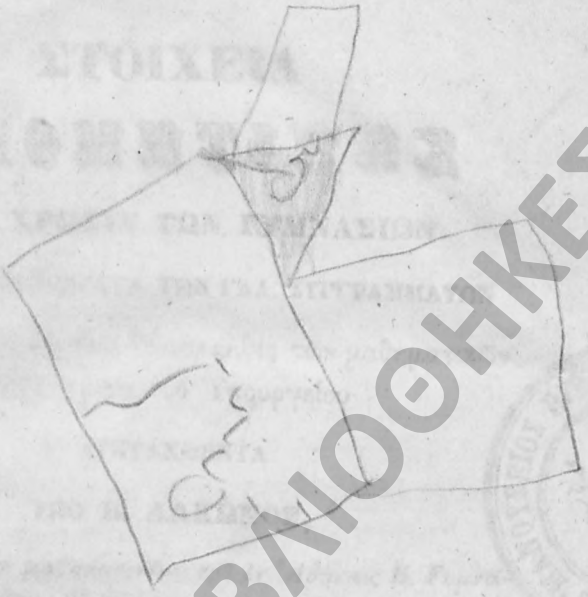
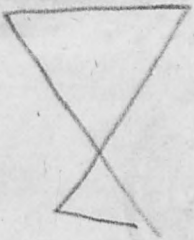


ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσειον"





ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ
# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

## ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΚΑΤΑ ΤΑ ΔΟΚΙΜΩΤΑΤΑ ΤΩΝ ΓΑΛ. ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Καὶ συμφώνως τῷ περὶ διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν προγράμματι τοῦ Ὑπουργείου

ΣΥΝΤΑΧΘΕΝΤΑ

ΥΠΟ **Β. ΛΑΚΩΝΟΣ,**

*Καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν τοῦ ἐν Ἀθήναις Β. Γυμνασίου καὶ Ὑφηγητοῦ τῆς φυσικῆς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ.*

Τόδε ἤδη ἐπεσκέψω ὡς οἵτε φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα ὡς ἔπος εἰπεῖν ὀξεῖς φαίνονται; οἵτε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἰς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασι. (Πλάτ. πολιτ. βιβλ. Ζ'.)



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,
ΤΥΠΟΙΣ Δ. ΑΘ. ΜΑΥΡΟΜΜΑΤΗ.

1857.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
ΔΗΜΟΣΙΟΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΜΑΝΟΥΣΕΙΟΣ ΣΙΑΤΙΣΤΗΣ
3704
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφήν μου θεωρεῖται ὡς προερχόμενον ἐκ τυποκλοπίας, ἧς ὁ αὐτουργὸς θέλει καταδιωχθῆ κατὰ τὸν νόμον.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Τὸ Ὑπουργεῖον τῆς Δημοσίας ἐκπαιδεύσεως ὀρθότατα πράττον συνέταξε πρὸ μικροῦ πρόγραμμα τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν ἐν τοῖς Ἑλληνικοῖς σχολείοις καὶ γυμνασίοις, τὸ ὁποῖον ὀφείλουσι νὰ ἀκολουθῶσιν οἵ τε διδάσκοντες καὶ οἱ συγγράφοντες διδακτικὰ βιβλία.

Κατὰ τὸ πρόγραμμα τοῦτο συνετάχθη ἡ παροῦσα πραγματεία, ἵνα χρησιμεύσῃ εἰς διδασκαλίαν τῆς ἀριθμητικῆς ἐν τοῖς γυμνασίοις. Ἠρανίσθην δὲ τὰ πλεῖστα τῶν καθ' ἕκαστα ἐκ τῶν νεωτάτων καὶ δοκιμωτάτων γαλλικῶν συγγραμμάτων, ἰδίως δ' ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς τοῦ Γάλλου Ἀκαδημαϊκοῦ Βερτράνδου (Bertrand), ἣν πολλαχοῦ ἁπλῶς μετέφρασα.

Συμφώνως λοιπὸν τῷ προγράμματι μετὰ τὰς τέσσαρας πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἔρχονται τὰ περὶ διαιρετότητος, περὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου, καὶ τὰ περὶ πρώτων ἀριθμῶν, ἤτοι ἡ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν θεωρία. Εἶναι δὲ ἡ τοιαύτη τῆς ὕλης διάταξις ἡ λογικωτέρα, διότι ἡ τῶν ἀκεραίων θεωρία καὶ αὐτοτελὴς εἶναι, καὶ διότι, ταύτης ἐκτεθείσης, ἐπειδὴ πᾶσα ἀριθμητικὴ πρᾶξις ἐπὶ τέλους ἀνάγεται εἰς πράξεις ἐπ' ἀκεραίων,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

σαφέστατα καὶ πληρέστατα δύνανται ἔπειτα νὰ ἐκτεθῶσι τὰ περὶ παντὸς ἀριθμοῦ. Εἶναι δὲ καὶ ἁρμοδιώτατα τὰ ἐν αὐτῇ θεωρήματα εἰς τὸ νὰ ἀσκήσωσι τοὺς μαθητὰς εἰς τὸ συλλογίζεσθαι· διὰ τοῦτο καὶ ἐξετέθησαν ἐν ἐκτάσει.

Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ ἐτέθησαν ἐπίσης, διότι ἐν Ἑλλάδι, ὡς γνωστὸν, γίνεται μεγάλη αὐτῶν χρῆσις, καὶ διότι προσέτι χρησιμεύουσιν εἰς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν περὶ τοὺς λογισμούς.

Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν ἀναλογιῶν, ἤτοι τῶν ἰσοδιαφορῶν, οὐδόλως ἐγένετο λόγος, διότι οὐδεμία ἡ χρῆσις αὐτῶν εἰς λύσιν προβλημάτων, καὶ διότι ἀντὶ νὰ ὠφελῶσι, κάμνουσι τοὺς μαθητὰς νὰ συγχέωσι τὰς ἰδιότητας τῶν ἰσοδιαφορῶν μετὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν.

Αἱ πρόοδοι καὶ οἱ λογάριθμοι παρελείφθησαν· διότι πολὺ εὐκολώτερον καὶ τελειότερον δύνανται νὰ διδαχθῶσιν οἱ μαθηταὶ τὰ περὶ αὐτῶν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ.

Ἐν τῷ τέλει ἑκάστου κεφαλαίου ἐτέθησαν ζητήματά τινα πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν. Ἐκ τούτων τὰ μὲν εἶναι θεωρήματα, ὧν ζητεῖται ἡ ἀπόδειξις, τὰ δὲ προβλήματα, ὧν ζητεῖται ἡ λύσις. Τῶν τελευταίων τὸ ἐξαγόμενον εἶναι γεγραμμένον πρὸς ὁδηγίαν τοῦ λύοντος· θεωρημάτων, δέ τινων ἡ ἀπόδειξις ὡς δύσκολος ἴσως διὰ μαθητὰς τῆς πρώτης τάξεως τῶν γυμνασίων, ἢ ὑπ' αὐτοῦ τοῦ καθηγητοῦ γίγνεται, ἢ ἀναβάλλεται διὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἑπομένου ἔτους, ὅτε εἶναι νομίζω καλὸν νὰ γίγνηται ἀνακεφαλαίωσίς τις τῆς ἀριθμητικῆς.

Β. ΛΑΚΩΝ.

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

### ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ. ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ.

#### ά. Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1. Καλεῖται *ποσὸν* πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.

Τὸ ποσὸν παρουσιάζεται διττῶς· ἢ ὡς συλλογὴ ὁμοειδῶν ἀντικειμένων, καὶ τότε καλεῖται *διακεκριμένον*, ἢ ὡς ὅλον τι ἄνευ διακρίσεως τῶν μερῶν αὐτοῦ, καὶ τότε καλεῖται *συνεχές*.

Οὕτως, ἀγέλη βοῶν, πληθὺς ἀνθρώπων κτλ. εἶναι ποσὰ διακεκριμένα. Τὰ δὲ μήκη, αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ ὄγκοι, ὁ χρόνος κτλ. εἶναι ποσὰ συνεχῆ.

2. Ἡ μαθηματικὴ εἶναι ἡ ἐπιστήμη ἡ ἀσχολουμένη περὶ τὰ ποσά. Ἐπιλαμβάνεται δὲ τούτων μόνον ὅταν δύνανται νὰ μετρηθῶσι.

3. Μετρεῖν ποσόν τι εἶναι τὸ προσδιορίζειν αὐτὸ διὰ συγκρίσεως πρὸς ἄλλο ποσὸν τῆς αὐτῆς φύσεως, ὡς γνωστὸν θεωρούμενον.

Τὸ ποσὸν τοῦτο τὸ χρησιμεῦον ὡς *ὅρος συγκρίσεως* εἰς πάντα τὰ τῆς αὐτῆς φύσεως ποσὰ καλεῖται *μονάς*.



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἡ μονὰς ἐν μὲν τοῖς διακεκριμένοις ποσοῖς εἶναι ὡρισμένη ὑπ' αὐτῆς τῆς φύσεως· οἷον ἐν ἀγέλῃ βοῶν ἀναγκαίως μονὰς εἶναι ὁ βοῦς. Ἐπὶ δὲ τῶν συνεχῶν ποσῶν ἡ μονὰς λαμβάνεται κατὰ συνθήκην· οἷον διὰ τὰ μήκη ὡς μονάδα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν πῆχυν, τὴν ὀργυιὰν, τὸν πόδα, καὶ ἐν γένει οἱονδήποτε μῆκος.

4. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ποσοῦ τινος πρὸς τὴν μονάδα αὐτοῦ καλεῖται *ἀριθμός*· οἷον, ὅταν λέγωμεν ἀπόστασις τριῶν πήχεων, βάρος πέντε μνῶν, ἐπιφάνεια ὀκτὼ στρεμμάτων, ἀγέλη τριάκοντα βοῶν, αἱ λέξεις *τρεῖς, πέντε, ὀκτώ, τριάκοντα*, εἰσὶν ἀριθμοί.

5. Ἀριθμός τις λέγεται *ἀκέραιος*, ὅταν ἐκφράζῃ μονάδα, ἢ συλλογὴν μονάδων. Ὅταν δ' ἡ μεταξὺ τοῦ ποσοῦ καὶ τῆς μονάδος αὐτοῦ σχέσις εἶναι πολυπλοκωτέρα, ἐκφράζεται δι' ἀριθμῶν, περὶ ὧν θέλομεν πραγματευθῆ ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ.

6. Ὅταν ἀριθμός τις ἀπαγγέλληται, χωρὶς νὰ γνωσθῇ ἡ φύσις τῶν μονάδων ἃς παριστᾷ, καλεῖται *ἀφῃρημένος*· τοὐναντίον δέ, *συγκεκριμένος*· οὕτως πέντε ἐστὶν ἀριθμὸς ἀφῃρημένος, ὁ δὲ πέντε πήχεις εἶναι ἀριθμὸς συγκεκριμένος.

Σημειωτέον ὅμως ὅτι ὁ καλούμενος συγκεκριμένος ἀριθμὸς κυρίως εἶναι ποσόν· οὕτω, τὸ πέντε πήχεις εἶναι ποσόν, τοῦ ὁποίου μέτρον εἶναι ὁ ἀριθμὸς πέντε.

7. Ἀριθμητικὴ εἶναι ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἐπιστήμη. Περιλαμβάνει δὲ τὰς *πράξεις* ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτῶν. Ἀλλ' ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων θέλουσιν ἐκτεθῆ ἐν τῇ παρούσῃ πραγματείᾳ ἐκεῖναι μόνον, αἵτινες δύνανται νὰ εὐκολύνωσι τὰς πράξεις.

## Β'. Περὶ ἀριθμήσεως.

8. Ἀνωτέρω ὡρίσαμεν μόνον τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς· μέχρις οὗ δὲ ὁρίσωμεν καὶ τοὺς λοιποὺς, λέγοντες διὰ

ΔΗΜΟΣΙΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τὸ σύντομον ἁπλῶς ἀριθμοὺς, θέλομεν ἐννοεῖ τοὺς ἀκεραίους.

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄπειροι, διότι οἱουδήποτε ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἕτερον μείζονα διὰ προσθέσεως μιᾶς ἢ πλειοτέρων μονάδων, ἐὰν ἐδίδετο εἰς ἕκαστον ἰδιαίτερον ὄνομα, ἤθελον χρειασθῆ ἄπειρα ὀνόματα, καὶ ἐπομένως ἤθελεν εἶσθαι ἀδύνατος ἡ ἀπομνημόνευσις αὐτῶν· διὰ τοῦτο ἐδέησε νὰ εὑρεθῆ *μέσον τοῦ νὰ ἐκφράζωνται οἱ ἀριθμοὶ διὰ πεπερασμένου συστήματος λέξεων ἁρμοδίως συνδυαζομένων*, πρὸς τούτοις δὲ τοῦ νὰ *γράφωνται δι' ὡρισμένου ἀριθμοῦ σημείων*· τοιοῦτος εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς ἀριθμήσεως, ἥτις περιλαμβάνει τὴν ὀνοματολογίαν καὶ γραφὴν τῶν ἀριθμῶν.

## Ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν.

9. Οἱ ἀρχικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται *ἓν* (ἡ μονὰς θεωρουμένη μόνη), *δύο* (ἓν καὶ ἓν), *τρία* (δύο καὶ ἓν), *τέσσαρα*, *πέντε*, *ἕξ*, *ἑπτὰ*, *ὀκτὼ*, *ἐννέα*, *δέκα*.

Ὁ ἀριθμὸς δέκα θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καλουμένη *δεκὰς*, ἢ *μονὰς δευτέρας τάξεως*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἥτις καλεῖται *μονὰς ἁπλῆ*, ἢ *πρώτης τάξεως*. Ἀριθμοῦμεν δὲ κατὰ δεκάδας, ὅπως καὶ καθ' ἁπλᾶς μονάδας, καὶ λέγομεν, μία δεκὰς, δύο δεκάδες, τρεῖς δεκάδες, τέσσαρες, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα δεκάδες, ἢ *εἴκοσι*, *τριάκοντα*, *τεσσαράκοντα*, *πεντήκοντα*, *ἑξήκοντα* *ἑβδομήκοντα*, *ὀγδοήκοντα*, *ἐνενήκοντα*, ὅπου σημειωτέον ὅτι μόνον τὸ εἴκοσιν εἶναι νέα λέξις; αἱ δὲ λοιπαὶ παράγονται ἐκ τῶν προηγουμένων διὰ τῆς προσθήκης τῆς καταλήξεως *κοντα*.

Οἱ μεταξὺ τοῦ δέκα καὶ εἴκοσιν, εἴκοσι καὶ τριάκοντα, τριάκοντα καὶ τεσσαράκοντα κτλ. ἀριθμοὶ ἐκφράζονται, προσαρτωμένου εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ συμπληροῦντος αὐτούς· οὕτω λέγομεν, *δέκα καὶ ἓν* ἢ *ἕνδεκα*, *δυοκαίδεκα* ἢ *δώδεκα*, *δεκα*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*τρία . . . δέκα ἐννέα, εἴκοσι ἑξ, ἑβδομήκοντα ὀκτὼ . . . ἐνενήκοντα ἐννέα.*

Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς αὐξανόμενος κατὰ μονάδα, παρέχει *δέκα δεκάδας*, ἢ *ἑκατόν*, ὅστις θεωρεῖται καὶ αὐτὸς ὡς νέα μονὰς, καλουμένη *ἑκατοντὰς*, ἢ μονὰς *τρίτης τάξεως*.

Ἀριθμοῦμεν ἀκολούθως καθ' *ἑκατοντάδας*, ὡς καὶ κατὰ *δεκάδας* καὶ καθ' *ἁπλᾶς μονάδας*, καὶ λέγομεν, δύο *ἑκατοντάδες*, *τρεῖς ἑκατοντάδες*, . . . *ἐννέα ἑκατοντάδες*, ἢ *διακόσια*, *τριακόσια*, . . . . *ἐννακόσια*· σημειωτέον δὲ πάλιν ὅτι αἱ λέξεις αὗται παράγονται ἐκ τῶν προηγουμένων διὰ τῆς προσθήκης τῆς καταλήξεως *κόσια*. Τιθεμένων μεταξὺ τῶν λέξεων ἑκατὸν καὶ διακόσια, διακόσια καὶ τριακόσια, . . . ὀκτακόσια καὶ ἐννακόσια, καὶ κατόπιν τοῦ ἐννακόσια, τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ *ἑνὸς* μέχρι τοῦ *ἐνενήκοντα ἐννέα*, σχηματίζονται τὰ ὀνόματα ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ ἑκατὸν μέχρι τοῦ ἐννακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα.

Προστιθεμένης δὲ μιᾶς μονάδος εἰς τὸν ἐννακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα, παράγεται συλλογὴ δέκα ἑκατοντάδων, ἢ ὁ ἀριθμὸς *χίλια*, ὅστις ἀποτελεῖ τὴν *μονάδα χιλιάδων*, ἢ *μονάδα τετάρτης τάξεως*.

Ἵνα μὴ πολλαπλασιάζηται δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν λέξεων ἐθεωρήθη ὁ *χίλια* ὡς *δευτέρα ἀρχικὴ μονὰς*, πρὸ τῆς ὁποίας τίθενται τὰ ὀνόματα τῶν ἐννακοσίων ἐνενήκοντα ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν· οὕτω λέγομεν, *μία χιλιὰς*, *δύο χιλιάδες*, *τρεῖς χιλιάδες*, *δέκα ὀκτὼ χιλιάδες*, *διακόσιαι πεντήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες* . . . . *ἐννακόσιαι ἐνενήκοντα ἐννέα χιλιάδες*.

Ἄλλως δὲ *μία δεκὰς χιλιάδων* ἀποτελεῖ τὴν μονάδα *πέμπτης τάξεως*, *μία ἑκατοντὰς χιλιάδων* τὴν μονάδα *ἕκτης τάξεως*.

Τιθεμένων δὲ κατόπιν ἑκάστου ἀριθμοῦ χιλιάδων τῶν ὀνομάτων ἁπάντων τῶν μικροτέρων τοῦ χίλια ἀριθμῶν,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

σχηματίζονται τὰ ὀνόματα ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ *ἐννακόσιαι ἐνενήκοντα ἐννέα χιλιάδες ἐννακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα.*

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος αὐξανόμενος κατὰ μονάδα παρέχει *δέκα ἑκατοντάδας χιλιάδων*, ἢ *χιλίας χιλιάδας*· ἐκλήθη δὲ *ἑκατομμύριον* καὶ εἶναι ἡ *τρίτη ἀρχικὴ μονάς*· ἐπίσης συλλογὴ *χιλίων ἑκατομμυρίων* καλεῖται *δισεκατομμύριον*· συλλογὴ *χιλίων δισεκατομμυρίων* καλεῖται *τρισεκατομμύριον* . . . ἑκάστη δὲ τῶν συλλογῶν τούτων θεωρεῖται ὡς νέα *ἀρχικὴ μονάς*. Δύναται δέ τις νὰ ἐξακολουθήσῃ οὕτως ἐπ᾽ ἀόριστον, λέγων *τετρακισεκατομμύριον*, *πεντακισεκατομμύριον* κτλ.

Τὸ μέγα τοῦ συστήματος τούτου τῆς ἀριθμήσεως πρωτέρημα εὐκόλως κατανοεῖ τις, παρατηρῶν ὅτι διὰ δεκατεσσάρων μόνον διαφόρων λέξεων ἠδυνήθημεν νὰ ὀνομάσωμεν τόσον μέγα ἀριθμῶν πλῆθος.

## Περὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

10. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμός, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν ἦναι, δύναται νὰ ἐννοηθῇ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὡς συγκείμενος ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων, αἱ δὲ μονάδες τάξεώς τινος δύνανται νὰ μὴν ὦσι περισσότεραι τῶν ἐννέα, καθότι δέκα μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῇ οἱοσδήποτε ἀριθμὸς δι᾽ ἐννέα μόνον σημείων, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ μέσον, ὥστε τὸ αὐτὸ σημεῖον νὰ παριστᾷ ἀριθμὸν μονάδων τάξεώς τινος οἱασδήποτε.

Καὶ τὰ μὲν σημεῖα, δι᾽ ὧν παριστῶνται οἱ ἐννέα ἀρχικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι τὰ ἑξῆς, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *ψηφία* ἢ *χαρακτῆρες*.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ἕν | δύο | τρία | τέσσαρα | πέντε | ἕξ | ἑπτὰ | ὀκτὼ | ἐννέα· |

τὸ δὲ νὰ παριστᾷ ψηφίον τι μονάδας τάξεως οἱασδήποτε

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

κατωρθώθη διὰ τῆς ἑξῆς συνθήκης· *ψηφίον τι τιθέμενον πρὸ τὰ ἀριστερὰ ἑτέρου ἐκφράζει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τῶν τοῦ ψηφίου τούτου μονάδων, ἢ ἄλλως, ὅταν πολλὰ ψηφία ἦναι γεγραμμένα κατὰ σειράν, τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον σημαίνει ἁπλᾶς μονάδας, τὸ ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑπόμενον ψηφίον δεκάδας, τὸ τρίτον ἑκατοντάδας, τὸ τέταρτον χιλιάδας, τὸ πέμπτον δεκάδας χιλιάδων κτλ.* οὕτως ἐν τῷ ἀριθμῷ 85763 τὸ ψηφίον 3 ἐκφράζει ἁπλᾶς μονάδας, τὸ ψηφίον 6 δεκάδας, τὸ 7 ἑκατοντάδας, τὸ 5 χιλιάδας καὶ τὸ 8 δεκάδας χιλιάδων.

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι δυνατὸν ἐν ἀριθμῷ τινι νὰ λείπωσι μονάδες μιᾶς τινος ἢ καὶ πλειοτέρων τάξεων, εἶναι ἀνάγκη νὰ προσληφθῇ καὶ ἕτερόν τι ψηφίον, καθ' ἑαυτὸ μὲν οὐδὲν σημαῖνον, χρησιμεῦον δὲ εἰς τὸ νὰ κάμνῃ τὰ *κατέχωσι τὰ ἄλλα* τὴν ἁρμόζουσαν τάξιν. Τοιοῦτον σημεῖον ἐλήφθη τὸ 0, τὸ ὁποῖον καλεῖται *μηδὲν* ἢ *μηδενικόν*· οὕτως ὁ ἀριθμὸς δέκα ἢ μία δεκὰς γράφεται 10, ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα γράφεται 30, ὁ ἀριθμὸς τρεῖς χιλιάδες γράφεται 3000· ὡσαύτως 9006 παριστᾷ 9 χιλιάδας καὶ 6 μονάδας κτλ.

Τὰ ἐννέα πρῶτα ψηφία πρὸς ἀντιδιαστολὴν ἀπὸ τοῦ μηδενικοῦ καλοῦνται *σημαντικά*.

## Κανὼν πρὸς ἀνάγνωσιν γεγραμμένου ἀριθμοῦ.

11. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς, ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν, ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον προσθέτοντες τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς ἐκφράζει· οὕτω 527 ἀπαγγέλλεται

πέντε ἑκατοντάδες, δύο δεκάδες, ἑπτὰ μονάδες
ἢ ἁπλούστερον, πεντακόσια εἴκοσι ἑπτά.

12. Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, χωρίζομεν αὐτὸν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν, εἰς τρι-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ψήφια τμήματα, ὧν τὸ τελευταῖον μόνον δύναται νὰ ἔχῃ ἓν, ἢ δύο ψηφία. Τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ τμῆμα παριστᾷ τότε ἁπλᾶς μονάδας, τὸ δεύτερον πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ χιλιάδας, τὸ τρίτον ἑκατομμύρια, τὸ τέταρτον δισεκατομμύρια κτλ. Ἀναγινώσκομεν δὲ διαδοχικῶς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν, ἕκαστον τμῆμα, ὡς ἐὰν ἦτο μόνον, προσθέτοντες τὸ ὄνομα τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἣν ἡ τάξις αὐτοῦ παριστᾷ.

Οἷον, 76937581326 ἀναγινώσκεται 76 *δισεκατομμύρια*, 937 *ἑκατομμύρια*, 581 *χιλιάδες*, 326 *μονάδες*.

## Κανὼν πρὸς γραφὴν ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ.

13. Ἵνα γράψωμεν ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τῶν ἀρχικῶν μονάδων κατὰ σειρὰν, προχωροῦντες ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, καὶ τελευτῶντες εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας· προσέχοντες ὅμως, ἐὰν μὲν ὁλόκληρος ἀριθμὸς ἀρχικῆς τινος μονάδος ἐλλείπῃ, ν᾽ ἀναπληρῶμεν αὐτὸν διὰ τριῶν μηδενικῶν, ἐὰν δ᾽ ἔχῃ ἓν μόνον ἢ δύο ψηφία, νὰ προτάσσωμεν αὐτοῦ δύο ἢ ἓν μηδενικόν.

Οἷον, *ἑπτακόσια ἑξήκοντα τρία ἑκατομμύρια καὶ εἴκοσι ὀκτὼ μονάδες* γράφεται 763000028· ἤτοι γράφονται τρία μηδενικὰ εἰς τὴν θέσιν τῶν ἐλλειπουσῶν χιλιάδων καὶ 028 ἀντὶ 28 διὰ τὸ τμῆμα τῶν μονάδων, ὅπως τὸ τμῆμα τοῦτο ἔχῃ τρία ψηφία.

14. Τὸ ἐκτεθὲν σύστημα ἀριθμήσεως καλεῖται δεκαδικὸν, διότι *βάσις* τοῦ συστήματος τούτου εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10, ἤτοι 10 μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἑπομένης. Πιθανῶς δ᾽ ἐγένετο ἐκλογὴ τοῦ ἀριθμοῦ δέκα, διότι κατὰ πρῶτον ἠρίθμουν διὰ τῶν δακτύλων, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι 10. Ἀλλ᾽ εἶναι προφανὲς ὅτι ἦτο δυνατὸν νὰ ληφθῇ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἄλλος τις ἀριθμὸς, οἷον ὁ 6 ὡς βάσις, καὶ τότε διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν ἔπρεπε νὰ γείνῃ ἡ συνθήκη ὅτι ψηφίον τι τιθέμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑτέρου λαμβάνει ἀξίαν ἑξάκις μείζονα. Κατὰ ταῦτα αἱ τῶν διαφόρων τάξεων μονάδες ἤθελον γράφεσθαι·

| | | |
|---|---|---|
| 10 | τὸ ὁποῖον ἤθελε παριστᾷ | 6 μονάδας |
| 100 | | 36 |
| 1000 | | 216 |
| 10000 | | 1296 |

κτλ.

Ἵνα δὲ γραφῇ ἀριθμός τις ἐν τῷ συστήματι τούτῳ, ἔπρεπε ν' ἀναλυθῇ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, καὶ δὲν ἤθελεν εἶσθαι ἀνάγκη νὰ παραλαμβάνωνται πλειότεραι τῶν 5 μονάδων τάξεώς τινος, ἐπειδὴ 6 ἤθελον ἀποτελεῖ μίαν μονάδα τῆς ἑπομένης τάξεως· 6 ψηφία, περιλαμβανομένου ἐν αὐτοῖς καὶ τοῦ μηδενικοῦ, ἤθελον ἀρκεῖ πρὸς γραφὴν ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

---

### ά. Πρόσθεσις.

*Ὁρισμοί.*

15. Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζεται *ἀριθμὸς περιέχων πάσας τὰς μονάδας, ὅσας περιέχουσι δύο ἢ πλειότεροι ἄλλοι δεδομένοι ἀριθμοί.*

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ταύτης καλεῖται *ἄθροισμα, κεφάλαιον, ἢ ὅλον.*

Ἡ πρόσθεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου +, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *σύν*· οἷον 5+7 σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 7· ἀπαγγέλλεται δὲ 5 *σὺν* 7.

Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἀριθμοὺς, εἶναι περιττὸν νὰ γνωρίζωμεν τὴν φύσιν τῶν μονάδων, ἃς παριστῶσιν, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν ὅτι αἱ μονάδες αὗται εἶναι αἱ αὐταί· οὕτω λέγοντες ὅτι *πέντε καὶ τρία ἀποτελοῦσιν ὀκτώ*, ἐκφράζομεν συνάμα ὅτι *πέντε ἄνθρωποι καὶ τρεῖς ἄνθρωποι ἀποτελοῦσιν ὀκτὼ ἀνθρώπους, πέντε δένδρα καὶ τρία δένδρα ἀποτελοῦσιν ὀκτὼ δένδρα, πέντε ἑκατοντάδες καὶ τρεῖς ἑκατοντάδες ἀποτελοῦσιν ὀκτὼ ἑκατοντάδας κτλ.*

Πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν ὅτι οἱ ἀφηρημένοι ἀριθμοὶ καθ' ἑαυτοὺς οὐδὲν σημαίνουσι, καὶ ὅτι ποιοῦντες διαφόρους ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἐννοοῦμεν μόνον ὅτι ἡ φύσις τῶν μονάδων, ἃς παριστῶσι, δὲν εἶναι εἰσέτι προσδιωρισμένη, ἀλλ' ὅτι δύναται ἀκολούθως νὰ προσδιορισθῇ ὁπωσδήποτε.

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## Πρόσθεσις τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

16. Ἵνα προσθέσωμεν εἰς μονοψήφιον ἀριθμὸν ἕτερον μονοψήφιον, προσθέτομεν εἰς τὸν πρῶτον διαδοχικῶς ἑκάστην τῶν μονάδων τοῦ δευτέρου. Τὸ δ' ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀφοῦ προσθέσωμεν καὶ τὴν τελευταίαν μονάδα τοῦ δευτέρου, εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα· εὐκόλως ἔπειτα ἀποστηθίζομεν τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων τούτων.

Ἐὰν δ' ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν τὸν πρῶτον εἰς τὸν δεύτερον, εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο τὸν τρίτον καὶ οὕτως ἑφεξῆς.

## Ἀρχή, ἐφ' ἧς στηρίζεται ἡ θεωρία τῆς προσθέσεως.

17. Ἡ πρόσθεσις δύο ἢ πλειοτέρων οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων διὰ τῆς ἑπομένης ἀρχῆς· *ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμούς, δυνάμεθα, ἀφοῦ ἀποσυνθέσωμεν αὐτοὺς εἰς διάφορα μέρη, νὰ προσθέσωμεν κατὰ τάξιν τινὰ οἱαδήποτε τὰ μέρη ταῦτα εἰς ἄλληλα, καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα ἐξαγόμενα.*

Τῷ ὄντι εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ οὕτω εὑρεθησόμενον ἐξαγόμενον θέλει περιέχει ἅπαντα τὰ μέρη τῶν ἀριθμῶν τούτων, καὶ ἑπομένως θέλει εἶσθαι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

## Πρόσθεσις δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν.

18. Ἔστωσαν νὰ προστεθῶσιν οἱ δύο ἀριθμοὶ 5673 καὶ 8725.

$$\begin{array}{r} 5673 \\ 8725 \\ \hline 14398 \end{array}$$

Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ἐννοηθῶσιν ἀποσυντεθειμένοι εἰς τέσσαρα μέρη, μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

καὶ χιλιάδας, καὶ δυνάμεθα κατὰ τὴν προηγουμένην ἀρχὴν νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδας καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ ἐξαγόμενα.

Θέλομεν εἶπει λοιπόν· 5 καὶ 3 ἀποτελοῦσιν 8, καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀμέσως τὸ 8 ὡς ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ἀθροίσματος, ἐπειδὴ αἱ ἀκόλουθοι ἐργασίαι παρέχουσι μόνον ἀνωτέρων τάξεων μονάδας, καὶ δὲν δύνανται ἑπομένως νὰ μεταβάλωσι τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων.

2 δεκάδες καὶ 7 δεκάδες ἀποτελοῦσιν 9 δεκάδας, καὶ δυνάμεθα διὰ τὸν αὐτὸν λόγον νὰ γράψωμεν τὸ 9 ὡς ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ἀθροίσματος.

7 ἑκατοντάδες καὶ 6 ἑκατοντάδες ἀποτελοῦσιν 13 ἑκατοντάδας, ἤτοι 1 χιλιάδα καὶ 3 ἑκατοντάδας· γράφομεν 3 ὡς ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, καὶ ἐπιφυλαττόμεθα νὰ προσθέσωμεν τὴν 1 χιλιάδα εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων.

8 χιλιάδες καὶ 5 χιλιάδες ἀποτελοῦσι 13 χιλιάδας, προστιθεμένης δὲ καὶ τῆς 1 χιλιάδος, τῆς προελθούσης ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἑκατοντάδων, ἔχομεν 14 χιλιάδας, ἤτοι 4 χιλιάδας καὶ 1 δεκάδα χιλιάδων, ἄρα τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων τοῦ ἀθροίσματος εἶναι 4, τὸ δὲ τῶν δεκάδων χιλιάδων 1, καὶ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 14398.

Ὅμοιος συλλογισμὸς δύναται νὰ γείνῃ καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πλειότεροι τῶν δύο, καὶ ἄγει ἡμᾶς εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον· ἔπειτα προσθέτομεν διαδοχικῶς τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς τῶν μονάδων· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τοῦτο δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν γραμμήν· ἐὰν δὲ ὑπερβαίνῃ αὐτό, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος τούτου, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἑπομένης πρὸς τὰ ἀρι-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

στερὰ στήλης, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τῆς τελευταίας πρὸς τὰ ἀριστερά.

Οὕτω δὲ ἔχομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο προέρχεται ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων κτλ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

19. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑκάστης στήλης δὲν ὑπερέβαινε τὸ 9, ἤθελεν εἶσθαι ἀδιάφορον ν' ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ νὰ προχωρῶμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, ἢ ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ νὰ προχωρῶμεν πρὸς τὰ δεξιά. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον πολλὰ τῶν ἀθροισμάτων τούτων ὑπερβαίνουσι τὸ 9, ἐὰν ἠρχόμεθα *ἐκ τῶν ἀριστερῶν*, ἠθέλομεν εἶσθαι συχνάκις ὑποχρεωμένοι νὰ ἐπανορθόνωμεν γεγραμμένον ψηφίον, αὐξάνοντες αὐτὸ κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας δεκάδας ἤθελε παράσχει τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἑπομένης στήλης. Διὰ τοῦτο ἀρχόμεθα πάντοτε τῆς προσθέσεως *ἐκ δεξιῶν* καὶ οὐχὶ *ἐξ ἀριστερῶν*.

## *Β'.* Ἀφαίρεσις.

### *Ὁρισμοί.*

20. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένον ἀριθμὸν ἐλαττοῦμεν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ἕτερος· ὁ πρῶτος καλεῖται μειωτέος, ὁ δεύτερος ἀφαιρετέος, ὁ δὲ μετὰ τὴν ἐλάττωσιν ταύτην προκύπτων ἀριθμὸς καλεῖται *ὑπόλοιπον*, *διαφορὰ*, ἢ *ὑπεροχή*.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ πορίζόμεθα ὅτι τὸ ὑπόλοιπον προστιθέμενον εἰς τὸν ἀφαιρετέον παράγει τὸν μειωτέον.

Ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου —, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *πλήν*· οὕτως 9—5 σημαίνει ὅτι ἀπὸ τοῦ 9 πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 5· ἀπαγγέλλεται δὲ, 9 *πλὴν* 5.

21. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν μονοψήφιον ἀφ' ἑτέρου μο-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

νοψηφίου, ἢ καὶ ἀπ' ἀριθμοῦ μὴ ὑπερβαίνοντος αὐτὸν κατὰ πλειοτέρας τῶν 9 μονάδων, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτου διαδοχικῶς ἑκάστην τῶν μονάδων ἐκείνου· ὁ δ' ὑπολειπόμενος ἀριθμὸς μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τῆς τελευταίας ἐκείνου μονάδος εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Εὐκόλως ἔπειτα ἀποστηθίζομεν τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων τούτων, τὰ ὁποῖα ἄλλως δὲν διαφέρουσι τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν· οἷον, γνωρίζοντες ὅτι 7 καὶ 6 ἀποτελοῦσι 13, γνωρίζομεν καὶ ὅτι 13 πλὴν 6 παρέχει 7.

## Ἀρχαὶ, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ θεωρία τῆς ἀφαιρέσεως.

22. Ὁ συλλογισμὸς ὁ ὁδηγῶν ἡμᾶς εἰς τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς ἀρχῶν.

*α.) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀποσυντεθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μερῶν, καὶ ἅπαντα τὰ μέρη τοῦ μείζονος ὑπερβαίνωσι τὰ ἀντιστοιχοῦντα μέρη τοῦ μικροτέρου, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ εὑρεθῇ, προστιθεμένων τῶν διαφορῶν τῶν ἀντιστοιχούντων μερῶν.*

Οἷον, ὁ 8 ὑπερβαίνει τὸν 5 κατὰ 3 μονάδας, καὶ ὁ 11 ὑπερβαίνει τὸν 7 κατὰ 4, τὸ ἄθροισμα 8+11 ὑπερβαίνει τὸ 5+7 κατὰ 3+4, ἢ 7 μονάδας.

*β'.) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, αὐξανομένων ἀμφοτέρων κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Αἱ δύο αὗται ἀρχαὶ εἶναι ἐξ ἐκείνων, αἵτινες δὲν χρήζουσιν ἀποδείξεως.

## Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ τινος ἀφ' ἑτέρου.

23. Ἡ πρώτη τῶν προηγουμένων ἀρχῶν ἀρκεῖ, ὅταν ἅπαντα τὰ ψηφία τοῦ μειωτέου ὑπερβαίνωσι τὰ τῆς αὐτῆς τάξεως ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου. Ἔστω τῷ ὄντι ν' ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 345123 ἀπὸ τοῦ 876296. Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε τὰ ψηφία τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδων νὰ κεῖνται τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἕτερον.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

876296
345123
531173

Ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ μειωτέου, καὶ εὑρίσκομεν τὰ ψηφία τῆς διαφορᾶς· διότι πράττοντες οὕτως ἀφαιροῦμεν προφανῶς ἕκαστον μέρος τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ μειωτέου καὶ ἐνοῦμεν τὰ ἐξαγόμενα τῶν μερικῶν ἀφαιρέσεων.

Ὅταν ἡ προηγουμένη συνθήκη δὲν ὑπάρχῃ, τότε ἡ πρᾶξις εἶναι ἧττον ἁπλῆ. Ἔστω π. χ. ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 52378 ὁ 25843· γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ ἀντιστοιχῶσι·

52378
25843
26535

καὶ λέγομεν 3 μονάδες ἀφαιρούμεναι ἀπὸ 8 μονάδων παρέχουσι 5 μονάδας· 4 δεκάδες ἀπὸ 7 δεκάδων παρέχουσι 3 δεκάδας.

8 ἑκατοντάδες δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ 3· διὰ τοῦτο προσθέτομεν 10 ἑκατοντάδας εἰς τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ μειωτέου καὶ λέγομεν, 8 ἑκατοντάδες ἀφαιρούμεναι ἀπὸ 13 παρέχουσιν 7 ἑκατοντάδας.

Ἐπειδὴ δὲ προσετέθησαν 10 ἑκατοντάδες εἰς τὸν μειωτέον, πρέπει κατὰ τὴν δευτέραν ἀρχὴν, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ, νὰ προστεθῶσιν ἐπίσης 10 ἑκατοντάδες, ἢ 1 χιλιὰς καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον· θέλομεν ἄρα ἐξακολουθήσει τὴν πρᾶξιν, ὡς ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων τοῦ ἀφαιρετέου ἦτον 6. Καὶ θέλομεν εἴπει· 6 χιλιάδες ἀπὸ 2 χιλιάδων δὲν ἀφαιροῦνται· προσθέτομεν 10 χιλιάδας εἰς τὰς τοῦ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

μειωτέου καὶ λέγομεν, 6 χιλιάδες ἀπὸ 12 χιλιάδων παρέχουσιν 6 χιλιάδας. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μειωτέος ηὐξήθη κατὰ 10 χιλιάδας πρέπει ἐπίσης καὶ ὁ ἀφαιρετέος νὰ αὐξηθῇ κατὰ 10 χιλιάδας ἢ 1 δεκάδα χιλιάδων, πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων χιλιάδων τοῦ ἀφαιρετέου ἦτο 3. Ἀφαιρουμένου τοῦ ψηφίου τούτου 3 ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος 5, ὑπολείπεται 2· ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 26535.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ προηγουμένῳ συλλογισμῷ ὑπεθέσαμεν ὅτι μειωτέος τε καὶ ἀφαιρετέος ἔχουσιν ἰσάριθμα ψηφία. Ἐὰν τοῦτο δὲν ὑπάρχῃ, τὰ πρὸς ἀριστερὰν τοῦ ἀφαιρετέου λείποντα ψηφία δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι κατεχόμενα ὑπὸ μηδενικῶν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

*Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀφ' ἑτέρου, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ· ὑποκάτω ἄγομεν γραμμὴν, ἔπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δέ τις τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων ἦναι ἀδύνατος, διότι τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεῖζον τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, προσθέτομεν δέκα μονάδας εἰς τὸ ψηφίον τοῦ μειωτέου, ἀλλὰ τότε ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς ἐὰν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἦτο μεῖζον κατὰ μονάδα. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τῆς ζητουμένης διαφορᾶς.*

## Ἀφαίρεσις διαφορᾶς τινος.

24. *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τινος τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, πρὶν ἢ εὕρωμεν αὐτὴν, πρέπει νὰ ἀφαι-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*ρέσωμεν τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ταύτης.*

Οἷον, διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τινος τὴν διαφορὰν 11—3 δυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ ἀφαιρέσωμεν 11 καὶ νὰ προσθέσωμεν ἀκολούθως 3 εἰς τὸ ἐξαγόμενον.

Διότι ἀφαιροῦντες 11 ἀφαιροῦμεν ἀριθμὸν κατὰ τρεῖς μονάδας μείζονα τοῦ ἀφαιρετέου, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον γίνεται κατὰ τρεῖς μονάδας μικρότερον τοῦ ζητουμένου, ἑπομένως προσθέτοντες τρεῖς μονάδας ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Ἡ ἀπόδειξις αὕτη εἶναι γενικὴ, διότι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 11 καὶ 3 δυνάμεθα νὰ λάβωμεν δύο ἄλλους οἱουσδήποτε.

## Βάσανος τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

25. Βάσανος ἀριθμητικῆς τινος πράξεως εἶναι ἑτέρα πρᾶξις, δι' ἧς βεβαιούμεθα ὅτι ἡ πρώτη ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς· ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν, οἷον προσθέτοντες ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐὰν προηγουμένως προσεθέσαμεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ἐὰν εὕρωμεν καὶ οὕτω τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, εἶναι πιθανώτατον ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς.

Ἡ βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται προστιθεμένης εἰς τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς· ἐὰν ὡς ἄθροισμα εὑρεθῇ ὁ μειωτέος, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς· τοῦτο δὲ στηρίζεται εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως.

---

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΔΗΜΟΤΙΚΗ ΚΟΙΝΟΤΗΤΟΣ ΣΙΑΤΙΣΤΗΣ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

## ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

*Ὁρισμοί.*

26. Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς, δεδομένων δύο ἀριθμῶν, σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν τρίτον, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ πρώτῳ, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ δευτέρου.

Ὁ πρῶτος τῶν ἀριθμῶν τούτων καλεῖται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ *δεύτερος πολλαπλασιαστὴς*, τὸ δ' ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται *γινόμενον*.

Ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ὁμοῦ καλοῦνται *παράγοντες τοῦ γινομένου*. Λέγεται ἐπίσης ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι *πολλαπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου*. Ἐν γένει δὲ καλοῦνται *πολλαπλάσια ἀριθμοῦ τινος*, τὰ γινόμενα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐφ' ἕτερον ἀριθμὸν οἱονδήποτε· οἷον, τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 εἶναι 3,6,9,12,15,18 κτλ. ἤτοι ἅπαξ 3, δὶς 3, τρὶς 3, κτλ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\times$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *ἐπί*· οἷον, $5 \times 7$ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 7, ἀπαγγέλεται δὲ 5 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 7, ἢ ἁπλῶς 5 ἐπὶ 7.

Πρὶν ἢ προχωρήσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξηγήσωμεν ὅρους τινὰς καὶ σημεῖα, ὧν θέλομεν κάμει χρῆσιν ἐν τοῖς ἑξῆς.

*Θεώρημα* καλεῖται πρότασις, ἧς τὸ ἀληθὲς γίνεται καταφανὲς διὰ συλλογισμοῦ, ὅστις καλεῖται *ἀπόδειξις*.

*Πόρισμα* δὲ εἶναι συνέπεια θεωρήματός τινος.



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Πρὸς παράστασιν τῆς ἰσότητος γράφομεν τὸ σημεῖον = τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *ἴσον*· οὕτω 7 + 5 = 12 σημαίνει 7 σὺν 5 ἴσον 12.

Πρὸς παράστασιν τῆς ἀνισότητος γράφομεν τὸ σημεῖον >, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *μεῖζον*, ἢ τὸ σημεῖον <, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *ἔλαττον*· οὕτω 8 > 5 σημαίνει 8 μεῖζον τοῦ 5· τὸ δὲ 7 < 9 σημαίνει 7 *ἔλαττον* τοῦ 9.

Τὰ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος ἢ ἀνισότητος συναπτόμενα καλοῦνται *μέλη* τῆς ἰσότητος ἢ τῆς ἀνισότητος, τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ πρῶτον μέλος, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ δεύτερον μέλος.

Ὅταν θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν πρᾶξίν τινα ἐπ' ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ἐξαγόμενα πράξεων μήπω ἐκτελεσθεισῶν, τότε κλείομεν αὐτοὺς ἐντὸς παρενθέσεων· οὕτως (8—2)—(7—3) σημαίνει ὅτι ἀπὸ τῆς διαφορᾶς τοῦ 8 καὶ 2 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ τοῦ 7 καὶ 3. Ὡσαύτως 7 × (8 + 5) σημαίνει ὅτι ὁ 7 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ 8 καὶ 5.

## Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

27. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ μονοψήφιος ἐπὶ μονοψήφιον, οἷον ὁ 7 ἐπὶ 5. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θέλομεν σχηματίσει ἀριθμὸν ἐκ τοῦ 7 ὅπως ὁ 5 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 5 σχηματίζεται ἐκ τῆς προσθέσεως πέντε μονάδων, θέλομεν εὕρει τὸ ζητούμενον γινόμενον προσθέτοντες πέντε ἀριθμοὺς ἴσους τῷ 7· θέλομεν εἴπει λοιπόν· 7 καὶ 7 ἀποτελοῦσι 14, καὶ 7 21, καὶ 7 28, καὶ 7 35· ὁ ἀριθμὸς 35 εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ 7, ἢ τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 5. Τὰ γινόμενα ταῦτα, τὰ ὁποῖα οἱ ἀρχάριοι πρέπει νὰ ἀποστηθίζωσιν, εὑρίσκονται ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι, ὅστις καλεῖται Πυθαγόρειος, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ ἐφευρέτου.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## Πίναξ πολλαπλασιασμοῦ.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Ἡ πρώτη ὁριζόντιος στήλη περιέχει κατὰ σειρὰν τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμούς.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν δευτέραν προσθέτομεν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης εἰς ἑαυτὸν, καὶ τὸ ἐξαγόμενον γράφομεν ὑποκάτω αὐτοῦ· ἑπομένως ἡ δευτέρα αὕτη στήλη περιέχει τὰ διπλάσια τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἤτοι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν τρίτην ὁριζόντιον στήλην, προσθέτομεν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῆς πρώτης, τουτέστι μετ' ἐκείνου, ὅστις εὑρίσκεται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, τὸ δ' ἐξαγόμενον γράφομεν ὑποκάτω· ἑπομένως ἡ τρίτη ὁριζόντιος στήλη περιέχει τὰ τριπλάσια τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἤτοι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3.

Ὁμοίως διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν τετάρτην ὁριζόντιον στήλην, προσθέτομεν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς τρίτης μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῆς πρώτης, τὸ δ' ἐξαγόμενον

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

γράφομεν ὑποκάτω· ἑπομένως ἡ τετάρτη αὕτη στήλη περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ 4.

Ὁμοίως σχηματίζομεν ἑκάστην τῶν ἑπομένων ὁριζοντίων στηλῶν μέχρι τῆς ἐννάτης, προσθέτοντες ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς προηγουμένης ὁριζοντίου στήλης μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῆς πρώτης· ὅθεν προκύπτει ὅτι αἱ ἐννέα ὁριζόντιοι στῆλαι περιέχουσι τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ 1, 2, 3, . . . . 9.

Ἰδοὺ δὲ πῶς γίνεται χρῆσις τοῦ πίνακος τούτου. Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 5. Κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ πίνακος, τὸ γινόμενον τοῦτο πρέπει νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ ἑβδόμῃ κατακορύφῳ στήλῃ, ἥτις περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ 7 ἐπὶ τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμούς· ἀλλὰ πρέπει νὰ εὑρίσκηται ἐπίσης ἐν τῇ πέμπτῃ ὁριζοντίῳ, ἥτις περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ 5· ἄρα πρέπει νὰ εὑρίσκηται ἐκεῖ, ὅπου αἱ δύο στῆλαι συναντῶνται· οὕτω δ' εὑρίσκεται ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 35.

## Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θεωρία.

28. ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος ἦναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, τὸ γινόμενον εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένου διαδοχικῶς ἑκάστου τούτων ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ προστιθεμένων τῶν μερικῶν γινομένων.* Ἔστω

$$16 = 6 + 7 + 3.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει ὅτι 16 *μονάδες* εἶναι τὸ ἄθροισμα 6 μονάδων, 7 μονάδων, καὶ 3 μονάδων. Ἐπειδὴ δ' ἐνταῦθα ἡ μονὰς ὡς ἀόριστος παριστᾷ οἱονδήποτε ποσόν, ἄρα δύναται νὰ παραστήσῃ καὶ τὴν συλλογὴν ὁσωνδήποτε μονάδων, οἷον πέντε, ἢ μίαν *πεντάδα*· ἄρα δυνάμεθα νὰ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

εἴπωμεν ὅτι 16 πεντάδες εἶναι τὸ ἄθροισμα 6 πεντάδων, 7 πεντάδων καὶ 3 πεντάδων· ἀλλ' ἡ σχέσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτως·

$$16\times5=6\times5+7\times5+3\times5$$

Ἐντεῦθεν βλέπω ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω 16 ἐπὶ 5, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς αὐτὸν ἀποτελοῦντας ἀριθμοὺς 6, 7 καὶ 3 ἐπὶ 5, καὶ νὰ ἀθροίσω τὰ μερικὰ γινόμενα.

29. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, τὸ γινόμενον εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένου διαδοχικῶς τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τούτων καὶ προστιθεμένων τῶν μερικῶν γινομένων.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 9 ἐπὶ 7+5+3, ἤτοι 15. Ἵνα πολλαπλασιάσω τὸν 9 ἐπὶ 15 πρέπει νὰ σχηματίσω τὸ ἄθροισμα 15 ἀριθμῶν ἴσων τῷ 9. Ἀλλ' εἶναι προφανὲς ὅτι ἐὰν ἀθροίσω 7 τοιούτους, ἔπειτα 5 καὶ ἔπειτα 3, καὶ ἀθροίσω τὰ μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα, θέλω εὕρει τὸ αὐτὸ ὡς καὶ πρότερον ἐξαγόμενον· ἑπομένως ἔχομεν

$$9\times(7+5+3)=9\times7+9\times5+9\times3.$$

30. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων, ἤτοι γινομένου πολλαπλασιαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τἀνάπαλιν.*

Ἔστωσαν δύο οἱοιδήποτε ἀριθμοί, οἷον ὁ 7 καὶ 5· πρόκειται δὲ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πενταπλάσιον τοῦ 7 εἶναι ἴσον τῷ ἑπταπλασίῳ τοῦ 5, ἤτοι ὅτι $7\times5=5\times7$.

Πρὸς τοῦτο ἐννοοῦμεν τὸν 7 ἀποσυντεθειμένον εἰς μονάδας διατεθειμένας καθ' ὁριζόντιον στίχον, καὶ ἐπαναλαμβάνομεν 5 τοιούτους στίχους, ὡς ἑξῆς·

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1

Τὸ σύνολον τοῦτο τῶν μονάδων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πενταπλάσιον τοῦ 7, διότι ἔχομεν πέντε ὁριζοντίους στίχους, ὧν ἕκαστος περιέχει 7 μονάδας· δύναται δ' ἐπίσης νὰ θεωρηθῇ καὶ ἑπταπλάσιον τοῦ 5, διότι ἔχομεν ἑπτὰ κατακορύφους στήλας, ὧν ἑκάστη περιέχει 5 μονάδας. Ἄρα τὸ πενταπλάσιον τοῦ 7 καὶ τὸ ἑπταπλάσιον τοῦ 5, ὡς παριστῶντα τὸ αὐτὸ μονάδων ἄθροισμα, εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι.

Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς δύο ἄλλους οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

31. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. γραφομένων ἑνός, δύο, τριῶν κτλ. μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.*

Εἶναι τῷ ὄντι προφανὲς ὅτι τότε ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου, ἑπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός, γίνεται 10κις, 100κις, 1000κις κτλ. μείζων.

Οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ 673 ἐπὶ 10000 εἶναι 6730000.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πολλαπλασιαστὴν μονοψήφιον.

32. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 6973 ἐπὶ 7. Πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ ἀριθμοῦ 6793 (28). Ἔχοντες λοιπὸν ὑπ' ὄψιν τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θέλομεν εἴπει

7κις 3 μονάδες ἀποτελοῦσιν 21 μονάδας·
7κις 7 δεκάδες ἀποτελοῦσι 49 δεκάδας·
7κις 9 ἑκατοντάδες ἀποτελοῦσιν 63 ἑκατοντάδας·
7κις 6 χιλιάδες ἀποτελοῦσι 42 χιλιάδας·

ὑπολείπεται δὲ νὰ προστεθῶσι τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Τοῦτο ἐν τῇ πράξει ποιοῦμεν καθ' ὅσον λαμβάνομεν τὰ μερικὰ γινόμενα, καὶ λέγομεν

6973
7
48811

7κις 3 μονάδες ἀποτελοῦσι 21 μονάδας· γράφομεν 1 μονάδα καὶ κρατοῦμεν 2 δεκάδας· 7κις 7 δεκάδες ἀποτελοῦσι 49 δεκάδας, καὶ 2 αἱ κρατούμεναι ἀποτελοῦσι 51 δεκάδας, γράφομεν 1 δεκάδα καὶ κρατοῦμεν 5 ἑκατοντάδας· 7κις 9 ἑκατοντάδες ἀποτελοῦσι 63 ἑκατοντάδας, καὶ 5 αἱ κρατούμεναι ἀποτελοῦσιν 68 ἑκατοντάδας, γράφομεν 8 ἑκατοντάδας καὶ κρατοῦμεν 6 χιλιάδας· 7κις 6 χιλιάδες ἀποτελοῦσι 42 χιλιάδας, καὶ 6 αἱ κρατούμεναι ἀποτελοῦσι 48 χιλιάδας, τὸ ὁποῖον γράφομεν, καὶ οὕτως ἔχομεν ὡς γινόμενον 48811.

## Πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν.

33. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ 6549 ἐπὶ 300, ὅστις κατὰ τὰ ἀνωτέρω (31) εἶναι ἑκατονταπλάσιον τοῦ 3.

Ἂς γράψωμεν ὑπ' ἀλλήλους τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τῷ πολλαπλασιαστέῳ 6549, ἔπειτα ὑπὸ τὸ σύμπλεγμα τοῦτο δεύτερον ὅμοιον, καὶ τρίτον καὶ τέταρτον κτλ. μέχρις οὗ σχηματισθῶσιν ἑκατὸν τοιαῦτα, ὡς ἑξῆς·

1ον { 6549
6549
6549

2ον { 6549
6549
6549

3ον { 6549
6549
6549

....

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Βλέπομεν ὅτι οὕτως ὁ 6549 εἶναι γεγραμμένος τοσάκις, ὅσον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ 100, ἤτοι 300κις. Ἐὰν προσθέσωμεν πάντας τούτους τοὺς ἀριθμούς, θέλομεν ἔχει τὸ γινόμενον τοῦ 6549 ἐπὶ 300. Ἀλλ' εἶναι προφανὲς ὅτι θέλομεν λάβει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προσθέτοντες τοὺς 3 ἀριθμοὺς ἑκάστου συμπλέγματος, καὶ προσθέτοντες ἀκολούθως τὰ 100 προκύψαντα ἀθροίσματα. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν ἑκάστου συμπλέγματος εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ 6549 ἐπὶ 3· ἵνα σχηματίσωμεν δὲ ἄθροισμα 100 ἀριθμῶν ἴσων τῷ γινομένῳ τούτῳ, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ δύο μηδενικά. Ἄρα, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν 6549 ἐπὶ 300 ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 3, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τούτου νὰ προσγράψωμεν δύο μηδενικά.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συλλογισμοῦ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

*Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ σημαντικὸν ψηφίον ἀκολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον, θεωροῦμενον ὡς παριστῶν ἁπλᾶς μονάδας, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τόσα μηδενικά, ὅσα ὑπάρχουσι πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

## Πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

34. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 789 ἐπὶ 436.

Ἵνα ἐπαναλάβωμεν τὸν 789 436κις ἀρκεῖ (29) νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸν 6κις, 30κις καὶ 400κις, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Ἕκαστος τῶν μερικῶν τούτων πολλαπλασιασμῶν ἀνάγεται εἰς μίαν τῶν δύο προηγουμένων περιπτώσεων, καὶ δὲν ἀπαιτεῖ νέας ἐξηγήσεις. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἀπαγγείλωμεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

*Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα οἱονδήποτε ἐπὶ ἕτερον, πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς τὸν πολλα-*

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*πλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα, ἀφοῦ προηγουμένως γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστου αὐτῶν τόσα μηδενικὰ, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἕπονται μετὰ τὸ παρασχὸν αὐτὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

Ἐν τῇ πράξει τὰ μηδενικὰ ταῦτα δὲν γράφονται, ἀλλὰ μόνον τὰ ψηφία τῶν μερικῶν γινομένων τάσσονται εἰς τὴν θέσιν, ἣν ἤθελον κατέχει μετὰ τὴν προσθήκην τῶν μηδενικῶν τούτων· καὶ δὴ ὡς ἑξῆς·

789
436
4734
2367
3156
344004

## Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

35. Σχηματίζειν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι τὸ πολλαπλασιάζειν τοὺς δύο πρώτους, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον τοῦτο γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Οὕτω $3 \times 5 \times 7 \times 4 \times 9$ σημαίνει τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ 5, ἤτοι ὁ 15, νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7, ὅπερ παρέχει 105· ἔπειτα τοῦτο νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4, ὅπερ παρέχει 420· τέλος δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 9, ὅπερ παρέχει 3780.

## Περὶ δυνάμεων.

36. Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐφ ἑαυτὸν καλεῖται *τετράγωνον*, ἡ *δευτέρα δύναμις* αὐτοῦ. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ληφθῇ τρὶς ὡς παράγων, τὸ γινόμενον καλεῖται *κύβος*, ἡ *τρίτη δύναμις* αὐτοῦ. Γενικῶς δὲ, ἐὰν ἀριθμός τις ληφθῇ 4κις, 5κις, 6κις.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*. . . ὡς παράγων, τὸ γινόμενον καλεῖται τετάρτη, πέμπτη, ἕκτη . . . δύναμις αὐτοῦ.*

Ἐν τῷ δεκαδικῷ συστήματι ἀριθμήσεως αἱ τῶν διαφόρων τάξεων μονάδες, δέκα, ἑκατόν, χίλια κτλ. εἶναι αἱ δυνάμεις τῆς βάσεως δέκα.

Διὰ νὰ γράψωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ τινος γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ὑψηλότερα ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει ποσάκις ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς πρέπει νὰ ληφθῇ ὡς παράγων, καὶ καλεῖται *ἐκθέτης τῆς δυνάμεως*.

Οὕτω $7^3$ σημαίνει $7 \times 7 \times 7$ ἤτοι 343· ἐκθέτης δὲ εἶναι ὁ 3.

## Ἄλλα τινὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θεωρήματα.

37. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε. *Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης ὁπωσδήποτε τῆς τάξεως τῶν παραγόντων τούτων.*

Τὸ σπουδαῖον τοῦτο θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἤδη, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι δύο (30), περιλαμβάνει τὰς ἑξῆς περιπτώσεις·

*α.) Γινόμενόν τι δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων τῶν δύο πρώτων παραγόντων.*

Ἔστω τῷ ὄντι τὸ γινόμενον $5 \times 7 \times 8 \times 9$· πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ $7 \times 5 \times 8 \times 9$. Ἵνα εὑρεθῇ τὸ πρῶτον γινόμενον, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 5 ἐπὶ 7, τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 8, καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ 9. Ἵνα εὑρεθῇ δὲ τὸ δεύτερον, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 7 ἐπὶ 5, τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 8, καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ 9· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 7 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ 7 ἐπὶ 5· ἄρα καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους θέλει εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ γινόμενον.

*β.) Τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων τῶν δύο τελευταίων.*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω τὸ γινόμενον $5\times7\times4$. Πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $5\times4\times7$. Τῷ ὄντι ἂς γράψωμεν ἐν τῇ αὐτῇ ὁριζοντίῳ γραμμῇ ἑπτάκις τὸν ἀριθμὸν 5, καὶ ἂς λάβωμεν τέσσαρας τοιαύτας γραμμάς, τότε θέλομεν σχηματίσει τὸν ἑξῆς πίνακα·

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης ὁριζοντίου σειρᾶς εἶναι $5\times7$, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 4 τοιαῦται σειραὶ, τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος εἶναι $5\times7\times4$. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ ἀριθμῶν εἶναι $5\times4$, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 7 τοιαῦται στῆλαι, τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν τοῦ πίνακος ἀριθμῶν εἶναι $5\times4\times7$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τοῦ πίνακος τούτου ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ, ὅπως καὶ ἂν γείνῃ ἡ πρόσθεσις, ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$5\times7\times4=5\times4\times7.$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.) *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων τῶν δύο τελευταίων.*

Ἔστω τὸ γινόμενον $5\times7\times8\times9\times6$· πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἴσον τῷ $5\times7\times8\times6\times9$.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰ δύο γινόμενα, πρέπει καὶ διὰ τὰ δύο νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον 5 ἐπὶ 7 καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 8. Χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις ταύτας, ἂς παραστήσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ Π· διὰ νὰ ἀποτελειώσωμεν τὸ πρῶτον γινόμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Π ἐπὶ 9 καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 6· διὰ νὰ ἀποτελειώσωμεν δὲ τὸ δεύτερον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τὸ Π ἐπὶ 6, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 9. Θέλομεν δὲ εὕρει καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους τὸ αὐτὸ γινόμενον, διότι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν·

$$\Pi \times 9 \times 6 = \Pi \times 6 \times 9.$$

δ΄.) *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων δύο διαδοχικῶν παραγόντων.*

Ἔστω τὸ γινόμενον $7 \times 8 \times 11 \times 13 \times 9 \times 4$. Πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἴσον τῷ γινομένῳ

$$7 \times 8 \times 13 \times 11 \times 9 \times 4$$

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα γνωρίζομεν ὅτι

$$7 \times 8 \times 11 \times 13 = 7 \times 8 \times 13 \times 11$$

Καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς ἐπὶ 9, καὶ τὰ ἐξαγόμενα πάλιν ἐπὶ 4, εἶναι προφανὲς ὅτι θέλομεν εὕρει γινόμενα ἴσα, ἄρα

$$7 \times 8 \times 11 \times 13 \times 9 \times 4 = 7 \times 8 \times 13 \times 11 \times 9 \times 4,$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.) *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων ὁπωσδήποτε τῶν παραγόντων.*

Γνωρίζομεν (δ΄) ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν δύο διαδοχικοὺς παράγοντας. Διὰ τῆς τοιαύτης μεταθέσεως δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς παράγοντας τοιαύτην θέσιν, οἵαν θέλομεν. Δυνάμεθα τῷ ὄντι νὰ φέρωμεν παράγοντά τινα οἱονδήποτε εἰς τὴν πρώτην θέσιν, μεταθέτοντες αὐτὸν διαδοχικῶς μετὰ τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ. Ἔπειτα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἕτερον παράγοντα καὶ ὁμοίως νὰ τὸν φέρωμεν εἰς τὴν δευτέραν θέσιν, ἔπειτα τρίτον τινὰ εἰς τὴν τρίτην θέσιν, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ πάντες λάβωσι τὴν θέσιν, ἣν θέλομεν.

38. ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ΄. *Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*ἀριθμόν τινα ἐπὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν διαδοχικῶς ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων τούτων.*

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 17 ἐπὶ τὸ γινόμενον $3\times5\times7$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον τῷ ἀριθμῷ 105. Γνωρίζομεν ὅτι

$$17\times105=105\times17$$

Ἀλλ' ἐν τῷ γινομένῳ $105\times17$ δυνάμεθα ἀντὶ 105 νὰ θέσωμεν $3\times5\times7$· διότι διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $3\times5\times7\times17$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει πρῶτον νὰ σχηματισθῇ τὸ γινόμενον $3\times5\times7$ καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 17· ἔχομεν ἄρα·

$$105\times17=3\times5\times7\times17$$

καὶ μετατιθεμένων τῶν παραγόντων τοῦ δευτέρου μέλους

$$105\times17 \text{ ἢ } 17\times105=17\times3\times5\times7$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενόν τι ἐπὶ ἕτερον γινόμενον, σχηματίζοντες μοναδικὸν γινόμενον μετὰ τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ $3\times5\times7$ ἐπὶ $6\times8\times9$. Διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμός τις ἐπὶ τὸ γινόμενον $6\times8\times9$, ἀρκεῖ, ὡς εἴδομεν, νὰ πολλαπλασιασθῇ διαδοχικῶς ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων, ἤτοι ἔχομεν·

$$(3\times5\times7)\times(6\times8\times9)=(3\times5\times7)\times6\times8\times9.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ παρένθεσις τοῦ δευτέρου μέλους δὲν μεταβάλλει οὐδόλως τὰς σεσημειωμένας πράξεις, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν αὐτὴν καὶ νὰ γράψωμεν

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$$(3\times5\times7)\times(6\times8\times9)=3\times5\times7\times6\times8\times9$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. *Ἐν γινομένῳ τινὶ, ἀριθμός τις ὁσωνδήποτε παραγόντων δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐν τῷ γινομένῳ

$$2\times3\times5\times7\times9\times8$$

δύναμαι νὰ ἀντικαταστήσω τοὺς τρεῖς παράγοντας 2,7 καὶ 8 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 112. Τῷ ὄντι ἐν τῷ ὑπ' ὄψιν γινομένῳ δύναμαι νὰ δώσω τὰς τρεῖς πρώτας θέσεις εἰς τὰς παράγοντας 2,7 καὶ 8, τουτέστιν ἔχομεν·

$$2\times3\times5\times7\times9\times8=2\times7\times8\times3\times5\times9.$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸ γινόμενον τὸ ἀποτελοῦν τὸ δεύτερον μέλος, γνωρίζομεν ὅτι κατὰ πρῶτον θέλομεν ἐκτελέσει τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων 2,7,8, τὸ ὁποῖον εἶναι 112· ἄρα ἔχομεν·

$$2\times3\times5\times7\times9\times8=112\times3\times5\times9$$

Ἡ δ' ἰσότης αὕτη ἀποδεικνύει τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεώρημα.

41. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπὶ ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἷς τῶν παραγόντων.*

Ἔστω τῷ ὄντι τὸ γινόμενον

$$2\times3\times5\times7$$

Πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ ἀριθμόν τινα οἱονδήποτε, οἷον ἐπὶ 12, θέλομεν λάβει τὸ νέον γινόμενον

$$2\times3\times5\times7\times12$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν παράγοντα 12 καὶ ἕνα τῶν ἄλλων, οἷον τὸν 5, διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 60, ἄρα τὸ προηγούμενον γινόμενον εἶναι ἴσον τῷ

$$2\times3\times60\times7$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42. Θεώρημα Η'. *Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἔχων ἐκθέτην ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.*

Ἔστω τῷ ὄντι νὰ πολλαπλασιασθῇ $7^3$ ἐπὶ $7^5$, τουτέστιν $7\times7\times7$ ἐπὶ $7\times7\times7\times7\times7$. Ἀρκεῖ (39) νὰ σχηματισθῇ ἓν μοναδικὸν γινόμενον μετὰ τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ· τὸ δὲ γινόμενον τοῦτο εἶναι

$$7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7 \text{ ἢ } 7^8.$$

43. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμοὺς λήγοντας εἰς μηδενικά, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὰ μηδενικά, νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, καὶ νὰ προσθέσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τόσα μηδενικά, ὅσα ὑπάρχουσι καὶ εἰς τοὺς δύο παράγοντας.*

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ 3720000 ἐπὶ 79000, ἤτοι $372\times10^4$ ἐπὶ $79\times10^3$· ἐκ τῶν προηγουμένων γνωρίζομεν ὅτι

$$(372\times10^4)\times(79\times10^3)=372\times10^4\times79\times10^3=$$

$$=372\times79\times10^4\times10^3=372\times79\times10^7.$$

Ἐπειδὴ δὲ $10^7$ εἶναι ἴσον τῷ 10000000, βλέπομεν ὅτι ἵνα σχηματίσωμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 372 ἐπὶ 79 καὶ νὰ γράψωμεν ἑπτὰ μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἐξαγομένου.

## Πολλαπλασιασμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα.

44. Ἐκ τῶν ἐν τοῖς παραγράφοις 28 καὶ 29 θεωρημάτων, ἕπεται ὅτι, *διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἄθροισμά τι ἐπὶ ἕτε-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*ρον ἄθροισμα, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προστεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα.*

Οὕτως $(7+5)(8+9)=7\times8+5\times8+7\times9+5\times9$.

## Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς τινος ἐπὶ δεδομένον ἀριθμόν.

45. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ διαφορὰ 19—7 ἐπὶ 5, ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ πολλαπλασιασθῇ 5 ἐπὶ 19—7.

Ἐὰν πολλαπλασιασθῇ 5 ἐπὶ 19, λαμβάνομεν πολλαπλασιαστὴν μείζονα κατὰ 7 μονάδας τοῦ δεδομένου· ἄρα τὸ γινόμενον εἶναι μεῖζον τοῦ ζητουμένου κατὰ 7 πολλαπλασιαστέους, ἢ κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 5· ἵνα εὑρεθῇ ἑπομένως τὸ ζητούμενον γινόμενον, πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $5\times19$ τὸ $5\times7$, ἄρα ἔχομεν

$$(19-7)5=19\times5-7\times5$$

*Ἑπομένως, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν διαφοράν τινα ἐπ' ἀριθμὸν οἱονδήποτε, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μειωτέον τε καὶ ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.*

## Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων γινομένου τινός.

46. ΘΕΩΡΗΜΑ Θ'. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου δύο παραγόντων εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἢ τῷ ἀθροίσματι τούτῳ ἠλαττωμένῳ κατὰ μονάδα.*

Ὑποτεθείσθω, παραδείγματος χάριν, ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχει ἓξ ψηφία. Εἶναι τότε τοὐλάχιστον ἴσος τῇ μονάδι ἀκολουθουμένῃ ὑπὸ πέντε μηδενικῶν, καὶ μικρότερος

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ ἓξ μηδενικῶν. Τὸ γινόμενον εἶναι λοιπὸν τοὐλάχιστον ἴσον τῷ πολλαπλασιαστέῳ ἀκολουθουμένῳ ὑπὸ πέντε μηδενικῶν, καὶ μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀκολουθουμένου ὑπὸ ἓξ μηδενικῶν· ἔχει ἑπομένως πέντε ψηφία τοὐλάχιστον, καὶ ἓξ τὸ πολὺ περισσότερα ἡ ὁ πολλαπλασιαστέος.

---



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

## ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

### Ὁρισμοί.

47. Ἡ διαίρεσις, εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς, δεδομένων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος δεικνύων ποσάκις ὁ δεύτερος περιέχεται ἐν τῷ πρώτῳ.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται *διαιρετέος*, ὁ δεύτερος *διαιρέτης*, ὁ δὲ τρίτος *πηλίκον*.

Ἡ διαίρεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου : τιθεμένου μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου. Οὕτω 12:3 σημαίνει ὅτι ὁ 12 πρόκειται νὰ διαιρεθῇ διὰ 3· ἀπαγγέλλεται δέ· 12 διαιρούμενον διὰ 3, ἢ ἁπλούστερον, 12 διὰ 3.

Δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς τὸν διαιρέτην ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις, ὁσάκις τοῦτο εἶναι δυνατόν· τότε δὲ θέλει συμβῇ θάτερον, ἢ μηδὲν θέλει ὑπολειφθῇ, καὶ τότε λέγεται ὅτι ἡ *διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς*, ἢ θέλει ὑπολειφθῇ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ὅστις καλεῖται *ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως*. Καὶ κατὰ τὰς δύο δὲ περιπτώσεις τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν γενομένων ἀφαιρέσεων.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, νὰ διαιρεθῇ ὁ 35 διὰ 7. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν ποσάκις ὁ 7 περιέχεται ἐν τῷ 35· τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ 35 ἀφαιρεθῇ ὁ 7 τοσάκις, ὁσάκις τοῦτο εἶναι δυνατόν· θέλομεν λοιπὸν εἴπει, 35—7=28. 28—7=21. 21—7=14. 14—7=7. 7—7=0. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 35 πεντάκις τὸν 7, οὐδὲν ὑπολείπεται· ἄρα ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 5.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 35 σύγκειται ἐκ πέντε μερῶν ἴσων τῷ 7, ἕπεται ὅτι $35=7\times5$. Ἄρα, *ὅταν ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς, ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.*

Ἐπειδὴ δὲ δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ πηλίκον ὡς πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ διαιρέτης ὡς πολλαπλασιαστής, ἤτοι $35=5\times7$, ἕπεται ὅτι ὁ διαιρετέος σύγκειται ἐκ τοσούτων μερῶν ἴσων τῷ πηλίκῳ, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ διαιρέτου. Ὑπὸ τὴν ἔποψιν δὲ ταύτην ἡ διαίρεσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς *πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένος ἀριθμὸς μερίζεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες δευτέρου ἀριθμοῦ.* Ἐκ ταύτης μάλιστα τῆς ἐπόψεως προῆλθον αἱ ὀνομασίαι, *διαίρεσις, διαιρετέος* καὶ *διαιρέτης.*

Ἔστω πρὸς τούτοις νὰ διαιρεθῇ ὁ 38 διὰ 7. Ἐὰν, ὡς ἀνωτέρω, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 38 τὸν 7, ὁσάκις τοῦτο εἶναι δυνατὸν, θέλομεν ἴδει ὅτι ὁ 7 περιέχεται ἐν τῷ 38 πεντάκις, ὑπολειπομένου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 3· ἑπομένως ἐνταῦθα τὸ πηλίκον εἶναι 5, τὸ δ' ὑπόλοιπον 3. Δηλονότι ὁ 38 σύγκειται ἐκ τοῦ πενταπλασίου τοῦ 7, καὶ προσέτι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 3, ἤτοι ἔχομεν $38=7\times5+3$.

Βλέπομεν ἐντεῦθεν ὅτι, *ἐν πάσῃ διαιρέσει, ἥτις δὲν ἐκτελεῖται ἀκριβῶς, ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.*

Παρατηρητέον δὲ ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ μέγιστον ἐν τῷ διαιρετέῳ περιεχόμενον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου. Ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως ταύτης στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ 1, 2, 3, 4 . . . . καὶ βλέποντες ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον τῶν γινομένων τούτων, τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ διαιρετέῳ· ὁ τὸ γινόμενον τοῦτο παρέχων πολλαπλασιαστὴς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

48. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ διαίρεσις δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ γείνῃ διὰ τῆς διαδοχικῆς ἀφαιρέσεως τοῦ διαιρέτου ἀπὸ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τοῦ διαιρετέου, ἢ καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 1,2,3,4 . . . Ἀλλ' οὕτως ἡ πρᾶξις ἤθελεν ἀποβῆ μακροτάτη, ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι μεγάλοι ἀριθμοί. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐκθέσωμεν τὰ μέσα, δι' ὧν ἡ πρᾶξις αὕτη γίνεται εὐκόλως καὶ συντόμως.

## Περίπτωσις τῆς διαιρέσεως, καθ' ἣν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

49. Ἵνα ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε διαίρεσιν, πρέπει προηγουμένως νὰ γνωρίζωμεν τὴν λύσιν τοῦ ἑξῆς ζητήματος·

*Εὑρεῖν τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος, ὅταν τοῦτο ἦναι μονοψήφιον.*

Ἀναγνωρίζομεν δὲ ὅτι τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος εἶναι μονοψήφιον, ὅταν γράφοντες ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, λαμβάνωμεν ἀριθμὸν μείζονα τοῦ διαιρετέου· τῷ ὄντι τότε ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ἑπομένως οὗτος περιέχεται ἧττον ἢ δεκάκις ἐν ἐκείνῳ.

Τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις·

α.) *Ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.*

Κατὰ τὴν περίστασιν ταύτην ὁ πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δεικνύει ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ διαιρετέῳ, καὶ ἐντεῦθεν γίνεται γνωστὸν τὸ πηλίκον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 58 διαιρούμενον διὰ τοῦ 7 παρέχει πηλίκον 8, διότι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 7, τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ 58 εἶναι τὸ 56, ἢ $7 \times 8$· τὸ δ' ὑπόλοιπον εἶναι 2.

β'.) *Ὁ διαιρέτης ἀποτελεῖται ὑφ' ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν.*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐπειδὴ ὁ πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καθιστᾷ γνωστὸν τὸ γινόμενον τοῦ τοιούτου διαιρέτου ἐπὶ τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, δυνάμεθα ἀμέσως νὰ εὕρωμεν ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον τῶν γινομένων τούτων τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ διαιρετέῳ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 52876 διὰ 8000. ὁ 52876 εἶναι μείζων τοῦ 48000, ἤτοι τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ διαιρέτου, καὶ ἐλάσσων τοῦ 56000, ἤτοι τοῦ ἑπταπλασίου τοῦ διαιρέτου· ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 6, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ 52876 πρὸς τὸν 48000, ἤτοι 4876.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι μόνον αἱ χιλιάδες τοῦ διαιρετέου προσδιορίζουσι τὸ πηλίκον· τῷ ὄντι, παντὸς πολλαπλασίου τοῦ διαιρέτου 8000 ὄντος ἀριθμοῦ τινος χιλιάδων, τὸ μέγιστον τῶν πολλαπλασίων τούτων τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χιλιάδων, ἃς οὗτος περιέχει. Ἠδυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον διαιροῦντες 52 δι' 8. Ἐν γένει δέ, *ὅταν ὁ διαιρέτης σύγκηται ἐξ ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν, ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὰ μηδενικὰ ταῦτα, ὡς καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιά.*

Οὕτως ἐν τῇ διαιρέσει τοῦ 653875 διὰ 90000, τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 65 διὰ 9, ἑπομένως εἶναι 7.

γ΄.) *Ὁ διαιρέτης εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός.*

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 68735 διὰ 7894.

Γνωρίζοντες κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 10, ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτὸ πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην διαδοχικῶς ἐπὶ 1, 2, 3 . . . μέχρι τοῦ 9, καὶ παύοντες, ὅταν δύο διαδοχικὰ γινόμενα περιλαμβάνωσι τὸν διαιρετέον.

Ἂν καὶ ἡ μέθοδος αὕτη δὲν ἦναι λίαν μακρά, διότι τὸ πολὺ ἐννέα πολλαπλασιασμοὺς θέλομεν ἐκτελέσει, ἐν τού-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τοις εἶναι ὠφέλιμον νὰ εὕρωμεν τρόπον συντομώτερον· τοῦτο δὲ γίνεται διὰ τῆς ἑξῆς παρατηρήσεως.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν πάντα τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου ψηφία διὰ μηδενικῶν, καὶ ζητήσωμεν τὸ εἰς τὸν νέον τοῦτον διαιρέτην ἀντιστοιχοῦν πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὐκόλως κατὰ τὰ προηγούμενα προσδιορίζεται, τὸ πηλίκον τοῦτο δύναται μὲν νὰ ἦναι ἴσον, ἢ μεῖζον τοῦ ζητουμένου, οὐδέποτε ὅμως μικρότερον. Διότι, ἀντικαθισταμένων τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου, πλὴν τοῦ πρώτου, διὰ μηδενικῶν, οὗτος ἐλαττοῦται, ἑπομένως τὸ πηλίκον ἢ θέλει αὐξήσει, ἢ θέλει μείνει τὸ αὐτό, ἀλλ' οὐδέποτε δύναται νὰ ἐλαττωθῇ. Ὀλίγαι δὲ δοκιμαὶ ἀρκοῦσι καθ' ἑκάστην περίπτωσιν, ἵνα ἴδωμεν, ἐὰν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον ἦναι μεῖζον τοῦ ζητουμένου, καὶ πόσαι μονάδες πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 4573 διὰ 782. Διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον 4573 διὰ 700. Τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτὸ (6'.) καὶ τὸ τῆς διαιρέσεως τοῦ 45 δι' 7, ἤτοι 6. Ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι *περίπου* 6, καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ ὅριον τοῦτο. Ἵνα δοκιμάσωμεν δὲ τὸ ψηφίον 6, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 6,5, 4, . . . μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου. 782 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 6 δίδει γινόμενον 4692, τὸ ὁποῖον εἶναι μεῖζον τοῦ διαιρετέου. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 5 εἶναι 3910, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου 4573· ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 5, διότι ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται μὲν πεντάκις ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ἑξάκις.

50. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἴδομεν ὅτι ἀντικαθιστῶντες τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου, πλὴν τοῦ πρώτου, διὰ μηδενικῶν, εὑρίσκομεν ἀνώτερον ὅριον τοῦ πηλίκου, ἤτοι ὅριον, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται τὸ πηλίκον νὰ ὑπερβῇ. Δυνάμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ εὕρωμεν ὅριον κατώτερον αὐτοῦ. Ἂς ἀναλά-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ὦμεν τῷ ὄντι τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Ἀντὶ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν διαιρέτην 782 διὰ τοῦ 700, ἂς ἀντικαταστήσωμεν αὐτὸν διὰ 800. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 4573 διὰ 800 εἶναι τὸ αὐτὸ (49, 6′.), καὶ τὸ τῆς διαιρέσεως τοῦ 45 διὰ 8, ἤτοι 5. Ἀλλ᾽ ἀντικαταστήσαντες τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ 800, ηὐξήσαμεν αὐτὸν, καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον ἠλαττώθη, ἢ ἔμεινε τὸ αὐτό. Ἄρα τὸ πηλίκον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ηὔξησε, καὶ ἐπειδὴ χωρὶς ν᾽ αὐξήσῃ εἶναι 5, εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἡ ἀληθὴς ἀξία αὐτοῦ εἶναι *τοὐλάχιστον* 5.

Ἐνίοτε διὰ τῆς προηγουμένης παρατηρήσεως προσδιορίζεται ἀμέσως ἀκριβῶς τὸ πηλίκον. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 6378 διὰ 875. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν διαιρέτην διὰ 800, τὸ πηλίκον εἶναι (49, 6′.) 7· ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι *τὸ πολὺ* 7. Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὸν διαιρέτην διὰ 900, εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον πάλιν 7· τὸ πηλίκον εἶναι λοιπὸν *τοὐλάχιστον* 7. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν ἀριθμὸν 7, καὶ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ 7, ἄρα εἶναι ἀκριβῶς 7.

51. Ὅταν τὸ ἀνώτερον ὅριον τοῦ πηλίκου διαφέρῃ τοῦ κατωτέρου, τότε συνήθως ὀλίγαι τινὲς πράξεις ἀρκοῦσι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀληθοῦς ψηφίου τοῦ πηλίκου.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 18213 διὰ 2976. Ἐνταῦθα κατὰ τὰ προηγούμενα τὸ ἀνώτερον ὅριον εἶναι τὸ 9, τὸ δὲ κατώτερον τὸ 6· ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν 9,8,7,6. Ἵνα εὕρωμεν ποῖος τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην διαδοχικῶς ἐπὶ 9,8,7,6, τὸ δὲ ζητούμενον ψηφίον εἶναι τὸ πρῶτον παρέχον γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου, ἢ ἴσον αὐτῷ. Ἐν τῷ ἡμετέρῳ παραδείγματι βλέπομεν ὅτι

$$2976 \times 9 = 26784,$$
$$2976 \times 8 = 23808,$$
$$2976 \times 7 = 20832,$$
$$2976 \times 6 = 17856.$$

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἄρα 6 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἀλλ' ὑπάρχει τρόπος ἁπλούστερος τοῦ προηγουμένου, δι' οὗ *κατὰ τὰς πλείστας περιστάσεις* ἀμέσως προσδιορίζομεν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου. Συνίσταται δὲ οὗτος εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ δύο πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ δοκιμάσωμεν, καὶ τὸ γινόμενον νὰ συγκρίνωμεν πρὸς τὰ δύο, ἢ πρὸς τὰ τρία ψηφία πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, καθ' ὅσον οὗτος ἔχει ἰσάριθμα ψηφία μετὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ ἓν περισσότερον.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι πολλαπλασιάζομεν τὸν 29 διαδοχικῶς ἐπὶ 9,8,7,6 καὶ συγκρίνομεν τὰ γινόμενα πρὸς τὸν 182, βλέπομεν δ' ὅτι

$$29 \times 9 = 261$$
$$29 \times 8 = 232$$
$$29 \times 7 = 203$$
$$29 \times 6 = 174$$

Ἄρα 6 εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἐπειδὴ αὐτὸ πρῶτον παρέχει γινόμενον 174 μικρότερον τοῦ 182.

Μικρὰ δὲ περὶ τοὺς λογισμοὺς ἕξις ἀρκεῖ διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ ἐκτελῶμεν τοὺς τοιούτους πολλαπλασιασμοὺς, χωρὶς νὰ γράφωμεν οὐδὲν, καὶ νὰ συγκρίνωμεν συγχρόνως τὰ τοιαῦτα γινόμενα πρὸς τὸ ἀντιστοιχοῦν τοῦ διαιρετέου μέρος.

Τὸ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρισκόμενον ψηφίον *κατὰ μὲν τὰς πλείστας περιστάσεις* εἶναι αὐτὸ τὸ ζητούμενον, *σπανιώτερον δὲ τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον*, οὐχὶ δὲ καὶ κατὰ πλείονας μονάδας.

Διότι, ὅταν τὸ οὕτως εὑρισκόμενον πηλίκον ἦναι μεῖζον τοῦ ἀληθοῦς, τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου, ἐπὶ τὸ μέρος τοῦ διαιρέτου, τὸ ὁποῖον μένει, ἀφαιρεθέντων τῶν δύο πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων αὐτοῦ· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο οὐδέποτε δύναται νὰ ἀποτελέσῃ μίαν μονάδα τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ διαιρέτου· ὥστε, ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸ πηλίκον τοῦτο κατὰ

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

μονάδα, εἴμεθα βέβαιοι ὅτι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην θέλει δώσει γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου· διότι τὸ γινόμενον τοῦτο ἕνεκα τῆς ἀφαιρέσεως μιᾶς μονάδος ἀπὸ τοῦ πηλίκου ἐγένετο μικρότερον κατὰ τὸν διαιρέτην ὁλόκληρον, ἑπομένως κατ' ἀριθμὸν μείζονα τοῦ γινομένου τοῦ εὑρεθέντος τὸ πρῶτον πηλίκου ἐπὶ τὸ μέρος τοῦ διαιρέτου, τὸ ὁποῖον μένει, ἀφαιρεθέντων τῶν δύο πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων αὐτοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 182134 διὰ 22895. λέγομεν 18 διὰ 2 δίδει 9· καὶ 18 διὰ 3 δίδει 6· ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν 9,8,7,6. Τὸ γινόμενον $22 \times 9$, ἢ 198, εἶναι μεῖζον τοῦ 182, ὥστε τὸ 9 εἶναι μεῖζον τοῦ ζητουμένου πηλίκου. $22 \times 8$, ἢ 176, εἶναι μικρότερον τοῦ 182, ὥστε ἴσως 8 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 8 εἶναι μεῖζον τοῦ διαιρετέου, βεβαίως τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ 8 ἀριθμός, ἤτοι ὁ 7.

Ἔστω προσέτι νὰ διαιρεθῇ 187862 διὰ 19653· 18 διαιρούμενον διὰ 1 δίδει 18 ὡς ἀνώτερον ὅριον τοῦ ζητουμένου πηλίκου· ἀλλ' ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι τὸ πηλίκον δὲν ὑπερβαίνει τὸν 9, λαμβάνομεν ὡς ἀνώτερον ὅριον αὐτὸν τὸν 9. Διαιροῦντες δὲ τὸν 18 διὰ 2 εὑρίσκομεν ὡς κατώτερον ὅριον πάλιν 9· ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 9.

## Γενικὴ περίπτωσις τῆς διαιρέσεως.

52. Ὅταν τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος ἦναι μεῖζον τοῦ 10, ἐκφράζεται διὰ πλειοτέρων ψηφίων, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ζητήσωμεν διαδοχικῶς.

Κατὰ πρῶτον πρέπει νὰ ἴδωμεν, πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἀνωτάτων μονάδων τοῦ πηλίκου· τοῦτο δὲ τὸ ζήτημα ὑποδιαιρεῖται εἰς δύο· ά.)τὸν προσδιορισμὸν τῆς τάξεως τῶν μονάδων τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ πηλίκου· β'.) τὴν εὕρεσιν αὐτοῦ τούτου τοῦ ψηφίου

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 7539652 διὰ 365.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν τάξιν τῶν ἀνωτάτων μονάδων τοῦ πηλίκου, χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρέτου τόσα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται ὅπως σχηματισθῇ ἀριθμὸς μείζων μὲν τοῦ διαιρέτου, ἐλάσσων δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐν τῷ ἡμετέρῳ παραδείγματι εἶναι 753· ἐπειδὴ δὲ παριστᾷ δεκάδας χιλιάδων, λέγω ὅτι καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου θέλει παριστᾷ δεκάδας χιλιάδων, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι τὸ πηλίκον ἔσεται μεῖζον τοῦ 10000 καὶ ἔλασσον τοῦ 100000.

1.) Τὸ πηλίκον εἶναι μεῖζον τοῦ 10000· διότι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 10000 εἶναι 365 δεκάδες χιλιάδων, ἐνῷ ὁ διαιρετέος περιέχει 753 δεκάδας χιλιάδων.

2.) Τὸ πηλίκον εἶναι ἔλασσον τοῦ 100000· διότι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοῦτο εἶναι 36500000, ὅστις εἶναι ἀριθμὸς μείζων τοῦ διαιρετέου.

Ὁ συλλογισμὸς οὗτος εἶναι γενικὸς καὶ ἄγει ἡμᾶς εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα·

*Ἐὰν χωρίσωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται ὅπως σχηματισθῇ ἀριθμὸς μείζων μὲν τοῦ διαιρέτου, ἐλάσσων δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου ἐκφράζει μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως ταῖς τοῦ ὑπὸ τῶν ψηφίων τούτων ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ.*

53. Γνωστοῦ ἤδη ὄντος ὅτι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου παριστᾷ δεκάδας χιλιάδων, ὑπολείπεται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία αὐτοῦ. Τὸ ζήτημα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λυθῇ, εἶναι τὸ ἑξῆς· πόσαι δεκάδες χιλιάδων περιέχονται ἐν τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 7539652 διὰ 365; Ἢ ἄλλως, τίς εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς δεκάδων χιλιάδων, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 365 παρέχει γινόμενον μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ 7539652; Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ δεκάδων χιλιάδων πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 365 παρέχει μόνον δεκά-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

δας χιλιάδων, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο περιέχεται ὁλόκληρον ἐν τῷ 753, διότι τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ διαιρέτου ἐκφράζει μονάδας κατωτέρας τάξεως. Ἄρα τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 365 παρέχει γινόμενον μικρότερον, ἢ ἴσον τῷ 753, ἑπομένως εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 753 διὰ 365.

Ὁ συλλογισμὸς οὗτος εἶναι γενικὸς καὶ ἄγει ἡμᾶς εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα.

*Ἀφοῦ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται πρὸς σχηματισμὸν ἀριθμοῦ μείζονος μὲν τοῦ διαιρέτου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ διαιρέτου εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου.*

Διαιροῦντες 753 διὰ 365 κατὰ τὸν παράγραφον 50 εὑρίσκομεν πηλίκον 2· ἑπομένως τὸ ζητούμενον πηλίκον περιέχει 2 δεκάδας χιλιάδων.

54. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀριθμὸς 753, ὃν χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, καλεῖται *μερικὸς διαιρετέος*. Μερικός τις διαιρετέος εἶναι πάντοτε μείζων τοῦ διαιρέτου καὶ ἐλάσσων τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ. Δύναται δὲ νὰ ἔχῃ ἴσα ψηφία τοῖς τοῦ διαιρέτου, ἢ ἓν περισσότερον.

55. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς εὑρεθείσας 2 δεκάδας χιλιάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην 365, τὸ δὲ γινόμενον 730 δεκάδας χιλιάδων ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, ἔχομεν τὸ ὑπόλοιπον, ἤτοι τὴν ὑπεροχὴν τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 2 δεκάδας χιλιάδων. Πρὸς συμπλήρωσιν δὲ τοῦ πηλίκου ὑπολείπεται νὰ εὑρεθῇ ποσάκις ὁ διαιρέτης περιέχεται ἐν τῷ ὑπολοίπῳ τούτῳ, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ διαιρέτου 365.

Ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

*Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἀφαιρέ-*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*σωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης, διαιρούμενον διὰ τοῦ διαιρέτου, θέλει δώσει τὸ σύνολον τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς 2 δεκάδας χιλιάδων τοῦ πηλίκου, ἤτοι τῶν 730 δεκάδων χιλιάδων, εὑρίσκεται, ἀφαιρουμένων τῶν 730 ἀπὸ τῶν 753 δεκάδων χιλιάδων τοῦ διαιρετέου, καὶ προσγραφομένων κατόπιν τῆς διαφορᾶς 23 τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου.

56. Ἐπὶ τῶν προηγουμένων στηριζόμενοι δυνάμεθα ἤδη νὰ ἐκτελέσωμεν διαίρεσίν τινα οἱανδήποτε· διότι δι' αὐτῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἡ δὲ ἀναζήτησις τῶν ἄλλων ἀνάγεται εἰς νέαν τινὰ διαίρεσιν. Ἐφαρμόζοντες τὰ αὐτὰ εἰς τὴν δευτέραν ταύτην διαίρεσιν, εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἡ δὲ ἀναζήτησις τῶν λοιπῶν ἀνάγεται εἰς τρίτην διαίρεσιν· διὰ ταύτης θέλομεν εὕρει τὸ τρίτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ συστήσωμεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

*α.) Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἑτέρου, χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου ψηφία ἱκανὰ ὥστε τὸ σύνολον αὐτῶν νὰ ἀποτελῇ ἀριθμὸν μεῖζον τοῦ διαιρέτου, ἢ τοὐλάχιστον ἴσον αὐτῷ, μικρότερον ὅμως τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ· διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ διαιρέτου, εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως ταῖς τοῦ πρώτου τούτου μερικοῦ διαιρετέου.* (52 καὶ 53).

*β'.) Εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, δι' ἧς εὑρέθη τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, καὶ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου· ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμός, διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου, θέλει δώσει τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ πηλίκου.* (55).

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

γ΄.) *Ἐφαρμόζοντες εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν τοὺς ἐκτεθέντας κανόνας, εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ νέου πηλίκου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ δεύτερον τοῦ ζητουμένου, τὰ δὲ λοιπὰ θέλουσιν εὑρεθῆ διὰ νέας τινὸς διαιρέσεως.*

Τὸ διὰ τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως εὑρισκόμενον ψηφίον θέλει εἶσθαι τὸ δεύτερον τοῦ πηλίκου τότε μόνον, ὅταν αἱ μονάδες, ἃς ἐκφράζει, ἦναι τάξεως ἀμέσως κατωτέρας τῶν τοῦ πρώτου ψηφίου. Ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, πρέπει νὰ τεθῶσι μεταξὺ αὐτῶν ἕν, ἢ πλειότερα μηδενικά. Ἡ περίπτωσις αὕτη παρουσιάζεται, ὅταν μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου, πρέπει νὰ προσγραφῶσι πλειότερα τοῦ ἑνὸς νέα ψηφία εἰς τὴν διαφορὰν ταύτην, ἵνα κατασταθῇ μείζων τοῦ διαιρέτου καὶ ἀποτελέσῃ τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον. Τῷ ὄντι εἶναι προφανὲς ὅτι κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ ὑπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου ἐκφραζόμεναι μονάδες δὲν θέλουν εἶσθαι τάξεως ἀμέσως κατωτέρας ἐκείνων, ἃς ἐκφράζει ὁ πρῶτος.

δ΄.) *Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὴν πρᾶξιν, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς μερικὸν διαιρετέον μικρότερον τοῦ διαιρέτου. Ὁ διαιρετέος οὗτος εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.*

## Τρόπος καθ' ὃν ἡ πρᾶξις διατάσσεται.

57. Ἵνα ἐκτελέσωμεν διαίρεσίν τινα, γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ κατακορύφου γραμμῆς, ὑπὸ δὲ τὸν διαιρέτην ἄγομεν ὁριζόντιον. Ἔπειτα χωρίζομεν τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον, καὶ γράφομεν προσωρινῶς ὑπὸ τὸν διαιρέτην, ὡς πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου διαιρέτου, τὸ κατὰ προσέγγισιν εὑρισκόμενον ψηφίον κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα. Πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον τοῦτο ψηφίον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου. Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις αὕτη δὲν ἦναι δυνατὴ, ἐλατ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τοῦμεν κατὰ μονάδα τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, μέχρις οὗ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην εἶναι μικρότερον, ἢ ἴσον τῷ διαιρετέῳ· ἐκτελοῦμεν τότε τὴν ἀφαίρεσιν, χωρὶς νὰ γράφωμεν αὐτὸ τὸ γινόμενον, ἀφαιροῦντες τὰ διάφορα αὐτοῦ ψηφία, καθόσον λαμβάνομεν αὐτά. Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, ἢ, ἐὰν ἦναι ἀνάγκη, τὰ δύο, τὰ τρία ..... πρῶτα τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, μέχις οὗ ἀποτελεσθῇ δεύτερος μερικὸς διαιρετέος μεῖζων τοῦ διαιρέτου. Ὁ μερικὸς οὗτος διαιρετέος διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου παρέχει τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρις οὗ εὕρωμεν μερικὸν διαιρετέον μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Οἱ λογισμοὶ τῆς διαιρέσεως τοῦ 7539652 διὰ τοῦ 365 γίνονται ὡς ἑξῆς·

| | |
|---|---|
| 7539652 | 365 |
| 2396 | 20656 |
| 2065 | |
| 2402 | |
| 212 | |

Χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὸν ἀριθμὸν 753, ὅστις ἀποτελεῖ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ 365· βλέπομεν ἀμέσως ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 2. γράφομεν λοιπὸν 2 εἰς τὸ πηλίκον· πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2 τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 753· τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 23. Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου γράφομεν τὸ πρῶτον τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, ἤτοι τὸ 9, καὶ σχηματίζομεν τὸν μερικὸν διαιρετέον 239· ἐπειδὴ ὅμως οὗτος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 6 τοῦ διαιρετέου. Οὕτως ἔχομεν τὸν μερικὸν διαιρετέον 2396, ὃν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ 365· λέγομεν δὲ 23 διὰ 3 δίδει

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

πηλίκον 7· ἀλλ᾽ 7 ἐπὶ 36 δίδει γινόμενον 252 μεῖζον τοῦ 239· ἄρα πρέπει νὰ λάβωμεν 6. Ἀλλὰ τὸ ψηφίον τοῦτο 6 δὲν πρέπει νὰ γράψωμεν ἀμέσως μετὰ τὸ 2, διότι τὸ μὲν 2 παριστᾷ δεκάδας χιλιάδων, τὸ δ᾽ 6 μόνον ἑκατοντάδας, ὥστε μετὰ τὸ 2 πρέπει νὰ γραφῇ ἓν 0, ἵνα κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων, μετ᾽ αὐτὸ δὲ τὸ 6. Τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 2396 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 206. Πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράφομεν τὸ πρῶτον τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, ὅσων δὲν ἐγένετο εἰσέτι χρῆσις, ἤτοι τὸ 5 (ὅπερ συνήθως λέγεται *καταβιβάζομεν* τὸ 5), καὶ σχηματίζομεν τὸν μερικὸν διαιρετέον 2065, ὃν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 365. 20 διὰ 3 δίδει πηλίκον 6, ἀλλ᾽ 6 ἐπὶ 36 δίδει 216, μεῖζον τοῦ 206, ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν 5. Τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 2065 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 240. Τὸ δὲ ψηφίον 5 γράφομεν ἀμέσως μετὰ τὸ 6, διότι παριστᾷ δεκάδας, τὸ δὲ ἓξ ἑκατοντάδας· πλησίον τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν καὶ τὸ τελευταῖον τοῦ διαιρετέου ψηφίον 2· καὶ οὕτω σχηματίζομεν τὸν μερικὸν διαιρετέον 2402, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ 365· 24 διὰ 3 δίδει πηλίκον 8, ἀλλὰ καὶ μικρὰ περὶ τοὺς λογισμοὺς ἔξις δεικνύει ὅτι τὸ 8 εἶναι ὑπὲρ τὸ δέον μέγα· δοκιμάζομεν λοιπὸν τὸ 7, ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶναι μεῖζον τοῦ ζητουμένου· διότι 7 ἐπὶ 36 δίδει 252, μεῖζον τοῦ 240· ὥστε λαμβάνομεν 6, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 2402, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 242. Γράφομεν λοιπὸν τὸ 6 ἀμέσως μετὰ τὸ 5, ὡς παριστῶν ἁπλᾶς μονάδας. Ἡ πρᾶξις οὕτως ἐπερατώθη, καὶ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 20656, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 242.

Ἂς θεωρήσωμεν προσέτι καὶ τὸ ἑξῆς παράδειγμα, ἐν ᾧ τὸ πηλίκον περιέχει πολλάκις τὸ ψηφίον 0.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 238193866 διὰ 476

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

238193866 | 476
1938 | 500407
3466
134

Χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὸν ἀριθμὸν 2381, μείζονα τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρέτου· τὸ πηλίκον δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 23 διὰ 4, ἤτοι 5· δοκιμάζομεν τὸ 5, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ τὸν διαιρέτην εἶναι 2380 μικρότερον τοῦ 2381, ἄρα 5 εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὑπόλοιπον δὲ τῆς πρώτης ταύτης διαιρέσεως εἶναι 1. Ἵνα ἀποτελέσωμεν δὲ δεύτερον μερικὸν διαιρετέον μείζονα τοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 1 τὰ τρία ἀμέσως ἑπόμενα ψηφία τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸν μερικὸν διαιρετέον 1938. Ἐπειδὴ δὲ ὁ διαιρετέος οὗτος παριστᾷ ἑκατοντάδας, τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου θέλει παριστᾷ ἑκατοντάδας, καὶ ἐπειδὴ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον παρίστα ἑκατοντάδας χιλιάδων, πρέπει νὰ γράψωμεν μετ' αὐτὸ δύο μηδενικά, ἀκολούθως δὲ τὸ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου εὑρεθησόμενον ψηφίον. Ἵνα εὕρωμεν τοῦτο λέγομεν· 19 διὰ 4 δίδει 4· τὸ ζητούμενον ψηφίον ἄρα δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 4.

Πολλαπλασιάζοντες τὸ ψηφίον τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην εὑρίσκομεν γινόμενον μικρότερον τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 1938· ἄρα τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου εἶναι 4· ὑπόλοιπον δὲ εὑρίσκομεν 34. Πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ πρέπει νὰ γράψωμεν καὶ τὰ λοιπὰ δύο ψηφία τοῦ διαιρετέου ἵνα λάβωμεν μερικὸν διαιρετέον μείζονα τοῦ διαιρέτου. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ μερικὸς οὗτος διαιρετέος παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας, τὸ ψηφίον τὸ εὑρεθησόμενον διὰ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ θέλει παριστᾷ ἐπίσης ἁπλᾶς μονάδας, ἑπομένως πρέπει νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων 4 ἓν 0

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

καὶ μετ' αὐτὸ τὸ εὑρεθησόμενον ψηφίον. Ἵνα εὕρωμεν τοῦτο λέγομεν· 34 διὰ 4 δίδει 8· ἀλλ' 8 ἐπὶ 47 δίδει 376, μεῖζον τοῦ 346, ἄρα τὸ ψηφίον 8 εἶναι ὑπὲρ τὸ δέον μέγα. Δοκιμάζοντες τὸ 7 εὑρίσκομεν ὅτι πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παρέχει γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου· ἄρα 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου, ὑπόλοιπον δὲ εὑρίσκεται 134.

*Ἐν γένει δὲ, ὁσάκις, καταβιβάζοντες ἓν τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ ὑπολοίπου τινὸς, εὑρίσκομεν μερικὸν διαιρετέον μικρότερον τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου.*

58. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι μονοψήφιος, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲν γράφονται οἱ μερικοὶ διαιρετέοι. Ἔστω, παραδείγματος χάριν, νὰ διαιρεθῇ ὁ 68732 διὰ 7.

Ἡ πρᾶξις διατίθεται ὡς ἑξῆς·

| | |
|---|---|
| 68732 | 7 |
| 6 | 9818 |

68 διὰ 7 δίδει πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 5,
57 διὰ 7 . . . . 8 . . . . 1,
13 διὰ 7 . . . . 1 . . . . 6,
62 διὰ 7 . . . . 8 . . . . 6,

γράφομεν δὲ μόνον τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον 6.

59. Ὅταν τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος θέλει περιέχει μέγαν ἀριθμὸν ψηφίων, τότε ἡ πρᾶξις διατίθεται ὡς ἑξῆς·

Σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον πίνακα τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ὀκτὼ μονοψήφιους ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 2 μέχρι τοῦ 9, καὶ οὕτως ἔχομεν τὰ ἑξῆς πλεονεκτήματα· α.) δι' ἁπλῆς ἐπόψεως εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον ἑκάστης μερικῆς διαιρέσεως, β.) ἐὰν εὑρεθῶσιν ὅμοια ψηφία ἐν τῷ πηλίκῳ,



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπαναλάβωμεν πολλάκις τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

| | |
|---|---|
| 3141592653589793 23 \| 3183098 | |
| 28647882 | 98696070733 |
| 27680445 | |
| 25464784 | |
| 22156613 | 2 \| 6366196 |
| 19098588 | 3 \| 9549294 |
| 30580255 | 4 \| 12732392 |
| 28647882 | 5 \| 15915490 |
| 19323738 | 6 \| 19098588 |
| 19098588 | 7 \| 22281686 |
| 22515097 | 8 \| 25464784 |
| 22281686 | 9 \| 28647882 |
| 23341193 | |
| 22281686 | |
| 10595072 | |
| 9549294 | |
| 10457783 | |
| 9549294 | |
| 908489 | |

Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.

60. Ἅμα ἀρχόμενοι τῆς πράξεως γνωρίζομεν (52) τὴν τάξιν τῶν μονάδων τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ πηλίκου. Ἑπομένως, ἐὰν τοῦτο παριστᾷ ἑκατοντάδας, τὸ πηλίκον θέλει ἔχει τρία ψηφία· ἐὰν τοῦτο παριστᾷ δεκάδας χιλιάδων, τὸ πηλίκον θέλει ἔχει πέντε ψηφία κτλ. Ἐν τούτοις ὑπάρχει γενικός τις κανών, ὃν εἶναι καλὸν νὰ γνωρίζωμεν.

*Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου εἶναι ἴσος τῇ δια-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*φορᾷ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου, ἢ τῇ διαφορᾷ ταύτῃ ηὐξημένῃ κατὰ μονάδα.*

Τῷ ὄντι, τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως ταῖς τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου· μετὰ δὲ τὸ πρῶτον ψηφίον ὑπάρχουσιν ἐν τῷ πηλίκῳ τόσα ψηφία, ὅσα καὶ ἐν τῷ διαιρετέῳ μετὰ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον.

Ὁ δὲ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος δύναται νὰ ἔχῃ τόσα ψηφία, ὅσα καὶ ὁ διαιρέτης, ἢ ἓν περισσότερον. Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῶν ὑπαρχόντων μετὰ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον, καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἀκολουθοῦσι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, εἶναι ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου· κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος. Ὁ ὁλικὸς λοιπὸν ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου, *συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ πρώτου*, εἶναι κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν μείζων κατὰ μονάδα τῆς διαφορᾶς, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἴσος ταύτῃ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 6397523 διὰ 975. Τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου ὄντος 6397, τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου θέλει παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως ταῖς τοῦ τελευταίου ψηφίου 7 τοῦ διαιρετέου· θέλει λοιπὸν παρακολουθεῖσθαι ὡς καὶ τοῦτο ὑπὸ τριῶν ψηφίων, καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον θέλει ἔχει τέσσαρα ψηφία.

## Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

61. *Ἡ βάσανος τῆς διαιρέσεως γίνεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ προστιθεμένου εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ὑπολοίπου. Ἐὰν οὕτω προκύψῃ ὁ διαιρετέος, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς.*

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Τοῦτο ἐξάγεται ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Α'. Ἐὰν Α καὶ Β παριστῶσι δύο οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς, ἵνα δείξωμεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου εἶναι Π καὶ τὸ ὑπόλοιπον Υ, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν

$$A = B \times \Pi + \Upsilon,$$

ὅπου τὸ Υ ὑποτίθεται μικρότερον τοῦ Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β'. Ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς χρησιμεύει ὡς βάσανος τῆς διαιρέσεως, οὕτω καὶ ἡ διαίρεσις δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τῷ ὄντι διὰ νὰ ἦναι πολλαπλασιασμός τις ἀκριβὴς, ἀρκεῖ τὸ γινόμενον διαιρούμενον διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων νὰ δίδῃ πηλίκον τὸν ἕτερον καὶ ὑπόλοιπον μηδέν. Οὕτως, ἐὰν 72 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $8 \times 9$, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 72 δι' 8 εἶναι προφανῶς 9.

## Θεωρήματα τῆς διαιρέσεως.

62. ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Πολλαπλασιαζομένου διαιρετέου τε καὶ διαιρέτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δ' ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 841 διὰ 17 ὄντος 49, τοῦ δ' ὑπολοίπου 8, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν λάβωμεν ὡς διαιρετέον $841 \times 12$, ὡς διαιρέτην $17 \times 12$, θέλομεν εὕρει τὸ αὐτὸ μὲν πηλίκον 49, ὑπόλοιπον δὲ $8 \times 12$.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης διαιρέσεως δεικνύει ὅτι 841 *μονάδες περιέχουσι* $49^{\text{κις}}$ 17 *μονάδας*, καὶ προσέτι 8 *μονάδας*.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ λέξις μονὰς ἐκφράζει ποσὸν ὅλως αὐθαίρετον, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι παριστᾷ συλλογὴν 12 πραγμάτων, ἤ μίαν δωδεκάδα, ἑπομένως 841 *δωδεκάδες περιέχουσι* $49^{\text{κις}}$ 17 *δωδεκάδας* καὶ προσέτι 8 *δωδεκάδας*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἡ δὲ τελευταία ἔκφρασις δεικνύει ὅτι $12\times8$ διαιρούμενον διὰ $17\times12$ δίδει πηλίκον 49 καὶ ὑπόλοιπον $12\times8$, προφανῶς μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὁ συλλογισμὸς εἶναι γενικός, διότι ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 12 ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἄλλους οἱουσδήποτε.

63. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενόν τι διά τινος τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.*

Ὑποτεθείσθω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ τὸ γινόμενον $3\times5\times7$ διὰ 5· τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ

$$(3\times7)\times5$$

τοῦ ὁποίου τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ 5 εἶναι $3\times7$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενόν τι διὰ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τούτου ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, ἐὰν ὅμως ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς.*

Τῷ ὄντι, ὑποτεθείσθω ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν διὰ 5 τὸ γινόμενον $6\times20\times7$· ἐπειδὴ ὁ παράγων 20 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 5, διότι $20=4\times5$, τὸ δεδομένον γινόμενον εἶναι ἴσον τῷ

$$6\times4\times5\times7.$$

Ἀλλ' ἵνα διαιρεθῇ τοῦτο διὰ 5, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλειφθῇ ὁ παράγων 5· ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$6\times4\times7,$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

64. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, ὅταν ἡ διαίρεσις*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*αὕτη γίγνηται ἀκριβῶς, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, τὸ προκύπτον πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ πάντες οἱ παράγοντες ληφθῶσιν ὡς διαιρέται.*

Ἔστω τῷ ὄντι νὰ διαιρεθῇ ὁ 240 διὰ τοῦ 24, ὅστις εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων 2,3,4. Τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 240 διὰ 24 ὄντος 10, ἔχομεν

$$240=24\times10,$$

ἢ

$$240=2\times3\times4\times10.$$

Τὰ πηλίκα τῶν δύο τούτων ἴσων ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2 εἶναι ἴσα, ἄρα ἔχομεν (63)·

$$240:2=3\times4\times10.$$

Διαιροῦντες πάλιν τοὺς δύο τούτους ἴσους ἀριθμοὺς διὰ 3 λαμβάνομεν·

$$(240:2):3=4\times10,$$

ἢ ἁπλούστερον ἄνευ παρενθέσεων

$$240:2:3=4\times10.$$

Διαιροῦντες δὲ πάλιν τὰ δύο μέλη διὰ 4 λαμβάνομεν

$$240:2:3:4=10,$$

ἤτοι

$$240:2:3:4=240:(2\times3\times4)\cdot$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

## ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ.

### ΒΑΣΑΝΟΙ ΔΙΑ ΤΟΥ 9 ΚΑΙ 11.

---

### ά. Συνθῆκαι διαιρετότητος.

*Ὁρισμοὶ καὶ γενικὰ θεωρήματα.*

65. Ἀριθμός τις λέγεται διαιρετὸς δι' ἑτέρου, ὅταν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου ἦναι μηδέν. Τότε ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον. Τῷ ὄντι, λέγοντες ὅτι ὁ 35 διαιρούμενος διὰ 5 περιέχει πηλίκον 7, δεικνύομεν ὅτι ὁ 35 ἰσοῦται τῷ πενταπλασίῳ τοῦ 7· ἔπεται ἐντεῦθεν ὅτι ἀριθμός τις διαιρετὸς δι' ἑτέρου εἶναι ἓν τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ· ἀντιστρόφως πάντα τὰ πολλαπλάσια ἀριθμοῦ τινος εἶναι διαιρετὰ δι' αὐτοῦ.

Ἀριθμός τις διαιρῶν ἕτερον ἄνευ ὑπολοίπου καλεῖται *διαιρέτης, ὑποπολλαπλάσιον, ἢ παράγων αὐτοῦ.* Αἱ ἑξῆς δὲ ἐκφράσεις εἶναι ἰσοδύναμοι·

ὁ 35 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5.

ὁ 35 εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 5.

ὁ 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 35, ἢ ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 35, ἢ παράγων τοῦ 35.

66. ΘΕΩΡΗΜΑ Ά.) *Πᾶς διαιρέτης δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Ἂς θεωρήσωμεν, ὡς ἐν παραδείγματι, δύο ἢ πλειοτέ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

λαπλάσια τοῦ 5· πολλαπλασιάζοντες δὲ τὸ πρῶτον μέρος τοῦ 48 ἐπὶ τὸ δεύτερον τοῦ 34 λαμβάνομεν τρίτον πολλαπλάσιον τοῦ 5· τέλος δὲ, πολλαπλασιάζοντες τὸ δεύτερον μέρος τοῦ 48 ἐπὶ τὸ δεύτερον τοῦ 34 ἔχομεν τὸ γινόμενον $3\times4$· ἑπομένως τὸ γινόμενον $48\times34$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τεσσάρων μερῶν, ὧν τὰ τρία πρῶτα εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5, τὸ δὲ τελευταῖον τὸ γινόμενον $3\times4$, ἄρα

$$48\times34=\text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 5+3\times4.$$

Ἑπομένως, ἐὰν ἀπὸ τοῦ $48\times34$ ἀφαιρεθῇ $3\times4$, θέλει μείνει πολλαπλάσιόν τι τοῦ 5, ἤτοι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ 5. Παρατηρητέον δὲ ὅτι $48\times34$ διαιρούμενον διὰ 5 δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ τὸ $3\times4$ διὰ 5 (69). Ἄρα·

*Ἐὰν διαιρέσωμεν δύο ἀριθμοὺς διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ τούτου τοῦ διαιρέτου, θέλομεν εὕρει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον τῶν δύο διαιρετέων διὰ τοῦ αὐτοῦ πάλιν διαιρέτου.*

## Συνθῆκαι διαιρετότητος διὰ 2, 5, 4, 25, 8 καὶ 125.

72. Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦ παραγράφου 69, κατὰ τὸ ὁποῖον, *τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρου δὲν μεταβάλλεται, ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλασίου τινὸς τοῦ διαιρέτου*, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεώς τινος, ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι 2, 5, 4, 25, 8, 125.

73. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5.*

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 67927· ἔχομεν

$$67927=67920+7$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέρος 67920 ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 10 εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 καὶ διὰ 5, διότι $10=2\times5$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 67927 διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων 7 διὰ 2 ἢ διὰ 5.

Ἀριθμός τις καλεῖται *ἄρτιος* ἢ *περιττὸς*, καθόσον εἶναι, ἢ μὴ, διαιρετὸς διὰ τοῦ 2. Εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἐναλλὰξ ἄρτιοι καὶ περιττοί. Κατὰ τὰ προηγούμενα λοιπὸν βλέπομεν ὅτι·

*Ἀριθμός τις εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς, καθόσον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν. Τὸ δὲ μηδὲν θεωρεῖται ὡς ἄρτιον ψηφίον.*

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μόνον διαιρετὸν διὰ τοῦ 5 ψηφίον εἶναι τὸ 5, βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι·

*Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5, ὅταν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἦναι 0 ἢ 5.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς περιλαμβάνεται ἐν τῇ ἐκφράσει $2\times\mu$, πᾶς δὲ περιττὸς ἐν τῇ ἐκφράσει $2\times\mu+1$, ὅπου $\mu$ παριστᾷ ἀριθμόν τινα οἱονδήποτε.

74. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ 25 τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ.*

Ἔστω ἀριθμός τις οἱοσδήποτε ὁ 97653· ἔχομεν

$$97653=97600+53.$$

Τὸ πρῶτον μέρος $97600=976\times100$ ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 100, εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ 25, ἐπειδὴ $100=4\times25$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 97653 διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 53 διὰ 4 ἢ 25· ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι·

*Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ὅταν τὰ δύο πρὸς*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*τὰ δεξιὰ ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.*

75. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 8 ἢ 125 τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν τριῶν τελευταίων πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ.*

Τῷ ὄντι ἔστω ὁ ἀριθμὸς 786543, ἔχομεν

$$796543 = 796000 + 543$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέρος ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 1000, διότι $796000 = 796 \times 1000$, εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 8 καὶ 125, διότι $1000 = 8 \times 125$· ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 796543 διὰ 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 543 διὰ 8 ἢ 125. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι·

*Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν τριῶν τελευταίων πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ ἦναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125.*

## Συνθήκαι διαιρετότητος ἀριθμοῦ τινος δι' 9 ἢ 3.

76. Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' 9 ἢ 3 στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς προτάσεων·

ά.) *Ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑφ' ἑνὸς ἢ πλειοτέρων μηδενικῶν εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9 αὐξημένον κατὰ μονάδα.*

Τῷ ὄντι παρατηροῦμεν ὅτι

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1000 = 999 + 1$$
$$10000 = 9999 + 1$$

κτλ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων φαίνεται ἡ ἀλήθεια τῆς ἀνω-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τέρω προτάσεως, διότι οἱ ἀριθμοὶ 9, 99, 999, 9999 κτλ. εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 9.

ϛ΄.) *Πᾶς ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ὑφ' ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν εἶναι ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 9 ηὐξημένῳ κατὰ τὸ ψηφίον τοῦτο.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 80000· ἀπεδείξαμεν ὅτι

$$10000 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 1$$

80000 εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ 10000· ἀλλ' ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμά τι ἐπὶ 8, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ ἐπὶ 8, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα, ἄρα

$$80000 = (\text{πολλαπλάσιόν τι τοῦ } 9) \times 8 + 8.$$

Ἐπειδὴ δὲ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 8 παρέχει πάλιν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$80000 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 8$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ΄.) *Πᾶς ἀριθμὸς ἰσοῦται πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 9 ηὐξημένῳ κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 87354· ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐκ πέντε μερῶν, 80000, 7000, 300, 50, καὶ 4· ἀλλὰ κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἔχομεν

$$80000 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 8,$$
$$7000 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 7,$$
$$300 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 3,$$
$$50 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 5,$$
$$4 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Προσθέτοντες δὲ, καὶ γνωρίζοντες ὅτι τὸ ἄθροισμα πολλαπλασίων τοῦ 9 εἶναι καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον τοῦ 9, ἔχομεν

$$87354 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + (8+7+3+5+4)$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

**ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἐπειδὴ ὁ 9 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὁμοίως·

*Πᾶς ἀριθμὸς ἰσοῦται πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 3 ηὐξημένῳ κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ.*

77. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι·

ά.) *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' 9 ἢ διὰ 3 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ δι' 9 ἢ 3.*

β'.) *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' 9 ἢ 3, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἦναι διαιρετὸν δι' 9 ἢ 3.*

## Συνθήκη διαιρετότητος διὰ τοῦ 11.

78. Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' 11 στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς προτάσεων·

ά.) *Ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ μηδενικῶν εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.*

Τῷ ὄντι, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοιούτου ἀριθμοῦ μίαν μονάδα, βλέπομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον σύγκειται ἐξ ἀρτίου ἀριθμοῦ ψηφίων 9, οἷον,

$$10000 = 9999 + 1.$$

Ἀλλὰ $9999 = 99 \times 100 + 99$, ἤτοι ἰσοῦται ἀθροίσματι πολλαπλασίων τοῦ 99· ἄρα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι πολ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

λαπλάσιος τοῦ 99, καὶ ἑπομένως τοῦ 11, διότι 99=9×11. Ἐνιεῦθεν ἕπεται ὅτι

10000=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11+1.

*β'.) Ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν ἰσοῦται πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ* 11 *ἠλαττωμένῳ κατὰ μονάδα.*

Ἔχομεν κατὰ πρῶτον,

10=11—1.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν, οἷον τὸν 100000· ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἰσοῦται τῷ 10000×10· ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀνωτέρω

10000=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11+1.

Ἑπομένως

10×10000=10×πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11+10.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεκαπλάσιον πολλαπλασίου τινος τοῦ 11 εἶναι καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον τοῦ 11, καὶ ἐπειδὴ τὸ νὰ προσθέσωμεν 10 εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ προσθέσωμεν 11 καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκολούθως 1, ἡ ἰσότης αὕτη τρέπεται εἰς τὴν

10×10000=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11+11—1,

ἤτοι 100000=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11—1·

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*γ'.) Ἀριθμός τις ἀποτελούμενος ὑπὸ σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ μηδενικῶν εἶναι ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ* 11 *ηὐξημένῳ κατὰ τὸ σημαντικὸν τοῦτο ψηφίον.*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 70000. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἰσοῦται τῷ 10000×7, τὸ δὲ 10000 εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ μονάδα, ὁ 70000 ἰσοῦται τῷ ἑπταπλασίῳ πολλαπλασίου τινὸς τοῦ 11 ηὐξημένῳ κατὰ 7· ἄρα

70000=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11+7.

δ'.) *Ἀριθμός τις ἀποτελούμενος ὑπὸ σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν ἰσοῦται πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11 ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ σημαντικὸν τοῦτο ψηφίον.*

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 700000. Ἐπειδὴ ὁ 100000 ἰσοῦται πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11—1, ὁ 700000 θέλει εἶσθαι ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11—7 (45). ἄρα ἔχομεν

700000=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11—7.

έ.) *Πᾶς ἀριθμὸς ἰσοῦται πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς, ἀπὸ τῶν δεξιῶν, καὶ ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας.*

Ἔστω ἐν παραδείγματι ὁ ἀριθμὸς 76843· γνωρίζομεν ὅτι 76843=70000+6000+800+40+3· ἀλλὰ κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν

70000=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11+7,
6000=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11—6,
800=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11+8,
40=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11—4,
3= . . . . . 3·

ἄρα

76843=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11+7—6+8—4+3,
ἢ 76843=πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11+(7+8+3)—(6+4)·

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΔΗΜΟΣΙΕ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

79. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὅτι·

*Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' 11 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως δι' 11 τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς, ἀπὸ τῶν δεξιῶν, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας.*

Παρατηρητέον ἐν τούτοις ὅτι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον ἄθροισμα 11 ἢ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11, ἵνα γείνῃ δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις· τὸ δὲ προστιθέμενον τοῦτο πολλαπλάσιον τοῦ 11 δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11, καὶ τὸ ὁποῖον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην μένει πάλιν πολλαπλάσιον τοῦ 11.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. ά.) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 76843· ἔχομεν

$$76843 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 11 + 18 - 10,$$
$$= \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 11 + 8.$$

8 λοιπὸν εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 76843 δι' 11.

β'.) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 27481· ἔχομεν

$$27481 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 11 + 7 - 15,$$
$$= \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 11 + (11 + 7) - 15,$$
$$= \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 11 + 3.$$

3 λοιπὸν εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 27481 δι' 11.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι·

*Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' 11, ὅταν ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς ἦναι 0 ἢ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11.*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## 6'. Βάσανοι διὰ τοῦ 9 ἢ τοῦ **11**.

80. Ὡς ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων ἐκθέτομεν ἐνταῦθα τὸν τρόπον, καθ' ὃν δύναται νὰ γείνῃ ἡ βάσανος τῶν τεσσάρων πράξεων διὰ *διαιρέτου τινὸς οἱουδήποτε*. Θέλομεν δὲ κάμει τοὺς συλλογισμοὺς ἡμῶν ἐπὶ τοῦ 9, ἀλλ' ὅ,τι θέλομεν εἴπει περὶ αὐτοῦ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς πάντα ἄλλον διαιρέτην.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ. *Ἵνα γείνῃ ἡ βάσανος διὰ τοῦ* 9 *τῆς προσθέσεως πολλῶν ἀριθμῶν, προσθέτομεν τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως δι' 9 ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων, καὶ ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον ἦναι ἴσον τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως δι' 9 τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος, ἡ διαφέρῃ κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ* 9, *τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐγένετο ὀρθῶς.*

Ὑποτεθείσθω ὅτι προσθέσαντες τοὺς ἀριθμοὺς 6893, 4781 καὶ 708, εὕρομεν ἄθροισμα 12382. Τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως δι' 9 τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 8, 2, 6, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 16· ἔχομεν λοιπὸν

$$6893 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 8,$$
$$4781 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 2,$$
$$708 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 6.$$

Ἑπομένως

$$6893 + 4781 + 708 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 16.$$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 9 τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος 12382 εἶναι 7· ἔχομεν λοιπὸν

$$12382 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 7.$$

Ἑπομένως, ἐὰν 12382 ἦναι ἀληθῶς τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, οἱ ἀριθμοὶ 16 καὶ 7 πρέπει νὰ διαφέρωσι κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9· ἐπειδὴ δὲ $7 + 9 = 16$, ἡ ἐπαλήθευσις ὑπάρχει.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ. Ἡ βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως ἀνάγεται εἰς τὴν τῆς προσθέσεως, θεωρουμένου τοῦ μειωτέου ὡς ἀθροίσματος τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.

81. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ. *Ἵνα κάμωμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ* 9, *σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως δι' 9 τῶν παραγόντων, εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 9 τοῦ γινομένου τούτου, καὶ ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἦναι ἴσον τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ γινομένου, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐγένετο ὀρθῶς.*

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ κανόνος τούτου στηρίζεται εἰς τὸ θεώρημα τοῦ παραγράφου 71.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτομεν ὅτι πολλαπλασιάσαντες 2096 ἐπὶ 347 εὕρομεν γινόμενον 727312· τῶν ὑπολοίπων δὲ τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τῶν δεδομένων παραγόντων ὄντων 8 καὶ 5, ἔχομεν (71)

$$2096 \times 347 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 8 \times 5$$
$$= \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 4.$$

διότι $8 \times 5 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 4$.

Ἀφ' ἑτέρου δὲ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ εὑρεθέντος γινομένου ὄντος 4, ἔχομεν

$$727312 = \text{πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ } 9 + 4.$$

Ἄρα ἡ ἐπαλήθευσις ὑπάρχει.

82. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον, ἡ προκύπτουσα διαφορά, ἐὰν ἡ διαίρεσις ἐγένετο ὀρθῶς, πρέπει νὰ ἦναι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον. Ὥστε οὕτως ἡ βάσανος τῆς διαιρέσεως ἀνάγεται εἰς τὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

83. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α. Ὅταν ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος ἐπι-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τυγχάνῃ δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν μετὰ βεβαιότητος ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι, ἐὰν ὑπάρχῃ λάθος, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9. Ὁμοίως ἡ ἐπιτυχία τῆς βασάνου δι' 11 δεικνύει ὅτι, ἐὰν ὑπάρχῃ λάθος, τοῦτο εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11· ὅταν δὲ ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος ἐπιτυγχάνῃ συνάμα μετὰ τῆς διὰ τοῦ 11, δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι, ἐὰν ὑπάρχῃ λάθος, τοῦτο εἶναι πολλαπλάσιον συνάμα καὶ τοῦ 9 καὶ τοῦ 11.

84. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Εἴπομεν καὶ ἀνωτέρω ὅτι οἱ συλλογισμοὶ μένουσιν οἱ αὐτοὶ καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν διαιρετῶν 9 καὶ 11 λάβωμεν ἄλλον τινὰ οἱονδήποτε. Ἐκλέγονται δὲ οἱ διαιρέται 9 καὶ 11 διὰ τὴν εὐκολίαν, μεθ' ἧς εὑρίσκονται τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι καὶ τῶν διαιρετῶν 2, 3, 4, 5, 8, 25 τὰ ὑπόλοιπα εὐκόλως λογίζονται· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 2, 5, 4, 25 καὶ 8 ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ ἑνὸς, τῶν δύο, τῶν τριῶν τελευταίων ψηφίων, ἡ βάσανος διά τινος τούτων ἐξελέγχει τὴν ὀρθότητα τούτων μόνον τῶν ψηφίων.

Ἡ ἐπιτυχία τῆς βασάνου διὰ 3 δεικνύει μόνον ὅτι, ἐὰν ὑπάρχῃ λάθος, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, καὶ ἐπειδὴ ἐκ τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶναι πάντοτε διαιρετὸς διὰ 3, ἡ βάσανος δύναται συχνάκις νὰ ἐπιτύχῃ, καὶ τῆς πράξεως οὔσης ἐσφαλμένης. Ἄλλως δὲ, ὅταν ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος ἐπιτυγχάνῃ, ἡ διὰ τοῦ 3 οὐδὲν νέον διδάσκει, διότι, ὅταν τὸ λάθος ἦναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 3, εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ 9.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἦναι διαιρετὸν διὰ 4.

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

2. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων ἦναι διαιρετὸν δι' 8.

3. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' 6, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου ἑκάστου τῶν ἄλλων ψηφίων ἦναι διαιρετὸν δι' 6.

4. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 37, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα τριψήφια, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν (τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος δυναμένου νὰ ἔχῃ ἓν μόνον ἢ δύο ψηφία), ἀθροίζομεν τοὺς ἀποτελοῦντας τὰ τμήματα ταῦτα ἀριθμούς, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο διαιροῦμεν διὰ 37· τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι τὸ τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω κανόνος στηρίζεται ἐπὶ τούτου ὅτι ὁ 1000 εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 37 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

---

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

## ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ.

*Ὁρισμοί.*

85. Ἀριθμός τις διαιρῶν ἀκριβῶς πολλοὺς ἄλλους καλεῖται *κοινὸς διαιρέτης* αὐτῶν. Εἶναι δὲ πολλάκις χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἰδίως τὸν μέγιστον πάντων, ὅστις καλεῖται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* αὐτῶν.

Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

86. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ἐὰν ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ εἷς ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἑτέρου, ὁ μικρότερος τῶν δύο εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρέτης αὐτῶν.*

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν μικρότερον αὐτῶν, ἐπειδὴ πρέπει νὰ διαιρῇ αὐτόν. Ἐὰν ἄρα ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν διαιρῇ τὸν μείζονα, ἐπειδὴ διαιρεῖ καὶ ἑαυτὸν, αὐτὸς εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

87. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ εἷς δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἑτέρου, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ μείζονος διὰ τοῦ μικροτέρου.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 8206 καὶ 874· διαιροῦντες τὸν

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 340, ὥστε ἔχομεν

$$8206 = 874 \times 9 + 340.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται

ά.) Ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 8206 καὶ 874 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ 340· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὡς διαιρέται τοῦ 874 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ πολλαπλασίου αὐτοῦ $874 \times 9$· ἐπειδὴ δὲ διαιροῦσι τὸ ἄθροισμα 8206 καὶ τὸ ἓν τῶν μερῶν αὐτοῦ $874 \times 9$, ἄρα διαιροῦσι καὶ τὸ ἕτερον μέρος (68), τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ἀριθμὸς 340.

β΄.) Ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 340 καὶ 874 εἶναι ἅπαντες διαιρέται καὶ τοῦ 8206· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὡς διαιρέται τοῦ 874 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ πολλαπλασίου αὐτοῦ $874 \times 9$· εἶναι διαιρέται λοιπὸν τῶν δύο μερῶν $874 \times 9$ καὶ 340 ἀθροίσματός τινος, ἑπομένως (66) καὶ αὐτοῦ τοῦ ἀθροίσματος 8206.

Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι

Ἅπαντες οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 8206 καὶ 874 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ 340, ἑπομένως εἶναι κοινοὶ διαιρέται τοῦ 874 καὶ 340.

Ἅπαντες οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 874 καὶ 340 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ 8206, ἑπομένως εἶναι κοινοὶ διαιρέται τοῦ 8206 καὶ 874.

Αἱ δύο αὗται προτάσεις συνδυαζόμεναι δεικνύουσιν ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 8206 καὶ 874 εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 874 καὶ 340· ἄρα ὁ μέγιστος τῶν πρώτων εἶναι αὐτὸς τῷ μεγίστῳ τῶν δευτέρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

88. Διὰ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος δυνάμεθα νὰ ἀν-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τικαταστήσωμεν τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς, ὧν ζητεῖται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, διὰ δύο ἄλλων ἁπλουστέρων. Τούτους δὲ διὰ δύο ἄλλων ἁπλουστέρων, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς δύο ἀριθμοὺς, ὧν ὁ εἷς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἑτέρου· ὁ μικρότερος τῶν δύο θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (86)· δυνάμεθα ἄρα νὰ θέσωμεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

*Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μείζονα διὰ τοῦ μικροτέρου, ἔπειτα τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν· ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐφαρμόζοντες τὸν προηγούμενον κανόνα ἐξ ἄπαντος θέλομεν καταντήσει εἰς ὑπόλοιπον μηδέν· διότι τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἀριθμοὶ προβαίνοντες ὁλονὲν ἐλαττούμενοι, ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι πεπερασμένος.

89. Ἐν τῇ πράξει αἱ διαδοχικαὶ διαιρέσεις διατίθενται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς, καὶ ἕκαστον πηλίκον γράφεται ὑπεράνω τοῦ ἀντιστοιχοῦντος διαιρέτου, φυλαττομένης τῆς ὑποκάτω αὐτοῦ θέσεως διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀκολούθου διαιρέσεως· ὡς ἑξῆς·

| | 4 | 2 | 5 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4332 | 972 | 444 | 84 | 24 | 12 |
| 444 | 84 | 24 | 12 | 0 | |

12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4332 καὶ 972.

90. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἂς λάβωμεν τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 4332 καὶ 972 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ὑπολοίπου 444 τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου (87)· διαιρῶν δὲ 972 καὶ 444, διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 84· διαιρῶν 444 καὶ 84, διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 24· διαιρῶν δὲ 84 καὶ 24 διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 12, ὅστις εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4332 καὶ 972.

## Ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν.

91. ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Δεδομένων ὄντων πολλῶν ἀριθμῶν, ἐὰν εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ οὕτω εὑρεθέντος ἀριθμοῦ καὶ τῶν λοιπῶν δεδομένων ἀριθμῶν, λαμβάνομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ἁπάντων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ, 504,432,324, 60. Τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν 504 καὶ 432 ὄντος 72, λέγω ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

72,324,60,

εἶναι ἐπίσης ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Διότι πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν τεσσάρων δεδομένων ἀριθμῶν, διαιρῶν ἰδιαιτέρως καὶ τοὺς ἀριθμοὺς 504 καὶ 432, διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν 72 (90)· ἄρα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 72, 324,60. Ἀντιστρόφως, πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 72,324,60, ὡς διαιρῶν τὸν 72, διαιρεῖ καὶ τοὺς 504 καὶ 432, οἵτινες εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ· ἄρα εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων τεσσάρων ἀριθμῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ 504,324,60 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας οὓς καὶ οἱ ἀριθμοὶ 72,324,60· ἄρα ὁ μέγιστος μεταξὺ τῶν πρώτων, εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ μεταξὺ τῶν δευτέρων.

92. Κατὰ τὰ προηγούμενα εὐκόλως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην πολλῶν ἀριθμῶν. Τῷ ὄντι ἔστωσαν οἱ ἀνωτέρω τέσσαρες ἀριθμοὶ

504,432,324,60.

Κατὰ πρῶτον ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν 504 καὶ 432, εὑρίσκομεν δὲ 72. ἄρα τὸ ζήτημα ἀνάγεται 90) εἰς τὴν ἀναζήτησιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν τριῶν ἀριθμῶν

72,324,60.

Ζητοῦμεν ἐπίσης τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν 72 καὶ 324· εὑρίσκομεν 36· Ἑπομένως μένει νὰ ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο ἀριθμῶν

36,60.

Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι εἶναι 12· ἄρα ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν τεσσάρων δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι 12.

Δυνάμεθα λοιπὸν κατὰ τὰ προηγούμενα νὰ θέσωμεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

*Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο πρώτων· ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ οὕτω εὑρεθέντος καὶ τοῦ τρίτου τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ γείνῃ χρῆσις πάντων τῶν ἀριθμῶν. Ὁ τελευταῖος τῶν οὕτω εὑρεθέντων μεγίστων κοινῶν διαιρετῶν, εἶναι ὁ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

93. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Πᾶς κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθ-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*μῶν διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν.*

Ἔστωσαν πάλιν οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ 504,432,324,60. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν τεσσάρων τούτων διαιρεῖ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 72 τῶν 504 καὶ 432 (90), ἄρα εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν 72,324,60· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον διαιρεῖ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 36 τῶν 72 καὶ 324· ἄρα εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν 36 καὶ 60· ἑπομένως διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν 12, ὅστις εἶναι ἐπίσης ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἁπάντων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

94. Δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ καλοῦνται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἢ τὴν μονάδα· ἢ ἄλλως, ὅταν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι 1.

Ἐὰν ἐν τῇ ἀναζητήσει τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν φθάσωμεν εἰς δύο διαδοχικὰ ὑπόλοιπα, τὰ ὁποῖα γνωρίζομεν ὅτι εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα, εἶναι περιττὸν νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν, διότι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι τότε ὁμοίως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐπειδὴ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ δύο διαδοχικῶν ὑπολοίπων.

Ὁμοίως ἐν τῇ ἀναζητήσει τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν, ἐὰν φθάσωμεν εἰς δύο διαδοχικοὺς διαιρέτας πρώτους πρὸς ἀλλήλους, εἶναι περιττὸν νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν, διότι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι τότε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

## Θεωρήματα τοῦ μεγίστου κοίνοῦ διαιρέτου.

95. Ἐν τοῖς ἑξῆς θέλομεν κάμει συχνάκις χρῆσιν τῶν γραμμάτων Α,Β,Γ, . . .. α,β,γ . . . . πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν. Ἐνίοτε θέλομεν κάμει χρῆσιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος κατὰ πρῶτον *ἀτόνου*, ἔπειτα φέροντος ἕνα ἢ πλειοτέρους

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τόνους, οἷον $A, A', A'', A'''$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται Α, Α *τονούμενον*, Α *δὶς τονούμενον*, Α *τρὶς τονούμενον* κτλ. Θέλομεν ἐπίσης κάμει χρῆσιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος φέροντος πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον πρὸς τὰ κάτω ψηφία μικρὰ τὸ μέγεθος· οἷον $A_1, A_2, A_3, \ldots$ τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται Α ἕν, Α δύο, Α τρία κτλ. Ἰδίως δὲ γίνεται χρῆσις τοῦ εἴδους τούτου τῆς σημειώσεως πρὸς παράστασιν δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν ἐχόντων κοινήν τινα ἰδιότητα, ἢ ὅμοιον σχηματισμοῦ τρόπον, ἐφ' οὗ θέλομεν νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν.

96. ΘΕΩΡΗΜΑ Ά. *Πολλαπλασιαζομένων δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

ά.) Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον δύο ἀριθμοὶ Α καὶ Β. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν ἐγένοντο τέσσαρες διαιρέσεις, καὶ ὅτι ἑπομένως τὸ τέταρτον ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν· διότι ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι αἱ διαιρέσεις αὗται, ὁ συλλογισμὸς θέλει μείνει ὁ αὐτός. Ἔστω Γ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Β, Γ′ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Β δι' Γ, καὶ Γ″ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ δι' Γ′. Κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ′ δι' Γ″ εἶναι μηδέν, ἑπομένως Γ″ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ Α καὶ Β.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, εἴδομεν (62) ὅτι ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ὁ Α καὶ Β ἐπὶ ἀριθμόν τινα οἱονδήποτε Π, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν Γ θέλει πολλαπλασιασθῆ ἐπίσης ἐπὶ Π· τῶν δὲ Β καὶ Γ πολλαπλασθέντων ἐπὶ Π, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεων αὐτῶν Γ′ θέλει πολλαπλασιασθῆ ἐπίσης ἐπὶ Π· ὁμοίως δὲ τῶν Γ καὶ Γ′ πολλαπλασθέντων ἐπὶ Π, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν Γ″, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ Α καὶ Β, θέλει πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ Π.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

6΄.) Ἔστωσαν ἤδη πλειότεροι ἀριθμοὶ, καθ' ὑπόθεσιν τέσσαρες οἱ Α,Β,Γ,Δ. Ἔστω Μ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ Α καὶ Β, Μ΄ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ Μ καὶ Γ, Μ΄΄ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ Μ΄ καὶ Δ. Γνωρίζομεν (92) ὅτι Μ΄΄ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν Α,Β,Γ,Δ.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἂς πολλαπλασιάσωμεν τοὺς Α,Β, Γ,Δ, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Π. Τῶν Α καὶ Β πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ Π, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν Μ θέλει πολλαπλασιασθῆ ἐπίσης ἐπὶ Π· τῶν Μ καὶ Γ πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ Π, θέλει πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ Π καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν Μ΄· τέλος δὲ τῶν Μ΄ καὶ Δ πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ Π, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν Μ΄΄, ὅστις εἶναι ἐπίσης ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν τεσσάρων δεδομένων ἀριθμῶν, θέλει πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ Π.

97. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. *Διαιρουμένων δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, τέσσαρες ἀριθμοὶ

$$\Pi\times\Lambda,\ \Pi\times B,\ \Pi\times\Gamma,\ \Pi\times\Delta,$$

διαιρετοὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ Π. Ἔστω Μ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α,Β,Γ,Δ. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα $\Pi\times M$ θέλει εἶσθαι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν τεσσάρων δεδομένων ἀριθμῶν. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ Π τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν θέλει ἐπίσης διαιρεθῆ διὰ Π.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου δύναται ἐνίοτε νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν. Ἐὰν τῷ ὄντι παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέ-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

την Π, διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ Π, καὶ ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν εὑρεθέντων πηλίκων. Πολλαπλασιάζοντες ἀκολούθως τοῦτον ἐπὶ Π, εὑρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 50400 καὶ 43200, ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν 504 καὶ 432, καὶ τὸ γινόμενον τούτου, ὅστις εἶναι 72, ἐπὶ 100, ἤτοι ὁ 7200, θέλει εἶσθαι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν.

98. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. *Ἐὰν διαιρεθῶσι δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ προκύπτοντα πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ὑποτεθείσθω ὅτι οὗτοι διαιρούμενοι διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν Μ παρέχουσι τὰ πηλίκα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (97), διαιρουμένων τῶν Α,Β,Γ,Δ, διὰ Μ, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν Μ διαιρεῖται διὰ Μ, ἑπομένως γίνεται ἴσος τῇ μονάδι· ἄρα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

99. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. *Ἀντιστρόφως, ἐὰν διαιρέσαντες δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμοὺς διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, εὕρωμεν πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, ὁ διαιρέτης, δι' οὗ ἐγένετο ἡ διαίρεσις, εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ πηλίκα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ κοινοῦ διαιρέτου Μ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἤτοι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ πηλίκα ταῦτα ἔχουσι τὴν μονάδα ὡς μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, ἐπὶ Μ, τὰ γινό-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

να Α, Β, Γ, Δ, θέλουν ἔχει μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 1×Μ ἢ Μ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

100. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε. *Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα τῶν παραγόντων, διαιρεῖ τὸν ἕτερον.*

Λέγω ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις Π διαιρῇ τὸ γινόμενον Α×Β, ἦναι δὲ πρῶτος πρὸς τὸν Α, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν Β. Τῷ ὄντι, τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀριθμῶν Α καὶ Π ὄντος 1, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους ἐπὶ Β, τὰ γινόμενα

Α×Β καὶ Π×Β

θέλουσιν ἔχει τὸν Β μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ὁ Π διαιρεῖ τὸν Α×Β, διαιρεῖ ἐπίσης τὸν Π×Β, ἄρα διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν Α×Β καὶ Π×Β, ἤτοι τὸν Β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Ἀναζήτησις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν.

101. Ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ πολλῶν ἄλλων *καλεῖται κοινὸν πολλαπλάσιον* αὐτῶν. Πολλάκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν τὰ κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν, ἰδίως δὲ τὸ ἐλάχιστον πάντων, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον* αὐτῶν.

102. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν ἐπὶ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν δι' αὐτοῦ τούτου τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀριθμοί, Μ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν, Α′ καὶ Β′ τὰ πηλίκα τοῦ Α καὶ Β διὰ Μ, ὥστε ἔχομεν

$$A = A' \times M, \quad B = B' \times M.$$

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω ἐπίσης Π πολλαπλάσιόν τι κοινὸν τοῦ Α καὶ Β. Τὸ Π ὡς πολλαπλάσιον τοῦ Α εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ Α ἐπ' ἀριθμόν τινα Ρ, ὥστε Π=Α×Ρ, καὶ ἐπειδὴ Α=Α′×Μ, συνάγομεν ὅτι

$$\Pi = M \times A' \times P.$$

Πρὸς τούτοις, τοῦ Π ὄντος πολλαπλασίου τοῦ Β ἢ τοῦ Μ×Β′, τὸ Μ×Α′×Ρ πρέπει νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ Μ×Β′. Ἵνα ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, δυνάμεθα (63) νὰ διαιρέσωμεν κατὰ πρῶτον Μ×Α′×Ρ διὰ Μ, ἔπειτα τὸ πηλίκον Α′×Ρ νὰ διαιρέσωμεν διὰ Β′. ἐπειδὴ δὲ ὁ Β′ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α′, ἵνα διαιρῇ τὸ γινόμενον Α′×Ρ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν Ρ (100)· ἄρα ὁ Ρ εἶναι γινόμενον τοῦ Β′ ἐπὶ ἀριθμόν τινα Σ· ἑπομένως ἔχομεν Ρ=Β′×Σ, καὶ διὰ τοῦτο

$$\Pi = M \times A' \times B' \times \Sigma.$$

Ἀντιστρόφως ὁ ἀριθμὸς Μ×Α′×Β′×Σ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ Β· διότι εἶναι ἴσος τῷ (Μ×Α′)×Β′×Σ, ἢ τῷ (Μ×Β′)×Α′×Σ. Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὸ Σ διαδοχικῶς διὰ τῶν ἀριθμῶν, 1,2,3 κτλ. θέλομεν ἔχει τὴν σειρὰν τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τοῦ Α καὶ Β, ἤτοι

$$M \times A' \times B',\ 2 \times M \times A' \times B',\ 3 \times M \times A' \times B', \ldots$$

Τὸ ἐλάχιστον τούτων εἶναι τὸ Μ×Α′×Β′, ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεώρημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α. Ἐν τῷ γινομένῳ Μ×Α′×Β′ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας Μ καὶ Α′ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν Α, ἢ τοὺς παράγοντας Μ καὶ Β′ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν Β. ἑπομένως τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α καὶ Β εἶναι Α×Β′ ἢ Β×Α′.

Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι

*Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*ἀριθμῶν, πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν τούτων, νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἕτερον τῶν δύο διὰ τοῦ μεγίστου τούτου κοινοῦ διαιρέτου, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕτερον ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον.*

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β ὦσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι αὐτὸ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος δεικνύει ἐπίσης ὅτι τὰ κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.

## Ἀναζήτησις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν.

103. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Δεδομένων ὄντων πολλῶν ἀριθμῶν, ἐὰν εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ οὕτω εὑρεθέντος ἀριθμοῦ καὶ τῶν λοιπῶν δεδομένων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἁπάντων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ

Α, Β, Γ, Δ,

καὶ Π τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δύο πρώτων· λέγω ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν

Π, Γ, Δ,

εἶναι ἐπίσης τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν. Τῷ ὄντι, πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ Β, εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐ-



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τῶν Π· εἶναι ἄρα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Π, Γ, Δ. Ἀντιστρόφως, πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Π, Γ, Δ, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ Π, εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ Α καὶ Β, οἵτινες εἶναι διαιρέται τοῦ Π· ἄρα εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ, Δ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ πολλαπλάσια, ἃ καὶ οἱ ἀριθμοὶ Π, Γ, Δ· ἑπομένως τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν πρώτων εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ἐλαχίστῳ κοινῷ πολλαπλασίῳ τῶν δευτέρων.

104. Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι ἤδη εὔκολον νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν. Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ

Α, Β, Γ, Δ.

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Π τοῦ Α καὶ Β, τὸ ζήτημα ἀνάγεται οὕτω εἰς τὴν ἀναζήτησιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν ἀριθμῶν

Π, Γ, Δ.

Ἔστω Π′ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Π καὶ Γ· τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἀναζήτησιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν ἀριθμῶν

Π′ Δ·

τοῦτο δὲ θέλει εἶσθαι τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

*Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δύο πρώτων, ἔπειτα τὸ ἐλάχι-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*στον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ οὕτω εὑρεθέντος ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τρίτου των δεδομένων, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δεδομένους ἀριθμούς. Τὸ τελευταῖον τῶν οὕτω εὑρεθέντων ἐλαχίστων κοινῶν πολλαπλασίων εἶναι τὸ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.* Τῷ ὄντι, ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ, οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ, Π τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ Β, Π′ τὸ τῶν Π καὶ Γ, Π″ τὸ τῶν Π′ καὶ Δ. Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Π, Γ, Δ· ὁμοίως εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Π′ καὶ Δ, διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ Π″, ἤτοι τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

105. Καλεῖται ἀριθμὸς *πρῶτος* ὁ μὴ ἔχων ἄλλους διαιρέτας ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα.

Οἷον, ὁ 2, 3, 5, 7, 11 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι.

Εἶναι προφανὲς ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος εἶναι πρῶτος πρὸς πάντας τοὺς ἄλλους, ἐκτὸς τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ· διότι κοινὸς παράγων πρώτου ἀριθμοῦ καὶ ἄλλου τινὸς δύναται νὰ ἦναι ἢ ἡ μονὰς, ὅτε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ ὁ πρῶτος, ὅτε ὁ δεύτερος εἶναι πολλαπλάσιος αὐτοῦ.

### Θεωρήματα τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

106. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Πᾶς ἀριθμὸς μὴ πρῶτος ἔχει τοὐλάχιστον ἕνα διαιρέτην πρῶτον.*

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἀριθμός τις δὲν ἦναι πρῶτος, ἔχει ἕνα ἢ πλειοτέρους διαιρέτας ἄλλους ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα. Εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι ὁ ἐλάχιστος τῶν διαιρετῶν τούτων εἶναι πρῶτος· διότι ἐὰν δὲν ἦτο πρῶτος, ἤθελεν ἔχει διαιρέτην μικρότερον ἑαυτοῦ, ὅστις ἤθελε διαιρεῖ τὸν δεδομένον ἀριθμόν.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 4199. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γνωρίζομεν πάντας τοὺς διαιρέτας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ὁ ἐλάχιστος εἶναι 13. Λέγω ὅτι ὁ 13 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος· διότι ἐὰν εἶχε διαιρέτην τινά, οἷον τὸν 3, ὁ 3 ὡς διαιρῶν τὸν 13 ἔπρεπε νὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 4199, καὶ ἑπομένως ὁ 13 δὲν ἤθελεν εἶσθαι ὁ ἐλάχιστος τῶν διαιρετῶν τοῦ 4199:

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

107. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ δὲν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχουσι τοὐλάχιστον ἕνα κοινὸν διαιρέτην πρῶτον.*

Τῷ ὄντι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ δὲν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην ἄλλον ἢ τὴν μονάδα. Ὁ διαιρέτης οὗτος ἢ εἶναι πρῶτος, ἢ ἔχει ἕνα διαιρέτην πρῶτον, ὅστις προφανῶς διαιρεῖ τοὺς δύο δεδομένους ἀριθμούς.

108 ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Ἡ σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἀπέραντος.*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει πρῶτός τις ἀριθμὸς μέγιστος πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν, καὶ ἂς σημειώσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ Π. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἀπὸ τῶν 2 μέχρι τοῦ Π, καὶ προσθέσωμεν μίαν μονάδα εἰς τὸ γινόμενον, θέλομεν ἔχει

$$2\times3\times5\times7\times\ldots\times\Pi+1.$$

Ἐὰν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν κάλεσωμεν Κ, ὁ Κ ἔχει τοὐλάχιστον ἕνα διαιρέτην πρῶτον (106). Λέγω δὲ ὅτι ὁ διαιρέτης οὗτος πρέπει νὰ ἦναι μείζων τοῦ Π· διότι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ Π, ὡς διαιρῶν τὸ πρῶτον μέρος τοῦ Κ, καὶ μὴ διαιρῶν τὸ ἕτερον 1, δὲν διαιρεῖ οὔτε τὸ ἄθροισμα Κ· ὑπάρχει ἄρα ἀριθμὸς πρῶτος μείζων τοῦ Π, ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω γενομένη ὑπόθεσις εἶναι ἀπαράδεκτος.

## Σχηματισμὸς πίνακος πρώτων ἀριθμῶν.

109. Ἡ ἁπλουστέρα μέθοδος πρὸς σχηματισμὸν πίνακος τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρις ὁρίου τινὸς Τ, καλεῖται κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους. Εἶναι δὲ ἡ ἑξῆς.

Γράφομεν τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, . . . . . μέχρι τοῦ ὁρίου Τ, καὶ διαγράφομεν πάντας τοὺς μὴ πρώτους ἀριθμούς.

Οἱ δύω πρῶτοι ὅροι τῆς προηγουμένης σειρᾶς, ἤτοι ὁ 1 καὶ 2 εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ, ὡς ἔχοντες τὰ προσόντα τῶν πρώτων ἀριθμῶν· ἄρα πρέπει νὰ διατηρηθῶσι.

Ἔπειτα διαγράφομεν ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς, τῶν μετὰ τὸν 2, ἕκαστον δεύτερον, ἤτοι τοὺς 4, 6, 8 κτλ. διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι προφανῶς εἶναι 2+2, 2+2+2, 2+2+2+2, κτλ. ἤτοι πολλαπλάσια τοῦ 2.

Ὁ μετὰ τὸν 2 ἐρχόμενος ἀριθμὸς, ἤτοι ὁ 3, εἶναι πρῶτος, ὡς μὴ ὢν πολλαπλάσιος οὐδενὸς τῶν προηγουμένων. Διαγράφομεν δὲ ἐκ τῶν μετὰ τὸν 3 ἕκαστον τρίτον· διότι οἱ οὕτω διαγραφόμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 3+3, 3+3+3, κτλ. ἤτοι πολλαπλάσιοι τοῦ 3. Οὕτω δὲ θέλουσι διαγραφῆ ἐκ νέου καί τινες τῶν ἤδη διαγεγραμμένων, ἀλλὰ τοῦτο οὐδόλως βλάπτει.

Εἶναι περιττὸν νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ μετὰ τὸν 3 ἀριθμοῦ, ἤτοι τοῦ 4· διότι ὁ 4 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2, καὶ ἑπομένως πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 4, ὡς πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 2, εὑρίσκεται ἤδη διαγεγραμμένον. Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ περὶ τοῦ πολλαπλασίου παντὸς μὴ πρώτου ἀριθμοῦ.

Ὁ πρῶτος τῶν μὴ διαγραφέντων ἀριθμῶν ὁ 5 εἶναι πρῶτος, ὡς μὴ ὢν πολλαπλάσιος οὐδενὸς τῶν προηγουμένων ἀριθμῶν. Ἐξαλείφομεν δὲ ἐκ τῶν μετὰ τὸν 5 ἕκαστον πέμπτον, καὶ οὕτω διαγράφομεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5.

Ὁ μετὰ τὸν 5 πρῶτος τῶν μὴ διαγραφέντων ἀριθμῶν, ἤτοι ὁ 7, εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὡς μὴ πολλαπλάσιος οὐδενὸς τῶν προηγουμένων. Διαγράφομεν δὲ ἐκ τῶν μετὰ τὸν

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

7 ἕκαστον ἕβδομον, καὶ οὕτω διαγράφομεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7.

Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω διαγράφοντες τὰ πολλαπλάσια τοῦ πρώτου τῶν μὴ διαγραφέντων ἀριθμῶν διὰ πασῶν τῶν προηγουμένων ἐργασιῶν, ἀναλογιζόμενοι ὅτι εἶναι περιττὸν νὰ διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια τῶν μὴ πρώτων ἀριθμῶν· διότι ταῦτα, ὡς πολλαπλάσια τῶν προηγουμένων αὐτῶν πρώτων ἀριθμῶν, εὑρίσκονται ἤδη διαγεγραμμένα.

110. Εἶναι καλὸν νὰ γνωρίζωμεν ὅτι, ἀφοῦ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, πάντες οἱ μὴ διαγραφέντες ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀμέσως ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι. Οἷον, ἀφοῦ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7, λέγω ὅτι πάντες οἱ μὴ διαγραφέντες ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀμέσως ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 11, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι. Διότι ἐὰν ὁ 97 (μικρότερος τοῦ $11 \times 11$) δὲν διεγράφη, τοῦτο δεικνύει ὅτι δὲν εἶναι διαιρετὸς δι' οὐδενὸς τῶν προηγουμένων πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7. Ἐὰν λοιπὸν ὁ 97 δὲν ἦναι πρῶτος, ὁ ἐλάχιστος τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ, ὅστις πρέπει νὰ ἦναι πρῶτος (106), εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ 11. Ἑπομένως

$$97 = \Delta \times \Pi,$$

ὅπου Δ δεικνύει ἀριθμὸν τοὐλάχιστον ἴσον τῷ 11. Ἐπειδὴ δὲ ὁ Π, ὅστις εἶναι πηλίκον τοῦ 97 διὰ Δ, εἶναι προφανῶς διαιρέτης τοῦ 97, ἄρα εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ Δ (διότι ὑπετέθη ὅτι Δ εἶναι ὁ ἐλάχιστος διαιρέτης τοῦ 97). Ἡ ἰσότης

$$97 = \Delta \times \Pi,$$

δεικνύει λοιπὸν ὅτι ὁ 97 εἶναι γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ 11· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ ὁ 97 εἶναι μικρότερος τοῦ $11 \times 11$. Ἄρα

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἡ γενομένη ὑπόθεσις ὅτι ὁ 97 δὲν εἶναι πρῶτος εἶναι ψευδής. Ὁμοίως δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν ὅτι, ἀφοῦ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 11, πάντες οἱ μὴ διαγραφέντες ἀριθμοὶ μέχρι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρου πρώτου ἀριθμοῦ ἤτοι τοῦ 13, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι. Ἡ ἀπόδειξις ἄρα εἶναι γενική, καὶ ἑπομένως, ἀφοῦ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, πάντες οἱ μὴ διαγραφέντες ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρου πρώτου ἀριθμοῦ, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι.

111. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἵνα ἴδωμεν ἐὰν ἀριθμός τις ἦναι πρῶτος ἢ μή, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διαδοχικῶς διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 . . . , ὧν τὰ τετράγωνα εἶναι μικρότερα αὐτοῦ· ἐὰν οὐδεμία τῶν διαιρέσεων τούτων γίγνηται ἀκριβῶς, ὁ ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος.

Πληροφορούμεθα δὲ ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ διαιρέτου, ὃν δοκιμάζομεν, εἶναι μεῖζον τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ πηλίκον καταστῇ μικρότερον τοῦ διαιρέτου. Διότι, ἐὰν καλέσωμεν Α τὸν διαιρετέον, ἤτοι τὸν δεδομένον ἀριθμόν, καὶ Δ τὸν διαιρέτην, ἐὰν ὁ Α ἦναι μικρότερος τοῦ $\Delta^2$, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι μικρότερον τοῦ Δ.

## Ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας.

112. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων.*

Σημειωθήτω δι' Α ἀριθμός τις μὴ πρῶτος· ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει τοὐλάχιστον ἕνα διαιρέτην πρῶτον Δ (106), ἑπομένως σημειουμένου διὰ Π τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Δ, ἔχομεν

$$\text{Α} = \Delta \times \Pi.$$

Ἐὰν ὁ Π ἦναι πρῶτος, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον, διότι Α εἶναι τότε τὸ γινόμενον δύο πρώτων ἀριθμῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐὰν δὲ ὁ Π δὲν ἦναι πρῶτος, ἔχει τοὐλάχιστον ἕνα διαιρέτην πρῶτον Δ′· ἑπομένως σημειουμένου διὰ Π′ τοῦ πηλίκου, τῆς διαιρέσεως τοῦ Π διὰ Δ′, ἔχομεν

$$\Pi = \Delta' \times \Pi'.$$

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ Π ἐν τῇ προηγουμένῃ ἰσότητι, λαμβάνομεν

$$A = \Delta \times \Delta' \times \Pi'.$$

Ἐὰν μὲν ὁ Π′ ἦναι πρῶτος, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον, διότι τότε Α εἶναι τὸ γινόμενον τριῶν πρώτων ἀριθμῶν· ἐὰν δὲ δὲν ἦναι πρῶτος, τότε ἔχει τοὐλάχιστον ἕνα διαιρέτην πρῶτον Δ′′· ὥστε σημειωμένου διὰ Π′′ τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ Π′ διὰ Δ′′, λαμβάνομεν

$$\Pi' = \Delta'' \times \Pi''.$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ Π′ ἐν τῇ προηγουμένῃ ἰσότητι, λαμβάνομεν

$$A = \Delta \times \Delta' \times \Delta'' \times \Pi''.$$

Δυνάμεθα δὲ νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτω μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς πηλίκον πρῶτον ἀριθμόν· τοῦτο δὲ ἀναγκαίως θέλει συμβῇ μετ' ἀριθμόν τινα τοιούτων ἐργασιῶν, διότι ἄλλως οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι Π, Π′, Π′′. . . . ., οἵτινες προβαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἤθελον σχηματίσει σειρὰν ἀπέραντον, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

Σημειωτέον ὅτι ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς δὲν ὑποθέτει ὅτι οἱ διὰ Δ, Δ′, Δ′′. . . σημειούμενοι ἀριθμοὶ διαφέρουσιν ἀλλήλων· ὁ αὐτὸς παράγων δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ πολλάκις ἐν τῷ γινομένῳ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὸν προηγούμενον συλλογισμὸν εἰς τὸν ἀριθμὸν 630.

ά.) Ὁ 630 ἔχει τὸν πρῶτον διαιρέτην 2, ἑπομένως εἶναι

$$630 = 2 \times 315.$$

β.) Ὁ 315 ἔχει τὸν πρῶτον διαιρέτην 3, καὶ εἶναι

$$315 = 3 \times 105.$$

ἑπομένως $630 = 2 \times 3 \times 105.$

γ΄.) Ὁ 105 ἔχει τὸν πρῶτον διαιρέτην 3, καὶ εἶναι

$$105 = 3 \times 35.$$

ἑπομένως $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 35.$

δ΄.) Ὁ 35 ἔχει τὸν πρῶτον διαιρέτην 5, καὶ εἶναι

$$35 = 5 \times 7.$$

ἑπομένως $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7.$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 7 εἶναι πρῶτος, ἡ ἀνάλυσις ἐπερατώθη.

113. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε. *Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, διαιρεῖ τοὐλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων.*

Ἔστω Π ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον $A \times B$· ὁ Π ὡς πρῶτος, ἐὰν δὲν διαιρῇ τὸν Α, εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτὸν (105), τότε δὲ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ παραγράφου 100 πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον.

114. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. *Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, διαιρεῖ τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, γινόμενον τεσσάρων παραγόντων $A \times B \times \Gamma \times \Delta$, διαιρετὸν διά πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ Π. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

συγκείμενον ἐκ τῶν παραγόντων (Α×Β×Γ) καὶ Δ, ἐὰν ὁ Π δὲν διαιρῇ τὸν Δ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν Α×Β×Γ (113). Ἀλλὰ τὸ νέον τοῦτο γινόμενον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκείμενον ἐκ τῶν παραγόντων Α×Β καὶ Γ· ἐὰν ὁ Π δὲν διαιρῇ τὸν Γ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν Α×Β, καὶ ἑπομένως τὸν Α ἢ τὸν Β· ὥστε ἀναγκαίως ὁ Π διαιρεῖ τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Προφανῶς δὲ ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται εἰς οἱονδήποτε ἀριθμὸν παραγόντων.

115. ΠΟΡΙΣΜΑ Α. *Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον πρώτων παραγόντων, εἶναι ἴσος ἑνὶ ἐξ αὐτῶν.*

Διότι ἵνα διαιρῇ τὸ γινόμενον, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕνα τῶν παραγόντων (114)· οἱ δὲ παράγοντες οὗτοι ὡς πρῶτοι εἶναι διαιρετοὶ μόνον δι' ἑαυτῶν καὶ τῆς μονάδος.

116. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. *Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν δύναμίν τινα ἀριθμοῦ, διαιρεῖ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω Π ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν $A^3$· λέγω ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸν Α. Διότι $A^3$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ Α×Α×Α· ἐπειδὴ δὲ ὁ Π διαιρεῖ τὸ γινόμενον τοῦτο πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ ἕνα τῶν παραγόντων, ἤτοι τὸν Α.

117 ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱαιδήποτε δυνάμεις αὐτῶν εἶναι ἐπίσης πρῶται πρὸς ἀλλήλας.*

Οἷον, τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 15 ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους, λέγω ὅτι καὶ $8^3$ καὶ $15^4$ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι ἐὰν $8^3$ καὶ $15^4$ δὲν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχουσι πρῶτον τινὰ διαιρέτην κοινὸν π. Ἀλλ' ὁ π, ὡς διαιρῶν $8^3$, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν 8 (116)· ὁμοίως διαιρῶν $15^4$, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν 15· ὥστε ὁ 8 καὶ ὁ 15 ἤθελον ἔχει κοινόν τινα διαιρέτην π, ὅπερ εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως, καθότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

118. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. *Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου τινος, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν. Καὶ ἀντιστρόφως, ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων.*

ά.) Ἔστω τὸ γινόμενον Α×Β×Γ×Δ, καὶ Π ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων Α,Β,Γ,Δ. Ἐὰν ὁ Π καὶ τὸ γινόμενον Α×Β×Γ×Δ δὲν ἦναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε πρέπει νὰ ἔχωσι τοὐλάχιστον ἕνα κοινὸν διαιρέτην πρῶτον Μ (107)· ἐπειδὴ δὲ ὁ Μ εἶναι πρῶτος, καὶ διαιρεῖ τὸ γινόμενον Α×Β×Γ×Δ, πρέπει νὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου, οἷον τὸν Γ· ἀλλὰ τότε ὁ Π καὶ ὁ Γ ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸν Μ, ὅπερ εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

β'.) Ἔστω ἀριθμός τις Κ πρῶτος πρὸς τὸ γινόμενον Α×Β×Γ×Δ· λέγω ὅτι εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου. Διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Κ καί τις τῶν παραγόντων, οἷον ὁ Β, ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην Μ, ὁ Μ ὡς διαιρῶν τὸν Β, διαιρεῖ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ Α×Β×Γ×Δ· ὥστε τότε ὁ Κ καὶ τὸ γινόμενον Α×Β×Γ×Δ ἤθελον ἔχει κοινὸν διαιρέτην τὸν Μ, ὅπερ εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

119. ΘΕΩΡΗΜΑ Η'. *Ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ πολλῶν ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Κ διαιρετὸς διὰ πολλῶν Α,Β,Γ, πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Ἐπειδὴ ὁ Κ διαιρεῖται δι' Α, σημειοῦντες διὰ Π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Κ δι' Α, ἔχομεν

$$K = A \times \Pi.$$

Τὸ γινόμενον Α×Π, ὡς ἴσον τῷ Κ, διαιρεῖται ἐξ ὑποθέσεως διὰ τοῦ Β· ἐπειδὴ δὲ ὁ Β εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Α, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν παράγοντα Π (100)· ὥστε σημειοῦντες διὰ Π′ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Π διὰ Β, θέλομεν ἔχει

$$\Pi = B \times \Pi'.$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ Π ἐν τῇ προηγουμένῃ ἰσότητι, λαμβάνομεν

$$K = A \times B \times \Pi'.$$

Τὸ γινόμενον $A \times B \times \Pi'$, ὡς ἴσον τῷ Κ, εἶναι ὅπως καὶ τοῦτο, διαιρετὸν διὰ Γ· ἀλλ' ὁ Γ ὡς πρῶτος πρὸς τὸν Α καὶ Β εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν $A \times B$ (118)· ἑπομένως πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν Π′ (100). Σημειουμένου λοιπὸν διὰ Π″ τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ Π′ διὰ Γ, θέλομεν ἔχει (118)

$$\Pi' = \Gamma \times \Pi''.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ Π′, ἐν τῇ τοῦ Κ, λαμβάνομεν

$$K = A \times B \times \Gamma \times \Pi''.$$

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη ἀποδεικνύει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

120. ΘΕΩΡΗΜΑ Θ′. *Πᾶς ἀριθμὸς καθ' ἕνα μόνον τρόπον δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς πρώτους παράγοντας.*

Ἐὰν ὑπῆρχον δύο τρόποι ἀναλύσεως, ἤθελον διαφέρει ἀλλήλων ἢ κατὰ τὴν ἀριθμὸν τῶν παραγόντων, ἢ κατὰ τοῦτο ὅτι ἐντῷ ἑτέρῳ ὁ αὐτὸς πρῶτος παράγων εὑρίσκεται πλεονάκις ὡς παράγων ἢ ἐν τῷ ἑτέρῳ. Θέλομεν δὲ ἀποδείξει ὅτι ἀμφότερα ταῦτα εἶναι ἀδύνατα.

α.) *Ἐὰν δύο γινόμενα πρώτων ἀριθμῶν παριστῶσι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν παραγόντων.*

Τῷ ὄντι, γνωρίζομεν ὅτι οὐδεὶς πρῶτος ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ ἦναι ἴσος τινὶ ἐξ αὐτῶν (115). Ἐὰν ἄρα δύο γινόμενα πρώτων παρα-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

γόντων παριστῶσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἕκαστον αὐτῶν πρέπει νὰ περιέχῃ ἅπαντας τοὺς πρώτους διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, καὶ ἑπομένως ἅπαντας τοὺς παράγοντας τοῦ ἑτέρου γινομένου· ὅπερ ἀποδεικνύει τὴν ἀνωτέρω πρότασιν.

6'.) *Ἐὰν δύο γινόμενα πρώτων ἀριθμῶν παριστῶσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὁσάκις ἕκαστος παράγων εὑρίσκεται ἐν τῷ πρώτῳ, τοσάκις εὑρίσκεται καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ.*

Τῷ ὄντι, ὑποτεθείσθω ὅτι ἐν τῷ ἑνὶ τῶν γινομένων ὁ παράγων 7 περιέχεται τρὶς, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ μόνον δίς· καὶ ἔστωσαν

$$7\times7\times7\times13\times13\times19 \text{ καὶ } 7\times7\times13\times19\times19$$

τὰ δύο ταῦτα γινόμενα. Ἐὰν ἦσαν ἴσα, διαιρούμενα ἑκάτερον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $7\times7$, ἤθελον δώσει ἴσα πηλίκα, καὶ ἑπομένως ἠθέλομεν ἔχει

$$7\times13\times13\times19=13\times19\times19.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἀδύνατος, διότι τὸ πρῶτον γινόμενον περιέχει τὸν παράγοντα 7, ἐνῷ τὸ δεύτερον δὲν περιέχει αὐτόν. Ἡ ἀπόδειξις αὕτη εἶναι γενικὴ· διότι οἱοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ παράγων, ὅστις δὲν περιέχεται τοσάκις ἐν τῷ ἑνὶ γινομένῳ, ὁσάκις καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύο γινόμενα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἦναι ἴσα ἐὰν τὰ δεδομένα ἦναι, καὶ ἐξ ὧν τὸ ἓν μόνον περιέχει τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος παράγοντα.

## Πῶς ἀναλύεται ἀριθμὸς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

119. Ἀφοῦ ἀπεδείξαμεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς πρώτους παράγοντας, καὶ ὅτι τοῦτο γίνεται καθ' ἕνα μόνον τρόπον, ὑπολείπεται νὰ ἴδωμεν πῶς ἐκτελεῖται ἡ ἀνάλυσις αὕτη.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 32760· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 (72)· ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 16380· ἄρα ἔχομεν

$$32760=2\times16380,$$

ὑπολείπεται δὲ ἀναλυθῇ εἰς πρώτους παράγοντας ὁ 16380. Ἐπειδὴ δὲ καὶ οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 8190· ἄρα ἔχομεν

$$16380=2\times8190\cdot$$

ἑπομένως

$$32760=2\times2\times8190=2^2\times8190.$$

Ὑπολείπεται δὲ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 8190 εἰς πρώτους παράγοντας. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὡσαύτως διαιρετὸς διὰ 2· ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 4095· ἄρα ἔχομεν

$$8190=2\times4095\cdot$$

καὶ ἑπομένως

$$32760=2^2\times2\times4095=2^3\times4095\cdot$$

μένει δὲ ν' ἀναλυθῇ ὁ 4095 εἰς πρώτους παράγοντας. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, ἀλλ' εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 (76)· ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 1365· ἄρα ἔχομεν

$$4095=3\times1365,$$

καὶ ἑπομένως

$$32760=2^2\times3\times1365.$$

Ὁ ἀριθμὸς 1365 εἶναι πάλιν διαιρετὸς διὰ 3. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 455· ἄρα ἔχομεν

$$1365=3\times455\cdot$$

καὶ ἑπομένως

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$$32790 = 2^3 \times 3 \times 3 \times 455 = 2^3 \times 3^2 \times 455.$$

Ὁ ἀριθμὸς 455 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 3, διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ 5 (72). Ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 91· ἄρα ἔχομεν

$$455 = 5 \times 91$$

καί ἑπομένως

$$32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 91.$$

Ὑπολείπεται δὲ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 91 εἰς πρώτους παράγοντας. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 5· διὰ τοῦτο δοκιμάζομεν ἐὰν διαιρῆται διὰ τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρου πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ 7. Τῷ ὄντι ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 13· ἄρα ἔχομεν

$$91 = 7 \times 13$$

καὶ ἑπομένως

$$32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ τελευταῖος παράγων 13 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ἡ ἐργασία ἐπερατώθη.

Συνήθως ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

| | |
|---|---|
| 32760 | 2 |
| 16380 | 2 |
| 8190 | 2 |
| 4095 | 3 |
| 1365 | 3 |
| 455 | 5 |
| 91 | 7 |
| 13 | 13 |
| 1 | |

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α. Πρέπει νὰ δοκιμάζωμεν τὸν αὐτὸν διαιρέτην πολλάκις κατὰ συνέχειαν, ὅπως ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι τοὺς πρώτους διαιρέτας 2 καὶ 3, μέχρις οὗ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

παύσῃ τοῦ νὰ ἦναι ἀκριβὴς διαιρέτης. Ἀλλ' ἀκολούθως εἶναι περιττὸν νὰ δοκιμάσωμεν ἐκ νέου αὐτούς· διότι ἑκάστου πηλίκου ὄντος διαιρέτου τῶν προηγουμένων πηλίκων, ἀριθμὸς μὴ διαιρῶν ἓν ἐξ αὐτῶν, δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὰ ἑπόμενα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ ἀναλυθῇ εἰς πρώτους παράγοντας, φαίνηται ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι εἶναι τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων γνωστῶν ἀριθμῶν, ἁπλοποιοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ἀναλύοντες χωριστὰ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων, καὶ σχηματίζοντες ἀκολούθως μοναδικὸν γινόμενον ἐκ πάντων τῶν παραγόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 2400. Βλέπομεν ὅτι $2400=24\times100$· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἀναλύσωμεν 24 καὶ 100· ἀλλὰ $24=4\times6$· $4=2\times2$· $6=2\times3$· ἄρα $24=2\times2\times2\times3$· $100=10\times10=2\times5\times2\times5$. ἑπομένως ἔχομεν

$$2400=2\times2\times2\times3\times2\times5\times2\times5=2^5\times3\times5^2.$$

## Πότε ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἑτέρου.

122. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Διὰ νὰ ἦναι ἀριθμός τις διαιρετὸς δι' ἑτέρου πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ διαιρέτης νὰ ἔχῃ πρώτους παράγοντας, οἵτινες εὑρίσκονται ἅπαντες ἐν τῷ διαιρετέῳ, καὶ αὐτοὶ δὲ νὰ μὴ περιέχωνται πλεονάκις ἐν τῷ διαιρέτῃ ἢ ἐν τῷ διαιρετέῳ.*

ά.) Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία. Τῷ ὄντι, ἐὰν νοήσωμεν τὸν διαιρετέον, τὸν διαιρέτην καὶ τὸ πηλίκον ἀναλελυμένους εἰς πρώτους παράγοντας, ὁ διαιρετέος, ὡς γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, εἶναι τὸ γινόμενον πάντων τῶν παραγόντων τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν. Ἑπομένως οἱ παράγοντες τοῦ διαιρέτου ὑπάρχουσιν ἐν τῷ διαιρετέῳ τοὐλάχιστον τοσάκις, ὁσάκις καὶ ἐν τῷ διαιρέτῃ.



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Β'.) Ἡ συνθήκη αὕτη ἀρκεῖ. Τῷ ὄντι, τῆς συνθήκης ταύτης πληρουμένης, δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν τὸν διαιρετέον εἰς δύο παράγοντας, ὧν ὁ ἕτερος θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον τῶν πρώτων παραγόντων, ἐξ ὧν σύγκειται ὁ διαιρέτης, ὁ δὲ ἕτερος θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν πρώτων παραγόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $3^2 \times 7^3 \times 5^4 \times 13 \times 17$ διαιρούμενον διὰ $3^2 \times 7 \times 5^2$, θέλει δώσει πηλίκον $7^2 \times 5^2 \times 13 \times 17$· διότι ἑνοῦντες τοὺς παράγοντας τούτου μετὰ τῶν τοῦ διαιρέτου, θέλομεν ἔχει, ὡς καὶ ἐν τῷ διαιρετέῳ, 2 παράγοντας 3, 3 παράγοντας 7, 4 παράγοντας 5, 1 παράγοντα 13 καὶ 1 παράγοντα 17.

## Εὕρεσις πάντων τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος.

123. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 792. Ἐπειδὴ ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 792 εἶναι γινόμενον πρώτων τινῶν παραγόντων αὐτοῦ, πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ ἀναλύσωμεν αὐτὸν εἰς πρώτους παράγοντας.

Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι

$$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι πᾶς διαιρέτης τοῦ 792, συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς μονάδος καὶ αὐτοῦ τοῦ 792, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τριῶν παραγόντων, ὧν ὁ μὲν πρῶτος εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν $1, 2, 2^2, 2^3$· ὁ δὲ δεύτερος εἷς τῶν ἀριθμῶν $1, 3, 3^2$· καὶ ὁ τρίτος εἷς τῶν ἀριθμῶν 1, 11.

Ἑπομένως θέλομεν εὕρει πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 792, σχηματίζοντες τὸν ἑξῆς πίνακα·

$1, 2, 2^2, 2^3,$
$1, 3, 3^2,$
$1, 11,$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

καὶ λαμβάνοντες τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, ἔπειτα πάλιν ἕκαστον τῶν ἐξαγομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς.

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, σχηματίζομεν τὸν ἑξῆς πίνακα·

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3, \\ 3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2. \end{array}$$

Ἔπειτα, πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ πίνακος τούτου ἐφ' ἕκαστον τῆς τρίτης σειρᾶς τοῦ πρώτου πίνακος, λαμβάνομεν τὸν ἑξῆς·

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3, \\ 3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2, \\ 11, & 2\times 11, & 2^2\times 11, & 2^3\times 11, \\ 3\times 11, & 2\times 3\times 11, & 2^2\times 3\times 11, & 2^3\times 3\times 11, \\ 3^2\times 11, & 2\times 3^2\times 11, & 2^2\times 3^2\times 11, & 2^3\times 3^2\times 11, \end{array}$$

ὅστις περιέχει πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 792.

Ἐκτελοῦντες δὲ τοὺς σεσημειωμένους πολλαπλασιασμοὺς εὑρίσκομεν·

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 4, | 8, |
| 3, | 6, | 12, | 24, |
| 9, | 18, | 36, | 72, |
| 11, | 22, | 44, | 88, |
| 33, | 66, | 132, | 264, |
| 99, | 198, | 396, | 792. |

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών.

*Ἵνα εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας ἀριθμοῦ τινος, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς πρώτους παράγοντας, καὶ σχηματίζομεν*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*πίνακα συγκείμενον ἐκ τοσούτων ὁριζοντίων σειρῶν, ὅσοι εἶναι οἱ διάφοροι πρῶτοι παράγοντες, οὓς περιέχει ὁ δεδομένος ἀριθμός. Ἑκάστη τῶν σειρῶν τούτων ἀποτελεῖται ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ πασῶν τῶν δυνάμεων ἑνός τινος τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς ἐν τῷ ἀριθμῷ περιεχομένης.*

*Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἅπαντας τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, ἔπειτα ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων, ἐφ' ἕκαστον τῆς τρίτης, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ τελευταῖα γινόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πίνακος, εἶναι πάντες οἱ ζητούμενοι διαιρέται.*

## Ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος.

**124.** Ἔστω ἀριθμός τις Π ἀναλελυμένος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον·

$$\Pi = \alpha^{\mu} \times \beta^{\nu} \times \gamma^{\pi},$$

ὅπου α, β, καὶ γ εἶναι οἱ πρῶτοι παράγοντες, μ, ν, π οἱ ἐκθέται αὐτῶν.

Κατὰ τὸν προηγουμένον κανόνα σχηματίζομεν τὸν πίνακα

$$\begin{array}{llllll} 1, & \alpha, & \alpha^2, & \alpha^3, & \ldots & \alpha^{\mu}, \\ 1, & \beta, & \beta^2, & \beta^3, & \ldots & \beta^{\nu}, \\ 1, & \gamma, & \gamma^2, & \gamma^3, & \ldots & \gamma^{\pi}, \end{array}$$

ἐν ᾧ ἡ μὲν πρώτη σειρὰ περιέχει $\mu+1$ ὅρους, ἡ δὲ δευτέρα $\nu+1$, καὶ ἡ τρίτη $\pi+1$· ὅταν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης ἐπὶ τοὺς τῆς δευτέρας, θέλομεν λάβειτὸ ὅλον $(\mu+1)(\nu+1)$ γινόμενα. Καὶ ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὰ γινόμενα ταῦτα ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

σειρᾶς, ἕκαστος τούτων θέλει δώσει $(\mu+1)(\nu+1)$ γινόμενα· ἑπομένως τὸ ὅλον ἤτοι οἱ $\pi+1$ θέλουσι δώσει

$$(\mu+1)(\nu+1)(\pi+1).$$

Οὗτος ἄρα εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι

*Ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος εὑρίσκεται προστιθεμένης μιᾶς μονάδος εἰς τὸν ἐκθέτην ἑκάστου πρώτου παράγοντος, καὶ σχηματιζομένου τοῦ γινομένου τῶν οὕτω προκυπτόντων ἀριθμῶν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α. Ἐν τῷ ἀριθμῷ $(\mu+1)(\nu+1)(\pi+1)$ τῶν διαιρετῶν συμπεριλαμβάνεται καὶ ἡ μονὰς, ἥτις προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων ὅρων τῶν διαφόρων σειρῶν, καὶ αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς, προκύπτων ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τελευταίων ὅρων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἄρτιος, ἐκτὸς ἐὰν οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἔχωσιν ἅπαντες ἐκθέτας ἀρτίους.*

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον ὅτι γινόμενον περιέχον τινὰς ἢ ἕνα μόνον παράγοντα ἄρτιον, εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· ἐὰν δὲ ἅπαντες οἱ παράγοντες ἦναι περιττοὶ, τὸ γινόμενον εἶναι ἀριθμὸς περιττός. Ἤδη δὲ, ἐὰν ὁ ἐκθέτης τινὸς τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ εἶναι περιττὸς, προστιθεμένης εἰς αὐτὸν μονάδος, τὸ ἄθροισμα γίνεται ἄρτιον, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν, τοῦ ὁποίου παράγων εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦτο. Ἐὰν δὲ ἅπαντες οἱ ἐκθέται ἦναι ἄρτιοι, ἕκαστος τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαιρετῶν εἶναι περιττὸς, ἑπομένως καὶ αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν ἴδει εἰς τὸ μετὰ ταῦτα ὅτι οἱ ἀριθμοὶ, ὧν οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσιν ἅπαντες ἀρτίους ἐκθέτας, εἶναι τετράγωνοι, δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν τὴν προηγουμένην πρότασιν ὡς ἑξῆς.

*Ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος εἶναι*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*ἄρτιος, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἦναι τετράγωνον ἑτέρου ἀριθμοῦ.*

Δυνάμεθα δὲ νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἐκ τῶν προτέρων τὸ προηγούμενον θεώρημα.

Ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἄρτιος, ἐπειδὴ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τρόπων, κἀθ' οὓς οὗτος δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Ἂς θεωρήσωμεν, παραδείγματος χάριν, τὸν ἀριθμὸν 60. Πᾶς διαιρέτης τοῦ 60 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἷς τῶν δύο παραγόντων γινομένου ἴσου τῷ 60· ἀλλ' εἰς ἑκάστην τοιαύτην ἀνάλυσιν τοῦ 60 ἀντιστοιχοῦσι δύο διαιρέται· οἷον, ἐὰν ἔχωμεν

$$60 = 4 \times 15,$$

τοῦτο δεικνύει ὅτι 60 διαιρούμενος διὰ 4 δίδει πηλίκον 15, καὶ 60 διὰ 15 δίδει πηλίκον 4· ἄρα 4 καὶ 15 εἶναι διαιρέται τοῦ 60· βλέπομεν ἐντεῦθεν ὅτι ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δυνατῶν ἀναλύσεων εἰς δύο παράγοντας· ἑπομένως εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· ἐξαίρεσις δὲ ὑπάρχει μόνον ὅταν ὁ θεωρούμενος ἀριθμὸς ἦναι τετράγωνος· διότι, ὅταν οἱ δύο παράγοντες τοῦ γινομένου καταστῶσιν ἴσοι, πρέπει νὰ λογίσωμεν αὐτοὺς ὡς ἕνα ἐν τῇ ἀπαριθμήσει τῶν διαιρετῶν.

## Ἐφαρμογὴ τῆς εἰς πρώτους παράγοντας ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν.

125 ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ ἦναι ἀναλελυμένοι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, σχηματίζοντες τὸ γινόμενον τῶν πρώτων παραγόντων,*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*οἵτινες εἶναι κοινοὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων, λαμβανομένων ἑκάστου μετὰ τοῦ ἐλαχίστου τῶν ἐκθετῶν, οὓς ἔχει ἐν τοῖς διαφόροις ἀριθμοῖς.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

$$4680 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13,$$
$$14700 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2,$$
$$23760 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 11.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες εἶναι οἱ 2, 3, 5· καὶ ἡ ἐλαχίστη δύναμις τοῦ μὲν 2 εἶναι ἡ δευτέρα, τοῦ δὲ 3 ἡ πρώτη, καὶ τοῦ 5 ἐπίσης ἡ πρώτη.

Λέγω λοιπὸν ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι

$$2^2 \times 3 \times 5.$$

ά.) Εἶναι κοινὸς διαιρέτης ὁ οὕτω σχηματισθεὶς ἀριθμὸς· διότι πάντες οἱ παράγοντες αὐτοῦ ὑπάρχουσιν ἐν ἑκάστῳ τῶν δεδομένων (122).

β΄.) Εἶναι ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν· διότι ἂν μὲν προσληφθῶσι καὶ ἕτεροι πρῶτοι παράγοντες, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρέτης, ἢ πάντων, ἢ τινῶν τῶν δεδομένων ἀριθμῶν. Ἐὰν δὲ παράγοντός τινος, οἷον τοῦ 3, ληφθῇ μείζων δύναμις, οἷον $3^3$, ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρέτης ἐκείνου, ἐν ᾧ τὸ 3 ἔχει μικρότερον ἐκθέτην (122.)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐπ' ἀριθμὸν πρῶτον πρὸς τὸν ἕτερον.* Διότι οὕτως οὔτε εἰσάγεται, οὔτε ἐξαλείφεται κοινός τις παράγων. Ἑπομένως ἐν τῇ ἀναζητήσει τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν ἐξ ἑκάστου ὑπολοί-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

που τοὺς πρώτους πρὸς τὸ ἀκόλουθον ὑπόλοιπον παράγοντος, ἐὰν διακρίνωμεν αὐτούς.

126. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ ἦναι ἀναλελυμένοι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν πολλαπλάσιον, σχηματίζοντες τὸ γινόμενον ἁπάντων τῶν πρώτων παραγόντων τῶν περιεχομένων ἐν τοῖς δεδομένοις ἀριθμοῖς, λαμβανομένων ἑκάστου μετὰ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκθετῶν αὐτοῦ.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

$$4680 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13,$$
$$14700 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2,$$
$$23760 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 11.$$

λέγω ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι

$$2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 11 \times 13 \times 7^2.$$

α.) Εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς· διότι περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας ἑκάστου αὐτῶν, ἑπομένως διαιρεῖται δι' ἑκάστου αὐτῶν.

β.) Εἶναι τὸ ἐλάχιστον· διότι πᾶν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν πρέπει νὰ περιέχῃ $2^4$, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἐν τῷ ἀριθμῷ 23760· πρέπει νὰ περιέχῃ καὶ $3^3$, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἐν τῷ αὐτῷ· πρέπει νὰ περιέχῃ καὶ $5^2$, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἐν τῷ 14700· πρέπει νὰ περιέχῃ καὶ 11, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἐν τῷ 23760· πρέπει τέλος νὰ περιέχῃ καὶ 13, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἐν τῷ 4680· δὲν δύναται ἑπομένως νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ γινομένου τῶν παραγόντων τούτων, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς, ἐξαιρουμένου τοῦ 2, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 4 ηὐξημένον ἢ ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.

2. Πᾶς πρῶτος ἀριθμός, ἐξαιρουμένων τοῦ 2 καὶ 3, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 6 ηὐξημένον ἢ ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.

3. Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν δι' 6.

4, Τοῦ ν παριστῶντος οἱονδήποτε ἀριθμόν, τὸ γινόμενον

$$\nu\,(\nu+1)\,(2\nu+1)$$

εἶναι πάντοτε διαιρετὸν δι' 6.

5. Ἐὰν διατάξωμεν κατὰ τάξιν μεγέθους πάντας τοὺς διαιρέτας ἀριθμοῦ τινος, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τελευτῶντες εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς ταύτης, ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσον τῷ δεδομένῳ ἀριθμῷ.

6. Εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον τῶν ἐχόντων 180 διαιρέτας ἀριθμῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

*Ὁρισμοί.*

127. Εἴδομεν ὅτι πρὸς ὁρισμὸν ποσοῦ τινος συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἕτερον ποσὸν τῆς αὐτῆς φύσεως, ὡς γνωστὸν θεωρούμενον, τὸ ὁποῖον καλεῖται μονάς.

Καὶ ὅταν μὲν τὸ ποσὸν εὑρίσκηται συγκείμενον ἐκ μερῶν ἴσων ἁπάντων τῇ μονάδι, τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως τοῦ ποσοῦ πρὸς τὴν μονάδα αὐτοῦ εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός. Περὶ τοιούτων δὲ ἀριθμῶν ἀποκλειστικῶς μέχρι τοῦδε ἐγένετο λόγος.

Ἀλλ' ἐν τῇ μετρήσει ποσοῦ τινος δύναται νὰ συμβῇ καὶ ἄλλο τι· τουτέστι τὸ ποσὸν δύναται νὰ ἦναι μικρότερον τῆς μονάδος, ἢ ἄθροισμα μερῶν ἴσων τῇ μονάδι, καὶ προσέτι μέρους μικροτέρου τῆς μονάδος. Πρὸς μέτρησιν τοῦ μέρους τούτου, διαιροῦμεν τὴν μονάδα εἰς ἴσα μέρη, πρὸς ἓν τῶν ὁποίων, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς, *κλασματικὴ* καλουμένη, συγκρίνομεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ποσόν. Ἐὰν δὲ τοῦτο ἦναι ἄθροισμα τοιούτων μονάδων, ὁ τὸ μέτρον αὐτοῦ ἐκφράζων ἀριθμὸς καλεῖται *κλασματικὸς ἀριθμὸς*, ἢ *κλάσμα*.

Πκραδείγματος χάριν, ἂς θεωρήσωμεν μῆκός τι, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τῆς μονάδος διαιρεθείσης εἰς 7 ἴσα μέρη, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος μῆκος περιέχει 5 τοιαῦτα· τότε λέγομεν ὅτι τὸ μῆκος περιέχει *κλάσμα* τῆς μονάδος ἴσον 5 ἑβδόμοις, ἢ ὅτι μέτρον τοῦ μήκους τούτου εἶναι 5 ἕβδομα.

Ἂς θεωρήσωμεν προσέτι μῆκός τι μεῖζον τῆς μονάδος, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι συγκρίναντες αὐτὸ πρὸς τὸ ἑνδέκατον τῆς μονάδος, εὕρομεν ὅτι περιέχει ἀκριβῶς 28 τοι-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

αὗτα ἐνδέκατα· τότε μέτρον τοῦ μήκους τούτου εἶναι ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς 28 ἐνδέκατα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι πρὸς παράστασιν παντὸς κλάσματος ἀπαιτοῦνται δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὁρίζοντες ὁ μὲν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἴσων μερῶν εἰς ἃ διῃρέθη ἡ μονάς, ὁ δὲ πόσων τοιούτων μερῶν συλλογὴ εἶναι· ὁ μὲν πρῶτος καλεῖται *παρονομαστὴς*, ὁ δὲ δεύτερος *ἀριθμητής*· περιληπτικῶς δὲ ἀμφότεροι καλοῦνται *ὅροι* τοῦ κλάσματος.

Γράφονται δὲ τὰ κλάσματα, γραφομένου τοῦ παρονομαστοῦ ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν, ἀφ' οὗ χωρίζεται δι' ὁριζοντίου γραμμῆς· οὕτω $\frac{5}{7}$ παριστᾷ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν 5 καὶ παρόνομαστὴν 7.

Ἵνα ἀπαγγείλωμεν κλάσμα, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν, ἔπειτα τὸν παρονομαστὴν ὡς ἀριθμητικὸν τακτικόν· οἷον, $\frac{8}{15}$ ἀπαγγέλλεται *ὀκτὼ δέκατα πέμπτα*.

128. Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν οἱονδήποτε ἀριθμόν. Ἔστω, παραδείγματος χάριν, νὰ τραπῇ ὁ 5 εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 7. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς εἶναι ἴση 7 ἑβδόμοις, ὁ 5 εἶναι ἴσος $5 \times 7$ ἑβδόμοις, τουτέστι $\frac{5 \times 7}{7}$ ἢ $\frac{35}{7}$.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι·

*Ἵνα τραπῇ ἀκέραιος εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν δεδομένον ἀριθμὸν, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον νὰ τεθῇ παρονομαστὴς ὁ αὐτὸς οὗτος.*

## Θεωρήματα τῶν κλασμάτων.

129. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Πᾶς κλασματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓν τῶν μερῶν τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ διαιρεθέντος εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.*

Λέγω δηλονότι ὅτι ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{13}{17}$ ὅστις πα-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ριστᾷ 13 ἕβδομα τῆς μονάδος, παριστᾷ ἐπίσης τὸ ἕβδομον τοῦ ἀριθμοῦ 13.

Τῷ ὄντι γνωρίζομεν ὅτι

$$13 \times 7 = 7 \times 13$$

τουτέστι 13 *μονάδες* ἐπαναλαμβανόμεναι $7^{\text{κις}}$, παρέχουσι τὸ αὐτὸ γινόμενον, ὅ καὶ 7 *μονάδες* ἐπαναλαμβανόμεναι $13^{\text{κις}}$· ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ὡς μονάδα τὸ $\frac{1}{7}$ βλέπομεν ὅτι 13 *ἕβδομα* ἐπαναλαμβανόμενα $7^{\text{κις}}$, παρέχουσι τὸ αὐτὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον καὶ 7 *ἕβδομα* ἢ 1, ἐπαναλαμβανόμενον $13^{\text{κις}}$, δηλονότι 13 ἕβδομα ἐπαναλαμβανόμενα $7^{\text{κις}}$ παρέχουσι γινόμενον 13, ἑπομένως 13 ἕβδομα εἶναι τὸ ἕβδομον τοῦ 13.

Τὸ προηγούμενον θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

*Πολλαπλασιάζοντες κλάσμα τι ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ εὑρίσκομεν γινόμενον τὸν ἀριθμητήν.*

Τῷ ὄντι, ὅταν λέγωμεν ὅτι $\frac{13}{7}$ εἶναι τὸ ἕβδομον τοῦ 13, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ λέγωμεν ὅτι $\frac{13}{7}$ ἐπαναλαμβανόμενον $7^{\text{κις}}$ παρέχει γινόμενον 13.

130. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Πᾶς κλασματικὸς ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος εἶναι ἴσος τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ηὐξημένῳ κατὰ κλάσμα ἔλασσον τῆς μονάδος, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον, παρανομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.*

Ἔστω π. χ. ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{43}{5}$. Διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ εὑρίσκομεν πηλίκον 8 καὶ ὑπόλοιπον 3· ὥστε ἔχομεν

$$43 = 5 \times 8 + 3.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει ὅτι 43 *μονάδες* περιέχουσιν ὀκτάκις 5 *μονάδας* καὶ προσέτι 3 *μονάδας*. Ἐπειδὴ δὲ ὡς

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

μονάδα δύναμαι νὰ λάβω τὸ *πέμπτον*, ἡ αὐτὴ ἰσότης δεικνύει ὅτι 43 πέμπτα περιέχουσι ὀκτάκις 5 *πέμπτα* καὶ προσέσι 3 *πέμπτα*· ἐπειδὴ δὲ 5 πέμπτα ἀποτελοῦσι μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἡ ἀνωτέρω σχέσις δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τῆς ἰσότητος

$$\frac{43}{5} = 8 + \frac{3}{5},$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅταν κλασματικὸς ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος ἀναλύηται οὕτως εἰς ἀκέραιον καὶ κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος, λέγεται ὅτι *ἐξάγομεν* τὸν ἐν τῷ κλασματικῷ περιεχόμενον ἀκέραιον.

131. Ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰσότητι

$$\frac{43}{5} = 8 + \frac{3}{5},$$

Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος παριστᾷ τὸ πέμπτον τοῦ ἀριθμοῦ 43, συμπεραίνομεν ὅτι, ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες ἑτέρου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν ἓν τῶν ἴσων τούτων μερῶν, πρέπει εἰς τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ πρώτῳ, καὶ ὃν μέχρι τοῦδε ἐκαλέσαμεν πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου, νὰ προσθέσωμεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης, παρανομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Ἐπομένως ὁ ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων, ὅτι εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένος ἀκέραιος διαιρεῖται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες δευτέρου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ὃν

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

εἴδομεν ὅτι ἐφαρμόζεται ὅταν ἡ διαίρεσις ἐκτελῆται ἀκριβῶς, δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τοῦτο δὲν συμβαίνει.

Εἰς τὸ ἑξῆς λοιπὸν, ἐκεῖνο μὲν τὸ ὁποῖον μέχρι τοῦδε ἐκαλοῦμεν ἁπλῶς πηλίκον, θέλομεν ὀνομάζει *ἀκέραιον πηλίκον*, ἢ *ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου*, *κλῆρες δὲ πηλίκου* ἢ ἁπλῶς *πηλίκον* θέλομεν ὀνομάζει τὸ ἓν τῶν μερῶν τοῦ διαιρετέου διαιρεθέντος εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ διαιρέτου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον τῷ ἀκεραίῳ πηλίκῳ ηὐξημένῳ κατὰ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, παρανομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει τὸν διαιρετέον.

132. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ κλάσματος δι' ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Τῷ ὄντι, τοῦ παρανομαστοῦ μένοντος τοῦ αὐτοῦ, ἡ μονὰς τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ μένει ἡ αὐτή· πολλαπλασιαζομένου λοιπὸν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ 2,3,4 . . . ὁ ἀριθμὸς τῶν κλασματικῶν μονάδων γίνεται δὶς, τρὶς, τετράκις . . . μείζων, ἑπομένως τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2, 3, 4. Ὡσαύτως διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ 2, 3, 4 . . . ὁ ἀριθμὸς τῶν κλασματικῶν μονάδων γίνεται δὶς, τρὶς, τετράκις . . . μικρότερος, ἑπομένως τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 2,3,4 . . .

Παράδειγματος χάριν, τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{20}{7}$· τὸ δὲ τέταρτον τοῦ $\frac{20}{7}$ εἶναι $\frac{5}{7}$.

133. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ κλάσματος δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

α) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$· πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πολλα-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

πλασιαζομένου τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ 6 εὑρίσκομεν κλάσμα, $\frac{5}{42}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ $\frac{5}{7}$.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἀφοῦ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 7 ἴσα μέρη ἤτοι εἰς 7 ἕβδομα, διαιρέσωμεν ἕκαστον τούτων εἰς 6 ἴσα μέρη, θέλομεν ἔχει τὸ ὅλον 42 μέρη ἴσα, τὰ ὁποῖα θέλουσιν εἶσθαι τεσσαρακοστὰ δεύτερα· $\frac{1}{42}$ εἶναι λοιπὸν τὸ ἕκτον ἑνὸς ἑβδόμου καὶ ἑπομένως πέντε τεσσαρακοστὰ δεύτερα εἶναι τὸ ἕκτον πέντε ἑβδόμων.

β΄.) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{8}{15}$· πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 3, εὑρίσκομεν κλάσμα $\frac{8}{5}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τριπλάσιον τοῦ πρώτου. Τῷ ὄντι ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις δεικνύει ὅτι $\frac{8}{15}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{8}{5}$, ἄρα $\frac{5}{8}$ εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{8}{15}$.

134. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὅτι, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν (132), ἢ νὰ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν (133) διὰ τοῦ ἀκεραίου τούτου ἀριθμοῦ. Ὁ πρῶτος τρόπος δύναται πάντοτε νὰ ἐφαρμοσθῇ· ἀλλ᾽ ὁ δεύτερος ἀπαιτεῖ νὰ ἦναι διαιρετὸς ὁ παρονομαστὴς διὰ τοῦ θεωρουμένου πολλαπλασιαστοῦ.

Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα δι᾽ ἀκεραίου, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν (133), ἢ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ (132) διὰ τοῦ ἀκεραίου τούτου ἀριθμοῦ. Ὁ πρῶτος τρόπος δύναται πάντοτε νὰ ἐφαρμοσθῇ, ὁ δὲ δεύτερος ἀπαιτεῖ νὰ ἦναι διαιρετὸς ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ θεωρουμένου διαιρέτου.

135. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. *Ἡ ἀξία κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$· πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 4 εὑρίσκομεν $\frac{20}{7}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{7}$ (132). Πολλαπλασιάζοντες δὲ μετὰ ταῦτα τὸν παρανομαστὴν τοῦ $\frac{20}{7}$ ἐπὶ 4 λαμβάνομεν κλάσμα $\frac{20}{28}$ τετράκις μικρότερον

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τοῦ $\frac{25}{7}$ (130), ἔπομένως ἴσον τῷ $\frac{5}{7}$· διότι τὸ τέταρτον τοῦ τετραπλασίου ἀριθμοῦ τινος, εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀξία κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

## Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

136. Δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν κλάσμα διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἦναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν, οἱ δύο ὅροι καθίστανται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ δὲν δυνάμεθα πλέον νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ προκύπτον κλάσμα διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου. Διὰ δὲ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος βεβαιούμεθα ὅτι εἶναι ἀδύνατον δι' οἱασδήποτε μεθόδου νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἁπλούστερον.

137. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀνάγωγον, ἤτοι εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐκφρασθῇ διὰ μικροτέρων ὅρων.*

Ἔχω, παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{12}{25}$ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὑποτεθείσθω ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι ἴσον ἄλλῳ τινὶ κλάσματι $\frac{\alpha}{6}$, τουτέστιν ὅτι

$$\frac{\alpha}{6} = \frac{12}{25}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ 6, τὰ γινόμενα θέλουσιν εἶσθαι ἴσα· ἀλλὰ $\frac{\alpha}{6}$ ἐπὶ 6 δίδει γινόμενον α· τὸ δὲ $\frac{12}{25}$ ἐπὶ 6 δίδει γινόμενον $\frac{12 \times 6}{25}$

ἄρα θέλομεν ἔχει

$$\alpha = \frac{12 \times 6}{25}$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐπειδὴ δὲ τὸ α εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ὁ 25 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ γινόμενον $12 \times 6$· ἀλλ' εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 12, ἄρα διαιρεῖ τὸν 6 (100). Ἐὰν λοιπὸν σημειώσωμεν διὰ π ἀκέραιόν τι πηλίκον θέλομεν ἔχει $6 = 25 \times \pi$· ἡ δὲ τιμὴ τοῦ α τότε γίνεται

$$\alpha = \frac{12 \times 25 \times \pi}{25} = 12 \times \pi.$$

Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι α καὶ 6 εἶναι μείζονες τοῦ 12 καὶ 25, καὶ ἴσοι τῷ γινομένῳ αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν π.

138. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν ὅτι, ἵνα σχηματίσωμεν πάντα τὰ κλάσματα τὰ ἴσα δεδομένῳ κλάσματι, ἀρκεῖ νὰ καταστήσωμεν τοῦτο ἀνάγωγον, ἔπειτα δὲ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4 . . .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἵνα σχηματίσωμεν πάντα τὰ κλάσματα τὰ ἴσα τῷ κλάσματι $\frac{60}{84}$, διαιροῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 12, εὑρίσκομεν δὲ $\frac{5}{7}$· τοῦ δὲ $\frac{5}{7}$ ὄντος ἀναγώγου, τὰ μόνα κλάσματα τὰ ἴσα αὐτῷ εἶναι $\frac{10}{14}$, $\frac{15}{21}$, $\frac{20}{28}$, κτλ.

## Ἀναγωγὴ δύο ἢ πλειοτέρων κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

139. *Δυνάμεθα πάντοτε τὰ ἀναγάγωμεν δεδομένα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἔχομεν δύο μόνον κλάσματα, οἷον τὰ $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{9}{11}$· πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου, καὶ οὕτω λαμβάνομεν



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσειά"

$$\frac{5\times11}{7\times11}, \quad \frac{9\times7}{11\times7}$$

τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐὰν ἔχωμεν πλειότερα τῶν δύο κλασμάτων, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν ἄλλων· οὕτω δὲ ἅπαντα θέλουσιν ἔχει τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἴσον τῷ γινομένῳ ἁπάντων τῶν παρονομαστῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}$· ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω μέθοδον λαμβάνομεν

$$\frac{5\times8\times4\times6}{7\times8\times4\times6}, \frac{3\times7\times4\times6}{8\times7\times4\times6}, \frac{3\times7\times8\times6}{4\times7\times8\times6}, \frac{1\times7\times8\times4}{7\times8\times4\times6}.$$

καὶ ἐκτελουμένων τῶν πολλαπλασιασμῶν,

$$\frac{960}{1344}, \quad \frac{504}{1344}, \quad \frac{1008}{1344}, \quad \frac{224}{1344}.$$

## Ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής.

140. Ἐὰν καταστήσωμεν τὰ δεδομένα κλάσματα ἀνάγωγα, ἕκαστον αὐτῶν δὲν δύναται νὰ ἦναι ἴσον (138), ἢ κλάσμασιν, ὧν οἱ ὅροι εἶναι πολλαπλάσιοι τῶν ὅρων αὐτοῦ. Πᾶς λοιπὸν κοινὸς παρονομαστὴς πρέπει νὰ ἦναι ἐν ταὐτῷ πολλαπλάσιον ἁπάντων τῶν οὕτω ἀνηγμένων παρονομαστῶν, ἡ δὲ ἐλαχίστη τιμὴ, ἣν δύναται νὰ ἔχῃ, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν πολλαπλάσιον. Ἵνα λάβωσι δὲ τὰ κλάσματα τὸν κοινὸν τοῦτον παρονομαστὴν, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἑκάστου ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστωσαν καὶ πάλιν τὰ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος κλάσματα

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{6},$$

τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνάγωγα. Τὸ ἐλάχιστον πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν εἶναι 168. Ἵνα λάβωσι τὰ δεδομένα κλάσματα τὸν παρονομαστὴν τοῦτον, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 168 διὰ 7, ἤτοι ἐπὶ 24· τοὺς τοῦ δευτέρου ἐπὶ 168 διὰ 8, ἤτοι ἐπὶ 21· τοὺς τοῦ τρίτου ἐπὶ 168 διὰ 4, ἤτοι 42· καὶ τοὺς τοῦ τετάρτου ἐπὶ 168 διὰ 6 ἤτοι 28· οὕτω δὲ λαμβάνομεν

$$\frac{120}{168}, \quad \frac{63}{168}, \quad \frac{126}{168}, \quad \frac{28}{168}.$$

## Πρόσθεσις τῶν κλασμάτων.

141. ά.) *Ἵνα προσθέσωμεν κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν, καὶ νὰ θέσωμεν παρονομαστὴν τοῦ ἀθροίσματος τὸν κοινὸν παρονομαστήν.*

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{2}{11}, \frac{5}{11}, \frac{7}{11}$.

Εἶναι προφανὲς ὅτι προσθέτοντες 2 ἑνδέκατα καὶ 5 ἑνδέκατα καὶ 7 ἑνδέκατα, θέλομεν εὕρει $2+5+7$ ἤτοι 14 ἑνδέκατα· ἄρα ἔχομεν $\frac{2}{11}+\frac{5}{11}+\frac{7}{11}=\frac{14}{11}$.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

6'.) *Ἵνα προσθέσωμεν κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὰς διαφόρους, ἀνάγομεν κατὰ πρῶτον ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.*

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, τὰ κλάσματα

$$\frac{3}{5},\quad \frac{7}{10},\quad \frac{2}{3}.$$

Ἀνάγοντες ταῦτα εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, ὅστις εἶναι 30, λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα αὐτοῖς

$$\frac{18}{30},\quad \frac{21}{30},\quad \frac{20}{30}.$$

ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{3}=\frac{18}{30}+\frac{21}{30}+\frac{20}{30}=\frac{18+21+20}{30}=\frac{59}{30}.$$

καὶ ἐξάγοντες τὰς ἐν τῷ ἀθροίσματι περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας εὑρίσκομεν

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{3}=1+\frac{29}{30}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀριθμὸς συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, οἷος ὁ $5+\frac{3}{7}$, καλεῖται *μικτός*. Ἐπειδὴ δὲ πάντα ἀκέραιον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα, ἐφαρμόζοντες τὰ ἀνωτέρω περὶ προσθέσεως κλασμάτων δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν πάντα μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{5}{1}+\frac{3}{7}=\frac{35}{7}+\frac{3}{7}=\frac{38}{7}$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐντεῦθεν ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

*Ἵνα τρέψωμεν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητήν, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.*

*Ἵνα προσθέσωμεν δὲ μικτούς, προσθέτομεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους, ἔπειτα τὰ κλάσματα, καὶ ἑνοῦμεν τὰ δύο μερικὰ ἀθροίσματα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστωσαν νὰ προστεθῶσιν οἱ μικτοὶ

$$7+\frac{3}{5},\ 6+\frac{7}{10},\ 9+\frac{2}{3}.$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι $7+6+9$ ἢ $22$· τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{3}$ ἢ $1+\frac{29}{30}$.

ἑπομένως ἔχομεν

$$\left(7+\frac{3}{5}\right)+\left(6+\frac{7}{10}\right)+\left(9+\frac{2}{3}\right)=22+\left(1+\frac{29}{30}\right)=$$

$$23+\frac{29}{30}.$$

Ἠδυνάμεθα δὲ καὶ νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα κλάσματα· ἀλλ' ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι ὁ συντομώτερος.

## Ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων.

142. ἀ.) *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσματος ἔχοντος τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου, καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν ὡς ἀριθμητὴν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω νὰ ἀφαιρεθῇ $\frac{5}{11}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{9}{11}$.

εἶναι προφανὲς ὅτι ἀφαιρουμένων ἀπὸ 9 ἑνδεκάτων 5 ἑνδεκάτων, μένουσι 4 ἑνδέκατα· ἤτοι

$$\frac{9}{11} - \frac{5}{11} = \frac{4}{11}.$$

*ϐ'.) Ἐὰν τὰ κλάσματα δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, τρέπονται πρῶτον εἰς ἰσοδύναμα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ ἔπειτα ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἀνωτέρω.*

Ἔστω παραδείγματος χάριν νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $\frac{7}{8}$ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$. Τὰ κλάσματα ταῦτα ἀναγόμενα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι $\frac{21}{24}$ καὶ $\frac{16}{24}$, καὶ ἔχομεν

$$\frac{21}{24} - \frac{16}{24} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$$

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου τοῦ μειωτέου τὸν τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἀπὸ τοῦ κλάσματος τοῦ πρώτου τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου, καὶ ἑνοῦμεν τὰς δύο διαφοράς.

Ἔϛω, παραδείγματος χάριν, νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $7+\frac{6}{7}$ ὁ μικτὸς $3+\frac{2}{5}$· ἔχομεν

$$\frac{6}{7} - \frac{2}{5} = \frac{30}{35} - \frac{14}{35} = \frac{16}{35}.$$

$$7-3=4.$$

ὅθεν ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $4+\frac{16}{35}$.

Ἔστω προσέτι νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $9+\frac{2}{7}$ ὁ $4+\frac{5}{6}$· ἤ,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἀφοῦ τὰ κλάσματα ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἀπὸ τοῦ $9+\frac{12}{42}$ ὁ $4+\frac{35}{42}$.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερον τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἐκ τοῦ 9 καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς $\frac{42}{42}$, τὰ ὁποῖα προσθέτομεν εἰς τὰ $\frac{12}{42}$· οὕτως ὁ μειωτέος τρέπεται εἰς $8+\frac{54}{42}$· ἀφαιρουμένου δὲ ἀπὸ τούτου τοῦ $4+\frac{35}{42}$, εὑρίσκεται διαφορὰ $4+\frac{19}{42}$.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, τρέποντες ἀμφοτέρους εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς.

## Πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασμάτων.

### *Ὁρισμοί.*

143. Ἀριθμός τις λέγεται ὅτι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεθῇ εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος, καὶ ληφθῶσι τόσα τῶν μερῶν τούτων, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ.

Οἷον, νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 9 ἐπὶ $\frac{5}{7}$ εἶναι τὸ νὰ νὰ ληφθῇ πεντάκις τὸ ἕβδομον τοῦ 9, ἢ τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ 9. Καὶ ἐνταῦθα δὲ ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς καλεῖται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ ἀριθμὸς ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζεται καλεῖται *πολλαπλασιαστὴς*, καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως *γινόμενον*.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι κλασματικός, περιέχεται ἐν τῷ ὁρισμῷ, ὃν ἐδώκαμεν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων (26)· ὥστε ὁ γενικὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁρισμός, ὅστις ἰσχύει, εἴτε ἀκέραιος εἶναι ὁπολλαπλασιαστὴς εἴτε κλασματικός, εἶναι ὁ ἑξῆς.

*Πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν, σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος.*

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι μεῖζον, ἴσον, ἢ μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθόσον ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μείζων, ἴσος, ἢ μικρότερος τῆς μονάδος.

## Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπ' ἀκέραιον.

144. *Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπ' ἀκέραιον, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ἢ διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἐὰν ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς. (134).*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\frac{5}{12} \times 4 = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$.

## Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

145. *Ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀκεραίου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, καὶ τιθεμένου παρονομαστοῦ ὑπὸ τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.*

Ἔστω τῷ ὄντι νὰ πολλαπλασιασθῇ 5 ἐπὶ $\frac{4}{7}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρόκειται νὰ ληφθῇ τετράκις τὸ ἕβδομον τοῦ 5. Λαμβάνομεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ 5, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{5}{7}$ (129), καὶ τετραπλασιάζοντες τοῦτο εὑρίσκομεν $\frac{5 \times 4}{7} = \frac{20}{7}$, ὡς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

## Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

146. *Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιαζομένων ἀριθμητοῦ ἐπ' ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστοῦ ἐπὶ παρονομαστὴν, καὶ ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον τιθεμένου παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου.*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω τῷ ὄντι νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{3}{7}$ ἐπὶ $\frac{5}{9}$. Πρόκειται τουτέστι νὰ ληφθῇ $5^{\text{ας}}$ τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ $\frac{3}{7}$. Τὸ ἔνατον τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{3}{7\times9}$ (134)· $5^{\text{ας}}$ δὲ τοῦτο λαμβανόμενον ἀποτελεῖ $\frac{3\times5}{7\times9}$.

ὥστε ἔχομεν· $\frac{3}{7}\times\frac{5}{9}=\frac{3\times5}{7\times9}=\frac{15}{63}$.

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ μικτὸν, τρέπομεν προηγουμένως αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς, καὶ τότε ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἀνωτέρω.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων τῶν παραγόντων· διότι κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα, μόνον ἡ τάξις τῶν ἀκεραίων παραγόντων τῶν ἀποτελούντων τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν αὐτοῦ μεταβάλλεται.

147. Τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων ὁρίζεται ὡς καὶ τὸ πολλῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· εἶναι δηλονότι τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον προκύπτει πολλαπλασιαζομένων κατὰ πρῶτον τῶν δύο πρώτων κλασμάτων, ἔπειτα τοῦ γινομένου τούτων ἐπὶ τὸ τρίτον, ἔπειτα τοῦ νέου γινομένου ἐπὶ τὸ τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τοιοῦτο γινόμενον κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἀριθμητῶν διαιρουμένῳ διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν. Οἱαδήποτε δὲ καὶ ἂν ἦναι ἡ τάξις τῶν παραγόντων, ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρανομαστὴς τοῦ γινομένου θέλουσι περιέχει τοὺς αὐτοὺς ἀκεραίους παράγοντας· ἑπομένως, *τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων δὲν μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων.*

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἐξάγονται τὰ ἑπόμενα, ἀπαραλλάκτως ὅπως ἐγένετο ὅτε προέκειτο περὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν (38, 39 καὶ 40).

*Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ γινόμενον*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*πολλῶν παραγόντων, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν διαδοχικῶς ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων.*

*Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐφ' ἕτερον γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν μοναδικὸν γινόμενον μετὰ τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

*Ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε αὐτῶν διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν.*

## Διαίρεσις τῶν κλασμάτων.

148. Διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ κλάσματος εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκεται δεύτερος ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει τὸν πρῶτον· ὁ διαιρούμενος ἀριθμὸς καλεῖται *διαιρετέος*, τὸ κλάσμα δι' οὗ διαιρεῖται καλεῖται *διαιρέτης*, καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται *πηλίκον*.

149. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὰ περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν ῥηθέντα, ὁ γενικὸς τῆς διαιρέσεως ὁρισμός, ὅστις ἐφαρμόζεται εἰς πάσας τὰς περιστάσεις εἶναι ὁ ἑξῆς.

*Διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένου τοῦ γινομένου δύο παραγόντων καὶ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, ζητεῖται ὁ ἕτερος παράγων.*

150. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀνεστραμμένον.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, νὰ διαιρεθῇ διὰ $\frac{5}{7}$ ἀριθμός τις, ὃν καλῶ Α. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πεντάκις τὸ ἕβδομον τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ ἀποτελῇ τὸν ἀριθμὸν Α· ἄρα τὸ ἕβδομον τοῦ πηλίκου εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ Α, καὶ τὸ πηλίκον ὁλόκληρον εἶναι ἑπτάκις τὸ πέμπτον τοῦ Α, ἤτοι

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ Α, ἢ τὸ γινόμενον τοῦ Α ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν, ἵνα διαιρεθῇ ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀνεστραμμένον· παραδείγματος χάριν

$$\frac{3}{7} : \frac{5}{9} = \frac{3}{7} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{35}.$$

Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι μικτὸς, τρέπεται προηγουμένως εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν, καὶ ἔπειτα ἡ διαίρεσις γίνεται ὡς ἀνωτέρω.

## Ἐφαρμογαὶ τῶν κλασμάτων.

151. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α. *Εὑρεῖν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ προστιθέμενα νὰ ἀποτελῶσιν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἐλαττούμενον κατὰ 175, νὰ παρέχῃ τὸν ἀριθμὸν 417.*

Τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{37}{30}$ αὐτοῦ, ἐπειδὴ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{37}{30}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{37}{30}$ αὐτοῦ ἐλαττούμενα κατὰ 175 παρέχουσι τὸν ἀριθμὸν 417, ἄρα τὰ $\frac{37}{30}$ χωρὶς νὰ ἐλαττωθῶσι κατὰ 175 θέλουσιν ἀποτελεῖ $417+175=592$.

Τῶν $\frac{37}{30}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἀποτελούντων 592, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 592 διὰ $\frac{37}{30}$, ἤτοι $\frac{592\times 30}{37}=480$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Ῥάβδος εἶναι διῃρημένη εἰς τέσσαρα μέρη. Τὸ μῆκος τοῦ πρώτου μέρους εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὁλικοῦ μήκους τῆς ῥάβδου, τὸ τοῦ δευτέρου μέρους εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ τοῦ τρίτου τὸ $\frac{2}{7}$, καὶ τὸ τέταρτον ἔχει μῆκος $\frac{5}{11}$ τοῦ πήχεως. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου;*

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Τὰ τρία πρῶτα μέρη ἐνούμενα ἀποτελοῦσιν $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{7}$, ἢ $\frac{73}{84}$ τοῦ ὁλικοῦ μήκους· ἄρα τὸ τέταρτον μόνον ἔχει μῆκος τὰ $\frac{11}{84}$ τοῦ ὁλικοῦ· καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι $\frac{5}{11}$ πήχεως, τὰ $\frac{11}{84}$ τῆς ῥάβδου ἔχουσι μῆκος $\frac{5}{11}$ τοῦ πήχεως, τουτέστι τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς ῥάβδου πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\frac{11}{84}$ παρέχει γινόμενον $\frac{5}{11}$ τοῦ πήχεως. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{5}{11}$ τοῦ πήχεως διὰ $\frac{11}{84}$, τὸ ὁποῖον πηλίκον εἶναι

$$\frac{5}{11}\times\frac{84}{11}=3+\frac{37}{121}.$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** *Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς ὕψος ἴσον τοῖς $\frac{2}{9}$ ἐκείνου ὅθεν ἔπεσε· κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν ὑψοῦται εἰς ὕψος $\frac{13}{16}$ τοῦ πήχεως. Ἐκ ποίου ὕψους ἔπεσε τὸ πρῶτον ;*

Ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα ἀνεπήδησε τρὶς, τὸ ὕψος, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν, ἰσοῦται ἐκείνῳ, ὅθεν τὸ πρῶτον ἔπεσε, πολλαπλασιασθέντι τρὶς ἐπὶ τὸν παράγοντα $\frac{2}{9}$, τουτέστι ἐπὶ $\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}$, ἢ $\frac{8}{729}$. Ἄρα τὰ $\frac{8}{729}$ τοῦ ζητουμένου ὕψους εἶναι $\frac{13}{16}$ τοῦ πήχεως, καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον ὕψος ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{13}{16}$ διὰ $\frac{8}{729}$, ἢ $\frac{13}{16}\times\frac{729}{8}=\frac{9477}{128}=74\text{πήχ.}+\frac{5}{128}$.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.** *Κρουνὸς ῥέων συνεχῶς δύναται τὸ πληρώσῃ ὕδατος δεξαμενὴν ἐν $\frac{7}{5}$ τῆς ὥρας. Δεύτερός τις κρουνὸς δύναται τὸ πληρώσῃ αὐτὴν ἐν $\frac{7}{3}$ τῆς ὥρας. Ἐν πόσῳ χρόνῳ ἀμφότεροι οἱ κρουνοὶ ῥέοντες δύνανται τὸ πληρώσωσιν αὐτήν ;*

Ὁ πρῶτος κρουνὸς πληροῖ τὴν δεξαμενὴν ἐν $\frac{7}{5}$ τῆς ὥρας· ἑπομένως ἐν $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας πληροῖ τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς δεξαμενῆς, καὶ ἐν $\frac{5}{5}$ τῆς ὥρας, τουτέστιν ἐν μιᾷ ὥρᾳ, πληροῖ τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς δεξαμενῆς.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ δεύτερος κρουνὸς ἐν μιᾷ ὥρᾳ πληροῖ τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς δεξαμενῆς.

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἄρα καὶ οἱ δύο κρουνοὶ ῥέοντες ὁμοῦ χύνουσι $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}$ ἢ $\frac{8}{7}$ τοῦ ἀπαιτουμένου ὕδατος πρὸς πλήρωσιν τῆς δεξαμενῆς. ἑπομένως μία ὥρα εἶναι τὰ $\frac{8}{7}$ τοῦ χρόνου τοῦ ἀπαιτουμένου πρὸς πλήρωσιν τῆς δεξαμενῆς, τουτέστιν ὁ χρόνος οὗτος εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 1 ὥρας διὰ $\frac{8}{7}$, ἢ $\frac{7}{8}$ τῆς ὥρας.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1.) Εὑρεῖν ἀριθμὸν, οὗ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ προστιθέμενα ν' ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν, ὅστις ἐλαττούμενος κατὰ 26 νὰ παρέχῃ τὸν ἀριθμὸν 150. (Ἀποκ. 120)

2.) Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ διὰ τριῶν διαφόρων κρουνῶν· καὶ ὑπὸ μὲν τοῦ πρώτου πληροῦται ἐν 5 ὥραις, ὑπὸ τοῦ δευτέρου ἐν 6, καὶ ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐν 9. Ἐν πόσαις ὥραις, ἐὰν ἀνοιχθῶσι καὶ οἱ τρεῖς συγχρόνως κρουνοὶ, θέλει πληρωθῇ ἡ δεξαμενή ; (Ἀποκ. $2+\frac{4}{4\,3}$.)

3.) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους κλάσματος, τὸ ἐξαγόμενον θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ αὐτοῦ τοῦ κλάσματος· ὥστε θέλει μὲν αὐξήσει, ἐὰν ἦναι μικρότερον τῆς μονάδος, θέλει δὲ ἐλαττωθῇ, ἐὰν ἦναι μεῖζον αὐτῆς.

4.) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων, ὧν οἱ παρονομασταὶ διαφέρουσι, δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

5.) Ἐὰν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\acute{\alpha}}{\beta'}$ ἦναι ἴσα, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\acute{\alpha}}{\beta+\beta'}$, εἶναι ἴσον ἑκατέρῳ αὐτῶν.

6.) Ἐὰν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\acute{\alpha}}{\beta'}$ ἦναι ἄνισα, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\acute{\alpha}}{\beta+\beta'}$, περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο δεδομένων.

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

7.) Ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς πολλῶν ἀνίσων κλασμάτων, τῶν $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''}\ldots\ldots$, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο θέσωμεν παρονομαστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots}{\beta+\beta'+\beta''+\ldots}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου αὐτῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ θ'.

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

*Ὁρισμοί.*

152. Ὅταν τὸ ποσὸν, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ μετρήσωμεν, ἦναι λίαν μέγα πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, τότε λαμβάνομεν ὡρισμένον τι πολλαπλάσιον αὐτῆς ὡς νέαν μονάδα, καὶ πρὸς ταύτην συγκρίνομεν τὸ ποσόν. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ἀριθμὸν μικρότερον ἐκείνου, ὃν ἠθέλομεν εὕρει συγκρίνοντες τὸ ποσὸν πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ὅστις διὰ τοῦτο καὶ συντομώτερον γράφεται καὶ ἀπαγγέλλεται, καὶ σαφεστέραν περὶ τοῦ μεγέθους τοῦ ποσοῦ ἰδέαν ἐμποιεῖ. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν ποσὸν μικρότερον τῆς ἀρχικῆς μονάδος, τότε διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν, ἓν δὲ τῶν μερῶν τούτων λαμβάνομεν ὡς μονάδα. Διὰ ποσὸν μικρότερον τῆς νέας ταύτης μονάδος, διαιροῦμεν πάλιν ταύτην εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν, καὶ ἓν τούτων λαμβάνομεν ὡς νέαν μονάδα, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἵνα διακρίνωμεν τὰς νέας ταύτας μονάδας ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς, ἢ πρέπει νὰ σημαίνωμεν ποῖον πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς εἶναι ἑκάστη, ἢ νὰ δώσωμεν εἰς ἑκάστην ἴδιον ὄνομα.

Καὶ ὅταν μὲν τὰ πολλαπλάσια καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδος δὲν λαμβάνωσιν ἴδιον ὄνομα, ἀλλ' ἐκφράζηται ἡ ἑκάστης τούτων πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα σχέσις, τότε προκύπτουσιν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ, περὶ ὧν ἐπραγματεύθημεν ἐν τῷ προηγουμένῳ κεφαλαίῳ.

Ὅταν δὲ ἕκαστον πολλαπλάσιον ἢ ὑποδιαίρεσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος λαμβάνῃ ἴδιον ὄνομα, παρασιωπωμένης τῆς

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς μονάδος καὶ αὐτῆς σχέσεως, προκύπτουσιν οἱ καλούμενοι *συμμιγεῖς* ἀριθμοί.

*Συμμιγὴς λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος ἐκ μερῶν, ὧν αἱ μονάδες εἶναι ὡρισμένα πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια ἀρχικῆς τινος μονάδος, ἔχοντα ἴδιον ὄνομα.*

Οἷον, 9 *ὀργυιαὶ*, 4 *πόδες*, 7 *δάκτυλοι*, 8 *γραμμαὶ*, εἶναι ἀριθμὸς συμμιγής.

Σημειωτέον δὲ ὅτι ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε συγκεκριμένος.

153. Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θέλομεν πραγματευθῆ περὶ τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν. Πρὸς τοῦτο ὅμως ἀπαιτεῖται νὰ γνωρίζωμεν ποσῶν τινων τὰς ἀρχικὰς μονάδας, καὶ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποδιαιρέσεις τούτων, ὅπως εἶναι παραδεδεγμέναι παρ' ὡρισμένοις ἔθνεσι. Διότι τὸ αὐτὸ ποσὸν δύναται νὰ ἔχῃ διαφόρους ἀρχικὰς μονάδας· καὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς κατὰ τὰ διάφορα ἔθνη.

Ἐκθέτομεν λοιπὸν πίνακα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων ποσῶν, ὅσων ἡ χρῆσις εἶναι συχνοτέρα. Ἄλλως δὲ αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις θέλουσι δείξει πῶς πρέπει νὰ γίνωνται καὶ ἐπὶ παντὸς συμμιγοῦς.

Μονάδες μήκους. (ἀρχαῖαι Γαλλικαί).

*Ὀργυιὰ*, ἀρχικὴ μονάς. *Ποῦς* $= \frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς. *Δάκτυλος* $= \frac{1}{12}$ τοῦ ποδός. *Γραμμή* $= \frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου. Ἑπομένως εἶναι

$$\begin{aligned} 1^{\text{ὀργ.}} &= 6^{\text{ποδ.}} = 72^{\text{δακ.}} = 864^{\text{γραμ.}} \\ 1 &= 12 = 144. \\ 1 &= 12. \end{aligned}$$

Μονάδες βάρους. (ἐν χρήσει παρ' Ἕλλησι καὶ Τούρκοις).

*Ὀκὰς*, ἀρχικὴ μονάς. *Στατὴρ* $= 44$ ὀκάδες. *Δράμιον* $= \frac{1}{400}$ τῆς ὀκάδος. Ἑπομένως

$$\begin{aligned} 1^{\text{στατ.}} &= 44^{\text{κ}} = 17600^{\text{δρ.}} \\ 1 &= 400 \end{aligned}$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Μονάδες χρόνου. (ἐν χρήσει παρ' ἅπασι τοῖς πεπολιτισμένοις ἔθνεσι).

*Ἡμέρα*, ἀρχικὴ μονάς· *ὥρα* = $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας· *λεπτὸν πρῶτον* = $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας· *λεπτὸν δεύτερον* = $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ· *ἔτος* = 365 ἡμέραις (ἢ 366, ὅταν τὸ ἔτος ἦναι βίσεκτον·)

$1^{\text{ἡμ.}} = 24^{\text{ὡρ.}} = 1440^{\text{λ.π.}} = 86400^{\text{λ.δ.}}$

$1 = 60 = 3600.$

$1 = 60.$

Μονάδες νομισμάτων (Ἑλληνικαί).

*Δραχμὴ*, ἀρχικὴ μονάς· *πεντάδραχμον* = 5 δραχμαῖς· *Ὀθώνειον* = 4 πενταδράχμοις ἢ 20 δραχμαῖς· *λεπτὸν* = $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς. Ἐπομένως εἶναι

$1^{\text{ὀθ.}} = 4^{\text{πεντ.}} = 20^{\text{δραχ.}} = 2000^{\text{λεπ.}}$

$1 = 5 = 500.$

$1 = 100.$

## Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς κλασματικὸν, καὶ τἀνάπαλιν.

134. *Προκείσθω νὰ τραπῇ δεδομένος συμμιγὴς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἀριθμὸν μιᾶς οἱασδήποτε αὐτοῦ μονάδος.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς $13^{\text{ὀρ.}}\ 5^{\text{ποδ.}}\ 7^{\text{δακ.}}\ 9^{\text{γραμ.}}$ εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ὀργυιᾶς.

Κατὰ πρῶτον τρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν μονάδων τοῦ κατωτάτου εἴδους, ἤτοι εἰς γραμμὰς, ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 1 ὀργυιὰ ἰσοῦται 6 ποσὶ, 13 ὀργυιαὶ ἰσοῦνται $13 \times 6$ ἢ 78 ποσίν· εἰς τὸν ἀριθμὸν 78 πόδες προσθέτομεν καὶ τοὺς 5 πόδας, καὶ οὕτως ἔχομεν 83 πόδας ἀντὶ $13^{\text{ὀργ.}}, 5^{\text{ποδ.}}$. Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν 83 πόδες ἐπὶ 12 μεταβάλλομεν αὐτὸν εἰς δακτύλους, διότι εἷς ποῦς ἰσοῦται 12 δακτύλοις. Εἰς τὸ γινόμενον 996 προσθέ-



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τοντες τοὺς 7 δακτύλους τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς, εὑρίσκομεν 1003 δακτύλους. Τέλος δὲ πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ 12, τρέπομεν αὐτὸν εἰς γραμμὰς, διότι 1 δάκτυλος ἰσοῦται 12 γραμμαῖς. Εἰς τὸ γινόμενον 12036 προσθέτοντες τὰς 9 γραμμὰς τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς, εὑρίσκομεν 12045 γραμμάς· ἑπομένως εἶναι

$$13^{\text{οργ.}}\ 5^{\text{ποδ.}}\ 7^{\delta\text{ακ.}}\ 9^{\text{γραμ.}} = 12045^{\text{γραμ.}}$$

Τρέποντες δὲ μίαν ὀργυιὰν εἰς γραμμὰς εὑρίσκομεν $1^{\text{οργ}} = 864^{\text{γραμ.}}$ ἑπομένως 1 γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς, καὶ 12045 γραμμαὶ εἶναι $\frac{12045}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς. Ἄρα ὁ δεδομένος συμμιγὴς ἰσοῦται τῷ κλασματικῷ $\frac{12045}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς. Ἐὰν ὁ δεδομένος συμμιγὴς προέκειτο νὰ τραπῇ εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τοῦ ποδὸς, ἐπειδὴ 1 ποῦς ἰσοῦται 144 γραμμαῖς, μία γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{144}$ τοῦ ποδὸς, καὶ αἱ 12045 γραμμαὶ εἶναι $\frac{12045}{144}$ τοῦ ποδός.

Ἡ πρᾶξις διατίθεται συνήθως ὡς ἑξῆς.

13 οργ 5 ποδ 7 δακ 9 γραμ.

6
78
5
83 ποδ
12
166
83
996
7
1003 δακτ.
12
2006
1003
12036
9
12045 γραμ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς πάντα συμμιγῆ, ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

*Ἵνα τρέψωμεν δεδομένον συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν μιᾶς οἱασδήποτε αὐτοῦ μονάδος, τρέπομεν κατὰ πρῶτον τὸν συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν μονάδων τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, καὶ ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς ἀριθμητὴν γράφομεν παρονομαστὴν ἀριθμὸν δεικνύοντα πόσας τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως μονάδας περιέχει ἡ μονὰς, τῆς ὁποίας κλασματικὸς πρόκειται νὰ γείνῃ ὁ δεδομένος συμμιγής.*

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκεται ὅτι

$5^{ήμ}\ 10^{ωρ}\ 22'\ 34'' = \frac{469354}{86400}$ τῆς ἡμέρας.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $5^{ήμ}$ | $10^{ωρ}$ | $22'$ | $34''$ |
| 24 | | | |
| 120 | | | |
| 10 | | | |
| $130^{ωρ}$ | | | |
| 60 | | | |
| 7800 | | | |
| 22 | | | |
| 7822 | | | |
| 60 | | | |
| 469320 | | | |
| 34 | | | |
| 469354 | | | |

$1^{ήμ} = 24^{ωρ}$

60

$1440'$

60

$86400''$

155. *Ἀντιστρόφως, δεδομένος κλασματικὸς ἀριθμὸς ὡρισμένης μονάδος εἴδους τινὸς ποσοῦ νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{876}{95}$ τῆς ὀργυιᾶς, νὰ τραπῇ εἰς ὀργυιὰς, πόδας, δακτύλους κτλ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

876 | 95
21 | 9οργ. 1π. 3δ. 10οργ. $\frac{24}{95}$
6

31
12
372
87
12
1044
94

Κατὰ πρῶτον ἐξάγομεν τὸν ἐν τῷ κλασματικῷ περιεχόμενον ἀκέραιον, διαιροῦντες 876 διὰ 95· εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 21· ἑπομένως ἔχομεν

$\frac{876}{95}$ τῆς ὀργυιᾶς $=9$οργ. $+\frac{21}{95}$ τῆς ὀργυιᾶς.

ὑπολείπεται δὲ νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{21}{95}$ τῆς ὀργυιᾶς εἰς πόδας, δακτύλους καὶ γραμμάς.

Ἐπειδὴ δὲ 1 ὀργυιὰ περιέχει 6 πόδας, ἄρα τὰ $\frac{21}{95}$ τῆς ὀργυιᾶς περιέχουσι $\frac{21}{95}$ τῶν 6 ποδῶν, ἤτοι $\frac{21\times6}{95}$ τοῦ ποδός.

Ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν 21 ἐπὶ 6, ὡς δεικνύει ὁ ἀνωτέρω πίναξ τῆς πράξεως, καὶ τὸ γινόμενον 126 διαιρέσωμεν διὰ 95, τὸ ἀκέραιον πηλίκον 1 παριστᾷ πόδας, τὸ δὲ συμπληροῦν τὸ πηλίκον κλάσμα $\frac{31}{95}$ εἶναι κλάσμα ποδὸς, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τραπῇ εἰς δακτύλους.

Συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι, ἵνα τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{31}{95}$ τοῦ ποδὸς εἰς δακτύλους, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 31 ἐπὶ 12 καὶ τὸ γινόμενον 372 νὰ διαιρέσωμεν διὰ 95· οὕτω δὲ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 δακτύλους καὶ $\frac{87}{95}$ τοῦ δακτύλου.

Πολλαπλασιάζοντες ὁμοίως τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσμα-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τος $\frac{87}{95}$ τοῦ δακτύλου ἐπὶ 12, καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον δι' 95 εὑρίσκομεν πηλίκον 10 γραμμὰς καὶ $\frac{24}{95}$ τῆς γραμμῆς· ὥστε ἔχομεν

$\frac{876}{95}$ τῆς ὀργυιᾶς $=$ $9^{\text{ορ}}$ $1^{\pi}$ $3^{\text{δακ}}$ $10^{\text{γραμ.}}$ $+\frac{24}{95}$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρᾶξις γίνεται κατ' ἀνάλογον τρόπον, οἱονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ εἶδος τῆς μονάδος, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ κλασματικὸς, συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

*Ἵνα τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν μονάδος τινὸς οἱασδήποτε εἰς συμμιγῆ, ἐξάγομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἐν τῷ κλασματικῷ περιεχόμενον ἀκέραιον, ἐὰν οὗτος ἦναι μεῖζων τῆς μονάδος, τὸ δὲ πηλίκον παριστᾷ μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους τῇ μονάδι εἰς ἣν ἀναφέρεται ὁ κλασματικὸς ἀριθμός.*

*Πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως περιέχει ἡ πρώτη μονὰς, τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ἀριθμόν τινα μονάδων τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως, καὶ δεύτερόν τι ὑπόλοιπον.*

*Πολλαπλασιάζομεν ὁμοίως τὸ δεύτερον τοῦτο ὑπόλοιπον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως περιέχει μία μονὰς τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως, τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ· οὕτω δὲ εὑρίσκομεν πηλίκον παριστῶν μονάδας τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως· ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου πράττομεν τὸ αὐτὸ, καὶ οὕτω καθεξῆς.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

$\frac{753}{883}$ τῆς ἡμέρας $=$ $9^{\text{ήμ}}$ $1^{\text{ωρ}}$ $44'$ $5''$ $\frac{68}{883}$.

$\frac{9576}{79}$ τῆς ὑκάδος $=$ $2^{\text{στατ.}}$ $33^{\text{οκ.}}$ $86^{\text{δραμ.}}$ $\frac{6}{79}$.

$\frac{6937}{243}$ τοῦ πενταδράχμου $=$ $28^{\text{πεντ}}$ $2^{\text{δραχ}}$ $73^{\text{λεπ}}$ $\frac{161}{243}$,

ἢ $7^{\text{οθ.}}$ $0^{\text{πεντ.}}$ $2^{\text{δρ.}}$ $73^{\text{λεπ.}}$ $\frac{161}{243}$.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν.

156. Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν (ἐννοεῖται δὲ ὅτι πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδεῖς οἱ προστιθέμενοι) γίνεται ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων· δηλονότι γράφομεν αὐτοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, καὶ ὑπάγομεν ὁριζόντιον γραμμήν. Ἔπειτα προσθέτομεν τοὺς ἐν ἑκάστῃ στήλῃ ἀριθμούς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν· καὶ ἐὰν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν στήλης τινὸς δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμήν· ἐὰν δὲ ὑπερβαίνῃ τοῦτον, τότε διαιρεῖται δι' αὐτοῦ τούτου, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμήν, τὸ δὲ πηλίκον προστίθεται εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς ἑπομένης στήλης, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

| 15οργ. | 4παδ. | 9δακ. | 11γραμ. |
|---|---|---|---|
| 18 | 3 | 7 | 8 |
| | 8 | 0 | 9 |
| 19 | 0 | 6 | 7 |
| 54 | 5 | 0 | 11 |

| 18κατ. | 13οκ. | 175δραμ. |
|---|---|---|
| 9 | 32 | 360 |
| | 23 | 190 |
| 28 | 25 | 325 |

| 13ήμ. | 19ωρ. | 18′ | 22″ |
|---|---|---|---|
| 9 | 21 | 35 | 43 |
| 24 | 8 | 45 | 54 |
| | | 23 | 47 |
| 48 | 2 | 3 | 46 |

157. Καὶ ἡ ἀφαίρεσις δὲ τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων, δηλονότι γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ καὶ ὑπάγομεν γραμμήν. Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἀφαιροῦμεν ἕκαστον

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ συμβῇ ἐν μιᾷ τινι τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων ὁ ἀφαιρετέος ἀριθμὸς νὰ ἦναι μείζων τοῦ ἀντιστοιχοῦντος μειωτέου, τότε αὐξάνομεν τοῦτον κατὰ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τραπεῖσαν εἰς μονάδας τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος μειωτέου, φροντίζοντες νὰ προσθέσωμεν μίαν μονάδα εἰς τὸν ἀκόλουθον ἀφαιρετέον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25$^{\text{οργ.}}$ | 5 | $_{\text{ποδ}}$ | 3$^{\delta\text{ακ.}}$ | 9$^{\text{γραμ.}}$ | | 32$^{\text{σταστ.}}$ | 15$^{\text{οκ.}}$ | | 180$^{\delta\text{ρ.}}$ | |
| 19 | 4 | | 8 | 11 | | 24 | 29 | | 250 | |
| 6 | 0 | | 6 | 10 | | 7 | 29 | | 330 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 37$^{\text{ήμ.}}$ | 8$^{\omega\text{ρ.}}$ | 42′ | 37″ | |
| 25 | 15 | 49′ | 55″ | |
| 11 | 16 | 52 | 42 | |

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν δύναται νὰ γείνῃ καὶ ὡς ἑξῆς· τρέπονται κατὰ πρῶτον οἱ συμμιγεῖς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς, καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τούτων τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ. Ἀλλ᾽ ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι πολὺ συντομώτερος, καὶ ἑπομένως προτιμητέος.

## Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν συμμιγῶν.

*Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.*

158. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 15$^{\text{οργ.}}$ 4$^{\text{ποδ.}}$ 7$^{\delta\text{ακ.}}$ 10$^{\text{γραμ.}}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 9. Εἶναι προφανὲς ὅτι πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ ἐννεαπλάσιον ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ νὰ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα.

| 15$^{\text{οργ.}}$ | 4$^{\text{ποδ.}}$ | 7$^{\delta\text{ακ.}}$ | 10$^{\text{γρ.}}$ |
|---|---|---|---|
| | | | 9 |
| 141 | 5 | 10 | 0 |

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς 10$^{\text{γραμ.}}$ ἐπὶ 9 καὶ τὸ γινόμενον 90 διαιροῦμεν διὰ 12, διότι 12 γραμμαὶ ἀπο-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τελοῦσιν ἕνα δάκτυλον· εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 6· γράφομεν λοιπὸν 6 ὑπὸ τὰς γραμμάς. Πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως καὶ τὸν $7^{\delta\alpha\kappa.}$ ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 63 προσθέτομεν τοὺς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γραμμῶν προκύψαντας 7 δακτύλους, τὸ δὲ ἄθροισμα 70 διαιρούμενον διὰ 12 παρέχει 5 πόδας καὶ 10 δακτύλους· γράφομεν 10 ὑπὸ τοὺς δακτύλους. Πολλαπλασιάζομεν μετὰ ταῦτα τοὺς $4^{\pi o\delta.}$ ἐπὶ 9 καὶ εὑρίσκομεν 36 πόδας· προσθέτοντες δὲ εἰς τούτους τοὺς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δακτύλων προκύψαντας 5 πόδας, λαμβάνομεν $41^{\pi o\delta.}$ διαιροῦντες δὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ 6, εὑρίσκομεν $6^{o\rho\gamma.}$ καὶ $5^{\pi o\delta.}$ γράφομεν 5 ὑπὸ τοὺς πόδας. Τελευταῖον δὲ πολλαπλασιάζομεν $15^{o\rho\gamma.}$ ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 135 προσθέτοντες τὰς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ποδῶν προελθούσας ὀργυιάς, εὑρίσκομεν 141 ὀργυιάς, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ὀργυιάς.

159. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι πολυψήφιος ἀριθμός, τότε ἡ πρᾶξις δύναται μὲν νὰ γείνῃ ὡς ἀνωτέρω, ἀλλ' εἶναι προτιμητέα ἡ ἑξῆς μέθοδος, ἥτις καλεῖται *μέθοδος τῶν ὑποπολλαπλασίων μερῶν, ἢ ἁπλῶς, μέθοδος τῶν ὑποπολλαπλασίων.*

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ $27^{o\rho\gamma.}\ 4^{\pi o\delta.}\ 8^{\delta\alpha\kappa.}\ 10^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ ἐπὶ 482.

| | $27^{o\rho\gamma.}$ | $4^{\pi o\delta.}$ | $8^{\delta\alpha\kappa.}$ | $10^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ |
|---|---|---|---|---|
| | 482 | | | |
| | 54 | | | |
| | 216 | | | |
| | 108 | | | |
| $3^{\pi o\delta.}$ | 241 | | | |
| 1 | 80 | 2 | | |
| $6^{\delta\alpha\kappa.}$ | 40 | 1 | | |
| 2 | 13 | 2 | 4 | |
| $6^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ | 3 | 2 | 1 | |
| 3 | 1 | 4 | 0 | 6 |
| 1 | 0 | 3 | 4 | 2 |
| | $13394^{o\rho\gamma.}$ | $2^{\pi o\delta.}$ | $9^{\delta\alpha\kappa.}$ | $8^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ |

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον $27^{o\rho\gamma.}$ ἐπὶ τὸν πολλα-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

πλασιαστὴν 482 κατὰ τὴν συνήθη μέθοδον, παραλείποντες ἐν τούτοις τὸ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἔπειτα ἵνα πολλαπλασιάσωμεν 4 πόδας ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἀναλύομεν τοὺς 4 πόδας εἰς μέρη ὑποπολλαπλάσια τὸ μὲν πρῶτον τοῦ 6, ὅστις δεικνύει πόσοι πόδες ἀποτελοῦσι μίαν ὀργυιὰν, τὰ δὲ λοιπὰ ἢ πάλιν τοῦ 6, ἢ ἕκαστον τοῦ προηγουμένου. Ἐνταῦθα ἀναλύομεν τοὺς 4 πόδας εἰς 3, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 6, καὶ εἰς 1, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 3. Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι, ἐὰν εἴχομεν $6^{\pi o δ}$ ἤτοι $1^{οργ}$ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 482, ἠθέλομεν εὕρει γινόμενον $482^{οργ}$. Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν $3^{ποδ}$ ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς ὀργυιᾶς, θέλομεν λάβει ὡς γινόμενον τὸ ἥμισυ τοῦ 482 ἤτοι 241 ὀργυιάς· τὸ γινόμενον τοῦτο γράφομεν ὑπὸ τὰ προηγούμενα καταλλήλως.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $1^{ποδ.}$ λέγομεν· 3 πόδες πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν παρέσχον γινόμενον $241^{ὀργ.}$ ἄρα 1 ποῦς θέλει δώσει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $241^{ὀργ.}$ ἤτοι $80^{ὀργ.}\ 2^{ποδ.}$, τὸ ὁποῖον γράφομεν καταλλήλως ὑπὸ τὰ προηγούμενα.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς $8^{δακ}$ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἀναλύομεν τὸ 8 εἰς 6, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 12, καὶ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι τρίτον τοῦ 6. Λέγομεν δὲ, πολλαπλασιάσαντες 1 πόδα, ἤτοι 12 δακτύλους, ἐπὶ 482 εὕρομεν γινόμενον $80^{ὀργ.}\ 2^{ποδ.}$ Ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν 6 δακτύλους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, θέλομεν εὕρει ὡς γινόμενον τὸ ἥμισυ τοῦ $80^{ὀργ.}\ 2^{ποδ.}$, ἤτοι $40^{ὀργ.}\ 1^{ποδ}$, τὸ ὁποῖον γράφομεν καταλλήλως ὑπὸ τὰ προηγούμενα.

Ὁμοίως πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 2 δακτύλους, οἵτινες εἶναι τὸ τρίτον τῶν $6^{δακ.}$, θέλομεν εὕρει ὡς γινόμενον τὸ τρίτον τοῦ προηγουμένου γινομένου $40^{οργ}\ 1^{ποδ}$, ἤτοι $13^{οργ}\ 2^{ποδ}$, $4^{δακ}$.

Τελευταῖον ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὰς $10^{γραμ}$ ἐπὶ 482, ἀναλύομεν τὰς $10^{γραμ}$ εἰς 6, 3 καὶ 1, καὶ λέγομεν·

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ 2 δακτύλους εὕρομεν γινόμενον $13^{\text{οργ}}$ $2^{\text{ποδ}}$ $4^{\text{δακ}}$, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1 δάκτυλον, ἤτοι 12 γραμμὰς, θέλομεν εὕρει τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τούτου, καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6 γραμμὰς θέλομεν εὕρει τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος, ἤτοι τὸ τέταρτον τοῦ γινομένου $13^{\text{οργ}}$ $2^{\text{ποδ}}$ $4^{\text{δακ}}$· λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ τέταρτον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τὸ ὁποῖον εἶναι $3^{\text{ορ}}$ $2^{\text{ποδ}}$ $1^{\text{δακ}}$, καὶ γράφομεν αὐτὸ καταλλήλως ὑπὸ τὰ προηγούμενα γινόμενα. Ἠδυνάμεθα δὲ νὰ πράξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς· νὰ εὕρωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο δακτύλων, καὶ τὸ *βοηθητικὸν* τοῦτο γινόμενον νὰ γράψωμεν ὑπὸ τὰ προηγούμενα, κλείονται ὅμως αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεων, ἢ διαγράφοντες διὰ γραμμῆς, ἵνα μὴ προστεθῇ ἀκολούθως μετὰ τῶν ἄλλων γινομένων· ἔπειτα τοῦ βοηθητικοῦ τούτου γινομένου νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ.

Διὰ τὰς $3^{\text{γραμ}}$ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ τελευταίου γινομένου, καὶ εὑρίσκομεν $1^{\text{οργ}}$ $4^{\text{ποδ}}$ $0^{\text{δακ}}$ $6^{\text{γραμ}}$.
διὰ τὴν 1 γραμμὴν τὸ τρίτον τοῦ προηγουμένου, καὶ εὑρίσκομεν $0^{\text{οργ}}$ $3^{\text{ποδ}}$ $4^{\text{δακ}}$ $2^{\text{γραμ}}$.

Τελευταῖον προσθέτοντες τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα ἅπαντα, εὑρίσκομεν ὡς ὁλικὸν γινόμενον τὸν συμμιγῆ

$13394^{\text{οργ}}$ $2^{\text{ποδ}}$ $9^{\text{δακ}}$ $8^{\text{γραμ}}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $35^{\text{ἡμ}}$ | $17^{\text{ὥρ}}$ | $50'$ |
| | 98 | | |
| | 280 | | |
| | 315 | | |
| $12^{\text{ωρ}}$ | 49 | | |
| 4 | 16 | 8 | |
| 1 | 4 | 2 | |
| $30'$ | 2 | 1 | |
| 15 | 1 | 0 | 30 |
| 5 | 0 | 8 | 10 |
| | 3502 | 19 | 40 |

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $27^{\text{στατ.}}$ | $36^{\text{οκα.}}$ | $275^{\text{δραμ.}}$ |
| | 682 | | |
| | 54 | | |
| | 216 | | |
| | 162 | | |
| $22^{\text{οκ.}}$ | 341 | | |
| 11 | 170 | 22 | |
| 2 | 31 | | |
| 1 | 15 | 22 | |
| $200^{\text{δραμ}}$ | 7 | 33 | |
| 50 | 1 | 41 | 100 |
| 25 | 0 | 42 | 250 |
| | 18982 | 28 | 350 |

## Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

160. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς $245^{\text{οργ.}}\ 5^{\text{ποδ.}}\ 7^{\text{δακ.}}\ 9^{\text{γραμ.}}$ διὰ τοῦ ἀκεραίου 53· εἶναι προφανὲς ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ πεντηκοστὸν τρίτον ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ διαιρετέου.

| | | |
|---|---|---|
| $245^{\text{οργ.}}\ 5^{\text{ποδ.}}\ 7^{\text{δακ.}}\ 9^{\text{γραμ.}}$ | 53 | |
| 33 | | |
| 6 | | $4^{\text{οργ}}\ 3^{\text{ποδ}}\ 10^{\text{δακ}}\ 1^{\text{γραμ}}\ \frac{16}{53}$ |
| 198 | | |
| 5 | | |
| 203 | | |
| 44 | | |
| 12 | | |
| 88 | | |
| 44 | | |
| 7 | | |
| 535 | | |
| 5 | | |
| 12 | | |
| 90 | | |
| 9 | | |
| 69 | | |
| 16 | | |

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Διαιροῦντες κατὰ πρῶτον $245^{\text{ορ}\gamma}$ διὰ 53, εὑρίσκομεν πηλίκον $4^{\text{ορ}\gamma}$ καὶ ὑπόλοιπον $33^{\text{ορ}\gamma}$ τὰς ὀργυιὰς ταύτας τρέποντες εἰς πόδας, καὶ προσθέτοντες καὶ τοὺς 5 πόδας τοῦ δεδομένου διαιρετέου, εὑρίσκομεν 203 πόδας, τοῦ ὁποίου λαμβάνοντες τὸ πεντηκοστὸν τρίτον, εὑρίσκομεν $3^{\text{ποδ}}$ καὶ ὑπόλοιπον $44^{\text{ποδ}}$. Τρέποντες τοὺς πόδας τούτους εἰς δακτύλους, καὶ προσθέτοντες τοὺς 7 δακτύλους τοῦ διαιρετέου, εὑρίσκομεν $535^{\delta\alpha\kappa}$, τοῦ ὁποίου λαμβάνοντες τὸ πεντηκοστὸν τρίτον εὑρίσκομεν $10^{\delta\alpha\kappa}$ καὶ ὑπόλοιπον $5^{\delta\alpha\kappa}$. Τέλος δὲ τρέπομεν τοὺς μείναντας $5^{\delta\alpha\kappa}$ εἰς γραμμὰς καὶ προσθέτομεν καὶ τὰς 9 γραμμὰς τοῦ διαιρετέου, οὕτω δὲ εὑρίσκομεν 63 γραμμάς, τὸν ὁποῖον ἀριθμὸν διαιροῦντες διὰ 53 εὑρίσκομεν πηλίκον $1^{\gamma\rho\alpha\mu}$ καὶ $\frac{10}{53}$ τῆς γραμμῆς.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις δὲν διαφέρει ἐκείνης, δι' ἧς τρέπεται κλασματικὸς εἰς συμμιγῆ, ἢ κατὰ τοῦτο ὅτι εἰς ἕκαστον ὑπόλοιπον τρεπόμενον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως ἐνταῦθα προστίθενται μονάδες τινὲς τῆς αὐτῆς τάξεως ὑπάρχουσαι ἐν τῷ διαιρετέῳ.

## Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικὸν καὶ μικτόν.

161. *Συμμιγὴς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικὸν, ὅπως καὶ ἀκέραιος* (145), *δηλονότι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, ἵνα πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς $28^{\eta\mu}\ 9^{\omega\rho}\ 40'\ 28''$ ἐπὶ $\frac{7}{12}$, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 7 καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ 12.

Ἐὰν δὲ ὁ κλασματικὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μέρη, ὧν τὸ μὲν πρῶτον εἶναι ὑποπολλαπλάσιον τῆς μονάδος, τὰ δὲ λοιπὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ πρώτου, τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς δύναται νὰ γείνῃ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω παραδείγματος χάριν νὰ πολλαπλασιασθῇ συμμιγής τις ἐπὶ $\frac{11}{18}$· ἀναλύομεν τὸν $\frac{11}{18}$ εἰς $\frac{6}{18}$ (τρίτον τῆς μονάδος), $\frac{3}{18}$ (ἥμισυ τοῦ $\frac{6}{18}$) καὶ $\frac{2}{18}$ (τρίτον τοῦ $\frac{6}{18}$). Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ ἐπὶ $\frac{6}{18}$ ἤτοι $\frac{1}{3}$, λαμβάνομεν τὸ τρίτον αὐτοῦ. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{3}{18}$, ἥμισυ τοῦ προηγουμένου πολλαπλασιαστοῦ, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου γινομένου· τέλος δὲ ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{2}{18}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{6}{18}$, λαμβάνομεν τὸ τρίτον τοῦ πρώτου γινομένου. Προσθέτοντες δὲ τὰ τρία ταῦτα μερικὰ γινόμενα, λαμβάνομεν τὸ ὁλικὸν γινόμενον.

162. *Συμμιγὴς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μικτὸν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα ἐπὶ τὸ κλάσμα, καὶ προστεθῶσι τὰ δύο ταῦτα μερικὰ γινόμενα.*

Ἢ ἄλλως·

*Τρέπεται ὁ μικτὸς εἰς κλασματικὸν καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγής.*

## Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

163. Ἵνα καταστήσωμεν σαφεστέρας τὰς ἰδέας ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐδόθη τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

*Ἀριθμός τις κτιστῶν κτίζει ἐν μιᾷ ὥρᾳ* $15^{\text{ογρ}}\ 4^{\text{ποδ}}\ 8^{\text{δακ}}$ *τοίχου· οἱ αὐτοὶ ἐργάται πόσον θέλουσι κτίσει ἐν* $12^{\text{ωρ}}\ 35'\ 45''$;

Εἶναι προφανὲς ὅτι πρέπει ὁ συμμιγὴς $15^{\text{ογρ}}\ 4^{\text{ποδ}}\ 8^{\text{δακ}}\ 10^{\text{γραμ}}$ νὰ ἐπαναληφθῇ κατὰ πρῶτον δωδεκάκις, ἔπειτα νὰ ληφθῇ κλάσμα τι αὐτοῦ ἴσον τῷ κλάσματι τῆς ὥρας, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ $35'\ 45''$, καὶ νὰ προστεθῶσι τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγὴς $15^{\text{ογρ}}$· κτλ., πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ $12^{\text{ώρ}}$· κτλ. Ἑπομένως τὸ γινόμενον ὡς ὁμοειδὲς πάντοτε τῷ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

πολλαπλασιαστέῳ θέλει παριστᾷ ὀργυιὰς καὶ ὑποδιαιρέσεις τῆς ὀργυιᾶς.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος δύναται νὰ γείνῃ διττῶς.

ά.) *Τρέπεται ὁ πολλαπλασιαστὴς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ὥρας, καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος, ὅπως πολλαπλασιάζεται συμμιγὴς ἐπὶ κλασματικόν (161).*

β'.) *Ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων*, ὡς ἑξῆς.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 15 ὀργ. | 4 ποδ. | 8 δακ. | |
| | 12 ὥρ. | 35′ | 45″ | |
| | 30 | | | |
| | 15 | | | |
| 3 ποδ. | 6 | | | |
| 1 | 2 | | | |
| 6 δακ. | 1 | | | |
| 2 | 0 | 2 | | |
| 30′ | 7 | 5 | 4 | |
| 5 | 1 | 1 | 10 | 8 |
| (1) | (0) | (1) | (6) | $(11+\frac{1}{5})$βοηθ. γινόμ. |
| 30″ | 0 | 0 | 9 | $5+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ |
| 15 | 0 | 0 | 4 | $8+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$ |
| | 198 ὀργ. | 4 ποδ. | 4 δακ. | 10 γραμ. $+\frac{2}{5}$ |

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 12 κατὰ τὸν παράγραφον 159. Ἔπειτα ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 35′ ἀποσυνθέτομεν αὐτὰ εἰς 30′, ἥμισυ τῆς ὥρας, καὶ 5′, ἕκτον τῶν 30′. Λέγομεν δὲ, ἐὰν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 1 ὥραν, ἠθέλομεν λάβει ὡς γινόμενον αὐτὸν τὸν πολλαπλασιαστέον· ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 30′, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς ὥρας, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Διὰ τὰ 5′ λαμβάνομεν τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ προηγουμένου γινομένου. Εὑρίσκομεν δὲ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 1′, τοῦτο δὲ ὡς βοηθητικὸν μόνον κλείομεν ἐντὸς παρενθέσεων. Διὰ τὰ 30″ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ βοηθητικοῦ γινομένου· τέλος δὲ διὰ τὰ 15″, τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου. Ὑπολείπεται ἤδη ἡ πρόσθεσις τῶν μερικῶν γινομένων, τῆς ὁποίας ἀρχόμεθα ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν κλασμάτων τῆς γραμμῆς.

164. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Κτίστης τις κτίζει 1 ὀργυιὰν τοίχου ἐν* $12^{\text{ωρ.}}$ 35′ 45″· *ζητεῖται ἐν πόσῳ χρόνῳ θέλει κτίσει* $15^{\text{ὀργ.}}$ $4^{\text{ποδ.}}$ $8^{\text{δακ.}}$;

Εἶναι προφανὲς ὅτι πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ ἐπαναληφθῇ ὁ συμμιγὴς $12^{\text{ωρ.}}$ 35′ 45″ πεντάκις καὶ δεκάκις, καὶ δεύτερον νὰ ληφθῇ κλάσμα τι αὐτοῦ ἴσον τῷ κλάσματι τῆς ὀργυιᾶς, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν οἱ $4^{\text{ποδ.}}$ $8^{\text{δακ.}}$ ἔπειτα νὰ προστεθῶσι τὰ δύο μερικὰ ταῦτα γινόμενα.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $12^{\text{ωρ.}}$ | 35′ | 45″ | |
| | $15^{\text{ὀργ.}}$ | $4^{\text{ποδ.}}$ | $8^{\text{δακ.}}$ | |
| | 60 | | | |
| | 12 | | | |
| 30′ | 7 | 30 | | |
| 5 | 1 | 15 | | |
| (1) | (0) | (15) | | βοηθητικὸν γινόμενον |
| 30″ | 0 | 7 | 30 | |
| 15 | 0 | 3 | 45 | |
| $3^{\text{ποδ.}}$ | 6 | 17 | $52+\frac{1}{2}$ | |
| 1 | 2 | 5 | $57+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ | |
| $6^{\text{δακ.}}$ | 1 | 2 | $58+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ | |
| 2 | 0 | 20 | $59+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$ | |
| | $198^{\text{ὡρ.}}$, 44′, | | $3''+\frac{1}{3}$ | |

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἂν καὶ οἱ παράγοντες τοῦ ἀνωτέρου πολ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

λαπλασιασμοῦ ἦναι οἱ αὐτοὶ τοῖς τοῦ προηγουμένου παραγράφου, τὰ γινόμενα διαφέρουσιν, οὐχὶ μὲν κατὰ τὰς ἀρχικὰς μονάδας, ἀλλὰ κατὰ τὰς κατωτέρας. Ἵνα ἐννοήσωμεν πῶς τοῦτο συμβαίνει, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ συμμιγεῖς ἐτράπησαν εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς. Τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει εἶσθαι τὸ αὐτὸ οἱοσδήποτε καὶ ἂν ληφθῇ ὡς πολλαπλασιαστὴς ἢ πολλαπλασιαστέος· ἀλλὰ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν θέλει εἶσθαι κλασματικὸς ἀριθμὸς ὀργυιᾶς, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν κλασματικὸς ἀριθμὸς ὥρας. Καὶ ὁ μὲν ἀκέραιος ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ κλασματικῷ θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, οἱοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ μονὰς, πρὸς ἣν οὗτος ἀναφέρεται. Τὸ δὲ μένον κλάσμα κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν θέλει τραπῆ εἰς πόδας, δακτύλους καὶ γραμμὰς, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν εἰς λεπτὰ πρῶτα καὶ δεύτερα· καὶ ἐπειδὴ αἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς ὀργυιᾶς διαφέρουσι τῶν τῆς ὥρας, ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι θέλομεν εὕρει ἐξαγόμενα διαφέροντα ἀλλήλων.

## Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλασματικοῦ καὶ μικτοῦ.

165. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ, ὅπως καὶ πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ (150), τουτέστι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ καὶ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ.*

*Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦναι μικτὸς, τρέπεται προηγουμένως εἰς κλασματικὸν, καὶ ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἀνωτέρω.*

## Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

166. Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσιν ἐνταῦθα.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ Α'. *Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς.*

Παραδείγματος χάριν, ἐν τῷ ἑξῆς προβλήματι.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*Κτίστης τις κτίζει ἐν* 1 *ὥρᾳ* $2^{\text{οργ.}}\ 4^{\text{ποδ.}}\ 8^{\text{δακ.}}\ 9^{\text{γραμ.}}$ *τοίχου, ἐν πόσαις ὥραις θέλει κτίσει* $35^{\text{οργ.}}\ 3^{\text{ποδ.}}\ 10^{\text{δακ.}}\ 7^{\text{γραμ.}}$;

Εἶναι προφανὲς ὅτι τόσαι εἶναι αἱ ζητούμεναι ὧραι, ὁσάκις ὁ πρῶτος συμμιγὴς περιέχεται ἐν τῷ δευτέρῳ· ἑπομένως ἵνα εὑρεθῶσιν αἱ ζητούμεναι ὧραι, πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ δεύτερος διὰ τοῦ πρώτου.

*Πρὸς τοῦτο τρέπονται διαιρετέος τε καὶ διαιρέτης εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης ἐν αὐτοῖς ὑποδιαιρέσεως, καὶ διαιρεῖται ὁ πρῶτος τῶν οὕτω εὑρεθέντων ἀκεραίων ἀριθμῶν διὰ τοῦ δευτέρου.*

Οὕτως ἐν τῷ ἡμετέρῳ παραδείγματι τρέπεται ὁ διαιρετέος εἰς γραμμὰς καὶ εὑρίσκομεν 30799 $^{\text{γραμ.}}$ ὡσαύτως καὶ ὁ διαιρέτης καὶ εὑρίσκομεν 2409 $^{\text{γραμ.}}$ τὸ δὲ πηλίκον $\frac{30799}{2409}$ ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς ὥρας, ὅστις τρεπόμενος εἰς συμμιγῆ παρέχει 12 $^{\text{ωρ.}}$ 47′ 5″ $\frac{2175}{2409}$.

Ἐὰν προέκειτο νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

*Ἔργου τινὸς* $2^{\text{οργ.}}\ 4^{\text{ποδ.}}\ 8^{\text{δακ.}}\ 9^{\text{γραμ.}}$ *τιμῶνται* 1 *πεντάδραχμον· πόσα πεντάδραχμα τιμῶνται αἱ* $35^{\text{οργ.}}\ 5^{\text{ποδ.}}\ 10^{\text{δακ.}}\ 7^{\text{γραμ.}}$ *τοῦ αὐτοῦ ἔργου;*

Τό ζητούμενον εἶναι πάλιν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ δευτέρου διὰ τοῦ πρώτου, ἤτοι $\frac{30799}{2409}$· ἀλλ' ἐνταῦθα ὁ κλασματικὸς οὗτος εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς πενταδράχμου, καὶ τρεπόμενος εἰς συμμιγῆ παρέχει 12 $^{\text{πεντ.}}$ $3^{\text{δραχ.}}$ $92^{\text{λεπ.}}$ $\frac{1172}{2409}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὅτι, ὅταν διαιρετέος τε καὶ διαιρέτης ἦναι ὁμοειδεῖς, τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ πηλίκον, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς τῷ πολλαπλασιαστέῳ, κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, πολλαπλασιαστέος μὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὁ διαιρέτης, πολλαπλασιαστὴς δὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον.



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

### *Ὁρισμοί.*

168. Ἡ ἁπλότης τῶν ὑπολογισμῶν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν προέρχεται ἐκ τοῦ σταθεροῦ νόμου τῆς ἐλαττώσεως, ὃν ἀκολουθοῦσιν αἱ μονάδες αἱ παριστάμεναι ὑπὸ τῶν διαφόρων αὐτῶν ψηφίων. Ἀλλ' οὐδὲν τὸ ἀναγκάζον ἡμᾶς νὰ περιορίσωμεν τὸν νόμον τοῦτον μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· δυνάμεθα πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου νὰ γράψωμεν ἄλλα ψηφία, ὧν τὸ πρῶτον θέλει παριστᾷ δέκατα τῆς μονάδος, τὸ δεύτερον ἑκατοστά, τὸ τρίτον χιλιοστά, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὥστε ἑκάστη μονὰς νὰ ἦναι δεκάκις μικροτέρα τῆς προηγουμένης. Οἱ οὕτω γεγραμμένοι ἀριθμοὶ καλοῦνται *δεκαδικοὶ ἀριθμοί*, ἢ *δεκαδικὰ κλάσματα*. Ὅταν δὲ γράφωμεν αὐτοὺς πρέπει μετὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων νὰ τίθεται ὑποδιαστολή, ἵνα διακρίνηται πόθεν ἄρχονται τὰ ἐκφράζοντα κλάσματα τῆς μονάδος ψηφία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὁ ἀριθμὸς, 79,635 σημαίνει 79 μονάδες, 6 δέκατα, 3 ἑκατοστὰ, 5 χιλιοστά.

### Πῶς ἀναγινώσκεται δεκαδικὸς ἀριθμός.

169. Κατὰ τὸν νόμον τῆς ἐλαττώσεως, ὃν ἀκολουθοῦσιν, αἱ μονάδες αἱ ἐκφραζόμεναι ὑπὸ ψηφίου τινὸς οἱασδήποτε τάξεως δύνανται εὐκόλως νὰ τραπῶσιν εἰς μονάδας τῶν ἑπομένων τάξεων. Οἷον ἐν τῷ ἀριθμῷ 79,635 τὸ ψηφίον 6 παριστᾷ ἀδιαφόρως 6 δέκατα, 60 ἑκατοστὰ, ἢ 600 χιλιοστά. Τὸ ψηφίον 3 παριστᾷ 3 ἑκατοστὰ, ἢ 30 χιλιοστά· τέλος δὲ τὸ ψηφίον 5 παριστᾷ 5 χιλιοστά· ὥστε ὁ ῥηθεὶς ἀ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ριθμὸς δύναται νὰ ἀναγνωσθῇ 79 μονάδες, 635 χιλιοστά. Ἐπειδὴ δὲ αἱ 79 μονάδες ἀποτελοῦσιν 79000 χιλιοστά· ὁ ῥηθεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναγνωσθῇ καὶ οὕτω, 79635 χιλιοστά.

Συνήθως οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἀναγινώσκονται ὡς ἑξῆς· κατὰ πρῶτον ἀναγινώσκεται τὸ ἀκέραιον μέρος, ἔπειτα τρέπονται τὰ πρῶτα τρία δεκαδικὰ ψηφία εἰς χιλιοστὰ, τὰ ἑπόμενα τρία εἰς ἑκατομμυριοστὰ, τὰ ἀκόλουθα τρία εἰς δισεκατομμυριοστὰ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὁ ἀριθμὸς, 2753,617923754 ἀναγινώσκεται 2753 μονάδες, 617 χιλιοστὰ, 923 ἑκατομμυριοστὰ, 754 δισεκατομμυριοστά.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων δὲν ἦναι πολλαπλάσιος τοῦ 3, ἡ ἀνάγνωσις τοῦ ἀριθμοῦ περατοῦται ἀπαγγελλομένων τῶν δεκαδικῶν μονάδων τῶν παριστωμένων ὑπὸ τοῦ τελευταίου ἢ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 694,25067923 ἀναγινώσκεται 694 μονάδες, 250 χιλιοστὰ, 679 ἑκατομμυριοστὰ, 23 ἑκατοντάκισεκατομμυριοστά.

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύναται προσέτι νὰ ἀπαγγελθῇ καὶ ὡς ἑξῆς· ἀπαγγέλλεται κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος, ἔπειτα τὸ δεκαδικὸν ὡς ἀκέραιος, προστιθεμένου εἰς τὸ τέλος τοῦ ὀνόματος τῆς μονάδος τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 65,3041795 ἀναγινώσκεται, 65 μονάδες, 3041795 δεκακισεκατομμυριοστά. Ἢ, μὴ ἀπαγγελλομένων χωριστὰ τῶν ἀκεραίων, 953041795 δεκακισεκατομμυριοστά.

## Πῶς γράφεται ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμός.

170. Ἐὰν μὲν ὁ δεκαδικὸς ἀπαγγέλληται ὡς ἀκέραιος, προστιθεμένου εἰς τὸ τέλος τοῦ ὀνόματος τῆς μονάδος τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίου, γράφεται ὡς ἀκέραιος· ἡ δὲ ὑποδιαστολὴ τίθεται οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

δεξιὰ αὐτῆς ψηφίον νὰ παριστᾷ μονάδας ἐκείνης τῆς τάξεως, ἣν ἡ ἀπαγγελία τοῦ ἀριθμοῦ ἐκφαίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Ἑξήκοντα ὀκτὼ χιλιάδες τριακόσια ἑβδομήκοντα πέντε χιλιοστὰ, γράφεται* 68,375.

*Ὡσαύτως ἐννέα χιλιάδες ἑπτακόσια τεσσαράκοντα τρία ἑκατομμυριοστὰ γράφεται* 0,009743.

Ἐνταῦθα ἐπειδὴ τὸ τελευταῖον ψηφίον 3 τοῦ ἀριθμοῦ 9743 πρέπει νὰ παριστᾷ ἑκατομμυριοστὰ, καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ κατέχῃ τὴν ἕκτην πρὸς τὰ δεξιὰ θέσιν, ἐδέησε νὰ προσγραφῶσι δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 9.

Ἐὰν δὲ ὁ δεκαδικὸς ἀπαγγέλληται, ἀπαγγελλομένων χωριστὰ τῶν ἀκεραίων μονάδων, καὶ χωριστὰ τῶν δεκαδικῶν, γράφεται κατὰ πρῶτον ὁ ἀκέραιος, μετ' αὐτὸν ἡ ὑποδιαστολὴ, καὶ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, οὕτως ὥστε τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφίον νὰ κατέχῃ τὴν προσήκουσαν θέσιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 485 μονάδες καὶ 4583 δεκακισχιλιοστὰ, γράφεται 485,4583.

Ὡσαύτως 78 μονάδες καὶ 908 ἑκατοντακισχιλιοστὰ γράφεται 78,00908.

Ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ ἐδέησε νὰ γραφῶσι δύο μηδενικὰ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, ἵνα τὸ 8 παριστᾷ ἑκατοντακισχιλιοστά.

## Παράστασις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὡς κοινοῦ κλάσματος.

171. Ἔστω παραδείγματος χάριν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 38,7536, τοῦ ὁποίου τὸ τελευταῖον ψηφίον παριστᾷ δεκακισχιλιοστά. Εἴδομεν (169) ὅτι δύναται νὰ ἀπαγγελθῇ 387536 δεκακισχιλιοστὰ, εἶναι ἑπομένως ἴσος τῷ κοινῷ κλάσματι

$$\frac{387536}{10000}$$

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐν γένει δὲ,

*Ἵνα παρασταθῇ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ὡς κοινὸν κλάσμα, παραλείπεται ἡ ὑποδιαστολὴ, καὶ ὁ οὕτω προκύπτων ἀκέραιος ἀριθμὸς γράφεται ἀριθμητὴς, ὑπ᾽ αὐτὸν δὲ τίθεται ὡς παρονομαστὴς ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 9,028 εἶναι ἴσον τῷ $\frac{9028}{1000}$.

Ἀντιστρόφως ἵνα γραφῇ ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κλάσμα τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς εἶναι ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν, *χωρίζονται δι᾽ ὑποδιαστολῆς πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ παρονομαστοῦ.* Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἱκανὰ ψηφία, γράφονται πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ μηδενικά τινα, τὰ ὁποῖα καθιστῶσι τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν δυνατήν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $\frac{7}{10000}$ εἶναι ἴσον τῷ 0,0007

172. Ἐπειδὴ ἡ τάξις τῶν μονάδων ψηφίου τινος ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, δυνάμεθα χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἀξίαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ νὰ γράψωμεν ὁσαδήποτε μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 27,34=27,340=27,3400 κτλ. Τοῦτο δὲ καταφαίνεται καὶ ἐὰν παραστήσωμεν τοὺς δεκαδικοὺς τούτους ἀριθμοὺς ὡς κοινὰ κλάσματα· διότι τότε παρατηροῦμεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἑνός τινος τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον τῶν ὅρων τοῦ πρώτου.

173. Ἵνα καταστήσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν, δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις, κτλ. μείζονα, ἢ ἐλάσσονα, ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴ μίαν, δύο, τρεῖς τάξεις πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ τὰ ἀριστερά· διότι οὕτως ἕκαστον ψηφίον θέλει παριστᾷ ἀξίαν δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις μείζονα ἢ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἐλάσσονα. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων δὲν ἐπιτρέπῃ τὴν μεταφορὰν ταύτην τῆς ὑποδιαστολῆς, καθιστῶμεν ταύτην δυνατὴν γράφοντες μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀκεραίου μέρους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 37,625 διὰ 1000000, Μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἓξ τάξεις πρὸς τὰ ἀριστερὰ, ἀφοῦ προηγουμένως γράψωμεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς

0000037,625

καὶ οὕτω λαμβάνομεν

0,000037625

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν επι 1000000, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἓξ τάξεις πρὸς τὰ δεξιὰ, ἀφοῦ προηγουμένως γράψωμεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς

37,625000

οὕτω δὲ εὑρίσκομεν

37625000.

174. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Μία δεκαδικὴ μοιρὰς τάξεώς τινος οἱασδήποτε εἶναι πάντοτε μείζων τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστωμένων ὑπὸ τῶν ἀκολουθούντων αὐτὴν ψηφίων.*

Ἔστω παραδείγματος χάριν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα 0,79347652. Λέγω ὅτι 1 χιλιοστὸν εἶναι μεῖζον τοῦ μετὰ τὰ χιλιοστὰ μέρους τοῦ δεκαδικοῦ. Τῷ ὄντι, 1 χιλιοστὸν δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{100000}{100000000}$· τὸ δὲ λοιπὸν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος διὰ $\frac{47652}{100000000}$· παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ πρῶτον κλάσμα εἶναι μεῖζον τοῦ δευτέρου, διότι παρονομαστὴν μὲν ἔχει τὸν αὐτὸν, ἀριθμητὴν δὲ μείζονα.

Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος συμπεραίνομεν ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ κατὰ δύο τρόπους διὰ δεκαδικοῦ κλάσματος. Ἐὰν τῷ ὄντι δύο δεκαδικὰ ψη-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

φία διαφέρωσιν, ἡ διαφορὰ αὐτῶν θέλει εἶσθαι τοὐλάχιστον μία δεκαδικὴ μονὰς τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς αὐτὰ τάξεως, καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσορροπηθῇ ὑπὸ διαφορᾶς ἀντιθέτου μεταξὺ τῶν ἀκολούθων ψηφίων.

## Πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

175. *Ἵνα προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, κάμνομεν τὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, γράφοντες, ἐὰν ἦναι ἀνάγκη, ἐν ἢ πλειότερα μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ ἑνὸς ἢ πλειοτέρων ἐξ αὐτῶν. Ἔπειτα γράφομεν αὐτοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ὡς ἐὰν προέκειτο περὶ ἀκεραίων, φροντίζοντες νὰ θέσωμεν ἐν τῷ ἀθροίσματι τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ τὴν θέσιν, ἐν ᾗ εὑρίσκονται αἱ ὑποδιαστολαὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Ἔστω παραδείγματος χάριν νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ,

75,6329 687,23 9,173

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

75,6329
687,2300
9,1730
772,0359

Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 772,0359.

Ὁ κανὼν οὗτος ἀποδεικνύεται διὰ συλλογισμοῦ ἐντελῶς τοῦ αὐτοῦ ἐκείνῳ, ὅστις γίνεται διὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ πράξει συνήθως παραλείπομεν τὸ νὰ γράψωμεν τὰ μηδενικὰ, δι' ὧν ἐπιτυγχάνεται τὸ νὰ ἔχωσιν ἅπαντες οἱ προσθετέοι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, διότι ἡ παράλειψις αὕτη οὐδόλως μεταβάλλει τὸ ἄ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

θροισμα, γράφομεν δὲ ἁπλῶς τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ. Ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

75,6329
687,23
9,173
772,0359

## Ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

176 *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ δεκαδικοῦ, κάμνομεν ὥστε νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, γράφοντες, ἐὰν ἦναι ἀνάγκη, ἐν ἢ πλειότερα μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν. Ἔπειτα γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ ἀντιστοιχῶσι, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἐὰν προέκειτο περὶ ἀκεραίων, φροντίζοντες νὰ γράψωμεν ἐν τῇ διαφορᾷ ὑποδιαστολὴν κατὰ τὴν θέσιν, ἐν ᾗ εὑρίσκονται αἱ ὑποδιαστολαὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Ἔστω παραδείγματος χάριν νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 97,673 ἀπὸ τοῦ 275,72. Ἡ πρᾶξις διατίθεται ὡς ἑξῆς.

275,720
97,673
178,047

Ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 178,047.

Ὁ κανὼν οὗτος ἀποδεικνύεται διὰ συλλογισμοῦ ἐντελῶς τοῦ αὐτοῦ ἐκείνῳ, ὅστις γίνεται διὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ ἀφαιρετέος ἔχῃ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία ἢ ὁ μειωτέος, συνήθως παραλείπονται τὰ συμπληροῦντα τὰ δεκαδικὰ αὐτοῦ ψηφία μηδενικά. Οἷον, ἐὰν πρό-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

κηται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 83,97 ἀπὸ τοῦ 135,6253, ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

135,6253
83,97
51,6553

## Πολλαπλασιασμὸς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

177. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον ὡς ἐὰν δὲν ὑπῆρχον ὑποδιαστολαί, ἔπειτα δὲ χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου δι' ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία δεκαδικά, ὅσα ὑπάρχουσι καὶ εἰς τοὺς δύο παράγοντας ὁμοῦ.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 3,141 καὶ 9,86. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἴσοι τοῖς κλάσμασι $\frac{3141}{1000}$ καὶ $\frac{986}{100}$. Καὶ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων ἔχομεν,

$$3,141 \times 9,36 = \frac{3141}{1000} \times \frac{989}{100} = \frac{3141 \times 986}{100000}$$

Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι ἵνα σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 3,141 καὶ 9,86, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτοὺς μὴ θεωροῦντες τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀκολούθως τὸ γινόμενον διὰ 100000, ὅπερ γίνεται χωριζομένων πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ πέντε δεκαδικῶν ψηφίων, ἤτοι τοσούτων ὅσα εἶναι τὰ τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν ὁμοῦ. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

3,141
9,86
18846
25128
28269
30,97026

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται προφανῶς καὶ ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

178. Πολλάκις συμβαίνει νὰ θεωρῶμεν περιττὸν τὸ νὰ εὕρωμεν μετ' ἀκριβείας τὸ ἐξαγόμενον λογισμοῦ τινος. Ἐνταῦθα θέλομεν ἀναφέρει πῶς δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν πολλαπλασιασμόν τινα, ὅταν, διὰ λόγον τινὰ οἱονδήποτε, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἐν τῷ γινομένῳ δεκαδικὰ ψηφία μόνον μέχρις ὡρισμένης τινὸς τάξεως.

Ἔστω παραδείγματος χάριν νὰ πολλαπλασιασθῇ 48,57627 ἐπὶ 145,6892. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἐν τῷ γινομένῳ θέλομεν νὰ περιορισθῶμεν μέχρι τῶν χιλιοστῶν, εἴτε διότι περισσοτέρα ἀκρίβεια εἶναι περιττὴ ἐν τῷ προκειμένῳ ζητήματι, εἴτε διότι, καὶ αὐτῶν τῶν παραγόντων μὴ ὄντων γνωστῶν ἢ κατὰ προσέγγισιν, ἀνεγνωρίσαμεν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκακισχιλιοστῶν ἐὰν λογισθῇ, οὐδεμίαν ἐγγύησιν ἀκριβείας παρέχει.

Ὁ γενικὸς κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι νὰ πολλαπλασιάσωμεν 4857627 ἐπὶ 1456892, καὶ νὰ χωρίσωμεν ἀκολούθως ἐννέα δεκαδικὰ ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου. Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν νὰ γνωρίσωμεν τρία μόνον τῶν ψηφίων τούτων, δυνάμεθα νὰ παραμελήσωμεν τὰ ἓξ τελευταῖα, ἤτοι τὰ ἐκφράζοντα ἐν τῷ ἀκεραίῳ γινομένῳ μονάδας τάξεως κατωτέρας τῶν ἑκατομμυρίων. Ἑπομένως ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ θέλομεν παραμελήσει πάντα τὰ μερικὰ γινόμενα τὰ παριστῶντα μονάδας τάξεως κατωτέρας τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων· θέλομεν δὲ διατηρήσει τὰς ἑκατοντάδας χιλιάδων, διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δύναται νὰ παράσχῃ ἑκατομμύρια, ἑπομένως νὰ μεταβάλῃ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατομμυρίων.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

4857627
1456892

96
4365
38856
291456
2428810
19430508
4857627

7077,0361

Πολλαπλασιάζοντες διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ παρημελήσαμεν τὰ μερικὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα δὲν παριστῶσι τοὐλάχιστον ἑκατοντάδας χιλιάδων. Διὰ τοῦτο τὸ ψηφίον τῶν μονάδων 2 ἐπολλαπλασιάσθη μόνον ἐπὶ τὰς 48 ἑκατοντάδας χιλιάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου. Τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων 9 ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὰς 485 δεκάδας χιλιάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὸ εὑρεθὲν γινόμενον πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀκολουθούμενον ὑπὸ πέντε μηδενικῶν πρὸς παράστασιν τῶν μὴ λογισθέντων ψηφίων· χωρίζοντες δὲ ἐννέα ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ θέλομεν λάβει

7077,036100000

ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ πρὸς τὸ τέλος πέντε μηδενικὰ οὐδὲν σημαίνουσι, δύνανται νὰ παραλειφθῶσι. Πρέπει ὡσαύτως νὰ παραλείψωμεν τὸ ψηφίον 1, περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ ὁποίου δὲν εἴμεθα βέβαιοι· διότι τὸ ἄθροισμα τινῶν τῶν παραμεληθέντων γινομένων ἠδύνατο νὰ μεταβάλῃ αὐτό. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι ἁπλῶς τὸ

7077,036.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ρονομαστοῦ ὄντος δυνάμεώς τινος τοῦ 10, τὸ κλάσμα δύναται (171) νὰ γραφῇ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3\times 5}$. Τὸ δὲ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ $5^2$ γίνεται

$$\frac{7\times 5^2}{2^3\times 5^3}=\frac{175}{1000}=0{,}175.$$

$\frac{6}{125}=\frac{6}{5^3}$. Τὸ δὲ κλάσμα τοῦτο, πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ $2^3$, γίνεται

$$\frac{6\times 2^3}{5^3\times 2^3}=\frac{48}{1000}=0{,}048.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅταν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα ἔχει τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦμείζονος τῶν ἐκθετῶν τῶν ἐν τῷ παρονομαστῇ παραγόντων 2 καὶ 5.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα δύναται νὰ κατασταθῇ ἀνάγωγον, διὰ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἀποφασίζωμεν ἐὰν δεδομένον κλάσμα δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ὁ τοιοῦτος μετασχηματισμὸς δὲν εἶναι δυνατὸς, πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τί ἐννοοῦμεν λέγοντες, *τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν*.

181. Κατὰ τὰ προηγούμενα, κοινὸν κλάσμα δὲν δύναται πάντοτε νὰ παρασταθῇ ὡς δεκαδικόν. Πολλῷ μᾶλλον, δεδομένου ποσοῦ οἱουδήποτε τὸ μέτρον δὲν θέλει εἶσθαι ἐν γένει δεκαδικὸν κλάσμα. Εὐτυχῶς κατὰ τὰς πλείστας περιπτώσεις οὐδόλως βλάπτει τὸ νὰ ἀντικαταστήσω-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

μεν ἀριθμόν τινα διὰ τῆς ἱκανῶς προσεγγιζούσης αὐτοῦ ἀξίας. Θέλομεν δὲ δείξει ἤδη ὅτι δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ δεκαδικοῦ κλάσματος *μετὰ προσεγγίσεως ὅσον θελήσωμεν μεγάλης.*

Ἂς θεωρήσωμεν τῷ ὄντι ἀριθμόν τινα οἱονδήποτε. Ἐὰν συγκρίνωμεν αὐτὸν πρὸς τὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 0,1,2,3,4 . . . θέλομεν εὕρει πάντοτε δύο διαδοχικοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς ταύτης, μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλει περιέχεσθαι ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Ὁ μικρότερος τῶν ὅρων τούτων καλεῖται τὸ *ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ*, ἢ καὶ *ἡ ἀξία αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος*· εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι διαφέρει αὐτοῦ κατὰ ὀλιγώτερον ἢ μίαν μονάδα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ὁ δεδομένος ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ τοῦ 24 καὶ 25, τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, ἢ ἡ ἀξία αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 24.

Ἵνα ἔχωμεν ἀξίαν μᾶλλον προσεγγίζουσαν, ἂς θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν, 24 24,1 24,2 24,3 24,4 24,5 24,6 24,7 24,8 24,9 25, ἥτις περιέχει τοὺς ἀκριβεῖς ἀριθμοὺς δεκάτων τοὺς περιεχομένους μεταξὺ τοῦ 24 καὶ 25.

Ὁ δεδομένος ἀριθμὸς, ἐὰν δὲν ἦναι ἴσος τινὶ τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς ταύτης, θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ δύο ἐξ αὐτῶν. Ὁ μικρότερος τῶν δύο τούτων καλεῖται ἡ ἀξία αὐτοῦ *κατὰ προσέγγισιν δεκάτου*. Εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι διαφέρει αὐτοῦ κατ᾽ ὀλιγώτερον ἢ ἓν δέκατον.

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ὑπ᾽ ὄψιν ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ τοῦ 24,7 καὶ 24,8, ἡ ἀξία αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου εἶναι 24,7· λέγεται δὲ ἐπίσης ὅτι 7 εἶναι τὸ *ἀκριβὲς ψηφίον τῶν δεκάτων αὐτοῦ.*

Ἵνα ἔχωμεν δὲ ἀξίαν ἔτι μᾶλλον προσεγγίζουσαν, ἂς θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν

24,70 24,71 24,72 24,73 24,74 24,75 24,76 24,77 24,78 24,79 24,80

ἥτις περιέχει τοὺς ἀκριβεῖς ἀριθμοὺς ἑκατοστῶν τοὺς περι-



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

λαμβανομένους μεταξὺ 24,7 καὶ 24,8· ὁ δεδομένος ἀριθμὸς, ἐὰν δὲν ἦναι ἴσος τινὶ τῶν ὅρων τούτων, θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἐξ αὐτῶν· ὁ μικρότερος τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν καλεῖται ἡ ἀξία αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ὁ ὑπ' ὄψιν ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ 24,75 καὶ 24,76, ἡ ἀξία αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ εἶναι 24,75. Λέγεται ἐπίσης ὅτι 5 εἶναι τὸ ἀκριβὲς ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν αὐτοῦ.

Ἐξακολουθοῦντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ, δεκακισχιλιοστοῦ κτλ. καὶ συγχρόνως τὸ ἀκριβὲς ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, δεκακισχιλιοστῶν κτλ.

Οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι δύναται νὰ συγκεφαλαιωθῶσιν ὡς ἑξῆς.

*Ἡ ἀξία ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ μέγιστος ἐν αὐτῷ περιεχόμενος ἀκέραιος ἀριθμός.*

*Ἡ ἀξία ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν δεκάτου εἶναι ὁ μέγιστος ἐν αὐτῷ περιεχόμενος ἀκέραιος ἀριθμὸς δεκάτων.*

*Ἡ ἀξία ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, εἶναι ὁ μέγιστος ἐν αὐτῷ περιεχόμενος ἀκέραιος ἀριθμὸς ἑκατοστῶν.*

*Ἡ ἀξία ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν ἑκατομμυριοστοῦ εἶναι ὁ μέγιστος ἐν αὐτῷ περιεχόμενος ἀκέραιος ἀριθμὸς ἑκατομμυριοστῶν. κτλ.*

*Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικὸν εἶναι ἡ διαδοχικὴ ἐκτίμησις αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ κτλ. καὶ ὁ σχηματισμὸς τοῦ πίνακος τῶν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον προσεγγιζουσῶν τιμῶν τούτων.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ δεδομένον κλάσμα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ, καὶ ἦναι ἴσον, καθ' ὑπόθεσιν, ἀριθμῷ τινι ἑκατομμυριοστῶν, εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν ἐκτιμήσωμεν αὐτὸ κατὰ προσέγγισιν ἑκατομμυριοστοῦ, θέ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

λομεν ἔχει τὴν ἀκριβῆ αὐτοῦ ἀξίαν, καὶ ὅτι αἱ ἑπόμεναι ἐκτιμήσεις, ἐὰν ἐσχηματίζοντο, ἤθελον παρέχει πάντοτε τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. Ὁ προηγούμενος ὁρισμὸς ἁρμόζει λοιπὸν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ τροπὴ δύναται νὰ γείνῃ ἀκριβῶς.

182. Ἔστω νὰ τραπῇ $\frac{5}{7}$ εἰς δεκαδικόν. $\frac{5}{7}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ 0 καὶ 1· τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ, ἤτοι ἡ ἀξία αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἑπομένως 0. Ἵνα ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν, ἃς διατάξωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 7, ὡς ἐὰν προέκειτο νὰ διαιρεθῇ ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου,

$$\begin{array}{r|l} 50 & 7 \\ \hline 10 & 0,714 \\ 30 & \\ 2 & \end{array}$$

καὶ ἃς γράψωμεν 0 ἐν τῷ πηλίκῳ ὡς ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ σχηματίσωμεν.

$\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος ἰσοῦνται τοῖς $\frac{5}{7}$ δέκα *δεκάτων*, ἤτοι $\frac{50}{7}$ τοῦ *δεκάτου*. Διαιροῦντες δὲ 50 διὰ 7, εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{50}{7} = 7 + \frac{1}{7}$. Ἄρα $\frac{50}{7}$ τοῦ *δεκάτου* ἰσοῦνται 7 δεκάτοις καὶ $\frac{1}{7}$ τοῦ δεκάτου. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν 7 ὡς ψηφίον τῶν δεκάτων, καὶ ὑπολείπεται $\frac{1}{7}$ τοῦ *δεκάτου*.

$\frac{1}{7}$ τοῦ δεκάτου εἶναι ἴσον $\frac{1}{7}$ δέκα ἑκατοστῶν, ἢ $\frac{10}{7}$ τοῦ ἑκατοστοῦ. Διαιροῦντες 10 διὰ 7 εὑρίσκομεν $1 + \frac{3}{7}$· ἑπομένως $\frac{10}{7}$ τοῦ ἑκατοστοῦ ἰσοῦνται 1 ἑκατοστῷ καὶ $\frac{3}{7}$ τοῦ ἑκατοστοῦ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν 1 ὡς ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν, καὶ ὑπολείπονται $\frac{3}{7}$ τοῦ ἑκατοστοῦ.

$\frac{3}{7}$ τοῦ ἑκατοστοῦ ἰσοῦνται $\frac{3}{7}$ δέκα *χιλιοστῶν*, ἢ $\frac{30}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ. Διαιροῦντες 30 διὰ 7 εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$· ἑπομένως $\frac{30}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ ἰσοῦνται 4 χιλιοστοῖς καὶ $\frac{2}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν 4 ὡς ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, καὶ ὑπολείπονται $\frac{2}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἡ μέθοδος αὕτη προφανῶς εἶναι γενική, καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

*Ἵνα τρέψωμεν κλάσμα κοινὸν εἰς δεκαδικόν, γράφομεν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς ἓν ψηφίον πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου· γράφομεν ἀκολούθως μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον δεκαδικὸν ψηφίον· γράφομεν μετὰ ταῦτα μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου, καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον εἶναι τὸ τρίτον δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου, καὶ οὕτω καθεξῆς ἐπ' ἀόριστον. Ἐάν τι τῶν ὑπολοίπων ἦναι μηδέν, τὸ δοθὲν κλάσμα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ, εἰδὲ μή, ἡ μέθοδος παρέχει μόνον ἐκτιμήσεις ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον προσεγγιζούσας.*

## Περὶ τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

183. Ὅταν τὰ ψηφία δεκαδικοῦ τινος κλάσματος ἐπανέρχωνται πάντοτε τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τὸ δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται *περιοδικόν*. Τὸ σύνολον τῶν οὕτω ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων καλεῖται *περίοδος*. Καὶ ὅταν μὲν ἡ περίοδος ἄρχηται εὐθὺς μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, τὸ κλάσμα καλεῖται *ἁπλοῦν περιοδικόν*· ὅταν δὲ ἡ περίοδος δὲν ἄρχηται εὐθὺς μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, καλεῖται *μικτὸν περιοδικόν*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

0,345345345. . . . .

εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα.

0,675315315315. . . . .

εἶναι μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

184. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Πᾶν κοινὸν κλάσμα τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν παράγει κλάσμα ἔχον πεπερασμένον ἀριθμὸν ψηφίων, ἢ περιοδικόν.*

Ἔστω κοινόν τι κλάσμα $\frac{A}{B}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα κανόνα, πρὸς τροπὴν αὐτοῦ εἰς δεκαδικὸν θέλομεν πράξει ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline \Upsilon 0 & \Pi, \Pi_1\ \Pi_2\ \Pi_3\ \Pi_4\ \Pi_5\ \Pi_6 \\ \Upsilon_1 0 & \\ \Upsilon_2 0 & \\ \Upsilon_3 0 & \\ \Upsilon_4 0 & \\ \Upsilon_5 0 & \end{array}$$

Διαιροῦμεν Α διὰ Β, τὸ πηλίκον Π εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος. Πολλαπλασιάζομεν τὸ ὑπόλοιπον Υ ἐπὶ 10 καὶ τὸ γινόμενον Υ0 διαιρούμενον διὰ Β παρέχει τὸ ψηφίον $\Pi_1$ τῶν δεκάτων. Πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως ἐπὶ 10 τὸ ὑπόλοιπον $\Upsilon_1$ τῆς δευτέρας ταύτης διαιρέσεως, τὸ δὲ γινόμενον $\Upsilon_1 0$ διαιρούμενον διὰ Β παρέχει πηλίκον $\Pi_2$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν, καὶ ὑπόλοιπον $\Upsilon_2$. Πολλαπλασιάζομεν $\Upsilon_2$ ἐπὶ 10 καὶ τὸ γινόμενον $\Upsilon_2 0$ διαιροῦμεν διὰ Β· οὕτω δὲ εὑρίσκομεν πηλίκον $\Pi_3$, ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, καὶ ὑπόλοιπον $\Upsilon_3$. Πολλαπλασιάζομεν $\Upsilon_3$ ἐπὶ 10, κτλ.

Ἐὰν ἓν τῶν ὑπολοίπων $\Upsilon_1$, $\Upsilon_2$, $\Upsilon_3$, ἦναι μηδὲν, τότε τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν, ἄλλως ἡ πρᾶξις ἐξακολουθεῖ ἐπ᾽ ἀόριστον. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐπειδὴ τὰ ὑπόλοιπα $\Upsilon_1$, $\Upsilon_2$, $\Upsilon_3$ . . . . εἶναι πάντα μικρότερα τοῦ Β, μετ᾽ ἀριθμὸν διαιρέσεων τὸ πολὺ ἴσον τῷ Β—1, θέλομεν ἀνεύρει ἓν τῶν εὑρεθέντων ἤδη ὑπολοίπων,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἐπειδὴ ὑπάρχουσι μόνον Β—1 ἀριθμοὶ ἀκέραιοι μικρότεροι τοῦ Β. Ἕνεκα δὲ τῆς κανονικότητος τῆς μεθόδου, δι' ἧς εὑρίσκονται τὰ διάφορα ψηφία, ἀπὸ τῶν ἴσων τούτων ὑπολοίπων τὰ διαδοχικὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα θέλουσιν εἶσθαι τὰ αὐτὰ καὶ θέλουσιν ἔρχεσθαι κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· ἑπομένως τὸ δεκαδικὸν κλάσμα θέλει εἶσθαι περιοδικόν. Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, εὑρίσκετο $\Upsilon_3 = \Upsilon_1$, ἤθελεν εἶσθαι $\Pi_4 = \Pi_2$, $\Upsilon_4 = \Upsilon_2$, $\Pi_5 = \Pi_3$, $\Upsilon_5 = \Upsilon_3$, καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα ἐκτεινόμενον ἐπ' ἀόριστον ἤθελον εἶσθαι

$$\Pi, \Pi_1\ \Pi_2\ \Pi_3\ \Pi_2\ \Pi_3\ \Pi_2\ \Pi_3\ \Pi_2 \ldots\ldots$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ὅταν κλάσμα τι* $\frac{\text{Α}}{\text{Β}}$ *τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν παρέχῃ περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ* Β.

Διότι τῶν ὑπολοίπων ὄντων ἁπάντων μικροτέρων τοῦ Β, ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν Β ψηφία, ἀνεύρομεν ἤδη δὶς τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, καὶ ἑπομένως ἡ περίοδος ἤρξατο ἤδη.

## Ἀνεύρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον παρήγαγε δεδομένον περιοδικόν.

185. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν παράγει δεδομένον περιοδικὸν, παρατηρητέον ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι τὸ *ὅριον* εἰς ὃ τείνει ἡ τιμὴ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων λαμβάνηται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μέγας.

Ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον ἁπλοῦν τι περιοδικὸν κλάσμα, οἷον τὸ

$$0{,}351351351 \ldots\ldots 351 \ldots.$$

Καλοῦντες α τὴν ἀξίαν τὴν ἐκφραζομένην ὑπὸ τῶν μ πρώτων περιόδων, θέλομεν ἔχει

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$$\alpha = 0,351351351 \ldots . 351.$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ 1000 τοὺς δύο ἴσους τούτους ἀριθμοὺς, λαμβάνομεν

$$1000\,\alpha = 351,351351 \ldots . 351.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ 1000 α περιέχει τρία δεκαδικὰ ψηφία ὀλιγώτερον ἢ ἡ τιμὴ τοῦ α. Ἐὰν προσετίθεντο εἰς τὸ 1000 α τὰ τρία ταῦτα ψηφία, αἱ δύο ἐκφράσεις ἤθελον ἔχει τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἤθελεν εἶσθαι ὁ ἀκέραιος 351· ἄρα ἔχομεν

$$1000\alpha + 0,000000 \ldots . 351 - \alpha = 351\cdot$$

τουτέστι $999\alpha + 0,000000 \ldots . 351 = 351.$

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μ τῶν περιόδων ἐννοηθῇ αὐξάνων ἐπ' ἀόριστον, τὸ 0,000000 . . . . 351 δύναται νὰ γείνῃ μικρότερον παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ, καὶ καλοῦντες χ τὸ ὅριον τοῦ α θέλομεν ἔχει

$$999\,\chi = 351$$

ὅθεν $$\chi = \frac{351}{999}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ συλλογισμὸς οὗτος εἶναι γενικὸς, συμπεραίνομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ά. *Τὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν, παράγει δεδομένον ἁπλοῦν περιοδικὸν, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ ἀριθμὸν ἐκφραζόμενον ὑπὸ τοσούτων* 9, *ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.*

186. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τὸ διὰ τοῦ προηγουμένου κανόνος εὑρισκόμενον κλάσμα δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ. Οὕτως

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{361}{999}$ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 27, καὶ τὸ κλάσμα τοῦτο ἀνάγεται εἰς $\frac{13}{37}$. Παρατηρητέον μόνον ὅτι τοῦ παρονομαστοῦ, τοῦ ὁποίου ἅπαντα τὰ ψηφία εἶναι 9, μὴ ὄντος διαιρετοῦ οὔτε διὰ 2, οὔτε διὰ 5, τὸ αὐτὸ θέλει ὑπάρχει καὶ διὰ τὸν παρανομαστὴν τοῦ ἰσοδυνάμου ἀναγώγου κλάσματος· διότι ἀνάγοντες κλάσμα εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφὴν, ἐξαλείφομεν παράγοντας, ἀλλ' οὐδένα νέον εἰσάγομεν. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος ἐξ οὗ προῆλθεν ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα, δὲν περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5.*

187. Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, οἷον τὸ

$$0,3457257257\ldots\ldots572\ldots.$$

Ἂς παραστήσωμεν δι' α τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος τούτου, ὅταν περατωθῇ εἰς τὴν $\mu^{\text{στὴν}}$ περίοδον· θέλομεν ἔχει

$$\alpha = 0,34572572572\ldots.572.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο τούτους ἴσους ἀριθμοὺς ἐπὶ 100, ἵνα κάμωμεν ὥστε ἡ περίοδος νὰ ἄρχηται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, θέλομεν ἔχει

$$100\alpha = 34,572572572\ldots.572.$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ 1000 τοὺς δύο τούτους ἴσους ἀριθμοὺς, λαμβάνομεν

$$100000\,\alpha = 34572,572572\ldots.572$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ 100000 α περιέχει τρία δεκαδικὰ ψηφία ὀλιγώτερον ἢ ἡ τιμὴ τοῦ 100 α. Ἐὰν προσετίθεντο εἰς αὐτὴν τὰ τρία ταῦτα δεκαδικὰ ψηφία, αἱ δύο ἐκ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

φράσεις ἤθελον ἔχει τὸ δεκαδικὸν μέρος τὸ αὐτὸ, καὶ διαφορὰ αὐτῶν ἤθελεν εἶσθαι ἡ διαφορὰ τῶν ἀκεραίων μερῶν. Ἄρα ἔχομεν

$$100000\alpha + 0{,}000000\ldots 572 - 100\alpha = 34572 - 34$$

ἤτοι $$99900\alpha + 0{,}000000\ldots 572 = 34572 - 34$$

Τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λαμβανομένων περιόδων αὐξάνοντος ἐπ' ἀόριστον, τὸ μέρος $0{,}000000\ldots 572$ δύναται νὰ καταταθῇ μικρότερον παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ, καὶ καλοῦντες $\chi$ τὸ ὅριον τοῦ $\alpha$, θέλομεν ἔχει

$$99900\,\chi = 34572 - 34$$

ὅθεν $$\chi = \frac{34572 - 34}{99900}.$$

Τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ὄντος γενικοῦ, συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Τὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν παρέχει δεδομένον μικτὸν περιοδικὸν, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους ἀκολουθουμένου ὑπὸ μιᾶς περιόδου, ἠλαττωμένον κατὰ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων, παρονομαστὴν δὲ ἀριθμὸν συγκείμενον ἐκ τοσούτων ψηφίων 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου, ἀκολουθούμενον ὑπὸ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.*

188. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν γένει, τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον παρέχει ὁ προηγούμενος κανὼν δὲν εἶναι ἀνάγωγον· τότε δὲ δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς κοινοὺς τῶν δύο ὅρων παράγοντας, καὶ ὁ παρονομαστὴς θέλει ἀποβάλει τὴν ἰδιάζουσαν αὐτοῦ μορφήν. Οὕτως ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{34572-34}{99900}$, ἤτοι τοῦ $\frac{34538}{99900}$ διαι-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ροῦνται διὰ 2, καὶ τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{17269}{49950}$. Δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι καὶ ἀφοῦ ἀναχθῇ εἰς τὴν ἁπλουστάτην μορφὴν, ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ θέλει περιέχει τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 ἀκριβῶς τοσάκις, ὁσάκις καὶ ὑπὸ τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ μορφὴν, τουτέστι τοσάκις, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τὰ ὁποῖα ἔχει ἀρχικῶς πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ. Οἱ παράγοντες 2 καὶ 5 τῷ ὄντι δύνανται τότε νὰ ἐξαφανισθῶσιν, ὅταν διαιρῶσιν ἀμφότεροι συγχόνως τὸν ἀριθμητὴν· ἀλλὰ διὰ νὰ ἦναι οὗτος διαιρετὸς καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5, ἔπρεπε νὰ λήγῃ εἰς 0, καὶ ἐπειδὴ προκύπτει ἐξ ἀφαιρέσεως, ἔπρεπεν, ἵνα συμβῇ τοῦτο, τὰ τελευταῖα ψηφία τῶν ἀφαιρουμένων ἀριθμῶν νὰ ἦναι τὰ αὐτὰ, τουτέστιν ἡ περίοδος νὰ λήγῃ εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς ὃ καὶ τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι συμβαίνει τοῦτο, καὶ ὅτι τὸ ψηφίον 2, εἰς ὃ λήγει ἡ περίοδος, ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ ψηφίου 4, τότε τὸ μικτὸν περιοδικὸν ἤθελον εἶναι

0,345745745745 . . . . . .

Ἀλλὰ τότε ἡ περίοδος ἀντὶ νὰ ἦναι 574 ἤθελεν εἶσθαι 457, καὶ τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος ἤθελεν εἶσθαι μόνον τὸ 3, ὅπερ εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ἡ περίοδος ἄρχεται μετὰ τὸ δεύτερον δεκαδικὸν ψηφίον. Ἐπομένως ὁ ἀριθμητὴς δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς 0, καὶ ὅταν τὸ κλάσμα ἀναχθῇ εἰς τὴν ἁπλουστάτην μορφὴν, ὁ παρονομαστὴς θέλει διατηρήσει τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοσάκις, ὅσα εἶναι τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ μηδενικὰ, τουτέστι τοσάκις, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία ἐν τῷ δεδομένῳ μικτῷ περιοδικῷ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρων ἐξάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἐξ οὗ προῆλθε μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, περιέχει ἀναγκαίως τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων* 2 *καὶ* 5 *μετ'*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*ἐκθέτου ἀκριβῶς ἴσου τῷ ἀριθμῷ τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων. Δύναται δὲ ἐπίσης νὰ περιέχῃ καὶ τὸν ἕτερον μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἢ μετὰ μικροτέρου ἐκθέτου.*

189. Ἐκ τῶν θεωρημάτων Β′ καὶ Δ′ συνάγομεν τὰ ἑξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε′. *Ὅταν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.*

Τῷ ὄντι τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἔχον ὡρισμένον ἀριθμὸν ψηφίων (180)· ἄρα παράγει περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα (184). Ἀλλὰ τὸ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα κατὰ τὸ θεώρημα Δ′. δὲν δύναται νὰ ἦναι μικτὸν περιοδικὸν· ἄρα εἶναι ἁπλοῦν περιοδικόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ϛ′. *Ὅταν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ κλάσματος ἀναγώγου περιέχῃ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5., ἢ καὶ ἀμφοτέρους, πρὸς δὲ τούτοις καὶ ἄλλους πρώτους παράγοντας, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει μικτὸν περιοδικόν, ἐν ᾧ ὁ ἀριθμὸς τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων εἶναι ἴσος τῷ μεγίστῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, τῶν περιεχομένων ἐν τῷ παρονομαστῇ τοῦ κοινοῦ κλάσματος.*

Τῷ ὄντι, τὸ τοιοῦτο κοινὸν κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἔχον πεπερασμένον ἀριθμὸν ψηφίων (180), ἄρα παράγει περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα (184). Τὸ δὲ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα δὲν δύναται νὰ ἦναι κατὰ τὸ θεώρημα Β′. ἁπλοῦν περιοδικὸν· ἑπομένως εἶναι μικτὸν περιοδικόν. Τέλος δὲ κατὰ τὸ θεώρημα Δ′. ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους εἶναι ἴσος τῷ μεγίστῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, τῶν περιεχομένων ἐν τῷ παρονομαστῇ τοῦ κοινοῦ κλάσματος.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα, ἐὰν τρέψωμεν εἰς δεκαδικὰ τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}, \frac{7}{1\,3}, \frac{1\,7}{5\,6}$, τὸ μὲν πρῶτον θέλει παραγάγει δεκαδικὸν ἔχον πεπερασμένον ἀριθμὸν ψηφίον, τὸ δεύτερον ἁπλοῦν περιοδικόν, καὶ τὸ τρίτον μικτὸν περιοδικόν, τοῦ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ὁποίου τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία θέλουσιν εἶναι 3, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 56 περιέχει τὸν παράγοντα $2^3$.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Ἐὰν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα παράγῃ ἁπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικὸν, ἡ περίοδος δὲν δύναται νὰ ἀρχίσῃ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τούτου λήγῃ εἰς μηδέν.

2. Τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 0,648648648648 . . . ἐὰν μὲν ὡς περίοδος ἐν αὐτῷ θεωρηθῇ τὸ 648, προέρχεται ἐκ τοῦ κοινοῦ $\frac{648}{999}$. Ἐὰν δὲ τὸ 648648, προέρχεται ἐκ τοῦ $\frac{648648}{999999}$. Πρόκειται νὰ δειχθῇ *ἐκ τῶν προτέρων* ἡ ἰσότης τῶν δύο τούτων κοινῶν κλασμάτων.

3. Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, τραπῶσιν εἰς δεκαδικὰ, αἱ περίοδοι τῶν δύο δεκαδικῶν κλασμάτων, θέλουσιν ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ψηφίων.

4. Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\nu}{\beta}$ εἶναι δύο ἀνάγωγα κλάσματα παράγοντα ἁπλᾶ περιοδικὰ, ὧν ἡ περίοδος ἔχει $\beta-1$ ψηφία, καὶ κατατάξωμεν ἐν σχήματι κύκλου τὰ ψηφία ἑκάστης περιόδου, ὥστε νὰ μὴν ὑπάρχῃ οὔτε πρῶτον οὔτε τελευταῖον ψηφίον, οἱ δύο προκύπτοντες κύκλοι εἶναι οἱ αὐτοί.

5. Ἐὰν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς, τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν παρέχῃ περίοδον ἀρτίου ἀριθμοῦ ψηφίων, ἀ.) τὸ ἄθροισμα τῶν τὴν αὐτὴν τάξιν κατεχόντων ψηφίων ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἡμιπεριόδων εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ ἴσον τῷ 9. β΄.) τὸ ἄθροισμα τῶν εἰς τὰ ὁμοταγῆ ταῦτα ψηφία ἀντιστοιχούντων ὑπολοίπων εἶναι ἴσον τῷ παρονομαστῇ τοῦ κοινοῦ κλάσματος.

---

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'.

## ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΩΝ.

189. Ἡ Ἑλληνικὴ Κυβέρνησις κατὰ τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1836 διέταξε νὰ εἰσαχθῇ ἐν Ἑλλάδι τὸ ἑξῆς σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν, τοῦ ὁποίου δύο εἶναι τὰ κύρια πλεονεκτήματα.

ά.) ἡ ἀρχικὴ μονὰς, δι' ἧς πᾶσαι αἱ ἄλλαι προσδιορίζονται, ἔχει ὡρισμένην σχέσιν πρὸς μέγεθος σταθερὸν καὶ ἄφθαρτον τὸ τῆς γῆς· εἶναι δὲ τὸ δεκακισεκατομμυριοστὸν τοῦ τετάρτου τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ, καὶ ἐκλήθη *μέτρον* (mètre) ὑπὸ τῶν προσδιορισάντων αὐτὸ Γάλλων, εἰς οὓς ὀφείλεται τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σύστημα. Διὰ τὴν ὡρισμένην ταύτην σχέσιν πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς, τὸ σύστημα τοῦτο δύναται νὰ διατηρηθῇ ἀναλλοίωτον, καὶ νὰ ἀνευρεθῇ κατὰ πᾶσαν ἐποχήν.

β'. Αἱ διαιρέσεις αὐτοῦ εἶναι δεκαδικαὶ, καὶ ἐὰν συγκρίνωνωμεν τὰς ἐπὶ τῶν κλασματικῶν καὶ συμμιγῶν πράξεις πρὸς τὰς ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν, βλέπομεν ὅτι αἱ διάφοροι πράξεις ἐκτελοῦνται πολὺ ἁπλούστερον ἐπὶ τῶν τελευταίων.

### Μονάδες μήκους.

190. *Πῆχυς*, ἀρχικὴ μονάς· εἶναι δὲ τὸ Γαλλικὸν μέτρον.

*Παλάμη*, δέκατον τοῦ πήχεως (décimètre).

*Δάκτυλος*, δέκατον τῆς παλάμης, ἢ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως (centimètre).

*Γραμμὴ*, δέκατον τοῦ δακτύλου, ἢ ἑκατοστὸν τῆς παλάμης, ἢ χιλιοστὸν τοῦ πήχεως (millimètre).

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*Στάδιον*, χίλιοι πήχεις (kilomètre).

*Σχοινὶς*, δέκα στάδια, ἤτοι δέκα χιλιάδες πήχεις (myriamètre).

## Μονάδες ἐπιφανείας.

191. *Τετραγωνικὸς πῆχυς*, ἤτοι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς πῆχυς.

*Στρέμμα*, χίλιοι τετραγωνικοὶ πήχεις. Ἐὰν δὲ τὸ στρέμμα ἐννοηθῇ ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἔχει μῆκος 31πηχ, 622.

## Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

192. *Λίτρα*, οὕτως ἐκλήθη ἡ κυβικὴ παλάμη, ἤτοι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση παλάμῃ (décimètre cube).

*Κοτύλη*, δέκατον τῆς λίτρας.

*Μύστρον*, δέκατον τῆς κοτύλης, ἢ ἑκατοστὸν τῆς λίτρας.

*Κύθος*, δέκατον τοῦ μύστρου, ἢ ἑκατοστὸν τῆς κοτύλης, ἢ χιλιοστὸν τῆς λίτρας.

*Κοιλὸν*, ἑκατὸν λίτραι, ἤτοι δέκατον τοῦ κυβικοῦ πήχεως· γίνεται δὲ τούτου χρῆσις ἰδίως διὰ τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

## Μονάδες βάρους.

193. *Δραχμὴ*, ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους. Εἶναι δὲ αὕτη τὸ βάρος κύβου, ἤτοι χιλιοστοῦ τῆς λίτρας, ὕδατος ἀπεσταγμένου, ἐν τῇ μεγίστῃ αὐτοῦ πυκνότητι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν εὑρίσκηται ὑπὸ θερμοκρασίαν τεσσάρων βαθμῶν ἑκατονταδικῶν. Καλεῖται δ' ἡ μονὰς αὕτη Γαλλιστὶ gramme.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*Ὀβολὸς*, δέκατον τῆς δραχμῆς (décigramme).

*Κόκκος*, δέκατον τοῦ ὀβολοῦ, ἢ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς (centigramme).

*Μνᾶ*, 1500 δραχμαί. Δυστυχῶς ἐνταῦθα δὲν διετηρήθη ἡ δεκαδικὴ σχέσις.

*Τάλαντον*, ἑκατὸν μναῖ.

*Τόνος*, δέκα τάλαντα, ἢ χίλιαι μναῖ.

Ἅπασαι αἱ μονάδες τοῦ ἀνωτέρω συστήματος καλοῦνται *βασιλικαὶ* ἐν Ἑλλάδι.

194. Ἕνεκα τῆς δεκαδικῆς σχέσεως εἶναι εὔκολον νὰ παραστήσωμεν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀναφερομένου πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ποσὸν ἐκφραζόμενον διὰ τῶν πολλαπλασίων ἢ ὑποπολλαπλασίων αὐτῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 7 σχοινίδες, 5 στάδια, 78 πήχεις, 6 παλάμαι, 4 δάκτυλοι καὶ 9 γραμμαὶ, δύναται νὰ γραφῇ οὕτω·

$$75078^{\text{πχ}},\ 649$$

Ὁμοίως, 27 λίτραι, 6 κοτύλαι, 5 μύστρα καὶ 9 κύβοι δύναται νὰ γραφῇ οὕτω

$$27^{\lambda},\ 659$$

Ἀντιστρόφως δεκαδικὸς ἀριθμὸς παριστῶν ποσὸν ἀναφερόμενον εἰς μίαν τῶν μονάδων, δύναται νὰ ἀναλυθῇ ἄνευ οὐδενὸς ὑπολογισμοῦ εἰς ἁπλᾶς μονάδας ἑκάστης τάξεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $98756^{\text{πχ}}$, 034 δύναται νὰ ἀναγνωσθῇ οὕτω· 9 σχοινίδες, 8 στάδια, 756 πήχεις, 3 δάκτυλοι καὶ 4 γραμμαί. Ὡσαύτως, $823^{\lambda\text{ιτρ}}$, 453 δύναται νὰ ἀναγνωσθῇ ὡς ἑξῆς, 8 κοιλὰ, 23 λίτραι, 4 κοτύλαι, 5 μύστρα καὶ 3 κύβοι.

## Σύγκρισις τῶν παλαιῶν μονάδων πρὸς τὰς νέας.

195. Αἱ σχέσεις τῶν παλαιῶν μονάδων πρὸς τὰς νέας

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

καὶ τῶν νέων πρὸς τὰς παλαιὰς, κατὰ τὸ βασιλικὸν διάταγμα, δι' οὗ εἰσήχθησαν ἐν Ἑλλάδι, εἶναι αἱ ἑξῆς.

Ὁ βασ. πῆχυς εἶναι 1,5432 τοῦ μικροῦ πήχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως (ἐνδεζέ). Καὶ ἀντιστρόφως ὁ μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἶναι 0,648 τοῦ βασιλικοῦ πήχεως.

Ὁ βασιλικὸς πῆχυς ἦναι 1,495 τοῦ μεγάλου πήχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως (ἀρσίν)· ἀντιστρόφως ὁ τελευταῖος εἶναι τὰ 0,669 τοῦ βασιλικοῦ.

Ὁ βασιλικὸς πῆχυς εἶναι 0,513 τῆς ὀργυιᾶς, κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ· ἡ δὲ ὀργυιὰ εἶναι 1,949 τοῦ πήχεως, κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Ἡ βασιλικὴ μνᾶ εἶναι 1,1719 τῆς ὀκάδος, ἢ 468 $\frac{3}{4}$ δράμια. Ἡ δὲ ὀκὰς τὰ 0,8533 τῆς μνᾶς.

Ἡ βασιλικὴ λίτρα εἶναι 0,03015 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ, ἐπομένως τὸ βασιλικὸν κοιλὸν εἶναι 3,015 τοῦ παλαιοῦ. Τὸ δὲ παλαιὸν κοιλὸν εἶναι 33,166 τῆς λίτρας.

Ὁ βασιλικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι 2,381 τοῦ τετραγωνικοῦ μικροῦ πήχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως· ὁ δὲ τελευταῖος τὰ 0,419 τοῦ βασιλικοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

Τὸ βασιλικὸν στρέμμα εἶναι τὰ 0,787 τοῦ Παλαιοῦ πελοποννησιακοῦ, ὡς τετραγώνου πλευρᾶς 55 μικρῶν πήχεων τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ἐπομένως περιέχοντος 3025 τοιούτους τετραγωνικοὺς πήχεις· τὸ δὲ παλαιὸν πελοποννησιακὸν στρέμμα εἶναι 1,27 τοῦ βασιλικοῦ.

## Τροπὴ ἀριθμοῦ παλαιῶν μονάδων εἰς ἰσοδύναμον νέων, καὶ τἀνάπαλιν.

196. Γνωρίζοντες ἐκ τοῦ προηγομένου πίνακος τὰς σχέσεις τῶν παλαιῶν μονάδων πρὸς τὰς νέας, εὐκόλως δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν ἀριθμὸν παλαιῶν μονάδων εἰς ἰσοδύ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ναμον ἀριθμῶν νέων, καὶ τἀνάπαλιν. Ἵνα δειξωμεν δὲ πῶς τοῦτο γίνεται, φέρομεν παραδείγματά τινα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ά. *Νὰ τραπῶσι* $7+\frac{5}{8}$ *πήχεις μικροὶ τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἰς βασιλικούς.*

Ἐπειδὴ εἷς μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἶναι 0,648 τοῦ βασιλικοῦ, $7+\frac{5}{8}$ τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι $7^{\text{κις}}$ 0,648, σὺν $\frac{5}{8}$ τοῦ 0,648. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν 0,648 ἐπὶ $7+\frac{5}{8}$ ὡς ἑξῆς.

0,648

$7+\frac{5}{8}$

4,536

$\frac{4}{8}$ 0,324

$\frac{1}{8}$ 0,081

4,941

Ἑπομένως $7+\frac{5}{8}$ μικροὶ πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως δύνανται 4,941 βασιλικούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. *Νὰ τραπῶσι 24 ὀκάδες 65* $\frac{1}{4}$ *δράμια εἰς μνᾶς.*

Ἐπειδὴ μία ὀκὰς εἶναι 0,8533 τῆς μνᾶς, $24^{\text{οκάδ}}$ $65^{\delta\rho\alpha\mu}$ $\frac{1}{4}$ εἶναι $24^{\text{κις}}$ 0,8533 πρὸς δὲ κλάσμα τι τοῦ 0,8533 τοιοῦτο, ὁποῖον κλάσμα τῆς ὀκάδος εἶναι τὰ 65 $^{\delta\rho,}$ $\frac{1}{4}$· τουτέστι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 0,8533 ἐπὶ $24^{\text{οκ.}}$ $65^{\delta\rho\alpha\mu.}$ $\frac{1}{4}$ τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς.

0,8533

24 $65^{\delta\rho,}$ $\frac{1}{4}$

34132

17066

$50^{\delta\rho,}$ 1066

10 213

5 106

$\frac{1}{4}$ 5

20,6182



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἑπομένως $24^{\text{χα.}}\ 65^{\text{δραμ.}}\ \frac{1}{4}$ δύνανται 20,6182 μνᾶς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ'. *Νὰ τραπῶσι* 8 *παλαιὰ κοιλὰ καὶ* 7 *εἰκοστὰ, εἰς βασιλικὰ κοιλὰ καὶ λίτρας.*

Ἐπειδὴ 1 παλαιὸν κοιλὸν ἀποτελεῖ $33,^{\text{λιτρ.}}166$, ἵνα εὕρωμεν πόσαις λίτραις ἰσοῦνται 8 παλαιὰ κοιλὰ καὶ 7 εἰκοστὰ, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 33,166 ἐπὶ 8 καὶ 7 εἰκοστὰ, ὅπερ γίγνεται ὡς ἑξῆς.

$$
\begin{array}{rl}
 & 33,166 \\
 & \quad 8\ \ \frac{7}{20} \\
\hline
 & 265,328 \\
\frac{5}{20} & \quad 8,291 \\
\frac{2}{20} & \quad 3,317 \\
\hline
 & 276,936
\end{array}
$$

Εὑρίσκομεν δὲ ὡς τὸ ζητούμενον $276^{\text{λιτ.}},936$, ἤτοι 2 κοιλὰ, $76^{\text{λιτ.}},936$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ'. *Νὰ τραπῶσι* 47 *παλαιὰ στρέμματα εἰς βασιλικά.*

Ἐπειδὴ ἓν παλαιὸν στρέμμα εἶναι 1,27 βασιλικὰ, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 1,27, καὶ εὑρίσκομεν 59,69 βασιλικά.

197. Ὁμοίως πράττομεν ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν νέων μονάδων εἰς ἰσοδύναμον παλαιῶν. Πρὸς τοῦτο φέρομεν παραδείγματά τινα, ὧν οἱ τρεπτέοι ἀριθμοὶ εἶναι τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, καὶ τοῦτο δὲ πρὸς ἀμοιβαίαν τῶν λογισμῶν ἐπικύρωσιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ά. *Νὰ τραπῶσι* 4,941 *βασιλικοὶ πήχεις εἰς μικροὺς τῆς Κωνσταντινουπόλεως.*

Ἐπειδὴ 1 βασιλικὸς πῆχυς εἶναι 1,5432 τοῦ μικροῦ τῆς Κωνσταντινουπόλεως, οἱ 4,941 βασιλικοὶ εἶναι $4,941 \times 1,5432$ τοῦ μικροῦ τῆς Κωνσταντινουπόλεως. Σχηματίζομεν λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦτο κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ, ποι-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

οὔντες χρῆσιν τῆς συντόμου μεθόδου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν.

15432
4941
---
15
616
13887
61728
---
7,624(6)

Ἐπομένως 4, 941 βασιλικοὶ πήχεις ἀποτελοῦσι μικροὺς τῆς Κωνσταντινουπόλεως 7, 624, κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ, ἵνα τρέψωμεν τὰ 0,624 εἰς ὄγδοα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ 8, διότι ἡ μονὰς εἶναι ἴση $\frac{8}{8}$.

0,625
8
---
5,000

Καὶ οὕτως εὑρίσκομεν $\frac{5}{8}$ περίπου· ἄρα τὸ ζητούμενον εἶναι $7+\frac{5}{8}$, ὅστις ἦτο ὁ τρεπτέος ἀριθμὸς τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ παρόντος παραδείγματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6′. *Νὰ τραπῶσιν* 20,6182 *μναῖ εἰς ὀκάδας.*

Ἐπειδὴ 1 μνᾶ εἶναι 1,1719 τῆς ὀκάδος, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 20,6182 ἐπὶ 1,1719.

206182
11719
---
180
206
14427
20618
206182
---
24,161(3)

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Εὑρίσκομεν δὲ 24,161 τῆς ὀκάδος. Ἵνα τρέψωμεν τὰ 0,161 τῆς ὀκάδος εἰς δράμια, πολλαπλασιάζομεν τοῦτο ἐπὶ 400, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι δύναται 64 δράμια καὶ κλάσμα τι τοῦ δραμίου. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διαφέρει τοῦ τρεπτέου ἀριθμοῦ τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ παρόντος παραδείγματος κατὰ 1 περίπου δράμιον, ἀλλὰ τοῦτο προέρχεται ἐκ τούτου ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦ παραδείγματος Β΄ κατὰ προσέγγισιν εὑρέθη, καὶ προσέτι διότι ἐν τῷ παρόντι παραδείγματι ὁ πολλαπλασιασμὸς κατὰ προσέγγισιν ἐγένετο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ΄. *Νὰ τραπῶσι* 2 *κοιλὰ βασιλικὰ*, $76^{\text{λιτρ}},936$, *ἤτοι* $276^{\text{λιτρ}},936$ *εἰς παλαιὰ κοιλά.*

Ἐπειδὴ 1 βασιλικὴ λίτρα εἶναι 0,03015 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 276,936 ἐπὶ 0,03015.

$$\begin{array}{r} 276936 \\ 3015 \\ \hline 135 \\ 276 \\ 83079 \\ \hline 8,3490 \end{array}$$

Εὑρίσκομεν δὲ ὡς ἐξαγόμενον 8,35 περίπου παλαιὰ κοιλά. Καὶ τρέποντες τὰ 0,35 εἰς εἰκοστὰ λαμβάνομεν $8+\frac{7}{20}$, ὅπερ εἶναι ἀκριβῶς ὁ τρεπτέος ἀριθμὸς τοῦ παραδείγματος Γ΄.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ΄. *Νὰ τραπῶσιν* 59,69 *βασιλικὰ στρέμματα εἰς παλαιὰ πελοποννησιακά.*

Ἐπειδὴ 1 βασιλικὸν στρέμμα εἶναι 0,787 τοῦ πελοποννησιακοῦ, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 59,69 ἐπὶ 0,787· τούτου γενομένου εὑρίσκομεν ὡς τὸ ζητούμενον 46,976 παλαιὰ πελοποννησιακὰ στρέμματα ὅστις ἀριθμὸς διαφέρει τοῦ τρεπτέου ἀριθμοῦ τοῦ παραδείγματος Δ, κατὰ ὀλιγώτερον ἢ 3 ἑκα-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τοστά. Προέρχεται δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη ἐκ τούτου, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 0,787, ὁ δεικνύων τί μέρος τοῦ πελοποννησιακοῦ στρέμματος εἶναι τὸ βασιλικὸν, ἐλήφθη κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

ά.) Πόσον τιμᾶται ὁ βασιλικὸς πῆχυς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου $9+\frac{3}{8}$ μικροὶ πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἐπωλήθησαν ἀντὶ δραχμῶν 83,60; ($13^{\delta\rho\alpha\chi}$, 76....)

β'.) Πόσαι μναῖ σίτου χρειάζονται διὰ νὰ σπαρῶσι 76,38 βασιλικὰ στρέμματα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ 52 παλαιὰ πελοποννησιακὰ ἀπαιτοῦνται 425 ὀκάδες; ($419^{\mu\nu}$, 433...).

γ'.) Ἔχομεν 48,752 βασιλικοὺς πήχεις ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως τιμᾶται δραχμὰς 8,75, πόσον τιμῶνται $32+\frac{5}{8}$ μεγάλοι πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως; ($294^{\delta\rho}$, 60)

δ'.) Ἐν ἴσῳ ὄγκῳ, τὸ ὕδωρ εἶναι $773^{\kappa\iota\varsigma}$ βαρύτερον τοῦ ἀέρος, πόσον εἶναι τὸ βάρος $825^{\lambda\iota\tau\rho}$,371 ἀέρος; ($0^{\mu\nu}$,7118).

ε.) Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ 1800 μνῶν χαλκοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ βάρος ὄγκου τινὸς τοῦ μετάλλου τούτου εἶναι 8,167 τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος; ($0^{\mu\nu}$, 284 . . .).

ς'. Πόσον εἶναι τὸ βάρος $32^{\lambda\iota\tau\rho}$, 542 ὕδατος θερμοκρασίας $30^0$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν $30^0$ εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ ὄγκου, ὃν ἔχει ὑπὸ θερμοκρασίαν $4^0$, ἐπὶ τὸ κλάσμα 1,00437; ($21^{\mu\nu}$, 6002 . . .).

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

## ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

### Τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν.

198. Ἔστω $(\alpha+\beta)$ ἄθροισμά τι. Ἵνα σχηματίσωμεν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (36), πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν $(\alpha+\beta)$ ἐπὶ $(\alpha+\beta)$. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει (44) νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάτερον τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἑκάτερον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα· ἑπομένως ἔχομεν

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha\times\alpha+\alpha\times\beta+\alpha\times\beta+\beta\times\beta.$$

τουτέστι $$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\times\beta+\beta^2.$$

Ἀπαγγέλλεται δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ὡς ἑξῆς.

*Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον τῷ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου, σὺν τῷ διπλασίῳ τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, σὺν τῷ τετραγώνῳ τοῦ δευτέρου.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἴση τῷ διπλασίῳ τοῦ μικροτέρου ηὐξημένῳ κατὰ μονάδα.*

Τῷ ὄντι, ἐὰν παραστήσωμεν τοὺς δύο διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς διὰ $\alpha$ καὶ $\alpha+1$, ἔχομεν

$$(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐπομένως ἡ διαφορὰ $(\alpha+1)^2-\alpha^2$ εἶναι $2\alpha+1$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Τετράγωνον γινομένου τινός.

199. Ἔστω γινόμενόν τι οἱονδήποτε $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$· τὸ νὰ σχηματίσωμεν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$ ἐπὶ $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$· τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτου εἶναι (39) τὸ γινόμενον τῶν ὀκτὼ παραγόντων

$$\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta.$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο παράγοντας διὰ τοῦ τετελεσμένου γινομένου αὐτῶν, ἐπομένως καὶ νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο τῶν ὀκτὼ παραγόντων ὡς ἑξῆς·

$$\alpha^2\times\beta^2\times\gamma^2\times\delta^2.$$

*Ἄρα τὸ τετράγωνον γινομένου τινος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τετραγώνων τῶν παραγόντων.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐάν τινες τῶν παραγόντων ἦναι δυνάμεις, ἀρκεῖ, ὅπως ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον, νὰ διπλασιασθῇ ὁ ἐκθέτης αὐτῶν. Ἔστω, παραδείγματος χάριν, νὰ σχηματισθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha^5$. Ἐπειδὴ $\alpha^5$ εἶναι τὸ γινόμενον 5 παραγόντων ἴσων τῷ α, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι τὸ γινόμενον 10 παραγόντων ἴσων τῷ α, ἐπομένως εἶναι $\alpha^{10}$.

## Θεωρήματα τῶν τετραγώνων.

200. ΘΕΩΡΗΜΑ Ἀ. *Τὸ τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς οὐδὲν τῶν ψηφίων* 2, 3, 7 *ἢ* 8, *δύναται νὰ λήγῃ.*

Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἀκέραιον ἐφ' ἑαυτὸν, αἱ μονάδες τοῦ γινομένου προέρχονται ἐκ τοῦ γινομένου τῶν μο-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

νάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τουτέστιν ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων. Ἀλλὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, δὲν δύναται νὰ ἦναι ἢ ἓν τῶν ἑξῆς, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ὧν τὰ τετράγωνα εἶναι, 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81· τούτων δὲ οὐδὲν λήγει εἰς 2, 3, 7 ἢ 8.

201. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τῶν ἀριθμῶν τῶν ληγόντων εἰς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ἢ 9, τὰ τετράγωνα λήγουσιν εἰς 0, 1, 4, 9, 6, 5, 9, 4 ἢ 1. Ἐὰν λοιπὸν τετράγωνόν τι λήγῃ εἰς 0 ἢ 5, ἐπίσης καὶ ὁ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς λήγει εἰς 0 ἢ 5. Ἀλλὰ κατὰ πάσας τὰς ἄλλας περιπτώσεις, τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τετραγώνου ὄντος γνωστοῦ, ὑπάρχουσιν δύο τιμαὶ δυναταὶ διὰ τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτω τὰ τετράγωνα τὰ λήγοντα εἰς 1, 4, 9, 6, προέρχονται ἐξ ἀριθμῶν ληγόντων εἰς 1 ἢ 9, 2 ἢ 8, 3 ἢ 7, 4 ἢ 6.

202. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Τὸ τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν.*

Ὅπως λήγῃ τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος εἰς 0, πρέπει (201) καὶ αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς νὰ λήγῃ εἰς 0. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ $A \times 10^{\nu}$, τοῦ Α παριστῶντος ἀκέραιον ἀριθμὸν μὴ λήγοντα εἰς 0, καὶ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν μηδενικῶν, ὅστις δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ 1, τῶν ἀκολουθούντων αὐτόν. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τὸ $A^2 \times 10^{2\nu}$, λήγει προφανῶς εἰς 2ν μηδενικά. Ἐπειδὴ δὲ 2ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

203. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Διὰ νὰ ἦναι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς τὸ τετράγωνον ἑτέρου ἀκεραίου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἅπαντες οἱ πρῶτοι αὐτοῦ παράγοντες νὰ ἔχωσιν ἐκθέτας ἀρτίους.*

ά.) Τοῦτο εἶναι ἀναγκαία συνθήκη· διότι ἐὰν ἔχωμεν

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἀριθμὸν ἀναλελυμένον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ διπλασιάζοντες τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων τούτων, οἵτινες ἐκθέται διὰ τοῦτο γίνονται ἄρτιοι.

6.) Τοῦτο ἀρκεῖ· διότι τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων ὄντων ἀρτίων, ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτοὺς διὰ 2, εὑρίσκομεν ἕτερον ἀκέραιον ἀριθμὸν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον, παράγει τὸν πρῶτον.

204. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀκέραιος ἀριθμὸς, διαιρετὸς διὰ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ π, μὴ διαιρετὸς ὅμως καὶ διὰ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ $\pi^2$, δὲν δύναται νὰ ἦναι τετράγωνον ἑτέρου ἀκεραίου. Διότι, ἐὰν ἀναλυθῇ εἰς πρώτους παράγοντας, ὁ παράγων π ἤθελε περιέχεσθαι εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, καὶ ἑπομένως μετ' ἐκθέτου περιττοῦ. Παραδείγματος χάριν, τετράγωνόν τι δὲν δύναται νὰ ἦναι διαιρετὸν διὰ 2, χωρὶς νὰ ἦναι ἐνταυτῷ διαιρετὸν καὶ διὰ 4· διὰ 3, χωρὶς νὰ ἦναι καὶ δι' 9· διὰ 5, χωρὶς νὰ ἦναι καὶ διὰ 25.

205. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Οὐδενὸς κλάσματος τὸ τετράγωνον εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.*

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ κλάσμα τι, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ἀνηγμένον εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν· τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι προφανῶς $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha}{\beta}$ ἤτοι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β, καὶ τὸ $\alpha^2$ εἶναι πρῶτον πρὸς τὸ $\beta^2$ (117), ἄρα εἶναι ἀδύνατον τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

206. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ τὸ $\alpha^2$ εἶναι πρῶτον πρὸς τὸ $\beta^2$, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ εἶναι ἀνάγωγον (137). Ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι τετράγωνα, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ τετράγωνον κλάσματος ἀνηγμένου εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφὴν, ἔχει πάντοτε ὡς ὅρους τετράγωνα.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## Ὁρισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

207. Ὅταν ἀριθμός τις Α εἶναι τὸ τετράγωνον ἑτέρου ἀριθμοῦ Β, ὁ Β καλεῖται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Α, καὶ γράφεται οὕτω

$$B = \sqrt{A}$$

ὅπου τὸ πρὸ τοῦ Α σημεῖον $\sqrt{}$ καλεῖται *ῥιζικόν*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 25 ὄντος τοῦ τετραγώνου τοῦ 5, 5 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 25· $\frac{9}{16}$ ὄντος τοῦ τετραγώνου τοῦ $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{9}{16}$· τοῦτο δὲ γράφεται οὕτω

$$5 = \sqrt{25}, \quad \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{9}{16}}.$$

208. Πᾶς ἀριθμὸς ὅστις εἶναι τὸ τετράγωνον ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται *τέλειον τετράγωνον*.

Ἀριθμὸς ἀκέραιος ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνον ἑτέρου ἀκεραίου, οἷον ὁ 32 (200), δὲν δύναται νὰ ἦναι οὔτε κλασματικοῦ τὸ τετράγωνον, διότι οὐδενὸς κλασματικοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς (205). Ὁμοίως κλάσμα ἀνάγωγον, τοῦ ὁποίου ἀμφότεροι οἱ ὅροι δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα, δὲν δύναται νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον (206).

Ὅταν ἀριθμός τις Α δὲν ἦναι τέλειον τετράγωνον, ὁ ὁρισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτοῦ ἀπαιτεῖ ἀναπτύξεις τινάς.

Ἀριθμός τις λέγεται ὅτι εἶναι μεῖζων ἢ μικρότερος τῆς $\sqrt{A}$, καθόσον τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι μεῖζον ἢ μικρότερον τοῦ Α. Μετὰ ταῦτα, ἵνα ὁρίσωμεν *τὰ ποσὰ ὧν μέτρον εἶναι ἡ* $\sqrt{A}$, ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἀφοῦ παραδεχθῶμεν μονάδα τινὰ μήκους, θεωροῦμεν πάντας τοὺς ἀριθμούς, ὡς παριστῶντας μήκη λογιζόμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς, ἀπό

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τινος ὡρισμένης ἀρχῆς. Ἐπί τινος μέρους τῆς γραμμῆς θέλουσι κεῖσθαι τὰ ἄκρα τῶν μηκῶν, ὧν τὸ μέτρον εἶναι μικρότερον τῆς $\sqrt{A}$, καὶ ἐπὶ ἑτέρου μέρους τῆς γραμμῆς τὰ ἄκρα τῶν μηκῶν, ὧν τὸ μέτρον εἶναι μεῖζον τῆς $\sqrt{A}$. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων μερῶν δὲν δύναται προφανῶς νὰ ὑπάρξῃ οὐδὲν διάστημα, ἀλλὰ μόνον *σημεῖον διαχωρίσεως*. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, εἰς ἣν εὑρίσκεται τὸ σημεῖον τοῦτο, μετρεῖται κατὰ τὸν ὁρισμὸν ὑπὸ τῆς $\sqrt{A}$.

209. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α. Ὡρίσαμεν μόνον τὸ ποσὸν, οὗ $\sqrt{A}$ εἶναι τὸ μέτρον. Τῷ ὄντι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν ἀμέσως ἀφηρημένον ἀριθμόν. Ἐὰν σκεφθῶμεν θέλομεν ἰδεῖ ὅτι καὶ αὐτοὶ οἱ ὁρισμοὶ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ ἔνδειξις τῆς πράξεως, δι' ἧς τὸ ποσὸν, τοῦ ὁποίου εἶναι μέτρον, παράγεται ἐκ τῆς μονάδος.

210. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ὅταν ἀριθμός τις δὲν ἦναι οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικὸς, λέγεται *ἀσύμμετρος*. Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα, εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι.

## Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

211. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος (ἐὰν δὲν ἦναι τέλειον τετράγωνον) εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς ὁ περιεχόμενος ἐν τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ αὐτοῦ· εἶναι ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου τελείου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμῷ.

212. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀριθμοῦ μὴ ἀκεραίου, εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους.*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἔστω ἀριθμός τις Α περιεχόμενος καθ' ὑπόθεσιν μεταξὺ τοῦ 875 καὶ 876· πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ 875. Τῷ ὄντι, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ Α. Ἀλλ' οἱ ἐν τῷ Α περιεχόμενοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 875 καὶ οἱ μικρότεροι τούτου· ὥστε τὸ μέγιστον ἀκέραιον τετράγωνον τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ Α, εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ μεγίστῳ ἀκεραίῳ τετραγώνῳ τῷ περιεχομένῳ ἐν τῷ 875. Ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ ἀριθμοῦ 875.

213. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχῃ ἓν ἢ δύο ψηφία, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει ἓν μόνον ψηφίον· ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ τρία ἢ τέσσαρα ψηφία, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει δύο ψηφία· ἐὰν ἔχῃ πέντε ἢ ἓξ ψηφία, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει τρία ψηφία· ἐν γένει δέ, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ 2ν ἢ 2ν-1 ψηφία, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει ν ψηφία.*

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκφραζόμενοι δι' ἑνὸς ἢ δύο ψηφίων περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 100, ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0 (τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 0) καὶ 10 (τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 100), καὶ ἔχει ἓν μόνον ψηφίον.

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκφραζόμενοι διὰ τριῶν ἢ τεσσάρων ψηφίων περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ τοῦ 10000· ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 10 (τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 100), καὶ τοῦ 100 (τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 10000), ἑπομένως ἔχει δύο ψηφία.

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες πέντε ἢ ἓξ ψηφία περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 10000 καὶ τοῦ 1000000, ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 100 (τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 10000) καὶ τοῦ 1000 (τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 1000000), ἑπομένως ἔχει τρία ψηφία.

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐν γένει, οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες 2ν—1 ἢ 2ν ψηφία, περιλαμβάνονται μεταξὺ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ 2ν—2 μηδενικῶν, καὶ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ 2ν μηδενικῶν, τουτέστι μεταξὺ $10^{2\nu-2}$ καὶ $10^{2\nu}$, ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $10^{\nu-1}$ (τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $10^{2\nu-2}$), καὶ τοῦ $10^{\nu}$ (τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $10^{2\nu}$), ἑπομένως ἔχει ν ψηφία.

214. Ὅταν ἀριθμός τις ἦναι μικρότερος τοῦ 100, ὁ πίναξ τῶν τετραγώνων τῶν 9 πρώτων ἀριθμῶν δεικνύει ποία εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ, ἀκριβῶς μὲν ἐὰν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἦναι τέλειον τετράγωνον, κατὰ προσέγγισιν δὲ μονάδος, ὅταν τοῦτο δὲν ὑπάρχῃ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 49 εἶναι ἀκριβῶς 7. τοῦ δὲ 75 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 8, διότι 64 εἶναι τὸ μέγιστον ἐν τῷ 75 περιεχόμενον ἀκέραιον τετράγωνον.

Ὅταν ἀριθμός τις ἦναι μείζων τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἔχει πλειότερα τοῦ ἑνὸς ψηφία. Ἡ δὲ μέθοδος, ἧς γίνεται χρῆσις πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς, στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο θεωρημάτων.

215. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου τινος Α μείζονος τοῦ 100 εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ Α περιεχομένου ἀκεραίου τετραγώνου.*

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῶν περιεχομένων ἐν τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ Α, ἡ τετραγωνικὴ αὕτη ῥίζα περιλαμβάνεται μεταξὺ χ δεκάδων καὶ χ + 1 δεκάδων. Ἄρα αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς Α περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ $\chi \times 10$ ἢ τοῦ $\chi^2 \times 100$, καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ $(\chi+1) \times 10$ ἢ τοῦ $(\chi+1)^2 \times 100$, ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων τοῦ Α περιλαμβάνεται μεταξὺ $\chi^2$ καὶ $(\chi+1)^2$, ἑπομένως $\chi^2$ εἶναι τὸ μέγιστον ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν ἑκατον-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τάδων τοῦ Α περιεχόμενον ἀκέραιον τετράγωνον, καὶ χ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου τούτου τετραγώνου.

216. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀριθμοῦ τινος Α τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου διαιρεθῇ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, τὸ προκύπτον πηλίκον εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης.*

Τῷ ὄντι, ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ Α, καὶ μ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ταύτης. Τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ Α εἶναι $\delta\times10+\mu$· ἑπομένως ὁ Α εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ $(\delta\times10+\mu)^2$, τουτέστι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ $\delta^2\times100+2\delta\times10\times\mu+\mu^2$. Ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ Α τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης αὐτοῦ, ἤτοι τὸ $\delta^2\times100$, τὸ ὑπόλοιπον $A-\delta^2\times100$, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Υ, θέλει εἶσθαι τοὐλάχιστον ἴσον τῷ $2\delta\times10\times\mu+\mu^2$, καὶ θέλει περιέχει τοὐλάχιστον $2\delta\times\mu$ δεκάδας. Ἕπεται ἐνταῦθεν ὅτι ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ 2δ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ Υ, θέλομεν εὕρει πηλίκον ἴσον ἢ ἀνώτερον τοῦ μ.

217. Τούτων οὕτως ἐχόντων, προκείσθω νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος οἱουδήποτε, οἷον τοῦ 589624, κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ὄντος μείζονος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι μείζων τοῦ 10, καὶ κατὰ τὸ θεώρημα Γ'. ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης ταύτης εἶναι ἴσος τῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 5896 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 589624. Πρέπει λοιπὸν νὰ ζητήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς $\sqrt{5896}$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ ἀριθμὸς 5896 εἶναι μείζων τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι μείζων τοῦ 10, καὶ κατὰ τὸ

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

θεώρημα Γ'. ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης ταύτης εἶναι ἴσος τῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 58 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 5896. Πρέπει λοιπὸν κατὰ πρῶτον νὰ ζητήσωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς $\sqrt{58}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς 58 εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει ἓν μόνον ψηφίον. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ὁ 58 περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 49 καὶ 64, τετραγώνων τοῦ 7 καὶ 8. Ἑπομένως τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 58 εἶναι 7.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 5896 περιέχει ἄρα 7 δεκάδας. Ἂς ζητήσωμεν ἤδη τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ταύτης. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 58 ὑπερβαίνει τὸ τετράγωνον τοῦ 7, ἤτοι τὸν 49, κατὰ 9, εἶναι προφανὲς ὅτι ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 5896 τὸ τετράγωνον τῶν 7 δεκάδων, τουτέστι 49 ἑκατοντάδας, τὸ ὑπόλοιπον θέλει περιέχει 9 ἑκατοντάδας καὶ 96 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο θέλει εἶσθαι 996. Ἐὰν δὲ κατὰ τὸ θεώρημα Δ'. διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 99 τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ διπλασίου 14 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, τὸ πηλίκον 7, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Ἄρα τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 5896 εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ 77.

Ἵνα γνωρίσωμεν ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ἦναι πραγματικῶς 7, πρέπει νὰ ἴδωμεν ἐὰν τὸ τετράγωνον τοῦ 77 ἦναι μικρότερον τοῦ 5896. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ 77, ἤτοι τοῦ $70+7$, εἶναι $70^2+2\times70\times7+7^2$, ἢ $4900+140\times7+7^2$. Ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ 5896 τὸ πρῶτον τῶν τριῶν τούτων μερῶν, ἤτοι τὸν 4900, εὕρομεν ὑπόλοιπον 996.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἴδωμεν ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τούτου δυνάμεθα εἰσέτι νὰ ἀφαιρέσωμεν $140\times7+7^2$, ἢ $(140+7)7$ ἢ τέλος $147\times7$. Τὸ γινόμενον τοῦ 147 ἐπὶ 7 εἶναι 1029, ἀριθμὸς μεῖζων τοῦ 996· ἑπομένως τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 5896 εἶναι μικρότερον τοῦ 7.

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Πρέπει λοιπὸν νὰ δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον 6. Συλλογισμὸς ὅμοιος τῷ προηγουμένῳ δεικνύει ὅτι ἡ δοκιμὴ αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἴδωμεν ἐὰν τὸ γινόμενον $146 \times 6$ δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 996. Τὸ γινόμενον τοῦ $146 \times 6$ εἶναι 876, ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 996· ἐπομένως τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 5896 εἶναι 6, καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης ταύτης εἶναι 76. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀριθμοῦ 5896 πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ 76 εἶναι προφανῶς ἴση τῇ ὑπεροχῇ τοῦ 996 πρὸς τὸν $146 \times 6$, ἤτις εἶναι 120.

Ἂς ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 589624. Ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα περιέχει 76 δεκάδας, καὶ ὑπολείπεται νὰ ζητήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ταύτης. Ἐπειδὴ ὑπεροχὴ τοῦ 5896 πρὸς τὸν $76^2$ εἶναι 120, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ 589624 πρὸς τὸν $760^2$ ἢ $76^2$ δεκάδας προφανῶς θέλει σύγκεισθαι ἐξ 120 ἑκατοντάδων καὶ 24 μονάδων· ἄρα ἡ ὑπεροχὴ αὕτη εἶναι 12024. Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα Δ΄., ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1202 τῶν δεκάδων τοῦ 12024 διὰ τοῦ διπλασίου 152 τοῦ ἀριθμοῦ 76 τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, τὸ πηλίκον 7, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης· ἄρα τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 589624 εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ 767. Ἵνα γνωρίσωμεν ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ἦναι πραγματικῶς 7, πρέπει νὰ ἴδωμεν ἐὰν τὸ τετράγωνον τοῦ 767 δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 589624. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ 767 ἢ τοῦ $760+7$ εἶναι $760^2+2 \times 760 \times 7+7^2$. Ἀφαιρέσαντες τὸ πρῶτον τῶν μερῶν τούτων, ἤτοι τὸν $760^2$, ἀπὸ τοῦ 589624 εὕρομεν ὑπόλοιπον, 12024, ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τούτου δυνάμεθα εἰσέτι νὰ ἀφαιρέσωμεν $2 \times 760 \times 7+7^2$, ἢ $1520 \times 7+7^2$, ἢ $(1520+7)7$, ἢ τέλος $1527 \times 7$. Τὸ γινόμενον τοῦ 1527 ἐπὶ 7 εἶναι 10689, ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 12024. Ἄρα τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 589624 εἶναι 767. Ἡ δὲ ὑπεροχὴ

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τοῦ 589624 πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ 767 εἶναι ἴση τῇ ὑπεροχῇ τοῦ 12024 πρὸς τὸν 10689, ἥτις εἶναι 1335.

218. Ἐπειδὴ ὁ προηγούμενος συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς πάντα ἀριθμὸν, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἵνα ἐξαγάγωμεν, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων τούτων, ὧν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ δύναται νὰ ἔχῃ ἓν μόνον ψηφίον, εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης.

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῷ ἀποτελουμένῳ ὑπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος· οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης.

Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τούτου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος· λαμβάνομεν οὕτω πρῶτόν τι ὑπόλοιπον, εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὸ δεύτερον διψήφιον τμῆμα. Χωρίζομεν τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον τοῦ οὕτως ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρος διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ῥίζης. Ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον τοῦτο, γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ γινόμενον δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου ἀκολουθουμένου ὑπὸ τοῦ δευτέρου τμήματος, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ἀληθές· εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

εὕρωμεν ψηφίον παρέχον γινόμενον δυνάμενον τὰ ἀφαιρεθῇ· τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης. Ἐκτελεσθείσης δὲ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ γινομένου τούτου εὑρίσκομεν δεύτερον ὑπόλοιπον.

Ἀφοῦ εὑρεθῇ οὕτω τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης, καταβιβάζομεν τὸ τρίτον διψήφιον τμῆμα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου. Χωρίζομεν τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον τοῦ οὕτω σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρος διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν εὑρεθέντων δύο ψηφίων τῆς ῥίζης. Τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον τοῦτο, γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων ψηφίων τῆς ῥίζης, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ γινόμενον δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου ἀκολουθουμένου ὑπὸ τοῦ τρίτου τμήματος, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ἀληθές· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον παρέχον γινόμενον δυνάμενον νὰ ἀφαιρεθῇ. Τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης. Ἐκτελεσθείσης δὲ τῆς ἀφαιρέσεως εὑρίσκομεν τρίτον τι ὑπόλοιπον.

Ἐξακολουθοῦμεν δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μέχρις οὗ πάντα τὰ διψήφια τμήματα κοταβιβασθῶσι. Τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἦναι μηδέν, ἔχομεν τὴν ἀκριβῆ τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ὅστις ἑπομένως εἶναι τέλειον τετράγωνον. Εἰ δὲ μή, ἔχομεν μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης.

219. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Δύναται νὰ συμβῇ ἔν τινι τῶν με-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ρικῶν διαιρέσεων, ἃς ἐκτελοῦμεν πρὸς εὕρεσιν τῶν διαφόρων ψηφίων τῆς ῥίζης, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, τὸ ἀκέραιον πηλίκον νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ 9. Τότε ἀρχόμεθα τῶν δοκιμασιῶν ἀπὸ τοῦ ψηφίου 9.

220. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Δύναται ἐπίσης νὰ συμβῇ ἔν τινι τῶν μερικῶν διαιρέσεων, δι' ὧν εὑρίσκομεν τὰ διάφορα ψηφία τῆς ῥίζης, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, τὸ ἀκέραιον πηλίκον νὰ ἦναι 0· τότε τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον τῆς ῥίζης εἶναι 0. Τὸ δὲ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ψηφίον τοῦτο ὑπόλοιπον εἶναι τότε τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ἀκολουθούμενον ὑπὸ τοῦ τελευταίου καταβιβασθέντος τμήματος. Καταβιβάζομεν ἔπειτα νέον τμῆμα, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

221. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. *Τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐν τῇ ἐξαγωγῇ, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, οὐδέποτε δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον ταύτης.*

Ἔστω τῷ ὄντι Α ἀκέραιός τις ἀριθμός, καὶ Ρ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶναι ἡ διαφορὰ $A-P^2$. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἦτο μεῖζον τοῦ 2Ρ, ὁ Α ἤθελεν εἶσθαι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ $P^2+2P+1$, ἤτοι ἴσος τῷ $(P+1)^2$, καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἑπομένως ἤθελεν εἶσθαι τοὐλάχιστον $(P+1)$.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ τετράγωνον ἀκεραίου τινος Ρ ἦναι μικρότερον τοῦ Α, καὶ ἡ διαφορὰ $A-P^2$ δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 2Ρ, ὁ ἀριθμὸς οὗτος Ρ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Α, κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Τῷ ὄντι, ἐὰν $A-P^2<2P+1$, τότε $A<P^2+2P+1$, καὶ ἑπομένως $P^2$ εἶναι τὸ μέγιστον ἐν αὐτῷ περιεχόμενον ἀκέραιον τετράγωνον.

222. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Συμβαίνει ἐνίοτε ὡς ἐκ τῆς ἕξεως τοῦ ὑπολογισμοῦ νὰ εἰκάζωμεν ὅτι δοκιμαστέον τι ψηφίον εἶναι ὑπὲρ τὸ δέον μέγα· τότε ἐλαττοῦμεν αὐτὸ ἀμέσως κατὰ μίαν ἢ πλειοτέρας μονάδας. Δοκιμάζοντες αὐτὸ μετὰ τὴν

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ἐλάττωσιν ταύτην, βλέπομεν ἐὰν δὲν ἦναι ὑπὲρ τὸ δέον μέγα, διὰ δὲ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ὁδηγούμεθα νὰ ἴδωμεν ἐὰν ἦναι ὑπὲρ τὸ δέον μικρὸν· ἐπειδὴ τότε τὸ ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον θέλει ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ῥίζης.

Τρόπος καθ' ὃν ἡ πρᾶξις διατάσσεται.

223. Λαμβάνομεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 589624, ἐφ' οὗ ἐγένοντο οἱ συλλογισμοὶ ἡμῶν.

| | |
|---|---|
| 58.96.24 | 767 |
| 49 | 146 \| 1527 |
| 99.6 | 6 \| 7 |
| 876 | |
| 1202.4 | |
| 10689 | |
| 1335 | |

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι γεγραμμένη πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ· ὑπὸ δὲ τὴν ῥίζαν εἶναι γεγραμμένον α.) τὸ διπλάσιον 14 τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀκολουθούμενον ὑπὸ τοῦ δευτέρου ψηφίου 6. β.) τὸ διπλάσιον 152, (146 + 6) τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων ψηφίων τῆς ῥίζης, ἀκολουθούμενον ὑπὸ τοῦ τρίτου ψηφίου 7 τῆς ῥίζης.

Ὑποκάτω τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ εἶναι γεγραμμένον τὸ τετράγωνον 49 τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης, ὑποκάτω δὲ τούτου ὁ ἀριθμὸς 996, ὅστις εὑρίσκεται ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ 49 ἀπὸ τοῦ 58, καὶ καταβιβασθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 9 τὸ δεύτερον τμῆμα 96· ὑποκάτω τοῦ 996 εἶναι γεγραμμένον τὸ γινόμενον 876 τῶν ἀριθμῶν 146 καὶ 6, ἔπειτα ὑποκάτω

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ὁ ἀριθμὸς 12024, ὅστις προκύπτει ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ 876 ἀπὸ τοῦ 996 καὶ καταβιβασθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 120 τὸ τρίτον τμῆμα 24. Ὑποκάτω τοῦ ἀριθμοῦ 12024 εἶναι γεγραμμένον τὸ γινόμενον 10689 τῶν ἀριθμῶν 1527 καὶ 7, ἔπειτα τὸ ὑπόλοιπον 1335, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀφαιρουμένου τοῦ γινομένου 10689 ἀπὸ τοῦ 12024, καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸ νὰ γράψωμεν τὸ τετράγωνον 49 τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης, καὶ νὰ γράψωμεν μόνον τὴν διαφορὰν τούτου καὶ τοῦ 58. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ παραλείψωμεν τὸ νὰ γράψωμεν τὰ γινόμενα $146 \times 6$ καὶ $1527 \times 7$, καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν μόνον αὐτὰ ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν 996 καὶ 12024, ὅπως τοῦτο γίνεται ἐν τῇ διαιρέσει τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

| | |
|---|---|
| 58.96.24 | 767 |
| 99.6 | 146 \| 1527 |
| 1202.4 | 6 \| 7 |
| 1335 | |

Τὰς δὲ ἀναγκαίας δοκιμασίας πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαφόρων ψηφίων, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, κάμνομεν συνήθως χωρὶς νὰ γράφωμεν οὐδὲν, ὅπως καὶ ἐν τῇ διαιρέσει.

## Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης κατὰ δεδομένην προσέγγισιν.

**224.** Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινος Α ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ εἶναι τὸ μέγιστον ἐν αὐτῇ περιεχόμενον πολλαπλάσιον τοῦ $\frac{1}{\nu}$. Θέλομεν δὲ δείξει

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ὅτι ἡ ἀναζήτησις τούτου ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τετραγωνικῆς τινος ῥίζης κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Τῷ ὄντι, ἔστω $\frac{\chi}{\nu}$ τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ $\frac{1}{\nu}$ τὸ περιεχόμενον ἐν τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ Α, τοῦ χ παριστῶντος ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Α περιέχεται μεταξὺ τοῦ $\frac{\chi}{\nu}$ καὶ $\frac{\chi+1}{\nu}$, ἑπομένως οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ

$$\frac{\chi^2}{\nu^2}\ ,\ \text{A}\ ,\ \frac{(\chi+1)^2}{\nu^2}$$

εἶναι τεταγμένοι κατὰ τάξιν μεγέθους, τουτέστιν ὁ πρῶτος εἶναι ὁ ἐλάχιστος, ὁ δεύτερος μείζων τοῦ πρώτου, καὶ ὁ τρίτος μείζων τοῦ δευτέρου.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς τρεῖς ἐπὶ $\nu^2$, ἡ τάξις τοῦ μεγέθους αὐτῶν δὲν θέλει μεταβληθῇ, καὶ ἑπομένως $\text{A}\times\nu^2$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\chi^2$ καὶ $(\chi+1)^2$, ἄρα χ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\text{A}\times\nu^2$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς ἄγει ἡμᾶς εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα.

*Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος* Α, *ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{\nu}$, *πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου* $\text{A}\times\nu^2$, *καὶ ταύτην νὰ διαιρέσωμεν διὰ* ν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α. Ἔστω νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 23 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$. Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $23\times7^2=1127$. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 33. Ἑπομένως $\frac{33}{7}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ τοῦ 23 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$· τουτέστιν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 23 περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\frac{33}{7}$ καὶ $\frac{34}{7}$.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἔστω νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{38}{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$. Πολλαπλασιάζομεν $\frac{38}{5}$ ἐπὶ 121, τετράγωνον τοῦ 11, τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{38\times121}{5}$, ἤτοι $\frac{4598}{5}$, ἢ $919+\frac{3}{5}$. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ τοῦ 919 (212), εἶναι 30· ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{38}{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$ εἶναι $\frac{30}{11}$, τουτέστιν ἡ ῥίζα τοῦ $\frac{38}{5}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\frac{30}{11}$ καὶ $\frac{31}{11}$.

225. *Ὅταν ὁ παρονομαστὴς κλάσματός τινος ἦναι τέλειον τετράγωνον $\mathcal{C}^2$, λαμβάνομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος τούτου, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\mathcal{C}}$ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ διαιροῦντες ταύτην διὰ $\mathcal{C}$.*

Ἔστω τῷ ὄντι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\mathcal{C}^2}$, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\mathcal{C}}$. Κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου $\frac{\alpha}{\mathcal{C}^2}\times\mathcal{C}^2$ ἤτοι τοῦ α, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ $\mathcal{C}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ἦναι τέλεια τετράγωνα, εὑρίσκομεν τὴν ἀκριβῆ ῥίζαν τοῦ κλάσματος τούτου ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑκατέρου τῶν ὅρων αὐτοῦ. Τοῦτο δὲ εἶναι συνέπεια καὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν σχηματίζεται τὸ τετράγωνον παντὸς κλάσματος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Δυνάμεθα πάντοτε νὰ καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν δεδομένου κλάσματος τέλειον τετράγωνον. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρανομαστήν. Οὕτως $\frac{\alpha}{\mathcal{C}}$ εἶ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ναι ἴσον τῷ $\frac{\alpha \times \beta}{\beta^2}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐνίοτε, ἵνα καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματός τινος τέλειον τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάτερον τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπ' ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Τῷ ὄντι, διὰ νὰ ἦναι ἀριθμός τις τέλειον τετράγωνον, ἀρκεῖ (203) νὰ ἔχωσι πάντες οἱ πρῶτοι αὐτοῦ παράγοντες ἐκθέτας ἀρτίους. Τοῦτο δὲ θέλει ὑπάρχει ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ γινόμενον ἐκείνων, οἵτινες περιέχονται ἐν αὐτῷ μετ' ἐκθετῶν περιττῶν.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα

$$\frac{127}{1960} = \frac{127}{2^3 \times 5 \times 7^2}$$

Ἵνα καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν τέλειον τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ $2 \times 5$ ἢ 10.

Τότε δὲ τὸ δεδομένον κλάσμα γίνεται

$$\frac{127 \times 10}{2^4 \times 5^2 \times 7^2} = \frac{1270}{140^2}.$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1270 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 35· ἑπομένως ἡ τοῦ $\frac{1270}{140^2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{140}$ εἶναι $\frac{35}{140}$.

## Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^\nu}$.

**226.** Ἔστω κατὰ πρῶτον ἀκέραιός τις ἀριθμὸς A, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥί-

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ζα αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\nu}}$. Πρέπει πρὸς τοῦτο (224) ά.) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν Α ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $10^{\nu}$, τὸ ὁποῖον εἶναι $10^{2\nu}$, β΄.) νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου, καὶ γ΄.) νὰ διαιρέσωμεν ταύτην διὰ $10^{\nu}$.

Ὁ κανὼν οὗτος δύναται προφανῶς νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς.

*Ἵνα ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{10^{\nu}}$ *τὴν τετραγωνικὴν ρίζην ἀκεραίου τινος Α, γράφομεν 2ν μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, ἐξάγομεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ οὕτω ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ, καὶ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς ν δεκαδικὰ ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ρίζης ταύτης.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^4}$ ἤτοι 0,0001.

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 200000000 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 14142, ἑπομένως ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν 0,0001 εἶναι 1,4142.

227. Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη κλασματικόν τινα ἀριθμὸν Α, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\nu}}$. Πρέπει (212 καὶ 224) ά.) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν Α ἐπὶ $10^{2\nu}$. β΄.) νὰ ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ γινομένῳ περιεχόμενον ἀκέραιον· γ΄.) νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζην τοῦ ἀκεραίου τούτου κατὰ προσέγγισιν μονάδος· δ΄.) νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ $10^{\nu}$.

Ὁ κανὼν οὗτος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς.

*Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κλασματικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{10_{\nu}}$, *ἐκτιμῶμεν αὐτὸν κατὰ*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*προσέγγισιν* $\frac{1}{10^2}$, *ἐξαλείφομεν τὴν ὑποδιαστολήν, ἔπειτα ἐξάγομεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀκεραίου, καὶ χωρίζομεν ν δεκαδικὰ ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἐξαγομένου.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α. Ἔστω νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^3}$ ἢ 0,001. Ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{5}{7}$ εἰς δεκαδικά, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^6}$, εἶναι 0,714285. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 714285 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 845· ἑπομένως 0,845 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἔστω νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3,141 κατὰ προσέγγισιν 0,001. Πρέπει κατὰ τὸν κανόνα νὰ ἐκφράσωμεν τὸν 3,141 μετὰ ἓξ δεκαδικῶν, ὅπερ γίνεται γραφομένων τριῶν μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ. Ἐξαλείφοντες ἀκολούθως τὴν ὑποδιαστολὴν, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 3141000. Εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 1772· ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3,141 κατὰ προσέγγισιν 0,001 εἶναι 1,772.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Ἀριθμός τις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν ἦναι 2· ἢ, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἦναι ἄρτιον· ἢ, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 1, 4 ἢ 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἦναι περιττόν.

2. Τὸ τετράγωνον παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 8 αὐξημένον κατὰ μονάδα.

3. Ἐὰν ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος Α κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὕρωμεν ὑπόλοιπον μὴ ὑ-

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

περβαῖνον τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν, τότε ἔχομεν ταύτην κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{2}$ μονάδος.

4. Πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 4 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

5. Πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 8 ηὐξημένον κατὰ 2 ἢ 4.

6. Ἐὰν ἀριθμός τις ἄρτιος ἦναι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

7. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀκέραιος, διαιρετὸς διὰ 5, ἦναι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, τὸ πέμπτον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι ἐπίσης τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

8. Ἐὰν τετράγωνόν τι ἀκέραιον ἦναι τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων ἀκεραίων τετραγώνων (οἷον $25 = 16 + 9$), τὸ ἓν τῶν τριῶν τετραγώνων εἶναι διαιρετὸν διὰ 5.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

## ΠΕΡΙ ΚΥΒΟΥ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

### Θεωρήματα τῶν κύβων.

228. ΘΕΩΡΗΜΑ Α. *Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τοῦ κύβου τοῦ πρώτου, τοῦ τριπλασίου τοῦ γινομένου τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου, τοῦ τριπλασίου τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ κύβου τοῦ δευτέρου.*

Ἔστωσαν $\alpha$ καὶ $\beta$ δύο ἀριθμοί. Ἵνα σχηματίσωμεν τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν $(\alpha+\beta)^2$ ἐπὶ $(\alpha+\beta)$ Εἴδομεν δὲ (198) ὅτι

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\times\beta+\beta^2.$$

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἐπὶ $\alpha+\beta$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ $\alpha$, ἔπειτα ἐπὶ $\beta$, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα· οὕτω δὲ εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+2\alpha^2\times\beta+\beta^2\times\alpha+\alpha^2\times\beta+2\alpha\times\beta^2+\beta^3.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι

$2\alpha^2\times\beta+\alpha^2\times\beta=3\alpha^2\times\beta$, $\beta^2\times\alpha+2\beta^2\times\alpha=3\beta^2\times\alpha$

λαμβάνομεν

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\times\beta+3\beta^2\times\alpha+\beta^3,$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἴση τῷ τριπλασίῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου, σὺν τῷ τριπλασίῳ τοῦ μικροτέρου, σὺν 1.*

Τῷ ὄντι, ἐὰν παραστήσωμεν τοὺς δύο τούτους διαδοχι-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

κοὺς ἀριθμοὺς διὰ α καὶ α+1, ἔχομεν κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα

$$(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1.$$

ἑπομένως ἡ διαφορὰ $(\alpha+1)^3-\alpha^3$ εἶναι $3\alpha^2+3\alpha+1$.

229. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ὁ κύβος γινομένου τινὸς εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῶν κύβων τῶν παραγόντων.*

Ἔστω τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$, ἔχομεν

$$(\alpha\times\beta\times\gamma)^3=\alpha\times\beta\times\gamma\times\alpha\times\beta\times\gamma\times\alpha\times\beta\times\gamma,$$

ἢ ἑνοῦντες τοὺς ἴσους παράγοντας,

$$(\alpha\times\beta\times\gamma)^3=\alpha^3\times\beta^3\times\gamma^3,$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἵνα ὑψώσωμεν δύναμίν τινα εἰς τὸν κύβον, ἀρκεῖ νὰ τριπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην αὐτῆς.*

Ἔστω παραδείγματος χάριν νὰ ὑψώσωμεν τὸ $\alpha^5$ εἰς τὸν κύβον. Τοῦ $\alpha^5$ ὄντος τοῦ γινομένου 5 παραγόντων ἴσων τῷ α, ὁ κύβος αὐτοῦ εἶναι προφανῶς τὸ γινόμενον 15 παραγόντων ἴσων τῷ α, τουτέστιν $\alpha^{15}$.

230. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Ὁ κύβος παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς ὃ καὶ ὁ κύβος τῶν μονάδων αὐτοῦ.*

Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἐπ' ἀλλήλους δύο ἀκεραίους ἀριθμούς, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ γινομένου ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ τελευταίου ψηφίου ἑκάστου παράγοντος. Ὅταν λοιπόν, ἵνα σχηματίσωμεν τὸν κύβον ἀριθμοῦ τινος, πολλαπλασιάζωμεν αὐτὸν ἐφ' ἑαυτόν, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο πάλιν ἐπὶ τὸν αὐτόν, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ γινομένου ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ κύβοι τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν εἶναι 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, οἵτινες ἀριθμοὶ πάντες λήγουσιν εἰς ψηφία διαφέροντα ἀλλήλων. Δυνάμεθα λοιπὸν μόνον ἐκ τῆς ἐπόψεως τοῦ κύβου ἀριθμοῦ τινος, νὰγνωρί-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

σωμεν ἀμέσως εἰς τί ψηφίον λήγει ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Ἐὰν ὁ κύβος λήγῃ εἰς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ἢ 9, αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς λήγει εἰς 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2 ἢ 9.

231. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Ἐὰν ὁ κύβος ἀκεραίου ἀριθμοῦ λήγῃ εἰς μηδενικὰ, ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ* 3.

Ἵνα λήγῃ κύβος τις εἰς μηδὲν, πρέπει (230) καὶ αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς νὰ λήγῃ εἰς μηδέν. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ $A \times 10^{\nu}$, τοῦ Α ὄντος ἀριθμοῦ μὴ λήγοντος εἰς μηδὲν, καὶ ν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μηδενικῶν ὑφ' ὧν ἀκολουθεῖται, ὅστις δύναται νὰ ἦναι καὶ 1. Ὁ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, $A^3 \times 10^{3\nu}$, προφανῶς λήγει εἰς 3ν μηδενικὰ, τοῦ δὲ 3ν ὄντος πολλαπλασίου τοῦ 3, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

232. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. *Διὰ νὰ ἦναι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς ὁ κύβος ἑτέρου ἀκεραίου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων νὰ ἦναι διαιρετοὶ διὰ* 3.

α'.) Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία· διότι ἵνα σχηματίσωμεν τὸν κύβον ἀριθμοῦ τινος, ὃν δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἀναλύσωμεν εἰς πρώτους παράγοντας, ἀρκεῖ (229) νὰ τριπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων τούτων, οἵτινες διὰ τοῦτο καθίστανται πάντες διαιρετοὶ διὰ 3.

β'.) Ἡ συνθήκη αὕτη ἀρκεῖ· διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν αὐτὴν ὑπάρχουσαν, διαιροῦντες διὰ 3 τοὺς ἐκθέτας τῶν διαφόρων πρώτων παραγόντων σχηματίζομεν ἀριθμὸν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸν κύβον παράγει τὸν δεδομένον.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἕπεται ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ὅτι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχων πρῶτον τινὰ διαιρέτην π, καὶ μὴ διαιρετὸς διὰ τοῦ κύβου αὐτοῦ $\pi^3$, δὲν δύναται νὰ ἦναι τέλειος κύβος· διότι ἐὰν ἀναλυθῇ εἰς πρώτους παράγοντας, ὁ ἐκθέτης τοῦ π θέλει εἶσθαι 1 ἢ 2, καὶ ἑπομένως μὴ διαιρετὸς διὰ 3.

Παραδείγματος χάριν, κύβος τις δὲν δύναται νὰ ἦναι δι-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

αιρετὸς διὰ 2, χωρὶς νὰ ἦναι διαιρετὸς καὶ δι' 8, ἑπομένως καὶ διὰ 4· διὰ 3, χωρὶς νὰ ἦναι διαιρετὸς καὶ δι' 27, ἑπομένως καὶ δι' 9.

233. ΘΕΩΡΗΜΑ ς'. *Οὐδενὸς κλάσματος ὁ κύβος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.*

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ κλάσμα τι, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ἀνηγμένον εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν· ὁ κύβος αὐτοῦ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}$, ἤτοι $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$· Ἐπειδὴ δὲ ὁ α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ $\beta$, ὁ $\alpha^3$ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν $\beta^3$, ἑπομένως $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. τοῦ $\alpha^3$ ὄντος πρώτου πρὸς τὸν $\beta^3$, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ εἶναι ἀνάγωγον, καὶ ἐπειδὴ ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι κύβοι, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ κύβος κλάσματος ἀνηγμένος εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφὴν ἔχει πάντοτε ὅρους κύβους.

## Ὁρισμὸς τῆς κυβικῆς ῥίζης.

234. Ὅταν ἀριθμός τις Α εἶναι ὁ κύβος ἑτέρου ἀριθμοῦ Β, ὁ Β καλεῖται κυβικὴ ῥίζα τοῦ Α, καὶ γράφεται οὕτω

$$\text{B}=\sqrt[3]{\text{A}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 125 ὄντος τοῦ κύβου τοῦ 5, ὁ 5 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125. $\frac{27}{64}$ ὄντος τοῦ κύβου τοῦ $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{27}{64}$· Καὶ γράφομεν

$$5=\sqrt[3]{125},\ \frac{3}{4}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}.$$

235. Πᾶς ἀριθμὸς ὅστις εἶναι ὁ κύβος ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται *τέλειος κύβος*.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἀριθμὸς ἀκέραιος ὅστις δὲν εἶναι κύβος ἑτέρου ἀκεραίου, οἷον ὁ 7, δὲν δύναται νὰ ἦναι οὔτε κλασματικοῦ· διότι οὐδενὸς κλασματικοῦ ὁ κύβος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς (233).

Ὁμοίως κλάσμα ἀνάγωγον, τοῦ ὁποίου ἀμφότεροι οἱ ὅροι δὲν εἶναι τέλειοι κύβοι, δὲν εἶναι τέλειος κύβος.

Ὅταν ἀριθμός τις Α δὲν ἦναι τέλειος κύβος ὁ ὁρισμὸς τῆς κυβικῆς ῥίζης αὐτοῦ ἀπαιτεῖ ἀνάπτυξείς τινάς.

Ἀριθμός τις λέγεται ὅτι εἶναι μείζων ἢ μικρότερος τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ Α, καθόσον ὁ κύβος αὐτοῦ εἶναι μείζων ἢ μικρότερος τοῦ Α. Μετὰ ταῦτα, ἵνα ὁρίσωμεν τὸ *ποσὸν τοῦ ὁποίου μέτρον εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ* Α, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀφοῦ παραδεχθῶμεν, παραδείγματος χάριν, μονάδα τινὰ μήκους, θεωροῦμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς ὡς παριστῶντας μήκη λογιζόμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς, ἀπό τινος ὡρισμένης ἀρχῆς.

Ἐπί τινος μέρους τῆς γραμμῆς θέλουσι κεῖσθαι τὰ ἄκρα τῶν μηκῶν, ὧν τὸ μέτρον εἶναι μικρότερον τῆς $\sqrt[3]{A}$, καὶ ἀφ' ἑτέρου μέρους τῆς γραμμῆς τὰ ἄκρα τῶν μηκῶν, ὧν τὸ μέτρον εἶναι μεῖζον τῆς $\sqrt[3]{A}$. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων σημείων οὐδὲν πεπερασμένον διάστημα δύναται νὰ ὑπάρξῃ, ἀλλὰ μόνον σημεῖον διαχωρίσεως. Ἡ ἀπόστασις, εἰς ἣν τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, μετρεῖται κατὰ τὸν ἀριθμὸν ὑπὸ τῆς $\sqrt[3]{A}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. ὡρίσαμεν μόνον τὸ *ποσὸν*, τοῦ ὁποίου ἡ $\sqrt[3]{A}$ εἶναι μέτρον. Τῷ ὄντι, ὡς εἴπομεν (209), δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀριθμὸν, ἢ δεικνύοντες πῶς τὸ *ποσὸν*, τὸ ὁποῖον μετρεῖ, δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς μονάδος.

**Κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος.**

236. Ἡ κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

μονάδος (ἐὰν δὲν ἦναι τέλειος κύβος), εἶναι ὁ μέγιστος ἐν τῇ κυβικῇ αὐτοῦ ῥίζῃ περιεχόμενος ἀκέραιος ἀριθμός· εἶναι ἑπομένως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἐν τῷ ἀριθμῷ τούτῳ περιεχομένου μεγίστου ἀκεραίου κύβου.

237. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ἡ κυβικὴ ῥίζα, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἀριθμοῦ μὴ ἀκεραίου, εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους.*

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἀριθμός τις περιλαμβάνηται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν Α καὶ Α+1, ὁ μέγιστος ἐν αὐτῷ περιεχόμενος ἀκέραιος κύβος, εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος κύβος ὁ μικρότερος ἢ ἴσος τῷ Α· ἄρα εἶναι ὁ μέγιστος ἐν τῷ Α περιεχόμενος ἀκέραιος κύβος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Τοῦ $\frac{5\,7\,8\,9}{1\,2}=482+\frac{5}{1\,2}$ ἡ κυβικὴ ῥίζα, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ 482.

238. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχῃ* $3\nu$, $3\nu-1$, *ἢ* $3\nu-2$ *ψηφία, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἔχει* $\nu$ *ψηφία.*

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἀριθμός τις ἔχῃ $3\nu-2$, $3\nu-1$, ἢ $3\nu$ ψηφία, εἶναι μικρότερος τοῦ $10^{3\nu}$, καὶ τοὐλάχιστον ἴσος τῷ $10^{3\nu-3}$, ἤτοι τῷ $10^{3(\nu-1)}$. Ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι ἄρα μικροτέρα τοῦ $10^{\nu}$, καὶ τοὐλάχιστον ἴση τῷ $10^{\nu-1}$· ἑπομένως τὸ ἀκέραιον αὐτῆς μέρος ἔχει ν ψηφία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν ἀριθμός τις ἔχῃ 12 ψηφία, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἔχει 4· διότι $12=3\times4$. Ἐὰν ἔχῃ 10, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἔχει 4· διότι $10=3\times4-2$. Ἐὰν δὲ ἔχῃ 20, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἔχει 7, διότι $20=3\times7-1$.

239. Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν τοὺς κύβους τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν. Ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι ὑπάρχει ἀπέναντι ἑκάστου τούτων ὁ κύβος αὐτοῦ.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9. |
| 1, | 8, | 27, | 64, | 125, | 216, | 343, | 512, | 729. |

Διὰ τῆς ἁπλῆς ἐπόψεως τοῦ πίνακος τούτου εὑρίσκομεν



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τὴν κυβικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 1000. Οἷον τοῦ 457 ἡ κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 7, διότι ὁ ἐν αὐτῷ περιεχόμενος μέγιστος ἀκέραιος κύβος εἶναι 343.

Ὅταν ἀριθμός τις ἦναι μείζων τοῦ 1000, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει πλειότερα τοῦ ἑνὸς ψηφία. Ἡ μέθοδος δὲ, δι' ἧς ἐξάγεται, στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

240. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μείζονος τοῦ 1000 εἶναι ἴσος τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν χιλιάδων αὐτοῦ.*

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 563179548. Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης, ἡ ῥίζα αὕτη περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\chi\times 10$ καὶ τοῦ $(\chi+1)\times 10$· Ἄρα ὁ δεδομένος ἀριθμὸς 563179548 περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ κύβου τοῦ $\chi\times 10$ ἤτοι τοῦ $\chi^3\times 10^3$, καὶ τοῦ κύβου τοῦ $(\chi+1)\times 10$, ἤτοι τοῦ $(\chi+1)^3\times 10^3$, δηλονότι μεταξὺ τοῦ $\chi^3\times 1000$ καὶ τοῦ $(\chi+1)^3\times 1000$, ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιάδων αὐτοῦ, ἤτοι ὁ 563179, περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\chi^3$ καὶ $(\chi+1)^3$ ἑπομένως χ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 563179.

241. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀκεραίου τινὸς ὁ κύβος τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης, καὶ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, τὸ προκύπτον πηλίκον εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης.*

Τῷ ὄντι, ἔστω Α ἀκέραιός τις ἀριθμὸς, δ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων, καὶ μ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης· τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ Α εἶναι $\delta\times 10+\mu$. Ἑπομένως ὁ Α εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ $(\delta\times 10+\mu)^3$, ἤτοι τῷ

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$$\delta^3 \times 1000 + 3\delta^2 \times 100 \times \mu + 3\delta \times 10 \times \mu^2 + \mu^3.$$

Ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ Α ὁ κύβος τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης, ἤτοι ὁ $\delta^3 \times 1000$, τὸ ὑπόλοιπον $A - \delta^3 \times 1000$, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Υ, θέλει εἶσθαι τοὐλάχιστον ἴσον τῷ

$$3\delta^2 \times 100 \times \mu + 3\delta \times 10 \times \mu^2 + \mu^3,$$

καὶ θέλει περιέχει τοὐλάχιστον $3\delta^2 \times \mu$ ἑκατοντάδας. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ $3\delta^2$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ Υ, θέλομεν εὕρει πηλίκον ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ μ.

242. Τούτων οὕτως ἐχόντων, προτεθείσθω ἤδη νὰ ἐξαχθῇ κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 43725658.

Τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ὄντος μείζονος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι μείζων τοῦ 10. Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα Γ'. ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης ταύτης εἶναι ἴσος τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 43725 τῶν χιλιάδων τοῦ 43725658. Πρέπει λοιπὸν κατὰ πρῶτον νὰ ζητήσωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τοῦ ἀριθμοῦ 43725.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ 43725 εἶναι μείζων τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι μείζων τοῦ 10. Καὶ κατὰ τὸ θεώρημα Γ'. ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης ταύτης εἶναι ἴσος τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 43 τῶν χιλιάδων τοῦ 43725. Πρέπει λοιπὸν κατὰ πρῶτον νὰ ζητήσωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τοῦ 43.

Ἐπειδὴ ὁ 43 εἶναι μικρότερος τοῦ 1000, τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης ἔχει ἓν μόνον ψηφίον. Εὑρίσκομεν δὲ (239) ὅτι 27 εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος κύβος ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ 43· ἑπομένως ἡ κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ 43 εἶναι 3.

Ἄρα ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 43725 περιέχει 3 δεκάδας. Ἂς

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ζητήσωμεν ἤδη τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ταύτης. Τῆς ὑπεροχῆς τοῦ 43 πρὸς τὸν κύβον 27 τοῦ 3 οὔσης 16, εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 43725 τὸν κύβον τῶν 3 δεκάδων, ἤτοι 27 χιλιάδας, τὸ ὑπόλοιπον θέλει περιέχει 16 χιλιάδας καὶ 725 μονάδας, ἑπομένως θέλει εἶσθαι 16725. Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα Δ΄., ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 167 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, τουτέστι διὰ $3 \times 9$ ἢ 27, τὸ πηλίκον 6, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Ἄρα τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 43725 εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ 36. Ἵνα γνωρίσωμεν ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ἦναι τῷ ὄντι 6, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὸν κύβον τοῦ 36, καὶ νὰ ἴδωμεν ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 43725. Ὑψοῦντες τὸν 36 εἰς τὸν κύβον εὑρίσκομεν ὡς ἐξαγόμενον 46656, ἀριθμὸν μείζονα τοῦ 43725· ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ψηφίον 6 εἶναι ὑπὲρ τὸ δέον μέγα, καὶ πρέπει τότε νὰ δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον 5. Ὑψοῦντες τὸν 35 εἰς τὸν κύβον εὑρίσκομεν ὡς ἐξαγόμενον 42875, ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 43725. Ἄρα 35 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τοῦ 43725.

Ἂς ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 43725658. Εὕρομεν ὅτι ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα περιέχει 35 δεκάδας. Ἂς ζητήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ταύτης. Τῆς ὑπεροχῆς τοῦ 43725 πρὸς τὸν 42875, κύβον τοῦ 35, οὔσης 850, εἶναι προφανὲς ὅτι ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 43725658 τὸν κύβον τῶν 35 δεκάδων, τουτέστι 42875 χιλιάδας, τὸ ὑπόλοιπον θέλει περιέχει 850 χιλιάδας καὶ 658 μονάδας, ἑπομένως θέλει εἶσθαι 850658. Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα Δ΄., ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8506 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δε-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

κάδων τῆς ῥίζης, τουτέστι διὰ $3\times352^2$, ἢ 3675, τὸ πηλίκον 2, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Ἄρα τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 43725658 εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ 352. Ἵνα γνωρίσωμεν ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ἦναι τῷ ὄντι 2, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὸν κύβον τοῦ 352, καὶ νὰ ἴδωμεν ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 43725658. Ὑψοῦντες τὸν 352 εἰς τὸν κύβον εὑρίσκομεν ὡς ἐξαγόμενον 43614208, ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 43725658. Ἄρα 352 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ 43725658. Ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύβον 43614208 τοῦ 352 εἶναι 111450· ὥστε ἔχομεν

$$43725658=(352)^3+111450.$$

243. Ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς, δυνάμενος νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς πάντα ἀριθμὸν, ἄγει εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα.

*Ἵνα ἐξαγάγωμεν, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, μερίζομεν αὐτὸν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν, εἰς τμήματα τριψήφια, ἂν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἓν ἢ δύο ψηφία. Ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων τούτων εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης. Ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῷ ἀποτελουμένῳ ὑπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης.*

*Σχηματίζομεν τὸν κύβον τοῦ ψηφίου τούτου, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ἔπειτα καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου. Διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ δευτέ-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ρου ψηφίου τῆς ῥίζης. Ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον τοῦτο, γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης, καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων, τὸ δοκιμασθὲν ψηφίον εἶναι τὸ ἀληθές· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς ψηφίον.

Τοῦ δευτέρου τῆς ῥίζης ψηφίου εὑρεθέντος, καὶ τοῦ κύβου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων ψηφίων τῆς ῥίζης ταύτης ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων, καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος. Διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῆς ῥίζης. Τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον τοῦτο, γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύω πρώτων ψηφίων τῆς ῥίζης, καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων τμημάτων, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ἀληθές· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς ψηφίον.

Ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρις οὗ γείρῃ χρῆσις καὶ τοῦ τελευταίου τμήματος. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ πρὸς τὸν κύβον τῆς εὑρεθείσης ῥίζης καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἦναι μηδὲν, ἔχομεν τὴν ἀκριβῆ ῥίζαν τοῦ δεδομέ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*νου ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι ἐπομένως τέλειος κύβος, εἰ δὲ μὴ, ἔχομεν μόνον τὸ ἀκέραιον αὐτῆς μέρος, ἤτοι ἔχομεν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Δυνατὸν νὰ συμβῇ ἔν τινι τῶν μερικῶν διαιρέσεων, δι' ὧν εὑρίσκομεν τὰ ψηφία τῆς ῥίζης, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, τὸ ἀκέραιον πηλίκον νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ 9· τότε ἀρχόμεθα τῶν δοκιμασιῶν ἀπὸ τοῦ 9.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Δυνατὸν ὡσαύτως νὰ συμβῇ ἔν τινι τῶν διαιρέσεων τούτων νὰ εὑρεθῇ πηλίκον ἀκέραιον 0· τότε τὸ ἀντιστοιχοῦν τῆς ῥίζης ψηφίον εἶναι 0.

244. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν δὲ ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 43725658, ἐφ' οὗ ἐγένοντο οἱ συλλογισμοὶ ἡμῶν.

| | |
|---|---|
| 43.725.658 \| 352 | |
| 27 \| $27=3\times3^2$ | $35^3=42875$ |
| 167 \| $3675=3\times35^2$ | $352^3=43614208$ |
| 43725 | |
| 42875 | |
| 8506 | |
| 43725658 | |
| 43614208 | |
| 111450 | |

245. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. *Τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐν τῇ ἐξαγωγῇ τῆς κυβικῆς ῥίζης, οὐδέποτε δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ῥίζης σὺν τῷ τριπλασίῳ αὐτῆς.*

Ἔστω τῷ ὄντι Α ἀκέραιός τις ἀριθμὸς, Ρ ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος· τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶναι $A-P^3$. Λέγω ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι μικρότερον τοῦ $3P^2+3P+1$· διότι ἄλλως, ὁ Α ἤθελεν εἶσθαι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ $P^3+3P^2+3P+1$, ἤτοι τῷ $(P+1)^3$, καὶ ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἤθελεν εἶσθαι τοὐλάχιστον $P+1$.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Συμβαίνει ἐνίοτε ὡς ἐκ τῆς ἕξεως τοῦ λογισμοῦ νὰ εἰκάζωμεν ὅτι δοκιμαστέον τι ψηφίον εἶναι ὑπὲρ τὸ δέον μέγα· τότε ἐλαττοῦμεν αὐτὸ ἀμέσως κατὰ μίαν ἢ πλειοτέρας μονάδας. Δοκιμάζοντες αὐτὸ μετὰ τὴν ἐλάττωσιν ταύτην, βλέπομεν ἐὰν δὲν ἦναι ὑπὲρ τὸ δέον μεγα· γνωρίζομεν δὲ ὅτι δὲν εἶναι ὑπὲρ τὸ δέον μικρόν, ἐὰν τὸ ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ τριπλάσιον τοῦ τεγώνου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ῥίζης, σὺν τῷ τριπλασίῳ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

## Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης κατὰ δεδομένην προσέγγισιν.

246. Ἡ κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος Α, ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, εἶναι τὸ μέγιστον ἐν αὐτῇ περιεχόμενον πολλαπλάσιον τοῦ $\frac{1}{\nu}$. Θέλομεν δὲ δείξει ὅτι ἡ ἀναζήτησις τούτου ἀνάγεται πάντοτε εἰς ἐξαγωγὴν κυβικῆς ῥίζης, κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Τῷ ὄντι ἔστω $\frac{X}{\nu}$ τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον του $\frac{1}{\nu}$ τὸ περιεχόμενον ἐν τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ Α, τοῦ Χ παριστῶντος ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ Α περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\frac{X}{\nu}$ καὶ $\frac{X+1}{\nu}$, ἑπομένως οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ

$$\frac{X^3}{\nu^3}, \text{ Α, } \frac{(X+1)^3}{\nu^3}$$

εἶναι τεταγμένοι κατὰ τάξιν μεγέθους, τουτέστιν ὁ πρῶτος εἶναι ὁ ἐλάχιστος, ὁ δεύτερος μείζων τοῦ πρώτου, καὶ ὁ τρίτος μείζων τοῦ δευτέρου.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς τρεῖς ἐπὶ $\nu^3$, ἡ τά-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ξις τοῦ μεγέθους αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται, καὶ ἑπομένως $A \times \nu^3$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $X^3$ καὶ τοῦ $(X+1)^3$, ἄρα X εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $A \times \nu^3$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς ἄγει ἡμᾶς εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα.

*Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος A, ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{\nu}$, *πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου* $A \times \nu^3$, *καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ ν.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 19 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$. Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $19 \times 7^3$ καὶ εὑρίσκομεν 6517. Ἐξάγοντες τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 6517 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν 18· ἑπομένως $\frac{18}{7}$ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 19 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$, τουτέστιν ἡ ῥίζα αὕτη περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\frac{18}{7}$ καὶ $\frac{19}{7}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Ζητεῖται νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{73}{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$. Πολλαπλασιάζομεν τὸ $\frac{73}{5}$ ἐπὶ 343, κύβον τοῦ 7. Τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{73 \times 343}{5} = \frac{25039}{5}$, ἢ $5007 + \frac{4}{5}$. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τούτου κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ τοῦ 5007, (237), εἶναι 17. Ἑπομένως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{73}{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$ εἶναι $\frac{17}{7}$, τουτέστι περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\frac{17}{7}$ καὶ $\frac{18}{7}$.

247. *Ὅταν ὁ παρονομαστὴς κλάσματός τινος ἦναι τέλειος κύβος $\beta^3$, εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος τούτου, ἐξάγοντες τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ διαιροῦντες τὸ ἐξαγόμενον διὰ β.*

Ἔστω τῷ ὄντι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta^3}$. Κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

(246) πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ $\frac{\alpha}{\beta^3} \times \beta^3$, ἤτοι τοῦ α, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἔπεται ἐντεῦθεν ὅτι, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ἦναι τέλειοι κύβοι, εὑρίσκομεν τὴν ἀκριβῆ ρίζαν τοῦ κλάσματος τούτου, ἐξάγοντες τὴν κυβικὴν ρίζαν ἑκατέρου τῶν ὅρων αὐτοῦ. Τοῦτο δὲ εἶναι συνέπεια καὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν σχηματίζεται ὁ κύβος παντὸς κλάσματος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Δυνάμεθα πάντοτε νὰ καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν δεδομένου κλάσματος τέλειον κύβον. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Οὕτως $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{\alpha \times \beta^2}{\beta^3}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι τέλειος κύβος.

Ἐνίοτε, ἵνα καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματός τινος τέλειον κύβον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάτερον τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπ' ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Τῷ ὄντι, διὰ νὰ ἦναι ἀριθμός τις τέλειος κύβος ἀρκεῖ (232) πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ νὰ ἦναι πολλαπλάσια τοῦ 3. Τοῦτο δὲ θέλει ὑπάρχει, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ δεδομένου κλάσματος ἐφ' ἕκαστον τῶν πρώτων παραγόντων, οἵτινες ὑπάρχουσιν ἐν τῷ παρονομαστῇ μετ' ἐκθέτου ἴσου πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 3 ηὐξημένῳ κατὰ 2, καὶ ἐπὶ τὸ τετράγωνον ἑκάστου τῶν πρώτων παραγόντων, οἵτινες ὑπάρχουσιν ἐν τῷ παρονομαστῇ μετ' ἐκθέτου ἴσου πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 3 ηὐξημένῳ κατὰ 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{197}{360} = \frac{197}{2^3 \times 3^2 \times 5}$. Ἵνα καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ τέλειον κύβον πολ-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

λαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $3\times5^2$, καὶ τότε γίνεται $\frac{197\times3\times5^2}{2^3\times3^3\times5^3}=\frac{14775}{(30)^3}$. Ἐξάγοντες τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν 24· διαιροῦντες δὲ ταύτην διὰ 30 λαμβάνομεν, $\frac{24}{30}$ ὡς κυβικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{197}{360}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{30}$

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^\nu}$

248. Ἔστω κατὰ πρῶτον ἀκέραιός τις ἀριθμὸς Α, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^\nu}$. Πρέπει πρὸς τοῦτο (246) νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ Α ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ $10^\nu$, ὅστις εἶναι $10^{3\nu}$, β΄.) νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τοῦ γινομένου, καὶ γ΄.) νὰ διαιρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον διὰ $10^\nu$. Ὁ κανὼν οὗτος προφανῶς δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς.

*Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς Α, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^\nu}$, γράφομεν 3ν μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ οὕτως ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ, καὶ χωρίζομεν ν δεκαδικὰ ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ῥίζης ταύτης.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^2}$ ἤτοι 0, 01. Πολλαπλασιάζοντες τὸν 2 ἐπὶ $10^6$ εὑρίσκομεν γινόμενον 2 000 000, τοῦ ὁποίου ἡ κυβικὴ ῥίζα, κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 125. Χωρίζοντες δύο ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου, εὑρίσκομεν 1, 25. Ἑπομένως 1,25 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 0,01.

249. Ἔστω ἤδη κλασματικός τις ἀριθμὸς Κ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$\frac{1}{10^{\nu}}$. Πρέπει πρὸς τοῦτο (237 καὶ 246) ά.) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν Κ ἐπὶ $10^{3\nu}$· β.) νὰ ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ γινομένῳ περιεχόμενον ἀκέραιον· γ'.) νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου τούτου, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ δ'.) νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ $10^{\nu}$. Ὁ κανὼν οὗτος προφανῶς δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς.

*Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ κλασματικοῦ, κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{10^{\nu}}$, *ἐκτιμῶμεν αὐτὸν κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{10^{3\nu}}$, *ἐξαλείφομεν τὴν ὑποδιαστολήν, ἔπειτα ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀκεραίου, καὶ χωρίζομεν ν δεκαδικὰ ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἐξαγομένου.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Προκείσθω νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^3}$, ἤτοι 0, 001. Ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^9}$ εἶναι 0,714285714. Ἐξαλείφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν εὑρίσκομεν τὸν ἀκέραιον 714285714, τοῦ ὁποίου ἡ κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 893. Ἐπομένως 0, 893 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{7}$, κατὰ προσέγγισιν 0,001.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Προκείσθω νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 3,14 κατὰ προσέγγισιν 0,01. Πρέπει κατὰ τὸν κανόνα νὰ ἐκφράσωμεν τὸν 3,14 δι' ἓξ δεκαδικῶν ψηφίων, ὅπερ γίνεται γραφομένων τεσσάρων μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Ἐξαλείφοντες ἀκολούθως τὴν ὑποδιαστολὴν ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 3140009· ἡ κυβικὴ ῥίζα τούτου κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 145. Ἐπομένως 1, 45 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 3, 14 κατὰ προσέγγισιν 0,01.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ ἦναι τέλειος κύβος, ἐὰν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 2 ἢ 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἦναι ἄρτιον.

2. Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ ἦναι τέλειος κύβος, ἐὰν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 4 ἢ 8, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἦναι περιττόν.

3. Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ ἦναι τέλειος κύβος, ἐὰν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν ἦναι οὔτε 2 οὔτε 7.

4. Πῶς δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν ἐὰν δεδομένος ἀκέραιος ἀριθμὸς ἦναι ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν κύβων; καὶ πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς κύβους τούτους;

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'.

## ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

### Λόγος δύο ποσῶν.

250. *Λόγος* ποσοῦ τινος πρὸς ἕτερον ποσὸν τῆς αὐτῆς φύσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἤθελεν εἶσθαι τὸ μέτρον τοῦ πρώτου, ἐὰν τὸ δεύτερον ἐλαμβάνετο ὡς μονάς.

Ὅταν δύο ποσὰ ἦναι ἀμφότερα πολλαπλάσια τοῦ αὐτοῦ τρίτου ποσοῦ, καλοῦνται *σύμμετρα*. Καὶ ὁ λόγος δὲ αὐτῶν καλεῖται *σύμμετρος*.

251. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Πᾶς σύμμετρος λόγος ἰσοῦται κλασματικῷ ἀριθμῷ.*

Τὰ ποσὰ, τὰ ὁποῖα συγκρίνομεν, ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως κοινόν τι μέτρον, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται ἀκριβῶς ἐν ἑκατέρῳ αὐτῶν, οἷον $5^{\text{κις}}$ ἐν τῷ πρώτῳ καὶ $7^{\text{κις}}$ ἐν τῷ δευτέρῳ· τὸ πρῶτον ποσὸν τότε περιέχει $5^{\text{κις}}$ τὸ ἕβδομον τοῦ δευτέρου, τοῦ ὁποίου ἑπομένως εἶναι τὰ $\frac{5}{7}$, καὶ τὸ δεύτερον περιέχει $7^{\text{κις}}$ τὸ πέμπτον τοῦ πρώτου, τοῦ ὁποίου ἑπομένως εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$. Ὁ λόγος λοιπὸν εἶναι, κατὰ μὲν τὸν πρῶτον τρόπον τοῦ θεωρεῖν αὐτὸν, $\frac{5}{7}$, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον, $\frac{7}{5}$.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὁ λόγος δύο ποσῶν ἦναι κλασματικὸς ἀριθμὸς, τὰ δύο ταῦτα ποσὰ εἶναι *σύμμετρα*. Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, ποσόν τι ἦναι τὰ $\frac{7}{11}$ ἑτέρου ποσοῦ, τοῦτο δεικνύει ὅτι τὸ ἑνδέκατον τοῦ δευτέρου, ἐμπεριέχεται ἑπτάκις ἐν τῷ πρώτῳ, ἄρα ἀμφότερα εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ἑνδεκάτου τοῦ δευτέρου.

252. Ὅταν δύο ποσὰ δὲν ἔχωσι κοινόν τι μέτρον, ὁ λόγος αὐτῶν δὲν δύναται νὰ ἐκφραθῇ οὔτε δι' ἀκεραίου οὔτε διὰ κλασματικοῦ. Διότι εἴδομεν ὅτι, ὅταν ὁ λό-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

γος ἐκφράζηται διὰ κλασματικοῦ, τὰ ποσὰ ἔχουσι κοινὸν μέτρον. Ὁ τοιοῦτος λόγος καλεῖται *ἀσύμμετρος*.

Ἀντιστρόφως, ὅταν ὁ λόγος δύο ποσῶν δὲν ἦναι οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικὸς, ἀλλὰ ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (210), οἷον $\sqrt{2}$, τὰ ποσὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

## Λόγοι ἀντίστροφοι.

253. Εἴδομεν (251) ὅτι μεταξὺ δύο ποσῶν ὑπάρχουσι δύο λόγοι ἐκφραζόμενοι διὰ δύο κλασμάτων ἐχόντων τοὺς αὐτοὺς ὅρους, οἷον $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{7}{5}$· οἱ τοιοῦτοι λόγοι καλοῦνται *ἀντίστροφοι*, καὶ τὰ παριστῶντα αὐτοὺς κλάσματα καλοῦνται *ἀντίστροφα*.

Εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀντιστρόφων κλασμάτων εἶναι ἡ μονάς.

## Λόγος δύο ἀριθμῶν.

254. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν καλεῖται λόγος αὐτῶν. Εἶναι δὲ σπουδαῖον νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ ὁρισμὸς οὗτος συμφωνεῖ πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ λόγου δύο ποσῶν, καὶ ὅτι δύο ποσὰ τῆς αὐτῆς φύσεως παριστώμενα δι' ἀριθμῶν ἔχουσιν ὡς λόγον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι δύο ποσὰ συγκρινόμενα πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{2}{3}$. $\frac{5}{7}$ διαιρούμενον διὰ $\frac{2}{3}$ δίδει πηλίκον $\frac{15}{14}$ τοῦτο σημαίνει ὅτι $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος εἶναι τὰ $\frac{15}{14}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῆς μονάδος, ἢ ὅτι *ὁ λόγος* τοῦ ποσοῦ $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος πρὸς τὸ ποσὸν $\frac{2}{3}$ τῆς μονάδος εἶναι $\frac{15}{14}$. Ἄρα οἱ δύο ὁρισμοὶ συμφωνοῦσιν ἐντελῶς.

## Ὁρισμὸς τῶν ἀναλογιῶν.

255. Λέγεται ὅτι *ὑπάρχει ἀναλογία μεταξὺ τεσσάρων ποσῶν, ὅταν ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ἦναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν δύο ἄλλων.*

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ, ὅπου μόνον ἀριθμοὺς θεωροῦμεν, λέγεται ὅτι *ὑπάρχει ἀναλογία μεταξὺ τεσσάρων ἀριθμῶν, ὅταν ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ἦναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν δύο ἄλλων.*

Εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι, ὅταν ὑπάρχῃ ἀναλογία μεταξὺ τεσσάρων ἀριθμῶν, ὑπάρχει ἐπίσης ἀναλογία καὶ μεταξὺ τῶν ἀντιστοιχούντων ποσῶν, καὶ ὅτι ἀντιστρόφως ἡ ἀναλογία μεταξὺ τεσσάρων ποσῶν συνεπάγει τὴν τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν.

256. Ἵνα παραστήσωμεν ὅτι τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἑξῆς.

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta$$

ὅπερ ἀπαγγέλλεται

α πρὸς β ὡς γ πρὸς δ.

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ καλοῦνται ὅροι τῆς ἀναλογίας.

$\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ὁ πρώτος λόγος.

$\frac{\gamma}{\delta}$ ὁ δεύτερος λόγος.

Οἱ α καὶ δ καλοῦνται ἄκροι.

Οἱ β καὶ γ καλοῦνται μέσοι.

Ὁ α καλεῖται ἡγούμενος, ὁ δὲ β ἑπόμενος τοῦ πρώτου λόγου, περιληπτικῶς δὲ ἀμφότεροι, ὅροι τοῦ πρώτου λόγου.

Ὁ γ καλεῖται ἡγούμενος, ὁ δὲ δ ἑπόμενος τοῦ δευτέρου λόγου, περιληπτικῶς δὲ ἀμφότεροι, ὅροι τοῦ δευτέρου λόγου.

Ὅταν ἐν ἀναλογίᾳ τινὶ οἱ δύο μέσοι εἶναι ἴσοι, ἡ ἀναλογία καλεῖται *συνεχὴς*, ὁ δὲ ἕτερος τῶν ἴσων μέσων καλεῖται *μέσος ἀνάλογος* μεταξὺ τῶν ἄκρων.

Οἷον ἐν τῇ ἀναλογίᾳ 8 : 4 :: 4 : 2, ὁ 4 εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ 8 καὶ 2.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

257. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία α: β:: γ: δ.

Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

Ἐὰν ἀναγάγωμεν τὰ δύο ταῦτα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ μὲν πρώτου ἐπὶ δ, τοῦ δὲ δευτέρου ἐπὶ β, θέλομεν ἔχει.

$$\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta}=\frac{\beta\times\gamma}{\beta\times\delta}.$$

Τὰ δύο ταῦτα ἴσα κλάσματα, ὡς ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἔχουσι καὶ τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν ἴσους· ἑπομένως

$$\alpha\times\delta=\beta\times\gamma,$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

258. Στηριζόμενοι ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς ζήτημα.

*Γνωστῶν ὄντων τῶν τριῶν ὅρων ἀναλογίας, εὑρεῖν τὸν τέταρτον.*

Ἐὰν ὁ ἄγνωστος ὅρος ἦναι ἄκρος, εὑρίσκομεν αὐτὸν διαιροῦντες τὸ γινόμενον τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου. Ἐὰν δὲ ὁ ἄγνωστος ἦναι μέσος, εὑρίσκομεν αὐτὸν διαιροῦντα τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις χ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία

6 : 14 :: 3 : χ



Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\chi=\frac{14\times3}{6}=\frac{42}{6}=7$.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἀντιστρόφως, ἐὰν τέσσαρες κατὰ σειρὰν ἀριθμοὶ ἦναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων νὰ ἦναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.*

Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι

$$\alpha\times\delta=\beta\times\gamma.$$

Διαιροῦντες διὰ $\beta\times\delta$ τοὺς δύο τούτους ἴσους ἀριθμοὺς, ἔχομεν

$$\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta}=\frac{\beta\times\gamma}{\beta\times\delta}$$

Ἐξαλείφοντες δὲ τὸν κοινὸν παράγοντα $\delta$ τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου κλάσματος, καὶ τὸν κοινὸν παράγοντα $\beta$ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου, λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},$$

ὅθεν $\alpha:\beta::\gamma:\delta$.

260. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν τὴν τάξιν τῶν ὅρων ἀναλογίας, ἀρκεῖ οἱ αὐτοὶ ὅροι νὰ ἦναι συγχρόνως μέσοι ἢ ἄκροι. Οὕτως ἡ ἀναλογία, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, οἵτινες εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$, δύναται νὰ γραφῇ κατὰ τοὺς ἑξῆς ὀκτὼ τρόπους.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

α : β :: γ : δ
α : γ :: β : δ
δ : β :: γ : α
δ : γ :: β : α
β : α :: δ : γ
β : δ :: α : γ
γ : α :: δ : β
γ : δ :: α : β

261. Ὡσαύτως δυνάμεθα *νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν συγχρόνως ἕνα μέσον καὶ ἕνα ἄκρον ἀναλογίας διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ παύσῃ τοῦ νὰ ἦναι ἀναλογία.* Διότι οὕτω τὰ γινόμενα τῶν ἄκρων καὶ μέσων, ὡς πολλαπλασιαζόμενα ἢ διαιρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δὲν παύουσι τοῦ νὰ ἦναι ἴσα.

262. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Ὅταν δύο ἀναλογίαι ἔχωσιν ἕνα κοινὸν λόγον, οἱ δύο ἄλλοι λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.*

Ἔστωσαν αἱ δύο ἀναλογίαι

α : β :: γ : δ
ε : ζ :: γ : δ

οἱ δύο λόγοι α : β καὶ ε : ζ ὡς ἴσοι ἀμφότεροι τῷ αὐτῷ λόγῳ γ : δ, εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἴσοι, ἑπομένως ἔχομεν

α : β :: ε : ζ

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ὅταν δύο ἀναλογιῶν οἱ ἡγούμενοι ἢ οἱ ἑπόμενοι ἦναι οἱ αὐτοί, οἱ ἑπόμενοι ἢ οἱ ἡγούμενοι ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.* Τῷ ὄντι, ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι

α : β :: γ : δ
α : ε :: γ : ζ

Διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς

α : γ :: β : δ
α : γ :: ε : ζ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ὅθεν διὰ τὸν κοινὸν λόγον α : γ,

$$\beta : \delta :: \varepsilon : \zeta .$$

263. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. *Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων εἶναι πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta \qquad (1)$$

Πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ ταύτης ἕπεται ἡ ἑξῆς·

$$\alpha+\beta : \beta :: \gamma+\delta : \delta . \qquad (2)$$

Τῷ ὄντι, εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ λόγος $\alpha+\beta$: β ὑπερβαίνει κατὰ μονάδα τὸν λόγον α: β· διότι προστιθεμένου τοῦ διαιρέτου εἰς τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον αὐξάνει κατὰ μονάδα. Ὡσαύτως ὁ λόγος $\gamma+\delta$: δ ὑπερβαίνει κατὰ μονάδα τὸν γ: δ. Ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεροι οἱ ἴσοι λόγοι α: β καὶ γ: δ ηὐξήθησαν κατὰ μονάδα, ἡ ἰσότης αὐτῶν δὲν κατεστράφη.

Διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς·

$$\alpha : \gamma :: \beta : \delta$$
$$\alpha+\beta : \gamma+\delta :: \beta : \delta .$$

Ἐκ δὲ τούτων, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου β: δ, τὴν ἑξῆς·

$$\alpha+\beta : \gamma+\delta :: \alpha : \gamma,$$

καὶ μεταθέσει τῶν μέσων, $\alpha+\beta : \alpha :: \gamma+\delta : \gamma .$ (3)

Ἀποβλέποντες εἰς τὰς ἀναλογίας (2) καὶ (3) παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ γενικεύσωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ὡς ἑξῆς.

*Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι πρὸς τὸν πρῶτον ἢ δεύτερον, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸ τὸν τρίτον ἢ τέταρτον.*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

264. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε. *Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶναι πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta . \qquad (1)$$

Πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ ταύτης ἕπεται ἡ ἑξῆς·

$$\alpha - \beta : \beta :: \gamma - \delta : \delta. \qquad (2)$$

Τῷ ὄντι, εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ λόγος $\alpha - \beta : \beta$ εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ λόγου $\alpha : \beta$· διότι ἀφαιρουμένου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα. Ὡσαύτως ὁ λόγος $\gamma - \delta : \delta$ εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ $\gamma : \delta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἀμφότεροι οἱ λόγοι ἠλαττώθησαν κατὰ μονάδα, ἡ ἰσότης αὐτῶν δὲν κατεστράφη.

Διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς·

$$\alpha : \gamma :: \beta : \delta$$
$$\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \beta : \delta.$$

Ἐκ δὲ τούτων ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $\beta : \delta$, τὴν ἑξῆς

$$\alpha - \beta : \gamma - \delta :: \alpha : \gamma$$

ἐξ ἧς, μεταθέσει τῶν μέσων,

$$\alpha - \beta : \alpha :: \gamma - \delta : \gamma \qquad (3)$$

Ἀποβλέποντες εἰς τὰς ἀναλογίας (2) καὶ (3) παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ γενικεύσωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ὡς ἑξῆς.

*Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶναι πρὸς τὸν πρῶτον ἢ δεύτερον, ὡς ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τρίτον ἢ τέταρτον.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ προηγουμένῳ θεωρήματι ὑποτίθεται ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha$ καὶ $\gamma$ εἶναι μείζονες τῶν $\beta$ καὶ $\delta$. Ἐὰν τοῦτο

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

δὲν ὑπῆρχε, ποιοῦντες τοὺς μέσους ἄκρους καὶ τοὺς ἄκρους μέσους, ἠθέλομεν λάβει νέαν ἀναλογίαν, τὴν $\beta : \alpha :: \delta : \gamma$, εἰς ἣν τὸ θεώρημα ἤθελεν εἶσθαι ἐφαρμοστέον.

265. Ἐφαρμοζομένων τῶν θεωρημάτων Δ΄. καὶ Ε΄. εἰς ἑκάστην τῶν ὀκτὼ ἀναλογιῶν, τῶν προερχομένων ἐκ τῆς μεταθέσεως τῶν ὅρων δεδομένης ἀναλογίας (260), προκύπτουσι πολλὰ θεωρήματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων διακρίνομεν τὰ ἑξῆς.

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$

Διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων ταύτης λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς·

$$\alpha : \gamma :: \beta : \delta$$

Ἐφαρμόζοντες δὲ εἰς ταύτην τὰ θεωρήματα Δ΄ καὶ Ε΄, λαμβάνομεν

$$\alpha + \gamma : \gamma :: \beta + \delta : \delta$$
$$\alpha - \gamma : \gamma :: \beta - \delta : \delta$$

Διὰ δὲ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων τῶν ἀναλογιῶν τούτων προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς·

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \gamma : \beta + \delta :: \gamma : \delta \\ \alpha - \gamma : \beta - \delta :: \gamma : \delta \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Τουτέστιν,

*Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ, τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων, ὡς ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ.*

Ἡ δευτέρα τῶν ἀναλογιῶν (1) ὑποθέτει ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\alpha$ εἶναι μεῖζων τοῦ $\gamma$, ἑπομένως καὶ ὁ $\beta$ μεῖζων τοῦ $\delta$. Ἐὰν τοῦτο δὲν ὑπῆρχεν, ἀντὶ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, ἠθέλομεν γράψει τὴν

$$\delta : \gamma :: \beta : \alpha,$$

ἐξ ἧς ἠθέλομεν ἔχει

$$\delta - \beta : \gamma - \alpha :: \delta : \gamma.$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἀναλογιῶν (1) προκύπτει ἡ ἑξῆς

$$\alpha + \gamma : \alpha - \gamma :: \beta + \delta : \beta - \delta$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἤτοι, *ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$

κατὰ τὰ θεωρήματα Δ΄. καὶ Ε. προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς·

$$\alpha+\beta : \beta :: \gamma+\delta : \delta$$
$$\alpha-\beta : \beta :: \gamma-\delta : \delta$$

Διὰ τῆς μεταθέσεως δὲ τῶν μέσων τούτων λαμβάνομεν

$$\alpha+\beta : \gamma+\delta :: \beta : \delta$$
$$\alpha-\beta : \gamma-\delta :: \beta : \delta,$$

ἐξ ὧν, διὰ τὸν κοινὸν λόγον $\beta : \delta$, ἡ ἑξῆς·

$$\alpha+\beta : \gamma+\delta :: \alpha-\beta : \gamma-\delta$$

καὶ μετατιθεμένων τῶν μέσων,

$$\alpha+\beta : \alpha-\beta :: \gamma+\delta : \gamma-\delta,$$

Ἤτοι, *ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

266. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. *Τὰ γινόμενα τῶν τὴν αὐτὴν τάξιν κατεχόντων ὅρων ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.*

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta$$
$$\varepsilon : \zeta :: \eta : \theta$$
$$\iota : \kappa :: \lambda : \mu.$$

Αἱ ἀναλογίαι αὗται δύνανται νὰ παρασταθῶσι καὶ ὡς ἑξῆς·

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

$$\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\eta}{\theta}$$

$$\frac{\iota}{\kappa}=\frac{\lambda}{\mu}$$

Τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων μελῶν τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι ἴσον τῷ γενομένῳ τῶν τριῶν δευτέρων μελῶν· ὅθεν ἔχομεν

$$\frac{\alpha\times\varepsilon\times\iota}{\beta\times\zeta\times\kappa}=\frac{\gamma\times\eta\times\lambda}{\delta\times\theta\times\mu}$$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη ἰσοδυναμεῖ τῇ ἀναλογίᾳ

$$\alpha\times\varepsilon\times\iota : \beta\times\zeta\times\kappa :: \gamma\times\eta\times\lambda : \delta\times\theta\times\mu.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν θεωρήσωμεν μ ἀναλογίας ἀπάσας τὰς αὐτὰς τῇ πρώτῃ, καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ προηγούμενον θεώρημα, λαμβάνομεν

$$\alpha^{\mu} : \beta^{\mu} :: \gamma^{\mu} : \delta^{\mu}.$$

Ἤτοι, *ὑψοῦντες εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν πάντας τοὺς ὅρους ἀναλογίας, λαμβάνομεν νέαν ἀναλογίαν.*

Ἀντιστρόφως, ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta$$

προκύπτει ἡ ἑξῆς

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta}$$

Διότι ἡ δοθεῖσα ἀναλογία δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν δύο τούτων ἴσων ἀριθμῶν λαμβάνομεν

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} \qquad (1)$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἀλλὰ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

διότι τοῦ μὲν $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ τὸ τετράγωνον εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης· τοῦ δὲ $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ τὸ τετράγωνον εἶναι $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \times \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \frac{(\sqrt{\alpha})^2}{(\sqrt{\beta})^2} = \frac{\alpha}{\beta}$. Μόνον δὲ τῶν ἴσων ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα εἶναι ἴσοι ἀριθμοί. Ὡσαύτως ἔχομεν $\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}}$, ὥστε ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}},$$

ὅθεν $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta}$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι

$$\sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[3]{\beta} :: \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\delta}$$

Ἑπομένως *αἱ τετραγωνικαὶ ἢ αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν ὅρων ἀναλογίας τινὸς ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.*

267. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. *Ἐν σειρᾷ τινι ἴσων λόγων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὡς ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ.*

Ἔστω ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta :: \varepsilon : \zeta :: \eta : \theta$$

ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν δύο πρώτων λόγων

$$\alpha ; \beta :: \gamma ; \delta$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

συνάγομεν (265)

$$\alpha+\gamma : \beta+\delta :: \gamma : \delta$$

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ταύτῃ τὸν λόγον $\gamma : \delta$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\varepsilon : \zeta$, λαμβάνομεν

$$\alpha+\gamma : \beta+\delta :: \varepsilon : \zeta$$

ἐξ ἧς συνάγομεν (265)

$$\alpha+\gamma+\varepsilon : \beta+\delta+\zeta : \varepsilon : \zeta$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν ταύτῃ τὸν λόγον $\varepsilon : \zeta$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\eta : \theta$, λαμβάνομεν

$$\alpha+\gamma+\varepsilon : \beta+\delta+\zeta :: \eta : \theta$$

Ἐκ ταύτης δὲ πάλιν πορίζόμεθα (265)

$$\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta : \beta+\delta+\zeta+\theta :: \eta : \theta,$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ δυνάμεθα νὰ περισθῶμεν τὴν ἑξῆς·

$$\alpha\times\beta : \gamma\times\delta :: (\alpha+\beta)^2 : (\gamma+\delta)^2.$$

2. Προσθέτοντες τοὺς τὴν αὐτὴν τάξιν κατέχοντας ὅρους δύο ἀναλογιῶν, λαμβάνομεν νέαν ἀναλογίαν, ἁ.) ἐὰν οἱ λόγοι τῆς πρώτης ἀναλογίας ἦναι ἴσοι τοῖς λόγοις τῆς δευτέρας· β΄.) ἐὰν ὁ λόγος τῶν ἡγουμένων ἢ τῶν ἑπομένων τῆς πρώτης ἦναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ἡγουμένων ἢ τῶν ἑπομένων τῆς δευτέρας.

3. Ἐν σειρᾷ τινι ἴσων λόγων ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἑπομένων, ὡς τις τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ.

4. Ἡ ἀναλογία $\mu\times\alpha+\nu\times\beta : \mu\times\gamma+\nu\times\delta :: \alpha : \gamma$, συνεπάγει τὴν $\alpha : \gamma :: \beta : \delta$, οἱοιδήποτε καὶ ἂν ἦναι οἱ ἀριθμοὶ $\mu$ καὶ $\nu$.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

### Περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

268. Λέγεται ὅτι ποσόν τι εἶναι ἀνάλογον ἑτέρου, ὅταν δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ δευτέρου. Ἡ γεωμετρία, ἡ μηχανικὴ, ἡ φυσικὴ, καθιστῶσι γνωστὰ ποσὰ ἀνάλογα ἀλλήλων. Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δὲν πρόκειται νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἀνάλογον τοῦτο, παραδεχόμεθα αὐτὸ ὡς ἀλήθειαν χρησιμεύουσαν εἰς τὴν λύσιν ζητημάτων ἀναφερομένων εἰς τὰ ποσὰ ταῦτα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἡ μισθοδοσία ἐργάτου εἶναι ἀνάλογος τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν ἐργάζεται.

Τὸ ποσὸν τῶν τροφῶν, ἃς χρειάζεται στρατός τις ἐν ὡρισμένῳ χρόνῳ, εἶναι ἀνάλογον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνιστώντων αὐτὸν στρατιωτῶν.

269. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἶναι σπάνιον ποσόν τι νὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἐξ ἑνὸς ἄλλου· ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἡ ἀξία αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν περιστάσεων. Λέγεται τότε ὅτι δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅταν, τοῦ ἑνὸς μεταβαλλομένου, καὶ πασῶν τῶν ἄλλων περιστάσεων μενουσῶν τῶν αὐτῶν, δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου ἦναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ δευτέρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Λέγοντες ὅτι τὸ βάρος σιδηρᾶς ῥάβδου εἶναι ἀνάλογον τοῦ μήκους αὐτῆς, ὑποθέτομεν ὅτι τὰ λοιπὰ, ἐξ ὧν τὸ βάρος τῆς ῥάβδου ἐξαρτᾶται, ἤτοι τὸ πλάτος καὶ πάχος, μένουσιν ἀμετάβλητα.

270. *Ποσόν τι δύναται νὰ ἦναι ἐν τῷ ἅμα ἀνάλογον πολλῶν ἄλλων.*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ, τοῦ ἑνὸς τῶν ποσῶν τούτων μεταβαλλομένου, ἐνῷ τὰ ἄλλα μένουσιν ἀμετάβλητα, τὸ ὑπ' ὄψιν ποσὸν νὰ ἦναι ἀνάλογον τοῦ μεταβαλλομένου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἡ ἀξία τεμαχίου ὑφάσματος εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους καὶ τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως αὐτοῦ.

## Περὶ ποσῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων.

271. Λέγεται ὅτι ποσὸν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον ἑτέρου ποσοῦ, ὅταν δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου ἔχωσι λόγον ἀντίστροφον τοῦ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ ἑτέρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ὁ εἰς ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς ἀναγκαῖος χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εἰς τοῦτο ἐργαζομένων ἐργατῶν· τουτέστιν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν γείνῃ διπλάσιος, τριπλάσιος, κτλ. θέλει χρειασθῆ χρόνος δὶς, τρὶς κτλ. μικρότερος.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ὑφάσματος, ἃς δύναταί τις νὰ ἀγοράσῃ ἀνθ' ὡρισμένου ποσοῦ χρημάτων, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τιμῆς τοῦ πήχεως τοῦ ὑφάσματος τούτου.

272. *Ποσόν τι δύναται νὰ ἦναι ἐν τῷ ἅμα ἀνάλογον ποσῶν τινων, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον ἄλλων ποσῶν.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Τὸ μῆκος τεμαχίου τινὸς ὑφάσματος εἶναι ἀνάλογον τῆς τιμῆς αὐτοῦ, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ πλάτους καὶ τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως τοῦ ὑφάσματος τούτου.

Τουτέστι.

Τοῦ πλάτους τοῦ ὑφάσματος μένοντος τοῦ αὐτοῦ, ὡς καὶ τῆς ποιότητος αὐτοῦ, τὸ μῆκος εἶναι ἀνάλογον τῆς τιμῆς αὐτοῦ.

Τῆς ποιότητος τοῦ ὑφάσματος μενούσης τῆς αὐτῆς, ὡς καὶ τῆς ὁλικῆς τιμῆς, τὸ μῆκος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ πλάτους αὐτοῦ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Τοῦ πλάτους μένοντος τοῦ αὐτοῦ, ὡς καὶ τῆς ὁλικῆς τιμῆς, τὸ μῆκος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τοῖς προηγουμένοις παραδείγμασι τὸ ἀνάλογον τῶν ποσῶν εἶναι *σχεδὸν* προφανές. Ἐν τούτοις διά τινα ἐξ αὐτῶν ἐχρειάζετο ἀπόδειξις· ἀλλ᾽ ἐνταῦθα πρόκειται μόνον νὰ ὁρίσωμεν τί σημαίνουσιν αἱ λέξις *ἀνάλογον*, καὶ *ἀντιστρόφως ἀνάλογον*, οὐχὶ δὲ καὶ νὰ ἀποδείξωμεν εἰς ποίαν περίστασιν ἁρμόζει τοῦτο ἢ ἐκεῖνο.

## Κανὼν, δι᾽ οὗ γνωρίζομεν ἐὰν δύο ποσὰ ἦναι ἀνάλογα.

273. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀναλόγου δύο ποσῶν δὲν εἶναι, ὡς εἴπομεν ἤδη, ἔργον τῆς ἀριθμητικῆς, ἀλλ᾽ ἀνήκει εἰς τὴν ἐπιστήμην, ἥτις πραγματεύεται ἰδίως περὶ τῶν ποσῶν τούτων. Ἐν τούτοις, ποσά τινα δὲν ἀνάγονται εἰς οὐδεμίαν εἰδικὴν ἐπιστήμην· τοιαῦτα εἶναι τὰ πλεῖστα τῶν θεωρηθέντων ἐν τοῖς ἀνωτέρω παραδείγμασι. Ἐνταῦθα ἐκθέτομεν δύο θεωρήματα, δι᾽ ὧν δυνάμεθα πολλάκις νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τοῦ ἀναλόγου αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.) *Ἐὰν δύο ποσὰ ἦναι ἀνάλογα ἀλλήλων, ὁσάκις τὸ ἕτερον αὐτῶν καθίσταται πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον ἑαυτοῦ, εἶναι ἀνάλογα καὶ κατὰ πάσας τὰς περιστάσεις.*

Ἂς παραστήσωμεν τὰ δύο ταῦτα ποσὰ διὰ τῶν γραμμάτων Α καὶ Β. Ἐὰν τὸ Α γείνῃ *πολλαπλάσιον* ἢ *ὑποπολλαπλάσιον* ἑαυτοῦ, τὸ Β θέλει γείνει καὶ αὐτὸ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον ἑαυτοῦ. Πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, τούτου ὑπάρχοντος, οἱαδήποτε καὶ ἂν ἦναι αἱ τιμαὶ, ἃς λαμβάνει τὸ Α, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τοῦ Β τιμαὶ θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογοι αὐτῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ ποσὸν Α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\frac{5}{7}$ καὶ γίνεται $\frac{5}{7}$Α. Δυνάμεθα νὰ νοή-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

σωμεν ὅτι ἡ μεταβολὴ αὕτη γίνεται διαδοχικῶς, τουτέστιν ὅτι τὸ ποσὸν Α γίνεται κατὰ πρῶτον ἑπτάκις μικρότερον, ἔπειτα πεντάκις μεῖζον. Ἀλλὰ τότε ἐξ ὑποθέσεως τὸ Β θέλει γείνει κατὰ πρῶτον $\frac{B}{7}$, καὶ ἔπειτα $\frac{5 \times B}{7}$· ἄρα ἡ τιμὴ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν $\frac{5}{7}$Α εἶναι $\frac{5}{7}$Β· ἀλλὰ προφανῶς ἔχομεν

$$\frac{5}{7}A : A :: \frac{5}{7}B : B$$

Ὑπάρχει λοιπὸν ἀναλογία μεταξὺ τῶν δύο τιμῶν τοῦ Α καὶ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ Β.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.) *Ἐὰν δύο ποσὰ ἦναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἀλλήλων, ὁσάκις τὸ ἕτερον αὐτῶν καθίσταται πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον ἑαυτοῦ, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ κατὰ πάσας τὰς περιστάσεις.*

Ἂς παραστήσωμεν πάλιν τὰ ποσὰ ταῦτα διὰ τῶν γραμμάτων Α καὶ Β. Ἐὰν τὸ Α καταστα θῇ *πολλαπλάσιον* ἢ *ὑποπολλαπλάσιον* ἑαυτοῦ, τὸ Β θέλει γείνει, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ αὐτὸ ὑποπολλαπλάσιον ἢ πολλαπλάσιον ἑαυτοῦ. Πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, τούτου ὑπάρχοντος, οἱαδήποτε καὶ ἂν ἦναι αἱ τιμαὶ, ἃς λαμβάνει τὸ Α, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ Β θέλουσιν εἶσθαι ἀντιστόφως ἀνάλογοι αὐτῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν τῷ ὄντι ὅτι τὸ Α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\frac{5}{7}$ καὶ γίνεται $\frac{5}{7}$Α. Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι ἡ μεταβολὴ αὕτη γίνεται διαδοχικῶς, ἤτοι ὅτι τὸ Α γίνεται κατὰ πρῶτον $\frac{A}{7}$, ἔπειτα $\frac{5 \times A}{7}$, ἀλλὰ τότε, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ποσὸν Β θέλει γείνει $7 \times B$ καὶ ἔπειτα $\frac{7 \times B}{5}$· προφανῶς δὲ ἔχομεν

$$\frac{5 \times A}{7} : A :: B : \frac{7 \times B}{5}.$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἄρα αἱ δύο τιμαὶ τοῦ Α εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοιχουσῶν τοῦ Β.

Κατὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα, ἵνα βεβαιωθῶμεν ἐὰν δύο ποσὰ ἦναι ἀνάλογα, ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν τοῦτο ὑπάρχῃ ὅταν τὸ ἕτερον τούτων πολλαπλασιάζηται ἢ διαιρῆται δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι ἵνα διατρέξῃ τις διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον κτλ. ἢ δὶς τρὶς τετράκις κτλ μικρότερον διάστημα, χρειάζεται διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον κτλ. ἢ δὶς, τρὶς, τετράκις κτλ. βραχύτερονχρόνον, ἕπεται ὅτι τὸ ἐν χρόνῳ τινὶ διατρεχόμενον διάστημα εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου τούτου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἐὰν ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται δὶς, τρὶς, τετράκις. . . . περισσότερον, ἢ δὶς, τρὶς, τετράκις . . . ὀλιγώτερον, τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν ἀνθ' ὡρισμένης ποσότητος χρημάτων, εἶναι δὶς, τρὶς, τετράκις. . . μικρότερον, ἢ δὶς, τρὶς, τετράκις. . . . . μεῖζον. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως ὑφάσματός τινος εἶναι κατὰ πάσας τὰς περιστάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ μήκους, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν ἀνθ' ὡρισμένης ποσότητος χρημάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει τῶν ἀνωτέρω δύο θεωρημάτων, αἱ τιμαὶ ἃς λαμβάνει τὸ ποσὸν Α ὑποτίθενται σύμμετροι. Ἀλλὰ τοῦτο ἀρκεῖ διὰ τὸν σκοπὸν ἡμῶν· διότι τὰ ποσὰ, περὶ ὧν θέλει γείνει λόγος ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ, οὐδέποτε θέλουσι λάβει τιμὰς ἀσυμμέτρους πρὸς τὴν μονάδα αὐτῶν.

## Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

274. Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ἐκείνη, καθ' ἣν λύονται τὰ ζητήματα, ἐν οἷς, γνωστῆς οὔσης τῆς τιμῆς ποσοῦ τινος καὶ τῆς τιμῆς ἄλλου τινὸς ποσοῦ, πρὸς τὸ ὁποῖον

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τὸ πρῶτον εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον, ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς νέαν τινὰ τιμὴν τοῦ δευτέρου.

Ἐὰν τὰ δύο ποσὰ ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, ἡ μέθοδος καλεῖται *ὀρθὴ*, ἐὰν δὲ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, *ἀντίστροφος*.

Ἡ λύσις προβλημάτων τινῶν ἀναγομένων εἰς τὴν μέθοδον ταύτην δύναται νὰ δείξῃ πῶς αὕτη ἐφαρμόζεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Ἡ τιμὴ* 8 *πήχεων ὑφάσματός τινος εἶναι* 22 *δραχμαί. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ* 11 *πήχεων τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;*

Ἐπειδὴ διπλάσιοι τριπλάσιοι . . . πήχεις ἔχουσι τιμὴν διπλασίαν, τριπλασίαν, . . . ἡ τιμὴ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ μήκους τοῦ ὑφάσματος. Ἐνταῦθα λοιπὸν ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ὀρθή. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν,

$$8 : 12 :: 22 : \chi ,$$

$$\text{ὅθεν (258) } \chi = \frac{12 \times 22}{8} = 33.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Ταχυδρόμος, βαδίζων ἰσοταχῶς, διέτρεξε* 26 *στάδια ἐν* 3 *ὥραις· πόσα στάδια θέλει διατρέξει ὁ αὐτὸς ταχυδρόμος ἐν* 8 *ὥραις;*

Ἐπειδὴ ὁ ταχυδρόμος ἐν διπλασίῳ, τριπλασίῳ κτλ. ἢ ὑποδιπλασίῳ, ὑποτριπλασίῳ, κτλ. χρόνῳ, διατρέχει διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἢ ὑποδιπλάσιον, ὑποτριπλάσιον κτλ. ἀριθμὸν σταδίων, ἕπεται (273) ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν σταδίων εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν. Ἄρα ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἦναι ὀρθή. Καὶ ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν σταδίων, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$3 : 8 :: 26 : \chi$$

$$\text{ὅθεν } \chi = \frac{8 \times 26}{3} = \frac{208}{3} = 69\ \tfrac{1}{3}.$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *18 ἐργάται ἐκτελοῦσιν ἔργον τι ἐν 7 ἡμέραις· ἐν πόσῳ χρόνῳ 12 ἐργάται θέλουσιν ἐκτελέσει τὸ αὐτὸ ἔργον;*

Ἐπειδὴ διπλάσιοι, τριπλάσιοι, κτλ. τὸν ἀριθμὸν ἐργάται ἤθελον ἐκτελέσει τὸ αὐτὸ ἔργον ἐν χρόνῳ δὶς, τρὶς κτλ. βραχυτέρῳ, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ἡμερῶν, ὁ λόγος 18 : 12 εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου 7 : χ· ἄρα ὁ ἀντίστροφος τοῦ 18 : 12 λόγος, ἤτοι ὁ 12 : 18 εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ 7 : χ, ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$12 : 18 :: 7 : \chi$$

$$\text{ὅθεν } \chi = \frac{18 \times 7}{12} = \frac{3 \times 7}{2} = \frac{21}{2} = 10\,\tfrac{1}{2}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. *Διὰ τὴν ἐνδυμασίαν ἀριθμοῦ τινος ἀνθρώπων ἐχρειάσθησαν 120 πήχεις ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $\frac{5}{6}$ τοῦ πήχεως· πόσοι πήχεις θέλουσι χρειασθῆ διὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀνθρώπων ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως;*

Εἶναι φανερὸν ὅτι τοῦ πλάτους ὄντος διπλασίου, τριπλασίου κτλ, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πήχεων γίνεται δὶς, τρὶς κτλ μικρότερος· ἄρα ἐνταῦθα ἡ μέθοδος εἶναι ἀντίστροφος. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν πήχεων, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\tfrac{7}{8} : \tfrac{5}{6} :: 120 : \chi$$

$$\text{ὅθεν } \chi = \frac{120 \times \frac{5}{6}}{\frac{7}{8}} = \frac{120 \times 5 \times 8}{6 \times 7} = \frac{800}{7} = 114 + \tfrac{2}{7}$$

Ἠδυνάμεθα δὲ νὰ τρέψωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν εἰς ἑτέραν ἰσοδύναμον ἔχουσαν ἀκεραίους ὅρους ὡς ἑξῆς. Ἀ-



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

νάγομεν τὰ δύο κλάσματα $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{5}{6}$ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, οὕτω δὲ ἡ ἀναλογία τρέπεται εἰς τὴν

$$\frac{42}{48} : \frac{40}{48} :: 120 : \chi$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους ὅρους ἐπὶ 48 λαμβάνομεν

$$42 : 40 :: 120 : \chi$$

ὅθεν $\chi = \frac{120 \times 40}{42} = \frac{20 \times 40}{7} = \frac{800}{7} = 114\frac{2}{7}$, ὡς ἀνωτέρω.

275. Κατατάσσομεν ἐνταῦθα καὶ ἄλλα τινὰ προβλήματα λυόμενα κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν.

ά.) Φρουρὰ, ἐξ 800 ἀνδρῶν συγκειμένη, ἔχει τροφὰς διὰ 36 ἡμέρας· ἕνεκα δὲ ἐκρήξεως πυριταποθήκης ἀπωλέσθησαν τροφαὶ 8 ἡμερῶν· πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης, ἵνα ἐπαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡμερῶν; ($\frac{7}{9}$)

β'. Βιβλίον τι σύγκειται ἐκ 16 τυπογραφικῶν φύλλων, πρὸς 40 στίχους τὴν σελίδα· ἐκ πόσων φύλλων σύγκειται νέα αὐτοῦ ἔκδοσις, ἐν ᾗ ἑκάστη σελὶς περιέχει 32 στίχους; (20)

γ'.) Ὡρολόγιον ὑστερίζον $2\frac{1}{2}$ λεπτὰ ἐν 3 ὥραις δεικνύει ἀκριβῶς τὴν μεσημβρίαν· μετὰ πόσον χρόνον θέλει δεικνύει πάλιν τὸν ἀληθῆ χρόνον; (μετὰ 864 ὥρας)

δ'.) Τὸ φῶς διατρέχει 30800 στάδια κατὰ δεύτερον λεπτόν· ἵνα φθάσῃ δὲ ἀπὸ τοῦ ἡλίου εἰς τὴν γῆν χρειάζεται 8' καὶ 18''· πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς γῆς ἀπὸ τοῦ ἡλίου; (153384000. στάδια.)

έ.) Ἠγοράσαμεν βιβλία πρὸς δραχμὰς 7,80 τὸ ἀντίτυ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

πον, λαμβάνοντες εἰς 12 ἀντίτυπα τὸ δέκατον τρίτον δωρεὰν· πόση συγκατάβασις γίνεται;

(60 λεπτὰ δι' ἕκαστον ἀντίτυπον.)

ς'.) Ἔργον τι πρέπει νὰ περατωθῇ ἐντὸς 21 ἡμερῶν· ἐμισθώθησαν δὲ πρὸς τοῦτο 10 ἐργάται, οἵτινες ἐξετέλεσαν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔργου ἐν 9 ἡμέραις· δύνανται οὗτοι μόνοι νὰ περάνωσι τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς ὡρισμένης προθεσμίας; καὶ ἐὰν δὲν δύνανται, πόσοι πρέπει νὰ προστεθῶσι ὅπως γείνῃ τοῦτο;

(5 ἐργάται.)

ζ'.) Τὸ βάθος ἀρτεσιανοῦ τινος φρέατος τῶν Παρισίων εἶναι 505 πήχεις, ἡ δὲ θερμοκρασία κατὰ τὸν πυθμένα αὐτοῦ $27^0$, 33· τῆς θερμοκρασίας τῶν ὑπογείων τοῦ ἀστεροσκοπείου τῆς αὐτῆς πόλεως, κειμένων εἰς βάθος 28 πήχεων ὑπὸ τὸ ἔδαφος, οὔσης $11^0$, 7, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία στρώματος κειμένου εἰς βάθος 217 πήχεων. Ὑποτίθεται δὲ ἐνταῦθα ὅτι ἡ αὔξησις τῆς θερμοκρασίας εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τοῦ βάθους. ($17^0$, 89.)

## Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

276. Ἡ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ἐκείνη, καθ' ἣν λύονται ζητήματα, ἐν οἷς γνωστῆς οὔσης τῆς τιμῆς ποσοῦ τινος, ὡς καὶ πολλῶν ἄλλων, πρὸς ἕκαστον τῶν ὁποίων τοῦτο εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον, ζητεῖται ποίαν τιμὴν λαμβάνει τὸ ποσὸν τοῦτο, ὅταν πάντα τὰ ἄλλα λάβωσι νέας τιμάς.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

*25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν ἔσκαψαν ἐν 18 ἡμέραις τάφρον 120 πήχεων μήκους, 6 πλάτους καὶ 3 βάθους· ἐν πόσαις ἡμέραις 32 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν θέλουσι σκάψει τάφρον 150 πήχεων μήκους, 4 πλάτους καὶ 5 βάθους;*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐνταῦθα *ὑποτίθεται* ὅτι ὁ ἀναγκαῖος χρόνος εἶναι ἀνάλογος ἑκάστης τῶν διαστάσεων τῆς τάφρου, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, καὶ τῆς διαρκείας τῆς ἡμερησίας ἐργασίας.

Συνήθως τὰ δεδομένα προβλήματος τῆς μεθόδου τῶν τριῶν κατατάσσονται εἰς δύο ὁριζοντίους γραμμὰς οὕτως, ὥστε αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου εἴδους ποσοῦ νὰ εὑρίσκωνται ἡ μία ὑπὸ τὴν ἑτέραν. Οὕτως ἐν τῷ προκειμένῳ προβλήματι, ἐὰν καλέσωμεν $\chi$ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ἡμερῶν, θέλομεν γράψει τὰς ἑξῆς δύο ὁριζοντίους γραμμάς.

| ἐργάται | ὧραι | ἡμέραι | μῆκος | πλάτος | βάθος |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 12 | 18 | 120 | 6 | 3 |
| 32 | 10 | $\chi$ | 150 | 4 | 5 |

Θέλομεν ὑποθέσει, στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν διαφόρων δεδομένων τῶν εὑρισκομένων ἐν τῇ πρώτῃ γραμμῇ, ὅτι μεταβάλλομεν *διαδοχικῶς* τοὺς ἀριθμοὺς 25, 12, 120, 6 καὶ 3 εἰς τοὺς ἀντιστοιχοῦντας ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας γραμμῆς, καὶ θέλομεν ζητήσει ποίας τιμὰς λαμβάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν δι' ἑκάστην τῶν μεταβολῶν τούτων.

Ὑποθέτομεν κατὰ πρῶτον ὅτι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν μεταβάλλεται ἀπὸ 25 γινόμενος 32, ὅτι δὲ πάντα τὰ λοιπὰ μένουσι τὰ αὐτά· καὶ θέλομεν ζητήσει τί θέλει γείνει ὡς ἐκ τούτου ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν τῆς ἐργασίας. Θέλομεν ὑποθέσει ἀκολούθως ὅτι οἱ ἐργάται ἐργάζονται 10 ὥρας τὴν ἡμέραν ἀντὶ 12, καὶ θέλομεν ζητήσει τὸν ἀπαιτούμενον ἀριθμὸν ἡμερῶν μετὰ τὴν νέαν ταύτην μεταβολήν· Τέλος δὲ θέλομεν ζητήσει διαδοχικῶς τὴν μεταβολήν, ἣν λαμβάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἕνεκα τῆς μεταβολῆς ἑκάστης τῶν διαστάσεων τῆς τάφρου· ὥστε κυρίως θέλομεν ἔχει

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

πέντες ἁπλᾶς μεθόδους τῶν τριῶν, ὧν ἡ τελευταία θέλει δώσει τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

Δυνάμεθα δὲ νὰ σημειώσωμεν τὰ διάφορα ταῦτα ζητήματα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

| ἐργάται | ὧραι | ἡμέραι | μῆκος | πλάτος | βάθος |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 12 | 18 | 120 | 6 | 3 |
| 32 | 12 | υ | 120 | 6 | 3 |
| 32 | 10 | φ | 120 | 6 | 3 |
| 32 | 10 | ψ | 150 | 6 | 3 |
| 32 | 10 | ω | 150 | 4 | 3 |
| 32 | 10 | χ | 150 | 4 | 5 |

Ἐν ταῖς ὁριζοντίαις ταύταις γραμμαῖς ἦναι γεγραμμέναι αἱ τιμαὶ, ἃς λαμβάνουσι διαδοχικῶς τὰ διάφορα στοιχεῖα, ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, καὶ τὰ γράμματα δι' ὧν σημειοῦνται αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τῶν ἡμερῶν.

Ὡς ἐκ τῆς μεταβολῆς μόνον τῶν ἐργατῶν ἀπὸ 25 εἰς 32, αἱ ἡμέραι ἀπὸ 18 γίνονται υ.

Ὡς ἐκ τῆς μεταβολῆς μόνον τῶν 12 ὡρῶν εἰς 10, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἀπὸ υ γίνεται φ.

Ὡς ἐκ τῆς μεταβολῆς μόνον τοῦ μήκους 120 εἰς 150, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἀπὸ φ γίνεται ψ.

Ὡς ἐκ τῆς μεταβολῆς μόνον τοῦ πλάτους 6 εἰς 4, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἀπὸ ψ γίνεται ω.

Τέλος δὲ, ὡς ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ βάθους 3 εἰς 5, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἀπὸ ω γίνεται χ.

χ δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος, διότι εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὰς νέας τιμὰς πάντων τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος.

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ υ, φ, ψ, ω, χ ὑπολογίζονται προφανῶς διὰ τῶν ἑξῆς ἀναλογιῶν.

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$$32 : 25 :: 18 : \upsilon$$
$$10 : 12 :: \upsilon : \varphi$$
$$120 : 150 :: \varphi : \psi$$
$$6 : 4 :: \psi : \omega$$
$$3 : 5 :: \omega : \chi$$

Τὴν τιμὴν τοῦ χ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων ὡς ἑξῆς. Ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ υ· ἀντικαθιστῶντες ταύτην ἐν τῇ δευτέρᾳ, εὑρίσκομεν τὴν τοῦ φ· γνωστοῦ ὄντος τοῦ φ, ἐκ τῆς τρίτης προσδιορίζομεν τὸ ψ· ἔπειτα ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ ψ ἐν τῇ τετάρτῃ εὑρίσκομεν τὸ ω· καὶ τελευταῖον γνωστοῦ ὄντος τοῦ ω, ἐκ τῆς τετάρτης προσδιορίζομεν τὸ χ.

Ἀλλὰ πολὺ ἁπλούστερον εὑρίσκομεν τὸ χ ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἀνωτέρω ἀναλογίας ὅρον ἐφ᾽ ὅρον, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (266)

$$32\times10\times120\times6\times3 : 25\times12\times150\times4\times5 ::$$
$$18\times\upsilon\times\varphi\times\psi\times\omega : \upsilon\times\varphi\times\psi\times\omega\times\chi$$

διαιροῦντες δὲ τὸν τρίτον καὶ τέταρτον ὅρον τῆς ἀναλογίας ταύτης διὰ τοῦ γινομένου $\upsilon\times\varphi\times\psi\times\omega$ τῶν κοινῶν παραγόντων, λαμβάνομεν

$$32\times10\times120\times6\times3 : 25\times12\times120\times4\times5 :: 18 : \chi$$

ὅθεν

$$\chi = \frac{25\times12\times150\times4\times5\times18}{32\times10\times120\times6\times3} = 23+\tfrac{7}{16}$$

## Γενικὸς τύπος τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

277. Πᾶν ζήτημα ἀναγόμενον εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ ἑξῆς ζητήματος.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*Ποσόν τι Μ ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν ἄλλων Α, Β, Γ . . ., Π, Ρ, Σ . . ., εἶναι δὲ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τῶν Α, Β, Γ . . ., καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῶν Π, Ρ, Σ . . ., Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ Μ ἔχει ὡρισμένην τινὰ τιμὴν μ, ὅταν τὰ Α, Β, Γ . . ., Π, Ρ, Σ . . ., ἦναι ἴσα τοῖς α, β, γ . . ., π, ρ, σ . . ., καὶ ζητεῖται ποίαν τιμὴν θέλει λάβει, ὅταν τὰ διάφορα ταῦτα στοιχεῖα λάβωσι τὰς τιμὰς* $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1 \ldots, \pi_1$, $\rho_1$, $\sigma_1 \ldots$. Ἀντὶ νὰ θεωρήσωμεν μεταβαλλόμενα συγχρόνως τὰ διάφορα ταῦτα στοιχεῖα, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὰ μεταβαλλόμενα διαδοχικῶς ἀνὰ ἕν· οὕτω δὲ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τοσαῦτα μερικὰ ζητήματα, ὅσα εἶναι τὰ στοιχεῖα α, β, γ . . ., π, ρ, σ . . . Ἕκαστον τῶν μερικῶν τούτων ζητημάτων λύεται κατὰ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, διότι πρόκειται πάντοτε νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταβολὴ ἣν πάσχει ποσόν τι ἕνεκα τῆς μεταβολῆς ἑνὸς μόνου στοιχείου, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον.

Τὰ διάφορα ταῦτα ζητήματα δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| μ | α | β | γ | π | ρ | σ |
| $\chi_1$ | $\alpha_1$ | β | γ | π | ρ | σ |
| $\chi_2$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | γ | π | ρ | σ |
| $\chi_3$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ | π | ρ | σ |
| $\chi_4$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ | $\pi_1$ | ρ | σ |
| $\chi_5$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ | $\pi_1$ | $\rho_1$ | σ |
| χ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ | $\pi_1$ | $\rho_1$ | $\sigma_1$ |

Ἐν ταῖς ὁριζοντίαις ταύταις γραμμαῖς εἶναι γεγραμμέναι αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ τῶν ποσῶν, ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται τὸ ποσὸν Μ, ὡς καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ μ, αἱ σημειούμεναι διὰ τῶν γραμμάτων $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3$, $\chi_4$, $\chi_5$, καὶ χ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τῶν ποσῶν $\alpha, \beta, \gamma$, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῶν ποσῶν $\pi, \rho, \sigma$, ἔχομεν προφανῶς τὰς ἀναλογίας

$$\begin{array}{lllll} \mu : \chi_1 :: \alpha : \alpha_1 \\ \chi_1 : \chi_2 :: \beta : \beta_1 \\ \chi_2 : \chi_3 :: \gamma : \gamma_1 \\ \chi_3 : \chi_4 :: \pi_1 : \pi \\ \chi_4 : \chi_5 :: \rho_1 : \rho \\ \chi_5 : \chi :: \sigma_1 : \sigma \end{array}$$

Ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ $\chi$ ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων, τὸ ἁπλούστερον εἶναι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς ὅρον ἐφ' ὅρον, καὶ νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παράγοντας $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$, οἵτινες εἶναι κοινοὶ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ πρώτου λόγου· οὕτω δὲ θέλομεν ἔχει

$$\mu : \chi :: \alpha \times \beta \times \gamma \times \pi_1 \times \rho_1 \times \sigma_1 : \alpha_1 \times \beta_1 \times \gamma_1 \times \pi \times \rho \times \sigma$$

ὅθεν λαμβάνομεν

$$\chi = \frac{\mu \times \alpha_1 \times \beta_1 \times \gamma_1 \times \pi \times \rho \times \sigma}{\alpha \times \beta \times \gamma \times \pi_1 \times \rho_1 \times \sigma_1}$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

*Γνωστῆς οὔσης τῆς τιμῆς μ ποσοῦ τινος, καὶ τῶν τιμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \rho, \sigma$, ποσῶν πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον, ἵνα εὕρωμεν τὴν τιμὴν $\chi$ τοῦ ποσοῦ τούτου, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὰς τιμὰς $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \pi_1, \rho_1, \sigma_1$, ἐκείνων ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μ ἐπὶ τὰς ἀρχικὰς τιμὰς $\pi, \rho, \sigma$, τῶν ποσῶν πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον, καὶ ἐπὶ τὰς νέας τιμὰς $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, ἐκείνων πρὸς ἃ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο διὰ τοῦ γινομένου τῶν νέων τιμῶν $\pi_1$,*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$\rho_1$, $\sigma_1$, *τῶν ποσῶν, πρὸς τὰ ὁποῖα τὸ ζητούμενον ποσὸν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον, ἐπὶ τὰς ἀρχικὰς τιμὰς* $\alpha, \beta, \gamma$ *ἐκείνων πρὸς ἃ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον.*

## Μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

278. Τὰ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν λυόμενα ζητήματα δύνανται νὰ λυθῶσι καὶ κατ' ἄλλον τινὰ τρόπον, διαφέροντα κατά τι, ὅστις καλεῖται *μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα*.

Ἵνα καταστήσωμεν καταληπτὴν τὴν μέθοδον ταύτην ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν αὐτὴν εἰς ἓν παράδειγμα· ὡς τοιοῦτο δὲ λαμβάνομεν τὸ ἀνωτέρω (276) κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν λυθὲν πρόβλημα.

25 *ἐργάται ἐργαζόμενοι* 12 *ὥρας τὴν ἡμέραν ἔσκαψαν ἐν* 18 *ἡμέραις τάφρον* 120 *πήχεων μήκους,* 6 *πλάτους καὶ* 3 *βάθους· ἐν πόσαις ἡμέραις* 32 *ἐργάται ἐργαζόμενοι* 10 *ὥρας τὴν ἡμέραν θέλουσι σκάψει τάφρον* 150 *πήχεων μήκους,* 4 *πλάτους καὶ* 5 *βάθους;*

Ἂς γράψωμεν ὡς καὶ ἀνωτέρω τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἰς δύο ὁριζοντίους γραμμὰς,

| ἐργάται | ὧραι | ἡμέραι | μῆκος | πλάτος | βάθος |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 12 | 18 | 120 | 6 | 3 |
| 32 | 10 | $\chi$ | 150 | 4 | 5 |

Ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα συνίσταται εἰς τὸ νὰ ὑπολογίσωμεν κατὰ πρῶτον τί ἤθελε γείνει ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ἐὰν πάντα τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἐγίνοντο ἴσα τῇ μονάδι, τουτέστιν ἐὰν ὑπῆρχεν 1 ἐργάτης ἐργαζόμενος 1 ὥραν τὴν ἡμέραν, ἵνα σκάψῃ τάφρον μήκους 1 πήχεως, πλάτους 1 καὶ βάθους 1. Τούτου τοῦ ὑπολογισμοῦ γενομένου, εὐκόλως ἔπειτα ὑπολογίζεται ὁ εἰς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς ἡμερῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐὰν ἀντὶ 25 ἐργατῶν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπῆρχεν εἷς μόνος, ὁ ἀναγκαῖος τῶν ἡμερῶν ἀριθμὸς ἤθελεν εἶσθαι εἰκοσιπενταπλάσιος, ἤτοι $18 \times 25$.

Ἐὰν ἀντὶ 12 ὡρῶν ἐργασίας ὑποθέσωμεν 1 ὥραν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἤθελεν εἶσθαι προφανῶς δωδεκάπλασιος, ἤτοι $18 \times 25 \times 12$.

Ἐὰν τὸ μῆκος ἀντὶ 120 πήχεων ἦτο 1 πήχεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων ἡμερῶν ἤθελεν εἶσθαι $120^{\text{πλ}}$ μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{18 \times 25 \times 12}{120}$$

Ἐὰν τὸ πλάτος ἀντὶ 6 ἦτον 1 πήχεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἤθελεν εἶσθαι $6^{\text{πλ}}$ μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{18 \times 25 \times 12}{120 \times 6}$$

Τέλος δὲ ἐὰν τὸ βάθος ἀντὶ 3 ἦτον 1 πήχεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἤθελεν εἶσθαι τρὶς μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{18 \times 25 \times 12}{120 \times 6 \times 3}$$

Ἄρα ὁ ἀναγκαῖος ἀριθμὸς ἡμερῶν εἰς 1 ἐργάτην ἐργαζόμενον 1 ὥραν τὴν ἡμέραν ἵνα σκάψῃ τάφρον ἔχουσαν 1 πήχεως μῆκος, 1 πλάτος καὶ 1 βάθος, εἶναι

$$\frac{18 \times 25 \times 12}{120 \times 6 \times 3}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἐργάται εἶναι 32, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θέλει εἶσθαι $32^{\text{πλ}}$ μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{18 \times 25 \times 12}{120 \times 6 \times 3 \times 32}$$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐὰν δὲ οἱ ἐργάται οὗ τοι ἐργάζωνται 10 ὥρας τὴν ἡμέραν ἀντὶ μιᾶς, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θέλει εἶσθαι δεκάκις μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{18\times25\times12}{120\times6\times3\times32\times10}$$

Τέλος δὲ ἐὰν τὸ μῆκος, πλάτος καὶ βάθος ἀντὶ νὰ ἦναι 1, 1, 1, γείνῃ 150, 4 καὶ 5, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θέλομεν ἴδει ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν τῆς ἐργασίας πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοὺς τρεῖς τούτους ἀριθμοὺς καὶ νὰ γείνῃ τέλος πάντων

$$\frac{18\times25\times12\times150\times4\times5}{120\times6\times3\times32\times10},$$

ὅπερ εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἀνωτέρω (276) εὑρεθὲν ἐξαγόμενον.

279. Κατατάσσομεν ἐνταῦθα προβλήματά τινα, εἰς τὴν λύσιν τῶν ὁποίων οἱ μαθηταὶ δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, ἢ τὴν τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, πρὸς ἄσκησιν.

ά.) Ταχυδρόμος, βαδίζων 12 ὥρας τὴν ἡμέραν, διατρέχει ἐν 20 ἡμέραις 340 στάδια· ἵνα διατρέξῃ 410 στάδια ἐν 22 ἡμέραις, πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ τὴν ἡμέραν; ($13^{\text{ὥρ.}}\frac{29}{187}$)

β'. 12 ἵπποι ἔφαγον 350 μνᾶς χόρτου ἐν 7 ἡμέραις· ἐπὶ πόσας ἡμέρας θέλουσιν ἐξαρκέσει 1000 μναῖ εἰς 15 ἵππους; ($16^{\text{ἡμ.}}$).

γ'.) Ἐκ δύο ταπήτων τῆς αὐτῆς ποιότητος, ὧν ὁ μὲν ἔχων 7 πήχεων μῆκος καὶ 5 πλάτος τιμᾶται 420 δραχμὰς, ὁ δὲ ἔχων μῆκος $6\frac{3}{4}$ καὶ πλάτος $4\frac{1}{2}$ τιμᾶται 350 δραχμὰς, τίς εἶναι ὁ εὐθηνότερος, καὶ κατὰ πόσον; (ὁ δεύτερος κατὰ 14, $_{\text{δραχ.}}$ 50)

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

δ΄.) Φρουρὰ 400 στρατιωτῶν πολιορκουμένη εἶχε τὴν 2 Ἀπριλίου τροφὰς δι' ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον. Τὴν 9ην Ἀπριλίου ἔφθασεν εἰς αὐτὴν ἐπικουρία 120 στρατιωτῶν ἔχουσα τροφὰς διὰ 5 ἡμέρας. Ἐὰν ἑνώσωσιν οὗτοι τὰς τροφὰς αὐτῶν μετὰ τῶν τροφῶν τῶν πρώτων στρατιωτῶν, πόσον μέρος τοῦ ὡρισμένου σιτηρεσίου πρέπει νὰ τρώγῃ ἕκαστος στρατιώτης, ὅπως ἐπαρκέσωσιν εἰς αὐτοὺς αἱ τροφαὶ μέχρι τέλους τοῦ μηνὸς; (τὰ $\frac{75}{91}$).

ε.) Ταχυδρόμος τις διατρέχων 12 στάδια ἐν 5 ὥραις ἀναχωρεῖ διὰ πόλιν ἀπέχουσαν 270 στάδια· μετὰ 13 ὥρας ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου διευθυνόμενος πρὸς τὴν αὐτὴν πόλιν ἕτερος ταχυδρόμος, διατρέχων 24 στάδια ἐν 7 ὥραις· τίς θέλει φθάσει πρῶτος εἰς τὴν πόλιν ταύτην, καὶ πόσας ὥρας πρὸ τοῦ ἑτέρου; (Ὁ δεύτερος θέλει φθάσει 20ωρ 45′ πρὸ τοῦ πρώτου.)

## Προβλήματα τόκου.

280. *Τόκος* καλεῖται τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείσας κεφάλαιόν τι. Τὸ κέρδος τοῦτο ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ δανειζομένου ποσοῦ, ἐκ τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν τοῦτο εἶναι ἐν δανείῳ, καὶ ἐκ τοῦ *ἐπιτοκίου*, ἤτοι τοῦ τόκου τὸν ὁποῖον φέρει ὡρισμένον τι κεφάλαιον ἐν ὡρισμένῳ χρόνῳ, καὶ ὅστις ὁρίζεται κατὰ συνθήκην. Συνήθως ἐπιτόκιον εἶναι ὁ τόκος, ὃν φέρουσιν 100 δραχμαὶ ἐν ἑνὶ ἔτει.

Ὁ τόκος καλεῖται *ἁπλοῦς*, ὅταν τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· *σύνθετος* δὲ, ὅταν κατὰ τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ὁ τόκος προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον, τὸ δ' οὕτω προκύπτον νέον κεφάλαιον τοκίζηται τὸ ἑπόμενον ἔτος.

Ἐνταῦθα θέλει γείνει λόγος μόνον περὶ τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

281. Πᾶν πρόβλημα τόκου ὑπάγεται εἰς ἓν τῶν ἑξῆς τεσσάρων γενικῶν προβλημάτων.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α. *Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἐπιτοκίου, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος, ὃν φέρει ὡρισμένον κεφάλαιον ἐν ὡρισμένῳ χρόνῳ.*

Ὁ τόκος εἶναι προφανῶς κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ δανεισθέντος κεφαλαίου· διότι διπλάσιον, τριπλάσιον, κτλ. κεφάλαιον φέρει διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. τόκον.

Ὁ τόκος εἶναι προσέτι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν τὸ κεφάλαιον μένει ἐν τῷ δανείῳ· διότι τὸ αὐτὸ κεφάλαιον ἐν διπλασίῳ, τριπλασίῳ κτλ. χρόνῳ φέρει διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. τόκον.

Ἄρα πᾶν πρόβλημα τοῦ εἴδους τούτου λύεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1). Ποῖος εἶναι ὁ ἐτήσιος τόκος κεφαλαίου 6200 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 τοῖς ἑκατὸν; (γράφεται δὲ τοῦτο 8 $^0/_0$).

100 φέρουσι τόκον 8 δραχμάς.

6200 χ

ἐπειδή, τοῦ χρόνου ὄντος τοῦ αὐτοῦ, ὁ τόκος εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$100 : 6200 :: 8 : \chi$$

ὅθεν $\chi = \frac{6200 \times 8}{100} = 496.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2). Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 4800 δραχμῶν εἰς 2 ἔτη καὶ 3 μῆνας, ἤτοι $\frac{27}{12}$ τοῦ ἔτους, πρὸς 9$^0/_0$ κατ' ἔτος;

100 φέρουσι τόκον 9 ἐν 1 ἔτει

4800 χ $\frac{27}{12}$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἐπειδὴ, ὡς ἀνωτέρῳ εἴπομεν, ὁ τόκος εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$100 : 4800 :: 9 : \varphi$$

$$1 : \tfrac{27}{12} :: \varphi : \chi$$

ὅθεν $\chi = \dfrac{4800 \times 9 \times \frac{27}{12}}{100} = 972.$

Ἐπειδὴ δὲ πᾶν ἄλλο πρόβλημα μὴ διαφέρον τοῦ ἀνωτέρω ἢ κατὰ τὴν τιμὴν τοῦ κεφαλαίου, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου, λύεται προφανῶς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, παρατηροῦντες τὴν ἀνωτέρω τιμὴν τοῦ χ, συμπεραίνομεν ὅτι

*Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον, καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρῆται δι' 100.*

282. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Γνωστοῦ ὄντος τοῦ τόκου, ὃν ὡρισμένον τι κεφάλαιον παρήγαγεν ἐν δεδομένῳ χρόνῳ, νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἐπιτόκιον.*

Τὸ ἐπιτόκιον εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν ἐν 1 ἔτει. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τόκος κεφαλαίου τινος εἶναι ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου τούτου καὶ τοῦ χρόνου, ἐν ᾧ παρήχθη, τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ προηγούμενον, ὑπάγεται εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 2500 δραχμαὶ τοκισθεῖσαι τρεῖς μῆνας, παρήγαγον τόκον 60 δραχμάς· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν;

Γράφομεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ὅπως καὶ ἐν τῇ μεθόδῳ τῶν τριῶν.

| | | |
|---|---|---|
| 2500 | $\frac{3}{12}$ | 60 |
| 100 | 1 | $\chi$ |

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ χ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τῶν ποσῶν, ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

$$2500 : 100 :: 60 : \varphi$$
$$\tfrac{3}{12} : 1 :: \varphi : \chi$$

ὅθεν $\chi = \dfrac{100 \times 60}{2500 \times \frac{3}{12}}$

Ἀποβλέποντες εἰς τὴν τιμὴν τοῦ χ, συνάγομεν ὅτι

*Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ὁ τόκος ἐπὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.*

283. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἐν ὡρισμένῳ χρόνῳ, πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον, παρήγαγεν ὡρισμένον τόκον.*

Τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τοῦ τόκου· διότι ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, διπλάσιος τριπλάσιος κτλ. τόκος, προέρχεται ἐκ διπλασίου τριπλασίου κτλ. κεφαλαίου. Εἶναι δὲ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ χρόνου· διότι ὁ αὐτὸς τόκος ἐν διπλασίῳ τριπλασίῳ κτλ. χρόνῳ, προσέρχεται ἐκ κεφαλαίου δις, τρὶς κτλ. μικροτέρου. Ἄρα τὸ πρόβλημα λύεται κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκισθὲν 2 ἔτη καὶ 3 μῆνας, ἤτοι $\frac{27}{12}$ τοῦ ἔτους, πρὸς 10 % παρήγαγε τόκον δραχμὰς 1545,75 ;

| 100 | 1 | 10 |
|---|---|---|
| $\chi$ | $\frac{27}{12}$ | 1545,75 |

Ἐπειδὴ δὲ ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, τὸ χ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τοῦ τόκου καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ χρόνου, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$10 : 1545,75 :: 100 : \varphi$$
$$\tfrac{27}{12} : 1 :: \varphi : \chi$$

ὅθεν $\chi = \dfrac{1545,75 \times 100}{10 \times \frac{27}{12}} = 6870$

ἀποβλέποντες εἰς τὴν τιμὴν τοῦ χ συνάγομεν ὅτι

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου, πρέπει νὰ πολλοπλασιάζηται ὁ τόκος ἐπὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον.*

**284. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.** *Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ ὡρισμένον κεφάλαιον, πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον, παρήγαγεν ὡρισμένον τόκον.*

Ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου καὶ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ τόκου. Τῷ ὄντι, τοῦ κεφαλαίου γινομένου διπλασίου, τριπλασίου κτλ., ἡ δὶς, τρὶς, κτλ., μικροτέρου, ὁ ἀναγκαῖος χρόνος πρὸς παραγωγὴν τοῦ αὐτοῦ τόκου γίνεται δὶς, τρὶς, κτλ., μικρότερος, ἥ διπλάσιος τριπλάσιος κτλ. Τοὐναντίον δὲ, τοῦ τόκου, ὃν θέλομεν νὰ λάβωμεν, γινομένου διπλασίου, τριπλασίου κτλ. ἡ δὶς, τρὶς κτλ, μικροτέρου, τοῦ δὲ κεφαλαίου μένοντος τοῦ αὐτοῦ, ὁ ἀναγκαῖος χρόνος πρέπει νὰ γείνῃ διπλάσιος, τριπλάσιος κτλ., ἡ δὶς, τρὶς, κτλ. βραχύτερος. Εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι χρειάζεται ἓν ἔτος εἰς κεφάλαιον 100 δραχμῶν ἵνα παραγάγῃ ὡρισμένον τόκον, ὥστε τὸ πρόβλημα ὑπάγεται εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιον δραχμῶν 960 τοκιζόμενον πρὸς 8 $^0/_0$ θέλει φέρει τόκον 121,$^{\text{δρ.}}$ 60;

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | φέρουσι τόκον | 8 | ἐν 1 ἔτει |
| 960 | | 121, 60 | χ |

Ἐπειδὴ, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ὁ χρόνος ἦναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου, καὶ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ τόκου, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$960 : 100 :: 1 : \varphi$$
$$8 : 121, 60 :: \varphi : \chi$$

$$\text{ὅθεν } \chi = \frac{121, 60 \times 100}{960 \times 8}$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ χ συμπεραίνομεν ὅτι

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ὁ τόκος ἐπὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*

285. Προτείνομεν ἐνταῦθα πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν προβλήματά τινα, ὧν ἕκαστον ὑπάγεται εἴς τι τῶν ἀνωτέρω λυθέντων τεσσάρων γενικῶν προβλημάτων.

ά.)Πόσον τόκον φέρουσι 2570,50 δραχμαὶ πρὸς $\frac{3}{4}$ % κατὰ μῆνα, εἰς $1^{\text{ετ.}}$ $8^{\text{μην.}}$; (385 , 57 . .).

β΄.) Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιον 960 δραχμῶν, τοκιζόμενον πρὸς 9 %, θέλει φέρει τόκον 244, $^{\text{δρ.}}$ 80; ( $2^{\text{ετ.}}$ $10^{\text{μην.}}$ ).

γ΄.) Ἔμπορος ἠγόρασε σῖτον 3480 δραχμῶν· πωλήσας αὐτὸν μετὰ 7 μῆνας ἔλαβε δραχμὰς 3960· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησε; (23, $^{\text{δραχ.}}$ 64 . .)

δ΄.) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ δραχμῶν 5800 κτῆμα ἔχον ἐτήσιον εἰσόδημα δραχμὰς 410· πόσα τοῖς ἑκατὸν φέρουσι τὰ χρήματα αὐτοῦ; ($7^{\text{δραχ.}}$ 06)

έ.) Ἐν πόσῳ χρόνῳ κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον πρὸς 12% διπλασιάζεται; ($8^{\text{ετ.}}$ $4^{\text{μην.}}$)

ς΄.) Οἰνοπώλης ἠγόρασε 5900 ὀκάδας οἴνου πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ἐκ τούτων 1500 μετεβλήθησαν εἰς ὄξος· μετὰ 8 μῆνας ἐπώλησε τὸν μὲν οἶνον πρὸς 60 λεπτὰ, τὸ δ' ὄξος πρὸς 9 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ζητεῖται ἐὰν ἐκέρδησε, καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησε. (ἐκέρδησε $26^{\text{δρ.}}$, 37 %)

## Προβλήματα ὑφαιρέσεως.

286. Τὸ ποσὸν, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐλαττοῦται ἡ ἀξία γραμματίου ἐξαργυρουμένου πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτοῦ, καλεῖται *ὑφαίρεσις.*

Διακρίνονται δὲ δύο ὑφαιρέσεως εἴδη, ἡ *ἐξωτερικὴ* ὑφαίρεσις καὶ ἡ *ἐσωτερική.*



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

### ά.) Ὑφαίρεσις ἐξωτερική.

Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος, ὃν ἤθελε παραγάγει ἡ ἐν τῷ γραμματίῳ ποσότης ἐν τῷ χρόνῳ, ὅστις θέλει παρέλθει μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Ἐπομένως τὰ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως προβλήματα οὐδόλως διαφέρουσιν τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Γραμμάτιον 1800 δραχμῶν ἐξαργυροῦται πέντε μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 $^0/_0$; πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν ὁ τόκος τῶν 1800 δραχμῶν διὰ πέντε μῆνας, ὅστις εἶναι (281)

$$\frac{1800 \times 8 \times \frac{5}{12}}{100} = 60 \text{ δραχ.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, ἡ πρὸ πέντε μηνῶν πληρονομένη ποσότης εἶναι μόνον 1800—60, ἤτοι 1740· ἐν τούτοις ὁ πληρόνων τὴν ποσότητα ταύτην κρατεῖ τὸν τόκον 1800 δραχμῶν, τουτέστι ποσότητος μείζονος ἐκείνης, ἣν πληρόνει. Ἐπομένως ἡ συνθήκη ἡ χρησιμεύουσα ὡς βάσις τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως δὲν εἶναι δικαία.

### β΄.) Ὑφαίρεσις ἐσωτερική.

287. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ὑπολογίζεται οὕτως, ὥστε ἡ πληρονομένη ποσότης, ἐὰν ἐτοκίζετο μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, ἤθελε παραγάγει τόκον ἴσον τῇ γενομένῃ ὑφαιρέσει.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γραμμάτιον 840 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτοῦ, καὶ ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν αὐτοῦ, τοῦ ἐπιτοκίου ὑποτιθεμένου 9 $^0/_0$.

Ἂς ζητήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. διὰ 8 μῆνας, ἤτοι $\frac{8}{12}$ τοῦ ἔτους. Παριστῶντες τὸν τόκον

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τοῦτον διὰ χ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$1 : \tfrac{8}{12} :: 9 : \chi$$

ὅθεν $\chi = \frac{8}{12} \times 9 = 6$

Ὥστε κεφάλαιον 100 δραχμῶν πληρονόμενον σήμερον, θέλει γείνει μετὰ 8 μῆνας 106· ἀντιστρόφως κεφάλαιον 106 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 8 μῆνας, τὴν σήμερον ἐξοφλεῖται διὰ δραχμῶν 100· ἄρα ἡ ὑφαίρεσις αὐτοῦ ἤθελεν εἶσθαι 6 δραχμαί.

Τὸ ζήτημα λοιπὸν δύναται νὰ τεθῇ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Εἰς ποσότητα 106 δραχμῶν πληρωτέαν μετὰ 8 μῆνας γίνεται ὑφαίρεσις δραχμῶν 6· ποία ὑφαίρεσις πρέπει νὰ γείνῃ εἰς ποσότητα 840 δραχμῶν, πληρωτέαν μετὰ τὸν αὐτὸν χρόνον;

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὑφαίρεσις ποσότητός τινος εἶναι ἀνάλογος τῆς ποσότητος ταύτης, διότι εἰς διπλασίαν, τριπλασίαν κτλ. ποσότητα πρέπει νὰ γείνῃ διπλασία, τριπλασία κτλ. ὑφαίρεσις, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$106 : 840 :: 6 : \chi$$

ὅθεν $\chi = \frac{840 \times 6}{106}$.

Ἐν γένει, οἱονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ ἐπιτόκιον, ὑπολογίζομεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν διὰ τὸν χρόνον, ὅστις μέλλει νὰ παρέλθῃ μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, καὶ ὁ τόκος οὗτος εἶναι προφανῶς ἡ ὑφαίρεσις, ἥτις πρέπει νὰ γείνῃ εἰς ποσότητα ἴσην τῷ ἀθροίσματι τοῦ 100 καὶ τοῦ τόκου τούτου· τότε δὲ διὰ μιᾶς ἀναλογίας εὑρίσκεται εὐκόλως ἡ ὑφαίρεσις ποσότητος οἱασδήποτε.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α. Ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εὑρίσκεται ἀφαιρουμένης τῆς ὑφαιρέσεως ἀπὸ τῆς ἐν τῷ γραμματίῳ ποσότητος· δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ ἀμέσως δι' ἀνα-

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

λογίας· διότι ἐὰν καλέσωμεν φ τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$106 : 840 :: 100 : \varphi$$

ὅθεν $$\varphi = \frac{840 \times 100}{106}$$

Εὐκόλως δὲ δεικνύεται ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία αὕτη αὐξανομένη κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν, παράγει τὴν ἐν τῷ γραμματίῳ ποσότητα· Τῷ ὄντι

$$\chi + \varphi = \frac{840 \times 6}{106} + \frac{840 \times 100}{106} = \frac{840 \times 6 + 840 \times 100}{106} =$$

$$= \frac{840\ (100 + 6)}{106} = \frac{840 \times 106}{106} = 840.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ποσότητός τινος εἶναι ἀνάλογος τῆς ποσότητος ταύτης· ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀνάλογος οὔτε τοῦ ἐπιτοκίου, οὔτε τοῦ χρόνου, ὅστις μέλλει νὰ παρέλθῃ μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

288. Τὰ προβλήματα, ἐν οἷς εἶναι γνωστὴ ἡ ὑφαίρεσις, ζητεῖται δὲ ὁ χρόνος, τὸ ἐπιτόκιον, ἢ ἡ ἐν τῷ γραμματίῳ ποσότης, εὐκόλως δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι ἀνάγονται εἰς προβλήματα τόκου· ὡς παράδειγμα δὲ φέρομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

*Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον δραχμῶν* 540, *εἰς τὸ ὁποῖον ἐξαργυρούμενον τὴν σήμερον γίνεται ὑφαίρεσις δραχμῶν* 32, *τοῦ ἐπιτοκίου λογιζομένου πρὸς* 8 % *κατ᾽ ἔτος* ;

Ἡ ὑφαίρεσις 32 εἶναι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἤτοι τῆς διαφορᾶς 540 — 32, ἢ 508. Ἑπομένως τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

*Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιον δραχμῶν* 508, *τοκιζόμενον πρὸς* $8^0/_0$ *κατ' ἔτος, φέρει τόκον δραχμὰς* 32 ; τὸ ὁποῖον εἶναι πρόβλημα τόκου.

289. Πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν προτείνομεν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

ά.) Πόση ὑφαίρεσις πρέπει νὰ γείνῃ εἰς γραμμάτιον δραχμῶν 940,60, ἐξαργυρούμενον $1^{\text{ετ.}}$ $7^{\mu\eta\nu.}$ πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ, τοῦ ἐπιτοκίου λογιζομένου πρὸς $9^0/_0$; (117,31).

β'.) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 1240 δραχμῶν ἐξαργυρουμένου διὰ δραχμῶν 1135 7 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ; (15,85).

γ'.) Πόσων δραχμῶν εἶναι τὸ γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον ἐξαργυροῦται 9 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ διὰ δραχμῶν 710, τοῦ ἐπιτοκίου λογιζομένου $8^0/_0$; (752,60).

δ'.) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον δραχμῶν 1120, τὸ ὁποῖον ἐξαργυροῦται σήμερον διὰ δραχμῶν 992, τοῦ ἐπιτοκίου λογιζομένου πρὸς $\frac{3}{4}\,^0/_0$ κατὰ μῆνα ($1^{\text{ετ.}}$ $5^{\mu\eta\nu.}$ $\frac{19}{93}$).

έ.) Ἔμπορος ἔχει τρία γραμμάτια, τὸ μὲν 620 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ 940 πληρωτέων μετὰ 14 μῆνας, τὸ δὲ 1410 πληρωτέων μετὰ 20 μῆνας. Ἐὰν θέλῃ νὰ ἀνταλλάξῃ τὰ τρία ταῦτα γραμμάτια ἀνθ' ἑνὸς πληρωτέου μετὰ 17 μῆνας, πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $9^0/_0$; (3001,97).

## Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

290. Μερισμὸς ποσοῦ τινος εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ποσῶν α, β, γ, εἶναι ὁ μερισμὸς αὐτοῦ εἰς ἀριθμὸν μερῶν ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν ποσῶν τούτων, καὶ οὕτως ὥστε νὰ ἔχωσιν ἀνὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα ποσά. Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ τὸ μεριστέον ποσὸν παρίσταται δι' ἀριθμοῦ, ἐπίσης δὲ δι' ἀριθμῶν παρίστανται καὶ ἐκεῖνα

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

τὰ ποσὰ, πρὸς τὰ ὁποῖα τὰ μέρη ταῦτα πρέπει νὰ ἦναι ἀνάλογα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἔπεται ὅτι διὰ νὰ ἦναι ἀριθμοί τινες ἀνάλογοι ἄλλων πρέπει νὰ σχηματίζωσι μετ' αὐτῶν διαφόρους ἀναλογίας. Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ ἦναι οἱ ἀριθμοὶ φ, χ, ψ, ω, ἀνάλογοι τῶν α, β, γ, δ, πρέπει νὰ ὑπάρχωσιν αἱ ἑξῆς ἀναλογίαι.

φ : χ :: α : β
φ : ψ :: α : γ
φ : ω :: α : δ
χ : ψ :: β : γ
χ : ω :: β : δ
ψ : ω :: γ : δ

Διὰ τῆς μεταθέσεως δὲ τῶν μέσων τῶν ἀναλογιῶν τούτων λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς.

φ : α :: χ : β
φ : α :: ψ : γ
φ : α :: ω : δ
χ : β :: ψ : γ
χ : β :: ω : δ
ψ : γ :: ω : δ

Ἐὰν δὲ συγκρίνωμεν τὰς ἀναλογίας ταύτας, παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσαι ἐκφράζουσι τὴν ἰσότητα τῶν τεσσάρων λόγων φ : α, χ : β, ψ : γ, ω : δ. Ἐν γένει δὲ, ἵνα παραστήσωμεν ὅτι ἀριθμοί τινες φ, χ, ψ, ω . . . εἶναι ἀνάλογοι ἄλλων ἀριθμῶν α, β, γ, δ . . . , ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ὅτι οἱ ἀντιστοιχοῦντες ἀριθμοὶ τῶν δύο σειρῶν ἀποτελοῦσι σειρὰν ἴσων λόγων, ὡς ἑξῆς·

φ : α :: χ : β :: ψ : γ :: ω : δ κτλ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

291. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Νὰ μερισθῇ ἀριθμός τις Α εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν* α, β, γ, . . .

Καλοῦντες φ, χ, ψ . . . τὰ ἄγνωστα μέρη τοῦ ἀριθμοῦ Α, κατὰ τὸν προηγούμενον παράγραφον θέλομεν ἔχει

$$\varphi : \alpha :: \chi : \beta :: \psi : \gamma \ldots$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐν πάσῃ σειρᾷ ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὡς τις τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ (267), ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\varphi+\chi+\psi\ldots : \alpha+\beta+\gamma\ldots :: \varphi : \alpha :: \chi : \beta :: \psi : \gamma\ldots$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα $\varphi+\chi+\psi+\ldots$ εἶναι γνωστὸν καὶ ἴσον τῷ μεριστέῳ ἀριθμῷ Α, ἡ ἀναλογία αὕτη τρέπεται εἰς τὴν

$$A : \alpha+\beta+\gamma\ldots :: \varphi : \alpha :: \chi : \beta :: \psi : \gamma\ldots$$

ὅθεν
$$\varphi = \frac{A \times \alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$$

$$\chi = \frac{A \times \beta}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$$

$$\psi = \frac{A \times \gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$$

Ἐν γένει δὲ, *ἕκαστον μέρος εἶναι ἴσον τῷ μεριστέῳ ἀριθμῷ* Α *πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, πρὸς ὃν εἶναι ἀνάλογον, καὶ διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν, πρὸς οὓς εἶναι ἀνάλογα τὰ διάφορα μέρη.*

## Προβλήματα ἑταιρίας.

292. Ἐν τοῖς προβλήμασι τῆς ἑταιρίας πρόκειται νὰ μερισθῇ κέρδος τι ἢ ζημία μεταξὺ πολλῶν συνεταίρων ἀναλόγως τῶν δικαιωμάτων ἑκάστου.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ὑποθέτομεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ μέρη εἶναι ἀνάλογα τῶν καταβολῶν· τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς μερισμὸν δεδομένου ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον εἰς ἐμπορικήν τινα ἐπιχείρησιν, ὁ μὲν δραχμὰς* 5600, *ὁ δὲ* 4700, *ὁ δὲ* 6400· *ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης ἐκέρδησαν δραχμὰς* 3680. *Ζητεῖται πόσον μέρος τοῦ κέρδους θέλει λάβει ἕκαστος.*

Καλοῦντες $\chi$, $\psi$, $\omega$ τὰ ζητούμενα μέρη, θέλομεν ἔχει

$$5600 : \chi :: 4700 : \psi :: 6400 : \omega$$

Ἐκ τῆς σειρᾶς ταύτης τῶν ἴσων λόγων, συνάγομεν (267)

$$5600+4700+6400 : \chi+\psi+\omega :: 5600 : \chi :: 4700 : \psi$$

$$:: 6400 : \omega$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν $\chi+\psi+\omega$ εἶναι ἴσον τῷ ὁλικῷ κέρδει 3680, λαμβάνομεν

$$5600+4700+6400 : 3680 :: 5600 : \chi :: 4700 : \psi$$

$$:: 6400 : \omega$$

ὅθεν πορίζόμεθα

$$\chi = \frac{3680 \times 5600}{5600+4700+6400}$$

$$\psi = \frac{3680 \times 4700}{5600+4700+6400}$$

$$\omega = \frac{3680 \times 6400}{5600+4700+6400}$$

Ἐν γένει, *ἕκαστον μέρος εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ὁλικοῦ κέρδους ἐπὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν καταβολήν, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν καταβολῶν.*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν διαιρέσωμεν πάσας τὰς καταβολὰς 5600, 4700, 6400 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 100, καὶ μερίσωμεν τὸ κέρδος εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν πηλίκων 56, 47, 64, θέλομεν εὕρει τὰ αὐτὰ μέρη. Τῷ ὄντι, τὰ μέρη ταῦτα ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ λόγου τῶν καταβολῶν, ὁ δὲ λόγος αὐτῶν διὰ τῆς διαιρέσεως ἁπασῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται.

293. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὰ δικαιώματα τῶν συνεταίρων διαφέρουσι καὶ τῶν καταβολῶν ἕνεκα, καὶ τοῦ χρόνου, ἐφ᾽ ὃν ἡ καταβολὴ ἑκάστου ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει. Θέλομεν δὲ παραδεχθῆ, ὅτι τοῦ χρόνου, ἐφ᾽ ὃν αἱ καταβολαὶ ἔμειναν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει, ὄντος τοῦ αὐτοῦ, τὰ κέρδη εἶναι ἀνάλογα τῶν καταβολῶν· καὶ ὅτι διὰ καταβολὰς ἴσας τὰ κέρδη εἶναι ἀνάλογα τοῦ χρόνου, ἐφ᾽ ὃν ἑκάστη καταβολὴ ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει. Ἐπὶ τῆς διπλῆς ταύτης ὑποθέσεως στηριζόμενοι, θέλομεν ἀποδείξει τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν πολλοὶ συνέταιροι κατέβαλον ἐν ἐπιχειρήσει τὰ κεφάλαια $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \ldots$ ἐπὶ τοὺς χρόνους $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots$, τὰ μέρη τοῦ κέρδους τὰ ὁποῖα θέλουσι λάβει εἶναι ἀνάλογα τῶν γινομένων $\kappa_1 \times \mu_1$, $\kappa_2 \times \mu_2$, $\kappa_3 \times \mu_3$, $\kappa_4 \times \mu_4 \ldots$

Ἂς θεωρήσωμεν παραδείγματος χάριν τοὺς δύο πρώτους συνεταίρους, ὧν αἱ καταβολαὶ $\alpha_1$, $\alpha_2$, ἔμειναν ἐν τῇ ἐπιχηρήσει ἐπὶ τοὺς χρόνους $\mu_1$, $\mu_2$. Ἂς συγκρίνωμεν διαδοχικῶς τὰ μέρη αὐτῶν $\chi$ καὶ $\psi$ πρὸς τὸ μέρος $\omega$ ὑποθετικοῦ τινος συνεταίρου, ὅστις ἤθελε καταβάλει τὸ αὐτὸ καὶ ὁ πρῶτος κεφάλαιον $\kappa_1$, ἐπὶ τὸν αὐτὸν χρόνον $\mu_2$, ἐφ᾽ ὃν καὶ ὁ δεύτερος. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω γενομένην συνθήκην θέλομεν ἔχει

$$\chi : \omega :: \mu_1 : \mu_2$$
$$\omega : \psi :: \kappa_1 : \kappa_2$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰ ἀναλογίας ταύτας ὅρον ἐφ᾽ ὅρον, λαμβάνομεν, $\chi : \psi :: \kappa_1 \times \mu_1 : \kappa_2 \times \mu_2$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὸν ἀνωτέρω συλλογισμὸν εἶναι δυνατὸν νὰ γείνῃ ἡ ἑξῆς ἔνστασις. Ἡ εἰσαγωγὴ ὑποθετικοῦ συνεταίρου

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

μεταβάλλει τὴν τιμὴν τῶν μερῶν χ καὶ ψ, καὶ τὰ μεταβεβλημένα ταῦτα μέρη ἦναι τὰ συγκριθέντα. Ἀλλ' εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ νέου συνεταίρου, ἂν καὶ μεταβάλλει τὰ δύο μέρη, δὲν μεταβάλλει ὅμως τὸν λόγον αὐτῶν· μόνον δὲ τὸν λόγον τοῦτον προϋτιθέμεθα νὰ εὕρωμεν.

Διὰ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος πᾶν πρόβλημα ἑταιρίας ἀνάγεται εἰς πρόβλημα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Τρεῖς συνεταῖροι κατέβαλον εἰς ἐμπορικήν τινα ἐπιχείρησιν ὁ μὲν* 8000 *δραχμὰς ἐπὶ* 4 *ἔτη, ὁ δὲ* 9000 *ἐπὶ* 3 *ἔτη, ὁ δὲ* 12000 *ἐπὶ* 2 *ἔτη· ἐκέρδησαν δὲ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης δραχμὰς* 6200· *πόσον μέρος τοῦ κέρδους πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;*

Τὰ ζητούμενα μέρη πρέπει νὰ ἦναι ἀνάλογα τῶν γινομένων $8000\times4$, $9000\times3$ καὶ $12000\times2$, τουτέστι τῶν ἀριθμῶν 32000, 27000 καὶ 24000, ἢ, ὅπερ εἶναι τὸ αὐτό, τῶν ἀριθμῶν 32, 27 καὶ 24. Καλοῦντες λοιπὸν τὰ μέρη ταῦτα χ, ψ, ω, θέλομεν ἔχει (291)

$$\chi=\frac{6200\times32}{83}=2390,\ 36\ldots$$

$$\psi=\frac{6200\times27}{83}=2016,\ 86\ldots$$

$$\omega=\frac{6200\times24}{83}=1792,\ 77\ldots$$

294. Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

ά.) Εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται συνήθως 16 μέρη νίτρου, 3 μέρη ἄνθρακος καὶ 2 θείου· πόσαι μναῖ ἑκάστης τῶν ὑλῶν τούτων ἀπαιτοῦνται πρὸς κατασκευὴν 600 μνῶν πυρίτιδος;

($457^{\mu\nu}\cdot+\frac{1}{7}$ νίτρου, $85+\frac{5}{7}$ ἄνθρακος καὶ $57+\frac{1}{7}$ θείου).

β'.) Ἔμπορος ἀναλαμβάνει ἐπιχείρησίν τινα, εἰς ἣν καταβάλλει 12600 δραχμὰς· μετὰ 8 μῆνας προσλαμβάνει καὶ συνέταιρον, ὅστις καταβάλλει 14800 δραχμὰς· 9 δὲ μῆ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

νας μετὰ τὴν πρόσληψιν τούτου προσλαμβάνει καὶ ἄλλον, ὅστις καταβάλλει δραχμὰς 18700· μετὰ 34 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως, εὑρέθη ὅτι ἐκέρδησαν δραχμὰς 16200· πόσον μέρος τοῦ κέρδους πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

( 6135,69, 5511,23, 4553,07. )

γ΄.) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ αὐτοῦ νὰ μερισθῶσι τὴν περιουσίαν συγκειμένην ἐκ δραχμῶν 55800 οἱ τέσσαρες αὐτοῦ υἱοὶ ὡς ἑξῆς· ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέρους τοῦ πρώτου· ὁ τρίτος τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερῶν τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου· καὶ ὁ τέταρτος τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν μερῶν τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· πόσον θέλει λάβει ἕκαστος; (12000, 9000, 14000, 20800).

δ΄.) Ἔμπορος ἐχρεωκόπησε ἔχων μὲν 18000 δραχμὰς, ὀφείλων δὲ εἰς μὲν τὸν Α δραχμὰς 7200, εἰς δὲ τὸν Β 9400, εἰς δὲ τὸν Γ 12400, καὶ εἰς τὸν Δ 15600· πόσας ἐκ τῶν 18090 πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν ὀφειλομένων αὐτῷ; (2972,47· 3467,89· 5119,26· 6440,37.)

ε.) Τέσσαρες ἐργάται, ὧν ὁ πρῶτος εἰργάσθη 5 ἡμέρας πρὸς 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δεύτερος 4 ἡμέρας πρὸς 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ τρίτος 6 πρὸς 7 ὥρας τὴν ἡμέραν, καὶ ὁ τέταρτος 8 ἡμέρας πρὸς 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἔλαβον διὰ τοῦτο δραχμὰς 124· πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

(25,05· 22,55· 26,30· 50,10.)

## Μέθοδος τῆς ἀναμίξεως.

295. Ὑπάρχουσι δύο εἰδῶν προβλήματα ἀναμίξεως.

ά.) Ἐκεῖνα, ἐν οἷς ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πραγμάτων, ὧν καὶ ἡ ποσότης καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου εἶναι ὡρισμένη.

β΄.) Ἐκεῖνα, ἐν οἷς ζητεῖται κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἀναμιχθῶσι πράγματα, ἡ μονὰς ἑκάστου τῶν ὁποίων ἔχει ὡρισμένην τιμὴν, ὥστε ἡ μονὰς τοῦ μίγματος νὰ ἔχῃ ὡρισμένην τιμήν.

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

## Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α.) Ἀνεμίχθησαν οἶνοι διαφόρου ἀξίας, τουτέστιν 90 λίτραι τῶν 40 λεπτῶν ἡ λίτρα, 75 λίτραι τῶν 32 λεπτῶν καὶ 85 λίτραι τῶν 50 λεπτῶν· πόσον πρέπει νὰ τιμηθῇ ἡ λίτρα τοῦ μίγματος;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 90 | × | 40 | = | 3600 |
| 75 | × | 32 | = | 2400 |
| 85 | × | 50 | = | 4250 |
| 250 | | | | 10250 |

Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν λιτρῶν ἑκάστου εἴδους ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς μονάδος αὐτοῦ, καὶ λαμβάνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν τούτων γινομένων, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ὅλου μίγματος· ἐπειδὴ δὲ τὸ μίγμα περιέχει 90+75+85 ἤτοι 250 λίτρας, διαιροῦντες τὴν ὁλικὴν τιμὴν 10250 διὰ 250 εὑρίσκομεν ὡς τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος 41 λεπτά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Συνεχωνεύθησαν 18 δραχμαὶ ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,900, 12 δραχμαὶ τῶν 0,820 καὶ 25 δραχμαὶ τῶν 0,840· ποῖος ἦναι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ μεταλλικοῦ τούτου κράματος;

Λέγοντες ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἴδους τινὸς ἀργύρου εἶναι 0,900, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς χίλια μέρη τοῦ εἴδους τούτου τοῦ ἀργύρου τὰ 900 εἶναι ἄργυρος καθαρὸς, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι ἄλλα μέταλλα, ἢ, ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ, εἰς 1 μονάδα τοῦ ἀργύρου τούτου τὰ 0, 900 μόνον εἶναι ἄργυρος καθαρός.

Πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος πράττομεν ὡς ἑξῆς.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | × | 0,900 | = | 16,200 |
| 12 | × | 0,820 | = | 9,840 |
| 25 | × | 0,840 | = | 21,000 |
| 55 | | | | 47,040 |

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Πολλαπλασιάζομεν 18 ἐπὶ 0,900, τὸ δὲ γινόμενον ἀθῇ μία δεικνύει ὅτι εἰς 18 δραχμὰς τοῦ ἀργύρου τοῦ εἴδους του ἡ του, καθαρὸς ἄργυρος εἶναι αἱ 16,200. Πράττοντες τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ λοιπὰ εἴδη, καὶ προσθέτοντες τὰ γινόμενα ταῦτα εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς 18+12+25, ἤτοι 55 λίτρας τοῦ κράματος, καθαρὸς ἄργυρος εἶναι αἱ 48,040· ἄρα 1 λίτρα τοῦ κράματος περιέχει $\frac{48,040}{55}$ ἤτοι 0,8355...

Ἑπομένως ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος εἶναι 0,8355.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον λύονται καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τοῦ σελινίου τὸ βάρος εἶναι δραχμαὶ 5, 65, ὁ δὲ βαθμὸς τῆς καθαρότητος 0,925· τοῦ φράγκου τὸ βάρος εἶναι δραχμαὶ 5, ὁ δὲ βαθμὸς τῆς καθαρότητος 0,910· τοῦ δὲ διστήλου δραχμαὶ 27, 045, βαθμὸς δὲ καθαρότητος 0,903· ἐὰν συγχωνεύσωμεν 3 σελίνια, 7 φράγκα καὶ 2 δίστηλα, ποῖον θέλει εἶσθαι τὸ βάρος τοῦ μεταλλικοῦ τούτου κράματος, καὶ ποῖος ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος αὐτοῦ; (τὸ βάρος 106,δραχ.040, ὁ δὲ τῆς καθαρότητος βαθμὸς, 0,908 . . .)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 9 δραχμὰς ἀργύρου τῶν 0,900, 17 τῶν 0,860 καὶ 2 δραχμὰς χαλκοῦ, ποῖος θέλει εἶσθαι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ μεταλλικοῦ τούτου κράματος; (0,811 . . .)

## Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους.

296. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α.) *Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἀναμίξωμεν οἶνον τῶν 80 λεπτῶν ἡ λίτρα μετ' οἴνου τῶν 50 λεπτῶν, ἵνα σχηματίσωμεν 120 λίτρας κράματος τῶν 60 λεπτῶν ἡ λίτρα;*

Δι' ἑκάστην λίτραν τῶν 50 λεπτῶν πωλουμένην 60 προσγίγνεται κέρδος λεπτῶν 10.

Δι' ἑκάστην δὲ λίτραν τῶν 80 πωλουμένην 60 γίνεται ζημία λεπτῶν 20. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν χ καὶ ψ τὰς ποσότητας, ἃς θέλομεν λάβει ἐξ ἑκάστου εἴδους οἴνου, ἵνα μὴ ὑπάρξῃ οὔτε κέρδος οὔτε ζημία, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης

$$\chi \times 10 = \psi \times 20$$

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

[redacted]μεν τὴν ἀναλογίαν

$$\chi : \psi :: 20 : 10.$$

Ἵνα προσδιορισθῶσι δὲ τὰ μέρη χ καὶ ψ πρέπει νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 120 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 20 καὶ 10· τούτου δὲ γενομένου, εὑρίσκεται ὅτι τὰ μέρη ταῦτα εἶναι 80 καὶ 40.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲν ὡρίζετο ἡ ποσότης τοῦ ζητουμένου μίγματος, τότε τὸ πρόβλημα ἤθελεν εἶσθαι ἀόριστον· τουτέστι δὲν ἤθελεν εἶσθαι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ ἀπόλυτοι ποσότητες, αἵτινες πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἐξ ἑκάστου εἴδους, ἀλλὰ μόνον ὁ λόγος αὐτῶν ὁριζόμενος ἐκ τῆς ἀναλογίας $\chi : \psi :: 20 : 10$.

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι 20 εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἀνωτέρας τιμῆς καὶ τῆς μεσαίας, 10 δὲ ἡ τῆς κατωτέρας καὶ τῆς μεσαίας, συνάγομεν ὅτι *ἡ ποσότης, ἥτις πρέπει νὰ ληφθῇ ἐκ τοῦ κατωτέρου εἴδους, εἶναι πρὸς τὴν ποσότητα, ἥτις πρέπει νὰ ληφθῇ ἐκ τοῦ ἀνωτέρου, ὡς ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς τοῦ ἀνωτέρου καὶ μεσαίου πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς τοῦ κατωτέρου καὶ μεσαίου.*

297. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ἔχομεν δύο ὄγκους ἀργύρου, καὶ τοῦ μὲν πρώτου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,960, τοῦ δὲ δευτέρου 0,875· πόσον πρέπει νὰ ληφθῇ ἐξ ἑκατέρου αὐτῶν ὅπως σχηματισθῇ 1 μνᾶ ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος νὰ ἦναι 0,900;

Ἑκάστη δραχμὴ ἀργύρου τῶν 0,960 εἰσάγει ἐν τῷ κράματι 0,060 ἀργύρου περισσότερον, ἢ ὅτον ἀπαιτεῖται ὅπως ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος ἦναι 0,900. Τοὐναντίον δὲ ἑκάστη δραχμὴ τῶν 0,875 εἰσάγειἑκάστη 0,025 ἀργύρου ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ἀπαιτεῖται, ὅπως σχηματισθῇ ὁ ἀπαιτούμενος βαθμὸς καθαρότητος. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν χ καὶ ψ τὰς ποσότητας ἀργύρου, ἃς θέλομεν λάβει ἐξ ἑκάστου εἴδους, θέλει ὑπάρξει ἀντισήκωσις, ἐάν

$$\chi \times 0{,}060 = \psi \times 0{,}025,$$

ἤτοι ἐὰν $\chi : \psi :: 0{,}025 : 0{,}060$

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

Ἵνα εὑρεθῇ λοιπὸν τὸ ζητούμενον ἀρκεῖ νὰ μερισθῇ μία μνᾶ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 0,025 καὶ 0,060, ἢ ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ, τῶν ἀριθμῶν 25 καὶ 60.

## Μέθοδος συνεζευγμένη.

298. Ἡ *συνεζευγμένη μέθοδος* χρησιμεύει εἰς τὴν λύσιν ζητημάτων ἐξαρτωμένων ἀπὸ πολλὰς εὐθείας μεθόδους τῶν τριῶν συνδεδεμένας οὕτως πως πρὸς ἀλλήλας, ὥστε νὰ παρέχωσι σύνθετον λόγον. Τοιαῦτα δὲ εἶναι ἐκεῖνα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ τραπῶσι μέτρα ἢ νομίσματα ἔθνους τινὸς εἰς μέτρα ἢ νομίσματα ἄλλου τινὸς ἔθνους. Ἡ λύσις προβλημάτων τινῶν θέλει καταδείξει εἰς τί αὕτη συνίσταται.

299. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α. *5 δίστηλα δύνανται 27 φράγκα· πόσα φράγκα δύνανται 9 δίστηλα ;*

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ κατὰ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς.

$$5 : 9 :: 27 : \chi = \frac{27 \times 9}{5} = 48,60.$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ γράψωμεν τὰς ἰσότητας

27 φράγκα = 5 δίστηλα
9 δίστηλα = χ φράγκα.

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἰσότητος ἐπὶ 9, τὰ δὲ τῆς δευτέρας ἐπὶ 5, λαμβάνομεν

$9 \times 27$ φράγκα $= 9 \times 5$ δίστηλα
$5 \times 9$ δίστηλα $= 5 \times \chi$ φράγκα.

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς πρώτης ἰσότητος εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ πρώτῳ τῆς δευτέρας, συνάγομεν

$9 \times 27$ φράγκα $= 5 \times \chi$ φράγκα
ἤτοι $9 \times 27 = 5 \times \chi$

ὅθεν $\chi = \frac{9 \times 27}{5} = 48,60$, ὡς καὶ ἀνωτέρω.

300. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Ζητεῖται πόσα φράγκα δύνανται*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

480 *λίραι ἀγγλικαί, γνωστοῦ ὄντος ὅτι* 13 *λίραι δύνανται* 64 *δίστηλα, καὶ ὅτι* 10 *δίστηλα δύνανται* 54 *φράγκα.*

Γράφομεν τὰς ἰσότητας

54 φράγκα = 10 δίστηλα
64 δίστηλα = 13 λίραι
480 λίραι = χ φράγκα

Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἰσοτήτων, ποιοῦντες ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρω προβλήματι, πορίζόμεθα τὴν ἑξῆς.

$$64 \times 54 \text{ φράγκα} = 13 \times 10 \text{ λίραι.}$$

Ἑπομένως αἱ ἀνωτέρω τρεῖς ἰσότητες δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν ἑξῆς δύο

$$64 \times 54 \text{ φράγκα} = 13 \times 10 \text{ λίραι}$$
$$480 \text{ λίραι} = \chi \text{ φράγκα.}$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον αἱ δύο αὗται ἰσότητες δύνανται νὰ ἀντικασταθῶσι διὰ τῆς

$$64 \times 54 \times 480 \text{ φράγκα} = 13 \times 10 \times \chi \text{ φράγκα}$$

τουτέστι $64 \times 54 \times 480 = 13 \times 10 \times \chi$

ὅθεν $\chi = \dfrac{64 \times 54 \times 480}{13 \times 10}$

301. Παρατηροῦντες τὴν τάξιν τῶν διαδοχικῶν ἰσοτήτων, καὶ τὸν συλλογισμὸν, ἐφ' οὗ στηριζόμενοι πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς, βλέπομεν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι αἱ ἰσότητες. *Πρέπει δὲ νὰ γράφωνται οὕτως, ὥστε τὸ δεύτερον μέλος ἑκάστης νὰ ἦναι τῆς αὐτῆς μονάδος τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἑπομένης· πρὸς δὲ τούτοις τὸ πρῶτον μέλος τῆς πρώτης ἰσότητος νὰ ἦναι τῆς αὐτῆς μονάδος τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς τελευταίας. Τότε ἵνα εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον, σχηματίζεται τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῶν εὑρισκομένων ἐν τῇ στήλῃ, ἐν ᾗ δὲν ὑπάρχει τὸ χ, καὶ τοῦτο διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ στήλῃ.*

302. Ἡ λύσις καὶ ἄλλων τινῶν προβλημάτων θέλει

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

δείξει πῶς γίνεται χρῆσις τῆς συνιζευγμένης μεθόδου, καὶ τὸ ὠφέλιμον αὐτῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσιν 87 ρούβλια, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 17 δίστηλα δύνανται 50 ρούβλια, 25 δίστηλα 26 Γερμανικὰ τάλληρα, 24 γερμ. τάλληρα 5 λίρας, καὶ 1 λίρα 28,12 δραχμάς;

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω (301) αἱ διάφοροι ἰσότητες πρέπει νὰ γραφῶσιν ὡς ἑξῆς.

$$\begin{aligned} \chi \text{ δραχμαὶ} &= 87 \text{ ρούβλια} \\ 50 \text{ ρούβλια} &= 17 \text{ δίστηλα} \\ 25 \text{ δίστηλα} &= 26 \text{ Γερμανικὰ τάλληρα} \\ 24 \text{ Γερ. τάλ.} &= 5 \text{ λίραι} \\ 1 \text{ λίρα} &= 28{,}12 \text{ δραχμαὶ} \end{aligned}$$

ὅθεν $\chi = \dfrac{87 \times 17 \times 26 \times 5 \times 28{,}12}{50 \times 25 \times 24 \times 1}$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ, πρὶν ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἐν τῷ ἀριθμητῇ καὶ παρονομαστῇ σεσημειωμέναι πράξεις, εἶναι καλὸν νὰ ἐξαλείφωνται οἱ κοινοὶ τῶν δύο ὅρων παράγοντες πρὸς διευκόλυνσιν τῶν λογισμῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐν Ἑλλάδι κορινθιακὴν σταφίδα, πρὸς 190 δραχμὰς τὰς 1000 λίτρας. Ἔστειλε δὲ αὐτὴν εἰς Τεργέστην, πληρώσας ἔξοδα διὰ μὲν τὸν δασμὸν καὶ ναῦλον $23\%$, εἰς δὲ τὸν παραγγελιοδόχον $2\%$. Ζητεῖται πόσα φιορίνια τιμᾶται εἰς Τεργέστην ὁ στατὴρ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1000 λίτραι δύνανται 375 ὀκάδας, αἱ 44 ὀκάδες ἕνα στατῆρα, καὶ ὅτι 35 φιορίνια δύνανται 17 τάλληρα γερμανικὰ, τὸ δὲ τάλληρον 5,$^{\text{δραχ.}}$ 78.

$$\begin{aligned} \chi \text{ φιορίνια} &= 1 \text{ στατὴρ} \\ 1 \text{ στατὴρ} &= 44 \text{ ὀκάδες} \\ 375 \text{ ὀκάδες} &= 190 \text{ δραχμαὶ} \\ 123 \text{ δρ. ἄνευ ἐξόδων} &= 123 \text{ δρ. μετὰ τῶν ἐξόδων } 23\% \\ 100 \text{ δρ. ἐκ τῶν τελ.} &= 102 \text{ μετὰ τῶν νέων ἐξόδων } 2\% \\ 578 \text{ δραχμαὶ} &= 400 \text{ τάλληρα Γερμαν.} \\ 17 \text{ τάλληρα Γερμ.} &= 35 \text{ φιορίνια.} \end{aligned}$$



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ὅθεν $\chi = \frac{44 \times 190 \times 123 \times 102 \times 100 \times 35}{375 \times 123 \times 100 \times 578 \times 17}$

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

ά.) Πόσους βασιλικοὺς πήχεις δύνανται 27 ἀγγλικοὶ πόδες, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1,πχ 3 δύνανται 4 γαλλικοὺς πόδας, καὶ ὅτι 15 γαλ. δύνανται 16 ἀγγλικοὺς ; (8, πχ 2666.)

β΄.) Ἔμπορος ὀφείλει εἰς Παρισίους 3300 φράγκα· πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους τούτου ἀποστέλλει τὸ ἀντίτιμον εἰς Βιέννην, ὅπου ἡ συναλλαγὴ ἦναι 289 δραχμαὶ ἀντὶ 100 φιορινίων· ἡ δὲ μεταξὺ Βιέννης καὶ Παρισίων συναλλαγὴ ἦναι $38\frac{1}{4}$ φιορίνια ἀντὶ 100 φράγκων καὶ τὰ ἔξοδα ἀπὸ μὲν τῶν Ἀθηνῶν εἰς Βιέννην $\frac{1}{2}\,^0/_0$, ἀπὸ δὲ Βιέννης εἰς Παρισίους $2\frac{1}{3}\,^0/_0$· διὰ πόσων δραχμῶν θέλει ἐξοφληθῆ οὕτω τὸ ἀνωτέρω χρέος ; (3751, 68 . .)

γ΄.) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐν Ἀθήναις μέταξαν πρὸς 70 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· ἔξοδα ἐγένοντο ἐν Ἑλλάδι μὲν $9\,^0/_0$, ἐν δὲ Μασσαλίᾳ $2\,^0/_0$· ζητεῖται πόσα φράγκα πρέπει νὰ τιμᾶται τὸ χιλιόγραμμον ἐν Μασσαλίᾳ, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι 5 φράγκα δύνανται 5,δραχ. 58, καὶ ὅτι τὸ χιλιόγραμμον δύναται $312\frac{1}{2}$ δράμια. (54,φρ. 48)

δ΄.) Ἔμπορος ἠγόρασε 5 στατῆρας πράγματός τινος ἀντὶ 4920 φράγκων· πόσα λεπτὰ πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ δράμιον ὅπως ὠφεληθῇ $20\,^0/_0$ ; Εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι ὁ στατὴρ δύναται 44 ὀκάδας, ἡ ὀκὰς 400 δράμια, τὰ δὲ 5 φράγκα 5,δραχ. 58. (7 λεπτὰ περίπου).

ΤΕΛΟΣ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

# ΠΙΝΑΞ

## ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.


ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α. *Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι. Ἀρίθμησις.*

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι — Περὶ ἀριθμήσεως.— Ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν.—Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.— Τινὰ περὶ τοῦ δυνατοῦ διαφόρων συστημάτων ἀριθμήσεως. Σελὶς 1—8.

ΚΕΦ. Β'. *Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.*

Ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως.— Πρόσθεσις τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.— Ἀρχὴ, ἐφ' ᾗς στηρίζεται ἡ θεωρία τῆς προσθέσεως.—Πρόσθεσις δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν — Ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως.— Ἀρχαὶ ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ θεωρία τῆς ἀφαιρέσεως.— Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀφ' ἑτέρου.— Ἀφαίρεσις διαφορᾶς τινος —Βάσανος τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. 9—16

ΚΕΦ. Γ'. *Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.*

Ὁρισμοί.— Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.— Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ τοῦ πολλαπλοσιασμοῦ θεωρία.— Πολλαπλασιασμὸς δύο ἀριθμῶν κατὰ πάσας τὰς περιστάσεις.— Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.— Περὶ δυνάμεων.— Ἄλλα τινὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θεωρήματα.— Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς τινος ἐπὶ δεδομένον ἀριθμόν. 17—33

ΚΕΦ. Δ'. *Περὶ διαιρέσεως.*

Ὁρισμοί.— Διαίρεσις ὅταν τὸ πηλίκον ἦναι μονοψήφιον.—Γενικὴ περίπτωσις τῆς διαιρέσεως.— Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.— Βάσανος τῆς διαιρέσεως.— Θεωρήματα τῆς διαιρέσεως. 33—54

ΚΕΦ. Ε. *Συνθῆκαι διαιρετότητος.*

*Βάσανοι διὰ τοῦ 9 καὶ 11.*

Ὁρισμοὶ καὶ γενικὰ θεωρήματα.— Συνθῆκαι διαιρετότητος διὰ 2, 5, 4, 25, 8 καὶ 125.— *δι' 9 καὶ 3, καὶ δι' 11.*— Βάσανοι διὰ τοῦ 9 καὶ 11. —Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν, 55—69

ΚΕΦ. ς'. *Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.*

Ὁρισμοί.— Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.— Ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.— Ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν.— Θεωρήματα τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου — Ἀναζήτησις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν.— Ἀναζήτησις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν 70—83

ΚΕΦ. Ζ'. *Περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν.*

Ὁρισμοί.— Θεωρήματα τῶν πρώτων ἀριθμῶν.— Σχηματισμὸς πίνακος πρώτων ἀριθμῶν.— Ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας.— Πότε ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἑτέρου.— Ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος.— Ἐφαρμογὴ τῆς εἰς πρώτους παράγοντας ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν. Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν. 84—105.



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

513
ΠΑΚ



ΚΕΦ. Η. *Περὶ τῶν κλασμάτων.*

Ὁρισμοί.— Θεωρήματα τῶν κλασμάτων.— Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.— Ἀναγωγὴ δύο ἢ πλειοτέρων κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.— Ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής.— Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν κλασμάτων.— Ἐφαρμογαὶ τῶν κλασμάτων.— Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν. Σελὶς 106—126

ΚΕΦ. Θ'. *Περὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.*

Ὁρισμοί — Πίναξ τῶν διαφόρων μονάδων ποσῶν τινων — Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς κλασματικὸν καὶ τἀνάπαλιν.— Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν συμμιγῶν.— Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν. 127—147

ΚΕΦ. Ι. *Περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.*

Ὁρισμοί — Περὶ ἀναγνώσεως καὶ γραφῆς τῶν δεκαδικῶν.— Παράστασις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὡς κινου κλάσματος.— Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν — Τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά.— Περὶ τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων — Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν. 148—172

ΚΕΦ. ΙΑ. *Περὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν μέτρων καὶ σταθμῶν.*

Πίναξ τῶν διαφόρων μονάδων.— Σύγκρισις τῶν παλαιῶν μονάδων πρὸς τὰς νέας.— Τροπὴ ἀριθμοῦ παλαιῶν μονάδων εἰς ἰσοδύναμον νέων, καὶ τἀνάπαλιν — Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν. 173—181.

ΚΕΦ ΙΒ'. *Περὶ τετραγώνου καὶ τετραγων. ῥίζης.*

Τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν.— Τετράγωνον γινομένου τινός.— Θεωρήματα τῶν τετραγώνων.— Ὁρισμος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.— Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κατὰ προσέγγισ. μονάδος.— Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κατὰ δεδομένην προσέγγισιν.— Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν. 182—203.

ΚΕΦ. ΙΓ'. *Περὶ κύβου καὶ κυβικῆς ῥίζης.*

Θεωρήματα τῶν κύβων.— Ὁρισμός τῆς κυβικῆς ῥίζης.— Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης κατὰ προσέγγισιν μοναδος.— Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης κατὰ δεδομένην προσέγγισιν.— Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.— 204—221.

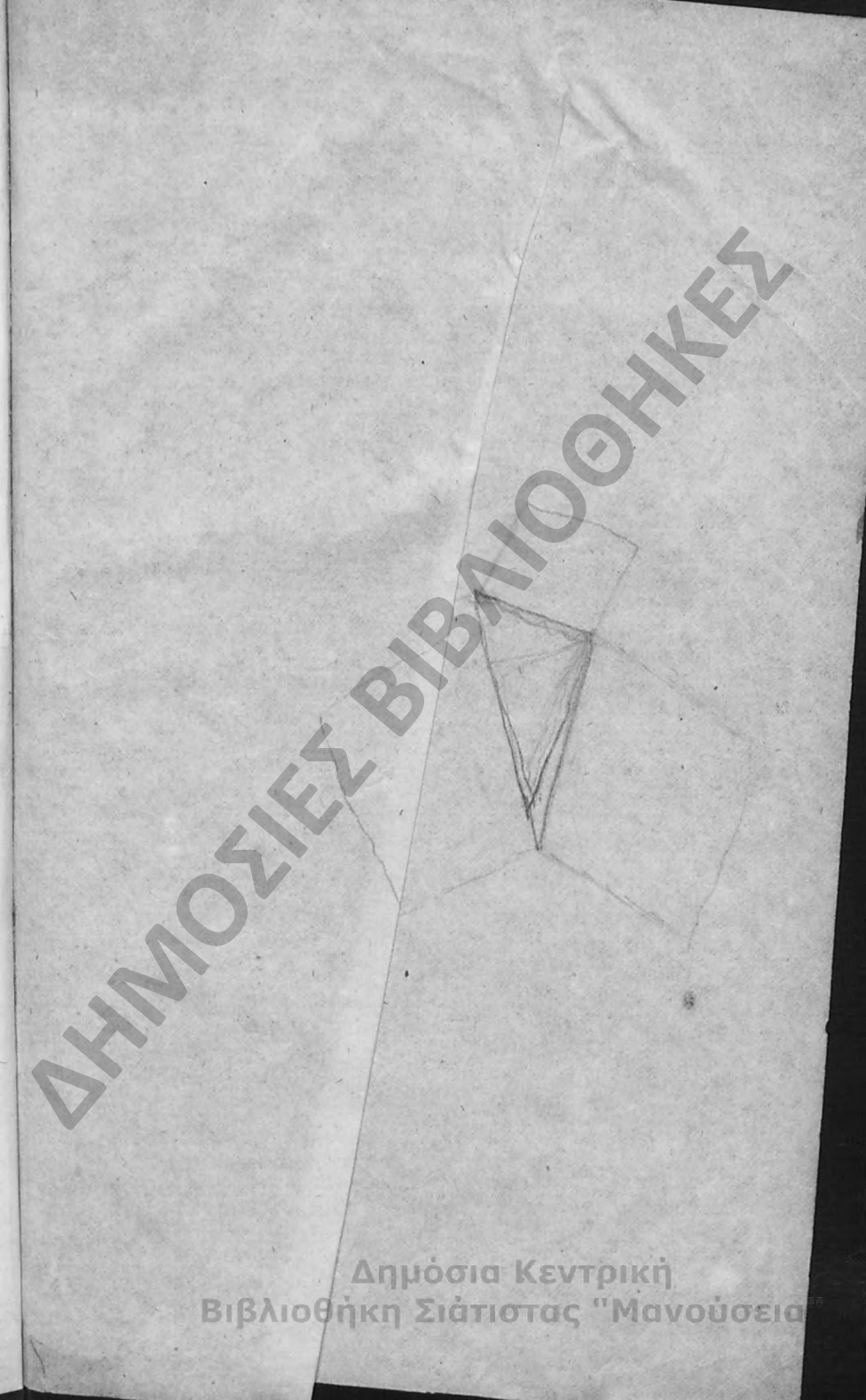
ΚΕΦ. ΙΔ'. *Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν.*

Λόγος δύο ποσῶν.— Λόγοι ἀντίστροφοι.— Λόγος δύο ἀριθμῶν.— Ὁρισμὸς τῶν ἀναλογιῶν — ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.— Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν. 222—234.

ΚΕΦ. ΙΕ. *Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναλογιῶν.*

Περὶ ποσῶν ἀναλόγων.— Περὶ ποσῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων.— Μέθοδος τῶν τριῶν ὀρθή τε καὶ ἀντίστροφος.— Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.— Γενικὸς τύπος τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.— Μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.—Προβλήματα τόκου — Προβλήματα ὑφαιρέσεως.— Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.— Προβλήματα ἑταιρίας.— Μέθοδος τῆς ἀναμίξεως.— Μέθοδος συνεζευγμένη.—Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν 235—274

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"



ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική
Βιβλιοθήκη Σιάτιστας "Μανούσεια"

