **γωνία ἄξονος** x'x **καὶ ἡμιευθείας** $\overrightarrow{AB}$ νοεῖται ἡ γωνία τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\vec{i}$ τοῦ ἄξονος καὶ διανύσματος $\vec{\delta}$ ὁμορρόπου πρὸς τὴν ἡμιευθεῖαν $\overrightarrow{AB}$. (Ἤτοι $(\overrightarrow{x'x}\ \overrightarrow{AB}) \equiv (\vec{i}, \vec{\delta})$.

## 380. (Θ) Δύο ἡμιευθεῖαι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἄξονα σχηματίζουν μετὰ τοῦ ἄξονος γωνίας ἀντιθέτους (mod 2π).

Ἔστωσαν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ αἱ συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα x'x ἡμιευθεῖαι. Οἱ φορεῖς τῶν ἡμιευθειῶν τούτων τέμνονται ὡς γνωστὸν ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας ἔστω εἰς O. Ἔστω θ ἡ κυρτὴ διευθυνομένη γωνία (μέτρου ἀπολύτως < π), τὴν ὁποίαν διαγράφει ὁ θετικὸς ἡμιάξων Ox, μέχρις ὅτου συμπέσῃ μετὰ τῆς ἡμιευθείας $\overrightarrow{OB}$ τῆς ἐχούσης τὴν φορὰν τῆς $\overrightarrow{AB}$ καὶ θ' ἡ κυρτὴ διευθυνομένη γωνία $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OB'})$,



Σχ. 422

ὅπου ἡ ἡμιευθεῖα $\overrightarrow{OB'}$ ἔχει τὴν φορὰν τῆς $\overrightarrow{A'B'}$. Αἱ θ καὶ θ' εἶναι ἀπολύτως ἴσαι διότι ἡ Ox εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας B'OB· εἶναι δὲ καὶ ἀντιθέτων φορῶν, διότι αἱ τελικαὶ πλευραὶ των $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB'}$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς Ox (εἰς ἀντίθετα ἡμιεπίπεδα). Ἑπομένως

$$(1) \qquad \theta' = -\theta.$$

Διὰ **τυχούσας** διευθυνομένας γωνίας $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB})$ καὶ $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{A'B'})$ ἰσχύει:

$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{OB}) = \theta + 2k'\pi$ καὶ

$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{OB'}) = \theta' + 2k''\pi.$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (1) λαμβάνομεν :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{A'B'}) = 0 + 2(k' + k'')\pi$$

καί, ἐπειδὴ k', k'' ἀκέραιοι, θὰ εἶναι καὶ $k' + k'' = k$ ἀκέραιος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅθεν $(x'x, \overrightarrow{AB}) + (x'x, \overrightarrow{A'B'}) = 0 + 2k\pi$ ἢ ἀκόμη $(x'x, \overrightarrow{AB}) = -(x'x, \overrightarrow{A'B'}) + 2k\pi$ ἤ, ἐπειδὴ ὁ k εἶναι ἀκέραιος, γράφομεν τὴν ταυτόσημον ἰσότητα $(x'x, \overrightarrow{AB}) = -(x'x, \overrightarrow{A'B'}) \pmod{2\pi}$.

**381**. (Θ) **Ἐὰν δύο διευθυνομένων γωνιῶν αἱ ὁμώνυμοι πλευραὶ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς ἄξονα, τότε αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἀντίθετοι (mod 2π).**

Ἔστωσαν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ καὶ $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ δύο διευθυνόμεναι γωνίαι ἔχουσαι τὰς ἀρχικὰς πλευράς των $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'A'}$ συμμετρικὰς πρὸς ἕνα ἄξονα x'x καὶ τὰς τελικὰς πλευράς των $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O'B'}$ ἐπίσης συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸν x'x. Κατὰ Chasles ἰσχύει :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, x'x) + (x'x, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}, \text{ ἑπομένως}$$

$$(1) \qquad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -(x'x, \overrightarrow{OA}) + (x'x, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$$

Ὁμοίως ἰσχύει ἡ

$$(2) \qquad (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = -(x'x, \overrightarrow{O'A'}) + (x'x, \overrightarrow{O'B'}) \pmod{2\pi}$$

Βάσει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἰσχύουν :

$$(3) \qquad (x'x, \overrightarrow{OA}) + (x'x, \overrightarrow{O'A'}) = 0 \pmod{2\pi}$$

$$(4) \qquad (x'x, \overrightarrow{OB}) + (x'x, \overrightarrow{O'B'}) = 0 \pmod{2\pi}$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (3) καὶ (4) φθάνομεν εἰς τὴν σχέσιν

$$(5) \qquad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = 0 \pmod{2\pi}$$

Αὕτη γράφεται καὶ

$$(6) \qquad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) \pmod{2\pi}.$$

Ἡ (6) εἶναι ἡ ἀποδεικτέα σχέσις.

Ἐὰν αἱ συμμετρικαὶ διευθυνόμεναι γωνίαι εἶναι ἀμφότεραι κυρταὶ (μέτρων ἀπολύτως $< \pi$), τότε εἶναι ἀκριβῶς ἀντίθετοι. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα **ἀντιστρέφει τὴν φορὰν τῆς γωνίας.**

## ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

**382. Μονοσήμαντος ἀπεικόνισις συνόλου εἰς σύνολον.** — **Ἔστω ἓν σύνολον E καὶ ἕτερον σύνολον F διάφορον ἢ ταυτιζόμενον μὲ τὸ E. Εἰς κάθε στοιχεῖον $x \in E$ προσεταιρίζομεν ἓν στοιχεῖον $y \in F$. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ ὁρίζει μίαν (μονοσήμαντον) ἀπεικόνισιν f τοῦ συνόλου E εἰς τὸ σύνολον F.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ στοιχεῖον $y \in F$ καλεῖται *εἰκὼν* τοῦ $x \in E$. Ἡ ἀπεικόνισις ἡ προσεταιρίζουσα κάθε x τοῦ E μὲ ἓν y, τοῦ F παρίσταται συμβολικῶς μὲ ἓν γράμμα, f. Σημειοῦμεν :

$$f : x \in E \xrightarrow{\Theta} y \in F$$

ἤτοι, βάσει μιᾶς καθωρισμένης ἀπεικονίσεως f, τὸ x ἔχει εἰκόνα τὸ y.

Λέγεται ἀκόμη ὅτι ἡ εἰκὼν y ἔχει **ἀρχέτυπον** τὸ x.

Ἡ εἰκὼν τοῦ x, δηλ. τὸ y, παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον : f(x) (διαβάζεται : f τοῦ x), ὁπότε γράφομεν :

(1) $$y = f(x)$$

ἢ καί :

(2) $$x \xrightarrow{\Theta} f(x)$$

Τὸ βέλος $\xrightarrow{\Theta}$ διαβάζεται : **«ἔχει ὡς εἰκόνα»** ἢ **«παρέχει»** ἢ **«μετασχηματίζεται εἰς»**.

Ἐνῶ κάθε στοιχεῖον τοῦ E ἔχει μίαν εἰκόνα ἐντὸς τοῦ F, κάθε στοιχεῖον τοῦ F δὲν εἶναι ὑποχρεωτικῶς εἰκὼν ἑνὸς στοιχείου τοῦ E, ἤτοι ἐν γένει τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων δὲν καλύπτει τὸ F, ἀλλὰ μέρος αὐτοῦ. Δύναται ὅμως νὰ συμβαίνῃ ἓν οἱονδήποτε στοιχεῖον τοῦ F νὰ εἶναι εἰκὼν ἑνὸς τουλάχιστον στοιχείου τοῦ E. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ ἀπεικόνισις f εἶναι *μία ἀπεικόνισις τοῦ E* **ἐπὶ** *τοῦ F*. Τὰ ἀνωτέρω διατυποῦνται καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἂς παραστήσωμεν μὲ f(E) **τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων** τῶν στοιχείων τοῦ E. Θὰ εἶναι πάντοτε $f(E) \subseteq F$. Τότε :

I. Ἐὰν $f(E) \subset F$ (δηλ. τὸ f(E) εἶναι μέρος τοῦ F), ἡ f εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ E $\boxed{\text{εἰς}}$ τὸ F.

II. Ἐὰν $f(E) = F$, ἡ f εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ E $\boxed{\text{ἐπὶ}}$ τοῦ F. (Τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων ταυτίζεται μὲ τὸ F).

Ὅμως διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν διατυπώσεων θὰ λέγωμεν πολλάκις «ἀπεικόνισις τοῦ E εἰς τὸ F» χωρὶς μὲ τοῦτο νὰ ἀποκλείωμεν ὅτι πρόκειται περὶ ἀπεικονίσεως τοῦ E ἐπὶ τοῦ F ἢ ὅτι πρόκειται περὶ ἀπεικονίσεως **μέρους** τοῦ E εἰς τὸ F.

Τέλος ἡ «μονοσήμαντος ἀπεικόνισις» ἀναφέρεται συνήθως ὡς «ἀπεικόνισις» ἁπλῶς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : **1.** Ἂς λάβωμεν ὡς E τὸ σύνολον $A_k$ τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς F πάλιν τὸ $A_k$. Εἰς κάθε στοιχεῖον x τοῦ $A_k$, δηλ. εἰς κάθε ἀκέραιον, ἂς ἀντιστοιχίσωμεν τὸν ἀριθμὸν $x^3$, ὅστις εἶναι πάλιν στοιχεῖον τοῦ $A_k$. Οὕτω ὁρίζομεν μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ $A_k$ εἰς τὸ $A_k$ :

$$f : x \in A_k \xrightarrow{\Theta} x^3 \in A_k.$$

Κάθε $x \in A_k$ ἔχει μίαν εἰκόνα $f(x) = x^3 \in A_k$. Ἀλλὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ $A_k$ δὲν εἶναι εἰκὼν ἑνὸς ἄλλου στοιχείου τοῦ $A_k$, διότι κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀναγκαίως τέλειος κύβος. Συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις δὲν εἶναι ἀπεικόνισις τοῦ $A_k$ **ἐπὶ** τοῦ $A_k$, ἀλλὰ τοῦ $A_k$ εἰς τὸ $A_k$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐάν ὅμως ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις $x \xrightarrow{\ominus} x^3$ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν :

$$f : x \in \Pi \xrightarrow{\ominus} x^3 = f(x) \in \Pi,$$

τότε ἔχομεν ἀπεικόνισιν τοῦ Π ἐπὶ τοῦ Π. Διότι ὄχι μόνον κάθε στοιχεῖον τοῦ Π ἔχει μίαν εἰκόνα ἐπὶ τοῦ Π (δηλ. τὸν κύβον του), ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως κάθε στοιχεῖον τοῦ Π (δηλ. κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς) εἶναι κύβος κάποιου ἄλλου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου), δηλαδὴ εἶναι εἰκὼν ἑνὸς στοιχείου τοῦ Π.

Ἡ ἀνωτέρω μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἐκφράζεται συντόμως :

$$f(x) = x^3 \text{ ἢ } y = x^3.$$

2. Ἂς λάβωμεν ὡς Ε τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ὡς F πάλιν τὸ Π. Ἂς ὁρίσωμεν ὡς εἰκόνα τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x τὸν ἀριθμὸν $x^3 - 7x$, ὅστις εἶναι πάλιν πραγματικός. Οὕτω δημιουργοῦμεν μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ Π εἰς τὸ Π :

$$x \xrightarrow{\ominus} x^3 - 7x = f(x).$$

Ἂς εὕρωμεν τώρα τὰς εἰκόνας τῶν στοιχείων : $-3, 1, 2$ τοῦ Π. Ἔχομεν :

$-3 \xrightarrow{\ominus} f(-3) = (-3)^3 - 7(-3) = -6$, $1 \xrightarrow{\ominus} f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 = -6$, $2 \xrightarrow{\ominus} f(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 = -6$.

Δηλαδὴ τὰ τρία διαφορετικὰ στοιχεῖα $-3, 1, 2$ τοῦ Π ἔχουν τὴν ἰδίαν εἰκόνα : $-6$. Ὥστε ἓν στοιχεῖον τοῦ F δύναται νὰ εἶναι εἰκὼν περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς στοιχείων τοῦ Ε. (Μία εἰκὼν νὰ ἔχῃ πολλὰ «ἀρχέτυπα»).

Ἐνταῦθα ἡ μονοσήμαντος ἀπεικόνισις γράφεται συντόμως $y = x^3 - 7x$.

3. Ἂς λάβωμεν ὡς Ε τὸ $\Pi \times \Pi$ καὶ ὡς F, τὸ Π. Κάθε στοιχεῖον x τοῦ Ε εἶναι ἐνταῦθα ἓν *διατεταγμένον ζεῦγος* πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β, ἤτοι $x = (\alpha, \beta)$, ἐνῶ κάθε στοιχεῖον y τοῦ F εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.

Ἂν λάβωμεν ὡς ἀντίστοιχον τοῦ x τὸ στοιχεῖον $y = \dfrac{3\alpha + \beta}{4}$ τοῦ Π, ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ $\Pi \times \Pi$ ἐπὶ τοῦ Π :

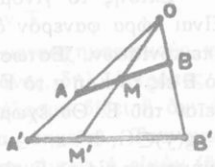
$$f : x = (\alpha, \beta) \in \Pi^2 \xrightarrow{\ominus} y = \frac{3\alpha + \beta}{4} \in \Pi.$$

Ἐνταῦθα ἡ μονοσήμαντος ἀπεικόνισις γράφεται συντόμως : $f(\alpha, \beta) = \dfrac{3\alpha + \beta}{4}$.

4. Ἂν λάβωμεν ὡς σύνολον Ε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB (σημειοσύνολον) καὶ ὡς F τὸ τμῆμα A′B′, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 423, τότε εἰς κάθε στοιχεῖον (σημεῖον) M τοῦ πρώτου δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς ἀντίστοιχον ἓν σημεῖον M′ τοῦ δευτέρου τοιοῦτον, ὥστε τὰ O, M, M′ νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Οὕτω ὁρίζεται μία ἀπεικόνισις f τοῦ AB ἐπὶ τοῦ A′B′ :

$$f : M \in AB \xrightarrow{\ominus} M' = f(M) \in A'B'$$

Ἡ εἰκὼν τοῦ M, δηλαδὴ τὸ M′, δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ f(M).



Σχ. 423

**383. Ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις. — Ἐὰν εἰς μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ Ε ἐπὶ τοῦ F, ὄχι μόνον πᾶν στοιχεῖον τοῦ Ε ἔχῃ μίαν καὶ μόνην εἰκόνα εἰς τὸ F, ἀλλὰ καὶ πᾶν στοιχεῖον τοῦ F εἶναι εἰκὼν ἑνὸς καὶ μόνου στοιχείου τοῦ Ε, τότε ἡ ἀπεικόνισις λέγεται ἀμφιμονοσήμαντος (Bijection).**



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν f(x) καὶ f(x′) εἶναι αἱ εἰκόνες τῶν x καὶ x′, τότε, ἐφ' ὅσον ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἰσχύουν :

$$f(x) = f(x') \Longleftrightarrow x = x'$$
$$f(x) \neq f(x') \Longleftrightarrow x \neq x'.$$

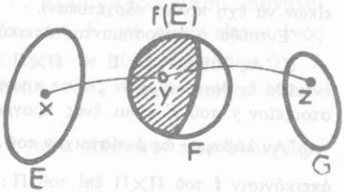
**Ἀντίστροφος ἀπεικόνισις.** Εἰς τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν $y = f(x)$ τὸ y ὡς στοιχεῖον τοῦ F θὰ εἶναι εἰκὼν ἑνὸς καὶ μόνου στοιχείου $x \in E$. Ἡ ἀπεικόνισις, καθ' ἣν τὸ x εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ y, καλεῖται **ἀντίστροφος ἀπεικόνισις** τῆς f καὶ παρίσταται μὲ $f^{-1}$. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$(1) \qquad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

**384. Σύνθεσις ἀπεικονίσεων.** — Ἂς θεωρήσωμεν τρία σύνολα E, F, G (σχ. 424). Ἔστω f μία ἀπεικόνισις τοῦ E εἰς τὸ F προσεταιρίζουσα κάθε $x \in E$ μὲ ἓν $y \in F : y = f(x)$.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ μέρος f(E) τοῦ F, τὸ ὁποῖον καλύπτουν αἱ εἰκόνες τῶν x, $(f(E) \subseteq F)$ καὶ μίαν δευτέραν ἀπεικόνισιν, τὴν g, ἡ ὁποία εἰς κάθε $y \in f(E)$ προσεταιρίζει ἕνα $z \in G$, δηλ. : $z = g(y)$.

Αἱ δύο ἀλλεπάλληλοι μεταβάσεις, ἀπὸ x εἰς y καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀπὸ y εἰς z, ἰσοδυναμοῦν μὲ μίαν μετάβασιν ἀπὸ x εἰς z.



Σχ. 424

**Ἡ ἀπεικόνισις $x \xrightarrow{\ominus} z$ ὀνομάζεται τὸ γινόμενον (ἢ ἡ σύνθετος ἀπεικόνισις) τῶν δύο ἀπεικονίσεων : $x \xrightarrow{\ominus} y$ καὶ $y \xrightarrow{\ominus} z$.**

Ἡ σύνθετος ἀπεικόνισις τῶν $y = f(x)$ καὶ $z = g(y)$ γράφεται :

$$z = g\{f(x)\}$$

Ἐπίσης τὸ γινόμενον δύο ἀπεικονίσεων f καὶ g σημειοῦται : gof. Εἶναι τώρα φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ συνθέσωμεν περισσοτέρας τῶν δύο ἀπεικονίσεων. Ἔστωσαν f, g, h τρεῖς ἀπεικονίσεις : ἡ f ἀπεικονίζουσα τὸ E εἰς τὸ F, ἡ g τὸ F εἰς τὸ G καὶ ἡ h τὸ G εἰς τὸ H. Ἔστω x τυχὸν στοιχεῖον τοῦ E. Θὰ ἔχωμεν κατὰ σειράν, $f : x \xrightarrow{\ominus} y = f(x) \in F$, $g : y \xrightarrow{\ominus} z = g(y) \in G$, $h : z \xrightarrow{\ominus} \omega = h(z) \in H$. Ἡ ἀπ' εὐθείας μετάβασις ἐκ τοῦ x ἀνήκοντος εἰς τὸ E εἰς τὸ ω ἀνῆκον εἰς τὸ H εἶναι πάλιν μία ἀπεικόνισις τοῦ E εἰς τὸ H καὶ καλεῖται «γινόμενον» τῶν τριῶν ἀπεικονίσεων f, g, h. Ἐπειδὴ $\omega = h(z) = h\{g(y)\} = h\{g\{f(x)\}$, διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον (δηλ. ἡ ἀλλεπάλληλος ἐκτέλεσις ἢ σύνθεσις) τῶν τριῶν ἀπεικονίσεων f, g, h παρίσταται μὲ : hogof.

**Ἴσαι ἀπεικονίσεις.** Ἔστω f ἀπεικόνισις τοῦ E εἰς τὸ F καὶ $f_1$ ἀπεικόνισις πάλιν τοῦ E εἰς τὸ F. Λέγομεν ὅτι $f = f_1$, ὅταν κάθε ἀπεικονιζό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μενον στοιχεῖον x τοῦ E ἔχῃ τὴν αὐτὴν πάντοτε εἰκόνα $y \in F$ καὶ κατὰ τὰς δύο ἀπεικονίσεις f καὶ $f_1$.

**Προσεταιριστικότης τοῦ γινομένου.** Αὕτη ἐκφράζεται διὰ τῶν ἰσοτήτων : $h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Τὰ τρία μέλη ἐκφράζουν τὸν ἴδιον μετασχηματισμὸν μεταφέροντα κάθε $x \in E$ εἰς τὸ αὐτὸ πάντοτε στοιχεῖον $\omega \in H$. (Βλέπε καὶ σχ. 427 τῆς § **386**).

## ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

**385. Ὁρισμοί.** — α') Καλεῖται **σημειακὸς μετασχηματισμὸς** πᾶσα ἀντιστοιχία, βάσει τῆς ὁποίας εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἓν ἄλλο σημεῖον M′ τοῦ χώρου καὶ μόνον ἕν. Ἑπομένως, ὁ σημειακὸς μετασχηματισμὸς εἶναι μία **μονοσήμαντος ἀπεικόνισις** τοῦ χώρου εἰς τὸν ἑαυτόν του (βλ. § **382**). Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ T τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην (δηλ. τὸν τρόπον δι' οὗ μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ M εἰς M′), τότε γράφομεν $M \xrightarrow{T} M'$, τὸ ὁποῖον διαβάζεται : τὸ M, μέσῳ τοῦ μετασχηματισμοῦ T, ἔχει ὡς εἰκόνα τὸ M′. Τὸ M λέγεται ἀρχέτυπον τοῦ M′ (δὲν ἀποκλείεται δὲ ἓν σημεῖον M′ νὰ ἔχῃ περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἀρχέτυπα ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, διαφορετικὰ σημεῖα νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν εἰκόνα).

—Ὁρισθέντος ἑνὸς σημειακοῦ μετασχηματισμοῦ T, τότε εἰς κάθε **σημειοσύνολον** (δηλ. σχῆμα) F τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕτερον σημειοσύνολον F′ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰς εἰκόνας M′ τῶν σημείων M καὶ F τὰς παρεχομένας διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ T. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\underset{\in F}{M} \xrightarrow{T} \underset{\in F'}{M'}$$

Τὸ σύνολον F′ τῶν εἰκόνων τῶν σημείων τοῦ F λέγεται τὸ *ὁμόλογον* πρὸς F σχῆμα· ἢ τὸ *μετεσχηματισμένον* τοῦ F σχῆμα διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ T ἢ καὶ ἡ *εἰκὼν* τοῦ F κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν T.

**β') Σημεῖα μὴ ἔχοντα εἰκόνας.** Δεχόμεθα καὶ μετασχηματισμούς, κατὰ τοὺς ὁποίους ἰδιάζοντά τινα σημεῖα δὲν ἔχουν εἰκόνας, δηλ. ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ ἀντιστοίχισις ἢ οὐδὲν ἀποτέλεσμα δίδει ἢ ὄχι ὡρισμένην εἰκόνα δι' ἓν πλῆθος σημείων (ἀνώμαλα σημεῖα). Τουναντίον, ὅταν σημείου M δύναται νὰ κατασκευασθῇ μονοσημάντως ἡ εἰκὼν (ἢ νὰ προσδιορισθῇ), τότε λέγομεν ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς T **εἶναι ὡρισμένος** διὰ τὸ σημεῖον M.

**γ') Μετασχηματισμοὶ ἰσοδύναμοι.** Δύο σημειακοὶ μετασχηματισμοὶ T καὶ T′ λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν εἰς ὁ π ο ι ο ν δ ή π ο τ ε σημεῖον M παρέχουν εἰκόνας ταυτιζομένας. Γράφομεν

$$T = T'$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**δ') Μετασχηματισμὸς ταυτοτικός.** Εἰς μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον εἰς κ ά θ ε σημεῖον Μ ἀντιστοιχεῖ αὐτὸ τοῦτο τὸ Μ, λέγεται ταυτοτικὸς καὶ παρίσταται μὲ $H^o$.

**ε') Διπλοῦν σημεῖον.** Ἐὰν κατά τινα μετασχηματισμὸν Τ ἓν σημεῖον Μ ταυτίζεται μὲ τὴν εἰκόνα του Μ', τότε λέγομεν ὅτι τὸ Μ εἶναι **διπλοῦν σημεῖον** ἢ σημεῖον **ἀναλλοίωτον** κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν Τ.

**ς') Σχῆμα ἀναλλοίωτον.** Ἓν σχῆμα F λέγεται **ἀναλλοίωτον διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ Τ,** ὅταν ἡ εἰκὼν Μ' παντὸς σημείου Μ τοῦ F εἶναι, πάλιν, σημεῖον τοῦ F. Δηλ. :

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ M & \xrightarrow{\Theta} & M' \\ \in F & & \in F \end{array}$$

Γενικῶς τὸ Μ' εἶναι διάφορον τοῦ Μ, ὁπότε τὸ σχῆμα F λέγεται **ἀναλλοίωτον ὡς ἓν ὅλον.**

Ἐὰν $\forall$ $M \in F$ τὸ Μ' ταυτίζεται μὲ τὸ Μ, τότε τὸ σχῆμα F λέγεται **ἀναλλοίωτον σημεῖον πρὸς σημεῖον.** Προφανῶς τὸ ἀναλλοίωτον σημεῖον πρὸς σημεῖον σχῆμα ἀποτελεῖται ἀπὸ διπλᾶ σημεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ.

**ζ') Ἀμφιμονοσήμαντος σημειακὸς μετασχηματισμός.** Εἰς μετασχηματισμὸς Τ εἰκονίζων ἓν σχῆμα F ἐπὶ ἄλλου σχήματος F' λέγεται ἀμφιμονοσήμαντος, ἐὰν πᾶν σημεῖον τοῦ F ἔχῃ ὡς εἰκόνα ἓν σημεῖον τοῦ F' καὶ ἐὰν πᾶν σημεῖον τοῦ F' εἶναι εἰκὼν ἑνὸς καὶ μόνου σημείου τοῦ F.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀντιστοιχεῖ εἰς πᾶν σημεῖον Μ' τοῦ F' ἓν καὶ μόνον σημεῖον Μ τοῦ F (τὸ ἀρχέτυπον τοῦ Μ'), δηλ. ὑπάρχει σημειακὸς μετασχηματισμός, μετασχηματίζων τὸ F' εἰς τὸ F. Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος, εἰς τὸν ὁποῖον αἱ εἰκόνες χρησιμεύουν ὡς ἀρχέτυπα καὶ τὰ ἀρχέτυπα ὡς εἰκόνες, καλεῖται ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ τοῦ Τ καὶ παρίσταται μὲ $T^{-1}$. Ὑπάρχει δὲ ὁ $T^{-1}$ μόνον, ὅταν ὁ Τ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Γράφομεν :

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ M & \xrightarrow{\Theta} & M' \\ \in F & \underset{T^{-1}}{\xleftarrow{\Theta}} & \in F' \end{array}$$

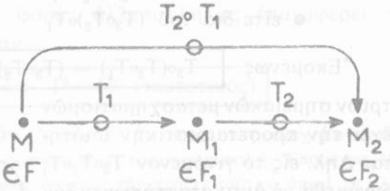
Οὐσιαστικῶς πάντες οἱ ἐν χρήσει σημειακοὶ μετασχηματισμοὶ ἐν τῇ γεωμετρίᾳ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι καὶ συνεπῶς ἔχουν ἀντίστροφον.

**386. Γινόμενον μετασχηματισμῶν. α') Γινόμενον δύο μετασχηματισμῶν.** Ἂς θεωρήσωμεν ἕνα μετασχηματισμὸν $T_1$, ὅστις μετασχηματίζει τὸ σημειοσύνολον F εἰς τὸ σημειοσύνολον $F_1$. Ἂς μετασχηματίσωμεν τώρα τὸ $F_1$ εἰς τὸ $F_2$ δι' ἑνὸς δευτέρου μετασχηματισμοῦ $T_2$.

Ἡ διαδοχικὴ αὐτὴ ἐκτέλεσις τῶν δύο μετασχηματισμῶν $T_1$, $T_2$ ἀντι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

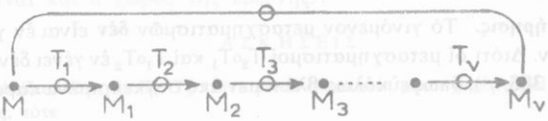
στοιχίζει κάθε σημεῖον M τοῦ F μὲ ἓν σημεῖον $M_2$ τοῦ $F_2$ καὶ ἓν μόνον. δηλ. δημιουργεῖ ἕνα νέον μετασχηματισμόν, ὅστις μετασχηματίζει τὸ F εἰς τὸ $F_2$. Ὁ μετασχηματισμὸς αὐτὸς $T, M \xrightarrow{T} M_2$, ὁ μετασχηματίζων ἀπ' εὐθείας τὸ F εἰς τὸ $F_2$ λέγεται γινόμενον τῶν $T_1$ καὶ $T_2$ καὶ παρίσταται μὲ $T_2T_1$ ἢ $T_2 \circ T_1$ (διαβάζεται, $T_2$ κύκλος, $T_1$). Γράφομεν ἐπίσης (βλ. σχ. 425): $M_1 = T_1(M)$, $M_2 = T_2(M_1) = T_2\{T_1(M)\}$. Ἡ τελευταία αὐτὴ γραφὴ δικαιολογεῖ τὴν διάταξιν $T_2 \circ T_1$, δηλ. ὅτι γράφομεν τὸ $T_2$ ἀριστερὰ καὶ τὸ $T_1$ δεξιά, ἐνῷ οἱ μετασχηματισμοὶ ἐκτελοῦνται κατὰ τὴν τάξιν $T_1$, $T_2$.




Σχ. 425

**β') Γινόμενον ὁσωνδήποτε μετασχηματισμῶν.** Ἔστωσαν ν μετασχηματισμοὶ $T_1, T_2, \ldots T_\nu$. Ἂς σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $T_2 \circ T_1$, κατόπιν τὸ γινόμενον τοῦ οὕτω προκύψαντος μετασχηματισμοῦ $T_2 \circ T_1$ καὶ τοῦ $T_3$, δηλ.

$$T = T_\nu \circ \ldots T_3 \circ T_2 \circ T_1$$




Σχ. 426

τὸ $T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$ κ.ο.κ., μέχρις ὅτου περιλάβωμεν καὶ τὸν $T_\nu$. Τότε φθάνομεν τελικῶς εἰς ἕνα μετασχηματισμὸν T, ὅστις καλεῖται **γινόμενον τῶν ν μετασχηματισμῶν** καὶ ὁ ὁποῖος παρίσταται συμβολικῶς,

$$T = T_\nu \circ T_{\nu-1} \ldots T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

**γ') Εἰδικαὶ περιπτώσεις.** i) Ἐὰν ὁ μετασχηματισμὸς T ἔχῃ ἕνα ἀντίστροφον, $T^{-1}$, τότε τὸ γινόμενον $T^{-1} \circ T$ εἶναι, προφανῶς, ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς $H^0$. Ἤτοι:

$$T^{-1} \circ T = H^0 = T \circ T^{-1}$$

ii) Ἐὰν ἐκτελεσθῇ ν ἀλλεπαλλήλους φορὰς ὁ μετασχηματισμὸς T, τότε γράφομεν:

$$T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T = T^\nu.$$

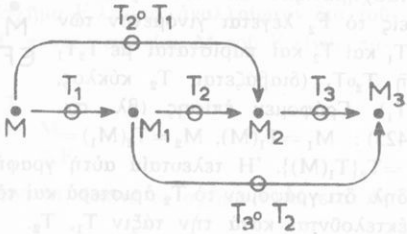
iii) Εἰς ἓν γινόμενον μετασχηματισμῶν ὁ «παράγων» $H^0$ παραλείπεται, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἀποτέλεσμα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**δ') Προσεταιριστικότης.** Ἔστωσαν τρεῖς μετασχηματισμοὶ $T_1$, $T_2$, $T_3$. Ὅπως βλέπομεν ἀπὸ τὸ σχ. 427, τὸ $M_3$ εἶναι εἰκὼν τοῦ M :

- εἴτε διὰ τοῦ $T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$
- εἴτε διὰ τοῦ $(T_3 \circ T_2) \circ T_1$

Ἑπομένως $\boxed{T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1.}$ Βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον τριῶν σημειακῶν μετασχηματισμῶν ἔχει τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα. Δηλ. εἰς τὸ γινόμενον $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ **δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο διαδοχικοὺς μετασχηματισμοὺς διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἢ ἀντιστρόφως δυνάμεθα εἰς γινόμενον δύο μετασχηματισμῶν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἕνα διὰ δύο ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον.**



Σχ. 427

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐπεκτείνεται εἰς τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μετασχηματισμῶν, ὅπως γίνεται εἰς τὰ γινόμενα τῆς ἀριθμητικῆς. Ἑπομένως ἰσχύει τὸ

**Θεώρημα. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μετασχηματισμῶν εἶναι προσεταιριστικόν.**

**Παρατήρησις.** Τὸ γινόμενον μετασχηματισμῶν **δὲν** εἶναι ἐν γένει ἀντιμεταθετικόν. Διότι οἱ μετασχηματισμοὶ $T_2 \circ T_1$ καὶ $T_1 \circ T_2$ ἐν γένει δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι (§ **385**, γ'), ὅπως εὐκόλως βλέπομεν ἀπὸ συγκεκριμένα παραδείγματα.

## 387. Ἐνελικτικὸς μετασχηματισμός.

**Εἰς μετασχηματισμὸς ἀμφιμονοσήμαντος λέγεται ἐνελικτικός, ὅταν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἀντίστροφόν του.** Ἤτοι, ὅταν **διὰ τῆς ἰδίας μεθόδου,** δι' ἧς μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ ἀρχετύπου M εἰς τὴν εἰκόνα M', μεταβαίνωμεν καὶ ἐκ τοῦ M' εἰς τὸ M.

Π.χ. ἂν T σημαίνῃ συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν (ε), τὸ $T^{-1}$ σημαίνει πάλιν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν (ε). Οἱ T καὶ $T^{-1}$ ἐκφράζουν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸν ἴδιον μετασχηματισμόν, ἄρα ὁ T εἶναι ἐνελικτικός.

Τοὐναντίον, ἂν ὁ T σημαίνῃ ἐπίπεδον στροφὴν κατὰ προσημασμένην γωνίαν θ, ὁ $T^{-1}$, ὁ ἐπαναφέρων τὴν εἰκόνα εἰς τὸ ἀρχέτυπον, σημαίνει στροφὴν κατὰ —θ, ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν εἶναι ὁ $T^{-1}$ ὁ ἴδιος (δηλ. ἰσοδύναμος) μετασχηματισμὸς μὲ τὸν T. Ἄρα ὁ T (ἡ στροφὴ) δὲν εἶναι ἐν γένει ἐνελικτικός. Τελικῶς :

(1) $$\boxed{T \text{ ἐνελικτικὸς} \Longleftrightarrow T = T^{-1}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅταν ὅμως $T = T^{-1}$, τότε $T^2 = T^{-1} \circ T = H^o$ (ταυτοτικός). Ἀντιστρόφως : $T^2 = H^o$ σημαίνει $T \circ T = H^o$, δηλ. ὁ T εἶναι συγχρόνως καὶ ἀντίστροφος τοῦ T, ἄρα T ἐνελικτικός. Ἑπομένως : ἐνελικτικὸς μετασχηματισμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις ἐκτελούμενος δύο φορὰς ἀλλεπαλλήλως ἐπαναφέρει τὸ σημεῖον εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν.

(2) $\boxed{T \text{ ἐνελικτικὸς} \Longleftrightarrow T^2 = H^o \text{ (ταυτοτικός)}}$

**388. Ὁμὰς μετασχηματισμῶν.** Ἔστω $\mathscr{E}$ ἓν σύνολον μετασχηματισμῶν. Γνωρίζομεν (§ 386, δ') ὅτι ἡ πρᾶξις o (γινόμενον) εἶναι προσεταιριστική. Ἑπομένως, **ἵνα ἓν σύνολον $\mathscr{E}$ μετασχηματισμῶν εἶναι ὁμὰς** ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν ταύτην, **ἀρκεῖ** νὰ πληροῦνται αἱ ἑξῆς τρεῖς συνθῆκαι.

**i) Τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μετασχηματισμῶν τοῦ $\mathscr{E}$ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ $\mathscr{E}$** (ἡ πρᾶξις o νὰ εἶναι ἐσωτερική).

**ii) Ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ $\mathscr{E}$** (ὕπαρξις οὐδετέρου στοιχείου).

**iii) Ἕκαστος μετασχηματισμὸς T τοῦ συνόλου $\mathscr{E}$ νὰ ἔχῃ ἀντίστροφον $T^{-1}$ ἀνήκοντα εἰς τὸ $\mathscr{E}$.** (Ὕπαρξις συμμετρικοῦ στοιχείου).

**389. Ἐπίπεδοι σημειακοὶ μετασχηματισμοί.** Εἰς τὴν ἐπίπεδον γεωμετρίαν ἐξετάζομεν, φυσικά, ἐπιπέδους σημειακοὺς μετασχηματισμούς· δι' αὐτῶν τὸ ἐπίπεδον ἀπεικονίζεται εἰς τὸν ἑαυτόν του, δηλ. ἀρχέτυπον καὶ εἰκὼν εὑρίσκονται πάντοτε ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ὁ χῶρος τῆς ἐρεύνης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1283. Δείξατε ὅτι, ἂν $T_1$, $T_2$ καὶ a εἶναι σημειακοὶ μετασχηματισμοὶ καὶ ὁ a εἶναι ἐνελικτικός, τότε

$$T_2 \circ T_1 = T_2 \circ a \circ a \circ T_1.$$

1284. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἐνελικτικῶν μετασχηματισμῶν δὲν εἶναι ἐν γένει ἐνελικτικός. Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἐνελικτικόν;

1285. Δείξατε ὅτι, ἂν ὁ μετασχηματισμὸς T εἶναι ἐνελικτικὸς καὶ ὁ a εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, τότε ὁ μετασχηματισμὸς $a^{-1} \circ T \circ a$ εἶναι ἐνελικτικός.

1286. Δοθέντων τῶν σταθερῶν σημείων A καὶ B, θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $M \xrightarrow{T} M'$, διὰ τοῦ ὁποίου εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον τομῆς M' τῶν εἰς τὰ A καὶ B ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰς εὐθείας MA, MB ἀντιστοίχως.

i) Ποία σημεῖα δὲν ἔχουν ὁμόλογον (δηλ. εἰκόνα) κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον; Ποίων αἱ εἰκόνες εἶναι ἀόριστοι;

ii) Ποία ἡ εἰκὼν (δηλ. τὸ ὁμόλογον σχῆμα) εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ A;

iii) Ποία ἡ εἰκὼν περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν A καὶ B;

iv) Ποῖον τὸ μετεσχηματισμένον σχῆμα εὐθείας (δ) καθέτου ἐπὶ τὴν AB; Δύναται ἡ (δ) νὰ εἶναι ἀναλλοίωτος κατὰ τὸν μετασχηματισμόν;

1287. Ἔστωσαν δύο σταθερὰ σημεῖα O καὶ A, (ε) καὶ (ε') αἱ εἰς O καὶ A κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθ OA καὶ (η) ἡ μεσοκάθετος τοῦ OA. Εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζομεν τὸ σημεῖον M', συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὰ A καὶ P, ὅπου P τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθ AM καὶ τῆς (ε).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

i) Ζητεῖται νὰ μελετηθῇ ὁ μετασχηματισμὸς Τ, ὁρισθεὶς ὡς ἀνωτέρω. Πᾶν σημεῖον ἔχει ὡρισμένον ὁμόλογον; Εἶναι ὁ Τ ἐνελικτικός; Ποία τὰ διπλᾶ σημεῖα;

ii) Ποῖον τὸ μετεσχηματισμένον περιφερείας (γ), διαμέτρου ΣΣ', ὅπου Σ καὶ Σ' συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Ο καὶ Α;

1288. Δοθέντων δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, θεωροῦμεν τὸν σημειακὸν μετασχηματισμὸν Μ' = Τ(Μ), διὰ τοῦ ὁποίου εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου, μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ευθ ΑΒ, ἀντιστοιχεῖ τὸ ὀρθόκεντρον Μ' τοῦ τριγώνου ΜΑΒ.

i) Εἶναι ὁ Τ ἐνελικτικός;

ii) Ποία γραμμὴ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἀναλλοίωτος σημεῖον πρὸς σημεῖον (βλ. § 385, ς') κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον;

iii) Θεωροῦμεν καὶ δεύτερον μετασχηματισμὸν $T_1$, ἀντιστοιχίζοντα εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ ΑΒ. Δείξατε ὅτι κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $T_1 \circ T$ κάθε περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Β (ἀφ' ἧς ἐξαιροῦνται τὰ Α καὶ Β) παραμένει ἀναλλοίωτος.

iv) Ποία ἡ εἰκὼν εὐθείας (ε) καθέτου ἐπὶ τὴν ευθ ΑΒ, κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $T_1 \circ T$;

v) Εἶναι τὸ γινόμενον $T_1 \circ T$ ἀντιμεταθετικόν;

vi) Εἶναι τὸ γινόμενον $T_1 \circ T$ ἐνελικτικόν;

1289. Δοθέντος ὀρθοκανονικοῦ συστήματος ἀξόνων xOy, ὀνομάζομεν Τ τὸν σημειακὸν μετασχηματισμόν, ὅστις εἰς τὸ σημεῖον Μ τὸ ἔχον συντεταγμένας x καὶ y ($xy \neq 0$) προσεταιρίζει τὸ σημεῖον Μ' μὲ συντεταγμένας $X = \frac{\alpha^2}{x}$, $\Psi = \frac{\alpha^2}{y}$, ὅπου α δεδομένον μῆκος.

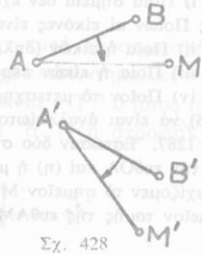
i) Δείξατε ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς Τ εἶναι ἐνελικτικὸς καὶ ἔχει τέσσαρα διπλᾶ σημεῖα.

ii) Δείξατε ὅτι ἡ καμπύλη (ρ) μὲ ἐξίσωσιν $ay = x^2$ (παραβολή) παραμένει ἀναλλοίωτος κατὰ τὸν μετασχηματισμόν.

iii) Ἔστω $T_1$ ἕτερος μετασχηματισμός, ὅστις εἰς τὸ σημεῖον Μ(x, y) προσεταιρίζει τὸ σημεῖον $M_1\left(\frac{\beta^2}{x}, \frac{\beta^2}{y}\right)$, ὅπου β δεδομένον μῆκος. Δείξατε ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς $T_1 \circ T$ μετασχηματίζει τὸ Μ εἰς σημεῖον $M_1$ κείμενον ἐπ' εὐθείας μὲ τὰ Ο καὶ Μ.

## ΟΜΟΡΡΟΠΩΣ ΙΣΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΣ ΙΣΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

**390. Ἐπίπεδοι καὶ μὴ ἐπίπεδοι μετατοπίσεις.** α') **Ὁμορρόπως ἴσα σχήματα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.** Δύο σχήματα F καὶ F' τοῦ ἐπιπέδου λέγονται **ὁμορρόπως ἴσα,** ὅταν ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσημάντως σημεῖον πρὸς σημεῖον εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ἀπόστασις δύο τυχόντων σημείων τοῦ F νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν ὁμολόγων των ἐν τῷ F' καὶ ἐὰν εἰς κάθε τριάδα σημείων Α, Β, Μ τοῦ F ἀντιστοιχῇ τριὰς σημείων Α', Β', Μ' τοῦ F' τοιαύτη, ὥστε $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) \pmod{2\pi}$.



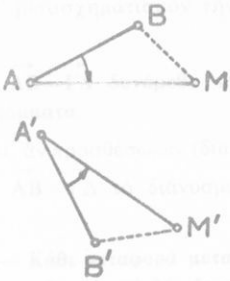
Σχ. 428

Ὁ ἀμφιμονοσήμαντος σημειακὸς μετα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σχηματισμὸς ὁ φέρων τὸ ἀνωτέρω σχῆμα F ἐπὶ τοῦ F′ λέγεται τότε **ἐπίπεδος μετατόπισις** ἢ **ἐπίπεδος κίνησις** ἢ **ὁμόρροπος ἰσότης**. Οὗτος διατηρεῖ τὰ μήκη καὶ τὰς διευθυνομένας γωνίας (mod 2π).

**β′) Ἀντιρρόπως ἴσα σχήματα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.** Δύο σχήματα F καὶ F′ τοῦ ἐπιπέδου λέγονται **ἀντιρρόπως ἴσα**, ὅταν ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσημάντως σημεῖον πρὸς σημεῖον εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ἀπόστασις δύο τυχόντων σημείων τοῦ F νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν ὁμολόγων των ἐν τῷ F′ **καὶ** ἐὰν εἰς κάθε τριάδα σημείων A, B, M τοῦ F ἀντιστοιχῇ τριὰς σημείων A′, B′, M′ τοῦ F′ τοιαύτη, ὥστε $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$ (mod 2π).



Σχ. 429

Ὁ μετασχηματισμὸς δὲ ὁ εἰκονίζων τὸ F ἐπὶ τοῦ F′ λέγεται τότε **μὴ ἐπίπεδος μετατόπισις** ἢ **μὴ ἐπίπεδος κίνησις** ἢ **ἀντίρροπος ἰσότης**. Διατηρεῖ δὲ οὗτος τὰ μήκη, ἀλλ' **ἀντιστρέφει τὰς φορὰς τῶν διευθυνομένων κυρτῶν γωνιῶν** (σχ. 429).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVIII

# Η ΕΞΑΣ ΤΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

## (Δηλαδὴ τῶν σημειακῶν μετασχηματισμῶν τῶν εἰκονιζόντων τὴν περιφέρειαν εἰς περιφέρειαν ἢ εὐθεῖαν)

### I. ΜΕΤΑΦΟΡΑ

**391**. **α') Ὁρισμὸς.— Δοθέντος ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\delta}$ καλεῖται μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ ὁ σημειακὸς μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος εἰς κάθε σημεῖον Μ προσεταιρίζει σημεῖον Μ' τοιοῦτον, ὥστε :**

(1) $\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}}$ (Διανυσματικὴ ἰσότης).

Θὰ παριστῶμεν μὲ Μετ($\vec{\delta}$) τὸν μετασχηματισμὸν αὐτόν.

**β') Διπλᾶ σημεῖα.—Ἀναλλοίωτοι.**—Ἡ σχέσις $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$ δεικνύει ὅτι οὐδὲν διπλοῦν σημεῖον ὑπάρχει, ἐφ' ὅσον $\vec{\delta} \neq \vec{0}$. Ἐὰν τὸ διάνυσμα $\vec{\delta}$ εἶναι μηδενικόν, τότε τὰ Μ καὶ Μ' συμπίπτουν καὶ ὁ μετασχηματισμὸς καθίσταται ταυτοτικός.

Ἀναλλοίωτοι ὡς ἓν ὅλον γραμμαὶ ὅμως ὑπάρχουν κατὰ τὴν Μετ($\vec{\delta}$) : Πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ // $\vec{\delta}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ') **Ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς.** Ἡ ἰσοδυναμία: $\overrightarrow{MM}=\vec{\delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{M'M}=-\vec{\delta}$ δεικνύει ὅτι ἡ Μετ($\vec{\delta}$) ἔχει ἀντίστροφον μετασχηματισμὸν τὴν Μετ ($-\vec{\delta}$).

δ') **Λῆμμα.— Εἰς τὴν διανυσματικὴν ἰσότητα $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὰ ἄκραῖα γράμματα ἢ τὰ μεσαῖα γράμματα.**

Δηλ. : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma A}$. Τοῦτο προκύπτει, ἂν προσθέσωμεν (διανυσματικῶς) εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta A}$. Ὁμοίως ἰσχύει : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$.

ε') **Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς μεταφορᾶς.— Κάθε μεταφορὰ μετασχηματίζει δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Μ εἰς δύο σημεῖα Α΄ καὶ Μ΄ ἀντιστοίχως τοιαῦτα, ὥστε $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{AM}$. Ἀντιστρόφως, ἐὰν εἰς ἕνα σημειακὸν μετασχηματισμὸν δύο σημεῖα : Α σταθερὸν καὶ Μ τυχὸν ἔχουν εἰκόνας τὰ Α΄ καὶ Μ΄ τοιαύτας, ὥστε : $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{AM}$, τότε ὁ μετασχηματισμὸς εἶναι μεταφορὰ κατὰ $\overrightarrow{AA'}$.**

*Ἀπόδειξις.* i) Κατὰ τὴν Μετ($\vec{\delta}$) θὰ εἶναι $\overrightarrow{AA'}=\vec{\delta}$ καὶ $\overrightarrow{MM'}=\vec{\delta}$, ὅπου Α΄ καὶ Μ΄ αἱ εἰκόνες τῶν Α καὶ Μ. Ἑπομένως $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$ καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ προηγουμένου λήμματος : $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{AM}$.

ii) Ἔστω μετασχηματισμὸς Τ εἰκονίζων τὸ σταθερὸν σημεῖον Α εἰς τὸ σταθερὸν Α΄ καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ εἰς τὸ Μ΄ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε : $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{AM}$. Τότε κατὰ τὸ λῆμμα θὰ εἶναι ἐπίσης $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι Τ=Μετ($\overrightarrow{AA'}$).

ς') Εἶναι φανερὸν ὅτι **διὰ τῆς μεταφορᾶς εὐθείας κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει εὐθεῖα παράλληλος καὶ διὰ μεταφορᾶς ἡμιευθείας προκύπτει ἡμιευθεῖα ὁμόρροπος πρὸς τὴν ἀρχικήν.**

ζ') Ἔστω περιφέρεια (Κ, R) καὶ διάνυσμα $\vec{\delta}$. Διὰ τῆς Μετ($\vec{\delta}$) τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς (Κ, R) ἔρχεται εἰς Μ΄ καὶ τὸ κέντρον Κ εἰς Κ΄. Θὰ εἶναι δὲ $\overrightarrow{K'M'}=\overrightarrow{KM} \Rightarrow K'M'=R$, δηλ. τὸ Μ΄ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν (Κ΄, R). Ἀντιστρόφως, ἂν Ρ΄ τυχὸν σημεῖον τῆς (Κ΄, R) καὶ φέρωμεν ἀκτῖνα ΚΡ τῆς (Κ, R) ὁμόρροπον πρὸς τὴν $\overrightarrow{K'P'}$, θὰ εἶναι $\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{K'P'}$ καὶ συνεπῶς $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{KK'}=\vec{\delta}$. Ἤτοι καὶ πᾶν σημεῖον τῆς (Κ΄, R) εἶναι τὸ ὁμόλογον ἑνὸς σημείου τῆς (Κ, R) κατὰ τὴν Μετ($\vec{\delta}$). Ὅθεν : **τὸ μετεσχηματισμένον περιφερείας διὰ μεταφορᾶς εἶναι περιφέρεια ἴση ἔχουσα κέντρον τὸ ὁμόλογον τοῦ κέντρου.**

η') **Ἡ μεταφορὰ εἶναι ἐπίπεδος μετατόπισις.** Διότι, ἂν Α καὶ Β δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τυχόντα σημεῖα σχήματος F καὶ A′, B′ τὰ ὁμόλογά των κατὰ τὴν Μετ($\vec{\delta}$). Θὰ εἶναι $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow A'B' = AB$. Ἂν M τρίτον σημεῖον τοῦ F καὶ M′ τὸ ὁμόλογόν του, τότε ἰσχύουν (ἐδαφ. ε′) : $\{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}\} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) \pmod{2\pi}$ (διευθυνόμεναι γωνίαι μὲ τὰς ὁμωνύμους πλευράς των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους). Ὥστε κατὰ τὴν μεταφορὰν διατηροῦνται τὰ μήκη καὶ αἱ γωνίαι (mod 2π)· ἑπομένως ἡ μεταφορὰ εἶναι ἐπίπεδος μετατόπισις (§ **390**).

θ′) (Θ) — **Τὸ σύνολον τῶν μεταφορῶν ἐν ἐπιπέδῳ ἔχει τὴν δομὴν ὁμάδος** (ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν «γινόμενον»).

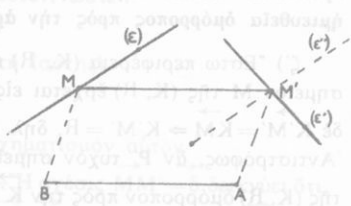
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{E}$ τῶν μεταφορῶν πληροῦνται αἱ τρεῖς συνθῆκαι τῆς § **388**. Πράγματι : i) **Τὸ γινόμενον δύο μεταφορῶν κατὰ διανύσματα $\vec{\delta}_1$ καὶ $\vec{\delta}_2$ εἶναι πάλιν μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2$.** Διότι ἡ Μετ($\vec{\delta}_1$) μεταφέρει τὸ τυχὸν σημεῖον M εἰς M′ τοιοῦτον, ὥστε $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ Μετ($\vec{\delta}_2$) μεταφέρει τὸ M′ εἰς M″ τοιοῦτον, ὥστε $\overrightarrow{M'M''} = \vec{\delta}_2$. Συνεπῶς τὸ γινόμενον Μετ($\vec{\delta}_2$)οΜετ($\vec{\delta}_1$) μεταφέρει τὸ M εἰς M″, ὅπου : $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2$. Δηλ. Μετ($\vec{\delta}_2$)οΜετ($\vec{\delta}_1$) = Μετ($\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2$). Ὥστε ἡ πρᾶξις **ο** (γινόμενον) εἶναι **ἐσωτερική**, δηλ. δίδει ἀποτέλεσμα ἀνῆκον εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{E}$.

ii) **Ὕπαρξις οὐδετέρου στοιχείου :** Ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{E}$ τῶν μεταφορῶν, διότι ἡ Μετ($\vec{0}$) εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμός.

iii) **Ὕπαρξις συμμετρικοῦ στοιχείου.** Κάθε Μετ($\vec{\delta}$) ἔχει ὡς ἀντίστροφον μετασχηματισμὸν πάλιν μεταφοράν, τὴν Μετ($-\vec{\delta}$), δηλ. : Μετ($\vec{\delta}$)οΜετ($-\vec{\delta}$) = $H^0$ (ταυτοτικὸς μετασχηματισμός.) Ὥστε εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ $\mathscr{E}$ ἀντιστοιχεῖ ἕτερον στοιχεῖον τοῦ $\mathscr{E}$ ἔχον μετὰ τοῦ δοθέντος γινόμενον τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον $H^0$ τοῦ συνόλου $\mathscr{E}$ (Δηλ. κάθε στοιχεῖον ἔχει ἓν συμμετρικόν). Ἑπομένως τὸ σύνολον $\mathscr{E}$ τῶν μεταφορῶν ἔχει δομὴν ὁμάδος ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν «γινόμενον» καὶ μάλιστα ἀβελιανῆς, διότι ἡ πρᾶξις ο («κύκλος» ἢ «γινόμενον») εἶναι ἀντιμεταθετική.

Πράγματι : $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 = \vec{\delta}_2 + \vec{\delta}_1 \Rightarrow$ Μετ($\vec{\delta}_2$)οΜετ($\vec{\delta}_1$) = Μετ($\vec{\delta}_1$)οΜετ($\vec{\delta}_2$).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: **(Κατασκευὴ διὰ τομῆς δύο γραμμῶν, ἐξ ὧν ἡ μία λαμβάνεται διὰ μεταφορᾶς). Ἔστωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε′) καὶ ἓν τμῆμα AB. Νὰ εὑρεθῇ ἓν σημεῖον M ἐπὶ τῆς (ε) καὶ ἓν σημεῖον M′ ἐπὶ τῆς (ε′) τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράπλευρον ABMM′ νὰ εἶναι παρ)μον** (σχ. 430).



Σχ. 430

*Λύσις.* Εἰς τὸ παρ/μον ABMM′ δέον νὰ εἶναι :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BA},$$

δηλ. τὸ M′ προκύπτει ἐκ τοῦ M διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ καί, ἐπειδὴ τὸ M ἀνήκει εἰς τὴν (ε), τὸ M′ ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν (ε″) προκύπτουσαν ἐκ τῆς (ε) διὰ Μετ($\overrightarrow{BA}$). Τὸ M′ προσδιορίζεται ὡς τομὴ τῶν (ε″) καὶ (ε′), τὸ δὲ M ὁρίζεται ἐκ τῆς: $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{AB}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1290. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ δοθείσης περιφερείας.

1291. Νὰ γραφῇ τμῆμα παρ/λον καὶ ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

1292. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, οὗτινος δίδονται τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς τὴν τετάρτην πλευράν.

1293. Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν καὶ εὐθείας (ε) ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα // (ε) καὶ ἀποκόπτουσα ἴσας χορδὰς ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας.

1294. Δίδεται περιφέρεια (γ) καὶ τμῆμα ΑΒ. Τόπος τοῦ Ρ, ὅταν τὸ τετράπλευρον ΑΒΜΡ εἶναι παρ/μον, τοῦ Μ ἀνήκοντος εἰς τὴν (γ).

1295. Περιφέρεια (γ) σταθερᾶς ἀκτῖνος, ἀλλὰ μεταβλητῆς θέσεως, διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Α. Εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς ἄγονται ἐφαπτόμεναι παράλληλοι πρὸς σταθερὰν εὐθεῖαν. Τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

1296. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἀποκόπτουσα ἀπὸ δοθείσης εὐθείας χορδὴν δοθέντος μήκους.

1297. Δίδονται δύο παρ/λοι (ε) καὶ (ε΄) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἑκατέρωθεν τῆς ταινίας τῶν δύο παρ/λων. Ἑνοῦμεν τὸ Α μὲ ἓν σημεῖον Μ τῆς (ε) καὶ τὸ Β μὲ ἓν σημεῖον Μ΄ τῆς (ε΄). i) Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ Μ καὶ Μ΄ οὕτως, ὥστε ἡ ΜΜ΄ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν, τὰ δὲ τμήματα ΑΜ καὶ ΒΜ΄ νὰ εἶναι ἴσα. ii) Τῆς ΜΜ΄ ἐχούσης δεδομένην διεύθυνσιν, νὰ κατασκευασθοῦν τὰ Μ καὶ Μ΄ οὕτως, ὥστε ΑΜ + ΜΜ΄ + Μ΄Β νὰ εἶναι minimum. (Ὑποδ. Νὰ γίνῃ μεταφορὰ τοῦ Β καὶ τῆς (ε΄) κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{M'M}$).

## ΙΙ. ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΣΤΡΟΦΗ

**392.** α΄) Ὁρισμός. — **Ἔστω Ο σημεῖον κείμενον ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου καὶ θ διευθυνομένη γωνία ὡρισμένη κατὰ προσέγγισιν 2κπ (κ ἀκέραιος). Καλεῖται στροφὴ κέντρου Ο καὶ γωνίας θ εἰς σημειακὸς μετασχηματισμὸς προσεταιρίζων εἰς οἱονδήποτε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἕτερον σημεῖον Μ΄ τοιοῦτον, ὥστε :**

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \pmod{2\pi} \text{ καὶ } OM = OM'.$$

Θὰ παριστῶμεν μὲ Στρ(Ο, θ) τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον.

β΄) **Διπλᾶ σημεῖα.** Ἐὰν τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ Ο, τότε καὶ τὸ Μ΄ κεῖται ἐπὶ τοῦ Ο. *Τὸ κέντρον Ο εἶναι διπλοῦν σημεῖον.*

—Ἐὰν τὸ Μ εἶναι διάφορον τοῦ Ο καὶ ἡ θ διάφορος τοῦ 2κπ, τότε τὸ Μ΄ δὲν συμπίπτει μὲ τὸ Μ. Ἡ στροφὴ ἔχει ἓν μόνον διπλοῦν σημεῖον εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν.

—Ἐὰν θ = 2κπ, τὰ Μ καὶ Μ΄ ταυτίζονται καὶ ἡ στροφὴ καθίσταται ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ.

γ΄) **Ἀντίστροφος μετασχηματισμός.** Ἡ Στρ(Ο),θ ἔχει ἀντίστροφον μετασχηματισμὸν τὴν Στρ(Ο, —θ). Αἱ δύο αὗται στροφαὶ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅταν καὶ μόνον ὅταν θ = πολλαπλάσιον τοῦ π. Ἑπομένως ἡ στροφὴ εἶναι ἐνελικτικὴ (§ **387**) μόνον, ὅταν θ = κπ (δηλ. ὅταν καθίσταται συμμετρία ὡς πρὸς κέντρον Ο).

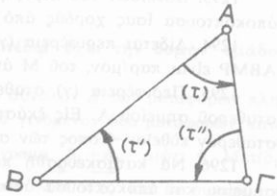
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**δ') Λῆμμα.—Εἰς μίαν ἰσότητα διευθυνομένων γωνιῶν διανυσμάτων δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὰ ἀκραῖα διανύσματα ἢ τὰ μεσαῖα διανύσματα.** Δηλ. :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{\Gamma'\Delta'}) \pmod{2\pi} \Rightarrow (\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}.$$

Τοῦτο προκύπτει, ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσοδυναμίας $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{\Gamma'\Delta'}) \pmod{2\pi}$ προσθέσωμεν τὴν γωνίαν $(\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}, \overrightarrow{AB})$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν σχέσιν τοῦ Chasles § **379**, ε').

Ὁμοίως δεικνύεται ἡ πρότασις διὰ τὰ δύο μεσαῖα διανύσματα.



Σχ. 431

**ε') Κανὼν τῶν βελῶν.** Δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἑξῆς (ἐποπτικῶς καταφανὴς) πρότασις, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν «κανόνα τῶν βελῶν» : **αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου προσανατολίζονται ὁμορρόπως διὰ κυρτῶν βελῶν, ὧν ἕκαστον λήγει εἰς τὴν πλευράν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἄρχεται τὸ ἄλλο.** Οὕτω π.χ. εἰς τὸ σχ. 431, ἂν διὰ τοῦ βέλους (τ) καθίσταται ἡ $\widehat{A}$ κυρτὴ διευθυνομένη γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$, τότε διὰ τοῦ (τ') καθίσταται ἡ $\widehat{B}$ διευθυνομένη γωνία $(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{BA})$ **ὁμόρροπος** πρὸς τὴν $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ καὶ ἡ $\widehat{\Gamma}$ προσανατολίζεται διὰ τοῦ (τ'') ὁμορρόπως πρὸς τὰς δύο ἄλλας.

**ς') Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς στροφῆς. — Κάθε στροφὴ (O, θ) μετασχηματίζει δύο τυχόντα σημεῖα A καὶ M εἰς δύο σημεῖα A' καὶ M' τοιαῦτα, ὥστε :**

$$A'M' = AM \angle (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \pmod{2\pi}$$

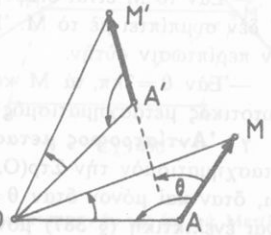
**Ἀντιστρόφως, ἂν εἷς σημειακὸς μετασχηματισμὸς προσεταιρίζῃ εἰς ἓν σταθερὸν σημεῖον A, ἓν σταθερὸν σημεῖον A' καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον M ἓν σημεῖον M' τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε**

$$A'M' = AM \angle (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \ (\neq 2k\pi),$$

**τότε ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος εἶναι στροφή, γωνίας θ.**

*Ἀπόδειξις.* i) Κατὰ τὴν Στρ(O, θ) εἶναι $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \pmod{2\pi}$ καὶ κατὰ τὸ λῆμμα τοῦ ἐδαφ. δ' θὰ εἶναι :

(1) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'})$ (σχ. 432).



Σχ. 432

Ἐπειδὴ ἀκόμη OA = OA', OM = OM', συνάγομεν ὅτι τρ.OAM = τρ.OA'M'. Ἑπομένως AM = A'M' καὶ αἱ κυρταὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διευθυνόμεναι γωνίαι $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})$ καὶ $(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{A'O})$ εἶναι κατ' **ἀπόλυτον τιμὴν ἴσαι.** Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ δύο τελευταῖαι γωνίαι εἶναι καὶ **ὁμόρροποι.** Πρὸς τοῦτο βοηθεῖ ὁ κανὼν τῶν βελῶν (ἐδαφ. ε'). Βάσει τοῦ κανόνος τούτου εἶναι :

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})$ ὁμόρροπος $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) =$ (λόγῳ τῆς (1)) $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'})$ ὁμόρροπος $(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{A'O}) \Rightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})$ ὁμόρροπος $(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{A'O})$.

Ἑπομένως εἶναι :

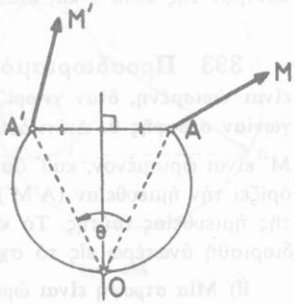
$$(2) \qquad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{AO})$$

Ἐκ τῆς (2) ἕπεται βάσει τοῦ λήμματος :

$$(3) \qquad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) \pmod{2\pi}$$

Τέλος εἶναι $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ ὡς συμμετρικαὶ ὡς πρὸς O καὶ ἑπομένως ἡ (3) δίδει : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \pmod{2\pi}$, ὅ.ἔ.δ.

ii) **Ἀντίστροφον** (σχ. 433). Ὑπάρχει στροφὴ (O, θ) φέρουσα τὸ A εἰς A'. Τὸ κέντρον O ταύτης ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AA' καὶ τοῦ μοναδικοῦ τόξου τοῦ βαίνοντος ἐπὶ τοῦ AA' καὶ ἱκανοῦ διευθυνομένης γωνίας θ (mod2π). (Ἂν θ = π, τὸ O εἶναι τὸ μέσον τοῦ AA'). Ἡ στροφὴ αὕτη φέρει τὸ $\overrightarrow{AM}$ εἰς τὸ $\overrightarrow{A'M''}$ τοιαῦτα, ὥστε (συμφώνως πρὸς τὸ εὐθὺ θεώρημα i) : $A'M'' = AM \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M''}) = \theta$. Εἶναι ὅμως καὶ $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἑπομένως $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M''}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) \wedge A'M'' = A'M'$, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ὅτι τὸ $M'' \equiv M'$. Ἑπομένως ὑπάρχει στροφὴ ἰσοδύναμος πρὸς τὸν ἐξεταζόμενον μετασχηματισμὸν T (§ **385,** γ'), διότι εἰς κάθε M παρέχει τὴν ἰδίαν εἰκόνα, ἣν παρέχει καὶ ὁ T, ὥστε T = Στρ(O, θ).



Σχ. 433

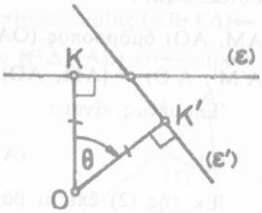
ζ') **Ἡ στροφὴ εἶναι ἐπίπεδος μετατόπισις.** Πράγματι ἂν A, B, M τρία τυχόντα σημεῖα σχήματος F καὶ A', B', M' τὰ ἀντίστοιχά των εἰς μίαν στροφὴν φέρουσαν τὸ F εἰς F', ἰσχύουν, ὡς εἴδομεν προηγουμένως : MA = M'A', MB = M'B', $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'A'}) = \theta$, $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M'B'}) = \theta$. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'A'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M'B'}) \Rightarrow$ (βλέπε λῆμμα) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{M'A'},$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\overrightarrow{M'B'}$), ἤτοι ἡ διευθυνομένη γωνία $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ ἐν τῷ F εἶναι ἴση μὲ τὴν εἰκόνα της $(\overrightarrow{M'A'}, \overrightarrow{M'B'})$ ἐν τῷ F' (βλ. § **390**, α').

**Συνέπεια :** Κάθε εὐθεῖα (ε) μετασχηματίζεται διὰ στροφῆς (O,θ) εἰς εὐθεῖαν.

η') Διὰ νὰ στρέψωμεν εὐθεῖαν (ε) **μὴ** διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου O, ἀρκεῖ νὰ στρέψωμεν τὸ ἐκ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) τμῆμα OK (σχ. 434). Διότι τὸ διὰ στροφῆς τῆς (ε) προκῦπτον σχῆμα θὰ εἶναι πάλιν εὐθεῖα (σχῆμα ἴσον), ἔστω ἡ (ε'). Ἐπειδὴ ἡ (ε) περιέχει τὸ K, ἡ (ε') θὰ περιέχῃ τὴν εἰκόνα K' τοῦ K. Τέλος, ἐπειδὴ κατὰ τὴν στροφὴν αἱ γωνίαι διατηροῦνται, διὰ τοῦτο ἡ (ε') εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν OK' εἰς τὸ K'.



Σχ. 434

θ') Ἐὰν εἰς τὸ σχ. 434 εἶναι $\theta = \pm 90^o$, τότε: $OK \perp OK' \Rightarrow (\varepsilon') \perp (\varepsilon)$.

ι') *Κάθε περιφέρεια μετασχηματίζεται διὰ τῆς στροφῆς εἰς περιφέρειαν ἴσην. Τὰ κέντρα τῶν δύο τούτων ἴσων περιφερειῶν εἶναι ὁμόλογα κατὰ τὴν στροφήν.* (Διὰ νὰ στρέψωμεν περιφέρειαν κατὰ γωνίαν θ, στρέφομεν τὸ κέντρον της κατὰ θ καὶ διατηροῦμεν τὴν ἀκτῖνα της).

**393. Προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου στροφῆς. i) Μία στροφὴ εἶναι ὡρισμένη, ὅταν γνωρίζωμεν δύο ὁμόλογα σημεῖα A καὶ A' καὶ τὴν γωνίαν στροφῆς θ.** Διότι δοθέντος τυχόντος σημείου M τὸ ὁμόλογόν του M' εἶναι ὡρισμένον, καθ' ὅσον : ἡ σχέσις $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ (βλ. § **392**, ς') ὁρίζει τὴν ἡμιευθεῖαν (A'M') καὶ ἡ σχέσις A'M' = AM ὁρίζει τὸ M' ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ταύτης. Τὸ κέντρον τῆς στροφῆς ταύτης ἔχει ἤδη προσδιορισθῆ ἀνωτέρω εἰς τὸ σχ. 433.

**ii) Μία στροφὴ εἶναι ὡρισμένη, ὅταν γνωρίζωμεν δύο ὁμόλογα δεσμευμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, ἰσομήκη καὶ ὄχι παρ)λα καὶ ὁμόρροπα.**

Διότι τότε γνωρίζομεν δύο ὁμόλογα σημεῖα A καὶ A' καὶ τὴν γωνίαν στροφῆς $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ καὶ ἑπομένως ἀναγόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν i).

Τὸ κέντρον O τῆς στροφῆς ταύτης κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AA', διότι πρέπει OA = OA' καὶ ὁμοίως ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ BB', διότι πρέπει OB = OB'. Ἑπομένως :

*Τὸ κέντρον στροφῆς εἶναι ἡ ἀλληλοτομὴ τῶν μεσοκαθέτων τῶν AA' καὶ BB'.*

**Ἐξαιρετικὴ περίπτωσις.** Αἱ δύο ἀνωτέρω μεσοκάθετοι δὲν τέμνονται,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἂν AA′//BB′ (σχ. 435). Τότε ὅμως τὸ τραπέζιον ABB′A′ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ αἱ εὐθεῖαι BA, B′A′ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον O τοιοῦτον, ὥστε :

$$OA = OA', \quad OB = OB',$$
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \theta$$

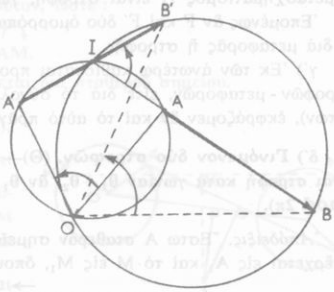
καὶ ἑπομένως ἡ στροφὴ κέντρου O καὶ γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$ φέρει τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$. *Τὸ κέντρον στροφῆς εἶναι ἀλληλοτομὴ τῶν εὐθειῶν AB, A′B′ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ* (καθ' ἣν τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς ἄξονα).

Σχ. 435

**iii)** (Θ) —**Ἔστωσαν δύο δεσμευμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ ἰσομήκη καὶ I τὸ σημεῖον τομῆς τῶν φορέων των. Τότε τὸ κέντρον στροφῆς φερούσης τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ κεῖται ἐπὶ ἑκάστης τῶν περιφερειῶν (IAA′) καὶ I BB′).**

Ἂν O τὸ κέντρον τῆς στροφῆς, τότε ὡς γνωστόν : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) =$ γωνία στροφῆς (§ **392**, στ′).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος προκύπτει βάσει τοῦ σχ. 436 ἡ ἰσότης $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB'})$, ἡ ὁποία δεικνύει ὅτι τὰ O,A′,I,A εἶναι ὁμοκυκλικά. (Μὴ ἔχοντες εἰσαγάγει τὴν ἔννοιαν τῆς διευθυνομένης γωνίας εὐθειῶν, διὰ νὰ μὴ δώσωμεν ἔκτασιν εἰς τὸ παρὸν βιβλίον (καὶ ἀφοῦ ἡ ἔννοια αὕτη δὲν ἀναφέρεται εἰς τὸ πρόγραμμα), περιοριζόμεθα εἰς ἓν εἰδικὸν σχῆμα, ὅπως τὸ σχ. 436).



Σχ. 436

Ὁμοίως : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'})$ (βάσει τοῦ σχ. 436) ⇒ O, B′, B, I ὁμοκυκλικὰ (σχ. 436). Ἐφ' ὅσον λοιπὸν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται, τὸ κέντρον στροφῆς εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν, τὸ διάφορον τοῦ I.

**394. Ἡ ὁμὰς τῶν στροφῶν-μεταφορῶν (ἢ ὁμὰς τῶν ἐπιπέδων μετατοπίσεων ἢ ὁμὰς τῶν ὁμορρόπων ἰσοτήτων).**

α′) Εἴδομεν ὅτι τόσον ἡ μεταφορά, ὅσον καὶ ἡ στροφή, εἶναι ἐπίπεδοι μετατοπίσεις, δηλ. διατηροῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων καὶ τὰς φορὰς τῶν διευθυνομένων κυρτῶν γωνιῶν. Ἰσχύει ὅμως καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑπόμενον Θεώρημα.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**β') (Θ) — Πᾶσα ἐπίπεδος μετατόπισις εἶναι στροφὴ ἢ μεταφορά.**

Ἔστω Η μία ἐπίπεδος μετατόπισις. Αὕτη μετασχηματίζει τυχὸν σχῆμα F εἰς τὸ ὁμορρόπως ἴσον του σχῆμα F' (§ **390**).

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σταθερὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου καὶ Α', Β' τὰ ὁμόλογά των κατὰ τὴν μετατόπισιν Η.

Τέλος ἔστω τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ Μ' τὸ ἀντίστοιχόν του κατὰ τὴν μετατόπισιν Η. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις Η διατηρεῖ τὰ μήκη τῶν τμημάτων καὶ τὰς φορὰς τῶν γωνιῶν, διὰ τοῦτο θὰ εἶναι :

(1) $$AB = A'B', \quad AM = A'M', \quad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}).$$

I. Ἐὰν εἶναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, τότε ἐκ τῶν (1) ἕπεται :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$. Τοῦτο ὅμως εἶναι χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς μεταφορᾶς (§ **391**, ε') καὶ ἡ κίνησις Η εἶναι μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$.

II. Ἐὰν εἶναι $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, τότε αἱ (1), βάσει τοῦ λήμματος τῆς § **392**, δ', δίδουν :

(2) $$A'M' = AM \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta.$$

Αἱ (2), λόγῳ τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῆς στροφῆς (§ **392**, στ'), δηλοῦν ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς Η εἶναι στροφή, γωνίας $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Ἑπομένως ἂν F καὶ F' δύο ὁμορρόπως ἴσα σχήματα (§ **390**), τὸ F' προκύπτει ἐκ τοῦ F διὰ μεταφορᾶς ἢ στροφῆς.

γ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι, εἴτε ὁμιλοῦμεν διὰ τὸ σύνολον τῶν στροφῶν - μεταφορῶν, εἴτε διὰ τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων κινήσεων (ἢ ὁμορρόπων ἰσοτήτων), ἐκφράζομεν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα.

**δ') Γινόμενον δύο στροφῶν. (Θ)— Τὸ γινόμενον δύο στροφῶν $(O_1, \theta_1)$, $(O_2, \theta_2)$ εἶναι στροφὴ κατὰ γωνίαν $\theta_1 + \theta_2$, ἂν $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$ ἢ μεταφορά, ἂν $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Α σταθερὸν σημεῖον καὶ Μ τυχόν. Τότε διὰ τῆς Στρ$(O_1, \theta_1)$ τὸ Α ἔρχεται εἰς $A_1$ καὶ τὸ Μ εἰς $M_1$, ὅπου :

(1) $$A_1M_1 = AM \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) = \theta_1 \quad (\S\ 392,\ \zeta')$$

Διὰ τῆς Στρ$(O_2, \theta_2)$ τὸ $A_1$ ἔρχεται εἰς $A_2$ καὶ τὸ $M_1$ εἰς $M_2$, ὅπου :

(2) $$A_2M_2 = A_1M_1 \wedge (\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A_2M_2}) = \theta_2.$$

Ἐπειδὴ (θεώρ. Chasles) :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) + (\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A_2M_2}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_2M_2}) \pmod{2\pi},$$

ἕπεται ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ὅτι διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἐκτελέσεως τῶν δύο στροφῶν τὸ Α ἔρχεται εἰς $A_2$ καὶ τὸ Μ εἰς $M_2$ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι :

(3) $$AM = A_2M_2 \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_2M_2}) = \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}.$$

Ἐὰν $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$, αἱ (3) δεικνύουν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο στροφῶν εἶναι στροφὴ γωνίας $\theta_1 + \theta_1$ (§ **394**, ζ').

(Ἐὰν $O_1 \equiv O_2$, τὸ ἀνωτέρω συμπέρασμα, προφανῶς, ἰσχύει).

Ἐὰν $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$, αἱ (3) δίδουν : $AM = A_2M_2 \wedge \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{A_2M_2}$, ἤτοι :

(4) $$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_2M_2}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ (4), λόγῳ τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῆς μεταφορᾶς (§ **391**. ε΄), δεικνύει ὅτι τὸ Μ ἔρχεται εἰς $M_2$ διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{AA_2}$, ἤτοι τὸ γινόμενον Στρ($O_2$, $\theta_2$) ο Στρ($O_1$, $\theta_1$) εἶναι μεταφορά, ὅταν $\theta_1+\theta_2=0$ (mod 2π)

ε΄) **Τὸ γινόμενον στροφῆς καὶ μεταφορᾶς** εἶναι ἐπίπεδος μετατόπισις, διότι διατηρεῖ καὶ τὰ μήκη τῶν τμημάτων καὶ τὰς φορὰς τῶν γωνιῶν. Ἑπομένως εἶναι στροφὴ ἢ μεταφορά. Ἀλλὰ μεταφορὰ δὲν δύναται νὰ εἶναι, ἐφ' ὅσον ἡ γωνία στροφῆς θ εἶναι $\neq 0$ (mod 2π). Διότι, ἂν $\overrightarrow{AM}$ καὶ $\overrightarrow{A''M''}$ εἶναι δύο ὁμόλογα διανύσματα κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον, θὰ ἔχωμεν $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A''M''})=\theta\neq 0$ (mod 2π), ὅπερ ἀποκλείει τὴν μεταφοράν.

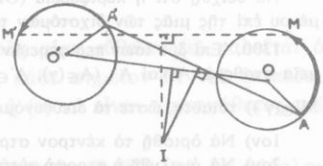
ς΄) **Τὸ σύνολον στροφῶν - μεταφορῶν.** Τὸ σύνολον τῶν δυνατῶν ἐπιπέδων στροφῶν δὲν ἀποτελεῖ ὁμάδα ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν «γινόμενον». Διότι τὸ γινόμενον δύο στροφῶν δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι στροφή, ἀλλὰ μεταφορὰ (ἐδαφ. δ΄), ὁπότε δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν στροφῶν. Ἑπομένως δὲν πληροῦται ὁ ὅρος i) τῆς § **388**. Ἡ ἕνωσις ὅμως τοῦ συνόλου τῶν στροφῶν καὶ τοῦ συνόλου τῶν μεταφορῶν ἀποτελεῖ ὁμάδα, διότι πληροῦνται οἱ τρεῖς ὅροι τῆς § **388** (ὁμὰς τῶν ἐπιπέδων μετατοπίσεων, βλ. ἐδάφ. γ΄).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΗΣ. **i) Ἔστωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο ἴσοι κύκλοι (O, R) καὶ (O΄, R) ὑποτιθέμενοι προσανατολισμένοι κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Ἔστω Α σταθερὸν σημεῖον τοῦ (O, R) καὶ Α΄ σταθερὸν σημεῖον τοῦ (O΄, R). Ἔστω Μ μεταβλητὸν σημεῖον τοῦ (O, R) καὶ Μ΄ σημεῖον τοῦ (O΄, R) τοιοῦτον, ὥστε :**

$$\overset{\frown}{A'M'}=\overset{\frown}{AM}.$$

**Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ΄ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.**

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'})\neq 0$ (mod 2π), ὑπάρχει μία στροφὴ μεταφέρουσα τὸ $\overrightarrow{OA}$ ἐπὶ τοῦ $\overrightarrow{O'A'}$. Ἡ στροφὴ αὐτὴ μεταφέρει τὸν κύκλον (O, R) ἐπὶ τοῦ (O΄, R) καὶ τὸ σημεῖον Μ εἰς ἓν σημεῖον $M_1$ τοῦ (O΄, R) τοιοῦτον, ὥστε $\overset{\frown}{A'M_1}=\overset{\frown}{AM}$. Ὅθεν τὸ σημεῖον $M_1$ ταυτίζεται μὲ τὸ Μ΄. Ἀφοῦ λοιπὸν διὰ τῆς ἐν λόγῳ στροφῆς τὸ Μ ἔρχεται εἰς Μ΄, διὰ τοῦτο ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ΄ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ι τῆς στροφῆς ταύτης. Τὸ Ι εἶναι σταθερὸν σημεῖον ὡς τομὴ τῶν μεσοκαθέτων τῶν ΟΟ΄ καὶ ΑΑ΄.



Σχ. 437

Ἐὰν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'})=0$, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{O'A'}$ εἶναι παρ/λα καὶ ὁμόρροπα καὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν μεταφορὰν κατὰ $\overrightarrow{OO'}$, ἡ ὁποία φέρει τὸ Μ εἰς Μ΄. Ἑπομένως ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ΄ ἔχει σταθερὰν διεύθυνσιν, κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΟ΄. (Διέρχεται διὰ τοῦ εἰς ἄπειρον σημείου τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΟ΄).

**ii) Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι (γ) καὶ (γ΄) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α τῆς μικροτέρας, ἔστω τῆς (γ). Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Β νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς (γ), αἱ δὲ δύο ἄλλαι κορυφαὶ Γ καὶ Δ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς (γ΄).**

*Λύσις.* Ἂς προσανατολίσωμεν τὸ ἐπίπεδον (§ **379**, α΄) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα δυνατὸν καὶ τὸ ζητούμενον τετράγωνον ΑΒΓΔ κατεσκευασμένον. Τότε θὰ εἶναι :

i) $A\Delta=AB \wedge (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})=\frac{\pi}{2}$ ἢ ii) $A\Delta=AB \wedge (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})=-\frac{\pi}{2}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰς τὴν περίπτωσιν i) τὸ Δ προκύπτει ἐκ τοῦ Β διὰ τῆς Στρ $\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$ καὶ ἐπειδὴ τὸ Β∈(γ), διὰ τοῦτο τὸ ὁμόλογόν του Δ ἀνήκει εἰς περιφέρειαν (γ″), προκύπτουσαν ἐκ τῆς (γ) διὰ τῆς Στρ $\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$. Τὸ Δ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν (γ′), ὅθεν ὁρίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν (γ′) καὶ (γ″). Τὸ Β προκύπτει ἐκ τοῦ Δ διὰ τῆς ἀντιθέτου στροφῆς $\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$, τὸ δὲ Γ ὁρίζεται ὡς τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ. Ἐπειδὴ αἱ (γ′) καὶ (γ″) ἔχουν δύο τὸ πολὺ κοινὰ σημεῖα, διὰ τοῦτο ὑπάρχουν δύο τὸ πολὺ θέσεις τοῦ Δ, αἵτινες μᾶς παρέχουν τὰς ἀντιστοίχους λύσεις.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ii) τὸ Δ προκύπτει ἐκ τοῦ Β διὰ τῆς στροφῆς $\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ καὶ ἡ λύσις ἀκολουθεῖ τὸν ἴδιον δρόμον.

Μέγιστον πλῆθος λύσεων : 4.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1298. Δίδεται περιφέρεια (O, R) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου της. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς (O, R) καὶ κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΜΜ′ ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον εἰς Α. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ′.

1299. Δύο ἄξονες xOx′ καὶ yOy′ μὲ ἰσομήκη μοναδιαῖα διανύσματα τέμνονται εἰς Ο. Ἐπ' αὐτῶν κεῖνται ἀντιστοίχως τὰ σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Α′. Θεωροῦμεν ζεῦγος μεταβλητῶν σημείων Β καὶ Β′ κειμένων ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ xOx′ καὶ τοῦ yOy′ καὶ τοιούτων, ὥστε :

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια (OBB′) διέρχεται διὰ δευτέρου σταθεροῦ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν δύο ἀξόνων.

1300. Ἐπὶ δύο ἴσων περιφερειῶν (γ) καὶ (γ′) κέντρων Ο καὶ Ο′ θεωροῦμεν δύο σημεῖα σταθερά, Α καὶ Α′ (Α∈(γ), Α′∈(γ′)) καὶ τὰ μεταβλητὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ (Μ∈(γ), Μ′∈(γ′)) τοιαῦτα, ὥστε τὰ διευθυνόμενα τόξα $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{A'M'}$ νὰ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἴσα.

1ον) Νὰ ὁρισθῇ τὸ κέντρον στροφῆς, ἡ ὁποία φέρει τὸ $\widehat{AM}$ ἐπὶ τοῦ $\widehat{A'M'}$.

2ον) Νὰ ἀναλυθῇ ἡ στροφὴ αὐτὴ εἰς μίαν μεταφορὰν καὶ εἰς μίαν στροφὴν περὶ τὸ Ο′.

3ον) Νὰ εὑρεθῇ ὡς συνέπεια ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τοῦ ΜΜ′.

1301. Δοθεισῶν δύο ἴσων περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ) καὶ δύο σημείων Α καὶ Β ἐπ' αὐτῶν, νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ΜΝ δεδομένου μήκους $l$ καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του Μ καὶ Ν ἐπὶ τῶν περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ) κατὰ τρόπον, ὥστε τὰ τόξα $\overrightarrow{\widehat{AM}}$ καὶ $\overrightarrow{\widehat{BN}}$ νὰ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.

1302. Δείξατε ὅτι πᾶσα ἐπίπεδος μετατόπισις ἔχουσα ἓν μόνον διπλοῦν σημεῖον Α εἶναι στροφὴ κέντρου Α.

1303. Ἔστω τρ.ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ διευθυνομένη γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ ἔχει τὴν θετικὴν φορὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τῶν ὁποίων τὰ περίκεντρα ἔστωσαν Ζ, Η, Θ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν στροφῶν :

$$\left(Z, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(H, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(\Theta, -\frac{2\pi}{3}\right)$$

εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμός.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1304. Τετράγωνον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον Ο εἶναι σταθερόν, μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε ὁ φορεὺς τῆς πλευρᾶς του ΑΒ νὰ ἐφάπτεται πάντοτε δεδομένης σταθερᾶς περιφερείας (Κ). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ περιβάλλουσαι τῶν λοιπῶν πλευρῶν του.

1305. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δεδομένον κέντρον Ο, ἡ ευθ ΑΒ νὰ ἐφάπτεται δεδομένου κύκλου (Κ) καὶ ἡ ευθ ΒΓ νὰ διέρχεται διὰ δεδομένου σημείου Σ. (Βλ. προηγουμένην ἄσκησιν).

1306. Εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον (δηλ. τετράγωνον ἔχον τὰς κορυφάς του ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἢ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν τοῦ παρ/μου).

1307. Δίδονται τρεῖς παρ/λοι $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3)$ καὶ ἐπὶ τῆς $(\varepsilon_1)$ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε $B\in(\varepsilon_2) \wedge \Gamma\in(\varepsilon_3)$. (**Ὑπόδ.** Τὸ Γ προκύπτει ἐκ τοῦ Β διὰ στροφῆς περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν $\pm 60^0$).

1308. Δίδεται εὐθεῖα (ε), περιφέρεια (Κ) καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε $B\in(\varepsilon) \wedge \Gamma\in(K)$.

1309. i) Δοθέντος τρ.ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τετράγωνον ΑΒΓ΄Κ πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου καὶ προεκτείνοντες τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α λαμβάνομεν τμῆμα ΑΣ=ΒΓ. Δείξατε ὅτι τὸ τρ.Γ΄ΒΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ τρ.ΒΑΣ διὰ μιᾶς μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ στροφῆς περὶ τὸ Α καὶ συναγάγετε ὅτι $B\Sigma \perp \Gamma\Gamma'$. ii) Ἐὰν κατασκευάσωμεν καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ τετράγωνον ΑΓΒ΄Λ ἔξω τοῦ τριγώνου, δείξατε ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Β ἀγομένη $\perp \Gamma\Gamma'$ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Γ ἀγομένη $\perp BB'$ τέμνονται ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τρ.ΑΒΓ (Θεώρημα τοῦ Vecten).

(**Ὑπόδ.** : i) Ἐὰν εὐθεῖα στραφῇ περὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου κατὰ $\pm 90^0$, γίνεται $\perp$ ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν θέσιν της (§ **392**, θ΄).

## III. ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΝ ΤΩ ΕΠΙΠΕΔΩ

**395. Ἀξονικὴ συμμετρία** ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν (ε) καλεῖται ὁ σημειακὸς μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος εἰς κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου προσεταιρίζει σημεῖον Μ΄ τοιοῦτον, ὥστε ἡ (ε) νὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΜΜ΄. Σύμβολον : Συμμ(ε).

Ὁ μετασχηματισμὸς αὐτὸς εἶναι **ἐνελικτικὸς** (§ **387**), τὸ δὲ σύνολον **τῶν διπλῶν σημείων** του εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε).

Ἡ ἀξονικὴ συμμετρία διατηρεῖ τὰ μήκη τῶν τμημάτων, ἀλλ' **ἀντιστρέφει τὴν φορὰν τῶν διευθυνομένων κυρτῶν γωνιῶν** (§ **381**).

Ἑπομένως: **Ἡ ἀξονικὴ συμμετρία ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εἶναι μία μὴ ἐπίπεδος μετατόπισις** (ἢ κίνησις) (§ **390**).

**Σχέσις τμήματος ΑΒ καὶ τῆς εἰκόνος του Α΄Β΄ :**

ΑΒ=Α΄Β΄ καὶ {Α, Β, Α΄, Β΄ ὁμοκυκλικὰ ἢ συνευθειακά}.

**396. Γινόμενον ἀξονικῶν συμμετριῶν.** α΄) (Θ) — **Τὸ γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μὲ ἄξονας παραλλήλους εἶναι μεταφορά.**

Ἔστωσαν (ε) καὶ $(\varepsilon_1)$ οἱ δύο παράλληλοι ἄξονες συμμετρίας. Ἡ Συμμ(ε) φέρει τὸ Μ εἰς $M_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ Συμμ$(\varepsilon_1)$ φέρει τὸ $M_1$ εἰς

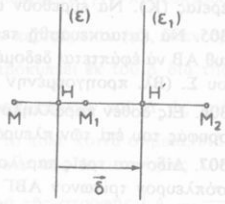
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$M_2$. Ἑπομένως τὸ γινόμενον Συμμ($\varepsilon_1$) ο Συμμ($\varepsilon$) φέρει τὸ M εἰς $M_2$, τοιοῦτον, ὥστε : (σχ. 438)

$$\overline{MM_2} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} =$$

$$2\overline{HM_1} + 2\overline{M_1H'} = 2\overline{HH'} \Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{HH'}.$$

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{HH'}$ εἶναι σταθερὸν $= \vec{\delta}$ (ἀνεξάρτητον τοῦ M) καὶ συνεπῶς τὸ M ὑφίσταται μεταφορὰν κατὰ $2\vec{\delta}$ :



Σχ. 438

$$\text{Συμμ}(\varepsilon_1) \circ \text{Συμμ}(\varepsilon) = \text{Μετ}(2\vec{\delta}).$$

**Σημειωτέον** ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο *δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικόν*.

**β') (Θ) — Πᾶσα μεταφορὰ δύναται νὰ ἀναλυθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους εἰς τὸ γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μὲ παραλλήλους ἄξονας.** Ὁ εἷς τῶν ἀξόνων δύναται νὰ ἐκλεγῇ αὐθαιρέτως μεταξὺ τῶν καθέτων πρὸς τὸ διάνυσμα μεταφορᾶς.

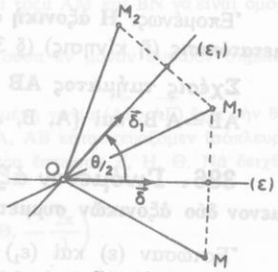
Ἔστω (ε) αὐθαίρετος εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα μεταφορᾶς $\vec{\delta}$ καὶ ἔστω ($\varepsilon_1$) ἡ εὐθεῖα ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς (ε) διὰ μεταφορᾶς κατὰ $\vec{\delta}/2$. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad \text{Συμμ}(\varepsilon_1) \circ \text{Συμμ}(\varepsilon) = \text{Μετ}\left(2\frac{\vec{\delta}}{2}\right) = \text{Μετ}\,(\vec{\delta}). \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Παρατηρητέον ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν πρῶτον τὴν ($\varepsilon_1$) μεταξὺ τῶν καθέτων ἐπὶ τὸ $\vec{\delta}$ καὶ νὰ λάβωμεν τὴν (ε) διὰ μεταφορᾶς τῆς ($\varepsilon_1$) κατὰ $-\vec{\delta}/2$, ὁπότε πάλιν ἡ (1) ἰσχύει.

**γ') Τὸ γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μὲ ἄξονας (ε) καὶ ($\varepsilon_1$) τεμνομένους εἰς O εἶναι στροφὴ κέντρου O καὶ γωνίας $2(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1)$, ὅπου $\vec{\delta}, \vec{\delta}_1$ διανύσματα ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τοὺς ἄξονας συμμετρίας (ε) καὶ ($\varepsilon_1$).**

Ἡ πρώτη συμμετρία (ὡς πρὸς (ε)) φέρει τὸ M εἰς $M_1$ καὶ ἡ δευτέρα (ὡς πρὸς ($\varepsilon_1$)) φέρει τὸ $M_1$ εἰς $M_2$ (σχ. 439). Τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων φέρει τὸ M εἰς $M_2$. Ἔχομεν $OM = OM_1 \wedge OM_1 = OM_2 \Rightarrow OM = OM_2$.



Σχ. 439

Ἔχομεν ἀποδείξει ὅτι $(\overrightarrow{OM}, \vec{\delta}) = -(\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta})$ (mod $2\pi$) $\Rightarrow$

(1) $(\overrightarrow{OM}, \vec{\delta}) = (\vec{\delta}, \overrightarrow{OM_1})$ (mod $2\pi$) (§ **380**).

Ὁμοίως: (2) $(\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta}_1) = (\vec{\delta}_1, \overrightarrow{OM_2})$ (mod $2\pi$).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Χρησιμοποιοῦντες τὸ (Θ) τοῦ Chasles καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν κατὰ σειράν :

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, \vec{\delta}) + (\vec{\delta}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta_1}) + (\vec{\delta_1}, \overrightarrow{OM_2}) \pmod{2\pi} =$
$= 2(\vec{\delta}, \overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta_1}) = 2\{(\vec{\delta}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta_1})\} \pmod{2\pi} = 2(\vec{\delta}, \vec{\delta_1})$ $\pmod{2\pi} \Rightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = 2(\vec{\delta}, \vec{\delta_1}) \pmod{2\pi}$. Αὕτη μετὰ τῆς $OM = OM_2$ δεικνύει ὅτι τὸ $M_2$ προκύπτει διὰ στροφῆς τοῦ M περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν $2(\vec{\delta}, \vec{\delta_1}) \pmod{2\pi}$. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι $\Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_1) \circ \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon) = \Sigma\tau\rho(O, 2(\vec{\delta}, \vec{\delta_1}) \pmod{2\pi}$.

**Σημειωτέον** ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι *ἀντιμεταθετικόν, μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν* $(\vec{\delta}, \vec{\delta_1}) = \pi/2 \pmod{2\pi}$.

**δ') (Θ)—Πᾶσα στροφὴ (O, θ) δύναται νὰ ἀναλυθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους εἰς γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μὲ ἄξονας διερχομένους διὰ τοῦ O καὶ φέροντας διανύσματα $\vec{\delta}$ καὶ $\vec{\delta_1}$ τοιαῦτα, ὥστε $(\vec{\delta}, \vec{\delta_1}) = \theta/2$.**

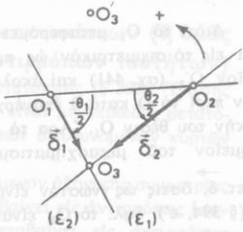
Ἔστωσαν (ε) καὶ $(\varepsilon_1)$ δύο εὐθεῖαι διὰ τοῦ O διερχόμεναι καὶ φέρουσαι τὰ διανύσματα $\vec{\delta}$ καὶ $\vec{\delta_1}$ τοιαῦτα, ὥστε $(\vec{\delta}, \vec{\delta_1}) = \theta/2$ (σχ. 439). Τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα :

$$\Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_1) \circ \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon) = \Sigma\tau\rho\left(O, 2\frac{\theta}{2}\right) = \Sigma\tau\rho(O, \theta).$$

Παρατηρητέον ὅτι, τῆς (ε) ὁρισθείσης αὐθαιρέτως καὶ τοῦ $\vec{\delta}$ ἐπ' αὐτῆς, ἡ $(\varepsilon_1)$ ὁρίζεται διὰ τοῦ διανύσματος $\vec{\delta_1}$ τοιούτου, ὥστε $(\vec{\delta}, \vec{\delta_1}) = \theta/2$.

**397. Κέντρον τοῦ γινομένου δύο στροφῶν ἢ στροφῆς καὶ μεταφορᾶς.** α') (Θ)—Τὸ γινόμενον δύο στροφῶν μὲ διαφορετικὰ κέντρα $O_1$, $O_2$ καὶ μὲ ἀντιστοίχους γωνίας $\theta_1$ καὶ $\theta_2$, ὄχι ἀντιθέτους, εἶναι στροφὴ γωνίας $\theta_1 + \theta_2$ καὶ κέντρου $O_3$ ὁριζομένου διὰ τῶν σχέσεων :

$$(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1O_3}) = -\frac{\theta_1}{2} \wedge (\overrightarrow{O_2O_1}, \overrightarrow{O_2O_3}) = +\frac{\theta_2}{2}$$



Σχ. 440

Ἂς κατασκευάσωμεν διάνυσμα $(\vec{\delta_1})$ μὲ ἀρχὴν τὸ $O_1$ τοιοῦτον, ὥστε $(\overrightarrow{O_1O_2}, \vec{\delta_1}) = -\frac{\theta_1}{2}$ καὶ διάνυσμα $\vec{\delta_2}$ μὲ ἀρχὴν τὸ $O_2$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε $(\overrightarrow{O_2O_1}, \vec{\delta_2}) = +\frac{\theta_2}{2}$. Οἱ φορεῖς $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ τῶν διανυσμάτων τούτων τέμνονται εἰς $O_3$. Κατὰ τὸ (Θ) τῆς § 396, δ', ἡ $\Sigma\tau\rho(O_1, \theta_1)$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς ἄξονας $(\varepsilon_1)$ καὶ $O_1O_2$ φέροντας διανύσματα $\vec{\delta_1}$ καὶ $\overrightarrow{O_1O_2}$ σχηματίζοντα γωνίαν $\frac{\theta_1}{2}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως καὶ ἡ Στρ(Ο, $\theta_2$) ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς ἄξονας $O_2O_1$ καὶ ($\varepsilon_2$) φέροντας διανύσματα $\overrightarrow{O_2O_1}$ καὶ $\vec{\delta}_2$ σχηματίζοντα γωνίαν $(\overrightarrow{O_2O_1}, \vec{\delta}_2) = \frac{\theta_2}{2}$.

Ἔχομεν οὕτω: Στρ($O_2$,$\theta_2$) ο Στρ($O_1$, $\theta_1$) =

$$= \text{Συμμ}(\varepsilon_2) \circ \underbrace{\text{Συμμ}(O_2O_1) \circ \text{Συμμ}(O_2O_1)}_{\text{ταυτοτικὸς μετασχηματισμός}} \circ \text{Συμμ}(\varepsilon_1) =$$

$$= \text{Συμμ}(\varepsilon_2) \circ \text{Συμμ}(\varepsilon_1) = (\text{βλ. } (\Theta) \text{ § 396, } \gamma') \text{ Στρ}(O_3, 2(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2)).$$

Ἀλλὰ $2(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 2\{(\vec{\delta}_1, \overrightarrow{O_1O_2}) + (\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_2O_1}) + (\overrightarrow{O_2O_1}, \vec{\delta}_2)\} =$

$$= 2\left\{\frac{\theta_1}{2} + \pi + \frac{\theta_2}{2}\right\} = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi = \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}.$$

Ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ἰσότης: Στρ ($O_2$, $\theta_2$) ο Στρ($O_1$, $\theta_1$) = Στρ($O_3$, $2(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2)$), γράφεται Στρ($O_2$, $\theta_2$) ο Στρ($O_1$, $\theta_1$) = Στρ($O_3$, $\theta_1 + \theta_2$). Τοῦτο ἐκφράζει τὸ ἀποδεικτέον (Θ).

**Παρατήρησις.** Τὸ γινόμενον Στρ($O_1$, $\theta_2$) ο Στρ($O_1$, $\theta_1$) *δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικόν*. Διότι, ἂν κατασκευάσωμεν τὸ κέντρον τῆς στροφῆς: Στρ($O_1$, $\theta_1$) ο Στρ ($O_2$,$\theta_2$), εὑρίσκομεν ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ $O'_3$, συμμετρικὸν τοῦ $O_3$, ὡς πρὸς τὴν εὐθ$O_1O_2$(σχ. 440).

β') Ἐὰν $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$, τότε ἡ γωνία τῶν δύο ἀνωτέρω διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ εἶναι $(\theta_1 + \theta_2)/2 = 0 \pmod{\pi}$, $\vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Rightarrow (\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$. Τὸ γινόμενον τῶν δύο στροφῶν ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν: Συμμ($\varepsilon_2$) ο Συμμ($\varepsilon_1$) (ὡς εἴδομεν), ἀλλὰ μὲ παρ/λους ἄξονας, ἑπομένως εἶναι μία μεταφορὰ (§ 396) καλῶς προσδιοριζομένη, ἂν χαράξωμεν τοὺς δύο ἀνωτέρω ἄξονας ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) μὲ τὸν ἴδιον ὡς ἄνω κανόνα.

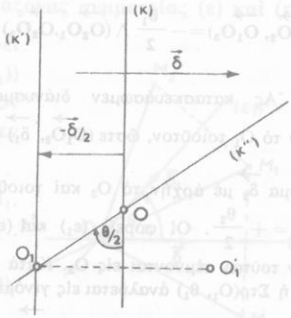
**γ') Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κέντρου στροφῆς ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ γινόμενον Στρ (Ο, θ) ο Μετ($\vec{\delta}$) φέρομεν ἐκ τοῦ Ο εὐθεῖαν (κ) $\perp \vec{\delta}$ καὶ**

**1ον) μεταφέρομεν τὴν (κ) κατὰ $-\vec{\delta}/2$,**

**2ον) στρέφομεν τὴν (κ) περὶ τὸ Ο κατὰ θ/2.**

**Τὸ κοινὸν σημεῖον $O_1$ τῶν δύο τούτων εἰκόνων τῆς (κ) εἶναι τὸ κέντρον τῆς στροφῆς τῆς ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ γινόμενον στρ(Ο, θ) ο Μετ $\vec{\delta}$.**

Διότι τὸ $O_1$ μεταφερόμενον κατὰ $\vec{\delta}$ ἔρχεται εἰς τὸ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν (κ) σημεῖον $O'_1$ (σχ. 441) καὶ ἀκολούθως στρεφόμενον περὶ τὸ Ο κατὰ θ ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν $O_1$. Ἄρα τὸ $O_1$ εἶναι διπλοῦν σημεῖον τοῦ μετασχηματισμοῦ Στρ(Ο, θ) ο Μετ $\vec{\delta}$, ὅστις ὡς γνωστὸν εἶναι στροφὴ γωνίας θ (§ 394, ε'): δηλ. τὸ $O_1$ εἶναι τὸ κέντρον τῆς στροφῆς - γινόμενον.



Σχ. 441

**Σημείωσις.** Τὸ $O'_1$ εἶναι διπλοῦν σημεῖον τοῦ μετασχηματισμοῦ Μετ $\vec{\delta}$ ο Στρ (Ο, θ). Ἄρα τὸ γινόμενον στροφῆς - μεταφορᾶς δὲν εἶναι *ἀντιμεταθετικόν*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1310. i) Τὸ γινόμενον τριῶν ἀξονικῶν συμμετριῶν δὲν εἶναι οὔτε στροφὴ οὔτε μεταφορά. ii) Ἐὰν οἱ τρεῖς ἄξονες συμμετρίας διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τότε τὸ ἀνωτέρω γινόμενον εἶναι ἀξονικὴ συμμετρία. iii) Ἐὰν οἱ δύο ἐκ τῶν τριῶν ἀξόνων τέμνωνται εἰς Ο, ἐνῷ ὁ τρίτος δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Ο, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀξονικῶν συμμετριῶν δὲν εἶναι ἀξονικὴ συμμετρία. (Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου συνάγεται ὅτι δύο ἀντιρρόπως ἴσα σχήματα δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα).

1311 Ἐὰν δύο σχήματα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα καὶ ἔχουν ἓν διπλοῦν σημεῖον, τότε εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα.

1312. Πᾶσα ἐπίπεδος μετατόπισις δύναται νὰ ἀναλυθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους εἰς γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν.

1313. Διὰ σημείου Ρ τῆς περὶ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας φέρομεν χορδὰς παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ : τὰς ΡΑ΄//ΒΓ, ΡΒ΄//ΓΑ, ΡΓ΄//ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἂν ἀντὶ παρ/λων φέρωμεν καθέτους χορδὰς ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1314. Ἔστω τρ.ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ διευθυνομένη γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ ἔχει θετικὴν φορὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Κατασκευάζομεν εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΑΟ΄Γ ἰσοσκελῆ καὶ ὀρθογώνια εἰς Ο καὶ Ο΄. Δείξατε ὅτι εἰς τὸ γινόμενον τῶν στροφῶν (Ο, π/2) καὶ (Ο΄, π/2) τὰ Β καὶ Γ εἶναι ὁμόλογα. Συναγάγετε ὅτι τὸ κέντρον τῆς στροφῆς-γινόμενον εἶναι τὸ μέσον Μ τοῦ ΒΓ. Ἀπὸ τὴν κατασκευὴν τοῦ κέντρου τῆς στροφῆς - γινόμενον συναγάγετε ὅτι τὸ τρ.ΜΟΟ΄ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον εἰς Μ.

1315. Ἐὰν τὸ σχῆμα $(\Sigma_2)$ προκύπτῃ διὰ στροφῆς τοῦ $(\Sigma_1)$ καὶ τὸ σχῆμα $(\Sigma_3)$ προκύπτῃ διὰ στροφῆς τοῦ $(\Sigma_2)$, τότε τὰ τρία σχήματα $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$ εἶναι συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ὡς πρὸς τρεῖς εὐθείας.

1316. Ἐὰν τὸ σχῆμα $(\Sigma_1)$ δίδῃ διὰ μεταφορᾶς τὸ $(\Sigma_2)$ καὶ τὸ $(\Sigma_2)$ δίδῃ διὰ στροφῆς τὸ $(\Sigma_3)$, τότε τὰ σχήματα $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$ εἶναι συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ὡς πρὸς τρεῖς εὐθείας.

1317. Δίδονται τὰ συμμετρικὰ $\Delta_1E_1$, $\Delta_2E_2$, $\Delta_3E_3$ ἑνὸς τμήματος ΔΕ ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, χωρὶς νὰ δίδεται τὸ ΔΕ. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον. (Ὑποτίθεται ὅτι τὰ δοθέντα (ἴσα) τμήματα $\Delta_1E_1$, $\Delta_2E_2$, $\Delta_3E_3$ ἔχουν τρεῖς διαφορετικὰς διευθύνσεις).

**398. Ὁμὰς τῶν ἐπιπέδων ∪ μὴ ἐπιπέδων μετατοπίσεων (ἢ ὁμὰς τῶν κινήσεων ἢ ὁμὰς τῶν ὁμορρόπων ∪ ἀντιρρόπων ἰσοτήτων)** —Ἡ ἀξονικὴ συμμετρία ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εἶναι μὴ ἐπίπεδος μετατόπισις (§ 395). Ἐπίσης τὸ γινόμενον ἀξονικῆς συμμετρίας καὶ μεταφορᾶς ἢ στροφῆς εἶναι μὴ ἐπίπεδος μετατόπισις, διότι διατηρεῖ τὰ μήκη καὶ ἀντιστρέφει τὴν φορὰν τῶν διευθυνομένων κυρτῶν γωνιῶν.

Ἀντιστρόφως, πᾶσα μὴ ἐπίπεδος μετατόπισις Τ εἶναι γινόμενον ἀξονικῆς συμμετρίας καὶ μεταφορᾶς ἢ στροφῆς. Διότι διὰ τῆς Τ πᾶν σχῆμα F μεταβαίνει εἰς ἀντιρρόπως ἴσον σχῆμα F΄. Ἀλλὰ τὸ F διὰ μιᾶς ἀξονικῆς συμμετρίας μεταβαίνει εἰς ἀντιρρόπως ἴσον σχῆμα F΄΄. Τὸ F΄΄ καὶ τὸ F΄ ὡς ἀντιρρόπως ἴσα πρὸς τὸ F εἶναι μεταξὺ των ὁμορρόπως ἴσα. Ἄρα τὸ F΄΄ μεταβαίνει εἰς τὸ F΄ διὰ μεταφορᾶς ἢ στροφῆς. Ὥστε τὸ F μεταβαίνει εἰς τὸ F΄ διὰ μιᾶς ἀξονικῆς συμμετρίας καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ μεταφορᾶς ἢ στροφῆς. Ἄρα ἡ Τ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ γινόμενον ἀξονικῆς συμμετρίας καὶ μιᾶς μεταφορᾶς ἢ στροφῆς (ἐπιπέδου κινήσεως).

Ὥστε τὸ σύνολον τῶν μὴ ἐπιπέδων μετατοπίσεων ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον τῶν ἀ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ξονικῶν συμμετριῶν ∪ σύνολον γινομένων ἀξονικῶν συμμετριῶν καὶ ἐπιπέδων μετατοπίσεων.

— Τὸ σύνολον τῶν μὴ ἐπιπέδων μετατοπίσεων δὲν ἀποτελεῖ ὁμάδα.

Διότι, π.χ. τὸ γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν (δηλ. μὴ ἐπιπέδων μετατοπίσεων) εἶναι στροφὴ ἢ μεταφορά, δηλ. ἐπίπεδος μετατόπισις, ἄρα δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν μὴ ἐπιπέδων μετατοπίσεων. Ἂν ὅμως εἰς τὸ σύνολον τῶν μὴ ἐπιπέδων μετατοπίσεων ἐπισυνάψωμεν καὶ τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων μετατοπίσεων (μεταφορῶν - στροφῶν), λαμβάνομεν ὡς ἕνωσιν σύνολον $\mathscr{E}$ μετασχηματισμῶν διατηρούντων τὰ μήκη (ἰσομετρικῶν μετασχηματισμῶν) καὶ ἀποτελούντων ὁμάδα ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν «γινόμενον», διότι πληροῦνται οἱ τρεῖς ὅροι τῆς § **388**.

## IV. ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

**399. Ὁρισμὸς καὶ ἁπλαῖ ἰδιότητες τῆς ὁμοιοθεσίας.**

**— α') Δοθέντος σταθεροῦ σημείου Ο καὶ σχετικοῦ ἀριθμοῦ $k \neq 0$ καλεῖται ὁμοιοθεσία (ἢ ὁμοθεσία) εἰς σημειακὸς μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος εἰς κάθε σημεῖον Μ προσεταιρίζει ἓν καὶ μόνον σημεῖον Μ′ τοιοῦτον, ὥστε :**

(1) $$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

**Τὸ Ο καλεῖται κέντρον καὶ ὁ k λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας.**

(Ἐκ τοῦ (1) συνεπάγεται ὅτι τὰ Ο, Μ, Μ′ εἶναι συνευθειακά).

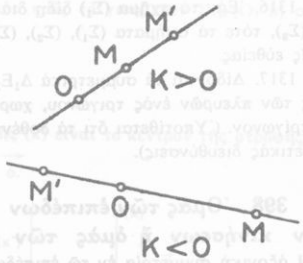
Δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν μὲ Ὁμ(Ο, k) τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον.

Ἐὰν $k > 0$, ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται *θετικὴ* καὶ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο.

Ἐὰν $k < 0$, ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται *ἀρνητικὴ* καὶ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο (σχ. 442).

Ἐὰν $k = -1$, τὰ Μ καὶ Μ′ εἶναι **συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο** καὶ ἡ ὁμοιοθεσία ἰσοδυναμεῖ μὲ συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο.

Ἐὰν $k = 1$, τὸ Μ′ ταυτίζεται πάντοτε μετὰ τοῦ Μ καὶ ὅλα τὰ σημεῖα εἶναι διπλᾶ (ταυτοτικὸς μετασχηματισμός).



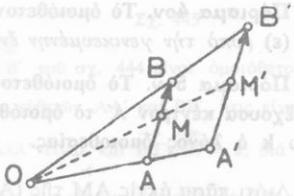
Σχ. 442

**β') Ἀναλλοίωτοι.** Ἐφ' ὅσον $k \neq 1$, τὸ κέντρον Ο εἶναι τὸ μόνον ἀναλλοίωτον (διπλοῦν) σημεῖον τοῦ μετασχηματισμοῦ καὶ προφανῶς **πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο εἶναι ἐν τῷ συνόλῳ της ἀναλλοίωτος. Τὸ ἀντίστροφον ἰσχύει· ἂν εὐθεῖα παραμένῃ ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν ($k \neq 1$), τότε διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο.** Διότι, ἂν Μ σημεῖον τῆς εὐθείας, τὸ Μ′ θὰ κεῖται πάλιν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἐφ' ὅσον αὕτη εἶναι ἀναλλοίωτος (βλ. § **385**, ς'). Ἀλλὰ τὰ Ο, Μ, Μ′ εἶναι συνευθειακά, ἄρα ἡ εὐθΜΜ′ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ') **Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς** τῆς Ὁμ(O, k) ὑπάρχει καὶ εἶναι προφανῶς ἡ ὁμοιοθεσία $\left(O, \frac{1}{k}\right)$. Ἡ ὁμοιοθεσία **δὲν εἶναι ἐνελικτική,** ἐκτὸς ἂν $k = \frac{1}{k}$, ἤτοι $k = \pm 1$. Δηλ. μόνον, ἂν ἐκπίπτῃ εἰς ταυτοτικὴν ἢ συμμετρίαν ὡς πρὸς κέντρον.

**400. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ὁμοιοθεσίας.** (Θ) — **Μία ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα εἰς μετασχηματισμὸς εἶναι ὁμοιοθεσία μὲ λόγον $k \neq 1$, εἶναι νὰ μετασχηματίζῃ τυχὸν ζεῦγος σημείων A καὶ B εἰς ζεῦγος σημείων A′ καὶ B′ τοιούτων, ὥστε $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$** (k σταθ. $\neq 1$).



Σχ. 443

*Ἀπόδειξις.* i) Ἔστω (O, k) μία ὁμοιοθεσία, A καὶ B δύο τυχόντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου καὶ A′, B′ αἱ εἰκόνες των (σχ. 443). Τότε, ἐπειδὴ $OA'/OA = OB'/OB = |k| \Rightarrow AB//A'B'$, εἴτε $k > 0$ εἴτε $k < 0$.

Ἐὰν $k > 0$, τὰ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁμόρροπα, τὰ δὲ μέτρα των ἔχουν λόγον $A'B'/AB = k$ (ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων OAB καὶ OA′B′), ἄρα $A'B' = k.AB$ καὶ $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$. Ὁμοίως, ἂν $k < 0$ (ὁπότε τὰ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίρροπα).

**ii) Ἀντιστρόφως:** Ἔστω ὅτι κατά τινα σημειακὸν μετασχηματισμὸν εἰς δύο τυχόντα σημεῖα A καὶ M ἀντιστοιχοῦν τὰ A′ καὶ M′ τοιαῦτα, ὥστε: $\overrightarrow{A'M'} = k\ \overrightarrow{AM}$ (k σταθερὰ $\neq 1$). Ἂς νοήσωμεν τὰ A καὶ A′ σταθερά, τὸ δὲ M διατρέχον τὸ ἐπίπεδον. Ὑπάρχει τότε ἐπὶ τῆς εὐθ AA′ ἓν καὶ μόνον σημεῖον O τοιοῦτον, ὥστε:

$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = k \Longleftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k.\overrightarrow{OA} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A'O} = k\ \overrightarrow{AO}.$$

Ἡ ἰσότης $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$, ἥτις ἐξ ὑποθέσεως ἰσχύει, γράφεται:

$$\overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OM'} = k\{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\} = k \cdot \overrightarrow{AO} + k \cdot \overrightarrow{OM}$$

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{AO} + k \cdot \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{A'O} = k \cdot \overrightarrow{AO} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM},$$

ἤτοι ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ M εἰς M′ εἶναι ὁμοιοθεσία (O, k).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Πόρισμα 1ον.** — Ὅταν σημεῖον διατρέχῃ δεσμευμένον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 443), τὸ ὁμοιόθετον (εἰκὼν) M′ τοῦ M θὰ πληροῖ πάντοτε τὴν σχέσιν: $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow A'M' // AM$, ἑπομένως τὸ M′ διαγράφει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$. Ὥστε :

**Τὸ ὁμοιόθετον (εἰκὼν) δεσμευμένου διανύσματος εἶναι διάνυσμα ἔχον λόγον πρὸς τὸ ἀρχικὸν τὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας.** Τὰ δύο διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα, ἂν $k > 0$ καὶ ἀντίρροπα ἂν $k < 0$.

**Πόρισμα 2ον. Τὸ ὁμοιόθετον ἡμιευθείας εἶναι ἡμιευθεῖα ὁμόρροπος, ἂν $k > 0$ καὶ ἀντίρροπος, ἂν $k < 0$.**

**Πόρισμα 3ον. Τὸ ὁμοιόθετον γωνίας εἶναι γωνία ἴση.**

**Πόρισμα 4ον. Τὸ ὁμοιόθετον εὐθείας (ε) εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν (ε)** *(ὑπὸ τὴν γενικευμένην ἔννοιαν τῆς παραλληλίας).*

**Πόρισμα 5ον. Τὸ ὁμοιόθετον περιφερείας (A, R) εἶναι περιφέρεια (A′, R′) ἔχουσα κέντρον A′ τὸ ὁμοιόθετον τοῦ κέντρου A καὶ ἀκτῖνα $R' = R \cdot |k|$, ὅπου k ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας.**

Διότι πᾶσα ἀκτὶς $\overrightarrow{AM}$ τῆς (A, R) μετασχηματίζεται εἰς $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow A'M' = |k| \cdot AM = |k| \cdot R = R'$.

**Παρατήρησις.** Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι, *ἂν τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας O εἶναι σημεῖον τῆς (A, R), τὸ ὁμοιόθετον τῆς (A, R), εἶναι περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς (A, R) εἰς τὸ O.*

**Πόρισμα 6ον. Ἐὰν δύο παράλληλα δεσμευμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ ἔχουν λόγον $\overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{AB} = k \neq 1$, τότε τὸ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ὁμοιοθεσίαν λόγου k καὶ κέντρου O διαιροῦντος καὶ τὸ $\overrightarrow{A'A}$ καὶ τὸ $\overrightarrow{B'B}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον k.**

## ΟΜΟΙΟΘΕΤΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

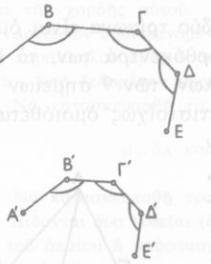
**401.** α′) Δύο πολύγωνα λέγονται *ὁμοιόθετα ἀλλήλων*, ὅταν αἱ κορυφαὶ τοῦ ἑνὸς εἶναι τὰ ὁμόλογα τῶν κορυφῶν τοῦ ἄλλου εἰς μίαν ὁμοιοθεσίαν. Προφανῶς τὰ **ὁμοιόθετα πολύγωνα εἶναι ὅμοια ἔχοντα τὰς ὁμολόγους πλευρὰς των παραλλήλους** καὶ λόγον ὁμοιότητος τὸν λόγον ὁμοιοθεσίας, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν λαμβανόμενον. (Ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία δημιουργεῖ πιστὴν εἰκόνα ἑνὸς σχήματος ὑπὸ μεγέθυνσιν ἢ ὑπὸ σμίκρυνσιν, καθ' ὅσον $k > 1$ ἢ $|k| < 1$).

β′) Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ ἀντιστρόφως :

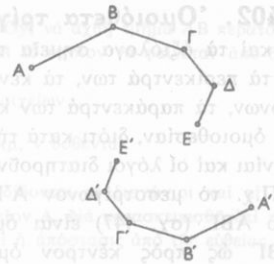
**ἐὰν δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ... καὶ Α′Β′Γ′Δ′Ε′... ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς των παρ)λους καὶ ὁμορρόπους, ἤτοι ἰσχύει : $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'} = k.\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'} = k.\overrightarrow{\Gamma\Delta}$..., ὅπου $k > 0$ καὶ $\neq 1$** (σχ. 444) **ἢ τὰς ἔχουν παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους, δηλ. $\overrightarrow{A'B'} = \lambda.\overrightarrow{AB}$,**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\overrightarrow{B'\Gamma'} = \lambda.\overrightarrow{B\Gamma}$..., ὅπου $\lambda < 0$ (σχ. 445), τότε τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὁμοιόθετα ἀλλήλων. (Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′... συντρέχουν εἰς τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας).




Σχ. 444



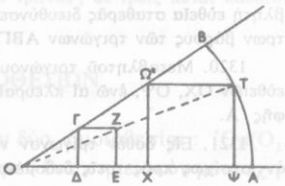

Σχ. 445

Διότι κατὰ τὸ πόρισμα 6ον τῆς § **400** τὸ $\overrightarrow{A'B'}$ τοῦ σχ. 444 εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ὡς πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′, ἥτις εἶναι σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k$. Ἀλλ' εἶναι καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}/\overrightarrow{B\Gamma} = k$, διὰ τοῦτο τὸ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ $\overrightarrow{B\Gamma}$ ὡς πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας διαιροῦν τὸ Β′Β εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον k καὶ ἑπομένως συμπῖπτον μὲ τὸ Ο. Ὥστε τὰ Α′, Β′, Γ′ εἶναι ὁμοιόθετα τῶν Α, Β, Γ εἰς τὴν Ὁμ(Ο, k). Ὁμοίως τὸ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἰς τὴν αὐτὴν ὁμοιοθεσίαν κ.τ.λ. Διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 445 ἰσχύουν τὰ ἴδια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα ΑΟΒ γωνίας $\widehat{AOB} < 90^o$ νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἔχον δύο κορυφὰς ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, μίαν ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καὶ μίαν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΧΨΤΩ τὸ ζητούμενον (σχ. 446) ἔχον $\overrightarrow{X\Psi} \nearrow\nearrow \overrightarrow{OA}$. Ἂς θεωρήσωμεν ἓν ὁμοιόθετον τοῦ ζητουμένου ὡς πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας Ο, ἔστω τὸ ΓΔΕΖ, τοῦ ὁποίου τὴν κορυφὴν Γ, ὁμόλογον τῆς Ω, ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ΓΔΕΖ εἶναι γνωστὸν τετράγωνον (Γ γνωστή, ΓΔ⊥ΟΑ, ΓΖ⊥ καὶ =ΓΔ, $\overrightarrow{\Gamma Z} \nearrow\nearrow \overrightarrow{OA}$). Ἐκ τοῦ γνωστοῦ μεταβαίνομεν εἰς τὸ ζητούμενον δι' ὁμοιοθεσίας κέντρου Ο.

*Σύνθεσις.* Κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΓΔΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΖ καὶ ὁρίζομεν τὸ Τ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Φέρομεν ΤΩ//ΟΑ, ΩΧ⊥ΟΑ, ΤΨ⊥ΟΑ καὶ ὁρίζομεν τὸ ζητούμενον τετράγωνον ΤΩΧΨ.




Σχ. 446

*Ἀπόδειξις.* Ἔχομεν (ἀλγεβρικὴ διατύπωσις θεωρήματος Θαλοῦ):

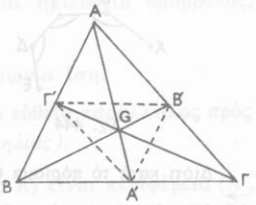
$\frac{\overline{OX}}{\overline{O\Delta}} = \frac{\overline{O\Omega}}{\overline{O\Gamma}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{O\Psi}}{\overline{OE}} = \lambda$, ἐξ ὧν: Χ, Ω, Τ, Ψ εἶναι ἀντιστοίχως ὁμοιό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θετα τῶν Δ, Γ, Ζ, Ε εἰς τὴν Ὁμ(Ο, λ). Ἐπειδὴ τὰ ὁμοιόθετα πολύγωνα εἶναι καὶ ὅμοια, διὰ τοῦτο, ἀφοῦ τὸ ΓΔΕΖ εἶναι τετράγωνον, θὰ εἶναι καὶ τὸ ὁμοιόθετόν του ΩΧΨΤ ἐπίσης τετράγωνον.

**402. Ὁμοιόθετα τρίγωνα.** Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὁμοιόθετα, τότε καὶ τὰ ἀξιόλογα σημεῖα των, π.χ. τὰ ὀρθόκεντρά των, τὰ ἔγκεντρά των, τὰ περίκεντρά των, τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν 9 σημείων τῶν δύο τριγώνων, τὰ παράκεντρά των κ.τ.λ. εἶναι ἀντιστοίχως ὁμοιόθετα εἰς τὴν ἰδίαν ὁμοιοθεσίαν, διότι κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν αἱ γωνίαι καὶ οἱ λόγοι διατηροῦνται (βλ. § **401**, α΄). Π.χ. τὸ μεσοτρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 447) εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ τρ.ΑΒΓ ὡς πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ κέντρον βάρους G τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ λόγον

$$-\frac{1}{2}=\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{G\Gamma'}}{\overline{G\Gamma}}.$$



Σχ. 447

Ἐκ τούτου προκύπτουν διάφορα θεωρήματα. Π.χ. τὸ ὀρθόκεντρον Κ τοῦ μεσοτριγώνου Α΄Β΄Γ΄, δηλ. τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ, εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τρ.ΑΒΓ εἰς τὴν ὁμοιοθεσίαν $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Ὅθεν, ἂν Η, G, Κ τὸ ὀρθόκεντρον, βαρύκεντρον, περίκεντρον ἑνὸς τρ.ΑΒΓ, ἰσχύει : $\overrightarrow{GK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ (εὐθεῖα Euler).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1318. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἔχον δύο διαδοχικὰς κορυφὰς ἐπὶ τῆς εὐθ.ΒΓ καὶ τὰς δύο ἄλλας ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ.

(Ὑπόδ. : Τὸ ζητούμενον εἶναι ὁμοιόθετον πρὸς γνωστὸν τετράγωνον κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς ΒΓ, μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Α).

1319. Δίδονται δύο σταθεραὶ εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ΄) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α. Μεταβλητὴ εὐθεῖα σταθερᾶς διευθύνσεως τέμνει τὰς (δ) καὶ (δ΄) εἰς Β καὶ Γ. Σύνολον τῶν κέντρων βάρους τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

1320. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ μένουν ἐπὶ δύο σταθερῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΨ, ἐνῶ αἱ πλευραὶ του διατηροῦν σταθερὰς διευθύνσεις. Τόπος τῆς κορυφῆς Α.

1321. Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο ἔχον τὰς πλευράς του παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τρεῖς δεδομένας εὐθείας.

1322. Ἐπὶ δύο σταθερῶν ἀξόνων Ox, Oy λαμβάνομεν σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως καὶ θεωροῦμεν καὶ δύο μεταβλητὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἐπὶ τῶν Ox, Oy τοιαῦτα, ὥστε : $\overline{AM}=k\cdot\overline{BN}$ (k σταθ.). Ἐκ τῶν Μ καὶ Ν φέρομεν παραλλήλους πρὸς δύο σταθερὰς εὐθείας ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς Ρ τῶν δύο τούτων παραλλήλων.

1323. Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἔχον δύο διαδοχικὰς κο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρυφάς του ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τομέως, τὰς δὲ δύο ἄλλας ἐπὶ τῶν ἀκραίων ἀκτίνων τοῦ τομέως.

1324. Εἰς δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα, μικρότερον ἡμικυκλίου, νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἔχον δύο διαδοχικὰς κορυφὰς ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος καὶ τὰς δύο ἄλλας ἐπὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.

1325. Δοθεισῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν Ox, Oy, νὰ ἀχθῇ τμῆμα AB περατούμενον εἰς αὐτάς, παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τὸ ὁποῖον νὰ φαίνεται ἀπὸ δεδομένου σημείου ὑπὸ δεδομένην κυρτὴν γωνίαν.

1326. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

$$\mu_\alpha, \delta_A \text{ καὶ } \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu} < 1 \ (\mu, \nu \text{ δοθέντα}).$$

1327. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, οὗτινος δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ αἱ γωνίαι.

1328. Δίδονται δύο εὐθεῖαι $(\delta_1)$, $(\delta_2)$ καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς $(\delta_1)$ σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ Α καὶ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς εὐθείας $(\delta_2)$ νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα, $\mu/\nu$.

1329. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΜΑΒ μὲ ΜΑ = ΜΒ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α εἶναι δεδομένον σημεῖον, ἡ κορυφὴ Μ νὰ κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας $(\delta_1)$, ἡ κορυφὴ Β νὰ κεῖται ἐπὶ ἄλλης δοθείσης εὐθείας $(\delta_2)$ καὶ ἡ πλευρὰ ΜΒ νὰ ἔχῃ δεδομένην διεύθυνσιν.

1330. Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τριγώνου ΑΒΓ δίδεται σημεῖον Ρ. Φέρομεν διὰ τοῦ μέσου Α΄ τῆς ΒΓ παρ/λον πρὸς τὴν ΡΑ, διὰ τοῦ μέσου Β΄ τῆς ΓΑ παρ/λον τῇ ΡΒ καὶ διὰ τοῦ μέσου Γ΄ τῆς ΑΒ παρ/λον τῇ ΡΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς ἀχθεῖσαι ἐκ τῶν Α΄, Β΄, Γ΄ παρ/λοι συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον (βλ. § 402).

1331. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν καὶ R καὶ ρ αἱ ἀκτῖνες τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἔγκεντρον Ο καὶ τὸ περίκεντρον Κ τοῦ τριγΑΒΓ κεῖνται ἐπ' εὐθείας μὲ τὸ ὀρθόκεντρον Η΄ τοῦ τρ.ΔΕΖ.

ii) Ἰσχύει ἡ σχέσις : $\dfrac{\overline{OK}}{\overline{OH'}} = -\dfrac{R}{\rho}$

(**Ὑπόδ.** : Νὰ δειχθῇ πρῶτον ὅτι αἱ εὐθεῖαι Euler τοῦ τρ.ΔΕΖ καὶ τοῦ τρ.$O_1O_2O_3$ τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ παράκεντρα τοῦ ΑΒΓ ταυτίζονται).

1332. Ἔστωσαν Α΄, Β΄, Γ΄ αἱ (ὀρθαὶ) προβολαὶ σημείου Ρ ἐπὶ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐὰν διὰ τῶν μέσων Α΄΄, Β΄΄, Γ΄΄ τῶν τμημάτων Β΄Γ΄, Γ΄Α΄, Α΄Β΄ ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τρ.ΑΒΓ, αἱ τρεῖς αὗται κάθετοι συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.

## ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΩΝ

**403. Περίπτωσις : $k_1k_2 \neq 1$.** Ἔστωσαν δύο ὁμοιοθεσίαι : Ὁμ$(O_1, k_1)$ καὶ Ὁμ$(O_2, k_2)$. Ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν ἕνα σημειακὸν μετασχηματισμὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ὁμοιοθεσιῶν.

Ἡ ὁμοιοθεσία $(O_1, k_1)$ μετασχηματίζει σχῆμα τί F εἰς τὸ $F_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ $(O_2, k_2)$ μετασχηματίζει τὸ $F_1$ εἰς τὸ $F_2$. Τυχὸν ζεῦγος σημείων (Α, Β) τοῦ F μετατρέπεται διαδοχικῶς εἰς $(A_1, B_1)$ καὶ $(A_2, B_2)$. Θὰ ἔχωμεν δὲ (§ **400**) :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k_1\,\overrightarrow{AB} \quad \text{καὶ} \quad \overrightarrow{A_2B_2} = k_2\,\overrightarrow{A_1B_1}$$

ὁπότε: $$\overrightarrow{A_2B_2} = k_2(k_1\overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{A_2B_2} = k_1k_2\,\overrightarrow{AB}.$$

Ἐὰν $\boxed{k_1k_2 \neq 1}$, ἡ τελευταία σχέσις εἶναι χαρακτηριστικὴ ὁμοιοθεσίας μὲ λόγον $k_1k_2$ (§ **400**). Δηλαδὴ ἡ ἀλλεπάλληλος ἐκτέλεσις δύο ὁμοιοθεσιῶν μὲ λόγους $k_1, k_2$ ἰσοδυναμεῖ μὲ μίαν ὁμοιοθεσίαν ἔχουσαν λόγον $k_1k_2$.

Ἐὰν τὰ $O_1$ καὶ $O_2$ εἶναι διάφορα ἀλλήλων, ἡ εὐθεῖα $O_1O_2$ εἶναι ἀναλλοίωτος εἰς τὴν ὁμοιοθεσίαν $(O_1, k_1)$ καὶ ἀκολούθως εἰς τὴν ὁμοιοθεσίαν $(O_2, k_2)$, ἄρα καὶ εἰς τὸ γινόμενον τῶν δύο. Ἄρα διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου $O_3$ τῆς ὁμοιοθεσίας - γινόμενον. Συνάγομεν ὅτι **τὰ κέντρα τῶν τριῶν ὁμοιοθεσιῶν εἶναι συνευθειακά.**

Ἐὰν τὰ $O_1$ καὶ $O_2$ συμπίπτουν εἰς ἓν σημεῖον O, τὸ O μένει ἀναλλοίωτον καὶ εἰς τὸ γινόμενον τῶν δύο ὁμοιοθεσιῶν, ἄρα εἶναι τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας - γινόμενον.

Τέλος, ἂν καλέσωμεν k τὸν λόγον τῆς τρίτης ὁμοιοθεσίας (ἥτις προκύπτει ὡς γινόμενον τῶν δύο πρώτων) ἔχομεν:

$$k = k_1k_2 \Rightarrow k^2 = k_1k_2k \Rightarrow k_1k_2k > 0.$$

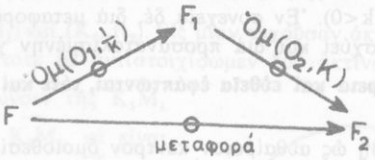
Ἡ τελευταία ἀνισότης δεικνύει ὅτι ἢ δύο ἢ οὐδεὶς ἐκ τῶν τριῶν λόγων εἶναι ἀρνητικοί, δηλαδὴ μεταξὺ τῶν τριῶν ὁμοιοθεσιῶν: Ὁμ$(O_1, k_1)$, Ὁμ$(O_2, k_2)$, Ὁμ$(O_3, k)$ ὑπάρχουν ἢ δύο ἀρνητικαὶ ἢ καμμία. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τό:

**Θεώρημα.— Τὸ γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν μὲ λόγους $k_1$ καὶ $k_2$ εἶναι μία ὁμοιοθεσία μὲ λόγον $k_1k_2$, ἐφ' ὅσον $k_1k_2 \neq 1$. Τὸ κέντρον τῆς τρίτης ὁμοιοθεσίας ταύτης κεῖται ἐπ' εὐθείας μὲ τὰ κέντρα τῶν δύο πρώτων, ἐφ' ὅσον ταῦτα εἶναι διακεκριμένα ἀλλήλων ἢ συμπίπτει μὲ αὐτά, ἂν καὶ αὐτὰ συμπίπτουν. Τέλος ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω ὁμοιοθεσιῶν ὑπάρχουν μηδὲν ἢ δύο, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀρνητικαί.**

**404. Εἰδικὴ περίπτωσις: $k_1k_2 = 1$.** Εἴδομεν εἰς τὴν § **403** ὅτι τὸ τυχὸν ζεῦγος σημείων (A, B) μετασχηματίζεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ὁμοιοθεσιῶν $[O_1, k_1]$ καὶ $[O_2, k_2]$ εἰς ζεῦγος σημείων $(A_2, B_2)$ τοιοῦτον, ὥστε $\overrightarrow{A_2B_2} = k_1k_2\overrightarrow{AB}$. Ἐὰν $\boxed{k_1k_2 = 1}$, τότε $\boxed{\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{AB}}$ καὶ τοῦτο χαρακτηρίζει μεταφορὰν (διότι συνεπάγεται $\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{BB_2}$). Δηλ. **τὸ γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν μὲ ἀντιστρόφους λόγους εἶναι μεταφορὰ** (ἢ ταυτο-

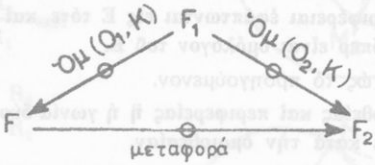
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τικὸς μετασχηματισμός, ἂν τὰ κέντρα συμπίπτουν). Τὸ γεγονὸς τοῦτο διατυποῦται σχηματικῶς ὡς κάτωθι :




Σχ. 448

Τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἑξῆς :




Σχ. 449

καὶ ἐκφράζει ὅτι τὰ δύο ἴσα σχήματα F καὶ $F_2$ εἶναι τὰ μετεσχηματισμένα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος $F_1$ εἰς δύο ὁμοιοθεσίας μὲ διαφορετικὰ κέντρα καὶ τὸν αὐτὸν λόγον k.

Ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω σχηματικῶν παραστάσεων προκύπτει τό :

**Θεώρημα.— Δύο σχήματα ὁμοιόθετα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ὡς πρὸς δύο διάφορα κέντρα, ἀλλὰ μὲ τὸν ἴδιον λόγον, προκύπτουν τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ μεταφορᾶς.**

**405. Συνέπειαι.** Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δεικνύει ὅτι, **διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὁμοιόθετον σχήματος εἰς μίαν δεδομένην ὁμοιοθεσίαν [$O_2$, k], δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ὁμοιόθετον τοῦ σχήματος ὡς πρὸς ἓν αὐθαίρετον κέντρον $O_1$ (μὲ τὸν ἴδιον λόγον k) καὶ κατόπιν νὰ ἐκτελέσωμεν μίαν μεταφορὰν** (βλ. σχ. 449). Τοῦτο ἔχει διαφόρους συνεπείας (μερικὰς ἤδη γνωστὰς ἀπὸ τὴν § **400**).

**i) Τὸ ὁμοιόθετον εὐθείας μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι εὐθεῖα παράλληλος.**

Διότι, ἂν ἐκλεγῇ ἓν αὐθαίρετον κέντρον ὁμοιοθεσίας ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ εὐθεῖα μένει κατ' ἀρχὰς ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν καὶ ἐν συνεχείᾳ ὑφίσταται μεταφοράν.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**ii) Τὸ ὁμοιόθετον γωνίας εἶναι γωνία ἴση.**

Διότι, ἂν ἐκλεγῇ ὡς αὐθαίρετον κέντρον ὁμοιοθεσίας ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας, τὸ ὁμοιόθετον τῆς γωνίας εἶναι ἡ ἰδία γωνία (ἂν $k>0$) ἢ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς (ἂν $k<0$). Ἐν συνεχείᾳ δέ, διὰ μεταφορᾶς, προκύπτει γωνία ἴση. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ προσανατολισμένην γωνίαν.

**iii) Ἐὰν περιφέρεια καὶ εὐθεῖα ἐφάπτωνται, τότε καὶ τὰ ὁμοιόθετά των ἐφάπτονται.**

Διότι, ἐὰν ληφθῇ ὡς αὐθαίρετον κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, τότε εἰς τὴν ὁμοιοθεσίαν αὐτὴν τὸ ὁμοιόθετον τῆς εὐθείας θὰ ἐφάπτεται τοῦ ὁμοιοθέτου τῆς περιφερείας (§ **400**, πόρισμα 2ον), ἡ δὲ τελικὴ εἰκὼν προκύπτει διὰ μεταφορᾶς τῆς πρώτης εἰκόνος. *Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἰς τὰ ἀρχέτυπα ἔχει ὁμόλογον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἰς τὰς εἰκόνας.*

**iv) Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται εἰς Ε τότε, καὶ τὰ ὁμοιόθετά των ἐφάπτονται εἰς Ε΄, ὅπερ εἶναι ὁμόλογον τοῦ Ε.**

Ἀποδεικνύεται ὡς τὸ προηγούμενον.

**γ΄) Ἡ γωνία εὐθείας καὶ περιφερείας ἢ ἡ γωνία δύο τεμνομένων περιφερειῶν διατηρεῖται κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν.**

Διότι, ἂν εὐθεῖα τέμνῃ εἰς Α καὶ Β τὴν (Κ, R), ἡ γωνία $\widehat{KAB}$ διατηρεῖ τὸ μέγεθός της κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν. Ἂν δὲ δύο περιφέρειαι (Κ, R), (Λ, ρ) τέμνωνται εἰς Μ, ἡ γωνία $\widehat{KM\Lambda}$ διατηρεῖ τὸ μέγεθός της κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν (ἀφοῦ τὰ ὁμοιόθετα τῶν κέντρων εἶναι τὰ κέντρα τῶν ὁμοιοθέτων περιφερειῶν καὶ τὸ ὁμοιόθετον τοῦ Μ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο εἰκόνων).

**406. Τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοθεσιῶν.** Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν δυνατὸν νὰ εἶναι μεταφορὰ (§ **404**),δηλ. νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοθεσιῶν, διὰ τοῦτο τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοθεσιῶν δὲν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν **o** (κύκλος) (δι' ἧς σχηματίζεται τὸ γινόμενον). Ἐὰν ὅμως ἑνώσωμεν τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοθεσιῶν μὲ τὸ σύνολον τῶν μεταφορῶν, τότε λαμβάνομεν ὁμάδα ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν **o** (κύκλος). Διότι τὸ **γινόμενον** : Μετ$(\vec{\delta})$**o**Ομ(O, k) μετασχηματίζει τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ πρῶτον εἰς τὸ $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$ (§ **400**) καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ $\overrightarrow{A'B'}$ εἰς τὸ $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{A'B'}$. Ὥστε τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων μετασχηματισμῶν μετασχηματίζει τὸ τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς διάνυσμα $\overrightarrow{A''B''} = k\overrightarrow{AB}$, ἄρα εἶναι ὁμοιοθεσία (§ **400**). Ὁμοίως τὸ γινόμενον Ὁμ(O, k) **o** Μετ$(\vec{\delta})$ εἶναι ὁμοιοθεσία. Ἐπειδὴ καὶ τὸ γινόμενον δύο μεταφορῶν εἶναι μεταφορὰ καὶ τὸ γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν εἶναι ὁμοιοθεσία ἢ μεταφοά, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον δύο μετασχηματισμῶν ἀνηκόντων εἰς τὸ σύνολον {ὁμοιοθεσιῶν ∪ μεταφορῶν} εἶναι μετασχηματισμὸς ἀνήκων εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον. Ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς ἀνήκει ἐπίσης εἰς τὸ σύνολον (διότι εἶναι ὁμοιοθεσία μὲ $k=1$) καὶ τὸ ἀντίστροφον ἑκάστου μετασχηματισμοῦ τοῦ ἐν λόγῳ συνόλου ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον· διὰ τοῦτο **τὸ σύνολον ὁμοιοθεσιῶν-μεταφορῶν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν «γινόμενον»** (§**388**).

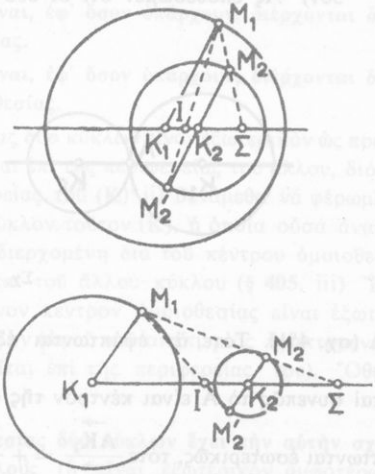
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

**407. Τὰ δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας.** Ἔστωσαν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ δύο περιφέρειαι $(K_1, R_1)$ καὶ $(K_2, R_2)$. Εἰς μίαν τυχοῦσαν ἀκτῖνα $\overrightarrow{K_1M_1}$ τῆς πρώτης δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἀντιστοιχίσωμεν δύο ἀκτῖνας τῆς δευτέρας, ἐχούσας τὴν διεύθυνσιν τῆς $\overrightarrow{K_1M_1}$ καὶ ἐξ ὧν ἡ μία, $\overrightarrow{K_2M_2}$, νὰ εἶναι ὁμόρροπος, ἡ δὲ ἄλλη, $\overrightarrow{K_2M'_2}$, νὰ εἶναι ἀντίρροπος τῆς $\overrightarrow{K_1M_1}$ (σχ. 450). Θὰ ἔχωμεν δηλ.:

$$\frac{\overrightarrow{K_2M_2}}{\overrightarrow{K_1M_1}} = \frac{R_2}{R_1} \text{ καὶ}$$

$$\frac{\overrightarrow{K_2M'_2}}{\overrightarrow{K_1M_1}} = -\frac{R_2}{R_1}.$$



Σχ. 450

Συμφώνως πρὸς τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα (§ **400**), ἑκάστη τῶν δύο τούτων ἀντιστοιχίσεων εἶναι μία ὁμοιοθεσία, ἐφ' ὅσον $R_2/R_1 \neq 1$. Τὸ $M_2$ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ $M_1$ εἰς μίαν θετικὴν ὁμοιοθεσίαν, ἧς κέντρον εἶναι ἡ τομὴ Σ τῆς ἑνούσης τὰ ἄκρα τῶν παρ/λων καὶ ὁμορρόπων ἀκτίνων $\overrightarrow{K_1M_1}$, $\overrightarrow{K_2M_2}$ μετὰ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων, τὸ δὲ $M'_2$ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ $M_1$ εἰς μίαν ἀρνητικὴν ὁμοιοθεσίαν, ἧς κέντρον εἶναι ἡ τομὴ I τῆς ἑνούσης τὰ ἄκρα τῶν ἀντιρρόπων ἀκτίνων μετὰ τῆς διακέντρου.

Τὰ σταθερὰ σημεῖα Σ καὶ I ὁρίζονται διὰ τῶν σχέσεων:

$$\frac{\overline{\Sigma K_1}}{\overline{\Sigma K_2}} = \frac{R_1}{R_2} \text{ καὶ } \frac{\overline{IK_1}}{\overline{IK_2}} = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Ἰσχύει ἑπομένως τό:

**Θεώρημα.—Ἐὰν $R_1 \neq R_2$ οἱ δύο ὁμοεπίπεδοι κύκλοι $(K_1, R_1)$ καὶ $(K_2, R_2)$ εἶναι ὁμοιόθετοι ἀλλήλων κατὰ δύο τρόπους: εἰς μίαν θετικὴν ὁμοιοθεσίαν καὶ εἰς μίαν ἀρνητικήν. Τὰ κέντρα Σ καὶ I τῶν δύο τούτων ὁμοιοθεσιῶν διαιροῦν τὴν διάκεντρον $\overrightarrow{K_1K_2}$ ἐξωτερικῶς καὶ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον $R_1/R_2$.**

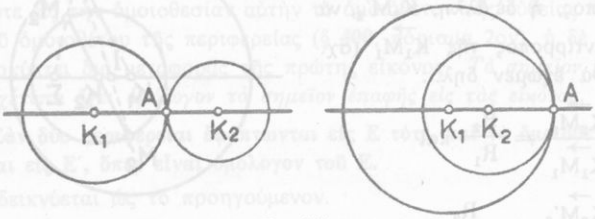
(Ἑπομένως $(K_1, K_2, I, \Sigma) = -1$ (ἁρμονικὴ τετράς).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**408. Διάφοροι παρατηρήσεις.** 1ον) Ἐὰν $R_1 = R_2$, ἡ θετικὴ ὁμοιοθεσία ἀντικαθίσταται μὲ μίαν μεταφορὰν κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{K_1K_2}$, ἐνῷ ἡ ἀρνητικὴ ὁμοιοθεσία μὲ λόγον —1 καθίσταται συμμετρία ὡς πρὸς τὸ μέσον I τῆς διακέντρου.

2ον) Ἂν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι, τὰ δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας συμπίπτουν μὲ τὸ κοινὸν κέντρον τῶν κύκλων.

3ον) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων εἰς τὸ

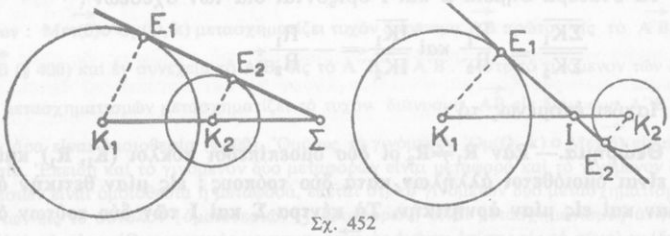



Σχ. 451

A (σχ. 451). Τότε, ἂν ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, ἔχομεν : $\dfrac{\overrightarrow{AK_1}}{\overrightarrow{AK_2}} = -\dfrac{R_1}{R_2}$ καὶ συνεπῶς τὸ A εἶναι κέντρον **τῆς ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας.** Ἐὰν δὲ ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς, τότε $\dfrac{\overrightarrow{AK_1}}{\overrightarrow{AK_2}} = +\dfrac{R_1}{R_2}$ καὶ τὸ A εἶναι κέντρον **τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας.**

(Θ) — **Δύο ἐφαπτόμενοι κύκλοι ἔχουν κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.**

4ον) Ἂς θεωρήσωμεν δύο κύκλους ἔχοντας κοινὰς ἐφαπτομένας.




Σχ. 452

Ἐὰν $E_1$, $E_2$ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, τότε αἱ ἀκτῖνες $K_1E_1$ καὶ $K_1E_2$ εἶναι παρ/λοι καὶ συνεπῶς τὰ σημεῖα $E_1$ καὶ $E_2$ εἶναι ὁμοιόθετα ἀλλή-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λων, ἄρα ἡ ευθ$E_1E_2$ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ὁμοιοθεσίας (σχ. 452).

Ἐὰν ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη εἶναι *ἐξωτερική*, αἱ ἀκτῖνες $\overrightarrow{K_1E_1}$ καὶ $\overrightarrow{K_2E_2}$ εἶναι ὁμόρροποι καὶ ἡ ευθ$E_1E_2$ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας. Ἐὰν ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη εἶναι *ἐσωτερική*, αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἀντίρροποι καὶ ἡ ευθ$E_1E_2$ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας.

Δηλαδή :

**Αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν, διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας.**

**Αἱ κοιναὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν, διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας.**

5ον) Ἐὰν ἓν κέντρον ὁμοιοθεσίας δύο κύκλων εἶναι ἐξωτερικὸν ὡς πρὸς τὸν **ἕνα** κύκλον (K), τότε i) δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἄλλου, διότι τότε θὰ ἔκειτο καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ (K)· ii) δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δι' αὐτοῦ ἐφαπτομένην πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον (K), ἡ ὁποία οὖσα ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν (ὡς διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ὁμοιοθεσίας) θὰ ἐφάπτεται κατ' ἀνάγκην καὶ τοῦ ἄλλου κύκλου (§ **405**, iii) Ἐξ αὐτῶν συνάγομεν ὅτι τὸ θεωρούμενον κέντρον ὁμοιοθεσίας εἶναι ἐξωτερικὸν καὶ ὡς πρὸς τὸν **ἄλλον** κύκλον (ἀφοῦ κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἐφαπτομένης τοῦ δευτέρου κύκλου, χωρὶς νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας του). Ὅθεν ἰσχύει τό

(Θ) —**Ἕκαστον κέντρον ὁμοιοθεσίας δύο κύκλων ἔχει τὴν αὐτὴν σχετικὴν θέσιν ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους** (ἢ εἶναι ἐξωτερικὸν ἀμφοτέρων ἢ εἶναι ἐσωτερικὸν ἀμφοτέρων ἢ κεῖται ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν).

**409. Ὁμοιοθεσίαι εἰς τρεῖς κύκλους.** Ἔστωσαν $K_1$, $K_2$, $K_3$ τὰ κέντρα τριῶν ἀνίσων κύκλων ($K_1$), ($K_2$), ($K_3$) ὑποτιθέμενα **ὄχι ἐπ' εὐθείας**. Τῶν κύκλων λαμβανομένων ἀνὰ δύο ὑπάρχουν 6 κέντρα ὁμοιοθεσίας. Δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἐκ τοῦ ($K_1$) εἰς τὸν ($K_2$) διὰ μιᾶς ὁμοιοθεσίας, κέντρου $O_1$. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ μεταβῶμεν ἐκ τοῦ ($K_2$) εἰς τὸν ($K_3$) διὰ μιᾶς δευτέρας ὁμοιοθεσίας ἐχούσης κέντρον $O_2$. Οὕτω μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ ($K_1$) εἰς τὸν ($K_3$) διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο προηγουμένων ὁμοιοθεσιῶν, ἥτις εἶναι πάλιν ὁμοιοθεσία, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $O_1O_2$ (§ **403** (Θ)).

Τὸ τρίτον τοῦτο κέντρον εἶναι κατ' ἀνάγκην ἓν ἐκ τῶν κέντρων ὁμοιοθεσίας μετασχηματιζούσης τὸν ($K_1$) εἰς τὸν ($K_3$). Ἑπομένως :

(Θ) — **Τὰ κέντρα ὁμοιοθεσιῶν τριῶν κύκλων εἶναι συνευθειακὰ κατὰ τριάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει ἢ οὐδὲν ἢ δύο κέντρα ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας** (§ **403**, θεώρημα).

Δηλ. δύο κέντρα ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι συνευθειακὰ μὲ ἓν κέν-

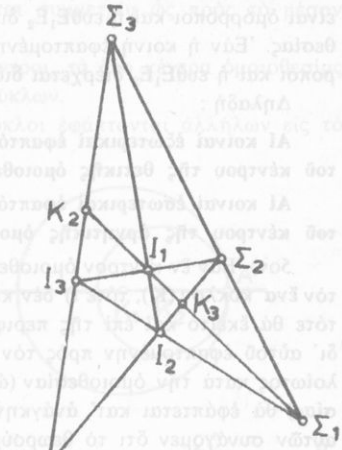
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρον θετικῆς ὁμοιοθεσίας. Οὕτω εἰς τὸ σχ. 453, ἂν $I_1$, $I_2$, $I_3$ εἶναι κέντρα ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας καὶ τὰ $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ θετικῆς, ἔχομεν τὰς εὐθείας :

$I_2I_3\Sigma_1$, $I_3I_1\Sigma_2$, $I_1I_2\Sigma_3$
(ἄξονες ὁμοιοθεσιῶν).

Τὰ τρία κέντρα θετικῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι συνευθειακὰ καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ (ἄξων ὁμοιοθεσιῶν).

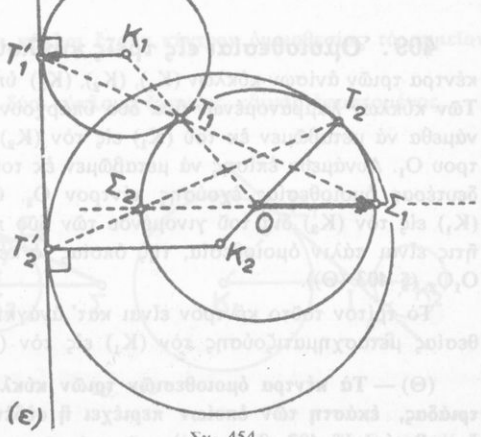
**Ἑτέρα ἀπόδειξις** τοῦ ἀνωτέρω (Θ) γίνεται διὰ τοῦ (Θ) τοῦ Μενελάου καὶ ἄνευ χρήσεως τῆς § **403**.



Σχ. 453

**410. Κύκλοι ἐφαπτόμενοι δοθέντος κύκλου καὶ δοθείσης εὐθείας.** Δοθέντος σταθεροῦ κύκλου (Ο) καὶ σταθερᾶς εὐθείας (ε), θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον ($K_1$) ἐφαπτόμενον καὶ τοῦ (Ο) καὶ τῆς (ε) εἰς τὰ σημεῖα $T_1$ καὶ $T'_1$ ἀντιστοίχως. Τὸ $T_1$ εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κύκλων ($K_1$) καὶ (Ο) καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ευθ $T_1T'_1$ ἐπανατέμνει τῶν περιφέρειαν (Ο) εἰς τι σημεῖον $\Sigma_1$, ὁμοιόθετον τοῦ $T'_1$, ἄρα τοιοῦτον, ὥστε: $O\Sigma_1 // K_1T'_1$, ἤτοι $O\Sigma_1 \perp (\varepsilon)$. Δηλαδὴ ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν $T_1T'_1$ διέρχεται (προεκτεινομένη ἐν ἀνάγκῃ) ἀπὸ τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ (Ο), τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν (ε). Ἔχομεν λοιπὸν δύο σταθερὰ σημεῖα $\Sigma_1$ καὶ $\Sigma_2$ ἄκρα διαμέτρου τοῦ (Ο), καθέτου ἐπὶ τὴν (ε). Ἀπὸ τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο τούτων διέρχεται ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν παντὸς κύκλου ἐφαπτομένου τῶν (Ο) καὶ (ε). Ὅτι ἄλλαι χορδαὶ ἐπαφῶν διέρχονται διὰ τοῦ $\Sigma_1$ καὶ ἄλλαι διὰ τοῦ $\Sigma_2$ φαίνεται διὰ τῆς ἑξῆς **κατασκευῆς** :

Ἂς φέρωμεν π.χ. διὰ τοῦ $\Sigma_2$ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν (Ο) εἰς τὸ $T_2$ καὶ τὴν (ε) εἰς τὸ $T'_2$. Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ $T'_2$ τέμνει τὴν ευθ$T_2O$ εἰς σημεῖον $K_2$. Τὰ $K_2$ καὶ $T'_2$ εἶναι ὁμοιόθετα τῶν Ο καὶ $\Sigma_2$ εἰς μίαν ὁμοιοθεσίαν κέντρου $T_2$ (διότι $K_2T'_2 // O\Sigma_2$). Ἄρα ὁ κύκλος κέντρου $K_2$ καὶ ἀκτῖνος $K_2T'_2$ εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ (Ο) ὡς πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας $T_2$



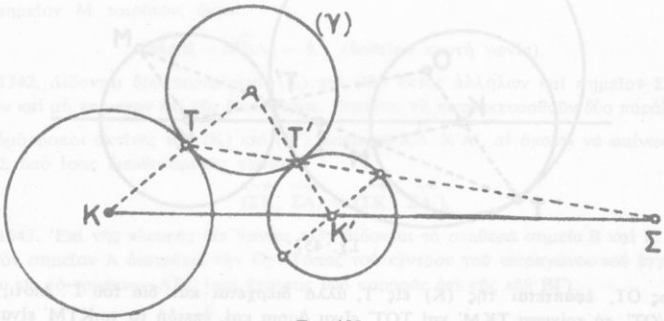
Σχ. 454

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\overrightarrow{K_2T'_2}/\overrightarrow{O\Sigma_2}$. Συνεπῶς ὁ κύκλος αὐτὸς $(K_2, K_2T'_2)$ ἐφάπτεται τοῦ (Ο) εἰς $T_2$ (§ **400** παρατ.).

Ἐπίσης ἐφάπτεται καὶ τῆς (ε), ἡ δὲ χορδὴ ἐπαφῶν $T'_2T_2$ διέρχεται διὰ τοῦ $\Sigma_2$. Ἐντελῶς ὁμοίως συλλογιζόμεθα καὶ μὲ τὸ $\Sigma_1$. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο οἰκογένειαι κύκλων ἐφαπτομένων τῆς (ε) καὶ τοῦ (Ο). (Ἐκτὸς ἂν ὁ (Ο) ἐφάπτεται τῆς (ε), ὁπότε ὑπάρχει μόνον ἡ μία οἰκογένεια.)

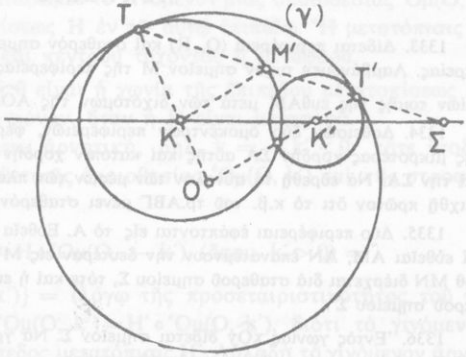
**411. Κύκλοι ἐφαπτόμενοι δύο δεδομένων κύκλων.** Ἔστωσαν (Κ) καὶ (Κ΄) δύο δεδομέναι περιφέρειαι καὶ (γ) τρίτη περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν δύο πρώτων εἰς Τ καὶ Τ΄ ἀντιστοίχως (σχ. 455).




Σχ. 455

Ἐπειδὴ τὸ Τ εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας τῶν (Κ) καὶ (γ) καὶ τὸ Τ΄ εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας τῶν (γ) καὶ (Κ΄) (§ **408**, 3ον), διὰ τοῦτο ἡ ευθ ΤΤ΄ διέρχεται διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κέντρων ὁμοιοθεσίας τῶν (Κ) καὶ (Κ΄) (βλ. § **409**).

Ἐὰν αἱ ἐπαφαὶ τῆς (γ) μὲ τὰς (Κ) καὶ (Κ΄) εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως (δηλ. ἂν ἡ (γ) ἐφάπτεται ἀμφοτέρων ἐξωτερικῶς ἢ ἀμφοτέρων ἐσωτερικῶς), τότε τὰ Τ καὶ Τ΄ εἶναι κέντρα ὁμοσήμων ὁμοιοθεσιῶν καὶ ἡ ευθ ΤΤ΄ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου θετικῆς ὁμοιοθεσίας τῶν (Κ) καὶ (Κ΄), ὡς εἰς τὰ σχ. 455, 456 (βλ. § **409**).




Σχ. 456

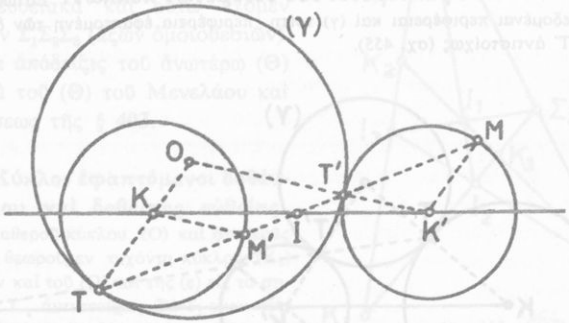
Ἐὰν αἱ ἐπαφαὶ τῆς (γ) μὲ τὰς (Κ) καὶ (Κ΄) εἶναι διαφορετικῆς φύσεως, τότε τὰ Τ καὶ Τ΄ εἶναι κέντρα ἑτεροσήμων ὁμοιοθεσιῶν καὶ ἡ ευθΤΤ΄ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ι ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κύκλων (Κ) καὶ (Κ΄), ὡς εἰς σχῆμα 457 (βλ. § **409**).

Ἀντιστρόφως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν κύκλον ἐφαπτόμενον τῶν (Κ) καὶ (Κ΄)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φέροντες διὰ τοῦ ἑνὸς κέντρου ὁμοιοθεσίας, I, τῶν (K) καὶ (K′) (διαφόρου τοῦ σημείου ἐπαφῆς των, ἂν τυχὸν αἱ (K) καὶ (K′) ἐφάπτωνται) μίαν κοινὴν τέμνουσαν (σχ. 457).

Ἔστωσαν T καὶ M′ τὰ σημεῖα τομῆς της μετὰ τῆς (K) καὶ T′ καὶ M τὰ σημεῖα τομῆς της μετὰ τῆς (K′), ὁμοιόθετα τῶν M′ καὶ T, ἀφοῦ τὸ I εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας. Ἔστω T′ τὸ σημεῖον τομῆς μετὰ τῆς (K′), τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ T, ἀλλὰ τοῦ M′. Τότε ἡ K′T′ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν KT (διότι εἶναι //KM′) καὶ συνεπῶς αἱ εὐθεῖαι K′T′ καὶ KT τέμνονται εἰς τι σημεῖον O. Ἡ περιφέρεια (γ), κέντρου O καὶ




Σχ. 457

ἀκτῖνος OT, ἐφάπτεται τῆς (K) εἰς T, ἀλλὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ T′. Διότι, ἀφοῦ KM′//OT′, τὰ τρίγωνα TKM′ καὶ TOT′ εἶναι ὅμοια καί, ἐπειδὴ τὸ τρ.KTM′ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι καὶ τὸ ὅμοιόν του OTT′, ἄρα OT = OT′. Ἡ (γ) λοιπὸν ἐφάπτεται ἀμφοτέρων τῶν κύκλων (K) καὶ (K′).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1333. Δίδεται περιφέρεια (O, R) καὶ σταθερὸν σημεῖον A μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M τῆς περιφερείας καὶ ζητοῦμεν τὸν γ.τ. τῶν σημείων τομῆς τῆς ευθAM μετὰ τῶν διχοτόμων τῆς $\widehat{AOM}$.

1334. Δοθεισῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, φέρομεν διὰ σταθεροῦ σημείου Σ τῆς μικροτέρας χορδὴν ΣA αὐτῆς καὶ κατόπιν χορδὴν BΣΓ τῆς μεγαλυτέρας, κάθετον ἐπὶ τὴν ΣA. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων ABΓ, ἀφοῦ δειχθῇ πρῶτον ὅτι τὸ κ.β. τοῦ τρ.ABΓ μένει σταθερόν.

1335. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται εἰς τὸ A. Εὐθεῖα τέμνει τὴν πρώτην εἰς M καὶ N. Αἱ εὐθεῖαι AM, AN ἐπανατέμνουν τὴν δευτέραν εἰς M′ καὶ N′. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ὅταν ἡ ευθ MN διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Σ, τότε καὶ ἡ ευθ M′N′ διέρχεται δι' ἑτέρου σταθεροῦ σημείου Σ′.

1336. Ἐντὸς γωνίας $x\widehat{O}y$ δίδεται σημεῖον Σ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ Σ καὶ ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

1337. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Σ καὶ τέμνουσα δύο δεδομένας εὐθείας $(\delta_1)$, $(\delta_2)$ ὑπὸ δοθείσας ὀξείας γωνίας $\widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\beta}$.

1338. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε′) παράλληλοι, τρίτη εὐθεῖα (δ) τέμνουσα αὐτὰς καὶ κύκλος (γ′). Ζητεῖται i) ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοθεσιῶν, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ μὲν εὐθεῖα (ε′) ἔχει ὡς ὁμοιόθετον τὴν (ε), ὁ δὲ κύκλος (γ′) ἔχει ὡς ὁμοιόθετον, κύκλον (γ) ἐφαπτόμενον τῆς (δ). ii) Ποῖος ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν κύκλων (γ);

1339. Δίδονται δύο κύκλοι καὶ σημεῖον Α. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν δύο ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων, παράλληλοι μεταξύ των καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ Α νὰ ἔχουν δεδομένον λόγον μ : ν.

1340. Θεωροῦμεν τὰ ζεύγη τῶν περιφερειῶν (γ) καὶ (γ′), αἵτινες ἐφάπτονται μεταξύ των καὶ δοθέντος κύκλου (Κ) εἰς δύο δεδομένα σημεῖα Α καὶ Α′ (ὄχι ἀντιδιαμετρικά).

1ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπαφῆς Μ τῶν κύκλων (γ) καὶ (γ′). Νὰ ἀναγνωρισθῇ κατὰ τὴν θέσιν τοῦ Μ τὸ εἶδος τῆς ἐπαφῆς τῶν κύκλων (γ) καὶ (γ′) μεταξύ των καὶ μὲ τὸν δοθέντα.

2ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων τομῆς τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τοῦ ἰδίου ζεύγους.

1341. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε :

$$|\widehat{MAB} - \widehat{MBA}| = \theta \quad \text{(δοθεῖσα κυρτὴ γωνία).}$$

1342. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Κ′) ἐκτὸς ἀλλήλων καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῶν καὶ μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἀκτῖνες τῶν (Κ) καὶ (Κ′), ἔστω αἱ $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{K'A'}$, αἱ ὁποῖαι νὰ φαίνωνται ἐκ τοῦ Σ ὑπὸ ἴσας διευθυνομένας γωνίας·

$$(\overrightarrow{\Sigma K}, \overrightarrow{\Sigma A}) = (\overrightarrow{\Sigma K'}, \overrightarrow{\Sigma A'}).$$

1343. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox γωνίας xOy δίδονται τὰ σταθερὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Μεταβλητὸν σημεῖον Α διατρέχει τὴν Oy. Τόπος τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (καὶ ἔχοντος δύο κορυφὰς ἐπὶ τῆς εὐθ ΒΓ).

## V. ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΣ ΟΜΟΡΡΟΠΟΣ

**412. α′) Γινόμενον μιᾶς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς ἐπιπέδου μετατοπίσεως.** Ἂς ἐξετάσωμεν τὸ γινόμενον μιᾶς ὁμοιοθεσίας Ὁμ(Ο, k) καὶ μιᾶς ἐπιπέδου μετατοπίσεως Η ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἡ μετατόπισις Η εἶναι ἢ στροφὴ γωνίας θ καὶ κέντρου τυχόντος ἢ μεταφορά.

Λέγομεν γενικῶς ὅτι ἡ θ εἶναι ἡ γωνία τῆς ἐπιπέδου μετατοπίσεως Η, θέτομεν δὲ $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ μόνον, ὅταν ἡ Η εἶναι μεταφορά.

Ἐὰν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀρνητική, δηλ. $k = -k' < 0$, τότε ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ γινόμενον τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας Ὁμ(Ο, k′) καὶ τῆς στροφῆς Στρ(Ο,π). Ἑπομένως :

$$H \circ \text{Ὁμ}(O, k) = H \circ \text{Ὁμ}(O, -k'), \text{ (ὅπου } k' > 0) =$$

$= H \circ \{\text{Στρ}(O, \pi) \circ \text{Ὁμ}(O, k')\} =$ (λόγῳ τῆς προσεταιριστικότητος τοῦ γινομένου) $\{H \circ \text{Στρ}(O, \pi)\} \circ \text{Ὁμ}(O, k') = H' \circ \text{Ὁμ}(O, k')$, διότι τὸ γινόμενον $H \circ \text{Στρ}(O, \pi)$ εἶναι μία ἐπίπεδος μετατόπισις Η′. Δηλαδὴ τὸ γινόμενον ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας καὶ ἐπιπέδου μετατοπίσεως ἀνάγεται εἰς γινόμενον θετικῆς ὁμοιοθεσίας καὶ ἐπιπέδου μετατοπίσεως. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς θετικὰς ὁμοιοθεσίας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β') **Ὁρισμός.** Καλεῖται **ἐπίπεδος ὁμοιότης ὁμόρροπος τὸ γινόμενον μιᾶς θετικῆς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς ἐπιπέδου μετατοπίσεως** ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. (Συντόμως : *«ὁμοιότης»*).

γ') Μία εὐθεῖα μετασχηματίζεται διὰ τῆς ὁμοιοθεσίας εἰς εὐθεῖαν καὶ διὰ τῆς ἐπιπέδου μετατοπίσεως πάλιν εἰς εὐθεῖαν. Ἑπομένως *μία ὁμοιότης μετασχηματίζει μίαν εὐθεῖαν εἰς ἄλλην εὐθεῖαν.*

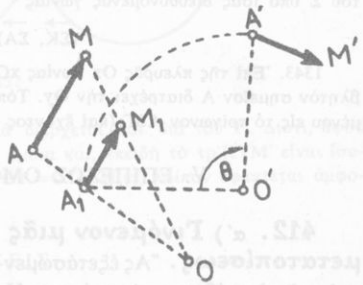
Ὁμοίως *ἓν διάνυσμα μετασχηματίζεται* διὰ μιᾶς ὁμοιότητος : $H \circ Ὁμ(O, k)$ *εἰς ἄλλο διάνυσμα, εἷς κύκλος (O, R) εἰς ἕτερον κύκλον (O', R')*, ὅπου τὸ O' εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ O καὶ ὁ λόγος $R'/R = k$.

*Ἡ ὁμοιότης διατηρεῖ τὰς γωνίας κατὰ μέγεθος καὶ φοράν*, διότι τοῦτο συμβαίνει καὶ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν καὶ κατὰ τὴν ἐπίπεδον μετατόπισιν.

δ') Τὸ διὰ τῆς ὁμοιότητος μετεσχηματισμένον σχῆμα λέγεται **ὅμοιον** πρὸς τὸ ἀρχικόν.

**413. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης.** Τὸ τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ μετασχηματίζεται διὰ τῆς ὁμοιοθεσίας (O, k) εἰς διάνυσμα $\overrightarrow{A_1M_1}$ τοιοῦτον, ὥστε $\overrightarrow{A_1M_1} = k \cdot \overrightarrow{AM}$ (σχ. 458). Ἐπειδὴ $k > 0$, τὰ $\overrightarrow{AM}$ καὶ $\overrightarrow{A_1M_1}$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ συνεπῶς :

(1) $A_1M_1 = k \cdot AM$ καὶ $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) = 0$.



Σχ. 458

Ἐν συνεχείᾳ διὰ στροφῆς (O', θ) (ἢ μεταφορᾶς) τὸ $\overrightarrow{A_1M_1}$ μετασχηματίζεται εἰς $\overrightarrow{A'M'}$ τοιοῦτον, ὥστε

(2) $A'M' = A_1M_1$ καὶ $(\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \pmod{2\pi}$.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγεται ὅτι

$$A'M' = k\ AM \text{ καὶ } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

(Τὸ $\theta = 0$, ἂν ἀντὶ στροφῆς ἐκτελεσθῇ μεταφορά). Ἔχομεν λοιπόν :

**ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. — Μία ὁμοιότης λόγου k καὶ γωνίας θ μετασχηματίζει τυχὸν ζεῦγος σημείων A, M εἰς ζεῦγος σημείων A', M' τοιούτων, ὥστε :**

$$A'M' = k \cdot AM \text{ καὶ } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

**Ἀντίστροφον.** Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα σημειακὸν μετασχηματισμὸν προσεταιρίζοντα εἰς ἓν σταθερὸν σημεῖον A τὸ σημεῖον A' καὶ εἰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τυχὸν σημεῖον M τὸ σημεῖον M′ τοιαῦτα, ὥστε : $A'M' = k \cdot AM$ καὶ $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$, ὅπου k θετικὸς ἀριθμὸς καὶ θ δεδομένη γωνία.

Ἂς ἐκτελέσωμεν τώρα μίαν ὁμοιοθεσίαν, λόγου k καὶ κέντρου τυχόντος. Θὰ λάβωμεν ὡς εἰκόνα τοῦ AM ἓν διάνυσμα $\overrightarrow{A_1M_1}$ τοιοῦτον, ὥστε

$$(3) \qquad A_1M_1 = k \cdot AM \text{ καὶ } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) = 0.$$

Ἔχομεν ὅμως, ἐξ ὑποθέσεως, $A'M' = k \cdot AM$ καὶ $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$. Ταῦτα λόγῳ τῶν (3) δίδουν :

$$(4) \qquad A_1M_1 = A'M' \text{ καὶ } (\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta.$$

Αἱ δύο σχέσεις (4) δεικνύουν ὅτι τὸ A′M′ προκύπτει ἐκ τοῦ $A_1M_1$ διὰ στροφῆς κατὰ (διευθυνομένην) γωνίαν θ, ἂν $\theta \neq 0$ ἢ διὰ μεταφορᾶς, ἂν $\theta = 0$, δηλ. προκύπτει δι' ἐπιπέδου μετατοπίσεως. Ὥστε τελικῶς ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ $\overrightarrow{AM}$ εἰς $\overrightarrow{A'M'}$ ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἐκτελέσεως μιᾶς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς ἐπιπέδου μετατοπίσεως, ἄρα εἶναι ὁμοιότης. Δηλ. ἰσχύει :

**ΘΕΩΡΗΜΑ II.—Ἐὰν εἰς σημειακὸς μετασχηματισμὸς προσεταιρίζῃ εἰς ἓν σταθερὸν σημεῖον A ἓν σημεῖον A′ καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον M ἓν σημεῖον M′ τοιαῦτα, ὥστε :**

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta, \quad \text{ὅπου } \theta \text{ σταθερὰ γωνία}$$

**καὶ $A'M' = k \cdot AM$, ὅπου k σταθερὸς θετικὸς ἀριθμός, τότε ὁ μετασχηματισμὸς αὐτὸς εἶναι ὁμοιότης λόγου k καὶ γωνίας θ.**

**Παρατήρησις.** Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις τοῦ ἀντιστρόφου δεικνύει ὅτι μία ὁμοιότης δύναται νὰ ἀναλυθῇ **κατ' ἀπείρους τρόπους** εἰς μίαν ὁμοιοθεσίαν καὶ μίαν ἐπίπεδον μετατόπισιν, ὅπου τόσον ὁ λόγος k τῆς ὁμοιοθεσίας, ὅσον καὶ ἡ γωνία θ τῆς μετατοπίσεως εἶναι πάντοτε τὰ ἴδια. Τὸ k καλεῖται **λόγος τῆς ὁμοιότητος** καὶ τὸ θ **γωνία τῆς ὁμοιότητος.**

**414. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός.** Αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι χαρακτηριστικαὶ συνθῆκαι τῆς ὁμοιότητος : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ καὶ $A'M' = k \cdot AM$ γραφόμεναι :

$$(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{AM}) = -\theta, \qquad AM = \frac{1}{k} A'M'$$

δεικνύουν ὅτι ἡ μετάβασις ἐκ τοῦ A′M′ εἰς AM, δηλ. ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁμοιότης μὲ λόγον $1/k$ καὶ γωνίαν $-\theta$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**415. Διπλοῦν σημεῖον (ἢ «κέντρον») μιᾶς ὁμοιότητος.** Μία ὁμοιότης ὁρίζεται, *ἐὰν δοθοῦν δύο ὁμόλογα σημεῖα Α καὶ Α΄, ὁ λόγος k καὶ ἡ γωνία θ*. Πράγματι ἡ σχέσις (§ 413).

(1) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ ὁρίζει τὴν ἡμιευθεῖαν (Α΄, Μ΄) καὶ ἡ

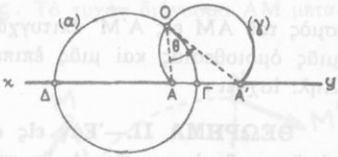
(2) $A'M' = k \cdot AM$ ὁρίζει τὸ Μ΄ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ταύτης, δηλ. παντὸς σημείου Μ ἡ εἰκὼν κατασκευάζεται.

Ἵνα σημεῖον Ο εἶναι διπλοῦν εἰς τὴν ὁμοιότητα ταύτην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν εἰκόνα του· ὁπότε αἱ (1) καὶ (2) δίδουν :

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) = \theta \text{ καὶ } A'O = k \cdot AO \quad \text{ἢ}$$

(3) $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \text{ καὶ } OA' = k \cdot OA$$

Δηλαδὴ τὸ Ο πρέπει καὶ ἀρκεῖ (λόγῳ τῶν (3)) νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου (γ) τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα βλέπουν τὸ ΑΑ΄ ὑπὸ διευθυνομένην γωνίαν θ καὶ ἐπὶ ἀπολλωνίου περιφερείας (α) ἀναφερομένης εἰς τὰ σημεῖα Α΄ καὶ Α μὲ λόγον k (σχ. 459).



Σχ. 459

**Ὥστε τὸ διπλοῦν σημεῖον Ο εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τόπων (γ) καὶ (α)** (σχ. 459).

—Ἐὰν $\theta \neq \nu\pi$ ($\nu \in \Phi$), ὁ τόπος (γ) εἶναι ἓν ὡρισμένον τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνεται ὑπὸ τοῦ τόπου (α), ἀκόμη καὶ ἂν $k = 1$, ὁπότε ὁ τόπος (α) καθίσταται μεσοκάθετος τοῦ ΑΑ΄.

—Ἐὰν $\theta = \pi$ (mod $2\pi$), τότε ὁ τόπος (γ) εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΑ΄ καὶ πάλιν τέμνεται ὑπὸ τοῦ τόπου (α).

—Ἐὰν $\theta = 0$ (mod $2\pi$), ὁ τόπος (γ) εἶναι τὸ ζεῦγος ἡμιευθειῶν Αx, Α΄y (σχ. 459) καὶ τὸ Ο ὑπάρχει, ἐφ' ὅσον $k \neq 1$ καὶ δὲν ὑπάρχει, ἂν $k = 1$, ὁπότε ὁ τόπος (α) καθίσταται μεσοκάθετος τοῦ ΑΑ΄.

Εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν περίπτωσιν ($k = 1$, $\theta = 0$), ἥτις εἶναι ἡ μόνη, καθ' ἣν δὲν ὑπάρχει διπλοῦν σημεῖον, αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἰσοδυναμοῦν μὲ $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$, δηλ. ὁ μετασχηματισμὸς εἶναι μεταφορά. Ἐδείχθη λοιπὸν τό :

(Θ) — **Πᾶσα ὁμοιότης, ἡ ὁποία δὲν ἀνάγεται εἰς μεταφοράν, ἔχει ἓν διπλοῦν σημεῖον καὶ ἕν μόνον.**

Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται **κέντρον τῆς ὁμοιότητος.**

**416. Ἰδιότης τοῦ κέντρου ὁμοιότητος.** Ἔστω Ο τὸ κέντρον (διπλοῦν σημεῖον) μιᾶς ὁμοιότητος, Μ τυχὸν σημεῖον καὶ Μ΄ τὸ ὁμόλο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γόν του. Κατὰ τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τῆς ὁμοιότητος (§ **413, I**) τὸ ζεῦγος O, M μετασχηματίζεται διὰ τῆς ὁμοιότητος εἰς τὸ ζεῦγος O, M′ τοιοῦτον, ὥστε :

(1) $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$ καὶ $OM' = k\ OM$.

Ἡ ὁμοιοθεσία (O, k) μετασχηματίζει τὸ M εἰς τὸ $M_1$ τοιοῦτον, ὥστε $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ καὶ ἐπειδὴ

$$k > 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OM},\ OM_1 = k \cdot OM.$$

Σχ. 460

Αἱ δύο τελευταῖαι σχέσεις δίδουν βάσει τῶν (1) :

(2) $$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{καὶ} \quad OM' = OM_1.$$

Αἱ (2) δεικνύουν ὅτι τὸ $M_1$ μεταβαίνει εἰς M′ διὰ στροφῆς (O, θ). Ἐπομένως τὸ M μεταβαίνει εἰς M′ διὰ μιᾶς ὁμοιοθεσίας (O, k) καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ μιᾶς στροφῆς (O, θ). Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι τὸ M μεταβαίνει εἰς M′, ἂν πρῶτον ἐκτελεσθῇ ἡ στροφὴ (O, θ) (δι' ἧς μεταβαίνει εἰς m) καὶ κατόπιν ἡ ὁμοιοθεσία (O, k). Ἑπομένως ἰσχύει τὸ

**(Θ) — Πᾶσα ὁμοιότης (ἡ ὁποία δὲν ἀνάγεται εἰς μεταφορὰν) εἶναι τὸ ἀντιμεταθετικὸν γινόμενον μιᾶς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς στροφῆς ἔχουσῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. Τὸ κέντρον τοῦτο, διπλοῦν σημεῖον τοῦ μετασχηματισμοῦ, εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιότητος.**

**417. Κατασκευὴ τοῦ κέντρου μιᾶς ὁμοιότητος.** Γνωρίζομεν νὰ κατασκευάζωμεν τὸ κέντρον O, ὅταν ἡ ὁμοιότης ὁρίζεται ἀπὸ δύο ὁμόλογα σημεῖα A καὶ A′, ἀπὸ τὸν λόγον k καὶ τὴν γωνίαν θ (§ **415**).

*Μία ὅμως ὁμοιότης ὁρίζεται ἀκόμη ἀπὸ δύο ὁμόλογα διανύσματα* $\overrightarrow{AB}$ *καὶ* $\overrightarrow{A'B'}$, διότι τότε ὁ λόγος k εἶναι ὁ A′B′/AB καὶ ἡ γωνία θ εἶναι ἡ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Ἔστω O τὸ κέντρον τῆς ὁμοιότητος τῆς φερούσης τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς $\overrightarrow{A'B'}$ (σχ. 461) καὶ I τὸ σημεῖον τομῆς τῶν φορέων τῶν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$. Θὰ εἶναι τότε :

Σχ. 461

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta,\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Βάσει τοῦ σχ. 461 αἱ ἰσότητες αὗται γραφόμεναι

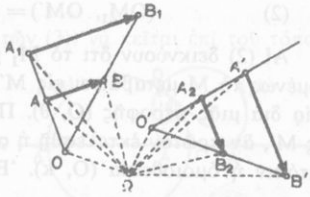
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA'}) \Rightarrow O, A, I, A' \text{ ὁμοκυκλικὰ καὶ}$$

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}) \Rightarrow O, B', B, I \text{ ὁμοκυκλικὰ (Βλ. § 393 iii).}$$

Ἑπομένως :

**Δοθέντων δύο ὁμολόγων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς τέμνονται εἰς τὸ I, τὸ κέντρον ὁμοιότητος εἶναι τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν (AIA') καὶ (B, I, B').**

**418. Ἀντιμεταθετικότης μιᾶς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς στροφῆς.** Ἔστω ὅτι διὰ μιᾶς θετικῆς ὁμοιοθεσίας (O, k) τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἔρχεται εἰς $\overrightarrow{A_1B_1}$ καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ μιᾶς στροφῆς (Ω, θ) τὸ $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἔρχεται εἰς $\overrightarrow{A'B'}$.



Σχ. 462

Διὰ τῆς στροφῆς ὅμως (Ω, θ), ἂς νοήσωμεν καὶ τὸ O καὶ τὸ AB στρεφόμενα καὶ ἐρχόμενα εἰς O' καὶ $A_2B_2$. Τότε, ἐπειδὴ κατὰ τὴν στροφὴν ἡ σχετικὴ θέσις τῶν σημείων πρὸς ἄλληλα δὲν βλάπτεται, διὰ τοῦτο, ὅπως τὸ $\overrightarrow{A_1B_1}$ εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$, οὕτω καὶ τὸ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ $\overrightarrow{A_2B_2}$ ὡς πρὸς ὁμοιοθεσίαν (O', k). Βλέπομεν ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία (O, k) καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ στροφὴ (Ω, θ) φέρει ἐπὶ τοῦ AB τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον φέρει ἡ στροφὴ (Ω, θ) καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ ὁμοιοθεσία ὄχι (O, k), ἀλλ' ἡ (O', k), ἤτοι Ὁμ(O, k)∘Στρ(Ω, θ) ≡ Στρ(Ω, θ)∘Ὁμ(O', k). Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν τὸ γινόμενον ἀντιμεταθετικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ δύο ὁμοιοθεσίαι νὰ ταυτίζωνται, δηλ. τὸ O νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ O', ἤτοι τὸ O νὰ μένῃ ἀναλλοίωτον κατὰ τὴν στροφὴν (Ω, θ), ἄρα τὸ O νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ Ω. Συνάγομεν ὅτι :

«τὸ γινόμενον μιᾶς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς στροφῆς δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικὸν παρὰ μόνον, ὅταν τὰ κέντρα τῶν δύο τούτων μετασχηματισμῶν ταυτίζωνται».

**419. Ὁμὰς τῶν ὁμοιοτήτων.** Ἂν τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοτήτων τοῦ ἐπιπέδου τὸ ἑνώσωμεν μὲ τὸ σύνολον τῶν μεταφορῶν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, λαμβάνομεν ἓν σύνολον μετασχηματισμῶν ἔστω T, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν «γινόμενον». Διότι διαπιστοῦμεν ὅτι :

i) τὸ γινόμενον δύο μετασχηματισμῶν τοῦ συνόλου T ἀνήκει πάλιν εἰς τὸ σύνολον τοῦτο·

ii) ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον T·

iii) κάθε μετασχηματισμὸς ἀνήκων εἰς τὸ σύνολον T ἔχει ἕνα ἀντίστροφον ἀνήκοντα εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον.

Τὸ i) δύναται νὰ ἀποδειχθῇ βάσει τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου (§ 386 δ'). Π.χ. : Ὁμοιότης ∘ Μεταφορὰν = (Ὁμοιοθεσία ∘ Ἐπιπ. μετατόπισιν) ∘ Μεταφορὰν = Ὁμοιοθ ∘ (Ἐπιπ. μετατόπισιν ∘ Μεταφορὰν) = Ὁμοιοθ ∘ Ἐπιπ. μετατόπισιν = Ὁμοιότης.

Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν ὅτι Μεταφορὰ ∘ Ὁμοιότης ≡ Ὁμοιότης καὶ Ὁμοιότης ∘ Ὁμοιότης ≡ Ὁμοιότης.

ii) Ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον, διότι εἶναι ἡ ὁμοιότης κέντρου O, λόγου 1 καὶ γωνίας 0.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

iii) Ἡ ὁμοιότης(O, k, θ) ἔχει ἀντίστροφον μετασχηματισμὸν πάλιν ὁμοιότητα, τὴν $\left(O, \frac{1}{k}, -\theta\right)$ καὶ ἡ μεταφορὰ $(\vec{\delta})$ ἔχει ἀντίστροφον πάλιν μεταφοράν, τὴν $(-\vec{\delta})$. Ἑπομένως :

**Τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοτήτων καὶ τῶν μεταφορῶν ἀποτελεῖ τὴν ὁμάδα τῶν ὁμοιοτήτων** (ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν «γινόμενον»).

## 420. Μεταβαλλόμενον σχῆμα καὶ σταθερὸν κέντρον ὁμοιότητος.

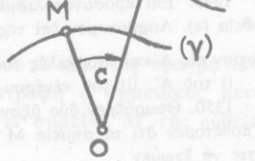
Εἰς τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος συντελεῖ ἡ ἀκόλουθος παρατήρησις :

**Ἐὰν δύο τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ΄Β΄ εἶναι ὁμορρόπως ὅμοια (ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, εἶναι ὁμόλογα εἰς μίαν οἱανδήποτε ὁμοιότητα κέντρου Ο), τότε καὶ τὰ τρίγωνα ΟΑΑ΄ καὶ ΟΒΒ΄ εἶναι ὁμόλογα εἰς μίαν ὁμοιότητα κέντρου Ο, γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ καὶ λόγου ΟΒ : ΟΑ.**

Διότι, ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ἔχομεν : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) = \theta$ καὶ $OB/OA = OB'/OA' = k$, τὰ ὁποῖα δεικνύουν ὅτι ἐκ τοῦ Α μεταβαίνομεν εἰς τὸ Β δι' ὁμοιοτήτος κέντρου Ο, γωνίας θ καὶ λόγου k **καὶ** ἐκ τοῦ Α΄ μεταβαίνομεν εἰς τὸ Β΄ διὰ τῆς **ἰδίας** ὁμοιοτήτος (O, θ, k). Ἄρα τὸ ὁμόλογον τοῦ τρ.ΟΑΑ΄ εἶναι τὸ τρ.ΟΒΒ΄ εἰς τὴν ὁμοιότητα ταύτην (O, θ, k).

Οὕτω π.χ. ἂς θεωρήσωμεν μεταβλητὸν σχῆμα F, τὸ ὁποῖον παραμένει πάντοτε ὅμοιον πρὸς σταθερὸν σχῆμα Σ ὡς πρὸς ἓν σταθερὸν κέντρον ὁμοιότητος Ο. Εἰς κάθε θέσιν τοῦ F, κάθε σημεῖον αὐτοῦ εἶναι ὁμόλογον ἑνὸς ὡρισμένου (πάντοτε τοῦ ἰδίου) σημείου τοῦ Σ εἰς μίαν ὁμοιότητα κέντρου Ο. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν γ.τ. ἑνὸς σημείου Μ τοῦ F ἀντιστοιχοῦντος εἰς σταθερὸν σημεῖον $M_0$ τοῦ Σ, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν γ.τ. οἱουδήποτε ἄλλου σημείου Ν τοῦ F, ἀντιστοιχοῦντος εἰς γνωστὸν σημεῖον $N_0$ τοῦ Σ. Διότι εἰς τὴν τυχοῦσαν θέσιν του τὸ F εἶναι ὅμοιον τοῦ Σ εἰς μίαν ὁμοιότητα κέντρου Ο, τὰ τρίγωνα $OM_0N_0$ καὶ ΟΜΝ εἶναι ὁμορρόπως ὅμοια καί, συνεπῶς, κατὰ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν καὶ τὰ τρίγωνα $OM_0M$ καὶ $ON_0N$ εἶναι ὁμόλογα εἰς μίαν ὁμοιότητα κέντρου Ο, γωνίας $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{ON_0}) = c$ (σταθ.) καὶ λόγου $ON_0/OM_0$ σταθεροῦ. Ἑπομένως μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ Μ εἰς τὸ Ν διὰ μιᾶς ὡρισμένης ὁμοιότητος :

$$\left\{O, \frac{ON_0}{OM_0}, c\right\}.$$



Σχ. 463

Ἄρα τὸ Ν διαγράφει γραμμὴν (γ΄) ὁμοίαν τῆς ὑπὸ τοῦ Μ διαγραφομένης, ὡς πρὸς κέντρον ὁμοιότητος Ο, γωνίαν ὁμοιότητος $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{ON_0})$ καὶ μὲ λόγον ὁμοιότητος $ON_0/OM_0$.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1344. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοτήτων λόγου δεδομένου, μ/ν, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζουν δοθεῖσαν εὐθεῖαν $(\varepsilon_1)$ εἰς ἄλλην δοθεῖσαν εὐθεῖαν $(\varepsilon_2)$ τέμνουσαν τὴν πρώτην.

1345. Δείξατε ὅτι δύο περιφέρειαι τοῦ ἐπιπέδου δύνανται νὰ ἀντιστοιχισθοῦν εἰς μίαν ἀπειρίαν ὁμοιοτήτων. Ποῖος ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοτήτων τούτων;

1346. Θεωροῦμεν δύο περιφερείας (O, R) καὶ (O΄, R΄), ἐπὶ τῶν ὁποίων μετατοπίζονται δύο σημεῖα Μ καὶ Μ΄ εἰς τρόπον, ὥστε $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \theta$, ὅπου θ σταθερὰ γωνία. Ἡ ευθ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΜ΄ ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας ἀντιστοίχως εἰς Ν καὶ Ν΄. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ Ν΄ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Ν εἰς μίαν ὁμοιότητα καὶ νὰ καθορισθῇ ἡ ὁμοιότης αὐτη.

1347. Δοθείσης εὐθείας σταθερᾶς (ε) καὶ σταθεροῦ σημείου Ο προβαλλομένου ἐπὶ τῆς (ε) εἰς τὸ Η, θεωροῦμεν ὅλας τὰς ὁμοιότητας κέντρου Ο, κατὰ τὰς ὁποίας εἰς τὸ Η ἀντιστοιχεῖ σημεῖον Η΄ τῆς (ε).

i) Δείξατε ὅτι εἰς τὰς ἀνωτέρω ὁμοιότητας ἡ γωνία ὁμοιότητος προσδιορίζει καὶ τὸν λόγον ὁμοιότητος.

ii) Ποῖον τὸ σύνολον τῶν ὁμολόγων Μ΄ ἑνὸς δεδομένου σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὰς ὁμοιότητας αὐτάς;

iii) Ποῖον τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα κατὰ τὰς ὁμοιότητας ταύτας ἔχουν τὴν αὐτὴν εἰκόνα Μ΄;

iv) Δείξατε ὅτι πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι (η), αἱ ἔχουσαι κατὰ τὰς ἀνωτέρω ὁμοιότητας ὡς ὁμόλογον τὴν αὐτὴν σταθερὰν εὐθεῖαν (η΄), διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου.

v) Ἔστω (γ) δοθεῖσα περιφέρεια καὶ (γ΄) ἡ μετεσχηματισμένη τῆς (γ) περιφέρεια διὰ μιᾶς τῶν ἀνωτέρω ὁμοιοτήτων.

1ον) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ (γ΄), ἂν δίδεται ἡ γωνία θ τῆς ὁμοιότητος.

2ον) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ (γ΄), ἂν δίδεται ἓν σημεῖον αὐτῆς.

3ον) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ (γ΄), ἂν δίδεται μία ἐφαπτομένη αὐτῆς.

1348. Ἔστωσαν Α΄, Β΄, Γ΄ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Στρέφομεν τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἕκαστον περὶ τὸ μέσον τῆς ἐπ' αὐτοῦ πλευρᾶς κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν x καὶ τὴν αὐτὴν φοράν. Αἱ τρεῖς νέαι προκύπτουσαι εὐθεῖαι σχηματίζουν τρίγωνον αβγ.

i) Τόπος τῶν σημείων α, β, γ.

ii) Δείξατε ὅτι τὸ τρ.αβγ παραμένει ὁμορρόπως ὅμοιον πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ.

iii) Δείξατε ὅτι τὸ τρ.αβγ ἔχει τὸ αὐτὸ περίκεντρον μετὰ τοῦ τρ.ΑΒΓ.

iv) Εὕρετε τοὺς γ. τόπους τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τρ.αβγ, τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ὀρθοκέντρου, τοῦ ἐγκέντρου καὶ τῶν περικέντρων τοῦ τρ.αβγ.

v) Δείξατε ὅτι αἱ διάμεσοι καὶ τὰ ὕψη τοῦ τρ.αβγ διέρχονται διὰ σταθερῶν σημείων.

1349. Ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου δίδεται σταθερὸν σημεῖον Ο καὶ σταθερὰ εὐθεῖα (ε). Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (ε) τυχὸν σημεῖον Α καὶ θεωροῦμεν τὸ τρ.ΟΑΑ΄ ὀρθογώνιον εἰς Α καὶ ἰσοσκελὲς τοιοῦτον, ὥστε $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = +\pi/4$. Ζητοῦνται οἱ γ. τόποι :

i) τοῦ Α΄, ii) τοῦ κέντρου βάρους G τοῦ τρ.ΟΑΑ΄.

1350. Θεωροῦμεν δύο ἄξονας Ox, Oy καὶ δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Α΄ ἐπ' αὐτῶν. Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ εἶναι μεταβλητὰ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τούτων οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν :

$$\overline{AM} = k\,\overline{A'M'},$$

ὅπου τὰ $\overrightarrow{AM}$ καὶ $\overrightarrow{A'M'}$ μετροῦνται μὲ ἰσομήκη μοναδιαῖα διανύσματα καὶ k σταθερὸς θετικὸς $\neq 1$.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΟΜΜ΄ διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου Ι, διαφόρου, ἐν γένει, τοῦ Ο.

ii) Ποῖον τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τοῦ Ι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΜΜ΄;

iii) Εἰς τυχὸν ζεῦγος Μ, Μ΄ θεωροῦμεν τὴν ἀντίστοιχον περιφέρειαν, ἥτις εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων Ρ τοιούτων, ὥστε PM/PM΄ = k.

Δείξατε ὅτι ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι μία εὐθεῖα καὶ ὅτι πᾶσαι αἱ περιφέρειαι αὐταὶ διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων.

1351. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄) καὶ ἓν σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ ἓν σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς (ε) καὶ ἓν σημεῖον Μ΄ ἐπὶ τῆς (ε΄) οὕτως, ὥστε τὸ τρίγωνον ΟΜΜ΄ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Μ καὶ ἰσοσκελές.

1352. **Ἐπίπεδος ὁμοιότης ἀντίρροπος**. Ὀνομάζεται «ἐπίπεδος ὁμοιότης ἀντίρρο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πος» τὸ γινόμενον μιᾶς θετικῆς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς συμμετρίας ὡς πρὸς εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου. (Πρώτη ἂς ἐκτελῆται ἡ συμμετρία).

i) Δείξατε ὅτι κατὰ τὴν ἀντίρροπον ὁμοιότητα μία γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ μετασχηματίζεται εἰς ἀντιρρόπως ἴσην γωνίαν. Ποῖαι αἱ μετεσχηματισμέναι εὐθειῶν καθέτων ἢ παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας;

ii) Δείξατε ὅτι μία ἀντίρροπος ὁμοιότης δύναται νὰ ἀναλυθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους εἰς γινόμενον μιᾶς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς ἀξονικῆς συμμετρίας καὶ ὅτι οἱ ἄξονες συμμετρίας εἶναι παράλληλοι.

iii) Δείξατε ὅτι δύναται νὰ εὑρεθῇ μία ἀνάλυσις, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας. (Τὸ κέντρον τοῦτο καλεῖται **κέντρον τῆς ἀντιρρόπου - ἐπιπέδου ὁμοιότητος**).

1353. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας δύο κύκλων εἶναι κέντρον ἀντιρρόπου ὁμοιότητος αὐτῶν (συμφώνως μὲ τὸν ὁρισμόν, iii ἀσκ. 1352).

1354. **Ἀντιρρόπως ὅμοια πολύγωγα** λέγονται δύο ὅμοια πολύγωνα $A_1A_2A_3...A_\nu$ καὶ $B_1B_2B_3...B_\nu$, ὧν αἱ ἀντίστοιχοι διευθυνόμεναι γωνίαι $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_\nu})$ μὲ $(\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1B_\nu})$ καὶ $(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_1})$ μὲ $(\overrightarrow{B_2B_3}, \overrightarrow{B_2B_1})$ κ.τ.λ. εἶναι ἀντιρρόπως ἴσαι. Εὕρετε τὴν ἀντίρροπον ὁμοιότητα, ἥτις μετασχηματίζει τὸ πρῶτον εἰς τὸ δεύτερον.

1355. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ κορυφὴ Α μένει σταθερά, ἡ κορυφὴ Β διαγράφει δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἢ δοθεῖσαν περιφέρειαν καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μένει ὁμορρόπως ὅμοιον πρὸς ἓν σταθερὸν τρίγωνον Α'Β'Γ'. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ὁ γ. τόπος i) τῆς κορυφῆς Γ, ii) τοῦ βαρυκέντρου, iii) τοῦ ὀρθοκέντρου καὶ iv) τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

1356. Θεωροῦμεν δύο μεταβλητὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΟΒ δύο δεδομένων περιφερειῶν (Κ, R), (Ο, ρ) τοιαύτας, ὥστε $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{OB}) = \theta$ (σταθερά). Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΟΒ τέμνωνται εἰς τὸ Ν, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια (ΝΑΒ) διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

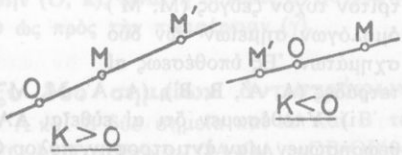
## VI. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

**421. Ὁρισμοί. Δοθέντος σταθεροῦ σημείου Ο καὶ ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ k διαφόρου τοῦ μηδενὸς καλεῖται ἀντιστροφὴ ὁ σημειακὸς μετασχηματισμός, καθ' ὃν εἰς ἓν σημεῖον Μ ἀντιστοιχεῖ σημεῖον Μ' τῆς εὐθείας ΟΜ τοιοῦτον, ὥστε**

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k.$$

Τὸ Ο καλεῖται **πόλος** (ἢ **κέντρον**) τῆς ἀντιστροφῆς καὶ ὁ k **δύναμις τῆς ἀντιστροφῆς.** Τὸ μετεσχηματισμένον δι' ἀντιστροφῆς ἑνὸς σχήματος F λέγεται καὶ *ἀντίστροφον* τοῦ F.

Ἐὰν $k > 0$, ἡ ἀντιστροφὴ λέγεται **θετικὴ** καὶ τὰ ὁμόλογα σημεῖα Μ καὶ Μ' κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο (σχ. 464), ἐνῷ ἂν $k<0$, ἡ ἀντιστροφὴ λέγεται **ἀρνητικὴ** καὶ τὰ ὁμόλογα σημεῖα Μ καὶ Μ' κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο (σχ. 464).




Σχ. 464



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶν σημεῖον Μ διάφορον τοῦ Ο ἔχει ἓν ἀντίστροφον, ἐνῷ ὁ πόλος Ο δὲν ἔχει ἀντίστροφον.

Ἡ ἰσοδυναμία : $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=k \longleftrightarrow \overline{OM'}\cdot\overline{OM}=k$ δεικνύει ὅτι ἡ ἀντιστροφὴ εἶναι **ἐνελικτική** (§ **387**).

Ἐὰν τὸ Μ διαγράφῃ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ πόλου Ο, τὸ Μ' διαγράφει τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἥτις συνεπῶς εἶναι ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον (§ **385** ς') κατὰ τὴν ἀντιστροφήν. (Ἂν τὸ Μ συμπέσῃ μὲ τὸ Ο, δυνάμεθα συμβατικῶς νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὸ Μ' καθίσταται τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον τῆς εὐθείας).

Ἀντιστρόφως, ἂν εὐθεῖα (ε) μένῃ ἀναλλοίωτος εἰς μίαν ἀντιστροφήν, τότε, ἐπειδὴ τοῦ Μ ὄντος σημείου τῆς (ε) τὸ Μ' εἶναι πάλιν σημεῖον τῆς (ε) καὶ ἐπειδὴ ἡ ΜΜ' διέρχεται διὰ τοῦ Ο, ἡ (ε) διέρχεται διὰ τοῦ Ο. Ὥστε :

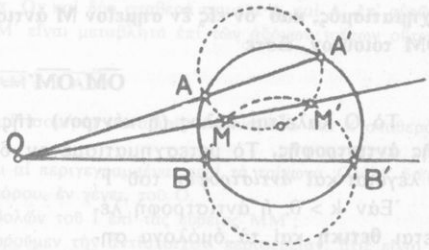
**Ἵνα εὐθεῖα παραμένῃ ἀναλλοίωτος εἰς μίαν ἀντιστροφήν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ πόλου.**

Τέλος, ἐπειδὴ ἡ ἀντιστροφὴ εἶναι ὡρισμένη διὰ τοῦ πόλου Ο καὶ τῆς δυνάμεως k, διὰ τοῦτο τὴν παριστάνομεν : Αντ(Ο, k).

**Παρατήρησις.** Ἐπειδὴ $OM'=\frac{|k|}{OM}$, αἱ ἀποστάσεις δύο ὁμολόγων σημείων ἀπὸ τὸν πόλον εἶναι *ἀντιστρόφως ἀνάλογοι* καὶ συνεπῶς τοῦ Μ ἀπομακρυνομένου ἀπὸ τὸν πόλον τὸ Μ' πλησιάζει πρὸς αὐτόν.

**422. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης.** Ἔστω ζεῦγος σημείων Α καὶ Μ καὶ τὰ ὁμόλογά των (ἢ ἀντίστροφά των) Α', Μ' εἰς τὴν Αντ(Ο, k). Τότε $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=k$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Μ, Α',Μ', ἐφ' ὅσον δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, *εἶναι ὁμοκυκλικά*.

Ἀντιστρόφως ἔστωσαν F καὶ F' δύο σχήματα ἀντιστοιχοῦντα σημεῖον πρὸς σημεῖον κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε *δύο τυχόντα ζεύγη* ὁμολόγων σημείων των νὰ εἶναι ὁμοκυκλικά.



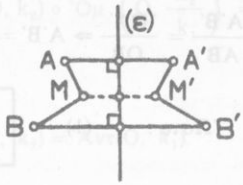
Σχ. 465

Ἂς λάβωμεν δύο σταθερὰ ζεύγη (Α, Α') καὶ (Β, Β') ὁμολόγων σημείων καὶ τρίτον τυχὸν ζεῦγος (Μ, Μ') ὁμολόγων σημείων τῶν δύο σχημάτων. Ἐξ ὑποθέσεως αἱ τετράδες (Α, Α', Β, Β'), (Α, Α', Μ, Μ'), (Β, Β' Μ,Μ'), εἶναι ὁμοκυκλικαί.

i) Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ' καὶ ΒΒ' τέμνονται εἰς Ο καὶ ἂς θεωρήσωμεν μίαν ἀντιστροφήν, πόλου Ο καὶ δυνάμεως $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}$. Εἰς τὴν ἀντιστροφὴν ταύτην τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ θὰ εἶναι σημεῖον ἀνῆκον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν (A, A′, M) καὶ εἰς τὴν (B, B′, M), ἑπομένως εἶναι τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν τούτων, δηλ. τὸ M′. Δηλαδὴ δύο τυχόντα ἀντίστοιχα σημεῖα M, M′ τῶν δύο σχημάτων εἶναι ὁμόλογα εἰς μίαν ἀντιστροφήν, ἄρα καὶ τὰ σχήματα.



Σχ. 466

**ii) Σύμβασις.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ AA′ καὶ BB′ εἶναι παράλληλοι (σχ. 466). Τότε τὸ AA′B′B εἶναι τραπέζιον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἄρα ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει ἄξονα συμμετρίας (ε). Ἑκάστη τῶν δύο περιφερειῶν AMM′A′ καὶ BMM′B′ ἔχει τότε ἄξονα συμμετρίας τὴν (ε), ἄρα τὰ δύο σημεῖα τομῆς των εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν (ε). Δηλ. τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ F καὶ τὸ ἀντίστοιχόν του M′ τοῦ F′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν (ε). Ἄρα τὰ δύο σχήματα F καὶ F′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα (ε).

Ἐὰν δεχθῶμεν **συμβατικῶς** ὅτι ἡ *συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι μία ἰδιάζουσα ἀντιστροφὴ μὲ πόλον εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν*, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

**«Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο σχήματα εἶναι ὁμόλογα εἰς μίαν ἀντιστροφήν, εἶναι δύο οἱαδήποτε ζεύγη ἀντιστοίχων σημείων των μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας νὰ εἶναι πάντοτε ὁμοκυκλικά».**

**423. Περιφέρεια ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον.** Ἔστω περιφέρεια (γ) διερχομένη διὰ δύο ὁμολόγων σημείων M καὶ M′ μιᾶς ἀντιστροφῆς πόλου O. Τότε καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον N τῆς (γ) ἔχει τὸ ὁμόλογόν του N′ ἐπὶ τῆς (γ), διότι $\overline{ON}\cdot\overline{ON'}=\overline{OM}\cdot\overline{OM'}$. Ἄρα ἡ (γ) εἶναι ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν ταύτην, τῆς ὁποίας ἡ δύναμις ἰσοῦται μὲ $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}$, δηλ. ἰσοῦται μὲ τὴν δύναμιν τοῦ πόλου O ὡς πρὸς τὴν (γ).

Ἀντιστρόφως ἔστω περιφέρεια ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον εἰς μίαν ἀντιστροφὴν (O, k). Τὸ ὁμόλογον M′ τυχόντος σημείου M τῆς (γ) κεῖται τότε ἐπὶ τῆς (γ)· ἄρα $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=k$, δηλ. ἡ δύναμις τοῦ O ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν εἶναι k. Ὅθεν ἰσχύει τὸ

(Θ) —**Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα περιφέρεια (γ) μένῃ ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον εἰς μίαν ἀντιστροφὴν (O, k), εἶναι ἡ δύναμις ἀντιστροφῆς νὰ εἶναι καὶ δύναμις τοῦ πόλου O ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (γ).**

**424. Ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων ἀντιστρόφων πρὸς δύο δοθέντα.** Ἔστωσαν A καὶ B δύο σημεῖα καὶ A′ καὶ B′ τὰ ὁμόλογά των εἰς μίαν ἀντιστροφὴν (O, k). Τότε ἔχομεν $OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=|k|$ καὶ συνεπῶς $OA/OB'=OB/OA'$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ΄Β΄ ἔχοντα ἐπὶ πλέον καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{O}$ κοινὴν (ἢ κατὰ κορυφὴν) εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} \Rightarrow A'B' = AB \cdot \frac{OA'}{OB} = AB \cdot \frac{OA' \cdot OA}{OA \cdot OB} = AB \cdot \frac{|k|}{OA \cdot OB}.$$

Ὥστε : (1) $$\boxed{A'B' = AB \cdot \frac{|k|}{OA \cdot OB}}$$

Ἐὰν τὰ Α, Β, Α΄, Β΄ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι πάλιν ὁ τύπος (1) ὁ παρέχων τὴν ἀπόστασιν Α΄Β΄ ἰσχύει.

**425. Γινόμενον δύο ἀντιστροφῶν τοῦ ἰδίου πόλου.** Ἂς ζητήσωμεν τὸ γινόμενον :

(1) Ἀντ(Ο, $k_2$) ο Ἀντ(Ο, $k_1$).

Διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) τὸ τυχὸν σημεῖον Μ μετασχηματίζεται πρῶτον εἰς τὸ $M_1$ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = k_1$ καὶ τὸ $M_1$ ἐν συνεχείᾳ εἰς τὸ Μ΄ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{OM_1} \cdot \overline{OM'} = k_2$. Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη :

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{k_2}{k_1}$$

Ἤτοι τὸ Μ΄ εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τοῦ Μ εἰς τὴν Ὁμ$\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$.

Ἑπομένως : **τὸ γινόμενον δύο ἀντιστροφῶν τοῦ ἰδίου πόλου εἶναι μία ὁμοιοθεσία.**

**Παρατηρήσεις.** Τὸ ἀνωτέρω γινόμενον (1) δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικὸν παρὰ μόνον, ὅταν $\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_1}{k_2}$, δηλ. ὅταν $k_2 = \pm k_1$.

Ἐὰν $k_1 = k_2$, τὸ γινόμενον (1) εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς (Ὁμ(Ο, 1)). Ἤτοι Ἀντ (Ο, $k_2$) ο Ἀντ(Ο, $k_2$) = $H^0$. (Ἡ ἀντιστροφὴ εἶναι ἐνελικτική).

Ἐὰν $k_1 = -k_2$, τὸ γινόμενον (1) εἶναι Ὁμ(Ο, —1), δηλ. συμμετρία ὡς πρὸς κέντρον Ο.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι, ἂν μετασχηματίσωμεν σχῆμα F διὰ δύο ἀντιστροφῶν, πόλου Ο καὶ διαφορετικῶν δυνάμεων $k_1$, $k_2$, λαμβάνομεν δύο σχήματα $F_1$ καὶ $F_2$ ὁμοιόθετα ὡς πρὸς κέντρον τὸ Ο. Δηλ. : *ἐκλεγέντος τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς Ο τὸ μετεσχηματισμένον σχῆμα ὑφίσταται ὁμοιοθεσίαν κέντρου Ο, ὅταν ἡ δύναμις ἀντιστροφῆς μεταβληθῇ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος Ἀντ(Ο, $k_2$)ο Ἀντ(Ο, $k_1$) = Ὁμ $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$ ⇒

⇒ Ἀντ(Ο, $k_2$)ο Ἀντ(Ο, $k_2$)ο Ἀντ(Ο, $k_1$) = Ἀντ(Ο, $k_2$) ο Ὁμ $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$ ⇒

⇒ Ἀντ(Ο, $k_2$)ο Ὁμ $\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$ = Ἀντ(Ο, $k_1$).

Ὁμοίως εὑρίσκομεν Ὁμ $\left(O, \frac{k_1}{k_2}\right)$ ο Ἀντ(Ο, $k_2$) = Ἀντ(Ο, $k_1$).

**426. Διευθύνουσα περιφέρεια.** α') Ἂς θεωρήσωμεν θετικὴν ἀντιστροφὴν δυνάμεως $k = \rho^2$, ὅπου τὸ ρ ἂς θεωρηθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα. Τότε, ἂν σημεῖον Μ ἀπέχῃ τοῦ πόλου Ο ἀπόστασιν ρ, συμπίπτει μὲ τὸ ἀντίστροφόν του, ἤτοι εἶναι διπλοῦν σημεῖον τῆς ἀντιστροφῆς (Ο, $\rho^2$) καὶ ἀντιστρόφως. Ἤτοι τὸ σύνολον τῶν διπλῶν σημείων τῆς ἀντιστροφῆς (Ο, $\rho^2$) εἶναι περιφέρεια (Ο, ρ) ἀναλλοίωτος σημεῖον πρὸς σημεῖον, ἥτις καλεῖται **διευθύνουσα περιφέρεια τῆς ἀντιστροφῆς.**

Ἐὰν τώρα περιφέρεια (γ) μένῃ ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον κατὰ τὴν ἀντιστροφήν, γνωρίζομεν ὅτι τότε ΔυνΟ/(γ) = δύναμις ἀντιστροφῆς = $\rho^2$ (§ **423**), τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ διευθύνουσα περιφέρεια τέμνει ὀρθογωνίως τὴν (γ). Συνάγομεν ὅτι :

**«ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα περιφέρεια μένῃ ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον κατὰ τὴν ἀντιστροφήν, εἶναι νὰ τέμνῃ ὀρθογωνίως τὴν διευθύνουσαν περιφέρειαν».**

β') Ἂς θεωρήσωμεν ἀρνητικὴν ἀντιστροφὴν (Ο, $-\rho^2$). Εἰς αὐτὴν διπλᾶ σημεῖα δὲν ὑπάρχουν, διότι θὰ ἔπρεπε $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM} = -\rho^2$. Μία δὲ περιφέρεια (γ) μένει ἀναλλοίωτος ὡς ἓν ὅλον κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν ταύτην, ὅταν ΔυνΟ/(γ) = δύναμις ἀντιστροφῆς = $-\rho^2$, δηλ. ὅταν τέμνῃ ψευδοορθογωνίως τὸν κύκλον (Ο, ρ).

## ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

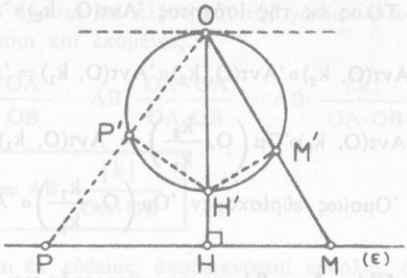
**427. Τὸ ἀντίστροφον εὐθείας.** α') Ἐὰν ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ πόλου, τότε εἶναι ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν (§ **421**).

**β') (Θ) — Τὸ ἀντίστροφον εὐθείας μὴ διερχομένης διὰ τοῦ πόλου Ο τῆς ἀντιστροφῆς εἶναι περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ πόλου Ο, ἀφ' ἧς ἐξαιρεῖται τὸ Ο** (ἡ δὲ εἰς Ο ἐφαπτομένη εἶναι παρ/λος πρὸς τὴν εὐθεῖαν βλ. σχ. 467).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Η ἡ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ Η' τὸ ἀντίστροφον τοῦ Η, ὁπότε $\overline{OH}\cdot\overline{OH'} = k$. Ἔστω Μ τυχὸν ἄλλο σημεῖον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς (ε) (ὁπότε $HH' \perp HM$) καὶ M′ τὸ ἀντίστροφόν του. Τότε τὰ M, M′, H′, H εἶναι ὁμοκυκλικὰ (§ **422**) καί, ἐπειδὴ $H'\widehat{H}M$ εἶναι $1^D$, θὰ εἶναι καὶ $H'\widehat{M'}M = 1^D$, δηλ. $H\widehat{M'}O = 1^D$. Ὅθεν τὸ M′ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, διαμέτρου OH′. Ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον P′ τῆς περιφερείας ταύτης, διάφορον τοῦ O, εἶναι ἀντίστροφον ἑνὸς σημείου P τῆς (ε) καὶ δὴ ἐκείνου, καθ' ὃ ἡ ευθ OP′ τέμνει τὴν (ε). Διότι ἐκ τῶν : $H'\widehat{P'}P = 1^D$, $P\widehat{H}H' = 1^D \Rightarrow$ P, P′, H′, H ὁμοκυκλικὰ $\Rightarrow$ τὰ ζεύγη (P, P′), (H, H′) εἶναι ὁμόλογα εἰς τὴν ἰδίαν ἀντιστροφὴν (§ **422**).



Σχ. 467

γ′) (Θ) — **Τὸ ἀντίστροφον περιφερείας διερχομένης διὰ τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς O εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν εἰς τὸ O ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας.**

Διότι, ἀφοῦ ἡ ἀντιστροφὴ εἶναι ἐνελικτική, ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς περιφερείας διαμέτρου OH′, ὡς φαίνεται σαφῶς εἰς τὸ σχ. 467.

**δ′) (Θ) — Εἰς κάθε ἀντιστροφὴν μετασχηματίζουσαν μίαν εὐθεῖαν εἰς μίαν περιφέρειαν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν.**

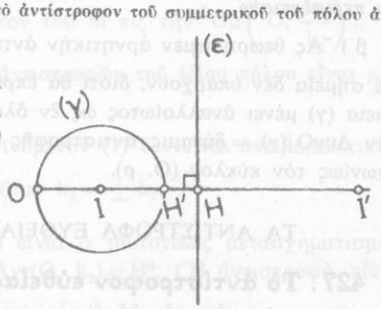
*Ἀπόδειξις.* Ἔστω I τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς ἀντιστρόφου τῆς εὐθείας (ε). Τὸ ἀντίστροφον τοῦ I εἶναι σημεῖον I′ τοιοῦτον, ὥστε (σχ. 468)

$\overline{OI} \cdot \overline{OI'} = k = \overline{OH} \cdot \overline{OH'} \Rightarrow$

$\overline{OI} \cdot \overline{OI'} = \overline{OH} \cdot \overline{OH'} \Rightarrow$

$$\frac{\overline{OH'}}{2} \cdot \overline{OI'} = \overline{OH'} \cdot \overline{OH}$$

$\left(\text{διότι } \overline{OI} = \frac{\overline{OH'}}{2}\right)$ καὶ τέλος $\overline{OI'} = 2\overline{OH}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ I′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ O ὡς πρὸς τὴν (ε).



Σχ. 468

ε′) (Θ) — **Δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ δοθεῖσα περιφέρεια δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἀντίστροφα ἀλλήλων κατὰ δύο διαφορετικοὺς τρόπους, ἂν δὲν ἐφάπτωνται· καὶ κατὰ ἕνα μόνον τρόπον, ἂν ἐφάπτωνται.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω (ε) μία εὐθεῖα καὶ (γ) μία περιφέρεια (σχ. 468). Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. β′, ὁ πόλος ἀντιστροφῆς πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἓν ἢ τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου τῆς (γ) τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν (ε). Ἔστωσαν O καὶ H′ τὰ δύο ταῦτα ἄκρα. Ἂν ἐκλέξωμεν ὡς πόλον ἀντιστροφῆς τὸ O καὶ δύναμιν ἀντιστροφῆς $\overline{OH'}\cdot\overline{OH}$, τότε κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν ταύτην, (O, $\overline{OH'}\cdot\overline{OH}$) ἡ (ε) εἰκονίζεται εἰς τὴν (γ). Ὁμοίως καὶ εἰς τὴν ἀντιστροφὴν (H′, $\overline{H'O}\cdot\overline{H'H}$), ἐφ' ὅσον $\overline{H'O}\cdot\overline{H'H}\neq 0$. Ἂν ὅμως ἡ (ε) ἐφάπτεται εἰς H′ τῆς (γ), τότε τὸ H′ δὲν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς πόλος ἀντιστροφῆς φερούσης τὴν (ε) ἐπὶ τῆς (γ), ἀλλὰ μόνον τὸ O.

**428. Τὸ ἀντίστροφον περιφερείας.** α′) Ἐὰν ἡ περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς, τὸ ἀντίστροφόν της εἶναι εὐθεῖα (§ **427**, γ′).

**β′) (Θ) — Τὸ ἀντίστροφον τῆς περιφερείας (c) μὴ διερχομένης διὰ τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς εἶναι περιφέρεια (c′) ὁμοιόθετος τῆς (c) ὡς πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας, τὸν πόλον ἀντιστροφῆς· ὁ δὲ λόγος λ τῆς ὁμοιοθεσίας, ἥτις μετασχηματίζει τὴν (c) εἰς τὴν (c′) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :**

$$\boxed{\lambda = \frac{k}{p}}$$

**ὅπου k ἡ δύναμις ἀντιστροφῆς καὶ p ἡ δύναμις τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (c).**

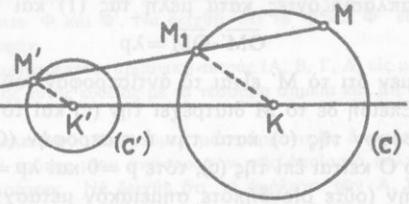
(Ἐννοεῖται ὅτι $|\lambda| = R'/R$, ὅπου R′ καὶ R εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἀκτῖνες τῶν (c′) καὶ (c)).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω M′ τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου M τῆς (c) (σχ. 469) εἰς τὴν ἀντιστροφὴν (O, k). Θὰ ἔχωμεν

(1) $$\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = k.$$

Ἂν ἡ εὐθεῖα OM ἐπανατέμνῃ τὴν (c) εἰς $M_1$, θὰ ἔχωμεν

(2) $$\overline{OM}\cdot\overline{OM_1} = p.$$




Σχ. 469

Διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

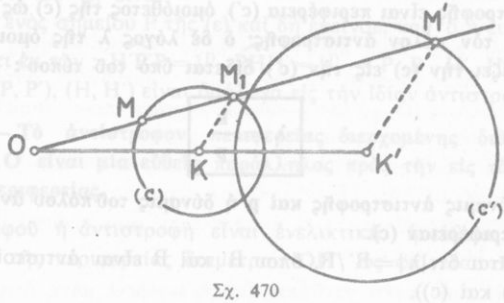
$\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM_1}} = \dfrac{k}{p}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ M′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ $M_1$ εἰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν ὁμοιοθεσίαν $\left(O, \frac{k}{p}\right)$. Τὸ σύνολον ὅθεν τῶν M′ εἶναι περιφέρεια (c′) ὁμοιόθετος τῆς (c). (Φυσικὰ τὸ κέντρον K′ τῆς (c′) ὁρίζεται ἐκ τῆς : $\overline{OK'}/\overline{OK} = k/p$).

**γ′) (Θ) — Δύο δεδομέναι περιφέρειαι δύναται νὰ θεωρηθοῦν ἀντίστροφοι ἀλλήλων κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, ἐὰν δὲν ἐφάπτωνται· καὶ κατὰ ἕνα μόνον τρόπον, ἐὰν ἐφάπτωνται. Ἐὰν δὲν ἐφάπτωνται, οἱ πόλοι ἀντιστροφῆς εἶναι τὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας καὶ ἐὰν ἐφάπτωνται, ὁ πόλος ἀντιστροφῆς εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ μὴ κείμενον ἐπὶ τῶν περιφερειῶν.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν (c) καὶ (c′) δύο δοθεῖσαι περιφέρειαι (σχ. 470) καὶ O ἓν κέντρον ὁμοιοθεσίας αὐτῶν (§ **407**) ἐπὶ οὐδεμιᾶς τούτων κείμενον.




Σχ. 470

Ἔστω $M_1$ σημεῖον τῆς (c) καὶ M′ τὸ ὁμοιόθετόν του ἐπὶ τῆς (c′). Τότε :

(1) $$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM_1}} = \lambda \qquad (= \text{λόγος ὁμοιοθεσίας}).$$

Ἡ εὐθ$M_1$M′ ἐπανατέμνει τὴν (c), ἔστω εἰς M, ὁπότε :

(2) $$\overline{OM_1} \cdot \overline{OM} = p \quad (= \text{ΔυνO}/(c)).$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

(3) $$\overline{OM'} \cdot \overline{OM} = \lambda p$$

καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ M′ εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ M εἰς τὴν ἀντιστροφὴν (O, λp). Ἐπειδὴ δὲ τὸ M διατρέχει τὴν (c) καὶ τὸ M′ τὴν (c′), ἡ (c′) εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς (c) κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν (O, λp).

Ἂν τὸ O κεῖται ἐπὶ τῆς (c), τότε p = 0 καὶ λp = 0, ἡ δὲ (3) δὲν ἐκφράζει ἀντιστροφὴν (οὔτε οἱονδήποτε σημειακὸν μετασχηματισμόν). Ὅταν ὅμως τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας O κεῖται ἐπὶ τῆς (c), αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων εἰς τὸ O. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ O δὲν εἶναι πόλος.

**Παρατήρησις.** Ἐὰν αἱ περιφέρειαι εἶναι ἴσαι, ἡ μία ἐκ τῶν δύο ἀντιστροφῶν ἐκπίπτει εἰς συμμετρίαν ὡς πρὸς ἄξονα (§ **422**, ii).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**δ') Κατασκευὴ τοῦ ἀντιστρόφου δοθείσης περιφερείας (c).** Κατασκευάζομεν δύο ὁμόλογα σημεῖα M καὶ M′ τῆς ἀντιστροφῆς (O, k) (σχ. 470) καὶ ἐξ αὐτῶν τὸ $M_1$. Φέρομεν τὴν M′K′//$M_1$K καὶ εὑρίσκομεν τὸ K′ ἐπὶ τῆς ευθOK.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1357. Δίδεται περιφέρεια (O,R) καὶ σημεῖον Σ μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς. Θεωροῦμεν μεταβλητὴν διάμετρον AB τῆς (O, R).

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια (ΣAB) διέρχεται καὶ διὰ δευτέρου σταθεροῦ σημείου I.

ii) Αἱ ευθΣA, ΣB ἐπανατέμνουν τὴν (O,R) εἰς M καὶ N. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ευθMN διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια (ΣMN) διέρχεται καὶ διὰ δευτέρου σταθεροῦ σημείου.

1358. Ἔστω (c) σταθερὰ περιφέρεια καὶ AB σταθερὰ χορδὴ αὐτῆς. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M τῆς (c) καὶ κατασκευάζομεν δύο περιφερείας (γ) καὶ (γ′) διερχομένας διὰ τοῦ M καὶ ἐφαπτομένας τῆς AB εἰς A καὶ B. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς M′ τῶν περιφερειῶν τούτων.

1359. Δίδεται περιφέρεια (K, R) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐκτὸς αὐτῆς. Ἀπὸ σημείου M τῆς (ε) φέρομεν ἐφαπτόμενα τμήματα MΓ, MΔ πρὸς τὴν περιφέρειαν. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν ὀρθοκέντρων τῶν τριγώνων MΓΔ, ὅταν τὸ M διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν (ε).

1360. Ὀρθὴ γωνία στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της A κειμένην ἐντὸς κύκλου (K, R), αἱ δὲ πλευραί της τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς Γ καὶ Δ. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς M τῶν εἰς Γ καὶ Δ ἀγομένων ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (K, R).

1361. Ἔστω σταθερὰ περιφέρεια (c) καὶ σταθερὰ χορδὴ AB αὐτῆς. Διὰ τυχόντος σημείου P τῆς ευθAB διέρχονται δύο περιφέρειαι (γ) καὶ (γ′) ἐφαπτόμεναι τῆς (c) εἰς A καὶ B. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς M τῶν δύο τούτων μεταβλητῶν περιφερειῶν;

1362. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν πόλων τῶν ἀντιστροφῶν δεδομένης δυνάμεως k τῶν μετασχηματιζουσῶν δύο ὁμοκέντρους περιφερείας εἰς δύο ἴσας περιφερείας.

1363. Δίδονται δύο περιφέρειαι $(c_1)$ καὶ $(c_2)$ καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως δύο σημεῖα A καὶ B. Νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον P τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν $(c_1)$ καὶ $(c_2)$ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν αἱ εὐθεῖαι PA, PB ἐπανατέμνουν τὰς $(c_1)$, $(c_2)$ εἰς A′, B′, νὰ εἶναι A′B′ $\perp$ ἐπὶ τὸν ριζικὸν ἄξονα.

1364. Ἔστωσαν F καὶ F′ δύο σχήματα ἀντίστροφα ἀλλήλων εἰς μίαν ἀντιστροφὴν (O, k). Μετασχηματίζομεν τὰ F καὶ F′ διὰ μιᾶς ἄλλης ἀντιστροφῆς (O′, k′) καὶ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σχήματα Φ καὶ Φ′. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Φ καὶ Φ′ εἶναι ὁμόλογα ἀλλήλων εἰς μίαν ἀντιστροφήν.

1365. Νὰ εὑρεθῇ εἰς τί μετατρέπεται ἁρμονικὴ τετράς (A, B, Γ, Δ) εἰς μίαν ἀντιστροφὴν πόλου O κειμένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὰ τέσσαρα σημεῖα καὶ μὴ συμπίπτοντος μὲ αὐτά.

1366. **Ἁρμονικὸν τετράπλευρον.** Θεωροῦμεν μίαν ἁρμονικὴν διαίρεσιν (A, B, Γ, Δ) = —1 καὶ ἐκτελοῦμεν ἐπὶ ταύτης μίαν ἀντιστροφήν, τῆς ὁποίας ὁ πόλος εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ φορέως τῆς διαιρέσεως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ὁμόλογα τῶν A, B, Γ, Δ εἶναι κορυφαὶ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου τὰ γινόμενα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσα.

1367. Ἔστω OABΓ κυρτὸν τετράπλευρον καὶ A′, B′, Γ′ τὰ ἀντίστροφα τῶν A, B, Γ εἰς μίαν θετικὴν ἀντιστροφὴν (O, k). Δείξατε ὅτι, ἂν τὸ OABΓ δὲν εἶναι ἐγγράψιμον, τότε A′B′ + B′Γ′ > A′Γ′, ἐνῷ, ἂν εἶναι ἐγγράψιμον, τότε A′B′ + B′Γ′ = A′Γ′. Χρησιμοποιοῦντες δὲ τὸν τύπον τῆς § 424 ἀποδείξατε τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

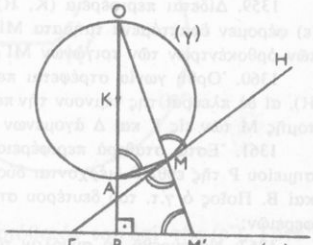
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

## ΔΙΑΤΗΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΝ

**429**. α') Ἐνταῦθα λέγοντες «γραμμὴν» θὰ ἐννοοῦμεν τὴν εὐθεῖαν ἢ τὴν περιφέρειαν, διότι εἰς τὴν παροῦσαν πραγματείαν μόνον τὰς δύο ταύτας γραμμὰς ἐξετάζομεν. Λέγοντες δὲ **γωνίαν δύο γραμμῶν τεμνομένων εἴς τι σημεῖον** Μ ἐννοοῦμεν μίαν μὴ προσανατολισμένην κυρτὴν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῶν δύο γραμμῶν τὰς ἀγομένας εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Μ. Ἂν ἡ γραμμὴ εἶναι εὐθεῖα, τότε ὡς ἐφαπτομένη αὐτῆς ἀγομένη εἰς ἓν σημεῖον Μ αὐτῆς νοεῖται ἡ ἰδία εὐθεῖα.

**β') (Θ). Ἡ ἐφαπτομένη γραμμῆς (γ) εἴς τι σημεῖον αὐτῆς Μ διάφορον τοῦ πόλου καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀντιστρόφου γραμμῆς (γ') εἰς τὸ σημεῖον Μ' αὐτῆς, τὸ ὁμόλογον (ἀντίστροφον) τοῦ Μ, εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΜΜ'.**

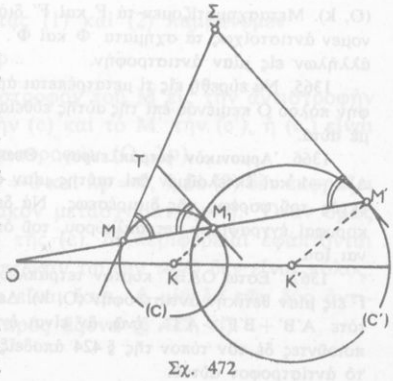
*Περίπτωσις 1η*. Αἱ ἀντίστροφοι γραμμαὶ εἶναι εὐθεῖα (γ') καὶ περιφέρεια (γ). Ἔστωσαν Μ καὶ Μ' δύο ὁμόλογα σημεῖα τῶν ἀντιστρόφων τούτων γραμμῶν, ΟΒ⊥(γ') καὶ Α τὸ ἀντίστροφον τοῦ Β (σχ. 471). Ἔστω ΓΜΗ ἡ ἐφαπτομένη τῆς (γ) εἰς τὸ Μ, ἐνῶ ἡ εἰς Μ' ἐφαπτομένη τῆς (γ') εἶναι ἡ ευθΜ'Γ.



Σχ. 471

Ἔχομεν ὅτι $\widehat{\Gamma M M'} = \widehat{OMH} = \widehat{OAM}$ (ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης..) $= \widehat{MM'B}$ (λόγῳ τοῦ ἐγγραψίμου ΑΜΜ'Β). Ἑπομένως $\widehat{\Gamma M M'} = \widehat{\Gamma M' M} \Rightarrow$ τρ.ΓΜΜ' ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΓ, Μ'Γ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΜΜ'.

*Περίπτωσις 2α*. Αἱ ἀντίστροφοι γραμμαὶ εἶναι περιφέρειαι (c) καὶ (c')—Ὁ πόλος ἀντιστροφῆς Ο τῶν δύο κύκλων εἶναι συγχρόνως καὶ κέντρον ὁμοιοθεσίας τούτων. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν διὰ τοῦ Ο τέμνουσαν τῶν δύο περιφερειῶν, αὕτη ὁρίζει ἀφ' ἑνὸς δύο σημεῖα $M_1$ καὶ Μ' ὁμοιόθετα καὶ ἀφ' ἑτέρου δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' ἀντίστροφα ἀλλήλων. Αἱ ἐφαπτόμεναι $M_1T$ καὶ Μ'Σ εἰς τὰ ὁμοιόθετα σημεῖα $M_1$ καὶ Μ' εἶναι παράλληλοι. Ἔστω ΜΤ ἡ ἐφαπτομένη τῆς (c) εἰς Μ. Ἐπειδὴ τὸ τρ. $TMM_1$ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ $M_1T$ // Μ'Σ, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ΣΜΜ' εἶναι

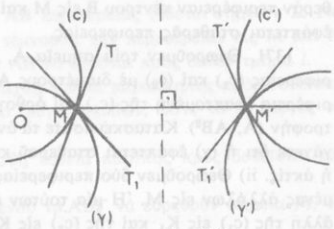


Σχ. 472

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἰσοσκελὲς μὲ ΣΜ = ΣΜ΄. Ὅθεν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἀντίστροφα σημεῖα Μ καὶ Μ΄ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν μεσο ⊥ τοῦ ΜΜ΄.

γ΄) (Θ). **Ἡ μὴ διευθυνομένη κυρτὴ γωνία δύο γραμμῶν (γ) καὶ (c) τεμνομένων εἴς τι σημεῖον Μ ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ἀντιστρόφων των (γ΄) καὶ (c΄) τεμνομένων εἰς τὸ ὁμόλογον σημεῖον Μ΄ τοῦ Μ** (σχ. 473)· διότι τὸ ζεῦγος τῶν ἐφαπτομένων ΜΤ καὶ $ΜΤ_1$ τῶν (c) καὶ (γ) εἶναι κατὰ τὸ προηγούμενον (Θ) συμμετρικὸν τοῦ ζεύγους τῶν ἐφαπτομένων Μ΄Τ΄ καὶ $Μ΄Τ΄_1$ τῶν (c΄) καὶ (γ΄) ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΜΜ΄. Ἑπομένως αἱ κυρταὶ μὴ διευθυνόμεναι γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΜΤ, $ΜΤ_1$ εἶναι ἀντιστοίχως συμμετρικαὶ τῶν ὑπὸ τῶν Μ΄Τ΄ καὶ $Μ΄Τ΄_1$ σχηματιζομένων, ἄρα ἀντιστοίχως ἴσαι.



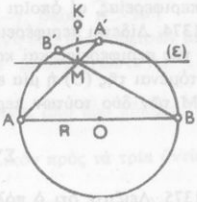
Σχ. 473

**Πόρισμα 1ον. Δύο γραμμαὶ ὀρθογωνίως τεμνόμεναι μετασχηματίζονται δι' ἀντιστροφῆς εἰς δύο γραμμὰς ὀρθογωνίως τεμνομένας.**

**Πόρισμα 2ον. Δύο γραμμαὶ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Μ μετασχηματίζονται δι' ἀντιστροφῆς εἰς δύο γραμμὰς ἐφαπτομένας εἰς τὸ σημεῖον Μ΄, ὁμόλογον τοῦ Μ.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. **Δίδεται περιφέρεια (Ο, R), διάμετρος ΑΒ αὐτῆς καὶ εὐθεῖα (ε)//ΑΒ. Ἐπὶ τῆς (ε) λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ, ΜΒ, ἐπανατεμνούσας τὴν περιφέρειαν εἰς Α΄ καὶ Β΄. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια (ΜΑ΄Β΄) τέμνει ὀρθογωνίως τὴν (Ο, R) καὶ συγχρόνως ἐφάπτεται τῆς (ε).**

Λύσις. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν ἀντιστροφὴν πόλου Μ καὶ δυνάμεως ἴσης πρὸς τὴν ΔυνΜ/(Ο, R), τότε ἡ (Ο, R) μένει ἀναλλοίωτος, τὰ δὲ σημεῖα Α΄, Β΄ ἔχουν ἀντίστροφα τὰ Α καὶ Β. Ἡ περιφέρεια (ΜΑ΄Β΄) ὡς διερχομένη διὰ τοῦ πόλου μετασχηματίζεται εἰς εὐθεῖαν καὶ δὴ τὴν ευθΑΒ. Ἡ ΑΒ ὡς διάμετρος τέμνει καθέτως τὴν περιφέρειαν (Ο, R), ἄρα καὶ τὰ ἀντίστροφά των, δηλ. ἡ (ΜΑ΄Β΄) καὶ ἡ (Ο, R) τέμνονται ὀρθογωνίως.



Σχ. 474

Ἐξ ἄλλου τὸ ἀντίστροφον τῆς ευθ ΑΒ, δηλ. ἡ περιφέρεια (ΜΑ΄Β΄), ἔχει τὸ κέντρον της Κ ἐπὶ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ πόλου Μ ἀντιστροφῆς καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἄρα καθέτου καὶ ἐπὶ τὴν (ε). Δηλ. ΜΚ ⊥ (ε), ἄρα ἡ (ΜΑ΄Β΄) ἐφάπτεται τῆς (ε).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1368. Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς εἰς Α καὶ ἔστω σημεῖον Μ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν.

i) Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν ἐν γένει δύο περιφέρειαι διερχόμεναι διὰ τοῦ Μ καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δοθεισῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ii) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σύνολον τῶν δευτέρων σημείων τομῆς Ρ τῶν περιφερειῶν τούτων, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὸν ριζικὸν ἄξονα.

1369. Ἔστωσαν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπ' εὐθείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν αἱ περιφέρειαι (ΑΓΒ) καὶ (ΑΓΔ) τέμνωνται ὀρθογωνίως, τότε καὶ αἱ περιφέρειαι (ΒΔΑ) καὶ (ΒΔΓ) τέμνονται ὀρθογωνίως.

1370. Μεταβλητὴ ἐφαπτομένη σταθερᾶς περιφερείας κέντρου Α τέμνει ἑτέραν σταθερὰν περιφέρειαν κέντρου Β εἰς Μ καὶ Ν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεταβλητὴ περιφέρεια (ΒΜΝ) ἐφάπτεται σταθερᾶς περιφερείας.

1371. Θεωροῦμεν τρία σημεῖα Α, Ο, Β ἐπ' εὐθείας, ὅπου ΟΑ = ΟΒ = R καὶ δύο περιφερείας ($c_1$) καὶ ($c_2$) μὲ διαμέτρους ΑΒ καὶ ΑΟ ἀντιστοίχως. Ἔστω (γ) μεταβλητὴ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς ($c_1$) καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα τὴν ($c_2$). i) Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντιτροφὴν (Α, $AB^2$). Κατασκευάσατε τὰ ἀντίστροφα τῶν περιφερειῶν ($c_1$), ($c_2$), (γ) καὶ συναγάγετε ὅτι ἡ (γ) ἐφάπτεται σταθεροῦ κύκλου ($c_3$), τοῦ ὁποίου νὰ ὁρισθῇ τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτίς. ii) Θεωροῦμεν δύο περιφερείας τῆς κατηγορίας τῆς (γ), τὰς (γ) καὶ (γ΄), ἐφαπτομένας ἀλλήλων εἰς Μ. Ἡ μία τούτων ἐφάπτεται τῆς ($c_1$) εἰς $P_1$ καὶ τῆς ($c_3$) εἰς $P_3$, ἡ δὲ ἄλλη τῆς ($c_1$) εἰς $K_1$ καὶ τῆς ($c_3$) εἰς $K_3$. Δείξατε ὅτι τὰ Α, $P_1$, Μ, $K_3$, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας καὶ τὰ Α, $P_3$, Μ, $K_1$ ἐπίσης καὶ ὅτι αἱ δύο αὐταὶ περιφέρειαι εἶναι ὀρθογώνιοι. iii) Δείξατε ὅτι ὑπάρχει ζεῦγος περιφερειῶν (γ) καὶ (γ΄) πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ τοιοῦτον, ὥστε τὰ Α, $P_1$, Μ, $K_3$ νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι τότε τὰ Α, $P_1$, Μ, $K_3$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα. Ὑπολογίσατε τὰς ἀκτῖνας τῶν ἀνωτέρω δύο κύκλων (γ) καὶ (γ΄) συναρτήσει τοῦ R.

1372. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν πόλων τῶν ἀντιστροφῶν, δεδομένης δυνάμεως c, τῶν μετασχηματιζουσῶν δύο τεμνομένας εἰς Α καὶ Β περιφερείας εἰς δύο ἴσας περιφερείας.

(Ὑπόδ. Ἂν Μ εἷς τῶν πόλων τούτων, νὰ θεωρηθῇ ἡ περιφέρεια ΑΜΒ καὶ νὰ ἐξετασθῇ ἡ θέσις τοῦ μετεσχηματισμένου τῆς περιφερείας ταύτης ὡς πρὸς τὰς ἴσας περιφερείας, εἰς ἃς μετασχηματίζονται αἱ δύο ζητούμεναι).

1373. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Α, Β καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα μίαν δοθεῖσαν περιφέρειαν (c) τέμνει ὑπὸ ἴσας γωνίας τὰς δύο περιφερείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ ἐφάπτονται τῆς (c).

1374. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Διὰ τοῦ Α ἄγεται τέμνουσα ΑΒΓ τῆς περιφερείας καὶ κατόπιν γράφονται δύο περιφέρειαι διερχόμεναι διὰ τοῦ Α καὶ ἐφαπτόμεναι τῆς (Ο) ἡ μία εἰς Β καὶ ἡ ἄλλη εἰς Γ. Τίς ὁ τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς Μ τῶν δύο τούτων περιφερειῶν, ὅταν ἡ τέμνουσα ΑΒΓ μεταβάλλεται;

## ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1375. Δείξατε ὅτι ὁ πόλος εὐθείας συνδεούσης δύο σημεῖα συζυγῆ ὡς πρὸς κύκλον (Ο) εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὸ κέντρον Ο καὶ τὰ δύο συζυγῆ σημεῖα.

1376. Αἱ εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ὀξυγωνίου τρ.ΑΒΓ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων σχηματίζουν τρίγωνον ὁμοιόθετον πρὸς τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ τρ.ΑΒΓ. Τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας τῶν δύο τούτων τριγώνων κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Euler τοῦ τρ.ΑΒΓ.

1377. Γωνία σταθεροῦ μεγέθους στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Α μένουσαν σταθεράν, ἐνῷ αἱ πλευραί της τέμνουν σταθερὰν εὐθεῖαν (ε) εἰς Β καὶ Γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) ἐφάπτεται σταθερᾶς περιφερείας.

1378. Περιφέρεια (Β) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Α ἑτέρας περιφερείας (Α). Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (Α) καὶ (Β) εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς (Β) εἰς ἀντιστροφὴν μὲ διευθύνουσαν περιφέρειαν τὴν (Α).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1379. Τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς κορυφὰς τετραπλεύρου λαμβανομένας ἀνὰ τρεῖς σχηματίζουν τετράπλευρον ὁμοιόθετον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ. Εὕρετε τὸ κέντρον καὶ τὸν λόγον ὁμοιοθεσίας.

1380. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ τῶν ὁριζομένων ἐκ τῆς ὀρθοκεντρικῆς τετράδος ΑΒΓΗ σχηματίζουν τρίγωνον ὁμοιόθετον πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ καὶ ὅτι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ νέου τριγώνου συμπίπτει μὲ τὸ βαρύκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ.

1381. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ΑΒ περιφερείας δίδεται σημεῖον Σ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Σ καὶ τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς ΜΝ ἐπὶ τὴν ΑΒ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα $l$.

1382. Δοθέντων δύο τεμνομένων κύκλων νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τέμνουσα τὰς δύο περιφερείας εἰς δύο ζεύγη σημείων, ὥστε τὸ ἓν ζεῦγος νὰ χωρίζῃ ἁρμονικῶς τὸ ἄλλο.

1383 Δοθεισῶν δύο γωνιῶν, νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παρ/λος πρὸς δοθεῖσαν καὶ ἀποτέμνουσα ἴσας χορδὰς τῶν γωνιῶν.

1384. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ δεδομένου τρ.ΑΒΓ νὰ εὑρεθοῦν σημεῖα Μ, Ν, Ρ ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε :

$$BM = MN = NP = PA.$$

1385. Δοθεισῶν δύο ἴσων περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ) καὶ δύο σημείων Α καὶ Β ἐπ' αὐτῶν, νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ΜΝ δεδομένου μήκους $l$ καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ) εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τόξα $\widehat{A\vec{M}}$ καὶ $\widehat{B\vec{N}}$ νὰ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

1386. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ δύο κύκλους χορδὰς ἐχούσας δοθὲν ἄθροισμα.

1387. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ δύο περιφέρειαι, ἐφ' ὧν κεῖνται ἀντιστοίχως τὰ Β καὶ Γ.

1388. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ δοθέντος τρ.ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι :

$$B\Delta = \Delta E = E\Gamma.$$

1389. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν $\widehat{A}$, α—β, α—γ, ὅπου $\widehat{A} > 90^0$.

1390. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἀχθῇ χορδὴ τριχοτομουμένη ὑπὸ δύο δοθεισῶν ἀκτίνων.

1391. Ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ τριγ.ΑΒΓ ὁρίσατε σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε $AP^2 : BP \cdot P\Gamma$ νὰ ἰσοῦται μὲ δοθέντα λόγον μ : ν.

1392. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ δύο κύκλους χορδὰς ἀναλόγους πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν δύο κύκλων.

1393. Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὁμοκυκλικὸν πρὸς τὰ τρία ἀντίστροφά του εἰς τρεῖς δεδομένας θετικὰς ἀντιστροφάς.

1394. Νὰ εὑρεθῇ ἀντιστροφὴ μετασχηματίζουσα τρεῖς δοθέντας κύκλους, ὧν τὰ κέντρα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας εἰς τρεῖς κύκλους, ὧν τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας.

1395. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἀποκόπτουσα ἀπὸ δοθείσης εὐθείας χορδὴν δοθέντος μήκους.

1396. Προσδιορίσατε τὰ στοιχεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ :

$$T = \text{Μετ}(\overrightarrow{-\delta}) \circ \text{Στρ}(O, \theta) \circ \text{Μετ}(\overrightarrow{\delta}).$$

1397. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τὰς τρεῖς στροφάς :

$$\text{Στρ}\left(A, \frac{2\pi}{3}\right), \text{Στρ}\left(B, \frac{2\pi}{3}\right), \text{Στρ}\left(\Gamma, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ (δεσμευμένον) ἔρχεται διὰ τῆς πρώτης στροφῆς εἰς $\overrightarrow{\Delta_1 E_1}$, τὸ $\overrightarrow{\Delta_1 E_1}$ ἔρχεται διὰ τῆς δευτέρας εἰς $\overrightarrow{\Delta_2 E_2}$ καὶ τὸ $\overrightarrow{\Delta_2 E_2}$ διὰ τῆς τρίτης εἰς $\overrightarrow{\Delta_3 E_3}$.

i) Προσδιορίσατε τὴν γωνίαν $(\overrightarrow{\Delta E}, \overrightarrow{\Delta_3 E_3})$.

ii) Προσδιορίσατε τὸν μετασχηματισμόν.

$$T = \text{Στρ}\left(\Gamma, \frac{2\pi}{3}\right) \circ \text{Στρ}\left(B, \frac{2\pi}{3}\right) \circ \text{Στρ}\left(A, \frac{2\pi}{3}\right)$$

(Δηλ. εὕρετε μὲ ποῖον γνωστὸν μετασχηματισμὸν εἶναι ἰσοδύναμος ὁ Τ καὶ κατασκευάσατε τὰ στοιχεῖα του).

iii) Καθορίσατε τὸ εἶδος τοῦ τρ.ΑΒΓ, ἵνα ὁ Τ εἶναι ταυτοτικός.

1398. Δίδεται περιφέρεια, σημεῖον Β ἐπὶ αὐτῆς καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς εἰς Β ἐφαπτομένης. Διὰ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΓΔ καὶ προβάλλομεν τὰ Γ καὶ Δ ἐπὶ τὴν ευθΑΒ. Ἔστωσαν Γ΄ καὶ Δ΄ αἱ προβολαὶ τῶν Γ καὶ Δ. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν Γ΄Δ καὶ ΓΔ΄.

1399. Ἐν προσανατολισμένῳ ἐπιπέδῳ δίδονται δύο ἴσαι περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ) καὶ ἐπ' αὐτῶν δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δύο ἄλλα μεταβλητὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τοιαῦτα, ὥστε τὰ τόξα $\widehat{\overrightarrow{AM}}$ καὶ $\widehat{\overrightarrow{BN}}$ νὰ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΜΝ.

1400. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΜΝ, ὅταν τὰ τόξα $\widehat{\overrightarrow{AM}}$ καὶ $\widehat{\overrightarrow{BN}}$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.

1401. Δίδονται παρ/λοι εὐθεῖαι $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$, σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς ταινίας αὐτῶν καὶ ἕτερον σταθερὸν σημεῖον Ρ ἐντὸς τῆς ταινίας. Διὰ τοῦ Σ διέρχεται εὐθεῖα (δ) μεταβλητὴ τέμνουσα τὴν $(\varepsilon_1)$ εἰς Α καὶ τὴν $(\varepsilon_2)$ εἰς Β. Ἡ εὐθΒΡ τέμνει τὴν $(\varepsilon_1)$ εἰς Μ. Τόπος τῆς τομῆς Ν τῶν εὐθειῶν ΜΣ καὶ ΡΑ.

1402. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Ο καὶ Ι. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ εἰς τὴν στροφὴν κέντρου Ο καὶ γωνίας $+\pi/2$ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ευθΜΙ.

1403. Δίδονται δύο στροφαί : $(O_1, \theta_1)$, $(O_2, \theta_2)$. Σημεῖον Μ ἔρχεται διὰ τῆς πρώτης εἰς $M_1$ καὶ τὸ $M_1$ διὰ τῆς δευτέρας εἰς $M_2$. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν Μ τοιούτων, ὥστε $M_1M_2 = l$ (δεδομένον μῆκος).

1404. Μεταβλητὴ περιφέρεια (Ο) κέντρου Ο διέρχεται διὰ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β. Ἔστω Μ σημεῖον τῆς ΟΒ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{MB}/\overline{MO} = -m$, ὅπου m δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός.

i) Ποῖος ὁ γ.τ. τῶν Μ;

ii) Ἡ εἰς τὸ Μ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ τέμνει τὴν περιφέρειαν (Ο) εἰς Γ καὶ Δ. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ βαρυκέντρου G τοῦ μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΓΔ; Δείξατε ἀκόμη ὅτι ἡ OG διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

iii) Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων τοῦ τρ. ΑΓΔ;

1405. Δίδονται δύο σημεῖα σταθερά, Ο καὶ Ι. Ἔστω Μ΄ τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ εἰς τὴν ὁμοιότητα $\left(O, \frac{\pi}{2}, k\right)$. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε τὰ Μ, Ι, Μ΄ νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1406. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) ἐφάπτεται τῆς ευθΑΒΓ εἰς Γ. Ἡ ἐκ τοῦ Α ἀγομένη ἐφαπτομένη τῆς (γ), διάφορος τῆς ΑΓ, ἔχει σημεῖον ἐπαφῆς τὸ Τ. Ἡ ευθΒΤ ἐπανατέμνει τὴν (γ) εἰς Μ. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τοῦ Μ.

1407. Δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σταθερὰ σημεῖα Ι, Α, Β καὶ εὐθεῖα (δ) τέμνουσα τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΙΑΒ εἰς τὸ Ι. Ἐπὶ τῆς (δ) λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον S καὶ θεωροῦμεν τὴν ἀντιστροφὴν (S, SB²). Ἔστω P τὸ ἀντίστροφον τοῦ A εἰς τὴν ἀντιστροφὴν ταύτην. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ P, ὅταν τὸ S διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν (δ).

1408. Μεταβλητὴ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σταθερῶν σημείων A καὶ Δ τέμνει δύο σταθερὰς εὐθείας ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) διερχομένας διὰ τοῦ A εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1409. Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι (K) καὶ (K′) ἐκτὸς ἀλλήλων καὶ δύο σταθερὰ σημεῖα ἐπ' αὐτῶν A καὶ A′. Δύο περιφέρειαι (γ) καὶ (γ′) ἐφάπτονται τῶν (K) καὶ (K′) εἰς A καὶ A′ καὶ μεταξύ των εἰς τὸ S. Δείξατε διὰ καταλλήλου ἀντιστροφῆς ὅτι τὸ σύνολον τῶν S ἀποτελεῖ δύο περιφερείας ὀρθογωνίους μεταξύ των.

1410. Σημεῖον M περιφερείας (O,R) προβάλλεται εἰς A καὶ B ἐπὶ δύο καθέτων διαμέτρων ($\delta_1$) καὶ ($\delta_2$) τῆς (O,R). i) Ἐὰν P ὁ πόλος τῆς AB ὡς πρὸς τὴν (O,R) καὶ $P_1$, $P_2$ αἱ προβολαὶ τοῦ P ἐπὶ τὰς ($\delta_1$) καὶ ($\delta_2$), νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ $P_1P_2$ ἐφάπτεται τῆς (O,R) εἰς M. ii) Μὲ διάμετρον $P_1P_2$ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν εἰς Γ καὶ Δ τὴν (O,R). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΓΔ διέρχεται διὰ τῶν A καὶ B.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1975 (IX) — ΑΝΤΙΤ. 85.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ: 2617/7-6-75

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ - ΕΚΤΥΠ. - ΒΙΒΛΙΟΔ.: Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ - Α.Ε.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής