

ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΑΙ
Δ', Ε', ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1975

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α. Α. Δικαίου

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΑΙ
Δ', Ε', ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

17570

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1975
ΔΩΡΕΑΝ

1 / 11/11/11

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

18570

ΔΩΡΕΑΝ

ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΑΙ

Δ', Ε', ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

Το έργο είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων. Το έργο είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Έχει καταβληθεί ιδιαίτερα προσπάθεια από την Ελληνική και κατά το δυνατόν απλοποιημένα έκδοσις των περιεχομένων θεμάτων, χωρίς ταύτα να γίνονται εις βάρος της επιστημονικής αξιοπιστίας του βιβλίου. Ειδικά τα θέματα έχουν επεξεργασθεί με ιδιαίτερη προσοχή, ώστε να παραληφθούν εις πρώτην θέσιν, ενώ οι απαντήσεις είναι η απάντηση των διδασκόντων, ενώ οι απαντήσεις των διδασκόντων είναι οι απαντήσεις των διδασκόντων.

Έχει επίσης δοθεί ιδιαίτερη προσοχή εις τας περιοχάς των γεωμετρικών τόπων και κατασκευών, οι δε προτεινόμενες ασκήσεις προς λύσιν κατατάσσονται εις δύο κατηγορίας, από το στοιχείον Α των απλοποιήσεων και από το στοιχείον Β των δυσκολιών, ώστε να παρέχεται η εύχρηστος εις τον μαθητή της προοδευτικής μεταβάσεως εις τας δυσκολίες ασκήσεις.

Τέλος με την επιθυμία ότι έχω επιτύχει τον σκοπόν μου, παραδίδω το

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1975

ΧΡΗΣΤΟΣ Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΥΟΛΟΚΙΝΑΠΑΠ Τ.ΡΧ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΚΑΙ
ΔΕΥΤΕΡΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1975

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ἡ ἀριθμητικὴ περιέχεται εἰς παραγράφους

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ ἀνὰ χειρας βιβλίον ἀπευθύνεται πρὸς τοὺς μαθητὰς τῶν τεσσάρων τελευταίων τάξεων τῶν Γυμνασίων θεωρητικῆς κατευθύνσεως καὶ πραγματεύεται διεξοδικῶς τὰ διὰ τὰς ἐν λόγῳ τάξεις θέματα τῆς ὅλης τῆς Εὐκλείδειου Γεωμετρίας τῆς καθοριζομένης ὑπὸ τοῦ ἰσχύοντος ἐπισήμου ἀναλυτικοῦ προγράμματος τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων.

Ἐχει καταβληθῇ ἰδιαιτέρα προσπάθεια διὰ τὴν εὐληπτον καὶ κατὰ τὸ δυνατόν ἀπλουστέραν ἔκθεσιν τῶν περιεχομένων θεμάτων, χωρὶς τοῦτο νὰ γίνεται εἰς βάρος τῆς ἐπιστημονικῆς ἀριότητος τοῦ βιβλίου. Ἐδάφια τὰ ὅποια ἔχουν σημειωθῇ δι' ἀστερίσκον, δύνανται νὰ παραληφθοῦν εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν, ἐκρίθη σκόπιμος ὁμως ἡ ἀναγραφὴ τῶν διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ ἔργου καὶ δέον νὰ μελετηθοῦν ἀργότερον ὑπὸ τῶν ἐνδιαφερομένων διὰ τὴν βαθυτέραν γνῶσιν τῆς γεωμετρίας.

Ἐχει ἐκτεθῇ ἱκανὸν πλῆθος παραδειγμάτων εἰς τὰς περιοχὰς τῶν γεωμετρικῶν τόπων καὶ κατασκευῶν, αἱ δὲ προτεινόμεναι ἀσκήσεις πρὸς λύσιν κλιμακοῦνται εἰς δύο κατηγορίας, ὑπὸ τὸ στοιχεῖον Α τῶν ἀπλουστέρων καὶ ὑπὸ τὸ στοιχεῖον Β τῶν δυσκολωτέρων, ὥστε νὰ παρέχεται ἡ εὐχέρεια εἰς τὸν μαθητὴν τῆς προοδευτικῆς μεταβάσεως εἰς τὰς δυσκόλους ἀσκήσεις.

Τέλος μὲ τὴν πεποιθήσιν ὅτι ἔχω ἐπιτύχει τὸν σκοπὸν μου, παραδίδω τὸ βιβλίον εἰς τὴν μαθητιῶσαν νεολαίαν.

ΧΡΗΣΤΟΣ Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ἡ ἀρίθμησης ἀναφέρεται εἰς παραγράφους

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ §

Γεωμετρία - Πρωταρχικαὶ ἔννοιαι - Αἱ προτάσεις τῆς γεωμετρίας - Γεωμετρικὸν σχῆμα	1 - 9
Αἱ τρεῖς βασικαὶ κατηγορίαι ἀξιωμάτων - Ἀξιώματα θέσεως - Ἀξιώματα ἰσότητος - Ἀξιώματα διατάξεως	10 - 16
Ἡμιευθεῖα - Εὐθύγραμμον τμήμα	19 - 20
Ἰσότης εὐθυγράμμων τμημάτων - Ἰδιότητες	23
Πράξεις καὶ διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων	25 - 32
Περὶ γραμμῶν	33 - 45
Ἡμιεπίπεδον - Ἐπίπεδα τμήματα	46 - 47
Εἶδη ἐπιφανειῶν	48
Ἐπιπεδομετρία καὶ Στερεομετρία	49
Γωνίαι	50 - 51
Ἰσότης πράξεις καὶ διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν	52 - 60
Παραπληρωματικαὶ γωνίαι - Διχοτόμος γωνίας - Ὁρθὴ γωνία	61 - 65
Ἀξονικὴ συμμετρία	71 - 72
Κάθετος καὶ πλάγιοι - Μεσοκάθετος - Γεωμετρικὸς τόπος	73 - 80
Ἰδιότης τῆς διχοτόμου γωνίας	81
Κεντρικὴ συμμετρία - Κατὰ κορυφὴν γωνίαι	82 - 84
Παράλληλοι εὐθεῖαι	86 - 92
Ὁμόροπος καὶ ἀντίροπος παραλλήλια	93
Γωνίαι μὲ πλευρὰς παραλλήλους ἢ καθετοὺς	94 - 95
Ἰσότης καὶ πράξεις εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων	96 - 98

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

§ §

Πολύγωνα	99 - 100
Τὸ τρίγωνον - Εἶδη τριγώνων	101 - 104
Ἀθροισμα γωνιῶν τριγώνου καὶ πολυγώνου	105 - 106
Ἰσότης τριγώνων	107 - 110
Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον	111 - 114
Ἀνισοτικαὶ σχέσεις εἰς τὰ τρίγωνα	115 - 118
Τετράπλευρα - Παραλληλόγραμμον	119 - 132
Ὁρθογώνιον - Ρόμβος - Τετράγωνον	133 - 146
Παράλληλος μεταφορὰ	147 - 148

Τράπεζιον - Ἴσοσκελές τραπέζιον	149 - 153
Ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων	154 - 157
Κέντρα τοῦ τριγώνου - Περιέντρον - Ὁρθόκεντρον - Βαρύκεντρον - Ἐγκέντρον - Παράκεντρα	158 - 164

BIBAION ΔΕΥΤΕΡΟΝ

§ §

Ὁ κύκλος - Ἴσοι κύκλοι - Συμμετρίαι	166 - 171
Ἐπίκεντρος γωνία	173
Ἰσότης, πράξεις, διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων	175
Μέσον τόξου - Διαδοχικά - Παραπληρωματικά τόξα	176 - 178
Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ κύκλου	182 - 187
Σχετικαὶ θέσεις δύο κύκλων	189 - 196
Γωνία δύο κύκλων - Ὁρθογώνιοι κύκλοι	198 - 199
Σχέσις ἐπικέντρου καὶ ἐγγεγραμμένης γωνίας	204
Γωνία ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης	205
Γωνία τεμνομένων χορδῶν	206 - 207
Ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα	210 - 213
Περιγεγραμμένα τετράπλευρα	216
Παραγεγραμμένα πολύγωνα	217 - 218
Γεωμετρικαὶ Κατασκευαὶ - Στοιχειώδη γεωμετρικὰ προβλήματα	219 - 231
Ἀπλᾷ κατασκευαὶ τριγώνων	232 - 239
Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος - Παραδείγματα	241 - 245
Στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ τόποι - Παραδείγματα	246 - 252

BIBAION ΤΡΙΤΟΝ

§ §

Μετρικὴ Γεωμετρία - Γεωμετρικὰ μεγέθη - Μονάδες μετρήσεως	253 - 258
Ἀναλογίαι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν	260 - 261
Μέση ἀνάλογος - Τετάρτη ἀνάλογος	262 - 263
Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ	264
Κατασκευὴ τετάρτης ἀναλόγου	266
Ὅμοια τρίγωνα	268 - 275
Ὅμοια πολύγωνα	276 - 279
Ὁμοιοθεσία	280 - 286
Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ	287 - 288
Δέσμη εὐθειῶν - θεωρήματα τῆς δέσμης	289 - 292
Περὶ ὀρθῶν προβολῶν	293 - 294
Μετρικαὶ σχέσεις εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα	296
Πυθαγόρειον θεώρημα	297
Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ	304 - 305
Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τυχὸν τρίγωνον	306 - 307
Θεωρήματα διαμέσων	308 - 309
Ἐμβαδὰ κλειστῶν εὐθυγράμμων σχημάτων	311 - 313
Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου καὶ παραλληλογράμμου	314 - 318
Ἐμβαδὸν τριγώνου	319
Ἐμβαδὸν τραπέζιου	321
Ἐμβαδὰ πολυγώνων	323 - 325
Μετασχηματισμὸς πολυγώνου	326
Τόπος Ἡρώου	328
Ἡ πολυλογία ἀκτίνων τῶν κύκλων τριγώνου	329 - 331

Λόγος τῶν ἐμβαδῶν ὁμοίων πολυγώνων	332 - 333
Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τετράπλευρα	334 - 335
Θεωρήματα τῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου	336 - 337
Ἀρμονικὴ διαίρεσις τμήματος	338 - 340
Ἀπολλώνιος κύκλος	341
Δύναμις σημείου πρὸς κύκλον	342 - 347
Ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ εἰς τὴν γεωμετρίαν	348
Διαίρεσις τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον	349
ΡΙΖΙΚὸς ἄξων - ΡΙΖΙΚὸν κέντρον	350 - 352

BIBAION TETARTON

§ §

Κανονικὰ πολύγωνα - Γενικὰ θεωρήματα καὶ συμβολισμοὶ	353 - 364
Τετράγωνον	365
Κανονικὸν ἑξάγωνον	366
Κανονικὸν (ισόπλευρον) τρίγωνον	367
Κανονικὸν δεκάγωνον	368
Κανονικὸν πεντάγωνον	369
Κανονικὸν δεκαπεντάγωνον	370
Μέτρησις τοῦ κύκλου - σχετικὰ θεωρήματα	371 - 376
Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ π	377
Ἐμβαδὸν κύκλου - Κυκλικὸς τομεὺς - Κυκλικὸν τμήμα - Μηνίσκος	381 - 385

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

BIBAION PEMPTON

§ §

Τὸ ἐπίπεδον - Ἀξιώματα	386 - 388
Καθορισμὸς ἐπιπέδου	389 - 393
Ἐπίπεδα εἰς τὸν χώρον	397 - 399
Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδον εἰς τὸν χώρον - Εὐθεῖα κάθετος πρὸς ἐπίπεδον	400 - 401
Θεωρήματα τριῶν καθέτων	405 - 407
Μεσοκάθετον ἐπίπεδον	412 - 413
Παράλληλοι εὐθεῖαι	414 - 417
Κάθετα καὶ πλάγια τμήματα πρὸς ἐπίπεδον	418 - 419
Παραλλήλια εὐθείας καὶ ἐπιπέδου	420 - 424
Παραλλήλα ἐπίπεδα - Θεώρημα Θαλοῦ	425 - 436
Ἀσύμβατοι εὐθεῖαι - κοινὴ κάθετος	437 - 444
Ὅρθαι προβολαὶ	445 - 452
Ἀξονικὴ συμμετρία	454 - 455
Συμμετρία ὡς πρὸς ἐπίπεδον	456 - 458
Κεντρικὴ συμμετρία	459 - 460
Διεδροὶ γωνία - Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία - Διχοτομοῦν ἐπίπεδον - Εὐδὴ διέδρων - Κάθετα ἐπίπεδα	473 - 478
Στερεαὶ γωνίαί - Τριεδροὶ στερεαὶ γωνίαί	479 - 481
Προσανατολισμὸς τριέδρου στερεᾶς γωνίας	482
Παραπληρωματικὴ τριέδρου στερεᾶς γωνίας	484
Θεωρήματα ἰσότητος στερεῶν γωνιῶν	485 - 488
Ἀνισοτικαὶ σχέσεις εἰς τὰς στερεὰς γωνίας	489 - 492

BIBAION EKTON

Πολύεδρα – Τετράεδρον – Είδη τετράεδρων	493 - 495
Κέντρον βάρους τετράεδρου	496
Πυραμίς – Κανονική πυραμίς	497 - 499
Κόλουρος πυραμίς – Κανονική κόλουρος πυραμίς	500 - 501
Πρίσμα	502 - 505
Παραλληλεπίπεδον – Όρθογώνιον παραλληλεπίπεδον	506 - 511
Πρισματοιδές	512
Μέτρησις τῶν πολυέδρων – Επιφάνειαι	513 - 519
Όγκοι τῶν πολυέδρων	520 - 529
Όμοια πολύεδρα	530 - 534

BIBAION EBΔOMON

Έπιφάνειαι καὶ στερεὰ ἐκ περιστροφῆς – Όρισμοὶ	535
Κύλινδρος	536 - 543
Κῶνος	544 - 550
Κόλουρος κῶνος	551 - 552
Περιστροφή τριγώνου περὶ ἄξονα	553 - 554
Σφαῖρα – Όρισμοὶ – Συμμετρίαι	555 - 558
Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ σφαίρας	559
Σχετικαὶ θέσεις σφαίρας καὶ ἐπιπέδου	560
Σχετικαὶ θέσεις δύο σφαιρῶν	561
Καθορισμὸς σφαίρας	565
Γεωμετρικοὶ τόποι	566
Γραφικαὶ ἐφαρμογαὶ	567 - 569
Σφαιρικὴ ζώνη – Σφαιρικὴ ἐπιφάνεια	570 - 572
Σφαιρικὸς τομεὺς – Όγκος σφαίρας – Σφαιρικὸς δακτύλιος – Σφαιρικὸν τμήμα	574 - 579
Σφαιρικὰ πολύγωνα	580 - 581

ΜΕΡΟΣ Α'

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Γεωμετρία καλείται ο κλάδος τῶν μαθηματικῶν, ὁ ὁποῖος ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἑκτασιν τῶν στερεῶν σωμάτων, ὡς καὶ τὰς μετρικὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξύ αὐτῶν. Ἀδιαφορεῖ διὰ τὴν ὕλην καὶ ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τὴν μορφήν τῶν στερεῶν, θεωροῦσα αὐτὰ ἄϋλα καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχει τὸ δικαίωμα νὰ τὰ μεταφέρῃ καὶ νὰ θέτῃ τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἢ καὶ τὸ ἐν ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

Ἱστορικὸν σημεῖωμα. Γεωμετρία κατὰ τοὺς ἀρχαίους, εἶναι ἡ τέχνη τοῦ μετρᾶν τὴν Γῆν (τὸ ἔδαφος). Ὁ πατὴρ τῆς ἱστορίας Ἡρόδοτος ἀναφέρει, ὅτι ἡ γεωμετρία ἐδημιουργήθη εἰς τὴν Αἴγυπτον τὴν ἐποχὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ βασιλεὺς Σέσωστρις διένειμεν εἰς κλήρους τὸ ἔδαφος τῆς Αἰγύπτου καὶ παρέστη ἀνάγκη νὰ ἀνευρίσκῃ ἕκαστος Αἰγύπτιος τὸν γεωργικὸν κλῆρον του, μετὰ ἐκάστην πλημμύραν τοῦ Νείλου.

Παρὰ ταῦτα ἡ ἀληθὴς πατρίς τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ ἀρχαία Ἑλλάς, διότι οἱ ἀρχαῖοι πρόγονοί μας ἔδωσαν μεγάλην ὥθησιν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς. Ὡς πρῶτος θεμελιωτὴς τῆς γεωμετρίας θεωρεῖται ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (ΣΤ' αἰὼν π.Χ.), ὁ ὁποῖος διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν ἀναλόγων τμημάτων, τῶν περιλαμβανομένων μεταξύ παραλλήλων εὐθειῶν, ὑπέλογισε τὸ ὕψος αἰγυπτιακῆς πυραμίδος, καταπλήξας τὸν βασιλεῖα τῆς Αἰγύπτου Ἀμασιν. Ὁ Θαλῆς ἱδρυσεν εἰς Μίλητον τὴν Ἰωνικὴν Σχολὴν καὶ ἐπλούτισε τὰς γεωμετρικὰς γνώσεις.

Ἡ σπουδὴ τῆς γεωμετρίας ἐξακολοθεῖ εἰς τὴν μεγάλην Ἑλλάδα (κάτω Ἰταλίαν) ὅπου ὁ ἐκ Σάμου Πυθαγόρας (580 - 500 π.Χ.) ἱδρυσεν εἰς τὸν Κρότωνα τὴν περιφημὸν Σχολὴν του. Κατόπιν ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (450 π.Χ.) ἐδημοσίευσεν Στοιχεῖα Γεωμετρίας, θεωρεῖται δὲ ὡς ὁ πρῶτος γράψας βιβλίον γεωμετρίας.

Μετὰ ὁ φιλόσοφος Πλάτων (430 - 347 π.Χ.) ἐπεζέτεινε τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας, τὴν δὲ σημάσας ἔδωκεν εἰς αὐτήν, ὥστε εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς θύρας τῆς ἱδρυθείσης ὑπ' αὐτοῦ ἐν Ἀθῆναις Σχολῆς, τῆς «Ἀκαδημίας», ἀνέγραψε τὸ ρητὸν : «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσέλτω». Εἰς τὸν Πλάτωνα ὀφείλεται ἡ εἰσαγωγὴ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου ἐρεῦνης καὶ ἡ διδασκαλία τῶν γεωμετρικῶν τόπων.

Κατόπιν οι τρεις μεγάλοι άρχαίοι συγγραφείς μαθηματικών βιβλίων Εὐκλείδης (330 - 270 π. Χ.), Ἀρχιμήδης (287 - 212 π. Χ.) και Ἀπολλώνιος (260 - 200 π. Χ.) συνετέλεσαν κατά πολλή εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας, ἰδίως δὲ ὁ Εὐκλείδης μὲ τὰ «Στοιχεῖα», σύγγραμμα ἀποτελούμενον ἀπὸ 13 βιβλία. Εἰς τὸν Εὐκλείδην ὀφείλεται ἡ εἰσαγωγή τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, εἰς δὲ τὸν Ἀρχιμήδην ὀφείλονται αἱ πρῶται ἔννοιαι τῶν ὀρίων. Ὡθησιν ἐπίσης ἔδωσαν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας και οἱ Ἀλεξανδρινοὶ Μενέλαος (80 π. Χ.), Πτολεμαῖος (125 μ. Χ.) και Πάππος (Γ' Αἰὼν μ. Χ.).

Μετὰ τοὺς Ἀλεξανδρινούς, ἡ ἀνάπτυξις τῶν γεωμετρικῶν γνώσεων ὑπῆρξε βραδυτάτη μέχρι τῆς Ἀναγεννήσεως. Μετὰ τὴν Ἀναγέννησιν ἤρχισεν ἡ ἀλματώδης πρόοδος τῆς γεωμετρίας. Ὁ Καρτέσιος (Descartes 1596 - 1650) μὲ τὰς ὀρθογωνίους συντεταγμένας ἐνὸς σημείου, δημιουργεῖ τὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν, ἰδιαιτέρον κλάδον τῆς γεωμετρίας, ὁ ὁποῖος συνετέλεσε πάρα πολὺ εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν και παρέσχε νέας μεθόδους ἐρεῦνης. Αἱ νέαι αὗται μέθοδοι και ἡ κατὰ τὸν ΙΖ' αἰῶνα διατύπωσις τῆς ἀπειροστικῆς ἀναλύσεως, συνετέλεσαν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας και πρὸς ἄλλας κατευθύνσεις. Οὕτω ἐδημιουργήθησαν και ἄλλοι κλάδοι τῆς γεωμετρίας, ὅπως ἡ διαφορικὴ γεωμετρία, ἡ παραστατικὴ γεωμετρία, ἡ προβολικὴ γεωμετρία ἢ γεωμετρία τῆς θέσεως κ.λπ.

2. Πρωταρχικοί έννοιαι. Ἡ γεωμετρία θεωροῦσα τὰ ἀντικείμενά της αὖλα, δημιουργεῖ φανταστικά εἰδῶλα αὐτῶν και ὥς ἐκ τούτου ἔχει ἀνάγκην σαφοῦς θεμελιώσεως. Εὐρισκόμενοι εἰς ἀδυναμίαν νὰ ὀρίσωμεν τὰς πρώτας ἔννοιαις τῆς γεωμετρίας, θεωροῦμεν αὐτάς γνωστάς και τὰς καλοῦμεν **πρωταρχικάς έννοιαις**. Αὗται εἶναι τὸ «σημεῖον» ἢ «εὐθεΐα», ἢ «γραμμὴ», τὸ «ἐπίπεδον» ἢ «ἐπιφάνεια» και ὁ «χώρος». Ἐπὶ τῶν ἔννοιῶν τούτων θὰ θεμελιωθῇ μιὰ γεωμετρικὴ θεωρία διὰ τῶν προτάσεών της.

3. Συμβολισμός. Τὰ σημεῖα συνήθως θὰ συμβολίζωνται μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, αἱ εὐθεΐαι μὲ τὰ μικρὰ γράμματα ἐγκεκλισμένα ἐντὸς παρενθέσεων και τὰ ἐπίπεδα μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα ἐγκεκλισμένα ἐντὸς παρενθέσεων.

4. Αἱ προτάσεις τῆς γεωμετρίας. i). Ἀξίωμα καλεῖται μιὰ πρότασις, τὴν ὁποίαν δεχόμεθα ὥς ἀληθῆ. Τὰ ἀξιώματα, κατὰ κανόνα, εἶναι προτάσεις ἀφ' ἑαυτῶν φανεραί, ἀπορρέουσαι ἐκ τῆς ἐμπειρίας μας, πάντως εἶναι προτάσεις αὐθαιρέτως παραδεκταί. Μία γεωμετρικὴ θεωρία θεμελιούται ἐπὶ πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἀξιωμάτων.

Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν περισσότεράς τῆς μιᾶς γεωμετρικᾶς θεωρίας, ἐκάστη δὲ θὰ βασιζέται εἰς ἀξιώματα ἐκ τῶν ὁποίων ὀρισμένα τοῦλάχιστον δὲν εἶναι παραδεκτά ὑπὸ τῆς ἄλλης. Οὕτω ἐκτὸς τῆς Εὐκλείδειου Γεωμετρίας, μὲ τὴν ὁποίαν και θὰ ἀσχοληθῶμεν, ἐδημιουργήθησαν κατὰ καιροὺς και ἄλλαι γεωμετρικαὶ θεωρίαι βασιζόμεναι εἰς διαφορετικάς ομάδας ἀξιωμάτων, αἱ πλέον ἀξιόλογοι τῶν ὁποίων εἶναι τοῦ Gauss (1777 - 1856), τοῦ Lobatchefsky (1793 - 1856) και τοῦ Riemann (1826 - 1866). Αἱ γεωμετρίαι αὗται ὀνομάσθησαν μὴ Εὐκλείδειοι γεωμετρίαι, ἢ ἀντενυκλείδειοι γεωμετρίαι.

ii). **Θεώρημα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ἀλήθεια τῆς ὁποίας γίνεται φανερά κατόπιν ἀποδείξεως, ἢτοι κατόπιν λογικῆς ἐπεξεργασίας βασιζομένης ἐπὶ τῶν τεθέντων ἀξιωμάτων καὶ τῶν προηγουμένως ἀποδεδειγμένων θεωρημάτων.

iii). **Πόρισμα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ἄμεσος συνέπεια μιᾶς ἄλλης προτάσεως (ἢ ἄλλων προτάσεων) καὶ ὥς ἐκ τούτου ἡ ἀπόδειξις τῆς συνήθως εἶναι περιττὴ ὡς προφανής.

iv). **Πρόβλημα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ὁποία ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων γνωστῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα παρέχει, ζητεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἢ νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικὸν τι μέγεθος. **Λύσις** τοῦ προβλήματος καλεῖται ἡ διαδικασία τοῦ ὑπολογισμοῦ ἢ τῆς κατασκευῆς τοῦ ζητουμένου.

v). **Αἴτημα**. Οὐσιώδης διαφορὰ μεταξὺ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος δὲν ὑπάρχει. Τὸ αἴτημα, ὅπως καὶ τὸ ἀξίωμα, εἶναι πρότασις μὴ δυναμένη νὰ ἀποδειχθῇ.

Ὁ Εὐκλείδης (περὶ τὸ 285 π.Χ.) εἰς τὸ Α' βιβλίον τῶν «Στοιχείων» τοῦ διετύπωσε πρότασιν μὴ ἀποδειχθεῖσαν, τὴν ὁποίαν ἐκάλεσεν αἴτημα ἐπιζητῶν τὴν παραδοχὴν τῆς, διότι ἐγνώριζεν ὅτι ἡ μὴ παραδοχὴ τῆς προτάσεώς του, εἶναι δυνατόν νὰ μὴ ὀδηγῇ εἰς ἄτοπα συμπεράσματα (βλ. καὶ § 88).

vi). **Λήμμα** καλεῖται βοηθητικὴ πρότασις χρῆζουσα ἀποδείξεως (βοηθητικὸν θεώρημα), ἡ ὁποία προτάσσεται θεωρήματος διὰ νὰ ἀπλουστεύσῃ καὶ συντομεύσῃ τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

5. **Ἡ Λογικὴ τῶν προτάσεων**. Μία γεωμετρικὴ πρότασις περιέχει στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα δεχόμεθα ὅτι ἰσχύουν καὶ θὰ τὰ καλοῦμεν **ὑποθέσεις** καὶ ἄλλα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἐπονται καὶ θὰ τὰ καλοῦμεν **συμπεράσματα**. Αἱ ὑποθέσεις καὶ τὰ συμπεράσματα μιᾶς προτάσεως καλοῦνται **συνθῆκαι** αὐτῆς.

6. **Ἀντίστροφος πρότασις**. Ἐὰν εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρότασιν ἐναλλάξωμεν τὰς θέσεις ὑποθέσεων καὶ συμπερασμάτων καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, τότε δημιουργοῦμεν ἄλλας γεωμετρικὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **ἀντίστροφοι** τῆς πρώτης. Ἐὰν ἡ πρότασις περιέχῃ μίαν ὑπόθεσιν καὶ ἓν συμπέρασμα τότε ἔχει μίαν μόνον ἀντίστροφον πρότασιν.

7. **Συνεπαγωγὴ**. Ἐὰν μία συνθήκη Α ἔχῃ ὥς συνέπειαν μίαν ἄλλην συνθήκην Β, τότε λέγομεν ὅτι ἐκ τῆς Α συνεπάγεται ἡ Β καὶ συμβολίζομεν

$$A \Rightarrow B$$

Ἡ σχέσις αὕτη καλεῖται **συνεπαγωγὴ**.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω συνεπαγωγὴν, ἡ συνθήκη Α καλεῖται **ικανὴ** διὰ τὴν Β, διότι ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ Α, τοῦτο εἶναι ἀρκετὸν (ικανὸν) διὰ τὴν ὑπαρξιν καὶ τῆς Β.

Ἐὰν διὰ τὰς συνθήκας Α καὶ Β συμβαίη $A \Rightarrow B$ ἀλλὰ καὶ $B \Rightarrow A$, τότε

τάς καλοῦμεν **ισοδυνάμους συνθήκας** ἢ **ισοδυνάμους προτάσεις** καὶ συμβολίζομεν

$$A \iff B$$

ἐκάστη δὲ ἐξ αὐτῶν καλεῖται **ἀναγκαία καὶ ἰκανή** συνθήκη διὰ τὴν ἄλλην.

Κατὰ ταῦτα ἡ φράσις «δείξατε ὅτι ἡ συνθήκη A εἶναι ἀναγκαία καὶ ἰκανή διὰ τὴν συνθήκην B » μᾶς ὑποχρεώνει εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς συνεπαγωγῆς $A \Rightarrow B$, διὰ τῆς ὁποίας ἡ A χαρακτηρίζεται ἰκανή διὰ τὴν B , ἀλλὰ καὶ τῆς ἀντιστρόφου τῆς $B \Rightarrow A$ διὰ τῆς ὁποίας ἡ A ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τῆς B .

Ἐνίοτε ἡ φράσις «ἀναγκαία καὶ ἰκανή συνθήκη», διατυπῶνται καὶ ὡς ἐξῆς : «τότε καὶ μόνον τότε» ἢ «πρέπει καὶ ἀρκεῖ».

Ἀπὸ τὴν συνεπαγωγὴν $A \Rightarrow B$ διατυπώνομεν συναφῶς καὶ τὰς ἐξῆς προτάσεις

$$\text{Ἀπὸ } \delta\chi\iota \ A \Rightarrow \delta\chi\iota \ B$$

ἢ ὁποία καλεῖται **ἀντίθετος** τῆς ἀρχικῆς καὶ

$$\text{Ἀπὸ } \delta\chi\iota \ B \Rightarrow \delta\chi\iota \ A$$

ἢ ὁποία καλεῖται **ἀντιστροφoαντίθετος** τῆς ἀρχικῆς.

8. Ὁ χώρος εἶναι θεμελιώδης ἔννοια γνωστὴ ἐκ τῆς ἐμπειρίας μας (περιβάλλον εἰς τὸ ὁποῖον ζοῦμε). Ἐντὸς τοῦ χώρου ὑπάρχει ἡ ὕλη εἰς ὅλας τὰς μορφάς της καὶ ἐντὸς αὐτοῦ συμβαίνουν τὰ φυσικὰ φαινόμενα.

9. Γεωμετρικὸν σχῆμα καλεῖται ἡ αὐλος ἀπεικόνισης κάθε ὑποσυνόλου τοῦ (αἰσθητοῦ) χώρου εἰς τὸν ὡρον τῆς νοήσεως. Ἡ ἀπεικόνις αὕτη εἶναι ἐν γένει ἐν σύνολον ἀπὸ σημεία, γραμμὰς καὶ ἐπιφανείας, δηλαδὴ εἶναι ἐν σημειοσύνολον, δεδομένου ὅτι αἱ γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι σημειοσύνολα.

Τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα οὐδέποτε μᾶς πείθει διὰ κάποιαν ιδιότητα, τὴν ὁποίαν ἔχει ἐνδεχομένως τὸ ἐξεταζόμενον μέσῳ αὐτοῦ στερεόν. Ἀπλῶς μᾶς ὑποβοηθεῖ διὰ τὴν ἀνακάλυψιν καὶ ἀπόδειξιν αὐτῆς.

10. Αἱ τρεῖς βασικαὶ κατηγορίαι ἀξιωμάτων. Αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς γεωμετρίας εἶναι τὸ **σημεῖον**, ἡ **εὐθεΐα** καὶ τὸ **ἐπίπεδον**. Εἶναι ἔννοιαι μὴ δυνάμεναι νὰ ὀρισθοῦν (πρωταρχικαὶ ἔννοιαι) καὶ δι' αὐτῶν συγκροτοῦνται ὅλα τὰ γεωμετρικὰ σχήματα.

Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει σχῆμα οὔτε ἔκτασιν, ἀλλὰ ἔχει μόνον θέσιν.

Λεπτὸν τεταμένον νῆμα δίδει τὴν εἰκόνα μέρους εὐθείας γραμμῆς.

Τέλος ἡ ἐπιφάνεια ἡρεμουντος ὕδατος (περιωρισμένων διαστάσεων), δύνανται νὰ δώσῃ τὴν εἰκόνα μέρους ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Τὰ ἀνωτέρω δὲν ἀποτελοῦν μαθηματικούς ὁρισμούς τῶν γεωμετρικῶν τούτων στοιχείων, ἀλλὰ αὐτὰ ἔχουν καθορισμένας ιδιότητας περιγραφόμενας ὑπὸ ἀξιωμάτων.

Τὰ ἀξιώματα ἐπὶ τῶν ὁποίων θεμελιοῦται ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία, διαίρουνται κυρίως εἰς τρεῖς ομάδας, ἦτοι :

i). Ἀξιώματα θέσεως. Τὰ ἀξιώματα τῆς ομάδος αὐτῆς ἐγκλείουν τὴν ἔννοιαν τοῦ «περιέχειν» ἢ «περιέχεσθαι».

ii). Ἀξιώματα ἰσότητος. Ταῦτα διέπουν τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσότητος, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐφοδιασθῇ τὸ σύνολον τῶν σχημάτων.

iii). Ἀξιώματα διατάξεως. Ταῦτα διέπουν τὰς σχετικὰς θέσεις σημείων πρὸς ἄλληλα καὶ τὰς σχέσεις μεγέθους τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων.

Εἰς τὰ ἐπόμενα ἡ θεμελιώσις τῆς Εὐκλείδειου Γεωμετρίας θὰ συμπληρωθῇ καὶ μὲ ἄλλα τινὰ ἀξιώματα, ἐκ τῶν ὁποίων σπουδαιότερον εἶναι τὸ ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδου, σχετικὸν μὲ τὰς παραλλήλους εὐθείας.

11. Ἀξιώματα θέσεως. Ἀξίωμα I. Μία εὐθεῖα περιέχει τοῦλάχιστον δύο σημεῖα A καὶ B, ὑπάρχει δὲ τοῦλάχιστον ἓν σημεῖον Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας.

Παρατήρησις. "Ὅταν θὰ λέγωμεν «δύο σημεῖα» ἀντιστοίχως «δύο εὐθεῖαι» ἢ «δύο ἐπίπεδα» θὰ τὰ ἐννοοῦμεν ἐν γένει διακεκριμένα, δηλαδὴ μὴ συμπίπτοντα.

Ἀξίωμα II. Διὰ δύο σημείων μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα διέρχεται.

Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι δύο σημεῖα A καὶ B, ὀρίζουν πλήρως τὴν θέσιν μιᾶς μόνον εὐθείας, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ συμβολίζωμεν καὶ ὡς εὐθ.AB.

Ἀξίωμα III. Ἐν ἐπίπεδον περιέχει τρία τοῦλάχιστον σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχει δὲ τοῦλάχιστον ἓν σημεῖον Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.

Ἀξίωμα IV. Διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, ἓν καὶ μόνον ἐν ἐπίπεδον διέρχεται.

Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι τρία σημεῖα A, B καὶ Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὀρίζουν πλήρως τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου, τὸ ὅποῖον δυνάμεθα νὰ συμβολίζωμεν καὶ ὡς ἐπίπ.(ABΓ).

Ἀξίωμα V. Ἄν A καὶ B εἶναι δύο σημεῖα ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα AB ἀνήκει εἰς τὸ (Π).

Διὰ τὴν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐπίπεδον δεχόμεθα ἐπὶ πλέον καὶ τὰ ἀκόλουθα ἀξιώματα :

Ἀξίωμα VI. Μία εὐθεῖα AB ἐκτείνεται ἀπεριορίστως ἑκατέρωθεν τῶν σημείων A καὶ B.

Ἀξίωμα VII. Ἐν ἐπίπεδον (ABΓ) ἐκτείνεται ἀπεριορίστως.

12. Μετατόπισις σχήματος καλεῖται πᾶσα ἀλλαγὴ τῆς θέσεως αὐτοῦ

ἐντὸς τοῦ χώρου. Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει καὶ ταυτοτικὴ μετατόπισις, ἡ ὁποία ἀφίνει κάθε σχῆμα εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν.

Ἀξίωμα VIII. Πᾶσα μετατόπισις σχήματος (Σ) δὲν τὸ μεταβάλλει.

13. Ἴσα σχήματα. Τὸ σύνολον τῶν σχημάτων τὸ ἐφοδιαζόμεν με μίαν σχέσιν βασικῆς ἰσότητος, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἐξῆς ἔννοιαν :

Δύο σχήματα (Σ_1) καὶ (Σ_2) καλοῦνται ἴσα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὑπάρχῃ μετατόπισις, ἡ ὁποία νὰ θέτῃ τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον, ὥστε τὰ δύο σχήματα νὰ ταυτισθοῦν, ἤτοι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἑνὸς νὰ συμπέσῃ με ἐν σημεῖον τοῦ ἄλλου καὶ ἀντιστρόφως. Συμβολικῶς γράφομεν

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$$

14. Ἀξιώματα τῆς ἰσότητος. Διὰ τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσότητος δεχόμεθα τὰ κάτωθι ἀξιώματα.

Ἀξίωμα I. Ἐκαστον σχῆμα (Σ) εἶναι ἴσον πρὸς ἑαυτό, ἤτοι :

$$(\Sigma) = (\Sigma)$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται ἀνακλαστική.

Ἀξίωμα II. Ἐὰν $(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$, τότε καὶ $(\Sigma_2) = (\Sigma_1)$. Συντόμως γράφομεν

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_2) = (\Sigma_1)$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται συμμετρική.

Ἀξίωμα III. Ἄν δύο σχήματα εἶναι ἴσα πρὸς τρίτον, τότε εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα. Συντόμως γράφομεν :

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2) = (\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1) = (\Sigma_3).$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται μεταβατική.

15. Διάταξις σημείων ἐπ' εὐθείας. Ἐὰν ὑπάρχουν τρία διάφορα ἀλλήλων σημεῖα A, B καὶ Γ ἀνήκοντα εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ

$$(δ) \quad \begin{array}{c} A \qquad \qquad \Gamma \qquad \qquad B \\ \hline \end{array}$$

Σχ. 1

κεῖνται ὡς πρὸς ἀλλήλα ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 1, τότε τὸ σημεῖον Γ καλεῖται ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B. Ἰσοδυνάμως λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ ἔχει ἐκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ σημεῖα A καὶ B. Ἡ σημειοσειρὰ A, Γ, B ὅπως ἔχει εἰς τὸ σχ. 1,

λέγομεν ὅτι εἶναι μία διάταξις τῶν τριῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ), ἥ ἀκόμη ὅτι τὰ τρία σημεῖα εἶναι διαδοχικὰ κατὰ τὴν σειρὰν A, Γ, B .

16. Ἀξιώματα διατάξεως. Ἀξίωμα I. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας (δ), ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον $\Gamma \in (\delta)$ ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B (σχ. 1).

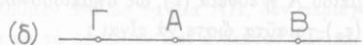
Ἀξίωμα II. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας



Σχ. 2

(δ), ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον $\Gamma \in (\delta)$ οὕτως, ὥστε τὸ B νὰ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Γ (σχ. 2).

Ἀξίωμα III. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας



Σχ. 3

(δ), ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον $\Gamma \in (\delta)$ οὕτως, ὥστε τὸ A νὰ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ B (σχ. 3).

17. Θεώρημα. Μία εὐθεῖα ἔχει ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα.

Ἀπόδειξις. Συμφώνως πρὸς τὰ τεθέντα ἀξιώματα, μία εὐθεῖα (δ) ἔχει τοῦλάχιστον δύο σημεῖα A καὶ B . Τότε, διὰ τὰ A καὶ B , ὑπάρχει ἓν τοῦ-



Σχ. 4

λάχιστον ἐνδιάμεσον σημεῖον Γ τῆς (δ). Διὰ τῆς αὐτῆς σκέψεως, ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον Δ τῆς (δ) ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Γ κ.ο.κ. Οὕτω δυνάμεθα νὰ συσσωρεύσωμεν μίαν ἀπειρίαν σημείων ἐνδιαμέσων τῶν A καὶ B . Ἀρα ἡ εὐθεῖα (δ) περιέχει ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα, ἐφ' ὅσον ἓν μέρος αὐτῆς περιέχει ἄπειρα σημεῖα.

18. Θεώρημα. Δύο διάφοροι μεταξύ των εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) ἔν τὸ πολὺ κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχουν.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὴν ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ

ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον. Διότι ἂν θεωρήσωμεν τρία σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, τὰ A καὶ B ὀρίζουν τὴν εὐθεῖαν (ε_2) , ὁμοίως τὰ A καὶ Γ ὀρίζουν τὴν εὐθεῖαν (ε_1) , αἱ ὁποῖαι ἔχουν προφανῶς κοινὸν σημεῖον τὸ A (σχ. 5).

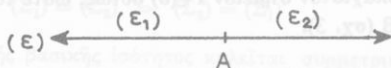
Ἐκτὸς τοῦ A δὲν δύνανται νὰ ἔχουν καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον, διότι ἂν M ἦτο ἓν ἐπὶ πλέον κοινὸν σημεῖον τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) αὗται θὰ ἐταυτίζοντο, διότι τὰ A καὶ M μίαν μόνον εὐθεῖαν ὀρίζουν. Ἀρα δύο διάφοροι μεταξὺ τῶν εὐθεϊῶν ἓν τὸ πολὺ κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχουν.

Τότε λέγομεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) **τέμνονται**, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον A αὐτῶν λέγεται **σημεῖον τομῆς** τῶν, ἢ **ἴχνος** ἢ **ποὺς** τῆς μιᾶς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἄλλην.

19. Ἡμιευθεῖα. Ὡς θεωρήσωμεν εὐθεῖαν (ε) καὶ σημεῖον A αὐτῆς (σχ. 6). Διὰ τοῦ σημείου A ἡ εὐθεῖα (ε) , ὡς σημειοσύνολον, διακρίνεται εἰς δύο ὑποσύνολα (ε_1) καὶ (ε_2) τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι :

$$(\varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2) = (\varepsilon) - \{A\} \text{ καὶ } (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \emptyset$$

Τὰ ὑποσύνολα (ε_1) καὶ (ε_2) καλοῦνται **ἡμιευθεῖαι** με **ἀρχὴν** τὸ σημεῖον A .



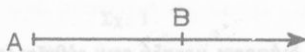
Σχ. 6

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, ἡ ἀρχὴ A δὲν ἀνήκει εἰς τὰς ἡμιευθεῖας (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ τότε θὰ τὰς λέγωμεν **ἀνοικτὰς** ἡμιευθεῖας. Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς αὐτὰς καὶ τὴν ἀρχὴν τῶν A , ὁπότε θὰ τὰς καλοῦμεν **κλειστὰς** ἡμιευθεῖας, τότε θὰ πληροῦνται αἱ σχέσεις :

$$(\varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2) = (\varepsilon) \text{ καὶ } (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \{A\}.$$

Αἱ ἡμιευθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καλοῦνται **ἀντίθετοι** ἡμιευθεῖαι, ἐφ' ὅσον ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν καὶ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν, ἐκάστη δὲ δύναται νὰ λέγεται καὶ **συμπληρωματικὴ** τῆς ἄλλης.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι μία ἡμιευθεῖα με ἀρχὴν σημεῖον A , ἐκτείνεται ἀπεριόριστως ἀπὸ τὸ ἓν μόνον μέρος τῆς. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς ἡμιευθεῖας ἀπαι-

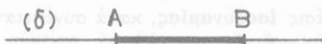


Σχ. 7

τεῖται νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀρχὴν τῆς A καὶ ἓν τυχὸν σημεῖον τῆς B (σχ. 7). Διὰ τὸν συμβολισμόν τῆς γράφομεν ἡμιευθ. AB ἢ ἀπλῶς AB , ὅταν ἔχη ἀνα-

φερθῇ προηγουμένως ὅτι πρόκειται περὶ ἡμιευθείας. Πάντως εἰς τὸν συμβολισμόν προτάσσεται ἡ ἀρχὴ A .

20. Εὐθύγραμμοι τμήμα. Ἐστω εὐθεῖα (δ) καὶ A, B δύο σημεῖα τῆς. Καλοῦμεν εὐθύγραμμοι τμήμα με ἄκρα τὰ A καὶ B τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς εὐθείας (δ) , τὰ ὅποια εἶναι ἐνδιάμεσα τῶν σημείων A καὶ B (σχ. 8). Συμβολικῶς γράφομεν $\tau\mu.AB$ ἢ ἀπλῶς AB , ὅταν προηγουμένως ἔχῃ ἀναφερθῇ



Σχ. 8

ὅτι εἶναι εὐθύγραμμοι τμήμα. Πρὸς μεγαλύτεραν ἀπλούστευσιν διὰ τὸν συμβολισμόν, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν καὶ μικρὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἥτοι ἐν τμήμα AB τὸ ὀνομάζομεν α .

Κατὰ τὸν ὀρισμόν, τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB , τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ τὸ καλοῦμεν ἀπλῶς τμήμα AB , δὲν περιέχονται εἰς αὐτὸ καὶ ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ τὸ λέγωμεν καὶ ἀνοικτὸν τμήμα. Δυνατὸν ὅμως νὰ θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν ἐντὸς τοῦ τμήματος καὶ τὰ ἄκρα αὐτοῦ καὶ τότε θὰ τὸ λέγωμεν κλειστὸν τμήμα. Ἀναλόγως ὀρίζεται καὶ ἡμιάνοικτον τμήμα, ὅταν τὸ ἐν μόνον τῶν δύο ἄκρων περιλαμβάνεται εἰς αὐτό.

Συμβατικῶς δεχόμεθα τὴν ὑπαρξίν εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα συμπίπτουν. Τοῦτο θὰ τὸ λέγωμεν **μηδενικὸν** εὐθύγραμμοι τμήμα.

21. Ἀπόστασις δύο σημείων. Τὴν ἔννοιαν «ἀπόστασις δύο σημείων» τὴν θεωροῦμεν γνωστὴν ἐκ τῆς ἐμπειρίας. Τονίζομεν ὅμως ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο σημείων A καὶ B δὲν εἶναι τὸ εὐθύγραμμοι τμήμα AB , δεδομένου ὅτι τὸ τμήμα AB εἶναι σημειοσύνολον, ἐνῶ ἡ ἀπόστασις AB εἶναι ἔννοια διάφορος τῆς ἔννοιας τοῦ σημειοσυνόλου.

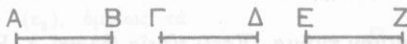
22. Μήκος εὐθυγράμμου τμήματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

23. Ἰσότης εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἰδιότητες. Τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τὸ ἐφοδιάζομεν με τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσότητος, ὡς αὕτη ἔχει ὀρισθῇ γενικῶς εἰς τὸ σύνολον τῶν σχημάτων (§ 13), ἥτοι :

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ καλοῦνται ἴσα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως (ἐκαστον σημεῖον τοῦ πρώτου νὰ ταυτισθῇ με ἓν σημεῖον τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως).

Ὡς ἰδιότητες τῆς βασικῆς ἰσότητος ἀναφέρονται τὰ τρία γενικὰ ἀξιώματα αὐτῆς, ἥτοι ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σχέσις :

i) Ἀνακλαστική, ἥτοι (σχ. 9) : $AB = AB$ (πᾶν τμήμα ἰσοῦται πρὸς ἑαυτό).



Σχ. 9

ii) Συμμετρική, ἥτοι : $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta = AB$

iii) Μεταβατική, ἥτοι : $AB = \Gamma\Delta \wedge \Gamma\Delta = EZ \Rightarrow AB = EZ$

Πᾶσα σχέσις, εἰς τὴν ὁποῖαν ἰσχύουν τὰ τρία προηγούμενα ἀξιώματα, χαρακτηρίζεται ὡς σχέσις **ἰσοδυναμίας**, κατὰ συνέπειαν ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος, εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Παρατήρησις. Ἐν εὐθύγραμμον τμήμα AB , ὡς σημειοσύνολον, συμπίπτει μὲ τὸ σημειοσύνολον BA . Ἀρα δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν ὡς ἰδιότητα τῆς ἰσότητος καὶ τὴν $AB = BA$.

24. Μέσον εὐθυγράμμου τμήματος καλεῖται ἓν σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος. Ἐὰν AB εἶναι ἓν εὐθύγραμμον τμήμα (σχ. 10) καὶ M εἶναι τὸ μέσον του, τότε θὰ εἶναι $MA = MB$.

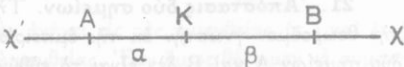


Σχ. 10

Ἀξίωμα. Ἐν εὐθύγραμμον τμήμα AB ἔχει ἓν καὶ μόνον ἓν μέσον M .

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

25. Ἀθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἐστωσαν α καὶ β δύο εὐθύγραμμα τμήματα. Ἐπ' εὐθείας xx' λαμβάνομεν σημεῖον K (σχ. 11) καὶ ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν Kx' καὶ Kx λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $KA = \alpha$ καὶ $KB = \beta$. Ὡς ἄθροισμα τῶν δύο τμημάτων α καὶ β ὀρίζομεν τὸ τμήμα AB καὶ συμβολίζομεν



Σχ. 11

$$\alpha + \beta = AB \quad \eta \quad AK + KB = AB.$$

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία πρὸς εὐρεσιν τοῦ ἀθροίσματος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων καλεῖται **πρῶξις προσθέσεως** ἢ ἀπλῶς **πρόσθεσις** τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων.

Τὸ ἀθροισμα τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ὀρίζεται ἀναλόγως, ἐὰν εἰς τὸ ἀθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὸ τρίτον τμήμα, ὁμοίως δὲ 4, 5, ..., ν τμημάτων.

26. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. i) Ἡ πρῶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι ἀντιμεταθετική, ἥτοι ἐὰν α, β εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα $\Rightarrow \alpha + \beta = \beta + \alpha$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $AB = \alpha$ καὶ $B\Gamma = \beta$ (σχ. 12) $\Rightarrow A\Gamma = AB + B\Gamma = \alpha + \beta$ (1).

Ἐπίσης εἶναι $\Gamma A = \Gamma B + BA = \beta + \alpha$ (2)

Ἀλλὰ $A\Gamma = \Gamma A$ καὶ ἐπομένως ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

ii) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι προσεταιριστική, ἥτοι ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα $\Rightarrow (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Ἀπόδειξις. Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς σημεῖα A, B, Γ, Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$ (σχ. 13).

Τότε εἶναι : $A\Delta = A\Gamma + \Gamma\Delta = (\alpha + \beta) + \gamma$ (3)

καὶ $A\Delta = AB + B\Delta = \alpha + (\beta + \gamma)$ (4). Αἱ σχέσεις (3) καὶ (4) ἔχουν

τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

iii) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ἔχει οὐδέτερον στοιχείον τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμήμα, συμβολιζόμενον μὲ 0 , ἥτοι εἶναι $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, ὅπου τὸ α εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα.

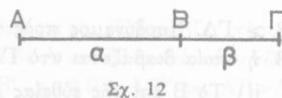
iv) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι μονότροπος καὶ ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ἥτοι τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

Πράγματι, ἀπὸ τὰς προηγουμένης ιδιότητος ἔπεται ὅτι ν τὸ πλῆθος εὐθύγραμμα τμήματα δύνανται νὰ προστεθοῦν καθ' οἷανδήποτε σειρὰν μὲ ἀποτελεσμα τῆς πράξεως (ἄθροισμα) τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμήμα, ἥτοι εἶναι μονότροπος. Ἐπίσης εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, διότι τὸ ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα, δηλαδὴ στοιχεῖον τοῦ αὐτοῦ συνόλου.

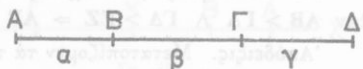
27. Διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων. Ὡς θεωρήσωμεν δύο ἄνισα (ἔχι ἴσα) εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ (σχ. 14). Μετατοπίζομεν τὸ $\Gamma\Delta$ εἰς τὴν θέσιν $A\Delta'$ οὕτως, ὥστε τὰ δύο τμήματα νὰ ἀποκτήσουν κοινὸν ἄκρον τὸ A καὶ κοινὸν μέρος. Τότε δύο εἶναι τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα :

i) Τὸ Δ' ἐπὶ τῆς εὐθείας AB , εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B (σχ. 14).

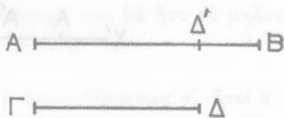
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ τμήμα AB εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $A\Delta'$, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ, τὸ AB εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\Gamma\Delta$ καὶ συμβολιζόμεν



Σχ. 12



Σχ. 13

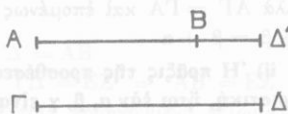


Σχ. 14

$AB > \Gamma\Delta$. Ίσodύναμος πρὸς τὴν προηγουμένην σχέσιν εἶναι καὶ ἡ $\Gamma\Delta < AB$ ἢ ὁποία διαβάζεται «τὸ $\Gamma\Delta$ εἶναι μικρότερον τοῦ AB ».

ii) Τὸ B ἐπὶ τῆς εὐθείας AB εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Δ' (σχ. 15). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ τμήμα AB εἶναι μικρότερον τοῦ $\Gamma\Delta$ (συμβολικῶς $AB < \Gamma\Delta$) ἢ τὸ $\Gamma\Delta$ μεγαλύτερον τοῦ AB (συμβολικῶς $\Gamma\Delta > AB$).

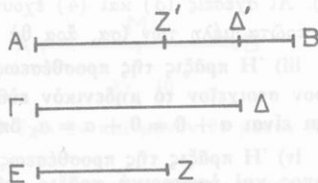
Ἡ σχέσις $AB > \Gamma\Delta$ (ἀντιστοίχως $AB < \Gamma\Delta$) καλεῖται **σχέσις ἀνισότητος**.



Σχ. 15

28. Ίδιότητες. i) Ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος εἶναι μεταβατική, ἥτοι ἐὰν $AB > \Gamma\Delta \wedge \Gamma\Delta > EZ \Rightarrow AB > EZ$.

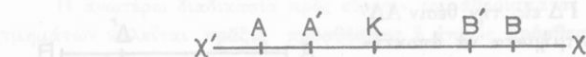
Ἀπόδειξις. Μετατοπίζομεν τὰ τμήματα $\Gamma\Delta$ καὶ EZ ἐπὶ τοῦ AB οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα Γ καὶ E νὰ ταυτισθοῦν μετὰ τοῦ A (σχ. 16) καὶ τὰ Δ καὶ Z νὰ λάβουν θέσεις Δ' καὶ Z' ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς εὐθείας AB . Ἐπειδὴ $AB > \Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma\Delta = A\Delta' \Rightarrow AB > A\Delta'$, ἥτοι τὸ Δ' εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B . Ὀμοίως ἐπειδὴ $\Gamma\Delta > EZ \Rightarrow A\Delta' > AZ'$, ἔπεται ὅτι τὸ Z' εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Δ' . Ἄρα τὸ Z' εἶναι ἐνδιάμεσον καὶ τῶν A καὶ $B \Rightarrow AB > AZ' \iff AB > EZ$.



Σχ. 16

Παρατήρησις. Ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος δὲν εἶναι συμμετρική, δηλαδὴ ἐὰν $AB > \Gamma\Delta$ ἀποκλείεται νὰ εἶναι καὶ $\Gamma\Delta > AB$. Κάθε σχέσις μεταβατικὴ καὶ μὴ συμμετρικὴ, χαρακτηρίζεται ὡς σχέσις **διατάξεως** καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, εἶναι σχέσις διατάξεως.

ii) Ἐὰν $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα τοιαῦτα, ὥστε $\alpha > \alpha' \wedge \beta > \beta' \Rightarrow \alpha + \beta > \alpha' + \beta'$ ἥτοι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοιοστροφούς ἀνισότητας.



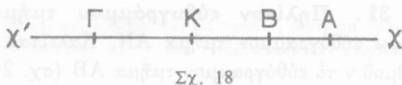
Σχ. 17

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ εὐθείας xx' λαμβάνομεν σημεῖον K (σχ. 17). Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Kx' λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ A' , οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $KA = \alpha$ καὶ $KA' = \alpha'$ καὶ ἐπὶ τῆς Kx σημεῖα B καὶ B' οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $KB = \beta$ καὶ $KB' = \beta'$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \alpha' \Rightarrow KA > KA'$, ἔπεται ὅτι τὸ A' εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ A . Ὀμοίως τὸ B' εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ B .

Ἡ τοιαύτη διάταξις τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας xx' , ἐξασφαλίζει τόσον τὰ A, B ὅσον καὶ τὰ A', B' ἐκατέρωθεν τοῦ K , τὰ δὲ A καὶ B , ἐκατέρωθεν τῶν A' καὶ B' ἀντιστοίχως. Τότε θὰ εἶναι : $AB > A'B' \wedge A'B' > A'B \Rightarrow AB > A'B$ (1) (μεταβατική ιδιότητα). Ἀλλὰ $AB = AK + KB = \alpha + \beta$ καὶ $A'B' = A'K + KB' = \alpha' + \beta'$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται : $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$.

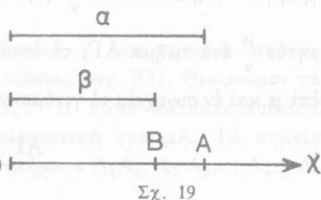
iii) Ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα μὲ $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$, ἤτοι δυνάμεθα εἰς τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος νὰ προσθέσωμεν τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμήμα.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ εὐθείας xx' λαμβάνομεν σημεῖον K (σχ. 18). Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Kx λαμβάνομεν σημείον A καὶ B οὕτως, ὥστε $KA = \alpha$ καὶ $KB = \beta$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \beta \Rightarrow KA > KB$ καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον B εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ A . Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Kx' λαμβάνομεν σημεῖον Γ οὕτως ὥστε $K\Gamma = \gamma$. Ἡ τοιαύτη διάταξις τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$, ἐξασφαλίζει τὸ K ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ B , ὡς καὶ τὸ B ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ A . Ἄρα θὰ εἶναι :



$\Gamma A > \Gamma B$ (2). Ἀλλὰ $\Gamma A = \Gamma K + KA = \gamma + \alpha$ καὶ $\Gamma B = \Gamma K + KB = \gamma + \beta$. Τότε ἡ σχέσις (2) γράφεται $\gamma + \alpha > \gamma + \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

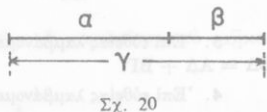
29. Διαφορά εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἀς θεωρήσωμεν δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β μὲ $\alpha > \beta$. Ἐπὶ ἡμιευθείας Ox (σχ. 19) λαμβάνομεν $OA = \alpha$ καὶ $OB = \beta$. Τὸ τμήμα AB (ἢ καὶ κάθε ἴσον πρὸς αὐτὸ) καλοῦμεν **διαφορὰν** τῶν τμημάτων α καὶ β καὶ συμβολίζομεν $OA - OB = AB$ ἢ $\alpha - \beta = AB \Leftrightarrow \alpha = \beta + AB$.



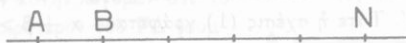
Ἡ διαδικασία, μέσω τῆς ὁποίας δοθέντων δύο εὐθυγράμμων τμημάτων εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν των, καλεῖται **πρῶξις τῆς ἀφαιρέσεως** ἢ ἀπλῶς **ἀφαιρέσεις**.

Ἐὰν τὰ τμήματα α καὶ β ᾖσαν ἴσα, ἡ διαφορὰ των θὰ ᾖ τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμήμα, ἤτοι ἐὰν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \beta = 0$.

Παρατήρησις. Ἐὰν δύο τμήματα α καὶ β ἔχουν ἄθροισμα γ , ἤτοι $\alpha + \beta = \gamma$ (σχ. 20), ἀπὸ τὸν ὀρισμὸν τῆς διαφορᾶς ἔπεται ὅτι τὸ β εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γ καὶ α , ὡς ἐπίσης τὸ α εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γ καὶ β . Ἄρα ἀπὸ τὴν σχέσιν $\alpha + \beta = \gamma$ ἔπονται αἱ σχέσεις $\beta = \gamma - \alpha$ καὶ $\alpha = \gamma - \beta$.



30. Γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμόν.
 Ἐστω εὐθύγραμμος τμήμα AB. Καλεῖται γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν ν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AN (σχ. 21), τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν



Σχ. 21

πρόσθεσιν ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ AB. Τότε γράφομεν

$$AN = \nu \cdot AB$$

31. Πηλίκον εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ.
 Ἐστω εὐθύγραμμος τμήμα AN. Καλεῖται πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB (σχ. 21) διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέση $AN = \nu \cdot AB$. Τότε γράφομεν

$$AB = \frac{AN}{\nu}$$

(βλέπετε καὶ § 227 διὰ τὴν ὑπαρξιν τοῦ πηλίκου εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ).

32. Γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ρητόν. Ἐστω εὐθύγραμμος τμήμα AB καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ ρητὸς ἀριθμός. Καλοῦμεν γινόμενον τοῦ AB ἐπὶ τὸν ρητὸν $\frac{\mu}{\nu}$ ἓνα τμήμα AG, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἂν τὸ AB πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ μ καὶ ἔν συνεχείᾳ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ ν . Τότε γράφομεν

$$AG = \frac{\mu}{\nu} \cdot AB.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

1. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ. Ἄν εἶναι $AG = BD$, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι καὶ $AB = \Gamma\Delta$.

2. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος BΓ, δείξατε ὅτι

$$A\Delta = \frac{AG + AB}{2} \quad \text{καὶ} \quad \Delta\Gamma = \frac{AG - AB}{2}.$$

3. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ. Δείξατε ὅτι $AG + BD = A\Delta + B\Gamma$.

4. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ εἰς τῶν, ὥστε νὰ εἶ-

ναί $AB = 2\alpha$ καί $B\Gamma = 2\beta$. "Αν Δ , E καί Z εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν τμημάτων AB , $B\Gamma$, καί $A\Gamma$, νά δειχθῇ ὅτι τὰ τμήματα AE καί AZ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον καί νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AZ ἀπὸ τὸ Γ .

5. "Επὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ . "Αν εἶναι M τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB καί N τὸ μέσον τοῦ $\Gamma\Delta$ δείξατε ὅτι

$$MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$$

Β'.

6. "Εάν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας καί εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τμήματα AB καί $\Gamma\Delta$ νά ἔχουν κοινὸν μέσον, τότε θά εἶναι $A\Gamma = B\Delta$. "Εξετάσατε ἐὰν ἀληθεύῃ τὸ ἀντίστροφον.

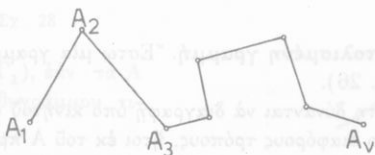
7. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι 6 διακεκριμένα σημεῖα μὴ κείμενα ἀνά τρία ἀπ' εὐθείας, ὀρίζουν 15 εὐθύγραμμα τμήματα.

8. Πόσα εὐθύγραμμα τμήματα ὀρίζονται ἀπὸ n τὸ πλῆθος διακεκριμένα σημεῖα μὴ κείμενα ἀνά τρία ἐπὶ εὐθείας; "Εφαρμογὴ διὰ $n=20$.

9. Πόσα σημεῖα ὀρίζονται ἀπὸ n τὸ πλῆθος εὐθείας τεμονόμενας ἀνά δύο καί "μὴ διερχομένας ἀνά τρεῖς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου;

ΠΕΡΙ ΓΡΑΜΜΩΝ

33. Τεθλασμένη γραμμή. "Ας θεωρήσωμεν n διακεκριμένα σημεῖα $A_1, A_2, \dots, A_n$ μὴ κείμενα ὅλα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (σχ. 22). Θεωροῦμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. "Η οὕτω κατασκευασθεῖσα γραμμὴ καλεῖται **τεθλασμένη γραμμὴ** ἢ **πολυγωνικὴ γραμμὴ**. Τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \dots, A_n$ καλοῦνται **κορυφαί** αὐτῆς, καί τὰ τμήματα $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ **πλευραὶ** αὐτῆς.



Σχ. 22

34. Μῆκος τεθλασμένης γραμμῆς $A_1A_2A_3 \dots A_n$ καλεῖται τὸ μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n.$$

35. Καμπύλη γραμμή. Μία γραμμή (Γ) καλείται **καμπύλη**, όταν οὐδέν τμήμα αὐτῆς εἶναι εὐθύγραμμον (σχ. 23). Τότε κάθε τμήμα της καλεῖται **καμπύλον**. "Εν οἰονδήποτε



Σχ. 23

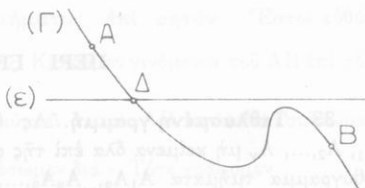


Σχ. 24

τμήμα μιᾶς καμπύλης με ἄκρα σημεία A καὶ B καλεῖται **τόξον** αὐτῆς καὶ συμβολίζεται με $\widehat{AB}$.

36. Μικτή γραμμή. Μία γραμμή (Γ) καλεῖται **μικτή**, όταν αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμου καὶ ἀπὸ καμπύλου τμήματος (σχ. 24).

37. Ἀξίωμα. Ἐστωσαν ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) εὐθεῖα (ϵ) καὶ δύο σημεία A καὶ B ἐκατέρωθεν αὐτῆς (σχ. 25). Πᾶσα γραμμή (Γ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) διερχομένη διὰ τῶν A καὶ B ἔχει ἓν τοῦλάχιστον κοινὸν σημεῖον Δ μετὰ τῆς εὐθείας (ϵ).



Σχ. 25

38. Ἐπίπεδος καὶ στρεβλὴ γραμμή. Μία γραμμή καλεῖται **ἐπίπεδος** τότε καὶ μόνον τότε, όταν ὅλα τὰ σημεία της κεῖνται ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνει, τότε ἡ γραμμή καλεῖται **στρεβλή**.

Ὡς παράδειγμα στρεβλῆς γραμμῆς ἀναφέρομεν σπειροειδὲς ἐλατήριο, νοοῦμενον ὡς γραμμή.

39. Προσανατολισμένη γραμμή. Ἐστω μία γραμμή (Γ) καὶ A καὶ B δύο σημεία της (σχ. 26).

Ἡ γραμμή αὕτη δύνανται νὰ διαγραφῇ ὑπὸ κινητοῦ σημείου ἄνευ παλινδρομήσεως κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, ἥτοι ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B ἢ ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A. Πρὸς διαφοροποίησιν τῶν δύο τούτων τρόπων διαγραφῆς της, τὸν ἓνα ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸν ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B καλοῦμεν **θετικὴν φορὰν διαγραφῆς**. Τότε ἡ φορὰ ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A θὰ λέγεται **ἀρνητικὴ**. Ἡ ἐκλογὴ τῆς θετικῆς φορᾶς διαγραφῆς εἶναι αὐθαίρετος.

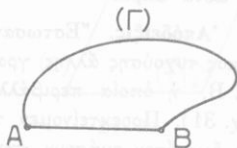
Μία γραμμή, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετικὴ φορὰ διαγραφῆς της, καλεῖται **προσανατολισμένη ἢ προσημασμένη γραμμή**.



Σχ. 26

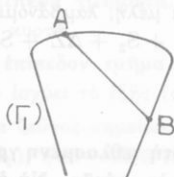
40. Ἀξίωμα. Ἐάν A καὶ B εἶναι δύο σημεῖα, τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB ποὺ ὀρίζουν, ἔχει μῆκος μικρότερον τοῦ μήκους πάσης ἄλλης γραμμῆς (Γ) μετὰ τὰ αὐτὰ ἄκρα A καὶ B (σχ. 27).

41. Ἐπίπεδα σχήματα. Ἐν σχῆμα (Σ) καλεῖται ἐπίπεδον σχῆμα, ἐάν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτοῦ εὐρίσκωνται ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π).



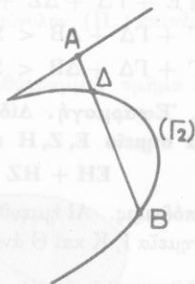
Σχ. 27

42. Κυρτή καὶ μὴ κυρτή γραμμή. Θεωροῦμεν μίαν ἐπίπεδον γραμμὴν (Γ₁) (σχ. 28). Ἡ γραμμὴ αὕτη, θὰ λεγεται κυρτή γραμμή, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ζευγὸς σημείων τῆς A καὶ B, τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχει μετὰ τῆς (Γ₁) (ἐκτὸς τῶν A καὶ B), ἢ κεῖται ἐξ



Σχ. 28

ὁλοκλήρου ἐπὶ τῆς (Γ₁), ἐάν τὰ A καὶ B ληφθοῦν ἐπὶ εὐθυγράμμου τινὸς τμήματος τῆς (Γ₁).



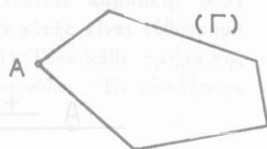
Σχ. 29

Ἡ ἐπίπεδος γραμμὴ (Γ₂) θὰ λέγεται μὴ κυρτή γραμμή (σχ. 29), ὅταν δὲν εἶναι κυρτή, δηλαδή ὅταν ἐπ' αὐτῆς ὑπάρχη ἓν τοῦλάχιστον ζευγὸς σημείων A καὶ B τοιοῦτον, ὥστε τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB νὰ ἔχη ἓν τοῦλάχιστον κοινὸν σημεῖον Δ μετὰ τῆς (Γ₂) (διάφορον τῶν A καὶ B).

43. Κλειστὴ γραμμή. Μία γραμμὴ (Γ) (ὄχι ἀπέραντος) καλεῖται

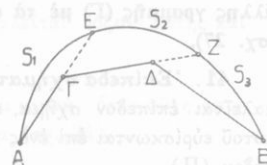
κλειστή γραμμή (σχ. 30), όταν άρχομένη έκ τινος σημείου A, περατοϋται εις τὸ αὐτὸ σημεῖον A (κλείνει).

44. Θεώρημα. Τὸ μήκος κάθε κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς με ἄκρα τὰ σημεῖα A καὶ B, εἶναι μικρότερον τοῦ μήκους κάθε ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία τὴν περιβάλλει καὶ ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.



Σχ. 30

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ AΓΔB καὶ S τὸ μήκος τυχούσης ἄλλης γραμμῆς με ἄκρα τὰ A καὶ B, ἡ ὁποία περιβάλλει τὴν τεθλασμένην (σχ. 31). Προεκτείνομεν τὰ τμήματα AΓ καὶ ΓΔ ἕως ὅτου τμήσουν τὴν S εἰς τὰ E καὶ Z ἀντιστοίχως. Ἐὰν καλέσωμεν



Σχ. 31

$\widehat{AE} = S_1$, $\widehat{EZ} = S_2$ καὶ $\widehat{ZB} = S_3$
τὰ τρία τμήματα τῆς γραμμῆς S εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη ἐχωρίσθη, τότε θὰ ἔχωμεν (§ 40).

$$\begin{aligned} AE < \widehat{AE} &\Rightarrow A\Gamma + \Gamma E < S_1 \\ \Gamma Z < \Gamma E + \widehat{EZ} &\Rightarrow \Gamma\Delta + \Delta Z < \Gamma E + S_2 \\ \Delta B < \Delta Z + \widehat{ZB} &\Rightarrow \Delta B < \Delta Z + S_3 \end{aligned}$$

Διὰ προσθέσεως τῶν δευτέρων σχέσεων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

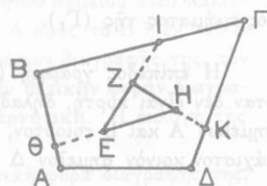
$$\begin{aligned} A\Gamma + \Gamma E + \Gamma\Delta + \Delta Z + \Delta B &< S_1 + \Gamma E + S_2 + \Delta Z + S_3 \\ \Rightarrow A\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta B &< S_1 + S_2 + S_3 \\ \Rightarrow A\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta B &< S \end{aligned}$$

45. Ἐφαρμογή. Δίδεται κλειστὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ABΓΔA καὶ τρία σημεῖα E, Z, H περικλειόμενα ἐντὸς αὐτῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$EH + HZ + ZE < AB + BG + GA + \Delta A.$$

Ἀπόδειξις. Αἱ ἡμιευθεῖαι EZ, ZH καὶ HE τέμνουν τὴν γραμμὴν ABΓΔA εἰς τὰ σημεῖα I, K καὶ Θ ἀντιστοίχως (σχ. 32). Τότε (§ 40) ἔχομεν :

- $$H\Theta < \Theta A + A\Delta + \Delta K + KH \quad \eta$$
- (1) $EH + E\Theta < \Theta A + A\Delta + \Delta K + KH$,
 $ZK < ZI + I\Gamma + \Gamma K \quad \eta$
 - (2) $HZ + HK < ZI + I\Gamma + \Gamma K$ καὶ
 $EI < E\Theta + \Theta B + BI \quad \eta$
 - (3) $ZE + ZI < E\Theta + \Theta B + BI$



Σχ. 32

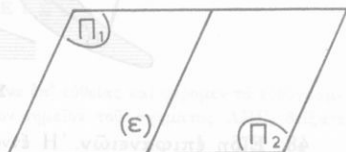
Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :
 $EH + HZ + ZE + E\Theta + HK + ZI < (\Theta A + \Theta B) + (BI + I\Gamma) + (K\Delta + K\Gamma) + \Delta\Delta + ZI + E\Theta + KH \iff$
 $EH + HZ + ZE < AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A.$

46. Ἡμιεπίπεδον. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ε) αὐτοῦ. Διὰ τῆς (ε) τὸ ἐπίπεδον (Π) διαιρεῖται εἰς δύο μέρη (Π_1) καὶ (Π_2) , (σχ. 33). διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι :

$$(\Pi_1) \cup (\Pi_2) = (\Pi) - (\varepsilon)$$

$$\text{καὶ } (\Pi_1) \cap (\Pi_2) = \emptyset$$

Τὰ (Π_1) καὶ (Π_2) καλοῦνται ἡμι-επίπεδα.



Σχ. 33

Κατὰ τὸν ὅρισμόν ἡ εὐθεῖα (ε) , ἡ ὁποία καλεῖται καὶ ἀρχικὴ εὐθεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων, δὲν ἀνήκει εἰς οὐδὲν ἐξ αὐτῶν. Τότε δυνάμεθα ταῦτα νὰ τὰ λέγωμεν καὶ ἀνοικτὰ ἡμιεπίπεδα.

Ἐὰν ὁμως θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν καὶ τὴν (ε) εἰς τὰ ἡμιεπίπεδα, τότε ταῦτα θὰ λέγωνται κλειστὰ καὶ θὰ εἶναι :

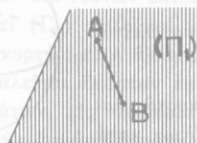
$$(\Pi_1) \cup (\Pi_2) = (\Pi) \quad \text{καὶ}$$

$$(\Pi_1) \cap (\Pi_2) = (\varepsilon)$$

47. Ἐπίπεδα τμήματα. Διακρίνομεν δύο εἴδη ἐπιπέδων τμημάτων, κυρτὰ καὶ μὴ κυρτὰ.

Κυρτὸν ἐπίπεδον τμήμα καλεῖται κάθε ὑποσύνολον (Π_1) ἐπιπέδου (Π) , διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει τὸ ἐξῆς (σχ. 34) :

Διὰ κάθε ζευγὸς σημείων $A, B \in (\Pi_1)$ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB ἀνήκει εἰς τὸ (Π_1) , ἥτοι $AB \in (\Pi_1)$

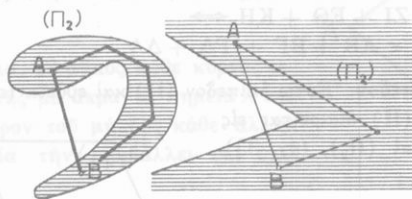


Σχ. 34

Μὴ κυρτὸν ἐπίπεδον τμήμα καλεῖται κάθε ὑποσύνολον (Π_2) ἐπιπέδου (Π) , διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει τὸ ἐξῆς (σχ. 35) :

Ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον ζευγὸς σημείων $A, B \in (\Pi_2)$ τοιοῦτον, ὥστε τὸ

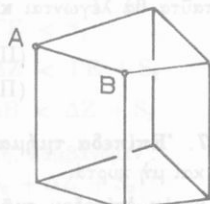
εὐθύγραμμον τμήμα AB νὰ μὴν ἀνήκη ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ (Π_2) , ἀλλὰ ὑπάρχει γραμμὴ μὲ ἄκρα τὰ A καὶ B ἀνήκουσα εἰς τὸ (Π_2) .



Σχ. 35

48. Εἶδη ἐπιφανειῶν. Ἡ ἔννοια τῆς ἐπιφανείας γενικῶς δὲν ὀρίζεται, θεωρουμένη ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια. Πάντως τὰ διάφορα εἶδη ἐπιφανειῶν δύνανται νὰ περιγραφοῦν περιφραστικῶς εἴτε καὶ διὰ μαθηματικῶν σχέσεων εἰς ἐπαρκῆ ἕως πλήρη βαθμὸν ἀναγνωρίσεως αὐτῶν. Θὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν περιφραστικὴν μόνον περιγραφὴν τῶν κυριωτέρων εἰδῶν ἐπιφανειῶν τὰ ὅποια, ἐκτὸς τῆς ἥδη γνωστῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, εἶναι :

i) **Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια.** Ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα τμήματα (σχ. 36) ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὅποια καλοῦνται **ἑδῶν** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας. Ἡ τομὴ δύο ἑδρῶν εἶναι εὐθεῖα ἢ τμήμα εὐθείας (βλ. εἰς σχῆμα τὴν AB) καὶ καλεῖται **ἀκμὴ** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ τομὴ τριῶν τοῦλάχιστον ἑδρῶν (ἂν ὑπάρχη) εἶναι σημεῖον (βλ. εἰς σχῆμα τὸ B), τὸ ὅποιον καλεῖται **κορυφὴ** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 36

ii) **Καμπύλη ἐπιφάνεια.** Ἐπ' αὐτῆς οὐδὲν ἐπίπεδον τμήμα ὑπάρχει. Καμπύλη ἐπιφάνεια εἶναι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια (σχ. 37) ἡ ὅποια ἂς θεωρηθῇ γνωστὴ, ὡς παράδειγμα, ἀπὸ τὴν προηγουμένην τάξιν.

iii) **Μικτὴ ἢ τυχαία ἐπιφάνεια.** Αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα τμήματα.

Αἱ ἐπιφάνεια γενικῶς διακρίνονται εἰς κυρτάς καὶ μὴ κυρτάς, ὀριζομένων τῶν ἑννοιῶν τούτων κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἑννοίας διὰ τὰς γραμμὰς (§ 42).



Σχ. 37

49. Ἐπιπεδομετρία καὶ Στερεομετρία. Ἡ γεωμετρία, ἐξετάζουσα τὰ σχήματα τῶν στερεῶν, τέμνει κατ' ἀρχὰς αὐτὰ δι' ἐπιπέδων καὶ ἐξετάζει τὰς τομὰς. Εἰς τὸ πρῶτον (καὶ μεγαλύτερον) μέρος της, ὅπου ἐξετάζει τὰς

επιπέδους αὐτὰς τομὰς, ἡ γεωμετρία καλεῖται **Ἐπιπεδομετρία**. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἡ γεωμετρία, ἐξετάζει τὰ σχήματα τῶν στερεῶν ἐν ὧν καλεῖται **Στερεομετρία**.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς γεωμετρίας, δηλαδὴ εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν, ὅταν θὰ λέγωμεν «σχῆμα» θὰ ἐννοοῦμεν ἐπίπεδον σχῆμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

10. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ φέρομεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Ἐὰν Ο εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ σχήματος ΑΒΓ, δείξατε ὅτι :

$$\frac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2} < ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ < ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ.$$

11. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΑ, λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι

$$Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Α' < ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ.$$

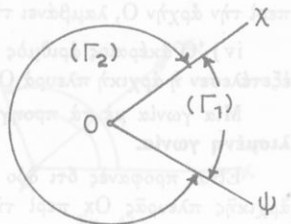
12. Δίδεται ἡ κλειστὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΑ καὶ φέρομεν τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ. Δείξατε ὅτι

$$\frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2} < ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ.$$

13. Νὰ διατυπωθοῦν οἱ ὁρίσμοι κυρτῆς καὶ μὴ κυρτῆς ἐπιφανείας ἀντίστοιχοι πρὸς ἐκείνους τῆς κυρτῆς καὶ μὴ κυρτῆς γραμμῆς. Νὰ ἀναφερθῇ ἀνὰ ἓν παράδειγμα ἀπὸ τὰς ἐπιφανείας γνωστῶν στερεῶν.

ΓΩΝΙΑΙ

50. **Ὁρισμός.** Δύο ἡμιευθεῖαι Οχ καὶ Οψ μὲ κοινὴν ἀρχὴν σημεῖον Ο (σχ. 38), διαιροῦν τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἐπίπεδα τμήματα (Γ₁) καὶ (Γ₂), ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι κυρτὸν καὶ τὸ ἄλλο μὴ κυρτὸν. Ἐκαστον ἐκ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων τμημάτων (Γ₁) καὶ (Γ₂) καλεῖται γωνία καὶ μάλιστα ἡ μία κυρτὴ καὶ ἡ ἄλλη μὴ κυρτὴ. Ἄρα γωνία καλεῖται ἕκαστον ἐκ τῶν δύο ἐπιπέδων τμημάτων, εἰς τὰ ὅποια δύο ἡμιευθεῖαι μὲ κοινὴν ἀρχὴν διαιροῦν τὸ ἐπίπεδόν των.

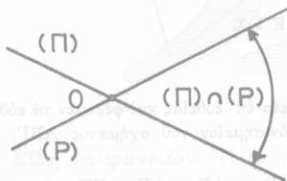


Σχ. 38

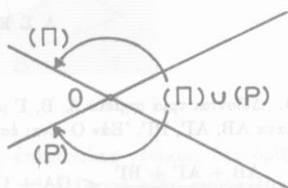
Αἱ ἡμιευθεῖαι Οχ καὶ Οψ καλοῦνται **πλευραὶ** ἐκάστης γωνίας καὶ ἡ κοινὴ ἀρχὴ Ο τῶν πλευρῶν καλεῖται **κορυφή** ἐκάστης γωνίας ἐκ τῶν (Γ₁) καὶ (Γ₂), συμβολίζονται δὲ χΟψ καὶ χ̃Οψ ἀντιστοίχως.

Ίσοδύναμοι πρὸς τὸν προηγούμενον ὅρισμόν εἶναι καὶ οἱ ἀκόλουθοι δύο ὅρισμοί :

Κυρτὴ γωνία καλεῖται ἡ τομὴ δύο ἡμιεπιπέδων (Π) καὶ (P) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι τέμνονται εἰς σημεῖον O (σχ. 39).



Σχ. 39



Σχ. 40

Μὴ κυρτὴ γωνία καλεῖται ἡ ἔνωση δύο ἡμιεπιπέδων (Π) καὶ (P) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι τέμνονται εἰς σημεῖον O (σχ. 40).

51. Προσανατολισμός γωνίας — Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας. Σκόπιμον εἶναι ὠρισμένως φορᾶς νὰ θεωρήσωμεν τὴν γωνίαν, ὡς περιοχὴν τοῦ ἐπιπέδου, διαγραφομένην ὑπὸ ἡμιευθείας Ox , στρεφομένης εἰς τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν ἀρχὴν O κατὰ ὠρισμένην φορὰν περιστροφῆς (σχ. 41). Κατὰ ταῦτα, μία γωνία θὰ θεωρεῖται πλήρως καθωρισμένη, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ἀκόλουθα τέσσαρα στοιχεῖα τῆς :

- i) Ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς Ox .
- ii) Ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς Oy .
- iii) Ἡ φορὰ διαγραφῆς τῆς, ἥτοι ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς Ox , στρεφομένη περὶ τὴν ἀρχὴν O , λαμβάνει τὴν θέσιν Oy .



Σχ. 41

- iv) Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς k , ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσας πλήρεις περιστροφὰς ἐξετέλεσεν ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ Ox , πρὶν αὕτη λάβῃ τὴν τελικὴν θέσιν τῆς Oy .

Μία γωνία μὲ τὰ προηγούμενα τέσσαρα στοιχεῖα, καλεῖται **προσανατολισμένη γωνία**.

Εἶναι προφανές ὅτι δύο μόνον εἶναι αἱ δυνατὰ φοραὶ περιστροφῆς τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς Ox περὶ τὴν ἀρχὴν O . Πρὸς διαφοροποίησιν αὐτῶν τῶν δύο φορῶν περιστροφῆς, τὴν μίαν, αὐθαιρέτως ἐκλεγείσαν, καλοῦμεν **θετικὴν** καὶ τὴν ἄλλην (ἀντίθετον τῆς πρώτης) **ἀρνητικὴν** φορὰν περιστροφῆς. Κατὰ συνθήκειαν, ὡς θετικὴν φορὰν περιστροφῆς θεωροῦμεν τὴν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου (σχ. 41).

Προκειμένου διὰ δύο ἢ περισσοτέρας γωνίας αὐτὸ τοῦ μᾶς ἐνδιαφέρει

κυρίως, δὲν εἶναι τὸ ἂν εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι, ἀλλὰ τὸ ἂν αὐταὶ εἶναι ὁμοίόστροφοι ἢ ἐτερόστροφοι, ἤτοι ἔαν εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φοράς. Εἰς τὴν συμβολικὴν ἀναγραφὴν των, προτάσσομεν τὸ σύμβολον $\hat{\angle}$ ἐνῶ εἰς τὴν ἀναγραφὴν τῆς γωνίας προτάσσομεν πάντοτε τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν π.χ. $\hat{\angle} XAY$ σημαίνει προσανατολισμένη γωνία με ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ax . Χρησιμοποιεῖται καὶ ὁ συμβολισμὸς $(\hat{A}x, \hat{A}y)$ διὰ διατεταγμένου ζεύγους ἡμιευθειῶν, ὅπου ἡ Ax εἶναι ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ καὶ ἡ Ay ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας.

52. Ίσότης εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν. Δύο γωνίαι καλοῦνται ἴσαι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Ἐπὶ προσανατολισμένων γωνιῶν πρέπει ἐπὶ πλέον νὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, ἡ ἀρχικὴ δὲ πλευρὰ των νὰ ἔχη ἐκτελέσει τὸ αὐτὸ πλῆθος k πλήρων περιστροφῶν πρὶν λάβῃ τὴν τελικὴν τῆς θέσιν.

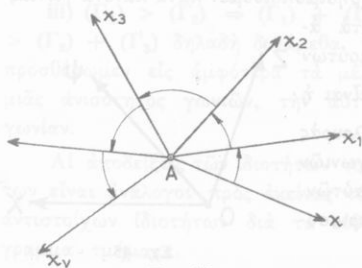
Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἶναι ἀνακλαστικὴ, συμμετρικὴ καὶ μεταβατικὴ, ἤτοι ἔαν $(\Gamma_1), (\Gamma_2), (\Gamma_3)$ εἶναι γωνίαι, τότε :

$$i) (\Gamma_1) = (\Gamma_1)$$

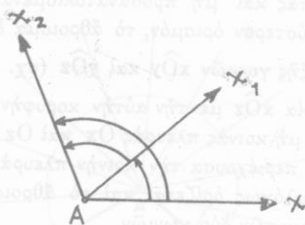
$$ii) (\Gamma_1) = (\Gamma_2) \Rightarrow (\Gamma_2) = (\Gamma_1)$$

$$iii) (\Gamma_1) = (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_2) = (\Gamma_3) \Rightarrow (\Gamma_1) = (\Gamma_3).$$

53. Ἐφεξῆς καὶ διαδοχικαὶ γωνίαι. Ἐφεξῆς καλοῦνται δύο γωνίαι $\hat{x}\hat{A}x_1$ καὶ $x_1\hat{A}x_2$ (σχ. 43), ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καί, νοοῦμεναι προσανατολισμέναι, εἶναι τῆς αὐτῆς φοράς, ἡ τελικὴ δὲ πλευρὰ τῆς πρώτης εἶναι ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς δευτέρας.



Σχ. 42



Σχ. 43

Διαδοχικαὶ καλοῦνται n τὸ πλῆθος γωνίαι (σχ. 42), ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν A καί, νοοῦμεναι προσανατολισμέναι, εἶναι τῆς αὐτῆς φοράς, ἡ τελικὴ δὲ πλευρὰ ἐκάστης εἶναι ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς ἐπομένης π.χ. αἱ γωνίαι $\hat{\angle} xAx_1, \hat{\angle} x_1Ax_2, \dots, \hat{\angle} x_{n-1}Ax_n$.

54. "Άθροισμα γωνιών. "Άθροισμα δύο έφεξις γωνιών $\angle xAx_1$ και $\angle x_1Ax_2$ καλεῖται ἡ γωνία $\angle xAx_2$ με ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τῆς πρώτης γωνίας καὶ τελικὴν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς δευτέρας γωνίας (σχ. 43). Συμβολικῶς γράφομεν $\angle xAx_1 + \angle x_1Ax_2 = \angle xAx_2$.

Ἐὰν αἱ γωνίαι δὲν εἶναι έφεξις, δυνάμεθα διὰ μετατοπίσεως νὰ τὰς καταστήσωμεν έφεξις. Ἡ διαδικασία πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἄθροίσματος δύο γωνιών καλεῖται **πρᾶξις τῆς προσθέσεως** ἢ ἀπλῶς **πρόσθεσις** τῶν γωνιών.

Ἀναλόγως ὀρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο γωνιών, ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὴν τρίτην γωνίαν κ.ο.κ.

Εἰς τὸ σχῆμα 44 ἔχομεν :

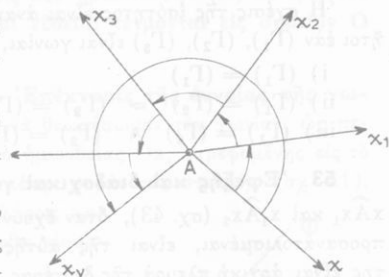
$$\angle xAx_1 + \angle x_1Ax_2 + \dots + \angle x_{v-1}Ax_v = \angle xAx_v.$$

Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιών εἶναι έσωτερικὴ πρᾶξις, διότι τὸ ἄθροισμα δύο γωνιών εἶναι γωνία καὶ έπομένως τὸ σύνολον τῶν γωνιών εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ἐπὶ πλεόν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ προσεταιριστικὴ καὶ μονότροπος, ἥτοι ἔαν (Γ_1) , (Γ_2) , (Γ_3) εἶναι γωνίαι, ἰσχύουν :

$$i) (\Gamma_1) + (\Gamma_2) = (\Gamma_2) + (\Gamma_1)$$

$$ii) [(\Gamma_1) + (\Gamma_2)] + (\Gamma_3) = (\Gamma_1) + [(\Gamma_2) + (\Gamma_3)].$$

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἀποδείξεις διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ παραλείπονται.



σχ. 44

Παρατήρησις. Εἰς τὴν γεωμετρίαν χρησιμοποιοῦμεν κατὰ κανόνα γωνίας κυρτὰς καὶ μὴ προσανατολισμένας. Κατὰ ἀπλούστερον ὅρισμόν, τὸ ἄθροισμα δύο τοιούτων έφεξις γωνιών $\widehat{xOy}$ καὶ $\widehat{yOz}$ (σχ. 45), εἶναι ἡ γωνία $\widehat{xOz}$ με τὴν αὐτὴν κορυφὴν O, πλευρὰς τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς Ox καὶ Oz τῶν γωνιών καὶ περιέχουσα τὴν κοινὴν πλευρὰν Oy αὐτῶν. Ἀναλόγως ὀρίζεται καὶ τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο γωνιών.



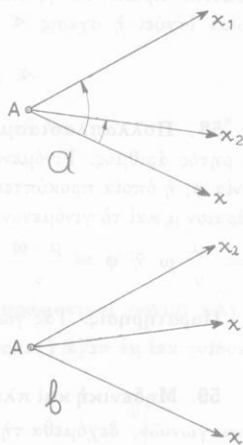
σχ. 45

55. Διαφορὰ δύο γωνιών. Ἀς θεωρήσωμεν δύο προσανατολισμένας γωνίας $\angle xAx_1$ καὶ $\angle xAx_2$ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, με κοινὴν κορυφὴν A καὶ κοινὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ax (σχ. 46 α, β). Διαφορὰ τῆς $\angle xAx_2$ ἀπὸ τὴν $\angle xAx_1$, συμβολιζομένη με $\angle xAx_1 - \angle xAx_2$, καλεῖται ἡ προσανατολισμένη γωνία $\angle x_2Ax_1$, ἥτοι εἶναι $\angle xAx_1 - \angle xAx_2 =$

$\angle x_2Ax_1$, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν $\angle xAx_1 = \angle xAx_2 + \angle x_2Ax_1$.

Ἡ διαδικασία πρὸς εὑρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο γωνιῶν καλεῖται **πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως** ἢ ἀπλῶς **ἀφαίρεσις** τῶν δύο γωνιῶν.

Συναφῶς ὀρίζομεν καὶ τὴν σχέσιν τῆς ἀνισότητος (διατάξεως) εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ὡς ἀκολούθως: Ἐὰν ἡ διαφορὰ $\angle x_2Ax_1$ τῶν δύο γωνιῶν εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ πρὸς ἐκεῖνον τῶν ἀρχικῶν γωνιῶν, ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς ἀρχικὰς γωνίας $\angle xAx_1$ καλεῖται **μεγαλύτερα** (ἀπολύτως) τῆς δευτέρας γωνίας $\angle xAx_2$ (σχ. 46α) καὶ συμβολίζομεν $\widehat{xAx_1} > \widehat{xAx_2}$. Ἐὰν ἡ διαφορὰ $\angle x_2Ax_1$ εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ πρὸς ἐκεῖνον τῶν ἀρχικῶν γωνιῶν, ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς ἀρχικὰς γωνίας $\angle xAx_1$ καλεῖται **μικροτέρα** (ἀπολύτως) τῆς δευτέρας γωνίας $\angle xAx_2$ (σχ. 46β) καὶ συμβολίζομεν $\widehat{xAx_1} < \widehat{xAx_2}$. (Αἱ προηγούμεναι σχέσεις ἀνισότητος εἶναι σχέσεις ἀπόλυτοι, ἥτοι ἀπηλλαγμένοι προσανατολισμοῦ).



Σχ. 46

Ἐὰν (Γ_1) , (Γ_2) , (Γ_3) , (Γ_4) εἶναι γωνίαι, διατυπώνομεν τὰς ἀκολούθους ιδιότητας τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν :

i) Ἡ σχέσηις τῆς ἀνισότητος εἶναι μεταβατική, ἥτοι :

$$(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_2) > (\Gamma_3) \Rightarrow (\Gamma_1) > (\Gamma_3).$$

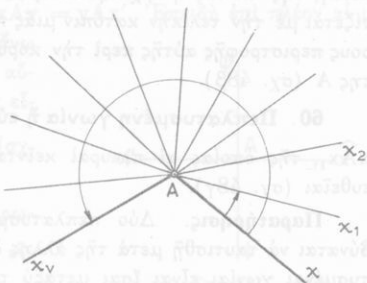
ii) $(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_3) > (\Gamma_4) \Rightarrow (\Gamma_1) + (\Gamma_3) > (\Gamma_2) + (\Gamma_4)$ δηλαδή δύναμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοιοστροφούς ἀνισότητας.

iii) $(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \Rightarrow (\Gamma_1) + (\Gamma_3) > (\Gamma_2) + (\Gamma_3)$ δηλαδή δύναμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος γωνιῶν, τὴν αὐτὴν γωνίαν.

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ιδιοτήτων τούτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἐκεῖνας τῶν ἀντιστοίχων ιδιοτήτων διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

56. Γινόμεμον γωνίας ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν. Ἐστω μία γωνία $\angle xAx_1$. Καλεῖται γινόμεμον αὐτῆς ἐπὶ

τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν n ἡ γωνία $\angle xAx_n$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν n γωνιῶν ἴσων πρὸς τὴν $\angle xAx_1$ (σχ. 47).



Σχ. 47

Τότε γράφουμεν : $\angle xAx_v = v \cdot \angle xAx_1$.

57. Πηλίκον γωνίας διά φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Ἐστω ἡ γωνία $\angle xAx_v$. Καλεῖται πηλίκον αὐτῆς διά τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v ἡ γωνία $\angle xAx_1$, διά τὴν ὁποῖαν ἰσχύει ἡ σχέσις $\angle xAx_v = v \cdot \angle xAx_1$. Τότε γράφουμεν :

$$\angle xAx_1 = \frac{\angle xAx_v}{v}.$$

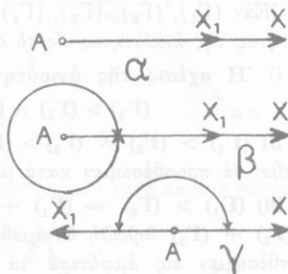
58. Πολλαπλασιασμός γωνίας ἐπὶ ρητόν. Ἐστω γωνία ω καὶ μ/v εἰς ρητὸς ἀριθμός. Γινόμενον τῆς γωνίας ω ἐπὶ τὸν ρητὸν μ/v καλεῖται μία γωνία φ , ἡ ὁποία προκύπτει ἐὰν τὴν γωνίαν ω τὴν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον μ καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιρέσωμεν διά τοῦ ἀκεραίου v . Τότε γράφουμεν

$$\varphi = \frac{\mu}{v} \omega \quad \text{ἢ} \quad \varphi = \frac{\mu \cdot \omega}{v}$$

Παρατήρησις. Τὰς γωνίας, δυνάμεθα νὰ τὰς συμβολίζομεν, πρὸς ἀπλούστευσιν, καὶ μὲ πεζὰ (μικρὰ) γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ὡς τὰ ω , φ , σ κλπ.

59. Μηδενικὴ καὶ πλήρης γωνία. Διὰ νὰ ἔχη νόημα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἴσων γωνιῶν, δεχόμεθα τὴν ὑπαρξιν **μηδενικῆς** γωνίας, ἥτοι γωνίας $\angle xAx_1$ τῆς ὁποίας αἱ δύο πλευραὶ ταυτίζονται (σχ. 48α). Ἡ μηδενικὴ γωνία ἀποτελεῖ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον διὰ τὴν πράξιν τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, συμβολίζεται μὲ $\hat{0}$ ἢ $\angle 0$ καὶ εἶναι $\hat{A} + \hat{0} = \hat{0} + \hat{A} = \hat{A}$ διὰ κάθε γωνίαν $\hat{A}$.

Πλήρης γωνία καλεῖται ἡ γωνία $\angle xAx_1$, τῆς ὁποίας ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ ταυτίζεται μὲ τὴν τελικὴν κατόπιν μιᾶς πλήρους περιστροφῆς αὐτῆς περὶ τὴν κορυφὴν τῆς A (σχ. 48β).



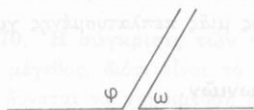
Σχ. 48

60. Πεπλατυσμένη γωνία ἢ εὐθεῖα γωνία καλεῖται μία κυρτὴ γωνία $\angle xAx_1$, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι (σχ. 48γ).

Παρατήρησις. Δύο πεπλατυσμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι ἡ μία δύναται νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἄλλης διὰ μετατοπίσεως. Ἄρα ὅσαι αἱ πεπλατυσμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐπομένως ἡ πεπλατυσμένη γωνία διατηρεῖ σταθερὸν μέγεθος.

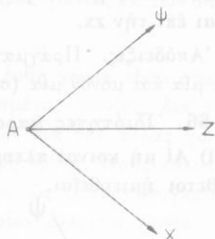
61. Παραπληρωματικαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο γωνίαι ω καὶ φ , ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν πεπλατυσμένην γωνίαν (σχ. 49).

62. **Διχοτόμος γωνίας** $\widehat{x\hat{A}y}$ καλείται ἡ ἡμιευθεῖα Az με ἀρχὴν τὴν κορυφὴν A , ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{x\hat{A}y}$ καὶ ἡ ὁποία διαιρεῖ τὴν $\widehat{x\hat{A}y}$ εἰς δύο ἄλλας ἴσας γωνίας, ἥτοι $\widehat{x\hat{A}z} = \widehat{z\hat{A}y}$ (σχ. 50).



Σχ. 49

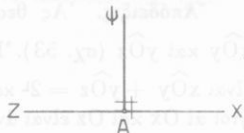
Ἀξίωμα. Μία γωνία ἔχει μίαν καὶ μόνον μίαν διχοτόμον.



Σχ. 50

63. Ὀρθὴ γωνία. Δύο ἴσαι καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι $\widehat{x\hat{A}y}$ καὶ $\widehat{y\hat{A}z}$ καλοῦνται ὀρθαί. (σχ. 51). Τότε γράφομεν: $\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{y\hat{A}z} = 1^\circ$.

Πόρισμα. Ἡ κοινὴ πλευρὰ Ay δύο ἐφεξῆς ὀρθῶν γωνιῶν $\widehat{x\hat{A}y}$ καὶ $\widehat{y\hat{A}z}$ εἶναι διχοτόμος τῆς πεπλατυσμένης γωνίας $\widehat{z\hat{A}x}$.



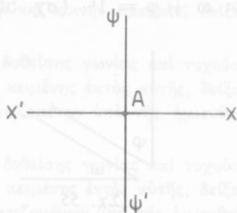
Σχ. 51

64. Θεώρημα. Ἐὰν ἐκ τῶν τεσσάρων κυρτῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι, δύο ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ μάλιστα ἄρθαι, αἱ δὲ εὐθεῖαι λέγονται ὅτι τέμνονται καθέτως.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν αἱ εὐθεῖαι xAx' καὶ yAy' τεμνόμεναι εἰς τὸ A , διὰ τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι $\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{y\hat{A}x'}$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλεον αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ Ax καὶ Ax' τῶν ὡς ἄνω γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι καὶ παραπληρωματικαί, ἄρα εἶναι ὀρθαί, ἥτοι $\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{y\hat{A}x'} = 1^\circ$ (σχ. 52).

Ἡ γωνία $\widehat{x'\hat{A}y'}$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{y\hat{A}x'}$, ἄρα εἶναι καὶ αὐτὴ ὀρθή, δηλαδή $\widehat{x'\hat{A}y'} = 1^\circ$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $\widehat{y'\hat{A}x} = 1^\circ$. Αἱ εὐθεῖαι xAx' καὶ yAy' λέγονται κάθετοι ἢ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην.



Σχ. 52

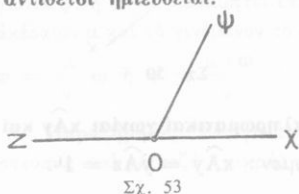
Ἡ καθετότης συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\perp$. Γράφομεν δηλαδή $xAx' \perp yAy'$.

65. Θεώρημα. Ἐξ ἐνὸς σημείου A εὐθείας zx μία καὶ μόνον μία κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὴν zx .

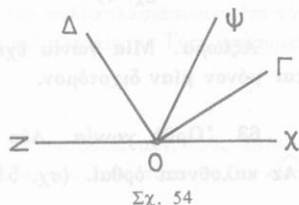
Ἀπόδειξις. Πράγματι, διότι ἡ διχοτόμος μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας εἶναι μία καὶ μόνον μία (σχ. 51), ἡ $Ay \perp zx$.

66. Ἰδιότητες παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

i) Αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν, εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.



Σχ. 53



Σχ. 54

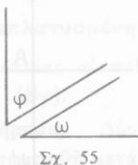
Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς γωνίας $\widehat{xOy}$ καὶ $\widehat{yOz}$ (σχ. 53). Ἐπειδὴ ἐξ ὁρίσμου τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν, εἶναι $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 2^\circ$ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$, ἔπεται ὅτι $\widehat{xOz} = 2^\circ$ ἥτοι αἱ Ox καὶ Oz εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.

ii) Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

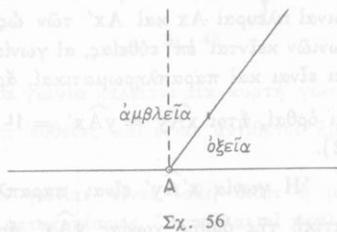
Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν $O\Gamma$ καὶ $O\Delta$ αἱ διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καὶ $\widehat{yOz}$ (σχ. 54). Ἐπειδὴ $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 2^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{xOy}}{2} + \frac{\widehat{yOz}}{2} = 1^\circ \Rightarrow \widehat{\Gamma Oy} + \widehat{yO\Delta} = 1^\circ \Rightarrow \widehat{\Gamma O\Delta} = 1^\circ.$$

67. Συμπληρωματικαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο γωνίαι ω καὶ ϕ , ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ἥτοι $\omega + \phi = 1^\circ$ (σχ. 55).



Σχ. 55



Σχ. 56

68. Πλάγια εὐθεῖαι. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι λέγονται πλάγια, ὅταν δὲν εἶναι κάθετοι.

69. Ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία. Κάθε γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται ὀξεῖα γωνία (σχ. 56).

Κάθε κυρτὴ γωνία μεγαλύτερα τῆς ὀρθῆς καλεῖται ἀμβλεία γωνία (σχ. 56).

Δύο πλαγίως τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὀρίζουν τέσσαρας γωνίας ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι ὀξεῖαι καὶ αἱ δύο ἀμβλεῖαι.

70. Ἡ σύγκρισις τῶν γωνιῶν. Ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι σταθερὰ κατὰ μέγεθος, διότι εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς πεπλατυσμένης γωνίας, διὰ τοῦτο αὕτη δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μέτρον συγκρίσεως διὰ τὰς ἄλλας γωνίας. Κάθε γωνία δύναται νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ὀρθὰς καὶ μέρη ὀρθῆς. Πρὸς καλυτέραν κλιμάκωσιν ὁμως διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν γωνιῶν, ὡς μέτρον συγκρίσεως χρησιμοποιοῦται τὸ $1/90$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον καλεῖται **γωνία μιᾶς μοίρας** ἢ ἀπλῶς **μοῖρα** καὶ συμβολίζεται 1° . Οὕτω μία ὀρθὴ γωνία ἔχει 90° , μία πεπλατυσμένη γωνία ἔχει 180° καὶ μία πλήρης γωνία ἔχει 360° . Ἐκάστη μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **πρῶτον λεπτὸν** καὶ συμβολίζεται μὲ $1'$, ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **δεύτερον λεπτὸν** καὶ συμβολίζεται $1''$. Τὰ δεύτερα λεπτὰ ἐν συνεχείᾳ ὑποδιαιροῦνται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α.

14. Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν αἱ διχοτόμοι των εἶναι κάθετοι, δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

15. Ποίας γωνίας τὸ ἄθροισμα τῆς συμπληρωματικῆς τῆς καὶ τῆς παραπληρωματικῆς τῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἐπταπλάσιον τῆς γωνίας ;

16. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἡμιἄθροισμα αὐτῶν. Ἐφαρμογή : Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν 120° . Ἐὰν ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὸ $1/4$ τῆς ἄλλης, νὰ εὐρεθῇ τὸ μέγεθος ἐκάστης.

17. Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν διαφορὰν μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ τοποθετηθοῦν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, οὕτως, ὥστε ν' ἀποκτήσουν κοινὴν κορυφὴν καὶ κοινὴν πλευράν, δείξατε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων των εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς ὀρθῆς.

18. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας καὶ τυχούσης ἡμιευθείας μὲ ἀρχὴν τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ κειμένης ἐκτὸς αὐτῆς, δείξατε ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

19. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας καὶ τυχούσης ἡμιευθείας μὲ ἀρχὴν τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ κειμένης ἐντὸς αὐτῆς, δείξατε ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

20. Ἐὰν μία γωνία εἶναι τὰ $3/8$ τῆς ὀρθῆς, νὰ εὐρεθῇ ἡ συμπληρωματικὴ καὶ ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

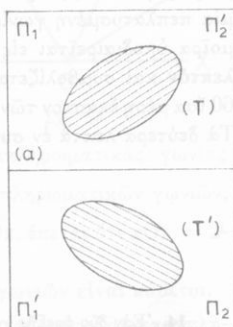
21. Τρεῖς διαδοχικαί γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθὰς. Ἐὰν ἡ β' γωνία εἶναι τὰ $4/5$ τῆς α' καὶ ἡ γ' τὸ $1/3$ τῆς α' νὰ εὐρεθοῦν αὐταὶ εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

22. Ἐκ σημείου A ἄγονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι Ax , Ay , Az οὕτως, ὥστε αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι $\widehat{xAy}$, $\widehat{yAz}$, $\widehat{zAx}$ νὰ εἶναι ἴσαι. Δείξατε ὅτι ἐκάστη τῶν ἡμιευθειῶν τούτων προεκτετινομένη διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων ἡμιευθειῶν.

23. Ἐὰν τέσσαρες ἡμιευθεῖαι OA , OB , OG , OD , σχηματίζουν γωνίας $\widehat{AOB} = \widehat{AOD}$ καὶ $\widehat{BOG} = \widehat{GOD}$, δείξατε ὅτι αἱ ἡμιευθεῖαι OA καὶ OG ἀποτελοῦν εὐθεῖαν.

ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

71. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ μία εὐθεῖα (α) αὐτοῦ, ἡ ὁποία τὸ διαιρεῖ εἰς τὰ δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καὶ (Π_2) (σχ. 57). Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι τὸ (Π) περιστρέφεται περὶ τὴν εὐθεῖαν (α) εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἡμιεπίπεδον (Π_1) νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν (Π'_1) ταυτιζόμενον μετὰ τοῦ (Π_2) καὶ τὸ (Π_2) νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν (Π'_2) ταυτιζόμενον μετὰ τοῦ (Π_1) , τότε ἐν οἴονδῃποτε σχῆμα (T) τοῦ ἐπιπέδου (Π) θὰ καταλάβῃ μίαν θέσιν (T') , ἡ ὁποία θὰ καλεῖται **συμμετρικὴ** τοῦ σχήματος (T) ὡς πρὸς **ἄξονα συμμετρίας** τὴν εὐθεῖαν (α) . Εἶναι προφανές ὅτι ἐὰν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ (T) ἐπὶ τοῦ ἄξονος (α) , ταῦτα παραμένουν εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ καλοῦνται **ἀναλλοίωτα** σημεῖα κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α) .



Σχ. 57

Συμβολικῶς, διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ σχῆμα (T') εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (T) ὡς πρὸς ἄξονα εὐθεῖαν (α) , γράφομεν :

$$(T) \xrightarrow[\Sigma_{(\alpha)}]{\Sigma_{(\omega)}} (T')$$

Πόρισμα I. Ἐὰν $(T) \xrightarrow[\Sigma_{(\alpha)}]{\Sigma_{(\omega)}} (T')$, τότε καὶ

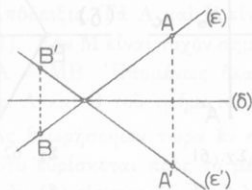
$(T') \xrightarrow[\Sigma_{(\alpha)}]{\Sigma_{(\omega)}} (T)$ δηλαδή ἐὰν τὸ (T') εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (T) ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α) , τότε καὶ τὸ (T) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (T') ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Πράγματι, διότι καὶ μὲ μίαν δευτέραν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου (Π) περὶ τὴν εὐθεῖαν (α) , τοῦτο θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν καὶ συνεπῶς τὸ (T') θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τοῦ (T) . Ὡς ἐκ τούτου, τὰ δύο σχήματα (T) καὶ (T') καλοῦνται **συμμετρικά** μεταξὺ των ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α) .

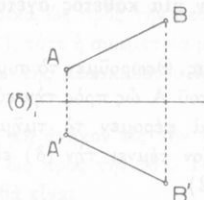
Πόρισμα II. Δύο συμμετρικά μεταξὺ των σχήματα εἶναι ἴσα. Διότι τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν, δύναται διὰ μιᾶς μετατοπίσεως νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἄλλου. Ἡ μετατόπισις αὕτη (τῆς συμμετρίας) καλεῖται ἀναστροφή.

Πόρισμα III. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ϵ) ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας εὐθεῖαν (δ), κατ' ἀρχὰς γνωρίζομεν ὅτι εἶναι ἴσον σχῆμα καὶ συνεπῶς εἶναι εὐθεῖα (ϵ'). Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ εὕρωμεν τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' δύο τυχόντων σημείων A καὶ B τῆς (ϵ). Ταῦτα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς εὐθείας (ϵ') τῆς (ϵ) καὶ συνεπῶς εἶναι ἱκανὰ νὰ τὴν ὀρίσουν.

Συνήθως ὡς ἓν ἐκ τῶν δύο σημείων λαμβάνεται τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ (ϵ) τέμνει τὸν ἄξονα (δ), ἐφ' ὅσον τοῦτο ὑπάρχει, διότι παραμένει ἀναλλοίωτον κατὰ τὴν συμμετρίαν ἐφ' ὅσον ἀνήκει εἰς τὸν ἄξονα (δ) (σχ. 58).



Σχ. 58



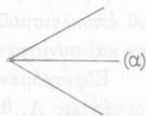
Σχ. 59

Πόρισμα IV. Τὸ συμμετρικὸν $A'B'$ εὐθυγράμμου τμήματος AB ὡς πρὸς ἄξονα (δ) ὀρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' τῶν ἄκρων A καὶ B τοῦ AB ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (δ) (σχ. 59).

Σημειώσεις. Ἡ ἀξονική συμμετρία καλεῖται καὶ **κατοπτρισμός**, διότι δύο συμμετρικὰ μεταξὺ των σχήματα ἐμφανίζουν τοιαύτην σχέσιν, ὡς ἂν ἐμφανίζετο τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ κατοπτρικὸν τοῦ εἰδωλον.

72. Ἄξων συμμετρίας σχήματος. Ἐὰν ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος (Σ) εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (α), τότε λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (α). Αὕτη δὲν ἀνήκει κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ (Σ) καὶ χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ὡς παράδειγμα ἀναφερόμεν τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 60).



Σχ. 60

ΚΑΘΕΤΟΙ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ

73. Μεσοκάθετος. Ἐστω εὐθεῖα xx' καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ A' ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν xx' καὶ φέρομεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AA' (σχ. 61), τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν xx' εἰς τὸ σημεῖον A_0 . Τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας, ἔχομεν ἂφ' ἑνὸς μὲν $AA_0 = A'A_0$, ἤτοι τὸ A_0 εἶναι μέσον τοῦ τμήματος AA' , ἂφ' ἑτέρου δὲ $\widehat{AA_0x} = \widehat{A'A_0x}$

και επειδή επί πλέον αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικά, ἔπεται ὅτι εἶναι ὀρθαί, ἤτοι αἱ εὐθεῖαι xx' καὶ AA' εἶναι κάθετοι μεταξὺ των. Ἡ εὐθεῖα xx' , ὡς κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AA' , καλεῖται **μεσοκάθετος** αὐτοῦ.

Πόρισμα. Ὁ ἄξων συμμετρίας εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος, ποὺ ὀρίζεται ἀπὸ κάθε ζεύγος συμμετρικῶν σημείων A, A' .

74. Θεώρημα. Ἐξ ἐνὸς σημείου A κειμένου ἐκτὸς εὐθείας (δ) , μία καὶ μόνον μία κάθετος ἄγεται ἐπ' αὐτήν.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ A ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ φέρομεν τὸ τμήμα AA' , τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν (δ) εἰς τὸ A_0 (σχ. 62).

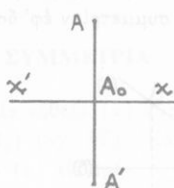
Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν AA' κάθετον ἐπὶ τῆς (δ) , ἄρα ὑπάρχει ἐκ τοῦ A κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) .

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τοῦ A ὑπάρχει καὶ ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) , ἡ AB . Τότε θὰ εἶναι $\widehat{ABA_0} = 1^\circ$. Ἡ $A'B$ εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς AB καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ $\widehat{BA_0A'} = 1^\circ$. Ἄρα $\widehat{ABA'} = 2^\circ$. Ἐπομένως ἡ γραμμὴ ABA' θὰ εἶναι εὐθεῖα. Τὰ σημεῖα A καὶ A' ὅμως μίαν καὶ μόνον μίαν εὐθεῖαν ὀρίζουν, τὴν AA_0A' . Ἐπομένως ἡ ABA' δὲν δύναται νὰ εἶναι κάθετος παρὰ μόνον ἂν ταυτίζεται μὲ τὴν AA_0A' . Ἄρα δὲν δύναται νὰ ὑπάρχη καὶ δευτέρα κάθετος ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν (δ) .

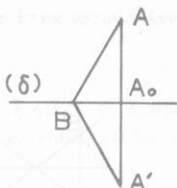
Σημείωσις. Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀποδεικτικὴ μέθοδος καλεῖται «μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς» ἢ «μέθοδος τοῦ ἀποκλεισμοῦ τῶν δυνατῶν περιπτώσεων». Αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Εὐκλείδην καὶ συνίσταται εἰς τὸ ἐξῆς :

Εὐρισκόμενοι εἰς ἀδυναμίαν νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἄμεσον ἀπόδειξιν μιᾶς προτάσεως A , θεωροῦμεν ὅλα τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα $B, \Gamma, \dots, N$ τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ συμβαίνουν. Λαμβάνοντες ἐν ἑκαστον ἐξ αὐτῶν καὶ μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τοῦτο συμβαίνει, κατόπιν λογικῆς ἐπεξεργασίας ἂν φθάσωμεν εἰς συμπέρασμα ἀναληθές, ἢ ἄτοπον ὅπως λέγομεν, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι εἰς τὸ ἐσφαλμένον συμπέρασμα μᾶς ὠδήγησεν ἡ ἐσφαλμένη ὑπόθεσις, ἡ ὁποία κατὰ συνέπειαν πρέπει νὰ ἀποκλεισθῇ. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ, ἂν ἀποκλεισθοῦν ὡς ἐσφαλμένα τὰ ἐνδεχόμενα $B, \Gamma, \dots, N$, πειθόμεθα ὅτι τὸ μόνον τὸ ὁποῖον ἀληθεύει εἶναι τὸ ἐνδεχόμενον A .

Τὰ ἐνδεχόμενα $B, \Gamma, \dots, N$ καλοῦνται **συμπληρωματικά** τοῦ A . Ἐὰν ἓνα ἐνδεχόμενον A ἔχῃ ἓν μόνον συμπληρωματικὸν B , τοῦτο καλεῖται καὶ **ἀντίθετον** τοῦ A .



Σχ. 61



Σχ. 62

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ὑπόθεσις ὅτι δυνατόν νά ὑπάρχῃ καί μία δευτέρα κάθετος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν (δ), μᾶς ὡδήγησεν εἰς τὸ ἐσφαλμένον (ἄτοπον) συμπέρασμα ὅτι διὰ τῶν σημείων Α αἱ Α' διέρχονται δύο εὐθεῖαι. Αὐτὸς ἦτο καὶ ὁ λογος βάσει τοῦ ὁποίου ἀπεκλείσθη ἡ ὑπαρξίς καὶ μιᾶς δευτέρας κάθετου.

75. Ἰδιότης τῆς μεσοκαθέτου. Θεώρημα. Ὅλα τὰ σημεία τῆς μεσοκαθέτου (δ) εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ μόνον αὐτὰ, ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Ἀπόδειξις. Τὰ Α καὶ Β εἶναι συμμετρικά ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον (δ) (σχ. 63). Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (δ), τότε ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $MA = MB$. Ἐπομένως ὅλα τὰ σημεία τῆς μεσοκαθέτου ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τμήματος.

Ἀς θεωρήσωμεν τώρα ἐν σημεῖον Ν, μὴ ἀνήκον εἰς τὴν (δ) καὶ ἔστω ὅτι τοῦτο εὐρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν (δ). Τότε ἡ ΝΑ θὰ τέμνῃ τὴν (δ) εἰς σημεῖον Ρ, διὰ τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι

$$(1) \quad PA = PB$$

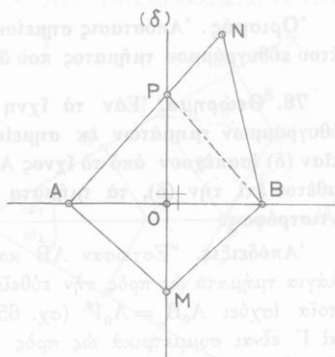
ὡς σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου.

Γνωρίζομεν ὅμως (§ 40) ὅτι $NB < NP + PB$, ἡ ὁποία λόγῳ τῆς σχέσεως (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$NB < NP + PA \Rightarrow NB < NA$$

Ἄρα κάθε σημεῖον Ν, μὴ ἀνήκον εἰς τὴν μεσοκάθετον, ἀπέχει ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β καὶ μάλιστα μεγαλυτέραν ἀπὸ ἐκεῖνο μετὰ τοῦ ὁποίου κεῖνται ἐκατέρωθεν τῆς μεσοκαθέτου. Ἐπομένως μόνον τὰ σημεία τῆς μεσοκαθέτου (δ) ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ.

Παρατήρησις. Ἡ προηγούμενη ιδιότης τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου εὐθυγράμμου τμήματος καὶ μόνον αὐτῶν, νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος, ἀπεδείχθη διὰ τῆς λογικῆς ἰσοδυναμίας τῶν προτάσεων $A \Rightarrow B$ καὶ $\delta\chi\iota A \Rightarrow \delta\chi\iota B$, ἐκ τῶν ὁποίων ἔπεται $A \Leftrightarrow B$.



Σχ. 63

76. Γεωμετρικός τόπος καλεῖται κάθε σύνολον σημείων, τοῦ ὁποίου τὰ σημεία καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουν μίαν ὁρισμένην ιδιότητα.

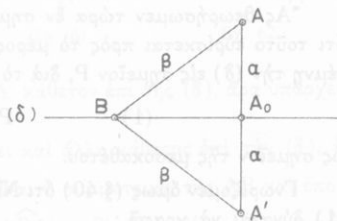
Τὰ σημεία ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου (συντόμως γ. τόπου) εἶναι ἐν γένει ἄπειρα καὶ συνιστοῦν ἐν σχῆμα (Τ). Ἐὰν f εἶναι ἡ καθοριστικὴ ιδιότης ἑνὸς γ. τόπου (Τ), κάθε σημεῖον τοῦ σχήματος (Τ) ἔχει τὴν ιδιότητα f , ἀλλὰ καὶ κάθε σημεῖον ἔχον τὴν ιδιότητα f , ἀνήκει εἰς τὸν γ. τόπον (Τ).

Κατὰ ταῦτα, ἡ μεσοκάθετος (δ) ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB , εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μετὰ τὴν καθοριστικὴν ιδιότητα νὰ «ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τμήματος AB ».

77. Θεώρημα. Ἐὰν σημεῖον A εὐρίσκεται ἐκτὸς εὐθείας (δ), τὸ κάθετον εὐθύγραμμον τμήμα ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (δ) εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου εὐθυγράμμου τμήματος ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (δ).

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ σημείου A ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ φέρομεν τὴν AA' , ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ A_0 τὴν (δ). Ἡ συμμερτία μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν AA' κάθετον ἐπὶ τὴν (δ) καὶ $AA_0 = A'A_0 = \alpha$ (σχ. 64).

Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ ἐν πλάγιον εὐθύγραμμον τμήμα AB ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (δ), τὸ $A'B$ θὰ εἶναι τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν (δ), ἐπομένως $AB = A'B = \beta$.

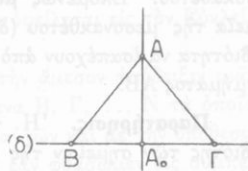


Σχ. 64

Τότε θὰ εἶναι (§ 40) $AA' < AB + A'B$ ἢ $2\alpha < 2\beta \Rightarrow \alpha < \beta$ ἢ $AA_0 < AB$.

Ὁρισμός. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν καλεῖται τὸ μήκος τοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

78. Θεώρημα. Ἐὰν τὰ ἴχνη δύο πλαγίων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐκ σημείου A πρὸς εὐθεῖαν (δ) ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος A_0 τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν (δ), τὰ τμήματα εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.



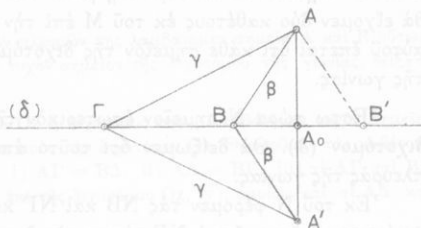
Σχ. 65

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν AB καὶ $A\Gamma$ τὰ δύο πλάγια τμήματα ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ), διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $A_0B = A_0\Gamma$ (σχ. 65). Τότε τὰ B καὶ Γ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα τὴν AA_0 καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $AB = A\Gamma$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἶναι $AB = A\Gamma$. Τότε τὸ σημεῖον A θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος $B\Gamma$, δηλαδὴ ἡ κάθετος AA_0 ἐπὶ τὴν (δ) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Gamma$ (§75). Ἀρα $A_0B = A_0\Gamma$.

79. Θεώρημα. Ἐὰν τὰ ἴχνη δύο πλαγίων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐκ σημείου A πρὸς εὐθεῖαν (δ) ἀπέχουν ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος A_0 τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν (δ) , τὰ τμήματα εἶναι κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ἄνισα καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν AB καὶ AG δύο πλαγία εὐθύγραμμα τμήματα ἐκ σημείου A πρὸς εὐθεῖαν (δ) , διὰ τὰ ὅποια ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι $A_0B < A_0G$ (1) (σχ. 66) ὅπου A_0 τὸ ἴχνος τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν (δ) . Δυνάμεθα πάντοτε νὰ θεωρήσωμεν τὰ τμήματα AB καὶ AG πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κείμενα ὡς πρὸς τὴν κάθετον AA_0 , διότι ἂν τοῦτο δὲν συνέβαινε καὶ εἴχομεν τὰ AG καὶ AB' ἑκατέρωθεν τῆς AA_0 , θὰ ἐλαμβάναμεν τὸ συμμετρικὸν AB τοῦ AB' ὡς πρὸς τὴν AA_0 , τὸ ὁποῖον θὰ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὡς πρὸς τὴν AA_0 μετὰ τοῦ AG .



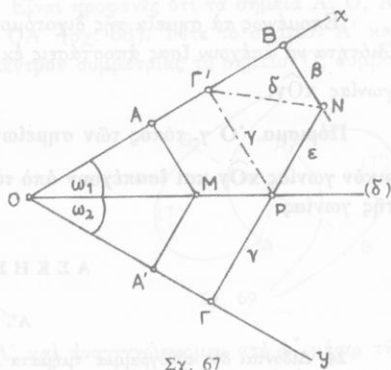
Σχ. 66

Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ A ὡς πρὸς τὴν (δ) καὶ φέρομεν τὰς $A'B$ καὶ $A'G$. Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $AB = A'B = \beta$ καὶ $AG = A'G = \gamma$. Ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἔπεται ὅτι ἡ κυρτὴ τεθλασμένη ABA' περικλείεται ὑπὸ τῆς AGA' , ἐνῷ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα. Τότε (§ 44) θὰ εἶναι

$$AB + A'B < AG + A'G \quad \eta \quad 2\beta < 2\gamma \Rightarrow \beta < \gamma \quad \eta \quad AB < AG.$$

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἶναι $AB < AG$. Τότε ἀποκλείεται νὰ εἶναι $A_0B = A_0G$, διότι τότε θὰ ἦτο καὶ $AB = AG$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται νὰ εἶναι καὶ $A_0B > A_0G$, διότι, ὡς ἐδείχθη, θὰ ἦτο καὶ $AB > AG$, καὶ αὐτὸ ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Ἐπομένως τὸ μόνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίῃ εἶναι $A_0B < A_0G$.



Σχ. 67

80. Ἰδιότης τῆς διχοτόμου κυρτῆς γωνίας. Θεώρημα. Ὅλα τὰ σημεία τῆς διχοτόμου (δ) κυρτῆς γωνίας $\widehat{xOy}$ καὶ μόνον αὐτά, ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

'Απόδειξις. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου (δ) κυρτῆς γωνίας $\widehat{XOY}$ (σχ. 67). Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν τὰς MA καὶ MA' καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως. Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα τὴν διχοτόμον (δ) ἀπεικονίζει τὴν ἡμιευθεῖαν Ox ἐπὶ τῆς Oy , ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega_1 = \omega_2$. Περιστρέφομεν τὴν Ox περὶ τὴν διχοτόμον (δ), ὥστε αὕτη νὰ λάβῃ τὴν θέσιν τῆς Oy . Τότε τὸ σημεῖον A θὰ συμπίσῃ μετὰ τοῦ A' , διότι ἂν δὲν συνέβαινε τοῦτο, θὰ εἴχομεν δύο καθέτους ἐκ τοῦ M ἐπὶ τὴν Oy . Ἀρα εἶναι $MA = MA'$. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου (δ), ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευράς τῆς γωνίας.

Ἐστω τώρα N σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας $\widehat{XOY}$ μὴ ἀνήκον εἰς τὴν διχοτόμον (δ). Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς πλευράς τῆς γωνίας.

Ἐκ τοῦ N φέρομεν τὰς NB καὶ NG καθέτους ἐπὶ τὰς Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως καὶ ἔστω ὅτι ἡ NG τέμνει τὴν διχοτόμον (δ) εἰς σημεῖον P . Ἐκ τοῦ P φέρομεν τὴν PG' κάθετον ἐπὶ τὴν Ox . Τότε, ὡς ἐδείχθη, θὰ εἶναι $PG = PG' = \gamma$. Ἐὰν καλέσωμεν $NB = \beta$ καὶ $NP = \varepsilon$, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\beta < \varepsilon + \gamma$.

Φέρομεν τὴν $NG' = \delta$. Τότε, ἐπειδὴ ἡ β εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς Ox , ἡ δ θὰ εἶναι πλαγία, συνεπῶς

$$(1) \quad \beta < \delta$$

Ἐπὶ πλεόν ὁμῶς εἶναι καὶ (§ 40)

$$(2) \quad \delta < \gamma + \varepsilon$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι

$$\beta < \delta < \gamma + \varepsilon \quad \text{ἄρα} \quad \beta < \gamma + \varepsilon \quad \eta \quad NB < NG$$

Ἐπομένως τὰ σημεία τῆς διχοτόμου (δ) ἀλλὰ καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσας ἀποστάσεις ἐκ τῶν πλευρῶν Ox καὶ Oy τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{XOY}$.

Πόρισμα. Ὁ γ . τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας $\widehat{XOY}$ καὶ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευράς της, εἶναι ἡ διχοτόμος (δ) τῆς γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

24. Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$. Ἐὰν αἱ μεσοκάθετοι αὐτῶν τέμνονται εἰς σημεῖον O καὶ εἶναι $OB = O\Gamma$, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι καὶ $OA = O\Delta$.

25. Δίδεται εὐθεῖα (δ), δύο σημεία A καὶ B καὶ ἔστωσαν A' καὶ B' τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν (δ). Ἐὰν ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AB τέμνῃ τὴν (δ) εἰς τὸ E , δείξατε ὅτι $EA = EB = EA' = EB'$.

26. Δίδεται ὀρθή γωνία $\widehat{xOy}$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ B τοιαῦτα, ὥστε $OA < OB$ καὶ ἐπὶ τῆς Oy λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε $OG < OD$. Δείξατε ὅτι $AG < BD$.

Β'.

27. Ἐὰν δύο τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἔχουν κοινὴν μεσοκάθετον εὐθεῖαν (δ) , δείξατε ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων AG καὶ BD τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ) .

28. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ B οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $OA = OB$. Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας, δείξατε ὅτι $MA = MB$.

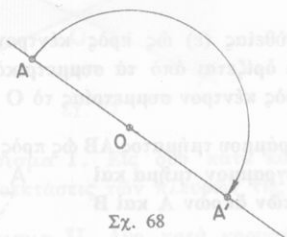
29. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$ καὶ ἔστω Oz ἡ διχοτόμος τῆς. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον A καὶ ἔστω B τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον Oz . Θεωροῦμεν τὰς καθέτους $AG \perp Ox$ καὶ $BD \perp Oy$. Δείξατε ὅτι i) $AG = BD$, ii) $AD = BG$, iii) αἱ AG καὶ BD (προεκτείνόμεναι ἐν ἀνάγκῃ) τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου Oz , iv), ὁμοίως καὶ αἱ AD καὶ BG .

30. Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Φέρομεν τὰς εὐθείας $AB, BG, \Gamma A$ καὶ θεωροῦμεν τὰς καθέτους $AD \perp BG, BE \perp AG, \Gamma Z \perp AB$, ὅπου τὰ Δ, E καὶ Z εὐρίσκονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $BG, \Gamma A, AB$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $AD + BE + \Gamma Z < AB + BG + AG$.

31. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο τεμνομένης εὐθείας εἰς σημεῖον O , εἶναι δύο κάθετοι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ O .

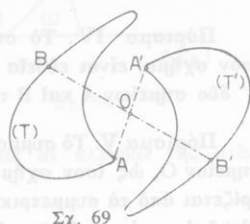
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

81. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ σταθερὸν σημεῖον O αὐτοῦ. Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ὀλισθαίνον ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, νὰ στρέφεται περὶ τὸ O οὕτως, ὥστε τυχὸν σημεῖον A αὐτοῦ νὰ καταλάβῃ θέσιν A' , ὅπου ἡ γωνία $\widehat{AOA'}$ νὰ εἶναι πεπλατυσμένη. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ σημεῖα A, O, A' κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι $OA = OA'$ (σχ. 68). Τότε τὸ σημεῖον A' καλεῖται συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον O , συμβο-



Σχ. 68

Σ.



Σχ. 69

λικῶς δὲ γράφομεν $A \xrightarrow{\quad} A'$ καὶ ἀναγιγνώσκουμε «τὸ A , μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρου O , ἔχει τὸ συμμετρικὸν του εἰς τὸ A' » ἢ «τὸ A ἀπεικονίζεται μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρου O , εἰς τὸ A' ».

Ἐὰν (T) εἶναι ἓν τυχὸν σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 69), κατὰ τὴν περι-

στροφήν, τοῦτο θὰ καταλάβῃ νέαν θέσιν (T'), ἡ ὁποία καλεῖται συμμετρικὴ αὐτοῦ κατὰ τὴν συμμετρίαν Σ_0 . Τότε, τυχὸν σημεῖον A τοῦ (T) θὰ ἔχῃ τὸ συμμετρικόν του A' ἐπὶ τοῦ (T'), ἀλλὰ καὶ τυχὸν σημεῖον B' τοῦ (T') εἶναι τὸ συμμετρικὸν ἐνὸς σημείου B τοῦ (T) κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου O . Συμβολικῶς γράφομεν :

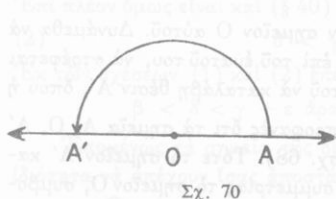
$$(T) \xrightarrow{\Sigma_0} (T')$$

Τὸ κέντρον τῆς συμμετρίας O εἶναι τὸ μόνον ἀναλλοίωτον σημεῖον τοῦ (Π) κατὰ τὴν κεντρικὴν συμμετρίαν Σ_0 , ἥτοι τὸ μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μετὰ τοῦ συμμετρικοῦ του.

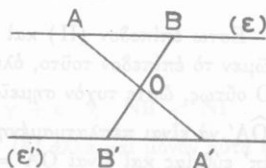
Πόρισμα I. Ἐὰν $(T) \xrightarrow{\Sigma_0} (T')$ τότε καὶ $(T') \xrightarrow{\Sigma_0} (T)$, δηλαδὴ ἐὰν τὸ (T') εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (T) κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου O , τότε καὶ τὸ (T) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (T') κατὰ τὴν αὐτὴν συμμετρίαν.

Πόρισμα II. Δύο συμμετρικὰ μεταξὺ των σχήματα κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου O εἶναι ἴσα, διότι ἡ κεντρικὴ συμμετρία εἶναι μετατόπισις.

Πόρισμα III. Κάθε εὐθεῖα διερχόμενη διὰ τοῦ κέντρου O , παραμένει ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν κεντρικὴν συμμετρίαν Σ_0 , ἥτοι ταυτίζεται μετὰ τῆς συμμετρικῆς της, ἐνῶ κάθε ἡμιευθεῖα μὲ ἀρχὴν τὸ O ἔχει ὡς συμμετρικὴν τὴν ἀντίθετόν της (σχ. 70).



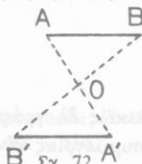
Σχ. 70



Σχ. 71

Πόρισμα IV. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ϵ) ὡς πρὸς κέντρον O , ὡς ἴσον σχῆμα, εἶναι εὐθεῖα (ϵ'), ἡ ὁποία ὀρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' δύο σημείων A καὶ B τῆς (ϵ), ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ O (σχ. 71).

Πόρισμα V. Τὸ συμμετρικὸν εὐθυγράμμου τμήματος AB ὡς πρὸς κέντρον σημείου O , ὡς ἴσον σχῆμα, εἶναι εὐθύγραμμος τμήμα καὶ ὀρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' τῶν ἁκρῶν A καὶ B αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ O (σχ. 72).



Σχ. 72

82. Θεώρημα. Δύο εὐθεῖαι (ϵ) καὶ (ϵ') συμμετρικαὶ κατὰ μίαν κεντρικὴν συμμετρίαν Σ_0 τῆς ὁποίας τὸ κέντρον O δὲν ἀνήκει εἰς αὐτάς, οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται

νά ταυτίζονται, διότι τὸ κέντρον συμμετρίας δὲν ἀνήκει εἰς τὴν (ϵ) (σχ. 73).

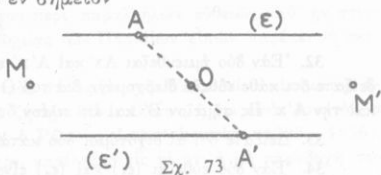
Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχει ἓν σημεῖον M κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν ἤτοι :

(1) $M \in (\epsilon)$ καὶ $M \in (\epsilon')$

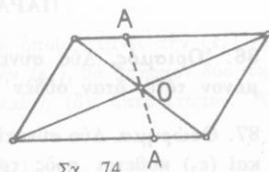
Τότε ἂν M' εἶναι τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ O , ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἔπεται ἀντιστοίχως:

$M' \in (\epsilon')$ καὶ $M' \in (\epsilon)$

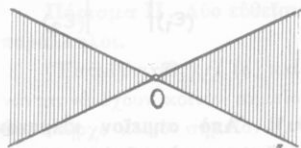
ἦτοι τὸ M' εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο εὐθειῶν. Τότε ὅμως αἱ δύο εὐθεῖαι θὰ ἐταυτίζοντο ὡς ἔχουσαι δύο κοινὰ σημεῖα M καὶ M' , ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα αἱ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.



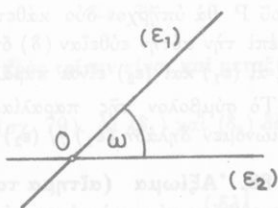
83. Κέντρον συμμετρίας σχήματος. Ἐὰν ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος (Σ) εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον O , τότε λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον O , τὸ ὁποῖον συνήθως καλεῖται ἀπλῶς κέντρον τοῦ σχήματος (σχ. 74).



84. Κατὰ κορυφήν γωνία. Δύο γωνίαὶ καλοῦνται κατὰ κορυφήν τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν κοινὴν κορυφήν σημεῖον O καὶ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὴν κορυφήν των O (σχ. 75).



Σχ. 75



Σχ. 76

Πόρισμα I. Εἰς δύο κατὰ κορυφήν γωνίας αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Πόρισμα II. Δύο κατὰ κορυφήν γωνίαὶ εἶναι ἴσαι, λόγῳ συμμετρίας.

85. Γωνία τεμνομένων εὐθειῶν. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τέμνονται εἰς σημεῖον O (σχ. 76), καλοῦμεν γωνίαν αὐτῶν τὴν μικροτέραν γωνίαν ω ἐκ τῶν σχηματιζομένων με κορυφήν τὸ O . Ἡ γωνία ω καλεῖται καὶ γωνία κλίσεως τῆς μιᾶς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν ἄλλην.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

32. Ἐὰν δύο ἡμιευθεῖαι AX καὶ $A'x'$ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον σημείον O , δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ O καὶ τέμνουσα τὴν AX εἰς σημεῖον B , τέμνει καὶ τὴν $A'x'$ εἰς σημεῖον B' καὶ ἐπὶ πλέον ὅτι εἶναι $AB = A'B'$.

33. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.

34. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον σημείον O , δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ O καὶ τέμνουσα τὴν (ε_1) , τέμνει καὶ τὴν (ε_2) καὶ ἐπὶ πλέον σχηματίζει ἴσας γωνίας μετ' αὐτῶν.

35. Ἐὰν ἓν σχῆμα ἔχη δύο ἀξονας συμμετρίας καθέτους μεταξύ των, δείξατε ὅτι ἔχει καὶ κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἀξόνων.

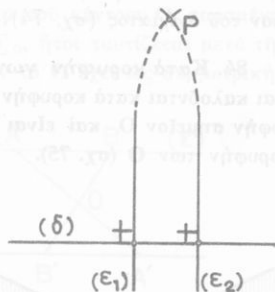
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

86. Ὅρισμός. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι καλοῦνται παράλληλοι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.

87. Θεώρημα. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) κάθετοι πρὸς τρίτην εὐθεῖαν (δ) , εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν (σχ. 77). Πράγματι, ἐὰν ὑπῆρχεν ἓν κοινὸν σημεῖον P , τότε ἐκ τοῦ P θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι (ε_1) καὶ (ε_2) ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ) ὑπερ ἄτοπον. Ἀρα αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι.

Τὸ σύμβολον τῆς παραλλας εἶναι $//$, σημειώνομεν δηλαδὴ $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$



Σχ. 77

88. Ἀξίωμα (αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου). Ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας μία καὶ μόνον μία παράλληλος ἄγεται πρὸς αὐτήν.

Ἱστορικὸν σημείωμα. Εἰς τὸ A' βιβλίον τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου (περὶ τὸ 285 π.Χ.) ἀναφέρεται τὸ ἐξῆς ε' αἴτημα. «Ἡτήσθω... ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὁρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὁρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι».

Τὸ αἴτημα τοῦτο, (τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἰς τὴν § 105 ἀναφερόμεν V πόρισμα), ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ Gergonne κατὰ τὸ 1812 ἢ, κατ' ἄλλους, ὑπὸ τοῦ J. Playfair κατὰ τὸ 1795 ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, ἡ ὁποία ἔκτοτε εἶναι γνωστὴ ὡς Εὐκλείδειον αἴτημα, ἡ δὲ γνωστὴ εἰς ἡμᾶς Γεωμετρία, ἡ παραδεχομένη καὶ στηριζομένη εἰς τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα, λέγεται Εὐκλείδειος Γεωμετρία.

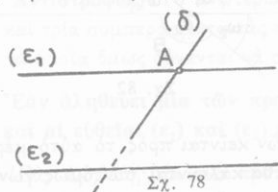
Ὅσοι ἐπεχείρησαν νὰ ἀποδείξουν τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα δὲν κατόρθωσαν παρὰ

νὰ μετατοπίσουν τὴν πρότασιν νὰ παραδεχθοῦν δηλαδὴ ἄλλην πρότασιν ὡς αἴτημα καὶ ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῆς νὰ ἀποδείξουν τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα. Μάλιστα ὁ Γάλλος Ἀκαδημαϊκὸς Lagrange ἠναγκάσθη νὰ ἀποσύρῃ ἐργασίαν του περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καθ' ἣν στίγμην τὴν ἀνεκοίλωσεν ἐν τῇ συνεδρίᾳ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων εἰπὼν· «πρέπει νὰ σκεφθῶν ἀκόμη ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου».

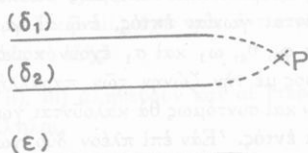
Ὅλαι αἱ ἀκαρποὶ αὗται προσπάθειαι πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ Εὐκλείδειου αἰτήματος ἠνάγκασαν τοὺς γεωμέτρους νὰ δεχθοῦν ἢ ὅτι τὸ ζήτημα εἶναι ἄλυτον, ἢ ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ μὴ εἶναι ἀπολύτως ἀληθὲς τὸ αἴτημα. Οὕτω ὁ Ρῶσσος Lobatchewsky (1793 - 1856), ὁ Γερμανὸς Riemann (1826 - 1866) καὶ ἄλλοι, κατέληξαν εἰς τὸ ὅτι ἡ μὴ παραδοχὴ τοῦ Εὐκλείδειου αἰτήματος δὲν ἄγει εἰς ἄτοπα συμπεράσματα. Τοιοῦτοτρόπως, ἐκτὸς τῆς γνωστῆς εἰς ἡμᾶς Εὐκλείδειου Γεωμετρίας, ὑπάρχουν θεωρητικῶς καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Lobatchewsky κατὰ τὴν ὁποίαν ἐξ ἐνὸς σημείου ἄγονται ἄπειροι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Riemann κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν ὑπάρχουν παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Πόρισμα I. Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, τέμνει καὶ τὴν ἄλλην.

Ἔστωσαν $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$ καὶ εὐθεῖα (δ) , ἡ ὁποία τέμνει τὴν (ε_1) εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 78). Ἐὰν ἡ (δ) δὲν ἔτεμνε τὴν (ε_2) , θὰ ὑπῆρχον δύο παράλληλοι ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν (ε_2) , ἡ (ε_1) καὶ ἡ (δ) , ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα ἡ (δ) τέμνει καὶ τὴν (ε_2) .



Σχ. 78

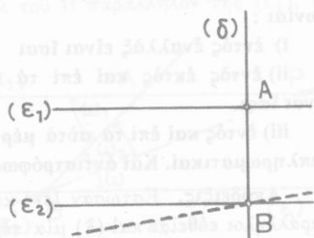


Σχ. 79

Πόρισμα II. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ἔστω ὅτι $(\delta_1) // (\varepsilon)$ καὶ $(\delta_2) // (\varepsilon)$ (σχ. 79). Αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι, ἐὰν ὑπῆρχε κοινὸν σημεῖον P, θὰ εἴχομεν ἐξ αὐτοῦ δύο παραλλήλους πρὸς τὴν (ε) , ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα $(\delta_1) // (\delta_2)$.

89. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (δ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) , εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.



Σχ. 80

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $(\delta) \perp (\varepsilon_1)$ καὶ Α τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν (σχ. 80). Ἡ (δ) , ἐφ' ὅσον τέμνει τὴν (ε_1) θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλὸν τῆς (ε_2)

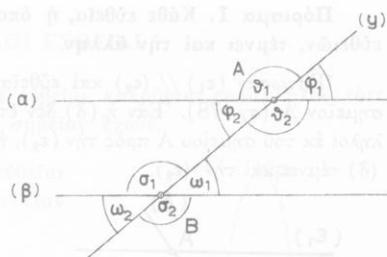
ἔστω εἰς σημεῖον B. Ἐὰν ἡ (ε_2) δὲν ᾗτο κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἐκ τοῦ B κάθετον ἐπὶ τὴν (δ), αὕτη θὰ ᾗτο παράλληλος τῆς (ε_1) (§ 87), ὅπερ ἄτοπον διότι θὰ ὑπῆρχον ἐκ τοῦ σημείου B δύο παράλληλοι πρὸς τὴν (ε_1). Ἄρα εἶναι καὶ (δ) $\perp$ (ε_2).



Σχ. 81

90. Ζώνη ἢ ταινία δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ ἐπίπεδον τμῆμα, πὺν περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων (σχ. 81).

91. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ ζεύγους παραλλήλων καὶ τεμνούσης. Θεωροῦμεν δύο παραλλήλους εὐθείας (α) καὶ (β) καὶ μίαν εὐθεΐαν (γ) τέμνουσαν αὐτάς εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως (σχ. 82). Τότε σχηματίζονται τέσσαρα ζεύγη κυρτῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν καὶ ἄς τὰς συμβολίσωμεν μὲ $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$, καὶ $\omega_1, \omega_2, \sigma_1, \sigma_2$. Αἱ γωνίαι $\varphi_1, \theta_1, \omega_2$ καὶ σ_2 κεῖνται ἐκτὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων καὶ συντόμως θὰ καλοῦνται γωνίαι ἐκτὸς, ἐνῶ αἱ γωνίαι $\varphi_2, \theta_2, \omega_1$ καὶ σ_1 ἔχουν κοινὸν μέρος μὲ τὴν ζώνην τῶν παραλλήλων καὶ συντόμως θὰ καλοῦνται γωνίαι ἐντὸς. Ἐὰν ἐπὶ πλεόν δύο γωνίαι ἐξ αὐτῶν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης AB, ὅπως αἱ γωνίαι φ_1 καὶ ω_1 , θὰ καλοῦνται συντόμως γωνίαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ τέλος ἐὰν δύο γωνίαι κεῖνται ἐκατέρωθεν τῆς τεμνούσης AB, ὅπως αἱ γωνίαι φ_2 καὶ ω_1 , θὰ καλοῦνται συντόμως γωνίαι ἐναλλάξ. Σχετικῶς μὲ τὰς γωνίας αὐτάς ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα.



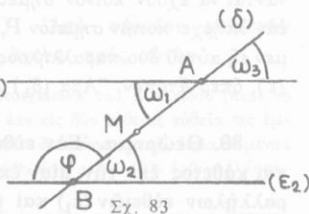
Σχ. 82

92. Θεώρημα. Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεΐαι τέμνονται ὑπὸ τρίτης, τότε αἱ σχηματιζόμεναι μὴ κοινῆς κορυφῆς γωνίαι :

- i) ἐντὸς ἐναλλάξ εἶναι ἴσαι
- ii) ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (Ε₁) εἶναι ἴσαι.
- iii) ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι παρὰλληλωματικά. Καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν (ε_1) καὶ (ε_2) δύο παράλληλοι εὐθεΐαι καὶ (δ) μία τέμνουσα αὐτάς εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως (σχ. 83).

Εἰς τὴν παράγραφον 82 εἶδομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ε_1) ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι εὐθεΐα παράλληλος πρὸς τὴν (ε_1).



Σχ. 83

Ἐὰν ἐπομένως M εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB , ἡ κεντρικὴ συμμετρία μὲ κέντρον τὸ M μᾶς ἐξασφαλίζει προφανῶς τὸ B συμμετρικὸν τοῦ A . Τότε ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα τῆς (ε_1) θὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ B παράλληλος τῆς (ε_1) , δηλαδὴ ἡ (ε_2) .

i) Λόγω τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸ M ἔχομεν :

$$(1) \quad \omega_1 = \omega_2,$$

ἥτοι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ii) Ἐπειδὴ $\omega_1 = \omega_3$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\omega_2 = \omega_3$$

ἥτοι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι.

iii) Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω_2 καὶ φ εἶναι παραπληρωματικαί, ἥτοι $\omega_2 + \varphi = 2^{\circ}$ καὶ λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\omega_1 + \varphi = 2^{\circ},$$

ἥτοι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀντιστρόφως Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἐπειδὴ ἔχει μίαν ὑπόθεσιν $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ καὶ τρία συμπεράσματα τὰς προτάσεις i), ii) καὶ iii), ἔχει τρία ἀντίστροφά, τὰ ὁποῖα ὁμως δύνανται νὰ συνοψισθοῦν εἰς τὸ ἐξῆς :

Ἐὰν ἀληθεύει μία τῶν προτάσεων i), ii), iii) ἀληθεύουν καὶ αἱ ἕτεραι δύο καὶ αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι.

Ἐὰν ἀληθεύῃ μία τῶν προτάσεων i), ii), iii) εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἀληθεύουν καὶ αἱ ἕτεραι δύο (διατί ;). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι ἐὰν ἀληθεύῃ μία ἐξ αὐτῶν, ἔστω ἡ i), ἥτοι ἐὰν αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῆς τεμνοῦσης AB ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι ω_1 καὶ ω_2 εἶναι ἴσαι, τότε αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι (σχ. 84).

Τοῦτο πράγματι συμβαίνει, διότι ἐὰν αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) ἐτέμνοντο ἔστω εἰς τὸ σημεῖον P , θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (ε) ἐκ τοῦ B παράλληλον τῆς (ε_1) , ἡ ὁποία θὰ σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας, δηλαδὴ

$$(1) \quad \omega_1 = \omega$$

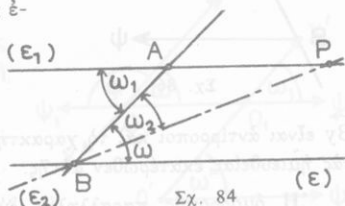
Ἐξ ὑποθέσεως ὁμως ἔχομεν

$$(2) \quad \omega_1 = \omega_2$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι

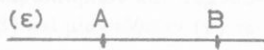
$$(3) \quad \omega = \omega_2$$

Αἱ γωνίαι ὁμως ω καὶ ω_2 ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν B , κοινὴν τὴν πλευρὰν BA καὶ κοινὸν μέρος. Ἐπομένως ταυτίζονται ἐφ' ὅσον εἶναι ἴσαι



και ἄρα ἡ εὐθεΐα (ε_2) ταυτίζεται μετὴν ἐκ τοῦ B παράλληλον τῆς (ε_1) , ἥτοι $(\varepsilon_2) \equiv (\varepsilon) // (\varepsilon_1)$.

93. Όμορροπος και αντίρροπος παραλληλία. Συνυφασμένη μετὴν ἔννοιαν τῆς εὐθείας (γενικώτερον τῆς γραμμῆς) εἶναι καὶ ἡ φορὰ διαγραφῆς τῆς. Ἐὰν ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ἔχη καθορισθῇ καὶ ἡ φορὰ διαγραφῆς τῆς, δηλαδὴ ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν κινήτὸν σημεῖον ἄνευ παλινδρομήσεως διαγράφει τὴν εὐθεΐαν, τότε αὕτη λέγεται **προσανατολισμένη εὐθεΐα**. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (ε) (σχ. 85), δύο μόνον φοραὶ διαγραφῆς ὑπάρχουν, ἡ ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B ἢ ἡ ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A. Αὗται καλοῦνται ἀντίθετοι καὶ ἐὰν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν τὴν καλέσωμεν θετικὴν, ἡ ἄλλη θὰ λέγεται ἀρνητικὴ. Τὴν εὐθεΐαν (ε) ἐπὶ τῆς ὁποίας ὠρίσθη ἡ θετικὴ καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορὰ διαγραφῆς τῆς, θὰ τὴν συμβολίζωμεν $(\vec{\varepsilon})$.

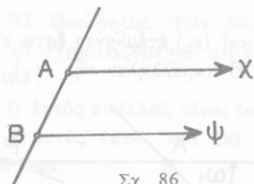


Σχ. 85

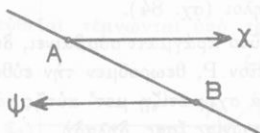
Ἡ ἔννοια τῆς ὁμορρόπου παραλληλίας ἀναφέρεται εἰς παραλλήλους εὐθείας τῆς αὐτῆς φορᾶς διαγραφῆς, ἀντιστοίχως ἡ ἔννοια τῆς ἀντιρρόπου παραλληλίας ἀναφέρεται εἰς παραλλήλους εὐθείας ἀντιθέτου φορᾶς διαγραφῆς.

Αἱ ἔννοιαι ἐπεκτείνονται καὶ εἰς παραλλήλους ἡμιευθείας ὡς καὶ εἰς παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Φανερόν εἶναι ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ «ὁμορρόπου» ἢ «ἀντιρρόπου» διὰ τὰς εὐθείας, ἡμιευθείας καὶ εὐθύγραμμα τμήματα, συνεπάγεται ὅπωςδήποτε καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς παραλληλίας.

Εἰς τὸ σχῆμα 86 αἱ παράλληλοι ἡμιευθεΐαι $\vec{AX}$ καὶ $\vec{By}$ εἶναι ὁμορροποι καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν των εἶναι ὅτι ἡ εὐθεΐα AB τὰς ἀφήνει εἰς τὸ ἐν ἡμιεπίδον ἐκ τῶν δύο τὰ ὁποῖα ὀρίζει, ἐνῶ εἰς τὸ σχῆμα 87 αἱ ἡμιευθεΐαι $\vec{AX}$ καὶ



Σχ. 86



Σχ. 87

$\vec{By}$ εἶναι ἀντίρροποι καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν των εἶναι ὅτι ἡ εὐθεΐα AB ἔχει τὰς ἡμιευθείας ἐκατέρωθεν αὐτῆς.

Ἡ ὁμορρόπος παραλληλία δύο εὐθειῶν $(\vec{\varepsilon}_1)$ καὶ $(\vec{\varepsilon}_2)$ συμβολίζεται $(\varepsilon_1) \uparrow \uparrow (\varepsilon_2)$, ἀντιστοίχως ἡ ἀντίρροπος παραλληλία μετὸ σύμβολον $\uparrow \downarrow$. Ὅμοιως καὶ διὰ τὰς ὁμορρόπους ἀντιστοίχως τὰς ἀντιρρόπους ἡμιευθείας ὡς καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

36. Έκ των οκτώ γωνιών τās οποίās σχηματίζουν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ λοιπαὶ ἑπτὰ γωνίαι εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

37. Δίδονται δύο παράλληλοι καὶ ὁμορροποὶ ἡμιευθεῖαι $\vec{Ax}$ καὶ $\vec{By}$. Φέρομεν τὸ τμήμα AB καὶ λαμβάνομεν σημεῖον O ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν, φέρομεν δὲ καὶ τὰ τμήματα OA, OB , Δείξατε ὅτι :

$$\widehat{AOB} = \widehat{OAx} + \widehat{OBy}$$

38. Δίδεται εὐθεῖα (δ) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B αὐτῆς. Ἄγομεν τὰς ἡμιευθεῖας Ax καὶ By παραλλήλους μεταξὺ των καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς (δ) , λαμβάνομεν δὲ σημεῖον O ἐκτὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς (δ) ὅπου εὐρίσκονται αἱ ἡμιευθεῖαι. Δείξατε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν $\widehat{OAx}$ καὶ $\widehat{OBy}$.

39. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἢ τὰς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικὰς, τότε αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

40. Δίδεται ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ $AB\Gamma\Delta$. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν κυρτῶν γωνιῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma\Delta}$ τέμνονται.

41. Ἐὰν (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (δ) μία τέμνουσα αὐτάς, δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐντὸς ἐναλλάξ γωνιῶν εἶναι παράλληλοι, ἐνῶ αἱ διχοτόμοι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

42. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σχῆμα ποὺ ἀποτελοῦν δύο ἀντίρροποι ἡμιευθεῖαι, ἔχει κέντρον συμμετρίας.

Β'.

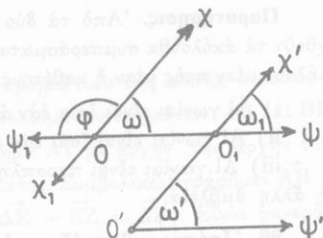
43. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) ἔχουν τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα : Κάθε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τέμνουσα τὴν μίαν τέμνει καὶ τὴν ἄλλην. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$.

44. Ἐὰν δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καὶ (Π_2) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν, δείξατε ὅτι αἱ ἀρχικαὶ τῶν εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι ἢ ταυτίζονται.

Γωνίαι με τὰς πλευράς των παραλλήλους ἢ καθέτους.

94. Θεώρημα. Δύο γωνίαι με τὰς πλευράς των παραλλήλους εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις. i) Ἐστωσαν $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}'y'$ δύο γωνίαι (σχ. 88), με $Ox \uparrow \uparrow O'x'$ καὶ $Oy \uparrow \uparrow O'y'$. Ἡ εὐθεῖα Oy , ἐφ' ὅσον τέμνει τὴν Ox , θά τέμνη καὶ τὴν παράλληλὸν τῆς $O'x'$ εἰς σημεῖον O_1 . Τότε θά εἶναι : $\omega = \omega_1$ (1) λόγω τῶν παραλλήλων $Ox \uparrow \uparrow O'x'$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς



Σχ. 88

Oy και $\omega_1 = \omega'$ (2) λόγω των παραλλήλων $Oy \uparrow \uparrow O'y'$ τεμνομένων υπό της $O'x'$. Έκ των σχέσεων (1) και (2) έπεται $\omega = \omega'$ (3) $\Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

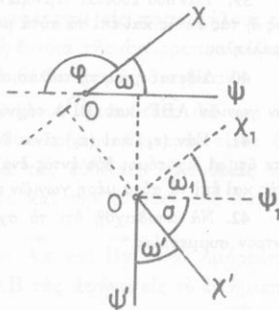
ii) Έπειδή είναι προφανώς $\omega + \varphi = 2\angle$, επί τη βάσει της σχέσεως (3), ή τελευταία γράφεται $\omega' + \varphi = 2\angle \Rightarrow \widehat{x'O'y'} + \widehat{xOy_1} = 2\angle$.

Σημείωσις. Προς διευκρίνισιν δυνάμεθα νά διαχωρίσωμεν τὰς δύο περιπτώσεις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ὡς ἀκολουθῶς :

Δύο γωνίαί με τὰς πλευράς των παραλλήλους εἶναι ἴσαι, ἐὰν αἱ πλευραὶ των εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, ἐνῶ εἶναι παραπληρωματικάί, ἐὰν ἐν ζεύγος πλευρῶν εἶναι ὁμόρροποι, τὸ δὲ ἕτερον ζεύγος πλευρῶν εἶναι ἀντίρροποι.

95. Θεώρημα. Δύο γωνίαί με τὰς πλευράς των καθέτους εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικάι.

Ἀπόδειξις. i) Ἐστώσαν $\widehat{xOy}$ καὶ $\widehat{x'O'y'}$ δύο γωνίαί (σχ. 89), με τὰς πλευράς των καθέτους, ἥτοι $Ox \perp O'x'$ (1) καὶ $Oy \perp O'y'$ (2). Ἐκ τῆς κορυφῆς O' φέρομεν $O'x_1 \perp O'x'$ (3) καὶ $O'y_1 \perp O'y'$ (4). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (3) έπεται $Ox \parallel O'x_1$ καὶ ἐκ τῶν (2) καὶ (4) έπεται $Oy \parallel O'y_1$, ἥτοι (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) αἱ γωνίαί $\widehat{xOy}$ καὶ $\widehat{x_1O'y_1}$ εἶναι ἴσαι, με τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἔχουν τὰς πλευράς των ὁμορρόπους (ἀντιστοίχως ἀντιρρόπους), ἢ $\omega_1 = \omega$ (5). Εἶναι φανερόν ὅμως ὅτι $\omega_1 = \omega'$ (6), διότι ἀμφότεραι εἶναι συμπληρωματικάί τῆς αὐτῆς γωνίας σ ($\widehat{x_1O'x'} = \widehat{y_1O'y'} = 1\angle$). Ἐκ τῶν σχέσεων (5) καὶ (6) λαμβάνομεν $\omega = \omega' \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.



Σχ. 89

ii) Ἐπειδὴ εἶναι προφανὸς $\omega + \varphi = 2\angle \Rightarrow \omega' + \varphi = 2\angle$.

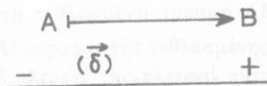
Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα δύνανται νά ἐξαχθοῦν τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα διὰ δύο γωνίας με τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν ἢ καθέτους μίαν πρὸς μίαν :

- Αἱ γωνίαί εἶναι ἴσαι ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ὁξεῖαι.
- Αἱ γωνίαί εἶναι ἴσαι ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ἀμβλεῖαι.
- Αἱ γωνίαί εἶναι παραπληρωματικάι ἐὰν μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.

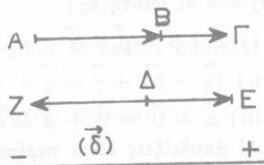
96. Ἰσότης καὶ πράξεις εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων. Μία προσανατολισμένη εὐθεῖα ($\vec{\delta}$) ἐφοδιάζει τὸ ἐπίπεδον με μίαν θετικὴν φορὰν (καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς ἀρνητικὴν). Τὸ σύνολο

λον όλων τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν διεύθυνσιν ($\vec{\delta}$), ἀποτελεῖ ἓν ὑποσύνολον Δ τοῦ συνόλου τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου. Κάθε εὐθύγραμμον τμήμα τοῦ Δ με ἄκρα σημεῖα A καὶ B καὶ φορὰν διαγραφῆς ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B, συμβολίζεται με $\vec{AB}$. Τὸ A καλεῖται **ἀρχή** αὐτοῦ καὶ τὸ B **τέλος** ἢ **πέρας**. Εἰς τὴν σχηματικὴν ἀπεικόνισιν (σχ. 90), τοποθετοῦμεν αἰχμὴν βέλους εἰς τὸ τέλος B τοῦ AB, ἐνδεικτικὴν τῆς φορᾶς διαγραφῆς του.

Δύο προσανατολισμένα τμήματα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καλοῦνται **δια-**



Σχ. 90



Σχ. 91

δοχικά, ὅταν τὸ τέλος τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀρχὴ διὰ τὸ ἄλλο ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν αὐτὰ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα.

Εἰς τὸ σχῆμα 91 τὰ $\vec{AB}$ καὶ $\vec{B\Gamma}$ εἶναι διαδοχικά, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ $\vec{\Delta E}$ καὶ $\vec{E\Z}$.

Ίσα καλοῦνται δύο προσανατολισμένα τμήματα, τότε καὶ μόνον τότε ὅταν ἔχουν :

- ἴσα μήκη
- τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν [παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ($\vec{\delta}$)]
- τὴν αὐτὴν φορὰν (ὁμόρροπα).

Ἡ σχέσης τῆς ἰσότητος εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἥτοι ἂν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ εἶναι προσανατολισμένα τμήματα, τότε :

- $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \wedge \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$

97. Άθροισμα προσανατολισμένων τμημάτων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως. Άθροισμα δύο διαδοχικῶν προσανατολισμένων τμημάτων $\vec{AB}$ καὶ $\vec{B\Gamma}$ (σχ. 91) καλεῖται τὸ προσανατολισμένον τμήμα $\vec{A\Gamma}$ με ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος τὸ τέλος τοῦ δευτέρου τμήματος. Συμβολικῶς γράφομεν $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$ (ὁμοίως εἰς τὸ σχῆμα εἶναι $\vec{\Delta E} + \vec{E\Z} = \vec{\Delta Z}$). Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ $\vec{A\Gamma}$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ($\vec{\delta}$) (διὰ τὴν ;) καὶ ἐπομένως ἀνήκει καὶ αὐτὸ εἰς τὸ σύνολον Δ . Ἀρα ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως (δικασιὰ εὐρέσεως τοῦ ἀθροίσματος) εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου Δ , ἥτοι τὸ σύνολον Δ εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.

Ἐὰν τὰ πρὸς ἄθροισιν προσανατολισμένα τμήματα δὲν εἶναι διαδοχικά, ταῦτα δύνανται νὰ καταστοῦν διαδοχικά διὰ μετατοπίσεως.

Ἀναλόγως ὀρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο προσανατολισμένων τμημάτων, ἔαν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὸ τρίτον κ.ο.κ.

Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον Δ , εἶναι ἀντιμεταθετικὴ προσεταιριστικὴ καὶ μονότροπος, ἔχει δὲ οὐδέτερον στοιχείον τὸ μηδενικὸν προσανατολισμένον τμήμα, συμβολιζόμενον μὲ $\vec{0}$, ἥτοι ἔαν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ἀνήκουν εἰς τὸ Δ ἰσχύουν αἱ ιδιότητες :

$$i) \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$$

$$ii) (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$$

$$iii) \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$$

Αἱ ἀποδείξεις εἶναι περίπου ἀνάλογοι πρὸς ἐκείνας διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

98. Ἀντίθετα καλοῦνται δύο προσανατολισμένα τμήματα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα τὸ μηδενικὸν προσανατολισμένον τμήμα. Δύο ἀντίθετα προσανατολισμένα τμήματα εἶναι ὅπωςδήποτε ἀντίρροπα. Διὰ κάθε τμήμα $\vec{AB}$, ἀντίθετον εἶναι τὸ $\vec{BA}$, διότι $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$. Ἀρα $\vec{AB} = -\vec{BA} + \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} = -\vec{BA}$.

Ἡ διαφορὰ $\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta}$ δύο προσανατολισμένων τμημάτων, ἀνάγεται εἰς ἄθροισιν, διότι $\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB} - (-\vec{\Delta\Gamma}) = \vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma}$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις προσανατολισμένου τμήματος ἐπὶ ἀκέραιον, ἀντιστοίχως ρητόν, ἀνάγονται εἰς τὰς ἀντιστοίχους πράξεις τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι ἐδῶ δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὰς πράξεις ταύτας καὶ δι' ἀρνητικὸς πολλαπλασιαστὰς (ἀντιστοίχως διαιρέτας). Ὅταν εἶναι θετικὸς ὁ πολλαπλασιαστής (ἢ διαιρέτης), τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὁμόρροπον τμήμα τοῦ ἀρχικοῦ, ἐνῶ ὅταν εἶναι ἀρνητικὸς ὁ πολλαπλασιαστής (ἢ διαιρέτης), τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀντίρροπον τμήμα τοῦ ἀρχικοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

45. Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$ καὶ $(\zeta_1) // (\zeta_2)$ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ. Εἰς τὸ σχῆμα ABΓΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

i) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ii) Αἱ διπλαναὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

46. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$. Φέρομεν $Ox_1 \perp Ox$ καὶ πρὸς τὸ μέρος ὅπου κεῖται ἡ Oy καὶ $Oy_1 \perp Oy$ καὶ ἔχι πρὸς τὸ μέρος ὅπου κεῖται ἡ Ox. Δείξτε ὅτι αἱ γωνίαι $\widehat{xOy}$, $\widehat{x_1Oy_1}$ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν εἶναι κάθετοι.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

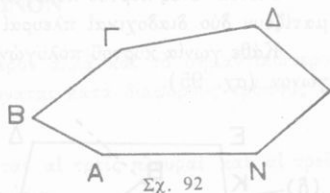
ΠΟΛΥΓΩΝΑ

99. Όρισμός. Πολύγωνον καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ μία κλειστή τεθλασμένη γραμμὴ $ΑΒΓ \dots ΝΑ$.

Αἱ κορυφαὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς καλοῦνται **κορυφαὶ** τοῦ πολυγώνου καὶ αἱ πλευραὶ τῆς πλευραὶ αὐτοῦ.

Ἐν πολύγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὀλιγωτέρας ἀπὸ τρεῖς κορυφάς, διότι ὀλιγώτερα ἀπὸ τρία σημεῖα δὲν ὀρίζουν τεθλασμένην γραμμήν.

Προσανατολισμένον καλεῖται τὸ πολύγωνον ὅταν ἡ τεθλασμένη γραμμὴ, ποὺ τὸ ἀποτελεῖ, εἶναι προσανατολισμένη, δηλαδὴ ὅταν ἔχῃ ὀρισθῇ ἡ φορὰ διαγραφῆς τῆς.



100. Θεώρημα. Ἐν πολύγωνον ἔχει τὸν ἴδιον ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω πολύγωνον $ΑΒΓ \dots Ν$ μὲ n τὸ πλῆθος πλευρᾶς (σχ. 92). Παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν κορυφῶν καὶ τῶν πλευρῶν του, κατὰ τὴν ἔννοιαν $A \leftrightarrow AB, B \leftrightarrow ΒΓ, \dots, N \leftrightarrow ΝΑ$. Ἀρα οἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς πλευράς του.

Καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἢ κορυφῶν ἑνὸς πολυγώνου, εἶναι 3, 4, 5, ... n , τὸ πολύγωνον καλεῖται τρίγωνον ἢ τρίπλευρον, τετράπλευρον, πεντάγωνον ἢ πεντάπλευρον, ..., n / γωνον ἢ n / πλευρον ἀντιστοίχως.

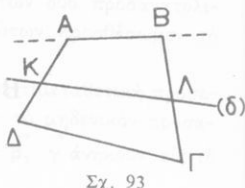
Περίμετρος ἑνὸς πολυγώνου καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Διαδοχικαὶ κορυφαὶ καλοῦνται δύο κορυφαί, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄκρα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς.

Διαδοχικαὶ πλευραὶ καλοῦνται δύο πλευραί, αἱ ὁποῖαι συμβάλλουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

Διαγώνιος ἑνὸς πολυγώνου καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἄκρα δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφάς.

Κυρτὸν πολύγωνον καλεῖται κάθε πολύγωνον, ὅταν ἡ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ, ἡ ὁποία τὸ ἀποτελεῖ εἶναι κυρτὴ. Τότε ἐν κυρτὸν πολύγωνον εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα δύναται νὰ τέμνεται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας (δ) ἡ ὁποία δὲν περιέχει πλευράν αὐτοῦ (σχ. 93) καὶ κάθε πλευρά του προεκτεινομένη ἀφήνει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ ἐν ἐκ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει.



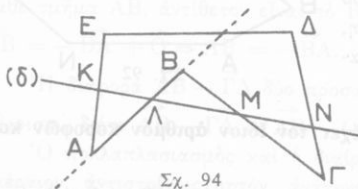
Σχ. 93

Μὴ κυρτὸν καλεῖται κάθε πολύγωνον ὅταν ἡ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ, ἡ ὁποία τὸ ἀποτελεῖ εἶναι μὴ κυρτὴ.

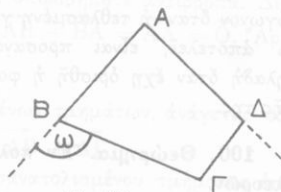
Τότε ὑπάρχει μία τοῦλάχιστον εὐθεῖα (δ), ἡ ὁποία δὲν περιέχει πλευράν αὐτοῦ καὶ ἡ ὁποία τὸ τέμνει εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα K, Λ, M, N (σχ. 94) καὶ ἐπὶ πλέον ὑπάρχει μία τοῦλάχιστον πλευρὰ αὐτοῦ AB, ἡ ὁποία προεκτεινομένη χωρίζει τὸ πολύγωνον εἰς δύο μέρη ἐκατέρωθεν αὐτῆς.

Γωνία ἐνὸς κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται ἡ κυρτὴ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ του.

Κάθε γωνία κυρτοῦ πολυγώνου περιέχει ἐντὸς αὐτῆς ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον (σχ. 95).



Σχ. 94

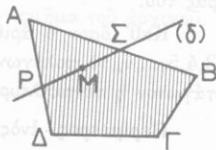


Σχ. 95

Ἐξωτερικὴ γωνία μιᾶς γωνίας $\widehat{B}$ κυρτοῦ πολυγώνου λέγεται ἡ ἐφεξῆς παραπληρωματικὴ αὐτῆς γωνία ω (σχ. 95).

Ἐσωτερικὸν σημεῖον ἐνὸς κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται κάθε σημεῖον M, ὅταν κάθε εὐθεῖα (δ) διερχομένη δι' αὐτοῦ τέμνει τὸ πολύγωνον εἰς δύο σημεῖα P καὶ Σ (σχ. 96).

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων καλεῖται ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 96

★ **Παρατήρησις.** Ἐπειδὴ παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ABΓ...N, ἐκάστη γωνία περιέχει ἐντὸς αὐτῆς ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον, τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κοινὸν μέρος τῶν ἐσωτερικῶν τῶν γωνιῶν του (σχ. 97), δηλαδὴ ὡς ἡ τομὴ



Σχ. 97

$$\text{ἐς. } \widehat{A} \cap \text{ἐς. } \widehat{B} \cap \dots \cap \text{ἐς. } \widehat{N}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

47. Δείξατε ότι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ταυτίζεται μετὰ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν δύο γωνιῶν αὐτοῦ, ἦτοι :

$$\text{ἐσ. } AB\Gamma = \text{ἐσ. } \widehat{B} \cap \text{ἐσ. } \widehat{\Gamma}.$$

48. Δείξατε ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ταυτίζεται μετὰ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ, ἦτοι :

$$\text{ἐσ. } AB\Gamma\Delta = \text{ἐσ. } \widehat{A} \cap \text{ἐσ. } \widehat{\Gamma} = \text{ἐσ. } \widehat{B} \cap \text{ἐσ. } \widehat{\Delta}.$$

49. Δείξατε ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\dots A_n$ μετὰ 2n πλευρὰς ταυτίζεται μετὰ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν ἀρτίας διαδοχικῆς τάξεως γωνιῶν του, ἦτοι

$$\text{ἐσ. } A_1A_2A_3\dots A_n = \text{ἐσ. } A_2 \cap \text{ἐσ. } A_4 \cap \dots \cap \text{ἐσ. } A_{2n}$$

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

101. Τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἀπλούστερον ἀλλὰ καὶ τὸ σημαντικώτερον τῶν πολυγώνων, διότι κάθε πολύγωνον δύναται κατὰ διαφόρους τρόπους νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα (σχ. 98).

Κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου καλοῦνται αἱ τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι του. Οὕτως ἓν τρίγωνον ἔχει ἑξὺ κύρια στοιχεῖα. Ἐκάστη πλευρὰ τοῦ τριγώνου δύναται νὰ λέγεται καὶ βάσις αὐτοῦ.



102. **Ύψη-διάμεσοι-διχοτόμοι.** Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$.

i) Τὸ κάθετον εὐθύγραμμον τμήμα AD ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ ἀπέναντι πλευρὰ $B\Gamma$, καλεῖται **ὕψος** τοῦ τριγώνου ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἐπὶ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$.

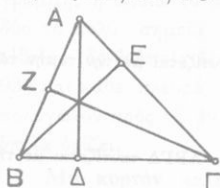
Σχ. 98

Ἀναλόγως ὁρίζονται καὶ τὰ ὕψη ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ . Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρία ὕψη ἀγόμενα ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν του, ἦτοι $AD, BE, \Gamma Z$ (σχ. 99).

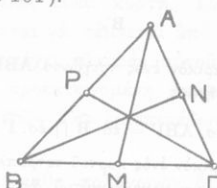
ii) Ἄν M εἴναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AM καλεῖται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἢ ἐπὶ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$. Ἀναλόγως ὁρίζονται καὶ αἱ διάμεσοι ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ . Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς διαμέσους ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς του, ἦτοι $AM, BN, \Gamma P$ (σχ. 100).

iii) Ἐστω Ax ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ σημεῖον E τὴν πλευρὰν $B\Gamma$. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AE καλεῖται **διχοτόμος** τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Ἀναλόγως ὁρίζονται καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν

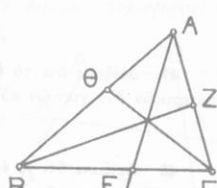
γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Οὕτω, κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς διχοτόμους, τὰς AE , BZ , $\Gamma\Theta$ (σχ. 101).



Σχ. 99



Σχ. 100



Σχ. 101

iv) Ἐστω Ay ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$. Ἐὰν αὕτη τέμνῃ τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς $B\Gamma$ εἰς τὸ E (σχ. 102), τὸ τμήμα AE καλεῖται ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς ἐξωτερικὰς διχοτόμους, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς του.

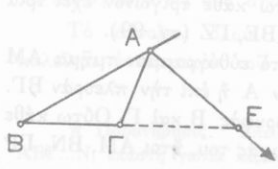
Τὰ ὕψη καὶ αἱ διάμεσοι ἐνὸς τριγώνου καθὼς καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καλοῦνται δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Ὑπάρχουν καὶ ἄλλα δευτερεύοντα στοιχεῖα ἐνὸς τριγώνου τὰ ὁποῖα θὰ γνωρίσωμεν εἰς τὰ ἐπόμενα.

103. Συνηθέστεροι συμβολισμοί. Ἐν τριγώνον με κορυφὰς τὰ σημεῖα A , B καὶ Γ συμβολίζεται με τριγ. $AB\Gamma$ ἢ $\triangle AB\Gamma$ ἢ ἀπλῶς $AB\Gamma$ ὅταν προηγουμένως ἔχῃ ἀναφερθῇ ἡ λέξις τρίγωνον.

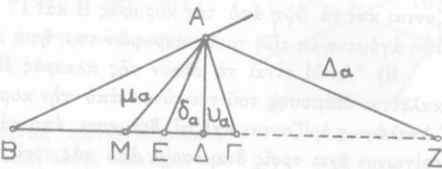
Αἱ πλευραὶ $B\Gamma$, ΓA καὶ AB ποὺ κεῖνται ἀπέναντι τῶν κορυφῶν A , B καὶ Γ ἀντιστοίχως, συμβολίζονται με α , β καὶ γ ἀντιστοίχως, ἐνῶ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου συμβολίζεται με 2τ , ἥτοι

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\tau.$$

Τὰ ὕψη ἀπὸ τὰς κορυφὰς A , B καὶ Γ συμβολίζονται με ν_a , ν_b καὶ ν_γ ἀντιστοίχως, ὁμοίως αἱ ἀντίστοιχοι διάμεσοι με μ_a , μ_b καὶ μ_γ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι διχοτόμοι με δ_a , δ_b καὶ δ_γ , ἐνῶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι με Δ_a , Δ_b καὶ Δ_γ (σχ. 103).



Σχ. 102



Σχ. 103

104. Εἶδη τριγώνων. Τὰ τρίγωνα δυνάμεθα νὰ τὰ κατατάξωμεν εἰς ἕξ κατηγορίας ἐξετάζοντες τὰ κύρια στοιχεῖα αὐτῶν, ἥτοι τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας των. Καὶ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ἔχομεν τὰς ἐξῆς κατηγορίας.

i) Ἀνισόπλευρον ἢ σκαληνὸν καλεῖται ἐν τριγώνον, ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ εἶναι ἄνισοι ἀνὰ δύο.

ii) Ἰσοσκελὲς καλεῖται ἐν τριγώνον ὅταν δύο πλευραὶ τοῦ εἶναι ἴσαι. Ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ συνήθως καλεῖται βάσις.

iii) Ἰσόπλευρον καλεῖται ἐν τριγώνον, ὅταν καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 104

Ὡς πρὸς τὰς γωνίας ἔχομεν :

iv) Ὀξυγώνιον καλεῖται ἐν τριγώνον, τοῦ ὁποῖου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ὀξείαι.

v) Ὄρθογώνιον καλεῖται ἐν τριγώνον, ὅταν ἡ μία τῶν γωνιῶν τοῦ εἶναι ὀρθή.



Σχ. 105

ὀρθή. Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ καλεῖται ὑποτείνουσα, αἱ ἄλλαι δὲ πλευραὶ καλοῦνται κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

vi) Ἀμβλυγώνιον καλεῖται ἐν τριγώνον, ὅταν ἡ μία ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ εἶναι ἀμβλεία.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

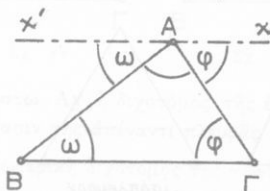
105. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ εἶναι 2π .

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τὴν ἐκ τοῦ Α παρὰλ-

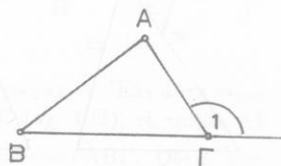
ληλον $x'Ax$ τῆς $B\Gamma$ (σχ. 106). Τότε θὰ εἶναι $x'\widehat{AB} = \widehat{B} = \omega$ καὶ $x\widehat{AG} = \widehat{G} = \varphi$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων $x x'$ καὶ $B\Gamma$ τεμνομένων ὑπὸ τῶν AB καὶ AG ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ xAx' εἶναι εὐθεῖα, ἔχομεν

$$x'\widehat{AB} + \widehat{A} + x\widehat{AG} = 2\text{L} \quad \eta \quad \omega + \widehat{A} + \varphi = 2\text{L}$$

$$\eta \quad \widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{G} = 2\text{L}.$$



Σχ. 106



Σχ. 107

Πόρισμα I. Κάθε ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

Πράγματι, ἂν $\widehat{\Gamma}_1$ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 107), ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{G} = 2\text{L}$ ἀφ' ἑτέρου δὲ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{G} = 2\text{L}$. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A} + \widehat{B}$.

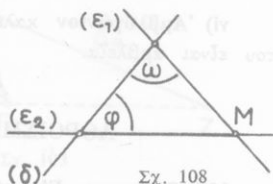
Πόρισμα II. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μία πρὸς μίαν, θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην αὐτῶν γωνίαν ἴσην. Τὰ τρίγωνα τότε θὰ λέγονται ἰσογώνια.

Πόρισμα III. Τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, μίαν μόνον ἀμβλείαν γωνίαν δύναται νὰ ἔχῃ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον μίαν μόνον ὀρθήν καὶ τὰς ἄλλας δύο ὀξείας.

Πόρισμα IV. Αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.

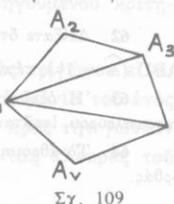
Πόρισμα V. Ἄν δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας (δ) σχηματίζουν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας μὲ ἄθροισμα μικρότερον τῶν 2L , αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον M πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων (σχ. 108).

106. Θεώρημα. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου μὲ n πλευρὰς ἰσοῦται μὲ $2n - 4$ ὀρθὰς γωνίας.



Ἀπόδειξις. Ἐστω $A_1A_2\dots A_n$ κυρτὸν n /γωνον. Ἐκ μιᾶς κορυφῆς, ἔστω τῆς A_1 φέρομεν ὅλας τὰς διαγωνίους $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$, διὰ τῶν ὁποίων

τὸ πολὺγώνον χωρίζεται εἰς $n - 2$ τρίγωνα (σχ. 109). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὸ κάθε τρίγωνον ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2ι , ἔπεται ὅτι τὰ $n - 2$ τρίγωνα ἔχουν ἄθροισμα γωνιῶν $2\iota \cdot (n - 2)$, ἥτοι $2n - 4$ ὀρθὰς γωνίας.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

50. Εἰς ἓν τρίγωνον ABΓ ἡ γωνία $\hat{A}$ εἶναι 70° , ἡ δὲ γωνία $\hat{B}$ εἶναι τὰ $4/5$ τῆς $\hat{A}$. Νὰ εὐρεθῇ ἡ γωνία $\hat{\Gamma}$ αὐτοῦ.

51. Εἰς πᾶν τρίγωνον ABΓ δεῖξατε ὅτι : α) αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$, τεμνόμεναι εἰς σημεῖον O, σχηματίζουν γωνίαν ἴσην με $\iota\iota + \frac{\hat{A}}{2}$, β) αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ τεμνόμεναι εἰς τὸ Z σχηματίζουν γωνίαν ἴσην με $\iota\iota - \frac{\hat{A}}{2}$ καὶ γ) μία ἐσωτερικὴ καὶ μία ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως τεμνόμεναι εἰς τὸ K σχηματίζουν γωνίαν ἴσην με $\hat{A}/2$.

52. Δείξατε ὅτι ἡ γωνία τοῦ ὕψους καὶ τῆς διχοτόμου τριγώνου, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

53. Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ABΓΔ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\hat{A}$ καὶ $\hat{B}$ αὐτοῦ τέμνονται εἰς σημεῖον E, δεῖξατε ὅτι $\hat{E} = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

54. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἐνὸς κυρτοῦ : α) πενταγώνου, β) ἑξαγώνου, γ) δωδεκαγώνου.

55. Ἐὰν δύο γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαί, δεῖξατε ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι παραπληρωματικαί.

56. Πόσας πλευρὰς ἔχει ἓν κυρτὸν πολὺγώνον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι α) 10 ὀρθαὶ γωνίαι, β) 16 ὀρθαὶ γωνίαι.

57. Δείξατε ὅτι, ἐὰν μία γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

58. Ἐὰν μία γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἁθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του, τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

59. Εἰς τρίγωνον ABΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\hat{A}$ σχηματίζει μετὰ τὴν πλευρὰν BΓ δύο γωνίας, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά ἰσοῦται μετὰ τὴν διαφοράν τῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

60. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο, σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

61. Νὰ δευχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου.

B'.

62. Δείξτε ότι αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$), τέμνονται ὑπὸ γωνίαν 45° .

63. Ἡ ὀξεῖα γωνία ποὺ σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου, ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.

64. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθάς.

65. Ἐὰν ἡ γωνία $\widehat{A}$ τριγώνου $AB\Gamma$ εἴναι 60° , αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ αὐτοῦ εἶναι ἰσον κεκλιμέναι πρὸς τὰς $A\Gamma$ καὶ AB ἀντιστοίχως.

66. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 90^\circ$. Δείξτε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ σχηματίζει μὲ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ γωνίαν 45° .

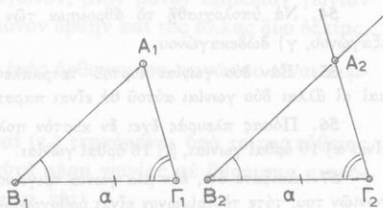
67. Ἐκάστη γωνία κυρτοῦ n -γώνου εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ. ($n \geq 4$).

68. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ἐνὸς κυρτοῦ πολυγώνου, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἴναι k ὀρθαὶ γωνίαι. Διερευνήσεις.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

107. Α' περίπτωσης. Θεώρημα. Ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς μίαν πλευρὰν ἄλλου τριγώνου καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τοῦ ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς προσκείμενας γωνίας τῆς ἴσης πλευρᾶς τοῦ ἄλλου τριγώνου, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 = \alpha$ καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ (σχ. 110). Μετατοπίζομεν τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ $A_1B_1\Gamma_1$ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ $B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην τῆς $B_2\Gamma_2$ ταυτιζομένων τῶν κορυφῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι καὶ ἐπὶ πλῆσιν αἱ κορυφαὶ A_1 καὶ A_2 νὰ εὐρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $B_2\Gamma_2$.



Σχ. 110

Τότε, ἐπεὶδὴ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, ἡ ἡμιευθεῖα B_1A_1 θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἡμιευθεῖας B_2A_2 ὥς καὶ ἡ ἡμιευθεῖα Γ_1A_1 μετὰ τῆς Γ_2A_2 . Τότε θὰ ταυτισθοῦν καὶ αἱ τομαὶ αὐτῶν A_1 καὶ A_2 . Ἀρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως.

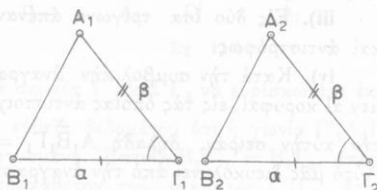
Παρατήρησις. Εἰς τὰ ἐπόμενα, ἐὰν δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ ἀποδειχθοῦν ἴσα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου, χάριν συντομίας θὰ συμβολίζωμεν $\overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1} = \overset{\Delta}{A_2B_2\Gamma_2}$ ($\Gamma - \Pi - \Gamma$), ὅπου τὸ $\Gamma - \Pi - \Gamma$

θά σημαίνει Γωνία - Πλευρά - Γωνία, συμβολικόν τοῦ προηγουμένου κριτηρίου.

108. Β' περίπτωσης. Θεώρημα. Ἐάν δύο πλευραὶ ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν πρὸς δύο πλευρὰς ἄλλου τριγώνου καὶ ἡ γωνία τοῦ ἐνὸς τριγώνου ἢ περιεχομένη εἰς τὰς ἐν λόγῳ πλευρὰς εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τοῦ ἄλλου τριγώνου τὴν περιεχομένην εἰς τὰς ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου τριγώνου, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 = \alpha$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2 = \beta$ καὶ $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ (σχ. 111). Μετατοπίζομεν τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ἐπὶ τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$

οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{\Gamma_1}$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην τῆς $\widehat{\Gamma_2}$ καὶ ἡ πλευρὰ $B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην τῆς $B_2\Gamma_2$. Τότε προφανῶς καὶ ἡ Γ_1A_1 θὰ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς Γ_2A_2 καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐφ' ὅσον δύνανται διὰ μετατοπίσεως νὰ ταυτισθοῦν.

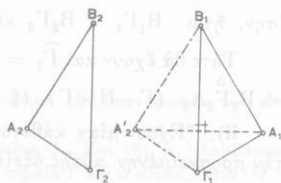


Σχ. 111

Παρατήρησις. Εἰς τὰ ἐπόμενα, ἡ ἰσότης δύο τριγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου θὰ συμβολίζεται, χάριν συντομίας, μὲ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$ (Π - Γ - Π), ὅπου τὸ Π - Γ - Π θὰ σημαίνει Πλευρά - Γωνία - Πλευρά, συμβολικόν τοῦ προηγουμένου κριτηρίου.

109. Γ' Περίπτωσης. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἀντιστοίχως ἴσας εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2$ (σχ. 112). Μετατοπίζομεν τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ $A_2B_2\Gamma_2$, ὥστε ἡ πλευρὰ $B_2\Gamma_2$ νὰ συμπίσῃ μὲ τὴν ἴσην τῆς $B_1\Gamma_1$, ἡ κορυφή A_2 νὰ καταλάβῃ θέσιν A'_2 οὕτως, ὥστε τὰ σημεῖα A_1 καὶ A'_2 νὰ εἶναι ἑκατέρωθεν τῆς $B_1\Gamma_1$, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς κορυφὰς B_1 καὶ Γ_1 νὰ συντρέχουν ἴσαι πλευραὶ $B_1A_1 = B_1A'_2$ καὶ $\Gamma_1A_1 = \Gamma_1A'_2$. Τότε τὰ σημεῖα B_1 καὶ Γ_1 , ὡς ἀπέχοντα ἕκαστον ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ A_1 καὶ A'_2 κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος $A_1A'_2$. Ἄρα ἡ $B_1\Gamma_1$ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $A_1A'_2$. Τότε τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A'_2B_1\Gamma_1$, εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν



Σχ. 112

$B_1\Gamma_1$, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$, διότι τὸ

$A_2\overset{\Delta}{B}_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$ είναι ἴσον πρὸς τὸ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1$, ἐφ' ὅσον τὸ τελευταῖον προέκυψε διὰ μετατοπίσεως τοῦ $A_2\overset{\Delta}{B}_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$.

Παρατηρήσεις i). Εἰς τὰ ἐπόμενα, ἡ ἰσότης δύο τριγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου θὰ συμβολίζεται, χάριν συντομίας, μὲ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$ (Π - Π - Π), ὅπου τὸ Π - Π - Π θὰ σημαίνει Πλευρὰ - Πλευρὰ - Πλευρὰ, συμβολικὸν τοῦ προηγουμένου κριτηρίου.

ii). Ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων (κριτηρίων) ἐπεται ὅτι διὰ τὴν σύγκρισιν δύο τριγώνων, ἀπαιτοῦνται τρία ζεύγη ἀντιστοίχων στοιχείων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν τοῦλάχιστον ζεύγος νὰ εἶναι ζεύγος πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων.

iii). Εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν κεῖνται ἴσαι γωνίαι καὶ ἀντιστρόφως.

iv). Κατὰ τὴν συμβολικὴν ἀναγραφὴν δύο ἴσων τριγώνων θὰ ἐπιδιώκωμεν αἱ κορυφαί, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι νὰ ἀναγράφωνται κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν, δηλαδὴ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$ καὶ ὅχι $A_1\overset{\Delta}{B}_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1 = B_2\overset{\Delta}{A}_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$. Αὐτὸ μᾶς διευκολύνει ἀπὸ τὴν ἀναγραφὴν τῆς ἰσότητος καὶ μόνον νὰ διακρίνωμεν τὰ ἴσα στοιχεῖα χωρὶς νὰ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὸ σχῆμα.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

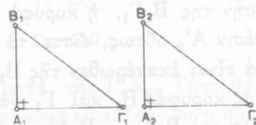
110. Θεώρημα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν, (ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας), δύο ἐκ τῶν κυρίων στοιχείων τῶν ἀντιστοίχως ἴσα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν τοῦλάχιστον νὰ εἶναι πλευρὰ.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $A_1B_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1$ καὶ $A_2B_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$ μὲ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 1^\circ$ (σχ. 113). Διακρίνομεν τὰς ἐξῆς περιπτώσεις :

i). Ἐχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ μίαν τῶν ὀξείων γωνιῶν τῶν ἴσην, ἥτοι $B_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1 = B_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$ καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$.

Τότε θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ ὡς συμπληρώματα ἴσων γωνιῶν, ἄρα $B_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1A_1 = B_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2A_2$ (Γ - Π - Γ) (§ 107).

ii). Ἐχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην αὐτῆς ὀξείαν γωνίαν ἴσην ἀντιστοίχως, ἥτοι $A_1B_1 = A_2B_2$ καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον ἔχουν $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 1^\circ$, ἐπεται ὅτι $A_1\overset{\Delta}{B}_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$ (Γ - Π - Γ).



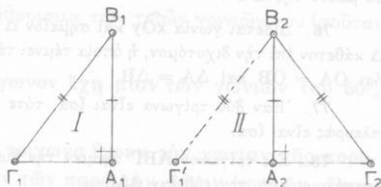
Σχ. 113

iii). Ἐχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν ἀντικειμένην αὐτῆς γωνίαν ἴσην ἀντιστοίχως, ἥτοι $A_1B_1 = A_2B_2$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$.

Τότε θα έχουν και $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ ως συμπληρώματα ίσων γωνιών και επομένως $A_1\widehat{B}_1\Gamma_1 = A_2\widehat{B}_2\Gamma_2$ (Γ - Π - Γ).

iv). Τα τρίγωνα έχουν τās υποτεινούσας των ίσας και μίαν τών καθέτων πλευρῶν ἴσην ἀντιστοίχως, ἤτοι $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$ και $A_1B_1 = A_2B_2$ (σχ. 114).

Μετατοπίζομεν τὸ $A_1B_1\Gamma_1$ ἀπὸ τὴν θέσιν I εἰς τὴν θέσιν II οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ A_1B_1 νὰ συμπίσῃ μετὰ τὴν ἴσην τῆς A_2B_2 και ἔτσι ὥστε αἱ κορυφαὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν νὰ ταυτισθοῦν, ἡ δὲ κορυφή Γ_1 νὰ ἔλθῃ



Σχ. 114

εἰς τὴν θέσιν Γ'_1 εἰς τρόπον, ὥστε τὰ σημεῖα Γ'_1 και Γ_2 νὰ εὐρίσκωνται ἐκὰτέρωθεν τῆς A_2B_2 . Ἡ $\Gamma'_1A_2\Gamma_2$ εἶναι εὐθεῖα δεδομένου ὅτι ἡ γωνία $\Gamma'_1\widehat{A}_2\Gamma_2$, ὡς ἄθροισμα δύο ὀρθῶν εἶναι πεπλατυσμένη. Ἐπειδὴ $B_2\Gamma'_1 = B_2\Gamma_2$, ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον B_2 ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος $\Gamma'_1\Gamma_2$, ἄρα ἡ B_2A_2 εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $\Gamma'_1\Gamma_2$. Τότε θὰ εἶναι $A_2\Gamma'_1 = A_2\Gamma_2$, ἐπομένως εἶναι $A_2\widehat{B}_2\Gamma'_1 = A_2\widehat{B}_2\Gamma_2$ (Π - Π - Π). Ἀρα θὰ εἶναι και $A_2\widehat{B}_2\Gamma_2 = A_1\widehat{B}_1\Gamma_1$, διότι τὸ $A_2\widehat{B}_2\Gamma'_1$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $A_1\widehat{B}_1\Gamma_1$, ὡς προελθὸν ἐξ αὐτοῦ διὰ μετατοπίσεως.

v). Τα τρίγωνα έχουν τās δύο καθέτους πλευράς των ἴσας ἀντιστοίχως, ἤτοι $A_1B_1 = A_2B_2$ και $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 1^{\circ}$, ἔπεται ὅτι $B_1\widehat{A}_1\Gamma_1 = B_2\widehat{A}_2\Gamma_2$ (Π - Γ - Π).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

69. Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε και αἱ διχοτόμοι τῶν ἴσων γωνιῶν των εἶναι ἴσαι.

70. Δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται εἰς σημεῖον O. Ἐπὶ τῆς (ϵ_1) λαμβάνομεν σημεῖα A και B οὕτως, ὥστε $OA = OB$ και ἐπὶ τῆς (ϵ_2) σημεῖα Γ και Δ οὕτως, ὥστε $OG = OD$. Δείξατε ὅτι θὰ εἶναι $AG = BD$ και $AD = BG$.

71. Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς διαμέσου AD τριγώνου ABΓ λαμβάνομεν τμήμα ΔΕ = AD. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AB = EG$.

72. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας $x\hat{O}y$ λαμβάνομεν τμήματα $OA = OB$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου OZ τῆς γωνίας ἱσαπέχει ἀπὸ τὰ A και B.

73. Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα τότε και αἱ διάμεσοι αὐτῶν πού ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας πλευράς εἶναι ἴσαι.

74. Ἐὰν δύο κυρτὰ τετράπλευρα έχουν τās πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν και

ὁμοίως κειμένας καὶ μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξύ ἴσων πλευρῶν, τὰ τετράπλευρα εἶναι ἴσα.

75. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ προεκτείνωμεν τὰς πλευράς AB καὶ $A\Gamma$ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς A καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνωμεν ἀντιστοίχως τμήματα $AB' = AB$ καὶ $A\Gamma' = A\Gamma$. Δείξατε ὅτι ἡ διάμεσος AD τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ προεκτεινομένη διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς $B'\Gamma'$.

76. Δίδεται γωνία $\widehat{XOY}$ καὶ σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὴν ἐκ τοῦ Δ κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον, ἡ ὅποια τέμνει τὰς πλευράς τῆς γωνίας εἰς τὰ A καὶ B . Δείξατε ὅτι $OA = OB$ καὶ $DA = DB$.

77. Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας πλευράς εἶναι ἴσα.

78. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἄγωμεν τὴν διάμεσον AM . Δείξατε ὅτι αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν AM .

79. Ἀπὸ τὸ μέσον O εὐθυγράμμου τμήματος AB ἄγωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (δ) πλῆξιαν ὡς πρὸς τὴν AB . Ἐὰν αἱ κάθετοι ἐκ τῶν A καὶ B ἐπὶ τὴν AB τέμνουν τὴν (δ) εἰς τὰ E καὶ Z ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι $OE = OZ$.

80. Ἀπὸ τὸ μέσον O εὐθυγράμμου τμήματος AB φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐκ τῶν A καὶ B καθέτους AG καὶ BD ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι $AD = BG$.

B'.

81. Δίδεται γωνία $\widehat{XOY}$. Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ B καὶ ἐπὶ τῆς Oy σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε $OA = OG$ καὶ $OB = OD$. Δείξατε ὅτι α) $AB = \Gamma\Delta$, β) Ἄν E εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν AD καὶ $B\Gamma$ τότε τρίγ. $EAB =$ τρίγ. $E\Gamma\Delta$, γ) ἡ EO εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{XOY}$.

82. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$ ὅχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ τριγώνου καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $AB' = AB$ καὶ $A\Gamma' = A\Gamma$. Δείξατε ὅτι α) $B\Gamma' = \Gamma B'$ καὶ β) $B\Gamma' \perp \Gamma B'$.

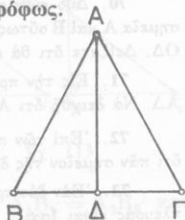
83. Τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τὰ ὕψη BD καὶ ΓE . Προεκτείνωμεν αὐτὰ πρὸς τὸ μέρος τῶν κορυφῶν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα $BB' = A\Gamma$ καὶ $\Gamma\Gamma' = AB$ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι α) $AB' = A\Gamma'$ καὶ β) $AB' \perp A\Gamma'$.

ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

111. Θεώρημα. Ἐὰν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές μὲ $AB = A\Gamma$, τότε αἱ παρὰ τὴν βάσιν $B\Gamma$ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν τὴν κάθετον AD ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ (σχ. 115). Ἐπειδὴ εἶναι $AB = A\Gamma$, ἡ AD εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Gamma$, ἐπομένως ὑπάρχει συμμετρία ὡς πρὸς τὴν AD . Τότε θὰ εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ὡς συμμετρικαὶ μεταξύ των.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές. Συγχρί-



Σχ 115

νομεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\triangle ADB$ καὶ $\triangle AD\Gamma$. Ταῦτα ἔχουν τὴν AD κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας των $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι $AB = A\Gamma$, ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Πόρισμα I. Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἐκάστη γωνία του ἰσοῦται πρὸς 60° , διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν του ἰσοῦται πρὸς 2 ° ἢτοι 180° .

Πόρισμα II. Ἐὰν ἰσοσκελές τρίγωνον ἔχη μίαν τῶν γωνιῶν του 60° , εἶναι ἰσόπλευρον.

Πόρισμα III. Ἐὰν δύο ἰσοσκελεῖ τρίγωνα ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν των ἴσην ἢ μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσην, τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια.

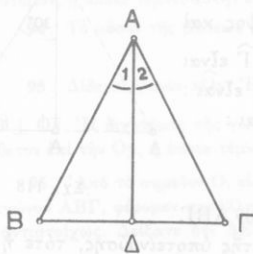
Πόρισμα IV. Ἐκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ὀξεία.

112. Θεώρημα. Εἰς πᾶν ἰσοσκελές τρίγωνον τὸ ὕψος ποῦ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῶν ἴσων πλευρῶν, εἶναι καὶ διάμεσος καὶ διχοτόμος.

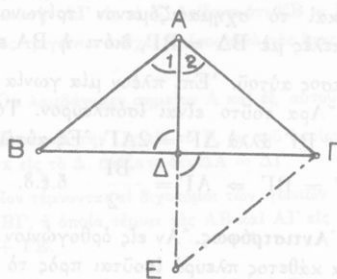
Ἀπόδειξις. Ἐστω ἰσοσκελές τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $AB = A\Gamma$ (σχ. 116). Τότε τὸ ὕψος AD θὰ εἶναι καὶ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Gamma$, διότι τὸ σημεῖον A ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα B καὶ Γ . Ἐφ' ὅσον εἶναι μεσοκάθετος εἶναι καὶ διάμεσος, διότι $\triangle DB = D\Gamma$. Ἐπὶ πλέον εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, διότι ὡς μεσοκάθετος τοῦ $B\Gamma$ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος, συνεπῶς $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

113. Θεώρημα. Ἐὰν εἰς ἓνα τρίγωνον συμβαίνει : i) ἓνα ὕψος νὰ εἶναι καὶ διάμεσος ἢ ii) ἓνα ὕψος νὰ εἶναι καὶ διχοτόμος ἢ iii) μία διάμεσος νὰ εἶναι καὶ διχοτόμος, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 117), ἔνθα :



Σχ. 116



Σχ. 117

i) Τὸ ὕψος AD εἶναι καὶ διάμεσος. Τότε τὸ AD εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Gamma$, συνεπῶς ἄξων συμμετρίας, ἄρα $AB = A\Gamma$. Ἐπομένως τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

ii) Τὸ ὕψος AD εἶναι καὶ διχοτόμος. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ADB καὶ ADG , ὡς ἔχοντα τὴν AD κοινὴν καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $AB = AG$. Ἐπομένως τὸ τρίγωνον ABG εἶναι ἰσοσκελές.

iii) Ἡ διάμεσος AD εἶναι καὶ διχοτόμος. Εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $DE = DA$ καὶ συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ADB καὶ DEG . Ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $DB = DG$ ἐξ ὑποθέσεως, $DA = DE$ καὶ τὰς γωνίας των εἰς τὸ D ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν ($\Pi - \Gamma - \Pi$). Ἄρα θὰ εἶναι

$$(1) \quad AB = EG \text{ καὶ } \widehat{A}_1 = \widehat{E}$$

Ἐπειδὴ ὁμοῦς εἶναι καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ἐξ ὑποθέσεως, ἔπεται ὅτι $\widehat{A}_2 = \widehat{E}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον AGE εἶναι ἰσοσκελές μὲ

$$(2) \quad AG = EG$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι

$$AB = AG.$$

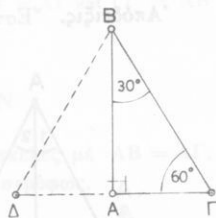
Ἄρα τὸ τρίγωνον ABG εἶναι ἰσοσκελές.

114. Θεώρημα. Ἄν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἡ μία ὀξεία γωνία του εἶναι 30° , τότε ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ABG μὲ $\widehat{B} = 30^\circ$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $AG = \frac{BG}{2}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{B} = 30^\circ$ ἔπεται ὅτι $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν AG πρὸς τὸ μέρος τοῦ A καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $AD = AG$ (σχ. 118). Φέρομεν τὴν BD καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον BAG εἶναι ἰσοσκελές μὲ $BD = BG$, διότι ἡ BA εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ. Ἐπὶ πλέον μία γωνία του, ἡ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι 60° . Ἄρα τοῦτο εἶναι ἰσοπλευρον. Τότε θὰ εἶναι: $AD = BG$ ἀλλὰ $AD = 2AG$. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται:

$$2AG = BG \Rightarrow AG = \frac{BG}{2} \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$



Σχ. 118

Ἀντιστρόφως. Ἄν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ABG ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας, τότε ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι 30° .

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν ὅτι $AG = \frac{BG}{2}$. Προεκτείνομεν ὡς καὶ προηγουμένως, τὴν AG πρὸς τὸ μέρος τοῦ A καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $AD =$

ΑΓ. Τότε το τρίγωνον ΒΔΓ είναι ισοσκελές με $ΒΔ = ΒΓ$ (1), διότι η ΒΑ είναι ύψος και διάμεσος αὐτοῦ. Ἀρα θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΒΓΔ}$. Ἐξ ὑποθέσεως ὁμως εἶναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow 2.ΑΓ = ΒΓ$ ἢ $ΔΓ = ΒΓ$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $ΒΔ = ΒΓ = ΔΓ$, ἥτοι το τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ισόπλευρον. Ἐπομένως $\widehat{ΔΒΓ} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ΑΒΓ} = 30^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

84. Ἴσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι τὸ τρίτον ἐκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν του. Ἄν ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι 35 m. νὰ εὕρεθῶν αἱ πλευραὶ του.
85. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$). Εἰς τὰς προεκτάσεις τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ἐκατέρωθεν τῶν Β καὶ Γ λαμβάνομεν τμήματα $ΒΒ' = ΓΓ'$. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' εἶναι ἰσοσκελές.
86. Τὰ ὕψη ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσα.
87. Ἐάν τρίγωνον ἔχη δύο ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοσκελές.
88. Αἱ διάμεσοι ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.
89. Αἱ διχοτόμοι ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.
90. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.
91. Ἴσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) προεκτείνομεν τὰς ἴσας πλευρὰς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΑΕ = ΑΖ. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΒΔ καὶ ΖΓΔ εἶναι ἴσα καὶ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ.
92. Κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει $ΑΒ = ΒΓ$ καὶ $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$. Δείξατε ὅτι α) $ΑΔ = ΔΓ$ καὶ β) αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως.
93. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι $ΕΒ = ΕΖ$.
94. Τὸ μέσον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς του.
95. Δίδεται γωνία $\chi\widehat{Ο}ϕ$. Ἐπὶ τῆς Οχ λαμβάνομεν σημεῖον Α καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν $ΑΒ \perp Οϕ$. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΟΑΒ}$ τέμνει τὴν Οϕ εἰς τὸ Γ, ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Οϕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Οχ εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι $ΔΑ = ΔΓ$.
96. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ, φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ$.
97. Δίδεται κυρτὴ γωνία $\chi\widehat{Ο}ϕ$. Ἐκ τῆς κορυφῆς Ο φέρομεν $ΟΑ \perp Οϕ$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οχ λαμβάνομεν ΟΒ = ΟΑ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν ΒΔ $\perp Οϕ$. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΔΒΟ}$ ἢ τῆς γωνίας $\widehat{ΔΒχ}$.

98. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνομεν τμήμα $AD = A\Gamma$. Δείξατε ὅτι

$$\widehat{A\Gamma B} = \frac{\widehat{\Gamma} - \widehat{B}}{2}$$

99. Δίδεται ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς BA λαμβάνομεν τμήμα $AD = AB$ καὶ με πλευράν τὴν BD κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον BDE , φέρομεν δὲ καὶ τὴν GE . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου GBE (δύο περιπτώσεις).

100. Δίδεται γωνία $\chi\hat{O}\gamma$. Ἀπὸ σημείου A τῆς $O\chi$ φέρομεν παράλληλον τῆς $O\gamma$ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $AB = AO$. Δείξατε ὅτι ἡ OB εἶναι διχοτόμος (ἐσωτερικὴ ἢ ἐξωτερικὴ) τῆς γωνίας $\chi\hat{O}\gamma$.

101. Δίδεται ὀρθή γωνία $B\hat{A}\Gamma$. Κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{ABD} = 30^\circ$ ἔνθα ἡ BD τέμνει τὴν $A\Gamma$ ἢ τὴν προέκτασιν τῆς εἰς τὸ Δ . Ἐπίσης κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{AGE} = 30^\circ$, ἔνθα ἡ GE τέμνει τὴν AB ἢ τὴν προέκτασιν τῆς εἰς τὸ E . Ἐὰν αἱ BD καὶ GE τέμνονται εἰς τὸ Z , δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα BEZ καὶ $ZD\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελῆ ἢ ὀρθογώνια.

102. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ σημεῖον Γ ἐπ' αὐτοῦ. Ἐκ τῶν A καὶ B ἄγομεν δύο παραλλήλους ἡμιευθείας Ax καὶ By πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ AB καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $AD = A\Gamma$ καὶ $BE = B\Gamma$ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $\widehat{\Gamma DE} = 1^\circ$.

103. Ἐὰν ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

104. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$. Μὲ βάσεις τὰς πλευράς του κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ ἰσόπλευρα τρίγωνα ABD , $A\Gamma E$, $B\Gamma Z$. Δείξατε ὅτι : α) αἱ γραμμαὶ DAE , $E\Gamma Z$, ZBD εἶναι εὐθεῖαι β) τὸ τρίγωνον ΔEZ εἶναι ἰσόπλευρον.

B'.

105. Μὲ βάσεις τὰς ἴσας πλευράς AB , $A\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ ἰσόπλευρα τρίγωνα ABD καὶ $A\Gamma E$. Δείξατε ὅτι ἡ DE εἶναι παράλληλος τῆς $B\Gamma$. Πότε ἡ γραμμὴ DAE εἶναι εὐθεῖα ;

106. Δύο εὐθεῖαι (e_1) καὶ (e_2) τέμνονται εἰς σημεῖον O . Ἐπὶ τῆς (e_1) λαμβάνομεν σημεῖα B , Γ καὶ ἐπὶ τῆς (e_2) σημεῖον A , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $OA = OB = OG$. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον.

107. Τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$. Φέρομεν τὸ ὕψος AD καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς AB λαμβάνομεν τμήμα $BE = BD$. Ἐὰν ἡ ED τέμνη τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z , δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα $ZD\Gamma$ καὶ ZDA εἶναι ἰσοσκελῆ.

108. Ἐπ' εὐθείας δίδονται διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A , B , Γ . Σχηματίζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ABD καὶ $B\Gamma E$. Δείξατε ὅτι $AE = \Gamma D$.

109. Ἐὰν ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) διαιρῇται διὰ τῆς BD εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ADB καὶ $B\Delta\Gamma$ με $AD = DB$ καὶ $BD = B\Gamma$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

115. Θεώρημα. i). Εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ ἑξ σχέσεις ἀνισότητος :

$$\begin{array}{ll} (1) & \alpha < \beta + \gamma \quad \text{καὶ} \quad (4) \quad \alpha > |\beta - \gamma| \\ (2) & \beta < \alpha + \gamma \quad (5) \quad \beta > |\alpha - \gamma| \\ (3) & \gamma < \alpha + \beta \quad (6) \quad \gamma > |\alpha - \beta| \end{array}$$

ii). Αἱ ἀνωτέρω ἑξ σχέσεις συγχωνεύονται εἰς τὴν διπλὴν ἀνισότητα :

$$(7) \quad |\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

ὅπου α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ $|\beta - \gamma| = \beta - \gamma$ ἐὰν $\beta \geq \gamma$ ἐνῶ $|\beta - \gamma| = \gamma - \beta$ ἐὰν $\beta < \gamma$.

Ἀποδείξεις. i). Αἱ τρεῖς πρῶται εἶναι προφανεῖς βάσει τοῦ ἀξιώματος § 40 κατὰ τὸ ὅποῖον ἐν εὐθύγραμμον τμήμα εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς μετὰ τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν ἀντιστοιχῶς $\alpha > \beta - \gamma$ καὶ $\alpha > \gamma - \beta$.

Ἐξ αὐτῶν ἐπεται ὅτι $\alpha > |\beta - \gamma|$, ἥτοι ἰσχύει ἡ σχέση (4). Ὅμοιως ἐκ τῶν σχέσεων (1), (3) καὶ (1), (2) λαμβάνομεν ἀντιστοιχῶς :

$\beta > |\alpha - \gamma|$ καὶ $\gamma > |\alpha - \beta|$, ἥτοι ἰσχύουν αἱ σχέσεις (5) καὶ (6).

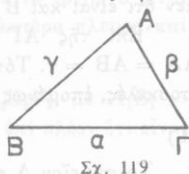
ii). Ἐὰν ἰσχύουν αἱ σχέσεις (1) ἕως (6) τότε προφανῶς ἰσχύει καὶ ἡ (7) διότι τὰ δύο σκέλη τῆς ἀποτελοῦν αἱ (4) καὶ (1) ἀντιστοιχῶς.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ (7) θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ (1) ἕως (6). Ἀμέσως ἐκ τῆς (7) ἐπεται ὅτι ἰσχύουν αἱ (4) καὶ (1), διότι εἶναι τὰ δύο σκέλη τῆς.

Χωρὶς νὰ βλάπτεται ἡ γενικότης δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν μίαν τυχαίαν σχέσιν διατάξεως μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ ἔστω $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Τότε ἡ (7) γράφεται $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ καὶ διασπᾶται εἰς τὰς :

$$\begin{array}{ll} (8) & \beta - \gamma < \alpha \quad \text{καὶ} \\ (9) & \alpha < \beta + \gamma \end{array}$$

Ἐκ τῆς (8) ἐπεται $\beta < \alpha + \gamma$, ἄρα ἰσχύει ἡ (2). Ἐπειδὴ ἡ γ ὑπετέθη ἡ μικρότερα πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἐπεται ὅτι εἶναι μικρότερα καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἥτοι $\gamma < \alpha + \beta$, ἄρα ἰσχύει ἡ (3). Ἐκ τῆς (9) ἐπεται $\beta > \alpha - \gamma$ καὶ $\gamma > \alpha - \beta$, ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\alpha \geq \gamma$ καὶ $\alpha \geq \beta$, αἱ δύο τελευταῖαι σχέσεις δύνανται ἀκόμη νὰ γραφοῦν $\beta > |\alpha - \gamma|$ καὶ $\gamma > |\alpha - \beta|$. Ἀρα ἰσχύουν καὶ αἱ (5) καὶ (6). Ἐπομένως αἱ ἀνισότητες (1) ἕως (6) εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν (7).



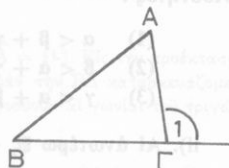
Σχ. 119

116. Θεώρημα. Ἐκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλύτερα ἐκάστης τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 120) καὶ $\widehat{\Gamma}_1$ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τῆς $\widehat{\Gamma}$. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 105 πρῶ. I) :

$$\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A} + \widehat{B}$$

Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1 > \widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1 > \widehat{B}$.



σχ. 120

117. Θεώρημα. Ἄν αἱ δύο πλευραὶ ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἄνισοι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλύτερας πλευρᾶς κεῖται μεγαλύτερα γωνία καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\beta > \gamma$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ (σχ. 121).

Ἐπὶ τῆς $A\Gamma = \beta$ λαμβάνομεν τμῆμα $A\Delta = AB = \gamma$. Τότε τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές, ἐπομένως

$$(1) \quad \omega_1 = \omega_2$$

Τὸ σημεῖον Δ εἶναι προφανῶς ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Γ , συνεπῶς ἡ $B\Delta$ εἶναι ἐσωτερικὴ διὰ τὴν γωνίαν $\widehat{B}$. Ἄρα :

$$(2) \quad \widehat{B} > \omega_1$$

Ἐπὶ πλέον δὲ εἶναι :

$$(3) \quad \omega_2 > \widehat{\Gamma}$$

διότι (§ 116) ἡ ω_2 εἶναι ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου $\Delta B\Gamma$. Τότε ἐκ τῶν (2), (1) καὶ (3) λαμβάνομεν $\widehat{B} > \omega_1 = \omega_2 > \widehat{\Gamma}$. Ἄρα :

$$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$$

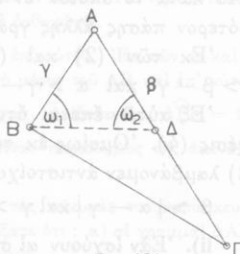
Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ $\beta > \gamma$ (σχ. 122).

Ἐκ τοῦ B φέρομεν ἡμιευθεῖαν ἐσωτερικὴν τῆς γωνίας $\widehat{B}$, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς $B\Gamma$ γωνίαν $\varphi = \widehat{\Gamma}$. Τότε τὸ σημεῖον Δ , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἡμιευθεῖα τέμνει τὴν $A\Gamma$, εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Γ καὶ τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα :

$$(4) \quad \Delta B = \Delta \Gamma$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου $AB\Delta$ ἔχομεν :

$$\gamma < A\Delta + \Delta B$$

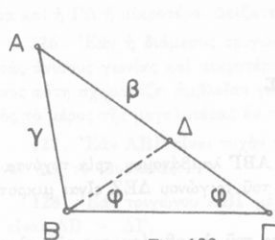


σχ. 121

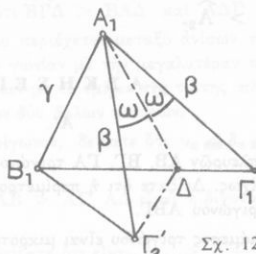
ἢ ὅποια, λόγω τῆς (4), γράφεται :

$$\gamma < \Delta\Delta + \Delta\Gamma \quad \eta \quad \gamma < \Delta\Gamma.$$

$$\text{Ἀρα :} \quad \gamma < \beta$$



Σχ. 122



Σχ. 123

118. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοιχῶς ἴσας καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἄνισα, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κείται μεγαλυτέρα πλευρὰ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $A_1B_1 = A_2B_2 = \gamma$ καὶ $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2 = \beta$ (σχ. 123). Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι εἶναι $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2$.

Μετατοπίζομεν τὸ τρίγωνον $A_2B_2\Gamma_2$ εἰς τὴν θέσιν $A_1B_1\Gamma'_2$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ A_2B_2 αὐτοῦ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἴσης τῆς A_1B_1 ἡ δὲ γωνία $\widehat{A_2}$ αὐτοῦ νὰ ἀποκτήσῃ κοινὸν μέρος μετὰ τῆς $\widehat{A_1}$. Τότε, ἐπειδὴ $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$ ἢ $A_1\Gamma_2 > A_1\Gamma'_2$ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας $\widehat{A_1}$ καὶ ἀρκεῖ πλέον νὰ δείξωμεν ὅτι $B_1\Gamma_1 > B_1\Gamma'_2$.

Θεωροῦμεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\Gamma_1\widehat{A_1}\Gamma'_2$ καὶ ἔστω ὅτι αὕτη τέμνει τὴν πλευρὰν $B_1\Gamma_1$ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τότε εἶναι τριγ. $A_1\Gamma_1\Delta =$ τριγ. $A_1\Gamma'_2\Delta$ ὡς ἔχοντα $A_1\Gamma_1 = A_1\Gamma'_2$, τὴν $A_1\Delta$ κοινὴν καὶ $\Gamma_1\widehat{A_1}\Delta = \Gamma'_2\widehat{A_1}\Delta = \omega$. Ἀρα θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \Delta\Gamma_1 = \Delta\Gamma'_2$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου $B_1\Delta\Gamma'_2$ ἔχομεν : $B_1\Gamma'_2 < B_1\Delta + \Delta\Gamma'_2$ καὶ λόγω τῆς σχέσεως (1), ἡ τελευταία γράφεται

$$B_1\Gamma'_2 < B_1\Delta + \Delta\Gamma_1 \quad \eta \quad B_1\Gamma'_2 < B_1\Gamma_1. \quad \text{Ἀρα } B_2\Gamma_2 < B_1\Gamma_1 \quad \eta \quad B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2.$$

Ἀντιστρόφως. Ἐστώ ὅτι τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ ἔχουν $A_1B_1 = A_2B_2 = \gamma$, $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2 = \beta$ καὶ $B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2$. Θὰ δείξωμεν ὅτι : $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$.

Πράγματι, ἡ περίπτωσις $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ ἀποκλείεται, διότι τότε τὰ τρίγωνα θὰ ἦσαν ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν

γωνίαν ίσην. Τοῦτο ὁμῶς ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται ἡ περίπτωσης $\widehat{A}_1 < \widehat{A}_2$, διότι τότε, ὡς ἐδείχθη, θὰ ἦτο καὶ $B_1\Gamma_1 < B_2\Gamma_2$, ἀλλὰ καὶ αὐτὸ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἀρα τὸ μόνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίῃ εἶναι $\widehat{A}_1 > \widehat{A}_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

110. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, BG, ΓΑ τριγώνου ABΓ λαμβάνομεν τρία τυχόντα σημεία Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι μικρότερα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ABΓ.

111. Ἐκάστη διάμεσος τριγώνου εἶναι μικρότερα τοῦ ἡμισυθροίσματος τῶν πλευρῶν πού τὴν περιέχουν καὶ μεγαλύτερα τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν.

112. Ἐὰν Μ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τριγώνου ABΓ, δείξατε ὅτι $\tau < MA + MB + MG < 2\tau$, ὅπου 2τ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου.

113. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ABΓ εἶναι $\beta > \gamma$ καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέσου AM, δείξατε ὅτι $EG > EB$.

114. Δίδεται τμήμα AB καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος του. Ἄν τὰ τμήματα ΓΒ καὶ ΔΑ τέμνονται, δείξατε ὅτι $AG + BD < AD + BG$.

115. Ἐστω τρίγωνον ABΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Δείξατε ὅτι $AB > BD$ καὶ $AG > GD$.

116. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κυρτοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ οὕτως, ὥστε ἡ τεθλασμένη ΑΕΖΔ νὰ εἶναι κυρτή. Δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ εἶναι μικρότερα τῆς περιμέτρου τοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ.

117. Ἐὰν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐσωτερικὰ τριγώνου ABΓ, δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι μικρότερα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ABΓ.

Β'.

118. Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν AB καὶ ΑΓ τριγώνου ABΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Δείξατε ὅτι $DE > BG$.

119. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι μεγαλύτερον τῆς [ἡμι-περιμέτρου καὶ μικρότερον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

120. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ABΓ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὴν διχοτόμον ΒΔ τῆς γωνίας $\widehat{B}$. Δείξατε ὅτι $AD < GD$.

121. Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ABΓΔ εἶναι $AD = BG$ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma} > \widehat{B\Gamma\Delta}$, νὰ συγκριθοῦν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ.

122. Ἐὰν ἡ πλευρὰ BG ἰσοσκελοῦς τριγώνου ABΓ ($AB = AG$) εἶναι μικρότερα, ἴση ἢ μεγαλύτερα μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν του, τότε ἡ γωνία $\widehat{A}$ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως μικρότερα, ἴση ἢ μεγαλύτερα τῶν 60° .

123. Ἐστω τρίγωνον ABΓ καὶ AM ἡ διάμεσος αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι : α) ἐὰν $AM < \frac{BG}{2}$, τότε $\widehat{A} > 1^\circ$, β) ἐὰν $AM = \frac{BG}{2}$, τότε $\widehat{A} = 1^\circ$ καὶ γ) ἐὰν $AM > \frac{BG}{2}$, τότε $\widehat{A} < 1^\circ$.

124. 'Εάν τὸ ὕψος AD τριγώνου $AB\Gamma$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, δείξατε ὅτι ἡ γωνία $\hat{A}$ εἶναι ὀξεῖα ἢ ὀρθή. Πότε εἶναι ὀρθή;

125. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποῖου ἡ πλευρά AB εἶναι ἡ μεγαλύτερα καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ἡ μικρότερα. Δείξατε ὅτι $B\hat{\Gamma}\Delta > B\hat{A}\Delta$ καὶ $A\hat{\Delta}\Gamma > A\hat{B}\Gamma$.

126. 'Εάν ἡ διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, σχηματίζει μὲ αὐτὰς ἀνίσους γωνίας καὶ μικρότεραν γωνίαν μὲ τὴν μεγαλύτεραν πλευράν. 'Επίσης ἡ διάμεσος αὐτὴ σχηματίζει ἀμβλείαν γωνίαν μὲ τὸ τμήμα τῆς τρίτης πλευρᾶς, τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλύτερας ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

127. 'Εάν $AB\Gamma$ εἶναι τυχὸν τρίγωνον, δείξατε ὅτι $\alpha \leq \delta \leq \mu$ ὅπου τὸ $=$ ἰσχύει μόνον διὰ τὸ ἰσοσκελές.

128. 'Εάν τριγώνου $AB\Gamma$ μὲ $AB > A\Gamma$, AD εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\hat{A}$, τότε θὰ εἶναι $\Delta B > \Delta\Gamma$.

129. Εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ δείξατε ὅτι εἶναι $2\mu > \beta + \gamma - \alpha$.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

119. **Τυχὸν τετράπλευρον.** Τετράπλευρον εἶναι τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τέσσαρας πλευράς. Τότε θὰ ἔχη τέσσαρας κορυφάς, τέσσαρας γωνίας καὶ δύο διαγωνίους.

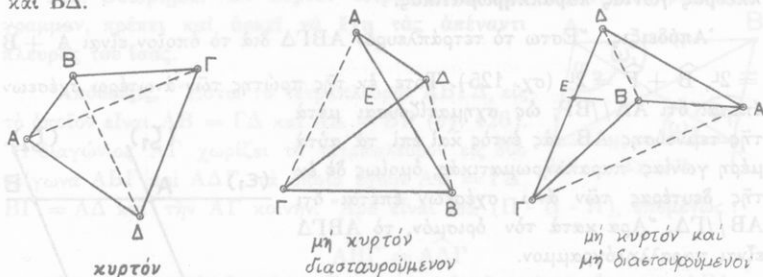
Εἰς ἓν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ θὰ λέγωμεν ὅτι εὐρίσκονται ἀπέναντι ἀλλήλων :

i) Αἱ κορυφαὶ A καὶ Γ , B καὶ Δ .

ii) Αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν γωνίαι $\hat{A}$ καὶ $\hat{\Gamma}$, $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Delta}$.

iii) Αἱ πλευραὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ καὶ $A\Delta$.

Αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ A καὶ Γ , B καὶ Δ ὀρίζουν τὰς δύο διαγωνίους $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$.



Σχ. 124

Τετράπλευρα ὑπάρχουν κυρτὰ καὶ μὴ κυρτά. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθαὶ (§ 106).

Ὅταν ἓν τετράπλευρον εἶναι μὴ κυρτόν, μία τοῦλάχιστον ἀπὸ τὰς εὐθείας ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ του τέμνει τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευράν (διατί;). 'Εάν ἐνὸς μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 124) ἡ εὐθεῖα AB τέμνη

τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς σημεῖον E καὶ συμβαίνει τὸ E νὰ εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος AB , τότε λέγομεν ὅτι αἱ πλευραὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ διασταυροῦνται καὶ τὸ τετράπλευρον καλεῖται **διασταυρούμενον**. Ἐὰν τὸ σημεῖον E τῆς εὐθείας AB δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος AB (σχ. 124), τότε αἱ πλευραὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ δὲν διασταυροῦνται καὶ τὸ τετράπλευρον καλεῖται **μὴ διασταυρούμενον**.

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰ κυρτὰ τετράπλευρα αἱ διαγώνιοι εἶναι ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τετραπλεύρου καὶ τέμνονται, ἐνῶ εἰς τὰ μὴ κυρτὰ δὲν τέμνονται. Εἰς τὰ μὴ κυρτὰ καὶ διασταυρούμενα αἱ διαγώνιοι εἶναι ἐξωτερικὰ τμήματα, ἐνῶ εἰς τὰ μὴ κυρτὰ καὶ μὴ διασταυρούμενα ἡ μία διαγώνιος εἶναι ἐσωτερικὸν καὶ ἡ ἄλλη ἐξωτερικὸν τμήμα τοῦ τετραπλεύρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μὴ κυρτοῦ καὶ μὴ διασταυρουμένου τετραπλεύρου (σχ. 124), ἡ ἐσωτερικὴ διαγώνιος τὸ διαιρεῖ εἰς δύο τρίγωνα καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4° . Δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιο καὶ διὰ τὸ διασταυρούμενον τετράπλευρον.

Εἰς τὰ ἐπόμενα λέγοντες «τετράπλευρον» θὰ ἐννοοῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ἐκτὸς ἐὰν γίνῃ ἰδιαίτερα μνεῖα περὶ μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

120. Ὅρισμός. Παραλληλόγραμμον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς του παραλλήλους.

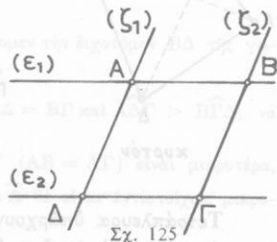
Δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν (ϵ_1) (ϵ_2) καὶ (ζ_1), (ζ_2) τεμνόμενα ὀρίζουν ἐν παραλληλόγραμμον (σχ. 125). Ἐν παραλληλόγραμμον εἶναι πάντοτε κυρτόν.

121. Θεώρημα. Ἐν κυρτὸν τετράπλευρον διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ τὰς προσκειμένας εἰς δύο διαδοχικὰς πλευρὰς γωνίας παραπληρωματικὰς.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^\circ$, $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ$ (σχ. 125). Τότε, ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἔπεται ὅτι $A\Delta // B\Gamma$, ὡς σχηματίζουσαι μετὰ τῆς τεμνούσης AB τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικὰς, ὁμοίως δὲ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἄνω σχέσεων ἔπεται ὅτι $AB // \Gamma\Delta$. Ἀρα κατὰ τὸν ὅρισμόν, τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ προσκειμένοις εἰς δύο διαδοχικὰς πλευρὰς γωνίαί εἶναι παραπληρωματικαί.

Πράγματι, εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^\circ$ ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς AB . Ὁμοίως εἶναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ$.



Σχ. 125

122. Θεώρημα. Ἐν κυρτὸν τετράπλευρον, διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχη τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίας ἴσας.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 125) διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$(1) \quad \widehat{A} = \widehat{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{B} = \widehat{\Delta}$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 4^{\circ}$, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον. Τότε ἡ τελευταία, λόγῳ τῶν σχέσεων (1), γράφεται :

$$2\widehat{A} + 2\widehat{B} = 4^{\circ} \Rightarrow$$

$$(2) \quad \widehat{A} + \widehat{B} = 2^{\circ}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$(3) \quad \widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2^{\circ}$$

Τότε, ἐκ τῶν (2), (3) καὶ δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἔπεται ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{\circ}$ καὶ $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2^{\circ}$. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{\Delta} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{\Delta}$.

Ὁμοίως θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{\circ}$ καὶ $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{\circ}$ ἐκ τῶν ὁποίων ἔπεται ὅτι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$. Ἀρα τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι γωνίας του ἴσας.

123. Θεώρημα. Ἐν κυρτὸν τετράπλευρον διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχη τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας.

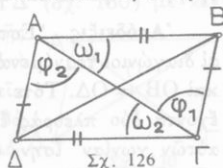
Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $AD = B\Gamma$ (σχ. 126).

Ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζει τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν $AB = \Gamma\Delta$, $B\Gamma = AD$ καὶ τὴν ΑΓ κοινὴν. Ἀρα εἶναι ἴσα (Π - Π - Π), ἐπομένως :

$$\widehat{AB\Gamma} = \widehat{AD\Gamma}$$

Φέροντες καὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ, ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\widehat{AB\Delta} = \widehat{B\Gamma\Delta}$. Ἀρα $\widehat{B\Delta A} = \widehat{B\Gamma\Delta}$. Τότε αὐτό, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, εἶναι παραλληλόγραμμο, ὥς ἔχον τὰς ἀπέναντι γωνίας του ἴσας.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $B\Gamma = AD$. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ ἔχουν τὴν πλευρὰν ΑΓ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας $\omega_1 = \omega_2$ καὶ $\varphi_1 = \varphi_2$, ὥς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλ-



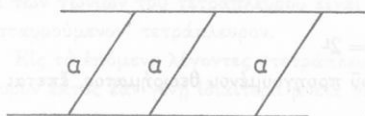
λήλων $AB // \Gamma\Delta$ και $B\Gamma // A\Delta$ ἀντιστοίχως τεμνομένων ὑπὸ τῆς $ΑΓ$. Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ($\Gamma - \Pi - \Gamma$). Ἐπομένως $AB = \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = A\Delta$.

Πόρισμα Ι. Ἐκάστη διαγώνιος παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.

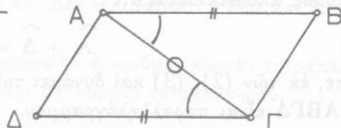
Πόρισμα ΙΙ. Παράλληλα τμήματα ἔχοντα τὰ ἄκρα αὐτῶν ἐπὶ δύο παραλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα (σχ. 127).

124. Θεώρημα. Ἐὰν ἐν κυρτὸν τετράπλευρον ἔχη δύο ἀπέναντι πλευράς του ἴσας και παραλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμοι.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 128) τοῦ ὁποῖου θεωροῦμεν τὰς πλευράς AB και $\Gamma\Delta$ ἴσας και παραλήλους. Φέρομεν τὴν διαγώνιον $ΑΓ$, ἡ ὁποία χωρίζει τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta\Lambda$; τὰ ὁποῖα



Σχ. 127

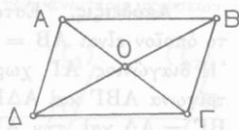


Σχ. 128

ἔχουν δύο πλευράς ἀντιστοίχως ἴσας $ΑΓ = ΑΓ$, $AB = \Gamma\Delta$ και τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην λόγῳ τῶν $AB // \Gamma\Delta$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς $ΑΓ$. Ἄρα εἶναι ἴσα ($\Pi - \Gamma - \Pi$), ἐπομένως θὰ εἶναι και $A\Delta = B\Gamma$. Ἡδη τὸ τετράπλευρον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἀνὰ δύο ἴσας. Ἄρα (§ 123) εἶναι παραλληλόγραμμοι.

125. Θεώρημα. Ἐν κυρτὸν τετράπλευρον, διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμοι, πρέπει και ἀρκεῖ αἱ διαγώνιοί του νὰ διχοτομοῦνται.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 129), τοῦ ὁποῖου αἱ διαγώνιοι τεμνομένην εἰς τὸ σημεῖον O διχοτομοῦνται, ἥτοι εἶναι $OA = OG$ και $OB = OD$. Τότε τὰ τρίγωνα AOB και $ΓΟΔ$, ὡς ἔχοντα δύο πλευράς ἴσας και τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην, ὡς κατὰ κορυφήν, εἶναι ἴσα ($\Pi - \Gamma - \Pi$). Ἐπομένως $AB = \Gamma\Delta$. Ἐπὶ πλέον εἶναι $AB // \Gamma\Delta$, διότι αὗται τεμνομένην ὑπὸ τῆς $ΑΓ$ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας. Ἄρα, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμοι.



Σχ. 129

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμοι $AB\Gamma\Delta$ τοῦ ὁποῖου αἱ διαγώνιοι $ΑΓ$ και $B\Delta$ τέμνονται εἰς τὸ O . Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον ἐκάστης.

Πράγματι, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα AOB και $ΓΟΔ$ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των AB και $\Gamma\Delta$ ἴσας και τὰς προσκειμένας αὐτῶν γωνίας ἀνὰ δύο ἴσας λόγῳ τῶν παραλήλων $AB // \Gamma\Delta$ τεμνομένων ὑπὸ τῶν $ΑΓ$ και $B\Delta$.

αντιστοίχως. Έπομένως θα είναι $OA = OG$ και $OB = OD$, ήτοι αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

126. Κέντρον συμμετρίας παραλληλογράμμου.

Θεώρημα. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

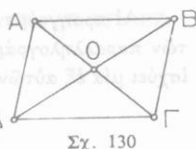
Ἀπόδειξις. Ἐστω παραλληλόγραμμοι $ABΓΔ$ (σχ. 130) καὶ O τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του. Ἐπειδὴ τὸ O εἶναι μέσον ἐκάστης τῶν διαγωνίων (§ 125), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἀκολουθούσας ἀπεικονίσεις κεντρικῆς συμμετρίας ὡς πρὸς κέντρον τὸ O :

$$\left. \begin{array}{l} A \longleftrightarrow \Gamma \\ B \longleftrightarrow \Delta \\ \Gamma \longleftrightarrow A \\ \Delta \longleftrightarrow B \end{array} \right\} \Rightarrow AB\Gamma\Delta \longleftrightarrow \Gamma\Delta AB$$

Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμοι $AB\Gamma\Delta$ ἀπεικονίζεται εἰς ἑαυτὸ μέσῳ κεντρικῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του O , ἥτοι τὸ O εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

127. Θεώρημα. (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐάν ἓν τετράπλευρον ἔχει κέντρον συμμετρίας, εἶναι παραλληλόγραμμοι.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 130) μὲ κέντρον συμμετρίας σημεῖον O . Ἡ πλευρὰ AB , μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρον O , ἀπεικονίζεται ὅπωςδῇποτε ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$, διότι μετὰ τῶν $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ ἔχει κοινὰ σημεῖα (§ 82). Τότε, λόγῳ τῆς κεντρικῆς συμμετρίας, θὰ εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $AB // \Gamma\Delta \Rightarrow AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμοι (§ 124).



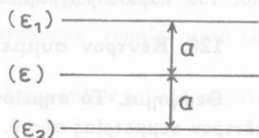
Σημείωσις. Τὸ κέντρον σύμμετρίας O καλεῖται ἀπλῶς κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου ἢ καὶ κέντρον βάρους αὐτοῦ. Ὁ ὅρος αὐτός ἔχει ληφθῇ ἀπὸ τὴν φυσικὴν διότι τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους ὕλικης πλακὸς ἐξ ὁμογενοῦς ὕλου, σχήματος παραλληλογράμμου.

128. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ μήκος εὐθυγράμμου τμήματος καθέτου πρὸς αὐτὰς καὶ ἔχοντος τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν παραλλήλων.

129. Μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) καλεῖται

μία ευθεία (ϵ) παράλληλος πρὸς αὐτὰς καὶ ἀπέχουσα ἴσας ἀποστάσεις ἀπ' αὐτὰς (σχ. 131).

Ἡ μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων ευθειῶν εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τὴν ὁποίαν ὀρίζουν αὐταί.



Σχ. 131

130. Βάσις παραλληλογράμμου δύναται νὰ λέγεται οἰαδήποτε πλευρά του.

131. Ὑψος παραλληλογράμμου καλεῖται ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν του. Ἀρα κάθε παραλληλόγραμμοι ἔχει δύο ὕψη u_1 καὶ u_2 (σχ. 132).

132. Σύνοψις τῶν ιδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων.

Κάθε παραλληλόγραμμοι ἔχει τὰς κάτωθι ιδιότητες :

i) Αἱ ἀπέναντι αὐτοῦ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

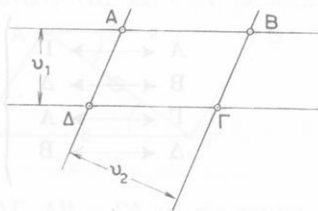
ii) Αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς ἑκάστην πλευράν εἶναι παραπληρωματικάι.

iii) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

iv) Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

v) Αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται.

vi) Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.



Σχ. 132

Αἱ προηγούμεναι ιδιότητες δύνανται νὰ χρησιμεύσουν καὶ ὡς γνωρίσματα τῶν παραλληλογράμμων. Ἀν δηλαδὴ ἀνακαλύψωμεν ὅτι εἰς ἓν τετράπλευρον ἰσχύει μία ἐξ αὐτῶν, τότε τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

130. Αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι, ἐνῶ αἱ διχοτόμοι τῶν προσκειμένων γωνιῶν του εἶναι κάθετοι.

131. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ σημείου Δ τῆς ΒΓ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν ἐκ τοῦ Α παράλληλον τῆς ΒΓ εἰς τὰ σημεία Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα.

132. Εἰς πᾶν παραλληλόγραμμοι δείξατε ὅτι ἡ μεγαλύτερα διαγώνιος εἶναι ἡ ἔχουσα ὡς ἄκρα τὰς κορυφὰς τῶν μικροτέρων γωνιῶν.

133. Εἰς παραλληλόγραμμοι ΑΒΓΔ συνδέομεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ μέσα

Ε και Ζ δύο ἀπέναντι πλευρῶν του, ἕκαστον μὲ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφάς. Δείξατε ὅτι τὰ τέσσαρα τμήματα τεμνόμενα σχηματίζουν παραλληλόγραμμον.

134. Τὰ μέσα τῶν τεσσάρων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ κέντρον ἑνὸς παραλληλογράμμου χωρίζει τὰς δύο διαγωνίους του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου μὲ τὸ αὐτὸ κέντρον.

135. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ ΒΕ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΔΗ = ΔΑ, ΕΖ = ΕΒ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ σημεία Η, Γ, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΗΖ.

136. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν (δ), ἡ ὁποία τέμνει τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς ΑΒ, ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὸ ΑΕΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Β'.

137. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔστω ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν παράλληλον τῆς ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι ΑΕ = ΒΖ.

138. Ἐστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἰσας πλευράς τοῦ τριγώνου, ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΔ + ΜΕ παραμένει σταθερόν.

139. Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΒΑ' = ΒΑ, ΓΒ' = ΓΒ, ΔΓ' = ΔΓ, ΑΔ' = ΑΔ. Δείξατε ὅτι :

α) τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμον,

β) τὰ κέντρα τῶν δύο παραλληλογράμμων συμπίπτουν.

140. Ἀπὸ σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἄλλας πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τὰς τέμνουν εἰς τὰ σημεία Ε καὶ Ζ. Ἐὰν $\beta > \gamma$, δείξατε ὅτι ἡ τετρασμένη γραμμὴ ΕΔΖ εἶναι μεγαλύτερα τῆς γ καὶ μικρότερα τῆς β.

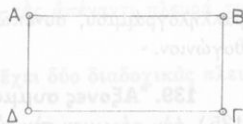
141. Ἐὰν κυρτοῦ ἐξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ αἱ ἀπέναντι γωνία εἶναι ἴσαι, ἤτοι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$, δείξατε ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, ἤτοι ΑΒ//ΔΕ, ΒΓ//ΕΖ, ΓΔ//ΖΑ.

ΕΙΔΙΚΑ ΤΙΝΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

133. Ὁρθογώνιον καλεῖται τὸ τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθάς.

134. Θεώρημα. Ἐὰν τετραπλεύρου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τετραπλεύρου εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των, ἔπεται ὅτι ἑκάστη εἶναι ὀρθή. Ἀρα τὸ τετράπλευρον εἶναι ὀρθογώνιον (σχ. 133).



Σχ. 133

135. Θεώρημα. Τὸ ὀρθογώνιον εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐφ' ὅσον αἱ προσκείμεναι εἰς ἐκάστην πλευρὰν γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 121) τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Καλεῖται δὲ καὶ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

136. Θεώρημα. Ἐὰν ἓν παραλληλόγραμμον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν, εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον ἔχει $\widehat{A} = 1^\circ$ (σχ. 133). Τότε θὰ ἔχῃ καὶ $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 1^\circ$, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς $\widehat{A}$ (§ 121), ὡς ἐπίσης καὶ $\widehat{\Gamma} = 1^\circ$, ὡς ἴση πρὸς τὴν $\widehat{A}$ (§ 122). Ἀρα τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

137. Θεώρημα. Τὸ ὀρθογώνιον ἔχει ἴσας διαγωνίους.

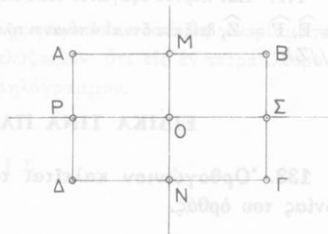
Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A\Gamma$, $B\Delta$ αἱ διαγωνίαι αὐτοῦ (σχ. 134). Τὰ τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ καὶ $B\Gamma\Delta$ εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν $A\Delta = B\Gamma$, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς ὀρθογωνίου καὶ τὴν $\Delta\Gamma$ κοινὴν, ἄρα εἶναι ἴσα. Τότε θὰ εἶναι καὶ $A\Gamma = B\Delta$.

138. Θεώρημα. Ἐὰν ἓν παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὰς διαγωνίους του ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 134). μὲ $A\Gamma = B\Delta$. Τὰ τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ καὶ $B\Delta\Gamma$ ἔχουν τότε καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}$. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι καὶ παραπληρωματικαί, ὡς προσκείμεναι τῆς πλευρὰς $\Gamma\Delta$ τοῦ πα-



Σχ. 134



Σχ. 135

ραλληλογράμμου, συνεπῶς εἶναι ὀρθαί. Ἀρα τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον.

139. Ἀξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου. Εἰς ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 135), ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ὀριζομένην ἀπὸ τὰ μέσα M καὶ N τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του AB καὶ $\Gamma\Delta$, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς $A\Delta$ καὶ

ΒΓ και κάθετος πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, διότι τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΜΝΔ εἶναι ὀρθογώνιον, ὡς ἔχον $AM // = DN$ καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ ὀρθήν. Ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἄρα εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἐπίσης ἡ ΡΣ, ἡ ὀριζομένη ἀπὸ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους.

140. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου ποὺ ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 136) καὶ ΑΟ ἡ διάμεσος αὐτοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας. Εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $OA = OD$. Ἄρα :

$$(1) \quad 2 \cdot OA = AD$$

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι του διχοτομοῦνται καὶ μάλιστα εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἔχει $\widehat{A} = 1^\circ$. Ἐπομένως αἱ διαγώνιοι του θὰ εἶναι ἴσαι, ἥτοι :

$$(2) \quad AD = BG$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $2 \cdot OA = BG$ ἢ $OA = \frac{BG}{2}$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι ἡ διάμεσος ΑΟ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

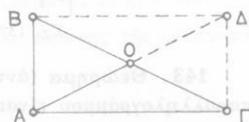
Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΟ λαμβάνομεν σημεῖον Δ οὕτως, ὥστε $OA = OD$. Τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι του διχοτομοῦνται. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι $OA = \frac{BG}{2} \Rightarrow 2 \cdot OA = BG$ ἢ $AD = BG$. Ἄρα, ἐφ' ὅσον ἔχει καὶ διαγωνίους ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον, ἐπομένως $\widehat{A} = 1^\circ$, ἥτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

141. Ρόμβος καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας.

Ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας.

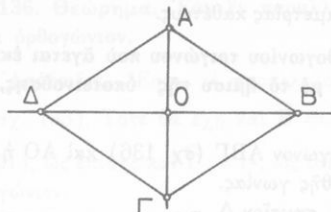
Πόρισμα. Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευράς ἴσας, εἶναι ρόμβος.

142. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι κάθετοι.

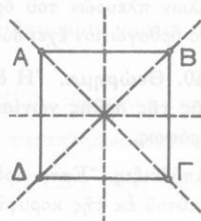


Σχ. 136

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ (σχ. 137). Τὸ σημεῖον Α ἰσαπέχει ἐκ τῶν Β καὶ Δ, ἐφ' ὅσον εἶναι $AB = AD$, ὡς πλευραὶ ρόμβου. Τότε τὸ σημεῖον Α ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΒΔ. Ὀμοίως τὸ σημεῖον Γ ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΒΔ. Ἐπομένως ἡ ΑΓ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΔ. Ἀρα $AG \perp BD$.



Σχ. 137



Σχ. 138

143. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι κάθετοι, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 137), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχει τὸ τμήμα ΑΟ ὕψος καὶ διάμεσον. Ἀρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἦτοι $AB = AD$. Τότε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος (§ 141 πόρισμα).

Πόρισμα I. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Πόρισμα II. Ἐὰν κυρτοῦ τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον εἶναι ρόμβος.

144. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦν τὰς γωνίας του.

Ἀπόδειξις. Τοῦτο ἔπεται ἐκ τοῦ ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος.

145. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦν τὰς γωνίας του, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 137), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦν τὰς γωνίας του. Τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ἐφ' ὅσον ἔχει τὸ τμήμα ΑΟ ὡς διάμεσον καὶ διχοτόμον, εἶναι ἰσοσκελές με $AB = AD$. Ἀρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος (§ 141 πόρισμα).

146. Τετράγωνον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ ὅλας τὰς πλευράς του ἰσας (σχ. 138).

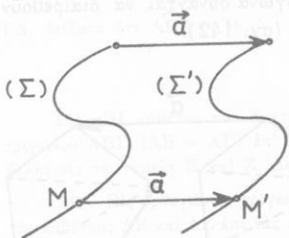
Πόρισμα I. Τὸ τετράγωνον εἶναι ἓνας ὀρθογώνιος ρόμβος.

Πόρισμα II. "Ένα παραλληλόγραμμο δια να είναι τετράγωνο, πρέπει και άρκεί αί διαγώνιοί του να είναι ίσαι και να τέμνονται καθέτως.

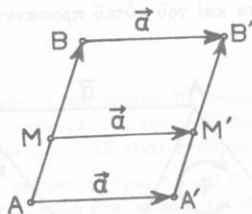
Πόρισμα III. Τό τετράγωνο, ως όρθογώνιο μὲν έχει δύο άξονας συμμετρίας, τās μεσοκαθέτους τών πλευρών του, ως ρόμβος δέ έχει δύο άξονας συμμετρίας, τās εὐθείας τών διαγωνίων του. "Αρα τό τετράγωνο έχει τέσσαρας άξονας συμμετρίας (σχ. 138).

Πόρισμα IV. Αί διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου σχηματίζουν με τās πλευράς του γωνίας 45° .

147. Παράλληλος μεταφορά. Παράλληλος μεταφορά σχήματος (Σ) καλεῖται ή άπεικόνισις αὐτοῦ εἰς σχῆμα (Σ') δια τοῦ ἐξῆς νόμου άπεικονίσεως : Κάθε σημείον M τοῦ σχήματος (Σ) άπεικονίζεται εἰς σημείον M' τοῦ σχήματος (Σ') δια τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμένου τμήματος α , ἥτοι $\overrightarrow{MM'} = \alpha$ (σχ. 139). Τό προσανατολισμένον τμήμα α καλεῖται **δείκτης** τῆς μεταφορᾶς.



Σχ. 139



Σχ. 140

148. Θεώρημα. Τυχόν προσανατολισμένον τμήμα $\overrightarrow{AB}$, άπεικονίζεται δια παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον προσανατολισμένον τμήμα $\overrightarrow{A'B'}$.

Ἀπόδειξις. "Εστω α ό δείκτης τῆς μεταφορᾶς. Ἀπεικονίζομεν τὰ άκρα A καὶ B τοῦ προσανατολισμένου τμήματος $\overrightarrow{AB}$ κατὰ τὸν δείκτην α εἰς τὰ A' καὶ B' αντίστοιχως, ἥτοι $\overrightarrow{AA'} = \alpha$, $\overrightarrow{BB'} = \alpha$ (σχ. 140). "Εξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι τό τετράπλευρον $AA'B'B$ εἶναι παραλληλόγραμμο, διότι $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \alpha \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BB'}$. "Αρα εἶναι καὶ $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Πρέπει ακόμη να άποδειχθῇ ὅτι τό τυχόν σημείον M τοῦ $\overrightarrow{AB}$ άπεικονίζεται εἰς σημείον M' τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ άντιστρόφως. Πράγματι, ἐάν ἐκ τυχόντος σημείου M τοῦ $\overrightarrow{AB}$ φέρωμεν εὐθεΐαν $MM' \parallel AA'$, ὅπου τό M' εἶναι ἐπὶ τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$. Τό τετράπλευρον $AA'M'M$ εἶναι παραλληλόγραμμο, ως ἔχον τās άπέναντι πλευράς του παραλλήλους. "Αρα θά εἶναι $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \alpha$, ἥτοι τό

M' είναι ή εικών του σημείου M κατά την μεταφοράν δείκτου $\vec{\alpha}$. 'Ομοίως αποδεικνύεται και τὸ ἀντίστροφον, ἥτοι τυχὸν σημεῖον M' τοῦ $\vec{A'B'}$ ἔχει ὡς πρό-
τυπον ἐν σημεῖον M τοῦ $\vec{AB}$ κατὰ τὴν μεταφοράν δείκτου $\vec{\alpha}$.

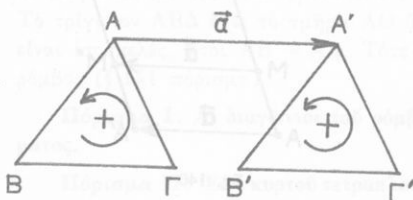
Ἀναφερόμενοι καὶ εἰς μὴ προσανατολισμένα τμήματα, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράλληλος μεταφορά τὰ ἀπεικονίζει εἰς παράλληλα καὶ ἴσα.

Πόρισμα I. Κάθε τρίγωνον ἀπεικονίζεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον τρίγωνον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (φορᾶς διαγραφῆς).

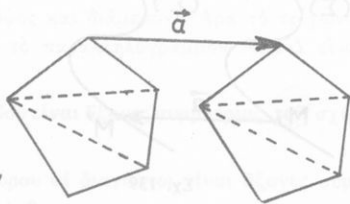
Πράγματι, ἐν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἀπεικονίζεται διὰ τοῦ δείκτου μεταφορᾶς $\vec{\alpha}$ εἰς ἴσον τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 141), διότι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Πόρισμα II. Κάθε πολὺγωνον ἀπεικονίζεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον πολὺγωνον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Πράγματι αὐτὸ συμβαίνει, διότι τὰ δύο πολὺγωνα δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἴσα καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ τρίγωνα (σχ. 142).



Σχ. 141



Σχ. 142

Τὰ ἀνωτέρω δύνανται νὰ γενικευθοῦν δι' οἰονδήποτε σχῆμα (Σ) , τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ σχῆμα (Σ') . Κατὰ συνέπειαν ἡ παράλληλος μεταφορά εἶναι μετατόπισις καὶ ὡς ἐκ τούτου δύνανται νὰ λέγεται καὶ παράλληλος μετατόπισις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

142. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τεμνόμεναι εἰς τὸ O . Ἀπὸ σημεῖον A τῆς (ε_1) φέρομεν καθέτους AB καὶ AG πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν δύο εὐθειῶν. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον $ABOG$ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ δὲ $B\Gamma$ εἶναι παράλληλος τῆς (ε_2) .

143. Δίδεται γωνία $\widehat{Oxy}$ καὶ σημεῖον A ἐντὸς αὐτῆς. Φέρομεν $AB \perp Ox$, $AG \perp Oy$ καὶ ἐκ τοῦ μέσου M τοῦ τμήματος OA φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$. Δείξατε ὅτι ἡ κάθετος αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος $B\Gamma$.

144. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὸ ὕψος AD . Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν AB καὶ AG , δείξατε ὅτι $E\widehat{D}Z = 1^\circ$.

145. Ἀπὸ σημείων M τῆς διχοτόμου γωνίας $x\widehat{O}y$ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς τῆς, αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται ἐπ' αὐτῶν τὰ σημεία A καὶ B . Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα AB καὶ OM τέμνονται καθέτως καὶ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

146. Συνδέομεν τυχὸν σημείον M τῆς διαγωνίου AG ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ B καὶ Δ . Δείξατε ὅτι ὁ ρόμβος ἔχει χωρισθῇ εἰς δύο ζεύγη ἴσων τριγώνων.

147. Τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνομεν τὰς πλευράς AB καὶ $B\Gamma$. Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς AB καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ B λαμβάνομεν σημείον M , εἰς δὲ τὴν προέκτασιν τῆς $B\Gamma$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ λαμβάνομεν σημείον N τοιοῦτον, ὥστε $\Gamma N = AM$. Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $MANE$. Δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον.

148. Δείξατε ὅτι τὰ ὕψη ρόμβου εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν παραλληλόγραμμον ἔχῃ ἴσα ὕψη εἶναι ρόμβος.

149. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

150. Ἐὰν παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ εἶναι $AB = 2 \cdot B\Gamma$ καὶ E εἶναι τὸ μέσον τῆς $\Gamma\Delta$, δείξατε ὅτι $A\widehat{E}B = 1^\circ$.

B'.

151. Ἡ κάθετος ποὺ ἄγεται ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = AG$) ἐπ' αὐτήν, τέμνει τὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης εἰς τὰ σημεία E καὶ Z . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $DE + DZ$ εἶναι σταθερόν.

152. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὸ ὕψος AD καὶ ἐκ τοῦ Δ τὰς καθέτους DE καὶ DZ ἐπὶ τὰς AB καὶ AG . Δείξατε ὅτι ἡ EZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμεσον AM τοῦ τριγώνου.

153. Ἐστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = AG$) καὶ M τυχὸν σημείον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$. Ἐκ τοῦ M φέρομεν καθέτους ME καὶ MZ ἐπὶ τὰς AB καὶ AG . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $ME + MZ$ παραμένει σταθερόν.

154. Τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τὰ ὕψη BD καὶ ΓE . Δείξατε ὅτι $DE < B\Gamma$.

155. Ἐὰν O εἶναι ἐσωτερικὸν σημείον ἰσοπλευροῦ τριγώνου $AB\Gamma$, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευράς τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερόν.

156. Τὰ τμήματα ποὺ ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημείον τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = AG$) καὶ τέμνουν τὰς ἴσας πλευράς τοῦ ὑπὸ τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν γωνίαν, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

157. Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}z$ ἐκάστη 60° καὶ M τυχὸν σημείον ἐσωτερικὸν τῆς $x\widehat{O}y$. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ M ἀπὸ τὰς Ox , καὶ Oy εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ M ἀπὸ τὴν Oz .

158. Ὁρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν $AA' \perp B\Delta$ καὶ $\Gamma\Gamma' \perp B\Delta$. Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν AB καὶ $B\Gamma$ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A'E$ καὶ $\Gamma'Z$ τέμνονται ὀρθογωνίως.

159. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποῖου αἱ διαγώνιοι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευράς τοῦ παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι τετράγωνον;

160. 'Εάν E και Z είναι σημεία τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ ἀντιστοίχως ρόμβου ΑΒΓΔ, αἱ εὐθεῖαι ΕΒ, ΕΔ, ΖΑ, ΖΓ τεμνόμεναι σχηματίζουν κυρτὸν τετράπλευρον, τοῦ ὁποῖου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικάι.

ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

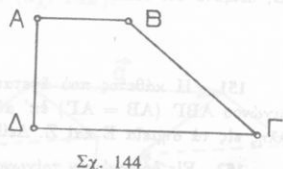
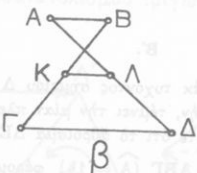
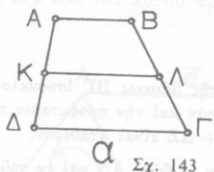
149. Ὅρισμός. Κάθε τετράπλευρον, τοῦ ὁποῖου αἱ δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, λέγεται **τραπέζιον**.

Ἐν τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι δυνατόν νὰ εἶναι κυρτὸν (σχ. 143α) ἢ καὶ μὴ κυρτὸν (σχ. 143β).

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τραπέζιου ΑΒΓΔ λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ καὶ ἡ ἀπόστασίς των, **ὕψος** τοῦ τραπέζιου.

Διάμεσος τραπέζιου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΚΛ μέ ἀκρα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

150. Θεώρημα. Παντὸς κυρτοῦ τραπέζιου, αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς ἐκάστην τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, εἶναι παραπληρωματικάι



Ἀπόδειξις. Ἐστω κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. (σχ. 143α). Ἡ πλευρὰ ΑΔ, ὡς τέμνουσα τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ σχηματίζῃ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς. Ἀρα θὰ εἶναι $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2\pi$. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς γωνίας $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$, ἥτοι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2\pi$.

Πόρισμα. Ἐὰν ἓν τραπέζιον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν, ἔχει καὶ μίαν ἄλλην γωνίαν ὀρθήν. Τότε τὸ τραπέζιον λέγεται ὀρθογώνιον τραπέζιον (σχ. 144).

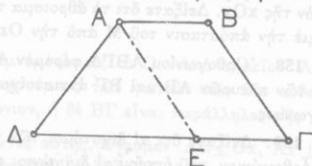
151. Ἴσοσκελὲς τραπέζιον καλεῖται τὸ τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του (σχ. 145).

152. Θεώρημα. Παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπέζιου, αἱ προσκείμεναι εἰς ἐκάστην βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ με

$$(1) \quad B\Gamma = A\Delta$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$ καὶ $\widehat{A} = \widehat{B}$.



σχ. 145

Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς μικροτέρας βάσεως ΑΒ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΓΔ εἰς τὸ Ε (σχ. 145). Τότε θὰ εἶναι :

$$(2) \quad \text{ΒΓ} = \text{ΑΕ},$$

διότι εἶναι παράλληλα τμήματα κείμενα μεταξύ παραλλήλων. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές. Τότε θὰ ἔχῃ :

$$(3) \quad \widehat{\Delta} = \widehat{\text{ΑΕΔ}}.$$

Ἐπὶ πλέον ἔχομεν ὅτι :

$$(4) \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\text{ΑΕΔ}},$$

λόγῳ τῶν παραλλήλων $\text{ΑΕ} \parallel \text{ΒΓ}$, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ. Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) ἔπεται ὅτι $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$.

Τότε θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\text{Β}} = \widehat{\text{Α}}$ ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ ἀντιστοίχως. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ μὴ κυρτὸν τραπέζιον.

Ἀντιστροφῶς. Ἐστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 145) μὲ

$$(5) \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta},$$

θὰ δείξωμε ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς μικροτέρας βάσεως ΑΒ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ε. Τότε θὰ εἶναι :

$$(6) \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\text{ΑΕΔ}},$$

λόγῳ τῶν παραλλήλων $\text{ΒΓ} \parallel \text{ΑΕ}$, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ.

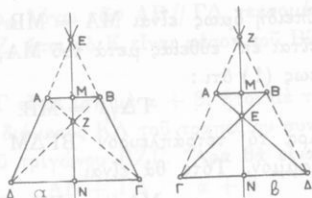
Ἐκ τῶν σχέσεων (5) καὶ (6) ἔπεται ὅτι $\widehat{\Delta} = \widehat{\text{ΑΕΔ}}$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἔχον τὰς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ΔΕ γωνίας ἴσας. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν :

$$(7) \quad \text{ΑΔ} = \text{ΑΕ},$$

Ἀλλὰ εἶναι καὶ :

$$(8) \quad \text{ΒΓ} = \text{ΑΕ},$$

ὡς παράλληλα τμήματα κείμενα μεταξύ παραλλήλων. Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) λαμβάνομεν $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$, ἤτοι τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 146

153. Ἀξων συμμετρίας ἰσοσκελοῦς τραπέζιου. Ἐπειδὴ παντὸς ἰσο-

σκελοῦς τραπέζιου (κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ σχ. 146α,β) αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ σχηματίζουν μεθ' ἑκάστης τῶν βάσεων γωνίας ἴσας, αὗται προεκτείνονται (ἐν ἀνάγκῃ), τέμνονται εἰς σημεῖον Ε καὶ σχηματίζουν μετὰ τῶν βάσεων τοῦ

τραπεζίου δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ. Τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Ε ὕψος αὐτῶν θὰ διέρχεται ἐκ τῶν μέσων Μ καὶ Ν τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως, ἥτοι θὰ εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν βάσεων, ἄρα ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ, ὡς συμμετρικαὶ μεταξύ των, εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται εἰς σημεῖον Ζ ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

161. Δείξατε ὅτι ἐὰν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

162. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιον.

163. Ἐὰν ἡ βάσις ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ ἴσούται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΓΔ.

164. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε τραπέζιον ἡ διαφύρα τῶν δύο βάσεων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ μικροτέρα τοῦ ἁθροίσματος αὐτῶν.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

154. Θεώρημα. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, ποὺ ὀρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Μ, Ν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως (σχ. 147). Φέρομεν τὸ τμήμα ΜΝ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτοῦ λαμβάνομεν τμήμα ΝΔ = ΝΜ. Τότε, τοῦ τετραπλεύρου ΑΜΓΔ αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΜΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ν, διχοτομοῦνται, ἄρα τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι :

$$(1) \quad \Gamma\Delta // = MA (*)$$

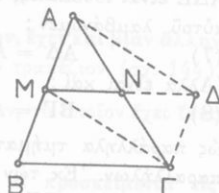
Ἐπειδὴ ὁμοῦς εἶναι ΜΑ = ΜΒ καὶ τὸ τμήμα ΜΒ κεῖται ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ ΜΑ, ἔπεται ἐκ τῆς σχέσεως (1) ὅτι :

$$\Gamma\Delta // = MB.$$

Ἀρα τὸ τετράπλευρον ΒΓΔΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. Τότε θὰ εἶναι :

$$M\Delta // = B\Gamma \quad \eta \quad 2 \cdot MN // = B\Gamma \quad \alpha\gamma\alpha :$$

$$MN // = \frac{B\Gamma}{2}$$



Σχ. 147

* Ἡ $\Gamma\Delta // = MA$ συμβολίζει τὴν παραλληλίαν καὶ ἰσότητά διὰ τὰ τμήματα ΓΔ, ΜΑ καὶ ἐπομένως ἀντικαθιστᾷ τὰς $\Gamma\Delta // MA \wedge \Gamma\Delta = MA$.

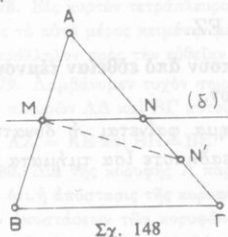
155. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τότε θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ν τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τὸ ἀποκοπτόμενον ἀπ' αὐτὴν τμήμα ΜΝ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ παράλληλος τῆς ΒΓ, τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν (σχ. 148). Ἐὰν τὸ Ν δὲν ἦτο μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ ἦτο τὸ Ν' μέσον αὐτῆς, τότε ἡ ΜΝ', κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἦτο παράλληλος τῆς ΒΓ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀτοπον, διότι ἐκ τοῦ σημείου Μ θὰ εἴχομεν δύο παραλλήλους, τὰς ΜΝ καὶ ΜΝ' πρὸς τὴν ΒΓ. Ἀρα ἡ ἐκ τοῦ Μ παράλληλος τῆς ΒΓ διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου Ν τῆς ΑΓ.

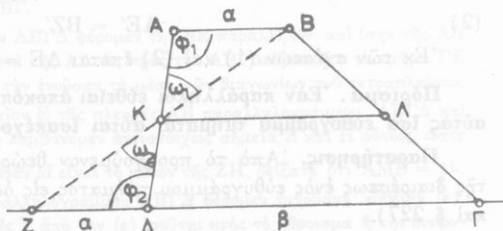
Τὸ τμήμα ΜΝ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ διότι, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγούμενου θεωρήματος, ὀρίζεται ἐκ τῶν μέσων Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

156. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποῦ αἱ βάσεις εἶναι $AB = \alpha$ καὶ $GD = \beta$ (σχ. 149). Ἄν Κ καὶ Λ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως, φέρομεν τὴν ΒΚ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως ΓΔ εἰς τὸ Ζ.



Σχ. 148



Σχ. 149

Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΚ καὶ ΔΖΚ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $KA = KD$, $\omega_1 = \omega_2$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ $\phi_1 = \phi_2$, λόγῳ τῶν $AB \parallel GD$, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ. Τότε θὰ ἔχωμεν $BK = KZ$, ἥτοι τὸ Κ εἶναι μέσον τοῦ ΒΖ καὶ $AB = \Delta Z = \alpha$.

Τοῦ τριγώνου πλέον ΒΖΓ, ἡ πλευρὰ ΖΓ εἶναι ἴση με $\alpha + \beta$, ἥτοι με τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου, ἐνῶ ἡ διάμεσος ΚΛ τοῦ τραπεζίου συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΖ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΒΖΓ. Ἀρα θὰ εἶναι $KL \parallel \frac{ZG}{2}$, ἥτοι $KL \parallel AB \parallel GD$ ἂν $KL = \frac{AB + GD}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

157. Θεώρημα. Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι ἀποκόπτουν ἀπὸ εὐθείαν τέμνουσαν αὐτὰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, τότε αὗται ἀποκόπτουν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα καὶ ἀπὸ κάθε ἄλλης τέμνουσαν αὐτάς.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τρεῖς παραλλήλους εὐθείας (α) , (β) , (γ) καὶ εὐθεῖαν (δ) τέμνουσαν αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε $AB = B\Gamma$ (σχ. 150). Ἐστω (ε) , μία ἄλλη τέμνουσα τὰς παραλλήλους εἰς τὰ Δ, E, Z ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν A καὶ B θεωροῦμεν τὰς παραλλήλους τῆς (ε) , αἱ ὁποῖαι τέμνουσι ἢ μὲν πρώτη τὴν (β) εἰς τὸ E' , ἢ δὲ δευτέρα τὴν (γ) εἰς τὸ Z' . Τότε τὰ τετράπλευρα $A\Delta E E'$ καὶ $BE Z Z'$ εἶναι παραλληλόγραμμα, ἐπομένως :

$$(1) \quad \Delta E = AE' \quad \text{καὶ} \quad EZ = BZ'$$

Τὰ τμήματα AE' καὶ BZ' , ὡς παράλληλα πρὸς τὴν (ε) εἶναι καὶ μετὰξὺ τῶν

παράλληλα. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων AE' καὶ BZ' τεμνομένων ὑπὸ τῆς (δ) . Ὀμοίως $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2$, λόγῳ τῶν παραλλήλων (β) καὶ (γ) , τεμνομένων ὑπὸ τῆς (δ) . Τότε τὰ τρίγωνα ABE' καὶ $B\Gamma Z'$ εἶναι ἴσα, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως $AB = B\Gamma$. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι :

$$(2) \quad AE' = BZ'.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται $\Delta E = EZ$.

Πόρισμα. Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι ἀποκόπτουν ἀπὸ εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτὰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, αὗται ἰσαπέχουν.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα φαίνεται ἡ δυνατότης τῆς διαιρέσεως ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἰς ὁσαδήποτε ἴσα τμήματα (βλ. καὶ § 227).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

165. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου, εἶναι κορυφαί, παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον, πότε ῥόμβος καὶ πότε τετράγωνον;

166. Τὰ τμήματα ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου, διαιροῦν αὐτὸ εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα.

167. Εἰς κάθε τρίγωνον τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ καὶ τὸ ἴχνος ἐνὸς ὕψους τοῦ, εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπέζιου.

168. Δείξατε ὅτι ἡ διάμεσος ἐπὶ τινὰ πλευρὰν τριγώνου τέμνει εἰς τὸ μέσον τοῦ τὸ τμήμα ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

169. Ἐὰν ἡ μία βάσις κυρτοῦ τραπέζιου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, τότε ἡ διάμεσος αὐτοῦ τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων.

170. Ἐὰν ἡ διάμεσος KL τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ τέμνεται ὑπὸ τῶν διαγωνίων εἰς τὰ E καὶ Z δείξατε ὅτι $KE = AZ$. Πότε ἡ διάμεσος τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων;

171. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τυχοῦσαν εὐθεΐαν, ἥ ὁποία δὲν τὸ τέμνει, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ἀπ' αὐτῆν.

172. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἀγομεν τυχοῦσαν εὐθεΐαν διὰ τῆς κορυφῆς A καὶ ἀπὸ τὰ B καὶ Γ φέρομεν καθέτους BD καὶ ΓE ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι τὸ μέσον M τοῦ τμήματος $B\Gamma$ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ Δ καὶ E .

B.

173. Εἰς κάθε κυρτὸν τετράπλευρον τὰ τμήματα πού ὀρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσον ἐκάστου.

174. Ἡ εὐθεΐα ἡ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς A τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τοῦ μέσου E τῆς διαμέσου BD τέμνει τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ εἰς σημεῖον Z . Δείξατε ὅτι $Z\Gamma = 2 \cdot BZ$.

175. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν διχοτόμον AD καὶ ἐκ τοῦ B κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἥ ὁποία τὴν τέμνει εἰς τὸ E . Ἐὰν εἶναι M τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, δείξατε ὅτι $EM \parallel A\Gamma$ καὶ $EM = \frac{|AB - A\Gamma|}{2}$.

176. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τραπεζίου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.

177. Ἐστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς AB ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$ λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma E = BA$. Δείξατε ὅτι τὸ τμήμα ΔE διχοτομεῖται ἀπὸ τὴν $B\Gamma$.

178. Εἰς κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν τὴν BE παράλληλον καὶ ἴσην τῆς AD καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κειμένην μετὰ τῆς AD ὡς πρὸς τὴν AB . Δείξατε ὅτι τὸ τμήμα ΓE εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεΐαν τὴν ἐνοῦσαν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

179. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον E τῆς πλευρᾶς AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν AD καὶ $B\Gamma$ αὐτοῦ λαμβάνομεν ἀντιστοιχῶς σημεῖα Z καὶ H οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AZ = AE$ καὶ $BH = BE$. Ἐὰν M εἶναι τὸ μέσον τῆς ZH , δείξατε ὅτι $\widehat{AMB} = 1^\circ$.

180. Διὰ τῆς κορυφῆς A παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεΐαν (ε). Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὴν (ε) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν B καὶ Γ ἀπὸ τὴν (ε), ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἡ εὐθεΐα (ε) δὲν τέμνῃ ἢ τέμνῃ τὸ παραλληλόγραμμον.

181. Δίδεται παραλληλόγραμμον καὶ τυχοῦσα εὐθεΐα (ε) μὴ τέμνουσα αὐτό. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν (ε) ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν (ε).

182. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος ἀπὸ τυχοῦσαν εὐθεΐαν ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιἄθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ἀπὸ τὴν εὐθεΐαν, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν τὸ τμήμα δὲν τέμνῃ ἢ τέμνῃ τὴν εὐθεΐαν.

ΚΕΝΤΡΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

158. Θεώρημα. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 151). Θεωροῦμεν τὰς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν $B\Gamma$ καὶ $A\Gamma$. Αὗται εἶναι κάθετοι εἰς μὴ παραλλή-

λους πλευράς ΒΓ καὶ ΑΓ, συνεπῶς δὲν εἶναι παράλληλοι, ἄρα τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Ο. Τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς ἀνήκον εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΒΓ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα του, ἦτοι :

$$(1) \quad OB = OG.$$

Ὁμοίως τὸ σημεῖον Ο ἰσαπέχει ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΓ, ὡς ἀνήκον εἰς τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ, ἦτοι :

$$(2) \quad OG = OA.$$

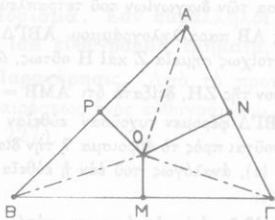
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$OA = OB,$$

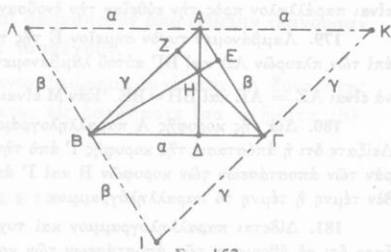
δηλαδή τὸ Ο ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ, συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ. Ἀρα αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται **περίκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφάς τοῦ τριγώνου ὡς προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2).

159. Θεώρημα. Τὰ τρία ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ τρία ὕψη αὐτοῦ (σχ. 152). Ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ φέρομεν παράλληλους πρὸς τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευράς, αἱ ὁποῖαι ὀρίζουν τὸ τρίγωνον ΙΚΛ. Τὸ τετράπλευρον



Σχ. 151



Σχ. 152

ΑΒΓΚ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παράλληλους, συνεπῶς εἶναι παράλληλόγραμμον, ἄρα :

$$(1) \quad AK = BG = \alpha.$$

Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὸ ΑΓΒΛ. Ἐπομένως :

$$(2) \quad AL = GB = \alpha.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $AK = AL$, ἦτοι τὸ Α εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΚΛ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ.

Τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΚΛ καί, ἐπειδὴ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Α τῆς ΚΛ, ἔπεται ὅτι εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΚΛ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ.

Όμοίως αποδεικνύεται ότι τὰ ύψη BE καὶ ΓΖ τοῦ τριγώνου ABΓ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΙΑ καὶ ΙΚ τοῦ τριγώνου ΙΚΑ ἀντιστοίχως. Τότε αὐτὰ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η (§ 158). Τὸ σημεῖον Η καλεῖται ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ABΓ.

160. Όρθοκεντρική τετράς σημείων. Αἱ τρεῖς κορυφαὶ παντὸς τριγώνου καὶ τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ λέγονται ὅτι ἀποτελοῦν μίαν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα σημείων, διότι εὐκόλως φαίνεται ὅτι τὰ οἰαδήποτε τρία ἐξ αὐτῶν ὀρίζουν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ὀρθόκεντρον τὸ τέταρτον σημεῖον τῆς τετράδος.

★ **161. Θεώρημα.** Ἐάν Ε καὶ Ζ εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως τριγώνου ABΓ, αἱ ἡμιευθεῖαι BE καὶ ΓΖ τέμνονται εἰς σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἡμιευθεῖα ΑΣ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς σημεῖον Δ ἐνδιάμεσον τῶν Β καὶ Γ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ εἶναι ἐσωτερικὰ τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως ἔπεται ὅτι (σχ. 153):

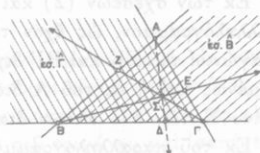
$$\widehat{EB\Gamma} < \widehat{B} \quad \text{καὶ}$$

$$\widehat{Z\Gamma B} < \widehat{\Gamma}$$

Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{EB\Gamma} + \widehat{Z\Gamma B} < \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 2\angle$$

Ἄρα αἱ ἡμιευθεῖαι BE καὶ ΓΖ τέμνονται εἰς ἐν σημεῖον Σ.



Σχ. 153

Αἱ ἡμιευθεῖαι BE καὶ ΓΖ εἶναι ἐσωτερικαὶ διὰ τὰς γωνίας $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως ἤτοι:

$$BE \in \text{εσ. } \widehat{B} \quad \text{καὶ}$$

$$\Gamma Z \in \text{εσ. } \widehat{\Gamma}.$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι:

$$(1) \quad BE \cap \Gamma Z \in (\text{εσ. } \widehat{B}) \cap (\text{εσ. } \widehat{\Gamma})$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἡμιευθεῶν BE καὶ ΓΖ, δηλαδὴ τὸ Σ καὶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς εἶναι τὸ κοινὸν μέρος τῶν ἐσωτερικῶν τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$, δηλαδὴ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ABΓ. Τότε ἡ (1) γράφεται.

$$\Sigma \in \text{εσ. AB}\Gamma,$$

ἄρα τὸ Σ εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ABΓ.

Κατὰ ταῦτα ἡ ΑΣ εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A}$, τὰ δὲ Β καὶ Γ, ὡς σημεῖα τῶν πλευρῶν τῆς $\widehat{A}$, εὐρίσκονται ἐκατέρωθεν τῆς ΑΣ. Συνεπῶς τὸ τμήμα ΒΓ τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΣ εἰς σημεῖον Δ ἢ ἰσοδυνάμως ἡ ἡμιευθεῖα ΑΣ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς σημεῖον Δ ἐνδιάμεσον τῶν Β καὶ Γ.

162. Θεώρημα. Αἱ τρεῖς διάμεσοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, ἀπέχει δὲ ἀπὸ ἐκάστην κορυφὴν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ 2/3 τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ BE , ΓZ αἱ δύο διαμέσοι αὐτοῦ (σχ. 154). Αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον Σ (βλ. § 161), τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου.

Φέρομεν τὴν AS , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Δ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$.

Ἐπὶ τῆς AD , λαμβάνομεν τμῆμα :

$$(1) \quad SK = SA,$$

ὥστε τὸ S νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος AK . Τότε, ἐπειδὴ τὸ Z εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB , ἔπεται ὅτι $ZS \parallel BK$ ἢ

$$(2) \quad Z\Gamma \parallel BK$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $ES \parallel \Gamma K$ ἢ

$$(3) \quad EB \parallel \Gamma K$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) ἔπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον $BK\Gamma S$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἄρα αἱ διαγώνιοι τοῦ SK καὶ $B\Gamma$ διχοτομοῦνται, ἤτοι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$. Ἐπομένως καὶ ἡ ἐκ τοῦ A διάμεσος τοῦ τριγώνου διέρχεται ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου S τῶν δύο ἄλλων διαμέσων.

Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου $BK\Gamma S$ λαμβάνομεν $SK = 2 \cdot \Sigma\Delta$. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$(4) \quad 2 \cdot \Sigma\Delta = SA$$

Ἐχομεν ὁμῶς ὅτι $SA + \Sigma\Delta = AD$ ἢ

$$2\Sigma\Delta + 2\Sigma\Delta = 2AD \quad \text{καὶ λόγω τῆς (4) ἡ τελευταία γράφεται}$$

$$2\Sigma\Delta + SA = 2AD \Rightarrow 3\Sigma\Delta = 2AD \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι :}$$

$$\Sigma\Delta = \frac{2}{3} AD,$$

ἤτοι τὸ σημεῖον S τῆς τομῆς τῶν διαμέσων, ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἀποστασιν ἴσην πρὸς τὰ $2/3$ τῆς διαμέσου AD .

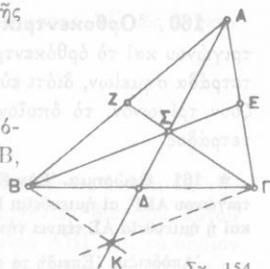
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι :

$$SB = \frac{2}{3} BE \quad \text{καὶ} \quad SG = \frac{2}{3} \Gamma Z.$$

Τὸ κοινὸν σημεῖον S τῶν διαμέσων τριγώνου ὀνομάζεται **κέντρον βάρους** ἢ **βαρύκεντρον** αὐτοῦ. Ὁ ὅρος οὗτος ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς φυσικῆς, διότι τὸ S συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους ὕλικῆς πλακῶς ἐξ ὁμογενοῦς ὕλικου, σχήματος τριγώνου.

$$\text{Σημείωσις. Εἶναι ἐπίσης} \quad \Sigma\Delta = \frac{1}{3} AD, \quad SE = \frac{1}{3} BE, \quad SZ = \frac{1}{3} \Gamma Z.$$

163. Θεώρημα. Αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώ-



νου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευράς.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ (σχ. 155). Αὗται εἶναι ἐσωτερικαὶ τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως, ἐπομένως, τέμνονται εἰς σημεῖον Θ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν $\Theta I \perp B\Gamma$, $\Theta K \perp A\Gamma$ καὶ $\Theta \Lambda \perp AB$. Τὸ σημεῖον Θ , ὡς ἀνήκον εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{B}$, ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευράς της, ἥτοι :

$$(1) \quad \Theta I = \Theta \Lambda.$$

Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον τοῦτο ἀνήκει καὶ εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$ ἔπεται ὅτι :

$$(2) \quad \Theta I = \Theta K$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) συνεπάγεται ὅτι :

$$\Theta \Lambda = \Theta K.$$

Ἄρα τὸ σημεῖον Θ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{A}$, ὡς ἰσαπέχον ἀπὸ τὰς πλευράς της. Ἐπομένως αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Θ , τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Τὸ σημεῖον Θ καλεῖται **ἐγκέντρον** τοῦ τριγώνου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευράς του.

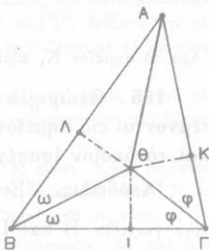
★ 164. **Θεώρημα.** Εἰς κάθε τρίγωνον αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι δύο γωνιῶν του τέμνονται εἰς σημεῖον εὐρισκόμενον ἐντὸς τῆς τρίτης γωνίας του.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 156). Ἡ εὐθεὶα $B\Gamma$, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐρίσκεται ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου, χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καὶ (Π_2) ὅπου ἡ κορυφή A εὐρίσκεται εἰς τὸ (Π_1) , αἱ δὲ εὐθεῖαι $A\Gamma$ καὶ AB χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἡμιεπίπεδα ἑκάστη, (P_1) , (P_2) καὶ (Σ_1) , (Σ_2) ἀντιστοίχως ὅπου αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ εὐρίσκονται εἰς τὰ (P_1) καὶ (Σ_1) ἀντιστοίχως. Ἄν 2ω καὶ 2φ εἶναι αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι τῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως, ἔχομεν: $2\omega < 2L$ καὶ $2\varphi < 2L$ ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ἄρα $2\omega + 2\varphi < 4L$ ἢ $\omega + \varphi < 2L$. Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται εἰς σημεῖον K_1 ἐντὸς τοῦ ἡμιεπιπέδου (Π_2) . Τὸ σημεῖον K_1 , ὡς σημεῖον τοῦ ἡμιεπιπέδου (Π_2) εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, διότι τὸ τρίγωνον κεῖται ἐντὸς τοῦ (Π_1) .

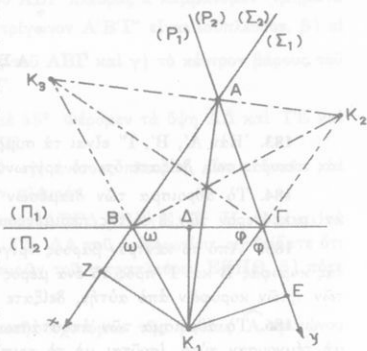
Αἱ διχοτόμοι BK_1 καὶ ΓK_1 κεῖνται ἐντὸς τῶν κυρτῶν γωνιῶν $\widehat{TBx}$ καὶ $\widehat{B\Gamma y}$ ἥτοι :

$$BK_1 \in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \quad \text{καὶ}$$

$$\Gamma K_1 \in (\Pi_2) \cap (P_1)$$



Σχ. 155



Σχ. 156

197. Έξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι:

$$(BK_1) \cap (ΓK_1) \in [(\Pi_2) \cap (\Sigma_1)] \cap [(\Pi_2) \cap (P_1)]$$

$$\eta K_1 \in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \cap (P_1)$$

$$\eta K_1 \in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \cap (P_1)$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται

$$K_1 \in (\Sigma_1) \cap (P_1) \quad \eta$$

$$K_1 \in \varepsilon\sigma. \hat{A}.$$

Ἄρα τὸ σημεῖον K_1 εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας $\hat{A}$.

165. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον ἀνὰ δύο αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τέμνονται εἰς σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχεται ἡ τρίτη ἐσωτερικὴ διχοτόμος καὶ τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $ABΓ$. Φέρομεν τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, εἰς σημεῖον K_1 (βλ. § 164), ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας $\hat{A}$ (σχ. 156). Φέρομεν τὰς $K_1\Delta \perp B\Gamma$, $K_1E \perp A\Gamma$ καὶ $K_1Z \perp AB$. Τότε, ἐπεὶ δὴ τὸ K_1 εἶναι σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\hat{\Gamma}Bx$ καὶ $\hat{B}\Gamma y$, θὰ ἔχωμεν:

$$K_1\Delta = K_1Z \quad \text{καὶ} \quad K_1\Delta = K_1E$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἔπεται ὅτι $K_1Z = K_1E$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἔπεται ὅτι τὸ K_1 ἀνήκει εἰς τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\hat{A}$, διότι ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς καὶ εὐρίσκεται καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς.

Τὸ σημεῖον τοῦτο ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ὀνομάζεται **παράκεντρον** αὐτοῦ. Ἀντιστοίχως ὑπάρχουν καὶ δύο ἄλλα παράκεντρα K_2 καὶ K_3 τοῦ τριγώνου ἐντὸς τῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

183. Ἐὰν A' , B' , Γ' εἶναι τὰ συμμετρικὰ τοῦ περικέντρου τριγώνου $AB\Gamma$ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς του, δεῖξτε ὅτι τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $AB\Gamma$.

184. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν $3/4$ καὶ μικρότερον τῶν $3/2$ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

185. Ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν εὐθεῖαν (ε), ἡ ὁποία ἀφήνει τὰς κορυφὰς B καὶ Γ πρὸς τὸ ἓνα μέρος αὐτῆς. Ἐὰν AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν τριῶν κορυφῶν ἀπὸ αὐτῆς, δεῖξτε ὅτι εἶναι $AA' = BB' + \Gamma\Gamma'$.

186. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀπὸ τυχούσαν εὐθεῖαν μὴ τέμνουσαν αὐτό, ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπὸ αὐτήν.

187. Παραλλήλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωροῦμεν τὰ μέσα M καὶ N τῶν πλευρῶν AB καὶ AD . Δείξτε ὅτι ἡ διαγώνιος BD τριχοτομεῖται ἀπὸ τὰς GM , GN .

188. Ἐὰν τρίγωνον ἔχη δύο ἰσας διαμέσους, τότε εἶναι ἰσοσκελές.

189. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$, AD , BE , ΓZ αἱ διάμεσοι αὐτοῦ καὶ O τὸ κέντρον βάρους.

ρους του. Προεκτείνωμεν τὰς διαμέσους καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνωμεν τμήματα $\Delta\Lambda' = \Delta\Theta$, $EB' = EO$, $ZI' = ZO$ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'I'$ εἶναι ἴσα.

B.

190. Ἐὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ προεκτείνωμεν τὰς πλευράς του κατὰ κύκλικήν σειρὰν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λάβωμεν τμήματα $AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$, δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον $A'B'I'$ εἶναι ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποῦ τοῦ κέντρον βάρους ταυτίζεται μὲ τὸ κέντρον βάρους τοῦ $AB\Gamma$.

191. Μὲ πλευράς τὰς AB καὶ AG τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζωμεν ἔκτος αὐτοῦ τὰ τετράγωνα $AB\Delta E$ καὶ $AGZH$. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι BH καὶ $\Gamma\Delta$ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους $A\Theta$ τοῦ τριγώνου.

192. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = AG$). Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς AB καὶ λάβωμεν εἰς τὴν προέκτασιν τῆς AG σημεῖον N , τοιοῦτον ὥστε $\Gamma N = BM$, δείξατε ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος MN διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

193. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐὰν Δ καὶ E εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν AG καὶ AB ἀντιστοίχως τοιαῦτα, ὥστε διὰ τὰ τμήματα $B\Delta$ καὶ ΓE τεμνόμενα εἰς σημεῖον O νὰ εἶναι $BO = 2 \cdot OD$ καὶ $\Gamma O = 2 \cdot OE$, δείξατε ὅτι τὰ Δ καὶ E εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν AG καὶ AB .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

B.

194. Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, δείξατε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{E}$ καὶ $\widehat{Z}$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμίθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

195. Ὁρθογωνίον τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι $AB < AG$. Φέρομεν τὸ ὕψος AD καὶ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας λαμβάνομεν τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ φέρωμεν $\Gamma Z \perp AE$. Δείξατε ὅτι ἡ ΓB εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A\Gamma Z}$.

196. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ πλευρᾶς α λαμβάνομεν τμήματα $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \frac{\alpha}{3}$. Δείξατε ὅτι: α) τὸ τρίγωνον $A'B'I'$ εἶναι ἰσόπλευρον, β) αἱ πλευραὶ τοῦ $A'B'I'$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς τοῦ $AB\Gamma$ καὶ γ) τὸ κέντρον βάρους τοῦ $A'B'I'$ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους τοῦ $AB\Gamma$.

197. Τριγώνου $AB\Gamma$ ἡ γωνία $\widehat{B}$ εἶναι ἴση μὲ 45° . Φέρομεν τὰ ὕψη AD καὶ ΓE καὶ ἔστω Z τὸ μέσον τῆς AG . Δείξατε ὅτι $ZD \perp ZE$.

198. Αἱ διάμεσοι τριγώνου ποῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀνίσους πλευράς, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς μικροτέραν πλευράν.

199. Ἐστω M σημεῖον ἐσωτερικὸν ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. Ἐὰν E, Z, H, Θ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τοῦ M ὡς πρὸς τὰς πλευράς $AB, \Gamma\Gamma', \Gamma\Delta, \Delta A$ τοῦ ὀρθογωνίου, α) δείξατε ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου $EZH\Theta$, β) πότε τὸ $EZH\Theta$ εἶναι παραλληλόγραμμον;

200. Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου $AB\Gamma$, δείξατε ὅτι $MB + \Gamma\Gamma' > AB + AG$.

201. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (e_1) , (e_2) καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου A τῆς (e_1) φέρομεν $AG \perp (e_2)$ καὶ AB πλάγιαν ὡς πρὸς τὴν (e_2) . Ἐκ τοῦ B θεωροῦμεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν AG εἰς τὸ Δ καὶ τὴν (e_1) εἰς τὸ Z ταύτην, ὥστε $\Delta Z = 2 \cdot AB$. Νὰ δεიχθῇ ὅτι $\widehat{AB\Gamma} = 3 \cdot \widehat{AB\Gamma}$.

202. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $AB, \Gamma\Gamma', \Gamma\Delta, \Delta A$ τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα

E, Z, H, Θ αντιστοίχως ούτως, ώστε $AE = BZ = \Gamma H = \Delta\Theta = \lambda$. α) Δείξτε ότι το $EZH\Theta$ είναι τετράγωνον, β) να προσδιορισθῇ τὸ λ , ούτως, ώστε τὸ τετράγωνον $EZH\Theta$ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

203. Τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι τέμνονται κάθετως. Δείξτε ότι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

204. Κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ πλευραὶ AD καὶ $B\Gamma$ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, δείξτε ότι ἡ EZ εἶναι παράλληλος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν πλευρῶν AD καὶ $B\Gamma$.

205. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ Γ τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐκ τῶν A καὶ B φέρομεν τὰς παράλληλους ἡμιευθείας Ax καὶ By πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ AB , ἐπὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τμήματα $AD = AG$ καὶ $BE = B\Gamma$ ἀντιστοίχως. Ἐὰν Z εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος DE , δείξτε ότι $ZA \perp ZB$.

206. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν κάθετους ἡμιευθείας ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$ ὅχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ τριγώνου καὶ ἐπ' αὐτὸν λαμβάνομεν τμήματα $AB' = AB$ καὶ $A\Gamma' = A\Gamma$ ἀντιστοίχως. Δείξτε ότι τὸ ὕψος AD τοῦ $AB\Gamma$ προεκτεινόμενον διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος $B'\Gamma'$. Τί παρατηρεῖται διὰ τὸ ὕψος AE τοῦ τριγώνου $AB\Gamma'$;

207. Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{A}$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ B' καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Δείξτε ότι $AB' = A\Gamma' = \frac{AB + A\Gamma}{2}$.

208. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐκ τοῦ A φέρομεν ἀνὰ μίαν κάθετον AD, AE, AZ, AH , ἐπὶ τὰς τέσσαρας διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Δείξτε ότι τὰ σημεῖα Δ, E, Z, H κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

209. Μὲ πλευρὰς τὰς AB καὶ $A\Gamma$ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα $AB\Delta E$ καὶ $A\Gamma Z\Theta$. Φέρομεν τὰς $\Delta\Delta' \perp B\Gamma$ καὶ $ZZ' \perp B\Gamma$. Δείξτε ότι: α) $\Delta\Delta' + ZZ' = B\Gamma$, β) τὰ σημεῖα Δ, A, Z κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ γ) αἱ ΔE καὶ $Z\Theta$ τέμνονται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὕψους AH τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

210. Κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ δὲ ἀπέναντι πλευραὶ προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὰ E καὶ Z . Δείξτε ότι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{E}$ καὶ $\widehat{Z}$ τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἰς τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

211. Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν AB καὶ $B\Gamma$ ἀντιστοίχως τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ Δ τὸ ἴχνος τοῦ ὕψους AD , δείξτε ότι ἡ γωνία $\widehat{\Delta EZ}$ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

212. Ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὸ ὕψος AH καὶ ἐκ τοῦ H τὰς κάθετους HA, HE ἐπὶ τὰς $AB, A\Gamma$ ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ B φέρομεν εὐθεῖαν (δ) παράλληλον τῆς ΔE . Ἐὰν Λ καὶ M εἶναι τὰ μέσα τῶν AB καὶ $B\Gamma$ ἀντιστοίχως, δείξτε ότι: α) $AM \perp (\delta)$, β) αἱ AM καὶ AH τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ) καὶ γ) αἱ AM καὶ HE τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ) .

213. Αἱ μεσοκάθετοι DO, EO τῶν πλευρῶν $AB, B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνουν τὰς $B\Gamma, AB$ εἰς τὰ Z, H ἀντιστοίχως. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ παράλληλόγραμμον $HRZ\Theta$, δείξτε ότι ἡ ΘO εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$.

214. Ἐὰν τρίγωνον ἔχη δύο ἴσας διχοτόμους, τότε εἶναι ἰσοσκελές.

215. Ἐστω κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὁποῖου κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα $ABEZ, B\Gamma H\Theta, \Gamma\Delta IK, \Delta\Lambda M$. Ἐὰν Σ καὶ T εἶναι τὰ μέσα τῶν AE καὶ IO , δείξτε ότι τὸ τετράπλευρον $\Sigma\Delta T$ εἶναι τετράγωνον.

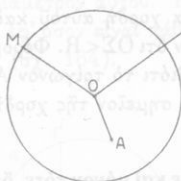
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ο ΚΥΚΛΟΣ

166. Όρισμοί: Κύκλος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων (γ. τόπος) τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὅποια ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ὠρισμένην ἀπόστασιν R ἀπὸ σταθερὸν σημείον O τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σημειοσύνολον τοῦτο συμβολίζεται μὲ (O, R) καὶ τὸ O καλεῖται **κέντρον** τοῦ κύκλου. Ἐὰν M εἴναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 157), τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $OM = R$ καλεῖται **ἀκτίς** τοῦ κύκλου.

Ἐν σημείον A καλεῖται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τοῦ κύκλου (O, R) τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἴναι $OA < R$. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων καλεῖται **ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου** καὶ συμβολίζεται μὲ ἐς. (O, R) . Ἐν σημεῖον B καλεῖται **ἐξωτερικὸν σημεῖον** τοῦ κύκλου τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἴναι $OB > R$. Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων καλεῖται **ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου** καὶ συμβολίζεται μὲ ἐξ. (O, R) .



Σχ. 157



Σχ. 158

Σημείωσις. Κατ' ἄλλον ὅρισμόν, κύκλος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὅποια εἴναι $OM \leq R$, ἐνῷ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὅποια εἴναι $OM = R$ καλεῖται περιφέρεια κύκλου. Ἐνταῦθα θὰ δεχθῶμεν τὸν προαναφερθέντα ὅρισμόν § 166.

Χορδὴ τοῦ κύκλου (O, R) καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα AB , τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα A καὶ B εἴναι σημεῖα τοῦ κύκλου (σχ. 158).

Διάμετρος τοῦ κύκλου (O, R) καλεῖται κάθε χορδὴ $\Gamma\Delta$ αὐτοῦ, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου (σχ. 158). Τὸ μῆκος κάθε διαμέτρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτίνος, ἥτοι $\Gamma\Delta = 2R$. Ἄρα ὅλαι αἱ διαμέτροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ μιᾶς διαμέτρου $\Gamma\Delta$ καλοῦνται **ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα**.

Ἡ χάραξις τοῦ κύκλου ἐπιτυγχάνεται διὰ γνωστοῦ ὀργάνου, τοῦ διαβή-

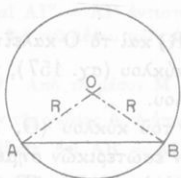
του, τὸ ὁποῖον διατηρεῖ σταθερὰν ἀπόστασιν μεταξύ τῆς αἰχμῆς του, ἥτις καθορίζει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τῆς γραφίδος του, ἥτις χαράσσει (γράφει) τὸν κύκλον.

167. Θεώρημα. Διὰ κάθε χορδὴν AB κύκλου (O, R) ἰσχύει $AB \leq 2R$.

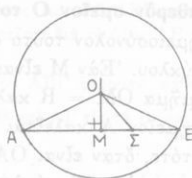
Ἀπόδειξις i) Ἐὰν ἡ χορδὴ AB δὲν εἶναι διάμετρος (σχ. 159), τὸ τρίγωνον OAB εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $OA = OB = R$. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν $AB < OA + OB \Rightarrow AB < R + R \Rightarrow AB < 2R$.

ii) Ἐὰν ἡ χορδὴ AB εἶναι διάμετρος θὰ ἔχωμεν $AB = 2R$.

Ἄρα διὰ κάθε χορδὴν AB ἰσχύει $AB \leq 2R$ καὶ ἡ μεγαλύτερα χορδὴ εἶναι ἡ διάμετρος, ἴση πρὸς $2R$.



Σχ. 159



Σχ. 160

168. Θεώρημα. Κάθε σημεῖον χορδῆς κύκλου, εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κύκλος (O, R) , AB μία χορδὴ αὐτοῦ καὶ Σ τυχὸν σημεῖον τῆς χορδῆς (σχ. 160). Ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν ὅτι $O\Sigma < R$. Φέρομεν $OM \perp AB$. Τὸ σημεῖον M εἶναι μέσον τῆς χορδῆς AB , διότι τὸ τρίγωνον AOB εἶναι ἰσοσκελὲς ($OA = OB = R$). Ἐπειδὴ τὸ Σ εἶναι σημεῖον τῆς χορδῆς, ἔπεται $M\Sigma < MB \Rightarrow O\Sigma < OB$ (§ 80) ἢ $O\Sigma < R$.

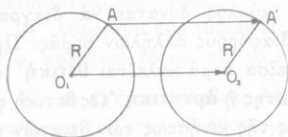
169. Ἴσοι κύκλοι. Δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν ἴσας ἀκτίνες. Διότι δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ παραλλήλου μετατοπίσεως (σχ. 161).

170. Ἀξονικὴ συμμετρία εἰς τὸν κύκλον. Θεώρημα. Πᾶσα διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

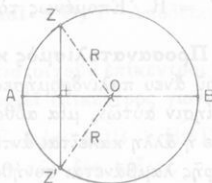
Ἀπόδειξις. Ἐστω ὁ κύκλος (O, R) καὶ AB μία διάμετρος αὐτοῦ. Ἄν Z εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, θεωροῦμεν τὸ συμμετρικόν του Z' ὡς πρὸς ἄξωνα τὴν AB καὶ ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν ὅτι τὸ Z' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 162). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι λόγω τῆς συμμετρίας εἶναι $OZ = OZ'$. Ἀλλὰ $OZ = R$. Ἄρα $OZ' = R$ καὶ ἐπομένως τὸ Z' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου.

Πόρισμα I. Πᾶσα διάμετρος χωρίζει ἕνα κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων καλεῖται ἡμικύκλιον.

Πόρισμα II. Ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου κάθετος ἐπὶ μίαν χορδὴν αὐτοῦ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον αὐτῆς.



Σχ. 161



Σχ. 162

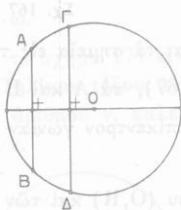
Πόρισμα III. Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς χορδῆς κύκλου διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Διότι ἂν δὲν διήρχετο θὰ ὑπῆρχον δύο μεσοκάθετοι τοῦ αὐτοῦ τμήματος. Ἡ δευτέρα θὰ ἦτο ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Πόρισμα IV. Δύο παράλληλοι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἔχουν κοινὴν μεσοκάθετον, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (σχ. 163).

Πόρισμα V. Δοθέντος κύκλου κέντρου O καὶ εὐθείας (ε) , ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὐθεΐα (δ) , ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν (ε) , εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Πράγματι ἡ εὐθεΐα (δ) εἶναι ἄξων συμμετρίας διὰ τὸν κύκλον, ἐφ' ὅσον περιέχει διάμετρον αὐτοῦ. Ἐπὶ πλέον εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας διὰ τὴν εὐθεΐαν (ε) , ἐφ' ὅσον εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ἄρα εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 164).



Σχ. 163



Σχ. 164

Πόρισμα VI. Ἡ εὐθεΐα ποὺ ἐνώνει τὸ κέντρον με τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν.

171. Κεντρικὴ συμμετρία εἰς τὸν κύκλον. Θεώρημα. Τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου εἶναι καὶ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὁ κύκλος (O, R) καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν M' αὐτοῦ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ O καὶ ἀρκεῖ νὰ

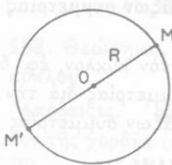
δείξωμεν ὅτι τὸ M' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 165). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $OM = OM'$. Ἀλλὰ $OM = R$. Ἄρα $OM' = R$. Ἐπομένως τὸ M' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου.

172. Προσανατολισμός κύκλου. Εἰς κύκλος δύναται νὰ διαγραφῇ ὑπὸ κινήτου ἄνευ παλινδρομήσεως κατὰ δύο διαφόρους ἀλλήλων φοράς. Πρὸς διαφοροποίησιν αὐτῶν, μία αὐθαίρετως ἐκλεγείσα φορά καλεῖται **θετική** (σχ. 166). Τότε ἡ ἄλλη καλεῖται ἀντίθετος τῆς πρώτης ἢ **ἀρνητική**. Ὡς θετική φορά διαγραφῆς λαμβάνεται συνήθως ἡ ἀντίθετος τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὁρολογίου.

Εἰς κύκλος, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχει ὀρισθῇ ἡ θετική φορά διαγραφῆς του καλεῖται **προσανατολισμένος κύκλος**.

173. Ἐπίκεντρος γωνία. Κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς εἰς τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου, καλεῖται **ἐπίκεντρος γωνία**. Ἐκάστη πλευρὰ τῆς ἐπίκεντρος γωνίας, τέμνει τὸν κύκλον εἰς ἓν σημεῖον (σχ. 167).

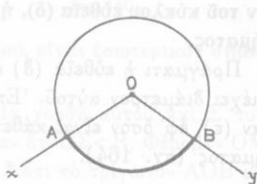
174. Τόξον καλεῖται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ ἔσω-



Σχ. 165.



Σχ. 166



Σχ. 167

τερικὸν μιᾶς ἐπίκεντρος γωνίας. Ἐὰν A καὶ B εἶναι τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{xOy}$ τέμνει τὸν κύκλον (σχ. 167), τὰ A καὶ B καλοῦνται **ἄκρα** τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν $\widehat{xOy}$. Τὸ ἐν λόγῳ τόξον συμβολίζεται $\widehat{AB}$.

Παρατήρησις. Μεταξὺ τῶν τόξων ἑνὸς κύκλου (O, R) καὶ τῶν ἐπικέντρων αὐτοῦ γωνιῶν ὀφίσταται ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, διότι εἰς κάθε ἐπίκεντρον γωνίαν $\widehat{xOy}$ ἀντιστοιχεῖ ἓν τόξον $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου (O, R) , ἀλλὰ καὶ εἰς κάθε τόξον $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου (O, R) ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία, ἡ $\widehat{AOB} \equiv \widehat{xOy}$.

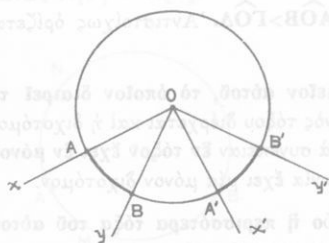
175. Ἰσότης - πράξεις - διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων. Λόγῳ τῆς ὀφισταμένης ἀμφιμονοσημάντου ἀντιστοιχίας μεταξὺ τόξων καὶ ἐπικέντρων γωνιῶν, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ ὀρίζονται τὰ ἀκό-

λουθα. Τονίζομεν ὅτι ἀναφερόμεθα εἰς τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων.

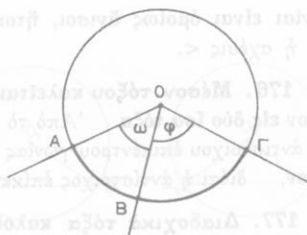
i) Δύο τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A'B'}$ εἶναι ἴσα, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἰς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι $\widehat{xOy}$ καὶ $\widehat{x'O'y'}$. Ἀποδεικνύεται διὰ μετατοπίσεως (σχ. 168).

ii) Ἐξ άθροισμα δύο τόξων εἰς τὰ ὅποια ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντροι γωνίαι ω καὶ ϕ , καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $\omega + \phi$.

Εἰς τὸ σχῆμα 169 εἶναι $\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$, διότι $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$. Ἀναλόγως ὀρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο τόξων.



Σχ. 168



Σχ. 169

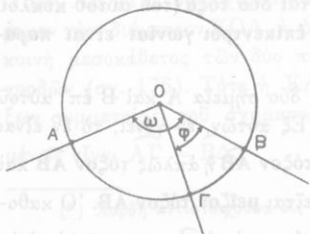
iii) Διαφορὰ δύο τόξων εἰς τὰ ὅποια ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντροι γωνίαι ω καὶ ϕ μὲ $\omega > \phi$, καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $\omega - \phi$.

Εἰς τὸ σχῆμα 170 εἶναι $\widehat{AB} - \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$ διότι $\widehat{AOB} - \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$.

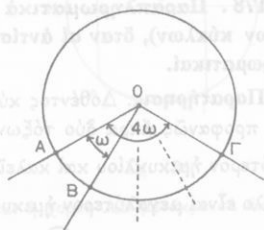
iv) Γινόμενον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ω , ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν n , καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $n \cdot \omega$.

Εἰς τὸ σχῆμα 171 εἶναι $4 \cdot \widehat{AB} = \widehat{A\Gamma}$, διότι $4 \cdot \widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma}$.

v) Πηλίκον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ϕ , διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ n , καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ϕ/n .



Σχ. 170



Σχ. 171

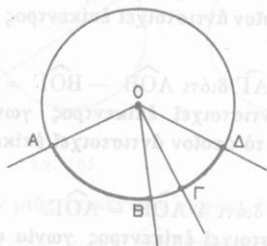
Εἰς τὸ σχῆμα 171 εἶναι $\frac{\widehat{A\Gamma}}{4} = \widehat{AB}$, διότι $\frac{\widehat{A\Omega\Gamma}}{4} = \widehat{A\Omega B}$.

vi) Γινόμενον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ω , ἐπὶ ρητὸν ἀδιθμόν μ/ν , καλεῖται τὸ τόξον εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $\varphi = \frac{\mu}{\nu} \cdot \omega$.

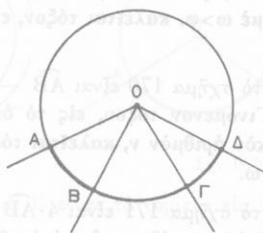
vii) Ἐν τόξον $\widehat{AB}$ (σχ. 172) καλεῖται μεγαλύτερον τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$ καὶ συμβολίζεται $\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία εἶναι ὁμοίως ἄνιστοι, ἥτοι ὅταν $\widehat{A\Omega B} > \widehat{\Gamma\Omega\Delta}$. Ἀντιστοίχως ὀρίζεται καὶ ἡ σχέσις $<$.

176. Μέσον τόξου καλεῖται ἓν σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα τόξα. Ἀπὸ τὸ μέσον ἑνὸς τόξου διέρχεται καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἀντιστοίχου ἐπίκεντρος γωνίας καὶ κατὰ συνέπειαν ἓν τόξον ἔχει ἓν μόνον μέσον, διότι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία ἔχει μία μόνον διχοτόμον.

177. Διαδοχικὰ τόξα καλοῦνται δύο ἢ περισσότερα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία εἶναι, ἐφεξῆς προκειμένου περὶ δύο, γενικῶς διαδοχικαί (σχ. 173).



Σχ. 172



Σχ. 173

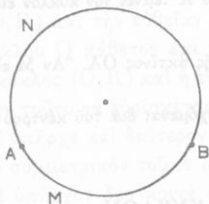
178. Παραπληρωματικὰ τόξα καλοῦνται δύο τόξα (τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων), ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία εἶναι παραπληρωματικαί.

Παρατήρησις. Δοθέντος κύκλου (O, R) , δύο σημεία A καὶ B ἐπ' αὐτοῦ εἶναι προφανῶς ἄκρα δύο τόξων (σχ. 174). Ἐξ αὐτῶν, ἓν γένει, τὸ ἓν εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου καὶ καλεῖται **ἔλασσον τόξον** $\widehat{AB}$ ἢ ἀπλῶς τόξον $\widehat{AB}$ καὶ τὸ ἄλλο εἶναι μεγαλύτερον ἡμικυκλίου καὶ καλεῖται **μεῖζον τόξον** $\widehat{AB}$. Ὁ καθορισμὸς ἑνὸς ἀπὸ τὰ τόξα $\widehat{AB}$ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνη καὶ μὲ τὴν παρεμβολὴν ἑνὸς τρίτου γράμματος ἀντιστοιχοῦντος εἰς σημεῖον τοῦ τόξου ἐνδιάμεσον τῶν

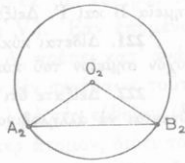
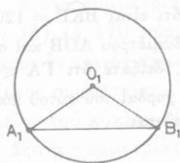
ἄκρων Α και Β π.χ. $\widehat{AMB}$ ἢ $\widehat{ANB}$ διὰ τὰ δύο τόξα $\widehat{AB}$ τοῦ σχήματος 174.

179. Θεώρημα. Εἰς ἴσα τόξα δύο ἴσων κύκλων (ἢ τοῦ αὐτοῦ κύκλου) ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί *.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ἴσους κύκλους (O_1, R) , (O_2, R) καὶ $\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$ δύο ἴσα τόξα αὐτῶν (σχ. 175). Τότε θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαὶ $\widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A_2O_2B_2}$ τῶν τόξων. Ἄρα $\widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A_2O_2B_2}$ (Π - Γ - Π) διότι $O_1A_1 = O_1B_1 = O_2A_2 = O_2B_2 = R$. Ἐπομένως $A_1B_1 = A_2B_2$.



Σχ. 174



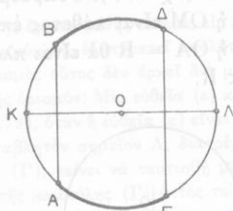
Σχ. 175

180. Θεώρημα. Εἰς ἴσας χορδὰς δύο ἴσων κύκλων (ἢ τοῦ αὐτοῦ κύκλου), ἀντιστοιχοῦν ἴσα ἐλάσσονα (ἀντιστοίχως μείζονα) τόξα.

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A_1B_1 = A_2B_2$ (σχ. 175), $\Rightarrow \widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A_2O_2B_2}$ (Π - Π - Π), διότι $O_1A_1 = O_1B_1 = O_2A_2 = O_2B_2 = R$. Ἄρα $\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$. Συμπερασματικῶς καὶ τὰ μείζονα τόξα μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα θὰ εἶναι ἴσα.

181. Θεώρημα. Δύο παράλληλοι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὀρίζουν ἐντὸς τῆς ζώνης αὐτῶν δύο ἴσα τόξα τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κύκλος κέντρου Ο καὶ $AB // \Gamma\Delta$ δύο χορδαὶ αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΚΟΛ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν δύο παραλλήλων χορδῶν (σχ. 176). Τότε ἡ ΚΛ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος καὶ ἐπομένως εἶναι $\widehat{ΑΓ} = \widehat{ΒΔ}$.



Σχ. 176

(*) Χορδὴ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τόξον $\widehat{AB}$ νοεῖται ἡ χορδὴ ΑΒ μὲ ἄκρα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου. Εἰς ἓν τόξον $\widehat{AB}$ ἀντιστοιχεῖ μία χορδὴ, ἡ ΑΒ, ἐνῶ εἰς μίαν χορδὴν ΑΒ ἀντιστοιχοῦν τὰ δύο τόξα $\widehat{AB}$ (ἐλάσσον καὶ μείζον).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

216. Ἐάν δύο σημεία μιᾶς χορδῆς κύκλου ἱσαπέχουν τοῦ μέσου αὐτῆς, δείξατε ὅτι ἱσαπέχουν καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

217. Δείξατε ὅτι δύο παράλληλοι χορδαὶ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς διαμέτρου κύκλου εἶναι ἴσαι καὶ ἡ ἐνοῦσα τὰ ἄλλα ἄκρα αὐτῶν χορδῇ εἶναι ἐπίσης διάμετρος.

218. Δείξατε ὅτι δύο χορδαὶ κύκλου κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τρίτης χορδῆς εἶναι ἴσαι.

219. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΚΒ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ κέντρου Κ λαμβάνομεν σημεία Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε $ΚΓ = ΚΔ$ καὶ ἐξ αὐτῶν φέρομεν δύο παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι ἡ χορδὴ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους ταύτας.

220. Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς ἀκτίνος ΚΑ κύκλου κέντρου Κ τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεία Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι εἶναι $\widehat{ΒΚΓ} = 120^\circ$.

221. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΟΒ καὶ σημείον Γ τῆς ἀκτίνος ΟΑ. Ἄν Μ εἶναι τυχὸν σημείον τοῦ κύκλου, δείξατε ὅτι $ΓΑ < ΓΜ < ΓΒ$.

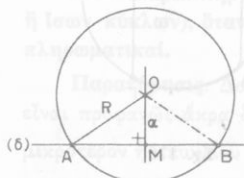
222. Δείξατε ὅτι δύο χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου δὲν δύνανται νὰ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ
ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

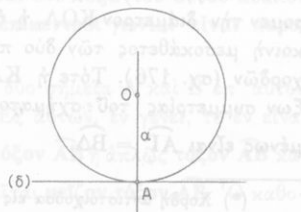
182. Θεώρημα. Ἐάν μία εὐθεῖα (δ) καὶ εἰς κύκλος, (Ο, R) ἔχουν δύο κοινὰ σημεία, τότε εἶναι $a < R$, ὅπου α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεΐαν.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς ἂς παρατηρήσωμε ὅτι εἰς κύκλος καὶ μία εὐθεΐα δύνανται νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεία, διότι δύο οἰαδήποτε σημεία ἐνὸς κύκλου ὀρίζουν μίαν εὐθεΐαν, ἡ ὁποία μετ' αὐτοῦ ἔχει προφανῶς κοινὰ τὰ σημεία αὐτά.

Ἐστω ὅτι ἡ εὐθεΐα (δ) μετ' τὸν κύκλον (Ο, R) ἔχουν δύο κοινὰ σημεία Α καὶ Β (σχ. 177). Θεωροῦμεν τὴν ἀπόστασιν $OM = a$ τοῦ Ο ἀπὸ τὴν (δ). Τότε ἡ OM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) καὶ τὸ Μ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ. Ἀρα ἡ $OA = R$ θὰ εἶναι πλαγία ὡς πρὸς τὴν (δ), συνεπῶς θὰ εἶναι $OM < OA$ ἢ $a < R$.



Σχ. 177



Σχ. 178

Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τοῦ κύκλου καὶ τῆς εὐθείας, ἡ εὐθεῖα λέγεται **τέμνουσα** τοῦ κύκλου, ἢ λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα **τέμνει** τὸν κύκλον ἢ ὅτι ὁ κύκλος **τέμνεται** τὴν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B .

183. Έφαπτομένη εὐθεῖα κύκλου καλεῖται μία εὐθεῖα ἔχουσα ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 178). Τὸ κοινὸν σημεῖον καλεῖται σημεῖον ἐπαφῆς. Αἱ προτάσεις εὐθεῖα ἐφάπτεται κύκλου καὶ κύκλος ἐφάπτεται εὐθείας εἶναι ἰσοδύναμοι.

184. Θεώρημα. Έάν εὐθεῖα (δ) ἐφάπτεται κύκλου (O, R) , τότε εἶναι $a = R$, ὅπου a ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

Απόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ σχῆμα πού ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸν κύκλον (O, R) καὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου O κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) (§ 170 πόρισμα V). Έάν ἐπομένως ὁ κύκλος (O, R) καὶ ἡ εὐθεῖα (δ) ἔχουν ἐν κοινὸν σημεῖον A , πρέπει κατ' ἀνάγκην τοῦτο νὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας. Έάν δὲν συνέβαινε τοῦτο, θὰ ὑπῆρχε καὶ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O, R) μετὰ τὴν εὐθεῖαν (δ) , τὸ συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας, ὅπερ ἄτομον, διότι τότε θὰ ὑπῆρχον δύο κοινὰ σημεῖα εὐθείας καὶ κύκλου. Άρα τὸ τμήμα OA εἶναι τὸ κάθετον τμήμα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) , δηλαδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν. Έπομένως εἶναι $OA = R$, διότι τὸ A ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον, ἦτοι $a = R$.

Πόρισμα I. Μία ἐφαπτομένη ἐνὸς κύκλου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Πόρισμα II. Έάν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτίνος κύκλου, τότε ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται εἰς τὸν κύκλον.

Πόρισμα III. Έάν A εἶναι σημεῖον ἐνὸς κύκλου, ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον A .

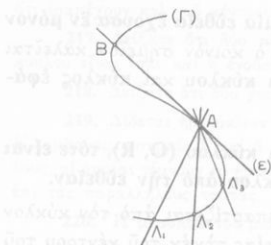
* **185.** Έφαπτομένη καμπύλης. Ένῳ ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς κύκλον, ὡς ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἔχει ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τὸν κύκλον, ἐξυπηρετεῖ ἀπολύτως τὰς ἀνάγκας τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, ἐν τούτοις ὁ ὁρισμὸς οὗτος δὲν ἀρκεῖ διὰ μιαν τυχοῦσαν καμπύλην (Γ) . Γενικώτερον θὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς ὁρισμὸν: Μία εὐθεῖα (ε) καλεῖται ἐφαπτομένη μιᾶς καμπύλης (Γ) εἰς σημεῖον τῆς A (σχ. 179), ὅταν ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι ἡ ὁριζή θέσις μιᾶς μεταβλητῆς τεμνούσης AA_1 , ὅπου τὸ μεταβλητὸν σημεῖον A_1 , διατρέχον τὴν ἀκολουθίαν τῶν σημείων $A_1, A_2, A_3, \dots$ τῆς καμπύλης (Γ) , τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τὸ A .

Ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα (ε) , δυνατόν νὰ ἔχη μετὰ τῆς καμπύλης (Γ) ἐκτὸς τοῦ A καὶ δεύτερον κοινὸν σημεῖον B . Τοῦτο ἐνδεχομένως νὰ συμβαίῃ μόνον ὅταν ἡ καμπύλη (Γ) εἶναι μὴ κυρτή.

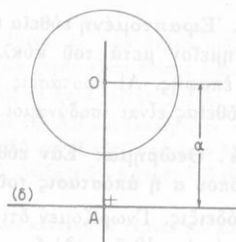
186. Θεώρημα. Έάν μία εὐθεῖα (δ) καὶ εἰς κύκλος (O, R) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, τότε εἶναι $a > R$ ὅπου a ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

Απόδειξις. Έφ' ὅσον ἡ εὐθεῖα (δ) καὶ ὁ κύκλος (O, R) δὲν ἔχουν κοινὰ

σημεία, έπεται ότι δέν υπάρχουν σημεία τής (δ) έσωτερικά διά τόν κύκλον (Ο, R), διότι εάν υπήρχον ή ευθεία θα έτεμνε τόν κύκλον (σχ. 180). Τότε από



Σχ. 179



Σχ. 180

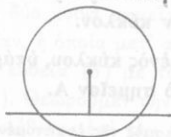
τό κέντρον Ο τοῦ κύκλου φέρομεν τήν κάθετον ΟΑ ἐπὶ τήν (δ) καί τό Α, ὡς σημείον τῆς (δ) θά εἶναι ἐξωτερικόν τοῦ κύκλου. Ἄρα διά τήν ἀπόστασιν $OA = \alpha$ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (Ο, R) ἀπό τήν ευθείαν (δ) θά εἶναι $OA > R$ ἢ $\alpha > R$.

Εἰς τήν θέσιν αὐτήν τῆς ευθείας καί τοῦ κύκλου, ἡ ευθεία λέγεται ἐξωτερική διά τόν κύκλον, ἢ μὴ τέμνουσα αὐτόν.

Διά τὰ τρία προηγούμενα θεωρήματα ἰσχύουν καί τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν τά ὅποια συνοψίζονται εἰς τό ἐπόμενον θεώρημα :

187. Θεώρημα. Ἐστω ευθεία (δ), κύκλος (Ο, R) καί α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου ἀπό τήν ευθείαν. Τότε εάν εἶναι $\alpha < R$ ἢ $\alpha = R$ ἢ

Συνοπτική ἀνακεφαλαίωσις



$$\alpha < R$$



$$\alpha = R$$



$$\alpha > R$$

Σχ. 181

$\alpha > R$ ή εὐθεῖα μετὸν κύκλον ἔχουν δύο ἢ ἓνα ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἀντιστοίχως.

Ἀποδείξεις. i). Ἐὰν εἶναι $\alpha < R$, τότε ἀποκλείεται ὁ κύκλος μετὴν εὐθεΐαν νὰ ἔχουν ἐν ἡ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον, διότι τότε θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι $\eta \alpha = R$ ἢ $\alpha > R$ ἀντιστοίχως. Ἀρα ὁ κύκλος μετὴν εὐθεΐαν ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

ii). Ἐὰν $\alpha = R$, τότε ἀποκλείεται ὁ κύκλος μετὴν εὐθεΐαν νὰ ἔχουν δύο ἢ οὐδὲν κοινὰ σημεῖα, διότι τότε θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι $\eta \alpha < R$ ἢ $\alpha > R$ ἀντιστοίχως. Ἀρα ὁ κύκλος μετὴν εὐθεΐαν ἔχουν ἐν κοινὸν σημεῖον.

iii). Ἐὰν τέλος εἶναι $\alpha > R$ τότε κατ' ἀνάγκην ὁ κύκλος μετὴν εὐθεΐαν δὲν θὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

223. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου κύκλου, εἶναι παράλληλοι.

224. Ἐστω ὀρθογώνιον τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ εἰς τὰς γωνίας $\hat{A}$ καὶ $\hat{\Delta}$. Ἐὰν ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ εἶναι ἴση μετὸ ἄθροισμα $AB + \Gamma\Delta$ τῶν δύο βάσεων, δείξατε ὅτι ὁ κύκλος μετὰ διάμετρον τὴν $B\Gamma$ ἐφάπτεται τῆς $A\Delta$.

B'.

225. Ἀπὸ σημείου A εὐρισκόμενον εἰς τὴν προέκτασιν μιᾶς διαμέτρου $B\Gamma$ κύκλου κέντρου K καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ , φέρομεν τέμνουσαν τοῦ κύκλου $A\Delta E$ οὕτως, ὥστε τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμήμα αὐτῆς $A\Delta$ νὰ εἶναι ἴσον μετὴν ἀκτῖνα. Δείξατε ὅτι εἶναι $B\hat{K}E = 3 \cdot \Gamma\hat{K}\Delta$.

226. Ἐστώσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο παράλληλοι εὐθεΐαι, AB μία κοινὴ κάθετος αὐτῶν καὶ M τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB . Θεωροῦμεν ὀρθὴν γωνίαν μετὰ κορυφὴν τὸ M , τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουσι τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου μετὰ διάμετρον τὴν AB .

188. Θεώρημα. Ἐστω κύκλος (O, R) καὶ Σ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Φέρομεν τὴν SO , ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Ἐὰν εἶναι $SA < SB$ καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, τότε θὰ εἶναι καὶ $SA \leq SM \leq SB$.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα OM καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου SOM λαμβάνομεν (§ 115) :

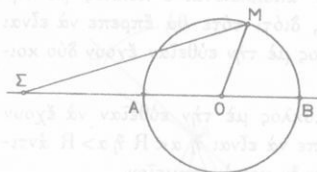
$$(1) \quad |SO - OM| < SM$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

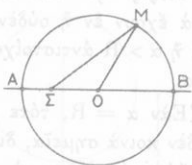
i). Ἐὰν τὸ Σ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου (O, R) (σχ. 182), ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$\Sigma O - OM < \Sigma M \quad \eta \quad \Sigma A + AO - OM < \Sigma M \quad \eta$$

$$\Sigma A + R - R < \Sigma M \Rightarrow \Sigma A < \Sigma M$$



Σχ. 182



Σχ. 183

ii). 'Εάν τὸ Σ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O,R) (σχ. 183), ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$OM - \Sigma O < \Sigma M \quad \eta \quad OM - (OA - \Sigma A) < \Sigma M \quad \eta$$

$$R - (R - \Sigma A) < \Sigma M \Rightarrow$$

$$(2) \quad \Sigma A < \Sigma M$$

Οὕτως ἀπεδείχθη τὸ πρῶτον σκέλος τῆς δοθείσης διπλῆς σχέσεως μετὰ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ ἴσον θὰ ἰσχύῃ, ὅταν τὸ Μ συμπίπτῃ μετὰ τὸ Α.

Ὅμοιως ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΣΟΜ λαμβάνομεν καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις ὅτι:

$$\Sigma M < \Sigma O + OM \quad \eta \quad \Sigma M < \Sigma O + R \quad \eta$$

$$\Sigma M < \Sigma O + OB \quad \eta$$

$$(3) \quad \Sigma M < \Sigma B$$

Αἱ σχέσεις (2) καὶ (3) συγχωνεύονται εἰς τήν:

$$\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$$

ὅπου τὸ ἴσον ἰσχύει ἐάν τὸ Μ συμπίπτῃ μετὰ τὸ Α ἢ μετὰ τὸ Β ἀντιστοίχως.

Παρατήρησις. Ἡ ἀπόστασις ΣΑ καλεῖται ἐλαχίστη ἀπόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὸν κύκλον (O,R) καὶ ἡ ΣΒ μέγιστη ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τὸν κύκλον (O,R).

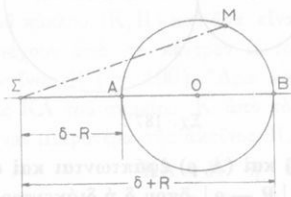
Πόρισμα. Ἐάν δ εἶναι ἡ ἀπόστασις σημείου Σ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (O,R), τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ κύκλου ἀπὸ τὸ Σ περιέχεται εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $[|\delta - R|, \delta + R]$ (σχ. 184).

ΣΧΗΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

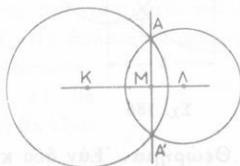
189. Διάκεντρος δύο κύκλων καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα μετὰ ἄκρα τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων. Συμβολίζεται συνήθως ἡ διάκεντρος μετὰ τὸ γράμμα δ.

190. Θεώρημα. Ἐάν δύο κύκλοι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον, ἔχουν κοινὸν καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον.

Ἀπόδειξις. Ἡ διάκεντρος ΚΛ, δύο κύκλων κέντρων Κ καὶ Λ, προεκτεινομένη, περιέχει διαμέτρου αὐτῶν (σχ. 185). Ἐπειδὴ ἐκάστη διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὅλου σχήματος. Ἐὰν ἐπομένως ὑπάρχῃ σημεῖον Α ἀνήκον καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους, τότε καὶ τὸ συμμετρικὸν Α' αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ΚΛ θὰ ἀνήκῃ καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους.



Σχ. 184



Σχ. 185

Πόρισμα I. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, τότε ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς των.

Τότε λέγομεν ὅτι δύο κύκλοι τέμνονται.

Πόρισμα II. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τοῦτο εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Ἐστω Α τὸ κοινὸν σημεῖον δύο κύκλων κέντρων Κ καὶ Λ (σχ. 187). Ἐὰν τὸ Α δὲν ἦτο ἐπὶ τῆς διακέντρου ΚΛ, τότε οἱ δύο κύκλοι θὰ εἶχον ὡς κοινὸν σημεῖον καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ΚΛ, δηλαδὴ θὰ εἶχον δύο κοινὰ σημεῖα, ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα τὸ κοινὸν σημεῖον Α εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς ΚΛ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν πού οἱ δύο κύκλοι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, λέγομεν ὅτι ἐφάπτονται ὁ εἰς εἰς τὸν ἄλλον, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς.

191. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) τέμνονται εἰς δύο σημεῖα, τότε εἶναι: $|R - \rho| < \delta < R + \rho$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

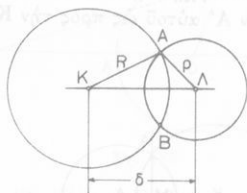
Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο κύκλων (σχ. 186). Ταῦτα θὰ εἶναι συμμετρικά ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΚΛ, ἐπομένως εὐρίσκονται ἐκατέρωθεν αὐτῆς. Τότε ὑπάρχει τρίγωνον ΑΚΛ, ἐκ τοῦ ὁποῦ λαμβάνομεν (§ 115).

$$|AK - AL| < KL < AK + AL \quad \eta \quad |R - \rho| < \delta < R + \rho.$$

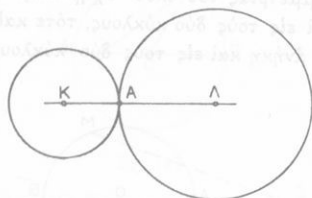
192. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται καὶ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta = R + \rho$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των. Γνωρίζομεν ὅτι τοῦτο εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου ΚΛ (σχ. 187). Τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐνδιάμεσον

τῶν κέντρων K καὶ Λ τῶν δύο κύκλων, διότι ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου. Ἄρα $K\Lambda = KA + A\Lambda \Rightarrow \delta = R + \rho$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.



Σχ. 186

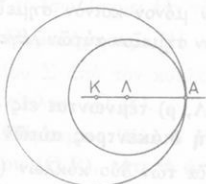


Σχ. 187

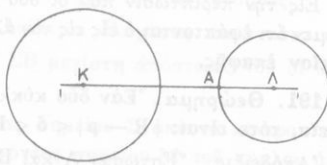
193. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται καὶ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta = |R - \rho|$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω A τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των, τὸ ὁποῖον θὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς $K\Lambda$ (σχ. 188). Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ κύκλος (Λ, ρ) εἶναι ἐσωτερικὸς διὰ τὸν κύκλον (K, R) . Τότε εἶναι $R > \rho$ καὶ τὸ Λ , ὡς ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (K, R) , εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ A . Ἄρα $KA = K\Lambda + \Lambda A \Rightarrow R = \delta + \rho \Rightarrow \delta = R - \rho$. Γενικῶς γράφομεν $\delta = |R - \rho|$, ὅταν δὲν γνωρίζωμεν τὴν σχέσιν μεγέθους τῶν ἀκτίνων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.



Σχ. 188



Σχ. 189

194. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta > R + \rho$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ὁ κύκλος (Λ, ρ) εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (K, R) (σχ. 189), ἔπεται ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ κύκλου (Λ, ρ) ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον K ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτίνος R τοῦ κύκλου (K, R) . Τότε καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις KA τοῦ σημείου K ἀπὸ τὸν κύκλον (Λ, ρ) θὰ εἶναι

μεγαλύτερα τῆς ἀκτίνος R , ἤτοι (§ 188) θὰ εἶναι $KA > R$ ἢ $\delta - \rho > R \Rightarrow \delta > R + \rho$.

195. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta < |R - \rho|$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ὁ κύκλος (Λ, ρ) εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (K, R) καὶ ἄρα εἶναι $R > \rho$. Τότε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Λ, ρ) θὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου (K, R) ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτίνος R (σχ. 190). Ἀρα καὶ ἡ μεγίστη ἀπόστασις KA τοῦ σημείου K ἀπὸ τὸν κύκλον (Λ, ρ) , θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτίνος R , ἤτοι (§ 188) θὰ εἶναι

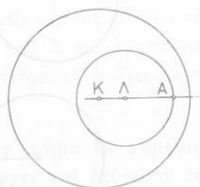
$$KA < R \quad \text{ἢ} \quad \delta + \rho < R$$

$$\text{ἢ} \quad \delta < R - \rho.$$

Ἐὰν εἶναι $R < \rho$, τότε θὰ ἔχωμεν $\delta < \rho - R$.

Γενικῶς ἔχομεν :

$\delta < |R - \rho|$ ὅταν δὲν γνωρίζωμεν σχέσιν μεγέθους τῶν ἀκτίνων.



Σχ. 190

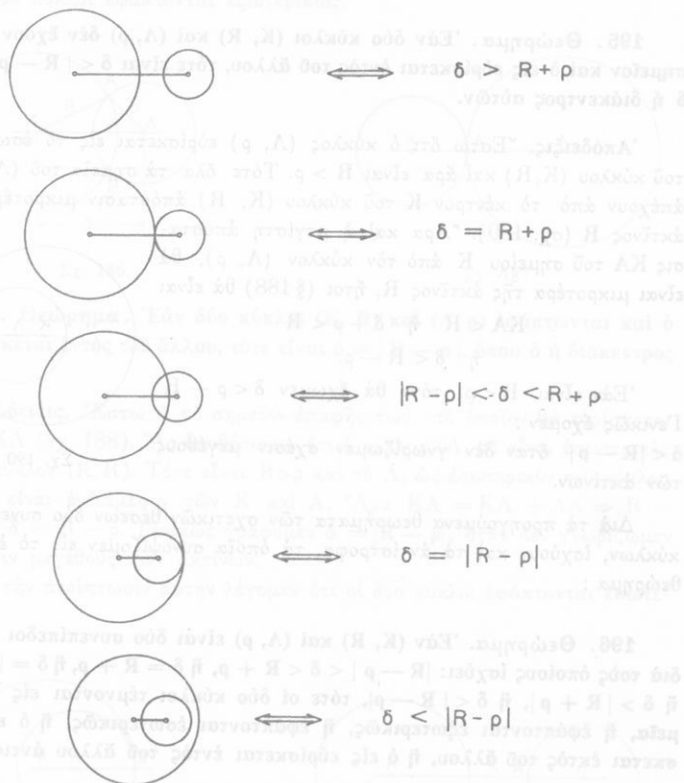
Διὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα τῶν σχετικῶν θέσεων δύο συνεπιπέδων κύκλων, ἰσχύουν καὶ τὰ ἀντίστροφα, τὰ ὅποια συνοψίζομεν εἰς τὸ ἐπόμενον θεώρημα :

196. Θεώρημα. Ἐὰν (K, R) καὶ (Λ, ρ) εἶναι δύο συνεπιπέδοι κύκλοι, διὰ τοὺς ὁποίους ἰσχύει: $|R - \rho| < \delta < R + \rho$, ἢ $\delta = R + \rho$, ἢ $\delta = |R - \rho|$, ἢ $\delta > |R + \rho|$, ἢ $\delta < |R - \rho|$, τότε οἱ δύο κύκλοι τέμνονται εἰς δύο σημεία, ἢ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, ἢ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, ἢ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, ἢ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι διὰ τοὺς κύκλους (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἰσχύει $|R - \rho| < \delta < R + \rho$. Τότε ἀποκλείεται τὸ ἐνδεχόμενον, οἱ δύο κύκλοι νὰ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, διότι τότε θὰ ἦτο $\delta = R + \rho$ (§ 192) ἢ $\delta = |R - \rho|$ (§ 193) ἀντιστοίχως, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται οἱ δύο κύκλοι νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι τότε θὰ ἦτο ἢ $\delta > R + \rho$ (§ 194) ἢ $\delta < |R - \rho|$ (§ 195), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἀρα κατ' ἀνάγκην οἱ δύο κύκλοι θὰ τέμνονται εἰς δύο σημεία.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι ἐκάστη τῶν ὑπολοίπων συνθηκῶν $\delta = R + \rho$, $\delta = |R - \rho|$, $\delta > R + \rho$ καὶ $\delta < |R - \rho|$, ἐξασφαλίζει τὴν ἀντίστοιχον θέσιν τῶν δύο κύκλων.

Συνοπτική άνακεφαλαίωση τῶν σχετικῶν θέσεων δύο κύκλων εἰς τὸ ἐπίπεδον.



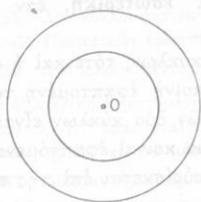
Σχ. 191

Με δ συμβολίζομεν τὴν διάκεντρον $ΚΛ$ τῶν δύο κύκλων (K, R) καὶ (A, ρ) .

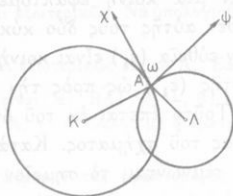
197. Ὁμόκεντροι κύκλοι καλοῦνται δύο κύκλοι ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον. Ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι μηδενικὴ καὶ ὁ εἷς κύκλος εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 192).

198. Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων καλεῖται ἡ κυρτὴ γωνία ω τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι ἡμιευθεῖαι Ax, Ay τῶν κύκλων εἰς ἓν τῶν κοινῶν σημείων των A , ὅταν αὐταὶ δὲν τέμνουν τοὺς κύκλους (σχ. 193). Ἡ γωνία αὐτῶν ω εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας $\widehat{K\hat{A}L}$, ποὺ σχηματίζουν αἱ ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου A ἀγόμεναι ἀκτῖνες τῶν δύο κύκλων (διατί ;)

199. Ὀρθογώνιοι κύκλοι ἢ κύκλοι τεμνόμενοι ὀρθογωνίως καλοῦνται δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων ἡ γωνία ω εἶναι ὀρθή.



Σχ. 192



Σχ. 193

200. Ἐφαπτόμενον τμήμα. Ἐάν Σ εἶναι σημεῖον ἐκτός κύκλου κέντρου O (σχ. 194) καὶ (ε) μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Σ καὶ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς σημεῖον A , τὸ τμήμα ΣA καλεῖται ἐφαπτόμενον τμήμα ἐκ τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον κέντρου O .

201. Θεώρημα. Ἐάν ΣA εἶναι ἓν ἐφαπτόμενον τμήμα ἐκ σημείου Σ ἐκτός κύκλου κέντρου O πρὸς τὸν κύκλον, τότε ὑπάρχει καὶ δεῦτερον ἐφαπτόμενον τμήμα $\Sigma A'$ ἐκ τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον καὶ εἶναι:

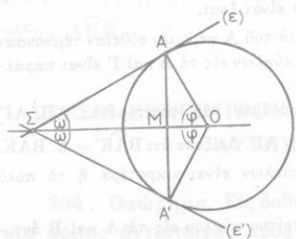
i) $\Sigma A = \Sigma A'$

ii) Ἡ ΣO εἶναι διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A \Sigma A'}$.

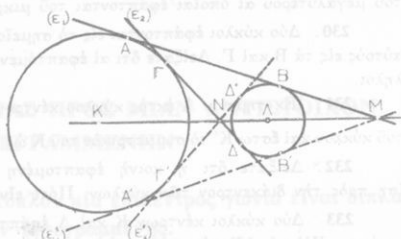
iii) Ἡ ΣO εἶναι διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A O A'}$.

iv) Ἡ ΣO εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς AA' .

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ ΣO περιέχει διάμετρον τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 194). Ἄρα τὸ τμήμα $\Sigma A'$, συμμετρικὸν τοῦ ΣA ὡς πρὸς τὸν ἄξωνα ΣO , εἶναι καὶ αὐτὸ ἐφαπτόμενον τοῦ κύκλου καὶ μάλιστα εἰς σημεῖον A' συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς ἄξωνα τὸν ΣO . Τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας ἰσχύουν αἱ προτάσεις i), ii), iii) καὶ iv).



Σχ. 194



Σχ. 195

202. Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων καλεῖται μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἐφάπτεται καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους.

Μία κοινή εφαπτομένη (ε_1) δύο κύκλων κέντρων K και Λ καλείται **έξωτερική**, εάν αφήνη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τοὺς δύο κύκλους, ὅπως ἡ AB (σχ. 195) καὶ μία κοινή εφαπτομένη (ε_2) καλεῖται **ἐσωτερική**, εάν αφήνη ἐκατέρωθεν αὐτῆς τοὺς δύο κύκλους, ὅπως ἡ $\Gamma\Delta$.

Ἐὰν εὐθεῖα (ε_1) εἶναι κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων, τότε καὶ ἡ συμμετρική αὐτῆς (ε_1') ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον εἶναι κοινή εφαπτομένη τῶν δύο κύκλων. Τοῦτο ἔπεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Κατὰ συνέπειαν ἐὰν δύο κοινὰ εφαπτόμεναι (ε_1) καὶ (ε_1') τέμνονται, τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν M εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας $K\Lambda$.

Κατὰ τὸ θεώρημα 201, ἔχομεν :

$$MA = MA' \quad \text{καὶ} \quad MB = MB'$$

Δι' ἀφαίρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν :

$$AB = A'B'.$$

Ὁμοίως ἔχομεν $NG = NG'$ καὶ $ND = ND'$. Ἄρα $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$.

Ὡστε τὰ κοινὰ εφαπτόμενα τμήματα (ἐξωτερικὰ $AB = A'B'$ ἢ ἐσωτερικὰ $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$) δύο κύκλων εἶναι ἴσα.

Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι, τότε αἱ δύο κοινὰ ἐξωτερικὰ εφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι (διατί ;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

227. Δύο κύκλοι κέντρων K καὶ Λ τέμνονται εἰς τὰ A καὶ B . Ἐκ τοῦ A φέρομεν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta \parallel K\Lambda$, τέμνουσαν αὐτοὺς εἰς τὰ Γ καὶ Δ . Δείξατε ὅτι εἶναι $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$.

228. Δύο κύκλοι κέντρων K καὶ Λ τέμνονται εἰς τὰ A καὶ B . Δείξατε ὅτι ἐξ ὧν τῶν τεμνουσῶν αὐτοὺς τῶν διερχομένων διὰ τοῦ A , μεγαλύτερα εἶναι ἢ παράλληλος τῆς $K\Lambda$.

229. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον (εἶναι ὁμόκεντροι), ὅλαι αἱ χορδαὶ τοῦ μεγαλύτερου αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τοῦ μικροτέρου εἶναι ἴσαι.

230. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον A . Διὰ τοῦ A φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτοὺς εἰς τὰ B καὶ Γ . Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων εἰς τὰ B καὶ Γ εἶναι παράλληλοι.

231. Ἐκ σημείου A ἐκτὸς κύκλου κέντρον K θεωροῦμεν τὰς ἐφαπτομένας $AB, A\Gamma$ τοῦ κύκλου καὶ ἔστω K' τὸ συμμετρικόν τοῦ K ὡς πρὸς τὴν $A\Gamma$. Δείξατε ὅτι $\widehat{BAK'} = 3 \cdot \widehat{BAK}$.

232. Δείξατε ὅτι ἡ κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων εἶναι μικρότερα ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν διάκεντρον τῶν κύκλων. Πότε εἶναι ἴση;

233. Δύο κύκλοι κέντρων K καὶ Λ ἐφάπτονται τρίτου κύκλου εἰς τὰ A καὶ B ἀντιστοίχως. Ἐὰν ἡ AB τέμνῃ τὸν κύκλον Λ εἰς τὸ Γ , δείξατε ὅτι $K\Lambda \parallel A\Gamma$.

B'.

234. Δίδεται κύκλος κέντρον K καὶ διάμετρος AB αὐτοῦ. Μὲ κέντρον σημεῖον Γ τῆς ἀκτίνος KB καὶ ἀκτῖνα ΓK γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ τὸν (K, KB) εἰς τὰ

σημεία Δ και Ε. 'Εάν η εὐθεΐα ΔΓ τέμνη τὸν κύκλον (Κ, ΚΒ) εἰς τὸ Ζ, δεῖξατε ὅτι $\widehat{AKZ} = 3\widehat{BK\Delta}$.

235. Δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν.

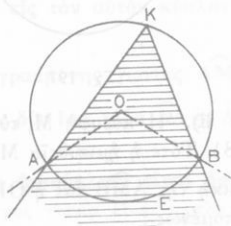
236. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. 'Εάν ΒΓ εἶναι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, δεῖξατε ὅτι εἶναι: α) $\widehat{BA\Gamma} = 1^\circ$, β) ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ ἐφάπτεται τῆς διακέντρου εἰς τὸ Α, γ) ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΚΛ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς τὸ μέσον τῆς.

237. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΚΒ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ἡμιευθείας Αχ καὶ Βυ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τρίτην ἐφαπτομένην αὐτοῦ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς Αχ καὶ Βυ εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δεῖξατε ὅτι: α) $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Delta}$, β) $\widehat{\Gamma\Delta} = 1^\circ$.

203. Έγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον (Ο, R) καλεῖται κάθε γωνία $\widehat{AKB}$, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς Κ ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο, R), αἱ δὲ πλευραὶ τῆς τέμνουσιν αὐτὸν εἰς σημεία Α καὶ Β.

Λέγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ $\widehat{AKB}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον $\widehat{AKB}$, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AEB}$ τὸ ὁποῖον περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας (σχ. 196).

Ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AOB}$, ἡ ὁποία περιέχει τὸ αὐτὸ τόξον $\widehat{AB}$ μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης $\widehat{AKB}$, καλεῖται ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος τῆς ἐγγεγραμμένης. Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μίαν ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον ἐνῶ κάθε ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ἀντίστοιχος ἀπείρων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι σημεία τοῦ τόξου $\widehat{AKB}$.



Σχ. 196

ΣΧΕΣΙΣ ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ ΠΡΟΣ ΜΙΑΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΝ ΑΥΤΗΣ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΝ

204. Θεώρημα. Εἰς δοθέντα κύκλον μία ἐπίκεντρος γωνία εἶναι διπλασία πάσης ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης.

Ἀποδείξεις. Ἐστω ὁ κύκλος (Ο, R), $\widehat{AOB}$ ἡ ἐπίκεντρος γωνία βαίνουσα εἰς τόξον $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{AMB}$ μία ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐγγεγραμμένη. Θὰ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις:

i). Ἡ κορυφή M εὐρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς AO (σχ. 197). Τότε τὸ τρίγωνον OMB εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $OM = OB = R$.

Ἄρα $\widehat{OMB} = \widehat{OBM} = \omega$ ἢ

$$(1) \quad \widehat{AMB} = \omega$$

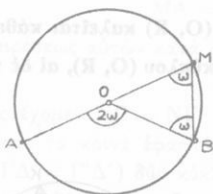
Ἐπομένως (§ 105 I) θὰ εἶναι καί :

$$(2) \quad \widehat{AOB} = \omega + \omega = 2\omega$$

ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου OMB .

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}$$



Σχ. 197



Σχ. 198

ii). Ἡ κορυφή M , εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς $\widehat{AOB}$ (σχ. 198). Τότε ἡ ἡμιευθεῖα MO , ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ , εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{AMB}$ καὶ ἡ $O\Gamma$ ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{AOB}$.

Ἐπομένως :

$$(3) \quad \widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma MB} \quad \text{καὶ}$$

$$(4) \quad \widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB}$$

Κατὰ τὴν περίπτωσιν (i) ἔχομεν :

$$(5) \quad \widehat{AO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{AM\Gamma} \quad \text{καὶ}$$

$$(6) \quad \widehat{\Gamma OB} = 2 \cdot \widehat{\Gamma MB}$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (5) καὶ (6)

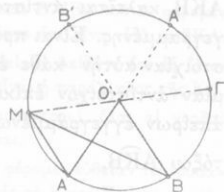
λαμβάνομεν :

$$\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB} = 2(\widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma MB})$$

καὶ δυνάμει τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) ἡ τελευταία γράφεται :

$$\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}$$

iii). Ἡ κορυφή M εὐρίσκεται ἐκτὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς $\widehat{AOB}$ (σχ. 199). Τότε ἡ ἡμιευθεῖα MO , ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ , εἶναι ἐξωτερικὴ τὸσον τῆς $\widehat{AMB}$ ὅσον καὶ τῆς $\widehat{AOB}$.



Σχ. 199

Έπομένως :

$$(7) \quad \widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} - \widehat{BM\Gamma} \quad \text{και}$$

$$(8) \quad \widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma}$$

Κατά την περίπτωση (i) έχουμε :

$$(9) \quad \widehat{AO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{AM\Gamma} \quad \text{και}$$

$$(10) \quad \widehat{BO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{BM\Gamma}$$

Δι' αφαιρέσεως τών (9) και (10) κατά μέλη λαμβάνομεν :

$$\widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma} = 2(\widehat{AM\Gamma} - \widehat{BM\Gamma})$$

και δυνάμει τών σχέσεων (7) και (8) η τελευταία γράφεται :

$$\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}$$

Πόρισμα I. Είς δοθέντα κύκλον, ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ ἐπὶ ἰσῶν τόξων, εἶναι ἰσαί.

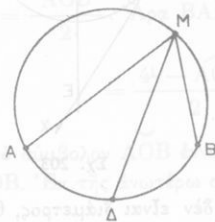
Πράγματι, διότι ὅλαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου γωνίας ἢ ἰσῶν ἐπικέντρων γωνιῶν.

Πόρισμα II. Δύο ἰσαί ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἰσούς κύκλους, ἀποτεμνοῦν ἴσα τόξα.

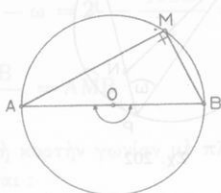
Πόρισμα III. Ἡ διχοτόμος ΜΔ μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{AMB}$, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$, χωρίζει τοῦτο εἰς δύο ἴσα τόξα $\widehat{AD} = \widehat{DB}$. (σχ. 200).

Πόρισμα IV. Μία γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή.

Πράγματι, ἀφοῦ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπικέντρος γωνία εἶναι πεπλατυσμένη (σχ. 201).



Σχ. 200



Σχ. 201

Ίσχύει και τὸ ἀντίστροφον, δηλαδὴ ἂν μία ὀρθὴ γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη, τότε βαίνει εἰς ἡμικύκλιον, διότι ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπικέντρος θὰ εἶναι πεπλατυσμένη και συνεπῶς θὰ χωρίζῃ τὸν κύκλον εἰς δύο ἡμικύκλια.

Παρατήρησης. Ἐν τμήμα AB λέγομεν ὅτι φαίνεται ἀπὸ σημείου M ὑπὸ γωνίαν ω (σχ. 202), ὅταν εἶναι $\widehat{AMB} = \omega$. Τὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον M βλέπει τὸ τμήμα AB ὑπὸ γωνίαν ω .

και επομένως $\widehat{AOB} = 2\omega$. Γνωρίζομεν όμως ότι είναι και $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ (§ 204). "Αρα :

$$(2) \quad \widehat{AMB} = \omega$$

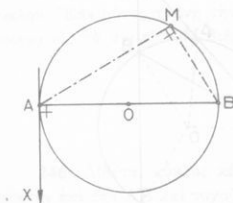
Έκ τῶν (1) και (2) έπεται ότι είναι $\widehat{DAE} = \widehat{AMB}$ ήτοι :

$$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$

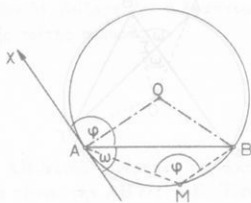
ii). 'Η γωνία είναι όρθή. Τοῦτο συμβαίνει μόνον όταν ή χορδή AB είναι διάμετρος (σχ. 204). 'Αλλά τότε ή έγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AMB}$ είναι όρθή ως βαίνουσα εις ήμικύκλιον.

"Αρα :

$$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$



Σχ. 204



Σχ. 205

iii). 'Η γωνία είναι άμβλεία. Έστω $\widehat{BAx} = \varphi > 1^\circ$ (σχ. 205). Τότε, αν ω είναι ή παραπληρωματική της, γνωρίζομεν ότι :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\widehat{AOB}}{2}. \text{ "Αρα } \widehat{BAx} = \varphi = 2^\circ - \omega = 2^\circ - \frac{\widehat{AOB}}{2} = \\ &= \frac{4^\circ - \widehat{AOB}}{2} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \widehat{AMB} \end{aligned}$$

όπου με τὸ σύμβολον $\widehat{AOB}$ έννοοῦμεν τήν μη κυρτήν γωνίαν με πλευράς τὰς OA και OB. Έκ τῆς άνωτέρω σχέσεως έπεται :

$$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΧΟΡΔΩΝ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

206. Θεώρημα. Έάν δύο χορδαί κύκλου τέμνονται εις σημειον έσωτερικόν αὐτοῦ, ή γωνία, τήν όποία σχηματίζουν ίσοῦται πρὸς τὸ ήμίθροισμα τῶν επικέντρων γωνιῶν ποῦ άντιστοιχοῦν εις τὰ τόξα τὰ περιλαμβανόμενα έντὸς τῆς γωνίας και τῆς κατὰ κορυφήν της.

"Απόδειξις. Έστωσαν αἱ χορδαί AB και ΓΔ κύκλου (O, R) τεμνόμεναι

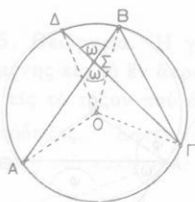
εἰς σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου καὶ ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν (σχ. 206). Φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΒΓ λαμβάνομεν :

$$\omega = \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{AO\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{BO\Delta}}{2}$$

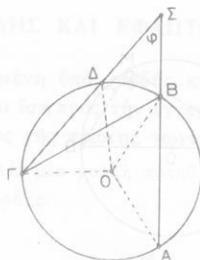
Ἄρα :

$$\omega = \frac{\widehat{AO\Gamma} + \widehat{BO\Delta}}{2}$$

207. Θεώρημα. Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνονται προεκτεινόμεναι ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα τὰ περιλαμβανόμενα ἐντὸς τῆς γωνίας.



Σχ. 206



Σχ. 207

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ κύκλου (Ο, R), αἱ ὁποῖαι προεκτείνονται τέμνονται εἰς σημεῖον Σ ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ φ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν (σχ. 207). Φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΒΓ λαμβάνομεν :

$$\widehat{AB\Gamma} = \varphi + \widehat{B\Gamma\Delta} \quad \eta$$

$$\varphi = \widehat{AB\Gamma} - \widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{AO\Gamma}}{2} - \frac{\widehat{BO\Delta}}{2}$$

$$\text{ἄρα: } \varphi = \frac{\widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Delta}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A.

238. Δύο ἴσοι κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν αὐτοὺς ΓΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν κάθετον ΒΜ ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΓΔ.

239. Διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α δύο ἐφαπτομένων κύκλων φέρομεν δύο τεμνούσας αὐτῶν. Δείξατε ὅτι αἱ δύο χορδαὶ πού ὀρίζονται ἀπὸ τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν κύκλων μετὰ τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

240. Δύο κύκλοι ακτίνων r και $2r$ εφάπτονται έσωτερικώς εις τὸ A . Δείξατε ὅτι κάθε χορδὴ τοῦ μεγαλύτερου ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὸ A διχοτομεῖται ἀπὸ τὸν μικρότερον κύκλον.

241. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς AB καὶ AC τριγώνου ABC γράφομεν δύο κύκλους. Δείξατε ὅτι τὸ δεύτερον σημεῖον Δ τῆς τομῆς των εὐρύσκεται ἐπὶ τῆς BC καὶ ὅτι ἡ AD εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BC .

242. Ἐὰν A, B, Γ, Δ εἶναι τέσσαρα σημεῖα διαδοχικῶς ἐνὸς κύκλου καὶ K, Λ, M, N τὰ μέσα τῶν τόξων $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$, δείξατε ὅτι αἱ χορδαὶ KM καὶ AN τέμνονται καθέτως.

243. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς AB, AC τριγώνου ABC γράφομεν δύο κύκλους. Ἀπὸ τὰ B καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους χορδὰς $BD, \Gamma E$. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Δ, A, E κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

244. Κύκλος κέντρου K εφάπτεται εις ἄλλον κύκλον κέντρου Λ εις τὸ A καὶ εὐθείας (ε) εις τὸ B . Ἐὰν ἡ BA τέμνῃ τὸν δεύτερον κύκλον εις τὸ Γ , δείξατε ὅτι εἶναι $\Gamma\Lambda \perp (\varepsilon)$.

245. Μὲ διάμετρον τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου γράφομεν κύκλον. Ἐὰν οὗτος τέμνῃ τὴν ὑποτείνουσαν εις σημεῖον M , δείξατε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εις τὸ σημεῖον M διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς.

Β'.

246. Δίδεται κύκλος κέντρου O καὶ διάμετρος AB αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα OG κάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ τοχοῦσαν χορδὴν $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εις τὸ E . Ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη εις τὸ Δ τέμνῃ τὴν AB εις τὸ Z , δείξατε ὅτι εἶναι $Z\Delta = ZE$.

247. Δύο κύκλοι τέμνονται εις τὰ A καὶ B καὶ ἔστω M τυχὸν σημεῖον τῆς κοινῆς χορδῆς AB . Διὰ τοῦ M θεωροῦμεν τοχοῦσαν τέμνουσαν τοὺς κύκλους εις τὰ σημεῖα Γ, Δ, E, Z διαδοχικῶς. Δείξατε ὅτι $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{EBZ}$.

248. Ἐστω κύκλος κέντρου K καὶ A, B, Γ τρία σημεῖα αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸν κύκλον εις τὰ Δ καὶ E . Δείξατε ὅτι ἡ DE εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AO , ὅπου O εἶναι τὸ ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

249. Ἐπ' εὐθείας (δ) λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ . Μὲ διαμέτρους τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$ γράφομεν δύο κύκλους καὶ θεωροῦμεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην EZ αὐτῶν, ὅπου τὸ E εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου διαμέτρου AB . Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AE, BE, \Gamma Z, \Delta Z$ τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποῦ ἡ ἄλλη διαγώνιος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον.

250. Διὰ τοῦ ἐνὸς κοινοῦ σημείου A δύο τεμνομένων κύκλων θεωροῦμεν τοχοῦσαν εὐθεῖαν $BA\Gamma$ τέμνουσαν αὐτοὺς. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εις τὰ B καὶ Γ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν σταθεράν.

251. Δύο κύκλοι εφάπτονται έσωτερικώς εις τὸ A . Θεωροῦμεν χορδὴν $B\Gamma$ τοῦ μεγαλύτερου κύκλου, ἡ ὁποία εφάπτεται τοῦ μικροτέρου εις τὸ Δ . Δείξατε ὅτι ἡ AD διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\widehat{BA\Gamma}$.

252. Δύο κύκλοι εφάπτονται ἐξωτερικῶς εις τὸ A . Θεωροῦμεν χορδὴν $B\Gamma$ τοῦ ἐνὸς κύκλου, ἡ ὁποία προεκτενομένη εφάπτεται τοῦ ἄλλου εις τὸ Δ . Δείξατε ὅτι ἡ AD εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

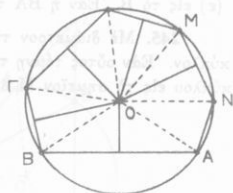
208. Όρισμός. Έν πολύγωνον $ΑΒΓ...Ν$ καλεῖται ἔγγεγραμμένον (ἢ ἐγγράψιμον) εἰς κύκλον τότε καὶ μόνον τότε ὅταν αἱ κορυφαὶ τοῦ εἶναι (ἢ δύνανται νὰ εἶναι) σημεῖα ἐνὸς κύκλου.

Ἐκ τοῦ ὁρίσμου ἔπεται ὅτι αἱ πλευραὶ ὡς καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ πολυγώνου εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου καλοῦνται ὁμοκυκλικά ἢ ὁμοκύκλια σημεῖα.

Ὁ κύκλος καλεῖται περιγεγραμμένος περὶ τὸ πολύγωνον.

209. Θεώρημα. Ἀναγκαῖα καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἓν πολύγωνον $ΑΒΓ...Ν$ μὲ n πλευρὰς εἶναι ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον $(Ο, R)$, εἶναι αἱ $n-1$ μεσοκάθετοι τῶν $n-1$ πλευρῶν τοῦ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ. 208

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαῖα. Ἐστω τὸ ἔγγεγραμμένον πολύγωνον $ΑΒΓ...Ν$ εἰς τὸν κύκλον $(Ο, R)$. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι ἡ μεσοκάθετος ἐκάστης διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον $Ο$ τοῦ κύκλου (σχ. 208). Ἀρα τὸ θεώρημα ἰσχύει.

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἐστω ὅτι τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓ...ΜΝ$ αἱ μεσοκάθετοι τῶν $n-1$ πλευρῶν τοῦ $ΑΒ, ΒΓ, ..., ΜΝ$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου $Ο$. Τότε τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς ἀνήκον εἰς ἐκάστην τῶν μεσοκαθέτων τούτων θὰ ἰσαπέχη ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς, ᾗτοι θὰ εἶναι :

$$(1) \quad ΟΑ = ΟΒ, \quad ΟΒ = ΟΓ, ..., ΟΜ = ΟΝ$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἔπεται ὅτι :

$$ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ... = ΟΝ$$

Ἀρα, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ $Ο$ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἐκ μιᾶς κορυφῆς γραφῇ κύκλος, οὗτος θὰ διέλθῃ δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου, ἐπομένως τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Πόρισμα I. Κάθε τρίγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εὐρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν τοῦ (τὸ κέντρον τοῦ κύκλου λέγεται περίκεντρον (§ 158)).

Πόρισμα II. Διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ εὐθείας εἰς καὶ μόνον εἰς κύκλος διέρχεται, διότι ἓν εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα αὐτά.

Πόρισμα III. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα, τότε ταυτίζονται.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

210. Θεώρημα. Ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα ἔν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ νὰ εἶναι παραπληρωματικάι.

Ἀποδείξεις. i) Εἶναι ἀναγκαῖα. Ἐστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κέντρου Ο (σχ. 209). Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ καὶ ΟΔ. Ἡ γωνία $\widehat{A} = \omega$ εἶναι ἐγγεγραμμένη. Ἀρα ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος θὰ εἶναι $\widehat{O\Gamma} = 2\omega$. Ὁμοίως ἡ γωνία $\widehat{\Gamma} = \varphi$ εἶναι ἐγγεγραμμένη. Ἀρα ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος θὰ εἶναι $\widehat{B\Delta} = 2\varphi$. Ἀλλὰ $2\omega + 2\varphi = 4\iota$, Ἀρα: $\omega + \varphi = 2\iota$, ἤτοι: $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2\iota$

ii) Είναι ικανή. Έστω ότι εις τὸ κυρτὸν τε-
τράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι :

$$(1) \quad \hat{A} + \hat{\Gamma} = 2L \iff \hat{B}A_x + \hat{\Gamma} = 2L$$

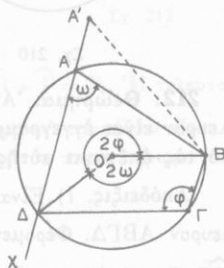
Θεωροῦμεν τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος ὀρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ Δ. Ἄν αὐτὸς διέρχεται διὰ τοῦ Α, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη. Ἄν ὅμως δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Α θὰ τέμνῃ τὴν ΔΑ εἰς σημεῖον Α', ὁπότε τὸ τετράπλευρον Α'ΒΓΔ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον.

"Αρα :

$$(2) \quad \widehat{BA'}_x + \widehat{\Gamma} = 2L$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $\widehat{BAx} + \widehat{\Gamma} = \widehat{BA'x} + \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{BA'x}$.
Ἐξ αὐτῆς ὁμῶς ἔπεται $AB \parallel A'B$, ὅπερ ἄτοπον.

"Αρα ὁ κύκλος ποὺ διέρχεται διὰ τῶν Β, Γ καὶ Δ κατ' ἀνάγκην θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Α. "Αρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.



Σχ. 209

211. Θεώρημα. Ἀναγκαῖα καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἔν κυρτὸν τετρά-
πλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι μία ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ νὰ
ἴσουςται μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ἐσωτερικὴν.

Ἀποδείξεις. i) Εἶναι ἀναγκαῖα. Ἐστω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 210) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Τότε θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \hat{A} + \hat{\Gamma} = 2L$$

Ἐπίσης ὁμῶς εἶναι :

$$(2) \quad \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_1 = 2L$$

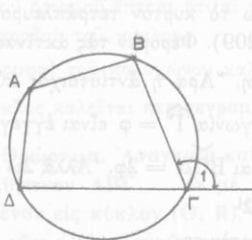
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται

$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \hat{A} = \hat{\Gamma}_1.$$

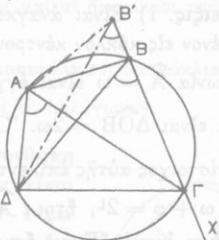
ii) Εἶναι ἰκανή. Ἐστω ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση

$$(3) \quad \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma} = 2\epsilon$, λόγω τῆς (3) αὕτη γράφεται $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2\epsilon$. Ἀρα τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγράψιμον.



Σχ. 210



Σχ. 211

212. Θεώρημα. Ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα ἓν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι μία πλευρὰ του νὰ φαίνεται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι αὐτῆς κορυφᾶς ὑπὸ ἴσας γωνίας.

Ἀποδείξεις. i) Εἶναι ἀναγκαῖα. Ἐστω τὸ κυρτὸν ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$. Φέρομεν τὰς διαγωνίους $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$. Αἱ γωνίαι $\widehat{\Delta A \Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta B \Gamma}$ εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου $\widehat{\Gamma \Delta}$ (σχ. 211). Ἀρα εἶναι ἴσαι, ἦτοι :

$$\widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B \Gamma}$$

Ὡστε ἡ πλευρὰ $\Gamma\Delta$ φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας ἀπὸ τὰς κορυφᾶς A καὶ B .

ii) Εἶναι ἰκανή. Ἐὰν τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ἡ πλευρὰ $\Gamma\Delta$ φαίνεται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι αὐτῆς κορυφᾶς A καὶ B ὑπὸ ἴσας γωνίας, τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον. Διότι ἂν δὲν ἦτο, ὁ κύκλος ποὺ ὀρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, Γ καὶ Δ θὰ ἔεμνε τὴν ΓB ἔστω εἰς τὸ B' , ὅποτε τὸ τετράπλευρον $AB'\Gamma\Delta$ θὰ ἦτο ἐγγεγραμμένον καὶ ἐπομένως θὰ ἦτο :

$$(1) \quad \widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B' \Gamma}$$

Ἐξ ὑποθέσεως ὁμως ἔχομεν ὅτι :

$$(2) \quad \widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B \Gamma} \iff \widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B \Gamma}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι : $\widehat{\Delta B \Gamma} = \widehat{\Delta B' \Gamma}$

Ἐξ αὐτῆς ὁμως ἔπεται $B\Delta // B'\Delta$, ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα ὁ κύκλος ποὺ διέρχεται διὰ τῶν A, Γ καὶ Δ κατ' ἀνάγκην θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ B . Ἀρα τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγράψιμον.

ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ

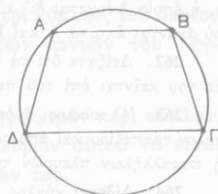
213. Θεώρημα. Ἐάν ἐν τραπέζιον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι ἰσοσκελές καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τραπέζιον ΑΒΓΔ, με $AB \parallel \Gamma\Delta$ (σχ. 212). Αἱ παράλληλοι χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ὀρίζουν ἐντὸς τῆς ζώνης αὐτῶν δύο ἴσα τόξα $\widehat{B\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta}$ (§ 181). Ἀρα καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν χορδαὶ εἶναι ἴσαι, ἥτοι $B\Gamma = A\Delta$ καὶ ἐπομένως τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ ἰσοσκελές τραπέζιον ΑΒΓΔ. Τοῦτο ὡς ἰσοσκελές, ἔχει τὰς παρὰ ἐκάστην βάσιν τοῦ γωνίας ἴσας, ἥτοι :

$$(1) \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$$

Ἐπὶ πλέον, λόγω τῶν παραλλήλων $AB \parallel \Gamma\Delta$, ἔχει $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2\text{L}$. Ἡ τελευταία, λόγω τῆς σχέσεως (1), γράφεται $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2\text{L}$. Ἀρα τὸ τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι γωνίας τοῦ παραπληρωματικὰς.



Σχ. 212

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α.

253. Δείξατε ὅτι κάθε παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ὀρθογώνιον.

254. Ἀπὸ σημείου Ο κείμενον ἐκτὸς κύκλου κέντρου Κ φέρομεν τὴν ΟΚ καὶ τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ΟΑ. Ἐκ τοῦ Ο θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐκ τοῦ Κ φέρομεν $KB \perp (\delta)$. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον πού ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Κ, Α, Β, Ο εἶναι ἐγγράψιμον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ.

255. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ τῶν Α καὶ Β φέρομεν ἀνὰ μίαν τέμνουσαν αὐτοὺς ΓΑΔ καὶ ΕΒΖ. Ἐάν τὰ Γ καὶ Ε εἶναι σημεῖα τοῦ ἑνὸς κύκλου, καὶ Δ καὶ Ζ τοῦ ἄλλου δείξατε ὅτι $\Gamma E \parallel \Delta Z$.

256. Ἐάν ἀπὸ σημείου Μ ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς μιᾶς γωνίας $\widehat{XOY}$, τὰ σημεῖα τομῆς ἐκάστης καθέτου μετὰ τὴν ἄλλην πλευράν, τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς πλευράς τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον Ο, εἶναι ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.

257. Ἐάν ΑΒΓΔ εἶναι τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ΒΕ, ΓΖ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΓΔ, ΑΒ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι $EZ \parallel \Delta\Delta$.

Β.

258. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ. Λαμβάνομεν δύο ἴσα τόξα $\widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta}$ μικρότερα τεταρτοκυκλίου καὶ σημεῖον Ε τοῦ τόξου $\widehat{A\Delta}$. Ἐάν αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΕ τέμνονται εἰς τὸ Ο, αἱ δὲ ΑΔ καὶ ΓΕ εἰς τὸ Ζ δείξατε ὅτι: α) τὸ τετράπλευρον ΑΕΖΟ εἶναι ἐγγράψιμον, β) τὸ Ο ἰσαπέχει ἀπὸ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ Ζ.

259. Δίδεται κύκλος κέντρου K και χορδή AB αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ ἄγουμεν χορδὰς $\Gamma\Delta$ καὶ ΓE , οὕτως ὥστε αὐταὶ νὰ τέμνουν τὴν χορδὴν AB εἰς τὰ H καὶ Z ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔEZH εἶναι ἐγγράψιμον.

260. Δείξατε ὅτι τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον παντὸς τριγώνου $AB\Gamma$ (δηλαδὴ τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὕψων τοῦ $AB\Gamma$) ἔχει ὡς διχοτόμους τὰ ὕψη τοῦ $AB\Gamma$.

261. Ἐκ τυχόντος σημείου M χορδῆς AB ἐνὸς κύκλου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία διέρχεται δι' αὐτοῦ. Ἐάν ἡ κάθετος αὕτη τέμνῃ τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὰ A καὶ B εἰς τὰ Γ καὶ Δ , δείξατε ὅτι $M\Gamma = M\Delta$.

262. Δείξατε ὅτι τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ἐνὸς τριγώνου ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς του κεῖνται ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

263. Ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπεζίου καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

264. Δίδεται κύκλος κέντρου K καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν $AB\Gamma$ καὶ ἐκ τοῦ A κάθετον ἐπὶ τὴν KA . Αἱ ἐφαπτομέναι ποὺ ἄγονται εἰς τὰ B καὶ Γ τέμνουν τὴν κάθετον ταύτην εἰς τὰ Δ καὶ E . Δείξατε ὅτι: α) τὰ τετράπλευρα $KBA\Delta$ καὶ $K\Gamma EA$ εἶναι ἐγγράψιμα β) $A\Delta = AE$.

265. Δίδονται δύο ἐφεξῆς καὶ ἴσαι γωνίαι $\widehat{XOY}$ καὶ $\widehat{XOZ}$ καὶ σημεῖον M ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{XOY}$. Ἐκ τοῦ M φέρομεν καθέτους $MA, MB, M\Gamma$ ἐπὶ τὰς Ox, Oy, Oz ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: α) τὰ σημεῖα M, A, B, Γ, O εἶναι ὁμοκυκλικά, β) $BA = B\Gamma$.

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

214. Ὅρισμός. Ἐν πολύγωνον καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (ἢ περιγράψιμον) τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ ἐφάπτονται (ἢ δύνανται νὰ ἐφάπτονται) ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ὁ κύκλος λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον.

215. Θεώρημα. Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἔν πολὺγωνον μὲ n πλευρὰς εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον εἶναι αἱ $n-1$ διχοτόμοι τῶν $n-1$ γωνιῶν τοῦ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἐστω τὸ πολὺγωνον $A_1A_2...A_n$ τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον κέντρου O (σχ. 213). Ἐπειδὴ ἐκάστη γωνία τοῦ πολυγώνου ἔχει πλευρὰς, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι ἐκάστη διχοτόμος γωνίας διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου (§ 201). Ἀρα ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία.

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἐστω ὅτι τοῦ πολυγώνου $A_1A_2...A_n$ αἱ $n-1$ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, ..., \widehat{A_{n-1}}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O . Ἐκ τοῦ O θεωροῦμεν τὰς καθέτους $OB_1, OB_2, ..., OB_n$ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου. Τὸ σημεῖον O , ὡς ἀνήκον εἰς τὰς $n-1$ διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, ..., \widehat{A_{n-1}}$, θὰ ἰσαπέχῃ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἐκάστης γωνίας, ἥτοι :

$$(1) \quad OB_1 = OB_2, \quad OB_2 = OB_3, ..., OB_{n-1} = OB_n.$$

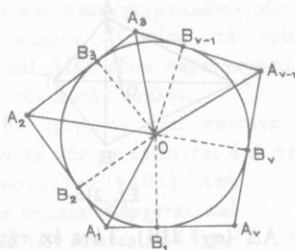
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἐπεταί ὅτι :

$$OB_1 = OB_2 = \dots = OB_n$$

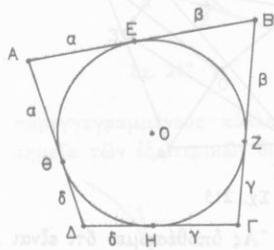
Ἐπομένως ἐὰν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον O καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ἀποστάσεων τούτων, ἔστω τὴν OB_1 , γράψωμεν κύκλον, οὗτος θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.

Πόρισμα. Κάθε τρίγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εὐρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του (ἐγκέντρον § 163).

216. Θεώρημα. Ἵνα ἓν τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του.



Σχ. 213



Σχ. 214

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ ἓν τετράπλευρον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O, R) καὶ ἔστωσαν E, Z, H καὶ Θ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν του μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 214). Τότε θὰ εἶναι (§ 201) :

$$AE = A\Theta = \alpha, \quad BE = BZ = \beta, \quad \Gamma Z = \Gamma H = \gamma \quad \text{καὶ} \quad \Delta H = \Delta\Theta = \delta.$$

Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(1) \quad AB + \Gamma\Delta = AE + BE + \Gamma H + \Delta H = \alpha + \beta + \gamma + \delta \quad \text{καὶ}$$

$$(2) \quad A\Delta + B\Gamma = A\Theta + \Delta\Theta + BZ + \Gamma Z = \alpha + \delta + \beta + \gamma$$

Τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) τὰ τελευταῖα μέλη εἶναι ἴσα, ἄρα καὶ τὰ πρῶτα θὰ εἶναι ἴσα, ἥτοι :

$$(3) \quad AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma.$$

Ἀντιστρόφως. Ἄν εἰς τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (3), θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

i) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $AB > A\Delta$. Τότε, ἡ σχέσις (3) γράφεται :

$$(4) \quad AB - A\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἐπεταί ὅτι εἶναι $B\Gamma > \Gamma\Delta$.

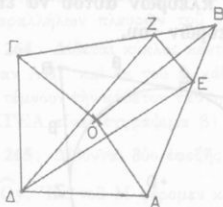
Ἐπὶ τῶν δύο μεγαλύτερων πλευρῶν AB καὶ $B\Gamma$ (σχ. 215) σχηματίζομεν τὰς διαφορὰς τῶν μελῶν τῆς σχέσεως (4), λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῶν τμή-

ματα $AE = AD$ και $\Gamma Z = \Gamma\Delta$ ἀντιστοίχως. Τότε τὰ τρίγωνα ΔDE και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσοσκελῆ, ἐνῶ ἡ σχέσις (4) γράφεται

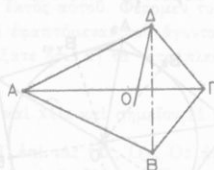
$$\begin{aligned} AB - AE &= B\Gamma - \Gamma Z & \eta \\ BE &= BZ \end{aligned}$$

Ἐξ αὐτῆς φαίνεται ὅτι και τὸ τρίγωνον BEZ είναι ίσοσκελές.

Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, θὰ είναι μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων DE , EZ , και ΔZ ἀντιστοίχως, λόγω τῶν ίσοσκελῶν τριγώνων, ἤτοι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΔEZ . Ἄρα (§ 158) θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O . Τότε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ τετράπλευρον είναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.



Σχ. 215



Σχ. 216

ii) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι είναι $AB = AD$ (σχ. 216). Τότε ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἔπεται ὅτι θὰ είναι και $\Gamma\Delta = B\Gamma$, συνεπῶς τὰ τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ίσοσκελῆ. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$, ὡς μεσοκάθετοι τοῦ αὐτοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $B\Delta$, συμπίπτουν μὲ τὴν $A\Gamma$. Ἡ διχοτόμος μιᾶς τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἔστω τῆς $\widehat{\Delta}$ τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ O και οὕτω αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O . Ἄρα τὸ τετράπλευρον είναι περιγράψιμον (§ 215).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

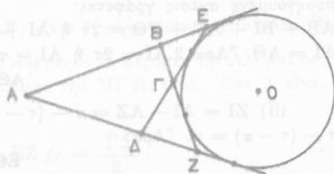
Α'.

266. Κάθε παραλληλόγραμμος περιγεγραμμένος περὶ κύκλον είναι ρόμβος.
267. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του ίσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτείνουσας και τῆς διαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.
268. Ἐὰν ἐν τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ μὲ βάσεις τὰς AB και $\Gamma\Delta$ είναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον κέντρου K , δείξατε ὅτι: α) τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο βάσεων είναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου και β) $B\widehat{K}\Gamma = 1^\circ$.
269. Ἐὰν ίσοσκελοὺς τραπέζιον ἡ διάμεσος ίσοῦται μὲ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, δείξατε ὅτι τοῦτο είναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.
270. Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο τρίγωνα εἰς τὰ ὅποια τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου του ἐφαπτῶνται μεταξύ των, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον είναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

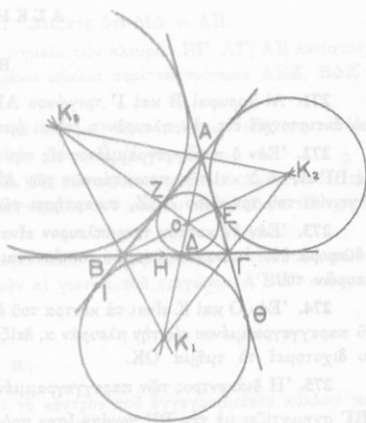
217. Όρισμός. "Εν πολύγωνον καλεῖται **παρεγγεγραμμένον** εἰς κύκλον τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τοῦ ἢ καὶ μερικαὶ τῶν πλευρῶν τοῦ (πάντως ὅχι ὅλαι), ἐφάπτωνται ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ὁ κύκλος καλεῖται **παρεγγεγραμμένος** εἰς τὸ πολύγωνον. Τὸ πολύγωνον δὲν περιβάλλει τὸν κύκλον, οὔτε περιέχεται ἐντὸς αὐτοῦ, δύναται δὲ νὰ εἴναι κυρτὸν ἢ μὴ κυρτὸν. Τὸ τετράπλευρον π.χ. ΑΒΓΔ (σχ. 217) εἶναι κυρτὸν καὶ παρεγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον κέντρου Ο, ἐνῷ τὸ ΑΕΓΖ εἶναι μὴ κυρτὸν καὶ παρεγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Ὁμοίως τὰ τρίωνα ΑΕΔ καὶ ΑΒΖ εἶναι παρεγγεγραμμένα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.



Σχ. 217

"Εν τρίγωνον ἔχει πάντοτε τρεῖς παρεγγεγραμμένους κύκλους, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα ὀρίζονται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ (§ 165). Ἀπὸ τὰ ἴδια σημεῖα διέρχεται καὶ ἀνὰ μία τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων. Ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος κέντρου K_1 (σχ. 218) εὐρίσκόμενος ἐντὸς τῆς γωνίας $\hat{A}$, καλεῖται **παρεγγεγραμμένος** εἰς τὴν γωνίαν $\hat{A}$ ἢ εἰς τὴν πλευρὰν α . Ὁμοίως οἱ κύκλοι κέντρων K_2 καὶ K_3 καλοῦνται **παρεγγεγραμμένοι** εἰς τὰς γωνίας $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ ἢ εἰς τὰς πλευρὰς β καὶ γ ἀντιστοίχως.



Σχ. 218

Τὰ κέντρα K_1, K_2, K_3 τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων καλοῦνται **παράκεντρα** (§ 165).

218. Θεώρημα. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἂν εἶναι Α, Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν α, β καὶ γ ἀντιστοίχως καὶ Η, Θ καὶ Ι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ εἰς τὴν πλευρὰν α παρεγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς πλευρᾶς α καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως, τότε εἶναι :

i) $AE = AZ = \tau - \alpha$ ii) $A\Theta = AI = \tau$ iii) $E\Theta = ZI = \alpha$
καὶ iv) $\Delta H = |\beta - \gamma|$ ὅπου $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι (σχ. 218):

$$(1) \quad AE = AZ, \quad BD = BZ, \quad \Gamma D = \Gamma E$$

ὡς ἐφαπτόμενα τμήματα ἀπὸ σημείου πρὸς κύκλον (§ 201). Τότε θὰ εἶναι καί:

i) $AZ + ZB + BD + D\Gamma + \Gamma E + EA = 2\tau$ καὶ λόγῳ τῶν σχέσεων (1) αὕτη γράφεται: $2(AZ + BD + \Delta\Gamma) = 2\tau$, ἢ $AZ + B\Gamma = \tau$, ἄρα $AZ = \tau - B\Gamma$ ἢ

$$AE = AZ = \tau - \alpha$$

'Ομοίως εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι $BD = BZ = \tau - \beta$ καὶ $\Gamma D = \Gamma E = \tau - \gamma$.

ii) $AB + BH + H\Gamma + \Gamma A = 2\tau$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BH = BI$ καὶ $H\Gamma = \Gamma\Theta$, ἢ προηγουμένη σχέσις γράφεται:

$$AB + BI + A\Gamma + \Gamma\Theta = 2\tau \quad \text{ἢ} \quad AI + A\Theta = 2\tau. \quad \text{'Αλλὰ εἶναι}$$

$$AI = A\Theta. \quad \text{'Αρα } 2AI = 2\tau \quad \text{ἢ} \quad AI = \tau \quad \text{ἢ}$$

$$A\Theta = AI = \tau.$$

iii) $ZI = AI - AZ = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$. 'Ομοίως εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι $E\Theta = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$. 'Αρα:

$$E\Theta = ZI = \alpha$$

iv) 'Εστω $\gamma > \beta$. Τότε θὰ εἶναι:

$$\Delta H = BD - BH = (\tau - \beta) - BI = (\tau - \beta) - (AI - AB) = (\tau - \beta) - (\tau - \gamma) = \gamma - \beta. \quad \text{'Εὰν ᾗτο } \gamma < \beta \text{ ὁμοίως θὰ ὑπελογίζετο ὅτι εἶναι } \Delta H = \beta - \gamma.$$

$$\text{Γενικῶς ἔχομεν } \Delta H = |\beta - \gamma|.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B'.

271. Αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ τριγώνου ABΓ, τὸ ἔγκεντρον αὐτοῦ καὶ τὸ παράκεντρον ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν α, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

272. 'Εὰν ὁ παρεγγεγραμμένος εἰς τὴν πλευρὰν α κύκλος τριγώνου ABΓ ἐφάπτεται τῆς BΓ εἰς τὸ Δ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν AB καὶ AΓ εἰς τὰ E καὶ Z, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΔEZ, συναρτήσει τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ABΓ.

273. 'Εὰν ἐν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς κύκλον, δεῖξτε ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του.

274. 'Εὰν O καὶ K εἶναι τὰ κέντρα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον ABΓ καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν πλευρὰν α, δεῖξτε ὅτι ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ τριγώνου διχοτομεῖ τὸ τμήμα OK.

275. 'Η διάκεντρος τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰς πλευράς β καὶ γ τριγώνου ABΓ σχηματίζει μὲ τὴν BΓ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$.

276. Τριγώνου ABΓ θεωροῦμεν τοὺς παρεγγεγραμμένους κύκλους εἰς τὰς πλευράς β καὶ γ. 'Εὰν οὗτοι ἐφάπτονται τῶν προεκτάσεων τῆς BΓ εἰς τὰ Δ καὶ E, δεῖξτε ὅτι εἶναι $\Delta E = \beta + \gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

A'.

277. Τρίγωνον ABΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Φέρομεν τὴν διάμετρον AΔ καὶ τὸ ὕψος ΓΕ. Δεῖξτε ὅτι εἶναι $B\Delta \parallel \Gamma E$.

278. Δεῖξτε ὅτι ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου, διτοχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τοῦ

ύψους και της διαμέτρου του περιγεγραμμένου περί το τρίγωνον κύκλου, που ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν.

279. Τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κέντρου O . Φέρομεν τὴν χορδὴν $\Gamma\Delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$. Ἄν H εἶναι τὸ ὀρθόκέντρον τοῦ τριγώνου δείξατε ὅτι εἶναι $AH = \Gamma\Delta$.

280. Δίδεται ἰσοπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐὰν Δ καὶ E εἶναι τὰ μέσα τῶν τόξων $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Gamma}$, δείξατε ὅτι ἡ χορδὴ ΔE τριχοτομεῖται ἀπὸ τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$.

281. Ἴσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$, ὅπου δὲν εὐρίσκεται τὸ A , φέρομεν τὴν AM καὶ ἐκ τοῦ B φέρομεν $BE \perp AM$, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν $M\Gamma$ εἰς τὸ Δ . Ἐὰν Z εἶναι τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$, δείξατε ὅτι εἶναι:

$$\alpha) MB = M\Delta, \quad \beta) EZ // = \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

282. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$. Θεωροῦμεν κύκλον, ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς B καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς AB καὶ $B\Gamma$ εἰς τὰ Δ καὶ E . Ἄλλος κύκλος διέρχεται διὰ τῶν σημείων Γ καὶ E καὶ τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z . Ἐὰν Θ εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν δύο κύκλων, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον $\Delta\Delta\Theta Z$ εἶναι ἐγγράψιμον.

283. Τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τοῦ μέσου M τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ ἄγομεν χορδὴν $M\Delta$ παράλληλον τῆς $A\Gamma$. Δείξατε ὅτι $M\Delta = AB$.

284. Ἐὰν Δ, E, Z εἶναι τρία τυχόντα σημεῖα τῶν πλευρῶν $B\Gamma, A\Gamma, AB$ ἀντιστοίχως τριγώνου $AB\Gamma$, δείξατε ὅτι οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι περὶ τὰ τρίγωνα $A\Delta Z, B\Delta Z$ καὶ $\Gamma\Delta E$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

285. Εἰς κάθε κυρτὸν τετράπλευρον, τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν του ἀνὰ τρεῖς, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

286. Ἐστω κύκλος κέντρου K καὶ $AB, \Gamma\Delta$ δύο κάθετοι χορδαί. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εἰς τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

287. Ἐὰν ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ κύκλος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἰς τὰ A', B', Γ' , νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$ συναρτήσει τῶν γωνιῶν $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Β'.

288. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐὰν K εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ Δ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τέμνει τὸν περιγεγραμμένον κύκλον, δείξατε ὅτι εἶναι $B\Delta = \Delta K$.

289. Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ κυρτὸν τραπέζιον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ τέμνονται εἰς τὸ E , αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ A καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ Z . Δείξατε ὅτι: α) $\widehat{E} = \widehat{Z}$ καὶ β) ἡ EZ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπέζιου.

290. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως, δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ μίαν πλευρὰν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου.

291. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως, δείξατε ὅτι τὰ

Ιχνη τῶν καθέτων, πού ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

292. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τῶν B καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ Δ . Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετα τμήματα ΔE , ΔZ , ΔH ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὸ ΔEZH εἶναι παραλληλόγραμμον.

293. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος καὶ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ἐλάσσονος τόξου $\widehat{B\Gamma}$. Δείξατε ὅτι $MA = MB + M\Gamma$.

294. Ἐφ' ἐκάστης πλευρᾶς ἐνὸς ἔγγραφίμου τετραπλεύρου ὡς χορδῆς, γράφομεν ἓνα κύκλον. Οἱ τέσσαρες οὗτοι κύκλοι, τεμνόμενοι ἀνὰ δύο διαδοχικοὶ ὀρίζουν τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα δεῖξατε ὅτι εἶναι ὁμοκυκλικά.

295. Εἰς τὸ ἄκρον A μιᾶς διαμέτρου AB κύκλου φέρομεν ἐφαπτομένην, ἣ ὁποία τέμνεται ἀπὸ τὴν προέκτασιν μιᾶς χορδῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ Δ . Εἰς τὴν πρόεκτασιν τῆς $A\Gamma$ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ A ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ) λαμβάνομεν τμήμα $AE = A\Delta$ καὶ ἀπὸ τὸ E φέρομεν παράλληλον τῆς AB , ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Z . Δείξατε ὅτι εἶναι $BZ = BA$.

296. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν πού σχηματίζουν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἔγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως, συναντοῦν δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

297. Ἀπὸ ἑσωτερικὸν σημεῖον M τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν καθέτους MH , MZ , $M\Theta$ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Ὁ κύκλος πού ὀρίζεται ἀπὸ τὰ H , Z , Θ τέμνει ἐκ δευτέρου τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τὰ H' , Z' , Θ' ἀντιστοίχως. Ἐὰν M' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τούτου, δεῖξατε ὅτι αἱ $M'H'$, $M'Z'$, $M'\Theta'$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

298. Ἐφ' ἐκάστης πλευρᾶς τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $AB\Gamma'$, $B\Gamma A'$, $\Gamma AB'$. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ εἶναι ἴσα, καὶ ὅτι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

299. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Δείξατε ὅτι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τῆς κορυφῆς A καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $AB\Gamma$ ὀρίζουν εὐθεῖαν, ἣ ὁποῖα διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$.

300. Ἐὰν O εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον $AB\Gamma$, H τὸ ὀρθόκεντρον καὶ M τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$, δεῖξατε ὅτι $AH = 2 \cdot OM$.

301. Ἄν ἡ διαγώνιος $A\Gamma$ ἔγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ εἶναι διάμετρος καὶ φέρωμεν τὰς $AE \perp BA$ καὶ $\Gamma Z \perp BA$, δεῖξατε ὅτι εἶναι $BE = \Delta Z$.

302. Εὐθεῖα τοῦ Euler. Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ὀρθόκεντρον H , τὸ κέντρον βάρους M καὶ τὸ περίκεντρον K κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, εἶναι δὲ $HM = 2 \cdot MK$.

303. Κύκλος τοῦ Euler (τῶν ἐννέα σημείων). Εἰς κάθε τρίγωνον, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, τὰ ἰχνη τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν τμημάτων πού συνδέουν τὸ ὀρθόκεντρον μετ' ἐκάστην κορυφὴν εἶναι ὁμόκυκλικά σημεῖα.

304. Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ Euler ἰσοῦται μετ' τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου, τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τοῦ Euler.

305. Δείξατε ὅτι αἱ ἀκτῖνες τοῦ εἰς τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθοῦ τριγώνου.

306. Ἡ εὐθεῖα πού διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον N τοῦ τμήματος AH , ἔνθα H εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν πού διέρχεται ἀπὸ τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν B καὶ Γ .

307. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος. Σχηματίζομεν: α)

τὸ ὀρθοκέν τριγώνων ΔΕΖ, β) τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' μὲ κορυφὰς τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέν-
τρου ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒΓ καὶ γ) τὸ τρίγωνον ΘΙΑ μὲ πλευρὰς τὰς ἐφαπτομένας
τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου εἰς τὰ Α, Β, Γ. Δείξατε ὅτι τὰ τρία ταῦτα
τρίγωνα ἔχουν πλευρὰς παραλλήλους.

308. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε ἐγγράψιμον τετράπλευρον, αἱ εὐθεῖαι ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὸ
μέσον ἐκάστης πλευρᾶς κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

309. Τὸ ἔγκεντρον καὶ τὰ τρία παράκεντρα παντὸς τριγώνου, ἀνὰ δύο ὀρίζουν ἐξ
εὐθύγραμμα τμήματα. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν τμημάτων τούτων κεῖνται ἐπὶ τοῦ περι-
γεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

310. Εἰς κάθε τρίγωνον δείξατε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις: $R_\alpha + R_\beta + R_\gamma = 4R + \rho$
ἐνθα $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων R ἡ ἀκτίς τοῦ περιγε-
γραμμένου καὶ ρ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

311. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^\circ$). Δείξατε ὅτι εἶναι:
α) $R_\beta + R_\gamma = 2R$ καὶ β) $R_\alpha = R_\beta + R_\gamma + \rho$.

312. Εὐθεῖα τοῦ Simson. Τὰ ἔχνη τῶν καθέτων, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον
τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου ἐπὶ τὰς πλευρὰς του, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

313. Ἐστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἄν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον
τοῦ κύκλου, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτό, διχοτομεῖ τὸ
τμήμα ΜΗ, ὅπου Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΑΒΓ.

314. Δείξατε ὅτι τὰ συμμετρικὰ ἐνὸς σημείου Μ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ
τρίγωνον ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης ἀπὸ τὸ ὀρθό-
κεντρον Η τοῦ τριγώνου καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ Simson ποὺ ἀντιστοιχεῖ
εἰς τὸ Μ.

315. Ἀπὸ σημεῖον Μ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τρίγωνον κύκλου, φέρομεν εὐθείας
ἴσον κεκλιμένας ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὰ τρία σημεῖα, κα-
τὰ τὰ ὁποῖα αὗται τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς τρεῖς πλευρὰς, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

316. Μὲ διαμέτρους τὰς χορδὰς ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἐνὸς κύκλου γράφομεν τρεῖς κύκλους,
οἱ ὅποιοι ἀνὰ δύο τέμνονται ἐκ δευτέρου εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Δείξατε ὅτι τὰ Δ, Ε, Ζ κεῖν-
ται ἐπ' εὐθείας.

317. Ἐστω ΑΒΓΔ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώ-
νιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται καθέτως εἰς τὸ Θ. Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς
τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι τὰς τέμνουν εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Ι ἀντιστοίχως.
Δείξατε ὅτι:

- α) Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΙ εἶναι ἐγγράψιμον,
- β) τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΙ εἶναι περιγράψιμον,
- γ) ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΕΖΗΙ διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν
τοῦ ΑΒΓΔ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Α' ΚΑΙ Β' ΒΙΒΛΙΟΥ

219. Ὅρισμοί. Γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται μία πρότασις, εἰς
τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἐν γεωμετρικὸν σχῆμα μὲ προκαθωρι-
σμένας ιδιότητες, ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων στοιχείων.

Λύσις ἢ ἐπιλύσις τοῦ γεωμετρικοῦ προβλήματος καλεῖται ὁ τρόπος (ἡ

διαδικασία), διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται ἡ κατασκευὴ τοῦ ζητουμένου σχήματος.

Γεωμετρικὴ λύσις ἐνὸς προβλήματος καλεῖται ἡ λύσις αὐτοῦ, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται διὰ μόνης τῆς χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, ἤτοι τοῦ **κανόνος** καὶ τοῦ **διαβήτου**.

Ἀπόδειξις τοῦ προβλήματος καλεῖται ἡ λογικὴ σειρὰ σκέψεων, ἡ ὁποία βασιζομένη ἐπὶ γνωστῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, μᾶς πείθει ὅτι τὸ κατασκευασθὲν σχῆμα ἔχει τὰ προκαθωρισμένα (δεδομένα) στοιχεῖα.

Διερεύνησις τοῦ προβλήματος καλεῖται ὁ ἔλεγχος τῶν συνθηκῶν, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ πληροῦν τὰ δεδομένα μόνον στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, οὕτως ὥστε τὸ πρόβλημα νὰ ἐπιδέχεται λύσιν.

Στοιχειώδη γεωμετρικὰ προβλήματα ἐπιλυόμενα διὰ μόνης τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

- i) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων.
- ii) Νὰ ἀχθῇ ἡμικυκλίω, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ ἀρχὴ καὶ ἓν σημεῖον τῆς.
- iii) Νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμήμα μὲ δεδομένα ἄκρα.

Διὰ μόνης τῆς χρήσεως τοῦ διαβήτου δύναται νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα :

Νὰ γραφῇ κύκλος μὲ δεδομένον κέντρον καὶ δεδομένην ἀκτῖνα.

Ἐπίσης ὁ διαβήτη δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ὡς μεταφορεὺς εὐθυγράμμων τμημάτων (διαστημόμετρον).

Αἱ ἀνωτέρω στοιχειώδεις γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ θὰ θεωροῦνται ὅπως δὴποτε γνωσταί. Διὰ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν καὶ μόνον, θὰ ἐπιτυγχάνωμεν τὰς γεωμετρικὰς λύσεις τῶν διαφορῶν προβλημάτων.

Ὁρισμένον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἐν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται μίαν τοῦλάχιστον γεωμετρικὴν λύσιν, ἢ ἐν πάσῃ περιπτώσει, πεπερασμένον πλῆθος λύσεων.

Ἀδύνατον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἐν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον δὲν ἐπιδέχεται γεωμετρικὴν λύσιν. Ἀδύνατα π.χ. προβλήματα εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

- i) Νὰ τριχοτομηθῇ τυχούσα γωνία.
- ii) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον μὲ πλευρὰς 2α, 3α, 6α.

Ἀόριστον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἐν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος γεωμετρικῶν λύσεων. Ἀόριστον πρόβλημα εἶναι π.χ. τὸ πρόβλημα «νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη ἀπὸ ἓν δεδομένον σημεῖον».

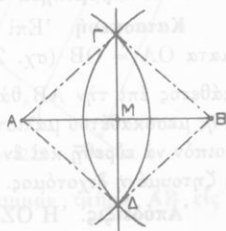
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

220. Πρόβλημα 1. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μεσοκάθετος δεδομένου εὐθυγράμμου τμήματος AB.

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν δύο σημεῖα τῆς ζητουμένης μεσοκα-

θέτου. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὴν ιδιότητά της, ὅτι τὰ σημεῖα της καὶ μόνον αὐτὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τμήματος. Μὲ κέντρον λοιπὸν τὸ Α καὶ ἀκτῖνα $R > \frac{AB}{2}$ γράφομεν κύκλον (σχ. 219). Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα R. Οἱ δύο κύκλοι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ἡ ζητούμενη μεσοκάθετος.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι τέμνονται, διότι ἐκ τῆς σχέσεως $R > \frac{AB}{2}$ ἔπεται $AB < 2R$ ἢ $0 < AB < 2R$ ἢ $R - R < AB < R + R$, ἥτοι ἡ διάκεντρος αὐτῶν περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων των. Διὰ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων Γ καὶ Δ ἔχομεν τότε : $GA = GB = R$ καὶ $DA = DB = R$. Ἀρα τὰ Γ καὶ Δ ἀνήκουν εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AB, τὴν ὁποίαν καὶ ὀρίζουν.



Σχ. 219

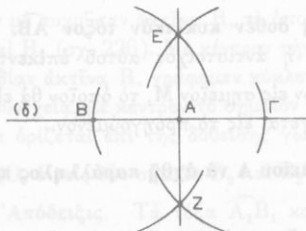
Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

221. Πρόβλημα 2. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτοῦ.

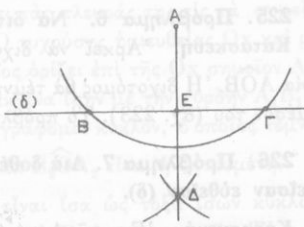
Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον. Ἡ μεσοκάθετος ΓΔ τέμνει τὸ τμήμα AB εἰς σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον του (σχ. 219).

222. Πρόβλημα 3. Δοθείσης εὐθείας (δ) καὶ σημείου Α αὐτῆς, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν (δ).

Κατασκευὴ. Ἐκατέρωθεν τοῦ Α ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ) λαμβάνομεν δύο σημεῖα Β καὶ Γ. οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AB = AG$ (σχ. 220). Τότε τὸ Α εἶναι



Σχ. 220



Σχ. 221

μέσον τοῦ BG. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος BG, ἡ ὁποία θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ Α. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 1.

223. Πρόβλημα 4. Δοθείσης εὐθείας (δ) νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν διὰ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

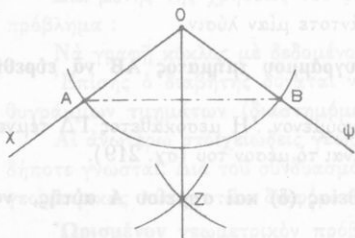
Κατασκευή. Μὲ κέντρον τὸ A γράφομεν κύκλον μὲ μόνην ἀπαιτήσιν αὐτὸς νὰ τέμνῃ εἰς δύο σημεῖα B καὶ Γ τὴν εὐθεῖαν (δ) (τοῦτο πάντοτε εἶναι δυνατόν). Ἦδη τὸ A εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος $B\Gamma$ (σχ. 221). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ ἓν δεύτερον σημεῖον Δ αὐτῆς (πρόβλημα 1). Ἡ $A\Delta$ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) .

224. Πρόβλημα 5. Νὰ διχοτομηθῇ δοθεῖσα γωνία $\widehat{XOY}$.

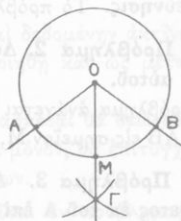
Κατασκευή. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς Ox καὶ Oy λαμβάνομεν δύο ἴσα τμήματα $OA = OB$ (σχ. 222). Τότε, τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB , ἡ μεσοκάθετος ἐπὶ τὴν AB θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τοῦ $\widehat{AOB}$ (§ 112). Τῆς μεσοκαθέτου μάλιστα αὐτῆς γνωρίζομεν καὶ ἓν σημεῖον τῆς, τὸ O . Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ ἓν δεύτερον σημεῖον τῆς Z (πρόβλημα 1). Ἡ AZ εἶναι ἡ ζητούμενη διχοτόμος.

Ἀπόδειξις. Ἡ OZ εἶναι μεσοκάθετος τῆς βάσεως AB τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB , ἄρα καὶ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις.



Σχ. 222



Σχ. 223

225. Πρόβλημα 6. Νὰ διχοτομηθῇ δοθὲν κυκλικὸν τόξον $\widehat{AB}$.

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ διχοτομηθῇ ἡ ἀντίστοιχος αὐτοῦ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AOB}$. Ἡ διχοτόμος θὰ τέμνῃ τὸ τόξον εἰς σημεῖον M , τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ μέσον του (σχ. 223). Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

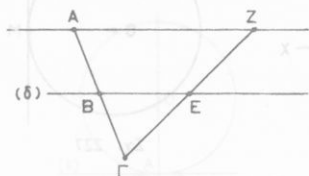
226. Πρόβλημα 7. Διὰ δοθέντος σημείου A νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) .

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ A φέρομεν τυχούσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν (δ) εἰς τὸ B καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Γ , τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $B\Gamma = BA$ (σχ. 224). Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν (δ) εἰς τὸ E καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $EZ = E\Gamma$. Ἡ AZ εἶναι ἡ ζητούμενη παράλληλος.

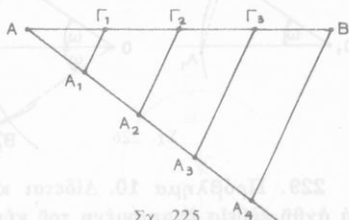
Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ A . Κατόπιν παρατη-

ροῦμεν ὅτι τοῦ τριγώνου ΓΑΖ τὰ σημεῖα Β καὶ Ε εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΓΑ καὶ ΓΖ ἐκ κατασκευῆς. Ἄρα θὰ εἶναι $AZ // BE$.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις, ἐφ' ὅσον τὸ Α δὲν ἀνήκει εἰς τὴν (δ).



Σχ. 224



Σχ. 225

227. Πρόβλημα 8. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα AB εἰς ν ἴσα τμήματα.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τοῦ τμήματος AB φέρομεν τυχούσαν ἡμιευθεῖαν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖα $A_1, A_2, \dots, A_n$, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ (σχ. 225). Οὕτω τὸ τμήμα AA_n εἶναι διηρημένον εἰς ν ἴσα τμήματα. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BA_n (εἰς τὸ σχῆμα εἶναι $n = 4$) καὶ ἐκ τῶν διαιρετικῶν σημείων $A_1, A_2, A_3, \dots$, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν BA_n . Αὗται τέμνουν τὸ δοθὲν τμήμα εἰς τὰ $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$ ἀντιστοίχως, τὰ ὅποια εἶναι τὰ ζητούμενα διαιρετικά σημεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$, ἔπεται ὅτι, (§ 157) θὰ εἶναι καὶ $A\Gamma_1 = \Gamma_1\Gamma_2 = \dots = \Gamma_{n-1}B$.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται πάντοτε μίαν λύσιν.

228. Πρόβλημα 9. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθείσαν γωνίαν ω.

Κατασκευή. Καθιστῶμεν τὴν δοθείσαν γωνίαν ω ἐπίκεντρον γράφοντες τόξον μὲ τυχούσαν ἀκτῖνα R, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευράς της εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1 (σχ. 226). Μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν O τυχούσης ἡμιευθείας Ox καὶ μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα R, γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος ὀρίζει ἐπὶ τῆς Ox σημεῖον A_2 . Ἐν συνεχείᾳ, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον A_2 καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν A_1B_1 ἢ ὅποια ὀρίζεται ἐπὶ τῆς δοθείσης γωνίας ω, γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὸν (O, R) εἰς δύο σημεῖα B_2 καὶ B_2' . Ἡ γωνία $B_2\hat{O}A_2$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

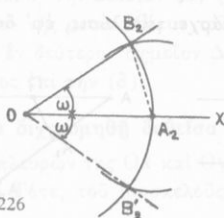
Ἀπόδειξις. Τὰ τόξα $\widehat{A_1B_1}$ καὶ $\widehat{A_2B_2}$ εἶναι ἴσα ὡς τόξα ἴσων κύκλων εἰς τὰ ὅποια ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαὶ A_1B_1 καὶ A_2B_2 ἐκ κατασκευῆς. Τότε αἱ γωνίαι ω καὶ $A_2\hat{O}B_2$ εἶναι ἴσαι ὡς ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσων κύκλων βαίνουσαι εἰς ἴσα τόξα.

Διερεύνησις. Ἡ γωνία $A_2\hat{O}B_2$ δὲν ἀποτελεῖ μίαν δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος, διότι εἶναι συμμετρικὴ τῆς $A_2\hat{O}B_2$ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον OA_2 .

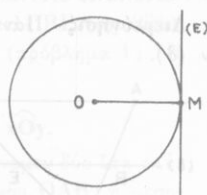
“Αρα είναι ίση πρὸς αὐτήν. Κατόπιν τούτου τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν μόνον λύσιν.



Σχ. 226



Σχ. 227



229. Πρόβλημα 10. Δίδεται κύκλος (O, R) και σημείον M αὐτοῦ. **Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημείον M .**

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν $(ε)$ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OM εἰς τὸ σημείον M . Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 3. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι προφανής. Λύσις ὑπάρχει πάντοτε μία (σχ. 227).

230. Πρόβλημα 11. Δίδεται εὐθεῖα $(ε)$ καὶ σημείον A αὐτῆς. **Νὰ γραφῇ κύκλος δοθείσης ἀκτίνος R ἐφαπτόμενος τῆς $(ε)$ εἰς τὸ A .**

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ σημείου A φέρομεν εὐθεῖαν $(δ)$ κάθετον ἐπὶ τὴν $(ε)$ καὶ ἐπ’ αὐτῆς λαμβάνομεν σημείον O τοιοῦτον, ὥστε $OA = R$. Ὁ κύκλος μὲ κέντρον O καὶ ἀκτίνα R εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξις. Πράγματι εἶναι ὁ ζητούμενος διότι ἔχει ἀκτίνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν R , ἐφάπτεται δὲ καὶ τῆς εὐθείας $(ε)$ εἰς τὸ σημείον A , διότι ἡ ἀκτίς τοῦ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $(ε)$ (σχ. 228).

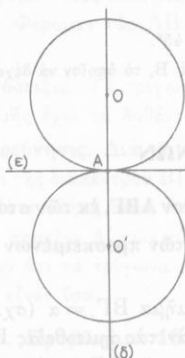
Διερεύνησις. Δυνάμεθα ἐπὶ τῆς $(δ)$ νὰ λάβωμεν καὶ δεύτερον σημεῖον O' τοιοῦτον ὥστε $O'A = R$, ὅπου τὸ A νὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος OO' . Ὁ κύκλος (O', R) πληροῦ καὶ αὐτὸς τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, ἐπομένως ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα χαρακτηρίζεται ὡς πρόβλημα θέσεως καὶ ὄχι ὡς πρόβλημα μεγέθους. Διότι ἔπρεπε, γνωστὸς κύκλος ἀκτίνος R , νὰ τοποθετηθῇ εἰς κατάλληλον θέσιν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $(ε)$. Δι’ αὐτὸ οἱ δύο κύκλοι κέντρων O καὶ O' , θεωροῦνται δύο λύσεις τοῦ προβλήματος, διότι, παρ’ ὅτι εἶναι ἴσοι, ἐν τούτοις διαφέρει ἡ τοποθέτησις των ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $(ε)$.

231. Πρόβλημα 12. **Νὰ κατασκευασθῇ τόξον μὲ δεδομένα ἄκρα A , καὶ B , τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται δοθεῖσαν γωνίαν $ω$.**

Κατασκευή. Εἰς τὸ ἐν ἄκρον τοῦ τμήματος AB , ἔστω εἰς τὸ B , κατασκευάζομεν ἡμιευθεῖαν Bx , ἥ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τοῦ AB γωνίαν $ω$. Εἰς τὸ σημείον B φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Bx καὶ τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AB , αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι ὀρίζουν σημεῖον O . Μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα τὴν OB γράφομεν τόξον $\widehat{A\Gamma B}$, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας $ω$. Τὸ τόξον τοῦτο μὲ ἄκρα τὰ A καὶ B εἶναι τὸ ζητούμενον (σχ. 229).

Ἀπόδειξις. Ἡ ἡμιευθεῖα Bx εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (O, OB) ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος OB αὐτοῦ καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ω , ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς AB καὶ τῆς ἐφαπτομένης Bx , εἶναι ἴση μετὴν ἐγγεγραμμένην εἰς τὸ τόξον γωνίαν (§ 205).



Σχ. 228



Σχ. 229

Διερεύνησις. Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα τὴν AB μᾶς ἐξασφαλίζει καὶ ἐν ἄλλο τόξον $\widehat{AB}$ ἴσον μετὸ πρῶτον καὶ μετὰ αὐτὰ ἄκρα, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον O' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ O ὡς πρὸς τὴν AB . Πάντοτε ὑπάρχουν τὰ δύο ταῦτα τόξα ἐφ' ὅσον ἡ γωνία ω εἶναι κυρτή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A' .

318. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ εὐθεῖα (ϵ) . Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ϵ) σημεῖον M ἰσαπέχον ἐκ τῶν A καὶ B .
319. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ α .
320. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ διαγώνιος δ .
321. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ λ .
322. Δίδεται κύκλος μετὰ ἄγνωστον κέντρον καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον του.
323. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ εὐθεῖα (ϵ) . Νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $AB\Gamma$ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (ϵ) .
324. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$.
325. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$.
326. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα $B\Gamma$ καὶ εὐθεῖα (ϵ) . Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ϵ) σημεῖον A , οὕτως ὥστε τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ νὰ ἔχῃ ἐκ τῆς κορυφῆς A δεδομένον ὕψος u .
327. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$. Νὰ εὑρεθῇ ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας δεδομένην ἀπόστασιν α .

328. Δεδομένον εὐθύγραμμον τμήμα AB νὰ διαιρεθῇ εἰς 5 ἴσα τμήματα.
329. Δίδεται γωνία $\widehat{XOY}$. Ἐκ τῆς κορυφῆς O νὰ ἀχθῇ ἡμιευθεῖα Oz , τοιαύτη ὥστε ἡ Oy νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{XOz}$.
330. Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (O, R) , παράλληλος πρὸς δοθείσαν εὐθεῖαν (δ) .
331. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία i) 60° , ii) 30° , iii) 45° .
332. Νὰ κατασκευασθῇ τόξον μὲ δεδομένα ἄκρα A καὶ B , τὸ ὅποιον νὰ δέχεται γωνίαν 45° .

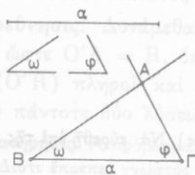
ΑΠΛΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

232. Πρόβλημα 13. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐκ τῶν στοιχείων του $\alpha, \widehat{B} = \omega$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \varphi$ (ἥτοι ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν).

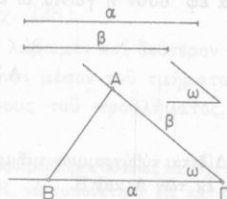
Κατασκευή. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμήμα $B\Gamma = \alpha$ (σχ. 230). Μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ καὶ μὲ μίαν πλευρὰν τὰς ἡμιευθεῖας $B\Gamma$ καὶ ΓB ἀντιστοίχως κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $B\Gamma$ γωνίας ἴσας μὲ ω καὶ φ ἀντιστοίχως. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται εἰς σημεῖον A . Τότε τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον διότι, ἐκ κατασκευῆς, ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega + \varphi < 2L$.



Σχ. 230



Σχ. 231

233. Πρόβλημα 14. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του α, β καὶ $\widehat{\Gamma} = \omega$ (ἥτοι ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας).

Κατασκευή. Μὲ κορυφὴν σημεῖον Γ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς λαμβάνομεν τμήματα $\Gamma B = \alpha, \Gamma A = \beta$ καὶ φέρομεν τὴν AB . Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον (σχ. 231).

Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι, ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega < 2L$.

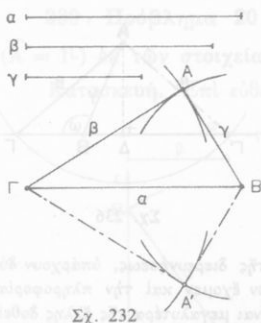
234. Πρόβλημα 15. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του α , β καὶ γ , (ἥτοι ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν του).

Κατασκευή. Ἐπὶ εὐθείας τινος λαμβάνομεν τμήμα $B\Gamma' = \alpha$ (σχ. 232) καὶ γράφομεν τοὺς κύκλους (B, γ) καὶ (Γ, β) , οἱ ὁποῖοι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον A . Φέρομεν τὰς AB καὶ $A\Gamma$. Τότε τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

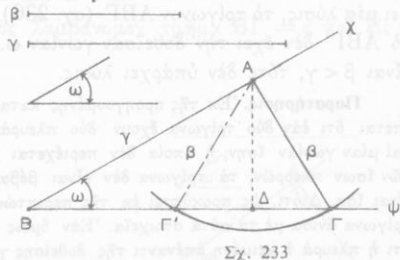
Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ τέμνονται οἱ δύο κύκλοι εἰς τὸ σημεῖον A μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου $B\Gamma$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ (§ 115) νὰ εἶναι $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$. Ἡ συνθήκη αὕτη πάντοτε μᾶς ἐξασφαλίζει μίαν μόνον λύσιν. Διότι τὸ δεύτερον σημεῖον A' τῶν κύκλων δὲν δίδει δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος, δεδομένου ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B\Gamma$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν $B\Gamma$ καὶ ἄρα εἶναι ἴσα.

235. Πρόβλημα 16. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδονται αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ καὶ ἡ γωνία $\widehat{B} = \omega$, ποὺ κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν.



Σχ. 232



Σχ. 233

Κατασκευή. Μὲ κορυφὴν τὸ B κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{xBy} = \omega$ καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς Bx λαμβάνομεν τμήμα $BA = \gamma$ (σχ. 233). Μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτίνα β γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν By εἰς τὸ σημεῖον Γ . Φέρομεν τὴν $A\Gamma$ καὶ τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

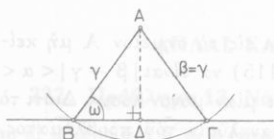
Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Θεωροῦμεν τὴν κάθετον AD ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν By . Τὸ τόξον (A, β) διὰ νὰ τέμνῃ τὴν By , πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\beta \geq AD$. Διακρίνομεν τὰς ἐξῆς περιπτώσεις :

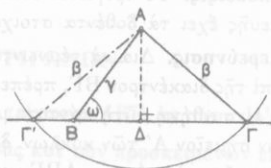
i) Ἐὰν εἶναι $\omega < 1^\circ$ καὶ $\beta = AD$, τότε τὸ τόξον (A, β) ἐφάπτεται τῆς By εἰς τὸ Δ καὶ τότε τὸ Γ ταυτίζεται μὲ τὸ Δ . Ὑπάρχει λοιπὸν μία λύσις, ἥτοι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Delta$.

ii) 'Εάν είναι $\omega < 1^\circ$ καὶ $AD < \beta < \gamma$ (σχ. 233), τότε τὸ τόξον (Α, β) τέμνει τὴν By εἰς τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Γ' καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν δύο τρίγωνα διάφορα ἀλλήλων, τὰ ABΓ καὶ ABΓ', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ δοθέντα στοιχεῖα. Ἄρα ἔχομεν δύο λύσεις.

iii) 'Εάν είναι $\omega < 1^\circ$ καὶ $\beta = \gamma$ τότε ὑπάρχει μία λύσις μόνον, τὸ τρίγωνον ABΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελὲς ($AB = AG$) (σχ. 234).



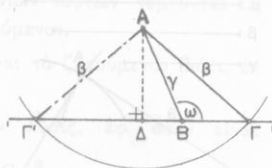
Σχ. 234



Σχ. 235

iv) 'Εάν είναι $\omega < 1^\circ$ καὶ $\beta > \gamma$, τότε ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἥτοι τὸ τρίγωνον ABΓ (σχ. 235), διότι τὸ τρίγωνον ABΓ' δὲν ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω , ἀλλὰ τὴν παραπληρωματικὴν της.

v) 'Εάν είναι $\omega \geq 1^\circ$ καὶ $\beta > \gamma$, τότε ὑπάρχει μία λύσις, τὸ τρίγωνον ABΓ (σχ. 236), διότι τὸ ABΓ' δὲν ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . 'Εάν είναι $\beta < \gamma$, τότε δὲν ὑπάρχει λύσις.



Σχ. 236

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς ἔπεται ὅτι ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, ἡ ὁποία δὲν περιέχεται μεταξὺ τῶν ἴσων πλευρῶν, τὰ τρίγωνα δὲν εἶναι βέβαιον ὅτι εἶναι ἴσα. Διότι, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς περιπτώσεως ii τῆς διερευνήσεως, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα ἄνισα μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα. Ἐὰν ὅμως ἐπὶ πλέον ἔχομεν καὶ τὴν πληροφορίαν ὅτι ἡ πλευρὰ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς δοθείσης γωνίας εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἄλλης δοθείσης πλευρᾶς (περίπτώσεις iv καὶ v), αἰρεται ἡ ἀβεβαιότης καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διότι ἓνα μόνον τρίγωνον ὑπάρχει μὲ τὰ στοιχεῖα αὐτά.

Συμπληρωματικῶς ἐπομένως δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ ἓν ἀκόμη κριτήριον ἰσότητος δύο τριγώνων, τὸ ἑξῆς:

Δύο τρίγωνα ABΓ καὶ A'B'Γ' εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχουν $AG = A'G' = \beta$, $AB = A'B' = \gamma$, $\widehat{B} = \widehat{B}' = \omega$ καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει $\beta \geq \gamma$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

236. Πρόβλημα 17. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ABΓ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων του β καὶ γ.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 14 § 233 καὶ ἡ λύσις του θεωρεῖται γνωστὴ.

237. Πρόβλημα 18. Νά κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ α καὶ β .

Κατασκευή. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $A\gamma$ ὀρθῆς γωνίας $\chi\hat{A}\gamma$ λαμβάνομεν τμήμα $A\Gamma = \beta$ (σχ. 237). Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτίνα α γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $A\chi$ εἰς σημεῖον B . Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀποδείξεις. Πράγματι τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Ὑπάρχει πάντοτε μία λύσις ἐφ' ὅσον εἶναι $\alpha > \beta$.

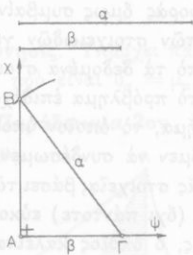
238. Πρόβλημα 19. Νά κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ β καὶ $\widehat{\Gamma} = \omega$.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 13 § 232 καὶ ἡ λύσις τοῦ θεωρεῖται γνωστή.

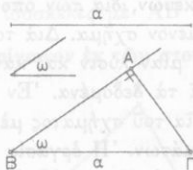
Παρατήρησις. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἀνάγεται καὶ ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ β καὶ $\widehat{B} = \varphi$. Διότι τότε εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ γωνία $\widehat{\Gamma} = 1^\circ - \varphi$.

239. Πρόβλημα 20. Νά κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ α καὶ $\widehat{B} = \omega$.

Κατασκευή. Ἐπὶ εὐθείας τινος λαμβάνομεν τμήμα $B\Gamma = \alpha$ καὶ εἰς τὸ



Σχ. 237



Σχ. 238

ἄκρον B κατασκευάζομεν γωνίαν ω μὲ μίαν πλευρὰν τὴν $B\Gamma$ (σχ. 238). Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον A . Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀποδείξεις. Πράγματι τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega < 1^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

333. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ:

i) $B\Gamma = \alpha$, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$

ii) $\widehat{B\Gamma} = \alpha$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{\Gamma} = \omega$ (διερεύνησις).

334. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του:

i) $AB = \lambda$, $B\Gamma = 2\lambda$, $\widehat{B} = 75^\circ$

ii) $AB = \frac{3\lambda}{2}$, $B\Gamma = \frac{4\lambda}{3}$, $\widehat{B} = 45^\circ$, ὅπου λ εἶναι δεδομένον τμήμα.

335. Δεδομένων τῶν τμημάτων λ καὶ μ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του:

i) $\alpha = \frac{5\lambda}{4}$, $\beta = 2\lambda$, $\gamma = \frac{3\lambda}{2}$

ii) $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = \mu$ (διερεύνησις).

336. Δεδομένων τῶν τμημάτων λ καὶ μ νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1L$) ἐκ τῶν στοιχείων:

i) $\beta = 3\lambda$, $\gamma = \frac{5\lambda}{3}$

ii) $\alpha = 2\lambda$, $\beta = 3\mu$.

iii) $\beta = 4\lambda$, $\widehat{\Gamma} = 15^\circ$.

iv) $\alpha = 2\lambda$, $\widehat{B} = 75^\circ$

240. Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος Κάθε γεωμετρικὴ κατασκευὴ θὰ θεωρηθῇ δυνατὴ ἐφ' ὅσον αὕτη ἀνάγεται εἰς τὰς ἐκτεθείσας προηγουμένως στοιχειώδεις γεωμετρικὰς κατασκευάς. Πολλὰς φορές ὅμως συμβαίνει νὰ εἶναι δύσκολον νὰ ἀνακαλύψωμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, διὰ τῶν ὁποίων θὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα. Διὰ τοῦτο θεωροῦμεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τοῦλάχιστον μίαν λύσιν καὶ κατασκευάζομεν ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι πληροῖ τὰ δεδομένα. Ἐν συνεχείᾳ προσπαθοῦμεν νὰ συνδέσωμεν τὰ βασικὰ στοιχεῖα τοῦ σχήματος μὲ τὰ δεδομένα εἰς ἡμᾶς στοιχεῖα, βάσει τῶν γνωστῶν θεωρημάτων. Ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι συνήθως (ὅχι πάντοτε) εὐκολωτέρα καὶ καλεῖται ἀνάλυσις. Ὁ ἀντίστροφος δρόμος τῆς, ὃ ὁποῖος καλεῖται σύνθεσις, εἶναι αὐτὸς ποὺ θὰ μᾶς ὡδηγήσῃ ἀπὸ τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα.

Διὰ εἶναι δυνατόν ὅμως νὰ συμβῇ αὐτό, θὰ πρέπει αἱ συνθήκαι, αἱ ὁποῖαι μᾶς ὡδηγοῦν ἀπὸ τὸ ζητούμενον σχῆμα εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, νὰ εἶναι ἀντιστρεπταί, ἥτοι νὰ εἶναι ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναί συνθήκαι. Ἐὰν τοῦτο διαπιστοῦται ἐκάστοτε κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, τότε ἡ ἀπόδειξις θὰ ᾔτο λογικῶς περιττὴ. Ἐπειδὴ ὅμως, συνήθως δὲν εἶναι εὐκολον νὰ ἐλέγχωμεν, ἐὰν αἱ συνθήκαι, αἱ ὁποῖαι ὡδηγοῦν ἀπὸ τὸ ζητούμενον σχῆμα εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἶναι ἱκαναί, διὰ τοῦτο ἐργαζόμεθα εἰς τὴν ἀνάλυσιν μόνον μὲ ἀναγκαίαις συνθήκας καὶ ἐν συνεχείᾳ, μετὰ τὴν σύνθεσιν, εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἀπόδειξις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐπεταὶ ὅτι ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἡ μέθοδος τῆς ἀναζητήσεως

τοῦ τρόπου ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος, ἐφαρμόζεται δὲ ἐπιτυχῶς, ὅχι μόνον εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευάς, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς ἀποδείξεις θεωρημάτων τῆς γεωμετρίας, γενικώτερον δὲ καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν.

‘Η ἀξία τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, ὡς μεθόδου ἀναζητήσεως, θὰ φανῇ μὲ τὰ ἐπόμενα παραδείγματα.

241. Παράδειγμα 1ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ α , μ_α , ν_α .

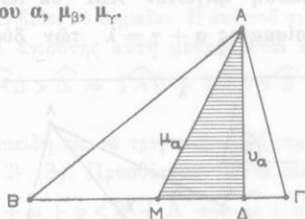
‘Ανάλυσις. Ἐστω $AB\Gamma$ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, $B\Gamma$ ἡ δοθεῖσα πλευρὰ (βάσις), AM ἡ δοθεῖσα διάμεσος καὶ AD τὸ δοθὲν ὕψος (σχ. 239). Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ADM δύναται ἐξ ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ, διότι εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα AM καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ AD . Οὕτως ἐντοπίζεται ἡ κορυφὴ A τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ θὰ ἀναζητηθοῦν ἐπὶ τῆς εὐθείας MD ἐκατέρωθεν τοῦ M εἰς ἀπόστασιν $\alpha/2$.

Σύνθεσις - Κατασκευὴ. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ADM μὲ $AM = \mu_\alpha$ καὶ $AD = \nu_\alpha$ καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ M ἐπὶ τῆς εὐθείας MD λαμβάνομεν τμήματα $MB = MG = \frac{\alpha}{2}$. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

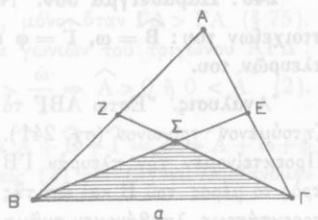
‘Απόδειξις. Εἶναι προφανὲς ὅτι τοῦτο ἔχει τὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἦτοι πλευρὰν $B\Gamma = BM + MG = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, διάμεσον $AM = \mu_\alpha$ καὶ ὕψος $AD = \nu_\alpha$.

Διερεύνησις. Ὑπάρχει πάντοτε μία λύσις, ἐφ’ ὅσον εἶναι $\nu_\alpha \leq \mu_\alpha$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ εἶναι $\nu_\alpha = \mu_\alpha$, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $AB = A\Gamma$.

242. Παράδειγμα 2ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ α , μ_β , μ_γ .



Σχ. 239



Σχ. 240

‘Ανάλυσις. Ἐστω $AB\Gamma$ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, $B\Gamma = \alpha$ ἡ δοθεῖσα πλευρὰ, $BE = \mu_\beta$ καὶ $GZ = \mu_\gamma$ αἱ δύο διάμεσοι αὐτοῦ καὶ Σ τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν (σχ. 240). Εἰς τὸ τρίγωνον ΣBG εἶναι γνωστὰ τὰ στοιχεῖα $B\Gamma = \alpha$, $\Sigma B = \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} \mu_\beta$ καὶ $\Sigma G = \frac{2}{3} GZ = \frac{2}{3} \mu_\gamma$. Τότε αὐτὸ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἐφ’ ὅσον γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του.

Σύνθεσις - Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΣΒΓ μὲ πλευρὰς $BΓ = \alpha$, $\Sigma B = \frac{2}{3} \mu_\beta$, $\Sigma\Gamma = \frac{2}{3} \mu_\gamma$. Προεκτείνομεν τὴν ΣΒ ἀπὸ τὸ ἄκρον Σ καὶ εἰς τὴν προέκτασίν της λαμβάνομεν τμήμα $\Sigma E = \frac{\Sigma B}{2} = \frac{1}{3} \mu_\beta$. Φέρομεν τὴν ΓΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $EA = EG$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τοῦτο ἔχει $BΓ = \alpha$. Ἡ ΒΕ ἔχει μῆκος $BE = B\Sigma + \Sigma E = \frac{2}{3} \mu_\beta + \frac{1}{3} \mu_\beta = \mu_\beta$ καὶ εἶναι ἐκ κατασκευῆς διάμεσος, διότι ἐλήφθη $EA = EG$. Ἡ εὐθεῖα ΣΓ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Τὸ σημεῖον Σ τῆς διαμέσου ΒΕ, ποῦ ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΒΕ, εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου (§ 162). Συνεπῶς εἶναι σημεῖον καὶ τῆς ἐκ τοῦ Γ διαμέσου. Ἀρα ἡ ΓΖ εἶναι διάμεσος, ἐπὶ πλέον δὲ εἶναι $\Gamma\Sigma = \frac{2}{3} \mu_\gamma$, ἄρα $\Gamma Z = \mu_\gamma$, διότι τὸ Σ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου.

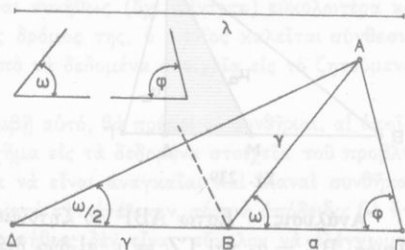
Διερεύνησις. Διὰ νὰ ὑπάρχη μία λύσις πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχη τὸ τρίγωνον ΣΒΓ. Ἡ συνθήκη ποῦ ἐξασφαλίζει τὴν ὑπαρξιν τοῦ ΣΒΓ εἶναι (§ 115).

$$\left| \frac{2}{3} \mu_\beta - \frac{2}{3} \mu_\gamma \right| < \alpha < \frac{2}{3} \mu_\beta + \frac{2}{3} \mu_\gamma \Leftrightarrow$$

$$|\mu_\beta - \mu_\gamma| < \frac{3}{2} \alpha < \mu_\beta + \mu_\gamma$$

243. Παράδειγμα 3ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του: $\widehat{B} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \gamma = \lambda$ τῶν δύο πλευρῶν του.

Ἀνάλυσις. Ἐστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον (σχ. 241). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα $B\Delta = BA = \gamma \Rightarrow \Gamma\Delta = \alpha + \gamma = \lambda$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἰσοσκελὲς $\Rightarrow$



$$(1) \quad \widehat{B\Delta A} = \widehat{B\hat{A}\Delta}$$

Σχ. 241

Ἡ γωνία $\widehat{B} = \omega$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ, εἶναι $\omega = \widehat{B\Delta A} + \widehat{B\hat{A}\Delta}$. Ἡ τελευταία, λόγῳ τῆς σχέσεως (1)

γράφεται $\omega = 2 \cdot \widehat{B\Delta A} \Rightarrow \widehat{B\Delta A} = \frac{\omega}{2}$. "Αρα τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δύναται ἐξ

ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ $\Gamma\Delta = \lambda$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ $\widehat{\Delta} = \frac{\omega}{2}$.

Σύνθεσις - Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΓΔ (§ 232) μὲ τὰ προαναφερθέντα στοιχεῖα καὶ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος πλέον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἐντοπισμὸν τῆς ἀγνώστου κορυφῆς Β. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ πρέπει νὰ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ κορυφή Β πρέπει νὰ εὐρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκάθετου τοῦ τμήματος ΑΔ. Φέρομεν ἐπομένως καὶ τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν γωνίαν $\widehat{\Gamma} = \varphi$ ἐκ κατασκευῆς. Ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΔ μᾶς ἐξασφαλίζει $AB = BD \Rightarrow \alpha + \gamma = BG + AB = BG + BD = \Gamma\Delta = \lambda$ (ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\Gamma\Delta = \lambda$). "Αρα εἶναι $\alpha + \gamma = \lambda$. Ἐπὶ πλέον εἶναι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{B\Delta A} + \widehat{B\Delta D} = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega \Rightarrow$

$\widehat{B} = \omega$. "Αρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς ἔχον τὰ δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν μὲ τὸν γνωστὸν περιορισμὸν διὰ τὰ τρίγωνα $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 2^\circ$ ἢ $\omega + \varphi < 2^\circ$.

Πράγματι, παρακολουθοῦντες ἐξ ἀρχῆς τὴν κατασκευὴν ἡ ὑπαρξίς τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ $\Gamma\Delta = \lambda$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ $\widehat{\Delta} = \frac{\omega}{2}$ ἐξασφαλί-

ζεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν συνθήκην $\varphi + \frac{\omega}{2} < 2^\circ$ (1). Ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΔ δίδει τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΔ, μόνον ὅταν $\Gamma\Delta > \Gamma\Delta$ (§ 75). Ἡ ἀνισότης αὕτη μεταφέρεται εἰς ἀνισότητα γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ: $\widehat{\Gamma\Delta A} > \widehat{\Delta} \Rightarrow \widehat{\Gamma\Delta B} + \widehat{B\Delta A} > \widehat{\Delta} \Rightarrow \widehat{A} + \frac{\omega}{2} > \frac{\omega}{2} \Rightarrow \widehat{A} > 0$ ἢ $0 < \widehat{A}$ (2).

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \omega + \varphi = 2^\circ$ (3). Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (2) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν $\widehat{A} + \omega + \varphi < 2^\circ + \widehat{A} \Leftrightarrow \omega + \varphi < 2^\circ$.

Παρατηρήσεις

i) Εἰς κατασκευὰς ὅπου εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα δίδεται τὸ ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων (ἢ ἡ διαφορά αὐτῶν), φροντίζομεν κατὰ κανόνα εἰς τὴν ἀνάλυσιν νὰ τὸ ἐμφανίσωμεν ἐπὶ εὐθείας τινός, ὥστε νὰ δύναι τοῦτο νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν σύνθεσιν. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, τὸ ἄθροισμα $\alpha + \gamma = \lambda$ τὸ ἐνεφανίσσαμεν εἰς τὸ τμήμα ΓΔ.

ii) Ἐὰν εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα ἐνὸς προβλήματος ὑπάρχῃ ἓν μόνον μέτρος, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, κατὰ τὴν διερεύνησιν, εἰς οὐδέναν περιορισμὸν μεγέθους θὰ ὑπόκειται τοῦτο.

244. Παράδειγμα 4ον. Ἀπὸ δοθὲν σημείου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη πρὸς δοθέντα κύκλον.

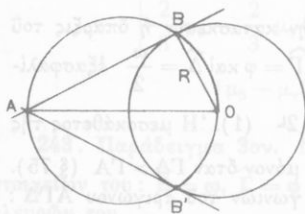
Ἀνάλυσις. Ἐστω A τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ (O, R) ὁ δοθεὶς κύκλος (σχ. 242). Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου ἐπαφῆς B . Μία συνθήκη, τὴν ὁποῖαν πρέπει νὰ πληροῦ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν κύκλον (O, R) . Μία δευτέρα συνθήκη, τὴν ὁποῖαν πρέπει νὰ πληροῦ τὸ σημεῖον B , εἶναι ἡ γωνία $\widehat{ABO}$ νὰ εἶναι ὀρθή.

Ἄρα τὸ ἄγνωστον σημεῖον B , πρέπει νὰ εὐρίσκεται καὶ ἐπὶ κύκλου διαμέτρου AO .

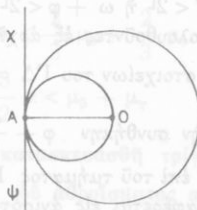
Σύνθεσις - Κατασκευὴ. Μὲ διάμετρον τὴν AO γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὸν (O, R) εἰς τὸ σημεῖον B . Ἡ εὐθεῖα AB εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη.

Ἀπόδειξις. Ἡ AB εἶναι πράγματι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (O, R) διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OB εἰς τὸ ἄκρον B αὐτῆς καὶ ἐπὶ πλεόν διέρχεται διὰ τοῦ A . Ἄρα εἶναι ἡ ζητούμενη.

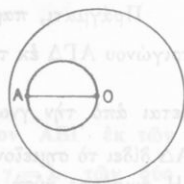
Διερευνήσις. Ἐφ' ὅσον τὸ A εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (O, R) , οἱ δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα τὰ B καὶ B' . Ἄρα ὑπάρχουν δύο λύσεις, ἤτοι αἱ ἐφαπτόμεναι AB καὶ AB' . Ἐάν τὸ A εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (O, R) (σχ. 243) οἱ δύο κύκλοι ἐφαπτόνται εἰς τὸ A καὶ ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἡ



Σχ. 242



Σχ. 243



Σχ. 244

κάθετος ἐπὶ τὴν OA εἰς τὸ A . Ἐάν τὸ A εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O, R) δὲν ὑπάρχει λύσις, διότι οἱ δύο κύκλοι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον (σχ. 244).

245. Παράδειγμα 5ον. Νὰ ἀχθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δοθέντων κύκλων (K, R) καὶ (Λ, ρ) .

Ἀνάλυσις. Θεωροῦντες τὸ πρόβλημα λυμένον ὑποθέτομεν ὅτι ἔχει ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη MN τῶν δύο δοθέντων κύκλων (σχ. 245). Ἐστω ὅτι εἶναι $R > \rho$. Φέρομεν τὰς KM καὶ ΛN , αἱ ὁποῖαι προφανῶς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν MN καὶ ἐκ τοῦ Λ φέρομεν τὴν $\Lambda\Lambda' \parallel MN$. Τότε θὰ εἶναι $\Lambda\Lambda' \perp KM$ ἐνῶ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου $AMN\Lambda$ ἔχομεν $AM = \Lambda N = \rho$. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\Lambda K\Lambda$ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν $K\Lambda = \delta$,

Εάν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, υπάρχουν άπειροι λύσεις και το πρόβλημα είναι άπροσδιόριστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A.

337. Να κατασκευασθούν γωνίες:

i) $22^\circ 30'$, ii) $67^\circ 30'$, iii) 105° , iv) 135° , v) 150° .

338. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ διδονται ἡ γωνία $\widehat{A}$, ἡ πλευρά β καὶ ἡ διχοτόμος δ τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Ἐφαρμογὴ διὰ $\widehat{A} = 60^\circ$, $\beta = 4$ cm καὶ $\delta_\alpha = 3$ cm.

339. Να κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποῦ διδεται ἡ μία πλευρά α καὶ αἱ δύο διαγώνιοι δ καὶ δ' .

340. Να κατασκευασθῇ ρόμβος, τοῦ ὁποῦ διδονται αἱ διαγώνιοι δ καὶ δ' .

341. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , μ_α , μ_β .

342. Να κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) ἐκ τοῦ ὕψους u_α καὶ τῆς ἀκτίνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

343. Να κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐκ τῆς ἀκτίνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

344. Να κατασκευασθῇ ρόμβος ἐκ τῆς μιᾶς διαγωνίου δ αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

345. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, u_α .

346. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν β , γ , u_α .

347. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

348. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\widehat{B}$ καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

349. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1L$, $\widehat{B}$, $\alpha + \gamma = \lambda$.

350. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1L$, $\widehat{B}$, $\alpha + \beta = \lambda$.

351. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ διδονται τὰ μέσα K , L , M τῶν τριῶν πλευρῶν του.

B.

352. Να κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποῦ διδεται μία πλευρά, μία διαγώνιος καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

353. Να κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποῦ διδονται ἡ περίμετρος 2λ καὶ ἡ διαγώνιος δ .

354. Να κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος λ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

355. Να κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποῦ διδεται ἡ διαφορά λ τῆς πλευρᾶς ἀπὸ τὴν διαγώνιον.

356. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν μ_α , μ_β , μ_γ .

357. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν u_α , μ_α καὶ ἐκ τοῦ ὅτι εἶναι $\alpha = 2\beta$.

358. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν β , γ , μ_α .

359. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1L$, α καὶ $\beta - \gamma = \lambda$.

360. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ 2τ καὶ τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

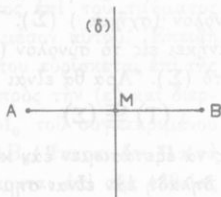
246. Τὴν ἔννοιαν καὶ τὸν ὅρισμόν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τὴν ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς τὴν παράγραφον 76. Οἱ γ. τόποι ποὺ ἔχομεν γνωρίσει καλοῦνται στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ τόποι καὶ τοὺς ἔχομεν χρησιμοποιήσει καὶ εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευάς. Συνοψίζομεν αὐτοὺς κατωτέρω καὶ εἰς τὸ ἐξῆς θὰ τοὺς θεωροῦμεν ὅπωςδῆποτε γνωστούς.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

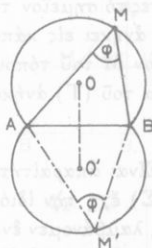
247. 1. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ὠρισμένην ἀπόστασιν R ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ὁ κύκλος (O, R) , ἐξ ὁρισμοῦ (σχ. 247).



Σχ. 247



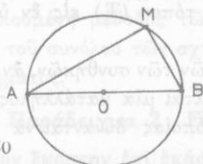
Σχ. 248



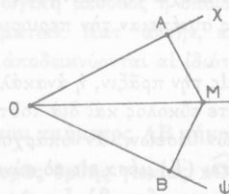
Σχ. 249

3. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθέν εὐθύγραμμον τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ δοθείσαν γωνίαν φ , εἶναι ἡ ἔνωσις τῶν δύο τόξων $\widehat{AMB}$ καὶ $\widehat{AM'B}$ με κοινὰ ἄκρα τὰ A καὶ B , τὰ ὁποῖα δέχονται γωνίαν φ (§ 204 πόρ. V) (σχ. 249).

Ἰδιαιτέρως σημειώνομεν τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία φ εἶναι ὀρθή. Τότε ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι κύκλος με διάμετρον τὸ τμήμα AB (σχ. 250).



Σχ. 250



Σχ. 251

4. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἐσωτερικῶν σημείων γωνίας $\widehat{xOy}$, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευράς της, εἶναι διχοτόμος OZ αὐτῆς (§ 80) (σχ. 251).

248. Γενικός τρόπος εργασίας. Εἰς τὰ θέματα τῶν γεωμετρικῶν τόπων κατὰ κανόνα δίδεται ἡ ιδιότης, τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου καὶ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς αὐτοῦ.

Εἰς τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους σχεδὸν πάντοτε δυνάμεθα νὰ πιθανολογήσωμεν ἐξ ἀρχῆς τὴν μορφήν τοῦ τόπου κατασκευάζοντες τρία σημεῖα μὲ τὴν χαρακτηριστικὴν ιδιότητα τοῦ τόπου. Ἐὰν ταῦτα συμβαίῃ νὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, τότε ὁ τόπος θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα αὕτη ἢ τμῆμα αὐτῆς, ἐνῶ ἐὰν ταῦτα δὲν κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, τότε ὁ τόπος θὰ εἶναι ὁ κύκλος, τὸν ὁποῖον ὀρίζουν ἡ τόξον αὐτοῦ. Ἡ διαπίστωσις αὕτη ἀπλῶς θὰ καθοδηγήσῃ τὴν σκέψιν καὶ τὴν προσπάθειάν μας εἰς τὸν ἐντοπισμὸν τοῦ τόπου, χωρὶς νὰ ἀποτελῇ καὶ ἀποδείξιν.

Εἰς τὴν ἀναζήτησιν ἐνὸς γεωμετρικοῦ τόπου, ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἡ μέθοδος ποὺ ἀποκλειστικὰ σχεδὸν χρησιμοποιεῖται. Ἐστω (Τ) ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος καὶ f ἡ χαρακτηριστικὴ ιδιότης τῶν σημείων του. Θεωροῦμεν ἐν σημείον Μ τοῦ τόπου καὶ καταλλήλως ἐπεξεργαζόμενοι τὴν ιδιότητα f αὐτοῦ συσχετίζοντες τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ σταθερὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἀνακαλύπτομεν ὅτι τοῦτο ἀνήκει εἰς κάποιον σύνολον (σχῆμα) (Σ). Τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ τυχαῖον σημεῖον Μ τοῦ τόπου (Τ) ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον (Σ), μᾶς πείθει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Τ) ἀνήκουν εἰς τὸ (Σ). Ἄρα θὰ εἶναι

$$(1) \quad (T) \subseteq (\Sigma)$$

Εἶναι ἀπαραίτητον ὅμως νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν καὶ κάθε σημεῖον τοῦ συνόλου (Σ) ἔχῃ τὴν ιδιότητα f , δηλαδὴ ἐὰν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου (Τ). Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν ἐν τυχαῖον σημεῖον τοῦ συνόλου (Σ) καὶ τὸ ἐξετάζομεν ἐὰν ἔχῃ τὴν ιδιότητα f . Ἐὰν τοῦτο συμβαίῃ, ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς προηγουμένης καὶ μᾶς πείθει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Σ) ἀνήκουν εἰς τὸν τόπον (Τ) δηλαδὴ θὰ εἶναι

$$(2) \quad (\Sigma) \subseteq (T)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) πλέον ἐπεται ὅτι

$$(T) \equiv (\Sigma),$$

ἥτοι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ ἀνακαλυφθὲν σύνολον (σχῆμα) (Σ).

Τοῦτο τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν συμβαίνει πάντοτε δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Σ) καὶ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐπισημάνωμεν τὰς συνθήκας, ὑπὸ τὰς ὁποίας ἐν στοιχείῳ τοῦ Σ ἔχει τὴν ιδιότητα f τοῦ τόπου. Ἡ ἀνακάλυψις τῶν συνθηκῶν τούτων, ἔχει ὡς συνέπειαν τὸν περιορισμὸν τοῦ τόπου (Τ) εἰς ἐν ὑποσύνολον (Σ₁) τοῦ (Σ).

Συνήθως εἰς τὴν πρᾶξιν, ἡ ἀνακάλυψις αὐτῶν τῶν συνθηκῶν, ἂν ὑπάρχουν, δὲν εἶναι πάντοτε εὐκόλος καὶ διὰ τοῦτο ἀπαιτεῖται μία κατάλληλος διερεύνησις τῶν ὀριακῶν θέσεων, ἂν ὑπάρχουν, τὰς ὁποίας δύνανται νὰ λάβουν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου (Τ) μέσα εἰς τὸ σύνολον (Σ).

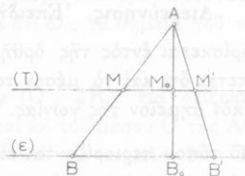
Ἡ διερεύνησις αὕτη θὰ ᾔτο λογικῶς περιττή, ἐὰν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν

ἐχρησιμοποιοῦσαμεν μόνον ἀναγκαίᾳς καὶ ἱκανὰς συνθήκας, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον συνήθως δὲν εἶναι πάντοτε εὐκόλουν νὰ ἐλέγχεται. Δι' αὐτὸ, κατὰ τὴν ἀνάλυσιν χρησιμοποιοῦμεν ἀναγκαίᾳς μόνον συνθήκας καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ τοῦ ἀντιστρόφου καὶ τῆς διερευνήσεως γίνεται ὁ ἐλεγχος τοῦ ἂν αὐταὶ εἶναι ἱκαναί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ

249. Παράδειγμα 1. Δίδεται εὐθεῖα (ϵ) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτῆς. Ἐὰν B εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (ϵ), νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AB .

Ἀνάλυσις. Ἐστω M τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB . Ἐκ τοῦ A φέρομεν $AB_0 \perp (\epsilon)$ καὶ ἔστω M_0 τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB_0 (σχ. 252). Ἡ εὐθεῖα MM_0 εἶναι παράλληλος τῆς (ϵ) ὡς διερχομένη ἀπὸ τὰ μέσα M καὶ M_0 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ABB_0 , ἄρα κάθετος ἐπὶ τοῦ τμήματος AB_0 καὶ μάλιστα εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἐπειδὴ τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας (T), παραλλήλου πρὸς τὴν (ϵ) καὶ διερχομένης διὰ τοῦ μέσου M_0 τοῦ συγκεκριμένου καὶ γνωστοῦ τμήματος AB_0 , ἔπεται ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης.



Σχ. 252

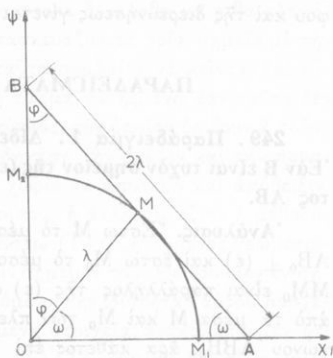
Ἀντιστρόφως. Ἐστω M' τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (T). Θὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει τμήμα, τοῦ ὁποῦ τοῦ ἐν ἄκρον εἶναι τὸ A καὶ τὸ ἄλλο εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς (ϵ) καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει μέσον τὸ M' . Πράγματι ἡ εὐθεῖα AM' τέμνει πάντοτε τὴν (ϵ) εἰς ἓν σημεῖον B' . Εἰς τὸ τρίγωνον AB_0B' ἡ M_0M' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν B_0B' καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον M_0 τῆς πλευρᾶς AB_0 . Ἀρα θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB' , ἥτις τὸ M' εἶναι μέσον τοῦ τμήματος AB' . Τότε ὁ ζητούμενος γ . τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα MM_0 , παράλληλος τῆς (ϵ) καὶ διερχομένη ἀπὸ τὸ μέσον M_0 τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν (ϵ) τμήματος AB_0 .

Παρατήρησις. Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ἀποδεικτικὴ μέθοδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ιδιότης τοῦ μεμονωμένου σημείου M νὰ ἀνήκῃ εἰς εὐθεῖαν (T), ἐγενικεύθη δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ γ . τόπου, καλεῖται **ἐπαγωγικὴ μέθοδος**. Ἀντιθέτως πρὸς αὐτὴν ὑπάρχει καὶ ἡ **ἀπαγωγικὴ μέθοδος** ἡ ὁποία εἶναι ἡ πλεον χρησιμοποιουμένη μέθοδος τῶν θεωρημάτων. Κατ' αὐτὴν, ἐκ τῶν γενικῶν ιδιοτήτων τοῦ συνόλου τῶν σχημάτων, ἀποδεικνύονται αἱ ιδιότητες συγκεκριμένου σχήματος.

250. Παράδειγμα 2. Εὐθυγράμμου τμήματος AB μήκους 2λ τὰ ἄκρα ὀλισθαίνουν ἕκαστον ἐπὶ ἐκάστης πλευρᾶς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{xOy}$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ μέσου M τοῦ τμήματος AB .

Ἀνάλυσις. Τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τμήματος $AB = 2\lambda$ εὐρίσκονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως τῆς δοθείσης ὀρθῆς γωνίας $x\hat{O}y$ (σχ. 253). Λαμβάνομεν μίαν τυχοῦσαν θέσιν AB τοῦ τμήματος 2λ καὶ ἔστω M τὸ μέσον του. Τοῦτο εἶναι ἓν σημεῖον τοῦ τόπου. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AOB ἡ ὑποτείνουσα ἔχει ὠρισμένον μήκος $AB = 2\lambda$. Ἄρα ἡ ἐπ' αὐτὴν διάμεσος OM , ὡς ἴση πρὸς τὸ ἡμισυ τῆς ὑποτείνουσας, ἔχει μήκος λ . Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι τὸ μέσον M τοῦ τμήματος ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὸ σημεῖον O , ἥτοι εὐρίσκεται ἐπὶ κύκλου (O, λ) .

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ τὸ τμήμα AB εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας $x\hat{O}y$, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ μέσον του εἶναι ἑσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας. Ἄρα τὰ σημεῖα



Σχ. 253

τοῦ τόπου περιορίζονται εἰς τὸ τόξον M_1M_2 τοῦ κύκλου (O, λ) τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας $x\hat{O}y$.

Ἀντιστροφή. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου M_1M_2 τοῦ εὐρισκόμενου ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας $x\hat{O}y$. Μὲ κέντρον M καὶ ἀκτῖνα $MO = \lambda$ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Ox εἰς σημεῖον A . Ἡ MA τέμνει τὴν Oy εἰς σημεῖον B . Τὸ τρίγωνον MOA εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἰσοσκελὲς μὲ $MO = MA = \lambda$, ἄρα $\widehat{MOA} = \widehat{A} = \omega$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AOB ἔπεται ὅτι εἶναι :

$$\widehat{B} = \varphi = 180^\circ - \omega, \text{ ἐνῶ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας } x\hat{O}y \text{ ἔπεται ὅτι } \widehat{BOM} = 180^\circ - \omega.$$

Ἄρα $\widehat{B} = \widehat{BOM}$, ἥτοι καὶ τὸ τρίγωνον OMB εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $MO = MB = \lambda$.

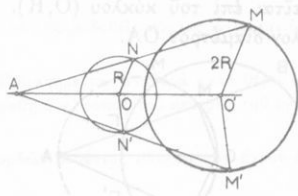
Ἐκ τῶν δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων ἔπεται $MA = MO = MB = \lambda$. Ἄρα τὸ M εἶναι μέσον τοῦ τμήματος $AB = 2\lambda$, ἥτοι τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόξου M_1M_2 εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ὁ ζητούμενος γ . τόπος εἶναι τὸ τέταρτον M_1M_2 τοῦ κύκλου (O, λ) μὲ ὁριακὰ σημεῖα τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2 .

251. Παράδειγμα 3. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A . Ἐὰν N εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O, R) φέρομεν τὴν NA καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον M , τοιοῦτον ὥστε $NM = NA$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου M , ὅταν τὸ N διατρέχῃ τὸν κύκλον (O, R) .

Ἀνάλυσις. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, ἥτοι εἶναι $NM = NA$ (σχ. 254). Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα NO καὶ ἐκ τοῦ M παράλληλον τῆς NO , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AO εἰς τὸ σημεῖον O' .

Τοῦ τριγώνου AMO' ἡ NO εἶναι παράλληλος τῆς MO' καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου N τῆς πλευρᾶς AM . Ἄρα θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς AO' , ἥτοι $AO' = 2 \cdot AO$, ἐπομένως τὸ σημεῖον O' εἶναι σταθερόν. Ἐπὶ πλέον ἡ NO θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμισυ τῆς MO' , ἥτοι θὰ εἶναι $NO = \frac{MO'}{2} \Rightarrow MO' =$



Σχ. 254

$2 \cdot NO = 2R$. Ἄρα τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν $2R$ ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ σημείου O' . Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ κύκλῳ ($O', 2R$).

Ἀντιστροφή. Ἐστω M' σημεῖον τοῦ κύκλου ($O', 2R$). Θὰ δεῖξωμεν ὅτι τοῦτο ἀνήκει εἰς τὸν τόπον. Φέρομεν τὴν AM' καὶ ἐκ τοῦ μέσου O τῆς AO' φέρομεν παράλληλον τῆς $M'O'$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AM' εἰς σημεῖον N' . Ἐκ τοῦ τριγώνου $AO'M'$ ἔπεται ὅτι N' εἶναι τὸ μέσον τῆς AM' καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι

$$ON' = \frac{O'M'}{2} = \frac{2R}{2} = R. \text{ Ἄρα τὸ } N' \text{ ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον } (O, R) \text{ καὶ}$$

ἐπειδὴ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος AM' ἔπεται ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M' τοῦ κύκλου ($O', 2R$) ἔχει τὴν ιδιότητα τοῦ τόπου, ἄρα ἀνήκει εἰς τὸν τόπον καὶ ἐπομένως ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι ὁ κύκλος ($O', 2R$).

252. Παράδειγμα 4. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ σημείου A (προεκτείνονται ἐν ἀνάγκῃ).

Ἀνάλυσις. Ἐστω ὁ κύκλος (O, R) καὶ $B\Gamma$ μία χορδὴ, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ A καὶ M τὸ μέσον αὐτῆς (σχ. 255). Τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου γ. τόπου. Τὸ τμήμα OM εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν, διότι τὸ O εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου (§ 170, πόρ. II). Ἄρα τὸ σταθερὸν τμήμα OA φαίνεται ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ κύκλῳ, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν OA .

Διερεύνησις. i) Τὸ σημεῖον A εἶναι ἐξωτερικόν τοῦ κύκλου (O, R) . Τότε ὁ κύκλος διαμέτρου OA τέμνει τὸν κύκλον (O, R) εἰς δύο σημεία M_1 καὶ M_2 (σχ. 255). Ἐπειδὴ τὰ σημεία τοῦ τόπου, ὡς μέσα χορδῶν τοῦ κύκλου εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι ταῦτα ἀνήκουν εἰς τὸ τόξον $\widehat{M_1OM_2}$. Ἄρα τὰ σημεία τοῦ τόπου ἀνήκουν εἰς τὸ τόξον $\widehat{M_1OM_2}$.

368. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὅποιοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας.

369. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν συμμετρικῶν δοθέντος σημείου A ὡς πρὸς τὰς εὐθείας, ποὺ διέρχονται διὰ δοθέντος σημείου O .

370. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὅποια δοθεὶς κύκλος φαίνεται ὑπὸ δοθείσαν γωνίαν ω .

371. Μεταβλητοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ διατηρεῖται σταθερά κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ ἡ γωνία A σταθερά κατὰ μέγεθος. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου του.

372. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῶν χορδῶν δοθέντος κύκλου ποὺ ἔχουν δεδομένον μήκος λ .

373. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A . Ἐὰν K εἴναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AK , ὅταν τὸ K διαγράφῃ τὸν κύκλον.

Β'.

374. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$ θεωροῦμεν δύο σημεῖα Δ καὶ E ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἴναι $AD = \Gamma E$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔE .

375. Δίδεται κύκλος διαμέτρου AB . Φέρομεν τυχούσαν χορδὴν $A\Gamma$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma M = \Gamma B$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

376. Μεταβλητοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἡ πλευρὰ α παραμένει σταθερά κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ ἡ γωνία $\hat{A} = \omega$ παραμένει σταθερά κατὰ μέγεθος. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου ἐκάστης ἐκ τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$.

377. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ μεταξὺ τῶν εἰς τὸ σημεῖον M . Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

378. Δίδεται κύκλος κέντρου O καὶ διάμετρος AOB αὐτοῦ. Φέρομεν τυχούσαν ἀκτῖνα OG καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $OM = \Gamma\Delta$, ἔνθα $\Gamma\Delta \perp AB$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

379. Ἀπὸ σημείου A ἐκτὸς κύκλου φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν $AB\Gamma$, καὶ ἀπὸ τὸ μέσον I τῆς χορδῆς $B\Gamma$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $IM = IA$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

380. Δίδεται κύκλος καὶ σταθερὰ χορδὴ AB . Ἐὰν Γ εἴναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $\Gamma A B \Delta$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος: α) τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου, β) τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ

Α'.

381. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γ , $\hat{B}$ καὶ δ_α .

382. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , R καὶ $\hat{B}$.

383. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\hat{A}$, $\hat{B}$ καὶ ρ .

384. Νά ἀχθῇ εὐθεῖα ἰσαπέχουσα ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα A , B , Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.

385. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\hat{B}$ καὶ ν_β .

386. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον Μ. Διὰ τοῦ Μ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παραλλήλους, οὕτως ὥστε τὸ ἀποκοπτόμενον τμήμα νὰ ἔχη δοθὲν μήκος λ.

387. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A}$, $\delta\alpha$, $\upsilon\alpha$.

388. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1\text{L}$, $\widehat{B} = \omega$, καὶ $\alpha - \gamma = \lambda$.

389. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1\text{L}$, α καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

390. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{B}$, $\upsilon\alpha$ καὶ $\alpha + \beta = \lambda$.

391. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\upsilon\beta$ καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

392. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ Δ καὶ Ε, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\Delta\Delta = \Gamma\Gamma$.

393. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\widehat{A} = \omega$ καὶ $\upsilon\beta$.

394. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\upsilon\beta$, $\upsilon\gamma$.

395. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\upsilon\alpha$, καὶ $\widehat{B} = \varphi$.

396. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\mu\alpha$ καὶ $\upsilon\beta$.

397. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{B} = \varphi$, $\upsilon\alpha$ καὶ $\mu\gamma$.

Β.

398. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\widehat{B}$ καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

399. Περὶ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ τὸ μέγιστον ἰσόπλευρον τρίγωνον.

400. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον διὰ τὸ ὅποιον δίδεται ἡ εὐθεῖα (ε) ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐρίσκεται ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ.

401. Ἀπὸ τὸ ἐν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων Α δύο τεμνομένων κύκλων νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτοὺς εἰς τὰ Β καὶ Γ, οὕτως ὥστε τὸ τμήμα ΒΓ νὰ ἔχη δεδομένον μήκος α .

402. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

403. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται μία γωνία, αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

Γεωμετρικοὶ τόποι

404. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθεῖσαν βάσιν α καὶ δοθεῖσαν γωνίαν κορυφῆς $\widehat{A} = \omega$.

405. Μεταβλητοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΑΒ διατηρεῖται σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος ἐνῶ αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ ὡς καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ διατηροῦνται σταθεραὶ μόνον κατὰ μέγεθος. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῆς διαγωνίου ΒΔ, ὡς καὶ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος, ποῦ ἔχει ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

406. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ χορδὴ ΑΒ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου ἐκάστης διαγωνίου τῶν τραπέζιων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς μεγαλύτεραν βάσιν τὴν δοθεῖσαν χορδὴν ΑΒ.

407. Δίδεται κύκλος καὶ χορδὴ ΑΒ. Μὲ κέντρον τυχὸν σημείου Γ τοῦ τόξου ΑΒ γράφομεν κύκλον ἐφαπτόμενον τῆς χορδῆς καὶ ἐκ τῶν Α καὶ Β φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Μ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

408. Ὁρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1L$) ὀλισθαίνει εἰς τὸ ἐπίπεδόν του, εἰς τρόπον ὥστε αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ αὐτοῦ νὰ εὐρίσκωνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο καθέτως τεμνομένων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τῆς κορυφῆς A .

409. Μεταβλητὸς κύκλος ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας (ε) εἰς σταθερὸν σημεῖον A αὐτῆς. Εὐθεῖα (δ) γνωστῆς διεθύνσεως $\vec{\delta}$ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου M .

410. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν χορδὴν AB καὶ ἐκ τοῦ O φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐκ τοῦ B ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ M .

411. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ διάμετρος AB αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν τυχοῦσαν χορδὴν $B\Gamma$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma\Delta = \Gamma B$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου M τῆς τομῆς τῶν AG καὶ OD .

412. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = AG$). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν A καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα (μικροτέραν τῆς AB) γράφομεν κύκλον καὶ ἐκ τῶν B καὶ Γ φέρομεν τὰς μὴ συμμετρικὰς ἐφαπτομένας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M . α) Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου M . β) Ἐπὶ τῆς MB λαμβάνομεν τὸ τμήμα $MN = MG$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου N .

413. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1L$). Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$. Ἐκ τοῦ σημείου M φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς AB καὶ AG εἰς τὰ Δ καὶ E ἀντιστοίχως. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔE .

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

253. Τὰ Γεωμετρικὰ μεγέθη. Μέγεθος ἐν γένει καλεῖται πᾶν ὅ, τι ἐπιδέχεται αὐξησιν ἢ ἐλάττωσιν. Γεωμετρικὰ μεγέθη καλοῦνται τὰ μεγέθη, τὰ ὁποῖα ἐξετάζονται ὑπὸ τῆς γεωμετρίας. Τοιαῦτα εἶναι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, αἱ γωνίαι, τὰ κυκλικὰ τόξα, αἱ ἐπιφάνειαι κλειστῶν ἐπιπέδων σχημάτων, οἱ ὅγκοι τῶν στερεῶν κ.λ.

Τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη τὰ χωρίζομεν εἰς κατηγορίας ἣ σύνολα ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν ὅπως π.χ. τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ἢ τὸ σύνολον τῶν τόξων ἴσων κύκλων κ.λ.π.

Εἰς τὰ προηγούμενα ὥρισamen τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως εἰς τὰ σύνολα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων ἴσων κύκλων, ὡς ἐπίσης τὸν πολλαπλασιασμόν καὶ τὴν διαίρεσιν μὲ φυσικὸν ἀριθμόν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν ἐπὶ ρητόν. Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον γεωμετρικοῦ μεγέθους ἐπὶ ἄρρητον ἀριθμόν ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁμοειδὲς μέγεθος πρὸς τὸ ἀρχικόν.

★ Πράγματι, ἐὰν α εἶναι εἰς ἄρρητος ἀριθμός, εἶναι γνωστὸν ὅτι ἔχει ἐν δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα δὲν ἐμφανίζουν περιοδικότητα. Ἐστω λοιπὸν $\alpha = \Psi_0, \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \dots \Psi_n \dots$ τὸ δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ ἀριθμοῦ α , ὅπου Ψ_0 εἶναι αἱ ἀκέραιαι μονάδες αὐτοῦ καὶ $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \dots$ τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματος του. Κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν ρητῶν ἀριθμῶν :

$$(1) \quad \alpha_0 = \Psi_0, \quad \alpha_1 = \Psi_0, \Psi_1, \quad \alpha_2 = \Psi_0, \Psi_1 \Psi_2, \dots, \quad \alpha_n = \Psi_0, \Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_n, \dots$$

Ἡ ἀκολουθία (1) τῶν ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνει εἰς τὸν ἄρρητον ἀριθμόν α , ἥτοι εἶναι:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha \quad (\lim \text{ σημαίνει ὅριον})$$

Ἐστω τώρα ὅτι A εἶναι ἐν γεωμετρικῶν μέγεθος (π.χ. εὐθύγραμμον τμήμα). Ἐκ τῆς ἀκολουθίας (1) κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν

$$(3) \quad A \cdot \alpha_0, \quad A \cdot \alpha_1, \quad A \cdot \alpha_2, \dots, \quad A \cdot \alpha_n, \dots$$

ἢ ὁποῖα ἔχει ἔννοιαν ἀκολουθίας ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν πρὸς τὸ A , καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ εἶναι ρητοί.

Ἡ ἀκολουθία γεωμετρικῶν μεγεθῶν (3), λόγφ τῆς σχέσεως (2), ἀποδεικνύεται ὅτι συγκλίνει εἰς ὁμοειδὲς μέγεθος πρὸς τὸ A , συμβολιζόμενον μὲ $A \cdot \alpha$ καὶ καλεῖται γινόμενον τοῦ γεωμετρικοῦ μεγέθους A ἐπὶ τὸν ἄρρητον ἀριθμόν α .

Παράδειγμα. Ἐστω A ἐν εὐθύγραμμον τμήμα καὶ $\alpha = \sqrt{2} = 1,414213 \dots$ εἰς ἄρρητος ἀριθμός. Κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1,4, \quad \alpha_2 = 1,41, \quad \alpha_3 = 1,414, \quad \alpha_4 = 1,4142, \quad \alpha_5 = 1,41421 \dots$$

ή όποία συγκλίνει εις τόν αριθμόν $\sqrt{2}$ και έξ αύτης τήν άκολουθίαν εύθυγράμμων τμημάτων $A \cdot 1, A \cdot 1,4, A \cdot 1,41, A \cdot 1,414, A \cdot 1,4142, A \cdot 1,41421, \dots$

ή όποία συγκλίνει εις εύθύγραμμον τμήμα τό όποιον γράφεται $A \cdot \sqrt{2}$.

254. Λόγος όμοειδών γεωμετρικών μεγεθών. Έστωσαν A και B δύο όμοειδῇ γεωμετρικά μεγέθη, όπου τό A δέν είναι μηδενικόν. Άποδεικνύεται ότι (βλέπε κατωτέρω άπόδειξιν δια τά εύθύγραμμα τμήματα) πάντοτε υπάρχει μη άρνητικός αριθμός ρ , τοιούτος ώστε νά είναι $A\rho = B$. Ό αριθμός ρ καλεΐται λόγος τοῦ μεγέθους B πρὸς τό όμοειδές μέγεθος A , γράφομεν δέ:

$$\rho = \frac{B}{A}$$

Εΐναι φανερόν ότι ό λόγος δύο γεωμετρικών μεγεθών είναι ό αριθμός, επί τό όποιον πρέπει νά πολλαπλασιάσωμεν τό Ξ έξ αύτῶν, δια νά λάβωμεν τό άλλο.

★ 255. 'Αξίωμα τοῦ 'Αρχιμήδους. Έάν A και B είναι δύο μη μηδενικά εύθύγραμμα τμήματα τοιαῦτα ώστε $A < B$, υπάρχει φυσικός αριθμός, n τοιοῦτος ώστε $n \cdot A > B$.

Τό άνωτέρω άξίωμα διατυπώνεται και ως εξής:

'Η άκολουθία τῶν εύθυγράμμων τμημάτων $A, 2A, 3A, \dots, nA, \dots$ είναι αύξουσα και μη φραγμένη.

Θεώρημα. Έάν A και B είναι δύο εύθύγραμμα τμήματα όπου τό A δέν είναι μηδενικόν, υπάρχει πάντοτε πραγματικός και μη άρνητικός αριθμός ρ , τοιοῦτος ώστε νά είναι $A \cdot \rho = B$.

'Απόδειξις. i) Έστω ότι τό τμήμα B είναι μηδενικόν, ήτοι $B = 0$. Τότε θα είναι $A \cdot 0 = 0$, άρα τό θεώρημα ισχύει δια $\rho = 0$.

ii) Έάν $A = B$ τότε θα είναι $A \cdot 1 = B$, ήτοι τό θεώρημα ισχύει δια $\rho = 1$.

iii) Έστω $A < B$. Κατασκευάζομεν τήν άκολουθίαν τῶν εύθυγράμμων τμημάτων (1) $A, 2A, 3A, \dots, nA, \dots$

ή όποία, κατὰ τό προηγούμενον άξίωμα, είναι αύξουσα και μη φραγμένη. Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός k τοιοῦτος ώστε νά είναι:

$$k \cdot A \leq B < (k+1)A$$

α) Έάν εις τήν προηγούμενήν σχέσηιν ισχύη $\tau\acute{o} =$, τότε αύτη γράφεται $k \cdot A = B$, ήτοι τό θεώρημα ισχύει δια $\rho = k$.

β) Έάν είναι $k \cdot A < B < (k+1)A$, δηλαδή εάν τό B περιέχεται έντός τοῦ άνοικτοῦ διαστήματος $(k \cdot A, (k+1)A)$, τό όποιον έχει πλάτος A , τότε διχοτομοῦμεν τό διάστημα τοῦτο και λαμβάνομεν τά δύο διαστήματα:

$$(2) \quad \left(k \cdot A, k \cdot A + \frac{A}{2} \right), \quad \left(k \cdot A + \frac{A}{2}, (k+1)A \right)$$

έκαστον εκ τῶν όποιων έχει πλάτος $\frac{A}{2}$. Δύο είναι τά πιθανά ένδεχόμενα, ήτοι:

α₁) Τό τμήμα B συμπίπτει με τό $k \cdot A + \frac{A}{2}$, δηλαδή $B = k \cdot A + \frac{A}{2}$ ή $B = \frac{2k+1}{2} \cdot A$, όποτε τό θεώρημα ισχύει δια $\rho = \frac{2k+1}{2}$.

β₁) Τὸ τμήμα Β περιέχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο διαστημάτων (2), ἔστω εἰς τὸ πρῶτον. Τότε διχοτομοῦμεν ἐκ νέου τοῦτο καὶ λαμβάνομεν δύο διαστήματα.

$$(3) \left(k \cdot A, k \cdot A + \frac{A}{4} \right), \quad \left(k \cdot A + \frac{A}{4}, k \cdot A + \frac{A}{2} \right)$$

ἑκάστον ἐκ τῶν ὁποίων ἔχει πλάτος $\frac{A}{4} = \frac{A}{2^2}$.

*Ὡς καὶ προηγουμένως, δύο εἶναι τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα, ἥτοι:

α₂) Τὸ τμήμα Β συμπίπτει μὲ τὸ τμήμα $k \cdot A + \frac{A}{4}$, δηλαδή
 $B = k \cdot A + \frac{A}{4}$ ἢ $B = \frac{4k+1}{4} \cdot A$, ὁπότε τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ $\rho = \frac{4k+1}{4}$.

β₂) Τὸ τμήμα Β περιέχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν διαστημάτων (3). Διχοτομοῦμεν ἐκ νέου τὸ διάστημα εἰς τὸ ὅποιον περιέχεται τὸ τμήμα Β. Λαμβάνομεν οὕτω δύο διαστήματα πλάτους $\frac{A}{2^3}$ κ.ο.κ.

*Ἡ αὕτῃ σκέψις ἐπαναλαμβανομένη ν φορές, θὰ περιορίσῃ τὸ τμήμα Β μεταξύ δύο διαστημάτων μὲ διαφορὰν πλάτους $A/2^n$, ἐὰν ἐν τῷ μεταξύ τὸ Β δὲν ἔχῃ συμπίψει μὲ ἓν ἐκ τῶν διχοτομοῦντων σημείων τὰ προηγουμένα διαστήματα. Μεταβαίνοντες εἰς τὸ ὅριον, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, διαπιστώνομεν ὅτι τὸ τμήμα Β περιορίζεται εἰς δύο διαστήματα (τμήματα) μὲ διαφορὰν μηδενικοῦ πλάτους. *Ἀρα τὸ Β, συμπίπτει μὲ τὰ συμπίπτοντα ἄκρα τοῦ μηδενικοῦ αὐτοῦ διαστήματος, τὰ ὁποῖα ὅπωςδήποτε ἐκφράζονται ἀπὸ τὸ στοιχεῖον Α, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ κάποιον ἀριθμητικὸν συντελεστήν. Αὐτὸς ἀκριβῶς ὁ συντελεστής εἶναι ὁ ἀριθμὸς ρ.

256. Μέτρον τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν. *Ἐστῶσαν Α καὶ Μ δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη. Καλοῦμεν μέτρον τοῦ μεγέθους Α μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ μέγεθος Μ, τὸν λόγον.

$$\frac{A}{M} = \rho$$

τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ ὁμοειδὲς μέγεθος Μ. *Ἀρα τὸ μέτρον ρ ἐνὸς γεωμετρικοῦ μεγέθους εἶναι πραγματικὸς καὶ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν σχέσιν τοῦ μεγέθους Α ὡς πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως Μ. Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν

$$A = \rho \cdot M$$

ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ρ φορές τῆς μονάδος μετρήσεως Μ, λαμβάνομεν τὸ Α.

*Ἡ ἐκλογή τῆς μονάδος μετρήσεως εἶναι αὐθαίρετος.

257. Μονάδες μετρήσεως τῶν μέχρι τοῦδε ἐξετασθέντων γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, ὡς ἀνεφέρθη, ἔχουν ληφθῆ αὐθαιρέτως, πάντως εἶναι καθωρισμέναι καὶ διεθνῶς παραδεκταί.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μηκῶν χρησιμοποιεῖται τὸ μέτρον (σύμβολον 1 m). Τοῦτο ὀρίζεται ὡς ἡ ἀπόστασις μεταξύ δύο χαραγῶν ἐφ' ἐνὸς κανόνος ἐξ ἱριδιούχου λευκοχρύσου, φυλασσομένου εἰς τὸ διεθνὲς γραφεῖον μέτρων καὶ σταθμῶν εἰς Sèvres τῆς Γαλλίας. *Ἡ μονὰς αὕτῃ τοῦ μήκους λέγεται ὅτι εἶναι τὸ

1/40 000 000 του μήκους του ισημερινού της Γης. Είς την κατά το 1960 11ην διεθνή συνδιάσκεψιν διὰ τὸ μέτρον, ἀπεφασίσθη ὅπως αὐτὸ ἀναχθῇ εἰς ἓν ὀρισμένον μῆκος κύματος τοῦ φωτός. Οὕτω τὸ μέτρον ἀντιστοιχεῖ εἰς 1.650.763,73 μῆκη κύματος, ἐν κενῷ, τῆς πορτοκαλοχρόου γραμμῆς τοῦ ἱσοτόπου 86 τοῦ στοιχείου κρυπτοῦ.

Ἐκτὸς τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ βασικὴ μονὰς μετρήσεως τῶν μη-κῶν, χρησιμοποιοῦνται τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ, κυριώ-τερα τῶν ὁποίων εἶναι τὸ 1 ἑκατοστόμετρον $1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m}$ καὶ τὸ ἐν χι-λιόμετρον $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται αἱ ἐξῆς μονάδες :

i) Ἡ **μοῖρα** (σύμβολον 1°). Αὕτη εἶναι τὸ 1/360 τῆς πλήρους γωνίας (1 πλήρης γωνία = 4 ὀρθαί). Ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ ($60'$) καὶ ἑκάστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δευτέρα ($60''$).

ii) Ὁ **βαθμός** (σύμβολον 1°). Οὗτος εἶναι τὸ 1/400 τῆς πλήρους γωνίας καὶ ὑποδιαιρεῖται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

iii) Τὸ **ἀκτίνιον** (σύμβολον 1 rad). Τοῦτο εἶναι γωνία, ἡ ὁποία καθι-σταμένη ἐπίκεντρος δέχεται τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος l εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μῆκος R τῆς ἀκτίνος διὰ τῆς ὁποίας ἐγράφη (σχ. 258).

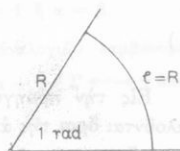
Μία πλήρης γωνία, θὰ ἀποδειχθῇ εἰς ἄλλο κεφάλαιο, ὅτι ἔχει 2π ἀκτίνια, ὅπου $\pi = 3,14159\dots$ ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Τὸ ἀκτίνιον ὑποδιαιρεῖται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Ἐν ἀκτίνιον εἶναι ἴσον μὲ $57^\circ 17' 44'', 8$ περίπου.

Ἀντιστοιχῶς πρὸς τὰς μονάδας μετρήσεως τῶν γωνιῶν, ὀρίζονται καὶ αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν τόξων ἴσων κύκλων, ἧτοι :

i) Ἡ **μοῖρα**, ἴση πρὸς τὸ 1/360 τοῦ κύκλου.

ii) Ὁ **βαθμός**, ἴσος πρὸς τὸ 1/400 τοῦ κύ-κλου καὶ

iii) Τὸ **ἀκτίνιον**, ἴσον πρὸς τὸ 1/2π τοῦ κύκλου.



Σχ. 258

258. Σύμμετρα γεωμετρικά μεγέθη καλοῦνται

δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικά μεγέθη A καὶ B , ἐὰν εἶναι πολλαπλάσια ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ὁμοειδοῦς πρὸς αὐτὰ μεγέθους Γ . Δηλαδή ἐὰν εἶναι :

$$A = k \cdot \Gamma \quad \text{καὶ} \quad B = \lambda \cdot \Gamma$$

ὅπου k καὶ λ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Τότε λέγομεν ὅτι τὰ μεγέθη A καὶ B ἔχουν **κοινὸν μέτρον**, καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι ὑπάρχει ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ μέγεθος Γ τὸ ὁποῖον, ὡς μονὰς μετρήσεως διὰ τὰ A καὶ B , παρέχει διὰ τὰ μέτρα αὐτῶν ἀκεραίους ἀριθμούς k καὶ λ .

259. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μέτρων των, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη A καὶ B καὶ ἔστωσαν α καὶ β τὰ μέτρα των ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως M . Τότε θὰ εἶναι $A = \alpha \cdot M$, $B = \beta \cdot M \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\alpha \cdot M}{\beta \cdot M} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{M}{M} = \frac{\alpha}{\beta}$, διότι $\frac{M}{M} = 1 \Leftrightarrow M = 1 \cdot M$. Ἄρα εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$.

260. Ἀναλογίαι καὶ ιδιότητες αὐτῶν. Ἔστωσαν

$$\Omega_1 = \{A, B, \Gamma, \dots, X, \dots\} \text{ καὶ } \Omega_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \chi, \dots\}$$

δύο σύνολα, ἕκαστον μὲ στοιχεῖα ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη, χωρὶς κατ' ἀνάγκην τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 , νὰ εἶναι ὁμοειδῆ πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2 . Ἄς θεωρήσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, ἥτοι :

$$\begin{array}{cccc} A, & B, & \Gamma, \dots & X, \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \alpha, & \beta, & \gamma, \dots & \chi, \dots \end{array}$$

(π.χ. ἐπίκεντροι γωνίαι καὶ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου). Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη θὰ καλεῖται **ἀναλογία** τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὁ λόγος

$\frac{A}{B}$ δύο τυχόντων στοιχείων τοῦ ἑνὸς συνόλου Ω_1 εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ ἄλλου συνόλου Ω_2 , ἥτοι ὅταν εἶναι :

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν, τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα A, B, α καὶ β καλοῦνται **ὄροι** τῆς ἀναλογίας. Τὰ A καὶ β καλοῦνται **ἄκροι ὄροι** καὶ τὰ B καὶ α **μέσοι ὄροι**.

Ἡ σχέσις (1) εἶναι οὐσιαστικῶς ἰσότης ἀριθμητικῶν κλασμάτων (§ 259) καὶ κατὰ συνέπειαν, ἐὰν ἀντὶ τῶν μεγεθῶν χρησιμοποιήσωμεν τὰ μέτρα των, ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ιδιότητες τῶν ἴσων κλασμάτων. Ἀπὸ αὐτὰς ὑπενθυμίζομεν τὰς ἐξῆς σπουδαιότερας :

$$\text{i) Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$\text{ii) Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

$$\text{iii) Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$$

$$\text{iv) Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \dots + \lambda}$$

Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὰς ἄνω ἀναλογίας θεωρῶμεν ἀντὶ τῶν μέτρων τῶν τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη, ἀπαιτεῖται προσοχὴ εἰς τὰς ἰδιότητας. Ὅπου ἐμφανίζονται ἀθροίσματα (ἀντιστοιχῶς διαφοραὶ), πρέπει νὰ εἶναι γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ αὐτοῦ συνόλου (ὁμοειδῆ), διὰ νὰ ἔχουν νόημα αἱ πράξεις.

★ 261. Ἰδιότητες τῶν ἀναλόγων γεωμετρικῶν μεγεθῶν.

Ἐστώσαν $\Omega_1 \equiv \{A, B, \dots, X, \dots\}$ καὶ $\Omega_2 \equiv \{\alpha, \beta, \dots, \chi, \dots\}$ δύο σύνολα γεωμετρικῶν μεγεθῶν, διὰ τὰ ὁποῖα μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν ὑφίσταται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία κατὰ τὴν ἔννοιαν $A \longleftrightarrow \alpha, B \longleftrightarrow \beta, \dots, X \longleftrightarrow \chi, \dots$

Ἐὰν ἡ ἀντιστοιχία αὕτη εἶναι ἀναλογία, ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἰδιότητες:

i) Ἡ ἰσότης δύο στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_1 συνεπάγεται τὴν ἰσότητα τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_2 ἤτοι:

$$\text{ἐὰν } A = B \iff \alpha = \beta.$$

ii) Τὸ ἄθροισμα δύο στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_1 ἔχει ὡς ἀντίστοιχον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_2 , ἤτοι:

$$\text{Ἐὰν } A + B = \Gamma \iff \alpha + \beta = \gamma, \text{ ὅπου } \Gamma \longleftrightarrow \gamma.$$

iii) Ἐὰν δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 εἶναι ἄνισα, τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τοῦ συνόλου Ω_2 εἶναι ὁμοιοστρόφως ἄνισα ἤτοι:

$$\text{ἐὰν } A > B \iff \alpha > \beta.$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἀνωτέρω ἰδιότητες ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Ω_1 καὶ Ω_2 εἶναι ἀναλογία.

Ἀποδείξεις. Ὡς ὑπόθεσιν ἔχομεν ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 , εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2 ἤτοι:

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

i) Ἐὰν $A = B$, τότε $\frac{A}{B} = 1$ καὶ ἐκ τῆς (1) ἔπεται $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ ἢ $\alpha = \beta$.

ii) Ἐκ τῆς (1), ἐφαρμόζοντας γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν λαμβάνομεν $\frac{A+B}{B} = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$ καὶ ἐπειδὴ $B \longleftrightarrow \beta$ ἔπεται ὅτι $A+B \longleftrightarrow \alpha+\beta$ ἢ $\Gamma \longleftrightarrow \gamma$ ὅπου ἐθέσαμεν $\Gamma = A+B$ καὶ $\gamma = \alpha+\beta$.

iii) Ἐὰν $A > B$ τότε θὰ εἶναι $\frac{A}{B} > 1$ καὶ ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} > 1 \quad \text{ἄρα} \quad \alpha > \beta.$$

Ἀντιστρόφως. Ἐστώσαν A καὶ B δύο τυχόντα στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 . Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι σύμμετρα, ἥτι ὑπάρχει στοιχεῖον $\Gamma \in \Omega_1$ τοιοῦτον ὥστε τὰ A καὶ B νὰ εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ, δηλαδὴ:

$$(2) \quad A = k \cdot \Gamma, \quad B = \lambda \cdot \Gamma$$

Τότε θὰ εἶναι:

$$(3) \quad \frac{A}{B} = \frac{k}{\lambda}$$

Αἱ σχέσεις (2) γράφονται ἀντιστοιχῶς:

$$A = \underbrace{\Gamma + \Gamma + \dots + \Gamma}_k \text{ προσθετέι,} \quad B = \underbrace{\Gamma + \Gamma + \dots + \Gamma}_\lambda \text{ προσθετέι.}$$

Κατά την ιδιότητα ii) θά έχουμε τότε :

$$\alpha = \underbrace{\gamma + \gamma + \dots + \gamma}_k \text{ προσθετέι}, \quad \beta = \underbrace{\gamma + \gamma + \dots + \gamma}_\lambda \text{ προσθετέι}$$

$$\eta \quad \alpha = k \cdot \gamma, \quad \beta = \lambda \cdot \gamma$$

εκ τών οποίων λαμβάνομεν:

$$(4) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{\lambda}$$

Έκ τών (3) και (4) έπεται ότι:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Έάν τὰ στοιχεΐα A και B δέν έχουν κοινόν μέτρον, τότε ο λόγος $\frac{A}{B}$ είναι ασύμμετρος αριθμός και ή κατά προσέγγισιν τιμή αυτού οιασδήποτε τάξεως, ως ρητός αριθμός, θά είναι ίση μέ την κατά προσέγγισιν τιμήν της αΐτης τάξεως του λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$. Μεταβαίνοντες εις τὸ όριον, όταν ή προσέγγισις γίνη άπείρου τάξεως, λαμβάνομεν:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Άρα τὰ στοιχεΐα του συνόλου Ω_1 είναι άνάλογα πρὸς τὰ στοιχεΐα του συνόλου Ω_2 , έφ' όσον ισχύουν αΐ τρεΐς άνωτέρω ιδιότητες.

262. Μέση άνάλογος δύο όμοειδών γεωμετρικών μεγεθών A και B καλεΐται έν όμοειδές πρὸς αΐτὰ γεωμετρικόν μέγεθος M, δια τὸ όποϊον ισχύει ή σχέσις :

$$\frac{A}{M} = \frac{M}{B} \iff M^2 = AB.$$

Τότε ή άνωτέρω άναλογία λέγεται **συνεχής**.

263. Τετάρτη άνάλογος τριών όμοειδών γεωμετρικών μεγεθών A, B, και Γ, καλεΐται έν όμοειδές πρὸς αΐτὰ γεωμετρικόν μέγεθος T, δια τὸ όποϊον ισχύει ή σχέσις :

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{T}$$

(τὸ T κατέχει την τετάρτην θέσιν εις την άναλογίαν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

414. Έάν είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νά δειχθῇ ότι: $\frac{3\alpha + 2\beta}{\beta} = \frac{3\gamma + 2\delta}{\delta}$. Όμοίως ότι:

$$\frac{k\alpha + \lambda\beta}{\beta} = \frac{k\gamma + \lambda\delta}{\delta} \text{ όπου } k, \lambda \text{ αριθμητικοί συντελεσται.}$$

415. Έάν είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νά δειχθῇ ότι: $\frac{3\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{3\gamma - \delta}{\gamma + \delta}$. Όμοίως ότι:

$$\frac{k\alpha + \lambda\beta}{\mu\alpha + \nu\beta} = \frac{k\gamma + \lambda\delta}{\mu\gamma + \nu\delta} \text{ όπου } k, \lambda, \mu, \nu, \text{ αριθμητικοί συντελεσται.}$$

416. Έάν είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νά δειχθῇ ότι $\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

417. 'Εάν οι αριθμοί α, β, γ είναι ανάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 4, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7.

418. 'Εάν εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, δείξατε ὅτι: $\frac{5\alpha_1 - 7\beta_1 + 3\gamma_1}{5\alpha_2 - 7\beta_2 + 3\gamma_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

419. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \dots = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ τότε

$$\frac{k\alpha_1 + \lambda\beta_1 + \dots + \nu\rho_1}{k\alpha_2 + \lambda\beta_2 + \dots + \nu\rho_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ ὅπου } k, \lambda, \dots, \nu \text{ ἀριθμητικοὶ συντελεσταί.}$$

420. 'Εάν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, δείξατε ὅτι: $\frac{\alpha}{\delta} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ (*)

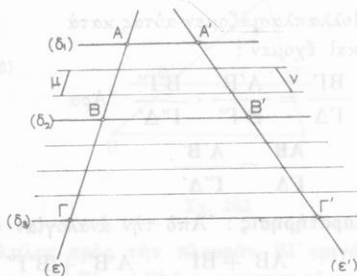
264. Θεώρημα: 'Εάν δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε') τέμνονται ὑπὸ τριῶν τοῦλάχιστον παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ ἀποκτόμενα τμήματα ἐπὶ τῶν (ε) καὶ (ε') ἀντιστοιχῶς ὑπὸ τῶν παραλλήλων τούτων, εἶναι ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. 'Εστωσαν (ε) καὶ (ε') δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου καὶ (δ_1), (δ_2) καὶ (δ_3) τρεῖς παράλληλοι μεταξὺ των εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς (ε) καὶ (ε') ἀντιστοιχῶς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α', Β καὶ Β', Γ καὶ Γ' (σχ. 259). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι:

$$\frac{AB}{BG} = \frac{A'B'}{B'G'}$$

i) 'Εστω ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἐπὶ τῆς (ε) ἐπιδέχονται ὡς κοινὸν μέτρον ἐν εὐθύγραμμον τμῆμα μ , ἥτοι ἀμφότερα εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ. Τότε θὰ εἶναι:

(1) $AB = k\mu$ καὶ $BG = \lambda\mu$
ὅπου k καὶ λ ἀκέραιοι ἀριθμοί.
Διαιροῦμεν τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς k τμήματα ἴσα πρὸς τὸ μ καὶ τὸ ΒΓ εἰς λ τμήματα ἴσα πρὸς τὸ μ . 'Απὸ τὰ διαιρετικά σημεῖα φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας. Αὗται τέμνουν τὴν εὐθεῖαν (ε') καὶ ὀρίζουν ἐπ' αὐτῆς $k + \lambda$ τὸ πλῆθος ἴσα τμήματα καὶ ἔστω ν τὸ μῆκος ἐκάστου. Τότε θὰ εἶναι:



Σχ. 259

* Θαλῆς (ἐκ Φοινίκης ΣΤ' π.Χ. αἰών). Μετέβη εἰς Αἴγυπτον καὶ ἐμέτρησε τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων ἐκ τῆς σκιάς των. Φέρει τὴν γεωμετρίαν εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἰδρύει εἰς Μίλητον τὴν Ἰωνικὴν Σχολὴν καὶ πλουτίζει τὴν ἐπιστήμην μετὰ πολλὰ θεωρήματα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας καὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων μέσῳ τοῦ σπουδαιότερου θεωρήματος τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς γεωμετρίας περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ ἀναλόγων τμημάτων.

$$(2) \quad A'B' = k\nu \text{ και } B'\Gamma' = \lambda\nu.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{k\mu}{\lambda\mu} = \frac{k}{\lambda} \text{ καὶ } \frac{A'B'}{B'\Gamma'} = \frac{k\nu}{\lambda\nu} = \frac{k}{\lambda}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν :

$$(3) \quad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

ii) Ἐὰν τὰ τμήματα AB καὶ $B\Gamma$ δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, τότε ὁ λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ αὐτοῦ οἰασδήποτε τάξεως, ποῦ θὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ τῆς αὐτῆς τάξεως. Λαμβάνοντες τὰ ὅρια τῶν ἴσων λόγων, ὅταν ἡ προσέγγισις γίνῃ ἀπείρου τάξεως, ὅποτε θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκριβῆ τιμὴν τῶν λόγων τούτων εὐρίσκομεν:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

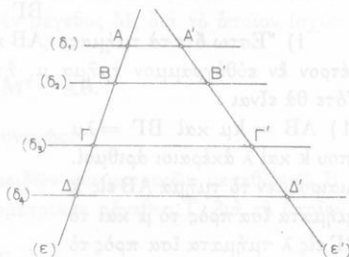
iii) Ἐστω ὅτι αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε') τέμνονται ὑπὸ τεσσάρων παραλλήλων εὐθειῶν (δ_1) , (δ_2) , (δ_3) καὶ (δ_4) , εἰς τὰ σημεῖα A καὶ A' , B καὶ B' , Γ καὶ Γ' , Δ καὶ Δ' ἀντιστοιχῶς (σχ. 260). Τότε θὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \text{ καὶ } \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}$$

Πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$\frac{AB}{B\Gamma} \cdot \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \cdot \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'} \quad \text{Ἄρα}$$

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$$



Σχ. 260

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν (3) λαμβάνομεν

$$\frac{AB + B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A'B' + B'\Gamma'}{B'\Gamma'} \quad \eta \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{B'\Gamma'}$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}$, $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A'\Delta'}{A'B'}$ καὶ γενικῶς, οἷα-

δήποτε τμήματα ὀρίζομενα διὰ τῶν παραλλήλων ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα αὐτῶν ἐπὶ τῆς ἄλλης.

265. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐστώσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (ε) , (ε') δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλή-

λους εἰς τὰ A καὶ A' , B καὶ B' ἀντιστοίχως. Ἐὰν Γ καὶ Γ' εἶναι σημεῖα τῶν τμημάτων AB καὶ $A'B'$ ἀντιστοίχως τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A'\Gamma'}{\Gamma'B'}$$

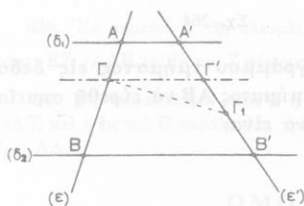
τότε ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Gamma'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) .

Ἀποδείξις. Ἐὰν ἡ $\Gamma\Gamma'$ δὲν εἶναι παράλληλος τῶν (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς αὐτάς, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τμήμα $A'B'$ ἔστω εἰς τὸ Γ_1 (σχ. 261). Τὸ Γ_1 εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος $A'B'$, διότι ἐὰν ᾗτο ἐκτὸς τοῦ $A'B'$, ἔστω πρὸς τὸ μέρος τοῦ B' , ἡ $\Gamma\Gamma_1$ θὰ ἔτεμνε τὴν BB' . Ἀλλὰ αὐτὸ δὲν δύναται νὰ συμβαίῃ διότι ἡ $\Gamma\Gamma_1$ ἔθεωρήθη παράλληλος τῆς BB' .

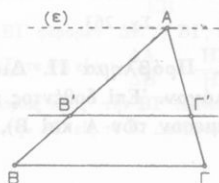
Τότε θὰ εἶναι $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A'\Gamma_1}{\Gamma_1 B'}$. Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς δοθείσης, λαμβάνομεν:

$$\frac{A'\Gamma'}{\Gamma'B'} = \frac{A'\Gamma_1}{\Gamma_1 B'} \quad \eta \quad \frac{A'\Gamma' + \Gamma'B'}{\Gamma'B'} = \frac{A'\Gamma_1 + \Gamma_1 B'}{\Gamma_1 B'} \quad \eta \quad \frac{A'B'}{\Gamma'B'} = \frac{A'B'}{\Gamma_1 B'}$$

Ἄρα $\Gamma'B' = \Gamma_1 B'$ ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται $\Gamma' \equiv \Gamma_1$, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὰ Γ' καὶ Γ_1 ὑπετέθησαν διάφορα ἀλλήλων. Ἐπομένως πρέπει νὰ εἶναι ἡ $\Gamma\Gamma'$ παράλληλος πρὸς τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) .



Σχ. 261



Σχ. 262

Πόρισμα. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, τέμνῃ τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' ἀντιστοίχως, τότε εἶναι

$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{A\Gamma'}{\Gamma'\Gamma} \quad \text{καὶ ἀντιστρόφως.}$$

Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς A εὐθεῖαν (ϵ) παράλληλον τῆς $B\Gamma$ καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ διὰ τὰς παραλλήλους $(\epsilon) \parallel B'\Gamma' \parallel B\Gamma$ τεμνομένας ὑπὸ τῶν AB καὶ $A\Gamma$ (σχ. 262).

Ἀπὸ τὴν ἄνω ἀναλογίαν εὐρίσκομεν καὶ $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma}$

266. Πρόβλημα I. Κατασκευή τετάρτης αναλόγου. Δοθέντων τριών εὐθυγράμμων τμημάτων α , β καὶ γ , νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x , τὸ ὁποῖον νὰ πληροῖ τὴν σχέσιν :

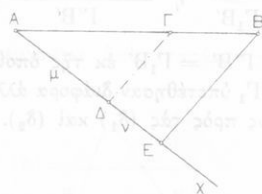
$$(1) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$

Λύσις. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox' τυχούσης γωνίας $\angle Oy'$ λαμβάνομεν διαδοχικῶς τμήματα $OA = \alpha$, $AB = \beta$ καὶ ἐπὶ τῆς Oy' τμήμα $OG = \gamma$ (σχ. 263). Φέρομεν τὴν AG καὶ ἐκ τοῦ B παράλληλον πρὸς τὴν AG , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy' εἰς τὸ σημεῖον Δ . Τὸ τμήμα GD εἶναι τὸ ζητούμενον x , διότι κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 263

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$



Σχ. 264

267. Πρόβλημα II. Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς δεδομένον λόγον. Ἐπὶ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB νὰ εὐρεθῇ σημεῖον Γ (ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B), οὕτως ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{AG}{GB} = \frac{\mu}{\nu}$$

Λύσις. Ἐκ τοῦ A φέρομεν τυχούσαν ἡμιευθεῖαν Ax ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν διαδοχικῶς δύο τμήματα $AD = \mu$ καὶ $DE = \nu$ (σχ. 264). Φέρομεν τὴν EB καὶ ἐκ τοῦ Δ παράλληλον πρὸς αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Γ . Τότε εἶναι προφανῶς

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AD}{DE} = \frac{\mu}{\nu}$$

Παρατήρησις. Διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ, ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύναται νὰ μεταφερθῇ διὰ παραλλήλων εὐθειῶν, εἰς τὸν λόγον ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰ εὐθυγράμμων τμημάτων ἐπὶ οἰασδήποτε ἄλλης εὐθείας.

A'.

421. Τρεις παράλληλοι ευθείαι (ϵ_1), (ϵ_2), (ϵ_3) διατεταγμένοι κατά την σειράν αυτήν, απέχουν οι δύο πρώτοι απόστασιν 2α και η δεύτερα με την τρίτην απόστασιν 5α. Ευθεία τέμνουσα αυτάς εις τὰ Α, Β, Γ, αντιστοίχως έχει $AB = 3\alpha$. Νά υπολογισθῇ τὸ τμήμα ΒΓ.

422. Εἰς τὴν προηγουμένην ἀσκήσιν, ἂν εἶναι $AG = 21\alpha$, νά υπολογισθῇ τὸ τμήμα ΒΓ.

423. Τρίγωνον ΑΒΓ έχει $AB = 9\lambda$ καὶ $AG = 15\lambda$. Ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ Κ φέρομεν ευθείαν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Νά υπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΓΕ.

424. Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AD = 6\alpha$ καὶ $B\Gamma = 4\alpha$. Ἐπὶ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν σημεία Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AE = \frac{3\alpha}{2}$ καὶ $BZ = \alpha$. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπέζίου.

425. Εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ νά διαιρεθῇ εἰς τρία τμήματα ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5.

426. Νά εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ χωρὶς νὰ ἀχθῇ διάμεσος.

427. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ ευθεία ἡ ὁποία ὀρίζεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς διαμέσου ΑΔ, τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι $\frac{ZA}{Z\Gamma} = \frac{1}{2}$.

428. Ευθεία παράλληλος πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἰς τὰ Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{AE}{AH} = \frac{AB}{AG}$.

429. Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τυχοῦσαν ευθείαν τέμνουσαν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{EA}{EB} = \frac{ZA}{Z\Gamma}$.

430. Ἐκ σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν $DE \parallel B\Gamma$, ἐκ τοῦ Ε φέρομεν $EZ \parallel AB$ καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν $ZH \parallel \Gamma A$. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{DA}{DB} = \frac{HB}{HA}$.

431. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ Ε καὶ ἡ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι $BZ \parallel AD$.

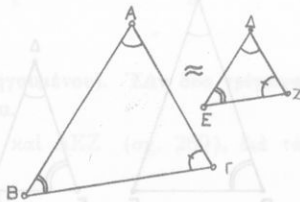
ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

268. Ὅρισμός. Δύο τρίγωνα καλοῦνται **ὅμοια**, ὅταν εἶναι ἰσογώνια, ἥτοι ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ καλοῦνται **ὁμόλογοι** πλευραί. Διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ χρησιμοποιοῦμεν τὸν συμβολισμόν $\approx$, γράφομεν δηλαδή (σχ. 265).

$$(1) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle \Delta EZ.$$

Ἐφιστᾶται ἡ προσοχὴ εἰς τὴν σειράν τῆς ἀναγραφῆς τῶν γραμμάτων



Σχ. 265

A, B, Γ και Δ, E, Z . Πρέπει να είναι τοιαύτη, ώστε οι κορυφαί, εις τὰς οποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι διὰ τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα, να ἀναγράφονται με τὴν αὐτὴν σειράν. (Τοῦτο δὲν εἶναι ἀναγκαῖον, ἀλλὰ ἔχει μόνον πρακτικὴν σημασίαν). Ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἐπεται ἀμέσως τότε ὅτι εἰς τὰ δύο τρίγωνα εἶναι $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$ καὶ $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ ἐπὶ πλέον δὲ ὅτι τὰ τρία ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι τὰ $(AB, \Delta E)$, $(B\Gamma, EZ)$ καὶ $(\Gamma A, Z\Delta)$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων, ἔπονται αἱ ἐξῆς ιδιότητες :

i) Πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$, εἶναι ὅμοιον πρὸς ἑαυτό, ἤτοι εἶναι $\hat{A}B\Gamma \approx \hat{A}B\Gamma$ (ἀνακλαστική).

ii) Ἐὰν εἶναι $\hat{A}B\Gamma \approx \hat{\Delta}E\bar{Z}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\hat{\Delta}E\bar{Z} \approx \hat{A}B\Gamma$ (συμμετρική).

iii) Ἐὰν εἶναι $\hat{A}B\Gamma \approx \hat{\Delta}E\bar{Z}$ καὶ $\hat{\Delta}E\bar{Z} \approx \hat{H}\Theta\bar{I}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\hat{A}B\Gamma \approx \hat{H}\Theta\bar{I}$ (μεταβατική).

Ἄρα ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος δύο τριγώνων ἔπονται τὰ ἐξῆς πορίσματα.

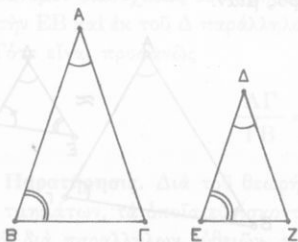
Πόρισμα I. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας τῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τότε εἶναι ὅμοια, διότι κατὰ τὴν § 105, πόρ. II ἔχουν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν αὐτῶν ἴσην.

Πόρισμα II. Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν τῶν ὀξείων γωνιῶν τῶν ἴσην, εἶναι ὅμοια.

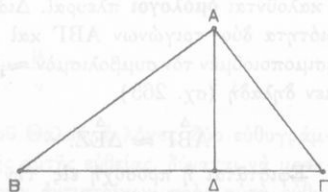
Πόρισμα III. Ἐὰν δύο ἰσοσκελεῖ τρίγωνα ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν ἴσην, ἢ μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαν ἴσην, τότε εἶναι ὅμοια (σχ. 266).

Πόρισμα IV. Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσιν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅμοια πρὸς τὸ ἀρχικὸν καὶ μεταξὺ τῶν ὅμοια.

Πράγματι $\hat{A}\hat{D}B \approx \hat{A}\hat{D}\bar{Z}$ (σχ. 267), διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν $\hat{B}$ κοινήν.



Σχ. 266



Σχ. 267

Ὁμοίως $\triangle G\hat{A}A \approx \triangle G\hat{A}B$, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν $\hat{G}$ κοινήν. Ἀρα θὰ εἶναι καὶ $\triangle A\hat{A}B \approx \triangle G\hat{A}A$.

269. Θεώρημα. Δύο ὅμοια τρίγωνα, ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τῶν ἀναλόγους.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $\triangle AB\Gamma \approx \triangle \Delta EZ$ (σχ. 268). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνομεν τμῆμα $AE' = \Delta E$ καὶ ἐκ τοῦ E' φέρομεν παράλληλον τῆς $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z' . Τότε εἶναι $\triangle AE'Z' = \triangle \Delta EZ$ ὡς ἔχοντα $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{E}' = \hat{B} = \hat{E}$ καὶ $AE' = \Delta E$. Ἀρα $AZ' = \Delta Z$ καὶ $E'Z' = EZ$ καὶ τότε (§ 265, πορ.) εἶναι :

$$(1) \quad \frac{AB}{AE'} = \frac{A\Gamma}{AZ'} \Rightarrow \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}.$$

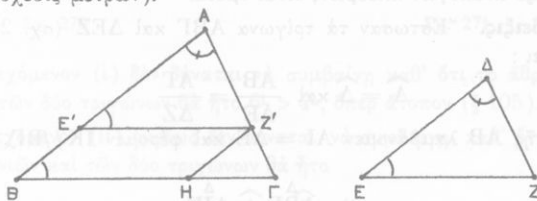
Ἐκ τοῦ Z' φέρομεν παράλληλον τῆς AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ H . Τότε τὸ τετράπλευρον $E'Z'HB$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἀρα $BH = E'Z' = EZ$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$(2) \quad \frac{A\Gamma}{AZ'} = \frac{B\Gamma}{BH} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Ἀπὸ τὰς δευτέρας ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ἔπεται ὅτι :

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Παρατήρησις. Ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) εἶναι καὶ ἡ $AB \cdot AZ' = AE' \cdot A\Gamma$, ὅπου τὰ γινόμενα τῶν μελῶν τῆς ἐρμηνεύονται (πρὸς τὸ παρὸν) ὡς γινόμενα τῶν μέτρων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ ὁποῖα περιέχουν (σχέσις μέτρων).



Σχ. 268

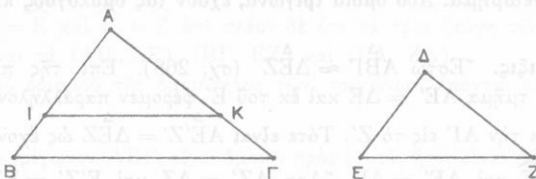
270. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ (σχ. 269), διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

$$(1) \quad \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Ἐπὶ τῆς AB λαμβάνομεν τμήμα $AI = \Delta E$ καὶ ἐκ τοῦ I φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν BΓ, ἥ ὁποία τέμνει τὴν AΓ εἰς τὸ K. Εἶναι προφανῶς

$$(2) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle AIK,$$



Σχ. 269

διότι εἶναι ἰσογώνια. Ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι :

$$(3) \quad \frac{AB}{AI} = \frac{A\Gamma}{AK} = \frac{B\Gamma}{IK}$$

Ἀλλὰ τὰ πρῶτα μέλη τῶν (1) καὶ (3) εἶναι ἴσα, διότι $AI = \Delta E$. Ἄρα

$$\theta\acute{\alpha} \text{ εἶναι καὶ } \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{AK} \quad \text{καὶ} \quad \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{IK} \quad \text{ἐκ τῶν ὁποίων ἔπεται} :$$

$$\Delta Z = AK \quad \text{καὶ} \quad EZ = IK \quad \text{ἀντιστοίχως.}$$

Ἐπομένως εἶναι $\triangle EZ = \triangle IK$ (Π - Π - Π) καὶ λόγω τῆς σχέσεως (2)

$$\text{λαμβάνομεν} \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle EZ.$$

Παρατήρησις. Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων τριγώνων καλεῖται **λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν**.

271. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν τὰ τρίγωνα ABΓ καὶ ΔEZ (σχ. 269) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

$$(1) \quad \hat{A} = \hat{\Delta} \quad \text{καὶ} \quad \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

Ἐπὶ τῆς AB λαμβάνομεν $AI = \Delta E$ καὶ φέρομεν $IK \parallel B\Gamma$. Τότε εἶναι προφανῶς :

$$(2) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle AIK$$

καὶ ἔπομένως :

$$(3) \quad \frac{AB}{AI} = \frac{A\Gamma}{AK}$$

Τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (3) εἶναι ἴσα, διότι $\Delta E = AI$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ εἶναι καί :

$$\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{AK}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι $AK = \Delta Z$.

Ἐπομένως $\hat{A}\hat{I}\hat{K} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$ (Π - Γ - Π). Ἄρα, λόγω τῆς σχέσεως (2), ἔπεται :

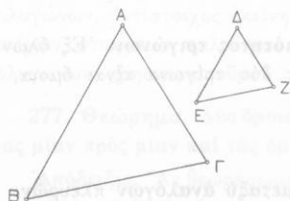
$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \approx \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}.$$

Πόρισμα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς καθετοὺς αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους.

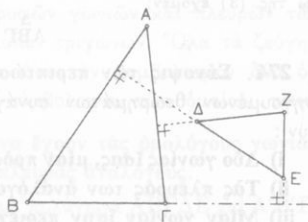
272. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν παραλλήλους ἢ καθετοὺς, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ καὶ $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$, τὰ ὅποια ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν παραλλήλους (σχ. 270) ἢ καθετοὺς (σχ. 271), μίαν πρὸς μίαν. Τότε τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα εἶναι τὰ ἑξῆς (§§ 94, 95) :

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \quad \hat{A} + \hat{\Delta} = 2^{\circ} & \text{ii)} \quad \hat{A} = \hat{\Delta} & \text{iii)} \quad \hat{A} = \hat{\Delta} & \text{iv)} \quad \hat{A} = \hat{\Delta} \\ \hat{B} + \hat{E} = 2^{\circ} & \hat{B} + \hat{E} = 2^{\circ} & \hat{B} = \hat{E} & \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} + \hat{Z} = 2^{\circ} & \hat{\Gamma} + \hat{Z} = 2^{\circ} & \hat{\Gamma} + \hat{Z} = 2^{\circ} & \hat{\Gamma} = \hat{Z} \end{array}$$



Σχ. 270



Σχ. 271

Τὸ ἐνδεχόμενον (i) δὲν δύναται νὰ συμβαίῃ καθ' ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν δύο τριγῶνων θὰ ἦτο $6^{\circ} > 4^{\circ}$, ὅπερ ἄτοπον (§ 105).

Τὸ ἐνδεχόμενον (ii) ὁμοίως δὲν δύναται νὰ συμβαίῃ, καθ' ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν δύο τριγῶνων θὰ ἦτο

$$4^{\circ} + \hat{A} + \hat{\Delta} > 4^{\circ}$$

Τὸ ἐνδεχόμενον (iii) δύναται νὰ συμβαίῃ μόνον ὅταν εἶναι $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 1^{\circ}$, διότι αἱ δύο προηγούμεναι ἰσότητες $\hat{A} = \hat{\Delta}$ καὶ $\hat{B} = \hat{E}$ συνεπάγονται καὶ τὴν $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Τότε ὅμως τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια.

Τέλος τὸ ἐνδεχόμενον (iv) δὲν ἔχομεν λόγους νὰ τὸ ἀποκλείσωμεν, συνεπῶς τοῦτο εἶναι τὸ μόνον τὸ ὅποῖον δύναται νὰ συμβαίῃ (ἢ περιπτώσιν iii εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς iv). Ἄρα τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

273. Θεώρημα. Ἐάν εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ὁ λόγος τῶν ὑποτείνουσῶν εἶναι ἴσος μετὰ τὸν λόγον δύο καθέτων πλευρῶν, ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ (σχ. 272) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει:

$$(1) \quad \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{\Delta E}$$

Ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$ λαμβάνομεν τμήμα

$$(2) \quad BK = EZ \text{ καὶ φέρομεν } KI \parallel \Gamma A.$$

Τότε εἶναι προφανῶς

$$(3) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle IBK \text{ καὶ ἐπομένως:}$$

$$(4) \quad \frac{B\Gamma}{BK} = \frac{AB}{IB}$$

Τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (4) τὰ πρῶτα μέλη εἶναι ἴσα λόγῳ τῆς (2). Ἀρα θὰ εἶναι καὶ τὰ δευτέρα μέλη ἴσα, ἥτοι

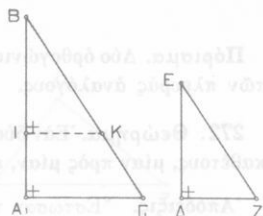
$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AB}{IB}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται

$$(5) \quad IB = \Delta E$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (5) ἔπεται ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα IBK καὶ ΔEZ εἶναι ἴσα καὶ λόγῳ τῆς (3) ἔχομεν:

$$\triangle AB\Gamma \approx \triangle EZ$$



Σχ. 272

274. Σύνοψις τῶν περιπτώσεων ὁμοιότητος τριγώνων. Ἐξ ὧν τῶν προηγουμένων θεωρημάτων συνάγεται ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν:

i) Δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν

ii) Τὰς πλευράς των ἀναλόγους.

iii) Μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.

iv) Τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν.

v) Τὰς πλευράς των καθέτους, μίαν πρὸς μίαν.

Εἰδικῶς διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἰσχύει ἡ πρότασις:

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν μίαν ὀξείαν γωνίαν ἴσην ἢ δύο πλευράς ἀναλόγους, μίαν πρὸς μίαν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν καθέτου πρὸς κάθετον καὶ ὑποτείνουσας πρὸς ὑποτείνουσας.

275. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ (σχ. 273) καὶ ἔστω λ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν, ἥτοι:

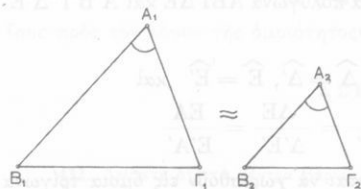
$$(1) \quad \lambda = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1\Gamma_1}{A_2\Gamma_2} = \frac{B_1\Gamma_1}{B_2\Gamma_2} = \frac{A_1B_1 + A_1\Gamma_1 + B_1\Gamma_1}{A_2B_2 + A_2\Gamma_2 + B_2\Gamma_2} = \frac{2\tau_1}{2\tau_2}, \text{ ὅπου}$$

$2\tau_1$ καὶ $2\tau_2$ αἱ περίμετροι τῶν τριγώνων $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ ἀντιστοίχως.

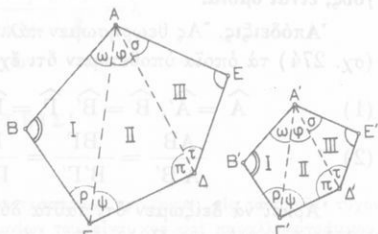
Πόρισμα. Ἐὰν τριγώνου τὰ μήκη τῶν πλευρῶν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ ἀριθμὸν τινα λ , τότε ἡ περίμετρος αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν λ .

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

276. Ὁρισμός. Δύο πολύγωνα καλοῦνται ὅμοια, ὅταν δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἀνὰ δύο καὶ ὁμοίως κείμενα (σχ. 274).



Σχ. 273



Σχ. 274

Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, ὑπάρχει δὲ ἀμφοιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ κορυφῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν τῶν δύο πολυγώνων, ἀντίστοιχος ἐκείνης τῶν ὁμοίων τριγώνων. Ὅλα τὰ ζεύγη ἀντιστοιχῶν στοιχείων καλοῦνται **ὁμολόγια**. Διὰ τὸν συμβολισμόν δύο ὁμοίων πολυγώνων χρησιμοποιοῦμεν τὸ αὐτὸ σύμβολον $\approx$ τῶν ὁμοίων τριγώνων.

277. Θεώρημα. Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (σχ. 274), τὰ ὁποῖα ἔχομεν χωρίσει εἰς ζεύγη ὁμοίων τριγώνων ἥτοι :

- (I) $\triangle AB\Gamma \approx \triangle A'B'\Gamma'$
 (II) $\triangle A\Gamma\Delta \approx \triangle A'\Gamma'\Delta'$
 (III) $\triangle A\Delta E \approx \triangle A'\Delta'E'$

i) Τότε, λόγῳ τῶν ὁμοίων τριγώνων, εἶναι : $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{E} = \widehat{E'}$ ἐνῷ αἱ γωνίαι $\widehat{A}$, $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ τοῦ ἑνὸς πολυγώνου εἶναι ἴσαι ἀντιστοιχῶς μετὰ τὰς $\widehat{A'}$, $\widehat{\Gamma'}$ καὶ $\widehat{\Delta'}$ τοῦ ἄλλου ὡς ἀθροίσματα ἴσων γωνιῶν.

ii) Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων (I) ἔχομεν :

$$(1) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

ἐνῷ ἐκ τῶν ἐπίσης ὁμοίων τριγώνων (II) καὶ (III) ἔχομεν ἀντιστοιχῶς :

$$(2) \quad \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

278. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν δύο πολύγωνα ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ ὁμοίως κειμένας καὶ τὰς πλευράς, τὰς κατὰ τὴν ἰδίαν διάταξιν περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγως, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν πάλιν τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ (σχ. 274) τὰ ὅποια ὑποθέτομεν ὅτι ἔχουν

$$(1) \quad \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}, \widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}, \widehat{E} = \widehat{E'} \text{ καὶ}$$

$$(2) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ταῦτα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ ὁμοίως κείμενα. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς διαγωνίους AG , AD , $A'\Gamma'$ καὶ $A'\Delta'$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι :

$$(I) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle A'B'\Gamma'$$

διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν. Τότε θὰ εἶναι :

$$(3) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AG}{A'\Gamma'}$$

Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν

$$(4) \quad \widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A'\Gamma'\Delta'}$$

ὡς διαφορὰς ἴσων γωνιῶν. Ἀρα ἐκ τῶν (2), (3) καὶ (4) ἔπεται ὅτι :

$$(II) \quad \triangle A\Gamma\Delta \approx \triangle A'\Gamma'\Delta'$$

ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.

Ὅμοίως λαμβάνομεν :

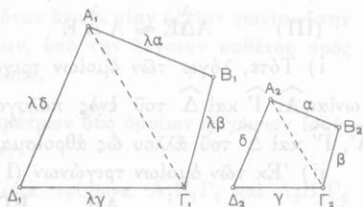
$$(III) \quad \triangle A\Delta E \approx \triangle A'\Delta'E'$$

ἄρα τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια.

Σημείωσις. Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, καλεῖται **λόγος ὁμοιότητος** τῶν πολυγώνων.

279. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων, ἴσودται πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \approx A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ (σχ. 275) καὶ ἄς καλέσωμεν



Σχ. 275

α, β, γ καὶ δ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$. Ἄν λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν, τότε αἱ πλευραὶ τοῦ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ θὰ εἶναι $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma$ καὶ $\lambda\delta$ ἀντιστοίχως.

Ἄρα ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν δύο πολυγώνων θὰ εἶναι :

$$\frac{A_1B_1 + B_1\Gamma_1 + \Gamma_1\Delta_1 + \Delta_1A_1}{A_2B_2 + B_2\Gamma_2 + \Gamma_2\Delta_2 + \Delta_2A_2} = \frac{\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma + \lambda\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \frac{\lambda(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \lambda$$

ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

432. Δείξατε ὅτι τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων, εἰς τὰ ὅποια τυχὸν κυρτὸν τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

433. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου διαιρεῖ ἐκάστην διαγώνιον εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις του.

434. Διὰ τῆς κορυφῆς B τριγώνου ABΓ ἄγομεν εὐθεῖαν BΔ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς AΓ εἰς τὸ Δ καὶ τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{\Gamma B \Delta} = \widehat{A}$. Δείξατε ὅτι εἶναι $B\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta \Gamma$.

435. Εἰς τρίγωνον ABΓ φέρομεν τὰ ὕψη AΔ καὶ BE. Ἐάν H εἶναι τὸ ὀρθόκέντρον, δείξατε ὅτι α) $HA \cdot HD = HB \cdot HE$ καὶ β) $\Gamma A \cdot \Gamma E = \Gamma B \cdot \Gamma \Delta$.

436. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ABΓ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὸ ὕψος AΔ καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν $\Delta E \perp AB$. Δείξατε ὅτι εἶναι $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$.

437. Αἱ βάσεις ἐνὸς τραπεζίου ἔχουν μήκη α καὶ 3α καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ β καὶ 2β . Ἐάν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τέμνονται εἰς τὸ O, νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὴν τὸ O καὶ βάσιν τὴν μεγαλυτέραν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

438. Ἐστω κύκλος (O, R) καὶ AB μία χορδὴ αὐτοῦ. Εἰς τὸ B φέρομεν ἐφαπτομένην (ε) καὶ ἐκ τοῦ A φέρομεν τὴν $A\Gamma \perp (ε)$. Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2 = 2R \cdot A\Gamma$.

439. Εἰς τυχὸν τετράπλευρον ABΓΔ ἄγομεν τὴν διαγώνιον AΓ. Ἐάν E καὶ Z εἶναι τὰ κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ABΓ καὶ AΔΓ, δείξατε ὅτι εἶναι $EZ \parallel \frac{BD}{3}$.

440. Δίδεται τρίγωνον ABΓ. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ὁμοίου πρὸς τὸ ABΓ.

441. Ἀπὸ τυχὸν σημείου A τῆς πλευρᾶς Ox δοθείσης ὀξείας γωνίας $\widehat{xOy}$ φέρομεν κάθετον AB ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν της. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{AB}{AO}$ εἶναι σταθερὸς (ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ A).

442. Τριγώνου ABΓ, ἡ διχοτόμος AΔ τέμνει τὸν περιγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ E. Δείξατε ὅτι εἶναι α) $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$, β) $EB^2 = EA \cdot ED$.

443. Διὰ τῆς κορυφῆς A ἰσοσκελοῦς τριγώνου ABΓ ($AB = A\Gamma$) φέρομεν τυχούσαν εὐθεῖαν, ἡ ὅποια τέμνει τὴν πλευρὰν BΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὸν περιγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ E. Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2 = A\Delta \cdot AE$.

444. Δείξατε ὅτι δύο παραλληλόγραμμα μὲ μίαν γωνίαν ἴσην ἢ παραπληρωματικὴν καὶ τὰς προσκειμένους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

445. Δείξατε ὅτι ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν τὰς διαγωνίους των ἀναλόγους καὶ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἴσας γωνίας, εἶναι ὅμοια.

446. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου ἐνὸς κύκλου ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς ἐφαπτομένης εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην.

447. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐὰν Δ καὶ E εἶναι σημεῖα τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, τοιαῦτα ὥστε $BA\Delta = \widehat{GA\Gamma E}$ καὶ Z εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς $A\Delta$ μετὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ $AB\Gamma$ κύκλου, δείξατε ὅτι εἶναι $\beta \cdot \gamma = AZ \cdot AE$.

Β'.

448. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$, εἰς τὸ ὑποῖον εἶναι $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 1^\circ$. Ἐὰν AA' εἶναι τὸ ὕψος του, δείξατε ὅτι εἶναι $AA'^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$.

449. Ἐστω E τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου BA παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Φέρομεν τὴν AE , ἡ ὅποια τέμνει τὰς $B\Gamma$ καὶ $\Gamma\Delta$ εἰς τὰ Z καὶ H ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι $AE^2 = EZ \cdot EH$.

450. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος. Φέρομεν τὴν διάμετρον AA' , ἡ ὅποια τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ E καὶ ἐκ τοῦ E φέρομεν τὰς $EZ \perp AB$ καὶ $EH \perp A\Gamma$. Δείξατε ὅτι εἶναι $ZH \parallel B\Gamma$.

451. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἐκάστη κορυφή καὶ τὰ ἴχνη τῶν δύο ἄλλων ὕψων εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ὁμοίου πρὸς αὐτό.

452. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου διχοτομεῖ τὸ τμήμα πού ἄγεται ἀπὸ αὐτὸ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

453. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου διχοτομεῖ τὸ τμήμα πού ἄγεται ἀπὸ αὐτὸ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του εἰς τὰς προεκτάσεις τῶν διαγωνίων.

454. Ἀπὸ σημείου Σ κείμενον ἐκτὸς δοθέντος κύκλου φέρομεν τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα ΣA καὶ ΣB καὶ μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν $\Sigma \Gamma\Delta$. Δείξατε ὅτι εἶναι $A\Gamma \cdot B\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$.

455. Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ βάσεις τραπεζίου, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ τμήματος πού ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

456. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ AA' , BE , ΓZ τὰ τρία ὕψη του. Δείξατε ὅτι εἶναι $\Delta B \cdot \Delta \Gamma = \Delta E \cdot \Delta Z$.

457. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου ἐνὸς κύκλου ἀπὸ χορδῆν εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας πού ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς.

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

280. Ὅρισμοί. Δοθέντος σταθεροῦ σημείου O καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ k , ὀρίζομεν :

i) Ὁμόρροπον ὁμοιοθεσίαν τὴν ἀπεικόνισιν τυχόντος σημείου A εἰς σημεῖον A' τῆς ἡμιευθείας OA , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $OA' = k \cdot OA$.

ii) Ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν τὴν ἀπεικόνισιν τυχόντος σημείου A εἰς σημείον A' τῆς ἀντιθέτου ἡμιευθείας πρὸς τὴν OA , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $OA' = k \cdot OA$.

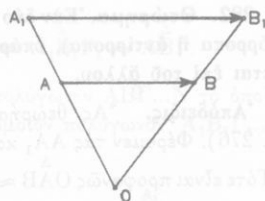
Τὸ σημεῖον O καλεῖται κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ ὁ ἀριθμὸς k λόγος αὐτῆς. Μία ὁμοιοθεσία μὲ κέντρον σημεῖον O καὶ λόγον k , συμβολίζεται μὲ $F(O, k)$. Ἐὰν μέσῳ αὐτῆς, σημεῖον A ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον A' , συμβολίζομεν :

$$A \xrightarrow{F(O, k)} A'$$

281. Θεώρημα. Ἐν προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμήμα $\vec{AB}$ ἀπεικονίζεται μέσῳ μιᾶς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$ εἰς προσανατολισμένον τμήμα $\vec{A_1B_1}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\vec{A_1B_1} = k \cdot \vec{AB}$ (ὁμόρροπον), ἐνῶ μέσῳ μιᾶς ἀντίρροπου ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$ εἰς προσανατολισμένον τμήμα $\vec{A_2B_2}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\vec{A_2B_2} = -k \cdot \vec{AB}$ (ἀντίρροπον).

Ἀπόδειξις. i) Ἐπειδὴ ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμόρροπος, ἔχομεν (σχ. 276) :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA_1} = k \cdot \vec{OA} \\ \vec{OB_1} = k \cdot \vec{OB} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}} = k \\ \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OB}} = k \end{array} \right\} \quad (1)$$



Σχ. 276

Τὰ δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (1) εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OB}}$$

Τότε $\triangle OA_1B_1 \approx \triangle OAB$, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν καὶ τὴν γωνίαν των εἰς τὸ O

κοινὴν. Ἀρα $\frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}}$ καὶ λόγω τῆς (1) $\Rightarrow \frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = k \Rightarrow$

$$\vec{A_1B_1} = k \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{A_1B_1} \uparrow \vec{AB} \quad (\text{διότι εἶναι } k > 0).$$

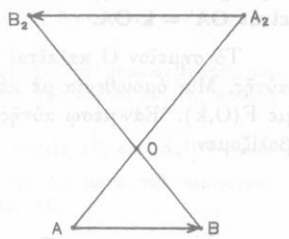
ii) Εἰς τὴν ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν, ἐπειδὴ τὰ $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OA_2}$ εἶναι ἀντίρροπα ἐξ ὁρισμοῦ, ἔχομεν (σχ. 277).

$$\left. \begin{aligned} \vec{OA_2} &= -k \cdot \vec{OA} \\ \vec{OB_2} &= -k \cdot \vec{OB} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\vec{OA_2}}{\vec{OA}} &= -k \\ \frac{\vec{OB_2}}{\vec{OB}} &= -k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Τὰ δευτέρω μέλη τῶν σχέσεων (2) εἶναι

$$\text{ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ } \frac{\vec{OA_2}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OB_2}}{\vec{OB}} \Rightarrow$$

$\vec{OA_2B_2} \approx \vec{OAB}$, διότι ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των εἰς τὸ O ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν. Ἀρα $\frac{\vec{A_2B_2}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{OA_2}}{\vec{OA}}$ καὶ λόγῳ τῆς (2) $\Rightarrow \frac{\vec{A_2B_2}}{\vec{AB}} = -k$
 $\Rightarrow \vec{A_2B_2} = -k \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{A_2B_2} \uparrow \downarrow \vec{AB}$ (διότι εἶναι $-k < 0$).



Σχ. 277

282. Θεώρημα. Ἐὰν δύο προσανατολισμένα τμήματα εἶναι παράλληλα (ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα), ὑπάρχει ὁμοιοθεσία μέσῳ τῆς ὁποίας τὸ ἓν ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

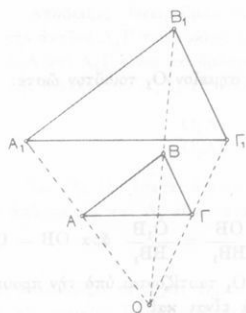
Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν τὰ ὁμόρροπα τμήματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{A_1B_1}$ (σχ. 276). Φέρομεν τὰς AA_1 καὶ BB_1 , αἱ ὁποῖαι ἐν γένει τέμνονται εἰς σημεῖον O . Τότε εἶναι προφανῶς $\vec{OAB} \approx \vec{OA_1B_1} \Rightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{A_1B_1}{AB}$ καὶ ἐὰν θέσωμεν $\frac{A_1B_1}{AB} = k \Rightarrow OA_1 = k \cdot OA$ καὶ $OB_1 = k \cdot OB$, αἱ ὁποῖαι εἶναι χαρακτηριστικαὶ σχέσεις ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$.

Ἐξαιρέσειν ἀποτελεῖ τὸ ἐνδεχόμενον $AB = A_1B_1$, διότι τότε αἱ AA_1 καὶ BB_1 θὰ εἶναι παράλληλοι. Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι θὰ τέμνονται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας θὰ εἶναι $k = 1$.

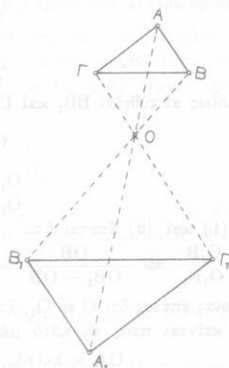
Ὁμοίως διὰ τὰ ἀντίρροπα τμήματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{A_2B_2}$ (σχ. 277) ἔχομεν $\vec{OAB} \approx \vec{OA_2B_2} \Rightarrow \frac{\vec{OA_2}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OB_2}}{\vec{OB}} = \frac{\vec{A_2B_2}}{\vec{AB}} = -k \Rightarrow \vec{OA_2} = -k \cdot \vec{OA}$ καὶ $\vec{OB_2} = -k \cdot \vec{OB} \Rightarrow A \xrightarrow{F(O, -k)} A_2$ καὶ $B \xrightarrow{F(O, -k)} B_2$.

283. Θεώρημα. Κάθε τρίγωνον $AB\Gamma$ ἀπεικονίζεται μέσῳ ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$ εἰς τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$ μὲ λόγον ὁμοιότητος k .

Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ δι' ὁμόρροπον καὶ δι' ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν (σχ. 278 καὶ 279), διότι (§ 280) καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι :



Σχ. 278

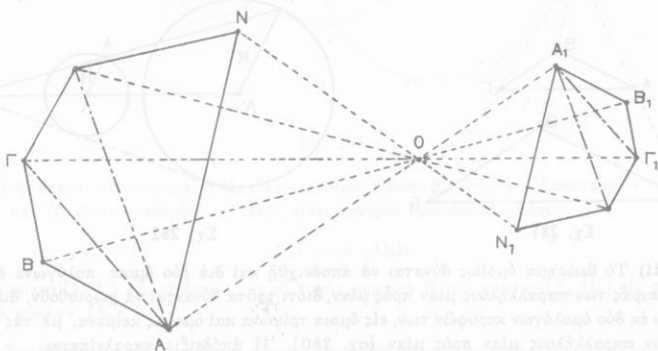


Σχ. 279

$$A_1B_1 = k \cdot AB, \quad B_1\Gamma_1 = k \cdot B\Gamma, \quad \Gamma_1A_1 = k \cdot \Gamma A \Rightarrow$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma} = \frac{\Gamma_1A_1}{\Gamma A} = k \Rightarrow A_1B_1\Gamma_1 \approx \Delta AB\Gamma.$$

Τὸ θεώρημα ἐπεκτείνεται καὶ διὰ τυχόν πολύγωνον $AB\Gamma\dots N$ τὸ ὁποῖον, μέσῳ ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$, ἀπεικονίζεται εἰς ὅμοιον πολύγωνον $A_1B_1\Gamma_1\dots N_1$



Σχ. 280

(σχ. 280) με λόγον ὁμοιότητος k . Ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ διαιρέσεως τοῦ πολυγώνου $AB\Gamma\dots N$ εἰς τρίγωνα, με διαγωνίους ἐκ τῆς κορυφῆς A .

★ 284. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, ὑπάρχει ὁμοιοθεσία ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Απόδειξεις i_2 Έστω ότι δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμορρόπους. (σχ. 281). Ἐάν εἶναι $\lambda \neq 1$ ὁ λόγος ὁμοιότητος, αἱ εὐθεῖαι AA_1 καὶ BB_1 τέμνονται εἰς σημεῖον O τοιοῦτον, ὥστε:

$$\triangle OAB \approx \triangle OA_1B_1.$$

Ἄρα:

$$(1) \quad \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \lambda.$$

Ὀμοίως αἱ εὐθεῖαι BB_1 καὶ $\Gamma\Gamma_1$ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον O_1 τοιοῦτον ὥστε:

$$\triangle O_1B\Gamma \approx \triangle O_1B_1\Gamma_1.$$

Ἄρα:

$$(2) \quad \frac{O_1B}{O_1B_1} = \frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1} = \lambda.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι:

$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{O_1B}{O_1B_1} \Rightarrow \frac{OB}{OB_1 - OB} = \frac{O_1B}{O_1B_1 - O_1B} \Rightarrow \frac{OB}{BB_1} = \frac{O_1B}{BB_1} \quad \text{ἄρα } OB = O_1B$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι $O \equiv O_1$, ἥτοι τὰ σημεῖα O καὶ O_1 ταυτίζονται ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ B . Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$OA = \lambda \cdot OA_1, \quad OB = \lambda \cdot OB_1, \quad OG = \lambda \cdot OG_1,$$

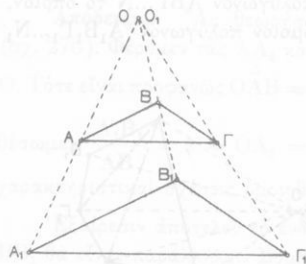
ἥτοι ὑπάρχει ὁμοιοθεσία $F(O, \lambda)$, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ $A_1B_1\Gamma_1$ ἐπὶ τοῦ $AB\Gamma$.

Ἐάν $\lambda = 1$, τὰ τετράπλευρα ABB_1A_1 καὶ $B\Gamma\Gamma_1B_1$ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμα, ὁπότε

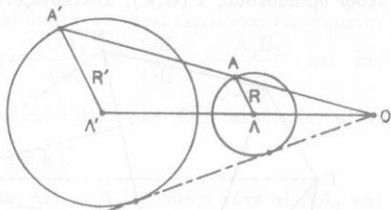
$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel \Gamma\Gamma_1.$$

Τότε πάλιν ὑπάρχει ὁμοιοθεσία, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον ἔχει ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον.

i_3 Ὀμοίως ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα καὶ ὅταν αἱ πλευραὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἀντίρροποι.



Σχ. 281



Σχ. 282

ii) Τὸ θεώρημα ὁμοίως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ δύο ὁμοία πολύγωνα ἔχοντα τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, διότι ταῦτα δύναται νὰ χωρισθοῦν, διὰ διαγωνίων ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν των, εἰς ὁμοία τρίγωνα καὶ ὁμοίως κείμενα, μετὰ τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν (σχ. 280). Ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται.

★ **285. Θεώρημα.** Τὸ ὁμοιόθετον ἐνὸς κύκλου εἶναι κύκλος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω (Λ, R) κύκλος καὶ $F(O, k)$ μία ὁμοιοθεσία (σχ. 282). Ἐάν Λ' εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ Λ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν $F(O, k)$, τὸ Λ' εἶναι σταθερὸν σημεῖον ὡς εἰκὼν σταθεροῦ σημείου. Ἐστω A τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου. Τότε (§ 280) εἶναι

$$\Lambda\Lambda' \xrightarrow{F(O, k)} \Lambda'\Lambda'$$

τοιούτον, ὥστε $\Lambda' A' = k \cdot \Lambda A = k \cdot R$. Ἄρα τὸ σημεῖον A' ἀνήκει εἰς κύκλον ἀκτίνος $R' = k \cdot R$, ὁ ὅποιος εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ κύκλου (Λ, R) .

★ 286. **Θεώρημα.** Δύο κύκλοι (Λ_1, R_1) καὶ (Λ_2, R_2) ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διάμετρον AB (σχ. 283) τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2) καὶ τὴν ἀκτίνα $\Lambda_1 \Gamma$ τοῦ κύκλου (Λ_1, R_1) παράλληλον τῆς διαμέτρου AB . Ἐστω ὅτι αἱ ἀκτίνες $\Lambda_2 A$ καὶ $\Lambda_1 \Gamma$ εἶναι καὶ ὁμόροποι. Τότε ἐφ' ὅσον $R_1 \neq R_2$, ἡ $\Lambda \Gamma$ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διακέντρου $\Lambda_1 \Lambda_2$ εἰς σημεῖον O_1 , τοιούτον ὥστε:

$$(1) \quad \frac{O_1 \Lambda_1}{O_1 \Lambda_2} = \frac{O_1 \Gamma}{O_1 A} = \frac{\Lambda_1 \Gamma}{\Lambda_2 A} = \frac{R_1}{R_2} = k.$$

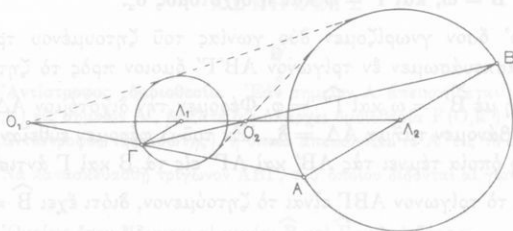
Ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον O_1 εἶναι σταθερόν, διότι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων του ἀπὸ τὰ Λ_1 καὶ Λ_2 εἶναι σταθερὸς, καὶ τέλος εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας, διότι:

$$(2) \quad O_1 \Gamma = k \cdot O_1 A,$$

ἥτοι ἀπεικονίζει τὸ τυχὸν σημεῖον A τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2) , ὅπως φαίνεται ἐκ τῆς σχέσεως (2), εἰς σημεῖον Γ τοῦ κύκλου (Λ_1, R_1) .

Ἐάν φέρωμεν τὴν $B\Gamma$, αὕτη τέμνει τὴν διακέντρον εἰς σημεῖον O_2 τοιούτον, ὥστε:

$$(3) \quad \frac{O_2 \Lambda_1}{O_2 \Lambda_2} = \frac{O_2 \Gamma}{O_2 B} = \frac{\Lambda_1 \Gamma}{\Lambda_2 B} = \frac{R_1}{R_2} = k.$$



Σχ. 283

Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον O_2 εἶναι σταθερόν, διότι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων του ἀπὸ τὰ Λ_1 καὶ Λ_2 εἶναι σταθερὸς καὶ τέλος εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας διότι:

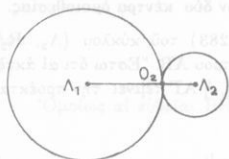
$$(4) \quad O_2 \Gamma = k \cdot O_2 B$$

ἥτοι ἀπεικονίζει διὰ τῆς σχέσεως (4) τὸ τυχὸν σημεῖον B τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2) εἰς σημεῖον Γ τοῦ κύκλου (Λ_1, R_1) .

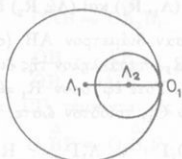
Συμπέρασμα. Δύο τυχόντες κύκλοι ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας εὐρίσκόμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ διακέντρος. Τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν εὐρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο κέντρων τῶν κύκλων καὶ καλεῖται ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας, ἐνῷ τὸ ἄλλο εὐρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς διακέντρου καὶ καλεῖται ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων, (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει), διέρχεται ἀπὸ τὸ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας, καὶ ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει), διέρχεται ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

ii) Ἐάν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἶναι τὸ ἐν ἐκ τῶν δύο κέντρων ὁμοιοθεσίας (σχ. 284).



Σχ. 284



Σχ. 285

iii) Ἐάν εἶναι $R_1 = R_2$, τὸ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ τὸ ἐσωτερικὸν εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς διακέντρου (σχ. 285).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΜΕ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

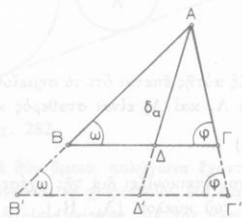
287. Παράδειγμα 1. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$, τοῦ ὁποῖου δίδονται αἱ γωνίαι $\widehat{B} = \omega$, καὶ $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ ἡ διχοτόμος δ_α .

Λύσις. Ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν δύο γωνίας τοῦ ζητουμένου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον $AB'\Gamma'$ ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον (σχ. 286), δηλαδή μὲ $\widehat{B'} = \omega$ καὶ $\widehat{\Gamma'} = \varphi$. Φέρομεν τὴν διχοτόμον AD' αὐτοῦ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $AD = \delta_\alpha$. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς $B'\Gamma'$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς AB' καὶ $A\Gamma'$ εἰς τὰ B καὶ Γ ἀντιστοίχως. Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει $\widehat{B} = \widehat{B'} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} = \varphi$ καὶ διχοτόμον τὴν $AD = \delta_\alpha$.

Λύσις ὑπάρχει πάντοτε μία, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega + \varphi < 2\pi$.

288. Παράδειγμα 2. Εἰς δοθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$, νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποῖου ἡ μία πλευρὰ νὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς $B\Gamma$.

Ἀνάλυσις. Ἐστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχει ἐγγραφῇ τὸ τετράγωνον ΔEZH (σχ. 287) μὲ τὴν πλευρὰν ΔE ἐπὶ τῆς $B\Gamma$. Ἡ ὁμοιοθεσία



Σχ. 286

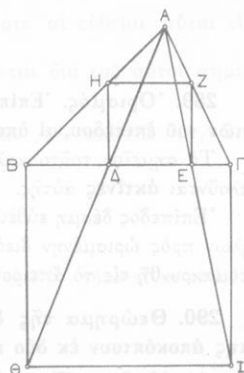
μὲ κέντρον τὸ A καὶ λόγον $k = \frac{AB}{AH}$, ἀπεικονίζει τὴν HZ ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ καὶ τὸ τετράγωνον $HZE\Delta$ εἰς τετράγωνον $B\Gamma\Theta$, τὸ ὁποῖον δύναται ἐξ ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου,

τὸ τετράγωνον ΒΓΙΘ καὶ φέρομεν τὰς ΑΘ καὶ ΑΙ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν Δ καὶ Ε φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΗ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΔΗ // ΒΘ, ΔΕ // ΘΙ, ΕΖ // ΓΙ, ἔπεται ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία κέντρου Α καὶ λόγου $k' = \frac{1}{k} = \frac{AH}{AB}$ ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα Β, Θ, Ι, Γ εἰς τὰ Η, Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Ἀρα :

$ΒΘΙΓ \xrightarrow{F(A, k')} HΔΕΖ \Rightarrow ΒΘΙΓ \approx HΔΕΖ$
καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΘΙΓ εἶναι ἕκ κατασκευῆς τετράγωνον, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ΗΔΕΖ εἶναι τετράγωνον.



Σχ. 287

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β.

458. Ἀντίστροφος ὁμοιοθεσία. Ἐὰν σημείον Α ἀπεικονίζεται μέσῳ μιᾶς ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$ εἰς σημείον Α', δείξατε ὅτι ὑπάρχει ὁμοιοθεσία $F(O, k')$ τοῦ αὐτοῦ κέντρου (καλούμενη ἀντίστροφος τῆς πρώτης), ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ Α' εἰς τὸ Α.

459. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ ἡ διάμεσος μ_x .

460. Ὅμοιως ὅταν δίδονται αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ τὸ ὕψος μ_x .

461. Δίδεται γωνία $\chi\widehat{O}\gamma$ καὶ σημείον Α ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Β καὶ Γ, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{AG} = \frac{\mu}{\nu}$.

462. Δίδεται γωνία $\chi\widehat{O}\gamma$ καὶ σημείον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma B = 3 \cdot \Sigma A$.

463. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἀκτίς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

464. Ὅμοιως ὅταν δίδεται ἡ ἀκτίς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

465. Δίδεται κύκλος (Κ, R) καὶ σημείον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma B = 2 \cdot \Sigma A$.

466. Δίδεται κύκλος (Ο, R), εὐθεῖα (ε) καὶ σημείον Σ. Διὰ τοῦ Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν (ε) εἰς τὸ Α καὶ τὸν (Ο, R) εἰς τὸ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma B = 3 \cdot \Sigma A$.

467. Ἀπὸ τὸ ἐν τῶν κοινῶν σημείων Α δύο τεμονόμενων κύκλων (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτοὺς εἰς τὰ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AB = 2 \cdot AG$.

468. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς δοθὲν.

469. Μεταβλητὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ διατηρεῖ σταθερὰν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = \alpha$ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ τὴν διάμεσον $BD = \mu_B$ κατὰ μέγεθος. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς A .

ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

289. Ὅρισμός. Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν καλεῖται τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται δι' ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου O .

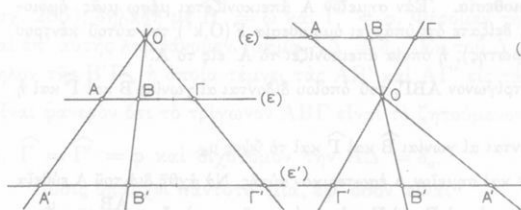
Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται κέντρον τῆς δέσμης. Αἱ εὐθεῖαι τῆς δέσμης καλοῦνται ἀκτῖνες αὐτῆς.

Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ τὸ σύνολον τῶν παραλλήλων πρὸς ὠρισμένην διεύθυνσιν εὐθειῶν. Τότε τὸ κέντρον τῆς δέσμης ἔχει ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον.

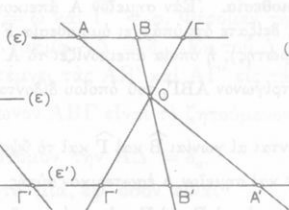
290. Θεώρημα τῆς δέσμης. Τρεῖς ἢ περισσότεραι ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης ἀποκόπτουν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τμήματα ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν κέντρου O καὶ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ϵ) καὶ (ϵ') , τεμνόμεναι ὑπὸ τριῶν ἀκτῖνων τῆς δέσμης εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ καὶ A', B', Γ' ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

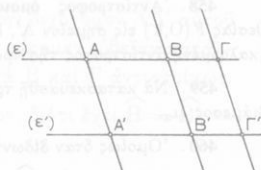
$$(1) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$



Σχ. 288



Σχ. 289



Σχ. 290

Ἀπὸ τὰ δύο ζεύγη ὁμοίων τριγώνων (σχ. 288, 289) $\triangle OAB \approx \triangle OA'B'$ καὶ $\triangle O\Gamma B \approx \triangle O\Gamma'B'$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{OB}{OB'}.$$

Αὗται ἔχουν τὰ δεῦτερα μέλη των ἴσα.

Ἀρα θὰ εἶναι καὶ :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$

Ὅμοιως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ δέσμην περισσοτέρων ἀκτῖνων.

291. Θεώρημα. Ἐὰν τρεῖς (ἢ περισσότεραι) εὐθεῖαι τέμνουν δύο παραλλήλους εὐθείας (ε) καὶ (ε') εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{AG}{A'G'}$, τότε αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἀκτῖνες μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς δέσμης, ἥτοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἐστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ' (σχ. 288). Τότε εἶναι $O\hat{A}B \approx O\hat{A}'B'$, ἄρα :

$$(2) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$$

Ἐὰν Ο' εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΒ' καὶ ΓΓ', τότε εἶναι $O'\hat{B}G \approx O'\hat{B}'G'$, ἄρα :

$$(3) \quad \frac{BG}{B'G'} = \frac{O'B}{O'B'}$$

Ἐκ τῆς ὑποθέσεως $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'}$ καὶ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται :

$$\frac{OB}{OB' - OB} = \frac{O'B}{O'B' - O'B} \Rightarrow \frac{OB}{BB'} = \frac{O'B}{BB'}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἀναλογίας ἔπεται ὅτι $OB = O'B$, δηλαδὴ τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο' συμπίπτουν. Ἀρα αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ἥτοι εἶναι ἀκτῖνες μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς δέσμης.

Ἐὰν εἶναι $AA' // BB'$, τὸ τετράπλευρον $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον (σχ. 290), ἐπομένως $AB = A'B'$. Τότε ἡ ὑπόθεσις (1) γράφεται :

$$1 = \frac{BG}{B'G'}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι $BG = B'G'$. Ἀρα καὶ τὸ $BGG'B'$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπομένως $BB' // GG'$, ἥτοι $AA' // BB' // GG'$.

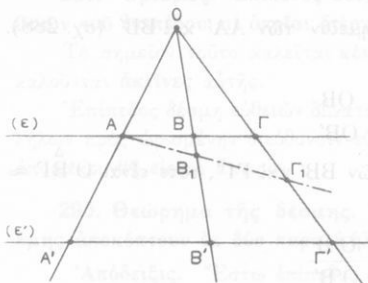
292. Θεώρημα. Ἐὰν τρεῖς ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης κέντρου Ο τέμνονται ὑπὸ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ε') εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως καὶ εἶναι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'}$, αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε') εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ (ε) καὶ (ε') δὲν εἶναι παράλληλοι (σχ. 291), φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὴν $AB_1\Gamma_1 // A'B'\Gamma'$ καὶ τότε, κατὰ τὸ θεώρημα 291, θὰ εἶναι :

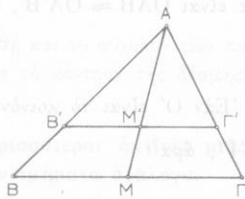
$$\frac{AB_1}{A'B'} = \frac{B_1\Gamma_1}{B'\Gamma'} \iff \frac{AB_1}{B_1\Gamma_1} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \quad (1). \quad \text{Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} \iff \frac{AB}{BG} = \frac{A'B'}{B'G'} \quad (2). \text{ Έκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), αἱ}$$

ὁποῖαι ἔχουν τὰ δευτέρα μέλη των ἴσα, ἔπεται ὅτι $\frac{AB_1}{B_1\Gamma_1} = \frac{AB}{BG}$. Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι (Θ. Θαλοῦ) $BB_1 // \Gamma\Gamma_1$, ὅπερ ἤτοπον, διότι αἱ BB_1 καὶ $\Gamma\Gamma_1$, ἐξ



Σχ. 291



Σχ. 292

ὕποθέσεως, τέμνονται εἰς τὸ Ο. Ἄρα κατ' ἀνάγκην πρέπει νὰ εἶναι $AB\Gamma // A'B'G'$ ἢ $(\epsilon) // (\epsilon')$.

Πόρισμα. Ἐὰν τριγώνου $AB\Gamma$ ἢ AM εἶναι διάμεσος, πᾶν εὐθύγραμμον τμήμα $B'\Gamma' // B\Gamma$, ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς διαμέσου.

Πράγματι, εἶναι: $\frac{BM}{B'M'} = \frac{GM}{G'M'}$ καί, ἐπειδὴ $BM = GM$, ἔπεται καὶ $B'M' = G'M'$ (σχ. 292).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

470. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὰ μέσα K καὶ Λ τῶν βάσεων τραπεζίου, διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου E τῶν διαγωνίων καὶ διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Z τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

471. Ἐὰν αἱ ἀκτίνες μιᾶς δέσμης κέντρου O τέμνουν δύο παραλλήλους εὐθείας (ϵ) καὶ (ϵ') εἰς τὰ A καὶ A' , B καὶ B' , Γ καὶ Γ' ,... ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ διαγώνιοι τῶν τραπεζίων $AA'B'B$, $BB'\Gamma'\Gamma$, $\Gamma\Gamma'\Delta'\Delta$,... τέμνονται εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς (ϵ) καὶ (ϵ') .

472. Φέρομεν δύο παραλλήλους πρὸς τὴν διαγώνιον $A\Gamma$ κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευράς του εἰς τὰ E , Θ καὶ H, Z ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι EZ καὶ $H\Theta$ τέμνονται ἐπὶ τῆς $B\Delta$.

473. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διάμεσον AM , ἡ ὁποία τέμνει τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ E καὶ Z . Δείξατε ὅτι τὸ ἀθροισμα $\Delta E + \Delta Z$ εἶναι σταθερόν.

474. Δίδεται παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστω E τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου $B\Delta$. Διὰ τοῦ E φέρομεν ἀνὰ μίαν παράλληλον πρὸς τὰς πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἰς τὰ Z καὶ H ἀντιστοίχως καὶ τὰς AD καὶ $B\Gamma$ εἰς τὰ I καὶ Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι : α) $Z\Theta // HI$, καὶ β) αἱ IZ καὶ $H\Theta$ τέμνονται ἐπὶ τῆς $B\Delta$.

475. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστω E τυχὸν σημεῖον τῆς AB . Διὰ τοῦ E φέρομεν παράλληλον τῆς $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z καὶ ἐκ τοῦ Z φέρομεν παράλληλον τῆς $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AD εἰς τὸ H . Δείξατε ὅτι εἶναι :

$$\alpha) AE \cdot \Delta H = BE \cdot AH, \text{ καὶ } EH // B\Delta.$$

476. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) , (ϵ_2) καὶ σημεῖον A . Αἱ (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τέμνονται, ἀλλὰ τὸ σημεῖον τομῆς των δὲν εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ πεδίου σχεδίασεως. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ A διερχομένη καὶ ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) .

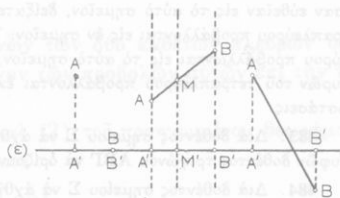
ΠΕΡΙ ΟΡΘΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

293. Ὅρισμοί. Ἐστω σημεῖον A καὶ εὐθεῖα (ϵ) (σχ. 293). Φέρομεν τὴν $AA' \perp (\epsilon)$. Τὸ σημεῖον A' ἐπὶ τῆς (ϵ) καλεῖται (ὀρθή) **προβολή** τοῦ σημείου A ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) . Ἡ εὐθεῖα (ϵ) καλεῖται **προβολικὸς ἄξων** καὶ τὸ τμήμα AA' καλεῖται **προβάλλουσα** τοῦ σημείου A .

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι, ἐὰν ἓν σημεῖον B εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἄξωνος, τότε ταυτίζεται μετὰ τῆς προβολῆς του.

Προβολή ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ ἄξωνα (ϵ) , καλεῖται τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος AB , ἐπὶ τὸν ἄξωνα (ϵ) .

294. Θεώρημα. Ἡ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ εὐθεῖαν (ϵ) , εἶναι τμήμα $A'B'$ μὲ ἄκρα τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων τοῦ AB ἐπὶ τὴν (ϵ) .



Σχ. 293

Ἀποδείξεις. Ἐστωσαν A' καὶ B' αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων A καὶ B

τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) (σχ. 293). Ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τμήματος AB , προβάλλεται εἰς σημεῖον M' τοῦ τμήματος $A'B'$ καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M' τοῦ τμήματος $A'B'$, εἶναι ἡ προβολὴ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) , ἑνὸς σημείου M τοῦ τμήματος AB .

Ἐστω M' ἡ προβολὴ τυχόντος σημείου M τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) . Αἱ εὐθεῖαι AA' , BB' καὶ MM' εἶναι παράλληλοι, ὥς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ϵ) . Τὸ σημεῖον M , ὡς ἀνήκον εἰς τὸ τμήμα AB , εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων AA' καὶ BB' . Ἀρα καὶ ἡ MM' θὰ εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων AA' καὶ BB' . Ἐπομένως ἡ MM' θὰ τέμνῃ τὸ τμήμα $A'B'$ εἰς σημεῖον M' , ἥτοι ἡ προβολὴ M' τοῦ M ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος $A'B'$.

Ὅμοιως ἀποδεικνύεται τὸ ἀντίστροφον, ἥτοι, ἐὰν M' εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος $A'B'$, ἡ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) , ὡς παράλληλος πρὸς τὰς AA' καὶ BB' , θὰ τέμνῃ τὸ τμήμα AB εἰς σημεῖον M . Ἀρα τὸ σημεῖον M' εἶναι ἡ προβολὴ ἐνὸς σημείου M τοῦ τμήματος AB .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

477. Δείξατε ὅτι αἱ προβολαὶ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων τμημάτων ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι ἴσαι.

478. Ἐὰν $A'B'$ εἶναι ἡ προβολὴ τμήματος AB ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) , δείξατε ὅτι εἶναι $AB \geq A'B' \geq 0$. Πότε ἰσχύει τὸ πρῶτον ἴσον; καὶ πότε τὸ δεύτερον;

479. Δείξατε ὅτι τὸ μέσον ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν.

480. Ἐὰν εὐθύγραμμον τμήμα AB προβάλλεται ἐπὶ τρεῖς εὐθείας (ε_1) , (ε_2) , (ε_3) εἰς τὰ A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων A_1B_1 , A_2B_2 καὶ A_3B_3 διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

B'.

481. Ἐὰν τὰ μέσα K καὶ Λ τῶν πλευρῶν AB καὶ AG τριγώνου ABG , προβάλλωνται ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς BI' ἐπὶ τὴν (ε) εἶναι μηδενική.

482. Ἐὰν τὰ μέσα δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλεύρου, προβάλλωνται ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι καὶ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται εἰς ἓν σημεῖον. Ἐὰν τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται ἐκατέρωθεν τοῦ προηγουμένου σημείου εἰς ἴσας ἀποστάσεις.

483. Διὰ δοθέντος σημείου Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα (ε) , ἐπὶ τὴν ὁποίαν αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν δοθέντος τριγώνου ABG νὰ ὀρίζουν δύο ἴσα τμήματα.

484. Διὰ δοθέντος σημείου Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ὁποίαν αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν τριγώνου ABG νὰ ὀρίζουν δύο διαδοχικὰ τμήματα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

295. Μετρικὴ σχέσις γενικῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν καλεῖται πᾶσα σχέσις συνδέουσα τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων, ὅταν ταῦτα μετρῶνται μετὰ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς μετρήσεως εἶναι αὐθαίρετος, ἔπεται ὅτι πᾶσα μετρικὴ σχέσις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως καὶ εἶναι καθαρῶς σχέσις λόγων.

Πᾶσα γεωμετρικὴ σχέσις εἶναι μετρικὴ σχέσις, ἥτοι σχέσις ἀληθεύουσα δι' οἰανδήποτε μονάδα μετρήσεως, εἶναι δὲ ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὰ μήκη τὰ ὅποια περιέχει. Οὐδὲν γεωμετρικὸν θεώρημα καταλήγει εἰς μὴ ὁμογενῆ σχέσιν.

Ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα, ἡ σχέσις $2(\alpha)(\beta) = (\gamma)^2$ ἀναφορομένη εἰς τὰ μέτρα $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ τῶν τμημάτων, εἶναι μετρικὴ σχέσις ὁμογενῆς δευτέρου βαθμοῦ καὶ διὰ τὴν ἀπλοῦστεσιν θὰ γράφεται $2\alpha\beta = \gamma^2$. Ἡ σχέσις $3\alpha^2 + \beta = \gamma^3$ δὲν εἶναι μετρικὴ σχέσις, διότι δὲν εἶναι ὁμογενῆς.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

296. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκάστη ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν του, εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτείνουσας καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) μὲ πλευρὰς α, β, γ (σχ. 294). Φέρομεν $AD \perp B\Gamma$. Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $\Delta A\Gamma$ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν $\widehat{\Gamma}$ κοινὴν.

Ἄρα :

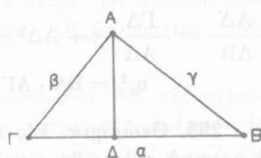
$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta\Gamma}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad \beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma,$$

ὅπου $\Delta\Gamma$ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς β ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

$$\text{Ὁμοίως εἶναι } AB\Gamma \approx \Delta B A \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\Delta B}{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B$$



Σχ. 294

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Πράγματι, ἐὰν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) τοῦ προηγουμένου θεωρήματος τὰς διαιρέσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}.$$

297. Πυθαγόρειον Θεώρημα*. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας.

Ἀπόδειξις. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 294), ἀπὸ τὸ προηγουμένον θεώρημα ἔχομεν :

$$\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B.$$

(*) Πυθαγόρας (γεννηθεὶς εἰς Σάμον περὶ τὸ 580 π.Χ.), εἶναι ὁ πλέον ἐνδοξος ὁπαδὸς τοῦ Θαλῶ. Ἐταξίδευσεν εἰς Αἴγυπτον καὶ Ἰνδίας καὶ κατόπιν ἀπεσῆρθη εἰς Ἰταλίαν, ὅπου ἔδρυσεν τὴν περίφημον Σχολὴν του.

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν : $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha(\Delta\Gamma + \Delta B)$.
 Ἄλλὰ $\Delta\Gamma + \Delta B = \Gamma B = \alpha$. Ἄρα ἡ προηγουμένη σχέσηις γράφεται :

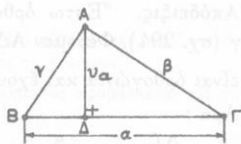
$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

298. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος, εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὅποια τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$) καὶ $AD = u_\alpha$ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος (σχ. 295). Τὸ ὕψος διαιρεῖ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἰς δύο ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα $\triangle ADB \approx \triangle A\Gamma A$, διότι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{\Gamma A} \iff AD^2 = AB \cdot \Gamma A$$

$$u_\alpha^2 = BA \cdot \Delta\Gamma.$$



Σχ. 295

299. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσηις $\beta\gamma = \alpha u_\alpha$.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὸ ὕψος $AD = u_\alpha$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι $\triangle B\hat{A}D \approx \triangle B\hat{A}\Gamma$, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν $\hat{B}$ κοινήν.

$$\text{Ἄρα } \frac{AB}{AD} = \frac{GB}{\Gamma A} \iff \frac{\gamma}{u_\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \iff$$

$$\beta\gamma = \alpha u_\alpha$$

300. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσηις $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{u_\alpha^2}$.

Ἀπόδειξις.

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 \gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{(\beta\gamma)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\alpha u_\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \cdot u_\alpha^2} = \frac{1}{u_\alpha^2}$$

301. Ἀνακεφαλαίωσις τῶν μετρικῶν σχέσεων διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

Ἐὰν $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ πλευράς α, β, γ καὶ $AD = u_\alpha$ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος του, ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$i) \quad \beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma, \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$$

$$\text{iii)} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \text{ καὶ ἔξ αὐτῆς αἱ :} \\ \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \text{ καὶ } \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\text{iv)} \quad \alpha_x^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$$

$$\text{v)} \quad \beta\gamma = \alpha\alpha_x$$

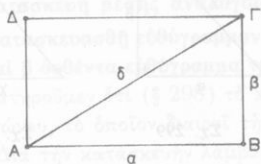
$$\text{vi)} \quad \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\alpha_x^2}$$

Σημείωσις. Πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, καλεῖται **πυθαγόρειον τρίγωνον**. Πυθαγόρειον τρίγωνον εἶναι π.χ. τὸ ἔχον μέτρα πλευρῶν 3, 4, 5, διότι $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25$.

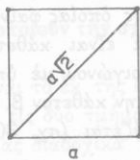
Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι παριστοῦν τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, καλοῦνται **πυθαγόρειοι ἀριθμοί**. Οἱ ἀπλούστεροι πυθαγόρειοι ἀριθμοί εἶναι οἱ 3, 4, 5.

Υπάρχουν ἄπειροι πυθαγόρειοι ἀριθμοὶ συνδεδεμένοι διὰ τῆς σχέσεως $(\mu^2 - \nu^2)^2 + (2\mu\nu)^2 = (\mu^2 + \nu^2)^2$, ὅπου μ καὶ ν τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἐάν π.χ. εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν θέσωμεν $\mu = 5$ καὶ $\nu = 2$, εὐρίσκωμεν τοὺς πυθαγόρειους ἀριθμοὺς $5^2 - 2^2 = 21$, $2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$ καὶ $5^2 + 2^2 = 29$, δηλαδὴ τοὺς 21, 20, 29. Πράγματι εἶναι $21^2 + 20^2 = 29^2 \Leftrightarrow 441 + 400 = 841$.

302. Διαγώνιος ὀρθογωνίου διαστάσεων α καὶ β . Ἐστω ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις α καὶ β (σχ. 296). Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ = δ



Σχ. 296



Σχ. 297

καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν : $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$
 $\Rightarrow \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Πόρισμα. Ἡ διαγώνιος τετραγώνου πλευρᾶς α ἰσοῦται πρὸς $\alpha\sqrt{2}$ (σχ. 297).

303. "Υψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α . "Εστω $\triangle AB\Gamma$ ισόπλευρον τρίγωνον πλευράς α (σχ. 298). Φέρομεν τὸ ὕψος $\triangleleft \Delta = \upsilon$ αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ μέσον της

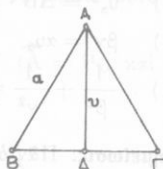
$$\Rightarrow B\Delta = \frac{\alpha}{2}.$$

Τότε, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\triangle A\Delta B$ λαμβάνομεν: $\triangleleft^2 = AB^2 - B\Delta^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} =$$

$$= \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}. \text{ Ἀρα}$$

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$



Σχ. 298

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ Τῆς ΒΟΗΘΕΙΑς ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

304. i) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{a^2 + \beta^2}$, ὅπου a καὶ β εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = a^2 + \beta^2$, ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι τὸ x δύναται νὰ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, μὲ καθέτους πλευρὰς τὰ τμήματα a καὶ β . Τὸ τρίγωνον κατασκευάζεται (σχ. 299).

ii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν

$$x = \sqrt{a^2 - \beta^2}, \quad a > \beta.$$

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = a^2 - \beta^2$, ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι τὸ x δύναται νὰ εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν a καὶ τὴν ἄλλην κάθετον β . Τὸ τρίγωνον κατασκευάζεται (σχ. 300).



Σχ. 299



Σχ. 300

iii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$, ὅπου a, β, γ καὶ δ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται

$$x^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $a^2 + \beta^2$ δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ $\triangleleft^2$ (σχ. 301), ὅπου $\triangleleft$ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέ-

τους πλευράς τὰς α καὶ β . Ἐν συνεχείᾳ δὲ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $\Lambda\Gamma^2 + \gamma^2$ μὲ τὸ $\Lambda\Delta^2$ καὶ ἀκολουθῶς τὸ $\Lambda\Delta^2 + \delta^2$ μὲ τὸ $\Lambda\epsilon^2$. Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται τότε ὅτι εἶναι

$$x^2 = \Lambda\epsilon^2 = \Lambda\Delta^2 + \delta^2 = \Lambda\Gamma^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

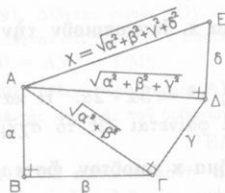
Σημείωσις. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τμήμα x ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \dots + \epsilon^2 + \zeta^2}$, ὅταν δίδεται πεπερασμένον πλῆθος εὐθυγράμμων τμημάτων $\alpha, \beta, \dots, \epsilon, \zeta$.

iv) Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}$ ὅπου α, β, γ καὶ δ δοθέντα τμήματα, τοιαῦτα ὥστε $\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 > 0$.

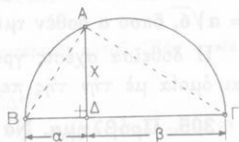
Ἡ δοθεῖσα σχέσις δύναται νὰ γραφῇ

$$x^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - (\beta^2 + \delta^2) \quad \text{ἢ} \quad x^2 = \lambda^2 - \mu^2,$$

ὅπου τὰ εὐθύγραμμα τμήματα λ καὶ μ ἱκανοποιῶν τὰς σχέσεις $\lambda^2 = \alpha^2 + \gamma^2$



Σχ. 301



Σχ. 302

καὶ $\mu^2 = \beta^2 + \delta^2$ καὶ κατασκευάζονται ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν (i). Τότε πλέον δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ τὸ x ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν (ii).

v) Κατασκευὴ μέσης ἀναλόγου.

Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x^2 = \alpha\beta$, ὅπου α καὶ β δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

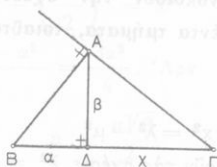
Παρατηροῦμεν ὅτι (§ 298) τὸ x δύναται νὰ εἶναι τὸ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὕψος τριγώνου, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσάν εἰς δύο τμήματα μὲ μήκη α καὶ β . Διὰ τὴν κατασκευὴν λαμβάνομεν ἐπ' εὐθείας διαδοχικὰ τμήματα $BA = \alpha$ καὶ $\Delta\Gamma = \beta$ (σχ. 302) καὶ μὲ διάμετρον τὴν $B\Gamma$, γράφομεν ἡμικύκλιον. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, ἥ ὁποία τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ A . Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνιον ($\widehat{A} = 1^\circ$). Ἐπομένως τὸ ζητούμενον τμήμα εἶναι τὸ $x = \Lambda\Delta$, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν $x^2 = \alpha\beta$.

vi) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $\alpha x = \beta^2$, ὅπου α καὶ β δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

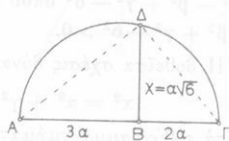
Ἄν β εἶναι τὸ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ α τὸ

ἐν ἐκ τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὅποια τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσιν (σχ. 303), τότε τὸ x θὰ εἶναι τὸ ἕτερον.

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Delta$ ($\widehat{\Delta} = 1^\circ$) μὲ καθέτους πλευράς τὰς α καὶ β . Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ AB , ἥ ὅποια τέμνει τὴν $B\Delta$ εἰς τὸ σημεῖον Γ . Τὸ τμήμα $\Gamma\Delta$ εἶναι τὸ ζητούμενον, ἦτοι $\Gamma\Delta = x$, διότι κατὰ τὴν § 298 ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $\alpha \cdot \Gamma\Delta = \beta^2$.



Σχ. 303



Σχ. 304

vii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \alpha\sqrt{6}$, ὅπου α δοθὲν τμήμα.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = 6\alpha^2$ ἢ $x^2 = 3\alpha \cdot 2\alpha$. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ὁμοία μὲ τὴν τῆς περιπτώσεως (v) καὶ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 304.

305. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}$$

ὅπου α δοθὲν τμήμα καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ δεδομένος ἀριθμητικὸς λόγος.

Κατασκευή. Μὲ διάμετρον $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = \mu + \nu$ γράφομεν ἡμικύκλιον καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, ἥ ὅποια τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ A . Ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ λαμβάνομεν τμήμα $AH = \alpha$ καὶ φέρομεν τὴν $HZE // \Gamma\Delta B$ (σχ. 305). Τὸ τμήμα $AE = x$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 296, πορ.) :

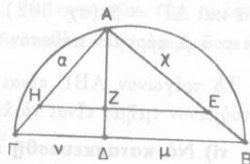
$$(1) \quad \frac{AE^2}{AH^2} = \frac{EZ}{ZH} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{EZ}{ZH}$$

Ἀλλὰ, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς δέσμης, εἶναι :

$$(2) \quad \frac{EZ}{ZH} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}$$



Σχ. 305

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

485. Ὁρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 15m καὶ 20m. Νὰ εὐρεθοῦν ἡ ὑποτείνουσα, αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὸ ὕψος, ποὺ ἄγεται ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

486. Ὁρθογωνίου τριγώνου αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 2m καὶ 8m. Νὰ εὐρεθοῦν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος καὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

487. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 84m καὶ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 37m.

488. Δείξατε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν.

489. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$) φέρομεν ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς AB κάθετον ΔE ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Δείξατε ὅτι $EG^2 - EB^2 = AG^2$.

490. Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι. Δείξατε ὅτι $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = BG^2 + A\Delta^2$.

491. Δίδεται γωνία $\chi\hat{O}y = 45^\circ$ καὶ σημεῖον M ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Ἐκ τοῦ M φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Ox , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ A καὶ τὴν Oy εἰς τὸ B . Δείξατε ὅτι $AB^2 + AM^2 = OM^2$.

492. Δίδεται ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ καὶ σημεῖον E ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Ἐὰν συνδέσωμεν τὸ E μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ ὀρθογωνίου, δείξατε ὅτι εἶναι

$$EA^2 + EG^2 = EB^2 + ED^2$$

493. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, ὅπου α, β, γ εἶναι δεδομένα τμήματα.

494. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \alpha\sqrt{30}$, ἔνθα α δεδομένον τμήμα.

495. Δίδεται τεταρτοκύκλιον AOB . Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ φέρομεν $\Gamma E \perp OA$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διχοτόμον τῆς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{AOB}$ εἰς τὸ Δ . Δείξατε ὅτι εἶναι $\Gamma E^2 + \Delta E^2 = OA^2$.

496. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \alpha\sqrt{3} + \beta\sqrt{5}$ ἔνθα καὶ β α δεδομένα τμήματα.

Β'.

497. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων αὐτῶν.

498. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ὡς καὶ τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης δύο κύκλων ἀκτίνων α καὶ 4α , ἐὰν ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι 6α .

499. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta\gamma}$, ἔνθα α, β, γ δεδομένα τμήματα.

500. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma\delta}$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ δεδομένα τμήματα.

501. Δίδεται τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ πλευρᾶς α . Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $\Delta BE, \Gamma Z, \Gamma\Delta H, \Delta A\Theta$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον $EZH\Theta$ εἶναι τετράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του.

502. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\gamma\delta}$ ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ δεδομένα τμήματα.

503. Δίδονται δύο εὐθεῖαι $(e_1), (e_2)$ τεμνόμεναι καθέτως. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ τόπος

τῶν σημείων M , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) παραμένει σταθερόν.

504. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2}$ ἐνθα α, β, γ δοθέντα τμήματα.

505. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ δύο χορδαὶ αὐτοῦ, τεμνόμεναι καθέτως εἰς τὸ σημεῖον M . Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὅποια αὗται διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ M , δεῖξάτε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ εἶναι σταθερόν.

506. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Διὰ τοῦ Σ φέρομεν δύο χορδὰς ASB καὶ $\Gamma\Delta$, τεμνομένης καθέτως. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $AB^2 + \Gamma\Delta^2$ εἶναι σταθερόν.

507. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα x καὶ y , τὰ ὅποια ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας $x^2 + y^2 = \alpha^2$ καὶ $xy = \beta^2$, ὅπου τὰ α καὶ β εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΥΧΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

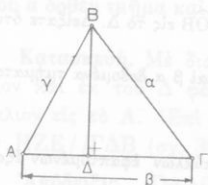
306. Θεώρημα. Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ τετράγωνον πλευρᾶς, κειμένης ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἡλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μῆδος ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{A} < 90^\circ$ (σχ. 306). Φέρομεν τὴν $B\Delta \perp A\Gamma$ καὶ θὰ δεῖξωμεν ὅτι εἶναι

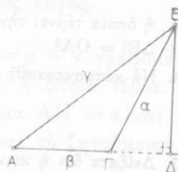
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta.$$

Θὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις, ἥτοι :

i) Τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} < 90^\circ$ καὶ



Σχ. 306



Σχ. 307

ii) Τὸ σημεῖον Δ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς $A\Gamma$ (σχ. 307). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} > 90^\circ$.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $B\Gamma\Delta$ λαμβάνομεν :

$$(1) \quad \alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν (i) εἶναι $\Gamma\Delta = \beta - A\Delta$, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν (ii) εἶναι $\Gamma\Delta = A\Delta - \beta$. Καὶ εἰς τὰς δύο ὁμοῦς περιπτώσεις εἶναι :

$$\Gamma\Delta^2 = (\beta - A\Delta)^2 = (A\Delta - \beta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta.$$

Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$(2) \quad \alpha^2 = \beta^2 + \Lambda\Delta^2 - 2\beta \cdot \Lambda\Delta + \Delta B^2$$

Ἀλλὰ ἐπειδὴ $\Lambda\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2$, ἡ (2) γράφεται :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Lambda\Delta$$

307. Θεώρημα. Εἰς πᾶν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἡδξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μῖδος ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$ μὲ $\widehat{A} > 90^\circ$ (σχ. 308). Φέρομεν τὴν $B\Delta \perp \Lambda\Gamma$ καὶ θὰ δεῖξωμεν ὅτι εἶναι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Lambda\Delta.$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $B\Gamma\Delta$ λαμβάνομεν

$$(1) \quad \alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$$

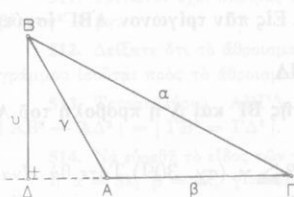
Ἀλλὰ $\Gamma\Delta = \beta + \Lambda\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta^2 = (\beta + \Lambda\Delta)^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot \Lambda\Delta + \Lambda\Delta^2$.

Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

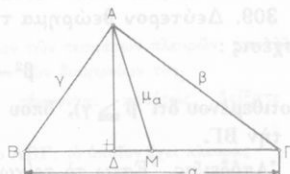
$$(2) \quad \alpha^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot \Lambda\Delta + \Lambda\Delta^2 + \Delta B^2$$

καὶ ἐπειδὴ $\Lambda\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2$, ἡ (2) γράφεται :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Lambda\Delta$$



Σχ. 308



Σχ. 309

308. Πρώτον θεώρημα τῆς διαμέσου. Εἰς πᾶν τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$ ἰσχύει ἡ σχέση

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

ὅπου μ_a ἡ ἐκ τοῦ Λ διάμεσος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$ (σχ. 309) καὶ $\Lambda\Delta$ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Διὰ τῆς διαμέσου ΛM τὸ τρίγωνον χωρίζεται εἰς δύο ἄλλα τρίγωνα ΛMB καὶ $\Lambda M\Gamma$. Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι $\widehat{AM\Gamma} > 90^\circ$. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{AMB} < 90^\circ$ καὶ ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad \beta^2 = \mu_a^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$$

$$(2) \quad \gamma^2 = \mu_a^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta$$

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι $MB = MG = \frac{\alpha}{2}$, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} (3) \quad & \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2MB^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

Σημειώσεις. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὴν μορφήν (3).

Παρατήρησις i) Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου, διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων α , β καὶ γ , δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντιστοίχως τοὺς τύπους :

$$\gamma^2 + \alpha^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}$$

Παρατήρησις ii) Ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω τύπων λαμβάνομεν τοὺς τύπους :

$$\begin{aligned} 4\mu_\alpha^2 &= 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2, & 4\mu_\beta^2 &= 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2, \\ 4\mu_\gamma^2 &= 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 \end{aligned}$$

ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη τῶν διαμέσων τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.

309. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου. Εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ σχέση :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot MA$$

(ὑποτιθεμένου ὅτι $\beta \geq \gamma$), ὅπου M τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$ καὶ Δ ἡ προβολὴ τοῦ A ἐπὶ τὴν $B\Gamma$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $\beta \geq \gamma$ (σχ. 309) Τότε θὰ εἶναι (§ 307 καὶ § 306) :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \mu_\alpha^2 + MG^2 + 2MG \cdot MA \\ \gamma^2 &= \mu_\alpha^2 + MB^2 - 2MB \cdot MA \end{aligned}$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν αὐτάς κατὰ μέλη, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $MB = MG = \frac{\alpha}{2}$, ἔχομεν :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 4MB \cdot MA = 4 \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot MA \quad \eta$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot MA$$

310. Βασικὸν κριτήριο διὰ τὸ εἶδος γωνίας τριγώνου. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα καὶ ἀπὸ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἔπεται ὅτι εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$

$$\text{i) } \widehat{A} < 1^\circ \iff \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$$

$$\text{ii) } \widehat{A} = 1^\circ \iff \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$\text{iii) } \widehat{A} > 1^\circ \iff \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2.$$

Τὰ ἀντίστροφα ἀποδεικνύονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ἦτοι :
 "Ἄν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, ἀποκλείονται τὰ ἐνδεχόμενα $\widehat{A} = 1^\circ$ ἢ $\widehat{A} > 1^\circ$, διότι ἐξ αὐ-
 τῶν ἔπεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ἢ $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ ἀντιστοίχως. Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A} < 1^\circ$.
 Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς (ii) καὶ (iii).

Εὐνόητον εἶναι ὅτι εἰς τρίγωνον μὲ γνωστὰς πλευρὰς τὸ κριτήριον ἐφαρ-
 μόζεται μόνον διὰ τὴν μεγαλυτέραν πλευράν, διότι, ἂν τὸ τρίγωνον εἴναι ὀρθο-
 γώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον, αὐτὸ θὰ συμβαίνει εἰς τὴν γωνίαν ἑναντι τῆς μεγαλυ-
 τέρας πλευρᾶς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

508. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τραπέζιον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων
 τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ σὺν τῷ
 διπλασίῳ γινομένῳ τῶν δύο βάσεων.

509. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρομεν παράλληλον τῆς $B\Gamma$, ἡ
 ὁποία τέμνει τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ Δ καὶ E ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $BE^2 = E\Gamma^2 +$
 $B\Gamma \cdot \Delta E$.

510. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) συνδέομεν τὴν κορυφὴν A μὲ τυχὸν
 σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$. Δείξατε ὅτι $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

511. Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς α , β , γ καὶ γωνίαν $\widehat{A} = 120^\circ$. Δείξατε ὅτι εἶναι $\alpha^2 =$
 $\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.

512. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν παραλληλο-
 γράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων τοῦ.

513. Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Δείξατε ὅτι
 $|AB^2 - A\Delta^2| = |\Gamma B^2 - \Gamma\Delta^2|$.

514. Νὰ εὐρεθῇ τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν τριγώνου $AB\Gamma$, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς

i) $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = 6\lambda$

ii) $\alpha = \lambda$, $\beta = \frac{\lambda}{2}$, $\gamma = \frac{2\lambda}{3}$

iii) $\alpha = 8\lambda$, $\beta = 15\lambda$, $\gamma = 17\lambda$

iv) $\alpha = 7\lambda$, $\beta = 6\lambda$, $\gamma = 8\lambda$.

Β'.

515. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέσων ἐνὸς τριγώνου ἰσοῦ-
 ται μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἄθροισματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ.

516. Ἐὰν M εἶναι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου $AB\Gamma$, δείξατε ὅτι :

$$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3}.$$

517. Μὲ πλευράν $AB = \gamma$ κατασκευάζομεν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$, ABE
 ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐὰν Γ εἶναι τυχὸν σημεῖον, δείξατε ὅτι $\Gamma\Delta^2 + \Gamma E^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$,
 ἔνθα α , β , γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

518. Δίδεται κύκλος, διάμετρος AB αὐτοῦ καὶ χορδὴ $\Gamma\Delta$ παράλληλος τῆς AB . Ἐὰν
 M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέτρου AB , δείξατε ὅτι εἶναι $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2$.

519. Δίδεται ἰσοπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ πλευρᾶς α . Ἐὰν M εἴναι τυχόν σημεῖον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2$ εἶναι σταθερόν.

520. Διακρούμεν τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma = \alpha$ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ εἰς τρία ἴσα τμήματα $BD = DE = E\Gamma$ καὶ φέρομεν τὰς AD καὶ AE . Δείξατε ὅτι εἶναι $AD^2 + AE^2 + DE^2 = \frac{2\alpha^2}{3}$.

521. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων M , διὰ τὰ ὅποια ἰσχύει ἡ σχέση $MA^2 + MB^2 = k^2$, ἔνθα A, B εἶναι σταθερὰ σημεία καὶ k δεδομένον τμήμα.

522. Νὰ ἀποδείχθῃ ὅτι εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του, ἡυξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τοῦ τμήματος μετὰ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του.

523. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ πλευρὰ α , τὸ ὕψος u καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta^2 + \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμήμα.

524. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, u καὶ $\beta^2 + \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμήμα.

525. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων M , διὰ τὰ ὅποια ἰσχύει $MA^2 - MB^2 = k^2$, ἔνθα A, B εἶναι σταθερὰ σημεία καὶ k δεδομένον τμήμα.

526. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, u καὶ $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμήμα.

527. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, u καὶ $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμήμα.

ΕΜΒΑΔΑ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

311. Ὅρισμός. Μία θεμελιώδης ἔννοια, ἡ ὁποία συνδέεται ἄμεσα μετὰ ὁιονδήποτε κλειστὸν ἐπίπεδον σχῆμα, εἶναι ἡ ἔννοια τῆς ἐκτάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἡ ἐκτασις ἀκριβῶς αὕτη καλεῖται **ἐμβαδὸν** τοῦ σχήματος.

312. Ἰσεμβαδικὰ ἢ ἰσοδύναμα καλοῦνται δύο σχήματα, ὅταν ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ.

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχημάτων εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, ἥτοι εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καὶ μεταβατική.

Διὰ τὸν συμβολισμόν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐνὸς πολυγώνου $AB\Gamma\dots N$, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ σύμβολον $(AB\Gamma\dots N)$ ἢ ἀπλῶς E , ὅταν εἶναι γνωστὸν ποῦ ἀναφέρεται αὐτό.

313. Ἀξιώματα διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων.

i) Δύο ἴσα σχήματα εἶναι ἰσεμβαδικά.

ii) Ἐὰν δύο σχήματα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσα ἢ ἰσεμβαδικὰ τμήματα ἐν πρὸς ἓν, τότε εἶναι ἰσεμβαδικὰ (σχ. 310).

iii) Ἄν εἰς ἰσεμβαδικὰ σχήματα προσθέσωμεν ἰσεμβαδικὰ σχήματα, προκύπτουν ἰσεμβαδικὰ σχήματα.



Σχ. 310

ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

314. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων, μὲ μίαν τῶν διαστάσεων τῶν ἴσων, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἄλλων διαστάσεων τῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογώνια $AB\Gamma\Delta$ καὶ $EZH\Theta$ μὲ διαστάσεις $AB = \alpha$, $A\Delta = \beta$ καὶ $EZ = \alpha$, $E\Theta = \gamma$ (σχ. 311). Ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ $E(\alpha, \beta)$ καὶ $E(\alpha, \gamma)$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχως, θὰ δεῖξωμεν ὅτι

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\alpha, \gamma)} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ἐστω ὅτι ὁ λόγος τῶν διαστάσεων β καὶ γ ἰσοῦται πρὸς ἀριθμητικὸν τι κλάσμα μ/ν , ἥτοι

$$(1) \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν πλευρὰν $A\Delta = \beta$ εἰς μ τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ρ τμήματα, ἥτοι $\beta = \mu\rho$ καὶ τὴν πλευρὰν $E\Theta = \gamma$ νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς ν τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ρ τμήματα, ἥτοι $\gamma = \nu\rho$ καὶ τότε

$$\theta\grave{\alpha} \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\iota \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu\rho}{\nu\rho} = \frac{\mu}{\nu}. \quad \text{Ἀπὸ τὰ διαιρετικὰ σημεῖα ἐπὶ τῶν}$$

πλευρῶν $A\Delta$ καὶ $E\Theta$ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς βάσεις AB καὶ EZ ἀντιστοίχως τῶν ὀρθογωνίων. Τότε τὰ δύο ὀρθογώνια διαιροῦνται εἰς μ καὶ ν ἀντιστοίχως στοιχειώδη ἴσα ὀρθογώνια, μὲ διαστάσεις (α, ρ) ἕκαστον, καὶ ἔστω $E(\alpha, \rho)$ τὸ στοιχειώδες ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. Προφανῶς θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀρχικῶν ὀρθογωνίων :

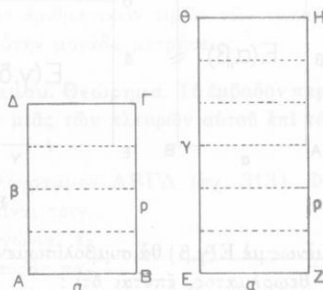
$$E(\alpha, \beta) = \mu \cdot E(\alpha, \rho) \quad \text{καὶ} \quad E(\alpha, \gamma) = \nu \cdot E(\alpha, \rho) \Rightarrow \frac{E(\alpha, \beta)}{E(\alpha, \gamma)} = \frac{\mu \cdot E(\alpha, \rho)}{\nu \cdot E(\alpha, \rho)} = \frac{\mu}{\nu}$$

καί, λόγῳ τῆς σχέσεως (1), ἡ τελευταία γράφεται

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\alpha, \gamma)} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ὅταν τὰ τμήματα $A\Delta$ καὶ $E\Theta$ εἶναι ἀσύμμετρα. Ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται, ὡς ἐκφεύγουσα τῶν πλαίσιων τοῦ βιβλίου.

315. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν διαστάσεων αὐτῶν.

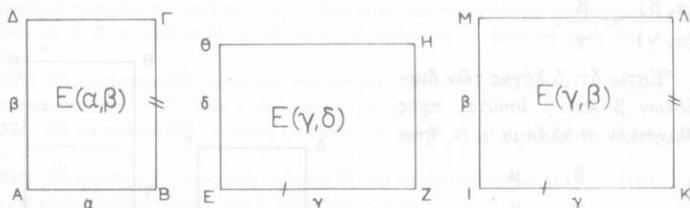


Σχ. 311

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ μετὰ διαστάσεις (α, β) καὶ (γ, δ) ἀντιστοίχως (σχ. 312).

Ἐάν συμβολίσωμεν μὲ $E(\alpha, \beta)$ καὶ $E(\gamma, \delta)$ τὰ ἐμβασδὰ των, θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\gamma, \delta)} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$.

Κατασκευάζομεν βοηθητικὸν ὀρθογώνιον ΙΚΑΜ, λαμβάνοντες, ὡς διαστάσεις του ἀνὰ μίαν ἐξ ἐκάστου τῶν δύο πρώτων, ἥτοι μετὰ διαστάσεις β καὶ γ .



Σχ. 312

Ἐπομένως μὲ $E(\gamma, \beta)$ θὰ συμβολίσωμεν τὸ ἐμβασδὸν του. Τότε, ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἔπεται ὅτι :

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\gamma, \beta)} = \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{E(\gamma, \beta)}{E(\gamma, \delta)} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\gamma, \beta)} \cdot \frac{E(\gamma, \beta)}{E(\gamma, \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\delta} \iff \frac{E(\alpha, \beta)}{E(\gamma, \delta)} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

316. Μονάδες μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Ἡ θεωρία καὶ ἡ πράξις ἀπέδειξαν ὅτι αἱ πλέον κατάλληλοι καὶ αἱ πλέον εὐχρηστοὶ μονάδες μετρήσεως τῶν ἐμβασδῶν εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ μονάδες, ἥτοι τὰ ἐμβασδὰ τετραγώνων, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Κατ' ἀναλογίαν τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν μηκῶν, θὰ ἔχωμεν ὡς βασικὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ($1m^2$) καὶ ἐξ αὐτοῦ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποποπλάσιά του.

317. Θεώρημα. Τὸ ἐμβασδὸν ὀρθογωνίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών του.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ἐμβασδῶν τετράγωνον πλευρᾶς 1. Τότε θὰ εἶναι $E(1, 1) = 1$ τετραγωνικὴ μονάς. Κατὰ τὸ θεώρημα 315 θὰ εἶναι :

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(1, 1)} = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot 1} = \alpha\beta.$$

Ἄρα : $E(\alpha, \beta) = \alpha\beta \cdot E(1, 1)$ ἢ $E(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ τετραγωνικαὶ μονάδες, ὅπου $E(\alpha, \beta)$ εἶναι τὸ ἔμβαδὸν ὀρθογωνίου με διαστάσεις α καὶ β καὶ $E(1, 1)$ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τετραγωνικῆς μονάδος.

Γενικῶς διὰ τὸ ἔμβαδὸν E ὀρθογωνίου διαστάσεων α καὶ β , ἔχομεν τὸν τύπον :

$$E = \alpha\beta$$

Πόρισμα. Τὸ ἔμβαδὸν τετραγώνου πλευρᾶς a , ἰσοῦται πρὸς a^2 .

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὸν προηγούμενον τύπον $E = \alpha\beta$ τοῦ ἔμβαδοῦ ὀρθογωνίου, ἔπεται ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἔμβαδοῦ εἰς τετραγωνικὰς μονάδας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν τμημάτων α καὶ β , ὅταν αὐτὰ μετρηθοῦν μετὰ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως.

318. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδὸν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ἐπ' αὐτὴν ὕψος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 313). Φέρομεν τὰς $AE \perp \Gamma\Delta$ καὶ $BZ \perp \Gamma\Delta$. Τότε εἶναι $\text{τριγ. } AED = \text{τριγ. } BZ\Gamma$, διότι εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν τὰς $AD = BG$, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ τὰς $AE = BZ$, ὡς παράλληλα τμήματα μεταξὺ παραλλήλων. Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ἔμβαδὰ ἴσα, ἥτοι

$$(AED) = (BZ\Gamma).$$

Τότε θὰ εἶναι :

$$(AB\Gamma\Delta) = (ABZ\Delta) + (BZ\Gamma) = (ABZ\Delta) + (AED) = (ABZE).$$

Ἄλλὰ τὸ $ABZE$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως εἶναι $(ABZE) = AB \cdot AE$. Τότε ἡ τελευταία σχέσις γράφεται :

$$(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot AE$$

Ἐτόμεν $(AB\Gamma\Delta) = E$, $AB = \beta$, $AE = \alpha$ καὶ λαμβάνομεν τὸν τύπον

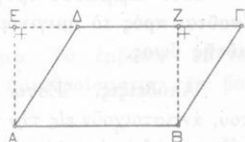
$$E = \beta\alpha$$

ἥτοι τὸ ἔμβαδὸν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως του ἐπὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος.

Πόρισμα I. Δύο παραλληλόγραμμα με ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσημετρικά.

Πόρισμα II. Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὰς βάσεις ὕψων. Καὶ ἂν ἔχουν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων βάσεων.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἂς θεωρήσωμεν δύο παραλληλόγραμμα με ἴσας βάσεις



Σχ. 313

β καὶ ὕψη u_1 καὶ u_2 . Τότε τὰ ἐμβαδὰ των θὰ εἶναι $E_1 = \beta u_1$ καὶ $E_2 = \beta u_2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\beta u_1}{\beta u_2} = \frac{u_1}{u_2}$. Ὀμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις καὶ εἰς τὴν περίπτωσηὶν τῶν ἴσων ὕψων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

528. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τοῦ ὁποίου ἡ μὴ διάστασις εἶναι 1m καὶ ὁ λόγος τῆς πρὸς τὴν ἄλλην διάστασιν εἶναι 0,5.

529. Ὄρθογώνιον ἔχει βάσιν 8m καὶ ἐμβαδὸν 36m^2 . Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὕψος του.

530. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 44m ;

531. Ὄρθογώνιον καὶ τετράγωνον εἶναι ἰσμεβαδικά. Ἄν ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 45m, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς βάσεώς του, νὰ εὐρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

532. Παράλληλογράμμου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουν μήκη 6m καὶ 8m καὶ σχηματίζουν γωνίαν 60° . Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν του.

319. Ἐμβαδὸν τριγώνου. Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον μιᾶς τῶν πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 314) καὶ $AD = u_x$ τὸ ὕψος του, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$. Ἐκ τῶν A καὶ Γ φέρομεν παράλληλους πρὸς τὰς πλευρὰς $B\Gamma$ καὶ BA ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς σημεῖον Z καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ παράλληλόγραμμον $AB\Gamma Z$. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ παράλληλόγραμμον χωρίζεται δι' ἐκάστης τῶν διαγωνίων του εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Τότε θὰ εἶναι $AB\Gamma = \Gamma ZA$ καὶ ἐὰν θέσωμεν $(AB\Gamma) = E$ τότε θὰ εἶναι :

$$(1) \quad (AB\Gamma Z) = 2E$$

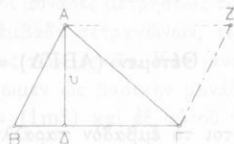
Ἀλλὰ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἶναι :

$$(2) \quad (AB\Gamma Z) = B\Gamma \cdot AD = a \cdot u_x.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$2E = a \cdot u_x \quad \eta$$

$$E = \frac{1}{2} a \cdot u_x$$



Σχ. 314

Ὀμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι : $E = \frac{1}{2} \beta \cdot u_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot u_\gamma$.

Πόρισμα I. Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῶν καθετῶν πλευρῶν του.

Πόρισμα II. Δύο τρίγωνα μὲ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσμεβαδικά.

Πόρισμα III. Έάν δύο τρίγωνα έχουν ίσας βάσεις, ο λόγος των εμβασδων των ισοϋται προς τον λόγον των αντίστοιχων προς τας βάσεις ύψων. Έάν έχουν ίσα ύψη, ο λόγος των εμβασδων των ισοϋται προς τον λόγον των αντίστοιχων προς αυτά βάσεων.

Διά την απόδειξιν, ἄς θεωρήσωμεν δύο τρίγωνα με ίσας βάσεις β καὶ ἔστωσαν ν_1 καὶ ν_2 τὰ ύψη αὐτῶν. Έάν E_1 καὶ E_2 εἶναι τὰ εμβασδά των, θά ἔχωμεν :

$$E_1 = \frac{1}{2} \beta \nu_1, \quad E_2 = \frac{1}{2} \beta \nu_2. \text{ Διά διαιρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν :}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}. \text{ Όμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις μετὰ τὰ ἴσα ύψη.}$$

320. Έμβασδων ισοπλευρου τριγωνου πλευρᾶς α . Τὸ ύψος ισοπλευρου τριγωνου πλευρᾶς α , ισοϋται προς $\frac{\alpha \sqrt{3}}{2}$ (§ 303). Άρα τὸ εμβασδὸν του εἶναι :

$$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{\alpha \sqrt{3}}{2} \Rightarrow E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$$

321. Έμβασδων κυρτου τραπεζιου. Θεώρημα. Τὸ εμβασδὸν παντός κυρτου τραπεζιου ισοϋται προς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων του ἐπὶ τὸ ύψος του.

Άπόδειξις. Έστω κυρτὸν τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι $B\Gamma = \beta_1$ καὶ $A\Delta = \beta_2$ καὶ ν τὸ ύψος αὐτοῦ (σχ. 315). Φέρομεν τὴν διαγώνιον $A\Gamma$, διὰ τῆς ὁποίας τὸ τραπέζιον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα. Έάν καλέσωμεν E τὸ εμβασδὸν τοῦ τραπεζιου, ἔχομεν :

$$(1) \quad E = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma)$$

Άλλὰ τὰ δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta\Gamma$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ύψος ν καὶ βάσεις τὰς β_1 καὶ β_2 ἀντιστοίχως, ἐπομένως :

$$(2) \quad (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta_1 \cdot \nu \quad \text{καὶ} \quad (A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \beta_2 \cdot \nu$$

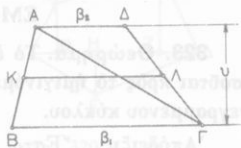
Έκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$(3) \quad E = \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \cdot \nu$$

Πόρισμα. Τὸ εμβασδὸν τραπεζιου ισοϋται προς τὸ γινόμενον τῆς διαμέσου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ύψος του.

Πράγματι, ἐάν εἶναι $K\Lambda = \delta$ ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζιου, γνωρίζομεν (§ 156) ὅτι εἶναι $K\Lambda = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$. Τότε ὁ τύπος (3) γράφεται :

$$E = K\Lambda \cdot \nu \quad \text{ἢ} \quad E = \delta \nu.$$



Σχ. 315

322. Θεώρημα. Ο λόγος των έμβασων δύο τριγώνων, τα όποια έχουν μίαν γωνία ίσην ή παραπληρωματικήν, είναι ίσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ όποια περιέχουν τὴν ἴσην ἢ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta E$, τὰ όποια έχουν τὴν γωνίαν τῶν $\widehat{A}$ ἴσην (σχ. 316 α) ἢ παραπληρωματικὴν (σχ. 316 β). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot AE}.$$

Φέρομεν τὴν BE . Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ABE έχουν ἀπὸ τὴν κορυφὴν B τὸ αὐτὸ ὕψος BZ . Ἄρα (§ 319 πόρ. ΙΙΙ) θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} = \frac{A\Gamma}{AE}$$

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ABE καὶ $A\Delta E$ έχουν ἀπὸ τὴν κορυφὴν E τὸ αὐτὸ ὕψος EH . Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(2) \quad \frac{(ABE)}{(A\Delta E)} = \frac{AB}{A\Delta}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} \frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} \cdot \frac{(ABE)}{(A\Delta E)} &= \frac{A\Gamma}{AE} \cdot \frac{AB}{A\Delta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot AE}. \end{aligned}$$

ΕΜΒΑΣΑ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

323. Θεώρημα. Τὸ έμβασὸν πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, ἴσουςται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta E$ τυχὸν πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O, ρ) (σχ. 317). Φέρομεν τὰς $OA, OB, \dots, OE$. Τότε θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned} (AB\Gamma\Delta E) &= (OAB) + (OB\Gamma) + \dots + (OE\Delta) = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot \rho + \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \rho + \dots + \frac{1}{2} EA \cdot \rho = \\ &= \frac{AB + B\Gamma + \dots + EA}{2} \cdot \rho. \end{aligned}$$

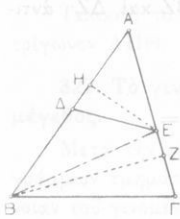
$$\text{Ἄρα } (AB\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2} (AB + B\Gamma + \dots + EA) \cdot \rho.$$

Πόρισμα. Τὸ έμβασὸν τριγώνου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

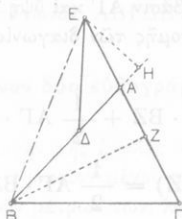
$$E = \tau\rho$$

όπου 2τ , εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ καὶ ρ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

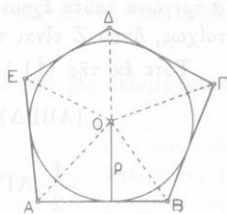
324. Ἐμβαδὸν οἴουδήποτε πολυγώνου. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἔμβαδου ἑνὸς τυχόντος πολυγώνου, ἀναλύομεν αὐτὸ ἐν γένει εἰς ἄθροισμα ἢ



Σχ. 316α



Σχ. 316β



Σχ. 317

διαφορὰν ἄλλων γνωστῶν ἔμβαδῶν, ἀναλόγως τῶν ἐκάστοτε γνωστῶν στοιχείων. Εἰς τὰ ἐπόμενα ὑποδεικνύομεν μερικοὺς τρόπους ἐργασίας :

i) Διὰ τριγωνισμοῦ μὲ διαγωνίους ἐκ μιᾶς κορυφῆς (σχ. 318).

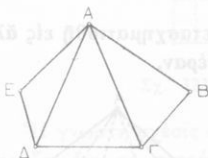
$$(ABΓΔΕ) = (ABΓ) + (AΓΔ) + (AΔΕ).$$

ii) Διὰ τριγωνισμοῦ, διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα μὲ κοινὴν κορυφὴν γνωστὸν σημεῖον O (σχ. 319).

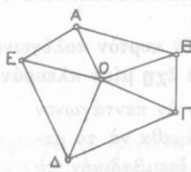
$$(ABΓΔΕ) = (OAB) + (OBΓ) + \dots + (OEA).$$

iii) Διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ τραπέζια (σχ. 320).

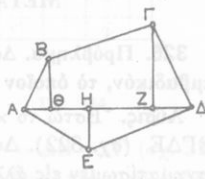
$$(ABΓΔΕ) = (ABΘ) + (BΓΖΘ) + (ΓΔΖ) + (ΔΕΗ) + (ΕΑΗ)$$



Σχ. 318



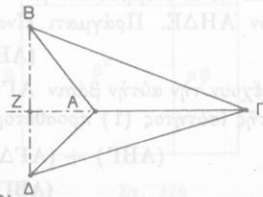
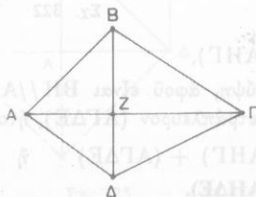
Σχ. 319



Σχ. 320

325. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδὸν παντὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποῖου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τυχὸν τετράπλευρον ABΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του κάθετους, ἤτοι $AG \perp BD$ (σχ. 321). Διὰ τῆς διαγωνίου AG



Σχ. 321

τούτο χωρίζεται εις δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ και συνεπώς είναι :

$$(1) \quad (AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma).$$

Τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν $A\Gamma$ καὶ ὕψη τὰ BZ καὶ ΔZ ἀντιστοίχως, ὅπου Z εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων.

Τότε ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot BZ + \frac{1}{2} A\Gamma \cdot \Delta Z =$$

$$\frac{1}{2} A\Gamma \cdot (BZ + \Delta Z) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Delta \quad \eta$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Delta$$

Παρατήρησις. Ὡς ἀπεδείχθη, τὸ προηγούμενον θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ τὸ μὴ κυρτὸν τετράπλευρον τοῦ σχήματος 315 μὲ καθετοὺς τὰς διαγωνίους του. Δὲν ἰσχύει ὅμως τὸ θεώρημα διὰ τὰ μὴ κυρτὰ διασταυρούμενα τετράπλευρα.

Πόρισμα. Ἐὰν ρόμβος ἔχη διαγωνίους δ_1 καὶ δ_2 , τὸ ἔμβαδόν του δίδεται ἐκ τοῦ τύπου.

$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}.$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

326. Πρόβλημα. Δοθὲν κυρτὸν πολύγωνον νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἄλλο ἰσεμβαδικόν, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.

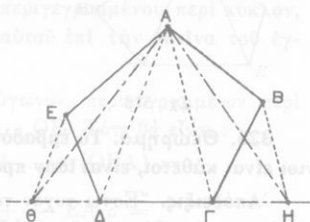
Λύσις. Ἐστω τὸ κυρτὸν πεντάγωνον $AB\Gamma\Delta E$ (σχ. 322). Δυνάμεθα νὰ τὸ μετασχηματίσωμεν εἰς ἄλλο ἰσεμβαδικόν, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη τέσσαρας πλευράς, ὡς ἐξῆς: Φέρομεν τὴν διαγώνιον $A\Gamma$ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν τὴν $BH \parallel A\Gamma$, ἥ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $\Delta\Gamma$ εἰς τὸ H . Τέλος φέρομεν τὴν AH . Τὸ πεντάγωνον $AB\Gamma\Delta E$ εἶναι ἰσεμβαδικόν μὲ τὸ τετράπλευρον $AH\Delta E$. Πράγματι εἶναι :

$$(1) \quad (AB\Gamma) = (AH\Gamma),$$

διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν $A\Gamma$ καὶ ἴσα ὕψη, ἀφοῦ εἶναι $BH \parallel A\Gamma$. Εἰς τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) προσθέτομεν τὸ τετράπλευρον $(A\Gamma\Delta E)$, ἤτοι :

$$(AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta E) = (AH\Gamma) + (A\Gamma\Delta E) \quad \eta$$

$$(AB\Gamma\Delta E) = (AH\Delta E).$$



Σχ. 322

Παρατήρησις. Ἄν φέρωμεν τὴν διαγώνιον $ΑΔ$ καὶ τὴν $ΕΘ // ΑΔ$ καὶ τὴν $ΑΘ$, εὐρίσκομεν ὁμοίως $(ΑΗΔΕ) = (ΑΗΘ)$. Ὡστε :

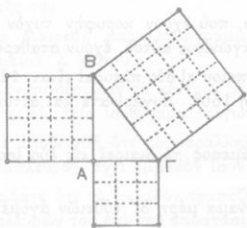
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΗΔΕ) = (ΑΗΘ),$$

Τελικῶς τὸ πεντάγωνον $ΑΒΓΔΕ$ μετεσχηματίσθη εἰς τὸ ἰσεμβαδικὸν τρίγωνον $ΑΗΘ$.

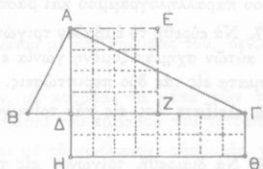
327. Τὸ γινόμενον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ὡς γεωμετρικὸν μέγεθος.

Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ γινόμενον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τὸ ὁποῖον μέχρι πρὸ τῶν ἐμβαδῶν εἶχε ἀπλῶς τὴν ἐννοιαν τοῦ γινομένου τῶν μέτρων των, λαμβάνει ὑπόστασιν γεωμετρικοῦ μεγέθους καὶ συγκεκριμένως ὑπόστασιν ἐμβαδοῦ.

Οὕτως, ἡ βασικὴ σχέσις $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα, δύναται νὰ ἐρμηνευθῇ ὡς ἐκφράζουσα σχέσιν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων, ποὺ κατασκευάζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου (σχ. 323) μὲ πλευρὰς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ τριγώνου.



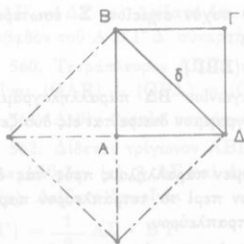
Σχ. 323



Σχ. 324

Ἡ γνωστὴ σχέσις ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\alpha^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$ (σχ. 324), ἐκφράζει ὅτι τὸ τετράγωνον $ΑΔΖΕ$ ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $ΔΓΘΗ$ μὲ διαστάσεις $ΓΔ$ καὶ $ΗΔ = \Delta B$.

Ἐπίσης ἡ γνωστὴ σχέσις $\delta = \alpha\sqrt{2}$, ποὺ συνδέει τὴν διαγώνιον δ τετρα-



Σχ. 325

	β	α
α	$\alpha\beta$	α^2
β	β^2	$\alpha\beta$

Σχ. 326

γώνου με την πλευράν του α και ή όποία γράφεται και $\delta^2 = 2\alpha^2$, εκφράζει ότι τὸ τετράγωνον, πού κατασκευάζεται ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου με πλευράν τὴν διαγώνιον, εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ τετράγωνον (βλ. καὶ σχῆμα 325).

Γενικῶς κάθε ὁμογενὴς σχέσις δευτέρου βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὸ μῆκος, ἐρμηνεύεται ὡς σχέσις ἐμβαδῶν. Ἐν ἀκόμῃ παράδειγμα, ἡ γνωστὴ ταυτότης $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ὅπου τὰ α καὶ β παριστοῦν εὐθύγραμμα τμήματα, παριστᾷ σχέσιν ἐμβαδῶν ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 326.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

533. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὕψος τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐπὶ πλευρᾶς 5 m, ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι 10 m².

534. Ὁρθογωνίου τριγώνου αὐ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3 m καὶ 4 m. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καὶ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσιν.

535. Τρίγωνον καὶ ὀρθογώνιον ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ εἶναι ἰσεμβαδικά. Νὰ εὐρεθῇ σχέσις συνδέουσα τὰ ἀντίστοιχα ὕψη των.

536. Δείξατε ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, πού ἔχουν κορυφὴν τυχὸν σημεῖον τῆς περιμέτρου παραλληλογράμμου καὶ βάσεις τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα.

537. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου αὐ δύο πλευραὶ εἶναι 12 m καὶ 8 m, ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι 30° ἢ 150°. Συγκρίνατε καὶ αἰτιολογήσατε τὰ ἀποτελέσματα εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

538. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον μία διάμεσος τὸ διαιρεῖ εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

539. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

540. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπέζιου, τοῦ ὁποίου αὐ βάσεις εἶναι 4 m καὶ 6 m ἡ δὲ ἀπόστασις των εἶναι 3 m.

541. Τραπεζίου ἡ μία βάσις εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὐρεθοῦν αὐταί, ἐὰν τὸ ὕψος του εἶναι 3 m καὶ τὸ ἐμβαδὸν του εἶναι 12 m².

542. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς διαγωνίου παραλληλογράμμου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του. Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν τεσσάρων σχηματιζομένων παραλληλογράμμων τὰ δύο, πού δὲν περιέχουν τμήματα τῆς διαγωνίου αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμα.

543. Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τυχὸν σημεῖον Σ ἑσωτερικὸν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μετὰ τὰς κορυφὰς του, δείξατε ὅτι :

$$(\Sigma\text{ΑΒ}) + (\Sigma\Gamma\Delta) = (\Sigma\text{ΑΔ}) + (\Sigma\text{ΒΓ})$$

544. Ἐὰν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον Σ τῆς διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μετὰ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ, δείξατε ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς δύο ζεύγη ἰσοδυνάμων τριγώνων.

545. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τυχόντος τετραπλεύρου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του. Δείξατε ὅτι τὸ σχηματισθὲν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον, ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

546. Δείξατε ὅτι τὰ δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπέζιου καὶ βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμα.

547. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ και $\widehat{B} + \widehat{E} = 2\angle$. Δείξτε ότι είναι: $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.

548. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Έκ τυχόντος σημείου M άγομεν καθέτους επί τὰς AB και $A\Gamma$ και ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $MA = AB$ και $ME = A\Gamma$. Δείξτε ότι είναι $(AB\Gamma) = (MAE)$.

549. Τρίγωνον $AB\Gamma$ έχει $AB = 48$ m και $A\Gamma = 12$ m. Νά εύρεθῇ τὸ μήκος ἐκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἰσοδύναμου πρὸς αὐτό, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοῦται μετὴν γωνίαν $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

550. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Έκ σημείου O ἐσωτερικοῦ τοῦ $AB\Gamma$ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς AB , $B\Gamma$, ΓA και ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $OA = AB$, $OE = B\Gamma$, $OZ = \Gamma A$ ἀντιστοίχως. Δείξτε ότι είναι $(\Delta EZ) = 3(AB\Gamma)$.

Β'.

551. Νά διαιρεθῇ τετράγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

552. Νά διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

553. Νά διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας, διερχομένης ἐκ σημείου Σ αὐτοῦ.

554. Έάν συνδέσωμεν τὸ κέντρον βάρους τριγώνου μετὰ τὰς κορυφάς του, δείξτε ότι τοῦτο διαιρεῖται εἰς τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

555. Νά ἀποδειχθῇ ότι τὸ παραλληλόγραμμον, μετὰ κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τυχόντος τετραπλεύρου, έχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἕμισι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

556. Δείξτε ότι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται μετὰ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπ' αὐτὴν.

557. Δίδεται παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ και σημεῖον O , μὴ κείμενον ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$ οὔτε ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς. Δείξτε ότι είναι $(OAG) = (OAB) + (OAD)$.

558. Τριγώνου $AB\Gamma$ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν και ἐφ' ἐκάστης προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήματα $A\Gamma' = A\Gamma$, $BA' = BA$, $\Gamma B' = \Gamma B$. Νά ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$ συναρτήσῃ τοῦ ἐμβαδοῦ E τοῦ $AB\Gamma$.

559. Παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν και ἐφ' ἐκάστης προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήματα $\Delta\Delta' = \Delta\Delta$, $BA' = BA$, $\Gamma B' = \Gamma B$, $\Delta\Gamma' = \Delta\Gamma$. α) Δείξτε ότι τὸ $A'B'\Gamma'\Delta'$ εἶναι παραλληλόγραμμον. β) Νά ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $A'B'\Gamma'\Delta'$ συναρτήσῃ τοῦ ἐμβαδοῦ E τοῦ $AB\Gamma\Delta$.

560. Τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον κέντρον O . Δείξτε ότι είναι $(OAB) + (O\Gamma\Delta) = (OAD) + (OB\Gamma)$.

561. Δοθὲν κυρτὸν πεντάγωνον νά μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον.

562. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ και σημεῖον Σ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$. Έκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν εὐθεῖαν $(\varepsilon) \perp A\Sigma$ και ἐκ τῶν B και Γ φέρομεν τὰς BB' και $\Gamma\Gamma'$ καθέτους ἐπὶ τὴν (ε) . Δείξτε ότι είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Sigma \cdot B'\Gamma'$$

563. Δίδεται ὀξυγώνιον τρίγωνον και ὁ περιγεγραμμένος αὐτοῦ κύκλος. Δείξτε ότι

τὸ κυρτὸν ἐξάγωνον, μὲ κορυφὰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου καὶ τὰ ἀντιδιαμετρικὰ αὐτῶν σημεῖα, ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

564. Ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου φέρομεν ἀνά μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον καὶ ἔστω ὅτι αὐτὰ τέμνονται εἰς τὸ O . Ἐὰν συνδέσωμεν τὸ O μὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, δεῖξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα τετράπλευρα.

565. Ἐὰν O εἴναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου $ABΓΔ$ καὶ συνδέσωμεν αὐτὸ μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου, δεῖξατε ὅτι εἶναι: $(OAB) + (OΓΔ) = (OAD) + (OBΓ)$.

566. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $BΓ$ τριγώνου $ABΓ$ καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ μέσου M αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα $MΔ = ME$. Ἀπὸ τὸ $Δ$ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $ΑΓ$ εἰς τὸ Z . Ἐὰν ἡ BZ τέμνη τὴν AE εἰς τὸ H , δεῖξατε ὅτι εἶναι $(ABH) = (HZΓE)$.

567. Ἀπὸ σημείου Σ τῆς πλευρᾶς AB δοθέντος τετραπλεύρου $ABΓΔ$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

568. Εἰς τρίγωνον $ABΓ$ ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν $BΓ$ τέμνει τὸ ὕψος $ΑΔ$ εἰς τὸ E . Ἐὰν H εἴναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, δεῖξατε ὅτι εἶναι

$$\alpha) \Delta E^2 = \Delta A \cdot \Delta H \text{ καὶ } \beta) \frac{(EBΓ)}{(ABΓ)} = \frac{(HBΓ)}{(EBΓ)}.$$

569. Τρίγωνον $ABΓ$ ἔχει $AB = \gamma$, $ΑΓ = \beta$ καὶ $\widehat{A} = 30^\circ$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB , $ΑΓ$ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνα $ABΔE$, $ΑΓZH$ καὶ φέρομεν τὴν EH . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν $(BΓZHEΔB)$.

328. Ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν E τριγώνου $ABΓ$, ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ αὐτοῦ.

Ἐστω τρίγωνον $ABΓ$ μὲ $\widehat{B} < 1^\circ$ (σχ. 327). Φέρομεν τὸ ὕψος $ΑΔ = u_\alpha$ καὶ ἔχομεν:

$$(1) \quad E = \frac{1}{2} \alpha \cdot u_\alpha$$

Ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος u_α ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ABΔ$ ἔχομεν

$$(2) \quad u_\alpha^2 = \gamma^2 - B\Delta^2$$

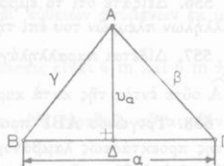
Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $B\Delta$ ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ θεωρήματος 306 λαμβάνομεν:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta. \quad \text{Ἄρα } B\Delta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \quad \eta$$

$$(3) \quad B\Delta^2 = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2}.$$

Δυνάμει τῆς (3) ἡ (2) γράφεται:

$$u_\alpha^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} =$$



Σχ. 327

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) \cdot (2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2)}{4\alpha^2} = \\
 &= \frac{[(\alpha + \gamma)^2 - \beta^2] \cdot [\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2]}{4\alpha^2} = \\
 &= \frac{(\alpha + \gamma + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)}{4\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ ὁμῶς εἶναι :

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\tau, \text{ ἔπεται } \alpha + \beta - \gamma = 2(\tau - \gamma),$$

$$\alpha - \beta + \gamma = 2(\tau - \beta) \text{ καὶ } \beta - \alpha + \gamma = 2(\tau - \alpha).$$

Τότε ἡ τελευταία σχέσηις γράφεται :

$$u_a^2 = \frac{2\tau \cdot 2(\tau - \alpha) \cdot 2(\tau - \beta) \cdot 2(\tau - \gamma)}{4\alpha^2} \quad \eta$$

$$(4) \quad u_a = \frac{2\sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}}{\alpha}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (4) ἔπεται ὅτι :

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

Ὁ ἄνωτέρω τύπος τοῦ ἑμβადοῦ ἐνὸς τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι γνωστὸς ὡς **τύπος τοῦ Ἡρώνος**.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΑΥΤΟΥ

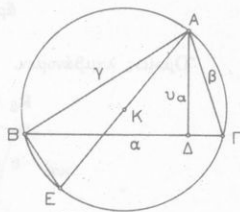
★ 329. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, $AD = u_a$, τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς A ὕψος τοῦ καὶ $AK = 2R$ ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου (σχ. 328). Τὰ τρίγωνα $AD\Gamma$ καὶ ABE εἶναι ὁμοία, διότι εἶναι ὀρθογώνια ($\widehat{ABE} = 1^{\circ}$ ὡς βαίνουσα εἰς ἡμικύκλιον) καὶ ἔχουν $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AT} \quad \eta \quad \frac{\gamma}{u_a} = \frac{2R}{\beta}.$$

Ἄρα

$$\beta\gamma = 2Ru_a$$



Σχ. 328

Πόρισμα I. Τὸ ἑμβადὸν παντὸς τριγώνου $AB\Gamma$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

Πράγματι, ἐὰν τὴν ἀποδειχθεῖσαν σχέσιν τοῦ ἄνωτέρω θεωρήματος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ α , λαμβάνομεν :

$$\alpha\beta\gamma = 2Ru_a \quad \eta \quad \alpha\beta\gamma = 2R \cdot 2E. \quad \text{Ἄρα } E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

Πόρισμα II. Ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $R = \frac{a\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$.

Πράγματι, ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου λαμβάνομεν $R = \frac{a\beta\gamma}{4E}$ καί, ἐπειδὴ εἶναι (§ 328) $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ἔπεται ὅτι

$$R = \frac{a\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

★ 330. Ὑπολογισμός τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 323, πόρ.) τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι $E = \tau \cdot \rho$. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$\rho = \frac{E}{\tau} \quad \eta \quad \rho = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau}$$

$$\eta \quad \rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

★ 331. Ὑπολογισμός τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$, K τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν πλευρὰν α καὶ R_α ἡ ἀκτίς αὐτοῦ (σχ. 329). Τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ, ὡς ἑξῆς :

$$E = (KAB) + (KAG) - (KB\Gamma) =$$

$$= \frac{1}{2} \gamma R_\alpha + \frac{1}{2} \beta R_\alpha - \frac{1}{2} \alpha R_\alpha = \frac{1}{2} (\gamma + \beta - \alpha) R_\alpha = \frac{1}{2} 2(\tau - \alpha) R_\alpha =$$

$$= (\tau - \alpha) R_\alpha \quad \eta \quad E = (\tau - \alpha) R_\alpha \quad \alpha\alpha$$

$$R_\alpha = \frac{E}{\tau - \alpha} \quad \eta$$

$$R_\alpha = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau-\alpha} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$$

$$\alpha\alpha \quad R_\alpha = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$$

Ὁμοίως λαμβάνομεν.

$$R_\beta = \frac{E}{\tau - \beta} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau-\beta}}$$

$$\kappa\alpha\iota \quad R_\gamma = \frac{E}{\tau - \gamma} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau-\gamma}}$$

ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

332. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ (σχ. 330). Ἄν λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν καὶ α, β, γ , εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$, τότε $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma$ θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ $A_1B_1\Gamma_1$. Ἐπειδὴ τὰ δύο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

570. Τρίγωνον έχει πλευράς 25 cm, 52 cm, 63 cm. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

571. Παραλληλογράμμου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουν μήκη 9 cm καὶ 10 cm καὶ ἡ μία διαγώνιος εἶναι 17 cm. Νά εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

572. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται μὲ $\tau(\tau - \alpha)$. Δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

573. Τρίγωνον ABΓ ἔχει ἐμβαδὸν 90 m^2 . Ἐκ σημείου Μ τοῦ ὕψους ΑΔ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον $2/1$, φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Νά εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΕΖ.

574. Τρίγωνον ABΓ ἔχει $\alpha = 17 \text{ cm}$, $\beta = 8 \text{ cm}$, $\gamma = 15 \text{ cm}$. i) Δείξατε ὅτι εἶναι ὀρθογώνιον. ii) Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ. Νά υπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

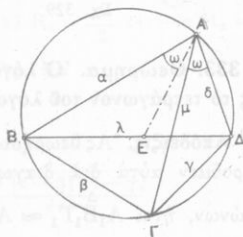
ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

★ 334. Πρώτον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.

Ἀποδείξις. Ἐστω τὸ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον ABΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευράς $AB = \alpha$, $ΒΓ = \beta$, $ΓΔ = \gamma$, $ΔΑ = \delta$ καὶ διαγωνίους $ΒΔ = \lambda$ καὶ $ΑΓ = \mu$. Θὰ δειξώμεν ὅτι εἶναι :

$$\begin{aligned} ΒΔ \cdot ΑΓ &= ΑΒ \cdot ΓΔ + ΒΓ \cdot ΑΔ \quad \eta \\ \lambda \mu &= \alpha \gamma + \beta \delta. \end{aligned}$$

Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{BAE} = \widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = \omega$, (σχ. 332), ἔνθα Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς ΑΕ καὶ τῆς δια-



Σχ. 332

γωνίου ΒΔ. Τότε θὰ εἶναι $\text{τριγ. } ABE \approx \text{τριγ. } A\Gamma\Delta$, διότι ἔχουν $\widehat{BAE} = \widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = \omega$ ἐκ κατασκευῆς καὶ $\widehat{ABE} = \widehat{A\Gamma\Delta}$ ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἀρα θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma\Delta} \quad \eta \quad \frac{\alpha}{\mu} = \frac{BE}{\gamma}. \quad \text{Ἀρα} \quad \mu \cdot BE = \alpha\gamma.$$

Ἐπίσης ἔχομεν $\text{τριγ. } AB\Gamma \approx \text{τριγ. } AΕΔ$, ὡς ἔχοντα $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta\Lambda} = \omega + \widehat{E\Lambda\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma\Lambda} = \widehat{E\Delta\Lambda}$, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἀρα θὰ εἶναι :

$$(2) \quad \frac{B\Gamma}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \quad \eta \quad \frac{\beta}{\mu} = \frac{\mu}{\delta}. \quad \text{Ἀρα} : \quad \mu \cdot E\Delta = \beta\delta.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς τελευταίας τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν : $\mu(BE + E\Delta) = \alpha\gamma + \beta\delta$. καὶ, ἐπειδὴ εἶναι $BE + E\Delta = BD = \lambda$, ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται :

$$\lambda\mu = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

★ 335. Δεύτερον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ὁ λόγος τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὰ ἄκρα ἐκάστης διαγωνίου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ καὶ διαγωνίους $B\Delta = \lambda$ καὶ $A\Gamma = \mu$ (σχ. 332). Θὰ δεῖξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}$$

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 329, πρῶ. I) εἶναι :

$$(1) \quad (AB\Delta) = \frac{\lambda\alpha\delta}{4R} \quad \text{καὶ}$$

$$(2) \quad (\Gamma B\Delta) = \frac{\lambda\beta\gamma}{4R},$$

ὅπου R ἡ ἀκτίς τοῦ περὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ περιγεγραμμένου κύκλου.

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(3) \quad (AB\Gamma\Delta) = \frac{\lambda(\alpha\delta + \beta\gamma)}{4R}$$

Ἐπίσης ἔχομεν :

$$(4) \quad (BA\Gamma) = \frac{\mu\alpha\beta}{4R} \quad \text{καὶ} \quad (\Delta A\Gamma) = \frac{\mu\gamma\delta}{4R}$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(5) \quad (AB\Gamma\Delta) = \frac{\mu(\alpha\beta + \gamma\delta)}{4R}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$\lambda(\alpha\delta + \beta\gamma) = \mu(\alpha\beta + \gamma\delta) \quad \eta$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

575. Εἰς κύκλον ἐγγράφομεν ἰσοπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐὰν M εἶναι σημεῖον τοῦ ἐλάσσονος τόξου $B\Gamma$, δεῖξατε ὅτι εἶναι $MA = MB + M\Gamma$.

576. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ τρία σημεῖα τοῦ A, B, Γ . Ἐὰν εἶναι $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τῆς χορδῆς $A\Gamma$ ἐκ τῶν α, β καὶ R .

577. Κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ δίδονται τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων τοῦ.

B'.

578. Δίδεται παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$. Κύκλος διερχόμενος διὰ τῆς κορυφῆς A τέμνει τὰς πλευρὰς AB καὶ AD εἰς τὰ σημεῖα E καὶ H ἀντιστοίχως καὶ τὴν διαγώνιον $A\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον Z . Δείξατε ὅτι εἶναι :

$$AB \cdot AE + AD \cdot AH = A\Gamma \cdot AZ$$

579. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας $\widehat{xAy}$ λαμβάνομεν δύο τμήματα AM καὶ AN συνδεόμενα διὰ τῆς σχέσεως $\alpha \cdot AM + \beta \cdot AN = \lambda^2$, ὅπου α, β καὶ λ δοθέντα τμήματα. Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος, ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον AMN , διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου (ἴδε ἄσκ. 578).

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

336. Θεώρημα τῆς έσωτερικῆς διχοτόμου. Ἡ έσωτερικὴ διχοτόμος γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ἀντιστρόφως.

Ἄν AD εἶναι ἡ έσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι $\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AG}$.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς κορυφῆς B φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον AD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς GA εἰς τὸ E (σχ. 333). Τότε, κατὰ τὸ Θ . 265, πὸρ. θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AG}$$

Ἀλλά, ἐπειδὴ $EB \parallel AD$, ἔχομεν $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{E} = \widehat{A}_2$ καί, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ἔπεται ὅτι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}$, ἥτοι τὸ τρίγωνον ABE εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα $AE = AB$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(2) \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AG}$$

Ἀντιστρόφως : Ἔστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ABG ἰσχύει ἡ σχέσις (2). Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ AD εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Φέρομεν τὴν $BE \parallel AD$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (1). Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα. Ἀρα θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AB}{AG} \text{ καὶ ἄρα } AE = AB.$$

Ὡστε τὸ τρίγωνον ABE εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα $\widehat{B}_1 = \widehat{E}$. Ἀλλά, λόγῳ τῶν $BE \parallel AD$, ἔχομεν :

$$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 \text{ καὶ } \widehat{E} = \widehat{A}_2. \text{ Ἀρα : } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$$

καὶ ἐπομένως ἡ AD εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

Παρατήρησις : Ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία (2) γράφεται :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\gamma}{\beta}, \text{ ἢ } \frac{AB}{AB + AD} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}, \text{ ἢ } \frac{AB}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

$$\text{Ἀρα : } AB = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}. \text{ Ὁμοίως εὐρίσκομεν } AD = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}.$$

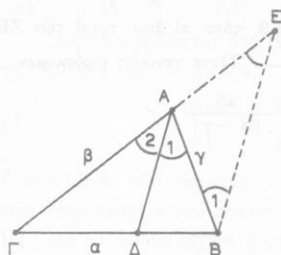
337. Θεώρημα τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου. Ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρὰς αὐτῆς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ἀντιστρόφως.

"Αν AZ είναι η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\widehat{A}$, θά δείξωμεν ότι είναι $\frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

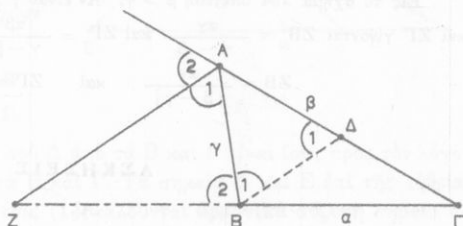
"Απόδειξις. Φέρομεν την $B\Delta // AZ$ (σχ. 334). Τότε, κατά τὸ Θ. 265 πόρ. ἔχομεν :

$$(1) \quad \frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}.$$

"Αλλά, λόγω τῶν $AZ // B\Delta$, ἔχομεν $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_2$ καί, ἐπειδὴ



Σχ. 333



Σχ. 334

εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ἔπεται : $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$, ἥτοι τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα $A\Delta = AB$. Τότε ἡ ἀναλογία (1) γίνεται :

$$(2) \quad \frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

"Αντιστρέφως : "Εστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ ἀναλογία (2).

Θά δείξωμεν ὅτι ἡ AZ εἶναι διχοτόμος τῆς εξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$. Φέρομεν τὴν $B\Delta // AZ$. Τότε ἰσχύει ἡ ἀναλογία (1). Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα. Ἄρα θά εἶναι καὶ

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}, \quad \text{καὶ ἄρα} \quad A\Delta = AB.$$

"Ὡστε τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές καὶ ἄρα εἶναι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$. Ἀλλά, λόγω τῶν $B\Delta // AZ$, ἔχομεν :

$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_2$. Ἄρα $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ἥτοι ἡ AZ εἶναι διχοτόμος τῆς εξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$.

Παρατηρήσεις. i) Τὸ σημεῖον Z εὐρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῆς μικροτέρας πλευρᾶς (σχ. 334). Πράγματι, ἔστω ὅτι $\beta > \gamma \iff \widehat{B} > \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \varphi > 0$. Ἡ γωνία $\widehat{A}_1$, ὡς τὸ ἥμισυ τῆς εξωτερικῆς τῆς $\widehat{A}$, ἰσοῦται πρὸς

$\frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2}$. Άρκει νά δείξωμεν ὅτι $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 < 2\iota$, ὅπου $\widehat{B}_2$ ἡ ἐξωτερική τῆς $\widehat{B}$.

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2} + 2\iota - \widehat{B} = 2\iota - \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2} = 2\iota - \frac{\varphi}{2} < 2\iota.$$

ii) Ὑπολογισμός τῶν ἀποστάσεων τοῦ Z ἀπό τὰ B καί Γ :

$$\frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \eta \quad \frac{ZB}{Z\Gamma - ZB} = \frac{\gamma}{\beta - \gamma} \quad \eta \quad \frac{ZB}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta - \gamma}$$

$$\text{Άρα : } ZB = \frac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma}. \quad \text{Ὁμοίως εὐρίσκομεν } Z\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta - \gamma}.$$

Εἰς τὸ σχῆμα 334 ὑπετέθη $\beta > \gamma$. Ἄν εἶναι $\gamma > \beta$, τότε αἱ ἄνω τιμαὶ τῶν ZB καὶ ZΓ γίνονται $ZB = \frac{\alpha\gamma}{\gamma - \beta}$ καὶ $Z\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\gamma - \beta}$. Ὡστε γενικῶς εὐρίσκομεν :

$$ZB = \frac{\alpha\gamma}{|\beta - \gamma|} \quad \text{καὶ} \quad Z\Gamma = \frac{\alpha\beta}{|\beta - \gamma|}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

580. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ διάμεσος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ, τέμνουν τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι $EZ // BG$.

581. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $AB = 7,5$ cm, $B\Gamma = 8$ cm καὶ $A\Gamma = 4,5$ cm. Νά εὐρεθοῦν τὰ μῆκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

582. Εἰς τὸ τρίγωνον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νά ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ) τέμνουν τὴν ΒΓ.

583. Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 3α, 4α, 5α. Νά εὐρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν μικροτέραν πλευρὰν ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς ἀπέντι γωνίας.

584. Τέσσαρες ἡμιευθεῖαι μὲ κοινὴν ἀρχὴν σημείων Ο σχηματίζουν διαδοχικὰς γωνίας ἴσας πρὸς 45° ἐκάστην. Τέμνομεν αὐτὰς δι' εὐθείας ΑΒΓΔ εἰς τρόπον, ὥστε νά εἶναι $OA = OD$. Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2 = AD \cdot BG$.

B'.

585. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ, δείξατε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις $BD \cdot \Gamma E \cdot ZA = \Gamma D \cdot BZ \cdot AE$.

586. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν Η, Θ, Κ εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τοῦ, δείξατε ὅτι εἶναι $HB \cdot \Theta \Gamma \cdot KA = H\Gamma \cdot \Theta A \cdot KB$.

587. Ὁρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) ἔχει $\widehat{B} = 15^\circ$ καὶ $AB = \lambda$. Νά υπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

588. Τριγώνου $AB\Gamma$ δίδονται αἱ πλευραὶ α, β, γ . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὅποιον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τέμνουν τὰς πλευράς του.

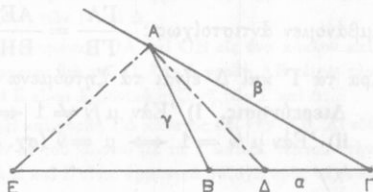
338. Ἀρμονικὴ διαίρεσις τμήματος εἰς δεδομένον λόγον.

Ἐάν εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 329), AD καὶ AE εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ), γνωρίζομεν ἀπὸ τὰ δύο θεωρήματα τῶν διχοτόμων ὅτι :

$$\frac{DB}{\Gamma D} = \frac{AB}{A\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι (ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη των ἴσα)

$$(1) \quad \frac{DB}{\Gamma D} = \frac{EB}{E\Gamma}$$



Σχ. 335

ἦτοι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ Δ ἀπὸ τὰ B καὶ Γ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ E ἀπὸ τὰ B καὶ Γ . Τὰ σημεῖα Δ καὶ E ἐπὶ τῆς εὐθείας $B\Gamma$, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέσις (1), καλοῦνται **ἄρμονικὰ συζυγῆ** σημεῖα ὡς πρὸς τὰ B καὶ Γ . Τὸ Δ καλεῖται **ἄρμονικὸν συζυγὲς** τοῦ E ὡς πρὸς τὰ B καὶ Γ , ὁμοίως καὶ τὸ E εἶναι **ἄρμονικὸν συζυγὲς** τοῦ Δ ὡς πρὸς τὰ B καὶ Γ . Ἡ τετράς σημείων E, B, Δ, Γ καλεῖται **ἄρμονικὴ τετράς σημείων** ἢ **ἄρμονικὴ σημειοσειρά**. Ὁ λόγος $\frac{DB}{\Gamma D}$ καλεῖται **λόγος τομῆς** τοῦ τμήματος $B\Gamma$. Ἐπίσης λέγομεν ὅτι τὸ τμήμα $B\Gamma$ εἶναι **διηρημένον ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον $\frac{DB}{\Gamma D}$** .

Παρατήρησις. Ὅταν λέγωμεν ὅτι τμήμα $B\Gamma$ εἶναι διηρημένον ὑπὸ σημείου Δ εἰς λόγον ρ , ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{DB}{\Gamma D} = \rho$ καὶ ὅχι $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \rho$.

339. Θεώρημα. Ἐάν τὰ Δ καὶ E εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῆ, ὡς πρὸς τὰ B καὶ Γ , τότε καὶ τὰ B καὶ Γ εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Δ καὶ E .

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἔπεται ὅτι $\frac{DB}{\Gamma D} = \frac{EB}{E\Gamma}$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{DB}{EB} = \frac{\Gamma D}{E\Gamma}$ ἢ $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι τὰ B καὶ Γ εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Δ καὶ E .

340. Πρόβλημα. Δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα AB νὰ διαιρεθῇ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς δεδομένον λόγον μ/ν .

Λύσις. Ἐκ τοῦ A φέρομεν τυχούσαν ἡμιευθεῖαν Ax , ἐπὶ τῆς ὁποίας

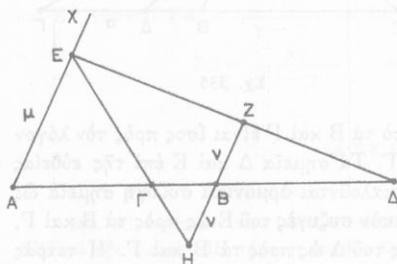
λαμβάνομεν τμήμα $AE = \mu$ (σχ. 336). Ἐκ τοῦ B φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς Ax καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ B τμήματα $BZ = BH = \nu$. Φέρομεν τὰς EH καὶ EZ , αἱ ὁποῖαι τεμνοῦν τὴν AB εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα Γ καὶ Δ .

Ἀποδείξεις. Λόγω τῶν παραλλήλων AE καὶ HBZ , σχηματίζονται δύο ζεύγη ὁμοίων τριγώνων, ἦτοι: $\triangle A\Gamma E \approx \triangle B\Gamma H$ καὶ $\triangle A\Delta E \approx \triangle B\Delta Z$. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοιχῶς: $\frac{GA}{GB} = \frac{AE}{BH} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{BZ} = \frac{\mu}{\nu}$.

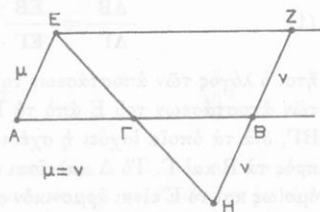
Ἄρα τὰ Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα.

Διερεύνησις. i) Ἐὰν $\mu/\nu \neq 1 \Leftrightarrow \mu \neq \nu$, τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν.

ii) Ἐὰν $\mu/\nu = 1 \Leftrightarrow \mu = \nu$ (σχ. 337), τὸ τετράπλευρον $ABZE$ εἶναι



Σχ. 336



Σχ. 337

παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ἡ EZ δὲν δίδει σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς AB , ἐνῶ ἡ EH δίδει τὸ Γ εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB (διὰ τὴν ;). Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει λύσις, μὲ τὴν διευκρίνησιν ὅτι τὸ Δ ἔχει ἀπομακρυνθῆ εἰς τὸ ἄπειρον.

iii) Ὑπάρχει μία μόνον λύσις τοῦ προβλήματος, ἦτοι τὰ Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς εὐθείας AB εἶναι μονοσημάντως (κατὰ ἓνα μόνον τρόπον) ὠρισμένα. Πράγματι ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{GA}{GB} = \frac{\mu}{\nu}$ λαμβάνομεν $\frac{GA}{GA + GB} = \frac{\mu}{\mu + \nu} \Rightarrow$

$$\frac{GA}{AB} = \frac{\mu}{\mu + \nu} \Rightarrow GA = AB \cdot \frac{\mu}{\mu + \nu}, \text{ ἦτοι τὸ σημεῖον } \Gamma \text{ ἐπὶ τοῦ}$$

τμήματος AB ἀπέχει σταθερὸν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A καὶ ἐπομένως εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένον. Ὁμοίως καὶ διὰ τὸ Δ (σχ. 336) τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τμήματος AB καὶ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας AB , ἐφ' ὅσον εἶναι

$$\mu > \nu, \text{ λαμβάνομεν: } \frac{DA}{DB} = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow \frac{DA}{DA - DB} = \frac{\mu}{\mu - \nu} \Rightarrow \frac{DA}{AB} =$$

$$= \frac{\mu}{\mu - \nu} \Rightarrow DA = AB \cdot \frac{\mu}{\mu - \nu}, \text{ ἦτοι τὸ } \Delta \text{ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας } AB, \text{ ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἐκ τοῦ } A \text{ καὶ ἐπομένως εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένον.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B'.

589. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν τὰς ΒΕ καὶ ΓΖ καθέτους ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῇ τῶν σημείων Α καὶ Δ.

590. Δίδεται ἡμικύκλιον ΑΒ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς διαμέτρου καὶ ἀπὸ τυχόν σημείου Μ τοῦ ἡμικυκλίου φέρομεν ἄλλην ἐφαπτομένην, ἣ ὅποια συναντᾷ αὐτάς εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ε εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῇ τῶν Γ καὶ Δ.

591. Ἀπὸ σημείου Ο ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΟΑ καὶ ΟΒ εἰς ἓνα κύκλον καὶ τὴν διάμετρον ΓΔ, ἣ ὅποια προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ Ο. Ἄν ἡ χορδὴ ΑΒ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Ο καὶ Ε εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῇ τῶν Γ καὶ Δ.

592. Εἰς κύκλον δίδεται διάμετρος ΑΒ καὶ χορδὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Αἱ εὐθεῖαι ΜΓ καὶ ΜΔ, ποὺ ἐνώνουν τὸ τυχόν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου μετὰ Γ καὶ Δ, τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῇ πρὸς τὰ Α καὶ Β.

593. Δίδεται κύκλος Κ καὶ ἡ διάμετρος ΑΒ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν σημεῖον Ε καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΕΗ καὶ ΕΘ καὶ τὴν χορδὴν ΗΘ, ἣ ὅποια τέμνει τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : α) τὸ ΕΚ εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν ΕΑ καὶ ΕΒ, β) τὸ ΕΗ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς μέσος (ἢ μέσος ἀνάλογος) τῶν ΕΑ καὶ ΕΒ καὶ γ) τὸ ΕΔ εἶναι ὁ ἄρμονικὸς μέσος τῶν ΕΑ καὶ ΕΒ.

Σημ. Ἄν Α, Γ, Η εἶναι κατὰ σειρὰν ὁ ἀριθμητικὸς μέσος, ὁ γεωμετρικὸς μέσος καὶ ὁ ἄρμονικὸς μέσος δύο τμημάτων λ καὶ μ, τότε εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς ἀλγέβρας ὅτι εἶναι :

$$A = \frac{\lambda + \mu}{2}, \Gamma^2 = \lambda\mu, H = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

594. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ καὶ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄρμονικὸν συζυγὲς τοῦ Γ, ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β ὅταν τὸ Γ i) εἶναι ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ ii) ἀνήκῃ εἰς τὸ τμήμα ΑΒ.

595. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ καὶ μεταβλητὸν σημεῖον Χ τοῦ ΑΒ. Ἐὰν Ψ εἶναι τὸ ἄρμονικὸν συζυγὲς τοῦ Χ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β, νὰ μελετηθῇ ἡ κίνησις τοῦ Ψ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ὅταν τὸ Χ διαγράφῃ τὸ τμήμα ΑΒ.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ (*)

341. Πρόβλημα. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν δεδομένον λόγον $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

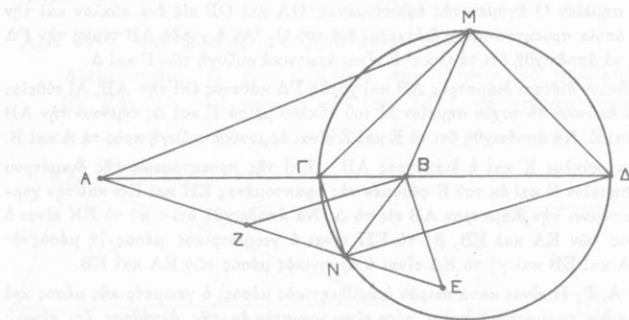
Λύσις. Ἐστώσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου μετὰ τὴν ιδιότητα :

$$(1) \quad \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}.$$

(*) Ἀπολλώνιος (περὶ τὸ 247 π.Χ.). Ἐπραγματεύθη τὴν γεωμετρίαν τῆς Θέσεως, δηλαδὴ τῆς μορφῆς καὶ τῆς σχέσεως τῶν σχημάτων. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται τὸ ἔργον περὶ κωνικῶν εἰς οὐκὼν βιβλία. Ἐξ αὐτῶν ἑπτὰ ἐσώθησαν. Τὸ ὄγδον ἀποκατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἀστρονόμου Halley τὸ 1646, βάσει πληροφοριῶν τοῦ Πάππου. Τὸ ἔργον του ὑπῆρξεν ἡ αἰτία νὰ τοῦ δοθῇ ἡ ἐπωνυμία τοῦ κατ' ἐξοχὴν γεωμέτρου.

Διχοτομοῦμεν ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς τὴν γωνίαν $\widehat{M}$ τοῦ τριγώνου MAB καὶ ἔστωσαν Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα, κατὰ τὰ ὅποια αἱ διχοτόμοι τέμνουν τὴν AB (σχ. 338). Τότε ὁ λόγος $\frac{\mu}{v}$ ἔχει μεταφερθῇ διὰ τῶν διχοτόμων ἐπὶ τῆς AB , ἦτοι :

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{v} \text{ (§ 336) καὶ } \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{v} \text{ (§ 337).}$$



Σχ. 338

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι ἐντελῶς ὠρισμένα καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι ἀρμονικὰ συζυγῇ τῶν A καὶ B μὲ λόγον τομῆς $\frac{\mu}{v}$. Ἐπὶ πλέον εἶναι $\widehat{\Gamma M \Delta} = 1^\circ$, ὡς σχημα-

τιζομένη ὑπὸ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{M}$. Ἀρα τὸ M εὐρίσκεται ἐπὶ κύκλου διαμέτρου $\Gamma \Delta$.

Ἀντιστροφῶς. Ἐστω N τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου τούτου. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{v}$.

Ἐκ τοῦ B φέρομεν $BE \parallel \Gamma N$ καὶ $BZ \parallel \Delta N$. Τότε, ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma N \Delta} = 1^\circ$, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{EBZ} = 1^\circ$. Λόγῳ τῶν παραλλήλων ἔχομεν :

$$(2) \quad \frac{NA}{NE} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{v} \quad \text{καὶ}$$

$$(3) \quad \frac{NA}{NZ} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{v}$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται :

$$\frac{NA}{NE} = \frac{NA}{NZ}.$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν $NE = NZ$, δηλαδὴ τὸ N εἶναι μέσον τοῦ EZ καί, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον EBZ εἶναι ὀρθογώνιον, ἔπεται ὅτι :

$$(4) \quad NE = NB = NZ.$$

Τότε, ἡ σχέσις (2), λόγω τῆς (4) γράφεται :

$$\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{v}$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΓΔ.

Κατασκευή. Δοθέντων τῶν Α, Β καὶ τοῦ λόγου $\frac{\mu}{v}$ διαιροῦμεν ἄρμονικῶς τὸ τμήμα ΑΒ, ὅπως εἰς τὸ πρόβλημα 340, καὶ εὐρίσκομεν τὰ Γ καὶ Δ. Μὲ διάμετρον τὴν ΓΔ γράφομεν τὸν κύκλον.

Σημείωσις. Ἐὰν εἶναι $\frac{\mu}{v} = 1$, τότε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, δηλαδὴ ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ. Τοῦτο ἐξηγεῖται καὶ διὰ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς, διότι τὸ μὲν Γ θὰ ᾗτο τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, τὸ δὲ Δ θὰ εἶχεν ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον. Ἄρα ὁ κύκλος διαμέτρου ΓΔ θὰ εἶχεν ἄπειρον εἰς τὸ μῆκος ἀκτῖνα, ἐπομένως θὰ εἶχε ἐκφυλισθῇ εἰς εὐθεῖαν διερχομένην ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ὁ προηγούμενος γεωμετρικὸς τόπος καλεῖται **ἀπολλώνιος κύκλος**, ἐξ ὀνόματος τοῦ μελετήσαντος αὐτὸν Ἑλλήνος μαθηματικοῦ Ἀπολλωνίου (περὶ τὸ 247 π.Χ.).

Ἐν γένει, ἀπολλώνιος κύκλος, ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καλεῖται κάθε κύκλος διαμέτρου ΓΔ, ὅπου τὰ Γ καὶ Δ εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῇ τῶν Α καὶ Β. Ἐπομένως ὑπάρχουν ἄπειροι ἀπολλώνιοι κύκλοι, ὡς πρὸς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ νὰ ὀρισθῇ δὲ εἰς ἐξ αὐτῶν, δοθέντων τῶν Α καὶ Β, χρειάζεται νὰ δοθῇ ὁ λόγος τομῆς $\frac{\mu}{v}$, ἣ ἐν ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

596. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βᾶσις α, ἡ διάμεσος μ_a καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{v}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

597. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βᾶσις α, ἡ γωνία $\hat{A}$ = ω καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{v}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

598. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βᾶσις α, τὸ ὕψος u_a καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{v}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

599. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεώς του α, τοῦ λόγου $\frac{\mu}{v}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ τῆς γωνίας $\hat{B}$.

600. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ πλευρὰ β καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{v}$ τῆς ὑποτείνουσας πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν.

601. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ πλευρὰ α , ἡ διχοτόμος δ_α καὶ ὁ λόγος $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Β'.

602. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\beta^2 - \gamma^2 = \lambda^2$, ἐνθα λ δεδομένον τμήμα καὶ τοῦ σημείου Δ , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τὴν $B\Gamma$.

603. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δύο δοθέντες κύκλοι (C_1) καὶ (C_2) φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

604. Δίδονται ἐπ' εὐθείας διαδοχικῶς τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ . Νὰ εὑρεθῇ σημείον M τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\hat{AMB} = \hat{BM\Gamma} = \hat{\Gamma M\Delta}$.

ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

342. **Θεώρημα.** Ἐστω κύκλος (K, R) καὶ σημεῖον A τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐὰν διὰ τοῦ A θεωρήσωμεν τυχούσαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὸν κύκλον εἰς τὰ B καὶ Γ , τὸ γινόμενον $AB \cdot A\Gamma$ εἶναι σταθερόν, ἥτοι τὸ αὐτὸ δι' οἰανδήποτε τέμνουσαν.

Ἀπόδειξις. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ἥτοι :

i) Τὸ σημεῖον A εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (K, R) (σχ. 339). Φέρομεν καὶ τὴν ἐφαπτομένην $A\Delta$ καὶ τὰς ΔB καὶ $\Delta \Gamma$. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\hat{AB\Delta} \approx \hat{A\Delta\Gamma}$$

διότι ἔχουν τὴν γωνίαν $\hat{A}$ κοινὴν καὶ $\hat{A\Delta B} = \hat{\Gamma}$ (ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης, § 205). Ἄρα θὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow$$

$$(1) \Rightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2$$

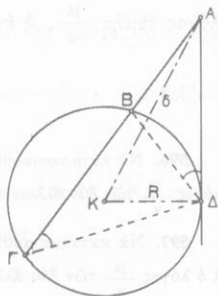
Ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης $A\Delta$ εἶναι ὠρισμένον καὶ ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τῆς τεμνούσης $AB\Gamma$. Ἄρα, ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἔπεται ὅτι τὸ γινόμενον $AB \cdot A\Gamma$ εἶναι σταθερόν.

Τὴν σχέσιν (1) δυνάμεθα νὰ τὴν μετασχηματίσωμεν, φέροντες τὴν $AK = \delta$ καὶ τὴν ἀκτὶνα $K\Delta = R$. Τότε, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A\Delta K$, λαμβάνομεν :

$$A\Delta^2 = \delta^2 - R^2 \quad \text{καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται :}$$

$$AB \cdot A\Gamma = \delta^2 - R^2.$$

ii) Τὸ A εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου (K, R) . Ἐστω $BA\Gamma$ τυχούσα τέμνουσα διερχομένη διὰ τοῦ A (σχ. 340). Φέρομεν καὶ τὴν διάμετρον ΔE , ἡ



Σχ. 339

ὅποια διέρχεται διὰ τοῦ Α, καὶ τὰς ΒΔ καὶ ΓΕ. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$\triangle A\hat{B}D \approx \triangle A\hat{E}G$$

διότι ἔχουν τὰς γωνίας των $\hat{A}$ ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ $\hat{B} = \hat{E}$, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον $\widehat{GD}$. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AG} \Rightarrow$$

$$(2) \quad AB \cdot AG = AD \cdot AE$$

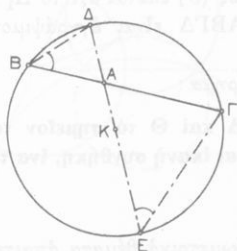
Ἄλλὰ εἶναι :

$$(4) \quad AD \cdot AE = (R - \delta)(R + \delta) = R^2 - \delta^2$$

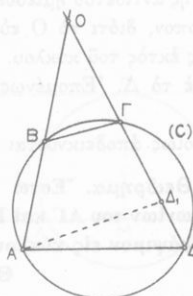
ὅπου ἐτέθη $AK = \delta$. Ἄρα ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$AB \cdot AG = R^2 - \delta^2$$

ἦτοι τὸ γινόμενον $AB \cdot AG$ εἶναι σταθερόν.



Σχ. 340



Σχ. 341

343. Ὅρισμός. Δύναμις σημείου Α ὡς πρὸς κύκλον (K,R) καλεῖται τὸ σταθερὸν γινόμενον $AB \cdot AG$, ὅπου τὰ Β καὶ Γ εἶναι κοινὰ σημεία τοῦ κύκλου καὶ τυχούσης εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ Α.

Ἡ δύναμις τοῦ Α, ὡς πρὸς τὸν κύκλον (K, R), συμβολίζεται $DA/(K, R)$.

Ἐὰν τὸ Α εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, εἶναι $DA/(K, R) = \delta^2 - R^2 = AD^2$ (σχ. 339), ὅπου $\delta = KA$ καὶ AD τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ἐκ τοῦ Α.

Ἐὰν τὸ Α εἶναι ἐντὸς τοῦ κύκλου εἶναι $DA/(K, R) = R^2 - \delta^2$.

Τέλος, ἐὰν τὸ Α εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κύκλου, εἶναι $\delta = R$ καὶ αἱ προηγούμεναι σχέσεις δίδουν $DA/(K, R) = R^2 - R^2 = 0$, ἦτοι διὰ σημείον τοῦ κύκλου ἡ δύναμις εἶναι μηδενική.

344. Θεώρημα. Ἐστω τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ O τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ αὐτοῦ. Μία ἀναγκαῖα καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, εἶναι :

$$OA \cdot OB = OG \cdot OD$$

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαῖα. Πράγματι, ἔστω ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (C) (σχ. 341). Τότε ἕκαστον τῶν γινομένων

ΟΑ · ΟΒ καὶ ΟΓ · ΟΔ παριστᾷ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸν κύκλον (C), ἐπομένως εἶναι :

$$(1) \quad \text{ΟΑ} \cdot \text{ΟΒ} = \text{ΟΓ} \cdot \text{ΟΔ}$$

ii) Εἶναι ἰκανή. Ἐνῷ ἰσχύει ἡ σχέσις (1), ἔστω ὅτι τὸ ΑΒΓΔ δὲν εἶναι ἐγγράψιμον. Τότε γράφομεν τὸν κύκλον, ποὺ ὀρίζουν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ἔστω ὅτι οὗτος τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ Δ₁. Ἄρα τὸ ΑΒΓΔ₁ εἶναι ἐγγράψιμον. Τότε θὰ εἶναι :

$$(2) \quad \text{ΟΑ} \cdot \text{ΟΒ} = \text{ΟΓ} \cdot \text{ΟΔ}_1$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι :

$$(3) \quad \text{ΟΔ}_1 = \text{ΟΔ}$$

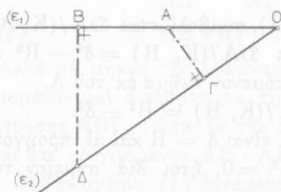
Ἄς σημειωθῇ ὅτι τὸ Δ₁ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΟΓ, διότι, ἐὰν ᾔτο ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου ἡμιευθείας, τὸ Ο θὰ ᾔτο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸ Ο εὐρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ ἐπομένως ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ἄρα, ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἔπεται ὅτι τὸ Δ₁ συμπίπτει μὲ τὸ Δ. Ἐπομένως τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ κάτωθι θεώρημα :

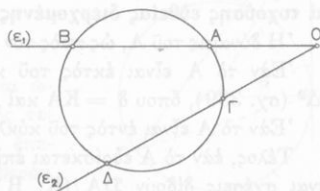
345. Θεώρημα. Ἐστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Θ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ. Μία ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, εἶναι :

$$\text{ΟΑ} \cdot \text{ΟΓ} = \text{ΟΒ} \cdot \text{ΟΔ}$$

346. Μεταφορὰ γινομένου. Εἰς πολλὰ γεωμετρικὰ θέματα ἀπαιτεῖται ἡ μεταφορὰ ἐνὸς γινομένου ΟΑ · ΟΒ, ὅπου τὰ σημεῖα Ο, Α, Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας (ε₁), ἐπὶ ἄλλης εὐθείας (ε₂), διερχομένης διὰ τοῦ Ο. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τοὺς ἐξῆς δύο τρόπους :



Σχ. 342



Σχ. 343

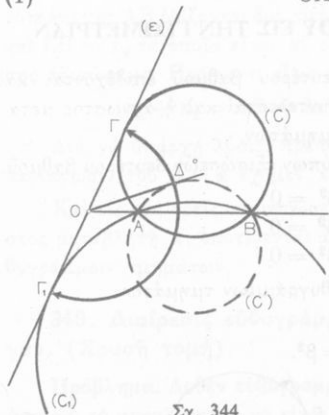
i) Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΓ ⊥ (ε₂) καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ΒΔ ⊥ (ε₁) (σχ. 342). Τότε εἶναι ΟΑ · ΟΒ = ΟΓ · ΟΔ διότι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

ii) Γράφομεν τυχόντα κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν Α καὶ Β, ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ τὴν (ε₂) εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ (σχ. 343). Τότε εἶναι ΟΑ · ΟΒ = ΟΓ · ΟΔ.

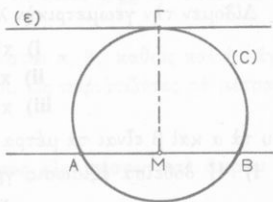
347. Πρόβλημα. Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας.

Ἀνάλυσις. Ἐστώσαν A καὶ B τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ (ε) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 344). Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λυθῇ καὶ ἔστω (C) ὁ ζητούμενος κύκλος, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς (ε) εἰς τὸ σημεῖον Γ . Ὁ κύκλος (C) προσδιορίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B καὶ Γ . Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ λοιπὸν ἡ θέσις τοῦ Γ ἐπὶ τῆς (ε) . Πρὸς τοῦτο, θεωροῦμεν τὸ σημεῖον O τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ AB , τὸ ὁποῖον εἶναι σαφῶς καθωρισμένον. Τότε θὰ εἶναι (§ 342)

$$(1) \quad OA \cdot OB = O\Gamma^2$$



Σχ. 344



Σχ. 345

Σύνθεσις - Κατασκευή. Γράφομεν βοηθητικὸν κύκλον (C') με μόνην ἀπαιτήσιν νὰ διέρχεται διὰ τῶν A καὶ B . Ἐκ τοῦ O φέρομεν ἐφαπτομένην OD αὐτοῦ. Τότε εἶναι :

$$(2) \quad OA \cdot OB = OD^2$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι :

$$(3) \quad O\Gamma = OD$$

Μεταφέρομεν τότε τὸ μῆκος OD εἰς τὸ $O\Gamma$ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ διὰ τῶν A, B καὶ Γ γράφομεν τὸν κύκλον (C) , ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται ὅτι :

$$OA \cdot OB = O\Gamma^2$$

Ἐπομένως ἡ $O\Gamma$ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (C) .

Διερεύνησις. Ἐφ' ὅσον αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ AB δὲν εἶναι παράλληλοι, ὑπάρχει πάντοτε τὸ σημεῖον O καί, ἐὰν τοῦτο εἶναι ἐκτὸς τοῦ τμήματος AB , ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις, οἱ κύκλοι (C) καὶ (C_1) , οἱ ὁποῖοι προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς τριάδας τῶν σημείων A, B, Γ καὶ A, B, Γ_1 , ὅπου τὰ Γ καὶ Γ_1 λαμβάνονται ἑκατέρωθεν τοῦ O ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) .

Ἐὰν $AB \parallel (\varepsilon)$, ὑπάρχει μία λύσις, ὁ κύκλος (C) (σχ. 345), ὁ ὁποῖος

προσδιορίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ὅπου τὸ Γ εἶναι ἡ τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ μετὰ τῆς (ε).

Ἐὰν τέλος τὸ σημεῖον Ο τομῆς τῶν ΑΒ καὶ (ε) ᾗτο ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, δὲν θὰ ὑπῆρχε λύσις, διότι τότε τὸ Ο θὰ ᾗτο ἐσωτερικὸν καὶ τοῦ βοηθητικοῦ κύκλου (C'), ἐπομένως δὲν θὰ ᾗτο δυνατόν νὰ φέρωμεν δι' αὐτοῦ τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ΟΔ, ὥστε ἐν συνεχείᾳ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ Γ ἐπὶ τῆς (ε).

Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Ο συμπίπτει μετὰ τοῦ Α ἢ τοῦ Β.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

348. Ὡρισμένοι τύποι ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ ἐπιδέχονται καὶ γεωμετρικὴν λύσιν, ὅταν δεχθῶμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ καὶ ἡ ἄγνωστος μεταβλητὴ παριστοῦν τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων.

Δίδομεν τὴν γεωμετρικὴν λύσιν τριῶν τύπων ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

$$\text{i)} \quad x^2 + 2ax - \beta^2 = 0$$

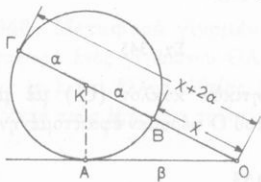
$$\text{ii)} \quad x^2 - 2ax - \beta^2 = 0$$

$$\text{iii)} \quad x^2 - 2ax + \beta^2 = 0$$

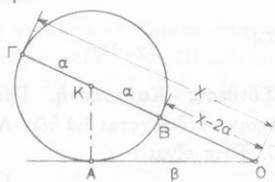
ὅπου τὰ α καὶ β εἶναι τὰ μέτρα δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων.

i) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$x(x + 2a) = \beta^2.$$



Σχ. 346



Σχ. 347

Γράφομεν κύκλον ἀκτίνος α καὶ φέρομεν εἰς τυχὸν σημεῖον Α αὐτοῦ ἐφαπτομένην, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τμήμα ΑΟ = β (σχ. 346). Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, φέρομεν τὴν ΟΚ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ Β καὶ Γ.

Τὸ τμήμα ΟΒ εἶναι τὸ ζητούμενον x, διότι εἶναι :

$$ΟΒ \cdot ΟΓ = ΟΑ^2 \quad \text{ἢ}$$

$$x(x + 2a) = \beta^2$$

ii) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

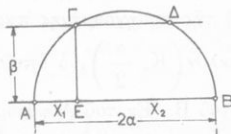
$$x(x - 2a) = \beta^2$$

Ἡ ἰδία κατασκευὴ μὲ τὴν προηγουμένην, (σχ. 347), ἀλλ' ἐδῶ τὸ τμήμα x εἶναι τὸ ΟΓ. Πράγματι εἶναι :

$$OG \cdot OB = OA^2 \text{ ή}$$

$$x(x - 2a) = \beta^2$$

iii) $x^2 - 2ax + \beta^2 = 0$. Παρατηρούμεν ότι, εάν x_1 και x_2 είναι αι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως, θὰ ἔχωμεν $x_1 + x_2 = 2a$ καὶ $x_1 x_2 = \beta^2$. Τότε κατασκευάζομεν ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB = 2a$ καὶ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς διαμέτρου εἰς ἀπόστασιν β (σχ. 348). Αὕτη ἔστω ὅτι τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὰ Γ καὶ Δ . Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν $GE \perp AB$ καὶ τότε ἐπὶ τῆς AB ὀρίζονται δύο τμήματα $AE = x_1$ καὶ $EB = x_2$ τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Πράγματι εἶναι :



Σχ. 348

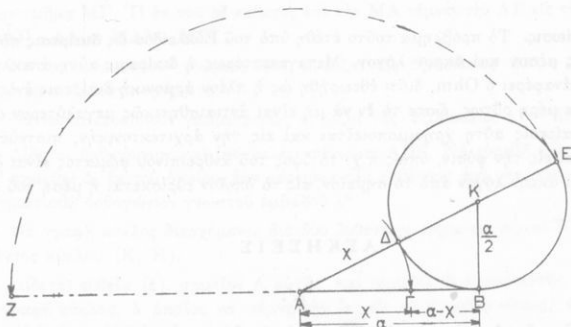
$$x_1 + x_2 = AB = 2a \text{ καὶ } x_1 x_2 = GE^2 = \beta^2 \text{ (§ 298)}$$

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις, πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι $\beta \leq a$, ὅπου εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ $\beta = a$ ἔχομεν $x_1 = x_2 = a$.

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις οἱ συντελεσταὶ a, β , καθὼς καὶ ἡ ἄγνωστος μεταβλητὴ x , ὑποτίθενται ἀριθμοὶ θετικοί, ὡς παριστῶντες τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων.

349. Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. (Χρυσὴ τομή).

Πρόβλημα. Δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεγαλύτερον νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ μικροτέρου μέρους καὶ ὁλοκλήρου τοῦ τμήματος.



Σχ. 349

Λύσις. Ἐστω $AB = a$ τὸ μῆκος τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος καὶ Γ τὸ ζητούμενον σημεῖον διαιρέσεως (σχ. 349). Ἐὰν καλέσωμεν τὸ

μῆκος τοῦ μεγαλύτερου τμήματος $ΑΓ = x$, τότε θὰ εἶναι $ΓΒ = α - x$ καὶ θὰ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις : $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$ ἢ

$$(1) \quad x^2 = α(α - x)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ καὶ ἀνάγεται εἰς τὴν μορφήν (i) τῆς προηγουμένης παραγράφου. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ἡ ἰδία, ἥτοι γράφομεν

κύκλον $\left(K, \frac{α}{2}\right)$, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τοῦ τμήματος $ΑΒ = α$ εἰς τὸ ἄκρον

αὐτοῦ Β. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔΚΕ. Τότε τὸ μῆκος ΑΔ εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος x , διότι εἶναι : $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ ἢ $x(x + α) = α^2$, ἢ ὁποῖα γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ ἢ $x^2 = α(α - x)$. Ἡ τελευταία εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1). Μεταφέροντες τότε τὸ μῆκος ΑΔ εἰς τὸ ΑΓ ἐπὶ τοῦ τμήματος $ΑΒ = α$ καὶ οὕτως ἐπιτυγχάνομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἥτοι $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$.

Παρατηρήσεις i) Τὴν σχέσιν $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ δυνάμεθα νὰ τὴν γράψωμεν καὶ ὡς ἐξῆς : $(ΑΕ - ΔΕ) \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ ἢ $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΔΕ + ΑΒ^2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΔΕ = ΑΒ$, ἔχομεν $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΑΒ + ΑΒ^2 = ΑΒ \cdot (ΑΕ + ΑΒ)$. Καὶ ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΒΑ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α) τμήμα ΑΖ = ΑΕ, εὐρίσκομεν $ΑΖ^2 = ΒΑ \cdot ΒΖ$. Ὡστε καὶ τὸ σημεῖον Ζ διαιρεῖ τὴν ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, μὲ τὴν ἑννοίαν τῆς ἐξωτερικῆς διαιρέσεως.

ii) Αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσεως $x^2 = α(α - x)$ ἢ $x^2 + αx - α^2 = 0$ εἶναι :

$$x_1 = \frac{-α + α\sqrt{5}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{-α - α\sqrt{5}}{2}.$$

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ριζῶν ἡ x_1 εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ ΑΓ καὶ ἡ x_2 εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ ΑΖ, ἥτοι $(ΑΓ) = \frac{α(\sqrt{5} - 1)}{2}$

καὶ $(ΑΖ) = \frac{-α(\sqrt{5} + 1)}{2}.$

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδους ὡς **διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον**. Μεταγενεστέρως ἡ διαίρεσις αὕτη ἀπεκλήθη **χρυσή τομή**, ὅπως ἀναφέρει ὁ Οὐμ, διότι ἔθεωρήθη ὡς ἡ πλέον ἁρμονικὴ διαίρεσις ἑνὸς τμήματος εἰς δύο ἄνισα μέρη οὕτως, ὥστε τὸ ἓν νὰ μὴ εἶναι ἀντιαισθητικῶς μεγαλύτερον ὡς πρὸς τὸ ἄλλο. Ἡ διαίρεσις αὕτη χρησιμοποιεῖται καὶ εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικὴν, πιστεύεται δὲ ὅτι ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν φύσιν, ὅπως π.χ. τὸ ὕψος τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος εἶναι διηρημένον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον ἀπὸ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἡ μέση τοῦ ἀνθρώπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

605. Σημεῖον Δ ἀπέχει κατὰ 10 cm. ἀπὸ τὸ κέντρον κύκλου ἀκτῖνος 8 cm. Διὰ τοῦ Δ φέρομεν τὴν τέμνουσάν ΔΑΒ, ὁρίζουσάν τὴν χορδὴν ΑΒ = 6 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ΔΒ.

606. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος 8 m. καὶ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 12 m. Ἄγομεν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον κατὰ χορδὴν ΒΓ = 2m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ΑΓ.

607. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος $R = 12$ cm καὶ σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ

κέντρον κατά 6 cm. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΕΒ, ἔχουσιν μῆκος 21 cm. Νὰ εὑρεθῶν τὰ μῆκη τῶν τμημάτων ΑΕ καὶ ΕΒ.

608. Ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος 13 m λαμβάνομεν σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 11 m καὶ ἄγομεν τὴν ΑΔΒ. Ἄν τὸ τμήμα ΔΒ αὐτῆς εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΔ, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ.

609. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἀπὸ σημεῖον Σ τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν δύο εὐθείας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία τέμνει τὸν ἕνα κύκλον εἰς τὰ Γ καὶ Δ καὶ ἡ ἄλλη τὸν δεύτερον κύκλον εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐγγράψιμον.

610. Ἐκ σημείου Μ, κειμένου ἐκτὸς κύκλου (C), φέρομεν τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ΜΑ καὶ τυχοῦσαν τέμνουσαν ΜΒΓ. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{AB^2}{AT^2} = \frac{MB}{MT}$.

Β'.

611. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς Οx. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς Οy οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{AMB}$ νὰ εἶναι μεγίστη.

612. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς ζώνης των. Νὰ ἀχθῇ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τῶν παραλλήλων οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{ASB}$ νὰ εἶναι μεγίστη.

613. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον Α. Ζητεῖται νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Α καὶ ἐφαπτόμενος τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) .

614. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α αὐτοῦ. Ἐπὶ τυχοῦσης εὐθείας (ε) διερχομένης διὰ τοῦ Α λαμβάνομεν σημεῖον Ι τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $IA \cdot IB = k^2$, ὅπου Β εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς (ε) μετὰ τοῦ (O, R) καὶ k δοθὲν τμήμα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

615. Ἐκ σημείου Μ κειμένου ἐκτὸς κύκλου (C) φέρομεν τὴν διάμετρον ΜΒΑ καὶ τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ΜΓ. Ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΑ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι εἶναι $AT \cdot AD = MA^2 - MT^2$.

616. Νὰ κατασκευασθῶν γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσews $3x^2 - 2\lambda x = 12\mu^2$, ἐνθα λ καὶ μ εἶναι δοθέντα τμήματα.

617. Νὰ κατασκευασθῶν γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσews $x^2 - 8x + 15 = 0$.

618. Δίδεται ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ σημεῖον Δ, ἐκ τοῦ ὁποίου, ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς ΑΒ καὶ ΑΓ, νὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον γωστοῦ ἐμβαδοῦ λ^2 .

619. Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτομενος δοθέντος κύκλου (K, R).

620. Δίδεται εὐθεῖα (ε), σημεῖον Α αὐτῆς καὶ σημεῖον Β ἐκτὸς αὐτῆς. Μὲ κέντρον τὸ Β νὰ γραφῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ τὴν (ε) εἰς τὰ Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AT \cdot AD = k^2$, ὅπου k δεδομένον τμήμα.

621. Ἀπὸ σημείον Σ ἐσωτερικὸν γωνίας $\widehat{xOy}$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευράς τῆς γωνίας εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως, ὥστε τὸ τμήμα ΑΒ νὰ διαιρῆται ὑπὸ τοῦ Σ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

622. Δοθέντος τοῦ μεγαλυτέρου (ἢ τοῦ μικροτέρου) μέρους ἐνὸς τμήματος, διαιρέντος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τμήμα.

ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΩΝ

350. Πρόβλημα. Δοθέντων δύο κύκλων (O_1, R_1) και (O_2, R_2) , νά εύρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.

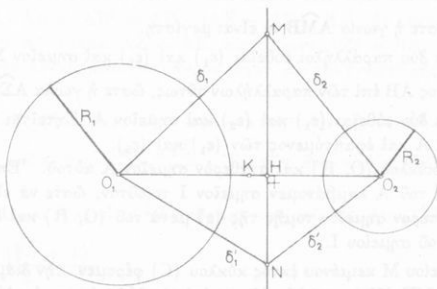
Λύσις. Ἐστω M ἓν τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου ἐκτὸς τῶν δύο κύκλων καὶ ἂς καλέσωμεν δ_1 καὶ δ_2 τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 ἀντιστοίχως (σχ. 350). Γνωρίζομεν (§ 343) ὅτι εἶναι : $DM/(O_1, R_1) = \delta_1^2 - R_1^2$ καὶ $DM/(O_2, R_2) = \delta_2^2 - R_2^2$. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τοῦ M , ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι :

$$(1) \quad \delta_1^2 - R_1^2 = \delta_2^2 - R_2^2.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $R_1 \geq R_2$, ἡ (1) γράφεται :

$$(2) \quad \delta_1^2 - \delta_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Ἐκ τῆς (2) ἔπεται ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων δ_1 καὶ δ_2 τοῦ σημείου M ἀπὸ τὰ O_1 καὶ O_2 εἶναι σταθερά. Ἐνθυμούμεθα τότε τὸ δεύτε-



Σχ. 350

ρον θεώρημα τῆς διαμέσου (§ 309) διὰ τὸ τρίγωνον MO_1O_2 . Φέρομεν τὴν ἐκ τοῦ M κάθετον ἐπὶ τὴν O_1O_2 , ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ H καὶ ἔχομεν :

$$(3) \quad \delta_1^2 - \delta_2^2 = 2\delta \cdot KH,$$

ὅπου $\delta = O_1O_2$ ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων καὶ K τὸ μέσον αὐτῆς. Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται ὅτι :

$$2\delta \cdot KH = R_1^2 - R_2^2 \quad \eta$$

$$(4) \quad KH = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\delta}$$

Ἐκ τῆς (4) ἔπεται ὅτι τὸ μῆκος KH εἶναι σταθερόν. Ἀρα τὸ σημεῖον H εἶναι ἐντελῶς ὠρισμένον ἐπὶ τῆς διακέντρου, καὶ μάλιστα, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι $R_1 \geq R_2$, ἐκ τῆς (2) ἔπεται ὅτι $\delta_1 \geq \delta_2$, ἄρα τὸ H , ὡς πρὸς τὸ K , θὰ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ μικροτέρου κύκλου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι, ἐφ' ὅσον ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου M τοῦ

Αί AB καί $\Gamma\Delta$, τεμνόμεναι ἐν γένει, ὀρίζουν σημεῖον M , τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (C_1) καί (C_2) . Πράγματι, εἶναι :

$$(1) \quad MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta = \mathcal{DM}/(C)$$

Ἀλλά :

$$(2) \quad MA \cdot MB = \mathcal{DM}/(C_1) \quad \text{καί}$$

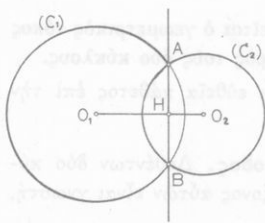
$$(3) \quad M\Gamma \cdot M\Delta = \mathcal{DM}/(C_2)$$

Ἐκ τῶν (1), (2) καί (3) ἔπεται ὅτι :

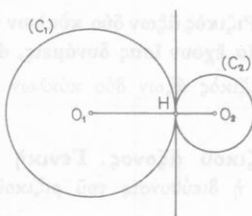
$$\mathcal{DM}/(C_1) = \mathcal{DM}/(C_2)$$

Ἐπομένως τὸ M εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (C_1) καί (C_2) . Τότε ἐκ τοῦ M φέρομεν κάθετον MH ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν, ἡ ὁποία εἶναι ὁ ριζικός ἄξων τῶν δύο κύκλων.

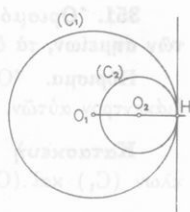
Εἰδικαὶ περιπτώσεις. i) Οἱ δύο κύκλοι τέμνονται (σχ. 353). Τότε ὁ ριζικός ἄξων αὐτῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ὀρίζεται ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν A καί B . Τοῦτο εἶναι προφανές, ἀφοῦ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν ἔχουν μηδενικὴν δύναμιν, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους. Ἄρα εἶναι σημεῖα τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.



Σχ. 353



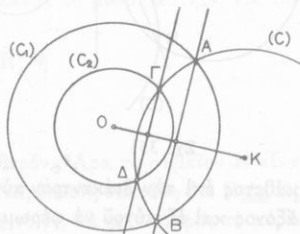
Σχ. 354



Σχ. 355

ii) Οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται. Ἄν εἶναι H τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των, ἡ ἐκ τοῦ H κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον εἶναι ὁ ριζικός ἄξων αὐτῶν (σχ. 354, 355), διότι τὸ H , ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (C_1) καί (C_2) , ἔχει μηδενικὴν δύναμιν ὡς πρὸς αὐτούς. Ἄρα εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

iii) Οἱ κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι. Τότε ριζικός ἄξων δὲν ὑπάρχει, διότι ἔχει μόνον δὲν γνωρίζομεν τὴν διεύθυνσίν του, δεδομένου ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς διακέντρου τῶν (C_1) καί (C_2) εἶναι ἀπροσδιόριστος, ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οὔτε ἐν σημεῖον του. Πράγματι, ἐάν O εἶναι τὸ κέντρον τῶν (C_1) καί (C_2) καί K τὸ κέντρον ἑνὸς βοηθητικοῦ κύκλου (C) , ὁ ὁ-



Σχ. 356

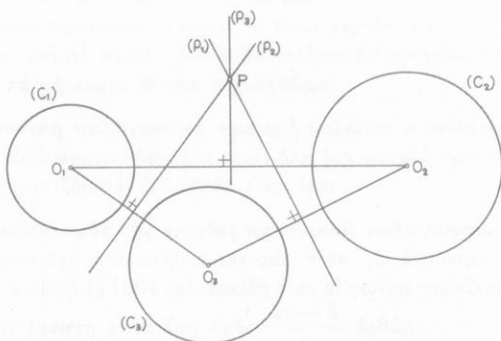
ποῖος τέμνει τοὺς (C_1) καὶ (C_2) εἰς τὰ A, B καὶ Γ, Δ (σχ. 356) ἀντιστοίχως, εἶναι $AB \parallel \Gamma\Delta$, ὡς κάθετοι ἀμφοτέραι ἐπὶ τὴν OK . Ἐπομένως δὲν τέμνονται. Ἄρα δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

★ 352. Ριζικόν κέντρον τριῶν κύκλων. Ἄς θεωρήσωμεν τρεῖς κύκλους (C_1) , (C_2) καὶ (C_3) καὶ ἔστωσαν (p_1) ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (C_2) καὶ (C_3) καὶ (p_2) ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (C_1) καὶ (C_3) . Οἱ δύο οὗτοι ριζικοὶ ἄξονες ἐν γένει τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον P καὶ τότε θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$(1) \quad DP/(C_2) = DP/(C_3),$$

διότι τό P ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (p_1) , ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$(2) \quad DP/(C_1) = DP/(C_3),$$



Σχ. 357

διότι τό P ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (p_2) .

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$DP/(C_1) = DP/(C_2)$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τό P εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (p_3) τῶν κύκλων (C_1) καὶ (C_2) . Ἄρα οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν κύκλων (C_1) , (C_2) , (C_3) , λαμβανομένων ἀνὰ δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου P , τὸ ὁποῖον καλεῖται **ριζικόν κέντρον** τῶν τριῶν κύκλων, καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς αὐτοὺς.

Ἐὰν τὰ κέντρα τῶν τριῶν κύκλων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τότε ριζικὸν κέντρον δὲν ὑπάρχει, διότι οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες θὰ εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Συμβατικῶς δεχόμεθα τότε ὅτι τὸ ριζικόν κέντρον ἔχει ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

623. Ἐὰν ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων δὲν τέμνη τὸν ἓνα ἐξ αὐτῶν, δείξατε ὅτι δὲν τέμνει καὶ τὸν ἄλλον.

624. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A . Νὰ εὕρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M , διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $MA = MB$, ὅπου MB εἶναι τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ἐκ τοῦ M πρὸς τὸν κύκλον (O, R) .

625. Δίδονται δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) και έστω (δ) ό ριζικός άξων αυτών. Έάν MA είναι ή απόσταση του τυχόντος σημείου M του κύκλου (K, R) από τον ριζικόν άξωνα, δείξατε ότι είναι $DM/(\Lambda, \rho) = 2KL \cdot MA$.

626. Δίδονται τρία σημεία A, B, Γ . Νά γραφή κύκλος, του όποιου τά εφαπτόμενα τμήματα από τά A, B, Γ νά έχουν δεδομένα μήκη α, β, γ αντίστοιχως.

627. Έάν τρεις κύκλοι τέμνονται άνά δύο, δείξατε ότι αι κοιναι χορδαι διέρχονται διά του αύτου σημείου.



ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

353. Ὅρισμός. Ἐν πολύγωνον καλεῖται **κανονικόν**, ὅταν ἔχη ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας.

Ἐν κανονικόν πολύγωνον δύναται νὰ εἶναι κυρτόν (σχ. 358), ἢ ὑπὸ ὀρίσμενας συνθήκας καὶ μὴ κυρτόν, ὅποτε θὰ καλεῖται ἀστεροειδές, λόγῳ τοῦ σχήματός του. Μὲ τὰ μὴ κυρτὰ δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν.

354. Κανονικὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ καλεῖται ἡ τεθλασμένη γραμμὴ τῆς ὁποίας τὰ εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ των καὶ ἐπὶ πλεοναί γωνίαί αἱ σχηματιζόμεναι ὑπ' αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

355. Ὑπολογισμός τῆς γωνίας κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐὰν ἐν κανονικόν πολύγωνον ἔχη n τὸ πλῆθος πλευράς, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι $2n - 4$ ὀρθαί (§ 106) καί, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαί του εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἔπεται ὅτι ἐκάστη εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2n - 4}{n}$ ὀρθάς.

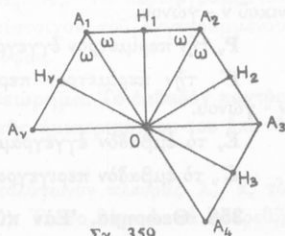
Παράδειγμα. Τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ἐκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν, εἶναι $\frac{2 \cdot 5 - 4}{5} = \frac{6}{5}$ ὀρθαί ἢ $\frac{6}{5} \cdot 90^\circ = 108^\circ$.

356. Θεώρημα. Κάθε κανονικόν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ κανονικόν πολύγωνον $A_1A_2\dots A_n$, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι λ καὶ τὸ μέτρον ἐκάστης τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι $2\omega < 2^\circ$ (σχ. 359). Διχοτομοῦμεν τὰς γωνίας $\widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{A_2}$. Αἱ διχοτόμοι τέμνονται εἰς σημείον O , διότι αὗται σχηματίζουν γωνίας ω μετὰ τῆς A_1A_2 , μὲ ἄθροισμα



Σχ. 358



Σχ. 359

$\omega + \omega = 2\omega < 2\pi$. Τὸ τρίγωνον OA_1A_2 εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἔχον τὰς παρὰ τὴν πλευρὰν A_1A_2 γωνίας ἴσας. Φέρομεν τὴν OA_3 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$\overset{\Delta}{OA_1A_2} = \overset{\Delta}{OA_2A_3}$$

ὡς ἔχοντα $A_1A_2 = A_2A_3 = \lambda$, τὴν OA κοινὴν καὶ τὴν περιεχομένην τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαν ἴσην πρὸς ω . Ἄρα θὰ εἶναι καὶ τὸ OA_2A_3 ἰσοσκελές, συνεπῶς ἔχομεν :

$$OA_1 = OA_2 = OA_3.$$

Ὁμοίως λαμβάνομεν

$$OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n.$$

Ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον κέντρου O καὶ ἀκτῖνος OA_1 .

Τὸ πολύγωνον πλέον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς n τὸ πλῆθος ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα

$$\overset{\Delta}{OA_1A_2} = \overset{\Delta}{OA_2A_3} = \dots = \overset{\Delta}{OA_nA_1}.$$

Τότε καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα, ἥτοι $OH_1 = OH_2 = \dots = OH_n$. Ἄρα ὁ κύκλος μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα OH_1 , ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καί, κατὰ συνέπειαν, τὸ πολύγωνον εἶναι περιγράψιμον περὶ αὐτόν.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον O , ὡς κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου διὰ τὸ πολύγωνον $A_1A_2\dots A_n$, καλεῖται ἀπλῶς **κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου**. Ἡ ἀκτίς OA_1 τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου καλεῖται **ἀκτίς τοῦ πολυγώνου** καὶ ἡ ἀκτίς OH τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου καλεῖται **ἀπόστημα** αὐτοῦ. Ἡ γωνία $\widehat{A_1OA_2}$ καλεῖται **κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου**. Αὕτη ἰσοῦται προφανῶς μὲ $\frac{360^\circ}{n}$ ἢ $\frac{4\pi}{n}$, ὅπου n τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

357. Γενικοὶ συμβολισμοί. Εἰς τὸ ἐξῆς θὰ συμβολίζωμεν μέ :

λ_n τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ n - γώνου.

α_n τὸ ἀπόστημα ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ n - γώνου.

λ'_n τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ n - γώνου.

P_n τὴν περίμετρον ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ n - γώνου.

P'_n τὴν περίμετρον περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ n - γώνου.

E_n τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ n - γώνου.

E'_n τὸ ἐμβαδὸν περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ n - γώνου.

358. Θεώρημα. Ἐὰν κύκλος διαιρεθῇ εἰς n ἴσα τόξα, τὰ διαιρετικά

σημεῖα εἶναι κορυφαὶ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ n -γώνου, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ὀρίζουν ἐπίσης περιγεγραμμένον κανονικὸν n -γώνον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κύκλος κέντρου O , ὁ ὁποῖος ἔχει διαιρεθῇ εἰς n ἴσα τόξα διὰ τῶν σημείων $A_1, A_2, \dots, A_n$ (σχ. 360). Τότε θὰ εἶναι :

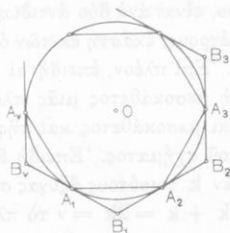
$$(1) \quad A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1$$

ὥς χορδαὶ ἴσων τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐπὶ πλεόν δὲ ἔχομεν :

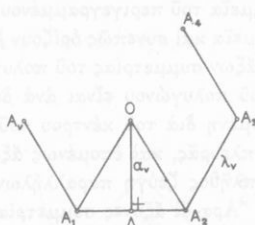
$$(2) \quad \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \dots = \widehat{A_n},$$

διότι εἶναι γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἐπεταὶ ὅτι τὸ πολύγωνον $A_1A_2\dots A_n$ εἶναι κανονικόν.

Ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \dots, A_n$ φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αὗται τεμνόμεναι ὀρίζουν τὰ σημεῖα $B_1, B_2, \dots, B_n$, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ n -γώνου. Πράγματι τὰ τρίγωνα $B_1A_1A_2, B_2A_2A_3, \dots, B_nA_nA_1$ εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι ἐκ τοῦ οἰουδήποτε σημείου $B_k, k = 1, 2, \dots, n$ ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρὸς τὸν κύκλον. Τὰ τρίγωνα εἶναι καὶ ἴσα διότι ἔχουν ἴσας βάσεις



Σχ. 360



Σχ. 361

αἱ δὲ παρὰ τὴν βάσιν αὐτῶν γωνίαι, ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ ἴσων χορδῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐφαπτομένων, εἶναι ἴσαι. Ἀρα :

$$B_1A_1A_2 = B_2A_2A_3 = \dots = B_nA_nA_1.$$

Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$(3) \quad \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \dots = \widehat{B_n} \text{ καὶ}$$

$$(4) \quad B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_nB_1$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἐπεταὶ ὅτι τὸ πολύγωνον $B_1B_2\dots B_n$ εἶναι κανονικόν καὶ ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν μὲ τὸ $A_1A_2\dots A_n$. Τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον $B_1B_2\dots B_n$, καλεῖται ἀντίστοιχον τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\dots A_n$ καὶ ἀντιστρόφως.

359. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδον παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἴσεται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $A_1A_2\dots A_n$ κανονικὸν πολύγωνον πλευρᾶς λ_n , α_n τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ καὶ O τὸ κέντρον του. (σχ. 361). Τοῦτο δύναται νὰ διαιρεθῇ

εἰς n τὸ πλήθος τρίγωνα ἴσα πρὸς τὸ OA_1A_2 . Ἐπομένως, ἂν E_n εἶναι τὸ ἔμβα-
δὸν αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad E_n = n \cdot (OA_1A_2)$$

Ἀλλὰ $(OA_1A_2) = \frac{1}{2} \lambda_n \alpha_n$ καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$E_n = n \cdot \frac{1}{2} \lambda_n \alpha_n = \frac{n \lambda_n}{2} \alpha_n = \frac{P_n \alpha_n}{2}.$$

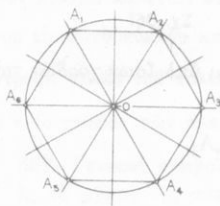
Ἄρα

$$E_n = \frac{P_n \alpha_n}{2}$$

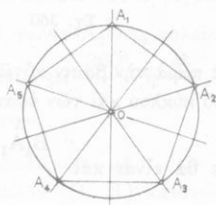
ὅπου P_n ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου.

360. Συμμετρία εἰς κανονικὰ πολύγωνα. Θεώρημα. Κάθε κανο-
νικὸν n -γωνον ἔχει n τὸ πλήθος ἄξονας συμμετρίας.

Ἀπόδειξις. i) Ἐστω $n = 2k$ ἄρτιος. Αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου τότε, ὡς σημεῖα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου, εἶναι ἀνὰ δύο ἀντιδιαμετρι-
κὰ σημεῖα καὶ συνεπῶς ὀρίζουν k τὸ πλήθος διαμέτρους, ἐκάστη ἐκ τῶν ὁποίων
εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ πολυγώνου (σχ. 362). Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ αἱ πλευ-
ραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι, ἡ μεσοκάθετος μιᾶς πλευρᾶς,
διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου, εἶναι μεσοκάθετος καὶ τῆς ἀπέ-
ναντι πλευρᾶς, καὶ ἐπομένως ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ ἔχομεν
 k τὸ πλήθος ζεύγη παραλλήλων πλευρῶν, ἔχομεν k τοιοῦτους ἄξονας συμμε-
τρίας. Ἄρα οἱ ἄξονες συμμετρίας τελικῶς εἶναι $k + k = 2k = n$ τὸ πλήθος.



Σχ. 362



Σχ. 363

ii) Ἐστω n περιττὸς (σχ. 363). Ἐκάστη διάμετρος τοῦ περιγεγραμμέ-
νου περὶ τὸ πολύγωνον κύκλου, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ μιᾶς κορυφῆς, εἶναι μεσο-
κάθετος διὰ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν (διατί;) καὶ συνεπῶς ἄξων συμμετρίας
τοῦ σχήματος. Οἱ ἄξονες οὗτοι εἶναι n τὸ πλήθος ὅσαι καὶ αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυ-
γώνου.

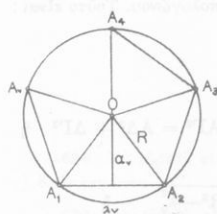
361. Ὁμοιότης εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα. Θεώρημα. Δύο κα-
νονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν εἶναι ὅμοια. Ὁ λόγος
τῶν ἀκτίνων καὶ ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον
ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο κανονικὰ πολύγωνα $A_1 A_2 \dots A_n$, $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν n (σχ. 364). Ἀπὸ τὰ κέντρα O καὶ O' φέρομεν τὰς ἀκτῖνας $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ καὶ $O'A'_1, O'A'_2, \dots, O'A'_n$ καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον πολύγωνον εἰς n ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἐπειδὴ $\widehat{A_1 O A_2} = \widehat{A'_1 O' A'_2} = \frac{360^\circ}{n}$, ἔπεται ὅτι $\triangle A_1 O A_2 \approx \triangle A'_1 O' A'_2$. Ἄρα τὰ δύο κανονικὰ πολύγωνα

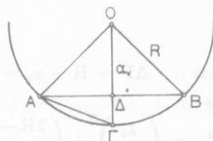
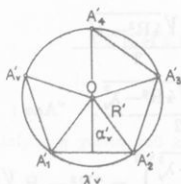
εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι διηρημένα εἰς ἰσάριθμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τρίγωνα. Ἐὰν λ_n καὶ λ'_n εἶναι αἱ πλευραὶ τῶν δύο πολυγώνων, ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν μεταφέρεται προφανῶς καὶ εἰς τὰς ἀκτῖνας τῶν καὶ εἰς τὰ ἀποστήματα, διότι ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα $A_1 O A_2$ καὶ $A'_1 O' A'_2$ λαμβάνομεν $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \frac{OA_1}{O'A'_1} = \frac{R}{R'}$ καὶ $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \frac{\alpha_n}{\alpha'_n}$, ὡς ὁμόλογα ὑψη ὁμοίων τριγώνων.

Πόρισμα I. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Πράγματι, ἂν P_n καὶ P'_n εἶναι αἱ περίμετροι αὐτῶν, ἔχομεν :



Σχ. 364



Σχ. 365

$$(3) \quad \frac{P_n}{P'_n} = \frac{n \cdot \lambda_n}{n \cdot \lambda'_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda'_n}$$

Πόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Πράγματι, ἂν E_n καὶ E'_n εἶναι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν, ἔχομεν (§ 359) :

$$\frac{E_n}{E'_n} = \frac{\frac{P_n \cdot \alpha_n}{2}}{\frac{P'_n \cdot \alpha'_n}{2}} = \frac{P_n}{P'_n} \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha'_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} \right)^2$$

★ 362. Πρόβλημα I. Δοθέντος κανονικοῦ n -γώνου πλευρᾶς λ_n καὶ ἀκτίνος R νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα α_n αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐστω $AB = \lambda_n$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ n -γώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) (σχ. 365). Φέρομεν τὴν $OD \perp AB$. Ἐπομένως τὸ OD εἶναι τὸ ἀπόστημα α_n τοῦ πολυγώνου. Ἐπὶ πλεον δε τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς AB , διότι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώ-

νου OAB τὸ ὕψος OD εἶναι καὶ διάμεσος. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAD ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἡ ὑποτείνουσα εἶναι $OA = R$ καὶ ἡ κάθετος $AD = \frac{\lambda_v}{2}$. Ἄρα ἔχομεν $OD^2 = OA^2 - AD^2$ ἢ

$$\alpha_v^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_v}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 - \lambda_v^2}{4},$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι :

$$\alpha_v = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}$$

★ 363. Πρόβλημα II. Δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου πλευρᾶς λ_v καὶ ἀκτίνος R , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἔγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Λύσις. Ἐστω $AB = \lambda_v$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἔγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R). Ἐκ τοῦ κέντρου O φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AB (σχ. 365), ἡ ὁποία συναντᾷ αὐτὴν εἰς τὸ Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ μέσον τῆς AB καὶ τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ. Ἡ AG εἶναι προφανῶς ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ ἔστω λ_{2v} τὸ μῆκος τῆς. Αὕτη εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔAG, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$AD = \frac{\lambda_v}{2} \quad \text{καὶ}$$

$\Delta G = OG - OD = R - \alpha_v$, ὅπου α_v τὸ ἀπόστημα τοῦ δοθέντος πολυγώνου. Τοῦτο εἶναι :

$$\alpha_v = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}$$

$$\text{Τότε : } \Delta G = R - \alpha_v = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}. \quad \text{Ἄρα : } AG^2 = AD^2 + \Delta G^2 \quad \text{ἢ}$$

$$\lambda_{2v}^2 = \left(\frac{\lambda_v}{2}\right)^2 + \left(\frac{2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}\right)^2 = 2R^2 - R \sqrt{4R^2 - \lambda_v^2} \quad \text{ἢ}$$

$$(1) \quad \lambda_{2v} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}} \quad (\text{Τύπος Ἀρχιμήδους})$$

★ 364. Πρόβλημα III. Δοθέντος κανονικοῦ ν-γώνου πλευρᾶς λ_v καὶ ἀκτίνος R , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν.

Λύσις. Ἐστω $AB = \lambda_v$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἔγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) (σχ. 366). Ἐκ τοῦ O φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AB, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Δ καὶ τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ. Εἰς τὸ Γ φέρομεν εφαπτομένην τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν OA καὶ OB εἰς τὰ E καὶ Z ἀντιστοίχως. Τότε ἡ EZ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν.

Διότι τὸ τρίγωνον OEZ, ὡς ἔχον τὸ ὕψος τοῦ OG καὶ διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{O}$ αὐτοῦ, εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὁμοιον πρὸς τὸ OAB μὲ σταθερὸν λόγον ὁμοιότητος $\frac{OE}{OA} = \frac{R}{\alpha_v}$. Ἐπο-

μένως τὸ διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ κατασκευαζόμενον πολύγωνον μὲ πλευρὰν τὴν EZ διαίρεται εἰς τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τοῦ ἔγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου πλευρᾶς λ_v . Ἄρα εἶναι ὁμοιον πρὸς αὐτὸ καὶ ἐπομένως κανονικόν. Ἄς σημειωθῇ ἐπὶ πλέον ὅτι ὅλα τὰ περιγεγραμμένα (ἀντιστοίχως τὰ ἔγγεγραμμένα) κανονικὰ πολύγωνα περὶ τὸν

αὐτὸν κύκλον μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὁμοία μὲ λόγον ὁμοιότητος, ὁ ὁποῖος μεταφέρεται εἰς τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου $\frac{R}{R} = 1$.

Ἐκ τῶν $\triangle O\epsilon Z \approx \triangle OAB$ λαμβάνομεν :

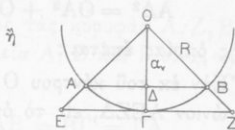
$$(1) \quad \frac{EZ}{AB} = \frac{O\Gamma}{O\Delta}$$

Τὸ $O\Delta$ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ εἶναι ἴσον πρὸς

$$\alpha_v = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}$$

Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda'_v}{\lambda_v} &= \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}} \\ \lambda'_v &= \frac{2R\lambda_v}{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}} \end{aligned}$$



Σχ. 366

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

628. Νὰ εὐρεθῇ εἰς μοίρας ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ α) πενταγώνου, β) ὀκταγώνου, γ) δωδεκαγώνου.

629. Νὰ εὐρεθῇ εἰς μοίρας ἡ κεντρικὴ γωνία τοῦ κανονικοῦ : α) πενταγώνου, β) δεκαγώνου, γ) δεκαπενταγώνου.

630. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μὲν γωνία κανονικοῦ ν - γώνου, διὰ $n > 4$, εἶναι ἀμβλεία, ἡ δὲ κεντρικὴ γωνία του εἶναι ὀξεῖα.

631. Ποίου κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι 36° ;

632. Ὑπάρχει κανονικὸν πολύγωνον μὲ κεντρικὴν γωνίαν α) 15° , β) 25° , γ) 24° καὶ ποῖον ;

633. Ὑπάρχει κανονικὸν πολύγωνον μὲ γωνίαν α) 140° , β) $157^\circ 30'$, γ) 160° καὶ ποῖον ;

634. Κανονικοῦ πολυγώνου ἡ ἀκτίς εἶναι 8 cm καὶ τὸ ἀπόστημα εἶναι $4\sqrt{3}$ cm. Νὰ εὐρεθῇ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ.

635. Ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων δύο κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων αὐτῶν, ὡς καὶ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των.

636. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῆς πλευρᾶς λ, τοῦ ἀποστήματος α καὶ τῆς ἀκτίνος R ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ὑφίσταται ἡ σχέση $\lambda^2 = 4(R^2 - \alpha^2)$.

637. Ἐὰν A, B, Γ, Δ εἶναι διαδοχικαὶ κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, δείξατε ὅτι $AG^2 - AB^2 = AB \cdot AD$.

ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΕΙΣ ΔΟΘΕΝΤΑ ΚΥΚΛΟΝ

365. Πρόβλημα I. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου τέμνονται καθέτως καὶ διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου του, γράφομεν δύο καθέτως τεμνομένης διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον (O, R). Αὗται ὀρίζουν ἐπὶ τοῦ κύκλου τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ. 367).

Τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΔ λαμβάνομεν :

$$ΑΔ^2 = ΟΑ^2 + ΟΔ^2 \quad \eta \quad λ_4^2 = R^2 + R^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται :

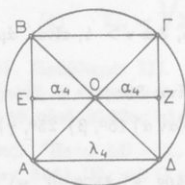
$$λ_4 = R\sqrt{2}$$

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου O φέρωμεν παράλληλον τῆς ΑΔ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ, εἰς τὸ ὅποιον εἶναι προφανῶς ΕΖ = 2α₄. Ἀλλὰ ΕΖ = ΑΔ = λ₄. Ἄρα 2α₄ = R√2, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

$$α_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

366. Πρόβλημα II. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικόν ἑξάγωνον, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἐστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ ζητούμενον ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R) (σχ. 368). Ἡ κεντρικὴ γωνία αὐτοῦ $\widehat{ΑΟΒ}$ εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. 367



Σχ. 368

$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Ἄρα τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοπλευρον, συνεπῶς

$$ΑΒ = ΟΑ = R. \quad \text{Ἄρα} \quad λ_6 = R$$

Ἡ κατασκευὴ γίνεται εὐκόλως ἐὰν λάβωμεν αὐθαίρετως ἓν σημεῖον Α τοῦ κύκλου (O, R) καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα R ὀρίσωμεν διαδοχικῶς διὰ τοῦ διαβήτου τὰς ὑπολοίπους κορυφὰς οὕτως, ὥστε

$$ΑΒ = R, \quad ΒΓ = R, \dots, \quad ΕΖ = R.$$

Τὸ ἀπόστημα $a_6 = OH$ εἶναι ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς R καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι :

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Τοῦτο, ἄλλωστε, εὐκόλως συνάγεται καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, OAH , τὸ ὁποῖον ἔχει $OA = R$ καὶ $AH = \frac{R}{2}$.

367. Πρόβλημα III. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν τρίγωνον (ἰσόπλευρον), νὰ υπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ὅριζομεν ἐπὶ τοῦ κύκλου διαδοχικῶς τὰς κορυφὰς $A, Z, B, \Delta, \Gamma, E$ κανονικοῦ ἑξαγώνου (σχ. 369). Τότε τὰ σημεία A, B καὶ Γ εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ τριγώνου. Πράγματι ἔχομεν :

$$\widehat{AZB} = \widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma E A}. \text{ Ὡς } AB = B\Gamma = \Gamma A,$$

ἥτοι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

Διὰ τὸν υπολογισμὸν τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, προεκτείνομεν τὴν GO , ἡ ὁποία, ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{G}$, θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, ἥτοι ἀπὸ τὴν κορυφὴν Z τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ὡς $ZB = R$. Τὸ τρίγωνον $B\Gamma Z$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ B , διότι ἡ ΓZ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. Εἰς αὐτὸ εἶναι $\Gamma Z = 2R$ καὶ $ZB = R$.

$$\text{Ὡς } \Gamma B^2 = \Gamma Z^2 - ZB^2 \quad \eta$$

$$\lambda_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \quad \eta \quad \lambda_3 = R\sqrt{3}.$$

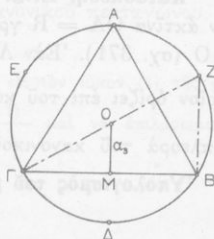
$$\text{Διὰ τὸ ἀπόστημα ἔχομεν } OM = a_3 = \frac{ZB}{2}.$$

$$\text{Ὡς } a_3 = \frac{R}{2},$$

διότι τὰ ἄκρα τοῦ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΓZ καὶ ΓB τοῦ τριγώνου ΓZB , τὸ ὁποῖον ἔχει $ZB = R$.

368. Πρόβλημα IV. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον, νὰ υπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἐστω AB ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) καὶ ἂς καλέσωμεν x τὸ μῆκος τῆς (σχ. 370). Ἡ κεντρικὴ γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Ὡς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB ἐκάστη



Σχ. 369

τῶν ἰσῶν γωνιῶν εἶναι $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον

ΑΓ τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τὸ τρίγωνον ΟΑΒ χωρίζεται εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, διότι τὸ ΓΑΟ ἔχει $\widehat{O} = 36^\circ$ καὶ $\widehat{A} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$. Ἄρα

$$(1) \quad \Gamma\Lambda = \Gamma\text{Ο}$$

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\widehat{A} = 36^\circ$ καὶ $\widehat{B} = 72^\circ$.

Ἄρα $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$. Ἐπομένως

$$(2) \quad \Lambda\Gamma = \Lambda\text{Β}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $\Lambda\text{Β} = \Lambda\Gamma = \Gamma\text{Ο} = x$.

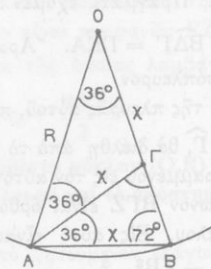
Ἐὰν τώρα ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου διὰ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ, εὐρίσκομεν :

$$\frac{\Lambda\text{Β}}{\Lambda\text{Ο}} = \frac{\Gamma\text{Β}}{\Gamma\text{Ο}} \quad \eta$$

$$\frac{x}{R} = \frac{R-x}{x} \quad \eta$$

$$(3) \quad x^2 = R(R-x)$$

Ἡ σχέσις (3) εἶναι ἡ ἴδια μετὰ τὴν σχέσιν τῆς § 349, ἄρα τὸ τμήμα x εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμήμα τῆς διαιρέσεως τῆς ἀκτίνος R εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.



Σχ. 370



Σχ. 371

Κατασκευή. Εἶναι ἡ ἴδια μετὰ τὴν τῆς παραγράφου 349. Ἄρα εἰς τυχούσαν ἀκτῖνα $OA = R$ γράφομεν κύκλον διαμέτρου R ἐφαπτόμενον αὐτῆς εἰς τὸ O (σχ. 371). Ἐὰν Λ εἶναι τὸ κέντρον αὐτοῦ, φέρομεν τὸ τμήμα $\Lambda\Lambda$, τὸ ὁποῖον ὀρίζει ἐπὶ τοῦ κύκλου $\left(\Lambda, \frac{R}{2}\right)$ σημεῖον M . Τὸ τμήμα ΛM εἶναι τότε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ὑπολογισμὸς τοῦ μήκους. Ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται :

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

καὶ ἡ θετικὴ ρίζα αὐτῆς εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ἦτοι :

$$\lambda_{10} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2} \quad \eta$$

$$\lambda_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

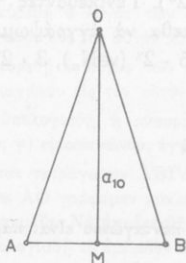
Τὸ ἀπόστημα ὑπολογίζεται ἀπὸ ἓν κεντρικὸν τρίγωνον OAB (σχ. 372).

$$\text{Φέρομεν } OM \perp AB \Rightarrow OM = \alpha_{10} \Rightarrow AM = \frac{\lambda_{10}}{2} \Rightarrow$$

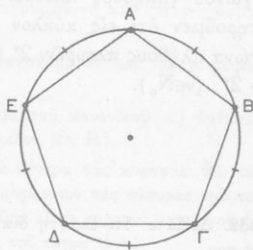
$$\begin{aligned} \alpha_{10}^2 &= OA^2 - AM^2 = R^2 - \left[\frac{R(\sqrt{5}-1)}{4} \right]^2 \\ &= R^2 - \frac{R^2(5-2\sqrt{5}+1)}{16} = \frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16} \Rightarrow \\ \alpha_{10} &= \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \end{aligned}$$

369. Πρόβλημα V. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτί-
νος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Κατασκευασθέντος τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, αἱ κορυφαὶ περι-



Σχ. 372



Σχ. 373

τῆς τάξεως αὐτοῦ ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, ἥτοι τὸ ΑΒΓΔΕ (σχ. 373) εἶναι κανονικὸν πεντάγωνον.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς πλευρᾶς λ_5 αὐτοῦ, ἀρκεῖ εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 363 νὰ θέσωμεν $n = 5$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\lambda_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ καὶ νὰ ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς λ_5 . Τότε λαμβάνομεν :

$$\lambda_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Τὸ ἀπόστημα ὑπολογίζεται ἀπὸ ἓν κεντρικὸν τρίγωνον :

$$\begin{aligned} \alpha_5^2 &= R^2 - \left(\frac{\lambda_5}{2} \right)^2 = R^2 - \left[\frac{R}{4} \sqrt{10-2\sqrt{5}} \right]^2 = \\ &= R^2 - \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{16} = \frac{R^2(6+2\sqrt{5})}{16} \Rightarrow \\ \alpha_5 &= \frac{R}{4} \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{R(\sqrt{5}+1)}{4}. \end{aligned}$$

370. Πρόβλημα VI. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.

Λύσις. Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἰσότητος $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ παρατηροῦ-

μεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον πέμπτον τοῦ κύκλου, ἀρκεῖ ἀπὸ τὸ ἕκτον αὐτοῦ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δέκατον. Ἄν λοιπὸν ἀπὸ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει τὴν πλευρὰν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἀφαιρέσωμεν τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει τὴν πλευρὰν κανονικοῦ δεκαγώνου, θὰ εὕρωμεν τόξον, τὸ ὁποῖον θὰ ὑποτείνει τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ταύτης, ἡ κατασκευὴ θεωρεῖται γνωστὴ.

Παρατήρησις. Εἶδομεν ἀνωτέρω ὅτι, δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) , δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸν ἴδιον κύκλον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ἐμελετήσαμεν δὲ τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἀριθμοῦ πλευρῶν $4 = 2^2$, $5 = 5 \cdot 2^0$, $6 = 3 \cdot 2^1$, $10 = 5 \cdot 2^1$ καὶ ὑπεδείξαμεν τὸν τρόπον ἐγγραφῆς εἰς κύκλον κανονικοῦ δεκαπενταγώνου (πλήθους πλευρῶν $15 = 3 \cdot 5 \cdot 2^0$). Γενικεύοντες τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κύκλον (O, R) δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα πλήθους πλευρῶν 2^n ($n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$), $5 \cdot 2^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), $3 \cdot 2^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) καὶ $3 \cdot 5 \cdot 2^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

638. Δείξατε ὅτι ἐκάστη διαγώνιος κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι παράλληλος μιᾶς πλευρᾶς του.

639. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀκτίς κύκλου ἐκ τῆς πλευρᾶς λ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) ἑξαγώνου, γ) τετραγώνου.

640. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) τετραγώνου, γ) ἑξαγώνου ἐκ τῆς ἀκτίνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

641. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτίνας R νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον καὶ νὰ υπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

642. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτίνας R νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δωδεκάγωνον καὶ νὰ υπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

643. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) τετραγώνου, γ) ἑξαγώνου, περιγεγραμμένων περὶ κύκλον (O, R) ἐκ τῆς ἀκτίνας R .

644. Νὰ δεიχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\frac{1}{4}$.

645. Νὰ δεიχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\frac{3}{4}$.

646. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ κατασκευάζομεν τετράγωνα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν τετραγώνων αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι καὶ κορυφαὶ τοῦ ἑξαγώνου, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ δωδεκαγώνου, τοῦ ὁποῖου νὰ εὐρεθῇ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

B.

647. Είς κανονικόν ἐξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ πλευρᾶς α συνδέομεν τὴν κορυφὴν Α μετὰ τὸ μέσον Η τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐκάστου τῶν δυο μερῶν, εἰς τὰ ὅποια διαιρεῖται τὸ ἐξάγωνον.

648. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνος R εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος καθέτους πλευρὰς τὰς πλευρὰς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων κανονικοῦ ἐξαγώνου καὶ κανονικοῦ δεκαγώνου.

649. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν λ καὶ τὴν κεντρικὴν γωνίαν ω αὐτοῦ.

650. Εἰς κύκλον ἀκτίνος R ἐγγράφομεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Μετὰ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ, τὰ ὅποια περιέχουν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΔ καὶ ΓΖ τέμνονται εἰς σημεῖον Ν, τὸ ὅποιον κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ ΕΔ καὶ ΗΖ τέμνονται εἰς σημεῖον Μ, κείμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου, ποῦ ἄγεται ἐκ τοῦ Α. Νὰ εὐρεθῇ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος ΑΕΜΗ.

651. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυρτοῦ κανονικοῦ δεωκαγώνου ἐκ τῆς ἀκτίνος του, χωρὶς νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του.

652. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R).

653. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ δωδεκαγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R).

654. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ α) ὀκταγώνου, β) δωδεκαγώνου, γ) εἰκοσαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R).

655. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ κέντρου O. Μετὰ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα ΑΟ γράφομεν κυκλικά τόξα, τὰ ὅποια τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου εἰς ὀκτὼ σημεῖα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταγώνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν του ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

656. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ λ.

657. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ ἀπόστημα α.

658. Δείξατε ὅτι ἐκάστη διαγώνιος κανονικοῦ πενταγώνου διαιρεῖται ὑπὸ μιᾶς ἄλλης διαγωνίου του εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

659. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R), τὸ ὅποιον ἔχει 35 διαγωνίους.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

371. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R) ἔχει περίμετρον μικροτέραν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, μετὰ διπλάσιον ἀριθμῶν πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB = \lambda_k$ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον (O, R) κανονικοῦ πολυγώνου μετὰ k πλευρὰς καὶ $AD = DB = \lambda_{2k}$ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μετὰ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν (σχ. 374). Ἐκ τοῦ τριγώνου ADB λαμβάνομεν :

$$AB < AD + DB \quad \eta$$

$$(1) \quad \lambda_k < 2\lambda_{2k}$$

Ἐάν τὴν σχέσιν (1) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κ λαμβάνομεν :

$$\kappa \cdot \lambda_{\kappa} < 2\kappa \cdot \lambda_{2\kappa} \quad \eta$$

$$(2) \quad P_{\kappa} < P_{2\kappa},$$

ὅπου P_{κ} καὶ $P_{2\kappa}$ αἱ περιμέτροι τῶν ὡς ἄνω πολυγώνων μὲ πλευρὰς κ καὶ 2κ ἀντιστοίχως.

Πόρισμα. Ἡ ἀκολουθία

$$(3) \quad P_{\kappa}, P_{2\kappa}, P_{4\kappa}, \dots, P_{2^v \kappa}, \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$

τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R) καὶ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου του, εἶναι αὐξουσα ἤτοι :

$$P_{\kappa} < P_{2\kappa} < P_{4\kappa} < \dots < P_{2^v \kappa} < \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$

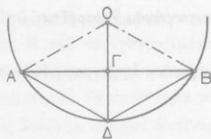
372. Θεώρημα. Ἐάν μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς σταθερὸν κύκλον (O, R) , τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του αὐξάνῃ τείνουν πρὸς τὸ ἄπειρον, τότε :

i) Τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς του λ_v ἐλαττοῦται τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.

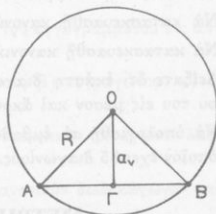
ii) Τὸ μήκος τοῦ ἀποστήματός του a_v αὐξάνει τείνουν πρὸς τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

iii) Τὸ μήκος τῆς περιμέτρου του P_v αὐξάνει τείνουν πρὸς τὸ μήκος L τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω σταθερὸς κύκλος (O, R) μὲ μήκος L (περίμετρον) καὶ $AB = \lambda_v$ ἡ πλευρὰ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ πολυγώνου μὲ v πλευρὰς (σχ. 375).



Σχ. 374



Σχ. 375

i) Τὸ μήκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ (ἐλάσσονος) ἰσοῦται πρὸς τὸ $1/v$ τοῦ μήκους L τοῦ κύκλου, ἤτοι εἶναι

$$(1) \quad \widehat{AB} = \frac{1}{v} \cdot L$$

Τότε

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \widehat{AB} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{L}{v} = 0 (*)$$

* Τὸ Σύμβολον $\lim$ τῆς διεθνoῦς βιβλιογραφίας, σημαίνει ὅριον.

Ἐπειδὴ ὁμῶς εἶναι

$$(2) \quad \lambda_v = AB < \widehat{AB},$$

ἐπεταὶ ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2)

$$\text{ὅτι } \lim_{v \rightarrow \infty} \lambda_v = 0$$

ii) Ἐὰν $OG = \alpha_v$ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ $AG = \frac{AB}{2} = \frac{\lambda_v}{2}$, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AGO , μὲ ὑποτείνουσιν $AO = R$,

λαμβάνομεν :

$$AO^2 = OG^2 + AG^2 \Rightarrow R^2 = \alpha_v^2 + \left(\frac{\lambda_v}{2}\right)^2 \iff \alpha_v^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_v}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v^2 = \lim_{v \rightarrow \infty} \left[R^2 - \left(\frac{\lambda_v}{2}\right)^2 \right] = R^2 - \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_v}{2}\right)^2 =$$

$$= R^2 - 0 = R^2 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v^2 = R^2 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = R \text{ (ἐφ' ὅσον ἡ σχέσις ἀνα-}$$

φέρεται εἰς μέτρα γεωμετρικῶν μεγεθῶν), ἥτοι τὸ ἀπόστημα α_v τείνει πρὸς τὴν ἀκτίνα R , ὅταν τὸ v τείνη πρὸς τὸ ἄπειρον.

iii) Τὸ μῆκος κυκλικοῦ τόξου, ἐξ ὀρισμοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὅποῖον τείνει κανονικὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτό, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον. Ἄρα τὸ μῆκος L κύκλου (O, R) ἰσοῦται πρὸς τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὅποῖον τείνει ἡ περίμετρος P_v μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν, ὅταν τὸ πλῆθος v τῶν πλευρῶν τοῦ τείνη πρὸς τὸ ἄπειρον.

Κατὰ ταῦτα, ἐφ' ὅσον ἡ πλευρὰ $\lambda_v = AB$ τυχόντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ v -γώνου εἰς τὸν κύκλον (O, R) εἶναι μικρότερα τοῦ ἀντιστοίχου

αὐτῆς τόξου AB , ἥτοι $\lambda_v < \widehat{AB} \Rightarrow v \cdot \lambda_v < v \cdot \widehat{AB} \Rightarrow P_v < L$ καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον $\lim_{v \rightarrow \infty} P_v = L$, ἐπεταὶ ὅτι τὸ μῆκος τῆς μεταβλητῆς περιμέτρου P_v

αὐξάνει τεῖνον εἰς τὸ μῆκος L τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

Κατ' ἄλλην διατύπωσιν, ἡ ἀκολουθία P_v , $v = 3, 4, 5, \dots$, τῶν περιμέτρων, τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων εἰς τὸν κύκλον (O, R) , εἶναι αὐξοῦσα καὶ φραγμένη ὑπὸ τῆς περιμέτρου L τοῦ κύκλου (O, R) , συγκλίνει δὲ εἰς αὐτήν.

373. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O, R) , ἔχει περίμετρον μεγαλύτεραν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB = \lambda'_n$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) , Γ τὸ μέσον αὐτῆς καὶ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς

μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 376). Φέρομεν τὰς OA καὶ OB καὶ ἔστω ὅτι αὗται τέμνουν εἰς τὰ I καὶ K τὸν κύκλον. Εἰς τὰ I καὶ K φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι ὀρίζουν ἐπὶ τῆς AB τὰ σημεῖα E καὶ Z . Ἡ συμμετρία, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα OG , ὡς καὶ τοὺς ἄξονας OA καὶ OB , μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν κανονικότητα διὰ τὸ πολύγωνον τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον (O, R) μὲ πλευρὰν τὴν EZ . Τὸ πολύγωνον τοῦτο $\Delta EZH\dots$ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἀπὸ τὸ πολύγωνον μὲ πλευρὰν τὴν AB (διὰτί;) καὶ ἔστω λ'_{2^k} τὸ μήκος-ἐκάστης πλευρᾶς του.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων AIE καὶ BKZ ἔχομεν :

$$AE > IE \text{ καὶ } ZB > ZK. \text{ Τότε εἶναι :}$$

$$AE + EZ + ZB > IE + EZ + ZK \quad \eta$$

$$\lambda'_x > \frac{\lambda'_{2^k}}{2} + \lambda'_{2^k} + \frac{\lambda'_{2^k}}{2} \quad \eta$$

$$(1) \quad \lambda'_x > 2\lambda'_{2^k}$$

Ἐὰν τὴν (1) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ x , λαμβάνομεν :

$$x\lambda'_x > 2x\lambda'_{2^k} \quad \eta$$

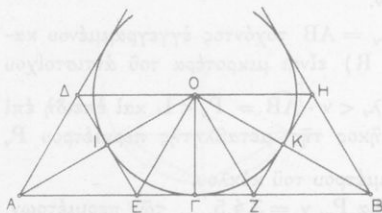
$$(2) \quad P'_x > P'_{2^k}$$

Πόρισμα. Ἡ ἀκολουθία

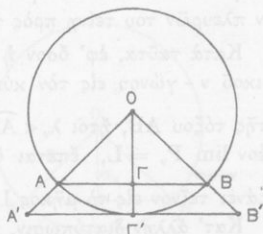
$$(3) \quad P'_x, P'_{2^k}, P'_{4^k}, \dots, P'_{2^v x}, \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$

τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R) καὶ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου του, εἶναι φθίνουσα, ἥτοι :

$$P'_x > P'_{2^k} > P'_{4^k} > \dots > P'_{2^v x} > \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$



Σχ. 376



Σχ. 377

374. Θεώρημα. Αἱ περίμετροι δύο μεταβλητῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, τοῦ ἐνὸς ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ ἄλλου περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R) , τείνουν πρὸς κοινὸν ὄριον, τὸ μήκος τοῦ κύκλου, ὅταν τὸ πλήθος τῶν πλευρῶν των τείνη πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν πλευρὰν $AB = \lambda_n$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἀντιστοίχως πρὸς αὐτὴν, τὴν $A'B' = \lambda'_n$ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 377). Τὰ δύο πολύγωνα, ἐφ' ὅσον

ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὁμοια καὶ ἐπομένως $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OG}{OG'}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_v}{\lambda'_v} = \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow \frac{v \cdot \lambda_v}{v \cdot \lambda'_v} = \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow \frac{P_v}{P'_v} = \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{P_v}{P'_v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{\lim_{v \rightarrow \infty} P_v}{\lim_{v \rightarrow \infty} P'_v} = \frac{\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v}{R} \Rightarrow \frac{\lim_{v \rightarrow \infty} P_v}{\lim_{v \rightarrow \infty} P'_v} = \frac{R}{R} = 1 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} P_v = \lim_{v \rightarrow \infty} P'_v \cdot \text{'Αλλὰ}$$

$\lim_{v \rightarrow \infty} P_v = L$ (§ 372). Ἄρα $\lim_{v \rightarrow \infty} P_v = \lim_{v \rightarrow \infty} P'_v = L$, ὅπου L εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κύκλου.

375. Θεώρημα. (Ἰπποκράτους τοῦ Χίου). Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

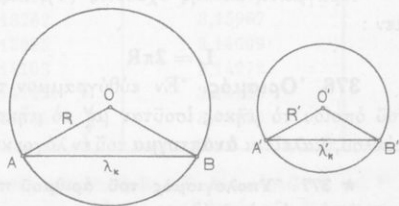
Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν δύο κύκλοι (O, R) καὶ (O', R') . Εἰς αὐτοὺς ἐγγράφομεν ἀνά ἓν κανονικὸν πολύγωνον μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος v πλευρῶν (σχ. 378). Τότε τὰ πολύγωνα εἶναι ὁμοια καὶ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν (§ 361). Ἀλλὰ ὁ

λόγος ὁμοιότητος $\frac{\lambda_v}{\lambda'_v}$ ἰσοῦται

μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν

$\frac{R}{R'}$. Ἄρα :

$$(1) \quad \frac{P_v}{P'_v} = \frac{R}{R'}$$



Σχ. 378

Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων διπλασιαζόμενον συνεχῶς τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τότε, ὡς εἶδομεν, αἱ περιμέτροι τῶν πολυγώνων συγκλίνουν εἰς τὰ μῆκη τῶν κύκλων καὶ ἡ (1) γράφεται :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{P_v}{P'_v} = \frac{R}{R'} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\lim_{v \rightarrow \infty} P_v}{\lim_{v \rightarrow \infty} P'_v} = \frac{R}{R'} \quad \text{ἢ}$$

$$(2) \quad \frac{L}{L'} = \frac{R}{R'}$$

Πόρισμα I. Ὁ λόγος τοῦ μήκους ἑνὸς κύκλου διὰ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς.

Πράγματι, η σχέσις (2) γράφεται :

$$\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'} \quad \text{ή ακόμη}$$

$$(3) \quad \frac{L}{2R} = \frac{L'}{2R'}$$

Έκ τῆς (3) έπεται ότι, ἐφ' ὅσον διὰ δύο τυχόντας κύκλους ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ ἐνὸς πρὸς τὴν διάμετρόν του εὔρεθῃ ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ μήκους τοῦ ἄλλου πρὸς τὴν διάμετρόν του ἀντιστοιχῶς, ὁ λόγος οὗτος δὲν μεταβάλλεται, δηλαδὴ εἶναι σταθερός.

Ὁ σταθερὸς αὐτὸς λόγος συμβολίζεται διεθνῶς μὲ τὸ ἐλληνικὸν γράμμα π, δηλαδὴ

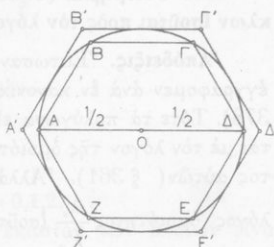
$$(4) \quad \frac{L}{2R} = \pi$$

Πόρισμα II. Τὸ μήκος ἐνὸς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως (4), λαμβάνομεν :

$$L = 2\pi R$$

376. Ὁρισμός. Ἐν εὐθύγραμμον τμήμα, τοῦ ὁποίου τὸ μήκος ἰσοῦται μὲ τὸ μήκος ἐνὸς κύκλου, καλεῖται **ἀνάπτυγμα** τοῦ ἐν λόγῳ κύκλου.



Σχ. 379

*** 377. Ὑπολογισμός τοῦ ἀριθμοῦ π.** Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν π, σκεπτόμεθα, ὡς ἀκολούθως :

Ὁ τύπος (4) τῆς προηγουμένης παραγράφου δίδει τὸν ἀριθμὸν π ὡς πηλίκον τῆς περιμέτρου L ἐνὸς κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον 2R αὐτοῦ. Ἐὰν ἐπομένως ἐγνωρίζαμεν τὴν περίμετρον L κύκλου γνωστῆς διαμέτρου, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν π.

Ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ γράψωμεν κύκλον διαμέτρου $2R = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$, ὁπότε

ὁ τύπος (4) τῆς προηγουμένης παραγράφου δίδει $\pi = L$, ἥτοι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μήκους L τῆς περιμέτρου κύκλου ἀκτίνος $R = \frac{1}{2}$.

Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον ἐγγράψωμεν καὶ περιγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, ἔστω ἐξάγωνα (σχ. 379), εἶναι φανερόν ὅτι ἡ περίμετρος L τοῦ κύκλου περιέχεται μεταξὺ τῶν περιμέτρων τῶν δύο πολυγώνων. Πράγματι, τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ἔχει περίμετρον μικρότεραν τῆς τοῦ κύκλου, ὡς κλειστὴ κυρτὴ γραμμὴ περι- κλειομένη ὑπὸ ἄλλης (τοῦ κύκλου), ἐπίσης ὁ κύκλος ἔχει περίμετρον μικρότεραν τῆς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, ὡς κλειστὴ κυρτὴ γραμμὴ περικλειομένη ὑπὸ ἄλλης (τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου). Ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐξαγώνου εἶναι $l_6 = R = \frac{1}{2}$ καὶ ἐπομένως ἡ περίμετρος του εἶναι $P_6 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Ἡ πλευρὰ τοῦ περιγε-

γραμμένου ἐξαγώνου ὑπολογίζεται ἡ βοηθεῖα τοῦ τύπου (2) τῆς παραγράφου 364 προσεγ- γιστικῶς εἰς τὸν ἀριθμὸν 0,57735 καὶ ἐπομένως ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι $P'_6 = 6 \cdot 0,57735$

$\approx 3,4641$. Ήδη εύρεθη μία πρώτη προσέγγισις διὰ τὸν ἀριθμὸν π, εἶναι $\pi = 3$, διότι $P_6 < \pi < P'_6 \Rightarrow 3 < \pi < 3,4641$.

Διὰ διπλασιασμοῦ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν ἑξαγώνων μεταβαίνομεν εἰς δωδεκάγωνα, ἐν συνεχείᾳ εἰς 24 - γωνα κ.ο.κ. δυνάμενοι νὰ ὑπολογίζωμεν πάντοτε τὰς πλευρὰς τῶν ἐκάστοτε κανονικῶν πολυγώνων τῇ βοήθειᾳ τῶν τύπων τῶν παραγράφων 363 καὶ 364. Τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων συνεχιζομένου, τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα τείνουν νὰ ταυτισθοῦν μετὰ τοῦ κύκλου, δημιουργουμένου διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ δύο συγκλινουσῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸν π ἀκολουθιῶν περιμέτρων :

$P_6 < P_{12} < P_{24} < \dots < \pi < \dots < P'_{24} < P'_{12} < P'_6$ περιοριζομένου τοῦ ἀριθμοῦ π συνεχῶς εἰς στενώτερα ἀριθμητικὰ πλαίσια.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι, ὅσον περισσοτέρους ὅρους τῶν προηγουμένων ἀκολουθιῶν ὑπολογίσωμεν, τόσον μεγαλυτέραν προσέγγισιν διὰ τὸν ἀριθμὸν π θὰ λάβωμεν. Ὡς σημειωθῇ ὅτι οἱ τοιοῦτοι εἴδους ὑπολογισμοί, πρὸ τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἡλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, ἦσαν δυσχερέστατοι καὶ ἀπασχόλησαν ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν τοὺς μαθηματικούς διαφόρων ἐποχῶν.

Κατωτέρω δίδομεν πινάκα τῶν περιμέτρων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων εἰς κύκλον διαμέτρου $2R = 1$.

v	P	P'
6	3	3,46410
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14155	3,14166

Ὁ ἀριθμὸς π περιέχεται πάντοτε μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο στηλῶν P καὶ P'. Τὰ ἀκριβῆ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π εἶναι προφανῶς τὰ κοινὰ ψηφία τῶν δύο προσεγγίσεων. Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πινάκα προκύπτει ὅτι $3,14155 < \pi < 3,14166$, ἥτοι εἶναι $\pi = 3,141\dots$

Ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ μάλιστα ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς, ὥς ἀπέδειξε τὸ 1882 ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann, δηλαδὴ ὅχι μόνον δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμητικοῦ τινος κλάσματος, ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ εἶναι ρίζα ἐξισώσεως $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$ μὲ ἀκεραίους συντελεστάς. Ἐξ αὐτοῦ ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατόν νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου εὐθύγραμμον τμήμα, ἔχον μῆκος ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν π, πρᾶγμα τὸ ὅποιον δίδει ὀριστικῶς ἀρνητικὴν ἀπάντησιν εἰς τὴν λύσιν τοῦ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων τεθέντος προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἥτοι τῆς κατασκευῆς εὐθυγράμμου τμήματος, τοῦ ὁποῦ τοῦ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κύκλου γωνστῆς ἀκτίνος.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἰπποκράτους φαίνεται ὅτι ἦτο γνωστὸς ὁ ἀριθμὸς π ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἰκάζετο δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμητικοῦ τινος κλάσματος. Ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) ἔδωσε τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ $\pi = \frac{22}{7} \approx 3,1428$ διαφέρουσαν περίπου κατὰ $\frac{1}{1000}$ ἀπὸ τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ π.

Συνήθως διὰ τὸν ἀριθμὸν π χρησιμοποιοῦνται αἱ προσεγγίσεις αὐτοῦ

3,14,

3,1416,

3,14159,

αναλόγως της ακριβείας της απαιτούμενης διά τὸ ἐκάστοτε πρόβλημα. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὰ ψηφία τῆς τελευταίας τῶν ἀνωτέρω προσεγγίσεων, ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ 16ου αἰῶνος περίπου, συμφωνοῦν μὲ τὸ πλῆθος τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων τῆς φράσεως :

Ἄει ὁ Θεὸς ὁ μέγας γεωμετερεῖ
3 1 4 1 5 9

Σήμερον, διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς ἀστροναυτικῆς, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖ ἀκριβεστάτους ὑπολογισμούς, ἔχει ἐπιτευχθῇ δι' ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ προσέγγις τοῦ ἀριθμοῦ π μὲ 10000 δεκαδικὰ ψηφία.

Δίδομεν προσέγγισιν τοῦ ἀριθμοῦ π μὲ 15 δεκαδικὰ ψηφία :

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\dots$$

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ

378. Ὅρισμός. Μήκος ἡ ἀνάπτυγμα κυκλικοῦ τόξου μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ μῆκος κανονικῆς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Β ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ἐν λόγω τόξον, ὅταν τὸ πλῆθος n τῶν πλευρῶν τῆς αὐξανόμενον ἀπεριορίστως τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

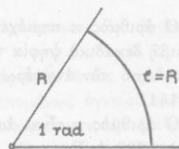
379. Ὑπολογισμὸς τοῦ μήκους κυκλικοῦ τόξου. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη «τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία» ἀποτελοῦν ἀναλογίαν. Ἄν ἐπομένως καλέσωμεν l τὸ μῆκος κυκλικοῦ τόξου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία, μετρουμένη εἰς μοίρας, εἶναι μ^0 , θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν :

$$(1) \quad \frac{l}{L} = \frac{\mu^0}{360^0}$$

ὅπου L εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κύκλου (O, R) , εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει τὸ τόξον.

Τότε ἐκ τῆς σχέσεως (1) καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $L = 2\pi R$, λαμβάνομεν :

$$(2) \quad l = \frac{2\pi R \cdot \mu}{360}$$



Σχ. 380

380. Ἀκτίνιον (rad ἐκ τοῦ radian = ἀκτίνιον). Ἐν κυκλικὸν τόξον καλεῖται τόξον ἑνὸς ἀκτινίου (ἡ ἀκτίνιον τόξον) ὅταν τὸ ἀνάπτυγμά του (τὸ μῆκος του) εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει. Ἀντιστοίχως ἡ ἐπίκεντρος γωνία του, καλεῖται γωνία ἑνὸς ἀκτινίου. Κατὰ ταῦτα, ἐν πλῆρες τόξον (τόξον 360^0) ἔχει $\frac{L}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ ἀκτίνια. Ἀντιστοίχως, ἡ ἐπίκεντρος γωνία του, ἢτοι ἡ γωνία τῶν 360^0 , ἔχει 2π ἀκτίνια.

Ἡ γωνία ἑνὸς ἀκτινίου περιέχεται μεταξύ τῶν 57^0 καὶ 58^0 . Μία προσέγγις αὐτῆς εἶναι :

$$1 \text{ rad} = 57^0\ 17' 44'', 3$$

Ἄν ἡ ἐπίκεντρος γωνία τόξου l , μετρουμένη εἰς ἀκτίνια, εἶναι ω , ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$l = \frac{2\pi R \cdot \omega}{2\pi} = \omega \cdot R \quad \eta \quad l = \omega \cdot R$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

381. Συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς κύκλου (O, R) τείνει νὰ καλυφθῇ ἀπὸ τὸ ἔμβαδὸν μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του, διπλασιαζόμενον συνεχῶς, τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον. Ἄν E_λ εἶναι τὸ ἔμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου μὲ λ πλευράς, γνωρίζομεν (§ 359) ὅτι εἶναι $E_\lambda = \frac{P_\lambda \cdot \alpha_\lambda}{2}$. Τότε δημιουργοῦμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἐμβαδῶν

$$(1) \quad E_x, E_{2x}, E_{2^2x}, \dots, E_{2^vx}, \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$

Ἐὰν ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνῃ, τότε θὰ ὑπάρχῃ τὸ ἔμβαδὸν E τοῦ κύκλου καὶ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας (1). Ἀλλὰ ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνει, διότι (§ 372):

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} E_{2^vx} &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{P_{2^vx} \cdot \alpha_{2^vx}}{2} \right] = \frac{1}{2} \lim_{v \rightarrow \infty} P_{2^vx} \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_{2^vx} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot R \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2. \text{ Ἄρα} \end{aligned}$$

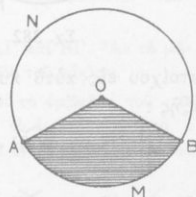
$$(2) \quad E = \pi R^2$$

Ἄν $d = 2R$ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, τότε ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$(3) \quad E = \frac{\pi d^2}{4}$$

382. Κυκλικὸς τομεύς. Ἐστω κύκλος (O, R) , $\widehat{AMB}$ ἐν τόξον αὐτοῦ καὶ OA, OB αἱ δύο ἀκραιῖαι ἀκτῖνες τοῦ τόξου (σχ. 381). Τὸ κλειστὸν ἐπίπεδον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ τὸ ἐν λόγῳ τόξον καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἀκραιῖας ἀκτῖνας του καλεῖται **κυκλικὸς τομεύς**. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AOB}$ τοῦ τόξου καλεῖται καὶ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως.

Ὁ κύκλος (O, R) μετὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ του δύναται νὰ θεωρηθῇ κυκλικὸς τομεύς, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι πλήρης γωνία, ἥτοι γωνία 360° . Τοῦτον θὰ τὸν λέγωμεν καὶ πλήρη κυκλικὸν τομέα.



Σχ. 381

383. Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως. Δύναται εὐκόλως νὰ διαπιστωθῇ

ὅτι τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα «κυκλικοὶ τομέεις τοῦ αὐτοῦ κύκλου» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία» ἀποτελοῦν ἀναλογίαν (διὰ τὴν ;).

Κατόπιν τούτου, ἐὰν $E_{\kappa.τ.}$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία, μετρουμένη εἰς μοίρας, εἶναι μ^0 , καὶ $E = \pi R^2$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει, ἔχομεν

$$\frac{E_{\kappa.τ.}}{\pi R^2} = \frac{\mu^0}{360^0} \quad \eta$$

$$(1) \quad E_{\kappa.τ.} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu}{360}$$

Μετασχηματισμὸς τοῦ τύπου (1). Ἐὰν ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, μετρουμένη εἰς ἀκτίνια, εἶναι ω , τότε ὁ τύπος (1) γράφεται :

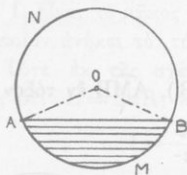
$$E_{\kappa.τ.} = \frac{\pi R^2 \cdot \omega}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \omega = \frac{1}{2} R \omega \cdot R = \frac{1}{2} l \cdot R \quad \eta$$

$$E_{\kappa.τ.} = \frac{1}{2} l R$$

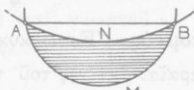
ὅπου l εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου του (§ 380).

384. Κυκλικὸν τμήμα. Ἐστω κύκλος (O, R) καὶ AB μία χορδὴ αὐτοῦ (σχ. 382). Διὰ τῆς χορδῆς AB ὁ κύκλος χωρίζεται εἰς δύο κλειστὰ τμήματα $ABMA$ καὶ $ABNA$, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **κυκλικὸν τμήμα**. Εἰς ἕκαστον τούτων ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AOB}$, ἡ ὁποία διὰ τὸ πρῶτον μὲν εἶναι κυρτή, διὰ τὸ δεύτερον δὲ εἶναι μὴ κυρτή.

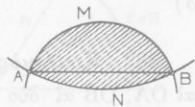
Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος ὑπολογίζεται ἐκ τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἀντι-



Σχ. 382



Σχ. 383 α



Σχ. 383 β

στοίχου εἰς αὐτὸ κυκλικὸν τομέως καὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου AOB , ὡς ἑξῆς :

- i) Ἐὰν $\widehat{AOB} < 2L$, τότε :
- $$(ABMA) = (AOBMA) - (AOB).$$
- ii) Ἐὰν $\widehat{AOB} > 2L$, τότε :
- $$(ABNA) = (AOBNA) + (AOB)$$

385. Μηνίσκος. Τὸ κλειστὸν ἐπίπεδον τμήμα, ποὺ ὀρίζουν δύο κυκλικά τόξα (ἄχι τοῦ αὐτοῦ κύκλου) μὲ κοινὰ ἄκρα A καὶ B καλεῖται μηνίσκος.

Ἐὰν ἡ κοινὴ χορδὴ AB κεῖται ἐκτὸς τοῦ μηνίσκου, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἶναι ἴσον μετὰ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων AMB καὶ ANB (σχ. 383α), ἐνῶ, ἐὰν ἡ κοινὴ χορδὴ κεῖται ἐντὸς τοῦ μηνίσκου, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἶναι ἴσον μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων AMB καὶ ANB (σχ. 383β).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

660. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 8 m.
661. Αὐτοκίνητου οἱ τροχοὶ ἔχουν ἀκτῖνα 0,35 m καὶ ἔκαναν 1800 στροφάς. Πόσῃ ἀπόστασιν διήνυσεν τὸ αὐτοκίνητον;
662. Κυκλικὸς στίβος ἔχει μῆκος 400 m. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς αὐτοῦ;
663. Ἐπὶ μιᾷς εὐθείας λαμβάνομεν τὰ διαδοχικὰ τμήματα AB , $ΒΓ$ καὶ $ΓΔ$ καὶ γράφομεν ἡμικύκλια μετὰ διαμέτρους τὰς AB , $ΒΓ$ καὶ $ΓΔ$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου AD ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν τριῶν ἄλλων ἡμικυκλίων.
664. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κανονικὸν ἐξάγωνον πλευρᾶς 5 cm.
665. Εἰς κύκλον ἀκτίνος 6 cm ἐγγράφομεν τετράγωνον καὶ εἰς τὸ τετράγωνον ἐγγράφομεν νέον κύκλον. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀκτίς καὶ τὸ μῆκος τοῦ νέου αὐτοῦ κύκλου.
666. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς πλευρὰν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἐξαγώνου εἰς κύκλον ἀκτίνος 4 m.
667. Ὁμοίως τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς πλευρὰν τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνος 10 m.
668. Εἰς κύκλον, τόξον 40° ἔχει μῆκος 15m. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου.
669. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἰσοπλευροῦ τριγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν 3 τόξα, περατούμενα εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν αὐτῶν ἰσοῦται μετὰ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα $\frac{\alpha}{2}$.
670. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτίνος 5 cm.
671. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τετράγωνον πλευρᾶς α.
672. Εἰς κύκλον ἄγομεν τὴν διάμετρον AB καὶ τὰς χορδὰς $ΑΓ$ καὶ $ΒΓ$. Ἄν τὸ μῆκος τῶν χορδῶν εἶναι 12 m καὶ 5 m ἀντιστοίχως, νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.
673. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δακτυλίου (ἥτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, ποῦ περιέχεται μετὰξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων) ἰσοῦται μετὰ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν χορδὴν τοῦ μεγαλύτερου κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ μικροτέρου.
674. Εἰς κύκλον ἀκτίνος α εἶναι ἐγγεγραμμένοι κανονικὸν ἐξάγωνον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἐξαγώνου.
675. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 120° εἰς κύκλον ἀκτίνος α.
676. Κυκλικὸς τομεὺς 45° ἔχει ἐμβαδὸν πa^2 . Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου.

677. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐκάστου ἐκ τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὅποια διαιρεῖται κύκλος ἀκτίνος α ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ἰσοπλευροῦ τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν.

678. Ὅμοιως ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

679. Δύο ἴσοι κύκλοι ἀκτίνος ρ ἔχουν διάκεντρον ἴσῃ με $\rho\sqrt{2}$. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους αὐτῶν.

B'.

680. Δοθεῖς κύκλος νά διαιρεθῇ εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη δι' ὁμοκέντρων κύκλων.

681. Δοθεῖς κύκλος νά διαιρεθῇ δι' ὁμοκέντρων κύκλων εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ δοθέντα μήκη λ , μ , ν .

682. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἀκτίνος R ἐφάπτονται ἀνὰ δύο ἐξωτερικῶς. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν τριῶν τούτων κύκλων.

683. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἀκτίνος R ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πού ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς αὐτῶν καὶ τοῦ κύκλου πού ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς αὐτῶν.

684. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α . Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς του καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν ἀνὰ ἓν τόξον περατούμενον εἰς τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς του. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου κομψολογισμοῦ τριγώνου.

685. Δίδεται τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ πλευρᾶς α . Μὲ κορυφὰς τὰς A καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν δύο τεταρτοκύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταξύ αὐτῶν περιεχομένου μέρους.

686. Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους. Ὁρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον. Μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρᾶς AB καὶ $A\Gamma$ γράφομεν ἡμικύκλια πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Νά δευχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σχηματιζομένων μηνίσκων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

687. Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς 2α . Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς του καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τεταρτοκύκλια ἐντὸς αὐτοῦ. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμψολογισμοῦ σταυροῦ.

688. Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς 2α . Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρᾶς του γράφομεν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμψολογισμοῦ σταυροῦ.

689. Δίδεται κύκλος (K, R) . Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν ἰσοπλευροῦ τριγώνου καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν τρία τόξα περατούμενα εἰς τὸν κύκλον. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμψολογισμοῦ τριφύλλου.

690. Εἰς κύκλον K ἀκτίνος R φέρομεν δύο διαμέτρους AKB καὶ $\Gamma K\Delta$ καθέτους μεταξύ των. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ΓA γράφομεν τὸ τόξον $\widehat{A\epsilon B}$. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μηνίσκου $\Delta\epsilon B\epsilon A$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $\Gamma A B$.

691. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α . Γράφομεν ἀνὰ ἓν τόξον, διερχόμενον διὰ τῶν δύο κορυφῶν του καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ τριγώνου. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου τριφύλλου.

692. Δίδεται τεταρτοκύκλιον KAB ἀκτίνος R . Μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν τόξον, τὸ ὅποιον τέμνει τὸ τόξον $\widehat{AB}$ εἰς τὸ Γ . Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου σχήματος $K\epsilon\Gamma$.

693. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου AKB . Ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ καὶ μὲ διαμέτρους τὰς $A\Gamma$ καὶ $B\Gamma$ γράφομεν ἀνὰ ἓνα κύκλον ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου, φέρομεν δὲ ἐκ τοῦ Γ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν AB , τέμνουσαν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ

Δ. Νά αποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν τριῶν ἡμικυκλίων ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος διάμετρον τὴν ΓΔ.

694. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τεταρτοκύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ὑπ' αὐτῶν καμπυλογράμμου τετραγώνου.

695. Δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἄγομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν ΒΓ. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς ΒΓ καὶ τῶν δύο κύκλων.

696. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν τρία τμήματα $AB = BG = GA = \alpha$ καὶ μὲ κέντρα τὸ Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν κύκλους, οἱ ὁποῖοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Μὲ κέντρα τὰ Ε καὶ Ζ καὶ ἀκτῖνα 2α γράφομεν τόξα, τὰ ὁποῖα καταλήγουν εἰς τοὺς κύκλους τούτους. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ὠσειδοῦς σχήματος.

697. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΚΑΒ κέντρου Κ. Μὲ διαμέτρους τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ γράφομεν ἀνὰ ἓν ἡμικύκλιον κείμενον ἐντὸς τοῦ τεταρτοκυκλίου, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι : α) Τὰ σημεῖα Α, Γ, Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας, β) τὸ καμπυλόγραμμον σχῆμα ΚΓ, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν δύο τούτων ἡμικυκλίων, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν χορδὰς τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ καὶ γ) νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου σχήματος ποὺ περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{AG}$, καὶ $\widehat{BG}$.

698. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τέσσαρας κύκλους. α) Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ ἐσωτερικοῦ τμήματος τῶν τεσσάρων κύκλων. β) Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὅλου σχήματος.



ΜΕΡΟΣ Β'

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

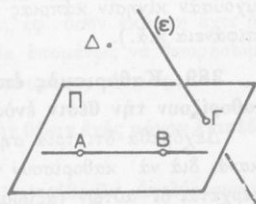
ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

386. 'Επίπεδον. Ἡ ἔννοια τοῦ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδου ἐπιφανείας εἶναι ἤδη γνωστὴ ἀπὸ τὴν ἐπιπεδομετρίαν, ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια. Ἡ ἐπιφάνεια ἡρεμοῦντος ὕδατος (περιωρισμένων διαστάσεων) δύναται νὰ δώσῃ τὴν εἰκόνα μέρους ἐπιπέδου ἐπιφανείας, χωρὶς ὅμως τοῦτο νὰ ἀποτελῇ καὶ ὅρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου.

387. 'Αξιώματα τοῦ ἐπιπέδου. 'Αξίωμα I. Ἐν ἐπίπεδον περιέχει τοῦλάχιστον τρία σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχει δὲ ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 384).

'Αξίωμα II. Διὰ τριῶν σημείων, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διέρχεται.

'Αξίωμα III. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο διακεκριμένα σημεῖα ἐνὸς ἐπιπέδου (II), ἢ εὐθεῖα AB εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (II) (σχ. 384).



Σχ. 384

Πόρισμα. Μία εὐθεῖα (ε), μὴ ἀνήκουσα εἰς ἐπίπεδον (II), δύναται νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον (II) μόνον εἰς ἓν σημεῖον Γ . Τὸ Γ καλεῖται ἵχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (II) (σχ. 384).

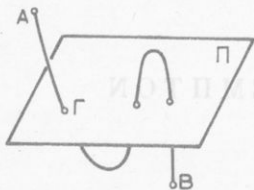
Ἀξίωμα IV. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο σημεῖα τοῦ χώρου, ἑκατέρωθεν ἐπιπέδου (Π) , τότε πᾶσα γραμμὴ διερχομένη διὰ τῶν A καὶ B ἔχει ἓν τοῦλάχιστον κοινὸν σημεῖον Γ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 385).

Ἀξίωμα V. Ἐν ἐπίπεδον ἐκτείνεται ἀπεριόριστως.

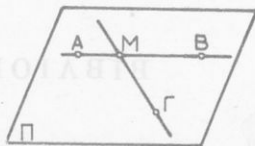
388. Θεώρημα. Ἐν ἐπίπεδον περιέχει ἀπείρους εὐθείας.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ τρία σημεῖα A, B καὶ Γ αὐτοῦ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας (σχ. 386). Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν AB , ἣ ὅποια ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (ἄξίωμα III). Ἐστω τυχὸν σημεῖον M τῆς εὐθείας $AB \Rightarrow M \in (\Pi)$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ εὐθεῖα GM ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) .

Τὸ σημεῖον M , ὡς δυνάμενον νὰ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν AB , δίδει ἀπείρους εὐθείας GM , αἱ ὅποια ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) . Ἀρα τὸ ἐπίπεδον (Π) περιέχει ἀπείρους εὐθείας.



Σχ. 385



Σχ. 386

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 388), ἔπεται ὅτι, ἐὰν μία εὐθεῖα GM κινῆται οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Γ νὰ παραμῇ σταθερὸν καὶ τὸ M νὰ ἀνῆκῃ πάντοτε εἰς εὐθεῖαν AB , ἡ εὐθεῖα GM διαγράφει ἐπίπεδον (Π) . Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς τοιαύτης κινήσεως τῆς εὐθείας GM , διὰ τοῦτο καὶ καλεῖται **εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια**. Ἡ εὐθεῖα AB καλεῖται ὁδηγὸς διὰ τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας GM , ἐνῶ τὸ σημεῖον Γ καλεῖται **πόλος**.

Κάθε εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, ἥτοι κάθε ἐπιφάνεια διαγραφομένη ἀπὸ τὴν τυχοῦσαν κίνησιν κάποιας εὐθείας, ἐν γένει δὲν εἶναι ἐπίπεδον (κυματοειδὴς ἐπιφάνεια κ.ἄ.).

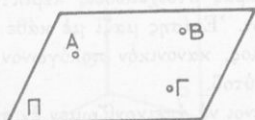
389. Καθορισμὸς ἐπιπέδου. Τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

Δεχόμεθα ὅτι τρία σημεῖα A, B καὶ Γ , μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, εἶναι ἱκανά, διὰ νὰ καθορίσουν τὸ μοναδικὸν ἐπίπεδον (Π) (σχ. 387) τὸ ὅποῖον διέρχεται δι' αὐτῶν (ἄξίωμα II).

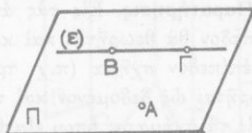
Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, συμπίπτουν.

390. Μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου.

Πράγματι, ἔστω εὐθεῖα (ϵ) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτῆς. Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα B καὶ Γ τῆς εὐθείας (ϵ). Τὰ τρία σημεῖα A, B καὶ Γ καθορίζουν ἓν ἐπίπεδον (Π) (σχ. 388), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ σημεῖον A , ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ εὐθεῖα (ϵ), ὡς ἔχουσα δύο σημεῖα τῆς B καὶ Γ ἐπὶ τοῦ (Π). Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) ὀρίζεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον A .



Σχ. 387

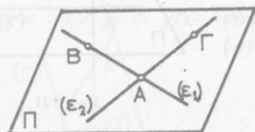


Σχ. 388

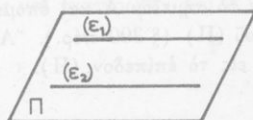
Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν μίαν κοινὴν εὐθεῖαν καὶ ἓν κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας, συμπίπτουν.

391. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου.

Πράγματι, ἔστωσαν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι καὶ A τὸ κοινὸν σημεῖον των (σχ. 389). Λαμβάνομεν ἀνὰ ἓν σημεῖον B καὶ Γ ἐκάστης



Σχ. 389



Σχ. 390

καὶ θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον (Π) τὸ διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B καὶ Γ . Εἰς τὸ (Π) ἀνήκουν καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι, ἐφ' ὅσον ἐκάστη ἔχει δύο σημεῖα τῆς ἐπὶ τοῦ (Π) (ἀξίωμα III). Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) ἔχει ὁρισθῇ ἀπὸ τὰς δύο τεμνομένης εὐθείας.

392. Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου (σχ. 390).

Τοῦτο ἔπεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ὡς δύο συνεπιπέδων εὐθειῶν χωρὶς κοινὸν σημεῖον.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν δύο κοινὰς εὐθείας (τεμνομένης ἢ παραλλήλους), συμπίπτουν.

393. Ἀνακεφαλαιώσως διὰ τὸν καθορισμὸν ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ἐν ἐπίπεδον καθορίζεται πλήρως, καὶ συνεπῶς θὰ θεωρῇται γνωστόν, εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

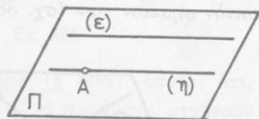
- i) Ὅταν γνωρίζωμεν τρία σημεῖα αὐτοῦ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.
- ii) Ὅταν γνωρίζωμεν μίαν εὐθεῖαν καὶ ἓνα σημεῖον αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον.
- iii) Ὅταν γνωρίζωμεν δύο τεμνομένας εὐθείας αὐτοῦ.
- iv) Ὅταν γνωρίζωμεν δύο παραλλήλους εὐθείας αὐτοῦ.

Παρατήρησις. Εἰς τὰς ἀνωτέρω τέσσαρας στοιχειώδεις περιπτώσεις, τὸ ἐπίπεδον θὰ θεωρῇται καὶ κατασκευάσιμον. Ἐπίσης μαζὶ μὲ κάθε δεδομένον ἐπίπεδον σχῆμα (π.χ. τρίγωνον, κύκλος, κανονικὸν πολύγωνον κ.ἄ.) θὰ θεωρῇται ὡς δεδομένον καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ.

Εἰς τὰ σχήματα, ὅπου εἴμεθα ἀναγκασμένοι νὰ ἀπεικονίζωμεν ἐν στερεῶν ἐπὶ τοῦ φύλλου σχεδιάσεως, τὰς περισσοτέρας φορὰς τὰ ἐπίπεδα θὰ τὰ ἀπεικονίζωμεν μὲ ἐν ὀρθογώνιον τμήμα αὐτοῦ, τὸ ὅποῖον ὁμῶς θὰ σχεδιάζωμεν συνήθως ὡς πλάγιον παραλληλόγραμμον (βλέπε καὶ § 453).

394. Θεώρημα. Ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε) καὶ σημεῖον Α. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν (η) // (ε). Ἡ εὐθεῖα (η) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (η) καθορίζουν ἐπίπεδον (σχ. 391). Τοῦτο μετὰ τοῦ ἐπίπεδου (Π) ἔχει κοινὴν τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ τὸ σημεῖον Α καὶ ἐπομένως συμπίπτει μετὰ τοῦ (Π) (§ 390 πόρ.). Ἀρα ἡ εὐθεῖα (η) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).



Σχ. 391

ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

395. Συνεπίπεδοι εὐθεῖαι ἢ ὁμοεπίπεδοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο διακεκριμένοι εὐθεῖαι, ὅταν ὑπάρχῃ ἐπίπεδον, τὸ ὅποῖον νὰ τὰς περιέχῃ. Τότε αἱ δύο εὐθεῖαι ἢ θὰ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

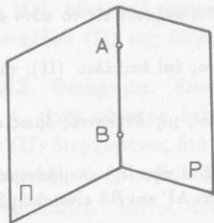
396. Ἀσύμβατοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο μὴ συνεπίπεδοι εὐθεῖαι. Ἀποκλείονται τὰ ἐνδεχόμενα «νὰ τέμνονται» ἢ «νὰ εἶναι παράλληλοι».

ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

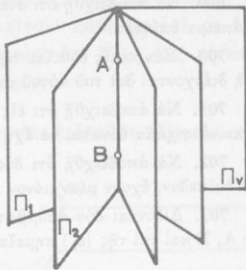
397. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β, τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις. $A \in (\Pi), B \in (\Pi) \Rightarrow \text{εὐθ. } AB \in (\Pi)$. Ἐπίσης $A \in (P), B \in (P) \Rightarrow \text{εὐθ. } AB \in (P)$ (σχ. 392). Ἀρα ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κοινὴ διὰ τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ).

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ n ἐπίπεδα, ἤτοι :
 Ἐὰν n ἐπίπεδα $(\Pi_1), (\Pi_2), (\Pi_3), \dots, (\Pi_n)$ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα A καὶ B ,
 τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν τὴν AB .



Σχ. 392

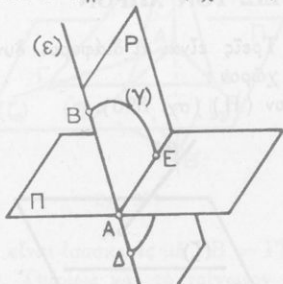


Σχ. 393

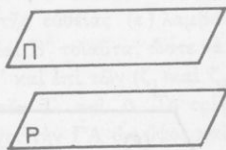
Τὰ n ἐπίπεδα λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων (σχ. 393), ἐφ' ὅσον εἶναι διακεκριμένα.

398. Θεώρημα. Ἐὰν δύο διακεκριμένα ἐπίπεδα (Π) καὶ $(Ρ)$ ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον A , τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου A .

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ϵ) τοῦ ἐπιπέδου $(Ρ)$ διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου A (σχ. 394). Ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ A λαμβά-



Σχ. 394



Σχ. 395

νομεν δύο σημεῖα B καὶ Δ καὶ γράφομεν γραμμὴν (γ) (ὄχι εὐθεῖαν), ἀνήκουσαν εἰς τὸ ἐπίπεδον $(Ρ)$, ἥ ὁποία θὰ διέρχεται διὰ τῶν B καὶ Δ . Αὕτη θὰ τμήσῃ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον E (§ 387, IV). Τὸ σημεῖον E ἀνήκει προφανῶς καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα καὶ συνεπῶς ἡ εὐθεῖα AE εἶναι κοινὴ διὰ τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ $(Ρ)$. Ἀρα ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων ἐν γένει εἶναι εὐθεῖα.

399. Ὅρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ $(Ρ)$ καλοῦνται παράλληλα, ἐὰν ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον (σχ. 395).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

699. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τριῶν σημείων κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διέρχονται ἀπειρα ἐπίπεδα.

700. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο, δείξατε ὅτι ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἢ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

701. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς κύκλος (O, R) , μὴ κείμενος ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) , τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα δύναται νὰ ἔχη μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π) .

702. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο ἴσοι καὶ ὁμόκεντροι κύκλοι, μὴ ἀνήκοντες ὁμῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἔχουν μίαν μόνον κοινὴν διάμετρον.

703. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) . Ἐπὶ τῆς (ε_1) λαμβάνομεν σημεῖα A, B καὶ ἐπὶ τῆς (ε_2) σημεῖα Γ, Δ . Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ εἶναι ἀσύμβατοι.

Β'.

704. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 10 ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ 45 τὸ πολὺ εὐθείας.

705. Νὰ εὐρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν, κατὰ τὰς ὁποίας n τὸ πλῆθος ἐπίπεδα τέμνονται ἀνὰ δύο.

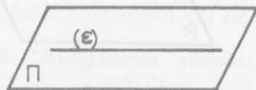
706. Δίδονται σημεῖον A , εὐθεῖα (ε) καὶ κύκλος (K, R) ἐν τῷ χώρῳ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ A εὐθεῖα (ζ) , τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ τὸν κύκλον (K, R) .

707. Δίδονται δύο τεμνόμεναι καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα καὶ τὰς τέσσαρας δοθείσας εὐθείας.

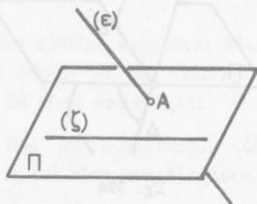
ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

400. Θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. Τρεῖς εἶναι αἱ διάφοροι δυναταὶ θέσεις εὐθείας (ε) καὶ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸν χώρον :

i) Ἡ εὐθεῖα (ε) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 396).



Σχ. 396



Σχ. 397

ii) Ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A (σχ. 397). Τὸ A καλεῖται ἔχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) .

Παρατήρησις. Κάθε εὐθεῖα (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) , μὴ διερχομένη διὰ τοῦ A , (σχ. 397) εἶναι ἀσύμβατος τῆς εὐθείας (ε) (διατί ;).

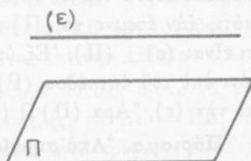
iii) Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου (Π) . Μὲ τὸν ὅρον «παράλληλος» ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ

ἐπιπέδου (Π) (σχ. 398). Τότε καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται παράλληλον τῆς εὐθείας (ε).

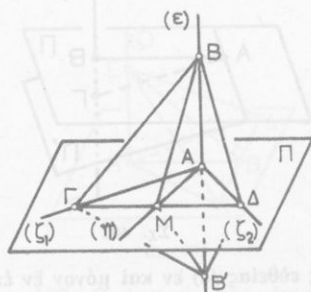
401. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον. Ὁρισμός. Μία εὐθεῖα (ε) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ, καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π) τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου Α.

402. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα (ε), τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α, εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π) διερχομένας διὰ τοῦ Α, τότε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

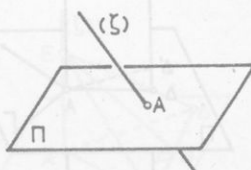
Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας (ζ₁) καὶ (ζ₂) τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ Α (σχ. 399). Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τυχούσαν εὐθεῖαν (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π), τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Α.



Σχ. 398



Σχ. 399



Σχ. 400

Ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) λαμβάνομεν σημεῖα Β καὶ Β' τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $AB = AB'$ καὶ ἐπὶ τῶν (ζ₁) καὶ (ζ₂) τυχόντα σημεῖα Γ καὶ Δ. Τὸ τρίγωνον

$\Gamma BB'$ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $GB = GB'$ (1), διότι ἔχει τὴν ΓΑ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ὁμοίως καὶ τὸ τρίγωνον $\Delta BB'$ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $\Delta B = \Delta B'$ (2). Τότε, ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ἔπεται ὅτι $\text{τριγ. } B\Gamma\Delta = \text{τριγ. } B'\Gamma\Delta$ (ἢ $\Gamma\Delta$ εἶναι κοινή). Ἄρα $B\hat{\Gamma}\Delta = B'\hat{\Gamma}\Delta$ (3). Ἐστω Μ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ τυχούσα εὐθεῖα (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Α, τέμνει τὴν $\Gamma\Delta$. Τριγ. $B\Gamma M = \text{τριγ. } B'\Gamma M$, λόγῳ τῶν σχέσεων (1), (3) καὶ τῆς $\Gamma M = \Gamma M$. Ἄρα $MB = MB'$, ἥτοι τὸ $\text{τριγ. } BMB'$ εἶναι ἰσοσκελὲς. Τοῦτο ἔχει τὴν ΜΑ ὡς διάμεσον. Ἐπομένως εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ, ἥτοι $MA \perp BB' \Rightarrow (ε) \perp (η)$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

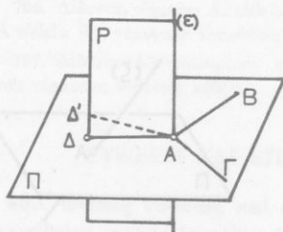
Παρατήρησις. Πᾶσα εὐθεῖα (ζ) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) καὶ μὴ κάθετος πρὸς αὐτό, καλεῖται **πλαγία** ὡς πρὸς τὸ (Π) (σχ. 400).

403. Θεώρημα. Ἐστω εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον A αὐτῆς. Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς τὸ σημεῖον A ἀποτελεῖ ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ A .

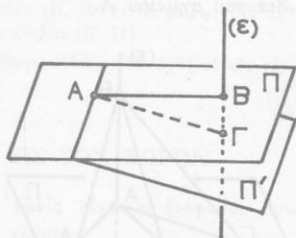
Ἀπόδειξις. Δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν τοῦ συνόλου τούτου, αἱ AB καὶ AG , καθορίζουν ἐπίπεδον (Π) , τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς τὸ σημεῖον A , διότι $(\varepsilon) \perp AB$ καὶ $(\varepsilon) \perp AG$ (σχ. 401). Ἐστω ἀκόμῃ μία εὐθεῖα $AD \perp (\varepsilon)$. Ἀρκεῖ νὰ δεθῇ ὅτι $AD \in (\Pi)$.

Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (P) , τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας (ε) καὶ AD . Αὐτὸ τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατ' ἀνάγκην κατὰ τὴν εὐθεῖαν AD . Διότι, ἐὰν ἔτεμνε τὸ (Π) κατ' ἄλλην εὐθεῖαν AD' , θὰ ἦτο $(\varepsilon) \perp AD'$, καθ' ὅτι εἶναι $(\varepsilon) \perp (P)$. Ἐξ ὑποθέσεως ὁμῶς ἔχομεν ὅτι $(\varepsilon) \perp AD$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) θὰ ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι AD καὶ AD' κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε) , Ἄρα $(\Pi) \cap (P) = AD$, ἦτοι ἡ AD ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) .

Πόρισμα. Ἀπὸ σημεῖον A εὐθείας (ε) ἔν μόνον κάθετον ἐπίπεδον ὑπάρχει ἐπὶ τὴν (ε) .



Σχ. 401



Σχ. 402

404. Θεώρημα. Ἐκ σημείου A ἐκτὸς εὐθείας (ε) ἔν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διέρχεται κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) .

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ A φέρομεν $AB \perp (\varepsilon)$. Ἡ AB εἶναι μία καὶ μοναδική (διατί ;). Ἐκ τοῦ B θεωροῦμεν τὸ κάθετον ἐπίπεδον (Π) ἐπὶ τὴν (ε) (σχ. 402), τὸ ὁποῖον ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι ἓν καὶ μοναδικόν (§ 403 πόρ.), ἀφ' ἑτέρου δὲ περιέχει τὸ A , διότι $AB \perp (\varepsilon)$. Ἄρα ὑπάρχει ἐκ τοῦ A ἓν ἐπίπεδον $(\Pi) \perp (\varepsilon)$. Εἶναι καὶ τὸ μοναδικόν διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ A ὑπῆρχε καὶ δεύτερον ἐπίπεδον $(\Pi') \perp (\varepsilon)$, αὐτὸ θὰ ἔτεμνε τὴν (ε) εἰς σημεῖον (Γ) καὶ θὰ ἦτο $AG \perp (\varepsilon)$. Δηλαδή ἐκ τοῦ A θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι αἱ AB καὶ AG , ἐπὶ τὴν (ε) , ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὸ (Π) εἶναι καὶ μοναδικόν.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ

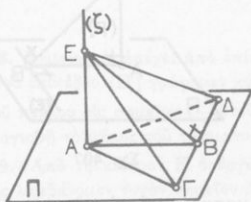
405. Θεώρημα. Εὐθεῖα (ζ) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς A θεωροῦμεν εὐθεῖαν $AB \perp \Gamma\Delta$, ὅπου ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι εὐθεῖα

τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἐὰν Ε εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (ζ), τότε εἶναι $EB \perp \Gamma\Delta$.

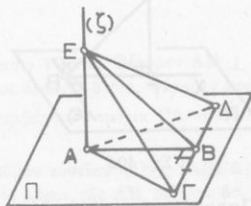
Ἀπόδειξις. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τὰ λαμβάνομεν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $B\Gamma = B\Delta$ (σχ. 403). Τότε τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει τὴν ΑΒ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον $\Rightarrow A\Gamma = A\Delta$. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ καὶ ΕΑΔ, ($EA \perp (\Pi)$), ὡς ἔχοντα τὴν ΑΕ κοινὴν καὶ $A\Gamma = A\Delta$, εἶναι ἴσα $\Rightarrow E\Gamma = E\Delta$, ἥτοι τὸ τρίγωνον ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Αὐτὸ ἔχει τὴν ΕΒ ὡς διάμεσον. Ἀρα εἶναι καὶ ὕψος του $\Rightarrow EB \perp \Gamma\Delta$.

406. Θεώρημα. Εὐθεῖα (ζ) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδον (Π) εἰς σημεῖον Δ. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημείου Ε τῆς (ζ) φέρωμεν κάθετον ΕΒ ἐπὶ τυχούσαν εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ληφθοῦν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $B\Gamma = B\Delta$ (σχ. 404), τὸ τρίγωνον ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, με $E\Gamma = E\Delta$, διότι ἔχει τὴν ΕΒ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ καὶ ΕΑΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΕΑ κοινὴν καὶ $E\Gamma = E\Delta$. Ἀρα εἶναι καὶ $A\Gamma = A\Delta$, ἥτοι τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Τοῦτο ἔχει τὴν ΑΒ ὡς διάμεσον. Ἐπομένως εἶναι καὶ ὕψος του, ἥτοι $AB \perp \Gamma\Delta$.



Σχ. 403



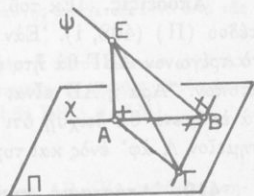
Σχ. 404

407. Θεώρημα. Δύο ἡμιευθεῖαι Βx καὶ By μὲ κοινὴν ἀρχὴν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τρίτην εὐθεῖαν ΒΓ. Αἱ Βx καὶ ΒΓ ὀρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου (Π). Ἀπὸ τυχὸν σημείου Ε τῆς By φέρομεν $EA \perp Bx$. Τότε εἶναι $EA \perp (\Pi)$.

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $EA \perp Bx$ (σχ. 405). Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΕΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ μίαν ἀκόμη εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΒΓ καὶ ΕΒΓ εἶναι ὀρθογώνια. Ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα καὶ ἔχομεν ἀντιστοιχῶς: $BE^2 = AB^2 + AE^2$ (1), $AG^2 = AB^2 + BG^2$ (2) καὶ $GE^2 = BG^2 + BE^2$ (3). Ἀπὸ τὴν σχέσιν

(1) λαμβάνομεν $AE^2 = BE^2 - AB^2$ (4). Προσθέτομεν τὰς σχέσεις (2) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν: $AG^2 + AE^2 = BG^2 + BE^2$ (5).



Σχ. 405

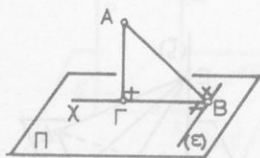
Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (5) ἔπεται $ΓΕ^2 = ΑΓ^2 + ΑΕ^2$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, διότι εἰς αὐτὸ ἰσχύει ἡ σχέση τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Ἄρα $ΕΑ \perp ΑΓ$ καὶ ἐπομένως $ΕΑ \perp (Π)$.

408. Κατασκευὴ εὐθείας διερχομένης ἀπὸ δοθὲν σημείου Α καὶ καθετοῦ ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον (Π).

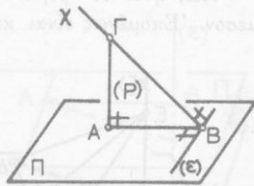
i) Τὸ σημεῖον Α δὲν ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 406). Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν εὐθεῖαν $ΑΒ \perp (ε)$, ὅπου (ε) τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν εὐθεῖαν $Βχ \perp (ε)$ ἀνήκουσα εἰς τὸ (Π). Ἐκ τοῦ Α φέρομεν $ΑΓ \perp Βχ$. Ἡ ΑΓ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

ii) Τὸ σημεῖον Α ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 407). Φέρομεν $ΑΒ \perp (ε)$, ὅπου (ε) εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν $Βχ \perp (ε)$, μὴ ἀνήκουσα εἰς τὸ (Π). Αἱ ΑΒ καὶ Βχ καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ). Ἐπ' αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν $ΑΓ \perp ΑΒ$. Ἡ ΑΓ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἡ ἀπόδειξις καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι φανερά, τῇ βοηθείᾳ τοῦ 3ου θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων (§ 407).



Σχ. 406



Σχ. 407

Παρατήρησις. Αἱ δύο προηγούμεναι κατασκευαὶ ἀποδεικνύουν τὴν ὑπαρξίν εὐθείας κάθετου ἐπὶ ἐπίπεδον, ἀπὸ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ κείμενον ἢ ἐπὶ αὐτοῦ.

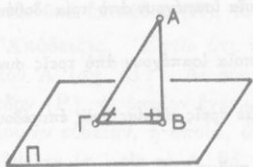
409. Θεώρημα. Ἀπὸ δοθὲν σημείου Α, κείμενον ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π), μία μόνον κάθετος εὐθεῖα ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ Α ὑπάρχει μία κάθετος ΑΒ (σχ. 408) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) (408, i). Ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δευτέρα κάθετος ΑΓ ἐπὶ τοῦ (Π), τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἦτο ὀρθογώνιον εἰς τὰς δύο γωνίας τοῦ Β καὶ Γ, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μοναδικὴ κάθετος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ (Π). Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ δειχθῇ ὅτι αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ μικρότερον τμήμα μὲ ἄκρα τὸ σημεῖον Α ἀφ' ἑνὸς καὶ τυχὸν σημείου τοῦ (Π) ἀφ' ἑτέρου.

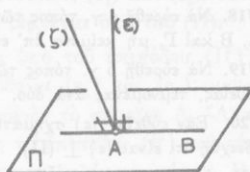
410. Ἀπόστασις σημείου Α ἀπὸ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ κάθετου τμήματος ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

411. Θεώρημα. Ἀπὸ δοθὲν σημείου Α ἐπιπέδου (Π) μία μόνον κάθετος εὐθεῖα ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ A ὑπάρχει μία εὐθεῖα $(\epsilon) \perp (\Pi)$ (408, ii). Ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δευτέρα εὐθεῖα (ζ) κάθετος ἐπὶ τοῦ (Π) εἰς τὸ A (σχ. 409), τότε τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) θὰ ἔτεμεν τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν



Σχ. 408



Σχ. 409

εὐθεῖαν AB καὶ θὰ ἦτο $(\epsilon) \perp AB$ καὶ $(\zeta) \perp AB$. Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται νὰ συμβαίῃ, διότι θὰ ὑπῆρχον εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐκ τοῦ A δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν AB . Ἄρα ἡ $(\epsilon) \perp (\Pi)$ εἶναι ἡ μοναδικὴ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ σημεῖον A .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

708. Σημεῖον A ἀπέχει ἀπὸ ἐπίπεδον (Π) ἀπόστασιν 10 cm. Φέρομεν $AB \perp (\Pi)$ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) γράφομεν κύκλον κέντρου B καὶ ἀκτίνος 8 cm. Φέρομεν εφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς σημεῖον Γ αὐτοῦ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma\Delta = 2\sqrt{7}$ cm. Νὰ υπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ τμήματος $A\Delta$.

709. Ἀπὸ τὸ κέντρον K ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν εὐθεῖαν $(\epsilon) \perp (AB\Gamma\Delta)$ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M . Ἐὰν Z εἶναι τὸ μέσον τῆς AB , δεῖξατε ὅτι εἶναι $MZ \perp AB$.

710. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ϵ) πλαγία ὡς πρὸς αὐτό. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει μία μόνον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) .

711. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) , σημεῖον A αὐτοῦ καὶ σημεῖον B ἔκτος αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν προβολῶν τοῦ B ἐπὶ τὰς εὐθείας τοῦ (Π) τὰς διερχομένας διὰ τοῦ A .

712. Ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ὑποτείνουσας ὀρθογωνίου τριγώνου ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου.

713. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A αὐτοῦ φέρομεν τὴν Ax κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου καὶ ἐνώνομεν τὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς Ax μετὰ τὸ μέσον M τῆς βάσεως $B\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι α) $\Delta M \perp B\Gamma$ καὶ β) $B\Gamma \perp (\Delta AM)$.

B'.

714. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν AB . Ἐκ τυχόντος σημείου Γ φέρομεν $\Gamma\Delta \perp (\Pi)$, $\Gamma E \perp (P)$ καὶ ἐκ τῶν Δ καὶ E φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν AB . Δείξατε ὅτι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

715. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον A ἔκτος αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π) , τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐκ τοῦ A δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ .

716. Δίδεται επίπεδον (Π), σημείον Α αὐτοῦ καὶ σημείον Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τοῦ (Π) ἀπέχουσα ἐκ τοῦ Β δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

717. Δίδεται επίπεδον (Π), κύκλος (Κ, R) ἐπ' αὐτοῦ καὶ σημείον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Κ, R) καὶ ἀπέχουσα ἐκ τοῦ σημείου Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

718. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἰσαπέχουν ἀπὸ τρία δοθέντα σημεία Α, Β καὶ Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.

719. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἰσαπέχουν ἀπὸ τρεῖς συνεπιπέδους εὐθείας, τεμνομένης ἀνὰ δύο.

720. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τρεῖς εὐθείας ἐνὸς ἐπιπέδου (Π), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $(ε) \perp (Π)$.

721. Δίδεται επίπεδον (Π) καὶ εὐθύγραμμον τμήμα $AB = 2a$ ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπὸ τὰ ὅποια τὸ τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ ὁρθῆν γωνίαν.

722. Δίδεται επίπεδον (Π) καὶ σημείον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὸ κάθετον τμήμα AB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο πλάγια τμήματα ΑΓ καὶ ΑΔ. Ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν σημεία Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{AG} = \frac{AH}{AD}$. Δείξατε ὅτι $AB \perp (EZH)$.

723. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδεται κύκλος (Κ, R). Ἀπὸ σημείον Α τοῦ κύκλου φέρομεν τὴν διάμετρον AB καὶ ὑψώνομεν κάθετον Αχ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Ἐπὶ τῆς Αχ λαμβάνομεν σημείον Γ καὶ τὸ συνδέομεν μὲ τυχὸν σημείον Δ τοῦ κύκλου. α) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\Gamma\Delta \perp B\Delta$. β) Φέρομεν $AE \perp B\Gamma$ καὶ $AZ \perp \Gamma\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\triangle G\Delta \approx \triangle \Gamma\Delta$. γ) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $B\Gamma \perp (AEZ)$.

724. Δίδεται επίπεδον (Π) καὶ δύο σημεία Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), διὰ τὰ ὅποια εἶναι: $MA^2 + MB^2 = \lambda^2$, ἐνθα λ δεδομένον μῆκος.

725. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὅποια εἶναι: $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$, ὅπου λ δοθὲν μῆκος.

412. Μεσοκάθετον ἐπίπεδον εὐθυγράμμου τμήματος. Ὅρισμός. Μεσοκάθετον ἐπίπεδον εὐθυγράμμου τμήματος AB καλεῖται τὸ ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AB κάθετον ἐπίπεδον ἐπ' αὐτοῦ.

413. Θεώρημα. Κάθε σημείον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π) εὐθυγράμμου τμήματος AB ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος καὶ ἀντιστρόφως, κάθε σημείον, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος, εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου.

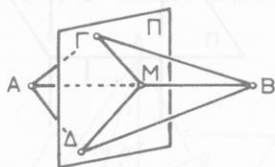
Ἀπόδειξις. Ἐστω Γ τυχὸν σημείον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π) τοῦ τμήματος AB $\Rightarrow \Gamma M \perp AB$ (σχ. 500). Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $MA = MB$, ἔπεται ὅτι τὸ $\triangle GAB$ εἶναι ἰσοσκελές, ἐφ' ὅσον ἔχει τὴν ΓΜ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ἀρα $GA = GB$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω Δ τυχὸν σημείον, ἰσαπέχον ἐκ τῶν Α καὶ Β, ἥτοι $\Delta A = \Delta B \Rightarrow$ τὸ $\triangle DAB$ εἶναι ἰσοσκελές. Τότε ἡ διάμεσος ΔΜ εἶναι καὶ ὕψος του, ἥτοι $\Delta M \perp AB$. Ἀρα τὸ σημείον Δ ἀνήκει εἰς τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον (Π) τοῦ τμήματος AB.

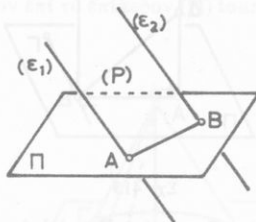
Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἔπεται ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἱσαπέχουν ἐκ δύο δοθέντων σημείων A καὶ B εἶναι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος AB .

414. Θεώρημα. Ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) , ἐὰν ἡ μία τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου (Π) , τότε καὶ ἡ ἄλλη τέμνεται ὑπὸ τοῦ (Π) .

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ (ϵ_1) τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 411). Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) , καθορίζουν ἐπίπεδον (P) , τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ (Π) κοινὸν τὸ σημεῖον A . Ἄρα ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία, ὥς ἀνήκουσα εἰς τὸ ἐπίπεδον (P) καὶ τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν (ϵ_1) εἰς τὸ A , θὰ τέμνη καὶ τὴν παράλληλόν της εἰς τὸ B . Τὸ B ἐπομένως, ὥς ἀνήκον εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἀνήκει καὶ εἰς τὸ (Π) , ἥτοι τὸ ἐπίπεδον (Π) τέμνει καὶ τὴν (ϵ_2) εἰς τὸ B .



Σχ. 410

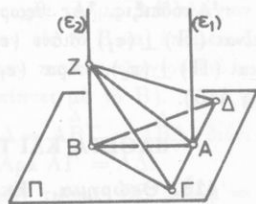


Σχ. 411

415. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) εἶναι κάθετοι ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) , εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) ἀποκλείεται νὰ τέμνονται, διότι τότε ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον των θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 412). Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) εἶναι συνεπίπεδοι.

A καὶ B εἶναι τὰ ἴχνη τῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ A φέρομεν εὐθεῖαν τοῦ (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $AG = AD$. Τότε τὸ τριγ. BGA εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει τὴν BA ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ἄρα $BG = BA$. Αἱ εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ AB καθορίζουν τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος GA , διότι $(\epsilon_1) \perp GA$ καὶ $AB \perp GA$. Τὸ σημεῖον B τῆς (ϵ_2) ἀνήκει προφανῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἐστω Z τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (ϵ_2) . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ZBG καὶ ZBA ἔχουν τὴν ZB κοινὴν καὶ $BG = BA$. Ἄρα εἶναι ἴσα $\Rightarrow ZG = ZA$. Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον Z ἀνήκει εἰς τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος GA . Τότε

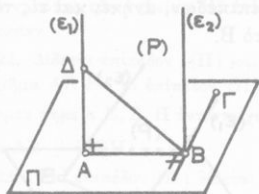


Σχ. 412

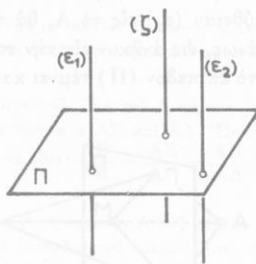
καὶ ἡ εὐθεῖα (ε_2) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ ἐπομένως εἶναι συνεπίπεδος τῆς (ε_1). Ἄρα εἶναι (ε_1) // (ε_2).

416. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, τότε τὸ (Π) εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἀπόδειξις. Ἐστω (Π) $\perp$ (ε_1) εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 413). Τὸ ἐπίπεδον (Π) θὰ τέμνῃ ὅπωςδήποτε καὶ τὴν εὐθεῖαν (ε_2) εἰς σημεῖον Β, διότι εἶναι (ε_1) // (ε_2) (§ 414) καὶ θὰ εἶναι (ε_1) $\perp$ AB $\Rightarrow$ (ε_2) $\perp$ AB. Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ (ε_2) εἶναι κάθετος καὶ εἰς ἄλλην μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).



Σχ. 413



Σχ. 414

Ἐκ τοῦ σημείου Β καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν τὴν $B\Gamma \perp AB$ καὶ ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε_1). Γνωρίζομεν ὅτι $\Delta B \perp B\Gamma$ (θεώρ. τριῶν καθέτων) καὶ ἐπομένως $B\Gamma \perp (AB\Delta)$. Τὸ ἐπίπεδον ὁμως ($AB\Delta$) συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) τῶν δύο παραλλήλων (ε_1) καὶ (ε_2), διότι ἔχουν κοινὴν τὴν εὐθεῖαν (ε_1) καὶ τὸ σημεῖον Β. Ἄρα θὰ εἶναι (ε_2) $\perp$ BΓ. Τότε ὁμως εἶναι (ε_2) $\perp$ (Π).

417. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι πρὸς τρίτην εὐθεῖαν (ζ), εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον (Π) $\perp$ (ζ) (σχ. 414). Τότε θὰ εἶναι (Π) $\perp$ (ε_1) διότι (ε_1) // (ζ) (§ 416). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ εἶναι καὶ (Π) $\perp$ (ε_2). Ἄρα (ε_1) // (ε_2), ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 415).

ΚΑΘΕΤΑ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

418. Θεώρημα. Ἐκ σημείου Α ἔκτος ἐπιπέδου (Π) κειμένου :

- Τὸ κάθετον τμήμα πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου.
- Τὰ ἴχνη δύο ἴσων πλαγίων τμημάτων ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.
- Τὰ ἴχνη δύο ἀνίσων τμημάτων ἀπέχουν ὁμοιοστροφῶς ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

Ἀπόδειξις.

i) $AB \perp (\Pi)$. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ B (σχ. 415) καὶ ἐπομένως εἶναι $AB < A\Gamma$.

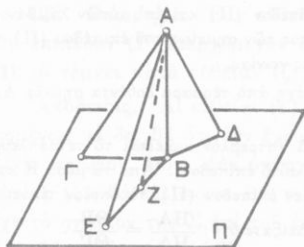
ii) Ἐστώσαν $A\Gamma$ καὶ AD δύο ἴσα πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ABD ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ τὴν AB κοινήν. Ἀρα εἶναι ἴσα $\Rightarrow B\Gamma = BD$.

iii) Ἐστώσαν AE , AD δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα μὲ $AE > AD$. Ἐπὶ τῆς EB λαμβάνομεν σημεῖον Z τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $AZ = AD \Rightarrow BZ = BD$ καὶ $AE > AZ \Rightarrow BE > BZ \Rightarrow BE > BD$.

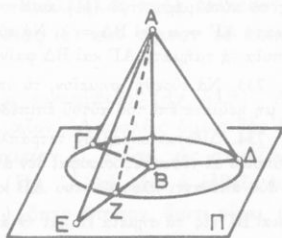
419. Θεώρημα. Εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου A πρὸς ἐπίπεδον (Π) :

i) Μικρότερον ὅλων εἶναι τὸ κάθετον.

ii) Δύο τμήματα εἶναι ἴσα, ἐὰν τὰ ἴχνη τῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθετοῦ τμήματος.



Σχ. 415



Σχ. 416

iii) Δύο τμήματα εἶναι ἄνισα, ἐὰν τὰ ἴχνη τῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἀπέχουν ὁμοιοστρόφως ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθετοῦ τμήματος.

Ἀπόδειξις.

i) Φέρομεν τὸ κάθετον τμήμα $AB \perp (\Pi)$ καὶ τυχὸν τμήμα AD πλάγιον ὡς πρὸς τὸ (Π) . Τὸ τρίγωνον ABD εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ B καὶ ἐπομένως $AB \leq AD$, ἥτοι τὸ κάθετον τμήμα εἶναι μικρότερον παντὸς πλάγιου (τὸ = ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ D συμπίπτει μὲ τὸ B).

ii) $AB \perp (\Pi)$ (σχ. 416) καὶ ἔστω $B\Gamma = BD \Rightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{ABD}$, διότι εἶναι ὀρθογώνια μὲ $B\Gamma = BD$ καὶ τὴν AB κοινήν. Ἀρα $A\Gamma = AD$.

iii) Ἐστω $BE > BD$. Ἐπὶ τῆς BE λαμβάνομεν τμήμα $BZ = BD \Rightarrow AZ = AD$ καὶ $BE > BZ \Rightarrow AE > AZ \Rightarrow AE > AD$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

726. Δίδεται εὐθεῖα (ϵ) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B τοῦ χώρου. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ) σημεῖον M , τὸ ὁποῖον νὰ ἰσαπέχῃ ἐκ τῶν A καὶ B .

727. Δίδονται δύο σημεία Α καὶ Β καὶ εὐθεῖα (ε) εἰς τὸν χώρον. Νὰ εὐρεθῇ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας (ε) τοιοῦτον ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς α) μὲ κορυφὴν τὸ Γ β) μὲ κορυφὴν τὸ Α.

728. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεία Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ τῶν Α καὶ Β.

729. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου (τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου) εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι ῥόμβος;

730. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι τὰ Α καὶ Γ ἰσαπέχουν ἀπὸ κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΒΔ.

Β'.

731. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α. Διὰ τοῦ Α νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμήμα ἔχον τὰ ἄκρα του Β καὶ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι: $\frac{AB}{AG} = \frac{1}{2}$.

732. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδονται δύο σημεία Α καὶ Β. Ἐκ τῶν Α καὶ Β φέρομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Π) καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΓ = κ καὶ ΒΔ = λ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

733. Νὰ εὐρεθῇ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἰσαπέχῃ ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεία Α, Β, Γ, Δ μὴ κεῖμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

734. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (στρεβλὸν καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ τέσσαρες κορυφαὶ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον). Ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΓΔ φέρομεν ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ σημεία Η καὶ Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: $\frac{HA}{HD} = \frac{GB}{GT}$.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

420. Ὅρισμός. Εὐθεῖα (ε) καλεῖται παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), ἐὰν ἡ τομὴ των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον: $(ε) // (Π) \iff (ε) \cap (Π) = \emptyset$ (σχ. 417).

Τότε καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται παράλληλον τῆς εὐθείας (ε).

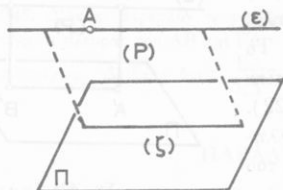
421. Θεώρημα. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ζ) αὐτοῦ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε) // (ζ). Τότε ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ), ὡς παράλληλοι, καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) (σχ. 417), τὸ ὁποῖον τέμνεται μετὰ τοῦ (Π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν (ζ). Ἡ εὐθεῖα (ε), ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς αὐτό. Ἐπομένως, ἐὰν ἡ (ε) ἔτεμε τὸ (Π) εἰς σημεῖον Σ, θὰ ἔπρεπε αὐτὸ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων, ἥτοι εἰς τὴν εὐθεῖαν (ζ). Τοῦτο ὁμως εἶναι ἄτοπον, καθ' ὅτι εἶναι $(ε) // (ζ)$. Ἀρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

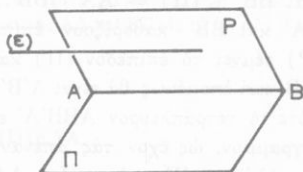
Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔπεται ὅτι ἀπὸ σημεῖον

Α ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Πόρισμα. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν AB δύο τεμνομένων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 418), μὴ ἀνήκουσα εἰς αὐτά, εἶναι παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα.



Σχ. 417

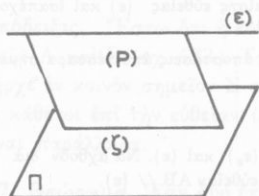


Σχ. 418

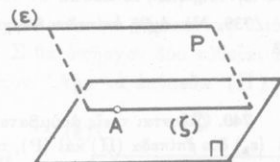
422. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), πᾶν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας (ε) καὶ τέμνον τὸ ἐπίπεδον (Π), τὸ τέμνει κατὰ εὐθεῖαν (ζ) $//$ (ε).

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) εἶναι συνεπίπεδοι (σχ. 419). Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Ἀσφαλῶς ὅμως δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι, ἐὰν ὑπῆρχε κοινὸν σημεῖον Σ, τοῦτο, ὡς σημεῖον τῆς εὐθείας (ζ), θὰ εὐρίσκετο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀλλὰ τότε ἡ εὐθεῖα (ε) θὰ εἶχε τὸ σημεῖον τῆς Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), ὅπερ ἄτοπον, διότι εἶναι (ε) $//$ (Π). Ἀρα εἶναι (ε) $//$ (ζ).

423. Θεώρημα. Ἐστω ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα (ε) $//$ (Π). Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ζ) $//$ (ε). Τότε ἡ εὐθεῖα (ζ) εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π).



Σχ. 419



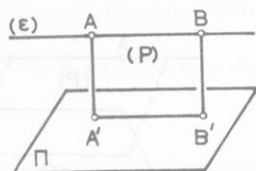
Σχ. 420

Ἀπόδειξις. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) (σχ. 420). Τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν κοινὸν σημεῖον τὸ Α. Ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν καὶ μάλιστα αὕτη πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος τῆς εὐθείας (ε) (§ 422). Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ διέρχεται

ἀπὸ τὸ σημεῖον A , δὲν εἶναι ἄλλη παρὰ ἡ ἰδία ἡ εὐθεΐα (ζ). "Αρα ἡ εὐθεΐα (ζ) ὡς κοινὴ διὰ τὰ δύο ἐπίπεδα, ἀνήκει καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).

424. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεΐα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἱσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν A καὶ B δύο σημεῖα τῆς εὐθεΐας (ε) (σχ. 421). Φέρομεν $AA' \perp (\Pi)$ καὶ $BB' \perp (\Pi) \Rightarrow AA' \parallel BB'$. Αἱ παράλληλοι AA' καὶ BB' καθορίζουν ἐπίπεδον (P). Τὸ (P) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν εὐθεΐαν $A'B'$ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $A'B' \parallel (\varepsilon)$ (§ 422). Τότε τὸ τετράπλευρον $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὥς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἐπομένως εἶναι $AA' = BB'$.



Σχ. 421

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι τὰ σημεῖα A καὶ B τῆς εὐθεΐας (ε) ἱσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (Π), ἥτοι εἶναι $AA' = BB'$. Τότε τὸ τετράπλευρον $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον ὥς ἔχον τὰς AA' καὶ BB' ἴσας καὶ παραλλήλους (κάθετοι ἐπὶ τὸ (Π)). "Αρα εἶναι $AB \parallel A'B'$ καὶ ἐπομένως (ε) $\parallel (\Pi)$ (§ 421).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

735. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) τέμνονται κατὰ εὐθεΐαν AB . Ἐπίπεδον (Σ) παράλληλον τῆς AB τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ εἶναι παράλληλοι.

736. Ἀπὸ δοθέν σημείου A νὰ ἀχθῇ εὐθεΐα παράλληλος πρὸς δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P).

737. Δίδεται εὐθεΐα (ε) καὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P). Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθεΐας (ε) ἐπίπεδον τέμνον τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) κατὰ εὐθείας παραλλήλους.

738. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ δοθείσης εὐθεΐας (ε) καὶ ἱσαπέχον ἐκ δύο δοθέντων σημείων A καὶ B .

739. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ .

B'.

740. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεΐαι (ε_1), (ε_2) καὶ (ε). Νὰ ἀχθοῦν διὰ τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P), τεμνόμενα κατὰ εὐθεΐαν $AB \parallel (\varepsilon)$.

741. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι τοποθετημένα οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AB \parallel A'B'$, $B\Gamma \parallel B'\Gamma'$, $\Gamma A \parallel \Gamma' A'$. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεΐαι AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

742. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεΐα (ε) $\parallel (\Pi)$ καὶ σημεῖον Σ . Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεΐα τέμνουσα τὴν εὐθεΐαν (ε) εἰς σημεῖον A καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον B οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AB = \lambda$, ὅπου λ δοθέν μήκος.

743. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα A, B καὶ εὐθύγραμμον τμήμα $\alpha \parallel (\Pi)$.

Διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, τέμνουσαι τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $A'B' // \alpha$.

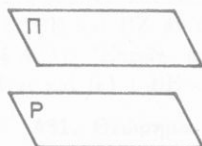
744. (Θεώρημα Desargues). Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι τοποθετημένα εἰς τρόπον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β' νὰ τέμνονται εἰς σημεῖον Κ, αἱ ΒΓ καὶ Β'Γ' νὰ τέμνονται εἰς σημεῖον Λ καὶ αἱ ΓΑ καὶ Γ'Α' νὰ τέμνονται εἰς σημεῖον Μ. Δείξατε ὅτι α) τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ εὐρίσκονται ἐπ' εὐθείας, β) αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

745. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς του ΑΒ καὶ ΓΔ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: $\frac{EA}{ED} = \frac{ZB}{ZT}$.

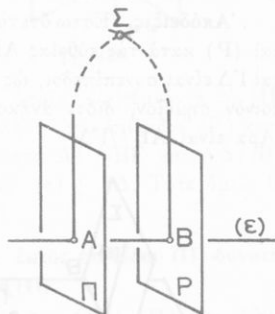
ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

425. Ὅρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καλοῦνται **παράλληλα**, ἐὰν ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον: $(\Pi) \cap (P) = \emptyset$ (σχ. 422).

426. Θεώρημα. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ε), εἶναι μετὰξὺ των παράλληλα.



Σχ. 422

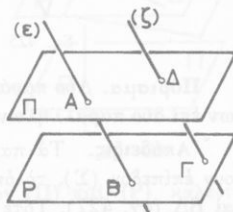


Σχ. 423

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 423). Τὰ ἐπίπεδα ἀποκλείεται νὰ τέμνονται. Διότι, ἐὰν ὑπῆρχε ἓν κοινὸν σημεῖον Σ αὐτῶν, ἐκ τοῦ Σ θὰ ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι ΣΑ καὶ ΣΒ κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα.

427. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα (ε), τέμνουσα τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 424). Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν (ζ) $// (ε)$. Τὸ ἐ-



Σχ. 424

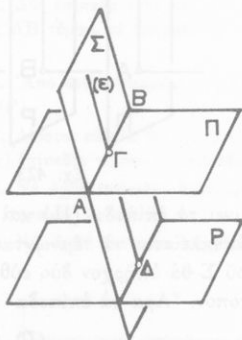
πίπεδον (Π), ὡς τέμνον τὴν εὐθεΐαν (ϵ), θὰ τέμνη καὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς (ζ) εἰς σημεῖον Δ (§ 414). Ἄρα ἡ εὐθεΐα (ζ), ὡς ἔχουσα σημεῖον τῆς Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (P), δὲν εἶναι εὐθεΐα τοῦ (P). Τὸ ἐπίπεδον (P) ὁμῶς τέμνει τὴν εὐθεΐαν (ζ) εἰς τὸ Γ καὶ ἐπομένως θὰ τέμνη καὶ τὴν παράλληλόν τῆς (ϵ) εἰς σημεῖον B .

428. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα, πᾶν ἐπίπεδον (Σ) τέμνον τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.

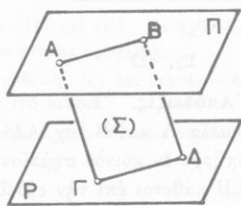
Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) τέμνει τὸ (Π) κατὰ τὴν εὐθεΐαν AB (σχ. 425). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεΐαν (ϵ) τοῦ ἐπιπέδου (Σ) τέμνουσαν τὴν AB εἰς τὸ Γ . Ἡ εὐθεΐα (ϵ), τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον Γ , θὰ τέμνη καὶ τὸ παράλληλον αὐτοῦ ἐπίπεδον (P) εἰς σημεῖον Δ . Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ Δ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) καὶ ἐπομένως τὸ τέμνει.

429. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P), ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου (Σ), εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) κατὰ τὰς εὐθείας AB καὶ $\Gamma\Delta$ ἀντιστοίχως (σχ. 426). Αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι συνεπίπεδοι, ὡς εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου (Σ). Ἀποκλείεται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι ἀνήκουν εἰς τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P). Ἄρα εἶναι $AB \parallel \Gamma\Delta$.



Σχ. 425



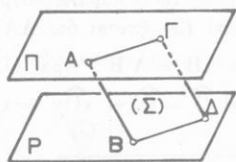
Σχ. 426

Πόρισμα. Δύο παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$, μὲ τὰ ἄκρα τῶν ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) εἶναι ἴσα.

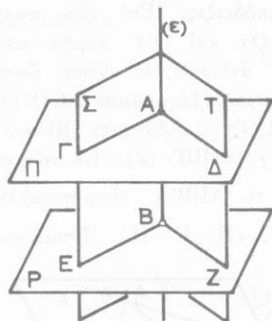
Ἀπόδειξις. Τὰ παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ), τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) κατὰ τὰς $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ (σχ. 427). Τότε θὰ εἶναι $A\Gamma \parallel B\Delta$ (§ 429) καὶ ἐπομένως τὸ $AB\Delta\Gamma$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow AB = \Gamma\Delta$.

430. Θεώρημα. Ἐὰν δύο επίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεΐα (ε) , κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι $(\varepsilon) \perp (\Pi)$ (σχ. 428). Ἡ εὐθεΐα (ε) , ἐφ' ὅσον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A , θὰ τέμνη καὶ τὸ παράλληλον αὐτοῦ ἐπίπεδον (P) εἰς σημεῖον B . Ἐκ τοῦ σημείου A θεωροῦμεν δύο τυχοῦσας εὐθείας AG καὶ AD τοῦ ἐπιπέδου (Π) . Ἡ (ε) μετὰ τῶν AG καὶ AD καθο-



Σχ. 427

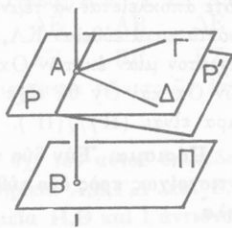


Σχ. 428

ρίζει δύο επίπεδα (Σ) καὶ (T) ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα, ὡς τέμνοντα τὸ (Π) κατὰ τὰς AG καὶ AD , θὰ τέμνουν καὶ τὸ παράλληλόν του ἐπίπεδον (P) κατὰ τὰς BE καὶ BZ ἀντιστοίχως καὶ θὰ εἶναι μάλιστα $AG \parallel BE$ καὶ $AD \parallel BZ$ (§ 429). Ἐπειδὴ $(\varepsilon) \perp (\Pi) \Rightarrow (\varepsilon) \perp AG$ καὶ $(\varepsilon) \perp AD$. Τότε ὅμως θὰ εἶναι καὶ $(\varepsilon) \perp BE$ καὶ $(\varepsilon) \perp BZ \Rightarrow (\varepsilon) \perp (P)$.

431. Θεώρημα. Ἀπὸ σημείου A κείμενον ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) δύναται νὰ ἀχθῇ ἓν μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ (Π) .

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ σημείου A φέρομεν εὐθεΐαν $AB \perp (\Pi)$ (σχ. 429). Φέρομεν ἐπίσης $AG \perp AB$ καὶ $AD \perp AB$, αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τὸ μοναδικὸν κάθετον ἐπίπεδον (P) ἐπὶ τῆς AB εἰς τὸ σημεῖον A . Εἶναι φανερόν τώρα ὅτι $(P) \parallel (\Pi)$, ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν AB . Τὸ (P) εἶναι καὶ τὸ μοναδικὸν ἐπίπεδον ἐκ τοῦ A παράλληλον πρὸς τὸ (Π) , διότι, ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δεύτερον ἐπίπεδον $(P') \parallel (\Pi) \Rightarrow (P') \perp AB$, διότι $AB \perp (\Pi)$. Ἀλλὰ τότε θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετα ἐπίπεδα ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν AB τὸ (P) καὶ τὸ (P') , ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα ἐκ τοῦ A ἓν μόνον ἐπίπεδον ὑπάρχει παράλληλον πρὸς τὸ (Π) .



Σχ. 429

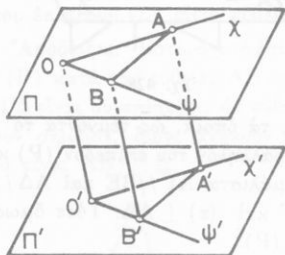
432. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) καλεῖται τὸ μῆκος α τοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος AB τῶν δύο ἐπιπέδων. Τὰ

A και B είναι σημεία τῶν ἐπιπέδων (Π) και (Ρ) ἀντιστοίχως (σχ. 430).

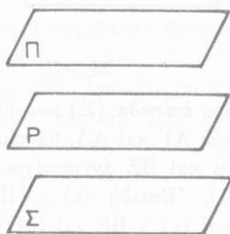
433. Θεώρημα. Δύο γωνίαι $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'O'y'}$, ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους και ὁμορρόπους, εἶναι ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα, τὰ καθοριζόμενα ὑπ' αὐτῶν, εἶναι παράλληλα.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Ox και $O'x'$ λαμβάνομεν σημεία A και A' ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $OA = O'A' \Rightarrow$ τὸ $OAA'O'$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow OO' // AA'$ (1) (σχ. 431). Ὀμοίως ἐπὶ τῶν Oy και $O'y'$ λαμβάνομεν $OB = O'B' \Rightarrow$ τὸ $OBBO'$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow OO' // BB'$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) και (2) ἔπεται ὅτι $AA' // BB' \Rightarrow$ τὸ $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow AB = A'B'$. Ἄρα $\widehat{OAB} = \widehat{O'A'B'}$, (Π - Π - Π). Ἐπομένως θὰ εἶναι και $\widehat{O} = \widehat{O'} \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Σχ. 430



Σχ. 431



Σχ. 432

Αἱ δύο γωνίαι $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'O'y'}$ καθορίζουν τὰ ἐπίπεδα (Π) και (Π') ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ $Ox // O'x' \Rightarrow Ox // (Π')$ (§ 421), ἤτοι ἡ Ox ἀποκλείεται νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον (Π'). Ὀμοίως ἡ Oy , διότι $Oy // O'y' \Rightarrow Oy // (Π')$. Τότε ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται και τὰ ἐπίπεδα (Π) και (Π'), διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο κατὰ εὐθεῖαν ΚΛ, αὕτη, ὡς εὐθεῖα τοῦ (Π), θὰ ἔπρεπε νὰ τέμνῃ τοὺλάχιστον μίαν ἐκ τῶν Ox και Oy και αὐτὸ σημαίνει ὅτι μία τοὺλάχιστον ἐκ τῶν Ox και Oy θὰ εἶχε σημεῖον της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π'), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα εἶναι $(Π) // (Π')$.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ἐνὸς ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς δύο εὐθείας ἐνὸς ἄλλου ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

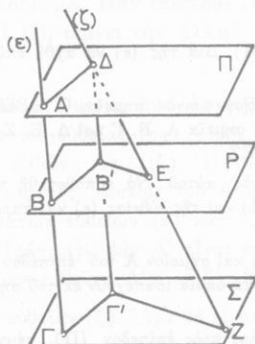
434. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) και (Ρ) εἶναι παράλληλα πρὸς τρίτον ἐπίπεδον (Σ), εἶναι και μεταξύ των παράλληλα.

Ἀπόδειξις. $(Π) // (Σ)$, $(Ρ) // (Σ)$ (σχ. 432). Τὰ ἐπίπεδα (Π) και

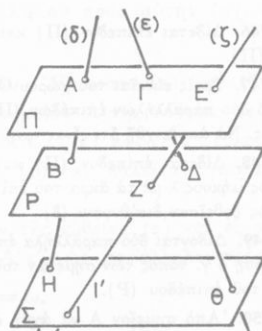
(P) ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται, διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο, ἐξ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων των θὰ ὑπῆρχον δύο παράλληλα ἐπίπεδα πρὸς τὸ (Σ), ὅπερ ἄτοπον (§ 431). Ἄρα εἶναι (Π) // (P).

435. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ. Ἐὰν τρία τοὐλάχιστον ἐπίπεδα (Π), (P) καὶ (Σ) εἶναι παράλληλα καὶ τέμνονται ὑπὸ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) εἰς τὰ σημεία A, B, Γ, καὶ Δ, E, Z ἀντιστοίχως, τὰ ἀποκοπτόμενα τμήματα ἐκ τῶν εὐθειῶν ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἀνάλογα.

Ἀποδείξεις. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ (σχ. 433). Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν εὐθεῖαν ΔB'Γ' // ABΓ. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καθορίζουν ἐπίπεδον, τὸ ὅποιον τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π), (P) καὶ (Σ) κατὰ εὐθείας παραλλήλους ΑΔ // B'B' // ΓΓ'. Ἄρα τὰ τετραπλευρά ABB'Δ καὶ BΓΓ'B' εἶναι παραλληλόγραμμα $\Rightarrow AB = \Delta B'$ καὶ BΓ = B'Γ'.



Σχ. 433



Σχ. 434

Αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΔEZ καὶ ΔB'Γ' καθορίζουν ἐπίπεδον τὸ ὅποιον, τέμνει τὰ ἐπίπεδα (P) καὶ (Σ) κατὰ εὐθείας παραλλήλους B'E // Γ'Z. Ἄρα θὰ εἶναι (θεώρημα τοῦ Θαλοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον) $\frac{\Delta B'}{B'\Gamma'} = \frac{\Delta E}{EZ} \Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$.

Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ διὰ περισσότερα τῶν τριῶν ἐπιπέδων.

436. Θεώρημα. Τρεῖς εὐθεῖαι (δ), (ε) καὶ (ζ) ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τέμνουν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἰς τὰ σημεία A, B, Γ, Δ καὶ E, Z ἀντιστοίχως (σχ. 434). Ἐὰν ἐπ' αὐτῶν λάβωμεν σημεία H, Θ καὶ I ἀντιστοίχως καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (P) τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι : $\frac{AB}{BH} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta} = \frac{EZ}{ZI}$, τὰ σημεία H, Θ καὶ I καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ) παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P).

'Απόδειξις. 'Εάν τὸ ἐπίπεδον (Σ) (σχ. 434), τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Η, Θ καὶ Ι, δὲν ἦτο παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), ἐκ τῶν σημείων Η καὶ Θ θὰ διήρχετο ἐν μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ θὰ ἔτεμνε τὴν εὐθεῖαν (Ζ) εἰς σημεῖον Ι', πρὸς τὸ μέρος τῶν Η καὶ Θ ὡς πρὸς τὸ (Ρ) (διατί;). Τότε θὰ ἦτο (προηγούμενον θεωρήμα) :

$$\frac{AB}{BH} = \frac{EZ}{ZI'} \quad (1).$$

'Εξ ὑποθέσεως ὁμῶς ἔχομεν :

$$\frac{AB}{BH} = \frac{EZ}{ZI}$$

(2). 'Εκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται

$$\frac{EZ}{ZI'} = \frac{EZ}{ZI} \iff ZI' = ZI, \text{ ἥτοι}$$

θὰ ἔπρεπε τὸ σημεῖον Ι' νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ σημείου Ι. 'Εξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι (Σ)/(Π)/(Ρ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

746. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ε)/(Π). Διὰ τῆς (ε) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον (Ρ)/(Π).

747. Τρεῖς εὐθεῖαι τοῦ χώρου Οχ, Ογ, καὶ Οζ ἔχουν κοινὸν σημεῖον Ο καὶ τέμνονται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι τριγ. ΑΒΓ ≈ τριγ. ΔΕΖ.

748. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ τοποθετηθῇ τμήμα δοθέντος μήκους λ μετὰ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

749. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π)/(Ρ) καὶ σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου (Π). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ).

750. 'Απὸ σημεῖον Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε).

751. Τρία παράλληλα ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ) κατὰ σειρὰν ἀπέχουν τὰ μὲν (Π) καὶ (Ρ) 12cm, τὰ δὲ (Ρ) καὶ (Σ) 8cm. Εὐθεῖα (ε) τέμνει αὐτὰ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως καὶ εἶναι ΑΒ = 18cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος ΒΓ.

Β'.

752. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἰσαπέχον ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Β, Γ, Δ.

753. 'Επὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) εὐρίσκονται δύο κύκλοι (Κ, Ρ) καὶ (Λ, ρ) ἀντιστοίχως. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ), ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τοὺς δύο κύκλους.

754. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα διαιροῦν εἰς δεδομένον λόγον μ/ν τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ ἄκρα των ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ).

755. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Α, Β αὐτοῦ καὶ σημεῖον Κ ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν ΚΑ καὶ ΚΒ καὶ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ εὐθείας παράλληλους.

756. Δίδεται επίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Συνδέομεν τὸ Α μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΜ λαμβάνομεν σημεῖον Ι τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ΙΑ}{ΙΜ} = \frac{\kappa}{\lambda}$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

757. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖον Α. Ἐὰν Μ εἴναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Δ τοῦ τμήματος ΑΜ. Νὰ γίνη γενικεύσις ἐὰν $\frac{ΑΔ}{ΑΜ} = \frac{\kappa}{\lambda}$.

758. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ κατασκευασθοῦν τέσσαρα ἰσαπέχοντα ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῶν τεσσάρων δοθέντων σημείων ἀντιστοίχως.

759. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ δύο σημεῖα Β καὶ Γ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του. Μεταβλητὸν σημεῖον Α διαγράφει τὸν κύκλον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κ. βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

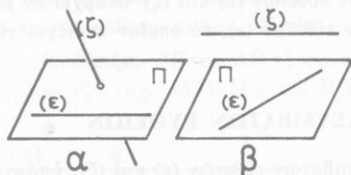
ΑΣΥΜΒΑΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

437. Ὅρισμός. Εἰς τὴν § 396 εἶδομεν ὅτι ἀσύμβατοι εὐθεΐαι καλοῦνται δύο μὴ συνεπίπεδοι εὐθεΐαι.

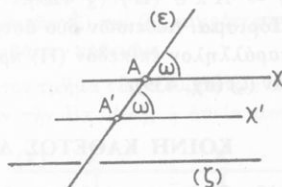
Πόρισμα. Πᾶν ἐπίπεδον (Π), περιέχον μίαν ἐκ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ), τέμνει τὴν ἄλλην ἢ εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτὴν (σχ. 435 α καὶ β).

438. Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Ἐστωσαν (ε) καὶ (ζ) δύο ἀσύμβατοι εὐθεΐαι (σχ. 436). Ἐκ τυχόντος σημείου Α τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν εὐθεΐαν Αχ // (ζ). Ἡ γωνία ω τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ Αχ* εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Α ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν (ε) καὶ καλεῖται γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ).

Πράγματι, ἐὰν Α' εἴναι ἐν ἄλλῳ σημείῳ τῆς εὐθείας (ε) καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρωμεν εὐθεΐαν Α'χ' // (ζ), θὰ εἶναι Αχ // Α'χ', ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν (ζ). Ἀρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{Α} = \widehat{Α'} = \omega$.



Σχ. 435



Σχ. 436

439. Ὁρθογώνιοι εὐθεΐαι καλοῦνται δύο ἀσύμβατοι εὐθεΐαι, τῶν ὁποίων ἡ γωνία εἶναι ὀρθή.

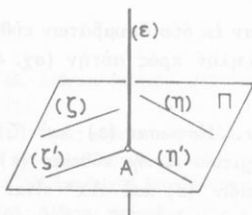
440. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεΐα (ε) εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο εὐθεΐας (ζ) καὶ (η) ἐνὸς ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεΐα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

* Ὑπενθυμίζομεν ὅτι γωνία δύο τεμνομένων εὐθειῶν καλεῖται ἡ μικροτέρα γωνία (ὀξεία) τὴν ὁποίαν σχηματίζουν.

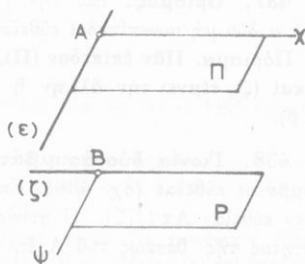
Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὸ ἴχνος A τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν τὰς εὐθείας $(\zeta') // (\zeta)$ καὶ $(\eta') // (\eta)$ (σχ. 437). Αἱ εὐθεῖαι (ζ') καὶ (η') ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 394). Ἐπειδὴ εἶναι $(\epsilon) \perp (\zeta) \Rightarrow (\epsilon) \perp (\zeta')$. Ὁμοίως εἶναι καὶ $(\epsilon) \perp (\eta')$. Ἀρα ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) , ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας του.

441. Θεώρημα. Δοθεῖσων δύο ασυμβάτων εὐθειών (ϵ) καὶ (ζ) ὑπάρχουν δύο μόνον παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) , ἐξ ὧν ἕκαστον περιέχει ἀνὰ μίαν τῶν ἀσυμβάτων.

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ σημεῖα A καὶ B τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) ἀντιστοίχως φέρομεν ἀνὰ μίαν εὐθεῖαν Ax καὶ By παράλληλον τῆς (ζ) καὶ (ϵ) ἀντιστοίχως (σχ. 438). Τὰ δύο καθοριζόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα, διότι δύο εὐθεῖαι τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τοῦ ἄλλου.



Σχ. 437



Σχ. 438

Εἶναι καὶ τὰ μόνα παράλληλα ἐπίπεδα, τὰ ὅποια περιέχουν τὰς δύο ἀσυμβάτους, διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ οἰουδήποτε σημείου A' τῆς εὐθείας (ϵ) ῥῆγοτο $A'x' // (\zeta) \Rightarrow A'x' \in (\Pi)$ (§ 423).

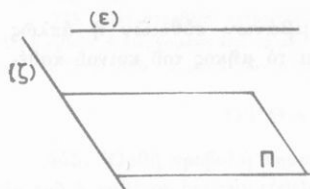
Πόρισμα. Δοθεῖσων δύο ασυμβάτων εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) ὑπάρχει ἓν μόνον παράλληλον ἐπίπεδον (Π) πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ϵ) , τὸ ὅποιον περιέχει τὴν εὐθεῖαν (ζ) (σχ. 439).

ΚΟΙΝΗ ΚΑΘΕΤΟΣ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

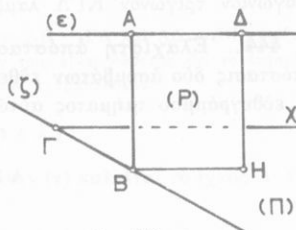
442. Θεώρημα. Δοθεῖσων δύο ασυμβάτων εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) , ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τυχόντος σημείου Γ τῆς εὐθείας (ζ) φέρομεν εὐθεῖαν $\Gamma x // (\epsilon)$ (σχ. 440). Αἱ δύο εὐθεῖαι (ζ) καὶ Γx καθορίζουν ἐπίπεδον (Π) . Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς εὐθείας (ϵ) φέρομεν $\Delta H \perp (\Pi)$ καὶ ἐκ τοῦ H τὴν εὐθεῖαν $HB // (\epsilon)$. Ἡ εὐθεῖα HB ἀνήκει ἀσφαλῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 423) καὶ ἐπομένως τέμνει τὴν εὐθεῖαν (ζ) εἰς σημεῖον B (ἀποκλείεται νὰ εἶναι παράλληλοι, διότι τότε θὰ ᾔτο καὶ $(\epsilon) // (\zeta)$). Αἱ δύο παράλληλοι (ϵ) καὶ BH καθορίζουν ἐπίπεδον (P) εἰς τὸ ὅποιον ἀνήκει προφανῶς καὶ ἡ ΔH . Ἀπὸ τὸ

σημείον Β φέρομεν ευθείαν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΗ, ἥ ὁποία, ὡς ευθεία τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), τέμνει τὴν ευθείαν (ε) εἰς σημείον Α. Τὸ τετράπλευρον ΑΔΗΒ εἶναι ἐκ κατασκευῆς παραλληλόγραμμον καὶ μάλιστα ὀρθογώνιον,



Σχ. 439



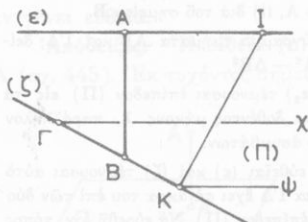
Σχ. 440

διότι εἶναι $\Delta H \perp (\Pi) \Rightarrow \Delta H \perp HB$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A} = 1^\circ \Rightarrow AB \perp (\epsilon)$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $\Delta H \perp (\Pi) \Rightarrow AB \perp (\Pi) \Rightarrow AB \perp (\zeta)$. Ἐπομένως ἡ ΑΒ εἶναι κοινὴ κάθετος διὰ τὰς δύο άσυμβάτους ευθείας (ε) καὶ (ζ).

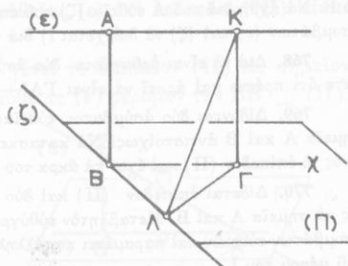
Ἡ κοινὴ κάθετος ΑΒ τῶν δύο άσυμβάτων ευθειῶν εἶναι καὶ ἡ μοναδική. Πράγματι ἔστω ὅτι ἡ ΙΚ (σχ. 441) εἶναι μία ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν δύο άσυμβάτων. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν $Ky \parallel (\epsilon)$. Τότε ἡ ΙΚ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Ky , ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν παράλληλόν της (ε). Ἡ Ky ὅμως ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π), διότι $Ky \parallel (\epsilon) \parallel \Gamma x$. Ἄρα $IK \perp (\Pi)$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο ευθείας του (ζ) καὶ $Ky \Rightarrow AB \parallel IK$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) $\Rightarrow$ αἱ ΑΒ καὶ ΙΚ καθορίζουν ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ ΑΙ $\equiv (\epsilon)$ καὶ ἡ ΒΚ $\equiv (\zeta)$, ἤτοι αἱ άσυμβάτοι ευθείαι (ε) καὶ (ζ) εἶναι συνεπίπεδοι, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα μία μόνον εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος δύο άσυμβάτων ευθειῶν.

443. Θεώρημα. Ἐξ ὅλων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εὐρίσκονται ἐπὶ δύο άσυμβάτων ευθειῶν (ε) καὶ (ζ), μικρότερον εἶναι τὸ κοινὸν κάθετον τμήμα ΑΒ τῶν δύο άσυμβάτων ευθειῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ΑΒ τὸ κοινὸν κάθετον τμήμα τῶν άσυμβάτων ευθειῶν (ε) καὶ (ζ) (σχ. 442). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν $Bx \parallel (\epsilon)$, ἡ ὁποία μετὰ τῆς



Σχ. 441



Σχ. 442

εὐθείας (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον $(\Pi) // (\epsilon)$. Ἐὰν ΚΛ εἶναι τυχὸν εὐθύγραμμον τμήμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) , ἀρκεῖ νὰ δεიχθῇ ὅτι $AB < ΚΛ$. Φέρομεν $ΚΓ \perp (\Pi) \Rightarrow AB = ΚΓ$ (§ 424). Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΓΛ λαμβάνομεν $ΚΓ < ΚΛ \Rightarrow AB < ΚΛ$.

444. Ἐλαχίστη ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἢ ἀπλῶς «ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν» καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ κοινοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

760. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) καὶ σημεῖον Α. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο ἀσυμβάτους.

761. Ἡ κοινὴ κάθετος ΑΒ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) ἔχει μῆκος 12cm, ἡ δὲ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εἶναι 60° . Ἐπὶ τῆς (ϵ_1) λαμβάνομεν τμήμα $ΑΓ = 6$ cm καὶ ἐπὶ τῆς (ϵ_2) τμήμα $ΒΔ = 8$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΓΔ (δύο περιπτώσεις).

762. Ἀπὸ τὸ μέσον Γ τοῦ κοινοῦ καθέτου τμήματος ΑΒ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) φέρομεν ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὰς ἀσυμβάτους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε τμήμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π) .

763. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) παράλληλοι πρὸς τὸ (Π) . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν δύο ἀσυμβάτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) .

764. Εἰς στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $AB = ΓΔ$ καὶ $ΑΔ = ΒΓ$. Δείξατε ὅτι ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

Β'.

765. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) . Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο ἀσυμβάτους καὶ ἔχουσα δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ) .

766. Μεταβλητοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ διατηροῦνται σταθεραί, ἐνῶ ἡ κορυφή Δ διαγράφει εὐθεῖαν (ϵ) . Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ Δ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ) οὕτως, ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι : α) ὀρθογώνιον, β) ῥόμβος.

767. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) , σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα (ϵ) τέμνουσα τὸ (Π) εἰς τὸ Β. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) τοιαύτη, ὥστε ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ἀσυμβάτων (ϵ) καὶ (ζ) νὰ διέρχεται i) διὰ τοῦ σημείου Α, ii) διὰ τοῦ σημείου Β.

768. Διὰ νὰ εἶναι ὀρθογώνια δύο ἀσύμβατα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ, δεῖξτε ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $ΓΑ^2 - ΓΒ^2 = ΔΑ^2 - ΔΒ^2$.

769. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τέμνουσαι ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεία Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα δοθέντος μήκους λ, παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων.

770. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ) καὶ (ζ) τέμνουσαι αὐτὸ εἰς τὰ σημεία Α καὶ Β. Μεταβλητὸν εὐθύγραμμον τμήμα ΓΔ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν καὶ παραμένει παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ Ι.

771. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ_1) , (ϵ_2) , (ϵ_3) . Μεταβλητὸν ἐπίπεδον (Π) ,

τὸ ὁποῖον παραμένει παράλληλον πρὸς δύο σταθερὰς διευθύνσεις, τέμνει τὰς ἀσυμβάτους εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κ. βάρους τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

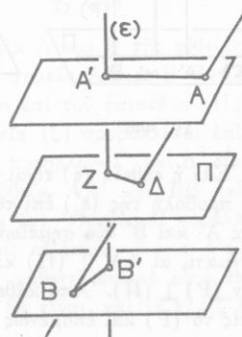
772. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι $(\epsilon_1), (\epsilon_2), (\epsilon_3)$ τέμνουν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας (δ_1) καὶ (δ_2) εἰς μέρη ἀνάλογα, δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον, πρὸς τὸ ὁποῖον αἱ $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ καὶ (ϵ_3) εἶναι παράλληλοι.

773. Ἐὰν στρεβλοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $AD = B\Gamma$, δεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ποῦ ὀρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου.

ΟΡΘΑΙ ΠΡΟΒΟΛΑΙ

445. Ὄρθῃ προβολῇ σημείου A ἐπὶ εὐθείαν (ϵ) καλεῖται τὸ ἴχνος A' τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθείαν (ϵ) .

Ὄρθῃ προβολῇ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ εὐθείαν (ϵ) καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὴν εὐθείαν (ϵ) (σχ. 443). Τὸ σημειοσύνολον τοῦτο εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα με ἄκρα τὰς ὀρθὰς προβολὰς A' καὶ B' τῶν A καὶ B ἐπὶ τὴν εὐθείαν (ϵ) . Κάθε σημεῖον Δ τοῦ τμήματος AB προβάλλεται εἰς ἓν σημεῖον Z τοῦ τμήματος $A'B'$ δι' ἐπιπέδου (Π) ἐκ τοῦ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν (ϵ) καὶ ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Z τοῦ τμήματος $A'B'$ εἶναι ἡ προβολὴ ἑνὸς σημείου Δ τοῦ τμήματος AB , ὅπου τὸ Δ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν (ϵ) ἐκ τοῦ Z .



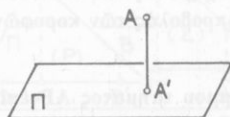
Σχ. 443

446. Ὄρθῃ προβολῇ σημείου A ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ ἴχνος A' τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 444).

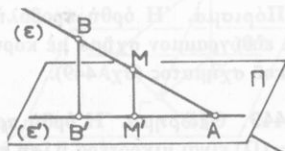
447. Ὄρθῃ προβολῇ σχήματος (Σ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) .

448. Θεώρημα. Ἡ ὀρθῇ προβολῇ εὐθείας (ϵ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἓν γένει εὐθεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα (ϵ) τέμνει ἓν γένει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A (σχ. 445). Ἐκ τυχόντος σημείου B τῆς εὐθείας (ϵ) φέρομεν τὴν $BB' \perp (\Pi)$.



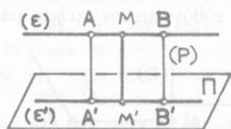
Σχ. 444



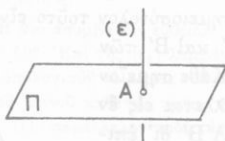
Σχ. 445

Ἡ εὐθεῖα BB' καὶ τὸ σημεῖον A καθορίζουν ἐπίπεδον (P) , τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν (ϵ') . Τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς εὐθείας (ϵ) προβάλλεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον M' ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ') , διότι ἡ MM' , ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) , εἶναι παράλληλος τῆς εὐθείας BB' καὶ ἐπομένως εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (P) . Ἐπομένως τὸ σημεῖον M' , κατὰ τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) , πρέπει νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) , ἥτοι εἰς τὴν εὐθεῖαν (ϵ') .

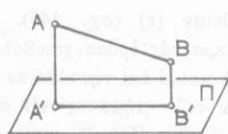
Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν M' εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας (ϵ') , φέρομεν ἐξ αὐτοῦ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π) , ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος τῆς BB' καὶ ἐπομένως περιέχεται εἰς τὸ ἐπίπεδον $BB'A$. Ἄρα τέμνει τὴν AB εἰς σημεῖον M . Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἡ εὐθεῖα (ϵ') .



Σχ. 446



Σχ. 447



Σχ. 448

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 446), ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς (ϵ') ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καθορίζεται ἀπὸ τὰς ὀρθὰς προβολὰς A' καὶ B' δύο σημείων A καὶ B τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) . Πράγματι, αἱ $AA' \perp (\Pi)$ καὶ $BB' \perp (\Pi)$ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁρίζουν ἐπίπεδον $(P) \perp (\Pi)$. Ἀπὸ κάθε σημείου M τῆς εὐθείας (ϵ) ἡ $MM' \perp (\Pi)$ ἀνήκει εἰς τὸ (P) καὶ ἐπομένως τέμνει τὸ (Π) εἰς $M' \in (\epsilon')$ καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ τυχόντος σημείου M' τῆς (ϵ') ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (P) καὶ ἐπομένως τέμνει τὴν (ϵ) εἰς σημεῖον M . Αἱ εὐθεῖαι (ϵ) καὶ (ϵ') , ὡς συνεπίπεδοι καὶ μὴ τεμνόμεναι, εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 447), ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι τὸ ἕχνος τῆς A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) .

Παρατήρησις. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα με ἄκρα τὰς ὀρθὰς προβολὰς A' καὶ B' τῶν A καὶ B ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 448) (διὰ τὴν ;).

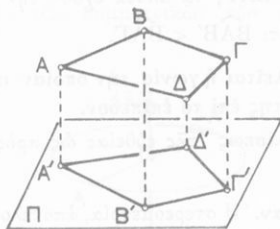
Πόρισμα. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου σχήματος ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) εἶναι εὐθύγραμμον σχῆμα με κορυφὰς τὰς ὀρθὰς προβολὰς τῶν κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ σχήματος (σχ. 449).

449. Θεώρημα. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὸ τμήμα AB .

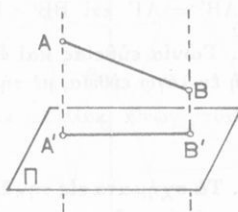
Ἀπόδειξις. Ἐστω $A'B'$ ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον

(Π) (σχ. 450). Τότε εἶναι $A'B' \leq AB$, διότι τὸ τμήμα $A'B'$ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν AA' καὶ BB' . Τὸ $\equiv$ ἰσχύει μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς παραλληλίας τοῦ τμήματος AB μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

450. Θεώρημα. Αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.



Σχ. 449

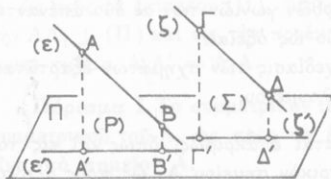


Σχ. 450

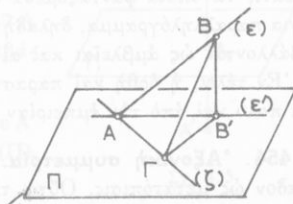
Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα A καὶ B τῆς εὐθείας (ε) καὶ τὰ προβάλλομεν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' ἀντιστοίχως (σχ. 451). Τὰ σημεῖα A' καὶ B' καθορίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) τὴν ὀρθὴν προβολὴν τῆς εὐθείας (ε). Ὁμοίως ἡ εὐθεῖα (ζ) προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὴν εὐθεῖαν (ζ') διὰ τῶν ὀρθῶν προβολῶν Γ' καὶ Δ' δύο τυχόντων σημείων τῆς Γ καὶ Δ. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι AA' καὶ BB' καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ εὐθεῖα (ε). Ὁμοίως αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι GG' καὶ DD' καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ εὐθεῖα (ζ). Ἐπειδὴ εἶναι $(ε) \parallel (ζ)$ καὶ $AA' \parallel GG'$ ὥς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π), ἔπεται ὅτι $(Ρ) \parallel (Σ)$ (§ 433). Ἀρα θὰ εἶναι καὶ $(ε') \parallel (ζ')$, ὥς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου.

451. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) τέμνῃ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον A, σχηματίζει γωνίαν μετὰ τὰς εὐθεῖας τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐκ τῶν ὁποίων μικρότερα εἶναι ἡ σχηματιζομένη μετὰ τὴν προβολὴν τῆς (ε').

Ἀπόδειξις. Ἐκ τυχόντος σημείου B τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν $BB' \perp (Π)$ (σχ. 452). Ἡ εὐθεῖα $AB' \equiv (ε')$ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὸ



Σχ. 451



Σχ. 452

ἐπίπεδον (Π). Ἄς θεωρήσωμεν καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Α. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $ΑΓ = ΑΒ'$ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{ΒΑΒ'} < \widehat{ΒΑΓ}$.

$ΒΒ' < ΒΓ$, διότι ἡ $ΒΓ$ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ΒΒ'Γ$ ($\widehat{Β'} = 1^\circ$). Τότε ἀπὸ τὰ τρίγωνα $ΒΑΒ'$ καὶ $ΒΑΓ$, τὰ ὅποια ἔχουν τὴν $ΒΑ$ κοινὴν, $ΑΒ' = ΑΓ$ καὶ $ΒΒ' < ΒΓ$, ἔπεται ὅτι $\widehat{ΒΑΒ'} < \widehat{ΒΑΓ}$.

452. Γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου καλεῖται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα, μὲ τὴν προβολὴν της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἡ αὕτῃ γωνία καλεῖται καὶ γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

453. Τὰ σχήματα εἰς τὴν Στερεομετρίαν. Ἡ στερεομετρία, ἀποτελοῦσα ἐπέκτασιν τῆς ἐπιπεδομετρίας, μὲ πρώτην σκέψιν δὲν θὰ πρέπει νὰ παρουσιάξῃ μεγαλυτέραν δυσχέρειαν εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τῶν θεμάτων της, ἀπὸ ἐκείνην τῆς ἐπιπεδομετρίας. Παρὰ ταῦτα ὅμως, ὑπάρχει μεγαλυτέρα δυσχέρεια καὶ τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός ὅτι δὲν ἐργαζόμεθα μὲ αὐτὰ τὰ ἴδια στερεὰ τῆς στερεομετρίας, ἀλλὰ ἀπεικονίζομεν αὐτὰ ἐπὶ ἐπιπέδου (φύλλου χάρτου ἢ πίνακος) καὶ ἐργαζόμεθα μὲ τὰς εἰκόνας των.

Αἱ εἰκόνες τῶν στερεῶν μὲ τὰς ὁποίας ἐργαζόμεθα, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, παρὰ αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν ἐν λόγῳ στερεῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Διὰ τὴν σχεδιάσιν ἐπομένως τῶν σχημάτων, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὀρισμένους ἀπαραβάτους κανόνας, ἥτοι :

i) Ἐὰν τὸ πρὸς ἀπεικόνισιν στερεὸν περιέχῃ παραλλήλους εὐθείας, αὗται θὰ σχεδιασθοῦν ὡς παράλληλοι (§ 450).

ii) Τὰ μήκη ἐν γένει δὲν διατηροῦνται, ἀλλὰ προβάλλονται εἰς μικρότερα (§ 449).

iii) Δύο παράλληλα καὶ ἴσα τμήματα ἔχουν παραλλήλους καὶ ἴσας προβολὰς (διὰ τί ;)

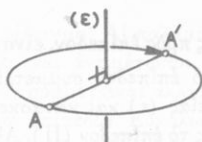
iv) Αἱ γωνίαι ἐν γένει δὲν διατηροῦνται, ἀλλὰ προβάλλονται εἰς μεγαλυτέρας ἢ μικροτέρας γωνίας καὶ τοῦτο θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φανταστικὴν θέσιν τοῦ στερεοῦ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Τὰ ἐπίπεδα τμήματα, ἐπὶ παραδείγματι, τὰ ὅποια φανταζόμεθα ὡς ὀρθογώνια, τὰ σχεδιάζομεν συνήθως ὡς πλάγια παραλληλόγραμμα, δηλαδὴ ἐκ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν των αἱ δύο ἀπέναντι προβάλλονται ὡς ἀμβλεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ὡς ὀξεῖαι.

Ἐν τέλει, ἡ ὀρθὴ καὶ παραστατικὴ σχεδίασις τῶν σχημάτων ἐξαρτᾶται κατὰ πολὺ καὶ ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν τοῦ ἀσχολουμένου.

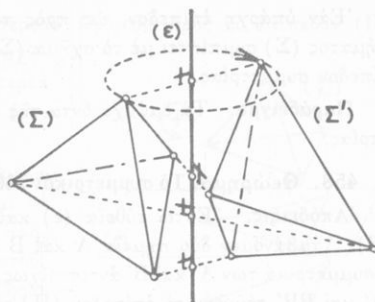
454. Ἀξονικὴ συμμετρία. Καθορίζεται ἐπακριβῶς, ὅπως καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ὡς μετατόπισις. Οὕτω τὸ συμμετρικὸν σημείου Α, ὡς πρὸς ἄξονα εὐθεῖαν (ε) (σχ. 453), εἶναι σημεῖον Α', τὸ ὅποιον προκύπτει ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ σημείου Α περὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), κατὰ γωνίαν 180° . Τὸ ἐπίπεδον

ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ περιστροφή τοῦ Λ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας (ϵ). Τὸ τμήμα AA' ἔχει ὡς μεσοκάθετον τὸν ἄξονα συμμετρίας (ϵ)

Τὸ συμμετρικὸν (Σ') ἐνὸς στερεοῦ (Σ) ὡς πρὸς ἓνα ἄξονα συμμετρίας (ϵ) ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τῶν ση-



Σχ. 453



Σχ. 454

μείων τοῦ στερεοῦ (Σ) ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα (σχ. 454). Τὰ δύο στερεὰ (Σ) καὶ (Σ') εἶναι ἴσα, διότι τὸ (Σ') προκύπτει ἀπὸ μετατόπισιν (περιστροφήν) τοῦ στερεοῦ (Σ).

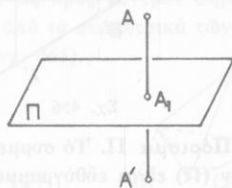
455. "Αξων συμμετρίας στερεοῦ. Ἐὰν δι' ἓν στερεὸν (Σ) ὑπάρχῃ εὐθεῖα (ϵ) καὶ εἶναι τοιαύτη, ὥστε τὸ συμμετρικὸν M' τυχόντος σημείου M τοῦ στερεοῦ (Σ), ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν (ϵ), νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ (Σ), τότε λέγομεν ὅτι τὸ στερεὸν (Σ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (ϵ).

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ (ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΣ)

456. Ὅρισμός. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ (σχ. 455).

Συμμετρικὸν τοῦ σημείου A , ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), καλεῖται ἓν σημεῖον A' , τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐπίπεδον (Π) νὰ εἶναι τὸ μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AA' .

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ σημείου A ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), φέρομεν ἐκ τοῦ A τὴν $AA_1 \perp (\Pi)$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν λαμβάνομεν τμήμα $A_1A' = A_1A$.



Σχ. 455

Πόρισμα I. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου A' συμμετρικοῦ τοῦ A , ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), εἶναι τὸ σημεῖον A .

Πόρισμα II. Τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) παραμένουν ἀναλλοίωτα εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ (Π), ἤτοι συμπίπτουν μὲ τὰ συμμετρικά των.

457. Ὁρισμός. Συμμετρικὸν σχήματος (Σ), ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) καλεῖται ἓν σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἐπίπεδον, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ συμμετρικὸν (Σ') ἑνὸς σχήματος (Σ) συμπίπτει μετὰ τὸ σχῆμα (Σ), θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σχῆμα (Σ) ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας.

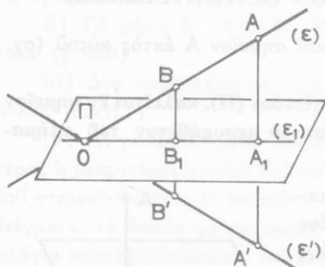
Παράδειγμα. Τὰ ἔμφυχα ὄντα τῆς φύσεως ἐν γένει ἔχουν ἐπίπεδον συμμετρίας.

458. Θεώρημα. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι εὐθεῖα.

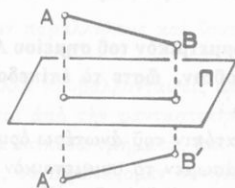
Ἀπόδειξις. Ἐστω εὐθεῖα (ϵ) καὶ (Π) τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας (σχ. 456). Λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ B τῆς εὐθείας (ϵ) καὶ κατασκευάζομεν τὰ συμμετρικὰ τῶν A' καὶ B' ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π). Αἱ εὐθεῖαι AA' καὶ BB' τέμνουσιν τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1 ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα καθορίζουν τὴν ὀρθὴν προβολὴν (ϵ_1) τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Τότε ἡ συμμετρία τῆς εὐθείας (ϵ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἀξονικὴ συμμετρία, ὡς πρὸς ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ϵ_1). Ἐπομένως, λόγῳ συνυπαρχούσης ἀξονικῆς συμμετρίας, τὸ συμμετρικὸν τῆς εὐθείας (ϵ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθεῖα (ϵ').

Πόρισμα I. Ἐὰν εὐθεῖα (ϵ) τέμνῃ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον O , ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα (ϵ') τῆς (ϵ) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) διέρχεται διὰ τοῦ σημείου O .

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ϵ) ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), καὶ ἡ συμμετρικὴ τῆς θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ (Π).



Σχ. 456



Σχ. 457

Πόρισμα II. Τὸ συμμετρικὸν εὐθυγράμμου τμήματος AB , ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα $A'B'$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἄκρα τὰ συμμετρικὰ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος AB (σχ. 457) καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ AB .

Πόρισμα III. Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἴσον τρίγωνον $A'B'\Gamma'$, διότι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως ἴσας. Κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ συμμετρικὸν οἰοῦνδήποτε ἐπιπέδου

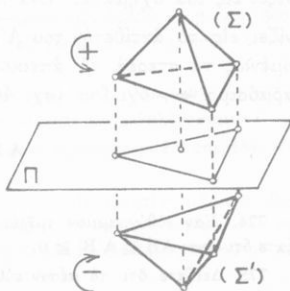
εὐθυγράμμου σχήματος, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι ἴσον σχῆμα καὶ γενικότερον τὸ συμμετρικὸν οἰοῦνδήποτε ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴσον σχῆμα.

Παρατηρήσεις.

i) Τὸ συμμετρικὸν (Σ') ἑνὸς στερεοῦ (Σ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), ἐν γένει δὲν εἶναι σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα (Σ) καὶ τοῦτο, διότι τὰ δύο στερεὰ εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα (σχ. 458).

Παράδειγμα. Αἱ παλάμαι τῶν χειρῶν μας, τιθέμεναι ἀντιμέτωποι, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν συμμετρικαὶ ἀλλήλων, ὡς πρὸς ἐνδιάμεσον ἐπίπεδον. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι δὲν εἶναι ἴσαι, διότι, ἐὰν ᾗσαν ἄυλοι, δὲν θὰ ἠδύναντο νὰ ταυτισθοῦν τιθέμεναι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

ii) Ἡ συμμετρία, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, καλεῖται καὶ κατοπτρισμός, διότι δύο συμμετρικὰ μεταξύ των στερεά, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, ἔχουν τοιαύτην σχέσιν, οἷαν σχέσιν ἔχει τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ κατοπτρικόν του εἰδῶλον ἐντὸς ἐπιπέδου κατόπτρου.



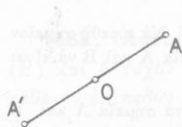
Σχ. 458

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

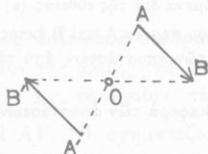
459. Ὅρισμός. Δοθέντος σημείου A καὶ σημείου O , καλουμένου κέντρου, καλοῦμεν συμμετρικὸν τοῦ σημείου A , ὡς πρὸς κέντρον τὸ σημεῖον O , ἓν σημεῖον A' τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμήμα AA' νὰ ἔχη ὡς μέσον τὸ κέντρον O (σχ. 459).

Πόρισμα. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου A' , συμμετρικοῦ τοῦ A , ὡς πρὸς τὸ κέντρον O , εἶναι τὸ σημεῖον A .

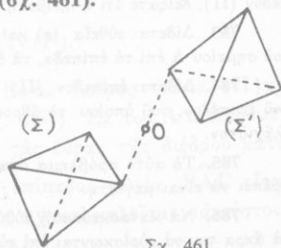
460. Ὅρισμός. Συμμετρικὸν σχήματος (Σ), ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον O , καλεῖται ἓν σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρὸς τὸ κέντρον O (σχ. 461).



Σχ. 459



Σχ. 460



Σχ. 461

Ἐὰν τὸ σχῆμα (Σ') συνέπιπτε μὲ τὸ σχῆμα (Σ), λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον O .

461. Ἡ κεντρικὴ συμμετρία ἀπεικονίζει ἐν εὐθύγραμμον τμήμα AB εἰς ἴσον τμήμα $A'B'$ (§ 81), καὶ ἐπομένως τὰ ἐπίπεδα σχήματα γενικῶς τὰ ἀπεικονίζει εἰς ἴσα σχήματα. Ἐνα προσανατολισμένον τμήμα ὅμως $\overrightarrow{AB}$ τὸ ἀπεικονίζει εἰς τὸ ἀντίθετόν του $\overrightarrow{A'B'}$ (σχ. 460), ἥτοι εἶναι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$ καὶ ἐπομένως τὰ στερεὰ τὰ ἀπεικονίζει ἀντιθέτως προσανατολισμένα, ἥτοι μὴ ἐφαρμοσίμα $\nleftrightarrow$ ὅχι ἴσα (σχ. 461).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

774. Ἐὰν εὐθύγραμμον τμήμα AB προβάλλεται ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ $A'B'$, δεῖξτε ὅτι εἶναι $AB \geq A'B' \geq 0$.

775. Δείξτε ὅτι τὸ μέσον εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον.

776. Τρία σημεῖα A, B, Γ κινῶνται ἐπ' εὐθείας καὶ προβάλλονται ἐπ' ἐπιπέδου (Π) εἰς τὰ A', B', Γ' ἀντιστοίχως. Δείξτε ὅτι: $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$.

777. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ σημεῖα B καὶ Γ τοῦ (Π). Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου A ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι 3λ καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν $B\Gamma$ εἶναι 5λ . Ἐὰν A' εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ A ἐπὶ τὸ (Π), δεῖξτε ὅτι: $(A'B\Gamma) = \frac{4}{5} (A'B'\Gamma')$.

778. Εὐθύγραμμον τμήμα AB μήκους 20cm ἔχει προβολὴν $A'B'$ ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) μήκους 10cm . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

779. Σημεῖον A ἀπέχει ἀπὸ ἐπίπεδον (Π) 8cm καὶ σημεῖον B ἀπέχει ἀπὸ τὸ (Π) 10cm . Ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος AB , ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), εἶναι 30° , νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ τμήματος AB , ὅταν: α) τὰ A καὶ B εὐρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Π), β) τὰ A καὶ B εὐρίσκονται ἐκατέρωθεν τοῦ (Π).

780. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος AB , ὡς πρὸς τὸ (Π), εἶναι 45° .

B'.

781. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων καὶ ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι ἴσαι.

782. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $\widehat{X\Gamma Y}$. Ἐὰν ἡ μία πλευρὰ τῆς εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), δεῖξτε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ὀρθὴ γωνία.

783. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον A . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν ὀρθῶν προβολῶν τοῦ σημείου A ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας (ε).

784. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποῦ τοῦ ἀθροίσμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

785. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B πρέπει νὰ εἶναι μεγίστη.

786. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα, ἔχον ὡς μέσον δοθὲν σημεῖον O καὶ τὰ ἄκρα του νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ εὐθείας (ε) καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) ἀντιστοίχως.

787. Δίδεται ὀρθή γωνία $\widehat{xKy}$, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.

788. Πότε ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ὀξεῖα γωνία ;

789. Δίδεται ὀξεῖα γωνία $\widehat{xOy}$. Ἐὰν ἡ μία πλευρά τῆς εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ὀξεῖα γωνία.

790. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὀρθῶν προβολῶν δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, ἀνὰ δύο ὀρθογωνίους, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δοθέντος τμήματος.

791. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ τετράπλευρον νὰ προβάλλεται κατὰ παραλλήλογραμμον.

792. Ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προβάλλεται ἐπὶ ἐπιπέδου κατὰ τὴν διχοτόμον τῆς προβολῆς τῆς ;

793. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) . Μεταβλητὸν τμήμα σταθεροῦ μήκους λ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ τμήμα σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν κλίσεως καὶ προβάλλεται ἐπ' αὐτοῦ κατὰ σταθερὸν μήκος.

794. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄξονες συμμετρίας, ὅπου μέσῳ ἐκάστου ἐξ αὐτῶν ἡ μία ἐκ τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἀπεικονίζεται ἐπὶ τῆς ἄλλης.

795. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας (ε) .

796. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ δύο σημεία Α καὶ Β ὅχι μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὅταν αὐτὸς πρέπει νὰ ἐγγίξῃ τὰ δύο ἐπίπεδα καὶ τὸ ἐντὸς τῶν ἐπιπέδων τμήμα του νὰ ἔχῃ καθωρισμένον μήκος λ.

797. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) . Εὐθύγραμμον τμήμα σταθεροῦ μήκους λ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

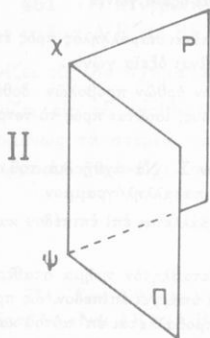
ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

462. Ὅρισμός. Δύο ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) μὲ κοινὴν ἀρχὴν εὐθεῖαν xy διαιροῦν τὸν χώρον εἰς δύο περιοχάς Ι καὶ ΙΙ (σχ. 462). Ἐκάστη ἐξ αὐτῶν καλεῖται διέδρος γωνία μὲ ἀκμὴν τὴν εὐθεῖαν xy καὶ μὲ ἑδρας τὰ ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (Ρ)

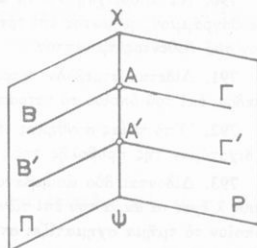
Τὴν διέδρον γωνίαν συμβολίζομεν μὲ $(\Pi)xy(P)$.

463. Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος διέδρου. Ἐστω διέδρος γωνία $(\Pi)xy(P)$ καὶ Α τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς τῆς xy (σχ. 463). Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν xy , τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἑδρας τῆς διέδρου κατὰ τὰς ἡμιευθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἡ σχηματιζομένη ἐπίπεδος γωνία $\widehat{B\hat{A}G}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς xy καὶ καλεῖται «ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$ ».

Πράγματι, ἐὰν A' εἶναι ἐν ἄλλο σημεῖον τῆς ἀκμῆς xy καὶ φέρομεν ἐξ αὐτοῦ τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν xy , θὰ καθορισθῇ ἀντιστοίχως ἡ ἐπίπεδος



Σχ. 462



Σχ. 463

γωνία $B\hat{A}'\Gamma'$, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἴση μετὰ τὴν $B\hat{A}\Gamma$, ὥς ἔχουσιν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους (§ 433).

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας εὐρίσκονται ἐπὶ τῶν ἐδρῶν τῆς διέδρου καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκμὴν.

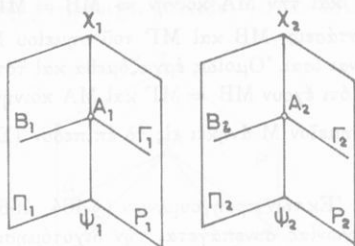
464. Θεώρημα. Ἐὰν δύο διέδροι γωνία $(\Pi_1)x_1y_1(P_1)$ καὶ $(\Pi_2)x_2y_2(P_2)$ εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνία αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον αἱ διέδροι εἶναι ἴσαι, δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μετὰ μετατόπισιν καὶ ἐπομένως δύνανται νὰ ἀποκτήσουν κοινὴν $\Rightarrow$ ἴσην ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν, μετὰ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν των.

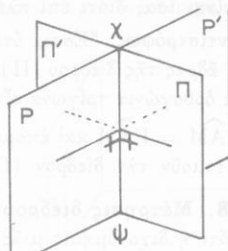
Ἀντιστροφή. Ἐστω $B_1\hat{A}_1\Gamma_1 = B_2\hat{A}_2\Gamma_2$ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνία τῶν διέδρων (σχ. 464). Φανταζόμεθα μετατόπισιν τῆς ἐπιπέδου γωνίας $B_2\hat{A}_2\Gamma_2$ οὕτως, ὥστε νὰ ταυτισθῇ μετὰ τὴν $B_1\hat{A}_1\Gamma_1$. Τότε κατ' ἀνάγκην ἡ ἀκμὴ x_2y_2 θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἀκμῆς x_1y_1 , διότι ἄλλως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $B_1\hat{A}_1\Gamma_1$ θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον A_1 , ὅπερ ἄτοπον. Τότε ὅμως τὸ ἡμιεπίπεδον (Π_2) εἰς τὴν νέαν θέσιν του θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ (Π_1) , διότι θὰ ἔχη μετ' αὐτοῦ κοινὰς τὰς A_1B_1 καὶ x_1y_1 . Ὅμοιως καὶ τὸ ἡμιεπίπεδον (P_2) θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ (P_1) . Ἀρα αἱ διέδροι εἶναι ἴσαι, ἐφ' ὅσον δύνανται νὰ ταυτισθοῦν.

465. Κατ' ἀκμὴν διέδροι καλοῦνται δύο διέδροι γωνία $(\Pi)xy(P)$ καὶ $(\Pi')xy(P')$ (σχ. 465), αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν ἀκμὴν xy καὶ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν ἀκμὴν των xy . Ἐπομένως δύο κατ' ἀκμὴν διέδροι γωνία εἶναι ἴσαι (§ 454). Αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνία

αὐτῶν, αἱ προκύπτουσαι ἀπὸ τὸ αὐτὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν xy , εἶναι κατὰ κορυφὴν.



Σχ. 464

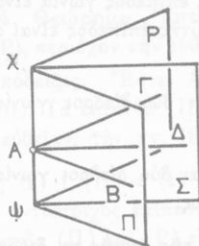


Σχ. 465

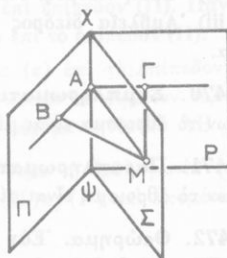
466. Διχοτομοῦν ἐπίπεδον. Ἐστω $(\Pi)xy(P)$ μία διέδρος γωνία καὶ $\widehat{BA\Gamma}$ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος αὐτῆς (σχ. 466). Ἡ διχοτόμος AD τῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου $BA\Gamma$ καὶ καθορίζει μετὰ τῆς xy ἐπίπεδον (Σ) . Τὸ ἐπίπεδον (Σ) καλεῖται ἐπίπεδον διχοτομοῦν τὴν διέδρον $(\Pi)xy(P)$ καὶ τὴν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσας διέδρους. Πράγματι εἶναι $(\Pi)xy(\Sigma) = (P)xy(\Sigma) \iff \widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}$.

467. Χαρακτηριστικὴ ιδιότης τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου. Πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος διέδρον γωνίαν, ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς ἑδρας τῆς καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον ἐσωτερικὸν μιᾶς διέδρου καὶ ἰσαπέχον ἀπὸ τὰς ἑδρας τῆς ἀνήκει εἰς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω διέδρος γωνία $(\Pi)xy(P)$, (Σ) τὸ διχοτομοῦν αὐτὴν ἐπίπεδον καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ (Σ) (σχ. 467). Ἐκ τοῦ M φέρομεν $MA \perp$



Σχ. 466



Σχ. 467

xy , $MB \perp (\Pi)$, $MG \perp (P) \Rightarrow AB \perp xy$ καὶ $AG \perp xy$ (θεώρ. τριῶν καθέτων), ἤτοι ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$, ὡς καὶ αἱ $\widehat{BAM}$ καὶ $\widehat{\Gamma AM}$ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν $(\Pi)xy(\Sigma)$ καὶ $(P)xy$

(Σ). 'Επειδή τὸ σημεῖον M ἀνήκει εἰς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$, ἔπεται ὅτι $\widehat{BAM} = \widehat{GAM}$. "Αρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα BAM καὶ GAM εἶναι ἴσα, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν καὶ τὴν MA κοινὴν $\Rightarrow MB = MG$.

Ἀντιστρόφως. "Εστω ὅτι αἱ ἀποστάσεις MB καὶ MG τοῦ σημείου M ἀπὸ τὰς ἑδρας τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$ εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ τότε τὰ αὐτὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $MB = MG$ καὶ MA κοινήν. "Αρα $\widehat{BAM} = \widehat{GAM}$ καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον M ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Σ) τὸ διχοτομοῦν τὴν διέδρου $(\Pi)xy(P)$.

468. Μέτρησης διέδρου γωνίας. 'Εκ τῶν προηγουμένων (§ 464, 466) ἔπεται ὅτι ἡ διχοτόμησις μιᾶς διέδρου γωνίας συνεπάγεται τὴν διχοτόμησιν τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς ἐπιπέδου καὶ ἀντιστρόφως. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διαίρεσις μιᾶς διέδρου εἰς n διέδρους συνεπάγεται τὴν διαίρεσιν εἰς n ἴσας ἐπιπέδους τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου. "Αρα τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα «διέδροι γωνία» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι» εἶναι ἀνάλογα καὶ ἐπομένως δέχονται ἀριθμητικῶς μόνον τὰς ἰδίας μονάδας μετρήσεως. Λέγομεν, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι μία διέδρος γωνία εἶναι 60° , ἐὰν καὶ μόνον ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος εἶναι 60° . Εὐνόητον εἶναι ὅτι ὅλαι αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γωνιῶν ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους τῶν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διέδρων γωνιῶν.

Αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως μεταξὺ διέδρων γωνιῶν ὡς καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαίρεσεως διέδρου μὲ φυσικὸν ἀριθμὸν, ἀνάγονται εἰς τὰς ἀντιστοίχους πράξεις μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν.

469. Εἶδη διέδρων γωνιῶν. 'Αντιστοίχως πρὸς τὰ γνωστὰ εἶδη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ὀρίζομεν καὶ διὰ τὰς διέδρους γωνίας :

- i) Ὁξεία διέδρος, ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία εἶναι ὀξεία.
- ii) Ὄρθη διέδρος, ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία εἶναι ὀρθή.
- iii) Ἀμβλεῖα διέδρος ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.

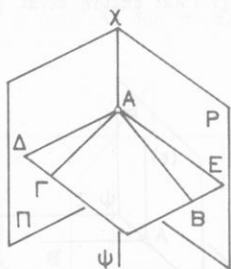
470. Συμπληρωματικαὶ διέδροι καλοῦνται δύο διέδροι γωνίαί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μία ὀρθή διέδρος.

471. Παραπληρωματικαὶ διέδροι καλοῦνται δύο διέδροι γωνίαί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μία πεπλατυσμένη διέδρος.

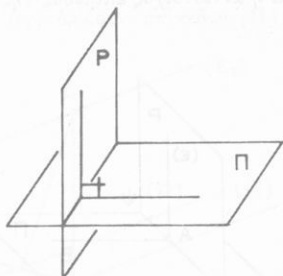
472. Θεώρημα. 'Εὰν ἀπὸ τυχὸν σημείου A τῆς ἀκμῆς xy διέδρου γωνίας $(\Pi)xy(P)$ ἀχθοῦν ἡμιευθεῖαι AB καὶ AG κάθετοι ἐπὶ τὰς ἑδρας τῆς διέδρου καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἑδρῶν (P) καὶ (Π) ἀντιστοίχως, αἱ ἡμιευθεῖαι AB καὶ AG καθορίζουν διέδρον μὲ ἀκμὴν τὴν xy παραπληρωματικὴν τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$.

'Απόδειξις. $AB \perp (\Pi) \Rightarrow AB \perp xy$, $AG \perp (P) \Rightarrow AG \perp xy$ (σχ. 468).

"Αρα τὸ ἐπίπεδον τῶν ἡμιευθειῶν AB καὶ AG εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν xy καὶ ἐπομένως αἱ τομαὶ τοῦ AD καὶ AE μὲ τὰς ἑδρας τῆς διέδρου δίδουν τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν $\widehat{\Delta AE}$ τῆς διέδρου. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι



Σχ. 468



Σχ. 469

$$\begin{aligned} \widehat{BAG} + \widehat{\Delta AE} &= 2^{\circ}. \widehat{BAD} = 1^{\circ}, \widehat{GAE} = 1^{\circ} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{GAE} = 2^{\circ} \Rightarrow (\widehat{BAG} \\ &+ \widehat{GAD}) + (\widehat{GAB} + \widehat{BAE}) = 2^{\circ} \Rightarrow \widehat{BAG} + (\widehat{GAD} + \widehat{GAB} + \widehat{BAE}) = 2^{\circ} \\ &\Rightarrow \widehat{BAG} + \widehat{\Delta AE} = 2^{\circ}. \end{aligned}$$

ΚΑΘΕΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

473. Ὅρισμός. Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καλοῦνται κάθετα μεταξύ των, ὅταν μία ἐκ τῶν τεσσάρων διέδρων, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή (σχ. 469).

Εὐνόητον εἶναι ὅτι καὶ αἱ τέσσαρες σχηματιζόμεναι διέδροι εἶναι ὀρθαί.

474. Θεώρημα. Ἐστω εὐθεῖα (ε) κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π). Πᾶν ἐπίπεδον (Ρ), περιέχον τὴν εὐθεῖαν (ε), εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Ἐστω Α τὸ ἕχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 470). Τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), ὡς ἔχοντα κοινὸν τὸ σημεῖον Α, ἔχουν κοινὴν εὐθεῖαν, τὴν xy. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν εὐθεῖαν $AB \perp xy$.

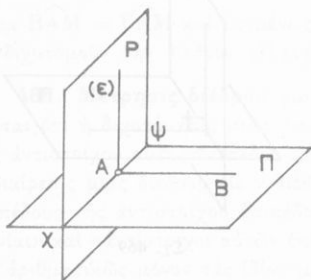
Ἐπεὶ $(ε) \perp (Π) \Rightarrow (ε) \perp xy$ καὶ $(ε) \perp AB$. Ἀρα ἡ ὀρθὴ γωνία $(ε)\widehat{AB}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου $(Π)xy(P)$ καὶ ἐπομένως τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα.

475. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα μεταξύ των, πᾶσα εὐθεῖα (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Π), κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν των xy, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ).

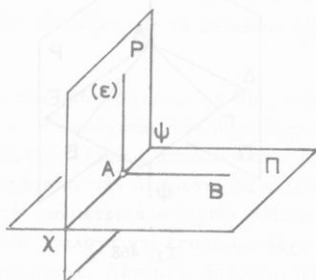
Ἀπόδειξις. Ἐστω Α τὸ ἕχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὴν xy (σχ. 471). Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀρκεῖ

επομένως ναδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εὐθεῖαν $AB \perp \chi\gamma$. Τότε ἡ γωνία (ϵ) $\widehat{AB}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου (Π) $\chi\gamma$ (P) καὶ ἐπειδὴ εἶναι (Π) $\perp$



Σχ. 470

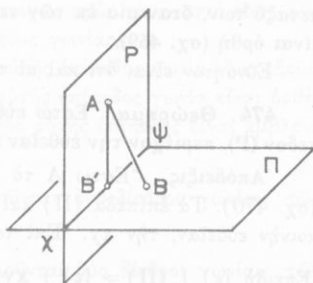


Σχ. 471

(P) $\Rightarrow$ (ϵ) $\perp AB$. Ἀρα (ϵ) $\perp$ (Π), ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθεῖας τοῦ $\chi\gamma$ καὶ AB .

476. Θεώρημα. Ἐστωσαν (Π) καὶ (P) δύο κάθετα μεταξύ των επίπεδα καὶ A τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (P). Φέρομεν $AB \perp$ (Π). Τότε ἡ εὐθεῖα AB ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (P).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB δὲν ἀνῆκεν εἰς τὸ ἐπίπεδον (P), δὲν θὰ ἔτεμνε τὴν τομὴν $\chi\gamma$ τῶν δύο ἐπιπέδων (σχ. 472). Θὰ ὑπῆρχεν επομένως εὐθεῖα $AB' \perp \chi\gamma$. Τότε ὅμως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἦτο $AB' \perp$ (Π), ἤτοι θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι AB καὶ AB' ἐκ τοῦ σημείου A πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα ἡ $AB \perp$ (Π) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (P).



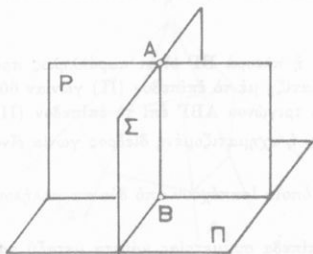
Σχ. 472

477. Θεώρημα. Ἐὰν δύο επίπεδα (P) καὶ (Σ) εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), τότε καὶ ἡ τομὴ των εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

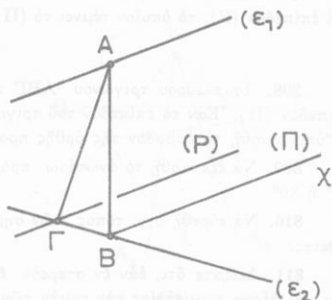
Ἀπόδειξις. Ἐστω A τυχὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (P) καὶ (Σ) (σχ. 473). Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν $AB \perp$ (Π) $\Rightarrow AB \in (P)$ καὶ $AB \in (\Sigma)$ (§ 476). Ἀρα ἡ εὐθεῖα AB εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (P) καὶ (Σ) καὶ επομένως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

478. Θεώρημα. Ἐάν δύο εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διὰ τῆς μιᾶς κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογωνίους εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2) (σχ. 474). Φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον AB αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ B τὴν $Bx \parallel (\varepsilon_1) \Rightarrow Bx \perp (\varepsilon_2)$. Αἱ δύο παράλληλοι Bx καὶ (ε_1) ὀρίζουν ἐπίπεδον (Π) , τὸ



Σχ. 473



Σχ. 474

ὅποιον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2) , διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι $Bx \perp (\varepsilon_2)$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $AB \perp (\varepsilon_2)$. Ἄρα ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) διὰ τῆς (ε_1) , κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2) .

Ἐκτὸς τοῦ (Π) δὲν ὑπάρχει ἄλλο. Διότι, ἐάν ὑπῆρχε διὰ τῆς (ε_1) καὶ δεύτερον ἐπίπεδον $(P) \perp (\varepsilon_2)$, αὐτὸ θὰ ἔτεμνε τὴν (ε_2) εἰς σημεῖον Γ καὶ θὰ ἦτο $(\varepsilon_2) \perp (P) \Rightarrow (\varepsilon_2) \perp A\Gamma$. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἐκ τοῦ A θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε_2) , ἡ AB καὶ ἡ $A\Gamma$. Ἄρα δὲν ὑπάρχει δεύτερον ἐπίπεδον διὰ τῆς (ε_1) , κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

798. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο κατ' ἀκμὴν διέδρων γωνιῶν ἀποτελοῦν ἓν ἐπίπεδον.

799. Ἐάν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) τμηθοῦν ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου (Σ) , δείξατε ὅτι αἱ ἐντὸς καὶ ἐναλλὰξ σχηματιζόμεναι διέδροι εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη διέδροι εἶναι παραπληρωματικαί.

800. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἀνήκουσα εἰς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου γωνίας, εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἑδρας τῆς διέδρου.

801. Ἐάν δύο διέδροι γωνία ἔχουν τὰς ἑδρας των παραλλήλους, δείξατε ὅτι αἱ ἀκμαὶ των εἶναι παράλληλοι.

802. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) .

803. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν διέδρων γωνιῶν εἶναι κάθετα.

804. Εὐθεία (ε) εἶναι πλαγία ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π). Δείξατε ὅτι διὰ τῆς (ε) διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

805. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

806. Ἐὰν ἐν ἐπίπεδον (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων (P) καὶ (Σ), δείξατε ὅτι τὸ (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰ (P) καὶ (Σ).

807. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ ἐπίπεδον (P), τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ (Π), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

Β'.

808. Ἰσοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ πλευρᾶς α ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π). Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου σχηματίζῃ μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) γωνίαν 60° , νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

809. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἐὰν ἡ σχηματιζομένη διέδρος γωνία εἶναι 45° ἢ 30° .

810. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας.

811. Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἐν στερεὸν ἔχῃ δύο ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ των ἔχει καὶ ἄξονα συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων.

812. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα B καὶ Γ αὐτοῦ καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐὰν A' εἶναι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ σημείου A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι εἶναι $(A'B\Gamma) = (AB\Gamma) \cdot \sin \varphi$, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον (Π) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $(AB\Gamma)$.

813. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αὐ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) ἔχουν λόγον $\mu : \nu$.

814. Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἐξ ἴσου κεκλιμένη πρὸς τὰς ἑδρας διέδρου γωνίας, δείξατε ὅτι τὰ ἔχρη τῆς ἐπὶ τῶν ἐδρῶν τῆς διέδρου ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὴν ἀκμὴν καὶ ἀντιστρόφως.

815. Δίδονται δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) τεμνόμενα καθέτως. Δείξατε ὅτι, ἵνα μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι ὀρθογώνιος ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (P), πρέπει καὶ ἀρκεῖ μία τοῦλάχιστον τῶν εὐθειῶν τούτων νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν $\chi\gamma$ τῶν δύο ἐπιπέδων.

816. Εὐθύγραμμον τμήμα AB ἔχει τὰ ἄκρα του A καὶ B ἐπὶ τῶν ἐδρῶν δοθείσης διέδρου γωνίας. Τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου τέμνει τὸ τμήμα AB εἰς σημεῖον Γ. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὰ A καὶ B εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν A καὶ B ἀπὸ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου.

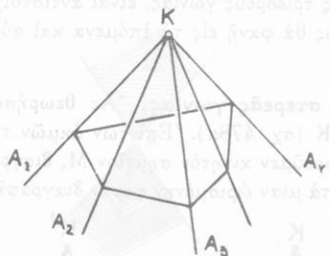
817. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρία ἐπίπεδα, ἀνά δύο κάθετα, ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τετραγώνου τοῦ δοθέντος τμήματος.

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

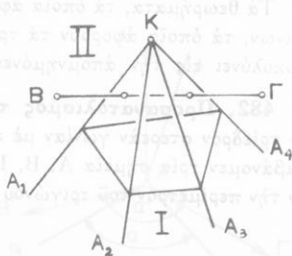
479. Ὅρισμός. Μὲ ἀρχὴν σημεῖον K θεωροῦμεν μίαν διαδοχὴν ἡμιευθειῶν $KA_1, KA_2, KA_3, \dots, KA_n, KA_1$, $n \geq 3$, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἀνά τρεῖς διαδοχικὰ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (σχ. 475). Τὸ σύνολον τῶν (ἐπιπέδων) γωνιῶν μὲ πλευρὰς δύο διαδοχικὰς ἡμιευθείας ἀπαρτίζει ἓν στερεὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον καλεῖται n -εδρος στερεὰ γωνία.

Τὸ σημεῖον K καλεῖται **κορυφή** τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ ἡμιευθεῖαι $KA_1, KA_2, KA_3, \dots, KA_n$ καλοῦνται **ἄκμαί** τῆς καὶ αἱ γωνίαι $\widehat{A_1KA_2}, \widehat{A_2KA_3}, \dots, \widehat{A_nKA_1}$ ἔδραι αὐτῆς.

Τὰ κύρια στοιχεῖα μιᾶς n -έδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι αἱ n ἔδραι τῆς (ἐπίπε-



Σχ. 475



Σχ. 476

δοι γωνίαι) καὶ αἱ n διέδρου αὐτῆς με ἄκμας τὰς ἄκμας τῆς στερεᾶς γωνίας. **Διαγώνιον** ἐπίπεδον καλεῖται κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς ἄκμας. Τὰ διαγώνια ἐπίπεδα μιᾶς n -έδρου γωνίας εἶναι τόσα, ὅσας καὶ αἱ διαγώνιοι ἐνὸς n -γώνου, τὸ ὁποῖον προκύπτει με ἐπίπεδον τομῇ τῆς διέδρου, ἥτοι $\frac{n(n-3)}{2}$.

Μία n -έδρος στερεὰ γωνία καλεῖται **κανονική**, ἐὰν ἔχη ὅλας τὰς ἔδρας τῆς ἴσας καὶ ὅλας τὰς διέδρους τῆς ἐπίσης ἴσας.

480. Κυρτὴ στερεὰ γωνία. Μία στερεὰ γωνία καλεῖται **κυρτή**, ἐὰν εἶναι δυνατόν ὅλας αἱ ἔδραι τῆς νὰ τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδου καὶ ἡ τομὴ νὰ εἶναι κυρτὸν πολύγωνον (σχ. 476).

Μία κυρτὴ στερεὰ γωνία διαιρεῖ τὸν χώρον εἰς δύο περιοχὰς I καὶ II. Ἐξ αὐτῶν ἡ περιοχὴ I ἔχει τὴν ἐξῆς ιδιότητα : Διὰ κάθε ζευγὸς σημείων τῆς, τὸ εὐθύγραμμον τμήμα με ἄκρα τὰ σημεία αὐτά, ἀνήκει εἰς τὴν περιοχὴν. Ἡ περιοχὴ αὕτη καλεῖται **κυρτὴ περιοχὴ** τοῦ χώρου καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας. Ἡ ἄλλη περιοχὴ II, ὅπου ὑπάρχει ἐν τοῦλάχιστον ζευγὸς σημείων $\{B, \Gamma\}$ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμήμα $B\Gamma$ δὲν ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὴν περιοχὴν II, καλεῖται **μὴ κυρτὴ περιοχὴ** καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐξωτερικὸν τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.

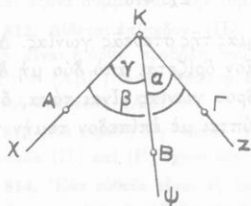
Αἱ δύο περιοχαί, εἰς τὰς ὁποίας μία μὴ κυρτὴ στερεὰ γωνία διαιρεῖ τὸν χώρον, εἶναι μὴ κυρταὶ περιοχαί.

481. Τριέδρου στερεαί γωνίαι. Εἶναι αἱ ἀπλούστεραι, ἀλλὰ καὶ αἱ βασικώτεραι ἐκ τῶν στερεῶν (πολυέδρων) γωνιῶν, διότι πᾶσα πολυέδρος γωνία δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τριέδρους, με διαγώνια ἐπίπεδα ἐκ μιᾶς ἄκμῆς τῆς.

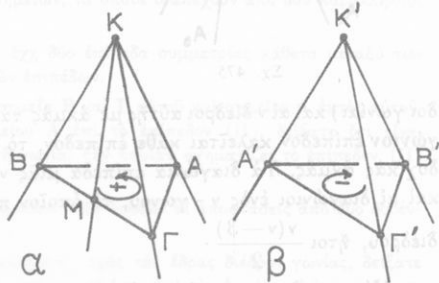
Ἐστω $K.xyz$ μία τριέδρος στερεᾶς γωνία (σχ. 477). Ἄν τοποθετήσωμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς τρία σημεῖα A, B καὶ Γ , τότε τὰ ἐξ κύρια στοιχεῖα τῆς τὰ συμβολίζομεν, ὡς ἐξῆς. Τὰς διέδρους γωνίας τῆς με $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ καὶ τὰς ἑδρας τῆς με $\widehat{\alpha}$, τὴν εὗρισκομένην ἀπέναντι τῆς διέδρου $\widehat{A}$, με $\widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\gamma}$ ἀντιστοίχως τὰς ἄλλας.

Τὰ θεωρήματα, τὰ ὅποια ἀφοροῦν τὰς τριέδρους γωνίας, εἶναι ἀντίστοιχα ἐκείνων, τὰ ὅποια ἀφοροῦν τὰ τρίγωνα, ὡς θὰ φανῇ εἰς τὰ ἐπόμενα καὶ αὐτὸ διευκολύνει εἰς τὴν ἀπομνημόνευσιν.

482. Προσανατολισμός τριέδρου στερεᾶς γωνίας. Ὡς θεωρήσωμεν τριέδρον στερεᾶς γωνίας με κορυφὴν K (σχ. 478α). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς λαμβάνομεν τρία σημεῖα A, B, Γ καὶ θεωροῦμεν κινητὸν σημεῖον M , διαγράφον τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ κατὰ μίαν ὀρισμένην φορὰν διαγραφῆς,



Σχ. 477



Σχ. 478

ἔστω τὴν $AB\Gamma A$. Τότε ἡ τριέδρος στερεᾶς γωνίας K θεωρεῖται προσανατολισμένη, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι διαγράφεται ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας KM κατὰ τὴν φορὰν $AB\Gamma A$. Εἶναι φανερόν ὅτι δύο εἶναι αἱ δυναταὶ φοραὶ διαγραφῆς τῆς στερεᾶς γωνίας K , ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $AB\Gamma A$ ἢ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $A\Gamma B A$. Μία ἐξ αὐτῶν, αὐθαίρετως ἐκλεγείσα, καλεῖται θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη (ἀντίθετος τῆς πρώτης) ἀρνητικὴ. Αὐτό, πού κυρίως μᾶς ἐνδιαφέρει, εἶναι δύο τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἴαν εἶναι ὁμοιοστροφῶς ἢ ἑτεροστροφῶς προσανατολισμένοι, δηλαδὴ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ. Εἰς τὸ σχῆμα 478 αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι $K.AB\Gamma$ καὶ $K'.A'B'\Gamma'$ εἶναι ἑτεροστροφῶς προσανατολισμένοι.

483. Κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο στερεαὶ γωνίαι με κοινὴν κορυφὴν K καὶ συμμετρικαὶ μεταξὺ των ὡς πρὸς τὴν κοινὴν κορυφὴν των (σχ. 479).

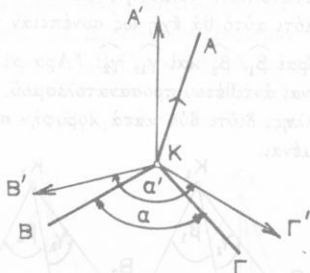
Δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς ἑδρας των ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς διέδρους των ἐπίσης ἴσας, ἀλλὰ αἱ στερεαὶ γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι (ὑπὸ τὴν ἔννοιαν μὴ ἐφαρμοσίμοι), διότι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ (§ 461)

484. Παραπληρωματικὴ τριέδρου στερεᾶς γωνίας. Ἐστω $K.AB\Gamma$

μία τριέδρος στερεὰ γωνία (σχ. 480). Φέρομεν ἡμιευθεῖαν KA' κάθετον ἐπὶ τὴν ἑδραν BKG καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς KA . Ὀμοίως φέρομεν $KB' \perp AKG$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KB , ὡς ἐπίσης καὶ $KG' \perp AKB$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KG . Αἱ τρεῖς ἡμιευθεῖαι KA' , KB' καὶ KG' ὀρίζουν τριέδρον στερεάν γωνίαν, ἡ ὁποία καλεῖται παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου $K.ABG$.



Σχ. 479



Σχ. 480

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου μιᾶς δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἔπονται τὰ ἑξῆς :

i) Ἡ παραπληρωματικὴ $K.A'B'G'$ τῆς $K.ABG$ ὀρίζεται κατὰ ἓνα μόνον τρόπον καὶ ἐπομένως εἶναι μοναδική.

ii) Ἐκάστη ἑδρα τῆς $K.A'B'G'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοίχου διέδρου τῆς $K.ABG$, ἥτοι εἶναι $\hat{\alpha}' + \hat{A} = 2L$, $\hat{\beta}' + \hat{B} = 2L$, $\hat{\gamma}' + \hat{G} = 2L$ (διατί;) (§ 472).

iii) Ἡ τριέδρος $K.ABG$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς $K.A'B'G'$. Πράγματι, εἶναι $KB' \perp AKG \Rightarrow KB' \perp KA$ (1) καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KB καὶ $KG' \perp AKB \Rightarrow KG' \perp KA$ (2) καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KG . Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται $KA \perp B'KG'$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KA' . Ὀμοίως εἶναι $KB \perp A'KG'$ καὶ $KG \perp A'KB'$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν KB' καὶ KG' ἀντιστοίχως. Ἀρα ἡ $K.ABG$ εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ τῆς $K.A'B'G'$ (ἄρα ἡ ἔννοια τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας εἶναι συμμετρικὴ καὶ διὰ τὰς τριέδρους).

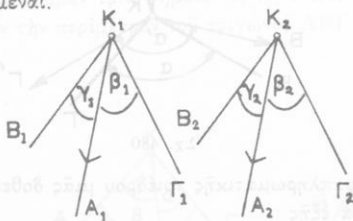
iv) Ἡ τριέδρος $K.ABG$, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς $K.A'B'G'$, εἶναι τοιαύτη, ὥστε : $\hat{\alpha} + \hat{A}' = 2L$, $\hat{\beta} + \hat{B}' = 2L$, $\hat{\gamma} + \hat{G}' = 2L$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΤΡΙΕΔΡΟΥΣ ΣΤΕΡΕΑΣ

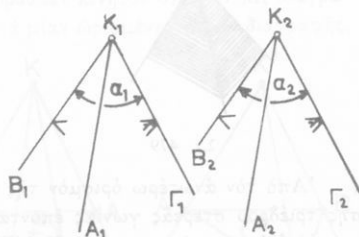
485. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν δύο ἑδρας ἀντιστοίχως ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ἑδρῶν περιεχομένης διέδρους ἴσας, αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἴσودται πρὸς τὴν κατὰ κορυ-

φὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἔαν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι μὲ $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$, $\widehat{\gamma}_1 = \widehat{\gamma}_2$, $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ καὶ ἐπὶ πλέον τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 481). Αἱ δύο τριέδροι προφανῶς δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μὲ μετατόπισιν τοιαύτην, ὥστε νὰ συμπίσουν αἱ δύο ἴσαι διέδροι $\widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{A}_2$. Διότι αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν νὰ συμπίσουν καὶ αἱ ἐκατέρωθεν αὐτῶν ἴσαι ἔδραι $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$ καὶ $\widehat{\gamma}_1$, $\widehat{\gamma}_2$. Ἀρα αἱ τριέδροι εἶναι ἴσαι. Ἐὰν αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, διότι δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.



Σχ. 481



Σχ. 482

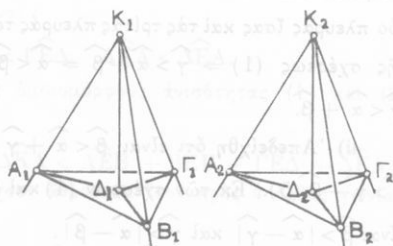
486. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν μίαν ἔδραν ἀντιστοίχως ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς τὴν ἴσην ἔδραν διέδρους γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας, αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἔαν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τριέδροι μὲ $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\alpha}_2$, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ καὶ ἐπὶ πλέον τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 482). Αἱ δύο τριέδροι προφανῶς δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μὲ μετατόπισιν τοιαύτην, ὥστε νὰ συμπίσουν αἱ ἴσαι ἔδραι $\widehat{\alpha}_1$, καὶ $\widehat{\alpha}_2$. Διότι αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν νὰ συμπίσουν καὶ αἱ ἐκατέρωθεν αὐτῶν ἴσαι διέδροι $\widehat{B}_1$, $\widehat{B}_2$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1$, $\widehat{\Gamma}_2$. Ἀρα αἱ τριέδροι εἶναι ἴσαι. Ἐὰν αἱ δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἦσαν ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία θὰ ἦτο ἴση μὲ τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.

487. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς τρεῖς ἔδρας τῶν ἀντιστοίχως ἴσας, αἱ τριέδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἔαν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ τριέδροι στερεαὶ γωνίαι μὲ $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\alpha}_2$, $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$ καὶ $\widehat{\gamma}_1 = \widehat{\gamma}_2$ (σχ. 483). Δὲν βλάπτεται ἡ γενικό-

της, ἐὰν ἐπὶ πλέον ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $K_1A_1 = K_1B_1 = K_1\Gamma_1 = K_2A_2 = K_2B_2 = K_2\Gamma_2$. Τότε εἶναι προφανῶς $A_1\hat{K}_1B_1 = A_2\hat{K}_2B_2$, $B_1\hat{K}_1\Gamma_1 = B_2\hat{K}_2\Gamma_2$, $\Gamma_1\hat{K}_1A_1 = \Gamma_2\hat{K}_2A_2$ ὡς ἔχοντα δύο πλευράς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην. Ἄρα $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2 \Rightarrow A_1B_1\Gamma_1 = A_2B_2\Gamma_2$. Φέρομεν $K_1\Delta_1 \perp (A_1B_1\Gamma_1) \Rightarrow$ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$, $K_1B_1\Delta_1$, $K_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας ὑποτείνουσας καὶ τὴν κοινὴν $\Rightarrow \Delta_1A_1 = \Delta_1B_1 = \Delta_1\Gamma_1$, ἥτοι τὸ Δ_1 εἶναι περίκεντρον τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. Ὀμοίως φέρομεν τὴν $K_2\Delta_2 \perp (A_2B_2\Gamma_2)$ καὶ τὸ Δ_2 θὰ εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι μετατοπίζοντες τὴν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἴσου του $A_2B_2\Gamma_2$ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Δ_1 θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Δ_2 . Ἐπὶ πλέον ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$ καὶ $K_2A_2\Delta_2$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα $K_1A_1 = K_2A_2$ καὶ $\Delta_1A_1 = \Delta_2A_2$, ἔπεται ὅτι $\Delta_1K_1 = \Delta_2K_2$. Ἄρα εἰς τὴν μετατόπισιν ἡ κορυφὴ K_1 θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς K_2 . Ἐπομένως, αἱ τριέδροι εἶναι ἴσαι, ἐφ' ὅσον δύο τριέδροι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.



Σχ. 483

488. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς τρεῖς διέδρους των ἀντιστοίχως ἴσας, εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἔαν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἐτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι μὲ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (σχ. 483). Φανταζόμεθα τὰς παραπληρωματικὰς αὐτῶν τριέδρους (§ 484), αἱ ὁποῖαι κατ' ἀνάγκην θὰ ἔχουν τὰς ἑδρας των ἴσας, ἐφ' ὅσον αἱ ἀρχικαὶ ἔχουν τὰς διέδρους των ἴσας καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι ἴσαι. Τότε ὁμοῦ καὶ αἱ τριέδροι $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ θὰ εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρωματικαὶ ἴσων τριέδρων. Ἐὰν αἱ δύο τριέδροι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

489. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν τριέδρον στερεὰν γωνίαν ἐκάστη ἑδρα εἶναι :

i) Μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

ii) Μεγαλύτερα τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

Ἀποδείξις. i) Τὸ θεώρημα ἔχει προφανῶς ἀνάγκην ἀποδείξεως μόνον διὰ τὴν μεγαλύτεραν ἔδραν (σχ. 484). Ἄς θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι: $\widehat{\alpha} \geq \widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\alpha} \geq \widehat{\gamma}$. Ἐντὸς τῆς ἔδρας $\widehat{\alpha}$ λαμβάνομεν ἡμιευθεῖαν ΚΔ, τοιαύτην ὥστε νὰ εἶναι: $\widehat{\Gamma\hat{K}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{K}\Lambda} = \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{B\hat{K}\Delta} = \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$ (1). Δὲν βλάπτεται ἡ γενικότης, ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι $KA = K\Delta$ καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι συνεπίπεδα. Τότε εἶναι τριγ. $\Gamma\hat{K}\Lambda =$ τριγ. $\Gamma\hat{K}\Delta$, ὡς ἔχοντα τὴν ΓΚ κοινὴν, $KA = K\Delta$ καὶ $\widehat{\Gamma\hat{K}\Lambda} = \widehat{\Gamma\hat{K}\Delta}$. Ἀρα $\Gamma\Lambda = \Gamma\Delta \Rightarrow \Delta B = \Gamma B - \Gamma\Lambda$ (2). Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν: $AB > \Gamma B - \Gamma\Lambda$ (3). Ἡ σχέσις (3), λόγῳ τῆς (2) γράφεται $AB > BD \Rightarrow \widehat{B\hat{K}\Lambda} > \widehat{B\hat{K}\Delta}$, διότι τὰ τρίγωνα ΒΚΑ καὶ ΒΚΔ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς τρίτας πλευράς τῶν ἀνίσους. Ἀρα $\widehat{\gamma} > \widehat{B\hat{K}\Delta}$ καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (1) $\Rightarrow \widehat{\gamma} > \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$. Ἐπίσης εἶναι $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}$ καὶ $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$.

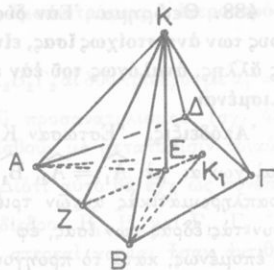
ii) Ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} \Rightarrow \widehat{\alpha} > \widehat{\beta} - \widehat{\gamma}$ (4) καὶ $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{\alpha} > \widehat{\gamma} - \widehat{\beta}$ (5). Ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) ἔπεται ὅτι $\widehat{\alpha} > |\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}|$. Ὁμοίως εἶναι $\widehat{\beta} > |\widehat{\alpha} - \widehat{\gamma}|$ καὶ $\widehat{\gamma} > |\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}|$.

Αἱ ἀνωτέρω ἑξ ἀνισοτικά σχέσεις δύνανται νὰ συγχωνευθοῦν εἰς τὴν διπλὴν ἀνισοτικήν σχέσιν: $|\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}| < \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$.

490. Θεώρημα. Πάσης πολυέδρου κυρτῆς στερεᾶς γωνίας, τὸ ἄθροισμα τῶν ἔδρων τῆς εἶναι μικρότερον τῶν 4° .



Σχ. 484



Σχ. 485

Ἐστω ἡ κυρτὴ στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓΔ. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\widehat{A\hat{K}B} + \widehat{B\hat{K}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{K}\Delta} + \widehat{\Delta\hat{K}A} < 4^\circ$$

Ἀπόδειξις. Ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας λαμβάνομεν ἐν εὐθύγραμμον τμήμα ΚΕ καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΕ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ (σχ. 485) καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ. (Τὴν θέσιν τῆς ΚΕ τὴν ἐκλέγομεν, ὥστε τὸ

ἐκ τοῦ Ε ἀγόμενον κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΚΕ νὰ τέμνη ὅλας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας). Φέρομεν $EZ \perp AB$ καὶ ἄρα $KZ \perp AB$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου EKZ ἔχομεν $ZE < ZK$. Ἄν περιστρέψωμεν τὸ τρίγωνον KAB περὶ τὴν AB οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδόν του νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ $AB\Gamma\Delta$, τότε ἡ ZK , μένουσα κάθετος ἐπὶ τὴν AB , θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ZE καὶ, ἐπειδὴ εἶναι $ZE < ZK$, ἄρα τὸ K θὰ πέσῃ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ZE , ἔστω εἰς τὸ σημεῖον K_1 . Φέρομεν καὶ τὰς EA καὶ EB . Ἔχομεν (§ 116).

$$\widehat{AK_1Z} < \widehat{AEZ}, \quad \widehat{ZK_1B} < \widehat{ZEB}.$$

Καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(1) \quad \widehat{AK_1B} < \widehat{AEB}, \quad \text{ἤτοι} \quad \widehat{AKB} < \widehat{AEB}.$$

Ὀμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι εἶναι :

$$(2) \quad \widehat{BK\Gamma} < \widehat{BEG}, \quad \widehat{GK\Delta} < \widehat{GED}, \quad \widehat{\Delta KA} < \widehat{\Delta EA}.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ὁμοιομόρφους ἀνισότητας (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν :

$$(3) \quad \widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} + \widehat{GK\Delta} + \widehat{\Delta KA} < \widehat{AEB} + \widehat{BEG} + \widehat{GED} + \widehat{\Delta EA}$$

καὶ, ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ Ε γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας, ἡ (3) γίνεται :

$$\widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} + \widehat{GK\Delta} + \widehat{\Delta KA} < 4L$$

★ 491. Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς ἀκολούθως : Ἀπόδειξις. Ἐστω ἡ κυρτὴ στερεὰ γωνία $KA_1A_2\dots A_n$ (σχ. 486), ὅπου τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \dots, A_n$ εὐρίσκονται ἐπὶ ἐπιπέδου τομῆς. Θὰ συμβολίσωμεν μὲ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ τὰς ἑδρας τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ μὲ $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \dots, \widehat{A_n}$ τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\dots A_n$ ἀντιστοίχως. Τότε, ἀπὸ τὰ τρίγωνα $KA_1A_2, KA_2A_3, \dots, KA_nA_1$, ἔχομεν :

$$\widehat{\alpha_1} = 2L - (\widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1}), \quad \widehat{\alpha_2} = 2L - (\widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2}), \quad \dots, \quad \widehat{\alpha_n} = 2L - (\widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_n}).$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ν ἰσότητας καὶ λαμβάνομεν :

$$\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} + \dots + \widehat{\alpha_n} = 2nL - (\widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + \dots + \widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_n}) \quad (1).$$

Τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \dots, A_n$ εἶναι κορυφαὶ τριέδρων στερεῶν γωνιῶν καὶ ἐπομένως (§ 489) θὰ εἶναι :

$$\widehat{A_1} < \widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_2}, \quad \widehat{A_2} < \widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_3}, \quad \dots, \quad \widehat{A_n} < \widehat{KA_{n-1}A_n} + \widehat{KA_nA_1}.$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ν ἀνισότητας καὶ λαμβάνομεν :

$$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \dots + \widehat{A_n} < \widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + \dots + \widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_n}.$$

Γνωρίζομεν ὅτι $A_1 + A_2 + \dots + A_n = (2n - 4)L$ καὶ ἐπομένως ἡ τελευταία ἀνισότης γράφεται :

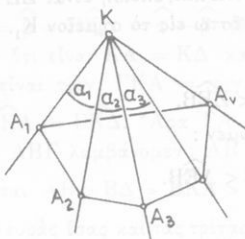
$$(2n - 4)L < \widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + \dots + \widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_n} \quad (2)$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) καὶ λαμβάνομεν :

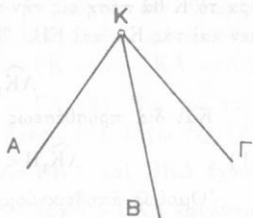
$$\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} + \dots + \widehat{\alpha_n} + (2n - 4)L < 2nL \Rightarrow \widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} + \widehat{\alpha_3} + \dots + \widehat{\alpha_n} < 4L.$$

492. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν τριέδρον στερεὰν γωνίαν τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς εὐρίσκεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν γωνιῶν, ἐκάστη δὲ αὐξανόμενη κατὰ 2° ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων διέδρων.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $K.AB\Gamma$ μία τριέδρος στερεὰ γωνία (σχ. 487). Ἄς



Σχ. 486



Σχ. 487

φαντασθῶμεν τὴν παραπληρωματικὴν τῆς $K.A'B'\Gamma'$ (§ 484), τῆς ὁποίας αἱ ἔδραι εἶναι $\hat{\alpha}'$, $\hat{\beta}'$, $\hat{\gamma}'$. Γνωρίζομεν ὅτι $\hat{A} + \hat{\alpha}' = 2^\circ$, $\hat{B} + \hat{\beta}' = 2^\circ$, $\hat{\Gamma} + \hat{\gamma}' = 2^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{\alpha}' + \hat{B} + \hat{\beta}' + \hat{\Gamma} + \hat{\gamma}' = 6^\circ$ (1) $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6^\circ$ (2). Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $\hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' < 4^\circ \Rightarrow 4^\circ > \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}'$ (3). Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' + 4^\circ > 6^\circ + \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} > 2^\circ$. Αἱ ἀνισότητες (2) καὶ (4) συγχωνεύονται εἰς τὴν διπλὴν ἀνισότητα $2^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6^\circ$.

Ἐπίσης εἶναι (§ 489) $\hat{\beta}' + \hat{\gamma}' > \hat{\alpha}' \Rightarrow 2^\circ - \hat{B} + 2^\circ - \hat{\Gamma} > 2^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{A} + 2^\circ > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Ὀμοίως εὐρίσκομεν $\hat{B} + 2^\circ > \hat{A} + \hat{\Gamma}$ καὶ $\hat{\Gamma} + 2^\circ > \hat{A} + \hat{B}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

818. Εἰς κάθε τριέδρον στερεὰν γωνίαν δείξατε ὅτι μία τοῦλάχιστον ἔδρα εἶναι μικρότερα τῶν 120° .

819. Εἰς κάθε τριέδρον στερεὰν γωνίαν δείξατε ὅτι μία τοῦλάχιστον διέδρος εἶναι μεγαλύτερα τῶν 60° .

820. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας (με τὰς ἔδρας τῆς ὀρθᾶς) λαμβάνομεν τμήματα $KA = KB = K\Gamma = \alpha$. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἔμβαδον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἔμβαδου ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α .

821. Τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας αἱ ἀκμαὶ τέμνονται δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ . Ἐὰν εἶναι $KA = 3\alpha$, $KB = 4\alpha$, $K\Gamma = 5\alpha$, ὅπου K εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

822. Τέμνομεν τὰς ἀκμὰς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας K δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ

σημεία Α, Β, Γ. Δείξτε ότι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ συμπίπτει μὲ τὸ ὀρθόκέντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

823. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκέντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ὅτι :

α) $(ΚΑΒ)^2 = (ΓΑΒ)(ΗΑΒ)$, β) $(ΚΑΒ)^2 + (ΚΒΓ)^2 + (ΚΓΑ)^2 = (ΑΒΓ)^2$.

824. Τρισσορθογώνιος στερεὰ γωνία τέμνεται δι' ἐπίπεδον εἰς τὰ σημεία Α, Β, Γ. Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ὑπολογισθοῦν ἐξ αὐτῶν τὰ τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ὅπου Κ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς τρισσορθογωνίου.

825. Ἐὰν αἱ ἔδραι μιᾶς στερεᾶς γωνίας εἶναι 60° ἑκάστη, πόσας τὸ πολὺ ἔδρας ἔδραται νὰ ἔχῃ ἡ στερεὰ γωνία ;

826. Τὸ αὐτὸ νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν αἱ ἔδραι τῆς εἶναι 90° ἑκάστη.

827. Μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας αἱ δύο ἔδραι εἶναι 70° καὶ 90°. Ποῖαι εἶναι αἱ ἔδραται τιμὰι διὰ τὴν τρίτην ἔδραν αὐτῆς ;

Β'.

828. Εἰς πᾶσαν τριέδρον στερεὰν γωνίαν δείξτε ὅτι τὰ τρία διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων τῆς διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

829. Δείξτε ὅτι τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὅποια διέρχονται ἀνὰ ἓν ἀπὸ τὰς ἀκμὰς μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἔδρων, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

830. Δείξτε ὅτι, ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τότε αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν θὰ ἔχουν τὰς ἔδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἀντιστρόφως.

831. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Κ διυθείσης τρισσορθογωνίου στερεᾶς γωνίας φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν Κχ εἰς τὸ ἑσωτερικὸν τῆς στερεᾶς γωνίας. Δείξτε ὅτι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ Κχ μὲ τὰς τρεῖς ἀκμὰς καὶ μὲ τὰς τρεῖς ἔδρας τῆς στερεᾶς γωνίας, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

832. Δείξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἐνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν.

833. Ἐὰν δύο ἔδραι μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι, δείξτε ὅτι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν διέδροι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

834. Ἐὰν μία τριέδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ τὰς τρεῖς ἔδρας τῆς ἴσας, δείξτε ὅτι θὰ ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς διέδρους τῆς ἴσας καὶ ἀντιστρόφως.

835. Ἐὰν μία τριέδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ δύο ἴσας διέδρους, δείξτε ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς τρίτης διέδρου εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἔδραν.

836. Δίδεται κυρτὴ τετράεδρος στερεὰ γωνία καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Σ ἐπίπεδον (Π), τὸ ὅποῖον νὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν στερεὰν γωνίαν κατὰ παραλλήλογραμμον.

837. Δείξτε ὅτι εἰς πᾶσαν τριέδρον στερεὰν γωνίαν ἀπέναντι μεγαλύτερας διέδρου κεῖται μεγαλύτερα ἔδρα καὶ ἀντιστρόφως.

838. Δίδεται τριέδρος στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓ. Φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΚΧ ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $\widehat{ΚΚΑ} + \widehat{ΚΚΒ} < \widehat{ΓΚΑ} + \widehat{ΓΚΒ}$.

839. Δείξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας μὲ ν ἀκμὰς περιέχεται μεταξὺ 2ν - 4 καὶ 6ν - 12 ὀρθῶν γωνιῶν.

840. Δίδεται τετράεδρος στερεὰ γωνία κορυφῆς Κ καὶ δύο σταθερὰ σημεία Α καὶ Β ἐπὶ δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν τῆς. Μεταβλητὸν ἐπίπεδον διέρχεται πάντοτε διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τέμνει τὰς ἄλλας δύο ἀκμὰς τῆς εἰς τὰ Μ καὶ Ν. i) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. ii) Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΜ καὶ ΒΝ. iii) Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΝ καὶ ΒΜ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

493. Ὅρισμός. Πολύεδρον καλεῖται τὸ στερεόν, τὸ ὅποιον περατοῦται πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα τμήματα.

Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τμήματα εἶναι κατ' ἀνάγκην πολύγωνα καὶ καλοῦνται ἔδραι τοῦ πολυέδρου (σχ. 488). Αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων ἐδρῶν καλοῦνται ἄκμαι τοῦ πολυέδρου καὶ εἶναι αἱ τομαὶ δύο προσκειμένων ἐδρῶν. Αἱ κορυφαὶ τῶν πολυγώνων ἐδρῶν καλοῦνται **κορυφαὶ** τοῦ πολυέδρου. Αὐτὰ ἀνήκουν εἰς τρεῖς τοῦλάχιστον ἔδρας καὶ εἶναι σημεῖα, εἰς τὰ ὅποια συμβάλλουν τρεῖς τοῦλάχιστον ἄκμαι. Ἐν εὐθύγραμμον τμήμα με ἄκρα δύο κορυφάς, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν ἔδραν, καλεῖται **διαγώνιος** τοῦ πολυέδρου. Διαγώνιοι δὲν ὑπάρχουν εἰς ὅλα τὰ πολύεδρα.

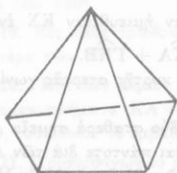
Ἐν πολυέδρον καλεῖται **κυρτόν**, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τῆς οἰασθῆποτε ἔδρας τοῦ ἀφήνῃ πρὸς τὴν αὐτὴν περιοχὴν τοῦ χώρου ὁλόκληρον τὸ πολύεδρον.

Παντὸς κυρτοῦ πολυέδρου αἱ ἔδραι εἶναι κυρτὰ πολύγωνα καὶ ἀντιστρέφως.

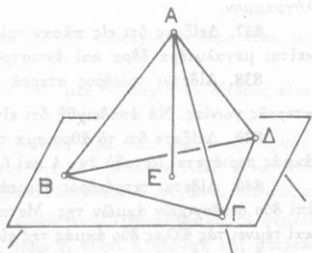
Ἡ τομὴ κυρτοῦ πολυέδρου με ἐπίπεδον εἶναι κυρτόν πολύγωνον, ἐνῶ μία εὐθεῖα, μὴ ἀνήκουσα εἰς ἔδραν, ἔχει τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα με τὴν πολυεδρικήν ἐπιφάνειαν.

ΤΟ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΝ

494. Τὰ στοιχεῖα τοῦ τετραέδρου. Τὸ τετραέδρον εἶναι τὸ ἀπλούστερον ἐκ τῶν πολυέδρων. Ἐχει τέσσαρας τριγωνικὰς ἔδρας, τέσσαρας κορυφάς καὶ ἑξ ἁκμάς. Τετραέδρον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἐὰν τμήσωμεν τὰς ἁκμάς τριέδρου στερεῆς γωνίας δι' ἐπίπεδον (σχ. 489).



Σχ. 488



Σχ. 489

Κάθε τετράεδρον είναι κυρτόν πολύεδρον, έχει εξ διέδρους γωνίας, αί οποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἐξ ἀκμᾶς του καὶ τέσσαρας τριέδρους στερεάς, γωνίας αἱ οποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τέσσαρας κορυφάς του.

Ύψος τετράεδρου καλεῖται τὸ κάθετον τμήμα, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐξ ἐκᾶστης κορυφῆς πρὸς τὴν ἀπέναντι ἑδραν (σχ. 489). Τὸ τετράεδρον ἐπομένως ἔχει τέσσαρα ὕψη. Τὰ ὕψη ἐνὸς τετράεδρου ἐν γένει δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Διάμεσος τετράεδρου καλεῖται τὸ τμήμα μὲ ἄκρα μίαν κορυφήν, καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς ἀπέναντι ἑδρας. Τὸ τετράεδρον ἐπομένως ἔχει τέσσαρας διαμέσους.

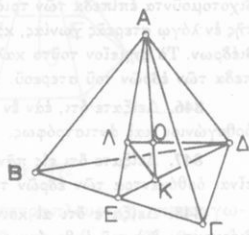
495. Εἶδη τετράεδρων. Εἰς τὸ σύνολον τῶν τυχόντων τετράεδρων ἀξιοσημείωτα εἶναι τὰ κανονικὰ καὶ τὰ ὀρθοκεντρικὰ τετράεδρα.

Κανονικόν τετράεδρον καλεῖται ἐν τετράεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς ἐξ ἀκμᾶς του ἴσας. Αἱ ἑδραι ἐνὸς κανονικοῦ τετράεδρου εἶναι ἴσα ἰσοπλευρα τρίγωνα.

Ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον καλεῖται ἐν τετράεδρον, τοῦ ὁποῖου τὰ τέσσαρα ὕψη διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὕψων του καλεῖται **ὀρθόκεντρον** τοῦ τετράεδρου. Εἰς τὰ ὀρθοκεντρικὰ μόνον τετράεδρα καὶ τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ὀρθογώνια (βλ. ἀσχ. 846).

496. Θεώρημα. Εἰς κάθε τετράεδρον αἱ τέσσαρες διάμεσοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ τετράεδρου καὶ ἀπέχει ἐξ ἐκᾶστης κορυφῆς ἀπόστασιν ἰσην πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου τοῦ τετράεδρου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ Κ, Λ τὰ κέντρα βάρους τῶν ἐδρῶν του ΒΓΔ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως (σχ. 490). Τὸ σημεῖον Κ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΔΕ τῆς ἑδρας ΒΓΔ καὶ τὸ σημεῖον Λ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΕ τῆς ἑδρας ΑΒΓ. Ἐπομένως αἱ διάμεσοι ΑΚ καὶ ΔΛ τοῦ τετράεδρου τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, διότι εἶναι ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.



Σχ. 490

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ εἶναι κέντρα βάρους ἐδρῶν, ἔπεται ὅτι

$$\frac{ΕΔ}{ΕΚ} = \frac{ΕΑ}{ΕΛ} = \frac{3}{1} \Rightarrow \Delta\Lambda // Κ\Lambda \Rightarrow \text{τριγ. } ΕΔ\Lambda \approx \text{τριγ. } ΕΚ\Lambda \Rightarrow \frac{\Delta\Lambda}{Κ\Lambda} = \frac{3}{1}.$$

Ἐπίσης, ἀπὸ τὴν παραλληλίαν τῶν τμημάτων ΔΑ καὶ ΚΛ, ἔπεται ὅτι $\Delta\Lambda \approx$

$$\begin{aligned} \triangle OKA &\Rightarrow \frac{OA}{OK} = \frac{AD}{KA} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{OA}{OK} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{AO}{AO + OK} = \frac{3}{3+1} \\ &\Rightarrow \frac{AO}{AK} = \frac{3}{4} \Rightarrow AO = \frac{3}{4} AK. \end{aligned}$$

Όμοίως αποδεικνύεται ή αυτή σχέση και διά τας άλλας διαμέσους του τετραέδρου, αι όποϊαι διέρχονται διά του αυτού σημείου O.

Ή όνομασία **κέντρον βάρους του τετραέδρου** διά τὸ σημείον O ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς φυσικῆς, διότι συμπίπτει με τὸ κέντρον βάρους τετραέδρου ἐξ όμογενοῦς ὕλικου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B'.

841. Εἰς κάθε τετράεδρον : α) Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα με ἄκρα τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. β) Ἐάν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἀνά δύο ἴσαι, τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμάς καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι ἀκμαὶ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας.

842. Εἰς κανονικὸν τετράεδρον δείξατε ὅτι τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἐξ ἀκμῶν του εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἄξονες συμμετρίας.

843. Περὶ κέντρον τετραέδρου. Εἰς πᾶν τετράεδρον δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι, αἱ όποϊαι ἄγονται ἐπὶ τὰς ἑδρας του εἰς τὰ περικέντρα αὐτῶν, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται περικέντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς κορυφάς του.

844. Ἐγκέντρον τετραέδρου. Εἰς πᾶν τετράεδρον δείξατε ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ἐξ διέδρων γωνιῶν του διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ἔγκέντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς ἑδρας του.

845. Παρά κέντρον τετραέδρου. Εἰς πᾶν τετράεδρον δείξατε ὅτι ἐντὸς ἐκάστης στερεᾶς γωνίας του καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου ὑπάρχει σημεῖον, ἀπὸ τοῦ όποῖον διέρχονται τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν τριῶν διέδρων, τῶν όποῖων αἱ ἀκμαὶ συγκλίνουν εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ἐν λόγῳ στερεᾶς γωνίας, καὶ τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ὑπολοίπων τριῶν ἐξωτερικῶν διέδρων. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται παρά κέντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἐδρῶν τοῦ στερεοῦ. Κάθε τετράεδρον ἔχει τέσσαρα παρά κέντρα.

846. Δείξατε ὅτι, ἐάν ἐν τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν, αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ του εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ ἀντιστρόφως.

847. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον τὰ ἔγχνη τῶν τεσσάρων ὕψων του εἶναι ὀρθοκέντρα τῶν ἐδρῶν του.

848. Δείξατε ὅτι αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τετραέδρου.

849. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Νά εὑρεθῇ σημεῖον Μ, διά τὸ όποῖον τὸ ἄθροισμα $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ εἶναι ἐλάχιστον.

850. Δείξατε ὅτι τὰ ἐξ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

851. Ἐάν τετραέδρου ΚΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία Κ εἶναι τρισορθογώνιος, δείξατε ὅτι τὸ ὕψος ΚΗ πληροῖ τὴν σχέσηιν : $\frac{1}{KH^2} = \frac{1}{KA^2} + \frac{1}{KB^2} + \frac{1}{KC^2}$.

852. Εἰς κάθε τετράεδρον δείξατε ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὀριζόμενα ὑπὸ ἐκάστης ἀκμῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

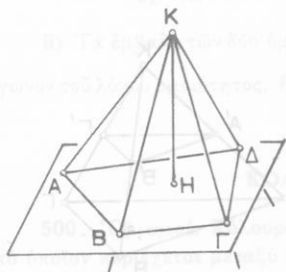
853. Δίδεται τετράεδρον $AB\Gamma\Delta$. Ἐπίπεδον παραμένει παραλλήλον πρὸς τὴν ἕδραν $B\Gamma\Delta$ καὶ τέμνει τὸ τετράεδρον κατὰ τὸ τρίγωνον $B'\Gamma'\Delta'$. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $B'\Gamma'\Delta'$ μετὰ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν κορυφὰς τοῦ τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Η ΠΥΡΑΜΙΣ

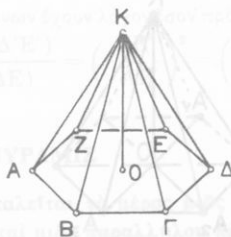
497. Ὅρισμοί. Πυραμὶς καλεῖται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποῖου ἡ μία ἕδρα εἶναι τυχὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον καλεῖται βάσις τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι τρίγωνα μετὰ κοινὴν κορυφὴν ἐν σημείῳ, τὸ ὁποῖον καλεῖται κορυφή τῆς πυραμίδος.

Πυραμίδα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἐὰν τμήσωμεν τὰς ἀκμὰς στερεᾶς γωνίας κορυφῆς K δι' ἐπίπεδον εἰς τὰ σημεῖα $A, B, \Gamma, \dots$ (σχ. 491).

Μία πυραμὶς εἶναι κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἡ βάσις τῆς $AB\Gamma\Delta$ εἶναι κυρτὸν ἢ μὴ κυρτὸν πολύγωνον ἀντιστοίχως. Αἱ τριγωνικαὶ ἕδραι $KAB, KB\Gamma, \dots$ καλοῦνται **παράπλευροι ἕδραι** τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ ἀκμαὶ $KA, KB, K\Gamma, \dots$, αἱ ὁποῖαι συγκλίνουν εἰς τὴν κορυφὴν K τῆς πυραμίδος, καλοῦνται **παράπλευροι ἀκμαί**.



Σχ. 491



Σχ. 492

Μία πυραμὶς χαρακτηρίζεται ὡς τριγωνικὴ, τετραπλευρική, πένταγωνική κλπ., ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως τῆς.

Ὑψος τῆς πυραμίδος καλεῖται τὸ κάθετον τμήμα KH ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς K πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

Κανονικὴ καλεῖται κάθε πυραμὶς, ἡ ὁποία ἔχει ὡς βάσιν κανονικὸν πολύγωνον, ἢ δὲ κορυφὴ τῆς προβάλλεται ὀρθῶς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως (σχ. 492).

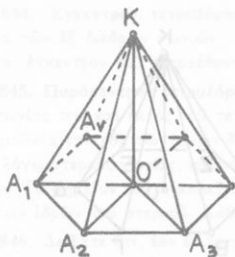
498. Θεώρημα. Κάθε κανονικής πυραμίδος αι παράπλευροι ἔδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

Ἀπόδειξις. Ὡς θεωρήσωμεν κανονικὴν πυραμίδα $K.A_1A_2...A_n$ (σχ. 493). Φέρομεν τὸ ὕψος KO , ὅπου τὸ O εἶναι κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, ἐπομένως εἶναι $OA_1 = OA_2$. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KOA_1 καὶ KOA_2 εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν KO κοινὴν καὶ $OA_1 = OA_2$. Ἄρα $KA_1 = KA_2$. Ὀμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $KA_1 = KA_2 = ... = KA_n$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$, ἔπεται ὅτι τὰ παράπλευρα τρίγωνα εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ.

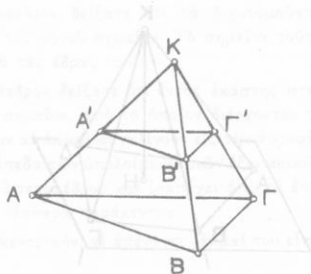
Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἰς τὴν πυραμίδα $K.A_1A_2...A_n$ εἶναι $KA_1 = KA_2 = ... = KA_n$ καὶ $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$. Φέρομεν πάλιν τὸ ὕψος $KO \Rightarrow KOA_1 = KOA_2 = ... = KOA_n$, ὡς ὀρθογώνια μὲ ἴσας τὰς ὑποτείνουσας καὶ τὴν KO κοινὴν. Ἄρα $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Τότε τὰ τρίγωνα $OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1$ εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ καὶ ἐπομένως τὸ πολύγωνον $A_1A_2...A_n$ εἶναι κανονικὸν μὲ κέντρον τὴν προβολὴν O τοῦ A ἐπὶ αὐτό. Ἄρα ἡ πυραμὶς εἶναι κανονικὴ.

499. Θεώρημα. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τῆς, ἡ τομὴ εἶναι πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως.

Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα θὰ ἀποδειχθῇ κατ' ἀρχὰς διὰ τριγωνικὴν πυραμίδα $K.ABG$ (σχ. 494). Ἐὰν $A'B'Γ'$ εἶναι ἡ παράλληλος τομὴ πρὸς τὴν



Σχ. 493



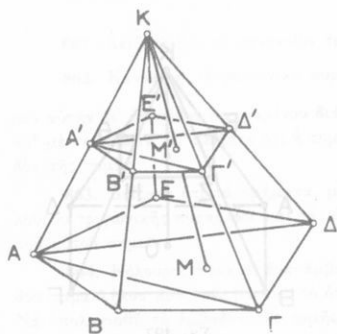
Σχ. 494

βάσιν $ABΓ$, παρατηροῦμεν ὅτι $A'B' // AB$, $B'Γ' // BΓ$ καὶ $Γ'A' // ΓA$, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Ἄρα εἶναι $\text{τριγ. } A'B'Γ' \approx \text{τριγ. } ABΓ$, ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των παραλλήλους (τὸ σχετικὸν θεώρημα τῆς ἐπιπεδομετρίας ἰσχύει αὐτούσιον καὶ εἰς τὸν χώρον, ὡς ἔπεται ἐκ τῆς § 433).

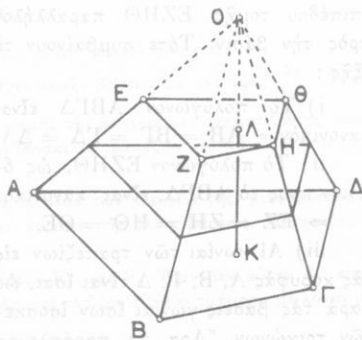
Ὡς θεωρήσωμεν τώρα τυχοῦσαν πυραμίδα $K.ABΓΔΕ$ καὶ τὴν τομὴν $A'B'Γ'Δ'Ε'$ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν (σχ. 495). Μὲ τὰ ἐπίπεδα $AKΓ$, $AKΔ$, τὰ ὅποια τέμνουν τὴν βάσιν καὶ τὴν παράλληλον τομὴν κατὰ διαγωνίους διαιρεῖται ἡ πυραμὶς εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Ἄρα εἶναι $A'B'Γ' \approx ABΓ$, $A'Γ'Δ' \approx AΓΔ$, $A'Δ'Ε' \approx AΔΕ$ καὶ ἐπομένως $A'B'Γ'Δ'Ε' \approx ABΓΔΕ$.

Παρατηρήσεις:

i) 'Ο λόγος ομοιότητας $\frac{A'B'}{AB}$ τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{KA'}{KA}$, διότι εἶναι $KA'B' \approx KAB$. 'Ο ἴδιος λόγος μεταφέρεται καὶ ἐπὶ τοῦ τυχόντος τμήματος $KM'M$, μετὰ M' καὶ M ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ ἀσφαλῶς καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων παραπλευρῶν ἀκμῶν $KB'B$, $KΓ'Γ$, κλπ. Τοῦτο ἔπεται ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.



Σχ. 495



Σχ. 496

ii) Τὰ ἑμβαδὰ τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ομοιότητος, ἥτοι $\frac{(A'B'Γ'Δ'E')}{(ABΓΔE)} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{KM'}{KM}\right)^2$.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

500. 'Ορισμοί. Κόλουρος πυραμίδας καλεῖται τὸ μέρος μιᾶς πυραμίδος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τομῆς τῆς πυραμίδος.

Μία κόλουρος πυραμίδας $ABΓΔ.EZHΘ$ (σχ. 496) ἔχει τὰς ἑδρας τῆς $ABΓΔ$ καὶ $EZHΘ$ παραλλήλους. Αὐταὶ καλοῦνται **βάσεις** τῆς πυραμίδος καὶ εἶναι ὅμοια πολύγωνα (§ 499). Αἱ παράπλευροι ἑδραι τῆς εἶναι τραπέζια.

'Η ἀπόστασις $ΚΛ$ τῶν δύο παραλλήλων βάσεων καλεῖται **ὕψος** τῆς κολούρου πυραμίδος.

Μία κόλουρος πυραμίδας, καλεῖται **κανονικὴ**, ἐὰν ἔχη προκύψει ἀπὸ κανονικὴν, πυραμίδα. Ἄρα μία κανονικὴ κόλουρος πυραμίδας ἔχει ὡς βάσεις κανονικὰ ὅμοια πολύγωνα, τὸ δὲ τμήμα, μετὰ ἄκρα τὰ κέντρα βάρους τῶν δύο βάσεων, εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτάς.

Μεσαία τομή ἡ μέση τομή τῆς κολούρου πυραμίδος καλεῖται ἡ τομή αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της καὶ ἰσαπέχοντος ἀπ' αὐτάς. Ἡ μεσαία τομή εἶναι πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὰς βάσεις καὶ διχοτομεῖ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς της κολούρου πυραμίδος, ὡς καὶ τὸ ὕψος της, καὶ γενικῶς κάθε τμήμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν βάσεων.

501. Θεώρημα. Κάθε κολούρου κανονικῆς πυραμίδος αἱ παράπλευροι ἔδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια καὶ ἀντιστρόφως.

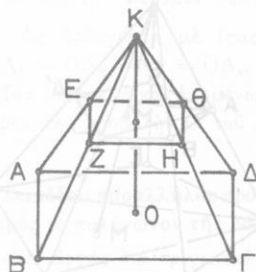
Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν κολούρου κανονικὴν πυραμίδα $AB\Gamma\Delta$. $EZH\Theta$ (σχ. 497). Αὕτη ἔχει προκύψει ἀπὸ κανονικὴν πυραμίδα $K.AB\Gamma\Delta$ δι' ἐπιπέδου τομῆς $EZH\Theta$ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Τότε συμβαίνουν τὰ ἑξῆς :

i) Τὸ πολύγωνον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι κανονικὸν $\Rightarrow AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$.

ii) Τὸ πολύγωνον $EZH\Theta$, ὡς ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma\Delta$, εἶναι κανονικὸν $\Rightarrow EZ = ZH = H\Theta = \Theta E$.

iii) Αἱ γωνίαι τῶν τραπεζίων εἰς τὰς κορυφὰς A, B, Γ, Δ εἶναι ἴσαι, ὡς παρὰ τὰς βάσεις γωνίαι ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων. Ἄρα τὰ παράπλευρα τραπέζια εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ.

Ἀντιστρόφως. Ἐάν ἡ κολούρος πυραμὶς $AB\Gamma\Delta.EZH\Theta$ ἔχῃ τὰ παράπλευρα τραπέζια ἴσα ἰσοσκελῆ, εἶναι κανονικὴ. Πράγματι κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν ὅτι αἱ παράπλευροι ἔδραι συγκλίνουν εἰς σημεῖον K , διότι κάθε κολούρος πυραμὶς ἔχει προκύψει ἀπὸ πυραμίδα. Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ πυραμὶς $K.AB\Gamma\Delta$ εἶναι κανονικὴ. Τοῦτο ὁμῶς συμβαίνει, διότι τὰ τρίγωνα $KAB, KB\Gamma, K\Gamma\Delta, K\Delta A$, ὡς ἔχοντα ἐξ ὑποθέσεως ἴσας βάσεις $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ καὶ τὰς παρὰ τὰς βάσεις τῶν γωνίας ἴσας (ἐκ τῶν ἴσων ἰσοσκελῶν τραπεζίων), ἔπεται ὅτι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα $\Rightarrow$ ἡ $K.AB\Gamma\Delta$ εἶναι κανονικὴ $\Rightarrow$ ἡ κολούρος πυραμὶς $AB\Gamma\Delta.EZH\Theta$ εἶναι κανονικὴ.



Σχ. 497

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

854. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου ἐκ τῆς ἀκμῆς α αὐτοῦ. Συμπεράνατε ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

855. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κανονικὸν τετράεδρον εἶναι κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς. Κατὰ τί διαφέρει τὸ κανονικὸν τετράεδρον ἀπὸ μίαν κανονικὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ;

856. Πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως E . Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ διερχομένου ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ E τῆς βάσεως.

857. Πυραμίδα έχει έμβαδόν βάσεως E και ύψος $υ$. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάση εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τῆς κορυφῆς ($\alpha < υ$). Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ έμβαδὸν τῆς τομῆς ἐκ τῶν E , α καὶ $υ$.

858. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος μιᾶς τῶν παραπλευρῶν ἀκμῶν κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἐκ τῆς ἀκμῆς α τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους $υ = \frac{\alpha \sqrt{7}}{2}$.

859. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμίδα εἶναι α) τριγωνικὴ, β) ἑξαγωνικὴ.

860. Κολούρου πυραμίδος δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν βάσεων ἔχουν λόγον $1/3$ καὶ τὰ έμβαδὰ τῶν βάσεων εἶναι E_1 καὶ E_2 . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ έμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς. Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ, ἐὰν αἱ βάσεις εἶναι ἰσοπλευρά τρίγωνα μετ' πλευρὰς α καὶ 3α ἀντιστοίχως.

Β'.

861. Δείξατε ὅτι τὸ κανονικὸν τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

862. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμίδα έχει ἀκμὴν βάσεως 2α καὶ ὕψος $\frac{4\alpha}{3}$. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καὶ σχηματίζοντος γωνίαν 45° μετ' τὴν βάση. α) Δείξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ έμβαδὸν τῆς τομῆς.

863. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα, μετ' ἅλλα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος καὶ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τῆς ἄλλης βάσεως, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

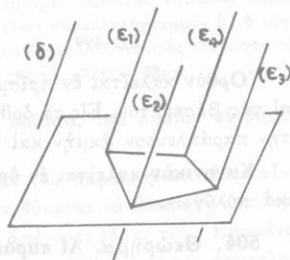
864. Κόλουρος πυραμίδα έχει έμβαδὰ βάσεων E_1 καὶ E_2 . Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ ὕψος εἰς δύο τμήματα μετ' λόγον m/n . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ έμβαδὸν τῆς τομῆς.

865. Εἰς κανονικὸν τετράεδρον $ΑΒΓΔ$ δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ μέσον E τοῦ ὕψους $ΑΗ$ μετ' τὰς κορυφὰς $B, Γ$ καὶ Δ , εἶναι ἀκμαὶ τρισορθογωνίου στερεοῦς γωνίας.

ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ

502. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια. Θεωροῦμεν μίαν διαδοχὴν εὐθειῶν (ϵ_1) , (ϵ_2) , (ϵ_3) , ..., (ϵ_n) παραλλήλων πρὸς μίαν διεύθυνσιν (δ) (σχ. 498). Ἀνὰ δύο, διαδοχικὰ σχηματίζουν ἐπιπέδους ζώνας, τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ἀπαρτίζει μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία καλεῖται **πρισματικὴ**. Αἱ ἐπίπεδοι ζῶναι καλοῦνται **ἑδραι** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καλοῦνται **ἀκμαὶ** αὐτῆς. Ἡ πρισματικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **κυρτή**, ἐὰν ἡ τομὴ τῆς ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου εἶναι κυρτὸν πολύγωνον, ἄλλως ἢ πρισματικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **μὴ κυρτή**.

Κάθετος τομὴ πρισματικῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὰς ἀκμάς τῆς. Ἡ κάθετος τομὴ εἶναι πολύγωνον.



Σχ. 498

503. Πρίσμα. Ἐὰν πρισματική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) (σχ. 499), ἀποκόπτεται στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται **πρίσμα**.

Αἱ παράλληλοι τομαὶ εἶναι πολύγωνα ($AB\Gamma\Delta$ καὶ $EZH\Theta$), τὰ ὁποῖα καλοῦνται **βάσεις** τοῦ πρίσματος, ἐνῶ αἱ λοιπαὶ ἔδραι τοῦ στερεοῦ καλοῦνται **παράπλευροι ἔδραι**.

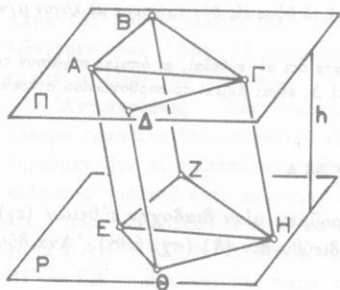
Κάθετος τομὴ πρίσματος καλεῖται ἡ κάθετος τομὴ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, ἐκ τῆς ὁποίας προῆλθεν τὸ πρίσμα.

Αἱ ἄκμαι τοῦ πρίσματος ($AE, BZ, \Gamma H$ καὶ $\Delta\Theta$), αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὰς βάσεις του, καλοῦνται **παράπλευροι ἄκμαί**.

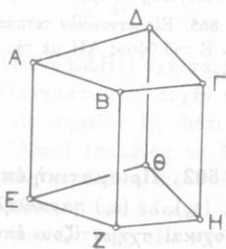
Ὑψος τοῦ πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

Ἐν πρίσμα χαρακτηρίζεται ὡς τριγωνικόν, τετραπλευρικόν, πενταγωνικόν κλπ. ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Διαγώνιον ἐπίπεδον καλεῖται ἐν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ δύο παραπλεύρους ἄκμας (AE καὶ ΓH), μὴ κειμένους ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἔδρας. Ἐν διαγώνιον ἐπίπεδον τέμνει τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος κατὰ διαγώνιους. Τὰ τριγωνικὰ πρίσματα δὲν ἔχουν οὐδένα διαγώνιον ἐπίπεδον.



Σχ. 499



Σχ. 500

Ὅρθον καλεῖται ἐν πρίσμα, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἄκμαί του εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις του. Εἰς τὰ ὀρθὰ μόνον πρίσματα τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ ἐκάστην παράπλευρον ἄκμην καὶ ἡ κάθετος τομὴ ἴση πρὸς ἐκάστην βάσιν του.

Κανονικόν καλεῖται ἐν ὀρθὸν πρίσμα, τοῦ ὁποῖου αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

504. Θεώρημα. Αἱ παράπλευροι ἔδραι κάθε πρίσματος εἶναι παραλλήλογραμμα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τυχὸν πρίσμα $AB\Gamma\Delta.EZH\Theta$ (σχ. 500). Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι $AE // BZ // \Gamma H // \Delta\Theta$. Ἐπὶ πλεόν εἶναι $AB // EZ$, ὡς τομαὶ παραλλή-

λων ἐπιπέδων (τῶν βάσεων) ὑπὸ τρίτου. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ABZE εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαὶ παράπλευροι ἔδραι τοῦ εἶναι παραλληλόγραμμα.

Πόρισμα I. Αἱ παράπλευροι ἄκμαὶ κάθε πρίσματος εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα II. Αἱ παράπλευροι ἔδραι ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθογώνια.

Πόρισμα III. Αἱ παράπλευροι ἔδραι κανονικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσα ὀρθογώνια.

505. Θεώρημα. Αἱ βάσεις κάθε πρίσματος εἶναι ἴσα πολύγωνα.

Ἀπόσειξις. Ἐστώ τυχὸν πρίσμα ABΓΔ.EZHΘ (σχ. 500). Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἄκμαὶ τοῦ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἔπεται ὅτι, ἐάν ἡ βάσις ABΓΔ μετατοπισθῇ κατὰ τὸν δείκτην ΑΕ, θὰ συμπίσῃ μετὰ τῆς ἄλλης βάσεως EZHΘ. Ἄρα αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

866. Ἐάν πρίσμα τηρῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς παραπλεύρους ἄκμας τοῦ, δείξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμον.

867. Δείξατε ὅτι ἡ τομὴ δύο διαγωνίων ἐπιπέδων πρίσματος εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὰς παραπλεύρους ἄκμας τοῦ.

868. Κανονικὸν τριγωνικὸν πρίσμα τέμνεται δι' ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καὶ διὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς τῆς ἄνω βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ἐκ τῆς ἀκμῆς α τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐάν τὸ ἐπίπεδον τομῆς σχηματίζῃ μὲ τὴν βάσιν γωνίαν 60° .

869. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐάν τὸ ἐπίπεδον τομῆς σχηματίζῃ γωνία 45° μὲ τὴν βάσιν.

870. Κανονικὸν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει ἀκμὴν βάσεως α καὶ ὕψος α. Τέμνομεν αὐτὸ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καὶ σχηματίζοντος γωνίαν 60° μὲ τὴν βάσιν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐκ τῆς ἀκμῆς α.

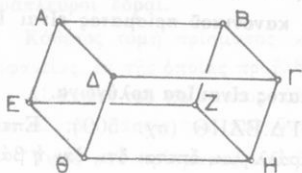
871. Δίδεται τριγωνικὸν πρίσμα ABΓ.ΔΕΖ. Τέμνομεν αὐτὸ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν ἔδραν ΒΓΖΕ. Δείξατε ὅτι α) ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμον β) ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραλλήλου ἔδρας ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῆς ἀκμῆς ΑΔ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου ἔδρας.

506. Παραλληλεπίπεδον καλεῖται ἓν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα (σχ. 501).

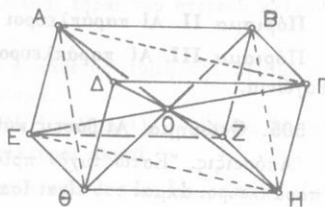
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι ὅλαι αἱ ἔδραι τοῦ παραλληλεπίπεδου εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἄρα τὸ παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὑπὸ τριπλῇ ἔννοιαν πρίσμα μὲ βάσεις δύο οἰασδήποτε ἀπέναντι ἔδρας τοῦ. Ἐπομένως αἱ ἀπέναντι ἔδραι τοῦ εἶναι ἴσα παραλληλόγραμμα καὶ αἱ ἄκμαὶ τοῦ ἀποτελοῦν τρεῖς ομάδας ἐκ τεσσάρων παραλλήλων καὶ ἴσων ἀκμῶν. Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ὕψη.

507. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι κάθε παραλληλεπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ$ τυχὸν παραλληλεπίπεδον (σχ. 502).



Σχ. 501



Σχ. 502

Αἱ ἄκμαί του $ΑΕ$ καὶ $ΓΗ$ εἶναι ἴσαι καὶ παραλλήλοι καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον $ΑΕΗΓ$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow$ αἱ διαγώνιοι $ΑΗ$ καὶ $ΓΕ$ τέμνονται εἰς σημεῖον $Ο$, τὸ ὁποῖον μάλιστα εἶναι καὶ μέσον ἐκάστης.

Ὁμοίως ἐκ τῶν παραλληλογράμμων $ΑΒΗΘ$ καὶ $ΑΖΗΔ$ ἔπεται ὅτι καὶ αἱ διαγώνιοι $ΒΘ$ καὶ $ΔΖ$ ἀντιστοίχως διέρχονται ἀπὸ τὸ μέσον $Ο$ τῆς διαγωνίου $ΑΗ$. Ἀρα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου $Ο$, τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον βάρους** τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον $Ο$, ὡς μέσον τῆς κάθε διαγωνίου τοῦ παραλληλεπιπέδου, εἶναι καὶ κέντρον συμμετρίας τοῦ στερεοῦ, ἐξ οὗ καὶ καλεῖται ἀπλῶς κέντρον αὐτοῦ.

508. Ὁρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται τὸ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποῖου αἱ ἔδραι εἶναι ὀρθογώνια (σχ. 503).

Αἱ στερεαὶ γωνίαι ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τρισσογώνιοι καὶ τὰ τρία ὕψη του εἶναι ἴσα πρὸς τρεῖς ἄκμάς του, αἱ ὁποῖαι συντρέχουν εἰς τὴν αὐτὴν στερεὰν γωνίαν, καλοῦνται δὲ καὶ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

509. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

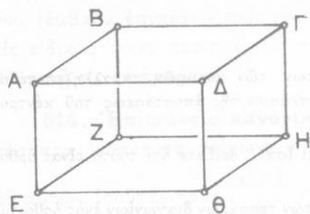
Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν α, β, γ αἱ διαστάσεις ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 504) καὶ $ΑΗ = \delta$ ἡ τυχούσα διαγώνιος αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΕΗ$ λαμβάνομεν: $\delta^2 = ΕΗ^2 + \gamma^2$ (1). Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΕΘΗ$ λαμβάνομεν: $ΕΗ^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται:

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

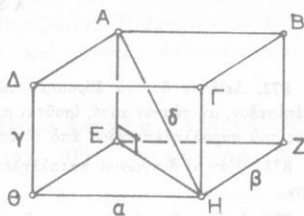
Τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς λοιπὰς διαγωνίους. Ἀρα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

510. Κύβος καλεῖται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἔδραι εἶναι τετράγωνα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι.



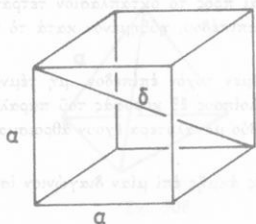
Σχ. 503



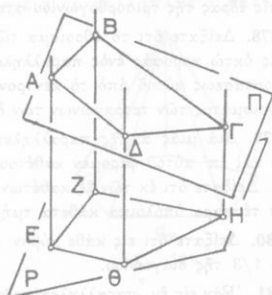
Σχ. 504

Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου (σχ. 505) καὶ δ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ, ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔπεται ὅτι $\delta = \alpha\sqrt{3}$.

511. Κολοβὸν πρίσμα. Ἐὰν πρισματική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ δύο μὴ παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 506), ἀποκόπτεται στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται κολοβὸν πρίσμα.



Σχ. 505

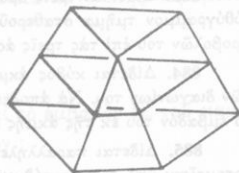


Σχ. 506

Αἱ τομαὶ ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) εἶναι πολύγωνα (ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ ὅχι ἴσα), τὰ ὁποῖα καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Αἱ λοιπαὶ ἔδραι καλοῦνται παράπλευροι ἔδραι καὶ εἶναι ἐν γένει τραπέζια. Ὑψος εἰς τὸ κολοβὸν πρίσμα δὲν ὀρίζεται.

512. Πρισματοειδὲς καλεῖται τὸ πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο παραλλήλους ἔδρας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **βάσεις** καὶ δὲν ἔχει ἄλλας κορυφὰς ἐκτὸς ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν βάσεων (σχ. 507).

Αἱ λοιπαὶ ἔδραι, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **παράπλευροι**, εἶναι τρίγωνα ἢ τραπέζια. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καλεῖται **ὑψος** τοῦ πρισματοειδοῦς.



Σχ. 507

Μεσαία τομή καλεῖται ἡ τομή τοῦ στερεοῦ ὑπὸ τοῦ μεσοπαρὰλλήλου ἐπιπέδου τῶν βάσεων αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

872. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν παραλληλεπιπέδου ἀπὸ ἐπίπεδον, μὴ τέμνον αὐτό, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.

873. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

874. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του.

875. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

876. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κύβος ἔχει κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων του.

877. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία $Oxyz$ καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας τυχὸν τμήμα OA μήκους δ . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τοῦ τμήματος ἐπὶ τὰς τρεῖς ἑδρας τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας παραμένει σταθερόν.

878. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἀπὸ τὰς ὀκτὼ κορυφᾶς ἐνὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τετραγώνων τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἡῤῥημένον κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

879. Διὰ μιᾶς ἀκμῆς παραλληλεπιπέδου θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον μὴ τέμνον τὸ στερεὸν καὶ ἐπ' αὐτοῦ φέρομεν καθέτου ἀπὸ τὰς ὑπολοίπους ἑξ κορυφᾶς τοῦ παραλληλεπιπέδου. Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν ἑξ καθέτων τμημάτων τὰ δύο μεγαλύτερα ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὰ τέσσαρα ὑπόλοιπα κάθετα τμήματα.

880. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε κύβον ἡ προβολὴ μιᾶς ἀκμῆς ἐπὶ μίαν διαγώνιον ἰσοῦται πρὸς τὸ $1/3$ τῆς διαγωνίου.

881. Ἐὰν εἰς ἓν παραλληλεπίπεδον δύο προσκείμενα ἑδραι εἶναι ἰσοδύναμοι, δείξατε ὅτι ἡ τομή τοῦ παραλληλεπιπέδου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῶν ἰσοδυναμῶν ἑδρῶν εἶναι ῥόμβος.

882. Κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος δίδονται τὰ μήκη α, β, γ τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν βαρυκέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ.

B'.

883. Δίδονται τρεῖς ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι $(e_1), (e_2), (e_3)$ καὶ μεταβλητὸν κατὰ θέσιν εὐθύγραμμον τμήμα σταθεροῦ μήκους δ . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν του ἐπὶ τὰς τρεῖς ἀσυμβάτους εὐθείας παραμένει σταθερόν.

884. Δίδεται κύβος ἀκμῆς α . Τέμνομεν αὐτὸν διὰ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου μιᾶς τῶν διαγωνίων του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομή εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ κύβου.

885. Δίδεται παραλληλεπίπεδον $AB\Gamma\Delta EZ\eta\Theta$. Δείξατε ὅτι ἡ διαγώνιος $A\eta$ τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $B\Delta E$ καὶ $\Gamma Z\Theta$.

886. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμαὶ νὰ εὐρίσκονται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

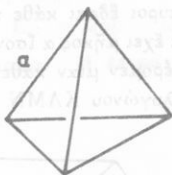
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

513. Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας πολυέδρου. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τυχόντος πολυέδρου, μετρώμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν ἑδρῶν του (ἐμβαδὰ ἐπιπέδων πολυγώνων) καὶ ἀθροίζομεν. Ἡ ἐργασία αὕτη ὅμως, εἰς εἰδικὰς τινὰς περιπτώσεις τυποποιεῖται καὶ συνεπῶς ἀπλουστεύεται, ὥς θὰ φανῇ εἰς τὰ ἐπόμενα.

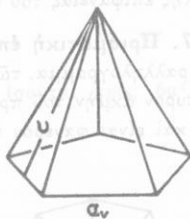
514. Ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α . Ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α (σχ. 508). Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι $4 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \alpha^2\sqrt{3}$, ἥτοι

$$E = \alpha^2\sqrt{3}$$

515. Ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος. Εἰς κανονικὴν πυραμίδα, ὅπου ὅλαι αἱ παράπλευροι ἑδραὶ εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μόνον τριγώνου καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ



Σχ. 508



Σχ. 509

πλῆθος ν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν. Ἐὰν α_v εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καὶ u εἶναι τὸ παράπλευρον ὕψος (σχ. 509), μία παράπλευρος ἑδρα ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2} \alpha_v u$ καὶ ἐπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι $\nu \frac{1}{2} \alpha_v u = \frac{\nu \alpha_v}{2} u = \frac{P_v}{2} u$, ὅπου P_v εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Ἀρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$E_{\pi} = \frac{P_v}{2} u$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν E_v τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$E_{ολ.} = \frac{P_v}{2} u + E_v$$

τῆς ὅλικῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

516. Ἐπιφάνεια κολούρου κανονικῆς πυραμίδος. Αἱ παράπλευροι ἔδραι μιᾶς κολούρου κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια. Ἐὰν α_v , β_v καὶ υ εἶναι αἱ βάσεις καὶ τὸ ὕψος ἀντιστοίχως ἐνδὸς ἐξ αὐτῶν (σχ. 510), τὸ ἐμβαδὸν τοῦ θα εἶναι $\frac{\alpha_v + \beta_v}{2} \cdot \upsilon$ καὶ ἐπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι : $\nu \cdot \frac{\alpha_v + \beta_v}{2} \cdot \upsilon = \frac{\nu\alpha_v + \nu\beta_v}{2} \cdot \upsilon = \frac{P_v + p_v}{2} \upsilon$, ὅπου P_v καὶ p_v εἶναι αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν βάσεων. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς κολούρου πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

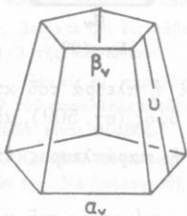
$$E_{\pi} = \frac{P_v + p_v}{2} \cdot \upsilon$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν προσθέσωμεν καὶ τὰ ἐμβαδὰ E_v καὶ ε_v τῶν δύο βάσεων, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

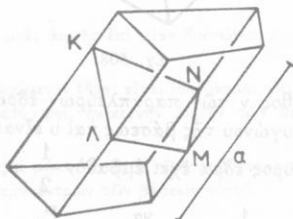
$$E_{ολ} = \frac{P_v + p_v}{2} \upsilon + E_v + \varepsilon_v$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ.

517. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια. Αἱ παράπλευροι ἔδραι κάθε πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος α ἴσον πρὸς τὴν παράπλευρον ἀκμὴν τοῦ πρίσματος (σχ. 511). Φέρομεν μίαν κάθετον τομὴν ΚΛΜΝ καὶ εἶναι φανερόν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ΚΛΜΝ εἶναι ὕψη



Σχ. 510



Σχ. 511

διὰ τὰς παραπλεύρους ἔδρας τοῦ πρίσματος. Τότε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, ὡς ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἐδρῶν, ἰσοῦται πρὸς $\alpha \cdot ΚΛ + \alpha \cdot ΛΜ + \alpha \cdot ΜΝ + \alpha \cdot ΝΚ = \alpha(ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΚ) = \alpha \cdot P$. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια παντὸς πρίσματος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$E_{\pi} = \alpha \cdot P$$

ὅπου α εἶναι ἡ παράπλευρος ἀκμὴ τοῦ πρίσματος καὶ P ἡ περίμετρος τῆς καθέτου τομῆς του.

Ἐάν εἰς τὴν προηγουμένην ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν καὶ τὰς δύο ἴσας βάσεις Β τοῦ πρίσματος, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$E_{o\lambda} = a \cdot P + 2B$$

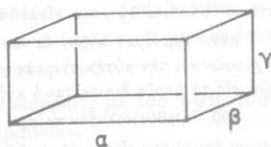
τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

518. Ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος. Οἱ τύποι τῆς προηγουμένης παραγράφου ἰσχύουν βεβαίως καὶ διὰ τὰ ὀρθὰ πρίσματα, ὅπου ὅμως ἡ περίμετρος Ρ τῆς καθέτου τομῆς εἶναι ἡ αὐτὴ μετὰ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως, ἐνῶ τὸ μῆκος α τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μετὰ τὸ ὕψος h τοῦ πρίσματος. Οὕτω λαμβάνομεν :

$$E_{\pi} = P \cdot h \quad \text{καὶ} \quad E_{o\lambda} = P \cdot h + 2B$$

519. Ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἐάν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β, γ (σχ. 512), ὁ τύπος τῆς προηγουμένης παραγράφου διὰ τὴν ὀλικὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ γίνεται : $E_{o\lambda} = (2\alpha + 2\beta)\gamma + 2\alpha\beta = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$, ἥτοι :

$$E_{o\lambda} = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$



Σχ. 512

Πόρισμα. Ἡ ἐπιφάνεια κύβου ἀκμῆς α ἰσοῦται πρὸς 6α².

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

887. Κανονικὴ ἐξαγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἀκμὴν βάσεως 5α καὶ ὕψος 6α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

888. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος τὸ παράπλευρον ὕψος ἰσοῦται πρὸς τὰ 5/6 τῆς ἀκμῆς τῆς βάσεως. Ἐάν ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι 384cm², νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τῆς.

889. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν πλευρᾶς α καὶ αἱ παράπλευροι ἔδραι τῆς σχηματίζουν μετὰ τῆς βάσεως γωνίας 30°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

890. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἀκμὴν βάσεως α καὶ παράπλευρον ἀκμὴν α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

891. Τετραέδρου ΑΒΓΔ αἱ ἔδραι ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α καὶ ἡ διέδρος ΒΓ' εἶναι 60°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

892. Ὄρθου τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μετὰ καθέτους πλευρᾶς 9α καὶ 12α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἐάν τὸ ὕψος τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τῆς τριγωνικῆς βάσεως.

893. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος μετὰ ὕψος 2α, ὅταν ἡ βάσις τοῦ εἶναι κανονικὸν α) τρίγωνον, β) τετράγωνον, γ) ἐξαγωνον, ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον ἀκτίνος α.

894. Ὄρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποῦ ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς

α καὶ τὸ ὕψος εἶναι 2α τέμνεται δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν ἄκρων τῶν ἀκμῶν τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ὅλική ἐπιφάνεια τῆς ἀποκοπτομένης πυραμίδος.

895. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλλήλεπιπέδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1,3,4 καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι 342cm^2 . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

896. Ἡ διαγώνιος κύβου εἶναι $\frac{12}{\sqrt{3}}$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνειά του.

B'.

897. Τριέδρος στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν Κ ἔχει τὰς ἑδρας τῆς 60° ἐκάστην. Ἐπὶ μιᾷς ἀκμῆς τῆς λαμβάνομεν τμήμα ΚΑ = α καὶ φέρομεν ἐπίπεδον $(\text{ΑΒΓ}) \perp \text{ΚΑ}$, τὸ ὅποῖον τέμνει τὰς ἄλλας ἀκμὰς τῆς τριέδρου εἰς τὰ Β καὶ Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου ΚΑΒΓ.

898. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο κανονικῶν πρισμάτων, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνον τοῦ ἐνός, ἐξαγώνου τοῦ ἄλλου, ἐγγεγραμμένα εἰς ἴσους κύκλους ἀκτίνος R καὶ τὰ ὕψη των εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ἀποστήματα τῶν βάσεων ἀντιστοιχῶς.

899. Τέμνομεν κύβον δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν ἄκρων τριῶν ἀκμῶν, συντρεχουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν στερεάν γωνίαν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν στερεῶν, εἰς τὰ ὅποια διαιρεῖται ὁ κύβος.

900. Ὁρθὸν κολοβὸν πρίσμα ἔχει βάσιν ἰσοπλευρὸν τρίγωνον πλευρᾶς α. Αἱ δύο παρά πλευροὶ ἀκμαὶ του εἶναι $\alpha(1 + \sqrt{3})$ καὶ ἡ τρίτη α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ.

901. Δείξατε ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου ἐνός τετραέδρου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὰ ἐδρῶν.

ΟΓΚΟΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

520. Θεώρημα. Εἰς κάθε τετράεδρον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἑδρας του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς ἑδρας.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράεδρον. Φέρομεν τὰ ὕψη ΑΕ, ΒΖ (σχ. 513) καὶ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $(\text{ΒΓΔ}) \cdot \text{ΑΕ} = (\text{ΑΓΔ}) \cdot \text{ΒΖ}$.

Φέρομεν $\text{ΑΗ} \perp \text{ΓΔ}$ καὶ $\text{ΒΘ} \perp \text{ΓΔ} \Rightarrow \text{ΕΗ} \perp \text{ΓΔ}$ καὶ $\text{ΖΘ} \perp \text{ΓΔ}$ (θεώρ. τριῶν καθέτων). Ἀρα αἱ γωνίαι $\widehat{\text{ΑΗΕ}}$ καὶ $\widehat{\text{ΒΘΖ}}$ εἶναι ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς διέδρου ΓΔ, $\Rightarrow \widehat{\text{ΑΗΕ}} = \widehat{\text{ΒΘΖ}}$. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ καὶ ΒΘΖ εἶναι ὅμοια $\Rightarrow$

$$(1) \quad \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΒΖ}} = \frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΒΘ}}.$$

Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ ἔχουν τὴν ΓΔ κοινήν. Ἀρα

$$(2) \quad \frac{(\text{ΑΓΔ})}{(\text{ΒΓΔ})} = \frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΒΘ}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται: } \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΒΖ}} &= \frac{(\text{ΑΓΔ})}{(\text{ΒΓΔ})} \Rightarrow (\text{ΒΓΔ}) \cdot \text{ΑΕ} \\ &= (\text{ΑΓΔ}) \cdot \text{ΒΖ}. \end{aligned}$$

521. Όρισμός. Όγκος τετραέδρου καλείται τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐκ τῶν ἐδρῶν του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος, ἐπὶ σταθερόν τινα συντελεστὴν k , ἐξαρτώμενον ἀπὸ τὴν αὐθαίρετον ἐκλογὴν τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν ὄγκων*.

Ὁ ὄγκος τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$ συμβολίζεται μὲ $(AB\Gamma\Delta)$ ἢ $V_{(AB\Gamma\Delta)}$ ἢ ἀπλῶς μὲ V , ὅταν προηγουμένως ἔχη μνημονευθῇ τὸ τετράεδρον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ ὄγκος. Οἱ αὐτοὶ συμβολισμοὶ ἐπεκτείνονται καὶ διὰ τὸν ὄγκον τυχόντος πολυέδρου.

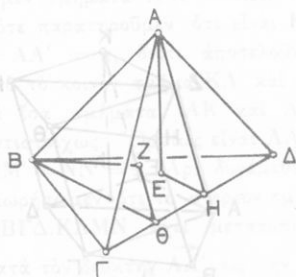
Δύο τετράεδρα ἢ ἐν γένει δύο στερεὰ μὲ ἴσους ὄγκους καλοῦνται ἰσοδύναμα.

Πόρισμα I. Δύο τετράεδρα, μὲ ἰσημετρικὰς βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

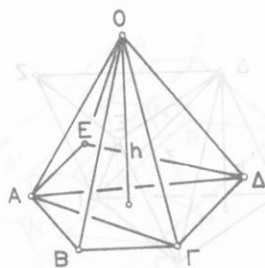
Πόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων μὲ ἰσημετρικὰς βάσεις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως (τοῦ συντελεστοῦ k) καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχῶν πρὸς τὰς βάσεις ὕψων.

Πόρισμα III. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων, μὲ ἴσα ὕψη, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχῶν πρὸς αὐτὰ βάσεων.

522. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $k \cdot B \cdot h$, ὅπου B ἡ βάση καὶ h τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.



Σχ. 513



Σχ. 514

Ἀπόδειξις. Ἐστω $O.AB\Gamma\Delta E$ τυχοῦσα πυραμὶς μὲ ὕψος h (σχ. 514). Τὴν διαιροῦμεν εἰς τετράεδρα μὲ τὰ ἐπίπεδα OAG , OAD . Τότε ἔχομεν :

$$(1) (O.AB\Gamma\Delta E) = (O.AB\Gamma) + (O.A\Gamma\Delta) + (O.A\Delta E).$$

Κατὰ τὸν ὅρισμόν ὅμως (§ 521) εἶναι : $(O.AB\Gamma) = k(AB\Gamma)h$, $(O.A\Gamma\Delta) = k(A\Gamma\Delta)h$, $(O.A\Delta E) = k(A\Delta E)h$ καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(O.AB\Gamma\Delta E) = k \{ (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta) + (A\Delta E) \} h = k (AB\Gamma\Delta E) h \Rightarrow$$

$$(O.AB\Gamma\Delta E) = k B \cdot h$$

(*) Ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ k ὁρίζεται κατωτέρω (§ 525) ἀφοῦ προηγουμένως ὁρίσθῃ ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν ὄγκων.

523. Θεώρημα. Κάθε τριγωνικόν πρίσμα δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $ABΓ.ΔΕΖ$ τυχόν τριγωνικόν πρίσμα (σχ. 515). Διαίρουμεν αὐτὸ εἰς τρία τετράεδρα :

$$(1) \quad (ABΓ.ΔΕΖ) = (Δ.ΑΒΓ) + (Γ.ΔΕΖ) + (Δ.ΒΓΕ)$$

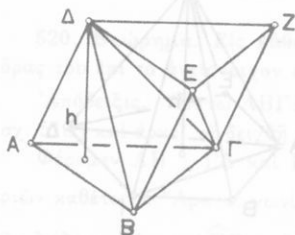
Παρατηροῦμεν ὅτι $(Δ.ΑΒΓ) = (Γ.ΔΕΖ)$, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Ἐπίσης εἶναι $(Γ.ΔΕΖ) = (Δ.ΒΓΕ)$, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς $ΓΕΖ$ καὶ $ΓΕΒ$ καὶ ἴσα ὕψη ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς τῶν $Δ$. Ἀρα τὸ τριγωνικόν πρίσμα διαίρεται εἰς τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(ABΓ.ΔΕΖ) = 3(Δ.ΑΒΓ)$$

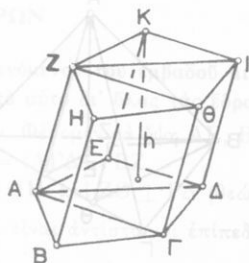
Πόρισμα. Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς $3k \cdot B \cdot h$, ὅπου B ἡ βάση του καὶ h τὸ ὕψος του.

224. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος τυχόντος πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἐπὶ τὸν σταθερὸν συντελεστὴν $3k$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $ABΓΔΕ.ΖΗΘΙΚ$ τυχόν πρίσμα μὲ ὕψος h (σχ. 516). Διὰ μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς του τῆς AZ φέρομεν ὅλα τὰ διαγώνια ἐπίπεδα καὶ τὸ πρίσμα διαίρεται εἰς τριγωνικά πρίσματα.



Σχ. 515



Σχ. 516

Τότε ἔχομεν : $(ABΓ...Κ) = 3k(ABΓ)h + 3k(ΑΓΔ)h + 3k(ΑΔΕ)h = 3k(ABΓΔΕ)h$. Ἀρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $3kBh$, ὅπου B ἡ βάση τοῦ πρίσματος.

Πόρισμα. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις $a, b, γ$ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $3kabγ$.

525. Μονὰς μετρήσεως τῶν ὄγκων. Προσδιορισμὸς συντελεστοῦ k . Πρακτικοὶ λόγοι ἔχουν ἐπιβάλλει ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων τὴν κυβικήν, ἥτοι ἓνα κύβον μὲ ἀκμὴν τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ὁ ὄγκος

τῆς μονάδος μετρήσεως, κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα, ἰσοῦται πρὸς $3k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ καὶ βεβαίως πρέπει νὰ εἶναι $3k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Ἄρα :

$$k = \frac{1}{3}$$

Πόρισμα. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἔπεται ὅτι :

i) Ὁ ὄγκος πυραμίδος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \frac{1}{3} Bh$.

ii) Ὁ ὄγκος πρίσματος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = Bh$, ὅπου B εἶναι ἡ βάσις τοῦ στερεοῦ καὶ h τὸ ὕψος του.

iii) Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου μὲ διαστάσεις a, β, γ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = a\beta\gamma$.

iv) Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου ἀκμῆς a δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = a^3$

526. Θεώρημα. Κάθε πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρίσμα μὲ βάσιν τὴν κάθετον τομὴν καὶ ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμὴν του.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta.A'B'\Gamma'\Delta'$ ἐν (πλάγιον) πρίσμα μὲ παράπλευρον ἀκμὴν $AA' = a$ καὶ $K\Lambda MN$ μία κάθετος τομὴ αὐτοῦ (σχ. 517). Προεκτείνοντες τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν λαμβάνομεν τμήματα $A'K' = AK, B'\Lambda' = BL, \Gamma'M' = \Gamma M$ καὶ $\Delta'N' = \Delta N$.

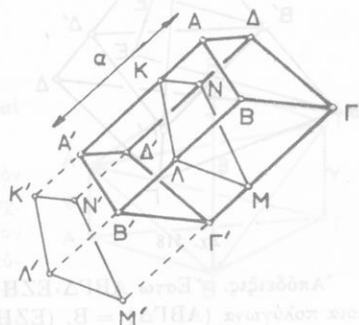
Τότε παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $KK' = AA' = a$, διότι ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ κοινὸν τμήμα KA' καὶ ἀπὸ τὰ ἴσα τμήματα AK καὶ $A'K'$ ἀντιστοίχως. Ὁμοίως εἶναι $\Lambda\Lambda' = MM' = NN' = a$. Ἄρα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ στερεὸν τμήμα $AB\Gamma\Delta.K\Lambda MN$ ἔχει μετατοπισθῇ

κατὰ τὸν δεσθετὴν AA' εἰς τὴν θέσιν $A'B'\Gamma'\Delta'.K'\Lambda'M'N'$ καὶ ἐπομένως εἶναι :

$$(AB\Gamma\Delta.A'B'\Gamma'\Delta') = (K\Lambda MN.K'\Lambda'M'N') \quad (1).$$

Ἄλλὰ τὸ $K\Lambda MN.K'\Lambda'M'N'$ εἶναι ὀρθὸν πρίσμα,

μὲ βάσιν τὴν κάθετον τομὴν $(K\Lambda MN) = B$ καὶ ὕψος τὴν ἀκμὴν $KK' = a$. Ἐπομένως εἶναι $(K\Lambda MN.K'\Lambda'M'N') = B \cdot a$ καὶ τότε ἡ σχέση (1) γράφεται : $(AB\Gamma\Delta.A'B'\Gamma'\Delta') = B \cdot a$.



Σχ. 517

227. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν στερεὰν γωνίαν ἴσην, ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας στερεὰς γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ τὰ δύο τετράεδρα (χ. 518) τοποθετημένα εἰς τρόπον, ὥστε νὰ συμπίπτουν αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνία εἰς τὸ A . Φέρομεν $BE \perp (A\Gamma\Delta)$ καὶ $B'E' \perp (A'\Gamma'\Delta')$. Τότε θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{\frac{1}{3}(A\Gamma\Delta) BE}{\frac{1}{3}(A'\Gamma'\Delta') B'E'} = \frac{(A\Gamma\Delta) BE}{(A'\Gamma'\Delta') B'E'}$$

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ καὶ $A'\Gamma'\Delta'$ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν $\widehat{A}$, ἔχομεν

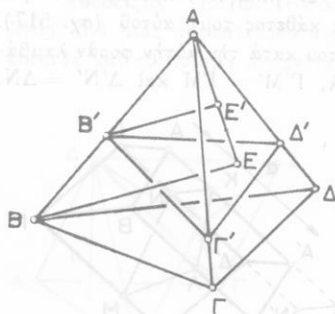
$$\frac{(A\Gamma\Delta)}{(A'\Gamma'\Delta')} = \frac{A\Gamma \cdot A\Delta}{A'\Gamma' \cdot A'\Delta'}, \text{ ἐνῶ ἀπὸ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα } ABE$$

καὶ $AB'E'$ λαμβάνομεν $\frac{BE}{B'E'} = \frac{AB}{AB'}$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

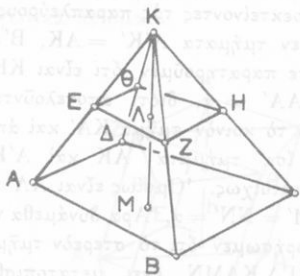
$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{A\Gamma \cdot A\Delta}{A'\Gamma' \cdot A'\Delta'} \cdot \frac{AB}{AB'} \Rightarrow \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{AB \cdot A\Gamma \cdot A\Delta}{AB' \cdot A'\Gamma' \cdot A'\Delta'}$$

528. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$V = \frac{1}{3} (B + \sqrt{B\beta} + \beta)h.$$



Σχ. 518



Σχ. 519

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta \cdot EZH\Theta$ μία κολούρος πυραμὶς με βάσεις τὰ ὅμοια πολύγωνα $(AB\Gamma\Delta) = B$, $(EZH\Theta) = \beta$ καὶ ὕψος h (σχ. 519).

Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον K , εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς, καὶ τὸ κάθετον τμήμα $K\Lambda M$ ἐπὶ τὰς βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος. Ὁ ὄγκος V αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὀγκῶν τῶν δύο πυραμίδων $K \cdot AB\Gamma\Delta$ καὶ $K \cdot EZH\Theta$, ἥτοι εἶναι

$$(1) \quad V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot KM - \frac{1}{3} \cdot \beta \cdot K\Lambda$$

$$\text{Γνωρίζομεν ὅτι (§ 499)} \quad \frac{B}{\beta} = \frac{KM^2}{K\Lambda^2} \Rightarrow$$

$$(2) \quad \frac{KM}{KL} = \frac{V\bar{B}}{V\bar{\beta}}.$$

$$\text{Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν ἄφ' ἑνὸς μὲν} \quad \frac{KM}{KM - KL} = \frac{V\bar{B}}{V\bar{B} - V\bar{\beta}} \Rightarrow$$

$$\frac{KM}{h} = \frac{V\bar{B}}{V\bar{B} - V\bar{\beta}} \Rightarrow KM = \frac{h V\bar{B}}{V\bar{B} - V\bar{\beta}}, \text{ ἄφ' ἑτέρου δὲ} \quad \frac{KM - KL}{KL} =$$

$$\frac{V\bar{B} - V\bar{\beta}}{V\bar{\beta}} \Rightarrow \frac{h}{KL} = \frac{V\bar{B} - V\bar{\beta}}{V\bar{\beta}} \Rightarrow KL = \frac{h V\bar{\beta}}{V\bar{B} - V\bar{\beta}}. \quad \text{Ἀντικαθι-}$$

στῶμεν ἐξ αὐτῶν τὰς τιμὰς τῶν KM καὶ KL εἰς τὴν σχέσιν (1) καὶ λαμβάνομεν :

$$V = \frac{1}{3} \left[B \frac{h V\bar{B}}{V\bar{B} - V\bar{\beta}} - \beta \frac{h V\bar{\beta}}{V\bar{B} - V\bar{\beta}} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{V\bar{B}^3 - V\bar{\beta}^3}{V\bar{B} - V\bar{\beta}} \right] h =$$

$$\frac{1}{3} (V\bar{B}^2 + V\bar{B}\bar{\beta} + V\bar{\beta}^2) h = \frac{1}{3} (B + V\bar{B}\bar{\beta} + \beta) h, \text{ ἤτοι :}$$

$$V = \frac{1}{3} (B + V\bar{B}\bar{\beta} + \beta)h$$

529. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{1}{3} B(a + \beta + \gamma),$$

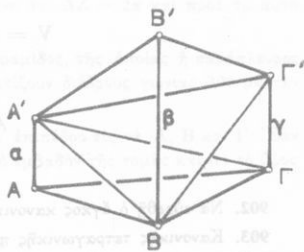
ὅπου B εἶναι ἡ κάθετος τομῇ αὐτοῦ καὶ α, β, γ αἱ παράπλευροι ἄκμαι του.

Ἀπόδειξις. i) Ἐστω ὅτι τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα $AB\Gamma.A'B'\Gamma'$ (σχ. 520) εἶναι ὀρθόν. Τότε ἡ βάσις του $(AB\Gamma) = B$ εἶναι καὶ κάθετος τομῇ αὐτοῦ καὶ ὁ ὄγκος του V ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, ὡς ἐξῆς :

$$(1) \quad V = (A'.AB\Gamma) + (A'.BB'\Gamma') + (A'.B\Gamma\Gamma').$$

$$\text{Ἐκτελοῦμεν τοὺς ἐξῆς προφανεῖς μετασχηματισμοὺς (§ 521 πόρ. I): } (A'.BB'\Gamma') = (A.BB'\Gamma') = (\Gamma'.ABB') = (\Gamma.ABB') = (B'.AB\Gamma) = \frac{1}{3} B\beta \text{ καὶ}$$

$$(A'.B\Gamma\Gamma') = (A.B\Gamma\Gamma') = (\Gamma'.AB\Gamma) = \frac{1}{3} B\gamma. \text{ Ἐπεὶδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι}$$



Σχ. 520

$$(A'.AB\Gamma) = \frac{1}{3} B\alpha, \text{ ή σχέσις (1) γράφεται: } V = \frac{1}{3} B\alpha + \frac{1}{3} B\beta + \frac{1}{3} B\gamma \Rightarrow$$

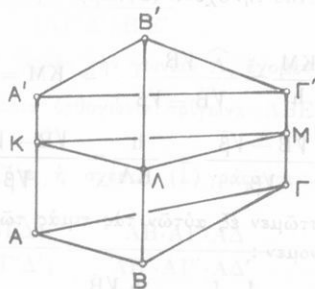
$$V = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma).$$

ii) Έστω ότι το τριγωνικόν κολοβόν πρίσμα δὲν εἶναι ὀρθόν (σχ. 521). Φέρομεν μίαν κάθετον τομήν (ΚΛΜ) = Β αὐτοῦ καὶ τότε τὸ στερεὸν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο ὀρθῶν κολοβῶν τριγωνικῶν πρισμάτων με κοινὴν βάσιν τὴν (ΚΛΜ) = Β, ἥτοι :

$$(2) V = (ΚΛΜ.ΑΒΓ) + (ΚΛΜ.Α'Β'Γ').$$

Κατὰ τὸ προηγούμενον θὰ ἔχωμεν :

$$(ΚΛΜ.ΑΒΓ) = \frac{1}{3} B(ΚΑ + ΛΒ + ΜΓ)$$



Σχ. 521

$$\text{καὶ } (ΚΛΜ.Α'Β'Γ') = \frac{1}{3} B(ΚΑ' + ΛΒ' + ΜΓ'), \text{ ἐπομένως ἡ σχέσις (2)}$$

γράφεται :

$$V = \frac{1}{3} B(ΚΑ + ΛΒ + ΜΓ) + \frac{1}{3} B(ΚΑ' + ΛΒ' + ΜΓ') = \frac{1}{3} B(ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ') = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma), \text{ ἥτοι}$$

$$V = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

902. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

903. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ αἱ παράπλευροι ἔδραι τῆς σχηματίζουν γωνίας 45° μετὰ τὴν βάσιν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς.

904. Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι (ϵ_1) , (ϵ_2) , (ϵ_3) , ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπὶ τῆς (ϵ_1) ὀλισθαίνει τμήμα ΑΒ σταθεροῦ μήκους καὶ ἐπὶ τῶν (ϵ_2) καὶ (ϵ_3) δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ μεταβλητοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι σταθερός.

905. Ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου νὰ ἐκφρασθῇ α) ἐκ τοῦ ὕψους του h, β) ἐκ τῆς ἐπιφανείας του Ε.

906. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{17}}{2}$.

907. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδος ή άκμή της βάσεως είναι α και ή παρά- πλευρος επιφάνεια είναι διπλάσια της βάσεως. Νά υπολογισθί ή όγκος της πυραμίδος.

Β'.

908. Δείξατε ότι ή όγκος τετραέδρου ισοῦται πρὸς τὸ $1/3$ τοῦ γινομένου μιᾶς άκμης του ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ στερεοῦ εἰς ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν άκμὴν ταύτην.

909. Ἐάν τετραέδρου αἱ δύο ἀπέναντι άκμαὶ εἶναι ὀρθογώνιοι, δείξατε ὅτι ή όγκος του ισοῦται πρὸς $1/6$ τοῦ γινομένου τῶν άκμῶν τούτων, ἐπὶ τὴν ἐλάχιστην ἀπόστασιν αὐτῶν.

910. Ἐάν τετραέδρου ή μία κορυφή προβάλλεται ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἔδραν εἰς τὸ ὀρ- θόκεντρον αὐτῆς, δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον δύο οἰωνδήποτε άκμῶν τοῦ τετραέδρου ἐπὶ τὴν κοινὴν κάθετον αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῶν άκμῶν τούτων.

911. Τετραέδρου $ΑΒΓΔ$ αἱ ἔδραι $ΑΒΓ$ καὶ $ΔΒΓ$ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, ή άκμή $ΑΔ = \alpha$ καὶ ή διεδρος $\widehat{ΒΓ}$ εἶναι 60° . Νά υπολογισθί ή όγκος του.

912. Ἐντὸς τετραέδρου νά εὑρεθῇ σημεῖον K τοιοῦτον, ὥστε τὰ τετράεδρα με κορυ- φὴν τὸ K καὶ βάσεις τὰς ἔδρας τοῦ τετραέδρου, νά εἶναι ἰσοδύναμα.

913. Πυραμίδος $K.ΑΒΓΔ$ ή βάσις $ΑΒΓΔ$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Δείξατε ὅτι ή όγκος της ισοῦται πρὸς τὰ $2/3$ τῆς ἔδρας KAB ἐπὶ τὴν ἐλάχιστην ἀπόστασιν τῶν άκμῶν KA καὶ $ΓΔ$.

914. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδος ή άκμή της βάσεως εἶναι 2α καὶ αἱ παρά- πλευροι ἔδραι σχηματίζουν με τὴν βάσιν γωνίας 15° . Νά υπολογισθί ή όγκος της.

915. Δίδεται τετράγωνον $ΑΒΓΔ$ πλευρᾶς α . Ἀπὸ τὰς κορυφάς A καὶ Γ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος του καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $ΑΕ = ΑΓ'$ καὶ $\Gamma Z = AB$. Νά υπολογισθί ή όγκος τοῦ στερεοῦ $ΑΒΓΔΕΖ$.

916. Δίδεται τετράγωνον $ΑΒΓΔ$ πλευρᾶς α . Ἀπὸ τὰς κορυφάς του B καὶ Δ φέρομεν κάθετα τμήματα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου $BE = 3\alpha$, $\Delta Z = 2\alpha$ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Νά υπολογισθί ή όγκος τοῦ τετραέδρου $ΑΓΕΖ$.

917. Νά εὑρεθῇ ή όγκος κανονικῆς ἐξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ή παράπλευρος επιφάνεια εἶναι $12\alpha^2$ καὶ αἱ παράπλευροι ἔδραι σχηματίζουν διέδρους γωνίας 30° με τὴν βάσιν.

918. Τρισσορθογώνιος στερεά γωνία K τέμνεται δι' ἐπίπεδου εἰς τὰ A, B καὶ Γ . Ἐάν $KA = 2\alpha$, $KB = 3\alpha$ καὶ $K\Gamma = 4\alpha$, νά υπολογισθῇ i) τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ ii) τὸ ὕψος $K\Pi$ τοῦ τετραέδρου $KAB\Gamma$.

Α'.

919. Νά εὑρεθῇ ή όγκος πρίσματος, τοῦ ὁποίου ή βάσις εἶναι κανονικὸν α) τρίγω- νον, β) τετράγωνον, γ) ἐξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ακτίνος R καὶ ἔχει ὕψος δι- πλάσιον τῆς άκμης τῆς βάσεως.

920. Ὅρθου τριγωνικοῦ πρίσματος ή βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον με καθέτους πλευρᾶς 20α καὶ 15α , τὸ δὲ ὕψος του ισοῦται με τὴν ὑποτείνουσαν τῆς τριγωνικῆς βάσεως. Νά εὑρεθῇ ή όγκος αὐτοῦ.

921. Τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ αἱ παρά- πλευροι άκμαὶ του εἶναι κεκλιμένα κατὰ 60° πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του.

922. Δείξτε ότι ο όγκος τριγωνικού πρίσματος ισούται προς το ήμισυ του γινομένου μιας παραπλεύρου έδρας του, επί την απόστασιν τής απέναντι άκμης απ' αυτήν.

923. Νά εύρεθί ό λόγος τών όγκων δύο πρισμάτων, τών όποίων αί βάσεις είναι κανονικόν έξάγωνον τοῦ ενός, τρίγωνον τοῦ άλλου, έγγεγραμμένα εις ίδους κύκλους ακτίνος R, τὰ δὲ ύψη των ίσα πρὸς τὰ ἀποστήματα τών βάσεων ἀντιστοίχως.

924. Δείξτε ότι τὸ ἄθροισμα τών όγκων τών δύο πυραμίδων, με κοινήν κορυφήν τυχόν σημείον έσωτερικόν δοθέντος πρίσματος καί βάσεις τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος, είναι σταθερόν.

925. Νά εύρεθί ό όγκος όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ όποίου αί διαστάσεις ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόδον με ἄθροισμα 27cm καί τοῦ όποίου ἡ ἐπιφάνεια είναι 454cm².

926. Νά εύρεθί ό όγκος τοῦ κύβου, τοῦ όποίου ἡ ἐπιφάνεια είναι 486cm².

927. Νά ὑπολογισθί ό όγκος κύβου α) ἐκ τῆς διαγωνίου του δ καί β) ἐκ τῆς ἐπιφανείας του E.

928. Αἱ διαστάσεις όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ἀνάλογοι τών ἀριθμῶν 2,3,4 καί ό όγκος του είναι 648cm³. Νά εύρεθῶν αἱ διαστάσεις του.

929. Ἐπὶ τών άκμῶν τών συντρεχουσῶν εις τὴν αὐτὴν κορυφὴν A κύβου άκμῆς α λαμβάνομεν τμήματα AB' = ΑΓ' = ΑΔ' = 2α/3. Νά ὑπολογισθί ό λόγος τών όγκων τοῦ κύβου καί τοῦ τετραέδρου AB'T'D'.

B'.

930. Ὁρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις είναι 3α, 4α, 5α. Νά ὑπολογισθί ό όγκος του, ἐάν ὡς μονὰς μετρήσεως τών όγκων ληθθί ό όγκος κανονικοῦ τετραέδρου με άκμην 2α.

931. Νά ὑπολογισθῶν αἱ διαστάσεις όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐάν ἡ διαγώνιος αὐτοῦ είναι 26cm, ἡ διαγώνιος μιᾶς έδρας του 10 cm καί ἡ ἐπιφάνειά του 768cm².

932. Νά εύρεθί ό λόγος τών όγκων παραλληλεπιπέδου καί τοῦ τετραέδρου τοῦ όποίου τρεῖς άκμαί συντρέχουν εις μίαν κορυφὴν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

933. Δοθὲν παραλληλεπίπεδον νά διαιρεθί εις τρία ίσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδων άγομένων ἐκ μιᾶς άκμῆς του.

934. Νά εύρεθί ό λόγος τών όγκων όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί τοῦ όκταέδρου με κορυφὰς τὰ κέντρα τών έδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

935. Δείξτε ότι οἱ όγκοι δύο παραλληλεπιπέδων, με μίαν στερεάν γωνίαν κοινήν, είναι ὅπως τὰ γινόμενα τών άκμῶν τών περιεχουσῶν τὴν κοινήν στερεάν γωνίαν.

A'.

936. Δείξτε ότι ό όγκος κολούρου πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου $V = \frac{1}{3} B(1 + \lambda + \lambda^2)h$, ἐνθα λ είναι ό λόγος ομοιότητος τών δύο βάσεων.

937. Κανονική τετραγωνική πυραμὶς, με άκμην βάσεως 2α καί ύψος α√3, τέμνεται δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάση καί διερχομένου ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ύψους. Νά ὑπολογισθί ἡ όλική ἐπιφάνεια καί ό όγκος τῆς σχηματιζομένης κολούρου πυραμίδος.

938. Ὁρθὸν κολοβὸν πρῶσιμα ἔχει βάση ίσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καί παραπλεύρους άκμὰς α, 2α, 3α. Νά ὑπολογισθί ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καί ό όγκος του.

939. Δείξτε ότι ο όγκος κολοβού τριγωνικού πρίσματος ισοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κ. βάρους τῶν βάσεων.

B'.

940. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ βάσις ἔχει πλευρὰν 2α καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ σχηματίζουν γωνίας 60° μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν βάσιν πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν οὕτως, ὥστε ἡ ἀποκοπτομένη κόλυρος πυραμὶς νὰ ἔχη ὄγκον $\frac{104\alpha^3\sqrt{3}}{81}$.

941. Τριγωνικοῦ πρίσματος αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἔχουν μῆκος 20cm. Ἐπὶ δύο παραπλεύρων ἀκμῶν λαμβάνομεν σημεῖα Η καὶ Θ, ἀπέχοντα ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς τῆς αὐτῆς βάσεως ἀποστάσεις 12cm καὶ 15cm. Ἐπὶ τῆς τρίτης παραπλεύρου ἀκμῆς νὰ ὀρισθῇ σημεῖον Ι οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδον (ΗΘΙ) νὰ διαιρῇ τὸ πρίσμα εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

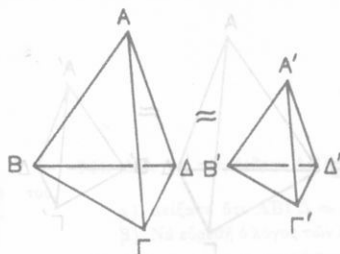
942. Δείξτε ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου ισοῦται πρὸς τὸ $1/4$ τοῦ γινομένου τῆς καθέτου τομῆς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

943. Δείξτε ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου ισοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ.

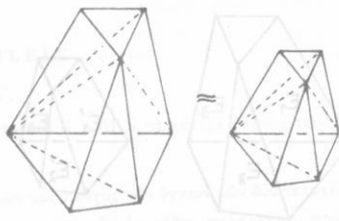
ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

530. "Όμοια τετράεδρα. Ὅρισμός. Δύο τετράεδρα καλοῦνται ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς ἑδρας τῶν ὁμοίας μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμοίως τοποθετημένας (σχ. 522).

Ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν τριγωνικῶν ἐδρῶν εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλα τὰ ζεύγη τῶν ὁμοίων ἐδρῶν καὶ καλεῖται λόγος ὁμοιότητος τῶν τετράεδρων. Αἱ ἀντίστοιχοι στερεαί, ὡς καὶ αἱ διέδροι γωνίαι τῶν δύο τετράεδρων, εἶναι ἴσαι.



Σχ. 522



Σχ. 523

531. "Όμοια πολύεδρα. Ὅρισμός. Δύο πολύεδρα καλοῦνται ὅμοια, ἐὰν δύνανται νὰ διαιρεθοῦν δι' ἐπιπέδων ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς τῶν ἀντιστοιχῶς εἰς ὅμοια τετράεδρα καὶ ὁμοίως τοποθετημένα (σχ. 523).

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐπονται τὰ ἑξῆς :

1) Ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ

ένος πολυέδρου (ἔδραι, κορυφαί, ἀκμαί, γωνίαι κλπ.) πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Δύο ἀντίστοιχα στοιχεῖα καλοῦνται **ὁμόλογα**.

ii) Αἱ ἀντίστοιχοι ἔδραι εἶναι ὅμοια πολύγωνα μετὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.

iii) Αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων (ἐπίπεδοι, διέδροι, στερεαί) εἶναι ἴσαι.

iv) Ἡ σχέσηις τῆς ὁμοιότητος δύο πολυέδρων, ἡ ὁποία συμβολίζεται μετὰ $\approx$, εἶναι σχέσηις ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἥτοι :

$$\alpha) (\Sigma) \approx (\Sigma),$$

$$\beta) (\Sigma_1) \approx (\Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_2) \approx (\Sigma_1),$$

$$\gamma) (\Sigma_1) \approx (\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2) \approx (\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1) \approx (\Sigma_3)$$

"Ἄρα ἡ σχέσηις τῆς ὁμοιότητος εἶναι σχέσηις ἰσοδυναμίας.

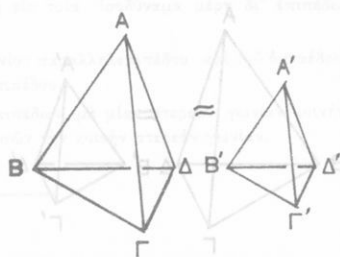
532. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια πολυέδρα μετὰ λόγον ὁμοιότητος λ (σχ. 524) καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἔδραι ἔχουν ἐμβαδὰ $E_1, E_2, \dots, E_n$ καὶ $E'_1, E'_2, \dots, E'_n$ ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ αἱ ἀντίστοιχοι ἔδραι εἶναι ὅμοια πολύγωνα μετὰ λόγον ὁμοιότητος λ , ἔχομεν :

$$\frac{E_1}{E'_1} = \lambda^2, \frac{E_2}{E'_2} = \lambda^2, \dots, \frac{E_n}{E'_n} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \dots = \frac{E_n}{E'_n} \\ = \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_n}{E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n} = \frac{E}{E'}, \text{ ὅπου } E \text{ καὶ } E' \text{ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων. Ἄρα εἶναι } \frac{E}{E'} = \lambda^2.$$



Σχ. 524



Σχ. 525

533. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν δύο ὁμοίων τετραέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τετραέδρα $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ (σχ. 525) καὶ ἔστω λ ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν. Τότε θὰ εἶναι : $\frac{AB}{A'B'}$

$$= \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \lambda \Rightarrow AB = \lambda A'B', A\Gamma = \lambda A'\Gamma', A\Delta = \lambda A'\Delta'. \text{ Έπει-}$$

δή αἱ τριέδροι γωνίαι $\hat{A}$ καὶ $\hat{A}'$ εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι (§ 527) :

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{AB \cdot A\Gamma \cdot A\Delta}{A'B' \cdot A'\Gamma' \cdot A'\Delta'} = \frac{\lambda A'B' \cdot \lambda A'\Gamma' \cdot \lambda A'\Delta'}{A'B' \cdot A'\Gamma' \cdot A'\Delta'} = \lambda^3. \text{ Ἄρα}$$

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \lambda^3.$$

534. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότη-
τος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὁμοία πολυέδρα (σχ. 526), τῶν ὁποίων οἱ ὀγκοὶ εἶναι V καὶ V' . Ἐκ δύο ὁμο-
λόγων κορυφῶν A καὶ A' φέρομεν ἐ-
πίπεδα καὶ διαιροῦμεν τὰ δύο στερεὰ
εἰς ζεύγη ὁμοίων τετραέδρων μετὸν αὐ-
τὸν λόγον ὁμοιότητος λ , ἔστωσαν δὲ $V_1, V_2, \dots, V_n$ καὶ $V'_1, V'_2, \dots, V'_n$ οἱ
ὀγκοὶ αὐτῶν. Τότε θὰ εἶναι (§ 533) :

$$\frac{V_1}{V'_1} = \lambda^3, \frac{V_2}{V'_2} = \lambda^3, \dots, \frac{V_n}{V'_n} = \lambda^3 \Rightarrow \lambda^3 = \frac{V_1}{V'_1} = \frac{V_2}{V'_2} = \dots = \frac{V_n}{V'_n} =$$

$$\frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V'_1 + V'_2 + \dots + V'_n} = \frac{V}{V'}.$$

Ἄρα εἶναι :

$$\frac{V}{V'} = \lambda^3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A.

944. Δίδεται τετραέδρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστωσαν K, Λ, M, N τὰ κέντρα βάρους τῶν ἐδρῶν
του.

α) Δείξατε ὅτι $AB\Gamma\Delta \approx K\Lambda M N$.

β) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο τετραέδρων.

945. Δίδεται πυραμὶς $K.AB\Gamma\Delta$. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν
βάσιν της καὶ διερχομένου ἀπὸ τοῦ μέσου A' τῆς ἀκμῆς KA .

α) Δείξατε ὅτι σχηματίζεται νέα πυραμὶς ὁμοία τῆς δοθείσης.

β) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο
πυραμίδων.

946. Ἡ βάσις πυραμίδος ἔχει ἐμβαδὸν 144cm^2 . Τέμνομεν με ἐπίπεδον παράλληλον
τῆς βάσεως εἰς ἀπόστασιν 4cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς καὶ ἡ τομὴ ἔχει ἐμβαδὸν 64cm^2 . Νὰ ὑπο-
λογισθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

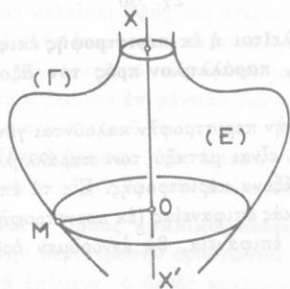
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

535. 'Ορισμοί.

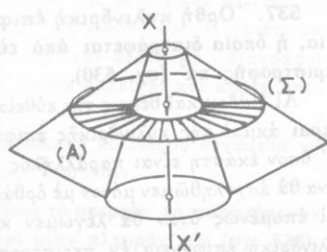
i) Κάθε γραμμή (Γ), περιστρεφόμενη περί άξονα xx' κατά μίαν πλήρη γωνίαν (360°), διαγράφει επιφανείαν Ε, ή όποία καλεΐται **επιφάνεια εκ περιστροφής** (σχ. 527).

ii) Κάθε σχήμα (Α), στρεφόμενον περί άξονα xx' κατά μίαν πλήρη γωνίαν, δημιουργεί στερεόν (Σ), τό όποϊον καλεΐται **στερεόν εκ περιστροφής** (σχ. 528).

Σημείωσις. Είς τά έπόμμενα θά λέγωμεν χάριν συντομίας «σχήμα στρέφεται περί άξονα» καί θά έννοοϋμεν «σχήμα στρέφεται πλήρη στροφήν περί άξονα».



Σχ. 527



Σχ. 528

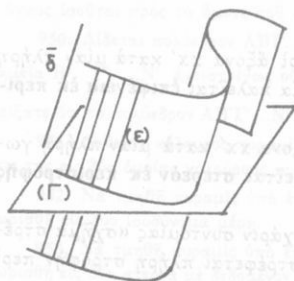
Πόρισμα I. Έκ τυχόντος σημείου Μ τής γραμμής (Γ) (σχ. 527) φέρομεν $MO \perp xx'$. Είς την περιστροφήν τό τμήμα ΜΟ παραμένει σταθερόν κατά μέγεθος, τό σημείον Ο σταθερόν κατά θέσιν καί έπομένως τό σημείον Μ διαγράφει κύκλον (Ο,ΟΜ), τοϋ όποϊού τό έπίπεδον είναι κάθετον επί τόν άξονα περιστροφής. Άρα ή τομή επιφανείας εκ περιστροφής υπό έπιπέδου κάθετου επί τόν άξονα είναι κύκλος.

Πόρισμα II. Η τομή στερεοϋ εκ περιστροφής, υπό έπιπέδου κάθετου επί τόν άξονα περιστροφής (σχ. 528), είναι έν γένει κυκλικός δακτύλιος.

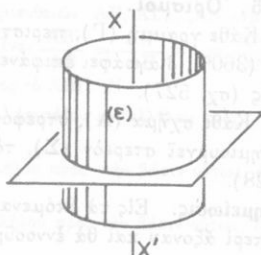
Πόρισμα III. Κάθε επιφάνεια ή κάθε στερεόν εκ περιστροφής έχει άξονα συμμετρίας τόν άξονα περιστροφής, ό όποϊος καλεΐται καί άξων τοϋ σχήματος.

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

536. Γενική έννοια κυλινδρικής επιφάνειας. Κυλινδρική επιφάνεια ἐν γένει καλεῖται κάθε εὐθαιογενής επιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα (ϵ), πού τὴν διαγράφει, παραμένει πάντοτε παράλληλος πρὸς δεδομένην διεύθυνσιν (δ) καὶ τέμνει σταθερὰν γραμμὴν (Γ) (σχ. 529). Ἡ γραμμὴ (Γ) καλεῖται ὁδηγὸς τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ϵ). Ἡ κυλινδρική επιφάνεια ἐν γένει δὲν εἶναι ἐκ περιστροφῆς επιφάνεια.



Σχ. 529



Σχ. 530

537. Ὄρθη κυλινδρική επιφάνεια καλεῖται ἡ ἐκ περιστροφῆς επιφάνεια, ἡ ὁποία διαγράφεται ἀπὸ εὐθείαν (ϵ), παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς xx' (σχ. 530).

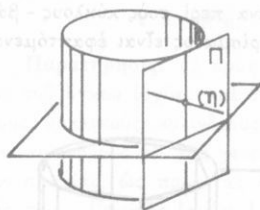
Αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τῆς εὐθείας (ϵ) εἰς τὴν περιστροφὴν καλοῦνται γενέταιραι ἀκμαὶ τῆς κυλινδρικῆς επιφάνειας καὶ εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, ἐφ' ὅσον ἐκάστη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον με ὀρθὰς κυλινδρικὰς επιφανεῖας (ἐκ περιστροφῆς) καὶ ἐπομένως ὅταν θὰ λέγωμεν κυλινδρική επιφάνεια, θὰ ἐννοοῦμεν ὀρθή κυλινδρική επιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.

538. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κυλινδρικῆς επιφάνειας καλεῖται κάθε ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τῆς κυλινδρικῆς επιφάνειας κοινὴν μίαν μόνον γενέτειραν ἀκμὴν (σχ. 531). Κάθε εὐθεῖα (η) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ἐξαιρέσει τῆς γενετείρας ἀκμῆς) καλεῖται ἐφαπτομένη εὐθεῖα τῆς κυλινδρικῆς επιφάνειας καὶ ἔχει ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τὴν επιφάνειαν.

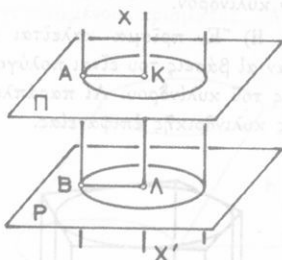
539. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ κυλινδρικῆς επιφάνειας ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα τῆς επιφάνειας εἶναι ἴσοι κύκλοι.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τομὰς μιᾶς κυλινδρικῆς επιφάνειας ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα xx' τῆς επιφάνειας (σχ. 532). Αἱ τομαὶ εἶναι ὅπωςδήποτε κύκλοι, ἐφ' ὅσον ἡ επιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 535 πόρ. I) καὶ ἔστωσαν K καὶ Λ τὰ κέντρα των ἐπὶ τοῦ ἄξονος xx' . Μία γενέτειρα ἀκμὴ τέμνει τὰ ἐπίπεδα τομῆς εἰς τὰ A καὶ B . Τὸ τετράπλευρον

ΑΚΛΒ είναι ὀρθογώνιον, διότι $AB \parallel KL$ καὶ $KL \perp (P)$. Ἄρα εἶναι $KA = LB$ καὶ ἐπομένως οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι.



Σχ. 531



Σχ. 532

540. Κύλινδρος. Ἐὰν κυκλινδρική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (P), καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα xk' (σχ. 532), τὸ ἀποκοπτόμενον στερεὸν μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων καλεῖται ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος.

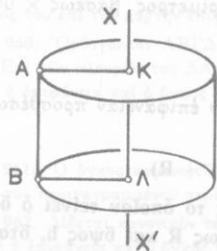
Οἱ ἴσοι κύκλοι, κατὰ τοὺς ὁποίους τὰ δύο ἐπίπεδα τέμνουν τὴν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν, καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Τὸ τμήμα AB τῆς γενετείρας ἀκμῆς τῆς κυλινδρικής ἐπιφανείας καλεῖται **γενέτειρα ἀκμή** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ γενέτειρα ἀκμή τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς περὶ τὸν ἄξονα xk' , διαγράφει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ.

Παρατήρησις. Ὡς ὅρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὴν ἀκόλουθον ἰσοδύναμον πρότασιν.

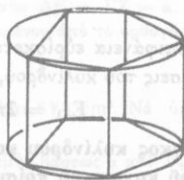
541. Ὁρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου ΑΚΛΒ περὶ μίαν πλευράν του (σχ. 533). Εἰς τὰ ἐπόμενα ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος θὰ ἀναφέρεται ἀπλῶς ὡς κύλινδρος.

542. Ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πρῖσμα εἰς κύλινδρον.

Ι) Ἐν πρῖσμα καλεῖται ἐγγεγραμμένον εἰς κύλινδρον (σχ. 534), ὅταν



Σχ. 533



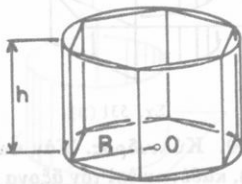
Σχ. 534

αί βάσεις του είναι πολύγωνα έγγεγραμμένα εις τούς κύκλους - βάσεις του κυλίνδρου. Αί παράπλευροι άκμαί του πρίσματος είναι γενέτειραι άκμαί δια τόν κύλινδρον.

ii) "Εν πρίσμα καλεΐται **περιγεγραμμένον** περί κύλινδρον (σχ. 535), όταν αί βάσεις του είναι πολύγωνα περιγεγραμμένα περί τούς κύκλους - βάσεις του κυλίνδρου. Αί παράπλευροι έδραι του πρίσματος είναι έφαπτόμεναι τής κυλινδρικής έπιφανείας.



Σχ. 535



Σχ. 536

543. Μέτρησης κυλίνδρου. "Ας θεωρήσωμεν όρθον κύλινδρον με βάσιν κύκλον (Ο, R), ύψος h και έγγεγραμμένον εις αυτόν κανονικόν πρίσμα (σχ. 536). Φανταζόμεθα τὸ πρίσμα μεταβλητὸν οὕτως, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτοῦ, αὐξανόμενον συνεχῶς, νά τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε τὸ πρίσμα θά ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κυλίνδρου καὶ οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εις τὰ πρίσματα, ἰσχύουν οὐσιαστικῶς καὶ διὰ τούς κυλίνδρους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.

Τότε :

i) Παράπλευρος έπιφάνεια ἢ κυρτὴ έπιφάνεια κυλίνδρου καλεΐται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος έπιφάνεια μεταβλητοῦ κανονικοῦ πρίσματος με ἀκτίνα βάσεως R καὶ ὕψος h, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως του τείνῃ εις τὸ ἄπειρον.

Διὰ τὴν παράπλευρον έπιφάνειαν ὀρθοῦ πρίσματος γνωρίζομε τὸν τύπον $E_{\pi} = P_v \cdot h$ (§ 518). Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος) έπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς $E_{\kappa} = \lim_{v \rightarrow \infty} P_v \cdot h = 2\pi R h$ (περίμετρος βάσεως $\times$ ὕψος) ἥτοι εἶναι :

$$E_{\kappa} = 2\pi R h.$$

Ἡ ὅλική έπιφάνεια εὐρίσκεται, ἐὰν εις τὴν κυρτὴν έπιφάνειαν προσθέσωμεν τὰς δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἥτοι εἶναι :

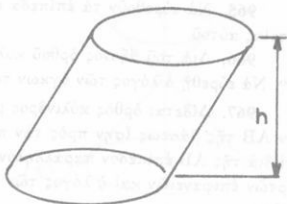
$$E_{\sigma\lambda} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R (h + R)$$

ii) Όγκος κυλίνδρου καλεΐται τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητοῦ κανονικοῦ πρίσματος με ἀκτίνα βάσεως R καὶ ὕψος h, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως του τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ο τύπος, ο οποίος δίδει τον όγκον V κυλίνδρου, προέρχεται από τον τύπον $V = Bh$ του όγκου πρίσματος και είναι : $V = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n h = \pi R^2 h$, όπου E_n το έμβαδόν της κανονικής βάσεως του έγγεγραμμένου πρίσματος. Άρα είναι :

$$V = \pi R^2 h.$$

Παρατήρησης. Ο προηγούμενος τύπος του όγκου ισχύει και δια τους πλαγίους κυκλικούς κυλίνδρους (σχ. 537), ήτοι κυλίνδρους με τας γενετείρας άκμάς των πλαγίας, ως προς τας κυκλικάς βάσεις των. Γενικώς ισχύει ο τύπος «**Όγκος = Βάσις × Ύψος**» δια κάθε κύλινδρον (όρθον ή πλαγιον), του οποίου ή βάσις δέν είναι κατ' ανάγκην κύκλος και τοῦτο, διότι δυνάμεθα, ως και προηγουμένως, νά θεωρήσωμεν ότι ο κάθε κύλινδρος προέρχεται από κάποιο μεταβλητό έγγεγραμμένο πρίσμα, όπου το πλήθος των πλευρών του τείνει προς το άπειρον, ταυτοχρόνως δέ ή κάθε πλευρά του τείνει εις το μηδέν.



Σχ. 537

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A.

954. Έάν δύο όρθοί κύλινδροι έχουν ίσας βάσεις, δείξατε ότι ο λόγος των κυρτών επιφανειών των ίσούται προς τον λόγον των ύψων των.

955. Έάν δύο όρθοί κύλινδροι έχουν ίσα ύψη, δείξατε ότι ο λόγος των κυρτών επιφανειών των είναι ίσος προς τον λόγον των άκτινων των βάσεων.

956. Η περίμετρος της βάσεως όρθου κυλίνδρου είναι 31,4 cm και το ύψος του 6 cm. Νά εύρεθ ή επιφάνεια και ο όγκος του.

957. Όρθου κυλίνδρου ή κυρτή επιφάνεια είναι τριπλασία της βάσεως. Νά εύρεθ ή όγκος του, εάν ή άκτις της βάσεως είναι 4 cm.

958. Η διάμετρος της βάσεως όρθου κυλίνδρου είναι 10 cm και ή κυρτή επιφάνεια αυτού είναι 125,6 cm². Νά υπολογισθ ή όγκος του.

959. Δείξατε ότι ο όγκος όρθου κυλίνδρου ίσούται προς το 1/2 του γινομένου της άκτινος του επί την κυρτήν επιφάνειάν του.

960. Όρθογώνιον ΑΒΓΔ διαστάσεων ΑΒ = 4α και ΑΔ = 3α στρέφεται περί την ΑΒ. Επί των πλευρών του ΔΑ και ΓΒ λαμβάνομεν τμήματα ΔΕ = ΓΖ = α. Νά υπολογισθ ή επιφάνεια και ο όγκος του στερεού, του διαγραφόμενου από το όρθογώνιον ΓΔΕΖ.

B.

961. Ο όγκος κανονικού έξαγωνικού πρίσματος είναι 6√3 cm³. Νά υπολογισθ ή όγκος του περιγεγραμμένου περί αυτό κυλίνδρου.

962. Δίδεται κανονικόν τετραγωνικόν πρίσμα με άκμήν βάσεως α και ύψος 2α. Νά εύρεθ ή επιφάνεια και ο όγκος του εις αυτό α) έγγεγραμμένου κυλίνδρου, β) περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

963. Ὁρθογώνιου αἱ διαστάσεις εἶναι α καὶ β με $\alpha < \beta$. Περὶ ποῖαν τῶν πλευρῶν τοῦ πρέπει νὰ στραφῇ τὸ ὀρθογώνιον ὥστε ὁ προκύπτων κύλινδρος νὰ ἔχη α) τὴν μεγαλύτεραν ἐπιφάνειαν, β) τὸν μεγαλύτερον ὄγκον.

964. Ἐὰν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ, δεῖξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ὀρθογώνιον.

965. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας ἐνὸς ὀρθοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

966. Διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ κυλίνδρου φέρομεν δύο ἡμιεπίπεδα σχηματίζοντα γωνίαν 60° . Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

967. Δίδεται ὀρθὸς κύλινδρος με βάσιν κύκλον ἀκτίνος R καὶ ὕψος h . Φέρομεν χορδὴν AB τῆς βάσεως ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἰσοπλευροῦ τριγώνου καὶ διὰ τῆς AB ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

968. Χορδὴ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἐν εὐθύγραμμον τμήμα μετὰ τὰ ἄκρα τοῦ ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τοῦ ἄξονος μῖας ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ μῖας χορδῆς τῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς χορδῆς.

969. Ὁρθογώνιον στρέφεται περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, παράλληλον μῖας πλευρᾶς του καὶ μὴ τέμνοντα τὰ ὀρθογώνια. Δείξατε ὅτι α) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ κύκλου, τὸν ὅποιον διαγράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου. β) Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ κύκλου, τὸν ὅποιον διαγράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου.

970. Δίδονται τρία ἐπίπεδα (Π) , (P) , (Σ) , τεμνόμενα ἀνὰ δύο καὶ παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ) . Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρες ὀρθαὶ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἐφάπτεται καὶ εἰς τὰ τρία ἐπίπεδα.

971. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) εἶναι α .

972. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν εὐθειῶν σταθεροῦς διευθύνσεως καὶ ἐφαπτομένων, δοθείσης ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

973. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M , τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς δύο εὐθείας εἶναι κ/λ .

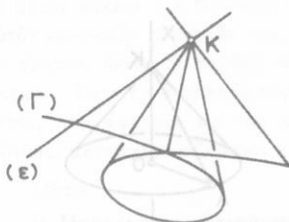
974. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς παραλλήλους εἶναι σταθερόν.

ΚΩΝΟΣ

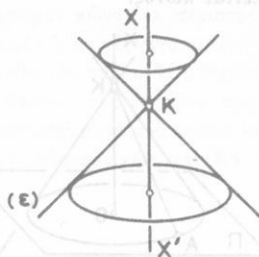
544. Γενικὴ ἔννοια κωνικῆς ἐπιφανείας. Κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐν γένει καλεῖται κάθε εὐθαιογενὴς ἐπιφάνεια, ὅπου ἡ εὐθεῖα (ε) , ποὺ τὴν διαγράφει, διέρχεται πάντοτε διὰ σταθεροῦ σημείου K καὶ τέμνει σταθερὰν γραμμὴν (Γ) (σχ. 538). Τὸ σημεῖον K καλεῖται **κορυφὴ** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ γραμμὴ (Γ) **ὁδηγὸς** τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ε) . Ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἐν γένει, δὲν εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια.

545. Ὁρθὴ κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια ἡ διαγραφομένη ἀπὸ εὐθεῖαν (ε) , τέμνουσαν τὸν ἄξονα περιστροφῆς $\chi\chi'$ εἰς σημεῖον K (σχ. 539).

Τὸ σημεῖον K καλεῖται **κορυφή** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τῆς εὐθείας (ϵ) εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς καλοῦνται **γενέτειραι ἄκμαι** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ τὰς ὀρθὰς κωνικάς ἐπιφανείας (ἐκ περιστροφῆς).

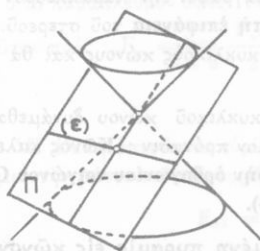


Σχ. 538

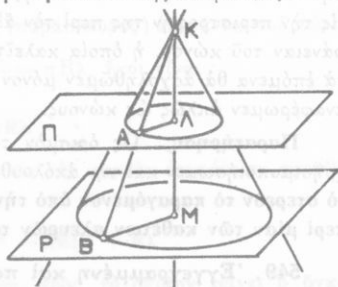


Σχ. 539

546. Ἐφαπτόμενον επίπεδον κωνικῆς ἐπιφανείας καλεῖται κάθε ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κοινὴν μίαν μόνον γενέτειραν ἄκμην (σχ. 540). Κάθε εὐθεῖα (ϵ) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ἐξαίρειται τῆς γενέτειρας ἄκμης) ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ καλεῖται **ἐφαπτομένη** εὐθεῖα τῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 540



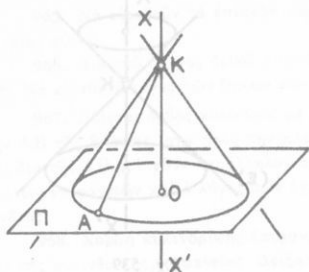
Σχ. 541

547. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα τῆς εἶναι κύκλοι καὶ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὴν κορυφῇν.

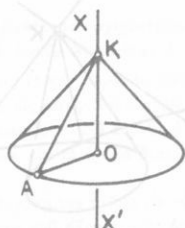
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τομὰς μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα xx' τῆς ἐπιφανείας (σχ. 541). Αἱ τομαὶ εἶναι ὅπωςδήποτε κύκλοι, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 535) καὶ ἔστωσαν Λ καὶ M τὰ κέντρα τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος xx' . Μία γενέτειρα ἄκμῃ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τέμνει τὰ ἐπίπεδα τομῆς εἰς τὰ Λ καὶ B . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $K\Lambda\Lambda$ καὶ KMB εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν τῶν εἰς τὸ K . Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\frac{\Lambda\Lambda}{MB} = \frac{K\Lambda}{KM} = \frac{KA}{KB}.$$

548. Ὅρθος κυκλικὸς κώνος. Ἐάν κωνικὴ ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου (Π) καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς xx' (σχ. 542), τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον μεταξύ τῆς κορυφῆς K τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τομῆς καλεῖται κώνος.



Σχ. 542



Σχ. 543

Ὁ κύκλος, κατὰ τὸν ὅποιον τέμνεται ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **βάσις** τοῦ κώνου καὶ ἡ ἀπόστασις KO τῆς κορυφῆς K ἀπὸ τὴν βάσιν καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Γενέτειρα ἀκμὴ τοῦ κώνου καλεῖται τὸ τμήμα KA ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἕως τὸν κύκλον τῆς βάσεως. Ἡ Γενέτειρα ἀκμὴ KA τοῦ κώνου, εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς περὶ τὸν ἄξονα xx' , διαγράφει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ ὀρθοὺς κυκλικοὺς κώνους καὶ θὰ τοὺς ἀναφέρωμεν ἀπλῶς ὡς κώνους.

Παρατήρησις. Ὡς ὁρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν ἀκόλουθον ἰσοδύναμον πρότασιν : **Κώνος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τριγώνου OKA περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του (σχ. 543).**

549. Ἐγγεγραμμένη καὶ περιγεγραμμένη πυραμὶς εἰς κώνον.

i) Μία πυραμὶς καλεῖται **ἐγγεγραμμένη** εἰς κώνον (σχ. 544), ὅταν τὰ δύο στερεὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον - βάσιν τοῦ κώνου. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος εἶναι γενέτειραι ἀκμαὶ διὰ τὸν κώνον.

ii) Μία πυραμὶς καλεῖται **περιγεγραμμένη** περὶ κώνον (σχ. 545), ὅταν



Σχ. 544



Σχ. 545

τά δύο στερεά ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι πολυγώνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον - βάσιν τοῦ κώνου. Αἱ παράπλευροι ἔδραι τῆς πυραμίδος εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

550. Μέτρησις τοῦ κώνου. Ἐὰν θεωρήσωμεν κώνον ἐκ περιστροφῆς μετὰ βάσιν κύκλον (Ο, R), ὕψος h, γενέτειραν ἀκμὴν λ καὶ ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὸν κανονικὴν πυραμίδα (σχ. 546). Φανταζόμεθα τὴν πυραμίδα μεταβλητὴν εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε ἡ μεταβλητὴ πυραμὶς τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κώνου καὶ οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εἰς τὰς πυραμίδας, ἰσχύουν οὐσιαστικῶς καὶ διὰ τοὺς κώνους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.

Οὕτω :

i) Παράπλευρος ἐπιφάνεια ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μεταβλητῆς κανονικῆς πυραμίδος μετὰ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ παράπλευρον ἀκμὴν λ, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κανονικῆς πυραμίδος, γνωρίζομεν τὸν τύπον $E_{\pi} = \frac{P_{\nu} \nu}{2}$ (§ 515), ὅπου P_{ν} ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως

καὶ ν τὸ παράπλευρον ὕψος. Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος) ἐπιφάνεια τοῦ κώνου

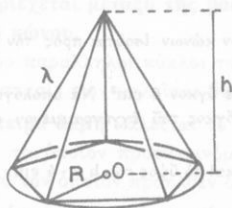
ἰσοῦται πρὸς : $E_{\kappa} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{P_{\nu} \nu}{2} = \frac{2\pi R \lambda}{2} = \pi R \lambda$, ἥτοι εἶναι :

$$E_{\kappa} = \pi R \lambda$$

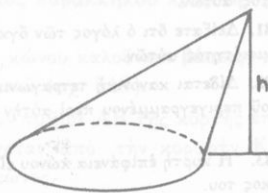
Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εὐρίσκεται, ἐὰν εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἥτοι εἶναι :

$$E_{ολ} = \pi R \lambda + \pi R^2 = \pi R(\lambda + R)$$

ii) Ὅγκος κώνου καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὅγκος μεταβλητῆς κανονικῆς πυραμίδος μετὰ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.



Σχ. 546



Σχ. 547

Ο τύπος, ο οποίος δίδει τον όγκον V του κώνου, προέρχεται από τον

τύπον $V = \frac{1}{3} Bh$ του όγκου της πυραμίδος και είναι : $V = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{3} E_v h =$
 $= \frac{1}{3} \pi R^2 h$, όπου E_v το έμβαδόν της κανονικής βάσεως της έγγεγραμμέ-
 νης πυραμίδος. Άρα είναι :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Παρατήρησης. Ο προηγούμενος τύπος όγκου ισχύει και διά τους πλ-
 γίους κώνους (σχ. 547) και γενικώς ισχύει ο τύπος «Όγκος = $\frac{1}{3}$ [Βάσις

Ύψος]» διά τους τυχαίους κώνους, δηλαδή κώνους, των οποίων ή βάσις δέν
 είναι κατ' ανάγκην κύκλος. Η απόδειξις γίνεται με την ιδίαν διαδικασίαν
 της έγγεγραμμένης πυραμίδος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

975. Ίσοπλευρος κώνος καλείται ο κώνος, πού παράγεται από την περιστροφήν
 ίσοπλεύρου τριγώνου περί έν ύψος του. Νά υπολογισθῇ ή επιφάνεια και ο όγκος ίσο-
 πλεύρου κώνου, εκ της πλευράς α του ίσοπλεύρου τριγώνου, εκ του οποίου παρήχθη.

976. Ίσοπλεύρου κώνου με επιφάνειαν $E = 3\pi\alpha^2$ νά υπολογισθῇ ή μεσαία τομή.

977. Νά υπολογισθῇ ο όγκος κώνου, του οποίου ή κυρτή επιφάνεια είναι 20π cm²
 και ή άκτις της βάσεως αυτού είναι 4 cm.

978. Νά υπολογισθῇ ή επιφάνεια κώνου, του οποίου ο όγκος είναι 72π cm³ και το
 ύψος του 8 cm.

979. Δίδεται κανονική έξαγωνική πυραμίς με πλευράν βάσεως 5α και ύψος 12α.
 Νά υπολογισθῇ ο όγκος και ή όλική επιφάνεια του περιγεγραμμένου κώνου.

980. Όμοιοι κώνοι καλούνται δύο κώνοι παραγόμενοι από την περιστροφήν δύο
 όμοιων όρθογωνίων τριγώνων περί μίαν των όμολόγων καθέτων πλευρών των αντίστοιχως.
 Λόγος όμοιότητας καλείται ο λόγος δύο αντίστοιχων γραμμικών στοιχείων των. Δείξατε
 ότι ο λόγος των επιφανειών δύο όμοιων κώνων ίσούται προς το τετράγωνον του λόγου
 όμοιότητας αὐτῶν.

981. Δείξατε ότι ο λόγος των όγκων δύο όμοιων κώνων ίσούται προς την κύβον του
 λόγου όμοιότητας αὐτῶν.

982. Δίδεται κανονική τετραγωνική πυραμίς με όγκον 6 cm³. Νά υπολογισθῇ i) ο
 όγκος του περιγεγραμμένου περί αὐτήν κώνου ii) ο όγκος του έγγεγραμμένου εις αὐτήν
 κώνου.

983. Η κυρτή επιφάνεια κώνου είναι 24π cm² και το ύψος του $h = 4$ cm. Νά εῖρε-
 θῇ ο όγκος του.

984. Δίδεται κώνος και ζητεῖται νά χωρισθῇ ή κυρτή επιφάνειά του εις δύο ίσοδύ-
 ναμα μέρη δι' επιπέδου παραλλήλου προς την βάση του.

985. Ίσοσκελές τρίγωνον $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = \alpha$ και $\hat{A} = 120^\circ$ στρέφεται περί την AB . Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

986. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ $1/3$ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπὸ μίαν γενέτειραν ἀκμὴν.

Β'.

987. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου εἶναι $E = \pi(33 + 7\sqrt{33})\text{cm}^2$ καὶ ὁ ὄγκος του $V = 44\pi\text{cm}^3$. Νά εὑρεθῇ ἡ γενέτειρα ἀκμὴ καὶ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκφράζονται ὑπὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν.

988. Ὁρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περί τὰς τρεῖς πλευράς του. Ἐὰν V_1, V_2 εἶναι οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι διὰ τῆς περιστροφῆς του περί τὰς καθέτους πλευράς του καὶ V εἶναι ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος διὰ τῆς περιστροφῆς του περί τὴν ὑποτείνουσαν, δείξατε ὅτι :

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{1}{V^2}.$$

989. Περὶ δοθεῖσαν τριεδρον στερεὰν γωνίαν νὰ περιγραφῇ κωνικὴ ἐπιφάνεια (ἐκ περιστροφῆς).

990. Εἰς δοθεῖσαν τριεδρον στερεὰν γωνίαν νὰ ἐγγραφῇ κωνικὴ ἐπιφάνεια (ἐκ περιστροφῆς).

991. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἑμβάδον τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται, ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, τὸν ὅποιον διαγράφει τὸ κ. βάρος αὐτοῦ.

992. Δίδεται κῶνος με ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h . Νά υπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἐν διαιρεῖ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη καὶ τὸ ἄλλο διαιρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου εἰς δύο ἴσους ὄγκους.

993. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια δοθέντος κώνου νὰ διαιρεθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του εἰς δύο τμήματα με λόγον μ/ν .

994. Δοθεὶς κῶνος νὰ διαιρεθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ὄγκων νὰ εἶναι μ/ν .

995. Δίδεται κῶνος με κορυφὴν K καὶ εἰς τὴν βάσιν του φέρομεν χορδὴν AB ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κανονικοῦ τριγώνου. Νά υπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κῶνος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου KAB .

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

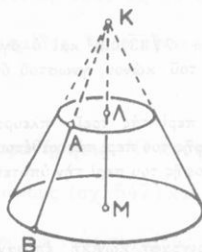
551. Ὅρισμός. Κόλουμερος κῶνος καλεῖται τὸ τμήμα ἐνὸς κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τομῆς τοῦ κώνου.

Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι τοῦ κολούρου κώνου καλοῦνται **βάσεις** αὐτοῦ καὶ ἡ ἀπόστασις των καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ (σχ. 548).

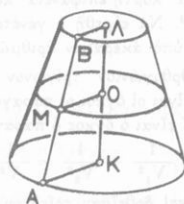
Γενέτειρα ἀκμὴ καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, τὸ ὁποῖον προεκτείνομενον, διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν K τοῦ κώνου, ἀπὸ τὸν ὁποῖον προήλθεν ὁ κόλουμερος κῶνος.

Μεσαία τομὴ κολούρου κώνου καλεῖται ἡ τομὴ τοῦ στερεοῦ δι' ἐπιπέδου

παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὸ ὕψος του (σχ. 549). Ἡ μεσαία τομὴ εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποῖου ἡ ἀκτὶς OM ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀκτίνων KA καὶ ΛB τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸ τραπέζιον ABAK μὲ διάμεσον τὴν OM.



Σχ. 548



Σχ. 549

Παρατήρησις. Ὡς ὁρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κολούρου κώνου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν ἐξῆς ἰσοδύναμον πρότασιν.

Κόλουρος κῶνος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τραπεζίου ABAK, στρεφομένου περὶ τὴν πλευρὰν ΚΛ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις (σχ. 549).

552. Μέτρησις κολούρου κώνου. Ὡς θεωρήσωμεν κόλουρον κῶνον ἐκ περιστροφῆς μὲ βάσεις κύκλους (K, R), (Λ, ρ) ὕψος h καὶ γενέτειραν ἀκμὴν λ (σχ. 550). Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸν κανονικὴν κόλουρον πυραμίδα, τὴν ὁποίαν ὁμῶς θεωροῦμεν μεταβλητὴν οὕτως, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε ἡ κόλουρος πυραμὶς τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κολούρου κώνου καὶ ἐπομένως οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εἰς τὰς κολούρους πυραμίδας, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς κολούρους κῶνους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.



Σχ. 550

i) **Παράπλευρος ἐπιφάνεια** ἢ **κυρτὴ ἐπιφάνεια** κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μεταβλητῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος μὲ ἀκτίνες βάσεων R, ρ καὶ παράπλευρον ἀκμὴν λ, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, γνωρίζομεν τὸν τύπον $E_{\pi} = \frac{P_v + p_v}{2} \cdot \lambda$ (§ 516), ὅπου P_v , p_v αἱ περιμέτροι τῶν βάσεων αὐτῆς καὶ λ τὸ παράπλευρον ὕψος. Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος)

Πόρισμα II. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $E_\kappa = 2\pi r_l$ κολούρου κώνου μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$$E_\kappa = 2\pi MI \cdot h$$

ὅπου MI τὸ μεσοκάθετον τμήμα τῆς γενετείρας AB μέχρι τοῦ ἄξονος.

Τοῦτο ἐπεταί ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων MOI καὶ $B\Delta A$ ($B\Delta \perp KA$), ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν :

$$\frac{MO}{MI} = \frac{B\Delta}{BA} \Rightarrow \frac{r}{MI} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow r_l = MI \cdot h.$$

Τότε ὁ προηγούμενος τύπος $E_\kappa = 2\pi r_l$ μετασχηματίζεται εἰς τὸν $E_\kappa = 2\pi \cdot MI \cdot h$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

996. Κολούρου κώνου αἱ βάσεις εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ κανονικά ἑξάγωνα μὲ πλευρὰς 2 cm, 10 cm ἀντιστοίχως καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 15 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

997. Κόλουρος κώνος ἔχει ὄγκον $V = 700\pi a^3$, ὕψος $h = 12a$ καὶ ἡ μία ἀκτὶς του εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του.

998. Δοχεῖον σχήματος κολούρου κώνου, μὲ κάτω βάσιν ἐσωτερικῆς διαμέτρου 20 cm, ἄνω βάσιν ἐσωτερικῆς διαμέτρου 40 cm καὶ γενετείραν ἀκμὴν 26 cm, πληροῦται διὰ πετρελαίου μέχρις ὕψους 5 cm ἀπὸ τῆς ἄνω βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου πετρελαίου εἰς λίτρα καὶ τὸ βάρος του (εἰδ. βάρος πετρελαίου 0,8).

999. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐφαπτομένη αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διάμετρον $ΚΛ$ καὶ περιστρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) . Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν διαγράφει ἡ διάμετρος $ΚΛ$ εἶναι σταθερά.

1000. Κόλουρος κώνος ἔχει βάσεις μὲ ἀκτίνες ρ καὶ 3ρ . Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο κολούρων κώνων, εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ὁ δοθεὶς κόλουρος κώνος ὑπὸ τῆς μεσαίας τομῆς του.

1001. Κανονικὸν ἑξάγωνον στρέφεται περὶ ἓνα ἄξονα συμμετρίας του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ (δύο περιπτώσεις).

1002. Ἴσοσκελὲς τραπέζιον μὲ βάσεις a , $2a$ καὶ ὕψος $a \frac{\sqrt{3}}{2}$ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς βάσεις του. i) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο παραγομένων στερεῶν καὶ νὰ γίνῃ σύγκρισις αὐτῶν ii) Ὁμοίως διὰ τοὺς ὄγκους.

1003. Τὸ αὐτὸ ἴσοσκελὲς τραπέζιον τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως στρέφεται περὶ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

1004. Δίδεται ὀρθογωνίων $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστω K τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $\Gamma\Delta$. Φέρομεν τὰς KA , KB καὶ $KO \perp AB$. Τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του KO καὶ τὸ μὲν ὀρθογωνίον διαγράφει κύλινδρον, τὸ δὲ ἴσοσκελὲς τρίγωνον KAB διαγράφει κώνον. Ὁ ὁποῖος καλεῖται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κύλινδρον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν i) ἐὰν τὸ ὀρθογωνίον εἶναι τετράγωνον, ii) ἐὰν εἶναι $\frac{AB}{\Delta\Delta} = \frac{3}{2}$.

1005. Δίδεται ἴσοσκελὲς τρίγωνον KAB ($KA = KB$). Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸ ὀρθογωνίον $\Gamma\Delta EZ$ μὲ τὴν EZ ἐπὶ τῆς AB καὶ φέρομεν $KO \perp AB$. Τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὸν

άξονα συμμετρίας του ΚΟ και τὸ μὲν τρίγωνον διαγράφει κώνον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον διαγράφει κύλινδρον, ὁ ὁποῖος καλεῖται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸν κώνον. Νὰ υπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν, ἔάν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον.

B.

1006. Κόλουρος κώνος ἔχει ὄγκον $V = 124\pi\alpha^3$, ὕψος $h = 4\alpha$ καὶ κυρτὴν ἐπιφάνειαν $E = 55\pi\alpha^2$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες του.

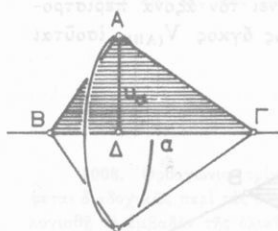
1007. Δίδεται κόλουρος κώνος μὲ στοιχεῖα R, ρ, h . Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἐκ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδος τομὴ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις οὕτως, ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας;

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ

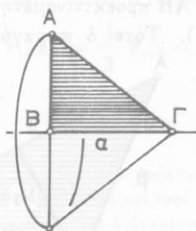
553. Θεώρημα. Τρίγωνον ΑΒΓ, στρεφόμενον περὶ τὴν πλευρὰν του α , παράγει ὄγκον ἴσον πρὸς $\frac{1}{3} \pi \alpha u_\alpha^2$.

i) Ἐάν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον εἰς τὰς γωνίας του $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$, ὁ παραγόμενος ὄγκος ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο κώνων (σχ. 553) μὲ κοινὴν βάσιν κύκλον ἀκτῖνος u_α . Τότε ἔχομεν :

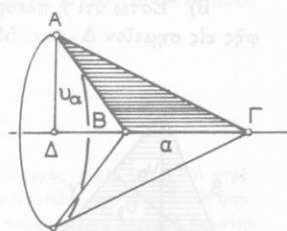
$$V = \frac{1}{3} \pi u_\alpha^2 \cdot \Delta B + \frac{1}{3} \pi u_\alpha^2 \cdot \Delta \Gamma = \frac{1}{3} \pi (\Delta B + \Delta \Gamma) u_\alpha^2 = \frac{1}{3} \pi \alpha u_\alpha^2.$$



Σχ. 553



Σχ. 554



Σχ. 555

ii) Ἐάν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς μίαν τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ ἢ $\widehat{\Gamma}$, ἔστω εἰς τὴν $\widehat{B}$ (σχ. 554), ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον κώνου μὲ βάσιν κύκλον ἀκτῖνος $AB = u_\alpha$ καὶ ὕψος $B\Gamma = \alpha$, ἥτοι εἶναι :

$$V = \frac{1}{3} \pi u_\alpha^2 \cdot B\Gamma = \frac{1}{3} \pi \alpha u_\alpha^2$$

iii) Ἐάν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς μίαν ἐκ τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$

ή $\widehat{\Gamma}$, έστω εις την $\widehat{B}$ (σχ. 555), ό παραγόμενος όγκος αναλύεται εις διαφοράν δύο κώνων με κοινήν βάσιν κύκλον ακτίνοσ u_x . Τότε έχομεν :

$$V = \frac{1}{3} \pi u_x^2 \cdot \Delta\Gamma - \frac{1}{3} \pi u_x^2 \cdot \Delta B = \frac{1}{3} \pi (\Delta\Gamma - \Delta B) u_x^2 = \frac{1}{3} \pi \alpha u_x^2.$$

"Αρα και εις τās τρείς περιπτώσεις ό παραγόμενος όγκος ισοϋται πρὸς :

$$V = \frac{1}{3} \pi \alpha u_x^2.$$

554. Θεώρημα. "Ο όγκος, ό παραγόμενος υπό τριγώνου στρεφομένου περί άξονα τοϋ επιπέδου του, διερχόμενον διά μιὰς κορυφής του και μη τέμνοντα το τρίγωνον ισοϋται πρὸς το τρίτον τῆς επιφανείας, τὴν όποίαν διαγράφει ή άπέναντι πλευρά επί το έπ' αὐτήν ύψος.

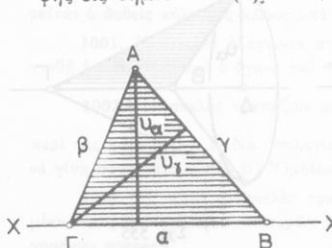
"Απόδειξις. "Εστω τρίγωνον $AB\Gamma$ και xx' ό άξων περιστροφῆς, διερχόμενος διά τῆς κορυφῆς Γ .

i) "Ας θεωρήσωμεν ότι ό άξων xx' περιέχει τὴν πλευράν $B\Gamma$ (σχ. 556). Τότε ό παραγόμενος όγκος ισοϋται πρὸς $V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \pi \alpha u_x^2$ (§ 553) και μετασχηματίζεται, ώς έξῆς :

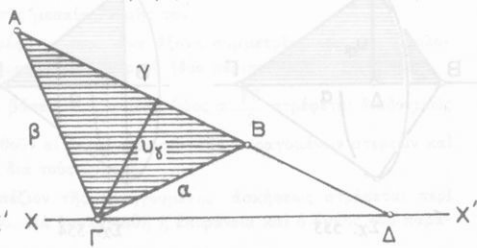
$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \pi (\alpha u_x) u_x = \frac{1}{3} \pi (\gamma u_\gamma) u_x = \frac{1}{3} (\pi u_x \gamma) u_\gamma = \frac{1}{3} E_{AB u_\gamma}, \text{ όπου } E_{AB} = \pi u_x \gamma \text{ είναι ή επιφάνεια, ή δια-}$$

γραφομένη από τὴν πλευράν AB .

ii) "Εστω ότι ή πλευρά AB προεκτεινομένη τέμνει τὸν άξωνα περιστροφῆς εις σημείον Δ (σχ. 557). Τότε ό παραγόμενος όγκος $V_{(AB\Gamma)}$ ισοϋται



Σχ. 556



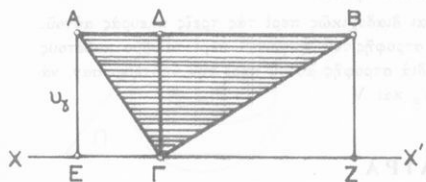
Σχ. 557

πρὸς τὴν διαφοράν $V_{(A\Delta\Gamma)} - V_{(B\Delta\Gamma)}$ και κατά τὴν προηγουμένην περίπτωσηιν είναι :

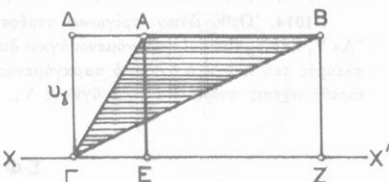
$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} E_{A\Delta} u_\gamma - \frac{1}{3} E_{B\Delta} u_\gamma = \frac{1}{3} (E_{A\Delta} - E_{B\Delta}) u_\gamma = \frac{1}{3} E_{AB} u_\gamma.$$

iii) "Εστω ότι ή πλευρά AB είναι παράλληλος πρὸς τὸν άξωνα περι-

στροφής. Φέρομεν $AE \perp xx'$, $BZ \perp xx'$ και είναι προφανώς $AE = BZ = u_\gamma$. Εάν το Γ προβάλλεται επί της AB εις σημείον Δ ένδιάμεσον τών A και B (σχ. 558), ό παραγόμενος όγκος $V_{(AB\Gamma)}$ άναλύεται ως εξής :



Σχ. 558



Σχ. 559

$$\begin{aligned} V_{(AB\Gamma)} &= V_{(ABZE)} - V_{(A\Gamma E)} - V_{(B\Gamma Z)} = \pi u_\gamma^2 AB - \frac{1}{3} \pi u_\gamma^2 E\Gamma - \frac{1}{3} \pi u_\gamma^2 Z\Gamma = \\ &= \frac{1}{3} [3\pi u_\gamma AB - \pi u_\gamma E\Gamma - \pi u_\gamma Z\Gamma] u_\gamma = \frac{1}{3} [\pi u_\gamma (3AB - E\Gamma - Z\Gamma)] u_\gamma = \\ &= \frac{1}{3} [\pi u_\gamma (3AB - AB)] u_\gamma = \frac{1}{3} [\pi u_\gamma (2AB)] u_\gamma = \frac{1}{3} (2\pi u_\gamma AB) u_\gamma = \frac{1}{3} E_{AB} u_\gamma. \end{aligned}$$

Εάν ή προβολή Δ του Γ επί της AB είναι εκτός του τμήματος AB (σχ. 559), ό παραγόμενος όγκος $V_{(AB\Gamma)}$ άναλύεται ως εξής : $V_{(AB\Gamma)} = V_{(ABZE)} + V_{(A\Gamma E)} - V_{(B\Gamma Z)}$ και διά του αύτου ως άνω τρόπου καταλήγομεν εις τό αύτό άποτέλεσμα.

*Αρα και εις τās τρείς περιπτώσεις ό παραγόμενος όγκος ίσουται πρὸς

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} E_{AB} \cdot u_\gamma$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1008. Όρθογώνιον τρίγωνον, τό όποϊον έχει καθέτους πλευράς 6 cm και 8 cm στρέφεται διαδοχικώς περί τās δύο καθέτους πλευράς και περί τήν ύποτείνουσάν αύτου. Νά υπολογισθῇ τό έμβαδόν της όλικῆς έπιφανείας και ό όγκος του παραγομένου στερεού εκάστην φοράν.

1009. Όρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικώς περί τās δύο καθέτους πλευράς του. Νά άποδειχθῇ ότι οι παραγόμενοι όγκοι είναι άντιστρόφως άνάλογοι πρὸς τās πλευράς, περί τās όποίας περιστρέφεται.

1010. Ίσόπλευρον τρίγωνον πλευράς α στρέφεται περί άξονα, μή τέμνοντα τό τρίγωνον και σχηματίζοντα γωνίαν 30° με τήν προσκειμένην πλευράν του. Νά υπολογισθῇ ό όγκος και τό έμβαδόν της όλικῆς έπιφανείας του παραγομένου στερεού.

1011. Ίσοσκελές τρίγωνον $AB\Gamma$ με ίσας πλευράς $AB = A\Gamma = \alpha$ και με γωνίαν κορυφῆς $\hat{A} = 120^\circ$ στρέφεται περί τήν πλευράν AB αύτου. Νά υπολογισθῇ ό όγκος και τό έμβαδόν της όλικῆς έπιφανείας του παραγομένου στερεού.

1012. Όρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1L$) στρέφεται περί άξονα του έπιπέδου

του διερχόμενου διὰ τῆς κορυφῆς A καὶ ἐφαπτόμενου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

1013. Τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $\alpha > \beta > \gamma$ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευράς του. Νὰ εὐρεθῇ ὁ μέγιστος ἐκ τῶν τριῶν παραγομένων ὀγκῶν.

1014. Ὁρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευράς αὐτοῦ. Ἄν V_1 καὶ V_2 εἶναι οἱ παραγόμενοι ὄγκοι διὰ στροφῆς τοῦ τριγώνου περὶ τὰς δύο καθέτους πλευράς του καὶ V ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος διὰ στροφῆς αὐτοῦ περὶ τὴν ὑποτείνουσαν, νὰ εὐρεθῇ σχέσις συνδέουσα τοὺς ὄγκους V_1 , V_2 καὶ V .

ΣΦΑΙΡΑ

555. Ὅρισμοί. Δοθέντος σταθεροῦ σημείου O , τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον** καὶ σταθεροῦ μήκους R , τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἄκτις**, καλοῦμεν :

i) **Σφαῖραν** τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὅποια ἰσχύει $OM \leq R$ καὶ συμβολίζομεν (O, R) .

ii) **Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν** τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὅποια ἰσχύει $OM = R$.

Εἰς τὰ ἐπόμενα, ὠρισμένας φοράς, λέγοντες «σφαῖρα» θὰ ἐννοοῦμεν τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν.

iii) **Ἀκτίς** τῆς σφαίρας καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $OM = R$, ὅπου O εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ M τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

iv) **Χορδὴ** καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμήμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

v) **Διάμετρος** καλεῖται κάθε χορδὴ διερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Εἶναι ἡ μεγαλύτερα ἐξ ὅλων τῶν χορδῶν καὶ ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτίνος. Τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καλοῦνται ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα καὶ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς ἔπονται εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα :

Ἄς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον (Π) , διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον O τῆς σφαίρας (O, R) (σχ. 560). Ἐπ' αὐτοῦ τὰ σημεῖα M τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἶναι τοιαῦτα, ὥστε $OM = R$ καὶ ἐπομένως ἀπαρτίζουν κύκλον (O, R) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) . Εἰς τοιοῦτος κύκλος καλεῖται **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καλεῖται **διαμετρικὸν ἐπίπεδον**.

556. Συμμετρίαι εἰς τὴν σφαῖραν ὑπάρχουν :

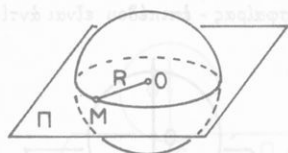
i) **Κεντρικὴ συμμετρία** ὡς πρὸς τὸ κέντρον της.

ii) **Ἀξονικὴ συμμετρία** ὡς πρὸς κάθε διάμετρόν της.

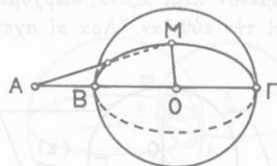
iii) **Συμμετρία ἐπιπέδου** ὡς πρὸς κάθε διαμετρικὸν ἐπίπεδον.

557. Ἡ σφαῖρα εἶναι στερεὸν ἐκ περιστροφῆς. Παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν κύκλου (O, R) περὶ μίαν διάμετρόν του.

558. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ σφαῖραν. Ἐὰς θεωρήσωμεν σφαῖραν (O, R) , σημεῖον A καὶ διάμετρον $B\Gamma$ διερχομένην διὰ τοῦ A (σχ. 561). Ἐὰν M εἴναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀπὸ τὸ τρίγωνον AOM λαμβάνομεν :



Σχ. 560



Σχ. 561

i) $AM \geq |AO - OM| \Rightarrow AM \geq |AO - OB| \Rightarrow AM \geq AB \Rightarrow AB \leq AM$.
Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως, τὴν ἀπόστασιν AB ὀρίζομεν ὡς **ἐλαχίστην ἀπόστασιν** τοῦ σημείου A ἀπὸ τὴν σφαῖραν, ἰσοῦται δὲ αὕτῃ πρὸς $|\delta - R|$, ὅπου $\delta = AO$.

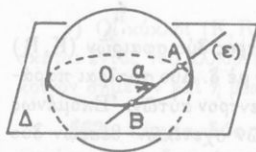
ii) $AM \leq AO + OM \Rightarrow AM \leq AO + OG \Rightarrow AM \leq AG \Rightarrow AG \geq AM$.
Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως, τὴν ἀπόστασιν AG ὀρίζομεν ὡς **μεγίστην ἀπόστασιν** τοῦ σημείου A ἀπὸ τὴν σφαῖραν, ἰσοῦται δὲ αὕτῃ πρὸς $\delta + R$.

559. Σχετικοί θέσεις ευθείας καὶ σφαίρας. Μία ευθεῖα (ε) καὶ μία σφαῖρα (O, R) , ὅπως καὶ ἂν εὐρίσκωνται, ἔχουν πάντοτε ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον (Δ) τῆς σφαίρας, ποὺ περιέχει τὴν ευθεῖαν (ε) (σχ. 562). Ἡ ευθεῖα (ε) δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖα τῆς ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Δ) καὶ ἐπομένως τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο σχημάτων θὰ τὰ ἀναζητήσωμεν ἐπὶ τοῦ (Δ) . Τὸ ἐπίπεδον (Δ) τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον (O, R) καὶ ἐπομένως αἱ σχετικοὶ θέσεις ευθείας καὶ σφαίρας ἀνάγονται εἰς τὰς γνωστὰς σχετικὰς θέσεις ευθείας καὶ κύκλου, ἥτοι, ἐὰν α εἴναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τὴν ευθεῖαν, ἔχομεν :

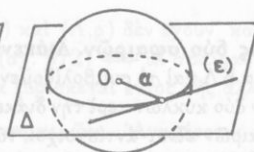
i) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ ευθεῖα ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα (τέμνονται) $\Leftrightarrow \alpha < R$ (σχ. 562).

ii) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ ευθεῖα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον (ἐφάπτονται) $\Leftrightarrow \alpha = R$ (σχ. 563).

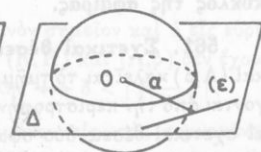
iii) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ ευθεῖα δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα $\Leftrightarrow \alpha > R$ (σχ. 564).



Σχ. 562

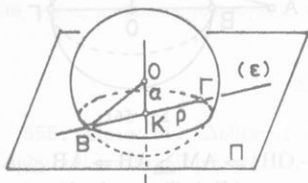


Σχ. 563

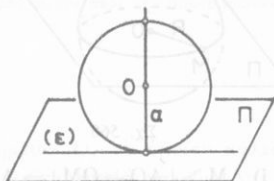


Σχ. 564

560. Σχετικές θέσεις σφαίρας και επιπέδου. Μιά σφαίρα παράγεται από περιστροφήν κύκλου περί διάμετρον. "Εν επίπεδον παράγεται από περιστροφήν ευθείας περί άξονα κάθετον αὐτῆς. Ἐπομένως τὸ σχῆμα «σφαῖρα - επίπεδον» παράγεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον σχῆμα «κύκλος - ευθεία» στρεφόμενον περί άξονα, διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ευθείαν. Ἄρα αἱ σχετικές θέσεις σφαίρας - επιπέδου εἶναι ἀντί-



Σχ. 565



Σχ. 566

στοιχοὶ ἐκείνων τοῦ σχήματος κύκλου - ευθείας εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἥτοι, ἐὰν α εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας (O, R) διαγραφομένης ἀπὸ κύκλον (O, R) καὶ (Π) τὸ ἐπίπεδον τὸ διαγραφόμενον ἀπὸ ευθείαν (ϵ) , ἔχομεν :

i) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν ευθείαν (ϵ) τέμνονται εἰς τὰ B καὶ Γ (σχ. 565) $\Leftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) τέμνονται, $\Leftrightarrow \alpha < R$. Τὰ B καὶ Γ, στρεφόμενα περί τὴν μεσοκάθετον OK τῆς χορδῆς BΓ, διαγράφουν ἐπὶ τοῦ επιπέδου (Π) κύκλον (K, ρ) . Ἄρα ἡ τομὴ σφαίρας καὶ επιπέδου εἶναι κύκλος μὲ ἀκτίνα $\rho \leq R$. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (Π) δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἶναι $\rho < R$ καὶ ὁ κύκλος (K, ρ) καλεῖται μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας, ἐνῶ ἐὰν τὸ (Π) διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας (διαμετρικὸν ἐπίπεδον), θὰ εἶναι $\rho = R$ καὶ ἡ τομὴ θὰ εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας.

ii) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν ευθείαν (ϵ) ἐφάπτονται εἰς τὸ A (σχ. 566) $\Leftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἐφάπτονται εἰς τὸ A (ἔχουν ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον) $\Leftrightarrow \alpha = R$.

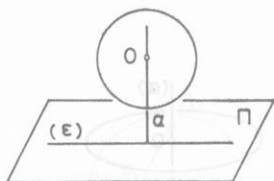
iii) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν ευθείαν (ϵ) δὲν τέμνονται (σχ. 567) $\Leftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) δὲν τέμνονται $\Leftrightarrow \alpha > R$.

Πόρισμα. Διὰ τριῶν σημείων μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διέρχεται εἰς κύκλος τῆς σφαίρας.

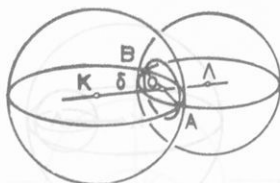
561. Σχετικές θέσεις δύο σφαιρῶν. Διάκεντρος δύο σφαιρῶν (K, R) καὶ (Λ, ρ) καλεῖται τὸ τμήμα ΚΛ καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ δ. Δύο σφαῖραι παράγονται ἀπὸ τὴν περιστροφήν δύο κύκλων περί τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Ἐπομένως αἱ σχετικές θέσεις δύο σφαιρῶν εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν σχετικῶν θέσεων δύο κύκλων εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ ἐπομένως ἔχομεν :

i) Δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) τέμνονται εἰς τὰ A καὶ B (σχ. 568) $\Leftrightarrow$

αἱ σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) τέμνονται $\Leftrightarrow |R - \rho| < \delta < R + \rho$. Τὰ κοινὰ σημεῖα A καὶ B τῶν δύο κύκλων, στρεφόμενα περὶ τὴν μεσοκάθετον $K\Lambda$, διαγράφουν κύκλον. Ἄρα ἡ τομὴ δύο σφαιρῶν εἶναι κύκλος. Τὸ κέντρον τοῦ O εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου τῶν δύο σφαιρῶν καὶ τὸ ἐπίπεδόν του εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον.



Σχ. 567

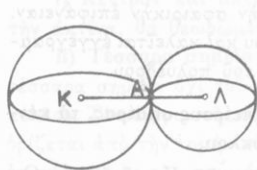


Σχ. 568

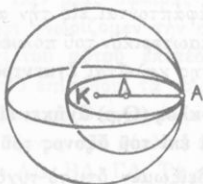
ii) Οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον A (σχ. 569) $\Leftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον A (ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον) $\Leftrightarrow \delta = R + \rho$. Τὸ σημεῖον A εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου.

iii) Οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς σημεῖον A (σχ. 570) $\Leftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ A (ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον) $\Leftrightarrow \delta = |R - \rho|$. Τὸ σημεῖον A εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου καὶ ἡ μία σφαῖρα εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

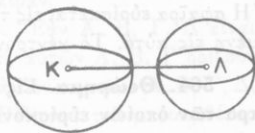
iv) Οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἷς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 571) $\Leftrightarrow$ αἱ δύο σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἡ μία εὐρίσκεται ἐκτὸς τῆς ἄλλης $\Leftrightarrow \delta > R + \rho$.



Σχ. 569



Σχ. 570



Σχ. 571

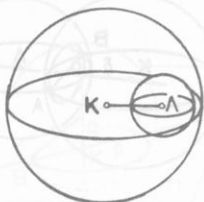
v) Οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἷς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 572) $\Leftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἡ μία εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ἄλλης $\Leftrightarrow \delta < |R - \rho|$.

562. Γωνία δύο σφαιρῶν. Ἀναφέρεται μόνον εἰς τὰς τεμνομένας σφαῖρας καὶ εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο κύκλων (§ 198), ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τῶν ὁποίων προῆλθον αἱ δύο σφαῖραι.

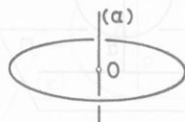
563. Ὅρισμοί.

i) Ἄξων κύκλου καλεῖται ἡ εὐθεῖα (α) ἡ διερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (σχ. 573).

ii) Πόλοι κύκλου σφαίρας. Ἐὰν κύκλος (O, ρ) ἀνήκει εἰς σφαῖραν (K, R) (σχ. 574), τὰ σημεῖα Π_1 καὶ Π_2 , εἰς τὰ ὅποια ὁ ἄξων τοῦ κύκλου τέμνει τὴν σφαῖραν, καλοῦνται πόλοι τοῦ κύκλου (O, ρ) τῆς σφαίρας (K, R) .



Σχ. 572



Σχ. 573

iii) Πολικὴ ἀπόστασις. Ἐκαστος πόλος (σχ. 574) ἱσαπέχει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα M τοῦ κύκλου (O, ρ) , διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $ΜΟΠ_1$ καὶ $ΜΟΠ_2$ διατηροῦν σταθερὸν μέγεθος διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ M ἐπὶ τοῦ κύκλου (O, ρ) . Ἐκάστη τῶν ἀποστάσεων τούτων καλεῖται **πολικὴ ἀπόστασις** τοῦ κύκλου. Κάθε κύκλος ἐπομένως ἔχει δύο πολικὰς ἀποστάσεις ρ_1 καὶ ρ_2 . Ἐπειδὴ οἱ πόλοι Π_1 καὶ Π_2 εἶναι ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τῆς σφαίρας, τὸ τρίγωνον $\Pi_1 M \Pi_2$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 4R^2$.

iv) Ἐγγεγραμμένον πολύεδρον εἰς σφαῖραν καλεῖται κάθε πολύεδρον, τοῦ ὁποῦ αἱ κορυφαὶ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ σφαῖρα καλεῖται **περιγεγραμμένη** περὶ τὸ πολύεδρον καὶ τὸ κέντρον τῆς καλεῖται **περίκεντρον** τοῦ πολυέδρου.

v) **Περιγεγραμμένον πολύεδρον** περὶ σφαῖραν καλεῖται κάθε πολύεδρον, τοῦ ὁποῦ αἱ ἔδραι ἐφάπτονται εἰς τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυέδρου καὶ καλεῖται **ἐγγεγραμμένη** εἰς αὐτό. Τὸ κέντρον τῆς καλεῖται **ἐγκεντρον** τοῦ πολυέδρου.

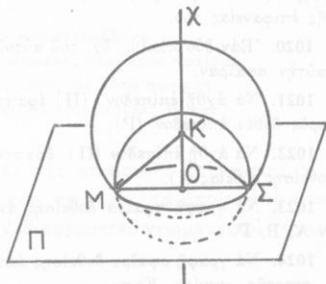
564. Θεώρημα. Εἰς κύκλος (O, ρ) ἀνήκει εἰς ἀπείρους σφαῖρας, τὰ κέντρα τῶν ὁποίων εὐρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον K τοῦ ἄξονος Ox τοῦ κύκλου (O, ρ) ἱσαπέχει ἀπὸ τὰ σημεῖα M τοῦ κύκλου (O, ρ) (σχ. 575). Τοῦτο ὅμως εἶναι φανερόν, διότι διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ M ἐπὶ τοῦ κύκλου (O, ρ) τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KOM διατηροῦν σταθερὸν μέγεθος, διότι εἰς αὐτά, ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ O , παραμένουν σταθεραὶ κατὰ μῆκος αἱ πλευραὶ OK καὶ $OM = \rho$. Ἄρα καὶ τὸ μῆκος KM παραμένει σταθερὸν καὶ ἐπομένως τὸ τυχὸν σημεῖον K τοῦ ἄξονος Ox εἶναι κέντρον σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ὁ κύκλος (O, ρ) .

Ίσχύει και τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι, ἐὰν ὁ κύκλος (O, ρ) ἀνήκει εἰς σφαῖραν (K, R) , τὸ κέντρον τῆς K εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox τοῦ κύκλου (O, ρ) . Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ KO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τοῦ κύκλου (O, ρ) . Ἐὰν Σ εἶναι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ M , ὡς πρὸς τὸν κύκλον (O, ρ) , εἶναι προφανῶς $KM = K\Sigma$, ὡς σημεῖα τῆς σφαίρας $(K, R) \Rightarrow KO \perp M\Sigma$.



Σχ. 574



Σχ. 575

Ὅμοιως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ KO εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκόμη διάμετρον τοῦ κύκλου (O, ρ) καὶ ἐπομένως $KO \perp (\Pi)$, ἤτοι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀνήκει εἰς τὸν ἄξονα Ox τοῦ κύκλου (O, ρ) .

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγεται ὅτι ὁ γ . τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκει ὁ κύκλος (O, ρ) , εἶναι ὁ ἄξων Ox τοῦ κύκλου.

565. Καθορισμός σφαίρας. Μία σφαῖρα εἶναι καθωρισμένη, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα :

i) **Κέντρον καὶ ἀκτίς.** Ἐὰν μιᾶς σφαίρας γνωρίζωμεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα, θὰ θεωρῶμεν ὅτι γνωρίζομεν τὴν σφαῖραν.

ii) **Τέσσαρα σημεῖα ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.** Ἐὰν A, B, Γ, Δ εἶναι τέσσαρα σημεῖα ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ τρία ἐξ αὐτῶν A, B, Γ ὀρίζουν κύκλον. Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων A, B, Γ, Δ , ὀρίζεται ἀπὸ τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου $(AB\Gamma)$ καὶ τοῦ μεσοκάθετου ἐπιπέδου ἑνὸς τῶν τμημάτων $AD, BD, \Gamma\Delta$. Τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν AD, BD καὶ $\Gamma\Delta$ τέμνουν τὸν ἄξονα τοῦ κύκλου $(AB\Gamma)$ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (διατί ;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1015. Δίδεται σφαῖρα ἀκτίνος 5 cm καὶ ἐπίπεδον ἀπέχον ἀπὸ τὸ κέντρον 3 cm. Νὰ εὐρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ βᾶσις εἶναι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. (Ἐγγεγραμμένος κύλινδρος εἰς σφαῖραν καλεῖται εἰς κύλινδρος, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κύκλοι τῆς σφαίρας).

1016. Δύο σφαίραι με ακτίνες 5 cm και 12 cm αντίστοιχως έχουν διάκεντρον 13 cm. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς των.

1017. Δεῖξτε ὅτι : κάθε ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν, ἥτοι ὑπάρχει σφαῖρα, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐρίσκονται αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

1018. Δίδεται σφαῖρα (O, R) . Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι $R/2$.

1019. Νά εὐρεθῇ ἡ συνθήκη, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἰς ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν, ἥτοι νά ὑπάρχῃ σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

1020. Ἐὰν δύο κύκλοι, ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τέμνονται, δεῖξτε ὅτι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

1021. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας (O, R) καὶ παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον (P) .

1022. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας (O, R) καὶ διερχόμενον διὰ δοθείσης εὐθείας (ε) .

1023. Νά γραφῇ σφαῖρα δοθείσης ἀκτίνος R , διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων A, B, Γ .

1024. Νά γραφῇ σφαῖρα δοθείσης ἀκτίνος R , ἐφαπτομένη τῶν ἐδρῶν δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας $Kxyz$.

1025. Ἐὰν σφαῖρα διέρχεται ἐκ σημείου A καὶ ἐφάπτεται τῶν ἐδρῶν διέδρου γωνίας, δεῖξτε ὅτι διέρχεται καὶ ἀπὸ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ A , ὡς πρὸς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου.

B'.

1026. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε τετράεδρον εἶναι i) ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν καὶ ii) περιγράψιμον περὶ σφαῖραν.

1027. Νά εὐρεθοῦν αἱ συνθήκαι, ὑπὸ τὰς ὁποίας δύο κύκλοι, ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

1028. Νά υπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς δύο τεμνομένων σφαιρῶν, ἐκ τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν καὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

1029. Δεῖξτε ὅτι κάθε κυκλικὸς κῶνος εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν, ἥτοι ὑπάρχει σφαῖρα, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐρίσκεται ἡ βάση καὶ ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου.

1030. Δίδεται σφαῖρα (O, R) . Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἱσοπλεύρου κώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν, ἐκ τῆς ἀκτίνος R τῆς σφαίρας.

1031. Δεῖξτε ὅτι κάθε ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος εἶναι περιγράψιμος περὶ σφαῖραν, ἥτοι ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῆς βάσεως καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

1032. Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἱσοπλεύρου κώνου περιγεγραμμένου περὶ δοθείσαν σφαῖραν (O, ρ) .

1033. Νά υπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κῶνον ἀκτίνος 5α καὶ ὕψους 12α.

1034. Δίδεται κανονικὸν τετράεδρον $KAB\Gamma$ ἀκμῆς α. Νά υπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἑδραν $AB\Gamma$ καὶ εἰς τὰς ἀκμὰς KA, KB, KT .

1035. Δεῖξτε ὅτι, ἐὰν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, εἶναι ὀρθογώνιον.

1036. Δεῖξτε ὅτι, ἓν ἐν παραλληλεπίπεδον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἑδραι του νὰ εἶναι ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα.

1037. Δίδεται σφαίρα (O, R) και σημείον K εκτός αὐτῆς. Τρις ὀρθογώνιος στερεά γωνία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς εἰς τὸ K καὶ στρέφεται περὶ αὐτὸ οὕτως, ὥστε αἱ ἔδραι τῆς νὰ τέμνουν τὴν σφαῖραν. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν κύκλων, κατὰ τοὺς ὁποίους αἱ ἔδραι τῆς στερεᾶς γωνίας τέμνουν τὴν σφαῖραν, εἶναι σταθερόν.

1038. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ $1/3$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

1039. Τετραέδρου $KAB\Gamma$ ἡ στερεά γωνία K εἶναι τρις ὀρθογώνιος καὶ ἔχει $KA = \alpha$, $KB = \beta$, $K\Gamma = \gamma$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν α , β , γ ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ σφαίρας.

1040. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου

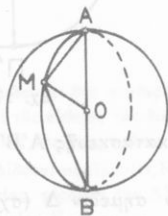
i) ἐκ τῆς ἀκτίνος R τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ σφαίρας

ii) ἐκ τῆς ἀκτίνος ρ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ σφαίρας.

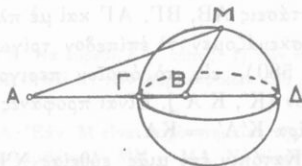
Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ πλέον σχέσις συνδέουσα τὰς ἀκτῖνας R καὶ ρ .

566. Γεωμετρικοί τόποι. Ἐκτὸς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία ἐξ ὀρίσμου εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπὸ σταθερόν σημεῖον ἀπέχουν σταθερὰν ἀπόστασιν, ἐνδιαφέροντες γεωμετρικοὶ τόποι εἶναι καὶ οἱ ἀκόλουθοι :

i) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθέν εὐθύγραμμον τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι σφαιρικὴ ἐπιφάνεια διαμέτρου AB (σχ. 576).



σχ. 576



σχ. 577

Πράγματι, ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἐπειδὴ $MO = AB/2 \Rightarrow \widehat{AMB} = 1^\circ$. Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἥτοι ἐὰν $\widehat{AMB} = 1^\circ \Rightarrow MO = AB/2$ καὶ ἐπομένως τὸ M εἶναι σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

ii) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δεδομένα σημεία A καὶ B εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$, εἶναι σφαιρικὴ ἐπιφάνεια διαμέτρου $\Gamma\Delta$ (Ἀπολλώνιος σφαῖρα), ὅπου τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ τμήμα AB ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ (σχ. 577).

Πράγματι, ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$. Τότε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθοριζομένου ὑπὸ τοῦ M καὶ τῆς εὐθείας AB , ὁ γ .

τόπος τοῦ M εἶναι Ἀπολλώνιος κύκλος σταθερᾶς διαμέτρου $\Gamma\Delta$ (§ 341). Ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν AB , ὁ Ἀπολλώνιος κύκλος θὰ διαγράφῃ Ἀπολλώνιον σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν διαμέτρου $\Gamma\Delta$, ἥ ὁποία εἶναι ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου M .

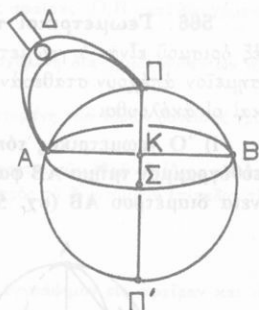
ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

567. Σφαιρικὸς διαβήτης. Διὰ νὰ χαράξωμεν ἕνα κύκλον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, χρησιμοποιοῦμεν τὸν **σφαιρικὸν διαβήτην**, ἥτοι ἕνα διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπύλα καὶ ὄχι εὐθύγραμμα, ὅπως τοῦ κοινοῦ διαβήτου (σχ. 578). Πρὸς τοῦτο στηρίζομεν τὸ ἐν ἄκρον τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἐπὶ τινος σημείου τῆς σφαίρας καὶ μετὰ τυχὸν ἄνοιγμ. αὐτοῦ γράφομεν κύκλον ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

568. Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς δοθείσης σφαίρας.

Λύσις. Μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον Π τῆς σφαίρας Σ καὶ ἀκτίνα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, ἔστω τὴν ΠA (σχ. 579), γράφομεν κύκλον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ λαμβάνομεν τρία σημεῖα A, B, Γ τοῦ κύκλου. Κατόπιν μετροῦμεν μετὰ τὸν σφαιρικὸν διαβήτην τὰς ἀποστάσεις $AB, B\Gamma, A\Gamma$ καὶ μετὰ πλευρὰς αὐτὰς κατασκευάζομεν τὸ ἐπίπεδον τριγώνου $A'B'\Gamma'$ (σχ. 580), εἰς τὸ ὁποῖον περιγράφομεν τὸν κύκλον ($K', K'A'$). Εἶναι προφανὲς ὅτι εἶναι ἐκ κατασκευῆς $A'B'\Gamma' = AB\Gamma$ καὶ ἄρα $K'A' = KA$.

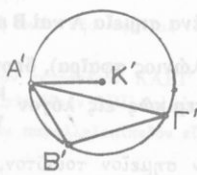
Κατόπιν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας $X\Psi$ λαμβάνομεν σημεῖον Δ (σχ. 581) καὶ φέρομεν τὴν ΔE κάθετον ἐπὶ τὴν $X\Psi$ καὶ ἴσην μετὰ τὴν $K'A'$. Μὲ κέντρον τὸ E καὶ ἀκτίνα τὴν πολικὴν ἀπόστασιν $A\Pi$ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $X\Psi$ εἰς τὸ σημεῖον Z . Φέρομεν τὴν $EZ' \perp EZ$, ἥ ὁποία τέμνει τὴν $X\Psi$ εἰς τὸ



Σχ. 578



Σχ. 579



Σχ. 580

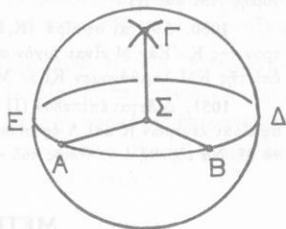


Σχ. 581

Ζ'. Είναι προφανές ότι είναι τρίγ. $\Delta EZ = \text{ΚΑΠ}$ ως ὀρθογώνια, ἔχοντα $\Delta E = \text{ΚΑ}$ καὶ $EZ = \text{ΑΠ}$. Ἐπίσης είναι τρίγωνα $EZZ' = \text{ΑΠΠ}'$, διότι ἔχουν $\widehat{E} = \widehat{A} = 90^\circ$, $EZ = \text{ΑΠ}$ καὶ $\widehat{EZZ'} = \widehat{ΑΠΠ}'$. Ἀρα $\text{ΠΠ}' = \text{ΖΖ}'$, ἤτοι ἡ $\text{ΖΖ}'$ είναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας Σ καὶ ἄρα ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας Σ είναι ἡ $\Sigma'Z = \frac{\text{ΖΖ}'}{2}$.

569. Πρόβλημα. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων αὐτῆς.

Λύσις. Μὲ κέντρα τὰ δοθέντα σημεία A καὶ B (σχ. 582) καὶ ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἴσον πρὸς τεταρτημόριον, δηλαδὴ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχοντος καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας, τὴν ὅποιαν ἀκτίνα εὐρίσκουμεν ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὅποια τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ . Κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτίνα τὴν αὐτὴν γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος είναι ὁ ζητούμενος.



Σχ. 582

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1041. Δίδονται δύο σταθερά σημεία O καὶ A . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος: i) τῶν προβολῶν τοῦ A ἐπὶ τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ O καὶ ii) τῶν συμμετρικῶν τοῦ A ὡς πρὸς τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ O .

1042. Δίδεται σφαῖρα (O, R) καὶ σημεῖον A . Ἐὰν M είναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν AM καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $MK = MA$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου K .

1043. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὅποια είναι: $MA^2 + MB^2 = k^2$, ἔνθα A καὶ B σταθερά σημεία καὶ k δεδομένον τμήμα.

1044. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὅποια είναι: $MA^2 - MB^2 = k^2$, ἔνθα A καὶ B σταθερά σημεία καὶ k δεδομένον τμήμα.

Β'.

1045. Δίδεται σφαῖρα (K, R) . Μεταβλητὴ εὐθεῖα (ε) είναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς σημεῖον M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

1046. Δίδεται σφαῖρα (K, R) καὶ εὐθεῖα (ε) . Μεταβλητὸν ἐπίπεδον (Π) διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας (ε) καὶ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον (O, ρ) . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου O .

1047. Μεταβλητὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ διατηρεῖ σταθερὰν κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος τὴν βᾶσιν $B\Gamma = \alpha$ καὶ σταθερὰν κατὰ μέγεθος τὴν διάμεσον $AM = \mu\alpha$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς A , ἔαν $AB = 2\lambda\Gamma$.

1048. Δίδεται σφαῖρα (K, R) καὶ σταθερὰ διάμετρος AKB αὐτῆς. Ἐὰν M είναι

τυχόν σημείον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν AM καὶ ἐκ τοῦ K παράλληλον τῆς AM , ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας ἐκ τοῦ M εἰς τὸ I . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου I .

1049. Δίδεται σφαῖρα (K, R) καὶ σταθερὰ διάμετρος AKB αὐτῆς. Ἐὰν M εἴναι τυχόν σημείον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν BM καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $MG = MB$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος i) τοῦ σημείου Γ , ii) τοῦ σημείου I τῆς τομῆς AM καὶ KI .

1050. Δίδεται σφαῖρα (K, R) καὶ σταθερὸν ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς K . Ἐὰν M εἴναι τυχόν σημείον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν $MA \perp (\Pi)$ καὶ ἐπὶ τῆς KM λαμβάνομεν $KI = MA$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου I .

1051. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σταθερὰ σημεία A καὶ B αὐτοῦ. Δύο μεταβληταὶ σφαῖραι κέντρων K καὶ Λ ἐφάπτονται τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὰ A καὶ B καὶ μεταξὺ των εἰς τὸ M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου M .

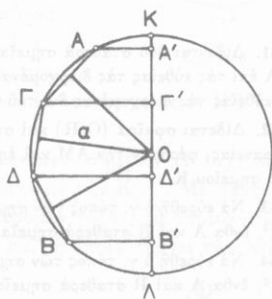
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

570. Σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται τὸ τμήμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποία τέμνουσιν τὴν σφαῖραν (σχ. 583).

Αἱ τομαὶ εἶναι κύκλοι καὶ καλοῦνται βάσεις τῆς σφαιρικῆς ζώνης καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων καλεῖται ὕψος αὐτῆς.



Σχ. 583



Σχ. 584

Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαιρικῆς ζώνης, θεωροῦμεν ἡμικύκλιον διαμέτρου $KO\Lambda$ (σχ. 584) καὶ ἐν τόξον $\widehat{AB}$ αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφομεν κανονικὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν $A\Gamma\Delta B$. Ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον $K\Lambda$, τὸ ἡμικύκλιον θὰ διαγράφῃ σφαῖραν, ἐνῶ τὸ τόξον $\widehat{AB}$ θὰ διαγράφῃ σφαιρικὴν ζώνην ὕψους $A'B'$, ὅπου $AA' \perp K\Lambda$ καὶ $BB' \perp K\Lambda$. Ἡ ἐγγεγραμμένη πολυγωνικὴ γραμμὴ $A\Gamma\Delta B$ θὰ διαγράφῃ ἐπιφανείαν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ διαγράφουν αἱ πλευραὶ τῆς. Φέρο-

μεν $\Gamma\Gamma' \perp \text{ΚΛ}$, $\Delta\Delta' \perp \text{ΚΛ}$ και τὰ ἀποστήματα α ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ἡμικυκλίου. Αἱ ἐπιφάνειαι, πού διαγράφουν αἱ πλευραὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, εἶναι κυρταὶ ἐπιφάνειαι κολούρων κώνων καὶ ἐπομένως ἔχομεν (§ 552 πόρ. II) : $E_{\text{ΑΓ}} = 2\pi\alpha\Gamma'\Gamma'$, $E_{\text{ΓΔ}} = 2\pi\alpha\Gamma'\Delta'$, $E_{\text{ΔΒ}} = 2\pi\alpha\Delta'\text{Β}'$. Διὰ προσθέσεως αὐτῶν λαμβάνομεν : $E_{\text{ΑΓΔΒ}} = 2\pi\alpha (\text{Α}'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'\text{Β}') = 2\pi\alpha\text{Α}'\text{Β}'$ (1). Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξανόμεναι τείνουν εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ τόξου $\widehat{\text{ΑΒ}}$ καὶ ἐπομένως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ὑπ' αὐτῆς τείνει εἰς τὴν ζητουμένην ἐπιφάνειαν τῆς σφαιρικῆς ζώνης με ὕψος $\text{Α}'\text{Β}' = h$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, τὸ μόνον, πού θὰ μεταβληθῇ εἰς τὴν ἔκφρασιν (1) τῆς γραφομένης ἐπιφανείας, εἶναι τὸ ἀπόστημα α , τὸ ὁποῖον θὰ ταυτισθῇ με τὴν ἀκτῖνα R καὶ ἐπομένως ἔχομεν διὰ τὴν ἐπιφάνειαν σφαιρικῆς ζώνης ὕψους h τὸν τύπον :

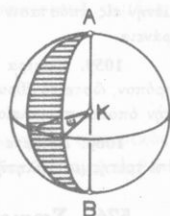
$$E = 2\pi R h.$$

571. Μονοβασικὴ σφαιρικὴ ζώνη. Ἐὰν ἐν ἐκ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας, ἡ ὑπ' αὐτῶν καθοριζομένη σφαιρικὴ ζώνη ἔχει μίαν βάσιν καὶ καλεῖται **μονοβασικὴ**. Ἡ ἐπιφάνειά της δίδεται ἀπὸ τὸν ἴδιον τύπον τῆς προηγουμένης παραγράφου.

572. Σφαιρικὴ ἐπιφάνεια. Ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐπιφάνεια σφαιρικῆς ζώνης με ὕψος $h = 2R$. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος δίδει

$$E_{\text{σφ}} = 4\pi R^2.$$

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων τῶν.



Σχ. 585

★ **573. Σφαιρικὴ ἄρκτος** καλεῖται τὸ τμήμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἐδρῶν διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ. 585).

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι δύο σφαιρικαὶ ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται ἀπὸ ἴσας διέδρους γωνίας εἶναι ἴσαι.

Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου εἶναι ἀνάλογος τοῦ μέτρου ω τῆς διέδρου γωνίας, ἀπὸ τὴν ὁποίαν καθορίζεται καὶ θὰ καλῆται **σφαιρικὴ ἄτρακτος γωνίας** ω .

Ἐπειδὴ ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ σφαιρικὴ ἄτρακτος πλήρους γωνίας (360°), ἡ ἐπιφάνεια E μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου γωνίας ω θὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε :

$$\frac{E}{\omega} = \frac{4\pi R^2}{360^\circ} \Rightarrow E = \frac{4\pi R^2 \omega}{360^\circ}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ γωνία ω , μετρούμενη εἰς ἀκτίνια, εἶναι α , ὁ ἀνωτέρω τύπος τῆς ἐπιφανείας σφαιρικῆς ἀτράκτου μετασχηματίζεται, ὡς ἑξῆς : $E = \frac{4\pi R^2 \alpha}{2\pi} = 2R^2 \alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1052. Σφαίρα ακτίνας 5 cm τέμνεται υπό δύο παραλλήλων επιπέδων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας 3 cm καὶ 4 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης τῆς περιλαμβανομένης μεταξὺ τῶν επιπέδων (δύο περιπτώσεις).

1053. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος σφαιρικῆς ζώνης ἰσοδύναμου πρὸς μέγιστον κύκλου σφαίρας ακτίνας R.

1054. Τὸ ἐπίπεδον μικροῦ κύκλου σφαίρας ακτίνας 4 cm ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας 1 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο μονοβασικῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαῖρα.

1055. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α. Ὁμοίως τῆς ἐγγεγραμμένης.

Β'.

1056. Σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ακτίνας R νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδων παραλλήλων.

1057. Τέμνομεν σφαῖραν (O,R) δι' ἐπίπεδον διερχομένου διὰ μιᾶς ἑδρας τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κύβου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἐκάστης τῶν δύο μονοβασικῶν σφαιρικῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαῖρα.

1058. Σφαῖρα ακτίνας α φωτίζεται ἀπὸ σημειακὴν φωτεινὴν πηγὴν Φ, εὐρισκόμενην εἰς ἀπόστασιν 2α ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φωτιζομένη ἐπιφάνεια.

1059. Σφαῖρα (O,R) νὰ τηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδων ἰσαπεχόντων ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν περικλείουν.

1060. Δείξατε ὅτι ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ποὺ καθορίζεται ἀπὸ δύο ὁμοκέντρους σφαῖρας ἐπὶ τρίτης μεταβλητῆς σφαίρας διερχομένης ἀπὸ τὸ κέντρο των, ἔχει σταθερὰν ἐπιφάνειαν.

574. Σφαιρικός τομέυς καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ κυκλικὸν τομέα AOB, στρεφόμενον περὶ διάμετρον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μὴ τέμνουσαν αὐτόν (σχ. 586).

Τὸ τόξον $\widehat{AB}$ διαγράφει σφαιρικὴν ζώνην, ἡ ὁποία καλεῖται **βάσις** τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καὶ **ὕψος** αὐτοῦ καλεῖται τὸ ὕψος τῆς βάσεώς του, ἥτοι τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν.

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου σφαιρικοῦ τομέως, θεωροῦμεν εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$ (σχ. 587) τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ἀπὸ τὸν ὅποιον παράγεται, ἐγγεγραμμένην κανονικὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν. Ὁ ὄγκος, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου σχήματος OAGΔBO περὶ τὴν ΚΛ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀγκῶν, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα OAG, OΓΔ, OΔB κατὰ τὴν περιστροφὴν. Φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου O τὰ ἀποστήματα α καὶ ἔχομεν (§ 554) :

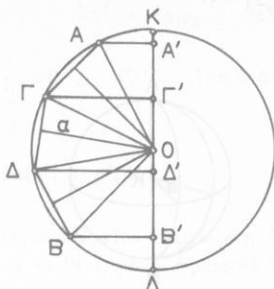
$$V_{(OAG)} = \frac{1}{3} E_{AG} \cdot \alpha, \quad V_{(OΓΔ)} = \frac{1}{3} E_{ΓΔ} \cdot \alpha, \quad V_{(OΔB)} = \frac{1}{3} E_{ΔB} \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$(1) \quad V_{(OAGΔBO)} = \frac{1}{3} [E_{AG} + E_{ΓΔ} + E_{ΔB}] \cdot \alpha = \frac{1}{3} E_{AGΔB} \cdot \alpha.$$

Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$ πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξανόμενον τείνη εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ ἀπόστημα α τείνει εἰς



Σχ. 586



Σχ. 587

τὴν ἀκτῖνα R καὶ ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον V τοῦ σφαιρικοῦ τομέως. Τότε ἀπὸ τὴν προηγουμένην σχέσιν (1) ἔχομεν : $V = \frac{1}{3} E_{\widehat{AB}} R$ καί, ἐπειδὴ $E_{\widehat{AB}} = 2\pi Rh$ (§ 570), ἔπεται ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως ἰσοῦται πρὸς :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

575. Όγκος σφαίρας. Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ σφαιρικός τομεὺς μὲ ὕψος $h = 2R$ καὶ ἐπομένως ἀπὸ τὸν προηγούμενον τύπον λαμβάνομεν :

$$V_{\sigma\phi} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων τῶν.

*** 576. Σφαιρικός θύψος** καλεῖται τὸ τμήμα τῆς σφαίρας τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἐδρῶν διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ AB εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ. 588).

Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ θύψους εἶναι ἀνάλογος τῆς διέδρου γωνίας αὐτοῦ, ἥτοι εἶναι : $\frac{V}{\omega} = \frac{V_{\sigma\phi}}{360^\circ}$ καὶ ἐπομένως δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\omega^\circ}{360^\circ}.$$

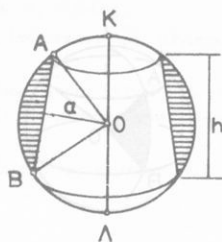
577. Σφαιρικός δακτύλιος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ κυκλικὸν τμήμα AB στρεφόμενον περὶ διάμετρον KL τοῦ ἐπιπέδου του, μὴ τέμνουσαν αὐτὸ (σχ. 589).

Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο παραλλήλων κύκλων, ποὺ διαγράφουν τὰ σημεῖα A καὶ B , καλεῖται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου.

Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ὑπολογίζεται ὡς ἡ διαφορὰ τῶν



Σχ. 588



Σχ. 589

ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυκλικοῦ τομέως AOB καὶ τοῦ ὄγκου, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου AOB . Φέρομεν τὸ ἀπόστημα α καὶ ἔχομεν : $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h -$

$$\frac{1}{3} E_{AB} \cdot \alpha = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} (2\pi \alpha h) \alpha = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{2}{3} \pi \alpha^2 h =$$

$$\frac{2}{3} \pi (R^2 - \alpha^2) h = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 h = \frac{1}{6} \pi AB^2 h. \text{ Ὡς ἀρα ὁ ὄγκος σφαιρι-}$$

κοῦ δακτυλίου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$V = \frac{1}{6} \pi AB^2 h.$$

578. Σφαιρικόν τμήμα. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνουν σφαῖραν, τὸ τμήμα αὐτῆς, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων, καλεῖται σφαιρικόν τμήμα (σχ. 590).

Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ οἱ κύκλοι κατὰ τοὺς ὁποίους τὰ ἐπίπεδα τέμνουν τὴν σφαῖραν, καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ.

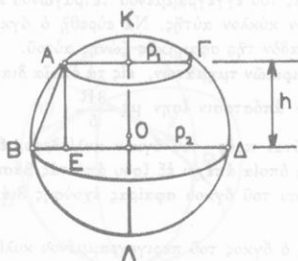
Ἄς θεωρήσωμεν διάμετρον KOL τῆς σφαίρας κάθετον ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς KL τέμνον τοὺς κύκλους - βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος εἰς τὰ A, Γ καὶ B, Δ ἀντιστοίχως. Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου AB ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ κολούρου κώνου $AB\Delta\Gamma$ ἀφ' ἑτέρου. Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος,

$$\text{ἔχομεν : } V = \frac{1}{6} \pi AB^2 h + \frac{1}{3} \pi (\rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) h = \frac{1}{6} \pi [AB^2 + 2\rho_1^2 +$$

$+ 2\rho_1\rho_2 + 2\rho_2^2]h$. Φέρομεν $AE \perp BD \Rightarrow AE=h \Rightarrow AB^2 = h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2 =$
 $= h^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2$ καὶ ὁ ὄγκος μετασχηματίζεται, ὡς ἀκολού-
 θως: $V = \frac{1}{6} \pi [(h^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2) + 2\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + 2\rho_2^2] h =$
 $\frac{1}{6} \pi [h^2 + 3\rho_1^2 + 3\rho_2^2]h = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi (\rho_1^2 + \rho_2^2)h$. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ
 σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi (\rho_1^2 + \rho_2^2)h.$$

579. Μονοβασικόν σφαιρικόν τμήμα. Σφαῖρα τεμνομένη ὑπὸ ἐπι-
 πέδου διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα δυνάμενα νὰ θεωρηθοῦν σφαιρικά τμήματα



Σχ. 590



Σχ. 591

μὲ μίαν βάσιν τὴν τομὴν ἀκτίνος ρ (σχ. 591) καὶ τὴν ἄλλην μηδενικὴν, ἐξ οὗ
 καὶ καλοῦνται μονοβασικά σφαιρικά τμήματα. Ἐὰν h εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς ἐξ
 αὐτῶν, ὁ ὄγκος του δίδεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς προηγουμένης παραγράφου, ὁ
 ὁποῖος μετασχηματίζεται, ὡς ἑξῆς:

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi \rho^2 h$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

1061. Δίδεται σφαῖρα ἀκτίνος 8 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τοῦ
 ὁποῦοι ἡ βάσις εἶναι τόξον 60° , ὁ δὲ ἄξων αὐτοῦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ
 τόξου τούτου.

1062. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κύβον ἀκμῆς α .

1063. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ κύβον ἀκμῆς α .

1064. Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου
 αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς καὶ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ταύτης.

1065. Ποῖα εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς
 τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς:

1066. Νά εύρεθῇ ὁ ὀγκος σφαίρας, ἐγγεγραμμένης εἰς κύλινδρον ἀκτίνος βάσεως R .

1067. Νά εύρεθῇ ὁ ὀγκος σφαίρας, ἐγγεγραμμένης εἰς κώνον ἀκτίνος βάσεως α καὶ ὕψους 3α .

1068. Νά εύρεθῇ ὁ ὀγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου, ἂν ἡ χορδὴ τοῦ τόξου τοῦ παράγοντος αὐτὸν ἰσοῦται μετὰ τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας ἀκτίνος R ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, ὁ δὲ ἄξων περιστροφῆς διέρχεται διὰ τοῦ ἐνὸς ἀκροῦ τῆς χορδῆς ταύτης.

1069. Εἰς σφαῖραν ἀκτίνος R φέρομεν χορδὴν AB κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ἀκτίνος OG . Νά εύρεθῇ ὁ ὀγκος τοῦ δακτυλίου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ ἔχοντος χορδὴν τὴν AB καὶ στρεφομένου περὶ τὸν ἄξονα OP παράλληλον πρὸς τὴν AB .

1070. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὀγκος σφαιρικοῦ τμήματος μετὰ μίαν βάσιν ἰσοῦται μετὰ $\frac{1}{3}\pi h^3$, ἐνθα R εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας καὶ h τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

1071. Εἰς σφαῖραν ἀκτίνος 4 cm φέρομεν δύο παραλλήλους κύκλους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου καὶ μετὰ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κωνικοῦ ἐξαγώνου εἰς μέγιστον κύκλον αὐτῆς. Νά εύρεθῇ ὁ ὀγκος τοῦ σχηματιζομένου σφαιρικοῦ τμήματος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης αὐτοῦ.

1072. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὀγκος τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην μετὰ $\frac{3R}{5}$.

1073. Ὁ ὀγκος σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὀγκον κυλίνδρου, ἔχοντος ὕψος τὸ αὐτὸ καὶ βάσιν τὴν τομὴν τῆς σφαίρας ἡ ὁποία ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἡλαττωμένον κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀγκου σφαίρας ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

1074. Ἐὰν V_1 εἶναι ὁ ὀγκος σφαίρας, V_2 ὁ ὀγκος τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου, V_3 ὁ ὀγκος τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου, δεῖξτε ὅτι : $\frac{V_1}{4} = \frac{V_2}{6} = \frac{V_3}{9}$. Ἐπίσης νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τῆς αὐτῆς σχέσεως συνδέονται καὶ αἱ ἐπιφάνειαι E_1, E_2, E_3 τῶν αὐτῶν στερεῶν.

1075. Κυκλικὸς τομεὺς γωνίας 60° καὶ ἀκτίνος ρ στρέφεται περὶ μίαν τῶν ἀκρῶν ἀκτίνων του. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὀγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

B.

1076. Κύβος ἀκμῆς α πληροῦται ὑπὸ ἴσων σφαιρῶν διαμέτρου α/n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Δείξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀγκων τῶν σφαιρῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ πλήθους των.

1077. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι καὶ δύο ἴσοι καὶ παράλληλοι χορδαὶ αὐτῶν. Δείξτε ὅτι οἱ σφαιρικοὶ δακτύλιοι, ποὺ παράγονται ἀπὸ τὰ δύο κυκλικά τμήματα, ὅταν ταῦτα στραφοῦν περὶ μίαν διάμετρον, εἶναι ἰσοδύναμοι.

1078. Κωνικὸν δοχεῖον ἰσοπλεύρου κώνου πληροῦται δι' ὕγρου μέχρι ὕψους 5 cm. Ἐντὸς αὐτοῦ βυθίζεται σφαῖρα ἀκτίνος 1 cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου. Ἐπίσης νὰ ὑπολογισθῇ πόσος θὰ ἔπρεπε νὰ ἦτο ὁ ὀγκος τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ δοχεῖον ὕγρου, ὥστε ἡ βυθιζομένη εἰς αὐτὸ σφαῖρα νὰ ἐφάπτεται τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου.

1079. Δύο σφαῖραι $(K, 3\alpha)$ καὶ $(\Lambda, 4\alpha)$ ἔχουν διὰ κέντρον $Κ\Lambda = 5\alpha$. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὀγκος τοῦ κοινοῦ μέρους των.

1080. Δείξτε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρὸς τὴν ὀλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν ἰσοπλεύρου κώνου ἔχει λόγον $4/9$. Τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὀγκοὶ τῶν δύο στερεῶν.

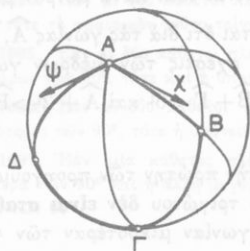
1081. Δείξτε ότι η επιφάνεια σφαίρας πρὸς τὴν επιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κυλίνδρου ἔχουν λόγον $2/3$. Τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὕγκοι τῶν δύο στερεῶν.

1082. Σφαῖρα (O, R) τέμνεται δι' ἐπιπέδου. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο σχηματιζομένων μονοβασικῶν ζωνῶν, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου τομῆς ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

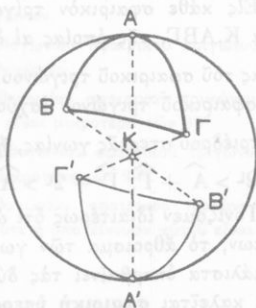
ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

580. Ὅρισμοί. Σφαιρικὸν πολὺγώνον καλεῖται ἐν τμήμα σφαιρικῆς ἐπιφανείας, περατοῦμενον εἰς κυκλικὰ τόξα μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας, τὰ ὁποῖα νοοῦνται ὅχι μεγαλύτερα ἡμικυκλίου (σχ. 592).

Τὰ κυκλικὰ τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα περατοῦται ἐν σφαιρικὸν πολὺγώνον,



Σχ. 592



Σχ. 593

καλοῦνται **πλευραὶ** τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν καλοῦνται **κορυφαὶ** αὐτοῦ.

Διαγώνιος σφαιρικοῦ πολυγώνου καλεῖται τὸ ἔλασσον κυκλικὸν τόξον μεγίστου κύκλου (π.χ. $\widehat{A\Gamma}$), τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς δύο κορυφὰς τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνῆκουν εἰς τὴν αὐτὴν πλευράν.

Γωνία δύο διαδοχικῶν πλευρῶν $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Delta}$ σφαιρικοῦ πολυγώνου καλεῖται ἡ γωνία $\widehat{xAy}$ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἡμιευθειῶν, τῶν ὁμορρόπων πρὸς τὰ τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Delta}$ (σχ. 592). Ἡ γωνία αὕτη, ἡ ὁποία συμβολίζεται καὶ ὡς γωνία $\widehat{A}$ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἢ καὶ ὡς $\widehat{BA\Delta}$, ἰσοῦται πρὸς τὴν διέδρον γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων κύκλων τῶν τόξων $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Delta}$.

Τὸ ἀπλούστερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων εἶναι τὸ **σφαιρικὸν δίγωνον**, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μὲ σφαιρικὴν ἄτρακτον (§ 573).

581. Σφαιρικὸν τρίγωνον. Τὰ κύρια στοιχεῖα ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 593) εἶναι αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι

του $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, αἱ ὁποῖαι, κατὰ μέτρον, εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς διέδρους $\widehat{KA}$, $\widehat{KB}$, $\widehat{K\Gamma}$, ὅπου K τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Εἰς τὰ σφαιρικά τρίγωνα διακρίνομεν ὡς δευτερεύοντα στοιχεῖα **ὕψη, διαμέσους, διχοτόμους**, τὰ ὁποῖα εἶναι κυκλικά τόξα μεγίστων κύκλων, καθοριζόμενα ἀντιστοιχῶς, ὅπως καὶ εἰς τὰ ἐπίπεδα τρίγωνα. Ἐπίσης διακρίνομεν ἀκτίνας τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Οἱ χαρακτηρισμοὶ **ἰσοσκελεῖς καὶ ἰσοπλευρον** τρίγωνον μεταφέρονται καὶ εἰς τὰ σφαιρικά τρίγωνα, μὲ ἔννοίαν τὴν αὐτὴν τῶν ἐπιπέδων τριγώνων.

Συμμετρικὸν τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καλεῖται τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ κέντρον K τῆς σφαίρας. Αὐτὸ εἶναι σφαιρικὸν τρίγωνον τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἀντιστοιχεῖ μία τριέδρος στερεὰ γωνία $K.AB\Gamma$, τῆς ὁποίας αἱ διέδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι κατὰ μέτρον μὲ τὰς γωνίας τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι διὰ τὰς γωνίας $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ σχέσεις τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας, ἥτοι: $2^{\circ} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6^{\circ}$ καὶ $\widehat{A} + 2^{\circ} > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$, $\widehat{B} + 2^{\circ} > \widehat{A} + \widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma} + 2^{\circ} > \widehat{A} + \widehat{B}$.

Τονίζομεν ἰδιαιτέρως ὅτι ὡς ἔπεται ἀπὸ τὴν πρώτην τῶν προηγουμένων σχέσεων, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου **δὲν εἶναι σταθερὸν** καὶ μάλιστα ὑπερβαίνει τὰς δύο ὁρθὰς κατὰ γωνίαν μικροτέραν τῶν 4° , ἡ ὁποία καλεῖται **σφαιρικὴ ὑπεροχή**.

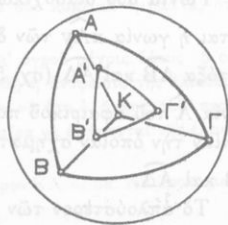
Ἐν σφαιρικὸν τρίγωνον καλεῖται **ὀρθογώνιον** ἢ **μονορθογώνιον**, **δισορθογώνιον**, **τρισορθογώνιον**, ἐὰν ἔχῃ ἀντιστοιχῶς μίαν ὀρθὴν γωνίαν, δύο ἢ τρεῖς.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, διὰ κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον, ἡ κάθε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἄθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἥτοι εἶναι $|\widehat{A\Gamma} - \widehat{B\Gamma}| < \widehat{AB} < \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma}$, σχέσεις ἀντίστοιχοι πρὸς ἐκεῖνας, ποὺ ἰσχύουν διὰ τὰς ἑδρας (ἐπιπέδους γωνίας) τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν.

Ἰσότης. Τὰ τέσσαρα θεωρήματα, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν (§ 485 ἕως 488), μεταφέρονται καὶ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ συνοψίζονται εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

Δύο σφαιρικά τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἀνήκουν εἰς ἴσας σφαῖρας καὶ εἰς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπικέντροι στερεαὶ γωνίαι.

582. Πολικὰ σφαιρικά τρίγωνα. Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον καθορίζεται



Σχ. 594

διαδικῶς ἐν ἄλλο σφαιρικόν τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ τῆς ἰδίας σφαίρας, καλούμενον πολικόν τρίγωνον τοῦ $AB\Gamma$ τοιοῦτον ὥστε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ δύο τρίγωνα τριέδροι γωνίαι $K.AB\Gamma$ καὶ $K.A'B'\Gamma'$ νὰ εἶναι παραπληρωματικαὶ (σχ. 594). Διὰ τὰ δύο τρίγωνα ἰσχύουν αἱ γινώσται σχέσεις τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν, ἥτοι, ἐὰν $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}, \alpha, \beta, \gamma$ καὶ $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{\Gamma'}, \alpha', \beta', \gamma'$ εἶναι τὰ ἐξ κύρια στοιχεῖα τῶν δύο τριγώνων ἀντιστοίχως, τότε :

$$\widehat{A} + \alpha' = \widehat{B} + \beta' = \widehat{\Gamma} + \gamma' = 2\text{L καὶ } \alpha + \widehat{A'} = \beta + \widehat{B'} = \gamma + \widehat{\Gamma'} = 2\text{L.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1083. Ἐὰν ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή, τότε τὸ σφαιρικόν τοῦτο τρίγωνον εἶναι δισορθογώνιον.

1084. Ἐὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθαί, τότε τὸ σφαιρικόν τοῦτο τρίγωνον εἶναι τρισορθογώνιον.

1085. Ἐὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότεραι τῶν 90° , τότε καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι μικρότερα τῶν 90° .

1086. Ἐὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλύτεραι τῶν 90° , τότε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι μικρότερα τῶν 90° .

1087. Ἐὰν μία κάθετος πλευρὰ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερα τῶν 90° καὶ ἡ ἄλλη μεγαλύτερα τῶν 90° , τότε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι μεγαλύτερα τῶν 90° .

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1975 (ΙΧ) — ΑΝΤΙΤ. 353.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ : 2616/7-6-75
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ - Α. Ε.

ΕΚΤΕΤΗΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ - Α.Ε.
ΕΚΔΟΣΙΣ Α' 1975 (IX) - ΑΡΙΤΗ 353.000 - ΣΥΜΦΑΣΙΣ 3516/Τ-8-75



024000025187

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

