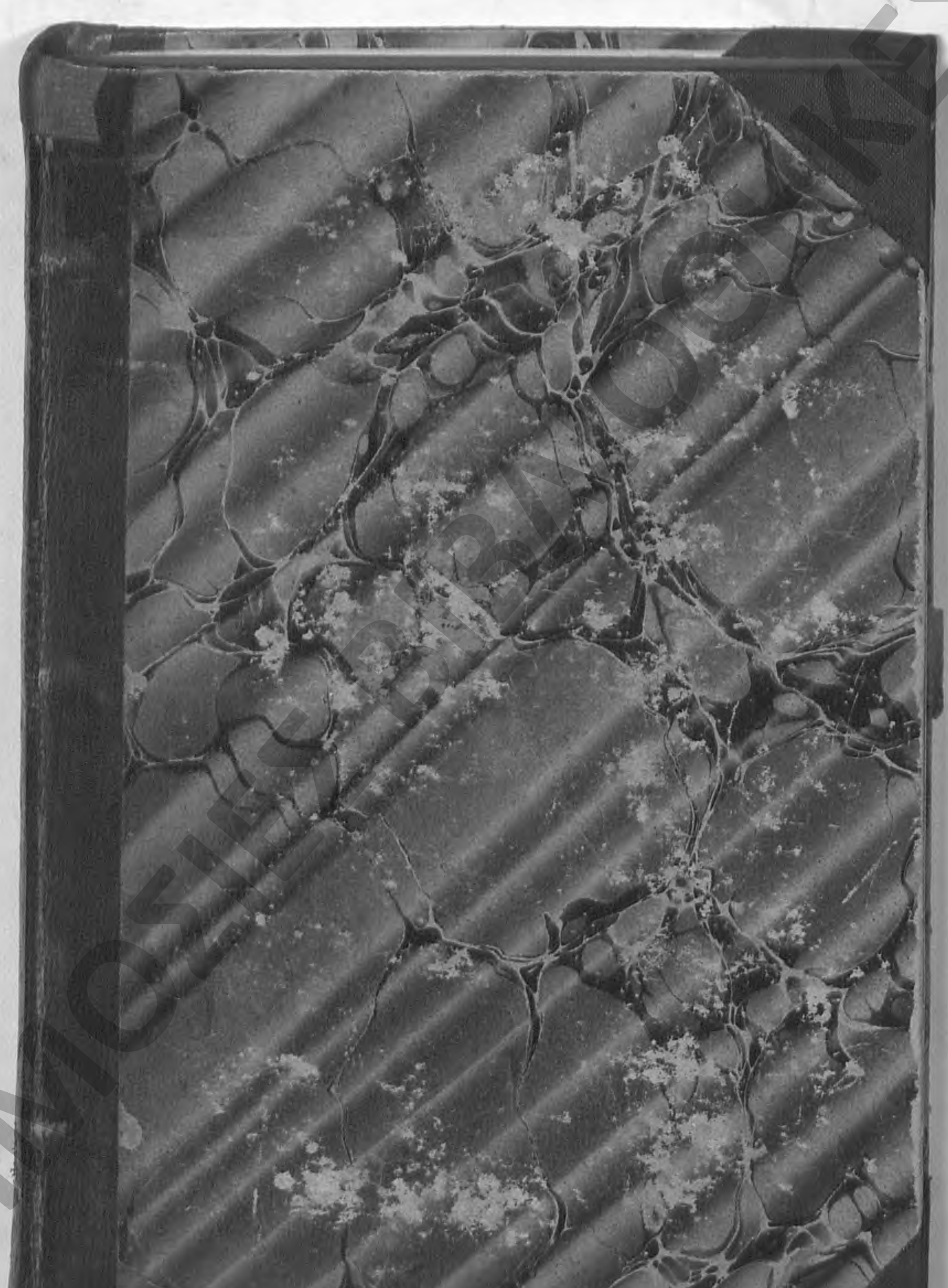


ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΠΕΜΠΤΟΣ.

ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητευόντων ἐν τοῖς γυμνασίοις τῆς Ἑλλάδος.

ΥΠΟ

Χ. ΒΑΦΑ.

ΑΘΗΝΗΣΙΝ,

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Κ. ΒΑΦΑ.

(Παρὰ τῇ ὁδῷ Ντέκα).

1846

Ὁ παρατυπώσας καταδιωχθήσεται κατὰ τὸν νόμον.

Πρὸς τὸν ἀναγινώσκοντα.

Ὁ πέμπτος οὗτος τόμος τῆς σειρᾶς τῶν στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν ἐμπεριέχει τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ τῆς Ἀλγέβρας ὄχι ὅλα, ὅσα συνήθως ἐν ταῖς στοιχειώδεσιν Ἀλγέβραις ἀπαντῶνται, ἀλλ' ὅσ' αὐτῶν ἔκρινα ἱκανὰ καὶ ὠφέλιμα τοῖς φοιτῶσιν εἰς τὰ παρ' ἡμῖν γυμνάσια. Τῶν δὲ παραλειφθέντων τὰ μὲν ἐξετέθησαν ἀρκούντως ἐν τῷ τετάρτῳ τόμῳ τῆς σειρᾶς, τῷ Συμπληρώματι τῆς Ἀριθμητικῆς, καὶ ἦτον περιττὸν νὰ ἐπαναληφθῶσιν ἐνταῦθα, τὰ δὲ ἤθελον εἶσθαι χρήσιμα μόνον εἰς τοὺς μέλλοντας νὰ σπουδάσωσι τὰ ὑψηλότερα Μαθηματικά, ὁποίους μέχρι τοῦδε εἴδομεν ὀλιγωτάτους, καὶ περὶ ὧν ἄλλοις ἐστὶ φροντίς.

Τῶν δ' ἐμπεριεχομένων εὐάριθμα εἶναι τ' ἀνήκοντα εἰς ἐμέ, τὰ ὁποῖα εὐκόλως ὁ εἰδήμων τῆς Ἀλγέβρας ἀναγνώστης διακρίνει. Τὰ δὲ πλεῖστα ὀλίγον τι τροποποιημένα εἶναι ἐκ τῆς Ἀλγέβρας τοῦ Φούρκυος, σπάνια δέ τινα καὶ ἐκ τῆς τοῦ Βουρδῶνος· τὰ δὲ πλεῖστα τῶν προβλημάτων ἐλήφθησαν ἔκ τινος τοῦ Γεωργίου Ῥίττου συλλογῆς προβλημάτων καὶ πρὸς ἄσκησιν ἐν τῷ ἀλγεβρικῷ ὑπολογισμῷ παραδειγμάτων.

Καὶ παρὰ μὲν ἄλλοις ἔθνεσι τοιαῦται συλλογαὶ εἶναι ἱκαναὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ εὔωνοι· διὰ τοῦτο οἱ συγγράφοντες Ἀλγέβρας περιορίζουσι τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐν αὐταῖς προβλημάτων εἰς ὀλίγα ἐκλεκτά. Παρ' ἡμῖν ὅμως, ἕως ν' ἀναπληρωθῇ ἡ ἔλλειψις αὕτη, εἶναι ἀναγκαῖον, νομίζω, τὰ διδακτικὰ τῶν Μαθηματικῶν βιβλία νὰ ἐμπεριέχωσιν ἱκανὰ προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Καὶ ἡ διάταξις δ' αὐτῶν καὶ ἡ ἐκλογὴ ἐν μέρει ἀπήτουν πλειοτέραν ἐπεξεργασίαν. Ἀλλ' ὄχι μόνον τοῦτο δὲν ἦτον δυνατὸν νὰ γείνῃ διά τινα αἴτια, ἀλλ' οὐδὲ τὰ πολλὰ τυπογραφικὰ λάθη τὰ ἐν τῷ τρίτῳ κεφαλαίῳ νὰ λείψωσιν.

Τοῦ δ' εὐκαταλήπτου χάριν πολλάκις ἔκρινα θυσιαστέαν τὴν συντομολογίαν, ὑπ' ὄψιν ἔχων τὸ τῶν μαθητῶν συμφέρον.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

Παρακαλεῖται ὁ ἀναγνώστης νὰ διορθώσῃ πρῶτον τὰ ἡμαρτημένα κατὰ τὰ ἑφεξῆς.

Σελ.	Στίχ.			
4	4	ἄνωθεν	γράψε	ὑπολειπόμενος
7	10	—	—	σημειόνηται
	13	—	—	σημειόνωνται
8	3	κάτωθεν	—	ἢ α.ϐ ἀντὶ αϐ
	2	—	—	ἢ—αϐγ ἀντὶ ἢ αϐγ
24	7 καὶ 6	—	—	$5\alpha^3\delta^2\gamma$ ἀντὶ $5\alpha^3\delta\gamma$ καὶ $5\alpha^3\beta^3\gamma$
27	8	—	—	χρησιμώταται
38	1	ἄνωθεν	—	$-2\alpha^3$
52	16	—	—	ἀριθμοῦ ἢ τῆς γνώσεως τοῦ κεφαλαίου ἀντὶ ἢ μερῶν τοῦ κεφ.
55	11	—	—	κατασκευάζεται
	21	—	—	$\chi+4\chi=2500$.
56	4	κάτωθεν	—	$\frac{1}{3}$ ἀντὶ $\frac{1}{6}$
62	3	ἄνωθεν	—	$41\times2\chi$
64	7	κάτωθεν	—	$=\alpha$ ἀντὶ $=\pi$
67	13	—	—	2560
69	17 καὶ 15	—		ὁ τρίτος ἀντὶ τὸ τρίτον, καὶ κατωτέρω ἕκαστος ἀντὶ ἕκαστον

70 Περὶ τῶν ἐξισώσεων τοῦ 80 προβλήματος ἰδὲ σελ. 95.

Σελ.	Στ.			
72	8	κάτωθεν	γράψε	$\frac{\omega}{9}$ ἀντὶ $\frac{\chi}{9}$.
74	2 καὶ 6	ἄνωθεν	—	39 ἀντὶ 19
75	21	—	—	$196\chi^2$ ἀντὶ 116χ
77	3 καὶ 7	—	—	52 καὶ $\chi\omega+52$ ἀντὶ 4 καὶ $\chi\omega+4$
	16	—	—	9 ἀντὶ 6
	19	—	—	112 ἀντὶ 212.
103	6	—	—	$\chi=\frac{\zeta+\nu\times\frac{\beta\xi-\delta\zeta}{\alpha\delta-\gamma\delta}}{\beta}$
105	15	—	—	περαιτέρω
145	Οἱ πρῶτοι πέντε στίχοι νὰ λείψωσιν.			
166	9	κάτωθεν	—	$\frac{5\alpha}{2\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$
168	8	—	—	49725 ἀντὶ 59725
179	13	ἄνωθεν	—	52 ἀντὶ 25
182	3 καὶ 5	—		$\frac{\pi^2}{4}$ ἀντὶ $\frac{\pi^2}{2}$

ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΛΥΕΙΝ ΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

1. Εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ ὑποτίθενται γνωστὰ ἐκ τοῦ Συμπληρώματος ὡς ἀναγκαῖα ἡ θεωρία τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν, ἡ χρῆσις τῶν γραμμάτων πρὸς παράστασιν τῶν γενικῶς νοουμένων ἀριθμῶν, ἡ ἐκτέλεσις καὶ ἡ σημείωσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν καὶ ἡ σημείωσις αὐτῶν ἐπὶ τῶν μονογραμμάτων ἐγγραμμάτων, τί εἶναι ταυτότης καὶ τί ἰσότης, τί εἶναι μερικὸν καὶ γενικὸν πρόβλημα, τί ὅμοια προβλήματα, καὶ τί σημαίνει ἡ λέξις τύπος, κτλ. Ἄλλα δέ τιν' ἀναγκαῖα εἰς τὰ ἑξῆς, ἂν καὶ ἐξηγήθησαν εἰς τὸ Συμπλήρωμα, θέλομεν ὅμως τὰ πραγματευθῇ καὶ ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ τελειότερα.

2. *Ἀριθμητικὸν πρόβλημα* εἶναι ἐκεῖνο, καθ' ὃ ζητεῖται ἀριθμὸς οὕτω πως συσχετισμένος πρὸς ἄλλους γνωστοὺς καὶ δεδομένους ἀριθμούς, συσχετισμένους καὶ αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους, ὥστε δυνατὸν ἐκ τούτων δι' ἀριθμητικῶν πράξεων νὰ προσδιορίζηται ἐκεῖνος. Πολλάκις δὲ ζητεῖται ὄχι εἷς ἀριθμός, ἀλλὰ δύο ἢ τρεῖς ἢ καὶ πλειότεροι. *Ἔκθεσις* δὲ τοῦ προβλήματος

ἢ καὶ *πρότασις* αὐτοῦ λέγεται ἡ διὰ λέξεων παράστασίς του. *Λύσις* δὲ αὐτοῦ καλεῖται ἡ ἀνακάλυψις ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ὅσαι ἀνάγκη νὰ ἐκτελῶνται ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου, συνήθως δὲ ἡ ἀνακάλυψις καὶ ἡ ἐκτέλεσις αὐτῶν.

3. Καὶ πολλῶν μὲν προβλημάτων διὰ τὰς ἁπλᾶς σχέσεις τῶν ἐν αὐτοῖς ἀριθμῶν εἶναι εὔκολος ἡ λύσις, ἡ δὲ Ἀριθμητικὴ διδάσκει τὰς μεθόδους τοῦ λύειν αὐτά· τοιαῦτα δὲ εἶναι ὅσα συνήθως ἀπαντῶνται εἰς τὰς στοιχειώδεις Ἀριθμητικάς. Ἀλλ' εἶναι καὶ πολλὰ ἄλλα ἐκείνων διάφορα, τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι τόσον πολλὰς καὶ ποικίλας σχέσεις πρὸς ἀλλήλους, ὥστε ἀδύνατον νὰ λυθῶσι κατὰ τῆς Ἀριθμητικῆς τὰς μεθόδους. Ἐκ τούτων ἁπλούστατον εἶναι τὸ ἀκόλουθον,

Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 82 *εἰς τρεῖς ἀνίσους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων ὁ μὲν μέσος νὰ ὑπερέχῃ τὸν μικρότερον κατὰ* 14 *μονάδας, ὁ δὲ μεγαλήτερος τὸν μέσον κατὰ* 18. *ἢ ἄλλως τὸ αὐτό,*

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἄνισοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ὁ μὲν μέσος νὰ ὑπερέχῃ τὸν μικρότερον κατὰ 14 *μονάδας, ὁ δὲ μεγαλήτερος τὸν μέσον κατὰ* 18, *τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἦναι* 82.

Ἡ Ἀριθμητικὴ διδάσκει τὰς μεθόδους τοῦ μερίζειν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη καὶ εἰς ἀνάλογα ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν, ἀλλ' ὄχι καὶ ὡς ἐνταῦθα ζητεῖται νὰ μερισθῇ ὁ 82. Εἰς λύσιν λοιπὸν ὅλων τούτων τῶν δυσκολωτέρων προβλημάτων εἶναι ἀναγκαία ἄλλη μέθοδος, τὴν ὁποίαν ὑποδεικνύοντές ἐνταῦθα θέλομεν ἀναπτύξει ἀρκούντως ἐν τοῖς ἀκολούθοις κεφαλαίοις.

4. Πρῶτον μὲν λοιπὸν παρατηροῦμεν ὅτι κυρίως τῶν τριῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εἷς τις ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ, οἷον ὁ μικρότερος· διότι εἰς τοῦτον ἔπειτα προσθέτοντες 14 εὑρίσκομεν τὸν μέσον, καὶ εἰς τοῦτον πάλιν προσθέτοντες 18 ἔχομεν τὸν μεγαλήτερον.

Ἔπειτα πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου δοκιμάζομεν διαφόρους κατὰ τύχην εἰλημμένους ἀριθμούς, ἠξεύροντες ὅτι ἐκεῖνος εἶναι ὁ ζητούμενος μικρότερος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀφοῦ προστεθῇ ὁ 14 πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέσου, καὶ εἰς τοῦτον προστεθῇ ὁ 18 πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγαλητέρου, θέλουσιν οὕτω προκύψει τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ ἦναι 82. Οὕτω λοιπὸν δοκιμάζοντες κατὰ σειρὰν τὸν 8, 9, 10, 11, 12, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι δὲν εἶναι 8 ἢ 9 κτλ. ὁ ζητούμενος μικρότερος, ἀλλ' εἶναι 12. Ἑπομένως 26 εἶναι ὁ μέσος καὶ 44 ὁ μεγαλήτερος.

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι πολλάκις δυνατὸν νὰ ἦναι πολλαὶ αὗται αἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου ἀναγκαῖαι δοκιμασίαι, καὶ τότε θέλομεν κατατρίβει πολὺν χρόνον πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναί τις ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος μικρότερος, ἂν καὶ ἄγνωστος, ἂν τὸν ὑποθέσωμεν γνωστὸν καὶ τὸν σημειώσωμεν διὰ τοῦ χ, σημειοῦντες ὅλας τὰς πρὸς δοκιμασίαν πράξεις, διότι ἀδύνατον τώρα νὰ ἐκτελεσθῶσι, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν οὕτω προκυπτόντων ἀριθμῶν θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὸν 82. Δηλαδή, ἐπειδὴ ὁ μικρότερος ἐσημειώθη διὰ χ

ὁ μὲν μέσος θέλει σημειωθῇ διὰ $\chi+14$

ὁ δὲ μεγαλήτερος διὰ $\chi+14+18$

τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $3\chi+28+18$

λοιπὸν $3\chi+28+18=82$.

Ἀλλὰ διότι ὑποτεθεὶς γνωστὸς ἐσημειώθη διὰ χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ κατ' ἀνάγκην ἔπειτα ἐσημειώθησαν μόνον αἱ πρὸς δοκιμασίαν πράξεις, ἀπαλλαττόμεθα μὲν τῶν πολλῶν δοκιμασιῶν, δὲν μανθάνομεν ὅμως τίς εἶναι ὁ ζητούμενος μικρότερος ἀριθμός, ἐνῷ δοκιμάζοντες τοὺς μερικοὺς ἀριθμοὺς τὸν εὑρίσκομεν· ὥστε ἕως ἐδῶ δὲν φαίνεται ὠφέλειά τις ἐκ τῆς διὰ χ σημειώσεως τοῦ ζητουμένου, ὑποτεθέντος γνωστοῦ. Ἂν ὅμως παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ προκύψασα ἰσότης $3\chi+28+18=82$ ἀναδεικνύει ὅτι ὁ 82 εἶναι ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, τοῦ 18, ἤτοι τῆς γνωστῆς διαφορᾶς τοῦ μέσου καὶ τοῦ μεγαλητέρου, τοῦ 28, ἤτοι τοῦ διπλασίου τῆς γνωστῆς διαφορᾶς τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ 3χ, ἤτοι τοῦ τριπλασίου τοῦ ὑποτεθέντος γνωστοῦ μικροτέρου, μανθάνομεν ὅτι, ἂν ἀπὸ τὸν 82 ἀφαιρεθῇ ὁ 18 καὶ ὁ 28, ὁ ὑπολοιπόμενος 36 εἶναι τριπλάσιος τοῦ ζητουμένου μικροτέρου, ἢ ἀντιστρόφως ὁ μικρότερος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 36, ἤτοι 12. Ὥστε ἐκ τῆς προκυψάσης ἰσότητος μανθάνομεν τίνας πράξεις ἀριθμητικὰς ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν χρειάζεται νὰ ἐκτελέσωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου, καὶ τώρα καταλαμβάνομεν ὅτι εἶναι ὠφελιμωτάτη ἡ μνημονευθεῖσα μέθοδος.

5. Ὅμοιον μὲ τὸ ἤδη λυθὲν μερικὸν πρόβλημα εἶναι πλεῖστα, καὶ ἂν σημειώσωμεν γενικῶς διὰ α μὲν τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ἑκάστου μερικοῦ προβλήματος, διὰ β δὲ τὴν διαφορὰν τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μέσου, διὰ γ δὲ τὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ μεγαλητέρου, θέλομεν ἔχει τὸ ἑξῆς γενικὸν πρόβλημα,

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἄνισοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ὁ μὲν μέσος νὰ ὑπερέχῃ τὸν μικρότερον κατὰ β μονάδας, ὁ δὲ μεγαλήτερος τὸν μέσον κατὰ γ μονάδας, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἦναι α μονάδες.

Καὶ τούτου δὲ τοῦ προβλήματος ὁ μέσος καὶ ὁ μεγαλήτερος εὑρίσκεται εὐκόλως, ἀφοῦ εὑρεθῇ ὁ μικρότερος. Διὰ τοῦτο πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου κατὰ τὴν προειρημένην μέθοδον ὑποθέτοντες αὐτὸν γνωστὸν τὸν σημειοῦμεν διὰ χ, τὸ ὁποῖον ἐδῶ δὲν σημαίνει μερικόν τιν' ἀριθμόν, ὡς τὸ καθ' ἕκαστον μερικὸν πρόβλημα χ, ἀλλὰ σημειοῖ τὸν μικρότερον ὑποτεθέντα γνωστὸν ἀριθμὸν ἑκάστου μερικοῦ προβλήματος.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ μικρότερος εἶναι	χ
ὁ μὲν μέσος θέλει εἶσθαι	$\chi+\beta$
ὁ δὲ μεγαλήτερος	$\chi+\beta+\gamma$
τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν	$3\chi+2\beta+\gamma$.

Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ τὴν ἔκθεσιν τοῦ προβλήματος

$$3\chi+2\beta+\gamma=\alpha.$$

Ἂν δὲ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος τὸ 2β καὶ τὸ γ, ἔχομεν

$$3\chi = \alpha - 2\beta - \gamma,$$

διαιρέσει δὲ τῶν δύο μελῶν διὰ 3 ἔχομεν

$$\chi = \frac{\alpha - 2\beta - \gamma}{3}.$$

6. Παρατηρητέον τώρα ὅτι διαφέρει τῆς λύσεως τοῦ μερικοῦ προβλήματος ἡ λύσις τοῦ γενικοῦ, καθότι ἐνταῦθα μὲν ἔγειναν γνωσταὶ μόνον αἱ ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἑκάστου μερικοῦ προβλήματος ἐκτελεσταίαι πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑποτεθέντος γνωστοῦ μικροτέρου, ἤτοι εὑρέθη τύπος τις, ὡς ἀδύνατον ἐπὶ τῶν ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν νὰ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις, κατὰ δὲ τὸ μερικὸν καὶ ἐξετελέσθησαν ἐνταυτῷ, καὶ οὕτως εὑρέθη μερικὸς ἀριθμὸς 12 ὁ μικρότερος. Ἀλλ' ὁ τύπος οὗτος εἶναι ὠφελιμώτατος· διότι πρὸς λύσιν ὁποιουδήποτε τῶν ὁμοίων μὲ τοῦτο μερικοῦ προβλήματος ἄλλο δὲν ἔχει νὰ πράττῃ τις, εἰμὴ ἐν αὐτῷ ἀντὶ τῶν γραμμάτων νὰ θέτῃ τοὺς τοῦ μερικοῦ προβλήματος ἀριθμοὺς καὶ νὰ ἐκτελῇ τὰς σημειωμένας πράξεις, καὶ οὕτω θέλει εὑρίσκει τὸν τοῦ μερικοῦ προβλήματος ζητούμενον ἀριθμόν. Οἷον, ἐὰν θέλῃ τις νὰ λύσῃ τὸ ἐν ἀριθμῷ 3 μερικόν, ἐν τῷ ἀνωτέρω τύπῳ λογίζεται $\alpha = 82$, $\beta = 14$ ἢ $2\beta = 28$, $\gamma = 18$, καὶ ἐκτελῶν τὰς δύο σημειωμένας ἀφαιρέσεις καὶ τὴν διὰ 3 διαίρεσιν τοῦ ὑπολοίπου εὑρίσκει $\chi = 12$. Οὕτω καὶ περὶ παντὸς ἄλλου μερικοῦ.

Δῆλον λοιπὸν καὶ ἐκ τούτων μόνων ὅτι ἡ λύσις τῶν γενικῶν προβλημάτων, ἥτις φέρει εἰς τύπον, ἐξ οὗ ἔπειτα εὑρίσκονται οἱ τῶν μερικῶν προβλημάτων ζητούμενοι ἀριθμοί, εἶναι ὠφελιμωτάτη.

7. Ἡ ἰσότης $3\chi + 28 + 18 = 82$ ἢ $3\chi + 2\beta + \gamma = \alpha$ καὶ πᾶσα ἄλλη τοιαύτη καλεῖται ἰδίως *ἐξίσωσις*, ἡ μὲν *μερική*, ἡ δὲ *γενική*. Εἶναι δὲ ἐξίσωσις ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ἐμφαίνεται διὰ τοῦ = ὅτι εἶναι ἴσοι δύο ἀριθμοὶ διαφόρως δι' ἄλλων ἀριθμῶν καὶ σημείων παριστανόμενοι, καὶ ἔχοντες ἢ ἀμφότεροι ἢ ὁ ἕτερος

ἓν τοὐλάχιστον γράμμα σημαῖνον ἄγνωστον ἀριθμὸν ὑποτεθέντα τοιοῦτον γνωστόν, ὁποῖος νὰ καταστaίνῃ ἴσους τοὺς προκειμένους ἀριθμούς.

Ἡ ἰδίως δὲ λεγομένη *ἰσότης* κατὰ μὲν τἆλλα εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐξίσωσιν, διαφέρει δὲ αὐτῆς κατὰ ταῦτα, ὅτι δυνατὸν νὰ ἔχωσι τῆς ἰσότητος ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ γράμμα σημαῖνον ἄγνωστον ἢ νὰ μὴ ἔχῃ μηδέτερος, καὶ ὅτι ἡ βεβαιότης ἡμῶν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν δύο ἀριθμῶν ἐξάγεται ἢ ἐξ ἁπλῆς ὄψεως αὐτῶν, οἷον $6+7=15-2, 9\times4=3\times12$, ἢ ἔκ τινος προτέρας γνώσεως, οἷον ἂν ἦναι γνωστὸν ὅτι $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, εἶναι βέβαιον ὅτι τὸ $\alpha\delta=\beta\gamma$, ἢ ἂν ἦναι γνωστὸν ὅτι 12 εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τοῦ ἐν ἀρ. 3 προβλήματος, εἶναι βέβαιον ὅτι $3\times12+28+18=82$, ἢ καὶ ἐκ τῆς ἐκτελέσεως πράξεών τινων ἁπλῶς, οἷον $\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)=\alpha^3-\alpha$· ἐνῷ ἡ βεβαιότης ἡμῶν ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσοι προέρχεται ἐκ μόνου τοῦ ὅτι ἐνυπάρχει γράμμα σημαῖνον ἄγνωστον ἀριθμὸν ὑποτεθέντα γνωστόν, καὶ τοιοῦτον, ὁποῖος νὰ καταστaίνῃ ἴσους τοὺς δύο ἀριθμούς. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις εἶναι καθ' ὑπόθεσιν ἰσότης, ἥτις γίνεται ἀληθῶς ἰσότης, ἀφοῦ προσδιορισθῇ ὁπωσδήποτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ τεθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ παριστάνοντος αὐτὸν γράμματος· καὶ τότε λέγουσιν ὅτι *ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις*. Ἐὰν δ' ἐκτελεσθῶσι καὶ ὅλαι αἱ σημειωμέναι πράξεις, τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται ταυτότης, ἤτοι ταυτοτητοποιεῖται, ἢ ἁπλούστερα *ταυτοποιεῖται*. Ὅταν δὲ μὴ ὄντος ἔτι προσδιωρισμένου τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ τίθηται ἁπλῶς ἀντὶ τοῦ γράμματος τοῦ σημαίνοντος αὐτὸν ἀριθμός τις καὶ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις, τότε δοκιμάζεται ὁ ἀριθμὸς οὗτος· ὁ δὲ φέρων εἰς ταυτότητα λέγεται *δεδοκιμασμένος* καὶ εἶναι ὁ ζητούμενος.

8. *Λύσις ἐξισώσεως* ἢ *ἐξισώσεων* λέγεται ἡ ἐξ αὐτῆς ἢ ἐξ αὐτῶν διὰ σειρᾶς πράξεων εὕρεσις ἀριθμοῦ ἴσου μὲ τὸν ζητούμενον ἢ ἀριθμῶν ἴσων μὲ τοὺς ζητουμένους κατὰ τὰ μερικὰ προβλήματα, καὶ τύπου ἢ τύπων κατὰ τὰ γενικά.

Η ἀνωτέρω μερικὴ ἐξίσωσις ἐλύθη, ἀφοῦ διὰ τῶν ἀφαιρέσεων καὶ τῆς διαιρέσεως εὑρέθη $\chi=12$, ἡ δὲ γενική, ἀφοῦ εὑρέθη $\chi=\frac{\alpha-2\beta-\gamma}{3}$, ὅπου πρῶτον μὲν μέλος εἶναι *μεμονωμένον* τὸ χ, δεύτερον δὲ εἶναι μερικὸς ἀριθμὸς ἢ ὁ προσήκων τύπος.

9. Ἐκ τῶν προηγουμένων καταλαμβάνει τις ὅτι ἡ προϋποδειχθεῖσα μέθοδος συνίσταται εἰς ταῦτα, πρῶτον νὰ γίνηται ἀκριβὴς διάγνωσις τοῦ ἐκληπτέου ὡς ἀγνώστου ἀριθμοῦ, ὅταν ἦναι πολλοὶ οἱ ζητούμενοι καὶ εὐκόλως δι' ἑνὸς αὐτῶν οἱ ἄλλοι προσδιορίζωνται· ἔπειτα νὰ ὑποτίθηται αὐτὸς γνωστὸς καὶ νὰ σημειοῖται διά τινος τῶν τελευταίων τοῦ ἀλφαβήτου γραμμάτων· μετὰ ταῦτα νὰ γίνηται προσπάθεια πρὸς ἀνακάλυψιν τῶν πρὸς δοκιμασίαν αὐτοῦ πράξεων καὶ ἅμ' ἀνακαλυπτόμεναι νὰ σημειόνηται, ἐξ ὧν θέλει προκύπτει ἐξίσωσις ἢ ἐξισώσεις· τελευταῖον νὰ λύηται ἢ νὰ λύωνται αὗται, ἐξ οὗ θέλει γίνεσθαι γνωστὸς ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἢ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, ἢ θέλει γίνεσθαι γνωστὸς ὁ προσήκων τύπος ἢ τύποι. Σύντομα ἡ μέθοδος συνίσταται εἰς τὴν διάκρισιν τῶν ἀγνώστων καὶ τὴν σημείωσιν αὐτῶν διὰ γραμμάτων, εἰς τὴν κατασκευὴν ἐξισώσεων καὶ εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν.

10. *Ἄλγεβρα* καλεῖται ἡ ἐπιστήμη κυρίως τῶν ἐξισώσεων πρὸς λύσιν μάλιστα τῶν γενικῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ἤτοι ἡ ἐπιστήμη καθ' ἣν μανθάνει τις, σημειῶν διὰ γραμμάτων μὲν τοὺς ἀριθμούς, δι' ἰδιαιτέρων δὲ σημείων τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις, νὰ κατασκευάζῃ ἐξισώσεις καὶ νὰ λύῃ αὐτάς, καὶ οὕτω νὰ λύῃ μάλιστα γενικὰ προβλήματα, τῶν ὁποίων τὰ δεδομένα καὶ τὰ ζητούμενα εἶναι ἀριθμοί. Η δὲ προειρημένη μέθοδος τοῦ λύειν τὰ προβλήματα ὀνομάζεται γενικῶς μὲν *ἀναλυτική*, ἰδίως δὲ *ἀλγεβρική*. Ἐνίοτε δὲ καὶ ἡ Ἄλγεβρα καλεῖται *ἀνάλυσις*.

Ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ θέλομεν πραγματευθῆ ἐκεῖνα τὰ μέρη τῆς Ἀλγέβρας, ὅσα κρίνομεν ἱκανὰ εἰς τοὺς σπουδάζοντας ἐν τοῖς παρ' ἡμῖν γυμνασίοις.

Σημ. Οἱ θέλοντες ἀπὸ τοῦδε νὰ γυμνάζωνται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεων τῶν προβλημάτων, εὑρίσκουσι ἐκθέσεις προβλημάτων ἐν τῷ τρίτῳ κεφαλαίῳ καὶ ἐν τῷ τέλει τοῦ βιβλίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ.

11. Ἡ σπουδὴ τῶν ἐξισώσεων προαπαιτεῖ τὴν εἴδησιν τοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑπολογισμοῦ, ἤτοι τῶν μεταλλαγῶν ἐκείνων, ὅσαι ἀνάγκη νὰ γίνωνται ἐπὶ ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν πρὸς εὕρεσιν ἄλλων ἐγγραμμάτων διαφόρως πρὸς τοὺς πρώτους συσχετισμένων. Διὰ τοῦτο θέλομεν ἐξηγήσει ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ ὅσα τοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑπολογισμοῦ θέλουσι χρειασθῆ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἀκολούθων.

Περὶ ὅρων, ὁμοίων ὅρων καὶ πολυόρων.

12. Καὶ ἐν τῷ Συμπληρώματι καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ κεφαλαίῳ εἴδομεν ὅτι ἀριθμοί τινες σημειοῦνται δι' ἑνὸς μόνου γράμματος καὶ ὀνομάζονται *μονογράμματοι*, οἷον οἱ δεδομένοι $α$, $β$, $γ$ τοῦ ἐν ἀρ. 5 γενικοῦ προβλήματος, ἄλλοι δὲ διὰ δύο ἢ διὰ πλειοτέρων καὶ διὰ πράξεων ἐκτελεστέων ἐπ' αὐτῶν, οἵτινες λέγονται *πολυγράμματοι* καὶ νοοῦνται ὅτι εἶναι ἐξαγόμενα μιᾶς ἢ πλειοτέρων πράξεων ἐκτελεστέων ἐπὶ μονογραμμάτων ἢ καὶ ἐπὶ ἄλλων ἁπλουστέρων πολυγραμμάτων· τοιοῦτοι δὲ εἶναι οἱ ἀκόλουθοι,

$α \times β$ ἢ $α\,β$ ἢ $αβ$, $-α \times -β$ ἢ $αβ$, $α \times -β$ ἢ $-αβ$;
$α \times β \times -γ$ ἢ $αβ \times -γ$ ἢ $α \times -γβ$ ἢ $-γαβ$ ἢ $αβγ$;
$α \times -β \times -γ$ ἢ $-αβ \times -γ$ ἢ $αβγ$, $-αβ \times -γδ$ ἢ $αβγδ$;

$$\frac{a}{\beta},\quad \frac{-a}{-\beta} \text{ ἢ } +\frac{a}{\beta},\quad \frac{-a}{+\beta} \text{ ἢ } -\frac{a}{\beta},\quad \frac{+a}{-\beta} \text{ ἢ } -\frac{a}{\beta},$$

$$a^2,\ \beta^3,\ \gamma^4,\ a^2\beta^3,\ -a^4\beta^2\gamma^3,\ 5a^2\beta^3,\ -6a^3\beta\gamma^2,$$

$$\sqrt{a},\ \sqrt{\beta},\ \sqrt{a^4},\ -\sqrt{a^8},\ \sqrt[3]{a^2\beta^4\gamma},\ \sqrt[4]{\delta^3\varepsilon^5},\ \pm\sqrt{\eta\theta^2},\ \sqrt{-a^3\beta},$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{\beta}},\ -\sqrt[3]{\frac{\delta^2}{\gamma^3}},\ \sqrt{-\frac{\theta^3}{\varepsilon^2}},\ \frac{5a^3\beta}{9\gamma^2\delta},\ \frac{3\theta\eta^2}{\sqrt{a}},\ \frac{-\sqrt{5a^2}}{+\sqrt[3]{2\beta^3}},$$

$$a+\beta,\quad a-\beta,\quad -a+\beta,\quad -a-\beta,$$

$$5a^2\beta^3+4a^3\gamma^4,\qquad 6\delta^4\varepsilon^2\zeta-9a^2\eta^4,$$

$$7a^3\beta^2-4a^2\beta^3+3a\beta^4,\quad 2\gamma^4\delta+3\delta^3\varepsilon-4\gamma^3\varepsilon^2-5\varepsilon^4,$$

$$\frac{3a^2\beta}{2\gamma^3\delta}+\frac{5a\beta^2}{3\gamma^2\delta^2}-\frac{9a^3}{4\delta^3}+\frac{8a^3}{5\gamma\delta^4}-\frac{9}{8\delta^3} \text{ κτλ.}$$

13. Ὅρος ὀνομάζεται μονογράμματος ἀριθμός, ἢ πολυγράμματος ἐν ᾧ εἶναι σημειωμένη πᾶσα ἄλλη πρᾶξις ἐκτὸς τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως, οἷον ὅλοι οἱ τῶν ἀνωτέρω ἑπτὰ πρώτων γραμμῶν· ἀλλὰ καὶ μερικός τις ἀριθμὸς καλεῖται ὅρος· οἷον 12, 5×7, κτλ.

Προσδιόρισμα τοῦ ἐγγραμμάτου ὅρου λέγεται ὁ μερικὸς ἀριθμός, ὅς τις προκύπτει ἀφοῦ μερικοποιηθῶσι τὰ γράμματά του καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σημειωμέναι πράξεις. Ἐκ δὲ τῶν ἀνωτέρω ὅρων καταλαμβάνει τις ὅτι, ἂν τὰ γράμματα a, β, γ, κτλ σημαίνωσιν ἀκεραίους ἀριθμούς, τὸ προσδιόρισμα ὅρου τινὸς δυνατὸν νὰ ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς ἢ ἀντιθετικός, κλασματικὸς θετικὸς ἢ ἀντιθετικός, ἐνάριθμον ποσὸν ἢ καὶ ἀνύπαρκτόν τι (Συμπ. ἀρ. 68 καὶ 83). Ἐννοεῖται δὲ ὅτι κατὰ τὰς διαφόρους μερικοποιήσεις τῶν ἁπλῶν γραμμάτων τὸ προσδιόρισμα εἶναι ἄλλοτε ἄλλο.

14. Οἱ ἀκέραιοι ὅροι, τῶν ὁποίων τὰ γράμματα ἦσαν εἶναι

τὰ αὐτὰ καὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος δείκτης εἰς ὅλους εἶναι ὁ αὐτός, καλοῦνται *ὅμοιοι*, οἷον οἱ $5\alpha^3\beta^2\gamma$, $-8\alpha^3\beta^2\gamma$, $+4\alpha^3\beta^2\gamma$.

15. *Πολύορος* δὲ ἀορίστως λέγεται ὁ ἀπαρτιζόμενος ἐκ πολλῶν κατὰ σειρὰν ὅρων ὁμοειδῶν ἢ ἀντιθέτων, ὡρισμένως δὲ *δίορος*, *τρίορος*, κτλ ὁ ἀποτελούμενος ἐκ δύο, ἐκ τριῶν κτλ ὅρων, οἷον οἱ τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων τελευταίων γραμμῶν ἐγγράμματοι. Λέγεται δὲ καὶ οὐδετέρως *δίορον*, *τρίορον*, *πολύορον*.

Πολυόρου οἱ ὅροι δυνατὸν νὰ ἦναι ὅλοι θετικοί, ἢ ὅλοι ἀντιθετικοί, ἢ οἱ μὲν θετικοί, οἱ δὲ ἀντιθετικοί. Τὸ δε προσδιόρισμα αὐτοῦ εὑρίσκεται, ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσι προσθέσεις ἢ καὶ ἀφαιρέσεις ἐπὶ τῶν προσδιορισμάτων τῶν ὅρων του ἐξ ἀριστερῶν κατὰ σειρὰν πρὸς δεξιά. Καὶ τοῦ μὲν ἔχοντος ὅλους του τοὺς ὅρους θετικοὺς ἢ ὅλους ἀντιθετικοὺς τὸ προσδιόρισμα δῆλον ὅτι εἶναι ἄθροισμα τῶν προσδιορισμάτων ὅλων τῶν ὅρων του, θετικὸν μὲν τὸ τῶν θετικῶν, ἀντιθετικὸν δὲ τὸ τῶν ἀντιθετικῶν. Τοῦ δ' ἔχοντος τοὺς μὲν θετικούς, τοὺς δὲ ἀντιθετικούς, τὸ *προσδιόρισμα εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθετικῶν, ὁμοειδὲς δὲ μὲ τὸ μεγαλήτερον προσδιόρισμα*.

Και πρῶτον μὲν τοῦ διόρου $\alpha-\beta$ εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ προσδιόρισμα εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ὅρων ὁμοειδὲς μὲ τὸν μεγαλήτερον· ὡσαύτως δὲ καὶ τοῦ τριόρου $\alpha+\beta-\gamma$.

Περὶ δὲ τοῦ τριόρου $\alpha-\beta+\gamma$ βλέπομεν ὅτι, ἂν μὲν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἦναι θετική, θέλει προστεθῇ εἰς τὸν τρίτον, τὸ δὲ ἄθροισμά των εἶναι ἐνταυτῷ καὶ προσδιόρισμα τοῦ τριόρου καὶ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο θετικῶν ὅρων ὑπὲρ τὸν ἀντιθετικόν, εἶναι δὲ ὁμοειδὲς μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα. Ἂν δ' ἦναι ἀντιθετική, θέλει ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν τρίτον, καὶ οὕτω, ἂν μὲν ὁ $-\beta$ ἦναι μεγαλήτερος τῶν δύο θετικῶν, μέρος τι αὐτοῦ συνηφανίσθη μὲ τὸν πρῶτον ὅρον, ἄλλο μέρος του μὲ τὸν τρίτον, καὶ τὸ ἄλλο του μέρος εἶναι ἐνταυτῷ καὶ προσδιόρισμα τοῦ τριόρου καὶ ὑπεροχὴ τοῦ $-\beta$ ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων, ὁμοειδὲς μὲ τὸν μεγαλήτερον· ἂν δ' ὁ $-\beta$ ἦναι μικρότερος τῶν δύο θετικῶν, μέρος τι αὐτοῦ συνηφανίσθη μὲ τὸν πρῶτον ὅρον, καὶ τὸ ἄλλο του μέρος συναφανίζεται μὲ μέρος τι τοῦ τρίτου ὅρου, μένει δὲ μέρος τοῦ τρίτου ὅρου, ἤτοι τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο θετικῶν, καὶ ὡς προσδιόρισμα τοῦ τριόρου καὶ ὡς διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀντιθετικοῦ, ὁμοειδὲς μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τοῦτον τρόπον θέλει πληροφορηθῆ τις ὅτι καὶ τοῦ τριόρου $\alpha-\beta-\gamma$ τὸ προσδιόρισμα εἶναι διαφορὰ τοῦ θετικοῦ ὅρου καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθετικῶν, ὁμοειδὲς μὲ τὸ μεγαλήτερον.

Περὶ δε τῶν τετραόρων $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ ἢ $\alpha-\beta+\gamma+\delta$ παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν μὲν τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἦναι θετικὸν, ἀπὸ μὲν τὸν τοῦ πρώτου τετραόρου τελευταῖον ὅρον θέλει ἀφαιρεθῆ, εἰς δὲ τὸν τοῦ δευτέρου θέλει προςτεθῆ, ἂν δ' ἦναι ἀντιθετικὸν, τἀνάπαλιν, καὶ οὕτω θέλει προκύψει τὸ προσδιόρισμα ἑκατέρου τοῦ τετραόρου. Ἀλλὰ κατὰ μὲν τὰς δύο περιπτώσεις καθ' ἃς προστίθεται, καὶ τὸ προσδιόρισμα τοῦ τετραόρου καὶ ἡ τοῦ μεγαλητέρου ἀθροίσματος τῶν ὅρων ὑπὲρ τὸ μικρότερον ὑπεροχὴ εἶναι κεφάλαιον τοῦ τετάρτου ὅρου καὶ τοῦ προσδιορίσματος τῶν τριῶν πρώτων· λοιπὸν τὸ προσδιόρισμα τοῦ τετραόρου εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθετικῶν, ὁμοειδὲς δὲ μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα. Κατὰ δὲ τὰς δύο περιπτώσεις καθ' ἃς ἀφαιρεῖται τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἀπὸ τὸν τέταρτον, προσδιόρισμα τοῦ τετραόρου εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ τετάρτου ὅρου καὶ τοῦ προσδιορίσματος τῶν τριῶν πρώτων. Ἀλλ' ἡ αὐτὴ διαφορὰ εἶναι διαφορὰ καὶ τῶν ἀθροισμάτων τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων τοῦ τετραόρου. Διότι, ἂν τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἦναι μεγαλήτερον τοῦ τετάρτου, διὰ τῆς εἰρημένης ἀφαιρέσεως συναφανίζεται καὶ τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῶν ὁμοειδῶν μὲ τὸν τέταρτον μὲ μέρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθέτων ὅρων, ἤτοι τοῦ προσδιορίσματος τῶν τριῶν πρώτων ὅρων, καὶ ἡ διαφορὰ τούτου τοῦ προσδιορίσματος καὶ τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι διαφορὰ καὶ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ἀθροισμάτων τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀντεθετικῶν ὅρων τοῦ τετραόρου. Ἂν δ' ἦναι τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων μικρότερον τοῦ τετάρτου, συναφανίζεται μὲ μέρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῶν ὁμοειδῶν μὲ τὸν τέταρτον τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθέτων ὅρων, ἤτοι τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων, καὶ ἡ διαφορὰ τούτου τοῦ προσδιορίσματος καὶ τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι διαφορὰ καὶ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ἀθροισμάτων τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων τοῦ τετραόρου, ὁμοειδὲς μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα. Λοιπὸν κτλ.

Ὡσαύτως πληροφορεῖταί τις καὶ περὶ τοῦ προσδιορίσματος τούτων τῶν τετραόρων $\alpha-\beta-\gamma-\delta$ ἢ $\alpha-\beta-\gamma+\delta$ καὶ περὶ πενταόρων καὶ περὶ ὁποιωνδήποτε ἄλλων πολυόρων.

Σημ. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι, ἂν ἑνός τινος ἢ πλειοτέρων ὅρων τοῦ πολυόρου τὸ προσδιόρισμα ἦναι ἀνάριθμον, ὁπότε ἀντὶ τούτου εἶναι εἰς χρῆσιν ἀριθμὸς προσεγγίζων, τὸ προσδιόρισμα τοῦ πολυόρου καὶ αὐτὸ θέλει εὑρεθῆ κατὰ προσέγγισιν· ἂν δ' ὅρος τις τοῦ πολυόρου παριστάνῃ ἀνύπαρκτον, καὶ τοῦ πολυόρου τὸ προσδιόρισμα θέλει σημαίνει ἀνύπαρκτον.

16. Ἔπεται ἐκ τῶν ἤδη ἀποδεδειγμένων ὅτι, *ἐὰν μεταθέτωνται οἱ ὅροι πολυόρου ὁπωσδήποτε, ἀλλὰ διατηρῶνται θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοὶ ὡς ἦσαν, τοῦ οὕτω προκύπτοντος πολυόρου τὸ προσδιόρισμα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐξ οὗ προέκυψε καὶ κατὰ τὸν ἀριθμὸν καὶ κατὰ τὸ θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν σημεῖόν του*· οἷον μεταθέσει τῶν ὅρων ἐκ τοῦ $\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon$ προκύπτει τὸ $\gamma-\varepsilon+\alpha-\beta+\delta$, τοῦ ὁποίου τὸ προσδιόρισμα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ πρώτου. Διότι καὶ τῶν δύο πολυόρων τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν καὶ τὸ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων εἶναι τὰ αὐτά, ἑπομένως καὶ ἡ διαφορά των, ἥτις εἶναι προσδιόρισμα ἑκατέρου, εἶναι ἡ αὐτή.

Σημ. Εἶναι βέβαιον ὅτι πολλῶν ὅρων ἢ θετικῶν ὅλων ἢ ἀντιθετικῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ αὐτό, ὁποιανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχωσιν εἰς τὴν παράθεσιν.

17. *Ἐὰν ἀλλάσσωνται τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων πολυόρου ἀπὸ θετικῶν εἰς ἀντιθετικὰ καὶ τἀνάπαλιν, τοῦ προκύπτοντος πολυόρου τὸ προσδιόρισμα θέλει εἶσθαι τὸ αὐτὸ μὲν κατὰ τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ τοῦ ἐξ οὗ προέκυψε πολυόρου, ἀντίθετον δὲ κατὰ τὸ σημεῖον.* Διότι τοιαύτη ἀλλαγὴ τῶν σημείων δὲν μεταβάλλει τὰ προσδιορίσματα τῶν ὅρων, ἐπομένως οὐδὲ τὰ κεφάλαιά των, οὐδὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο κεφαλαίων, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν τοῦ προσδιορίσματος, ἀλλὰ μεταβάλλει μόνον τὸ μεγαλήτερον κεφάλαιον ἀπὸ θετικοῦ εἰς ἀντιθετικὸν καὶ τἀνάπαλιν, ἐπομένως καὶ τὸ προσδιόρισμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ αὐτό, εἰς ἀντιθετικὸν καὶ τἀνάπαλιν.

Ὅταν λοιπὸν θέλῃ τις νὰ μεταποιῇ τὸ προσδιόρισμα πολυόρου, οἷον τοῦ $3\alpha^2-5\alpha\beta+4\beta^2$, εἰς τὸ ἴσον ἀντίθετόν του, ἀρκεῖ ν' ἀλλάσσῃ ὅλων τῶν ὅρων του τὰ σημεῖα οὕτω $-3\alpha^2+5\alpha\beta-4\beta^2$.

18. Ὀνομάζομεν *συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων* τὴν πρᾶξιν, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἕνα ὅρον ἰσοδύναμον μὲ πολλοὺς ἄλλους ὁμοίους. Καὶ ἂν μὲν ἦναι ὅλοι οἱ ὅμοιοι ὅροι θετικοὶ ἢ ὅλοι ἀντιθετικοί, οἷον
$5\alpha^3\beta^2+6\alpha^3\beta^2+4\alpha^3\beta^2$ ἢ $-5\alpha^3\beta^2-6\alpha^3\beta^2-4\alpha^3\beta^2$, ἐννοουμένου ὡς μονάδος τοῦ $\alpha^3\beta^2$, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 5 τοιαῦται μονάδες, ὁ δεύτερος 6 καὶ ὁ τρίτος 4, ὅλαι δὲ εἶναι ὁμόσημοι, δῆλον ὅτι τὸ τρίορον ἰσοδυναμεῖ μὲ $5+6+4$ ἢ μὲ 15 τοιαύτας μονάδας, ὅσας ἔχει τὸ κεφάλαιον τῶν συνεργῶν των, ἤτοι μὲ $+15\alpha^3\beta^2$ τὸ πρῶτον καὶ μὲ $-15\alpha^3\beta^2$ τὸ δεύτερον.

Ἂν δ' ἦναι τῶν ὁμοίων ὅρων ὁ μὲν θετικός, ὁ δὲ ἀντιθετικός, οἷον $8\alpha^4\beta^3\gamma^2-6\alpha^4\beta^3\gamma^2$, ἐννοουμένου τοῦ $\alpha^4\beta^3\gamma^2$ ὡς μονάδος, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος εἶναι 8 τοιαῦται μονάδες, ὁ δὲ δεύτερος 6, εἶναι δὲ ἀντίθετοι, δῆλον ὅτι τὸ δίορον ἰσοδυναμεῖ μὲ $8-6$ ἢ μὲ 2 τοιαύτας μονάδας, ἤτοι μὲ $2\alpha^4\beta^3\gamma^2$. Τὸ δὲ δίορον $4\alpha^2\beta^3-7\alpha^2\beta^3$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν $-3\alpha^2\beta^3$. Λοιπὸν ὁ ἰσοδύναμος μὲ πολλοὺς ὁμοίους ὅρους ὅρος ἔχει. ὅταν μὲν οἱ ὅροι ἦναι ὁμοειδεῖς, σημεῖον τὸ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ συνεργὸν ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν συνεργῶν των, ὅταν δ' ἦναι ἀντίθετοι, συνεργὸν καὶ σημεῖον τὴν διαφορὰν τῶν συνεργῶν τῶν ὁμοίων ὅρων μὲ τὸ σημεῖόν της, δεξιὰ δὲ τοῦ συνεργοῦ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις ἔχει τὰ αὐτὰ μὲ τοὺς ὁμοίους ὅρους γράμματα μὲ τοὺς δείκτας των. *Συστέλλονται λοιπὸν πολλοὶ ὅμοιοι ὅροι εἰς ἕνα ἰσοδύναμον, ἐὰν προστεθῶσιν οἱ συνεργοί των, ὅταν ἦναι ὁμοειδεῖς, ἢ ἂν ἀφαιρεθῶσιν, ὅταν ἦναι ἀντίθετοι, δεξιὰ δὲ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τεθῶσι τὰ γράμματα μὲ τοὺς δείκτας των ὅπως εἶναι ἐν τοῖς ὁμοίοις ὅροις.*

Πολύορον λοιπὸν ἔχον ὁμοίους ὅρους, οἷον τὸ

$$7a^3 - 8\beta^3 + 3\beta^3 - 9a^2\beta - 5\beta^3 + a\beta^2 + 4\beta^3,$$

καθίσταται ἁπλούστερον, ἀφοῦ γείνῃ τῶν ὁμοίων ὅρων του ἡ συστολή. Ὅμοιοι ὅροι τούτου εἶναι οἱ

$$-8\beta^3,\quad +3\beta^3,\quad -5\beta^3,\quad +4\beta^3,$$

μεταθέσει δὲ αὐτῶν οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι ὅλοι κατὰ σειρὰν πρῶτον οἱ δύο ἀντιθετικοί, ἔπειτα οἱ δύο θετικοί, προκύπτει τὸ

$$7a^3 - 9a^2\beta + a\beta^2 - 8\beta^3 - 5\beta^3 + 3\beta^3 + 4\beta^3,$$

τούτου δὲ οἱ μὲν ἀντιθετικοὶ ὅμοιοι ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὸν $-13\beta^3$, οἱ δὲ θετικοὶ μὲ τὸν $+7\beta^3$, οὗτοι δὲ οἱ δύο μὲ τὸν $-6\beta^3$. Λοιπὸν τὸ πολύορον ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ

$$7a^3 - 9a^2\beta + a\beta^2 - 6\beta^3.$$

Ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων τῶν πολυόρων δὲν πρέπει νὰ παραμελῆται ποτὲ ἐν τοῖς ἑξῆς, διότι παρέχει ἁπλούστερα εἰς χρῆσιν πολύορα. Δύναται δὲ νὰ γίνηται καὶ ἄνευ μεταθέσεως τῶν ὁμοίων ὅρων, ὥστε νὰ ἦναι κατὰ σειράν, ἀρκεῖ νὰ γίνηται κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

19. Συνήθως εἶναι χρήσιμον νὰ μεταθέτωνται οἱ ὅροι πολυόρου οὕτως, ὥστε μετὰ τὴν μετάθεσιν νὰ προβαίνωσιν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ οἱ δεῖκται τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ ἐν τοῖς διαφόροις ὅροις βαθμηδὸν ἐλαττούμενοι ἢ αὐξάνοντες. Ἡ τοι-

αὕτη πρᾶξις λέγεται *διάταξις πολυόρου*, τὸ δὲ πολύορον μετὰ τὴν διάταξιν καλεῖται *διατεταγμένον* ἢ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις γράμματός τινος ἢ κατὰ τὰς κατιούσας. Τὸ πολύορον

$$6a^4 - 5a^3\beta + 7a^2\beta^2 + 8a\beta^3 - 9\beta^4$$

εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a καὶ ἐνταυτῷ κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ β.

Ἐὰν δὲ πολυόρου πολλοὶ ὅροι ἔχωσι μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην τὸ γράμμα, πρὸς ὃ ἡ διάταξις γίνεται, οὗτοι διατάσσονται πρὸς τὰς δυνάμεις ἄλλου γράμματος.

20. Ἡ χρῆσις τῶν παρενθέσεων εἶναι συχνὴ ἐν τοῖς ἑξῆς. Παρενθέτεται δ' ἐν αὐταῖς πᾶν ὅ,τι εἶναι ὠφέλιμον νὰ ἐννοῆται ὡς μονογράμματος ὅρος, ἢ πᾶν οὗτινος ἐννοεῖται τὸ προσδιόρισμα, οἷον ὅροι πολυγράμματοι ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί, πολύορα μὲ ἀκεραίους ὅρους ἢ κλασματικούς, ῥίζαι σημειωμέναι διὰ τοῦ ῥιζικοῦ, μερικὸς ἀριθμὸς κτλ. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς

$$(5a^3\beta^2)^2,\quad \left(\frac{3a^2}{5\beta^3}\right)^3,\quad \frac{(4a)^3}{(6\beta)^2}\quad (\sqrt{a^3\beta^2})^3,\quad (8a^3-9\beta^2),$$

$$(4a-5\beta+6\gamma-7\delta)^2,\ (345)^3,\ \text{κτλ}.$$

Ἐνίοτε δὲ εἶναι εἰς χρῆσιν καὶ τοιουτόσχημοι παρενθέσεις [ ], τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν πρὸς διαστολὴν *ἐγγωνίους*.

21. Πρὸς ἄσκησιν εἰς ὅσα ἤδη προείπομεν πρόκεινται τὰ ἀκόλουθα πολύορα.

$$7\chi+\chi^3-11+5\chi^2,\qquad a\chi^3-a^4+\chi^4+a^3\chi-a^2\chi^2$$

τὸ $\chi=2$ τὸ $\chi=5$ καὶ τὸ $a=3$

$$a\chi^2+\beta^2\chi+\beta^3+\beta\chi^2-3a^2\beta-a\beta\chi-a^2\chi+a^3$$

$$\chi=7,\ a=5,\ \beta=4$$

$$\frac{12a\chi^2-9a^3+4\chi^3+8a^2\chi}{7a\chi-3a^2+4\chi^2}\quad \chi=2,\ a=2$$

$-6\alpha^5 - 9\alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \frac{3}{2}\alpha^2\beta^3 + 3\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^4\beta - \frac{1}{2}\alpha\beta^4$
$-5\alpha^2\beta^3 + 15\alpha^3\beta^2$ $\quad \alpha=5 \quad \beta=4.$

$4\alpha^2\chi^3 - 10\alpha^4\chi + 15\alpha^3\chi^2 + 24\alpha^2\chi^3 - 6\alpha\chi^4 + 20\alpha^2\chi^3$
$-12\alpha^4\chi - 16\alpha^3\chi^2 + 3\frac{1}{2}\alpha\chi^4$

Περὶ ἀλγεβρικῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

22. Εἴδομεν ἐν τῷ Συμπληρώματι ὅτι δύο ἀριθμοὶ ἀφῃρημένοι καὶ παριστάνοντες ποσὸν μὴ νοούμενον ὡς θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν δύνανται, ὁμώνυμοι ὄντες, νὰ προσθέτωνται ὁ ἕτερος εἰς τὸν ἄλλον ἢ ν' ἀφαιρῶνται, ἀλλ' ὁ μέλλων νὰ προστεθῇ τότε γίνεται θετικός, ὁ δὲ μέλλων ν' ἀφαιρεθῇ ἀντιθετικός· διότι σημαίνουσιν ἀντίθετα, ὁ μὲν *αὔξησιν τοῦ πρώτου καθ' ὅσας ἔχει αὐτὸς μονάδας*, ὁ δ' *ἐλάττωσιν τοῦ αὐτοῦ καθ' ὅσας ἔχει αὐτὸς μονάδας*. Καὶ ἄν τις θέλῃ μετὰ ταῦτα νὰ μὴ ἐκτελέσῃ, ἀλλὰ νὰ σημειώσῃ ἑκατέραν τὴν πρᾶξιν, θέλει γράψει κατόπιν τοῦ πρώτου τὸν δεύτερον θετικὸν μέν, ἂν μέλλῃ νὰ προστεθῇ, ἀντιθετικὸν δέ, ἂν μέλλῃ ν' ἀφαιρεθῇ, οἷον, ἂν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι 20 καὶ 15, $20+15$, $20-15$.

Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ παριστάνωσι ποσὰ ἐν γένει θετικά, ἢ ὁ μὲν θετικόν, ὁ δὲ ἀντιθετικόν, οἷον $+20$ καὶ $+15$, ἢ $+20$ καὶ -15, καὶ τοιοῦτοι εἶναι οἱ τῶν πλείστων προβλημάτων, τότε εἶναι ἀνάγκη ὁ $+15$ νὰ προστίθηται εἰς τὸν $+20$, ἀδύνατον δὲ καὶ ν' ἀφαιρῆται, ὁ δὲ -15, ὡς ἀντίθετος τοῦ $+15$, ἀνάγκη ν' ἀφαιρῆται, ἀδύνατον δὲ καὶ νὰ προστίθηται εἰς τὸν $+20$. Ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ -20 καὶ -15 ἀνάγκη νὰ προσθέτωνται, οἱ δὲ -20 καὶ $+15$ ν' ἀφαιρῶνται. Πρὸς σημείωσιν δὲ καὶ τούτων τῶν πράξεων ἀρκεῖ νὰ γράφηται ὁ ἕτερος κατόπιν τοῦ ἄλλου ὡς ἔχουσιν, οἷον $+20+15$, $+20-15$, $-20-15$, $-20+15$.

Οὕτω δὲ πρέπει νὰ γίνηται ἡ σημείωσις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως καὶ τῶν ἐγγραμμάτων ὅρων μονογραμμάτων τε καὶ πολυγραμμάτων, ὅταν ἦναι θετικοί, ἀντιθετικοὶ ἢ ἀντίθετοι, δηλ. νὰ γράφηται ὁ ἕτερος κατόπιν τοῦ ἄλλου ὅπως ἔχουσιν, καὶ οὕτω θέλει προκύψει δίορον, τοῦ ὁποίου τὸ προσδιόρισμα εἴπομεν ἤδη πῶς εὑρίσκεται· ἂν δ' ἦναι τρεῖς ἢ πλειότεροι οἱ ὅροι, θέλει προκύψει τρίορον ἢ πολύορον.

23. Τὰ πολύορα ὅμως παρέχουσιν εἰς σκέψιν τρίτην τινὰ περίπτωσιν τῶν δύο προηγουμένων διάφορον. Δηλαδὴ εἴδομεν (15) ὅτι τῶν μὲν ἐχόντων ὅλους τοὺς ὅρους των θετικοὺς πολυόρων τὸ προσδιόρισμα εἶναι θετικόν, τῶν δ' ἀντιθετικοὺς ἀντιθετικόν. Τῶν ἐχόντων ὅμως τοὺς μὲν τῶν ὅρων θετικούς, τοὺς δὲ ἀντιθετικούς, τὸ προσδιόρισμα ἀνάγκη νὰ ἦναι τῶν μὲν θετικόν, τῶν δὲ ἀντιθετικόν, ἀλλ' εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἄδηλον τίνων εἶναι θετικὸν καὶ τίνων ἀντιθετικὸν πρὸ τῆς μερικοποιήσεως τῶν γραμμάτων καὶ τῆς ἐκτελέσεως ὅλων τῶν πράξεων· μάλιστα ἐνίοτε συμβαίνει τοῦ αὐτοῦ πολυόρου τὸ προσδιόρισμα νὰ ἦναι κατὰ τὰς διαφόρους μερικοποιήσεις τῶν γραμμάτων ὁτὲ μὲν θετικόν, ὁτὲ δὲ ἀντιθετικόν.

Οὕτως ἐχόντων τῶν προσδιορισμάτων τῶν πολυόρων, δῆλον μὲν ὅτι δύο πολύορα ἢ πλειότερα ἔχοντα ὅλους των τοὺς ὅρους θετικοὺς ἢ ὅλους των τοὺς ὅρους ἀντιθετικοὺς πρέπει νὰ προσθέτωνται, δύο δὲ πολύορα, ὧν τὸ μὲν ἔχει ὅλους τοὺς ὅρους θετικούς, τὸ δὲ ὅλους ἀντιθετικούς, πρέπει νὰ ἀφαιρῶνται τὸ ἕτερον ἀπὸ τὸ ἄλλο· τί δὲ πρέπει νὰ πράττῃ τις, πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν, ἐπὶ τῶν πολυόρων τῶν ἐχόντων καὶ θετικοὺς καὶ ἀντιθετικοὺς ὅρους, ἐξ αὐτῶν τῶν πολυόρων ἀδύνατον νὰ τὸ μάθῃ. Ἀλλ' εὐθὺς θέλομεν ἰδεῖ τί τὸ πρακτέον περὶ τούτων.

24. Παρατηρητέον πρῶτον ὅτι, ἂν κατόπιν πολυόρου μὲ θετικοὺς ἢ μὲ ἀντιθετικοὺς ὅλους τοὺς ὅρους του, οἷον τοῦ $\alpha+\beta+\gamma$ ἢ τοῦ $-\alpha-\beta-\gamma$, γραφῇ ὅπως ἔχει ἄλλο πολύορον μὲ θετικοὺς ἢ μὲ ἀντιθετικοὺς ὅλους τοὺς ὅρους του, οἷον τὸ $\delta+\varepsilon+\zeta$ ἢ τὸ $-\delta-\varepsilon-\zeta$, προκύπτει τρίτον πολύορον

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta, \quad \text{ἢ} \quad -\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon-\zeta.$$

τοῦ ὁποίου τὸ προσδιόρισμα δῆλον ὅτι εἶναι κεφάλαιον τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πρώτων.

Ἂν δ' ἔπειτα κατόπιν τοῦ πρώτου γραφθῇ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του τὸ δεύτερον, προκύπτει τρίτον πολύορον

$$\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon-\zeta, \quad \text{ἢ} \quad -\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta,$$

τοῦ ὁποίου τὸ προσδιόρισμα δῆλον ὅτι εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πρώτων.

Ἐὰν ὅμως κατόπιν πολυόρου μὲ θετικοὺς καὶ μὲ ἀντιθετικοὺς ὅρους, οἷον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$, γραφθῇ ὅπως ἔχει ἄλλο πολύορον μὲ θετικοὺς καὶ ἀντιθετικοὺς ὅρους, οἷον τὸ $\mu-\nu-\xi+\pi$, τοῦ οὕτω προκύπτοντος τρίτου πολυόρου

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta+\mu-\nu-\zeta+\pi$$

τὸ προσδιόρισμα δυνατὸν νὰ ἦναι ἢ κεφάλαιον τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πρώτων ἢ διαφορά των. Διότι α΄. θετικοῦ ὄντος τοῦ προσδιορίσματος τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$, ἂν ἦναι θετικὸν καὶ τὸ τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$, ἐνῷ διὰ τῆς γραφῆς τοῦ ἑτέρου κατόπιν τοῦ ἄλλου αὐξάνει τὸ κεφάλαιον $\alpha+\gamma$ τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ κατὰ τὸ κεφάλαιον $\mu+\pi$ τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ ἄλλου, αὐξάνει κατὰ τοσοῦτον καὶ τὸ προσδιόρισμα αὐτοῦ, ἐνῷ δὲ αὐξάνει καὶ τὸ κεφάλαιον $-\beta-\delta$ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων κατὰ τὸ κεφάλαιον $-\nu-\xi$ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων τοῦ ἄλλου, τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ ἐλαττοῦται κατὰ τὸ αὐτό· ὥστε τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ τὸ προσδιόρισμα οὕτω μετεβλήθη κατὰ τὴν διαφορὰν τοῦ $\mu+\pi$ καὶ τοῦ $-\nu-\xi$, ἤτοι κατὰ τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$. Ἀλλὰ κατὰ τὰς ὑποθέσεις καὶ τοῦτο εἶναι θετικὸν καὶ τὸ τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$· λοιπὸν ηὔξησε τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ κατὰ τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$, καὶ οὕτως ἔγεινε προσδιόρισμα τοῦ τρίτου πολυόρου. *Λοιπὸν τοῦ τρίτου τὸ προσδιόρισμα κατὰ τὰς προειρημένας ὑποθέσεις εἶναι κεφάλαιον τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ἄλλων.*

β'. Ἂν δ' ἦναι τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ τὸ προσδιόρισμα ἀντιθετικόν, ἐνῷ ἡ διὰ τῆς ἀνωτέρω πράξεως αὔξησις τοῦ $-\beta-\delta$ κατὰ $-\nu-\xi$ αὐξάνει τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ κατὰ $-\nu-\xi$, ἡ αὔξησις τοῦ $\alpha+\gamma$ κατὰ $\mu+\pi$ ἐλαττοῖ αὐτὸ κατὰ $\mu+\pi$· ὥστε τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ μετεβλήθη κατὰ τὴν διαφορὰν τοῦ $\mu+\pi$ καὶ τοῦ $-\nu-\xi$, ἤτοι κατὰ τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$. Ἀλλὰ κατὰ τὰς ὑποθέσεις τὸ μὲν εἶναι θετικόν, τὸ δὲ ἀντιθετικόν· λοιπὸν τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ ἠλαττώθη κατὰ τὸ τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$, καὶ οὕτως ἔγεινε προσδιόρισμα τοῦ τρίτου. Λοιπὸν *τὸ προσδιόρισμα τοῦ τρίτου κατὰ τὰς νέας ὑποθέσεις εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ἄλλων*. Ο. Ε. Δ.

Ἂν δ' ἔπειτα τὸ $\mu-\nu-\xi+\pi$ γραφθῇ κατόπιν τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του, τοῦ προκύπτοντος τρίτου πολυόρου

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta-\mu+\nu+\xi-\pi$$

τὸ προσδιόρισμα εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὡς ἀνωτέρω ὅτι *εἶναι διαφορὰ μὲν τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πρώτων, ἂν τὸ προσδιόρισμα τοῦ* $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ *ἦναι θετικόν, κεφάλαιον δὲ αὐτῶν κατὰ τὴν ἀντίθετον ὑπόθεσιν.*

25. Ἐκ τῶν προειρημένων γίνονται δῆλα τὰ τρία ταῦτα·

α'. *Ὅταν γράφηται ὡς ἔχει πολύορον κατόπιν ἄλλου, ὥστε νὰ προκύπτῃ τρίτον, ἢ προστίθενται εἰς ἄλληλα τὰ προσδιορίσματά των, καὶ τοῦτο γίνεται ὅταν ἦναι ὁμοειδῆ, ἢ ἀφαιρεῖται τοῦ ἑτέρου τὸ προσδιόρισμα ἀπὸ τὸ τοῦ ἄλλου, ὅταν ἦναι ἀντίθετα.*

β'. *Ὅταν γράφηται πολύορον μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του κατόπιν ἄλλου, ὥστε νὰ προκύπτῃ τρίτον, γίνεται ἐπὶ τῶν προσδιορισμάτων των ἀντίθετος πρᾶξις τῆς γινομένης, ἂν ἤθελε γραφθῇ ὅπως εἶναι τὸ ἕτερον κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἤτοι ἀφαίρεσις ἀντὶ προσθέσεως καὶ τἀνάπαλιν.*

γ'. *Ὅταν ἀμφοτέρων τῶν πολυόρων οἱ ὅροι ἦναι καὶ* *θετικοὶ καὶ ἀντιθετικοὶ, ὥστε ν' ἀποβαίνῃ ἄδηλον ἂν ἦναι θετικὰ ἢ ἀντιθετικὰ αὐτῶν τὰ προσδιορίσματα, τότε, ἐνῷ διὰ τῆς γραφῆς τοῦ ἑτέρου κατόπιν τοῦ ἄλλου γίνεται πρόσθεσις ἢ ἀφαίρεσις τῶν προσδιορισμάτων των, εἶναι ἄδηλον τίς τῶν δύο γίνεται.*

26. Ἐπειδὴ λοιπὸν δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἠξεύρωμεν ὡρισμένως ὅτι εἶναι θετικὰ ἢ ὅτι εἶναι ἀντιθετικὰ τὰ προσδιορίσματα τῶν πολυόρων, ἵνα ἐκ τούτων προσδιορίσωμεν τὴν πρόσθεσιν ἢ τὴν ἀφαίρεσίν των, ὡς ἐπὶ τῶν ὅρων, καὶ ἐπειδὴ εἴμεθα ἤδη βέβαιοι ὅτι, γραφομένου μέν τινος πολυόρου ὅπως ἔχει κατόπιν ἄλλου, ἄλλο δὲν γίνεται εἰμὴ προσθέτονται ἢ ἀφαιροῦνται τὰ προσδιορίσματά των, γραφομένου δὲ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του, ἀντιστρόφως ἀφαιροῦνται ἢ προσθέτονται τὰ προσδιορίσματά των, διὰ ταῦτα διακρίνοντες μὲν τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν πολυόρων ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν προσδιορισμάτων των, ὡς διάφορα, ἐννοοῦντες δ' αὐτὰς πάντοτε ἀντιθέτους πράξεις, ὀνομάζομεν *πρόσθεσιν μὲν πολυόρων* ἢ *ἀλγεβρικὴν* τὸ γράφειν πολύορον ὡς ἔχει κατόπιν ἄλλου, *ἀφαίρεσιν δὲ πολυόρων* ἢ *ἀλγεβρικὴν* τὸ γράφειν πολύορον μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του κατόπιν ἄλλου. Τὸ δ' οὕτω προκύπτον τρίτον πολύορον λέγεται *κεφάλαιον* τῶν πολυόρων ἢ *διαφορὰ* αὐτῶν *ἀλγεβρικά*· εἶναι δὲ ἑκάτερον αὐτῶν ἢ ἄθροισμα τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πολυόρων ἢ διαφορά.

Σημ. Ἡ σημασία αὕτη τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως συνήθως ἐπεκτείνεται ἄνευ ἀνάγκης, ἀλλὰ διὰ τὸ γενικὸν, καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων.

27. Σημειοῦται δὲ ἡ τῶν πολυόρων πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, ἀφοῦ *τεθῇ τὸ μέλλον νὰ προστεθῇ ἢ ν' ἀφαιρεθῇ ἐντὸς παρενθέσεως καὶ μὲ τὸ + πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, μὲ τὸ — δ' ἐπὶ τῆς ἀφαιρέσεως γραφθῇ κατόπιν τοῦ ἄλλου*· οἷον γράφοντες

$$\alpha-\beta+(\delta-\varepsilon+\zeta) \text{ ἢ } \alpha-\beta-(\delta-\varepsilon+\zeta)$$

σημειοῦμεν νὰ προστεθῇ τὸ $\delta-\varepsilon+\zeta$ εἰς τὸ $\alpha-\beta$ ἢ ν' ἀφαιρεθῇ, τουτέστι νὰ παραμεληθῶσιν αἱ παρενθέσεις καὶ τὸ πρὸ τῆς ἑτέρας σημεῖον, νὰ γραφθῇ δὲ τὸ ἐν αὐταῖς ὅπως ἔχει ἢ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του κατόπιν τοῦ ἄλλου.

Ὅταν σημειῶνται αἱ πράξεις, διακρίνεται τὸ ἕτερον πολύορον τοῦ ἄλλου καὶ δὲν εἶναι συγχωνευμένα εἰς τρίτον.

28. Πᾶν πολύορον δυνατὸν νὰ θεωρῆται κεφάλαιον ἢ διαφορὰ δύο ἄλλων πολυόρων ἢ πολυόρου καὶ ὅρου. Ἵνα δείξωμεν δὲ τοῦτο, γράφομεν ὅπως ἔχει ἢ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του ἐντὸς παρενθέσεων τὸ δεύτερον πολύορον καὶ μὲ τὸ $+$ ἢ μὲ τὸ $-$ πρὸ τῆς παρενθέσεως κατόπιν τοῦ πρώτου. Π. χ. ἂν ἐννοῶμεν τὸ

$$5\alpha^3\beta-4\alpha\beta^2\gamma-6\alpha^2\gamma^2+3\beta^2\gamma^2-9\gamma^4$$

κεφάλαιον ἢ διαφορὰν τοῦ $5\alpha^3\beta-4\alpha\beta^2\gamma$ καὶ τοῦ ἄλλου τριόρου, γράφομεν οὕτω

$$5\alpha^3\beta-4\alpha\beta^2\gamma+(-6\alpha^2\gamma^2+3\beta^2\gamma^2-9\gamma^4),$$

ἢ οὕτω $5\alpha^3\beta-4\alpha\beta^2\gamma-(6\alpha^2\gamma^2-3\beta^2\gamma^2+9\gamma^4)$, κτλ.

29. Εἶναι ὠφέλιμον νὰ μὴ παραβλέπωμεν τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς, ὅταν τύχῃ νὰ ἔχωσιν ὁμοίους ὅρους τὰ εἰς πρόσθεσιν ἢ εἰς ἀφαίρεσιν πολύορα. Τότε εἶναι προτιμότερον νὰ διατάσσωνται πρῶτον τὰ πολύορα πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα, καὶ ἔπειτα νὰ γράφηται τὸ ἕτερον ὑπὸ τὸ ἄλλο καὶ ὄχι κατόπιν, ἐπὶ μὲν προσθέσεως ὅπως ἔχει, ἐπὶ δὲ ἀφαιρέσεως τὸ μέλλον ν' ἀφαιρεθῇ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του.

Πολύορα εἰς πρόσθεσιν καὶ εἰς ἀφαίρεσιν.

$$\begin{array}{r}
8\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha\beta-2\beta^2-\frac{3}{4}\\
-\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha\beta+7\gamma^2+2\\
\alpha\beta+2\beta^2+4\gamma^2+\frac{1}{2}\\
\hline
7\alpha^2-\frac{1}{4}\alpha\beta+11\gamma^2+\frac{7}{4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
9\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2+\frac{1}{2}\beta\gamma\\
5\alpha^2+4\alpha\beta-3\beta^2-\frac{1}{4}\beta\gamma\\
\hline
9\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2+\frac{1}{2}\beta\gamma\\
-5\alpha^2-4\alpha\beta+3\beta^2+\frac{1}{4}\beta\gamma\\
\hline
4\alpha^2-7\alpha\beta+5\beta^2+\frac{3}{4}\beta\gamma
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5\alpha+4\beta+8-3\gamma-7\delta \\ 7\gamma+3\alpha-10\delta-4-12\beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12\alpha-3\delta+9\gamma-\beta \\ 9\gamma-5\beta+7\alpha+12-10\delta \\ \hline \end{array}$$

$$12\beta-3\gamma-7\mu+3\nu+(8\gamma+5\theta-9\nu-3\beta-2\mu)$$

$$-8\alpha+5\beta-3\gamma-(-2\gamma+7\alpha-3\beta)$$

$$\begin{array}{l} 4\alpha^3-9\beta^3+7\alpha\beta^2-6\alpha^2\beta \\ -3\alpha^3+4\alpha^2\beta-4\beta^3-2\alpha\beta^2 \\ 10\beta^3-10\alpha^2\beta+6\alpha^3+8\alpha\beta^2 \\ 5\alpha\beta^2-3\alpha^3-8\beta^3-8\alpha^2\beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15\alpha^4+17\alpha^2\beta^2-18\alpha^3\beta+11\alpha\beta^3 \\ 13\alpha^3\beta+20\alpha\beta^3-19\alpha^2\beta^2+7\alpha^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10^4+2.8^3+9.7^2+12.6 \\ 3.10^4-8.8^3-5.7^2+15.6 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5\alpha^4+3\alpha^2\beta^2\gamma-7\alpha\beta^4 \\ -6\alpha^4+2\alpha^2\beta^2\gamma-17\alpha\beta^4 \\ +9\alpha^4-8\alpha^2\beta^2\gamma-10\alpha\beta^4 \\ +3\alpha^4-5\alpha^2\beta^2\gamma-7\alpha\beta^4 \\ \hline \end{array}$$

$$5\alpha^3-4\alpha\beta^2+8\beta^3-3\alpha^2\beta-(\beta^3-5\alpha^2\beta+2\alpha^3-6\alpha\beta^2).$$

Περὶ ἀλγεβρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

30. Εἴδομεν ἐν τῷ Συμπληρώματι πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀντιθετικῶν καὶ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν καὶ πῶς προσδιορίζεται ἐκ τῶν σημείων + ἢ — τῶν παραγόντων τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου, ἔτι δὲ καὶ τὸ διατί· ἐκ τοῦ αὐτοῦ δὲ εἶναι ἤδη γνωστὸν προσέτι καὶ πῶς σημειοῦται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ αὐτῶν καὶ τῶν μονογραμμάτων ὅρων, καὶ ὅτι ὁ συνεργὸς, ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, εἶναι παράγων, καὶ μάλιστα πολλαπλασιαστὴς, ἂν καὶ γράφεται ἀριστερὰ ὅλων τῶν παραγόντων, καὶ τελευταῖον ὅτι ἐνίοτε ἐκτελεῖται ἓν μέρος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἤτοι εὑρίσκεται τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου καὶ παραλείπονται τὰ σημεῖα τῶν παραγόντων (ἰδὲ καὶ ἐν ἀρ. 12) καὶ τἀνάπαλιν. Ἐνταῦθα δὲ θέλομεν ἐπαναλάβει τελειότερα τὰ περὶ σημειώσεως καὶ ἐκτελέσεως πολλαπλασιασμοῦ πολυγραμμάτων ἀκεραίων ὅρων καὶ πολυόρων.

31. Πρὸς σημείωσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ὁποιωνδήποτε (12) πολυγραμμάτων ὅρων ἀνάγκη πάντοτε νὰ θέτωμεν μεταξύ των ἢ τὸ $\times$ ἢ τὴν στιγμὴν, οὕτω $3a^4\beta^3\gamma\times5a^2\beta\delta$ ἢ οὕτω $3a^4\beta^3\gamma.5a^2\beta\delta$, ἵνα διακρίνηται καθαρὰ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ ἄλλου.

Πρὸς ἐκτέλεσιν δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀκεραίων ὅρων ἄνευ ῥιζικοῦ ἀπαιτεῖται νὰ ἐνθυμώμεθα

ά. *ὅτι, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων, δύναται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος πρῶτον ἐπὶ ἕνα τινὰ τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ γινόμενον ἐπὶ ἄλλον τινὰ, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ ἄλλον καὶ οὕτω καθεξῆς.*

β'. *ὅτι, ὁποιανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ παράγοντες ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, τὸ γινόμενον ὅλων εἶναι πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμός.*

γ'. *ὅτι τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἄλλη δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ δείκτην ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δεικτῶν τῶν δύο δυνάμεων, οἷον*

$$a^3\times a^2=a^5.$$

Διότι τὸ μὲν $a^3=aaa$, τὸ δὲ $a^2=aa$, ὥστε $a^3\times a^2=aaa\times aa$· κατὰ δὲ τὴν πρώτην μνημονευθεῖσαν ἀρχὴν ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν ἔχομεν $aaaaa$, τὸ ὁποῖον συντόμως εἶναι a^5· λοιπὸν $a^3\times a^2=a^5$.

Οὕτω δ' ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι $\beta^4\times\beta^3=\beta^7$, $\gamma^2\times\gamma=\gamma^3$, κτλ.

32. Κατὰ ταύτας λοιπὸν τὰς ἀρχὰς εὑρίσκομεν πάντοτε ἕνα ὅρον παριστάνοντα τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, οἷον τοῦ $3a^4\beta^3\gamma$ καὶ τοῦ $5a^2\beta\delta$. Δηλαδὴ, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων, κατὰ τὴν πρώτην ἀρχὴν ἔχομεν $3a^4\beta^3\gamma\cdot5$, ἔπειτα $3a^4\beta^3\gamma\cdot5a^2$, ἀκολούθως $3a^4\beta^3\gamma\cdot5a^2\beta$, καὶ τελευταῖον $3a^4\beta^3\gamma\cdot5a^2\beta\delta$· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $3a^4\beta^3\gamma\cdot5a^2\beta\delta=3\times5a^4a^2\beta^3\beta\gamma\delta$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν τρίτην $a^4a^2=a^6$, $\beta^3\beta=\beta^4$, τὸ δὲ $3\times5=15$, ἔχομεν ἁπλούστερα $3\times5a^4a^2\beta^3\beta\gamma\delta=15a^6\beta^4\gamma\delta$·

Λοιπὸν $$3\alpha^4\beta^3\gamma\times5\alpha^2\beta\delta=15\alpha^6\beta^4\gamma\delta.$$
Ὡσαύτως βεβαιούμεθα ὅτι
$5\alpha\beta\gamma\delta\times4\varepsilon\zeta\eta=20\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$, $9\alpha^3\beta\gamma^4\times6\alpha^5\gamma^3\delta^2\varepsilon=54\alpha^8\beta\gamma^7\delta^2\varepsilon$.

Ἐκ τούτων λοιπὸν πληροφορεῖταί τις ὅτι *τὸ γινόμενον δύο τοιούτων πολυγραμμάτων ὅρων εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάζωνται οἱ συνεργοί των, ἔπειτα δεξιὰ τοῦ γινομένου θέτωνται τὰ μὲν κοινὰ εἰς τοὺς δύο ὅρους γράμματα ἅπαξ μὲ δείκτην ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δεικτῶν τῶν παραγόντων, τὰ δὲ μὴ κοινὰ ὅπως εἶναι ἐν τοῖς πολλαπλασιαζομένοις ὅροις.*

Κατὰ τοῦτον λοιπὸν τὸν κανόνα καὶ τὸν περὶ τῶν σημείων πολλαπλασιάζονται ὄχι μόνον δύο ὅροι, ἀλλὰ καὶ τρεῖς καὶ πλειότεροι. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι τὸ προσδιόρισμα τοῦ οὕτως εὑρισκομένου γινομένου εἶναι γινόμενον τῶν προσδιορισμάτων τῶν παραγόντων του· γίνεται δὲ φανερὸν καὶ ἂν μερικοποιηθῶσι τὰ γράμματα, οἷον $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$, $\delta=6$, ἐν τῷ $3\alpha^4\beta^3\gamma\times5\alpha^2\beta\delta=15\alpha^6\beta^4\gamma\delta$ καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις. Οὕτως ἔχομεν $3\alpha^4\beta^3\gamma=77760$, $5\alpha^2\beta\delta=1080$, $15\alpha^6\beta^4\gamma\delta=83980800$, τὸ δὲ
$$77760\times1080=83980800.$$

33. Ἀντιστρόφως ὁ ὅρος $15\alpha^6\beta^4\gamma\delta$, ὅστις εἶναι γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, ὡς φαίνεται, δύναται νὰ θεωρῆται γινόμενον δύο μόνον ὅρων, ἀλλὰ τότε μεταξὺ αὐτῶν πρέπει νὰ τίθηται τὸ $\times$ ἢ ἡ στιγμή. Π. χ. δύναται νὰ θεωρηθῇ γινόμενον τοῦ $15\alpha^6\beta^4$ καὶ τοῦ $\gamma\delta$, ἢ τοῦ $-15\alpha^6\gamma$ καὶ τοῦ $-\beta^4\delta$, ἢ τοῦ $3\alpha^3\beta^2\delta$ καὶ τοῦ $5\alpha^3\beta\gamma$, ἢ ὅπως ἄλλως θελήσῃ τις, καὶ τότε γράφεται
$$15\alpha^6\beta^4\gamma\delta=15\alpha^6\beta^4\times\gamma\delta=-15\alpha^6\gamma\times-\beta^4\delta=3\alpha^3\beta^2\delta\times5\alpha^3\beta^2\gamma.$$

Τὸ αὐτὸ δ' ἐννοεῖται καὶ περὶ παντὸς ἄλλου ὅρου, καὶ ὅτι δύναται οὗτος νὰ θεωρῆται καὶ γινόμενον τριῶν ὅρων, κτλ.

Ἐκτελεστέοι πολλαπλασιασμοὶ πρὸς γύμνασιν.

$3\alpha\times-5\beta$, $-7\alpha\times6\alpha\beta$, $-12\alpha^3\beta\times-7\alpha^2\beta\gamma^2$,
$-5\alpha\beta\gamma\times8\alpha\beta\delta$, $14\alpha^2\beta\gamma\times-8\alpha\beta^3\gamma$, $7\alpha\beta\times-8\alpha^2\times7\beta\gamma$.

34. Σημειοῦται ὁ πολλαπλασιασμὸς πολυόρου ἐπὶ ὅρον, *ἐὰν τίθηται τὸ πολύορον ἐντὸς παρενθέσεων καμπύλων ἢ ἐγγωνίων καὶ κατόπιν αὐτοῦ γράφηται ὁ ὅρος, τιθεμένου ἢ μὴ τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*, οἷον $(a+b-\gamma)\times\mu$, $[a+b-\gamma]\times\mu$, $(a+b-\gamma)\mu$· οὕτω διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων οἱ δύο παράγοντες.

Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς πολυόρου μὲ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ θετικοὺς ἢ μὲ ὅλους ἀντιθετικοὺς ἐπὶ ὅρον θετικόν, οἷον τοῦ $a+b$ ἢ τοῦ $-a-b$ ἐπὶ μ, πρέπει νὰ γίνηται, *ἐὰν πολλαπλασιάζηται ἕκαστος ὅρος τοῦ πολυόρου ἐπὶ τὸν ὅρον κατὰ τὸν ἐν ἀρ. 32 κανόνα, καὶ γράφωνται τὰ μερικὰ γινόμενα ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*. Διότι ἑκάτερον εἶναι κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν, ὅπως εἶναι π. χ. ὁ διψήφιος 49 κεφάλαιον τοῦ 40 καὶ τοῦ 9· καὶ δῆλον ὅτι, ὅπως πολλαπλασιάζεται ὁ 49 ἐπὶ 8, οὕτω πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται καὶ ὁ $a+b$ ἢ ὁ $-a-b$ ἐπὶ μ. Ἀρχίζουσιν ὅμως ἐδῶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐξ ἀριστερῶν ὡς εὐκολώτερον, μὴ ὑπαρχούσης τῆς αἰτίας ν' ἀρχίζωσιν ἐκ δεξιῶν. Λοιπὸν $(a+b)\mu=a\mu+b\mu$, καὶ $(-a-b)\mu=-a\mu-b\mu$. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ τρίορον $\delta+\varepsilon+\zeta$ ἐπὶ ν, καὶ ὁποιονδήποτε ἄλλο πολύορον.

Ὡσαύτως δὲ τὸ $a+b$ ἢ τὸ $-a-b$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ ἐπὶ τὸν ἀντιθετικὸν ὅρον $-\mu$, καὶ τότε τὰ μερικὰ γινόμενα θέλουσιν εἶσθαι ἀντίθετα τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου, δηλ. $(a+b)\times-\mu=-a\mu-b\mu$, καὶ $(-a-b)\times-\mu=a\mu+b\mu$.

35. Ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ τὸ δίορον $a-b$, τὸ ὁποῖον παριστάνει διαφοράν, ἐπὶ μ.

Σημειοῦντες τὴν διαφορὰν ταύτην καὶ διὰ δ, ἥτις εἶναι $+\delta$, ἂν $a>b$, ἢ $-\delta$, ἂν $b>a$, καὶ ἑπομένως $a=b+\delta$, ἢ $-b=-a-\delta$, παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ a ἐπὶ μ, πολλαπλασιάζεται οὕτως ἐπὶ μ ὄχι μόνον ἡ διαφορὰ δ, ἀλλὰ καὶ ὁ ὅρος b, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον $a\mu$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀληθοῦς $b\mu$

κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἄλλου ὅρου ἐπὶ μ ἤτοι κατὰ τὸ $\beta\mu$. Ἂν λοιπὸν κατόπιν τοῦ $\alpha\mu$ γραφθῇ τὸ $-\beta\mu$, ἐλαττοῦται τὸ $\alpha\mu$ κατὰ $\beta\mu$, καὶ τὸ $\alpha\mu-\beta\mu$ παριστάνει τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ ἐπὶ μ. Λοιπὸν

$$(\alpha-\beta)\mu=\alpha\mu-\beta\mu.$$

Κατὰ δὲ τὴν περίπτωσιν $\beta>\alpha$, ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ $-\beta$ ἐπὶ μ, πολλαπλασιάζεται οὕτως ἐπὶ μ ὄχι μόνον ἡ διαφορὰ $-\delta$, ἀλλὰ καὶ ὁ ὅρος $-\alpha$, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον $-\beta\mu$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀληθοῦς $-\delta\mu$ κατὰ τὸ γινόμενον $-\alpha\mu$. Ἂν λοιπὸν κατόπιν ἢ πρὸ τοῦ $-\beta\mu$ γραφθῇ τὸ $+\alpha\mu$, τὸ προκύπτον $\alpha\mu-\beta\mu$ παριστάνει τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ ἐπὶ μ. Λοιπὸν

$$(\alpha-\beta)\mu=\alpha\mu-\beta\mu.$$

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι καὶ ἐνταῦθα *πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ἕκαστος ὅρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιοτὴν ὅρον κατὰ τὸν περὶ ὅρων κανόνα, καὶ νὰ γράφωνται τὰ μερικὰ γινόμενα κατὰ σειρὰν ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

Ἐννοεῖται δὲ ὅτι κατὰ τὸν αὐτὸν τοῦτον τρόπον πρέπει νὰ εὑρίσκηται τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta$ καὶ ἐπὶ $-\mu$, δηλ.

$$(\alpha-\beta)\times-\mu=-\alpha\mu+\beta\mu.$$

Ἐνθυμούμενοι δὲ ὅτι πολυόρου ὁποιουδήποτε μὲ θετικοὺς καὶ ἀντιθετικοὺς ὅρους τὸ προσδιόρισμα εἶναι διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων του, καταλαμβάνομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται αὐτὸ ἐπὶ μ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἑκάτερον ἄθροισμα ἐπὶ μ καὶ γραφθῶσι τὰ γινόμενα κατὰ σειρὰν ὅπως εὑρίσκονται. Ἀλλ' ἐπειδὴ πολλαπλασιάζεται ἑκάτερον ἄθροισμα ἐπὶ μ, ἐὰν πολλαπλασιάζηται ἕκαστος ὅρος αὐτοῦ ἐπὶ μ κτλ, διὰ ταῦτα πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται καὶ ταῦτα τὰ πολύορα ὡς καὶ τὰ προηγούμενα. Λοιπὸν γενικῶς

Ὁποιονδήποτε πολύορον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ὅρον, ἐὰν ἐξ ἀριστερῶν πολλαπλασιάζηται εἷς ἕκαστος ὅρος τοῦ πολυόρου ἐπὶ τὸν ὅρον κατὰ τὸν περὶ ὅρων κανόνα, καὶ γράφωνται κατὰ σειρὰν τὰ μερικὰ γινόμενα ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα εἶναι ὁμοειδῆ μὲν μὲ τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ὅρος ἦναι θετικός, ἀντίθετα δὲ αὐτῶν, ὅταν ἦναι ἀντιθετικός.

36. Ἐκ τούτου τοῦ κανόνος γίνεται δῆλον ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς ὅρος εἶναι κοινὸς παράγων ὅλων τῶν ὅρων τοῦ γινομένου. Λοιπὸν δυνάμεθα καὶ ἀντιστρόφως νὰ θεωρῶμεν *πᾶν πολύορον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι ἔχουσι κοινόν τινα παράγοντα, γινόμενον τοῦ κοινοῦ παράγοντος καὶ τοῦ μένοντος πολυόρου, ἀφοῦ ἐξαλειφθῇ ὁ κοινὸς παράγων.* Π. χ. τὸ $3a^2\beta-6a\beta^2+9\beta^2$, τοῦ ὁποίου ὁ 3 καὶ ὁ β εἶναι κοινοὶ παράγοντες ὅλων τῶν ὅρων, δύναται νὰ θεωρηθῇ γινόμενον τοῦ 3β καὶ τοῦ μένοντος $a^2-2a\beta+3\beta^2$, ἀφοῦ ἐξηλείφθη ὁ 3β, ἢ τοῦ $-a^2+2a\beta-3\beta^2$ καὶ τοῦ -3β, ἂν ἐκληφθῇ ὁ κοινὸς παράγων ἀντιθετικός· ἂν δὲ τεθῇ τὸ πολύορον ἐντὸς παρενθέσεων καὶ κατόπιν του ὁ ὅρος, ἔχομεν

$$3a^2\beta-6a\beta^2+9\beta^3=(a^2-2a\beta+3\beta^2)\times 3\beta,$$

$$\text{ἢ}=(-a^2+2a\beta-3\beta^2)\times -3\beta, \text{ἢ}=-3\beta(-a^2+2a\beta-3\beta^2).$$

Τοῦτο ὀνομάζομεν *ἀναγωγὴν τοῦ πολυόρου εἰς παράγοντας.* Τοιαῦται δ' ἀναγωγαὶ εἶναι χρησιμώταται ἐν τοῖς ἑξῆς καὶ ἀπαιτοῦσι νὰ γυμνάζωνται οἱ ἀρχάριοι.

Παραδείγματα πρὸς γύμνασιν.

$(6a+2\beta-8\gamma)7a$, $(-5a^2+3a\beta-8\beta^2)\times -9a\beta$,

$(5a\beta+3a\gamma-4\beta\gamma-6\delta^2)8a\beta$, $(5a^3\beta+6a\beta^2)9\gamma^3\delta$

$(5a^3\beta^3\gamma-6a^4\beta^2\gamma^5+7a^8\beta^5\gamma^6)\times -4a^2\beta^3\gamma$.

$7a^2\beta-12a\beta^3$, $8a^3+7a\beta^2$, $5a^2\beta^2-15\beta^4-20a\beta^3$.

$4a^2\beta\chi+2a\beta^2\chi-2\beta^3\chi$ $4a^4+3a^3\beta-12a^2\beta^2$.

37. Ἵνα σημειωθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πολυόρων, τίθενται πάντοτε καὶ τὰ δύο ἐντὸς παρενθέσεων καὶ τὸ ἕτερον κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὴν . ἢ τὸ $\times$ μεταξὺ ἢ ἄνευ τινὸς σημείου, οἷον

$(\alpha-\beta)\times(\gamma-\delta+\varepsilon)$, ἢ $(\alpha-\beta).(\gamma-\delta+\varepsilon)$, ἢ $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta+\varepsilon)$.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ δὲ τὸ πολύορον $\alpha-\beta+\gamma$ ἢ ἐπὶ $\mu+\nu+\pi$, ἢ ἐπὶ $-\mu-\nu-\pi$, ἢ ἐπὶ $\mu-\nu$. Ἐπειδὴ ἑκάτερον τῶν πρώτων εἶναι κεφάλαιον τῶν τριῶν ὅρων του, ὡς π. χ. ὁ 472 εἶναι κεφάλαιον τοῦ 400, τοῦ 70 καὶ τοῦ 2, δῆλον ὅτι τὸ $\alpha-\beta+\gamma$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἑκάτερον, ὡς πολυψήφιος ἀριθμὸς ἐπὶ 472, δηλ. πρέπει ἕκαστος ὅρος τοῦ πολλαπλασιαστέου πολυόρου νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον ἑκατέρου πολλαπλασιαστοῦ πολυόρου ὡς ἤδη εἴρηται, καὶ τὰ τρία μερικὰ γινόμενα νὰ προστεθῶσιν, ἤτοι νὰ γραφθῶσι κατόπιν τὸ ἓν τοῦ ἄλλου ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτως εὑρίσκεται $(\alpha-\beta+\gamma)(\mu+\nu+\pi)=$

$$\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu+\alpha\nu-\beta\nu+\gamma\nu+\alpha\pi-\beta\pi+\gamma\pi.$$

καὶ $(\alpha-\beta+\gamma)(-\mu-\nu-\pi)=$

$$-\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu-\alpha\pi+\beta\pi-\gamma\pi.$$

Ὁ δὲ τρίτος πολλαπλασιαστὴς $\mu-\nu$ παριστάνει τὴν διαφορὰν τοῦ μ καὶ τοῦ ν, ἥτις σημειουμένη διὰ δ θέλει εἶσθαι $+\delta$, ἂν $\mu>\nu$, ἢ $-\delta$, ἂν $\nu>\mu$, καὶ ἑπομένως $\mu=\nu+\delta$, ἢ $-\nu=-\mu-\delta$.

Ἂν λοιπὸν κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ πολύορον $\alpha-\beta+\gamma$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ μ, τὸ προκύπτον γινόμενον $\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἐπὶ ν, ἤτοι τὸ $\alpha\nu-\beta\nu+\gamma\nu$. Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου μετὰ τὸν ἐπὶ μ πολλαπλασιασμὸν τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἀνάγκη νὰ γραφθῇ κατόπιν τοῦ γινομένου των τὸ γινόμενον τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ ν μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του, ἤτοι τὸ $-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu$, τὸ ὁποῖον εἶναι γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἐπὶ $-\nu$, καὶ ἔχομεν

$(\alpha-\beta+\gamma)(\mu-\nu)=\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu$.

Ἂν δὲ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ $\alpha-\beta+\gamma$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $-\nu$, τὸ προκύπτον γινόμενον $-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἐπὶ $-\mu$, ἤτοι κατὰ τὸ $-\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu$. Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου μετὰ τὸν ἐπὶ $-\nu$ πολλαπλασιασμὸν τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἀνάγκη νὰ γραφθῇ κατόπιν ἢ πρὸ τοῦ γινομένου τούτων τὸ γινόμενον τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ $-\mu$ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του, ἤτοι τὸ $\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu$, τὸ ὁποῖον εἶναι γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἐπὶ μ, καὶ ἔχομεν

$$(\alpha-\beta+\gamma)(\mu-\nu)=\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu.$$

Ἐκ τούτων δὲ δῆλον ὅτι τὸ $\alpha-\beta+\gamma$ καὶ ἐπὶ $\mu-\nu$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ὡς καὶ ἐπὶ τὰ προηγούμενα πολύορα $\mu+\nu+\pi$ καὶ $-\mu-\nu-\pi$, δηλ. νὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον τοῦ $\mu-\nu$, καὶ νὰ γράφωνται τὰ μερικὰ γινόμενα κατόπιν ἀλλήλων ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐνθυμούμενοι δὲ τώρα ὅτι τὸ $\mu-\nu$ παριστάνει πᾶν πολύορον μὲ θετικοὺς καὶ ἀντιθετικοὺς ὅρους, ἐὰν νοηθῇ ὅτι τὸ μὲν μ εἶναι κεφάλαιον ὅλων τῶν θετικῶν ὅρων αὐτοῦ, τὸ δὲ $-\nu$ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων του, καταλαμβάνομεν ὅτι τὸ $\alpha-\beta+\gamma$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ πολυόρου κτλ. Γενικῶς λοιπὸν

Ἵνα πᾶν πολύορον πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ὁποιονδήποτε ἄλλο, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ἐξ ἀριστερῶν κατὰ σειρὰν εἷς ἕκαστος ὅρος τοῦ πρώτου ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον τοῦ δευτέρου κατὰ τὸν περὶ ὅρων κανόνα, καὶ νὰ γράφωνται τὰ μερικὰ γινόμενα κατόπιν ἀλλήλων ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅλα δὲ τὰ προειρημένα πείθουσιν ὅτι ὁ κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον καὶ τὸν τοῦ ἀρ. 35 πολλαπλασιασμὸς τῶν πολυόρων εἶναι κυρίως πολλαπλασιασμὸς τῶν προσδιορισμάτων αὐτῶν.

Πολλάκις εἶναι ὠφελιμώτατον νὰ διατάττωνται πρῶτον τὰ πολύορα πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα, ἐὰν ἔχωσι κοινόν τι, καὶ ἐπὶ τῶν διατεταγμένων νὰ ἐκτελῆται ὁ πολλαπλασιασμός· τὰ δ' ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ γινόμενα νὰ γράφωνται τότε ὑπ' ἄλληλα ὡς εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα, διότι οὕτως εὐκολύνεται ἡ τῶν ὁμοίων ὅρων συστολή.

$$
\begin{array}{r}
4a^3-5a^2\beta-8a\beta^2+\frac{2}{3}\beta^3 \\
2a^2-3a\beta-4\beta^2 \\
\hline
8a^5-10a^4\beta-16a^3\beta^2+\frac{4}{3}a^2\beta^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
-12a^4\beta+15a^3\beta^2+24a^2\beta^3-2a\beta^4 \qquad\quad \\
-16a^3\beta^2+20a^2\beta^3+32a\beta^4-\frac{8}{3}\beta^5, \\
\hline
8a^5-22a^4\beta-17a^3\beta^2+\frac{136}{3}a^2\beta^3+30a\beta^4-\frac{1}{8}\beta^5.
\end{array}
$$

38. Παρατηρητέον δὲ ὅτι ὁ $8a^5$ καὶ ὁ $-\frac{8}{3}\beta^5$ ἀδύνατον ἦτον νὰ ἔχωσιν ἄλλους ὅρους ὁμοίους των, ἐνῷ ἄλλοι ὅροι εἶναι ὅμοιοι· διότι ἑκάτερος, ὡς γινόμενον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τῶν ἐχόντων τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a ἢ τοῦ β, ἔχει καὶ αὐτὸς τὴν ἀνωτάτην δύναμιν ὁ μὲν τοῦ a, ὁ δὲ τοῦ β, ἐνῷ οὐδὲν ἄλλο γινόμενον ὅρων ἠδύνατο νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν. Δυνατοῦ λοιπὸν ὄντος νὰ ἦναι οἱ ἄλλοι ὅροι τοῦ γινομένου ἐξαγόμενα τῆς ὁμοίων ὅρων συστολῆς, ὁ ἔχων τὴν ἀνωτάτην δύναμιν γράμματός τινος ἀνάγκη νὰ ἦναι γινόμενον τοῦ ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐκείνων, οἵτινες ἔχουσι τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Ἐκτελεστέοι πολλαπλασιασμοὶ πρὸς ἄσκησιν.

$(2a-3\beta-8\gamma-\theta+9\varepsilon)(7\zeta+2\eta-\theta)$ $\qquad$ $(a-\beta)(a-\beta)$

$(5a\beta+3a\gamma-4\beta\gamma)(7a\beta-18a\gamma+2\beta\gamma+\theta)$ $\qquad$ $(a+\beta)(a+\beta)$

$(\chi^3-3\chi-7)(\chi-2)$, $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)$ $\qquad$ $(a+\beta)(a-\beta)$

$(a^4-2a^3\beta+4a^2\beta^2-8a\beta^3+16\beta^4)(a+2\beta)$

$$
\begin{array}{l}
a^5+a\beta^4+10a^3\beta^2-\beta^5-10a^2\beta^3-5a^4\beta \\
3a\beta^2-\beta^3+a^3-3a^2\beta \\
\hline
\end{array}
$$

$5a^3\beta^3\gamma^2-6a^4\beta^2\gamma^5+7a^3\beta^5\gamma^5$
$2a^3\beta^3\gamma^2+3a^4\beta^2\gamma^5-6a^7\beta^4\gamma^2$

$(2\chi^2+a\chi-a^2)(\chi^2+2a\chi-a^2)-(\chi^2+3a\chi-2a^2)(\chi^2-a^2)$

39. Ἐὰν δὶ a καὶ διὰ β σημειωθῇ ὁποιοςδήποτε ὅρος ἢ καὶ πολύορον, $a+\beta$ ἢ $a-\beta$ εἶναι δίορον ὁποιονδήποτε ἢ καὶ πολύορον παριστάνον τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων ὅρων ἢ πολυόρων. Κατὰ δὲ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν

$$(a+\beta)(a+\beta)=(a+\beta)^2=a^2+2a\beta+\beta^2,$$
$$(a-\beta)(a-\beta)=(a-\beta)^2=a^2-2a\beta+\beta^2,$$
$$(a+\beta)(a-\beta)=a^2-\beta^2.$$

Ταῦτα δὲ τὰ ἐξαγόμενα εἶναι χρησιμώτατα ἐν τοῖς ἑξῆς, διότι δὶ αὐτῶν πολλάκις συντέμνονται οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ ἀνάγονται τὰ γινόμενα εἰς τοὺς παράγοντάς των.

Ἐὰν π. χ. ἐπρόκειτο νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δίορον $3a^3\gamma^2+4a\gamma^3$ ἐφ' ἑαυτό, ἤτοι νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνόν του, δὲν θέλει πολλαπλασιασθῇ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, ἀλλ' ἁπλούστερα κατὰ τὸ πρῶτον ἐξαγόμενον θέλει κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ $3a^3\gamma^2$, τὸ διπλάσιον γινόμενον τοῦ $3a^3\gamma^2$ καὶ τοῦ $4a\gamma^3$, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $4a\gamma^3$ (Συμ. ἀρ. 77), θετικὰ δὲ θέλουσι γραφθῇ ἅμα εὑρισκόμενα κατὰ σειράν· οὕτως ἔχομεν

$$(3a^3\gamma^2+4a\gamma^3)^2=9a^6\gamma^4+24a^4\gamma^5+16a^2\gamma^6.$$

Ὡσαύτως θέλει εὑρεθῇ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $5a^2-6\delta^3$ κατὰ τὸ δεύτερον ἐξαγόμενον

$$(5a^2-6\delta^3)^2=25a^4-60a^2\delta^3+36\delta^6.$$

Ὡσαύτως τῶν δύο διόρων $4a^2+3\gamma$ καὶ $4a^2-3\gamma$, ἤτοι τοῦ ἀθροίσματος δύο ὅρων καὶ τῆς διαφορᾶς των τὸ γινόμενον θέλει εὑρεθῇ κατὰ τὸ τρίτον ἐξαγόμενον, ἤγουν θέλει κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ $4a^2$ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 3γ, τοῦτο δ' ἀντιθετικὸν θέλει γραφθῇ κατόπιν τοῦ πρώτου, ἤτοι

$$(4a^2+3\gamma)(4a^2-3\gamma)=16a^4-9\gamma^2.$$

Ἐνίοτε δὲ εἶναι εὔχρηστα καὶ τὰ τρία ἢ τὰ δύο μόνον πρὸς συντομίαν τῶν ὑπολογισμῶν.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ τὸ $5a^2-4a\delta+3\delta^2$ ἐπὶ $5a^2-4a\delta-3\delta^2$. Παρατηροῦντες ὅτι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι καὶ τῶν δύο εἶναι οἱ αὐτοί, ὁ δὲ τρίτος μόνον κατὰ τὸ σημεῖον διαφέρει, δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὸ μὲν ὡς κεφάλαιον τοῦ $5a^2-4a\delta$ καὶ τοῦ $+3\delta^2$, τὸ δὲ ὡς διαφορὰν τῶν αὐτῶν. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τοῦ γινομένου των κατασκευάζεται τὸ τετράγωνον τοῦ $5a^2-4a\delta$ κατὰ τὸ δεύτερον ἐξαγόμενον, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $3\delta^2$ κατασκευασθὲν γράφεται κατόπιν ἀντιθετικόν· λοιπὸν

$$(5a^2-4a\delta+3\delta^2)(5a^2-4a\delta-3\delta^2)$$
$$=25a^4-40a^3\delta+16a^2\delta^2-9\delta^4.$$

Καὶ τῶν πολυόρων δὲ

$$3a^3\gamma+2a^2\gamma^2+a\gamma^3-\gamma^4 \text{ καὶ } 3a^3\gamma+2a^2\gamma^2-a\gamma^3+\gamma^4,$$

ὧν τὸ μὲν εἶναι κεφάλαιον τῶν διόρων $3a^3\gamma+2a^2\gamma^2$ καὶ $a\gamma^3-\gamma^4$, τὸ δὲ διαφορὰ τῶν αὐτῶν, τὸ γινόμενον θέλει εὑρεθῇ κατὰ τὰ τρία προηγούμενα ἐξαγόμενα πολὺ συντομώτερα παρὰ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα.

40. Ἀντιστρόφως, ἀνάγονται τρίορα καὶ δίορα εἰς τοὺς παράγοντάς των κατὰ τὰ αὐτά, ὅταν τῶν μὲν τριόρων δύο ὅροι ἦναι τετράγωνοι, ὁ δὲ τρίτος, θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς ὤν, ἦναι διπλάσιος τοῦ γινομένου τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν δύο τετραγώνων ὅρων, τὰ δὲ δίορα ἦναι διαφορὰ δύο τετραγώνων· διότι τότε δῆλον ὅτι τοιοῦτον μὲν τρίορον εἶναι ἡ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν τετραγώνων ὅρων ἢ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, τοιοῦτον δὲ δίορον εἶναι γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν δύο ὅρων ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν. Π. χ.

$$9a^2+12a\varepsilon^2+4\varepsilon^4=(3a+2\varepsilon^2)^2=(3a+2\varepsilon^2)(3a+2\varepsilon^2).$$
$$16\chi^4-24\chi^2\omega^3+9\omega^6=(4\chi^2-3\omega^3)^2=(4\chi^2-3\omega^3)(4\chi^2-3\omega^3).$$
$$64a^2\zeta^4-36a^4\gamma^2=(8a\zeta^2+6a^2\gamma)(8a\zeta^2-6a^2\gamma).$$

$a^2-1=(a+1)(a-1)$; διότι ἡ 1 εἶναι καὶ τετράγωνον ἑαυτῆς.

$a^4-\chi^2=(a^2+\chi)(a^2-\chi)$

$$\chi^2+2\chi+1=(\chi+1)^2=(\chi+1)(\chi+1)$$
$$\beta^2-2\beta+1=(\beta-1)^2=(\beta-1)(\beta-1)$$
$$2\omega^2-8\chi^2=2(\omega^2-4\chi^2)=2(\omega+2\chi)(\omega-2\chi)$$
$$3a^3\chi^3-12a\chi^3=3a\chi^3(a^2-4)=3a\chi^3(a+2)(a-2).$$

Περὶ ἀλγεβρικῆς διαιρέσεως.

41. Ἐπειδὴ ἐν τῷ Συμπληρώματι ἐξηγήθη πῶς διαιροῦνται ἀντιθετικοὶ καὶ ἀντίθετοι ἀριθμοί, πῶς ἐκ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου προσδιορίζεται καὶ τοῦ πηλίκου τὸ σημεῖον καὶ διατί, ἔτι δὲ πῶς σημειοῦται ἡ διαίρεσις, καὶ πῶς ἐκτελεῖται ἓν μέρος αὐτῆς, ἤτοι πῶς εὑρίσκεται τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου καὶ παραλείπονται τὸ τοῦ διαιρετέου καὶ τὸ τοῦ διαιρέτου, καὶ τ' ἀνάπαλιν, διὰ ταῦτα παραπέμποντες εἰς αὐτὸ περὶ ὅλων τούτων, θέλομεν ἐπαναλάβει ἐνταῦθα τελειότερα τὰ περὶ διαιρέσεως πολυγραμμάτων ὅρων καὶ περὶ πολυόρων.

42. Εἶναι βέβαιον ἤδη ὅτι τὸ *πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι τοσοῦτον, ὥστε πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον.* Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ ὅτι *ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, καθ' ἣν εὑρίσκεται τοιοῦτος ἀριθμὸς πρὸς τὸν διαιρετέον, ὅ,τι εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην.* Διότι, ὄντος a τοῦ διαιρετέου καὶ β τοῦ διαιρέτου, ὅτε ἡ μονὰς εἶναι τὸ $\frac{1}{\beta}$ τοῦ διαιρέτου ἤτοι $\frac{1}{\beta}$ τοῦ β ἢ $\frac{\beta}{\beta}=1$, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι τὸ $\frac{1}{\beta}$ τοῦ a ἤτοι $\frac{a}{\beta}$, τοῦτο δὲ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ β παράγει $\frac{a\beta}{\beta}$ ἢ $a.\frac{\beta}{\beta}=a$. Διὰ ταῦτα ἐν τοῖς ἑξῆς ὡς πηλίκον θέλομεν ζητεῖ τοιοῦτον ὅρον ἢ πολύορον, ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ παράγῃ τὸν διαιρετέον.

43. Ἂς διαιρεθῇ ὁ $48\alpha^4\beta^3\gamma^2\delta^2$ διὰ $8\alpha^3\beta\gamma^2$. Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον πηλίκον πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην πρέπει νὰ παραγάγῃ τὸν διαιρετέον, δυνατὸν οὕτως νὰ ἐννοῆται γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, καὶ τότε ὁ μὲν συνεργὸς 48 εἶναι γινόμενον τοῦ 8 τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ 6, ὁ α^4 δὲ εἶναι γινόμενον τοῦ α^3 τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ α, ὡσαύτως καὶ ὁ β^3 εἶναι β ἐπὶ β^2, ὁ γ^2 δὲ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου γ^2, τελευταῖον ὁ δ^2 δὲν εἶναι ἐν τῷ διαιρέτῃ· λοιπὸν

$$48\alpha^4\beta^3\gamma^2\delta^2=8\times6\alpha^3\alpha\beta\beta^2\gamma^2\delta^2=8\alpha^3\beta\gamma^2\times6\alpha\beta^2\delta^2.$$

Ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι $6\alpha\beta^2\delta^2$, διότι αὐτὸ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει τὸν διαιρετέον.

Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι

$$\frac{35\alpha^2\beta^4\gamma^3}{7\alpha^2\beta\gamma^2}=5\beta^3\gamma,\quad \frac{24\beta^3\gamma\chi^3}{6\beta\chi^2}=4\beta^2\gamma\chi.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ πηλίκον ἔχει συνεργὸν μὲν τὸ πηλίκον τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, τῶν δὲ κοινῶν γραμμάτων τὰ μὲν μὲ ἀνώτερον δείκτην ἐν τῷ διαιρετέῳ ἔχει μὲ δείκτην ἴσον μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτου ὑπὲρ τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ, τὰ δὲ μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην ἐν ἀμφοτέροις δὲν ἔχει, τὰ δ' ἐν μόνῳ τῷ διαιρετέῳ γράμματα ἔχει καὶ τὸ πηλίκον ὁποῖα καὶ ὁ διαιρετέος, ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς περὶ διαιρέσεως πολυγραμμάτων ὅρων κανόνα. *Ἵνα διαιρῶμεν πολυγράμματον ὅρον δι' ἄλλου τοιούτου, διαιροῦμεν τὸν συνεργὸν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, δεξιὰ δὲ τοῦ πηλίκου γράφομεν τ' ἀνώτερον δείκτην ἐν τῷ διαιρετέῳ ἔχοντα κοινὰ γράμματα μὲ δείκτην τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτου ὑπὲρ τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ, τὰ δ' ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην ἐν ἀμφοτέροις δὲν γράφομεν, τὰ δ' ἐν μόνῳ τῷ διαιρετέῳ γράμματα γράφομεν καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ ὅπως εἶναι ἐν αὐτῷ.*

Κατὰ τοῦτον τὸν κανόνα καὶ τὸν περὶ τῶν σημείων νὰ εὑρεθῶσι τῶν ἀκολούθων τὰ πηλίκα.

$$\frac{8a^7}{4a^2},\quad \frac{35a^7\chi}{-7a^3\chi^3},\quad \frac{-8a\beta^3\chi^5}{-12a\beta\chi},\quad \frac{-48a^7\beta^3\gamma^3}{6a^4\beta^3},\quad \frac{30a^7\beta^3\gamma^7\delta}{5a\beta^2\gamma}.$$

44. Τὸ πηλίκον τοῦ a^3 διὰ a^3 εἶναι 1, διότι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσοι. Ἀλλ' ἐὰν θελήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον των ὅπως εὑρίσκομεν π. χ. τὸ τοῦ a^5 διὰ a^3, θέλομεν ἔχει

$$\frac{a^3}{a^3}=a^0,$$

τὸ ὁποῖον a^0 πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην a^3 παράγει τὸν διαιρετέον. Τὸ a^0 λοιπὸν, ἄν ποτε τὸ μεταχειρισθῶμεν, θέλομεν τὸ ἐκλαμβάνει ὡς ἀλγεβρικὸν σύμβολον παραστατικὸν τῆς 1, ἤτοι $a^0=1$. Ἀλλὰ καὶ $\beta^0=1$, $\gamma^0=1$, κτλ.

Εἶναι δὲ καὶ ἐκ τοῦ Συμπληρώματος (118) γνωστὸν ἤδη ὅτι ἡ μονὰς εἶναι *μηδενιστὴ* δύναμις παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ὅταν λοιπὸν διαιροῦντες ὅρον δι' ἄλλου, οἵτινες νὰ ἔχωσι γράμμα τι μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην, θέλωμεν νὰ διατηρήσωμεν τὸ γράμμα τοῦτο καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ, ἵνα δείξωμεν ὅτι ἦτον ἔν τε τῷ διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ, γράφομεν αὐτὸ μὲ δείκτην 0, οἷον

$$\frac{6a^3\beta^2\gamma}{2a\beta^2}=3a^2\beta^0\gamma,\ \text{ἀντὶ}\ 3a^2\gamma.$$

Ὡσαύτως τὸ $4a^2-5a\beta+3\beta^2$ δύναται νὰ γραφθῇ $4a^2\beta^0-5a\beta+3a^0\beta^2$. Ἀλλὰ καὶ ἂν δὲν γράψωμεν οὕτως, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ μὲν $4a^2$ ἔχει τὴν κατωτάτην δύναμιν τοῦ β, ὁ δὲ $3\beta^2$ τὴν κατωτάτην τοῦ a, ἤτοι τὴν a^0.

45. Ὅλων τῶν προηγουμένων διαιρέσεων τὰ πηλίκα ἦσαν ἀκέραια, καὶ ἑπομένως ὁ διαιρετέος ἦτον *διαιρέσιμος* διὰ τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει πάντοτε. Π. χ. ἂν πρόκηται νὰ διαιρεθῇ ὁ $12a^2\beta^3\gamma$ διὰ $8a^3\beta^2\delta^2$, τὸ πηλίκον τούτων ἀδύνατον νὰ ἦναι ἀκέραιον διὰ τὰ τρία ταῦτα, ά. ὅτι ὁ συνεργὸς 12 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ 8. β'. ὅτι ὁ a^2 δὲν εἶναι γινόμενον τοῦ a^3 καὶ ἄλλης δυνάμεως τοῦ a, ἢ ὁ a^2

ἔχει δείκτην μικρότερον παρὰ τὸν a^3, καὶ γ΄. ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει τὸν δ^2, ὅστις δὲν εἶναι ἐν τῷ διαιρετέῳ. Ὁ διαιρετέος λοιπὸν δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ καὶ ἓν μόνον τῶν προειρημένων ἂν ὑπάρχῃ, μάλιστα τῶν δύο τελευταίων, ὁ ὅρος δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ πηλίκον τότε θέλει εἶσθαι κλασματικόν, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δυνατὸν νὰ γείνωσιν ἁπλούστεροι κατὰ ταύτην τὴν ἀρχήν, ὅτι *τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν καὶ τὸ πηλίκον τῶν αὐτῶν πολλοστῶν τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός*. Ἂν λοιπὸν ἐξαλείφωνται ἐξ ἀμφοτέρων οἱ κοινοὶ παράγοντες, τὸ ὁποῖον σημαίνει νὰ διαιρῶνται οἱ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θέλει προκύψει πηλίκον κλασματικὸν μὲ ἁπλουστέρους ὅρους. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{12a^2\beta^3\gamma}{8a^3\beta^2\delta^2}=\frac{3\beta\gamma}{2a\delta^2},\quad \frac{48a^3\beta^2\gamma\delta^3}{36a^2\beta^3\gamma^2\delta\varepsilon}=\frac{4a\delta^2}{3\beta\gamma\varepsilon},\quad \frac{7a^2\beta}{14a^3\beta^2}=\frac{1}{2a\beta}.$$

Σημ. Εἶναι δυνατὸν διὰ τῆς χρήσεως τῶν ἀντιθετικῶν δυνάμεων (Συμπλ: ἀρ. 118) νὰ γράφωμεν πάντοτε καὶ ταῦτα τὰ πηλίκα ὡς ἀκέραια. Ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν θέλομεν ἔχει χρείαν ἐν τοῖς ἑξῆς τῶν δυνάμεων τούτων, περιοριζόμεθα εἰς ὅσα εἴπομεν.

46. Ἂς διαιρεθῇ τώρα καὶ τὸ πολύορον

$$8a^4\beta-12a^3\beta^2+4a^2\beta^3 \text{ διὰ τοῦ ὅρου } -4a^2\beta.$$

Τὸ ζητούμενον πηλίκον ἀνάγκη νὰ ἦναι τρίορον, διότι μόνον τρίορον πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $-4a^2\beta$ δύναται νὰ παραγάγῃ τὸν διαιρετέον. Ἔπειτ' ἀνάγκη ἕκαστος ὅρος τοῦ διαιρετέου νὰ ἦναι γινόμενον ὅρου τινὸς τοῦ τριόρου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, διότι τὸ τρίορον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ὅρον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος ὅρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ὅρον. Λοιπόν, *ἵνα εὑρεθῇ τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ διαιρεθῇ ἕκαστος ὅρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου ὅρου, καὶ τὰ μερικὰ πηλίκα νὰ γραφθῶσι κατὰ σειρὰν ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τῆς διαιρέσεως*. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{8a^4\beta-12a^3\beta^2+4a^2\beta^3}{-4a^2\beta}=-2a^2+3a\beta-\beta^2$$

ἢ $8a^4\beta-12a^3\beta^2+4a^2\beta^3 \left| \frac{-4a^2\beta}{-2a^2+3a\beta-\beta^2}\right.$

Ὅταν δ' ὅρος τις τοῦ διαιρετέου δὲν ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου, οὐδὲ τὸ πολύορον εἶναι διαιρέσιμον διὰ τοῦ ὅρου, ἀλλ' εἶναι κλασματικὸν τὸ πηλίκον, τοῦ ὁποίου πολλάκις οἱ ὅροι δυνατὸν νὰ γείνωσιν ἁπλούστεροι. Π. χ.

$$\frac{6a^3\beta-9a^2\beta^2+12a\beta^3}{6a^2\beta^3}=\frac{3a\beta(2a^2-3a\beta+4\beta^2)}{3a\beta\times2a\beta^2}=$$

$$\frac{2a^2-3a\beta+4\beta^2}{2a\beta^2},\quad \frac{8a^2\chi^2-6a\chi^3}{4a^3\chi^2}=\frac{2a\chi^2(4a-3\chi)}{2a\chi^2\times2a^2}=$$

$$\frac{4a-3\chi}{2a^2}.\quad \frac{a^5\beta-a^4\beta^2+a^3\beta^3-a^2\beta^4}{a^2\beta}=a^3-a^2\beta+a\beta^2-\beta^3$$

47. Ἂς διαιρεθῇ τώρα διὰ τοῦ πολυόρου $4a\beta-5a^2+3\beta^2$ τὸ $51a^2\beta^2+10a^4-48a^3\beta-15\beta^4+4a\beta^3$.

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον πηλίκον πρέπει νὰ ἦναι τοιοῦτον, ὁποῖον πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ παραγάγῃ τὸν διαιρετέον, δυνατὸν νὰ ἐννοῆται τὸ διαιρετέον πολύορον γινόμενον τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Τούτου οὕτως ἔχοντος, πρῶτον μὲν κατὰ τὴν ἐν ἀρ. 38 παρατήρησιν ὁ ὅρος $+10a^4$, ὅστις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a, ἀνάγκη νὰ ἦναι γινόμενον τοῦ ὅρου τοῦ πηλίκου, ὅστις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a, καὶ τοῦ ὅρου $-5a^2$ τοῦ διαιρέτου, ὅστις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a. Ὄντος δὲ γνωστοῦ τοῦ γινομένου $+10a^4$ καὶ τοῦ ἑτέρου παράγοντός του $-5a^2$, εὑρίσκεται ὁ ἄλλος παράγων, ἤτοι ὁ ὅρος τοῦ πηλίκου ὁ ἔχων τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a, ἂν διαιρεθῇ ὁ $+10a^4$ διὰ τοῦ $-5a^2$

κατὰ τὸν περὶ διαιρέσεως ὅρων κανόνα· οὕτως ἔχομεν $-2a^2$ ἕνα ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ἔπειτα τὸ διαιρετέον πολύορον ὡς γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ὅλους τοὺς ὅρους, ὅσοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ εὑρεθέντος ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ τοιούτους, ὁποῖοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂν δὲν εἶχε χώραν συστολὴ ὁμοίων ὅρων, ἢ τοιούτους, ὁποῖοι εἶναι μετὰ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἥτις τοὺς συστέλλει εἰς ἕνα ἰσοδύναμον, ἀλλὰ δὲν τοὺς ἀφανίζει. Ἂν λοιπὸν πολλαπλασιασθῇ ὁ εὑρεθεὶς ὅρος $-2a^2$ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα $-8a^3b+10a^4-6a^2b^2$ γραφθῶσι μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖά των ἢ κατόπιν τοῦ διαιρετέου ἢ κάλλιον ὑπ' αὐτὸν καὶ ἐκτελεσθῇ ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, οὕτω συνεξαφανίζονται οἱ ὅροι, οἵτινες εἶναι γινόμενα τοῦ εὑρεθέντος ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ μένον πολύορον $57a^2b^2-40a^3b-15b^4+4ab^3$ θέλει εἶσθαι γινόμενον τῶν ἔτι ἀγνώστων ὅρων τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Τὸ πολύορον δὲ τοῦτο λέγεται *ὑπόλοιπος διαιρετέος*.

Ἐκ δὲ τοῦ ὅτι ὁ ὑπόλοιπος διαιρετέος εἶναι γινόμενον τῶν ἔτι ἀγνώστων ὅρων τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι ὁ ὅρος αὐτοῦ $-40a^3b$, ὅς τις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a, εἶναι γινόμενον τοῦ ἔτι ἀγνώστου ὅρου τοῦ πηλίκου, ὅς τις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a ὡς πρὸς τοὺς λοιποὺς ἀγνώστους, ἐπὶ τὸν ὅρον $-5a^2$ τοῦ διαιρέτου, ὅς τις ἔχει καὶ αὐτὸς τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a· καὶ δῆλον ὅτι, ἂν διαιρεθῇ ὁ $-40a^3b$ διὰ τοῦ $-5a^2$, τὸ πηλίκον αὐτῶν $+8ab$ θέλει εἶσθαι ὁ προειρημένος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ὁ αὐτὸς δὲ ὑπόλοιπος διαιρετέος ἔχει ἐξ ἀνάγκης τοὺς ὅρους, ὅσοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $+8ab$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ ὡς προέκυψαν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ ὡς εἶναι μετὰ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἂν λοιπὸν ὁ εὑρεθεὶς ὅρος $+8\alpha\beta$ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα $+32\alpha^2\beta^2-40\alpha^3\beta+24\alpha\beta^3$ γραφθῶσι μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα των ὑπὸ τὸν ὑπόλοιπον διαιρετέον καὶ ἐκτελεσθῇ ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, οὕτω συνεξαφανίζονται καὶ τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ $+8\alpha\beta$ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ ὁ δεύτερος ὑπόλοιπος διαιρετέος $25\alpha^2\beta^2-15\beta^4-20\alpha\beta^3$ θέλει εἶσθαι γινόμενον τῶν ἔτι ἀγνώστων ὅρων τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

Ἐκ δὲ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων δῆλον ὅτι, ἂν ὁ ὅρος, $25\alpha^2\beta^2$ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου διαιρετέου, ὅς τις ἔχει τὴν ἀνωτάτην τοῦ α δύναμιν, διαιρεθῇ διὰ τοῦ $-5\alpha^2$ ὅρου τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον αὐτῶν $-5\beta^2$ θέλει εἶσθαι ἄλλος ὅρος τοῦ πηλίκου· καὶ ὅτι, ἂν ὁ $-5\beta^2$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δὲ τὰ μερικὰ γινόμενα μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα των γραφθῶσιν ὑπὸ τὸν δεύτερον ὑπόλοιπον διαιρετέον καὶ συσταλῶσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι, οὕτω συνεξαφανίζονται καὶ τὰ γινόμενα τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Ἀλλὰ τούτου γενομένου, εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 0, τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι τὸ διαιρετέον πολύορον εἶναι γινόμενον τοῦ τριόρου $-2\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἤδη εὑρεθὲν τρίορον $-2\alpha^2+8\alpha\beta-5\beta^2$. Ἡ πρᾶξις λοιπὸν ἐτελείωσεν.

Παρατηρητέον δὲ τώρα ὅτι, ἂν ὅ τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦσαν διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α, τότε ὁ τοῦ διαιρετέου καὶ ὁ ἑκάστου ὑπολοίπου διαιρετέου ὅρος, ὅς τις μέλλει νὰ διαιρεθῇ, εἶναι ὁ ἀριστερὸς πάντοτε, ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ τοῦ διαιρέτου $-5\alpha^2$, δι' οὗ θέλουσι διαιρεθῇ. Διὰ ταῦτα εἶναι προτιμότερον τὰ πολύορα νὰ ἦναι διατεταγμένα πρὸς τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελεσθῇ ὡς εἴπομεν ἤδη ἡ διαίρεσις, ὡς ἐδῶ φαίνεται.

$$
\begin{array}{l|l}
10\alpha^4-48\alpha^3\beta+51\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3-15\beta^4 & -5\alpha^2+4\alpha\beta+3\beta^2 \\
\underline{-10\alpha^4+8\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2} & \overline{-2\alpha^2+8\alpha\beta-5\beta^2} \\
\quad -40\alpha^3\beta+57\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3-15\beta^4 & \\
\quad \underline{+40\alpha^3\beta-32\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3} & \\
\qquad +25\alpha^2\beta^2-20\alpha\beta^3-15\beta^4 & \\
\qquad \underline{-25\alpha^2\beta^2+20\alpha\beta^3+15\beta^4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι, ἂν ἀντὶ νὰ διαιρῶμεν τὸν ἔχοντα τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ α διὰ τοῦ ἔχοντος ἐπίσης τὴν ἀνωτάτην τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ α ἠθέλαμεν διαιρεῖ τὸν ἔχοντα τὴν κατωτάτην δύναμιν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ α διὰ τοῦ ἔχοντος τὴν κατωτάτην τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ α, οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς προηγουμένους συλλογισμοὶ ἤθελαν μᾶς πείσει ὅτι τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶσθαι ὅρος τοῦ πηλίκου ὁ μὲ τὴν κατωτάτην δύναμιν τοῦ α. Τότε ἔπρεπε νὰ διατάττωμεν τόν τε διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α. Ἰδοὺ παράδειγμα τοιοῦτον, τοῦ ὅρου $2\beta^2$ τοῦ διαιρέτου ἔχοντος τὴν κατωτάτην δύναμιν τοῦ α, ἤτοι τὸ α^0, τὸ ὁποῖον ἴσον μὲ τὴν μονάδα δὲν γράφεται.

$$
\begin{array}{l|l}
-2\alpha\beta^4-3\alpha^2\beta^3+21\alpha^3\beta^2-27\alpha^4\beta+14\alpha^5 & 2\beta^2-3\alpha\beta+2\alpha^2 \\
\underline{+2\alpha\beta^4-3\alpha^2\beta^3+2\alpha^3\beta^2} & \overline{-\alpha\beta^2-3\alpha^2\beta+7\alpha^3} \\
\quad -6\alpha^2\beta^3+23\alpha^3\beta^2-27\alpha^4\beta+14\alpha^5 & \\
\quad \underline{+6\alpha^2\beta^3-9\alpha^3\beta^2+6\alpha^4\beta} & \\
\qquad +14\alpha^3\beta^2-21\alpha^4\beta+14\alpha^5 & \\
\qquad \underline{-14\alpha^3\beta^2+21\alpha^4\beta-14\alpha^5} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

48. Ἐκ τῶν προηγουμένων καταλαμβάνει τις ὅτι πολύορον δι' ἄλλου πολυόρου πρέπει νὰ διαιρῆται κατὰ τὸν ἀκόλουθον γενικὸν κανόνα.

Ἀφοῦ διαταχθῶσιν ὅ, τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης κατὰ τὰς κατιούσας ἢ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, διαιρεῖται κατὰ τὸν περὶ διαιρέσεως ὅρων κανόνα ὁ ἀριστερὸς ὅρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ὅρου τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν διαιρέτην ὅλον, τοῦ γινομένου οἱ ὅροι μὲ τ' ἀντίθετά των σημεῖα γράφονται ὑπὸ τὸν διαιρετέον καὶ γίνεται ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἔπειτα πάλιν τοῦ ὑπολοίπου διαιρετέου διαιρεῖται ὁ ἀριστερὸς ὅρος διὰ τοῦ ἀριστεροῦ τοῦ διαιρέτου, τοῦ πηλίκου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ τ' ἀντίθετα τῶν ὅρων του σημεῖα γράφεται ὑπὸ τὸν ὑπόλοιπον διαιρετέον καὶ γίνεται ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Σημ. Ἀφίνομεν εἰς τὸν διδάσκοντα τὴν φροντίδα νὰ δείξῃ τὰς χάριν συντομίας γινομένας τροποποιήσεις τοῦ κανόνος τούτου κατὰ τὴν πρᾶξιν.

49. Καὶ ὅταν μὲν ὁ ἀριστερὸς ὅρος τοῦ διαιρετέου καὶ ὁ ἀριστερὸς ἑκάστου ὑπολοίπου διαιρετέου ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ὅρου τοῦ διαιρέτου, μετά τινας δὲ διαιρέσεις εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 0, τὸ πηλίκον τότε θέλει ἔχει ὅλους του τοὺς ὅρους ἀκεραίους, καὶ ὁ διαιρετέος θέλει εἶσθαι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου, ἤτοι θέλει εἶσθαι γινόμενον ἀκεραίου πολυόρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ ἀκέραιον τὸν διαιρέτην (ἴδε τὰ τοῦ ἀρ. 47 παραδείγματα).

Ὅταν δὲ ὁ ἀριστερὸς ὅρος ἢ τοῦ διαιρετέου ἢ ὑπολοίπου τινὸς διαιρετέου δὲν ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ὅρου τοῦ διαιρέτου, τότε δῆλον ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ἢ ὅλον κλασματικόν, ἢ θέλει ἔχει ὅρους τινὰς ἀριστερούς του ἀκεραίους καὶ τὸ λοιπόν του μέρος κλασματικόν, ὡς συμβαίνει ἐν τῷ ἀκολούθῳ παραδείγματι.

$$
\begin{array}{r|l}
2\chi^3+\chi^2-9\chi+8 & \chi^2+2\chi-3 \\
\cline{2-2}
-2\chi^3-4\chi^2+6\chi & 2\chi-3 \\
\cline{1-1}
-3\chi^2-3\chi+8 & \\
+3\chi^2+6\chi-9 & \\
\cline{1-1}
+3\chi-1 &
\end{array}
$$

ὁ δεύτερος ὑπόλοιπος διαιρετέος ἔχει ἐν τῷ ἀριστερῷ αὐτοῦ ὅρῳ 3χ τὸν χ μὲ δείκτην μικρότερον τοῦ ἐν τῷ ἀριστερῷ ὅρῳ χ^2 τοῦ διαιρέτου, καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶναι διαιρέσιμος ὁ 3χ διὰ χ^2, ἑπομένως οὐδὲ ὁ $3\chi-1$ διὰ τοῦ $\chi^2+2\chi-3$.

Κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν τὸ πηλίκον ἢ παριστάνεται ὅλον κλασματικὸν οὕτω

$$\frac{2\chi^3+\chi^2-9\chi+8}{\chi^2+2\chi-3},$$

ἢ εἰς τοὺς δύο εὑρεθέντας ἤδη ἀκεραίους ὅρους αὐτοῦ προστίθεται καὶ τὸ κλασματικὸν πηλίκον τοῦ $3\chi-1$ διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ θέλει εἶσθαι $2\chi-3+\dfrac{3\chi-1}{\chi^2+2\chi-3}$, τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει μὲ μικτὸν ἀριθμόν, διότι ἔχει μέρος τι ἀκέραιον καὶ μέρος κλασματικόν, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς ἔχει τὸ χ μὲ δείκτην μικρότερον παρὰ τὸν παρονομαστήν. Τοῦτο δὲ τὸ μικτὸν πηλίκον εἶναι συνήθως εἰς χρῆσιν ἀντὶ τοῦ ὅλου κλασματικοῦ.

50. Ἐνίοτε εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίσωμεν τὸ μὴ διαιρέσιμον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξ ἄλλου σημείου, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι,

$$\begin{array}{r|l}
\chi^9+\chi^7-a\chi^5+a\chi^4 & \chi^4+\chi^3+a \\ \cline{2-2}
-\chi^9-\chi^8-a\chi^5 \qquad\quad & \chi^5-\chi^4 \\ \cline{1-1}
-\chi^8+\chi^7-2a\chi^5+a\chi^4 & \\
+\chi^8+\chi^7+a\chi^4 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
+2\chi^7-2a\chi^5+2a\chi^4. &
\end{array}$$

Δηλαδὴ εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $a\chi^4$, ὅστις ἔχει τὸν κατώτατον τοῦ χ δείκτην ἐν τῷ διαιρετέῳ, διὰ τοῦ a, ὅστις ἔχει τὸν κατώτατον δείκτην τοῦ χ ἐν τῷ διαιρέτῃ, εἶναι ὁ ὅρος τοῦ πηλίκου, ὅστις ἔχει καὶ αὐτὸς τὸν κατώτατον δείκτην τοῦ χ, καὶ ἑπομένως ὁ τελευταῖός του ὅρος. Τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι χ^4, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἦναι ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ὅλου πηλίκου. Ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὴν δευτέραν διαίρεσιν εὑρέθη ὁ χ^4, ἂν καὶ ἀντιθετικὸς, καὶ μετὰ τοῦτο δὲν εὑρέθη ὑπόλοιπον 0, ἀλλὰ διαιρετέος, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριστερὸς ὅρος $2\chi^7$ εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ὅρου χ^4 τοῦ διαιρέτου, δίδων καὶ ἄλλον ὅρον $2\chi^3$ τοῦ πηλίκου, διὰ τοῦτο, ὅτι τὸ πηλίκον θέλει ἔχει καὶ ἄλλον ὅρον μὲ δείκτην τοῦ χ κατώτερον παρὰ τὸν τοῦ τελευταίου του ὅρου, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ διαιρετέος δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου. Παύομεν δὲ τὴν πρᾶξιν, καίτοι δυνάμενοι νὰ ἐξακολουθήσωμεν, ἂν δὲν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους ὅρους τοῦ πηλίκου καὶ χωριστὰ τὸν κλασματικὸν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

51. Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς πηλίκα τῆς διαφορᾶς ὁποιωνδήποτε ὁμοβάθμων δυνάμεων δύο ἀρθμῶν α καὶ β διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν πρώτων αὐτῶν δυνάμεων, εὑρεθέντα διὰ τῆς κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα διαιρέσεως,

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta,\quad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2,$$

$$\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3,$$

$$\frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta}=\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4,\quad \text{κτλ},$$

βλέπομεν ὅτι ὅλα ἔχουσι τόσους ὅρους, ὅσας μονάδας ἔχουσιν οἱ δεῖκται τῶν διαιρετέων, ὅτι ὅλοι οἱ ὅροι των εἶναι θετικοὶ, ὅτι ὁ πρῶτος ἑκάστου ὅρος εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου μὲ δείκτην κατὰ μονάδα μικρότερον, ὅτι ἐν τοῖς ἑξῆς ὅροις οἱ μὲν δεῖκται τοῦ πρώτου ὅρου προβαίνουσιν ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα, οἱ δὲ τοῦ δευτέρου αὐξάνοντες κατὰ μονάδα, ὥστε ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι ὁ δεύτερος τοῦ διαιρετέου μὲ δείκτην κατὰ μονάδα μικρότερον, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν ἑκάστου τῶν ἄλλων ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὸν τοῦ πρώτου ἢ τοῦ τελευταίου ὅρου δείκτην. Ἐν τοῖς ἑξῆς λοιπὸν, ἂν τύχῃ νὰ χρειασθῇ τὸ πηλίκον τοιούτων διόρων, δὲν θέλει εὑρίσκεσθαι κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, ἀλλὰ θέλει κατασκευάζεσθαι παρευθὺς κατὰ τὰ προηγούμενα πηλίκα.

Σημ. Διαιρέσεις πολυόρων δυσκολωτέρας, τῶν ὁποίων τὴν ἀνάγκην ἐν τοῖς ἑξῆς δὲν θέλομεν ἀπαντήσει, καὶ τροποποιήσεις τινὰς τοῦ γενικοῦ κανόνος πρὸς συντομίαν εἰς σπανίας περιπτώσεις, ἐκρίναμεν καλὸν νὰ τὰς παραβλέψωμεν.

Διαιρέσεις ἐκτελεστέαι πρὸς ἄσκησιν.

$$\frac{4\chi^3+4\chi^2-29\chi+21}{2\chi-3},\quad \frac{a^8-16\chi^8}{a^2-2\chi^2},$$

$$\frac{-78\gamma^3\delta+17\gamma\delta^3+72\gamma^4-10\gamma^2\delta^2+3\delta^4}{6\gamma^2-\delta^2-4\gamma\delta},\quad \frac{32a^5+\beta^5}{2a+\beta},$$

$$\frac{-38\chi\omega^3+31\chi^2\omega^2+2\chi^4+24\omega^4-13\chi^3\omega}{2\chi^2-3\chi\omega+4\omega^2},\quad \frac{a^6+2a^3\omega^3+\omega^6}{a^2-a\omega+\omega^2}$$

$$\frac{5a^5\beta^3\gamma^5-22a^4\beta^3\gamma^6+5a^3\beta^3\gamma^7+12a^2\beta^3\gamma^8-7a^2\beta^2\gamma^8+28a\beta^2\gamma^9}{a^2\beta\gamma^2-4a\beta\gamma^3}$$

Περὶ ἐγγραμμάτων κλασματικῶν.

52. Ἐὰν a καὶ β σημαίνωσιν ὁποιουςδήποτε ὅρους ἢ πολύορα, τῶν ὁποίων τὰ προσδιορίσματα νὰ μὴ ἦναι ἀνάριθμα ἢ ἀνύπαρκτα ποσὰ, ὁ $\frac{a}{\beta}$ θέλει παριστάνει πάντα κλασματικὸν μεγαλήτερον τῆς μονάδος ἢ μικρότερον, ὅστις πρέπει νὰ ἐννοῆται ὅτι εἶναι ἢ πολλὰ πολλοστά τινα τῆς μονάδος, ἢ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἢ ὁ λόγος τοῦ ἀριθμητοῦ πρὸς τὸν παρονομαστὴν, ὡς καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ (ἰδὲ κατωτέρω διάφορα εἴδη κλασματικῶν).

Περὶ δὲ τῶν ἐπ' αὐτῶν ἐκτελεστέων διαφόρων πράξεων κρίνομεν περιττὸν νὰ εἴπωμεν καὶ ὀλίγα, διότι δὲν παρουσιάζουσιν οἱ κλασματικοὶ οὗτοι τίποτε νεώτερον μὴ ἐξηγηθὲν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, ἀλλ' ἔχον χρείαν ἰδιαιτέρας ἐξηγήσεως, καὶ ὅταν ἀκόμη ἔχωσι τοὺς ὅρους των κλασματικούς. Ἀναγκαιότατον ὅμως θεωροῦμεν τὴν ἄσκησιν εἰς τὸ ἐκτελεῖν ἐπ' αὐτῶν ταχέως καὶ ἀλανθάστως τὰς πράξεις ταύτας κατὰ τοὺς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ καὶ τοὺς προηγουμένως συστηθέντας κανόνας. Πρὸς τοῦτο δὲ καὶ ἐκτελοῦμεν ὑπολογισμούς τινας, καὶ ἀφίνομεν πολλοὺς ἄλλους νὰ ἐκτελέσωσιν οἱ μαθηταὶ κατ' ἰδίαν ἢ ἐνώπιον τοῦ διδάσκοντος.

1. Τὸ $\frac{\alpha}{\beta}+\chi=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta\chi}{\beta}=\frac{\alpha+\beta\chi}{\beta}$, ἀφοῦ τραπῇ ὁ χ εἰς κλασματικὸν ὁμώνυμον μὲ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, προστεθῶσιν οἱ ἀριθμηταὶ καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τεθῇ ὁ παρονομαστὴς β.

2. Τὸ $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\beta\gamma-\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$, ἀφοῦ οἱ ἑτερώνυμοι τραπῶσιν εἰς ὁμωνύμους κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, ἔπειτα αἱ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν πράξεις ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμητῶν καὶ γραφθῇ ὁ κοινὸς παρονομαστής.

3. Τὸ $\frac{\alpha^3}{(\alpha+\beta)^3}+\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}$· ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ $\alpha+\beta$ καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ τρίτου ἐπὶ $(\alpha+\beta)^2$ ἤτοι ἐπὶ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, τρέπεται εἰς τὸ $\frac{\alpha^3}{(\alpha+\beta)^3}+\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}-\frac{\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3}{(\alpha+\beta)^3}$. ἀφοῦ δὲ προστεθῶσιν οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμηταὶ καὶ ἐκ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν ἀφαιρεθῇ ὁ τρίτος, ἔχομεν

$\frac{a^3+a^2\beta+a\beta^2-a^2\beta-2a\beta^3-\beta^3}{(a+\beta)^3}$· γενομένης δὲ τῆς συστολῆς τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ ἀριθμητοῦ, ἔχομεν $\frac{a^3-a\beta^2-\beta^3}{(a+\beta)^3}$.

4. Τὸ $\left(\frac{a+\chi}{a-\chi}+\frac{\beta-\chi}{\beta+\chi}\right)\left(\frac{a-\chi}{a+\chi}+\frac{\beta+\chi}{\beta-\chi}\right)=\frac{4\chi^4+8a\beta\chi^2+4a^2\beta^2}{\chi^4-a^2\chi^2-\beta^2\chi^2+a^2\beta^2}$

Πρῶτον προσθέτονται οἱ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων κλασματικοί, ἀφοῦ τραπῶσιν εἰς ὁμωνύμους κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, καὶ εὑρίσκεται μετὰ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$\frac{2a\beta+2\chi^2}{a\beta-\beta\chi+a\chi-\chi^2}\times\frac{2a\beta+2\chi^2}{a\beta+\beta\chi-a\chi-\chi^2}$$

Ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς ἐπὶ παρονομαστὴν κατὰ τὰ ἐν ἀρ. 39, διότι οἱ ἀριθμηταὶ εἶναι ἴσοι, τῶν δὲ παρονομαστῶν ὁ μὲν εἶναι κεφάλαιον τοῦ $a\beta-\chi^2$ καὶ τοῦ $a\chi-\beta\chi$, ὁ δὲ διαφορὰ τῶν αὐτῶν· μετὰ δὲ τὴν ἐν τῷ παρονομαστῇ συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων γράφοντες διατεταγμένον τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὑπὸ τὸ τῶν ἀριθμητῶν ἔχομεν τὸ ἀνωτέρω δεύτερον μέλος.

5. Τὸ $\frac{\left(\gamma-\frac{\delta^2}{2\gamma}\right)\left(\gamma-\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma+\delta}\right)}{1-\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}=\gamma^2-\gamma\delta-\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^3}{2\gamma}$.

Τρέπονται τ' ἀκέραια εἰς κλασματικὰ ὁμώνυμα μὲ τ' ἀκόλουθα κλασματικὰ καὶ ἐκτελοῦνται αἱ ἀφαιρέσεις, ἔπειτ' ἀναστρέφονται οἱ ὅροι τοῦ παρονομαστοῦ καὶ οὕτω τρέπεται ἡ διαίρεσις εἰς πολλαπλασιασμόν, καὶ ἔχομεν

$$\frac{2\gamma^2-\delta^2}{2\gamma}\times\frac{\gamma\delta-\delta^2}{\gamma+\delta}\times\frac{\gamma+\delta}{\delta}=\frac{(2\gamma^2-\delta^2)(\gamma-\delta)\delta(\gamma+\delta)}{2\gamma(\gamma+\delta)\delta}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ δ καὶ ὁ $\gamma+\delta$ εἶναι κοινοὶ παράγοντες τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, ἐξαλείφονται καὶ μένει

$$\frac{(2\gamma^2-\delta^2)(\gamma-\delta)}{2\gamma}=\frac{2\gamma^3-2\gamma^2\delta-\gamma\delta^2+\delta^3}{2\gamma},$$ ἀφοῦ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός· γενομένης δὲ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ 2γ, εὑρίσκεται τὸ ἀνωτέρω.

6. Τὸ $$\frac{\left(1-\frac{\varepsilon}{\eta}+\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon-\eta}{2\eta}\right)}{\left(\varepsilon-2\eta+\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\eta}+\frac{\eta}{\varepsilon-\eta}\right)},$$ ἀφοῦ τ' ἀκέραια καὶ τὰ κλασματικὰ τὰ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις καὶ αἱ ἀφαιρέσεις καὶ ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, τρέπεται εἰς τὸ

$$\frac{\frac{\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2}{\varepsilon\eta}\times\frac{\eta^2+\varepsilon^2}{2\varepsilon\eta}}{\frac{\varepsilon^2-2\varepsilon\eta+\eta^2}{\varepsilon}\times\frac{\varepsilon^2+\eta^2}{\varepsilon^2-\eta^2}}=\frac{\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\eta^2+\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2\eta^2}}{\frac{(\varepsilon^2-2\varepsilon\eta+\eta^2)(\varepsilon^2+\eta^2)}{\varepsilon(\varepsilon^2-\eta^2)}}=$$

$$\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\eta^2+\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2\eta^2}\times\frac{\varepsilon(\varepsilon^2-\eta^2)}{(\varepsilon^2-2\varepsilon\eta+\eta^2)(\varepsilon^2+\eta^2)}=$$

$$\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\varepsilon^2-\eta^2)}{2\varepsilon\eta^2(\varepsilon^2-2\varepsilon\eta+\eta^2)}=\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\varepsilon+\eta)(\varepsilon-\eta)}{2\varepsilon\eta^2(\varepsilon-\eta)(\varepsilon-\eta)}=$$

$$\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\varepsilon+\eta)}{2\varepsilon\eta^2(\varepsilon-\eta)}=\frac{-\varepsilon^3+2\varepsilon\eta^2+\eta^3}{2\varepsilon^2\eta^2-2\varepsilon\eta^3}=-\frac{\varepsilon^3-2\varepsilon\eta^2-\eta^3}{2\varepsilon^2\eta^2-2\varepsilon\eta^3}.$$

7. $$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\varepsilon}{\zeta}-\frac{\eta}{\theta}-\varkappa=\frac{\alpha\delta\zeta\theta+\beta\gamma\zeta\theta-\beta\delta\varepsilon\theta-\beta\delta\zeta\eta-\beta\delta\zeta\theta\varkappa}{\beta\delta\zeta\theta}$$

8. $$\gamma+2\alpha\beta-3\alpha\gamma-\frac{\beta^2\gamma-5\alpha\beta^2\gamma+\alpha^3}{\beta^2-\beta\gamma}=\frac{2\alpha\beta^3-\beta\gamma^2+3\alpha\beta\gamma^2-\alpha^3}{\beta^2-\beta\gamma}.$$

9. $$\frac{3\zeta-4\theta}{7}-\frac{2\zeta-\theta-\kappa}{3}+\frac{15\zeta-4\kappa}{12}=\frac{85\zeta-20\theta}{84}.$$

10. $$\frac{3\theta+2\chi}{\theta+\chi}-\frac{5\theta-\chi}{\theta-\chi}+\frac{\theta}{2\chi}=\frac{\theta^3-4\theta^2\chi-11\theta\chi^2-2\chi^3}{2\theta^2\chi-2\chi^3}.$$

11. $$\frac{2\kappa\omega+\omega^2}{(\kappa-\omega)^2}-\frac{\kappa^2+5\kappa\omega}{(\kappa+\omega)^2}-\frac{\omega}{\kappa-\omega}=\frac{\kappa^4+2\kappa^3\omega-13\kappa^2\omega^2-2\omega^4}{\kappa^4-2\kappa^2\omega^2+\omega^4}.$$

12. $$\frac{3\gamma}{\gamma-2\chi}+\frac{2\gamma+\chi}{(\gamma+\chi)(\gamma-2\chi)}-\frac{5}{\gamma+\chi}.$$

13. $$\left(\frac{3\alpha+2\chi}{\alpha-\chi}+\frac{4\chi}{2\alpha}\right)\left(\frac{5\alpha-3\chi}{4\alpha-\chi}+\frac{7\chi}{5\alpha}\right)=\frac{75\alpha^4+139\alpha^3\chi-19\alpha^2\chi^2-54\alpha\chi^3+14\chi^4}{20\alpha^4-25\alpha^3\chi+5\alpha^2\chi^2}.$$

14. $$\frac{\dfrac{\delta^3\zeta^3}{\gamma^2\eta^2}-\dfrac{\delta^4\zeta}{\gamma\eta}+\delta^2\eta}{\dfrac{\delta^2\varepsilon}{\gamma\eta^2\theta}-\dfrac{\delta^6\eta}{\gamma\varepsilon\kappa}+\dfrac{\delta^3}{\gamma\eta}}=\frac{\delta\varepsilon\zeta^3\theta\kappa-\gamma\delta^2\varepsilon\zeta\eta\theta\kappa+\gamma^2\varepsilon\eta^3\theta\kappa}{\gamma\varepsilon^2\kappa-\gamma\delta^4\eta^3\theta+\gamma\delta\varepsilon\eta\theta\kappa}$$

15. $$\frac{\dfrac{\chi}{\chi-\alpha}+\dfrac{\alpha}{\chi+\alpha}}{\dfrac{\chi}{\chi-\alpha}-\dfrac{\alpha}{\chi+\alpha}}=\frac{\chi^2+2\alpha\chi-\alpha^2}{\chi^2+\alpha^2}.$$

$$16.\quad \frac{\dfrac{\omega^2}{\delta^2}-\dfrac{a^2}{a+\beta}}{\dfrac{\omega^2}{a+\beta}-\dfrac{\omega^4}{\delta\varepsilon^2}}=\frac{a^2\varepsilon^2+2a\varepsilon^2\beta-a\varepsilon\delta\omega-\beta^2\varepsilon^2-\beta\delta\varepsilon^2\omega}{a\delta^2\varepsilon^2-a^2\delta\omega^2-2a\beta\delta\omega^2+\beta\delta^2\varepsilon^2-\beta^2\delta\omega^2}$$

Γενικὴ παρατήρησις. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ἐννοεῖ τις τώρα σαφέστερα ὅ,τι εἴπομεν ἐν τῷ ἀρ. 11, ὅτι δηλ. ὁ ἀλγεβρικὸς ὑπολογισμὸς συνίσταται κυρίως εἰς μεταλλαγὰς ἐπὶ ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν γινομένας, δι' ὧν εὑρίσκομεν ἄλλους ἐγγραμμάτους διαφόρως πρὸς τοὺς πρώτους συσχετισμένους, καὶ ὅσον τὸ δυνατὸν ἁπλουστέρους, ἤτοι τοιούτους, ὥστε, ὅταν ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθῶσι μερικοὶ ἀριθμοί, νὰ χρειάζωνται ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτεροι ἀριθμητικοὶ ὑπολογισμοὶ νὰ γίνωνται, καὶ ὄχι εἰς εὕρεσιν ἀριθμοῦ παριστανομένου δι' ἑνὸς μόνου γράμματος, καὶ κατὰ τοῦτο διαφέρει τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

53. Ἐν ὀλίγοις τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον τοῦ λύειν τὰ προβλήματα ἐν τῷ πρώτῳ κεφαλαίῳ ὑποδείξαντες, ἐν τούτῳ καὶ ἐν τοῖς ἑπομένοις θέλομεν καθ' ἣν ἀκολουθεῖ σειρὰν ὁ λύων πρόβλημα ἀναπτύξει αὐτὴν ὅσον χρειάζεται.

Τὸ δυσκολώτερον τῆς λύσεως προβλήματος εἶναι ἀναντιῤῥήτως ἡ κατασκευὴ τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεών του· διότι δια τὴν μεγάλην ποικιλίαν τῶν προβλημάτων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπαχθῇ εἰς γενικὸν κανόνα, τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαρμογὴ νὰ μὴ παρέχῃ πλέον δυσκολίαν τινά. Ὅ,τι δὲ μέχρι τοῦδε πρὸς κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεων παραγγέλλεται κοινῶς ὡς χρήσιμον εἶναι τὸ ἑξῆς· *Νὰ προσδιορίζηται πρῶτον τί ποσὸν ἢ τίνα ποσὰ πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωνται ὡς ἄγνωστα, καὶ τοῦτο ἢ ταῦτα μόνα νὰ ὑποθέτωνται γνωστὰ καὶ νὰ σημειῶνται διά τινος γράμματος ἕκαστον· μετὰ ταῦτα δὲ μάλιστα νὰ ἐξετάζηται καθ' ὅλα τὰ μέρη του τὸ πρόβλημα, ἵνα ἐννοηθῇ τίνες πράξεις ἔπρεπε νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ ὅλων τοῦ προβλήματος τῶν ποσῶν, θεωρουμένων ἤδη ὡς γνωστῶν, ἵνα δοκιμασθῇ ἀριθμός τις ἢ ἀριθμοί τινες δεδομένοι ἂν ἦναι οἱ ζητούμενοι, αὗται δὲ αἱ πράξεις νὰ σημειῶνται ἅμα ἀνακαλυπτόμεναι διὰ τῶν ἁρμοδίων σημείων. Οὕτω δὲ θέλουσι προκύψει τὰ δύο ἑκάστης ἐξισώσεως μέλη, μεταξὺ τῶν ὁποίων τίθεται τὸ =* (*Ἰδὲ καὶ ἐν* 9).

Ἀλλ' ἕκαστος βλέπει ὅτι, καὶ ἵνα ἐννοηθῶσιν ἀκριβῶς ταῦτα, καὶ ἵνα δύνηταί τις νὰ ὠφελῆται ὑπ' αὐτῶν εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεων τῶν προβλημάτων, εἶναι ἀνάγκη νὰ θεωρήσῃ πολλὰ καὶ διάφορα προβλήματα βοηθούμενος ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος· ἡ δ' ἐνασχόλησίς του αὕτη βαθμηδὸν θέλει ἐμποιήσει ἐν αὐτῷ ἱκανότητά τινα τοῦ κατασκευάζειν ἔπειτα καὶ τῶν δυσκολωτέρων τὰς ἐξισώσεις. Ἰδοὺ διατί ἐκρίναμεν ὠφέλιμον νὰ κατατάξωμεν ἐφεξῆς διαφόρων εἰδῶν προβλήματα, προτάσσοντες αὐτῶν παρατηρήσεις χρησίμους εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεών των. Πρὸ πάντων δὲ ἐκθέτομεν τὰ ἑξῆς, ὡς ἀνάπτυξίν τινα καὶ τροποποίησιν τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

51. Τῶν κατὰ τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον δυναμένων νὰ λυθῶσι προβλημάτων αἱ ἐκθέσεις παριστάνουσιν ἢ ῥητῶς καὶ εὐλήπτως ἢ ἀσαφῶς πως καὶ δυσλήπτως ὅτι ποσά τινα εἶναι ἴσα, ἢ δύο ἢ τέσσαρα ἀνὰ δύο κτλ· τὰ ποσὰ δὲ ταῦτα εἶναι τὰ μέλη τῆς κατασκευασθησομένης ἐξισώσεως ἢ ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος. Τούτων δὲ τῶν ποσῶν τὰ μὲν παριστάνονται διὰ μερικοῦ τινος ἀριθμοῦ ἕκαστον ἢ δι' ἑνὸς μόνου γράμματος, τὰ πλεῖστα δὲ ἀδύνατον ἄλλως νὰ σημειῶνται, εἰμὴ δι' ὅρου ἕκαστον πολυγραμμάτου ἢ μὲ πολλοὺς ἀριθμοὺς καὶ πράξεις σημειωμένου, ἢ διὰ πολυόρου. Πρὸς ἀνακάλυψιν δὲ τῶν μελλουσῶν νὰ σημειωθῶσιν εἰς καταρτισμὸν τούτων τῶν ὅρων ἢ τῶν πολυόρων πράξεων, αἵτινες κυρίως εἶναι αἱ ἀνωτέρω μνημονευόμεναι ὡς ἁρμόδιαι πρὸς δοκιμασίαν ἂν δεδομένος τις ἀριθμὸς ἦναι ὁ ζητούμενος, ἔχουσιν αἱ ἐκθέσεις τῶν προβλημάτων πάντοτε τ' ἀναγκαῖα διδόμενα. Καὶ ὅταν μὲν τοῦ προβλήματος οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀφῃρημένοι, οἷον τῶν κατωτέρω 14, 16, 17, 26 κτλ, αἱ πρὸς κατασκευὴν τῶν ὅρων ἢ τῶν πολυόρων ἀναγκαῖαι πράξεις κοινῶς εἶναι ἐκφρασμέναι, εἶναι δεδομέναι, καὶ εὐκολώτερά τις τὰς ἐννοεῖ. Ὅταν δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἦναι συγκεκριμένοι καὶ ὑπερσυγκεκριμένοι μάλιστα, ὡς συμβαίνει ἐν τοῖς πλείστοις, αἱ διάφοροι περιστάσεις αἱ ἐν τῇ ἐκθέσει μνημονευόμεναι καὶ ἐνίοτε ὁ τρόπος τῆς ἐκφράσεως κατασταίνουσι πολλάκις δύσκολον τὴν ἀνακάλυψιν τῶν πράξεων· καὶ τότε ὠφελεῖ νὰ προσέχῃ τις ἐν τῇ ἐκθέσει νὰ καταλαμβάνῃ καὶ διακρίνῃ τὰ συντελοῦντα εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν πράξεων, παραβλέπων τὰς ἀνωφελεῖς εἰς τοῦτο περιστάσεις, νὰ μεταβάλλῃ δὲ πολλάκις εἰς ἄλλας σαφεστέρας φράσεις ἰσοδυνάμους τὰς περιπεπλεγμένας, νὰ ἐνθυμῆται δὲ καὶ τὰ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ περὶ λύσεως τῶν ἁπλουστέρων προβλημάτων παραγγελλόμενα.

55. Τριῶν εἰδῶν προβλήματα διακρίνονται, α΄. ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἐξισώσεις εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσι τόσαι, ὅσοι εἶναι οἱ ῥητῶς ζητούμενοι ἄγνωστοι, καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ πλεῖστα των ἀκολούθων· β΄. ἐκεῖνα τῶν ὁποίων αἱ δυνατὸν νὰ καταρτισθῶσιν ἐξισώσεις εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν ῥητῶς ζητουμένων ἀγνώστων, καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ εἰς τὸ τέλος· καὶ γ΄. ὅσων αἱ δυνατὸν νὰ γείνωσιν ἐξισώσεις εἶναι πλειότεραι τῶν μνημονευομένων ἀγνώστων, καὶ τοιαῦτα εἶναι ὀλίγα. Περὶ τούτων δὲ θέλομεν εἰπεῖ τὰ δέοντα ἐν ἄλλοις κεφαλαίοις κατωτέρω· ἀλλ' ἐδῶ σημειοῦμεν μόνον ὅτι πολλάκις δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκλαμβάνωμεν ἀγνώστους ὅλους τοὺς παριστανομένους ῥητῶς ὡς ἀγνώστους ἐν τῇ ἐκθέσει, καὶ ἐπομένως νὰ σημειῶμεν διὰ ἰδιαιτέρου γράμματος ἕκαστον καὶ νὰ κατασκευάζωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἐξισώσεις· διότι εἶναι δυνατὸν ἐξ ἑνὸς μόνου ἀγνώ-

στου, ἅμα γείνῃ γνωστός, δι' ἁπλῶν πράξεων δεικνυομένων ἐν τῇ ἐκθέσει νὰ προσδιορίζωνται καὶ οἱ λοιποί. Ἰδοὺ διατί πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν τίς παρέχει εἰς τοῦτο πλειοτέρας εὐκολίας, καὶ αὐτὸν μόνον ἐκλαμβάνοντες ὡς ἄγνωστον καὶ ὑποθέτοντες γνωστὸν θέλομεν σημειοῖ διὰ γράμματος, οἱ δὲ ἄλλοι θέλουσι παριστάνεσθαι διὰ τούτου, διὰ γνωστῶν καὶ διὰ πράξεων ἐκτελεσθησομένων ἐπ' αὐτῶν, καὶ προσδιοριζομένων ἐκ τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει δεδομένων· καὶ τότε θέλει κατασκευάζεσθαι κυρίως μία μόνη ἐξίσωσις ἀντὶ πολλῶν (ἰδὲ καὶ ἐν 9).

56. Μετὰ τὰς γενικὰς ταύτας παρατηρήσεις καὶ παραγγελίας λέγομεν καὶ ὀλίγα τινὰ περὶ ἑκάστης τάξεως προβλημάτων· ὥστε καὶ τὰ γενικὰ διὰ τούτων νὰ γείνωσι σαφέστερα, καὶ τὴν ἀναγκαίαν εἰς τὸ κατασκευάζειν τὰς ἐξισώσεις τῶν προβλημάτων ἱκανότητα ν' ἀποκτήσωσιν οἱ ἀρχάριοι.

Α. Τῆς τάξεως ταύτης προβλήματα εἶναι κυρίως ἐκεῖνα, ἐν οἷς διὰ τῆς γνώσεως μερῶν τινων ἀριθμοῦ ἢ μερῶν τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ καί τινων μερῶν του πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἢ μόνος αὐτὸς ἢ καί τις μὲ αὐτὸν συσχετισμένος.

Ἴσα δὲ ποσὰ εἶναι ἢ ὁ ζητούμενος διττῶς παριστανόμενος, ἁπλῶς τε καὶ διὰ τῶν μερῶν του (1,5,6,10), ἢ μέρη αὐτοῦ πρὸς ἄλληλα διττῶς παριστανόμενα (2,9,11), ἢ τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ καὶ ἄλλων συσχετισμένων μὲ αὐτόν, διττῶς παριστανόμενον (3,4,7,8).

Τῶν ἴσων δὲ ποσῶν τὰ μὲν εἶναι κεφάλαια ἄλλων, τὰ δὲ καὶ διαφορὰ ἄλλων (9 καὶ 10)· τὰ μὲν παριστάνονται δι' ἑνὸς μερικοῦ ἀριθμοῦ, τὰ δὲ διὰ πολυόρων, καὶ μόνον τοῦ 11 καὶ τὰ δύο εἶναι πολύορα· τὰ μὲν τέσσαρα πρῶτα εἶναι ἁπλούστερα, τὰ δὲ συνθετώτερα· τελευταῖον τὸ 10 καὶ 11, ἂν καὶ ἔχουσι δύο ἀγνώστους, ὅμως ὁ ἕτερος ἐκλαμβάνεται ἄγνωστος καὶ σημειοῦται διὰ χ. Ἄλλαι δέ τινες λεπτομέρειαι ἀφίνονται εἰς τὸν διδάσκοντα νὰ τὰς παρατηρήσῃ πρὸς τοὺς μαθητάς του.

1. Δύο τινὲς ὁμοῦ ἠγόρασαν ἵππον, καὶ ὁ μὲν εἶχε καὶ ἔδωκε τὸ πέμπτον τῆς ἀξίας του, ὁ δὲ τὸ ἕβδομον, ἐπειδὴ δὲ δὲν

ἐξήρκεσαν ταῦτα, ἐδανείσθησαν ἀκόμη καὶ ἔδωκαν 276 δραχμάς· πόσον ἀξίζει αὐτὸς ὁ ἵππος;

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{7}+276=x.$$

2. Τὸ τέταρτον καὶ τὸ πέμπτον τῶν ὅσα ἔχω ἐν τῷ βαλαντίῳ μου εἶναι δρ 2, 25· πόσα ἔχω ἐν αὐτῷ;

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=2,25.$$

3. Ἐκ τῶν ἐπιχειρήσεών του ἔμπορός τις ἐκέρδισεν 20 ἀνὰ 100 τοῦ κεφαλαίου του, καὶ οὕτως ἡ νῦν χρηματικὴ του κατάστασις ἀναβαίνει εἰς δρ 15571· πόσον ἦτον τὸ κεφάλαιόν του; (τὸ κέρδος του ἁπλούστερα εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ κεφαλαίου του).

$$x+\frac{x}{5}=15571.$$

4. Κεφάλαιόν τι ὁμοῦ μὲ τοὺς πέντε ἐτῶν ἁπλοῦς τόκους του πρὸς 4 τ. 0/0 συμποσοῦνται εἰς δρ. 8208· πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον;

$$x+\frac{x}{5}=8208.$$

5. Εἰς μὲν τὴν τροφήν του ἐργάτης τις δαπανᾷ τὸ τρίτον τοῦ ἐτησίου κέρδους του, εἰς φορέματα δὲ καὶ εἰς ἐνοίκιον τὸ ὄγδοον, εἰς ἄλλα δὲ ἔκτακτα ἔξοδα τὸ δέκατον, ἐναποταμιεύει δὲ καὶ 318 δρ· πόσον εἶναι τὸ ἐτήσιον κέρδος του;

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{8}+\frac{x}{10}+318=x.$$

6. Ἀοίδιμός τις ἐν τῇ διαθήκῃ του διέταξεν ἡ μὲν γυνή του νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ τῆς περιουσίας του, ἑκάτερος δὲ τῶν παίδων του τὸ ἕκτον αὐτῆς, ὁ δὲ οἰκέτης του τὸ δωδέκατον, καὶ αἱ ὑπόλοιποι 600 δρ νὰ διανεμηθῶσιν εἰς πένητας· πόσα ἦσαν ὅλα του τὰ χρήματα;

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+600=x.$$

7. Τὰ μὲν $\frac{4}{5}$ τῶν χρημάτων του τοκίσας τις πρὸς 4 τ. 0/0,

τὸ δὲ ἄλλο πέμπτον πρὸς 5 τ. 0/0, ἔλαβε κεφάλαια καὶ τόκους ὅλα δρ 2940· πόσα ἐτόκισεν;

$$x+\frac{4x}{125}+\frac{x}{100}=2940.$$

8. Ἐρωτηθείς τις πόσα χρήματα ἔχει ἀπεκρίθη, Ἂν ἀπὸ τὸ πενταπλάσιον τῶν ὅσα ἔχω ἀφαιρεθῶσι 3, καὶ εἰς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου προστεθῶσι 2, θέλει προκύψει ὁ 23, μὴ λογιζομένου τοῦ ἐν δεξιᾷ αὐτοῦ 0· πόσα ἔχει;

$$(5x-3)4+2=230.$$

9. Τρὶς πωλήσας ἐντὸς τῆς αὐτῆς ἡμέρας ἔμπορος, καὶ ζημιωθεὶς μὲν κατὰ τὴν πρώτην πώλησιν τὸ ἕκτον τῆς ὅλης ἀξίας τῶν πωληθέντων καὶ κατὰ τὴν δευτέραν τὸ δέκατον, κερδίσας δὲ κατὰ τὴν τρίτην τὸ τρίτον, εὗρε λογισάμενος ὅτι ἐκέρδισε δρ 3· πόσον ἤξιζαν τὰ πωληθέντα τὴν ἡμέραν ἐκείνην;

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{10}-\frac{x}{3}=3, \text{ ἢ ὀρθότερον } \frac{x}{3}-\frac{x}{6}-\frac{x}{10}=3.$$

10. Τρεῖς κληρονόμοι Α, Β, Γ μέλλουσι νὰ μοιρασθῶσι κληρονομίαν τινὰ οὕτως, ὁ μὲν Α νὰ λάβῃ 3000 δρ ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος ὅλης, ὁ δὲ Β 1000 ὀλιγώτερον τοῦ τρίτου ὅλης, ὁ δὲ Γ 800 πλειότερον τοῦ τετάρτου αὐτῆς· πόση ἦτον ἡ κληρονομία καὶ πόσον τὸ ἑκάστου μερίδιον;

$$\frac{x}{2}-3000+\frac{x}{3}-1000+\frac{x}{4}+800=x.$$

11. Οἱ παῖδές τινος ἐμοιράσθησαν τὴν ὁποίαν ὁ πατήρ των ἄφησε κληρονομίαν οὕτως, ὁ μὲν πρωτότοκος πρῶτος ἔλαβεν 100 δρ καὶ τὸ δέκατον τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δὲ δεύτερος ἔπειτα 200 δρ καὶ τὸ δέκατον τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δὲ τρίτος μετ' αὐτοὺς 300 καὶ τὸ δέκατον τοῦ ὑπολοίπου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς οἱ λοιποί, ἔλαβον δὲ ὅλοι ἴσα· πόση ἦτον ἡ κληρονομία καὶ πόσοι οἱ παῖδες; Τὰ τοῦ πρωτοτόκου καὶ τοῦ δευτέρου μερίδια εἶναι ἴσα.

$$100+\frac{x-100}{10}=200+\frac{x-100-\frac{x-100}{10}-200}{10}$$

Β. Τὰ τῆς τάξεως ταύτης (12—31) εἶναι ἐκεῖνα, ἐν οἷς εἶναι γνωστὸν τὸ κεφάλαιον δύο ἢ τριῶν ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν καὶ διάφοροι σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους, ζητοῦνται δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

Ἴσα δὲ ποσὰ εἶναι τὸ δεδομένον κεφάλαιον καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερῶν του, εὑρισκομένων κατὰ τὰς ἄλλας δεδομένας σχέσεις· ἐν δὲ τῷ 17, 19 καὶ 20 εἶναι δύο διάφορα κεφάλαια. Τὸ ἕτερον δὲ μόνον ποσὸν παριστάνεται διὰ πολυόρου. Ἂν δὲ καὶ οἱ ἄγνωστοι εἶναι ἢ δύο ἢ τρεῖς κτλ, ὅμως εἷς μόνος ἐκλαμβάνεται ἄγνωστος, καὶ μία ἐξίσωσις ἑπομένως κασκευάζεται.

12. Δύο τραπεζῖται λογισάμενοι τὰ ἐν τοῖς ταμείοις αὐτῶν εὑρίσκουσιν ὅτι τῶν δύο ὁμοῦ αἱ δραχμαὶ συμποσοῦνται εἰς 38700, αἱ δὲ τοῦ ἑτέρου τὸν ἀριθμὸν διπλάσιαι τῶν τοῦ ἄλλου· πόσας ἔχει ἑκάτερος ἐν τῷ ταμείῳ του;

$$x+2x=38700.$$

13. Δύο τινῶν μοιρασθέντων δρ 2500 ὁ ἕτερος ἔλαβε τοσάκις 20 δρ, ὁσάκις 5 δρ ἔλαβεν ὁ ἄλλος· πόσας ἑκάτερος;

$$x+4x+2500.$$

14. Νὰ μερισθῇ ὁ 237 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἕτερον νὰ ἦναι τοῦ ἄλλου μεγαλήτερον καθ' ἓν τέταρτον.

$$x+\frac{5x}{4}=237.$$

15. Νὰ μερισθῇ ὁ 1800 εἰς δύο τινας ἀναλόγως τῆς ἡλικίας αὐτῶν, ὄντος τοῦ μὲν 10 ἐτῶν, τοῦ δὲ 35.

$$x+\frac{35x}{10}=1800.$$

16. Τίνες εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ μὲν κεφάλαιον εἶναι 96, ἡ δὲ διαφορὰ 16;

$$x+x+16=96.$$

17. Νὰ μερισθῇ ὁ 46 εἰς δύο ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι 10 τὸ κεφάλαιον τῶν πηλίκων αὐτῶν διῃρημένων τοῦ μὲν διὰ 7, τοῦ δὲ διὰ 3.

$$\frac{x}{7}+\frac{46-x}{3}=10.$$

18. Δύο μικρέμποροι ἐμοιράσθησαν 500 δρ οὕτως, ὥστε ὁ ἕτερος ἔλαβε τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ ἄλλου καὶ ἔτι 50 δρ διὰ τοὺς κόπους του· πόσας ἑκάτερος;

$$x+\frac{x}{2}+50=500.$$

19. Φρουρά τις σύγκειται ἐκ πεζῶν καὶ ἱππέων ὅλων ὁμοῦ 1250, καὶ ἕκαστος μὲν τῶν πεζῶν λαμβάνει κατὰ μῆνα δρ 10, ἕκαστος δὲ ἱππεὺς δρ 15, εἰς ὅλους δὲ ὁμοῦ δαπανῶνται δρ 13500· πόσοι εἶναι οἱ πεζοὶ καὶ πόσοι οἱ ἱππεῖς;

$$10x+(1250-x)15=13500.$$

20. Οἴνου 36 λεπτῶν τὴν ὀκᾶν καὶ οἴνου 20 λεπ οἰνοπώλης θέλει ν' ἀναμίξῃ μέρος τοσοῦτον, ὥστε ν' ἀποτελέσῃ 50 ὀκάδων κρᾶμα, πωλητέων ἄνευ κέρδους ἢ ζημίας πρὸς λεπτὰ 30 τὴν ὀκᾶν· πόσας ὀκάδας ἐξ ἑκατέρου θέλει λάβει;

$$\frac{36x+20(50-x)}{50}=30.$$

21. Εἰς γάμον τινὰ ἦσαν ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παῖδες ὅλοι 266, καὶ ὁ μὲν τῶν ἀνδρῶν ἀριθμὸς ἦτον τετραπλάσιος τοῦ τῶν παίδων, ὁ δὲ τῶν γυναικῶν διπλάσιος· πόσοι οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία;

$$x+2x+4x=266.$$

22. Καθ' ὅλην του τὴν περιήγησιν διεπορεύθη περιηγητής τις στάδια 12540, τὰ μὲν ἔφιππος, τρὶς καὶ $\frac{1}{2}$ δὲ τόσα διαπόντιος, καὶ πεζὸς δὶς καὶ $\frac{1}{3}$ τόσα, ὅσα κατὰ θάλασσαν· πόσων σταδίων ὁδὸν διήνυσε πλέων, πόσων πεζὸς καὶ πόσων ἔφιππος;

$$x+\frac{7x}{2}+\frac{49x}{6}=12540.$$

23. Τρεῖς δῆμοι Α, Β, Γ χρεωστοῦν ν' ἀποστείλωσι 21 στρατευσίμους ἀναλόγως τῆς πλήθύος τῶν κατοίκων των, ὄντων τῶν τοῦ Α πρὸς τοὺς τοῦ Β ὡς 3 πρὸς 4, τῶν δὲ τοῦ Β πρὸς τοὺς τοῦ Γ ὡς 8 πρὸς 7· πόσους θέλει στείλει ἕκαστος;

$$x+\frac{3x}{4}+\frac{7x}{8}=21.$$

24. Χήρα ὁμοῦ μὲ τὰ πέντε τέκνα της, δύο ἄῤῥενα καὶ τρία θήλεα, ἔχουν νὰ μοιρασθῶσιν 7500 δρ οὕτως, ὥστε τὸ τῶν ἀῤῥένων μερίδιον νὰ ἦναι διπλάσιον τοῦ τῶν κορασίων, τὸ δὲ ἰδικόν της κατὰ 500 δρ μεγαλήτερον τῶν ὅσας θέλουσι λάβει ὅλα τὰ τέκνα της· πόσον εἶναι τὸ ἰδικόν της καὶ πόσον τῶν τέκνων της τὸ μερίδιον;

$$x+2x+3x+500=7500.$$

25. Τρεῖς γεωργοὶ Α, Β, Γ ἔχουν 8000 στρέμματα γῆς νὰ μοιρασθῶσι, καὶ ὁ μὲν Β θέλει λάβει 276 ὀλιγώτερα τοῦ Α, ὁ δὲ Γ 1112 πλειότερα τοῦ Β· πόσα θέλει λάβει ἕκαστος;

$$x+x-276+x-276+1112=8000.$$

26. Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὧν τὸ κεφάλαιον 70, ὁ δὲ δεύτερος διῃρημένος διὰ τοῦ πρώτου νὰ δώσῃ πηλίκον 2 καὶ κατάλοιπον 1, ὁ δὲ τρίτος διῃρημένος διὰ τοῦ δευτέρου νὰ δώσῃ καὶ πηλίκον καὶ κατάλοιπον 3.

$$x+2x+1+6x+6=70.$$

27. Τρεῖς ἔμποροι ἑτερείαν ποιήσαντες καὶ εἰς τὸ κοινὸν ἀφήσαντες ὁ μὲν Α 1200 δρ μῆνας 8, ὁ δὲ Β 800 δρ μῆνας 10, ὁ δὲ Γ 600 δρ μῆνας 14, ἐκέρδισαν δρ 500· πόσας τούτων ἕκαστος δικαιοῦται νὰ λάβῃ;

$$x+\frac{5x}{6}+\frac{7x}{8}=500.$$

28. Τριῶν ἑταίρων εἰς ἐμπόριον κατέβαλεν ὁ μὲν Β κατὰ τὸ ἥμισυ πλειοτέρας δρ τοῦ Α, ὁ δὲ Γ 800 δρ πλειοτέρας παρὰ τὸν Α καὶ τὸν Β ὁμοῦ, καὶ λαμβάνει 2570 δρ ἐκ τοῦ ὅλου κέρδους αὐτῶν 5020 δρ· πόσας κατέβαλεν ἕκαστος;

$$\frac{5140x}{5x+1600}+\frac{7710x}{5x+1600}+2570=5020.$$

29. Οὔσης τῆς καταβολῆς ἑταίρου τινὸς Γ δρ 5600, τῆς δὲ τοῦ συνεταίρου του Α κατὰ 320 δρ μικροτέρας τῆς τοῦ τρίτου Β, ὁ μὲν Α τὴν ἀφίνει εἰς τὴν ἑταιρείαν 7 μῆνας, ὁ δὲ Β 14, ὁ δὲ Γ 12· τοῦ κέρδους αὐτῶν ὅλου δρ 2402 καὶ $\frac{1}{6}$ μερισθέντος ἀναλόγως τῶν καταβολῶν καὶ τῶν χρόνων, ὁ Β ἔλαβε μερίδιον δρ 879 καὶ $\frac{2}{3}$· πόσα ἔλαβεν ὁ Α καὶ πόσα ὁ Γ;

$$\frac{(7x-2240)2639}{42x}+\frac{2639}{3}+\frac{67200\times2639}{42x}=2402+\tfrac{1}{6}.$$

30. Πέμπει τις 1000 δρ πρὸς τοὺς τέσσαρας υἱούς του νὰ τὰς μοιρασθῶσιν οὕτως, ὥστε ὁ νεώτερος τὴν ἡλικίαν νὰ λαμβάνῃ 20 δρ ὀλιγώτερον τοῦ ἀμέσως πρεσβυτέρου του· τί εἶναι τοῦ νεωτάτου τὸ μερίδιον;

$$x+x+20+x+40+x+60=1000\cdot$$

31. Πέντε κληρονόμων μοιρασθέντων 5600 ὁ μὲν Β ἔλαβε τὸ διπλάσιον τοῦ Α καὶ ἔτι 200 δρ, ὁ δὲ Γ τὸ τριπλάσιον τοῦ Α καὶ ἔτι 400 δρ, ὁ δὲ Δ τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα ἔλαβον ὁμοῦ ὁ Β καὶ ὁ Γ καὶ ἔτι 150 δρ, ὁ δὲ Ε τὸ τέταρτον τῶν ὅσα ἔλαβον οἱ ἄλλοι τέσσαρες ὁμοῦ καὶ 475 δρ· πόσας ἕκαστος;

$$x+2x+200+3x+400+\frac{5x+600}{2}+150+$$

$$\frac{17x+2100}{8}+475=5600,\ \text{ἢ}\ \frac{85x+14300}{8}=5600.$$

Γ. Τὰ ἀπὸ τοῦ 32 μέχρι καὶ τοῦ 38 εἶναι προβλήματα, ἐν οἷς γνωστῶν ὄντων δύο ἀριθμῶν, ἑπομένως καὶ τοῦ λόγου αὐτῶν, πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τρίτος, ὅς τις προστεθεὶς εἰς τοὺς γνωστοὺς ἢ ἀφαιρεθεὶς ἀπ' αὐτούς, ἢ προστεθεὶς ἢ ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τὸν ἕτερον αὐτῶν, νὰ μεταβάλλῃ τὸν λόγον αὐτῶν εἰς ἄλλον λόγον δεδομένον. Τὰ δὲ 39 καὶ 40 διαφέρουσι τούτων μόνον καθότι ἔχουσιν ἕνα δεδομένον ἀριθμόν, ὁ δὲ προσθετέος εἰς τοῦτον ζητεῖται τοιοῦτος, ὥστε νὰ καταστήσῃ τὸν λόγον τοῦ δεδομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ τε καὶ τοῦ προσθετέου ἴσον μὲ δεδομένον τινὰ λόγον. Τοῦ δὲ 38 οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ 7 πρὸς 3 εὑρίσκονται διῃρημένου τοῦ 80 εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τοῦ 7 καὶ τοῦ 3· τὰ ἴσα δὲ ποσὰ παρέχει ἡ ἀναλογία $56+\chi : 24 :: 11 : 4$ ἢ ἡ $56 : 24-\chi :: 11 : 4$. Ἄργυρος δὲ καθαρὸς κατὰ 0,900 σημαίνει μίγμα ἔχον 0,900 καθαρὸν ἄργυρον καὶ 0,100 ἄλλο τι μέταλλον ἢ μετάλλων μίγμα. Τὰ ἴσα δὲ ποσὰ τοῦ 40 παρέχει ἡ ἀναλογία $35+\chi : 35 :: 0,900 : 0,787\frac{1}{2}$, τοῦ δὲ 39 ἡ $136+\chi : 136 :: 120 : 80$.

32. Γεώργιός τις 40 ἐτῶν ἔχει υἱὸν 9 ἐτῶν· εἰς πόσα ἔτη ἡ τοῦ πατρὸς ἡλικία θέλει εἶσθαι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

$$40+\chi=2(9+\chi).$$

33. Ὁ Κίμων εἶναι 30 ἐτῶν καὶ ὁ Πλάτων 20· μετὰ πόσα ἔτη ἡ τοῦ Κ ἡλικία θέλει εἶσθαι τὰ $\frac{5}{4}$ τῆς τοῦ Π; ἢ πρὸ πόσων ἐτῶν ἦτον διπλασία τῆς τοῦ Π ἡ τοῦ Κ ἡλικία;

$$30+\chi=\frac{5}{4}(20+\chi), \text{ ἢ } 30-\chi=2(20-\chi).$$

34. Ἐὰν ὁ Κ καὶ ὁ Π, ἀδελφοὶ ὄντες, ἔχωσι καὶ τρίτον ἀδελφὸν ἑξαετῆ, πότε αἱ τῶν δύο νεωτέρων ἡλικίαι ὁμοῦ θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι μὲ τὴν τοῦ Κ;

$$20+\chi+6+\chi=30+\chi.$$

35. Ὁ θεῖος τῶν τριῶν ἀδελφῶν εἶναι 49 ἐτῶν, καὶ ἑπομένως κατὰ 7 ἔτη ἡ ἡλικία του μικροτέρα τῶν ἡλικιῶν ὁμοῦ τῶν τριῶν ἀνεψιῶν του· πότε ἡ τοῦ θείου ἡλικία θέλει εἶσθαι ἴση μὲ ὅλας ὁμοῦ τὰς ἡλικίας τῶν τριῶν ἀνεψιῶν;

$$49-\chi=30-\chi+20-\chi+6-\chi.$$

36. Ἐν χορῷ τινι κατ᾽ ἀρχὰς ὁ τῶν ἀνδρῶν ἀριθμὸς ἦτον τριπλάσιος τοῦ τῶν γυναικῶν, ἀλλ᾽ ἀπελθόντων 8 ἀνδρογύνων ἔμειναν πεντάκις τόσοι ἄνδρες, ὅσαι γυναῖκες· πόσοι ἄνδρες καὶ πόσαι γυναῖκες ἦσαν κατ᾽ ἀρχάς;

$$5(\chi-8)=3\chi-8.$$

37. Τίς ἀριθμὸς ἐὰν προστεθῇ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλασματικοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$· ἢ τίς ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοὺς δύο, ἢ τίς εἰς τὸν μὲν ἂν προστεθῇ, ἀπὸ τὸν ἄλλον δὲ ἂν ἀφαιρεθῇ, θέλει τρέψει τὸν $\frac{\alpha}{\beta}$ εἰς ἄλλον κλασματικὸν ἴσον μὲ τὸν $\frac{\gamma}{\pi}$;

$$\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}=\frac{\nu}{\pi},\ \frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\nu}{\pi},\ \frac{\alpha+\chi}{\beta-\chi}=\frac{\nu}{\pi},\ \frac{\alpha-\chi}{\beta+\chi}=\frac{\nu}{\pi}.$$

38. Ἀνεμίχθησαν ποσὰ νίτρου καὶ θείου ἀνὰ 7 ὀκάδας τοῦ πρώτου καὶ 3 τοῦ δευτέρου, καὶ ἀπετέλεσαν μίγμα 80 ὀκάδων· πόσον νίτρον χρειάζεται νὰ προστεθῇ εἰς τὸ μίγμα, ἢ πόσον θεῖον ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ αὐτό, ὥστε νὰ καταντήσωσι τὰ μέρη τοῦ νίτρου πρὸς τὰ τοῦ θείου ὡς 11 πρὸς 4;

$$(56+\chi)4=24\times11,\ \text{ἢ}\ 56\times4=(24-\chi)11.$$

39. Ἠγόρασεν οἰνοπώλης τις 136 ὀκάδας καλοῦ οἴνου πρὸς δρ. 1,20 τὴν ὀκάν, ἀλλ' ἐπειδὴ δυσκόλως ἤθελε τὸ πωλήσει καθαρόν, ὡς ἀκριβόν, θέλει νὰ τὸ συγκεράσῃ μὲ ὕδωρ, ὥστε νὰ τὸ πωλῇ λεπτὰ 80 τὴν ὀκάν· πόσας ὀκάδας ὕδατος θέλει ῥίψει;

$$(136+\chi)80=136\times120.$$

40. Χρυσοχόος ἔχων 35 οὐγκίας ἀργύρου κατὰ 0,900 καθαροῦ, πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συγχωνεύσῃ μὲ αὐτόν, ὥστε τὸ συγχώνευμα νὰ ἦναι κατὰ 0,787 $\frac{1}{2}$ καθαρόν;

$$\frac{1575}{2}(35+\chi)=35\times900.$$

Δ. Τὰ τῆς τάξεως ταύτης προβλήματα (41—47) ἔχουσι δεδόμενα ποσά τινα συσχετισμένα μὲ ἄλλα, οἷον τὰ ποσὰ τοῦ χυνομένου ὑγροῦ διὰ διαφόρων στροφίγγων καὶ τοὺς χρόνους καθ' οὓς δι' ἑκάστου στρόφιγγος ῥέει (41, 42, 42, 47), τὰ ποσὰ τοῦ ἔργου διαφόρων ἐργατῶν ἢ τὰ τῶν χρημάτων (44, 45) καὶ τοὺς χρόνους καθ' οὓς γίνονται τὰ ἔργα ἢ ἀνήκουσι τὰ χρήματα, τὰ ποσὰ τοῦ βάρους καὶ τοὺς ὄγκους, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὰ τὰ βάρη (76)· πρόκειται δὲ νὰ εὑρεθῇ ἢ ὁ χρόνος καθ' ὃν τὸ αὐτὸ ποσὸν τοῦ ὑγροῦ τὸ διὰ τῶν διαφόρων στροφίγγων ῥέον ἢ ἄλλο δεδομένον χύνεται δι' ὅλων ὁμοῦ, ἢ τὸ αὐτὸ ἔργον κτλ ἢ ἄλλο δεδομένον γίνεται ὑφ' ὅλων ὁμοῦ τῶν ἐργατῶν κτλ, ἢ νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κτλ.

Ἴσα δὲ ποσὰ εἶναι τὸ ὅλον ὑγρὸν καὶ τὰ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον διὰ τῶν διαφόρων στροφίγγων χυνόμενα μέρη του, τὸ ὅλον ἔργον καὶ τὰ μέρη του τὰ ὑπὸ τῶν διαφόρων ἐργατῶν γινόμενα κτλ. Τῶν ἴσων δὲ ποσῶν τὰ μέρη κατασκευάζονται δι' ἀναλογιῶν.

41. Βαρέλα πλήρης οἴνου κενοῦται διὰ δύο στροφίγγων ἐνταυτῷ, διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν ὁποίων κενοῦται εἰς 2 ὥρας, διὰ δὲ τοῦ ἄλλου εἰς 3· εἰς πόσας ὥρας κενοῦται;

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1.$$

42. Δεξαμενὴ πληροῦται συγχρόνως ὑπὸ τοῦ ὕδατος τριῶν βρύσεων, τῶν ὁποίων ἡ μὲν μόνη τὴν πληροῖ εἰς ὥραν $1\frac{1}{3}$, ἡ δὲ εἰς $3\frac{1}{3}$, ἡ δὲ εἰς 5· εἰς πόσας ὥρας πληροῦται ὑπὸ τῶν τριῶν;

$$\frac{3x}{4}+\frac{3x}{10}+\frac{x}{5}=1.$$

43. Δεξαμενὴ χωροῦσα πηχυαίους κύβους $755\frac{1}{4}$ μέλλει νὰ πληρωθῇ ὑπὸ τριῶν πηγῶν, τῶν ὁποίων ἡ μὲν χύνει ὕδατος 12 πηχυαίους κύβους εἰς $3\frac{1}{4}$, ἡ δὲ 15 εἰς $2\frac{1}{2}$, ἡ δὲ 17 εἰς 3 ὥρας· εἰς πόσον χρόνον αἱ τρεῖς ὁμοῦ θέλουσι τὴν πληρώσει;

$$\frac{12\times 4x}{5}+6x+9x=755+\frac{1}{4}.$$

44. Τρεῖς κτίσται ὁμοῦ μέλλουν νὰ κτίσωσιν 756 πηχυαίων κύβων τεῖχος, τοῦ ὁποίου ὁ μὲν κτίζει 8 πηχυαίους κύβους εἰς πέντε ἡμέρας, ὁ δὲ 9 εἰς 4, ὁ δὲ 10 εἰς 6 ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας θέλουσι τὸν ἐκτελέσει;

$$\frac{8x}{5}+\frac{9x}{4}+\frac{10x}{6}=756.$$

45. Πρωτομάστωρ, 12 κτίσται καὶ 4 ὑπηρέται ἐργασθέντες ὁ μὲν πρὸς δρ 3, 25 τὴν ἡμέραν, οἱ δὲ πρὸς δρ 1,25, οἱ δὲ πρὸς 80 λεπτά, ἔλαβον ὅλοι ὁμοῦ δρ 196,65· πόσας ἡμέρας εἰργάσθησαν;

$$325x+12\times 125x+4\times 80x=19665.$$

46. Τριῶν κομματίων μετάλλων τοῦ αὐτοῦ μὲν ὄγκου, ἀλλὰ διαφόρου βάρους, τοῦ μὲν 5 δακτυλιαῖοι κύβοι ζυγίζουσι δραχμὰς $69\frac{1}{4}$, τοῦ δὲ $3\frac{1}{2}$ ἔχουσι βάρος 41 δρ, τοῦ δὲ $4\frac{2}{7}$

εἶναι βαρεῖς 91 δρ, τὰ δὲ τρία κομμάτια ὁμοῦ ζυγίζουσι δρ 949 $\frac{2}{3}$· πόσος εἶναι ἑκάστου ὁ ὄγκος;

$$\frac{279x}{20}+\frac{41\times 3x}{7}+\frac{91\times 7x}{30}=949+\frac{2}{3}.$$

47. Δεξαμενῆς πλήρους ὕδατος, καὶ ἐχούσης δύο στρόφιγγας διαφόρου μεγέθους, χύνεται τὸ τέταρτον του ὕδατος διὰ τοῦ ἑτέρου μόνου, ἔπειτα τὰ τρία τέταρτα διὰ τῶν δύο ὁμοῦ εἰς ὥραν 1 $\frac{1}{4}$ πλειότερον τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διὰ τοῦ πρώτου ἐχύθη τὸ τέταρτον, ἐνῷ, ἂν ἐχύνετο τὸ ὕδωρ ὅλον ἐξ ἀρχῆς διὰ τῶν δύο, ἤθελε κενωθῆ ἡ δεξαμενὴ ἓν τέταρτον τῆς ὥρας προτήτερα· εἰς πόσας ὥρας ἤθελε κενωθῆ διὰ μόνου τοῦ τὸ τέταρτον τοῦ ὕδατος χύσαντος εἰς τὴν ἀρχήν;

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5+x}{3}.$$

Ε. Ταύτης τῆς τάξεως προβλήματα εἶναι (48—58) τὰ ἐν οἷς ὑπάρχει διάστημα, χρόνος καὶ ταχύτης, ἅτινα ἔχουσι χώραν σχεδὸν πάντοτε καὶ τὰ τρία ὁμοῦ ἐπὶ κινήσεως, γινομένης ἐπὶ εὐθείας ἢ ἐπὶ ἄλλης τε γραμμῆς καὶ ἐπὶ περιφερείας· ἄγνωστον δὲ εἶναι ἕν τι τῶν τριῶν καὶ τἄλλα δύο εἶναι δεδομένα, ποτὲ μὲν ἁπλῶς διδόμενα, ποτὲ δὲ περιπεπλεγμένως, ὡς ἡ ταχύτης ἐν τῷ 49, 50 κτλ. Τὰ δὲ κινούμενα ἢ διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἀντιθέτως, κινοῦσιν δὲ ἢ ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως, ἢ εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἢ κατὰ διαφόρους χρόνους. Τὰ τρία δὲ τελευταῖα διαφέρουσιν ὀλίγον τι τῶν ἄλλων, καὶ ἔτι ὀλιγώτερον τὸ 51.

Ἴσα δὲ ποσὰ εἶναι ἢ τὰ διαστήματα ἢ οἱ χρόνοι διττῶς παριστανόμενα, ἢ αἱ περιστροφαὶ ἢ τοῦ ὕδατος τὰ ποσὰ κτλ. Πρὸς κατασκευὴν δὲ τῶν πρώτων εἶναι ὠφελιμώτατον νὰ γνωρίζῃ τις ὅτι ἐπὶ ὁμαλῆς κινήσεως, ὁπότε ἡ ταχύτης διαμένει ἡ αὐτή, *τὸ διάστημα εἶναι γινόμενον τῆς ταχύτητος ἐπὶ τὸν χρόνον*, καὶ ὅτι *ἑπομένως ὁ χρόνος εἶναι ὁ λόγος τοῦ διαστήματος* πρὸς τὴν ταχύτητα. Ὥστε, ἂν Δ σημαίνῃ τὸ διάστημα, Χ τὸν χρόνον καὶ Τ τὴν ταχύτητα, ἔχομεν

$$\Delta = T \times X, \text{ ἢ } X = \frac{\Delta}{T}, \text{ ἢ } T = \frac{\Delta}{X}.$$

48. Περιηγητής τις κινήσας 10 ἡμέρας ὕστερον ἄλλου ὑπάγει κατόπιν του, ἵνα τὸν φθάσῃ, ὁδοιπορῶν 90 στάδια τὴν ἡμέραν, ἐνῷ ὁ ἄλλος ὁδεύει 40 μόνον· εἰς πόσας ἡμέρας θέλει τὸν φθάσει; Εἰς πόσας δέ, ἂν αἱ ταχύτητες αὐτῶν ἦναι ὡς 8 πρὸς 3;

$$90x - 40x = 400 \text{ ἢ } \tfrac{8}{3}x - x = 10.$$

49. Ὥρας 9 μετὰ τὴν ἐξ Ἀθηνῶν ἀναχώρησιν ταχυδρόμου, ὅστις ὁδοιπορεῖ 70 στάδια εἰς 5 ὥρας, πέμπεται κατόπιν του ἄλλος ταχυδρόμος διατρέχων 50 στάδια εἰς 3 ὥρας· πόσα στάδια μακρὰν τῶν Ἀθηνῶν θέλει φθάσει ὁ δεύτερος τὸν πρῶτον;

$$\frac{3x}{50} = \frac{(x-126)5}{70}.$$

50. Ἀλώπηξ διωκομένη ὑπὸ λαγωνικοῦ εἶναι 60 πηδήματα μακρὰν αὐτοῦ, πηδᾷ δὲ 9 πηδήματα, ἐνῷ τὸ λαγωνικὸν πηδᾷ 6, ἀλλὰ 3 πηδήματα τούτου ἰσοδυναμοῦσι τὸ μῆκος μὲ 7 τῆς ἀλώπεκος· μετὰ πόσα πηδήματά του τὸ λαγωνικὸν θέλει συλλάβει τὴν ἀλώπεκα;

$$\frac{x}{14} = \frac{7x - 180}{9 \times 7}.$$

51. Ἀπὸ σταθμοῦ εἰς σταθμὸν παρετηρήθη ὅτι ὀχήματος ὁ μὲν ἔμπροσθεν τροχός, οὗτινος ἡ περιφέρεια εἶναι ποδῶν $5\frac{1}{4}$, περιεστάφη 2000 περιστροφὰς ὑπὲρ τὸν ὀπίσθιον τροχόν, οὗτινος ἡ περιφέρεια εἶναι ποδῶν $7\frac{1}{8}$· πόσον ποδῶν εἶναι τὸ μεταξὺ τῶν δύο σταθμῶν διάστημα;

$$\frac{4x}{21} - \frac{8x}{57} = 2000.$$

52. Ἔκ τινος τόπου Α ἐξεκίνησε τάγμα στρατιωτῶν πρὸς τὸν Β τόπον, ὁδεῦον $35\frac{1}{2}$ στάδια τὴν ἡμέραν, ἐκ δὲ τοῦ τόπου Β μετὰ 8 ἡμέρας ἀνεχώρησεν ἄλλο τάγμα, διευθυνόμενον

πρὸς τὸν Α τόπον καὶ ὁδεῦον στάδια 52 $\frac{3}{4}$ τὴν ἡμέραν, τὸ δὲ μεταξὺ τῶν δύο τόπων διάστημα εἶναι 800 σταδίων· πόσοι μακρὰν τοῦ Α θέλουσι συναπαντηθῆ τὰ δύο τάγματα; ἢ εἰς ποίαν ἡμέραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου θέλουσι συναπαντηθῆ;

$$\frac{2x-568}{71}=\frac{(800-x)4}{211}$$

53. Ἐχθρικὸς στρατὸς ὁδοιπορῶν 45 στάδια τὴν ἡμέραν φεύγει δύο ἡμέρας πρότερον ἔκ τινος θέσεως, ἐκ τῆς ὁποίας ἔπειτα καὶ ὁ καταδιώκων στρατὸς ὁρμᾶται, ἵνα φθάσῃ τὸν φεύγοντα εἰς ἓξ ἡμέρας· πόσα στάδια τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ὁδοιπορῇ;

$$6x=360.$$

54. Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημβρίαν, ὄντος τοῦ τε λεπτοδείκτου καὶ τοῦ ὡροδείκτου κατὰ τὴν δωδεκάτην· εἰς τινὰ ὥραν θέλουσιν εἶσθαι πάλιν ὁμοῦ οἱ δεῖκται τὸ πρῶτον; καὶ ποσάκις θέλουσιν ἐνταμωθῆ εἰς 12 ὥρας;

$$x=\frac{x+12}{12}.$$

55. Δύο σώματα ἀρχίζουσι νὰ κινῶνται κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἀντιθέτως ἐπὶ περιφερείας κύκλου μακρᾶς π πήχεων, μακρὰν ἀλλήλων ὄντα εἰς τὴν ἀρχὴν α πήχεις καὶ δανύοντα τὸ μὲν πήχεις β εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον, τὸ δὲ γ· πότε ταῦτα θέλουσι συναπαντηθῆ τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον κτλ, ἐὰν δὲν μεταβάλληται ἡ κίνησίς των;

$$\beta x+\gamma x=\pi-\alpha,\ \text{ἢ}\ \beta x+\gamma x=\pi.$$

56. Δεξαμενὴ πληροῦται διὰ δύο κρουνῶν, τῶν ὁποίων τὰ στόμια εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς 5 πρὸς 13, τοῦ ὕδατος ῥέοντος δι' αὐτῶν μὲ ταχύτητα ὡς 8 πρὸς 7· ὄντος δ' ἔτι γνωστοῦ ὅτι διὰ τοῦ ἑτέρου κρουνοῦ ἐν χρόνῳ τινὶ χύνονται 561 δακτυλιαῖοι κύβοι πλειότερον παρὰ διὰ τοῦ ἄλλου, πόσον ὕδωρ δι' ἑκατέρου ῥέει ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ;

$$40\chi=91(\chi-561).$$

57. Δύο πυροβολιςῶν βομβοβολούντων πολιορκημένην πόλιν ὁ μὲν ἔρριψε 36 βόμβας πρὶν ἀρχίσῃ ὁ ἄλλος τὸ πῦρ, ἐν δὲ τῷ αὐτῷ χρόνῳ ῥίπτει ὁ πρῶτος 8 βόμβας καὶ ὁ δεύτερος 7, ἀλλ' οὗτος ἐν 3 βολαῖς δαπανᾷ ὅσην πυρίτιδα ὁ πρῶτος δαπανᾷ ἐν 4· πόσας βόμβας πρέπει νὰ ῥίψῃ ὁ δεύτερος, ἵνα δαπανήσῃ τὴν αὐτὴν μὲ τὸν πρῶτον ποσότητα πυρίτιδος;

$$36+\frac{8\chi}{7}=\frac{4}{3}\chi.$$

58. Τοκίζει τις 5500 δρ πρὸς 4 τ. 0/0 καὶ μετὰ 4 ἔτη 8000 δρ πρὸς 5 τ. 0/0· εἰς πόσον χρόνον τὰ δύο ταῦτα κεφάλαια θέλουσι φέρει τὸν αὐτὸν τόκον;

$$220\chi=400(\chi-4).$$

Ποικίλων προβλημάτων ἐκθέσεις.

Ἐν μὲν τοῖς τρισὶ πρώτοις ζητοῦνται δύο ἀριθμοί, ἐνῷ εἶναι γνωστὸν ὅτι τοῦ ἑτέρου τὰ γινόμενα ἐπὶ δύο διαφόρους δεδομένους ἀριθμοὺς εἶναι ἢ μεγαλήτερα ἢ μικρότερα ἢ τὸ μὲν μεγαλήτερον, τὸ δὲ μικρότερον τοῦ δευτέρου ζητουμένου κατὰ δεδομένον ἀριθμόν. Τὰ δὲ ἑπτὰ ἀκόλουθα εἶναι τρόπον τινὰ τῶν τριῶν πρώτων ἀντίστροφα ἢ κατά τι ὅμοια. Τὰ δὲ λοιπὰ μέχρι καὶ τοῦ 77 θέλουσι προσδιορίσει οἱ μαθηταὶ ἂν ὁμοιάζουσι μὲ τὰ προηγούμενα καὶ κατὰ τί καὶ μὲ τίνα, ἢ ἂν διαφέρουσιν.

59. Πολυμελοῦς συνελεύσεως ἕκαστον μέλος ἐὰν συνεισέφερεν ὑπὲρ τῶν πενήτων ἀνὰ 16 δρ, ἤθελε συναχθῆ κεφάλαιον κατὰ 430 δρ ὑπὲρ τὸ δέον, ἐὰν δὲ ἀνὰ 14 δρ, ἤθελε συναχθῆ κατὰ 40 δρ ὑπὲρ τὸ δέον· πόσα ἦσαν τὰ μέλη τῆς συνελεύσεως καὶ πόσαι δρ ἐχρειάζοντο;

$$16\chi-430=14\chi-40.$$

60. Θέλων τις νὰ βάλῃ τὸ ὡρολόγιόν του εἰς λαχεῖον λογίζεται ὅτι πρὸς μὲν 4 δρ τὸν κλῆρον ζημιοῦται 30 δρ εἰς

τῆς ἀξίας τοῦ ὡρολογίου του, πρὸς δὲ 5 δρ κερδίζει 50 δρ· πόσους κλήρους ἔκαμε καὶ πόσον ἤξιζε τὸ ὡρολόγιον;

$$4\chi+30=5\chi-50.$$

61. Ἵνα πληρώσῃ τις τὴν ἀξίαν οἰκίας, τὴν ὁποίαν ἠγόρασεν, θέλει νὰ ἐπάρῃ παρὰ τῶν ὀφειλετῶν του ἴσην ποσότητα χρημάτων, καὶ ἂν μὲν αἰτήσῃ ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ 1200 δρ, θέλουσι τοῦ λείψει ἔτι 10000 δρ, ἂν δὲ ἀνὰ 1600 δρ, θέλουσι τοῦ περισσεύσει 4400· πόσοι οἱ ὀφειλέται, πόση ἡ ἀξία τῆς οἰκίας καὶ πόσον πρέπει νὰ αἰτήσῃ ἕκαστον;

$$1200\chi+10000=1600\chi-4400.$$

62. Ὀφείλει τις νὰ ἐξοφλήσῃ τρία ὁμόλογα εἰς τρεῖς διαφόρους προθεσμίας, ἤγουν τὸ μὲν 2832 δρ εἰς 3 μῆνας, τὸ δὲ 2560 δρ εἰς 9 μ, τὸ δὲ 1450 δρ εἰς 16 μ· ἐὰν συμφωνηθῇ νὰ πληρώσῃ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν 6842 δρ εἰς ἕνα τινὰ χρόνον, εἰς πόσους μῆνας θέλει γείνει ἡ πληρωμή;

$$\frac{283200+2832\chi}{103}+\frac{256000+2560\chi}{109}+\frac{145000+1450\chi}{116}=6842.$$

63. Ἵνα ἐπαρκῶ εἰς ὅλας μου τὰς δαπάνας, ἔλεγέ τις, ἔπρεπε νὰ κερδίζω κατ' ἔτος 540 δρ, τὰς ὁποίας δὲν κερδίζω, ἐὰν δ' ἐκέρδιζα τρὶς καὶ $\frac{1}{2}$ τόσας ὅσας τώρα, ὄχι μόνον εἰς τὰς δαπάνας μου ἤθελα ἐπαρκεῖ, ἀλλ' ἤθελα ἐξοικονομεῖ κατ' ἔτος καὶ τόσας, ὅσαι τώρα μοῦ λείπουσι μέχρι τῶν 540 δρ· πόσας κερδίζει;

$$540-\chi=\frac{7\chi}{2}-540.$$

64. Ἐρωτηθεὶς ἀντιγραφεὺς πόσα φύλλα τὴν ἑβδομάδα ἀντιγράφει ἀπεκρίθη, 4 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐργαζόμενος δὲν δύναμαι ν' ἀντιγράφω 70 φύλλα, ἀλλ' ἐὰν εἰργαζόμην 10 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἤθελα ὑπερβῇ τὰ 70 φύλλα καθ' ὅσα τώρα ὀλιγώτερα αὐτῶν ἀντιγράφω· πόσα φύλλα τὴν ἑβδομάδα γράφει;

$$70-\chi=\frac{70\chi}{28}-70.$$

65. Πόσον εἶναι τὸ μεταξὺ δύο τινῶν ὁρίων διάστημα ἐρωτηθεὶς ἀγρομέτρης τις ἀπεκρίθη, Δὲν εἶναι 1000 πήχεων, ἂν δὲ προστεθῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίτον του καὶ ἔτι 176 πήχεις, τὸ δ' ἐξαγόμενον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 $\frac{1}{2}$, θέλει προκύψει ἀριθμὸς πήχεων κατὰ τοσοῦτον μεγαλήτερος τοῦ 1000, καθ' ὅσον τὸ διάστημα εἶναι μικρότερον αὐτοῦ· πόσων πήχεων εἶναι τὸ διάστημα;

$$1000-x=(x+\frac{x}{3}+176)\frac{5}{2}-1000.$$

66. Κεφαλαιοῦχος εἰς ἔμπορον ὑπεσχέθη νὰ δανείσῃ 16000 δρ διὰ 15 μῆνας, μὴ εὐκολυνόμενος δ' εὐθὺς νὰ τῷ δώσῃ τὸ ὅλον, συμβιβάζεται μὲ τὸν ἔμπορον καὶ τῷ δίδει πρῶτον 5000 δρ, μετὰ δὲ 6 μῆνας ἄλλας 3000 δρ, καὶ μετὰ 8 μῆνας τὰς ἄλλας 8000 δρ· μετὰ πόσους μῆνας πρέπει νὰ λάβῃ τὰ χρήματά του ὁ κεφαλαιοῦχος πρὸς ἐκπλήρωσιν τῆς ὑποσχέσεώς του ἄνευ ζημίας οὐδετέρου;

$$\frac{6\times3000}{100}+\frac{8\times8000}{100}=\frac{16000x}{100}.$$

67. Ὀφείλων τις νὰ πληρώσῃ κάμποσα χρήματα δίδων 1376 δρ εἰς 5 μῆνας, 2550 δρ 3 μῆνας ὕστερον καὶ τὰς λοιπὰς 5 μῆνας μετέπειτα, ἐὰν ἐπλήρονε ὅλα τὰ χρήματα διὰ μιᾶς, ἔμελλε νὰ τὰ πληρώσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκάτου μηνός· πόσα ἦσαν ὅλα τὰ χρήματα;

$$\frac{(x-3936)3}{100}=\frac{1376\times5}{100}+\frac{2560\times2}{100}$$

68. Ἔμπορος λαμβάνει ἓν τόπι τσόχας, τὸ ὁποῖον μετρήσας εὗρηκε κατὰ 5 πήχεις μακρότερον παρ' ὅσον ἐπλήρωσε, ἀλλὰ πολὺ κακῆς ποιότητος, ὥστε, ἐνῷ τὴν ἐπλήρωσε πρὸς 10 δρ τὸν πῆχυν, βιάζεται νὰ τὴν πωλῇ πρὸς 8, καὶ οὕτω ζημιοῦται δρ 13 $\frac{1}{2}$ τ. 0|0· πόσων πήχεων μακρὸν ἦτον τὸ τόπι;

$$10(x-5)-8x=\frac{135x-675}{100}.$$

69. Ὑπηρέτης λαμβάνει ἐτησίως μισθὸν 240 δρ. καὶ μίαν ἐνδυμασίαν, ἀλλ' ἀποπεμφθεὶς εἰς τὸ τέλος τοῦ πέμπτου μηνὸς πληρόνεται δρ 37 λαβὼν καὶ τὴν ἐνδυμασίαν· πόσον ὁ οἰκοδεσπότης ἐξετίμησε τὴν ἐνδυμασίαν;

$$5(240+\chi)=12(37+\chi).$$

70. Τυπογράφος παραλαμβάνει στοιχειοθέτην ἐπὶ συμφωνίᾳ νὰ τῷ δίδῃ δρ 1, 50 καθ' ἡμέραν καθ' ἣν ἐργασθῇ, νὰ τῷ κρατῇ δὲ 60 λεπτὰ καθ' ἡμέραν ἀπουσίας· εἰς τὸ τέλος 50 ἡμερῶν λαβὼν δρ 49, 80 ὁ στοιχειοθέτης, πόσας ἡμέρας ἦτον ἀπών;

$$150(50-\chi)-60\chi=4980.$$

71. Ἐρωτηθεὶς μάγειρος βαστῶν πορτογάλλια πόσα ἔχει ἐν τῷ καλαθίῳ ἀπεκρίθη, Ἀξίζει 90 λεπτὰ ἡ δωδεκάς των, ἂν δὲ μὲ τὰ ὁποῖα ἐδαπάνησα εἰς αὐτὰ χρήματα ἔπαιρνα 5 ἀκόμη, ἤθελεν ἀξίζει 2 $\frac{1}{2}$ λεπτὰ ὀλιγώτερον ἡ δωδεκάς· πόσα πορτογάλλια εἶχεν;

$$\frac{90\chi}{12}=\frac{(\chi+5)\frac{175}{2}}{12}.$$

72. Ἕκαστος κτηματίας πόλεώς τινος ἐπλήρονε πρότερον φόρους τὸ ἕβδομον τῶν εἰσοδημάτων του, ἀλλ' εἰς τὸ ἑξῆς θέλει πληρόνει τὸ ἕκτον αὐτῶν· πόσον πρέπει ν' αὐξήσῃ τῶν οἰκιῶν του τὸ ἐνοίκιον, ἵνα ἔχῃ τὸ αὐτὸ εἰσόδημα ὡς πρότερον;

$$\frac{7a-a}{7}=\frac{a\chi+a}{\chi}-\frac{a\chi+a}{6\chi}.$$

73. Ἐκβάλλω ἐκ κιβωτίου τὸ τρίτον τῶν ἐν αὐτῷ χρημάτων καὶ βάλλω ἔπειτα 50 δρ, ὀλίγον δ' ἔπειτα ἐκβάλλω πάλιν τὸ τέταρτον τῶν ἐν τῷ κιβωτίῳ καὶ ἐμβάλλω 70 δρ, καὶ τότε εἶναι ἐν αὐτῷ δρ 120· πόσαι ἦσαν κατ' ἀρχάς;

$$\frac{2\chi+150}{3}-\frac{2\chi+150}{12}+70=120.$$

74. Χωρικός τις πωλεῖ πρῶτον τὰ ἡμίσεα τῶν ἐν τῷ καλαθίῳ ὠῶν καὶ ἔτι 4, ἔπειτα πωλεῖ πάλιν τὰ ἡμίσεα τῶν ὑπολοίπων καὶ προσέτι 2, τελευταῖον ἀγοράζουσι καὶ τὰ ἡμί-

τεα τῶν ὅσα τοῦ εἶχαν μείνει καὶ 6 ἀκόμη, καὶ μετὰ ταῦτα τοῦ ἔμειναν 2 ὠά· πόσα εἶχεν εἰς τὴν ἀρχήν;

$$\frac{x-16}{4}-\frac{x-16}{8}-6=2.$$

75. Στρατηγοῦ θέλοντος νὰ κατατάξῃ τὸν στρατόν του εἰς τετράγωνον, κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀπόπειραν τοῦ περισσεύουσιν 9 στρατιῶται, ἀλλ' αὐξανομένης κατὰ ἕνα ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, τοῦ λείπουσι 50 ἄνδρες· ἐκ πόσων ἀνδρῶν σύγκειται ὁ στρατός;

Η διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν a καὶ $a+1$ εἶναι ἴση μὲ $2a+1$.

$$x+50=x-9+2\sqrt{x-9}+1.$$

76. Τριῶν πίθων ἐὰν μέν τις πληρώσῃ τὸν πρῶτον μὲ ὁ ἐν τῷ δευτέρῳ πλήρει ὄντι ὑγρόν, ἐναπομένουσιν ἐν τούτῳ τὰ δύο ἔννατα τοῦ ὅσον χωρεῖ, ἐὰν δὲ τὸν δεύτερον μὲ τὸ ἐν τῷ τρίτῳ, ἐναπολείπεται ἐν τούτῳ τὸ τρίτον του, τελευταῖον τὸ τρίτον πληροῦται ἐκ τοῦ ἐν τῷ πρώτῳ πλήρει καὶ ἐκ 50 ὀκάδων ἔτι· πόσας ὀκάδας αὐτοῦ τοῦ ὑγροῦ χωρεῖ ἕκαστον;

$$50+\frac{2x}{3}-\frac{4x}{27}=x.$$

77. Τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ψηφίων τριψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 13, ὁ ἀριθμὸς δὲ τῶν μονάδων εἶναι τριπλάσιος τοῦ τῶν ἑκατοντάδων του, ἀλλ' ἂν εἰς αὐτὸν προστεθῇ ὁ 396, προκύπτει κεφάλαιον ἔχον ἑκατοντάδας μὲν ὅσας ὁ προειρημένος μονάδας, μονάδας δὲ ὅσας αὐτὸς ἑκατοντάδας, δεκάδας δὲ τὰς αὐτάς· τίς εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

Ἂν x ἦναι αἱ ἑκατοντάδες του, τῶν μονάδων του $3x$ καὶ τῶν μονάδων τοῦ 396 τὸ κεφάλαιον θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ 10 καὶ τῶν ἑκατοντάδων του.

$$3x+6=x+10.$$

Ἀκολουθοῦσι προβλήματα, τῶν ὁποίων ἄγνωστοι ἐκλαμβάνονται δύο ἢ τρεῖς, καὶ ἑπομένως ἐξισώσεις κατασκευάζονται ισάριθμοι. Είναι δὲ ὠφέλιμον νὰ παραβληθῶσι μὲ τὰ προηγούμενα, ἵνα γείνῃ γνωστὴ ἡ ὁμοιότης των ἢ ἡ διαφορά των πρὸς ἐκεῖνα.

78. Δύο βαλάντια ἐμπεριέχουσι 300 δρ. ἐὰν δὲ λάβῃς 30 δρ ἐκ τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ καὶ τὰς βάλῃς ἐν τῷ ἄλλῳ, θέλουσιν ἔχει καὶ τὰ δύο ἴσον ἀριθμὸν δραχ· πόσαι εἶναι ἐν ἑκατέρῳ;

$$\chi+\omega=300,\ \chi-30=\omega+30.$$

79. Ὁ Α καὶ ὁ Β ὁμοῦ ἔχουσι δρ 570, ἂν δὲ ὁ μὲν εἶχε τὸ τριπλάσιον τῶν ὅσα ἔχει, ὁ δὲ τὸ τετραπλάσιον τῶν ὅσα ἔχει, τότε τῶν δύο ὁμοῦ αἱ δραχμαὶ ἤθελον εἶσθαι 2350· πόσας ἑκάτερος;

$$\chi+\omega=570,\ 3\chi+4\omega=2350.$$

80. Ἐρωτηθεὶς ὑπὸ τοῦ υἱοῦ του πατήρ τις πόσων ἐτῶν εἶναι ἀπεκρίθη, Πρὸ 6 ἐτῶν μ' ἔλειπε τὸ τρίτον τῆς ἡλικίας μου, ἵνα ἔχω τρὶς τόσα ἔτη ὅσα σύ, ἀλλὰ μετὰ 3 ἔτη πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 $\frac{1}{6}$ ἡ ἰδική σου, ἵνα γείνῃ ἔτη μὲ τὴν ἰδικήν μου· πόσων ἐτῶν ἦτον ἑκάτερος;

$$\chi-6+\frac{\chi-6}{3}=3(\omega-6),\ \chi+3=\tfrac{13}{6}(\omega+3).$$

81. Α τις χρεωστεῖ 1200 δρ, Β δέ τις 2550 δρ, μηδέτερος δ' ἔχων ἱκανὰς δρ πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους του, ὁ μὲν Α αἰτεῖ τὸν Β τὸ ὄγδοον τῶν ὅσα ἔχει, ὁ δὲ Β τὸν Α τὸ ἕκτον τῶν χρημάτων του, ἵνα δυνηθῇ ἑκάτερος νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του· πόσας εἶχεν ὁ Α καὶ πόσας ὁ Β;

$$\chi+\frac{\omega}{8}=1200,\ \omega+\frac{\chi}{6}=2550.$$

82. Δανεισθεὶς τις 32000 δρ πρός τι ἐπιτόκιον καὶ μετατοκίσας αὐτὰς καὶ ἄλλας ὁμοῦ ὅλας 92000 πρὸς ἀνώτερον ἐπιτόκιον ἐκέρδισεν δρ 3620, ἄλλοτε δὲ δανεισθεὶς 37600 δρ καὶ τοκίσας 70000 κατὰ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἐκέρδισε 2158 δρ· πρὸς τί ἐπιτόκιον ἐδανείσθη καὶ πρὸς τί ἐτόκισεν;

$$920\omega-320\chi=3620,\ 700\omega-376\chi=2158.$$

83. Δύο βρύσεις χύνουσι τὸ ὕδωρ των ἐν δεξαμενῇ τινι χωρούσῃ 210 ὀκάδας, εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι ἡ μὲν εἰς 4 ὥρας, ἡ δὲ εἰς 5 χύνουσιν αἱ δύο ὅλας 90 ὀκ. καὶ ὅτι ἡ μὲν εἰς 7 ὥρας, ἡ δὲ εἰς $3\frac{1}{2}$ ὡρ χύνουσιν 126 ὀκάδας· πόσον ὕδωρ ἑκατέρα χύνει καθ' ὥραν, καὶ εἰς πόσον χρόνον αἱ δύο ὁμοῦ ἤθελαν γεμίσει τὴν δεξαμενήν;

$$4\chi+5\omega=90,\quad 7\chi+\frac{7}{2}\omega=126.$$

84. Ἐπλήρωσέ τις δραχ. 594,10 δίδων 145 νομίσματα, τὰ μὲν πεντάδραχμα, τὰ δὲ σχελίγκια· πόσα πεντάδραχμα καὶ πόσα σχελίγκια; (τὸ σχελ. ἀξίζει δρ 1,26).

$$\chi+\omega=145,\quad 5\chi+\frac{126\omega}{100}=594,10.$$

85. Περιηγητὴς Ἄγγλος ἀνταλλάσσει γραμμάτιον 150 λιτρῶν στερλιγγῶν ἀντὶ δουκάτων καὶ λαμβάνει παρὰ τοῦ τραπεζίτου 331 δουκ καὶ δραχ 3,50 εἰς ἀποπλήρωσιν, ἄλλοτε δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀνταλλάσσει γραμμάτιον 40 λίτ. στερλ καὶ λαμβάνει 88 δουκ καὶ 4 δρ· πόσον ἐκτιμᾶται ἡ λιτ στερ καὶ πόσον τὸ δουκάτον;

$$150\chi=331\omega+3,50,\quad 40\chi=88\omega+4.$$

86. Ποῖον εἶναι τὸ κλάσμα, ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ ὁποίου ἂν μὲν ἀφαιρεθῶσι 3 μονάδες, μετατρέπεται εἰς $\frac{1}{4}$, ἂν δὲ προστεθῶσι 5 μονάδες, γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$;

$$\frac{\chi-3}{\omega-3}=\frac{1}{4},\quad \frac{\chi+5}{\omega+5}=\frac{1}{2}.$$

87. Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορά, τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ γινόμενον νὰ ἔχωσιν ὃν λόγον ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ 2,3 καὶ 5.

$$2\chi+2\omega=3\chi-3\omega,\quad 2\chi\omega=5\chi-5\omega.$$

88. Ὁ μὲν Β ἐτόκισε 12600 δρ ὑπὲρ τὰς τοῦ Α πρὸς 1 τ. 0/0 πλειότερον κατ' ἔτος, καὶ οὕτω κερδίζει πλειότερον κατ' ἔτος δρ 730, ὁ δὲ Γ ἐτόκισε 3000 δρ πλειότερον τοῦ Α πρὸς 2 τ. 0|0 ὑπὲρ τὸν Α κατ' ἔτος, καὶ οὕτως εἰσοδεύει

πλειότερον αὐτοῦ 380 δρ· πόσας ἐτόκισεν ἕκαστος καὶ πρὸς τί ἐπιτόκιον;

$$\frac{\chi\omega}{100}+730=\frac{(\chi+12000)(\omega+1)}{100},$$

$$\frac{\chi\omega}{100}+380=\frac{(\chi+3000)(\omega+2)}{100}.$$

89. Ἔχει τις οἶνον δύο εἰδῶν, καὶ ἂν 300 λίτρας τοῦ καλλιτέρου ἀναμίξῃ μὲ 500 λίτρ τοῦ κατωτέρου, δύναται νὰ πωλῇ τοῦ κράματος 100 λίτρ ἀντὶ δραχ 20, 50; ἂν δ' ἀναμίξῃ 375 λίτρ τοῦ καλλιτέρου μὲ 750 λιτ τοῦ κατωτέρου, δύναται νὰ πωλῇ 100 λίτρ τοῦ κράματος ἀντὶ 20 δρ· πόσον τιμῶνται ἑκατέρου αἱ 100 λίτραι;

$$3\chi+5\omega=164,\quad 375\chi+750\omega=22500.$$

90. 21 χιλιόδραχμα ἀργύρου ἐν τῷ ὕδατι ζυγίζουσι μόνον 19 χιλιόδρ; 9 δὲ χιλιόδρ χαλκοῦ ζυγίζουσι μόνον 8· ἐὰν δ' ἦναι γνωστὸν ὅτι μίγμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ ἔχον βάρος 148 χιλιόδρ χάνει ἐν τῷ ὕδατι χιλιόδρ 14 $\frac{2}{3}$, πόσον ἄργυρον καὶ πόσον χαλκὸν ἐμπεριέχει τὸ μίγμα;

Ὁ Ἀρχιμήδης πρῶτος εὗρηκεν ὅτι σῶμά τι ἐντὸς τοῦ ὕδατος ζυγίζει ὀλιγώτερον παρ' ὅσον ἐκτὸς αὐτοῦ, καὶ τόσον ὀλιγώτερον ὅσον ζυγίζει ὄγκος ὕδατος ἴσος μὲ τὸν ὄγκον αὐτοῦ τοῦ σώματος. *Εἰδικὸν δὲ βάρος σώματος* καλεῖται τὸ βάρος του πρὸς τὸ ἐκλαμβανόμενον ὡς μονάδα βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος καθαροῦ κατὰ τὴν μεγίστην του πυκνότητα.

$$\chi+\omega=148,\quad \frac{2\chi}{21}+\frac{\omega}{9}=\frac{44}{3}.$$

91. Τοῦ Ἱέρωνος ὁ στέφανος κατὰ τὸν Οὐϊτρούβιον ἐζύγιζε 20 λίτρας, ὁ δὲ Ἀρχιμήδης εὗρηκεν ὅτι ἔχανεν ἐν τῷ ὕδατι τοῦ βάρους του λίτραν 1 $\frac{1}{4}$· ὑποθετομένου δὲ ὅτι συνέκειτο ὁ στέφανος μόνον ἐκ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου, ὧν ὁ μὲν ἔχει εἰδικὸν βάρος 19, 64, ὁ δὲ 10, 5, πόσος ἦτον ὁ χρυσὸς καὶ πόσος ὁ ἄργυρος;

$$\chi+\omega=20,\quad \frac{\chi}{19{,}64}+\frac{\omega}{10{,}5}=1+\tfrac{1}{4}.$$

92. Πόσον ἐτῶν εἶναι αὐτὸς, πόσον ὁ πατήρ του καὶ πόσων ὁ πάππος του ἐρωτηθεὶς τις ἀπεκρίθη, Ἡ ἡλικία μου μὲ τὴν τοῦ πατρός μου εἶναι 56 ἐτῶν, ἡ τοῦ πατρός μου μὲ τὴν τοῦ πάππου μου εἶναι 100 ἐτῶν, ἡ δὲ ἰδική μου μὲ τὴν τοῦ πάππου μου 80 ἐτῶν· πόσων ἐτῶν ἦτον ἕκαστος;

$$\chi+\psi=56,\quad \psi+\omega=100,\quad \chi+\omega=80.$$

93. Ὁ Α καὶ ὁ Β ἔχουσιν ὁμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν χρημάτων τοῦ Γ, ὁ δὲ Β καὶ ὁ Γ ἔχουσιν ὁμοῦ τὸ ἑξαπλάσιον τῶν τοῦ Α, ἐὰν δ' ὁ Β εἶχεν ἔτι 680 δρ πλειότερον τῶν ὅσας ἤδη ἔχει, ἤθελεν ἔχει ὅσας ὁ Α καὶ ὁ Γ ὁμοῦ· πόσας ἕκαστος;

$$\chi+\psi=\tfrac{2}{3}\omega,\quad \psi+\omega=6\chi,\quad \chi+\omega=\psi+680.$$

94. Τρεῖς ἄνθρωποι Α, Β, Γ ἠγόρασαν καφὲ, ζάκχαρι καὶ τσάϊ πρὸς ἴσην ἕκαςος τιμὴν τὴν ὀκᾶν, καὶ ὁ μὲν Α ἐπλήρωσε 51 δρ ἀντὶ 6 ὀκ καφὲ, 9 ζάκχαρι καὶ 3 τσάϊ, ὁ δὲ Β δρ 64,10 ἀντὶ 8 ὀκ καφὲ, 7 ζάκχαρι καὶ 4 τσάϊ, ὁ δὲ Γ δρ 48,50 ἀντὶ 5 ὀκ καφὲ, 10 ζάκχαρι καὶ 2 ὀκ καὶ 20 δραμ τσάϊ· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ ἑκάστου εἴδους;

$$6\chi+9\psi+3\omega=51,\quad 8\chi+7\psi+4\omega=64{,}10,$$
$$5\chi+10\psi+2\tfrac{1}{20}\omega=48{,}50.$$

95. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τριῶν βρύσεων ἡ μὲν Α καὶ ἡ Β ὁμοῦ ἤθελαν γεμίσει δεξαμενήν τινα εἰς 70 λεπτὰ, ἡ δὲ Α καὶ ἡ Γ ὁμοῦ εἰς 84 λεπ, ἡ δὲ Β καὶ ἡ Γ ὁμοῦ εἰς 140, ἑκάστη αὐτῶν εἰς πόσον χρόνον ἤθελε τὴν γεμίσει, καὶ ὅλαι ὁμοῦ εἰς πόσον;

$$\frac{70}{\chi}+\frac{70}{\psi}=1,\quad \frac{84}{\chi}+\frac{84}{\omega}=1,\quad \frac{140}{\psi}+\frac{140}{\omega}=1.$$

96. Τριῶν κομματίων συγχωνευμένου χρυσοῦ καὶ ἀργύρου καὶ χαλκοῦ τὸ μὲν ἐμπεριέχει 5 οὐγκίας χρυσοῦ, 15

ἀργύρου καὶ 30 χαλκοῦ, τὸ δὲ 20 οὐγ χρυσοῦ, 28 ἀργύρου καὶ 48 χαλκοῦ, τὸ δὲ 12 οὐγ χρυσοῦ, 9 ἀργ καὶ 24 χαλκοῦ· πόσον πρέπει ἐξ ἑκάστου κομματίου νὰ συγχωνεύσῃ τις, ὥςε τὸ μίγμα νὰ ἐμπεριέχῃ 10 οὐγκίας χρυσοῦ, 25 ἀργύρου καὶ 26 χαλκοῦ;

$$\frac{\chi}{10}+\frac{5\psi}{24}+\frac{12\omega}{45}=10,\quad \frac{3\chi}{10}+\frac{7\psi}{24}+\frac{9\omega}{45}=25,$$

$$\frac{3\chi}{5}+\frac{\psi}{2}+\frac{24\omega}{45}=26.$$

97. Παίζουσιν ὁ Α, ὁ Β καὶ ὁ Γ μὲ συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ ὁ χάσας εἰς ἑκάτερον τῶν ἄλλων τὸ τρίτον τῶν χρημάτων ἑνὸς ἑκατέρου· ἐπειδὴ δὲ μετὰ τρία παιγνίδια, τῶν ὁποίων καθεὶς ἔχασεν ἕν, ἀριθμήσας εὗρεν ἕκαστος ὅτι εἶχε δρ 64, ζητεῖται πόσα εἶχε καθεὶς πρὶν ἀρχίσωσι τὸ παιγνίδιον;

$$\frac{48\chi-16\psi-16\omega}{27}=64,\quad \frac{52\psi-12\chi-12\omega}{27}=64,$$

$$\frac{55\omega-9\chi-9\psi}{27}=64.$$

98. Ναύαρχος μέλλων νὰ διανείμῃ 31824 δρ εἰς τὰ πληρώματα τριῶν νηῶν, λογιζόμενος εὑρίσκει ὅτι, ἂν μὲν δώσῃ εἰς ἕκαστον ναύτην τῆς πρώτης ἀνὰ 12 δρ, οἱ τῶν ἄλλων δύο θέλουσι λάβει ἀνὰ 6 ἕκαστος, ἂν δὲ δώσῃ εἰς ἕκαστον τῆς δευτέρας ἀνὰ 12, ἕκαστος τῶν δύο ἄλλων θέλει λάβει ἀνὰ 4, ἂν δὲ δώσῃ εἰς ἕκαστον τῆς τρίτης ἀνὰ 12, μένουσι μόνον ἀνὰ 3 δρ εἰς ἕκαστον τῶν δύο ἄλλων· ἐκ πόσων ἀνδρῶν ἑκάστης νηὸς τὸ πλήρωμα σύγκειται;

$$\frac{31824-12\chi}{\psi+\omega}=6,\quad \frac{31824-12\psi}{\chi+\omega}=4,\quad \frac{31824-12\omega}{\chi+\psi}=3.$$

99. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ τοῦ 6 νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ κεφάλαιον τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ 6, ὃν ὁ 2 πρὸς τὸν 3, ἂν δὲ προστεθῇ 5 εἰς τὸν πρῶτον καὶ τὸν τρίτον, τὰ κεφάλαιά των ταῦτα νὰ

ἦναι ὡς ὁ 7 πρὸς τὸν 11, ἂν δ' ἀφαιρεθῇ 36 ἀπὸ τὸν δεύτερον καὶ τὸν τρίτον, αἱ διαφοραί των νὰ ἦναι ὡς ὁ 6 πρὸς τὸν 7.

$$3(\chi+6)=2(\psi+6), 11(\chi+5)=7(\omega+5), 7(\psi-36)=6(\omega-36)$$

100. Εὑρεῖν τριψήφιον ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου τὰ τρία ψηφία ν' ἀποτελῶσι συνεχῆ ἰσοδιαφορὰν, τὸ δὲ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ κεφαλαίου τῶν τριῶν ψηφίων νὰ ἦναι 48, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 189 ἀπ' αὐτὸν ν' ἔχῃ μονάδας μὲν, ὅσας αὐτὸς ἑκατοντάδας, ἑκατοντάδας δὲ, ὅσας ἐκεῖνος μονάδας, καὶ δεκάδας τὰς αὐτάς.

$$\chi+\omega=2\psi, \frac{100\chi+10\psi+\omega}{\chi+\psi+\omega}=48, 10+\omega-8=\chi.$$

Τῶν ἑξῆς προβλημάτων (101—110) αἱ ἐξισώσεις θέλουσιν ἔχει τὸν ἄγνωστον μὲ δείκτην 2. Εἶναι δὲ παραβλητέα μὲ ἄλλα προηγούμενα ὅμοια τρόπον τινὰ, ἵνα γείνῃ γνωστὴ ἡ διαφορά των.

101. Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 5525 δρ. τριῶν εἰδῶν ἐμπορεύματα, τῶν ὁποίων ἑκάστου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει τόσας δραχμάς, ὅσας ὀκάδας ἠγόρασεν, ἐπῆρε δὲ ἐκ μὲν τοῦ δευτέρου ἓν τρίτον περισσότερον ἢ ἐκ τοῦ πρώτου, ἐκ δὲ τοῦ τρίτου 3 $\frac{1}{2}$ τόσον, ὅσον ἐκ τοῦ δευτέρου· πόσον ἑκάστου ἠγόρασεν;

$$\chi^2+\frac{16\chi^2}{9}+\frac{116\chi^2}{9}=5525.$$

102. Πόσων ἐτῶν εἶναι ἐρωτηθείς τις ἀπεκρίθη, Μ' ἐγέννησεν ἡ μήτηρ μου εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν της πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τῶν ἰδικῶν μου ὑπερβαίνει τὴν ἡλικίαν της ὁμοῦ μὲ τὴν ἰδικήν μου κατὰ 2500 ἔτη· πόσων ἐτῶν ἦτον;

$$\chi(\chi+20)=2\chi+20+2500.$$

103. Ἠγόρασα μανδήλια ἀντὶ 60 δρ, ἀλλ' ἂν μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα ἐλάμβανα 3 πλειότερα, ἕκαστον ἤθελεν ἀξίζει δρ. 1 ὀλιγώτερον· πόσα ἠγόρασα;

$$\frac{60}{\chi}-\frac{60}{\chi+3}=1.$$

104. Ἀποθανών τις ἄφησε νὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου οἱ παῖδές του δρ 46800, ἀλλ' ἀποθανόντων δύο παίδων πρὸ τῆς διαμοιράσεως, συνέβη νὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν λοιπῶν 1950 δρ πλειότερον παρ' ὅσον ἂν ἔζων καὶ οἱ ἄλλοι δύο· πόσοι ἦσαν ὅλοι οἱ παῖδες τοῦ ἀποθανόντος;

$$\frac{46800}{\chi}=\frac{46800}{\chi-2}-1950.$$

105. Δύο χωρικαὶ πωλήσασαι 144 ὠὰ ἔλαβον ἴσον ἀριθμὸν δραχμῶν ἑκατέρα· ἀλλ' ἂν ἡ πρώτη εἶχε τὰ τῆς δευτέρας καὶ τὰ ἐπώλει ὅσον τὰ ἰδικά της, ἤθελε λάβει δρ 2,56 ἂν δ' ἡ δευτέρα ἐπώλει τὰ τῆς πρώτης ὅσον τὰ ἰδικά της, ἤθελε λάβει δρ 4· πόσα ὠὰ εἶχεν ἑκατέρα;

$$\chi+\omega=144,\quad \frac{256\chi}{\omega}=\frac{400\omega}{\chi}.$$

106. Δύο περιηγηταὶ Α καὶ Β ἀπέρχονται ἐκ δύο διαφόρων πόλεων Γ καὶ Δ πρὸς ἀπάντησίν των· ἀπαντηθέντες δὲ καὶ λογισάμενοι τήν τε διανυθεῖσαν καὶ τὴν μέλλουσαν ὁδὸν εὗρον ὅτι ὁ μὲν Α διήνυσε 30 λεύγας ὑπὲρ τὸν Β, καὶ ὅτι κατὰ τὴν ταχύτητά των τὴν προτέραν ὁ Α εἰς 4 ἡμέρας θέλει φθάσει εἰς τὴν Δ πόλιν, ὁ δὲ Β εἰς 9 ἡμέρας δύναται νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Γ· πόσον ἀπέχει ἡ Γ πόλις τῆς Δ;

$$\frac{4\chi+120}{\chi-30}=\frac{9\chi-270}{\chi+30}.$$

107. Δύο τινὲς ἐπεχειρίσθησάν τι μὲ 2000 δρ, καὶ ὁ μὲν ἔλαβε μετὰ 17 μῆνας κεφάλαιον καὶ κέρδος 1710 δρ, ὁ δὲ μετὰ 12 μῆνας ἐπῆρε κεφάλαιον καὶ κέρδος 1040 δρ· πόσα κατέθεσεν ἑκάτερος;

$$\chi+\omega=2000,\quad 17\chi(1040-\omega)=12\omega(1710-\chi).$$

108. Τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ μὲν κεφάλαιον εἶναι 126, τὸ δὲ γινόμενον 13824, ἀποτελοῦσι συνεχῆ ἀναλογίαν· τίνες εἶναι αὐτοί;

$$\chi+\psi+\omega=126,\quad \chi\psi\omega=13824,\quad \omega=\frac{\psi^2}{\chi}.$$

109. Τίς εἶναι ὁ τριψήφιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὰ μὲν τετράγωνα τῶν ψηφίων ἀποτελοῦσι κεφάλαιον 104, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων εἶναι κατὰ 4 μεγαλήτερον τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 396 ἀπ' αὐτὸν εἶναι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς συναλλασσομένων τῶν μονάδων καὶ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ζητουμένου;

$$\chi^2+\psi^2+\omega^2=104,\quad \psi^2=\chi\omega+4,\quad \chi=\omega+4.$$

110. Ἀγοράσας τις ἵππον καὶ μεταπωλήσας αὐτὸν μετ' ὀλίγον 24 ὀθώνια ἔχασεν ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἀγορὰν τιμῆς τόσον τ. 0/0, ὅσον ἠγόρασε τὸν ἵππον· πόσον τὸν ἠγόρασεν;

$$\frac{\chi^2}{100}=\chi-24.$$

Τῶν ἀκολούθων προβλημάτων αἱ ἐξισώσεις εἶναι ὀλιγιώτεραι τῶν ἐν αὐτοῖς ἀγνώστων.

111. Παίζοντος παιδὸς μὲ καρύδια ὑπὲρ τὰ 100 ἀλλ' ὑπὸ τὰ 400, διαμοιράζοντος μὲν αὐτὰ ἀνὰ 13, ἔμεναν 6, διαχωρίζοντος δ' αὐτὰ ἀνὰ 17, ἔμεναν 14· πόσα καρύδια εἶχεν;

$$13\chi+9=17\omega+14.$$

212. Πόσους στρατιώτας ἔχει ἐρωτηθεὶς στρατηγός τις ἀπεκρίθη, Δύναμαι κατὰ βάθος νὰ τοὺς κατατάξω ὅλους ἐπὶ 5, 6 καὶ 7, ἀλλ' ὅτε τοὺς κατατάσσω ἐπὶ 11 ἢ ἐπὶ 13, μένουσιν 9 ἢ 8 μὴ δυνάμενοι νὰ ταχθῶσιν εἰς γραμμήν· πόσοι εἶναι οἱ στρατιῶται;

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τούτου εἶναι $11\chi+9=13\omega+8.$

113. Νὰ μερισθῇ ὁ 142 εἰς δύο μέρη διαιρετὰ τὸ μὲν διὰ 9, τὸ δὲ διὰ 14.

$$9\chi+14\omega=142.$$

114. Εἰς συμπόσιόν τι ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐδαπάνησεν 19 δεκάλεπτα, ἑκάστη γυνὴ 10 καὶ ἕκαστον παιδίον 8, ἡ δὲ δαπάνη ὅλων τῶν ἀνδρῶν ὑπερέβη τὴν τῶν γυναικῶν ὅλων

κατὰ 7 δεκάλεπτα, ἡ δὲ τῶν γυναικῶν τὴν τῶν παιδίων κατὰ 15· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία;

$$19\chi-10\psi=7,\quad 10\psi-8\omega=15\cdot$$

115. Ἠγόρασέ τις 124 ζῶα, ἤτοι χοίρους, αἰγίδια καὶ πρόβατα, ἀντὶ 4800 δρ, ἕκαστον μὲν χοῖρον πρὸς 54 δρ, ἕκαστον δ' αἰγίδιον πρὸς 38 καὶ ἕκαστον πρόβατον πρὸς 15· πόσα ἑκάστου εἴδους ἠγόρασεν;

$$\chi+\psi+\omega=124,\ 54\chi+38\psi+15\omega=4800.$$

116. Νὰ μερισθῇ ὁ 100 εἰς τρία τοιαῦτα μέρη, ὥστε τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων τοῦ μὲν πρώτου ἐπὶ 17, τοῦ δὲ δευτέρου ἐπὶ 11, τοῦ δὲ τρίτου ἐπὶ 3 νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν 800.

$$\chi+\psi+\omega=100.\ 17\chi+11\psi+3\omega=880.$$

117. Χρυσοχόος ἔχων τριῶν εἰδῶν ἄργυρον, τῶν ὁποίων τὸ μὲν περιέχει 7 οὐγκίας καθαροῦ εἰς ἓν ἡμίλιτρον, τὸ δὲ 5 $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ 4 $\frac{1}{2}$, θέλει νὰ συγχωνεύσῃ μέρη αὐτῶν, ὥστε ν' ἀποτελέσῃ μίγμα ἐκ 30 ἡμιλίτρων, τῶν ὁποίων ἕκαστον νὰ ἐμπεριέχῃ 6 οὐγκίας καθαροῦ ἀργύρου· πόσα πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους ἀκέραια ἡμίλιτρα;

$$\chi+\psi+\omega=30,\quad 7\chi+\frac{11\psi}{2}+\frac{9\omega}{2}=180.$$

118. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τοῦ πρώτου ἐπὶ 7 τὸ γινόμενον νὰ ἦναι κατὰ 1 μικρότερον τοῦ γινομένου τοῦ δευτέρου ἐπὶ 9 καὶ κατὰ 2 μεγαλήτερον τοῦ γινομένου τοῦ τρίτου ἐπὶ 11.

$$7\chi+1=9\psi,\quad 7\chi-2=11\omega.$$

Διαφόρων προβλημάτων ἐκθέσεις ἄνευ τῶν ἐξισώσεών των.

119. Διοφάντου τοῦ τῆς ἀρχαιοτέρας σωζομένης Ἀλγέβρας συγγραφέως ἡ παιδικὴ ἡλικία ἦτον τὸ ἕκτον τῆς ὅλης ζωῆς του, ἡ νεανικὴ τὸ δέκατον, τὸ ἕβδομον δὲ καὶ ἔτι 5 ἔτη

ἢ ἀπὸ τοῦ γάμου του μέχρι τῆς γεννήσεως τοῦ υἱοῦ του, ὅςις ζήσας τὸ ἥμισυ τῆς ζωῆς τοῦ πατρός του ἐτελεύτησε 4 ἔτη πρὸ αὐτοῦ· πόσον ἐτῶν ἀπέθανεν ὁ Διόφαντος; (84)

120. Θαλασσινοῦ ὕδατος 32 ὀκάδες ἐμπεριέχουσι 1 ὀκὰν ἅλατος· πόσον ὕδωρ γλυκὺ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ θαλασσινόν, ὥστε 32 ὀκ. τοῦ μίγματος νὰ ἐμπεριέχωσι μόνον 50 δράμια; (224).

121. Ἀναλαβών τις νὰ μετακομίσῃ διαφόρου μεγέθους ἐκ πορκελλάνης ἀγγεῖα μὲ συμφωνίαν νὰ πληρόνῃ τὸν κύριον τῶν ἀγγείων τόσον ἕκαστον ἀγγεῖον, τὸ ὁποῖον τυχὸν ἤθελε συντρίψει, ὅσον ἔμελλε νὰ λάβῃ, ἂν τὸ μετακόμιζε σῶον, πρῶτον μὲν λαβὼν 2 μικρά, 4 μεσαῖα καὶ 9 μεγάλα νὰ μετακομίσῃ, συνέτριψε τὰ μεσαῖα ὅλα καὶ ἔλαβεν ὡς ἀνήκουσαν πληρωμὴν κατὰ τὴν συμφωνίαν δρ. 28· ἔπειτα λαβὼν 7 μικρά, 3 μεσαῖα καὶ 5 μεγάλα, συνέτριψεν ὅλα τὰ μεγάλα καὶ ἐπληρώθη μόνον 3 δρ· τελευταῖον μετακομίζων 9 μικρά, 10 μεσαῖα καὶ 11 μεγάλα, πάλιν συνέτριψεν ὅλα τὰ μεγάλα καὶ ἐπληρώθη ἐπομένως 4 δρ· πόσον συνεφώνησε νὰ λάβῃ μετακομιστικὰ τὸ ἓν ἑκάστου μεγέθους; (2, 3 καὶ 4).

122. Ἔμπορος ἀντὶ δύο ὁμολόγων, τοῦ μὲν 6240 δρ πληρωτέου εἰς 8 μῆνας, τοῦ δὲ 7632 ἐξοφλητέου εἰς 9 μῆνας, δίδει εἰς ὃν χρεωστεῖ αὐτὰς ἓν ὁμόλογον 14256 δρ ἐξοφλητέον εἰς ἓν ἔτος· πόσον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον; (10, 33 δρ τ 0/0 κατ' ἔτος).

123. Δραχ 13000 χωρισμένας εἰς δύο μέρη τοκίζει τις οὕτως, ὥστε νὰ λαμβάνῃ ἴσον κέρδος ἐξ ἑκατέρου, ἐνῷ, ἐὰν μὲν ἐτόκιζε τὸ ἕτερον μέρος πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ ἄλλου, ἤθελε λάβει τόκον 360 δρ, ἂν δὲ τἀνάπαλιν ἐτόκιζε τὸ δεύτερον μέρος πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου, ἤθελε λάβει τόκον 490 δρ· πόσον εἶναι ἑκάτερον ἐπιτόκιον; (7 καὶ 6).

124. Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετράγωνόν του νὰ ἔχῃ τοιοῦτον λόγον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαφορῶν αὐτοῦ

τε καὶ δύο δεδομένων ἀριθμῶν α καὶ β, ὃν ἔχουσιν ἄλλοι δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ μ καὶ ν.

125. Τραπεζίτης ἔχει δύο εἰδῶν νομίσματα, τῶν ὁποίων α τοῦ πρώτου εἴδους ἰσοτιμῶνται μὲ 1 ὀθώνιον χρυσοῦν, β δὲ τοῦ δευτέρου· εἰς τὸν ζητοῦντα γ ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου πόσα ἐξ ἑκατέρου εἴδους πρέπει ὁ τραπεζίτης νὰ δώσῃ;

126. Πόσα ἔχει ἕκαστος τριῶν ἀνθρώπων Α,Β,Γ, ἐνῷ τὰ τοῦ Α χρήματα ὁμοῦ μὲ λ φορὰς τὰ τοῦ Β καὶ τοῦ Γ συμποσοῦνται εἰς π, τὰ δὲ τοῦ Β καὶ μ φορὰς τὰ τοῦ Α καὶ τοῦ Γ ἀποτελοῦσι κεφάλαιον ἴσον μὲ ρ, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν τοῦ Γ καὶ νιάκις τῶν τοῦ Α καὶ τοῦ Β εἶναι ἴσον μὲ σ;

127. Ὀφειλέτης 7000 δραχ. πληρωτέων τῶν μὲν 2000 εἰς $3\frac{1}{2}$ μῆνας, τῶν δὲ 3500 εἰς 4, τῶν δὲ 1500 εἰς 14, συμφωνεῖ μὲ τὸν δανειστὴν τοῦ νὰ πληρώσῃ τὸ εἰρημένον χρέος εἰς δύο δόσεις ἴσας, ἀλλὰ τὴν δευτέραν ἕνα μῆνα μετὰ τὴν πρώτην· εἰς τίνα χρόνον θέλει δοθῆ ἡ πρώτη δόσις;

128. Κτηματίας τις πληρόνει ἴσον ἡμερομίσθιον εἰς δύο ἐργάτας, καὶ ἔδωκεν εἰς τὸν μὲν 4 κοιλὰ σίτου καὶ 56 δρ. ἀντὶ 56 ἡμερομισθίων, εἰς δὲ τὸν ἄλλον $7\frac{1}{2}$ κοιλὰ σίτου καὶ 69 δρ. ἀντὶ 84 ἡμερομισθίων· πόσον ἐλογίσθη τὸ κοιλὸν ὁ σῖτος;

129. Ὁ δαπανῶν εἰς ἐκτάκτους δαπάνας τὸ ἕβδομον τοῦ εἰσοδήματός του καὶ ὅλον τὸ λοιπὸν εἰς τὰς τακτικάς του δαπάνας ἐὰν εἶχε κατὰ 400 δρ ἀνώτερον εἰσόδημα, ἠδύνατο νὰ δαπανᾷ τὸ πέμπτον αὐτοῦ εἰς τὰς ἐκτάκτους καὶ 160 δρ πλειότερον εἰς τὰς τακτικάς· πόσον εἶναι τὸ εἰσόδημά του;

130. Αὐξάνει τις κατ' ἔτος τὸ εἶναί του κατὰ 20 τ. 0/0 καὶ δαπανᾷ ἐκ τούτου εἰς τὰ τῆς οἰκογενείας του 4000 δρ, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους ἀφαιρέσας τὰς 4000 δρ εὗρεν ὅτι ἡ κατάστασίς του ηὔξησε κατὰ 800 δρ ὑπὲρ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἐν ἀρχῇ κεφαλαίου του· πόσον ἦτον τοῦτο τὸ κεφάλαιον;

131. Ἄσωτος τοκίσας πᾶσαν αὐτοῦ τὴν περιουσίαν πρὸς 4 τ. 0/0, μετὰ 2 ἔτη λαμβάνει τὸ τέταρτον ἀφίνων τὰ λοιπὰ 7 μῆνας, μετὰ τοὺς ὁποίους ἐπαίρει καὶ αὐτῶν τὸ τέταρτον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 13 μῆνας μετέπειτα τὸ λαμβάνει ὅλον· ἐν τού-

τῷ δὲ τῷ χρόνῳ τῶν 44 μηνῶν μόνον οἱ τόκοι, τοὺς ὁποίους ἔλαβεν, ἀναβαίνουσιν εἰς 24375 δρ· πόση ἦτον ἡ περιουσία του;

132. Τὰ μέτρα, πρὸς τὰ ὁποῖα τρία ἔθνη Α, Β, Γ μετροῦσι τὰ ὑφάσματα, εἶναι τοιαῦτα, ὥστε 15 τοῦ Α καὶ 33 τοῦ Β εἶναι ἰσομήκη μὲ 39 $\frac{1}{2}$ τοῦ Γ, 24 δὲ τοῦ Α καὶ 55 τοῦ Β ἰσοδυναμοῦσι μὲ 65 τοῦ Γ· ποῖον λόγον ἔχει τὸ μέτρον τοῦ Α καὶ τὸ τοῦ Β πρὸς τὸ τοῦ Γ, ποῖον τὰ τοῦ Α καὶ τοῦ Β, καὶ πόσον τ. 0/0 διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων τὰ δύο τελευταῖα;

133. Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο βρύσεων, ῥεούσης μόνης ἐν αὐτῇ πρῶτον τῆς ἑτέρας τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἡ ἄλλη ἤθελε τὴν γεμίσει, καὶ ἔπειτα ῥεούσης μόνης τῆς ἄλλης μέχρι τῆς ἀποπληρώσεως τῆς δεξαμενῆς· ἐνῷ, ἂν ἀμφότεραι ἐχύνοντο ἐν αὐτῇ, ἤθελε πληρωθῇ 6 ὥρας προτήτερα, ἡ δὲ πρώτη βρύσις ἤθελεν ἔχει χυμένα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕδατος τοῦ ὑπὸ τῆς δευτέρας χυθέντος μόνης πρὸς ἀποπλήρωσιν τῆς δεξαμενῆς· εἰς πόσας ὥρας ἑκατέρα μόνη ἤθελε γεμίσει τὴν δεξαμενήν;

57. Εἶναι ἀναγκαῖον τώρα νὰ γείνωσι γενικὰ ὅλα τὰ προηγούμενα μερικὰ προβλήματα, καὶ νὰ κατασκευασθῶσι καὶ αὐτῶν αἱ ἐξισώσεις, αἵτινες καλοῦνται καὶ αὐταὶ *γενικαί*. Καὶ ἓν μὲν ἕκαστον νὰ γείνῃ γενικὸν δὲν εἶναι δύσκολον, δύναται δὲ καὶ μόνος ὁ μαθητὴς ν' ἀσχολῆται ἐπιτυχῶς εἰς τοῦτο, ἕως ν' ἀποκτήσῃ τὴν ἀναγκαίαν ἕξιν εἰς τὸ νὰ ἐννοῇ εὐκόλως καὶ τὰ γενικὰ ὡς τὰ μερικὰ καὶ νὰ κατασκευάζῃ αὐτῶν τὰς ἐξισώσεις. Π. χ. τὸ 11 γίνεται γενικόν, ἂν ἀντὶ μὲν 100 ἐννοηθῇ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς a, καὶ ἐπομένως ἀντὶ 200, 300, κτλ θέλει εἶσθαι ὁ $2a$, $3a$, κτλ, ἀντὶ δὲ τοῦ δεκάτου ἐννοηθῇ ὁποιονδήποτε πολλοστὸν $\frac{1}{\nu}$· οὕτως ἔχομεν τὸ γενικὸν τοῦτο,

Οἱ παῖδές τινος ἐμοιράσθησαν τὴν ὁποίαν ὁ πατήρ των ἄφησε κληρονομίαν οὕτως, ὁ μὲν πρωτότοκος ἔλαβεν a δρ καὶ τὸ νιτὸν τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δὲ δεύτερος ἔπειτα $2a$ καὶ τὸ *νιτὸν τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δὲ τρίτος μετ' αὐτοὺς 3α καὶ τὸ νιτὸν τοῦ ὑπολοίπου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς οἱ λοιποί, ἔλαβον δὲ ὅλοι ἴσα· πόση ἦτον ἡ κληρονομία καὶ πόσοι οἱ παῖδες;*

Ἡ δὲ ἐξίσωσις θέλει εἶσθαι

$$\alpha+\frac{\chi-\alpha}{\nu}=2\alpha+\frac{\chi-\alpha-\frac{\chi-\alpha}{\nu}-2\alpha}{\nu}.$$

Τὸ 16 γίνεται γενικὸν οὕτω

Τίνες εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ μὲν κεφάλαιον εἶναι α ἡ δὲ διαφορὰ β;

Ἡ δὲ ἐξίσωσις

$$\chi+\chi+\beta=\alpha.$$

Τὸ δὲ 32 οὕτω

Γ τις α ἐτῶν ἔχει υἱὸν β ἐτῶν· εἰς πόσα ἔτη ἡ τοῦ πατρὸς ἡλικία θέλει εἶσθαι νπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

Ἡ δὲ ἐξίσωσις $\alpha+\chi=\nu(\beta+\chi)$. κτλ.

58. Ἀλλ' εἶναί τινα προβλήματα, ἐν οἷς ὑπάρχουσιν ἀντίθετα ποσά, καὶ ταῦτα δύνανται νὰ γείνωσι γενικὰ οὕτως, ὥστε νὰ ἐμπεριλαμβάνωσιν ἀορίστως καὶ τὰ δύο ἀντίθετα ποσὰ καὶ οὐδέτερον τούτων. Π. χ. τὸ ἀνωτέρω 32, ἐν ᾧ ζητεῖται ὁ χρόνος, καθ' ὃν θέλουσιν ἔχει αἱ ἡλικίαι λόγον τινὰ διάφορον τοῦ ὃν ἔχουσι τώρα, τὸν λόγον αὐτὸν δυνατὸν νὰ τὸν ἔχωσιν ἐν τῷ μέλλοντι χρόνῳ ἢ νὰ τὸν εἶχον ἐν τῷ παρελθόντι. Ταῦτα τὰ δύο ἐμπεριλαμβάνονται ἐν ταύτῃ τῇ ἐκθέσει, ἥτις διαφέρει τῆς ἀνωτέρω καὶ κατά τιν' ἄλλα,

Α τις εἶναι α ἐτῶν, Β δέ τις εἶναι β ἐτῶν· πότε ἡ τοῦ Α ἡλικία εἶναι πρὸς τὴν τοῦ Β ὡς μ. πρὸς ν;

Ἵνα δὲ κατασκευασθῇ τούτου ἡ ἐξίσωσις, ἀνάγκη νὰ ὑποτεθῇ ἢ ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι ἢ ὅτι ἐν τῷ παρελθόντι ἔχουσιν αἱ ἡλικίαι τὸν ζητούμενον λόγον. Ἐὰν ἐν τῷ μέλλοντι, τότε ὁ Α θέλει εἶσθαι $\alpha+\chi$ ἐτῶν, ὁ δὲ Β $\beta+\chi$ ἐτῶν, ἔχομεν δὲ

$$\alpha+\chi:\beta+\chi::\mu:\nu,\quad \text{ὅθεν}\quad (\alpha+\chi)\nu=(\beta+\chi)\mu.$$

Ὡσαύτως γίνεται γενικὸν καὶ τὸ 38.

Τοιοῦτον γίνεται καὶ τὸ 70, ἐὰν ἐννοηθῇ ὅτι μετά τινας ἡμέρας ἢ λαμβάνει ὁ στοιχειοθέτης ἢ δίδει ἢ οὔτε λαμβάνει οὔτε δίδει. Ἐκθέτεται δὲ γενικῶς οὕτω,

Τυπογράφος παραλαμβάνει στοιχειοθέτην ἐπὶ συμφωνίᾳ νὰ τῷ δίδῃ α λεπτὰ καθ' ἡμέραν καθ' ἣν ἐργασθῇ, νὰ τῷ κρατῇ δὲ β λεπτὰ καθ' ἡμέραν ἀπουσίας· μετὰ ν ἡμέρας, τῶν ὁποίων τινὰς μὲν εἰργάσθη, τινὰς δὲ ἦτον ἀπών, συνέβη νὰ λάβῃ ἢ νὰ δώσῃ ὁ στοιχειοθέτης γ λεπτὰ εἰς τὸν τυπογράφον ἢ μήτε τὸ ἓν μήτε τὸ ἄλλο· πόσας ἡμέρας ἦτον ἀπών;

Καὶ τούτου ἡ ἐξίσωσις ἵνα κατασκευασθῇ, ἀνάγκη νὰ ὑποτεθῇ ἓν τῶν τριῶν, π. χ. ὅτι ἔλαβε γ λεπτὰ μετὰ ν ἡμέρας. Ἔχομεν λοιπὸν χ ἡμέρας ἀπουσίας, $\nu-\chi$ ἡμέρας ἐργασίας· ἔμελλεν ὁ στοιχειοθέτης νὰ λάβῃ $(\nu-\chi)\alpha$ λεπτά, ἔμελλε νὰ δώσῃ $\beta\chi$, ἔλαβε λοιπὸν $(\nu-\chi)\alpha-\beta\chi$, τοῦτο δὲ εἶναι ἴσον γ· λοιπὸν

$$(\nu-\chi)\alpha-\beta\chi=\gamma.$$

Ὡσαύτως καὶ ἐπὶ κινήσεως τὸ κινούμενον κινεῖται πρὸς ἓν μέρος ἢ ἀντιθέτως, τὰ δὲ δύο ταῦτα δυνατὸν νὰ μὴ προσδιορίζωνται ἐν τῇ ἐκθέσει, ἀλλὰ νὰ ἐννοῶνται καὶ τὰ δύο ἀορίστως οὕτω πως,

Δύο σώματα, τὸ μὲν ἐκ τοῦ σημείου Α μὲ α ταχύτητα, τὸ δὲ ἐκ τοῦ Β, ἀπέχοντος τοῦ Α γ στάδια, μὲ β ταχύτητα, ἀρχίζουσι νὰ κινῶνται κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· ποῦ τῆς εὐθείας θέλουσιν εἶσθαι ὁμοῦ τὰ δύο σώματα;

Ἵνα καὶ τούτου ἡ ἐξίσωσις κατασκευασθῇ, ἀνάγκη νὰ προσδιορισθῇ ἡ διεύθυνσίς των, ὅτι δηλ. διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἀντιθέτως τὰ δύο. Ὡς εὔκολος δὲ νὰ κατασκευασθῇ παραλείπεται.

Κατωτέρω θέλομεν ἐπανέλθει εἰς τὴν ἀκριβεστέραν τούτων τῶν προβλημάτων ἐξέτασιν, εἰπόντες ἐνταῦθα πῶς κατασκευάζονται αὐτῶν αἱ ἐξισώσεις.

59. Τελευταῖον πολλὰ τῶν προηγουμένων προβλημάτων

δυνατὸν νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς ἓν γενικώτερον, ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν αἱ μερικαὶ περιστάσεις αὐτῶν, καθ᾽ ἃς διαφέρουσιν, καὶ τηρηθῶσι τὰ κοινά. Οὕτω τὰ 1, 5, 6, 10 συμπεριλαμβάνονται εἰς τοῦτο,

Τίς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ μιτόν του καὶ τὸ νιτόν του καὶ τὸ πιτόν του σὺν α ἢ πλὴν α ἢ ἄνευ τούτου;

Καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$\frac{\chi}{\mu}+\frac{\chi}{\nu}+\frac{\chi}{\pi}+\alpha=\chi.$$

Τὰ δὲ 2, 3, 4, 7, 9 εἰς τοῦτο,

Τίς εἶναι ὁ ἀριθμὸς, οὗ τινος τὸ μιτὸν καὶ τὸ νιτὸν καὶ τὰ α πιτὰ πλὴν τοῦ ῥωτοῦ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν β;

Ἡ δὲ ἐξίσωσίς του

$$\frac{\chi}{\mu}+\frac{\chi}{\nu}+\frac{\alpha\chi}{\pi}-\frac{\chi}{\rho}=\beta.$$

Ὡσαύτως τὸ 12, 13, 14, 15 συμπεριλαμβάνονται εἰς τοῦτο,

Νὰ μερισθῇ ὁ α εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τοῦ μ καὶ τοῦ ν.

Ὄντος δὲ τοῦ ἑτέρου χ, τὸ ἄλλο εἶναι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας $\mu : \nu :: \chi : \frac{\nu\chi}{\mu}$, καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$\chi+\frac{\nu\chi}{\mu}=\alpha.$$

Τὸ δὲ 21, 22, 23, κτλ εἰς τοῦτο,

Νὰ μερισθῇ ὁ α εἰς τρία ἢ καὶ τέσσαρα κτλ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ, ν, π, κτλ.

Ἔχομεν δὲ τὰ μέρη ἐκ τῶν ἀναλογιῶν, ὑποτεθέντος τοῦ ἑνὸς χ,

$$\mu : \nu :: \chi : \frac{\nu\chi}{\mu}, \quad \mu : \pi :: \chi : \frac{\pi\chi}{\mu}, \quad \text{κτλ.}$$

ὅθεν $$\chi+\frac{\nu\chi}{\mu}+\frac{\pi\chi}{\mu}+\text{ κτλ}=\alpha.$$

Τὴν ἄσκησιν εἰς τὸ νὰ καθισταίνῃ τις γενικὰ τὰ μερικὰ προβλήματα κατὰ τὰς τρεῖς διαφόρους προειρημένας περιπτώσεις θεωροῦμεν κατὰ πολλὰ ὠφελιμωτάτην, καὶ διὰ τοῦτο προτρέπομεν τοὺς ἀρχαρίους εἰς αὐτήν.

60. *Γενικὴ παρατήρησις*. Η κατασκευὴ τῶν ἐξισώσεων δύναται νὰ θεωρῆται ὡς μετάφρασις τῆς ἐκθέσεως τοῦ προβλήματος διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων· διότι καὶ διὰ τούτων, τὰ ὁποῖα ἐνυπάρχουσιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν, ἐννοεῖ τις σχεδὸν τὸ αὐτὸ, τὸ ὁποῖον καὶ διὰ τῆς ἐκθέσεως τοῦ προβλήματος. Λέγω σχεδὸν, διότι ἡ ἐξίσωσις δὲν ἐμπεριέχει ὅλας τὰς μερικὰς περιστάσεις τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ μόνον τὰς σχέσεις τῶν ἐν αὐτῷ ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο εἶναι παράστασις αὐτοῦ συντομωτέρα καὶ συνήθως γενικωτέρα, ἀνήκουσα εἰς πολλὰ προβλήματα διάφορα μόνον κατά τινας μερικὰς περιστάσεις. Εἶναι δ' ὠφέλιμον ὄχι μόνον νὰ γυμνάζηταί τις νὰ κατασκευάζῃ τὴν ἐξίσωσιν ἐκ τῆς ἐκθέσεως, ἀλλὰ καὶ τἀνάπαλιν πολλάκις, ἐκ τῆς ἐξισώσεως νὰ εὑρίσκῃ τὴν ἔκθεσιν τοῦ προβλήματος· τὸ ὁποῖον ὅμως ἔχει μεγάλην ἀοριστίαν, ὡς εὐκόλως τις τὸ ἐννοεῖ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΛΥΣΕΩΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Γενικαὶ ἀρχαὶ καὶ πράξεις περὶ λύσεως ἐξισώσεων.

61. Εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι τὰ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι σημεῖα x, y, ω, κτλ παριστάνουσι καθ' ὑπόθεσιν τοιούτους ἀριθμοὺς, οἵτινες γενόμενοι γνωστοὶ καὶ τεθέντες ἀντ' αὐτῶν ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν *ἐπαληθεύουσιν* αὐτὰς, ἤτοι κατασταίνουσι τὰ δύο μέλη των ἴσα· ἂν δ' ἐκτελεσθῶσι καὶ ὅλαι αἱ σημειωμέναι πράξεις, *ταυτοποιοῦσιν* αὐτάς.

Τούτου γνωστοῦ ὄντος, εὐκόλως καταλαμβάνει τις ὅτι, *ὅταν γράφηται εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὁ αὐτὸς θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς, ἢ ὅταν πολλαπλασιάζωνται ἢ διαιρῶνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως, τὸ διά τινος τῶν τεσσάρων τούτων προκύπτον εἶναι καὶ αὐτὸ ἐξίσωσις, ἐν ᾗ τὸ χ ἢ ψ κτλ. θέλει παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὃν καὶ ἐν τῇ δεδομένῃ.*

Π. χ. ἡ $\alpha\chi+\beta=\gamma\chi-\delta$ τρέπεται εἰς $(\alpha\chi+\beta)+\mu=(\gamma\chi-\delta)+\mu$ ἢ $(\alpha\chi+\beta)-\nu=(\gamma\chi-\delta)-\nu$, γραφομένου εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ $+\mu$ ἢ τοῦ $-\nu$, ἢ εἰς $(\alpha\chi+\beta)\xi=(\gamma\chi-\delta)\xi$ ἢ $\dfrac{\alpha\chi+\beta}{\pi}=\dfrac{\gamma\chi-\delta}{\pi}$, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο μελῶν ἐπὶ ξ ἢ διαιρουμένων διὰ τοῦ π. Τούτων δὲ τὰ δύο μέλη θέλουσι γείνει ἴσα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ χ, δι' οὗ καὶ τῆς δεδομένης τὰ μέλη θέλουσι γείνει ἴσα. Διότι, ὡς εἶναι ἤδη γραμμένα, βλέπει τις ὅτι τούτων τὰ μέλη εἶναι τὰ αὐτὰ τῆς δεδομένης αὐξημένα ἢ ἐλαττωμένα κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἢ εἶναι τὰ αὐτὰ πολλαπλάσια ἢ τὰ αὐτὰ πολλοστὰ τῶν μελῶν τῆς δεδοδομένης· ἑπομένως ὁ ἀντὶ τοῦ χ ἀριθμὸς, ὅστις θέλει καταστήσει ἴσα τὰ μέλη τῆς δεδομένης, θέλει καταστήσει ἐξ ἀνάγκης ἴσα καὶ τούτων τὰ μέλη. Ὥστε τὸ χ παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἐν ταύταις, ὅν τινα καὶ ἐν τῇ δεδομένῃ.

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ὅταν ὁ ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζομεν ἢ δι' οὗ διαιροῦμεν ἀριθμὸς ἐμπεριέχῃ αὐτὸν τὸν ἄγνωστον τῆς ἐξισώσεως, τότε *δυνατὸν* ἡ δευτέρα ἐξίσωσις νὰ ἐπαληθεύηται καὶ δι' ἄλλου ἀριθμοῦ, δι' οὗ ἡ πρώτη δὲν ἐπαληθεύεται. Π. χ. ἡ $2\chi=4$ ταυτοποιεῖται μόνον διὰ $\chi=2$· ἀφοῦ δὲ πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο μέλη της ἐπὶ $\chi-1$, ὅστις ἔχει τὸν χ, προκύπτει ἡ $2\chi(\chi-1)=4(\chi-1)$, ἥτις ἐπαληθεύεται μὲν διὰ $\chi=2$ ὡς ἡ πρώτη, ἀλλ' ἐπαληθεύεται ἔτι καὶ διὰ $\chi=1$, δι' οὗ δὲν ταυτοποιεῖται ἡ πρώτη. Κατὰ ταύτας λοιπὸν τὰς περιπτώσεις ἀπαιτεῖται προσοχὴ, μήπως ἔχῃ χώραν τοιαύτη ἐξαίρεσις.

62. Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἀρχῶν πληροφορεῖταί τις ὅτι *δύναται νὰ μεταθέτῃ ἐκ τοῦ ἑτέρου εἰς τὸ ἄλλο μέλος ἐξισώσεως ὅρον αὐτῆς τινα ἀλλάσσων μόνον τὸ + ἢ τὸ — τὸ πρὸ αὐτοῦ εἰς τὸ ἀντίθετόν του*. Διότι, ἐὰν εἰς τῆς ἐξισώσεως $3a^2\chi - 5\beta = 2\chi + 3\gamma$ π. χ. τὰ δύο μέλη γράψωμεν τοὺς ὅρους $+5\beta$ καὶ -2χ, τουτέστι τοὺς ἀντιθέτους τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει -5β καὶ $+2\chi$, ἔχομεν

$$3a^2\chi - 5\beta + 5\beta - 2\chi = 2\chi + 3\gamma + 5\beta - 2\chi$$

ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο τοῦ πρώτου μέλους ὅροι $-5\beta + 5\beta$ καὶ οἱ δύο $+2\chi - 2\chi$ τοῦ δευτέρου συναναιροῦνται, ἔχομεν ἁπλούστερα

$$3a^2\chi - 2\chi = 3\gamma + 5\beta,$$

ὅπου βλέπει τις ὅτι ὁ -5β ἐκ τοῦ πρώτου *μετετέθη* εἰς τὸ δεύτερον θετικός, ὁ δὲ $+2\chi$ ἐκ τοῦ δευτέρου εἰς τὸ πρῶτον ἀντιθετικός. Οὕτω καὶ περὶ παντὸς ἄλλου.

Εἶναι δ' ἔτι δῆλον ὅτι *δυνάμεθα νὰ ἐξαλείφωμεν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ὅρον κοινὸν μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον + ἢ —*.

63. Κατὰ δὲ τὴν τετάρτην ἀρχὴν ἐξίσωσις, *ἧς ἂν οἱ ὅροι ὅλοι ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα, καθίσταται ἁπλουστέρα διαιρουμένων ὅλων τῶν ὅρων της ἤτοι τῶν δύο μελῶν της διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος*· οἷον ἡ

$$3\chi + 6 = 9\chi - 12$$

τρέπεται εἰς τὴν ἁπλουστέραν ταύτην

$$\chi + 2 = 3\chi - 4$$

διαιρέσει ὅλων τῶν ὅρων της διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος αὐτῶν 3.

64. Κατὰ δὲ τὴν τρίτην ἀρχὴν πρῶτον μὲν *δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων ἐξισώσεως εἰς τ' ἀντιθετά των*, διότι τοῦτο σημαίνει ὅτι πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς ὅρους της ἐπὶ -1.

Ἔπειτα *δυνάμεθα νὰ μετατρέπωμεν ἐξίσωσιν ἔχουσαν κλασματικοὺς ὅρους εἰς ἄλλην, ἧς οἱ ὅροι ὅλοι νὰ ἦναι ἀκέραιοι*, τὸ ὁποῖον ὠνόμασαν *ἀκεραίωσιν* τῆς ἐξισώσεως.

Διότι, ἀφοῦ τρέψωμεν ὅλους τοὺς ἑτερωνύμους κλασματικοὺς εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἤτοι ὅλους τοὺς ὅρους της ἐπὶ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν, οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασματικῶν ὅρων ἐκλείπουσι, καὶ οὕτω προκύπτει ἐξίσωσις ἔχουσα ὅλους τοὺς ὅρους ἀκεραίους. Π. χ. τῆς ἐξισώσεως τοῦ 6 προβλήματος

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{12}+600=\chi$$

ἀφοῦ οἱ κλασματικοὶ ὅροι $\frac{\chi}{2}$ καὶ $\frac{\chi}{3}$ τραπῶσιν εἰς τοὺς ἰσοδυνάμους τῶν $\frac{6\chi}{12}$ καὶ $\frac{4\chi}{12}$, πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἐπὶ 12 ἔχομεν

$$6\chi+4\chi+\chi+7200=12\chi,$$

ἧς οἱ ὅροι εἶναι ὅλοι ἀκέραιοι.

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι *πρὸς ἀκεραίωσιν ἐξισώσεως πρῶτον πρέπει νὰ εὑρίσκηται μάλιστα ὁ ἐλάχιστος δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ διαιρέσιμος ἀριθμὸς (Συμ. ἀρ. 54), ἔπειτα οἱ μὲν ἀκέραιοι ὅροι τῆς ἐξισώσεως ὅλοι νὰ πολλαπλασιάζωνται ἐπὶ τοῦτον, ὁ ἀριθμητὴς δ' ἑκάστου κλασματικοῦ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τούτου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, καὶ νὰ παραλείπωνται οἱ παρονομασταί.*

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον πρὸς γύμνασιν ν' ἀκεραιωθῶσιν αἱ τῶν προβλημάτων τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι παρονομαστάς.

Τῆς δὲ γενικῆς ἐξισώσεως

$$5\alpha+\frac{\alpha^2\chi}{18\beta^2}=\frac{3\alpha^2}{4\beta}+\frac{\beta\chi}{9\alpha}$$

ὁ μὲν $18\beta^2=2\cdot3^2\beta^2$, ὁ δὲ $4\beta=2^2\beta$, ὁ δὲ $9\alpha=3^2\alpha$· ἐπομένως ὁ ἐλάχιστος διαιρέσιμος δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ εἶναι ὁ $2^2\cdot3^2\alpha\beta^2=36\alpha\beta^2$. Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν τὸν μὲν ἀκέραιον ὅρον 5α ἐπὶ $36\alpha\beta^2$, τὸν δὲ ἀριθμητὴν $\alpha^2\chi$ ἐπὶ τὸ πηλίκον 2α τοῦ $36\alpha\beta^2$ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ $18\beta^2$, τὸν δὲ ἀριθμητὴν $3\alpha^2$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $9\alpha\beta$ τοῦ $36\alpha\beta^2$ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4β, καὶ τέλος τὸν $\beta\chi$ διὰ τοῦ πηλίκου $4\beta^2$ κτλ. ἔχομεν τὴν

$$180a^2\beta^2+2a^3\chi=27a^3\beta-4\beta^3\chi.$$

Τῆς δ' ἐξισώσεως

$$2\beta-\frac{a\chi}{6\beta}=\frac{a^2\chi}{a\beta+\beta^2}-\frac{3a^2\beta}{2a^2-2\beta^2}$$

ὁ μὲν $6\beta=2.3\beta$, ὁ δὲ $a\beta+\beta^2=(a+\beta)\beta$, ὁ δὲ $2a^2-2\beta^2=2(a^2-\beta^2)=2(a+\beta)(a-\beta)$· ἑπομένως οἱ διάφοροι παράγοντες μὲ τοὺς ἀνωτάτους δείκτας των εἶναι οἱ 2, 3, β, $a+\beta$, $a-\beta$, καὶ ὁ ἐλάχιστος διαιρέσιμος δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ εἶναι $6\beta(a+\beta)(a-\beta)=6\beta(a^2-\beta^2)=6a^2\beta-6\beta^3$. Τὰ δὲ πηλίκα αὐτοῦ διὰ τῶν 6β, $a\beta+\beta^2$, $2a^2-2\beta^2$ εἶναι $a^2-\beta^2$, $6a-6\beta$, 3β. Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν τὸν μὲν ἀκέραιον 2β ἐπὶ $6a^2\beta-6\beta^3$, τοὺς δὲ ἀριθμητὰς $a\chi$, $a^2\chi$, $3a^2\beta$ ἐπὶ τὰ προσήκοντα πηλίκα $a^2-\beta^2$, $6a-6\beta$, 3β, ἔχομεν

$$12a^2\beta^2-12\beta^4-a^3\chi+a\beta^2\chi=6a^3\chi-6a^2\beta\chi-9a^2\beta^2.$$

65. Ἐξίσωσις, ἥτις πορίζεται ἐξ ἄλλης διά τινος τῶν προηγουμένων πράξεων, ἤτοι διὰ μεταθέσεως ὅρων, διὰ διαιρέσεως, δι' ἀλλαγῆς τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων, δι' ἐξαλείψεως τῶν παρονομαστῶν, ἢ καὶ δι' ἄλλης τινὸς πηγαζούσης ἐκ τῶν προειρημένων ἀρχῶν, ὀνομάζεται *συνέπεια τῆς ἄλλης*, ἐξ ἧς πορίζεται· καὶ δῆλον ἤδη ὅτι ἡ συνέπεια ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ καὶ ἡ ἐξ ἧς πορίζεται ἐξίσωσις, καὶ *τἀνάπαλιν*, διότι δύναται νὰ θεωρῆται καὶ ἡ δεδομένη ὡς συνέπεια τῆς συνεπείας αὐτῆς.

66. Ἐξίσωσις λέγεται *τοῦ πρώτου βαθμοῦ τοῦ δευτέρου* κτλ, ὅταν ἦναι 1, 2, κτλ ὁ ἀνώτατος τοῦ ἐν αὐτῇ ἀγνώστου δείκτης, ἢ, ἂν ἔχῃ πολλοὺς ἀγνώστους πολλαπλασιασμένους ἐπ' ἀλλήλους ἐν τῷ αὐτῷ ὅρῳ, τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα τῶν δεικτῶν των. Προσδιορίζεται δὲ ὁ βαθμὸς αὐτῆς συνήθως ἀφοῦ διά τινων πράξεων, ἂν ἦναι χρεία, μεταποιηθῇ ἡ ἐξίσωσις, ὥστε νὰ

καταντήσῃ εἰς ἄλλην, ἥτις νὰ ἔχῃ ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἀκεραίους καὶ τοὺς δείκτας τῶν ἀγνώστων θετικούς, οἷαι εἶναι αἱ ἑξῆς

$$2\chi-\alpha=\beta-\chi,\ 2\chi^2+\alpha=4\chi+2,\ \chi\omega^4-2\chi^3=\omega^3-1.$$

Ἡ πρώτη τούτων εἶναι *πρωτοβάθμιος*, διότι ὁ χ ἀνώτατον δείκτην ἔχει τὴν I· ἡ δευτέρα εἶναι *δευτεροβάθμιος*, διότι ὁ ἀνώτατος δείκτης τοῦ χ εἶναι ὁ 2· ἡ τρίτη εἶναι τοῦ *πέμπτου βαθμοῦ*, διότι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς εἶναι γινόμενον τοῦ χ καὶ τοῦ ω, καὶ τὸ ἄθροισμα 5 τῶν δεικτῶν των εἶναι τὸ μεγαλήτερον. (ἰδὲ καὶ τὰς τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου).

Καὶ τὰ προβλήματα δέ, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶναι τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ κτλ, λέγονται *πρωτοβάθμια*, *δευτεροβάθμια* κτλ. Τὰ τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου μέχρι καὶ τοῦ 100 εἶναι *πρωτοβάθμια*, τὰ δὲ ἀπὸ τοῦ 101 μέχρι καὶ τοῦ 110 εἶναι *τοῦ δευτέρου βαθμοῦ*, ἂν καί τινων αἱ ἐξισώσεις ἀναφαίνονται κατ' ἀρχὰς ἀνωτέρου βαθμοῦ, οἷον ἡ δευτέρα τοῦ 108.

Ἐφεξῆς λέγομεν πῶς λύονται αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις ὅλων τῶν διαφόρων εἰδῶν.

Περὶ λύσεως πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως ἐχούσης ἕνα ἄγνωστον.

67. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ τοῦ 49 προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{3\chi}{50}=\frac{(\chi-126)5}{70}$$

Ἐδῶ πρόκειται νὰ μεταποιήσωμεν ταύτην, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ ὑπὸ τοῦ χ παριστανόμενος ἀριθμός, εἰς ἄλλην, τῆς ὁποίας τὸ ἕτερον μέλος νὰ ἦναι μεμονωμένον τὸ χ, τὸ δὲ ἄλλο μερικός τις ἀριθμός.

Πρῶτον λοιπὸν *ἀκεραιοῦμεν αὐτὴν* (64) πολλαπλασιάζοντες τὸν 3χ ἐπὶ 7, τὸν δὲ $(\chi-126)5$ ἐπὶ 5, καὶ ἔχομεν

$$21\chi=(\chi-126)25.$$

Ἔπειτα *πολλαπλασιάζομεν τὸν* $\chi-126$ *ἐπὶ* 25, καὶ ἔχομεν

$$21\chi=25\chi-3150\cdot$$

τώρα *μεταθέτομεν τὸν* 25χ *εἰς τὸ πρῶτον μέλος* (62), ὥστε νὰ ἦναι οἱ ἔχοντες τὸ χ ὅροι εἰς τὸ ἕτερον μέλος, οἱ δὲ μὴ ἔχοντες αὐτὸ εἰς τὸ ἄλλο, καὶ γίνεται

$$21\chi-25\chi=-3150\cdot$$

συστέλλομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους 21χ *καὶ* 25χ, καὶ γίνεται

$$-4\chi=-3150\cdot$$

ἀλλάσσομεν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ σημεῖα, καὶ ἔχομεν

$$4\chi=3150\cdot$$

τελευταῖον *διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ συνεργοῦ* 4 *τοῦ* χ, καὶ ἔχομεν

$$\chi=\frac{3150}{4}=787\tfrac{1}{2}.$$

Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $787\frac{1}{2}$, ἤτοι ὅτι ὁ δεύτερος ταχυδρόμος φθάνει τὸν πρῶτον στάδια $787\frac{1}{2}$ μακρὰν τῶν Ἀθηνῶν. Διότι σημειωθεὶς διὰ χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς κατ' ἀρχὰς δὲν μετεβλήθη παντάπασιν οὔτε κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως οὔτε κατὰ τὴν λύσιν αὐτῆς· καὶ ἐπειδὴ δὲν ἔγεινε κἀνὲν λάθος εἰς τὰς κατὰ τὴν λύσιν πράξεις, ἡ $\chi=787\frac{1}{2}$ εἶναι συνέπεια τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος, καὶ ταυτοποιεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ καὶ ἡ τοῦ προβλήματος. Ἀλλ' ἡ $\chi=787\frac{1}{2}$ ταυτοποιεῖται ἂν ἀντὶ χ τεθῇ ὁ $787\frac{1}{2}$ καὶ *μόνον* δι' αὐτοῦ· λοιπὸν καὶ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις πρέπει νὰ ταυτοποιῆται μόνον διὰ τοῦ $787\frac{1}{2}$. Ἀλλ' ὁ ἐπαληθεύων τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ ζητούμενος, ἂν δὲν ἔγεινε λάθος τι κατασκευαζομένης αὐτῆς· λοιπὸν ὁ $787\frac{1}{2}$ εἶναι ὁ ζητούμενος, διότι κατεσκευάσθη ὀρθῶς ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος. Οἱ αὐτοὶ δὲ συλλογισμοὶ πρέπει νὰ γίνωνται εἰς ὅλας τὰς ὁμοίας περιστάσεις.

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν δὲ ὅτι αἱ πρὸς λύσιν πράξεις ἐξετελέσθησαν ὀρθῶς δύναταί τις νὰ θέσῃ ἀντὶ τοῦ χ τὸν $787\frac{1}{2}$ ἐν τῇ τοῦ προβλήματος ἐξισώσει, καὶ νὰ ἐκτελέσῃ ὅλας τὰς ἐκεῖ σημειωμένας πράξεις· πρέπει δὲ νὰ καταντήσῃ εἰς ταυτότητα, ἂν δὲν ἔγεινε λάθος κατὰ τὴν λύσιν, ἢ ἂν δὲν γείνῃ κατὰ τὴν ἐπιβεβαίωσιν, ὡς τῷ ὄντι ἐδῶ συμβαίνει.

$$\frac{3\times\frac{1575}{2}}{50}=\frac{(\frac{1575}{2}-126)5}{70}$$

$$\frac{4725}{100}=\frac{(1575-252)5}{140},$$

$$\frac{4725}{100}=\frac{1323\times5}{140},$$

$$47,25=47,25.$$

Σημ. Τὰ πρὸς ἐπιβεβαίωσιν ἤδη εἰρημένα εἶναι ἀναγκαῖα μάλιστα νὰ γίνωνται μόνον ὅταν ὁ ἄγνωστος ἦναι ἐν τοῖς παρονομασταῖς τῆς ἐξισώσεως. Διότι τότε πρὸς ἀκεραίωσιν αὐτῆς ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάζωνται τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχοντα τὸν ἄγνωστον, τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ μεταβάλλῃ τὸν ὑπὸ τοῦ x παριστανόμενον ἀριθμόν· ὥστε ὁ εὑρισκόμενος ἀντὶ τοῦ x ἀριθμὸς εἰς τὸ τέλος τῆς λύσεως νὰ μὴ ἦναι ὁ ζητούμενος. Ἂν ὅμως ὁ ἀντὶ τοῦ x ἀριθμὸς ταυτοποιῇ τὴν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν, εἶναι ὁ ζητούμενος.

68. Αἱ πρὸς λύσιν πάσης ἄλλης μερικῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον πράξεις εἶναι σχεδὸν αἱ ἐκτελεσθεῖσαι πρὸς λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἕξ, ἀλλ' ἢ χρειάζονται ὅλαι κατὰ τὴν ἀνωτέρω σειράν, ἢ τινὲς μόνον αὐτῶν. Π. χ. πρὸς λύσιν τῆς τοῦ 53 χρειάζεται μόνον ἡ τελευταία, ἤτοι διαίρεσις τῶν δύο μελῶν διὰ 6· πρὸς λύσιν δὲ τῆς τοῦ 12, 13 καὶ 21 χρειάζεται συστολὴ καὶ διαίρεσις· ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ 16 μετάθεσις, συστολὴ καὶ διαίρεσις· ἐπὶ ἄλλων δὲ πλειότεραι. Σπανιώτατα δὲ χρειάζεται καί τις ἑβδόμη, *τετραγωνισμὸς τῶν δύο μελῶν*, ὡς ἐπὶ τῆς τοῦ 75· διότι πρὸς λύσιν ταύτης

$$x+50=x-9+2\sqrt{x-9}+1$$

πρῶτον ὅλοι οἱ ἄλλοι ὅροι ἐκτὸς τοῦ ἔχοντος τὸ ῥιζικὸν μετατίθενται εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ γίνεται ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, ἔχομεν δὲ

$$58=2\sqrt{\chi-9},$$

ἥτις διαιρουμένων τῶν δύο μελῶν διὰ 2 γίνεται

$$29=\sqrt{\chi-9}.$$

Τώρα εἶναι ἀνάγκη νὰ *τετραγωνίσωμεν* καὶ τὰ δύο μέλη πρὸς ἐξάλειψιν τοῦ ῥιζικοῦ, ὑπὸ τὸ ὁποῖον κεῖται ὁ χ, καὶ ἔχομεν

$$841=\chi-9, \text{ ὅθεν } \chi=850.$$

69. Πρὸς λύσιν δὲ γενικῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον ἐκτὸς τῶν εἰρημένων πράξεων εἶναι συνήθως ἀναγκαία καὶ *ἀναγωγὴ γινομένου εἰς τοὺς παράγοντάς του*, ἔτι δὲ χρήσιμος καὶ *διάταξις τῶν ὅρων*.

Ἔστω εἰς λύσιν π. χ. ἡ

$$\frac{3\beta\chi}{2\alpha^2}-\frac{\chi-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\beta\chi-\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\chi}{4\alpha}.$$

Ὁ ἐλάχιστος δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ διαιρέσιμος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $4\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)=4\alpha^4-4\alpha^2\beta^2$. Τὰ δὲ πηλίκα αὐτοῦ δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν κατὰ σειρὰν εἶναι $2\alpha^2-2\beta^2$, $4\alpha^3-4\alpha^2\beta$, $4\alpha^2$, $\alpha^3-\alpha\beta^2$, καὶ πολλαπλασιάζοντες μὲν ἐπ' αὐτὰ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας ἀριθμητάς, ἀλλὰ σημειοῦντες μόνον τὰς πράξεις, παραλείποντες δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν ἔχομεν

$$3\beta\chi(2\alpha^2-2\beta^2)-(\chi-\beta)(4\alpha^3-4\alpha^2\beta)=$$
$$(\beta\chi-\alpha^2)4\alpha^2-\chi(\alpha^3-\alpha\beta^2).$$

Ἐκτελοῦντες τώρα τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἔχομεν

$$6\alpha^2\beta\chi-6\beta^3\chi-4\alpha^3\chi+4\alpha^2\beta\chi+4\alpha^3\beta-4\alpha^2\beta^2=$$
$$4\alpha^2\beta\chi-4\alpha^4-\alpha^3\chi+\alpha\beta^2\chi\cdot$$

μεταθέσει δὲ ὅλων τῶν ἐχόντων τὸν χ ὅρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τῶν δὲ μὴ ἐχόντων αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον γίνεται

$$6\alpha^2\beta\chi-6\beta^3\chi-4\alpha^3\chi+4\alpha^2\beta\chi-4\alpha^2\beta\chi+\alpha^3\chi-\alpha\beta^2\chi=$$
$$-4\alpha^4-4\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2\cdot$$

συστολῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὅρων γίνεται

$$6\alpha^2\beta\chi-6\beta^3\chi-3\alpha^3\chi-\alpha\beta^2\chi=-4\alpha^4-4\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2\cdot$$

διατάξει δὲ τῶν τοῦ πρώτου μέλους ὅρων πρὸς τὰς δυνάμεις τοῦ a γίνεται

$$-3a^3\chi+6a^2\beta\chi-a\beta^2\chi-6\beta^3\chi=-4a^4-4a^3\beta+4a^2\beta^2\cdot$$

ἀλλαγῇ δὲ τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων, ἵνα ὁ πρῶτος ἦναι θετικός, γίνεται

$$3a^3\chi-6a^2\beta\chi+a\beta^2\chi+6\beta^3\chi=4a^4+4a^3\beta-4a^2\beta^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χ εἶναι κοινὸς παράγων ὅλων τῶν τοῦ πρώτου μέλους ὅρων, τὸ *πρῶτον μέλος ἀνάγεται εἰς τοὺς παράγοντάς του* (36), καὶ ἡ ἐξίσωσις τρέπεται εἰς τὴν

$$(3a^3-6a^2\beta+a\beta^2+6\beta^3)\chi=4a^4+4a^3\beta-4a^2\beta^2.$$

Τελευταῖον διαιρέσει τῶν δύο μελῶν διὰ τοῦ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων παράγοντος ἔχομεν

$$\chi=\frac{4a^4+4a^3\beta-4a^2\beta^2}{3a^3-6a^2\beta+a\beta^2+6\beta^3}$$

Σημ. Πᾶσα γενικὴ ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος μὲ ἕνα ἄγνωστον διὰ τῶν προειρημένων πράξεων δύναται νὰ καταντήσῃ εἰς τοιαύτην τινὰ $A\chi=B$, ἐὰν διὰ A μὲν σημειωθῇ τὸ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἐν τῷ πρώτῳ μέλει ὂν πολύορον ἢ καὶ ὅρος τις ἐνίοτε, διὰ B δὲ τὸ δεύτερον μέλος, πολύορον ἢ ὅρος ὄν. Ὥστε πᾶσα τοιαύτη γενικὴ ἐξίσωσις δύναται γενικώτατα νὰ παριστάνηται διὰ τῆς

$$A\chi=B.$$

70. Ἀφοῦ λυθῇ γενικὴ ἐξίσωσις καὶ εὑρεθῇ ὁ τύπος, πρέπει νὰ μὴ λησμονῇ τις νὰ τὸν ἑρμηνεύῃ εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν τοιοῦτον, ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς λύσεως, ἢ καὶ τετραμμένον ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον, ἂν ἦναι δυνατόν.

Λυομένης π. χ. τῆς ἐξισώσεως $\chi+\chi+\beta=a$ τῆς ἐν ἀρ. 57, εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{a-\beta}{2}$.

τὸ δὲ μεγαλήτερον μέρος εἶναι

$$\beta+\chi=\beta+\frac{a-\beta}{2}=\frac{2\beta+a-\beta}{2}=\frac{a+\beta}{2}.$$

Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι *τὸ μὲν μικρότερον μέρος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τοῦ δεδομένου κεφαλαίου καὶ τῆς δεδομένης διαφορᾶς, τὸ δὲ μεγαλήτερον μέρος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δεδομένου κεφαλαίου καὶ τῆς δεδομένης διαφορᾶς*.

Ἀλλὰ τὸ μὲν $\frac{\alpha-\beta}{2}$ γράφεται καὶ οὕτω $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{2}$, τὸ δὲ $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$ λοιπὸν *τὸ μὲν εἶναι διαφορὰ, τὸ δὲ εἶναι κεφάλαιον τῶν ἡμίσεων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν*.

Περὶ λύσεως δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἑκατέρας μὲ δύο ἀγνώστους.

71. Ἔστωσαν εἰς λύσιν αἱ τοῦ 80 προβλήματος ἐξισώσεις, αἵτινες, ὀρθῶς ἐννοηθείσης καὶ μεταφρασθείσης τῆς ἐκθέσεως, εἶναι αὗται

[1] $\chi-6+\frac{\chi}{3}=3\omega,\ \chi=\frac{13}{6}(\omega+3),$

ἐν αἷς καὶ τὸ χ παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὴν ἐνεστῶσαν ἡλικίαν τοῦ πατρὸς, καὶ τὸ ω ὡσαύτως, τὴν τωρινὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ.

Πρῶτον καὶ αὗται πρέπει ν' ἀκεραιωθῶσι καὶ νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ $\omega+3$ ἐπὶ 13· οὕτω γίνονται

$$3\chi-18+\chi=9\omega,\ 6\chi=13\omega+39\cdot$$

ἔπειτα νὰ μετατεθῶσιν οἱ μὲν ἔχοντες τοὺς ἀγνώστους χ καὶ ω ὅροι εἰς τὸ πρῶτον μέλος, οἱ δὲ ὅλως γνωστοὶ ὅροι εἰς τὸ δεύτερον, νὰ συσταλθῶσιν δὲ οἱ ὅμοιοι ὅροι· οὕτως ἔχομεν

[2] $4\chi-9\omega=18,\ 6\chi-13\omega=39.$

Τὰς αὐτὰς δὲ ταύτας σχεδὸν πράξεις, ἂν χρειασθῇ, ἀνάγκη νὰ ἐκτελῶμεν πάντοτε, ὥστε νὰ λάβωσιν αἱ ἐξισώσεις τὴν ἔχουσαν ἤδη αἱ ἀνωτέρω μορφὴν, τουτέστιν *ἐν τῷ πρώτῳ μέλει νὰ ἦναι εἷς ὅρος μὲ τὸ χ θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς, καὶ εἷς ἄλλος ὅρος μὲ τὸν ω ὡσαύτως, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ εἷς μόνος ὅρος γνωστός*.

Μετὰ ταῦτα πρέπει νὰ ἐκτελῆται ἄλλη νέα σύνθετος πρᾶξις πρὸς πορισμὸν τρίτης ἐξισώσεως ἐκ τῶν δύο ἤδη εὑρεθεισῶν, ἥτις νὰ ἔχῃ μόνον τὴν ἑτέραν τῶν δύο ἀγνώστων, ὁποτέραν θελήσωμεν· ἡ πρᾶξις δ' αὕτη καλεῖται *ἀπάλειψις τῆς ἑτέρας ἀγνώστου*.

Ἡ ἀπάλειψις ἐκτελεῖται κατὰ διαφόρους τρόπους, τοὺς ὁποίους ἐκθέτομεν ἐφεξῆς.

72. *Ἀπάλειψις διὰ συστολῆς*. Ἔστω ἀπαλειπτέον ἄγνωστον τὸ χ, ὁπότε πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω τρίτη ἐξίσωσις μὲ μόνον τὸ ω.

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μὲν δύο μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ τὸν ἐν τῇ δευτέρᾳ συνεργὸν 6 *τοῦ ἀπαλειπτέου* χ, *τὰ δὲ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸν ἐν τῇ πρώτῃ συνεργὸν* 4 *τοῦ αὐτοῦ* χ, ἵνα γείνωσιν οἱ συνεργοὶ τῆς χ ἴσοι καὶ εἰς τὰς δύο; καὶ ἔχομεν

$$24\chi-54\omega=108,$$
$$24\chi-52\omega=156,$$

ἐν αἷς τὸ χ ἔχει τὸν αὐτὸν συνεργὸν 24. Τώρα πρὸς ἀπάλειψιν τοῦ χ, ἐπειδὴ οἱ μὲ αὐτὸ ὅροι εἶναι θετικοί, *ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἑτέρας ἐξισώσεως*, τῆς πρώτης προτιμότερον, *καὶ συστέλλομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους ἑκατέρων τῶν μελῶν*· οὕτως ἐκλείπει τὸ χ καὶ προκύπτει ἐξίσωσις μὲ μόνον τὸ ω αὕτη

$$2\omega=48.$$

Μετὰ τὴν ἀπάλειψιν τοῦ χ *λύομεν τὴν προκύψασαν ἐξίσωσιν*, ἥτις εἶναι πρωτοβάθμιος μὲ ἕνα ἄγνωστον, καὶ εὑρίσκομεν $\omega=24$.

Ὡσαύτως πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ *ἀπαλείφομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων*

$$4\chi-9\omega=18,\ 6\chi-13\omega=39$$

τὸ ω, πολλαπλασιάζοντες τὰ μὲν δύο μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ 13, τὸν ἐν τῇ δευτέρᾳ συνεργὸν τοῦ ω, τὰ δὲ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸν ἐν τῇ πρώτῃ συνεργὸν 9 τοῦ ω, ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα τῶν μελῶν τῆς πρώτης, διότι οἱ μὲ τὸ ω ὅροι εἶναι ἀντιθετικοὶ καὶ οἱ δύο, συστέλλομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους τῶν

τῶν πρώτων καὶ τοὺς τῶν δευτέρων μελῶν, καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν μὲ μόνον τὸ χ ἐξίσωσιν

$$2\chi=117, \text{ ὅθεν πάλιν } \chi=58\tfrac{1}{2}.$$

Ἢ ἀντὶ τούτων ὡς ἁπλούστερον *θέτομεν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀνωτέρω* [2] *ἐξισώσεων*, ἐν τῇ πρώτῃ προτιμότερον, ἀντὶ τοῦ ω τὸ *ἰσοδύναμόν* του 24, καὶ οὕτω τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον μὲ μόνον τὸ χ ταύτην

$$4\chi-9\times24=18,$$

τὴν ὁποίαν λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=58\frac{1}{2}$, ὡς καὶ διὰ τῆς ἀπαλείψεως.

73. Εἶναι τώρα εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ 24 καὶ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ τοῦ ω καὶ τοῦ χ καὶ μόνοι αὐτοί, ὄχι μόνον ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, ἀλλ' εἶναι καὶ οἱ ζητούμενοι, ἤτοι ὅτι ὁ πατὴρ εἶναι $58\frac{1}{2}$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς 24. Διότι αἱ πρὸ τῆς ἀπαλείψεως πράξεις δὲν μεταβάλλουσι τοὺς ἀγνώστους, καὶ αἱ [2] ἐξισώσεις ὡς συνέπειαι τῶν [1] τοῦ προβλήματος ἐπαληθεύονται διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, δι' ὧν καὶ αἱ τοῦ προβλήματος. Ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ πρὸς ἀπάλειψιν πράξεις δὲν μεταβάλλουσι τοὺς ἀγνώστους. Διότι αἱ πράξεις αὗται εἶναι πολλαπλασιασμοὶ τῶν δύο μελῶν τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ ἀριθμούς, οἵτινες δὲν ἔχουσι τοὺς ἀγνώστους, ἀλλαγὴ τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἑτέρας, πρόσθεσις ἢ ἀφαίρεσις τῶν μελῶν των καὶ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων· ὥστε αἱ προκύπτουσαι πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις $2\omega=48$ καὶ $2\chi=117$ εἶναι συνέπειαι τῶν ἐξισώσεων [2], καὶ ἐπαληθεύονται δι' ὧν ἀριθμῶν καὶ αἱ [2] ἢ αἱ [1]. Ἀλλ' ἡ μὲν αὐτῶν ταυτοποιεῖται διὰ 24 ἀντὶ ω καὶ μόνον διὰ 24, ἡ δὲ μόνον διὰ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ χ· λοιπὸν καὶ αἱ τοῦ προβλήματος [1] ἐξισώσεις ταυτοποιοῦνται διὰ τῶν 24 καὶ $58\frac{1}{2}$ καὶ μόνον δι' αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεων [1] δὲν ἔγεινε κἀνὲν λάθος καὶ τὸ χ καὶ τὸ ω ἀπ' ἀρχῆς μεχρισοῦ κατεσκευάσθησαν

αἱ ἐξισώσεις διετήρησαν τὴν ἀρχικήν των σημασίαν, οἱ ἐπαληθεύοντες ἀριθμοὶ τὰς ἐξισώσεις εἶναι οἱ ζητούμενοι.

Ὅταν δ' ὁ δεύτερος ἄγνωστος χ εὑρίσκηται ὄχι δι' ἀπαλείψεως, ἀλλ' ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τῶν [2] δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ 24 ἀντὶ ω καὶ λύσεως αὐτῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μὲν $2\omega=48$ ταυτοποιεῖται διὰ 24 ἀντὶ ω, ἡ δὲ πρώτη τῶν (2) ἐπαληθεύεται διὰ τῶν δύο ἀριθμῶν 24 καὶ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ ω καὶ χ, διότι λογισθέντος τοῦ $\omega=24$ εὑρέθη ὁ $\chi=58\frac{1}{2}$ ἐξ αὐτῆς λυθείσης. Ἡ δὲ δευτέρα τῶν [2], ὡς συνέπεια τῆς πρώτης τῶν [2] καὶ τῆς $2\omega=48$, ἐπαληθεύεται καὶ αὐτὴ διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν 24 καὶ $58\frac{1}{2}$, δι' ὧν καὶ ἐκεῖναι. Ὅτι δὲ εἶναι συνέπεια αὐτῶν γίνεται δῆλον, ἐὰν τῆς πρώτης πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο μέλη ἐπὶ 13 ὡς πρότερον πρὸς ἀπάλειψιν, καὶ γίνεται $24\chi-54\omega=108$, ἔπειτα ἑνωθῶσι μὲ τὰ μέλη της τὰ τῆς $2\omega=48$ καὶ συσταλθῶσιν· ὅθεν προκύπτει ἡ $24\chi-52\omega=156$, καὶ τελευταῖον διαιρεθῶσι ταύτης τὰ μέλη διὰ 4· οὕτως ἔχομεν τὴν δευτέραν $4\chi-13\omega=39$.

Ἐκ τούτων λοιπὸν τῶν συλλογισμῶν, οἵτινες εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαναλαμβάνωνται εἰς πᾶσαν ἄλλην ὁμοίαν περίστασιν, πληροφορεῖταί τις ὅτι, ὅταν ὀρθῶς κατασκευάζωνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ ἀλανθάστως κατὰ τὰ προειρημένα λύωνται, οἱ εὑρισκόμενοι οὕτως ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ζητούμενοι, καὶ εἶναι μόνοι αὐτοί. Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν δὲ, ἂν θέλῃ τις, θέτει ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τοῦ προβλήματος ἀντὶ χ καὶ ω τοὺς εὑρεθέντας ἀριθμοὺς, καὶ θέλει ἰδεῖ ὅτι ταυτοποιοῦνται, ἂν δὲν συνέβη ἢ δὲν συμβῇ λάθος εἰς τὰς πράξεις. Ὅταν δὲ αἱ ἐξισώσεις ἔχωσι τοὺς ἀγνώστους εἰς τοὺς παρονομαστὰς, τότε ἀνάγκη πάντοτε νὰ ἐκτελῶνται τὰ τῆς ἐπιβεβαιώσεως.

74. Ὅταν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου οἱ συνεργοὶ ἦναι ἴσοι, ὡς ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τοῦ 78, δὲν γίνεται πολλαπλασιασμὸς, ἀλλ' εὐθὺς συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων. Ὅταν δὲ ὁ ἕτερος συνεργὸς ἦναι πολλαπλάσιος τοῦ ἄλλου, ὡς ἐν ταῖς τοῦ 79 κτλ, πολλαπλασιάζονται τὰ μέλη τῆς ἑτέρας μόνον ἐξισώσεως, τῆς

ἐχούσης τὸν μικρότερον συνεργὸν κτλ. Ὅταν δ' ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα οἱ συνεργοί, ὡς ἀνωτέρω οἱ τοῦ χ, τότε εἶναι προτιμότερον νὰ πολλαπλασιάζωνται τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης μόνον ἐπὶ τὸν ἐν τῇ δευτέρᾳ μὴ κοινὸν παράγοντα, τὰ δὲ τῆς δευτέρας μόνον ἐπὶ τὸν ἐν τῇ πρώτῃ μὴ κοινὸν παράγοντα, διότι οὕτως εὑρίσκονται συνεργοὶ ἴσοι μικρότεροι. Ἡ μὲν πρώτη τῶν ἀνωτέρω πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ δύο, καὶ γίνονται

$$12\chi-27\omega=56$$

$$12\chi-26\omega=78.$$

Ὁπότερος δὲ τῶν ἀγνώστων παρέχει κατὰ τοῦτο εὐκολίαν πλειοτέραν, ἐκεῖνος ἐκλαμβάνεται ἀπαλειπτέος κατ' ἀρχάς.

Ὅταν δὲ οἱ μὲ τὸν ἀπαλειπτέον ἄγνωστον ὅροι ἦναι ἀντίθετοι, τότε, ἀφοῦ οἱ συνεργοὶ γείνωσιν ἴσοι, συστέλλονται εὐθὺς οἱ ὅμοιοι ὅροι τῶν ὁμοίων μελῶν· ὅταν δ' ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, τότε ἀνάγκη τῶν μελῶν τῆς ἑτέρας ἐξισώσεως τὰ σημεῖα ν' ἀλλάσσωνται καὶ ἔπειτα νὰ συστέλλωνται οἱ ὅμοιοι ὅροι κτλ.

Ἀφοῦ δὲ γυμνασθῇ τις ἱκανῶς, τότε καὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς ἀλλαγὰς τῶν σημείων καὶ τὰς συστολὰς ἐκτελεῖ διαμιᾶς, μάλιστα μετριάζει τοὺς πολλαπλασιασμοὺς μὴ πολλαπλασιάζων τοὺς μὲ τὸν ἀπαλειπτέον ἄγνωστον συνεργούς, καὶ οὕτως ἡ ἀπάλειψις καθίσταται ἁπλουστέρα.

Ὀνομάζεται δὲ *διὰ συστολῆς* ἀπάλειψις αὕτη, διότι κυρίως, ὅτε γίνεται ἡ συστολή, τότε ἀπαλείφεται ὁ ἄγνωστος, αἱ δὲ λοιπαὶ πράξεις εἶναι προπαρασκευαστικαί. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῶν ἀκολούθων λέξεων τῶν πρὸς διάκρισιν τῆς ἀπαλείψεως.

73. *Ἀπάλειψις δι' ἀντικαταστάσεως.* Ἐὰν ἐκ τῶν ἐξισώσεων

[2] $$4\chi-9\omega=18,\ 6\chi-13\omega=39$$

θέλωμεν ν' ἀπαλείψωμεν τὸ χ, ὑποθέτομεν τὸ ω γνωστὸν καὶ *λύομεν τὴν ἑτέραν τούτων, τὴν πρώτην*, ἵνα εὕρωμεν τὸ χ, καὶ ἔχομεν

$$[3] \qquad \chi=\frac{18+9\omega}{4}.$$

Ἔπειτα *θέτομεν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ τοῦ χ τὸ ἰσοδύναμόν του* $\frac{18+9\omega}{4}$, καὶ ἔχομεν

$$[4] \qquad 6\times\frac{18+9\omega}{4}-13\omega=39,$$

ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον μὲ μόνον ἄγνωστον τὸ ω. Τώρα, *λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν* $\omega=24$.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ χ κάμνομεν ὅ,τι καὶ προηγουμένως εἴπομεν, δηλ. *θέτομεν ἐν τῇ πρώτῃ* [2] (ἢ κάλλιον ἐν τῇ [3], ἥτις εἶναι συνέπεια τῆς πρώτης, ἀλλ' εἶναι ὁ τύπος τοῦ χ) *ἀντὶ ω τὸν 24, καὶ λύοντες αὐτὴν ἔχουσαν μόνον τὸ χ εὑρίσκομεν* $\chi=58\frac{1}{2}$.

Ἂν δὲ καὶ βέβαιοι ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ 24 καὶ $58\frac{1}{2}$ ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, διότι εἶναι οἱ αὐτοί, οἵτινες εὑρέθησαν καὶ προηγουμένως, ἀλλ' ὅμως εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ἰδίως ὅτι ἡ [4] ὡς συνέπεια τῶν [2] ταυτοποιεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ ω, δι' οὗ καὶ αὗται· ἀλλ' ἡ [4] μόνον διὰ 24 ταυτοποιεῖται· λοιπὸν καὶ τὸ ω τῶν [2] εἶναι 24. Ἀλλ' ἐκ τῆς πρώτης αὐτῶν, ἀφοῦ ἐτέθη 24 ἀντὶ ω, εὑρέθη $\chi=58\frac{1}{2}$· λοιπὸν ὁ 24 καὶ ὁ $58\frac{1}{2}$ ἐπαληθεύουσι τὴν πρώτην τῶν [2]. Ἡ δὲ δευτέρα εἶναι αὐτὴ ἡ [4], διαφέρουσα μόνον καθότι ἀντὶ $\frac{18+9\omega}{4}$ ἔχει τὸ χ. Ἀλλ' ὅταν τὸ $\omega=24$, τότε τὸ $\frac{18+9\omega}{4}$ ἤτοι τὸ χ γίνεται ἴσον $58\frac{1}{2}$· λοιπὸν ἢ ἐν τῇ [4] τεθῇ 24 ἀντὶ ω ἢ ἐν τῇ δευτέρᾳ τῶν [2] τεθῇ 24 ἀντὶ ω καὶ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ χ εἶναι τὸ αὐτό.

Ἀλλ' ἡ [4] ταυτοποιεῖται διὰ 24 ἀντὶ ω· λοιπὸν καὶ ἡ δευτέρα τῶν [2] ἐπαληθεύεται διὰ 24 ἀντὶ ω καὶ διὰ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ χ. Οἱ δὲ ἐπαληθεύοντες τὰς ἐξισώσεις [2] ἐπαληθεύουσι καὶ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ εἶναι οἱ ζητούμενοι.

Ἡ δὲ δι' ἀντικαταστάσεως ἀπάλειψις εἶναι μάλιστα ἐν χρήσει, ὅταν ὁ συνεργὸς τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου ἐν μιᾷ τινι ἐξισώσει ἦναι ἡ μονάς, ὡς ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τοῦ 78, 79, 81, 84, 90, 91· διότι τότε τὸ ἀντὶ τοῦ χ μέλλον νὰ τεθῇ ἐν τῇ ἄλλῃ ἐξισώσει θέλει εἶσθαι ἀκέραιον καὶ ὄχι κλασματικόν, τὸ ὁποῖον συνεπιφέρει πλειοτέρας πράξεις.

76. *Ἀπάλειψις διὰ συγκρίσεως.* *Ὑποθέτομεν ὡς ἀνωτέρω τὸ ω γνωστόν, λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις, ἵνα εὕρωμεν τὸ χ,* καὶ ἔχομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης ὡς ἀνωτέρω

$$\left.\begin{aligned} &\chi=\frac{18+9\omega}{4},\\ \text{ἐκ δὲ τῆς δευτέρας } &\chi=\frac{39+13\omega}{6}.\end{aligned}\right\}(5)$$

Τώρα, *ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς χ, τὰ δεύτερα μέλη, ἴσα ὄντα πρὸς τὰ πρῶτα, εἶναι ἴσα καὶ πρὸς ἄλληλα,* καὶ ἔχομεν

$$(6)\qquad \frac{18+9\omega}{4}=\frac{39+13\omega}{6},$$

ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον μὲ μόνον τὸ ω. *Λύοντες λοιπὸν ταύτην εὑρίσκομεν* ω=24.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τοῦ χ *θέτομεν* 24 *ἀντὶ ω ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν* [5] *ἰσοδυνάμῳ τοῦ χ*, καὶ εὑρίσκομεν πάλιν $\chi=58\frac{1}{2}$. Ἐν ὁποτέρῳ δὲ καὶ ἂν τεθῇ, δῆλον ὅτι θέλει εὑρεθῇ $\chi=58\frac{1}{2}$, διότι καὶ τὰ δύο ὡς μέλη τῆς (6) ἐξισώσεως ταυτοποιοῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ ω.

Εἶναι δ' εὔκολον νὰ ἴδῃ τις ὅτι ὁ 24 ταυτοποιῶν τὴν (6) ἐξίσωσιν, ταυτοποιεῖ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (5), καὶ ἑπομένως ὁ 24 ἀντὶ ω καὶ ὁ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ χ ταυτοποιοῦσι τὰς δύο (5). Ἀλλ' αἱ [2] ἐξισώσεις εἶναι συνέπειαι ἄλλη ἄλλης τῶν δύο (5), τὸ ὁποῖον εἶναι φανερόν· λοιπὸν ὁ 21 καὶ ὁ $58\frac{1}{3}$ ἐπαληθεύουσι τὰς [2] ἐξισώσεις, καὶ ἐπομένως εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί.

Καὶ ἡ τοιουτότροπος δ' ἀπάλειψις, διότι συνεπιφέρει κλασματικοὺς ὅρους, εἶναι ὀλιγώτερον ἐν χρήσει.

Ἐπειδὴ δ' ἐνίοτε εἶναι προτιμητέα ἡ μία τῆς ἄλλης, εἶναι καλὸν νὰ λύωσιν οἱ ἀρχάριοι τὰς τῶν τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου προβλημάτων ἐξισώσεις ἐκτελοῦντες τὴν ἀπάλειψιν καὶ κατὰ τοὺς τρεῖς διαφόρους τρόπους πρὸς ἄσκησιν.

77. Ἔτι δὲ κατὰ τοὺς αὐτοὺς τρόπους ἀπαλείψεως ἂς λυθῶσι καὶ αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τοῦ 86, γενικοῦ γενομένου οὕτω

Ποῖος εἶναι ὁ κλασματικός, ὅστις, ἀφαιρουμένου τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ν ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του, γίνεται ἴσος μὲ τὸν δεδομένον $\frac{α}{β}$, *προσθετομένου δὲ ἄλλου δεδομένου ἀριθμοῦ π εἰς τοὺς δύο ὅρους του, γίνεται ἴσος μὲ τὸν δεδομένον* $\frac{γ}{δ}$; αἵτινες εἶναι αὗται

$$\frac{χ-ν}{ω-ν}=\frac{α}{β},\quad \frac{χ+π}{ω+π}=\frac{γ}{δ}.$$

Ἀκεραιώσει μὲν λοιπὸν αὐτῶν εὑρίσκομεν

$$βχ-βν=αω-αν,\quad δχ+δπ=γω+γπ\cdot$$

μεταθέσει δὲ τῶν ὅρων

$$βχ-αω=βν-αν,\quad δχ-γω=γπ-δπ.$$

θέτοντες δὲ δι' ἁπλότητα ἀντὶ μὲν τοῦ $βν-αν$ τὸ $ζ$, ἀντὶ δὲ τοῦ $γπ-δπ$ τὸ $ξ$, ἔχομεν

$$βχ-αω=ζ,\quad δχ-γω=ξ.$$

Ἀπαλείψει δὲ διὰ συστολῆς πρῶτον τῆς $χ$, ἔπειτα τῆς $ω$, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$\begin{array}{cc}
βδχ-αδω=δζ & βγχ-αγω=γζ \\
βδχ-βγω=βξ & αδχ-αγω=αξ \\
\hline
αδω-βγω=βξ-δζ & αδχ-βγχ=αξ-γζ \\
(αδ-βγ)ω=βξ-δζ & (αδ-βγ)χ=αξ-γζ \\
ω=\dfrac{βξ-δζ}{αδ-βγ}\cdot & χ=\dfrac{αξ-γζ}{αδ-βγ}\cdot
\end{array}$$

Ἀπαλείψει δὲ δι' ἀντικαταστάσεως ἔχομεν

$$\beta\chi = \zeta + \alpha\omega \qquad \frac{\delta\zeta + \alpha\delta\omega}{\beta} - \gamma\omega = \xi$$

$$\chi = \frac{\zeta + \alpha\omega}{\beta} \qquad \delta\zeta + \alpha\delta\omega - \beta\gamma\omega = \beta\xi$$

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\omega = \beta\xi - \delta\zeta$$

$$\omega = \frac{\beta\xi - \delta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

$$\chi = \frac{\zeta + \alpha \times \frac{\beta\xi - \delta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma}}{\beta} = \frac{\alpha\delta\zeta - \beta\gamma\zeta + \alpha\beta\xi - \alpha\delta\zeta}{\beta(\alpha\delta - \beta\gamma)}$$

$$= \frac{\beta(\alpha\xi - \gamma\zeta)}{\beta(\alpha\delta - \beta\gamma)} \qquad \chi = \frac{\alpha\xi - \gamma\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

Ἀπαλείψει δὲ διὰ συγκρίσεως ἔχομεν

$$\beta\chi = \zeta + \alpha\omega \qquad \delta\chi = \xi + \gamma\omega$$

$$\chi = \frac{\zeta + \alpha\omega}{\beta} \qquad \chi = \frac{\xi + \gamma\omega}{\delta}$$

$$\frac{\zeta + \alpha\omega}{\beta} = \frac{\xi + \gamma\omega}{\delta}$$

$$\delta\zeta + \alpha\delta\omega = \beta\xi + \beta\gamma\omega$$

$$\alpha\delta\omega - \beta\gamma\omega = \beta\xi - \delta\zeta$$

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\omega = \beta\xi - \delta\zeta$$

$$\omega = \frac{\beta\xi - \delta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

θέτοντες δὲ ἐν τῇ $\chi = \frac{\zeta + \alpha\omega}{\beta}$ ἀντὶ ω τὸ ἰσοδύναμόν του, εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω

$$\chi = \frac{\alpha\xi - \gamma\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

Περὶ λύσεως πολλῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

78. Ἔστωσαν εἰς λύσιν αἱ ἐξισώσεις τοῦ 98 προβλήματος,

αἵτινες μετὰ τὴν ἀκεραίωσίν των, μετὰ τὴν μετάθεσιν τῶν ἀγνώστων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τῶν γνωστῶν εἰς τὸ δεύτερον καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τῶν σημείων τῶν μελῶν των γίνονται·

$$12\chi+6\psi+6\omega=31824$$
$$4\chi+12\psi+4\omega=31824$$
$$3\chi+3\psi+12\omega=31824.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὅλοι οἱ ὅροι τῆς μὲν πρώτης εἶναι διαιρετοὶ διὰ 6, τῆς δὲ δευτέρας διὰ 4, τῆς δὲ τρίτης διὰ 3, διαιροῦμεν αὐτούς, διότι οὕτω θέλομεν ἔχει ἁπλουστέρας ἐξισώσεις ταύτας

(1) $$2\chi+\psi+\omega=5304$$
(2) $$\chi+3\psi+\omega=7956$$
(3) $$\chi+\psi+4\omega=10608.$$

Τώρα ἢ διὰ συστολῆς ἢ δι' ἀντικαταστάσεως ἢ διὰ συγκρίσεως ἀπαλείφομεν ἓν τῶν ἀγνώστων, τὸ ω, ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας, ἔπειτα ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης, καὶ εὑρίσκομεν δύο πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις ἑκατέραν μὲ τὰ δύο ἄλλα ἄγνωστα χ καὶ ψ, ταύτας

(4) $$-\chi+2\psi=2652$$
(5) $$7\chi+3\psi=10608.$$

Ἀπαλείφομεν καὶ ἐκ τούτων τὸ χ, καὶ εὑρίσκομεν τὴν πρωτοβάθμιον μὲ μόνον τὸ ψ

$$17\psi=29172,$$

ὅθεν $$\psi=1716.$$

Θέτοντες δὲ ἐν τῇ πρώτῃ τῶν δύο εὑρεθεισῶν ἐξισώσεων, ἐν τῇ $-\chi+2\psi=2652$, 1716 ἀντὶ τοῦ ψ, καὶ λύοντες αὐτὴν ἔχομεν $\chi=780.$

Τελευταῖον θέτομεν ἐν τῇ πρώτῃ τῶν τριῶν ἀνωτέρω τοῦ προβλήματος ἐξισώσεων, ἐν τῇ

$$2\chi+\psi+\omega=5304$$

1716 ἀντὶ τοῦ ψ καὶ 780 ἀντὶ τοῦ χ, τοὺς ὁποίους ἤδη εὑρήκαμεν, καὶ λύοντες αὐτὴν ἔχομεν $\omega=2028.$

Λοιπὸν συμπεραίνομεν ὅτι τῆς πρώτης νηὸς τὸ πλήρωμα συνέκειτο ἐξ 780, τὸ τῆς δευτέρας ἐκ 1716, καὶ τὸ τῆς τρίτης ἐκ 2028 ἀνδρῶν. Διότι δῆλον μὲν ὅτι ὁ 780 ἀντὶ τοῦ χ καὶ ὁ 1716 ἀντὶ τοῦ ψ ταυτοποιοῦσι τὰς δύο ἐξισώσεις (4) καὶ (5), καὶ ὅτι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ μὲ τὸν 2028 ἀντὶ τοῦ ω ἐπαληθεύουσι τὴν (1) ἐξίσωσιν. Οἱ αὐτοὶ δὲ τρεῖς ἐπαληθεύουσι καὶ τὴν (2) καὶ τὴν (3)· διότι ἡ μὲν (2) εἶναι συνέπεια τῆς (1) καὶ τῆς (4), ἡ δὲ (3) εἶναι συνέπεια τῆς (1) καὶ τῆς (5), ὡς εὑρισκομένη ἡ μὲν (2), ἐὰν προστεθῶσιν ἑκάτερα τὰ μέλη τῆς (1) καὶ τῆς (4), ἡ δὲ (3), ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἑκάτερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ 4, καὶ ἔπειτ' ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτὰ τῆς (5) τὰ μέλη. Οἱ δὲ ἐπαληθεύοντες αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις ἀριθμοὶ ἐπαληθεύουσι καὶ τὰς τοῦ προβλήματος, καὶ ἑπομένως εἶναι οἱ ζητούμενοι.

79. Χωρὶς δὲ νὰ προβῶμεν περαιτέρω λύοντες καὶ τέσσαρας ἐξισώσεις ἑκάστην μὲ τέσσαρας ἀγνώστους καὶ πέντε μὲ πέντε ἀγνώστους κτλ, ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταλαμβάνει τις ὅτι *ὁσαιδήποτε ἐξισώσεις πρωτοβάθμιοι μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους ἑκάστην λύονται κατὰ τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα·* τουτέστιν

Ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων ἀπαλείφεται ἕν τι τῶν ἀγνώστων, καὶ οὕτω προκύπτουσιν ἄλλαι πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις κατὰ μίαν ὀλιγώτεραι τῶν δεδομένων καὶ μὴ ἔχουσαι τὸ ἀπαλειφθὲν ἄγνωστον. Πάλιν ἐκ μιᾶς τούτων τῶν εὑρεθεισῶν καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων ἀπαλείφεται ἄλλο ἄγνωστον τῶν ἐν αὐταῖς, καὶ οὕτω πάλιν προκύπτουσιν ἄλλαι πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις κατὰ μίαν ὀλιγώτεραι τῶν ἤδη εὑρεθεισῶν καὶ μὴ ἔχουσαι μηδὲ τὸ δεύτερον ἀπαλειφθὲν ἄγνωστον. Ἐξακολουθοῦντες δ' οὕτω θέλομεν καταντήσει τέλος πάντων εἰς μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ ἓν ἄγνωστον, τὴν ὁποίαν λύοντες θέλομεν εὑρεῖ ἕνα ἀριθμὸν ἀντ' αὐτοῦ. Ἔπειτα ἐπανερχόμενοι θέτομεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν ἀντὶ τοῦ σημείου τοῦ ἀγνώστου ἐν τῇ ἑτέρᾳ *τῶν δύο προηγουμένων καὶ λύοντές την προσδιορίζομεν καὶ τὸν δεύτερον ἄγνωστον. Οὕτω δ' ἐξακολουθοῦντες θέλομεν ἐπανέρχεσθαι προσδιορίζοντες ἀνὰ ἕνα ἄγνωστον μέχρι τῶν δεδομένων, ἐκ μιᾶς τῶν ὁποίων θέλομεν προσδιορίζει καὶ τὸν τελευταῖον ἄγνωστον.*

80. Ὅταν αἱ ἐξισώσεις, οὖσαι ἰσάριθμοι μὲ τοὺς ἐν αὐταῖς ἀγνώστους, δὲν ἔχουσιν ἑκάστη ὅλους τοὺς ἀγνώστους, ἀλλὰ τινὰς μόνον, τότε ὀλιγοστεύουσι μὲν αἱ ἀναγκαῖαι ἀπαλείψεις, ἀλλ' ἐνίοτε δυσκολεύονται οἱ ἀρχάριοι νὰ προσδιορίσωσι τίς ἄγνωστος εἶναι πρῶτον ἀπαλειπτέος καὶ ἐκ τίνων ἐξισώσεων.

Π. χ. πρὸς λύσιν τῶν τοῦ 92 προβλήματος ἐξισώσεων

$$\chi+\psi=56,\quad \psi+\omega=100,\quad \chi+\omega=80$$

δυνάμεθα ἐκ δύο ὁποιωνδήποτε τῶν τριῶν ν' ἀπαλείψωμεν τὸν ἐν αὐταῖς κοινὸν ἄγνωστον, οἷον ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τὸν ψ, διότι ἡ προκύψουσα ἐξίσωσις

$$\omega-\chi=44$$

θέλει ἔχει τοὺς δύο ἀγνώστους, οὓς ἔχει καὶ ἡ τρίτη· καὶ οὕτω διὰ μιᾶς μόνης ἀπαλείψεως ἔχομεν δύο ἐξισώσεις ἑκατέραν μὲ τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους, κτλ.

Ἀλλ' ἐὰν λυτέαι ἐξισώσεις ἦναι αἱ ἑξῆς

$$7\varphi-13\chi=87$$
$$3\varphi+14\psi=57$$
$$10\omega-3\psi=11$$
$$2\psi-11\chi=50,$$

ἀπαλειπτέος ἄγνωστος πρέπει νὰ ἐκληφθῇ πρῶτον ὁ κοινὸς εἰς δύο ἢ πλειοτέρας ἐξισώσεις, καὶ ὅστις ἀπαλειφθεὶς παρέχει ἐξίσωσιν, ἥτις νὰ ἔχῃ τοὺς αὐτοὺς ἀγνώστους, οὕτινας καί τις τῶν ἄλλων ἐξισώσεων, ἢ ὀλιγωτέρους τῶν ὄντων ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν, ἐξ ὧν εἶναι ἀπαλειπτέοι αὐτοί. Κατὰ ταῦτα δὲ δυνατὸν ν' ἀπαλείψωμεν τὸν φ ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας, διότι ἡ προκύψουσα θέλει ἔχει τὸν χ καὶ τὸν ψ, τοὺς ὁποίους ἔχει καὶ ἡ τετάρτη.

Ἀφοῦ δὲ λύσαντες ταύτας εὕρωμεν ἀντὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ δύο ἀριθμούς, ἔπειτα ἐκ μὲν τῆς τρίτης προσδιορίζομεν καὶ τὸν ω, ἐκ δὲ τῆς πρώτης ἢ τῆς δευτέρας καὶ τὸν φ.

Πρὸς γύμνασιν δὲ θέτομεν καὶ τὰς ἑξῆς

$$2\varphi-3\chi+2\psi=13 \qquad 7\upsilon+2\varphi+3\chi=17$$
$$4\omega+2\varphi=30 \qquad 4\psi+2\varphi+\omega=11.$$
$$4\chi+2\psi=14 \qquad 5\psi+3\upsilon-2\chi=8$$
$$5\chi+3\omega=32. \qquad 4\psi-3\chi+2\omega=9$$
$$3\varphi+8\chi=33.$$

Περὶ λύσεως πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ πλειοτέρους αὐτῶν ἀγνώστους.

81. Εἴδομεν καθ' ὅλα τὰ προηγούμενα ὅτι, ὅταν αἱ ἐκθέσεις τῶν προβλημάτων ἐμπεριέχωσι τ' ἀναγκαῖα διδόμενα πρὸς κατασκευὴν τοσούτων ἐξισώσεων, ὅσοι εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, εἴτε κατασκευάζονται ὅλαι εἴτε ὄχι, πάντοτε τὰ παριστάνοντα τοὺς ἀγνώστους σημεῖα ἔχουσιν ἕκαστον ἓν καὶ μόνον προσδιόρισμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται κατὰ τὰ προειρημένα· διὰ τοῦτο ὀνομάζονται οἱ ἄγνωστοι *προσδιωρισμένοι*, ἐκ δὲ τούτου καλοῦνται *προσδιωρισμένα* καὶ τὰ προβλήματα τὰ τοιαῦτα καὶ αἱ ἐξισώσεις αὐτῶν, ὁποῖα εἶναι τὰ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι καὶ τοῦ 100, ὅλα πρωτοβάθμια.

Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ ὅταν ἐμπεριέχωνται ἐν ταῖς ἐκθέσεσι τῶν προβλημάτων διδόμενα ὀλιγώτερα παρ' ὅσα χρειάζονται πρὸς καταρτισμὸν ἐξισώσεων ἰσαρίθμων μὲ τοὺς ἀγνώστους. Π. χ. ἂν τοῦ 111 προβλήματος παραμεληθῇ πρὸς ὥραν τὸ δεδομένον, ὅτι τὰ ζητούμενα καρύδια ἦσαν ὑπὲρ τὰ 100 καὶ ὀλιγώτερα τῶν 400, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι φύσεως τοιαύτης, ὥστε νὰ παρασταθῇ δι' ἐξισώσεως, δὲν εἶναι δεδομένα νὰ κατασκευασθῇ ἄλλη ἐξίσωσις παρὰ ταύτην

$$13\chi+9=17\omega+14,$$

ἐνῷ οἱ ἄγνωστοι εἶναι δύο, τὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν καρυδίων διὰ 13 καὶ διὰ 17 πηλίκα, δι' ὧν γνωστῶν γενομένων θέλει γείνει γνωστός καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν καρυδίων. Λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τῶν δύο ἀγνώστων δὲν ἔχομεν ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις δύο ἐξισώσεις, ἀλλὰ μόνον μίαν.

Μεταθέτομεν καὶ ἐνταῦθα τοὺς ἔχοντας τ' ἄγνωστα ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, καὶ συστέλλοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους ἔχομεν

$$13\chi-17\omega=5.$$

Τὸ πολὺ δὲ, τὸ ὁποῖον μετὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ κάμωμεν, εἶναι *νὰ ὑποθέσωμεν τὸν ἕτερον ἄγνωστον γνωστὸν*, οἷον τὸν ω, *καὶ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ* χ· *οὕτως ἔχομεν*

$$\chi=\frac{17\omega+5}{13}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ τύπος τοῦ χ ἐμπεριέχει τὸ ω, τὸ ὁποῖον ἀληθῶς εἶναι ἄγνωστον, βλέπομεν ὅτι ἄλλως δὲν θέλει προσδιορισθῇ τὸ χ, εἰμὴ ἀφοῦ προσδιορισθῇ τὸ ω. Εἰς προσδιορισμὸν δὲ τούτου δὲν ἔχομεν κανὲν δεδομένον, ἤτοι περιορισμὸν, ἐκ τῆς ἐκθέσεως τοῦ προβλήματος, καὶ δυνάμεθα νὰ τὸ προσδιορίσωμεν ὅσον θέλωμεν, ἤτοι 1, 2, 3, 4, κτλ, καὶ τότε ἐκ τοῦ τύπου ἀντὶ χ εὑρίσκομεν $1\frac{9}{13}$, 3, $4\frac{4}{13}$, $5\frac{8}{13}$, κτλ. Οἱ ἀντὶ ω καὶ χ λοιπὸν ἐπαληθεύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἀριθμοὶ εἶναι 1 καὶ $1\frac{9}{13}$, ἢ 2 καὶ 3, ἢ 3 καὶ $4\frac{4}{13}$ κτλ· ὁ δὲ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν καρυδίων δυνατὸν νὰ ἦτον ἢ 31, ἢ 48, ἢ 65, ἢ 82 κτλ. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι προσδιωρισμένος, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις, ἀλλ' *ἀπροσδιόριστος*. Διὰ τοῦτο καλοῦνται *ἀπροσδιόριστα* καὶ τὰ προβλήματα, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, καὶ αἱ ἐξισώσεις αὐταί.

82. Οἱ πορίζόμενοι ἐκ τοῦ τύπου τοῦ χ ἀριθμοὶ προσδιοριζομένου τοῦ ω εἶναι καὶ ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ ἢ μικτοί. Ἂν ὅμως ἦτον παραστατικὸν ἀκεραίων ἀριθμῶν τὸ χ, ὡς ἐν τῷ 112 προβλήματι κτλ, τότε ἔπρεπε νὰ παραμεληθῶσιν οἱ κλασματικοὶ καὶ νὰ ζητῶνται μόνον οἱ ἀκέραιοι, οἱ δὲ ἀντὶ χ καὶ ω ἐπαληθεύοντες τὴν ἐξίσωσιν ἀριθμοὶ ἤθελαν εἶσθαι ὄχι

τόσον πολυάριθμοι ὡς πρότερον. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ χ καὶ τὸ ω εἶναι δυνατὸν νὰ πορίζωνται ἐκ τύπων ἰδιαιτέρων ὡς ἐφεξῆς λέγομεν.

Ἀφοῦ πράξωμεν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν καὶ *λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τύπου τοῦ ἔχοντος τὸν μικρότερον συνεργὸν ἀγνώστου*, τοῦ χ, ἔχομεν

$$\chi=\frac{17\omega+5}{13}=\frac{17\omega}{13}+\frac{5}{13}\cdot$$

Τώρα *διαιροῦμεν τὸ 17ω διὰ 13 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον* $\omega+\frac{4\omega}{13}$· λοιπὸν

$$\chi=\omega+\frac{4\omega+5}{13}\cdot$$

Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν τὸ χ νὰ ἦναι ἀκέραιον, τὸ ω πρέπει νὰ ἦναι τοιοῦτος ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις νὰ καθιστάνῃ καὶ τὸν $\frac{4\omega+5}{13}$ ἀκέραιον, ἵνα ἦναι καὶ τὸ χ ἀκέραιον. *Σημειοῦμεν λοιπὸν* τὸ $\frac{4\omega+5}{13}=\tau$, *τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκέραιον καὶ ἀπροσδιόριστον, ὡς τὸ ω, δι' οὗ προσδιορίζεται·* οὕτω γίνεται τὸ $\chi=\omega+\tau$. *Ἀκεραιοῦντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν* $\frac{4\omega+5}{13}=\tau$, *καὶ λύοντες αὐτὴν, ἵνα εὕρωμεν τὸ ω, τὸ ἔχον τὸν μικρότερον συνεργὸν*, ἔχομεν

$$\omega=\frac{13\tau-5}{4}=\frac{13\tau}{4}-\frac{5}{4}.$$

Διαιροῦντες δὲ διὰ 4 καὶ τὸν 13τ καὶ τὸν 5, ὄντα μεγαλήτερον τοῦ 4, ἔχομεν

$$\omega=3\tau+\frac{\tau}{4}-1-\frac{1}{4}=3\tau-1+\frac{\tau-1}{4}=3\tau-1+\tau',$$

σημειοῦντες τὸ $\frac{\tau-1}{4}=\tau'$, *τοῦ τ' ὄντος ἄλλου ἀκεραίου ἀπροσδιορίστου*. Τελευταῖον *ἀκεραιοῦντες ταύτην τὴν ἐξίσωσιν καὶ λύοντες την πρὸς τὸ τ* εὑρίσκομεν

$$\tau=4\tau'+1,$$

Ἀφοῦ δὲ κατηντήσαμεν νὰ εὕρωμεν τύπον τοῦ ἀπροσδιορίστου τ ἀκέραιον, διότι εἶχε συνεργὸν τὴν 1, θέτομεν ἐν τῷ τύπῳ τοῦ ω ἀντὶ τ τὸν εὑρεθέντα τύπον του, καὶ ἔχομεν

$$\omega=3\tau-1+\tau'=12\tau'+3-1+\tau'=13\tau'+2.$$

Τέλος πάντων θέτοντες ἐν τῷ τύπῳ τοῦ χ ἀντὶ ω καὶ τ τοὺς ἤδη εὑρεθέντας τύπους των ἔχομεν

$$\chi=\omega+\tau=13\tau'+2+4\tau'+1=17\tau'+3.$$

Ἐν δὲ τοῖς τύποις $\chi=17\tau'+3$ καὶ $\omega=13\tau'+2$ θέτοντες ἀντὶ τοῦ τ' ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ $\tau'=0$, δῆλον ὅτι θέλομεν εὑρεῖ ἀντὶ χ καὶ ω ἀκεραίους ἀριθμούς, ἤγουν,

ὅταν $\tau'=0$, 1, 2, 3, 4, 5, κτλ,
τὸ $\chi=3$, 20, 37, 54, 71, 88, κτλ,
τὸ $\omega=2$, 15, 28, 41, 54, 67, κτλ,
ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν καρυδίων 48, 269, 490, κτλ.

Ἐὰν δὲ τώρα ἐνθυμηθῶμεν καὶ τὸ δεδομένον ὅτι ἦσαν τὰ καρύδια ὑπὲρ τὰ 100 καὶ ὑπὸ τὰ 400, βλέπομεν ὅτι περιορίζεται τὸ πρόβλημα τόσον, ὥστε καταντᾷ προσδιωρισμένον ἐντελῶς, καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν καρυδίων εἶναι μόνον ὁ 269, ὅστις τῷ ὄντι διαμοιραζόμενος μὲν ἀνὰ 13 ἀφίνει 9 κατάλοιπον, χωριζόμενος δὲ ἀνὰ 17 ἀφίνει 14 κατάλοιπον.

83. Ἂς λύσωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ 113 προβλήματος

$$9\chi+14\omega=142$$

πρὸς εὕρεσιν τύπων τοῦ χ καὶ τοῦ ω, ἐξ ὧν νὰ πορίζώμεθα μόνον ἀκέραια προσδιορίσματα.

Μεταθέτοντες τὸ 14ω εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ συνεργοῦ 9 τοῦ χ καὶ τὸν 142 καὶ τὸν 14ω ἔχομεν

$$\chi=\frac{142-14\omega}{9}=15-\omega+\frac{7-5\omega}{9}=15-\omega+\tau,$$

κάμνοντες τὸ $\frac{7-5\omega}{9}=\tau$· ὅθεν $7-5\omega=9\tau$.

Λύοντες δὲ καὶ ταύτην ὡς πρὸς τὸ ω ἔχομεν

$$\omega=\frac{7-9\tau}{5}=1-\tau+\frac{2-4\tau}{5}=1-\tau+\tau',$$

σημειοῦντες τὸ $\frac{2-4\tau}{5}=\tau'$· ὅθεν $2-4\tau=5\tau'$.

Λύοντες δὲ καὶ ταύτην ὡς πρὸς τὸ τ ἔχομεν

$$\tau=\frac{2-5\tau'}{4}=-\tau'+\frac{2-\tau'}{4}=-\tau'+\tau'',$$

σημειοῦτες τὸ $\frac{2-\tau'}{4}=\tau''$· ὅθεν $2-\tau'=4\tau''$, καὶ τελευταῖον

$$\tau'=2-4\tau''.$$

Τώρα θέτοντες κατὰ σειρὰν ἐν τοῖς τύποις τοῦ τ, ω, χ ἀντὶ τ', τ, ω τὰ ἰσοδύναμάτων ἔχομεν

$$\tau=-\tau'+\tau''=-2+4\tau''+\tau''=5\tau''-2.$$
$$\omega=1-\tau+\tau'=1-5\tau''+2+2-4\tau''=5-9\tau''.$$
$$\chi=15-\omega+\tau=15-5+9\tau''+5\tau''-2=8+14\tau''.$$

Ἐκ τῶν τύπων λοιπὸν $\chi=8+14\tau''$
$\omega=5-9\tau''$

κάμνοντες τὸ $\tau''=0, 1, 2$, κτλ

εὑρίσκομεν $\chi=8, 22, 36$, κτλ,
$\omega=5, -4, -13$, κτλ.

Καὶ ὅταν μὲν $\chi=8$ καὶ $\omega=5$, δῆλον ὅτι τὸ μὲν τῶν μερῶν τοῦ 142 εἶναι 72, τὸ διὰ 9 διαιρετόν, τὸ δὲ εἶναι 70, τὸ διὰ 14 διαιρετόν. Περὶ δὲ τῶν ἄλλων προσδιορισμάτων θέλομεν εἰπεῖ τὰ δέοντα ἐν τῷ ἀκολούθῳ κεφαλαίῳ.

84. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύοντες καὶ τὴν τοῦ 112 προβλήματος ἐξίσωσιν

$$11\chi+9=13\omega+8,$$

εὑρίσκομεν $\chi=13\tau-6$ καὶ $\omega=11\tau-5$, τὸ δὲ $11\chi+9$ ἢ τὸ $13\omega+8$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν, θέλει παρασταθῇ πρῶτον διὰ $143\tau-57$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5 καὶ διὰ 6 καὶ διὰ 7, σημειοῦντες διὰ φ καὶ ψ καὶ υ τ' ἀκέραια πηλίκα αὐτοῦ διῃρημένου διὰ 5 καὶ 6 καὶ 7, ἔχομεν αὐτὸν παριστανόμενον καὶ διὰ 5φ, 6ψ, 7υ. Καὶ πρῶτον μὲν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5\varphi=6\psi, \qquad \text{ὅθεν} \quad \varphi=\frac{6\psi}{5}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ φ εἶναι ἀκέραιον, καὶ τὸ $\frac{6\psi}{5}$ ἑπομένως ἀκέραιον, τὸ 6ψ πρέπει νὰ ἦναι διαιρέσιμον διὰ 5. Ἀλλ' ὁ 6 καὶ ὁ 5 εἶναι ἀσυνδιαίρετοι· λοιπὸν ἀνάγκη τὸ ψ νὰ ἦναι διαιρέσιμον διὰ 5, ἤτοι πολλαπλάσιον τοῦ 5 (συμ. 42 θεώρ. Α'.). Ἔστω λοιπὸν $\psi=5\sigma$· θέτοντες δὲ 5σ ἀντὶ ψ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ φ, ἔχομεν

$$\varphi=\frac{6\psi}{5}=\frac{6\times5\sigma}{5}=6\sigma.$$

Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν 5φ καὶ 6ψ θέλει παρασταθῆ τώρα καὶ διὰ 30σ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ αὐτὸς παριστάνεται καὶ διὰ 7υ, ἔχομεν νέαν ἐξίσωσιν τὴν

$$7\upsilon=30\sigma, \qquad \text{ὅθεν} \quad \upsilon=\frac{30\sigma}{7}.$$

Ἀλλ' ὡς ἀνωτέρω πληροφορούμεθα ὅτι τὸ σ πρέπει νὰ ἦναι πολλαπλάσιον τοῦ 7· λοιπὸν θέτοντες $\sigma=7\rho$, ἔχομεν

$$\upsilon=\frac{30\sigma}{7}=\frac{30\times7\rho}{7}=30\rho.$$

Ὥστε τώρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν παριστάνεται καὶ διὰ 210ρ. Ἀλλ' εὑρήκαμεν ἀνωτέρω ὅτι παριστάνεται καὶ διὰ $143\tau-57$· λοιπὸν ἔχομεν τελευταίαν ἐξίσωσιν τὴν

$$143\tau-57=210\rho.$$

Λύοντες δὲ καὶ αὐτὴν ὡς ἤδη εἴδομεν, θέλομεν εὑρεῖ

$$\rho=143\pi+108,$$
$$\tau=210\pi+159.$$

Ὅθεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν 210ρ ἢ $143\tau - 37$ πορίζεται τελευταῖον ἐκ μόνου τοῦ τύπου $30030\pi + 22680$, ὑποθετομένου τοῦ $\pi = 0, 1, 2, 3$ κτλ· διότι οἱ ἐντεῦθεν πορίζόμενοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρέσιμοι καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 6 καὶ διὰ 7, καὶ διαιρούμενοι διὰ μὲν 11 δίδουσι κατάλοιπον 0, διὰ δὲ 13 δίδουσι κατάλοιπον 8.

85. Ἐκ τῶν ἐν τῷ 82 καὶ 83 προειρημένων εἶναι ἤδη γνωστὴ ἡ μέθοδος, καθ' ἣν λύεται ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος μὲ δύο ἀγνώστους πρὸς εὕρεσιν τύπων αὐτῶν, ὅθεν νὰ πορίζωνται ἀκέραια προσδιορίσματα. Αὕτη συνίσταται πρῶτον εἰς λύσιν καὶ τῆς δεδομένης ἐξισώσεως ὡς πρὸς τὸν ἔχοντα τὸν μικρότερον συνεργὸν ἄγνωστον, τοῦ ἄλλου ὑποθετομένου γνωστοῦ, καὶ ὅλων τῶν ἄλλων, ὅσαι κατὰ σειρὰν προκύπτουσιν ἐκ τῶν μὴ ἀκριβῶν διαιρέσεων καὶ ἐκ τῆς ὑποθέσεως ὅτι τὸ κλασματικὸν μέρος πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀπροσδιόριστον, μεχρισοῦ εὑρεθῇ ἐξίσωσις μὲ ἀπροσδιόριστόν τι, ἔχον συνεργὸν τὴν 1· ἔπειτα εἰς τὸ νὰ θέτηται ὁ ἀκέραιος τύπος τοῦ προτελευταίου ἀπροσδιορίστου ἐν τῷ τοῦ προηγουμένου του, καὶ οἱ τῶν δύο ἤδη εὑρημένων ἐν τῷ τοῦ ἔτι προτέρου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μεχρισοῦ εὑρεθῶσι τῶν ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει ἀπροσδιορίστων ἀγνώστων ἀκέραιοι τύποι μὲ τὸ αὐτὸ ἀπροσδιόριστον· τελευταῖον, ἂν ἦναι *χρεία*, εἰς τὸ νὰ μεταχειριζώμεθα τὰ ἐκ τῶν τύπων τούτων ἀκέραια προσδιορίσματα ὅπως ἁρμόζει πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ προβλήματος ἀριθμῶν.

Καὶ ὅταν μὲν οἱ συνεργοὶ τῶν ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει ἀπροσδιορίστων ἦναι ἀσυνδιαίρετοι, μετά τινας λύσεις ἐξισώσεων θέλομεν καταντᾷ πάντοτε εἰς ἐξίσωσιν, ἧς τὸ ἕτερον ἀπροσδιόριστον νὰ ἔχῃ συνεργὸν τὴν 1. Διότι, ὡς ἐκ τῶν προηγουμένων

ΙΣΤ

βλέπομεν, αἱ λύσεις τῶν κατὰ σειρὰν ἐξισώσεων συνεπιφέρουσι τὴν διαίρεσιν τοῦ μεγαλητέρου συνεργοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου, τὴν διαίρεσιν τούτου διὰ τοῦ καταλοίπου τῆς πρώτης διαιρέσεως, τὴν τοῦ πρώτου καταλοίπου διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἐπὶ τῆς ζητήσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν συνεργῶν· λοιπὸν, ὄντων τῶν ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει συνεργῶν ἀσυνδιαιρέτων, ἐξ ἀνάγκης ἓν τῶν καταλοίπων τούτων θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὴν 1. Ἀλλὰ τὰ κατάλοιπα ταῦτα εἶναι οἱ συνεργοὶ τῶν ἀπροσδιορίστων, τοὺς ὁποίους κατὰ σειρὰν μεταχειριζόμεθα· λοιπὸν ἓν τῶν ἀπροσδιορίστων τούτων θέλει ἔχει συνεργὸν τὴν 1.

Ὅταν δὲ οἱ συνεργοὶ τῶν ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει ἀπροσδιορίστων ἦναι συνδιαιρετοὶ, ὁ δὲ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης δὲν ἦναι καὶ τοῦ γνωστοῦ ὅρου διαιρέτης, οἷον ἐν ταύτῃ $8\chi-6\omega=17$; εἶναι περιττὸν νὰ ζητῶμεν τύπους ἀκεραίους τῶν ἀπροσδιορίστων, εὐδήλου ὄντος ὅτι δὲν ἔχουσι τότε προσδιορίσματα ἀκέραια. Διότι ὁποιουσδήποτε ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ ἂν θέσωμεν ἀντ' αὐτῶν ἐν τῇ ἐξισώσει, τὸ μὲν πρῶτον μέλος ἀκέραιον ὂν θέλει εἶσθαι διαιρέσιμον διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν συνεργῶν, τὸ δὲ δεύτερον ὄχι, ἀλλὰ θέλει εἶσθαι κλάσμα ἢ μικτὸς ἀριθμός· τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δὲν ταυτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν.

Ὡς πρὸς τοὺς *τύπους δὲ τῶν ἀπροσδιορίστων* εἶναι ἀξιοπαρατήρητον ὅτι τὰ ἐξ αὐτῶν πορiζόμενα προσδιορίσματα ἑκατέρου ἀπροσδιορίστου εἶναι ὅροι προόδου ἰσοδιαφόρων, τῆς ὁποίας διαφορὰ εἶναι ὁ συνεργὸς τοῦ ἄλλου ἀπροσδιορίστου. Ὥστε, ἂν διὰ δοκιμασιῶν εὑρεθῇ εἷς ἀριθμὸς ἀντὶ ἑκατέρου ἀπροσδιορίστου, τὰ ἄλλα αὐτῶν προσδιορίσματα θέλουσι προκύψει προσθετομένου ἢ ἀφαιρουμένου τοῦ συνεργοῦ τοῦ ἄλλου ἀπροσδιορίστου ἀπὸ τὸ ἤδη εὑρεθὲν προσδιόρισμα. Ἀλλὰ πλειώτεραι διασαφήσεις περὶ τούτων κρίνονται περιτταί.

86. Ἂς λυθῶσι τώρα καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ 115 προβλήματος $\chi+\psi+\omega=124$, $54\chi+38\psi+15\omega=1800$, δύο οὖσαι μὲ τρεῖς ἀγνώστους ἑκατέρα.

Πρῶτον λοιπὸν ἀπαλείφεται τὸ ω ἐκ τῶν δύο καὶ εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις $$39\chi+23\psi=2940.$$
Ἔπειτα λύεται ὡς προείπομεν αὕτη ἡ ἐξίσωσις καὶ εὑρίσκεται
$$\chi=23\tau-6$$
$$\psi=138-39\tau.$$
Τελευταῖον θέτονται ἀντὶ χ καὶ ψ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει $\chi+\psi+\omega=124$ οἱ εὑρεθέντες τύποι των, καὶ λυομένης αὐτῆς εὑρίσκεται $\omega=16\tau-8$, ὅπου τὸ ω προσδιορίζεται διὰ τοῦ αὐτοῦ τ, δι᾽οὗ καὶ τὸ χ καὶ τὸ ψ. Ἂν δὲ ὁ τύπος τοῦ ω εἶχεν ἄλλον ἀπροσδιόριστον σ, ὁπότε καὶ τὸ τ ἤθελεν ἔχει τύπον τινὰ μὲ τὸ σ, τότε ἔπρεπεν ἐν τοῖς τύποις τοῦ χ καὶ τοῦ ψ ἀντὶ τοῦ τ νὰ τεθῇ ὁ ἤδη εἰρημένος τύπος του, ὥστε καὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ καὶ τοῦ ω οἱ τύποι νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἀπροσδιόριστον σ.

Ὅταν λοιπὸν τὸ ἀπροσδιόριστον $\tau=1,\ 2,\ 3,$
εὑρίσκεται
$$\chi=17,\ 40,\ 63,$$
$$\psi=99,\ 60,\ 21,$$
$$\omega=8,\ 24,\ 40.$$

Λοιπὸν ἠγόρασεν ἢ 17 χοίρους καὶ 99 αἰγίδια καὶ 8 πρόβατα, ἢ 40 χοίρους καὶ 60 αἰγίδια καὶ 24 πρόβατα, ἢ 63 χοίρους καὶ 21 αἰγίδια καὶ 40 πρόβατα.

Τῶν δ᾽ ἄλλων προσδιορισμάτων τινὰ εἶναι ἀντιθετικά, περὶ ὧν κατωτέρω.

Ἂν δὲ καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ εἴπωμεν πολλὰ περὶ τῆς λύσεως τῶν ἀπροσδιορίστων ἐξισώσεων, παύομεν ὅμως ἐνταῦθα, διότι νομίζομεν ἱκανὰ τὰ μέχρι τοῦδε, ἂν μόνον καλῶς ἐννοηθῶσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΣΙ ΤΕ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΣΙ ΠΑΡΕΚΤΡΟΠΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΑΥΤΩΝ.

Διάφορα εἴδη παρεκτροπῶν.

87. Ἐκ τῶν προειρημένων περὶ ἀριθμητικῶν προβλημάτων ἀκριβῶς διακρίνομεν τώρα τὰ τρία ταῦτα, πρῶτον τὴν σύστασιν αὐτῶν, δεύτερον τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεών των, καὶ τρίτον τὴν λύσιν αὐτῶν. Καὶ συνιστᾷ μέν τις πρόβλημα, ἐνῷ συσχετίζει διαφόρους γνωστοὺς μὲ ἀγνώστους ἀριθμοὺς κατὰ ποικίλας σχέσεις οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι δυνατὸν νὰ προσδιορίζωνται οἱ ἄγνωστοι διὰ τῶν γνωστῶν· ἐν δὲ τοῖς προηγουμένοις εἴδομεν ἀρκούντως τὰ περὶ κατασκευῆς ἐξισώσεων καὶ τὰ περὶ τῆς λύσεως τῶν πρωτοβαθμίων. Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ καταλάβῃ τις ὅτι πολλάκις ὁ συνιστῶν τὸ πρόβλημα συσχετίζει εἴτε ἐν γνώσει εἴτε ἐν ἀγνοίᾳ τοιούτους ἀριθμοὺς καὶ κατὰ τοιαύτας σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι ἀδύνατον νὰ προσδιορίζηται τοιοῦτος ὁ ζητούμενος, ὁποῖος ζητεῖται. Ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ κατασκευάζων τὴν ἐξίσωσιν δυνατὸν νὰ μὴ ἐννοῇ ὀρθῶς τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει, καὶ ἑπομένως μεταφράζων διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων τὰς ἐννοίας του νὰ παρεκτρέπηται τῆς ὀρθότητος, καὶ οὕτως ἡ ἐξίσωσις νὰ ἦναι ὄχι πιστὴ μετάφρασις τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει. Τελευταῖον δὲ ὁ λύων τὴν ἐξίσωσιν δυνατὸν νὰ λανθάνηται περὶ τὰς πράξεις, καὶ οὕτως ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ ζητουμένου νὰ μὴ ἦναι σωστός.

Ἐξηγούμεθα σαφέστερα ἐν μέρει διὰ παραδειγμάτων. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α εἶναι 40 ἐτῶν καὶ ὁ Β 10, καὶ ἂς ζητήσωμεν πότε ἡ τοῦ Α ἡλικία πρὸς τὴν τοῦ Β θέλει ἔχει λόγον τινὰ δεδομένον. Ὁ Β ἐγεννήθη ὅτε ὁ Α ἦτον 30 ἐτῶν, καὶ ἐπομένως, ὄντος τοῦ μὲν Β 1, 2, 3 κτλ ἐτῶν, τοῦ δὲ Α 31, 32, 33 ἐτῶν κτλ, ὁ λόγος τῆς τοῦ Α πρὸς τὴν τοῦ Β ἡλικίαν εἶναι κατὰ σειρὰν 31, 16, 11, κτλ, δηλ. προϊόντος τοῦ χρόνου ἐλαττοῦται. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι, ἐπειδὴ τώρα ἡ τοῦ Α ἡλικία εἶναι τετραπλασία τῆς τοῦ Β, ἐν μὲν τῷ μέλλοντι θέλει εἶσθαι τριπλασία, διπλασία κτλ, τουτέστιν ὁ λόγος μικρότερος τοῦ ἐνεστῶτος λόγου 4, ἐν δὲ τῷ παρελθόντι πενταπλασία, ἑξαπλασία κτλ. Ἂν λοιπὸν ζητῇ τις μετὰ πόσα ἔτη ἡ τοῦ Α ἡλικία θέλει εἶσθαι τριπλασία ἢ διπλασία κτλ τῆς τοῦ Β, εἶναι ὀρθόν· ὡσαύτως καὶ ἂν ζητῇ πρὸ πόσων ἐτῶν ἡ τοῦ Α ἡλικία ἦτον πενταπλασία, ἑξαπλασία κτλ. Ἂν ὅμως ζητῇ μετὰ πόσα ἔτη θέλει εἶσθαι πενταπλασία, ἑξαπλασία κτλ, ἢ πρὸ πόσων ἐτῶν ἦτον τριπλασία, διπλασία κτλ, δῆλον ὅτι ζητεῖ ἀσυμβίβαστα μὲ τὴν σχέσιν τῶν δεδομένων, καὶ ἐπομένως ἀδύνατα. Ὁ συνιστῶν λοιπὸν τοιοῦτον πρόβλημα παρεκτρέπεται τοῦ ὀρθοῦ εἴτε ἐν γνώσει εἴτε ἐν ἀγνοίᾳ.

Ἐὰν δὲ, ὄντος Γ τινος 30 ἐτῶν, Δ δέ τινος ἄλλου 20 ἐτῶν, ἐζητεῖτο πότε ἡ τοῦ Γ ἡλικία ἤθελεν εἶσθαι ἴση μὲ τὴν τοῦ Δ, εἶναι πρόδηλον ὅτι ποτέ. Λοιπὸν καὶ ἐν τῇ συστάσει τοῦ προβλήματος τούτου συμβαίνει ἔτι μεγαλητέρα παρεκτροπὴ, ὡς ζητουμένου κατὰ πάντα ἀδυνάτου.

Παρόμοιον εἶναι καὶ ὅταν συνιστᾷ τις πρόβλημα, τοῦ ὁποίου ὁ ἄγνωστος ζητεῖται ἀκέραιος, ἐνῷ οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε, ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσιν ὅλαι αἱ ἀναγκαῖαι πράξεις ἐπ' αὐτῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου, νὰ εὑρεθῇ *μικτὸς ἀριθμός*· ἢ ζητεῖται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἦναι π. χ. *μεγαλήτερος τοῦ 1 καὶ μικρότερος τοῦ* 10, ἐνῷ ὁ ἐκ τῶν γνωστῶν μετὰ τὰς ἀναγκαίας ἐπ' αὐτῶν πράξεις προκύψων θέλει εἶσθαι *μεγαλήτερος τοῦ* 10.

Παρόμοια δὲ μὲ τὰ ἤδη προειρημένα συμβαίνουσι καὶ ἐν τοῖς προβλήμασι, τῶν ὁποίων τὰ διδόμενα εἶναι ἱκανὰ πρὸς κατασκευὴν πλειοτέρων ἐξισώσεων ἰσαρίθμων μὲ τοὺς ἐν αὐταῖς ἀγνώστους.

Ἄλλο εἶδος ἀνωμαλίας εἶναι ὅταν τῶν μὲν ἀριθμῶν γνωστῶν τε καὶ ἀγνώστων αἱ σχέσεις διορίζωνται τοιαῦται, ὥστε νὰ ἦναι δυνατὸν νὰ μεταχειρίζηταί τις *πάντα ἀριθμὸν* ἀντὶ τοῦ ζητουμένου, ζητῆται δὲ *εἷς μόνος*.

Καὶ τοιαῦτα λοιπόν τινα εἶναι τὰ δυνάμενα νὰ συμβαίνωσιν ἐν τῇ συστάσει τῶν προβλημάτων, καὶ τὰ ὁποῖα συνήθως εἶναι δύσκολον ἢ καὶ ἀδύνατον νὰ τὰ καταλάβῃ τις ἐκ τῆς ἐκθέσεως αὐτῶν. Ὁ δὲ κατασκευάζων τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος πολλάκις μὴ ἐννοῶν τὰς σχέσεις τῶν ἀριθμῶν ὁποῖαι εἶναι, ἀλλ' ἄλλως πως, σημειοῖ διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων ἄλλο τι παρ' ὅ,τι ἔπρεπεν, ὡς ἐπίτηδες ἐκάμαμεν ἐν τῷ 9 καὶ ἐν τῷ 80 προβλήματι· καὶ τότε θέλει ἔχει ἐξίσωσιν, ἥτις δὲν παριστάνει τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ προβλήματος ἀκριβῶς, ἐπομένως δὲν εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος. Ἀλλὰ καὶ τοιαῦτα λάθη συνήθως δὲν τὰ διακρίνει πρὸ τῆς λύσεως ὁ κατασκευαστὴς τῶν ἐξισώσεων. Ἐνίοτε δ' ἐν γνώσει παραβλέπει τῶν δεδομένων τινὰ, ἐνῷ κατασκευάζει τὰς ἐξισώσεις.

88. Ὅτε λοιπὸν παρεκτρέπεταί πως τῆς ὀρθότητος ἢ ὁ συνιστῶν τὸ πρόβλημα ἢ ὁ κατασκευάζων τὴν ἐξίσωσιν καὶ λύων αὐτὴν χωρὶς νὰ δυνηθῇ νὰ καταλάβῃ εὐθὺς τὸ λάθος, ἄλλο δὲν μένει παρὰ νὰ ὁδηγηθῇ περὶ τῆς παρεκτροπῆς, ὡς καὶ περὶ τῆς ὀρθότητος ἐν τοῖς προηγουμένοις, ἐκ τοῦ προσδιορίσματος τοῦ ἀγνώστου· διότι αὐτὸ εὑρισκόμενον ἐν τῷ τέλει τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι συνέπεια τῶν τριῶν προηγουμένων, ἤτοι τῆς συστάσεως τοῦ προβλήματος, τῆς κατασκευῆς τῆς ἐξισώσεώς του καὶ τῆς λύσεως αὐτῆς, πᾶν δὲ προηγούμενον σφάλμα, ἂν πρότερον δὲν γείνῃ γνωστὸν, μέχρι τέλους ὅμως ἐξ ἅπαντος θέλει φανερωθῆ, ἂν δὲν ἀναιρεθῇ ὑπ' ἄλλου ἀντιθέτου.

Περὶ τῆς σημασίας θετικῶν τινων καὶ τῶν ἀντιθετικῶν προσδιορισμάτων τῶν ἀγνώστων.

89. Ἐξηγοῦντες ἐν τοῖς προηγουμένοις κεφαλαίοις πῶς κατασκευάζονται καὶ πῶς λύονται αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις μετεχειρίσθημεν προβλήματα, τῶν ὁποίων οἱ ἄγνωστοι εὑρέθησαν ὅτι παρίστανον θετικοὺς ἀριθμούς, καὶ ἐπληροφορήθημεν ἑκάστοτε ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ ἦσαν οἱ ζητούμενοι. Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι τὰ τῶν ἀγνώστων θετικὰ προσδιορίσματα δὲν εἶναι πάντοτε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Ἔστω π. χ. εἰς λύσιν τὸ 60 πρόβλημα ὀλίγον τι παρηλλαγμένον οὕτως.

Θέλων τις νὰ βάλῃ τὸ ὡρολόγιόν του εἰς λαχεῖον λογίζεται ὅτι πρὸς μὲν 4 δραχ. τὸν κλῆρον ζημιοῦται 30 δραχμὰς τῆς ἀξίας τοῦ ὡρολογίου του, πρὸς δὲ 6 κερδίζει 107 δρ· πόσους κλήρους ἔκαμε καὶ πόσον ἤξιζε τὸ ὡρολόγιόν του;

Ἡ ἐξίσωσίς του ὀρθῶς κατασκευασθεῖσα εἶναι αὕτη

$$4\chi+30=6\chi-107,$$

ἀλανθάστως δὲ λυθεῖσα δίδει $\chi=68\frac{1}{2}$. Λοιπὸν ἔπρεπε νὰ συμπεράνωμεν κατὰ τὰ προειρημένα ἐν τῷ τετάρτῳ κεφαλαίῳ ὅτι ἔκαμεν $68\frac{1}{2}$ κλήρους. Ἀλλ' ἕκαστος βλέπει ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ $\frac{1}{2}$ κλῆρος, καὶ πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τοιοῦτόν τι, ὁποῖον προτείνεται διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐκθέσεως, οὔτε συνέβη οὔτε θέλει συμβῇ ποτέ, ἐκτὸς μόνον ἂν ἐννοηθῇ ὅτι εἷς κλῆρος εἶχεν ἄλλην τιμὴν παρὰ τοὺς ἄλλους, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν μνημονεύει ἡ ἔκθεσις.

Κατέστη δὲ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον μόνον διότι ἠλλάχθησαν δύο ἀριθμοί. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐν τῷ 57, ἂν μόνον ἀντὶ 36 τεθῇ 35, διότι τότε ὁ $\chi=183\frac{3}{4}$· ὅτι δ' ἔρριψε $\frac{3}{4}$ βόμβας εἶναι ἀδύνατον, ἐκτὸς ἂν ἐννοηθῇ ὅτι ἔμειναν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς πυρίτιδος, ὅση χρειάζεται πρὸς μίαν βολὴν βόμβας. Ἐν ἄλλοις δὲ εἶναι ἔτι σαφέστερον τοιοῦτον ἀδύνατον.

90. Ἐὰν δὲ λυθῶσι καὶ τοῦ 80 προβλήματος αἱ ἐξισώσεις, ὁποῖαι ἐκεῖ εἶναι, εὑρίσκεται $\chi=289\frac{1}{2}$ καὶ $\omega=132$. Ἐκ δὲ τούτου ἔπρεπε νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ μὲν πατὴρ ἦτον $289\frac{1}{2}$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς 132. Ἀλλ' ἡ ἰδέα, ὅτι τῶν νῦν τοὐλάχιστον ἀνθρώπων ἡ ἡλικία δὲν φθάνει εἰς τὸ 289 ἔτος, μᾶς φέρει εἰς ὑποψίαν ἂν τῷ ὄντι τοιαύτην ἡλικίαν εἶχεν ὁ ἐρωτηθεὶς πατὴρ, ἢ μήπως συνέβη τι ἄτοπον· καὶ ἐξετάζοντες βλέπομεν ὅτι τῷ ὄντι παρεννόησις ἔγεινε, διότι ἐξελήφθη ὡς ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ ἀντὶ τῆς ἐνεστώσης ἡ παρελθοῦσα κ τ λ. Ὅθεν διορθοῦντες ὡς ἐν ἀρ 71 εὑρίσκομεν $\omega=21$ καὶ $\chi=58\frac{1}{2}$. Ἀλλ' ἂν τῷ ὄντι τοιαύτη ἦτον ἡ ἀληθὴς ἔννοια τῆς ἐκθέσεως, ὁποία παρίσταται διὰ τῶν ἐξισώσεων, καὶ ὁ λόγος ἦτον ὄχι περὶ τῶν μνημονευομένων ὡς ζησάντων μακρὸν βίον, ἀλλὰ περὶ τῶν κοινῶν ἀνθρώπων, ἔπρεπε νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα δὲν παριστάνει τι ὑπῆρξαν ἢ ὑπάρχον, ἤτοι ὅτι εἶναι ἀδύνατον.

91. Τελευταῖον, ὅταν ἐν γνώσει παραλείπωμέν τινα τῶν δεδομένων, διότι εἶναι δυνατὸν καὶ ἄνευ αὐτῶν νὰ κατασκευάσωμεν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, ὡς ἐν τῷ 11 προβλήματι, ὅπου κατεσκευάσθη ἐξίσωσις, ὄχι ἐκ τῆς κληρονομίας καὶ ὅλων τῶν μεριδίων, ἀλλ' ἐκ τῶν μεριδίων τοῦ πρωτοτόκου καὶ τοῦ δευτεροτόκου, καὶ οὕτω δὲν κατεσκευάσθησαν κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν ἄλλων υἱῶν τὰ μερίδια· ὅταν τοιοῦτόν τι συμβαίνῃ, τὸ προσδιόρισμα τοῦ χ, ἂν καὶ θετικὸν, δὲν πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωμεν ὡς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν ἔπειτ' ἂν ἐπαληθεύῃ καὶ τὰ παραλειφθέντα δεδομένα, ἤτοι μεν ἂν συμβιβάζηται καὶ μὲ αὐτὰ ὅλα. Καὶ ὅταν τοῦτο ἔχῃ χώραν, εἶναι ὁ ζητούμενος· εἰδεμὴ, δὲν εἶναι ὁ ζητούμενος, καὶ τότε ἐνδεχόμενον τὸ πρόβλημα νὰ ἦναι ἀδύνατον, ἂν δι ἄλλης ἐξισώσεως δὲν ἦναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἐπαληθεύῃ ὅλα του τὰ μέρη.

Τὸ x τῆς ἐξισώσεως τοῦ 11 προβλήματος εὑρίσκεται ἴσον μὲ 8100, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ πρωτοτόκου καὶ τοῦ δευτεροτόκου 900· ἂν διαιρεθῇ δὲ ὁ 8100 διὰ 900, εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τῶν παίδων 9. Τώρα πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν κατὰ τὴν ἔκθεσιν τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου, τοῦ τετάρτου, τοῦ πέμπτου μέχρι καὶ τοῦ ἐννάτου υἱοῦ· καὶ ἂν εὑρεθῶσιν ὅλα ἴσα μὲ τὸ τοῦ πρωτοτόκου, καὶ ἔπειτα προστεθέντα τῶν ἐννέα τὰ μερίδια ἀποτελέσωσι κεφάλαιον 8100 δρ, τότε εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἡ κληρονομία ἦτον τῷ ὄντι 8100 δρ, οἱ δὲ κληρονόμοι 9. Ταῦτα δὲ ὅλα ἀληθεύουσιν ἐν τούτῳ. Ἂν ὅμως δὲν ἀλήθευε καὶ ἓν μόνον, ἔπρεπε νὰ συμπεράνωμεν ὅτι δὲν ἦτον αὐτὴ ἡ κληρονομία καὶ ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

92. Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων καὶ ἐκ τῶν ἐν ἀρ. 67 καὶ 73 προειρημένων βλέπει τις ὅτι τὰ θετικὰ προσδιορίσματα τῶν ἀγνώστων τὰ διὰ τῆς κατασκευῆς ἐξισώσεων καὶ τῆς λύσεως αὐτῶν εὑρισκόμενα εἶναι κοινῶς οἱ ζητούμενοι ἐν ταῖς ἐκθέσεσι τῶν προβλημάτων ἀριθμοί, καὶ σπανιώτερα συμβαίνει νὰ μὴ ἦναι, ὅταν δὲν συμβιβάζωνται μέ τινα δεδομένα τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ σημειῶνται κατασκευαζομένων τῶν ἐξισώσεων, ἢ ὡς μὴ ἀναγκαῖα ἐν τῇ κατασκευῇ αὐτῶν παραλείπονται προσωρινῶς. Ὅταν λοιπὸν εὑρίσκωμεν θετικοὺς ἀριθμοὺς ἀντὶ τῶν ἀγνώστων, πρὶν παραδεχθῶμεν αὐτοὺς ὡς τοὺς ζητουμένους, πρέπει νὰ προσέχωμεν μήπως ἦναι ἐν τῇ ἐκθέσει περιορισμοί τινες, τοὺς ὁποίους πρότερον δὲν ἐλογίσθημεν, καὶ μὲ τοὺς ὁποίους πρέπει οἱ εὑρημένοι ἀριθμοὶ νὰ συμβιβάζωνται. Καὶ ἂν μὲν συμβιβάζωνται καὶ μὲ αὐτούς, εἶναι οἱ ζητούμενοι· εἰδεμὴ τὰ προβλήματα ὁποῖα ἐπροτάθησαν εἶναι ἀδύνατα.

93. Μεταβαίνομεν εἰς τ' ἀντιθετικὰ προσδιορίσματα, καὶ πρῶτον ἔστω εἰς λύσιν τοῦτο τὸ πρόβλημα·

Ἐργάτης εἰργάσθη παρά τινι 13 ἡμέρας θερινὰς πρός τι ἡμερομίσθιον, καθ' ἃς ὅμως ἔκαμε ζημίαν 22 δραχμῶν, *καὶ πάλιν παρὰ τῷ αὐτῷ 17 ἡμέρας τὸν χειμῶνα πρὸς ἡμερομίσθιον δύο δραχμὰς ὀλιγώτερον παρὰ τὸ θέρος, ἀλλὰ μὲ προσοχὴν καὶ ζῆλον, ὥστε ἐκρίθη ἄξιος ἰδιαιτέρου δώρου 28 δραχμῶν· ἐνῷ δὲ ἐζημιώθη τὸ θέρος ἐκ τῶν ἡμερομισθίων του τὰς 22 δραχμάς, ἔλαβε δὲ τὸν χειμῶνα περιπλέον αὐτῶν 28 δρ, εὑρέθη ὅτι ἔλαβε καὶ τὸν χειμῶνα ἴσα καὶ τὸ θέρος· πόσον ἦτον τὸ θερινὸν ἡμερομίσθιον;*

Ἐὰν ἦναι ἢ ὄχι αδύνατα τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει ταύτῃ, τοῦτο εἶναι δυσκολώτατον νὰ τὸ καταλάβῃ τις τώρα. Ἀλλ᾽ ἐὰν σημειωθῇ διὰ χ τὸ θερινὸν ἡμερομισθιον, δῆλον ὅτι $13\chi-22$ παριστάνει οσα ἔλαβε τὸ θέρος, και $17(\chi-2)+28$ ὅσα ἔλαβε τὸν χειμῶνα· λοιπον $13\chi-22=17(\chi-2)+28$.

ὅθεν

$$13\chi-22=17\chi-34+28$$
$$13\chi-17\chi=22-34+28$$
$$-4\chi=16 \text{ ἢ } 4\chi=-16$$
$$\chi=-4.$$

Τὸ ἀντιθετικὸν τοῦτο προσδιόρισμα τοῦ χ τί νὰ σημαίνῃ τάχα; Ἂς ἴδωμεν. Πρῶτον εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὡς ἐν ἀρ 67 ὅτι ὁ ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς -4 ἀντὶ τοῦ χ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, διότι δὲν ἔγεινε λάθος ἐν τῇ λύσει· ἔπειτα δὲ ὅτι ὁ -4 ἔπρεπε νὰ ἦναι καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἐν τῇ ἐκθέσει, διότι κατεσκευάσθη ὀρθῶς ἡ ἐξίσωσις. Ἀλλ᾽ ὁ μὲν ζητούμενος εἶναι τὸ θερινὸν ἡμερομίσθιον, τὸ ὁποῖον ἐλάμβανεν ὁ ἐργάτης, καὶ τοῦτο ἐξελήφθη θετικὸν σημειωθὲν διὰ χ, τὸ δὲ προσδιόρισμα τοῦ χ εὑρέθη ἀντιθετικόν, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν γνωρίζομεν ὅτι δύναται νὰ σημαίνῃ παρὰ τὸ ἀντίθετον τοῦ λαμβανομένου ἡμερομισθίου, ἤτοι καθημερινὴν ζημίαν 4 δραχμῶν. Λοιπὸν ὁ -4 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ὁ ζητούμενος, διότι ἀντιφάσκει εἰς αὐτὸν σημαίνων τὸ ἀντίθετόν του.

Ἀλλ᾽ ἡ ἐξίσωσις $\chi=-4$, ὅπου τέλος πάντων ἀνεφάνη ἡ ἀντίφασις, εἶναι συνέπεια τῶν προηγουμένων· καὶ ἐπειδὴ οὔτε κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως οὔτε κατὰ τὴν λύσιν αὐτῆς συνέβη τι λάθος, ὅθεν νὰ ἐπήγασεν ἡ ἀντίφασις, ὀρθῶς δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ πηγὴ τῆς ἀντιφάσεως ἐνυπάρχει ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ προβλήματος. Καὶ αὕτη δὲ ἡ πηγὴ τῆς ἀντιφάσεως εἶναι ἀντίφασις τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει, ἥτις γίνεται φανερὰ ὁποίου εἴδους εἶναι ἐκ τῶν δύο τούτων. Πρῶτον ὁ —4, ἐννοούμενος ὅτι παριστάνει ζημίαν καθημερινὴν τοῦ ἐργάτου ἀντὶ κέρδους, δὲν φέρει εἰς ἀντίφασιν, ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἰς ὀρθὸν ἐξαγόμενον. Διότι τότε ὁ ἐργάτης ἐζημιώθη τὰς 13 θερινὰς ἡμέρας 52 δρ, καὶ 22 τὴν ἄλλην ζημίαν ὅλας 74· τὸν δὲ χειμῶνα ἐζημιοῦτο 6 δραχμὰς καθ' ἡμέραν, διότι ἐλάμβανε 2 δραχμὰς ὀλιγώτερον ἄλλο δὲν σημαίνει παρ' ὅτι ἐζημιοῦτο 2 δρ περισσότερον, τὰς δὲ 17 ἡμέρας ἐζημιώθη 102 δραχ· ἀλλ' ὠφελήθη τὰς 28 τὸ δῶρον· λοιπὸν ἐζημιώθη μόνον 74, ὅσας καὶ τὸ θέρος. Ἔπειτα δὲ ἀντὶ τοῦ χ οὐδεὶς θετικὸς ἀριθμός, ὅστις ἐδῶ σημαίνει τὸ λαμβανόμενον ἡμερομίσθιον, κατασταίνει ἴσα τὰ μνημονευόμενα ἐν τῇ ἐκθέσει ὅτι ἔλαβεν ὁ ἐργάτης τὸ θέρος καὶ τὸν χειμῶνα.

Λοιπὸν ὁ —4 σημαίνει ὅτι ἐν τῇ ἐκθέσει εἶναι δεδομένα ἀντιφατικά, ἤγουν ὅτι ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον ὁ ἐργάτης κτλ, καὶ ὅτι ἔλαβεν ἴσα τὸ θέρος καὶ τὸν χειμῶνα. Λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπῆρξε ποτὲ τοιοῦτόν τι, ὁποῖον λέγεται ἐν τῇ ἐκθέσει, ὅτι ἐργάτης τις ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον κτλ, καὶ ὅτι ἔλαβεν ἴσα κατὰ τοὺς δύο καιρούς, ἀλλ' ἢ ἐζημιοῦτο 4 δρ τὴν ἡμέραν κτλ, καὶ τότε ἐζημιώθη ἴσα τὸ θέρος καὶ τὸν χειμῶνα, ἢ ἂν ἐλάμβανεν ἀληθῶς ἡμερομίσθιον κτλ, ἀδύνατον νὰ ἔλαβεν ἴσα κατὰ τοὺς δύο καιρούς. Ἂν δὲ φαίνεται ἀπίθανον ὅτι εἰργάζετο καὶ ἐζημιοῦτο καθ' ἡμέραν, τότε ἀνάγκη νὰ μὴ ἔλαβεν ἴσα κατὰ τοὺς δύο καιρούς.

94. Συνήθως δὲν περιορίζουσιν οἱ περὶ τὴν Ἄλγεβραν ἕως ἐδῶ τὰς σκέψεις των, δηλ. ἕως νὰ ἐξηγήσωσιν ὅτι τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα σημαίνει ἀντίφασιν τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει καὶ τὸ ἄξονα τοῦ προβλήματος ὅπως ἐπροτάθη, ἀλλὰ δεικνύουσι

καὶ πῶς δύναταί τις, ἂν θέλῃ, νὰ ἐπανορθώσῃ τὸ ἄτοπον τρέπων τὸ πρόβλημα εἰς ἄλλο δυνατόν. Η διόρθωσις δὲ αὕτη δύναται νὰ γείνῃ πολλαχῶς. Π. χ. ἂν δοθῇ πρῶτον ὅτι τὸν χειμῶνα ἐλάμβανεν 3, 4 κτλ δρ ὀλιγώτερον ἀντὶ 2, ἔπειτα ὅτι τὸ δῶρον ἦτον ὄχι 28 δρ. ἀλλὰ 8, 7, 6 κτλ, ἢ ὅτι ἡ ζημία ἦτον ὀλιγωτέρα τῶν 6 δραχ. κτλ.

Δι' ἑκάστης δὲ τούτων τῶν μεταβολῶν μεταβάλλεται τὸ προσδιόρισμα τοῦ χ εἰς θετικόν, ἀλλ' ἐνταυτῷ καὶ ὁ ἀριθμὸς 4 εἰς ἄλλον. Ἀλλὰ προτιμᾶται τούτων ἡ ἁπλῆ μεταβολὴ τοῦ σημείου τοῦ χ ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ προβλήματος, ἤτοι τοῦ $+\chi$ εἰς $-\chi$ καὶ τοῦ $-\chi$, ἂν ἦναι, εἰς $+\chi$. Διότι οὕτως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος μεταβάλλεται εἰς ταύτην

$$-13\chi-22=17(-\chi-2)+28,$$

ἤ, διότι ἔχει τὸ πρῶτον μέλος ὅλον ἀντιθετικόν, ἀλλασσομένων τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων της, εἰς ταύτην

$$13\chi+22=17(\chi+2)-28,$$

ἥτις, ἐνῷ ἔχει ὅλους τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς τοὺς αὐτοὺς κατὰ τὰς μονάδας καὶ μόνον διαφόρους τινὰς κατὰ τὰ σημεῖα, ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 4, ἀλλὰ θετικοῦ. Διότι, ἐπειδὴ ὁ -4 ἀντὶ τοῦ χ ἐπαληθεύει τὴν τοῦ προβλήματος

$$13\chi-22=17(\chi-2)+28,$$

ἀφοῦ τεθῇ ἐν αὐτῇ τὴν μεταβάλλει εἰς ταύτην τὴν ἰσότητα

$$-13\times4-22=17(-4-2)+28$$

τῆς ὁποίας τὰ μέλη διαμένουσιν ἴσα καὶ ἀφοῦ ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων της καὶ τραπῇ εἰς ταύτην

$$13\times4+22=17(4+2)-28,$$

ἥτις εἶναι ἡ ἀνωτέρω

$$13\chi+22=17(\chi+2)-28$$

ἔχουσα 4 ἀντὶ χ. Δῆλον λοιπὸν ἐκ τούτων ὅτι ὁ 4 θετικὸς ἀντὶ χ ἐπαληθεύει τὴν τελευταίαν.

Αὕτη δὲ τώρα ἐκλαμβάνεται ὡς ἐξίσωσις προβλήματος, τὸ ὁποῖον διαφέρει τοῦ δεδομένου κατὰ ταῦτα, ὅτι αἱ 22 δρ ἐννοοῦνται ὡς κέρδος, αἱ δὲ 28 ὡς ζημία, καὶ ὅτι τὸν χειμῶνα ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον κατὰ 2 δρ περισσότερον. Εἶναι δὲ εὔκολον τώρα νὰ συστήσῃ τις τὸ νέον πρόβλημα, ἂν θέλῃ.

Ἀλλ' ἕκαστος ἐννοεῖ ὅτι ἡ καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον γινομένη ἐπανόρθωσις δυνατὸν νὰ θεωρῆται περιττή, διότι κυρίως νὰ λυθῇ τὸ δεδομένον πρόβλημα ἐπρόκειτο, καὶ τοῦτο ἔγεινεν ἅμα ἐπληροφορήθημεν ὅτι εἶναι ἀδύνατον· εἰς τοῦτο δὲ ὡδηγήθημεν ἐκ τοῦ ἀντιθετικοῦ προσδιορίσματος τοῦ χ.

95. Καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα

Πατὴρ τις 38 ἐτῶν ἔχει υἱὸν ὀκταετῆ· μετὰ πόσα ἔτη ἡ τοῦ πατρὸς ἡλικία θέλει εἶσθαι ἑπταπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ; ἐὰν λύσωμεν, θέλομεν εὑρεῖ ἐξίσωσιν ταύτην

$$7(8+\chi)=38+\chi,$$

ὅθεν

$$\chi=-3,$$

ἄνευ λάθους καὶ ἐν τῇ κατασκευῇ τῆς ἐξισώσεως καὶ ἐν τῇ λύσει αὐτῆς. Κατὰ δὲ τοὺς προηγουμένους συλλογισμοὺς πληροφορούμεθα ὅτι τὸ -3 εἶναι σημεῖον ὅτι ἐν τῇ ἐκθέσει ἐνυπάρχουσι τ' ἀντιφατικά, τὰ ὁποῖα παρετηρήσαμεν ἐν ἀρ. 87, ἀλλ' ἐνταυτῷ καὶ ὅτι πρὸ 3 ἐτῶν ἦτον ἑπταπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ ἡλικίας ἡ τοῦ πατρός.

Τὸ αὐτὸ παρατηρεῖται καὶ ἐν τῷ 38 προβλήματι, ἂν ζητηθῇ πόσον νίτρον πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἢ πόσον θεῖον νὰ προστεθῇ, ὥστε νὰ καταστήσωσι τὰ μέρη τοῦ νίτρου πρὸς τὰ τοῦ θείου ὡς 11 πρὸς 4.

96. Ἐὰν ἐπρόκειτο νὰ λυθῇ καὶ τὸ 86 πρόβλημα οὕτω παρηλλαγμένον,

Ποῖον εἶναι τὸ κλάσμα, ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ ὁποίου ἂν μὲν ἀφαιρεθῶσι 3 μονάδες μετατρέπεται εἰς $\frac{1}{4}$, ἂν δὲ ἀφαιρεθῶσι 5 μονάδες, γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$; αἱ ἐξισώσεις του εἶναι

$$\frac{\chi-3}{\omega-3}=\frac{1}{4}, \quad \frac{\chi-5}{\omega-5}=\frac{1}{2},$$

αἵτινες λυθεῖσαι φέρουσιν εἰς $\chi=2$ καὶ $\omega=-1$· ὥστε τὸ κλάσμα τὸ ζητούμενον ἔπρεπε νὰ ἦναι $-\frac{2}{1}$ ἢ $-\frac{2}{1}$. Ἀλλ' εὐκόλως καταλαμβάνει τις ὅτι καὶ ἐδῶ τὸ ἀντιθετικὸν -1, ἢ τὸ $-\frac{2}{1}$, δεικνύει ὅτι ζητοῦνται ἀντιφατικά, ἐνθυμούμενος ὅτι, ὅσον μεγαλήτερος ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοὺς ὅρους *κλάσματος*, τόσον μικρότερον θέλει εἶσθαι τὸ προκύπτον (Συμ. ἀρ. 53), καὶ παρατηρῶν ὅτι ἐδῶ ζητεῖται τὸ προκύπτον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 5 νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ προκύπτοντος τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 3, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

97. Ἂς λυθῇ καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β τῆς ὁδοῦ ΑΒΧ κινοῦσι τὴν αὐτὴν στιγμὴν δύο ταχυδρόμοι, ὁ μὲν ἐκ τοῦ Α 10 στάδια τὴν ὥραν ὁδοιπορῶν, ὁ δ' ἐκ τοῦ Β 6, καὶ διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος Γ, τὸ δεξιὰ τοῦ Α καὶ τοῦ Β κείμενον μακρὰν τοῦ μὲν Α 110 στάδια, τοῦ δὲ Β 50· ποῦ τῆς ὁδοῦ θέλουσιν ἐνταμωθῇ οἱ δύο ταχυδρόμοι;

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἂς ἐκλάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὴν ἀπὸ τοῦ Δ μέχρι τοῦ γνωστοῦ σημείου Γ ἀπόστασιν, σημειοῦντες αὐτὴν διὰ χ. Τότε τὸ διάστημα ΑΔ παρίσταται διὰ $110-\chi$, τὸ δὲ ΒΔ διὰ $50-\chi$· τὸ πρῶτον δὲ διέτρεξεν ὁ ἐκ τοῦ Α κινήσας ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ ὁ ἐκ τοῦ Β κινήσας διήνυσε τὸ δεύτερον· ὥστε

$$\frac{110-\chi}{10}=\frac{50-\chi}{6},$$

ὅθεν ἄνευ λάθους ἐν τῇ λύσει ἔχομεν

$$\chi=-40.$$

Ἐπειδὴ δὲ λάθος ἐν τῇ λύσει δὲν ἔγεινεν, ἂς ἴδωμεν μήπως συνέβη ἐν τῇ κατασκευῇ ἢ ἐν τῇ συστάσει ἄτοπόν τι, ἐξ οὗ προέκυψεν ὁ -40 ἀντὶ τοῦ χ.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως ὡς ζητούμενον ἐθεωρήσαμεν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐνταμώσεως μέχρι τοῦ σημείου Γ ἀπόστασιν, ὑποθέσαντες ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ εἴς τι σημεῖον. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν Γ βέβαια ἔπρεπε νὰ ἔχῃ θέσιν τινὰ ἢ ἐν τῷ Γ ἢ δεξιόθεν ἢ ἀριστερόθεν αὐτοῦ, ἡ δὲ θέσις αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως τοῦ Α ἀπὸ τοῦ Β καὶ τῆς ταχύτητος τῶν ταχυδρόμων. Ἀλλὰ χωρὶς νὰ προσέξωμεν εἰς ταῦτα ὑπεθέσαμεν ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ ἀριστερὰ τοῦ Γ κατὰ τὸ Δ, σημειώσαντες διὰ x θετικοῦ τὸ ἀπὸ τοῦ Γ μέχρι τοῦ Δ διάστημα, ὁπότε τὰ δεξιὰ τοῦ Γ διαστήματα θέλουσιν εἶσθαι ἀντιθετικά. Πιθανὸν λοιπὸν τὸ -40 νὰ σημαίνῃ ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ οἱ ταχυδρόμοι δεξιὰ τοῦ Γ 40 στάδια μακρὰν αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως ὅτι συνέπεια τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει δὲν εἶναι ἡ γενομένη ὑπόθεσις, ἀλλ' ἡ ἐκ τοῦ δεξιοῦ μέρους τοῦ Γ ἐντάμωσις, καὶ λοιπὸν ὅτι ἦτον ἄτοπος ἡ ὑπόθεσις ἐκείνη.

Καὶ τῷ ὄντι τοῦτο ἀληθεύει. Διότι ὁ ἐκ τοῦ Β ταχυδρόμος τὸ διάστημα ΒΓ, ἤτοι 50 στάδια, τὸ διατρέχει ἐν ὥραις $8\frac{1}{3}$, ἐν αἷς ὁ ἀπὸ τοῦ Α ταχυδρόμος διέτρεξε $83\frac{1}{3}$ στάδια· λοιπόν, ὅτε ὁ ἐκ τοῦ Β ταχυδρόμος εἶναι ἐν τῷ Γ, ὁ ἐκ τοῦ Α ἤτοι ὁ ταχύτερος εἶναι κατόπιν του· τὸ ὁποῖον δεικνύει ὅτι μέχρι τοῦ Γ δὲν ἔγεινεν ἡ ἐντάμωσις, ἀλλ' ὅτι θέλει γείνει δεξιὰ τοῦ Γ.

Ἀφοῦ δ' ἐκ τοῦ ἀντιθετικοῦ σημείου τοῦ x ἐμάθαμεν τὴν ψευδῆ ὑπόθεσιν, ἔπρεπε τώρα νὰ σημειώσωμεν διὰ x τὸ δεξιὸν τοῦ Γ διάστημα ΓΔ', καὶ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν, ἥτις εἶναι αὕτη

$$\frac{110+x}{10}=\frac{50+x}{6}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη πορίζεται ἐκ τῆς προηγουμένης ἀλλαγῇ τοῦ $-x$ εἰς $+x$, καί, ἐνῷ ἐκείνη ἐπαληθεύεται διὰ -40 ἀντὶ x, αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ 40 ἀντὶ x, δῆλον ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ἐνταμώσεως εἶναι μακρὰν τοῦ Γ 40 στάδια πρὸς δεξιάν. Λοιπὸν καὶ χωρὶς κατασκευῆς καὶ λύσεως νέας ἐξισώσεως τὸ -40 ἀρκεῖ νὰ μᾶς δείξῃ τὸ τῆς ἐνταμώσεως σημεῖον, ἂν τὸ μὲν $-$ ἐννοήσωμεν ὅτι σημαίνει τὴν ἀντίθετον θέσιν τῆς ὑποτεθείσης, τὸ δὲ 40 πόσον μακρὰν τοῦ Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

98. Καὶ ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ 9 προβλήματος λυθεῖσα φέρει εἰς $\chi = -45$, τὸ δὲ — δεικνύει τὸ ἐν τῇ κατασκευῇ γενόμενον ἄτοπον, ἤτοι ὅτι τὸ δεύτερον μέλος 3 κέρδος ἐθεωρήθη θετικὸν, ἐνῷ πρότερον τὸ $\frac{\chi}{3}$ κέρδος ἐλογίσθη ἀντιθετικόν. Ἢ λοιπὸν πρέπει νὰ διορθωθῇ τὸ δεύτερον μέλος εἰς -3, ἢ νὰ διορθωθῇ ὡς ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει. Τούτου δὲ γενομένου, εὑρίσκεται $\chi = 45$. Λοιπὸν τὸ — τοῦ 45 δεικνύει τὸ ἐν τῇ κατασκευῇ λάθος, ὁ δὲ 45 σημαίνει τὴν ἀξίαν τῶν πωληθέντων.

99. Ἐκ τῶν προηγουμένων λοιπὸν βλέπομεν ὅτι τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα, εἰς ὃ φέρει ἡ ὀρθὴ λύσις ἐξισώσεως ἢ ἐξισώσεων, ἢ σημαίνει ὅτι ἐν τῇ κατασκευῇ τῆς ἐξισώσεως ποσόν τι ἐξελήφθη ἀντιθέτως παρ' ὅπως ἀπήτουν τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει, καὶ τότε ὁ εὑρεθεὶς ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς ἀντιθέτως ἤτοι θετικὸς ἐννοούμενος εἶναι ὁ ζητούμενος, ὡς ἀνωτέρω ὁ —40 καὶ ὁ —45· ἢ, ἂν τοιοῦτόν τι δὲν συνέβη, σημαίνει ὅτι εἶναι ἀντιφατικὰ τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει καὶ ἀδύνατον τὸ πρόβλημα ὅπως ἐπροτάθη, δυνατὸν δὲ, ἂν ἐπιδέχηται ἀντιθετικὸν ἀριθμὸν ἀντὶ τοῦ ζητουμένου, τουτέστι νὰ ἐννοηθῇ τὸ ζητούμενον ἀντιθέτως παρ' ὅπως παρίσταται ἐν τῇ ἐκθέσει. Ὁπότερον δὲ σημαίνει καὶ ὁποίου εἴδους ἄτοπον προηγήθη, τοῦτο θέλει τὸ μάθει ὁ λύων τὸ πρόβλημα ἐρευνῶν μετὰ προσοχῆς τὰ προηγούμενα, ὡς ἀνωτέρω ἐπράξαμεν.

Περὶ τῶν συμβόλων $\frac{a}{0}$ καὶ $\frac{0}{0}$.

100. *Δύο κληρονόμων μελλόντων νὰ μοιρασθῶσι κληρονομίαν τινὰ, ἂν μὲν ὁ ἕτερος λάβῃ τὸ τρίτον τῆς ὅλης, μένουσιν εἰς τὸν ἄλλον τὰ πεντεδωδέκατα τῆς αὐτῆς καὶ 40 δραχμαί· ἂν δ' ὁ δεύτερος λάβῃ τὰ τρία τέταρτα τῆς ὅλης, μένουσιν εἰς τὸν πρῶτον μόνον 49 δραχμαί· πόση ἦτον ἡ κληρονομία;*

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὀρθῶς κατασκευασθεῖσα ἡ ἐξίσωσις τούτου εἶναι

$$\frac{\chi}{3}+\frac{5\chi}{12}+40=\frac{3\chi}{4}+49:$$

ὅθεν

$$4\chi+5\chi+480=9\chi+588$$

$$4\chi+5\chi-9\chi=588-480$$

$$0=108.$$

Εἶναι δὲ παράδοξον ἐνταῦθα ὅτι, ὄχι μόνον δὲν εὕρομεν ἀριθμόν τινα ἀντὶ τοῦ χ, ἀλλ' ἐνῷ τὸ χ ἔγεινεν ἄφαντον, ἔμεινεν ἄτοπον προφανέστατον ὅτι ὁ 108 εἶναι ἴσος μὲ τὸ μηδέν. Τὸ δὲ ἄτοπον τοῦτο εἶναι φανερὸν ὅτι πηγάζει ἐκ τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος, καὶ ἐὰν τὸ ἐν αὐτῇ $\frac{\chi}{3}$ τραπῇ εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{4\chi}{12}$, ἑνωθῇ μὲ τὸ $\frac{5\chi}{12}$ εἰς $\frac{9\chi}{12}$, καὶ τούτου διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ 3, οὕτω ἀναφαίνεται καὶ αὐτὴ ἄτοπος· διότι τρέπεται εἰς

$$\frac{3\chi}{4}+40=\frac{3\chi}{4}+49,$$

ἐν ᾗ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς ἂν τεθῇ ἀντὶ χ, ἀκέραιος ἢ κλασματικός, θετικὸς ἢ ἀντιθετικός, ἀδύνατον νὰ γείνωσι τὰ μέλη ἴσα, ἀλλὰ θέλουσι διαφέρει πάντοτε κατὰ 9. Λοιπὸν οὐδεὶς ἀριθμὸς ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, καὶ ἐπομένως οὐδεὶς ἀριθμὸς εὑρίσκεται ἀντὶ τοῦ ζητουμένου, διότι ἡ ἐξίσωσις εἶναι πιστὴ μετάφρασις τῆς ἐκθέσεως. Λοιπὸν τὸ $0=108$ σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι παντάπασιν ἀδύνατον, ἤτοι ὅτι δὲν ὑπῆρξαν, οὐδὲ δύνανται νὰ ὑπάρξωσι τὰ λεγόμενα ἐν τῇ ἐκθέσει· ὡσαύτως καὶ ἡ ἐξίσωσίς του εἶναι ἀδύνατος.

101. *Πόσα ἐσκότωσεν ἐρωτηθεὶς κυνηγός τις ἀπεκρίθη, Τὰ ἡμίσεα τῶν ὅσα ἐσκότωσα ὑπερβαίνουσι κατὰ 5 τὸ τρίτον τῶν ὅσα προχθὲς ἐσκότωσα, τὸ δὲ προχθεσινὸν κυνήγιόν μου εἶναι κατὰ 5 ὀλιγώτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἡμίσεος τοῦ τωρινοῦ· πόσα ἐσκότωσεν ὁ κυνηγὸς καὶ τώρα καὶ προχθές;*

Ἔστω χ τὸ τωρινὸν κυνήγιον καὶ ω τὸ προχθεσινόν· αἱ ἐξισώσεις του εἶναι αὗται

$$\frac{\chi}{2}=\frac{\omega}{3}+5, \qquad \omega=\frac{3\chi}{2}-5.$$

Θέτοντες δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἀντὶ ω τὸ ἐκ τῆς δευτέρας ἰσοδύναμόν του ἔχομεν

$$\frac{\chi}{2}=\frac{\frac{3\chi}{2}-5}{3}+5=\frac{3\chi-10}{6}+5,$$
$$3\chi=3\chi-10+30$$
$$3\chi-3\chi=30-10$$
$$0=20.$$

Καὶ ἐνταῦθα κατηντήσαμεν εἰς ἄτοπον ἰσότητα χωρὶς νὰ εὕρωμεν τίνα ἀριθμὸν παριστάνει τὸ χ. Εἶναι δὲ τὸ ἄτοπον τοῦτο συνέπεια ἢ τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων ἢ τῶν δύο ὁμοῦ. Ἀλλ' ἡ μὲν πρώτη μεταποιεῖται εἰς ταύτην $3\chi-2\omega=30$, ἡ δὲ δευτέρα εἰς ταύτην $3\chi-2\omega=10$, ὧν οὐδετέρα καθ' αὑτὴν ἐμπεριέχει τι ἄτοπον, ἀλλὰ μάλιστα ὡς ἔχουσα δύο ἀγνώστους ἑκατέρα ἐπαληθεύεται διὰ πολλῶν καὶ διαφόρων ἀριθμῶν· αἱ δὲ δύο ὁμοῦ εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπαληθεύωνται διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀντὶ χ καὶ ω, διότι, ἐνῷ τὰ πρῶτά των μέλη εἶναι τὰ αὐτά, τὰ δεύτερα εἶναι ἄνισα. Λοιπὸν τὸ $0=20$ ὡς συνέπεια τῶν δύο ὁμοῦ εἶναι σημεῖον ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἤτοι τὰ ἐν τῷ προβλήματι εἶναι ἀδύνατα, καὶ τοῦτο διότι τὸ πρῶτον δεδομένον μὲ τὸ δεύτερον, ἤτοι ἡ πρώτη ἐξίσωσις μὲ τὴν δευτέραν δὲν συμβιβάζονται, ἀλλ' ἀντιφάσκουσιν· ἐνῷ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι τὸ ἄτοπον $0=108$ ἐσήμαινεν ὅτι τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως δὲν ἦτον δυνατὸν νὰ κατασταθῶσιν ἴσα δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ χ.

102. Τὸ ἤδη γνωστὸν ἄτοπον $\alpha=0$ ἀπαντᾶται καὶ ἐν τῇ λύσει πλειοτέρων ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, καὶ δεικνύει πάντοτε, ὅταν ὀρθῶς κατασκευάζωνται αἱ ἐξισώσεις καὶ ἀλανθάστως λύωνται, ὅτι τὸ πρόβλημα, ὅθεν πορίζονται

αἱ ἐξισώσεις, εἶναι ἀδύνατον, καὶ τοῦτο διότι τὰ δεδομένα τὰ χρησιμεύοντα εἰς κατασκευὴν μιᾶς τινος ἐξισώσεως εἶναι ἀσυμβίβαστα ἢ ἀντιφατικὰ μὲ τὰ χρησιμεύοντα εἰς καταρτισμὸν ἄλλης τινὸς ἐξισώσεως, ἢ ἄλλων δύο ἐξισώσεων κτλ. Ἐκ δὲ τῶν προηγουμένων ὁδηγούμενός τις θέλει δύνασθαι μετὰ προσοχῆς ἐρευνῶν ν' ἀνεύρῃ ποῖα εἶναι τ' ἀντιφατικά.

Π. χ. ἂν λύσῃ τὰς ἐξισώσεις ταύτας

$$\chi+3\psi-6\omega-6\upsilon=7,\ 2\chi+\psi-4\omega-2\upsilon=15,$$
$$4\chi-\psi-5\omega+5\upsilon=30,\ 5\chi+10\psi-22\omega-20\upsilon=39,$$

ἀπαλείφων μὲν πρῶτον τὸ ψ ἐκ τῆς δευτέρας καὶ ἑκάστης τῶν ἄλων τριῶν, θέλει εὑρεῖ

$$5\chi-6\omega=8,\ 6\chi-9\omega+3\upsilon=45,\ 15\chi-18\omega=111,$$

ἀπαλείφων δὲ τὸ ω ἐκ τῆς πρώτης καὶ ἑκατέρας τῶν ἄλλων, θέλει εὑρεῖ

$$6\upsilon-3\chi=66,\quad 0=87\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ $0=87$ πηγάζει ἐκ τῶν

$$5\chi-6\omega=8 \text{ καὶ } 15\chi-18\omega=111,$$

αἵτινες ἐπορίσθησαν ἐκ τῆς πρώτης δευτέρας καὶ τετάρτης, θέλει συμπεράνει ὅτι αὐταὶ αἱ τρεῖς εἶναι ἀσυμβίβαστοι, τὸ δὲ πρόβλημα, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐπήγασαν, ἀδύνατον.

103. Καὶ τὸ σύμβολον $\alpha=0$ καὶ τὸ $\chi=-\alpha$ δεικνύουσιν ὅτι τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ προβλήματος εἶναι ἀσυμβίβαστα ἢ ἀντιφατικά, καὶ ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον τοιοῦτον ὁποῖον ἐπροτάθη. Ἀλλὰ διαφέρουσι κατὰ τοῦτο, ὅτι τὸ μὲν $\chi=-\alpha$ ἐπιδεικνύει ὅτι, ἂν τὸ ζητούμενον ἐννοηθῇ ἀντιθέτως παρ' ὅπως ζητεῖται ἐν τῇ ἐκθέσει, τότε ἐκλείπει ἡ ἀντίφασις, συμβιβάζονται τὰ πρότερον ἀσυμβίβαστα καὶ τὸ πρόβλημα γίνεται δυνατόν, ἂν ἡ φύσις τῶν δεδομένων τὸ ἐπιτρέπει (ἰδὲ καὶ τὸ 79 πρόβλ). Τὸ δὲ $\alpha=0$ σημαίνει ὅτι οὔτε ὁποῖος ζητεῖται ἀριθμὸς οὔτε ἀντίθετος αὐτοῦ κατασταίνει τὸ πρόβλημα δυνατόν, διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς δύναται νὰ ἐπαληθεύῃ τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει· λοιπὸν εἶναι σημεῖον τοῦ κατὰ πάντα τρόπον ἀδυνάτου.

104. Ἀπροσδιορίστου δὲ προβλήματος οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοὶ ἂν ζητῶνται ἀκέραιοι, εἴπομεν ἐν ἀρ. 85 μίαν περίπτωσιν, καθ' ἣν γνωρίζεται τὸ ἀδύνατον. Ἀλλ' ὅταν αὕτη δὲν ὑπάρχῃ, τότε ἐκ τῶν τύπων τῶν ἀπροσδιορίστων δυνάμεθα νὰ τὸ καταλάβωμεν, ὡς ἐδῶ λέγομεν. Ἔστω εἰς λύσιν τοῦτο τὸ πρόβλημα·

Ἵν' ἀποτελέσωμεν μῆκος 23 παλαμῶν μὲ ἐφεξῆς τεθειμένους κανόνας τοὺς μὲν 5 παλαμῶν μακρούς, τοὺς δὲ 7, πόσους ἐξ ἑκατέρων πρέπει νὰ θέσωμεν;

Ἂν χ ἦναι τῶν πρώτων ὁ ἀριθμὸς καὶ ω ὁ τῶν δευτέρων, ἔχομεν $5\chi+7\omega=23$,

ὅθεν $\chi=6-7\tau$, $\omega=5\tau-1$.

Καὶ ἂν μὲν τὸ $\tau=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$

ἔχομεν $\chi=6,-1,-8,-15\ldots$

$\omega=-1,\ 4,\ 9,\ 14\ldots$

ἂν δὲ τὸ $\tau=-1,-2,-3\ldots$

ἔχομεν $\chi=13,\ 20,\ 27\ldots$

$\omega=-6,-11,-16\ldots$

Ἐνταῦθα βλέπομεν ὅτι, ὅτε τὸ προσδιόρισμα τοῦ χ εἶναι θετικόν, τὸ τοῦ ω εἶναι ἀντιθετικόν, καὶ τἀνάπαλιν. Ἐκ δὲ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι ἀδύνατον τὸ πρόβλημα ὅπως ἐπροτάθη, διότι ἀκέραιοι κανόνες καὶ θεμένοι κατὰ σειράν, ἐὰν ἦναι ὅσον λέγονται ἐν τῇ ἐκθέσει μακροί, ἀδύνατον ν' ἀποτελέσωσι μῆκος 23 παλαμῶν. Ἂν ὅμως ἐκληφθῶσιν οἱ ἑπταπάλαμοι ἀντιθέτως ἢ οἱ πενταπάλαμοι, ἤγουν ἂν οἱ πενταπάλαμοι τεθῶσι κατὰ σειρὰν καὶ ἀπὸ τὸ μῆκος αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τὸ μῆκος τῶν ἑπταπαλάμων, ἢ τἀνάπαλιν, τότε γίνεται δυνατὸν καὶ μάλιστα κατὰ μυρίους διαφόρους τρόπους ἀληθεύει· ἀλλὰ δὲν ζητεῖται τοῦτο.

105. *Τὸ ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ 10 καὶ τὰ δύο τρίτα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ καὶ τοῦ 20 καὶ τὰ πέντε ἕκτα τῆς ὑπεροχῆς αὐτοῦ ὑπὲρ τὸν 34 ἐξισοῦνται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ὑπὲρ τὸν 5 ὑπεροχῆς αὐτοῦ· τίς εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;*

Η ἐξίσωσις τούτου τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{x+10}{2}+\frac{2(x+20)}{3}+\frac{5(x-34)}{6}=2(x-5),$$

ἥτις λυομένη παρέχει κατὰ σειρὰν

$$3x+30+4x+80+5x-170=12x-60$$
$$3x+4x+5x-12x=170-80-30-60$$
$$0=0.$$

Ἐνταῦθα κατηντήσαμεν εἰς ταυτότητα χωρὶς νὰ προσδιορισθῇ τί εἶναι τὸ x, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Διατί ἄρά γε τοῦτο;

Ἐπανερχόμενοι βλέπομεν ὅτι τὸ $0=0$ προῆλθεν ἐκ τοῦ ὅτι ἐν τῇ προτέρᾳ ἐξισώσει τὸ κεφάλαιον τῶν μὲ τὸ x θετικῶν ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀντιθετικὸν ὅρον $-12x$, ὡσαύτως καὶ ὁ 170 μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀντιθετικῶν γνωστῶν ὅρων· τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι ἐν τῇ ἔτι προτέρᾳ ἐξισώσει καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν μὲ τὸ x ὅρων τοῦ πρώτου μέλους καὶ ἡ διαφορὰ τῶν γνωστῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι ἴσα τὸ μὲν μὲ τὸν $12x$ τοῦ δευτέρου μέλους, τὸ δὲ μὲ τὸν -60 τοῦ αὐτοῦ. Τοῦτο δὲ μέλλει νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἐν τῇ τοῦ προβλήματος ἐξισώσει, ἂν καὶ δὲν εἶναι εὔκολον νὰ τὸ διακρίνωμεν, διότι ἡ ἀκεραίωσίς της δὲν μετέβαλε τὰ μέλη. Καὶ τῷ ὄντι τοῦτο βλέπει τις, ἂν καταστάθωσιν οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους ὁμώνυμοι, ἐκτελεσθῶσιν οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ αἱ προσθέσεις, ἵνα κατασταθῇ ἁπλούστερον τὸ πρῶτον μέλος χωρὶς νὰ μεταβληθῇ. Διότι τὸ πρῶτον μέλος οὕτω καταντᾷ εἰς τὸ $\frac{12x-60}{6}$, τὸ ὁποῖον διαιρέσει διὰ 6 γίνεται $2x-10$, τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δεύτερον μέλος, ἀφοῦ ἐκτελεσθῇ ὁ σημειωμένος πολλαπλασιασμός. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ ἐπαληθεύηται δι' ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ x, καὶ ἐπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς δὲν εἶναι εἷς μόνος, ἀλλὰ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς ὁ ζητούμενος· ὥστε μένει ἀπροσδιόριστος αὐτός. Διὰ τοῦτο ὀνομάζονται καὶ τὸ πρόβλημα καὶ ἡ ἐξίσωσίς του, ἥτις κυρίως εἶναι ἰσότης (ἰδὲ ἀρ. 7), ἀπροσδιόριστα.

Λοιπὸν τὸ ἀπαντώμενον ἐν τῇ λύσει προβλήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ $0=0$ εἶναι σημεῖον ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

106. *Δύο χωρικαὶ εἶχον ἐν τοῖς καλαθίοις αὐτῶν ᾠά, καὶ τὰ μὲν τῆς πρώτης ἦσαν ὀλιγώτερα τῶν τριῶν δευτέρων τῶν τῆς ἄλλης κατὰ 15, τὰ δὲ τῶν τῆς δευτέρας ἡμίσεα ὑπερέβαινον τὸ τρίτον τῶν τῆς πρώτης κατὰ 5· πόσα εἶχεν ἑκατέρα;*

Αἱ ἐξισώσεις τούτου τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\chi=\frac{3\omega}{2}-15,\quad \frac{\omega}{2}=\frac{\chi}{3}+5.$$

Θέτοντες δὲ τὸ ἐκ τῆς πρώτης ἰσοδύναμον τοῦ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ κτλ, εὑρίσκομεν

$$\frac{\omega}{2}=\frac{\frac{3\omega}{2}-15}{3}+5=\frac{3\omega-30}{6}+5$$

$$3\omega=3\omega-30+30$$

$$3\omega-3\omega=30-30$$

$$0=0.$$

Ἐνταῦθα τὸ $0=0$ εἶναι συνέπεια τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ ὄχι τῆς ἑτέρας αὐτῶν, διότι τὰ μέλη ἑκατέρας δὲν εἶναι τὰ αὐτὰ ὡς ἐν τῇ τοῦ προηγουμένου προβλήματος. Καὶ ἐπειδή, ἀφοῦ ἀκεραιωθῶσιν αἱ ἐξισώσεις, μετατεθῶσιν οἱ μὲ τοὺς ἀγνώστους ὅροι εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἀλλαχθῶσι τῶν μελῶν τῆς πρώτης τὰ σημεῖα, τρέπονται εἰς ταύτας

$$3\omega-2\chi=30$$

$$3\omega-2\chi=30,$$

βλέπει τις ὅτι αἱ τοῦ προβλήματος ἐξισώσεις φαίνονται ὅτι εἶναι διάφοροι, ἀληθῶς δὲ εἶναι μία καὶ ἡ αὐτή· ὥστε, ἐνῷ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἀγνώστους, τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει δὲν εἶναι φύσεως τοιαύτης, ὥστε νὰ κατασκευασθῶσι δύο πάντη διάφοροι ἐξισώσεις, ἀλλὰ κυρίως μία καὶ ἡ αὐτή· λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, ὡς ἔχον δύο ἀγνώστους καὶ μίαν ἐξίσωσιν (ἰδὲ ἀρ. 81).

Το σημεῖον $0=0$ λοιπὸν σημαίνει καὶ ἐνταῦθα ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, ἀλλὰ τοῦτο διότι ἀντὶ δύο ἐξισώσεων διαφόρων ἔχει δύο ἐξισώσεις, αἵτινες εἶναι συνέπεια ἡ ἑτέρα τῆς ἄλλης, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἔχει κυρίως μίαν.

107. Τὸ σημεῖον $0=0$ ἀπαντᾶται καὶ ἐν τῇ λύσει πλειοτέρων ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, καὶ σημαίνει πάντοτε ὅτι τὸ πρόβλημα, τοῦ ὁποίου εἶναι ἐξισώσεις, εἶναι ἀπροσδιόριστον διὰ τοῦτο, ὅτι ἔχει κατὰ τὸ φαινόμενον τόσας διαφόρους ἐξισώσεις, ὅσους καὶ ἀγνώστους, ἀληθῶς ὅμως ἔχει ὀλιγωτέρας· διότι μία τις αὐτῶν θέλει εἶσθαι συνέπεια ἄλλης τινὸς αὐτῶν ἢ ἄλλων δύο κτλ. +

Π. χ. ἂν λυθῶσιν αἱ τέσσαραις αὗται ἐξισώσεις

$$\chi+3\psi-6\omega-6\upsilon=8,\quad 2\chi+5\psi-10\omega-9\upsilon=12,$$
$$2\chi+4\psi-8\omega-9\upsilon=14,\quad 5\chi+12\psi-24\omega-24\upsilon=34,$$

ἀπαλειφομένου μὲν τοῦ χ ἐκ τῆς πρώτης καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων, εὑρίσκονται

$$\psi-2\omega-3\upsilon=4,\quad 2\psi-4\omega-3\upsilon=2,\quad 3\psi-6\omega-6\upsilon=6,$$

ἀπαλειφομένου δὲ τοῦ υ ἐκ τούτων, εὑρίσκονται

$$2\omega-\psi=2,\quad \psi-2\omega=-2,$$

ἀπαλειφομένου δὲ τοῦ ψ ἐκ τούτων, εὑρίσκεται

$$0=0,$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι μία τις εἶναι συνέπεια τῶν ἄλλων τριῶν, διότι εὑρέθη ἐν τῇ τελευταίᾳ ἀπαλείψει.

Πληροφορεῖται δέ τις ὅτι ἡ τετάρτη εἶναι συνέπεια τῶν τριῶν ἄλλων ὁμοῦ, ὑποθέτων τὸ υ γνωστόν, λύων τὰς τρεῖς πρώτας ἐξισώσεις, καὶ θέτων ἐν τῇ τετάρτῃ ἀντὶ χ, ψ, ω τοὺς ὁποίους θέλει εὑρεῖ τύπους αὐτῶν. Οὕτω θέλει εὑρεῖ $0=0$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι οἱ ἐκ τῶν τριῶν πρώτων ἐξισώσεων προσδιοριζόμενοι ἀριθμοὶ ἀντὶ $χ$, $ψ$ καὶ $ω$, ἀπροσδιορίστου ὄντος τοῦ $υ$, ταυτοποιοῦσι καὶ τὴν τετάρτην· λοιπὸν ἡ τετάρτη εἶναι συνέπεια τῶν τριῶν πρώτων ὁμοῦ. Λοιπὸν κυρίως εἶναι τρεῖς αἱ ἐξισώσεις, καὶ τὸ πρόβλημα, ὅθεν ἐπήγασαν αὗται, εἶναι ἀπροσδιόριστον.

Ἀρκοῦσι ταῦτα περὶ τῶν μερικῶν προβλημάτων, μεταβαίνομεν δὲ τώρα καὶ εἰς τὰ γενικά.

Περὶ διεπιλύσεως τῶν γενικῶν προβλημάτων.

108. Ὅταν πρόκηται νὰ λυθῶσι γενικὰ προβλήματα, οἷα τὰ ἐν ἀρ. 57, 58, 59, σπανιώτατα δύναται νὰ συμβῇ ἐν τῇ λύσει τῶν ἐξισώσεών των ἀπαντηθῶσι τὰ προηγούμενα σύμβολα, ἀλλὰ συνήθως εὑρίσκεται ἀντὶ ἑκάστου ἀγνώστου τύπος τις. Μετὰ τὴν εὕρεσιν ὅμως ἑκάστου τύπου εἶναι ἀνάγκη πολλάκις νὰ μερικοποιῶμεν τὸ γενικὸν πρόβλημα (6), καὶ τότε τὰ ἐν τῷ τύπῳ γράμματα προσδιορίζονται διαφόρους προσδιορισμούς, ἐκ τῶν ὁποίων προέρχεται μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων τὸ τοῦ ἀγνώστου μερικὸν προσδιόρισμα, τὸ παριστάνον τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τοῦ μερικοῦ προβλήματος. Ἀλλ' ἐνταῦθα διά τινας προσδιορισμοὺς προκύπτουσι πολλάκις τῶν ἀγνώστων προσδιορίσματα ἰδιόμορφα χρείαν ἔχοντα ἐξηγήσεως τί σημαίνουσιν· ἀλλὰ καὶ τὰ μέχρι τοῦδε γνωστὰ εἶναι καλὸν νὰ ἐπιβεβαιῶνται ὅτι σημαίνουσι τὰ ἐν τοῖς προηγουμένοις εἰρημένα. Τὸ προσδιορίζειν λοιπὸν πάντα προσδιορισμὸν τὰ ἐν ἑκάστῳ τύπῳ γράμματα καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ἑρμηνεύειν τὰ διάφορα τοῦ ἀγνώστου προκύπτοντα προσδιορίσματα, καὶ οὕτω πως ἐξετάζειν τὸ γενικὸν πρόβλημα καθ' ὅλας του τὰς διαφόρους περιπτώσεις καλοῦμεν *διεπιλύειν τὸ γενικὸν πρόβλημα*. Τ' ἀκόλουθα παραδείγματα θέλουσι σαφηνίσει τὰ λεγόμενα καὶ θέλουσιν ὁδηγήσει ἕκαστον εἰς τὸ πῶς νὰ διεπιλύῃ πᾶν ἄλλο πρόβλημα.

109. *Ὄντος Κ τινὸς α ἐτῶν καὶ ἄλλου τινὸς Π β ἐτῶν, πότε ὁ λόγος τῆς τοῦ Κ ἡλικίας πρὸς τὴν τοῦ Π εἶναι ν;*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μετὰ χ ἔτη· τότε ὁ μὲν Κ θέλει εἶσθαι $\alpha+\chi$ ἐτῶν, ὁ δὲ Π $\beta+\chi$, ἡ δὲ πρώτη ἡλικία θέλει εἶσθαι ἴση μὲ τὴν δευτέραν ἐπὶ τὸν λόγον ν, ἤτοι

$$\alpha+\chi=\nu(\beta+\chi).$$

Λύοντες δὲ ταύτην τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\alpha-\beta\nu}{\nu-1}.$$

Διεπίλυσις. Τὰ α, β καὶ ν δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσι πλείστους διαφόρους προσδιορισμούς, ἀλλ' αὐτοὶ γενικώτερον θεωρούμενοι θέλουσιν εἶσθαι τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἦναι $\nu>1$, ἢ $\nu<1$, ἢ $\nu=1$, καὶ $\alpha>\beta\nu$, ἢ $\alpha<\beta\nu$, ἢ $\alpha=\beta\nu$· συνδυάζοντες δὲ ταῦτα, τοὺς πολυαρίθμους προσδιορισμοὺς ἀνάγομεν εἰς τὰ ἑξῆς ἑπτὰ εἴδη, $\alpha>\beta\nu$ καὶ $\nu>1$, $\alpha<\beta\nu$ καὶ $\nu<1$, $\alpha>\beta\nu$ καὶ $\nu<1$, $\alpha<\beta\nu$ καὶ $\nu>1$, $\alpha\lessgtr\beta\nu$ καὶ $\nu=1$, $\alpha=\beta\nu$ καὶ $\nu=1$, $\alpha=\beta\nu$ καὶ $\nu\gtrless 1$.

Πρῶτον μὲν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὲν διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν τοῦ Κ καὶ τοῦ Π πάντοτε εἶναι ἡ αὐτή, διότι ἐκ τῆς γεννήσεως τοῦ μικροτέρου αὐξάνουσι κατ' ἔτος καὶ αἱ δύο κατὰ μονάδα· ὁ δὲ λόγος αὐτῶν ἀδιακόπως μεταβάλλεται, διότι ὄντος ἔν τινι χρόνῳ τοῦ λόγου των ζ, ἐν ἄλλῳ χρόνῳ εἶναι ηὐξημέναι καὶ αἱ δύο ἡλικίαι ἤτοι οἱ ὅροι αὐτοῦ ἢ ἠλαττωμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τοῦτο δὲ μεταβάλλει τὸν λόγον. Εἶναι δὲ γνωστὸν (ἴδε ἀρ. 91) ὅτι, ἂν $\frac{\alpha}{\beta}<1$, αὐξανομένων τῶν ὅρων του κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, αὐξάνεται, ἐλαττουμένων δέ, ἐλαττοῦται· ἂν δὲ $\frac{\alpha}{\beta}>1$, ἀντιστρόφως αὐξανομένων τῶν ὅρων του κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἐλαττοῦται, ἐλαττουμένων δέ, αὐξάνεται· ἂν δὲ $\frac{\alpha}{\beta}=1$, οὔτ' ἡ αὔξησις οὔτ' ἡ ἐλάττωσις τὸν μεταβάλλει.

Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ r παριστάνει τὸν λόγον τῆς ζητουμένης ἡλικίας τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π, ὅταν μὲν $r>1$, ἐκ τῶν ζητουμένων ἡλικιῶν ἡ τοῦ K ὑποτίθεται μεγαλητέρα τῆς τοῦ Π· ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνεται ὅτι καὶ ἡ ἐνεστῶσα τοῦ K ἡλικία εἶναι μεγαλητέρα τῆς τοῦ Π, ἤτοι $a>b$ ἢ $\frac{a}{b}>1$. Ὅταν δὲ $r<1$, τότε ὑποτίθεται ἡ τοῦ K ἡλικία μικροτέρα τῆς τοῦ Π, ἤτοι $a<b$ ἢ $\frac{a}{b}<1$. Ὅταν δὲ $r=1$, τότε ὑποτίθεται ὅτι $a=b$ ἢ $\frac{a}{b}=1$. Ὥστε διὰ τοῦ τοιούτου προσδιορισμοῦ τοῦ r κυρίως προσδιορίζεται καὶ ἡ ἐνεστῶσα ἡλικία τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π.

Ἔτι δὲ παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν σημειωθῇ ὁ λόγος $\frac{a}{b}$ διὰ π, τότε εἶναι ὁ $a=b\pi$, καὶ ὁ $a-br$ τρέπεται εἰς $b\pi-br$ ἢ $b(\pi-r)$, ἀφοῦ ἀντὶ a τεθῇ τὸ ἰσοδύναμόν του $b\pi$. Ἐκ δὲ τοῦ $a>br$, $a<br$ καὶ $a=br$ συμπεραίνεται ὅτι $\pi>r$, $\pi<r$; $\pi=r$; ἤτοι ὅτι ὁ τῶν ἐνεστωσῶν ἡλικιῶν λόγος π εἶναι μεγαλήτερος τοῦ τῶν ζητουμένων r, ἢ μικρότερος, ἢ ἴσος.

Τελευταῖον παρατηροῦμεν ὅτι ὑποθέσαντες πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος ὅτι μετὰ χ ἔτη θέλουσιν ἔχει αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον r, ἀκριβῶς θεωρουμένου τοῦ πράγματος, ὑπεθέσαμεν δύο τινά, πρῶτον ὅτι εἶναί ποτε χρόνος, καθ' ὃν ἔχουσιν αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον r, καὶ δεύτερον ὅτι αὐτὸς εἶναι μετὰ τὸ ἐνεστώς, ἐνῷ ταῦτα ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος, ὡς θέλομεν ἰδεῖ.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἃς ἐξετάσωμεν κατὰ σειρὰν τὰ συμβαίνοντα καθ' ὅλα τὰ ἑπτὰ διάφορα εἴδη τῶν προσδιορισμῶν, καὶ πρῶτον ὅταν $a>br$ καὶ $r>1$. Τότε ἐκ μὲν τοῦ τύπου πορίζεται θετικὸς ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ χ· ἐπειδὴ δ' ἐκ μὲν τοῦ $r>1$ προσδιορίζεται ὅτι ἡ τοῦ K ἐνεστῶσα ἡλικία a εἶναι μεγαλητέρα τῆς τοῦ *Π* ἡλικίας β, ἐκ δὲ τοῦ $\alpha > \beta\nu$ ὅτι ὁ λόγος ν εἶναι μικρότερος τοῦ τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ π, τὸ γενικὸν πρόβλημα τρέπεται εἰς τὸ μερικώτερον τοῦτο,

Ὁ Κ ἔχει α ἡλικίαν μεγαλητέραν τῆς β τοῦ Π ἡλικίας, πότε ἡ τοῦ Κ πρὸς τὴν τοῦ Π ἔχει λόγον μικρότερον τοῦ ἐνεστῶτος;

καὶ δῆλον ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι χρόνῳ θέλει συμβῇ τοῦτο. Διότι, ἀφοῦ $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, ἐὰν αὐξηθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἐλαττοῦται ἕως νὰ γείνῃ ἴσος μὲ τὸν ν. Λοιπὸν αἱ ἐν ἀρχῇ ὑποθέσεις, ὅτι μετὰ χ ἔτη θέλουσιν ἔχει αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον ν, συμβιβάζονται μὲ τὰς τελευταίας $\alpha > \beta\nu$ καὶ $\nu > 1$, καὶ ἐπομένως ὁ ἀντὶ τοῦ χ προκύπτων ἐκ τοῦ τύπου του θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἁρμόζων εἰς τὸ προσδιωρισμένον ὡς ἀνωτέρω πρόβλημα.

β΄. Ὅταν δὲ $\alpha < \beta\nu$ καὶ $\nu < 1$, καὶ τότε ἐκ μὲν τοῦ τύπου τοῦ χ πορίζεται ἀριθμὸς θετικός· ἐπειδὴ δ' ἐκ μὲν τοῦ $\nu < 1$ προσδιορίζεται ἡ τοῦ *Κ* ἡλικία α μικροτέρα τῆς β τοῦ *Π*, ἐκ δὲ τοῦ $\alpha < \beta\nu$ ὅτι ὁ λόγος ν εἶναι μεγαλήτερος τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ π, τὸ γενικὸν πρόβλημα προσδιορίζεται οὕτως,

Ὁ Κ ἔχει α ἡλικίαν μικροτέραν τῆς β τοῦ Π, πότε ἡ τοῦ Κ πρὸς τὴν τοῦ Π ἔχει λόγον μεγαλήτερον τοῦ τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν των;

καὶ δῆλον ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι χρόνῳ θέλει συμβῇ τοῦτο. Διότι, ὄντος $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ἐὰν αὐξηθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐξάνει ἕως νὰ γείνῃ ἴσος μὲ τὸ ν. Λοιπὸν οἱ προσδιορισμοὶ $\alpha < \beta\nu$ καὶ $\nu < 1$ συμβιβάζονται μὲ τὰς ἐν ἀρχῇ ὑποθέσεις ὡς καὶ ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει. Λοιπὸν ὁ ἀντὶ τοῦ χ πορίζόμενος ἐκ τοῦ τύπου του θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἁρμόζων εἰς τὸ προσδιωρισμένον δεύτερον πρόβλημα.

γ'. Ὅταν δὲ $a > \beta\nu$ καὶ $\nu < 1$, τότε ἐκ μὲν τοῦ τύπου τοῦ χ προκύπτει ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς, τὸ δὲ γενικὸν πρόβλημα προσδιορίζεται οὕτως,

Ὄντος τοῦ μὲν Κ α ἐτῶν, τοῦ δὲ Π β ἐτῶν, ἀλλὰ μεγαλητέρου τὴν ἡλικίαν παρὰ τὸν Κ, πότε ἡ τοῦ Κ ἡλικία ἔχει πρὸς τὴν τοῦ Π λόγον ν μικρότερον τοῦ τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν των;

δῆλον δὲ ὅτι τοῦτο ὑπῆρξεν ἐν τῷ παρελθόντι. Διότι, ἀφοῦ ὁ λόγος $\frac{a}{\beta} < 1$, πρέπει ν' ἀφαιρῆται ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἵνα εὑρεθῇ μικρότερον κλάσμα, ὃ ἐστιν ἐν τῷ προτέρῳ τοῦ ἐνεστῶτος χρόνου αἱ ἡλικίαι εἶχον τὸν λόγον ν. Ἀλλ' ὁ τύπος τοῦ χ εὑρέθη κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἤτι ἐν τῷ μέλλοντι θέλουσιν ἔχει αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον ν, κατὰ δὲ τοὺς ἀνωτέρω προσδιορισμοὺς ἐν τῷ παρελθόντι εἶχον τὸν λόγον ν· λοιπὸν ὁ ἐκ τοῦ τύπου τοῦ χ ποριζόμενος ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς δεικνύει ὅτι μὲ τοὺς νέους προσδιορισμοὺς $a > \beta\nu$ καὶ $\nu < 1$ δὲν συμβιβάζεται ἡ ἐν ἀρχῇ γενομένη ὑπόθεσις, ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι αἱ ἡλικίαι θέλουσιν ἔχει τὸν λόγον ν. Λοιπὸν τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα τοῦ τύπου τοῦ χ σημαίνει ὅτι αἱ ἡλικίαι θέλουσιν ἔχει τὸν λόγον ν ἐν τῷ ἀντιθέτῳ χρόνῳ ἐκείνου, καθ' ὃν ἁρμόζει τὸ θετικὸν προσδιόρισμα τοῦ τύπου τοῦ χ.

δ'. Ὅταν δὲ $a < \beta\nu$ καὶ $\nu > 1$, καὶ τότε ἐκ μὲν τοῦ τύπου τοῦ χ προκύπτει ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς, τὸ δὲ γενικὸν πρόβλημα προσδιορίζεται οὕτως,

Ἐνῷ ἡ τοῦ Κ ἡλικία α ἦναι μεγαλητέρα τῆς β ἡλικίας τοῦ Π, πότε ἡ τοῦ Κ πρὸς τὴν τοῦ Π ἡλικίαν ἔχει λόγον ν μεγαλήτερον τοῦ τωρινοῦ $\frac{a}{\beta}$;

τοῦτο δὲ δῆλον ὅτι ὑπῆρξεν ἐν τῷ παρελθόντι. Διότι, ἀφοῦ $\frac{a}{\beta} > 1$, πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοὺς δύο του ὅρους ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἵνα εὑρεθῇ ἄλλος μεγαλήτερος κλασματικός. τουτέστιν ἐν τῷ παρελθόντι χρόνῳ εἶχον αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον ν. Ἀλλ᾽ ὁ τύπος τοῦ χ εὑρέθη κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ ἀντιθέτου χρόνου· λοιπὸν ἡ ἐν ἀρχῇ ὑπόθεσις δὲν συμβιβάζεται μὲ τοὺς νέους προσδιορισμοὺς $\alpha < \beta\nu$ καὶ $\nu > 1$, καὶ τοῦτο δεικνύει ὁ ἐκ τοῦ τύπου προκύπτων ἀντιθετικὸς ἀριθμός. Λοιπὸν τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα τοῦ χ δεικνύει ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π ἔχει τὸν λόγον ν ἐν τῷ ἀντιθέτῳ χρόνῳ ἐκείνου, καθ᾽ ὃν ἁρμόζει τὸ θετικὸν προσδιόρισμα τοῦ τύπου τοῦ χ.

ι. Ὅταν δὲ $\alpha \gtrless \beta\nu$ καὶ $\nu = 1$, τότε ἐκ τοῦ τύπου προκύπτει $\frac{+\mu}{0}$ ἢ $\frac{-\mu}{0}$, σημειωθείσης τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta\nu$ διὰ $+\mu$ ἢ $-\mu$, καὶ πρέπει ἔτι νὰ διαιρεθῇ τὸ $+\mu$ ἢ τὸ $-\mu$ διὰ 0, ἵνα εὑρεθῇ τὸ προσδιόρισμα τοῦ τύπου τοῦ χ. Ἀλλὰ τί σημαίνει νὰ διαιρεθῇ ἀριθμός τις διὰ τοῦ 0, καὶ τί εἶναι τὸ πηλίκον; Ἰδοὺ πῶς δύναταί τις νὰ ἐννοήσῃ ταῦτα.

Εἶναι γνωστὸν ἤδη ὅτι ὅσον μικρότερος τῆς μονάδος εἶναι ὁ διαιρέτης, ἤτοι ὅσον πλειότερον προσεγγίζει εἰς τὸ 0, τόσον μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου εἶναι τὸ πηλίκον· π. χ. ἂν ὁ διαιρέτης ἦναι κατὰ σειρὰν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κτλ. τὸ πηλίκον τοῦ μ δι᾽ αὐτῶν θέλει εἶσθαι 10μ, 100μ, 1000μ κτλ. Ἀκολουθοῦντες λοιπὸν αὐτὴν τὴν σειρὰν βλέπομεν ὅτι, ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι μικρότατος καὶ σχεδὸν 0, τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι μέγιστον καὶ σχεδὸν ἄπειρον. Ἐκ δὲ τούτου δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ μ διὰ 0 εἶναι *ἄπειρον*. Τὸ δὲ ἄπειρον σημειοῦται καὶ διὰ τοῦ 8 ὁριζοντίως τιθεμένου οὕτω ∞· ὥστε $\chi = \frac{+\mu}{0} = +\infty$, καὶ $\chi = \frac{-\mu}{0} = -\infty$.

Ἐκ δὲ τούτου πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π ἡλικίαν ἔχει τὸν λόγον ν μετ᾽ ἄπειρα ἔτη ἢ πρὸ ἀπείρων ἐτῶν, ἤγουν ὅτι ἀδύνατον αἱ ἡλικίαι των νὰ ἔχωσί ποτε τὸν λόγον ν.

Καὶ τῷ ὄντι διὰ μὲν τοῦ προσδιορισμοῦ $\nu=1$ προσδιορίζεται ὅτι ὁ K καὶ ὁ Π ἔχουσι τώρα τὴν αὐτὴν ἡλικίαν, διὰ δὲ τοῦ $\alpha \gtrless \beta\nu$ ὅτι ὁ λόγος τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τοῦ λόγου τῶν ζητουμένων ἡλικιῶν, δηλ. ὅτι εἶναι ἄνισοι αἱ ἡλικίαι, τὸ ὁποῖον ἀντιφάσκει εἰς τὸ διὰ τοῦ πρώτου προσδιορισμοῦ προσδιοριζόμενον. Τὸ κατὰ τοὺς νέους λοιπὸν προσδιορισμοὺς τοῦτο πρόβλημα,

Ἔχοντος τοῦ K ἡλικίαν α διάφορον τῆς β τοῦ Π, πότε αἱ ἡλικίαι των εἶναι ἴσαι;

εἶναι ἀδύνατον, τὸ ὁποῖον ἄλλως εἶναι καὶ ἐκ τῆς ἐκθέσεώς του ἁπλῶς δῆλον.

Λοιπὸν τὸ σύμβολον $\frac{\mu}{0}$, καθ' αὑτὸ μὲν θεωρούμενον εἶναι σημεῖον ἀπείρως μεγάλου ποσοῦ, θετικοῦ ἢ ἀντιθετικοῦ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ μ, ὡς προσδιόρισμα δὲ τοῦ χ σημαίνει ὅτι εἶναι κατὰ πάντα τρόπον ἀδύνατον τὸ κατὰ τοὺς προσδιορισμοὺς $\alpha \gtrless \beta\nu$ καὶ $\nu=1$ μερικώτερον πρόβλημα.

ϛ'. Ὅταν δὲ $\alpha=\beta\nu$ καὶ $\nu=1$, τότε ὁ τύπος τρέπεται εἰς $\frac{0}{0}$, τοῦτο δὲ τὸ πηλίκον ἀνάγκη νὰ ἦναι τοσοῦτον, ὥστε πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 νὰ παράγῃ τὸν διαιρετέον 0. Ἀλλὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει πᾶς ἀριθμὸς θετικὸς καὶ ἀντιθετικός· λοιπὸν τὸ $\frac{0}{0}$ εἶναι σύμβολον παραστατικὸν παντὸς ἀριθμοῦ.

Ἐκ τούτου λοιπὸν πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι προσδιόρισμα τοῦ χ εἶναι πᾶς ἀριθμός, ἤτοι ὅτι τὸν λόγον ν αἱ ἡλικίαι τοῦ K καὶ τοῦ Π ἔχουσι καὶ τώρα καὶ μετέπειτα καὶ προτήτερα. Καὶ τῷ ὄντι τὸ $\nu=1$ δεικνύει ὅτι καὶ αἱ τωριναὶ ἡλικίαι των εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ζητούμεναι ὡσαύτως· τὸ δὲ $\alpha=\beta\nu$ δεικνύει ὅτι ὁ λόγος ν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν των, δηλ. δεικνύει ὅ,τι καὶ τὸ $\nu=1$· ἀφοῦ δ' αἱ ἡλικίαι αἱ τωριναὶ εἶναι ἴσαι, δῆλον ὅτι καὶ πρότερον καὶ ὕστερον καὶ πάντοτε αἱ ἡλικίαι των εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ πρόβλημα ἀπροσδιόριστον.

Τὸ προσδιόρισμα λοιπὸν $\frac{0}{0}$ τοῦ τύπου χ ὡς παριστάνον πάντα ἀριθμὸν εἶναι σημεῖον ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

ζ΄. Ὅταν δὲ $\alpha=\beta\nu$ καὶ $\nu \gtrless 1$, τότε ὁ τύπος τοῦ χ τρέπεται εἰς $\frac{0}{\mu}$, ὑποτεθέντος τοῦ $\nu-1=\mu$, τὸ δὲ $\frac{0}{\mu}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ 0, διότι τὸ μετὸν τοῦ 0 εἶναι καὶ αὐτὸ 0. Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι τώρα αἱ ἡλικίαι ἔχουσι τὸν λόγον ν, τὸ ὁποῖον γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τῶν προσδιορισμῶν $\alpha=\beta\nu$ καὶ $\nu \gtrless 1$.

110. *Δύο κινητὰ σώματα Κ καὶ Λ κινοῦνται ὁμαλῶς, τὸ μὲν μὲ α ταχύτητα, τὸ δὲ μὲ β, ἐπὶ τῆς ἀπεράτου εὐθείας ΧΨ, διευθυνόμενα πρὸς τὸ Ψ καὶ τὰ δύο· εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι τὸ Κ φθάνει εἴς τι γνωστὸν σημεῖον Α τῆς ΧΨ εὐθείας ω ὥρας πρὶν φθάσῃ τὸ Λ εἰς ἄλλο γνωστὸν τῆς αὐτῆς εὐθείας σημεῖον Β, ἀπέχον τοῦ Α στάδια δ· ποῦ τῆς εὐθείας ΧΨ θέλουσιν ἐνταμωθῇ τὰ κινητὰ Κ καὶ Λ;*

Χ Α Β Ε Ψ.

Ὑποθέτομεν ὅτι κατὰ τὸ *Ε* σημεῖον τὸ δεξιὰ τοῦ *Β* θέλουσιν ἐνταμωθῇ, καὶ ὅτι ἄγνωστον χ εἶναι τὸ διάστημα *ΒΕ*. Τὸ διάστημα *ΑΕ* εἶναι ἴσον μὲ $AB+BE$ ἢ $\delta+\chi$, τὸ ὁποῖον διατρέχει τὸ *Κ* ἐν $\frac{\delta+\chi}{\alpha}$ ὥραις· ἐν δὲ τῷ αὐτῷ τούτῳ χρόνῳ τὸ *Λ* διατρέχει ἕν τι διάστημα ἐν ω ὥραις μέχρισοῦ φθάσῃ εἰς τὸ *Β*, καὶ ἔτι τὸ διάστημα *ΒΕ* ἤτοι χ ἐν $\frac{\chi}{\beta}$ ὥραις. Ὥστε θέλομεν ἔχει

$$\frac{\delta+\chi}{\alpha}=\omega+\frac{\chi}{\beta},\qquad \frac{\delta+\chi}{\alpha}-\frac{\chi}{\beta}=\omega,$$

ὅθεν πορίζεται $$\chi=\frac{\beta(\delta-\alpha\omega)}{\alpha-\beta}.$$

Ἐκ τῶν $\alpha>\beta$, $\alpha<\beta$ καὶ $\alpha=\beta$ προσδιορίζεται ὅτι τὸ K εἶναι ταχύτερον τοῦ A, ἀργότερον αὐτοῦ καὶ ἰσοταχὲς μὲ αὐτό· ἐκ δὲ τῶν $\delta>\alpha\omega$, $\delta<\alpha\omega$, καὶ $\delta=\alpha\omega$ προσδιορίζεται ἡ πρὸς ἄλληλα θέσις τοῦ K καὶ τοῦ A κατὰ τὸ τέλος τῶν ω ὡρῶν, ὅτε τὸ A εἶναι ἐν τῷ B. Ἵνα ἐννοηθῇ δὲ τοῦτο, παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ α εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ K καὶ ω εἶναι ὧραί τινες, τὸ γινόμενον $\alpha\omega$ παριστάνει ὅσον διάστημα διατρέχει τὸ K ἐν ω ὥραις. Τὸ διάστημα δὲ τοῦτο ἀρχίζει ἐκ τοῦ A, ὅπου εἶναι τὸ K ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν ω ὡρῶν, καὶ τελειόνει πρὸ τοῦ B, ὅταν $\delta>\alpha\omega$, ἢ ἐκεῖθεν τοῦ B, ὅταν $\delta<\alpha\omega$, ἢ κατὰ τὸ B, ὅταν $\delta=\alpha\omega$, ὄντος τοῦ διαστήματος AB. Ἀλλὰ κατὰ τὸ τέλος τῶν ω ὡρῶν τὸ A εἶναι ἐν τῷ B· λοιπὸν ἐν τῷ τέλει τῶν ω ὡρῶν, ἐνῷ τὸ A εἶναι κατὰ τὸ B, τὸ K εἶναι ἢ κατόπιν του, ἢ ἔμπροσθέν του, ἢ ὁμοῦ μὲ αὐτό, κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ δ πρὸς τὸ $\alpha\omega$.

ά. Ὅταν μὲν λοιπὸν $\delta>\alpha\omega$ καὶ $\alpha>\beta$, ἢ $\delta<\alpha\omega$ καὶ $\alpha<\beta$, ὁ τύπος τοῦ χ θέλει εἶσθαι θετικὸς ἀριθμός, καὶ δῆλον ὅτι τότε θέλουσιν ἐνταμωθῇ τὰ κινητὰ K καὶ A δεξιὰ τοῦ B, ὅπως ὑπετέθη κατ' ἀρχάς. Διότι ἐκ μὲν τοῦ $\delta>\alpha\omega$ προσδιορίζεται ὅτι τὸ K εἶναι κατόπιν τοῦ A, ἐνῷ τοῦτο εἶναι ἐν τῷ B, ἐκ δὲ τοῦ $\alpha>\beta$ ὅτι τὸ K εἶναι ταχύτερόν τοῦ A· ἐπειδὴ δὲ τὸ ταχύτερον εἶναι κατόπιν, μέχρι τοῦ B δὲν ἠνταμώθησαν τὰ κινητά, ἀλλὰ θέλουσιν ἐνταμωθῇ πέραν αὐτοῦ. Ὡσαύτως ἐκ τῶν $\delta<\alpha\omega$ καὶ $\alpha<\beta$ προσδιορίζεται ὅτι τὸ K εἶναι ἀργότερον τοῦ A καὶ ὅτι εἶναι ἔμπροσθεν αὐτοῦ, ὅτε αὐτὸ εἶναι ἐν τῷ B· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀργότερον εἶναι ἔμπροσθεν, δῆλον ὅτι μέχρι τοῦ B δὲν ἠνταμώθησαν, ἀλλ' ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ πέραν αὐτοῦ.

Ὡσαύτως καὶ ἐκ τῶν $\delta < \alpha\omega$ καὶ $\alpha < \beta$ προσδιορίζεται ὅτι τὸ K εἶναι ἀργότερον τοῦ A καὶ ὅτι εἶναι ἔμπροσθεν αὐτοῦ, ὅτε αὐτὸ εἶναι ἐν τῷ B. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀργότερον εἶναι ἔμπροσθεν, δῆλον ὅτι μέχρι τοῦ B δὲν ἠνταμώθησαν, ἀλλ' ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῆ πέραν αὐτοῦ.

β'. Ὅταν δὲ $\delta > \alpha\omega$ καὶ $\alpha < \beta$, ἢ $\delta < \alpha\omega$ καὶ $\alpha > \beta$, ὁ τύπος τοῦ χ θέλει εἶσθαι ἀντιθετικὸς ἀριθμός, καὶ δῆλον ὅτι τότε ἠνταμώθησαν τὰ κινητὰ K καὶ A ἀριστερὰ τοῦ B, ἤτοι κατὰ τὴν ἀντίθετον θέσιν τῆς ἐν ἀρχῇ ὑποτεθείσης. Διότι καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις προσδιορίζεται ὅτι, ὅτε τὸ A εἶναι ἐν τῷ B, τὸ ταχύτερον τῶν δύο εἶναι ἔμπροσθεν τοῦ ἀργοτέρου, τὸ ὁποῖον δεικνύει ὅτι πέραν τοῦ B δὲν εἶναι δυνατὸν πλέον νὰ ἐνταμωθῶσιν, ἀλλ' ὅτι ἠνταμώθησαν ἀριστερὰ τοῦ B, διότι κινούμενα τὰ κινητὰ ἐπὶ ἀπεράτου εὐθείας, πρὶν τὸ ταχύτερον ἐξαπεράσῃ τὸ ἀργότερον, ἦτον ἐν μιᾷ στιγμῇ ὁμοῦ καὶ τὰ δύο.

γ'. Ὅταν δὲ $\delta \gtrless \alpha\omega$ καὶ $\alpha = \beta$, ὁ τύπος μεταμορφοῦται εἰς $\frac{\pm\mu}{0}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει τὸ ἄπειρον, καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι εἰς τὸ ἄπειρον τὰ κινητὰ ἐνταμόνονται, ἤτοι ὅτι ποτὲ δὲν ἐνταμόνονται. Καὶ τῷ ὄντι, ἐπειδή, ὅτε τὸ A εἶναι ἐν τῷ B, τὸ K εἶναι ἔμπροσθέν του ἢ ὄπισθέν του, ἔχουσι δὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, διὰ τοῦτο ποτὲ δὲν ἐνταμόνονται.

δ'. Ὅταν δὲ $\delta = \alpha\omega$ καὶ $\alpha = \beta$, ὁ τύπος γίνεται $\frac{0}{0}$, τὸ ὁποῖον παριστάνει πάντα ἀριθμόν, καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου συμπεραίνεται ὅτι πανταχοῦ εἶναι ὁμοῦ τὰ κινητά. Καὶ τῷ ὄντι, ἀφοῦ, ὅτε τὸ A εἶναι ἐν τῷ B, εἶναι καὶ τὸ K ἐν τῷ B, ἤτοι εἶναι ὁμοῦ τὰ δύο ἐκεῖ, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, δῆλον ὅτι πανταχοῦ καὶ πάντοτε εἶναι ὁμοῦ.

έ. Ὅταν δὲ $\delta=\alpha\omega$ καὶ $\alpha\lessgtr\beta$, τότε ὁ τύπος τοῦ χ εἶναι ἴσος μὲ τὸ 0, ἐκ τοῦ ὁποίου συμπεραίνεται ὅτι ἐνταμόνονται τὰ κινητὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν B. Καὶ τῷ ὄντι, τὸ $\delta=\alpha\omega$ σημαίνει ὅτι εἶναι ὁμοῦ τὰ δύο ἐν τῷ B, καὶ τὸ $\alpha\gtrless\beta$ ὅτι ἔχουσι διάφορον ταχύτητα· ὥστε μόνον ἐν τῷ B εἶναι ὁμοῦ καὶ ὄχι ἐν ἄλλῳ σημείῳ τῆς εὐθείας $X\Psi$.

111. Ἔστω εἰς διεπίλυσιν καὶ τὸ 125 πρόβλημα, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις εἶναι αὗται

$$\chi+\omega=\gamma,\quad \frac{\chi}{\alpha}+\frac{\omega}{\beta}=1,$$

αἵτινες λυθεῖσαι παρέχουσι

$$\chi=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta},\qquad \omega=\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha-\beta}.$$

Ἐνταῦθα παρατηρητέον ὅτι, ἐὰν τὰ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ χ προσδιορισθῶσιν οὕτω, $\gamma>\beta$ καὶ $\alpha>\beta$, ἢ $\gamma<\beta$ καὶ $\alpha<\beta$, τότε δύναταί τις νὰ προσδιορίσῃ καὶ τὸ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ ω $\alpha-\gamma$ ἢ $\alpha>\gamma$ ἢ $\alpha<\gamma$· διότι κατὰ τοὺς εἰρημένους προσδιορισμοὺς καὶ τὸ γ καὶ τὸ α εἶναι ἢ μεγαλήτερα ἢ μικρότερα τοῦ β, ἀλλὰ δὲν προσδιορίζεται καὶ πότερον εἶναι μεγαλήτερον, τὸ α τοῦ γ ἢ τὸ γ τοῦ α. Ἀλλ' ἐὰν τὰ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ χ προσδιορισθῶσιν οὕτω, $\gamma>\beta$ καὶ $\alpha<\beta$, ἢ $\gamma<\beta$ καὶ $\alpha>\beta$, τότε ἕπεται ὅτι κατὰ μὲν τοὺς πρώτους προσδιορισμοὺς τὸ $\gamma>\alpha$, κατὰ δὲ τοὺς δευτέρους τὸ $\gamma<\alpha$, καὶ ἂν ἤθελε προσδιορίσει τις ἄλλως ταῦτα, ἤθελε καταντήσει εἰς φανερὰν ἀντίφασιν. Ὡσαύτως δὲ καὶ ὅταν $\gamma=\beta$ καὶ $\alpha=\beta$, ἕπεται ὅτι $\gamma=\alpha$. Παρομοίως καὶ ὅταν $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma\gtrless\beta$, τότε ἕπεται ὅτι καὶ $\gamma\gtrless\alpha$. Τελευταῖον δὲ τὰ $\gamma=\beta$, $\alpha=\gamma$ καὶ $\alpha\gtrless\beta$ δὲν ἔχουσι χώραν, ὡς ἀντιφατικά.

ά. Ὅταν μὲν λοιπὸν $\gamma>\beta$, καὶ $\alpha>\beta$, ἐὰν καὶ $\alpha>\gamma$, τότε καὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ω ὁ τύπος εἶναι θετικός· ὡσαύτως δὲ καὶ ὅταν $\gamma<\beta$, $\alpha<\beta$, καὶ ἐνταυτῷ $\alpha<\gamma$. Κατὰ τὰς δύο δὲ ταύτας περιπτώσεις προσδιορίζεται ὅτι τὰ τῶν δύο εἰδῶν νομίσματα τοῦ τραπεζίτου ἔχουσι διάφορον ἀξίαν, $a \lessgtr b$, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων γ εἶναι μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ a καὶ τοῦ b, οὕτω δὲ τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν. Διότι, προκειμένου νὰ δώσῃ ὁ τραπεζίτης ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου νομίσματα ἐκ τῶν δύο εἰδῶν, θέλει δώσει ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους ὀλιγώτερα τῶν a ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3 κτλ, τὸ δὲ ἰσότιμον τοῦ 1, 2, 3 κτλ θέλει δώσει ἐκ τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους. Ἀλλ' ἂν $a > b$, ἡ ἀξία ἑνὸς τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἑνὸς τῶν τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ διὰ τοῦτο θέλει δώσει ὀλιγώτερα· ὥστε τὰ τοῦ πρώτου εἴδους ὁμοῦ μὲ τὰ τοῦ δευτέρου θέλουσιν ἀποτελέσει κεφάλαιον μικρότερον τοῦ a. Ὡσαύτως δὲ γίνεται φανερὸν καὶ ὅτι θέλει εἶσθαι τὸ κεφάλαιον τοῦτο μεγαλήτερον τοῦ b. Ἐὰν δὲ $a < b$, ἡ ἀξία ἑνὸς τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους εἶναι μικροτέρα τῆς ἑνὸς τῶν τοῦ πρώτου, καὶ θέλει δώσει περισσότερα· ὥστε τὸ κεφάλαιον τῶν τοῦ πρώτου εἴδους καὶ τῶν τοῦ δευτέρου νομισμάτων θέλει εἶσθαι μεγαλήτερον τοῦ a. Ὡσαύτως δὲ δεικνύεται καὶ ὅτι τὸ αὐτὸ κεφάλαιον θέλει εἶσθαι μικρότερον τοῦ b.

Λοιπόν, ἐνῷ ὁ τύπος τοῦ χ καὶ ὁ τοῦ ω εἶναι θετικοὶ διὰ τοὺς προειρημένους προσδιορισμούς, διὰ τοὺς αὐτοὺς τὸ γενικὸν πρόβλημα μερικοποιεῖται οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι δυνατόν, ἐκτὸς μόνον ὅταν τὰ προσδιορίσματα δὲν ἦναι ἀκέραια.

β'. Ὅταν δὲ $\gamma > b$ καὶ $a > b$, ἀλλὰ τὸ $a < \gamma$, ἢ ὅταν $\gamma < b$ καὶ $a < b$, ἀλλὰ τὸ $a > \gamma$, τότε ὁ μὲν τοῦ χ τύπος θέλει εἶσθαι θετικός, ὁ δὲ τοῦ ω ἀντιθετικός. Διὰ τῶν προσδιορισμῶν δὲ τούτων προσδιορίζεται ὅτι τὰ τῶν δύο εἰδῶν νομίσματα τοῦ τραπεζίτου ἔχουσι διάφορον ἀξίαν, ἀλλ' ὅτι τὰ ζητούμενα γ εἶναι ἢ πλειότερα καὶ τῶν a καὶ τῶν b, ἢ ὀλιγώτερα καὶ τῶν a καὶ τῶν b, οὕτω δὲ τὸ πρόβλημα καθίσταται ἀδύνατον. Διότι, μέλλων νὰ δώσῃ ὁ τραπεζίτης νομίσματα τῶν δύο εἰδῶν, θέλει δώσει, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, πλειότερα μὲν τῶν a, ὀλιγώτερα δὲ τῶν b, ἢ ὀλιγώτερα μὲν τῶν α, πλειότερα δὲ τῶν β, ἀδύνατον δὲ τὰ ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου ζητούμενα γ ἐκ τῶν δύο εἰδῶν νὰ ἦναι ἢ πλειότερα ἢ ὀλιγώτερα καὶ τῶν α καὶ τῶν β.

Γίνεται δὲ δυνατὸν, ἂν τὰ τοῦ δευτέρου εἴδους νομίσματα ἐννοηθῶσιν ἀντιθέτως, διότι τοῦ ω τὸ προσδιόρισμα εἶναι ἀντιθετικόν· δηλ, ἂν δώσῃ ὁ τραπεζίτης τόσα τοῦ πρώτου εἴδους νομίσματα, ὅσα παριστάνει κατὰ ταύτας τὰς περιπτώσεις τοῦ τύπου τοῦ χ τὸ προσδιόρισμα, λάβῃ δὲ παρὰ τοῦ εἰς ὃν δώσῃ τὰ τοῦ πρώτου εἴδους τόσα ἐκ τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους, ὅσα παριστάνει τοῦ τύπου τοῦ ω τὸ προσδιόρισμα θετικὸν θεωρούμενον. Ἀλλὰ τοῦτο μεταβάλλει τὸ πρόβλημα εἰς ἄλλο πάντῃ διάφορον.

γ'. Ὅταν δὲ $\gamma>\beta$ καὶ $\alpha<\beta$, ὁπότε $\alpha<\gamma$, ἢ ὅταν $\gamma<\beta$ καὶ $\alpha>\beta$, ὁπότε $\alpha>\gamma$, τότε ὁ μὲν τύπος τοῦ χ θέλει εἶσθαι ἀντιθετικὸς, ὁ δὲ τοῦ ω θετικὸς, καὶ αἱ περιπτώσεις αὗται εἶναι ὅμοιαι καὶ αἱ προηγούμεναι (β').

Λοιπὸν, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν τύπων, ὁ τοῦ χ ἢ ὁ τοῦ ω, διὰ τοὺς προσδιορισμοὺς τῶν ἐν αὐτοῖς γραμμάτων ἀποβαίνῃ ἀντιθετικὸς, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· ἐκτὸς μόνον ἐὰν ἐννοηθῇ ἀντιθέτως τὸ ὑπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων παριστανόμενον, ὁπότε τὸ πρόβλημα μεταβάλλεται εἰς ἄλλο.

δ'. Ὅταν δὲ $\gamma>\beta$ καὶ $\alpha=\beta$, ὁπότε καὶ $\alpha<\gamma$, ἢ ὅταν $\gamma<\beta$ καὶ $\alpha=\beta$, ὁπότε καὶ $\alpha>\gamma$, τότε οἱ δύο τύποι μεταμορφοῦνται εἰς $\frac{\pm\mu}{0}$ καὶ $\frac{\pm\pi}{0}$, οἵτινες δεικνύουσιν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι κατὰ πάντα τρόπον ἀδύνατον. Καὶ τῷ ὄντι, ἀφοῦ τὰ τῶν δύο εἰδῶν νομίσματα ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀξίαν $\alpha=\beta$, δῆλον ὅτι α μόνον πρέπει νὰ δοθῶσιν ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου· ἀλλὰ ζητοῦνται γ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀλιγώτερα ἢ πλειότερα τῶν α· λοιπὸν ζητεῖται ἀδύνατον.

ε. Ὅταν δὲ $\gamma=\beta$, $\alpha=\beta$, ὁπότε καὶ $\alpha=\gamma$, τότε οἱ δύο τύποι μεταμορφοῦνται εἰς $\frac{0}{0}$, τὸ ὁποῖον δεικνύει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, ὡς τῷ ὄντι εἶναι. Διότι καὶ τὰ δύο εἴδη τῶν νομισμάτων ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀξίαν, καὶ ζητεῖται νὰ δώσῃ ὁ τραπεζίτης α νομίσματα ἐκ τῶν δύο εἰδῶν ἀντὶ ἑνὸς φθωνίου, διότι $\gamma=\alpha=\beta$· δύναται λοιπὸν νὰ δώσῃ ὅσα θέλει ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ἀρκεῖ μόνον τὸ κεφάλαιόν των νὰ ἦναι α.

Σημ. Πρὸς γύμνασιν ἂς διαπιλυθῶσι καὶ τὸ 124 πρόβλημα καὶ τὸ 126, ἔτι δὲ καὶ τὸ 86, ὁποῖον εἶναι ἐν ἀρ. 77.

112. Τῶν ἀγνώστων τῶν προηγουμένων προβλημάτων οἱ τύποι, διότι ἦσαν κλασματικοὶ, καὶ διότι ἔμελλε νὰ γείνῃ ἀφαίρεσις καὶ ἐν τῷ ἀριθμητῇ καὶ ἐν τῷ παρονομαστῇ, ἐπροσδιορίσθησαν πέντε διαφόρους προσδιορισμοὺς, δηλ. θετικοὶ, ἀντιθετικοὶ, ἴσοι μὲ τὸ 0, ἄπειροι καὶ ἀπροσδιόριστοι, ἐκ τῶν ὁποίων ἐσυμπεράναμεν ὅτι τὰ προβλήματα ἐμερικοποιοῦντο κατὰ πέντε διαφόρους τρόπους. Ἀλλ' ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι τῶν ἀγνώστων ἄλλων προβλημάτων οἱ τύποι δυνατὸν νὰ ἦναι ἁπλούστεροι, οἷοι εἶναι οἱ ἀκόλουθοι,

$$\chi=\alpha+\beta,\ \chi=\alpha-\beta,\ \chi=\frac{\alpha-\beta}{\gamma},\ \chi=\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\ \text{κτλ},$$

οἵτινες δὲν εἶναι ἐπιδεκτικοὶ ὅλων τῶν προηγουμένων προσδιορισμάτων, ἀλλ' ἄλλοι ἄλλων, καί τινες μόνον τοῦ θετικοῦ. Τῶν τοιούτων δὲ προβλημάτων ἡ διεπίλυσις εἶναι περιωρισμένη καὶ πολὺ ἁπλουστέρα, θέλει γίνεσθαι δὲ πάντοτε καθ' ἃ εἴπομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις.

113. Εἴδομεν διεπιλύοντες τὰ προηγούμενα προβλήματα ὅτι τὸ σύμβολον $\frac{\mu}{0}$ κυρίως σημαίνει ὅτι εἶναι παντάπασιν ἀδύνατον τὸ ἐξ οὗ πηγάζει πρόβλημα, καὶ κατὰ τοῦτο συμφωνεῖ μὲ τὸ $\alpha=0$, τὸ ὁποῖον εὕρομεν ἐν τῇ λύσει τῶν μερικῶν προβλημάτων· τὸ $\frac{0}{0}$ δὲ σημαίνει ὅτι τὸ ἐξ οὗ πηγάζει πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, συμφωνεῖ δὲ μὲ τὸ ἐν τῇ λύσει τῶν μερικῶν εὑρεθὲν $0=0$. Ἀλλὰ δὲν εἶναι πάντοτε τὸ $\frac{0}{0}$

σημεῖον ἀπροσδιορισίας, ὡς εἶναι τὸ $0=0$. Ἐὰν π. χ. λύοντες ἐξίσωσίν τινα ἠθέλαμεν εὑρεῖ

$$\chi=\frac{6(\omega^2-4)}{8(\omega-2)},$$

ὅπου τὸ ω ἐπιδέχεται διαφόρους προσδιορισμούς, ὅταν τὸ $\omega=2$, ὁ τύπος τρέπεται εἰς $\frac{0}{0}$, καὶ ἠθέλαμεν σφάλει νομίζοντες ὅτι, ὅταν τὸ ω ἦναι ἴσον 2, τὸ χ εἶναι ἀπροσδιόριστον, διότι τοῦ συμβόλου τούτου αἴτιον εἶναι ἄλλο. Δηλαδὴ ὁ τύπος τοῦ χ δύναται νὰ γραφθῇ καὶ οὕτω

$$\chi=\frac{6(\omega+2)(\omega-2)}{8(\omega-2)},$$

ἀναγομένου τοῦ ω^2-4 εἰς τοὺς παράγοντάς του· ἐπειδὴ δὲ ὁ $\omega-2$ εἶναι κοινὸς παράγων τῶν δύο ὅρων, ἐὰν ἐξαλειφθῇ, μένει

$$\chi=\frac{6(\omega+2)}{8},$$

καὶ ὅταν $\omega=2$, γίνεται $\chi=3$, καὶ ὄχι $\frac{0}{0}$. Ὅτι δὲ 3 εἶναι τὸ ἀληθὲς προσδιόρισμα τοῦ χ, ὅταν $\omega=2$, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν τὸ ω προσδιορισθῇ κατὰ σειρὰν ἄλλους προσδιορισμοὺς μεγαλητέρους ἢ μικροτέρους τοῦ 2, ἤτοι 5, 4, 3, ἢ 0,01, 0,1, 1 κτλ, πορίζεται καὶ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐκ τοῦ ἁπλουστέρου τύπου ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ χ, ἤτοι $5\frac{1}{4}$, $4\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$, ἢ 1,5075, 1,575, 2,25. Ἐκ τούτου δὲ ὀρθῶς δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι, καὶ ὅταν $\omega=2$, τὸ χ εἶναι ἴσον 3, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκ τοῦ δευτέρου τύπου, καὶ ὅτι τὸ κωλῦον νὰ εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ καὶ ἐκ τοῦ πρώτου εἶναι ὁ κοινὸς παράγων $\omega-2$, ὅστις ὡς ἴσος μὲ 0 μετατρέπει καὶ τὸν τύπον εἰς $\frac{0}{0}$. Λοιπὸν τὸ $\frac{0}{0}$ εἶναι σημεῖον ὅτι οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου τύπου ἔχουσι κοινόν τινα παράγοντα, ὅστις, ὅταν $\omega=2$, γίνεται ἴσος μὲ τὸ 0.

Ὡσαύτως καὶ οἱ κλασματικοὶ

$$\frac{3\omega^2-3}{2\omega-2},\qquad \frac{\omega^2-2\omega+1}{3\omega^2-3},\qquad \frac{3\omega^2-3}{\omega^2-2\omega+1},$$

τρέπονται εἰς $\frac{0}{0}$, ὅταν $\omega=1$· ἀλλ' ἂν, ἀναγομένων τῶν ὅρων εἰς τοὺς παράγοντάς των, γραφθῶσιν οὕτω,

$$\frac{3(\omega+1)(\omega-1)}{2(\omega-1)},\quad \frac{(\omega-1)(\omega-1)}{3(\omega+1)(\omega-1)},\quad \frac{3(\omega+1)(\omega-1)}{(\omega-1)(\omega-1)},$$

καὶ ἐξαλειφθῇ ὁ κοινὸς τῶν δύο ὅρων παράγων $\omega-1$, ὅταν $\omega=1$, ὁ μὲν γίνεται 3, ὁ δὲ 0, ὁ δὲ ∞.

Ἱκανὰ εἶναι ταῦτα νὰ δείξωσιν ὅτι τὸ $\frac{0}{0}$ δὲν εἶναι πάντοτε σημεῖον ἀπροσδιορισίας, ἀλλ' ἐνίοτε εἶναι καὶ σημεῖον ὅτι γίνεται 0 κοινὸς τῶν δύο ὅρων παράγων διά τινα γράμματός τινος προσδιορισμόν. Ὅταν λοιπὸν ἀπαντᾶται, πρέπει νὰ ἐξετάζῃ τις ἂν προέρχεται ἐκ τῆς μηδενίσεως κοινοῦ τινος παράγοντος, ἢ ἂν εἶναι σημεῖον ἀπροσδιορισίας.

114. Ἂς ἴδωμεν τώρα ὁποίαν μεταβολὴν λαμβάνει γενικὸν πρόβλημα, ἐὰν τὰ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ ἀγνώστου του γράμματα μεταβληθῶσιν ἐκ θετικῶν εἰς ἀντιθετικά, καὶ τἀνάπαλιν.

Ἔστω εἰς λύσιν τὸ ἐν ἀρ. 58 δεύτερον πρόβλημα

Τυπογράφος παραλαμβάνει κτλ,

τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις, ὅταν ὑποτίθηται ὅτι ὁ στοιχειοθέτης μετὰ τὰς ν ἡμέρας λαμβάνει γ λεπτὰ, εἶναι αὕτη

$$a(\nu-\chi)-\beta\chi=\gamma,$$

ὅθεν

$$a\nu-a\chi-\beta\chi=\gamma$$
$$-a\chi-\beta\chi=-a\nu+\gamma$$
$$a\chi+\beta\chi=a\nu-\gamma$$
$$\chi=\frac{a\nu-\gamma}{a+\beta}.$$

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι μετὰ τὰς ν ἡμέρας ὁ στοιχειοθέτης δίδει γ λεπτὰ, τότε τὸ $\beta\chi$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $a(\nu-\chi)$, καὶ ἡ ἐξίσωσις θέλει κατασκευασθῇ ἢ ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ $a(\nu-\chi)$ ἀπὸ τὸ $\beta\chi$, καὶ τότε τὸ γ θέλει εἶσθαι θετικὸν, ἢ προτιμότερον, ἂν ἀφαιρεθῇ πάλιν τὸ $\beta\chi$ ἀπὸ τὸ $a(\nu-\chi)$, ἵνα τὸ γ ἦναι ἀντιθετικὸν, διότι παριστάνει ποσὸν ἀντίθετον τοῦ προτέρου, ἤτοι ὅσον δίδει, ἀντίθετον ὂν τοῦ ὅσον λαμβάνει. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν εἶναι $a(r-\chi)-\beta\chi=-\gamma$,

ὅθεν

$$ar-a\chi-\beta\chi=-\gamma$$

$$-a\chi-\beta\chi=-ar-\gamma$$

$$a\chi+\beta\chi=ar+\gamma$$

$$\chi=\frac{ar+\gamma}{a+\beta}.$$

Ἐντεῦθεν βλέπει τις ὅτι, ἐνῷ ἡ ἐξίσωσις αὕτη διαφέρει τῆς προηγουμένης μόνον καθότι τὸ γ ἐδῶ μὲν εἶναι ἀντιθετικόν, ἐκεῖ δὲ θετικόν, καὶ ὁ τύπος οὗτος τοῦ χ διαφέρει τοῦ προηγουμένου μόνον καθότι τὸ γ ἐδῶ ἔχει ἀντίθετον σημεῖον τοῦ ἐν ἐκείνῳ σημείου του, καὶ τοῦτο διότι αἱ πρὸς λύσιν πράξεις κατὰ μὲν τἆλλα εἶναι αἱ αὐταί, μόνον δὲ τοῦ γ τὸ σημεῖον ἀπαιτοῦσι ν' ἀλλαχθῇ.

Ἐκ τούτων λοιπὸν πληροφορούμεθα ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν διαφέρει μόνον καθότι τὸ γ ποσὸν εἶναι ἀντίθετον τοῦ ὅ,τι ἦτον ἐν τῇ πρώτῃ, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ κατασκευάσωμεν νέαν ἐξίσωσιν καὶ νὰ λύσωμεν αὐτήν, ἀλλὰ μόνον ν' ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἐν τῷ εὑρεθέντι κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τύπῳ γράμματος γ εἰς τὸ ἀντίθετόν του, καὶ οὕτως ὁ τύπος τρέπεται εἰς τὸν ἁρμόζοντα κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Σημ. Ἐὰν δὲ μετὰ τὰς r ἡμέρας δὲν ἔμελλε οὔτε νὰ λάβῃ οὔτε νὰ δώσῃ ὁ στοιχειοθέτης, ὁ αὐτὸς τύπος χρησιμεύει νὰ δείξῃ τὰς ἡμέρας τῆς ἀπουσίας, ἂν μόνον λογισθῇ τὸ $\gamma=0$.

Καὶ τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ προβλήματος

Δύο σώματα κτλ.

ἡ ὅτε διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος AB τὰ σώματα ἐξίσωσις εἶναι $\frac{\chi}{a}=\frac{\chi-\gamma}{\beta}$,

ὑποτεθέντος ὅτι χ εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ A μέχρι τοῦ τῆς ἐνταμώσεως σημείου διάστημα, καὶ τότε $\chi-\gamma$ εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ B μέχρι τοῦ αὐτοῦ σημείου διάστημα.

Ἐκ ταύτης δὲ πορίζεται $\lambda=\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\beta}$.

Ἂν δὲ τὸ ἐκ τοῦ Β σῶμα ἀλλάξῃ διεύθυνσιν, ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$\frac{X}{\alpha}=\frac{\Gamma-X}{\beta}$, ὅθεν πορίζεται $\lambda=\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$,

ὅστις διαφέρει τοῦ προηγουμένου μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ β, ἤτοι τῆς ταχύτητος τοῦ ἀλλάξαντος διεύθυνσιν. Διότι, μὴ ὑπάρχοντος ἐν τῷ τύπῳ γράμματος, τὸ ὁποῖον νὰ παριστάνῃ τὴν διεύθυνσιν, ἵνα ἐκείνου ἀλλαχθῇ τὸ σημεῖον, ἤλλαξε τὸ σημεῖον ἄλλου γράμματος, τὸ ὁποῖον σημαίνει πρᾶγμα στενὰ συνδεδεμένον μὲ τὴν διεύθυνσιν.

Λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τύπου τοῦ ἁρμόζοντος κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἀρκεῖ ν' ἀλλαχθῇ τὸ σημεῖον τοῦ γράμματος τοῦ παριστάνοντος ἐν τῷ εὑρεθέντι ἤδη τύπῳ τὴν ταχύτητα τοῦ ἀλλάξαντος διεύθυνσιν σώματος.

Καὶ ἀντιστρόφως λοιπὸν, ὅταν ἀλλάσσωμεν τὸ σημεῖον γράμματος, ὄντος ἔν τινι τύπῳ, μεταβάλλεται ὁ τύπος εἰς ἄλλον, ὅστις ἁρμόζει εἰς πρόβλημα διαφέρον τοῦ πρώτου, ὅθεν ἐπορίσθη ὁ τύπος, μόνον καθότι τὸ ποσὸν, τοῦ ὁποίου ἠλλάξαμεν τὸ σημεῖον, ἐννοεῖται ἀντιθέτως παρ' ὅπως ἐξελαμβάνετο πρότερον.

Κατὰ ταῦτα δ' ἐννοεῖται εὐκόλως τίνος προβλήματος ἄγνωστος ἔχει ἕνα τῶν τύπων

$$\frac{-\beta(\delta-\alpha\omega)}{\alpha+\beta},\quad \frac{\beta(\delta+\alpha\omega)}{-\alpha-\beta},\quad \frac{-\beta(\delta+\alpha\omega)}{-\alpha+\beta},\quad \frac{\beta(\delta+\alpha\omega)}{\alpha-\beta},$$

οἵτινες πορίζονται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἀρ 110, μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τοῦ β, ἢ τοῦ α, ἢ τοῦ β καὶ τοῦ α, ἢ μόνου τοῦ ω.

Τὸ δὲ οὕτω λύειν τὰ τοιαῦτα προβλήματα δῆλον ὅτι εἶναι ὠφελιμώτατον.

Ὠφέλιμον δὲ κρίνομεν καὶ τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τῶν ἐν τούτῳ τῷ κεφαλαίῳ.

ΚΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΠΟΛΥΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΟΡΩΝ, ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΡΙΖΟΣΗΜΩΝ.

Περὶ τῶν δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων.

Πρὶν ἐπιχειρήσωμεν τὴν λύσιν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων καὶ προβλημάτων, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ διαλάβωμεν περὶ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν πολυγραμμάτων ὅρων καὶ τῶν πολυόρων καὶ περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων.

115. Εἴπομεν ἐν τῷ Συμπληρώματι (83) ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας τετραγωνικὰς ἴσας μὲν κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, ἀντιθέτους δὲ, διότι ἑκατέρα τούτων πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν παράγει τὸν τετράγωνον ἀριθμόν· οἷον ἂν A ἦναι ὁποιοσδήποτε τετράγωνος ἀριθμὸς, ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, a δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς ῥίζης του, ῥίζα τετραγωνικὴ τοῦ A εἶναι καὶ ὁ $+a$ καὶ ὁ $-a$. Ἐὰν δὲ μεταχειριζόμενοι τὸ $\sqrt{\ }$ σημειώσωμεν αὐτὰς, πρὶν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν πρὸς εὕρεσίν των, συνήθως γράφομεν $\pm\sqrt{A}$, καὶ τότε τὸ $\sqrt{A}$ σημαίνει μόνον τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Ἀλλὰ καὶ μόνον τὸ $\sqrt{A}$, ἀκριβῶς θεωρουμένου τοῦ πράγματος, σημαίνει τὸ αὐτὸ καὶ τὸ $\pm\sqrt{A}$, διότι σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ A, αὕτη δὲ εἶναι καὶ θετικὴ καὶ ἀντιθετική.

Ὅταν δὲ παριστάνωμεν ῥίζαν ἀριθμοῦ δι' αὐτοῦ καὶ τοῦ ῥιζικοῦ οὕτω $\sqrt{A}$, ἐν τοῖς ἑξῆς τὸ $\sqrt{A}$ θέλομεν ὀνομάζει *ῥιζόσημον* καὶ ἰδίως ῥιζόσημον δευτεροβάθμιον, διότι σημαίνει ῥίζαν τετραγωνικήν. Μέχρι τοῦδε ὀνομάζεται αὐτὸ *ῥιζικόν*.

Εἶναι δ' εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὅτι ὁ τετράγωνος θετικὸς ἀριθμὸς A ἄλλην παρὰ τὰς δύο εἰρημένας τετραγωνικὰς ῥίζας δὲν ἔχει. Διότι σημειοῦντες διὰ χ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ A, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι, θέλομεν ἔχει τὸ χ^2 ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν A, ἤτοι

$\chi^2=A$, ἢ μεταθέσει τοῦ A, $\chi^2-A=0$.

Ἀλλὰ τὸ A δύναται νὰ ἐννοηθῇ καὶ ὡς τετράγωνον τῆς τετραγωνικῆς του ῥίζης, καὶ νὰ σημειωθῇ οὕτω $A=(\sqrt{A})^2$· λοιπὸν

$$\chi^2-(\sqrt{A})^2=0.$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων, ἀφοῦ ἀναχθῇ εἰς τοὺς παράγοντάς του, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\chi-\sqrt{A})(\chi+\sqrt{A})=0,$$

τὴν ὁποίαν δῆλον ὅτι οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ χ ταυτοποιεῖ παρὰ τὸν $+\sqrt{A}$ καὶ τὸν $-\sqrt{A}$. Λοιπὸν ὁ A ἔχει δύο ῥίζας ἴσας, ἀλλ' ἀντιθέτους, $+\sqrt{A}$ καὶ $-\sqrt{A}$ καὶ *μόνον* αὐτάς.

116. Θετικοῦ δὲ ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου B ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δι' ἀριθμοῦ νὰ παρασταθῇ εἶναι ἀδύνατον (Συμ. ἀρ. 68), καὶ διὰ τοῦτο τὴν ὠνομάσαμεν ἀνάριθμον, ἀλλ' ἀντ' αὐτῆς εἶναι ἐν χρήσει ἀριθμὸς προσεγγίζων ὅσον ἂν θέλωμεν εἰς αὐτήν, καὶ τὸν ὁποῖον εἴπομεν ἐκεῖ πῶς εὑρίσκομεν. Ἀλλ' ἐνῷ εἶναι ἀδύνατον μὴ τετραγώνου μερικοῦ ἀριθμοῦ νὰ εὑρεθῇ ἀκριβῶς ἡ ῥίζα, τὸ ῥιζόσημον $\sqrt{14}$ ἢ τὸ $\sqrt{B}$ παριστάνει ἀκριβέστατα τὴν τετραγωνικὴν τοῦ 14 ἢ τοῦ B ῥίζαν, (ἥτις πρέπει νὰ ἐννοηθῇ διπλῆ, θετικὴ καὶ ἀντιθετικὴ, ὡς καὶ τῶν τετραγώνων). διότι τὸ ῥιζόσημον παριστάνει τὴν ῥίζαν, ὁποία εἶναι, εἴτε ἐνάριθμος εἶναι εἴτε ἀνάριθμος.

117. Ἀντιθετικὸς δὲ ἀριθμὸς (Συμ. ἀρ 83) εἴδομεν ὅτι δὲν ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν, διότι οὔτε θετικὸν ποσὸν οὔτε ἀντιθετικὸν πολλαπλασιαζόμενον ἐφ' ἑαυτὸ δύναται νὰ παράγῃ ἀντιθετικὸν ἀριθμόν. Τὸ σύμβολον λοιπὸν τοῦτο $\sqrt{-A}$ εἶναι μὲν ῥιζόσημον δευτεροβάθμιον, ἀλλ' ἐνταυτῷ καὶ παραστατικὸν φανταστικοῦ, ἀνυπάρκτου, καὶ ἀπαντᾶται ὁσάκις ζητοῦνται ἀδύνατα, ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἐν τῷ ἀκολούθῳ κεφαλαίῳ.

Ἀλλ' ὡς τὸ $-A$ δύναται νὰ ἐννοηθῇ γινόμενον τοῦ A καὶ τοῦ -1, οὕτω καὶ τὸ $\sqrt{-A}$ δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς γινόμενο τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ A ἐπὶ τὸ $\sqrt{-1}$. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν τὸ $\sqrt{-A}$ γινόμενον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ A καὶ ἄλλου τινὸς ἀγνώστου παράγοντος ω, τῶν ῥιζῶν τοῦ A σημειωθεισῶν διὰ $+a$ καὶ διὰ $-a$, θέλομεν ἔχει

$$(+a\omega)^2 = -A, \text{ και } (-a\omega)^2 = -A,$$

ἢ ἀφοῦ τετραγωνισθῶσι τὰ πρῶτα μέλη (Συμ. ἀρ. 77),

$$a^2\omega^2 = -A, \text{ ἢ οὕτως } a^2\omega^2 = -1 \times A.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ a^2 εἶναι ἴσον A, ἔχομεν $A\omega^2 = -1 \times A$· διαιροῦντες δὲ διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος A τὰ δύο μέλη ἔχομεν

$$\omega^2 = -1, \text{ ὅθεν } \omega = \sqrt{-1},$$

διότι δύο τινῶν ἴσων καὶ αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι εἶναι ἴσαι. Τὸ $\sqrt{-1}$ λοιπὸν εἶναι ὁ παράγων, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἑκατέραν τῶν ῥιζῶν $+a$ καὶ $-a$ παράγει τὸ ἴσον μὲ τὸ

$$\sqrt{-A}, \text{ ἤτοι } \sqrt{-A} = \pm a\sqrt{-1}.$$

Σημ. Τὰ δευτεροβάθμια ῥιζόσημα λοιπὸν εἶναι τριῶν εἰδῶν· τὰ μὲν σημαίνουσιν ἐνάριθμα (115), τὰ δὲ ἀνάριθμα (116), τὰ δὲ εἶναι σύμβολα ἀνυπάρκτων. Τὰ μὲν τελευταῖα θέλομεν ὀνομάζει ἐν τοῖς ἑξῆς *ῥιζόσημα ἀνυπάρκτων*, τὰ δὲ δύο πρῶτα πρὸς ἀντιδιαστολὴν κοινῶς *ῥιζόσημα ὑπαρκτικά*, διότι καὶ αἱ θετικαὶ ῥίζαι καὶ αἱ ἀντιθετικαί, τὰς ὁποίας σημαίνουσι, παριστάνουσιν ὑπάρχοντα ποσά. Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς τοῦ a ἐπὶ $\sqrt{-1}$ εἶναι καὶ αὐτὸς φανταστικός, διότι ἀκριβῶς εἶναι ἀκατανόητον τί σημαίνει πολλαπλασιάζειν ἀνύπαρκτον ἢ ἐπὶ ἀνύπαρκτον.

Περὶ τετραγωνισμοῦ καὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυγραμμάτων ὅρων καὶ πολυόρων.

118. Εἴδομεν ἐν τῷ Συμπληρώματι (77) ὅτι *τὸ τετράγωνον ἀκεραίου πολυγραμμάτου ὅρου εἶναι γινόμενον τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν παραγόντων του*, καὶ ὅτι τὸ *τετρά-*

γωνον γράμματος μὲ δείκτην εἶναι αὐτὸ τὸ γράμμα μὲ δείκτην διπλάσιον, τὰ ὁποῖα εὐκόλως ἐννοεῖ τις καὶ ἐκ τούτων

$$(\pi\rho\sigma\ldots)^2=\pi\rho\sigma\ldots\times\pi\rho\sigma\ldots=\pi^2\rho^2\sigma^2\ldots$$

$$(a^\nu)^2=a^\nu\times a^\nu=a^{\nu+\nu}=a^{2\nu}.$$

Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ τετραγώνου πολυγραμμάτου ὅρου *πρέπει νὰ τετραγωνίζωμεν τὸν συνεργόντου, νὰ διπλασιάζωμεν ὅλους τοὺς δείκτας καὶ νὰ γράφωμεν ὅλα τὰ προκύπτοντα κατόπιν ἀλλήλων*. Οὕτως ἔχομεν

$$(4a^3\beta^2\gamma)^2=16a^6\beta^4\gamma^2,\quad (-\tfrac{3}{5}\mu^2\nu^3)^2=\tfrac{9}{25}\mu^4\nu^6.$$

119. Ἐκ δὲ τούτων βλέπομεν πρῶτον ὅτι ὅρος, ὅστις δὲν ἔχει τὸν συνεργόν του τετράγωνον ἢ ὅλους τῶν γραμμάτων του τοὺς δείκτας ἀρτίους, δὲν εἶναι τετράγωνος.

Ἔπειτα συμπεραίνομεν καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι *ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ὅλων τῶν παραγόντων του*, καὶ ὅτι πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυγραμμάτου ὅρου *πρέπει νὰ ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ συνεργοῦ του, νὰ διαιρῶμεν ὅλους τοὺς δείκτας διὰ 2 καὶ νὰ γράφωμεν τὰ προκύπτοντα κατόπιν ἀλλήλων*. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{\pi\rho\sigma\ldots}=\sqrt{\pi}\times\sqrt{\rho}\times\sqrt{\sigma},\quad \sqrt{9a^4\beta^2}=3a^2\beta,$$

$$\sqrt{\tfrac{49}{64}\gamma^6\delta^4\varepsilon^2}=\tfrac{7}{8}\gamma^3\delta^2\varepsilon.$$

120. *Τοὺς δὲ μὴ τετραγώνους ὅρους πρῶτον ἀνάγομεν, ἂν ἦναι δυνατὸν, εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ὧν ὁ ἕτερος νὰ ἦναι τετράγωνος, ὁ δὲ ἄλλος νὰ μὴ ἔχῃ τετράγωνον κανένα παράγοντα· ἔπειτα ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου, ὡς ἤδη εἴπομεν, σημειοῦμεν δὲ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ τὴν τοῦ μὴ τετραγώνου καὶ γράφομεν τὸ ῥιζόσημον κατόπιν τῆς ῥίζης τοῦ τετραγώνου*. Π. χ. ἐπειδὴ ὁ $50a^5\beta^2\gamma=2.25a^4a\beta^2\gamma=25a^4\beta^2\times 2a\gamma$, ἔχομεν

$$\sqrt{50a^5\beta^2\gamma}=\sqrt{25a^4\beta^2}\times\sqrt{2a\gamma}=5a^2\beta\sqrt{2a\gamma}.$$ Ὡσαύτως

$$\sqrt{45a^2\beta^3\gamma^2\delta}=\sqrt{9a^2\beta^2\gamma^2}\times 5\beta\delta=3a\beta\gamma\sqrt{5\beta\delta}.$$

$\sqrt{864a^2\beta^5\gamma^9}=\sqrt{144a^2\beta^4\gamma^8\times6\beta\gamma}=12a\beta^2\gamma^4\sqrt{6\beta\gamma}$.

$\sqrt{-49a^2\beta^4}=\sqrt{49a^2\beta^4\times-1}=7a\beta^2\sqrt{-1}$ (ἴδε καὶ 117).

$\sqrt{-8a^2\beta}=\sqrt{4a^2\times-2\beta}=2a\sqrt{-2\beta}$,

ἢ ἔτι $=2a\sqrt{2\beta\times-1}=2a\sqrt{2\beta}\sqrt{-1}$.

Σημ. Διὰ τῆς πράξεως ταύτης τὰ πρῶτα ῥιζόσημα καθίστανται ἁπλούστατα, διότι ἀντὶ τοῦ $\sqrt{50a^2\beta^2\gamma}$ π. χ. ἔχομεν τὸ ἁπλούστατον $\sqrt{2a\gamma}$, διότι ἁπλούστερον ἀδύνατον νὰ γείνῃ, ἐκτὸς ὅταν προσδιορισθῶσι τὰ γράμματα a καὶ γ ἰδίους τινὰς προσδιορισμούς. Διὰ τοῦτο ἡ πρᾶξις αὕτη ὠνομάσθη *ἁπλοποίησις τῶν ῥιζοσήμων*. Ὀνομάζουσι δὲ προσέτι τὸν πρὸ τοῦ ῥιζοσήμου παράγοντα *συνεργὸν τοῦ ῥιζοσήμου*, ἀλλὰ νομίζω καλλίτερον τὸ ὄνομα *πρόῤῥιζον*· οἷον ὁ $5a^2\beta$ εἶναι πρόῤῥιζος παράγων τοῦ ὅρου $5a^2\beta\sqrt{2a\gamma}$, κτλ. Ἔτι δὲ καὶ τὰ $\pm$ τοῦ $\pm\sqrt{a}$ θέλομεν ὀνομάζει πρόῤῥιζα σημεῖα.

Ἡ ἁπλοποίησις λοιπὸν τοῦ ῥιζοσήμου εἶναι κυρίως τροπὴ αὐτοῦ εἴς ἄλλο τι ἁπλούστατον ῥιζόσημον καὶ πρόῤῥιζόν τι.

121. *Τετραγωνίζεται ἐγγράμματος κλασματικός, ἐὰν τετραγωνισθῇ ὁ ἀριθμητής του καὶ ὁ παρονομαστής του καὶ τεθῇ τὸ δεύτερον τετράγωνον ὑπὸ τὸ πρῶτον*, ὡς ἐδῶ φαίνεται, τοῦ a καὶ τοῦ β ὄντων ὁποιωνδήποτε,

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^2=\frac{a}{\beta}\times\frac{a}{\beta}=\frac{a^2}{\beta^2}.$$

Καὶ ἀντιστρόφως λοιπόν, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλασματικοῦ ἦναι τετράγωνοι, *ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ του καὶ τιθεμένης τῆς δευτέρας ὑπὸ τὴν πρώτην*. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{\frac{49a^4\beta^6}{16\gamma^2\delta^4}}=\frac{\sqrt{49a^4\beta^6}}{\sqrt{16\gamma^2\delta^4}}=\frac{7a^2\beta^3}{4\gamma\delta^2}.$$

Ὅταν δὲ ἢ ὁ παρονομαστὴς ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι δὲν ἦναι τετράγωνοι, τότε ἡ σημειοῦται διὰ τοῦ $\sqrt{}$ ἑκατέρου ἡ ῥίζα καὶ ἁπλοποιεῖται τὸ ῥιζόσημον, ἢ προτιμότερον (Συμ. ἀρ. 86), *πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι ἐπὶ ἄλλον, ὥστε νὰ καταστάνῃ τὸν παρονομαστὴν τετράγωνον, ἔπειτα ἐξάγεται τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ* $\sqrt{}$ *καὶ ἁπλοποιεῖται ἡ τοῦ ἀριθμητοῦ.* Ἔστω π. χ νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{3\alpha^4\beta}{50\gamma^3}$. Ἐπειδή, ἂν ὁ 50 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 καὶ ὁ γ^3 ἐπὶ γ, γίνεται ὁ παρονομαστὴς τετράγωνος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 2γ κτλ, καὶ ἔχομεν

$$\sqrt{\frac{3\alpha^4\beta}{50\gamma^3}}=\sqrt{\frac{3\alpha^4\beta\times2\gamma}{50\gamma^3\times2\gamma}}=\frac{\sqrt{6\alpha^4\beta\gamma}}{\sqrt{100\gamma^4}}=\frac{\alpha^2\sqrt{6\beta\gamma}}{10\gamma^2}$$

$$\sqrt{\frac{50\alpha^4\beta^2\gamma}{45\delta^2\varepsilon^3\zeta}}=\sqrt{\frac{50\alpha^4\beta^2\gamma\times5\varepsilon\zeta}{45\delta^2\varepsilon^3\zeta\times5\varepsilon\zeta}}=\frac{5\alpha^2\beta\sqrt{10\gamma\varepsilon\zeta}}{15\delta\varepsilon^2\zeta}.$$

Σημ. Δὲν μετεχειρίσθημεν ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τὸ $\pm$, ἀλλ' ἐννοεῖται ὅτι πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωνται διττῶς ὅλαι αἱ προηγούμεναι ῥίζαι· ὅπου δ' ὑπάρχει τὸ $\sqrt{}$, ἐξ αὐτοῦ ἐννοοῦνται αἱ δύο ῥίζαι.

122. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, κτλ παριστάνωσιν ὁποιαδήποτε ἐγγράμματα ποσά, θέλομεν εὑρεῖ τὸ τετράγωνον τοῦ πολυόρου $\alpha+\beta+\gamma+\delta....$ πολλαπλασιάζοντές το ἐφ' ἑαυτὸ κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα (37). Οὕτως ἔχομεν

$$\begin{array}{l}
\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\\
\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\\
\hline
\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta\ldots\\
\quad+\alpha\beta+\beta^2+\beta\gamma+\beta\delta\ldots\\
\qquad+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2+\gamma\delta\ldots\\
\qquad\quad+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\delta^2\ldots\\
\hline
\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+2\alpha\delta+2\beta\delta+2\gamma\delta+\delta^2+\ldots
\end{array}$$

ἢ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+(2\alpha+2\beta)\gamma+\gamma^2+(2\alpha+2\beta+2\gamma)\delta+\delta^2+..$

Ἐκ τούτων δὲ βλέπομεν ὅτι *τὸ τετράγωνον πολυόρου σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ ἐκ* *τῶν διπλασίων τῶν γινομένων ἑκάστου ὅρου ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων*, ἢ λεπτομερέστερα, *σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου, τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου, ἔτι ἐκ τοῦ διπλασίου καὶ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ τρίτου, προσέτι ἐκ τοῦ διπλασίου καὶ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ τετάρτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.*

Ἂν δέ τινες τῶν ὅρων τοῦ πολυόρου ἤθελαν εἶσθαι ἀντιθετικοί, τότε οἱ μὲν ἄλλοι ὅροι τοῦ τετραγώνου ἤθελον διαμείνει ὡς ἤδη εἴπομεν, τὰ δὲ διπλάσια τῶν γινομένων τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων θετικῶν ἤθελον εἶσθαι ἀντιθετικά.

Οὕτως ἔχομεν παρευθὺς

$$(3a^2-2a\beta+4\beta^2)^2=9a^4-12a^3\beta+4a^2\beta^2+24a^2\beta^2-16a\beta^3+16\beta^4,$$

ἢ μετὰ τὴν συστολὴν $9a^4-12a^3\beta+28a^2\beta^2-16a\beta^3+16\beta^4$.

$$(2\chi^3-4\chi^2+7\chi-1)^2=4\chi^6-16\chi^5+16\chi^4+28\chi^4-56\chi^3+49\chi^2-4\chi^3+8\chi^2-14\chi+1,$$

ἢ μετὰ τὴν συστολὴν

$$4\chi^6-16\chi^5+44\chi^4-60\chi^3+57\chi^2-14\chi+1.$$

123. Ἔστω τώρα νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα πολυόρου τινός, οἷον τοῦ $25a^4-30a^3\beta+49a^2\beta^2-24a\beta^3+16\beta^4$, διατεταγμένου ὄντος κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a.

Ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι τετράγωνον· ἐπειδὴ δὲ ἡ ῥίζα του θέλει εἶσθαι πολύορος, εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι αὐτὸ πρέπει νὰ σύγκηται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τῆς ῥίζης καὶ τῶν διπλασίων τῶν γινομένων κτλ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ὅρου τῆς ῥίζης, τοῦ ἔχοντος τὸν ἀνώτατον δείκτην π. χ. τοῦ a, ἔχει καὶ αὐτὸ τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a· λοιπὸν ὁ άριστερὸς ὅρος $25a^4$ τοῦ δεδομένου πολυόρου, ὅστις ἔχει τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a, πρέπει νὰ ἦναι τὸ τετράγωνον τοῦ ὅρου τῆς ῥίζης, τοῦ ἔχοντος τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a· λοιπὸν ἀντιστρόφως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $25a^4$, ἤτοι ὁ $5a^2$, εἶναι ὅρος τις τῆς ῥίζης, ὁ ἔχων τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a·

Ἔπειτα τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν δεύτερον, ὡς γινόμενον τῶν μὲ τοὺς ἀνωτέρους δείκτας τοῦ a ὅρων αὐτῆς, ἔχει τὸ a μὲ δείκτην κατώτερον μὲν τοῦ δείκτου τοῦ a^4 τοῦ ἐν τῷ τετραγώνῳ $25a^4$ τοῦ πρώτου ὅρου, ἀνώτερον δὲ τῶν τοῦ a δεικτῶν τῶν ἐν τοῖς ἄλλοις ὅροις τοῦ τετραγώνου πολυόρου. Λοιπὸν ὁ δεύτερος ὅρος $-30a^3b$ τοῦ δεδομένου πολυόρου, ὅστις ἔχει τοῦτον τὸν δείκτην, πρέπει νὰ ἦναι γινόμενον τοῦ διπλασίου τοῦ $5a^2$, ἤτοι τοῦ $10a^2$, ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης· λοιπὸν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $-30a^3b$ διὰ τοῦ $10a^2$, ἤτοι ὁ $-3ab$, εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Ἀφοῦ δ' εὑρέθησαν δύο ὅροι τῆς ῥίζης, ἐὰν κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον αὐτῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι $25a^4-30a^3b+9a^2b^2$, τοῦτο δὲ γραφθῇ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα τῶν ὅρων του ὑπὸ τὸ δεδομένον πολύορον καὶ συσταλθῶσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι των, οὕτως ἀφανίζεται ἐκ τοῦ δεδομένου πολυόρου τὸ τετράγωνον τῶν δύο εὑρεθέντων ὅρων τῆς ῥίζης, καὶ μένει ὑπόλοιπον $+40a^2b^2-24ab^3+16b^4$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ σύγκηται ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν τρίτον, ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ δευτέρου ὅρου ἐπὶ τὸν τρίτον κτλ.

Τούτων δὲ τῶν ὅρων ὁ ἔχων τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a, ἤτοι ὁ ἀριστερὸς $+40a^2b^2$, εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν τρίτον αὐτῆς· διότι τοῦτο τὸ γινόμενον, ὡς γινόμενον τῶν ὅρων τῆς ῥίζης τῶν ἐχόντων τοὺς ἀνωτέρους δείκτας τοῦ a ὡς πρὸς τὰ γινόμενα τῶν ἄλλων ὅρων τὰ ἐν τῷ ὑπολοίπῳ $+40a^2b^2$ κτλ, πρέπει καὶ αὐτὸ νὰ ἔχῃ τὸν ἀνώτερον δείκτην τοῦ a. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς διαιρέσεως τοῦ $+40a^2b^2$ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης, ἤτοι τοῦ $10a^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι $+4b^2$, θέλει εἶσθαι ὁ τρίτος ὅρος τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Γνωρίζοντες δὲ καὶ τὸν τρίτον ὅρον τῆς ῥίζης δυνάμεθα τώρα ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον $+40a^2b^2-24ab^3$

$+16\beta^4$ καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου, τὰ ὁποῖα ἐν αὐτῷ ἐμπεριέχονται. Κατασκευάζομεν δὲ αὐτοὺς τοὺς τρεῖς ὅρους διπλασιάζοντες τοὺς δύο ἤδη εὑρεθέντας ὅρους τῆς ῥίζης, γράφοντες κατόπιν των τὸν τρίτον ἤδη εὑρεθέντα ὅρον αὐτῆς καὶ πολλαπλασιάζοντες ἔπειτα τὸ προκύπτον τρίορον $10\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2$ ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον τῆς ῥίζης $+4\beta^2$· οὕτως ἔχομεν

$$+40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4.$$

Ἀφαιροῦντες δὲ τοῦτο ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν 0.

Ἐκ τούτου λοιπὸν τοῦ 0 συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι ἀληθῶς τετράγωνον τὸ δεδομένον πολύορον, ὡς ἐν ἀρχῇ ὑπετέθη, καὶ ὅτι τὸ ἤδη εὑρεθὲν τρίορον $5\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2$ εἶναι ἡ τετραγωνική του ῥίζα. Διότι πρῶτον ἀφῃρέσαμεν ἐκ τοῦ δεδομένου πολυόρου τὸ τετράγωνον τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ εὑρεθέντος τριόρου, ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπολοίπου ἀφῃρέσαμεν ἄλλους τρεῖς ὅρους, οἵτινες ὁμοῦ μὲ τὸ προαφαιρεθὲν τετράγωνον τῶν δύο ὅρων ἀποτελοῦσι τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τριόρου· λοιπὸν κυρίως ἀπὸ τὸ δεδομένον πολύορον ἀφῃρέσαμεν μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τρίτου ὅρου τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τριόρου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0, σημεῖον τοῦτο ὅτι τὸ δεδομένον πολύορον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τριόρου, ἤτοι ὅτι αὐτὸ μὲν εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τριόρου, τοῦτο δὲ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δεδομένου πολυόρου. Ἰδοὺ δὲ καὶ πῶς ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις.

$$\begin{array}{r|l}
25\alpha^4-30\alpha^3\beta+49\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 & 5\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2 \\ \cline{2-2}
-25\alpha^4+30\alpha^3\beta-9\alpha^2\beta^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & 10\alpha^2 \\ \cline{1-1}
+40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 & 10\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2 \\
-40\alpha^2\beta^2+24\alpha\beta^3-16\beta^4 & +4\beta^2 \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

124. **Πρὸς ἐξαγωγὴν λοιπὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης παντὸς πολυόρου,** *ἀφοῦ τὸ διατάξωμεν κατὰ τὰς κατιούσας δυ-*

νάμεις γράμματός τινος, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριστεροῦ ὅρου του, καὶ διὰ τοῦ διπλασίου αὐτῆς διαιροῦμεν τὸν δεύτερον ὅρον του, γράφομεν τὸ πηλίκον κατόπιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου, τετραγωνίζομεν τὸ εὑρεθὲν τοῦτο δίορον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον ἀπὸ τὸ δεδομένον πολύορον. Τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν τὸν ἀριστερὸν ὅρον διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου, γράφομεν τὸ πηλίκον κατόπιν τοῦ διπλασίου τῶν προευρημένων ὅρων τῆς ῥίζης καὶ ὑποκάτω, πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ τρίορον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον πολύορον. Τοῦ νέου ὑπολοίπου διαιροῦμεν τὸν ἀριστερὸν ὅρον διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου, γράφομεν τὸ πηλίκον κατόπιν τοῦ διπλασίου τῶν προευρημένων ὅρων τῆς ῥίζης καὶ ὑποκάτω, πολλαπλασιάζομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον πολύορον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Καὶ ἂν μὲν μετά τινας τοιαύτας πράξεις εὕρωμεν κατάλοιπον 0, εἴδομεν ἀνωτέρω τί ἐκ τούτου συμπεραίνεται. Ἂν δὲ ἢ ὁ ἀριστερὸς ὅρος τοῦ πολυόρου δὲν ἦναι τετράγωνος, ἢ ὁ δεύτερος ὅρος αὐτοῦ ἢ ὁ ἀριστερὸς ὅρος ἑκάστου ὑπολοίπου δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ἐν ἀριστερᾷ ὅρου τοῦ πολυόρου, τότε τὸ πολύορον αὐτὸ δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου πολυόρου, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῶν ἐν τῷ 123 εἰρημένων, καὶ εἶναι περιττὸν νὰ προχωρῇ τις εἰς τὴν πρᾶξιν, ἀφοῦ ἀπαντήσῃ τι τῶν μνημονευθέντων σημείων.

Ἔτι δὲ, ἐπειδὴ τελευταῖος ὅρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυόρου πρέπει νὰ ἦναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ πολυόρου, ἐὰν ἀπαντήσαντες αὐτὸν δὲν εὕρωμεν ἀμέσως κατάλοιπον 0, ἢ ἂν εὕρωμεν ὅρον μὲ δείκτην τοῦ πρὸς ὃ ἔγεινεν ἡ διάταξις γράμματος μικρότερον τοῦ ἐν τῷ προειρημένῳ ὅρῳ, ὅταν ἦναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος τὸ πολύορον, ἢ μεγαλήτερον, ὅταν ἦναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας, καὶ ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι δὲν εἶναι τετράγωνον τὸ πολύορον.

Σημ. Δίορον κἀνὲν δὲν εἶναι τετράγωνον· τρίορον δὲ ποῖον εἶναι τετράγωνον εἴπομεν ἐν ἀρ. 40. Ἀλλὰ δυνατὸν τρίορόν τι νὰ ἦναι γινόμενον τετραγώνου τριόρου καὶ ἄλλου ὅρου, οἷον

$$a^3\beta+4a^2\beta^2+4a\beta^3=a\beta(a^2+4a\beta+4\beta^2)\text{· ὥστε}$$

$$\sqrt{a^3\beta+4a^2\beta^2+4a\beta^3}=(a+2\beta)\sqrt{a\beta}\ \text{(ἴδε ἀρ. 121).}$$

Παραδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

$$9\chi^4-30a\chi^3-3a^2\chi^2+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4}.$$

$$4\chi^4+8a\chi^3+4a^2\chi^2+16\beta^2\chi^2+16a\beta^2\chi+16\beta^4.$$

$$\frac{25}{4}a^2\beta^2-\frac{5}{3}a\beta\gamma^2+\frac{1}{9}\gamma^4,\qquad a^6+6a^3\chi^4+9\chi^8.$$

ἔτι δὲ καὶ τὰ τοῦ ἀριθμοῦ 122.

Περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων.

125. Εἴδομεν προηγουμένως (120 καὶ 124) ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ὅρων καὶ πολυόρων, μὴ ὄντων τετραγώνων, ἀδύνατον νὰ παριστάνηται ἄνευ τοῦ ῥιζικοῦ, καὶ ἐξ ἀνάγκης συχνότατα θέλομεν ἔχει ὅρους, οἵτινες νὰ ἦναι ἢ ἁπλᾶ ῥιζόσημα, οἷον $\sqrt{a\beta}$ ἢ περίπλοκα ῥιζόσημα, οἷον $\frac{2}{3}a^2\beta\sqrt{\gamma\delta}$ κτλ, γινόμενα ὄντα ῥιζοσήμων ἐπὶ ἄλλους ἀριθμούς. Ἐπὶ δὲ τῶν τοιούτων ὅρων θέλει εἶσθαι ἀνάγκη νὰ ἐκτελῶνται διάφοροι πράξεις, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν μὴ ῥιζοσήμων ὅρων. Περὶ τῶν πράξεων τούτων λέγομεν ἐφεξῆς τὰ δέοντα.

126. Τὰ ῥιζόσημα προσθέτονται καὶ ἀφαιροῦνται ἀπ' ἄλληλα ὡς οἱ ἄλλοι ὅροι, ἤτοι γράφεται τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὸ σημεῖόν του. Οὕτω δὲ, ἂν μὲν ἦναι ὁμόσημα, προσθέτονται, ἂν δ' ἀντίθετα, ἀφαιρεῖται τὸ ἕτερον ἀπὸ τὸ ἄλλο. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ ῥιζόσημα παριστάνουσι δύο ῥίζας ἀντιθέτους, ἀπαιτεῖται προσοχὴ, ἂν ἐκλαμβάνωνται κατὰ τὴν γενικὴν σημασίαν των ἢ κατὰ τὴν μερικὴν, καθ' ἣν παριστάνουσι τὴν ἑτέραν ῥίζαν.

Τὸ $5\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}$ παριστάνει τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ὅρων. Ἐπειδὴ ὅμως δυνατὸν νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\pm 5\sqrt{\alpha}\pm 3\sqrt{\beta}$, ὅπου εἶναι σημειωμέναι δύο προσθέσεις καὶ δύο ἀφαιρέσεις, ἂν δὲν ἦναι προσδιωρισμένον ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ τὰ ῥιζόσημα ἐννοοῦνται θετικὰ καὶ τὰ δύο, τότε εἶναι σημειωμένη πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

Ὅταν δὲ τ' ἁπλᾶ ῥιζόσημα ἦναι τὰ αὐτὰ, καὶ μόνον οἱ πρόῤῥιζοι παράγοντες διάφοροι, οἷον $3\alpha\sqrt{\beta}+5\gamma\sqrt{\beta}$, τότε ἐπειδὴ τὸ $\sqrt{\beta}$ εἶναι κοινὸς παράγων τῶν δύο ὅρων μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐκλαμβανόμενος, τὸ ἀνωτέρω δύναται νὰ γραφθῇ ἁπλούστερα οὕτω $(3\alpha+5\gamma)\sqrt{\beta}$.

Ὡσαύτως $7\sqrt{2\alpha}-3\sqrt{2\alpha}=(7-3)\sqrt{2\alpha}=4\sqrt{2\alpha}$.

Ἀλλὰ καὶ τὰ $\sqrt{48\alpha\beta^2}+\beta\sqrt{75\alpha}$, τῶν ὁποίων τὰ ῥιζόσημα εἶναι διάφορα, δύνανται νὰ τραπῶσιν (120) εἰς τὰ ἰσοδύναμα $4\beta\sqrt{3\alpha}+5\beta\sqrt{3\alpha}$, τῶν ὁποίων τὰ ῥιζόσημα εἶναι τὰ αὐτά, καὶ ἑπομένως

$$\sqrt{48\alpha\beta^2}+\beta\sqrt{75\alpha}=9\beta\sqrt{3\alpha}.$$

Ὡσαύτως

$$3\alpha^2+5\sqrt{\alpha^2\beta^3}-2\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}=3\alpha^2+\left(5\alpha\beta-\frac{2\alpha}{\beta}\right)\sqrt{\beta},$$

διότι τὸ $5\sqrt{\alpha^2\beta^3}=5\alpha\beta\sqrt{\beta}$, καὶ τὸ $2\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}=2\sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\beta^2}}=\frac{2\alpha}{\beta}\sqrt{\beta}$.

127. Εἴδομεν (118) ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα γινομένου δύο ἢ πλειοτέρων παραγόντων εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν παραγόντων του· λοιπὸν καὶ ἀντιστρόφως, *τὸ γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν*. Ὥστε πρὸς πολλαπλασιασμὸν δύο ἢ πλειοτέρων δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων, *πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ἀριθμοί, καὶ τὸ γινόμενόν των νὰ τίθηται ὑπὸ τὸ* $\sqrt{}$. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta},\quad \sqrt{\alpha^2}\times\sqrt{\beta^3}\times\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha^2\beta^3\gamma}.$$

ἂν δ' ἦναι καὶ πρόῤῥιζοι ἀριθμοί, πρῶτον πολλαπλασιάζονται οὗτοι, ἔπειτα τὰ ῥιζόσημα, καὶ τὸ πρῶτον γινόμενον τίθεται πρόῤῥιζον πρὸ τοῦ δευτέρου· οἷον

$$3\sqrt{5a\beta}\times 4\sqrt{20a}=12\sqrt{100a^2\beta}\ \text{ἢ ἔτι}\ =120a\sqrt{\beta}.$$

$$2a\sqrt{\beta\gamma}\times 3a\sqrt{\beta\gamma}=6a^2\sqrt{\beta^2\gamma^2}=6a^2\beta\gamma.$$

128. Ὅταν πρόκηται νὰ σημειωθῇ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, δυνάμεθα πάντοτε νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα πηλίκου κλασματικοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ ἢ τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ παρονομαστοῦ ἢ τοῦ διαιρέτου, ἤτοι

$$\sqrt{\frac{a}{\beta}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}.$$

Λοιπὸν καὶ ἀντιστρόφως, τὸ πηλίκον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πηλίκου αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν. Ὥστε πρὸς διαίρεσιν δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων πρέπει νὰ διαιρῆται ὁ ὑπὸ τὸ ἕτερον ῥιζικὸν ἀριθμὸς διὰ τοῦ ὑπὸ τὸ ἄλλο, καὶ τὸ πηλίκον των νὰ τίθηται ὑπὸ τὸ $\sqrt{\ }$.

Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{a}{\beta}}$$

Ἂν δ' ἦναι καὶ πρόῤῥιζοι ἀριθμοί, πρῶτον διαιροῦνται αὐτοὶ κτλ. οἷον

$$\frac{5a\sqrt{\beta}}{2\beta\sqrt{\gamma}}=\frac{5a}{2\beta}\sqrt{\frac{\beta}{a}}.\quad \frac{12a\gamma\sqrt{6\beta\gamma}}{4\gamma\sqrt{2\beta}}=3a\sqrt{\frac{6\beta\gamma}{2\beta}}=3a\sqrt{3\gamma}.$$

129. Τὸ $a\sqrt{\beta}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{a^2\beta}$· ἐκ δὲ τούτου βλέπομεν ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ ῥιζόσημον $\sqrt{\beta}$ ἐπὶ a, ἢ νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν β ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ a. Λοιπὸν, ἵνα πρόῤῥιζον παράγοντα μεταβάλλωμεν εἰς παράγοντα τοῦ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν, ἢ ὡς λέγουσιν, ἵνα μεταθέτωμεν αὐτὸν ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν, πρέπει νὰ τὸν τετραγωνίζωμεν. Οὕτως ἔχομεν

$$3a\sqrt{5\beta}=\sqrt{9a^2}\times\sqrt{5\beta}=\sqrt{45a^2\beta}.$$

Τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἐν ἀρ. 120.
Συχνάκις ἀντὶ νὰ προσδιορίζηται ὡς ἔγγιστα τοιοῦτόν τι $6\sqrt{13}$ εἶναι προτιμότερον νὰ προσδιορίζηται τὸ $\sqrt{36\times 13}$, διότι προσδιορίζεται ἀκριβέστερον.

130. Τελευταῖον εἶναι ὠφέλιμον πολλάκις νὰ τρέπηται κλασματικὸς ἔχων ῥιζόσημα ἐν τῷ παρονομαστῇ εἰς ἄλλον ἰσοδύναμον κλασματικὸν, ὅστις νὰ μὴ ἔχῃ τοιαῦτα, εἰμὴ ἐν τῷ ἀριθμητῇ· διότι ὁ τοιοῦτος κλασματικὸς προσδιορίζεται κατὰ προσέγγισιν ἀκριβέστερον τοῦ ἔχοντος ῥιζόσημον ἐν τῷ παρονομαστῇ. Τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον ἐνίοτε.

ά. Ὅταν ἦναι ἓν ῥιζόσημον ἐν τῷ παρονομαστῇ, οἷον ἐν τῷ $\frac{a}{\sqrt{\beta}}$, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ τὸ ἐν τῷ παρονομαστῇ ῥιζόσημον, ἔχομεν

$$\frac{a}{\sqrt{\beta}}=\frac{a\sqrt{\beta}}{(\sqrt{\beta})^2}=\frac{a\sqrt{\beta}}{\beta}.$$

β΄. Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἦναι κεφάλαιον δύο ῥιζοσήμων ἢ διαφορὰ, οἷον $\frac{a}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$ ἢ $\frac{a}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, καὶ ἐπὶ τὸ κεφάλαιον τῶν αὐτῶν κατὰ τὴν δευτέραν, ἐνθυμούμενοι ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{a}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}=\frac{a(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}=\frac{a(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}=\frac{a(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}=\frac{a(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}.$$

Ὡσαύτως δὲ

$$\frac{a}{\beta+\sqrt{\gamma}}=\frac{a(\beta-\sqrt{\gamma})}{(\beta+\sqrt{\gamma})(\beta-\sqrt{\gamma})}=\frac{a\beta-a\sqrt{\gamma}}{\beta^2-\gamma}.$$

$$\frac{7}{3-\sqrt{5}}=\frac{21+7\sqrt{5}}{4},\quad \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΠΕΡΙ ΛΥΣΕΩΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ.

Περὶ λύσεως δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον.

131. Αἱ ἐν τοῖς ἀρ. 67, 68 καὶ 69 εἰρημέναι ὡς ἀναγκαῖαι πράξεις πρὸς λύσιν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωςον εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐκτελῶνται, ὅπως ἐκεῖ εἴπομεν, καὶ πρὸς λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἀλλὰ δὲν ἐξαρκοῦσι μόναι αὐταὶ, διότι δι' αὐτῶν δύναται μόνον δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις νὰ καταντήσῃ εἰς τοιαύτην μορφὴν $\chi^2=\alpha$, ἢ εἰς τοιαύτην $\chi^2+\pi\chi=\rho$, ἀλλ' ὄχι καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ χ μεμονωμένον ἐν τῷ ἑτέρῳ μέλει. Π. χ. ἡ τοῦ 101 προβλήματος ἐξίσωσις

$$\chi^2+\frac{16\chi^2}{9}+\frac{196\chi^2}{9}=5525$$

τρέπεται κατὰ σειρὰν εἰς τὰς ἑξῆς

$$9\chi^2+16\chi^2+196\chi^2=49725$$

$$221\chi^2=49725$$

$$\chi^2=\frac{49725}{221}=225.$$

Ἡ δὲ τοῦ 103 $\dfrac{60}{\chi}-\dfrac{60}{\chi+3}=1$

εἰς ταύτας $60\chi+180-60\chi=\chi^2+3\chi$

$$180=\chi^2+3\chi$$

ἢ $\chi^2+3\chi=180.$

Ὡσαύτως ἡ τοῦ 106 $\frac{4\chi+120}{\chi-30}=\frac{9\chi-270}{\chi+30}$ εἰς ταύτας

$$4\chi^2+120\chi+120\chi+3600=9\chi^2-270\chi-270\chi+8100$$
$$4\chi^2-9\chi^2+240\chi+540\chi=8100-3600$$
$$-5\chi^2+780\chi=4500$$
$$5\chi^2-780\chi=-4500$$
$$\chi^2-156\chi=-900.$$

Ἐκ τούτων δὲ βλέπομεν ὅτι τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων αἱ μὲν εἶναι *τρίοροι*, καλούμεναι καὶ *πλήρεις*, αἵτινες ἔχουσιν ἕνα ὅρον τὸ τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου θετικὸν καὶ μὲ συνεργὸν τὴν μονάδα, ἄλλον ὅρον τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ ἀγνώστου ἔχουσαν συνεργὸν ὁποιονδήποτε θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν, καὶ τρίτον ὅρον ὅλον γνωστὸν θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν ἀριθμόν· αἱ δὲ εἶναι *δίοροι*, μὴ ἔχουσαι τὸν μὲ τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ ἀγνώςου ὅρον, καλούμεναι δὲ διὰ τοῦτο καὶ *ἐλλιπεῖς*. Ἐφεξῆς δὲ λέγομεν τί ἄλλο ἀπαιτεῖται νὰ γείνῃ ἐπὶ τῶν τοῦ πρώτου εἴδους καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ δευτέρου πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου.

132. Ἀφοῦ λοιπὸν δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις διὰ τῶν προειρημένων πράξεων τραπῇ εἰς τὴν μορφὴν ταύτην $\chi^2=\alpha$, εἶναι εὔκολον νὰ εὑρεθῇ τὸ χ. Διότι, ὄντος τοῦ τετραγώνου τοῦ χ ἴσου μὲ α, τὸ χ θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ α. Ἀλλὰ τὸ α ἔχει δύο τετραγωνικὰς ῥίζας $+\sqrt{\alpha}$ καὶ $-\sqrt{\alpha}$, καὶ μόνον αὐτάς· λοιπὸν

$$\chi=\pm\sqrt{\alpha}.$$

Οὕτως ἐκ τῆς ἀνωτέρω $\chi^2=225$ ἔχομεν

$$\chi=\pm\sqrt{225}=\pm15.$$

Καὶ ὁ μὲν $+15$ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τοῦ πρώτου ἐμπορεύματος ὀκάδων, τὰς ὁποίας ἠγόρασεν· ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται ἔπειτα ὀκάδες τοῦ δευτέρου ἐμπορεύματος 20, καὶ τοῦ τρίτου 70. Ὁ δὲ —15, ὡς ἀντίθετος τοῦ +15, σημαίνει ὀκάδας τὰς ὁποίας ἐπώλησέ τις, καὶ κυρίως δὲν ἁρμόζει εἰς τὸ 101 πρόβλημα, ἀλλ' εἰς ἄλλο, ὅπου ἀντὶ τοῦ ἠγόρασε καὶ ἐπῆρεν εἶναι τὸ ἐπώλησεν ἄνευ ἄλλης διαφορᾶς, καὶ τοῦ ὁποίου ἐξίσωσις εἶναι ἡ αὐτὴ τοῦ 101 προβλήματος.

Ἐκ δὲ τῆς $3\chi^2=5$

ἔχομεν $\chi^2=\frac{5}{3}$

$$\chi=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\pm\sqrt{\frac{5\times3}{9}}=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{15}.$$

Ἐκ δὲ τῆς $$\frac{2\chi^2}{a}-5\beta=a+\frac{3\chi^2}{\beta}$$

ἔχομεν $$2\beta\chi^2-5a\beta^2=a^2\beta+3a\chi^2$$
$$(2\beta-3a)\chi^2=5a\beta^2+a^2\beta$$
$$\chi^2=\frac{5a\beta^2+a^2\beta}{2\beta-3a}$$
$$\chi=\pm\sqrt{\frac{5a\beta^2+a^2\beta}{2\beta-3a}}.$$

Ἐκ δὲ τῆς $3\chi^2+17=5\chi^2+89$

ἔχομεν $\chi^2=-36$

$$\chi=\sqrt{-36}=\pm6\sqrt{-1}.$$

Ἐκ δὲ τούτων βλέπει τις ὅτι τὰ προσδιορίσματα τοῦ ἀγνώστου ἐλλιποῦς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι δύο ἴσα καὶ ἀντίθετα, καὶ τὰ δύο δὲ ἢ ἐνάριθμα ἢ ἀνάριθμα ἢ φανταστικά.

133. Πρὸς λύσιν δὲ δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἥτις διὰ τῶν προειρημένων πράξεων λαμβάνει γενικῶς τοιαύτην μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\rho$, ἤτοι ἀποβαίνει τρίορος ἢ πλήρης, ὁποία ἐπροσδιορίσθη ἀνωτέρω 131, ἀπαιτοῦνται καὶ τὰ ἑξῆς. Πρῶτον οἱ δύο ὅροι $\chi^2+\pi\chi$ τοῦ πρώτου μέλους ἐννοοῦνται ὅτι εἶναι δύο ὅροι τριόρου τετραγώνου, ὁ μὲν χ^2 τετράγωνος τοῦ χ, ὁ

δὲ $\pi\chi$ διπλάσιος τοῦ γινομένου τοῦ χ ἐπὶ ἄλλον ὅρον, ὅστις εἶναι $\frac{\pi}{2}$, διότι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{\pi}{2}$ ἐπὶ χ εἶναι $\frac{\pi\chi}{2}$, τὸ δὲ διπλάσιον τούτου εἶναι $\pi\chi$. Τότε ὁ τρίτος ὅρος τοῦ τετραγώνου πρέπει νὰ ἦναι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{\pi}{2}$ ἤτοι ὁ $\frac{\pi^2}{4}$. Ἂν λοιπὸν γραφθῇ ἐν ἑκατέρῳ μέλει τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ὁ $+\frac{\pi^2}{4}$, τρέπεται αὐτὴ εἰς τὴν

$$\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}+\rho,$$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι τετράγωνον τοῦ $\chi+\frac{\pi}{2}$ καὶ δύναται νὰ γραφθῇ οὕτω

$$\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}+\rho.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ $\chi+\frac{\pi}{2}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, τὸ $\chi+\frac{\pi}{2}$ εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, ἤτοι

$$\chi+\frac{\pi}{2}=\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\cdot$$

ἐκ δὲ τῆς πρωτοβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως μεταθέσει τοῦ $\frac{\pi}{2}$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἔχομεν

$$\chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}.$$

Τοιοῦτος εἶναι ὁ τύπος τοῦ ἀγνώστου τριόρου δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἤτοι αὐτὸς *ἔχει ἕνα ὅρον, ὅστις εἶναι ἀντίθετον τὸ ἥμισυ τοῦ συνεργοῦ π τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἐν τῇ ἐξισώσει χ, καὶ ἔτι ἓν ῥιζόσημον μὲ τὸ διπλοῦν σημεῖον ± καὶ ἔχον ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ συνεργοῦ π καὶ τὸν γνωστὸν ὅρον ρ τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει σημεῖόν του.*

Ὥστε, ἐνθυμούμενοι τὴν σύνθεσιν τοῦ γενικοῦ τούτου τύπου, δυνάμεθα εὐθὺς νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἰσοδύναμον τοῦ ἀγνώστου πάσης μερικῆς τριόρου δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἠγμένης οὔσης εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\rho$. Οὕτως ἐκ τῶν τοῦ ἀρ. 131 ἐξισώσεων

$$\chi^2+3\chi=180 \quad \text{καὶ } \chi^2-156\chi=-900$$

εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$\chi=-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}+180}, \quad \chi=78\pm\sqrt{(78)^2-900},$$
$$\chi=-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{729}{4}} \quad \chi=78\pm\sqrt{5184}$$
$$\chi=-\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{27}{2} \quad \chi=78\pm72$$
$$\chi=12 \text{ καὶ } \chi=-15. \quad \chi=150 \text{ καὶ } \chi=6.$$

Ὡσαύτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\chi-2=\frac{4\chi-9}{\chi}$$

εὑρίσκομεν πρῶτον $\chi^2-6\chi=-9$,

ὅθεν κατὰ τ' ἀνωτέρω

$$\chi=3\pm\sqrt{9-9}, \text{ καὶ } \chi=3.$$

Ἐκ δὲ τῆς $\quad 100\chi^2-100\chi=-41$

ἢ $\quad \chi^2-\chi=-\frac{41}{100}$

ἔχομεν $\quad \chi=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{41}{100}}$

$$\chi=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{16}{100}}=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{2}{5}\sqrt{-1}.$$

134. Τὰ γενικὰ προσδιορίσματα τοῦ χ, ἤτοι τὸ $-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}$ καὶ τὸ $-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}$, τὰ ὁποῖα καλοῦνται καὶ *ῥίζαι* τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\rho$, ἐπαληθεύουσιν αὐτήν. Τοῦτο δὲ γίνεται δῆλον ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2+\pi\chi=\rho$ τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο προσδιόρισμα· διότι τὰ δύο μέλη μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ταυτίζονται, δηλ.

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\right)^2+\pi\left(-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\right)=$$

$$\frac{\pi^2}{4}-\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}+\frac{\pi^2}{4}+\rho-\frac{\pi^2}{2}+\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}=\rho.$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\right)^2+\pi\left(-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\right)=$$

$$\frac{\pi^2}{4}+\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}+\frac{\pi^2}{4}+\rho-\frac{\pi^2}{2}-\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}=\rho.$$

135. Τὰ τοῦ ἀγνώστου εὑρισκόμενα ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως προσδιορίσματα εἶναι δύο, καὶ εἴδομεν (133) ὅτι εἶναι ἢ καὶ τὰ δύο θετικοὶ ἀριθμοί, ἢ τὸ μὲν θετικός, τὸ δὲ ἀντιθετικὸς ἀριθμός, ἢ εἶναι δύο ἀνυπάρκτων σύμβολα καὶ ὄχι ἀριθμοί, κτλ. Ἐνταῦθα δὲ θέλομεν ἐξετάσει πόσους διαφόρους προσδιορισμοὺς δυνατὸν νὰ προσδιορίζωνται οἱ γενικοὶ τύποι

$$\chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}.$$

Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τῶν προσδιορισμάτων τῶν τύπων τούτων τοῦ χ ἀπαιτεῖται πρῶτον νὰ εὑρίσκηται τὸ προσδιόρισμα τοῦ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν διόρου $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, τούτου νὰ ἐξάγηται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ αὐτὴ ἔπειτα νὰ προστίθηται εἰς τὸν ὅρον $-\frac{\pi}{2}$ ἢ ν' ἀφαιρῆται ἀπ' αὐτόν. Ἡ δὲ γενικὴ ἐξίσωσις, ἐπειδὴ ὁ $\pi\chi$ ὅρος δυνατὸν νὰ ἦναι θετικὸς ἢ ἀντιθετικός, καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος ρ ὡσαύτως, θέλει εἶσθαι $\chi^2+\pi\chi=+\rho$, ἢ $\chi^2-\pi\chi=+\rho$, ἢ $\chi^2+\pi\chi=-\rho$, ἢ $\chi^2-\pi\chi=-\rho$, ἢ ἂν ἑνωθῶσιν αἱ δύο πρῶται καὶ αἱ δύο τελευταῖαι $\chi^2\pm\pi\chi=+\rho$, καὶ $\chi^2\pm\pi\chi=-\rho$.

ά. Καὶ ὅταν μὲν ὁ γνωστὸς ὅρος ἦναι θετικὸς $+\rho$ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως, δηλ. $\chi^2\pm\pi\chi=\rho$, τότε τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$ εἶναι θετικόν, ὡς καὶ τοῦ τετραγώνου $\frac{\pi^2}{4}$

ὄντος πάντοτε θετικοῦ· ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ δῆλον ὅτι θέλει εἶσθαι μεγαλητέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μόνου τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$ ἤτοι τοῦ $\frac{\pi}{2}$. Ὥστε, ὅταν μὲν ἦναι θετικὸν τὸ π ἐν τῇ ἐξισώσει, ὁπότε ὁ $\frac{\pi}{2}$ εἶναι ἀντιθετικὸς ἐν τῷ τύπῳ, πρέπειν' ἀφαιρῆται οὗτος ἀπὸ τὴν θετικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, καὶ νὰ προστίθηται εἰς τὴν ἀντιθετικήν, καὶ οὕτω θέλει εὑρίσκεσθαι ἓν θετικὸν προσδιόρισμα τοῦ χ καὶ ἓν ἀντιθετικόν, τὸ ὁποῖον θέλει εἶσθαι μεγαλήτερον τοῦ θετικοῦ. Ὅταν δὲ ἦναι ἀντιθετικὸν τὸ π ἐν τῇ ἐξισώσει, τότε ἀντιστρόφως θέλει προστίθεσθαι τὸ $\frac{\pi}{2}$ εἰς τὴν θετικήν, καὶ θέλει ἀφαιρεῖσθαι ἀπὸ τὴν ἀντιθετικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, μεγαλήτερον δὲ προσδιόρισμα τοῦ χ θέλει εἶσθαι τὸ θετικόν. *Σύντομα, ὅταν ὁ γνωστὸς ὅρος ἦναι θετικὸς ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως, ὁ ἄγνωστος ἔχει δύο προσδιορίσματα ἀντίθετα, ὧν μεγαλήτερον εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ συνεργοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου.*

β'. *Ὅταν δὲ τὸ $\rho=0$, ἤτοι ὅταν λείπῃ ὁ γνωστὸς ὅρος, ἡ δ' ἐξίσωσις ἦναι $\chi^2\pm\pi\chi=0$, ἢ $\chi(\chi\pm\pi)=0$, καὶ ἐκ τοῦ τύπου καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως δῆλον ὅτι $\chi=0$ καὶ* $\chi=\mp\pi$. Διότι τότε τὸ $\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}$ εἶναι ἴσον μὲ $\pm\frac{\pi}{2}$, τὸ ὁποῖον ὁμοῦ μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ $\frac{\pi}{2}$ θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν ἀποτελεῖ 0 καὶ π θετικὸν ἐκ τῆς $\chi^2-\pi\chi=0$, ἀντιθετικὸν δ' ἐκ τῆς $\chi^2+\pi\chi=0$. Τῆς δὲ ἐξισώσεως τὸ πρῶτον μέλος, γινόμενον ὂν δύο παραγόντων, γίνεται ἴσον μὲ τὸ 0 ἢ ἂν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων γείνῃ ἴσος μὲ τὸ 0 ἢ ἂν ὁ ἄλλος· ὅθεν

$$\chi=0, \text{ καὶ } \chi=\mp\pi \text{ κτλ.}$$

γ'. Ὅταν δ' ὁ γνωστὸς ὅρος ἦναι ἀντιθετικὸς ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει, δηλ. $\chi^2\pm\pi\chi=-\rho$, τότε 1) ἐὰν μὲν ἦναι $\rho<\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ῥιζόσημον εἶναι μικρότερον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζας τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$ ἤτοι τοῦ $\frac{\pi}{2}$, καὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσίν του καὶ πρόσθεσίν του εἰς τὸν πρὸ αὐτοῦ ὅρον $\frac{\pi}{2}$, θέλουσι προκύψει δύο προσδιορίσματα τοῦ χ ὁμόσημα μὲν πρὸς ἑαυτά, ἀντίθετα δὲ πρὸς τὸ ἐν τῇ ἐξισώσει π.

2. Ἐὰν δὲ $\rho=\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ῥιζόσημον εἶναι ἴσον μὲ τὸ 0 καὶ τὸ χ ἔχει ἓν προσδιόρισμα $\frac{\pi}{2}$, ἀντίθετον τοῦ ἐν τῇ ἐξισώσει π. Τότε, ὄντος $\rho=\frac{\pi^2}{4}$, ἡ ἐξίσωσις θέλει εἶσθαι

$$\chi^2\pm\pi\chi=-\frac{\pi^2}{4} \text{ ἢ } \chi^2\pm\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=0, \text{ ἢ } \left(\chi\pm\frac{\pi}{2}\right)^2=0,$$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος ὡς τετράγωνον μόνον διὰ $\frac{\pi}{2}$ ἢ $-\frac{\pi}{2}$ ἀντὶ χ ταυτίζεται μὲ τὸ δεύτερον καὶ ὄχι δι' ἄλλου.

3. Ἐὰν δὲ $\rho>\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ῥιζόσημον ἀποβαίνει σύμβολον ἀνυπάρκτων, καὶ διὰ τοῦτο καὶ τὰ προσδιορίσματα τοῦ χ εἶναι φανταστικά.

136. Παρόμοια μὲ τὰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις λύονται καὶ τοῦ τετάρτου βαθμοῦ αἱ ἐξισώσεις, ὅσαι εἶναι τρίοροι, ἔχουσαι πρῶτον ὅρον τὴν τετάρτην δύναμιν τοῦ ἀγνώστου, δεύτερον τὸ γινόμενον τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου ἐπί τινα γνωστὸν ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀντιθετικόν, καὶ τρίτον γνωστόν τινα ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀντιθετικόν, οἷον

$$\chi^4+\pi\chi^2=\rho.$$

Πρὸς λύσιν ταύτης ὑποθέτομεν πρῶτον τὸ $\chi^2=\omega$, καὶ ἡ ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ταύτην

$$\omega^2+\pi\omega=\rho,$$

ὅθεν $$\omega=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho} \text{ καὶ } \omega=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}.$$

Θέτοντες τώρα ἀντὶ ω τὸ χ^2, καὶ λύοντες τὰς δύο ἐξισώσεις ὡς ἐν ἀρ. 132, ἔχομεν

$$\chi=\pm\sqrt{-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}}, \quad \chi=\pm\sqrt{-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}},$$

Κατὰ τοὺς τύπους τούτους λοιπὸν εὑρίσκεται τὸ χ τῆς μερικῆς

$$\chi^4-12\chi^2=64$$

ἀφοῦ τεθῇ ἀντὶ $+\pi$ τὸ -12 καὶ ἀντὶ $+\rho$ τὸ $+64$, καὶ ἔχομεν $\chi=\pm\sqrt{6+\sqrt{36+64}}=\pm 4$,

$$\chi=\pm\sqrt{6-\sqrt{36+64}}=\pm 2\sqrt{-1}.$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι τὰ ἐκ τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως προσδιορίσματα τοῦ χ εἶναι τέσσαρα, δύο μὲν ὑπαρκτικά, δύο δὲ φανταστικά.

Περὶ λύσεως ἄλλων τινῶν ἐξισώσεων δύο ἢ τριῶν μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

137. Ἡ λύσις δύο γενικῶν ἢ πλήρων δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι δύσκολος νὰ γείνῃ, διότι προαπαιτεῖ γενικῶς τὴν γνῶσιν τοῦ πῶς λύονται ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ τοῦ δευτέρου. Ἀλλ' εἶναί τινες ἐλλιπεῖς ἐξισώσεις, αἵτινες λύονται ὡς αἱ προηγούμεναι, καὶ περὶ αὐτῶν λέγομεν ἐνταῦθα ὀλίγα τινά.

Α'. Ἔστωσαν εἰς λύσιν αἱ ἐξισώσεις

$$\chi+\omega=\alpha,\quad \chi^2+\omega^2=\beta^2,$$

ὧν ἡ μὲν ἔχει πρῶτον μέλος τὸ κεφάλαιον τῶν πρώτων δυνάμεων τῶν ἀγνώστων, ἡ δὲ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Πρῶτον ἀπαλείφομεν τὸν ἕτερον τῶν ἀγνώστων, οἷον τὸν ω, δι' ἀντικαταστάσεως· ἤγουν ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $\omega=\alpha-\chi$ καὶ τὸ τετράγωνον $\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2$ θέτομεν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ τοῦ ω^2· γίνεται δὲ ἡ δευτέρα

$$\chi^2+\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2=\beta^2,\ \text{ἢ}\ \chi^2-\alpha\chi=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2},$$

ὅθεν $$\chi=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-\alpha^2}.$$

Θέτοντες δ' ἐν τῇ $\omega=\alpha-\chi$ ἀντὶ τοῦ χ τὰ εὑρεθέντα ἤδη ἰσοδύναμα αὐτοῦ ἔχομεν

$$\omega=\alpha-\frac{\alpha}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-\alpha^2}=\frac{\alpha}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-\alpha^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ χ καὶ ὁ ω ἔχουσι δύο τύπους, πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὁμοῦ ὁ πρῶτος τοῦ χ καὶ ὁ πρῶτος τοῦ ω, ἢ ὁ δεύτερος καὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ω, δηλ.

$$\left\{\begin{array}{ll} \chi=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}, & \chi=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}, \\ \omega=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}. & \omega=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}. \end{array}\right\}$$

Ὡσαύτως λύονται καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ 105 καὶ τοῦ 107 προβλήματος, ἂν καὶ διαφέρει ἡ μία αὐτῶν τῆς μιᾶς τῶν προηγουμένων κατά τι.

B. Ἔστωσαν εἰς λύσιν καὶ αὗται

$$\chi^2+\omega^2=a^2, \quad \chi\omega=\beta^2,$$

ὧν ἡ μὲν ἔχει πρῶτον μέλος τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων, ἡ δὲ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Λύονται δ' αὗται καὶ ἂν ἐν τῇ πρώτῃ ἀντὶ ω^2 τεθῇ τὸ ἐκ τῆς δευτέρας πορίζόμενον $\frac{\beta^4}{\chi^2}$ ἰσοδύναμον τοῦ ω^2, καὶ ἔπειτα λυθῇ ἡ προκύπτουσα τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἐξίσωσις $\chi^4-a^2\chi^2=-\beta^4$, οἱ δὲ τύποι τοῦ χ τεθῶσιν ἐν τῇ $\omega=\frac{\beta^2}{\chi}$ ἀντὶ τοῦ χ. Ἀλλ' εἶναι προτιμότερον νὰ λυθῶσιν ὡς ἐφεξῆς.

Πρῶτον διπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας, καὶ τὸ μὲν διπλάσιον $2\chi\omega$ γράφομεν πρῶτον θετικόν, καὶ ἔπειτ' ἀντιθετικὸν ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς πρώτης, τὸ δὲ διπλάσιον $2\beta^2$ γράφομεν ὡσαύτως ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς πρώτης· οὕτω δ' ἔχομεν

$$\chi^2+2\chi\omega+\omega^2=(\chi+\omega)^2=a^2+2\beta^2,$$
$$\text{καὶ } \chi^2-2\chi\omega+\omega^2=(\chi-\omega)^2=a^2-2\beta^2.$$

Καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης πορίζόμεθα $\chi+\omega=\pm\sqrt{a^2+2\beta^2}$,
ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $\chi-\omega=\pm\sqrt{a^2-2\beta}$.

Τώρα εὑρόντες τὸ ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων καὶ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν προσδιορίζομεν τοὺς ἀγνώστους χ καὶ ω κατὰ τὰ ἐν ἀρ. 70 εἰρημένα. Ἄλλως, προσθέτοντες τὰ πρῶτα μέλη εἰς ἄλληλα καὶ τὰ δεύτερα ὡσαύτως, καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦντες τὰ αὐτά, ἔχομεν

$$2\chi=\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}\pm\sqrt{\alpha^2-2\beta^2},$$

καὶ
$$\chi=\frac{\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}\pm\sqrt{\alpha^2-2\beta^2}}{2},$$

$$2\omega=\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}\mp\sqrt{\alpha^2-2\beta^2},$$

καὶ
$$\omega=\frac{\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}\mp\sqrt{\alpha^2-2\beta^2}}{2}.$$

Γ. Αἱ τοῦ 108 προβλήματος τρεῖς ἐξισώσεις

$$\chi+\psi+\omega=126,\quad \chi\psi\omega=13824,\quad \omega=\frac{\psi^2}{\chi},$$

λύονται ὡς ἐφεξῆς.

Πρῶτον τίθεται ἐν τῇ πρώτῃ καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἐκ τῆς τρίτης ἰσοδύναμόν του $\frac{\psi^2}{\chi}$, καὶ ἔχομεν

$$\chi+\psi+\frac{\psi^2}{\chi}=126,\qquad \chi\psi\times\frac{\psi^2}{\chi}=13824,$$

$$\text{ἢ } \chi^2+\chi\psi+\psi^2=126\chi,\qquad \text{ἢ } \psi^3=13824, \text{ ὅθεν}$$

$$\psi=\sqrt[3]{13824} \text{ ἢ } \psi=24.$$

Ἔπειτα τίθεται ἐν τῇ $\chi^2+\chi\psi+\psi^2=126\chi$ ἀντὶ τοῦ ψ ὁ 24 καὶ ἀντὶ ψ^2 τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, ἤτοι ὁ 576, καὶ τρέπεται εἰς ταύτην $\chi^2+24\chi+576=126\chi$, ἢ εἰς ταύτην

$$\chi^2-102\chi=-576,$$

ὅθεν
$$\chi=96 \text{ καὶ } \chi=6.$$

Τελευταῖον, τιθεμένου τοῦ 24 ἀντὶ ψ καὶ τοῦ 96 ἢ τοῦ 6 ἀντὶ χ ἐν τῇ πρώτῃ ἢ ἐν τῇ τρίτῃ, εὑρίσκεται $\omega=6$ ἢ $\omega=96$.

Λοιπὸν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι

96, 24, 6, ἢ 6, 24, 96.

δ. Ὡσαύτως λύονται καὶ αἱ τοῦ 109 προβλήματος ἐξισώσεις

$$\chi^2+\psi^2+\omega^2=104,\ \psi^2=\chi\omega+52,\ \chi=\omega+4.$$

Πρῶτον τίθεται ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ χ τὸ ἐκ τῆς τρίτης ἰσοδύναμόν του $\omega+4$ καὶ εὑρίσκεται $\psi^2=\omega^2+4\omega+52$. Ἔπειτα τίθεται ἐν τῇ πρώτῃ τὸ ἤδη εὑρεθὲν ἰσοδύναμον τοῦ ψ^2 καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $\omega+4$ τοῦ ἰσοδυνάμου τοῦ χ, ἤτοι τὸ $\omega^2+8\omega+16$, καὶ ἔχομεν $\omega^2+8\omega+16+\omega^2+4\omega+52+\omega^2=104$, ἢ μετὰ τὴν μετάθεσιν, τὴν συστολὴν καὶ τὴν διὰ 3 διαίρεσιν ὅλων τῶν ὅρων

$$\omega^2+4\omega=12,$$

ὅθεν $\omega=-2\pm\sqrt{12+4}$, ἢ $\omega=2$ καὶ $\omega=-6$.
Ἐκ δὲ τῆς $\chi=\omega+4$ εὑρίσκεται $\chi=6$ καὶ $\chi=-2$.
Ἐκ δὲ τοῦ $\psi^2=\chi\omega+25$ εὑρίσκεται $\psi=8$ καὶ $\psi=-8$.

Περὶ λύσεως καὶ διεπιλύσεως δευτεροβαθμίων προβλημάτων.

138. Καὶ τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα λύονται ὡς τὰ πρωτοβάθμια, ἤγουν πρῶτον κατασκευάζεται ἑκάστου ἡ ἐξίσωσις ἢ αἱ ἐξισώσεις καθ' ἃ εἴπομεν ἐν τῷ τρίτῳ κεφαλαίῳ, ἔπειτα, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἢ αἱ ἐξισώσεις ἦναι δευτεροβάθμιαι ὅμοιαι μὲ τὰς ὁποίας προηγουμένως ἐλύσαμεν, λύονται καὶ αὐταὶ καθ' ἃ ἤδη προλαβόντως εἴπομεν. Ἀλλ' ἐκ τοιούτων ἐξισώσεων λυθεισῶν πορίζεται συνήθως ἑκάστου ἀγνώστου διπλοῦν προσδιόρισμα, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις παρετηρήσαμεν, ἂν καὶ τὸ προκείμενον εἰς λύσιν πρόβλημα ἦναι προσδιωρισμένον. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ ἐπιστήσωμεν ὀλίγον τὴν προσοχήν μας ἐπὶ τῶν εὑρισκομένων προσδιορισμάτων τῶν ἀγνώστων, ἵνα ἐννοήσωμεν τίνα χρῆσιν αὐτῶν ἁρμόζει νὰ κάμνωμεν.

139. Ὅταν λύοντες δευτεροβάθμιον πρόβλημα εὕρωμεν ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου δύο ἀριθμούς, τὸν μὲν θετικόν, τὸν δὲ ἀντιθετικόν, συνηθέστατα ὁ θετικὸς μόνον εἶναι ὁ ζητούμενος, ἂν δὲν ἐμποδίζῃ τι τῶν ἐν ἀρ. 92 παρατηρηθέντων, ὁ δὲ ἀντιθετικὸς ἀνήκει εἰς ἄλλο πρόβλημα, διαφέρον τοῦ δεδομένου ἢ ἁπλῶς κατά τι

ποσὸν ἀντίθετον, ἢ καὶ κατ' ἄλλα, καὶ οὕτινος ἡ ἐξίσωσις λαβοῦσα τὴν γενικὴν μορφὴν διαφέρει τῆς τοῦ δεδομένου προβλήματος μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου.

Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι τὸ 102, τὸ 103 καὶ τὸ 104. Διότι τοῦ 102 ἡ ἐξίσωσις λαβοῦσα τὴν γενικὴν μορφὴν εἶναι $\chi^2+18\chi=2520$, ὅθεν $\chi=42$ καὶ $\chi=-60$. Καὶ ὁ μὲν 42 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν. Ὁ δὲ -60 δῆλον ὅτι δὲν ἀνήκει εἰς τὸ 102 πρόβλημα, ἀλλὰ θετικὸς ἐκλαμβανόμενος 60 ἀνήκει καὶ εἰς τοῦτο τὸ πρόβλημα,

Πόσων ἐτῶν εἶναι ἐρωτηθείς τις ἀπεκρίθη, Μ' ἐγέννησεν ἡ μήτηρ μου εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους αὐτῆς, ἂν δ' ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπεροχὴ τῆς ἡλικίας της ὑπὲρ τὴν ἰδικήν μου ἀπὸ τὴν ἰδικήν μου καὶ πολλαπλασιασθῇ ἡ διαφορὰ ἐπὶ τὴν ἡλικίαν μου, εὑρίσκεται γινόμενον ἴσον μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ 2520 ὑπὲρ τὸ διπλάσιον τῆς ἡλικίας μου πόσων ἐτῶν ἦτον;

τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει τις, ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ προβλήματος θέσῃ $-\chi$ ἀντὶ χ, καὶ ὁδηγούμενος ἐκ τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως $-\chi(-\chi+20)=-2\chi+20+2500$,

ἤ, ὅπερ ταὐτόν, ἐκ τῆς $\chi(\chi-20)=-2\chi+2520$,

ἀνεύρῃ τὸ πρόβλημα, οὕτινος εἶναι ἐξίσωσις.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη λαβοῦσα τὴν γενικὴν μορφὴν εἶναι $\chi^2-18\chi=2520$, ἥτις διαφέρει τῆς τοῦ 102 προβλήματος μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ μὲ τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ χ ὅρου, καὶ ἥτις λυθεῖσα δίδει $\chi=60$ καὶ $\chi=-42$, δηλ. τὸν ἀντιθετικὸν -60 τοῦ 102 προβλήματος θετικόν, τὸν δὲ θετικὸν 42 ἀντιθετικόν.

Ὡσαύτως καὶ τοῦ 103 ὁ ἄγνωστος χ εὑρέθη (133) ἴσος μὲ 12 καὶ μὲ -15. Καὶ ὁ μὲν 12 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν μανδηλίων, ὁ δὲ -15 θετικὸς θεωρούμενος ἀνήκει καὶ εἰς τὸ πρόβλημα,

Ἠγόρασα μανδήλια ἀντὶ 60 δραχμῶν, ἀλλ' ἐὰν μὲ τὰ

αὐτὰ χρήματα ἐλάμβανα 3 ὀλιγώτερα, ἕκαστον ἤθελεν ἀξίζει 1 δρ περισσότερον· πόσα ἠγόρασα;
τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις ἠγμένη εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν εἶναι $\chi^2-3\chi=180$, διαφέρουσα τῆς τοῦ 108 προβλήματος μόνον καθότι ἔχει -3χ ἀντὶ τοῦ $+3\chi$, καὶ ἥτις λυθεῖσα δίδει $\chi=15$ καὶ $\chi=-12$.

Εὐκόλως δέ τις καὶ τὸν τοῦ 104 ἀντιθετικὸν -6 θετικὸν θεωρούμενον δύναται νὰ ἐννοήσῃ εἰς ὁποῖον πρόβλημα ἀνήκει. Ἐνίοτε ὅμως δὲν εἶναι τόσον εὔκολον νὰ προσδιορισθῇ τὸ πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα τοῦ ἀγνώστου θετικὸν ἐκλαμβανόμενον. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι καὶ περιττὸν, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἠξεύρῃ τις ὅτι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος καὶ ὅτι ὁ ἀντιθετικὸς εἶναι ἄλλου προβλήματος, ἀλλ' ὄχι ἐκείνου, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ ἄγνωστος, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι παραβλεπτέος. Σπανιώτερα δὲ καὶ ὁ ἀντιθετικὸς ἀνήκει εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα (ἴδε 142, β).

140. Ὅταν δὲ καὶ οἱ δύο ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ ἦναι θετικοὶ, τότε καὶ οἱ δύο ἀνήκουσιν εἰς τὸ πρόβλημα, ἄν τι τῶν ἐν ἀρ. 92 παρατηρηθέντων δὲν κωλύῃ. Τοιοῦτοι δὲ εἶναι οἱ τοῦ 110 προβλήματος ἀντὶ τοῦ χ εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ 60 καὶ 40, διότι καὶ οἱ δύο ἁρμόζουσιν εἰς τὸ πρόβλημα. Ἀλλ' ἐκ τῶν δύο εὑρεθέντων (133) ἀριθμῶν 150 καὶ 6 ἀντὶ τοῦ χ τοῦ 106 προβλήματος ὁ πρῶτος μόνος ἁρμόζει εἰς αὐτὸ, ὁ δὲ δεύτερος 6, καίτοι θετικὸς, δὲν ἁρμόζει, ὡς μὴ συμβιβαζόμενος μὲ ὅλα τὰ δεδομένα αὐτοῦ.

Τοῦ ἀκολούθου δὲ προβλήματος,

† *Νὰ μερισθῇ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς π εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ γινόμενον νὰ ἦναι ἴσον μὲ ἄλλον δεδομένον ἀριθμὸν ρ.*
οὗτινος ἡ ἐξίσωσις, ὑποτεθέντος χ τοῦ ἑτέρου μέρους, εἶναι

$$\chi(\pi-\chi)=\rho, \text{ ἢ } \pi\chi-\chi^2=\rho, \text{ ἢ } \chi^2-\pi\chi=-\rho,$$

εἶναι τὸ $\chi=\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$, καὶ ἑπομένως τὰ δύο προσδιορίσματα τοῦ χ θετικά, ἐὰν $\rho<\frac{\pi^2}{4}$ (ἀρ. 135, γ'.). Ταῦτα δὲ καὶ τὰ δύο ἁρμόζουσιν εἰς τὸ πρόβλημα, ἤτοι καὶ τὸ $\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-\rho}$ καὶ τὸ $\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$, ἀντὶ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ σημειωθέντος διὰ χ. Ἀλλ' ἐνταυτῷ παρατηρητέον ὅτι, ἂν ἐκληφθῇ τὸ $\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$ ἀντὶ τοῦ χ, τότε τὸ $\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-\rho}$ παριστάνει τὸν ἄλλον, τὸν ἀνωτέρω σημειωθέντα διὰ $\pi-\chi$, ὡς βλέπει τις, ἂν ἀπὸ τὸ π ἀφαιρέσῃ τὸ $\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$ καὶ *τἀνάπαλιν*. Ὥστε τὰ δύο προσδιορισματα τοῦ χ εἶναι τὰ δύο ζητούμενα μέρη τοῦ δεδομένου π, καὶ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ χ ὁπότερον ἂν θέλωμεν, τὸ δὲ δεύτερον εἶναι πάντοτε τὸ ἄλλο ζητούμενον μέρος. Καὶ οὕτως ἔπρεπε νὰ ἦναι, διότι διὰ τοῦ χ δεν ἐσημειώσαμεν μᾶλλον τὸ ἓν μέρος παρὰ τὸ ἄλλο, ἀλλὰ τὸ ἕτερον, τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ τὸ μικρότερον καὶ τὸ μεγαλήτερον.

Παρατηρητέον δ' ἐν παρόδῳ ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἐνόσῳ εἶναι τὸ $\rho<\frac{\pi^2}{4}$, ἢ τὸ πολὺ $\rho=\frac{\pi^2}{4}$, ἤτοι ἐνόσῳ τὸ δεδομένον γινόμενον τῶν δύο μερῶν τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ εἶναι τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ· ὁπότε εἶναι τὸ $\chi=\frac{\pi}{2}$, ἤτοι ἑκάτερον ζητούμενον μέρος ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ. Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι *τὸ μέγιστον γινόμενον τῶν δύο μερῶν ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἴσοι, καὶ ἥμισυ ἑκάτερος τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ*. Οὕτως, ἂν ὁ 24 π. χ. μερισθῇ εἰς 12 καὶ 12, ἢ εἰς 11 καὶ 13, ἢ εἰς 10 καὶ 14 κτλ, τὸ μέγιστον τῶν γινομένων τούτων τῶν μερῶν εἶναι τὸ τοῦ 12 ἐπὶ 12, ἤτοι τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ 24.

Τοῦτο δὲ γίνεται φανερὸν καὶ οὕτως. Ἐπειδὴ εἶναι γνωστὸν τὸ κεφάλαιον π τῶν δύο ζητουμένων μερῶν, ἂν σημειωθῇ διὰ ω καὶ ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν, τότε (70) τὸ μὲν μεγαλήτερον μέρος θέλει εἶσθαι $\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2}$, τὸ δὲ μικρότερον $\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$, τὸ δὲ γινόμενόν των $\frac{\pi^2}{4}-\frac{\omega^2}{4}$. Ἀλλὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἦναι ἴσον καὶ μὲ τὸ ρ· λοιπὸν

$$\frac{\pi^2}{4}-\frac{\omega^2}{4}=\rho.$$

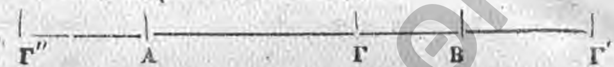
Ἐντεῦθεν δὲ δῆλον ὅτι, ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ ὅρος $\frac{\omega^2}{4}$, τόσον μεγαλήτερον εἶναι τὸ γινόμενον ρ, καὶ ὅτι μέγιστον θέλει εἶσθαι, ὅταν ὁ $\frac{\omega^2}{4}$ ἦναι ἴσος μὲ 0, τὸ ὁποῖον συμβαίνει ὅταν τὸ $\omega=0$, ἤτοι ὅταν τὰ δύο μέρη ἦναι ἴσα. Τότε δὲ εἶναι τὸ ρ ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ π.

141. Ὅταν δ' εὑρίσκηται ἀντὶ τοῦ x εἷς μόνος θετικὸς ἀριθμὸς, τότε αὐτὸς θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος, ἂν δὲν ὑπάρχῃ τι κώλυμα (92). Ὅταν δ' εὑρίσκηται εἷς μόνος ἀντιθετικὸς ἢ δύο ἀντιθετικοὶ, τότε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ὡς ἐν ἀρ. 93 καὶ ἐφεξῆς εἴπομεν. Ὅταν δὲ τελευταῖον τὰ ἰσοδύναμα τοῦ x εὑρεθῶσιν ἀνυπάρκτων σύμβολα, τότε τὸ πρόβλημα εἶναι κατὰ πάντα τρόπον ἀδύνατον, ὡς ἐν ἀρ· 100 καὶ ἐφεξῆς καὶ ἐν ἀρ 109. ε. εἴπομεν, οἷον τὸ τοῦ 140 ἀρ·, ὅταν $\rho>\frac{\pi^2}{4}$.

Δὲν ἐκτεινόμεθα πλειότερον περὶ τῶν μερικῶν, ἀλλ' εὐθὺς ἐπιχειροῦμεν τὴν διεπίλυσιν τοῦ ἑξῆς γενικοῦ προβλήματος.

142. *Εὐθείας, ἐφ' ἧς ἵστανται δύο λαμπάδες ἀναμμέναι, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπίσης ὑφ' ἑκατέρας φωτιζόμενον σημεῖον.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀπαιτεῖται νὰ ἠξεύρῃ τις τὸ ἐν τῇ Φυσικῇ ἀποδεικνυόμενον τοῦτο, ὅτι τὸ φῶς απομακρυνόμενον τῆς ἑστίας του ἐξασθενεῖ, γίνεται ἀμυδρότερον, ἢ, ὡς λέγουσιν, ἐλαττοῦται κατὰ τὴν ἔντασιν· *δύο δὲ ἐντάσεις τοῦ* αὐτοῦ φωτός, τὰς ὁποίας ἔχει εἰς δύο διαφόρως ἀπέχοντα τῆς ἑστίας του σημεῖα, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων. Οἷον, ἂν ὑποτεθῇ 1 ἡ ἔντασις, ἣν ἔχει φῶς τι εἰς σημεῖον ἕνα πῆχυν ἀπέχον τῆς ἑστίας του, ἡ ἔντασίς του εἰς σημεῖον ἀπέχον δύο πήχεις, τρεῖς κτλ θέλει εἶσθαι τὸ τέταρτον, τὸ ἔννατον κτλ τῆς ὑποτεθείσης ὡς μονάδος ἐντάσεώς του.



Τούτου οὕτως ἔχοντος, ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ δύο λαμπάδες, καὶ δ τὸ μεταξὺ αὐτῶν διάστημα ΑΒ· ὑποθέτομεν δὲ ὅτι Γ εἶναι τὸ ἐπίσης ὑφ' ἑκατέρας φωτιζόμενον σημεῖον, καὶ ὅτι $\text{ΑΓ}=\chi$, ὅθεν ἕπεται ὅτι $\text{ΒΓ}=\delta-\chi$. Ἐὰν δὲ ἡ ἔντασις τοῦ ἐκ τῆς Α λαμπάδος φωτὸς κατὰ τ' ἀπέχοντα τοῦ Α μίαν τινὰ μονάδα σημεῖα σημειωθῇ διὰ α, ἡ δὲ τοῦ ἐκ τῆς Β λαμπάδος φωτὸς ἔντασις κατὰ τὰς προειρημένας ἀποστάσεις σημειωθῇ διὰ β, ἡ ἔντασις τοῦ Α φωτὸς κατὰ τ' ἀπέχοντα 2, 3, 4... μονάδας σημεῖα εἶναι $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{9}$, $\frac{\alpha}{16}$, καὶ $\frac{\alpha}{\chi^2}$ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἡ δ' ἔντασις τοῦ Β φωτὸς κατὰ τὸ σημεῖον Γ δῆλον ὅτι εἶναι $\frac{\beta}{(\delta-\chi)^2}$. Ἀλλ' αἱ ἐντάσεις αὗται πρέπει νὰ ἦναι ἴσαι· λοιπὸν ἔχομεν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος τὴν

$$(\alpha)\qquad \frac{\alpha}{\chi^2}=\frac{\beta}{(\delta-\chi)^2},$$

ἐξ ἧς λυθείσης εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\alpha\delta}{\alpha-\beta}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2\delta^2}{(\alpha-\beta)^2}-\frac{\alpha\delta^2}{\alpha-\beta}}$$

ἢ ἁπλούστερα $\chi=\frac{\delta(\alpha\pm\sqrt{\alpha\beta})}{\alpha-\beta}$.

Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν ν' ἀπαλλαχθῶμεν τοῦ ῥιζοσήμου, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς (α) ἐξισώσεως ἐπὶ $(\delta-\chi)^2$ καὶ ἔπειτα τὰ διαιρέσωμεν διὰ $\frac{a}{\chi^2}$, τῆς δὲ προκυπτούσης ἐξισώσεως $(\delta-\chi)^2=\frac{\beta}{a}\chi^2$ τὸ $\frac{\beta}{a}$ σημειώσωμεν διὰ γ^2, ἤτοι $\gamma=\sqrt{\frac{\beta}{a}}$.

Οὕτως ἡ (α) ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ταύτην

(β) $$(\delta-\chi)^2=\gamma^2\chi^2,$$

ὅθεν
$$\delta^2-2\delta\chi+\chi^2=\gamma^2\chi^2$$
$$(1-\gamma^2)\chi^2-2\delta\chi=-\delta^2$$
$$\chi^2-\frac{2\delta}{1-\gamma^2}\chi=\frac{-\delta^2}{1-\gamma^2}$$

$$\chi=\frac{\delta}{1-\gamma^2}\pm\sqrt{\frac{\delta^2}{(1-\gamma^2)^2}-\frac{\delta^2}{1-\gamma^2}}=\frac{\delta}{1-\gamma^2}\pm$$
$$\sqrt{\frac{\delta^2-\delta^2+\gamma^2\delta^2}{(1-\gamma^2)^2}}=\frac{\delta}{1-\gamma^2}\pm\frac{\gamma\delta}{1-\gamma^2}=\frac{\delta(1\pm\gamma)}{1-\gamma^2}=\frac{\delta(1\pm\gamma)}{(1+\gamma)(1-\gamma)}$$

ὅθεν $$\chi=\frac{\delta}{1+\gamma} \text{ καὶ } \chi=\frac{\delta}{1-\gamma}.$$

Ἀλλ' εἰς ταῦτα ἠθέλαμεν καταντήσει ἁπλούστερα ἐξάγοντες ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (β) τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ λύοντες ἔπειτα τὴν προκύπτουσαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\delta-\chi=\pm\gamma\chi.$$

Ἐκ δὲ τούτου βλέπει τις ὅτι ἐνίοτε δι' ἰδιαιτέρας μεθόδου φθάνομεν συντομώτερα εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα φέρει καὶ ἡ γενική.

Διεπίλυσις. Ἐνόσῳ αἱ λαμπάδες ἀπέχουσί τι ἀπ' ἀλλήλων, ἤτοι τὸ δ δὲν εἶναι 0, οἱ διάφοροι προσδιορισμοὶ τῶν δεδομένων τῶν ἐν τοῖς τύποις

$$\chi=\frac{\delta}{1+\gamma} \quad\text{καὶ}\quad \chi=\frac{\delta}{1-\gamma}$$

δυνατὸν νὰ καταστaίνωσι τὸ $\gamma<1$, ἢ >1, ἢ $=1$. Ἀλλ' ἐ...

τῆς τοῦ γ ἴσου μὲ τὴν $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, τὸ μὲν $\gamma<1$ σημαίνει ὅτι τοῦ Α φωτὸς ἡ ἔντασις εἶναι μεγαλητέρα τῆς τοῦ Β. διότι, ἵνα ἦναι $\gamma<1$ ἤτοι $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}<1$, ἀνάγκη να ἦναι καὶ τὸ $\frac{\beta}{\alpha}<1$, ἤτοι $\alpha>\beta$. Τὸ δὲ $\gamma>1$ σημαίνει ὅτι $\alpha<\beta$, ἤτοι ὅτι τοῦ Α φωτὸς ἡ ἔντασις εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ Β. Τελευταῖον τὸ $\gamma=1$ σημαίνει ὅτι τὸ $\alpha=\beta$, ἤτοι ὅτι αἱ ἐντάσεις τῶν δύο φώτων εἶναι ἴσαι.

α. Ὅταν μὲν λοιπὸν $\gamma<1$, 1) ὁ μὲν παρονομαστὴς $1+\gamma$ τοῦ πρώτου τύπου τοῦ χ εἶναι θετικός· καὶ μεγαλήτερος μὲν τῆς 1, μικρότερος δὲ τοῦ 2· ἐπομένως ὁ τύπος $\frac{\delta}{1+\gamma}$ εἶναι θετικὸς καὶ $<\delta$, ἀλλὰ $>\frac{\delta}{2}$. Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι, *τὸ ἐπίσης ὑφ' ἑκατέρας λαμπάδος φωτιζόμενον σημεῖον κεῖται μεταξὺ αὐτῶν, εἶναι δὲ μακρύτερα τῆς Α παρὰ τῆς Β λαμπάδος.* Καὶ τῷ ὄντι τοῦτο συμβαίνει ὅταν $\alpha>\beta$· διότι τὰ φῶτα τῶν λαμπάδων ἀκτινοβολοῦντα πανταχόθεν φωτίζουσι καὶ τὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ σημεῖα, ἀλλὰ τοῦ Α φωτὸς ἡ ἔντασις, ὡς μεγαλητέρα τῆς τοῦ Β, εἰς σημεῖον μακρύτερα τοῦ Α παρὰ τοῦ Β θέλει εἶσθαι ἴση μὲ τὴν ἔντασιν τοῦ Β. Λοιπὸν *τὸ ἐπίσης φωτιζόμενον* κτλ.

2) Ὁ δὲ παρονομαστὴς $1-\gamma$ εἶναι μὲν θετικός, ἀλλὰ μικρότερος τῆς μονάδος, καὶ διὰ τοῦτο ὁ τύπος $\frac{\delta}{1-\gamma}$ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ δ. Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι *εἶναι καὶ δεύτερον σημεῖον ἐπίσης φωτιζόμενον ὑφ' ἑκατέρας λαμπάδος, τὸ ὁποῖον κεῖται ὄχι μεταξὺ αὐτῶν, ἀλλὰ δεξιὰ καὶ τῶν δύο κατὰ τὸ Γ.* Καὶ τῷ ὄντι οὕτως ἔχει τὸ πρᾶγμα· διότι ἐκ τοῦ ὅτι φωτίζεται ἐπίσης ὑφ' ἑκατέρας λαμπάδος τὸ Γ ἕπεται ὅτι κατὰ τὸ σημεῖον Β τοῦ Α φωτὸς ἡ ἔντασις εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ Β, ἐκεῖθεν δὲ πρὸς δεξιὰ καὶ τῶν δύο φώ-

των αἱ ἐντάσεις βαθμηδὸν σμικρύνουσιν, ἀλλὰ τοῦ Β ἡ ἔντασις ἐξασθενεῖ ταχύτερα ὡς μικροτέρα τῆς τοῦ Α. Ὥστε εἴς τι σημεῖον Γ' δεξιὰ τοῦ Β θέλουσι καταντήσει καὶ τῶν δύο αἱ ἐντάσεις ἴσαι, θέλουσι φωτίζει τὸ Γ' ἐπίσης καὶ τὰ δύο φῶτα.

Τοῦτο δὲ γίνεται δῆλον καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ Γ', καὶ ὅτι χ εἶναι τὸ ΑΓ' ... ὁπότε τὸ ΒΓ' παρίσταται διὰ $\chi-\delta$. Τότε δὲ ἡ ἐξίσωσις θέλει ἔσεσθαι

$$\frac{a}{\chi^2}=\frac{b}{(\chi-\delta)^2},$$

ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀνωτέρω (α), διότι τὸ $(\chi-\delta)^2$ καὶ τὸ $(\delta-\chi)^2$ εἶναι τὸ αὐτό· λοιπὸν καὶ τὸ Γ σημεῖον καὶ τὸ Γ' προσδιορίζονται ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως· λοιπόν, ἀφ' οὗ ἐκ τοῦ πρώτου τύπου τοῦ χ προσδιορίζεται τὸ Γ, ἐκ τοῦ δευτέρου ἀνάγκη νὰ προσδιορίζηται τὸ Γ'.

β'. Ὅταν δὲ $\gamma>1$, ἤτοι $b>a$, ἕκαστος ἐννοεῖ ὅτι πάλιν συμβαίνουσι τὰ αὐτά, ἤτοι φωτίζεται ὑφ' ἑκατέρας λαμπάδος ἐπίσης ἓν σημεῖον κείμενον μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Β, ἀλλὰ πλησιέστερον τοῦ Α παρὰ τοῦ Β, καὶ ἄλλο ἓν Γ'' κείμενον ἀριστερὰ τοῦ Α, ἐπομένως καὶ τοῦ Β. Τοῦτο δὲ δεικνύουσι καὶ οἱ τύποι· διότι ὁ μὲν πρῶτος εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ $\frac{\delta}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος εἶναι ἀντιθετικός, ὅστις σημαίνει ὅτι τὸ ἐπίσης φωτιζόμενον σημεῖον εἶναι ὄχι δεξιὰ τῆς ἀρχῆς Α, ὡς ὑπετέθη πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως, ἀλλ' ἀριστερὰ τῆς.

γ'. Ὅταν δὲ $\gamma=1$, ἤτοι $a=b$, ὁ μὲν πρῶτος τύπος τρέπεται εἰς $\frac{\delta}{2}$ καὶ δεικνύει ὅτι *ἓν σημεῖον ἐπίσης φωτιζόμενον ὑπὸ τῶν δύο λαμπάδων εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ εὐθείας*. Καὶ τῷ ὄντι, ὅταν τῶν φώτων αἱ ἐντάσεις ἦναι ἴσαι, τὸ μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ ἴσον ἀπέχον τῶν δύο φωτίζεται ἐπίσης.

Ὁ δὲ δεύτερος τρέπεται εἰς $\frac{\delta}{0}$, τὸ ὁποῖον ἤδη ἠξεύρομεν ὅτι παριστάνει τὸ ἄπειρον, ἤτοι ὅτι ἀπέχει ἀπείρως πολὺ τοῦ Α τὸ ἐπίσης φωτιζόμενον σημεῖον, ἤτοι ὅτι ἀδύνατον νὰ φωτίζηται ἄλλο σημεῖον ἐπίσης ὑπὸ τῶν δύο φώτων· τὸ ὁποῖον εὐκόλως τις ἐννοεῖ, ἐνθυμούμενος ὅτι τῶν φώτων αἱ ἐντάσεις εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι εἶναι μακρὰν ἡ μία λαμπὰς τῆς ἄλλης.

Συνιστῶμεν τὴν διεπίλυσιν καὶ τοῦ 121 προβλήματος, ἔτι δὲ καὶ τῶν κατωτέρω 13 καὶ 14.

Ποικίλα προβλήματα εἰς λύσιν.

1. Ἐκ τῶν 32 παιγνιδοχάρτων τῶν χρησίμων εἰς τὸ πικέτον ἐπαίρει τις τρία κατὰ τύχην καὶ ἐπιθέτει ἐφ' ἑκάστου αὐτῶν ὅσα χαρτία ἀρκοῦσιν εἰς τὸ νὰ γείνῃ 15 τὸ κεφάλαιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐπιτεθειμένων χαρτίων καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων τοῦ ἐφ' οὗ εἶναι ἐπιτεθειμένα χαρτίου, μετὰ ταῦτα μένουσιν ἔτι 8 χαρτία· πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν σημείων καὶ τῶν τριῶν ὁμοῦ εἰλημμένων χαρτίων; Καὶ γενικῶς,

Ὄντος a τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χαρτίων παιγνιδίου τινός, λ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λαμβανομένων, κ τοῦ κεφαλαίου τῶν σημείων ἑκάστου χαρτίου ὁμοῦ μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπιτεθειμένων, καὶ υ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑπολειπομένων χαρτίων, εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον τῶν σημείων τῶν λ χαρτίων τῶν κατ' ἀρχὰς εἰλημμένων.

2. Ἐμερίσθησαν 156 δρ εἰς 16 πτωχόπαιδα ἀναλόγως τῶν ἡλικιῶν των καὶ οὕτως, ὥστε ἔλαβεν ἕκαστον πρεσβύτερον τοῦ ἀμέσως νεωτέρου του περισσοτέρας δρ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· λαβόντος δὲ τοῦ νεωτάτου 6 δρ, πόσας ἔλαβεν ὁ πρεσβύτατος;

3. Μέλλοντός τινος νὰ πληρώσῃ 2363 δρ ἐν 34 πληρωμαῖς

οὕτως, ὥστ᾽ ἑκάστη τούτων νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀμέσως πρὸ αὐτῆς δρ 3, πόσων δρ εἶναι ἡ πρώτη πληρωμή;

4. Τίς εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις προστεθεὶς εἰς τὸν 15, εἰς τὸν 27 καὶ εἰς τὸν 45 παρέχει τρία κεφάλαια συνεχῆ ἀναλογίαν ἀποτελοῦντα;

5. Δύο πρόοδοι, ἡ μὲν ἰσοδιαφόρων, ἡ δὲ ἀναλόγων, ἔχουσιν ἑκατέρα τρεῖς μόνον ὅρους, καὶ τῶν μὲν 6 ὅρων των τὸ ἄθροισμα εἶναι 96, ὁ δὲ πρῶτος ὅρος τῆς τῶν ἰσοδιαφόρων εἶναι ἥμισυ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς τῶν ἀναλόγων, ὁ δεύτερος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τὸ ἕκτον τοῦ τρίτου· τίς εἶναι ἑκατέρα τούτων τῶν προόδων;

6. Ἵπποι 8 βοσκήσαντες 7 ἑβδομάδας ἐν λειβαδίῳ 400 πηχυαίων τετραγώνων κατέφαγον καὶ τὸ ἤδη ὑπάρχον ἐκεῖ χόρτον καὶ τὸ ἀναφυὲν κατὰ τὰς 7 ἑβδομάδας, ἐνῷ καθ' ὁμοίας περιστάσεις 9 ἵπποι ἤθελον τραφῆ 8 ἑβδομάδας ἐν λειβαδίῳ 500 πηχυαίων τετραγώνων· πόσους ἵππους ἤθελε θρέψει τὸ χόρτον λειβαδίου 600 πηχυαίων τετραγώνων ἐπὶ 10 ἑβδομάδας;

7. Δύο περιηγητῶν ἀπερχομένων ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως ὁ μὲν ὁδεύει τὴν πρώτην ἡμέραν 8 στάδια, τὴν δευτέραν 16, τὴν τρίτην 24 καὶ οὕτως ἑξῆς, ὁ δὲ τὴν ἕκτην ἡμέραν μετὰ τὸν πρῶτον κινήσας κατόπιν του διευθυνόμενος ὁδεύει 96 στάδια τὴν ἡμέραν· μετὰ πόσον χρόνον ἀφοῦ ὁ πρῶτος ἐκίνησε θέλει τὸν φθάσει ὁ δεύτερος;

8. Ποιμήν τις ἐπαριθμῶν μὲν τὰ πρόβατά του ἀνὰ 4 ἢ ἀνὰ 6 ἢ ἀνὰ 9 εὑρίσκει κατὰ τὰς τρεῖς ἐπαριθμήσεις ὑπόλοιπον 3, ἐπαριθμῶν δ' αὐτὰ ἀνὰ 7 ἢ ἀνὰ 13 εὑρίσκει ὑπόλοιπον ἕν, ἀριθμῶν δ' αὐτὰ ἀνὰ 11 εὑρίσκει ὑπόλοιπον 7· πόσα εἶναι τὰ πρόβατά του;

9. Νὰ μερισθῇ ὁ 70 εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου ἐπὶ 7, τοῦ δευτέρου ἐπὶ 8 καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ 9 ν' ἀποτελῶσι κεφάλαιον 561.

10. Ἀριθμητικός τις ἔδωκεν εἰς μαθητήν τινα δύο ἀριθμοὺς

νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον, ὧν ἡ διαφορὰ ἦτον 75, ἐκτελεσθέντος δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, παραγγέλλεται ὁ μαθητὴς πρὸς δοκιμὴν νὰ διαιρέσῃ τὸ γινόμενον διὰ τοῦ μικροτέρου παράγοντος. Τούτων λοιπὸν γενομένων, καὶ εὑρεθέντος πηλίκου 227 καὶ καταλοίπου 113, Ἔκαμες λάθος, εἶπε πρὸς τὸν μαθητὴν ὁ ἀριθμητικός, καὶ προσπάθησε νὰ τὸ εὕρῃς. Ἐλογίσθην 1 πλειότερον, ἀπεκρίθη ὁ μαθητής. Ὄχι 1, ἐπανέλαβεν ὁ ἀριθμητικός, ἀλλὰ 1000 περισσότερα πολλαπλασιάζων ἐλογίσθης. Τίνες ἦσαν οἱ δεδομένοι νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἀριθμοί;

11. Θέλων τις νὰ μετρήσῃ τὸ βάθος φρέατος, ἀφίνει νὰ πέσῃ ἐν αὐτῷ λίθον, καὶ παρατηρεῖ ὅτι ἀφ' ἧς στιγμῆς ἄφησε τὸν λίθον μέχρι τοῦ ἤκουσε τὸν ἦχον τῆς πτώσεως παρῆλθον τ δευτερόλεπτα. Γνωστοῦ δ' ὄντος ἔτι ὅτι ἐν τῷ κενῷ τὸ καταπίπτον σῶμα διανύει ἐπὶ μὲν τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον διάστημα $\frac{6}{2}$ (ἰδὲ Συμ. σελ. 124), ἐπὶ δὲ 2, 3 κτλ δευτερόλεπτα διαστήματ' ἀνάλογα τῶν τετραγώνων αὐτῶν τῶν χρόνων, καὶ ὅτι ὁ ἦχος ὁμαλῶς κινούμενος διατρέχει η βασιλικοὺς πήγεις ἐπὶ ἕκαστον δευτερόλεπτον, εὑρεῖν τὸ βάθος τοῦ φρέατος (τὸ η εἶναι περίπου 340 βασ. πήχ).

12. Δύο ἐργατῶν ἐργασθέντων ἐπὶ ἄλλῳ ἡμερομισθίῳ ἑκατέρου καὶ πληρωθέντων εἰς τὸ τέλος χρόνου τινός, ὁ μὲν ἔλαβε 96 δρ, ὁ δέ, 6 ἡμέρας ὀλιγώτερον ἐργασθείς, 54 δρ· ἤθελε δὲ λάβει ἑκάτερος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν δρ, ἐὰν ὁ δεύτερος ἤθελεν ἐργασθῇ ὅλας τὰς ἡμέρας, ὁ δὲ πρῶτος 6 ἡμέρας ὀλιγώτερον· πόσας ἡμέρας ἑκάτερος εἰργάσθη, καὶ πόσον ἦτον ἑκατέρου τὸ ἡμερομίσθιον;

13. Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν γινομένων τοῦ μὲν ἐπὶ α, τοῦ δὲ ἐπὶ β, νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν π, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν γινομένων τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν ρ.

14. Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν γινομένων αὐτῶν, τοῦ μὲν ἐπὶ α, τοῦ δὲ ἐπὶ β, νὰ ἦναι ἴση μὲ τὸν π, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των νὰ ἦναι ἴση μὲ ἄλλον ἀριθμὸν ρ.

ΤΕΛΟΣ.

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΥΠΟ

Α. Μ. ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ.

Μέλους τοῦ Πανεπιστημίου καὶ τοῦ Τάγματος τῆς Τιμῆς, τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου κ. τ. λ.

Μεταφρασθέντα ἐκ τοῦ Γαλλικοῦ ἐκ τῆς δωδεκάτης αὐτῶν ἐκδόσεως, ὑπὸ τοῦ

ΔΟΚΤΟΡΟΣ ΙΩ. ΚΑΡΑΝΔΗΝΟΥ ΚΕΦΑΛΗΝΟΣ.

Ἐφόρου τῆς Ἰονίου Ἀκαδημίας, Δεκάνου τῆς φιλοσοφικῆς Σχολῆς, καὶ Προφέσσορος τῆς Ὑψηλοτέρας Μαθηματικῆς.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ.

ΥΠΟ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΓΚΑΡΠΟΛΑ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΤΟΥ ΕΚΔΟΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΓΚΑΡΠΟΛΑ·

1840.

Ο ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΗΣ

Πρὸς τὸν ἀναγνώστην.

Ἰδοὺ ἐκβαίνει εἰς φῶς καὶ ὁ δεύτερος τόμος τῆς στοιχειώδους σειρᾶς τῶν Μαθηματικῶν. Ὅστις περιέχει τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας τοῦ περιφήμου Λεγένδρου.

Τὸ σύγγραμμα τοῦ Λεγένδρου εἶναι βέβαια τὸ καλήτερον στοιχειῶδες σύγγραμμα τῆς Γεωμετρίας. Ἀπὸ τοὺς ὅσοι πρὸ αὐτοῦ ἔγραψαν τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιστήμης ταύτης, ἄλλοι μὲν ἀνέμιξαν τὰς Γεωμετρικὰς ἀληθείας μὲ τὰς ἐφαρμογάς των, μὴ στοχασθέντες ὅτι ἡ ἀνάμιξις αὕτη εἶναι μέγα ἐμπόδιον εἰς τὴν πρόοδον τοῦ σπουδάζοντος τὴν Γεωμετρίαν· διότι πρέπει νὰ δαπανᾷ, ὄχι ὀλίγον καιρὸν, ἂν καὶ χωρὶς καρπὸν, εἰς ἀληθείας αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν κἀμίαν ἄμεσον σχέσιν μὲ τὸ ἀντικείμενον τῆς σπουδῆς του, καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἐντελὴς κατάληψις ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν καὶ τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς ἐπιστήμης εἰς τὴν ὁποίαν ἡ Γεωμετρία ἐφαρμόζεται. Ἄλλοι δὲ δὲν ἔπεσαν εἰς τὸ ἄτοπον τῶν πρώτων, πλὴν ἐκτὸς ὅτι εἰς τὰ συγγράμματά των δὲν φαίνεται ἐκείνη ἡ Γεωμετρικὴ ἀκρίβεια, οὐδὲ τακτικῶς ἐξέθεσαν τὰς διαφόρους προτάσεις, ὥστε νὰ φαίνηται ἡ πρὸς ἀλλήλας σχέσεις, ἀλλ' ὡς πρὸς τοῦτο δουλικῶς ἠκολούθησαν τὴν τάξιν τοῦ Εὐκλείδου, χωρὶς νὰ προσφέρουν ἴδιόν τι εἰς τὴν ἐπιστήμην· ἄλλοι τέλος πάντων ἐχάθησαν εἰς Μεταφυσικὰς λεπτολογίας, παραβλέψαντες τὰ οὐσιώδη, καὶ οὕτως ἐσκότιζον παρ' ὅ,τι διεσάφιζον τὰς ἐναργεστάτας προτάσεις τῆς Γεωμετρίας.

Ἀφ' οὗ δὲ εἰς τὴν Γαλλίαν ἄρχισαν νὰ προοδεύουν αἱ Μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι, διάφοροι σειραὶ στοιχείων Μαθηματικῆς ἐφάνησαν, μὲ περισσοτέραν τάξιν καὶ μέθοδον γραμμέναι, καὶ ἁρμόδιαι ἐπομένως εἰς τὴν σπουδάζουσαν Νεολαίαν.

Μεταξὺ τούτων διακρίνεται ἡ στοιχειώδης σειρὰ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Λακροΐου (Lacroix)· ὁ ἔνδοξος οὗτος Μαθηματικὸς ἀφ' οὗ εἰς τρεῖς μεγάλους τόμους συνήθροισε καὶ διέταξεν ὅτι ἀναφέρεται εἰς τὴν ὑψηλὴν Μαθηματικὴν, συνέγραψε καὶ πλήρη στοιχειώδη σειράν. Ἡ εἴσαξις ταύτης εἰς τὰ λύκεια τῆς Γαλλίας, ἡ εἰς τὰς ἄλλας Εὐρωπαϊκὰς γλώσσας μετάφρασίς της, ἀρκετὰ ἀποδεικνύουν τὴν ἀξίαν της. Πρέπει ὅμως νὰ ὁμολογήσωμεν ὅτι ἂν καὶ ὁ Λακρόϊος εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας του ἐφύλαξε τὴν ἀπαιτουμένην ἀκρίβειαν εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων, καὶ διὰ πολλὰ ὑπερέχει τὸ σύγγραμμά του ἄλλα στοιχειώδη συγγράμματα, τὰ στοιχεῖα ὅμως ταῦτα δὲν ἔχουσι τὸ πλῆρες, καὶ ἐλλείπουσι πολλῶν ἀναγκαίων προτάσεων τῆς Γεωμετρίας· ἐν ᾧ δὲ εἰς τὸ σύγγραμά του ἐπιγραφόμενον essais sur l'enseignement ἔδωκε παραγγέλματα διὰ τὴν συγγραφὴν στοιχείων Γεωμετρίας, ταῦτα ὅμως δὲν ἐφύλαξε, καὶ οὔτε τὴν τάξιν ἐπέτυχε.

Ὁ δὲ ἡμέτερος συγγραφεὺς εἰς τὸ σύγγραμμά του ἥνωσε τὸ πλῆρες μὲ θαυμασίαν τάξιν, καὶ φαίνεται ὅτι ἔβαλλεν εἰς πρᾶξιν ὅσα ὁ Λακρόϊος παραγγέλλει εἰς τὸ εἰρημένον σύγγραμμά του. Ἡ μόνη προσεκτικὴ ἀνάγνωσις τοῦ συγγράμματος τοῦ Λεγένδρου ἠμπορεῖ νὰ δώσῃ μίαν ἰδέαν τῆς τάξεως μὲ τὴν ὁποίαν ἐκτίθενται αἱ προτάσεις, καὶ ἡ ὁποία εἰς οὐδὲν ἄλλο σύγγραμμα παρατηρεῖται· ὥστε διὰ ταῦτά του τὰ προτερήματα καὶ δι' ἄλλα περισσότερα τὸ σύγγραμμα τοῦ Λεγένδρου εἶναι κατὰ τὸ παρὸν τὸ καλλίτερον στοιχειῶδες σύγγραμμα.

Ὅλα ταῦτα τὰ ὁποῖα καὶ ἡ ἰδία πεῖρα μὲ ἐβεβαίωσε, μὲ ἔκαμαν νὰ προτιμήσω τὸ σύγγραμμα τοῦ Λεγένδρου, ἐν ᾧ ἐμελετοῦσα νὰ δώσω εἰς τὸ ἔθνος μου στοιχεῖα Γεωμετρίας.

Εἰς τὴν μετάφρασίν μου δὲν ἔλλειψα νὰ προσθέσω τινὰς διασαφήσεις εἰς μερικὰς προτάσεις εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἀναγνώστης ἠμπορεῖ νὰ ἀπαντήσῃ δυσκολίας, ἠξεύρων ὅτι τὸ ἔθνος μας ἀκόμη στερεῖται τοιούτου εἴδους συγγραμμάτων, τὰ ὁποῖα, χρείας τυχούσης, νὰ συμβουλεύηται ὁ σπουδάζων.

Ἀλλ' ἐκδίδων τὸν παρόντα τόμον πρέπει νὰ ἀποκριθῶ εἰς τὴν κρίσιν τὴν ὁποίαν τινὲς ἐπέφερον διὰ τὴν Ἀριθμητικὴν τοῦ Βουρδῶνος· διότι ἴσως καὶ διὰ τὴν Γωμετρίαν τὴν αὐτὴν θέλουν ἐπιφέρει: ὅτι, δηλαδὴ, ἡ Ἀριθμητικὴ αὕτη εἶναι ἐκτεταμένη, καὶ διὰ τοῦτο ὄχι ἁρμοδία εἰς τὴν νεολαίαν. Ἡ ἀπόκρισίς μου εἶναι ὅτι ἠμποροῦσα νὰ μεταφράσω ἄλλην συντομωτέραν καθὼς τὴν τοῦ Λακροίου ἤ τινος ἄλλου· πλὴν κἀμμίαν δὲν ἔβλεπα ἐξισουμένην εἰς τὴν ἀξίαν μὲ τὴν τοῦ Βουρδῶνος, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὰς ἰδέας, εἰς τὴν μέθοδον, εἰς τὴν σαφήνειαν, καὶ εἰς ἄλλα προτερήματα, τὰ ὁποῖα οἱ μὴ κατ' ἐπιφάνειαν ἔχοντες ἰδέας ἐπάνω εἰς τὰς Μαθηματικὰς ἐπιστήμας ἠμποροῦν νὰ παρατηρήσουν· καὶ διὰ νὰ μὴ πολυλογῶ, καθὼς ὁ συγγραφεὺς συνέγραψε τοιαύτην Ἀριθμητικὴν διὰ νέους »qui ont à subir des épreuves difficiles, et dont les premiers pas, dans la carrière des sciences, doivent se faire d' une manière cûre et profitable« (*) ἤγουν· οἱ ὁποῖοι μέλλουν νὰ ὑποβληθοῦν εἰς αὐστηρὰς δοκιμασίας, καὶ τῶν ὁποίων τὰ πρῶτα βήματα εἰς τὸ στάδιον τῶν ἐπιστημῶν, πρέπει νὰ γίνουν ἀσφαλῶς καὶ ἐπωφελῶς· οὕτω καὶ ἐγὼ τὴν ἐμετάφρασα διὰ τοὺς νέους Ἕλληνας οἵτινες ἀσφαλῶς θέλουν νὰ διατρέξουν τὸ εὐρύχωρον πεδίον τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, καὶ μέλλουν νὰ ἀφιερωθοῦν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν καὶ τῶν ἐφαρμογῶν των· δι' ἐκείνους ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἡ νέα Ἑλλὰς ἐλπίζει Εὐκλείδας καὶ Ἀρχιμήδας, καὶ εἰσαγωγεῖς τῶν ἐπιστημῶν εἰς τὴν ἀρχαίαν πατρίδα των. Ὁ καιρὸς περιπλέον θέλει δείξει ἐὰν ἐπέτυχα εἰς τὴν ἐκλογήν μου, καὶ ἐὰν ἡ εἴσαξίς της εἰς τὰ σχολεῖα θέλῃ ὠφελήσει τὴν νεολαίαν ἢ ὄχι.

εὐτύχει.

(*) Βλέπε Γαλ. ἐκδ. avertissement pag. 8.

Ὅστις τῶν ἀναγνωστῶν, τοὐλάχιστον εἰς τὴν πρώτην ἀνάγνωσιν, θέλει νὰ περιορισθῇ εἰς τὰ ἁπλᾶ στοιχεῖα, ἠμπορεῖ νὰ παραβλέψῃ τὰς σημειώσεις, παραρτήματα καὶ γενικῶς ὅ,τι εἶναι τυπωμένον εἰς μικροὺς χαρακτῆρας ὡς ὀλιγώτερον ὠφέλιμα ἢ ἀπαιτοῦντα βαθυτέραν τὴν σπουδήν. Θέλει δὲ ἐπιστρέψει εἰς ταῦτα ὅταν τὸ κρίνῃ εὔλογον, ἐκλέγων ὅ,τι ἤθελε τοῦ φανῇ ἁρμόδιον, καὶ τοῦτο κατὰ τὴν συμβουλὴν πεφωτισμένου τινὸς προφέσορος.

Σ. Κ. Οἱ εἰς τὸ περιθώριον εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ σημειόνουν τὰς προτάσεις εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἀναγνώστης παραπέμπεται διὰ τὴν κατάληψιν τῶν ἀποδείξεων. Εἷς μόνος ἀριθμὸς, ὡς 4, σημειόνει τὴν δ' πρότασιν τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου· δύο δὲ ἀριθμοὶ ὡς 20. 3 σημειόνουν τὴν κ' πρότασιν τοῦ γ' βιβλίου. (*). Εἰς δὲ τὴν τριγωνομετρίαν τὰ ἄρθρα καὶ αἱ παραπομπαὶ ἐσημειώθησαν διὰ ῥωμαϊκῶν χαρακτήρων.

(*) Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἰς τὴν παροῦσαν μετάφρασιν ἐτέθησαν ἐντὸς τοῦ κειμένου.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΑΙ ΑΡΧΑΙ.

Ὁρισμοί.

Α΄. Ἡ Γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ἔχουσα ἀντικείμενον τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐκτάσεως.

Ἡ δὲ ἔκτασις ἔχει τρεῖς διαστάσεις, μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Β΄. Ἡ γραμμὴ εἶναι μῆκος χωρὶς πλάτος.

Τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς καλοῦνται σημεῖα· τὸ σημεῖον λοιπὸν δὲν ἔχει ἔκτασιν.

Γ΄. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ βραχύτατος δρόμος ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο.

Δ΄. Κάθε γραμμὴ ἥτις δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα οὔτε σύνθετος ἀπὸ εὐθείας γραμμάς, καλεῖται καμπύλη γραμμή.

Οὕτως ΑΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ΑΓΔΒ ἡ εἶναι γραμμὴ κεκλασμένη ἢ σύνθετος ἀπὸ εὐθείας γραμμάς, καὶ ΑΕΒ εἶναι καμπύλη γραμμή. σχ. 1.

Ε΄. Ἐπιφάνεια εἶναι ὅ,τι ἔχει μῆκος καὶ πλάτος, χωρὶς ὕψος ἢ πάχος.

ς΄. Τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἐπιφάνεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἐὰν ληφθῶσι κατ' ἀρέσκειαν δύο σημεῖα, καὶ ἑνωθῶσι τὰ δύο ταῦτα σημεῖα δι' εὐθείας γραμμῆς, ἡ γραμμὴ αὕτη εὑρίσκεται ὅλη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν.

Ζ΄. Κάθε ἐπιφάνεια, ἥτις δὲν εἶναι ἐπίπεδος οὔτε σύνθετος ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια.

Η΄. Στερεὸν ἢ σῶμα εἶναι ὅ,τι περιέχει ἐν ταὐτῷ τὰς τρεῖς διαστάσεις τῆς ἐκτάσεως.

Θ΄. Ὅταν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ συναπαντῶνται ὡς ΑΒ,ΑΓ, ἡ ποσότης, ἡ περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον μεγάλη, διὰ τῆς ὁποίας ἀπομακρύνονται αὗται αἱ εὐθεῖαι, ὅσον πρὸς τὴν θέσιν των, καλεῖται γωνία. Τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως ἢ τῆς κοινῆς τομῆς Α εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας· αἱ δὲ γραμμαὶ ΑΒ, ΑΓ εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτῆς. σχ. 2.

Ἡ γωνία σημειόνεται ἐνίοτε μόνον διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς Α, ἄλλοτε δὲ διὰ τριῶν γραμμάτων ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ, τιθεμένου ὅμως τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον.

Αἱ γωνίαι, καθὼς καὶ αἱ ἄλλαι ποσότητες, εἶναι δεκτικαὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως· οὕτως ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΔΓΒ, ΒΓΕ, καὶ ἡ γωνία ΔΓΒ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο γωνιῶν ΔΓΕ, ΒΓΕ. σχ. 20.

Ι'. Ὅταν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ συναπαντᾷ ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν ΓΔ, εἰς τρόπον ὥστε αἱ προσκείμεναι γωνίαι ΒΑΓ, ΒΑΔ νὰ ἦναι ἴσαι μεταξύ των, ἑκάστη τούτων τῶν γωνιῶν καλεῖται γωνία ὀρθή· ἡ δὲ γραμμὴ ΑΒ λέγεται κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ. σχ. 3.

ΙΑ'. Κάθε γωνία ΒΑΓ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία ὀξεῖα· κάθε δὲ γωνία μεγαλητέρα ΔΕΖ εἶναι γωνία ἀμβλεῖα. σχ. 4.

ΙΒ'. Δύο γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι, ὅταν, κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναπαντηθῶσιν, ὅσον μακρὰν καὶ ἂν προεκβληθῶσι· τοιαῦται εἶναι αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ.

ΙΓ'. Σχῆμα ἐπίπεδον εἶναι ἐπίπεδόν τι περιοριζόμενον ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη ἀπὸ γραμμάς.

Ἐὰν δὲ αἱ γραμμαὶ ἦναι εὐθεῖαι, τὸ περιεχόμενον ἀπὸ αὐτὰς χωρίον καλεῖται σχῆμα εὐθύγραμμον ἢ πολύγωνον· αἱ δὲ γραμμαὶ ὁμοῦ λαμβανόμεναι σχηματίζουν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου. σχ. 6.

ΙΔ'. Τὸ πολύγωνον ἐκ τριῶν πλευρῶν εἶναι τὸ ἁπλούστερον ἀπὸ ὅλα, καὶ ὀνομάζεται τρίγωνον. Τὸ ἐκ τεσσάρων πλευρῶν καλεῖται τετράπλευρον· τὸ ἐκ πέντε, πεντάγωνον· τὸ ἀπὸ ἓξ ἑξάγωνον, κ. τ. λ.

ΙΕ'. Καλεῖται τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας. σχ. 7.

Τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου αἱ δύο μόνον πλευραὶ εἶναι ἴσαι. σχ. 8.

Τρίγωνον σκαληνόν, τοῦ ὁποίου καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἄνισοι· σχ. 9.

ΙΣΤ'. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν. Ἡ δὲ ἀπέναντι πλευρὰ εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν καλεῖται Ὑποτείνουσα. Οὕτως ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς Α, ἡ δὲ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσά του. σχ. 10.

ΙΖ'. Μεταξὺ τῶν τετραπλεύρων διακρίνονται.

Τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι ὀρθαί. (βλέπε τὴν Κ' πρότ. βιβλ. Α'.) σχ. 11.

Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας ὀρθὰς χωρὶς νὰ ἔχῃ τὰς πλευρὰς ἴσας (βλέπε τὴν αὐτὴν πρότ.) σχ. 12.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἢ ῥόμβος, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. σχ. 13.

Τὸ ῥομβοειδὲς, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι χωρὶς αἱ γωνίαι νὰ ἦναι ὀρθαί. σχ. 14.

Τέλος τὸ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ μόνον εἶναι παράλληλοι. σχ. 15.

ΙΗ'. Καλεῖται διαγώνιος ἡ γραμμὴ δὲ, ἥτις ἑνόνει τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων γωνιῶν· τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ ΑΓ. σχ. 42.

ΙΘ'. Πολύγωνον ἰσόπλευρον εἶναι ἐκεῖνο δὲ, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Πολύγωνον, ἰσογώνιον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Κ'. Δύο πολύγωνα εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, ὅταν ἔχουν τὰς πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, καὶ θεμένας κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τουτέστιν, ὅταν διατρέχοντες τὰς περιμέτρους των κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, ἔχωμεν τὴν πρώτην πλευρὰν τοῦ ἑνὸς ἴσην μὲ τὴν πρώτην πλευρὰν τοῦ ἄλλου, τὴν δευτέραν τοῦ ἑνὸς μὲ τὴν δευτέραν τοῦ ἄλλου, τὴν τρίτην μὲ τὴν τρίτην καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὸ αὐτὸ ἐννοεῖται διὰ δύο πολύγωνα ἰσογώνια μεταξύ των.

Εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίστασιν, αἱ ἴσαι πλευραὶ ἢ αἱ ἴσαι γωνίαι καλοῦνται πλευραὶ ἢ γωνίαι ὁμόλογοι.

Σ. Κ. Εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία ὁ λόγος θέλει εἶναι περὶ ἐπιπέδων σχημάτων ἢ χαραχωμένων ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Ἐξήγησις τῶν Ὅρων καὶ σημείων.

Ἀξίωμα εἶναι πρότασις καθ' ἑαυτὴν φανερά.

Θεώρημα εἶναι ἀλήθεια γινομένη φανερὰ δι' ἑνὸς συλλογισμοῦ καλουμένου ἀπόδειξις.

Πρόβλημα εἶναι ζήτημα, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ λύσιν.

Λῆμμα εἶναι ἀλήθεια, τὴν ὁποίαν μεταχειριζόμεθα συμβοηθητικῶς διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς θεωρήματος, ἢ διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος.

Τὸ κοινὸν ὄνομα πρότασις ἀποδίδεται ἀδιαφόρως εἰς τὰ θεωρήματα, προβλήματα καὶ λήμματα.

Πόρισμα εἶναι συνέπεια πηγάζουσα ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας προτάσεις.

Σχόλιον εἶναι παρατήρησις γινομένη ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων προτάσεων προηγουμένων, σκοπὸν ἔχουσα νὰ δείξῃ τὸν δεσμὸν των, τὴν ὠφέλειάν των, τὸν περιορισμόν των, ἢ τὴν ἔκτασίν των.

Ὑπόθεσις εἶναι μία θέσις γινομένη εἰς τὴν ἐκφώνησιν προτάσεώς τινος, ἢ εἰς τὴν ὁδὸν μιᾶς ἀποδείξεως.

Τὸ σημεῖον $=$ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος· οὕτως ἡ ἔκφρασις $A=B$ σημειόνει ὅτι Α ἴσον Β.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι Α εἶναι μικρότερον τοῦ Β, γράφομεν $A<B$.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν δὲ ὅτι Α εἶναι μεγαλήτερον τοῦ Β, γράφομεν $A<B$.

Τὸ σημεῖον $+$ προφέρεται πλέον· σημειόνει δὲ τὴν πρόσθεσιν.

Τὸ σημεῖον $-$ προφέρεται μεῖον· σημειόνει δὲ τὴν ἀφαίρεσιν· οὕτως $A+B$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων Α καὶ Β. $A-B$ παριστάνει τὴν διαφοράν των ἢ ὅ,τι μένει ἀφαιρεθέντος Β ἀπὸ Α· παρομοίως $A-B+\Gamma$ ἢ $A+\Gamma-B$ παριστάνει ὅτι Α καὶ Γ πρέπει νὰ προστεθοῦν, καὶ ἐκ τοῦ ὅλου νὰ ἀφαιρεθῇ Β.

Τὸ σημεῖον $\times$ σημειόνει τὸν πολλαπλασιασμόν. Οὕτως $A\times B$ παριστάνει τὸ γινόμενον τοῦ Α πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ Β. Ἀντὶ τοῦ σημείου $\times$ ἐνίοτε μεταχειριζόμεθα μίαν στιγμήν· οὕτως $A.B$ εἶναι δὲ τὸ αὐτὸ μὲ $A\times B$· σημειόνεται προσέτι τὸ αὐτὸ γινόμενον χωρὶς παρένθεσιν τινὸς σημείου διὰ ΑΒ. Ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα ταύτην τὴν ἔκφρασιν, παρ' ὅταν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν δὲν ἔχωμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν ἐκείνης τῆς γραμμῆς ΑΒ ἀποστάσεως τῶν σημείων Α καὶ Β.

Ἡ Ἔκφρασις $A\times(B+\Gamma-\Delta)$ παριστάνει τὸ γινόμενον τοῦ Α ἐπὶ τὴν ποσότητα $B+\Gamma-\Delta$. Ἐὰν ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν $A+B$ ἐπὶ $A-B+\Gamma$, ἠθέλαμεν σημειώσει τὸ γινόμενον οὕτω $(A+B)\,(A-B+\Gamma)$· ὅ,τι περιέχεται μεταξὺ παρενθέσεων θεωρεῖται ὡς μία μόνη ποσότης.

Ἕνας ἀριθμὸς ἔμπροσθεν μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς ποσότητος, χρησιμεύει ὡς πολλαπλασιαστὴς ταύτης τῆς γραμμῆς ἢ ταύτης τῆς ποσότητος· οὕτω, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒ λαμβάνεται τρεῖς φοραῖς, ἢ τὸ τριπλάσιον αὐτῆς, γράφομεν $3AB$· διὰ νὰ σημειόσωμεν δὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας Α, γράφομεν $\frac{1}{2}\,A$.

Τὸ τετράγωνον τῆς γραμμῆς ΑΒ σημειόνεται διὰ $\overline{AB}^{2}$· ὁ δὲ κύβος της διὰ $\overline{AB}^{3}$. Ἐν οἰκείῳ τόπῳ θέλομεν ἐξηγήσει, τί σημαίνει ἀκριβῶς τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κύβος μιᾶς γραμμῆς.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ δεικνύει ἐξαγωγὴν ῥίζης. Οὕτω $\sqrt{2}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2. $\sqrt{(A\times B)}$ εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ γινομένου $A\times B$, ἢ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ Α καὶ Β.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

1. Δύο ποσότητες ἴσαι μὲ τρίτην τινά, εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι.
2. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἰδίου μέρους.
3. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη.
4. Ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο μίαν μόνον εὐθεῖαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν.
5. Δύο μεγέθη, γραμμή, ἐπιφάνεια ἢ στερεόν, εἶναι ἴσα ὅταν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζωσι καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θεώρημα.

Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΗΘ, ἐπὶ τῆς ΕΖ· λέγω δὲ ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΕΗΘ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. σχ. 16.

Ἂς ληφθῶσι τὰ τέσσαρα διαστήματα ΓΑ, ΓΒ, ΗΕ, ΗΖ ἴσα, τὸ διάστημα ΑΒ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ διάστημα ΕΖ, καὶ εἶναι δυνατὸν ἡ γραμμὴ ΕΖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ πέσῃ εἰς τὸ Α, καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ Β. Αἱ δύο αὗται γραμμαὶ οὕτως θεμέναι θέλουν ἐφαρμόσει· διότι, ἀλλέως, ἤθελον ὑπάρχει δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. ἀξ. 4. λοιπὸν τὸ σημεῖον Η μέσον τῆς ΕΖ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, μέσου τῆς ΑΒ. Ἀφ' οὗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ΗΕ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ΓΑ, λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΗΘ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΓΔ· διότι, ἂς ὑποθέσωμεν, ἐὰν ἦναι δυνατόν, ὅτι πίπτει ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΓΚ διαφορετικῆς τῆς ΓΔ· ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, ὁρ. 10. ἡ γωνία ΕΗΘ=ΘΗΖ, πρέπει νὰ ἔχωμεν ΑΓΚ = ΚΓΒ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΓΚ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ, ἡ γωνία ΚΓΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΓΔ· ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐξ ὑποθέσεως, ΑΓΔ=ΒΓΔ· λοιπὸν ΑΓΚ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΚΓΒ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΗΘ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς ΓΚ διαφορετικῆς τῆς ΓΔ· λοιπὸν πίπτει ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ ἡ γωνία ΕΗΘ ἐπὶ τῆς ΑΓΔ· λοιπὸν ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Θεώρημα.

Κάθε εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ, ἥτις συναπαντᾷ μίαν ἄλλην ΑΒ, κάμνει μὲ αὐτὴν δύο γωνίας προσκειμένας ΑΓΔ, ΒΓΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας. σχ. 17.

Εἰς τὴν στιγμὴν Γ, ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ κάθετος ΓΕ. Ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ· λοιπὸν ΑΓΔ+ΒΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΒΓΔ. Ἡ πρώτη τούτων εἶναι ὀρθή, αἱ δὲ δύο ἄλλαι κάμνουν ὁμοῦ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΓΕ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

Πόρισμα Α'. Ἐὰν μία τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ ἦναι ὀρθή, ἡ ἄλλη θέλει εἶναι παρομοίως ὀρθή.

Πόρισμα Β'. Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΔΕ ἦναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀντιστρόφως ΑΒ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ. σχ. 18.

Διότι, ἐπειδὴ ΔΕ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν προσκειμένην τῆς ΔΓΒ, καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ὀρθή, ἕπεται ὅτι ἡ προσκειμένη τῆς ΑΓΕ εἶναι ἐπίσης ὀρθή· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΕ=ΑΓΔ, λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ. σχ. 34.

Πόρισμα Γ'. Ὅλαι αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΖ, αἱ σχηματιζόμεναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΖ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς· διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι γραμμαί, αἵτινες ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα ἐφαρμόζουν καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν, καὶ σχηματίζουν μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἔστωσαν τὰ δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β· κατὰ πρῶτον αἱ δύο γραμμαὶ δὲν πρέπει νὰ κάμνουν παρὰ μίαν μεταξὺ Α καὶ Β, διότι ἄλλέως ἤθελον εἶναι δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. Ἂς ὑποθέσωμεν ἀκολούθως ὅτι προεκβαλλόμεναι αἱ γραμμαὶ αὗται, ἀρχίζουν νὰ χωρίζωνται εἰς τὴν στιγμὴν Γ, καὶ ἡ μὲν διευθύνεται κατὰ τὴν ΓΔ, ἡ δὲ κατὰ τὴν ΓΕ. Ἂς ἄξωμεν εἰς τὴν στιγμὴν Γ τὴν γραμμὴν ΓΖ, ὥστε νὰ κάμνῃ μὲ τὴν ΓΑ ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γραμμὴ ΑΓΔ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΔ εἶναι ὀρθὴ πρ. 2. πόρ. 1. ἐπειδὴ δ' ἔτι ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι παρομοίως γωνία ὀρθή. Ἀλλὰ τὸ μέρος ΖΓΕ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ὅλον ΖΓΔ· λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, αἵτινες ἔχουν δύο σημεῖα Α καὶ Β κοινά, δὲν ἠμποροῦν νὰ χωρισθῶσιν εἰς κἀνὲν σημεῖον τῆς προεκβολῆς των· λοιπὸν σχηματίζουν μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμήν. σχ. 19.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο προσκείμεναι γωνίαι ΑΓΔ, ΔΓΒ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ δύο ἐξωτερικαὶ πλευραὶ ΑΓ, ΓΒ θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας. σχ. 20.

Ἐπειδὴ ἐὰν ΓΒ δὲν εἶναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ, ἔστω ΓΕ ἡ προεκβολὴ αὐτή· τότε δὲ ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΕ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. πρ. 2. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΒ εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν ΑΓΔ + ΔΓΒ εἶναι ἴσον μὲ ΑΓΔ + ΔΓΕ· ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῇ ἡ γωνία ΑΓΔ, μένει τὸ μέρος ΔΓΒ ἴσον μὲ τὸ ὅλον ΔΓΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· λοιπὸν ΓΒ εἶναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Θεώρημα.

Ὁσάκις δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ τέμνονται, ὡς ΑΒ, ΔΕ, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι. σχ. 21.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΔΕ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΑΓΕ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· καὶ ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΒ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΒΓΕ, εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ΑΓΔ + ΑΓΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ΑΓΕ + ΒΓΕ· ἀφαιρεθείσης δὲ ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς γωνίας ΑΓΕ, μένει ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ΒΓΕ.

Παρομοίως ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ΒΓΔ.

Σχόλιον. Αἱ τέσσαρες γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὁλόγυρα μιᾶς στιγμῆς δύο τεμνομένων εὐθειῶν ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς· διότι αἱ γωνίαι ΑΓΕ, ΒΓΕ ὁμοῦ λαμβανόμεναι κάμνουν δύο ὀρθὰς, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ΑΓΔ, ΒΓΔ ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν.

Ἐὰν ὅσαι δήποτε εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, κ. τ. λ. συναπαντῶνται εἰς μίαν στιγμὴν Γ, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς· διότι, ἐὰν εἰς τὴν στιγμὴν Γ σχηματισθῶσι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι ὑπὸ δύο εὐθειῶν καθέτων τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης, τὸ αὐτὸ χωρίον θέλει πληροῦται τόσον ἀπὸ τὰς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, ὅσον καὶ ἀπὸ τὰς διαδοχικὰς γωνίας ΑΓΒ, ΒΓΔ, κ. τ. λ. σχ. 22.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὴν περιεχομένην ἀπὸ αὐτὰς γωνίαν ἴσην. σχ. 23.

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΔΕ, ἡ πλευρὰ ΑΓ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΔΖ, ἡ γωνία Α ἴση μὲ τὴν γωνίαν Δ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ θέλουν εἶναι ἴσα.

Τῷ ὄντι τὸ ἓν τούτων τῶν τριγώνων δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε ἐντελῶς νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ αὐτό. Καὶ κατὰ πρῶτον ἐὰν ἡ πλευρὰ ΔΕ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒ, τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει εἰς τὸ Α, καὶ τὸ Ε εἰς τὸ Β· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία Δ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Α, ἀφ' οὗ ἡ πλευρὰ ΔΕ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ πλευρὰ ΔΖ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΓ. Περιπλέον ΔΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓ· λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ θέλει πέσει εἰς τὸ Γ, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΕΖ θέλει ἐφαρμόσει ἀκριβῶς μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. ἀξ. 5.

Πόρισμα. Ὅταν τρία τινὰ ἦναι ἴσα εἰς δύο τρίγωνα, δηλαδὴ ἡ γωνία Α=Δ, ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΔΖ, ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι καὶ τὰ ἄλλα τρία εἶναι ἴσα, δηλαδὴ, ἡ γωνία Β=Ε, ἡ γωνία Γ=Ζ, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ=ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Θεώρημα.

Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ τὴν προσκειμένην εἰς αὐτὰς πλευρὰν ἴσην, εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα.

Ἔστω ἡ γωνία Β ἴση τῇ γωνίᾳ Ε, καὶ ἡ γωνία Γ ἴση τῇ Ζ· ἡ πλευρὰ ΒΓ ἴση τῇ πλευρᾷ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 23.

Διότι, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν (superposition), ἂς τεθῇ ἡ ΕΖ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΒΓ, τὸ σημεῖον Ε θέλει πέσει εἰς τὸ Β, καὶ τὸ σημεῖον Ζ εἰς τὸ Γ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Ε εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Β, ἡ πλευρὰ ΕΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΒΑ. Οὕτω τὸ σημεῖον Δ θέλει εὑρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ΒΑ. Παρομοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία Ζ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Γ, ἡ γραμμὴ ΖΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΓΑ, καὶ τὸ σημεῖον Δ θέλει εὑρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς πλευρᾶς ΓΑ· λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἐν ταὐτῷ ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν ΒΑ, ΓΑ, θέλει πέσει ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς των Α. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαρμόζουσι, καὶ εἶναι ἐντελῶς ἴσα.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἰσότητος τριῶν πραγμάτων εἰς δύο τρίγωνα, τουτέστι, ΒΓ=ΕΖ, Β=Ε, Γ=Ζ, ἠμποροῦμεν νὰ συνάξωμεν τὴν ἰσότητα τῶν ἄλλων τριῶν, τουτέστι, ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ =ΔΖ, Α=Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε τρίγωνον ὁποιαδήποτε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. σχ. 23.

Διότι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΓ, παραδείγματος χάριν, εἶναι ὁ βραχύτατος δρόμος ἀπὸ τὸ Β εἰς τὸ Γ, ὁρ. 3. λοιπὸν ΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ΒΑ+ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἐντὸς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ληφθῇ σημεῖόν τι Ο, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τινὸς πλευρᾶς ΒΓ αἱ εὐθεῖαι ΟΒ, ΟΓ, τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν εὐθειῶν θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. σχ. 24.

Ἄς προεκβληθῇ ἡ ΒΟ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς Δ. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΟΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΟΔ+ΔΓ. πρό. 8. προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ΒΟ, ἔχομεν ΒΟ+ΟΓ <ΒΟ+ΟΔ+ΔΓ ἢ ΒΟ+ΟΓ<ΒΔ+ΔΓ.

Ἔχομεν παρομοίως ΒΔ<ΒΑ+ΑΔ· προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ΔΓ, συνάγομεν ΒΔ+ΔΓ < ΒΑ+ΑΓ. Ἀλλ' εὑρήκαμεν ΒΟ+ΟΓ <ΒΔ+ΔΓ. Λοιπόν, πολὺ περισσότερον ΒΟ+ΟΓ <ΒΑ+ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Θεώρημα.

Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία ΒΑΓ ἡ περιεχομένης ἀπὸ τὰς πρώτας, ἦναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ, τῆς περιεχομένη ἀπὸ τὰς δευτέρας· λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου. σχ. 25.

Ἄς γένῃ ἡ γωνία ΓΑΗ=Δ, ἂς ληφθῇ ΑΗ=ΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΓΗ, τὸ τρίγωνον ΗΑΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ἐπειδὴ ἔχουν ἐκ τῆς κατασκευῆς μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων. πρό. 6. ἔχομεν λοιπὸν ΓΗ=ΕΖ. Τώρα δὲ δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν τρεῖς περιστάσεις, καθὼς τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἢ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. ἢ ἐντὸς τοῦ ἰδίου τριγώνου.

Πρώτη περίστασις. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΗΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΗΙ + ΙΓ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΑΙ + ΙΒ· λοιπὸν ΗΓ + ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ΗΙ + ΑΙ + ΙΓ + ΙΒ ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ΗΓ + ΑΒ + ΑΗ + ΒΓ. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸ ἓν μέρος ἀφαιρεθῇ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἡ ἴση της ΑΗ, μένει ΗΓ < ΒΓ: ἀλλὰ ΗΓ = ΕΖ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει ΕΖ < ΒΓ. σχ. 25.

Δευτέρα περίστασις. Ἐὰν τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, φανερὸν εἶναι, ὅτι ΗΓ, ἢ ἡ ἴση της ΕΖ θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΓ. σχ. 26.

Τρίτη περίστασις. Τέλος ἐὰν τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ΑΗ + ΗΓ < ΑΒ + ΒΓ· ἀφαιρεθείσης δὲ ἀπὸ τὸ ἓν μέρος τῆς ΑΗ, καὶ ἀπὸ ἄλλο τῆς ἴσης της ΑΒ, μένει ΗΓ < ΒΓ, ἢ ΕΖ < ΒΓ. σχ. 27.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ· ἐὰν περιπλέον, ἡ τρίτη πλευρὰ ΓΒ τοῦ πρώτου τριγώνου ἦναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου, λέγω ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ τοῦ δευτέρου.

Διότι, ἐὰν δὲν ἦναι μεγαλητέρα ἡ γωνία ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ, πρέπει νὰ ἦναι ἴση ἢ μικροτέρα· ἐὰν τὸ πρῶτον, ἡ πλευρὰ ΓΒ ἤθελεν εἶναι ἴση τῇ ΕΖ, πρ. 6. ἐὰν τὸ δεύτερον, ΓΒ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΖ· ἀλλὰ καὶ τὰ δύο ἐναντιόνονται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΕΔΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν.

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, ΒΓ = ΕΖ· λέγω δὲ ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Α = Δ, Β = Ε, Γ = Ζ. σχ. 23.

Διότι ἐὰν ἡ γωνία Α ἦτο μεγαλητέρα τῆς γωνίας Δ, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν ἤθελον ἀκολουθήσει, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς ΕΖ· ἐὰν δὲ ἡ γωνία Α ἦτο μικροτέρα τῆς γωνίας Δ, ἤθελεν ἀκολουθήσει ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς ΕΖ· ἀλλὰ ΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΖ· λοιπὸν ἡ γωνία Α δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι οὔτε μεγαλητέρα οὔτε μικροτέρα τῆς γωνίας Δ· λοιπὸν εἶναι ἴση μὲ αὐτήν· Παρομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ γωνία Β=Ε, καὶ ἡ γωνία Γ=Ζ.

Σχόλιον. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· οὕτως αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΓ, ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Θεώρημα.

Εἰς ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΑΓ, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Γ=Β. σχ. 28.

Ἂς ἀχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὴν στιγμὴν Δ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν· τουτέστι ΑΔ κοινήν, ΑΒ=ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ΒΔ=ΔΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς· λοιπόν, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ἡ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Γ.

Πόρισμα. Ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἐν ταὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, δηλαδή, ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας.

Σχόλιον. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ δεικνύει εἰς τὸν αὐτὸν καιρόν, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΔ=ΔΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΒΔΑ =ΑΔΓ· λοιπὸν αἱ δύο τελευταῖαι αὗται εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ ἀγομένη γραμμὴ ἐκ τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του, εἶναι κάθετος εἰς ταύτην τὴν βάσιν, καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

Εἰς ἓν τρίγωνον μὴ ἰσοσκελὲς ἀδιαφόρως λαμβάνεται ὡς βάσις ὁποιαδήποτε πλευρά, καὶ τότε ἡ κορυφή του εἶναι ἐκείνη τῆς ἀπέναντι γωνίας· εἰς τὸ ἰσοσκελὲς ὅμως τρίγωνον λαμβάνεται ὡς βάσις ἡ πλευρά, ἥτις δὲν εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄλλων δύο.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Ἀντιστρόφως ἐὰν δύο γωνίαι εἰς ἓν τρίγωνον ἦναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ θέλουν εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΓΒ· λέγω δὲ ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ. σχ. 29.

Διότι, ἐὰν αἱ πλευραὶ αὗται δὲν ἦναι ἴσαι, ἔστω ΑΒ ἡ μεγαλητέρα τῶν δύο. Ἂς ληφθῇ ΒΔ=ΑΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΔΓ· ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση τῇ ΑΓΒ· αἱ δύο δὲ πλευραὶ ΔΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΑΓ, ΓΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΔΒΓ προ. 6. ἤθελεν εἶναι ἴσαι μὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ· ἀλλὰ τὸ μέρος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ὅλον· λοιπὸν δὲν ὑπάρχει οὐδεμία ἀνισότης μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

Θεώρημα.

Ἐκ δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, ἐκείνη εἶναι ἡ μεγαλητέρα, ἥτις εἶναι ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἡ μεγαλητέρα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς.

1.ον Ἔστω ἡ γωνία $\Gamma > B$, λέγω δὲ ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλευρᾶς ΑΓ τῆς ἀπέναντι τῆς γωνίας Β. σχ. 30.

Ἂς γένῃ ἡ γωνία $B\Gamma\Delta = B$. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΓ ἔχομεν πρ. 13. $B\Delta = \Delta\Gamma$. ἀλλ' ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ $A\Delta + \Delta\Gamma$, καὶ $A\Delta + \Delta\Gamma = A\Delta + \Delta B = AB$· λοιπὸν ΑΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓ.

2.ον Ἔστω ἡ πλευρὰ $AB > A\Gamma$, λέγω ὅτι ἡ γωνία Γ ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας Β τῆς ἀπέναντι τῆς ΑΓ. Διότι ἐὰν εἴχαμεν $\Gamma < B$, ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, $AB < A\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἐὰν δὲ $\Gamma = B$, ἠθέλαμεν ἔχει πρ. 13. $AB = A\Gamma$, τὸ ὁποῖον ἀκόμη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία Γ πρέπει νὰ ἦναι μείζων τῆς Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Θεώρημα.

Ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου Α ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας ΔΕ, μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἐπὶ ταύτην τὴν εὐθεῖαν. σχ. 31.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι δύο ΑΒ καὶ ΑΓ· ἂς προεκβάλωμεν μίαν τούτων τὴν ΑΒ ποσότητά τινα $BZ = AB$, καὶ ἂς ἐπιζεύξωμεν ΖΓ.

Τὸ τρίγωνον ΓΒΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΒΖ εἶναι ὀρθὴ καθὼς καὶ ἡ ΓΒΑ, ἡ πλευρὰ ΓΒ εἶναι κοινή, ἡ δὲ $BZ = AB$· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἕπεται ὅτι ἡ γωνία $B\Gamma Z = B\Gamma A$. Ἡ γωνία ΒΓΑ εἶναι ὀρθὴ ἐξ ὑποθέσεως· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΓΖ εἶναι ἐπίσης ὀρθή. Ἀλλ' ἐὰν αἱ προσκείμεναι γωνίαι ὁμοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς, πρέπει ἡ γραμμὴ ΑΓΖ νὰ ἦναι εὐθεῖα πρ. 4. Ὅθεν ἕπεται ὅτι μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Ζ, ἤθελεν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ΑΒΖ, ΑΓΖ· τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. Λοιπὸν εἶναι παραμοίως ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας γραμμῆς.

Σχόλιον. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ διδόμενον ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ, εἶναι ἐπίσης ἀδύνατον νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι εἰς ταύτην τὴν γραμμήν· διότι ἐὰν ΓΔ καὶ ΓΕ ἦσαν αἱ δύο αὗται κάθετοι, ἡ γωνία ΔΓΒ ἤθελεν εἶναι ὀρθὴ καθὼς καὶ ἡ ΒΓΕ, καὶ τὸ μέρος ἤθελεν εἶναι ἴσον τῷ ὅλῳ. σχ. 17.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α κειμένου ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΔΕ ἄξωμεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ ταύτην τὴν εὐθεῖαν, καὶ διαφόρους πλαγίας ΑΕ, ΑΓ, ΑΔ κ. τ. λ., εἰς διάφορα σημεῖα ταύτης τῆς εὐθείας. σχ. 31.

1.ον Ἡ κάθετος ΑΒ θέλει εἶναι μικροτέρα κάθε πλαγίας.

2.ον Αἱ δύο πλάγιαι ΑΓ, ΑΕ, ἠγμέναι ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς καθέτου εἰς ἴσα διαστήματα ΒΓ, ΒΕ θέλουν εἶναι ἴσαι.

3.ον Ἀπὸ δύο πλαγίας ΑΓ καὶ ΑΔ, ἢ ΑΕ καὶ ΑΔ ἠγμένας κατ' ἀρέσκειαν, ἡ ἀπομακρυνομένη περισσότερον τῆς καθέτου θέλει εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ κάθετος ΑΒ ποσότητα τινὰ ΒΖ=ΑΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι ΖΓ, ΖΔ.

1.ον Τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΓΑ, ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία ΓΒΖ=ΓΒΑ, ἡ πλευρὰ ΓΒ εἶναι κοινή, ἡ δὲ ΒΖ =ΒΑ. Λοιπὸν πρ. 6. ἡ τρίτη ΓΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην ΑΓ. Τώρα, ΑΒΖ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΓΖ γραμμῆς κεκλασμένης· λοιπὸν ΑΒ ἥμισυ τῆς ΑΒΖ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΓ ἡμίσεως τῆς ΑΓΖ· λοιπὸν 1.ον ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα κάθε πλαγίας.

2.ον Ἐὰν ὑποτεθῇ ΒΕ=ΒΓ, ἐπειδὴ ἐκτὸς τοῦ ὅτι ΑΒ εἶναι κοινὴ καὶ ἡ γωνία ΑΒΕ=ΑΒΓ, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρ. 6. λοιπὸν αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΑΓ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν 2.ον δύο πλάγιαι ἰσάκις ἀπομακρυνόμεναι τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι.

3.ον Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΖΑ τὸ ἄθροισμα τῶν γραμμῶν ΑΓ, ΓΖ, εἶναι μικρότερον. πρ. 9. τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν ΑΔ, ΔΖ· λοιπὸν ΑΓ, ἥμισυ τῆς γραμμῆς ΑΓΖ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΔ ἡμίσεος τῆς ΑΔΖ· λοιπὸν 3.ον αἱ πλάγιαι αἵτινες περισσότερον ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου εἶναι μεγαλήτεραι.

Πόρισμα Α'. Ἡ κάθετος μετρεῖ τὴν ἀληθινὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου ἀπὸ μίαν γραμμήν, ὡς μικροτέρα κάθε πλαγίας.

Πόρισμα Β'. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι· διότι ἐὰν τοῦτο ἦτον δυνατὸν, ἤθελον ὑπάρχει ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου δύο ἴσαι πλάγιαι, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ, μέσου τῆς εὐθείας ΑΒ, ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΕΖ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. 1.ον κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκις θέλει ἀπέχει τῶν δύο ἄκρων τῆς ΑΒ. 2.ον κάθε δὲ σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνισάκις θέλει ἀπέχει τῶν αὐτῶν ἄκρων Α καὶ Β. σχ. 32.

Διότι, 1.ον ἐπειδὴ ὑποτίθεται ΑΓ$=$ΓΒ, αἱ δύο πλάγιαι ΑΔ, ΔΒ ἰσάκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου· λοιπὸν εἶναι ἴσαι. Τὸ αὐτὸ δὲ ὑπάρχει διὰ τὰς πλαγίας ΑΕ, ΕΒ, ΑΖ, ΖΒ, κ. τ. λ. λοιπὸν 1ον κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

2.ον Ἔστω Ι ἓν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου. Ἐὰν ἐπιζευχθῶσι ΙΑ, ΙΒ, ἡ μία τῶν γραμμῶν τούτων θέλει τέμνει τὴν κάθετον εἰς Δ, ὅθεν ἄγοντες τὴν ΔΒ, θέλομεν ἔχει ΔΒ$=$ΔΑ. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΙΒ εἶναι μικροτέρα τῆς κεκλασμένης ΙΔ$+$ΔΒ, καὶ ΙΔ$+$ΔΒ$=$ΙΔ$+$ΔΑ$=$ΙΑ· λοιπὸν ΙΒ$<$ΙΑ· λοιπὸν 2.ον κάθε σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνισάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα ὀρθογώνια εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην.

Ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ$=$ΔΖ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ$=$ΔΕ· λέγω δὲ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΖ. σχ. 33.

Ἡ ἰσότης ἤθελεν εἶναι φανερὰ, ἐὰν ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ ἦτον ἴση μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν ΕΖ. Ἄς ὑποθέσωμεν, εἰ δυνατὸν, ὅτι αἱ πλευραὶ αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, καὶ ἔστω ΒΓ ἡ μεγαλητέρα. Ἂς ληφθῇ ΒΗ$=$ΕΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΗ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ· διότι ἡ ὀρθὴ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν ὀρθὴν Ε, ἡ πλευρὰ ΑΒ$=$ΔΕ, καὶ ἡ ΒΗ$=$ΕΖ· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἑπομένως ΑΗ$=$ΔΖ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΔΖ$=$ΑΓ· λοιπὸν ΑΗ$=$ΑΓ. Ἀλλ' ἡ πλαγία ΑΓ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ἴση τῇ ΑΗ πρ. 16. ὡς περισσότερον ἀπομακρυνομένη τῆς καθέτου ΑΒ· λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον ἡ

ΒΓ να διαφέρη τῆς ΕΖ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ προτιθέμενον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν (1) ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλητέρα, ἡ δὲ ΒΓ ἡ μικροτέρα πλευρά, καὶ οὕτως ΑΓΒ εἶναι ἡ μεγαλητέρα γωνία ἡ δὲ ΒΑΓ ἡ μικροτέρα· πρ. 14. σχ. 35.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Α καὶ τῆς στιγμῆς Ι μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ, ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΙ, ἥτις ἂς προεκβληθῇ εἰς Γ′ ὥστε ΑΓ′ = ΑΒ· παρομοίως ἂς προεκβληθῇ ΑΒ εἰς Β′, ὥστε ΑΒ′ νὰ ἦναι διπλασία τῆς ΑΙ.

Ἐὰν σημειωθῶσι διὰ Α, Β, Γ, αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ παρομοίως διὰ Α′, Β′, Γ′ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου ΑΒ′Γ′· λέγω δὲ ἤδη ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Γ′ = Β + Γ, καὶ τὴν γωνίαν Α = Α′ + Β′· ὅθεν ἕπεται Α + Β + Γ = Α′ + Β′ + Γ′· τουτέστιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο τρίγωνα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς γένῃ ΑΚ′ = ΑΙ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ Γ′Κ′, θέλομεν ἔχει τὸ τρίγωνον Γ′ΑΚ′ ἴσον μὲ τὸ ΒΑΙ. Διότι εἰς τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα, ἡ κοινὴ γωνία Α περιέχεται μεταξὺ πλευρῶν ἴσων ἀνὰ μίαν, δηλαδή: ΑΓ′ = ΑΒ, καὶ ΑΚ′ = ΑΙ. Λοιπὸν ἡ τρίτη πλευρὰ Γ′Κ′ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην ΒΙ· λοιπὸν ὡσαύτως ἡ γωνία ΑΓ′Κ′ = ΑΒΓ καὶ ἡ γωνία ΑΚ′Γ′ = ΑΙΒ.

Λέγω δὲ τώρα ὅτι τὸ τρίγωνον Β′Γ′Κ′ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΓΙ, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΚ′Γ′ + Γ′Κ′Β′ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πρ. 2. καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΙΓ + ΑΙΒ. Ἐὰν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΚ′Γ′, ΑΙΒ μένει ἡ γωνία Γ′Κ′Β′ = ΑΙΓ. Αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας ταύτας γωνίας εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ Γ′Κ′ = ΙΒ = ΓΙ, καὶ Κ′Β′ = ΑΚ′ = ΑΙ, ἐπειδὴ ὑπετέθη ΑΒ′ = 2ΑΙ = 2ΑΚ′. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα Β′Γ′Κ′, ΑΓΙ εἶναι ἴσα πρ. 6. Ἀκολούθως

---

(1) Ἡ ὑπόθεσις αὕτη δὲν ἀποκλείει τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ἡ μέση πλευρὰ ΑΓ ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄκρων ΑΒ ἢ ΒΓ.

ἡ πλευρὰ Γ'Β'=ΑΓ, ἡ γωνία Β'Γ'Κ'=ΑΓΒ, καὶ ἡ γωνία Κ'Β'Γ'=ΓΑΙ.

Ἐκ τούτου ἕπεται 1.ον ὅτι ἡ γωνία ΑΓ'Β' ἡ σημειωθεῖσα διὰ Γ' σύγκειται ἀπὸ δύο ἴσας γωνίας μὲ τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ οὕτως ἔχομεν Γ'=Β+Γ. 2.ον ὅτι ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ σύγκειται ἐκ τῆς γωνίας Α' ἢ Γ'ΑΒ' ἥτις ἀνήκει εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' καὶ τῆς γωνίας ΓΑΙ ἴσης μὲ τὴν γωνίαν Β' τοῦ ἰδίου τριγώνου, δηλαδὴ Α=Α'+Β'· λοιπὸν Α+Β+Γ=Α'+Β'+Γ'. Ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΑΓ < ΑΒ, καὶ ἐπομένως Γ'Β' < ΑΓ', βλέπομεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓ'Β' ἡ γωνία εἰς Α, ἡ σημειωθεῖσα διὰ Α', εἶναι μικροτέρα τῆς Β', καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία Α' < ½ Α.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ', διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἓν τρίτον τρίγωνον ΑΓ''Β'', τοῦ ὁποίου τὰς γωνίας σημειόνομεν διὰ Α'',Β'',Γ'', θέλομεν ἔχει παρομοίως τὰς δύο ἰσότητας Γ'=Γ''+Β'',Α'=Α''+Β'', ὅθεν ἕπεται Α'+Β'+Γ'=Α''+Β''+Γ''. Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ ἴδιον εἰς ταῦτα τὰ τρία τρίγωνα· εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Α'' < ½ Α', καὶ ἐπομένως Α'' < ¼ Α.

Ἐξακολουθοῦντες ἀπροσδιορίστως τὴν σειρὰν τῶν τριγώνων ΑΓ'Β', ΑΓ''Β'', κ. τ. λ. θέλομεν φθάσει εἰς ἓν τρίγωνον αβγ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν θέλει εἶναι τὸ ἴδιον ὡς εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ τὸ ὁποῖον θέλει ἔχει τὴν γωνίαν α μικροτέραν ὁποιουδήποτε ὅρου τῆς κατιούσης προόδου ½ Α, ¼ Α, ⅛ Α, κ. τ. λ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ὑποθέσωμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν τριγώνων προεκτεινομένην ἕως ὅτου ἡ γωνία α νὰ ἦναι μικροτέρα πάσης δεδομένης.

Καὶ ἐὰν διὰ μέσου τοῦ τριγώνου αβγ κατασκευάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τρίγωνον α'β'γ', τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α' + β' τούτου θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν α, καὶ ἐπομένως μικρότερον πάσης δεδομένης γωνίας. Ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου α'β'γ' ἄγεται σχεδὸν εἰς τὴν μόνην γωνίαν γ'.

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἀκριβὲς μέτρον τούτου τοῦ ἀθροίσματος, ἂς προεκβάλωμεν τὴν πλευρὰν α'γ' πρὸς τὸ δ', καὶ ἂς καλέσωμεν χ' τὴν ἐκτὸς γωνίαν β'γ'δ' ἡ γωνία χ', μετὰ τῆς γωνίας, γ' τοῦ τριγώνου α'β'γ', κάμνει ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. πρ. 2. Οὕτω σημειόνοντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν διὰ Ο, θέλομεν ἔχει γ'=2Ο—χ'· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου α'γ'β' θέλει εἶναι.

$2O + \acute{\alpha} + \beta' - \chi'$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ἀβ'γ' μεταβάλλονται, εἰς τρόπον ὥστε διὰ τῆς μεταβολῆς ταύτης νὰ παριστάνη τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἐκ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς γεννῶνται καὶ πλησιάζουν μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον πρὸς τὸ ὅριον, ὅπου αἱ γωνίαι ά καὶ β' ἤθελον εἶναι μηδέν. Εἰς τὸ ὅριον τοῦτο, ταυτιζομένης τῆς εὐθείας ἀγ'δ' μὲ τὴν ἀβ' τὰ τρία σημεῖα ά, γ', β' θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας· τότε αἱ γωνίαι β' καὶ χ' μηδενίζονται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν καθ' ὃν καὶ ἡ ά· καὶ ἡ ποσότης $2O + \acute{\alpha} + 6' - \chi'$ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ά γ' β', ἄγεται εἰς 2O. Λοιπὸν εἰς κάθε τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Πόρισμα Α'. Γνωρίζοντες δύο γωνίας τριγώνου τινὸς ἢ μόνον τὸ ἄθροισμά των, προσδιορίζομεν τὴν τρίτην, ἀφαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν γωνιῶν ἀπὸ δύο ὀρθάς.

Β'. Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου τινὸς ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο γωνίας ἄλλου, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἡ τρίτη τοῦ ἑνὸς θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην τοῦ ἄλλου, καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσογώνια μεταξύ των.

Γ'. Ἓν τρίγωνον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ παρὰ μίαν μόνην ὀρθὴν γωνίαν· ἐπειδὴ ἐὰν εἶχε δύο, ἡ τρίτη ἔπρεπε νὰ ἦναι μηδέν· πολὺ περισσότερον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ παρὰ μίαν μόνην ἀμβλεῖαν γωνίαν.

Δ'. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν.

Ε'. Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον κάθε γωνία εἶναι τὸ τρίτον δύο ὀρθῶν ἢ τὰ δύο τρίτα μιᾶς ὀρθῆς. Λοιπὸν ἐὰν ἡ ὀρθὴ γωνία ἐκφρασθῇ διὰ Ι, ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου θέλει ἐκφρασθῇ διὰ $\frac{2}{3}$.

ΣΤ'. Εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἐὰν προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ πρὸς τὸ Δ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΓΒΔ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι Α καὶ Γ· διότι ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος ΑΒΓ, τὰ δύο ἀθροίσματα θέλουν εἶναι ἴσα μὲ δύο ὀρθάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐντὸς γωνιῶν πολυγώνου τινὸς ἰσοῦται μὲ τοσάκις δύο ὀρθὰς ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν μεῖον δύο.

Ἔστω ΑΒΓΔ κ. τ. λ. τὸ προτεθὲν πολύγωνον· ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς αὐτῆς γωνίας Α, ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, κ. τ. λ. εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι τὸ πολύγωνον θέλει μοιρασθῇ εἰς πέντε τρίγωνα, ἐὰν ἔχῃ ἑπτὰ πλευράς· εἰς ἕξ, ἐὰν ὀκτώ· καὶ ἐν γένει εἰς τόσα τρίγωνα ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον μεῖον δύο· διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἔχοντα κορυφὴν κοινὴν τὴν στιγμὴν Α, καὶ βάσεις τὰς διαφόρους πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ἐκτὸς τῶν δύο αἵτινες σχηματίζουν τὴν γωνίαν Α. Βλέπομεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τούτων τῶν τριγώνων δὲν διαφέρει παντάπασι τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις δύο ὀρθὰς ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, τουτέστιν, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μεῖον δύο. σχ. 42.

Πόρισμα Α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πολλαπλασιαζομένας ἐπὶ 4—2, τὸ ὁποῖον κάμνει τέσσαρας ὀρθάς. Λοιπὸν ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ἦναι ἴσαι, ἑκάστη τούτων θέλει εἶναι ὀρθή. Τοῦτο βεβαιόνει τὸν Η' ὁρισμὸν, ὅπου ὑπετέθη ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, ὅταν ἦναι ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον.

Β'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πολλαπλασιαζομένας ἐπὶ 5—2, δηλαδὴ μὲ 6 ὀρθάς. Ὅταν λοιπὸν τὸ πεντάγωνον ἦναι ἰσογώνιον, ὅταν δηλαδὴ ἔχῃ τὰς γωνίας ἴσας μεταξύ των, ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ πέμπτον ἐξ ὀρθῶν, ἢ μὲ τὰ $\frac{6}{5}$ μιᾶς ὀρθῆς.

Γ'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι $2 \times (6—2)$ ἢ 8 ὀρθαὶ γωνίαι· λοιπὸν εἰς τὸ ἰσογώνιον, κάθε γωνία εἶναι τὰ $\frac{8}{6}$ ἢ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

Σχόλιον. Ἐὰν ἠθέλαμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν ταύτην τὴν πρότασιν εἰς πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἔχει μίαν ἢ περισσοτέρας γωνίας εἰσεχούσας (angles rentrants), ἔπρεπε νὰ θεωρήσωμεν κάθε γωνίαν εἰσέχουσαν μεγαλητέραν δύο ὀρθῶν. Ἀλλὰ πρὸς ἀποφυγὴν κάθε περιπλοκῆς, ἐνταῦθα καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα δὲν θέλομεν θεωρεῖ παρὰ τὰ πολύγωνα μὲ γωνίας ἐξεχούσας (angles saillants), τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν πολύγωνα κυρτὰ (polygons convexes). Κάθε κυρτὸν πολύγωνον εἶναι τοιοῦτον, ὥστε μία εὐθεῖα γραμμὴ, ἠγμένη ὁπωσδήποτε, συναπαντᾷ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου μόνον εἰς δύο σημεῖα. σχ. 43.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, κάθετοι ἐπὶ τρίτης τινὸς ΖΗ, εἶναι παράλληλοι, τουτέστιν, ὅσον καὶ ἂν παρεκβληθῶσι δὲν δύνανται νὰ συναπαντηθοῦν. σχ. 36.

Ἐπειδὴ ἐὰν ἐσυναπαντῶντο εἰς σημεῖόν τι Ο, ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι ΟΖ, ΟΗ ἠγμέναι ἐκ τῆς ἰδίας στιγμῆς Ο, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΖΗ, ὅπερ ἀδύνατον. πρ. 15.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κάμνουν μὲ τρίτην τινὰ ΕΖ, δύο ἐντὸς γωνίας ΒΕΖ, ΔΖΕ, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων νὰ ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, θέλουν εἶναι παράλληλοι. σχ. 36.

Ἐὰν αἱ γωνίαι ΒΕΖ, ΔΖΕ ἦσαν ἴσαι, ἤθελον εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ δύο, καὶ ἠθέλαμεν πέσει εἰς τὴν περίστασιν τῆς προλαβούσης προτάσεως. Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι εἶναι ἄνισοι, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Ζ, κορυφῆς τῆς μεγαλητέρας, ἂς καταιβάσωμεν τὴν κάθετον ΖΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΕΖΗ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν ΖΕΗ+ΕΖΗ εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν. πρ. 19. πόρ. 4. Ἐὰν τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ ΒΕΖ+ΔΖΕ ἴσον ἐξ ὑποθέσεως μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας, μένει ἡ γωνία ΔΖΗ ἴση μὲ μίαν ὀρθήν. Λοιπὸν αἱ δύο γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΖΗ· λοιπὸν εἶναι παράλληλοι. πρ. 21.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κάμνουν μὲ τρίτην τινὰ ΕΖ δύο ἐντὸς γωνίας ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων νὰ ἦναι μικρότερον ἢ μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν, αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, ἱκανῶς προεκβαλλόμεναι, πρέπει νὰ συναπαντηθοῦν. σχ. 37.

Ἔστω 1.ον Τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ+ΕΖΔ μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ εἰς τρόπον ὥστε ἡ γωνία ΕΖΗ=ΑΕΖ, θέλομεν ἔχει τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ+ΕΖΗ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ+ΑΕΖ καὶ ἐπομένως ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ ἐπειδὴ ΒΕΖ+ΕΖΔ εἶναι μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἡ εὐθεῖα ΔΖ περιέχεται εἰς τὴν γωνίαν ΕΖΗ.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ πλαγία ΖΜ, ἥτις συναπαντᾷ ΑΒ εἰς Μ· ἡ γωνία ΑΜΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΗΖΜ, ἐπειδὴ ἐὰν προστεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ἡ αὐτὴ ποσότης ΕΖΜ+ΖΕΜ, ἕκαστον τῶν δύο ἀθροισμάτων ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Ἂς ληφθῇ ἀκολούθως ΜΝ =ΖΜ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΖΝ· ἡ γωνία ΑΜΖ, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΖΜΝ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΜΖΝ, ΜΝΖ, πρ. 19. πρ. 6. αὗται δὲ εἶναι μεταξύ των ἴσαι ὡς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ΜΝ, ΖΜ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΜΖ ἢ ἡ ἴση της ΜΖΗ εἶναι διπλασία τῆς ΜΖΝ· λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΝ διαιρεῖ δίχα τὴν γωνίαν ΗΖΜ καὶ συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς ἓν σημεῖον Ν μακρὰν τῆς Μ, ΜΝ=ΖΜ.

Ἐκ τῆς ἰδίας ἀποδείξεως ἕπεται, ὅτι ἐὰν λάβωμεν ΝΠ=ΖΝ, θέλομεν προσδιορίσει ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν στιγμὴν Π ὅπου συναπαντᾷ αὐτὴν ἡ ΖΠ ποιοῦσα τὴν γωνίαν ΗΖΠ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΗΖΝ, ἢ μὲ τὸ τέταρτον τῆς ΗΖΜ.

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον, τὸ ὄγδοον, κ. τ. λ. τῆς γωνίας ΗΖΜ, καὶ αἱ γραμμαὶ αἵτινες ἐκτελοῦν ταύτας τὰς διαιρέσεις θέλουν συναπαντᾷ τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς σημεῖα μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον ἀπομακρυνόμενα, ἀλλ' εὐκόλως προσδιοριζόμενα, ἐπειδὴ ΜΝ=ΖΜ, ΝΠ=ΖΝ, ΠΚ=ΠΖ, κ. τ. λ. Ἠμποροῦμεν παρομοίως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι κάθε διάστημα μιᾶς τούτων τῶν στιγμῶν τῆς κοινῆς τομῆς ἀπὸ τὴν σταθερὰν Ζ, δὲν εἶναι ὅλως διόλου διπλάσιον τοῦ διαστήματος τῆς προηγουμένης στιγμῆς τῆς κοινῆς τομῆς, διότι ΖΝ παραδείγματος χάριν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΖΜ+ΜΝ ἢ 2ΖΜ· ὡσαύτως ἔχομεν ΖΠ $<$ 2ΖΝ, ΖΚ $<$ 2ΖΠ, κ. τ. λ.

Ἀλλ' ἐξακολουθοῦντες τὴν ὑποδιαίρεσιν τῆς γωνίας ΗΖΜ κατὰ λόγον διπλάσιον, θέλομεν φθάσει εἰς γωνίαν τινὰ ΗΖΩ μικροτέραν τῆς δεδομένης ΗΖΔ, καὶ ἀκόμη θέλει εἶναι ἀληθὲς ὅτι ΖΩ προεκβαλλομένη συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς προσδιορισμένον σημεῖον· λοιπὸν πολὺ περισσότερον ἡ εὐθεῖα ΖΔ περιεχομένη εἰς τὴν γωνίαν ΕΖΩ, θέλει συναπαντήσει ΑΒ.

Ἂς ὑποθέσωμεν 2.ον ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς γωνιῶν ΑΕΖ+ΓΖΕ εἶναι μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν, ἐὰν προεκβληθῇ ΑΕ πρὸς τὸ Β καὶ ΓΖ πρὸς τὸ Δ, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν ΑΕΖ, ΒΕΖ, ΓΖΕ, ΕΖΔ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Λοιπὸν ἐὰν ἀπὸ τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῇ ΑΕΖ+ΓΖΕ μεῖζον δύο ὀρθῶν, μένει τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ+ΕΖΔ μικρότερον δύο ὀρθῶν. Λοιπὸν κατὰ τὴν πρώτην περίστασιν αἱ γραμμαὶ ΕΒ, ΖΔ, ἱκανῶς προεκβαλλόμεναι, πρέπει νὰ συναπαντηθοῦν.

Πόρισμα. Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Ζ μία μόνη παράλληλος τῆς δεδομένης γραμμῆς ΑΒ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ· διότι ἐὰν φέρωμεν τὴν ΖΕ κατ' ἀρέσκειαν, μία μόνη γραμμὴ ὑπάρχει ἡ ΖΗ, ἥτις νὰ κάμῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΕΖ+ΕΖΗ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· κάθε ἄλλη εὐθεῖα ΖΔ ἤθελε κάμει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΕΖ+ΕΖΔ μικρότερον ἢ μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν· ἐπομένως ἤθελε συναπαντᾷ τὴν ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο παράλληλοι γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ συναπαντηθῶσιν ἀπό τινα διατέμουσαν ΕΖ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν ΑΗΟ, ΗΟΓ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 38.

Ἐπειδή, ἐὰν ἦτον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἤθελον συναπαντῶνται ἀπὸ τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέρος. πρ. 23 καὶ δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλοι.

Πόρισμα Α'. Ἐὰν ἡ γωνία ΗΟΓ ἦναι ὀρθή, ἡ γωνία ΑΗΟ θέλει εἶναι παρομοίως· λοιπὸν κάθε γραμμὴ κάθετος εἰς μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἄλλην.

Πόρισμα Β'. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΑΗΟ+ΗΟΓ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ τὸ ἄθροισμα ΗΟΔ+ΗΟΓ εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος ΗΟΓ, θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν ΑΗΟ=ΗΟΔ. Ἀπὸ ἄλλο δὲ μέρος ΑΗΟ=ΒΗΕ, καὶ ΗΟΔ=ΓΟΖ, πρ. 5. Λοιπὸν αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι γωνίαι ΑΗΟ, ΒΗΕ, ΗΟΔ, ΓΟΖ, εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς τέσσαρας ἀμβλείας ΑΗΕ, ΒΗΟ, ΗΟΓ, ΔΟΖ. Περιπλέον δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐὰν προστεθῇ μία τῶν τεσσάρων ὀξειῶν γωνιῶν εἰς μίαν τῶν τεσσάρων ἀμβλειῶν, τὸ ἄθροισμα πάντοτε θέλει ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Σχόλιον. Αἱ γωνίαι, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, συγκρινόμεναι ἀνὰ δύο, λαμβάνουσι διάφορα ὀνόματα. Ἐκαλέσαμεν τὰς γωνίας ΑΗΟ, ΗΟΓ, ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος· αἱ γωνίαι ΒΗΟ, ΗΟΔ, καλοῦνται Ἐναλλὰξ ἐντός, ἢ ἁπλῶς Ἐναλλάξ, οὕτως ὀνομάζονται καὶ αἱ γωνίαι ΒΗΟ, ΗΟΓ. Τέλος καλοῦνται ἐντός-ἐκτὸς αἱ γωνίαι ΕΗΒ, ΗΟΔ, ἢ ΕΗΑ, ΗΟΓ, καὶ ἐναλλὰξ-ἐκτὸς αἱ γωνίαι ΕΗΒ, ΓΟΖ, ἢ ΑΗΕ, ΔΟΖ. Τούτου τεθέντος δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἀκολούθους προτάσεις ὡς ἀποδεδειγμένας.

1.ον Αἱ ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος γωνίαι ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς.

2.ον Αἱ ἐναλλὰξ-ἐντὸς γωνίαι εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἐντός-ἐκτός, καὶ αἱ ἐναλλὰξ-ἐκτός.

Ἀντιστρόφως ἐὰν εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίστασιν, δύο γωνίαι τοῦ αὐτοῦ ὀνόματος ἦναι ἴσαι, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ γραμμαὶ εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται εἶναι παράλληλοι. Ἔστω π. χ. ἡ γωνία ΑΗΟ=ΗΟΔ· ἐπειδὴ ΗΟΓ+ΗΟΔ, εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, θέλομεν ἔχει παρομοίως ΑΗΟ+ΗΟΓ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, λοιπόν, πρ. 22. αἱ γραμμαὶ ΑΗ, ΓΟ εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Θεώρημα.

Δύο γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, παράλληλοι τρίτης-τινὸς ΕΖ, εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι. σχ. 39.

Ἂς ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα ΠΚΡ κάθετος εἰς τὴν ΕΖ. Ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΖ, ἡ διατέμνουσα ΠΡ θέλει εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν ΑΒ πρ. 24. πόρ. 1. παρομοίως, ἐπειδὴ ΓΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΖ, ἡ διατέμνουσα ΠΡ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΓΔ. Λοιπὸν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΠΚ· διὰ τοῦτο εἶναι παράλληλοι. πρ. 21.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣΤ'.

Θεώρημα.

Δύο παράλληλοι ἰσάκις ἀπέχουσι καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν.

Δεδομένων τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, ἐὰν ἐκ δύο σημείων λαμβανομένων κατ' ἀρέσκειαν, ὑψωθῶσιν ἐπὶ τῆς ΑΒ αἱ δύο κάθετοι ΕΗ, ΖΘ, αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ θέλουν εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν κάθετοι εἰς τὴν ΓΔ πρ. 24. λέγω περιπλέον ὅτι θέλουν εἶναι καὶ ἴσαι μεταξύ των. σχ. 40.

Ἐπειδὴ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΖ, αἱ γωνίαι ΗΖΕ, ΖΗΘ, θεωρούμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, εἶναι ἴσαι, ὡς ἐναλλὰξ ἐντός· σχόλ. πρ. 24. παρομοίως ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, καὶ ἐπομένως παράλληλοι μεταξύ των, αἱ γωνίαι ΕΗΖ, ΗΖΘ, θεωρούμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΗΕ, ΖΘ, εἶναι ἴσαι ὡς ἐναλλὰξ ἐντός. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΕΖΗ, ΖΗΘ, ἔχουν μίαν κοινὴν πλευρὰν ΖΗ προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας, τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα. πρ. 7. λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΕΗ, ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ε, εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΖΘ, ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν ἰδίων παραλλήλων ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ζ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο γωνίαι ΒΑΓ, ΔΕΖ, ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, αἱ δύο αὗται γωνίαι θέλουν εἶναι ἴσαι. σχ. 41.

Ἂς προσεκβληθῇ, ἐὰν ἀνάγκη τὸ καλέσῃ, ἡ ΔΕ ἕως ὅτου νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς Η· ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση τῇ ΔΗΓ, ἐπειδὴ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΗ. πρ. 24. ἡ γωνία ΔΗΓ εἶναι ἴση τῇ

ΒΑΓ, ἐπειδὴ ΔΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση τῇ ΒΑΓ.

Σχόλιον. Εἰς ταύτην τὴν πρότασιν ἐκτὸς τοῦ παραλληλισμοῦ ὑποθέσαμεν τὴν ΕΖ πλευρὰν διευθυνομένην κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καθ' ἣν καὶ ἡ ΑΓ, καὶ τὴν ΕΔ διευθυνομένην κατὰ τὴν ἔννοιαν καθ' ἣν καὶ ἡ ΑΒ· ὁ δὲ λόγος εἶναι, ὅτι ἐὰν προεκβληθῇ ΖΕ πρὸς τὸ Θ, ἡ γωνία ΔΕΘ ἤθελεν ἔχει τὰς πλευράς της παραλλήλους ἐκείνων τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἀλλὰ δὲν ἤθελεν εἶναι ἴση. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ἡ γωνία ΔΕΘ καὶ ΒΑΓ ἤθελον κάμνει ὁμοῦ δύο ὀρθὰς γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ΄.

Θεώρημα.

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΒΔ· περιπλέον ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, ἡ γωνία ΑΔΒ=ΔΒΓ, πρ. 24. καὶ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἡ γωνία ΑΒΔ=ΒΔΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, εἶναι ἴσα. πρ. 7. λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΒ ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΓ τὴν ἀπέναντι τῆς ἴσης γωνίας ΔΒΓ: καὶ παρομοίως ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΔ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ ΒΓ· λοιπὸν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι. σχ. 44.

Δεύτερον, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἰδίων τριγώνων ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Γ, καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ, σύνθετος ἀπὸ τὰς δύο γωνίας ΑΔΒ, ΒΔΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΒΓ, σύνθετον ἀπὸ τὰς δύο γωνίας ΔΒΓ, ΑΒΔ, λοιπὸν αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Λοιπὸν δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ περιεχόμεναι μεταξὺ δύο ἄλλων παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς τετράπλευρόν τι ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἦναι ἴσαι, εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ=ΓΔ, καὶ ΑΔ=ΒΓ, αἱ ἴσαι πλευραὶ θέλουν εἶναι παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον. (σχ. 44.)

Διότι, ἐπιζευχθείσης τῆς διαγωνίου ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν· λοιπὸν εἶναι ἴσα· διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΔΒ ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΔΒΓ τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΓΔ· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ (πρ. 24.) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ· λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ, τετραπλεύρου τινὸς ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπομένως τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον (σχ. 44.).

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ· ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΒΔ, ΒΔΓ εἶναι ἴσαι (πρ. 24.): ἀπὸ ἄλλο δὲ μέρος ΑΒ=ΔΓ, ἡ πλευρὰ ΔΒ εἶναι κοινή, λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ (πρ. 6.)· ἐπομένως ἡ πλευρὰ ΑΔ= ΒΓ, ἡ γωνία ΑΔΒ=ΔΒΓ, διὰ τοῦτο ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ· λοιπὸν τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ΄.

Θεώρημα.

Αἱ δύο διαγώνιοι ΑΓ, ΔΒ, τοῦ παραλληλογράμου τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 45.

Διότι, συγκρίνοντες τὸ τρίγωνον ΑΔΟ μὲ τὸ τρίγωνον ΓΟΒ, εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν ΑΔ=ΓΒ, τὴν γωνίαν ΑΔΟ=ΓΒΟ (πρ. 24.)· καὶ τὴν γωνίαν ΔΑΟ=ΟΓΒ· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα (πρ. 7.)· λοιπὸν ΑΟ ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΔΟ, εἶναι ἴση τῇ ΟΓ, τῇ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΟΒΓ· διὰ τοῦτο καὶ ΔΟ=ΟΒ.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ εἰς τὸ ῥομβοειδὲς, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΟΒΓ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ=ΒΟΓ, καὶ οὕτως αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ ῥομβοειδοῦς τέμνονται ἀμοιβαίως κατ' ὀρθὰς γωνίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

Ὁρισμοί.

Α'. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι γραμμή τις καμπύλη, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἰσάκις ἀπέχουσιν ἀπό τι ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον καλούμενον κέντρον.

Ὁ κύκλος εἶναι τὸ περατούμενον χωρίον ἀπὸ ταύτην τὴν καμπύλην γραμμήν.

Σ. Κ. Ἐνίοτε εἰς τὴν ὁμιλίαν συγχέομεν τὸν κύκλον μὲ τὴν περιφέρειάν του· ἀλλ' εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποφεύγωμεν τὴν σύγχυσιν ταύτην καὶ νὰ ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ἐκφράσεων, ἐνθυμούμενοι, ὅτι κύκλος εἶναι ἐπιφάνεια ἥτις ἔχει μῆκος καὶ πλάτος, ἐν ᾧ περιφέρεια εἶναι γραμμή.

Β'. Κάθε εὐθεῖα γραμμὴ ΓΑ, ΓΕ, ΓΔ, κ. τ. λ. ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν, καλεῖται ἀκτὶς ἢ ἡμιδιάμετρος· κάθε δὲ γραμμὴ, ὡς ΑΒ, διερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται διάμετρος.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου, ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι· ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι παρομοίως, καὶ διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

Γ'. Καλεῖται τόξον μέρος τῆς περιφερίας· ὡς τὸ ΖΘΗ.

Χορδὴ δὲ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τόξου εἶναι ἡ εὐθεῖα ΖΗ ἡ ἑνόνουσα τὰ δύο ἄκρα του.

Δ'. Τμῆμα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἢ μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς.

Σ. Κ. Εἰς τὴν αὐτὴν χορδὴν ΖΗ ἀντίκεινται πάντοτε δύο τόξα ΖΘΗ, ΖΕΗ, καὶ ἑπομένως δύο τμήματα· πλὴν πάντοτε ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τοῦ μικροτέρου, ἐν ὅσῳ δὲν ἐκφράζομεν τὸ ἐναντίον.

Ε'. Τομεὺς εἶναι τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τόξου τινὸς ΔΕ καὶ τῶν δύο ἀκτίνων ΓΔ, ΓΕ, ἠγμένων εἰς τὰ ἄκρα τούτου τοῦ τόξου.

ΣΤ. Καλεῖται γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, ἐκείνη τῆς ὁποίας τὰ δύο ἄκρα εἶναι εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς ΑΒ. (σχ. 47.)

Γωνία ἐγγεγραμμένη, ἡ ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ σχηματιζομένη ἀπὸ δύο χορδάς. Τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ ΒΑΓ.

Τρίγωνον ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουν τὰς κορυφάς των εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς τὸ ΒΑΓ.

Καὶ ἐν γένει σχῆμα ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι ἔχουν τὰς κορυφάς των εἰς τὴν περιφέρειαν: εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν λέγεται ὁ κύκλος περιγεγραμμένος εἰς τοῦτο τὸ σχῆμα.

Ζ'. Καλεῖται διατέμνουσα ἡ γραμμή, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα: τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ ΑΒ (σχ. 48.).

Η'. Ἐφαπτομένη εἶναι γραμμὴ ἔχουσα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν: τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ ΓΔ. Ἡ κοινὴ στιγμὴ Μ λέγεται σημεῖον τῆς ἁφῆς.

Θ'. Παρομοίως δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων, ὅταν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσι.

Ι'. Πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῆς περιφερείας. Εἰς τὴν αὐτὴν περίστασιν ὁ κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον. (σχ. 160.)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θεώρημα.

Κάθε διάμετρος ΑΒ διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 49.)

Διότι ἐὰν φυλάττοντες τὴν κοινὴν βάσιν ΑΒ στρέψωμεν τὸ σχῆμα ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ ΑΖΒ, πρέπει ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΕΒ νὰ πέσῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΖΒ· ἐπειδή, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, ἤθελον ὑπάρχει εἰς τὴν μίαν ἢ εἰς τὴν ἄλλην σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Θεώρημα.

Κάθε χορδὴ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου.

Διότι ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΔ ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΓΔ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἐλάσσων $ΑΓ + ΓΔ$ ἢ $ΑΔ < ΑΒ$. (σχ. 49.)

Πόρισμα. Λοιπὸν ἡ μεγαλητέρα εὐθεῖα γραμμή, ἥτις δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον τινὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν του.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ περιφέρειαν κύκλου εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα.

Διότι ἐὰν τὴν ἐσυναπαντοῦσεν εἰς τρία, τὰ τρία ταῦτα σημεῖα ἰσάκις ἤθελον ἀπέχει τοῦ κέντρου· ἤθελον ὑπάρχει λοιπὸν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον (πρ. 16. βιβλ. 1.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνονται ἀπὸ ἴσας χορδὰς, καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσα τόξα ὑποτείνουσιν.

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς ΑΓ ἦναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΟ, καὶ τὸ τόξον ΑΜΔ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ, λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΕΗ. (σχ. 50.)

Διότι οὔσης τῆς διαμέτρου ΑΒ ἴσης μὲ τὴν διάμετρον ΕΖ, ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΑΜΔΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΕΝΗΖ, θέλει ἐφαρμόσει ἐντελῶς μὲ αὐτὸ, καὶ ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΜΔΒ μὲ τὴν καμπύλην ΕΝΗΖ. Ἀλλὰ τὸ μέρος ΑΜΔ ὑποτίθεται ἴσον μὲ τὸ μέρος ΕΝΗ· λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Η· λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΗ.

Ἀντιστρόφως, ὑποτιθεμένης πάντοτε τῆς ἀκτῖνος ΑΓ=ΕΟ, ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΔ=ΕΗ, λέγω ὅτι τὸ τόξον ΑΜΔ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ.

Διότι ἐπιζευχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΓΔ, ΟΗ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΕΟΗ, θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ, ΑΓ=ΕΟ, ΓΔ=ΟΗ, καὶ ΑΔ=ΕΗ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (11, 1)· ἀκολούθως ἡ γωνία ΑΓΔ=ΕΟΗ. Ἀλλ' ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου του ΕΗΖ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ=ΕΟΗ, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἀκτὶς ΓΔ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΗ, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τοῦ σημείου Η· λοιπὸν τὸ τόξον ΑΜΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Θεώρημα.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὸ μεγαλήτερον τόξον ὑποτείνεται ἀπὸ τὴν μεγαλητέραν χορδὴν, καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν ὅμως τὰ τόξα, περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, ἦναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

Διότι ἔστω τὸ τόξον ΑΘ (σχ. 50.) μεῖζον τοῦ ΑΔ, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ χορδαὶ ΑΔ, ΑΘ, καὶ αἱ ἀκτῖνες ΓΔ, ΓΘ· αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΓΘ τοῦ τριγώνου ΑΓΘ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ: ἡ γωνία ΑΓΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ· λοιπὸν (10, 1.) ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΑΔ· λοιπὸν ἡ χορδὴ ἡ ὑποτείνουσα τὸ μεγαλήτερον τόξον εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΘ ὑποτεθῇ μεγαλητέρα τῆς ΑΔ, θέλομεν συνάξει ἐκ τῶν ἰδίων τριγώνων, ὅτι ἡ Γωνία ΑΓΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ, καὶ οὕτω τὸ τόξον ΑΘ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΑΔ.

Σχόλιον. Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ τόξα περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἐὰν τὰ τόξα ἦσαν μεγαλήτερα, ἤθελεν ὑπάρχει ἡ ἐναντία ἰδιότης· τοῦ τόξου αὐξανομένου, ἡ χορδὴ ἤθελε σμικρύνει, καὶ ἀντιστρόφως· οὕτως ἐν ᾧ τὸ τόξον ΑΚΒΔ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΑΚΒΘ, ἡ χορδὴ ΑΔ τοῦ πρώτου εἶναι μικροτέρα τῆς χορδῆς ΑΘ τοῦ δευτέρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ.

Θεώρημα.

Ἡ ἀκτὶς ΓΗ (σχ. 51.), ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ, διαιρεῖ ταύτην τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ΑΗΒ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΒ· αἱ ἀκτῖνες αὗται, ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΓΔ, εἶναι δύο ἴσαι πλάγιαι· λοιπὸν ἰσάκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου (16, 1), ὅθεν ΑΔ=ΔΒ.

Δεύτερον, ἐπειδὴ ΑΔ=ΔΒ, ΓΗ εἶναι κάθετος ὑψωμένη εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· λοιπὸν (17, 1) κάθε σημεῖον ταύτης τῆς καθέτου ἰσάκις πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα Α καὶ Β. Μεταξὺ τούτων εἶναι καὶ τὸ Η· λοιπὸν τὸ διάστημα ΑΗ=ΒΗ· ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι τὸ τόξον ΑΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΒΗ (πρ. 4.)· λοιπὸν ἡ ἀκτὶς ΓΗ, ἡ κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ, διαιρεῖ τὸ ἀπὸ αὐτὴν ὑποτεινόμενον τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σχόλιον. Τὸ κέντρον Γ, τὸ μέσον Δ τῆς χορδῆς ΑΒ, καὶ τὸ μέσον Η τοῦ ἀπὸ αὐτὴν ὑποτεινομένου τόξου, εἶναι τρία σημεῖα εὑρισκόμενα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τὴν χορδήν. Τώρα ἐπειδὴ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς θέσεως τινος εὐθείας ἀρκοῦσι δύο σημεῖα· ἕπεται ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη ἀπὸ δύο τῶν εἰρημένων σημείων, διέρχεται καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, καὶ εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδήν.

Ἕπεται ὡσαύτως, ὅτι ἡ ὑψωμένη κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς τινος διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ μέσου τοῦ ὑποτεινομένου ἀπὸ τὴν χορδὴν τόξου.

Διότι ἡ κάθετος ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἐκείνη ἥτις ἤθελε καταβιβασθῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἰδίαν χορδὴν, ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο διέρχονται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Θεώρημα.

Ἐκ τριῶν μὴ ἐπ᾽ εὐθείας δεδομένων στιγμῶν Α, Β, Γ, πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου, καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν παρὰ μία μόνη νὰ διέλθῃ.

Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῶσι δίχα ὑπὸ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ· λέγω δὲ κατὰ πρῶτον, ὅτι αἱ κάθετοι αὗται συναπαντῶνται εἰς ἓν σημεῖον Ο.

Ἐὰν αἱ γραμμαὶ ΔΕ, ΖΗ δὲν ἦναι παράλληλοι, ἀναγκαίως τέμνονται. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι παράλληλοι· ἡ γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὴν ΔΕ, ἤθελεν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν ΖΗ (24, 1), καὶ ἡ γωνία Κ ἤθελεν εἶναι ὀρθή· ἀλλὰ ΒΚ προεκβολὴ τῆς ΒΔ εἶναι διαφορετικὴ τῆς ΒΖ, διότι τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ δὲν εἶναι ἐπ᾽ εὐθείας· λοιπὸν ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι ΒΖ, ΒΚ ἠγμέναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἰδίας γραμμῆς, ὅπερ ἀδύνατον (15, 1)· λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΔΕ, ΖΗ τέμνονται πάντοτε εἰς ἓν σημεῖον Ο.

Τώρα τὸ σημεῖον Ο, ἐπειδὴ ἀνήκει εἰς τὴν κάθετον ΔΕ, ἰσάκις ἀπέχει τῶν δύο σημείων Α καὶ Β (17, 1)· τὸ αὐτὸ δὲ σημεῖον, ἐπειδὴ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν κάθετον ΖΗ, ἰσάκις ἀπέχει τῶν δύο σημείων Β καὶ Γ. Τὰ τρία λοιπὸν διαστήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, εἶναι ἴσα. Ἡ γραφομένη λοιπὸν περιφέρεια ἐκ τοῦ Ο ὡς κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ θέλει διέλθῃ ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ.

Ἐκ τούτου ἀπεδείχθη ὅτι πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου ἐκ τριῶν δεδομένων στιγμῶν, μὴ ἐπ᾽ εὐθείας· λέγω δὲ περιπλέον ὅτι μία μόνη δύναται νὰ διέλθῃ.

Διότι ἐὰν ὑπῆρχε δευτέρα τις περιφέρεια ἥτις νὰ διήρχετο ἀπὸ τὰ τρία δεδομένα σημεῖα Α, Β, Γ, τὸ κέντρον της δὲν ἠμποροῦσε νὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς γραμμῆς ΔΕ (17, 1), ἐπειδὴ τότε ἀνισάκις ἤθελεν ἀπέχει τοῦ Α καὶ Β· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον δὲν ἠμποροῦσε νὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς γραμμῆς ΖΗ· λοιπὸν ἤθελεν εὑρίσκεται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν ΔΕ, ΖΗ. Ἀλλὰ δύο εὐθεῖαι εἰς ἓν μόνον σημεῖον τέμνονται· λοιπὸν μία μόνη περιφέρεια ὑπάρχει, ἥτις δύναται νὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰς τρεῖς δεδομένας στιγμάς.

Πόρισμα. Δύο περιφέρειαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τέμνωνται εἰς περισσότερα τῶν δύο σημείων· ἐπειδὴ ἐὰν εἶχον τρία κοινά, ἤθελον ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἤθελον σχηματίζει μίαν καὶ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Θεώρημα.

Δύο ἴσαι χορδαὶ ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου· καὶ ἐκ δύο ἀνίσων, ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον.

1.ον Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΒ=ΔΕ. Ἂς τμηθῶσι δίχα αἱ χορδαὶ αὗται ὑπὸ τῶν καθέτων ΓΖ, ΓΗ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΔ, (σχ. 53). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΖ, ΔΓΗ, ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ΓΑ, ΓΔ ἴσας· περιπλέον ἡ πλευρὰ ΑΖ ἥμισυ τῆς ΑΒ, εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΗ, ἥμισυ τῆς ΔΕ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (18. 1), καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΓΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην ΓΗ· ὅθεν 1.ον αἱ δύο ἴσαι χορδαὶ ΑΒ, ΔΕ, ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου.

2.ον Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΘ μεγαλητέρα τῆς ΔΕ, τὸ τόξον ΑΚΘ θέλει εἶναι μεῖζον τοῦ ΔΜΕ (πρ. 5)· ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘ τὸ μέρος ΑΝΒ=ΔΜΕ, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΑΒ, καὶ ἂς κατεβασθῇ ἡ ΓΖ κάθετος ἐπὶ ταύτην τὴν χορδὴν, καὶ ΓΙ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΘ· φανερὸν εἶναι ὅτι ΓΖ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΟ, καὶ ΓΟ μεγαλητέρα τῆς ΓΙ (16, 1)· λοιπὸν πολὺ περισσότερον ΓΖ > ΓΙ. Ἀλλὰ ΓΖ=ΓΗ, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν ἔχομεν ΓΗ > ΓΙ· ἕπεται λοιπὸν, ὅτι ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον τοῦ κέντρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Θεώρημα.

Ἡ κάθετος ΒΔ, ἠγμένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΑ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν. σχ. 54.

Διότι κάθε πλαγία ΓΕ εἶναι μεγαλητέρα τῆς καθέτου ΓΑ (16,1)· λοιπὸν τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου· διὰ τοῦτο ἡ ΒΔ ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν δὲν ἔχει εἰμὴ τὸ Α· λοιπὸν ΒΔ εἶναι ἐφαπτομένη (πρ. 8.)

Σχόλιον. Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Α μία μόνη ἐφαπτομένη ΑΔ εἰς τὴν περιφέρειαν δύναται νὰ ἀχθῇ· διότι ἐὰν ἦτον δυνατὸν νὰ ἀχθῇ μία ἄλλη, αὕτη δὲν ἤθελεν εἶναι πλέον κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα ΓΑ· λοιπὸν ὡς πρὸς τὴν νέαν ταύτην ἐφαπτομένην, ἡ ἀκτὶς ΓΑ ἤθελεν εἶναι πλαγία, καὶ ἡ κάθετος, ἠγμένη ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ ταύτην τὴν ἐφαπτομένην, ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΑ· λοιπὸν ἡ ἐφαπτομένη αὕτη ἤθελεν εἰσέρχεται εἰς τὸν κύκλον, καὶ ἤθελεν εἶναι διατέμνουσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Θεώρημα.

Δύο παράλληλοι ΑΒ, ΔΕ, χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα ΜΝ, ΠΚ. σχ. 55.

Τρεῖς περιστάσεις δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν.

1.ον Ἐὰν αἱ δύο παράλληλοι ἦναι διατέμνουσαι, ἂς ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΓΘ κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΜΠ, εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν παράλληλόν της ΝΚ (24, 1)· λοιπὸν τὸ σημεῖον Θ θέλει εἶναι ἐνταυτῷ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΜΘΠ καὶ τοῦ τόξου ΝΘΚ (πρ. 6.) λοιπὸν θέλομεν ἔχει τὸ τόξον ΜΘ=ΘΠ, καὶ τὸ τόξον ΝΘ=ΘΚ· ἐκ τούτου ἕπεται ΜΘ—ΝΘ=ΘΠ—ΘΚ, τουτέστι ΜΝ=ΠΚ.

2.ον Ἐὰν ἐκ τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ, ἡ μία ἦναι διατέμνουσα, καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἀφῆς Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΓΘ· αὕτη θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ (πρ. 9.) καὶ εἰς τὴν παράλληλόν της ΜΠ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΓΘ εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΜΠ, τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΜΘΠ· λοιπὸν τὰ τόξα ΜΘ, ΘΠ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἴσα.

3.ον Τέλος ἐὰν αἱ δύο παράλληλοι ΔΕ, ΙΛ ἦναι ἐφαπτόμεναι, ἡ μὲν εἰς Θ, ἡ δὲ εἰς Κ', ἂς ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα παράλληλος ΑΒ, θέλομεν ἔχει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ΜΘ=ΘΠ καὶ ΜΚ'=Κ'Π· λοιπὸν τὸ ὅλον τόξον ΘΜΚ'=ΘΠΚ', καὶ περιπλέον βλέπομεν ὅτι ἕκαστον τούτων τῶν τόξων εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, ἡ διερχομένη γραμμὴ ἀπὸ τὰ κέντρα των θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ἥτις ἑνόνει τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς, καὶ θέλει τὴν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 57 καὶ 58.

Διότι ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἡ ἑνόνουσα τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς, εἶναι κοινὴ χορδὴ εἰς τοὺς δύο κύκλους. Τώρα ἐὰν εἰς τὸ μέσον ταύτης τῆς χορδῆς ὑψωθῇ μία κάθετος, αὐτὴ πρέπει νὰ διέλθῃ ἀπὸ καθὲν τῶν δύο κέντρων Γ καὶ Δ. (πρ. 6.) Ἀλλ' ἐκ δύο δεδομένων σημείων μία μόνη εὐθεῖα δύναται νὰ ἀχθῇ· λοιπὸν ἡ διερχομένη εὐθεῖα ἀπὸ τὰ κέντρα, θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς μικροτέρας καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων, αἱ δύο περιφέρειαι θέλει τέμνονται. σχ. 57 καὶ 58.

Διότι διὰ νὰ ἔχῃ χώραν ἡ κοινὴ τομὴ, πρέπει τὸ τρίγωνον ΓΑΔ νὰ ὑπάρχῃ· πρέπει λοιπὸν ὄχι μόνον ΓΔ νὰ ἦναι $<$ ΑΓ $+$ ΑΔ σχ. 57· ἀλλὰ ἀκόμη καὶ ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ΑΔ νὰ ἦναι $<$ ΑΓ $+$ ΓΔ. σχ. 58. Τώρα ὁσάκις τὸ τρίγωνον ΓΑΔ ἠμπορεῖ νὰ κατασκευασθῇ, φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ γραμμέναι περιφέρειαι ἐκ τῶν κέντρων Γ καὶ Δ, θέλει τέμνονται εἰς Α καὶ Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΓΔ τῶν κέντρων δύο κύκλων ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των ΓΑ, ΑΔ, οἱ δύο κύκλοι θέλει ἅπτονται ἐξωτερικῶς.

Φανερὸν εἶναι ὅτι θέλουν ἔχει τὸ σημεῖον Α κοινόν· καὶ τοῦτο μόνον· διότι διὰ νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ἔπρεπε τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων (πρ. 12.)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΓΔ τῶν κέντρων δύο κύκλων ἦναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των ΓΑ, ΑΔ, οἱ δύο κύκλοι θέλει ἅπτονται ἐσωτερικῶς. σχ. 60.

Φανερὸν εἶναι, ὅτι ἔχουν τὸ σημεῖον Α κοινόν: καὶ τοῦτο μόνον· διότι διὰ νὰ ἔχουν ἓν ἄλλο, ἔπρεπε ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ΑΔ νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀκτῖνος ΑΓ καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων ΓΔ (πρό. 12.) τὸ ὁποῖον δὲν ὑπάρχει.

Πόρισμα. Λοιπὸν ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται, εἴτε ἐσωτερικῶς, εἴτε ἐξωτερικῶς, τὰ κέντρα καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Σχόλιον. Ὅλοι οἱ κύκλοι οἵτινες ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, καὶ διέρχονται ἐκ τῆς στιγμῆς Α, ἅποντται μεταξύ των, καὶ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον παρὰ τὸ Α. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Α ἀχθῇ ΑΕ κάθετος εἰς τὴν ΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΑΕ θέλει εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς ὅλους τούτους τοὺς κύκλους. σχ. 59 καὶ 60.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Θεώρημα.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ κέντρον, χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα ΑΒ, ΔΕ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ, ἦναι ἴσα, αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι. σχ. 61.

Διότι 1.ον ἐὰν ἡ γωνία ΑΓΒ ἦναι ἴση τῇ ΔΓΕ, ἡ μία δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης· καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραί των εἶναι ἴσαι φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ σημεῖον Α θέλει πέσει εἰς Δ, καὶ τὸ σημεῖον Β εἰς Ε. Ἀλλὰ τότε τὸ τόξον ΑΒ πρέπει ὁμοίως νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ· διότι ἐὰν τὰ δύο τόξα δὲν ἐταυτίζοντο, ἤθελον ὑπάρχει εἰς τὸ ἓν ἢ εἰς τὸ ἄλλο σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ κέντρον, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν τὸ τόξον ΑΒ=ΔΕ.

2.ον Ἐὰν ὑποτεθῇ ΑΒ=ΔΕ, λέγω ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΓΕ· διότι ἐὰν αἱ γωνίαι αὗται δὲν ἦναι ἴσαι, ἔστω ΑΓΒ ἡ μεγαλητέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΓΙ=ΔΓΕ· θέλομεν ἔχει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ΑΙ=ΔΕ: ἀλλά, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τόξον ΑΒ=ΔΕ· λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει ΑΙ=ΑΒ, ἢ τὸ μέρος ἴσον τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΒ=ΔΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'.

Θεώρημα.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἐὰν δύο γωνίαι εἰς τὸ κέντρον ΑΓΒ, ΔΓΕ ἦναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, τὰ περιεχόμενα τόξα μεταξὺ τῶν πλευρῶν των ΑΒ, ΔΕ, θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, καὶ θέλομεν ἔχει ταύτην τὴν ἀναλογίαν, γωνία ΑΓΒ : γωνίαν ΔΓΕ : : τόξον ΑΒ : τόξον ΔΕ. σχ. 62.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς 7 πρὸς 4, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, ὅτι ἡ γωνία Μ κοινὸν μέτρον τῶν δύο γωνιῶν, περιέχεται εἰς μὲν τὴν γωγωνίαν ΑΓΒ ἑπτάκις, εἰς δὲ τὴν ΔΓΕ τετράκις. Ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ γωνίαι ΑΓμ, μΓν, νΓΠ, κ. τ. λ, ΔΓχ, χΓψ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξύ των, τὰ μερικὰ τόξα Αμ, μν, νπ, κ. τ. λ, Δχ, χψ, κ. τ. λ. εἶναι παρομοίως ἴσα μεταξύ των. (Πρό. 15.) Λοιπὸν τὸ ὅλον τόξον ΑΒ θέλει εἶναι πρὸς τὸ ὅλον τόξον ΔΕ ὡς 7 πρὸς 4. Τώρα φανερὸν εἶναι, ὅτι ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἔχει χώραν, ὅταν ἀντὶ 7 καὶ 4 λάβωμεν ὁποιουσδήποτε ἄλλους ἀριθμούς· λοιπὸν ἐὰν ὁ λόγος τῶν γωνιῶν

ΑΓΒ, ΔΓΕ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ ἦσαν μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΒ, ἤθελον εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, καὶ πάντοτε ἠθέλαμεν ἔχει ΑΓΒ : ΔΓΕ : : ΑΒ : ΔΕ· διότι ἐπειδὴ τὰ μερικὰ τόξα Αμ, μν, κ. τ. λ, Δχ, χψ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα, αἱ μερικαὶ γωνίαι ΑΓμ, μΓν, κ. τ. λ. εἶναι παρομοίως ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Θεώρημα.

Ὁποιονδήποτε λόγον ἔχωσιν αἱ δύο γωνίαι ΑΓΒ, ΑΓΔ, πάντοτε θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τόξα ΑΒ, ΑΔ, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν των καὶ γεγραμμένα ἐκ τῶν κορυφῶν των ὡς ἐκ κέντρων μὲ ἴσας ἀκτῖνας.

Ἂς ὑποθέσωμεν τὴν μικροτέραν γωνίαν ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας: ἐὰν ἡ ἐκφωνηθεῖσα ἀναλογία δὲν ὑπάρχῃ, ἡ γωνία ΑΓΒ, θέλει εἶναι εἰς τὴν γωνίαν ΑΓΔ ὡς τὸ τόξον ΑΒ εἰς ἓν τόξον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τοῦ ΑΔ. Ἂς ὑποθέσωμεν τοῦτο τὸ τόξον μεγαλήτερον, καὶ ἂς τὸ παραστήσωμεν διὰ ΑΟ, οὕτω θέλομεν ἔχει·

γωνία ΑΓΒ : γωνίαν ΑΓΔ : : τόξον ΑΒ : τόξον ΑΟ.

Ἂς ἐννοήσωμεν τώρα τὸ τόξον ΑΒ διῃρημένον εἰς μέρη ἴσα ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ ΔΟ· θέλει ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον διαιρέσεως μεταξὺ Δ καὶ Ο: ἔστω Ι τοῦτο τὸ σημεῖον, ἂς ἐπιζευχθῇ ΓΙ. Τὰ τόξα ΑΒ, ΑΙ θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, καὶ κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα θέλομεν ἔχει:

γωνία ΑΓΒ : γωνίαν ΑΓΙ : : τόξον ΑΒ : τόξον ΑΙ.

Συγκρίνοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, βλέπομεν ὅτι οἱ ἡγούμενοι εἶναι οἱ αὐτοί· λοιπὸν οἱ ἑπόμενοι σχηματίζουν ἀναλογίαν καὶ ἔχομεν

γωνία ΑΓΔ : γωνίαν ΑΓΙ : : τόξον ΑΟ : τόξον ΑΙ.

Ἀλλὰ τὸ τόξον ΑΟ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τόξου ΑΙ: ἔπρεπε λοιπὸν διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία, ἡ γωνία ΑΓΔ νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΑΓΙ· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικροτέρα· λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον ἡ γωνία ΑΓΒ νὰ ἦναι πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΔ ὡς τὸ τόξον ΑΒ πρὸς ἓν τόξον μεγαλήτερον τοῦ ΑΔ.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς Ἀναλογίας δὲν δύναται νὰ ἦναι μικρότερος τοῦ ΑΔ· λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ ΑΔ· ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν:

γωνία ΑΓΒ : γωνίαν ΑΓΔ : : τόξον ΑΒ : τόξον ΑΔ.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ ἡ γωνία εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τὸ περιεχόμενον τόξον μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἔχουν τοιαύτην σχέσιν, ὥστε ὅταν ἡ γωνία αὐξάνῃ ἢ σμικρύνῃ, νὰ αὐξάνῃ ἢ νὰ σμικρύνῃ τὸ τόξον κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δικαίως ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν μίαν τούτων τῶν ποσοτήτων ὡς μέτρον τῆς ἄλλης: διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἑξῆς λαμβάνομεν τὸ τόξον ΑΒ ὡς μέτρον τῆς γωνίας ΑΓΒ. Πρέπει μόνον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τὴν πρὸς ἀλλήλας σύγκρισιν τῶν γωνιῶν, τὰ τόξα τὰ ὁποῖα μετροῦσιν αὐτάς, πρέπει νὰ ἦναι γεγραμμένα μὲ ἴσας ἀκτῖνας· διότι τοῦτο ὑποθέτουσιν αἱ προηγούμεναι προτάσεις.

Σχόλιον Α΄. Φαίνεται φυσικώτερον νὰ μετρῆται πᾶσα ποσότης διὰ ἄλλης τινὸς τοῦ ἰδίου εἴδους· καὶ κατ᾽ αὐτὴν ἀρχὴν ἔπρεπε νὰ ἀναφερθῶσιν ὅλαι αἱ γωνίαι εἰς τὴν ὀρθήν: διὰ τοῦτο λαμβανομένης τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος τοῦ μέτρου, ἡ ὀξεῖα γωνία ἤθελεν ἐκφρασθῇ δι᾽ ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξὺ 0 καὶ 1, καὶ ἡ ἀμβλεῖα δι᾽ ἀριθμοῦ μεταξὺ 1 καὶ 2. Ἀλλ᾽ ὁ τρόπος οὗτος τοῦ ἐκφράζειν τὰς γωνίας δὲν ἤθελεν εἶναι ὁ ἐπιτηδειότερος εἰς τὴν χρῆσιν. Εὑρέθη λοιπὸν ἁπλούστερον νὰ μετρῶνται αἱ γωνίαι διὰ τόξων κύκλων, διὰ τὴν εὐκολίαν τοῦ κατασκευάζειν τόξα ἴσα μὲ δεδομένα, καὶ δι᾽ ἄλλους πολλοὺς λόγους. Τέλος, ἂν καὶ τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν διὰ τῶν τόξων κύκλου εἶναι τρόπον τινὰ ἔμμεσον, μὲ εὐκολίαν ὅμως διὰ μέσου αὐτῶν συνάγομεν τὸ ἄμεσον καὶ ἀπόλυτον· διότι, ἐὰν συγκρίνωμεν τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μετρεῖ γωνίαν τινὰ μὲ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, θέλομεν ἔχει τὸν λόγον τῆς δεδομένης γωνίας πρὸς τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἀπόλυτον μέτρον.

Σχόλιον Β΄. Ὅ,τι ἀπεδείχθη εἰς τὰς τρεῖς προηγουμένας προτάσεις διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν γωνιῶν μὲ τὰ τόξα, ὑπάρχει ἐπίσης διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν τομέων μὲ τὰ τόξα, διότι οἱ τομεῖς εἶναι ἴσοι, ὅταν αἱ γωνίαι ἦναι ἴσαι, καὶ ἐν γένει εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς γωνίας· λοιπὸν δύο τομεῖς ΑΓΒ, ΑΓΔ, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τόξα ΑΒ, ΑΔ, τὰς βάσεις τῶν ἰδίων τομέων.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ τόξα τοῦ κύκλου τὰ ὁποῖα μετροῦν τὰς γωνίας, ἠμποροῦν ὁμοίως νὰ χρησιμεύσουν ὡς μέτρον τῶν διαφόρων τομέων τοῦ ἰδίου κύκλου ἢ ἴσων κύκλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

Θεώρημα.

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΔ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΔ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. σχ. 64. καὶ 65.

Ας υποθέσωμεν κατά πρώτον ότι το κέντρον του κύκλου ευρίσκεται εντός της γωνίας ΒΑΔ· άγομεν την διάμετρον ΑΕ και τας ακτίνας ΓΒ, ΓΔ. Η εκτός γωνία ΒΓΕ, είναι ίση με το άθροισμα των δύο εντός ΓΑΒ, ΑΒΓ. (πρ. 19, 1)· αλλ' επειδή το τρίγωνον ΒΑΓ είναι ισοσκελές, η γωνία ΓΑΒ=ΑΒΓ· λοιπόν η γωνία ΒΓΕ είναι διπλασία της ΒΑΓ. Η γωνία ΒΓΕ, ως γωνία εις το κέντρον, έχει διά μέτρον το τόξον ΒΕ· λοιπόν η γωνία ΒΑΓ θέλει έχει διά μέτρον το ήμισυ του ΒΕ. Διά τον αυτόν λόγον η γωνία ΓΑΔ θέλει έχει διά μέτρον το ήμισυ του ΕΔ· λοιπόν ΒΑΓ+ΓΑΔ ή ΒΑΔ θέλει μετρείται από το ήμισυ του ΒΕ+ΕΔ ή το ήμισυ του ΒΔ. σχ. 64.

Ας υποθέσωμεν δεύτερον ότι το κέντρον Γ ευρίσκεται εκτός της γωνίας ΒΑΔ, τότε εάν άξωμεν την διάμετρον ΑΕ, η γωνία ΒΑΕ θέλει έχει διά μέτρον το ήμισυ του ΒΕ, η γωνία ΔΑΕ το ήμισυ του ΔΕ· λοιπόν η διαφορά των ΒΑΔ θέλει έχει διά μέτρον το ήμισυ του ΒΕ μείον το ήμισυ του ΕΔ, ή το ήμισυ του ΒΔ. σχ. 65.

Λοιπόν κάθε έγγεγραμμένη γωνία έχει διά μέτρον το ήμισυ του περιεχομένου τόξου μεταξύ των πλευρών της.

Πόρισμα Α'. Όλαι αι έγγεγραμμέναι γωνίαι εις το αυτό τμήμα καθώς ΒΑΓ, ΒΔΓ κ. τ. λ. Είναι ίσαι, ως έχουσαι διά μέτρον το ήμισυ του ιδίου τόξου ΒΟΓ. σχ. 66.

Β'. Κάθε γωνία ΒΑΔ έγγεγραμμένη εις το ημικύκλιον είναι γωνία ορθή, ως έχουσα διά μέτρον το ήμισυ της ημιπεριφερείας ΒΟΔ, ή το τέταρτον της περιφερείας. σχ. 67.

Διά να δείξωμεν το αυτό με άλλον τρόπον, ας επιζευχθή η ακτίς ΑΓ· το τρίγωνον ΒΑΓ είναι ισοσκελές, όθεν η γωνία ΒΑΓ= ΑΒΓ· το τρίγωνον ΓΑΔ είναι παρομοίως ισοσκελές· λοιπόν η γωνία ΓΑΔ=ΑΔΓ· επομένως ΒΑΓ+ΓΑΔ ή ΒΑΔ=ΑΒΔ+ΑΔΒ. Αλλ' όταν αι δύο γωνίαι Β και Δ του τριγώνου ΑΒΔ κάμνουν ομού την τρίτην ΒΑΔ, φανερόν είναι ότι αι τρεις γωνίαι του τριγώνου ισοδυναμούν με δύο φοραίς την γωνίαν ΒΑΔ· αύται δε ισοδυναμούν με δύο ορθάς· λοιπόν η γωνία ΒΑΔ είναι ορθή.

Γ'. Κάθε γωνία ΒΑΓ έγγεγραμμένη εις τμήμα μείζον του ημικυκλίου, είναι γωνία οξεία· διότι έχει διά μέτρον το ήμισυ του τόξου ΒΟΓ ελάσσονος ημιπεριφερείας. σχ. 66.

Και κάθε γωνία ΒΟΓ έγγεγραμμένη εις τμήμα έλασσον του ημικυκλίου, είναι γωνία αμβλεία· διότι έχει διά μέτρον το ήμισυ του τόξου ΒΑΓ μείζονος ημιπεριφερείας.

Δ'. Αι απέναντι γωνίαι Α και Γ έγγεγραμμένου τινός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς· διότι ἡ γωνία ΒΑΔ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓΔ· ἡ γωνία ΒΓΔ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΑΔ· λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι ΒΑΔ, ΒΓΔ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἔχουν διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας· λοιπὸν τὸ ἄθροισμά των ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 68.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄.

Θεώρημα.

Ἡ σχηματιζομένη γωνία ΒΑΓ ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην καὶ ἀπὸ μίαν χορδήν, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΜΔΓ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. σχ. 69.

Εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἀφῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΔ· ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθή, (πρ. 9) καὶ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΔ, ἡ γωνία ΔΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ· λοιπὸν ΒΑΔ+ΔΑΓ ἢ ΒΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΜΔ, πλέον τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τόξου ΑΜΔΓ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ γωνία ΓΑΕ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

Εἰς τὰ δύο πρῶτα βιβλία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 70.

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὡς ἐκ κέντρων, μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἀλλὰ μεγαλητέραν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, ἂς γραφθῶσι δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς Δ. Τὸ σημεῖον Δ ἰσάκις θέλει ἀπέχει τῶν σημείων Α καὶ Β: ἂς σημειωθῇ παρομοίως ἄνω ἢ κάτω τῆς γραμμῆς ΑΒ ἓν δεύτερον σημεῖον Ε ἰσάκις ἀπέχον τῶν σημείων Α καὶ Β, ἂς ἐπεζευχθῇ ἡ γραμμὴ ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Γ.

Διότι ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β, πρέπει νὰ εὑρίσκηται εἰς τὴν ὑψωνομένην κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ διὰ δύο δεδομένων σημείων μία μόνη εὐθεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΔΕ εἶναι αὐτὴ ἡ ἰδία κάθετος τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, δεδομένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΒΓ, νὰ ὑψώσωμεν κάθετον εἰς ταύτην τὴν γραμμήν. σχ. 71.

Ἄς ληφθῶσι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὥστε ἰσάκις νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Α, ἀκολούθως ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν ἀλλὰ μείζονα τῆς ΒΑ, ἂς γραφθῶσι δύο τόξα τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς Δ· ἂς ἐπεζευχθῇ ΑΔ ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ ἰσάκις ἀπέχει τοῦ Β καὶ Γ, ἀνήκει εἰς τὴν ὑψωνομένην κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· λοιπὸν ΑΔ εἶναι αὐτὴ ἡ κάθετος.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς κάμνομεν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΔ, εἰς δεδομένον σημεῖον Α, ἐπὶ δεδομένης γαμμῆς ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΔ δεδομένου, νὰ κατεβάσωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. σχ. 72.

Ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην, ἂς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΔ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Δ· ἂς σημειωθῇ ἀκολούθως σημεῖόν τι Ε ἰσάκις ἀπέχον ἀπὸ Β καὶ Δ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΕ ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι ἕκαστον τῶν δύο σημείων Α καὶ Ε ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ Β καὶ Δ· λοιπὸν ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Εἰς τὴν στιγμὴν Α τῆς γραμμῆς ΑΒ, νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ Κ. σχ. 73.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Κ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν, ἂς γραφθῇ τὸ τόξον ΙΛ περατούμενον εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας. Ἐκ τῆς στιγμῆς Α ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΒ ἴσην τῇ ΚΙ, ἂς γραφθῇ τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον ΒΟ· ἂς ληφθῇ ἀκολούθως μία ἀκτὶς ἴση τῇ χορδῇ ΛΙ. Ἐκ τῆς στιγμῆς Β ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ταύτην τὴν ἀκτῖνα, ἂς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἀπροσδιόριστον ΒΟ εἰς Δ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΔ, καὶ ἡ γωνία ΔΑΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ δεδομένῃ Κ.

Διότι τὰ δύο τόξα ΒΔ, ΛΙ, ἔχουν ἀκτῖνας καὶ χορδὰς ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα (πρ. 4, 2.) ἑπομένως ἡ γωνία ΒΑΔ = ΙΚΛ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε.

Νὰ διαιρέσωμεν γωνίαν ἢ τόξον δεδομένον εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 74.

1.ον Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς Δ. Διὰ τῆς στιγμῆς Δ καὶ τοῦ κέντρου Γ ἄγομεν τὴν ΓΔ, ἥτις θέλει τέμνει τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Ε.

Διότι ἕκαστον τῶν δύο σημείων Γ καὶ Δ ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς χορδῆς ΑΒ, λοιπὸν ἡ ΓΔ, εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον ταύτης τῆς χορδῆς· ἑπομένως διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ τόξον ΑΒ εἰς τὴν στιγμὴν Ε. (προ. 6, 2).

2.ον Ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ, γράφομεν κατὰ πρῶτον ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, τὸ τόξον ΑΒ, ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν· φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ΓΔ θέλει διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν κάθε ἥμισυ ΑΕ, ΕΒ, εἰς δύο ἴσα μέρη· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διὰ διαδοχικῶν ὑποδιαιρέσεων, γωνία ἢ τόξον δεδομένον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα, ὀκτώ, δεκαέξ, κ. τ. λ. ἴσα μέρη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ΄.

Ἀπὸ δεδομένου σημείου Α, νὰ ἄξωμεν εὐθεῖαν παράλληλον ἄλλης δεδομένης ΒΓ. σχ. 75.

Ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην, γράφομεν τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον ΕΟ· ἐκ τοῦ σημείου Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν τὸ τόξον ΑΖ, λαμβάνομεν ΕΔ=ΑΖ, καὶ ἐπιζευγνύοντες τὴν ΑΔ θέλομεν ἔχει τὴν ζητουμένην παράλληλον.

Διότι ἑνόνοντες τὴν ΑΕ, βλέπομεν ὅτι αἱ ἀναλλὰξ γωνίαι ΑΕΖ, ΕΑΔ, εἶναι ἴσαι· λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΑΔ, ΕΖ εἶναι παράλληλοι. (24, 1).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄.

Δεδομένων δύο γωνιῶν Α καὶ Β ἑνὸς τριγώνου, νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην. σχ. 76.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος γραμμὴ ΔΕΖ, ἂς κατασκευασθῇ εἰς τὴν στιγμὴν Ε, ἡ γωνία ΔΕΓ=Α, καὶ ἡ ΓΕΘ=Β· Ἡ γωνία ΘΕΖ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη τρίτη· διότι αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι ὁμοῦ λαμβανόμεναι δίδουν δι᾽ ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

Δεδομένων δύο πλευρῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ᾽ αὐτῶν γωνίας Α, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον· σχ. 77.

Ἀχθείσης τῆς ἀπροσδιορίστου ΔΕ, ἂς κατασκευασθῇ εἰς τὴν στιγμὴν Δ ἡ γωνία ΕΔΖ ἴση τῇ δεδομένῃ Α· ἂς ληφθῇ ἀκολούθως ΔΗ = Β, καὶ ΔΘ = Γ, ἂς ἐπιζευχθῇ ΗΘ καὶ ΔΗΘ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Δεδομένων μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν τριγώνου τινὸς, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον.

Ἢ καὶ αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι πρέπει νὰ ἦναι προσκείμεναι εἰς τὴν δεδομένην πλευρὰν, ἢ ἡ μία προσκειμένη, καὶ ἡ ἄλλη ἀπέναντι: εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίστασιν, ζητοῦμεν τὴν τρίτην (πρόβ. 7.), καὶ οὕτως ἔχομεν τὰς δύο προσκειμένας. Τούτου τεθέντος, ἄγωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ, κάμνομεν εἰς τὴν στιγμὴν Δ τὴν γωνίαν ΕΔΖ ἴσην μὲ τὴν μίαν τῶν προσκειμένων γωνιῶν, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ε τὴν ΔΕΗ ἴσην μὲ τὴν ἄλλην· αἱ δύο γραμμαὶ ΔΖ, ΕΗ, θέλουν τέμνεσθαι εἰς Θ, καὶ ΔΕΘ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 78.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν Α, Β, Γ ἑνὸς τριγώνου, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ ἴση τῇ πλευρᾷ Α· ἐκ τῆς στιγμῆς Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δευτέρᾳ πλευρᾷ Β, ἂς γραφθῇ τόξον· ἐκ τῆς στιγμῆς Δ ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ τρίτῃ πλευρᾷ Γ ἂς γραφθῇ ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον θέλει τέμνει τὸ πρῶτον εἰς Ζ· ἂς ἐπιζευχθῶσι ΔΖ, ΕΖ, καὶ ΔΕΖ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 79.

Σχόλιον. Ἐὰν μία τῶν πλευρῶν ἦτο μεγαλητέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὰ τόξα δὲν ἤθελον τέμνεσθαι· ἀλλ᾽ ὁσάκις τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν λαμβανόμενον ὁπωσδήποτε εἶναι μεγαλήτερον τῆς τρίτης, ἡ λύσις εἶναι πάντοτε δυνατή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

Δεδομένων δύο πλευρῶν Α καὶ Β τριγώνου τινὸς, καὶ τῆς γωνίας Γ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς Β, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον. σχ. 80.

Δύο περιστάσεις ὑπάρχουν. 1.ον Ἐὰν ἡ γωνία Γ ἦναι ὀρθὴ ἡ ἀμβλεῖα· ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΕΔΖ ἴση τῇ Γ· ἂς ληφθῇ ΔΕ = Α· ἐκ δὲ τῆς στιγμῆς Ε, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ Β, ἂς γραφθῇ τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει εἰς Ζ τὴν ΔΖ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΕΖ, καὶ οὕτω ΔΕΖ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην περίστασιν πρέπει ἡ πλευρὰ Β νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς Α· διότι ἡ γωνία Γ οὖσα ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα εἶναι ἡ μεγαλητέρα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου· λοιπὸν ἡ ἀπέναντι πλευρὰ πρέπει ὁμοίως νὰ ἦναι ἡ μεγαλητέρα.

2.ον Ἐὰν δὲ ἡ γωνία Γ ἦναι ὀξεῖα, καὶ ἡ Β μεγαλητέρα τῆς Α, ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἔχει χώραν, καὶ ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 81.

Ἀλλ' ἐὰν, ἐν ᾧ Γ εἶναι ὀξεῖα, ἡ πλευρὰ Β ἦναι μικροτέρα τῆς Α, τότε τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τοῦ κέντρου Ε μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΖ = Β, θέλει τέμνει τὴν πλευρὰν ΔΖ εἰς δύο σημεῖα Ζ καὶ Η κείμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους τοῦ Δ· θέλουν ὑπάρχει λοιπὸν δύο τρίγωνα ΔΕΖ, ΔΕΗ, ἐπίσης πληροῦντα εἰς τὸ πρόβλημα, ὡς ἔχοντα τὰ αὐτὰ δοθέντα. σχ. 82.

Σχόλιον. Τὸ πρόβλημα ἤθελεν εἶναι ἀδύνατον εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις, ἐὰν ἡ πλευρὰ Β ἦτο μικροτέρα τῆς φερομένης καθέτου ἐκ τῆς στιγμῆς Ε ἐπὶ ΔΖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ.

Δεδομένων τῶν προσκειμένων πλευρῶν Α καὶ Β παραλληλογράμμου τινὸς καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας Γ, νὰ γράψωμεν τὸ παραλληλόγραμμον. σχ. 83.

Ἄγομεν τὴν ΔΕ = Α, κάμνομεν εἰς τὴν στιγμὴν Δ τὴν γωνίαν ΖΔΕ = Γ, λαμβάνομεν ΔΖ = Β· γράφομεν δύο τόξα, τὸ μὲν ἐκ τῆς στιγμῆς Ζ ὡς κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΖΗ = ΔΕ, τὸ δὲ ἐκ τῆς στιγμῆς Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΕΗ = ΔΖ: ἑνόνομεν τὴν στιγμὴν Η, ὅπου τὰ δύο ταῦτα τόξα τέμνονται, μὲ τὰς Ζ καὶ Ε, διὰ τῶν ΖΗ, ΕΗ· καὶ ΔΕΗΖ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὸ γεγραμμένον σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον (30, 1)· καὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο περιέχει τὰς δεδομένας πλευρὰς καὶ τὴν δεδομένην γωνίαν.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦναι ὀρθὴ, τὸ σχῆμα θέλει εἶναι ὀρθογώνιον· ἐὰν δὲ περιπλέον καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι, θέλει εἶναι τετράγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

Νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον κύκλου ἢ τόξου δεδομένου. σχ. 84.

Ἂς ληφθῶσι κατ' ἀρέσκειαν εἰς τὴν περιφέρειαν ἢ εἰς τὸ τόξον τρία σημεῖα Α, Β, Γ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ, ἂς τμηθῶσι δίχα αἱ γραμμαὶ αὗται ὑπὸ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ. Ἡ στιγμὴ Ο, ὅπου αὗται αἱ κάθετοι συναπαντῶνται, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν περιφέρειαν διὰ τριῶν δεδομένων στιγμῶν Α, Β, Γ, καθὼς καὶ νὰ περιγράψωμεν περιφέρειαν εἰς δεδομένον τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'.

Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον νὰ ἄξωμεν ἐφαπτομένην εἰς δεδομένον κύκλον.

Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Α ἦναι ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ἀκτὶς ΓΑ, καὶ ἂς ἀχθῇ ΑΔ κάθετος εἰς τὴν ΓΑ· οὕτως ἡ ΑΔ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. (9, 2) σχ. 85.

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Α ἦναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἂς ἑνωθῇ μὲ τὸ κέντρον διὰ τῆς εὐθείας ΓΑ· ἂς τμηθῇ δίχα ἡ ΓΑ εἰς τὴν στιγμὴν Ο· ἐκ δὲ τοῦ Ο, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΓ, ἂς γραφθῇ περιφέρεια ἥτις τέμνει τὴν δεδομένην εἰς τὴν στιγμὴν Β· ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΒ, αὕτη δὲ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. σχ. 86.

Διότι ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΒ, ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ (18, 2)· λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΒ, ἀκολούθως εἶναι ἐφαπτομένη.

Σχόλιον. Ὅταν τὸ σημεῖον Α ἦναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουν πάντοτε δύο ἐφαπτόμεναι ἴσαι ΑΒ, ΑΔ, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ Α: ἴσαι, διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΒΑ, ΓΔΑ, ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΓΑ κοινήν, καὶ τὴν πλευρὰν ΓΒ=ΓΔ· λοιπὸν εἶναι ἴσα (18, 1) ἐπομένως ΑΔ=ΑΒ, καὶ ἐνταυτῷ ἡ γωνία ΓΑΔ=ΓΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'.

Νὰ ἐγγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 87.

Ἂς τμηθῶσι δίχα αἱ γωνίαι Α καὶ Β ὑπὸ τῶν γραμμῶν ΑΟ καὶ ΒΟ, αἵτινες συναπαντῶνται εἰς Ο. Ἐκ δὲ τῆς στιγμῆς Ο ἂς καταβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου· λέγω δὲ ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι μεταξύ των· διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γωνία ΔΑΟ=ΟΑΖ, ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΔΟ=ΑΖΟ· λοιπὸν ἡ τρίτη ΑΟΔ εἶναι δὲ ἴση τῇ τρίτῃ ΑΟΖ. Ἀπὸ ἄλλο μέρος ἡ πλευρὰ ΑΟ εἶναι κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΔ, ΑΟΖ, καὶ αἱ εἰς τὴν ἴσην πλευρὰν προσκείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα· ἑπομένως ΔΟ=ΟΖ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΒΟΔ, ΒΟΕ, εἶναι ἴσα· λοιπὸν ΟΔ=ΟΕ, λοιπὸν αἱ τρεῖς κάθετοι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ, εἶναι ἴσαι μεταμεταξύ των.

Ἤδη δέ, ἐὰν ἐκ τῆς στιγμῆς Ο, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΔ, γραφθῇ περιφέρεια, φανερὸν, ὅτι θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· διότι ἡ πλευρὰ ΑΒ ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΔ, εἶναι ἐφαπτομένη: τὸ αὐτὸ δὲ ὑπάρχει διὰ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΑΓ.

Σχόλιον. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἵτινες τέμνουν δίχα τὰς τρεῖς γωνίας τριγώνου τινός, συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΣΤ΄.

Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ νὰ γράψωμεν τμῆμα ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν δεδομένην γωνίαν Γ, τουτέστι, τμῆμα τοιοῦτον, ὥστε ὅλαι αἱ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι νὰ ἦναι ἴσαι μὲ τὴν δεδομένην Γ. σχ. 88 καὶ 89.

Ἂς προεκβληθῇ ΑΒ πρὸς τὸ Δ, ἂς γένῃ εἰς τὴν στιγμὴν Β ἡ γωνία ΔΒΕ=Γ, ἂς ὑψωθῇ ἡ ΒΟ κάθετος εἰς τὴν ΒΕ καὶ ΗΟ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἐκ δὲ τῆς στιγμῆς τῆς συναπαντήσεως Ο, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ, ἂς γραφθῇ κύκλος· οὕτω τὸ ζητούμενον τμῆμα θέλει εἶναι ΑΜΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ΒΖ ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ εἶναι ἐφαπτομένη, ἡ γωνία ΑΒΖ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΚΒ (19, 2). Ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ μέρους ἡ γωνία ΑΜΒ, ὡς ἐγγεγραμμένη, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΚΒ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΜΒ=ΑΒΖ=ΕΒΔ=Γ· ἑπομένως ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ τμῆμα ΑΜΒ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν δεδομένην Γ.

Σχόλιον. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦτον ὀρθή, τὸ ζητούμενον τμῆμα ἤθελεν εἶναι τὸ γεγραμμένον ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ΄.

Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον δύο δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ἐὰν ὅμως ἔχωσι κοινὸν μέτρον μεταξύ των. σχ. 90.

Φέρομεν τὴν μικροτέραν ΓΔ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας ΑΒ τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχηται παραδείγματος χάριν, δὶς, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΒΕ.

Φέρομεν τὸ ὑπόλοιπον ΒΕ ἐπὶ τῆς ΓΔ τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχηται, μίαν φοράν, παραδείγματος χάριν, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΔΖ.

Φέρομεν τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ΔΖ ἐπὶ τοῦ πρώτου ΒΕ τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχηται, μίαν φοράν, παραδείγματος χάριν, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΒΗ.

Φέρομεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον ΒΗ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ΔΖ τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχηται.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτως ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον ἀκριβῶς νὰ περιέχηται εἰς τὸ προηγούμενον.

Τότε τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον θέλει εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γραμμῶν, καὶ θεωροῦντές το ὡς μονάδα, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰς τιμὰς τῶν προηγουμένων ὑπολοίπων καὶ τέλος τὰς τῶν δεδομένων γραμμῶν διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον των ἢ τὸν λόγον των ἐκφραζόμενον δι' ἀριθμῶν.

Ἐάν, π. χ. εὕρωμεν, ὅτι ΗΒ περιέχεται ἀκριβῶς δὶς εἰς ΖΔ, ΒΗ θέλει εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γραμμῶν. Ἔστω ΒΗ=1, θέλομεν ἔχει ΖΔ=2· ἀλλὰ ΕΒ περιέχει μίαν φορὰν ΖΔ πλέον ΗΒ· λοιπὸν ΕΒ=3. ΓΔ περιέχει μίαν φορὰν ΕΒ πλέον ΖΔ· λοιπὸν ΓΔ=5· τέλος ΑΒ περιέχει δὶς τὴν ΓΔ πλέον ΕΒ· λοιπὸν ΑΒ=13· διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῶν δύο γραμμῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ὁ τοῦ 13 πρὸς 5. Ἐὰν ἡ ΓΔ ἐλαμβάνετο ὡς μονάς, ἡ ΑΒ ἤθελεν εἶναι $\frac{13}{5}$, ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ ἐλαμβάνετο ὡς μονάς, ἡ ΓΔ ἤθελεν εἶναι $\frac{5}{13}$.

Σχόλιον. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην τὴν ὁποίαν διδάσκει ἡ Ἀριθμητικὴ πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο δὲν ἔχει χρείαν ἄλλης ἀποδείξεως.

Ἐνδέχεται ἐνίοτε ὅτι ὅσον καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν ἐργασίαν, νὰ μὴ εὕρωμεν ποτὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀκριβῶς νὰ περιέχηται εἰς τὸ προηγούμενον. Τότε αἱ δύο γραμμαὶ δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, καὶ λέγονται ἀσύμμετροι (incommensurables): ἐντὸς ὀλίγου θέλομεν ἰδεῖ ἓν παράδειγμα, εἰς τὸ περὶ τοῦ λόγου τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Τότε λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀκριβῆ λόγον δι' ἀριθμῶν· ἀλλὰ παραβλέποντες τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, εὑρίσκομεν λόγον μᾶλλον ἢ ἧττον πλησιάζοντα εἰς τὸν ἀληθινόν, καθόσον μᾶλλον ἢ ἧττον ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ΄.

Δεδομένων δύο γωνιῶν Β καὶ Α, νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν μέτρον των, ἐὰν ἔχωσι, καὶ ἐκ τούτου τὸν λόγον των εἰς ἀριθμούς. σχ. 91.

Ἂς γραφθῶσι μὲ ἴσας ἀκτῖνας τὰ τόξα ΓΔ, ΕΖ, τὰ ὁποῖα μετροῦσι ταύτας τὰς γωνίας· ἀκολούθως πράττομεν διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν τόξων ΓΔ, ΕΖ, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα· διότι τόξον τι δύναται νὰ φερθῇ ἐπὶ ἄλλου τῆς ἰδίας ἀκτῖνος, καθὼς εὐθεῖα ἐπὶ εὐθείας. Οὕτω θέλομεν φθάσει εἰς τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων ΓΔ, ΕΖ, ἐὰν ἔχωσι, καὶ εἰς τὸν ἀριθμητικόν των λόγον. Ὁ λόγος οὗτος θέλει εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τῶν δεδομένων γωνιῶν (17, 2) καὶ ἐὰν ΔΟ ἦναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων, ΔΑΟ θέλει εἶναι τὸ τῶν γωνιῶν.

Σχόλιον. Δυνάμεθα παρομοίως νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν γωνίας τινὸς, συγκρίνοντες τὸ μετροῦν αὐτὴν τόξον πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν: ἐὰν π. χ. τὸ τόξον ΓΔ ἦναι πρὸς τὴν περιφέρειαν ὡς 3 πρὸς 25, ἡ γωνία Α θέλει εἶναι τὰ $\frac{3}{25}$ τεσσάρων ὀρθῶν, ἢ τὰ $\frac{12}{25}$ τῆς ὀρθῆς.

Ἐνδέχεται νὰ συμβῇ ὥστε τὰ συγκρινόμενα τόξα νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν μέτρον· τότε δὲ διὰ τὰς γωνίας θέλομεν ἔχει λόγους περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον πλησιάζοντας εἰς τὸν ἀληθινὸν, καθόσον ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

Ὁρισμοί.

Α'. ΚΑΛΩ σχήματα ἰσοδύναμα ἐκεῖνα τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι.

Δύο σχήματα ἠμποροῦν νὰ ἦναι ἰσοδύναμα, ἂν καὶ πολλὰ ἀνόμοια: κύκλος, π. χ. ἠμπορεῖ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τετράγωνον, τρίγωνον μὲ ὀρθογώνιον κ. τ. λ.

Τὴν ὀνομασίαν ἴσα σχήματα θέλω ἀποδίδει εἰς ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζουσι καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα: τοιαῦτα δὲ εἶναι δύο κύκλοι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, κ. τ. λ.

Β'. Δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Δι' ὁμολόγους πλευρὰς ἐννοοῦμεν ἐκείνας αἵτινες ἔχουν τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ δύο σχήματα, ἢ πρόσκεινται εἰς ἴσας γωνίας. Αὗται δὲ αἱ γωνίαι καλοῦνται ὁμοίως γωνίαι ὁμόλογοι.

Δύο σχήματα ἴσα εἶναι πάντοτε ὅμοια· ἀλλὰ δύο σχήματα ὅμοια ἠμποροῦν νὰ ἦναι πολλὰ ἄνισα.

Γ'. Εἰς δύο διαφορετικοὺς κύκλους, καλοῦνται τόξα ὅμοια, τομεῖς ὅμοιοι, τμήματα ὅμοια, τὰ ἀνταποκρινόμενα εἰς γωνίας εἰς τὸ κέντρον ἴσας.

Οὕτως, οὔσης τῆς γωνίας Α ἴσης μὲ τὴν Ο, τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τόξον ΔΕ, ὁ τομεὺς ΑΒΓ μὲ τὸν τομέα ΟΔΕ, κ. τ. λ. σχ. 92.

Δ'. Τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμου εἶναι ἡ κάθετος ΕΖ ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ, λαμβανομένων ὡς βάσεων. σχ. 93.

Ε'. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας Α ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ λαμβανομένην ὡς βάσιν. σχ. 94.

ΣΤ'. Τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΕΖ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν του ΑΒ, ΓΔ. σχ. 95.

Ζ'. Ἐμβαδὸν ἢ ἐπιφάνεια σχήματός τινος εἶναι σχεδὸν λέξεις συνώνυμοι. Ἡ λέξις ἐμβαδὸν σημειόνει μερικώτερον τὴν ποσότητα τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος καθ' ὅσον μετρεῖται ἢ συγκρίνεται μὲ ἄλλας ἐπιφανείας.

Σ. Κ. Πρὸς κατάληψιν τοῦ παρόντος βιβλίου καὶ τῶν ἀκολούθων, πρέπει ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐνθυμῆται καλῶς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, διὰ τὴν ὁποίαν παραπέμπεται εἰς τὰς κοινὰς πραγματείας τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας. Ἡμεῖς δὲ μόνον μίαν παρατήρησιν θέλομεν κάμει, ἥτις θέλει χρησιμεύσει διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς ἀληθινῆς ἐννοίας τῶν προτάσεων, καὶ τὴν διάλυσιν κάθε δοσκολίας ἢ ἀσαφείας, ἥτις ἠμποροῦσε νὰ ἀπαντηθῇ εἴτε εἰς τὴν ἐκφώνησιν, εἴτε εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $Α : Β :: Γ : Δ$, γνωστὸν εἶναι ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων $Α \times Δ$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων $Β \times Γ$.

Ἡ ἀλήθεια αὐτη εἶναι ἀναντίῤῥητος διὰ τοὺς ἀριθμούς· ἀλλ' ὄχι ὀλιγώτερον ὑπάρχει δι' ὁποιασδήποτε ποσότητας, φθάνει μόνον νὰ ἐκφράζωνται ἢ νὰ τὰς ἐννοῶμεν ἐκφραζομένας δι' ἀριθμῶν· καὶ τοῦτο πάντοτε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν: ἐάν, παραδείγματος χάριν, Α, Β, Γ, Δ ἦναι γραμμαί, ἠμποροῦμεν νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι μία τούτων τῶν τεσσάρων γραμμῶν, ἤ, ἂν θέλωμεν, πέμπτη ἄλλη εἶναι κοινὸν μέτρον τούτων, καὶ λαμβάνεται ὡς μονάς. Τότε ἕκαστον τῶν στοιχείων Α, Β, Γ, Δ παριστάνει ἀριθμόν τινα μονάδων, ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν, συμμετρικὸν ἢ ἀσύμμετρον, καὶ ἡ μεταξὺ τῶν γραμμῶν Α, Β, Γ, Δ ἀναλογία τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν.

Τὸ γινόμενον λοιπὸν τῶν γραμμῶν Α καὶ Δ, τὸ ὁποῖον καλεῖται καὶ ὀρθογώνιόν των ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶν μονάδων (unités linéaires) τῶν περιεχομένων εἰς Α, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμικῶν μονάδων τῶν περιεχομένων εἰς Β· καὶ εὐκόλως ἐννοεῖται, ὅτι τοῦτο τὸ γινόμενον δύναται καὶ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ προκύπτον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπὸ τὰς γραμμὰς Β καὶ Γ.

Αἱ ποσότητες Α καὶ Β ἠμποροῦν νὰ ἦναι ἑνός τινος εἴδους, παραδείγματος χάριν, γραμμαὶ, αἱ δὲ ποσότητες Γ καὶ Δ ἄλλου διαφορετικοῦ, παραδείγματος χάριν, ἐπιφάνειαι. Τότε πρέπει πάντοτε νὰ θεωρῶμεν ταύτας τὰς ποσότητας ὡς ἀριθμούς· αἱ μὲν Α καὶ Β θέλουν ἐκφράζεσθαι διὰ γραμμικῶν μονάδων, αἱ δὲ Γ καὶ Δ διὰ μονάδων ἐπιφανείας, καὶ τὸ γινόμενον $Α \times Δ$ καθὼς καὶ τὸ $Β \times Γ$ θέλουν εἶναι ἀριθμοί.

Ἐν γένει, εἰς ὅλας τὰς ἐργασίας, τὰς ὁποίας θέλομεν ἐκτελεῖ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν, πάντοτε πρέπει νὰ θεωρῶνται οἱ ὅροι αὐτῶν ὡς τόσοι ἀριθμοὶ, κατὰ τὸ εἶδος εἰς τὸ ὁποῖον ἕκαστος ἀνήκει, καὶ κάμμία δυσκολία δὲν θέλει ἀπαντᾶται εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἐργασιῶν τούτων καὶ τῶν ἀπὸ αὐτὰς συναγομένων συνεπειῶν.

Νομίζομεν χρέος μας νὰ εἰδοποιήσωμεν προσέτι, ὅτι πολλαὶ τῶν ἀποδείξεών μας θεμελιοῦνται ἐπὶ μερικῶν κανόνων τῆς Ἀλγέβρας τῶν ἁπλουστέρων, οἱ ὁποῖοι καὶ αὐτοὶ ἐπιστηρίζονται ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀξιωμάτων· οὕτως ἐὰν ἔχωμεν $Α = Β + Γ$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέλος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα Μ, συνάγομεν $Α \times Μ = Β \times Μ + Γ \times Μ$· παρομοίως ἐὰν $Α = Β + Γ$ καὶ $Δ = Ε - Γ$, καὶ προστεθῶσιν αἱ ἴσαι ποσότητες, ἐξαλειφθὲν τῶν $+Γ$ καὶ $-Γ$, συνάγομεν $Α + Δ = Β + Ε$, καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων· ταῦτα εἶναι οἴκοθεν σαφῆ. Ἀλλὰ, τυχούσης δυσκολίας, καλὸν θέλει εἶναι νὰ συμβουλεύηταί τις τὰ βιβλία τῆς Ἀλγέβρας, καὶ οὕτω νὰ μιγνύῃ τὴν σπουδὴν τῶν δύο τούτων ἐπιστημῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα καὶ ἰσοϋψῆ ὄντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἔστω ΑΒ. σχ. 96· ἡ κοινὴ βάσις τῶν δύο παραλληλογράμμων **ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ**· ἐπειδὴ ὑποτίθενται ἰσοϋψῆ, αἱ ἄνω βάσεις **ΔΓ, ΖΕ,** πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου τῆς ΑΒ. Τώρα ἐκ τῆς φύσεως τῶν παραλληλογράμμων ΑΔ=ΒΓ, καὶ ΑΖ=ΒΕ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΔΓ=ΑΒ, καὶ ΖΕ=ΑΒ· λοιπὸν ΔΓ=ΖΕ· ὅθεν, ἐὰν ἀφαιρεθῶσι ΔΓ καὶ ΖΕ ἀπὸ τὴν αὐτὴν γραμμὴν ΔΕ, τὰ ὑπόλοιπα ΓΕ καὶ ΔΖ θέλουν εἶναι ἴσα.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΑΖ, ΓΒΕ, εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, καὶ ἐπομένως ἴσα.

Ἀλλ' ἐὰν ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΕΔ ἀφαιρεθῆ τὸ τρίγωνον ΑΔΖ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΖ· καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΕΔ ἀφαιρεθῆ τὸ τρίγωνον ΓΒΕ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· λοιπὸν τὰ δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ, τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ἔχοντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. Κάθε παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους. σχ. 97.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Θεώρημα.

Κάθε τρίγωνον ΑΒΓΟ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους. σχ. 98.

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ εἶναι ἴσα (πρ. 28, 1).

Πόρισμα Α'. Λοιπὸν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους ΑΟ· διότι τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Πόρισμα Β'. Ὅλα τὰ τρίγωνα τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα καὶ ἰσοϋψῆ ὄντα εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Δύο ἰσοϋψῆ ὀρθογώνια εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

Ἔστωσαν ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ δύο ὀρθογώνια τοῦ ἰδίου ὕψους ΑΔ· λέγω ὅτι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΕ. σχ. 99.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον τὰς βάσεις ΑΒ, ΑΕ συμμετρικάς, καὶ ὅτι εἶναι μεταξύ των παραδείγματος χάριν, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 4: ἐὰν ΑΒ διαιρεθῆ εἰς 7 ἴσα μέρη, ΑΕ θέλει περιέχει 4 ἐκ τούτων· ἀπὸ κάθε στιγμὴν διαιρέσεως ἂς ὑψωθῆ κάθετος εἰς τὴν βάσιν, θέλουν σχηματισθῆ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἑπτὰ μερικὰ ὀρθογώνια, ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θέλει περιέχει ἑπτὰ μερικὰ ὀρθογώνια, ἐν ᾧ τὸ ΑΕΖΔ τέσσαρα· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ ὡς 7 πρὸς 4, ἢ ὡς ΑΒ πρὸς ΑΕ. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ παντὸς ἄλλου λόγου διαφορετικοῦ ἀπὸ τὸν τοῦ 7 πρὸς 4· λοιπὸν ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ λόγος οὗτος, φθάνει νὰ ἦναι συμμετρικὸς, θέλομεν ἔχει

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ :: ΑΒ : ΑΕ.

Ἂς ὑποθέσωμεν, δεύτερον, ὅτι αἱ βάσεις ΑΒ, ΑΕ εἶναι ἀσύμμετροι μεταξύ των· λέγω ὅτι ἀκόμη θέλομεν ἔχει σχ. 100·

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ :: ΑΒ : ΑΕ.

Διότι ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ἦναι ἀληθὴς, τῶν τριῶν πρώτων ὅρων μενόντων τῶν αὐτῶν, ὁ τέταρτος θέλει εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος ἀπὸ ΑΕ. Ἂς τὸν ὑποθέσωμεν μεγαλήτερον, καὶ ὅτι ἔχομεν,

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ :: ΑΒ : ΑΟ.

Ἂς διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς μέρη ἴσα μικρότερα ἀπὸ ΕΟ, τοὐλάχιστον θέλει ὑπάρχει ἓν σημεῖον διαιρέσεως Ι μεταξὺ Ε καὶ Ο· ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΑΙ ἡ κάθετος ΙΚ αἱ βάσεις ΑΒ, ΑΙ, θέλουν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς ἀλλήλας, καὶ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα θέλομεν ἔχει,

ΑΒΓΔ : ΑΙΚΔ :: ΑΒ : ΑΙ.

ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ :: ΑΒ : ΑΟ.

Εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας οἱ ἡγούμενοι εἶναι ἴσοι· λοιπὸν οἱ ἑπόμενοι σχηματίζουν ἀναλογίαν, καὶ συνάγομεν·

ΑΙΚΔ : ΑΕΖΔ :: ΑΙ : ΑΟ.

Ἀλλὰ ΑΟ εἶναι μείζων ΑΙ· ἔπρεπε λοιπὸν διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ τοιαύτη ἀναλογία τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ ΑΙΚΔ· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον· λοιπὸν ἡ ἀναλογία εἶναι ἀδύνατος. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΑΒΓΔ δὲν δύναται νὰ ἦναι πρὸς τὸ ΑΕΖΔ ὡς ΑΒ πρὸς γραμμὴν μείζονα τῆς ΑΕ.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς ΑΕ· λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ ΑΕ.

Ὁποιοσδήποτε ἄρα καὶ ἂν ἦναι ὁ λόγος τῶν βάσεων, δύο ὀρθογώνια ἰσοϋψῆ ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΗΖ εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων πολυπλασιαζομένων ἐπὶ τὰ ὕψη, εἰς τρόπον ὥστε ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ :: ΑΒ×ΑΔ : ΑΕ×ΑΖ. σχ. 101.

Ἀφ' οὗ τὰ δύο ὀρθογώνια διαταχθῶσιν εἰς τρόπον ὥστε αἱ γωνίαι εἰς Α νὰ ἦναι κατακορυφὴν, ἄς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΗΕ, ΓΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντιθῶσιν εἰς Θ. Τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΘΔ, ἔχουν τὸ ἴδιον ὕψος ΑΔ· εἶναι λοιπὸν πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΕ: ὡσαύτως, τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΕΘΔ, ΑΕΗΖ, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ, εἶναι λοιπὸν πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΔ, ΑΖ: οὕτω θέλομεν ἔχει τὰς δύο ἀναλογίας.

ΑΒΓΔ : ΑΕΘΔ :: ΑΒ : ΑΕ

ΑΕΘΔ : ΑΕΗΖ :: ΑΔ : ΑΖ

Πολυπλασιάζοντες δὲ τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν, καὶ παρατηροῦντες, ὅτι ὁ μέσος ὅρος ΑΕΘΔ ὡς κοινὸς παράγων τοῦ ἡγουμένου καὶ ἑπομένου ἠμπορεῖ νὰ ἐξαλειφθῇ καὶ θέλομεν ἔχει,

ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ :: ΑΒ×ΑΔ : ΑΕ×ΑΖ.

Σχόλιον. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν διὰ μέτρον ὀρθογωνίου τινὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του φθάνει μόνον διὰ τούτου τοῦ γινομένου νὰ ἐννοῶμεν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων εἰς τὴν βάσιν, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων εἰς τὸ ὕψος.

Τὸ μέτρον ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι ἀπόλυτον, ἀλλὰ σχετικόν· προϋποθέτει τὴν ἐκτίμησιν ἄλλου ὀρθογωνίου διὰ τῆς καταμετρήσεως τῶν πλευρῶν του μὲ τὴν αὐτὴν γραμμὴν μονάδα· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προσδιορίζεται ἕτερον γινόμενον, ὁ δὲ λόγος τῶν δύο γινομένων θέλει εἶναι ἴσος μὲ τὸν τῶν ὀρθογωνίων, κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου Α ἦναι τριῶν μονάδων καὶ τὸ ὕψος του δέκα, τὸ ὀρθογώνιον θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3×10 ἢ 30. Ἀλλ' αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς οὕτω μεμονωμένος δὲν συμαίνει τίποτε· ἐὰν ὅμως ἔχομεν καὶ ἕτερον ὀρθογώνιον Β, ἡ βάσις τοῦ ὁποίου νὰ ἦναι δώδεκα μονάδων, καὶ τὸ ὕψος ἑπτὰ, τοῦτο θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7×12, ἢ 84: ἐντεῦθεν θέλομεν συμπεράνει ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια Α καὶ Β εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς 30 πρὸς 84. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ συνθήκης ἐλαμβάναμεν τὸ ὀρθογώνιον Α διὰ τὴν μονάδα τοῦ μέτρου εἰς τὰς ἐπιφανείας, τὸ ὀρθογώνιον Β ἤθελεν ἔχει τότε διὰ μέτρον ἀπόλυτον $\frac{84}{30}$ τουτέστιν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ $\frac{84}{30}$ μονάδος ἐπιφανείας.

Κοινότερον δὲ καὶ ἁπλούστερον εἶναι νὰ λαμβάνηται ὡς μονὰς ἐπιφανείας τὸ τετράγωνον, καὶ ἐκλέγεται τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου πλευρὰ εἶναι ἡ μονὰς τοῦ μήκους· τότε τὸ μέτρον τὸ ὁποῖον ἁπλῶς ἐθεωρήσαμεν ὡς σχετικὸν, γίνεται ἀπόλυτον: ὁ ἀριθμὸς, παραδείγματος χάριν, 30 διὰ τοῦ ὁποίου ἐμετρήσαμεν τὸ ὀρθογώνιον Α, παριστάνει 30 μονάδας ἐπιφανείας, ἢ 30 τετράγωνα, ἡ πλευρὰ τῶν ὁποίων εἶναι ἡ μονάς: τοῦτο γίνεται ἐπαισθητὸν διὰ τοῦ σχ. 102.

Συχνάκις εἰς τὴν γεωμετρίαν συγχέεται τὸ γινόμενον δύο γραμμῶν μὲ τὸ ὀρθογώνιόν των, καὶ ἡ ἔκφρασις αὕτη μετέβη καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν σημαίνουσα τὸ γινόμενον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν, καθὼς ἡ τοῦ τετραγώνου πρὸς παράστασιν τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτόν.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3. κ. τ. λ. εἶναι 1, 4, 9, κ. τ. λ. Οὕτω βλέπομεν ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ γραμμῆς διπλασίας εἶναι τετραπλάσιον, ἐπὶ τριπλασίας, ἐνναπλάσιον, καὶ ἐφεξῆς: σχ. 103.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν ὁποιουδήποτε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Διότι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ΒΕ (πρό. 1)· ἀλλὰ τοῦτο ἔχει διὰ μέτρον $AB \times BE$ (πρό. 4)· λοιπὸν $AB \times BE$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. σχ. 97.

Πόρισμα. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὸ ἴδιον ὕψος εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των· διότι, ἐὰν Α, Β, Γ παριστάνωσιν ὁποιασδήποτε ποσότητας, ἔχομεν ἐν γένει $A \times \Gamma : B \times \Gamma :: A : B$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του.

Διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ΑΔ (πρό. 2)· ἀλλὰ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου $= B\Gamma \times A\Delta$ (πρό. 5)· λοιπὸν ἡ τοῦ τριγώνου $= \frac{1}{2} B\Gamma \times A\Delta$ ἢ $B\Gamma \times \frac{1}{2} A\Delta$. σχ. 104.

Πόρισμα. Δύο τρίγωνα ἰσοϋψῆ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο τρίγωνα τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντα, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος του ΕΖ, πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν παραλλήλων βάσεων, ΑΒ, ΓΔ. σχ: 105.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Ι, μέσου τῆς πλευρᾶς ΓΒ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΛ παράλληλος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΑΔ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ΔΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΚΛ.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΙΒΛ, ΙΓΚ, ἔχομεν τὴν πλευρὰν ΙΒ=ΙΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν γωνίαν ΛΙΒ=ΓΙΚ, καὶ τὴν ΙΒΛ=ΙΓΚ, ἐπειδὴ ΓΚ καὶ ΒΛ εἶναι παράλληλοι (πρό. 24, 1)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (πρ. 7, 1)· τὸ τραπέζιον ἄρα ΑΒΓΔ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΚΛ, καὶ ἔχει διὰ μέτρον ΕΖ$\times$ΑΛ.

Ἀλλ' ἔχομεν ΑΛ=ΔΚ, καὶ διὰ τὴν ἰσότητα τοῦ τριγώνου ΙΒΛ μὲ τὸ ΚΓΙ, ἡ πλευρὰ ΒΛ=ΓΚ· λοιπὸν ΑΒ+ΓΔ=ΑΛ+ΔΚ=2ΑΛ, καὶ οὕτως ΑΛ εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ· λοιπὸν τέλος τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος ΕΖ πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ, ἢ ΑΒΓΔ=ΕΖ$\times$($\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}{2}$).

Σχόλιον. Ἐὰν ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ι, μέσον τῆς ΒΓ, ἀχθῇ ἡ ΙΘ, παράλληλος τῆς βάσεως ΑΒ, ἡ στιγμὴ Θ θέλει εἶναι παρομοίως τὸ μέσον τῆς ΑΔ· διότι τὸ σχῆμα ΑΘΙΛ εἶναι παραλληλόγραμμον, καθὼς καὶ τὸ ΔΘΙΚ, ὡς ἔχοντα τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους· ἔχομεν λοιπὸν ΑΘ=ΙΛ καὶ ΔΘ=ΙΚ· ἀλλὰ ΙΛ=ΙΚ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν δύο τριγώνων ΒΙΛ, ΓΙΚ, λοιπὸν ΑΘ=ΔΘ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΘΙ=ΑΛ=$\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}{2}$ λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ὁμοίως διὰ ΕΖ$\times$ΘΙ: ἐπομένως ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν γραμμὴν ἥτις ἑνόνει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν γραμμή τις ΑΓ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ΑΒ, ΒΓ, τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ὅλης ΑΓ θέλει περιέχει τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τοῦ μέρους ΑΒ, πλέον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους ΒΓ, πλέον δὶς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο μερῶν ΑΒ, ΒΓ: τοῦτο δὲ ἐκφράζεται οὕτως, $\overline{ΑΓ}^2$ ἢ $(ΑΒ+ΒΓ)^2=\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2+2ΑΒ\times ΒΓ$. σχ. 106.

Ἄς κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ, ἂς ληφθῇ ΑΖ=ΑΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ΖΗ παράλληλος τῆς ΑΓ, καὶ ΒΘ τῆς ΑΕ.

Δι' αὐτῆς τῆς κατασκευῆς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς τέσσαρα μέρη: τὸ μὲν πρῶτον ΑΒΙΖ εἶναι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἐπειδὴ ἐλήφθη ΑΖ=ΑΒ: τὸ δὲ δεύτερον ΙΗΔΘ εἶναι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΒΓ· διότι ἐπειδὴ ΑΓ=ΑΕ, καὶ ΑΒ=ΑΖ, ἡ διαφορὰ ΑΓ—ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ΑΕ—ΑΖ, ὅθεν ἕπεται, ὅτι ΒΓ=ΕΖ· ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων, ΙΗ=ΒΓ, καὶ ΔΗ=ΕΖ· λοιπὸν ΘΙΗΔ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ. Τὰ δύο ταῦτα μέρη ἀφαιρεθέντα ἀπὸ τὸ ὅλον τετράγωνον ἀφίνουσιν ὑπόλοιπα τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΓΗΙ, ΕΖΙΘ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει διὰ μέτρον ΑΒ×ΒΓ. Λοιπὸν τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΓ, κ. τ. λ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἀποδεικνυομένην διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ διωνύμου, καὶ ἡ ὁποία ἐκφράζεται οὕτως: $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΓ ἦναι ἡ διαφορὰ δύο ἄλλων ΑΒ, ΒΓ, τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΓ θέλει περιέχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ, μεῖον δὶς τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ· τουτέστιν $\overline{ΑΓ}^2$ ἢ $(ΑΒ—ΒΓ)^2=\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2—2ΑΒ\times ΒΓ$. σχ. 107.

Ἄς κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΑΒΙΖ, ἂς ληφθῇ ΑΕ=ΑΓ, ἂς ἀχθῇ ΓΗ παράλληλος τῆς ΒΙ, καὶ ΘΚ' τῆς ΑΒ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ τετράγωνον ΕΖΛΚ.

Ἕκαστον τῶν δύο ὀρθογωνίων ΓΒΙΗ, ΗΛΚ'Δ ἔχει διὰ μέτρον ΑΒ×ΒΓ: ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸ ὅλον σχῆμα ΑΒΙΛΚ'ΕΑ, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ εἶναι $\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2$, φανερὸν, ὅτι μένει τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ, λοιπὸν κ. τ. λ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὸν τύπον τῆς Ἀλγέβρας $(α-β)^2=α^2+β^2-2αβ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Θεώρημα.

Τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο γραμμῶν, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἰδίων: δηλαδὴ $(ΑΒ+ΒΓ)\times(ΑΒ-ΒΓ)=\overline{ΑΒ}^2-\overline{ΒΓ}^2$. σχ. 108.

Ἂς κατασκευασθῶσιν ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ τὰ τετράγωνα ΑΒΙΖ, ΑΓΔΕ· ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΒ ποσότητά τινὰ ΒΚ'=ΒΓ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΑΚ'Λ'Ε.

Ἡ μὲν βάσις ΑΚ' τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γραμμῶν ΑΒ, ΒΓ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ ΑΕ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἰδίων· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΚ'Λ'Ε=(ΑΒ+ΒΓ)(ΑΒ—ΒΓ). Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον σύγκειται ἀπὸ τὰ δύο μέρη ΑΒΘΕ+ΒΘΛΚ'· τὸ δὲ μέρος ΒΘΛΚ'· ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΔΗΖ, διότι ΒΘ=ΔΕ καὶ ΒΚ'=ΕΖ· λοιπὸν ΑΚ'ΛΕ=ΑΒΘΕ+ΕΔΗΖ.

Ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα μέρη σχηματίζουν τὸ τετράγωνον ΑΒΙΖ, μεῖον τὸ τετράγωνον ΔΘΙΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ. Ἄρα $(ΑΒ+ΒΓ)\times(ΑΒ-ΒΓ)=\overline{ΑΒ}^2-\overline{ΒΓ}^2$.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τύπον τῆς Ἀλγέβρας $(α+β)(α-β)=α^2-β^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Θεώρημα.

Τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς Α. Μετὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τετραγώνων ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν, ἂς κατεβασθῇ ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ κάθετος ΑΔ, ἥτις ἂς προεκβληθῇ ἕως εἰς τὸ Ε· ἂς ἐπιζευχθῶσιν δ' ἔπειτα αἱ διαγώνιοι ΑΖ, ΓΘ. σχ. 109.

Ἡ γωνία ΑΒΖ σύγκειται ἀπὸ τὴν ΑΒΓ καὶ τὴν ὀρθὴν ΓΒΖ· ἡ δὲ γωνία ΓΒΘ σύγκειται ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΒΓ καὶ τὴν ὀρθὴν ΑΒΘ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΖ=ΘΒΓ. Ἀλλὰ ΑΒ=ΒΘ ὡς πλευραὶ τοῦ ἰδίου τετραγώνου, καὶ ΒΖ=ΒΓ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΖ, ΘΒΓ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· λοιπὸν εἶναι ἴσα (πρ. 6, 1).

Τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΕΖ, (ἢ διὰ συντομίαν ΒΕ) τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΖ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ΒΔ (πρ. 2). Τὸ τρίγωνον ΘΒΓ εἶναι παρομοίως τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΘ· διότι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΒΑΔ εἶναι ὀρθαί, αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΑΛ μίαν μόνην σχηματίζουσιν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς ΘΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΘΒΓ καὶ τὸ τετράγωνον ΑΘ, ἐκτὸς τῆς κοινῆς βάσεως ΒΘ, ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ· τὸ τρίγωνον ἄρα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου.

Ἀπεδείξαμεν ἤδη ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΘΒΓ· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΖ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τετράγωνον ΑΘ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΘΒΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΓ· ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΔΕΖ, ΓΔΕΗ, ὁμοῦ λαμβανόμενα, ἀποτελοῦν τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ· λοιπὸν τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒΘΛ, ΑΓΙΚ τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἢ μὲ ἄλλους ὅρους, $\overline{ΒΓ}^2=\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΑΓ}^2$.

Πόρισμα Α'. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης μεῖον τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης πλευρᾶς, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται οὕτως:

$$\overline{ΑΒ}^2=\overline{ΒΓ}^2-\overline{ΑΓ}^2.$$

Πόρισμα Β'. Ἔστω ΑΒΓΔ τετράγωνόν τι, ΒΓ ἡ διαγώνιός του· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὡς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς δίδει $\overline{ΑΓ}^2=\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2=2\overline{ΑΒ}^2$· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ΑΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΑΒ· σχ. 118.

Ἡ ἰδιότης αὕτη καθίσταται ἐπαισθητή, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἀχθῶσι παράλληλοι τῆς ΒΔ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Δ παράλληλοι τῆς ΑΓ· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματίζεται νέον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσον μὲ τὸ τῆς ΑΓ. Τώρα βλέπομεν ὅτι ΕΖΗΘ περιέχει ὀκτὼ τρίγωνα ἴσα μὲ ΑΒΕ, καὶ ΑΒΓΔ περιέχει ἀπὸ αὐτὰ τέσσαρα· ἄρα τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ $\overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΑΒ}}^2 :: 2 : 1$, ἔχομεν, ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, $\text{ΑΓ} : \text{ΑΒ} :: \sqrt{2} : 1$· λοιπὸν ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος μὲ τὴν πλευράν του.

Τοῦτο θέλομεν ἀναπτύξει περισσότερον εἰς ἄλλην εὐκαιρίαν.

Πόρισμα Γ΄. Ἀπεδείχθη ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΘ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ· τώρα δὲ, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ ὕψους ΒΖ, τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ ὡς ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ· λοιπὸν, $\overline{\text{ΒΓ}}^2 : \overline{\text{ΑΒ}}^2 :: \text{ΒΓ} : \text{ΒΔ}$.

Ὅθεν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὸ προσκείμενον εἰς ταύτην τὴν πλευρὰν τμῆμα.

Ἐδῶ ὀνομάζομεν τμῆμα τὸ μέρος τῆς ὑποτεινούσης, τὸ ὁποῖον προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν κάθετον ἥτις καταιβάζεται ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Οὕτω ΒΔ εἶναι τὸ προσκείμενον τμῆμα εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ ΔΓ τὸ προσκείμενον τμῆμα εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ. Παρομοίως $\overline{\text{ΒΓ}}^2 : \overline{\text{ΑΓ}}^2 :: \text{ΒΓ} : \text{ΓΔ}$.

Πόρισμα. Δ΄. Τὰ ὀρθογώνια ΒΔΕΖ, ΔΓΗΕ τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν ΒΔ, ΓΔ. Ἀλλὰ τὰ ὀρθογώνια ταῦτα ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὰ τετράγωνα $\overline{\text{ΑΒ}}^2$, $\overline{\text{ΑΓ}}^2$ ἄρα

$$\overline{\text{ΑΒ}}^2 : \overline{\text{ΑΓ}}^2 :: \text{ΒΔ} : \text{ΔΓ}.$$

Λοιπὸν τὰ τετράγωνα τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ προσκείμενα εἰς ταύτας τὰς πλευρὰς τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Γ ἦναι ὀξεῖα, τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, αἵτινες περιέχουσι τὴν γωνίαν Γ· καὶ ἐὰν καταιβασθῇ ἡ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ διαφορὰ θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου $\text{ΒΓ}\times\text{ΓΔ}$· εἰς τρόπον ὥστε, σχ. 110.

$$\overline{\text{ΑΒ}}^2 = \overline{\text{ΑΓ}}^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2 - 2\text{ΒΓ}\times\text{ΓΔ}.$$

Δύο περιστάσεις ὑπάρχουσι. 1.τη Ἐὰν ἡ κάθετος πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει ΒΔ = ΒΓ — ΓΔ, καὶ ἑπομένως (πρό. 9)

$\overline{B\Delta}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2-2B\Gamma\times\Gamma\Delta$· προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη $\overline{A\Delta}^2$, καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, δίδουν $\overline{A\Delta}^2+\overline{B\Delta}^2=\overline{AB}^2$ καὶ $\overline{A\Delta}^2+\overline{\Delta\Gamma}^2=\overline{A\Gamma}^2$, συνάγομεν $\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{A\Gamma}^2-2B\Gamma\times\Gamma\Delta$.

2.ο Ἐὰν δὲ ἡ κάθετος ΑΔ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει $B\Delta=\Gamma\Delta-B\Gamma$, ἐπομένως (πρό. 9) $\overline{B\Delta}^2=\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{B\Gamma}^2-2\Gamma\Delta\times B\Gamma$. προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη $\overline{A\Delta}^2$, συνάγομεν παρομοίως $\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{A\Gamma}^2-2B\Gamma\times\Gamma\Delta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Γ ἦναι ἀμβλεῖα, τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, αἵτινες περιέχουσι τὴν γωνίαν Γ, καὶ ἐὰν καταιβασθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ διαφορὰ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓ×ΓΔ, εἰς τρόπον ὥστε,

$$\overline{AB}^2=\overline{A\Gamma}^2+\overline{B\Gamma}^2+2B\Gamma\times\Gamma\Delta.$$

Ἡ κάθετος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου· διότι ἐὰν ἔπιπτε, π. χ. εἰς Ε, τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἤθελεν ἔχει ἐνταυτῷ τὴν ὀρθὴν γωνίαν Ε καὶ τὴν ἀμβλεῖαν Γ, ὅπερ ἀδύνατον (19, 1)· πίπτει λοιπὸν ἐκτὸς, καὶ ἔχομεν $B\Delta=B\Gamma+\Gamma\Delta$. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται (πρό. 8)· $\overline{B\Delta}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2+2B\Gamma\times\Gamma\Delta$. Προσθέτοντες δὲ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη $\overline{A\Delta}^2$ καὶ κάμνοντες τὰς ἀναγωγὰς ὡς εἰς τὸ προλαβὸν θεώρημα, εὑρίσκομεν $\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{A\Gamma}^2+2B\Gamma\times\Gamma\Delta$.

Σχόλιον. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ μόνον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης· διότι ἐὰν ἡ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων περιεχομένη ἦναι ὀξεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἀμβλεῖα μικρότερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Θεώρημα.

Εἰς ὁποιονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν, εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἀχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΕ, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει $\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΑΓ}^2=2\overline{ΑΕ}^2+2\overline{ΒΕ}^2$. σχ. 112.

Ἄς καταιβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ· τὸ τρίγωνον ΑΕΓ κατὰ τὸ ΙΒ' θεώρημα δίδει, $\overline{ΑΓ}^2=\overline{ΑΕ}^2+\overline{ΕΓ}^2-2ΕΓ\times ΕΔ$.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΕ κατὰ τὸ ΙΓ' Θεώρημα δίδει,

$$\overline{ΑΒ}^2=\overline{ΑΕ}^2+\overline{ΕΒ}^2+2ΕΒ\times ΕΔ.$$

Προσθέτοντες λοιπὸν καὶ παρατηροῦντες ὅτι ΕΒ=ΕΓ, συνάγομεν

$$\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΑΓ}^2=2\overline{ΑΕ}^2+2\overline{ΕΒ}^2.$$

Πόρισμα. Εἰς κάθε ἄρα παραλληλόγραμμον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.

Διότι αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Ε (πρό. 31, 1). Οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δίδει, σχ. 113.

$$\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2=2\overline{ΑΕ}^2+2\overline{ΒΕ}^2.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΔΓ δίδει παρομοίως,

$$\overline{ΑΔ}^2+\overline{ΔΓ}^2=2\overline{ΑΕ}^2+2\overline{ΔΕ}^2.$$

Προσθέτοντες δὲ μέλος εἰς μέλος, καὶ παρατηροῦντες ὅτι ΒΕ=ΔΕ, συνάγομεν

$$\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΑΔ}^2+\overline{ΔΓ}^2+\overline{ΒΓ}^2=4\overline{ΑΕ}^2+4\overline{ΔΕ}^2.$$

Ἀλλὰ $4\overline{ΑΕ}^2$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· διότι ΑΓ =2ΑΕ· παρομοίως $4\overline{ΔΕ}^2$ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Θεώρημα.

Ἡ γραμμὴ ΔΕ, παραλλήλως τῆς βάσεως τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ἀγομένη, διαιρεῖ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ἀναλόγως· εἰς τρόπον ὥστε ΑΔ: ΒΔ :: ΑΕ: ΕΓ. σχ. 114.

Ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΔΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΔΕ, ΔΕΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕ, καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ των Β καὶ Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῆς βάσεως· λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα (πρό. 2).

Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΕ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι τὸ Ε, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΔ, ΒΔ (πρό. 6)· διὰ τοῦτο,

ΑΔΕ : ΒΔΕ : : ΑΔ : ΔΒ.

Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΕΓ, τῶν ὁποίων κοινὴ κορυφὴ εἶναι τὸ Δ, ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν ΑΕ, ΕΓ, ἄρα,

ΓΔ ΑΔΕ : ΕΓ : : ΑΕ : Ε.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΒΔΕ=ΔΕΓ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, συνάγομεν ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ.

Πόρισμα Α'. Ἐντεῦθεν συνάγομεν συνθέτοντες ΑΔ+ΔΒ : ΑΔ : : ΑΕ+ΕΓ : ΑΕ, ἢ ΑΒ : ΑΔ : : ΑΓ : ΑΕ, καὶ παρομοίως ΑΒ : ΒΔ : : ΑΓ : ΓΕ.

Πόρισμα Β'. Ἐὰν μεταξὺ δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε παράλληλοι ΑΓ, ΕΖ, ΗΘ, ΒΔ, κ. τ. λ. αἱ εὐθεῖαι αὗται θέλουν τμηθῆ ἀναλόγως, καὶ θέλομεν ἔχει

ΑΕ : ΓΖ : : ΕΗ : ΖΘ : : ΗΒ : ΘΔ. σχ. 115.

Διότι ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ· εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΖ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γραμμὴ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΕΖ, θέλομεν ἔχει ΟΕ : ΑΕ : : ΟΖ : ΓΖ ἢ ΟΕ : ΟΖ : : ΑΕ : ΓΖ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΗΘ, θέλομεν ἔχει παρομοίως ΟΕ : ΕΗ : : ΟΖ : ΖΘ, ἢ ΟΕ : ΟΖ : : ΕΗ : ΖΘ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου, ΟΕ : ΟΖ, αἱ δύο αὗται ἀναλογίαι δίδουν ΑΕ : ΓΖ : : ΕΗ : ΖΘ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ΕΗ : ΖΘ : : ΗΒ : ΘΔ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· αἱ γραμμαὶ ἄρα ΑΒ, ΓΔ τέμνονται ἀναλόγως ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΕΖ, ΗΘ κ. τ. λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'.

Θεώρημα.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ τμηθῶσιν ἀναλόγως ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΔΕ, εἰς τρόπον ὥστε ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ, λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ ΔΕ θέλει εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΒΓ.

Διότι ἐὰν ΔΕ δὲν ἦναι παράλληλος τῆς ΒΓ, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ ΔΟ· τότε, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, θέλομεν ἔχει ΑΔ : ΒΔ : : ΑΟ : ΟΓ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ· λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει ΑΟ : ΟΓ : : ΑΕ : ΕΓ· ἥτις ἀναλογία εἶναι ἀνύπαρκτος· διότι ἀπὸ τὸ ἓν μέρος ὁ ἡγούμενος ΑΕ εἶναι μείζων τοῦ ΑΟ, ἀπὸ δὲ τὸ ἄλλο ὁ ἑπόμενος ΕΓ εἶναι ἐλάσσων τοῦ ΟΓ· ἐὰν λοιπὸν διὰ τῆς στιγμῆς Δ ἀχθῆ παράλληλος τῆς ΒΓ, αὐτὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαφέρῃ τῆς ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι ἡ τοιαύτη παράλληλος.

Σχόλιον. Ἡ ἰδία συνέπεια ἤθελεν ἔχει χώραν, ἐὰν ὑπετίθετο ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ· διότι ἐκ ταύτης ἤθελε συναχθῇ ἡ ΑΒ—ΑΔ : ΑΔ :: ΑΓ—ΑΕ : ΑΕ ἢ ΒΔ : ΑΔ :: ΓΕ : ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Θεώρημα.

Ἡ γραμμὴ ΑΔ, ἡ δίχα τέμνουσα τὴν γωνίαν ΒΑΓ τριγώνου τινός, διαιρεῖ τὴν βάσιν ΒΓ εἰς δύο τμήματα ΒΔ, ΔΓ, ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ· εἰς τρόπον ὥστε ΒΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΑΓ. σχ. 117.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῆς ΑΔ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΒΑ προεκβαλλομένην.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΓΕ· οὕτως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν (πρό. 15), ΒΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΑΕ.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσοσκελές· διότι, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΓΕ, ἡ γωνία ΑΓΕ=ΔΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΕΓ=ΒΑΔ (πρό. 24, 1): Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΔΑΓ=ΒΑΔ· ἡ γωνία ἄρα ΑΓΕ=ΑΕΓ· καὶ ἀκολούθως ΑΕ=ΑΓ (πρό. 13, 1)· ἀντεισάγοντες δὲ ΑΓ ἀντὶ ΑΕ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν, συνάγομεν ΒΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα ἰσογώνια ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΓΔΕ, δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ ΒΑΓ=ΓΔΕ, ΑΒΓ=ΔΓΕ, καὶ ΑΓΒ=ΔΕΓ· λέγω δὲ ὅτι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αἱ προσκείμεναι εἰς τὰς ἴσας γωνίας θέλουν εἶναι ἀνάλογοι, εἰς τρόπον ὥστε ΒΓ : ΓΕ :: ΑΒ : ΓΔ :: ΑΓ : ΔΕ. σχ. 119.

Ἂς τεθῶσιν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΒΓ, ΓΕ εἰς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, καὶ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΒΑ, ΕΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ζ.

Ἐπειδὴ ΒΓΕ εἶναι εὐθεῖα γραμμή, καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ=ΓΕΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΕ (24, 1). Παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΓΕ, ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΓ· λοιπὸν τὸ σχῆμα ΑΓΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΖΕ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΖΕ, ὅθεν ΒΓ : ΓΕ : : ΒΑ : ΑΖ (πρό. 15). Ἀντὶ δὲ ΑΖ θέτοντες τὴν ἴσην της ΓΔ, ἔχομεν, ΒΓ : ΓΕ : : ΒΑ : ΓΔ.

Εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΒΖΕ, ἐὰν ἡ ΒΖ θεωρηθῇ ὡς βάσις, ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος αὐτῆς, καὶ ἐκ τούτου ΒΓ : ΓΕ : : ΖΔ : ΔΕ. Ἀντὶ δὲ ΖΔ θέτοντες τὴν ἴσην της ΑΓ, ἔχομεν ΒΓ : ΓΕ : : ΑΓ : ΔΕ.

Τέλος ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν, εἰς τὰς ὁποίας ὁ λόγος ΒΓ : ΓΕ εἶναι κοινὸς, συνάγομεν ὡσαύτως, ΑΓ : ΔΕ : : ΒΑ : ΓΔ.

Λοιπὸν τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ΒΑΓ, ΓΑΕ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους: ἀλλὰ κατὰ τὸν Β'. ὁρισμὸν, δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν ἐνταὐτῷ τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ΒΑΓ, ΓΔΕ, εἶναι δύο σχήματα ὅμοια.

Πόρισμα. Διὰ νὰ ἦναι δύο τρίγωνα ὅμοια, ἀρκεῖ νὰ ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, διότι τότε ἡ ἰσότης τῆς τρίτης ἕπεται, καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσογώνια.

Σχόλιον. Ἄς σημειώσωμεν ὅτι, εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν· οὕτως οὔσης τῆς γωνίας ΑΓΒ ἴσης μὲ τὴν ΔΕΓ, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ὁμόλογος τῆς ΔΓ· ὡσαύτως ΑΓ καὶ ΔΕ εἶναι ὁμόλογοι, ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ: ἀφ' οὗ λοιπὸν γνωρίσωμεν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς, εὐθὺς σχηματίζομεν τὰς ἀναλογίας:

ΑΒ : ΔΓ : : ΑΓ : ΔΕ : : ΒΓ : ΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ΒΓ : ΕΖ : : ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ· λέγω δὲ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, θέλουν ἔχει τὰς γωνίας ἴσας, δηλαδὴ, Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ. σχ. 120.

Εἰς τὴν στιγμὴν Ε ἂς γένῃ ἡ γωνία ΖΕΗ=Β, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἡ γωνία ΕΖΗ=Γ, ἡ δὲ τρίτη Η θέλει εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ Α, καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΖΗ, θέλουν εἶναι ἰσογώνια· λοιπὸν κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα ΒΓ : ΕΖ : : ΑΒ : ΕΗ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΒΓ : ΕΖ : : ΑΒ : ΔΕ· ἄρα ΕΗ=ΔΕ. Κατὰ τὸ ἴδιον θεώρημα, ΒΓ : ΕΖ : : ΑΓ : ΗΖ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΒΓ : ΕΖ : : ΑΓ : ΔΖ, ἄρα ΖΗ=ΔΖ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΕΗΖ, ΔΕΖ, ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, ἄρα εἶναι ἴσα (πρό. 11, 1). Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ τρίγωνον ΕΗΖ εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ· λοιπὸν ὡσαύτως τὰ τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Σχόλιον Α'. Ἀπὸ τὰς δύο ταύτας τελευταίας προτάσεις βλέπομεν, ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν εἶναι συνέπεια τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τρόπον ὥστε μία τούτων τῶν συνθηκῶν ἀρκεῖ πρὸς βεβαίωσιν τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων. Δὲν ὑπάρχει ὅμως τὸ αὐτὸ εἰς τὰ σχήματα τὰ ἔχοντα ὑπὲρ τὰς τρεῖς πλευράς· διότι, ἐὰν ὁ λόγος ἦναι μόνον περὶ τετραπλεύρων, ἠμποροῦμεν, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας, νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, ἢ χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰς πλευρὰς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας. Οὕτως ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι συνέπεια τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν, καὶ τ' ἀνάπαλιν. Βλέπομεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΕΖ παραλλήλως τῆς ΒΓ, αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ εἶναι μὲν ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ· ἀλλ' ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν διαφέρει: ὡσαύτως χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ ἠμποροῦμεν νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας, πλησιάζοντες ἢ ἀπομακρύνοντες τὸ σημεῖον Β ἀπὸ τὸ Δ. σχ. 121.

Σχόλιον Β'. Αἱ δύο προηγούμεναι προτάσεις αἱ ὁποῖαι κυρίως ἀποτελοῦν μίαν, καὶ ἡ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι αἱ ἀξιολογώτεραι καὶ γονιμώτεραι προτάσεις τῆς Γεωμετρίας· ἀρκοῦσι σχεδὸν μόναι δι' ὅλας τὰς ἐφαρμογὰς καὶ τὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων· ὁ δὲ λόγος εἶναι, ὅτι ὅλα τὰ σχήματα ἠμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τρίγωνα, καὶ ὁποιονδήποτε τρίγωνον εἰς δύο τρίγωνα ὀρθογώνια. Οὕτως αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων περιέχουσι συνεπτυγμένως (implicitment) τὰς ἰδιότητας ὅλων τῶν σχημάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια.

Ἔστω ἡ γωνία Α=Δ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ· λέγω δὲ ἤδη ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΔΕΖ (σχ. 122).

Ἂς ληφθῇ ΑΗ=ΔΕ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΘ παράλληλος τῆς ΒΓ, ἴσως ἡ γωνία ΑΗΘ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ (πρό. 24, 1)· καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΘ ἰσογώνιον μὲ τὸ ΑΒΓ· θέλομεν ἔχει λοιπὸν ΑΒ :

ΑΗ : : ΑΓ : ΑΘ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ, καὶ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΑΗ=ΔΕ· λοιπὸν ΑΘ=ΔΖ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ ἔχουν λοιπὸν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· ἄρα εἶναι ἴσα. Τώρα τὸ τρίγωνον ΑΗΘ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ· λοιπὸν ΔΕΖ εἶναι ὡσαύτως ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους, ἢ καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, εἶναι ὅμοια.

Διότι 1.ον ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ (σχ. 123) ἦναι παράλληλος τῆς ΔΕ, καὶ ΒΓ τῆς ΕΖ, ἡ γωνία ΑΒΓ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ (27, 1)· ἐὰν δὲ περιπλέον ΑΓ ἦναι παράλληλος τῆς ΔΖ, ἡ γωνία ΑΓΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΖΕ, καὶ ὡσαύτως ἡ ΒΑΓ τῇ ΕΔΖ: τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἰσογώνια· ἄρα καὶ ὅμοια.

2.ον Ἔστω (σχ. 124) ἡ πλευρὰ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, καὶ ἡ ΔΖ εἰς τὴν ΑΓ· εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΙΔΘ αἱ δύο γωνίαι Ι καὶ Θ θέλουν εἶναι ὀρθαί· αἱ τέσσαρες γωνίαι ἰσοδυναμοῦν ὁμοῦ μὲ τέσσαρας ὀρθὰς (20, 1)· λοιπὸν αἱ δύο ὑπόλοιποι ΙΑΘ, ΙΔΘ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς. Ἀλλ' αἱ δύο γωνίαι ΕΔΖ, ΙΔΘ ἰσοδυναμοῦν ὡσαύτως μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση τῇ ΙΑΘ ἢ τῇ ΒΑΓ: παρομοίως ἐὰν ἡ τρίτη πλευρὰ ΕΖ ἦναι κάθετος εἰς τὴν τρίτην ΒΓ, θέλομεν δείξει ὅτι ἡ γωνία ΔΖΕ=Γ, καὶ ΔΕΖ=Β· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Σχόλιον. Εἰς τὴν πρώτην περίστασιν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι· εἰς τὴν δευτέραν, εἶναι αἱ κάθετοι. Οὕτως εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίστασιν, ΔΕ εἶναι ὁμόλογος τῇ ΑΒ, ΔΖ τῇ ΑΓ, καὶ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Εἰς τὴν περίστασιν, καθ' ἣν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι, τὰ δύο τρίγωνα δυνατὸν νὰ ἔχωσι θέσιν τινὰ διαφορετικὴν τῆς ὑποτεθείσης εἰς τὸ σχῆμα 124· ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν πάντοτε ἤθελεν ἀποδειχθῆ εἴτε διὰ τετραπλεύρων τοιούτων ὡς ΑΙΔΘ, τῶν ὁποίων δύο γωνίαι εἶναι ὀρθαί, εἴτε διὰ τῆς συγκρίσεως δύο τριγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκτὸς τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ἤθελεν ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν: ἔπειτα, πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποθέτωμεν ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατεσκευασμένον τρίγωνόν τι ΔΕΖ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἦναι παράλληλοι τῶν πλευρῶν τοῦ πρὸς τὸ ΑΒΓ συγκρινομένου τριγώνου, καὶ τότε ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς εἰς τὴν περίστασιν τοῦ 124 σχήματος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

Θεώρημα

Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τριγώνου τινὸς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν βάσιν ὁπωσδήποτε εὐθεῖαι, ὡς ΑΖ, ΑΗ, κ. τ. λ. αὗται θέλουν διαιρεῖ τὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὴν παράλληλόν της ΔΕ ἀναλόγως, εἰς τρόπον ὥστε ΔΙ : ΒΖ : : ΙΚ΄ : ΖΗ : : Κ΄Λ : ΗΘ, κ. τ. λ. (σχ. 125).

Διότι, ἐπειδὴ ΔΙ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΖ, τὸ τρίγωνον ΑΔΙ εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ ΑΒΖ, καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΔΙ : ΒΖ : : ΑΙ : ΑΖ· ὡσαύτως ΙΚ΄ οὔσης παραλλήλου τῆς ΖΗ, ἔχομεν ΑΙ : ΑΖ : : ΙΚ΄ : ΖΗ· λοιπόν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου ΑΙ : ΑΖ, ΔΙ : ΒΖ : : ΙΚ΄ : ΖΗ· εὑρίσκομεν παρομοίως ΙΚ΄ : ΖΗ : : Κ΄Λ : ΗΘ, κ. τ. λ. λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΔΕ διαιρεῖται εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ΄, Λ ὡς ἡ βάσις ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η, Θ.

Πόρισμα. Ἄρα, ἐὰν ΒΓ διαιρεθῇ εἰς μέρη ἴσα εἰς τὰς στιγμὰς Ζ, Η, Θ, ἡ παράλληλος ΔΕ θέλει διαιρεθῇ ὡσαύτως εἰς μέρη ἴσα εἰς τὰς στιγμὰς Ι, Κ΄, Λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου καταιβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν (σχ. 126.)

1.ον Τὰ δύο μερικὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ θέλουν εἶναι ὅμοια ἀλλήλοις καὶ ὅμοια τῷ ὅλῳ ΑΒΓ.

2.ον Ἑκάστη πλευρὰ ΑΒ ἢ ΑΓ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος ΒΔ ἢ ΔΓ.

3.ον Ἡ κάθετος ΑΔ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΔ, ΔΓ.

Διότι, 1.ον τὸ τρίγωνον ΒΑΔ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἔχουν κοινὴν γωνίαν τὴν Β· περιπλέον ἡ ὀρθὴ ΒΔΑ εἶναι ἴση τῇ ὀρθῇ ΒΑΓ· λοιπὸν ἡ τρίτη γωνία ΒΑΔ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην Γ τοῦ ἄλλου· ἄρα τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια· ὡσαύτως θέλομεν δείξει, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΑΓ· λοιπὸν τὰ τρία τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια ἀλλήλοις.

2.ον Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΑΓ, αἱ ὁμόλογοί των πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι. Τώρα, ἡ πλευρὰ ΒΔ εἰς τὸ μικρὸν τρίγωνον εἶναι ὁμόλογος τῇ ΒΑ εἰς τὸ μεγάλον, διότι εἶναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν, ΒΑΔ, ΒΓΑ· ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΒΑ τοῦ μικροῦ εἶναι ὁμόλογος τῇ ὑποτεινούσῃ ΒΓ τοῦ μεγάλου· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀναλογίαν ΒΔ : ΒΑ : : ΒΑ : ΒΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν ἔχει ΔΓ : ΑΓ : : ΑΓ : ΒΓ· λοιπὸν 2.ον ἑκάστη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ προσκειμένου εἰς ταύτην τὴν πλευρὰν τμήματος.

3.ον Τέλος, ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ δίδει, παραβαλλομένων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ΒΔ : ΑΔ : : ΑΔ : ΔΓ· λοιπόν, 3.ον ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης.

Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀναλογίαν ΒΔ : ΑΒ : : ΑΒ : ΒΓ ἐξισοῦντες τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μὲ τὸ τῶν μέσων συνάγομεν $\overline{\text{ΑΒ}}^2 = \text{ΒΔ} \times \text{ΒΓ}$. Ἔχομεν παρομοίως $\overline{\text{ΑΓ}}^2 = \text{ΔΓ} \times \text{ΒΓ}$, λοιπὸν $\overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΑΓ}}^2 = \text{ΒΔ} \times \text{ΒΓ} + \text{ΔΓ} \times \text{ΒΓ}$· τὸ δὲ δεύτερον μέλος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $(\text{ΒΔ} + \text{ΔΓ}) \times \text{ΒΓ}$ καὶ ἄγεται εἰς $\text{ΒΓ} \times \text{ΒΓ}$ ἢ $\overline{\text{ΒΓ}}^2$· ἄρα $\overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΑΓ}}^2 = \overline{\text{ΒΓ}}^2$· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. Οὕτως ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν πρότασιν τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης διὰ ὁδοῦ πολλὰ διαφορετικῆς ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν· ὅθεν βλέπομεν ὅτι κυρίως ἡ πρότασις τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι συνέπεια τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν εἰς τὰ ἰσογώνια τρίγωνα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον αἱ θεμελιώδεις προτάσεις τῆς γεωμετρίας ἄγονται, διὰ νὰ εἴπω οὕτω, εἰς ταύτην μόνην, ὅτι τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Συχνάκις ἀκολουθεῖ, καθὼς τούτου παράδειγμα εἴδομεν ἀνωτέρω ἐξάγοντες συνεπείας ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας προτάσεις, νὰ καταντῶμεν εἰς προτάσεις ἀποδεδειγμένας. Ἐν γένει δὲ ὅ,τι μάλιστα χαρακτηρίζει τὰ θεωρήματα τῆς γεωμετρίας, καὶ εἶναι δεῖξις ἰσχυροτάτη τῆς βεβαιότητός των, εἶναι ὅτι συμπλέκοντές τα καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον, ἐὰν συλογιζώμεθα ὀρθῶς, πάντοτε καταντῶμεν εἰς ἀκριβῆ ἐξαγόμενα. Τοῦτο δὲ δὲν ἤθελεν ὑπάρχει, ἐὰν πρότασίς τις ἦτο ψευδής, ἢ ἦτον ἀληθὴς ὡς ἔγγιστα, ἀλλὰ διὰ τῆς συμπλοκῆς τῶν προτάσεων πρὸς ἀλλήλας τὸ σφάλμα ἤθελεν αὐξάνει καὶ κατασταθῇ ἐπαισθητόν. Τούτου δὲ βλέπομεν παραδείγματα εις όλας τάς ἀποδείξεις, εἰς τὰς ὁποίας μεταχειριζόμεθα τὴν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγὴν (reduction a l'absurde). Διὰ τῶν τοιούτων ἀποδείξεων βεβαιόνεται ἡ ἀλήθεια προτάσεώς τινος ἐκ τοῦ ἀτόπου, τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἐὰν ὑπῆρχε τὸ ἐναντίον· συνίστανται λοιπὸν αἱ ἀποδείξεις αὗται εἰς τὸ νὰ καταστήσουν φανερὸν τὸ τοιοῦτον ἄτοπον. Οὕτω π. χ. βεβαιόνομεν ὅτι δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι, ἀποδεικνύοντες ὅτι, ἐὰν ὑπῆρχεν ἡ παραμικρὰ ἀνισότης μεταξὺ αὐτῶν, ἠθέλαμεν φθάσει διά τινος σειρᾶς συλλογισμῶν εἰς ἄτοπον φανερόν, καί, διὰ νὰ εἴπω οὕτω, ψηλαφητόν· ὅθεν ἀναγκαζόμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι αἱ δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α τῆς περιφερείας ἀχθῶσιν αἱ δύο χορδαὶ ΑΒ, ΑΓ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΒΑΓ θέλει εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α (18, 2)· λοιπὸν 1ον ἡ *κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων* ΒΔ, ΔΓ, τῆς διαμέτρου, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, τὸ τετράγωνον $\overline{ΑΔ}^2$ ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ×ΔΓ.

2.ον *Ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος* ΒΔ, ἤ, $\overline{ΑΒ}^2$=ΒΔ×ΒΓ· ἔχομεν παρομοίως $\overline{ΑΓ}^2$=ΓΔ×ΒΓ· λοιπὸν $\overline{ΑΒ}^2$: $\overline{ΑΓ}^2$: : ΒΔ : ΔΓ· ἐπειδὴ δὲ $\overline{ΑΒ}^2$=ΒΔ×ΒΓ, καὶ $\overline{ΑΒ}^2$×ΒΓ =ΒΔ×$\overline{ΒΓ}^2$ διὰ τοῦτο $\overline{ΑΒ}^2$: $\overline{ΒΓ}^2$: : ΒΔ : ΒΓ· ὡσαύτως $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΒΓ}^2$: : ΔΓ : ΒΓ. Οἱ λόγοι οὗτοι τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν εἴτε πρὸς ἄλληλα εἴτε πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης, ἐλέχθησαν εἰς τὰ πορίσματα Γ′ καὶ Δ′ τῆς ΙΑ′ προτάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ′.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὴν ἴσην γωνίαν. Οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, καθὼς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΑΓ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΑΕ. (σχ. 128).

Ἂς ἐπιζευχθῇ ΒΕ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΔΕ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι Ε, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΔ (πρό. 6) λοιπόν, ΑΒΕ : ΑΔΕ : : ΑΒ : ΑΔ.

ἔχομεν ὡσαύτως, ΑΒΓ : ΑΒΕ : : ΑΓ : ΑΕ.

Πολυπλασιάζοντες δὲ κατὰ τάξιν τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν ὅρον ΑΒΕ, ἔχομεν

ΑΒΓ: ΑΔΕ:: ΑΒ×ΑΓ: ΑΔ×ΑΕ.

Πόρισμα. Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΑΓ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ΑΔ×ΑΕ, ἢ ἐὰν ἦναι ΑΒ: ΑΔ:: ΑΕ: ΑΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει χώραν, ὁσάκις ἡ ΔΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΕ. (βλέπε τὸ β'. τῶν δύο σχημάτων, 128).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω (σχ. 122) ἡ γωνία Α=Δ καὶ ἡ Β=Ε: κατὰ πρῶτον ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Δ, ἔχομεν, κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν,

ΑΒΓ: ΔΕΖ:: ΑΒ×ΑΓ: ΔΕ×ΔΖ.

ἔπειτα δὲ ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων,

ΑΒ: ΔΕ:: ΑΓ: ΔΖ.

Καὶ ἐὰν πολυπλασιάσωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν ἐπὶ τὴν ταυτοσήμαντον

ΑΓ: ΔΖ:: ΑΓ: ΔΖ

ὅρον ἐπὶ ὅρον, συνάγομεν,

$$\text{ΑΒ}\times\text{ΑΓ} : \text{ΔΕ}\times\text{ΔΖ} :: \overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΔΖ}}^2$$

Ἄρα,

$$\text{ΑΒΓ} : \text{ΔΕΖ} :: \overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΔΖ}}^2.$$

Τὰ δύο λοιπὸν ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁποιωνδήποτε ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣΤ'.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοια πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 129), ἃς ἀχθῶσιν ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν Α εἰς τὰς ἄλλας γωνίας αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ. Εἰς τὸ ἄλλο πολύγωνον ΖΗΘΙΚ ἃς ἀχθῶσι παρομοίως ἀπὸ τὴν γωνίαν Ζ τὴν ὁμόλογον τῇ Α, αἱ διαγώνιοι ΖΘ, ΖΙ εἰς τὰς ἄλλας γωνίας.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ὁμολόγῳ αὐτῆς ΖΗΘ (ὁρ, 2), αἱ δὲ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς ΖΗ, ΗΘ· εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ: ΖΗ :: ΒΓ: ΗΘ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεμένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (πρό. 20)· ἡ γωνία ἄρα ΒΓΑ εἶναι ἴση τῇ ΗΘΖ. Ἐὰν δὲ αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς ἴσας ΒΓΔ, ΗΘΙ, τὰ ὑπόλοιπα ΑΓΔ, ΖΘΙ θέλουν εἶναι ἴσα: ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν ΑΓ: ΖΘ :: ΒΓ: ΗΘ· ἀπὸ ἄλλο μέρος διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων (ὁρ. 2), ΒΓ: ΗΘ :: ΓΔ: ΘΙ· λοιπὸν ΑΓ: ΖΘ :: ΓΔ: ΘΙ: ἀλλ' εἴδομεν ἤδη ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ =ΖΘΙ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΖΘΙ· ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, ἄρα εἶναι ὅμοια. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν ἀποδείξει τὴν ὁμοιότητα τῶν ἀκολούθων τριγώνων, ὅσος δήποτε καὶ ἂν ἦτον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν προτεθέντων πολυγώνων· ἄρα δύο ὅμοια πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Σχόλιον. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἶναι ἐπίσης ἀληθής: ἐὰν δύο πολύγωνα συντίθενται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, θέλουν εἶναι ὅμοια.

Διότι ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ἤθελε δώσει τὴν γωνίαν ΑΒΓ= ΖΗΘ, ΒΓΑ=ΗΘΖ, ΑΓΔ=ΖΘΙ· ἄρα ΒΓΔ=ΗΘΙ, ὡσαύτως ΓΔΕ=ΘΙΚ κ. τ. λ. Περιπλέον, ΑΒ: ΖΗ :: ΒΓ: ΗΘ :: ΑΓ: ΖΘ :: ΓΔ: ΘΙ, κ. τ. λ. λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Θεώρημα.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί· αἱ δὲ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων πλευρῶν. (σχ. 129).

Διότι 1.ον ἐπειδή, ἐκ τῆς φύσεως τῶν ὁμοίων σχημάτων, ἔχομεν ΑΒ:ΖΗ::ΒΓ:ΗΘ::ΓΔ:ΘΙ, κ. τ. λ, συνάγομεν ἐκ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν ἴσων λόγων: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ κ. τ. λ, δηλ. ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου σχήματος, ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, τὴν περίμετρον τοῦ δευτέρου σχήματος, ὃν ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἴδιον ἑπόμενον, ἢ ὃν ἡ πλευρὰ ΑΒ πρὸς τὴν ὁμόλογόν της ΖΗ.

2.ον Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν (πρό. 25) ΑΒΓ : ΖΗΘ :: $\overline{\text{ΑΓ}}^2$: $\overline{\text{ΖΘ}}^2$· ὡσαύτως τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΔ, ΖΘΙ, δίδουν ΑΓΔ : ΖΘΙ : : ΑΓ^2 : ΖΘ^2· ἄρα ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου ΑΓ^2 : ΖΘ^2, ἔχομεν

ΑΒΓ : ΖΗΘ : : ΑΓΔ : ΖΘΙ,

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν εὑρεῖ,

ΑΓΔ : ΖΘΙ : : ΑΔΕ : ΖΙΚ.

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐὰν εἴχομεν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τριγώνων. Ἐκ δὲ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν ἴσων λόγων συνάγομεν: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ, ἢ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων ΖΗΘ+ΖΘΙ+ΖΙΚ, ἢ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ, ὃν ἡγούμενός τις ΑΒΓ πρὸς τὸν ἴδιον ἑπόμενον, ἢ ὃν ΑΒ^2 πρὸς ΖΗ^2· ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμοίων πλευρῶν.

Πόρισμα. Ἐὰν κατασκευασθῶσι τρία ὅμοια σχήματα, τῶν ὁποίων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ νὰ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου, τὸ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς κατασκευαζόμενον σχῆμα θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· διότι τὰ τρία ταῦτα σχήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἄρα κ. τ. λ. (1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Θεώρημα.

Τὰ μέρη δύο χορδῶν ΑΒ, ΓΔ, τεμνομένων εἰς κύκλον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τουτέστιν ΑΟ : ΔΟ : : ΓΟ : ΟΒ. (σχ. 130). (2)

(1) Ἔστωσαν ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῶν ὁποίων ΑΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα· τοῦ Χ ἂς παριστάνῃ τὸ κατασκευαζόμενον σχῆμα ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ, τὸ ὅμοιον μὲ τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ τῶν ὁμολόγων τῆς ΑΓ, καὶ παριστανόμενα διὰ τῶν χαρακτήρων Ψ, Ω. Κατὰ τὴν ἀνωτέραν πρότασιν ἔχομεν,

$$\text{Ψ} : \text{Ω} :: \text{ΑΒ}^2 : \text{ΒΓ}^2$$

Ὅθεν $$\text{Ψ}+\text{Ω} : \text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2 :: \text{Ω} : \text{ΒΓ}^2.$$

Ἀλλὰ $$\text{Χ} : \text{ΑΓ}^2 :: \text{Ω} : \text{ΒΓ}^2.$$

Ἄρα $$\text{Ψ}+\text{Ω} : \text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2 :: \text{Χ} : \text{ΑΓ}^2.$$

ἐπειδὴ δὲ $\text{ΑΓ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$· ἄρα $\text{Χ}=\text{Ψ}+\text{Ω}$· λοιπὸν κ. τ. λ.— Ο. Μ.

(2) Πρὸς κατάληψιν τῆς ἐκφωνήσεως τῆς παρούσης προτάσεως καὶ τῆς ἀκολούθου σημειωτέον ὅτι:

Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΔ· εἰς τὰ τρίγωνα ΑΓΟ, ΒΟΔ αἱ γωνίαι εἰς Ο εἶναι ἴσαι ὡς κατακορυφήν· ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Δ, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα (18, 2)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία Γ=Β· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΟ : ΔΟ :: ΓΟ : ΟΒ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ΑΟ × ΟΒ = ΔΟ × ΓΟ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μερῶν τῆς μιᾶς χορδῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μερῶν τῆς ἄλλης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, ἐκτὸς τοῦ κύκλου λαμβανόμενον, ἀχθῶσιν αἱ διατέμνουσαι ΟΒ, ΟΓ, περατούμεναι εἰς τὸ κοῖλον τόξον ΒΓ, αἱ ὅλαι διατέμνουσαι θέλουν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐκτὸς μερῶν των, τουτέστι θέλομεν ἔχει ΟΒ : ΟΓ :: ΟΔ : ΟΑ, (σχ. 131).

Διότι, ἐπιζευχθειτῶν τῶν ΑΓ, ΒΔ, τὰ τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΒΔ ἔχουν τὴν γωνίαν Ο κοινήν περιπλέον τὴν Β=Γ (18, 2)· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια· καὶ αἱ ὁμόλογαι πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν, ΟΒ : ΟΓ :: ΟΔ : ΟΑ.

Πόρισμα. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΟΑ × ΟΒ, ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΟΓ × ΟΔ.

Σχόλιον. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ πρότασις αὕτη ἔχει μεγάλην ἀναλογίαν μὲ τὴν προλαβοῦσαν, καὶ διαφέρει ταύτης μόνον καθ' ὅτι αἱ δύο χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ ἀντὶ νὰ τέμνωνται ἐντός, τέμνονται ἐκτὸς τοῦ κύκλου· τῆς δὲ παρούσης προτάσεως δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ περίστασις ἡ ἀκόλουθος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

Θώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο (σχ. 132) ἐκτὸς τοῦ κύκλου λαμβανόμενον, ἀχθῇ ἐφαπτομένη τις ΟΑ καὶ διατέμνουσα ΟΓ, ἡ ἐφαπτομένη θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διατεμνούσης

Δύο γραμμαὶ λέγονται ὅτι τέμνονται κατ' ἀντίστροφον λόγον, ὅταν εἰς τὴν σχηματιζομένην ἀναλογίαν ἀπὸ τὰ μέρη των τὰ δύο τῆς μιᾶς εἶναι τὰ ἄκρα, καὶ τὰ ἄλλα δύο τῆς ἄλλης τὰ μέσα.

Καὶ δύο γραμμαὶ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μερῶν των, ὅταν ἡ μία τούτων τῶν γραμμῶν καὶ τὸ ἀντικείμενον μέρος της σχηματίζουν τὰ ἄκρα, ἐν ᾧ ἡ ἄλλη καὶ τὸ ἀντικείμενον μέρος της σχηματίζουν τὰ μέσα — Ο. Μ.

καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους της· εἰς τρόπον ὥστε θέλομεν ἔχει ΟΓ: ΟΑ :: ΟΑ : ΟΔ· ἤ, ὅπερ ταὐτόν, $\overline{ΟΑ}^2 = ΟΓ \times ΟΔ$.

Διότι ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὰ τρίγωνα ΔΑΟ, ΟΑΓ, ἔχουν τὴν γωνίαν Ο κοινήν· περιπλέον ἡ γωνία ΟΑΔ, ὡς σχηματιζομένη ἀπὸ ἐφαπτομένην καὶ χορδὴν (19, 2), ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΑ, καὶ ἡ Γ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον· λοιπὸν ἡ γωνία ΟΑΔ=Γ· ἄρα τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν

ΟΓ : ΟΑ :: ΟΑ : ΟΔ.

ἐκ τῆς ὁποίας $\overline{ΟΑ}^2 = ΟΓ \times ΟΔ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ΄.

Θεώρημα.

Εἰς ὁποιονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 133), ἐὰν ἡ γωνία Α τμηθῇ δίχα ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΑΔ, τὸ ὀρθογώνιον τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς διχοτεμνούσης ΑΔ.

Διὰ τῶν τριῶν στιγμῶν Α, Β, Γ ἂς διέλθῃ περιφέρεια, ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΔ μέχρι τῆς περιφερείας, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ.

Τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΕΑΓ· διότι ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΒΑΔ=ΕΑΓ· περιπλέον ἡ γωνία Β=Ε, ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο ἔχουν μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν,

ΒΑ : ΑΕ :: ΑΔ : ΑΓ.

ἐντεῦθεν προκύπτει $ΒΑ \times ΑΓ = ΑΕ \times ΑΔ$· ἀλλὰ $ΑΕ = ΑΔ \times ΔΕ$, καὶ πολυπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέρη ἐπὶ ΑΔ, ἔχομεν $ΑΕ \times ΑΔ = \overline{ΑΔ}^2 + ΑΔ \times ΔΕ$· ἐκ δὲ ἄλλου μέρους $ΑΔ \times ΔΕ = ΒΔ \times ΔΓ$ (πρό. 28)· λοιπὸν τέλος $ΒΑ \times ΑΓ = \overline{ΑΔ}^2 + ΒΔ \times ΔΓ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ΄.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 134), τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ἰσοῦται μὲ τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΓΕ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τῆς ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ ἀγομένης καθέτου ΑΔ.

Διότι, ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΕ, τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΓ, εἶναι ὀρθογώνια, τὸ μὲν εἰς Δ, τὸ δὲ εἰς Α· περιπλέον ἡ γωνία Β

=E· ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΓΕ : : ΑΔ : ΑΓ· ἐκ τῆς ὁποίας ΑΒ×ΑΓ=ΓΕ×ΑΔ.

Πόρισμα. Ἐὰν αἱ ἴσαι αὗται ποσότητες πολυπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὴν ἰδίαν ποσότητα ΒΓ, θέλομεν ἔχει ΑΒ×ΑΓ×ΒΓ= ΓΕ×ΑΔ×ΒΓ. Τώρα. ΑΔ×ΒΓ εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου (πρό. 6)· λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειάν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸν διπλάσιον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Τὸ γινόμενον τριῶν γραμμῶν καλεῖται ἐνίοτε στερεόν, δι' αἰτίαν τὴν ὁποίαν ἀκολούθως θέλομεν ἰδεῖ. Εὐκόλως δὲ λαμβάνομεν ἰδέαν τῆς τιμῆς του, ἐννοοῦντες ὅτι αἱ γραμμαὶ ἀνάγονται εἰς ἀριθμούς, καὶ πολυπλασιάζοντες τοὺς περὶ ὧν ὁ λόγος ἀριθμούς.

Σχόλιον. Ἠμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν ὡσαύτως ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΑΟΓ ἔχοντα τὴν κορυφήν των κοινὴν εἰς Ο, ἔχουν κοινὸν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ἄρα τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τριγώνων θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΟΔ· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. σχ. 87.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ'.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΒΑΓΔ, τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, εἰς τρόπον ὥστε, σχ. 135.

ΑΓ×ΒΔ=ΑΒ×ΓΔ+ΑΔ×ΒΓ.

Ἂς ληφθῇ τὸ τόξον ΓΟ=ΑΔ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΟ ἡ συναπαντῶσα τὴν διάμετρον ΑΓ εἰς Ι.

Ἡ γωνία ΑΒΔ=ΓΒΙ, ἐπειδὴ ἡ μὲν ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΔ, ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ΓΟ ἴσου μὲ τὸ ΑΔ. Αἱ γωνίαι ΑΔΒ, ΒΓΙ εἶναι ἴσαι ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΑΟΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΙΒΓ, καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΔ : ΓΙ : : ΒΔ : ΒΓ· ὅθεν ΑΔ×ΒΓ

=ΓΙ×ΒΔ. Λέγω δὲ τώρα, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΙ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΔΓ· διότι ὄντος τοῦ τόξου ΑΔ ἴσου μὲ τὸ ΓΟ, ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέρη ΟΔ, προκύπτει τὸ τόξον ΑΟ=ΔΓ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΙ=ΔΒΓ· περιπλέον ἡ γωνία ΒΑΙ=ΒΔΓ, ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΙ, ΔΒΓ εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ:ΒΔ::ΑΙ:ΓΔ· ὅθεν ΑΒ×ΓΔ=ΒΔ×ΑΙ.

Προσθέτοντες δὲ τὰ δύο εὑρεθέντα ἐξαγόμενα, καὶ παρατηροῦντες ὅτι ΑΙ×ΒΔ+ΓΙ×ΒΔ=(ΑΙ+ΓΙ) ΒΔ=ΑΓ×ΒΔ, θέλομεν ἔχει ΑΔ×ΒΓ+ΑΒ×ΓΔ=ΑΓ×ΒΔ.

Σχόλιον. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἄλλο θεώρημα ἐπὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὅμοιον μὲ τὸ ΒΙΓ, δίδει τὴν ἀναλογίαν ...... ΒΔ:ΒΓ:ΑΒ:ΒΙ, ὅθεν ἕπεται ΒΙ×ΒΔ=ΒΓ×ΑΒ. Ἐὰν δὲ ἑνωθῇ ΓΟ, τὸ τρίγωνον ΙΓΟ, ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΙ, θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΔΓ, καὶ διὰ τοῦτο ΒΔ:ΓΟ::ΔΓ:ΟΙ· ὅθεν προκύπτει ΟΙ×ΒΔ=ΓΟ×ΔΓ, ἤ, ἐπειδὴ ΓΟ=ΑΔ, ΟΙ×ΒΔ=ΑΔ×ΔΓ. Προσθέτοντες τὰ δύο ἐξαγόμενα, καὶ παρατηροῦντες ὅτι ΒΙ×ΒΔ+ΟΙ×ΒΔ ἄγεται εἰς ΒΟ×ΒΔ, θέλομεν ἔχει,

ΒΟ×ΒΔ=ΑΒ×ΒΓ+ΑΔ×ΔΓ.

Ἐὰν ληφθῇ ΒΠ=ΑΔ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΚΠ, θέλομεν εὑρεῖ δι' ὁμοίων συλλογισμῶν,

ΓΠ×ΓΔ=ΑΒ×ΑΔ+ΒΓ×ΓΔ. (1)

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΠ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΓΟ, ἐὰν προστεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ΒΓ, θέλομεν ἔχει τὸ τόξον ΓΒΠ = ΒΓΟ· ἄρα ἡ χορδὴ ΓΠ εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΒΟ, καὶ ἐπομένως τὰ ὀρθογώνια ΒΟ×ΒΔ καὶ ΓΠ×ΓΔ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς ΒΔ πρὸς ΓΔ· ἄρα

ΒΔ:ΓΔ::ΑΒ×ΒΓ+ΑΔ×ΔΓ:ΑΔ×ΑΒ+ΒΓ×ΓΔ.

Λοιπὸν αἱ δύο διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου τινὸς τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἀθροίσ-

---

(1) Τὰ τρίγωνα ΠΚΒ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια· διότι ἡ γωνία Α=Π ἡ γωνία ΑΓΒ=ΠΒΔ· διότι ἡ μὲν ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΠΒ· ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΠΑΔ ἴσον μὲ τὸ ΑΠΒ· λοιπὸν καὶ ἡ τρίτη ΠΚΒ=ΑΒΓ· ἄρα ΠΒ:ΠΚ::ΑΓ:ΑΒ· ὅθεν ΠΒ×ΑΒ=ΑΔ×ΑΒ=ΑΓ×ΠΚ· πάλιν τὸ τρίγωνον ΔΓΚ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ· διότι ἡ γωνία ΔΚΓ=ΠΚΒ=ΑΒΓ· ἡ Δ=Α· ἄρα καὶ ΔΓΚ=ΑΓΒ· διὰ τοῦτο ΓΔ:ΓΚ::ΑΓ:ΒΓ λοιπὸν ΓΔ×ΒΓ=ΓΚ×ΑΓ: προσθέτοντες τὰ εὑρεθέντα ἐξαγόμενα εὑρίσκομεν τὴν εἰς τὸ κείμενον ἐξίσωσιν. Ο, Μ.

ματα τῶν ὀρθογωνίων τῶν πλευρῶν, αἵτινες τελειόνουν εἰς τὰ ἄκρα των.

Τὰ δύο ταῦτα θεωρήματα ἠμποροῦν νὰ χρησιμεύσουν διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν διαγωνίων, ὅταν αἱ πλευραὶ εἶναι γνωσταί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

Θεώρημα.

Εστω Π σημεῖον δεδομένον ἐντὸς τοῦ κύκλου ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι Κ ἐκτὸς ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ἰδίας ἀκτῖνος εἰς τρόπον ὥστε ΓΠ:ΓΑ::ΓΑ:ΓΚ· ἐὰν ἀπὸ ὁποιανδήποτε στιγμὴν τῆς περιφερείας Μ ἀχθῶσιν εἰς τὰς δύο στιγμὰς Π καὶ Κ αἱ εὐθεῖαι ΜΠ, ΜΚ, λέγω ὅτι διὰ κάθε στιγμὴν τῆς περιφερείας ὁ λόγος τῶν εὐθειῶν τούτων θέλει εἶναι ὁ αὐτός, καὶ θέλομεν ἔχει ΜΠ:ΜΚ::ΑΠ:ΑΚ. σχ. 136.

Διότι, ἐξ ὑποθέσεως, ἔχομεν, ΓΠ: ΓΑ:: ΓΑ : ΓΚ· ἀντὶ ΓΑ θέτοντες ΓΜ, θέλομεν ἔχει ΓΠ:ΓΜ::ΓΜ:ΓΚ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΚΜ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην Γ περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (20, 3)· ἄρα ἡ τρίτη πλευρὰ ΜΠ εἶναι πρὸς τὴν τρίτην ΜΚ ὡς ΓΠ πρὸς ΓΜ ἢ ΓΑ. Ἀλλ' ἡ ἀναλογία ΓΠ: ΓΑ:: ΓΑ: ΓΚ δίδει, ἐν διαιρέσει, ΓΠ:ΓΑ::ΓΑ—ΓΠ:ΓΚ—ΓΑ, ἢ ΓΠ:ΓΑ::ΑΠ:ΑΚ· λοιπὸν ΜΠ: ΜΚ:: ΑΠ: ΑΚ· εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὅτι ὑπάρχουν αἱ εὐθεῖαι Μ'Π, Μ'Κ, Μ''Π Μ''Κ κ. τ. λ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

Εἰς τὸ Γ'. βιβλίον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Νὰ διαιρέσωμεν εὐθεῖαν δεδομένην εἰς ὅσα ἴσα μέρη θέλομεν, ἢ εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων γραμμῶν.

1.ον Ἂς προτεθῇ νὰ διαιρέσωμεν τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς πέντε ἴσα μέρη· ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἂς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος ΑΗ, καὶ ἀφ' οὗ ληφθῇ ΑΓ ἴση μὲ ὁποιονδήποτε μέγεθος, ἂς φερθῇ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΑΗ. Ἂς ἑνωθῇ ἡ τελευταία στιγμὴ διαιρέσεως Η καὶ τὸ ἄκρον Β διὰ τῆς ΗΒ, ἔπειτα ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΙ παράλληλος τῆς ΗΒ· λέγω ὅτι ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΒ, καὶ οὕτω φερθείσης τῆς ΑΙ πεντάκις ἐπὶ ΑΒ, ἡ ΑΒ θέλει διαιρεθῆ εἰς πέντε ἴσα μέρη. σχ. 137.

Διότι, ἐπειδὴ ΓΙ εἶναι παράλληλος τῆς ΗΒ, αἱ πλευραὶ ΑΗ, ΑΒ τέμνονται ἀναλόγως εἰς Γ καὶ Ι (πρό. 15). Ἀλλὰ ΑΓ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΗ· λοιπὸν ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς ΑΒ.

2.ον Ἂς προτεθῇ νὰ διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν Π, Κ, Ρ. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἂς ἀχθῇ ἀπροσδιόριστος ΑΗ, ἂς ληφθῇ ΑΓ=Π, ΓΔ=Κ, ΔΕ=Ρ, ἂς ἑνωθῶσι τὰ ἄκρα Ε καὶ Β, καὶ διὰ τῶν σημείων Γ, Δ, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΙ, ΔΚ παράλληλοι τῆς ΕΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ διαιρεῖται εἰς μέρη ΑΙ, ΙΚ, ΚΒ ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν Π, Κ, Ρ. σχ. 138.

Διότι ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΓΙ, ΔΚ, ΕΒ τὰ μέρη ΑΙ, ΙΚ, ΚΒ εἶναι ἀνάλογα τῶν μερῶν ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ (πρό. 15)· ἐκ δὲ τῆς κατασκευῆς ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς δεδομένας γραμμὰς Π, Κ, Ρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Νὰ εὕρωμεν τετάρτην ἀνάλογον τριῶν δεδομένων γραμμῶν Α, Β, Γ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ δύο ἀπροσδιόριστοι ΔΕ, ΔΖ ὑπὸ ὁποιανδήποτε γωνίαν. Ἐπὶ τῆς ΔΕ ἂς ληφθῇ ΔΑ=Α καὶ ΔΒ=Β, ἐπὶ τῆς ΔΖ ἂς ληφθῇ ΔΓ=Π, ἂς ἑνωθῇ ΑΓ, καὶ διὰ τῆς στιγμῆς Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΧ παράλληλος τῆς ΑΓ· λέγω ὅτι ΔΧ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος· διότι, οὔσης τῆς ΒΧ παραλλήλου τῆς ΑΓ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΔΑ:ΔΒ::ΔΓ:ΔΧ. Τώρα οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι ταύτης τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι μὲ τὰς τρεῖς δεδομένας γραμμάς· λοιπὸν ΔΧ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος. σχ. 139.

Πόρισμα. Παρομοίως ἠθέλαμεν εὕρη τρίτην ἀνάλογον δύο δεδομένων γραμμῶν Α, Β· διότι αὕτη ἄλλό τι δὲν ἤθελεν εἶναι παρὰ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν Α, Β, Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Νὰ εὕρωμεν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ δύο δεδομένων γραμμῶν Α καὶ Β.

Ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΔΖ ἂς ληφθῇ ΔΕ=Α, καὶ ΕΖ=Β· ἐπὶ τῆς ὅλης ΔΖ ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΔΗΖ· εἰς τὴν στιγμὴν Ε ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΕΗ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς Η· λέγω ὅτι ΕΗ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος. σχ. 140.

Διότι ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τῆς διαμέτρου (πρό. 23)· λοιπὸν ΗΕ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΔΕ, ΕΖ, ἀλλὰ τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς δεδομένας γραμμὰς Α καὶ Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο μέρη ὥστε τὸ μεγαλήτερον νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης γραμμῆς καὶ τοῦ ἄλλου μέρους. σχ. 141.

Εἰς τὸ ἄκρον Β τῆς γραμμῆς ΑΒ· ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΒΓ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἐκ τῆς στιγμῆς Γ ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ΓΒ ἂς γραφθῇ περιφέρεια· ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΓ ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς Δ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΖ=ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ διαιρεῖται εἰς τὴν στιγμὴν Ζ κατὰ τὸν ζητούμενον τρόπον, τουτέστι ὡς ΑΒ:ΑΖ::ΑΖ:ΖΒ.

Διότι οὖσα ἡ ΑΒ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΒ εἶναι ἐφαπτομένη· καὶ ἐὰν προεκβληθῇ ΑΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ ἐκ νέου τὴν περιφέρειαν εἰς Ε, θέλομεν ἔχει ΑΕ:ΑΒ::ΑΒ:ΑΔ (πρό. 30)· λοιπὸν, ἐν διαιρέσει, ΑΕ—ΑΒ:ΑΒ::ΑΒ—ΑΔ:ΑΔ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΑΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἡ διάμετρος ΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ, καὶ ἐπομένως ΑΕ—ΑΒ=ΑΔ=ΑΖ· ἔχομεν ὡσαύτως, ἐπειδὴ ΑΖ=ΑΔ, ΑΒ—ΑΔ=ΖΒ· λοιπὸν ΑΖ:ΑΒ::ΑΒ:ΑΔ ἢ ΑΖ· λοιπὸν ἀντιστρέφοντες θέλομεν ἔχει ΑΒ:ΑΖ::ΑΖ:ΖΒ· ἐπειδὴ δὲ ΑΒ>ΑΖ, διὰ τοῦτο καὶ ΑΖ>ΖΒ· λοιπὸν ΑΖ εἶναι τὸ μεῖζον τμῆμα καὶ ὡς βλέπομεν εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης ΑΒ καὶ τοῦ μικροτέρου τμήματος ΖΒ.

Σχόλιον. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς διαιρέσεως τῆς γραμμῆς ΑΒ καλεῖται διαίρεσις εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον: θέλομεν ἰδεῖ τὰς χρήσεις της. Ἠμποροῦμεν δὲ νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ διατέμνουσα ΑΕ διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὴν στιγμὴν Δ· διότι, ἐπειδὴ ΑΒ=ΔΕ, ἔχομεν ΑΕ:ΔΕ::ΔΕ:ΑΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Α ἐντὸς δεδομένης γωνίας ΒΓΔ, νὰ ἀχθῇ ἡ ΒΔ εἰς τρόπον ὥστε τὰ μέρη ΑΒ, ΑΔ τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τοῦ σημείου Α καὶ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας νὰ ἦναι ἴσα. σχ. 142.

Διὰ τῆς στιγμῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ παράλληλος τῆς ΓΔ, ἂς ληφθῇ ΒΕ=ΓΕ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΑΔ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη γραμμή.

Διότι, οὔσης τῆς ΑΕ παραλλήλου τῆς ΓΔ, ἔχομεν ΒΕ : ΕΓ :: ΒΑ : ΑΔ· τώρα ΒΕ=ΕΓ· λοιπὸν ΒΑ=ΑΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ′.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ παραλληλόγραμον ἢ δεδομένον τρίγωνον.

1.ον Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δεδομένον παραλληλόγραμμον, ΑΒ ἡ βάσις του, ΔΕ τὸ ὕψος του: ἂς ζητηθῇ μέση ἀνάλογος ΧΨ μεταξὺ ΑΒ καὶ ΔΕ (πρόβλ. 3)· λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΧΨ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Διότι ἐκ τῆς κατασκευῆς ἔχομεν ΑΒ : ΧΨ :: ΧΨ : ΔΕ· λοιπὸν $\overline{ΧΨ}^2$=ΑΒ×ΔΕ· ἀλλὰ ΑΒ×ΔΕ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ $\overline{ΧΨ}^2$ τὸ τοῦ τετραγώνου· λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα. σχ. 143.

2.ον Ἔστω ΑΒΓ τὸ δεδομένον τρίγωνον, ΒΓ ἡ βάσις του, ΑΔ τὸ ὕψος του: ἂς ληφθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΒΓ καὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΔ, καὶ ἔστω ΧΨ ἡ μέση αὕτη ἀνάλογος· λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΧΨ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 144.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν ΒΓ : ΧΨ :: ΧΨ : $\frac{1}{2}$ ΑΔ, ἕπεται ὅτι $\overline{ΧΨ}^2$ =ΑΒ × $\frac{1}{2}$ ΑΔ· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΧΨ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ′.

Ἐπὶ τῆς δεδομένης γραμμῆς ΑΔ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ΑΔΕΧ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ. σχ. 145.

Ἂς ζητηθῇ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν ΑΔ, ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἔστω ΑΧ ἡ τετάρτη αὕτη ἀνάλογος· λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ ΑΔ καὶ ΑΧ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν ΑΔ : ΑΒ :: ΑΓ : ΑΧ, ἀκολουθεῖ ὅτι ΑΔ×ΑΧ=ΑΒ×ΑΓ· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΕΧ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η′.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τοῦ ὀρθογωνίου δύο δεδομένων γραμμῶν Α καὶ Β πρὸς τὸ ὀρθογώνιον δύο δεδομένων γραμμῶν Γ καὶ Δ. σχ. 148.

Ἔστω X τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν B, Γ, Δ· λέγω ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο γραμμῶν A καὶ X εἶναι ἴσος μὲ τὸν τῶν δύο ὀρθογωνίων A×B, Γ×Δ.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν B:Γ::Δ:X, ἕπεται ὅτι Γ×Δ=B×X· λοιπὸν A×B:Γ×Δ::A×B:B×X::A×X.

Πόρισμα. Εἰς εὕρεσιν λοιπὸν τοῦ λόγου τῶν τετραγώνων τῶν δεδομένων γραμμῶν A καὶ Γ, ἂς ζητήσωμεν τρίτην ἀνάλογον X τῶν γραμμῶν A καὶ Γ, εἰς τρόπον ὥστε A:Γ::Γ:X, καὶ θέλομεν ἔχει $\overline{A}^2:\overline{Γ}^2$::A:X.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τοῦ γινομένου τριῶν δεδομένων γραμμῶν A, B, Γ, πρὸς τὸ γινόμενον τριῶν ἄλλων ἐπίσης δεδομένων Π, K, P. (1). 149.

Ἂς ζητηθῇ τετάρτη ἀνάλογος X τῶν τριῶν δεδομένων γραμμῶν Π, A, B· ἂς ζητηθῇ ἐπίσης τετάρτη ἀνάλογος Ψ τῶν τριῶν δεδομένων γραμμῶν Γ, K, P. Αἱ δύο γραμμαὶ X, Ψ θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα A×B×Γ, Π×K×P.

Διότι, ἐπειδὴ Π:A::B:X, ἔχομεν A×B=Π×X, καί, πολυπλασιασθέντων τῶν δύο μερῶν ἐπὶ Γ, A×B×Γ=Π×Γ×X· ὡσαύτως, ἐπειδὴ Γ:K::P:Ψ, ἕπεται ὅτι K×P=Γ×Ψ· καί, μετὰ τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν δύο μερῶν ἐπὶ Π, ἔχομεν Π×K×P=Π×Γ×Ψ· λοιπὸν τὸ γινόμενον A×B×Γ εἶναι πρὸς τὸ γινόμενον Π×K×P ὡς Γ×Π×X πρὸς Π×Γ×Ψ, ἢ ὡς X πρὸς Ψ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι.

Νὰ εὕρωμεν τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον πολύγωνον.

Πρέπει νὰ πασχίσωμεν νὰ τρέψωμεν τὸ δεδομένον πολύγωνον εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μιᾶς πλευρᾶς ὀλιγώτερον τοῦ δεδομένου, καὶ τοῦτο πάλιν εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μιᾶς πλευρᾶς ὀλιγώτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως οὗ τελευταῖον νὰ καταντήσωμεν εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἔστω λοιπὸν ΑΒΓΔΕ τὸ δεδομένον πολύγωνον. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΓΕ, ἥτις ἀφαιρεῖ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ· ἐκ τῆς στιγμῆς Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖ παράλληλος τῆς ΓΕ ἕως οὗ νὰ συνα-

(1) Ἐπειδὴ ὡς ἀλλοῦ θέλομεν ἴδει τὸ γινόμενον τριῶν γραμμῶν παριστάνει ἓν στερεόν· διὰ τοῦτο ἡ ἐκφώνησις τοῦ παρόντος προβλήματος δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν ἀκόλουθον, Δεδομένων τῶν τριῶν διαστάσεων δύο στερεῶν νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τούτων εἰς γραμμὰς Ο. Μ.

παντήση τὴν ΑΕ προεκβαλλομένην· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΖ, καὶ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΖ τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον.

Διότι τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΖΕ ἔχουν κοινὴν βάσιν τὴν ΓΕ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ των Δ, Ζ, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς ΔΖ, παραλλήλου τῆς βάσεως· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα. Προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ σχῆμα ΑΒΓΕ, ἔχομεν ἐξ ἑνὸς μέρους τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου τὸ πολύγωνον ΑΒΓΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα.

Παρομοίως δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν Β ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ ἰσοδύναμον ΑΗΓ, καὶ οὕτως τὸ πεντάγωνον ΑΒΔΕ θέλει τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον ΗΓΖ. σχ. 146.

Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐφαρμόζεται εἰς κάθε ἄλλο σχῆμα· διότι ὀλιγοστεύοντες κάθε φορὰν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, θέλομεν καταντήσει τέλος εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον.

Σχόλιον. Εἴδομεν (πρόβ. 6) ὅτι κάθε τρίγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον. Οὕτω πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον εὐθύγραμμον σχῆμα· τοῦτο δὲ καλεῖται τετραγωνίζειν τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, ἢ εὑρίσκειν τὸν τετραγωνισμὸν αὐτοῦ.

Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ κύκλον δεδομένης διαμέτρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δεδομένων τετραγώνων.

1.ον Ἐὰν πρέπῃ νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τετραγώνων, ἂς φερθῶσι πρὸς ὀρθὰς αἱ ἀπροσδιόριστοι ΕΔ, ΕΖ· ἂς ληφθῇ ΕΔ=Α καὶ ΕΗ=Β, ἂς ἐπιζευχθῇ ΔΗ, καὶ ΔΗ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. σχ. 147.

Διότι ὄντος τοῦ τριγώνου ΔΕΗ ὀρθογωνίου, τὸ ἐπὶ τῆς ΔΗ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ ΕΔ καὶ ΕΗ κατασκευαζομένων.

2.ον Ἐὰν δὲ πρέπῃ νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν δεδομένων τετραγώνων, ἂς σχηματισθῇ ὡσαύτως ἡ ὀρθὴ γωνία ΖΕΘ, ἂς ληφθῇ ΗΕ ἴση μὲ τὴν μικροτέραν τῶν πλευρῶν Α καὶ Β· ἐκ τῆς στιγμῆς Η ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ΗΘ ἴσην μὲ τὴν ἄλλην πλευράν, ἂς γραφθῇ τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει ΕΘ εἰς Θ· λέγω ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν γραμμῶν Α καὶ Β.

Διότι τὸ τρίγωνον ΗΕΘ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ ὑποτείνουσα ΗΘ =Α, καὶ ἡ πλευρὰ ΗΕ=Β· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ κ. τ. λ.

Σχόλιον. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅσων θέλομεν τετραγώνων· διότι μὲ τὴν αὐτὴν κατασκευὴν μὲ τὴν ὁποίαν ἀνάγομεν δύο εἰς ἕν, ἀνάγομεν τρία εἰς δύο, καὶ τὰ δύο ταῦτα εἰς ἕν, καὶ οὕτω διὰ τὰ ἄλλα. Τὸ αὐτὸ ἤθελεν ὑπάρχει ἐὰν μερικὰ τῶν τετραγώνων ἔπρεπε νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ δεδομένον ΑΒΓΔ, ὃν ἡ γραμμὴ Μ πρὸς τὴν γραμμὴν Ν. σχ. 150.

Ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΕΗ, ἂς ληφθῇ ΕΖ=Μ καὶ ΖΗ= Ν· ἐπὶ τῆς ΕΗ ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΖΘ. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Θ ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΗΘ, ΘΕ αἵτινες ἂς προεκβληθῶσιν ἀπροσδιορίστως: ἐπὶ τῆς πρώτης ἂς ληφθῇ ΘΚ' ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ δεδομένου τετραγώνου, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Κ' ἂς ἀχθῇ ἡ Κ'Ι παράλληλος τῆς ΕΗ· λέγω ὅτι ΘΙ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Κ'Ι, ΗΕ, ἔχομεν ΘΙ: ΘΚ'::ΘΕ:ΘΗ· λοιπὸν $\overline{ΘΙ}^2:\overline{ΘΚ'}^2::\overline{ΘΕ}^2:\overline{ΘΗ}^2$: ἀλλ' εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΘΗ (πρό. 23), τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ ὡς τὸ τμῆμα ΕΖ πρὸς τὸ τμῆμα ΖΗ, ἢ ὡς Μ πρὸς Ν, λοιπὸν $\overline{ΘΙ}^2:\overline{ΘΚ'}^2$::Μ:Ν. Ἀλλὰ ΘΚ' =ΑΒ· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΘΙ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ὡς Μ πρὸς Ν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΖΗ, ὁμολόγου τῇ ΑΒ, νὰ γράψωμεν πολύγωνον ὅμοιον τῷ δεδομένῳ ΑΒΓΔΕ. σχ. 129.

Εἰς τὸ δεδομένον πολύγωνον ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἂς γένῃ ἡ γωνία ΗΖΘ = ΒΑΓ, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Η ἡ γωνία ΖΗΘ = ΑΒΓ· αἱ γραμμαὶ ΖΘ, ΗΘ, τέμνονται εἰς Θ, καὶ ΖΗΘ εἶναι τρίγωνον ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ: ὡσαύτως ἐπὶ τῆς ΖΘ, ὁμολόγου τῇ ΑΓ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΖΙΘ ὅμοιον τῷ ΑΔΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΖΙ ὁμολόγου τῇ ΑΔ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΖΙΚ ὅμοιον τῷ ΑΔΕ. Τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ εἶναι τὸ ζητούμενον ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ.

Διότι τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρό. 26).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'.

Δεδομένων δύο ὁμοίων σχημάτων, νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφοράν των.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν δεδομένων σχημάτων, ἂς ζητηθῇ τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν Α καὶ Β· ἔστω Χ ἡ πλευρὰ τούτου τοῦ τετραγώνου, Χ θέλει εἶναι εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα ἡ ὁμόλογος πλευρὰ τῇ Α καὶ Β εἰς τὰ δεδομένα σχήματα. Ἀκολούθως τὸ σχῆμα κατασκευάζεται διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος.

Διότι τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Τώρα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς Χ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν κατασκευαζομένων τετραγώνων ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν Α καὶ Β· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς Χ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν κατασκευαζομένων ὁμοίων σχημάτων ἐπὶ τῶν πλευρῶν Α καὶ Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμα ὅμοιον μὲ δεδομένον, καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πρὸς τοῦτο τὸ σχῆμα λόγον δεδομένον, καὶ τὸ ὁποῖον Μ πρὸς Ν.

Ἔστω Α μία τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου σχήματος, Χ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ εἰς τὸ ζητούμενον· ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα σχήματα πρέπει νὰ ἦναι ὅμοια, καὶ τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· διὰ τοῦτο τὸ τετράγωνον τῆς Χ ἀνάγκη νὰ ἦναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς Α ὡς Μ πρὸς Ν· εὑρίσκομεν λοιπὸν Χ διὰ τοῦ προβλήματος ΙΒ'· γνωστῆς τῆς Χ, τὸ ὑπόλοιπον ἐκτελεῖται διὰ τοῦ ΙΓ' προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΣΤ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα Π καὶ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ. σχ. 151.

Ζητοῦμεν τὴν πλευρὰν Μ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου μὲ τὸ σχῆμα Π, καὶ τὴν πλευρὰν Ν τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου μὲ τὸ σχῆμα Κ· εὑρίσκομεν ἀκολούθως μίαν τετάρτην ἀνάλογον Χ τῶν γραμμῶν Μ, Ν, ΑΒ αἵτινες εἶναι δεδομέναι· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ, ὁμολόγου τῇ ΑΒ, ἂς γραφθῇ σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα Π· λέγω ὅτι θέλει εἶναι προσέτι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ.

Διότι καλοῦντες Ψ τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ ἀναγραφόμενον σχῆμα, θέλομεν ἔχει $\Pi : \Psi :: \overline{AB}^2 : \overline{X}^2$ · ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς $AB : X :: M : N$, ἢ $\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2$· λοιπὸν $\Pi : \Psi :: M^2 : N^2$.

Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἔχομεν $M^2 = \Pi$ καὶ $N^2 = K$· λοιπὸν $\Pi : \Psi :: \Pi : K$· λοιπὸν $\Psi = K$· ἄρα τὸ σχῆμα Ψ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα Π, καὶ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ κάμνουν δεδομένον ἄθροισμα ΑΒ. σχ. 152.

Ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια· ἐκ τῆς στιγμῆς Α ἂς ὑψωθῇ μία κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἀφ' οὗ ληφθῇ ἐπὶ τῆς καθέτου ἡ ΑΔ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΒ. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ε, ὅπου ἡ παράλληλος τέμνει τὴν περιφέρειαν ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΕΖ· λέγω ὅτι ΑΖ καὶ ΖΒ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ ΑΒ· καὶ τὸ ὀρθογώνιόν των $AZ \times ZB$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ (πρό. 23), ἢ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ.

Σχόλιον. Διὰ νὰ ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν, πρέπει, τὸ διάστημα ΑΔ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα, τουτέστιν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου Γ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ τῆς γραμμῆς ΑΒ. (1).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τετράγωνον Γ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχουν μεταξύ των τὴν δεδομένην διαφορὰν ΑΒ. σχ. 153.

---

(1) Το ὅριον λοιπὸν τοῦ προβλήματος εἶναι ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δεδομένου ἀθροίσματος, καὶ τότε τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον εἶναι εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν εἰς τὸ ὅριον τοῦτο ἡ φερομένη παράλληλος τῇ ΑΒ ἅπτεται τῆς περιφερείας. Πέραν τούτου τοῦ ὁρίου τὸ πρόβλημα καθίσταται ἀνύπαρκτον διότι δὲν ὑπάρχει πλέον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν φερομένην παράλληλον καὶ τὴν περιφέρειαν. Ο. Μ.

Ἐπὶ τῆς δεδομένης ΑΒ, ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ περιφέρεια· εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΑΔ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου Γ: ἂς ἑνωθῇ ἡ ΔΟ καὶ ἂς προεκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς Ε· λέγω ὅτι ΔΕ καὶ ΔΖ εἶναι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Διότι 1.ον ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον ΕΖ ἢ ΑΒ. 2.ον τὸ ὀρθογώνιον ΔΕ$\times$ΔΖ εἶναι ἴσον μὲ $\overline{\text{ΑΔ}}^2$ (πρό. 30)· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘ'.

Νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν μέτρον, ἐὰν ὑπάρχῃ, μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Ἔστω ΑΒΓΗ ὁποιονδήποτε τετράγωνον, ΑΓ ἡ διαγώνιός του. σχ. 154.

Ἐπειδὴ ΑΓ ὡς πλαγία εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΒ ὡς καθέτου, πρέπει νὰ φέρωμεν ΓΒ ἐπὶ ΓΑ τοσάκις ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται (προβλ. 17. βιβλ. 2), καὶ πρὸς τοῦτο ἂς γραφθῇ ἐκ τοῦ κέντρου Γ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΕ, βλέπομεν ὅτι ΓΒ περιέχεται μίαν φορὰν εἰς ΑΓ μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔ· τὸ ἐξαγόμενον λοιπὸν τῆς πρώτης ἐργασίας εἶναι τὸ πηλίκον 1 μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν μὲ ΒΓ ἢ μὲ τὴν ἴσην της ΑΒ.

Ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ΑΖ=ΑΔ, καὶ νὰ φέρωμεν ΑΖ ἐπὶ ΑΒ· ἠθέλαμεν εὕρει ὅτι περιέχεται δὶς μὲ ὑπόλοιπον: πλὴν ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ τὰ ἀκόλουθα προβαίνουν σμικρύνοντα, καὶ διὰ τὴν σμικρότητά των ἀμέσως ἤθελον γένῃ ἀνεπαίσθητα, ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις δὲν ἤθελεν εἶναι παρὰ ἀτελὲς μηχανικὸν μέσον, ὅθεν τίποτε δὲν ἠθέλαμεν ἠμπορέσει νὰ συμπεράνωμεν, ὥστε νὰ ἀποφασίσωμεν, ἐὰν αἱ γραμαὶ ΑΓ, ΓΒ ἔχουν ἢ δὲν ἔχουν μεταξύ των κοινὸν μέτρον: ἀλλ' ὑπάρχει μέσον ἁπλούστατον νὰ ἀποφύγωμεν τὰς μειουμένας γραμμὰς, καὶ νὰ μὴν ἐργαζώμεθα μόνον ἐπὶ γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι μένουν πάντοτε τοῦ ἰδίου μεγέθους.

Τῷ ὄντι, οὔσης τῆς γωνίας ΑΒΓ ὀρθῆς, ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη, καὶ ΑΕ διατέμνουσα ἠγμένη ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου, εἰς τρόπον ὥστε ἔχομεν (πρό. 30) ΑΔ: ΑΒ:: ΑΒ: ΑΕ. Οὕτως εἰς τὴν δευτέραν ἐργασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ συγκρίνωμεν ΑΔ μὲ ΑΒ, ἠμποροῦμεν ἀντὶ τοῦ λόγου τῆς ΑΔ πρὸς ΑΒ, νὰ λάβωμεν τὸν τῆς ΑΒ πρὸς ΑΕ: Τώρα ΑΒ ἢ ἴση της ΓΔ περιέχεται δὶς εἰς ΑΕ μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔ· λοιπὸν τὸ ἐξαγόμενον τῆς δευτέρας ἐργασίας εἶναι τὸ πηλίκον 2 μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν μὲ ΑΒ.

Ἡ τρίτη ἐργασία, ἥτις συνίσταται εἰς τὴν σύγκρισιν τῆς ΑΔ μὲ ΑΒ, ἄγεται ὡσαύτως εἰς τὴν σύγκρισιν τῆς ΑΒ ἢ τῆς ἴσης της ΓΔ μὲ ΑΕ, καὶ ἀκόμη ἔχομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον ΑΔ.

Τώρα ἐπειδὴ εἰς ὅλας ταύτας τὰς ἐργασίας καὶ τὰς ἀκολούθους ἐργαζόμεθα ἐπὶ τῶν αὐτῶν ποσοτήτων, διὰ τοῦτο θέλομεν ἔχει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον δηλαδὴ πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον ΑΔ, καὶ ὅσον καὶ ἂν προεκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν πάντοτε τὸ αὐτὸ πηλίκον καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον ΑΔ εὑρίσκομεν· ἐπειδὴ λοιπὸν πάντοτε εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἰδίου μεγέθους, ἡ ἐργασία δὲν τελειόνει ποτέ· διότι ποτὲ δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον μηδέν. Δικαίως λοιπὸν ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου: ἀλήθεια γνωστὴ καὶ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς (διότι αἱ γραμμαὶ αὗται εἶναι μεταξύ των :: $\sqrt{2} : 1$ ἤγουν εἰς λόγον ἀσύμμετρον (πρ. 11), πλὴν ἀποκαθίσταται σαφεστάτη διὰ τῆς γεωμετρικῆς λύσεως.

Σχόλιον. Ἀδύνατον λοιπὸν εἶναι νὰ εὕρωμεν εἰς ἀριθμοὺς τὸν ἀκριβῆ λόγον τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου· ἀλλ' ἠμποροῦμεν νὰ πλησιάσωμεν τοσοῦτον ὅσον θέλομεν διὰ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τοῦτον τὸν λόγον. Ἡ πρώτη ἐργασία ἔδωκε διὰ πηλίκον 1· ἡ δευτέρα καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἐπ' ἄπειρον δίδουν 2: Οὕτως τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κλάσμα εἶναι . . . . :

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}+\ \text{κ. τ. λ. ἐπ' ἄπειρον.}}}}}$$

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν λογαριάσωμεν τοῦτο τὸ κλάσμα μέχρι τοῦ τετάρτου ὅρου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τιμή του εἶναι $1\,\frac{12}{29}$ ἢ $\frac{41}{29}$· εἰς τρόπον ὥστε ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου εἶναι :: 41 : 29. Ἠθέλαμεν εὑρεῖ πλέον ὡς ἔγγιστα λόγον, λογαριάζοντες μεγαλήτερον ἀριθμὸν ὅρων.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ
ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

Ὁρισμός.

Τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἐν ταὐτῷ εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον, καλεῖται κανονικὸν πολύγωνον.

Ὑπάρχουν κανονικὰ πολύγωνα κάθε ἀριθμοῦ πλευρῶν. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον τριῶν πλευρῶν· καὶ τὸ τετράγωνον, τὸ τῶν τεσσάρων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.
Θεώρημα.

Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι δύο ὅμοια σχήματα. σχ. 155.

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, τὰ δύο κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ, αβγδεζ· τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, ἰσοῦται δὲ μὲ ὀκτὼ γωνίας ὀρθὰς (28, 1). Ἡ γωνία Α εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τούτου τοῦ ἀθροίσματος ὡς καὶ ἡ γωνία α· λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι· ἐπομένως τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας Β καὶ β, Γ καὶ γ, κ. τ. λ.

Περιπλέον, ἐπειδὴ ἐκ τῆς φύσεως τῶν πολυγώνων τούτων αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ. τ. λ., εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ αβ, βγ, γδ κ. τ. λ. φανερὸν εἶναι ὅτι ἔχομεν τὰς ἀναλογίας ΑΒ : αβ :: ΒΓ : βγ :: ΓΔ : γδ, κ. τ. λ. λοιπὸν τὰ δύο σχήματα περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· εἶναι λοιπὸν ὅμοια (ὁρ. 2. βιβ. 3).

Πόρισμα. Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί, αἱ δὲ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων πλευρῶν (27, 3).

Σχόλιον. Ἡ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του ὡς ἡ τοῦ ἰσογωνίου πολυγώνου (20, 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Θεώρημα.

Κάθε κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφθῇ, καὶ νὰ περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον. 156

Ἔστω ΑΒΓΔΕ κ. τ. λ., τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολύγωνον· ἂς φαντασθῶμεν ὅτι διέρχεται περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· ἔστω Ο τὸ κέντρον της, καὶ ΟΠ ἡ φερομένη κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΟ, ΟΔ.

Τὰ τετράπλευρα ΟΠΓΔ, ΟΠΒΑ ἠμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσι: τῷ ὄντι ἡ πλευρὰ ΟΠ εἶναι κοινή, ἡ γωνία ΟΠΓ=ΟΠΒ, διότι εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΠΓ θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν ἴσην της ΠΒ, καὶ τὸ σημεῖον Γ θέλει πέσει εἰς τὸ Β· περιπλέον ἐκ τῆς φύσεως τοῦ πολυγώνου, ἡ γωνία ΠΓΔ=ΠΒΑ, λοιπὸν ΓΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΒΑ, καὶ ἐπειδὴ ΓΔ=ΒΑ, ἡ στιγμὴ Δ θέλει πέσει εἰς Α, καὶ τὰ δύο τετράπλευρα ἐντελῶς θέλουν ἐφαρμόσει. Τὸ ἀπόστημα λοιπὸν ΟΔ εἶναι ἴσον μὲ ΑΟ, καὶ ἐπομένως ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ θέλει διέλθει ὡσαύτως διὰ τοῦ Δ: ἀλλά, δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ, δείξομεν ὅτι ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ, θέλει διέλθει διὰ τῆς ἀκολούθου κορυφῆς Ε, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἡ αὐτὴ λοιπὸν περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, διέρχεται δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, καὶ τὸ πολύγωνον ἐγγράφεται εἰς ταύτην τὴν περιφέρειαν.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως, ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. ὡς πρὸς τὴν εἰρημένην περιφέρειαν εἶναι χορδαὶ ἴσαι· ἰσάκις λοιπὸν ἀπέχουσι τοῦ κέντρου (8, 2)· ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῆς στιγμῆς Ο, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΠ, γραφθῇ περιφέρεια, αὕτη θέλει ἅπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἡμισείας, καὶ θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον, ἢ τοῦτο περιγεγραμμένον εἰς ἐκείνην.

Σχόλιον Α'. Ἡ στιγμὴ Ο, κοινὸν κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου, ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὁμοίως ὡς τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου, καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται γωνία εἰς τὸ κέντρον, ἡ γωνία ΑΟΒ σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο ἀκτῖνας ἠγμένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἰδίας πλευρᾶς ΑΒ.

Ἐπειδὴ ὅλαι αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΕ κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, φανερὸν εἶναι ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι εἰς τὸ κέντρον εἶναι ἴσαι, καὶ οὕτως ἡ τιμὴ ἑκάστης εὑρίσκεται διαιρουμένων τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Σχόλιον Β'. Διὰ τὴν ἐγγραφὴν κανονικοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ τινος πλευρῶν εἰς δεδομένην περιφέρειαν, ἄλλο δὲν ἀπαιτεῖται παρὰ ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας πλευρὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ πολύγωνον· διότι, ὅταν τὰ τόξα ἦναι ἴσα, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ἴσαι· τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΒΟΓ, ΓΟΔ κ. τ. λ. ὡσαύτως θέλουν εἶναι ἴσα, ὡς ἰσόπλευρα μεταξύ των· λοιπὸν ὅλαι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ἴσαι· τὸ σχῆμα ἄρα ΑΒΓΔΕ, κ. τ. λ. θέλει εἶναι κανονικὸν πολύγωνον σχ. 158.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Πρόβλημα.

Νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν.

Ἂς ἄξωμεν πρὸς ὀρθὰς δύο διαμέτρους ΑΓ, ΒΔ· ἂς ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα Α, Β, Γ, Δ, καὶ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον: διότι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι. σχ. 157.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἔχομεν (11, 3) ΒΓ : ΒΟ : : $\sqrt{2}$: 1· λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Πρόβλημα.

Νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν.

Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λυμένον, καὶ ἔστω ΑΒ μία πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΟ, ΟΒ, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσόπλευρον. σχ. 158.

Διότι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν· οὕτω λαμβάνοντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὡς μονάδα, ἔχομεν ΑΟΒ = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$· αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι ΑΒΟ, ΒΑΟ, τοῦ ἰδίου τριγώνου κάμνουν ὁμοῦ $2 - \frac{2}{3}$ ἢ $\frac{4}{3}$, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, ἀκολουθεῖ ὅτι ἑκάστη τούτων εἶναι $= \frac{2}{3}$· τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΟ εἶναι ἰσόπλευρον· ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν, πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ἑξάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ οὕτω θέλομεν ἐπιστρέψει εἰς τὴν στιγμὴν ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεχωρήσαμεν.

Ἀφ' οὗ ἐγγραφθῇ τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, ἐὰν ἑνώσωμεν ἐναλλὰξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν, θέλομεν σχηματίσει τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

Σχόλιον. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΟ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐνταυτῷ ῥομβοειδές, διότι ΑΒ=ΒΓ=ΓΟ=ΑΟ· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν (14, 3) τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων $\overline{ΑΓ}^2+\overline{ΒΟ}^2$, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι $4\overline{ΑΒ}^2$ ἢ $4\overline{ΒΟ}^2$· ἀφαιρεθέντος καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη $\overline{ΒΟ}^2$, μένει $\overline{ΑΓ}^2=3\overline{ΒΟ}^2$· λοιπὸν $\overline{ΑΓ}^2:\overline{ΒΟ}^2::3:1$, ἢ $ΑΓ:ΒΟ::\sqrt{3}:1$· λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3 πρὸς τὴν μονάδα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Πρόβλημα.

Νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον δεδομένον κανονικὸν δεκάγωνον, ἀκολούθως πεντάγωνον καὶ δεκαπεντάγωνον.

Διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ΑΟ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (πρόβ. 4. βιβ. 3) εἰς τὴν στιγμὴν Μ, λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὸ μεῖζον τμῆμα ΟΜ· λέγω ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ φέρωμεν δεκάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας. σχ. 159.

Διότι ἐπιζευγνύοντες τὴν ΜΒ, ἔχομεν ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΟ : ΟΜ :: ΟΜ : ΑΜ· ἤ, ἐπειδὴ ΑΒ=ΟΜ, ΑΟ : ΑΒ :: ΑΒ : ΑΜ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΑΜΒ ἔχουν μίαν κοινὴν γωνίαν Α περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (20, 3). Τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΜΒ εἶναι παρομοίως, καὶ ἔχομεν ΑΒ=ΒΜ: ἄλλως ΑΒ=ΟΜ· λοιπὸν ὡσαύτως ΜΒ=ΟΜ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΜΟ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΜΒ εἶναι διπλασία τῆς ἐντὸς Ο (19, 1)· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΜΒ=ΜΑΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἑκάστη τῶν γωνιῶν πρὸς τὴν βάσιν, ΟΑΒ ἢ ΟΒΑ εἶναι διπλασία τῆς εἰς τὴν κορυφὴν Ο· ἄρα αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι κάμνουν ὁμοῦ πεντάκις τὴν γωνίαν Ο, καὶ οὕτως ἡ Ο εἶναι τὸ πέμπτον μέρος δύο ὀρθῶν, ἢ τὸ δέκατον τεσσάρων· ἄρα τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ δέκατον μέρος τῆς περιφερείας, καὶ ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Πόρισμα Α'. Ἐὰν ἀνὰ δύο δύο ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου θέλομεν σχηματίσει τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΗΙ.

Πόρισμα Β'. Οὔσης πάντοτε ΑΒ τῆς πλευρᾶς τοῦ δεκαγώνου, ἔστω ΑΛ ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου· τότε τὸ τόξον ΒΛ θέλει εἶναι, ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν, $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{15}$. λοιπὸν ἡ χορδὴ ΒΛ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαπενταγώνου ἢ κανονικοῦ πολυγώνου 15 πλευρῶν. Βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι τὸ τόξον ΓΛ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΓΒ.

Σχόλιον. Ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ἐὰν τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν του τόξα τμηθῶσι δίχα, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν ἡμιτόξων, θέλει σχηματισθῇ νέον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Οὕτως βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον ἠμπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων 8, 16, 32, κ. τ. λ., πλευρῶν. Ὡσαύτως τὸ ἑξάγωνον διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων 12, 24, 48, κ. τ. λ. πλευρῶν· τὸ δεκαπεντάγωνον διὰ τὴν τῶν πολυγώνων 30, 60, 120 κ. τ. λ. πλευρῶν (1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένου κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔ κ. τ. λ., νὰ περιγραφθῇ εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν ὅμοιον πολύγωνον, σχ. 160.

Εἰς τὴν στιγμὴν Τ, μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΗΘ ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ (πρό. 10, 2)· ἂς γένῃ τὸ αὐτὸ εἰς τὸ μέσον ἑκάστου τῶν ἄλλων τόξων ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. αἱ ἐφαπτόμεναι θέλουν σχηματίσει διὰ τῶν κοινῶν τομῶν των τὸ κανονικὸν περιγεγραμμένον πολύγωνον ΗΘΙΚ' κ. τ. λ., ὅμοιον, μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον

---

(1) Ἐπὶ πολὺ ἐνομίσθη ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα ἦσαν τὰ μόνα τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ ἐγγραφθοῦν διὰ τῶν διδασκαλιῶν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας, ἢ, ὅπερ ταὐτόν, διὰ τῆς λύσεως τῶν πρωτοβαθμίων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων: ἀλλ' ὁ Κ. Gauss ἔδειξεν, εἰς σύγγραμμά τι ἐπιγραφόμενον Disquisitiones Arithmeticæ, Lipsiæ, 1801 ὅτι δυνατὸν νὰ ἐγγραφθῇ δι' ὁμοίων μέσων τὸ κανονικὸν πολύγωνον δεκαεπτὰ πλευρῶν, καὶ ἐν γένει τὸ τῶν $2^{\nu}+1$ πλευρῶν, φθάνει μόνον $2^{\nu}+1$ νὰ ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος. Ο. Σ.

Εὐκόλως βλέπομεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ τρία σημεῖα Ο, Β, Θ εἶναι ἐπ' εὐθείας· διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΤΘ, ΟΘΝ, ἔχουν κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΘ, καὶ τὴν πλευρὰν ΟΤ=ΟΝ· λοιπὸν εἶναι ἴσα (18, 1)· ἐπομένως ἡ γωνία ΤΟΘ=ΘΟΝ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ ΟΘ διέρχεται διὰ τῆς στιγμῆς Β μέσου τοῦ τόξου ΤΝ: διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ στιγὴ Ι εἶναι ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΟΓ, κ. τ. λ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ΘΙ τῇ ΒΓ, ἡ γωνία ΗΘΙ=ΑΒΓ (26, 1)· ὡσαύτως ΘΙΚ'= ΒΓΔ, κ. τ. λ. λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἔχομεν ΗΘ : ΑΒ : : ΟΘ : ΟΒ, καὶ ΘΙ : ΒΓ : : ΟΘ : ΟΒ· λοιπὸν ΗΘ : ΑΒ : : ΘΙ : ΒΓ. ἀλλὰ ΑΒ=ΒΓ, ἄρα ΗΘ=ΘΙ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΘΙ= ΙΚ', κ. τ. λ. ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι· δέδεικται δὲ ὅτι καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· κανονικὸν ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.

Πόρισμα Α'. Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἐδίδετο τὸ περιγραμμένον πολύγωνον ΗΘΙΚ', κ. τ. λ., καὶ ἔπρεπε διὰ μέσου τούτου νὰ διαγράψωμεν τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον ΑΒΓ, κ. τ. λ., βλέπομεν ὅτι ἀρκοῦσε νὰ ἄξωμεν εἰς τὰς κορυφὰς Η, Θ, Ι κ. τ. λ. τοῦ δεδομένου πολυγώνου τὰς γραμμὰς ΟΗ, ΟΘ κ. τ. λ., αἱ ὁποῖαι ἤθελον συναπαντήσει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰς στιγμὰς Α, Β, Γ, κ. τ. λ. νὰ ἑνώσωμεν ἀκολούθως ταύτας τὰς στιγμὰς διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. αἱ ὁποῖαι ἤθελον σχηματίσει τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. Ἠμπορούσαμεν ὡσαύτως, εἰς τὴν ἰδίαν περίστασιν, νὰ ἑνώσωμεν ἁπλῶς τὰς στιγμὰς τῆς ἀφῆς, Τ, Ν, Π, κ. τ. λ. διὰ τῶν χορδῶν ΤΝ, ΝΠ, κ. τ. λ. καὶ ἐπίσης ἠθέλαμεν ἔχει ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον τῷ περιγεγραμμένῳ.

Πόρισμα Β'. Ἠμποροῦμεν ἄρα νὰ περιγράψωμεν εἰς δεδομένον κύκλον ὅσα κανονικὰ πολύγωνα ἠξεύρομεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τοῦτον τὸν κύκλον, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΗΘΙΚ', κ. τ. λ. Τὸ τρίγωνον ΗΟΘ ἔχει διὰ μέτρον ΗΘ $\times$ $\frac{1}{2}$ΟΤ, τὸ τρίγωνον ΟΘΙ ἔχει μέτρον ΘΙ $\times \frac{1}{2}$ ΟΝ· ἀλλὰ ΟΝ $=$ ΟΤ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ὁμοῦ ἔχουν μέτρον (ΗΘ $+$ ΘΙ) $\times \frac{1}{2}$ ΟΤ· ἐξακολουθοῦντες οὕτω διὰ τὰ ἄλλα τρίγωνα, βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων, ἢ τὸ ὅλον πολύγωνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ', κ. τ. λ. ἢ τὴν περίμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ΟΤ. σχ. 160.

Σχόλιον. Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ΟΤ ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρον ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν: ἐνίοτε καλεῖται ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Θεώρημα.

Αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, καὶ ὁμοίως ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων· αἱ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων ἀκτίνων.

Ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος πολυγώνων, Ο τὸ κέντρον του, καὶ ἑπομένως ΟΑ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ ΟΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου· ἔστω παρομοίως αβ ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου, Ο τὸ κέντρον του, οα καὶ οδ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων περιγεγραμμένου τε καὶ ἐγγεγραμμένου. Αἱ περίμετροι τῶν δύο πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ αβ· ἀλλ' αἱ γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι· διότι ἑκάστη εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας Β καὶ β· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, αβο εἶναι ὅμοια, καθὼς καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΟ, αδο· ἄρα ΑΒ : αβ :: ΑΟ : αο :: ΔΟ : δο· ἄρα αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες ΑΟ, αο, τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, καὶ ὁμοίως ὡς αἱ ἀκτῖνες ΔΟ, δο τῶν ἐγγεγραμμένων.

Αἱ ἐπιφάνειαι των ἰδίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αβ· ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ΑΟ, αο, ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων ΟΔ, οδ· ἕπεται ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ΑΟ, αο, ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων ΟΔ, οδ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Λῆμμα.

Κάθε καμπύλη ἢ πολύγωνος γραμμὴ ἥτις περικυκλοῖ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου ἕως τοῦ ἄλλου τὴν κυρτὴν γραμμὴν AMB εἶναι μακρυτέρα τῆς περικυκλουμένης γραμμῆς AMB.

Εἴπομεν ἤδη, ὅτι κυρτὴν γραμμὴν ἐννοοῦμεν καμπύλην ἢ πολύγωνον γραμμὴν, ἢ μέρος καμπύλην καὶ μέρος πολύγωνον, τοιαύτην ὥστε εὐθεῖα γραμμὴ νὰ μὴ ἠμπορῇ νὰ τὴν τέμνῃ εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Ἐὰν ἡ γραμμὴ AMB εἶχε μέρη εἰσέχοντα ἢ ἐσοχὰς, δὲν ἤθελεν εἶναι πλέον κυρτὴ, διότι εὔκολον εἶναι νὰ ἴδωμεν ὅτι εὐθεῖα γραμμὴ ἠμπόρει νὰ τὴν τέμνῃ εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Τὰ τόξα τοῦ κύκλου εἶναι οὐσιωδῶς κυρτά· διότι εὐθεῖα γραμμὴ δὲν ἠμπόρει νὰ τέμνῃ τόξον κύκλου εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα· ἀλλ' ἡ προκειμένη πρότασις ἐκτείνεται εἰς ὁποιανδήποτε γραμμὴν ἥτις πληροῖ εἰς τὴν ἀπαιτουμένην συνθήκην.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ γραμμὴ AMB δὲν εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς περικυκλούσας αὐτὴν, πρέπει μεταξὺ τούτων νὰ ὑπάρχῃ γραμμὴ βραχυτέρα ὅλων τῶν ἄλλων, ἡ ὁποία νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς AMB, ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ τὴν AMB. Ἔστω ΑΓΔΕΒ ἡ περικυκλοῦσα αὕτη γραμμή· μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν ὅπου θέλομεν ἂς ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΠΚ, ἥτις νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν AMB, ἢ τοὐλάχιστον νὰ ἅπτεται αὐτῆς· ἡ εὐθεῖα ΠΚ εἶναι βραχυτέρα τῆς ΠΓΔΕΚ· ἐὰν λοιπὸν ἀντὶ τῆς ΠΓΔΕΚ ἀντικαταστήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΠΚ, θέλομεν ἔχει τὴν περικυκλοῦσαν ΑΠΚΒ βραχυτέραν τῆς ΑΠΔΚΒ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, αὕτη πρέπει νὰ ἦναι βραχυτέρα ἀπὸ ὅλας· λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις δὲν ἠμπορεῖ νὰ ὑπάρξῃ· λοιπὸν ὅλαι αἱ περικυκλοῦσαι γραμμαὶ εἶναι μακρύτεραι τῆς AMB. σχ. 162.

Σχόλιον. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν δείξει ὅτι μία κυρτὴ καὶ πανταχόθεν κεκλεισμένη γραμμὴ AMB, εἶναι βραχυτέρα κάθε γραμμῆς ἥτις ἤθελε τὴν περικυκλοῖ ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη, εἴτε ἡ περικυκλοῦσα ΖΗΘ ἅπτεται τῆς AMB εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, εἴτε δὲν ἔχει κἀνὲν κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν. (1) σχ. 163.

---

(1) Δὲν πρέπει νὰ θαυμάζῃ τις ἐὰν εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀπαντᾷ ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν ἀληθειῶν τὰς ὁποίας οἱ μόνοι τοῦ κοινοῦ αἰσθήματος ἐστερημένοι ἠμποροῦν νὰ ἀρνηθοῦν. Ὁ Εὐκλείδης ἠναγκάζετο νὰ εὑρίσκῃ ἀποδείξεις τῶν τοιούτων ἀληθειῶν διὰ νὰ καταπείθῃ τοὺς πεισματώδεις ἐκείνους σοφιστὰς οἱ ὁποῖοι ἐνόμιζον δόξαν τους νὰ ἐναντιόνωνται καὶ εἰς αὐτὰς

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Λῆμμα.

Δεδομένων δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν, δυνατὸν εἶναι πάντοτε νὰ ἐγγραφθῇ εἰς τὴν μεγαλητέραν κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντῶσι τὴν μικροτέραν, καὶ ὡσαύτως νὰ περιγραφθῇ εἰς τὴν μικροτέραν κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντῶσι τὴν μεγαλητέραν· εἰς τρόπον ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιστάσεις αἱ πλευραὶ τοῦ γεγραμμένου πολυγώνου νὰ περικλείωνται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἔστωσαν ΓΑ, ΓΒ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο δεδομένων περιφερειῶν· εἰς τὴν στιγμὴν Α ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΔΕ περατουμένη εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν εἰς Δ καὶ Ε: ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τὴν μεγαλητέραν περιφέρειαν ἓν ἐκ τῶν κανονικῶν πολυγώνων ὅσα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφθῶσι διὰ τῶν προηγουμένων προβλημάτων· ἀκολούθως ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν τόξα, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν ἡμιτόξων· οὕτω θέλει σχηματισθῇ κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ἂς συνεχισθῇ ἡ διχοτομὴ τῶν τόξων ἕως οὗ νὰ προκύψῃ πολύγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ὑποτείνῃ τόξον μικρότερον τοῦ ΔΒΕ. Ἔστω ΜΒΝ τὸ τόξον τοῦτο (τοῦ ὁποίου ἡ στιγμὴ τῆς ἡμισείας ὑποτίθεται εἰς Β)· φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ χορδὴ ΜΝ θέλει ἀπέχει περισσότερον τοῦ κέντρου παρὰ ἡ ΔΕ, καὶ οὕτω τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ΜΝ εἶναι ἡ πλευρά, δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτίς. σχ. 164.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΜ, ΓΝ αἵτινες συναπαντοῦν τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ εἰς Π καὶ Κ· ΠΚ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ εἰς τὴν μεγάλην καὶ εἰς τὴν μικρὰν περιφέρειαν ὁμοίου μὲ τὸ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ΜΝ. Τώρα φανερὸν εἶναι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν ΠΚ, δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ τὴν μεγάλην περιφέρειαν, διότι ΓΠ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΜ.

Διὰ τῆς αὐτῆς λοιπὸν κατασκευῆς ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν

τὰς αὐτοφανεῖς ἀληθείας. Τίς, παραδείγματος χάριν, δὲν εἶναι ἐσωτερικῶς πεπεισμένος ὅτι τὸ περιέχον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ περιεχομένου; καὶ μ᾽ ὅλον τοῦτο εἶναι χρεία ἀποδείξεως διὰ τοὺς ἀρνουμένους τοιαύτην ἀλήθειαν ἤγουν τοὺς στερημένους τοῦ κοινοῦ αἰσθήματος· ἀγκαλὰ αἱ τοιούτου εἴδους ἀλήθειαι μᾶλλον σκοτίζονται ἀπὸ τὰς ἀποδείξεις παρ᾽ ὅ,τι διασαφίζονται. — Ο. Μ.

κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν, καὶ ὅμοιον περιγεγραμμένον εἰς τὴν μικρὰν πολύγωνον, τὰ ὁποία νὰ ἔχουν πλευρὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν.

Σχόλιον. Ἐὰν ἔχωμεν δύο συγκεντρικοὺς τομεῖς ΖΓΗ, ΙΓΘ, ἠμποροῦμεν παρομοίως νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸν μεγαλήτερον μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου, ἢ νὰ περιγράψωμεν εἰς τὸν μικρότερον μερίδα ὁμοίου πολυγώνου, εἰς τρόπον ὥστε αἱ περίμετροι τῶν δύο πολυγώνων νὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν: ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΖΒΗ διαδοχικῶς εἰς 2, 4, 8, 16 κ. τ. λ. ἴσα μέρη ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς μέρος μικρότερον τοῦ ΔΒΕ.

Ἐνταῦθα καλοῦμεν μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου τὸ περατούμενον σχῆμα ἀπὸ σειρὰν ἴσων χορδῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τόξον ΖΗ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου ἕως τοῦ ἄλλου. Ἡ μερὶς αὕτη ἔχει τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἔχει τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας, εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἐγγράψιμος καὶ περιγράψιμος εἰς τὸν κύκλον. Μ' ὅλον τοῦτο δὲν ἀποτελεῖ μέρος ἑνὸς κυρίως κανονικοῦ πολυγώνου, παρὰ ὁσάκις τὸ ὑποτεινόμενον ἀπὸ μίαν τῶν πλευρῶν της τόξον εἶναι πηλίκον μέρος τῆς περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Θεώρημα.

Αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες, καὶ αἱ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Ἂς σημειώσωμεν, χάριν συντομίας, διὰ περιφ. ΓΑ τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΒ : : ΓΑ : ΟΒ. σχ. 165.

Διότι, ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ἔχει χώραν, ΓΑ θέλει εἶναι πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς τέταρτον τινὰ ὅρον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ περιφ. ΟΒ: ἂς τὸν ὑποθέσωμεν δὲ μικρότερον, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, ΓΑ : ΟΒ : : περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ.

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΟΒ εἶναι ἡ ἀκτὶς κανονικὸν πολύγωνον ΕΖΗΚΛΕ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΟΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς (πρό. 10)· ἂς ἐγγράψωμεν ὅμοιον ΜΝΤΣΜ εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτῖνος ΓΑ.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, αἱ περίμετροί των ΜΝΠΣΜ, ΕΖΗΚΕ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΟΒ, τῶν περιγεγραμμένων κύκλων (πρό. 8), καὶ οὕτως ΜΝΠΣΜ : ΕΖΗΚ'Ε : : ΓΑ : ΟΒ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΓΑ : ΟΒ : : περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ· λοιπὸν ΜΝΠΣΜ : ΕΖΗΚ'Ε : : περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ. Τώρα ἡ ἀναλογία αὕτη εἶναι ἀδύνατος, διότι ἡ περίμετρος ΜΝΠΣΜ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περιφ. ΓΑ (πρό, 9), καὶ ἐξ ἐναντίας ΕΖΗΚ'Ε εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περιφ. ΟΔ· ἀδύνατον λοιπὸν ΓΑ νὰ ἦναι πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν ἀπὸ περιφ. ΟΒ, ἤ, μὲ λέξεις γενικωτέρας, ἀδύνατον εἶναι ἀκτὶς πρὸς ἀκτῖνα, ὡς ἡ μὲ τὴν πρώτην ἀκτῖνα γεγραμμένη περιφέρεια πρός τινα περιφέρειαν μικροτέραν παρὰ τὴν μὲ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα γεγραμμένην.

Ἐντεῦθεν συνάγω, ὅτι οὐδὲ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν, ΓΑ πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μεγαλητέραν τῆς περιφ. ΟΒ· διότι τούτου δοθέντος, ἠθέλαμεν ἔχει, ἀντιστρέφοντες τοὺς λόγους: ΟΒ πρὸς ΓΑ ὡς περιφέρεια μεγαλητέρα τῆς περιφ. ΟΒ πρὸς περιφ. ΓΑ, ἤ, ὅπερ ταὐτὸν, ὡς περιφ. ΟΒ πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν ἀπὸ περιφ. ΓΑ· λοιπὸν ἀκτὶς ἤθελεν εἶναι πρὸς ἀκτῖνα ὡς ἡ μὲ τὴν πρώτην ἀκτῖνα γεγραμμένη περιφέρεια πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν τῆς μὲ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα γεγραμμένης περιφερείας, τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἀδύνατον.

Ἐπειδὴ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ΓΑ : ΟΒ : : περιφ. ΓΑ : Χ οὔτε μικρότερος οὔτε μεγαλήτερος ἀπὸ περιφ. ΟΒ ἠμπορεῖ νὰ ἦναι, πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ περιφ. ΟΒ· λοιπὸν αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ καὶ κατασκευῆς ἠθέλαμεν δείξει ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Δὲν λέγομεν τίποτε περισσότερον ἐπὶ τῆς προτάσεως ταύτης, ἥτις ἄλλως εἶναι πόρισμα τῆς ἀκολούθου.

Πόρισμα. Τὰ ὅμοια τόξα ΑΒ, ΔΕ, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνές των ΑΓ, ΔΟ, καὶ οἱ ὅμοιοι τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ, εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων ἀκτίνων. σχ. 166.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Ο (ὅρ. 3. βιβλ. 3)· ἀλλ' ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΑΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ (17, 2), καὶ ἡ γωνία Ο εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΔΕ πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτῖνος ΟΔ· λοιπὸν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν ὁποίων ἀποτελοῦν μέρος: αἱ περιφέρειαι αὗται εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΔΟ, λοιπὸν τόξον ΑΒ : τόξον ΔΕ : : ΑΓ : ΔΟ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ εἶναι ὡς οἱ ὅλοι κύκλοι, οὗτοι δὲ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων· λοιπὸν τομ. ΑΓΒ: τομ. ΔΟΕ::$\overline{\text{ΑΓ}}^2$:$\overline{\text{ΔΟ}}^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος του.

Ἂς σημειώσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ἐπιφ. ΓΑ$=\frac{1}{2}$ ΓΑ$\times$ περιφ. ΓΑ.

Διότι ἐὰν $\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$ περιφ. ΓΑ δὲν ἦναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτίς, ἡ ποσότης αὕτη θέλει εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου κύκλου. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ κατὰ πρῶτον ὅτι εἶναι τὸ μέτρον κύκλου μεγαλητέρου, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, $\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$ περιφ. ΓΑ$=$ ἐπιφ. ΓΒ. σχ. 167.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ ἂς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον ΔΕΖΗ κ. τ. λ, αἱ πλευραὶ τοῦ ὁποίου νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΒ (πρό. 10)· ἡ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του ΔΕ$+$ΕΖ$+$ΖΗ$+$ κ. τ. λ., ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ΑΓ (πρό. 7): ἀλλ' ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, διότι τὴν περικυκλοῖ πανταχόθεν· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ, κ. τ. λ. εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ $\frac{1}{2}$ΑΓ$\times$ περ. ΑΓ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κύκλου τῆς ἀκτῖνος ΓΒ· λοιπὸν τὸ πολύγωνον ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ κύκλου· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον ὡς περιεχόμενον· ἀδύνατον λοιπὸν $\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$ περιφ. ΓΑ νὰ ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ ἐπιφ. ΓΑ, ἤ, μὲ ἄλλας λέξεις, ἀδύνατον ἡ περιφέρεια τινὸς κύκλου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του νὰ μετρῇ κύκλον μεγαλήτερον.

Λέγω δεύτερον, ὅτι τὸ ἴδιον γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι τὸ μέτρον κύκλου μικροτέρου· καί, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξω σχῆμα, ὑποθέτω ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΒ. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{2}$ΓΒ$\times$ περιφ. ΓΒ δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ κύκλον μικρότερον, π. χ. τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ. Τῷ ὄντι, ἔστω εἰ δυνατόν, $\frac{1}{2}$ΓΒ$\times$ περιφ. ΓΒ$=$ ἐπιφ. ΓΑ.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ, κ. τ. λ. θέλει ἔχει μέτρον (ΔΕ $+$ ΕΖ$+$ κ.τ.λ.) $\times\frac{1}{2}$ΓΑ· ἀλλ' ἡ περίμετρς ΔΕ $+$ ΕΖ $+$ ΖΗ$+$ κ.τ.λ.

εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περιφ. ΓΒ ἥτις τὴν περικυκλόνει πανταχόθεν· λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$ περιφ. ΓΒ, καὶ πολλὺ περισσότερον ἀπὸ $\frac{1}{2}$ΓΒ$\times$ περιφ. ΓΒ. Ἡ τελευταῖα αὕτη ποσότης, ἐξ ὑποθέσεως, μετρεῖ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα ΓΑ, λοιπὸν τὸ πολύγωνον ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ὅπερ ἄτοπον· ἀδύνατον λοιπὸν ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του, νὰ ἦναι τὸ μέτρον κύκλου μικροτέρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἰδίου τούτου κύκλου.

Π ό ρ ι σ μ α Α΄. Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς τομέως εἶναι ἴση μὲ τὸ τόξον τοῦ τομέως τούτου πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. σχ. 168.

Διότι ὁ τομεὺς ΑΓΒ εἶναι πρὸς τὸν ὅλον κύκλον ὡς τὸ τόξον ΑΜΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ΑΒΔ (17, 2) ἢ ὡς ΑΜΒ$\times$ $\frac{1}{2}$ ΑΓ πρὸς ΑΒΔ$\times$$\frac{1}{2}$ΑΓ. Ἀλλ' ὁ ὅλος κύκλος$=$ΑΒΔ$\times$$\frac{1}{2}$ΑΓ· λοιπὸν ὁ τομεὺς ΑΓΒ ἔχει μέτρον ΑΜΒ$\frac{1}{2}$$\times$ΑΓ.

Π ό ρ ι σ μ α Β΄. Ἂς καλέσωμεν π τὴν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ μονάς· ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ἢ ὡς αἱ διάμετροι, ἠμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν· ἡ διάμετρος 1 εἶναι πρὸς τὴν περιφέρειάν της π ὡς ἡ διάμετρος 2ΓΑ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ· εἰς τρόπον ὥστε 1 : π : : 2ΓΑ : περιφ. ΓΑ· λοιπὸν περιφ. ΓΑ $=2\pi\times$ΓΑ· πολυπλασιάζοντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέρη ἐπὶ $\frac{1}{2}$ΓΑ, ἔχομεν $\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$ περιφ. ΓΑ$=\pi\times\overline{\Gamma A}^{2}$, ἢ ἐπιφ. ΓΑ$=\pi.\,\overline{\Gamma A}^{2}$. λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὸ γ ι ν ό μ ε ν ο ν τ ο ῦ τ ε τ ρ α γ ώ ν ο υ τ ῆ ς ἀ κ τ ῖ ν ό ς τ ο υ ἐ π ὶ τ ὸ ν σ τ α θ ε ρ ὸ ν ἀ ρ ι θ μ ὸ ν π, ὅ σ τ ι ς π α ρ ι σ τ ά ν ε ι τ ὴ ν π ε ρ ι φ έ ρ ε ι α ν, τ ῆ ς ὁ π ο ί α ς ἡ δ ι ά μ ε τ ρ ο ς ε ἶ ν α ι 1, ἢ τ ὸ ν λ ό γ ο ν τ ῆ ς π ε ρ ι φ ε ρ ε ί α ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν δ ι ά μ ε τ ρ ο ν. σχ. 165.

Παρομοίως ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα ΟΒ θέλει εἶναι ἴση μὲ $\pi\times\overline{OB}^{2}$. Τώρα $\pi\times\overline{\Gamma A}^{2} : \pi\times\overline{OB}^{2} : : \overline{\Gamma A}^{2} : \overline{OB}^{2}$· λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ τὸ προλαβὸν θεώρημα.

Σ χ ό λ ι ο ν. Εἴπομεν ἤδη, ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τετραγώνου ἴσου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν μὲ κύκλον γνωστῆς ἀκτῖνος. Τώρα ἐδείξαμεν, ὅτι ὁ κύκλος ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος, τὸ δὲ ὀρθογώνιον τοῦτο μετατρέπεται εἰς τετράγωνον, ἐὰν ληφθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο του στάσεων (προβ. 6. βιβλ. 3). Οὕτω τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ἄγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς περιφερείας, ὅταν ἡ ἀκτὶς ἦναι γνωστή, καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ἡ γνῶσις τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἕως τοῦ νῦν δὲν ἐστάθη δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἄλλως ὁ λόγος οὗτος, παρὰ ὡς ἔγγιστα· πλὴν ἡ προσέγγισις τόσον μακρὰν προεκτάνθη, ὥστε ἡ γνῶσις τοῦ ἀκριβοῦς λόγου δὲν ἤθελεν ἔχει τι πλέον ἀπὸ τὴν τοῦ ἔγγιστα. Οὕτω τὸ ζήτημα τοῦτο, τὸ ὁποῖον τοσοῦτον ἐπησχόλησε τοὺς Γεωμέτρας, ὅταν ὀλίγον ἦσαν γνωσταὶ αἱ μέθοδοι τῆς προσεγγίσεως, ἐξωρίσθη τώρα καὶ κατετάχθη μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιττῶν ζητημάτων περὶ τὰ ὁποῖα εἰς ἄλλους δὲν εἶναι συγχωρημένον νὰ ἐνασχολῶνται, παρὰ εἰς τοὺς μόλις τὰς πρώτας ἰδέας τῆς Γεωμετρίας ἔχοντας.

Ὁ Ἀρχιμήδης ἔδειξεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον περιέχεται μεταξὺ $3\frac{10}{70}$ καὶ $3\frac{10}{71}$ οὕτω $3\frac{1}{7}$ ἢ $\frac{22}{7}$ εἶναι πολλὰ προσεγγίζουσα τιμὴ εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον ἐπαραστήσαμεν διὰ π, καὶ ἡ πρώτη αὕτη προσέγγισις εἶναι κατὰ πολλὰ ἐν χρήσει διὰ τὴν ἁπλότητά της. Ὁ Μέτιος εὗρε διὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πολὺ πλέον προσεγγίζουσαν τιμὴν $\frac{355}{113}$. Τέλος ἡ τιμὴ τοῦ π, ἀναπτυχθεῖσα μέχρι τάξεως τινὸς δεκαδικῶν, εὑρέθη ὑπὸ ἄλλων ὑπολογιστῶν (calculateurs) 3,14159265358979 32 κ. τ. λ. καὶ ἔλαβον τὴν ὑπομονὴν νὰ προεκτείνουν τὰ δεκαδικὰ ταῦτα μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ εἰκοστοῦ ἑβδόμου ἢ μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ τεσσαρακοστοῦ. Φανερὸν ὅτι τοιαύτη προσέγγισις ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἀλήθειαν, καὶ ἄλλως δὲν γνωρίζομεν τὰς ῥίζας τῶν ἀτελῶν δυνάμεων.

Εἰς τὰ ἀκόλουθα προβλήματα θέλομεν ἐξηγήσει δύο ἀπὸ τὰς ἁπλουστέρας στοιχειώδεις μεθόδους διὰ τὴν εὕρεσιν τούτων τῶν προσεγγίσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τῶν ἐπιφανειῶν κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ ὁμοίου περιγεγραμμένου, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένου τε καὶ περιγεγραμμένου τῶν ἐχόντων διπλασίας τὸν ἀριθμὸν πλευράς.

Ἔστω ΑΒ μὲν ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ΕΖ δὲ, παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, καὶ Γ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΑΜ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΠ, ΒΚ, ἡ χορδὴ ΑΜ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ἔχοντος διπλασίας τὸν ἀριθμὸν πλευράς, καὶ ΠΚ διπλασία τῆς ΠΜ θέλει εἶναι ἡ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου πολυγώνου (πρό. 6). Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ θέλει ἔχει χώραν εἰς τὰς διαφόρους ἴσας μὲ τὴν ΑΓΜ γωνίας, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν μόνον τὴν γωνίαν ΑΓΜ, καὶ τὰ εἰς αὐτὴν περιεχόμενα τρίγωνα θέλουν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὅλα πολύγωνα. Ἔστω Α ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ὁποίου ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ, Β ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, Α′ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου ΑΜ εἶναι ἡ πλευρὰ, Β′ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου· Α καὶ Β εἶναι γνωστὰ, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῶσι Α′ καὶ Β′. σχ. 169.

1.ον Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΓΜ τῶν ὁποίων Α εἶναι κοινὴ κορυφὴ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΓΔ, ΓΜ· ἄλλως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὡς τὰ πολύγωνα Α καὶ Α′, διότι εἶναι ὅμοια μέρη τούτων, καὶ τὰ ὅμοια μέρη δύω ποσοτήτων εἶναι ὡς αὗται αἱ ποσότητες· λοιπὸν Α : Α′ : : ΓΔ : ΓΜ. Τὰ τρίγωνα ΓΑΜ, ΓΜΕ, τῶν ὁποίων Μ εἶναι κοινὴ κορυφὴ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν ΓΑ, ΓΕ· τὰ ἴδια τρίγωνα εἶναι ὡς τὰ πολύγωνα Α′ καὶ Β διὰ τὸν εἰρημένον λόγον· λοιπὸν Α′ : Β : : ΓΑ : ΓΕ. Ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΜΕ, ἔχομεν ΓΔ : ΓΜ : : ΓΑ : ΓΕ· λοιπὸν Α : Α′ : : Α′ : Β· λοιπὸν τὸ πολύγωνον Α′ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ζητουμένων, εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο γνωστῶν πολυγώνων Α καὶ Β, καὶ ἐπομένως ἔχομεν $A' = \sqrt{(A \times B)}$.

2.ον Ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ ὕψους ΓΜ, τὸ τρίγωνον ΓΠΜ εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΠΕ ὡς ΠΜ πρὸς ΠΕ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΓΠ τέμνει δίχα τὴν γωνίαν ΜΓΕ, ἔχομεν (17, 3) ΠΜ : ΠΕ : : ΓΜ : ΓΕ : : ΓΔ : ΓΑ : : Α : Α′· λοιπὸν ΓΠΜ : ΓΠΕ : : Α : Α′, καὶ ἀκολούθως ΓΠΜ : ΓΠΜ + ΓΠΕ, ἢ ΓΜΕ : : Α : Α + Α′. Ἀλλὰ ΓΜΠΑ ἢ 2ΓΠΜ καὶ ΓΜΕ ὡς ὅμοια μέρη τῶν πολυγώνων Β′ καὶ Β εἶναι ἀναμεταξύ των ὡς τὰ ἴδια πολύγωνα· λοιπὸν Β′ : Β : : 2Α : Α + Α′. Ἤδη ἐπροσδιορίσθη Α′· διὰ τῆς νέας ταύτης ἀναλογίας προσδιορίζεται Β′, καὶ ἔχομεν $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$ λοιπὸν διὰ μέσου τῶν πολυγώνων Α καὶ Β εὔκολον εἶναι νὰ εὑρεθῶσι τὰ πολύγωνα Α′ καὶ Β′ τὰ ὁποῖα ἔχουν διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἔστω ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου $= 1$, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου θέλει εἶναι $\sqrt{2}$ (πρό. 3), ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἴση μὲ τὴν διάμετρον 2· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου $= 2$, καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου $= 4$. Τώρα ἐὰν κάμωμεν $A = 2$ καὶ $B = 4$, θέλομεν εὑρεῖ διὰ τοῦ προλαβόντος τὸ ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον $A' = \sqrt{8} = 2,8284271$, καὶ τὸ περιγεγραμμένον $B' = \frac{16}{2+\sqrt{8}} = 3,3137085$. Γνωρίζοντες οὕτω τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον ὀκτάγωνον, εὑρίσκομεν διὰ μέσου τούτων τὰ πολύγωνα διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν· πρέπει ἐκ νέου νὰ ὑποθέσωμεν $A = 2,8284271$, $B = 3,3137085$, καὶ θέλομεν ἔχει $A' = \sqrt{(A \times B)} = 3,0614674$, καὶ $B' = \frac{2A' \times B}{A+A'} = 3,1825979$. Ἀκολούθως διὰ τῶν πολυγώνων τούτων προσδιορίζομεν τὰ 32 πλευρῶν, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτως ἕως οὗ νὰ μὴ ὑπάρχῃ πλέον διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου, τοὐλάχιστον εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκαδικῶν εἰς τὴν ὁποίαν μένομεν, καὶ ἥτις εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα εἶναι ἡ ἑβδόμη. Φθάσαντες εἰς ταύτην τὴν στιγμὴν λέγομεν οὕτως: ὁ κύκλος πάντοτε περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου· ἐὰν λοιπὸν ταῦτα δὲν διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων μέχρι τάξεως τινὸς δεκαδικῶν, ὁ κύκλος βέβαια δὲν θέλει διαφέρει ἀπὸ ταῦτα μέχρι τῆς ἰδίας τάξεως. Οὕτως ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου.

Ἰδοὺ ὁ ὑπολογισμὸς τούτων τῶν πολυγώνων προεκτανθεὶς ἕως οὗ νὰ μὴ διαφέρουν πλέον κατὰ τὰ ἑπτὰ πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία.

Ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν.	Ἐγγεγραμμένον πολύγωνον.	Περιγεγραμμένον πολύγωνον.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,3214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321

1024 . . .	3,1415729 . . .	3,1416025
2048 . . .	3,1415877 . . .	3,1415951
4096 . . .	3,1415914 . . .	3,1415933
8192 . . .	3,1415923 . . .	3,1415928
16384 . . .	3,1415925 . . .	3,1415927
32768 . . .	3,1415926 . . .	3,1415926

Ἐντεῦθεν συνάγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι = 3, 1415926. Δυνατὸν νὰ ἀμφιβάλλῃ τις διὰ τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ἐξ αἰτίας τῶν σφαλμάτων, τὰ ὁποῖα προέρχονται ἀπὸ τὰ παραβλεφθέντα μέρη· πλὴν ὁ ὑπολογισμὸς ἔγινε μὲ ἓν δεκαδικὸν περισσότερον, διὰ νὰ ἤμεθα βέβαιοι διὰ τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν μέχρι τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου.

Ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, οὔσης τῆς ἀκτῖνος 1, ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι 3,1415926 ἢ τῆς διαμέτρου οὔσης 1, ἡ περιφέρεια εἶναι 3,1415926· λοιπὸν ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἀνωτέρω σημειωθεὶς διὰ π εἶναι = 3,1413926.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Λῆμμα.

Τὸ τρίγωνον ΓΑΒ (σχ. 170) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἰσοσκελὲς ΔΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν γωνίαν Γ, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΓΕ ἴση τῇ ΓΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΓΑ καὶ ΓΒ. Περιπλέον, ἐὰν ἡ γωνία ΓΑΒ ἦναι ὀρθή, ἡ φερομένη κάθετος ΓΖ ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΓΑ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ.

Διότι 1.ον ἐξ αἰτίας τῆς κοινῆς γωνίας Γ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι πρὸς τὸ ἰσοσκελὲς ΔΓΕ ὡς ΑΓ × ΓΒ πρὸς ΔΓ × ΓΕ ἢ $\overline{\Delta\Gamma}^2$ (24, 3)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν $\overline{\Delta\Gamma}^2$ = ΑΓ × ΓΒ, ἢ ἐὰν ΔΓ ἦναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΑΓ, ΓΒ.

2.ον Ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΓΗΖ τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ, ἔχομεν (17, 3) ΑΗ : ΗΒ :: ΑΓ : ΓΒ, ὅθεν ἕπεται, ἐν συνθέσει, ΑΗ : ΑΗ + ΗΒ ἢ ΑΒ :: ΑΓ : ΑΓ + ΓΒ· ἀλλὰ ΑΗ εἶναι πρὸς ΑΒ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΓΗ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἢ 2 ΓΔΖ· ἄλλως, ἐὰν ἡ γωνία Α ἦναι ὀρθή, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΗ, ΓΔΖ, θέλουν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλουν δώσει ΑΓΗ : ΓΔΖ :: $\overline{\mathrm{A}\Gamma}^2$ $\overline{\Gamma\mathrm{Z}}^2$· λοιπόν,

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2 : 2\overline{\text{ΓΖ}}^2 :: \text{ΑΓ} : \text{ΑΓ}+\text{ΓΒ}.$$

Ἐὰν δὲ πολυπλασιασθῇ ὁ δεύτερος λόγος ἐπὶ ΑΓ, οἱ ἡγούμενοι ἀποβαίνουν ἴσοι, καὶ ἐπομένως $2\overline{\text{ΓΖ}}^2=\text{ΑΓ}\times(\text{ΑΓ}+\text{ΓΒ})$, ἢ $\overline{\text{ΓΖ}}^2=\text{ΑΓ}\times\frac{(\text{ΑΓ}+\text{ΓΒ})}{2}$· λοιπὸν 2ον ἐὰν ἡ γωνία Α ἦναι ὀρθή, ἡ κάθετος ΓΖ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΑΓ, καὶ ΓΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν κύκλον διαφέροντα ὅσον θέλομεν κανονικοῦ δεδομένου πολυγώνου.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ τετράγωνον ΒΜΝΠ· ἀπὸ τὸ κέντρον Γ ἂς κατεβάσωμεν τὴν κάθετον ΓΑ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΜΒ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν ΓΒ. σχ. 171.

Ὁ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ γραφόμενος κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον, ὁ δὲ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ περιγεγραμμένος εἰς τὸ ἴδιον· ὁ πρῶτος εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου, ὁ δεύτερος μεγαλήτερος· ἀλλὰ πρόκειται νὰ πλησιάσωμεν ταῦτα τὰ ὅρια.

Ἂς λάβωμεν ἑκάστην τῶν ΓΔ, ΓΕ ἴσην μὲ τὴν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ ΓΑ καὶ ΓΒ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν ΕΔ· τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΔΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον ΓΑΒ (πρό. 15)· ἂς κάμωμεν τὸ αὐτὸ δι' ἑκάστην τῶν ὀκτὼ γωνιῶν τοῦ τετραγώνου, θέλομεν σχηματίσει οὕτω κανονικὸν ὀκτάγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΒΜΝΠ. Ὁ γραφόμενος κύκλος μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΖ, μέσην ἀνάλογον μεταξὺ ΓΑ καὶ $\frac{\text{ΓΑ}+\text{ΓΒ}}{2}$, εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ὀκτάγωνον, ὁ δὲ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΔ περιγεγραμμένος· οὕτως ὁ πρῶτος θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ δεδομένου τετραγώνου, ὁ δεύτερος μεγαλήτερος· ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι πλησιέστερα μεταξὺ των παρ' ὅτι ἦσαν τὰ δύο πρῶτα· διότι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀκτίνων των ἥτις εἶναι δι' ὅλα των τὰ σημεῖα ἡ αὐτή, εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν πρώτων.

Ἐὰν τρέψωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΖ εἰς ἰσοδύναμον ἰσοσκελές, θέλομεν σχηματίσει κανονικὸν πολύγωνον δεκαέξ πλευρῶν, ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τοῦτο τὸ πολύγωνον εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου, ὁ δὲ περιγεγραμμένος μεγαλήτερος· ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι πλησιέστερα παρὰ τὰ πρῶτα. Ἡμπορούμεν νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως ἕως οὗ ὁ λόγος μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου νὰ διαφέρῃ ὅσον θέλομεν ἀπὸ τὸν τῆς ἰσότητος. Τότε οἱ δύο κύκλοι ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἰσοδύναμοι μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον.

Σχόλιον. Ἰδοὺ εἰς τί ἄγεται ἡ ζήτησις τῶν διαδοχικῶν ἀκτίνων· ἔστω α ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς ἓν τῶν εὑρεθέντων πολυγώνων, β ἡ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ ἴδιον πολύγωνον· ἔστωσαν α' καὶ β' αἱ ὅμοιαι ἀκτῖνες διὰ τὸ ἀκόλουθον πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, β' εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β, καὶ α' μεταξὺ α καὶ $\frac{\alpha+\beta}{2}$· εἰς τρόπον ὥστε $\beta'=\sqrt{(\alpha\times\beta)}$, καὶ $\alpha'=\sqrt{(\alpha\times\frac{\alpha+\beta}{2})}$· ἐὰν λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες α καὶ β ἑνὸς πολυγώνου ἦναι γνωσταί, εὐκόλως προσδιορίζομεν τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἀκολούθου· καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω ἕως οὗ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἀκτίνων νὰ γένῃ ἀναιπαίσθητος. Τότε ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη τούτων τῶν ἀκτίνων θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ ἰσοδυνάμου κύκλου μὲ τὸ τετράγωνον ἢ μὲ τὸ προτεθὲν πολύγωνον.

Ἡ μέθοδος αὕτη εὔκολον εἶναι νὰ βαλθῇ εἰς πρᾶξιν διὰ γραμμῶν, διότι ἄγεται εἰς τὴν εὕρεσιν μέσων διαδοχικῶν ἀναλόγων μεταξὺ γνωστῶν γραμμῶν· ἀλλ' ἡ ἐφαρμογή της εἰς ἀριθμοὺς ἀποβαίνει ἐπιτυχεστέρα, καὶ χορηγεῖ μίαν τῶν ἐπιτηδειοτέρων ἀπὸ ὅσας ἡ στοιχειώδης Γεωμετρία δύναται νὰ δώσῃ μεθόδων πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὡς ἔγγιστα λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον: Ἔστω ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου $=2$, ἡ πρώτη ἐγγεγραμμένη ἀκτὶς ΓΑ θέλει εἶναι 1, καὶ ἡ πρώτη περιγεγραμμένη ΓΒ, $\sqrt{2}$ ἢ 1, 4142136. Κάμνοντες λοιπὸν $\alpha=1$, $\beta=1,4142136$, εὑρίσκομεν $\beta'=1,1892071$, καὶ $\alpha'=1,0986841$. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι χρησιμεύουν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀκολούθων κατὰ τὸν τῆς συνεχείας νόμον.

Ἰδοὺ τὰ ἐξαγόμενα τοῦ ὑπολογισμοῦ γενομένου μέχρι ἑπτὰ ἢ ὀκτὼ ψηφίων διὰ τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

Ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων.	Ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων.
1,4142136	1,0000000.
1,8992071	1,0986841.
1,1430500	1,1210863.
1,1320149	1,1265639.

1,1292862 . . . . 1,1279257.
1,1286063 . . . . 1,1282657.

Ἤδη δ' ὅτι τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη, ἠμποροῦμεν ἀντὶ τῶν μέσων γεωμετρικῶν νὰ λάβωμεν τοὺς μέσους ἀριθμητικούς, οἵτινες δὲν διαφέρουν ἀπὸ τοὺς γεωμετρικοὺς παρὰ εἰς τὰ ὕστερα δεκαδικά. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἐργασία ἐπιτέμνεται πολύ, καὶ τὰ ἐξαγόμενα εἶναι·

1,1284360 . . . . 1,1283508.
1,1283934 . . . . 1,1283721.
1,1283827 . . . . 1,1283774.
1,1283801 . . . . 1,1283787.
1,1283794 . . . . 1,1283791.
1,1283792 . . . . 1,1283792.

Λοιπὸν 1,1283792 εἶναι περίπου ἡ ἀκτὶς τοῦ ἴσου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον κύκλου τοῦ ὁποίου τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 2. Ἐντεῦθεν εὔκολον εἶναι νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον· διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνός του πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π· ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν 4 διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1,1283792, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν τοῦ π, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν διὰ τούτου τοῦ ὑπολογισμοῦ ἴσην μὲ 3,1415926 κ.τ.λ., ὡς τὴν εὕρομεν δι' ἄλλης μεθόδου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Δ'. ΒΙΒΛΙΟΝ.

Ὁρισμοί.

Α'. Καλεῖται *μέγιστον* (maximum) ἡ μεγαλητέρα ποσότης ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας τοῦ ἰδίου εἴδους· *ἐλάχιστον* (minimum) ἡ μικροτέρα.

Οὕτως ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι *μέγιστόν τι* μεταξὺ ὅλων τῶν γραμμῶν αἵτινες ἑνόνουν δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, καὶ ἡ κάθετος εἶναι *ἐλάχιστόν τι* μεταξὺ ὅλων τῶν ἀπὸ δεδομένου σημείου εἰς δεδομένην εὐθεῖαν φερομένων εὐθειῶν.

Β'. Καλοῦνται σχήματα ἰσοπερίμετρα τὰ ἴσας περιμέτρους ἔχοντα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θεώρημα.

Μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου, τὸ μέγιστον εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο ἀπροσδιόριστοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ΑΓ=ΓΒ, καὶ ΑΜ+ΜΒ=ΑΓ+ΓΒ· λέγω ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τριγώνου ΑΜΒ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον. σχ. 172.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ=ΓΒ, ἂς γραφθῇ περιφέρεια συναπαντῶσα τὴν ΓΑ προεκβαλλομένην εἰς Δ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΒ· ἡ γωνία ΔΒΑ, ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ θέλει εἶναι ὀρθὴ (15, 2). Ἂς προεκβληθῇ ἡ κάθετος ΔΒ πρὸς τὸ Ν, ἂς γένῃ ΜΝ=ΜΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΝ. Τέλος ἐκ τῶν στιγμῶν Μ καὶ Γ ἂς καταβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΜΠ καὶ ΓΗ ἐπὶ τῆς ΔΝ. Ἐπειδὴ ΓΒ=ΓΔ καὶ ΜΝ=ΜΒ, ἔχομεν ΑΓ+ΓΒ=ΑΔ, καὶ ΑΜ+ΜΒ=ΑΜ+ΜΝ. Ἀλλὰ ΑΓ+ΓΒ=ΑΜ+ΜΒ· λοιπὸν ΑΔ=ΑΜ+ΜΝ· λοιπὸν ΑΔ>ΑΝ. Τώρα ἐπειδὴ ἡ πλαγία ΑΔ εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλαγίας ΑΝ, πρέπει νὰ ἀπομακρύνεται τῆς καθέτου περισσότερον· λοιπὸν ΔΒ>ΒΝ· ἄρα ΒΗ, ἡμίσεια τῆς ΒΔ (12,1) εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΒΠ ἡμισείας τῆς ΒΝ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΜ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των ΒΗ, ΒΠ· λοιπόν, ἐπειδὴ ΒΗ>ΒΠ, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς ΑΜΒ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Θεώρημα.

Μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μέγιστον ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας.

Διότι ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ μέγιστον πολύγωνον· ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ δὲν ἦναι ἴση τῇ ΓΔ, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΔ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΒΟΔ ἰσοπερίμετρον μὲ τὸ ΒΓΔ· τὸ τρίγωνον ΒΟΔ θέλει εἶναι μεῖζον τοῦ ΒΓΔ (πρό. 1), καὶ ἑπομένως τὸ πολύγωνον ΑΒΟΔΕΖ μεῖζον τοῦ ΑΒΓΔΕΖ· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τοῦτο δὲν ἤθελεν εἶναι τὸ μέγιστον ἀπὸ ὅσα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Πρέπει λοιπὸν ΒΓ=ΓΔ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΓΔ=ΔΕ, ΔΕ=ΕΖ κ. τ. λ· λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ μεγίστου πολυγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. σχ. 173.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς ποιούσας μεταξύ των γωνίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μέγιστον εἶναι εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο δεδομέναι πλευραὶ ἀποτελοῦν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, καὶ τὴν ΑΓ=ΑΔ· ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ ἦναι ὀρθή, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΒΑΔ εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἐν Α γωνεία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. σχ. 174.

Διότι ἐπειδὴ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἡ αὐτή, τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ, εἶναι ὡς τὰ ὕψη ΑΓ, ΔΕ: ἀλλ' ἡ κάθετος ΔΕ εἶναι βραχυτέρα τῆς πλαγίας ΑΔ ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΑΓ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μέγιστον πρέπει νὰ ἦναι τοιοῦτον ὥστε ὅλαι του αἱ γωνίαι νὰ ἐγγράφωνται εἰς ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἄγνωστος πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος.

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ μεγαλήτερον τῶν σχηματιζομένων πολυγώνων μὲ τὰς δεδομένας πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ μίαν τελευταίαν ΑΖ κατ' ἀρέσκιαν· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΔΖ. Ἐὰν ἡ γωνία ΑΔΖ δὲν ἦτον ὀρθή, ἠμπορούσαμεν, φυλάττοντες τὰ μέρη ΑΒΓΔ, ΔΕΖ ὡς ὑπάρχουν, νὰ αὐξήσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΖ, καὶ ἐπομένως τὸ ὅλον πολύγωνον, ἀποκαθιστῶντες τὴν γωνίαν ΑΔΖ ὀρθήν, κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν· ἀλλὰ τὸ πολύγωνον τοῦτο δὲν ἠμπορεῖ πλέον νὰ αὐξηνθῇ, διότι ὑποτίθεται ὅτι ἔφθασεν εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΔΖ εἶναι ἤδη ὀρθή. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας ΑΒΖ, ΑΓΖ, ΑΕΖ· λοιπὸν ὅλαι αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ τοῦ μεγίστου πολυγώνου εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀπροσδιόριστος πλευρὰ ΑΖ εἶναι ἡ διάμετρος. σχ. 175.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη δίδει χώραν εἴς τι ζήτημα· τουτέστιν ἐὰν ὑπάρχουν πολλοὶ τρόποι τοῦ σχηματίζειν πολύγωνον μὲ δεδομένας πλευράς, καὶ μίαν τελευταίαν ἄγνωστον, ἥτις νὰ ἦναι ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμέναι: δηλαδὴ ἐὰν ἦναι δυνατὸν ἀφ' οὗ εὑρεθῇ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχει τὴν ἰδιότητα, ὥστε ὅλαι του αἱ γωνίαι νὰ ἐγγράφωνται εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀπροσδιόριστος πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος, ἐάν, λέγω, τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἄλλην περιφέρειαν διαφορετικήν· διότι ἐὰν τοῦτο ἦναι δυνατόν, τότε ἤθελον ὑπάρχει ἄπειρα πολύγωνα ἔχοντα τὴν ἀπαιτουμένην ἰδιότητα τοῦ μεγίστου, καὶ ἐπομένως πολλὰ μέγιστα πολύγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀδύνατον. Πρὶν νὰ εἴπωμέν τι ἐπάνω εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἐὰν μία καὶ ἡ αὐτὴ χορδὴ ὑποτείνῃ τόξα γεγραμμένα μὲ διαφόρους ἀκτῖνας ΑΓ, ΑΔ, ἡ εἰς τὸ κέντρον γωνία ἐπιστηριζομένη ἐπὶ ταύτης τῆς χορδῆς θέλει εἶναι μικροτέρα εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μεγαλητέρα· οὕτως ΑΓΒ$<$ΑΔΒ. Τῷ ὄντι ἡ γωνία ΑΔΟ$=$ΑΓΔ$+$ΓΑΔ (27, 2)· λοιπὸν ΑΓΔ$<$ΑΔΟ, καὶ διπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέρη θέλομεν ἔχει ΑΓΒ$<$ΒΔΒ. σχ. 176.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Θεώρημα.

Εἷς μόνος τρόπος ὑπάρχει τοῦ σχηματίζειν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν τελευταίαν ἄγνωστον, ἥτις νὰ ἦναι ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμέναι.

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρήκαμεν κύκλον πληροῦντα εἰς τὸ ζήτημα· ἐὰν λάβωμεν μεγαλήτερον, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλουν ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίας εἰς τὸ κέντρον μικροτέρας. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων τῶν εἰς τὸ κέντρον τούτων γωνιῶν θέλει εἶναι μικρότερον ἀπὸ δύο ὀρθάς. Οὕτω τὰ ἄκρα τῶν δεδομένων πλευρῶν, δὲν φθάνουν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου· ἐὰν δὲ λάβωμεν κύκλον μικρότερον, τὸ ἄθροισμα τῶν εἰς τὸ κέντρον γωνιῶν ἤθελεν εἶναι μεῖζον δύο ὀρθῶν, καὶ οὔτε πλέον αἱ δεδομέναι πλευραὶ ἤθελον τελειόνει ἐπὶ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου· ἄρα τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολύγωνον εἰς ἕνα μόνον κύκλον ἠμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ. σχ. 175.

Σχόλιον. Ἠμποροῦμεν νὰ ἀλλάξωμεν κατ' ἀρέσκειαν τὴν τάξιν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. καὶ ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου πάντοτε θέλει εἶναι ἡ αὐτή, καθὼς καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου· διότι ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ τάξις τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ., ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμά των νὰ ἀποτελῇ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ τὸ πολύγωνον θέλει ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, διότι θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμικύκλιον μεῖον τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευράς, τὸ μέγιστον εἶναι τὸ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ εἰς κύκλον.

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖΗ τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, αβγδεζη τὸ μὴ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ σχηματισμένον μὲ ἴσας πλευράς, εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ = αβ, ΒΓ = βγ, κ.τ.λ· λέγω ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἄλλου· ἂς φερθῇ ἡ διάμετρος ΕΜ, ἂς ἐπιζευχθῶσι ΑΜ, ΜΒ· ἐπὶ τῆς αβ = ΑΒ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον αβγ ἴσον μὲ τὸ ΑΒΜ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ εμ. σχ. 177.

Δυνάμει τῆς Δ' προτάσεως, τὸ πολύγωνον ΕΖΗΑΜ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ εζηαμ, ἐκτὸς ἐὰν τὸ πολύγωνον τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμιπεριφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εμ ἤθελεν εἶναι ἡ διάμετρος· πλὴν ἐπειδή, τούτου δοθέντος, ἡ ἡμιπεριφέρεια αὕτη δὲν ἠμπορεῖ οὔτε ἐλάσσων οὔτε μείζων νὰ ἦναι τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς ὁποίας ΕΜ εἶναι ἡ διάμετρος κατὰ τὴν Ε' πρότασιν, μένει νὰ ἦναι ἴση· ἀλλὰ τότε τὰ δύο πολύγωνα ἤθελον εἶναι ἴσα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ πολύγωνον ΕΔΓΒΜ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ εδγβμ, ἐξαιρουμένης τῆς περιστάσεως καθ' ἣν ἤθελον εἶναι ἴσα. Λοιπὸν τὸ ὅλον πολύγωνον ΕΖΗΑΜΒΓΔΕ εἶναι μεῖζον τοῦ εζημβγδ, ἐκτὸς ἐὰν ἦναι ἴσα· ἀλλὰ δὲν εἶναι· διότι τὸ ἓν ἐγγράφεται εἰς τὸν κύκλον, καὶ τὸ ἄλλο ὑποτίθεται μὴ ἐγγράψιμον· λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον εἶναι τὸ μεγαλήτερον. Ἐὰν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΜ, αβμ, μένει τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ μεγαλήτερον τοῦ μὴ ἐγγραψίμου αβγδεζη.

Σχόλιον. Καθὼς εἰς τὴν Ε' πρότασιν ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ ὑπάρχῃ παρὰ εἷς μόνος κύκλος, καὶ ἑπομένως ἓν μόνον μέγιστον πολύγωνον τὸ ὁποῖον νὰ πληροῖ εἰς τὸ ζήτημα, καὶ τὸ πολύγωνον τοῦτο θέλει ἔχει τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, καθ' ὅποιον τρόπον καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν πλευρῶν

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Θεώρημα.

Τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι μέγιστον μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Διότι, κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα, τὸ μέγιστον πολύγωνον ἔχει ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας· καί, κατὰ τὸ προλαβόν, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς τὸν κύκλον· λοιπὸν τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Λῆμμα.

Δύο γωνίαι εἰς τὸ κέντρον μετρούμεναι εἰς διαφορετικοὺς κύκλους εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ περιεχόμενα τόξα διαιρούμενα διὰ τῶν ἀκτίνων.

Οὕτως ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τὴν γωνίαν Ο ὡς ὁ λόγος $\frac{AB}{A\Gamma}$ πρὸς τὸν λόγον $\frac{\Delta E}{\Delta O}$. σχ. 178.

Μὲ ἀκτῖνα ΟΖ ἴσην τῇ ΑΓ ἂς γραφθῇ τὸ τόξον ΖΗ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΟΔ, ΟΕ προεκβαλλομένων· ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων ἀκτίνων ΑΓ, ΟΖ, θέλομεν ἔχει κατὰ πρῶτον Γ : Ο : : ΑΒ : ΖΗ (πρ. 17, 2) ἢ : : $\frac{AB}{A\Gamma} : \frac{ZH}{ZO}$ ἔπειτα, ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τόξων ΖΗ, ΔΕ, ΖΗ : ΔΕ : : ΖΟ : ΔΟ (πρό. 11)· λοιπὸν ὁ λόγος $\frac{ZH}{ZO}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον $\frac{\Delta E}{\Delta O}$, καὶ ἑπομένως Γ : Ο : : $\frac{AB}{A\Gamma} : \frac{\Delta E}{\Delta O}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Θεώρημα.

Ἐκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τὸ ἔχον μεγαλήτερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι τὸ μεγαλήτερον.

Ἔστω ΔΕ ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἑνὸς τῶν πολυγώνων, Ο τὸ κέντρον του, ΟΕ τὸ ἀπόστημά του· ἔστω ΑΒ ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἄλλου πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον του, ΓΒ τὸ ἀπόστημά του. Ὑποθέτομεν τὰ κέντρα Ο καὶ Γ ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων ὁποιονδήποτε διάστημα ΟΓ, καὶ τὰ ἀποστήματα ΟΕ, ΓΒ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΓ: οὕτως ΔΟΕ καὶ ΑΓΒ θέλουν εἶναι αἱ εἰς τὸ κέντρον ἡμιγωνίαι τῶν πολυγώνων, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, αἱ γραμμαὶ ΓΑ, ΟΔ προεκβληθεῖσαι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς στιγμήν τινὰ Ζ· ἐκ ταύτης ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΟΓ ἡ κάθετος ΖΗ· ἐκ τῶν στιγμῶν Ο καὶ Γ, ὡς ἐκ κέντρων, ἂς γραφθῶσι τὰ τόξα ΗΙ, ΗΘ περατούμενα εἰς τὰς πλευρὰς ΟΖ, ΓΖ· σχ. 179.

Τούτου τεθέντος, ἔχομεν κατὰ τὸ προλαβὸν λῆμμα Ο : Γ : : $\frac{HI}{OH} : \frac{H\Theta}{\Gamma H}$· ἀλλὰ ΔΕ εἶναι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ πρώτου πολυγώνου ὡς ἡ γωνία Ο εἰς τέσσαρας ὀρθάς, καὶ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ δευτέρου ὡς ἡ γωνία Γ πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· λοιπόν, ἐπειδὴ αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι, ΔΕ : ΑΒ : : Ο : Γ, ἢ ΔΕ : ΑΒ : : $\frac{HI}{OH} : \frac{H\Theta}{\Gamma H}$. πολυπλασιάζοντες τοὺς ἡγουμένους ἐπὶ ΟΗ καὶ τοὺς ἑπομένους ἐπὶ ΓΗ, θέλομεν ἔχει ΔΕ $\times$ ΟΗ : ΑΒ $\times$ ΓΗ : : ΗΙ : ΗΘ. Ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΔΕ, ΟΖΗ, δίδουν ΟΕ : ΟΗ : : ΔΕ : ΖΗ, ὅθεν ἕπεται ΔΕ $\times$

ΟΗ = ΟΕ × ΖΗ· θέλομεν ἔχει παρομοίως ΑΒ × ΓΗ = ΓΒ × ΖΗ· λοιπὸν ΟΕ × ΖΗ : ΓΒ × ΖΗ :: ΗΙ : ΗΘ, ἢ ΟΕ : ΓΒ :: ΗΙ : ΗΘ. Ἐὰν λοιπὸν δείξωμεν ὅτι τὸ τόξον ΗΙ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τόξου ΗΘ, θέλει ἀκολουθήσει ὅτι τὸ ἀπόστημα ΟΕ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΓΒ.

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΓΖ ἂς γένῃ τὸ σχῆμα ΓΚ′χ ἴσον μὲ τὸ σχῆμα ΓΗχ, εἰς τρόπον ὥστε ΓΚ′ = ΓΗ, ἡ γωνία ΘΓΚ′ = ΘΓΗ, καὶ τὸ τόξον Κ′χ = χΗ· ἡ καμπύλη Κ′χΗ περικυκλοῖ τὸ τόξον Κ′ΘΗ, καὶ εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ αὐτὸ (πρό. 9)· ἄρα Ηχ ἡμίσεια τῆς καμπύλης, εἶναι μεγαλητέρα τοῦ ΗΘ ἡμίσεως τοῦ τόξου· λοιπὸν, πολὺ περισσότερον, ΗΙ εἶναι μεῖζον τοῦ ΗΘ.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ ἀπόστημα ΟΕ εἶναι μεῖζον τοῦ ΓΒ. ἀλλὰ τὰ δύο πολύγωνα ὡς ἰσοπερίμετρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀποστήματά των (πρό. 7)· λοιπὸν τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον ἡμιπλευρὰν ΔΕ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἔχοντος ἡμιπλευρὰν ΑΒ· τὸ πρῶτον ἔχει περισσοτέρας πλευράς, διότι ἡ εἰς τὸ κέντρον γωνία του εἶναι μικροτέρα· ἄρα ἐκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τὸ ἔχον περισσοτέρας πλευρὰς εἶναι τὸ μεγαλήτερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Θεώρημα.

Ὁ κύκλος εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ κάθε ἰσοπερίμετρον πολύγωνον.

Ἀπεδείχθη ἤδη, ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα πολύγωνα καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι τὸ μεγαλήτερον· οὕτως ἄλλο δὲν πρόκειται παρὰ νὰ συγκρίνωμεν τὸν κύκλον μὲ ὁποιονδήποτε κανονικὸν ἰσοπερίμετρον πολύγωνον. Ἔστω ΑΙ ἡ ἡμιπλευρὰ τούτου τοῦ πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον του. Ἔστω εἰς τὸν ἰσοπερίμετρον κύκλον ἡ γωνία ΔΟΕ = ΑΓΙ, καὶ ἑπομένως τὸ τόξον ΔΕ ἴσον μὲ τὴν ἡμιπλευρὰν ΑΙ. Τὸ πολύγωνον Π εἶναι πρὸς τὸν κύκλον Κ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΓΙ πρὸς τὸν τομέα ΟΔΕ· οὕτως ἔχομεν Π : Κ :: $\frac{1}{2}$ ΑΙ × ΓΙ : $\frac{1}{2}$ ΔΕ × ΟΕ :: ΓΙ : ΟΕ. Ἂς ἀχθῇ εἰς τὴν στιγμὴν Ε ἡ ἐφαπτομένη ΕΗ ἥτις συναπαντᾷ τὴν προεκβολὴν τῆς ΟΔ εἰς Η. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΙ, ΗΟΕ, δίδουν τὴν ἀναλογίαν, ΓΙ : ΟΕ :: ΑΙ ἢ ΔΕ : ΗΕ· λοιπὸν Π : Κ :: ΔΕ : ΗΕ : ἢ ὡς ΔΕ × $\frac{1}{2}$ ΟΕ μέτρον τοῦ τομέως ΔΟΕ πρὸς ΗΕ × $\frac{1}{2}$ ΟΕ μέτρον τοῦ τριγώνου ΗΟΕ· ἀλλ' ὁ τομεὺς εἶναι μικρότερος τοῦ τριγώνου· λοιπὸν Π εἶναι μικρότερον τοῦ Κ, ἄρα ὁ κύκλος εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ κάθε πολύγωνον ἰσοπερίμετρον. σχ. 180.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.

ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ.

Ὁρισμοί.

Α'. Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι κάθετος ἐν ἐπιπέδῳ ὅταν ἦναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της εἰς τὸ ἐπίπεδον (πρό. 4). Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμήν.

Ὁ ποῦς τῆς καθέτου εἶναι ἡ στιγμὴ τῆς συναπαντήσεώς της μὲ τὸ ἐπίπεδον.

Β'. Εὐθεῖα εἶναι παράλληλος ἐπιπέδου ὅταν δὲν ἠμπορῇ νὰ τὸ συναπαντήσῃ ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῇ. Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς.

Γ'. Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα μεταξύ των, ὅταν δὲν ἠμποροῦν νὰ συναπαντηθῶσιν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι.

Δ'. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 3) ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συναπαντῶνται εἶναι εὐθεῖα γραμμή· τούτου τεθέντος, ἡ γωνία ἢ ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο ἐπιπέδων εἶναι ἡ ποσότης, μᾶλλον ἢ ἧττον μεγάλη κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων· ἡ ποσότης αὕτη μετρεῖται ἀπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των δύο κάθετοι ἠγμέναι εἰς ἕκαστον τούτων τῶν ἐπιπέδων εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς (βλέ. πρό. 7).

Ἡ γωνία αὕτη ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ὀξεῖα, ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα.

Ε'. Ἐὰν ἦναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο.

ΣΤ'. Γωνία στερεὰ εἶναι τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα πολλῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι ἑνοῦνται εἰς τὴν αὐτὴν στιγμήν.

Οὕτως ἡ στερεὰ γωνία Σ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΒ, ΔΣΑ. σχ. 199.

Τοὐλάχιστον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν στερεᾶς γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Θεώρημα.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ μέρος ἐκτὸς αὐτοῦ.

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου, ἅμα εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μὲ ἐπίπεδόν τι, εὑρίσκεται ὅλη εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

Σχόλιον. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν ἐὰν ἐπιφάνειά τις ἦναι ἐπίπεδος, πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς διάφορα μέρη αὐτῆς καὶ νὰ ἴδωμεν ἐὰν ἅπτεται τῆς ἐπιφανείας καθ' ὅλην της τὴν ἔκτασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ προσδιορίζουν τὴν θέσιν του.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΑΓ, δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εἰς Α: ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εὑρίσκηται ἡ εὐθεῖα ΑΒ· ἐὰν ἀκολούθως στρέψωμεν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ὁλόγυρα τῆς ΑΒ, ἕως οὗ νὰ διέλθῃ διὰ τῆς στιγμῆς Γ, τότε ἡ γραμμὴ ΑΓ, ἔχουσα δύο τῶν σημείων της Α καὶ Γ εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, θέλει εὑρίσκεται ὅλη εἰς αὐτό· λοιπὸν ἡ θέσις τούτου τοῦ ἐπιπέδου προσδιορίζεται ἀπὸ μόνην τὴν συνθήκην τὸ νὰ περιέχῃ τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΑΓ. σχ. 181.

Πόρισμα Α΄. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἢ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ ἐπ' εὐθείας προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἐπιπέδου.

Πόρισμα Β΄. Λοιπὸν ὡσαύτως δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἐπιπέδου· διότι ἐὰν ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα ΕΖ, τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν ΑΕ, ΕΖ θέλει εἶναι τὸ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

Θεώρημα.

Ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα τέμνονται, εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Διότι ἐὰν μεταξὺ τῶν κοινῶν σημείων εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα ἦτον δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι τρία μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων δὲν ἤθελον σχηματίζει παρὰ ἓν μόνον καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (πρό. 2), τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ΑΠ ἦναι κάθετος εἰς δύο ἄλλας ΠΒ, ΠΓ, αἵτινες διασταυροῦνται εἰς τὸν πόδα της ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος εἰς ὁποιανδήποτε εὐθεῖαν ΠΚ ἠγμένην ἐκ τοῦ ποδός της εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ οὕτω θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 183.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΠΚ σημεῖόν τι κατ' ἀρέσκειαν Κ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΠΓ, εἰς τρόπον ὥστε ΒΚ=ΚΓ (προβ. 5. βιβλ. 3)· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΑΚ, ΑΓ.

Ἐπειδὴ ἡ βάσις ΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Κ, τὸ τρίγωνον ΒΠΓ δίδει (14, 3),

$$\overline{\Pi\Gamma}^2+\overline{\Pi B}^2=2\overline{\Pi K}^2+2\overline{K\Gamma}^2.$$

Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ δίδει παρομοίως,

$$\overline{A\Gamma}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AK}^2+2\overline{K\Gamma}^2.$$

Ἐὰν ἀπὸ τὴν δευτέραν ἰσότητα ἀφαιρέσωμεν τὴν πρώτην, καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΠΓ, ΑΠΒ, καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια εἰς Π, δίδουν $\overline{A\Gamma}^2-\overline{\Pi\Gamma}^2=\overline{A\Pi}^2$, καὶ $\overline{AB}^2-\overline{\Pi B}^2=\overline{A\Pi}^2$· θέλομεν ἔχει,

$$\overline{A\Pi}^2+\overline{A\Pi}^2=2\overline{AK}^2-2\overline{\Pi K}^2.$$

Λοιπόν, διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη διὰ 2, συνάγομεν $\overline{A\Pi}^2=\overline{AK}^2-\overline{\Pi K}^2$, ἢ $\overline{AK}^2=\overline{A\Pi}^2+\overline{\Pi K}^2$. Τώρα ἐπειδὴ εἰς μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης· διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον ΑΠΚ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Π· λοιπὸν ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΠΚ.

Σχόλιον. Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι ὄχι μόνον εἶναι δυνατὸν εὐθεῖα γραμμὴ νὰ ἦναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἀλλ' ὅτι τοῦτο συμβαίνει ὁσάκις αὕτη ἡ γραμμὴ εἶναι κάθετος εἰς δύο εὐθείας ἠγμένας εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ τοῦτο βεβαιόνει τὸν Α΄ ὁρισμόν.

Πόρισμα Α΄. Ἡ κάθετος ΑΠ εἶναι βραχυτέρα ὁποιασδήποτε πλαγίας ΑΚ· λοιπὸν μετρεῖ τὴν ἀληθινὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΠΚ.

Πόρισμα Β΄. Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Π ἐπὶ ἐπιπέδου, μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατὸν νὰ ὑψωθῇ εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον·

διότι εἰ δυνατὸν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἠμπορεῖ νὰ ὑψωθοῦν δύο· ἂς φαντασθῶμεν ὅτι διὰ τῶν δύο τούτων καθέτων διέρχεται ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ΜΝ κατὰ τὴν ΠΚ· τότε αἱ δύο κάθετοι περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἤθελον εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΠΚ εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἀδύνατον εἶναι παρομοίως ἀπὸ δεδομένον σημεῖον ἐκτὸς ἐπιπέδου νὰ κατεβασθῶσι δύο κάθετοι εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διότι ἔστωσαν ΑΠ, ΑΚ, αἱ δύο αὗται κάθετοι· τότε τὸ τρίγωνον ΑΠΚ ἤθελεν ἔχει δύο ὀρθὰς γωνίας ΑΠΚ, ΑΚΠ, ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Θεώρημα.

Αἱ πλάγιαι, αἱ ἰσάκις ἀπέχουσαι τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι· καὶ ἐκ δύο πλαγίων αἵτινες ἀνισάκις ἀπέχουσι τῆς καθέτου, ἡ περισσότερον ἀπέχουσα εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΠΒ, ΑΠΓ, ΑΠΔ εἶναι ὀρθαὶ, ἐὰν τὰ διαστήματα ΠΒ, ΠΓ, ΠΔ ὑποτεθῶσιν ἴσα πρὸς ἄλληλα, τὰ τρίγωνα ΑΠΒ, ΑΠΓ, ΑΠΔ, θέλουν ἔχει μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· λοιπὸν θέλουν εἶναι ἴσα· ἄρα αἱ ὑποτείνουσαι ἢ αἱ πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, θέλουν εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Παρομοίως, ἐὰν τὸ διάστημα ΠΕ, ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ΠΔ ἢ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ ΠΒ, φανερὸν ὅτι ἡ πλαγία ΑΕ θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ, ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΑΔ. σχ. 184.

Πόρισμα. Ὅλαι αἱ ἴσαι πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κ. τ. λ. τελειόνουν εἰς τὴν περιφέρειαν ΒΓΔ, γεγραμμένην ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου Π ὡς ἐκ κέντρου· λοιπὸν δεδομένου σημείου Α ἐκτὸς ἐπιπέδου, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Π ὅπου ἤθελε πέσει ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὸ Α, πρέπει νὰ σημειώσωμεν ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου τρία σημεῖα Β, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα ἰσάκις νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὴν στιγμὴν Α, καὶ νὰ ζητήσωμεν ἀκολούθως τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τούτων τῶν σημείων· τὸ κέντρον τοῦτο θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη στιγμὴ Π.

Σχόλιον. Ἡ γωνία ΑΒΠ καλεῖται κλίσις τῆς πλαγίας ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ· βλέπομεν ὅτι ἡ κλίσις αὕτη εἶναι ἴση δι' ὅλας τὰς πλαγίας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κ.τ.λ. αἱ ὁποῖαι ἰσάκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου· διότι ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΒΠ, ΑΓΠ, ΑΔΠ, κ.τ.λ. εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ΄.

Θεώρημα.

Ἔστω ΑΠ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ ΒΓ εὐθεῖα κειμένη εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ἐὰν ἀπὸ τὸν πόδα Π τῆς καθέτου κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΠΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ ἐπιζευχθῇ ΑΔ, λέγω ὅτι ΑΔ, θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΓ. σχ. 185.

Ἂς ληφθῇ ΔΒ=ΔΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΠΒ, ΠΓ, ΑΒ, ΑΓ: ἐπειδὴ ΔΒ=ΔΓ, ἡ πλαγία ΠΒ=ΠΓ· καὶ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΑΠ, ἐπειδὴ ΠΒ=ΠΓ, ἡ πλαγία ΑΒ=ΑΓ (πρ. 5). λοιπὸν δύο σημεῖα τῆς γραμμῆς ΑΔ ἰσάκις ἀπέχουσι τῶν ἄκρων Β καὶ Γ· λοιπὸν ΑΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

Πόρισμα. Βλέπομεν ἐν ταὐτῷ ὅτι ΒΓ εἶναι κάθετος ὡς τὸ ἐπίπεδον ΑΔΠ, ὡς κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΔ, ΠΔ.

Σχόλιον. Αἱ δύο γραμμαὶ ΑΕ, ΒΓ παῤῥησιάζουν τὸ παράδειγμα δύο γραμμῶν αἱ ὁποῖαι δὲν συναπαντῶνται, ὡς μὴ κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ βραχύτερον διάστημα τούτων τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΔ, κάθετος ἐν ταὐτῷ εἰς τὴν ΑΠ καὶ τὴν ΒΓ. Τὸ διάστημα ΠΔ εἶναι τὸ βραχύτερον μεταξὺ τῶν δύο τούτων γραμμῶν· διότι ἐὰν ἑνώσωμεν δύο ἄλλα σημεῖα, ὡς Α καὶ Β, θέλομεν ἔχει ΑΒ>ΑΔ, ΑΔ> ΠΔ· λοιπὸν πολὺ περισσότερον, ΑΒ>ΠΔ.

Αἱ δύο γραμμαὶ ΑΕ, ΓΒ, ἂν καὶ δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, θεωροῦνται ὅμως ὅτι κάμνουν μεταξύ των γωνίαν ὀρθήν· διότι ΑΕ καὶ ἡ ἠγμένη παράλληλος ἐξ ἑνὸς τῶν σημείων της τῇ ΒΓ, ἤθελον κάμνει μεταξύ των γωνίαν ὀρθήν. Ὡσαύτως αἱ γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΠΔ, αἵτινες παριστάνουν δύο ὁποιασδήποτε εὐθείας μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένας, θεωροῦνται ὡς ποιοῦσαι μεταξύ των τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν ἤθελε κάμει μὲ τὴν ΑΒ ἡ παράλληλος τῇ ΠΔ ἠγμένη ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΠ ἦναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κάθε γραμμὴ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΠ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. σχ. 186.

Διὰ τῶν παραλλήλων ΑΠ, ΔΕ, ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον τοῦ ὁποίου ἡ κοινὴ τομὴ μὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ θέλει εἶναι ΠΔ· εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἂς ἀχθῇ ΒΓ κάθετος εἰς τὴν ΠΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΔ.

Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, ΒΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΠΔΕ· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΔΕ εἶναι ὀρθή: ἀλλ' ἡ γωνία ΕΔΠ εἶναι ὡσαύτως ὀρθή, διότι ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΠΔ, καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΠ· λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΔΠ, ΔΒ· ἄρα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΜΝ.

Πόρισμα Α'. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΔΕ ἦναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλουν εἶναι παράλληλοι· διότι ἄλλως, ἠμπορούσαμεν νὰ ἄξωμεν διὰ τοῦ σημείου Δ παράλληλον τῇ ΑΠ, ἥτις ἤθελεν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἤθελεν εἶναι ἄρα δυνατὸν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ, νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὅπερ ἀδύνατον (πρό. 4).

Πόρισμα Β'. Δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β, παράλληλοι μιᾶς τρίτης Γ εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι· διότι ἂς φαντασθῶμεν ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν Γ· αἱ γραμμαὶ Α καὶ Β, παράλληλοι ταύτης τῆς καθέτου, θέλουν εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· λοιπόν, κατὰ τὸ προλαβὸν πόρισμα, θέλουν εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ἐννοεῖται ὅτι αἱ τρεῖς γραμμαὶ δὲν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἄλλως ἡ πρότασις ἤθελεν εἶναι γνωστὴ (25, 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΒ ἦναι παράλληλος εὐθείας τινὸς ΓΔ ἠγμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι παράλληλος τούτου τοῦ ἐπιπέδου. σχ. 187.

Διότι ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἥτις εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, ἦτον δυνατὸν νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ συναπάντησις αὐτὴ θὰ ἐγίνετο εἰς κἀνὲν σημεῖον τῆς ΓΔ, κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων: Τώρα, ΑΒ δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ ΓΔ, ὡς παράλληλος αὐτῆς· λοιπὸν οὐδὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ θέλει συναπαντήσει· ἄρα εἶναι παράλληλος αὐτοῦ (ὁρ. 2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Θεώρημα.

Δύο ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, κάθετα εἰς εὐθεῖάν τινα ΑΒ, εἶναι παράλληλα μεταξύ των. σχ. 188.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι συναπαντῶνται· ἔστω Ο ἓν τῶν κοινῶν σημείων των· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΒ· ἡ γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ ἠγμένην ἀπὸ τὸν πόδα της εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΟ· λοιπὸν ΟΑ, ΟΒ ἤθελον εἶναι δύο κάθετοι κατεβασμέναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ δὲν ἠμποροῦν νὰ συναπαντηθοῦν· λοιπὸν εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Θεώρημα.

Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΖ, ΗΘ, δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ, ὑφ' ἑνὸς τρίτου ΖΗ, εἶναι παράλληλοι. σχ. 189.

Διότι ἐὰν αἱ γραμμαὶ ΕΖ, ΗΘ, εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δὲν εἶναι παράλληλοι, προσκβληθεῖσαι θέλουν συναπαντηθῇ· λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται, ὁμοίως ἤθελον συναπαντηθῇ· λοιπὸν δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

Θεώρημα.

Ἡ γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΚ παράλληλον τοῦ ΜΝ. σχ. 188.

Ἀχθείσης κατ' ἀρέσκειαν τῆς ΒΓ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΚ, διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ΜΝ κατὰ τὴν ΑΔ, ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ (πρ. 10)· ἀλλ' ἡ ΑΒ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΔ· λοιπὸν θέλει εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν παράλληλον αὐτῆς ΒΓ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς κάθε γραμμὴν ΒΓ ἠγμένην ἀπὸ τὸν πόδα της εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΚ, ἕπεται ὅτι εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Θεώρημα.

Αἱ παράλληλοι ΕΗ, ΖΘ, περιεχόμεναι μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ εἶναι ἴσαι. σχ. 189.

Διὰ τῶν παραλλήλων ΕΗ, ΖΘ, ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον ΕΗΘΖ, τὸ ὁποῖον θὰ συναπαντήσει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατὰ τὰς ΕΖ, ΗΘ. Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΖ, ΗΘ, εἶναι παράλληλοι μεταξύ των (πρό. 10), καθὼς καὶ αἱ ΕΗ, ΖΘ· ἄρα τὸ σχῆμα ΕΗΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ΕΗ=ΖΘ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἰσάκις ἀπέχουσι καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν· διότι ἐὰν ΕΗ καὶ ΖΘ ἦναι κάθετοι εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, θέλουν εἶναι παράλληλοι μεταξύ των (πρ. 7)· λοιπὸν εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΖ μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, αἱ γωνίαι αὗται θέλουν εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα. σχ. 190.

Ἂς ληφθῇ ΑΓ=ΒΔ, ΑΕ=ΒΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΕ, ΔΖ, ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. Ἐπειδὴ ΑΓ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΔ, τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον (11, 3)· λοιπὸν

ΓΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΕΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ· λοιπὸν ὡσαύτως ΓΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΖ· τὸ σχῆμα ἄρα ΓΕΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ οὕτως ἡ πλευρὰ ΓΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΖ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΓΑΕ, ΔΒΖ, εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των· ἄρα ἡ γωνία ΓΑΕ=ΔΒΖ.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΖ· διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῦ ΒΔΖ, ἠγμένον ἐκ τῆς στιγμῆς Α συναπαντᾷ τὰς γραμμὰς ΓΔ, ΕΖ, εἰς διαφορετικὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ Γ καὶ Ε, φέρ' εἰπεῖν, εἰς Η καὶ Θ. Τότε, κατὰ τὴν ΙΒ'. πρότασιν, αἱ τρεῖς γραμμαὶ ΑΒ, ΗΔ, ΖΘ ἤθελον εἶναι ἴσαι· ἀλλ' αἱ τρεῖς γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει ΓΔ=ΗΔ, καὶ ΖΘ=ΕΖ, ὅπερ ἄτοπον· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τοῦ ΒΔΖ.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, συναπαντῶται ἀπὸ δύο ἄλλα ΓΑΒΔ, ΕΑΒΖ, αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΖ ἀπὸ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, θέλουν εἶναι ἴσαι· διότι ἡ κοινὴ τομὴ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΔ (πρό. 10), ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ· λοιπὸν ἡ γωνία ΓΑΕ=ΔΒΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν ἄκρων τούτων τῶν εὐθειῶν, θέλουν εἶναι ἴσα καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα. σχ. 190.

Διότι, οὔσης τῆς ΑΒ ἴσης καὶ παραλλήλου τῇ ΓΔ, τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΒΖ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ ΓΕ, ΔΖ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ, εἶναι ἴσα : ἄλλως ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὡς καὶ εἰς τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, ὅτι τὰ ἐπίπεδά των εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι περιεχόμεναι μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒ συναπαντᾷ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, ΡΣ, εἰς Α, Ε, Β, καὶ ὅτι ἡ ΓΔ συναπαντᾷ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα εἰς Γ, Ζ, Δ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ὡς ΑΕ : ΕΒ : : ΓΖ : ΖΔ. σχ. 191.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ συναπαντῶσα τὸ ἐπίπεδον ΠΚ εἰς Η· καὶ ἂς ἑνωθῶσιν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ΗΖ, ΒΔ· αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΗ, ΒΔ, τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΠΚ, ΡΣ, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, εἶναι παράλληλοι (πρό. 10)· λοιπὸν ΑΕ : ΕΒ : : ΑΗ : ΗΔ· παρομοίως ἐπειδὴ αἱ κοιναὶ τομαὶ ΑΓ, ΗΖ, εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν ΑΗ : ΗΔ : : ΓΖ : ΖΔ· λοιπόν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου, ΑΗ : ΗΔ, θέλομεν ἔχει ΑΕ : ΕΒ : : ΓΖ : ΖΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣΤ'.

Θεώρημα.

Ἔστω ΑΒΓΔ ὁποιονδήποτε τετράπλευρον κείμενον ἢ μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (1)· ἐὰν τμηθῶσιν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἀναλόγως ὑπὸ δύο εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ, εἰς τρόπον ὥστε ΑΕ : ΕΒ : : ΔΖ : ΖΓ, καὶ ΒΗ : ΗΓ : : ΑΘ : ΘΔ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ, θέλουν τέμνεσθαι εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν Μ, εἰς τρόπον ὥστε θέλομεν ἔχει ΘΜ : ΜΗ : : ΑΕ : ΕΒ, καὶ ΕΜ : ΜΖ : : ΑΘ : ΘΔ. σχ. 192.

Διὰ τῆς ΑΔ ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον ὁποιονδήποτε ΑβΘγΔ τὸ ὁποῖον ὅμως νὰ μὴ διέρχεται διὰ τῆς ΗΘ· ἐκ τῶν στιγμῶν Ε, Β, Γ, Ζ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΗΘ αἱ Εε, Ββ, Γγ, Ζζ, αἵτινες συναπαντοῦν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον εἰς ε, β, γ, ζ. Ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Ββ, ΗΘ, Γγ (15. 3), θέλομεν ἔχει βΘ : Θγ : : ΒΗ : ΗΓ : : ΑΘ : ΘΔ· λοιπὸν (20, 3) τὰ τρίγωνα ΑΘβ, ΔΘγ, εἶναι ὅμοια. Ἀκολούθως θέλομεν ἔχει Αε : εβ : : ΑΕ : ΕΒ, καὶ Δζ : ζγ : : ΔΖ : ΖΓ· λοιπὸν Αε : εβ : : Δζ : ζγ, ἤ, ἐν συνθέσει, Αε : Δζ : : Αβ : Δγ· ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΘβ, ΔΘγ, ἔχομεν Αβ : Δγ : : ΑΘ : ΘΔ· λοιπὸν Αε : Δζ : : ΑΘ : ΘΔ : ἄλλως τὰ τρίγωνα ΑΘβ, γΘΔ ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία ΘΑΕ = ΘΔζ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΘε, ΔΘζ, εἶναι ὅμοια (20, 3)· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΘε = ΔΘζ. Ἐκ τούτου ἕπεται κατὰ πρῶτον ὅτι εΘζ εἶναι εὐθεῖα γραμμή, καὶ οὕτως αἱ τρεῖς παράλληλοι

(1) Διὰ τριῶν σημείων πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ ἐπίπεδον· ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο προεκβαλλόμενον περάσῃ καὶ ἀπὸ τέταρτον, τότε τὰ τέσσαρα σημεῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ ἑνοῦντες αὐτὰ ἀνὰ δύο, σχηματίζομεν τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ὅλο εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐξ ἐναντίας ἐὰν τὸ ἐπίπεδον δὲν διέλθῃ ἀπὸ τὸ τέταρτον, τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον εὑρίσκεται μοιρασμένον εἰς δύο ἐπίπεδα, καὶ τότε λέγεται ὅτι δὲν κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ τετράπλευρον τοῦτο καλεῖται ἀπὸ τοὺς Γάλλους quadrilatère gauche· οἱ ἡμέτεροι ἂς τὸ ὀνομάσουν ὅπως ἀγαποῦν. Εἰς τοιούτου εἴδους τετράπλευρον λοιπὸν ἂς φαντασθῇ ὁ ἀναγνώστης τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν καὶ ἀπόδειξιν. Ο. Μ.

Εε, ΗΘ, Ζζ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον περιέχει καὶ τὰς δύο εὐθείας ΕΖ, ΗΘ· λοιπὸν αὗται πρέπει νὰ τέμνωνται εἰς μίαν στιγμὴν Μ. Ἔπειτα ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Εε, ΜΘ, Ζζ, θέλομεν ἔχει ΕΜ : ΜΖ : : εΘ : Θζ : : ΑΘ : ΘΔ.

Ἐὰν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν ἀναφέρωμεν εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, θέλομεν ἀποδείξει ὅτι ΘΜ : ΜΗ : : ΑΕ : ΕΒ. (1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

Θεώρημα.

Ἡ περιεχομένη γωνία μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΑΝ, ΜΑΠ, ἠμπορεῖ, κατὰ τὸν ὁρισμόν, νὰ μετρηθῇ ἀπὸ τὴν γωνίαν ΝΑΠ τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των αἱ δύο κάθετοι ΑΝ, ΑΠ ἠγμέναι εἰς ἕκαστον τούτων τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΜ. σχ. 193.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ νόμιμον τούτου τοῦ μέτρου, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν 1.ον ὅτι εἶναι σταθερόν, ἢ ὅτι ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὁποιανδήποτε στιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ δύο κάθετοι.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ληφθῇ ἄλλη στιγμὴ Μ, καὶ ἀχθῇ ἡ μὲν ΜΓ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΜ, ἡ δὲ ΜΒ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΠ κάθετος ἐπὶ τῆς ἰδίας κοινῆς τομῆς· αἱ εὐθεῖαι ΜΒ καὶ ΑΠ ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ΑΜ, θέλουν εἶναι παράλληλοι μεταξύ των. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΜΓ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΝ· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΜΓ=ΠΑΝ (πρό. 13)· ἀδιάφορον λοιπὸν εἶναι νὰ ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ἐκ τῆς στιγμῆς Μ ἢ ἐκ τῆς στιγμῆς Α· ἡ περιεχομένη γωνία πάντοτε θέλει εἶναι ἡ αὐτή.

2.ον Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἐὰν ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων αὐξάνῃ ἢ ὀλιγοστεύῃ κατά τινα λόγον, κατὰ τὸν αὐτὸν θέλει αὐξάνει ἢ ὀλιγοστεύει ἡ γωνία ΠΑΝ.

---

(1) Ὅταν τὸ τετράπλευρον εὑρίσκηται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, οὐδεμία ἀμφιβολία ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνουν τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς ἀναλόγως, τέμνονται εἰς μίαν στιγμὴν Μ. Τὰς ἀναλογίας ὅμως ΕΜ : ΜΖ : : ΑΘ : ΘΔ καὶ ΘΜ : ΜΗ : : ΔΕ : ΕΒ, ἀποδεικνύομεν ὡς ἀκολούθως.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒβ, ΔΕε θέλουν δώσει ΑΕ : ΕΒ : : Αε : εβ· παρομοίως καὶ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΔΓγ, ΔΖζ, Δζ : ΖΓ : : Δζ : ζγ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΔΕ : ΕΒ : : ΔΖ : ΖΓ· λοιπὸν Αε : εβ : : Δζ : ζγ· καὶ ἐν συνθέσει Δβ : εβ : : Δγ : ζγ (1)· ἄλλως ΒΗ : ΗΓ : : βΘ : Θγ, καὶ ΑΘ : ΘΔ : : ΒΗ : ΗΓ· λοιπὸν ΑΘ : ΘΔ : : βΘ : Θγ, καί, ἐν μεταθέσει, ΑΘ : βΘ : : ΘΔ : Θγ· ὅθεν, ἐν διαιρέσει ΑΘ — βΘ ἢ Δβ : βΘ : : ΘΔ — Θγ ἢ γΔ : Θγ. Ἐκ τῆς νέας ταύτης ἀναλογίας καὶ τῆς (1) συνάγομεν εβ : Θβ : : ζγ : Θγ· ὅθεν ἐν συνθέσει εβ + Θβ ἢ εΘ : Θβ : : ζγ + Θγ ἢ Θζ : Θγ, καὶ ἐν μεταθέσει εΘ : Θζ : : Θβ : Θγ· ἀλλὰ εΘ : Θζ : : ΕΜ : ΜΖ· λοιπὸν ΕΜ : ΜΖ : : Θβ : Θγ· ἐπειδὴ δὲ βΘ : Θγ : : ΒΗ : ΗΓ : : ΑΘ : ΘΔ· διὰ τοῦτο καὶ ΕΜ : ΜΖ : : ΑΘ : ΘΔ· ἀναφέροντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ ὁμοίως συλλογιζόμενοι δεικνύομεν ὡσαύτως ὅτι ΘΜ : ΜΗ : : ΔΕ : ΕΒ. Ο. Μ.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΑΝ ἐκ τοῦ κέντρου Α καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν ἂς γραφθῇ τὸ τόξον ΝΔΠ· ἐκ τοῦ κέντρου Μ καὶ μὲ ἴσην ἀκτῖνα ἂς γραφθῇ τὸ τόξον ΓΕΒ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κατ' ἀρέσκειαν· ἐπειδὴ τὰ δύο ἐπίπεδα ΠΑΝ, ΒΜΓ, εἶναι κάθετα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΜΑ, εἶναι διὰ τοῦτο παράλληλα (πρό. 9)· λοιπὸν αἱ κοιναὶ τομαί των ΑΔ, ΜΕ ὑπὸ τρίτου τινὸς ΑΜΔ εἶναι παράλληλοι· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΜΕ εἶναι ἴση τῇ ΠΑΔ (πρό. 13).

Ἂς καλέσωμεν πρὸς ὀλίγον ἀγκωνὴν (1) τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΠ, ΜΝ· τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ γωνία ΔΑΠ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΔΑΝ, φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ἀγκωνὴ ΔΑΜΠ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀγκωνὴν ΔΑΜΝ· διότι ἡ βάσις ΠΑΔ ἀκριβῶς ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΔΑΝ, τὸ δὲ ὕψος ΑΜ εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό· λοιπὸν αἱ δύο ἀγκωναὶ ἐντελῶς θέλουν ἐφαρμόσει. Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι ἐὰν ἡ γωνία ΔΑΠ περιείχετο ἀριθμόν τινὰ φορῶν εἰς τὴν γωνίαν ΠΑΝ, ἡ ἀγκωνὴ ΔΑΜΠ ἤθελε περιέχεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὴν ἀγκωνὴν ΠΑΜΝ· λοιπὸν ἐὰν ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν ΔΑΠ, ΠΑΝ ἐκφράζεται δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὁ λόγος τῶν δύο ἀγκωνῶν ΔΑΜΠ, ΠΑΜΝ θέλει ἐκφράζεται διὰ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν· καὶ ἐπομένως γωνία ΔΑΠ : γωνίαν ΠΑΝ :: ἀγκωνὴ ΔΑΜΠ : ἀγκωνὴν ΠΑΜΝ. Ἀλλὰ καθὼς καὶ εἰς ἄλλην παρομοίαν περίστασιν (17, 2), οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἠμποροῦμεν νὰ δείξωμεν ὅτι ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν ΔΑΠ, ΠΑΝ, αὗται θέλουν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντικειμένων ἀγκωνῶν· λοιπὸν ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ λόγος τῆς γωνίας ΔΑΠ πρὸς τὴν γωνίαν ΠΑΝ, ἡ ἀγκωνὴ ΔΑΜΠ θέλει εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὴν ἀγκωνὴν ΠΑΜΝ· λοιπὸν ἡ γωνία ΝΑΠ ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ ὡς μέτρον τῆς ἀγκωνῆς ΠΑΜΝ, ἢ τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΑΠ, ΜΑΝ.

Σχόλιον. Ὅ,τι ὑπάρχει διὰ τὰς σχηματιζομένας γωνίας ἀπὸ δύο εὐθείας, ὑπάρχει καὶ διὰ τὰς σχηματιζομένας γωνίας ἀπὸ δύο ἐπίπεδα. Οὕτως ὅταν δύο ἐπίπεδα ἀμοιβαίως τὸ ἓν διαπερᾷ τὸ ἄλλο, αἱ ἀπέναντι εἰς τὴν κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ προσκείμεναι κάμνουν ὁμοῦ δύο ὀρθάς· ἐὰν λοιπὸν ἐπίπεδον ἦναι κάθετον εἰς ἄλλο, τοῦτο εἶναι κάθετον εἰς ἐκεῖνο. Παρομοίως εἰς τὴν συναπάντησιν παραλλήλων ἐπιπέδων μὲ τρίτον ἐπίπεδον, ὑπάρχουσιν αἱ αὐταὶ ἰσότητες καὶ αἱ αὐταὶ ἰδιότητες

(1) Ὠνόμασα ἀγκωνὴν τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς λέγει coin' ἐπειδὴ μὲ φαίνεται ὅτι ἡ λέξις αὐτὴ εἶναι εἰς ὅλους μας εὔληπτος.

αἱ ὁποῖαι καὶ εἰς τὴν συναπάντησιν δύο παραλλήλων γραμμῶν μὲ τρίτην τινά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν ΑΠ ἦναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κάθε ἐπίπεδον ΑΠΒ δι' αὐτῆς διερχόμενον, θέλει εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Ἔστω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΒΠ, ἡ ΑΠ, οὖσα κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος εἰς κάθε μίαν τῶν δύο εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΠΔ, σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο καθέτους ΠΑ, ΠΔ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ, μετρεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθὴ, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των (ὅρ. 5).

Σχόλιον. Ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι, ὡς ΑΠ, ΒΠ, ΔΠ, ἦναι κάθετοι μεταξύ των, ἑκάστη τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἀχθῇ ἡ ΠΑ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΠΒ, λέγω ὅτι ἡ ΠΑ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΠΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΒ, ἡ γωνία ΑΠΔ θέλει εἶναι ὀρθὴ, ἐπειδὴ τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των· λοιπὸν ἡ ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΠΒ, ΠΔ· λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΜΝ.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, καὶ ἐκ μιᾶς στιγμῆς Π τῆς κοινῆς τομῆς ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, λέγω ὅτι ἡ κάθετος αὕτη θέλει εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ· διότι, ἀλλέως, ἠμπορούσαμεν νὰ ἄξωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ μίαν κάθετον ΑΠ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ, ἥτις εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἤθελεν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· λοιπὸν εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν Π ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ὅπερ ἀδύνατον (πρό. 4).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ΑΒ, ΑΔ ἦναι κάθετα εἰς ἄλλο τρίτον ΜΝ, ἡ κοινὴ τομή των ΑΠ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ τρίτον τοῦτο ἐπίπεδον. σχ. 194.

Διότι ἐὰν ἐκ τῆς στιγμῆς Π ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ κάθετος αὕτη πρέπει ἐν ταὐτῷ νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΔ (πορ. 19)· λοιπὸν εἶναι ἡ κοινὴ τομή των ΑΠ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν μία στερεὰ γωνία ἦναι σχηματισμένη ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε τούτων τῶν γωνιῶν, θέλει εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης. σχ. 195.

Ἐὰν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ἦναι ἴσαι μεταξύ των, φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης. Ἐὰν δὲ ἄνισοι καὶ ἑκάστη τῶν δύο μείζων τῆς τρίτης, φανερὸν ἀκόμη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης. Ἡ μόνη λοιπὸν περίστασις καθ' ἣν ἡ ἐκφωνηθεῖσα πρότασις ἔχει χρείαν ἀποδείξεως, εἶναι ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν ἡ παραβαλλομένη ἐπίπεδος γωνία μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων εἶναι μείζων ἑκάστης τούτων. Ἔστω λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία Σ σχηματιζομένη ἀπὸ τρεῖς γωνίας ἐπιπέδους ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΣΒ εἶναι μείζων τῶν ἄλλων δύο· λέγω ὅτι θέλει εἶναι $ΑΣΒ < ΑΣΓ + ΒΣΓ$.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ ἂς γένῃ ἡ γωνία $ΒΣΔ = ΒΣΓ$, ἂς ἀχθῇ κατ' ἀρέσκειαν ἡ εὐθεῖα ΑΔΒ: καί, ληφθείσης τῆς $ΣΓ = ΣΔ$, ἐπιζευχθήτωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ.

Αἱ δύο πλευραὶ ΒΣ, ΣΔ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΒΣ, ΣΓ, ἡ γωνία $ΒΣΔ = ΒΣΓ$· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΒΣΔ, ΒΣΓ εἶναι ἴσα· λοιπὸν $ΒΔ = ΒΓ$. Ἀλλ' ἔχομεν $ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ$· ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τὸ ἓν μέρος τῆς ΒΔ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΒΓ, μένει $ΑΔ < ΑΓ$. Αἱ δύο πλευραὶ ΑΣ, ΣΔ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΑΣ, ΣΓ, ἡ τρίτη ΑΔ εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης ΑΓ· λοιπὸν (10, 1) ἡ γωνία $ΑΣΔ < ΑΣΓ$. Προσθέσει τῆς $ΒΣΔ = ΒΣΓ$, προκύπτει $ΑΣΔ + ΒΣΔ$ ἢ $ΑΣΒ < ΑΣΓ + ΒΣΓ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν γωνίαν στερεάν, εἶναι πάντοτε μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

Ἂς τμηθῇ ἡ στερεὰ γωνία Σ ἀπὸ ὁποιονδήποτε ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ· εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι Ο, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἂς ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς γωνίας αἱ γραμμαὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. σχ. 196.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὁλόγυρα τῆς κορυφῆς Σ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὁλόγυρα τῆς κορυφῆς Ο. Ἀλλ' εἰς τὴν στιγμὴν Β αἱ γωνίαι ΑΒΟ, ΟΒΓ, ὁμοῦ ληφθεῖσαι, κάμνουν τὴν γωνίαν ΑΒΓ μικροτέραν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ΑΒΣ, ΣΒΓ (πρό. 21)· ὡσαύτως εἰς τὴν στιγμὴν Γ ἔχομεν ΒΓΟ$+$ΟΓΔ$<$ΒΓΣ$+$ΣΓΔ· καὶ οὕτω διὰ τὰς ἄλλας γωνίας τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Ο, τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἰς τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Σ. Τώρα τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Σ μοιράζεται εἰς δύο: εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπίσης εἰς Σ, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ· καλοῦντες Α τὸ πρῶτον καὶ Β τὸ δεύτερον, ἔχομεν διὰ τὸ ἄθροισμα τούτων Α$+$Β· παρομοίως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Ο μοιράζεται εἰς δύο: εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπίσης εἰς Ο, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ· καλοῦντες τὸ πρῶτον ἄθροισμα Α' καὶ τὸ δεύτερον Β', ἔχομεν Α'$+$Β' διὰ τὸ ἄθροισμα ὅλων τούτων τῶν γωνιῶν· ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ἀθροίσματα Α$+$Β, καὶ Α'$+$Β' πρέπει νὰ ἦναι ἴσα· διὰ τοῦτο Α$+$Β$=$Α'$+$Β'· ἀλλὰ δέδεικται ὅτι Β$>$Β'· λοιπὸν ἀναγκαίως Α$<$Α'· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ὁλόγυρα τῆς στιγμῆς Ο, εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ὁλόγυρα τῆς στιγμῆς Σ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλόγυρα τῆς στιγμῆς Ο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθὰς (5, Ι)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Σ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τέσσαρας ὀρθάς.

Σχόλιον. Ἡ ἀπόδειξις αὕτη προϋποθέτει ὅτι ἡ στερεὰ γωνία εἶναι κυρτή, ἢ ὅτι τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας προεκβαλλόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ τέμνῃ τὴν στερεὰν γωνίαν Σ· ἄλλως, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν δὲν ἤθελεν ἔχει ὅρια, καὶ ἠμποροῦσε νὰ ἦναι ὁποιουδήποτε μεγέθους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἰσάκις θέλουν κλίνει τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἔστω ἡ γωνία ΑΣΓ=ΔΤΖ, ἡ γωνία ΑΣΒ=ΔΤΕ, καὶ ἡ γωνία ΒΣΓ=ΕΤΖ· λέγω ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΣΓ, ΑΣΒ, θέλουν ἔχει μεταξύ των κλίσιν ἴσην μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ΔΤΖ, ΔΤΕ. σχ. 197.

Ληφθείσης τῆς ΣΒ κατ' ἀρέσκειαν, ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΟ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΓ· ἐκ τῆς στιγμῆς Ο, ὅπου αὕτη ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΓ κάθετοι, ἡ μὲν ἐπὶ τῆς ΣΑ, ἡ δὲ ἐπὶ τῆς ΣΓ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ· ἂς ληφθῇ ἀκολούθως ΤΕ=ΣΒ· ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΠ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΤΔΖ· ἐκ τῆς στιγμῆς Π ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΠΔ, ΠΖ κάθετοι ἐπὶ τῶν ΤΔ, ΤΖ· τέλος ἂς ἑνωθῶσιν αἱ ΔΕ, ΕΖ.

Τὸ τρίγωνον ΣΑΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α, καὶ τὸ τρίγωνον ΤΔΕ εἰς Δ (πρό. 6), καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΣΒ=ΔΤΕ, ἔχομεν ὡσαύτως ΣΒΑ=ΤΕΔ. Ἄλλως ΣΒ=ΤΕ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΣΑΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΤΔΕ (5; 1)· λοιπὸν ΣΑ=ΤΔ, καὶ ΑΒ=ΔΕ. Ὁμοίως θέλομεν δείξει ὅτι ΣΓ=ΤΖ, καὶ ΒΓ=ΕΖ. Τούτου τεθέντος, τὸ τετράπλευρον ΣΑΟΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράπλευρον ΤΔΠΖ· διότι τεθείσης τῆς γωνίας ΑΣΓ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΔΤΖ, ἐπειδὴ ΣΑ=ΤΔ καὶ ΣΓ=ΤΖ, ἡ στιγμὴ Α θέλει πέσει εἰς Δ καὶ ἡ Γ εἰς Ζ. Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ΑΟ, κάθετος εἰς τὴν ΣΑ, θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΔΠ καθέτου εἰς τὴν ΤΔ, καὶ παρομοίως ΟΓ ἐπὶ τῆς ΠΖ· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Ο θέλει πέσει ἐπὶ τῆς στιγμῆς Π, καὶ θέλομεν ἔχει ΑΟ=ΔΠ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΔΠΕ εἶναι ὀρθογώνια εἰς Ο καὶ Π, ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ=ΔΕ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΟ=ΔΠ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (18, 1)· λοιπὸν ἡ γωνία ΟΑΒ=ΠΔΕ. Ἡ γωνία ΟΑΒ εἶναι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ·

ἡ γωνία ΠΔΕ εἶναι ἡ τῶν δύο ἐπιπέδων ΔΤΕ, ΔΤΖ· λοιπὸν αἱ δύο αὗται κλίσεις εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Πρέπει ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ γωνία Α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ δὲν εἶναι κυρίως ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ, παρ' ὅταν ἡ κάθετος ΒΟ πίπτῃ, ὡς πρὸς τὴν ΣΑ, ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος ὁποῦ καὶ ἡ ΣΓ· ἐὰν δὲ ἔπιπτεν ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, τότε ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ἤθελεν εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ μετὰ τῆς γωνίας Α ἤθελε κάμνει δύο ὀρθάς. Ἀλλ' εἰς τὴν αὐτὴν περίστασιν ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΤΔΖ ἤθελεν εἶναι παρομοίως ἀμβλεῖα, καὶ μετὰ τῆς γωνίας Δ τοῦ τριγώνου ΔΠΕ, ἤθελε κάμνει δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία Α πάντοτε ἤθελεν εἶναι ἴση τῇ Δ, ὡσαύτως ἠθέλαμεν συμπεράνει ὅτι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν δύο ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΤΔΖ.

Σχόλιον. Ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν αἱ ἴσαι ἢ ὁμόλογοι γωνίαι ἦναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας, τότε αἱ γωνίαι αὗται θέλουν εἶναι ἴσαι, καὶ ἐὰν τεθῶσιν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης θέλουν ἐφαρμόσει. Τῷ ὄντι εἴδομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΣΑΟΓ ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ ΤΔΠΖ· οὕτως τεθείσης τῆς ΣΑ ἐπὶ τῆς ΤΔ, ἡ ΣΓ πίπτει ἐπὶ τῆς ΤΖ, καὶ ἡ στιγμὴ Ο ἐπὶ τῆς στιγμῆς Π. Ἀλλά, ἐξ αἰτίας τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΔΠΕ, ἡ κάθετος ΟΒ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν κάθετον ΠΕ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΤΔΖ· περιπλέον αἱ κάθετοι αὗται διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Β θέλει πέσει ἐπὶ τῆς στιγμῆς Ε, ἡ γραμμὴ ΣΒ ἐπὶ τῆς ΤΕ, καὶ αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι κατὰ πάντα θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην.

Ἡ ἐφάρμοσις ὅμως αὕτη δὲν ἔχει χώραν παρ' ὁσάκις ὑποτίθεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι ἴσαι γωνίαι εἶναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας· διότι ἐὰν αἱ ἐπίπεδοι ἴσαι γωνίαι ἦσαν διατεταγμέναι εἰς τάξιν ἀντίστροφον, ἤ, ὅπερ ταὐτόν, ἐὰν αἱ κάθετοι ΟΒ, ΠΕ ἀντὶ νὰ διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΑΣΓ, ΔΤΖ, ἐδιευθύνοντο κατ' ἐναντίας, τότε ἀδύνατον ἤθελεν εἶναι νὰ γένῃ ἡ ἐφάρμοσις τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν. Ἀλλ' ὄχι ὀλιγώτερον ἤθελεν εἶναι ἀληθές, κατὰ τὸ θεώρημα, ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἤθελον κλίνει ἰσάκις τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου· εἰς τρόπον ὥστε αἱ δύο στερεαὶ γωνίναι ἤθελον εἶναι ἴσαι καθ' ὅλα των τὰ συστατικὰ μέρη, χωρὶς μ' ὅλον τοῦτο νὰ ἠμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσι. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ἰσότητος, ἥτις δὲν εἶναι ἀπόλυτος ἢ ἐπιθέσεως πρέπει νὰ διακριθῇ μὲ μερικὴν τινὰ ὀνομασίαν: θέλομεν τὴν ὀνομάζει ἰσότητα ἐκ συμμετρίας.

Οὕτως αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, αἱ ὁποῖαι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, ἀλλὰ διατεταγμένας κατ' ἀντίστροφον τάξιν θέλουν ὀνομάζεσθαι γωνίαι ἴσαι ἐκ συμμετρίας ἢ ἁπλῶς γωνίαι συμμετρικαί.

Ἡ αὐτὴ σημείωσις ἐφαρμόζεται εἰς τὰς στερεὰς γωνίας αἱ ὁποῖαι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ περισσοτέρας παρὰ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας: οὕτως στερεὰ γωνία σχηματισμένη ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ μία ἄλλη στερεὰ γωνία σχηματισμένη ἀπὸ τὰς αὐτὰς γωνίας εἰς τάξιν ἀντίστροφον Α, Ε, Δ, Γ, Β, ἠμποροῦν νὰ ἦναι τοιαῦται ὥστε τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ κλίνουν ἰσάκις τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Αἱ δύο αὗται στερεαὶ γωνίαι, αἵτινες ἤθελον εἶναι ἴσαι χωρὶς ἡ ἐπίθεσις νὰ ἦναι δυνατή, θέλουν ὀνομάζεσθαι γωνίαι στερεαὶ ἴσαι ἐκ συμμετρίας, ἢ γωνίαι στερεαὶ συμμετρικαί.

Εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα δὲν ὑπάρχει κυρίως ἰσότης ἐκ συμμετρίας, καὶ ὅσας ἤθελέ τις ὀνομάσει οὕτως ἤθελον εἶναι ἀπόλυτοι ἰσότητες ἢ ἐπιθέσεως: ὁ λόγος εἶναι ὅτι ἐπίπεδον σχῆμα ἠμπορεῖ νὰ ἀναποδογυρισθῇ, καὶ νὰ ληφθῇ ἀδιαφόρως τὸ ἄνω διὰ τὸ κάτω. Ἀλλὰ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς τὰ στερεὰ ὅπου ἡ τρίτη διάστασις ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ κατὰ δύο διαφορετικὰς ἐννοίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Θεώρημα.

Δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἵτινες σχηματίζουν στερεάν τινὰ γωνίαν, νὰ εὕρωμεν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμουν μεταξύ των.

Ἔστω Σ ἡ προτεθεῖσα στερεὰ γωνία, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι γνωσταὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ· ζητεῖται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξὺ τῶν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων, παραδείγματος χάριν, τὰ ἐπίπεδα ΑΣΒ, ΑΣΓ. σχ. 198.

Ἂς φαντασθῶμεν ὅτι ἐκάμαμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ὁποῦ καὶ εἰς τὸ προλαβὸν θεώρημα, ἡ γωνία ΟΑΒ ἤθελεν εἶναι ἡ ζητουμένη. Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν αὐτὴν γωνίαν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς ἢ ἐπάνω εἰς ἐπίπεδον ἐκτελουμένης.

Πρὸς τοῦτο ἂς γένουν ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς αἱ γωνίαι Β′ΣΑ, ΑΣΓ, Β″ΣΓ, ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΒΣΑ, ΑΣΓ, ΒΣΓ, εἰς τὸ στερεὸν σχῆμα· ἂς ληφθῇ ἑκάστη τῶν Β′Σ, Β″Σ ἴση μὲ τὴν ΒΣ τοῦ στερεοῦ σχήματος· ἐκ τῶν στιγμῶν Β′ καὶ Β″ ἂς καταβασθῶσιν αἱ Β′Δ, Β″Γ κάθεται ἐπὶ τῶν ΣΑ καὶ ΣΓ, αἱ ὁποῖαι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς στιγμήν τινα Ο. Ἐκ τῆς στιγμῆς Α ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΒ′ ἂς γραφθῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια Β′βΕ· εἰς τὴν στιγμὴν Ο ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς Β′Ε ἡ κάθετος Οβ συναπαντῶσα τὴν περιφέρειαν εἰς β, ἂς ἐπιζευχθῇ Αβ, καὶ ἡ γωνία ΕΑβ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΓ, ΑΣΒ, εἰς τὴν στερεὰν γωνίαν.

Τὸ πᾶν συνίσταται εἰς τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΟβ τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ τοῦ στερεοῦ. Τώρα τὰ δύο τρίγωνα Β′ΣΑ, ΒΣΑ εἶναι ὀρθογώνια εἰς Α, αἱ ἐν Σ γωνίαι εἶναι ἴσαι· λοιπὸν αἱ ἐν Β καὶ Β γωνίαι εἶναι παρομοίως ἴσαι. Ἀλλ᾽ ἡ ὑποτείνουσα ΣΒ′ εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ΣΒ: λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· λοιπὸν ΣΑ τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴση μὲ τὴν ΣΑ τοῦ στερεοῦ, καὶ ὁμοίως ΑΒ′, ἢ ἴση μὲ αὐτὴν Αβ εἰς τὸ ἐπίπεδον σχῆμα εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ εἰς τὸ στερεόν. Ὡσαύτως θέλομεν δείξει ὅτι ΣΓ εἶναι ἴση καὶ εἰς τὰ δύο μέρη· ὅθεν ἕπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΣΑΟΓ εἶναι ἴσον καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, οὕτως ΑΟ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΟ τοῦ στερεοῦ· λοιπὸν καὶ εἰς τὰ δύο τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟβ, ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ ἡ γωνία ΕΑβ, εὑρεθεῖσα διὰ τῆς ἐπιπέδου κατασκευῆς, εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΣΑΓ, εἰς τὴν στερεὰν γωνίαν.

Ὅταν τὸ σημεῖον Ο πέσῃ μεταξὺ Α καὶ Β′ εἰς τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, ἡ γωνία ΕΑβ ἀποβαίνει ἀμβλεῖα, καὶ μετρεῖ πάντοτε τὴν ἀληθινὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων: ἰδοὺ διατὶ ἐσημειώσαμεν διὰ ΕΑβ, καὶ ὄχι διὰ ΟΑβ τὴν ζητουμένην κλίσιν, διὰ νὰ ἀνήκῃ ἡ αὐτὴ λύσις εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις ἄνευ ἐξαιρέσεως.

Σ χ ό λ ι ο ν. Ἠμπορεῖ νὰ ζητηθῇ ἐὰν μὲ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, ἠλημμένας κατ᾽ ἀρέσκειαν, εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία.

Κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δεδομένων γωνιῶν πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· διότι χωρὶς ταύτης τῆς συνθήκης δὲν ἠμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ ἡ στερεὰ γωνία (πρό. 22).

Πρέπει περιπλέον ἀφ᾽ οὗ ληφθῶσι δύο τῶν γωνιῶν κατ᾽ ἀρέσκειαν Β'ΣΑ, ΑΣΓ, ἡ τρίτη ΓΣΒ'' νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε ἡ κάθετος Β''Γ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΣΓ νὰ συναπαντᾷ τὴν διάμετρον Β'Ε μεταξὺ τῶν ἄκρων Β' καὶ Ε. Οὕτω τὰ ὅρια τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας ΓΣΒ'' εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ὅταν φθάσῃ, ἡ κάθετος Β''Γ τελειόνει εἰς τὰς στιγμὰς Β' καὶ Ε. Ἐκ τῶν στιγμῶν τούτων ἂς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τῆς ΣΓ αἱ κάθετοι Β'Ι, ΕΚ', συναπαντῶσαι εἰς Ι καὶ Κ' τὴν γεγραμμένην περιφέρειαν μὲ τὴν ἀκτῖνα ΣΒ'', καὶ τὰ ὅρια τῆς ΓΣΒ'' θέλουν εἶναι αἱ γωνίαι ΓΣΙ, ΓΣΚ'.

Ἀλλ' εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον Β'ΣΙ, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΣΓ προεκβληθεῖσα συναπαντᾷ κατὰ κάθετον τὴν βάσιν Β'Ι, ἔχομεν τὴν γωνίαν ΓΣΙ = ΓΣΒ' = ΑΣΓ + ΑΣΒ'. Καὶ εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΣΚ', ἐπειδὴ ἡ ΣΓ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΕΚ', ἔχομεν τὴν γωνίαν ΓΣΚ' = ΓΣΕ. Ἄλλως ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων τριγώνων ΑΣΕ, ΑΣΒ', ἡ γωνία ΑΣΕ = ΑΣΒ'· λοιπὸν ΓΣΕ ἢ ΓΣΚ' = ΑΣΓ — ΑΣΒ'.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν ὁσάκις ἡ τρίτη γωνία ΓΣΒ'' εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ΑΣΓ, ΑΣΒ', ἀλλὰ μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς των: συνθήκη ἥτις συμφωνεῖ μὲ τὸ ΚΑ' θεώρημα· διότι, δυνάμει τούτου τοῦ θεωρήματος, πρέπει νὰ ἦναι ΓΣΒ'' < ΑΣΓ + ΑΣΒ'· πρέπει ὡσαύτως ΑΣΓ < ΓΣΒ'' + ΑΣΒ', ἢ ΓΣΒ'' > ΑΣΓ — ΑΣΒ'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένων δύο τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν στερεὰν γωνίαν, μετὰ τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν τὰ ἐπίπεδά των κάμνουν μεταξύ των, νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη ἐπίπεδος γωνία.

Ἔστωσαν ΑΣΓ, ΑΣΒ' αἱ δύο δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς ὀλίγον ὅτι ΓΣΒ'' εἶναι ἡ τρίτη ζητουμένη γωνία· τότε γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα, ἡ περιεχομένη γωνία μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο πρώτων ἤθελεν εἶναι ΕΑβ. Τώρα καθὼς προσδιορίζεται ἡ γωνία ΕΑβ διὰ μέσου τῆς ΓΣΒ'' δεδομένων τῶν δύο ἄλλων, οὕτω δυνατὸν εἶναι νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία ΓΣΒ'' διὰ μέσου τῆς ΕΑβ, καὶ μὲ τοῦτον τὸν τρόπον θέλει λυθῇ τὸ προτεθὲν πρόβλημα.

Ληφθείσης τῆς ΣΒ' κατ' ἀρέσκειαν, ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΣΑ ἡ ἀπροσδιόριστος κάθετος Β'Ε, ἂς γένῃ ἡ γωνία ΕΑβ ἴση μὲ τὴν τῶν δύο δεδομένων ἐπιπέδων· ἀπὸ τὴν στιγμὴν β ὅπου ἡ πλευρὰ Αβ συναπαντᾷ τὴν γεγραμμένην περιφέρειαν ἐκ τοῦ κέντρου Α μὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΒ', ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΑΕ ἡ κάθετος βΟ, καὶ ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ο ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΣΓ ἡ ἀπροσδιόριστος κάθετος ΟΓΒ″, ἥτις ἂς περατωθῇ εἰς Β″ὥστε ΣΒ″=ΣΒ· ἡ γωνία ΓΣΒ″ θέλει εἶναι ἡ τρίτη ἐπίπεδος ζητουμένη γωνία.

Διότι ἐὰν σχηματισθῇ στερεὰ γωνία μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΒΣΑ, ΑΣΓ, ΓΣΒ″, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ὅπου εὑρίσκονται αἱ δεδομέναι γωνίαι ΑΣΒ, ΑΣΓ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν ΕΑ6. σχ. 198.

Σχόλιον. Ἐὰν μία στερεὰ γωνία ἦναι τετραπλῆ, ἡ σχηματισμένη ἀπὸ τέσσαρας ἐπιπέδους γωνίας ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, ΔΣΑ, ἡ γνῶσις τῶν γωνιῶν τούτων δὲν ἀρκεῖ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἀμοιβαίων κλίσεων τῶν ἐπιπέδων των· διότι μὲ τὰς αὐτὰς ἐπιπέδους γωνίας δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ἀπειρία στερεῶν γωνιῶν. Ἀλλ' ἐὰν προστεθῇ μία συνθήκη, ἐὰν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΒΣΓ, τότε ἡ στερεὰ γωνία εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη, καὶ δυνατὸν εἶναι νὰ προσδιορισθῇ ἡ κλίσις δύο ὁποιωνδήποτε τῶν ἐπιπέδων της. Τῷ ὄντι ἂς φαντασθῶμεν στερεὰν τριπλῆν γωνίαν σχηματισμένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΑΣΓ· αἱ δύο πρῶται γωνίαι εἶναι δεδομέναι, καθὼς καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων των· δυνατὸν λοιπὸν νὰ προσδιορισθῇ, διὰ τοῦ λυθέντος προβλήματος, ἡ τρίτη γωνία ΑΣΓ. Ἀκολούθως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν τριπλῆν στερεὰν γωνίαν σχηματισμένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΑΣΓ, ΑΣΔ, ΔΣΓ, βλέπομεν ὅτι αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι εἶναι γνωσταί· οὕτως ἡ στερεὰ γωνία εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη. Ἀλλ' ἡ στερεὰ τετραπλῆ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν εἰρημένων δύο στερεῶν τριπλῶν γωνιῶν· λοιπὸν ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ αὗται γωνίαι εἶναι γνωσταὶ καὶ προσδιωρισμέναι, ἡ ὅλη γωνία εἶναι παρομοίως γνωστὴ καὶ προσδιωρισμένη.

Η γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΔ, ΔΣΓ, εὑρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς δευτέρας μερικῆς στερεᾶς γωνίας. Ὅσον διὰ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΒΣΓ, ΓΣΔ, πρέπει εἰς μίαν στερεὰν μερικὴν γωνίαν νὰ ζητηθῇ ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΓ, ΔΣΓ, καὶ εἰς ἄλλην ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΓ, ΒΣΓ· τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ΒΣΓ, ΔΣΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν εὕρη ὅτι διὰ τὴν προσδιόρισιν στερεᾶς πενταπλῆς γωνίας, πρέπει νὰ ἦναι γνωσταὶ ἐκτὸς τῶν πέντε γωνιῶν αἵτινες τὴν συνθέτουν δύο ἀμοιβαῖαι κλίσεις τῶν ἐπιπέδων των· ἤθελον χρειασθῇ τρεῖς εἰς τὴν ἑξαπλῆν στερεὰν γωνίαν καὶ οὕτως ἐφεξῆς. σχ. 199.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ'.

ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Ὁρισμοί.

Α'. Καλεῖται στερεὸν πολύεδρον, ἢ ἁπλῶς πολύεδρον, κάθε στερεὸν περατούμενον ἀπὸ ἐπίπεδα ἢ ἕδρας ἐπιπέδους (Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἀναγκαίως περατοῦνται ἀπὸ εὐθείας γραμμάς). Ἐν μέρει καλεῖται τετράεδρον τὸ ἔχον τέσσαρας ἕδρας στερεόν· ἑξάεδρον τὸ ἕξ· ὀκτάεδρον τὸ ὀκτώ· δωδεκάεδρον τὸ δώδεκα· εἰκοσάεδρον τὸ εἴκοσι, κ. τ. λ.

Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἁπλούστερον τῶν πολυέδρων· διότι τοὐλάχιστον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν στερεᾶς γωνίας, καὶ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἀφίνουσι κενόν τι, τὸ ὁποῖον διὰ νὰ κλεισθῇ, ἀπαιτεῖ τοὐλάχιστον τέταρτον ἐπίπεδον.

Β'. Ἡ κοινὴ τομὴ δύο προσκειμένων ἑδρῶν πολυέδρου τινὸς καλεῖται πλευρὰ ἢ κόψις (1) τοῦ πολυέδρου.

Γ'. Καλεῖται κανονικὸν πολύεδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τὰ πολύεδρα ταῦτα εἶναι πέντε τὸν ἀριθμόν. Ὅρα τὸ παράρτημα εἰς τὰ βιβλία ΣΤ'. καὶ Ζ'.

Δ'. Πρίσμα εἶναι τὸ περιεχόμενον στερεὸν ὑπὸ πολλῶν παραλληλογράμμων ἐπιπέδων, περατουμένων ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος ἀπὸ δύο ἐπίπεδα πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα.

Πρὸς κατασκευὴν τούτου τοῦ στερεοῦ, ἔστω ΑΒΓΔΕ ὁποιονδήποτε πολύγωνον· ἐὰν εἰς ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΑΒΓ, ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, κ. τ. λ. ἴσαι καὶ παράλληλοι μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλει σχηματισθῇ τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ· ἐὰν ἀκολούθως ἑνωθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἕως τοῦ ἄλλου αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων γωνιῶν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ. αἱ ἕδραι ΑΒΗΖ, ΒΓΘΖ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι παραλληλόγραμμα, καὶ τὸ οὕτως σχηματιζόμενον στερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ θέλει εἶναι πρίσμα. σχ. 200.

Ε'. Τὰ ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ, καλοῦνται βάσεις τοῦ πρίσματος· τὰ ἄλλα παραλληλόγραμμα ἐπίπεδα ὁμοῦ λαμβανόμενα συνιστοῦν τὴν παράπλευρον

(1) Κόψιν ὠνόμασα τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς λέγει (arête) διότι ἡ λέξις αὕτη μὲ ἐφάνη καταληπτὴ καὶ συνήθης εἰς τὴν γλῶσσάν μας.

(laterale) ἢ κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος. Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ. καλοῦνται πλευραὶ τοῦ πρίσματος.

ΣΤ΄. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι τὸ ἀπόστημα τῶν δύο του βάσεων, ἢ ἡ ἠγμένη κάθετος ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἄνω βάσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς κάτω.

Ζ΄. Τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθὸν, ὅταν αἱ πλευραὶ ΑΖ, ΒΗ, κ. τ. λ. ἦναι κάθετοι εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων: τότε ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· εἰς κάθε ἄλλην περίστασιν τὸ πρίσμα εἶναι πλάγιον, καὶ τὸ ὕψος εἶναι μικρότερον τῆς πλευρᾶς· διότι ἐκεῖνο μὲν εἶναι κάθετος, αὕτη δὲ πλαγία.

Η΄. Τὸ πρίσμα εἶναι τριγωνικὸν, τετραγωνικὸν, πενταγωνικὸν, ἑξαγωνικὸν, κ. τ. λ. καθὼς ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον, κ. τ. λ.

Θ΄. Τὸ πρίσμα τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, ἔχει ὅλας του τὰς ἕδρας παραλληλογραμμικάς· καλεῖται δὲ παραλληλεπίπεδον. σχ. 206.

Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον ὅταν ὅλαι του αἱ ἕδραι ἦναι ὀρθογώνιαι.

Ι΄. Μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων διακρίνεται ὁ κύβος ἢ τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

ΙΑ΄. Πυραμὶς εἶναι τὸ σχηματιζόμενον στερεὸν ὅταν πολλὰ τριγωνικὰ ἐπίπεδα ἀναχωροῦντα ἀπὸ τὴν αὐτὴν στιγμὴν Σ, τελειόνουν εἰς τὰς διαφόρους πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ πολυγωνικοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔΕ. σχ. 196.

Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καλεῖται βάσις τῆς πυραμίδος, ἡ στιγμὴ Σ κορυφὴ, καὶ ἡ ἕνωσις τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κ. τ. λ. σχηματίζει τὴν κυρτὴν ἢ παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

ΙΒ΄. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, προεκβαλλόμενον ἐὰν ἦναι ἀναγκαῖον.

ΙΓ΄. Ἡ πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ, τετραγωνικὴ, κ. τ. λ. καθὼς ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον (εἰς γενικὴν σημασίαν) κ. τ. λ.

ΙΔ΄. Ἡ πυραμὶς εἶναι κανονικὴ, ὅταν ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ταύτης τῆς βάσεως· ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται τότε ἄξων τῆς πυραμίδος.

ΙΕ'. **Διαγώνιος** πολυέδρου τινός, εἶναι ἡ εὐθεῖα ἥτις ἑνόνει τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων στερεῶν γωνιῶν.

ΙΣΤ'. Καλῶ **συμμετρικὰ πολύεδρα** δύο πολύεδρα τὰ ὁποῖα, ἔχοντα μίαν κοινὴν βάσιν, εἶναι ὁμοίως κατασκευασμένα, τὸ μὲν ἄνω τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως, τὸ δὲ ὑποκάτω, μὲ ταύτην τὴν συνθήκην, ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν νὰ κεῖνται εἰς ἴσα διαστήματα ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ταύτης τῆς βάσεως, μετρούμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

Ἐάν, π. χ. ἡ εὐθεῖα ΣΤ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ο, ὅπου συναπαντᾷ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΒΓ, θέλουν εἶναι δύο συμμετρικὰ πολύεδρα. σχ. 202.

ΙΖ'. **Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες λέγονται ὅμοιαι**, ὅταν ἔχουν δύο ἕδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, ὁμοίως κειμένας καὶ ἰσάκις κλινούσας.

Οὕτως, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ=ΔΕΖ, ΒΑΓ=ΕΔΖ, ΑΒΣ=ΔΕΤ, ΒΑΣ=ΕΔΤ, ἐὰν περιπλέον ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΑΒΣ, ΑΒΓ, ἦναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των ΔΤΕ, ΔΕΖ, αἱ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, θέλουν εἶναι ὅμοιαι. σχ. 203.

ΙΗ'. Ἀφ' οὗ σχηματισθῇ τρίγωνον μὲ τὰς κορυφὰς τριῶν γωνιῶν εἰλημμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας ἢ βάσεως πολυέδρου τινός, ἠμπορεῖ τις νὰ φαντασθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν διαφόρων στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, τῶν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως κειμένων, εἶναι κορυφαὶ τόσων τριγωνικῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουν κοινὴν βάσιν τὸ σημειωθὲν τρίγωνον· ἑκάστη δὲ τούτων τῶν πυραμίδων θέλει προσδιορίζει τὴν θέσιν καθεμιᾶς στερεᾶς γωνίας τοῦ πολυέδρου ὡς πρὸς ταύτην τὴν βάσιν. Τούτου τεθέντος:

Δύο πολύεδρα εἶναι ὅμοια ὅταν, ἐν ᾧ ἔχουν βάσεις ὁμοίας, αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν, ἐκτὸς τούτων τῶν βάσεων, προσδιορίζωνται ἀπὸ τριγωνικὰς πυραμίδας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν.

ΙΘ'. Καλῶ **κορυφὰς** ἑνὸς πολυέδρου τὰς στιγμὰς αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὰς κορυφὰς τῶν διαφόρων στερεῶν γωνιῶν του.

Σ. Κ. Ὅλα τὰ πολύεδρα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν, εἶναι πολύεδρα μὲ γωνίας ἐξεχούσας ἢ **κυρτὰ** *πολύεδρα. Καλοῦμεν οὕτως ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἡ ἐπιφάνεια δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναπαντηθῇ ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Εἰς τοιούτου εἴδους πολύεδρα τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας ἐὰν προεκβληθῇ, δὲν ἠμπορεῖ νὰ τέμνῃ τὸ πολύεδρον· ἀδύνατον λοιπὸν εἶναι μέρος τοῦ πολυέδρου νὰ εὑρίσκηται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἕδρας, καὶ μέρος ὑποκάτω· τὸ πολύεδρον εἶναι ὅλον ὑπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τούτου τοῦ ἐπιπέδου.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Θεώρημα.

Δύο πολύεδρα δὲν ἠμποροῦν νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς χωρὶς νὰ ἐφαρμόζηται τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο.

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ἓν τῶν πολυέδρων κατεσκευασμένον. Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἄλλο, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς, πρέπει τὰ ἐπίπεδα τούτου νὰ μὴ διέρχωνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ ὁποῖα διέρχονται τὰ ἐπίπεδα τοῦ πρώτου· διότι ἄλλως δὲν ἤθελε διαφέρει τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο: πλὴν τότε φανερὸν εἶναι ὅτι μερικὰ τῶν νέων ἐπιπέδων ἤθελον τέμνει τὸ πρῶτον πολύεδρον· ἤθελον ὑπάρχει κορυφαὶ ἄνω τούτων τῶν ἐπιπέδων, καὶ κορυφαὶ ὑποκάτω, τὸ ὁποῖον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀνήκῃ εἰς κυρτὸν πολύεδρον: λοιπὸν ἐὰν δύο πολύεδρα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς, ἀναγκαίως πρέπει νὰ ἐφαρμόζηται τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο.

Σχόλιον. Δεδομένων κατὰ θέσιν τῶν σημείων Α, Β, Γ, Κ, κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ χρησιμεύσουν ὡς κορυφαὶ ἑνὸς πολυέδρου, εὔκολον εἶναι νὰ διαγράψωμεν τὸ πολύεδρον.

Ἐκλέγομεν τρία πλησίον σημεῖα Δ, Ε, Θ, τοιαῦτα ὥστε τὸ ἐπίπεδον ΔΕΘ νὰ διέρχηται, ἐὰν τοῦτο ἔχῃ χώραν, διὰ νέων σημείων Κ, Γ, ἀλλ' ὅλα τὰ ἄλλα νὰ ἀφίνῃ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ ὅλα ἄνω τοῦ ἐπιπέδου ἢ ὅλα ὑποκάτω· τὸ ἐπίπεδον ΔΕΘ ἢ ΔΕΘΚΓ, οὕτω προσδιωρισμένον, θέλει εἶναι μία ἕδρα τοῦ στερεοῦ. Διὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ ΕΘ περνοῦμεν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον περιστρέφομεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ νέαν κορυφὴν Ζ, ἢ πολλὰς ἐν ταὐτῷ Ζ, Ι· θέλομεν ἔχει μίαν δευτέραν ἕδραν τὴν ΖΕΘ ἢ ΖΕΘΙ· ἐξακολουθοῦμεν νὰ περνοῦμεν ἐπίπεδα διὰ τῶν εὑρημένων πλευρῶν, ἕως οὗ τὸ στερεὸν νὰ περατωθῇ πανταχόθεν: τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πολύεδρον, διότι δὲν ὑπάρχουν δύο τὰ ὁποῖα νὰ ἠμποροῦν νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς κορυφάς. σχ. 204.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Θεώρημα.

Εἰς δύο συμμετρικὰ πολύεδρα αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν εἰς τὸ ἓν τούτων τῶν στερεῶν, εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν εἰς τὸ ἄλλο.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ ἡ κοινὴ βάσις εἰς τὰ δύο πολύεδρα, ἔστωσαν Μ καὶ Ν αἱ κορυφαὶ δύο ὁποιωνδήποτε στερεῶν γωνιῶν τοῦ ἑνὸς πολυέδρου, M′ καὶ N′ αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ τοῦ ἄλλου· πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμόν, αἱ εὐθεῖαι MM′, NN′, νὰ ἦναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, καὶ νὰ διαιρῶνται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὰς στιγμὰς μ καὶ ν ὅπου συναπαντοῦν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον. Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι τὸ διάστημα MN εἶναι ἴσον μὲ τὸ M′N′. σχ. 205.

Διότι ἐὰν στραφῇ τὸ τραπέζιον μM′N′ν ὁλόγυρα τῆς μν ἕως οὗ τὸ ἐπίπεδόν του νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μMNν· ἐξ αἰτίας τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἰς μ καὶ εἰς ν, ἡ πλευρὰ μM′ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν μM, καὶ ἡ νN′ ἐπὶ τῆς νN· λοιπὸν τὰ δύο τραπέζια θέλουν ἐφαρμόσει, καὶ θέλει εἶναι MN=M′N′.

Ἔστω Π μία τρίτη κορυφὴ τοῦ ἄνω πολυέδρου, καὶ Π′ ἡ ὁμόλογος αὐτῆ εἰς τὸ κάτω, ὡσαύτως θέλει εἶναι MΠ=M′Π′ καὶ NΠ=N′Π′· λοιπὸν τὸ τρίγωνον MNΠ, τὸ ὁποῖον ἑνόνει τρεῖς ὁποιασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἄνω πολυέδρου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον M′N′Π′ τὸ ὁποῖον ἑνόνει τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ κάτω πολυέδρου.

Ἐὰν μεταξὺ τούτων τῶν τριγώνων θεωρήσωμεν μόνον τὰ σχηματιζόμενα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῶν πολυέδρων, ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα τὸ καθὲ ἓν μὲ τὸ καθὲ ἕν.

Λέγω τώρα ὅτι ἐὰν τινὰ ἐκ τούτων τῶν τριγώνων εὑρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας καὶ σχηματίζουν τὴν αὐτὴν πολύγωνον ἕδραν, τὰ ὁμόλογα τρίγωνα θέλουν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς ἄλλης ἐπιφανείας καὶ σχηματίζει μίαν ἴσην πολύγωνον ἕδραν.

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν MΠN, NΠK, δύο προσκείμενα τρίγωνα τὰ ὁποῖα ὑποτίθενται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ ἔστωσαν M′Π′N′, N′Π′K′ τὰ ὁμόλογά των. Ἔχομεν τὴν γωνίαν MNΠ=M′N′Π′, τὴν γωνίαν ΠNK=Π′N′K′· καὶ ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ MK, M′K′, τὸ τρίγωνον MNK θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ M′N′K′, οὕτως ἡ γωνία MNK=M′N′K′. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ MΠNK εἶναι ἓν μόνον ἐπίπεδον, ἔχομεν τὴν γωνίαν MNK=MNΠ+ΠNK· λοιπὸν ὡσαύτως M′N′K′ =M′N′Π′+Π′N′K′. Τώρα, ἐὰν τὰ τρία ἐπίπεδα M′N′Π′, Π′N′K′, M′N′K′ δὲν ἐταυτίζοντο, ἤθελον σχηματίζει στερεὰν γωνίαν, καὶ ἤθελεν εἶναι (20, 5) M′N′K′ < M′N′Π′+Π′N′K′· λοιπόν, ἐπειδὴ αὐτὴ ἡ συνθήκη δὲν ἔχει χώραν, τὰ δύο τρίγωνα MNΠ, ΠN′K′, εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι καθὲ ἕδρα, εἴτε τριγωνικὴ εἴτε πολύγωνος εἰς τὸ ἓν πολύεδρον, ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἴσην ἕδραν εἰς τὸ ἄλλο, καὶ οὕτως τὰ δύο πολύεδρα περιέχονται ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν.

Μένει νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ κλίσις δύο ὁποιωνδήποτε προσκειμένων ἑδρῶν εἰς τὸ ἓν πολύεδρον εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν εἰς τὸ ἄλλο.

Ἔστωσαν ΜΠΝ, ΝΠΚ, δύο τρίγωνα σχηματισμένα ἐπὶ τῆς κοινῆς κόψεως ΝΠ εἰς τὰ ἐπίπεδα δύο προσκειμένων ἑδρῶν· ἔστωσαν Μ'Π'Ν', Ν'Π'Κ', τὰ ὁμόλογά των· ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν εἰς Ν γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΜΝΚ, ΜΝΠ, ΠΝΚ, καὶ εἰς Ν' γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς Μ'Ν'Κ', Μ'Ν'Π', Π'Ν'Κ'. Τώρα, ἐδείξαμεν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· λοιπὸν ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΝΠ, ΠΝΚ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των Μ'Ν'Π', Π'Ν'Κ' (22, 5).

Λοιπὸν εἰς τὰ συμμετρικὰ πολύεδρα, αἱ ἕδραι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰ ἐπίπεδα δύο ὁποιωνδήποτε προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ ἑνὸς τῶν στερεῶν, ἔχουν μεταξύ των τὴν αὐτὴν κλίσιν τὴν ὁποίαν τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν τοῦ ἄλλου.

Σχόλιον. Δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι αἱ συμμετρικαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ ἄλλου· διότι ἐὰν ἡ στερεὰ γωνία Ν σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα ΜΝΠ, ΠΝΚ, ΚΝΡ κ. τ. λ. ἡ ὁμόλογος αὐτῆ Ν' σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα Μ'Ν'Π', Π'Ν'Κ', Κ'Ν'Ρ', κ. τ. λ. Ταῦτα φαίνονται διατεταγμένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ὡς καὶ τὰ ἄλλα· πλὴν ἐπειδὴ αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι εἶναι εἰς θέσιν ἀντίστροφον ἡ μία ὡς πρὸς τὴν ἄλλην, ἕπεται ὅτι ἡ πραγματικὴ διάταξις τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Ν' εἶναι ἀντίστροφος τῆς διατάξεως ἥτις ὑπάρχει εἰς τὴν ὁμόλογον γωνίαν Ν. Ἄλλως ἡ κλίσις τῶν προσεχῶν ἐπιπέδων εἶναι ἴση εἰς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην στερεὰν γωνίαν· λοιπὸν αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι εἶναι συμμετρικαὶ ἡ μία τῆς ἄλλης. Βλέπε τὸ σχόλιον τῆς ΚΓ' προτάσεως, βιβλ. Ε'.

Ἡ σημείωσις αὕτη δεικνύει ὅτι ὁποιονδήποτε πολύεδρον ἓν μόνον συμμετρικὸν δύναται νὰ ἔχῃ. Διότι ἐὰν ἐπὶ ἄλλης βάσεως κατασκευασθῇ νέον πολύεδρον συμμετρικὸν μὲ τὸ δεδομένον, αἱ στερεαί του γωνίαι πάντοτε θέλουν εἶναι συμμετρικαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ δεδομένου· λοιπὸν θέλουν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ συμμετρικοῦ πολυέδρου τοῦ ἐπὶ τῆς πρώτης βάσεως κατασκευασμένου. Ἄλλως αἱ ὁμόλογοι ἕδραι θέλουν εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα συμμετρικὰ πολύεδρα ἐπὶ μιᾶς ἢ ἄλλης βάσεως κατασκευασμένα θέλουν ἔχει τὰς ἕδρας καὶ τὰς στερεὰς γωνίας ἴσας· λοιπὸν θέλουν ἐφαρμόσει διὰ τῆς ἐπιθέσεως, καὶ σχηματίσει ἓν μόνον καὶ τὸ αὐτὸ πολύεδρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν μίαν στερεὰν γωνίαν περιεχομένην μεταξὺ τριῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἔστω ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἴση μὲ τὴν βάσιν αβγδε, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΗΖ ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον αβηζ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΘΗ ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον βγθη· λέγω ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΙ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ πρίσμα αβγι. σχ. 200.

Διότι ἂς τεθῇ ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν αβγδε, αἱ δύο αὗται βάσεις θέλουν ἐφαρμόσει· ἀλλ' αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Β εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν β, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, τουτέστι, ΑΒΓ=αβγ, ΑΒΗ=αβη, καὶ ΗΒΓ=ηβγ· περιπλέον αἱ γωνίαι αὗται κεῖνται ὁμοίως· λοιπὸν αἱ στερεαὶ γωνίαι Β καὶ β εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως ἡ πλευρὰ ΒΗ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν βη. Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων παραλληλογράμμων ΑΒΗΖ, αβηζ, ἡ πλευρὰ ΗΖ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ηζ, καὶ ὁμοίως ἡ ΗΘ ἐπὶ τῆς ηθ· λοιπὸν ἡ ἄνω βάσις ΖΗΘΙΚ θέλει ἐφαρμόσει ἐντελῶς μὲ τὴν ἴσην μὲ αὐτὴν ζηθικ, καὶ τὰ δύο στερεὰ θέλουν ταυτισθῇ· διότι θέλουν ἔχει τὰς αὐτὰς κορυφὰς (πρό. 1).

Πόρισμα. Δύο ὀρθὰ πρίσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἴσας, καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἴσα. Διότι οὔσης τῆς ΑΒ ἴσης μὲ τὴν αβ, καὶ τοῦ ὕψους ΒΗ ἴσου μὲ τὸ βη, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΗΖ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον αβηζ· τὸ αὐτὸ θέλει ὑπάρχει διὰ τὰ ὀρθογώνια ΒΗΘΓ, βηθγ. Οὕτως τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Β εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρία τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν β. Λοιπὸν τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τούτου τοῦ στερεοῦ, αἱ βάσεις ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα, καὶ αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι: μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ δύο ἀπέναντι παραπλεύρους ἕδρας, ὡς ΑΕΘΔ, ΒΖΗΓ. Τώρα ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΓ· διότι τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΖ: λοιπὸν ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΓΒΖ (13, 5), καὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΑΕ παράλληλον τοῦ ΓΒΖ· λοιπὸν ὡσαύτως τὸ παραλληλόγραμμον ΔΑΕΘ εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΒΖΗ. Ὁμοίως θέλομεν δείξει ὅτι τὰ ἀπέναντι παραλληλόγραμμα ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ, εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα. σχ. 206.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ ἐπιπέδων ἐκ τῶν ὁποίων τὰ ἀπέναντι εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα, ἕπεται ὅτι μία ὁποιαδήποτε ἕδρα καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἠμποροῦν νὰ ληφθοῦν ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Σχόλιον. Δεδομένων τριῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΕ, ΑΔ αἵτινες διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς στιγμῆς Α, καὶ κάμνουν μεταξύ των γωνίας δεδομένας, δυνατὸν εἶναι ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον· πρὸς τοῦτο πρέπει ἀπὸ τὸ ἄκρον ἑκάστης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἄλλων· τουτέστιν ἀπὸ τὴν στιγμὴν Β ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΔΑΕ, ἀπὸ τὴν στιγμὴν Δ ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΒΑΕ· καὶ ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ε ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΒΑΔ· αἱ ἀμοιβαῖαι συναπαντήσεις τούτων τῶν ἐπιπέδων θέλουν σχηματίσει τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον αἱ ἀπέναντι στερεαὶ γωνίαι εἶναι συμμετρικαὶ ἡ μία τῆς ἄλλης· καὶ αἱ ἠγμέναι διαγώνιοι ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἂς συγκρίνομεν, παραδείγματος χάριν, τὴν στερεὰν γωνίαν Α μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς Η· ἡ γωνία ΕΑΒ, ἴση τῇ ΕΖΒ, εἶναι ὁμοίως ἴση τῇ ΘΗΓ, ἡ γωνία ΔΑΕ=ΔΘΕ=ΓΗΖ, καὶ ἡ γωνία ΔΑΒ=ΔΓΒ=ΘΗΖ· λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Α εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Η, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἄλλως εὔκολον εἶναι νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ διάταξίς των διαφέρει εἰς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην· λοιπὸν 1.ον αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι Α καὶ Η εἶναι συμμετρικαὶ ἡ μία τῆς ἄλλης (23, 5).

Ἀς φαντασθῶμεν τώρα δύο διαγωνίους ΕΓ, ΑΗ, ἠγμένας ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφάς: ἐπειδὴ ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΗ, τὸ σχῆμα ΑΕΗΓ εἶναι παραλληλόγραμμον· λοιπὸν αἱ διαγώνιοι ΕΓ, ΑΗ, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. Ὁμοίως θέλομεν δείξει ὅτι ἡ διαγώνιος ΕΓ καὶ μία ἄλλη ΔΖ τέμνονται ὡσαύτως εἰς δύο ἴσα μέρη· λοιπὸν 2.ον αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς ἴσα μέρη, εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ΄.

Θεώρημα.

Τὸ ἐπίπεδον ΒΔΘΖ, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι παραλλήλων κόψεων ΒΖ, ΔΘ, διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ εἰς δύο πρίσματα τριγωνικὰ ΑΒΔΘΕΖ, ΗΘΖΒΓΔ, συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου. σχ. 207.

Κατὰ πρῶτον τὰ δύο ταῦτα στερεὰ εἶναι πρίσματα· διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΖΘ, ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι ἴσα, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν αἱ παράπλευροι ἕδραι ΑΒΖΕ, ΑΔΘΕ, ΒΔΘΖ, εἶναι παραλληλόγραμμα· λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΒΔΘΕΖ εἶναι πρίσμα: τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὸ στερεὸν ΗΘΖΒΓΔ· λέγω τώρα ὅτι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου.

Ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΔ ἂς γένη τὸ πρίσμα ΑΒΔΕ'Ζ'Θ' τὸ ὁποῖον νὰ ἦναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος ΑΒΔΕΖΘ. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα (πρό. 2) τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖ'Ε' εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖΕ, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΘ'Ε' ἴσον μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΘΕ· ἀλλ' ἡ σύγκρισις τοῦ πρίσματος ΗΘΖΒΓΔ μὲ τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ'Ε'Ζ', δεικνύει ὅτι ἡ βάσις ΗΘΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΔ· τὸ παραλληλόγραμμον ΗΘΔΓ, ἴσον μὲ τὸ ΑΒΖΕ, ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ τὸ ΑΒΖ'Ε', καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖΒΓ, ἴσον μὲ τὸ ΑΔΘΕ, ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ τὸ ΑΔΘ'Ε'· λοιπὸν τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Η εἰς τὸ πρίσμα ΗΘΖΒΓΔ, εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Α εἰς τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ'Ε'Ζ', τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν· ἄλλως εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα· λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα (πρό. 3), καὶ ἠμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσιν. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ'Ε'Ζ' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος ΑΒΔΘΕΖ· λοιπὸν καὶ τὸ πρίσμα ΗΘΖΒΓΔ, εἶναι ὡσαύτως τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΔΘΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Λῆμμα.

Εἰς κάθε πρίσμα ΑΒΓΙ, αἱ γινόμεναι τομαὶ ΝΟΠΚΡΣΤΦΧΨ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι πολύγωνα ἴσα. σχ. 201.

Διότι αἱ πλευραὶ ΝΟ, ΣΤ, εἶναι παράλληλοι, ὡς κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου ΑΒΗΖ· αἱ ἴδιαι πλευραὶ ΝΟ, ΣΤ περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΝΣ, ΟΤ αἵτινες εἶναι πλευραὶ τοῦ πρίσματος· λοιπὸν ΝΟ εἶναι ἴση τῇ ΣΤ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλευραὶ ΟΠ, ΠΚ, ΚΡ, κ. τ. λ. τῆς τομῆς ΝΟΠΚΡ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΤΦ, ΦΧ, ΧΨ κ. τ. λ. τῆς τομῆς ΣΤΦΧΨ. Ἄλλως ἐπειδὴ αἱ ἴσαι πλευραὶ εἶναι καὶ παράλληλοι, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΝΟΠ, ΟΠΚ, κ. τ. λ. τῆς πρώτης τομῆς, εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΣΤΦ, ΤΦΧ, κ. τ. λ. τῆς δευτέρας. Λοιπὸν αἱ δύο τομαὶ ΝΟΠΚΡ, ΣΤΦΧΨ, εἶναι πολύγωνα ἴσα.

Πόρισμα. Κάθε τομὴ γινομένη εἰς ἓν πρίσμα παραλλήλως τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν τὴν βάσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Θεώρημα.

Τὰ δύο συμμετρικὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΔΘΕΖ, ΒΓΔΖΗΘ, εἰς τὰ ὁποῖα ἀποσυντίθεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. σχ. 208.

Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Ζ ἂς ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα Βαδγ, Ζεθη κάθετα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΖ, τὰ ὁποῖα συναπαντοῦν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος εἰς α, δ, γ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο εἰς ε, θ, η, τὰς τρεῖς ἄλλας πλευρὰς ΕΑ, ΔΘ, ΓΗ τοῦ ἰδίου παραλληλεπιπέδου· αἱ τομαὶ Βαδγ, Ζεθη εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα. Αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ἴσαι ὡς τομαὶ ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ ἑπομένως παραλλήλων (πρό. 7)· εἶναι παραλληλόγραμμα, διότι δύο ἀπέναντι πλευραὶ τῆς αὐτῆς τομῆς αΒ, δγ, εἶναι αἱ κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διὰ λόγον παρόμοιον, τὸ σχῆμα ΒαεΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, καθὼς καὶ αἱ ἄλλαι παράπλευροι ἕδραι ΒΖηγ, γδθη, αδθε, τοῦ στερεοῦ ΒαδγΖεθη· λοιπὸν τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι πρίσμα (ὁρ. 4)· καὶ τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι ὀρθὸν, διότι ἡ πλευρὰ ΒΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΒΖΘΔ μοιρασθῇ τὸ ὀρθὸν πρίσμα Βθ εἰς δύο τριγωνικὰ ὀρθὰ πρίσματα αΒδεΖθ, ΒδγΖθη·

λέγω ὅτι τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΕΖΘ, θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τριγωνικὸν ὀρθὸν αΒδεΖθ.

Τῷ ὄντι ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ἔχουν κοινὸν τὸ στερεὸν ΑΒΔθεΖ, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὑπόλοιπα μέρη δηλαδὴ, τὰ στερεὰ ΒαΑΔδ, ΖεΕΘθ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

Τώρα ἐξ αἰτίας τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΖΕ, αΒΖε, αἱ πλευραὶ ΑΕ, αε, ἴσαι μὲ τὴν παράλληλόν των ΒΖ, εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι· οὕτω, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ κοινοῦ μέρους Αε, μένει Αα=Εε. Ὁμοίως δείξομεν ὅτι Δδ=Θθ.

Ἤδη, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν τῶν δύο στερεῶν ΒαΑΔδ, ΖεΕΘθ, ἂς θέσωμεν τὴν βάσιν Ζεθ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν Βαδ· τότε ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ ε πίπτει εἰς α, καὶ ἡ θ εἰς δ, αἱ πλευραὶ εΕ, Θθ, θέλουν πέσει ἐπὶ τῶν ἴσων μὲ αὐτὰς αΑ, Δδ, διότι εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Βαδ· λοιπὸν τὰ δύο στερεὰ περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος κατὰ πάντα θέλουν ἐφαρμόσει τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο· λοιπὸν τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΑΔΖΕΘ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθὸν ΒαδΖεθ.

Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον θέλομεν δείξει ὅτι τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΔΓΖΘΗ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθὸν ΒδγΖθη. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα ΒαδΖεθ, ΒδγΖθη εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΖ καὶ αἱ βάσεις των Βαδ, Βδγ εἶναι ἡμίσεα τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου (πρό. 3. πόρ.). Λοιπὸν τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΒΑΔΖΕΘ, ΒΔΓΖΘΗ, ἰσοδύναμα μὲ ἴσα πρίσματα, εἶναι καὶ μεταξύ των ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. Κάθε τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΘΕΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας Α, μὲ τὰς αὐτὰς κόψεις ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ κατασκευαζομένου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ, ἔχουν μίαν κοινὴν βάσιν ΑΒΓΔ, καὶ αἱ ἄνω βάσεις των ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ, περιέχωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΕΚ', ΘΛ, τὰ δύο ταῦτα παραλληλεπίπεδα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. σχ. 209.

Τρεῖς περιστάσεις δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν, καθὼς ἡ ΕΙ εἶναι μείζων, μικροτέρα ἢ ἴση τῇ ΕΖ· πλὴν ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλας: καὶ κατὰ πρῶτον λέγω ὅτι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΕΙΔΘΜ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριγωνικὸν ΒΖΚ'ΓΗΛ.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ΑΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΖ καὶ ἡ ΘΕ τῇ

ΗΖ, ἡ γωνία ΑΕΙ=ΒΖΚ′, ΘΕΙ=ΗΖΚ′, καὶ ΘΕΑ=ΗΖΒ. Ἀπὸ τὰς ἓξ ταύτας γωνίας αἱ τρεῖς πρῶται σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Ε, αἱ τρεῖς ἄλλαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Ζ· λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ὁμοίως διατεταγμέναι, ἕπεται ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι Ε καὶ Ζ εἶναι ἴσαι. Ἤδη, ἐὰν τεθῇ τὸ πρίσμα ΑΕΜ ἐπὶ τοῦ πρίσματος ΒΖΛ, κατὰ πρῶτον ἡ βάσις ΑΕΙ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΖΚ, αἱ δύο αὗται βάσεις ὡς ἴσαι θέλουν ἐφαρμόσει· καὶ ἐπειδὴ ἡ στερεὰ γωνία Ε εἶναι ἴση τῇ στερεᾷ γωνίᾳ Ζ, ἡ πλευρὰ ΕΘ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΖΗ: ἀλλὰ δὲν εἶναι χρεία περισσότερον διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ δύο πρίσματα θέλουν ἐφαρμόσει καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν· διότι ἡ βάσις ΑΕΙ καὶ ἡ κόψις ΕΘ προσδιορίζουν τὸ πρίσμα ΑΕΜ, ὡς ἡ βάσις ΒΖΚ′ καὶ ἡ κόψις ΖΗ προσδιορίζουν τὸ πρίσμα ΒΖΛ (πρό. 3)· λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τὸ στερεὸν ΑΛ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα ΑΕΜ, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΙΛ· καὶ ἐὰν ἀπὸ τὸ αὐτὸ στερεὸν ΑΛ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα ΒΖΛ, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΕΗ· λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΙΛ, ΑΕΗ, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι′.

Θεώρημα.

Δύο παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

Ἔστω ΑΒΓΔ ἡ κοινὴ βάσις εἰς τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ· ἐπειδὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω βάσεις των ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ, θέλει εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Περιπλέον αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς ΙΚ′ καὶ ΑΒ· λοιπὸν ΕΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΙΚ′: διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΗΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΛΚ′. Ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΕΖ, ΗΘ, καθὼς καὶ αἱ ΛΚ′, ΙΜ, ἕως οὗ καὶ αἱ πρῶται καὶ αἱ δεύτεραι μὲ τὰς συναπαντήσεις των νὰ σχηματίσουν τὸ παραλληλόγραμμον ΝΟΠΚ· φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο θέλει ἰσοῦται μὲ κάθε μίαν τῶν βάσεων ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ. Τώρα ἐὰν φαντασθῶμεν τρίτον παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον μὲ τὴν αὐτὴν κάτω βάσιν ΑΒΓΔ, νὰ ἔχῃ δι' ἄνω βάσιν ΝΟΠΚ, τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἤθελεν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ (πρό. 9), διότι ἐν ᾧ ἔχουν τὴν αὐτὴν κάτω βάσιν, αἱ ἄνω βάσεις περιέχονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΗΚ, ΖΝ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἤθελεν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ· λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. σχ. 210.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Θεώρημα.

Κάθε παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ τρεφθῇ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἰσοδύναμον.

Ἔστω ΑΗ τὸ προτεθὲν παραλληλεπίπεδον· ἐκ τῶν στιγμῶν Α, Β, Γ, Δ, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΙ, ΒΚ', ΓΛ, ΔΜ κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Οὕτω θέλει σχηματισθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι ἕδραι ΑΚ', ΒΛ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ὀρθογώνια. (σχ. 210). Ἐὰν λοιπὸν ἡ βάσις ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον ΑΛ, θέλει εἶναι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἰσοδύναμον μὲ τὸ προτεθὲν ΑΗ (σχ. 211). Ἀλλ' ἐὰν ΑΒΓΔ δὲν ἦναι ὀρθογώνιον, ἂς ἀχθῶσιν ΑΟ καὶ ΒΝ κάθετοι ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἀκολούθως ΟΚ καὶ ΝΠ κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως· θέλει προκύψει τὸ στερεὸν ΑΒΝΟΙΚ'ΠΚ τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Τῷ ὄντι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ βάσις ΑΒΝΟ καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ΙΚ'ΠΚ εἶναι ὀρθογώνια· αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὁμοίως, διότι αἱ κόψεις ΑΙ, ΟΚ κ. τ. λ. εἶναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΠ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΠ, ΑΛ ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΚ'Ι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΟ: λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα· λοιπὸν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, τὸ ὁποῖον κατὰ πρῶτον ἐτρέφθη (σχ. 210 καὶ 211) εἰς ἰσοδύναμον παραλληλεπίπεδον ΑΛ, ἰσοδυναμεῖ τώρα μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΠ, ὕψος τοῦ ὁποίου εἶναι ΑΙ καὶ βάσις ΑΒΝΟ ἰσοδύναμος μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Θεώρημα.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒΓΔ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΕ, ΑΙ. σχ. 212.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ ὕψη ΑΕ, ΑΙ εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, παραδείγματος χάριν, ὡς 15 πρὸς 8. Διαιροῦμεν τὸ ὕψος ΑΕ εἰς 15 ἴσα μέρη, ἐκ τῶν οποίων ΑΙ θέλει περιέχει 8, καὶ ἐκ τῶν στιγμῶν τῆς διαιρέσεως χ, ψ, ω, κ. τ. λ. ἄγομεν ἐπίπεδα παράλληλα τῆς βάσεως. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουν μοιράσει τὸ στερεὸν ΑΗ εἰς 15 μερικὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ὁποῖα ὅλα θέλουν εἶναι ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα· βάσεις ἴσας, διότι κάθε τομὴ ὡς ΜΙΚ'Μ γινομένη εἰς ἓν πρίσμα παραλλήλως τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔ, εἶναι ἴση μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν (πρό. 7)· ὕψη ἴσα, διότι ταῦτα τὰ ὕψη εἶναι αἱ ἴδιαι διαιρέσεις Αχ, χψ, χω, κ. τ. λ. Τώρα, ἀπὸ ταῦτα τὰ 15 ἴσα παραλληλεπίπεδα, ὀκτὼ περιέχονται εἰς ΑΛ· λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΗ εἶναι πρὸς τὸ στερεὸν ΑΛ ὡς 15 πρὸς 8, ἢ ἐν γένει ὡς τὸ ὕψος ΑΕ πρὸς τὸ ὕψος ΑΙ.

Δεύτερον, ἐὰν ὁ λόγος τοῦ ὕψους ΑΕ πρὸς ΑΙ δὲν ἠμπορῇ νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀριθμῶν, λέγω ὅτι ἐπίσης θέλομεν ἔχει στερ. ΑΗ : στερ. ΑΛ : : ΑΕ : ΑΙ. Διότι, ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ὑπάρχῃ, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι στερ. ΑΗ : στερ. ΑΛ : : ΑΕ : ΑΟ. Ἂς διαιρεθῇ ΑΕ εἰς ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἦναι μικρότερον παρὰ ΟΙ· τοὐλάχιστον θέλει ὑπάρχει ἓν σημεῖον διαιρέσεως μ μεταξὺ Ο καὶ Ι. Ἔστω Π τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ βάσιν ΑΒΓΔ καὶ ὕψος Αμ· ἐπειδὴ τὰ ὕψη ΑΕ, Αμ εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, θέλομεν ἔχει στερ. ΑΗ : Π : : ΑΕ : Αμ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, στερ. ΑΗ : στερ. ΑΛ : : ΑΕ : ΑΟ· ἐντεῦθεν ἕπεται στερ. ΑΛ : Π : : ΑΟ : Αμ. Ἀλλὰ ΑΟ > Αμ ἔπρεπε λοιπόν, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία, τὸ στερεὸν ΑΛ νὰ ἦναι > Π. Ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον: ἀδύνατον λοιπὸν ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας στερ. ΑΗ : στερ. ΑΛ : : ΑΕ : χ νὰ ἦναι γραμμὴ μείζων τῆς ΑΙ. Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν δείξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι γραμμὴ ἐλάσσων τῆς ΑΙ· λοιπὸν εἶναι ἴση μὲ ΑΙ· λοιπὸν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Θεώρημα.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΚ', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των ΑΒΓΔ, ΑΜΝΟ. σχ. 213.

Ἀφ' οὗ τεθῶσι τὰ δύο στερεὰ ἓν πλησίον τοῦ ἄλλου, ὡς τὸ σχῆμα τὰ παριστάνει, ἂς προεκβληθῇ τὸ ἐπίπεδον ΟΝΚ'Λ, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΔΓΗΘ κατὰ τὴν ΠΚ· θέλει προκύψει τρίτον παραλληλεπίπεδον ΑΚ, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ συγκριθῇ μὲ ἕκαστον τῶν παραλληλεπιπέδων ΑΗ, ΑΚ'. Τὰ δύο στερεὰ ΑΗ, ΑΚ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΕΘΔ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΒ, ΑΟ, παρομοίως τὰ δύο στερεὰ ΑΚ, ΑΚ', ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΟΛΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΔ, ΑΜ. Οὕτω θέλομεν ἔχει τὰς δύο ἀναλογίας,

στερ. ΑΗ : στερ. ΑΚ : : ΑΒ : ΑΟ,

στερ. ΑΚ : στερ. ΑΚ' : : ΑΔ : ΑΜ.

Πολυπλασιάζοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν, καὶ ἐξαλείφοντες, εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸν κοινὸν πολυπλασιαστὴν στερ. ΑΚ, θέλομεν ἔχει,

στερ. ΑΗ : στερ. ΑΚ' : : ΑΒ $\times$ ΑΔ : ΑΟ $\times$ ΑΜ.

Ἀλλὰ ΑΒ$\times$ΑΔ παριστάνει τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, καὶ ΑΟ$\times$ΑΜ τὴν βάσιν ΑΜΝΟ· λοιπὸν δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Θεώρημα.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεών των ἐπὶ τῶν ὑψῶν των, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν διαστάσεών των.

Διότι ἀφ' οὗ τεθῶσι τὰ δύο στερεὰ ΑΗ, ΑΩ, εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐπιφάνειαί των νὰ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἃς προεκβληθῶσι τὰ ἀναγκαῖα ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου παραλληλεπιπέδου ΑΚ' τοῦ αὐτοῦ ὕψους μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ. Κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, θέλομεν ἔχει,

στερ. ΑΗ : στερ. ΑΚ' : : ΑΒΓΔ : ΑΜΝΟ.

Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΚ', ΑΩ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΜΝΟ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΕ, ΑΧ· οὕτως ἔχομεν,

στερ. ΑΚ' : στερ. ΑΩ : : ΑΕ : ΑΧ.

Πολυπλασιάζοντες κατὰ τάξιν τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, καὶ ἐξαλείφοντες, εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸν κοινὸν πολυπλασιαστὴν στερ. ΑΚ', θέλομεν ἔχει,

στερ. ΑΗ : στερ. ΑΩ : : ΑΒΓΔ $\times$ ΑΕ : ΑΜΝΟ $\times$ ΑΧ.

Ἀντὶ τῶν βάσεων ΑΒΓΔ καὶ ΑΜΝΟ, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ΑΒ$\times$ΑΔ καὶ ΑΟ$\times$ΑΜ, καὶ οὕτως ἔχομεν,

στερ. ΑΗ : στερ. ΑΩ : : ΑΒ$\times$ΑΔ$\times$ΑΕ : ΑΟ$\times$ΑΜ$\times$ΑΧ.

Λοιπὸν δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι μεταξύ των, κ. τ. λ. σχ. 213.

Σχόλιον. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διὰ μέτρον ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του, ἢ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων. Καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς ἀρχῆς θέλομεν ἐκτιμήσει ὅλα τὰ ἄλλα στερεά.

Πρὸς κατάληψιν τούτου τοῦ μέτρου πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι διὰ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων γραμμῶν, ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν οἵτινες παριστάνουν ταύτας τὰς γραμμάς, καὶ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν γραμμικὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν κατ' ἀρέσκειαν· τούτου τεθέντος, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀριθμὸς ὅστις καθ' ἑαυτὸν δὲν σημαίνει τίποτε, καὶ ὅστις ἤθελεν εἶναι διαφορετικὸς ἐὰν ἐλαμβάνετο μία ἄλλη γραμμικὴ μονάς. Ἀλλ' ἐὰν ὁμοίως πολυπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς διαστάσεις ἄλλου παραλληλεπιπέδου, ἐκτιμῶντες αὐτὰς μὲ τὴν αὐτὴν γραμμικὴν μονάδα, τὰ δύο γινόμενα θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ στερεά, καὶ θέλουν δώσει τὴν ἰδέαν τοῦ σχετικοῦ μεγέθους των.

Τὸ μέγεθος ἑνὸς στερεοῦ, ὁ ὄγκος του ἢ ἡ ἔκτασίς του συνιστοῦν τὴν στερεότητά του, καὶ τὴν λέξιν ταύτην μάλιστα μεταχειριζόμεθα διὰ νὰ σημειώνωμεν τὸ μέτρον ἑνὸς στερεοῦ: οὕτω λέγομεν ὅτι ἡ στερεότης ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ὀρθογωνίου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων.

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἐὰν ἡ πλευρὰ ἦναι 1, ἡ στερεότης θέλει εἶναι $1 \times 1 \times 1$ ἢ 1· ἐὰν ἡ πλευρὰ ἦναι 2, ἡ στερεότης θέλει εἶναι $2 \times 2 \times 2$, ἢ 8· ἐὰν δὲ 3, ἡ στερεότης θέλει εἶναι $3 \times 3 \times 3$, ἢ 27, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὅθεν ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, κ. τ. λ., οἱ κύβοι ἢ αἱ στερεότητές των εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 8, 27, κ. τ. λ. Ἐκ τούτου προῆλθε νὰ ὀνομάζηται εἰς τὴν ἀριθμητικὴν κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ τὸ προκύπτον γινόμενον ἀπὸ τρεῖς ἴσους πράγοντας μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

Ἐὰν ἐπρότείνετο νὰ κατασκευασθῇ κύβος διπλάσιος δεδομένου, ἔπρεπεν ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου νὰ ἦναι πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου ὡς ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα. Τώρα εὐκόλως εὑρίσκεται, διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2· πλὴν δὲν εἶναι δυνατὸν ὡσαύτως νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβική του, τοὐλάχιστον διὰ τῶν ἁπλῶν ἐργασιῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι συνίστανται εἰς τὴν χρῆσιν εὐθειῶν γραμμῶν τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὰ δύο σημεῖα, καὶ κύκλων τῶν ὁποίων τὰ κέντρα καὶ αἱ ἀκτῖνες εἶναι προσδιορισμένα.

Διὰ τὴν δυσκολίαν ταύτην τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ἐστάθη περίφημον τοῖς ἀρχαίοις γεωμέτραις, ὡς τὸ τῆς τριτομῆς τῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον εἶναι σχεδὸν τῆς αὐτῆς κατηγορίας. Ἀλλὰ πρὸ πολλοῦ εἶναι γνωσταὶ αἱ λύσεις τῶν ὁποίων τὰ τοιαῦτα προβλήματα εἶναι δεκτικά, αἱ ὁποῖαι ἐὰν καὶ δὲν φέρουσι τὴν ἁπλότητα τῶν κατασκευῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, δὲν εἶναι ὅμως ὀλιγώτερον ἀκριβεῖς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Θεώρημα.

Ἡ στερεότης ἑνὸς παραλληλεπιπέδου, καὶ ἐν γένει ἡ στερεότης ὁποιουδήποτε πρίσματος, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Διότι 1.ον ὁποιονδήποτε παραλληλεπίπεδον ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ ἰσοδυνάμου βάσεως (πρό. 11)· ἀλλ' ἡ στερεότης τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του· λοιπὸν καὶ ἡ στερεότης ἐκείνου ἰσοῦται παρομοίως μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

2.ον Κάθε τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κατασκευαζομένου παραλληλεπιπέδου εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν διπλασίαν (πρό. 8). Ἀλλ' ἡ στερεότης τούτου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του· λοιπὸν ἡ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του, ἡμισείας τῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

3.ον Ὁποιονδήποτε πρίσμα ἠμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς τόσα τριγωνικὰ πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους ὅσα τρίγωνα εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθοῦν εἰς τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον χρησιμεύει εἰς αὐτὸ ὡς βάσις. Ἀλλ' ἡ στερεότης ἑκάστου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ὕψους του· ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν πρισμάτων θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν εἰς αὐτὰ ὡς βάσεις, πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ὕψους· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν πρισμάτων συγκροτεῖ τὸ ὅλον πρίσμα· ἄρα ἡ στερεότης ὁποιουδήποτε πολυγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Πόρισμα. Ἐὰν παραβληθῶσι δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τῶν ὑψῶν θέλουν εἶναι ὡς αἱ βάσεις· λοιπὸν δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των· διὰ λόγον παρόμοιον, δύο πρίσματα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ιϛ'.

Λῆμμα.

Ἐὰν μία πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου αβδ παραλλήλου τῆς βάσεώς της. σχ. 214.

1.ον αἱ πλευραὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ... καὶ τὸ ὕψος ΣΟ, θέλουν διαιρεθῇ ἀναλόγως εἰς α, β, γ, ... καὶ ο.

2.ον ἡ τομὴ αβγδε θέλει εἶναι πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ.

Διότι 1.ον ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, αβγ, εἶναι παράλληλα, αἱ κοιναὶ τομαί των ΑΒ, αβ, ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΣΑΒ, εἶναι παράλληλοι (10, 5)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΣΑΒ Σαβ εἶναι ὅμοια, καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΣΑ:Σα::ΣΒ:Σβ· ὡσαύτως ΣΒ:Σβ::ΣΓ:Σγ· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κ. τ. λ. τέμνονται ἀναλόγως εἰς α, β, γ, κ. τ. λ. Τὸ ὕψος ΣΟ τέμνεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν εἰς τὴν στιγμὴν ο. διότι ΒΟ καὶ βο εἶναι παράλληλοι, καὶ οὕτως ΣΟ:Σο::ΣΒ:Σβ.

2.ον Ἐπειδὴ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ βγ τῇ ΒΓ, ἡ γδ τῇ ΓΔ, κ. τ. λ., ἡ γωνία αβγ=ΑΒΓ, ἡ γωνία βγδ=ΒΓΔ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΑΒ, Σαβ, ἔχομεν ΑΒ:αβ::ΣΒ:Σβ· καὶ ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΒΓ, Σβγ, ΣΒ:Σβ::ΒΓ:βγ· λοιπὸν ΑΒ:αβ::ΒΓ:βγ. Ὡσαύτως ΒΓ:βγ::ΓΔ:γδ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Λοιπὸν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· λοιπὸν εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα. Ἔστωσαν ΣΑΒΓΔΕ, ΣΧΨΩ, δύο πυραμίδες τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι κοινή, καὶ τὸ ὕψος τὸ αὐτό, ἢ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐὰν αἱ πυραμίδες αὗται τμηθῶσιν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων, καὶ προκύψωσιν αἱ τομαὶ αβγδε, χψω· λέγω ὅτι αἱ τομαὶ αβγδε, χψω, θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ.

Διότι ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ὅμοια, αἱ ἐπιφάνειαί των εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αβ· ἀλλὰ ΑΒ:αβ::ΣΑ:Σα· λοιπὸν ΑΒΓΒΕ:αβγδε::$\overline{\Sigma\mathrm{A}}^2$:$\overline{\Sigma\alpha}^2$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΧΨΩ:χψω::$\overline{\Sigma\mathrm{X}}^2$:$\overline{\Sigma\chi}^2$. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ αβγχψω εἶναι ἓν μόνον ἐπίπεδον, ἕπεται ὅτι ΑΧ καὶ αχ εἶναι παράλληλοι ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ΣΑΧ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΧ, Σαχ εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν ΣΑ: Σα :: ΣΧ : Σχ· ἑπομένως ΧΨΩ : χψω :: $ΣΑ^2 : Σα^2$· καὶ ἐπειδὴ ὡσαύτως ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: $ΣΑ^2 : Σα^2$· ἄρα ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: ΧΨΩ : χψω· λοιπὸν αἱ τομαὶ αβγδε, χψω, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ. Ἐὰν λοιπὸν αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ ἦναι ἰσοδύναμοι, αἱ γινόμεναι τομαὶ εἰς ἴσον ὕψος εἶναι παρομοίως ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

Θεώρημα.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, βάσεις ἔχουσαι ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἔστωσαν ΣΑΒΓ, σαβγ αἱ δύο πυραμίδες τῶν ὁποίων αἱ βάσεις ΑΒΓ, αβγ, τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΤΑ· ἐὰν αἱ πυραμίδες αὗται δὲν ἦναι ἰσοδύναμοι, ἔστω σαβγ ἡ μικροτέρα καὶ ΑΧ τὸ ὕψος ἑνὸς πρίσματος, τὸ ὁποῖον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓ, ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφοράν των (1). σχ. 215.

Ἂς διαιρεθῇ τὸ κοινὸν ὕψος ΑΤ εἰς μέρη ἴσα μικρότερα τοῦ Αχ, καὶ ἔστω κ ἓν τούτων τῶν μερῶν· ἐκ τῶν στιγμῶν τῆς διαιρέσεως τοῦ ὕψους, ἂς διέλθωσιν ἐπίπεδα παράλληλα τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων· αἱ γινόμεναι τομαὶ ἀπὸ καθὲν τούτων τῶν ἐπιπέδων, θέλουν εἶναι ἰσοδύναμοι (πρό. 16. πορ.), ὡς, παραδείγματος χάριν, ΔΕΖ καὶ δεζ, ΗΘΙ καὶ ηθι κ. τ. λ. Τούτου τεθέντος, ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΙ, κ. τ. λ. λαμβανομένων ὡς βάσεων, ἂς κατασκευασθῶσιν ἐξωτερικὰ πρίσματα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν διὰ κόψεις τὰ μέρη ΑΔ, ΔΗ, ΗΚ, κ. τ. λ. τῆς πλευρᾶς ΣΑ· ὡσαύτως ἐπὶ τῶν τριγώνων δεζ, ηθι, κλμ, κ. τ. λ. ὡς βάσεων λαμβανομένων, ἂς κατασκευασθῶσιν εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα πρίσματα ἐσωτερκὰ τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν διὰ κόψεις τὰ ἀντιστοιχοῦντα μέρη τῆς πλευρᾶς Σα· ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ πρίσματα θέλουν ἔχει διὰ κοινὸν ὕψος κ.

---

(1) Τοῦτο πάντοτε ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν· διότι ἂς παριστάνῃ α. τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν ὁποῦ εἷς προσδιωρισμένος ὄγκος περιέχεται εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα· β΄. τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν ὁποῦ ὁ αὐτὸς ὄγκος περιέχεται εἰς τὴν δευτέραν τὴν ἐξ ὑποθέσεως μικροτέραν: α—β παριστάνει τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων· τὸν ἀριθμὸν τοῦτον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον δύο παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ ὅστις παριστάνει τὴν βάσιν καὶ ἑνὸς ἄλλου ὅστις προσδιορίζεται· τώρα ἐὰν δώσωμεν εἰς πρίσμα διὰ βάσιν τὴν βάσιν τῶν πυραμίδων, καὶ διὰ ὕψος τὸν δεύτερον παράγοντα, ὁ ὄγκος τούτου τοῦ πρίσματος θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τούτων τῶν δύο ἀριθμῶν ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων. Ο. Μ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρισμάτων, εἶναι μεῖζον ταύτης τῆς πυραμίδος· τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ πρισμάτων, εἶναι μικρότερον ταύτης τῆς πυραμίδος· λοιπὸν διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων τῶν πρισμάτων πρέπει νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς μεταξὺ τῶν δύο πυραμίδων.

Τώρα ἐὰν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὰς βάσεις ΑΒΓ, αβγ ἀπαντῶμεν τὸ δεύτερον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΔΕΖΗ ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν δεζα, διότι αἱ βάσεις των ΔΕΖ, δεζ, εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος κ' διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἰσοδύναμα τὸ τρίτον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΗΘΙΚ καὶ τὸ δεύτερον ἐσωτερικὸν ηθιδ, τὸ τέταρτον ἐξωτερικὸν καὶ τὸ τρίτον ἐσωτερικὸν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου τῶν πρώτων, καὶ τοῦ τελευταίου τῶν δευτέρων. Λοιπὸν ὅλα τὰ ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρίσματα, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου ΑΒΓΔ, ἔχουν τὰ ἰσοδύναμά των εἰς τὰ ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ πρίσματα. Λοιπὸν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρισμάτων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐντὸς τῆς πυρμίδος σαβγ· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων εἶναι μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πυραμίδων· ἔπρεπε λοιπὸν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΧ· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον· διότι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των κ καὶ Αχ· ἀλλὰ κ εἶναι ἔλασσον τοῦ ΑΧ· ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ εἶναι ἔλασσον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΧ· λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, σαβγ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ τὰ ὕψη ἴσα, δὲν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων· ἄρα ἰσοδυναμοῦσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Θεώρημα.

Κάθε τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

Ἔστω ΣΑΒΓ τριγωνικὴ πυραμὶς, ΑΒΓΔΕΣ τριγωνικὸν πρίσμα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους· λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος.

Ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τὸ πρίσμα τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, μένει τὸ στερεὸν ΣΑΓΔΕ τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς τετραγωνικὴ πυραμὶς τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι Σ καὶ ἡ βάσις τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΔΕ· ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΓΕ, καὶ ἃς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΣΓΕ τὸ ὁποῖον μοιράζει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς ΣΑΓΕ, ΣΔΓΕ. Αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν κοινὸν ὕψος τὴν κατεβαζομένην κάθετον ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔΕ· ἔχουν βάσεις ἴσας, διότι τὰ τρίγωνα ΑΓΕ, ΔΓΕ, εἶναι τὰ δύο ἡμίσεα τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΓΕ, ΣΔΓΕ, εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των· ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΣΔΓΕ καὶ ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ ἔχουν βάσεις ἴσας ΑΒΓ, ΔΕΣ· ἔχουν ὁμοίως τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΔΕΣ· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΔΓΕ εἶναι ἰσοδύναμοι· ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἡ πυραμὶς ΣΔΓΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα ΣΑΓΕ· λοιπὸν αἱ τρεῖς πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΔΓΕ, ΣΑΓΕ αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ πρίσμα ΑΒΔ εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος ΑΒΔ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Πόρισμα. Ἡ στερεότης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τοῦ ὕψους της.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄.

Θεώρημα.

Κάθε πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ἔχει μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τοῦ ὕψους της ΑΟ. σχ. 214.

Διότι ἐὰν διὰ τῶν διαγωνίων ΕΒ, ΕΓ διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα ΣΕΒ, ΣΕΓ, ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ, θέλει μοιρασθῆ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι ὅλαι θέλουν ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος ΣΟ. Ἀλλά, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, ἑκάστη τούτων μετρεῖται ἀπὸ τὸ γινόμενον κάθε μιᾶς τῶν βάσεων ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΓΔΕ, ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους της ΣΟ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, ἢ ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΓΔΕ ἢ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πολυπλασιασθὲν ἐπὶ $\frac{1}{3}$ ΣΟ· λοιπὸν κάθε πυραμὶς ἔχει διὰ μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τοῦ ὕψους της.

Πόρισμα Α΄. Κάθε πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

Πόρισμα Β΄. Δύο πυραμίδες τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο πυραμίδες τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Σχόλιον. Ἠμποροῦμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν στερεότητα κάθε πολυέδρου σώματος, ἀναλύοντές το εἰς πυραμίδας. Ἡ δὲ ἀνάλυσις αὕτη ἠμπορεῖ νὰ γένῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ὁ ἁπλούστερος τούτων εἶναι τὸ νὰ διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, νὰ ἑνωθῇ ἡ κορυφὴ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας μὲ τὰς κορυφὰς τῶν ἄλλων στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου· οὕτω θέλουν προκύψει τόσαι μερικαὶ πυραμίδες, ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον, ἐξαιρουμένων τῶν σχηματιζουσῶν τὴν στερεὰν γωνίαν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀναχωροῦσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄.

Θεώρημα.

Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των, ἤτε ἴσα κατὰ τὴν στερεότητα.

Διότι 1.ον δύο τριγωνικαὶ συμμετρικαὶ πυραμίδες, ὡς ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ ἔχουν κοινὸν μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τριτημόριον τοῦ ὕψους ΣΟ ἢ ΤΟ· λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των. σχ. 202.

2.ον Ἐὰν καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον μοιρασθῇ ἓν τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, τὸ ἄλλο πολύεδρον ἠμπορεῖ ὡσαύτως νὰ μοιρασθῇ εἰς συμμετρικὰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Ἀλλ' αἱ συμμετρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· λοιπὸν καὶ τὰ ὅλα πολύεδρα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των, εἴτε ἴσα κατὰ τὴν στερεότητα.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη φαίνεται ὡς προκύπτουσα ἀμέσως ἀπὸ τὴν Β΄ πρότασιν, ὅπου δεικνύεται, ὅτι εἰς δύο συμμετρικὰ πολύεδρα ὅλα τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα μὲ τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ ἄλλου. Ἀλλὰ δὲν ἦτον ὀλιγώτερον ἀναγκαῖον νὰ ἀποδειχθῇ μὲ τρόπον ἀκριβέστερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν μία πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῆς βάσεώς της, ὁ ἐναπομένων κορμός, ἀφαιρεθείσης τῆς μικρᾶς πυραμίδος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων κοινὸν μὲν ὕψος εἶναι, τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δέ, ἡ κάτω βάσις τοῦ κορμοῦ, ἡ ἄνω βάσις τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων·

Ἔστω ΣΑΒΓΔΕ μία πυραμίς, ἡ ὁποία ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αβδ παραλλήλου τῆς βάσεως· ἔστω ΤΖΗΘ μία τριγωνικὴ πυραμὶς τῆς ὁποίας ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἔστωσαν ἴσα ἢ ἰσοδύναμα μὲ τὰ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ.

Ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν τὰς δύο βάσεις κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· καὶ τότε τὸ ἐπίπεδον αϐδ προεκϐαλλόμενον θέλει προσδιορίσει εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα τὴν τομὴν ζηθ ἀπέχουσαν ἐξίσου ἀπὸ τὸ κοινὸν ἐπίπεδον τῶν βάσεων: ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ τομὴ ζηθ εἶναι πρὸς τὴν τομὴν αϐδ, ὡς ἡ βάσις ΖΗΘ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΔ (πρό. 16)· καὶ ἐπειδὴ αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ τομαὶ εἶναι παρομοίως ἰσοδύναμοι. Αἱ πυραμίδες λοιπὸν Σαϐγδε, Τζηθ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους. Αἱ ὅλαι πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, ΤΖΗΘ, εἶναι ἰσοδύναμοι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· λοιπὸν καὶ οἱ κορμοὶ ΑΒΓδαϐ, ΖΗΘθζη, εἶναι ἰσοδύναμοι· καὶ ἐπομένως ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν διὰ τὸν κορμὸν τριγωνικῆς πυραμίδος. σχ. 217.

Ἔστω ΖΗΘθζη κορμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις: διὰ τῶν τριῶν σημείων Ζ, η, Θ, ἂς αχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΖηΘ, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν κορμὸν τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ηΖΗΘ. Ἡ πυραμὶς αὐτὴ ἔχει διὰ βάσιν τὴν κάτω βάσιν ΖΗΘ τοῦ κορμοῦ, διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, διότι ἡ κορυφὴ η εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄνω βάσεως ζηθ. σχ. 218.

Ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἡ πυραμὶς αὐτή, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ηζθΘΖ, τῆς ὁποίας κορυφὴ εἶναι τὸ η καὶ βάσις τὸ ζθΘΖ. Διὰ τῶν τριῶν σημείων ζ, η, Θ ἂς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ζηΘ, τὸ ὁποῖον μοιράζει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς ηΖζΘ, ηζθΘ. Ἡ τελευταία αὕτη ἔχει διὰ βάσιν τὴν ἄνω βάσιν ηζθ τοῦ κορμοῦ, καὶ διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ ἰδίου, ἐπειδὴ ἡ κορυφή της Θ ἀνήκει εἰς τὴν κάτω βάσιν: οὕτως ἔχομεν δύο τῶν τριῶν πυραμίδων αἵτινες πρέπει νὰ συγκροτήσουν τὸν κορμόν.

Μένει νὰ θεωρήσωμεν τὴν τρίτην ηΖζΘ: τώρα, ἐὰν ἄξωμεν ηΚ' παράλληλον τῇ ζΖ, καὶ φαντασθῶμεν νέαν πυραμίδα ζΖΘΚ', τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι Κ' καὶ ἡ βάσις ΖζΘ, αἱ δύο αὗται πυραμίδες θέλουν ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΖζΘ· θέλουν ἔχει ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ η καὶ Κ' εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς ηΚ' παραλλήλου τῇ Ζζ, καὶ ἐπομένως παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, καὶ τὰ σημεῖα εὐθείας παραλλήλου ἑνὸς ἐπιπέδου ἰσάκις ἀπέχουσιν ἀπ' αὐτό· λοιπὸν αἱ δύο αὗται πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ζΖΚ'Θ ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς ζ, καὶ οὕτως θέλει ἔχει τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ. Ὅσον δὲ διὰ τὴν βάσιν ΖΚ'Θ, λέγω ὅτι αὕτη εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων ΖΗΘ, ζηθ.

Τῷ ὄντι τὰ τρίγωνα ΖΘΚ', ζηθ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην Ζ=ζ, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην ΖΚ′=ζη· ἔχομεν λοιπὸν (24, 3) ΖΘΚ′: ζηθ::ΖΘ:ζθ· ἔχομεν ὡσαύτως ΖΘΗ:ΖΘΚ′::ΖΗ:ΖΚ′ ἢ ζη. Ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΖΗΘ, ζηθ, δίδουν ΖΗ:ζη::ΖΘ:ζθ· λοιπὸν ΖΗΘ:ΖΘΚ′::ΖΘΚ′:ζηθ· καὶ οὕτως ἡ βάσις ΖΘΚ′ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο βάσεων ΖΗΘ, ζηθ. Λοιπὸν ὁ κορμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος, ὁ ἔχων παραλλήλους βάσεις, ἰσοδυναμεῖ μὲ τρεῖς πυραμίδας, τῶν ὁποίων κοινὸν μὲν ὕψος εἶναι, τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δέ, ἡ κάτω βάσις τοῦ κορμοῦ, ἡ ἄνω βάσις τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ′.

Θεώρημα.

Ἐὰν τριγωνικὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου ΑΒΓ εἶναι ἡ βάσις, τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου ΔΕΣ κλίνοντος (1) πρὸς ταύτην τὴν βάσιν, τὸ ἐκ ταύτης τῆς τομῆς προκύπτον στερεὸν ΑΒΓΔΕΣ, θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων κορυφαὶ μὲν εἶναι τὸ Δ, Ε, Σ, βάσις δὲ κοινὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 216.

Διὰ τῶν τριῶν σημείων Σ, Α, Γ, ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΓ, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ κολοβὸν πρίσμα (Prisme tronqué) ΑΒΓΔΕΣ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ: ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει βάσιν τὸ ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν Σ.

Ἀφαιρεθείσης ταύτης τῆς πυραμίδος, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΓΔΕ, τῆς ὁποίας Σ εἶναι ἡ κορυφὴ καὶ ΑΓΔΕ ἡ βάσις. Διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Σ, Ε, Γ ἂς ἀχθῇ προσέτι τὸ ἐπίπεδον ΣΕΓ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς ΣΑΓΕ, ΣΓΔΕ.

Ἡ πυραμὶς ΣΑΕΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΕΓ καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν Σ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ μίαν πυραμίδα ΕΑΒΓ, ἥτις ἤθελεν ἔχει βάσιν τὸ ΑΕΓ καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν Β. Διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΒΣ, οὖσα παράλληλος ἑκάστης τῶν γραμμῶν ΑΕ, ΓΔ, εἶναι παράλληλος καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ΑΓΕ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΑΕΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν Ε.

Ἡ τρίτη πυραμὶς ΣΓΔΕ ἠμπορεῖ νὰ τραπῇ καταπρῶτον εἰς

(1) Τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὑποτίθεται ὅτι κλίνει πρὸς τὴν βάσιν· διότι ἐὰν δὲν ἔκλινεν, ἤγουν, ἐὰν ἦτο παράλληλον, τὸ προκύπτον στερεὸν ἤθελεν εἶναι ἐπίσης πρίσμα· καὶ τοῦ σώματος τούτου ἠξεύρομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν στερεότητα. Θ. Μ.

ΑΣΓΔ· διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΣΓΔ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι ΑΕ εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου ΣΓΔ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΓΔΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ΑΣΓΔ· ἀκολούθως ἡ πυραμὶς ΑΣΓΔ ἠμπορεῖ νὰ τραπῇ εἰς ΑΒΓΔ, διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΓΔ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Σ καὶ Β κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΓΔΕ, ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΑΣΓΔ, εἶναι ὡσαύτως ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΑΒΓΔ· ἀλλ' αὕτη ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ ΑΒΓ, καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν Δ.

Λοιπὸν τέλος τὸ κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πυραμίδων αἵτινες ἔχουν κοινὴν βάσιν τὸ ΑΒΓ, αἱ δὲ κορυφαί των εἶναι διαδοχικῶς Δ, Ε, Σ.

Πόρισμα. Ἐὰν αἱ κόψεις ΑΕ, ΒΣ, ΓΔ, ἦναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, θέλουν εἶναι ἐνταυτῷ τὰ ὕψη τῶν τριῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ κολοβὸν πρίσμα· εἰς τρόπον ὥστε ἡ στερεότης τοῦ κολοβοῦ πρίσματος, θέλει ἐκφράζεται διὰ $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ$\times$ΑΕ$+\frac{1}{3}$ΑΒΓ$\times$ΒΣ$+\frac{1}{3}$ΑΒΓ$\times$ΓΔ, ποσότης ἥτις ἄγεται εἰς $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ$\times$(ΑΕ$+$ΒΣ$+$ΓΔ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς μὲν ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας, τὰς δὲ ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, εἶναι ὅμοιαι, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΒ, ΑΒΓ, ἦναι ὅμοια μὲ τὰ δύο ΤΔΕ, ΔΕΖ, καὶ ὁμοίως κείμενα, τουτέστιν ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΣ$=$ΔΕΤ, ἡ ΒΑΣ$=$ΕΔΤ, ἡ ΑΒΓ$=$ΔΕΖ, ἡ ΒΑΓ$=$ΕΔΖ, καὶ προσέτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ, ἦναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΔΕΖ. Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται ἔχουν ὅλας τὰς ἕδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας. σχ. 203.

Ἂς ληφθῶσι ΒΗ$=$ΕΔ, ΒΘ$=$ΕΖ, ΒΙ$=$ΕΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΗΘ, ΗΙ, ΙΘ. Ἡ πυραμὶς ΤΔΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν πυραμίδα ΙΗΒΘ· διότι, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΗΒ, ΒΘ, ἐλήφθησαν ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἡ γωνία ΗΒΘ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση μὲ τὴν ΔΕΖ τὸ τρίγωνον ΗΒΘ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ· λοιπόν, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν τῶν δύο πυραμίδων, ἠμποροῦμεν κατὰ πρῶτον νὰ θέσωμεν τὴν βάσιν ΔΕΖ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΗΒΘ· ἀκολούθως, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΔΤΕ κλίνει ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ ὅσον τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΔΕΤ θέλει πέσει ἀπροσδιορίστως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΣ. Ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΔΕΤ=ΗΒΙ, λοιπὸν ΕΤ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΒΙ· καὶ ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Τ, ἐφαρμόζουσι μὲ τέσσαρα Η, Β, Θ, Ι, δύο δὲ πολύεδρα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐφαρμόζουσιν· ἕπεται ὅτι καὶ ἡ πυραμὶς ΤΔΕΖ ἐφαρμόζει μὲ τὴν πυραμίδα ΙΗΒΘ.

Τώρα, ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων τριγώνων ΔΕΖ, ΗΒΘ, ἔχομεν τὴν γωνίαν ΒΗΘ=ΕΔΖ=ΒΑΓ· λοιπὸν ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ. Διὰ λόγον παρόμοιον ΗΙ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΣ· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΙΗΘ εἶναι παράλληλον τοῦ ΣΑΓ (13, 5). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΙΗΘ, ἢ τὸ ἴσον του ΤΔΖ, εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΣΑΓ (πρό. 15), καὶ τὸ τρίγωνον ΙΒΘ, ἢ τὸ ἴσον του ΤΕΖ, εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΣΒΓ· λοιπὸν αἱ δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, ἔχουν τὰς τέσσαρας ἕδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν. Περιπλέον ἔχουν καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Διότι ἡ στερεὰ γωνία Ε ἐτέθη ἤδη ἐπὶ τῆς ὁμολόγου της Β, καὶ τὸ αὐτὸ ἠμποροῦσε νὰ γένῃ διὰ δύο ἄλλας ὁμολόγους στερεὰς γωνίας· πλὴν βλέπομεν ἀμέσως ὅτι δύο ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, π. χ. αἱ γωνίαι Τ καὶ Σ, διότι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ ὁμοίως κειμένας.

Λοιπόν, δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Πόρισμα Α'. Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἰς τὰς δύο πυραμίδας δίδουν τὰς ἀναλογίας ΑΒ : ΔΕ :: ΒΓ : ΕΖ :: ΑΓ : ΔΖ :: ΑΣ : ΔΤ :: ΣΒ : ΤΕ :: ΣΓ : ΤΖ· λοιπὸν εἰς τὰς ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι.

Β'. ἐπειδὴ δὲ αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι ἡ κλίσις δύο ὁποιωνδήποτε ἑδρῶν τῆς μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν τῆς ὁμοίας πυραμίδος.

Γ'. Ἐὰν τμηθῇ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ ὑπὸ ἐπιπέδου ΗΙΘ παραλλήλου μιᾶς τῶν ἑδρῶν ΣΑΓ, ἡ μερικὴ πυραμὶς ΒΗΙΘ θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ὅλην πυραμίδα ΒΑΣΓ· διότι τὰ τρίγωνα ΒΗΙ, ΒΗΘ εἶναι ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα ΒΑΣ, ΒΑΓ, τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν, καὶ ὁμοίως κείμενα· ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων των εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι.

Δ'. Ἐν γένει, ἐὰν τμηθῇ ὁποιαδήποτε πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ὑπὸ ἐπιπέδου αβγδε παραλλήλου τῆς βάσεως, ἡ μερικὴ πυραμὶς Σαβγδε θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ὅλην ΣΑΒΓΔΕ. Διότι αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ὅμοιαι, καί, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΓ, αγ, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν πυραμίδα Σαβγ (πόρ. Γ'.)· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Σ προσδιορίζεται ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ ὡς ἡ στιγμὴ Σ ὡς πρὸς τὴν βάσιν αβγ (ὁρ. 18)· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, Σαβγδε, εἶναι ὅμοιαι σχ. 214.

Σχόλιον. Ἀντὶ τῶν πέντε δεδομένων τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται ἀπὸ τὸν ὁρισμόν, διὰ νὰ ἦναι δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ὅμοιαι, δυνατὸν νὰ ἀντικατασταθῶσι πέντε ἄλλα, κατὰ διαφόρους συνδυασμούς, καὶ οὕτως ἤθελον προκύψῃ τόσα θεωρήματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἠμπορεῖ νὰ διακριθῇ τὸ ἀκόλουθον: Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ὅταν ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Διότι, ἐὰν ἔχομεν τὰς ἀναλογίας ΑΒ : ΔΕ : : ΒΓ : ΕΖ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΑΣ : ΔΤ : : ΣΒ : ΤΕ : : ΣΓ : ΤΖ, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι πέντε συνθήκας, τὰ τρίγωνα ΑΣΒ, ΑΒΓ θέλουν εἶναι ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα ΔΕΤ, ΔΕΖ καὶ ὁμοίως κείμενα. Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον ΣΒΓ θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΤΕΖ· λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Β, θέλουν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Ε, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται, ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των ΤΔΕ, ΔΕΖ, καὶ οὕτως αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι σχ. 203.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοια πολύεδρα ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς πολυέδρου· ἔστωσαν Μ καὶ Ν αἱ κορυφαὶ δύο στερεῶν γωνιῶν, ἐκτὸς ταύτης τῆς βάσεως, προσδιοριζόμεναι ἀπὸ τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΜΑΒΓ, ΝΑΒΓ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ βάσις εἶναι ΑΒΓ· ἔστωσαν εἰς τὸ ἄλλο πολύεδρον, αβγδε ἡ ὁμόλογος βάσις ἡ ὁμοία μὲ τὴν ΑΒΓΔΕ, μ καὶ ν αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ τῶν Μ καὶ Ν, προσδιοριζόμεναι ἀπὸ τὰς πυραμίδας μαβγ, ναβγ, ὁμοίας μὲ τὰς πυραμίδας ΜΑΒΓ, ΝΑΒΓ· λέγω κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ διαστήματα ΜΝ, μν, εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ΑΒ, αβ. σχ. 219.

Τωόντι, ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ΜΑΒΓ, μαβγ, εἶναι ὅμοιαι, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΜΑΓ, ΒΑΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων μαγ, βαγ· παρομοίως ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ΝΑΒΓ, ναβγ, εἶναι ὅμοιαι, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΝΑΓ, ΒΑΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ναγ, βαγ: λοιπὸν, ἐὰν αἱ πρῶται κλίσεις ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς δευτέρας, μένει ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΝΑΓ, ΜΑΓ ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ναγ, μαγ. Ἀλλὰ, ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν αὐτῶν πυραμίδων, τὸ τρίγωνον ΜΑΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ μαγ, καὶ τὰ τρίγωνον ΝΑΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ναγ: λοιπὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΜΝΑΓ, μναγ, ἔχουν δύο ἕδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, ὁμοίως κειμένας καὶ ἰσάκις κλινούσας μεταξύ των· λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ὅμοιαι (πρό. 21), καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραί των δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΜΝ : μν : : ΑΜ : αμ. Ἄλλως ΑΜ : αμ : : ΑΒ : αβ· λοιπὸν ΜΝ : μν : : ΑΒ : αβ.

Ἔστωσαν Π καὶ π δύο ἄλλαι ὁμόλογοι κορυφαὶ τῶν αὐτῶν πολυέδρων, καὶ ὁμοίως θέλομεν ἔχει ΠΝ : πν : : ΑΒ : αβ, ΠΜ : πμ : : ΑΒ : αβ. Λοιπὸν ΜΝ : μν : : ΠΝ : πν : : ΠΜ : πμ. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΠΝΜ τὸ ὁποῖον ἑνόνει τρεῖς ὁποιασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον πνμ τὸ ὁποῖον ἑνόνει τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ ἄλλου πολυέδρου.

Ἔστωσαν προσέτι Κ καὶ κ δύο ὁμόλογοι κορυφαὶ, καὶ τὸ τρίγωνον ΠΚΝ θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ πκν· λέγω περιπλέον ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΠΚΝ, ΠΜΝ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων πκν, πμν.

Διότι ἐὰν ἑνώσωμεν ΚΜ καὶ κμ, πάντοτε θέλομεν ἔχει τὸ τρίγωνον ΚΝΜ ὅμοιον μὲ τὸ κμν, καὶ ἑπομένως τὴν γωνίαν ΚΜΝ ἴσην μὲ τὴν κμν. Ἂς φαντασθῶμεν εἰς Ν στερεὰν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΚΝΜ, ΚΝΠ, ΠΝΜ, καὶ εἰς ν στερεὰν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας κνμ, κνπ, πνμ: ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, ἕπεται ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΠΝΚ, ΠΝΜ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των πνκ, πνμ· λοιπὸν, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΠΝΚ, ΠΝΜ, ἦσαν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἰς τὴν ὁποίαν περίστασιν ἤθελεν εἶναι ἡ γωνία ΚΝΜ = ΚΝΠ

+ ΠΝΜ, ἤθελεν εἶναι ὡσαύτως ἡ γωνία κνμ = κνπ + πνμ, καὶ τὰ δύο τρίγωνα κνπ, πνμ ἤθελον σχηματίζει ἓν μόνον ἐπίπεδον.

Τὰ ἀποδειχθέντα ἔχουν χώραν, ὁποῖαι καὶ ἂν ἦναι αἱ γωνίαι Μ, Ν, Π, Κ, παραβαλλόμεναι μὲ τὰς ὁμολόγους των μ, ν, π, κ.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι μοιρασμένη εἰς τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΜΝΠ, ΝΠΚ, κ.τ.λ. βλέπομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἄλλου πολυέδρου θέλει περιέχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων αβγ, αγδ, μνπ, νπκ, κ. τ. λ., ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων· καὶ ἐὰν πολλὰ τρίγωνα, ὡς ΜΠΝ, ΝΠΚ, κ. τ. λ., ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἕδραν, καὶ εὑρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὰ ὁμόλογά των μνπ, νπκ, κ. τ. λ. θέλει εὑρίσκονται παρομοίως εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Λοιπὸν κάθε πολύγωνος ἕδρα εἰς τὸ ἓν πολύεδρον θέλει ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ὁμοίαν πολύγωνον ἕδραν εἰς τὸ ἄλλο πολύεδρον· λοιπὸν τὰ δύο πολύεδρα θέλει περιέχονται ὑπὸ ἰσαρίθμων ἐπιπέδων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων. Λέγω περιπλέον ὅτι αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Διότι, ἐάν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ στερεὰ γωνία Ν σχηματίζηται ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΚΝΠ, ΠΝΜ, ΜΝΡ, ΚΝΛ ἡ ὁμόλογος στερεὰ γωνία ν θέλει σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας κνπ, πνμ, μνρ, κνρ. Τώρα αἱ ἐπίπεδαι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐπιπέδων εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των· λοιπὸν αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς δυνάμεναι νὰ ἐπιτεθῶσι.

Λοιπὸν τέλος δύο ὅμοια πολύεδρα ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Πόρισμα. Ἀπὸ τὴν προλαβοῦσαν ἀπόδειξιν ἕπεται, ὅτι ἐὰν μὲ τέσσαρας κορυφὰς ἑνὸς πολυέδρου σχηματισθῇ τριγωνικὴ πυραμίς, καὶ μὲ τέσσαρας ὁμολόγους κορυφὰς ἑνὸς ὁμοίου πολυέδρου δευτέρα πυραμίς, αἱ δύο αὗται πυραμίδες θέλουν εἶναι ὅμοιαι· διότι θέλουν ἔχει τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους (πρό. 21. σχόλ.).

Βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι δύο ὁμόλογοι διαγώνιοι, π. χ. ΑΝ, αν, εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ὁμόλογοι πλευραὶ ΑΒ, αβ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ΄.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοια πολύεδρα ἠμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ὅμοιαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ὁμοίως κείμεναι.

Διότι εἴδομεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων ἠμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν, καὶ ὁμοίως κειμένων. Ἂς θεωρήσωμεν ὅλα τὰ τρίγωνα τοῦ ἑνὸς πολυέδρου, ἐκτὸς ἐκείνων τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Α, ὡς βάσεις τόσων τριγωνικῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Α· αἱ πυραμίδες αὗται ὁμοῦ λαμβανόμεναι συγκροτοῦν τὸ πολύεδρον· ἂς μοιράσωμεν παρομοίως τὸ ἄλλο πολύεδρον εἰς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας α ὁμολόγου τῇ Α· φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἑνόνουσα πυραμὶς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ ἑνὸς πολυέδρου θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν πυραμίδα τὴν ἑνόνουσαν τὰς τέσσαρας ὁμολόγους τοῦ ἄλλου πολυέδρου. Λοιπὸν δύο ὅμοια πολύεδρα, κ. τ. λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κϛ΄.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Διότι ἐπειδὴ αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ἡ μικροτέρα ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας, ὥστε νὰ ἔχουν τὴν στερεὰν γωνίαν Σ κοινήν. Τότε αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αϐγδε, θέλουν εἶναι παράλληλοι· διότι, ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ὅμοιαι (πρό. 22), ἡ γωνία Σαϐ εἶναι ἴση τῇ ΣΑΒ, καθὼς καὶ ἡ Σϐγ τῇ ΣΒΓ· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον αϐγ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ (13, 5). Τούτου τεθέντος, ἔστω ΣΟ ἡ κατεϐαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, καὶ ο ἡ στιγμὴ ὅπου αὕτη ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον αϐγ: κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα (πρ. 15), θέλομεν ἔχει, ΣΟ : Σο : : ΣΑ : Σα : : ΑΒ : αϐ, καὶ ἑπομένως,

$$\tfrac{1}{3}\Sigma O : \tfrac{1}{3}\Sigma o :: AB : \alpha\beta,$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αϐγδε, εἶναι ὅμοια σχήματα, διὰ τοῦτο,

$$AB\Gamma\Delta E : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon :: \overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2.$$

Ὁ πολυπλασιασμὸς τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν ὅρου ἐπὶ ὅρον, δίδει τὴν ἀναλογίαν,

$$AB\Gamma\Delta E \times \tfrac{1}{3}\Sigma O : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \times \tfrac{1}{3}\Sigma o :: \overline{AB}^3 : \overline{\alpha\beta}^3.$$

Τώρα, ΑΒΓΔΕ $\times \frac{1}{3}$ ΣΟ εἶναι ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ (πρό. 18), καὶ αϐγδε $\times \frac{1}{3}$ Σο εἶναι ἡ τῆς πυραμίδος Σαϐγδε· λοιπὸν δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. σχ. 214.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ΄.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοια πολύεδρα εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Διότι δύο ὅμοια πολύεδρα ἠμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ὅμοιαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν (πρό. 25). Τώρα αἱ δύο ὅμοιαι πυραμίδες ΑΠΝΜ, απνμ, εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΜ, αμ, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αϐ. Ὁ αὐτὸς λόγος ἔχει χώραν καὶ ἐπὶ δύο ἄλλων ὁποιωνδήποτε ὁμολόγων πυραμίδων· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ ἓν πολύεδρον, ἤτοι αὐτὸ τὸ πολύεδρον, εἶναι πρὸς τὸ ἄλλο πολύεδρον, ὡς ὁ κύβος μιᾶς ὁποιασδήποτε πλευρᾶς τοῦ πρώτου, εἶναι πρὸς τὸν κύβον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς τοῦ δευτέρου.

Γενικὸν Σχόλιον.

Ἠμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν δι' ἀλγεβρικῶν ὅρων, τουτέστι μὲ τὸν πλέον σύντομον τρόπον, τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τῶν ἀρχικῶν προτάσεων τούτου τοῦ βιβλίου, ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰς στερεότητας τῶν πολυέδρων.

Ἔστω Β ἡ βάσις ἑνὸς πρίσματος, Υ τὸ ὕψος του· ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι $B\times Y$ ἢ BY.

Ἔστω Β ἡ βάσις πυραμίδος, Υ τὸ ὕψος της· ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος θέλει εἶναι $B\times\frac{1}{3}Y$, ἢ $Y\times\frac{1}{3}B$, ἢ $\frac{1}{3}BY$.

Ἔστω Υ τὸ ὕψος κορμοῦ πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις, ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ βάσεις του· $\sqrt{(AB)}$ θέλει εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τούτων, καὶ ἡ στερεότης τοῦ κορμοῦ θέλει εἶναι $\frac{1}{3}Y\left(A+B+\sqrt{(AB)}\right)$.

Ἔστω Β ἡ βάσις κορμοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, Υ, Υ΄, Υ΄΄, τὰ ὕψη τῶν τριῶν ἄνω κορυφῶν του, ἡ στερεότης τοῦ κολοβοῦ πρίσματος θέλει εἶναι $\frac{1}{3}B\,(Y+Y'+Y'')$.

Ἔστωσαν τέλος Π καὶ π αἱ στερεότητες δύο ὁμοίων πολυέδρων, Α καὶ α δύο πλευραὶ ἢ δύο ὁμόλογοι διαγώνιοι τούτων τῶν πολυέδρων, θέλει εἶναι $\Pi:\pi::\overline{A}^{3}:\overline{\alpha}^{3}$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄.

Η ΣΦΑΙΡΑ.

Ὁρισμοί.

Α΄. Ἡ σφαῖρα εἶναι στερεὸν περατούμενον ἀπὸ καμπύλην ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἐξίσου ἀπέχουσιν ἀπό τι ἐντὸς σημεῖον καλούμενον κέντρον.

Γενᾶται δὲ ἡ σφαῖρα ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ἡμικυκλίου, ὡς τοῦ ΔΑΕ, ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ: διότι τὰ σημεῖα τῆς εἰς ταύτην τὴν κίνησιν ἀπὸ τὴν καμπύλην ΔΑΕ γραφομένης ἐπιφανείας ἐξίσου θέλουν ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Γ. σχ. 220.

Β΄. Ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀγομένη ἀπὸ τὸ κέντρον πρὸς μίαν στιγμὴν τῆς ἐπιφανείας· διάμετρος δὲ ἢ ἄξων ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη γραμμή, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν περατουμένη.

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι· ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

Γ΄. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 1) ὅτι κάθε τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος. Τούτου τεθέντος, καλεῖται μέγιστος κύκλος ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τομή· μικρὸς δὲ κύκλος ἡ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη.

Δ΄. Ἐπίπεδον ἅπτεται τῆς σφαίρας, ὅταν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειάν της.

Ε΄. Πόλος κύκλου τινὸς τῆς σφαίρας εἶναι ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐξίσου ἀπέχον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τούτου τοῦ κύκλου. Θέλομεν δὲ ἰδεῖ (πρό. 6) ὅτι κάθε κύκλος εἴτε μέγιστος εἴτε μικρός, ἔχει πάντοτε δύο πόλους.

ς΄. Τρίγωνον σφαιρικὸν εἶναι μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων.

Τὰ τόξα ταῦτα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται πλευραὶ τοῦ τριγώνου, πάντοτε ὑποτίθενται μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας τὰ ἐπίπεδά των κάμνουν μεταξύ των εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου.

Ζ΄. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ὀνομάζεται ὀρθογώνιον, ἰσοσκελὲς, ἰσόπλευρον, εἰς τὰς αὐτὰς περιστάσεις καθ' ἃς καὶ τὸ εὐθύγραμμον.

Η'. Σφαιρικὸν πολύγωνον εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιεχόμενον ὑπὸ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων.

Θ'. Ἄτρακτος (Fuseau) εἶναι τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιμεγίστων κύκλων, οἱ ὁποῖοι τελειόνουν εἰς μίαν κοινὴν διάμετρον.

Ι'. Καλῶ σφῆνα ἢ ὄνυχα σφαιρικὸν (coin, onglet spherique) τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἡμιμεγίστων κύκλων, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἄτρακτος χρησιμεύει ὡς βάσις.

ΙΑ'. Πυραμὶς σφαιρικὴ εἶναι τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων μιᾶς στερεᾶς γωνίας τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ κέντρον. Ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ἀποχωριζόμενον ἀπὸ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα.

ΙΒ'. Καλεῖται Ζώνη τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης. Τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ δυνατὸν νὰ ἅπτηται τῆς σφαίρας, καὶ τότε ἡ ζώνη ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

ΙΓ'. Τμῆμα σφαιρικὸν εἶναι τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ βάσεις του.

Τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ δυνατὸν νὰ ἅπτηται τῆς σφαίρας, καὶ τότε τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

ΙΔ'. Τὸ ὕψος τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος εἶναι τὸ ἀπόστημα τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος. σχ. 220.

ΙΕ'. Ἐν ᾧ τὸ ἡμικύκλιον ΔΑΕ στρεφόμενον ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ γράφει τὴν σφαῖραν, κάθε κυκλικὸς τομεύς, ὡς ΔΓΖ ἢ ΖΓΘ γράφει στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται σφαιρικὸς τομεύς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θεώρημα.

Κάθε τομὴ τῆς σφαίρας, ὑπὸ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος.

Ἔστω ΑΜΒ ἡ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς τὴν σφαῖραν τομή, τὸ κέντρον τῆς ὁποίας σφαίρας εἶναι Γ. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Γ ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΟ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΒ, καὶ διάφοροι γραμμαὶ ΓΜ, ΓΜ, εἰς διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης ΑΜΒ ἥτις περατόνει τὴν τομήν. σχ. 221.

Αἱ πλάγιαι ΓΜ, ΓΜ, ΓΒ, εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τῆς σφαίρας· ἰσάκις λοιπὸν ἀπέχουσι τῆς καθέτου ΓΟ (5, 5)· ὅλαι λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΟΜ, ΟΜ, ΟΒ εἶναι ἴσαι· ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης ἥτις περατόνει τὴν τομήν, ἰσάκις ἀπέχουσι ἀπό τι ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον Ο· ἡ καμπύλη λοιπὸν αὕτη εἶναι κύκλου περιφέρεια τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Ο· ἡ τομὴ λοιπὸν ΑΜΒ εἶναι κύκλος.

Πόρισμα Α΄. Ἐὰν ἡ τομὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἀκτίς της θέλει εἶναι ἡ τῆς σφαίρας· ὅλοι λοιπὸν οἱ μέγιστοι κύκλοι εἶναι ἴσοι μεταξύ των.

Β΄. Δύο μέγιστοι κύκλοι πάντοτε τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐπειδὴ πρέπει νὰ εὑρίσκηται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πρώτου, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ δευτέρου, ἀναγκαίως εἶναι ἐκ τῶν σημείων τῆς κοινῆς τομῆς των· ἡ κοινή των λοιπὸν τομὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου· εἶναι λοιπὸν διάμετρος· ἀλλὰ κάθε διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη· λοιπὸν κ. τ. λ.

Γ΄. Κάθε μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφάνειάν της εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι ἐάν, ἀφ' οὗ χωρίσωμεν τὰ δύο ἡμισφαίρια, θέσωμεν αὐτὰ ἐπὶ τῆς κοινῆς βάσεως στρέφοντες τὴν κυρτότητά των κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος, αἱ δύο ἐπιφάνειαι θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην· διότι ἄλλως ἤθελον ὑπάρχει σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου.

Δ΄. Τὸ κέντρον μικροῦ τινος κύκλου καὶ τὸ τῆς σφαίρας εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου. σχ. 221.

Ε΄. Οἱ μικροὶ κύκλοι τόσον εἶναι μικρότεροι, ὅσον περισσότερον ἀπέχουσι τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· διότι ὅσον περισσότερον τὸ ἀπόστημα ΓΟ εἶναι μεγαλήτερον, τόσον περισσότερον ἡ χορδὴ ΑΒ, ἡ διάμετρος τοῦ μικροῦ κύκλου ΑΜΒ εἶναι μικροτέρα.

ς΄. Δύο δεδομένων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινός, εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ τόξον μεγίστου κύκλου· διότι τὰ δύο δεδομένα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι τρία σημεῖα προσδιορίζοντα τὴν θέσιν ἐπιπέδου. ἐὰν ὅμως τὰ δύο δεδομένα σημεῖα τύχῃ νὰ ἦναι τὰ ἄκρα διαμέτρου τινός, τότε τὰ δύο ταῦτα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας, καὶ ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι δυνατὸν νὰ διέλθωσι· διότι ἄπειρα ἐπίπεδα διὰ δύο σημείων δυνατὸν νὰ διέλθωσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, ὁποιαδήποτε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. σχ. 222.

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Ἐὰν φαντασθῶμεν τὰ ἐπίπεδα ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΓΟΒ, ταῦτα σχηματίζουν εἰς τὴν στιγμὴν Ο γωνίαν στερεάν, καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΓΟΒ, μετροῦνται ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τώρα, ἑκάστη τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὴν στερεὰν γωνίαν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματός τῶν δύο ἄλλων (21, 5)· λοιπὸν ὁποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Ὁ βραχύτατος δρόμος ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ ὁποῖον ἑνόνει τὰ δύο δεδομένα σημεῖα.

Ἔστω ΑΝΒ τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον ἑνόνει τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ ἔστω ἐκτὸς τούτου τοῦ τόξου, εἰ δυνατόν, Μ ἓν σημεῖον τῆς βραχυτάτης γραμμῆς μεταξὺ Α καὶ Β. Διὰ τῆς στιγμῆς Μ ἂς ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΜΑ, ΜΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ΒΝ=ΜΒ.

Κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα τὸ τόξον ΑΝΒ εἶναι βραχύτερόν τοῦ ΑΜ+ΜΒ· ἀφαιρέσει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ΒΝ=ΒΜ, μένει ΑΝ<ΑΜ. Τώρα τὸ διάστημα ἀπὸ Β εἰς Μ, εἴτε ταυτίζεται μὲ τὸ τόξον ΒΜ, ἢ εἶναι ὁποιαδήποτε ἄλλη γραμμή, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διάστημα ἀπὸ Β εἰς Ν· διότι στρέφοντες τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου ΒΜ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ Β, δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὴν στιγμὴν Μ εἰς τὴν στιγμὴν Ν, καὶ τότε ἡ βραχυτάτη γραμμὴ ἀπὸ Μ εἰς Β, ὁποία καὶ ἂν ἦναι, θέλει ταυτισθῇ μὲ τὴν βραχυτάτην γραμμὴν ἀπὸ Ν εἰς Β· λοιπὸν οἱ δύο δρόμοι ἀπὸ Α εἰς Β, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν διέρχεται διὰ Μ, ὁ δὲ διὰ Ν, ἔχουν ἓν μέρος ἴσον ἀπὸ Μ εἰς Β καὶ ἀπὸ Ν εἰς Β. Ὁ πρῶτος δρόμος εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ὁ βραχύτερος· λοιπὸν τὸ διάστημα ἀπὸ Α εἰς Μ ἶναι βραχύτερον τοῦ διαστήματος ἀπὸ Α εἰς Ν, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι ἄτοπον, διότι τὸ τόξον ΑΜ εἶναι μεῖζον τοῦ ΑΝ· λοιπὸν κἀνὲν σημεῖον τῆς βραχυτάτης γραμμῆς μεταξὺ Α καὶ Β δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ἐκτὸς τοῦ τόξου ΑΝΒ· λοιπὸν αὐτὸ τὸ τόξον εἶναι ἡ βραχυτάτη γραμμὴ μεταξὺ τῶν ἄκρων του. σχ. 223.

Σημείωσις τοῦ Μεταφραστοῦ. Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν κατάληψιν εἰς τὸν ἀναγνώστην ταύτης τῆς προτάσεως, ἔκρινα εὔλογον, χωρὶς νὰ ἀπομακρινθῶ ἀπὸ τὸν συγγραφέα, νὰ τὴν ἐκθέσω ὡς ἀκολούθως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

Μεταξὺ δύο στιγμῶν ἐπὶ τῆς ἰδίας σφαίρας τὸ βραχύτατον διάστημα εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν ἰδίων στιγμῶν, ὡς τὸ ΑΒ τόξον.

Ἐπειδὴ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ Α καὶ Β εἶναι ἄλλη τις καμπύλη γραμμὴ ὡς ἡ ΑΜΒ: δηλαδὴ ΑΜΒ < ΑΒ, καὶ κάθε ἄλλης καμπύλης διερχομένης διὰ Α καὶ Β. Τώρα ἐὰν ἐκ τῆς Β καὶ Μ φέρωμεν τὸ τόξον μεγίστου κύκλου ΜΒ, καὶ παρομοίως ἐκ τῆς Α καὶ Μ τὸ τόξον μεγίστου κύκλου ΑΜ, καὶ λάβωμεν τὸ τόξον ΒΝ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΜΒ· τότε τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ Β καὶ Ν θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μεταξὺ Β καὶ Μ· ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ ὑπάγωμεν ἀπὸ Β εἰς Α ἢ διατρέχοντες τὴν καμπύλην ΑΜΒ, ἢ τὸ διάστημα μεταξὺ Β καὶ Ν, καὶ τὸ διάστημα μεταξὺ Ν καὶ Α, καὶ ὁ πρῶτος δρόμος, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι βραχύτερος τοῦ δευτέρου, ἕπεται, ἐξ αἰτίας ὁποῦ τὸ βραχύτατον διάστημα ἀπὸ Β εἰς Μ εἶναι ἴσον μὲ τὸ βραχύτατον διάστημα ἀπὸ Β εἰς Ν, ὅτι τὸ διάστημα μεταξὺ Α καὶ Μ ἐκτιμώμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΜΒ ἀπὸ Α ἕως Μ, εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ διάστημα μεταξὺ Α καὶ Ν. Τώρα ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΜ πλέον τὸ ΜΒ εἶναι μεῖζον τοῦ τόξου ΑΒ, καὶ ἐλήφθη ΜΒ=ΒΝ· διὰ τοῦτο τὸ τόξον ΑΜ εἶναι μεῖζον τοῦ ΑΝ· λοιπὸν λαμβάνοντες ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ τόξον τι ἴσον μὲ τὸ ΑΜ, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ἡ στιγμὴ Μ πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τῆς Ν μεταξὺ Ν καὶ Β. Ἡ στιγμὴ λοιπὸν αὐτὴ ἀπέχει ἐκ τῆς στιγμῆς Α περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι ἀπέχει ἡ στιγμὴ Ν· ἀλλ' ὅσον ἀπέχει ἡ στιγμὴ ἡ μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β ἀπὸ τὴν Α, τόσον ἀπέχει καὶ ἡ Μ ἀπὸ τὴν Α· λοιπὸν τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ Μ εἶναι ἴσον μὲ τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ τῆς στιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β· ὅταν λοιπὸν τὸ τόξον ΑΜ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒ, τότε ἡ στιγμὴ Μ πίπτει ἐπὶ τῆς στιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β· καὶ τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ Μ ταυτίζεται μὲ τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ τῆς στιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β. Τώρα ἐπειδὴ ἡ Ν εἶναι πλησιεστέρα εἰς τὴν Α παρὰ ἡ μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β στιγμή, ἕπεται ὅτι τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ Α καὶ Ν, εἶναι μικρότερον τοῦ βραχυτάτου διαστήματος μεταξὺ Α καὶ τῆς στιγμῆς τῆς μεταξὺ Ν καὶ Β, ἢ μικρότερον τοῦ βραχυτάτου διαστήματος μεταξὺ τῆς Α, καὶ Μ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων βλέπομεν ὅτι τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ Ν πλέον τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ Ν καὶ Β, εἶναι μικρότερον τοῦ βραχυτάτου διαστήματος μεταξὺ Α καὶ Μ πλέον τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ Μ καὶ Β, δηλαδὴ τῆς καμπύλης ΑΜΒ· ψευδὲς λοιπὸν ὅτι τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ Α καὶ Β εἶναι ἡ καμπύλη ΑΜΒ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν, ὅτι κάθε ἄλλη καμπύλη, ἥτις ἑνόνει τὴν στιγμὴν Α καὶ Β, καὶ δὲν ἔχει ὅλας τὰς στιγμάς της ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ, δὲν εἶναι ἐκείνη ἥτις παριστάνει τὸ βραχύτατον διάστημα μεταξὺ Α καὶ Β· ἀλλὰ μεταξὺ τῆς Α καὶ Β εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον βραχύτατον διάστημα· λοιπὸν ἡ καμπύλη ἥτις ἐκφράζει αὐτό, εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου δηλαδὴ τὸ ΑΒ· ἐπειδὴ εἰς τὰς στιγμὰς τούτου, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀνωτέρω κατασκευήν· καὶ λοιπὸν δὲν δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει μία καμπύλη ἥτις ἑνόνει τὴν Α καὶ Β μικροτέρα τοῦ τόξου ΑΒ. Ὅπερ ἔδει ἀποδεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν σφαιρικοῦ τινος τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἔστω ΑΒΓ ὁποιονδήποτε σφαιρικὸν τρίγωνον· ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν ἐκ νέου εἰς Δ. Τὰ τόξα ΑΒΔ, ΑΓΔ, θέλουν εἶναι ἡμιπεριφέρειαι, διότι δύο μέγιστοι κύκλοι πάντοτε τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη (πρό. 1)· ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἔχομεν τὴν πλευρὰν $ΒΓ < ΒΔ + ΓΔ$ (πρό. 2)· προσθέσει καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τοῦ $ΑΒ + ΑΓ$, προκύπτει $ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ < ΑΒΔ + ΑΓΔ$, τουτέστι μικρότερον περιφερείας. σχ. 224.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν κάθε σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΔΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς

Ζ· ἐπειδὴ ΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΖ+ΓΖ, ἡ περίμετρος τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΔΖ. Ἂς προεκβληθῶσιν ἐκ νέου αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΖΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντιθῶσιν εἰς Η· θέλει εἶναι ΕΔ < ΕΗ + ΗΔ· λοιπὸν ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΔΖ εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ τριγώνου ΑΖΗ· αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου· λοιπὸν πολὺ περισσότερον ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου. σχ. 225.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι τῷ ὄντι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ΚΒ′ τοῦ έ βιβλίου· διότι ἐὰν Ο ἦναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν εἰς τὴν στιγμὴν Ο, γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, κ. τ. λ. τώρα ἑκάστη τούτων τῶν γωνιῶν ἔχει μέτρον μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου· λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου, ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν. Ἡ ἀπόδειξις τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν εἶναι διαφορετικὴ τῆς τοῦ έ βιβλίου· ἀλλὰ καὶ αἱ δύο προϋποθέτουσιν ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι κυρτόν, ἢ ὅτι οὐδεμία πλευρὰ προεκβαλλομένη τέμνει τὸ σχῆμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ′.

Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜΒ ἀχθῇ κάθετος ἡ διάμετρος ΔΕ, τὰ ἄκρα Δ καὶ Ε ταύτης τῆς διαμέτρου θέλουν εἶναι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου ΑΜΒ, καὶ ὅλων τῶν μικρῶν κύκλων, ὡς ΖΝΗ, τῶν παραλλήλων μὲ αὐτόν. σχ. 220.

Διότι ἡ ΔΓ ἡ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ, εἶναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΜ, ΓΒ, κ. τ. λ. ἠγμένας ἀπὸ τὸν πόδα της ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου· λοιπὸν ὅλα τὰ τόξα ΔΑ, ΔΜ, ΔΒ, κ. τ. λ. εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας: τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰ τόξα ΕΑ, ΕΜ, ΕΒ, κ. τ. λ. λοιπὸν ἕκαστον τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ΑΜΒ· λοιπὸν εἶναι οἱ πόλοι ταύτης τῆς περιφερείας. (ὁρ. 5).

Δεύτερον, ἡ ἀκτὶς ΔΓ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ, εἶναι καὶ κάθετος εἰς τὸ παράλληλον αὐτοῦ ΖΝΗ· λοιπὸν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου ΖΝΗ (πρό. 1)· λοιπὸν ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ πλάγιαι ΔΖ, ΔΝ, ΔΗ, αἱ πλάγιαι αὗται ἰσάκις θέλουν ἀπέχει τῆς καθέτου ΔΟ καὶ θέλουν εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ὅταν αἱ χορδαὶ ἦναι ἴσαι, τὰ τόξα εἶναι ἴσα· λοιπὸν ὅλα τὰ τόξα ΔΖ, ΔΝ, ΔΗ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μεταξύ των· ὅθεν ἡ στιγμὴ Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ΖΝΗ, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ στιγμὴ Ε εἶναι ὁ ἄλλος πόλος.

Πόρισμα Α'. Κάθε τόξον ΔΜ ἠγμένον ἀπὸ μίαν στιγμὴν τόξου μεγίστου κύκλου ΑΜΒ εἰς τὸν πόλον του εἶναι ἓν τέταρτον περιφερείας, τὸ ὁποῖον διὰ συντομίαν θέλομεν ὀνομάζει τεταρτημόριον (quadrant), καὶ τὸ τεταρτημόριον τοῦτο κάμνει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὀρθὴν γωνίαν μὲ τὸ τόξον ΑΜ· διότι, οὔσης τῆς γραμμῆς ΔΓ καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΓ, κάθε ἐπίπεδον ΔΜΓ δι' αὐτῆς διερχόμενον εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΓ (18, 6)· λοιπὸν ἡ γωνία τούτων τῶν ἐπιπέδων, ἤ, κατὰ τὸν ϛ' ὁρισμόν, ἡ γωνία ΑΜΔ εἶναι ὀρθή.

Β'. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον δεδομένου τόξου ΑΜ, ἄγομεν τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον ΜΔ κάθετον εἰς ΑΜ, λαμβάνομεν ΜΔ ἴσον μὲ τεταρτημόριον, καὶ ἡ στιγμὴ Δ θέλει εἶναι εἷς τῶν πόλων τοῦ τόξου ΑΜ· ἢ ἄγομεν εἰς τὰς δύο στιγμὰς Α καὶ Μ τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΜΔ κάθετα εἰς ΑΜ, ἡ στιγμὴ τῆς συνδρομῆς Δ τῶν δύο τούτων τόξων θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος πόλος.

Γ'. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῆς στιγμῆς Δ ἀπὸ καθὲν τῶν σημείων Α καὶ Μ ἦναι ἴσον μὲ τεταρτημόριον, λέγω ὅτι ἡ στιγμὴ Δ θέλει εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΜ, καὶ ἐν ταὐτῷ αἱ γωνίαι ΔΑΜ, ΑΜΔ θέλουν εἶναι ὀρθαί.

Διότι ἔστω Γ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΔ, ΓΜ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΜΓΔ εἶναι ὀρθαί, ἡ γραμμὴ ΓΔ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΓΑ, ΓΜ. λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΜ, καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΔΑΜ, ΑΜΔ, εἶναι ὀρθαί.

Σχόλιον. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πόλων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τόξα κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μὲ τὴν αὐτὴν εὐκολίαν μὲ τὴν ὁποίαν γράφομεν αὐτὰ ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Βλέπομεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐὰν στρέψωμεν τὸ τόξον ΔΖ ἢ κάθε ἄλλην γραμμὴν τοῦ αὐτοῦ διαστήματος ὁλόγυρα τῆς στιγμῆς Δ, τὸ ἄκρον Ζ θέλει γράψει τὸν μικρὸν κύκλον ΖΝΗ· καὶ ἐὰν στρέψωμεν τὸ τεταρτημόριον ΔΖΑ ὁλόγυρα τῆς στιγμῆς Δ, τὸ ἄκρον Α θέλει γράψει τόξον μεγίστου κύκλου τὸ ΑΜ.

Ἐὰν λάβωμεν χρείαν νὰ προεκβάλωμεν τὸ τόξον ΑΜ, ἢ ἐὰν δὲν ἔχωμεν δεδομένας παρὰ μόνον τὰς στιγμὰς Α καὶ Μ διὰ τῶν ὁποίων τὸ τόξον τοῦτο πρέπει νὰ διέλθῃ, κατὰ πρῶτον προσδιορίζομεν τὸν πόλον Δ διὰ τῆς κοινῆς τομῆς δύο τόξων γεγραμμένων ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Μ ὡς ἐκ κέντρων μὲ διάστημα ἴσον μὲ τεταρτημόριον· εὑρεθέντος τοῦ πόλου Δ, γράφομεν ἐκ τῆς στιγμῆς Δ ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ τὸ αὐτὸ διάστημα τὸ τόξον ΑΜ καὶ τὴν προεκβολήν του.

Τέλος, ἐὰν λάβωμεν χρείαν ἀπὸ δεδομένην στιγμὴν Π νὰ καταιβάσωμεν τόξον κάθετον ἐπὶ τοῦ δεδομένου ΑΜ, προεκβάλλομεν τοῦτο εἰς Σ ἕως οὗ τὸ διάστημα ΠΣ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τεταρτημόριον· ἀκολούθως ἐκ τοῦ πόλου Σ καὶ μὲ τὸ αὐτὸ διάστημα γράφομεν τὸ τόξον ΠΜ, τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κάθετον τόξον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Θεώρημα.

Κάθε ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτόμενον εἰς τὴν σφαῖραν. σχ. 226.

Ἔστω ΖΑΗ ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΑ· ἐὰν ληφθῇ ὁποιονδήποτε σημεῖον Μ ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἐπιζευχθῇ ΟΜ καὶ ΑΜ, ἡ γωνία ΟΑΜ θέλει εἶναι ὀρθή, καὶ οὕτως τὸ διάστημα ΟΜ θέλει εἶναι μεῖζον τοῦ ΟΑ. Ἡ στιγμὴ Μ εἶναι λοιπὸν ἐκτὸς τῆς σφαίρας· καί, ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ΖΑΗ, ἕπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν δὲν ἔχει παρὰ μόνον τὸ Α· λοιπὸν ἅπτεται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (ὁρ. 4).

Σχόλιον. Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ δείξωμεν ὅτι δύο σφαῖραι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουν, καὶ ἑπομένως ἅπτονται ἀλλήλων: ὅταν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων των ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των· τότε τὰ κέντρα καὶ ἡ στιγμὴ τῆς ἀφῆς εἶναι ἐπ' εὐθείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Θεώρημα.

Ἡ γωνία ΒΑΓ τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των δύο τόξα μεγίστων κύκλων ΑΒ, ΑΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΖΑΗ, τὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τούτων τῶν τόξων εἰς τὴν στιγμὴν Α: ἔχει ὁμοίως διὰ μέτρον τὸ τόξον ΔΕ, γραφόμενον ἐκ τῆς στιγμῆς Α ὡς ἐκ πόλου μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, προεκβαλλομένων ἐὰν ἦναι ἀναγκαῖον. σχ. 226.

Διότι ἡ ἐφαπτομένη ΑΖ, ἠγμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου ΑΒ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα ΑΟ· ἡ ἐφαπτομένη ΑΗ, ἠγμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου ΑΓ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ΑΟ· λοιπὸν ἡ γωνία ΖΑΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΟΑΒ, ΟΑΓ (17, 5), ἥτις εἶναι ἡ τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ, καὶ σημειοῦται διὰ ΒΑΓ.

Παρομοίως, ἐὰν τὸ τόξον ΑΔ εἶναι ἴσον μὲ τεταρτημόριον, καθὼς καὶ ΑΕ, αἱ γραμμαὶ ΟΔ, ΟΕ, θέλουν εἶναι κάθετοι εἰς ΑΟ, καὶ ἡ γωνία ΔΟΕ θέλει εἶναι ἀκόμη ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΑΟΔ, ΑΟΕ· λοιπὸν τὸ τόξον ΔΕ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας τούτων τῶν ἐπιπέδων, ἢ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΓΑΒ.

Πόρισμα. Αἱ γωνίαι τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἠμποροῦν νὰ παραβάλλωνται μεταξύ των διὰ τῶν τόξων μεγίστων κύκλων γεγραμμένων ἐκ τῶν κορυφῶν των ὡς ἐκ πόλων καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν των περιεχομένων: ὅθεν εὔκολον εἶναι νὰ κάμωμεν γωνίαν ἴσην μὲ δεδομένην.

Σχόλιον. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, ὡς ΑΓΟ καὶ ΒΓΝ εἶναι ἴσαι· διότι ἡ ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη πάντοτε εἶναι ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΓΒ, ΟΓΝ.

Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι εἰς τὴν συναπάντησιν δύο τόξων ΑΓΒ, ΟΓΝ, αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι ΑΓΟ, ΟΓΒ ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοδυναμοῦν πάντοτε μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 238.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Θεώρημα.

Δεδομένου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν ἐκ τῶν στιγμῶν Α, Β, Γ, ὡς ἐκ πόλων, γραφθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΔ, ΔΕ, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἀντιστρόφως αἱ τρεῖς στιγμαὶ Δ, Ε, Ζ, θέλουν εἶναι οἱ πόλοι τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ. σχ. 227.

Διότι ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Α εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΕΖ, τὸ διάστημα ΑΕ εἶναι τεταρτημόριον· ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Γ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΔΕ, τὸ διάστημα ΓΕ εἶναι παρομοίως τεταρτημόριον· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Ε ἀπέχει τεταρτημόριον ἀπὸ καθὲν τῶν σημείων Α καὶ Γ· εἶναι λοιπὸν ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΓ (6, πόρ. 3). Ὁμοίως δείξωμεν ὅτι Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΒΓ, καὶ Ζ ὁ τοῦ τόξου ΑΒ.

Πόρισμα. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δύναται νὰ γραφθῇ διὰ τοῦ ΔΕΖ, ὡς τὸ ΔΕΖ διὰ τοῦ ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Θεώρημα.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἑκάστη γωνία ἑνὸς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἡμιπεριφέρειαν μεῖον τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὸ ἄλλο τρίγωνον. σχ. 227.

Ἂς προεκβληθῶσιν, ἐὰν ἦναι ἀναγκαῖον, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσωσι τὴν ΕΖ εἰς Η καὶ Θ· ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Α εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΗΘ, ἡ γωνία Α ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΗΘ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΕΘ, ὡς καὶ τὸ ΗΖ, εἶναι τεταρτημόριον, ἐπειδὴ Ε εἶναι ὁ πόλος τοῦ ΑΘ, καὶ Ζ ὁ πόλος τοῦ ΑΗ· λοιπὸν ΕΘ+ΗΖ ἰσοῦται μὲ ἡμιπεριφέρειαν. Τώρα ΕΘ+ΗΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ΕΖ+ΗΘ· λοιπὸν τὸ τόξον ΗΘ μέτρον τῆς γωνίας Α εἶναι ἴσον μὲ ἡμιπεριφέρειαν μεῖον τὴν πλευρὰν ΕΖ· ὡσαύτως ἡ γωνία Β ἔχει μέτρον $\frac{1}{2}$ περ. — ΔΖ, καὶ ἡ γωνία Γ, $\frac{1}{2}$ περ. — ΔΕ.

Ἡ ἰδιότης αὕτη πρέπει νὰ ἦναι ἀντίστροφος μεταξὺ τῶν δύο τριγώνων, διότι γράφονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ἓν διὰ μέσου τοῦ ἄλλου. Οὕτω θέλομεν εὕρη ὅτι αἱ γωνίαι Δ, Ε, Ζ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ μετροῦνται διαδοχικῶς ὑπὸ $\frac{1}{2}$ περ.—ΒΓ, $\frac{1}{2}$ περ.—ΑΓ, $\frac{1}{2}$ περ.—ΑΒ. Τῷ ὄντι ἡ γωνία Δ, παραδείγματος χάριν, ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΜΙ. Τώρα ΜΙ+ΒΓ=ΜΓ+ΒΙ=$\frac{1}{2}$περ· λοιπὸν τὸ τόξον ΜΙ, μέτρον τῆς γωνίας Δ, = $\frac{1}{2}$ περ. ΒΓ, καὶ οὕτω διὰ τὰς ἄλλας.

Σχόλιον. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΔΕΖ δυνατὸν νὰ σχηματισθῶσι τρία ἄλλα ἀπὸ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν τριῶν τόξων ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ. Ἀλλ' ἡ παροῦσα πρότασις δὲν ἔχει χώραν παρὰ διὰ τὸ κεντρικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον διακρίνεται ἀπὸ τὰ τρία ἄλλα ἐκ τούτου ὅτι αἱ δύο γωνίαι Α καὶ Δ κεῖνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Ε ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΓ, καὶ δύο γωνίαι Γ καὶ Ζ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ· (σχ. 228 καὶ 227).

Διάφορα ὀνόματα δίδονται εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ· ἡμεῖς θέλομεν τὰ ὀνομάζει *τρίγωνα πολικά*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Λῆμμα.

Δεδομένου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου Α καὶ μὲ τὸ διάστημα ΑΓ γραφθῇ τὸ τόξον τοῦ μικροῦ κύκλου ΔΕΓ· ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου Β καὶ μὲ τὸ διάστημα ΒΓ γραφθῇ παρομοίως τὸ τόξον ΔΖΓ, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Δ, ὅπου τὰ τόξα ΔΕΓ, ΔΖΓ τέμνονται, ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΑΔ, ΔΒ· λέγω ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΒ θέλει ἔχει ὅλα του τὰ μέρη ἴσα μὲ τὰ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ. σχ. 229.

Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ πλευρὰ ΑΔ=ΑΓ, ΔΒ=ΒΓ, ΑΒ εἶναι κοινή· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν. Λέγω τώρα ὅτι αἱ ἀπέναντι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἰς Ο, ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην εἰς τὴν στιγμὴν Ο ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΒΟΓ· ἠμποροῦμεν ὡσαύτως νὰ φαντασθῶμεν μίαν δευτέραν γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΑΟΒ, ΑΟΔ, ΒΟΔ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, ἕπεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν μίαν τούτων τῶν στερεῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ἄλλην στερεὰν γωνίαν, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἀλλ' εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἀπεδείχθη (23, 5) ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἰσάκις κλίνουν μεταξύ των· λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΔΑΒ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τριγώνου ΓΑΒ, τουτέστι ΔΑΒ=ΒΑΓ, ΔΒΑ=ΑΒΓ, καὶ ΑΔΒ=ΑΓΒ· λοιπὸν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΔΒ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΓΒ.

Σχόλιον. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων τούτων δὲν εἶναι ὅμως ἀπόλυτος ἢ ἐπιθέσεως ἰσότης, διότι ἀδύνατον ἤθελεν εἶναι νὰ ἐφαρμόσωσιν ἀκριβῶς τὰ δύο τρίγωνα, ἐκτὸς εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἤθελον εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἰσότης εἶναι ἐκείνη τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν ἰσότητα ἐκ συμμετρίας, καὶ δι' αὐτὸν τὸν λόγον καὶ τὰ τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΔΒ θέλομεν ὀνομάζει τρίγωνα συμμετρικά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, ὅταν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν.

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΕΖ, ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΕΗ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ=ΖΕΗ· τὸ τρίγωνον ΕΖΗ ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του ΑΒΔ, καθ' ὃν τρόπον ἐπιτίθενται δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων. Λοιπὸν ὅλα τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΕΖΗ θέλουν εἶναι ἴσα μετὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τουτέστιν ἐκτὸς τῶν τριῶν μερῶν τῶν ὑποτιθεμένων ἴσων, θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ ΒΓ=ΖΗ, ἡ γωνία ΑΒΓ=ΕΖΗ, καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ= ΕΗΖ. σχ. 230.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν.

Διότι δυνάμεθα νὰ ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν τούτων τῶν τριγόνων ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του, ὡς ἐκάμαμεν εἰς παρομοίαν περίστασιν διὰ τὰ εὐθύγραμμμα τρίγωνα. Βλέπε πρότ. Ζ'. βιβλ. Α'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, ἦναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, θέλουν εἶναι ὡσαύτως καὶ ἰσογώνια, καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι θέλουν εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐκ τῆς ΙΑ' προτάσεως, ὅπου εἴδομεν ὅτι μὲ τρεῖς δεδομένας πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ δύο μόνον τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΒΔ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν, διαφορετικὰ μὲν ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῶν μερῶν, ἀλλ' ἴσα ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν ἰδίων τούτων μερῶν. Λοιπὸν δύο τρίγωνα ἰσόπλευρα μεταξύ των εἶναι ἢ ἀπολύτως ἴσα, ἢ τοὐλάχιστον ἴσα ἐκ συμμετρίας· καὶ εἰς τὰς δύο περιστάσεις εἶναι ἰσογώνια, καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν. σχ. 229.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Θεώρημα.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο γωνίαι σφαιρικοῦ τινος τριγώνου ἦναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

1.ον Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΑΓ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ γωνία Γ=Β: διότι, ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἀχθῇ εἰς τὴν στιγμὴν Δ, μέσον τῆς βάσεως, τὸ τόξον ΑΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν· τουτέστιν, ΑΔ κοινήν, ΒΔ =

ΔΓ, καὶ ΑΒ=ΑΓ: λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν ἔχει τὰς γωνίας ἴσας, καὶ θέλει εἶναι Β=Γ. σχ. 231.

2.ον Ἔστω ἡ γωνία Β=Γ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ΑΓ=ΑΒ: διότι ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ δὲν ἦναι ἴση τῇ ΑΓ, ἔστω ΑΒ ἡ μεγαλητέρα τῶν δύο, ἂς ληφθῇ ΒΟ=ΑΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΟΓ. Αἱ δύο πλευραὶ ΒΟ, ΒΓ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΑΓ, ΒΓ· ἡ περιεχομένη γωνία ΟΒΓ ἀπὸ τὰς πρώτας εἶναι ἴση μὲ τὴν περιεχομένην ἀπὸ τὰς δευτέρας ΑΓΒ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΒΟΓ, ΑΓΒ, ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα των μέρη ἴσα (πρό. 21), ἐπομένως ἡ γωνία ΟΓΒ=ΑΒΓ: ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΓΒ· λοιπὸν ἤθελεν εἶναι ΟΓΒ=ΑΓΒ, ὅπερ ἀδύνατον: ἀδύνατον λοιπὸν νὰ ὑποτεθῇ ἡ ΑΒ διαφορετικὴ τῆς ΑΒ· αἱ πλευραὶ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ Γ, εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις δεικνύει, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΔ=ΔΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΒΔΑ=ΑΔΓ· λοιπὸν αἱ δύο αὗται τελευταῖαι εἶναι ὀρθαί: ἄρα τὸ ἀγόμενον τόξον ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἰσοσκελοῦς τινος σφαιρικοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ μέσον τῆς βάσεώς του εἶναι κάθετον εἰς ταύτην τὴν βάσιν, καὶ τέμνει δίχα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ιϛʹ.

Θεώρημα.

Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἐὰν ἡ γωνία Α ἦναι μείζων τῆς γωνίας Β, ἡ πλευρὰ ΒΓ ἀπέναντι τῆς γωνίας Α θέλει εἶναι μείζων τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπέναντι τῆς γωνίας Β· ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μείζων τῆς ΓΑ, ἡ γωνία Α θέλει εἶναι μείζων τῆς γωνίας Β. σχ. 232.

1.ον Ἔστω ἡ γωνία Α > Β, ἂς γένῃ ἡ γωνία ΒΑΔ = Β, θέλει εἶναι ΑΔ = ΔΒ (πρό. 15): ἀλλὰ ΑΔ + ΔΓ εἶναι μεῖζον ἀπὸ ΑΓ· ἀντὶ τῆς ΑΔ τεθείσης τῆς ΔΒ, θέλει εἶναι ΔΒ + ΔΓ ἢ ΒΓ > ΑΓ.

2.ον Ὑποτεθείσης τῆς ΒΓ > ΑΓ, λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ γωνία ΒΑΓ μείζων τῆς ΑΒΓ: διότι, ἐὰν ΒΑΓ ἦτον ἴση μὲ ΑΒΓ, ἤθελεν εἶναι ΒΓ=ΑΓ· ἐὰν δὲ ΒΑΓ < ΑΒΓ, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, ἤθελεν εἶναι ΒΓ < ΑΓ· ὅπερ ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μείζων τῆς ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖʹ.

Θεώρημα.

Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἐπὶ μιᾶς ἴσης σφαίρας χαραγμένου, ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία Α ἦναι μείζων τῆς γωνίας Δ, λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μείζων τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου. σχ. 233.

Η ἀπόδειξις εἶναι κατὰ πάντα ὁμοία μὲ τὴν τῆς προτάσεως Ι, βιβλ. Α'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν χαραγμένα ἦναι ἰσογώνια μεταξύ των, θέλουν εἶναι καὶ ἰσόπλευρα.

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δύο δεδομένα τρίγωνα, Π καὶ Κ τὰ πολικά των· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων Α καὶ Β εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ τῶν πολικῶν Π καὶ Κ θέλουν εἶναι ἴσαι (πρό. 10): ἀλλ' ἐκ τοῦ ὅτι τὰ τρίγωνα Π καὶ Κ εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνια (πρό. 14)· τέλος, ἐκ τοῦ ὅτι αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων Π καὶ Κ εἶναι ἴσαι, ἕπεται (πρό. 10) ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν πολικῶν Α καὶ Β εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν τὰ ἰσογώνια τρίγωνα Α καὶ Β εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν καὶ ἰσόπλευρα μεταξύ των.

Ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ ἀποδείξωμεν τὴν αὐτὴν πρότασιν χωρὶς νὰ συνδράμωμεν εἰς τὰ πολικὰ τρίγωνα κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ, δύο τρίγωνα ἰσογώνια μεταξύ των, εἰς τρόπον ὥστε Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, ΒΓ= ΕΖ. σχ. 234.

Ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ἂς ληφθῇ ΑΗ= ΔΕ, καὶ ΑΘ=ΔΖ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΗΘ καὶ ἂς προεκβληθῶσι τὰ τόξα ΒΓ, ΗΘ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ι καὶ Κ'.

Αἱ δύο πλευραὶ ΑΗ, ΑΘ, εἶναι, ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσαι μὲ τὰς δύο ΔΖ, ΔΕ· ἡ περιεχομένη γωνία ΗΑΘ=ΒΑΓ =ΕΔΖ· λοιπὸν (πρό. 12) τὰ τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, λοιπὸν ἡ γωνία ΑΗΘ= ΔΕΖ=ΑΒΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΘΗ =ΔΖΕ= ΑΓΒ.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΙΒΗ, Κ'ΒΗ, ἡ πλευρὰ ΒΗ εἶναι κοινή, ἡ γωνία ΙΗΒ = ΗΒΚ'. καὶ ἐπειδὴ ΙΗΒ + ΒΗΚ' ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, καθὼς καὶ ΗΒΚ' + ΙΒΗ, ἕπεται ὅτι ΒΗΚ' = ΙΒΗ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΙΒΗ, ΗΒΚ', εἶναι ἴσα (πρό. 13)· ἄρα ΙΗ =ΒΚ', καὶ ΙΒ =ΗΚ'.

Παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΘΗ = ΑΓΒ, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΙΓΘ, ΘΓΚ', ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα· ἄρα ΙΘ=ΓΚ', καὶ ΘΚ'=ΙΓ.

Τώρα, ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων ΒΚ', ΙΗ, ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα ΓΚ', ΙΘ, τὰ ὑπόλοιπα ΒΓ, ΗΘ, θέλουν εἶναι ἴσα. Ἄλλως ἡ γωνία ΒΓΑ=ΑΘΗ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΗΘ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΘΗ, ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα: ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον καθ' ὅλα του τὰ μέρη μὲ τὸ τρίγωνον ΑΘΗ· λοιπὸν εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ θέλει εἶναι ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, ΒΓ=ΕΖ· ἄρα, ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἦναι ἰσογώνια μεταξύ των, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας θέλουν εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη δὲν ὑπάρχει εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ὅπου ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἄλλό τι δὲν συνάγεται παρὰ ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν. Ἀλλ' εὔκολον εἶναι νὰ δώσωμεν λόγον τῆς τοιαύτης διαφορᾶς ἥτις κατὰ τοῦτο ὑπάρχει μεταξὺ τῶν εὐθυγράμμων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων. Εἰς τὴν παροῦσαν πρότασιν, καθὼς καὶ εἰς τὰς προτάσεις ΙΒ', ΙΓ', ΙΔ' καὶ ΙΖ', εἰς τὰς ὁποίας γίνεται λόγος περὶ τῆς συγκρίσεως τῶν τριγώνων, λέγομεν ἐκφραστικῶς (expressement) ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι χαραγμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν. Τώρα τὰ ὅμοια τόξα εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων· λοιπὸν ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν, δύο τρίγωνα δὲν ἠμποροῦν νὰ ἦναι ὅμοια χωρὶς νὰ ἦναι ἴσα. Δὲν εἶναι λοιπὸν θαυμαστὸν ὅτι ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπιφέρει τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν.

Δὲν ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ ἐὰν τὰ τρίγωνα ἦσαν χαραγμένα ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν. Τότε διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ἤθελον εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἤθελον εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν. (1)

---

(1) Εἰς τὴν ΚΓ' πρότασιν τοῦ ἑ. βιβλίου ἀπεδείχθη ὅτι ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι σύγκειωνται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι, εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τώρα εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ ἀντίστροφος· δηλαδή, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα δύο τριέδρων στερεῶν γωνιῶν ἰσάκις κλίνουν μεταξύ των, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν ὁποίων ἡ κλίσις εἶναι ἴση εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας, θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι (βλέπε διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀντιστρόφου ταύτης προτάσεως (les reciproques de la Geometrie par M. Garnier) τούτου τεθέντος, ὅταν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἦναι ἰσογώνια, ὅταν δηλαδὴ αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων ἢ τῶν ἑδρῶν τῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ παραβαλλόμενα τρίγωνα, ἦναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, τότε αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν πρώτην στερεὰν γωνίαν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν δευτέραν στερεὰν γωνίαν· καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀκολουθεῖ ὅτι τὰ τόξα τὰ ὁποῖα μετροῦν ταύτας τὰς γωνίας ἢ αἱ πλευραὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν, ὅταν ἦναι χαραγμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν· ἀνάλογα δὲ τῶν ἀκτίνων ὅταν ἦναι χαραγμένα ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν· διότι τότε μετροῦντα γωνίας εἰς τὸ κέντρον ἴσας, εἶναι ὅμοια, καὶ τὰ ὅμοια τόξα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ἀκτῖνες. Ο. Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.
Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἓξ καὶ μεγαλήτερον ἀπὸ δύο ὀρθάς.

Διότι 1.ον κάθε γωνία παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ δύο ὀρθῶν (βλέπε τὸ ἑξῆς σχόλιον)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μικρότερον ἓξ ὀρθῶν.

2.ον Τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν μεῖον ἡ ἀντιστοιχοῦσα πλευρὰ τοῦ πολικοῦ τριγώνου (πρό. 10)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἔχει μέτρον τρεῖς ἡμιπεριφερείας μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολικοῦ τριγώνου. Τώρα τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι μικρότερον περιφερείας (πρό. 4)· λοιπόν, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ τοιοῦτον ἄθροισμα ἀπὸ τρεῖς ἡμιπεριφερείας, ἐπειδὴ ἀφαιροῦμεν ποσότητα μικροτέραν περιφερείας, τὸ ὑπόλοιπον θέλει εἶναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας, ἥτις εἶναι τὸ μέτρον δύο ὀρθῶν γωνιῶν· λοιπὸν 2.ον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεῖζον δύο ὀρθῶν.

Πόρισμα Α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου δὲν εἶναι σταθερόν, ὡς τὸ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων· ἀλλὰ μεταβάλλεται ἀπὸ δύο ὀρθὰς γωνίας ἕως ἕξ, χωρὶς οὔτε μὲ τὸ ἓν οὔτε μὲ τὸ ἄλλο ὅριον νὰ ἠμπορῇ νὰ γένῃ ἴσον. Οὕτω δύο γωνίαι δεδομέναι δὲν κάμνουν γνωστὴν τὴν τρίτην.

Πόρισμα Β'. Τρίγωνον σφαιρικὸν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ δύο ἢ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας, δύο ἢ τρεῖς ἀμβλείας.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ἦναι δισορθογώνιον, τουτέστιν ἔχῃ δύο τῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ ὀρθάς, ἡ κορυφὴ Α θέλει εἶναι ὁ πόλος τῆς βάσεως ΒΓ (πρό. 6)· καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, θέλουν εἶναι τεταρτημόρια. σχ. 235.

Ἐὰν δὲ καὶ ἡ γωνία Α ἦναι ὀρθή, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι τρισορθογώνιον, ὅλαι του αἱ γωνίαι θέλουν εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ πλευραί του τεταρτημόρια. Τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὀκτὼ φοραῖς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· τοῦτο γίνεται φανερὸν ἀπὸ τὸ σχῆμα 236, ὑποτιθεμένου τοῦ τόξου ΜΝ ἴσου μὲ τεταρτημόριον.

Σχόλιον. Εἰς τὰ προηγούμενα, συμφώνως μὲ τὸν ϛ' ὁρισμόν, ὑποθέσαμεν ὅτι τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχουν πάντοτε τὰς πλευράς των μικροτέρας τῆς ἡμιπεριφερείας· τότε ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι πάντοτε μικρότεραι δύο ὀρθῶν: διότι, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ ἦναι μικροτέρα τῆς ἡμιπεριφερείας, καθὼς καὶ ἡ ΑΓ, τὰ τόξα ταῦτα πρέπει νὰ προεκβληθοῦν καὶ τὰ δύο διὰ νὰ συναπαντηθοῦν εἰς Δ. Τώρα αἱ δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ὁμοῦ ληφθεῖσαι, κάμουν δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΓ μόνη της εἶναι μικροτέρα δύο ὀρθῶν. σχ. 224.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὑπάρχουν σφαιρικὰ τρίγωνα, τῶν ὁποίων μερικαὶ πλευραὶ εἶναι μεγαλήτεραι τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ μερικαὶ γωνίαι μεγαλήτεραι δύο ὀρθῶν· διότι ἐὰν προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἀκεραίαν περιφέρειαν ΑΓΕ, ὅ τι μένει, ἀφ' οὗ ἀπὸ τὸ ἡμισφαίριον ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι νέον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ σημειωθῇ ὡσαύτως διὰ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ΑΒ, ΒΓ, ΑΕΔΓ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΕΔΓ εἶναι μείζων τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΕΔ· ἀλλ' εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ εἰς Β ἀπέναντι γωνία ὑπερέχει δύο ὀρθὰς κατὰ τὴν ποσότητα ΓΒΔ.

Ὁ λόγος δὲ διὰ τὸν ὁποῖον ἀπεκλείσαμεν ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι τοιούτου μεγέθους, εἶναι ὅτι ἡ λύσις των ἢ ἡ προσδιόρισις τῶν μερῶν των ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὴν λύσιν τῶν τριγώνων τὰ ὁποῖα περικλείονται εἰς τὸν ὁρισμόν. Τῷ ὄντι βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ἐὰν αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γνωσταί, ἀμέσως γίνονται γνωσταὶ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰδίου ὀνόματος τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἡμισφαιρίου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Θεώρημα.

Ὁ ἄτρακτος ΑΜΒΝΑ εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία ΜΑΝ τούτου τοῦ ἀτράκτου εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, ἢ ὡς τὸ τόξον ΜΝ μέτρον ταύτης τῆς γωνίας πρὸς τὴν περιφέρειαν. σχ. 236.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ τόξον ΜΝ εἶναι πρὸς τὴν περιφέρειαν ΜΝΠΚ εἰς λόγον συμμετρικόν, φερ' εἰπεῖν, ὡς 5 πρὸς 48. Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν ΜΝΠΚ εἰς 48 ἴσα μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων ΜΝ θέλει περιέχει 5· ἑνόνοντες ἔπειτα τὸν πόλον Α καὶ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ τεταρτημορίων περιφερείας, θέλομεν ἔχει 48 τρίγωνα εἰς τὸ ἡμισφαίριον ΑΜΝΠΚ, τὰ ὁποῖα θέλουν εἶναι ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα ὅλα των τὰ μέρη ἴσα. Ἡ ὅλη σφαῖρα θέλει περιέχει λοιπὸν 96 τοιαῦτα μερικὰ τρίγωνα, ὁ δὲ ἄτρακτος ΑΜΒΝΑ 10· λοιπὸν ὁ ἄτρακτος εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν ὡς 10 πρὸς 96, ἢ ὡς 5 πρὸς 48, τουτέστιν ὡς τὸ τόξον ΜΝ πρὸς τὴν περιφέρειαν.

Ἐὰν τὸ τόξον ΜΝ δὲν ἦναι συμμετρικὸν μὲ τὴν περιφέρειαν, διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ τοῦ ὁποίου ἤδη εἴδομεν πολλὰ παραδείγματα, ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ ἄτρακτος εἶναι πάντοτε πρὸς τὴν σφαῖραν ὡς τὸ τόξον ΜΝ πρὸς τὴν περιφέρειαν.

Πόρισμα Α΄. Δύο ἄτρακτοι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἴδιαί των γωνίαι.

Πόρισμα Β΄. Εἴδομεν ἤδη ὅτι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ ὀκτὼ τρισορθογώνια τρίγωνα (πρό. 19)· ἐὰν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τούτων τῶν τριγώνων ληφθῇ ὡς μονάς, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θέλει παῤῥησιασθῇ διὰ 8. Τούτου τεθέντος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀτράκτου τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 2Α (ἐννοουμένου ὅμως ὅτι ἡ γωνία Α ἐκτιμᾶται ἐπὶ τῆς ὀρθῆς λαμβανομένης ὡς μονάδος)· διότι ἔχομεν 2Α : 8 : : Α : 4. Ἐδῶ λοιπὸν εἶναι δύο διαφορετικαὶ μονάδες· ἡ μία διὰ τὰς γωνίας, καὶ εἶναι ἡ ὀρθή· ἡ ἄλλη διὰ τὰς ἐπιφανείας, καὶ εἶναι τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, ἢ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, καὶ αἱ πλευραὶ τεταρτημόρια περιφερείας.

Σχόλιον. Ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ ὁ περιεχόμενος ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΑΜΒ, ΑΝΒ, εἶναι πρὸς τὸ ὅλον στερεὸν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· διότι ὅταν οἱ ἄτρακτοι ἦναι ἴσοι, οἱ σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι παρομοίως ἴσοι· λοιπὸν δύο σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα ὁποῦ τοὺς περιέχουν. (1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

Θεώρημα.

Δύο σφαιρικὰ συμμετρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα, τουτέστι δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς ἴσας, ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, ΓΒ = ΕΖ, καὶ τῶν ὁποίων ὅμως εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐπίθεσις· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ΔΕΖ. σχ. 237.

(1) Ἡ αὐτὴ ἀναλογία ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἀτράκτου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος καὶ τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας· διότι ἐν ᾧ, ὑποτιθεμένου τοῦ λόγου τοῦ τόξου ΜΝ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ὡς 5 πρὸς 48, ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ὅλη σφαῖρα περιέχει 96 τρίγωνα, ἐν ᾧ ὁ ἄτρακτος 10, βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι τὸ ὅλον στερεὸν τῆς σφαίρας περιέχει 96 ἴσας σφαιρικὰς πυραμίδας, ἐν ᾧ ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ παραβαλλόμενος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἄτρακτος περιέχει 10, λοιπὸν ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ ὅστις ἔχει διὰ βάσιν τοῦτον τὸν ἄτρακτον, εἶναι πρὸς τὸ ὅλον στερεὸν τῆς σφαίρας ὡς 10 πρὸς 96 ἢ ὡς 5 πρὸς 48, τουτέστιν ὡς ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· καὶ ἡ αὐτὴ ἡ ἀναλογία ὑπάρχει ἐὰν ἡ γωνία Α δὲν εἶναι εἰς λόγον συμμετρικὸν μὲ τὰς τέσσαρας ὀρθάς· ἀπὸ ἄλλο μέρος εἴδομεν ὅτι τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὀκτὼ φορὰς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ἀλλ' εὐκόλως βλέπομεν ἀκόμη ὅτι ἡ πυραμὶς ἥτις ἔχει διὰ βάσιν τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται εἰς τὸ ὅλον στερεὸν τῆς σφαίρας ὀκτὼ φοράς· ἐὰν λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη ληφθῇ ὡς μονάς, τὸ στερεὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 8. Ἄρα ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α ἐκφράζεται διὰ 2Α. Καὶ εἷς ἄλλος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Β θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 2Β. λοιπὸν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον : : Α : Β. Ο. Μ.

Ἔστω Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ὅστις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ (1)· ἀπὸ τὴν στιγμὴν ταύτην ἂς ἀχθῶσι τὰ ἴσα τόξα (πρό. 6) ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ· εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἂς γένῃ ἡ γωνία ΔΖΚ = ΑΓΠ, τὸ τόξον ΖΚ = ΓΠ, καὶ ἂς ἑνωθῶσι ΔΚ, ΕΚ.

Αἱ πλευραὶ ΔΖ, ΖΚ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΓΠ, ἡ γωνία ΔΖΚ = ΑΓΠ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΚ, ΑΓΠ εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη (πρό. 12)· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΔΚ = ΑΠ, καὶ ἡ γωνία ΔΚΖ = ΑΠΓ.

Εἰς τὰ προτεθέντα τρίγωνα ΔΖΕ, ΑΒΓ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΔΖΕ, ΑΓΒ, ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΔΕ, ΑΒ εἶναι ἴσαι (πρό. 11), ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτὰς αἱ γωνίαι ΔΖΚ, ΑΓΠ ἴσαι ἐκ τῆς κατασκευῆς, μένει ἡ γωνία ΚΖΕ ἴση μὲ τὴν ΠΓΒ. Ἄλλως αἱ πλευραὶ ΚΖ, ΖΕ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΠΓ, ΓΒ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΖΚΕ, ΠΓΒ, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΚΕ = ΠΒ, καὶ ἡ γωνία ΖΚΕ = ΓΠΒ.

Ἐὰν τώρα παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΖΚ, ΑΓΠ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, εἶναι ἐν ταυτῷ ἰσοσκελῆ, βλέπομεν ὅτι ἠμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσι καὶ ἐντελῶς νὰ ἐφαρμόσωσι· διότι, ἀφ' οὗ τεθῇ ἡ ΠΓ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΚΖ, ἡ πλευρὰ ΠΑ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΚΔ, καὶ οὕτω τὰ δύο τρίγωνα θέλουν ταυτισθῆ εἰς ἓν μόνον· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια ΔΚΖ = ΑΠΓ. Διὰ λόγον παρόμοιον ἡ ἐπιφάνεια ΖΚΕ = ΓΠΒ, καὶ ἡ ἐπιφάνεια ΔΚΕ = ΑΠΒ· λοιπὸν ἔχομεν ΔΚΖ + ΖΚΕ — ΔΚΕ = ΑΠΓ +

---

(1) Ὁ κύκλος ὅστις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ, ἢ ὅστις περιγράφεται εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι παρὰ μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας· διότι, ἐὰν ἦτο μέγιστος, αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ἤθελον κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἤθελεν ἀχθῇ εἰς μίαν τῶν πλευρῶν των. (Σημείωσις τοῦ Συγγραφέως)

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι μέγιστος, αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

Ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ Α, Β, Γ εἶναι μέγιστος, τὸ κέντρον τούτου τοῦ κύκλου εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ἐπειδὴ τὸ κέντρον τοῦτο εὑρίσκεται εἰς καθὲν τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ἕπεται ὅτι καθὲν τούτων τῶν ἐπιπέδων ἤθελεν ἔχει τρία κοινὰ σημεῖα μὴ ἐπευθείας μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ Α, Β, Γ καὶ ἐπειδὴ ὅταν ἓν ἐπίπεδον ἔχει τρία κοινὰ σημεῖα μὲ ἓν ἄλλο ταυτίζεται μὲ αὐτό, ἕπεται ὅτι τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ἤθελον σχηματίζει ἓν μόνον ἐπίπεδον μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ Α, Β, Γ αἱ τρεῖς λοιπὸν πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ἤθελον τότε εὑρίσκεσθαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὥστε τότε δὲν σχηματίζουν τρίγωνον. Ο. Μ.

ΓΠΒ—ΑΠΒ· ἢ ΔΖΕ=ΑΒΓ· λοιπὸν τὰ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. (1)

Σχόλιον. Δυνατὸν εἶναι οἱ πόλοι Π καὶ Κ νὰ εὑρεθοῦν ἐντὸς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ· τότε πρέπει νὰ προστεθοῦν τὰ τρία τρίγωνα ΔΚΖ, ΖΚΕ, ΔΚΕ, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ παρομοίως τὰ τρία τρίγωνα ΑΠΓ, ΓΠΒ, ΑΠΒ, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἄλλως ἡ ἀπόδειξις καὶ ἡ συνέπεια ἤθελον εἶναι αἱ αὐταί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ΑΟΒ, ΓΟΔ τέμνωνται ὁπωσδήποτε εἰς τὸ ἡμισφαίριον ΑΟΓΒΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΟΓ, ΒΟΔ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ. σχ. 238.

Διότι, προεκβληθέντων τῶν τόξων ΟΒ, ΟΔ, εἰς τὸ ἄλλο ἡμισφαίριον ἕως οὗ νὰ συναπαντιθῶσιν εἰς Ν, ΟΒΝ, καθὼς καὶ ΑΟΒ, θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρεια· μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς ΟΒ, θέλει προκύψει ΒΝ=ΑΟ. Διὰ λόγον παρόμοιον ΔΝ=ΓΟ, καὶ ΒΔ=ΑΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΔΝ, ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας· ἄλλως ἡ θέσις των εἶναι τοιαύτη ὥστε εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου· λοιπὸν εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν (πρό. 21), καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΟΓ, ΒΟΔ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον ΟΒΝΔΟ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ.

Σχόλιον. Φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ δύο σφαιρικαὶ πυραμίδες βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ, ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ. (2)

---

(1) Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις δεικνύει ὅτι ἡ πυραμὶς ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴση κατὰ τὴν στερεότητα μὲ τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Ο. Μ.

(2) Ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ μοιράζεται εἰς δύο σφαιρικὰς πυραμίδας βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΒΟΔ, ΒΔΝ· τώρα ἡ πυραμὶς ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΒΔΝ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΟΓ (βλέπε τὴν ἀνωτέρω σημείωσιν)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πυραμίδων αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πυραμίδων βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ. Ο. Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια ὁποιουδήποτε σφαιρικοῦ τριγώνου ἔχει μέτρον τὴν διαφορὰν δύο ὀρθῶν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν του.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ προτεθὲν τρίγωνον· ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραί του ἕως οὗ νὰ συναπαντήσωσι τὸν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ὅπως δήποτε ἠγμένον μέγιστον κύκλον ΔΕΖΗ. Δυνάμει τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΗΘ, ὁμοῦ ληφθέντα, ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α, καὶ ὅστις ἔχει μέτρον 2Α (πρό. 20): οὕτω θέλει εἶναι ΑΔΕ$+$ΑΗΘ $=$2Α· διὰ λόγον παρόμοιον ΒΗΖ$+$ΒΙΔ$=$2Β, ΓΙΘ$+$ΓΖΕ$=$ 2Γ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τριγώνων ὑπερέχει τὸ ἡμισφαίριον τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἄλλως τὸ ἡμισφαίριον παριστάνεται διὰ 4· λοιπὸν τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ 2Α $+$ 2Β $+$ 2Γ $-$ 4, καὶ ἑπομένως ΑΒΓ$=$ Α$+$Β$+$Γ$-$2· λοιπὸν καθὲ σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον δύο ὀρθὰς γωνίας. σχ. 239.

Πόρισμα Α'. Ὅσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἰς τοῦτο τὸ μέτρον περιέχονται, ἄλλα τόσα τρισορθογώνια τρίγωνα ἢ ὄγδοα μέρη τῆς σφαίρας τὰ ὁποῖα εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας (πρό. 20), τὸ προτεθὲν τρίγωνον περιέχει. Ἐάν, φερ' εἰπεῖν, ἑκάστη τῶν γωνιῶν εἶναι $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, τότε αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μὲ 4 ὀρθάς, καὶ τὸ προτεθὲν τρίγωνον παριστάνεται διὰ 4$-$2 ἢ 2· λοιπὸν θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο τρισορθογώνια τρίγωνα.

Πόρισμα Β'. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι $\frac{\text{Α}+\text{Β}+\text{Γ}}{2}-1$ ὁμοίως ἡ σφαιρικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ΑΒΓ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι $\frac{\text{Α}+\text{Β}+\text{Γ}}{2}-1$ (1)

---

(1) Εἰς τὸ σχόλιον τῆς προλαβούσης προτάσεως ἐσημειώθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πυραμίδων αἱ ὁποῖαι ἔχουν διὰ βάσεις τὰ κατὰ κορυφὴν τρίγωνα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὅταν δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνωνται εἰς τὸ ἡμισφαίριον, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν γωνία τῶν τριγώνων· ἐπειδὴ δὲ ἡ στερεότης τοῦ ὄνυχος ἐκφράζεται διὰ τοῦ διπλασίου τῆς γωνίας του, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν εἰρημένων πυραμίδων ἔχει μέτρον τὸ διπλάσιον τῆς ἰδίας γωνίας. Τούτου τεθέντος διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως μὲ τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τριγώνου ἔχει μέτρον τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν του ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς, ἀποδεικνύεται ἐνταυτῷ ὅτι ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος ἥτις ἔχει

Σχόλιον. Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὁποῦ παραβάλλεται τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ τὸ τρισορθογώνιον, ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς ἥτις ἔχει βάσιν ΑΒΓ παραβάλλεται μὲ τὴν τρισορθογώνιον πυραμίδα, καὶ προκύπτει ἡ αὐτὴ ἀναλογία. Ἡ στερεὰ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος παραβάλλεται ὡσαύτως μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν τῆς τρισορθογωνίου πυραμίδος: τῷ ὄντι ἡ σύγκρισις στερεόνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν μερῶν. Τώρα ἐὰν αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ἐφαρμόζωσι, φανερὸν ὅτι καὶ αὗται αἱ πυραμίδες ἐφαρμόζουσι, καθὼς καὶ αἱ εἰς τὴν κορυφὴν των στερεαὶ γωνίαι: ἐντεῦθεν προκύπτουσι πολλαὶ συνέπειαι.

1.ον Δύο σφαιρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των· καὶ ἐπειδὴ πολυγωνικὴ πυραμὶς ἠμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς πολλὰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ἕπεται ὅτι δύο ὁποιαιδήποτε σφαιρικαὶ πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν εἰς αὐτὰς ὡς βάσεις.

2.ον Αἱ εἰς τὴν κορυφὴν τῶν ἰδίων πυραμίδων στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἐπίσης εἰς τὴν ἀναλογίαν τῶν βάσεων· λοιπὸν διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο ὁποιασδήποτε στερεὰς γωνίας, πρέπει νὰ θέσωμεν τὰς κορυφάς των εἰς τὸ κέντρον δύο ἴσων σφαιρῶν, καὶ αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ πολύγωνα τὰ ἀποχωριζόμενα μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ἢ ἑδρῶν των.

Ἡ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς τρισορθογωνίου πυραμίδος γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τρία ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των· ἡ γωνία αὕτη ἥτις ἠμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ ὀρθὴ στερεὰ γωνία, εἶναι πολλὰ ἁρμοδία διὰ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς μέτρου εἰς τὰς στερεὰς γωνίας. Τούτου τεθέντος, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὅστις δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου θέλει δώσει τὸ μέτρον τῆς ἀντικειμένης στερεᾶς γωνίας. Ἐάν, φέρ' εἰπεῖν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἦναι $\frac{3}{4}$, τουτέστι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου, ἡ ἀντικειμένη στερεὰ γωνία θέλει εἶναι ὡσαύτως τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀρθῆς στερεᾶς γωνίας.

βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει μέτρον τὴν ἰδίαν ποσότητα. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐκφράζει εἰς τὴν πρώτην περίστασιν μονάδας τρισορθογωνίου τριγώνου, καὶ εἰς τὴν δευτέραν μονάδας στερεῶν. Ζητοῦντες τώρα μὲ ποῖον ὄγκον ἡ πυραμὶς ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν ἀναλογίαν $A+B+\Gamma-2 : 8 :: X : 4$ ὅθεν $X = \frac{4A+4B+4\Gamma-8}{8} = \frac{A+B+\Gamma}{2}-1$ O. M.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον τὸ γινόμενον δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἐλαττωμένον κατὰ δύο.

Ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α ἂς ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ· τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει μοιρασθῆ εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ μεῖον δύο. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια κάθε τριγώνου ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον δύο ὀρθάς, καὶ φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον τοσάκις δύο ὀρθὰς γωνίας ὅσας πλευρὰς ἔχει παρὰ 2.

Σχόλιον. Ἔστω α τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου, π ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του ὑποτεθείσης τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου θέλει ἔχει μέτρον, $\alpha - 2\pi - 2)$ ἢ $\alpha - 2\pi + 4$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Θεώρημα.

Ἔστω Σ ὁ ἀριθμὸς τῶν στερεῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυέδρου, Θ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν του, Α ὁ ἀριθμὸς τῶν κόψεών του· λέγω ὅτι πάντοτε θέλει εἶναι $\Sigma + \Theta = A + 2$.

Ἂς ληφθῇ ἐντὸς τοῦ πολυέδρου μία στιγμὴ ἐκ τῆς ὁποίας ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς τὰς κορυφὰς ὅλων τῶν στερεῶν γωνιῶν του· ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὅτι ἀπὸ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ὡς ἀπὸ κέντρον γράφεται σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἥτις νὰ συναπαντᾶται ἀπὸ ὅλας ταύτας τὰς γραμμὰς εἰς τόσας στιγμάς· ἂς ἑνωθῶσι ταῦτα τὰ σημεῖα διὰ τόξων μεγίστων κύκλων, ὥστε νὰ σχηματισθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πολύγωνα ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου καὶ ἰσάριθμα μὲ αὐτάς. Ἔστω ΑΒΓΔΕ ἓν τούτων τῶν πολυγώνων (σχ. 240) καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του· ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι $\sigma - 2\nu + 4$, ὅπου σ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε. Ἐὰν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτιμηθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου τῶν ἄλλων σφαιρικῶν πολυγώνων, καὶ προστεθῶσιν ὅλαι ὁμοῦ, θέλει συναχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμά των, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας παριστανομένη διὰ 8, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων, μεῖον δύο φοραῖς ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν των, πλέον 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον. Τώρα, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι συνέρχονται ὁλόγυρα τῆς ἰδίας στιγμῆς Α ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσον μὲ 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσαι εἶναι αἱ στερεαὶ γωνίαι· εἶναι λοιπὸν ἴσον μὲ 4Σ. Ἀκολούθως τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ.τ.λ. εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κόψεων ἢ $=4A$, ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ κόψις χρησιμεύει ὡς πλευρὰ εἰς δύο ἕδρας· λοιπὸν θέλει εἶναι $8=4\Sigma-4A+4\Theta$· ἢ, διαιρεθέντων τῶν δύο μελῶν διὰ 4, $2=\Sigma-A+\Theta$· λοιπὸν $\Sigma+\Theta=A+2$.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι *τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς στερεὰς γωνίας ἑνὸς πολυέδρου εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις τέσσαρας ὀρθὰς, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς Σ—2, ὄντος Σ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου.*

Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν ἕδραν τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ταύτης τῆς ἕδρας θέλει εἶναι $2\nu-4$ ὀρθαὶ γωνίαι (25, 1). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν 2ν, ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν, $=4A$, καὶ 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι, $=4\Theta$· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν $=4A-4\Theta$. Τώρα, κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα, $A-\Theta=\Sigma-2$, καὶ ἑπομένως $4A-4\Theta=4(\Sigma-2)$. Λοιπὸν *τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν* κ.τ.λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κϛʹ.

Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς ΓΒ, ΓΑ, καὶ μίαν τρίτην κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μεγαλήτερον ΑΒΓ εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιεχομένη ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς γωνία Γ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Α καὶ Β. σχ. 272 καὶ 273.

Ἂς προεκβληθῶσιν αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΑΒ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Δ. θέλει προκύψει σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία ΔΒΓ θέλει εἶναι ὁμοίως ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν ΒΔΓ, ΒΓΔ: διότι ΒΓΔ+ΒΓΑ ἐπειδὴ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, ὡς καὶ ΓΒΑ+ΓΒΔ, ἔχομεν ΒΓΔ+ΒΓΑ=ΓΒΑ+ΓΒΔ· προσθέσει καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τῆς ΒΔΓ

=ΒΑΓ, προκύπτει ΒΓΔ+ΒΓΑ+ΒΔΓ=ΓΒΑ+ΓΒΔ+ΒΑΓ. Τώρα, ἐξ ὑποθέσεως, ΒΓΑ=ΓΒΑ+ΒΑΓ. λοιπὸν ΓΒΔ=ΒΓΔ +ΒΔΓ.

Ἂς ἀχθῇ τὸ τόξον ΒΙ ὥστε νὰ κάμνῃ τὴν γωνίαν ΓΒΙ= ΒΓΔ, καὶ ἐπομένως ΙΒΔ=ΒΔΓ· τὰ δύο τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΒΔ, θέλουν εἶναι ἰσοσκελῆ, καὶ θέλει εἶναι ΙΓ=ΙΒ.=ΙΔ. Λοιπὸν ἡ στιγμὴ Ι μέσον τῆς ΔΓ, ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Β, Γ, Δ: διὰ λόγον παρόμοιον ἡ στιγμὴ Ο, μέσον τῆς ΑΒ, ἰσάκις θέλει ἀπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς στιγμὰς Α, Β, Γ.

Ἔστω τώρα ΓΑ′=ΓΑ καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ′ > ΒΓΑ· ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ Α′Β, καὶ προεκβληθῶσι τὰ τόξα Α′Γ, Α′Β, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Δ′, τὸ τόξον Δ′ΓΑ′ θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρεια καθὼς καὶ ΔΓΑ· λοιπὸν ἐπειδὴ ΓΑ′=ΓΑ, θέλει εἶναι καὶ ΓΔ′ =ΓΔ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΓΙΔ′, ἔχομεν ΓΙ+ΙΔ′ > ΓΔ′. λοιπὸν ΙΔ′ > ΓΔ—ΓΙ, ἢ ΙΔ′ > ΙΔ. σχ. 272.

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΙΒ ἂς διαιρεθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Ι εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ τόξου ΕΙΖ τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΓ. Ἐὰν ληφθῇ μία στιγμὴ Λ μεταξὺ Ι καὶ Ε, τὸ διάστημα ΒΛ, ἴσον μὲ ΛΓ, θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΙ· διότι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς εἰς τὴν Θ′ πρότασιν τοῦ Α′ Βιβλίου, ὅτι ΒΛ+ΛΓ < ΒΙ+ΙΓ· λοιπὸν μετὰ τὴν διαίρεσιν τῶν δύο μερῶν διὰ δύο θέλει εἶναι ΒΛ < ΒΙ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον Δ′ΛΓ ἔχομεν Δ′Λ > Δ′Γ—ΓΛ, καὶ πολὺ περισσότερον Δ′Λ > Δ′Γ—ΓΙ, ἢ Δ′Λ > Δ′Ι, ἢ ΔΛ > ΒΙ· λοιπὸν Δ′Λ > ΒΛ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἐὰν ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΙΖ ζητηθῇ μία στιγμὴ ἰσάκις ἀπέχουσα τῶν τριῶν σημείων Β, Γ, Δ′, ἡ στιγμὴ αὕτη δὲν ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ παρὰ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τοῦ τόξου ΕΙ πρὸς τὸ Ζ. Ἔστω Ι′ ἡ ζητουμένη στιγμή, εἰς τρόπον ὥστε Δ′Ι′=ΒΙ′=ΓΙ′· ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα Ι′ΓΒ, Ι′ΓΔ′, ΙΒΔ′, εἶναι ἰσοσκελῆ, θέλομεν ἔχει τὰς ἴσας γωνίας Ι′ΒΓ=Ι′ΓΒ, Ι′ΒΔ′ =Ι′Δ′Β, Ι′ΓΔ′=Ι′Δ′Γ. Ἀλλ' αἱ γωνίαι Δ′ΒΓ+ΓΒΑ′ κάμνουν δύο ὀρθάς, καθὼς καὶ Δ′ΓΒ+ΒΓΑ′· λοιπὸν

Δ′ΒΙ′+Ι′ΒΓ+ΓΒΑ′=2,

ΒΓΙ′—Ι′ΓΔ′+ΒΓΑ′=2.

Προσθέτοντες, τὰ δύο ἀθροίσματα καὶ παρατηροῦντες ὅτι Ι′ΒΓ =ΒΓΙ′ καὶ Δ′ΒΙ′—Ι′ΓΔ′=ΒΔ′Ι′—Ι′Δ′Γ=ΓΔ′Β=ΓΑ′Β, θέλομεν ἔχει

2Ι′ΒΓ+ΓΑ′Β+ΓΒΑ′+ΒΓΑ′=4.

Λοιπὸν ΓΑ′Β+ΓΒΑ′+ΒΓΑ′—2 (μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου Α′ΒΓ)=2—2Ι′ΒΓ· εἰς τρόπον ὥστε ἐμβαδὸν Α′ΒΓ

$=2-2$ γωνία ΙΒΓ· ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐμβαδὸν ΑΒΓ$=2-2$ γωνία ΙΒΓ. Τώρα ἀπεδείχθη ὅτι ἡ γωνία Ι'ΒΓ εἶναι μείζων τῆς ΙΒΓ (1) λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν Α'ΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒΓ.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις καὶ ἡ αὐτὴ συνέπεια ἤθελον ἔχει χώραν ἐὰν λαμβάνοντες πάντοτε τὸ τόξον ΓΑ'$=$ΓΑ, ἐκάμναμεν τὴν γωνίαν ΒΓΑ' $<$ΒΓΑ'· λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι τὸ μεγαλήτερον τρίγωνον μεταξὺ ὅλων ἐκείνων τὰ ὁποῖα ἔχουν δεδομένας τὰς δύο πλευρὰς καὶ τὴν τρίτην κατ' ἀρέσκειαν. σχ. 273.

Σχόλιον Α'. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ μεγαλήτερον μεταξὺ ὅλων ἐκείνων τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο δεδομένας πλευρὰς ΓΑ, ΓΒ, ἠμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμικύκλιον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι ἡ διάμετρος· διότι ἐὰν Ο ἦναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, εἴδομεν ὅτι τὰ διαστήματα ΟΓ, ΟΒ εἶναι ἴσα· ἡ περιφέρεια λοιπὸν τοῦ μικροῦ κύκλου τοῦ ἐκ τῆς στιγμῆς Ο ὡς ἐκ πόλου καὶ μὲ διάστημα ΟΒ γραφομένου διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ. Περιπλέον ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἶναι διάμετρος τούτου τοῦ μικροῦ κύκλου· διότι τὸ κέντρον τὸ ὁποῖον ἐνταῦθα πρέπει νὰ εὑρίσκηται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου ΒΟΑ (πρό. 1, πόρ. 4), ἀναγκαίως πρέπει νὰ εὑρίσκηται εἰς τὴν κοινὴν τομὴν τούτων τῶν δύο ἐπιπέδων ἥτις εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΑ, καὶ οὕτω ΒΑ εἶναι διάμετρος. σχ. 241.

Β'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων Α καὶ Β, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι διπλάσιον τῆς γωνίας Γ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι πάντοτε μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν (19)· λοιπὸν ἡ γωνία Γ εἶναι μεγαλητέρα ὀρθῆς.

Γ'. Ἐὰν προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΓΒ, ΓΑ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ε, τὸ τρίγωνον ΒΑΕ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Διότι ἡ γωνία Ε$=$Γ$=$ΑΒΓ$+$ΓΑΒ· λοιπὸν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου ΒΑΕ γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰς τέσσαρας ΑΒΓ, ΑΒΕ, ΓΑΒ, ΒΑΕ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΒΑΕ (πρό. 24) $=4-2=2=\frac{1}{4}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

---

(1) Διότι ἐὰν ἦτον ἴση τότε ἡ στιγμὴ Ι ἔπρεπε νὰ πέσῃ εἰς Ι καὶ ἡ ἀπέχουσα στιγμὴ ἰσάκις ἀπὸ Δ, Β, Γ, ἤθελεν εἶναι ἡ Ι τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἀδύνατον· ἐὰν δὲ μικροτέρα, ἡ στιγμὴ Ι ἔπρεπε νὰ ἦναι μεταξὺ Ι καὶ Ε τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπίσης ἀδύνατον· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη στιγμὴ Ι οὔτε εἰς Ι οὔτε μεταξὺ Ι καὶ Ε εὑρίσκεται, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΙΒΓ $>$ ΙΒΓ. Ο. Μ.

Δ΄. Δὲν ἤθελεν ὑπάρχει μ έ γ ι σ τ ο ν ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ ἦτον ἴσον ἢ μεγαλήτερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου. Διότι ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρέπει νὰ ἐγγράφηται εἰς ἡμικύκλιον τῆς σφαίρας, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ ἀπαιτεῖται νὰ ἦναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΓΒ (πρό. 3), καὶ ἑπομένως μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου.

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον δὲν ὑπάρχει μ έ γ ι σ τ ο ν, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου, εἶναι ὅτι τότε τὸ τρίγωνον αὐξάνει μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον ἀναλόγως ὁποῦ ἡ περιεχομένη γωνία ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς γίνεται μεγαλητέρα· τέλος ὅταν γένη ἴση μὲ δύο ὀρθάς, αἱ τρεῖς πλευραὶ θέλουν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ σχηματίζει ἀκεραίαν περιφέρειαν· τὸ τρίγωνον λοιπὸν θέλει γένη ἡμισφαίριον, ἀλλὰ παύει ἀπὸ τὸ νὰ ἦναι τρίγωνον. (1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ΄.

Θ ε ώ ρ η μ α.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δεδομένην πλευρὰν καὶ δεδομένην περίμετρον, τὸ μεγαλήτερον εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο μὴ προσδιωρισμέναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

(1) Ἀφ' οὗ σχηματίσωμεν ἓν τρίγωνον μὲ τὰς δύο δεδομένας πλευρὰς δίδοντες κλίσιν εἰς αὐτὰς κατ' ἀρέσκειαν, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ τριγώνου αὐξάνει ἀναλόγως μὲ τὴν αὔξησιν τῆς περιεχομένης γωνίας ἀπὸ τὰς δύο δεδομένας πλευράς, καί, κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν, τότε φθάνει εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν, ὅταν ἡ γωνία αὕτη γένη ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· καὶ τὸ τοιοῦτον τρίγωνον, ὡς ἀπεδείχθη, ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἐγγράφηται εἰς ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ χορδὴ τῆς ἀπροσδιορίστου πλευρᾶς· ἐκ τοῦ ὁποίου ἐσυνάχθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν πρέπει νὰ ἦναι ἔλασσον ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου· ἕπεται λοιπὸν ὅτι ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν εἶναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας ὅσον καὶ ἂν αὐξήνῃ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς δὲν ἠμπορεῖ ποτὲ νὰ ὑπάρξῃ ἓν τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν, εἰς τρόπον ὥστε τὸ τρίγωνον ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ ὁποιονδήποτε μέγεθος· καὶ τὸ μέγεθός του κρέμαται ἀπὸ τὸ τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ἀπὸ τὰς δύο δεδομένας πλευράς. Ὅθεν ἐὰν αὕτη γένῃ ἴση μὲ δύο ὀρθάς, ἡ ἐπιφάνειά του γίνεται ἴση μὲ τὴν τοῦ ἡμισφαιρίου· διότι τότε τὰ δύο ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς δεδομένας πλευρὰς ταυτίζονται εἰς ἕν, καὶ διὰ τοῦτο αἱ δύο δεδομέναι πλευραὶ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐπειδὴ δὲ διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ τρίγωνον ἀνάγκη νὰ ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν δύο τούτων πλευρῶν διὰ τόξου μεγίστου κύκλου, ἕπεται ὅτι ὁ μέγιστος οὗτος κύκλος θέλει συναπαντᾷ τὸν μέγιστον κύκλον τοῦ ὁποίου μέρος τῆς περιφερείας εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν, εἰς αὐτὰ τὰ δύο ἄκρα· ἀπὸ ἄλλο μέρος αἱ δύο οὗτοι μέγιστοι κύκλοι δὲν ἠμποροῦν νὰ τέμνωνται εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι τὸ δεδομένον ἄθροισμα μὲ τὸ νὰ ἦναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἐπίλοιπον μέρος τοῦ ἑνὸς εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας· ἕπεται λοιπὸν ὅτι οἱ δύο κύκλοι οὗτοι ταυτίζονται καὶ οὕτως ταυτιζομένης τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου μὲ μέγιστον κύκλον, ἡ ἐπιφάνειά του ταυτίζεται μὲ τὴν τοῦ ἡμισφαιρίου· ἐὰν λάβῃ μίαν μεγαλητέραν αὔξησιν ἡ γωνία τὸ τρίγωνον αὐξάνει περαιτέρω ὥστε δύναται νὰ λάβῃ ὁποιονδήποτε μέγεθος. Θ. Μ.

Ἔστω ΑΒ ἡ δεδομένη πλευρὰ κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ ἔστω ΑΓ+ΓΒ=ΑΔ+ΔΒ· λέγω ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ, εἰς τὸ ὁποῖον ΑΓ=ΓΒ, εἶναι μεῖζον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς ΑΔΒ. σχ. 242.

Διότι ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ ΑΟΒ, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΟΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΟΓ. Ἡ γωνία ΓΒΑ ἴση τῇ ΓΑΒ, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΟΑΒ· οὕτως ἡ πλευρὰ ΑΟ εἶναι μείζων τῆς ΟΒ (πρό. 21)· ἂς ληφθῇ ΟΙ=ΟΒ· ἂς γένῃ ΟΚ′=ΟΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ Κ′Ι· τὸ τρίγωνον ΟΚ′Ι θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΟΒ. Ἐὰν τώρα τὸ τρίγωνον ΔΟΒ ἢ τὸ ἴσον τοῦ Κ′ΟΙ δὲν ἦναι μικρότερον τοῦ ΟΑΓ, πρέπει νὰ ἦναι ἴσον ἢ μεγαλήτερον καὶ εἰς τὰς δύο περιστάσεις, ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Ι εἶναι μεταξὺ τῶν στιγμῶν Α καὶ Ο, πρέπει ἡ στιγμὴ Κ′ νὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΟΓ, ἄλλως τὸ τρίγωνον ΟΚ′Ι ἤθελε περιέχεται εἰς τὸ τρίγωνον ΓΑΟ, καὶ ἐπομένως ἤθελεν εἶναι μικρότερον. Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ συντομώτερος δρόμος ἀπὸ Γ εἰς Α εἶναι ΓΑ, ἔχομεν ΓΚ′+Κ′Ι+ΙΑ > ΓΑ. Ἀλλὰ ΓΚ′=ΟΔ—ΓΟ, ΑΙ=ΑΟ—ΟΒ, Κ′Ι=ΒΔ. λοιπὸν ΟΔ—ΓΟ+ΑΟ—ΟΒ+ΒΔ > ΓΑ, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης, ΑΔ—ΓΒ+ΒΔ > ΓΑ, ἢ ΑΔ+ΔΒ > ΑΓ+ΓΒ. Τώρα ἡ ἀνισότης αὕτη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ΑΔ+ΒΔ=ΑΓ+ΓΒ· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Κ′ δὲν ἠμπορεῖ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΟΓ· λοιπὸν πίπτει μεταξὺ Ο καὶ Γ, καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΚΟΙ, ἢ τὸ ἴσον του ΟΔΒ, εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΓΟ· λοιπὸν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς ΑΔΒ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου.

Σχόλιον. Αἱ δύο αὗται τελευταῖαι προτάσεις εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς προτάσεις Α′ καὶ Γ′ τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ′ βιβλίον. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξάξωμεν, ὡς πρὸς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα, τὰς συνεπείας αἱ ὁποῖαι ἔχουν χώραν διὰ τὰ εὐθύγραμμα πολύγωνα.

Ἰδοὺ αἱ ἀρχικαί:

1.ην Ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα σφαιρικὰ πολύγωνα καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μεγαλήτερον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις μὲ τὴν τῆς Β′. προτάσεως τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ′. βιβλίον.

2.ρα Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν τελευταίαν κατ᾽ ἀρέσκειαν, τὸ μεγαλήτερον εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμικύκλιον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ τῆς μὴ προσδιωρισμένης πλευρᾶς θέλει εἶναι ἡ διάμετρος.

Ἡ ἀπόδειξις συνάγεται ἀπὸ τὴν πρότασιν Κϛ', ὡς εἴδομεν εἰς τὴν Ε' πρότασιν τοῦ ῥηθέντος παραρτήματος· πρέπει διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ μεγίστου, τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν νὰ ἦναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου.

3.ον Τὸ μεγαλήτερον τῶν σχηματιζομένων σφαιρικῶν πολυγώνων μὲ δεδομένας πλευράς, εἶναι τὸ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ εἰς κύκλον τῆς σφαίρας.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὁποῦ καὶ διὰ τὴν ϛ'. πρότασιν τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ'. βιβλίον ἐδώκαμεν.

4.ον Τὸ μεγαλήτερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας καὶ τὰς πλευράς του ἴσας.

Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὰ προηγούμενα 1 καὶ 2 πορίσματα.

Σημείωσις. Ὅλαι αἱ προτάσεις περὶ μεγίστου ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἐφαρμόζονται εἰς τὰς στερεὰς γωνίας τὰς ὁποίας μετροῦσι ταῦτα τὰ πολύγωνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ϛ'. ΚΑΙ Ζ'.

ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θεώρημα.

Πέντε μόνον κανονικὰ πολύεδρα ὑπάρχουσι.

Διότι κανονικὰ πολύεδρα ὡρίσαμεν ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι μεταξύ των. Αἱ συνθῆκαι αὗται εἰς πολλὰ ὀλίγας περιστάσεις ἔχουν χώραν.

1.ον Ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κάθε στερεὰν γωνίαν τοῦ πολυέδρου μὲ τρεῖς, ἢ μὲ τέσσαρας, ἢ μὲ πέντε γωνίας τούτων τῶν τριγώνων : ἐντεῦθεν γεννῶνται τρία κανονικὰ σώματα, τὰ ὁποῖα εἶναι, τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον, καὶ τὸ εἰκοσάεδρον. Δὲν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν περισσότερα μὲ ἰσόπλευρα τρίγωνα· διότι ὁ σχηματισμὸς γωνίας στερεᾶς με ἓξ γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἐπειδὴ ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς, εἶναι ἀδύνατος. (21, 5)

2.ον Ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι τετράγωνα, δυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν τὰς γωνίας των ἀνὰ τρεῖς· καὶ ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ ἑξάεδρον ἢ κύβος.

Τέσσαρες γωνίαι τετραγώνων ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς, καὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ σχηματίσουν γωνίαν στερεάν.

3.ον Τέλος ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι κανονικὰ πεντάγωνα, δυνατὸν ἀκόμη νὰ ἑνωθοῦν αἱ γωνίαι των ἀνὰ τρεῖς τρεῖς, καὶ ἐκ τούτου προκύπτει τὸ κανονικὸν δωδεκάεδρον.

Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάγωμεν περαιτέρω· διότι τρεῖς γωνίαι κανονικῶν ἑξαγώνων ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς, καὶ τρεῖς ἑπταγώνων μὲ ἔτι περισσότερον.

Λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι παρὰ μόνον πέντε κανονικὰ πολύεδρα, τρία σχηματιζόμενα μὲ ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἓν μὲ τετράγωνα, καὶ ἓν μὲ πεντάγωνα.

Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν θέλομεν δείξει ὅτι τὰ πέντε ταῦτα πολύεδρα πραγματικῶς ὑπάρχουν, καὶ ὅτι εἶναι δυνατόν, γνωστῆς μιᾶς τῶν ἑδρῶν των, νὰ προσδιορισθῶσιν ὅλαι των αἱ διαστάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Πρόβλημα.

Δεδομένης μιᾶς τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου, ἢ μόνον τῆς πλευρᾶς του, νὰ κατασκευασθῇ τὸ πολύεδρον.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο παῤῥησιάζει πέντε τὰ ὁποῖα διαδοχικῶς θέλομεν λύσει.

Κατασκευὴ τοῦ τετραέδρου.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἦναι μία τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου· εἰς τὴν στιγμὴν Ο κέντρον τούτου τοῦ τριγώνου, ἂς ὑψωθῇ ΟΣ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ· ἂς περατωθῇ ἡ κάθετος αὕτη εἰς τὴν στιγμὴν Σ, ὥστε ΑΣ = ΑΒ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΣΒ, ΣΓ, καὶ ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τετράεδρον. σχ. 243.

Διότι, ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων διαστημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ πλάγιαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ἰσάκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου ΣΟ καὶ εἶναι ἴσαι. Ἡ μία τούτων ΣΑ = ΑΒ· λοιπὸν αἱ τέσσαρες ἕδραι τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ εἶναι τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓ. Ἄλλως αἱ στερεαὶ γωνίαι ταύτης τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἐπειδὴ ἡ κάθε μια σύγκειται ἀπὸ τρία ἴσα ἐπίπεδα· λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι κανονικὸν τετράεδρον.

Κατασκευὴ τοῦ ἑξαέδρου.

Ἔστω ΑΒΓΔ δεδομένον τετράγωνον: ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ ἂς κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ΑΕ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ ἕδραι του εἶναι τετράγωνα ἴσα, καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι του εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς συγκείμεναι ἀπὸ τρεῖς γωνίας ὀρθάς· λοιπὸν τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι κανονικὸν ἑξάεδρον ἢ κύβος. σχ. 244.

Κατασκευὴ τοῦ ὀκταέδρου.

Ἔστω ΑΜΒ δεδομένον τρίγωνον ἰσόπλευρον· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἂς γραφθῇ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· εἰς τὴν στιγμὴν Ο κέντρον τούτου τοῦ τετραγώνου ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του ἡ κάθετος ΤΣ, ἥτις ἂς περατωθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς Τ καὶ Σ, εἰς τρόπον ὥστε ΟΤ=ΟΣ=ΑΟ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν ἀκολούθως αἱ ΣΑ, ΣΒ, ΤΑ, κ. τ. λ., θέλει προκύψει τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΤ, σύνθετον ἀπὸ δύο τετραγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΒΓΔ, ΤΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι ἐπιστηρίζονται ἐπὶ τῆς κοινῆς βάσεως ΑΒΓΔ· τὸ στερεὸν τοῦτο θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ὀκτάεδρον. σχ. 245.

Τῷ ὄντι, τὸ τρίγωνον ΑΟΣ, καθὼς καὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΔ, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Ο· αἱ πλευραὶ ΑΟ, ΟΣ, ΟΔ, εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, διὰ τοῦτο ΑΣ=ΑΔ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν ὅτι ὅλα τὰ ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΤ, ΒΟΣ, ΓΟΤ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μὲ τὸ τρίγωνον ΑΟΔ· λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΣ, ΑΤ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξύ των, καὶ ἐπομένως τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΤ περιέχεται ὑπὸ ὀκτὼ ἴσων τριγώνων μὲ τὸ δεδομένον ἰσόπλευρον ΑΜΒ. Λέγω περιπλέον ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσαι μεταξύ των: ἡ γωνία Σ, φέρ' εἰπεῖν, εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Β.

Διότι τὸ τρίγωνον ΣΑΓ, εἶναι φανερὰ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΑΓ, καὶ οὕτως ἡ γωνία ΑΣΓ εἶναι ὀρθή· λοιπὸν τὸ σχῆμα ΣΑΤΓ εἶναι τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ σύγκρισις τῆς πυραμίδος ΒΑΣΓΤ μὲ τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔ, δεικνύει ὅτι ἡ βάσις ΑΣΓΤ τῆς πρώτης ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ τῆς δευτέρας· τότε ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Ο εἶναι κοινὸν κέντρον, τὸ ὕψος ΟΒ τῆς πρώτης θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὸ ὕψος ΟΣ τῆς δευτέρας, καὶ αἱ δύο πυραμίδες θέλουν ταυτισθῇ· λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι ἴση μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν Β· τὸ στερεὸν ἄρα ΣΑΒΓΔΤ εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον.

Σχόλιον. Ἐὰν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι, ΑΓ, ΒΔ, ΣΤ, εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ τέμνωνται εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἡμισείας των, τὰ ἄκρα τούτων τῶν εὐθειῶν θέλουν εἶναι αἱ κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

Κατασκευὴ τοῦ δωδεκαέδρου.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ δεδομένον κανονικὸν πεντάγωνον· ἔστωσαν ΑΒΠ, ΓΒΠ, δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν ΑΒΓ μὲ ταύτας τὰς ἐπιπέδους γωνίας ἂς σχηματισθῇ ἡ στερεὰ γωνία, Β, καὶ ἂς προσδιορισθῇ διὰ τῆς ΚΔ' προτάσεως τοῦ Ε' βιβλίου, ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο τῶν ἐπιπέδων της, τὴν ὁποίαν κλίσιν καλῶ Κ. Ἂς σχηματισθῶσι παρομοίως εἰς τὰς στιγμὰς Γ, Δ, Ε, Α γωνίαι στερεαὶ ἴσαι μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν Β, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κείμεναι: τὸ ἐπίπεδον ΓΒΠ θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓΗ, διότι καὶ τὰ δύο κλίνουν τὴν αὐτὴν ποσότητα Κ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Δυνάμεθα λοιπὸν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΒΓΗ νὰ γράψωμεν τὸ πεντάγωνον ΒΓΗΖΠ ἴσον μὲ τὸ πεντάγωνον ΑΒ ΓΔΕ. Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν εἰς ἕκαστον τῶν ἄλλων ἐπιπέδων ΓΔΙ, ΔΕΛ, κ. τ. λ. θέλομεν ἔχει μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΠΖΗΘ, κ. τ. λ. σύνθετον ἀπὸ ἓξ κανονικὰ πεντάγωνα ἴσα καὶ ἕκαστον τῶν ὁποίων κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του τὴν αὐτὴν ποσότητα Κ. Ἔστω πζηθ. κ. τ. λ. μία δευτέρα ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὴν ΠΖΗΘ, κ. τ. λ. λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἠμποροῦν νὰ ἑνωθοῦν εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίσουν μίαν μόνην συνεχῆ κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Τῷ ὄντι ἡ γωνία οπζ, παραδείγματος χάριν, ἠμπορεῖ νὰ ἑνωθῇ μὲ τὰς δύο γωνίας ΟΠΒ, ΒΠΖ, ὥστε νὰ γένῃ μία στερεὰ γωνία Π ἴση τῇ γωνίᾳ Β, καὶ εἰς ταύτην τὴν ἕνωσιν οὐδεμία τροπὴ θέλει προξενηθῇ εἰς τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΒΠΖ, ΒΠΟ, διότι ἡ κλίσις αὕτη εἶναι ὁποία πρέπει νὰ ἦναι διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς στερεᾶς γωνίας. Ἀλλ' ἐν ᾧ ἡ στερεὰ γωνία Π σχηματίζηται, ἡ πλευρὰ πζ θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν ἴσην της ΠΖ, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ζ θέλουν εὑρεθῇ ἑνωμέναι τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΠΖΗ, πζε, εζη, αἱ ὁποῖαι θέλουν σχηματίσει γωνίαν στερεὰν ἴσην μὲ ἑκάστην τῶν ἤδη σχηματισμένων· ἡ ἕνωσις αὕτη θέλει γένῃ χωρὶς τὴν παραμικρὰν τροπὴν, οὔτε τῆς γωνίας Π, οὔτε τῆς ἐπιφανείας εζηθ, κ. τ. λ. διότι τὰ ἐπίπεδα ΠΖΗ, εζπ ἤδη ἑνωθέντα εἰς Π, ἔχουν μεταξύ των τὴν ἁρμοδίαν κλίσιν Κ, καθὼς καὶ τὰ ἐπίπεδα εζη, εζπ. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω κατὰ διαδοχὴν βλέπομεν ὅτι αἱ δύο ἐπιφάνειαι θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην ὥστε νὰ σχηματίσουν μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν καὶ εἰς ἑαυτὴν ἐπανερχομένην· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κανονικοῦ δωδεκαέδρου, ὡς σύνθετος ἀπὸ δώδεκα ἴσα κανονικὰ πεντάγωνα, καὶ ἐπειδὴ ὅλαι του αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. σχ. 246.

Κατασκευὴ τοῦ εἰκοσαέδρου.

Ἔστω ΑΒΓ μία τῶν ἑδρῶν του· πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ σχηματισθῇ γωνία στερεὰ μὲ πέντε ἴσα ἐπίπεδα μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, καὶ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσάκις νὰ κλίνῃ ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του. Πρὸς τοῦτο, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Β'Γ', ἴσης μὲ τὴν ΒΓ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον Β'Γ'Θ'Ι'Δ. εἰς τὸ κέντρον τούτου τοῦ πενταγώνου ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του μία κάθετος, ἥτις ἂς περατωθῇ εἰς Α' εἰς τρόπον ὥστε Β'Α' = Β'Γ'· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ Α'Γ', Α'Θ', Α'Ι', Α'Δ', καὶ ἡ στερεὰ γωνία Α' σχηματισμένη ἀπὸ τὰ πέντε ἐπίπεδα Β'Α'Γ', Γ'Α'Θ' κ. τ. λ. θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη στερεὰ γωνία. Διότι αἱ πλάγιαι Α'Β', Α'Γ', κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, καὶ μία τούτων Α'Β' εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν Β'Γ'· λοιπὸν ὅλα τὰ τρίγωνα Β'Α'Γ', Γ'Α'Θ', κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 247.

Ἄλλως δὲ φανερὸν εἶναι ὅτι ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων Β'Α'Γ', Γ'Α'Θ', κ. τ. λ. ἰσάκις κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του· διότι αἱ στερεαὶ γωνίαι Β', Γ', κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς σχηματισμέναι μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου. Ἂς καλέσωμεν Κ τὴν κλίσιν δύο ἐπιπέδων ὅπου εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἡ ὁποία δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς ΚΔ' προτάσεως τοῦ Ε' βιβλίου· ἡ γωνία Κ θέλει εἶναι ἐνταυτῷ ἡ κλίσις ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συγκροτοῦν τὴν στερεὰν γωνίαν Α' ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν εἰς τὰς στιγμὰς Α, Β, Γ, κάμωμεν γωνίας στερεὰς ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Α'. θέλομεν ἔχει μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΔΕΖΗ, κ. τ. λ. σύνθετον ἀπὸ δέκα ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων θέλει κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του τὴν ποσότητα Κ· καὶ αἱ γωνίαι Δ, Ε, Ζ, κ. τ. λ. τῆς περιμέτρου της θέλουν ἑνόνει ἀλληλοδιαδόχως τρεῖς, καὶ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων. Ἂς φαντασθῶμεν μίαν δευτέραν ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ΔΕΖΗ, κ. τ. λ. αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἠμποροῦν ἀμοιβαίως νὰ ἐφαρμόσωσιν, ἑνουμένης ἑκάστης τριπλῆς γωνίας τῆς μιᾶς μὲ μίαν διπλῆν τῆς ἄλλης· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν τούτων ἔχουν ἤδη μεταξύ των τὴν ἀναγκαίαν κλίσιν διὰ τὸν σχηματισμὸν στερεᾶς πενταπλῆς γωνίας ἴσης μὲ Α, οὐδεμία μεταβολὴ εἰς ταύτην τὴν ἕνωσιν θέλει προξενηθῇ εἰς ἑκάστην ἐπιφάνειαν κατὰ μέρος, καὶ αἱ δύο ὁμοῦ θέλουν σχηματίσει μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν, σύνθετον ἀπὸ εἴκοσι ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει εἶναι ἡ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου, διότι περιπλέον ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἡ κλίσις αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν κατασκευὴν τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων· εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν ΚΔ' πρότασιν τοῦ Ε' βιβλίου, διὰ τῆς ὁποίας, δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν στερεὰν γωνίαν, προσδιορίζεται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξύ των.

Εἰς τὸ τετράεδρον. Ἑκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τρεῖς γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων· πρέπει λοιπὸν νὰ ζητηθῇ διὰ τοῦ ῥηθέντος προβλήματος ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξύ των· ἡ γωνία αὕτη θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου. σχ. 243.

Εἰς τὸ ἑξάεδρον. Ἡ γωνία δύο προσκειμένων ἑδρῶν εἶναι ὀρθή. σχ. 244.

Εἰς τὸ ὀκτάεδρον. Ἂς σχηματισθῇ γωνία στερεὰ μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν ὀρθήν· ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου. σχ. 245.

Εἰς τὸ δωδεκάεδρον. Ἑκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται μὲ τρεῖς γωνίας κανονικῶν πενταγώνων. Οὕτως ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων δύο τούτων τῶν γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ τῶν δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ δωδεκαέδρου. σχ. 246.

Εἰς τὸ εἰκοσάεδρον. Ἂς σχηματισθῇ γωνία στερεὰ μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου· ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων, θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ εἰκοσαέδρου. σχ. 247.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πολυέδρου, νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ ἐκείνην τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολύεδρον σφαίρας.

Πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ δείξωμεν ὅτι κάθε κανονικὸν πολύεδρον δύναται νὰ ἐγγραφθῇ εἰς τὴν σφαῖραν καὶ νὰ περιγραφθῇ εἰς αὐτήν. σχ. 248.

Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ πλευρὰ εἰς δύο προσκειμένας ἕδρας· ἔστωσαν Γ καὶ Ε τὰ κέντρα τῶν δύο τούτων ἑδρῶν, καὶ ΓΔ, ΕΔ αἱ ἠγμέναι κάθετοι ἀπὸ ταῦτα τὰ κέντρα ἐπὶ τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΑΒ, αἱ ὁποῖαι θέλουν πέσει εἰς τὴν στιγμὴν Δ, μέσον ταύτης τῆς πλευρᾶς. Αἱ δύο κάθετοι ΓΔ, ΔΕ, κάμνουν μεταξύ των μίαν γνωστὴν γωνίαν ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν, προσδιοριζομένην διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος. Τώρα ἐάν, εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ, κάθετον εἰς ΑΒ, ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ ΕΔ αἱ ἀπροσδιόριστοι κάθετοι ΓΟ καὶ ΕΟ, αἱ ὁποῖαι συναπαντῶνται εἰς Ο, λέγω ὅτι ἡ στιγμὴ Ο θέλει εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας· οὔσης τῆς ἀκτῖνος τῆς πρώτης ΟΓ, καὶ τῆς δευτέρας ΟΑ.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὰ ἀποστήματα ΓΔ, ΔΕ, εἶναι ἴσα, καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΔΟ κοινή, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΟ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΔΕ (18, 1), καὶ ἡ κάθετος ΟΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν κάθετον ΟΕ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετος εἰς ΓΔΕ, (17, 5), ἡ ΓΔΕ εἰς ΑΒΓ· περιπλέον ΓΟ, εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ, εἶναι κάθετος εἰς ΙΔ, κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ΓΔΕ, ΑΒΓ· λοιπὸν ΓΟ (18, 5) εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΕΟ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ· λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι ΓΟ, ΕΟ ἠγμέναι εἰς τὰ ἐπίπεδα δύο προσκειμένων ἑδρῶν ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν ἰδίων, συναπαντῶνται εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ εἶναι ἴσαι. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ παριστάνουν δύο ἄλλας ὁποιασδήποτε προσκειμένας ἕδρας, τὸ ἀπόστημα ΓΔ πάντοτε θέλει μένει τοῦ ἰδίου μεγέθους, καθὼς καὶ ἡ γωνία ΓΔΟ, ἡμίσεια τῆς ΓΔΕ· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΟ καὶ ἡ πλευρά του ΓΟ θέλουν εἶναι ἴσα δι' ὅλας τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου· ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ο ὡς ἀπὸ κέντρον καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΓ γράψωμεν μίαν σφαῖραν, ἡ σφαῖρα αὕτη θέλει ἅπτεται ὅλων τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου εἰς τὰ κέντρα των (διότι τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΑΒΕ, θέλουν εἶναι κάθετα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος), καὶ ἡ σφαῖρα θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον ἢ τὸ πολύεδρον περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Ἂς ἑνωθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΒ· ἐπειδὴ ΓΑ = ΓΒ, αἱ δύο πλάγιαι

ΟΑ, ΟΒ, μὲ τὸ νὰ ἀπομακρύνωνται ἰσάκις τῆς καθέτου, θέλουν εἶναι ἴσαι· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ δύο ὁποιασδήποτε ἄλλας γραμμὰς ἠγμένας ἀπὸ τὸ κέντρον Ο εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς πλευρᾶς· ὅλαι λοιπὸν αὗται αἱ γραμμαὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των· ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ο ὡς ἀπὸ κέντρον καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ γραφθῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει διέλθῃ διὰ τῶν κορυφῶν ὅλων τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἡ σφαῖρα θέλει εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον, ἢ τοῦτο ἐγγεγραμμένον εἰς ἐκείνην.

Τούτου τεθέντος, ἡ λύσις τοῦ προτεθέντος προβλήματος δὲν ἔχει καμμίαν δυσκολίαν καὶ ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ ὡς ἀκολούθως.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς μιᾶς ἕδρας τοῦ πολυέδρου, ἂς γραφθῇ αὕτη ἡ ἕδρα, καὶ ἔστω ΓΔ τὸ ἀπόστημά της. Ἂς ζητηθῇ διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἂς γένῃ ἡ γωνία ΓΔΕ ἴση μὲ ταύτην τὴν κλίσιν. Ἂς ληφθῇ ΔΕ ἴση μὲ ΓΔ, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΟ καὶ ΕΟ κάθετοι ἐπὶ ΓΔ καὶ ΕΔ· αἱ δύο αὗται κάθετοι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς μίαν στιγμὴν Ο, καὶ ΓΟ θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸ πολύεδρον· σχ. 249.

Ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΔΓ ἂς ληφθῇ ΓΑ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς μίαν ἕδραν τοῦ πολυέδρου, καὶ ΟΑ θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολύεδρον σφαίρας.

Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔΟ, ΓΑΟ, τοῦ σχήματος 249, εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρίγωνα τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἰς τὸ σχῆμα 248: οὕτως ἐν ᾧ ΓΔ καὶ ΓΑ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς μίαν ἕδραν τοῦ πολυέδρου, ΟΓ καὶ ΟΑ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολύεδρον.

Σχόλιον. Ἠμποροῦμεν νὰ ἐξάξωμεν ἀπὸ τὰς προηγουμένας προτάσεις πολλὰς συνεπείας.

1.ον Κάθε κανονικὸν πολύεδρον ἠμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς τόσας κανονικὰς πυραμίδας, ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον: ἡ κοινὴ κορυφὴ τούτων τῶν πυραμίδων θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ πολυέδρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐνταυτῷ ἐκεῖνο τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης.

2.ον Ἡ στερεότης ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειάν του ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

3.ον Δύο κανονικὰ πολύεδρα τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἶναι δύο ὅμοια στερεά, καὶ αἱ ὁμόλογοι διαστάσεις των εἶναι ἀνάλογοι· λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ πλευραὶ τούτων τῶν πολυέδρων.

4.ον Ἐὰν ἐγγραφθῇ κανονικὸν πολύεδρον εἰς μίαν σφαῖραν, τὰ ἠγμένα ἐπίπεδα ἀπὸ τὸ κέντρον κατὰ τὰς διαφόρους πλευρὰς θέλουν μοιράσει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς τόσα ἴσα καὶ ὅμοια σφαιρικὰ πολύγωνα ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον.

ΒΙΒΛΙΟΝ Η'.

ΤΑ ΤΡΙΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΑ ΣΩΜΑΤΑ.

Ὁρισμοί.

Α'. Καλεῖται κύλινδρος τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τινὸς ΑΒΓΔ, ὁλόγυρα τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς ΑΒ. σχ. 250.

Εἰς ταύτην τὴν κίνησιν αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ, πάντοτε μένουσαι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ, γράφουσιν ἴσα κυκλικὰ ἐπίπεδα ΑΘΠ, ΓΗΚ, τὰ ὁποῖα καλοῦνται βάσεις τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἡ πλευρὰ ΓΔ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του.

Ἡ ἀκίνητος γραμμὴ ΑΒ καλεῖται ἄξων τοῦ κυλίνδρου.

Κάθε τομὴ ΚΛΜ, γινομένη εἰς τὸν κύλινδρον κατὰ κάθετον τοῦ ἄξονος, εἶναι κύκλος ἴσος μὲ ἑκάστην τῶν βάσεων: διότι ἐν ᾧ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται ὁλόγυρα τῆς ΑΒ, ἡ γραμμὴ ΙΚ κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, γράφει κυκλικὸν ἐπίπεδον ἴσον μὲ τὴν βάσιν, καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄλλό τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ γινομένη τομὴ κατακάθετον τοῦ ἄξονος εἰς τὴν στιγμὴν Ι.

Κάθε τομὴ ΠΚΘΗ, γινομένη διὰ τοῦ ἄξονος, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ΑΒΓΔ.

Β'. Καλεῖται κῶνος τὸ παραγόμενον στερεὸν ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΑΒ, ὁλόγυρα τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς ΣΑ. σχ. 251.

Εἰς ταύτην τὴν κίνησιν ἡ πλευρὰ ΑΒ γράφει κυκλικὸν ἐπίπεδον ΒΔΓΕ, τὸ ὁποῖον καλεῖται βάσις τοῦ κώνου, καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΣΑ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του.

Ἡ στιγμὴ Σ καλεῖται κορυφὴ τοῦ κώνου, ΣΑ ἄξων ἢ ὕψος, καὶ ΣΒ πλευρὰ ἢ ἀπόστημα.

Κάθε τομὴ ΘΚ'ΖΙ γινομένη κατακάθετον τοῦ ἄξονος, εἶναι κύκλος· κάθε δὲ τομὴ ΣΔΕ διὰ τοῦ ἄξονος γινομένη εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ γενήτορος ΣΑΒ.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τὸν κῶνον ΣΓΔΒ ἀφαιρεθῇ διὰ τομῆς παραλλήλου τῆς βάσεως, ὁ κῶνος ΣΖΚ'Θ, τὸ ἐναπομένον στερεὸν ΓΒΘΖ καλεῖται κολοβὸς κῶνος ἢ κορμὸς κώνου.

Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι γράφεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τραπεζίου ΑΒΘΗ, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι Α καὶ Η εἶναι ὀρθαί, ἐλόγυρα τῆς πλευρᾶς ΑΗ. Ἡ ἀκίνητος γραμμὴ ΑΗ καλεῖται ἄξων ἢ ὕψος τοῦ κορμοῦ, οἱ κύκλοι ΒΔΓ, ΘΖΚ', εἶναι αἱ βάσεις του, ἡ δὲ ΒΘ ἡ πλευρά του.

Δ'. Δύο κύλινδροι ἢ δύο κῶνοι εἶναι ὅμοιοι ὅταν οἱ ἄξονές των ἦναι μεταξύ των, ὡς αἱ διάμετροι τῶν βάσεών των.

Ε'. Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον ΑΓΔ ὅστις χρησιμεύει ὡς βάσις εἰς ἕνα κύλινδρον, ἐγγραφθῇ πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ὑψωθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἢ ὁ κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα. σχ. 252.

Φανερὸν ὅτι ἐπειδὴ αἱ κόψεις ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ. τοῦ πρίσματος, εἶναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, περιέχονται εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· λοιπὸν τὸ πρίσμα καὶ ὁ κύλινδρος ἅπτονται κατὰ ταύτας τὰς κόψεις.

ϛ'. Παρομοίως ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν κυλίνδρου τινός, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα λέγεται περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἢ ὁ κύλινδρος ἐγγεγραμένος εἰς τὸ πρίσμα. σχ. 253.

Ἔστωσαν Μ, Ν, κ. τ. λ. αἱ στιγμαὶ τῆς ἀφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. καὶ ἂς ὑψωθῶσιν ἀπὸ τὰς στιγμὰς Μ, Ν, κ. τ. λ. αἱ κάθετοι ΜΧ, ΝΨ, κ. τ. λ. εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· φανερὸν ὅτι αἱ κάθετοι αὗται θέλουν εἶναι ἐνταυτῷ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου καὶ εἰς τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πρίσματος· λοιπὸν θέλουν εἶναι αἱ γραμμαὶ κατὰ τὰς ὁποίας ἅπτονται.

Σ. Κ. Ὁ κύλινδρος, ὁ κῶνος, καὶ ἡ σφαῖρα, εἶναι τὰ τρία στρογγύλα σώματα περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος εἰς τὰ στοιχεῖα.

Προοιμιώδη λήμματα ἐπάνω εἰς τὰς ἐπιφανείας.

Α'.

Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἐπιφάνειαν ΠΑΒΓΔ, ἥτις περατοῦται εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ. σχ. 254.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι τόσον φανερὰ, ὥστε ἔπρεπε νὰ συγκαταριθμηθῇ μεταξὺ τῶν ἀξιωμάτων· διότι δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν ὅ,τι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ μεταξὺ τῶν γραμμῶν: ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἡ βραχυτέρα μεταξὺ δύο δεδομένων σημείων, ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἡ μικροτέρα ἐπιφάνεια μεταξὺ ὅλων ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον· πλὴν ἐπειδὴ τὰ ἀξιώματα πρέπει νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὸν ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερον ἀριθμὸν, ἰδοὺ εἷς συλλογισμὸς ὅστις κἀμμίαν ἀμφιβολίαν δὲν θέλει ἀφήσει ἐπάνω εἰς ταύτην τὴν πρότασιν.

Ἐπειδὴ μία ἐπιφάνεια εἶναι ἔκτασις μῆκος καὶ πλάτος ἔχουσα, ἀδύνατον νὰ νοηθῇ ὅτι ἐπιφάνειά τις εἶναι μεγαλητέρα ἄλλης τινὸς, χωρὶς αἱ διαστάσεις τῆς πρώτης νὰ ὑπερέχωσι κατά τινας ἐννοίας τὰς τῆς δευτέρας· καὶ ἐὰν ἀκολουθήσῃ ὅτι αἱ διαστάσεις ἐπιφανείας τινὸς καθ' ὅλας τὰς ἐννοίας εἶναι μικρότεραι τῶν διαστάσεων ἄλλης ἐπιφανείας, φανερὸν ὅτι ἡ πρώτη θέλει εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν δύο. Τώρα καθ' ὁποίαν ἔννοιαν καὶ ἂν διέλθῃ, τὸ ἐπίπεδον ΒΠΔ, τὸ ὁποῖον τὴν μὲν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν θέλει τέμνει κατὰ τὴν ΒΔ, τὴν δὲ ἄλλην ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν ΒΠΔ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΔ πάντοτε θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΠΔ· ἡ ἐπίπεδος λοιπὸν ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα τῆς περικυκλούσης ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ.

Β'.

Κάθε κυρτὴ ἐπιφάνεια ΘΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα ὁποιασδήποτε ἄλλης ἐπιφανείας ἥτις ἐπιστηριζομένη ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου ΑΒΓΔ ἤθελε περικυκλόνει τὴν πρώτην. σχ. 255.

Ἐπαναλαμβάνομεν ἐνταῦθα ὅτι διὰ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐννοοῦμεν ἐπιφάνειαν ἥτις δὲν δύναται νὰ συναπαντηθῇ ἀπὸ εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα: καὶ ὅμως δυνατὸν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀκριβῶς νὰ ἐφαρμόζηται κατά τινα ἔννοιαν ἐπὶ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας βλέπομεν τούτου παραδείγματα εἰς τὰς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ κυλίνδρου. Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι ἡ ὀνομασία κυρτὴ ἐπιφάνεια δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὰς καμπύλας ἐπιφανείας· ἀλλὰ περιλαμβάνει καὶ τὰς πολυεδρικὰς ἐπιφανίας ἢ συνθέτους ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα, καὶ ὁμοίως τὰς ἐπιφανείας αἱ ὁποῖαι εἶναι μέρος καμπύλαι, καὶ μέρος πολυεδρικαί.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ δὲν εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας ἐκείνας αἱ ὁποῖαι τὴν περικυκλόνουν, ἔστω μεταξὺ τούτων ΠΑΒΓΔ ἡ μικροτέρα ἐπιφάνεια ἡ ὁποία τὸ πολὺ θέλει εἶναι ἴση μὲ ΟΑΒΓΔ. Δι' ὁποιασδήποτε στιγμῆς Ο ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ ἅπτηται τῆς ἐπιφανείας ΟΑΒΓΔ χωρὶς νὰ τὴν τέμνῃ· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θέλει συναπαντήσει τὴν ἐπιφάνειαν ΠΑΒΓΔ, καὶ τὸ μέρος τὸ ὁποῖον ἀπ' αὐτὴν θέλει ἀφαιρέσει θὰ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον τελειόνει εἰς τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν (λῆμμ. Α'): λοιπόν, φυλαττομένου τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ δυνατὸν ἀντὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος μέρους νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ ἐπίπεδον, καὶ ἤθελε προκύψει νέα ἐπιφάνεια ἥτις ἤθελε περικυκλόνει τὴν ἐπιφάνειαν ΟΑΒΓΔ, καὶ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΠΑΒΓΔ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, αὕτη εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὅλας· τοιαύτη λοιπὸν ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἥτις τελειόνουσα εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ ἤθελε περικυκλόνει τὴν ΟΑΒΓΔ.

Σχόλιον. Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου ἤθελεν ἀποδειχθῇ.

1.ον ὅτι, ἐὰν κυρτή τις ἐπιφάνεια περατουμένη ἀπὸ δύο περιμέτρους ΑΒΓ, ΔΕΖ, περικυκλοῦται ἀπὸ ὁποιανδήποτε ἄλλην ἐπιφάνειαν εἰς τὰς αὐτὰς περιμέτρους περατουμένην, ἡ περικυκλουμένη θέλει εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν δύο. σχ. 256.

2.ον ὅτι, ἐὰν κυρτή τις ἐπιφάνεια ΑΒ περικυκλοῦται πανταχόθεν ἀπὸ ἄλλην τινὰ ΜΝ, εἴτε ἔχουσι σημεῖα, γραμμὰς ἢ ἐπίπεδα κοινά, εἴτε δὲν ἔχουσι κἀνὲν κοινὸν σημεῖον, ἡ περικυκλουμένη πάντοτε θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς περικυκλούσης.

Διότι μεταξὺ τούτων ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ κἀμμία ἥτις νὰ ἦναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας, ἐπειδὴ εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις δυνατὸν νὰ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ ἐφαπτόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας ΓΜΔ (λῆμμ. Α'.) καὶ οὕτως ἡ ἐπιφάνεια ΓΝΔ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ΜΝ, τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὅλας. Ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια ΑΒ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὰς ὅσαι τὴν περικυκλόνουν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θεώρημα.

Ἡ στερεότης παντὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἔστω ΑΓ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος του· ἄς παραστήσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· λέγω ὅτι ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου θέλει εἶναι ἐπιφ. ΓΑ×Υ. Διότι, ἐὰν ἐπιφ. ΓΑ×Υ δὲν εἶναι τὸ μέτρον τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, τὸ γινόμενον τοῦτο θέλει εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς κυλίνδρου μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου. Καὶ πρῶτον μὲν ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς κυλίνδρου μικροτέρου, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος. σχ. 258.

Ἂς περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ, κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΗΘΙΠ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς (10,4). Ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὀρθὸν πρίσμα βάσιν ἔχον τὸ πολύγωνον ΗΘΙΠ, καὶ ὕψος Υ, τὸ ὁποῖον πρίσμα θέλει εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ. Τούτου τεθέντος, ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν ΗΘΙΠ, πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος Υ· ἡ βάσις ΗΘΙΠ εἶναι μικροτέρα τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτίς: ἡ στερεότης λοιπὸν τοῦ πρίσματος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ἐπιφ. ΓΑ×Υ. Ἀλλὰ ἐπιφ. ΓΑ×Υ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ στερεότης τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πρίσμα κυλίνδρου· λοιπὸν τὸ πρίσμα ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου· τώρα, ἐξ ἐναντίας, ὁ κύλινδρος εἶναι μικρότερος τοῦ πρίσματος ὡς περιεχόμεος· ἀδύνατον λοιπὸν ἐπιφ. ΓΑ×Υ νὰ ἦναι τὸ μέτρον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος· ἤ, μὲ γενικωτέρους ὅρους, τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου ἐπὶ τοῦ ὕψους του δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ μικρότερον κύλινδρον.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ μεγαλήτερον κύλινδρον: διότι, διὰ νὰ μὴ πολυπλασιάσωμεν τὰ σχήματα, ἔστω ΓΔ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐπιφ. ΓΔ×Υ τὸ μέτρον μεγαλητέρου κυλίνδρου, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος.

Ἐὰν γένῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν δεδομένον κύλινδρον πρίσμα θέλει ἔχει μέτρον ΗΘΙΠ×Υ: τὸ ἐμβαδὸν ΗΘΙΠ εἶναι μεγαλήτετρον ἀπὸ ἐπιφ. ΙΔ· λοιπὸν ἡ στερεότης τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος πρίσματος εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ἐπιφ. ΓΔ×Υ: τὸ πρίσμα λοιπὸν ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἰσοϋψοῦς κυλίνδρου ὅστις ἔχει βάσιν ἐπιφ. ΓΑ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ πρίσμα, ὡς περιεχόμενον, εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου· ἀδύνατον λοιπὸν ἡ βάσις ἑνὸς κυλίνδρου πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοῦ ὕψους του νὰ ἦναι τὸ μέτρον ἑνὸς μεγαλητέρου κυλίνδρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Πόρισμα Α'. Οἱ ἰσοϋψεῖς κύλινδροι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των, καὶ οἱ κύλινδροι τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Πόρισμα Β'. Οἱ ὅμοιοι κύλινδροι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων· διότι αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων των· καὶ ἐπειδὴ οἱ κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι, αἱ διάμετροι τῶν βάσεων εἶναι ὡς τὰ ὕψη (ὁρ. 4.) λοιπὸν αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν· ὅθεν αἱ βάσεις πολυπλασιασθεῖσαι ἐπὶ τὰ ὕψη, ἢ οἱ ἴδιοι κύλινδροι, εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν.

Σχόλιον. Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος, ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως θέλει εἶναι πA^2 (12, 4), καὶ ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου $\pi A^2 \times Y$ ἢ $\pi A^2 Y$. —

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Β'.

Λῆμμα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΖΗΒ, ΒΗΘΓ, ΓΘΙΔ, κ. τ. λ. ἀπὸ τὰ ὁποῖα συγκροτεῖται: τώρα τὰ ὕψη ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ. τούτων τῶν ὀρθογωνίων εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· αἱ βάσεις των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ. τ. λ. ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν ὀρθογωνίων ἢ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του σχ. 252.

Πόρισμα. Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο ὀρθῶν πρισμάτων τοῦ αὐτοῦ ὕψους, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ περίμετροι τῶν βάσεών των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Λῆμμα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεγαλητέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κάθε ἐγγεγραμμένου πρίσματος, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου.

Διότι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ μῆκος, διότι κάθε τομὴ εἰς τὴν μίαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην παραλλήλως τῇ ΑΖ γινομένη, εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΖ· ἐὰν δὲ αἱ ἐπιφάνειαι αὗται τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῆς βάσεως ἢ καθέτων εἰς τὴν κόψιν ΑΖ, αἱ προκύπτουσαι τομαὶ θέλουν εἶναι τὰ πλάτη τούτων τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ἴσαι, ἡ μὲν, μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, ἡ δὲ, μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ μικροτέραν ταύτης τῆς περιφερείας· ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἔχει μὲν μῆκος ἴσον μὲ τὴν πρισματικὴν, πλάτος δὲ μεγαλήτερον, ἕπεται ὅτι εἶναι μεγαλητέρα. σχ. 252.

Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου ἤθελεν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου πρίσματος ΒΓΔΚΛΘ. σχ. 253.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του πολυπλασιασθεῖσαν.

Ἔστω ΓΑ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος του· ἐὰν παραστήσωμεν διὰ περ. ΓΑ τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ, λέγω ὅτι περ. ΓΑ$\times$Υ θέλει εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου· διότι, ἐὰν τοῦτο δὲν ὑπάρχῃ, πρέπει περ. ΓΑ$\times$Υ νὰ ἦναι ἡ ἐπιφάνεια κυλίνδρου μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου· καὶ πρῶτον μὲν ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κυλίνδρου μικροτέρου, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος. σχ. 258.

Ἂς περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΗΘΙΠ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ· ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὀρθὸν πρίσμα ὕψος ἔχον Υ, καὶ βάσιν τὸ πολύγωνον ΗΘΙΠ. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΗΘΙΠ ἐπὶ τοῦ ὕψους Υ πολυπλασιασθεῖσαν (πρό. 2): ἡ περίμετρος αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περι. ΓΑ$\times$Υ. Ἀλλὰ περ. ΓΑ$\times$Υ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ, καὶ ὁ ὁποῖος κύλινδρος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας πρέπει νὰ ἦναι μεγαλητέρα (πρό. 3)· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν, εἶναι ἄτοπος· λοιπὸν 1.ον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος του πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κυλίνδρου.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κυλίνδρου. Διότι, διὰ νὰ μὴν ἀλλάξωμεν σχῆμα, ἔστω ΓΔ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καί, εἰ δυνατόν, ἔστω περ. ΓΔ$\times$Υ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου ὅστις μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἤθελεν ἔχει βάσιν κύκλον μεγαλήτερον, φέρ' εἰπεῖν, τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ. Ἐκτελεσθείσης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι πάντοτε ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΗΘΠΙ ἐπὶ τὸ ὕψος Υ πολυπλασιασθεῖσαν. Ἀλλ' ἡ περίμετρος αὕτη εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΓΔ· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΓΔ$\times$Υ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἰδίου ὕψους καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι ΓΑ. Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τούτου τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν τὸ πρίσμα ἦτον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἡ ἐπιφάνειά του ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ κυλίνδρου, (πρό. 3), πολὺ περισσότερον εἶναι μικροτέρα ὅταν τὸ πρίσμα δὲν ἐκτείνεται μέχρι τοῦ κυλίνδρου. Καὶ ἡ δευτέρα ἄρα ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος· λοιπὸν 2.ον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος του πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κυλίνδρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Θεώρημα.

Ἡ στερεότης τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τριτημόριον τοῦ ὕψους του.

Ἔστω ΣΟ τὸ ὕψος τοῦ δεδομένου κώνου, ΑΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· ἐὰν σημειωθῇ διὰ ἐπιφ. ΑΟ ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως, λέγω ὅτι ἡ στερεότης τούτου τοῦ κώνου θέλει εἶναι ἴση μὲ ἐπιφ. ΑΟ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ. σχ. 259.

Τῷ ὄντι, ἂς ὑποθέσωμεν 1.ον ὅτι ἐπιφ. ΑΟ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ εἶναι ἡ στερεότης μεγαλητέρου κώνου, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου ΣΟ εἶναι πάντοτε τὸ ὕψος· ἀλλὰ τοῦ ὁποίου ΟΒ, μεγαλητέρα ἀπὸ ΑΟ, εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΑΟ ἂς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΜΝΠΓ τὸ ὁποῖον νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΟΒ (10, 4)· ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως πυραμὶς βάσιν ἔχουσα τὸ πολύγωνον καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν Σ. Ἡ στερεότης ταύτης τῆς πυραμίδος (19, 6) εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΜΝΠΓ πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους ΣΟ. Ἀλλὰ τὸ πολύγωνον, εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὅστις παριστάνεται διὰ ἐπιφ. ΑΟ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ἐπιφ. ΑΟ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου Σ εἶναι ἡ κορυφὴ καὶ ΟΒ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ πυραμὶς ὡς περιεχομένη εἶναι μικροτέρα τοῦ κώνου· λοιπὸν 1.ον ἀδύνατον ἡ βάσις τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ τριτημόριον τοῦ ὕψους του πολυπλασιασθεῖσα νὰ ἦναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου κώνου.

Λέγω 2.ον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι τὸ μέτρον κώνου μικροτέρου. Διότι, διὰ νὰ μὴν ἀλλάξωμεν σχῆμα, ἔστω ΟΒ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, καὶ, εἰ δυνατὸν, ἔστω, ἐπιφ. ΟΒ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ ἡ στερεότης τοῦ κώνου ὅστις ἔχει ὕψος ΣΟ καὶ βάσιν τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ΑΟ εἶναι ἡ ἀκτίς. Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ πυραμὶς ΣΜΝΠΓ θέλει ἔχει μέτρον τὸ ἐμβαδὸν ΜΝΠΓ πολυπλασιασθὲν ἐπὶ $\frac{1}{3}$ΣΟ. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν ΜΝΠΓ εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἐπιφ. ΟΒ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς ἤθελεν ἔχει μέτρον μικρότερον ἀπὸ ἐπιφ. ΟΒ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ, καὶ ἑπομένως ἤθελεν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸν κῶνον τοῦ ὁποίου ΑΟ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ ΣΟ τὸ ὕψος. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ πυραμὶς εἶναι μεγαλητέρα τοῦ κώνου, διότι οὗτος περιέχεται· λοιπὸν 2.ον ἀδύνατον ἡ βάσις ἑνὸς κώνου πολυπλασιασθεῖσα τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους του νὰ ἦναι τὸ μέτρον μικροτέρου κώνου.

Λοιπὸν τέλος ἡ στερεότης τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τριτημόριον τοῦ ὕψους του.

Π ό ρ ι σ μ α. Κῶνος εἶναι τὸ τριτημόριον κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους· ὅθεν ἕπεται.

1.ον Ὅτι οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.
2.ον Ὅτι οἱ κῶνοι ἴσων βάσεων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.
3.ον Ὅτι οἱ ὅμοιοι κῶνοι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεών των, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν των.

Σχόλιον. Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου, Υ τὸ ὕψος του· ἡ στερεότης τοῦ κώνου θέλει εἶναι $\pi \mathrm{A}^2 \times \frac{1}{3}\mathrm{Y}$ ἢ $\frac{1}{3}\pi \mathrm{A}^2\mathrm{Y}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Θεώρημα.

Ὁ κολοβὸς κῶνος ΑΔΕΒ, *τοῦ ὁποίου* ΑΟ, ΔΠ *εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ* ΠΟ *τὸ ὕψος, ἔχει μέτρον* $\frac{1}{3}\pi$.

$\mathrm{O\Pi}.\ (\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\Delta\Pi}^2+\mathrm{AO}\times\Delta\Pi)$. Σχ. 260.

Ἔστω ΤΖΗΘ τριγωνικὴ πυραμὶς τοῦ αὐτοῦ ὕψους μὲ τὸν κῶνον ΣΑΒ, καὶ τῆς ὁποίας ἡ βάσις ΖΗΘ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τὴν βάσιν τοῦ κώνου. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δύο αὗται βάσεις εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· τότε αἱ κορυφαὶ Σ καὶ Τ ἰσάκις θέλουν ἀπέχει ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΠΔ προεκβληθὲν θέλει κάμει εἰς τὴν πυραμίδα τὴν τομὴν ΙΚΛ. Λέγω τώρα ὅτι ἡ τομὴ αὕτη ΙΚΛ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν βάσιν ΔΕ· διότι αἱ βάσεις ΑΒ, ΔΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ΑΟ, ΔΠ (11, 4), ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν ΣΟ, ΣΠ· τὰ τρίγωνα ΖΗΘ, ΙΚΛ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων ὑψῶν (15, 6)· λοιπὸν οἱ κύκλοι ΑΒ, ΔΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τρίγωνα ΖΗΘ, ΙΚΛ. Ἀλλά, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τρίγωνον ΖΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΑΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΙΚΛ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΔΕ.

Τώρα, ἡ βάσις ΑΒ πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\frac{1}{3}$ΣΟ εἶναι ἡ στερεότης τοῦ κώνου ΣΑΒ, καὶ ἡ βάσις ΖΗΘ· πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\frac{1}{3}$ΣΟ εἶναι ἡ τῆς πυραμίδος ΖΗΘ· λοιπόν, ἐξ αἰτίας τῶν ἰσοδυνάμων βάσεων, ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος, εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ κώνου. Διὰ λόγον παρόμοιον, ἡ πυραμὶς ΤΙΚΛ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κῶνον ΣΔΕ· λοιπὸν ὁ κορμὸς τοῦ κώνου ΑΔΕΒ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν κορμὸν τῆς πυραμίδος ΖΗΘΙΚΛ. Ἀλλ' ἡ βάσις ΖΗΘ, ἰσοδυναμοῦσα μὲ τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΑΟ, ἔχει μέτρον $\pi\times\overline{\mathrm{AO}}^2$· ὁμοίως ἡ βάσις $\mathrm{IK\Lambda}=\pi\times\overline{\Delta\Pi}^2$, καὶ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ $\pi\times\overline{\mathrm{AO}}^2$ καὶ $\pi\times\overline{\Delta\Pi}^2$ εἶναι $\pi\times\mathrm{AO}\times\Delta\Pi$·

ἡ στερεότης λοιπὸν τοῦ κορμοῦ τῆς πυραμίδος, ἢ ἡ στερεότης τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου, ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}$ΟΠ$\times$ ($\pi\times\overline{\text{ΑΟ}}^2+\pi\times\overline{\text{ΔΠ}}^2+$ $\pi\times$ΑΟ$\times$ΔΠ) (20, 6), τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $\frac{1}{3}\pi\times$ΟΠ $\times(\overline{\text{ΑΟ}}^2+\overline{\text{ΔΠ}}^2+$ΑΟ$\times$ΔΠ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του πολυπλασιασθεῖσαν.

Ἔστω ΑΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, Σ ἡ κορυφή του, καὶ ΣΑ ἡ πλευρά του· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι περ. ΑΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΑ. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, περ. ΑΟ$\times$ $\frac{1}{2}$ΣΑ, ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου ὅστις κορυφὴν μὲν ἔχει τὴν στιγμὴν Σ, βάσιν δὲ τὸν γεγραμμένον κύκλον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ μεγαλητέραν τῆς ΑΟ· σχ. 259.

Ἄς περιγραφθῇ εἰς τὸν μικρὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΠΝΠΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΟΒ· καὶ ἔστω ΣΜΝΠΓ κανονικὴ πυραμίς, ἥτις βάσιν μὲν ἤθελεν ἔχει τὸ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὴν στιγμὴν Σ· τὸ τρίγωνον ΣΜΝ ἓν ἀπὸ τὰ συγκροτοῦντα τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, ἔχει μέτρον τὴν βάσιν του ΜΝ ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους ΣΑ πολυπλασιασθεῖσαν, τὸ ὁποῖον ὕψος εἶναι ἐνταῦθα ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου κώνου· ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἴσον εἰς ὅλα τὰ ἄλλα τρίγωνα ΣΝΠ, ΣΠΚ, κ. τ. λ. ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον ΠΝΠΤΜ ἐπὶ $\frac{1}{2}$ΣΑ πολυπλασιασθεῖσαν· ἀλλ' ἡ περίμετρος ΜΝΠΤΜ εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΑΟ· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΑΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΑ, καὶ ἐπομένως μεγαλητέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ὅστις μὲ τὴν αὐτὴν κορυφὴν Σ ἤθελεν ἔχει βάσιν τὸν γεγραμμένον κύκλον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ τὴν τῆς πυραμίδος· διότι ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος τεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ἑτέρας ἴσης πυραμίδος, καὶ τὸ αὐτὸ γένῃ καὶ ὡς πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο κώνων θέλει περικυκλώσει πανταχόθεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο πυραμίδων· ἡ πρώτη λοιπὸν ἐπιφάνεια θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς δευτέρας (λῆμ. 2)· διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἥτις περιέχεται. Τὸ ἐναντίον ἤθελεν εἶναι συνέπεια τῆς ὑποθέσεώς μας· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν αὕτη εἶναι ἀδύνατος· ἄρα 1.ον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κώνου.

Λέγω 2.ον ὅτι τὸ ἴδιον γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κώνου. Διότι ἔστω ΒΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, καί, εἰ δυνατὸν ἔστω περ. ΒΟ$\times\frac{1}{2}$ ΣΒ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου Σ εἶναι ἡ κορυφή, καὶ ΑΟ, μικροτέρα τῆς ΟΒ, ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ΣΜΝΠΤ πάντοτε θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον ΜΝΠΤ πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ $\frac{1}{2}$ΣΑ. Τώρα ἡ περίμετρος ΜΝΠΤ εἶναι μικροτέρα τῆς περ. ΒΟ, ΣΑ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΣΒ· λοιπὸν διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περ. ΒΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΒ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου ΑΟ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, εἶναι μεγαλητέρα· διότι ἐὰν τεθῇ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἐπὶ τῆς βάσεως ἑτέρας ἴσης πυραμίδος καὶ τὸ αὐτὸ γένῃ καὶ ὡς πρὸς τὸν κῶνον, ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο πυραμίδων πανταχόθεν θέλει περιτυλίσσει τὴν τῶν δύο κώνων, καὶ ἑπομένως θέλει εἶναι μεγαλητέρα. Λοιπὸν 2.ον ἀδύνατον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως δεδομένου κώνου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του πολυπλασιασθεῖσα νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κώνου.

Λοιπὸν τέλος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του πολυπλασιασθεῖσαν.

Σχόλιον. Ἔστω Π ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του, ἡ περιφέρεια ταύτης τῆς βάσεως θέλει εἶναι 2πΑ, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θέλει ἔχει μέτρον 2πΑ$\times\frac{1}{2}$Π ἢ πΑΠ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του ΑΔ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο του βάσεων ΑΒ, ΔΕ πολυπλασιασθεῖσαν. σχ. 261.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΖ ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΑΟ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΣΖ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΘ παράλληλος τῇ ΑΖ.

Ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΑΟ, ΣΔΓ, ἔχομεν ΑΟ: ΔΓ : : ΣΑ : ΣΔ, καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΣΑΖ, ΣΔΘ, ἔχομεν ὡσαύτως ΑΖ : ΔΘ : : ΣΑ : ΣΔ· λοιπὸν ΑΖ : ΔΘ : : ΑΟ : ΔΓ, ἢ : : περ. ΑΟ : περ. ΔΓ (11, 4). Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΖ = περ. ΑΟ· λοιπὸν ΔΘ = περ. ΔΓ. Τούτου τεθέντος, τὸ τρίγωνον ΣΑΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ΑΖ$\times\frac{1}{2}$ΣΑ, εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΣΑΒ, ἥτις ἔχει μέτρον περ. ΑΟ$\times$ $\frac{1}{2}$ΣΑ. Διὰ λόγον παρόμοιον τὸ τρίγωνον ΣΔΘ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΣΔΕ· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ τραπεζίου ΑΔΘΖ· αὕτη ἔχει μέτρον (7, 3), ΑΔ$\times\frac{(ΑΖ+ΔΘ)}{2}$· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του ΑΔ πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεών του.

Π ό ρ ι σ μ α. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ι, μέσον τῆς ΑΔ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΙΚ'Λ παράλληλος τῇ ΑΒ, καὶ ἡ ΙΜ παράλληλος τῇ ΑΖ· δεικνύομεν ὡς ἀνωτέρω ὅτι ΙΜ = περ. ΙΚ'. Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον ΑΔΘΖ = ΑΔ $\times$ ΙΜ = ΑΔ $\times$ περ. ΙΚ'. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν ἀκόμη νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἐ π ι φ ά ν ε ι α τ ο ῦ κ ω ν ι κ ο ῦ κ ο ρ μ ο ῦ ε ἶ ν α ι ἴ σ η μ ὲ τ ὴ ν π λ ε υ ρ ά ν τ ο υ π ο λ υ π λ α σ ι α σ θ ε ῖ σ α ν ἐ π ὶ τ ὴ ν π ε ρ ι φ έ ρ ε ι α ν τ ῆ ς τ ο μ ῆ ς τ η ς γ ι ν ο μ έ ν η ς ε ἰ ς ἴ σ ο ν ἀ π ό σ τ η μ α ἀ π ὸ τ ὰ ς δ ύ ο β ά σ ε ι ς.

Σ χ ό λ ι ο ν. Ἐὰν γραμμή τις ΑΔ, καθ' ὅλην της τὴν ἔκτασιν ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς γραμμῆς ΟΓ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένη, περιστρέφεται ὁλόγυρα τῆς ΟΓ, ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΔ θέλει ἔχει μέτρον ΑΔ $\times\frac{(\text{περ. ΑΟ}+\text{περ. ΔΓ})}{2}$, ἢ ΑΔ $\times$ περ. ΙΚ', ὅπου αἱ γραμμαὶ ΑΟ, ΔΓ, ΙΚ' εἶναι κάθετοι ἠγμέναι ἀπὸ τὰ ἄκρα καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς γραμμῆς ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΓ.

Διότι ἐὰν προεκβληθῶσιν αἱ ΑΟ, ΟΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Σ, φανερὸν ὅτι ἡ γραφομένη ἀπὸ τὴν ΑΔ ἐπιφάνειαν εἶναι ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου τῶν βάσεων τοῦ ὁποίου ΟΑ καὶ ΔΓ εἶναι αἱ ἀκτῖνες, ἔχοντος τοῦ ὅλου κώνου κορυφὴν τὴν στιγμὴν Σ. Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει ἔχει τὸ εἰρημένον μέτρον.

Τὸ μέτρον τοῦτο ἤθελε πάντοτε ὑπάρχει, καὶ ὅταν ἡ στιγμὴ Δ ἤθελε πέσει εἰς Σ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἤθελε προκύψει κῶνος, καὶ ὡσαύτως ὅταν ἡ γραμμὴ ΑΔ ἤθελεν εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος, ἐκ τοῦ ὁποίου ἤθελε γεννηθῇ κύλινδρος. Εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἡ ΔΓ ἤθελεν εἶναι μηδὲν, εἰς τὴν δευτέραν ἴση μὲ τὴν ΑΟ καὶ μὲ τὴν ΙΚ΄.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ΄.

Λῆμμα.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, πολλαὶ διαδοχικαὶ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, Ο τὸ κέντρον του, καὶ ΟΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ὑποτεθέντος ὅτι ἡ μερὶς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ, ὅλη ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΖΗ κειμένη, περιστρέφεται ὁλόγυρα ταύτης τῆς διαμέτρου, ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ ΑΒΓΔ θέλει ἔχει μέτρον ΜΚ $\times$ περ. ΟΙ, ὄντος ΜΚ τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ περιεχομένου μέρους τοῦ ἄξονος μεταξὺ τῶν καθέτων ΑΜ, ΔΚ. σχ. 262.

Ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, καὶ ΙΚ΄ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἠγμένη ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ι, ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΒ θέλει ἔχει μέτρον ΑΒ$\times$ περ. ΙΚ΄ (πρό. 8). Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΧ παράλληλος τοῦ ἄξονος· τὰ τρίγωνα ΑΒΧ, ΟΙΚ΄ ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ τὴν ΟΙ εἰς τὴν ΑΒ, τὴν ΙΚ΄ εἰς τὴν ΑΧ, καὶ τὴν ΟΚ΄ εἰς τὴν ΒΧ· εἶναι λοιπὸν ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΑΧ ἢ ΜΝ : : ΟΙ : ΙΚ΄, ἢ : : περ. ΟΙ : περ. ΙΚ΄· λοιπὸν ΑΒ $\times$ περ. ΙΚ΄ $=$ ΜΝ $\times$ περ. ΟΙ. Ὅθεν βλέπομεν ὅτι ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος της ΜΝ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολυπλασιασθέν· ὡσαύτως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ ΒΓ, $=$ ΝΠ $\times$ περ. ΟΙ, ἡ γραφομένη ἀπὸ ΓΔ, $=$ ΠΚ $\times$ περ. ΟΙ. Λοιπὸν ἡ ἀπὸ τὴν μερίδα τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ γραφομένη ἔχει μέτρον (ΜΝ$+$ΝΠ$+$ΠΚ) $\times$ περ. ΟΙ, ἢ ΜΚ $\times$ περ. ΟΙ· εἶναι λοιπὸν ἴση μὲ τὸ ὕψος της ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολυπλασιασθέν.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ὅλον πολύγωνον εἶναι ἀρτιόπλευρον, καὶ ὁ ἄξων ΖΗ διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν Ζ καὶ Η, ἡ ὅλη γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμιπολυγώνου ΖΑΓΗ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸν ἄξονα ΖΗ πολυπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ὁ ἄξων ΖΗ ἐνταυτῷ θέλει εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμμένου κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν της ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθεῖσαν.

Λέγω 1.^{ον} ὅτι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου της πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρας σφαίρας. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ΑΒ$\times$ περ. ΑΓ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΔ. σχ. 263. Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ, ἂς περιγραφθῇ ἀρτιόπλευρον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ὁποῖον νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΔ· ἔστωσαν Μ καὶ Σ δύο ἀπέναντι κορυφαὶ τούτου τοῦ πολυγώνου· καὶ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΜΣ ἂς περιστραφῇ τὸ ἡμιπολύγωνον ΜΠΣ. Ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια θέλει ἔχει μέτρον ΜΣ$\times$ περ. ΑΓ (πρό. 9.)· ἀλλὰ ΜΣ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένη ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ΑΒ$\times$ περ. ΑΓ, καὶ ἑπομένως μεγαλητέρα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἀκτὶς τῆς ὁποίας εἶναι ΓΔ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένης, ἐπειδὴ ἡ πρώτη περιτυλίσσει πανταχόθεν τὴν δευτέραν. Λοιπὸν 1.^{ον} ἡ διάμετρος σφαίρας τινὸς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου της πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρας σφαίρας.

Λέγω 2.^{ον} ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρας σφαίρας. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ΔΕ$\times$ περ. ΓΔ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ. Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ γενομένου στερεοῦ ἀπὸ τὸ πολύγωνον θέλει εἶναι ἴση μὲ ΜΣ $\times$ περ. ΑΓ. Ἀλλὰ ΜΣ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΕ, καὶ περ. ΑΓ μικροτέρα τῆς περ. ΓΔ· λοιπόν, διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένου στερεοῦ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΔΕ $\times$ περ. ΓΔ, καὶ ἑπομένως μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΑΓ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ γραφομένη ἀπὸ τὸ πολύγωνον ἐπιφάνεια, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ, διότι ἡ πρώτη ἐπιφάνεια, περιτυλίσσει τὴν δευτέραν· λοιπὸν 2.^{ον} ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου της πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρας σφαίρας.

Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν της ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου της πολυπλασιασθεῖσαν.

Πόρισμα. Ἡ ἐπιφάνεια μεγίστου κύκλου ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ἢ τὸ τέταρτον τῆς διαμέτρου· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι τετραπλασία τῆς ἐπιφανείας μεγίστου κύκλου.

Σχόλιον. Ἀφ' οὗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐμετρήθη καὶ ἐσυγκρίθη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μὲ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, εὔκολον νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῶν ἀτράκτων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων ἀνωτέρω ἐπροσδιορίσθη ὁ λόγος μὲ τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Καὶ πρῶτον μὲν ὁ ἄτρακτος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α, εἶναι πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ὡς ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς (20, 7), ἢ ὡς τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ ὁποῖον μετρεῖ τὴν γωνίαν Α πρὸς τὴν περιφέρειαν τούτου τοῦ ἰδίου μεγίστου κύκλου. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ ταύτην τὴν περιφέρειαν πολυπλασιασθεῖαν ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ ἀτράκτου εἶναι ἴση μὲ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μετρεῖ τὴν γωνίαν τούτου τοῦ ἀτράκτου ἐπὶ τὴν διάμετρον πολυπλασιασθέν.

Δεύτερον δὲ κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ἰσοδυναμεῖ μὲ ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν του ἐπάνω εἰς δύο ὀρθὰς (23, 7). Ἔστωσαν λοιπὸν Π, Κ, Ρ τὰ τόξα μεγίστου κύκλου τὰ ὁποῖα μετροῦν τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου. Ἔστω Γ ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου καὶ Δ ἡ διάμετρός του· τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία ἔχει μέτρον $\frac{\Pi + \Lambda + \mathrm{P} - \frac{1}{2}\Gamma}{2}$, καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι $\Delta \times \frac{(\Pi + \mathrm{K} + \mathrm{P} - \frac{1}{2}\Gamma)}{2}$.

Οὕτως, ὅταν τὸ τρίγωνον ἦναι τρισορθογώνιον, ἕκαστον τῶν τόξων Π, Κ, Ρ, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{4}$ Γ, τὸ ἄθροισμά των μὲ $\frac{3}{4}$ Γ, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἐπάνω εἰς $\frac{1}{2}$ Γ, εἶναι $\frac{1}{4}$ Γ, καὶ τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς ὑπεροχῆς $= \frac{1}{8}\Gamma$· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου $= \frac{1}{8}\Gamma \times \Delta$, ἰσοῦται δηλαδὴ μὲ τὸ ὄγδοον μέρος τῆς ὅλης σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Τὸ μέτρον τῶν πολυγώνων ἕπεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ τῶν τριγώνων, ἄλλως δὲ κατὰ πάντα ἐπροσδιορίσθη διὰ τῆς προ. ΚΔ' βιβλ. Ζ', διότι ἡ μονὰς τοῦ μέτρου, ἥτις εἶναι τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ἐκτιμήθη εἰς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια ὁποιασδήποτε σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέν. σχ. 269.

Ἔστω ΕΖ ὁποιονδήποτε τόξον ἔλασσον ἢ μεῖζον τεταρτημορίου περιφερείας, καὶ ἂς καταιβασθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΕΓ· λέγω ὅτι ἡ μὲ μίαν μόνην βάσιν ζώνη, ἡ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τόξου ΕΖ ὁλόγυρα τῆς ΕΓ γραφομένη, θέλει ἔχει μέτρον ΕΗ $\times$ περ. ΕΓ. σχ. 269.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἡ ζώνη αὕτη ἔχει μέτρον μικρότερον, καί, εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ μέτρον τοῦτο $=$ ΕΗ $\times$ περ. ΓΑ. Ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τὸ τόξον ΕΖ μερὶς κανονικοῦ πολυγώνου ΕΜΝΟΠΖ αἱ πλευραὶ τῆς ὁποίας νὰ μὴ φθάνουν εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ γραφομένην, καὶ ἂς καταιβασθῇ ἡ ΓΙ κάθετος, ἐπὶ τὴν ΕΜ· ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον ΕΜΖ ὁλόγυρα τῆς ΕΖ στρεφόμενον γραφομένη ἐπιφάνεια ἔχει μέτρον ΕΗ $\times$ περ. ΓΙ (πρό. 9). Ἡ ποσότης αὕτη εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ΕΗ $\times$ περ. ΑΓ, τήν, ἐξ ὑποθέσεως, μετροῦσαν τὴν ἀπὸ τὸ τόξον ΕΖ γραφομένην ζώνην. Ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΕΜΝΟΠΖ γραφομένη ἐπιφάνεια ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα τῆς ὑπὸ τοῦ περιγεγραμμένου τόξου ΕΖ γραφομένης ἐπιφανείας· τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ τελευταία αὕτη ἐπιφάνεια ὡς περιτυλίσσουσα τὴν πρώτην πανταχόθεν εἶναι μεγαλητέρα αὐτῆς· λοιπὸν 1.ον τὸ μέτρον κάθε σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν μόνην βάσιν δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέντος.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ μέτρον τῆς ἰδίας ζώνης δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέντος. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ ὁλόγυρα τῆς ΑΓ γραφομένης ζώνης, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, ζώνη ΑΒ $>$ ΑΔ $\times$ περ. ΑΓ. Ἡ ὅλη τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἀπὸ δύο ζώνας ΑΒ, ΒΘ συνισταμένη, ἔχει μέτρον ΑΘ $\times$ περ. ΑΓ (πρό. 10), ἢ ΑΔ $\times$ περ. ΑΓ $+$ ΔΘ $\times$ περ. ΑΓ· ἐὰν λοιπὸν ζώνη ΑΒ $>$ ΑΔ $\times$ περ. ΑΓ, ἀναγκαίως ζώνη ΒΘ $<$ ΔΘ $\times$ περ. ΑΓ· τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὰ ἤδη ἀποδειχθέντα. Λοιπὸν 2.ον τὸ μέτρον μὲ μίαν μόνην βάσιν σφαιρικῆς ζώνης δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέντος.

Λοιπὸν τέλος κάθε σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν μόνην βάσιν ἔχει μέτρον τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέν.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ὁποιανδήποτε ζώνην, μὲ δύο βάσεις, ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τόξου ΖΘ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ γραφομένην, καὶ ἂς καταιβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΟ, ΘΚ ἐπὶ ταύτης τῆς διαμέτρου. Ἡ ἀπὸ τὸ τόξον ΖΘ γραφομένη ζώνη εἶναι ἡ διαφορὰ δύο ζωνῶν ἀπὸ τὰ τόξα ΔΘ καὶ ΔΖ γραφομένων· αὗται μετροῦνται ὑπὸ ΔΚ $\times$ περ. ΓΔ καὶ ΔΟ $\times$ περ. ΓΔ· ἐκείνη λοιπὸν ἔχει μέτρον (ΔΚ — ΔΟ) $\times$ περ. ΓΔ ἢ ΟΚ $\times$ περ. ΓΔ.

Ὁποιαδήποτε λοιπὸν σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν ἢ δύο βάσεις, ἔχει μέτρον τὸ ὕψος της ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου πολυπλασιασθέν. σχ. 220.

Πόρισμα. Δύο ζῶναι εἰς τὴν αὐτὴν ἢ εἰς ἴσας σφαίρας λαμβανόμεναι, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ ὁποιαδήποτε ζώνη εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης πρὸς τὴν διάμετρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους ταυτοχρόνως στρέφωνται ὁλόγυρα τῆς κοινῆς βάσεως ΒΓ, τὸ γραφόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου στερεὸν θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου. σχ. 264 καὶ 265.

Ἂς καταιβασθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἡ κάθετος ΑΔ· ὁ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ γραφόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΑΖΒΔ γραφομένου κυλίνδρου (πρό. 5), ὡσαύτως ὁ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ γραφόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΓΕ γραφομένου κυλίνδρου· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δύο κώνων ἢ τὸ ἀπὸ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον γραφόμενον στερεὸν εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο κυλίνδρων ἢ τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ γραφομένου κυλίνδρου. σχ. 264.

Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τότε τὸ ἀπὸ τὸ ΑΒΓ γραφόμενον στερεὸν θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ γραφομένων κώνων· ἀλλ' ἐνταυτῷ ὁ ἀπὸ ΒΓΕΖ γραφόμενος κύλινδρος θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΑΖΒΔ, ΑΕΓΔ γραφομένων κυλίνδρων. Ἡ στερεότης λοιπὸν τοῦ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου γραφομένου στερεοῦ, πάντοτε θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους γραφομένου κυλίνδρου. σχ. 265.

Σχόλιον. Ἡ ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου ὅστις ἔχει ἀκτῖνα ΑΔ εἶναι $\pi \times \overline{\text{ΑΔ}}^2$· λοιπὸν $\pi \times \overline{\text{ΑΔ}}^2 \times \text{ΒΓ}$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου κυλίνδρου ἀπὸ ΒΓΕΖ, καὶ $\frac{1}{3}\,\pi \times \overline{\text{ΑΔ}}^2 \times \text{ΒΓ}$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου στερεοῦ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Πρόβλημα.

Ὑποτεθέντος ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται ὁλόγυρα τῆς γραμμῆς ΓΔ, ἡγμένης ὁπωσδήποτε ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφήν του Γ, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τοῦ οὕτω γεννωμένου στερεοῦ. σχ. 266.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸν ἄξονα ΓΔ εἰς Δ, ἀπὸ τὰς στιγμὰς Α καὶ Β ἂς καταιβασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος αἱ κάθετοι ΑΜ, ΒΝ.

Τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΑΔ ἔχει μέτρον (πρό. 12) $\frac{1}{3}\,\pi \times \overline{\text{ΑΜ}}^2 \times \text{ΓΔ}$· τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΒΔ ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}\,\pi \times \overline{\text{ΒΝ}}^2 \times \text{ΓΔ}$· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν στερεῶν τούτων ἢ τὸ ἀπὸ ΑΒΓ γραφόμενον στερεὸν ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}\,\pi.\ (\overline{\text{ΜΑ}}^2 - \overline{\text{ΒΝ}}^2) \times \text{ΓΔ}$.

Δυνατὸν νὰ δοθῇ εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν ἄλλη μορφή· ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ι, μέσον τῆς ΑΒ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΙΚ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, καὶ διὰ τῆς στιγμῆς Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΟ παράλληλος τῇ ΓΔ, θέλει εἶναι $\text{ΑΜ} + \text{ΒΝ} = 2\text{ΙΚ}'$ (7, 3) καὶ $\text{ΑΜ} - \text{ΒΝ} = \text{ΑΟ}$· λοιπὸν $(\text{ΑΜ} + \text{ΒΝ})\,(\text{ΑΜ} - \text{ΒΝ})$ ἢ $\overline{\text{ΑΜ}}^2 - \overline{\text{ΒΝ}}^2 = 2\text{ΙΚ}' \times \text{ΑΟ}$ (10, 3). Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεοῦ ἐκφράζεται καὶ διὰ $\pi \times \text{ΙΚ}' \times \text{ΑΟ} \times \text{ΓΔ}$. Ἀλλ' ἐὰν καταιβασθῇ ἡ ΓΠ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΔΓΠ, θέλουν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλουν δώσει τὴν ἀναλογίαν ΑΟ:ΓΠ::ΑΒ:ΓΔ. ὅθεν προκύπτει $\text{ΑΟ} \times \text{ΓΔ} = \text{ΓΠ} \times \text{ΑΒ}$· ἄλλως $\text{ΓΠ} \times \text{ΑΒ}$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· οὕτως ἔχομεν $\text{ΑΟ} \times \text{ΓΔ} = 2\text{ΑΒΓ}$· τὸ γραφόμενον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ὁμοίως μέτρον $\frac{2}{3}\,\pi \times \text{ΑΒΓ} \times \text{ΙΚ}'$, ἤ, ὅπερ ταὐτόν, $\text{ΑΒΓ} \times \frac{2}{3}$ περ. ΙΚ΄· (διότι περ. ΙΚ΄ $= 2\pi.$ ΙΚ΄). Τὸ γραφόμενον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔχει μέτρον τὸ ἐμβαδὸν τούτου τοῦ τριγώνου πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὰ δύο τρίτα τῆς περιφερείας τὴν ὁποίαν γράφει ἡ στιγμὴ Ι μέσον τῆς βάσεώς του.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΓ $=$ ΓΒ, ἡ γραμμὴ ΓΙ θέλει εἶναι κάθετος εἰς ΑΒ, τὸ ἐμβαδὸν ΑΒΓ θέλει ἰσοῦται μὲ ΑΒ $\times \frac{1}{2}$ ΓΙ, καὶ ἡ στερεότης $\frac{4}{3}\pi \times$ ΑΒΓ $\times$ ΙΚ′ ἀποβαίνει $\frac{2}{3}\pi \times$ ΑΒ $\times$ ΙΚ′ $\times$ ΓΙ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΓΙΚ′, εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΒΟ ἢ ΜΝ :: ΓΙ : ΙΚ′. λοιπὸν ΑΒ $\times$ ΙΚ′ $=$ ΜΝ $\times$ ΓΙ· τὸ γραφόμενον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi \times \mathrm{MN} \times \overline{\Gamma\mathrm{I}}^2$. σχ. 267.

Σχόλιον. Ἡ γενικὴ λύσις φαίνεται ὅτι ὑποθέτει τὴν συναπάντησιν μὲ τὸν ἄξονα τῆς γραμμῆς ΑΒ ὅταν προεκβληθῇ· ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα ἐπίσης ἤθελον εἶναι ἀληθῆ καὶ ὅταν ἡ ΑΒ ἤθελεν εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος.

Τῷ ὄντι ὁ γραφόμενος κύλινδρος ἀπὸ ΑΜΝΒ ἔχει μέτρον $\pi.\overline{\mathrm{AM}}^2.\mathrm{MN}$, ὁ γραφόμενος κῶνος ἀπὸ ΑΓΜ $= \frac{1}{3}\pi.\overline{\mathrm{AM}}^2.\Gamma\mathrm{M}$, καὶ ὁ γραφόμενος κῶνος ἀπὸ ΒΓΝ $= \frac{1}{3}\pi.\overline{\mathrm{AM}}^2.\Gamma\mathrm{N}$. Ἡ πρόσθεσις τῶν δύο πρώτων στερεῶν καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ τρίτου, δίδει διὰ τὴν στερεότητα τοῦ γραφομένου στερεοῦ ἀπὸ ΑΒΓ, $\pi.\overline{\mathrm{AM}}^2.(\mathrm{MN} + \frac{1}{3}\Gamma\mathrm{M} - \frac{1}{3}\Gamma\mathrm{N})$; καὶ ἐπειδὴ $\Gamma\mathrm{N} - \Gamma\mathrm{M} = \mathrm{MN}$, ἡ ἔκφρασις αὕτη ἄγεται εἰς $\pi.\overline{\mathrm{AM}}^2.\frac{2}{3}\mathrm{MN}$ ἢ $\frac{2}{3}\pi.\overline{\Gamma\Pi}^2.\mathrm{MN}$, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ τὰ ἤδη εὑρεθέντα ἐξαγόμενα. σχ. 268.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ′.

Θεώρημα.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, πολλαὶ διαδοχικαὶ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, Ο τὸ κέντρον του, καὶ ΟΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ΑΟΔ, ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΖΗ κείμενος, στρέφεται ὁλόγυρα αὐτῆς, τὸ γραφόμενον στερεὸν θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi.\overline{\mathrm{OI}}^2.\mathrm{MK}$, ἔνθα ΜΚ εἶναι τὸ μέρος τοῦ ἄξονος τὸ ὁποῖον περατοῦται ἀπὸ τὰς ἀκραίας καθέτους ΑΜ, ΔΚ. σχ. 262.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν, ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ. Τώρα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς προλαβούσης προτάσεως, τὸ παραγόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi$.

$\overline{\text{ΟΙ}}^{2}$. ΜΝ, τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}$ π. $\overline{\text{ΟΙ}}^{2}$. ΝΠ, καὶ τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΟΔ ἔχει μέτρον π. $\overline{\text{ΟΙ}}^{2}$. ΠΚ· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τούτων τῶν στερεῶν, ἢ τὸ ὅλον στερεὸν τὸ γραφόμενον ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ΑΟΔ, θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}$ π. $\overline{\text{ΟΙ}}^{2}$. (ΜΝ + ΝΠ + ΠΚ) ἢ $\frac{2}{3}$ π. $\overline{\text{ΟΙ}}^{2}$. ΜΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Θεώρημα.

Κάθε σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει μέτρον τὴν ζώνην τὴν χρησιμεύουσαν εἰς αὐτὸν ὡς βάσιν ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος πολυπλασιασθεῖσαν, καὶ ἡ ὅλη σφαῖρα ἔχει μέτρον τὴν ἐπιφάνειάν της ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος πολυπλασιασθεῖσαν.

Ἔστω ΑΒΓ ὁ κυκλικὸς τομεὺς ὅστις, μὲ τὴν περιστροφήν του ὁλόγυρα τῆς ΑΓ, γράφει τὸν σφαιρικὸν τομέα. Οὔσης τῆς γραφομένης ἀπὸ ΑΒ ζώνης ἴσης μὲ ΑΔ $\times$ περ. ΑΓ ἢ 2π. ΑΓ. ΑΔ (πρό. 12), λέγω ὅτι ὁ σφαιρικὸς τομεὺς θέλει ἔχει μέτρον ταύτην τὴν ζώνην ἐπὶ $\frac{1}{3}$ ΑΓ πολυπλασιασθεῖσαν, ἢ $\frac{2}{3}$ π. $\overline{\text{ΑΓ}}^{2}$. ΑΔ. σχ. 269.

Τῷ ὄντι, ἂς ὑποθέσωμεν 1.ον, εἰ δυνατὸν, ὅτι ἡ ποσότης αὕτη $\frac{2}{3}$ π. $\overline{\text{ΑΓ}}^{2}$. ΑΔ εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου σφαιρικοῦ τομέως, φερ' εἰπεῖν, τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὸν κυκλικὸν τομέα ΕΓΖ ὅμοιον μὲ τὸν ΑΓΒ.

Ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τὸ τόξον ΕΖ ἡ μερὶς κανονικοῦ πολυγώνου ΕΜΝΖ αἱ πλευραὶ τῆς ὁποίας νὰ μὴ συναπαντοῦν τὸ τόξον ΑΒ· ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὅτι ἐν ᾧ στρέφεται ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΕΓΖ, στρέφεται καὶ ὁ πολυγωνικὸς ΕΝΖΓ ὁλόγυρα τῆς ΕΓ. Ἔστω ΓΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τὸ πολύγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου, καὶ ἂς καταιβασθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΓ. Τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}$ π. $\overline{\text{ΓΙ}}^{2}$. ΕΗ (πρό. 14). Τώρα ΓΙ εἶναι μείζων τῆς ΑΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ ΕΗ μείζων τῆς ΑΔ· διότι, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΒ, ΕΖ, τὰ τρίγωνα ΕΖΗ, ΑΒΔ, ὄντα ὅμοια, δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΕΗ : ΑΔ : : ΖΗ · ΒΔ : : ΓΖ : ΓΒ· λοιπὸν ΕΗ > ΑΔ.

Διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους $\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΙ}}^2.\text{ΕΗ}$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΑ}}^2.\text{ΑΔ}$: ἡ πρώτη ἔκφρασις εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου στερεοῦ ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα, ἡ δευτέρα, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὸν κυκλικὸν ΕΓΖ· λοιπὸν τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ἤθελεν εἶναι μεῖζον γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ τὸν κυκλικόν. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεὸν εἶναι μικρότερον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὡς περιεχόμενον· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν εἶναι ἀδύνατος· λοιπὸν 1.ον ἡ ζώνη ἢ βάσις σφαιρικοῦ τομέως ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος πολυπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ μεγαλήτερον σφαιρικὸν τομέα.

Λέγω 2.ον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ μικρότερον σφαιρικὸν τομέα. Διότι ἔστω ΓΕΖ ὁ κυκλικὸς τομεὺς ὅστις μὲ τὴν περιστροφήν του παράγει τὸν σφαιρικὸν δεδομένον τομέα, καὶ ἂς ὑποτεθῇ, εἰ δυνατὸν ὅτι $\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΕ}}^2.\text{ΕΗ}$ εἶναι τὸ μέτρον μικροτέρου σφαιρικοῦ τομέως, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ ἀπὸ τὸν κυκλικὸν τομέα ΑΓΒ παραγομένου. Μενούσης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα θέλει ἔχει πάντοτε μέτρον $\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΙ}}^2.\text{ΕΗ}$. Ἀλλὰ ΓΙ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΕ· λοιπὸν τὸ στερεὸν εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΕ}}^2.\text{ΕΗ}$, μέτρου, ἐξ ὑποθέσεως, τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ τὸν κυκλικὸν ΑΓΒ. Τὸ γραφόμενον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ ΑΓΒ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεόν, ὡς περιέχον τὸν σφαιρικὸν τομέα, εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ αὐτόν. Λοιπὸν 2.ον ἀδύνατον ἡ ζώνη σφαιρικοῦ τομέως πολυπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος νὰ ἦναι τὸ μέτρον μικροτέρου σφαιρικοῦ τομέως.

Κάθε λοιπὸν σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει μέτρον τὴν ζώνην, ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις, πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος.

Κυκλικὸς τομεὺς ΑΓΒ ἠμπορεῖ νὰ αὐξήσῃ ἕως οὗ νὰ γένῃ ἴσος μὲ τὸ ἡμικύκλιον· τότε ὁ γραφόμενος ἀπὸ τὴν περιστροφήν του σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι ἡ ὅλη σφαῖρα. Ἡ στερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειάν της ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνός της πολυπλασιασθεῖσαν.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, αἱ ἐπιφάνειαι αὗται ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας πολυπλασιασθεῖσαι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων. Λοιπὸν αἱ στερεότητες δύο σφαιρῶν εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων των, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων των.

Σχόλιον. Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἡ ἐπιφάνειά της θέλει εἶναι $4\pi A^2$, καὶ ἡ στερεότης της $4\pi A^2 \times \frac{1}{3} A$, ἢ $\frac{4}{3}\pi A^3$· ἐὰν κληθῇ Δ ἡ διάμετρος, θέλει εἶναι $A = \frac{1}{2}\Delta$, καὶ $A^3 = \frac{1}{8}\Delta^3$· ἡ στερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκφρασθῇ καὶ διὰ $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}\Delta^3$, ἢ $\frac{1}{6}\pi\Delta^3$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚʹ.

Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου (περιλαμβανομένων τῶν βάσεών του) ὡς 2 πρὸς 3. Αἱ στερεότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω ΜΝΠΚ ὁ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας, ΑΒΓΔ τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον· ἐὰν ἐνταῦθα περιστραφῶσι τὸ ἡμικύκλιον ΠΜΚ καὶ τὸ ἡμιτετράγωνον ΠΑΔΚ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΠΚ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον θέλει γράψει τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ἡμιτετράγωνον τὸν εἰς ταύτην περιγεγραμμένον κύλινδρον· σχ. 270.

Τὸ ὕψος ΑΔ τούτου τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον ΠΚ, ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου ὡς ἔχουσα διάμετρον τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΜΝ, ἰσοῦται μὲ τὸν μέγιστον κύκλον· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια (πρό. 4) εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρόν του πολυπλασιασθεῖσαν. Τὸ μέτρον τοῦτο εἶναι καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (πρό. 10)· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ὡσαύτως ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους: ἐὰν προστεθῶσιν αἱ δύο βάσεις ἰσοδυναμοῦσαι μὲ δύο μεγίστους κύκλους, ἡ ὅλη τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἐπιφάνεια θέλει εἶναι ἴση μὲ ἓξ μεγίστους κύκλους· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὡς 4 πρὸς 6, ἢ ὡς 2 πρὸς 3. Ἰδοὺ ἀποδεδειγμένον τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου, ἃς παρατηρηθῇ ὅτι ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ μέγιστον κύκλον καὶ τὸ ὕψος του μὲ τὴν διάμετρον, ἡ στερεότης του εἶναι ἴση μὲ τὸν μέγιστον κύκλον πολυπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν διάμετρον (πρό. 1). Ἀλλ' ἡ στερεότης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους πολυπλασιασθέντας ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος (πρό. 16), ἢ μὲ ἕνα μέγιστον κύκλον πολυπλασιασθέντα ἐπὶ τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς ἀκτῖνος, ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέτρου. Ἡ σφαῖρα λοιπὸν εἶναι πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον ὡς 2 πρὸς 3, καὶ ἑπομένως αἱ στερεότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπιφάνειαί των.

Σχόλιον. Ἐὰν φαντασθῶμεν πολύεδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι νὰ ἅπτωνται τῆς σφαίρας, τὸ πολύεδρον τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς συνιστάμενον ἀπὸ πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ὅλαι ἔχουν διὰ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ βάσεις τὰς διαφόρους ἕδρας τοῦ πολυέδρου. Τώρα εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλαι αὗται αἱ πυραμίδες θέλουν ἔχει κοινὸν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, εἰς τρόπον ὥστε κάθε πυραμὶς θέλει ἰσοῦται μὲ τὴν ἕδραν τοῦ πολυέδρου ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὴν ὡς βάσις, πολυπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος. Τὸ ὅλον λοιπὸν πολύεδρον θέλει ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειάν του ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας πολυπλασιασθεῖσαν.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι αἱ στερεότητες τῶν εἰς τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων πολυέδρων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπιφάνειαί των. Οὕτως ἡ ἰδιότης τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν διὰ τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον εἶναι κοινὴ εἰς ἀναρίθμητα ἄλλα σώματα.

Δυνατὸν νὰ σημειωθῇ ἐπίσης ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ περίμετροί των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Πρόβλημα.

Ὑποτεθέντος ὅτι τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΒΜΔ στρέφεται ὁλόγυρα μιᾶς διαμέτρου ἐκτὸς αὐτοῦ, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γεννωμένου στερεοῦ. σχ. 271.

Ἃς καταιβασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος αἱ κάθετοι ΒΕ, ΔΖ· ἀπὸ τὸ κέντρον Γ ἃς ἀχθῇ ἡ ΓΙ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΔ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΒ, ΓΔ.

Τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν τομέα $ΒΓΑ = \frac{2}{3}\pi.\overline{ΓΒ}^2.ΑΕ$. (πρό. 15)· τὸ γραφόμενον στερεὸν, ἀπὸ τὸν τομέα ΔΓΑ =

$\frac{2}{3}\pi. \Gamma B^2. AZ$· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν δύο τούτων στερεῶν, ἡ τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸν τομέα ΔΓΒ $= \frac{2}{3}\pi. \Gamma B^2. (AZ - AE) = \frac{2}{3}\pi. \Gamma B^2. EZ$. Ἀλλὰ τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΓΒ ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi. \Gamma I^2. EZ$ (πρό. 14)· τὸ γραφόμενον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὸ τμῆμα ΒΜΔ $= \frac{2}{3}\pi. EZ. (\Gamma B^2 - \Gamma I^2)$. Τώρα εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΙ ἔχομεν $\Gamma B^2 - \Gamma I^2 = BI^2 = \frac{1}{4} B\Delta^2$. Τὸ γραφόμενον λοιπὸν στερεὸν ἀπὸ τὸ τμῆμα ΒΜΔ θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi. EZ. \frac{1}{4} B\Delta^2$, ἢ $\frac{1}{6}\pi. B\Delta^2, EZ$.

Σχόλιον. Τὸ γραφόμετον στερεὸν ἀπὸ τμῆμα ΒΜΔ εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν ἥτις ἔχει διάμετρον ΒΔ, ὡς $\frac{1}{6}\pi. B\Delta^2. EZ$ πρὸς $\frac{1}{6}\pi. B\Delta^3$, ἢ : : ΕΖ : ΒΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Θεώρημα.

Κάθε τμῆμα σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ὕψος του, πλέον ἡ στερεότης τῆς σφαίρας ἥτις ἔχει τὸ ἴδιον τοῦτο ὕψος διάμετρον. σχ. 271.

Ἔστωσαν ΒΕ, ΔΖ, αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ τμήματος, ΕΖ τὸ ὕψος του, εἰς τρόπον ὥστε τὸ τμῆμα νὰ παράγηται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυκλικοῦ χωρίου ΒΜΔΖΕ ὁλόγυρα τοῦ ἄξονος ΖΕ. Τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀπὸ τὸ τμῆμα ΒΜΔ (πρό. 17) $= \frac{1}{6}\pi. B\Delta^2. EZ$, ὁ γραφόμενος κορμὸς τοῦ κώνου ἀπὸ τὸ τραπέζιον ΔΒΖΕ (πρό. 6) $= \frac{1}{3}\pi. EZ. (BE^2 + \Delta Z^2 + BE. \Delta Z)$. Τὸ τμῆμα λοιπὸν τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων στερεῶν $= \frac{1}{6}\pi. EZ. (2BE^2 + 2\Delta Z^2 + 2BE. BZ + B\Delta^2)$. Ἀλλά, ἀχθείσης τῆς ΒΟ παραλλήλου τῇ ΕΖ, θέλει εἶναι $\Delta O = \Delta Z - BE$, $\Delta O^2 = \Delta Z^2 - 2\Delta Z. BE + BE^2$ (9, 3), καὶ ἑπομένως $B\Delta^2 = BO^2 + \Delta O^2 = EZ^2 + \Delta Z^2 - 2\Delta Z \times BE + BE^2$. Θέτοντες ταύτην τὴν τιμὴν ἀντὶ τοῦ $B\Delta^2$ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ τμήματος, καὶ ἐκ-

τελοῦντες πᾶσαν ἀναγωγὴν, θέλομεν ἔχει διὰ τὴν στερεότητ
τοῦ τμήματος,

$$\tfrac{1}{6}\pi Z.E.(3\overline{BE}^2+3\overline{\Delta Z}^2+\overline{EZ}^2).$$

Ἔκφρασις ἥτις ἀναλύεται εἰς δύο μέρη· τὸ μὲν $\frac{1}{6}\pi.EZ.(3\overline{B}$
$+3\overline{\Delta Z}^2)$, ἢ $EZ.\frac{(\pi.\overline{BE}^2+\pi.\overline{\Delta Z}^2)}{2}$ εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεω
πολυπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ὕψος· τὸ δὲ $\frac{1}{6}\pi.EZ^3$ παριστάνει τ
σφαῖραν τῆς ὁποίας ΕΖ εἶναι ἡ διάμετρος (πρό. 15. σχόλ.)
λοιπὸν κάθε τμῆμα σφαίρας, κτλ.

Πόρισμα. Ἐὰν μία τῶν βάσεων ἦναι μηδὲν, τὸ περὶ οὗ
λόγος τμῆμα ἀποβαίνει σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν μόνην βάσι
λοιπὸν κάθε σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν μόνην βάσι
ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου τῆς αὐτῆ
βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους, πλέον ἡ σφαῖρα τ
ὁποίας τοῦτο τὸ ὕψος εἶναι ἡ διάμετρος.

Γενικὸν σχόλιον.

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος το
ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου θέλει εἶναι $\pi A^2\times\Upsilon$ ἢ $\pi A^2\Upsilon$.

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου, Υ τὸ ὕψος του,
στερεότης τοῦ κώνου θέλει εἶναι $\pi A^2.\frac{1}{3}\Upsilon$, ἢ $\frac{1}{3}\pi A^2\Upsilon$.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ κολοβοῦ κώνο
Υ τὸ ὕψος του, ἡ στερεότης του θέλει εἶναι $\frac{1}{3}\pi\Upsilon\ (A^2+B^2+A$

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας· ἡ στερεότης της θέλει εἶναι $\frac{4}{3}\pi$

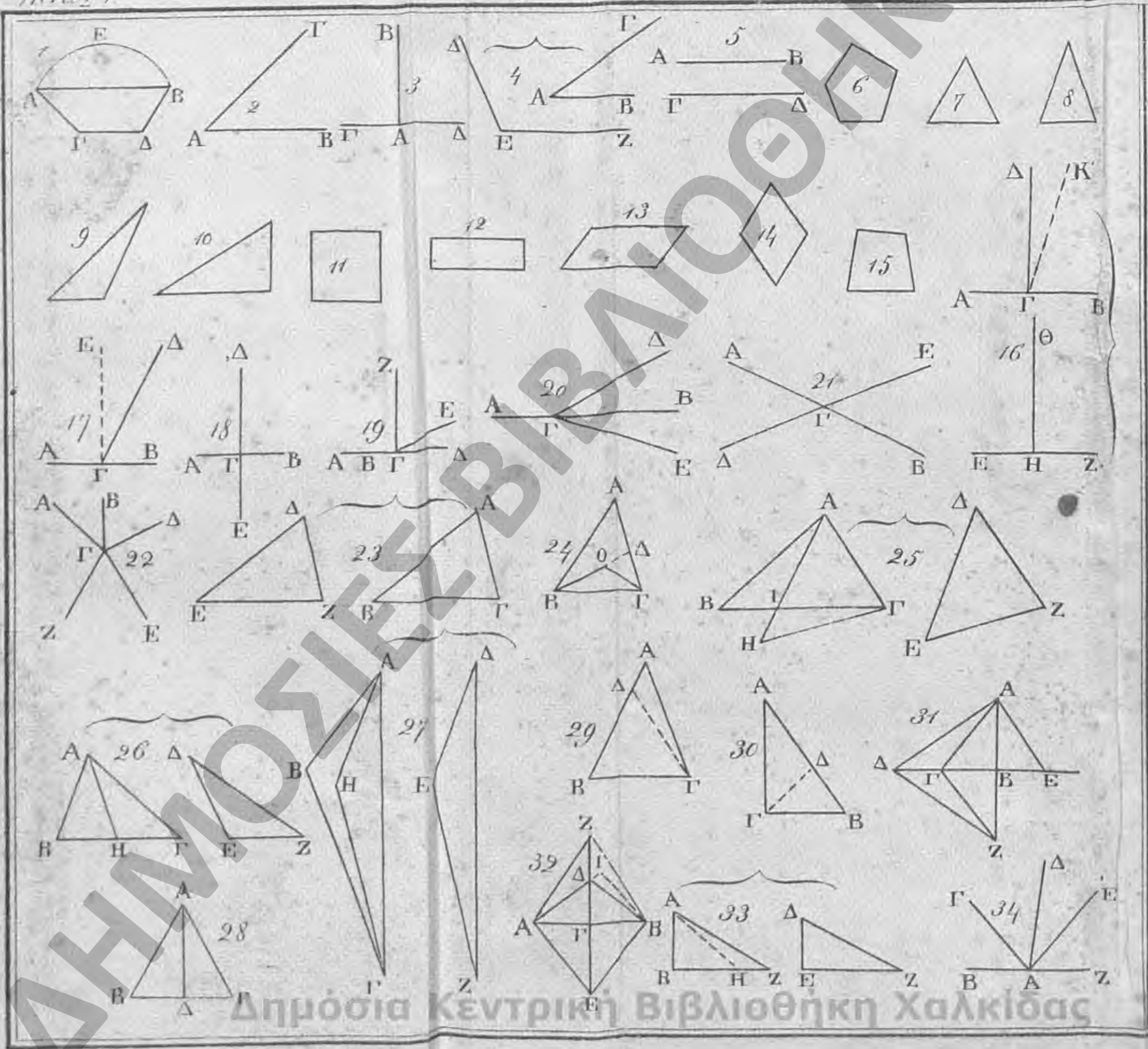
Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς σφαιρικοῦ τομέως, Υ τὸ ὕψος τῆς ζών
ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις· ἡ στερεότης του θέλει εἶναι $\frac{2}{3}A^2$

Ἔστωσαν Π. καὶ Κ αἱ δύο βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματ
Υ τὸ ὕψος του, ἡ στερεότης τούτου τοῦ τμήματος θέλει εἶ
$\frac{(\Pi+K)}{2}.\Upsilon+\frac{1}{6}\pi\Upsilon^3$.

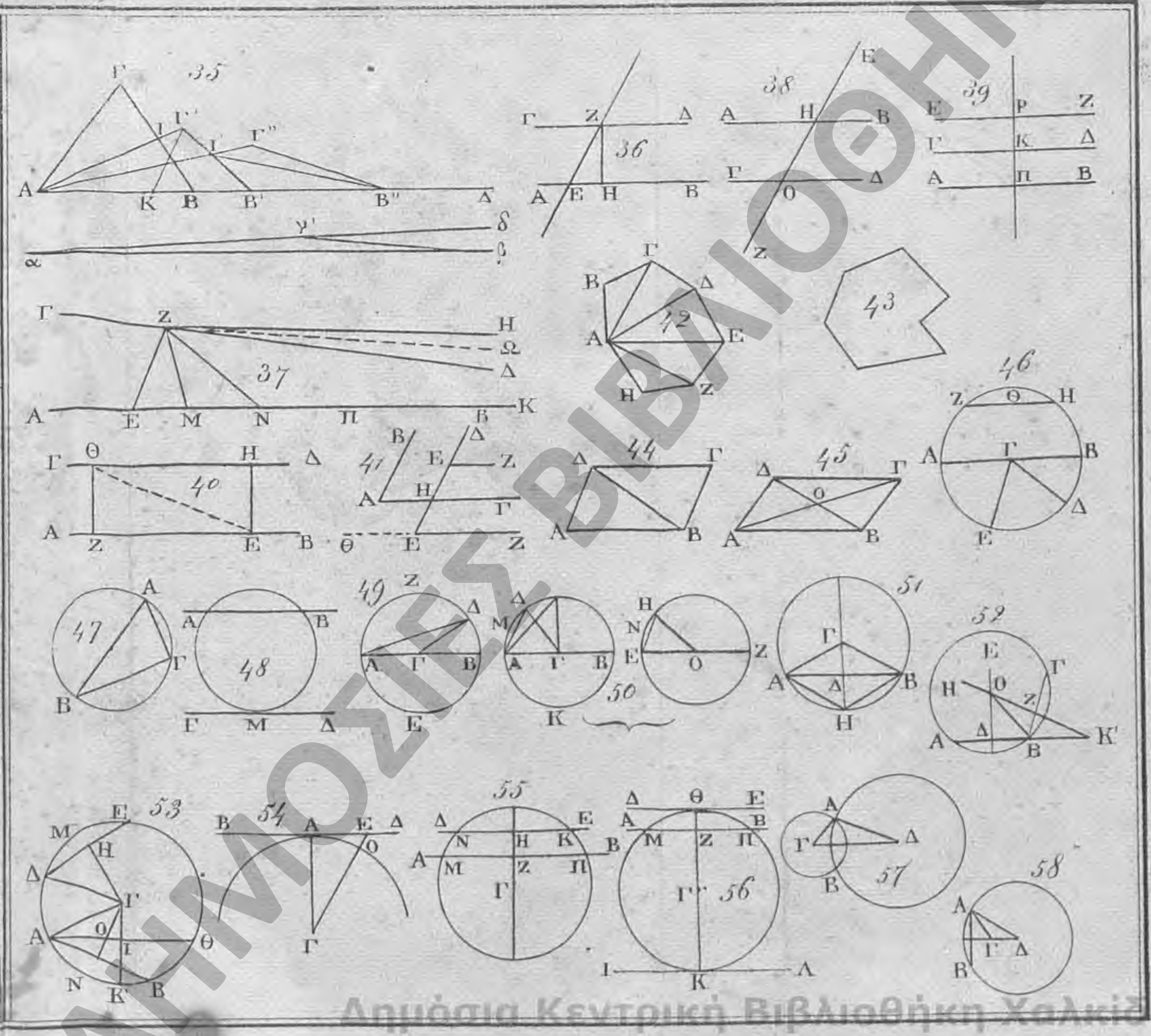
Ἐὰν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχῃ μίαν βάσιν Π, ἐπειδὴ ἡ ἄλ
εἶναι μηδὲν, ἡ στερεότης του θέλει εἶναι $\frac{1}{2}\Pi\Upsilon+\frac{1}{6}\pi\Upsilon^3$.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

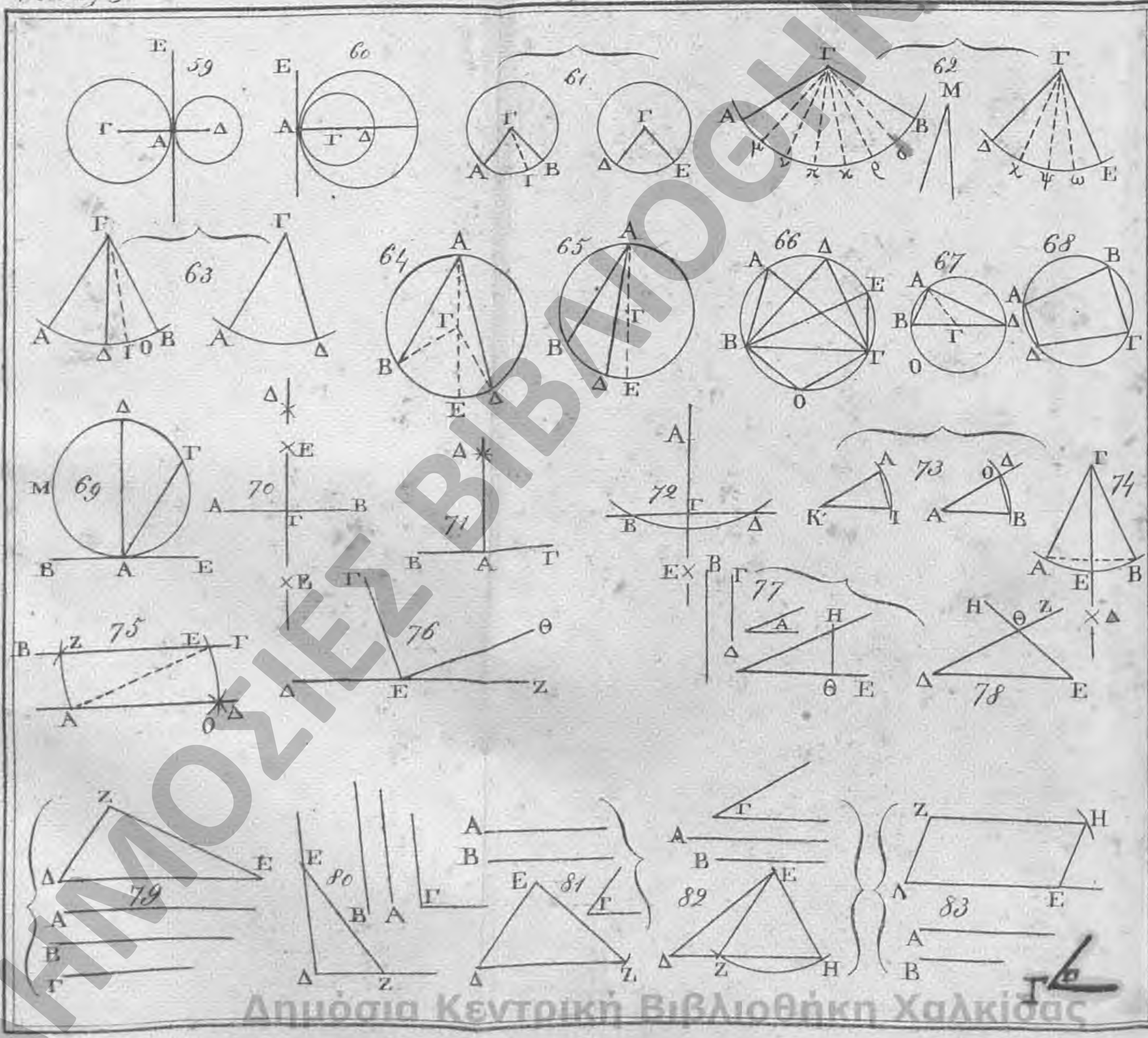
Πίναξ 1.



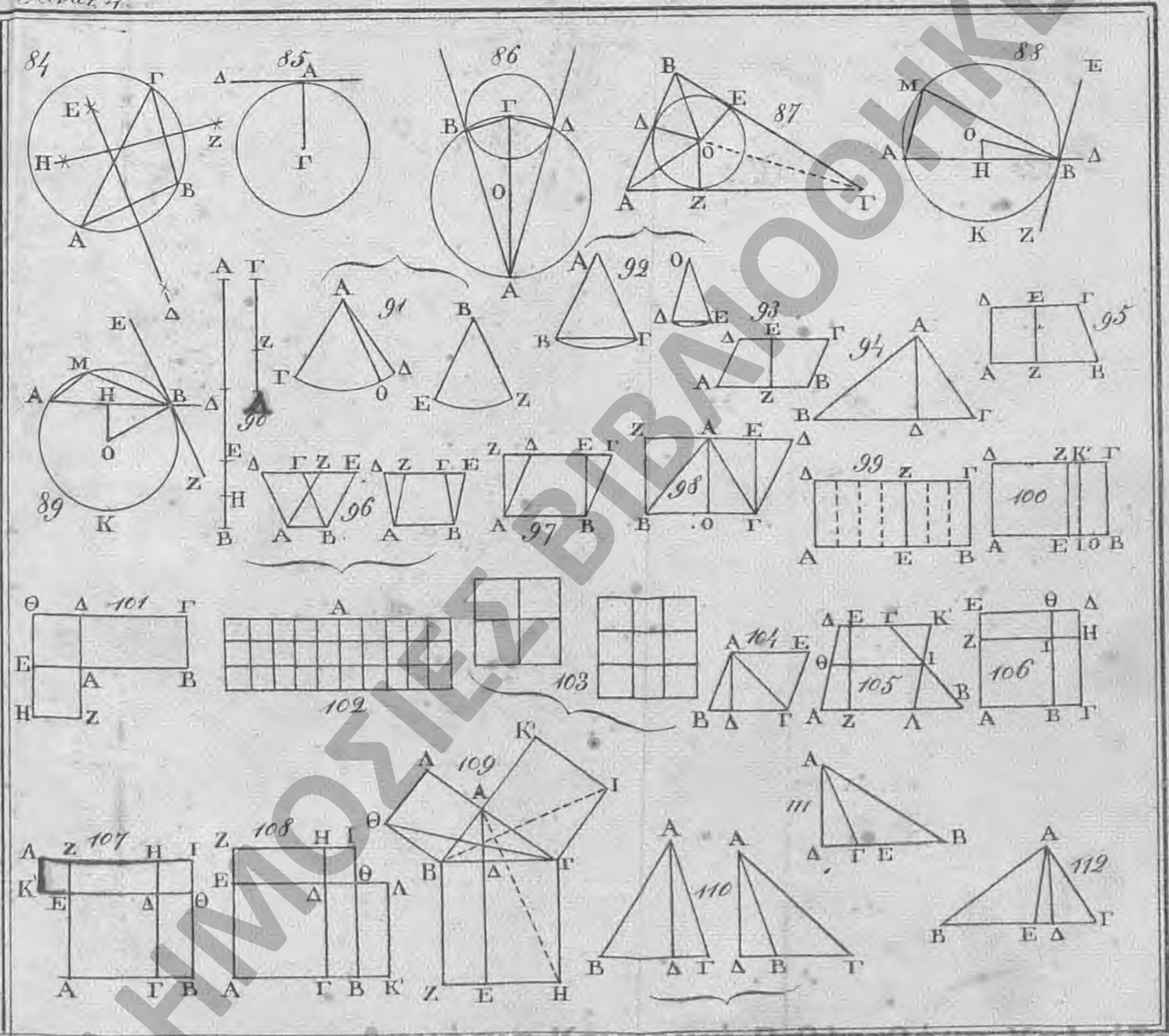
Πίναξ 2.



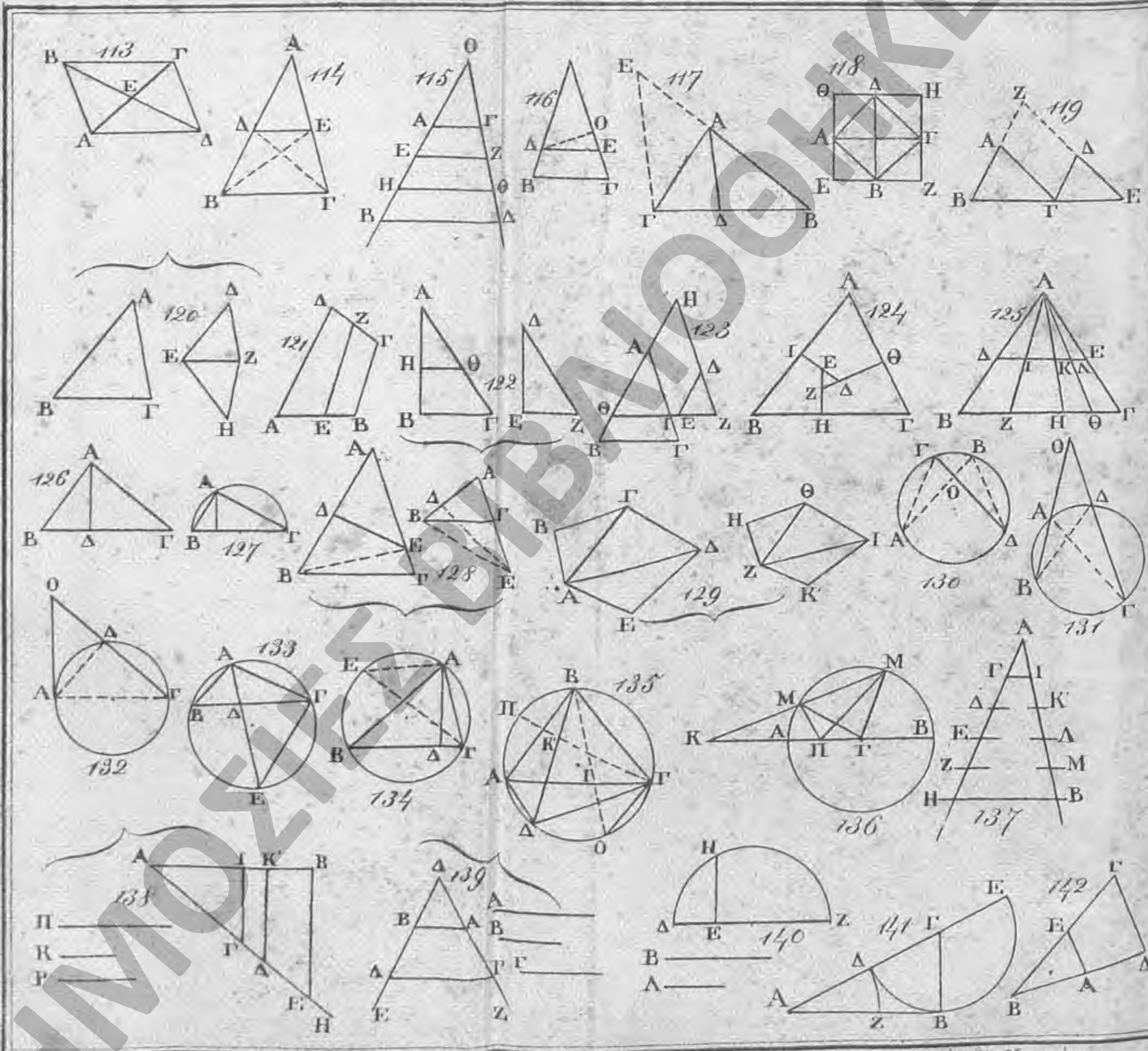
Πίναξ 3


59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83

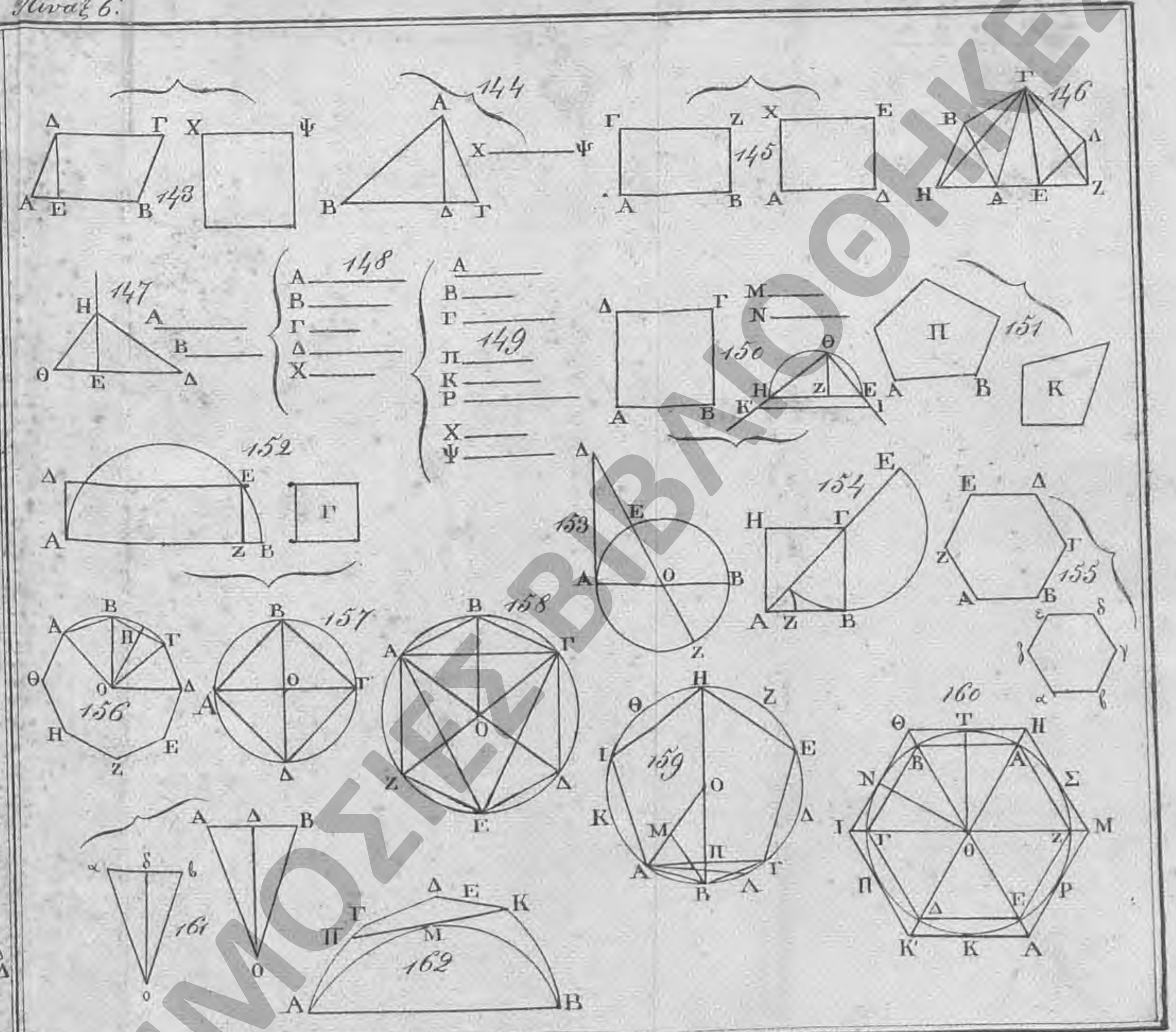
Πίναξ 4.


84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112

Πίναξ 5.

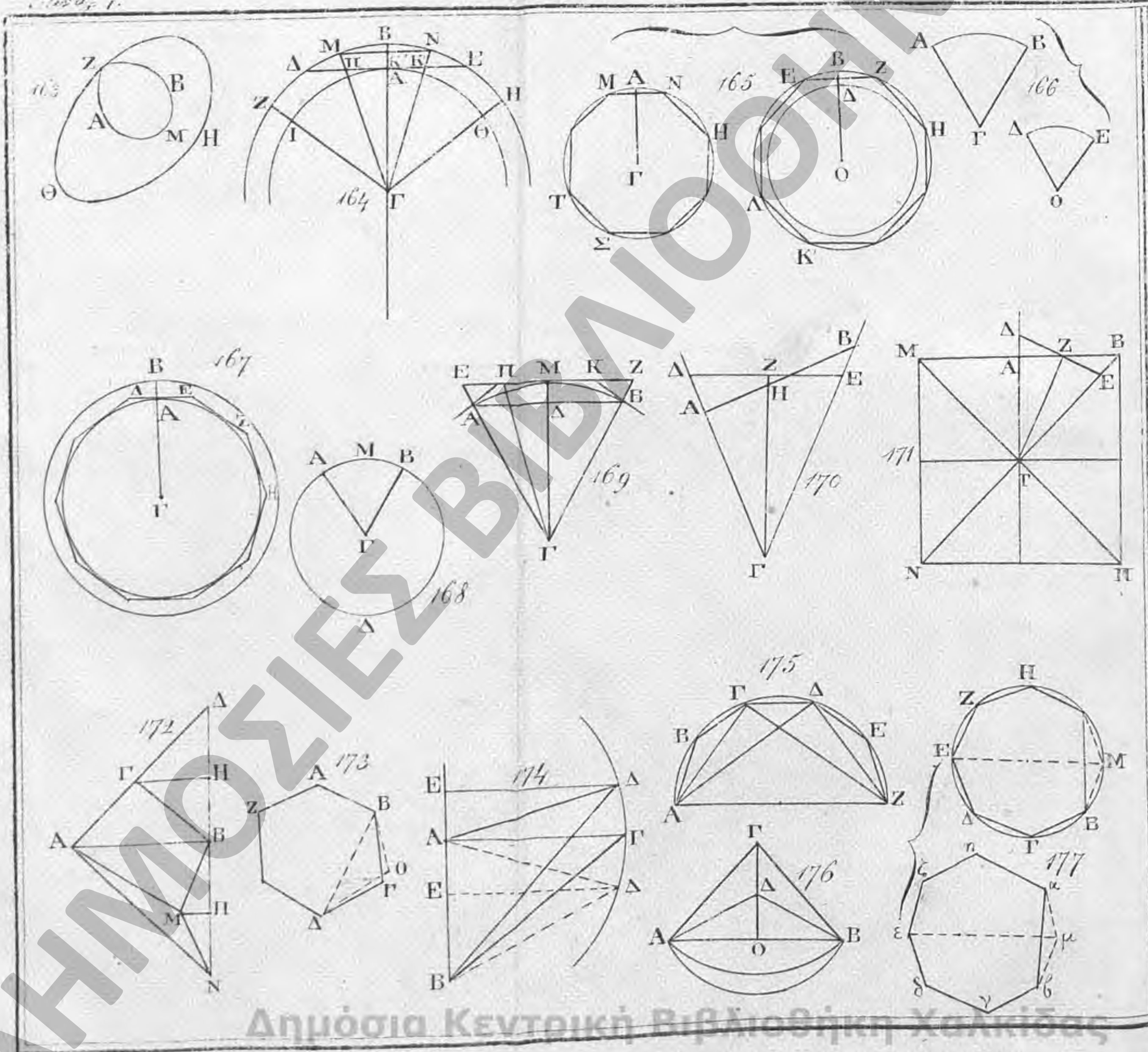


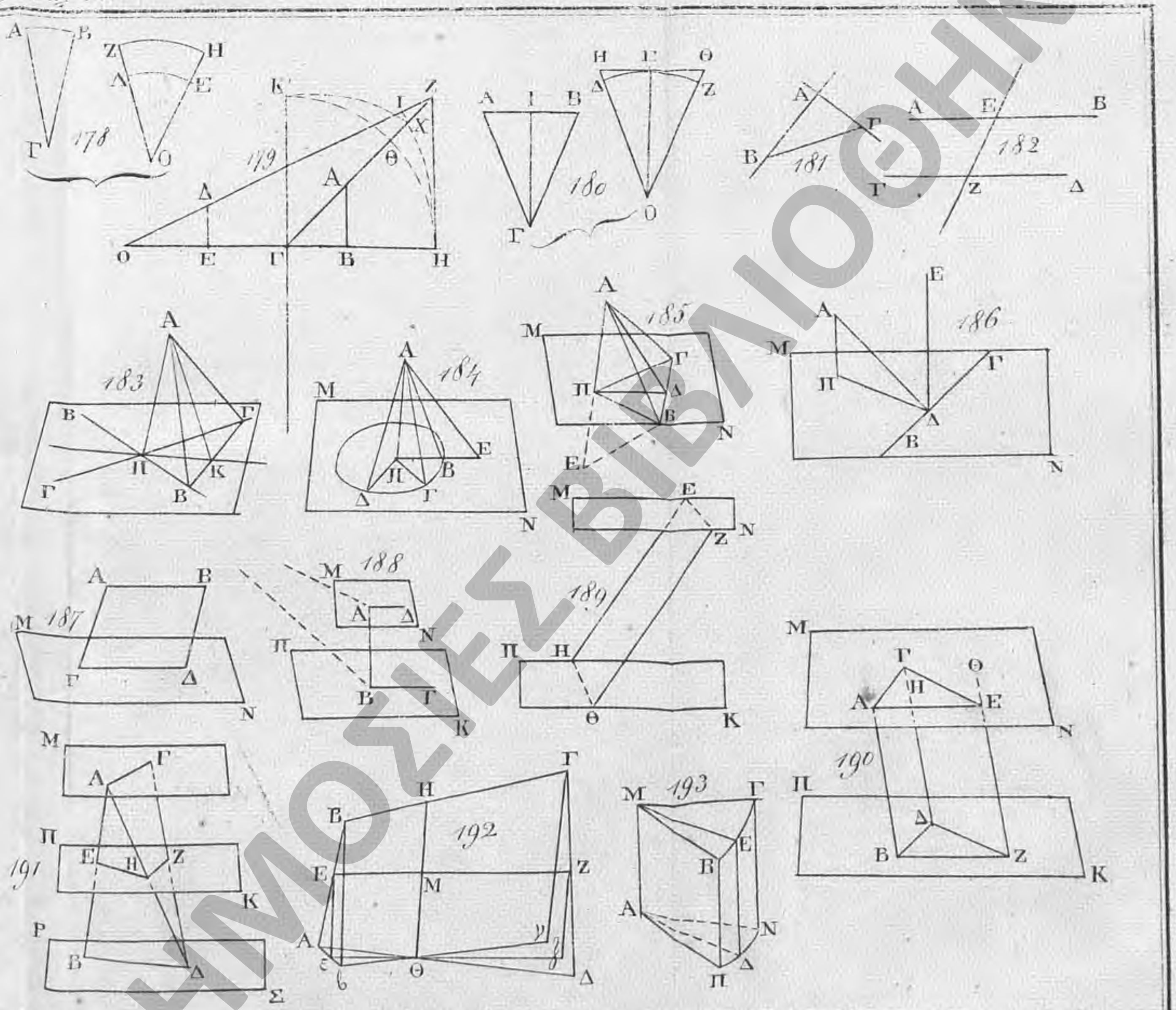
Ἐχαράχθη ὑπὸ Κ. Κοζμάνη



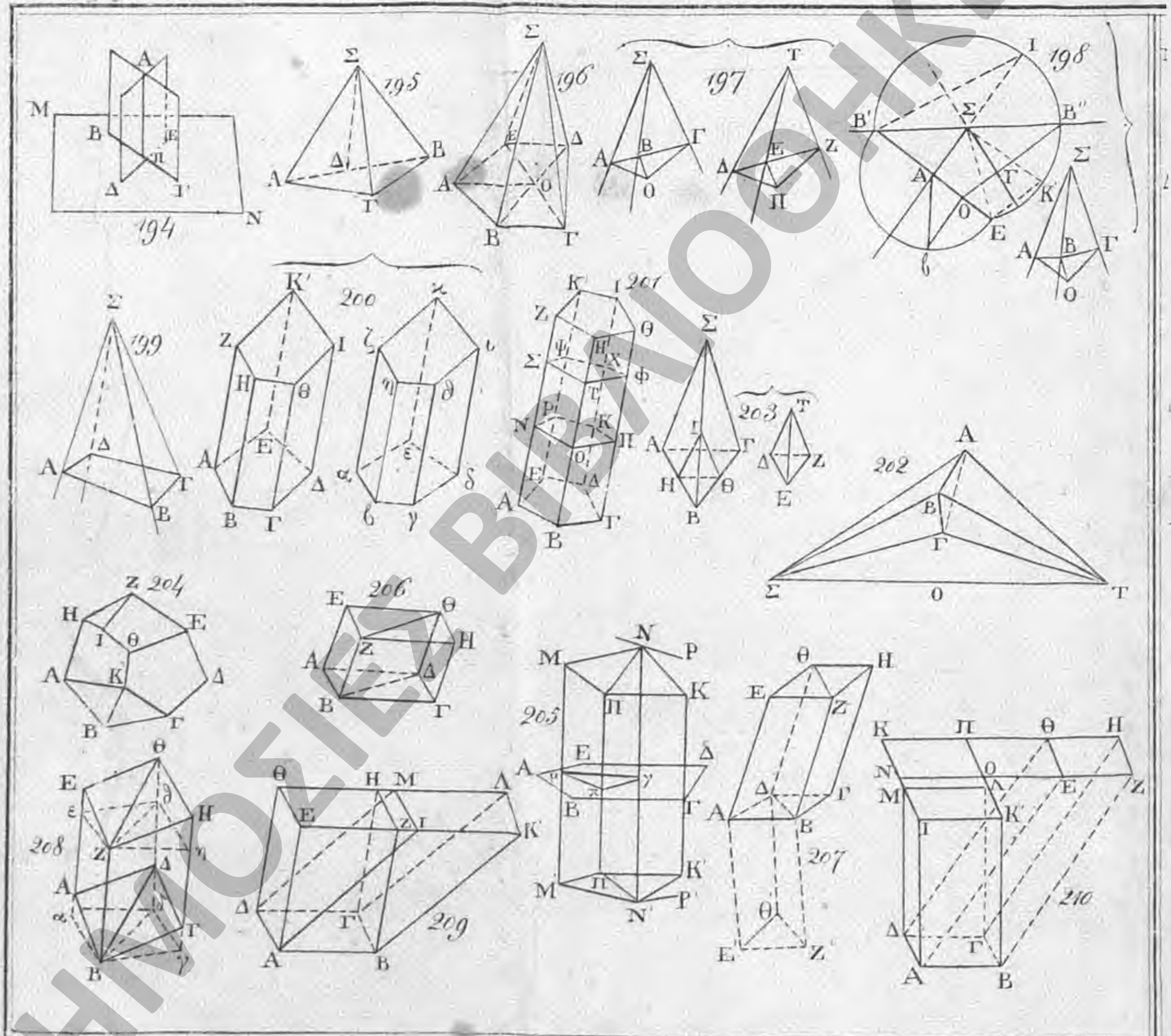
Ἐκ τ. Λιθογραφίας τοῦ Φ. Ἀρβενζόβεν ἐν Ἀθήναις.

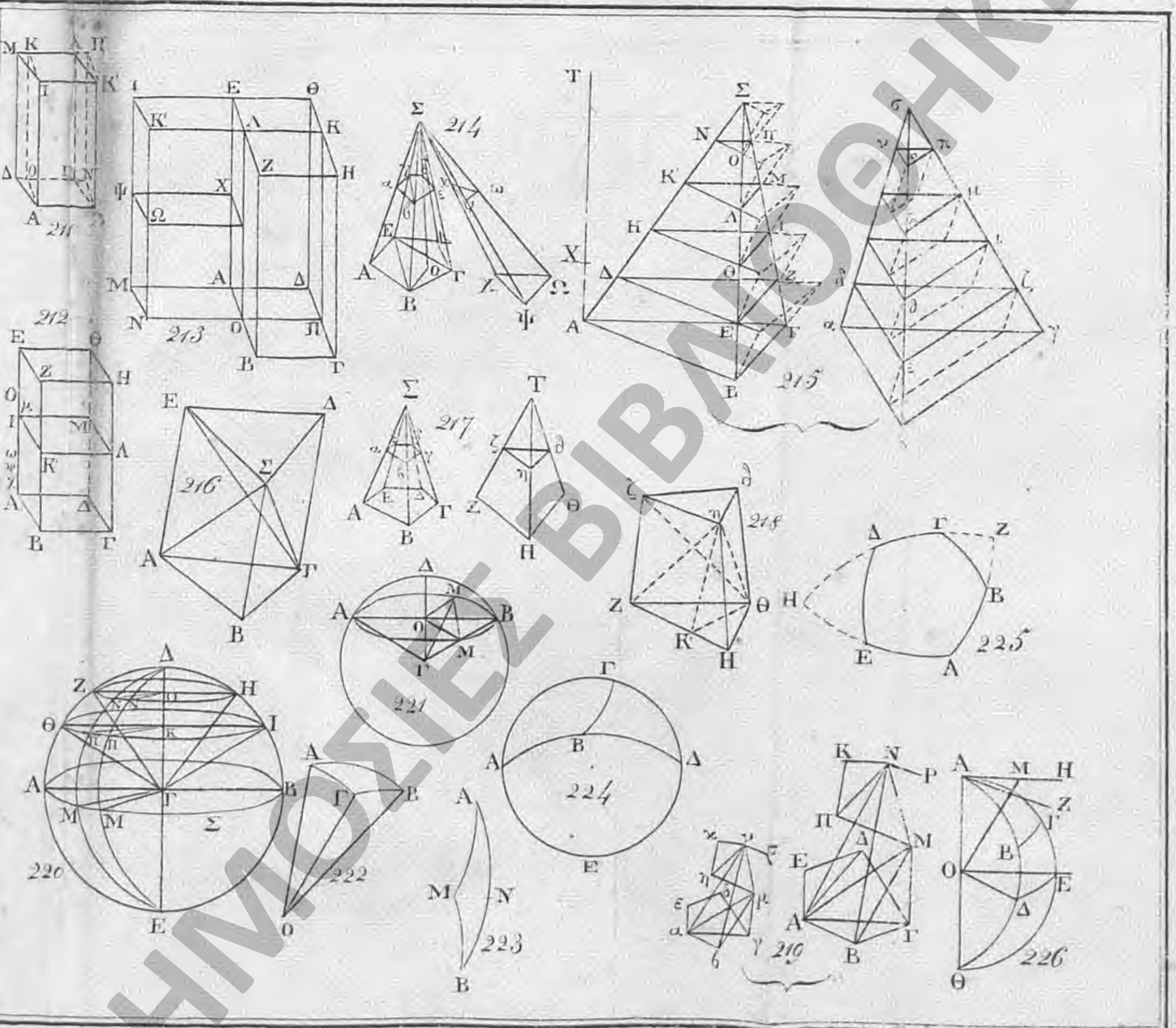
Πιν. 7.

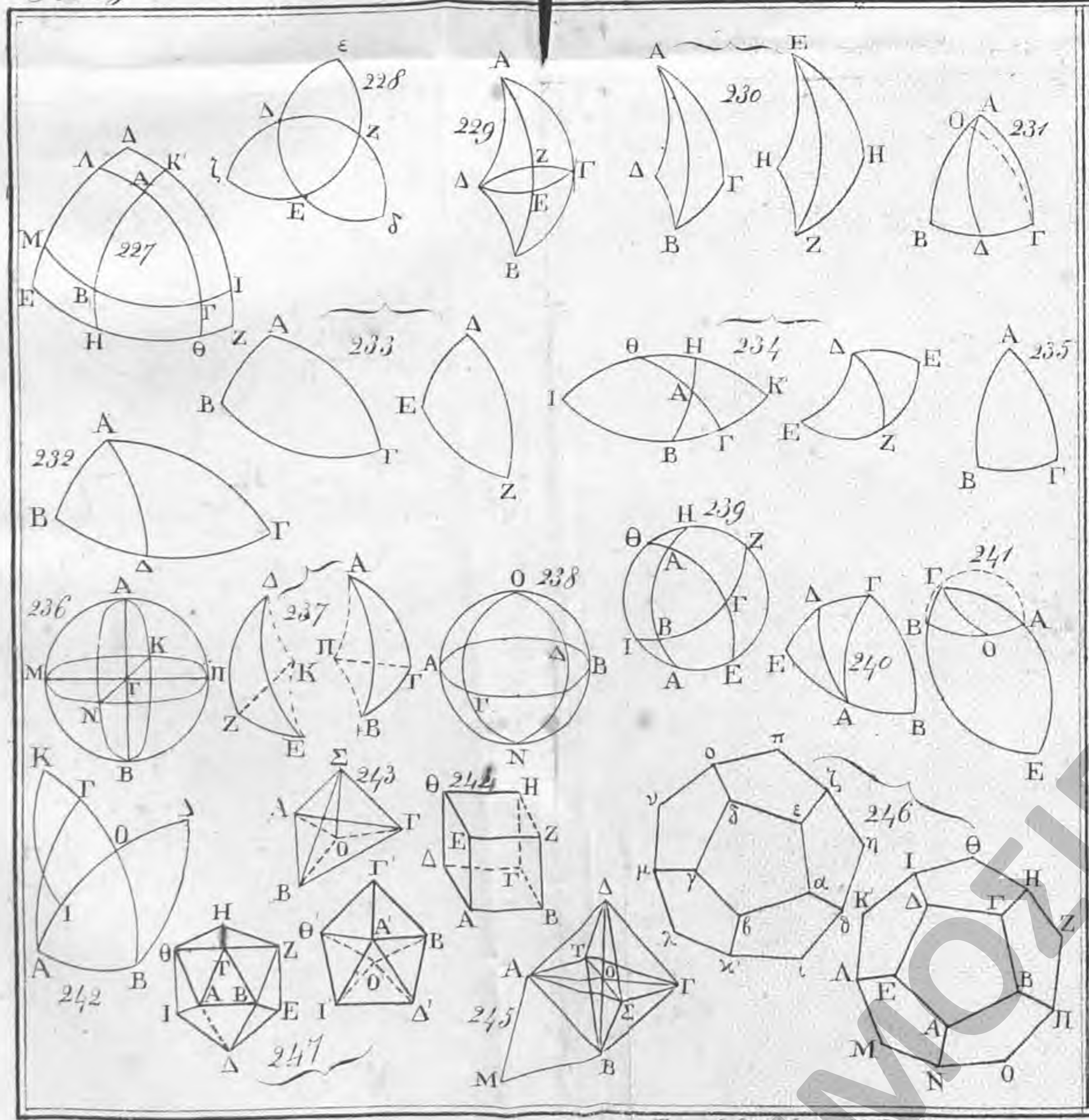


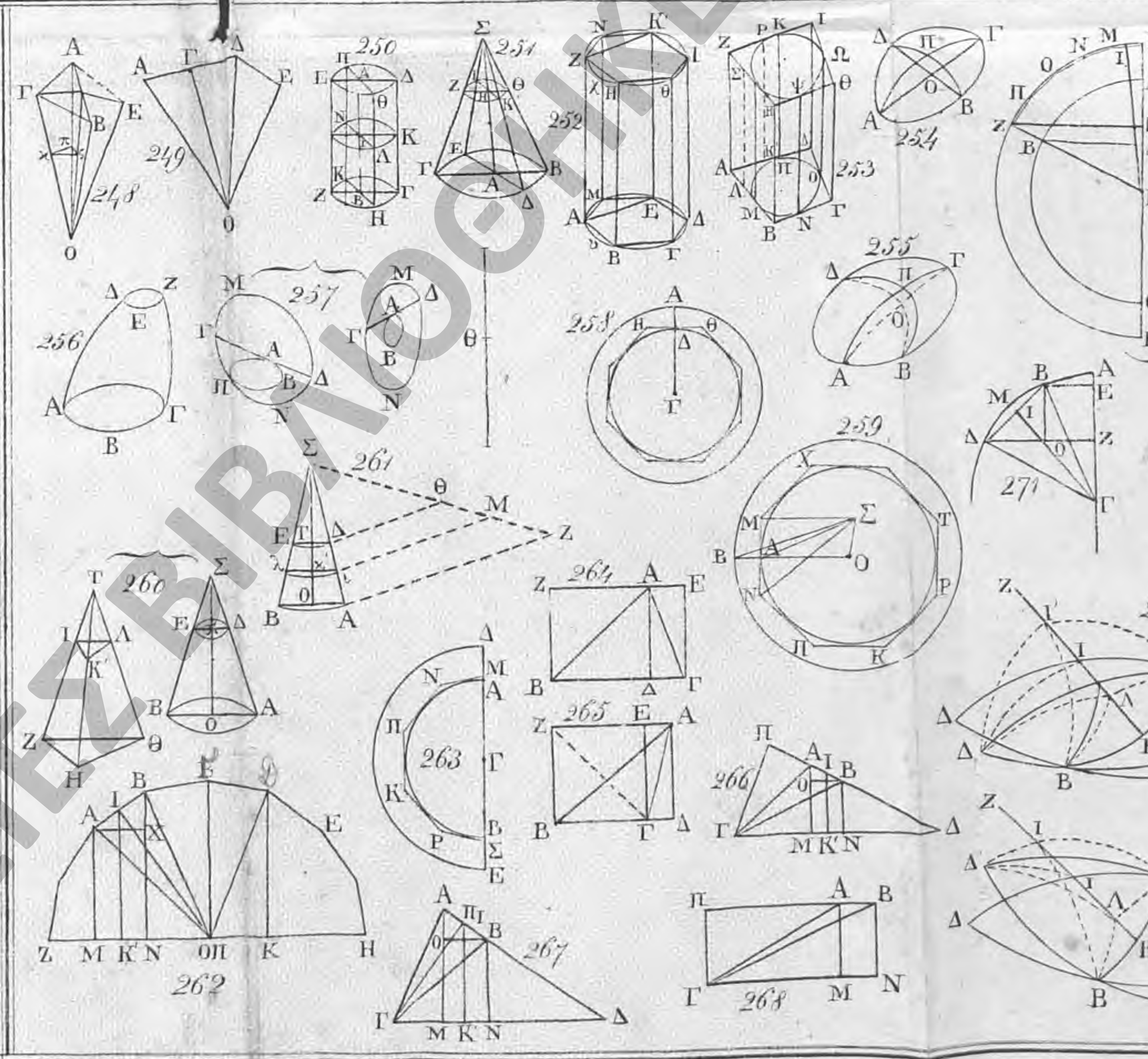

178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193

Πίναξ 9.


194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210


211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226





Εχαράχθη υπό Κ. Β. Κόλμαν

Εκ τ. Λιθογραφείας τ. Φ. Αλδενχόβεν εν Αθήναις.

Πίναξ 11.