Καὶ θεὸς σὺν τοῖς
ἄλλοις [illegible]

Καὶ τόδε σὺν τοῖς ἄλλοις ἀρχ...

Ἐμοῦ τοῦ Νικολάου Μαρκίδ...

1858

Ἰανουαρίου 1. ἐν Σιατίστῃ

Καὶ τοῦ ... 185[illegible] Δεκ. 15.

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητευόντων εἰς τὴν κατωτέραν τάξιν τῶν Ἑλληνικῶν σχολείων τῆς Ἑλλάδος.

ΥΠΟ

Χ. ΒΑΦΑ.

ΑΘΗΝΗΣΙΝ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Γ. ΒΑΦΑ.
(Παρὰ τῇ ὁδῷ Ἀδριανοῦ.)
1843

Ὁ παρατυπώσας θέλει καταδιωχθῇ κατὰ τὸν νόμον.

Η Βάφας

Πρὸς τὸν ἀναγινώσκοντα.

Νομίζων ὅτι εἰς τὸ ὁμοιόμορφον τῆς διδασκαλίας συντελεῖ μᾶλλον σειρὰ βιβλίων, ἥτις νὰ ἐμπεριλαμβάνῃ τὰ ὡρισμένα νὰ διδάσκωνται εἰς τὰ Ἑλληνικὰ σχολεῖα καὶ εἰς τὰ γυμνάσια, συντεταγμένα κατὰ τὰς αὐτὰς ἀρχὰς, τὴν αὐτὴν μέθοδον, τὴν αὐτὴν γλῶσσαν, ἐπεχείρησα τὴν σύνταξιν σειρᾶς στοιχειωδῶν μαθηματικῶν βιβλίων, καὶ ἰδοὺ τὸν πρῶτον αὐτῆς τόμον παρέχω ἐκδεδομένον διὰ τοῦ τύπου εἰς τὴν κρίσιν τῶν ἐπιμελουμένων τὴν παιδείαν τῆς Ἑλλάδος.

Ἐὰν οἱ εἰς τὰ Ἑλληνικὰ σχολεῖα μαθητεύοντες ἔχωσιν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ὅσας ἀριθμητικὰς γνώσεις ἐμπεριέχει τὸ βιβλιάριον τοῦτο, καὶ μεγίστην ἕξιν εἰς τὸ ἐκτελεῖν τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις καὶ λύειν τὰ κοινότερα ἀριθμητικὰ προβλήματα, νομίζω ὅτι θέλουσιν εἶσθαι ἱκανῶς προωδευμένοι καὶ εἰς τὴν μαθηματικήν.

Ἐπειδὴ δὲ πρακτικὴν ἀριθμητικὴν παραδίδονται οἱ παῖδες καὶ εἰς τὰ δημοτικὰ σχολεῖα, ἴσως νομίζει τις ὅτι εἰς τὰ Ἑλληνικὰ σχολεῖα φοιτῶντες πρέπει ν' ἀρχίζωσιν εὐθὺς ἐκ τῆς θεωρίας. Ἀλλ' ἐκτὸς ὅτι ἡ ἡλικία των δὲν τὸ συγχωρεῖ, ἐκ τῶν δημοτικῶν σχολείων μεταβαίνουσιν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ ὄχι τόσον προητοιμασμένοι πρὸς θεωρίαν, καὶ ἀνάγκη ὀλίγον χρόνον ἀκόμη νὰ ἐνδιατρίψωσιν εἰς τὸ πρακτικὸν μέρος. Ἔπειτα εἰς τὸ βιβλιάριον τοῦτο εὑρίσκει τις ὄχι μόνον τὸ πρακτικὸν πολὺ τελειότερον, ἀλλ' εἴς τινα μέρη καὶ λόγους τῶν πράξεων καὶ ἄλλων τινῶν.

Θέλει δὲ εἶσθαι πολὺ ὠφέλιμον, νομίζω, ἂν οἱ μέλλοντες νὰ διδάξωσι ταύτην τὴν ἀριθμητικὴν περιορισθῶσιν εἰς ὅσα ἐμπεριέχονται εἰς τὸ βιβλιάριον τοῦτο, ἐπιμελούμενοι μάλιστα ν' ἀναδείξωσι τοὺς μαθητάς των ὅσον τὸ δυνατὸν γυμνασμένους εἰς τὸ ἐκτελεῖν ὁποιανδήποτε πρᾶξιν καὶ λύειν ὅμοια μὲ τὰ καταχωρηθέντα ἐνταῦθα προβλήματα. Ἐὰν τοῦτο πράξωσιν, ἂς ἦναι βέβαιοι ὅτι θέλουν ἔπειτα εὐχαριστηθῆ βλέποντες τοὺς μαθητάς των καταλαμβάνοντας εὐκολώτερον τὸ διατί, καὶ ἀκούοντες ὅτι δὲν ἔχουσι χρείαν νὰ μανθάνωσιν εἰς τὰ γυμνάσια νὰ ἐκτελῶσι πράξεις.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ. *Περὶ δεκαδικῶν ἀριθ*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ. *Περὶ ἀναλογιῶν καὶ μεθόδων.*

Ἡμαρτημένων διόρθωσις.

Σελ.	Στίχ.	
1		Ἀντὶ τῆς ἀρχῆς *Τινῶν πραγμάτων* κτλ νὰ τεθῇ τοῦτο ὡς ἁπλούστερον, ἂν ὄχι καὶ ἀκριβέστερον, Πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι μόνον του καὶ ὄχι μὲ ἄλλο ὅμοιόν του μαζί, ὀνομάζεται *ἕν*. Καὶ τινὰ μὲν πράγματα, ὁποῖα εἶναι τὸ δένδρον, τὸ παράθυρον, ὁ ἄνθρωπος, ἡ οἰκία κτλ, εὐκόλως διακρίνονται ὅτι εἶναι ἕκαστον ἕν.
19	8	ἄνωθεν ἀντὶ 459 γράψε 456.
61		εἰς τὸν τελευταῖον στίχον νὰ τεθῇ ἀντὶ τοῦ *εἴς τινα* τὸ *ὑπό τινος εἰς ἄλλον*.
81	25	ἀντὶ $4^{\text{τόν}}$ $5^{\text{τάλ}}$ $694^{\text{μν}}$ γράψε $45^{\text{τόν}}$ $6^{\text{τάλ}}$ $94^{\text{μν}}$.
82	4	ἀντὶ $6^{\text{όρ}}$ $7^{\text{δάκ}}$ γράψε $6^{\text{όρ}}$ $4^{\text{πόδ}}$ $7^{\text{δάκ}}$.

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Περὶ ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν.

1. Τινῶν πραγμάτων τοῦ κόσμου ὀνομάζεταί τι *ἕν*, ὅπως εἶναι, καὶ καθεὶς διακρίνει εὐκόλως ποῖον εἶναι *ἕν*, οἷον ἓν παράθυρον, ἓν δένδρον, ἓν μῆλον κτλ (α). Ἄλλων δέ τινων πραγμάτων, ὁποῖον εἶναι τὸ βάρος, τὸ μῆκος, ὁ χρόνος (καιρός), ἡ ἀξία κτλ, πρῶτον προσδιορίζεται κάμποσον κατὰ συνθήκην, καὶ τοῦτο ἔπειτα θεωρεῖται καὶ ὀνομάζεται *ἓν* ἢ *μονάς*. Οὕτως εἰς τὴν Ἑλλάδα κάμποσον βάρος, ὅσον εἶναι τὸ ὀνομαζόμενον *ὀκᾶ*, θεωρεῖται ὡς ἓν ἢ μονὰς τοῦ βάρους· κάμποσον μῆκος, ὅσον εἶναι τὸ λεγόμενον *πῆχυς*, θεωρεῖται ὡς ἓν ἢ μονὰς τοῦ μήκους· ὡσαύτως ἡ δραχμὴ θεωρεῖται ὡς μονὰς τῆς ἀξίας κτλ.

2. Ἓν καὶ ἕν, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι, ὀνομάζεται *δύο*

ἓν καὶ ἓν καὶ ἕν, ἢ δύο καὶ ἓν	*τρία*
ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἕν, ἢ τρία καὶ ἓν	*τέσσαρα*
ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἕν, ἢ τέσσαρα καὶ ἓν	*πέντε*
ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἕν, ἢ πέντε καὶ ἓν	*ἕξ*
ὡσαύτως, ἓξ καὶ ἓν	*ἑπτὰ*
ἑπτὰ καὶ ἓν	*ὀκτὼ*
ὀκτὼ καὶ ἓν	*ἐννέα*
ἐννέα καὶ ἓν	*δέκα* ἢ *δεκάς*.

Ὅλα ταῦτα ἤτοι τὰ δύο, τὰ τρία . . . τὰ δέκα εἶναι ἀριθμοί, καὶ γενικῶς *ἀριθμὸς* ὀνομάζεται μονάδων συλλογή, τῆς ὁποίας εἶναι προσδιωρισμένον πόσαι εἶναι αἱ μονάδες.

(α). Οὕτω λέγουσι καὶ ἀρσενικῶς εἷς ἄνθρωπος, εἷς ἵππος, εἷς ποταμός· ἢ θηλυκῶς μία οἰκία, μία θύρα, μία πόλις κτλ.

Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ ἦναι ὡρισμένον τι πρᾶγμα, οἷον δένδρον, οἰκία κτλ, ὁ ἀριθμὸς λέγεται *συγκεκριμένος*, οἷον δύο πήχεις, τρεῖς ὀκάδες, τέσσαρες ἄνθρωποι, πέντε δένδρα κτλ· ὁ πρῶτος εἶναι ἀριθμὸς πήχεων, ὁ δεύτερος ἀριθμὸς ὀκάδων κτλ. Ἂν δὲ ἡ μονὰς ἦναι ὁποιαδήποτε ἢ ἀόριστος, ὁ ἀριθμὸς ὀνομάζεται *ἀφηρημένος* πρὸς ἀντιδιαστολήν, οἷον τρία, ἑπτά, δέκα, τῶν ὁποίων ποία εἶναι ἡ μονὰς μένει ἀπροσδιόριστον.

Τέσσαρα παράθυρα, τέσσαρες πήχεις, τέσσαρες ὀκάδες εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἀλλὰ *διαφόρων* μονάδων· τέσσαρα δὲ παράθυρα, ἑπτὰ παράθυρα, δέκα παράθυρα εἶναι *διάφοροι* ἀριθμοὶ τῆς *αὐτῆς* μονάδος.

3. Ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλήτεροι τοῦ δέκα ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν οὕτω,

δέκα ἓν ἢ *ἕνδεκα*, δέκα δύο ἢ *δώδεκα*, *δέκα τρία*, *δέκα τέσσαρα*, *δέκα πέντε* . . . . *δέκα ἐννέα*, δέκα δέκα ἢ δύο δέκα ἢ *δύο δεκάδες* ἢ μονολεξεὶ *εἴκοσιν* — *εἴκοσιν ἕν*, *εἴκοσι δύο*, *εἴκοσι τρία* . . . *εἴκοσιν ἐννέα*, εἴκοσι δέκα ἢ τρία δέκα ἢ *τρεῖς δεκάδες* ἢ *τριάκοντα* — *τριάκοντα ἕν*, *τριάκοντα δύο* . . . . *τριάκοντα ἐννέα*, τριάκοντα δέκα ἢ τέσσαρα δέκα ἢ *τέσσαρες δεκάδες* ἢ *τεσσαράκοντα* — *τεσσαράκοντα ἕν*, *τεσσαράκοντα δύο* . . . *τεσσαράκοντα ἐννέα*, τεσσαράκοντα δέκα ἢ *πέντε δεκάδες* ἢ *πεντήκοντα* — *πεντήκοντα ἕν*, *πεντήκοντα δύο* . . . *πεντήκοντα ἐννέα*, πεντήκοντα δέκα ἢ *ἓξ δεκάδες* ἢ *ἑξήκοντα* — *ἑξήκοντα ἓν* . . . *ἑξήκοντα ἐννέα*, *ἑπτὰ δεκάδες* ἢ *ἑβδομήκοντα* — *ἑβδομήκοντα ἓν* . . . *ἑβδομήκοντα ἐννέα*, *ὀκτὼ δεκάδες* ἢ *ὀγδοήκοντα* — *ὀγδοήκοντα ἓν* . . . . *ὀγδοήκοντα ἐννέα*, *ἐννέα δεκάδες* ἢ *ἐννενήκοντα* — *ἐννενήκοντα ἓν* . . . . *ἐννενήκοντα ἐννέα*, *δέκα δεκάδες* ἢ *ἑκατὸν* ἢ *καὶ ἑκατοντάς*·

Τῶν ἀριθμῶν τούτων οἱ μὲν δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα . . . . ἐννενήκοντα, ἢ ἄλλως ἡ μία δεκάς, δύο δεκάδες . . . ἐννέα δεκάδες, ὀνομάζονται *ἀριθμοὶ δεκάδων*, διότι μονὰς αὐτῶν εἶναι ὄχι ἀμέσως τὸ ἕν, ἀλλὰ ὁ δέκα ἢ ἡ δεκάς· οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι ὅλοι σύνθετοι ἐξ ἀριθμοῦ τινος δεκάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων, οἷον πεντήκοντα ὀκτώ.

Τὰ ὀνόματα δέκα ἕν, δέκα δύο, δέκα δέκα ἢ δύο δέκα, εἴκοσι δέκα ἢ τρία δέκα κτλ δὲν εἶναι συνειθισμένα ὅσον τὰ ἕνδεκα, δώδεκα, δύο δεκάδες ἢ εἴκοσι, τρεῖς δεκάδες ἢ τριάκοντα κτλ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ κατάληξις *κοντα* σημαίνει δεκάδας. Κοινῶς δὲ λέγομεν συντομώτερα *τριάντα*, *σαράντα*, *πενῆντα* . . . *ἐννενῆντα*.

4. Ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλήτεροι τοῦ ἑκατὸν ὀνομάζονται οὕτως, *ἑκατὸν ἕν*, *ἑκατὸν δύο*, . . . *ἑκατὸν ἐννέα*, *ἑκατὸν δέκα*, *ἑκατὸν ἕνδεκα* . . . *ἑκατὸν εἴκοσιν*, *ἑκατὸν εἴκοσιν ἕν* . . . *ἑκατὸν ἐννενήκοντα ἐννέα*, ἑκατὸν ἑκατὸν ἢ δύο ἑκατὸν ἢ *δύο ἑκατοντάδες* ἢ μονολεξεὶ *διακόσια* — *διακόσια ἕν*, *διακόσια δύο* . . . *διακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*, διακόσια ἑκατὸν ἢ τρία ἑκατὸν ἢ *τρεῖς ἑκατοντάδες* ἢ *τριακόσια* — *τριακόσια ἕν*, *τριακόσια δύο* . . . *τριακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*, τριακόσια ἑκατὸν ἢ *τέσσαρες ἑκατοντάδες* ἢ *τετρακόσια*, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ *ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*· ὁ δὲ ἀκόλουθος λέγεται ἐννεακόσια ἑκατὸν ἢ *δέκα ἑκατοντάδες* ἢ μονολεξεὶ *χίλια* καὶ *χιλιάς*.

Τούτων τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν ἑκατόν, διακόσια . . . ἐννεακόσια, ἢ ἄλλως ἡ μία ἑκατοντάς, δύο ἑκατοντάδες . . . ἐννέα ἑκατοντάδες, ὀνομάζονται *ἀριθμοὶ ἑκατοντάδων*, διότι μονὰς αὐτῶν εἶναι ἡ ἑκατοντάς, ἀλλ' ὄχι τὸ ἓν ἢ ἡ δεκάς· οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι σύνθετοι ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑκατοντάδων καί τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ ἑκατόν, δηλ. εἶναι σύνθετοι οἱ μὲν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατοντάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων, οἷον ὁ *διακόσια τρία*, οἱ δὲ ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατοντάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος δεκάδων, οἷον ὁ *τριακόσια τεσσαράκοντα*, οἱ δὲ ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατοντάδων ἀριθμοῦ τινος δεκάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων, οἷον ὁ *πεντακόσια ἑβδομήκοντα τέσσαρα*.

Τὰ ὀνόματα ἑκατὸν ἑκατὸν ἢ δύο ἑκατόν, διακόσια ἑκατὸν ἢ τρία ἑκατὸν κτλ δὲν εἶναι συνειθισμένα ὅσον τὸ δύο ἑκατοντάδες ἢ διακόσια, τρεῖς ἑκατονταδες ἢ τριακόσια, κτλ. Παρατηροῦμεν δὲ καὶ ἐδῶ ὅτι ἡ κατάληξις *κοσια* σημαίνει ἑκατοντάδας.

Σημ. α'. Τὸ ἓν ἢ ἡ μονὰς λέγεται *ἀρχικὴ* καὶ *πρώτης τάξεως*, ὁ δέκα ἢ ἡ δεκὰς λέγεται μονὰς *δευτέρας τάξεως*, καὶ ὁ ἑκατὸν ἢ ἡ ἑκατοντὰς ὀνομάζεται μονὰς *τρίτης τάξεως*.

Σημ. 6΄. Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ χίλια συνήθως λέγονται γενικῶς ἀριθμοὶ *ἁπλῶν μονάδων*.

5. Ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλήτεροι τοῦ χίλια λέγονται κατὰ σειρὰν οὕτως,

χίλια ἕν, χίλια δύο, χίλια τρία . . . . . χίλια ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα

δύο χιλιάδες, δύο χιλιάδες { *ἕν, δύο, τρία . . . . ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*

τρεῖς χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες { *ἕν, δύο, τρία . . . ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*

τέσσαρες χιλιάδες, —
πέντε χιλιάδες, —
ἕξ χιλιάδες, —
ἑπτὰ χιλιάδες, —
.
.
.
ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες —

} *ἕν, δύο, τρία . . . . . ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*

χίλιαι χιλιάδες ἢ μονολεξεὶ *ἑκατομμύριον* ἢ καὶ *χιλιόνιον*.

Τούτων τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν ἀριστεροὶ χίλια, δύο χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες . . . ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες ὀνομάζονται *ἀριθμοὶ χιλιάδων*, διότι μονὰς πρωτεύουσα (ἰδὲ ἀρ. 6 σημ.) αὐτῶν εἶναι ἡ χιλιάς· ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι εἶναι σύνθετοι ἔκ τινος ἀριθμοῦ χιλιάδων καὶ ἐξ ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια ἤτοι ἀριθμοῦ ἁπλῶν μονάδων.

Καὶ οἱ μὲν χίλια, δύο χιλιάδες . . . . . ἐννέα χιλιάδες εἶναι ἀριθμοὶ *μονάδων χιλιάδος*, καὶ ἡ χιλιὰς μονὰς *τετάρτης τάξεως*· οἱ δὲ δέκα χιλιάδες, εἴκοσι χιλιάδες . . . ἐννενήκοντα χιλιάδες εἶναι ἀριθμοὶ *δεκάδων χιλιάδος*, καὶ ἡ δεκὰς χιλιάδος, Ἑλληνιστὶ λεγομένη *μυριάς*, ὀνομάζεται μονὰς *πέμπτης τάξεως*· οἱ δὲ ἑκατὸν χιλιάδες, διακόσιαι χιλιάδες . . . ἐννεακόσιαι χιλιάδες εἶναι ἀριθμοὶ *ἑκατοντάδων χιλιάδος*, καὶ ἡ ἑκατοντὰς χιλιάδος μονὰς *ἕκτης τάξεως*· οἱ δὲ λοιποὶ ἀριθμοὶ τῶν χιλιάδων εἶναι σύνθετοι ἐκ ταύτων τῶν ἀριθμῶν, οἷον *πεντακόσιαι τριάκοντα ὀκτὼ χιλιάδες*.

6. Ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλήτεροι τοῦ ἑκατομμυρίου ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν οὕτως,

ἓν ἑκατομμύριον ἕν, ἓν ἑκατομμύριον δύο, ἓν ἑκατομμύριον τρία .... ἓν ἑκατομμύριον ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα

δύο ἑκατομμύρια, δύο ἑκατομμύρια { *ἕν, δύο, τρία ... ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*

τρία ἑκατομμύρια, ——
τέσσαρα ἑκατομμύρια, ——
πέντε ἑκατομμύρια, ——
.
.
.
.
.
.
.
ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα ἑκατομμύρια, ——

{ *ἕν, δύο, τρία ...... ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα.*

χίλια ἑκατομμύρια ἢ μονολεξεὶ *διχιλιόνιον* ἢ ἁπλούστερα *διλιόνιον*.

Τούτων τῶν ἀριθμῶν οἱ ἀριστεροὶ ἓν ἑκατομμύριον, δύο ἑκατομμύρια ... ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα ἑκατομμύρια λέγονται *ἀριθμοὶ ἑκατομμυρίων*. Καὶ οἱ μὲν ἓν ἑκατομμύριον, δύο ἑκατομμύρια ... ἐννέα ἑκατομμύρια εἶναι ἀριθμοὶ *μονάδων ἑκατομμυρίου*, οἱ δὲ δέκα, εἴκοσι .... ἐννενήκοντα ἑκατομμύρια εἶναι ἀριθμοὶ *δεκάδων ἑκατομμυρίου*, οἱ δὲ ἑκατὸν, διακόσια ... ἐννεακόσια ἑκατομμύρια εἶναι ἀριθμοὶ *ἑκατοντάδων ἑκατομμυρίου*· οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι σύνθετοι ἐκ τούτων— Καὶ ἡ μὲν μονὰς ἑκατομμυρίου εἶναι *μονὰς ἑβδόμης τάξεως*, ἡ δὲ δεκὰς ἑκατομμυρίου *μονὰς ὀγδόης τάξεως*, ἡ δὲ ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου *μονὰς ἐννάτης τάξεως*.

Ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ εἶναι σύνθετοι ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἑκατομμυρίων καὶ ἐξ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου τοῦ ἑκατομμυρίου, ἤτοι ἀριθμοῦ ἁπλῶν μονάδων, ἢ ἀριθμοῦ χιλιάδων, ἢ ἀριθμοῦ χιλιάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων.

Ἐκ δὲ τῶν εἰρημένων νοεῖται εὐκόλως καὶ πῶς ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλήτεροι τοῦ διλιονίου ἕως εἰς τὸν χίλια διλιόνια, ὅστις λέγεται τριλιόνιον, κτλ.

Σημ. Ἡ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ διλιόνιον κτλ ὀνομάζονται *πρωτεύουσαι μονάδες*, ἡ δὲ μονὰς πάλιν, ἡ δεκὰς καὶ ἡ ἑκατοντὰς καὶ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ τῶν χιλιάδων κτλ λέγονται *δευτερεύουσαι μονάδες*. Ἐννεακόσιοι ἐννενήκοντα ἐννέα εἶναι οἱ ἑκάστης πρωτευούσης μονάδος ἀριθμοί, καὶ ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὀνόματα ἕν, δύο, τρία κτλ μέχρι τοῦ ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα. Ἐννέα εἶναι οἱ ἑκάστης δευτερευούσης μονάδος ἀριθμοί, καὶ ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὀνόματα ἕν, δύο, τρία . . . ἐννέα, συνωδευμένα ὑπὸ τῆς λέξεως μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, ἢ ἔχοντα, ὅταν μὲν ἦναι δεκάδες, τὴν κατάληξιν κοντα, ὅταν δὲ ἦναι ἑκατοντάδες, τὴν κατάληξιν κοσια. Εἶναι ὠφελιμώτατον νὰ μάθῃ τις καλὰ τὰ ὀνόματα τῶν μικροτέρων τοῦ χίλια ἀριθμῶν, διότι αὐτὰ συνοδευόμενα μὲ τὰ ὀνόματα τῶν πρωτευουσῶν μονάδων ἀποτελοῦσι τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἷον τοῦ ἑβδομήκοντα πέντε *ἑκατομμύρια* τετρακόσια τριάκοντα ὀκτὼ *χιλιάδες* πεντήκοντα ἑπτὰ *μονάδες*, ὅστις ἔχει τὸν ἑβδομήκοντα πέντε, τὸν τετρακόσια τριάκοντα ὀκτὼ καὶ τὸν πεντήκοντα ἑπτά, ἀλλ' ὁ μὲν εἶναι ἑκατομμύρια, ὁ δὲ χιλιάδες, ὁ δὲ μονάδες.

Περὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

7. Οἱ ἀριθμοὶ σχεδὸν πάντοτε γράφονται διά τινων σημείων, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται *ἀραβικοὶ χαρακτῆρες* ἢ *ἀραβικὰ ψηφία*. Τὰ ψηφία ταῦτα εἶναι δέκα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9· σημαίνουσι κατὰ σειρὰν ὅ,τι σημαίνουν αἱ λέξεις τίποτε, ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα· ὀνομάζονται τὸ μὲν 0 *μηδενικὸν* καὶ *ἀσήμαντον* ψηφίον, τὰ δὲ 1, 2 . . . 9 *σημαντικὰ* ψηφία· καὶ τιθέμενα ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου παριστάνουν μονάδας διαφόρων τάξεων οὕτως, ἐὰν μὲν ἦναι εἰς τὴν δευτε-

ραν θέσιν πρὸς ἀριστερὰν, παριστάνουν μονάδας δευτέρας τάξεως ἤτοι δεκάδας, ἂν δὲ ἦναι εἰς τὴν τρίτην, μονάδας τρίτης τάξεως ἤτοι ἑκατοντάδας κτλ.

Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν κατὰ σειρὰν ἀπὸ τῆς μονάδος ἕως εἰς τὸν ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα γράφονται οὕτως,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

100 101 102 ... 109 110 111 ... 120 ... 130 ...	199
200 201 202 ... 209 210 ... ... 220 ... 230 ...	299
300 301 302 ... 309 310 ... ... 320 ... 330 ...	399
400 401 402	499
500 501	599
600 601	699
700 701	799
800 801	899
900 901	999

Τούτων δὲ οἱ μὲν ἕως εἰς τὸν ἐννέα ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ τῶν μονάδων εἶναι γραμμένοι μὲ ἓν ψηφίον, καὶ ὀνομάζονται *μονοψήφιοι*. Οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ δέκα ἕως εἰς τὸν ἐννενήκοντα ἐννέα εἶναι γραμμένοι μὲ δύο ψηφία, τῶν ὁποίων τὸ δεξιὸν παριστάνει μονάδας καὶ τὸ ἀριστερὸν ἤτοι τὸ εἰς τὴν δευτέραν θέσιν δεκάδας, ὀνομάζονται δὲ *διψήφιοι*· καὶ οἱ μὲν εἰς τὴν ἀριστερὰν στήλην ἀπὸ τοῦ 10 ἕως εἰς τὸν 90 παριστάνουσι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν δεκάδων, διότι εἰς τὴν δευτέραν θέσιν εἶναι σημαντικὸν ψηφίον, εἰς δὲ τὴν πρώτην θέσιν εἶναι 0, οἱ δὲ δεξιὰ τούτων παριστάνουσιν ἀριθμοὺς συνθέτους ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑκατὸν ἕως εἰς τὸν ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα εἶναι γραμμένοι μὲ τρία ψηφία, τῶν ὁποίων τὸ ἀριστερὸν ἤτοι τὸ εἰς τὴν τρίτην θέσιν παριστάνει ἑκατοντάδας, τὸ μεσαῖον δεκάδας καὶ τὸ δεξιὸν μονάδας, ὀνομάζονται δὲ *τριψήφιοι*. Καὶ οἱ μὲν εἰς τὴν ἀριστερὰν στήλην ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 900 σημαίνουν ἀριθμοὺς ἑκατοντάδων, διότι τὰ 1, 2 . . . 9 εἶναι εἰς τὴν τρίτην θέσιν, εἰς δὲ τὴν θέσιν τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων εἶναι 0· οἱ δὲ δεξιὰ τούτων σημαίνουν ἀριθμοὺς συνθέτους ἢ ἐξ ἑκατοντάδων καὶ μονάδων, ἂν ἦναι 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, ἢ ἐξ ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, ἂν ἦναι 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, ἢ ἐξ ἑκατοντάδων δεκάδων καὶ μονάδων, ἂν δὲν ὑπάρχῃ 0.

Σημ. Τὰ μὲν ψηφία σημαίνουν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, ἡ δὲ θέσις αὐτῶν τὴν τάξιν τῶν μονάδων. Π. χ. τὸ 5, ὅπου καὶ ἂν εὑρεθῇ, σημαίνει πέντε, ἀλλ' εἰς τὴν δευτέραν θέσιν ὂν σημαίνει δεκάδας, εἰς τὴν τρίτην ἑκατοντάδας, κτλ.

8. Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος σημαίνουν χιλιάδας, ἐὰν δεξιά των ἦναι γραμμένα ἢ 000, οἷον 1000, 2000, 3000 . . . . . 9000, 10000, 11000, ... 99000, 100000, 101000 . . . 999000, ἢ τρία ὁποιαδήποτε ψηφία, τὰ ὁποῖα παριστάνουν ἀριθμὸν ἁπλῶν μονάδων, οἷον 530738, 4580, 38003.

Οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ τοῦ πίνακος παριστάνουσιν ἑκατομμύρια, ἐὰν ἦναι δεξιά των γραμμένα ἓξ ψηφία. Καὶ ἂν μὲν τὰ ἓξ δεξιὰ ἦναι μηδενικά, οἷον 12000000, 374000000, 6000000, τότε εἶναι ἀριθμοὶ μόνον ἑκατομμυρίων· ἂν δὲ ἦναι σημαντικὰ ἢ ὅλα ἢ τινά, τὰ τρία δεξιὰ παριστάνουν ἀριθμὸν μονάδων, τὰ ἀριστερὰ τούτων τρία ἀριθμὸν χιλιάδων, καὶ τὰ ἔτι ἀριστερώτερα, ἢ ἓν εἶναι ἢ δύο ἢ τρία, παριστάνουσιν ἑκατομμύρια, οἷον 5308290, 78046003.

Ἐὰν δὲ ἦναι δεξιὰ τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν ἐννέα ψηφία, παριστάνουσιν αὐτοὶ διλιόνια· κτλ.

Ὥστε βλέπει τις ὅτι οἱ αὐτοὶ προειρημένοι ἀριθμοί, οἵτινες παριστάνουσι τοὺς μικροτέρους τοῦ χίλια ἀριθμούς, σημαίνουν καὶ χιλιάδας καὶ ἑκατομμύρια, ἐὰν μόνον ἦναι γραμμένοι εἰς τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν ἤδη εἴπομεν.

9. Μετὰ ταῦτα εἶναι εὔκολον καὶ νὰ γράφῃ τις ἀπαγγελλόμενον ἀριθμὸν ὁποιονδήποτε καὶ ν' ἀπαγγέλλῃ γραμμένον. Ἂς γραφθῇ π. χ. ὁ τριάκοντα πέντε *χιλιάδες* τετρακόσια ἑξήκοντα δύο. Ὁ τριάκοντα πέντε κατὰ τὸν ἀνωτέρω πίνακα γράφεται οὕτω 35, ἀλλὰ διὰ νὰ ἦναι χιλιάδες, πρέπει νὰ ἔχῃ τρία ψηφία δεξιά του· ὁ τετρακόσια ἑξήκοντα δύο ὡσαύτως γράφεται 462· ἂν λοιπὸν οὗτος γραφθῇ δεξιὰ τοῦ 35, θέλει εἶσθαι γραμμένος ὁ ἀνωτέρω ἀπαγγελθεὶς ἀριθμὸς οὕτω 35462. Ἂς γραφθῇ καὶ ὁ τριακόσιαι εἴκοσι *χιλιάδες* ἑβδομήκοντα ὀκτώ. Ὁ τριακόσια εἴκοσι γράφεται οὕτω 320, ἀλλὰ διὰ νὰ ἦναι χιλιάδες, πρέπει νὰ ἔχῃ δεξιά του τρία ψηφία· ὁ ἑβδομήκοντα ὀκτὼ γράφεται οὕτω 78. Ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτος γράφεται μὲ δύο ψηφία, δεξιὰ δὲ τοῦ 320 πρέπει νὰ ἦναι τρία, γράφεται ἀριστερὰ τοῦ 78 ἓν 0, καὶ ὁ 078 γράφεται δεξιὰ τοῦ 320· ὥστε ὁ ἀπαγγελθεὶς ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι γραμμένος οὕτω 320 078. Ὡσαύτως ὁ πεντακόσιαι *χιλιάδες* ἐννέα γράφεται οὕτω 500 009, ὁ ἑπτὰ χιλιάδες τριακόσια οὕτω 7 300, κτλ.

Γενικῶς κανών. α'. Διὰ νὰ γραφθῇ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμός, *πρῶτον γράφεται ὁ τῆς ἀνωτάτης πρωτευούσης μονάδος ἀριθμός, ὅστις εἰμπορεῖ νὰ ἦναι μονοψήφιος ἢ διψήφιος ἢ τριψήφιος· ἔπειτα δεξιὰ τούτου γράφεται ὁ τῆς ἀμέσως κατωτέρας πρωτευούσης μονάδος ἀριθμός, ἂν ὑπάρχῃ, καὶ ἂν ἦναι τριψήφιος· ἂν ὅμως δὲν ὑπάρχῃ, γράφονται τρία μηδενικά, ἢ ἂν ὑπάρχῃ μέν, ἀλλ' ἦναι μονοψήφιος ἢ διψήφιος, γράφονται πρῶτον* 00 *ἢ* 0 *καὶ ἔπειτα αὐτός· δεξιὰ τούτου πάλιν γράφεται ὁ τῆς ἀμέσως κατωτέρας πρωτευούσης μονάδος ἀριθμός, ὡς ἤδη εἴπομεν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἁπλῶν μονάδων.*

β'. Διὰ ν' ἀπαγγελθῇ δὲ γραμμένος ἀριθμός, *ἀφοῦ ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριστερὰ χωρισθῇ εἰς τμήματα ἐκ τριῶν ψηφίων καθέν, καὶ προσδιορισθῇ οὕτω τίνος πρωτευούσης μονάδος ἀριθμὸν παριστάνει τὸ ἀριστερὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἰμπορεῖ νὰ ἦναι μονοψήφιον, ἢ διψήφιον, ἢ τριψήφιον, ἀπαγγέλλεται πρῶτον τοῦτο, ὡς ἂν ἦτον ἀριθμὸς τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, εἰς δὲ τὸ τέλος λέγεται ἡ πρωτεύουσα μονάς του· ἔπειτα ἀπαγγέλ-*

λεται ὡσαύτως τὸ ἀμέσως πρὸς δεξιάν του τμῆμα, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ δεξιοῦ τμήματος τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Κατὰ τοῦτον τὸν κανόνα ὁ 47560403 ἀπαγγέλλεται τεσσαράκοντα ἑπτὰ *ἑκατομμύρια* πεντακόσιαι ἑξήκοντα *χιλιάδες* τετρακόσια τρία· ὁ 9038006 ἀπαγγέλλεται ἐννέα *ἑκατομμύρια* τριάκοντα ὀκτὼ *χιλιάδες* ἕξ· ὁ 370000600 εἶναι τριακόσια ἑβδομήκοντα *ἑκατομμύρια* ἑξακόσια.

Εἶναι καλὸν νὰ γίνηται πολὺ γύμνασις μάλιστα εἰς τὸ νὰ γράφηται ἀπαγγελλόμενος ἀριθμός.

Περὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν.

10. Ἐὰν τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν ἀριθμῶν λάβωσι κατάληξιν *ον* ἢ *τον*, γίνονται ἐκ τοῦ δύο δεύτερον ἢ ἥμισυ, ἐκ τοῦ τρία τρίτον, ἐκ τοῦ τέσσαρα τέταρτον, καὶ ἐφεξῆς πέμπτον, ἕκτον, ἕβδομον, ὄγδοον (α), ἔννατον, δέκατον, ἑνδέκατον, δωδέκατον, δέκατον τρίτον, δέκατον τέταρτον . . . εἰκοστόν, εἰκοστὸν πρῶτον . . . τριακοστὸν . . . . τεσσαρακοστόν, τεσσαρακοστὸν πρῶτον . . . πεντηκοστὸν . . . ἑξηκοστὸν . . . ἑβδομηκοστὸν . . . ὀγδοηκοστὸν . . . ἐννενηκοστὸν . . . ἑκατοστὸν . . . διακοσιοστὸν . . . . τριακοσιοστὸν . . . . ἐννεακοσιοστὸν . . . χιλιοστὸν κτλ. Ταῦτα ὅμως δὲν σημαίνουσι πλέον τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εἴπομεν ἀνωτέρω, ἀλλὰ σημαίνουν μέρος ἢ πράγματος ὁποιουδήποτε, ἢ ἀριθμοῦ, ἢ μονάδος. Ἐὰν βιβλίον τι μερισθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ἓν τῶν δύο λέγεται ἥμισυ τοῦ βιβλίου, ἐὰν μερισθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη, τὸ ἓν τῶν τριῶν λέγεται τρίτον μέρος τοῦ βιβλίου, ἐὰν μερισθῇ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, τὸ ἓν τῶν τεσσάρων λέγεται τέταρτον τοῦ βιβλίου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἡ μονὰς εἶναι ἥμισυ τοῦ δύο, τρίτον τοῦ τρία, τέταρτον τοῦ τέσσαρα, πέμπτον τοῦ πέντε . . . . δέκατον τοῦ δέκα, ... εἰκοστὸν τοῦ εἴκοσι . . . ἑκατοστὸν τοῦ ἑκατόν, . . . χιλιοστὸν τοῦ χίλια, κτλ.

(α). Τὸ δεύτερον τὸ ἕβδομον καὶ τὸ ὄγδοον ἔχουσι κατάληξιν ο ν· τὰ δὲ εἰκοστόν, τριακοστὸν . . . . ἑκατοστόν, διακοσιοστόν, χιλιοστὸν ἔχουσι κατάληξιν σ τ ο ν.

Ἀλλὰ καὶ μονάδα τινὰ, οἷον τὸν πῆχυν, ἐὰν μερίσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ἓν τῶν δύο εἶναι ἥμισυ τοῦ πήχεως, ἐὰν τὸν μερίσωμεν εἰς τρία ἴσα μέρη, τὸ ἓν τῶν τριῶν εἶναι τρίτον τοῦ πήχεως, κτλ.

Δύο ἡμίση τοῦ πήχεως ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν πῆχυν, τρίατρίτα τοῦ πήχεως ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν πῆχυν, τέσσαρα τέταρτα ὡσαύτως, πέντε πέμπτα . . . δέκα δέκατα, κτλ.

11. Τὸ ἥμισυ μονάδος τινὸς, τὸ τρίτον αὐτῆς, τὸ τέταρτον, τὸ πέμπτον κτλ θεωρεῖται καὶ αὐτὸ ὡς μονὰς, ἥτις ὀνομάζεται γενικῶς *κλασματικὴ μονάς*. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι κλασματικαὶ μονάδες εἶναι πολλόταται, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοί.

Τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν τῶν τοιούτων μονάδων εἶναι αὐτὰ τὰ προηγούμενα, οἷον δύο ἡμίση ἢ δύο δεύτερα, τρία δεύτερα κτλ — δύο τρίτα, τρία τρίτα, τέσσαρα τρίτα, κτλ — δύο τέταρτα, τρία τέταρτα, τέσσαρα τέταρτα, πέντε τέταρτα κτλ. Τὸ δύο, τρία, τέσσαρα κτλ εἶναι ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον, τρίτον, τέταρτον κτλ εἶναι ὄνομα τῆς μονάδος.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν κλασματικῶν μονάδων λέγονται *κλασματικοὶ ἀριθμοί*, οἱ δὲ προηγούμενοι πρὸς ἀντιδιαστολὴν λέγονται *ἀκέραιοι*. Ὁ *ὀκτὼ δεκάδες* εἶναι ἀκέραιος, ὁ δὲ *ὀκτὼ δέκατα τῆς ὀκᾶς* εἶναι κλασματικός. Καὶ ὁ μὲν ὀκτὼ ἤτοι τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ λέγεται *ἀριθμητὴς τοῦ κλασματικοῦ*, ὁ δὲ δέκατα τῆς ὀκᾶς ἤτοι τὸ ὄνομα τῆς κλασματικῆς μονάδος λέγεται *παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ*, οἱ δύο δὲ κοινῶς *λέγονται ὅροι τοῦ κλασματικοῦ*.

12. Κλασματική τις μονὰς γράφεται ἢ ἂν γραφθῇ ὑπὸ τὴν 1 γραμμὴ καὶ ὑποκάτω ὁ ἁρμόδιος ἀριθμὸς, οἷον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ κατὰ σειρὰν γράφονται οὕτω, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$ κτλ, ἢ ἂν γραφθῇ μόνον τὸ 2, 3, μὲ τὸ ον ἐπάνω του, οἷον 2ον, 3ον, 4ον, 5ον, 6ον, κτλ. Οἱ δὲ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται, ἐὰν γραφθῇ ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν ὁ παρονομαστὴς καὶ χωρισθῶσι διὰ γραμμῆς, οἷον $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$ κτλ, τὰ ὁποῖα σημαίνουν δύο πέμπτα, τρία πέμπτα κτλ.

13. Ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, οἷον $\frac{5}{8}$, λέγεται *μερικώτερον κλάσμα*. Τὰ $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{9}{12}$ εἶναι κλάσματα.

14. *Μικτὸς* δὲ ἀριθμὸς λέγεται ὁ σύνθετος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, οἷον 7 $\frac{3}{4}$, 20 $\frac{7}{9}$

15. Οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι ἴσαι ἢ καὶ ὅμοιαι μόνον, λέγονται *ὁμώνυμοι*, οἷον οἱ 7 πήχεις καὶ 12 πήχεις — 6 ὀκάδες καὶ 9 ὀκάδες, 16 βιβλία καὶ 10 βιβλία — $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως καὶ $\frac{7}{4}$ τοῦ πήχεως — $\frac{6}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς — 4 δεκάδες καὶ 7 δεκάδες — 3 ἑκατοντάδες καὶ 8 ἑκατοντάδες. Ἐκεῖνοι δέ, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι ἄνισοι, λέγονται *ἑτερώνυμοι ἀριθμοί*, οἷον οἱ 8 πήχεις καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ πήχεως — 6 δραχμαὶ καὶ 9 λεπτὰ — $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{3}{6}$ — $\frac{9}{12}$ τοῦ πήχεως καὶ $\frac{8}{10}$ τοῦ πήχεως — 8 δεκάδες καὶ 5 ἑκατοντάδες κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Περὶ προσθέσεως ἀκεραίων.

16. *Πρόσθεσις ἀριθμοῦ εἰς ἄλλον ἀριθμὸν* εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἑνόνονται αἱ μονάδες τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ μὲ τὰς τοῦ δευτέρου· οὕτω δὲ προκύπτει τρίτος ἀριθμός, ὅστις ἔχει ὅσας μονάδας ἔχει ὁ εἷς καὶ ὁ ἄλλος χωριστά, καὶ ὅστις ὀνομάζεται *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον* τῶν δύο πρώτων.

Οἱ *εἰς πρόσθεσιν ἀριθμοὶ* πρέπει νὰ ἦναι πάντοτε ὁμώνυμοι, καὶ τὸ ἄθροισμά των παρομοίως.

17. Μονοψήφιος ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄλλον μονοψήφιον ἢ καὶ πολυψήφιον, *ἐὰν προστιθῶσιν ἀπὸ μίαν αἱ μονάδες τοῦ πρώτου εἰς τὸν δεύτερον καὶ ἀπαγγελθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν*· ὁ εἰς τὸ τέλος προκύπτων ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων.

Ἀλλὰ διὰ νὰ μάθωσιν οἱ ἀρχάριοι νὰ εὑρίσκωσιν εὐθὺς τὸ ἄθροισμα, τίθεται ὁ ἀκόλουθος πίναξ ὀνομαζόμενος

Προπαίδεια τῆς προσθέσεως

2 καὶ 1	3	4 καί 1	5	6 καὶ 1	7	8 καὶ 1	9
2 — 2	4	4 — 2	6	6 — 2	8	8 — 2	10
2 — 3	5	4 — 3	7	6 — 3	9	8 — 3	11
2 — 4	6	4 — 4	8	6 — 4	10	8 — 4	12
2 — 5	7	4 — 5	9	6 — 5	11	8 — 5	13
2 — 6	8	4 — 6	10	6 — 6	12	8 — 6	14
2 — 7	9	4 — 7	11	6 — 7	13	8 — 7	15
2 — 8	10	4 — 8	12	6 — 8	14	8 — 8	16
2 — 9	11	4 — 9	13	6 — 9	15	8 — 9	17
3 καὶ 1	4	5 καὶ 1	6	7 καὶ 1	8	9 καὶ 1	10
3 — 2	5	5 — 2	7	7 — 2	9	9 — 2	11
3 — 3	6	5 — 3	8	7 — 3	10	9 — 3	12
3 — 4	7	5 — 4	9	7 — 4	11	9 — 4	13
3 — 5	8	5 — 5	10	7 — 5	12	9 — 5	14
3 — 6	9	5 — 6	11	7 — 6	13	9 — 6	15
3 — 7	10	5 — 7	12	7 — 7	14	9 — 7	16
3 — 8	11	5 — 8	13	7 — 8	15	9 — 8	17
3 — 9	12	5 — 9	14	7 — 9	16	9 — 9	18

Εἴτε μονάδας εἴτε δεκάδας εἴτε ἑκατοντάδας κτλ παριστάνουν οἱ εἰς πρόσθεσιν ἀριθμοί, τὸ κεφάλαιόν των θέλει εἶσθαι πάντοτε ὁ εἰς τὸν πίνακα ἀριθμός, ἀλλὰ θέλει εἶσθαι ὁμώνυμος μὲ τοὺς εἰς πρόσθεσιν ἀριθμούς, οἷον 5 μονάδες καὶ 8 μονάδες 13 μονάδες, 5 δεκάδες καὶ 8 δεκάδες 13 δεκάδες, 5 ἑκατοντάδες καὶ 8 ἑκατοντάδες 13 ἑκατοντάδες, κτλ.

Ἐὰν δὲ ζητῆται τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς ὅςις ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουσιν οἱ πολλοὶ ἀριθμοὶ χωριστά, πρέπει νὰ γείνωσι πολλαὶ προσθέσεις μία κατόπιν τῆς ἄλλης. Ἂς εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον π. χ. τοῦ 6 καὶ 8 καὶ 4 καὶ 5. Πρῶτον λέγομεν 6 καὶ 8 14· ἔπειτα 14 καὶ 4 18, διότι 14 καὶ 4 εἶναι 10 καὶ 4 καὶ 4, ἢ 10 καὶ 8, ἢ 18· τελευταῖον 18 καὶ 5 23, διότι 18 καὶ 5 εἶναι 10 καὶ 8 καὶ 5, ἢ 10 καὶ 13, ἢ 10 καὶ 10 καὶ 3, ἢ 23. Τὸ ἄθροισμα τοῦ 7 καὶ 5 καὶ 6 καὶ 8 καὶ 3 εἶναι 29 — Τὸ ἄθροισμα τοῦ 9 καὶ 4 καὶ 2 καὶ 5 καὶ 6 καὶ 7 εἶναι 33.

18. Πολυψήφιοι δὲ ἀριθμοὶ δύο ἢ περισσότεροι προσθέτονται οὕτω,

Γράφεται ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες των νὰ ἦναι εἰς μίαν στήλην, (ἐπομένως καὶ αἱ δεκάδες των θέλουν εἶσθαι εἰς μίαν στήλην καὶ αἱ ἑκατοντάδες των παρομοίως κτλ), *ὑποκάτω αὐτῶν σύρεται γραμμὴ, καὶ ἔπειτα προσθέτονται αἱ μονάδες των· καὶ ἂν μὲν ἦναι τὸ ἄθροισμά των μικρότερον τοῦ 10, γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας· ἐὰν δὲ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ 9, τότε ὑπὸ τὰς μονάδας γράφεται μόνον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων προσθέτεται εἰς τὰς δεκάδας· τὸ αὐτὸ τοῦτο γίνεται καὶ εἰς τὰς δεκάδας καὶ εἰς τὰς ἑκατοντάδας κτλ.*

Ὁ δὲ οὕτως εὑρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν εἰς πρόσθεσιν ἀριθμῶν.

Ἂς προστεθῇ ὁ 5472 εἰς τὸν 2514. Ἀφοῦ γράψωμεν τὸν 5472 ὑπὸ τὸν 2514 ὡς ἤδη εἴπομεν καὶ ἀντικρὺ φαίνεται, λέγομεν 2 καὶ 4 6 μονάδες, καὶ τὰς γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας· ἔπειτα 7 καὶ 1 8 δεκάδες, καὶ τὰς γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας· ἔπειτα 4 καὶ 5 9 ἑκατοντάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τελευταῖον 5 καὶ 2 7 χιλιάδες, καὶ τὰς γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας. Ὁ δὲ 7986 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{r} 2514 \\ 5472 \\ \hline 7986 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63059 \\ 5820 \\ \hline 68879 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3425 \\ 4530 \\ 1023 \\ \hline 8978 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6000 \\ 500 \\ 30 \\ 8 \\ \hline 6538 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3210 \\ 573 \\ 2015 \\ \hline 5798 \end{array}$$

Ἂς προστεθῇ καὶ ὁ 6598 εἰς τὸν 7969. 8 καὶ 9 17 μονάδες, ἢ 1 δεκὰς καὶ 7 μονάδες· γράφομεν 7 ὑπὸ τὰς μονάδας, καὶ προσθέτομεν τὴν 1 δεκάδα εἰς τὰς δεκάδας λέγοντες 1 καὶ 9 10 καὶ 6 16 δεκάδες, ἢ 1 ἑκατοντὰς καὶ 6 δεκάδες· γράφομεν 6 ὑπὸ τὰς δεκάδας, καὶ προσθέτομεν τὴν 1 ἑκατοντάδα εἰς τὰς ἑκατοντάδας λέγοντες 1 καὶ 5 6 καὶ 9 15 ἑκατοντάδες, ἢ 1 χιλιὰς καὶ 5 ἑκατοντάδες· γράφομεν 5 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, καὶ προσθέτομεν τὴν 1 χιλιάδα εἰς τὰς χιλιάδας λέγοντες 1 καὶ 6 7 καὶ

$$\begin{array}{r} 7969 \\ 6598 \\ \hline 14567 \end{array}$$

7 14 χιλιάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας. Ὁ δὲ 14567 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 9879, 674, 4798;

Τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων εἶναι 21 μονάδες, ἢ 2 δεκάδες καὶ 1 μονάς· γράφεται 1 ὑπὸ τὰς μονάδας, προσθέτονται αἱ 2 δεκάδες εἰς τὰς δεκάδας καὶ γίνεται ἄθροισμα τῶν δεκάδων 25 δεκάδες, ἢ 2 ἑκατοντάδες καὶ 5 δεκάδες· γράφεται 5 ὑπὸ τὰς δεκάδας, προσθέτονται αἱ 2 ἑκατοντάδες εἰς τὰς ἑκατοντάδας καὶ γίνεται ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων 23 ἑκατοντάδες, ἢ 2 χιλιάδες καὶ 3 ἑκατοντάδες· τελευταῖον γράφεται 3 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, προσθέτονται αἱ 2 χιλιάδες εἰς τὰς χιλιάδας καὶ γίνεται ἄθροισμα τῶν χιλιάδων 15 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι γράφονται ὑπὸ τὰς χιλιάδας. Ὁ δὲ 15351 εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

9879
674
4798
15351

	60357	9898	
38047	4987	989	78030
6409	97848	788	60380
83640	8459	6978	3800
99879	39876	5689	740
227975	211527	24342	142950

Περὶ ἀφαιρέσεως ἀκεραίων.

19. *Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπ' ἄλλον ἀριθμὸν* εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἀπὸ τὸν δεύτερον ἐκβάλλονται τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ πρῶτος. Ἀφοῦ δὲ γείνῃ ἡ ἀφαίρεσις, προκύπτει τρίτος ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ μεγαλήτερος περισσοτέρας τοῦ μικροτέρου, ἢ οὗτος ὀλιγωτέρας τοῦ μεγαλητέρου. Ὁ τρίτος οὗτος ἀριθμὸς λέγεται *ὑπόλοιπον* ἢ *ὑπεροχὴ* ἢ καὶ *διαφορά*. Ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς, ἀπὸ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκβάλλωνται αἱ μονάδες, λέγεται *ἀφαιρετέος*, ὁ δὲ ἄλλος, ὅστις δεικνύει πόσαι πρέπει νὰ ἐκβάλλωνται, λέγεται *ἀφαιρέτης*.

Ὁ ἀφαιρετέος καὶ ἀφαιρέτης πρέπει νὰ ἦναι ὁμώνυμοι, καὶ ἡ διαφορὰ των παρομοίως.

20. Ἀριθμὸς μονοψήφιος ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλον μονοψήφιον, *ἐὰν ἀπὸ τὸν δεύτερον ἀφαιρεθῶσιν ἀνὰ μίαν τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ πρῶτος, καὶ ἀπαγγελθῶσι κατὰ σειρὰν οἱ μένοντες ἀριθμοί*. Ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὑπόλοιπον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν.

Ἀλλὰ διὰ νὰ μάθωσιν οἱ ἀρχάριοι νὰ εὑρίσκωσιν εὐθὺς τὴν διαφορὰν, θέτομεν τὸν ἑξῆς πίνακα, ὅστις λέγεται

Προπαίδεια τῆς ἀφαιρέσεως

0 ἀπὸ ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν ἂν ἀφαιρεθῇ, μένει αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμὸς, οἷον 0 ἀπὸ 2 2, 0 ἀπὸ 3 3 κτλ.

1	ἀπὸ	1	0	4	ἀπὸ	4	0	7	ἀπὸ	7	0
1	—	2	1	4	—	5	1	7	—	8	1
1	—	3	2	4	—	6	2	7	—	9	2
1	—	4	3	4	—	7	3	7	—	10	3
1	—	5	4	4	—	8	4	7	—	11	4
1	—	6	5	4	—	9	5	7	—	12	5
1	—	7	6	4	—	10	6	7	—	13	6
1	—	8	7	4	—	11	7	7	—	14	7
1	—	9	8	4	—	12	8	7	—	15	8
1	—	10	9	4	—	13	9	7	—	16	9
2	ἀπὸ	2	0	5	ἀπὸ	5	0	8	ἀπὸ	8	0
2	—	3	1	5	—	6	1	8	—	9	1
2	—	4	2	5	—	7	2	8	—	10	2
2	—	5	3	5	—	8	3	8	—	11	3
2	—	6	4	5	—	9	4	8	—	12	4
2	—	7	5	5	—	10	5	8	—	13	5
2	—	8	6	5	—	11	6	8	—	14	6
2	—	9	7	5	—	12	7	8	—	15	7
2	—	10	8	5	—	13	8	8	—	16	8
2	—	11	9	5	—	14	9	8	—	17	9
3	ἀπὸ	3	0	6	ἀπὸ	6	0	9	ἀπὸ	9	0
3	—	4	1	6	—	7	1	9	—	10	1
3	—	5	2	6	—	8	2	9	—	11	2
3	—	6	3	6	—	9	3	9	—	12	3
3	—	7	4	6	—	10	4	9	—	13	4
3	—	8	5	6	—	11	5	9	—	14	5
3	—	9	6	6	—	12	6	9	—	15	6
3	—	10	7	6	—	13	7	9	—	16	7
3	—	11	8	6	—	14	8	9	—	17	8
3	—	12	9	6	—	15	9	9	—	18	9

Ὁποιασδήποτε τάξεως μονάδας καὶ ἂν παριστάνωσιν ὁ ἀφαιρετέος καὶ ὁ ἀφαιρέτης τοῦ πίνακος, τὸ ὑπόλοιπον θέλει εἶσθαι πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τοῦ πίνακος, ἀλλὰ ὁμώνυμος μὲ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀφαιρέτην, οἷον 7 δεκάδες ἀπὸ 9 δεκάδας 2 δεκάδες κτλ.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι *τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τόσον, ὥστε προστιθέμενον εἰς τὸν ἀφαιρέτην δίδει ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸν ἀφαιρετέον.*

19. Πολυψήφιος δὲ ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλον πολυψήφιον οὕτω, *γράφεται ὁ ἀφαιρέτης ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες των νὰ ἦναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην* (ἑπομένως καὶ αἱ δεκάδες των κτλ), *καὶ σύρεται ὑπ' αὐτοὺς γραμμή. Ἔπειτα, ἐὰν μὲν αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου ἦναι περισσότεραι ἀπὸ τὰς τοῦ ἀφαιρέτου ἢ ὅσαι καὶ αἱ τοῦ ἀφαιρέτου, ἀφαιροῦνται αὗται ἀπὸ τὰς τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας· ἐὰν δὲ ἦναι ὀλιγώτεραι, πρῶτον αὐξάνονται κατὰ δέκα μονάδας, ἔπειτ' ἀφαιροῦνται ἀπ' αὐτὰς αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρέτου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας. Μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦνται αἱ δεκάδες τοῦ ἀφαιρέτου ἀπὸ τὰς τοῦ ἀφαιρετέου ὅπως ἀφῃρέθησαν καὶ αἱ μονάδες· ἀλλ' ὅταν αὐξάνωνται κατὰ 10 μονάδας αἱ τοῦ ἀφαιρετέου μονάδες, τότε ἢ πρέπει νὰ ὀλιγοστευθῶσι κατὰ 1 δεκάδα αἱ δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου, ἢ ν' αὐξηθῶσι κατὰ 1 δεκάδα αἱ δεκάδες τοῦ ἀφαιρέτου, καὶ ἔπειτα νὰ γείνῃ ἡ ἀφαίρεσις. Ἀκολούθως ἀφαιροῦνται αἱ ἑκατοντάδες ὡς αἱ μονάδες καὶ δεκάδες, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἕως εἰς τὰς ἀριστερὰς μονάδας των.* Ὁ οὕτω δ' εὑρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο πολυψηφίων.

Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ 7356 ἀπὸ τὸν 9698.

$$\begin{array}{r} 9698 \\ 7356 \\ \hline 2342 \end{array}$$

Ἀφοῦ γραφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἤδη εἴπομεν καὶ ἀντικρὺ φαίνονται, λέγομεν 6 ἀπὸ 8 2 μονάδες, αἱ ὁποῖαι γράφονται ὑπὸ τὰς μονάδας· ἔπειτα 5 ἀπὸ 9 4 δεκάδες, αἱ ὁποῖαι γράφονται ὑπὸ τὰς δεκάδας· ἀκολούθως 3 ἀπὸ 6 3 ἑκατοντάδες, αἱ ὁποῖαι γράφονται ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τελευταῖον 7 ἀπὸ 9 2 χιλιάδες, καὶ γράφονται ὑπὸ τὰς χιλιάδας. Ὁ δὲ 2342 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

7496	5678	6789	9805
253	3046	1200	304
7243	2632	5589	9501

Ἂς ἀφαιρεθῇ καὶ ὁ 4658 ἀπὸ τὸν 8594.

8594
4658
3936

Ἐδῶ ἐπειδὴ αἱ 4 μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν 8 τοῦ ἀφαιρέτου, αὐξανόμεναι νοερῶς κατὰ 10 γίνονται 14, 8 δὲ ἀπὸ 14 6 μονάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας. Ἔπειτα, ἐπειδὴ ηὐξήσαμεν τὰς 4 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 10, πρέπει ἢ ν' ἀφαιρέσωμεν 5 ἀπὸ 8 δεκάδας, ὀλιγοστεύοντες τὰς 9 κατὰ 1, ἢ ν' ἀφαιρέσωμεν 6 ἀπὸ 9 δεκάδας, αὐξάνοντες τὰς 5 δεκάδας τοῦ ἀφαιρέτου κατὰ μίαν δεκάδα· οὕτως ἔχομεν ὑπόλοιπον 3 δεκάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας. Ἔπειτα, ἐπειδὴ καὶ αἱ 5 ἑκατοντάδες τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν 6 τοῦ ἀφαιρέτου, ἀφαιροῦμεν 6 ἀπὸ 15, καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 9 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας. Τελευταῖον ἀφαιροῦντες ἢ 4 ἀπὸ 7 ἢ 5 ἀπὸ 8, διότι πρότερον ηὐξήσαμεν κατὰ 10 τὰς ἑκατοντάδας τοῦ ἀφαιρετέου, ἔχομεν ὑπόλοιπον 3 χιλιάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας, καὶ ὁ 2936 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

6725	304	47395	5460	60050
3958	258	3876	937	38467
2767	46	43519	4523	21583

Σημ. Ὅταν ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου ἦναι 0, τὸ δεξιὸν δὲ αὐτοῦ ψηφίον δὲν αὐξάνῃ κατὰ 10, τὸ μὲν 0 λογίζεται 10, τὸ δὲ ἀμέσως ἀριστερὸν αὐτοῦ ψηφίον νοῆται ὠλιγοστευμένον κατὰ 1. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ὅταν αὐξάνῃ μὲν κατὰ 10 τὸ δεξιὸν τοῦ 0 ψηφίον, ἀλλὰ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις ἀφοῦ αὐξηθῇ κατὰ 1 τὸ ὑπὸ τὸ 0 ψηφίον τοῦ ἀφαιρέτου. Ἂν δὲ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὀλιγοστεύωμεν τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1, τὸ 0 λογίζεται 9, κτλ. Ἰδὲ τ' ἀνωτέρω παραδείγματα.

20. Πολλοὶ ἀριθμοὶ ἀφαιροῦνται ἀπὸ ἕνα κατὰ δύο τρόπους, ἢ *ἀφαιρεῖται δηλ. εἷς τῶν πολλῶν ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου, ἔπειτα*

ἄλλος ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον, καὶ ἄλλος ἀπὸ τὸ νέον ὑπόλοιπον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου, ἢ τὸ προτιμότερον, *προσθέτονται ὅλοι οἱ μέλλοντες ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ καὶ τὸ ἄθροισμά των ἔπειτ' ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον.*

Ἂς ἀφαιρεθῶσιν οἱ 36, 72, 68 ἀπὸ τὸν 564.

Ἰδοὺ ἡ πρᾶξις κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

		564
		36
		528
	36	72
564	72	456
176	68	68
388	176	388

Περὶ δοκιμῆς τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

21. Ὀνομάζεται οὕτω πρᾶξις, ἥτις γίνεται πρὸς ἐπιβεβαίωσιν ἂν ἡ πρόσθεσις ἢ ἡ ἀφαίρεσις ἔγεινε χωρὶς λάθος, καὶ ἐπομένως ἂν ὁ εὑρημένος διὰ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος.

Καὶ ἡ μὲν πρόσθεσις δοκιμάζεται δι' ἄλλης προσθέσεως τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, γινομένης ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ, καὶ ἀφαιρέσεως τοῦ δευτέρου κεφαλαίου ἀπὸ τὸ πρῶτον· καὶ ὅταν τὸ ὑπόλοιπον ἦναι 0, σημεῖον ὅτι ἡ πρόσθεσις εἶχε γείνει χωρὶς λάθος, καὶ ὅτι τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἦτον τὸ ζητούμενον. Π. χ. ἀφοῦ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 678, 732, 58, 395, εὑρίσκεται κεφάλαιον 1863. Πρὸς δοκιμὴν τώρα προσθέτονται αἱ ἑκατοντάδες, τὸ κεφάλαιον 16 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὰς 18 ἑκατοντάδας τοῦ πρώτου κεφαλαίου καὶ μένουν 2 ἑκατοντάδες, αἱ ὁποῖαι γράφονται ὑπὸ τὸ 8, δεξιὰ δὲ καταιβάζεται τὸ 6 καὶ γίνονται 26 δεκάδες. Τώρα προσθέτονται αἱ δεκάδες, τὸ ἄθροισμα 21 ἀφαιρεῖται ἀπὸ 26 καὶ μένουν 2 δεκάδες, αἵτινες γράφονται ὑπὸ τὸ 6, δεξιὰ δὲ καταιβάζονται αἱ 3 μονάδες. Τελευταῖον προσθέτονται αἱ μονάδες καὶ τὸ κεφάλαιον 23 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἤδη γραμμένον 23· ὥστε ὑπόλοιπον εἶναι 0, καὶ ἐπομένως ὁ 1863 εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, καὶ ἡ πρόσθεσις ἔγεινε χωρὶς λάθος.

678
732
58
395
1863
26
23
0

Η δὲ ἀφαίρεσις δοκιμάζεται διὰ προσθέσεως τοῦ ὑπολοίπου εἰς τὸν ἀφαιρέτην· καὶ ὅταν τὸ ἄθροισμα ἦναι ἴσον μὲ τὸν ἀφαιρετέον, σημεῖον ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶχε γείνει χωρὶς λάθος κτλ. Ἰδοὺ παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 6495 \\ 3857 \\ \hline 2638 \\ \hline 6495 \end{array}$$

Προβλήματα εἰς λύσιν.

22. Ὅταν ἐκφράζηται ὅτι ζητεῖται ἀριθμὸς, ὅςις εἶναι συσχετισμένος μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς γνωςοὺς, λέγομεν ὅτι *προτείνεται πρόβλημα ἀριθμητικόν*. Ὅταν δὲ ἀσχολώμεθα εἰς τὸ νὰ καταλάβωμεν ποίαν πρᾶξιν ἀριθμητικὴν πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν εἰς τοὺς γνωςοὺς ἀριθμοὺς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον, καὶ τὴν ἐκτελῶμεν, λέγομεν ὅτι *λύομεν τὸ πρόβλημα*. Τῶν ἀκολούθων προβλημάτων ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἢ κεφάλαιον τῶν γνωστῶν, ἢ διαφορὰ αὐτῶν· διὰ τοῦτο πρέπει ἢ νὰ προςεθῶσιν οἱ γνωςοὶ, ἢ ν' ἀφαιρεθῇ ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον, ἢ νὰ γείνῃ καὶ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

1. Παιδίον ἠγόρασεν ἀβάκιον 75 λεπτ., ἀλφαβητάριον 50 λεπτ., Ἑλληνικὴν ἱστορίαν 125 λεπτ.· πόσα λεπτὰ ἔδωσεν ὅλα; Ἀπόκ. 250.

2. Ὁ Δημήτριος εἶχε κάμποσα καρύδια, τῶν ὁποίων 15 ἔδωσεν εἴς τινα συμμαθητήν του, 8 εἰς ἄλλον, καὶ αὐτὸς ἐκράτησεν 7· πόσα εἶχεν ὅλα; 30.

3. Ἄνθρωπός τις ἐπώλησεν ἀγελάδα 96 δρα., ἵππον δὲ 120 δραχ., σῖτον δὲ 584 δρ., καὶ βούτυρον 255 δραχ.· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὅλας; 1055.

4. Ἄνθρωπός τις μὲ χρεωστεῖ 592 δρ., ἄλλος τις μὲ χρεωστεῖ 2475 δρ., τρίτος μὲ χρεωστεῖ 7284, ἄλλος 938 καὶ ἄλλος 1725· πόσας δραχμὰς μὲ χρεωστοῦσιν ὅλας ὁμοῦ; 13014.

5. Ἠγόρασα χωράφιον 6784 δρ, καὶ πωλήσας αὐτὸ ἐκέρδισα 584 δραχ.· πόσας δραχμὰς τὸ ἐπώλησα; 7368.

6. Ἀγρός τις εἶναι 500 τετραγωνικῶν πήχεων, ἄλλος εἶναι 638 πήχ., καὶ τρίτος 796 τετρ. πήχ.· πόσων τετραγωνικῶν πήχεων εἶναι τὰ τρία ὁμοῦ; 1934. (Τί εἶναι τετραγωνικὸς πῆχυς;)

7. Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε τέσσαρα μερίδια πορτογαλίων, τὸ μὲν 1817, τὸ δὲ 1950, τὸ δὲ 2156, τὸ δὲ 2210· πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν πορτογαλίων; 8133.

8. Εἰς περιβόλιον εἶναι διαφόρου εἴδους δένδρα, 584 εἶναι μηλέαι, 983 εἶναι ῥοδακινέαι, 1553 εἶναι ἀμυγδαλέαι καὶ 3794 εἶναι συκαμινέαι· πόσα εἶναι ὅλα ταῦτα τὰ δένδρα;

9. Ὁ μικρότερος δύο ἀριθμῶν εἶναι 7671, ἡ δὲ διαφορά των εἶναι 597· τίς εἶναι ὁ μεγαλήτερος;

10. Δανεισθεὶς τις κάμποσας δραχμὰς, 7632 ἀπέδωκα, χρεωςεῖ δὲ ἀκόμη 24735· πόσας δρ. ἐδανείσθη;

11. Πατὴρ ἀποθνήσκων ἀφῆκε τῆς μὲν θυγατρός του 17610 δραχ., τοῦ

δὲ υἱοῦ του 1800 δραχ. περισσότερον παρ' ὅσας εἰς τὴν κόρην του· πόσας δραχμὰς ἀφῆκεν εἰς τὸν υἱόν του, καὶ πόση ἦτον ἡ κατάστασίς του;

12. Τὰ ἔμπροσθεν τέταρτα βοδίου ζυγίζουν 58 ὀκάδας καθὲν, τὰ ὄπισθεν ζυγίζουν 62 ὀκ. καθὲν, τὸ δέρμα του ζυγίζει 12 ὀκ. καὶ 10 ὀκ. τὸ λίπος του· πόσον ζυγίζουν ὅλα ὁμοῦ;

13. Τὸ πρῶτον ἔτος τῆς πρώτης Ὀλυμπιάδος συμπίπτει μὲ τὸ 776ον ἔτος π. Χ· πόσα ἔτη εἶναι ἔκτοτε μέχρι τοῦ 1842; (Τί εἶναι Ὀλυμπιάς;)

14. Τέσσαρες ἀδελφοὶ ἀπὸ τὴν κληρονομίαν, τὴν ὁποίαν ἐκληρονόμησαν, ἀφοῦ ἐπλήρωσαν 1467 δραχ. χρέη, μοιρασθέντες τὰ ἐπίλοιπα ἔλαβον καθεὶς 4768 δρ.· πόσας δραχμὰς ἐκληρονόμησαν;

15. Ὁ λόρδος Γυίλφορδ, Ἄγγλος, ὅστις ἐσύστησεν Ἀκαδημίαν Ἑλληνικὴν εἰς τὴν Κέρκυραν τὸ 1823, ἀπέθανε τὸ 1828 ἐτῶν 68· πόσα ἔτη εἶναι ἀφοῦ ἐγεννήθη ὁ εὐεργετικώτατος οὗτος ἀνὴρ ἕως σήμερον;

16. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν συντροφίαν, καὶ ὁ μὲν ἔβαλεν εἰς τὸ κοινὸν ταμεῖον 12520 δρ., ὁ δὲ 35784, ὁ δὲ 26298· ἐκέρδισαν δὲ ὁ μὲν 6260 δρ., ὁ δὲ 17892, ὁ δὲ 13149· πόσον ἦτον ὅλων τὸ κεφάλαιον, καὶ πόσον ὅλων τὸ κέρδος;

17. Ἐκ μὲν τῶν τριῶν τάξεων τοῦ ἐν Ἀθήναις Ἑλληνικοῦ σχολείου ἡ μὲν ἔχει 160 μαθητάς, ἡ δὲ 140, ἡ δὲ 100· ἐκ δὲ τῶν τριῶν τάξεων τοῦ γυμνασίου ἡ μὲν ἔχει 118 μαθητάς, ἡ δὲ 87, ἡ δὲ 53· πόσοι εἶναι ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῶν δύο σχολείων;

18. Ὁ ἰανουάριος, μάρτιος, μάϊος, ἰούλιος, αὔγουστος, ὀκτώβριος καὶ δεκέμβριος ἔχουν 31 ἡμέρας καθεὶς, ὁ ἀπρίλιος, ἰούνιος, σεπτέμβριος καὶ νοέμβριος ἔχουν 30 ἡμέρας καθεὶς, ὁ δὲ φεβρουάριος ἔχει 28 ἡμέρας καὶ κατὰ τέταρτον ἔτος 29· πόσας ἡμέρας ἔχει τὸ ἔτος;

19. Ἔχει τις εἰς τὸ ταμεῖόν του 6358 δραχ., δίδει δὲ 2794 δρ. καὶ ἀγοράζει οἰκόπεδον· πόσαι δρ. τοῦ μένουν; ἀπόκ. 3564.

20. Ἠγόρασέ τις οἰκίαν 36742 δραχ., καὶ τὴν ἐπώλησεν εἰς ἄλλον 45798 δρ.· πόσας ἐκέρδισεν; 9056.

21. Ἀνήρ τις εἶναι 58 ἐτῶν, ἡ δὲ γυνή του 42 ἐτῶν· πόσων ἐτῶν μεγαλήτερος εἶναι ὁ ἀνήρ; 16.

22. Δανεισθεὶς τις 584 δραχ., ἀπέδωκεν ὅλας πλὴν 73· πόσας ἀπέδωκεν;

23. Ἔμπορος, ὅστις εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους εἶχε 15680 δρ, ἔμεινεν εἰς τὸ τέλος μὲ 12892· πόσας ἔχασεν;

24. Μεταπράτης ἐπώλησε σταφύλια 734 δραχ. κερδίσας 175· πόσον τὰ εἶχεν ἀγοράσει;

25. Ἐάν τις ἔχῃ εἰσόδημα ἐτήσιον 3600 δραχ., καὶ τούτων δαπανᾷ εἰς τροφήν του 1200, εἰς ἐνδυμασίαν του 600, εἰς ἐνοίκιον 720, εἰς ἀγορὰν βιβλίων 400, καὶ εἰς ἔκτακτα πράγματα 250, πόσαι δραχμαὶ τοῦ μένουν;

26. Ἡ περιουσία τινὸς εἶναι 8560 δραχ., ἀλλὰ χρεωστεῖ 3500 δρ.· ἀφοῦ πληρώσῃ τὰ χρέη του, πόσαι θέλουν τοῦ μείνει;

27. Ἐπώλησε ποιμήν τις 684 πρόβατα, καὶ εἶχεν ἀκόμη 708· πόσα εἶχεν εἰς τὴν ἀρχήν;

28. Ἀγρὸς μὲ τὰ ἐπ' αὐτοῦ κτίρια τιμῶνται 50000 δρ., τὰ δὲ κτίρια μόνα ἀξίζουν 22500 δρ.· πόσον ἀξίζει ἡ γῆ;

29. Πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθέσῃ τις εἰς 358642, διὰ νὰ γείνῃ 1487945;

30. Τίς ἀριθμὸς ὁμοῦ μὲ τοὺς 2530, 3250, 4184 ἀποτελεῖ ἄθροισμα ἴσον μὲ 10000;

31. Ὁ μεγαλήτερος δύο ἀριθμῶν εἶναι 1374, καὶ ἡ διαφορά των εἶναι 594· τίς εἶναι ὁ μικρότερος;

32. Τὸ κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν εἶναι 678, ὁ δὲ μικρότερος αὐτῶν 260. τίς εἶναι ὁ μεγαλήτερος;

33. Παιδίον 8 ὥρας τοῦ ἡμερονυκτίου κοιμᾶται, 5 ὥρας παίζει, 1 ὥραν τρώγει, 5 ὥρας ἀκροάζεται τὰ μαθήματά του, τὰς δὲ λοιπὰς μελετᾷ αὐτά· πόσας ὥρας μελετᾷ;

34. Ἡ Ἑλληνικὴ ἐπανάστασις ἤρχισε τὸ 1821· ἕως ἐφέτος πόσα ἔτη εἶναι ἔκτοτε;

35. Γεωργός τις πωλήσας τὸν σῖτόν του 784 δρ., τὸν οἶνόν του 475 δρ., καὶ τὴν κριθήν του 2490 δρ., ἠγόρασε 112 δρ. τυρὸν, 245 δρ. βούτυρον, 375 δρ. φορέματα· πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;

36. Ἡ Ἀμερικὴ ἀνεκαλύφθη τὸ 1492· πόσα ἔτη εἶναι ἔκτοτε ἕως τώρα;

37. Γέρων, ὅστις τὸ 1820 ἦτον 75 ἐτῶν, πότε ἐγεννήθη;

38. Ἐνῷ τοῦ ἐν Ἀθήναις Ἑλληνικοῦ σχολείου καὶ γυμνασίου οἱ μαθηταὶ εἶναι 658, τοῦ δὲ Ἑλληνικοῦ σχολείου μόνου εἶναι 400, οἱ τοῦ γυμνασίου πόσοι εἶναι;

39. Τέσσαρες ἄνθρωποι ἠγόρασαν οἰκίαν τινὰ, καὶ ὁ μὲν ἔδωκε 12000 δρ., ὁ δὲ 3520 δρ. ὀλιγώτερον τοῦ προτέρου, ὁ δὲ 1530 δρ. περισσότερον τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ τελευταῖος 6578 δρ. ὀλιγώτερον παρ' ὅσον ἔδωκαν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ὁμοῦ· πόσας δραχμὰς ἔδωκε καθεὶς τῶν τριῶν τελευταίων, καὶ πόσον ἐτιμήθη ἡ οἰκία;

Σημ. Παρόμοια μὲ ταῦτα τὰ προβλήματα νὰ γείνωσι πολλὰ ἄλλα πρὸς γύμνασιν πλειοτέραν.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίων ἐπὶ ἀκεραίους ἀριθμούς.

23. Καθὼς, ἐὰν προστεθῇ εἰς 1 ἄλλο 1, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 2, καὶ ἐὰν εἰς τὸν 2 προστεθῇ ἄλλο 1, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 3 καὶ καθεξῆς, οὕτω καὶ εἰς τὸν 2 ἂν προστεθῇ ὁ 2, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 4, καὶ εἰς τὸν 4 ἂν προστεθῇ ὁ 2, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 6, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· οὕτω καὶ εἰς τὸν 3 ἂν προστεθῇ ὁ 3, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 6, καὶ εἰς τὸν 6 ἂν προστεθῇ ὁ 3, γίνεται ὁ 9 κτλ· καὶ γενικῶς, ἐὰν εἰς ἀριθμόν τινα προστεθῇ αὐτὸς ὁ ἴδιος, γίνεται ἄλλος ἀριθμὸς, καὶ εἰς τοῦτον ἂν προστεθῇ ὁ πρότερον προστεθεὶς, γίνεται ἄλλος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ὅταν προσθέτηται ὁ 2 εἰς τὸν 2, λέγεται ὅτι *διπλασιάζεται* ὁ 2, ὁ δὲ 4, ὅστις εἶναι δὶς 2, λέγεται *διπλάσιος* τοῦ 2·

ὅταν δὲ προσθέτηται ὁ 2 εἰς τὸν 2 καὶ πάλιν εἰς τὸν διπλάσιόν του 4, λέγεται ὅτι *τριπλασιάζεται* ὁ 2, ὁ δὲ 6, ὅςτις τότε εἶναι τρὶς 2, λέγεται *τριπλάσιος* τοῦ 2· ἐκ δὲ τούτων νοεῖται καὶ τί σημαίνει *τετραπλασιάζεται* ὁ 2 καὶ *τετραπλάσιος* τοῦ 2, *πενταπλασιάζεται* ὁ 2 καὶ *πενταπλάσιος* τοῦ 2, καὶ γενικῶς *πολλαπλασιάζεται* ὁ 2 καὶ *πολλαπλάσιος* τοῦ 2.

Ὅ,τι εἴπομεν περὶ τοῦ 2 ἁρμόζει λεγόμενον καὶ περὶ ὁποιουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ.

Ἡ δὲ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, τετραπλασιάζεται καὶ γενικῶς πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ὁποιοςδήποτε, λέγεται *διπλασιασμός*, *τριπλασιασμός*, *τετραπλασιασμὸς* καὶ γενικῶς *πολλαπλασιασμὸς* τοῦ ἀριθμοῦ. Εἶναι δὲ *διπλασιασμός*, *τριπλασιασμὸς* καὶ γενικῶς *πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ* ἡ πρᾶξις, κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ὁ 2 ὁ 3 ἢ ὁποιοςδήποτε ἄλλος ἀριθμὸς ἀπὸ τὴν μονάδα, γινομένη ἐπὶ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Αὕτη δὲ ἐδῶ εἶναι ἐπανειλημμένη πρόσθεσις.

Ἀντὶ δὲ τοῦ *διπλασιάζεται ἀριθμὸς* συνηθέστερα λέγουν *πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2* ὁ ἀριθμός, ἀντὶ τοῦ *τριπλασιάζεται* λέγουν *πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 3*, κτλ. *Πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ 10* σημαίνει *δεκαπλασιάζεται ὁ ἀριθμός*, *πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 20* σημαίνει *εἰκοσαπλασιάζεται*. Ἡ φράσις *πολλαπλασιάζεται ἐπὶ* εἶναι προτιμοτέρα πολλάκις, μάλιστα ὅταν ὁ ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον μέλλει νὰ γείνῃ ὁ πολλαπλασιασμός, ἦναι μεγάλος. Π. χ. εἶναι ἁπλουστέρα καὶ ἑπομένως προτιμοτέρα ἡ φράσις *πολλαπλασιάζεται ὁ 25 ἐπὶ 673* παρὰ τὴν *ἑξακοσιαεβδομηκοντατριπλασιάζεται ὁ 25*.

Καὶ ὁ μὲν ἀριθμός, ὅστις μέλλει νὰ πολλαπλασιασθῇ, λέγεται *πολλαπλασιαστέος*· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅςτις δεικνύει τί πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου πρέπει νὰ σχηματισθῇ, λέγεται *πολλαπλασιαστής*, καὶ οὗτος ἔχει τὴν ἐπὶ πρὸ αὐτοῦ· ὁ δὲ γινόμενος ἀριθμὸς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὀνομάζεται *γινόμενον*. Ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος λέγονται κοινῶς *παράγοντες* τοῦ γινομένου. Λέγουν προσέτι *γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον*, ἢ *γινόμενον δύο ἀριθμῶν*, ἢ *γινόμενον* *τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν ἢ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ἢ δύο παραγόντων.*

Οἱ ἀρχάριοι πρέπει νὰ συνειθίσουν καλὰ τὰς ὀνομασίας ταύτας. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμώνυμον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι γίνεται ἐκ τούτου.

24. Μονοψήφιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον μονοψήφιον *ἐὰν ὁ πρῶτος προστεθῇ εἰς ἑαυτὸν, ἔπειτα εἰς τὸν διπλάσιόν του, καὶ οὕτω καθεξῆς ἕως νὰ γείνῃ ὁ ζητούμενος καὶ δεικνυόμενος ὑπὸ τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ πολλαπλάσιος.*

Ἀλλὰ διὰ ν' ἀπαλλαχθῶσιν οἱ ἀρχάριοι ἀπὸ τὸν κόπον τοῦτον, θέτομεν τὸν ἑξῆς πίνακα, ὅςτις ἐμπεριέχει ἕτοιμα τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, καὶ ὅςτις ὀνομάζεται

Προπαίδεια τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅποιος ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 0 παράγει γινόμενον 0.		
1 εἰ 1 1	2 — 8 16	5 εἰ 5 25
1 — 2 2	2 — 9 18	5 — 6 30
1 — 3 3	3 εἰ 3 9	5 — 7 35
1 — 4 4	3 — 4 12	5 — 8 40
1 — 5 5	3 — 5 15	5 — 9 45
1 — 6 6	3 — 6 18	6 εἰ 6 36
1 — 7 7	3 — 7 21	6 — 7 42
1 — 8 8	3 — 8 24	6 — 8 48
1 — 9 9	3 — 9 27	6 — 9 54
2 εἰ 2 4	4 εἰ 4 16	7 εἰ 7 49
2 — 3 6	4 — 5 20	7 — 8 56
2 — 4 8	4 — 6 24	7 — 9 63
2 — 5 10	4 — 7 28	8 εἰ 8 64
2 — 6 12	4 — 8 32	8 — 9 72
2 — 7 14	4 — 9 36	9 εἰ 9 81

Εἰς τὰς πρώτας στήλας τοῦ πίνακος τούτου εἶναι οἱ πολλαπλασιαστέοι, εἰς τὰς δευτέρας οἱ πολλαπλασιασταὶ καὶ εἰς τὰς τρίτας τὰ γινόμενα αὐτῶν. Ἀλλ' εἰμποροῦν νὰ θεωρῶνται ὡς πολλαπλασιασταὶ καὶ οἱ τῶν πρώτων στηλῶν ἀριθμοὶ καὶ ὡς πολλαπλασιαστέοι οἱ τῶν δευτέρων στηλῶν, καὶ τότε πρέπει νὰ λέγῃ τις π. χ. 3 εἰ 2 ἀντὶ 2 εἰ 3, 4 εἰ 2 ἀντὶ 2 εἰ 4 κτλ· οἱ δὲ τῶν τρίτων στηλῶν εἶναι καὶ τότε τὰ γινόμενά των. Σύντομα *ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς μονοψηφίους ὅποιος καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, παράγει γινόμενον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ὁποιασδήποτε τάξεως μονάδας καὶ ἂν παριστάνῃ ὁ πολλαπλασιαστέος, τοιαύτας παριστάνει καὶ τὸ γινόμενον, καὶ τόσας, ὅσαι εἶναι εἰς τὸ γινόμενον τοῦ πίνακος· π. χ. 6 μονάδες ἐπὶ 7 42 μονάδες, 6 δεκάδες ἐπὶ 7 42 δεκάδες, 6 ἑκατοντάδες ἐπὶ 7 42 ἑκατοντάδες κτλ.

Σημ. Ὅταν μανθάνουν τὴν προπαίδειαν ταύτην, ἀντὶ τῆς ἐπὶ μεταχειρίζονται τὸν ἦχον ι, ὅστις γράφεται ἡ ἀντὶ αἰ, ἢ εἰ Ἑλληνικὸν κατ' ἔλλειψιν τοῦ πολλαπλασιάζεται. Τοῦτο τὸ εἰ μετεχειρίσθην ἀνωτέρω.

25. Πολυψήφιος δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονοψήφιον οὕτω· *Γράφεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ σύρεται ὑποκάτω γραμμή. Ἔπειτα πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν μονοψήφιον πολλαπλασιαστὴν πρῶτον αἱ μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ τὸ γινόμενον, ἂν ἦναι μικρότερον τοῦ 10, γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας των, ἂν δὲ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ 9, ὑπὸ τὰς μονάδας γράφεται τότε μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων προσθέτεται ὕστερα εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων· ἔπειτα πολλαπλασιάζονται αἱ δεκάδες, αἱ ἑκατοντάδες κτλ τοῦ πολυψηφίου ἐπὶ τὸν μονοψήφιον, καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράφονται τὰ γινόμενα, ὡς εἴπομεν περὶ τοῦ γινομένου τῶν μονάδων.* Ὁ δὲ οὕτως εὑρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πολυψηφίου ἐπὶ τὸν μονοψήφιον ἀριθμόν.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ 6384 ἐπὶ 8.

Ἀφοῦ γραφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἤδη εἴπομεν καὶ ἀντικρὺ φαίνονται, λέγομεν 4 εἰ 8 32 μονάδες, ἤτοι 3 δεκάδες καὶ 2 μονάδες· γράφομεν 2 ὑπὸ τὰς μονά-

$$\begin{array}{r} 6384 \\ 8 \\ \hline 51072 \end{array}$$

δας, τὰς δὲ 3 δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων λέγοντες 8 εἰ 8 64 δεκάδες καὶ 3 67 δεκάδες, ἤτοι 6 ἑκατοντάδες καὶ 7 δεκάδες· γράφομεν 7 ὑπὸ τὰς δεκάδας, τὰς δὲ 6 ἑκατοντάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων λέγοντες 3 εἰ 8 24 ἑκατοντάδες καὶ 6 30 ἑκατοντάδες, ἤτοι 3 χιλιάδες καὶ 0 ἑκατοντάδες· γράφομεν 0 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, προσθέτομεν δὲ τὰς 3 χιλιάδας εἰς τὸ γινόμενον τῶν χιλιάδων λέγοντες 6 εἰ 8 48 χιλιάδες καὶ 3 51 χιλιάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὅλας ἀριστερὰ τοῦ 0, διότι δὲν εἶναι ἄλλος ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ. Ὁ δὲ 51072 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 6384 ἐπὶ 8, ἤτοι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ 6384.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4 ὁ 4006, ὅστις ἔχει μηδενικὰ εἰς τὴν μέσην.

$$\begin{array}{r} 4006 \\ 4 \\ \hline 16024 \end{array}$$

Λέγομεν 6 εἰ 4 ἢ 4 εἰ 6 24 μονάδες, γράφομεν 4 ὑπὸ τὰς μονάδας· ἔπειτα 4 εἰ 0 0 δεκάδες, καὶ 2 2 δεκάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας· ἔπειτα 4 εἰ 0 0 ἑκατοντάδες, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τελευταῖον 4 εἰ 4 16, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἀριστερὰ τοῦ 0.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 9 ὁ 5700, ὅστις ἔχει μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος.

$$\begin{array}{r} 5700 \\ 9 \\ \hline 51300 \end{array}$$

Λέγομεν 9 εἰ 0 0 μονάδες, καὶ γράφομεν 0 ὑπὸ τὰς μονάδας· ἔπειτα 9 εἰ 0 0 δεκάδες, καὶ γράφομεν 0 ὑπὸ τὰς δεκάδας· ἔπειτα 7 εἰ 9 63 ἑκατοντάδες, καὶ γράφομεν 3 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τελευταῖον 5 εἰ 9 45 χιλιάδες, καὶ 6 51 χιλιάδες, καὶ γράφομεν 51 ἀριστερὰ τοῦ 3.

Ἐδῶ βλέπει τις ὅτι *πολλαπλασιάζονται τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου θέτονται ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστέος δεξιά του.*

$$\begin{array}{r} 74098 \\ 6 \\ \hline 444588 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5930 \\ 7 \\ \hline 41510 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 695782 \\ 5 \\ \hline 3478910 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 683000 \\ 3 \\ \hline 2049000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7006 \\ 2 \\ \hline 14012 \end{array}$$

26. Πολυψήφιος δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον πολυψήφιον οὕτω· *Γράφεται ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον ὁ πολλαπλασιαστὴς ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ σύρεται γραμμὴ ὑποκάτω. Ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς ἤδη εἴπομεν, καὶ γράφεται τὸ γινόμενον ὑπὸ τὴν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζεται πάλιν ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς ἤδη εἴπομεν, καὶ γράφεται τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰς δεκάδας καὶ ἀριστερά· ἔπειτα πολλαπλασιάζεται πάλιν ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ γράφεται τὸ γινόμενον ὑπὸ τὰ προηγούμενα ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πρώτου καὶ ἀριστερά, καὶ οὕτω καθεξῆς ἕως νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ἐπὶ τὰς ἀριστερὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· τελευταῖον προστίθενται τὰ εὑρημένα μερικὰ γινόμενα, καὶ τὸ ἄθροισμά των θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν.*

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ 6754 ἐπὶ 598.

```
      6754
       598
   -------
     54032
    60786
   33770
   -------
   4038892
```

Ἀφοῦ γραφθῶσιν ὡς φαίνονται ἀντικρύ, πολλαπλασιάζομεν τὸν 6754 ἐπὶ τὰς 8 μονάδας τοῦ 598 καὶ γράφομεν τὸ γινόμενον 54032 ὑπὸ τὴν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν 6754 ἐπὶ 9, τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων, καὶ τὸ πρῶτον δεξιὸν ψηφίον 6 τοῦ γινομένου 60786 τὸ γράφομεν ὑπὸ τὰς 3 δεκάδας τοῦ πρώτου καὶ τὰ ἄλλα ἀριστερὰ αὐτοῦ, ἐνῷ τὰ εὑρίσκομεν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν 6754 ἐπὶ 5, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων, καὶ γράφομεν τὸ πρῶτον δεξιὸν ψηφίον 0 τοῦ γινομένου ὑπὸ τὰς 0 ἑκατοντάδας τοῦ πρώτου καὶ τἄλλα ἀριστερὰ αὐτοῦ, ἐνῷ τὰ εὑρίσκομεν. Τελευταῖον προσθέτομεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ὡς εἶναι γραμμένοι, καὶ τὸ ἄθροισμά των 4038892 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 6754 ἐπὶ 598.

ἰδοὺ καὶ ἄλλο παράδειγμα.

```
   947328
     8543
---------
  2841984
 3789312
4736640
7578624
---------
8093023104
```

27. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ 6478 ἐπὶ 50403, ὅστις ἔχει μηδενικὰ εἰς τὴν μέσην.

Ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιάζεται μόνον ἐπὶ τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ 6478 ἐπὶ 4 ἑκατοντάδας γράφεται ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας καὶ ἀριστερά, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 6478 ἐπὶ 5 δεκάδας χιλιάδος γράφεται ὑπὸ τὰ πρῶτα ἀπὸ τὰς δεκάδας χιλιάδος καὶ ἀριστερά, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω.

```
     6478
    50403
---------
    19434
   25912
  32390
---------
326510634
```

28. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχῃ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος, *τότε πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος μόνον ἐπὶ τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου θέτονται ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.*

Κατὰ ταῦτα ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, ἐὰν δεξιά του τεθῇ 0, ἐπὶ 100, ἐὰν τεθῶσι 00, ἐπὶ 1000, ἐὰν τεθῶσι 000, κτλ· οἷον ἐὰν δεξιὰ τοῦ 78 τεθῇ 0, 00, 000 κτλ, γίνεται 780, ὅστις εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ 78, 7800, ὅστις εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ 78, 78000, ὅστις εἶναι χιλιοπλάσιος κτλ.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ 7846 ἐπὶ 3800.

Πολλαπλασιάζεται ὁ 7846 ἐπὶ 38, καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 298148 θέτονται 00, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

```
    7846
    3800
--------
   62768
  23538
--------
29814800
```

Ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 5600 ἐπὶ 420. Ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσι τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ 5600 ἐπὶ τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ 420, ἤγουν ὁ 56 ἐπὶ 42, δεξιὰ τοῦ γινομένου 2352 θέτονται 000, τὰ 00, διότι εἶναι τόσα εἰς τὸν πολλασιαστέον, καὶ τὸ 0, διότι 0 εἶναι εἰς τὸν πολλαπλασιαστήν.

```
   5600
    420
-------
   112
  224
-------
2352000
```

29. *Ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς ἀκεραίους ὁποιουςδήποτε ὅποιος καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, παράγει γινόμενον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.* Π. χ. ἢ πολλαπλασιασθῇ ὁ 635 ἐπὶ 7382, ἢ πολλαπλασιασθῇ ὁ 7382 ἐπὶ 635, προκύπτει γινόμενον ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὡς εδῶ φαίνεται.

```
    635        7382        72
   7382         635        56
   ----       -----       ---
   1270       36910       432
  5080       22146       360
 1905       44292        ----
4445        -------      4032
-------     4687570        24
4687570                 -----
                        16128
                        8064
                        -----
                        96768
                           18
                       ------
                       774144
                       96768
                      -------
                      1741824
```

30. Ὅταν ἦναι πολλοὶ ἀριθμοὶ νὰ πολλαπλασιασθῶσι, *πρῶτον πολλαπλασιάζονται δύο ὁποιοιδήποτε, ἔπειτα πολλαπλασιάζεται τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐπὶ τρίτον τινά, ἔπειτα πολλαπλασιάζεται τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἐπὶ τέταρτόν τινα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου.*

Οὕτω πολλαπλασιάζονται ἀντικρὺ οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ 24, 72, 56, 18.

Περὶ διαιρέσεως ἀκεραίων δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν.

31. Εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθ. 10 τί ὀνομάζεται μέρος ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κτλ πράγματός τινος ἢ μονάδος. Ἀλλὰ καὶ ἀριθμός τις εἰμπορεῖ νὰ ἦναι μέρος ἄλλου ἀριθμοῦ ἢ ἥμισυ, ἢ τρίτον, ἢ τέταρτον κτλ· π. χ. ὁ 2 εἶναι ἥμισυ τοῦ 4, τρίτον τοῦ 6, τέταρτον τοῦ 8 κτλ· ὁ 3 εἶναι ἥμισυ τοῦ 6, τρίτον τοῦ 9, τέταρτον τοῦ 12 κτλ· καὶ γενικῶς ἀριθμός τις εἰμπορεῖ νὰ

ἦναι *πολλοστόν τι μέρος* ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν πολλάκις ὁ πρῶτος ἀποτελῇ τὸν δεύτερον, ἢ ἄλλως, ἂν ὁ δεύτερος ἦναι πολλαπλάσιος τοῦ πρώτου.

Πολλάκις εἶναι χρεία νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἦναι πολλοστόν τι μέρος ἄλλου γνωστοῦ ἀριθμοῦ, ἤγουν ἥμισυ, ἢ τρίτον, ἢ τέταρτον κτλ. Τοιοῦτος δὲ ἀριθμὸς εὑρίσκεται διά τινος πράξεως, ἥτις ὀνομάζεται *διαίρεσις*, καὶ ἐδῶ θέλομεν εἰπεῖ πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις, καὶ ἐπομένως πῶς εὑρίσκεται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἦναι πολλοστόν τι μέρος ἄλλου γνωστοῦ ἀριθμοῦ. Καὶ ὅταν μὲν ἐκτελῆται ἡ διαίρεσις πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἡμίσεος ἀριθμοῦ τινος, λέγομεν ὅτι *διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ 2*, ὅταν δὲ ἐκτελῆται ἡ διαίρεσις πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρίτου, λέγομεν ὅτι *διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 ὁ ἀριθμὸς*, κτλ. *Διαιρεῖται ἀριθμός τις διὰ τοῦ 10 ἢ τοῦ 20* σημαίνει ὅτι ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις πρὸς εὕρεσιν τοῦ δεκάτου ἢ τοῦ εἰκοστοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ, ἢ τοῦ ὁποίου πολλοστόν τι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ, λέγεται *διαιρετέος*· ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις προσδιορίζει τί πολλοστὸν πρόκειται νὰ εὑρεθῇ, λέγεται *διαιρέτης*, καὶ ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὴν διά· ὁ δὲ εὑρισκόμενος διὰ τῆς διαιρέσεως ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον*. Λέγουν προσέτι *πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου*, ἢ *πηλίκον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου*, ἢ καὶ *πηλίκον δύο ἀριθμῶν*.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὸ *πηλίκον εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ διαιρετέου, ὁποῖον πολλοστὸν τοῦ διαιρέτου εἶναι ἡ μονάς*. Ὅταν π. χ. πρόκηται νὰ διαιρεθῇ ὁ 45 διὰ τοῦ 9, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ἔννατον τοῦ 45, διότι καὶ ἡ 1 εἶναι ἔννατον τοῦ 9 κτλ. Ἔτι δὲ τὸ πηλίκον εἶναι ὁμώνυμον μὲ τὸν διαιρετέον.

32. Πρῶτον εἶναι ἀνάγκη νὰ μάθωσιν οἱ ἀρχάριοι τίνες ἀριθμοὶ εἶναι ἢ τὸ ἥμισυ τῶν μικροτέρων ἀριθμῶν τοῦ 20, ἢ τὸ τρίτον τῶν μικροτέρων τοῦ 30, ἢ τὸ τέταρτον τῶν μικροτέρων τοῦ 40 κτλ, ἕως εἰς τὸ ἔννατον τῶν μικροτέρων τοῦ 90. Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις ὀνομάζεται

Τὸ ἥμισυ τοῦ 0 εἶναι 0, τὸ τρίτον τοῦ 0 εἶναι 0 κτλ, τὸ ἔννατον τοῦ 0 εἶναι 0.

Τὸ ἥμισυ τοῦ	1	εἶναι	$\frac{1}{2}$
—	2	—	1
—	4	—	2
—	6	—	3
—	8	—	4
—	10	—	5
—	12	—	6
—	14	—	7
—	16	—	8
—	18	—	9

Τὸ 3ον τοῦ	1	εἶναι	$\frac{1}{3}$
—	2	—	$\frac{2}{3}$
—	3	—	1
—	6	—	2
—	9	—	3
—	12	—	4
—	15	—	5
—	18	—	6
—	21	—	7
—	24	—	8
—	27	—	9

Τὸ 4ον τοῦ	1	εἶναι	$\frac{1}{4}$
—	2	—	$\frac{2}{4}$
—	3	—	$\frac{3}{4}$
—	4	—	1
—	8	—	2
—	12	—	3
—	16	—	4
—	20	—	5
—	24	—	6
—	28	—	7
—	32	—	8
—	36	—	9

Τὸ 5ον τοῦ	1	εἶναι	$\frac{1}{5}$
—	2	—	$\frac{2}{5}$
—	3	—	$\frac{3}{5}$

Τὸ 5ον τοῦ	4	εἶναι	$\frac{4}{5}$
—	5	—	1
—	10	—	2
—	15	—	3
—	20	—	4
—	25	—	5
—	30	—	6
—	35	—	7
—	40	—	8
—	45	—	9

Τὸ 6ον τοῦ	1	εἶναι	$\frac{1}{6}$
—	2	—	$\frac{2}{6}$
—	3	—	$\frac{3}{6}$
—	4	—	$\frac{4}{6}$
—	5	—	$\frac{5}{6}$
—	6	—	1
—	12	—	2
—	18	—	3
—	24	—	4
—	30	—	5
—	36	—	6
—	42	—	7
—	48	—	8
—	54	—	9

Τὸ 7ον τοῦ	1	εἶναι	$\frac{1}{7}$
—	2	—	$\frac{2}{7}$
—	3	—	$\frac{3}{7}$
—	4	—	$\frac{4}{7}$
—	5	—	$\frac{5}{7}$
—	6	—	$\frac{6}{7}$
—	7	—	1
—	14	—	2
—	21	—	3
—	28	—	4
—	35	—	5
—	42	—	6

Τὸ 7ον τοῦ	49	εἶναι	7
—	56	—	8
—	63	—	9

Τὸ 8ον τοῦ	1	εἶναι	$\frac{1}{8}$
—	2	—	$\frac{2}{8}$
—	3	—	$\frac{3}{8}$
—	4	—	$\frac{4}{8}$
—	5	—	$\frac{5}{8}$
—	6	—	$\frac{6}{8}$
—	7	—	$\frac{7}{8}$
—	8	—	1
—	16	—	2
—	24	—	3
—	32	—	4
—	40	—	5
—	48	—	6
—	56	—	7
—	64	—	8
—	72	—	9

Τὸ 9ον τοῦ	1	εἶναι	$\frac{1}{9}$
—	2	—	$\frac{2}{9}$
—	3	—	$\frac{3}{9}$
—	4	—	$\frac{4}{9}$
—	5	—	$\frac{5}{9}$
—	6	—	$\frac{6}{9}$
—	7	—	$\frac{7}{9}$
—	8	—	$\frac{8}{9}$
—	9	—	1
—	18	—	2
—	27	—	3
—	36	—	4
—	45	—	5
—	54	—	6
—	63	—	7
—	72	—	8
—	81	—	9

Εἰς τὰς πρώτας στήλας τοῦ πίνακος τούτου εἶναι οἱ διαιρέται, εἰς τὰς δευτέρας οἱ διαιρετέοι καὶ εἰς τὰς τρίτας τὰ πηλίκα αὐτῶν.

ά. Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου βλέπει τις ά.) ὅτι, *ὅταν ὁ διαιρετέος ἦναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι κλάσμα τῆς μονάδος ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην*· β'.) ὅτι, *ὅταν ὁ διαιρετέος ἦναι ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον εἶναι* 1· γ'.) ὅτι, *ὅταν ὁ διαιρετέος ἦναι μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ* 1 *καὶ μικρότερον τοῦ* 10. *ἤγουν μονοψήφιος ἀριθμός.*

Σημ. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεταξὺ τῶν διαιρετέων τῶν μεγαλητέρων τοῦ διαιρέτου των δὲν ἐτέθησαν εἰς τὸν πίνακα, οὐδὲ τὰ πηλίκα των, διότι εἶναι εὔκολον νὰ τὰ εὕρῃ ὅστις καλὰ μάθῃ τὸν πίνακα. Π. χ. ὅταν ἠξεύρῃ τις ὅτι τὸ 4ον τοῦ 12 εἶναι 3, εὐκόλως ἐννοεῖ ὅτι τὸ 4ον τοῦ 13 θέλει εἶσθαι $3\frac{1}{4}$, τὸ 4ον τοῦ 14 θέλει εἶσθαι $3\frac{2}{4}$, τὸ 4ον τοῦ 15 θέλει εἶσθαι $3\frac{3}{4}$· οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Ἡ συμπλήρωσις αὕτη ἀφέθη εἰς τὸν διδάσκοντα. Ὅλα δὲ αὐτὰ τὰ πηλίκα εἶναι μικτοὶ ἀριθμοί.

β'. Εἶναι δὲ φανερὸν καὶ ἐκ τοῦ πίνακος (τοὐλάχιστον τώρα μόνον περὶ τῶν ἀκεραίων πηλίκων) ὅτι *τὸ πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον τὸν διαιρετέον.*

γ'. Εἶναι προσέτι φανερὸν ὅτι, *ἂν διαιρεθῇ διαιρετέος τις διὰ τοῦ πηλίκου του, θέλει εὑρεθῇ ὁ διαιρέτης.* Π. χ. τὸ 8ον τοῦ 40 εἶναι 5· ἀντιστρόφως τὸ 5ον τοῦ 40 εἶναι 8, τὸ ὁποῖον βλέπει τις εἰς τὸ μέρος, ὅπου εἶναι τὰ πέμπτα.

δ'. *Ἐὰν οἱ διαιρετέοι ἦναι δεκάδες, ἢ ἑκατοντάδες κτλ, τὰ πηλίκα θέλουν εἶσθαι τὰ αὐτά, ἀλλὰ ὁμώνυμα μὲ τοὺς διαιρετέους*· π. χ. τὸ 4ον τοῦ 24 εἶναι 6, καὶ τὸ 4ον τῶν 24 δεκάδων εἶναι 6 δεκάδες, καὶ τὸ 4ον τῶν 24 ἑκατοντάδων εἶναι 6 ἑκατοντάδες.

33. Πολυψήφιος ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ μονοψηφίου οὕτω· *Γράφεται ὁ διαιρέτης δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, σύρεται μεταξύ των γραμμὴ καὶ ἄλλη ὑπὸ τὸν διαιρέτην. Ἔπειτα διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου κατὰ τὸν πίνακα τὸ ἓν ἀριστερὸν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἂν ἦναι μεγαλήτερον τοῦ διαιρέτου ἢ ἴσον,*

εἰδὲ μή, διαιροῦνται τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ πολλαπλασιάζεται ἐπ' αὐτόν, τὸ γινόμενον γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμόν, ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτόν, καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταιβάζεται τὸ ψηφίον τοῦ διαιρετέου τὸ ἀμέσως μετὰ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμόν. Ἔπειτα ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον γράφεται δεξιὰ τοῦ προγεγραμμένου πηλίκου καὶ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ γινόμενον γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμόν, ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτὸν καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταιβάζεται τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Ἔπειτα πάλιν διαιρεῖται ὁ νέος ἀριθμὸς κτλ, ἕως νὰ καταιβασθοῦν καὶ αἱ μονάδες τοῦ διαιρετέου καὶ νὰ διαιρεθῇ καὶ ὁ τελευταῖος αὐτῶν ἀριθμός. Ὁ δὲ ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραμμένος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἢ τὸ ζητούμενον πολλοστὸν τοῦ διαιρετέου.

Ἂς διαιρεθῇ ὁ 8945 διὰ τοῦ 5, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ $5^{\text{ον}}$ τοῦ 8945.

```
8945 | 5
5    |----
---- | 1789
 39
 35
 ---
  44
  40
  ---
   45
   45
   --
    0
```

Ἀφοῦ γραφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἤδη εἴπομεν καὶ ἀντικρὺ φαίνονται, διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου 5 τὸν ἀριστερὸν ἀριθμὸν 8 χιλιάδες, (διότι εἶναι μεγαλήτερος ὁ 8 τοῦ διαιρέτου 5), ἤγουν λέγομεν τὸ $5^{\text{ον}}$ τῶν 8 χιλιάδων εἶναι 1 χιλιὰς καὶ κάτι, γράφομεν 1 ὑπὸ τὸν διαιρέτην, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, γράφομεν τὸ γινόμενον 5 χιλιάδες ὑπὸ τὰς 8 χιλιάδας, ἀφαιροῦμεν 5 ἀπὸ 8 καὶ μένουν 3, δεξιὰ δὲ τοῦ 3 καταιβάζομεν τὰς 9 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται 39 ἑκατοντάδες. Τώρα λέγομεν πάλιν τὸ $5^{\text{ον}}$ τῶν 39 ἑκατοντάδων εἶναι 7 ἑκατοντάδες καὶ κάτι, γράφομεν 7 δεξιὰ τοῦ προγεγραμμένου πηλίκου 1, πολλαπλασιάζομεν 7 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, γράφομεν τὸ γινόμενον 35 ἑκατοντάδες ὑπὸ τὸν 39, ἀφαιροῦμεν 35 ἀπὸ 39 καὶ μένουν 4 ἑκατοντάδες, δεξιὰ δὲ τοῦ 4 καταιβάζομεν τὰς 4 δεκάδας καὶ γίνονται 44 δεκάδες. Τώρα πάλιν λέγομεν τὸ $5^{\text{ον}}$ τῶν 44 δεκάδων εἶναι 8 δεκάδες καὶ κάτι, γράφομεν 8 δεξιὰ τοῦ 7, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, γράφομεν τὸ γινόμενον 40 ὑπὸ τὸν 44, ἀφαιροῦμεν 40 ἀπὸ 44, δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 4 δεκάδες καταιβάζομεν τὰς 5 μονάδας τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται 45 μονάδες. Τελευταῖον τὸ 5ον τῶν 45 μονάδων εἶναι σωστὰ 9 μονάδες, γράφομεν 9 δεξιὰ τοῦ 8, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, γράφομεν τὸ γινόμενον 45 ὑπὸ τὸν 45, ἀφαιροῦμεν καὶ μένει 0. Λοιπὸν ὁ ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραφθεὶς ἀριθμὸς 1789 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἤγουν τὸ 5ον τοῦ 8945.

Ἂς διαιρεθῇ καὶ ὁ 58462 διὰ τοῦ 8, ἤγουν ἂς εὑρεθῇ τὸ 8ον τοῦ 58462.

```
58462|8
56   |7307 6/8
 24
 24
   62
   56
    6
```

Ἐδῶ διαιροῦνται πρῶτον αἱ 58 χιλιάδες διὰ 8, διότι τὸ ἓν ἀριστερὸν ψηφίον 5 τοῦ διαιρετέου εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 8· Τὸ πηλίκον εἶναι 7 χιλιάδες καὶ μένουν 2· ἀφοῦ δὲ καταιβασθῶσιν αἱ 4 ἑκατοντάδες, διαιρεῖται ὁ 24 διὰ 8 καὶ τὸ πηλίκον εἶναι σωστὰ 3 χωρὶς νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον. Καταιβάζονται καὶ αἱ 6 δεκάδες τοῦ διαιρετέου· ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι αἱ 6 ὀλιγώτεραι τοῦ διαιρέτου 8, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ 3, ἔπειτα καταιβάζομεν καὶ τὰς δύο μονάδας καὶ διαιροῦντες 62 διὰ 8 ἔχομεν πηλίκον 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ τοῦ 0, καὶ ὑπόλοιπον 6· διαιροῦντες καὶ 6 διὰ 8 γράφομεν τὸ πηλίκον $\frac{6}{8}$ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τῶν 7 μονάδων. Λοιπὸν τὸ ὄγδοον τοῦ 58462 εἶναι 7307 $\frac{6}{8}$.

Πάντοτε πρέπει νὰ γράφωμεν 0 *εἰς τὸ πηλίκον, ὁσάκις, ἀφοῦ καταιβασθῇ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου.* Ἔπειτα καταιβάζεται καὶ ἄλλο ψηφίον καὶ ἐξακολουθεῖ ἡ διαίρεσις ὡς ἤδη εἴπομεν. Ἐὰν δὲ μείνῃ εἰς τὸ τέλος ἀριθμὸς μονάδων μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ὡς ἀνωτέρω ὁ 6, ὅστις λέγεται *κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως*, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς κατὰ τὸν πίνακα, καὶ τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εἶναι κλάσμα, γράφεται δεξιὰ τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου.

Ἐὰν δέ, ἀφοῦ ψηφίον τι τοῦ πηλίκου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ γινόμενον δὲν τὸ γράψωμεν ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα ἀριθμὸν καὶ ὕστερον νὰ τὸ ἀφαιρέσωμεν, ἀλλὰ τὸ ἀφαιρέσωμεν εὐθύς, τότε ἡ πρᾶξις γίνεται ὀγλιγωρότερα. Π. χ. εἰς τὴν τελευταίαν διαίρεσιν, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ὁ 7 ἐπὶ 8, τὸ γινόμενον 56 εὐθὺς τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ 58 καὶ μένουν 2, τοῦτο δὲ τὸ 2 γράφομεν ὑπὸ τὸ 58. Ἰδοὺ ἡ πρᾶξις ὅλη.

$$\begin{array}{r|l} 58462 & 8 \\ \hline 24 & 7307\frac{6}{8} \\ 62 & \\ 6 & \end{array}$$

Νὰ διαιρεθῶσι τὰ γινόμενα διὰ τῶν πολλαπλασιαστῶν τῶν παραδειγμάτων τοῦ 25 ἀριθμοῦ ἔτι δὲ καὶ οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ πρὸς γύμνασιν.

$$\begin{array}{r|l} 648305 & 7 \\ \hline & 92615 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5480357 & 4 \\ \hline & 1370089\frac{1}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 94328 & 3 \\ \hline & 31442\frac{2}{3} \end{array}$$

34. Διὰ νὰ διαιρῇ τις πολυψήφιον ἀριθμὸν δι' ἄλλου πολυψηφίου, πρέπει ν' ἀρχίσῃ ἀπὸ τοῦ νὰ διαιρῇ διαιρετέον μεγαλήτερον τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ἤγουν ἀριθμὸν ὅςτις νὰ ἔχῃ ἰσάριθμα ψηφία μὲ τὸν διαιρέτην, ἂν τὸ ἀριστερόν του ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ἀριςεροῦ τοῦ διαιρέτου, ἢ νὰ ἔχῃ ἓν ψηφίον περισσότερον τοῦ διαιρέτου, ἂν τὸ ἀριστερόν του παριστάνῃ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀριςεροῦ ψηφίου τοῦ διαιρέτου.

α'. Ἂς διαιρεθῇ ὁ 975 διὰ τοῦ 325, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ 325ον τοῦ 975.

Πρῶτον *διαιρεῖται τὸ ἐν ἀριστερὸν ψηφίον* 9 *τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου* 3 *τοῦ διαιρέτου*, διότι παριστάνει μεγαλήτερον ἀριθμόν, ἤγουν λέγομεν τὸ 3ον τοῦ 9 εἶναι 3· ἔπειτα *πολλαπλασιάζομεν τὸν* 3 *ἐπὶ τὸν διαιρέτην ὅλον καὶ τὸ γινόμενον* 975 *τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον* 975· καὶ ἐπειδὴ μένει ὑπόλοιπον 0, ὁ 3 εἶναι σωστὰ τὸ ζητούμενον πηλίκον ἤτοι τὸ 325ον τοῦ 975.

β'. Ἂς διαιρεθῇ ὁ 5915 διὰ τοῦ 845, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ 845ον τοῦ 5915.

Ἐδῶ *διαιροῦνται τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τοῦ διαιρέτου*, ἤτοι ὁ 59 διὰ τοῦ 8, διότι τὸ ἐν ἀριστερὸν 5 παριστάνει ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀριστεροῦ 8 τοῦ διαιρέτου, ἤγουν λέγομεν τὸ 8ον τοῦ 59 εἶναι 7 διὰ τὸ 56· *πολλαπλασιάζομεν τὸν* 7 *ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ γινόμενον* 5915 *ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον* καὶ μένει 0. Λοιπὸν 7 εἶναι τὸ 845ον τοῦ 5915.

γ΄. Ἂς διαιρεθῇ ὁ 55456 διὰ τοῦ 6932, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ 6932ον τοῦ 55456.

Διαιρεῖται ὁ 55 διὰ τοῦ 6 ὡς ἤδη εἴπομεν, καὶ τὸ 6ον τοῦ 55 εἶναι 9· *ἀλλὰ πολλαπλασιαζόμενος ὁ 9 ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον 62388 μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου· λοιπὸν δὲν εἶναι 9 τὸ ζητούμενον πηλίκον*. Τώρα πολλαπλασιάζεται ὁ 8, ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ 9, ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον εἶναι 55456 ἴσον μὲ τὸν διαιρέτην ἀφαιρεῖται ἀπ᾽ αὐτὸν καὶ μένει 0· λοιπὸν 8 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Σημ. Ὅτι τὸ 9 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου εἱμποροῦσε νὰ τὸ πληροφορηθῇ τις καὶ ἂν ἐπολλαπλασίαζε τὸν 9 ἐπὶ μόνον τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου, τὸν ἀριθμὸν 69· διότι τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 621, ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ ἐκ τῶν τριῶν ἀριστερῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ 554· ἐκ δὲ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ 9, θέλει παράξει γινόμενον μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου 55456. Αὕτη δ᾽ ἡ δοκιμὴ εὐκολύνει τὴν πρᾶξιν καὶ εἶναι καλὸν νὰ τὴν μεταχειριζώμεθα πάντοτε.

δ΄. Ἂς διαιρεθῇ ὁ 5256 διὰ τοῦ 584.

Ἐδῶ τὸ 5ον τοῦ 52 εἶναι 10. *Ἀλλ᾽ ὅταν ὁ διαιρετέος ἦναι μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ποτὲ τὸ πηλίκον δὲν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 9*. Ἀλλ᾽ ἐδῶ ὁ 5256 εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 584 καὶ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου του 5840· λοιπὸν τὸ πηλίκον δὲν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 9, ἤτοι δὲν εἶναι ὁ 10, τὸν ὁποῖον ηὕραμεν. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὸν 9 ἐπὶ τὸν διαιρέτην· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 5256 εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, καὶ ἀφαιρούμενον δίδει 0 ὑπόλοιπον, ὁ 9 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

ε΄. Ἂς διαιρεθῇ ὁ 709 διὰ τοῦ 94.

Τὸ 9ον τοῦ 70 εἶναι 7, τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 94 εἶναι 658, μικρότερον τοῦ διαιρετέου 709, καὶ ἀφαιρούμενον ἀπ᾽ αὐτὸν ἀφίνει *κατάλοιπον* 51. Τώρα πρέπει νὰ διαιρεθῇ καὶ ὁ 51 διὰ τοῦ 94. Ἀλλὰ *τὸ 94ον τοῦ 51 εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον 51 καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 94, ἤγουν εἶναι τὸ κλάσμα* $\frac{51}{94}$ (32)· λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον ἤτοι τὸ 94ον τοῦ 709 εἶναι ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $7\frac{51}{94}$.

35. Πολυψήφιος ἀριθμὸς ὁποιοσδήποτε διαιρεῖται δι' ἄλλου πολυψηφίου μικροτέρου του, ὅπως διαιρεῖται καὶ διὰ μονοψηφίου (33)· ἤγουν πρῶτον διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου, ὡς ἤδη εἴπομεν, μέρος τοῦ διαιρετέου ἀπὸ τ' ἀριστερά του ψηφία συγκείμενον, καὶ ἀπὸ τόσα, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἂν ἦναι μεγαλήτερον αὐτοῦ, εἰδὲ μὴ, καὶ ἀπὸ ἓν περισσότερον. Ἔπειτα δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταιβάζεται τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὡς ὁ πρότερον, ἂν ἦναι μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου, εἰδὲ μὴ, πρῶτον τίθεται 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ ἔπειτα καταιβάζεται καὶ ἄλλο ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρεῖται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἂς διαιρεθῇ ὁ 5082272 διὰ τοῦ 643, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ $643^{\text{ον}}$ τοῦ 5082272.

5082272	643
4501	7904
5812	
5787	
2572	
2572	
0	

Πρῶτον διαιρεῖται ὁ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τετραψήφιος ἀριθμὸς 5082 διὰ τοῦ διαιρέτου (διότι ὁ τριψήφιος 508 εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου), ἤγουν λέγομεν τὸ $6^{\text{ον}}$ τοῦ 50 εἶναι 8 καὶ κάτι· ἀλλὰ πολλαπλασιάζοντες τὸν 8 ἐπὶ τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου, τὸν ἀριθμὸν 64, εὑρίσκομεν γινόμενον 512, μεγαλήτερον ἀριθμὸν τοῦ 508, διὰ τοῦτο γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην 7 καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ γινόμενον 4501, ὡς μικρότερον τοῦ 5082, ἐνῷ τὸ εὑρίσκομεν, τὸ γράφομεν ὑπὸ τὸν 5082, καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτὸν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου 581 καταιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 2 τοῦ διαιρετέου.

Διαιροῦμεν πάλιν τὸν ἀριθμὸν 5812 διὰ τοῦ διαιρέτου, διότι εἶναι μεγαλήτερος αὐτοῦ, ἤγουν λέγομεν τὸ $6^{\text{ον}}$ τοῦ 58 εἶναι 9 καὶ κάτι, πολλαπλασιάζομεν τὸν 9 ἐπὶ τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον 576 εἶναι μικρότερον τοῦ 581, διὰ τοῦτο γράφομεν 9 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τοῦ 7 καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, τὸ γινόμενον 5787 τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 5812 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 25 καταιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 7 τοῦ διαιρετέου.

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 257 εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου· διὰ τοῦτο γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ 9. Καταιβάζομεν ἔπειτα καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 2 τοῦ διαιρετέου δεξιὰ τοῦ 257 καὶ διαιροῦμεν τὸν 2572 διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς πρότερον, γράφομεν τὸ πηλίκον 4 εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου δεξιὰ τοῦ 0, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 2572 ἀπὸ τὸν 2572, ἔχομεν κατάλοιπον 0. Λοιπὸν ὁ 7904 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

$$\begin{array}{r|l} 4038918 & 598 \\ \hline & 6754\,\frac{26}{598} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8093023104 & 8543 \\ \hline & 947328 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 326510634 & 6478 \\ \hline & 50403 \end{array}$$

36. Ἡ πρᾶξις γίνεται ὀγλιγωρότερα, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ γινομένου ἀπὸ τὸν *μερικὸν* διαιρετέον γείνωσι συγχρόνως, ὡς ἐδῶ λέγομεν.

Ἂς διαιρεθῇ ὁ 3928 διὰ τοῦ 864.

$$\begin{array}{r|l} 3928 & 864 \\ \hline 472 & 4\,\frac{472}{864} \end{array}$$

Τὸ 8ον τοῦ 39 εἶναι 4 καὶ κάτι· γράφομεν 4 ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην οὕτω· λέγομεν 4 εἰ 4 16, καὶ εὐθὺς ἀφαιροῦμεν 16 ἀπὸ 18 (νοοῦντες τὸ 8 18) 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ 8. Ἔπειτα 4 εἰ 6 24, καὶ 1 25 (διότι ἀφηρέσαμεν ἀπὸ 18), 25 ἀπὸ 32 (νοοῦντες τὸ 2 32) 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ 2. Τελευταῖον 4 εἰ 8 32 καὶ 3 35 (διότι ἀφηρέσαμεν ἀπὸ 32), 35 ἀπὸ 39 4, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ 9. Ἔπειτα διαιροῦμεν καὶ τὸ 472 διὰ τοῦ 864, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον $\frac{472}{864}$ εἰς τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ 4.

Πρὸς γύμνασιν οὕτω νὰ ἐκτελεσθῶσιν ὅλαι αἱ προηγούμεναι διαιρέσεις. Ἰδοὺ καὶ ἄλλη οὕτω γενομένη.

$$\begin{array}{r|l} 4687570 & 7382 \\ \cline{2-2} 25837 & 635 \\ 36910 & \\ 0 & \end{array}$$

37. Ὅταν ἔχωσι μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, *πρῶτον διαγράφονται τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ ἔχων τὰ ὀλιγώτερα, καὶ οἱ μετὰ τοῦτο μένοντες ἀριθμοὶ διαιροῦνται ὡς ἀνωτέρω.* Ἀντὶ

λοιπὸν νὰ διαιρεθῇ ὁ 2352000 διὰ τοῦ 4200, ἀφοῦ διαγραφθῶσι 00 καὶ ἀπὸ τοὺς δύο, μένει νὰ διαιρεθῇ ὁ 23520 διὰ τοῦ 42, καὶ εὑρίσκεται πηλίκον 560.

38. *Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 10 ἢ τοῦ 100 κτλ, ἐὰν ὑπὸ τὸ ἓν δεξιὸν ψηφίον του ἢ ὑπὸ τὰ δύο κτλ τεθῇ παρονομαστὴς ὁ 10 ἢ ὁ 100 κτλ.*

Ἂς διαιρεθῇ ὁ 5694 διὰ 10, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ δέκατον τοῦ 5694. Τὸ δέκατον εἶναι 569 $\frac{4}{10}$. Ὡσαύτως τὸ ἑκατοστὸν αὐτοῦ εἶναι 56 $\frac{94}{100}$· τὸ χιλιοστὸν αὐτοῦ εἶναι5 $\frac{694}{1000}$. Ταῦτα εὑρίσκονται ἂν ἐκτελέσῃ τις τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος, ἀφίνονται καὶ διαιρεῖται ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ μένοντος ἀριθμοῦ, ἔπειτα διαιρεῖται ὡς ἤδη εἴπομεν τὸ πηλίκον διὰ 10, ἂν ἀφέθη 0, διὰ 100, ἂν ἀφέθησαν 00 κτλ. Ὥστε, ἀντὶ νὰ διαιρεθῇ ὁ 2668 διὰ 4600 διαιρεῖται διὰ 46 καὶ τὸ πηλίκον 58 διὰ 100, καὶ ἔχομεν πηλίκον τοῦ 2668 διὰ 4600 τὸ $\frac{58}{100}$.

39. Συνήθως ἡ διαίρεσις δοκιμάζεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ ἂν τὸ γινόμενον ἦσαι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, σημεῖον ὅτι ἡ διαίρεσις εἶχε γείνει χωρὶς λάθος καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς δοκιμάζεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἂν τὸ πηλίκον ἦναι ἴσον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, σημεῖον ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶχεν ἐκτελεσθῇ χωρὶς λάθος καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Πρὸς γύμνασιν νὰ δοκιμασθῶσιν οὕτως ὅλοι οἱ προηγούμενοι πολλαπλασιασμοὶ καὶ διαιρέσεις.

Περὶ λόγου καὶ ἀναλόγων ἀριθμῶν.

40. *Λόγος δύο ἀριθμῶν* εἶναι ἀριθμὸς τρίτος γινόμενος ἐκ τῆς μονάδος ὅπως ὁ εἷς τῶν δύο ἀριθμῶν γίνεται ἐκ τοῦ ἄλλου. Π. χ. ὁ 12 εἶναι τρὶς 4, ἤτοι 4 καὶ 4 καὶ 4· λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4. Ἢ ἀντιστρόφως ὁ 4 εἶναι τρίτον τοῦ 12· λοιπὸν τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 4 πρὸς τὸν 12.

Ὡσαύτως 5 εἶναι ὁ λόγος τοῦ 20 πρὸς τὸν 4, τὸ δὲ $\frac{1}{5}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 4 πρὸς τὸν 20.

Σημ. α΄. Ἐδῶ βλέπει τις ὅτι ἄλλος εἶναι ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4, καὶ ἄλλος εἶναι ὁ λόγος τοῦ 4 πρὸς τὸν 12. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ προσδιορίζηται πάντοτε τίς λόγος ζητεῖται, π. χ. ὁ τοῦ 12 πρὸς 4, ἢ ὁ τοῦ 4 πρὸς 12.

Σημ. β΄. Ἀπὸ μὲν τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ὁ λόγος τοῦ γινομένου πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, ἀπὸ δὲ τοὺς ὅρους τῆς διαιρέσεως ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ λόγος τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸ πηλίκον.

41. *Ὁ λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον εὑρίσκεται ἂν διαιρεθῇ ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου, τοῦ ἔχοντος πρὸ αὐτοῦ τὴν πρός.*

Π. χ. τίς εἶναι ὁ λόγος τοῦ 672 πρὸς τὸν 56; Διαιροῦμεν τὸν 672 διὰ τοῦ 56, καὶ τὸ πηλίκον 12 εἶναι ὁ ζητούμενος λόγος, ἤγουν ὁ 672 εἶναι δωδεκάκις 56. Τίς εἶναι ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 8; Διαιροῦντες τὸν 5 διὰ τοῦ 8 ἔχομεν $\frac{5}{8}$· λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 8 εἶναι ὁ $\frac{5}{8}$, ἤγουν ὁ 5 εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ 8. Τελευταῖον τίς εἶναι ὁ λόγος τοῦ 38 πρὸς τὸν 7; Διαιροῦντες τὸν 38 διὰ τοῦ 7 ἔχομεν 5 $\frac{3}{7}$, καὶ οὗτος εἶναι ὁ λόγος τοῦ 38 πρὸς 7, δηλ. ὁ 38 εἶναι πεντάκις 7 καὶ $\frac{3}{7}$ τοῦ 7.

Σημ. Ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι ὁ λόγος εἶναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα ἢ μικτὸς ἀριθμός.

42. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ὁ λόγος ἦναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ὀνομάζονται *ἀνάλογοι*, ἢ οἱ δύο πρῶτοι *ἀνάλογοι τῶν* δύο δευτέρων ἢ *ἀνάλογοι πρὸς τοὺς* δύο δευτέρους. Π. χ. ὁ λόγος τοῦ 36 πρὸς τὸν 12 εἶναι 3, καὶ ὁ λόγος τοῦ 24 πρὸς τὸν 8 εἶναι πάλιν 3· λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ 36 πρὸς τὸν 12 εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 24 πρὸς τὸν 8· λοιπὸν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 36, 12, 24, 8 εἶναι ἀνάλογοι, ἢ οἱ δύο 36 καὶ 12 εἶναι ἀνάλογοι τῶν δύο 24 καὶ 8.

Προβλήματα εἰς λύσιν.

43. Τῶν ἀκολούθων προβλημάτων οἱ ἀριθμοί, ἐὰν ἦναι τρεῖς, εἶναι συσχετισμένοι ὡς οἱ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἀριθμοί, ἤγουν εἷς ἀριθμὸς εἶναι τοιοῦτον πολλαπλάσιον ἄλλου, ὅσας μονάδας ἔχει τρίτος ἀριθμός, ἢ εἷς ἀριθμὸς εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν ἄλλου, ὁποῖον πολλοστὸν τρίτου ἀριθμοῦ εἶναι ἡ μονάς του. Καὶ ἂν μὲν ἄγνωστος ἦναι ὁ πολλαπλάσιος

τοῦ ἄλλου, πρὸς εὕρεσίν του πολλαπλασιάζεται ὁ ἄλλος ἐπὶ τὸν τρίτον· ἂν δὲ ἄγνωστος ἦναι τὸ πολλοστὸν τοῦ ἄλλου, πρὸς εὕρεσίν του διαιρεῖται ὁ ἄλλος διὰ τοῦ τρίτου. Ἂν δὲ ἄγνωστος ἦναι ὁ τρίτος, ἤτοι ὁ λόγος τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸν ἄλλον, πάλιν διαιρεῖται ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου. Ἐκ δὲ τῶν τριῶν ἀριθμῶν τῶν προβλημάτων δύο εἶναι πάντοτε *ὁμοειδεῖς*, ἤγουν εἶναι ἀριθμοὶ τοῦ αὐτοῦ πράγματος, οἷον ἀριθμοὶ ὀκάδων, ἢ ἀριθμοὶ πήχεων κτλ· ὁ δὲ τρίτος εἶναι *ἑτεροειδὴς* πρὸς τοὺς δύο ἄλλους, ἤγουν εἶναι ἀριθμὸς ἄλλου πράγματος, καὶ οὗτος εἶναι ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων. Ὥστε, ὅταν ἄγνωστος ἦναι ὁ ἑτεροειδὴς πρὸς τοὺς δύο ἄλλους, εἶναι πάντοτε ὁ λόγος αὐτῶν καὶ εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως· τότε πρέπει καλὰ νὰ προσδιορισθῇ τίς τῶν δύο ὁμοειδῶν πρέπει νὰ ἦναι διαιρετέος. Εἰς δὲ τὰς ἄλλας περιπτώσεις πολλαπλασιαστέος καὶ διαιρετέος εἶναι ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ἀγνώστου. Εἶναι δὲ καί τινα προβλήματα πολυπλοκώτερα καὶ ἔχοντα πλειοτέρους τῶν τριῶν ἀριθμούς· τότε πρέπει νὰ γείνωσι πλειότεραι πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου.

1. Κομμάτιον τσόχας 75 πήχεων μακρὺ πρὸς 24 δραχμὰς τὸν πῆχυν πόσον ἀξίζει; Ἀπ. 1800 δρ.

2. 1000 κομμάτια μαλίνου ὑφάσματος πρὸς 678 δρ. τὸ ἓν πόσον ἀξίζουν; δρ· 678000.

3. Πόσον θέλω πληρώσει διὰ 76 σάκκους ἄλευρον, ἐνῷ ὁ σάκκος τιμᾶται 65 δραχμάς; 4940 δρ.

4. Ἐπώλησέ τις 273 σιδηρᾶ κραββάτια πρὸς 45 δρ. τὸ ἕν· πόσας δραχ. ἔλαβεν;

5. Εἰς περιβόλιον εἶναι 35 σειραὶ δένδρων, εἰς ἑκάστην δὲ σειρὰν εἶναι 84 δένδρα· πόσα εἶναι ὅλα τα δένδρα; δένδ. 2940.

6. Εἰς σημαίαν τινὰ εἶναι 5 σειραὶ ἄστρων ἑκάστη ἀνὰ 8 ἄστρα· πόσα εἶναι τὰ εἰς τὴν σημαίαν ἄστρα;

7. Ἔχω 345 ἀντίτυπα βιβλίου τινός, καθὲν δὲ τούτων ἔχει 345 σελίδας· πόσαι εἶναι ὅλων αἱ σελίδες;

8. Χωραφίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 245 πήχεων, τὸ δὲ πλάτος 68 πήχεων· πόσων τετραγωνικῶν πήχεων εἶναι ὅλον τὸ χωράφιον; (Τί εἶναι τετραγωνικὸς πῆχυς;) 16660.

9. 25 ἄνθρωποι ἠγόρασαν ὑποστατικόν τι καὶ ἐπλήρωσε καθεὶς 3800 δρ. πόσον ἀξίζει τὸ ὑποστατικόν; 95000 δρ.

10. 12 παιδία ἀπήντησαν ἐπαίτην (ζήτουλαν) καὶ ἔδωκε καθὲν εἰς αὐτὸν ἀνὰ 15 λεπτά· πόσα λεπτὰ ἔλαβεν ὁ ἐπαίτης;

11. 235 κτίσται κτίσαντες οἰκίαν ἔλαβον κάμποσα χρήματα, τὰ ὁποῖα μοιρασθέντες ἔλαβον μερίδιον καθεὶς 548 δρ. πόσα ἦσαν τὰ χρήματα ὅλα;

12. Πόσοι στρατιῶται εἰμποροῦν νὰ καταλύσουν εἰς στρατῶνα ἔχοντα 45 δωμάτια, τῶν ὁποίων καθὲν χωρεῖ 20 στρατιώτας;

13. 135 ἀξιωματικοί, οἵτινες μισθοδοτοῦνται ὁ εἷς μὲ τὸν ἄλλον ἀνὰ 250 δραχμὰς τὸν μῆνα, πόσας δραχμὰς λαμβάνουν κατὰ μῆνα ἀπὸ τὸ ταμεῖον;

14. Ταχυδρόμος τις ὁδοιπορῶν 8 στάδια τὴν ὥραν εἰς 14 ὥρας πόσα στάδια θέλει ὁδεύσει; (Τὸ στάδιον ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 πήχεις). 112.

15. Ἀτμόπλουν διαπλέον 11 μίλια τὴν ὥραν εἰς ἓν ἡμερονύκτιον πόσα μίλια θέλει διαπλεύσει; 264. (Τὸ μίλιον τοῦτο ὑποτίθεται ἰσοδύναμον μὲ 1854 πήχεις). Πόσους πήχεις λοιπὸν διαπλέει τὸ ἀτμόπλουν εἰς μίαν ὥραν καὶ πόσους εἰς ἓν ἡμερονύκτιον;

16. Ἡ γῆ κινεῖται περὶ τὸν ἥλιον 109904 στάδια τὴν ὥραν· πόσα στάδια διατρέχει ἡ γῆ εἰς 365 ἡμέρας;

17. 75 σκαφεῖς ἤνοιξαν αὔλακά τινα εἰς 18 ἡμέρας· πόσοι σκαφεῖς ἤθελαν τὸν σκάψει εἰς 1 ἡμέραν; ἢ εἰς πόσας ἡμέρας εἷς σκαφεὺς ἤθελε τὸν ἀνορύξει μόνος του; 1350.

18. Εἰς 30 ἡμέρας 95 ἄνθρωποι τρώγουν 1275 ὀκάδας ἄρτου· εἰς 1 ἡμέραν πόσοι ἄνθρωποι, ἴσα μὲ τοὺς πρώτους τρώγοντες, εἰμποροῦν νὰ φάγουν τὸν αὐτὸν ἄρτον; ἢ εἰς πόσας ἡμέρας εἷς ἄνθρωπος ἤθελε φάγει τον αὐτὸν ἄρτον;

19. Πρὸς ἐνδυμασίαν ἀνθρώπων τινῶν ἐχρειάσθησαν 245 πήχεις τσόχας 3 πήχεων πλατείας· ἀπ' ἄλλην τσόχαν 1 πῆχυν πλατεῖαν πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὴν ἐνδυμασίαν τῶν αὐτῶν ἀνθρώπων; 735.

20. Ἡ ὀκᾶ ἰσοδυναμεῖ κατὰ τὸ βάρος μὲ 400 δράμια· αἱ 68 ὀκάδες μὲ πόσα δράμια ἰσοδυναμοῦν; 27200.

21. Τὸ ἡμερονύκτιον ἰσοδυναμεῖ μὲ 24 ὥρας, ἡ ὥρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 60 λεπτά· μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν 94 ἡμερονύκτια; 135360.

22. Τὸ πεντάδραχμον τάλλαρον ἀξίζει 5 δραχμάς, ἡ δραχμὴ ἀξίζει 100 λεπτά· 235 τάλλαρα μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν;

23. Ἡ ὀργυιὰ εἶναι μῆκος ἴσον μὲ 6 πόδας, ὁ πούς εἶναι μῆκος ἴσον μὲ 12 δακτύλους καὶ ὁ δάκτυλος εἶναι μῆκος ἴσον μὲ 12 γραμμάς· 64 ὀργυιαὶ μὲ πόσους πόδας, μὲ πόσους δακτύλους καὶ μὲ πόσας γραμμὰς εἶναι ἰσομήκεις;

24. 1 δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρει κέρδος ἢ τόκον 8 λεπτά· 450 δρ. εἰς ἓν ἔτος πόσα λεπτὰ φέρουν τόκον; ἢ εἰς 6 ἔτη ἡ μία δραχ. πόσον τόκον φέρει; ἢ ἔτι 450 δραχμαὶ εἰς 6 ἔτη πόσον τόκον φέρουσιν;

25. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 12, 20 καὶ 74; Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν 6, 11, 24 καὶ 520; ἢ ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου παράγοντες εἶναι οἱ 4, 15 καὶ 7;

26. Μὲ 6448 δραχμὰς ἠγόρασέ τις 124 ἀσκοὺς ἐλαίου· πόσον ἀξίζει ὁ εἷς ἀσκός; 52 δρ.

27. 35 βόδια ἐπωλήθησαν 2835 δραχ.· πόσον ἀξίζει τὸ ἓν βόδιον; 81 δρ.

28. Εἰς 512 κιβώτια ἴσα ἐμπεριέχονται 17408 ὀκάδες τσαΐ· πόσαι ὀκάδες εἶναι εἰς καθὲν κιβώτιον;

29. Οἱ κάτοικοι χωρίου τινὸς εἶναι 1740, αἱ δὲ οἰκίαι αὐτοῦ εἶναι 145· πόσοι ἄνθρωποι κατοικοῦν εἰς ἑκάστην οἰκίαν;

30. Μὲ 12896 δραχ. πόσους ἀσκοὺς ἐλαίου ἀγοράζει τις πρὸς 52 δραχ. τὸν ἀσκόν; 248.

31. Κάμποσα βόδια ἐπωλήθησαν 2835 δραχμὰς πρὸς 81 δραχμὴν τὸ ἕν· πόσα ἦσαν αὐτά; 35.

32. Ἐὰν 17408 τσάϊ ἦναι διαμοιρασμένον εἰς κιβώτια ἀνὰ 34 ὀκάδας εἰς καθέν, εἰς πόσα κιβώτια εἶναι διαμοιρασμένον;

33. 1740 εἶναι οἱ κάτοικοι χωρίου τινός, κατοικοῦν δὲ ἀνὰ 12 εἰς ἑκάστην οἰκίαν· πόσαι εἶναι αἱ οἰκίαι τοῦ χωρίου;

34. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 6584, ὁ δὲ εἷς τῶν παραγόντων του εἶναι 478· τίς εἶναι ὁ ἄλλος παράγων;

35. Πόσα λεμόνια εἶναι τὸ $78^{ον}$ τῶν 18096 λεμονίων;

36. Ἄνθρωποί τινες ἐχρεώστουν 18950 δραχμάς, τὰς ὁποίας ἐπλήρωσαν δώσαντες καθεὶς ἀνὰ 25 δραχμάς· πόσοι ἦσαν αὐτοί; ἢ ἂν οἱ ἄνθρωποι ἦσαν 758, πόσας δραχ. ἐπλήρωσε καθείς;

37. Τίς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 135 παράγει γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 505710; ἢ ἐπὶ τίνα ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 64 παράγει τὸν 704;

38. 245 ἄνθρωποι ἐκέρδισαν 12540 δραχμάς· πόσαι ἀνήκουν εἰς ἕνα ἕκαστον αὐτῶν;

39. Ὁ μηνιαῖος μισθὸς τάγματός τινος στρατιωτῶν εἶναι 12600 δραχμαί· πόσοι εἶναι οἱ στρατιῶται τοῦ τάγματος, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἕκαστος λαμβάνει ἀνὰ 18 δραχμὰς τὸν μῆνα;

40. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 4608 νοηθῇ ὅτι σύγκειται ἀπὸ πολλάκις 72, ἀπὸ ποσάκις 72 σύγκειται;

Ἐὰν τῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 25 προβλημάτων ἄγνωστος μὲν θεωρηθῇ εἷς τῶν γνωστῶν, γνωστὸς δὲ ὁ ἄγνωστος, τρέπεται καθὲν εἰς δύο ὅμοια μὲ τὰ ἀπὸ τοῦ 26 μέχρι τοῦ 40. Π. χ. τὸ 1 μεταβάλλεται εἰς τά

41. Κομμάτιον τσόχας 75 πήχεων μακρὺ ἀξίζει 1800 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς;

42. Ἐὰν ὁ πῆχυς τσόχας τινὸς τιμᾶται 24 δραχμάς, μὲ 1800 δραχμὰς πόσους πήχεις ἀγοράζει τις;

Τὸ 9 μεταβάλλεται εἰς τά

43. 25 κτηματίαι ἠγόρασαν ὑποστατικόν τι ἀντὶ 95000 δραχμῶν· πόσα ἔδωκε καθείς;

44. Ἄνθρωποί τινες ἠγόρασαν ὑποστατικὸν ἀντὶ 95000 δραχμῶν, πληρώσαντες καθεὶς ἀνὰ 3500 δραχ· πόσοι ἦσαν αὐτοί;

Τὸ 14 μεταβάλλεται εἰς τά

45. Ἐὰν ταχυδρόμος εἰς 14 ὥρας ὁδοιπορῇ 112 στάδια, εἰς μίαν ὥραν πόσα στάδια ὁδεύει;

46. Ταχυδρόμος, ὅστις ὁδοιπορεῖ 8 στάδια τὴν ὥραν, 112 στάδια εἰς πόσας ὥρας θέλει τὰ διατρέξει;

Τὸ 17 μεταβάλλεται εἰς τά

47. Ἐὰν αὔλακά τινα 1350 σκαφεῖς τὸν ἤνοιξαν εἰς 1 ἡμέραν, 75 σκαφεῖς τὸν αὐτὸν εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν τὸν ἀνορύξει;

48. Ἐὰν 1350 σκαφεῖς ἤνοιξαν αὔλακά τινα εἰς 1 ἡμέραν, εἰς 18 ἡμέρας πόσοι σκαφεῖς ἠμποροῦν νὰ τὸν σκάψουν;

Τὸ 20 μεταβάλλεται εἰς τά

49. 27200 δράμια ἰσοζυγοῦν μὲ 68 ὀκάδας· μὲ πόσα δράμια ἰσοζυγεῖ ἡ ὀκᾶ;

50. Ἐὰν 400 δράμια ἰσοβαροῦν μὲ 1 ὀκᾶν, 27200 δράμια μὲ πόσας ὀκάδας ἰσοβαροῦν;

Ἐκ δὲ τούτων ἐννοεῖ τις πῶς θέλει μεταβάλλει καὶ τὰ λοιπά.

Ἀντιστρόφως, καὶ τὰ ἀπὸ τοῦ 26 μέχρι τοῦ 40 προβλήματα μεταβάλλονται εἰς ἄλλα παρόμοια μὲ τὰ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 25. Π. χ. τὸ 26 τρέπεται εἰς τοῦτο

51. Ἐὰν εἷς ἀσκὸς ἐλαίου τιμᾶται 52 δραχμάς, 124 ἀσκοὶ πόσον ἀξίζουν;

Οὕτω καὶ τὰ ἄλλα

52. Ἐάν τις φυλάττῃ 80 λεπτὰ τὴν ἡμέραν ἀφ' ὅσα κερδίζει, πόσα θέλει ἔχει εἰς ἓν ἔτος; καὶ πόσα θέλει ἔχει εἰς 24 ἔτη;

53. Διὰ νὰ δώσῃ τις 50000 δραχ. προῖκα εἰς τὴν δεκαετῆ κόρην του, τὴν ὁποίαν θέλει ὑπανδρεύσει εἰς τὸ εἰκοστὸν ἔτος τῆς ἡλικίας της, πόσας δρ. κατὰ μῆνα πρέπει νὰ θέτῃ κατὰ μέρος;

54. Εἰς σχολεῖόν τι εἶναι 5 σειραὶ θρανίων, ἀνὰ 4 θρανία ἑκάστη, ἕκαστον δὲ θρανίον χωρεῖ 7 μαθητάς· προσέτι εἶναι 3 θρανία χωροῦντα ἀνὰ 10 μαθητὰς ἕκαστον, καὶ ἓν ἄλλο, ὅπου εἰμποροῦν νὰ καθήσουν 14 μαθηταί· πόσους μαθητὰς χωρεῖ τὸ σχολεῖον τοῦτο;

55. Πόσας ὀκάδας βουτύρου ἀξίζοντος 6 δραχ. τὴν ὀκᾶν πρέπει νὰ δώσω εἰς ἀγορὰν 24 κιβωτίων τσάϊ πρὸς 30 δραχμὰς τὸ κιβώτιον;

56. Εἰς περιβόλιον εἶναι 70 μηλέαι, τῶν ὁποίων ἑκάστη καρποφορεῖ 35 ὀκάδας μῆλα πωλούμενα πρὸς 25 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, 48 ῥοδακινέαι καρποφοροῦσαι ἑκάστη ἀνὰ 20 ὀκάδας ῥοδάκινα πωλούμενα πρὸς 60 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, καὶ 200 πορτογαλέαι καρποφοροῦσαι ἑκάστη ἀνὰ 100 πορτογάλλια, ἕκαστον τῶν ὁποίων πωλεῖται 4 λεπτά· πόσων δραχμῶν εἰσόδημα ἔχει ἐκ τούτων ὁ κύριος τοῦ περιβολίου;

57. 100 δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουν τόκον 12 δραχμάς· 2580 εἰς 7 ἔτη πόσον τόκον φέρουσιν;

Ἐπειδὴ αἱ 100 δραχ. φέρουν τόκον 12 εἰς ἓν ἔτος, ἡ 1 ἤτοι τὸ ἑκατοστὸν τῶν 100 θέλει φέρει τὸ ἑκατοστὸν τῶν 12, ἤγουν τὸ 100ον τῶν 1200λεπ ἤτοι 12λεπ· αἱ δὲ 2580 θέλουν φέρει τόκον εἰς ἓν ἔτος 2580 φορὰς 12 λεπτὰ ἤτοι 30960 λεπτά, καὶ εἰς 7 ἔτη ὁ τόκος θέλει εἶσθαι ἑπτάκις 30960, ἤγουν 216720 ἢ 2167 $\frac{20}{100}$ ἢ τέλος 2167 δραχμὰς καὶ 20 λεπτά.

58. 642 δραχ. ἔφερον τόκον εἰς ἓν ἔτος 36 δραχ· 12572 δρ. πόσον τόκον φέρουσιν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;

59. Ἀνέμιξέ τις οἶνον τριῶν τιμῶν, 240 ὀκάδας πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, 150 ὀκάδας πρὸς 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, καὶ 350 ὀκάδας πρὸς 25 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ συνάξῃ ὅσα χρήματα ἤθελε λάβει, ἂν ἐπώλει τὸν οἶνον τῶν τριῶν τιμῶν χωριστά;

Ὅλος ὁ οἶνος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν 240, 150 καὶ 350 ὀκάδων, ἤγουν 740 ὀκάδες. Ἂν ἐπώλει χωριστὰ καθένα, ἤθελε λάβει διὰ τὸν πρῶτον 240 φορὰς 40 λεπτὰ ἤγουν 9600 λεπ.

διὰ τὸν δεύτερον 150 φορὰς 50 ἤγουν 7500, καὶ διὰ τὸν τρίτον 350 φορὰς 25 ἤγουν 8750 λεπτά· λοιπὸν ἤθελε λάβει ὅλα λεπτὰ 25850. Ἀλλ' ἐὰν αἱ 740 ὀκάδες ἀξίζουν 25850 λεπτά, ἡ μία ὀκὰ ἀξίζει τὸ 740^{ον} τοῦ 25850 ἤτοι σχεδὸν 35 λεπτά.

60. 6 κτίσται ἔκτισαν τοῖχόν τινα εἰς 48 ἡμέρας· 24 κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν τὸν κτίσει; Ἢ εἰς 12 ἡμέρας πόσοι κτίσται ἤθελαν κτίσει τοῖχον, τὸν ὁποῖον 56 κτίσται ἔκτισαν εἰς 7 ἡμέρας; (Ἴδὲ τὸ 17 καὶ 47 πρόβλημα).

Περὶ διαιρετῶν καὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

44. Ὀνομάζεται ἀριθμός τις *διαιρέσιμος δι' ἄλλου*, ὅταν τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου ἦναι ἀκέραιον· ὁ δὲ ἄλλος ἤτοι ὁ δεύτερος λέγεται *διαιρέτης τοῦ πρώτου* εἰς μερικωτέραν σημασίαν. Π. χ. ὁ 24 εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ 8, ἢ ὁ 8 εἶναι διαιρέτης τοῦ 24, διότι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 24 διὰ 8 εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ 3· ὡσαύτως ὁ 48 εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ 12, ἢ ὁ 12 εἶναι διαιρέτης τοῦ 48. Ὁ δὲ 27 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ 4, ἢ ὁ 4 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 27, διότι τὸ πηλίκον των εἶναι ὄχι ἀκέραιος, ἀλλὰ μικτὸς ἀριθμός, ὁ 6 $\frac{3}{4}$.

Πᾶς ἀριθμός, ὅστις εἶναι πολλαπλάσιος ἄλλου, εἶναι διαιρέσιμος δι' αὐτοῦ, ἢ ἄλλως, *πᾶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν πολλαπλασίων του*. Οἱ πολλαπλάσιοι τοῦ 5 π. χ. εἶναι 10, 15, 20, 25 κτλ· ὅλων λοιπὸν τούτων ὁ 5 εἶναι διαιρέτης.

Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρέτης ἑαυτοῦ, διότι πηλίκον του εἶναι ἡ μονάς. *Ἡ μονὰς εἶναι διαιρέτης ἑνὸς ἑκάστου ἀριθμοῦ, καὶ πηλίκον εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός*. Τὸ πηλίκον τοῦ 6 διὰ 1 εἶναι αὐτὸς ὁ 6.

45. *Ἄρτιοι* μὲν ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοί, ὅσων τὸ δεξιὸν ψηφίον, τὸ τῶν μονάδων, εἶναι 0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8· *περιττοὶ* δέ, ὅσων τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 1 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 9.

Σημ. Εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν οἱ μὲν ἄρτιοι λέγονται ζυγοί, οἱ δὲ περιττοὶ μονοί.

Ὁ 2 εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

Ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν, ὅσων αἱ τῶν διαφόρων τάξεων μονάδες, ὡς μονάδες ἁπλαῖ θεωρούμεναι, ἀποτελοῦν ἄθροισμα διαιρέσιμον διὰ 3· ὡσαύτως καὶ ὁ 9. Π. χ. τῶν 6954, 5376, 934275 εἶναι διαιρέτης ὁ 3, τῶν 756, 45279, 421857 εἶναι διαιρέτης καὶ ὁ 3 καὶ ὁ 9.

Ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν, ὅσων τὰ δύο δεξιὰ ψηφία ἀποτελοῦν ἀριθμὸν διαιρέσιμον διὰ 4, οἷον τῶν 428, 5616, 2536 κτλ.

Ὁ 5 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν, ὅσων τὸ δεξιὸν ψηφίον, τὸ τῶν μονάδων, εἶναι 0 ἢ 5, οἷον τοῦ 10, 15, 20 κτλ.

Ὁ 6 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν, ὅσοι εἶναι διαιρέσιμοι διὰ 3, οἷον τῶν 564, 78234 κτλ.

46. Πολλοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν κανένα διαιρέτην ἄλλον παρὰ τὸν ἑαυτόν του ἕκαστος καὶ τὴν μονάδα· τοιοῦτοι εἶναι οἱ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 κτλ. Οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ ὀνομάζονται *πρωτότυποι*. Ἄλλοι δὲ ἔχουσιν ἕκαστος δύο ἢ πλειοτέρους διαιρέτας, οἷον οἱ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24 κτλ. Οὗτοι ὀνομάζονται *παράγωγοι ἢ διαιρέσιμοι*.

47. Ἀριθμός τις εἰμπορεῖ νὰ ἦναι διαιρέτης δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν, οἷον ὁ 6, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ 24 καὶ τοῦ 36· ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται *κοινὸς διαιρέτης* τῶν δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν, οὗτοι δὲ λέγονται *συνδιαιρετοί*. Ἀλλ' εἶναι καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δεν ἔχουν κανένα κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα, οἷον οἱ 5 καὶ 8, οἱ 7 καὶ 15, οἱ 8 καὶ 25 κτλ· οἱ τοιοῦτοι ὀνομάζονται *ἀσυνδιαίρετοι*.

48. Δύο ἀριθμοὶ δυνατὸν νὰ ἔχουν πολλοὺς κοινοὺς διαιρέτας, οἷον ὁ 24 καὶ 36· ἐπειδὴ ὁ μὲν 24 ἔχει διαιρέτας αὐτοῦ τοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, ὁ δὲ 36 ἔχει τοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36· τούτων δὲ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 24 καὶ 36 εἶναι οἱ 1, 2, 3, 4, 6, 12. Ὁ μεγαλήτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν λέγεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν*. Τοῦ 24 καὶ 36 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 12.

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται οὕτω· *Διαιρεῖται ὁ μεγαλήτερος τῶν δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ μικρο-*

τέρου, καὶ ἂν μὲν δὲν μείνῃ κατάλοιπον, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν· ἂν δὲ μείνῃ, διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν, καὶ ἂν μὲν δὲν μείνῃ κατάλοιπον, αὐτὸ τὸ πρῶτον κατάλοιπον εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν· ἂν δὲ μείνῃ, διὰ τούτου τοῦ δευτέρου καταλοίπου διαιρεῖται τὸ πρῶτον κατάλοιπον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἕως νὰ εὑρεθῇ κατάλοιπόν τι, τὸ ὁποῖον νὰ ἦναι διαιρέτης τοῦ πρὸ αὐτοῦ καταλοίπου, καὶ αὐτὸ θέλει εἶσθαι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἰδοὺ παραδείγματα, ὅπου βλέπει τις καὶ πῶς διατάσσονται οἱ ἀριθμοὶ εἰς τὴν πρᾶξιν.

	9
4122	458
0	

	3	14
2408	784	56
56	224	
	0	

	2	2	8
840	340	160	20
160	20	0	

	3	20	1	2
756	248	12	8	4
12	8	4	0	

	1	2	2	1	1	4
624	440	184	72	40	32	8
184	72	40	32	8	0	

	2	12	4	1	3
483	232	19	4	3	1
19	42	3	1	0	
	4				

Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ τελευταίου παραδείγματος εἶναι ἀσυνδιαίρετοι, διότι δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ, ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΚΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Τροπὴ ἀκεραίων καὶ μικτῶν εἰς κλασματικοὺς καὶ τἀνάπαλιν.

49. Εἴπομεν (ἀριθ. 10—13) τί εἶναι κλασματικὴ μονάς, τί εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς καὶ μερικώτερον τί εἶναι κλάσμα,

πῶς γράφεται κλασματικὸς ἀριθμός, τίνες λέγονται ὅροι τοῦ κλασματικοῦ, τί σημαίνει ὁ ἀριθμητὴς καὶ τί σημαίνει ὁ παρονομαστής· διὰ τοῦτο παραπέμπομεν ἐκεῖ τὸν ἀναγνώστην περὶ αὐτῶν ὅλων. Ἐδῶ δὲ προσθέτομεν τὰ ἑξῆς.

Πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ μικτὸς εἰμπορεῖ νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν. Καὶ ἀκέραιος μὲν τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον δεδομένον κλασματικόν, *ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τεθῇ παρονομαστὴς ὁ τοῦ κλασματικοῦ παρονομαστής.* Π. χ. τρέπεται ὁ 4 εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἕκτων, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 4 ἐπὶ 6 καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον 24 τεθῇ παρονομαστὴς ὁ 6· οὕτως ἔχομεν $\frac{24}{6}$ ἰσοδύναμον μὲ 4 μονάδας. Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι ὁ 9 ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{36}{4}$, ὁ 5 ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{35}{7}$ κτλ.

Μικτὸς δὲ ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλασματικὸν ἰσοδύναμον, *ἐὰν ὁ ἀκέραιός του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ κεφάλαιον τεθῇ παρονομαστὴς ὁ τοῦ κλάσματος παρονομαστής.* Π. χ. ὁ 5 $\frac{6}{9}$ τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἐννάτων, ἀφοῦ ὁ 5 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 9, εἰς τὸ γινόμενον 45 προστεθῇ ὁ ἀριθμητὴς 6 καὶ ὑπὸ τὸ κεφάλαιον 51 τεθῇ παρονομαστὴς ὁ 9, καὶ ὁ 5 $\frac{6}{9}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{51}{9}$. Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι ὁ 6 $\frac{4}{5}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{34}{5}$, ὁ 9 $\frac{3}{4}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{39}{4}$ κτλ.

50. Ἀντιστρόφως, *πᾶς κλασματικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀκέραιον ἢ μικτὸν ἀριθμόν.* Πρὸς τοῦτο δὲ *διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τὸ πηλίκον ἢ ἀκέραιον εἶναι ἢ μικτὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν κλασματικὸν ἀριθμόν.* Π. χ. ὁ $\frac{24}{6}$ τρέπεται οὕτως εἰς τὸν ἰσοδύναμον ἀκέραιον 4· ὁ $\frac{32}{4}$ τρέπεται εἰς τὸν ἰσοδύναμον 8· ὁ $\frac{38}{7}$ τρέπεται εἰς τὸν ἰσοδύναμον 5 $\frac{3}{8}$ κτλ.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν δι' ἀκεραίων.

51. Κλασματικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον διττῶς, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του ἐπὶ τὸν ἀκέ-

ραιον, καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τεθῇ ὁ παρονομαστής του· ἢ ἂν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής του διὰ τοῦ ἀκεραίου, καὶ τὸ πηλίκον τεθῇ παρονομαστὴς ὑπὸ τὸν ἀριθμητήν του. Ὁ δὲ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον εὑρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ γινόμενόν των, τὸ ὁποῖον εἶναι τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ κλασματικοῦ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$.

α΄. Πολλαπλασιάζεται ὁ 5 ἐπὶ 4 καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον 20 τίθεται παρονομαστὴς ὁ 12, ὁ δὲ $\frac{20}{12}$ ἢ ὁ $1\frac{8}{12}$ εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$.

β΄. Διαιρεῖται ὁ 12 διὰ 4 καὶ τὸ πηλίκον 3 τίθεται παρονομαστὴς ὑπὸ τὸν 5, ὁ δὲ $\frac{5}{3}$ ἢ $1\frac{2}{3}$ εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$ (Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ ὅτι τὸ $\frac{2}{3}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{8}{12}$).

Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{9}{6}$ ἐπὶ 3 ἢ τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{9}{6}$ εἶναι $\frac{27}{6}$ ἢ $\frac{9}{2}$, ἤτοι $4\frac{1}{2}$. Τὸ $\frac{5}{4}$ ἐπὶ 2 ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ $\frac{5}{4}$ εἶναι $\frac{10}{4}$ ἢ $\frac{5}{2}$, ἤτοι $2\frac{1}{2}$.

Σημ. Ὁ μὲν πρῶτος τρόπος εἶναι πάντοτε δυνατός, ὁ δὲ δεύτερος μόνον ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀκεραίου πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τότε εἶναι προτιμητέος τοῦ πρώτου. Οὕτως ὁ $\frac{7}{8}$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 6 μόνον κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, διότι ὁ 8 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ 6.

52. Μικτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον διττῶς· α΄. *Πολλαπλασιάζεται τὸ κλάσμα του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸ γινόμενον τρέπεται εἰς μικτὸν* (51), ἂν χρειασθῇ, *ἔπειτα πολλαπλασιάζεται τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστήν, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτονται καὶ αἱ προκύψασαι ἀκέραιαι μονάδες ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ κλάσματος.* Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

β΄. *Τρέπεται ὁ μικτὸς εἰς κλασματικὸν* (49), *καὶ ἔπειτα ὁ κλασματικὸς οὗτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀκέραιον* ὡς ἤδη εἴπομεν (51).

Ὁ δὲ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον εὑρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ μικτοῦ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.

α. Τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ 7 $\frac{5}{9}$ εἶναι 42 $\frac{30}{9}$ ἢ 45 $\frac{3}{9}$.

β'. Τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ 7 $\frac{5}{9}$ εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ $\frac{68}{9}$ ἤτοι $\frac{408}{9}$ ἢ 45 $\frac{3}{9}$. Ὡσαύτως τὸ ἐννεαπλάσιον τοῦ 12 $\frac{3}{4}$ εἶναι 114 $\frac{3}{4}$. — Τὸ 5 $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 7 παράγει 39 $\frac{2}{3}$. — Τὸ γινόμενον τοῦ 4 $\frac{3}{7}$ ἐπὶ 6 εἶναι 26 $\frac{4}{7}$.

Σημ. Εἶναι προτιμητέος ὁ πρῶτος τρόπος.

53. Κλασματικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου διττῶς, ἢ *ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του διὰ τοῦ ἀκεραίου, καὶ ὑπὸ τὸ πηλίκον τεθῇ παρονομαστὴς ὁ τοῦ κλασματικοῦ παρονομαστής· ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ τὸ γινόμενον τεθῇ παρονομαστὴς ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ.* Ὁ δὲ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον εὑρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ κλασματικοῦ, ὅ,τι πολλοστὸν τοῦ ἀκεραίου εἶναι ἡ μονάς.

Ἂς διαιρεθῇ ὁ $\frac{12}{7}$διὰ 4, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ 4ον τοῦ $\frac{12}{7}$.

α. Διαιρεῖται ὁ 12 διὰ 4 καὶ ὑπὸ τὸ πηλίκον 3 τίθεται παρονομαστὴς ὁ 7· ἔχομεν οὕτω $\frac{3}{7}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τέταρτον τοῦ $\frac{12}{7}$.

β'. Πολλαπλασιάζεται ὁ 7 ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον 28 τίθεται παρονομαστὴς ὑπὸ τὸν 12· ἔχομεν οὕτω $\frac{12}{28}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τέταρτον τοῦ $\frac{12}{7}$. (Θέλομεν μετ' ὀλίγον ἰδεῖ ὅτι $\frac{12}{28}$ καὶ $\frac{3}{7}$ εἶναι ἰσοδύναμοι ἀριθμοί).

Ὡσαύτως τὸ 5ον τοῦ $\frac{15}{9}$ εἶναι ἢ $\frac{3}{9}$ ἢ $\frac{15}{45}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα. $\frac{9}{12}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ 3 δίδει πηλίκον $\frac{3}{12}$ ἢ $\frac{9}{36}$.

Σημ. Ὁ μὲν δεύτερος τρόπος εἶναι πάντοτε δυνατός, ὁ δὲ πρῶτος μόνον ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου, καὶ τότε εἶναι προτιμητέος. Οὕτως ὁ $\frac{7}{8}$ διαιρεῖται διὰ 5 μόνον κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, διότι ὁ 7 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ 5.

54. Μικτὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου διττῶς·

α. *Διαιρεῖται ὁ ἀκέραιός του διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ ἂν μείνῃ κατάλοιπον, τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν* (49), *ἑνόνεται μὲ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ ἔπειτα διαιρεῖται καὶ ὁ κλασματικὸς οὗτος διὰ τοῦ ἀκεραίου* (53). Τὸ ἀκέραιον πηλίκον καὶ τὸ κλασματικὸν πηλίκον ὁμοῦ ἀποτελοῦν τὸ ζητούμενον πηλίκον.

β'. *Τρέπεται ὁ μικτὸς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ διαιρεῖται ἔπειτα οὗτος διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου ὡς ἤδη εἴπομεν* (53).

Ὁ δὲ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον εὑρισκόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ μικτοῦ, ὅ,τι πολλοστὸν τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου εἶναι ἡ μονάς.

Τὸ ἕκτον τοῦ 18 $\frac{12}{15}$ εἶναι ά. 3 $\frac{2}{15}$, 6'. εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ $\frac{282}{15}$, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{47}{15}$ ἢ 3 $\frac{12}{15}$. Ὡσαύτως 8 $\frac{5}{9}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ 3 δίδει 2 $\frac{23}{27}$, ἢ $\frac{77}{9}$ διὰ 3, ἤγουν $\frac{77}{27}$ ἢ 2 $\frac{23}{27}$. Τὸ 9 $\frac{5}{6}$ διὰ 4 ἤτοι τὸ 4ον τοῦ 9 $\frac{5}{6}$ εἶναι 2 $\frac{11}{24}$.

Σημ. Ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι προτιμητέος.

55. Ὡς δύο ἡμίση τῆς μονάδος εἶναι αὐτὴ ἡ μονάς, ἢ τρία τρίτα τῆς μονάδος εἶναι αὐτὴ ἡ μονάς, ἢ τέσσαρα τέταρτα τῆς μονάδος εἶναι αὐτὴ ἡ μονὰς κτλ, οὕτω καὶ δύο ἡμίση ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, ἢ τρία τρίτα αὐτοῦ, ἢ τέσσαρα τέταρτα αὐτοῦ κτλ εἶναι αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμός. Καὶ πάλιν, ὡς τὸ ἥμισυ τῶν δύο μονάδων εἶναι ἡ μονάς, τὸ τρίτον τῶν τριῶν μονάδων εἶναι πάλιν ἡ μονάς, τὸ τέταρτον τῶν τεσσάρων μονάδων εἶναι ἡ μονὰς κτλ, οὕτω καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ διπλασίου ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, ἢ τὸ τρίτον τοῦ τριπλασίου, ἢ τὸ τέταρτον τοῦ τετραπλασίου του κτλ εἶναι αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμός.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι, *ἐὰν ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἄλλον ἀκέραιον, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου, θέλει προκύψει πάλιν ὁ αὐτὸς ἀριθμός· ἢ ἂν ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς διαιρεθῇ δι' ἄλλου ἀκεραίου, καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, πάλιν θέλει προκύψει ὁ αὐτὸς πρῶτος ἀριθμός.* Π. χ. ὁ 6 ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8 παράγει 48, οὗτος δὲ ἂν διαιρεθῇ διὰ 8, προκύπτει πάλιν ὁ 6. Ἢ ὁ 30 ἂν διαιρεθῇ διὰ 5 προκύπτει ὁ 6, οὗτος δὲ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5, παράγει πάλιν τὸν 30.

Λοιπὸν καὶ κλασματικὸς ἀριθμὸς ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀκέραιον, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου, θέλει προκύψει ἰσοδύναμος ἄλλος. Ἀλλὰ ά. πολλαπλασιάζεται κλασματικός, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του, καὶ διαιρεῖται τὸ γινόμενον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του, διὰ τοῦτο, *ὅταν πολλαπλασιάζηται ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἐνταυτῷ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τίθηται τὸ δεύτερον γινόμενον παρονομαστὴς ὑπὸ τὸ πρῶτον, ὁ οὕτω προκύπτων κλασματικὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον.*

ϛ'. Ἐπειδὴ διαιρεῖται κλασματικὸς ἀριθμὸς, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του, καὶ πολλαπλασιάζεται, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής του, διὰ τοῦτο, *ὅταν διαιρῆται ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἐνταυτῷ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τὸ δεύτερον πηλίκον τίθηται ὑπὸ τὸ πρῶτον, ὁ οὕτω προκύπτων κλασματικὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον*. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν τοῦ $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ 2, 3, 4, 5 κτλ, προκύπτουσι τὰ $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$ κτλ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλα ἰσοδύναμα μὲ τὸ $\frac{3}{4}$. Τοῦ δὲ $\frac{24}{36}$ ἐὰν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ 2, 3, 4 κτλ, προκύπτουσι τὰ $\frac{12}{18}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{9}$ κτλ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὸ $\frac{24}{36}$.

Περὶ τροπῆς ἑτερωνύμων κλασματικῶν εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους.

56. *Ὁμώνυμοι* λέγονται δύο ἢ πλειότεροι κλασματικοὶ, ἐὰν σύγκηνται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος, ἤγουν ἐὰν ἔχωσιν ὅλοι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, οἷον $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{7}$ κτλ· *ἑτερώνυμοι* δὲ, ἐὰν ἔχωσι διαφόρους παρονομαστὰς, οἷον $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{7}$ (ἰδὲ καὶ 15).

ά. Δύο κλασματικοὶ ἑτερώνυμοι τρέπονται πάντοτε εἰς δύο ἄλλους ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, ἔχοντας παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν. Τρέπονται δὲ οὕτω, *πολλαπλασιάζονται οἱ μὲν δύο ὅροι τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον παρονομαστὴν, οἱ δὲ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν πρῶτον παρονομαστήν.*

Κατὰ τοῦτο, τὰ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ τρέπονται εἰς τὰ ὁμώνυμα $\frac{20}{32}$, $\frac{24}{32}$, τῶν ὁποίων τὸ μὲν $\frac{20}{32}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{5}{8}$, τὸ δὲ $\frac{24}{32}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{3}{4}$ (55)· ὁ δὲ παρονομαστὴς 32 εἶναι γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν 8 καὶ 4.

Ὡσαύτως οἱ $\frac{7}{6}$ καὶ $\frac{6}{5}$ τρέπονται εἰς τοὺς $\frac{35}{30}$ καὶ $\frac{36}{30}$.

Σημ. Ὅταν ὁ μεγαλήτερος τῶν δύο παρονομαστῶν ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ μικροτέρου, τότε τρέπεται μόνον ὁ ἔχων τὸν μικρότερον παρονομαστὴν εἰς ἄλλον ἰσοδύναμόν του καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸν ἔχοντα τὸν μεγαλήτερον παρονομαστήν. Τρέπεται δὲ οὕτω, *διαιρεῖται ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς διὰ τοῦ μι-*

προτέρου, καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ ἔχοντος τὸν μικρότερον παρονομαστήν. Τῶν $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{3}{4}$, ἐπειδὴ ὁ 8 εἶναι διαιρέσιμος διὰ 4, τρέπεται μόνον ὁ $\frac{3}{4}$ εἰς $\frac{6}{8}$, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ 4 ἤτοι ἐπὶ 2. Τοῦτο εἶναι προτιμητέον, ὅταν ἦναι δυνατόν.

ϐ'. Τρεῖς ἢ πλειότεροι ἑτερώνυμοι κλασματικοὶ τρέπονται πάντοτε εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, ἔχοντας παρονομαστὴν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Τρέπονται δὲ οὕτω, *πολλαπλασιάζονται οἱ μὲν δύο ὅροι τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, οἱ δὲ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου πάλιν ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.*

Ἂς τραπῶσιν τὰ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{9}$ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα.

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 45 τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν 5 καὶ 9, καὶ τὸ $\frac{5}{8}$ τρέπεται οὕτως εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{225}{360}$. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 72 τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν 8 καὶ 9, καὶ οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{3}{5}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{216}{360}$. Τελευταῖον πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{6}{9}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 40 τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν 8 καὶ 5, καὶ οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{6}{9}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{240}{360}$. Ταῦτα δὲ τὰ νέα κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα, καὶ ὁ παρονομαστής των εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν παρονομαστῶν 8 καὶ 5 καὶ 9.

Ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ τρέπονται εἰς ταῦτα $\frac{1008}{1260}$, $\frac{1080}{1260}$, $\frac{945}{1260}$, $\frac{700}{1260}$.

Σημ. Ὅταν ὁ μεγαλήτερος τῶν παρονομαστῶν ἦναι διαιρέσιμος δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, τότε τρέπεται ἓν ἕκαστον τούτων εἰς ἄλλον ἰσοδύναμόν του καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸ ἔχον τὸν μεγαλήτερον παρονομαστήν. Τρέπεται δὲ ὡς εἴπομεν εἰς τὴν προηγουμένην σημείωσιν.

Ἂς τραπῶσι π. χ. τὰ $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{10}{24}$ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα. Διαιρεῖται ὁ 24 διὰ τοῦ 12 καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον 2 πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{7}{12}$· οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{7}{12}$ εἰς $\frac{14}{24}$. Ἔπειτα διαιρεῖται ὁ 24 διὰ 4, καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον 6 πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{3}{4}$· οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{3}{4}$ εἰς $\frac{18}{24}$.

Ἀντὶ λοιπὸν τῶν τριῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων ἔχομεν τὰ ἰσοδύναμά των ὁμώνυμα $\frac{14}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{10}{24}$. Τοῦτο εἶναι προτιμητέον, ὅταν ἦναι δυνατόν.

Οὕτω τρέπονται τὰ $\frac{8}{9}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{15}{36}$ εἰς ταῦτα $\frac{32}{36}$, $\frac{54}{36}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{15}{36}$.

Περὶ ἀγωγῆς κλασματικῶν εἰς ἄλλους ἰσοδυνάμους των μὲ μικροτέρους ὅρους.

57. *Ἐὰν κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου των, καὶ ὑπὸ τὸ τοῦ ἀριθμητοῦ πηλίκον τεθῇ παρονομαστὴς τὸ πηλίκον τοῦ παρονομαστοῦ, προκύπτει κλασματικὸς ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον* (55, ϐ΄) *καὶ μὲ μικροτέρους ὅρους*. Π. χ. τοῦ $\frac{24}{36}$ ἂν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των 2 κτλ, ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{12}{18}$. Καὶ τούτου πάλιν ἂν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των 2 κτλ, ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{6}{9}$. Καὶ τούτου πάλιν ἂν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των 3 κτλ, ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{2}{3}$. Ὥστε ὁ $\frac{24}{36}$ κατὰ σειρὰν ἄγεται εἰς τὰ ἰσοδύναμά του $\frac{12}{18}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{2}{3}$.

Σημ. Τὸ $\frac{2}{3}$, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀσυνδιαίρετοι, δὲν ἄγεται εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μικροτέρους ὅρους, καὶ διὰ τοῦτο λέγεται *ἀνάγωγον*.

Ἀλλ' ἤθελεν ἀχθῇ τὸ $\frac{24}{36}$ ἀμέσως εἰς τὸ $\frac{2}{3}$, ἐὰν ἤθελεν εὑρεθῇ πρῶτον ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 24 καὶ 36 (48), καὶ ἔπειτα διὰ τούτου, ὅστις εἶναι 12, ἤθελαν διαιρεθῇ ἅπαξ οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{24}{36}$.

Ἀφοῦ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ὅρων καὶ διαιρεθῶσιν οὗτοι δι' αὐτοῦ, τὸ $\frac{458}{4122}$ ἄγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{1}{9}$. Τὸ $\frac{784}{2408}$ ἄγεται ὡσαύτως εἰς τὸ $\frac{14}{43}$. Τὸ $\frac{340}{840}$ εἰς τὸ $\frac{17}{42}$. Τὸ $\frac{248}{756}$ εἰς τὸ $\frac{62}{189}$. Τὸ δὲ $\frac{232}{463}$ εἶναι ἀνάγωγον, διότι οἱ ὅροι του δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα, ἤγουν εἶναι ἀσυνδιαίρετοι. (Περὶ τούτων ἰδὲ εἰς τοὺς ἀριθμ. 48).

Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

58. *Κλασματικὸς ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄλλον ὁμώνυμόν του κλασματικὸν, ἐὰν προστεθῇ ὁ εἷς ἀριθμητὴς εἰς τὸν*

ἄλλον, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τεθῇ ὁ κοινὸς παρονομαστής των.

Κατὰ τοῦτο, προστίθεται τὸ $\frac{4}{9}$ εἰς τὸ $\frac{7}{9}$, ἐὰν προστεθῇ ὁ 4 εἰς τὸν 7 καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμά των 11 τεθῇ ὁ παρονομαστής των 9· ὁ δὲ $\frac{11}{9}$ ἢ $1\frac{2}{9}$ εἶναι τὸ ἄθροισμά των. Διότι ὡς 4 καὶ 7 κάμνουν 11, οὕτω καὶ 4 ἔννατα καὶ 7 ἔννατα κάμνουν 11 ἔννατα, ἤγουν $\frac{11}{9}$. Ὡσαύτως $\frac{10}{8}$ καὶ $\frac{6}{8}$ ἀποτελοῦσιν ἄθροισμα $\frac{16}{8}$ ἢ 2. $\frac{4}{10}$ καὶ $\frac{5}{10}$ καὶ $\frac{12}{10}$ ἀποτελοῦν ἄθροισμα $\frac{21}{10}$ ἢ $2\frac{1}{10}$.

Δύο δὲ ἑτερώνυμοι κλασματικοὶ πρῶτον πρέπει νὰ τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους (56), *καὶ ἔπειτα προσθέτονται οὗτοι ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Οὕτω τὰ $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{5}{6}$ τρέπονται πρῶτον εἰς τὰ ἰσοδύναμά των $\frac{42}{48}$ καὶ $\frac{40}{48}$, καὶ ταῦτα ἔπειτα προστιθέμενα ἀποτελοῦν ἄθροισμα $\frac{82}{48}$ ἢ $1\frac{34}{48}$ ἢ $1\frac{17}{24}$. Ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα τῶν $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{11}{16}$ εὑρίσκεται ὅτι εἶναι $\frac{33}{16}$ ἢ $2\frac{1}{16}$.

59. *Μικτὸς δὲ ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄλλον μικτὸν, ἢ ὡς ἀκέραιος προστίθεται εἰς ἀκέραιον, δηλ. ἐὰν προστεθῇ τὸ ἓν κλάσμα εἰς τὸ ἄλλο, ἔπειτα ὁ ἀκέραιος εἰς τὸν ἀκέραιον, καὶ προστιθῶσιν ἔτι εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων ὅσαι μονάδες προκύψωσιν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων, ἐὰν ροκύψωσιν· ἢ ἀφοῦ τραπῶσιν οἱ μικτοὶ εἰς κλασματικοὺς καὶ οὗτοι πἔπειτα προστεθῶσιν ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Οὕτω τῶν ἀριθμῶν $7\frac{4}{9}$ καὶ $6\frac{2}{3}$ ἀφοῦ προστεθῶσι τὰ κλάσματα, εὑρίσκεται $\frac{10}{9}$ ἢ $1\frac{1}{9}$, ἔπειτα λέγομεν 1 καὶ 6 7 καὶ 7 14· ὁ δὲ $14\frac{1}{9}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν. Ἢ τρέπεται ὁ μὲν $7\frac{4}{9}$ εἰς τὸν $\frac{67}{9}$, ὁ δὲ $6\frac{2}{3}$ εἰς τὸν $\frac{20}{3}$· ἔπειτα ὁ $\frac{20}{3}$ εἰς $\frac{60}{9}$ καὶ οὗτος προστιθέμενος εἰς τὸν $\frac{67}{9}$ δίδει $\frac{127}{9}$ ἢ $14\frac{1}{9}$. Ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα τῶν $4\frac{5}{7}$ καὶ $3\frac{6}{8}$ καὶ $5\frac{2}{3}$ εὑρίσκεται ὅτι εἶναι $14\frac{22}{168}$ ἢ $14\frac{11}{84}$.

Σημ. Ἐκ δὲ τούτων ἐννοεῖται εὐκόλως πῶς προστίθεται καὶ κλάσμα εἰς ἀκέραιον, καὶ ἀκέραιος εἰς μικτὸν, καὶ κλάσμα εἰς μικτόν.

60. *Κλασματικὸς ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλον ὁμώνυμόν του μεγαλήτερον, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου, καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν των τεθῇ ὁ παρονομαστής των.*

Κατὰ τοῦτο, ἀπὸ τὸν $\frac{8}{12}$ ἀφαιρεῖται ὁ $\frac{5}{12}$, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ 5 ἀπὸ τὸν 8 καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν των 3 τεθῇ ὁ 12· ὁ δὲ $\frac{3}{12}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κλασματικῶν. Διότι, ὡς 5 ἀπὸ 8 μένουν 3, οὕτω καὶ 5 δωδέκατα ἀπὸ 8 δωδέκατα μένουν 3 δωδέκατα ἢ $\frac{3}{12}$. Ὡσαύτως $\frac{6}{9}$ ἀπὸ $\frac{8}{9}$ μένουν $\frac{2}{9}$· $\frac{13}{10}$ ἀπὸ $\frac{17}{10}$ μένουν $\frac{4}{10}$ ἢ $\frac{2}{5}$.

Οἱ δ' ἑτερώνυμοι κλασματικοὶ πρῶτον πρέπει νὰ τρέπωνται εἰς ὁμωνύμους, καὶ ἔπειτ' ἀφαιρεῖται ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον ὡς ἤδη εἴπομεν.

Οὕτως, ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{3}{10}$ ἀπὸ τὸ $\frac{5}{6}$, ἀφοῦ τραπῶσιν εἰς τὰ ἰσοδύναμά των $\frac{18}{60}$ καὶ $\frac{50}{60}$· τούτων δὲ ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{32}{60}$ ἢ $\frac{8}{15}$. Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{7}{9}$ ἀπὸ τὸ $\frac{12}{11}$ εἶναι $\frac{31}{99}$.

Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ $\frac{1}{5}$ ἀπὸ τὸν 6. Μία τῶν μονάδων τοῦ 6 τρέπεται εἰς $\frac{5}{5}$, ἀπὸ τοῦτο ἀφαιροῦνται $\frac{1}{5}$ καὶ μένουν $\frac{4}{5}$· λοιπὸν 5 $\frac{4}{5}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{1}{5}$ ἀπὸ 6. Ὡσαύτως $\frac{6}{9}$ ἀπὸ 4 3 $\frac{3}{9}$ ἢ 3 $\frac{1}{3}$.

61. *Μικτὸς ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπ' ἄλλον μικτόν, ἢ ὡς ἀκέραιος ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀκέραιον, δηλ. ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ κλάσμα πρῶτον ἀπὸ τὸ κλάσμα, ἔπειτα ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον· ἢ ἂν τραπῶσι καὶ οἱ δύο εἰς κλασματικοὺς ἰσοδυνάμους, καὶ ἀφαιρεθῶσιν οὗτοι ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ 5 $\frac{7}{12}$ ἀπὸ 9 $\frac{3}{4}$. Τὸ $\frac{7}{12}$ ἀπὸ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{12}$ ἢ $\frac{1}{6}$· τὸ 5 ἀπὸ 9 4· λοιπὸν 4 $\frac{1}{6}$ εἶναι ἡ ζητουμένη διαφορά. Ἢ ὁ 5 $\frac{7}{12}$ τρέπεται εἰς $\frac{67}{12}$, ὁ 9 $\frac{3}{4}$ εἰς $\frac{39}{4}$ ἢ $\frac{117}{12}$· $\frac{67}{12}$ ἀπὸ $\frac{117}{12}$ $\frac{50}{12}$ ἢ 4 $\frac{2}{12}$ ἢ 4 $\frac{1}{6}$.

Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἦναι μικρότερον τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρέτου, αὐξάνεται κατὰ μίαν μονάδα τραμμένην εἰς κλασματικὸν ὁμώνυμον ἀριθμόν. Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι 2 $\frac{3}{7}$ ἀπὸ 7 $\frac{3}{8}$ δίδει ὑπόλοιπον 4 $\frac{37}{56}$.

Σημ. Ἐκ τούτων εἶναι φανερὸν πῶς ἀφαιρεῖται καὶ ἀκέραιος ἀπὸ μικτόν, καὶ μικτὸς ἀπὸ ἀκέραιον, καὶ κλάσμα ἀπὸ μικτόν.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἀριθμῶν διὰ κλασματικῶν καὶ μικτῶν.

62. *Πολλαπλασιασμὸς* ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ *κλασματικὸν* εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμός, ὅστις νὰ ἦναι τόσα καὶ τοιαῦτα πολλοστὰ τοῦ πρώτου, ὅσα καὶ ὁποῖα πολλοστὰ τῆς μονάδος εἶναι ὁ δεύτερος.

ά. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος 12 ἐπὶ $\frac{3}{4}$. Ἐπειδὴ ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι τρία τέταρτα τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι καὶ αὐτὸ τρία τέταρτα τοῦ 12. Πρῶτον λοιπὸν εὑρίσκεται τὸ τέταρτον τοῦ 12, ἤτοι διαιρεῖται ὁ 12 διὰ τοῦ 4, τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος, καὶ τὸ πηλίκον 3 ἔπειτα τριπλασιάζεται, ἤτοι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 3 τοῦ κλάσματος· καὶ ὁ 9, ὅστις οὕτως εὑρίσκεται, εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 12 ἐπὶ $\frac{3}{4}$ ἤγουν εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ 12.

Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι *ὁ πολλαπλασιαστέος πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλασματικοῦ, καὶ τὸ πηλίκον ἔπειτα νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ.* Οὕτω δὲ πολλαπλασιάζεται ἀριθμός, ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι, ἐπὶ ἄλλον κλασματικόν.

Σημ. ά. Συνήθως πρῶτον πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ, καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλασματικοῦ.

Σημ. β'. *Πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ* $\frac{3}{4}$, *καὶ εὑρίσκονται τὰ* $\frac{3}{4}$ *αὐτοῦ*, σημαίνουν τὸ αὐτό.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 9 ἐπὶ $\frac{5}{7}$, ἤτοι ἂς εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ 9. Πολλαπλασιάζεται ὁ 9 ἐπὶ 5, καὶ τὸ γινόμενον 45 διαιρεῖται διὰ τοῦ 7· ὁ ἀριθμὸς $\frac{45}{7}$ ἢ 6 $\frac{3}{7}$ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον. — Τὰ $\frac{7}{4}$ τοῦ 10 εἶναι 17 $\frac{2}{4}$, ἢ 17 $\frac{1}{2}$. Τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ $\frac{4}{5}$ ἶναι 4 $\frac{4}{5}$.

β'. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ κλασματικὸς $\frac{6}{8}$ ἐπὶ $\frac{5}{6}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{6}{8}$ ἐπὶ 5 καὶ τὸ γινόμενον να διαιρεθῇ διὰ 6. Ἀλλὰ πολλαπλασιάζεται ὁ $\frac{6}{8}$ ἐπὶ 5, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του 6 ἐπὶ 5 κτλ (51), καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{30}{8}$· διαιρεῖται δὲ οὗτος διὰ 6, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του ἐπὶ 6 κτλ (53), καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ $\frac{30}{48}$ ἢ $\frac{5}{8}$.

Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι *πολλαπλασιάζεται κλασματικὸς ἐπὶ κλασματικόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ εἷς ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν ἄλλον, καὶ ἔπειτα ὁ εἷς παρονομαστὴς ἐπὶ τὸν ἄλλον, καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον τεθῇ παρονομαστὴς ὑπὸ τὸ πρῶτον.*

Οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{9}$ ἐπὶ $\frac{3}{5}$ εὑρίσκεται ὅτι εἶναι $\frac{21}{45}$ ἢ $\frac{7}{15}$ — Τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ $\frac{8}{11}$ εἶναι $\frac{40}{99}$ — Τὰ $\frac{9}{13}$ τοῦ $\frac{6}{7}$ εἶναι $\frac{54}{91}$.

γʹ. *Μικτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικόν, ἐὰν τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ οὗτος πολλαπλασιασθῇ ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 6 $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι $\frac{189}{32}$ ἢ 5 $\frac{29}{32}$ — Τὰ $\frac{6}{7}$ τοῦ 4 $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{84}{21}$ ἢ 4.

63. *Ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μικτόν, ἀφοῦ ὁ μικτὸς τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 4 $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{138}{5}$ ἢ 27 $\frac{3}{5}$ — $\frac{7}{8}$ ἐπὶ 2 $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{77}{32}$ ἢ 2 $\frac{13}{32}$ — 5 $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 7 $\frac{2}{5}$ παράγει $\frac{629}{15}$ ἢ 41 $\frac{14}{15}$.

64. Πολλοὶ κλασματικοὶ πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλους, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμηταί των ἐπ' ἀλλήλους καὶ οἱ παρονομασταί των ὡσαύτως, καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον τεθῇ ὑπὸ τὸ πρῶτον.

Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{30}{84}$ ἢ $\frac{5}{14}$.

Σημ. Καὶ ἰδῶ, ὅπου ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλασματικός, πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ἀριθμός τις, ὁ πολλαπλασιαστής, ἐκ τῆς μονάδος, γινομένη ἐπὶ ἄλλου ἀριθμοῦ, τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ἀλλὰ δὲν εἶναι καὶ ἐπανειλημμένη πρόσθεσις, ὡς ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι ἀκέραιος (23), ἀλλ' εἶναι σύνθετος ἐκ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμητὴν καὶ διαιρέσεως διὰ τοῦ ἀκεραίου παρονομαστοῦ. Διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον εἶναι τόσα καὶ τοιαῦτα πολλοστὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσα καὶ ὁποῖα πολλοστὰ τῆς μονάδος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστής.

65. *Διαίρεσις ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ* εἶναι πρᾶξις, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν, ὅστις νὰ ἦναι τόσα καὶ τοιαῦτα πολλοστὰ τοῦ πρώτου, ὅσα καὶ ὁποῖα πολλοστὰ τοῦ δευτέρου εἶναι ἡ μονάς.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ μονὰς εἶναι τόσα καὶ τοιαῦτα πολλοστὰ τοῦ διαιρέτου, ὅσα καὶ ὁποῖα παριστάνει ὁ κλασματικός, ὅστις προκύπτει ἀφοῦ ἀναστραφῶσιν οἱ ὅροι τοῦ διαιρέτου, ἤγουν ἀφοῦ ὁ ἀριθμητὴς γραφθῇ παρονομαστὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἀριθμητής, π. χ. τοῦ $\frac{5}{8}$ εἶναι ἡ μονὰς τὰ $\frac{8}{5}$ (α'), διὰ τοῦτο ἀφοῦ ἀναστραφῶσιν οἱ ὅροι τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις καταντᾷ εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀνεστραμμένον τοὺς ὅρους διαιρέτην.

(α). Ἡ μονὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{8}{8}$ ἢ ὀκτὼ ὄγδοα αὐτῆς· ἀλλὰ τὸ ὄγδοον αὐτῆς εἶναι πέμπτον τοῦ $\frac{5}{8}$, ἤγουν τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{5}{8}$, διότι πεντάκις τὸ $\frac{1}{5}$ ἀποτελεῖ τὸ $\frac{5}{8}$· λοιπὸν ἡ μονὰς εἶναι ὀκτὼ πέμπτα τοῦ $\frac{5}{8}$ ἢ $\frac{8}{5}$ τοῦ $\frac{5}{8}$.

Λοιπὸν γενικῶς *διαιρεῖται ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς δι' ἄλλου κλασματικοῦ, ἐὰν ἀναστραφῶσιν οἱ ὅροι τοῦ διαιρέτου, καὶ ἔπειτα ἐπὶ τὸν κλασματικὸν τοῦτον πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος κατὰ τοὺς προηγουμένους κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ* (62 ά. β'. γ'.)

ά. Ἂς διαιρεθῇ ὁ 8 διὰ $\frac{4}{5}$. Ἀναστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου, καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸν 8 ἐπὶ $\frac{5}{4}$ εὑρίσκομεν 10· ὁ 10 εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ $\frac{4}{5}$, εἶναι δὲ τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ 8, διότι καὶ ἡ μονὰς εἶναι τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ διαιρέτου $\frac{4}{5}$. Ὡσαύτως ἀφοῦ διαιρεθῇ ὁ 12 ἐπὶ $\frac{3}{4}$, δίδει πηλίκον 16, τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ 12, ὡς ἡ μονὰς εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ $\frac{3}{4}$. — 9 διὰ $\frac{5}{7}$ δίδει πηλίκον $\frac{63}{5}$ ἢ 12 $\frac{3}{5}$.

β'. Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{4}{5}$ διὰ $\frac{3}{7}$ εἶναι $\frac{28}{15}$ ἢ 1 $\frac{13}{15}$. — $\frac{12}{7}$ διὰ $\frac{3}{5}$ δίδει πηλίκον $\frac{60}{21}$ ἢ 2 $\frac{18}{21}$ ἢ 2 $\frac{6}{7}$.

γ'. 4 $\frac{5}{6}$ διὰ $\frac{2}{3}$ δίδει πηλίκον $\frac{87}{12}$ ἢ 7 $\frac{3}{12}$ ἢ 7 $\frac{1}{4}$ — Ἂν διαιρεθῇ ὁ 3 $\frac{2}{5}$ διὰ $\frac{9}{7}$ δίδει $\frac{119}{45}$ ἢ 2 $\frac{29}{45}$.

66. *Ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ μικτοῦ ἀριθμοῦ, ἀφοῦ οὗτος τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ ἔπειτα ἐπὶ τοῦτον διαιρεθῇ ὁ διαιρετέος ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ 6 διὰ 2 $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{24}{11}$ ἢ 2 $\frac{2}{11}$ — Τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{7}{9}$ διὰ 3 $\frac{5}{6}$ εἶναι $\frac{42}{207}$ — Τὸ πηλίκον τοῦ 4 $\frac{2}{3}$ διὰ 5 $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{56}{69}$.

Σημ. Ἡ διαίρεσις καὶ ἐδῶ, ὅπου ὁ διαιρέτης εἶναι κλασματικός, καὶ εἰς τὸν ἀρ. 31 κτλ. καὶ 53, ὅπου ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος, εἶναι πρᾶξις, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἀριθμὸς τοιοῦτος πρὸς τὸν διαιρετέον, ὁποία εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην. Ἀλλ' ἐκεῖ, ὅπου ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος, ἡ μονὰς εἶναι πολλοστόν τι αὐτοῦ· διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτὸ πολλοστὸν τοῦ διαιρετέου. Ἐδῶ δέ, ὅπου ὁ διαιρέτης εἶναι κλασματικός, ἡ μονὰς εἶναι πολλά τινα πολλοστὰ τοῦ διαιρέτου, διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον εἶναι πολλὰ πολλοστὰ τοῦ διαιρετέου, ὅσα καὶ ὁποῖα εἶναι ἡ μονὰς τοῦ διαιρέτου. Ἡ δὲ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις σύνθετος ἐδῶ ἐκ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον παρονομαστὴν καὶ διαιρέσεως διὰ τοῦ ἀκεραίου ἀριθμητοῦ· διαφέρει δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ κλασματικὸν καθότι ἐκεῖνος ἐκτελεῖται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμητὴν καὶ διαιρέσεως διὰ τοῦ ἀκεραίου παρονομαστοῦ.

67. Καθὼς ὁ λόγος ἀριθμοῦ ἀκεραίου πρὸς ἄλλον ἀκέραιον εὑρίσκεται διὰ διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου, οὕτω *καὶ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ πρὸς ὁποιονδήποτε ἄλλον ἀριθμὸν ὁ λόγος εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου*, καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος λόγος.

Ἂς εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ $\frac{6}{8}$ πρὸς τὸν 3. Διαιρεῖται ὁ $\frac{6}{8}$ διὰ τοῦ 3 καὶ τὸ πηλίκον $\frac{2}{8}$ ἢ $\frac{1}{4}$ εἶναι ὁ ζητούμενος λόγος, δηλ. $\frac{6}{8}$ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 3. — Ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς $\frac{3}{4}$ εἶναι 16, ἤγουν ὁ 12 εἶναι 16 φορὰς $\frac{3}{4}$. Ὁ λόγος τοῦ $\frac{5}{7}$ πρὸς τὸν $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{15}{14}$, ἤγουν ὁ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{15}{14}$ τοῦ $\frac{2}{3}$, κτλ. Καὶ περὶ μικτῶν ὡσαύτως.

Προβλήματα εἰς λύσιν.

68. Ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς τῶν ἀκολούθων προβλημάτων ἢ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, ἢ εἶναι τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος, ἢ εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν, ὁποῖον πολλοστὸν τοῦ ἄλλου εἶναι ἡ μονάς του, ἢ εἶναι ἴσος μὲ τόσα καὶ τοιαῦτα πολλοστὰ τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν, ὅσα καὶ ὁποῖα πολλοστὰ τῆς μονάδος του εἶναι ὁ ἄλλος, ἢ εἶναι ἴσος μὲ τόσα καὶ τοιαῦτα πολλοστὰ τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν, ὅσα καὶ ὁποῖα πολλοστὰ τοῦ ἄλλου εἶναι ἡ μονάς του, ἢ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ἑνὸς τῶν γνωστῶν πρὸς τὸν ἄλλον, ἢ τελευταῖον εἶναί τι ἔτι συνθετώτερον. Διὰ τοῦτο θέλει εὑρεθῇ διὰ μιᾶς ἢ πλειοτέρων πράξεων ἀπὸ τὰς εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἐξηγηθείσας· μικρὰ δὲ προσοχὴ θέλει δείξει τίς πρᾶξις καὶ ἐπὶ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ.

1. Παιδίον ἔδωκεν εἰς ἕνα τῶν συμμαθητῶν του τὰ $\frac{2}{8}$ ἑνὸς πορτογαλίου, εἰς ἄλλον τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ καὶ εἰς τρίτον τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ· τί μέρος τοῦ πορτογαλίου ἔδωκεν εἰς τοὺς συμμαθητάς του; Καὶ ἂν ἔφαγεν αὐτὸς τὸ ἐπίλοιπον, τί μέρος τοῦ πορτογαλίου ἔφαγεν; $\frac{1}{4}$.

2. Τριῶν κομματίων ὑφάσματος τὸ μὲν εἶναι μακρὸν πήχεις $7 \frac{3}{4}$, τὸ δὲ $13 \frac{5}{6}$, τὸ δὲ $15 \frac{7}{8}$· πόσων πήχεων εἶναι καὶ τὰ τρία ὁμοῦ;

3. Μὲ τί ἰσοδυναμοῦν τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{3}{4}$ ἑνὸς πήχεως τσόχας, τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ δύο πήχεων; πῆχ. $1 \frac{53}{120}$.

4. Εἰς σάκκον τινὰ εἶναι σῖτος $\frac{2}{3}$ ἑνὸς κοιλοῦ, εἰς ἄλλον σάκκον εἶναι $\frac{3}{5}$ ἑνὸς κοιλοῦ· πόσον περισσότερος σῖτος εἶναι εἰς τὸν ἕνα παρ' εἰς τὸν ἄλλον; καὶ εἰς ποῖον εἶναι περισσότερος;

5. Ποῖον τῶν δύο κλασμάτων $\frac{7}{9}$, καὶ $\frac{3}{4}$ εἶναι μεγαλήτερον; καὶ πόσον;

6. Τὰ $\frac{4}{15}$ τοῦ ἡμερονυκτίου ἐργάζεταί τις καὶ τὰ $\frac{3}{10}$ κοιμᾶται· περισσότερον ἐργάζεται ἢ περισσότερον κοιμᾶται; καὶ πόσον περισσότερον; $\frac{1}{30}$ ἢ $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας.

7. Εἰς βαρέλιον ἦτον 145 ὀκάδες οἴνου· τούτων ἐπωλήθησαν εἴς τινα ὀκ. $35 \frac{1}{4}$, εἰς ἄλλον $24 \frac{3}{12}$ καὶ εἰς τρίτον $50 \frac{6}{8}$· πόσαι ὀκάδες ἔμειναν; $34 \frac{1}{4}$.

8. Ἠγόρασέ τις κομμάτιον ὑφάσματος $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως μακρὸν πρὸς $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς τὸν πῆχυν· πόσον τῆς δραχμῆς ἐπλήρωσεν; $\frac{15}{32}$.

9. Σάκκος ἀλεύρου ἀξίζει 48 δραχμάς, τὰ $\frac{9}{16}$ αὐτοῦ πόσον ἀξίζουν; δρ. 27.

10. Τῶν $\frac{8}{10}$ τῆς δραχμῆς, τὰ ὁποῖα εἶχέ τις, διένειμεν εἰς ἐπαίτας τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῶν· πόσον μέρος τῆς δραχμῆς ἔδωκεν εἰς τοὺς ἐπαίτας; καὶ πόσον τοῦ ἔμεινεν;

11. 12 μανδήλια πρὸς $\frac{7}{8}$ τοῦ πενταδράχμου τὸ καθὲν πόσον ἀξίζουν;

12. Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον δρ. $2 \frac{1}{2}$· εἰς 9 ἡμέρας πόσας δραχμὰς θέλει λάβει;

13. Ἐπωλήθησαν εἴς τινα τὰ $\frac{3}{4}$ ἀγροῦ τινος, καὶ τούτων τὰ

$\frac{4}{9}$ εἰς τρίτον, καὶ τούτων πάλιν τὰ $\frac{7}{12}$ εἰς τέταρτον· τί μέρος τοῦ ἀγροῦ ἠγόρασεν ὁ τέταρτος; $\frac{7}{36}$.

14. Ὁδοιπορῶν τις ςάδια 6 $\frac{3}{4}$ τὴν ὥραν, εἰς 9 $\frac{1}{2}$ ὥρας πόσα στάδια θέλει ὁδοιπορήσει;

15. Πόσα λεπτὰ εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{9}$ τῆς δραχμῆς; λεπτὰ 31 $\frac{1}{4}$.

16. 6 πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν $\frac{3}{5}$ τοῦ πενταδράχμου, ὁ εἷς πῆχυς πόσον τοῦ πενταδράχμου ἀξίζει; $\frac{1}{10}$ ἢ δρ. $\frac{1}{2}$.

17. Οἰκογένειά τις καίει 12 $\frac{3}{4}$ ὀκάδας ἐλαίου εἰς 18 ἡμέρας· πόσον καίει τὴν ἡμέραν; πόσον τὸν μῆνα; καὶ πόσον τὸ ἔτος; Ἡ μίαν ὀκὰν εἰς πόσον χρόνον τὴν καίει;

18. Ἐὰν μοιράσῃ τις $\frac{4}{5}$ μιᾶς δραχμῆς εἰς 8 παιδία, πόσα θέλει δώσει εἰς ἕκαστον; καὶ μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμεῖ αὐτό;

19. Εἰς πτωχούς τινας ἐμοίρασέ τις 9 δραχμάς, δίδων εἰς ἕκαστον $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς· πόσοι ἦσαν οἱ πτωχοί; 12.

20. Ἐὰν μὲ πεντάδραχμα 4 $\frac{2}{5}$ ἀγοράζῃ τις ἕνα πῆχυν τσόχας, μὲ 37 πεντάδραχμα πόσους πήχεις θέλει ἀγοράσει;

21. Τὸ σάκχαρι πωλεῖται $\frac{3}{10}$ τοῦ πενταδράχμου τὴν ὀκάν· μὲ $\frac{4}{5}$ τοῦ πενταδράχμου πόσον σάκχαρι ἀγοράζει τις; Ἡ $\frac{7}{12}$ τῆς ὀκᾶς πόσον τοῦ πενταδράχμου ἀξίζει;

22. Χρειάζονται 2 $\frac{3}{4}$ κοιλὰ κριθῆς, διὰ νὰ σπείρῃ τις μίαν τετραγωνικὴν ὀργυιὰν χωραφίου· πόσα κοιλὰ χρειάζονται, διὰ νὰ σπείρῃ χωράφιον 45 $\frac{4}{7}$ ὀργυιῶν;

23. Δαπανᾷ οἰκογένειά τις $\frac{1}{15}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου τὴν ἡμέραν· εἰς πόσας ἡμέρας θέλει δαπανήσει 12 $\frac{3}{12}$ ὀκάδας;

24. Ἐὰν 6 $\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 3 δραχμάς, 9 $\frac{1}{4}$ πήχεις πόσον ἀξίζουν; δρ. 4 $\frac{7}{26}$ ἢ περίπου δρ. 4 λεπ. 27.

25. Ἐὰν [illegible] ὀκᾶς ἐλαίου ἀξίζουν $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς, 42 $\frac{1}{2}$ ὀκάδες ἐλαίου πόσον ἀξίζουν; δρ. 49 $\frac{7}{12}$.

Τὰ $\frac{7}{12}$ τῆς δραχμῆς μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν;

26. Πόσαι ὀκάδες τυρίου πρὸς δρ. 2 $\frac{3}{8}$ τὴν ὀκὰν πρέπει νὰ δοθῶσιν ἀντὶ 15 $\frac{3}{5}$ κοιλῶν σίτου πρὸς δραχμὰς 4 $\frac{3}{5}$ τὸ κοιλόν; δραχμ. 30 $\frac{102}{475}$.

27. Ὄντος τοῦ πλάτους τσόχας 1 $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως, χρειάζονται 12 $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως δι' ἓν ἐπανωφόρεμα· ἄλλης τσόχας πλα-

τείας $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὸ αὐτὸ ἐπανωφόρεμα;

28. Κοράσιόν τι ἐργαζόμενον ὥρας 4 $\frac{1}{2}$ καθημέραν ἐκέντησε μανδήλιόν τι εἰς 15 ἡμέρας· ἐὰν ἤθελεν ἐργάζεσθαι ὥρας 7 $\frac{3}{4}$ καθημέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελε τὸ τελειώσει; ἢ ἂν ἤθελε νὰ τὸ κεντήσῃ εἰς 8 ἡμέρας, πόσας ὥρας ἔπρεπε νὰ ἐργάζηται τὴν ἡμέραν;

29. Ἐπωλήθησαν εἰς δημοπρασίαν 24 $\frac{3}{8}$ πήχεις τσήτι 15 $\frac{1}{2}$ δραχμὰς, 4 $\frac{2}{4}$ πήχεις τσόχας δρ. 35 $\frac{3}{5}$, 8 μανδήλια μεταξωτὰ δρ. 30 $\frac{3}{4}$, καὶ 9 ζεύγη ὑποδημάτων δρ. 75 $\frac{6}{9}$. Ὅλων τούτων τῶν δραχμῶν ὁ κήρυξ λαμβάνει τὰ $\frac{2}{15}$, καὶ τῶν ὅσαι μείνουν ὁ ἐπιστάτης τῆς δημοπρασίας λαμβάνει τὰ $\frac{3}{10}$. Πόσαι δρ. θέλουν μείνει εἰς τὸν κύριον τῶν πραγματειῶν; πόσον ἐτιμήθη τὸ τσήτι τὸν πῆχυν καὶ ἡ τσόχα; πόσον ἐτιμήθη τὸ μανδήλιον καὶ πόσον τὸ ζεῦγος τῶν ὑποδημάτων;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

Τί εἶναι συμμιγὴς ἀριθμὸς, καὶ τί διαφέρει ἀκεραίου.

69. Τοῦ αὐτοῦ πράγματος, οἷον τοῦ μήκους, τοῦ βάρους, τοῦ χρόνου κτλ, εἶναι πολλαὶ μονάδες εἰς χρῆσιν, ἄλλαι μεγαλήτεραι τῆς ἀρχικῆς καὶ ἴση ἑκάστη μὲ ἀριθμόν τινα μονάδων ἀρχικῶν, καὶ ἄλλαι μικρότεραι καὶ ἴση ἑκάστη μὲ πολλοστόν τι τῆς ἀρχικῆς μονάδος.

Ἡ *ἡμέρα* (τὸ ἡμερονύκτιον) εἶναι ἀρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου· τὸ *ἔτος* εἶναι ἄλλη μονὰς μεγαλητέρα καὶ ἴση μὲ 365 ἡμέρας, ἀνὰ τέταρτον δὲ ἔτος ἴση μὲ 366· ἡ *ὥρα* εἶναι μονὰς μικροτέρα καὶ ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας, ἢ ἄλλως ἡ ἡμέρα εἶναι ἴση μὲ 24 ὥρας· τὸ *λεπτὸν* εἶναι $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας καὶ $\frac{1}{1440}$ τῆς ἡμέρας· τὸ *δεύτερον λεπτὸν* ἴσον μὲ $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, μὲ $\frac{1}{3600}$ τῆς ὥρας καὶ μὲ $\frac{1}{86400}$ τῆς ἡμέρας.

Ἐνίοτε εἶναι εἰς χρῆσιν καὶ ἡ *ἑβδομάς*, ἥτις εἶναι ἴση μὲ 7 ἡμέρας, καὶ ὁ *μὴν* ὅστις εἶναι ἴσος μὲ 30 ἡμέρας ἢ 31 κτλ.

Ἡ *ὀκὰ* εἶναι ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους· ὁ *στατὴρ* (τὸ καντάρι) εἶναι ἄλλη μονὰς ἴση μὲ 44 ὀκάδας· τὸ *δράμι* ἄλλη μονὰς ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς, ἢ ἡ ὀκὰ εἶναι ἴση μὲ 400 δράμια.

Ἡ *δραχμὴ* εἶναι ἀρχικὴ μονὰς τῶν νομισμάτων· τὸ *πεντάδραχμον* ἴσον μὲ 5 δραχμάς, τὸ *χρυσοῦν ὀθώνιον* ἴσον μὲ 20 δραχμάς· τὸ *λεπτὸν* ἴσον μὲ τὸ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς.

Ἡ *ὀργυιά*, ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους· ὁ *πούς*, $\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς· ὁ *δάκτυλος*, $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδὸς καὶ $\frac{1}{72}$ τῆς ὀργυιᾶς· ἡ *γραμμή*, $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου, $\frac{1}{144}$ τοῦ ποδός, $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Ἀριθμός, ὅστις σύγκειται ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν διαφόρων μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, λέγεται *συμμιγής*, οἷον $5^{\text{ὀργ}}\ 8^{\text{πόδ}}\ 6^{\text{δάκ}}\ 3^{\text{γραμ.}}$ ἢ $8^{\text{έτη}}\ 245^{\text{ἡμ}}\ 15^{\text{ὦρ}}\ 9^{\text{λεπ}}$ κτλ.

Τὰ ὀνόματα τῶν διαφόρων μονάδων συνειθίζουν νὰ τὰ γράφουν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ ὀλίγον δεξιά, ὄχι ὁλόκληρα, οἷον $5^{\text{ὀργ}}\ 3^{\text{πόδ}}\ 5^{\text{δάκ}}\ 3^{\text{γραμ.}}$

Διαφέρει δὲ συμμιγὴς ἀκεραίου μόνον κατὰ ταῦτα, α΄. ὅτι αἱ διάφοροι μονάδες του εἶναι ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλοστόν, ἢ ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλαπλάσιον, καὶ ὄχι τὸ αὐτό, ὡς ἡ μονάς, ἡ δεκάς, ἡ ἑκατοντάς, αἵτινες εἶναι ἄλλη ἄλλης τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἢ πολλοστόν· β΄. ὅτι διακρίνονται εἰς τὴν γραφὴν οἱ ἀριθμοὶ τῶν διαφόρων μονάδων ὄχι ἁπλῶς διὰ τῆς θέσεως, ὡς τοῦ ἀκεραίου, ἀλλὰ διὰ τοῦ ἐπιτιθεμένου ὀνόματος τῶν μονάδων· καὶ γ΄. ὅτι εἶναι πάντοτε συγκεκριμμένος ὁ συμμιγής. Μικτοῦ δὲ ἀριθμοῦ διαφέρει ὁ συμμιγὴς καθότι εἶναι συνθετώτερος, ὅτι γράφεται διαφορετικὰ καὶ ὅτι εἶναι πάντοτε συγκεκριμμένος.

Διὰ ταῦτα αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις καθίστανται δυσκολώτεραι, καὶ ἀνάγκη ἐν συντόμῳ νὰ διαλάβωμεν καὶ περὶ αὐτῶν τ' ἀναγκαιότερα.

Περὶ τροπῆς συμμιγοῦς εἰς ἕνα ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τῆς μικροτέρας μονάδος του, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

70. Ἂν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 43 ἐξεθέταμεν προβλήματα τοιαῦτα, καὶ πρέπει νὰ ἦναι γνωστὸν πῶς γίνονται αὗται αἱ τροπαί, μολοντοῦτο ἐπαναλαμβάνομεν αὐτὰ ἐδῶ τελειότερα.

Ἄς τραπῇ ὁ $34^{\text{ἡμ}}$ $8^{\text{ὡρ}}$ $15^{\text{λεπ}}$ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν λεπτῶν.

Ἐπειδὴ ἡ $1^{\text{ἡμ}}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $24^{\text{ωρ}}$, αἱ $34^{\text{ἡμ}}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ 34 φορὰς $24^{\text{ωρ}}$· λοιπὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν αἱ $24^{\text{ωρ}}$ ἐπὶ 34, ἢ ὁ 34 ἐπὶ 24, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι $816^{\text{ωρ}}$. Προσθέτομεν τώρα εἰς τὸν 816 καὶ τὰς $8^{\text{ωρ}}$, καὶ τὸ ἄθροισμα $824^{\text{ωρ}}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $34^{\text{ἡμ}}$ καὶ $8^{\text{ωρ}}$. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ $1^{\text{ωρ}}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $60^{\text{λεπ}}$, αἱ $824^{\text{ωρ}}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ 824 φορὰς $60^{\text{λεπ}}$· λοιπὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθοῦν τὰ $60^{\text{λεπ}}$ ἐπὶ 824, ἢ ὁ 824 ἐπὶ 60, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι $49440^{\text{λεπ}}$. Προσθέτοντες καὶ τὰ $15^{\text{λεπ}}$ ἔχομεν ἄθροισμα $49455^{\text{λεπ}}$, ἰσοδύναμον μὲ $34^{\text{ἡμ}}$ $8^{\text{ωρ}}$ $15^{\text{λεπ}}$.

$$
\begin{array}{r}
34^{\text{ἡμ}}\ 8^{\text{ωρ}}\ 15^{\text{λεπ}} \\
24 \\ \hline
136 \\
68 \\ \hline
816 \\
8 \\ \hline
824^{\text{ωρ}} \\
60 \\ \hline
49440 \\
15 \\ \hline
49455^{\text{λεπ}}
\end{array}
$$

Σημ. Ὁ $49455^{\text{λεπ}}$ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν κλασματικὸν $\frac{49455}{1440}$ τῆς ἡμέρας, διότι τὸ 1 λεπτὸν εἶναι $\frac{1}{1440}$ τῆς ἡμέρας, καὶ ἐπομένως τὰ $49455^{\text{λεπ}}$ εἶναι $\frac{49455}{1440}$ τῆς ἡμέρας.

Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι τρέπεται συμμιγὴς ἀριθμὸς εἰς ἕνα ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τῶν μικροτάτων του μονάδων οὕτω· *πρῶτον πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριστερὸς ἀριθμὸς τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ ἀριθμὸν, ὅστις νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, μὲ ὅσας ἀμέσως μικροτέρας της ἰσοδυναμεῖ μία μονὰς τοῦ ἀριστεροῦ ἀριθμοῦ, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστίθεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀμέσως μικροτέρων μονάδων τοῦ συμμιγοῦς· ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τοῦτο πολλαπλασιάζεται ὡσαύτως ἐπὶ ἀριθμὸν, ὅστις νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, μὲ ὅσας ἀμέσως μικροτέρας της ἰσοδυναμεῖ μία μονὰς τοῦ ἀθροίσματος, καὶ προστίθεται εἰς τὸ γινόμενον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀμέσως μικροτέρων μονάδων τοῦ συμμιγοῦς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.*

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα παραδείγματα.

$12^{\pi\epsilon\nu}\ 4^{\delta\rho}\ 50^{\lambda\epsilon\pi}$	$6^{\sigma\tau\alpha\tau}\ 8^{o\kappa}\ 150^{\delta\rho}$	$18^{o\rho}\ 3^{\pi o\delta}\ 9^{\delta\alpha\kappa}$
5	44	6
60	24	108
4	24	3
$64^{\delta\rho}$	8	$111^{\pi o\delta}$
100	$272^{o\kappa}$	12
6400	400	222
50	108800	111
$6450^{\lambda\epsilon\pi}$	150	9
	$108950^{\delta\rho}$	$1341^{\delta\alpha\kappa}$

71. *Ἄς τραπῶσι τὰ* $49455^{\lambda\epsilon\pi}$ *τῆς ὥρας εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἰσοδύναμον.* Ἐπειδὴ 1440 λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ μίαν ἡμέραν, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἀπὸ ὅσας φορὰς 1440 λεπτὰ

49455	1440
6255	$34^{\eta\mu}\ 8^{\omega\rho}\ 15^{\lambda\epsilon\pi}$
495	60
15	

σύγκεινται τὰ $49455^{\lambda\epsilon\pi}$, μὲ τόσας ἡμέρας ἰσοδυναμοῦν. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἀπὸ ποσάκις 1440 σύγκειται ὁ 49455, ἤτοι τὸν λόγον τοῦ 49455 πρὸς τὸν 1440, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου. Εὑρίσκομεν λοιπὸν πηλίκον $34^{\eta\mu}$ καὶ $\frac{495}{1440}$ τῆς ἡμέρας, ἤτοι $495^{\lambda\epsilon\pi}$. Πάλιν, ἐπειδὴ 60 λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ μίαν ὥραν, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἀπὸ ὅσας φορὰς 60 σύγκεινται τὰ 495 λεπτά, μὲ τόσας ὥρας ἰσοδυναμοῦν, ἤγουν μὲ τόσας ὥρας, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ λόγος τοῦ 495 πρὸς τὸν 60, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 495 διὰ τοῦ 60, διὰ νὰ εὑρεθοῦν. Εὑρίσκομεν λοιπὸν πηλίκον 8 ὥρας καὶ $\frac{15}{60}$ τῆς ὥρας, ἤτοι 15 λεπτά. Λοιπὸν τὰ $49455^{\lambda\epsilon\pi}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $34^{\eta\mu}\ 8^{\omega\rho}\ 15^{\lambda\epsilon\pi}$.

Ἐκ τούτου εὐκόλως ἐννοεῖ τις ὅτι, διὰ νὰ τραπῶσι $6450^{\lambda\epsilon\pi}$ τῆς δραχμῆς εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἰσοδύναμον, πρέπει νὰ διαιρεθῶσι τὰ 6450 διὰ 500, καὶ ἔπειτα τὸ κατάλοιπον $450^{\lambda\epsilon\pi}$ διὰ τοῦ 100, καὶ οὕτως εὑρίσκεται ὅτι $6450^{\lambda\epsilon\pi}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $12^{\pi\epsilon\nu\tau}\ 4^{\delta\rho}\ 50^{\lambda\epsilon\pi}$. Τὰ δὲ $108950^{\delta\rho\alpha\mu}$ πρέπει νὰ διαιρεθῶσι διὰ 17600, καὶ τὸ κατάλοιπον $3350^{\delta\rho}$ διὰ 400, καὶ οὕτως εὑρίσκεται ὅτι $108950^{\delta\rho}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $6^{\sigma\tau\alpha\tau}\ 8^{o\kappa}\ 150^{\delta\rho\alpha\mu}$.

Ἄς τραπῶσι τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἡμέρας εἰς ὥρας καὶ λεπτά.

Ἐπειδὴ ἡ ἡμέρα ἰσοδυναμεῖ μὲ $24^{\omega\rho}$, εἰμποροῦμεν νὰ νοήσωμεν τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἡμέρας ὡς $\frac{3}{5}$ τῶν $24^{\omega\rho}$, τὰ δὲ $\frac{3}{5}$ τῶν $24^{\omega\rho}$ εὑρίσκονται (62 σημ. 6'.) ὅτι ἰσοδυναμοῦν μὲ $14^{\omega\rho}$ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας· Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ὥρα ἰσοδυναμεῖ μὲ $60^{\lambda\epsilon\pi}$, τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας νοοῦνται $\frac{2}{5}$ τῶν 60 λεπτῶν, τὰ δὲ $\frac{2}{5}$ τῶν $60^{\lambda\epsilon\pi}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $24^{\lambda\epsilon\pi}$. Λοιπὸν τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἡμέρας ἰσοδυναμοῦν μὲ $14^{\omega\rho}$ $24^{\lambda\epsilon\pi}$.

Ὡσαύτως τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀργυιᾶς εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν $6^{\pi o\delta}$, τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμοῦν μὲ $3^{\pi o\delta}$ καὶ $\frac{6}{8}$ τοῦ ποδός. Τὰ δὲ $\frac{6}{8}$ τοῦ ποδὸς ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰ $\frac{6}{8}$ τῶν 12 δακτύλων, ἤτοι μὲ $9^{\delta\alpha\kappa}$. Λοιπὸν $\frac{5}{8}$ τῆς ὀργ. ἰσοδυναμοῦν μὲ $3^{\pi o\delta}$ $9^{\delta\alpha\kappa\tau}$.

Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως συμμιγῶν.

72. *Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἐκτελεῖται ὡς ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων.* Ἀλλ' ἐπειδὴ τῶν συμμιγῶν αἱ διάφοροι μονάδες εἶναι ὄχι τὸ δέκατον ἡ μία τῆς ἄλλης ἢ τὸ δεκαπλάσιον, ὡς τῶν ἀκεραίων αἱ μονάδες, ἀλλ' ἄλλο πολλοστὸν ἢ πολλαπλάσιον, διὰ τοῦτο γίνονται ὀλίγον δυσκολώτερα.

Ἄνθρωπός τις ἐδάνεισεν εἰς μὲν τὸν Γεώργιον $38^{\pi\epsilon\nu\tau}$ $2^{\delta\rho}$ $35^{\lambda\epsilon\pi}$, *εἰς δὲ τὸν Κωνσταντῖνον* $54^{\pi\epsilon\nu}$ $4^{\delta\rho}$ $75^{\lambda\epsilon\pi}$, *εἰς δὲ τὸν Σωκράτην* $24^{\pi\epsilon\nu}$ $3^{\delta\rho}$ $50^{\lambda\epsilon\pi}$· *πόσα ἐδάνεισεν ὅλα;*

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον. Ἀφοῦ λοιπὸν γραφθῶσιν ὡς ἐδῶ φαίνονται, προσθέτομεν τὰ λεπτά, καὶ τοῦ ἀθροίσματος 160 τὰ μὲν 60 γράφομεν ὑπὸ τὰ λεπτά, τὰ δὲ 100 ἰσοδυναμοῦν μὲ μίαν δραχμήν, καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὰς δραχμάς·

$38^{\pi\epsilon\nu}$	$2^{\delta\rho}$	$35^{\lambda\epsilon\pi}$
54	4	75
24	3	50
118	0	60

οὕτως ἔχομεν 10 δρ, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν δύο πεντάδραχμα· γράφομεν λοιπὸν 0 ὑπὸ τὰς δραχμάς, καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ δύο πεντάδ. εἰς τὰ λοιπὰ πεντάδ. Οὕτως ἔχομεν ἄθροισμα $118^{\pi\epsilon\nu}$ $0^{\delta\rho}$ $60^{\lambda\epsilon\pi}$· λοιπὸν τόσα ἐδάνεισεν.

Ἔμελλέ τις νὰ κτίσῃ τοῖχον $35^{o\rho\gamma}$ $4^{\pi\delta}$ $9^{\delta\alpha\kappa}$ $4^{\gamma\rho}$ *καὶ* *ἔκτισε μόνον ἓν μέρος του ἴσον μὲ* $12^{\text{οργ}}$ $5^{\text{ποδ}}$ $7^{\text{δακ}}$ $10^{\text{γρ}}$· *πόσον ἔχει νὰ κτίσῃ ἀκόμη;*

Πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν πρῶτον, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον. Ἀφοῦ λοιπὸν γραφθοῦν ὡς φαίνονται, ἀφαιροῦμεν $10^{\text{γρ}}$ ὄχι ἀπὸ τὰς 4, ἀλλὰ ἀπὸ 16, ἀφοῦ ἐνώσωμεν μὲ τὰς 4 ἕνα τῶν 9^{δ} ἢ 12γ.

$35^{\text{οργ}}$	$4^{\text{ποδ}}$	$9^{\text{δακ}}$	$4^{\text{γρ}}$
12	5	7	10
22	5	1	6

γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον 6 ὑπὸ τὰς γραμμάς. Ἔπειτ' ἀφαιροῦμεν $7^{\text{δακ}}$ ἀπὸ 8 καὶ γράφομεν 1 ὑποκάτω. Ἔπειτ' ἀφαιροῦμεν $5^{\text{ποδ}}$ ὄχι ἀπὸ 4, ἀλλ' ἀπὸ $10^{\text{ποδ}}$, ἀφοῦ ἐνώσωμεν $1^{\text{ορ}}$ ἢ $6^{\text{ποδ}}$ μὲ τοὺς 4, καὶ γράφομεν ὑποκάτω τὸ ὑπόλοιπον 5. Τελευταῖον ἀφαιροῦμεν $12^{\text{ορ}}$ ἀπὸ 34 καὶ μένουν $22^{\text{ορ}}$. Λοιπὸν μέλλει νὰ κτίσῃ ἀκόμη $22^{\text{ορ}}$ $5^{\text{ποδ}}$ $1^{\text{δά}}$ $6^{\text{γρ}}$.

$25^{\text{στ}}$	$28^{\text{οκ}}$	$350^{\text{δρ}}$	$32^{\text{ημ}}$	$20^{\text{ωρ}}$	$45^{\text{λεπ}}$	$15^{\text{ορ}}$	$4^{\text{ποδ}}$	$11^{\text{δακ}}$
6	39	280	9	22	50	6	5	9
9	42	350	7	18	40	10	3	8
8	24	200	6	19	56	5	5	10
51	3	380	57	10	11	39	2	2

$34^{\text{πεν}}$	$3^{\text{δρ}}$	$66^{\text{λεπ}}$	$12^{\text{στατ}}$	$15^{\text{οκ}}$	$300^{\text{δρ}}$	$8^{\text{ημ}}$	$10^{\text{ωρ}}$	$25^{\text{λεπ}}$
28	3	78	6	35	250	3	22	40
5	4	88	5	24	50	4	11	45

Νὰ προστεθῶσι τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἡμέρας εἰς $12^{\text{ωρ}}$ $25^{\text{λεπ}}$. Πρῶτον τρέπονται τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἡμέρας εἰς $14^{\text{ωρ}}$ $24^{\text{λεπ}}$ (71), καὶ αὗται προστίθενται εἰς τὰς $12^{\text{ωρ}}$ 25^{λ}.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως συμμιγῶν.

73. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον καὶ διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ὅπως πολλαπλασιάζεται καὶ διαιρεῖται ἀκέραιος δι' ἀκεραίου.*

Ἐὰν μὲ ἓν πεντάδραχμον ἀγοράζῃ τις ἀγρὸν $6^{\text{ορ}}$ 3^{π} 8^{δ}, *μὲ* $15^{\text{πεντ}}$ *πόσον ἤθελεν ἀγοράσει;*

Φανερὸν ὅτι θέλει ἀγοράσει δεκαπεντάκις $6^{\text{ορ}}$ 3^{π} 8^{δ}.

Πρῶτον πολλαπλασιάζονται οἱ 8 δάκτυλοι ἐπὶ 15 καὶ εὑρίσκεται 120, ἔπειτα οἱ 3 πόδες καὶ εὑρίσκεται 45, τελευταῖον αἱ $6^{ορ}$ καὶ εὑρίσκονται 90. Μετὰ ταῦτα τρέπονται οἱ $120^{δακ}$ εἰς 10 πόδας σωστὰ (71), οἵτινες προσθέτονται εἰς τοὺς 45 πόδας, καὶ τὸ ἄθροισμα $55^{ποδ}$ τρέπεται (71) εἰς $9^{οργ}$ καὶ $1^{ποδ}$, ὅστις γράφεται ὑπὸ τοὺς πόδας. Τελευταῖον αἱ $9^{οργ}$ προσθέτονται εἰς τὰς $90^{οργ}$, καὶ οὕτως ἔχομεν γινόμενον $99^{οργ}$ $1^{π}$.

$6^{ορ}$	$3^{π}$	$8^{δ}$
		15
90	45	120
99	1	0

$120 : 12 = 10$

$55 : 6 = 9$

$24^{ημ}$	$18^{ωρ}$	$40^{λεπ}$
		56
1344	1008	2240
1387	13	20

2240 : 60 = 37, 440, 20
37 + 1008 = 1045
1045 : 24 = 43, 85, 13

$50^{πεντ}$	$4^{δρ}$	$75^{λεπ}$
		32
		150
		225
1600	128	2400
1630	2	0

2400 : 100 = 24
24 + 128 = 152
152 : 5 = 30, 2

Μὲ 15 πεντάδραχμα ἠγόρασέ τις ἀγρὸν $99^{οργ}$ $1^{π}$, μὲ ἓν πεντάδραχμον πόσον ἀγοράζει;

Ἐπειδὴ τὸ ἓν πεντάδραχμον εἶναι τὸ δέκατον πέμπτον τῶν $15^{πεντ}$, διὰ τοῦτο θέλει ἀγοράσει τὸ δέκατον πέμπτον τῶν $99^{ορ}$ $1^{ποδ}$, καὶ πρέπει νὰ διαιρεθοῦν αἱ $99^{ορ}$ $1^{π}$ διὰ 15.

Πρῶτον διαιροῦνται αἱ 99^ορ διὰ 15, καὶ εὑρίσκεται πηλίκον 6^ορ καὶ κατάλοιπον 9^ορ, αἵτινες τρέπονται (70) εἰς 54^ποδ, εἰς τοὺς ὁποίους προσθέτεται καὶ ὁ εἷς ποῦς τοῦ διαιρετέου. Ἔπειτα διαιροῦνται οἱ 55^π διὰ 15, καὶ εὑρίσκεται πηλίκον 3^π καὶ κατάλοιπον 10π, οἵτινες τρέπονται εἰς 120^δακ. Τελευταῖον διαιροῦνται καὶ οἱ 120^δακ διὰ 15, καὶ εὑρίσκεται σωστὰ πηλίκον 8^δακ. Λοιπὸν μὲ ἓν πεντάδραχμον ἀγοράζει τις ἀγρὸν 6^οργ 3^ποδ 8^δακ.

$99^{\text{οργ}}\ 1^{\pi}$ | 15 — $6^{\text{ορ}}\ 3^{\pi}\ 8^{\delta}$
90
9
6
54
1
55
45
10
12
120
120
0

$1387^{\text{ημ}}\ 13^{\text{ωρ}}\ 20^{\text{λεπ}}$ | 56 — $24^{\text{ημ}}\ 18^{\text{ωρ}}\ 40^{\text{λεπ}}$
267
43
24
172
86
13
1045
485
37
60
2220
20
2240
224
0

$1630^{\text{πεντ}}\ 2^{\text{δρ}}$ | 32 — $50^{\text{πεντ}}\ 4^{\text{δρ}}\ 75^{\text{λεπ}}$
30
5
150
2
152
24
100
2400
224
160
160
0

74. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικὸν ἢ μικτὸν, καὶ διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ ἢ μικτοῦ, ὡς ἀκέραιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ κλασματικοῦ ἢ μικτοῦ* (62, 63, 65, 66).

Καὶ ἂν μὲν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι κλασματικὸς, πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγὴς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ὡς ἤδη εἴπομεν· ἂν δὲ ἦναι μικτὸς, τρέπεται πρῶτον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ ἔπειτα ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγής. Ἰδοὺ παραδείγματα.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ 25πεν 3δρ 80λεπ ἐπὶ $\frac{8}{9}$, ἤγουν ἂς εὑρεθῶσι τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ συμμιγοῦς.

25πεντ 3δρ 80λεπ
8
200 24 640 | 640 : 100 = 6, 40 ; 6 + 24 = 30 ; 30 : 5 = 6
206 0 40 | 9
26 — 22πεν 4δρ 48λεπ $\frac{8}{9}$
8
5
40
4
100
400
40
440
80
8

Ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 12ημ 6ωρ 25λεπ ἐπὶ 3 $\frac{2}{5}$. Τρέπεται ὁ 3 $\frac{2}{5}$ εἰς $\frac{17}{5}$. Πολλαπλασιάζεται ὁ 12ημ 6ωρ 25λ ἐπὶ 17, καὶ τὸ γινόμενον 208ημ 13ωρ 5λεπ διαιρεῖται διὰ 5, καὶ οὕτως εὑρίσκεται γινόμενον ὁ 41ημ 17ωρ 1λεπ.

Ἂς διαιρεθῇ ὁ 9στ 24οκ 120δρ διὰ $\frac{5}{8}$. Ἀναστρέφονται οἱ ὅροι τοῦ $\frac{5}{8}$, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγὴς ἐπὶ $\frac{8}{5}$, ἤγουν πολλαπλασιάζεται ὁ 9στ 24οκ 120δρ ἐπὶ 8, καὶ τὸ γινόμενον 76στ 14οκ 160δρ διαιρεῖται διὰ 5, καὶ προκύπτει τὸ ζητούμενον πηλίκον 15στ 11οκ 272δρ. Οὕτως ἂν διαιρεθῇ ὁ 15ορ 5π 8δ διὰ $\frac{5}{7}$, προκύπτει πηλίκον 21ορ 1π 6δ 8γρ.

75. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον συμμιγῆ, ἐὰν οὗτος ὁ πολλαπλασιαστὴς τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν* (70 σημ.), *καὶ ἐπὶ τοῦτον τὸν κλασματικὸν πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος συμμιγὴς ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Σάκκος ἀλεύρου 2στ 26οκ 200δρ *πρὸς* 3πεντ 4δρ 50λεπ *τὸν στατῆρα πόσον ἀξίζει;*

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀξίας τῶν $2^{στ}$ $26^{οκ}$ $200^{δρ}$ εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $3^{πεντ}$ $4^{δρ}$ $50^{λεπ}$ ἐπὶ τὸν $2^{στ}$ $26^{οκ}$ $200^{δρ}$. Τρέπομεν λοιπὸν τὸν πολλαπλασιαστὴν $2^{στ}$ $26^{οκ}$ $200^{δρ}$ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν δραμίων, ἤτοι εἰς $45800^{δρ}$, καὶ γράφομεν παρονομαστὴν ὑποκάτω τὸν 17600, διότι τόσα δράμια ἰσοδυναμοῦν μὲ ἕνα στατῆρα (70 σημ.), καὶ ἔχομεν $\frac{45800}{17600}$ ἢ $\frac{458}{176}$.

Τώρα πολλαπλασιάζομεν τὸν $3^{πεν}$ $4^{δρ}$ $50^{λεπ}$ ἐπὶ 458, καὶ τὸ γινόμενον $1806^{πεν}$ $1^{δρ}$ τὸ διαιροῦμεν διὰ 176, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τοῦ ἀλεύρου $10^{πεν}$ $0^{δ}$ $74^{λ}$ περίπου.

```
   3πεν   4δρ   50λεπ
                 458
  ---------------------
  1374   1832  22900
   412
  -------------------
  1786     1  | 176
    26        |---------------
     5         10πεν 0δρ 74λεπ
  ----
   131        22900 | 100
   100              |----
  ----               229
 13100              1832
   780             --------
    76              2061 | 5
                       1 |----
                          412
```

Εἰς μίαν ὥραν ὁδοιπόρος τις ὁδεύει $524^{ορ}$ $4^{ποδ}$, *εἰς* $12^{ωρ}$ $40^{λεπ}$ *πόσον θέλει ὁδοιπορήσει;*

Καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $524^{ορ}$ $4^{ποδ}$ ἐπὶ $12^{ωρ}$ $40^{λεπ}$. Ὁ $12^{ωρ}$ $40^{λεπ}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $760^{λεπ}$ ἢ $\frac{760}{60}$ τῆς ὥρας, ἢ $\frac{76}{6}$ ἢ $\frac{38}{3}$. Τὸ γινόμενον τοῦ $524^{ορ}$ $4_{π}$ ἐπὶ 38 εἶναι $19937^{ορ}$ $2^{π}$, καὶ τὸ πηλίκον τούτου διὰ 3 εἶναι $6645^{ορ}$ $4^{π}$ $8^{δ}$.

76. α. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἄλλου συμμιγοῦς ἑτεροειδοῦς, ἀφοῦ οὗτος τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἀναστραφῶσιν οἱ ὅροι του, καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος συμμιγὴς ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Οἰκογένειά τις ἐδαπάνησεν $2^{\text{στ}}$ $12^{\text{οκ}}$ $300^{\text{δρ}}$ *σακχάρεως εἰς* $3^{\text{μην}}$ $8^{\text{ημ}}$, *πόσον ἔρχεται τὸν μῆνα ἡ δαπάνη, καὶ πόσον τὴν ἡμέραν;* (Ὁ μὴν εἶναι 30 ἡμέρ.)

Πρὸς εὕρεσιν τούτου πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς διὰ τοῦ δευτέρου. Ὁ $3^{\text{μην}}$ $8^{\text{ημ}}$ ἀποτελεῖ $98^{\text{ημ}}$ ἢ $\frac{98}{30}$ τοῦ μηνὸς ἢ $\frac{49}{15}$. Ἀναςρέφομεν τοὺς ὅρους τούτου, καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{15}{49}$ τὸν $2^{\text{στ}}$ $12^{\text{οκ}}$ $300^{\text{δρ}}$ ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι ἐδαπανοῦσε τὸν μῆνα $30^{\text{οκ}}$ $336^{\text{δρ}}$. Διαιροῦντες δὲ τοῦτον διὰ 30, εὑρίσκομεν ὅτι ἐδαπανοῦσε τὴν ἡμέραν $1^{\text{οκ}}$ $11^{\text{δρ}}$ $\frac{1}{5}$.

Χωράφιον $12^{\text{ορ}}$ $2^{\text{π}}$ *ἐπωλήθη* $30^{\text{δρ}}$ $75^{\text{λ}}$, *πόσον ἀξίζει ἡ ὀργυιά;*

Ὅσον παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $30^{\text{δρ}}$ $75^{\text{λ}}$ διὰ τοῦ $12^{\text{ορ}}$ $2^{\text{π}}$. Τοῦτο δὲ εἶναι $2^{\text{δρ}}$ $50^{\text{λ}}$ σχεδόν.

ε'. *Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ὁμοειδεῖς, τρέπονται καὶ οἱ δύο εἰς ἰσοδυνάμους ἀριθμοὺς τῆς μικροτάτης μονάδος, καὶ ἔπειτα διαιρεῖται ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς ἀκέραιος δι' ἀκεραίου, τὸ δὲ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁποῖον προσδιορίζεται εἰς τὸ πρόβλημα.*

Μὲ $30^{\text{πεν}}$ $2^{\text{δρ}}$ $25^{\text{λ}}$ *πόσους πήχεις τσόχας ἀγοράζει τις πρὸς* $3^{\text{πεν}}$ $4^{\text{δρ}}$ $50^{\text{λ}}$ *τὸν πῆχυν;*

Ἀπὸ ὅσους ἀριθμοὺς ἴσους μὲ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν σύγκειται ὁ πρῶτος, δηλαδὴ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον, τόσους πήχεις ἀγοράζει. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου.

Τρέπεται λοιπὸν ὁ μὲν $30^{\text{πεν}}$ $2^{\text{δρ}}$ $25^{\text{λ}}$ εἰς $15225^{\text{λεπ}}$, ὁ δὲ $3^{\text{πεν}}$ $4_{\text{δ}}$ $50^{\text{λ}}$ εἰς $1950^{\text{λεπ}}$. Τὸ δὲ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου εἶναι $7^{\text{πηχ}}$ $\frac{21}{26}$.

$4^{\text{οκ}}$ $50^{\text{δρ}}$ *ἐλαίου ἀξίζουν ἓν πεντάδραχμον, πόσον ἀξίζουν* $2^{\text{στ}}$ $28^{\text{οκ}}$;

Πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ $2^{\text{στ}}$ $28^{\text{οκ}}$ διὰ $4^{\text{οκ}}$ $50^{\text{δρ}}$, ἢ ὁ $46400^{\text{δρ}}$ διὰ $1650^{\text{δράμ}}$, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι $28^{\text{πεν}}$ $60^{\text{λεπ}}$ περίπου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Τί εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ καὶ πῶς γράφονται.

77. Ἐὰν μεταχειρισθῶμεν μόνον ταύτας τὰς κλασματικὰς μονάδας, *τὸ δέκατον* τῆς ἀρχικῆς, *τὸ ἑκατοστὸν* αὐτῆς, *τὸ χιλιοστὸν* αὐτῆς, *τὸ δεκαχιλιοστὸν*, *τὸ ἑκατοχιλιοστὸν*, *τὸ ἑκατομμυριοστὸν* κτλ, ἑκάστη τούτων εἶναι τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας της δέκατον μέρος, τῆς δὲ ἀμέσως μικροτέρας της δεκαπλασία, ὡς αἱ μονάδες τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, καὶ λέγονται *δεκαδικαὶ μονάδες*. Καὶ τὰ κλάσματα δὲ, τῶν ὁποίων μονὰς εἶναι μία τούτων τῶν δεκαδικῶν, οἷον 5 *δέκατα* ἤ, ὡς συνήθως λέγονται, *δεκατημόρια*, 24 *ἑκατοστὰ* ἢ *ἑκατοστημόρια*, 384 *χιλιοστὰ* ἢ *χιλιοστημόρια* κτλ ὀνομάζονται *δεκαδικά*.

Σημ. Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι κυρίως *δεκαδικός*. Ὅταν δὲ ὁμοῦ μὲ ἀκέραιον ἦναι καὶ κλάσμα δεκαδικὸν, οἷον 24 μονάδες 72 ἑκατοστημόρια ἢ 24 $\frac{72}{100}$, ὁ ἀριθμὸς τότε εἶναι *μικτὸς δεκαδικὸς* ἢ μόνον *δεκαδικὸς*, διότι ὁ 24 $\frac{72}{100}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν $\frac{2472}{100}$ (49)· ὡσαύτως ὁ $\frac{275}{10}$ εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός.

78. Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα γράφονται ἄνευ παρονομαστοῦ συνήθως, ἀλλ' ἀντὶ τούτου τίθεται 0 καὶ δεξιά του ὑποδιαστολὴ, ἔπειτα ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος. Τὰ δεκατημόρια γράφονται μὲ ἓν ψηφίον δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς οὕτω

0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9·

Τὰ ἑκατοστημόρια γράφονται μὲ δύο ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς οὕτω

0,01, 0,02, 0,03....0,09, 0,10, 0,11, 0,12....0,19, 0,20, 0,21, 0,22,....0,29, 0,30, 0,31....0,90, 0,91, ... 0,99.

Τὰ χιλιοστημόρια γράφονται μὲ τρία ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς οὕτω

0,001, 0,002, 0,003 ... 0,009, 0,010, 0,011,.... 0,099, 0,100, 0,101,....0,110, 0,111....0,200, 0,201....0999.

Τὰ δεκαχιλιοστημόρια γράφονται μὲ τέσσαρα ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς οὕτω

0,0001, 0,0002...0,0010...0,0099, 0,0100,...0,0999, 0,1000, 0,1001...0,1009, 0,1010, 0,1011...0,9999.

Ὡσαύτως τὰ ἑκατοχιλιοστημόρια γράφονται μὲ πέντε ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, τὰ ἑκατομμυριοστημόρια ἢ μιλιονιστημόρια γράφονται μὲ ἓξ ψηφία, κτλ.

Σημ. Οἱ ἀρχάριοι πρέπει νὰ μάθωσι καλὰ τούτους τοὺς πίνακας ἀναπληρωμένους ἐντελῶς.

Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἦναι μεγαλήτερος τῆς μονάδος, οἷον 6345 ἑκατοστημόρια ἢ $\frac{6345}{100}$, ἀφίνεται τὸ ὄνομα ἑκατοστημόρια ἢ ὁ παρονομαστὴς 100, καὶ τίθεται ὑποδιαστολὴ μεταξὺ τοῦ 3 καὶ τοῦ 4, ὥστε νὰ μείνουν δύο ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, διότι τὰ ἑκατοστημόρια γράφονται μὲ δύο ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ ἔχομεν 63,45, ὅστις ἢ θεωρεῖται ὡς 6345 ἑκατοστημόρια, ἢ ὡς 63 μονάδες 45 ἑκατοστημόρια, ἤγουν $\frac{6345}{100}$ ἢ 63 $\frac{45}{100}$. — Ὡσαύτως 274 δεκατημόρια ἢ $\frac{274}{10}$ γράφεται οὕτως 27,4. — 5782 χιλιοστημόρια ἢ $\frac{5782}{1000}$ γράφεται 5,782, ὅστις γράφεται καὶ 5 $\frac{782}{1000}$.

Ὅταν δὲ ἀπαγγέλλεται χωριστὰ ὁ ἀκέραιος καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα, τότε γράφεται πρῶτον ὁ ἀκέραιος καὶ δεξιά του ἡ ὑποδιαστολή, ἔπειτα γράφεται τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ὡς ἤδη εἴπομεν. 12 μονάδες 35 ἑκατοστημόρια γράφεται οὕτω 12,35. — 6 μονάδες 72 χιλιοστημόρια γράφεται οὕτως 6,072. — 42 μονάδες 9 δεκαχιλιοστημόρια γράφεται οὕτω 42,0009, ὅστις γράφεται καὶ οὕτω $\frac{420009}{10000}$ ἢ 42 $\frac{9}{10000}$.

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς γραμμένος διὰ ψηφίων ἀπαγγέλλεται διττῶς, ἢ ὅλος ὡς ἀκέραιος, εἰς δὲ τὸ τέλος λέγεται τὸ ὄνομα τῆς μικροτάτης δεκαδικῆς μονάδος ἤτοι τῆς δεξιᾶς, ἢ χωριστὰ τὸ πρὸς ἀριστερὰν τῆς ὑποδιαστολῆς μέρος του ἤτοι τὸ ἀκέραιον, καὶ χωριστὰ ἔπειτα τὸ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ὡς ἀκέραιον, καὶ εἰς τὸ τέλος τούτου λέγεται τὸ ὄνομα τῆς μικροτάτης μονάδος του ἤτοι τῆς δεξιᾶς. Ἡ δὲ μονὰς αὕτη προσδιορίζεται πάντοτε ἐκ τῆς θέσεως τοῦ δεξιοῦ ψηφίου. Κατὰ ταῦτα ὁ 52,724 ἀπαγγέλλεται 52 μονάδες 724 χιλιοστημόρια ἢ 52724 χιλιοστημόρια, διότι τὸ δεξιὸν ψηφίον 4 ἔχον τὴν τρίτην θέσιν δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς παριστάνει χιλιοστημόρια. — ὁ 4,0384 εἶναι 4 μονάδες 384 δεκαχιλιοστημόρια ἢ 40384 δεκαχιλιοστημόρια.

79. Ὅταν δεκαδικὸς ἀριθμὸς, οἷον 5,74, προσλάβῃ ἓν ἢ δύο ἢ πλειότερα μηδενικὰ, δὲν πολλαπλασιάζεται γινόμενος 5,740, ἢ 5,7400 κτλ, διότι τὰ σημαντικά του ψηφία παριστάνουν ὅ,τι παριστάνουν καὶ εἰς τὸν 5,74, ἀλλ' ἐνῷ ἦτον ἑκατοστημόρια, τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν χιλιοστημορίων ἢ δεκαχιλιοστημορίων κτλ. Ὡσαύτως ὁ 6,4 καὶ ὁ 6,40, καὶ ὁ 6,400 κτλ παριστάνουν τὸ αὐτό.

Διὰ τοῦτο ἑτερώνυμοι δεκαδικοὶ ἀριθμοί, οἷον 4,7, 9,35, 15,384, τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, ἐὰν εἰς τὸν πρῶτον τεθῶσι 00 καὶ εἰς τὸν δεύτερον τεθῇ 0, ὥστε νὰ ἔχωσιν ὅλοι τρία ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς. Οὕτως ἔχομεν 4,700, 9,350, 15,384, οἵτινες εἶναι ὅλοι ἀριθμοὶ χιλιοστημορίων.

Περὶ τροπῆς κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

80. Τρέπεται κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν οὕτω· *Γράφεται ὁ παρονομαστὴς δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, σύρεται γραμμὴ μεταξὺ αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸν παρονομαστὴν, ὡς εἰς διαίρεσιν, εἰς δὲ τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου γράφεται* 0, *ἔπειτα δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τίθεται* 0 *καὶ διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον τίθεται δεξιὰ τοῦ* 0, *τοῦ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου, δεξιὰ δὲ τοῦ καταλοίπου τίθεται ἄλλο* 0 *καὶ διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον τίθεται δεξιὰ τοῦ προειρημένου πηλίκου, δεξιὰ δὲ τοῦ καταλοίπου τίθεται καὶ ἄλλο* 0, *καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἕως νὰ μὴ μείνῃ κατάλοιπον, ἢ ὅσον θέλῃ τις.*

Οὕτω τρέπεται τὸ $\frac{3}{4}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του 0,75

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0,75 \end{array}$$

Τὸ $\frac{7}{8}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του 0,875

$$\begin{array}{r|l} 70 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0,875 \\ 40 & \end{array}$$

Τὸ $\frac{22}{50}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του 0,44

$$\begin{array}{r|l} 220 & 50 \\ \cline{2-2} 200 & 0,44 \end{array}$$

Τὸ $\frac{12}{13}$ εἰς τὸ 0,92307692.....

$$\begin{array}{r|l} 120 & 13 \\ \hline 30 & 0,92307692..... \\ 40 & \\ 100 & \\ 90 & \\ 120 & \\ 30 & \end{array}$$

Ἐδῶ βλέπει τις ὅτι, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσῃ ἡ διαίρεσις, ποτὲ δὲν θέλει εὑρεθῆ διαιρετέος διαιρέσιμος διὰ τοῦ 13. Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν κρατοῦνται δύο ἢ τρία μόνον ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ τ' ἄλλα παραιτοῦνται· καὶ τότε τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι σχεδὸν ἰσοδύναμον μὲ τὸ κοινόν. Ἐδῶ π. χ. τὸ 0,923 εἶναι σχεδὸν ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{12}{13}$, ἢ ἄλλως εἶναι *μεῖον χιλιοστημορίου* ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{12}{13}$. Τὸ δὲ 0,92 εἶναι *μεῖον ἑκατοστημορίου* ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{12}{13}$, διότι τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ 0,92 εἶναι ἑκατοστημόριον.

Ἂς τραπῇ τὸ $\frac{5}{7}$ εἰς δεκαδικὸν μεῖον χιλιοστημορίου ἰσοδύναμον σημαίνει ἂς εὑρεθῇ δεκαδικὸν μὲ τρία ψηφία, καὶ τοιοῦτον εἶναι τὸ 0,714.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 7 \\ \hline 10 & 0,714 \\ 30 & \end{array}$$

Περὶ πράξεων ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν.

81. *Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Αἱ δύο αὗται πράξεις ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀπαράλλακτα ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.* Πρέπει δὲ νὰ προσέχωμεν ὄχι μόνον νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον κατὰ τάξιν τῶν μονάδων των, ἀλλὰ καὶ νὰ θέτωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μεταξὺ τῶν μονάδων καὶ δεκατημορίων τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς. Οἱ δὲ πρὸς ἀφαίρεσιν ἑτερώνυμοι ἀριθμοὶ εἶναι προτιμότερον νὰ τρέπωνται πρότερον εἰς ὁμωνύμους (79) καὶ ἔπειτα νὰ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις.

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} 28,34 \\ 9,7642 \\ 348,003 \\ 94,9825 \\ \hline 481,0897 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 642,795 \\ 74,27 \\ 9,8457 \\ 98,752 \\ \hline 825,6627 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42,5800 \\ 35,8493 \\ \hline 6,7307 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 58,0346 \\ 15,4900 \\ \hline 42,5446 \end{array}$$

82. *Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως. Πολλαπλασιάζεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἐπὶ μὲν 10, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή του μίαν θέσιν πρὸς δεξιάν, ἐπὶ δὲ 100, ἐὰν ἡ ὑποδιαστολὴ μετατεθῇ δύο θέσεις πρὸς δεξιάν, ἐπὶ δὲ 1000, ἐὰν τρεῖς κτλ.* Κατὰ ταῦτα, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ ἀριθμοῦ 58,4938 πρὸς δεξιὰν μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς θέσεις κτλ, προκύπτει ὁ 584,938, ὅστις εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ πρώτου, ἢ ὁ 5849,38, ὅστις εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ πρώτου, ἢ ὁ 58493,8, ὅστις εἶναι χιλιοπλάσιος κτλ.

Ἀντιστρόφως, *διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ 10, ἢ 100, ἢ 1000 κτλ, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή του πρὸς ἀριστερὰν μίαν θέσιν ἢ δύο ἢ τρεῖς κτλ.* Οὕτως, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 4578,2 προκύπτει ὁ 457,82, ὅστις εἶναι τὸ δέκατον τοῦ πρώτου, ὁ 45,782, ὅστις εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ πρώτου κτλ.

Καὶ ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 10, ἐὰν τεθῇ ὑποδιαστολὴ μεταξὺ τῶν μονάδων καὶ δεκάδων, διὰ 100, ἐὰν τεθῇ ὑποδιαστολὴ μεταξὺ τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων κτλ. Οὕτως ὁ 4789 τρέπεται εἰς 478,9, ὅστις εἶναι τὸ δέκατον τοῦ ἀκεραίου, ἢ εἰς 47,89, ὅστις εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἀκεραίου κτλ. (Ἴδε καὶ 38).

83. Ὅταν δὲ ἢ ὁ πολλαπλασιαστέος ἦναι δεκαδικὸς ἢ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες, *πολλαπλασιάζεται ὁ εἷς ἐπὶ τὸν ἄλλον ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι, ἀλλ' εἰς τὸ γινόμενον τίθεται ὑποδιαστολὴ εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ ἦναι δεξιὰ αὐτῆς τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία καὶ εἰς τοὺς δύο ὁμοῦ παράγοντας.*

Παραδείγματα.

45,67	845	62,578
37	9,34	4,92
319 69	33 80	125 156
1370 1	253 5	5632 02
1689,79	7605	25031 2
	7892,30	307,88376

0,63 ἐπὶ 0,235 παράγει 1,55805
0,274 ἐπὶ 0,08 παράγει 0,02192
0,0056 ἐπὶ 0,00024 παράγει 0,000001344

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 274 ἐπὶ 8 ἔχει τέσσαρα ψηφία, δεξιὰ δὲ τῆς ὑποδιαστολῆς πρέπει νὰ ἦναι πέντε, διὰ τοῦτο ἐτέθη ἀριστερὰ τοῦ γινομένου 2192 ἓν 0, καὶ ἔπειτα τὸ 0,. Εἰς δὲ τὸ τελευταῖον διὰ τὸν ἴδιον λόγον ἐτέθησαν 00000.

84. ά. Ὅταν ὁ διαιρετέος ἔχῃ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς πλειότερα ψηφία παρὰ τὸν διαιρέτην, *διαιρεῖται ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι καὶ οἱ δύο, ἀλλ' εἰς τὸ πηλίκον τίθεται ὑποδιαστολὴ εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ ἦναι δεξιὰ αὐτῆς τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος πλειότερα τοῦ διαιρέτου.* Παραδείγματα.

```
1689,79|37            307,88376|4,92
 209   |45,67          12 68   |62,578
  247                   2 843
   259                   3837
     0                    3936
          0,02192|0,08       0
              2192|8
               59  0,274
                32
```

β'. Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχουν ἰσάριθμα ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, *διαιρεῖται ὁ εἷς διὰ τοῦ ἄλλου ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι*, καὶ τὸ πηλίκον, ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς πράξεως, εἶναι τὸ ζητούμενον. Παραδείγματα.

```
7892,30|9,34               0,6432|0,0024
 420 3 |845
  46 70                      6432|24
      0                       163 268
                               192
                                 0
```

γ'. Ὅταν ὁ διαιρετέος ἔχῃ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ὀλιγώτερα ψηφία παρὰ τὸν διαιρέτην, *θέτονται πρῶτον δεξιὰ τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ τόσα, ὥστε νὰ ἔχῃ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ὅσα ψηφία ἔχει καὶ ὁ διαιρέτης, καὶ ἔπειτα διαιρεῖται ὁ εἷς διὰ τοῦ ἄλλου ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι.*

Παραδείγματα.

478,2 | 59,32 84,54 | 2,3954 0,27 | 0,948

47820 | 5932
364 | 8 $\frac{364}{5932}$

845400 | 23954
126780 | 35 $\frac{7010}{23954}$
7010

2700 | 948
8040 | 0,284...
4560

Εἰς ταύτας τὰς διαιρέσεις εὑρίσκουσι κλάσμα δεκαδικὸν ἀντὶ τῶν κοινῶν $\frac{364}{5932}$ καὶ $\frac{7010}{23954}$· πρὸς τοῦτο δὲ θέτεται 0 δεξιὰ τῶν καταλοίπων 364 καὶ 7010, καὶ διαιροῦνται διὰ τῶν διαιρετῶν, τὸ δὲ πηλίκον θέλει εἶσθαι δεκατημόρια, καὶ οὕτως ἐξακολουθεῖ ἡ πρᾶξις ὅσον θέλῃ τις. Μὲ ἄλλας λέξεις, τὸ κλάσμα $\frac{364}{5932}$ τρέπεται εἰς δεκαδικόν(80).

Ἰδοὺ καὶ ἄλλο παράδειγμα, ὅπου βλέπει τις καὶ πῶς διαιρεῖται ἀκέραιος διὰ δεκαδικοῦ.

458 | 24,72

45800 | 2472
21080 | 18,52...
13040
6800
1856

Τὸ πηλίκον 18,52.... εἶναι μεῖον 0,01 ἰσοδύναμον μὲ τὸ ζητούμενον.

Σημ. Ἐκ τῶν προηγουμένων εἶναι φανερὸν πῶς γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς ἢ ἡ διαίρεσις, ὅταν ὁ εἷς τῶν ἀριθμῶν ἦναι δεκαδικὸς καὶ ὁ ἄλλος κλασματικὸς ἢ μικτός.

Δεκαδικὸν σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν.

85. Εἶναι διατεταγμένον νὰ ἔμβωσιν εἰς χρῆσιν βαθμηδὸν καθ' ὅλην τὴν Ἑλλάδα αἱ ἑξῆς δεκαδικαὶ μονάδες, αἵτινες ἐπονομάζονται *βασιλικαί*.

Μονάδες μήκους. Πῆχυς, ἀρχικὴ μονάς, *παλάμη*, δέκατον τοῦ πήχεως, *δάκτυλος*, δέκατον τῆς παλάμης καὶ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως, *γραμμή*, δέκατον τοῦ δακτύλου, ἑκατοστὸν τῆς παλάμης καὶ χιλιοστὸν τοῦ πήχεως. *Στάδιον*, ἴσον μὲ 1000 πήχεις, *σχοινίς*, ἴση μὲ 10 στάδια καὶ μὲ 10000 πήχεις.

Μονάδες ἐπιφανείας. Τετραγωνικὸς πῆχυς, ἀρχικὴ μονάς, *στρέμμα*, ἴσον μὲ 1000 τετραγωνικοὺς πήχεις.

Μονάδες στερεῶν καὶ ῥευστῶν. *Λίτρα*, ἀρχικὴ μονάς, *κοτύλη*, δέκατον τῆς λίτρας, *μύστρον*, δέκατον τῆς κοτύλης καὶ ἑκατοστὸν τῆς λίτρας, *κύβος*, δέκατον τοῦ μύστρου, ἑκατοστὸν τῆς κοτύλης καὶ χιλιοστὸν τῆς λίτρας. *Κοιλὸν*, ἴσον μὲ 100 λίτρας.

Μονάδες βάρους. *Μνᾶ*, ἀρχικὴ μονάς, *δραχμή*, χιλιοστὸν πεντακοσιοστὸν ἢ $\frac{1}{1500}$ τῆς μνᾶς (α), *ὀβολὸς*, δέκατον τῆς δραχμῆς, *κόκκος*, δέκατον τοῦ ὀβολοῦ καὶ ἑκατοςὸν τῆς δραχμῆς. *Τάλαντον*, ἴσον μὲ 100 μνᾶς, *τόνος*, ἴσος μὲ 10 τάλαντα καὶ μὲ 1000 μνᾶς.

86. Θέτομεν ἐδῶ προβλήματά τινα ἀποβλέποντα τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

1. Ἐμετρήθη τὸ μεταξὺ δύο φρουρίων διάστημα μὲ τὰ νέα μέτρα καὶ εὑρέθη ὅτι εἶναι 45$^{\text{ςάδ}}$ 54$^{\text{πηχ}}$ 6$^{\text{παλ}}$ 8$^{\text{δακ}}$, πῶς θέλει γραφθῆ ὁ ἀριθμὸς οὗτος; Ἀπόκρ. 45054$^{\text{πήχ}}$,68.

2. Ὁ ἀριθμὸς 49578,245 παριστάνει μῆκος μετρημένον μὲ τὰ νέα μέτρα, πόσα νέα μέτρα εἶναι; Ἀπόκ. 49$^{\text{ςάδ}}$ 578$^{\text{πηχ}}$ 245$^{\text{γρα}}$· ἢ 4$^{\text{σχοιν}}$ 9$^{\text{ςτ}}$ 578$^{\text{πηχ}}$ 2$^{\text{παλ}}$ 4$^{\text{δακ}}$ 5$^{\text{γραμ}}$· ἢ 49578245$^{\text{γραμ}}$.

3. 28$^{\text{λιτ}}$ 4$^{\text{κοτ}}$ 7$^{\text{μύςρ}}$ 5$^{\text{κύβ}}$ ἐλαίου πῶς γράφεται; Ἀπ. 28,475.

4. Ὁ ἀριθμὸς 4567,25 παριστάνει σῖτον μετρημένον μὲ τὰ νέα μέτρα, πόσον εἶναι; Ἀπόκρ. 45$^{\text{κοιλ}}$ 67$^{\text{λιτ}}$ 2$^{\text{κοτ}}$ 5$^{\text{μυς}}$.

5. Σάκκος ὀρύζιον ζυγίζει 74$^{\text{μνᾶς}}$ 6$^{\text{δρ}}$ 4$^{\text{ὀβολ}}$, πῶς θέλει γραφθῆ ὁ ἀριθμὸς οὗτος; Ἀπόκρ. 74$^{\text{μν}}$ 64$^{\text{ὀβ}}$.

6. Ὁ ἀριθμὸς 45694$^{\text{μν}}$ 274$^{\text{κόκ}}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ 4$^{\text{τόν}}$ 5$^{\text{τάλαν}}$ 694$^{\text{μν}}$ 2$^{\text{δρ}}$ 7$^{\text{ὀβ}}$ 4$^{\text{κόκ}}$.

7. Ὁ βασιλικὸς πῆχυς ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,513 τῆς ὀργυιᾶς μεῖον 0,001· πήχ. 24,358 μὲ ποῖον συμμιγῆ ἀριθμὸν ὀργυιῶν κτλ ἰσοδυναμεῖ;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἰσοδυναμεῖ μὲ 24 φορὰς 0,513 τῆς ὀργυιᾶς καὶ $\frac{358}{1000}$ τοῦ 0,513 τῆς ὀργυιᾶς· λοιπὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 0,513 ἐπὶ 24,358. Τὸ γινόμενον εἶναι ὀργ. 12,495654 ἢ μὲ μικρόν τι λάθος 12,5 ἢ 12$^{\text{ὀργ}}$ $\frac{5}{10}$ ἢ 12$^{\text{ὀργ}}$

(α) Ἐδῶ δὲν ἐφυλάχθη ἡ δεκαδικὴ σχέσις.

$3^{\pi o\delta}$, διότι $\frac{5}{10}$ τῆς ὀργυιᾶς εἶναι $3^{\pi o\delta}$ (71). Λοιπὸν πήχεις 24,358 ἰσοδυναμοῦν σχεδὸν μὲ $12^{o\rho\gamma}$ $3^{\pi o\delta}$.

8. Ἀντιστρόφως, ἡ ὀργυιὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ πήχ. 1,949 μεῖον 0,001· $6^{o\rho\gamma}$ $7^{\delta\alpha\kappa}$ μὲ πόσους πήχεις ἰσοδυναμοῦν;

Καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 1,949 ἐπὶ τὸν συμμιγῆ, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον. Οἱ $4^{\pi o\delta}$ $7^{\delta\alpha\kappa}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{55}{72}$ τῆς ὀργυιᾶς, ἡ ἂν τραπῇ εἰς δεκαδικὸν κλάσμα (80) τὸ $\frac{55}{72}$, ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,764 μεῖον 0,001· λοιπὸν αἱ $6^{o\rho\gamma}$ $4^{\pi o\delta}$ $7^{\delta\alpha\kappa}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ ὀρ. 6,764 μεῖον 0,001. Τώρα πολλαπλασιάζεται ὁ 1,949 ἐπὶ 6,764, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι πήχ. 13,183036 ἢ 13,183 μεῖον 0,001.

Ὡσαύτως ἠξεύρων τις ὅτι ἡ βασιλικὴ μνᾶ ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀκὰν 1,1719 ἢ μὲ 468 $\frac{3}{4}$ παλαιὰ δράμια, καὶ ὅτι ἡ ὀκὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,8533 τῆς μνᾶς, εἰμπορεῖ νὰ προσδιορίσῃ μὲ πόσας ὀκάδας κτλ ἰσοδυναμεῖ ἀριθμός τις μνῶν, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

Ἔτι σημειοῦμεν ὅτι ὁ βασιλικὸς πῆχυς ἰσοδυναμεῖ μὲ πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως (ἐνδεζὲ) 1,5432, (ἀρσχὶν) 1,495, ἢ ὁ ἐνδεζὲς ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,648 τοῦ βασιλικοῦ πήχεως, καὶ ὁ ἀρσχὶν μὲ 0,669 τοῦ αὐτοῦ βασιλικοῦ.

Ἡ βασιλικὴ λίτρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,03015 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ, τὸ δὲ παλαιὸν κοιλὸν μὲ λίτρας 33,166.

Ἰδοὺ καί τινα ἄλλα προβλήματα εἰς λύσιν.

9. Πήχεις τσόχι 24,75 πρὸς δρ. 1,20 τὸν πῆχυν πόσον ἀξίζουν; Ἀπόκρ. δρ. 29,70

10. Πόσων τετραγωνικῶν πήχεων εἶναι γήπεδον, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι πήχεις 14,25, τὸ δὲ πλάτος πήχεις 6,38; Ἀπόκρ. 90,915.

11. Κοιλὰ σίτου 26,58 ἀξίζουν $23^{\pi\epsilon\nu\tau}$ $3^{\delta\rho}$, 75, πόσον ἀξίζει τὸ κοιλόν; (ὁ $23^{\pi\epsilon\nu\tau}$ $3^{\delta\rho}$, 75 ἰσοδυναμεῖ μὲ δρ. 118,75)· δραχ. 4,46.

12. $40^{\mu\nu}$ $24^{\delta\rho}$,48 καφὲ διενεμήθη εἰς κάμποσους ἐμπόρους καὶ ἐπῆρεν ἕκαστος ἀνὰ $10^{\mu\nu}$ $6^{\delta\rho}$,12· πόσοι ἦσαν οἱ ἔμποροι; Ἀπόκρ. 4.

Σημ. Πρὸς γύμνασιν νὰ τεθῶσιν εἰς τινα προβλήματα τῶν ἀριθμ. 43 καὶ 68 δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἀντὶ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἢ μικτῶν, καὶ νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἔπειτα αἱ ἀναγκαῖαι πράξεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΩΝ.

Περὶ ἀναλογιῶν.

87. Εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμ. 40 ὅτι *λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον* εἶναι τρίτος ἀριθμός, ὅςις γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ὅπως ὁ πρῶτος ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου, καὶ ὅςτις ἑπομένως, ὅταν ἦναι γνωστός, δείχνει πῶς ὁ πρῶτος γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου· ὅταν δὲ ἦναι ἄγνωστος, εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἀριθμός τις πρέπει νὰ νοῆται γινόμενος ἐξ ἄλλου, ἤτοι τὸν λόγον αὐτῶν, μεταξὺ τῶν δύο γράφομεν δύο στιγμὰς ⁚, ἢ γράφομεν τὸν δεύτερον ὑπὸ τὸν πρῶτον καὶ μεταξύ των γραμμήν. Οὕτως, ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς 4 γράφεται 12⁚4 ἢ $\frac{12}{4}$, διότι ὁ λόγος εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 4. Ὁ 12 καὶ ὁ 4 λέγονται *ὅροι* τοῦ λόγου, ὁ μὲν 12 *ἡγούμενος*, ὁ δὲ 4 *ἑπόμενος*. — Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου, ὁ ἡγούμενος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἑπομένου καὶ τοῦ πηλίκου, ἤτοι τοῦ λόγου.

88. Εἴπομεν ἔτι εἰς τὸν ἀριθ. 42 ὅτι τέσσαρες ἀριθμοὶ λέγονται *ἀνάλογοι*, ἐὰν ὁ λόγος δύο ἐκ τῶν τεσσάρων ἦναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἄλλων δύο, οἷον οἱ τέσσαρες οὗτοι 30⁚6, 20⁚4. Διὰ νὰ σημειωθῇ δὲ ὅτι οἱ δύο λόγοι εἶναι ἴσοι, τίθενται μεταξὺ τῶν δύο λόγων τέσσαρες στιγμαί, οὕτω 30⁚6⁚⁚20⁚4. Τὸ σύνολον δὲ τεσσάρων ἀναλόγων ἀριθμῶν λέγεται *ἀναλογία*. Ὁ ἀριστερὸς λόγος λέγεται *πρῶτος*, ὁ δὲ δεξιὸς *δεύτερος*. Ἡ ἀναλογία ἀπαγγέλλεται οὕτω, 30 πρὸς 6 ὡς 20 πρὸς 4, ἢ ὅποιον λόγον ἔχει ὁ 30 πρὸς τὸν 6, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ 20 πρὸς τὸν 4.

Οἱ ὅροι τῆς *ἀναλογίας* λέγονται κατὰ σειρὰν *πρῶτος*, *δεύτερος*, *τρίτος*, *τέταρτος*. Ὁ πρῶτος καὶ τρίτος εἶναι *ἡγούμενοι*, ὁ μὲν *πρῶτος ἡγούμενος*, ὁ δὲ *δεύτερος*· ὁ δεύτερος καὶ τέταρτος εἶναι *ἑπόμενοι*, ὁ μὲν *πρῶτος ἑπόμενος*, ὁ δὲ *δεύτερος*.

Ἔτι δὲ ὁ πρῶτος καὶ τέταρτος λέγονται *ἄκροι ὅροι* ἢ *ἄκρα*, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος *μέσοι ὅροι* ἢ *μέσα* τῆς ἀναλογίας.

89. *Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων πάσης ἀναλογίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.* Π. χ. τῆς 20 : 5 :: 12 : 3 τὸ γινόμενον τοῦ 20 καὶ 3 εἶναι 60, ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 5 καὶ 12 εἶναι 60.

Γίνεται δὲ φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι ὁ πρῶτος ἡγούμενος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἑπομένου του καὶ τοῦ λόγου, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι γινόμενον τῶν δύο ἑπομένων καὶ τοῦ πρώτου λόγου. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ δεύτερος ἡγούμενος εἶναι γινόμενον τοῦ ἑπομένου του καὶ τοῦ λόγου, τὸ γινόμενον τῶν μέσων εἶναι καὶ αὐτὸ γινόμενον τῶν δύο ἑπομένων καὶ τοῦ δευτέρου λόγου. Λοιπὸν ἐπειδὴ οἱ δύο λόγοι εἶναι ἴσοι, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.

90. Ὅταν ὁ τελευταῖος ἢ ὁ τέταρτος ὅρος ἀναλογίας τινὸς ἦναι ἄγνωστος καὶ οἱ ἄλλοι τρεῖς ἦναι γνωστοί, *εὑρίσκεται ὁ τέταρτος, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο μέσοι καὶ διαιρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ πρώτου.* Τῆς 6 : 2 :: 30 χ (χ σημειόνει τὸν ἄγνωστον) ὁ τέταρτος εὑρίσκεται, ἐὰν τὸ γινόμενον 60 τῶν μέσων διαιρεθῇ διὰ τοῦ 6, καὶ ἔχομεν πηλίκον 10· λοιπὸν ὁ τέταρτος ὅρος εἶναι 10. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 60 τῶν μέσων εἶναι ἐνταυτῷ καὶ γινόμενον τῶν ἄκρων· τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου, τοῦ πρώτου, δίδει πηλίκον τὸν ἄλλον ἄκρον ἤτοι τὸν τέταρτον. (Ἰδὲ τὸ 34 καὶ 40 πρόβλ. τοῦ ἀριθ. 43).

91. *Πάσης ἀναλογίας εἰμποροῦμεν νὰ συμμεταθέσωμεν τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους, καὶ μετὰ τὴν συμμετάθεσιν οἱ ὅροι θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογοι.* Π. χ. τῆς 30 : 10 :: 9 : 3 ἐὰν μὲν συμμεταθέσωμεν τοὺς μέσους, ἔχομεν 30 : 9 :: 10 : 3, ἐὰν δὲ συμμεταθέσωμεν τοὺς ἄκρους, ἔχομεν 3 : 10 :: 9 : 30. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων πάσης ἀναλογίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων· ἀλλὰ καὶ τῶν δύο τελευταίων τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων, διότι εἶναι τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο τὰ αὐτὰ μὲ τὰ τῆς πρώτης ἀναλογίας· λοιπὸν καὶ αἱ δύο τελευταῖαι εἶναι ἀναλογίαι.

92. *Ἐὰν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι πάσης ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ προκύψοντα γινόμενα ἢ πηλίκα θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα πρὸς τοὺς δύο τελευταίους ὅρους αὐτῆς.* Π. χ. ἐκ τῆς 24 : 6 : : 36 : 9, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι

ἐπὶ 3, θέλει προκύψει ἡ . . . . . 72 : 18 : : 36 : 9,

ἐὰν δὲ διαιρεθῶσι διὰ 3, θέλει προκύψει ἡ 8 : 2 : : 36 : 9.

Ἐπειδὴ ὁ λόγος 24 : 6 γράφεται καὶ οὕτω $\frac{24}{6}$, καὶ ἠξεύρομεν ὅτι ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{24}{6}$ διὰ 3, προκύπτουσι $\frac{72}{18}$ ἢ $\frac{8}{2}$, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τὸν $\frac{24}{6}$, δηλ. ὁ λόγος 72 : 18 ἢ ὁ λόγος 8 : 2 εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον 24 : 6, καὶ ἐπομένως ἴσος καὶ μὲ τὸν 36 : 9. Λοιπὸν αἱ δύο ἤδη εὑρεθεῖσαι μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν εἶναι ἀναλογίαι.

93. *Ἐὰν οἱ δύο ἡγούμενοι πάσης ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ προκύψοντα γινόμενα ἢ πηλίκα μὲ τοὺς ἑπομένους τῆς ἀναλογίας ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.* Π. χ. ἐκ τῆς 24 : 4 : : 30 : 5, ἐὰν μὲν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἡγούμενοι

ἐπὶ 2, θέλει προκύψει ἡ . . . . . . 48 : 4 : : 60 : 5,

ἐὰν δὲ διαιρεθῶσι διὰ 3, θέλει προκύψει ἡ 8 : 4 : : 10 : 5.

Ἐπειδὴ, ἐὰν τῆς 24 : 4 : : 30 : 5 συμμετατεθῶσιν οἱ μέσοι, προκύπτει ἡ 24 : 30 : : 4 : 5.

Ἀλλ' εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 2 καὶ διαιρέσεως διὰ 3 τῶν δύο πρώτων ὅρων

προκύπτει ἡ . . . . 48 : 60 : : 4 : 5,

καὶ ἡ 8 : 10 : : 4 : 5·

ἐὰν δὲ τούτων συμμεταθέσωμεν τὰ μέσα,

προκύπτουν αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος 48 : 4 : : 60 : 5,

8 : 4 : : 10 : 5.

Σημ. Διὰ μὲν τῆς διαιρέσεως ἢ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἢ τῶν δύο ἡγουμένων ἀναλογίας τινὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην, καθίστανται οἱ ὅροι αὐτῆς μικρότεροι, τὸ ὁποῖον εἶναι ὠφέλιμον, ὡς θέλομεν ἰδεῖ μετ' ὀλίγον. Διὰ δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολλάκις τρέπομεν ἀναλογίαν

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι εἶναι κλασματικοί, εἰς ἄλλην, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραιοι, καὶ οὕτως εὐκολύνομεν τὰς πράξεις. Π. χ. ἡ ἀναλογία $\frac{7}{18} : \frac{4}{3} :: \frac{5}{6} : \chi$
τρέπεται εἰς ταύτην . . . . . . $7 : 4 :: 5 : \chi$,
ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἐπὶ 3, καὶ ἔπειτα οἱ δύο ἡγούμενοι ἐπὶ 6.

Περὶ μεθόδου τῶν τριῶν.

94. Ὅταν προβλήματός τινος οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ ἦναι τρεῖς καὶ ζητῆται τέταρτος, δύο δὲ τῶν τριῶν γνωστῶν ἦναι ὁμοειδεῖς, ἤτοι αἱ μονάδες των παριστάνουν τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, ὁ δὲ τρίτος ἦναι ὁμοειδὴς μὲ τὸν ἄγνωστον καὶ συσχετισμένος μὲ τὸν ἕνα τῶν δύο γνωστῶν ὁμοειδῶν, ὅπως ὁ ἄγνωστος μὲ τὸν ἄλλον, καὶ ἔτι ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ὁμοειδῶν ἦναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ τρίτου πρὸς τὸν ἄγνωστον, λύεται τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ κατ' ἄλλην διαφορετικὴν μέθοδον παρ' ἐκείνην, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐλύθησάν τινα τοῦ ἀριθ. 43.

Τὸ 58 πρόβλημα τοῦ ἀριθ. 43, *δηλ. 642^{δρ} ἔφεραν τόκον εἰς ἓν ἔτος 36^{δρ}, 12572^{δρ} πόσον τόκον φέρουσιν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;* ἔχει τρεῖς γνωςοὺς καὶ ἕνα ἄγνωστον· αἱ 642^{δρ} καὶ αἱ 12572^{δρ} εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοί, αἱ δὲ 36^{δρ} εἶναι τόκος, καὶ διὰ τοῦτο ὁμοειδὴς μὲ τὸν ἄγνωςον τόκον· εἶναι δὲ συσχετισμένος ὁ 36 μὲ τὸν 642, ὡς ὁ ἄγνωστος μὲ τὸν 12572, διότι φανερόνουν τὸ κέρδος ὁ μὲν 36 τῶν 642^{δρ}, ὁ δὲ ἄγνωστος τῶν 12572^{δρ}. Προσέτι ὁ λόγος τοῦ 12572 πρὸς τὸν 642 εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τόκων των, διότι διπλάσιος ἢ τριπλάσιος κτλ τοῦ 642 ἀριθμὸς δραχμῶν φέρει τόκον διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ τοῦ τόκου 36. Οἱ τέσσαρες λοιπὸν οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι, καὶ εἰμποροῦν νὰ διαταχθῶσιν εἰς ἀναλογίαν οὕτω . . . . $12572 : 642 :: \chi : 36$,
(χ σημαίνει τὸν ἄγνωστον), ἢ οὕτω $642 : 12572 :: 36 : \chi$.

Τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ ἑξῆς, 12^{οκ} *σακχάρεως ἀξίζουν* 18^{δρ}· 4^{οκ} *τῆς αὐτῆς σακχάρεως πόσον ἀξίζουν;*

Τὸ δὲ 60 πρόβλ. τοῦ ἀριθ. 43, δηλ. 6 *κτίσται ἔκτισαν τοῖ-*

χόν τινα εἰς 48 *ἡμέρας*, 24 *κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν τὸν κτίσει;* κατὰ μὲν τἄλλα ὁμοιάζει μὲ τὰ προηγούμενα, διαφέρει δὲ κατὰ τοῦτο, ὅτι, ἐνῷ 6 κτίσται ἔκτισαν τὸν τοῖχον εἰς 48 ἡμέρας, διπλάσιος τοῦ 6 ἀριθμὸς κτιστῶν ἢ τριπλάσιος κτλ δὲν ἤθελαν τὸν κτίσει εἰς διπλάσιον τοῦ 48 ἀριθμὸν ἡμερῶν ἢ τριπλάσιον κτλ, ἀλλ' ἐξεναντίας εἰς τὸ ἥμισυ τῶν 48 ἡμερῶν ἢ εἰς τὸ τρίτον κτλ. Λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ 24 πρὸς τὸν 6 δὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ ἀγνώστου πρὸς τὸν 48, ἀλλ' ἀντιςρόφως, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 48 πρὸς τὸν ἄγνωςον. Εἰμποροῦν λοιπὸν καὶ οὗτοι νὰ διαταχθῶσιν εἰς ἀναλογίαν οὕτως $24 : 6 :: 48 : \chi$.

Τῶν δύο πρώτων προβλημάτων οἱ ἀριθμοὶ λέγονται *κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι*, τοῦ δὲ τελευταίου *ἀντιστρόφως ἀνάλογοι*.

Τοῦ πρώτου προβλήματος οἱ δύο συσχετισμένοι ἀριθμοὶ 642 καὶ 36, ἤτοι αἱ δραχμαὶ αἵτινες κερδίζουν καὶ τὸ κέρδος αὐτῶν, λέγονται *σύστοιχοι*, ὡσαύτως καὶ οἱ ἄλλοι δύο 12572 καὶ ὁ ἄγνωστος. Καὶ τοῦ τρίτου δὲ ὁ 6 καὶ 48, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν κτιστῶν καὶ αἱ ἡμέραι κατὰ τὰς ὁποίας ἔκτισαν τὸν τοῖχον, λέγονται *σύστοιχοι*, καὶ ὁ 24 δὲ καὶ ὁ ἄγνωστος ὡσαύτως.

Μετὰ ταῦτα ἰδοὺ πῶς λύονται τὰ τοιαῦτα προβλήματα.

Σημειόνεται ὁ ἄγνωστος διὰ χ καὶ ἀριστερά του γράφεται ὁ ὁμοειδής του· ἔπειτα, ἐὰν μὲν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι, γράφονται ἀριστερὰ τῶν δύο ἤδη γραμμένων οἱ ἄλλοι δύο κατὰ τὴν τάξιν τῶν συστοίχων των, ἤτοι ὁ σύστοιχος τοῦ χ ἑπόμενος ἢ δεύτερος καὶ ὁ σύστοιχος τοῦ ἄλλου ἡγούμενος ἢ πρῶτος· ἐὰν δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, τότε γράφονται οἱ ἄλλοι δύο κατὰ τάξιν ἀντίστροφον τῆς τῶν συστοίχων των, ἤγουν ὁ σύστοιχος τοῦ χ ἡγούμενος ἢ πρῶτος καὶ ὁ ἄλλος δεύτερος ἢ ἑπόμενος. Ἔπειτα πολλαπλασιάζονται οἱ μέσοι, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ πρώτου· ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος.

Αὕτη ἡ *μέθοδος* λέγεται *τῶν τριῶν*, διότι εἶναι μέθοδος κατὰ τὴν ὁποίαν διατάσσονται εἰς ἀναλογίαν ὁμοῦ μὲ τὸν ἄγνωστον οἱ τρεῖς γνωστοὶ ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος, καὶ οὕτω προσδιορίζεται διὰ τῶν τριῶν ὁ ἄγνωστος.

Σημ. ά. Ἐπειδὴ εἶναι εὔκολον νὰ γνωρισθῶσι τίνες εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ καὶ τίνες σύστοιχοι, ἡ δυσκολία μένει μόνον εἰς τὸ νὰ καταλάβῃ τις ἂν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀνάλογοι ἢ ὄχι, καὶ ἂν ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

Σημ. β'. Εἰς τὸν ἀριθ. 43 τὸ 58 πρόβλημα λύεται οὕτως· Ἐπειδὴ 642 δραχ. ἐκέρδισαν 36, μία δραχ., ἥτις εἶναι τὸ $\frac{1}{642}$ τοῦ 642, θέλει κερδίσει τὸ $\frac{1}{642}$ τῶν 36 ἤτοι $\frac{36}{642}$, καὶ 12572 δρ. ἐπομένως θέλουν κερδίσει 12572 φορὰς $\frac{36}{642}$. Τὸ δὲ 60 οὕτως· Ἐπειδὴ 6 κτίσται ἔκτισαν τὸν τοῖχον εἰς 48 ἡμέρας, ὁ εἷς κτίστης, ὅστις εἶναι τὸ ἔκτον τοῦ 6, ἤθελε τὸν κτίσει εἰς 6 φορὰς 48, ἤτοι εἰς 288 ἡμέρας, οἱ δὲ 24 κτίσται ἐπομένως ἤθελαν τὸν κτίσει εἰς τὸ $\frac{1}{24}$ τῶν 288 ἡμερῶν.

1. Ἵππος, ὅστις ὁδοιπορεῖ $60^{\sigma\tau\acute{\alpha}\delta}$ εἰς $6^{\tilde{\omega}\rho}$, πόσα στάδια θέλει διατρέξει εἰς 15 ὥρας;

$$6^{\tilde{\omega}\rho} : 15^{\tilde{\omega}\rho} :: 60^{\sigma\tau} : \chi^{\sigma\tau},$$

καὶ ἀφοῦ διαιρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι διὰ 6, $1 : 15 :: 10 : \chi$, ὅθεν χ ἴσον μὲ $150^{\sigma\tau}$.

2. Μὲ $144^{\delta\rho}$ ἠγοράσθησαν 9 σάκκοι σίτου· μὲ $720^{\delta\rho}$ πόσοι σάκκοι θέλουν ἀγορασθῇ;

$$144^{\delta\rho} : 720^{\delta\rho} :: 9^{\sigma\acute{\alpha}\kappa} : \chi^{\sigma\acute{\alpha}\kappa}$$

καὶ ἀφοῦ διαιρεθῶσιν οἱ ἡγούμενοι διὰ 9, καὶ ἔπειτα οἱ δύο πρῶτοι ὅροι διὰ 16, $1 : 45 :: 1 : \chi$, ὅθεν χ ἴσον μὲ 45 σάκκους.

3. Οἰκογένεια ἐκ 10 ἀνθρώπων τρώγει $150^{\dot{o}\kappa}$ ψωμὶ εἰς ἕνα μῆνα· πόσας ὀκάδας θέλει τρώγει, ἐὰν αὐξηθῇ εἰς 30 ἀνθρώπους;

4. Κτίριόν τι ἐκτίσθη εἰς 8 μῆνας ἀπὸ 120 ἐργάτας· ἄλλο παρόμοιον εἰς 2 μῆνας πόσοι ἐργάται θέλουν τὸ κτίσει;

$$2^{\mu\tilde{\eta}\nu} : 8^{\mu\tilde{\eta}\nu} :: 120^{\dot{\epsilon}\rho\gamma} : \chi^{\dot{\epsilon}\rho\gamma}$$

$$\text{ἢ } 1 : 4 :: 120 : \chi, \text{ ὅθεν } \chi \text{ ἴσον μὲ } 480^{\dot{\epsilon}\rho\gamma}.$$

5. Πλοῖον διαπλέον 20 στάδια τὴν ὥραν φθάνει ἀπὸ νῆσον εἰς ἄλλην εἰς 12 ὥρας· ἄλλο πλοῖον, τὸ ὁποῖον διαπλέει 15 στάδια τὴν ὥραν, εἰς πόσας ὥρας θέλει διαπεράσει τὸ αὐτὸ διάστημα;

$$15^{\sigma\tau} : 20^{\sigma\tau} :: 12^{\omega\rho} : \chi.$$

ἢ $1 : 4 :: 4 : \chi$, ὅθεν χ ἴσον μὲ $16^{\omega\rho}$

6. Σωλήν τις ἀδειάζει δεξαμενὴν γεμάτην ὕδατος εἰς 10 ὥρας· πόσοι σωλῆνες τῆς αὐτῆς διαμέτρου ἤθελον τὴν ἀδειάσει εἰς 24 λεπτά;

$$24^{\lambda\epsilon\pi} : 600^{\lambda\epsilon\pi} :: 1^{\sigma\omega\lambda} : \chi^{\sigma\omega\lambda}$$

$1 : 25 :: 1 : \chi$, ὅθεν χ ἴσον μὲ $25^{\sigma\omega\lambda}$.

7. Ἐὰν $\frac{11}{12}$ τῆς μνᾶς σακχάρεως ἀξίζωσι $\frac{6}{15}$ ἑνὸς πενταδράχμου, πόσον ἀξίζουν ἀναλόγως $\frac{32}{42}$ τῆς μνᾶς;

$\frac{11}{12} : \frac{32}{42} :: \frac{6}{15} : \chi$, ὅθεν χ ἴσον μὲ $\frac{2304}{6930}$ ἢ δρ. 1,66.

8. Τὰ $\frac{7}{16}$ πλοιαρίου τινὸς ἀξίζουν 250 δραχ· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{32}$ αὐτοῦ;

$$\frac{7}{16} : \frac{3}{32} :: 250^{\delta\rho} : \chi^{\delta\rho}$$

$14 : 3 :: 250 : \chi$, ὅθεν χ ἴσον μὲ δρ. 53,57.

9. Φρουρὰ ἐκ 1200 στρατιωτῶν ἔχει ζωοτροφίας διὰ 9 μῆνας· ἐὰν αὐξηθῇ ἡ φρουρὰ κατὰ 400 στρατιώτας, πόσον καιρὸν θέλουν τοὺς ἐξαρκέσει αἱ ζωοτροφίαι; Ἢ πόσον πρέπει νὰ τρώγῃ καθημέραν ἕκαστος, διὰ νὰ τοὺς ἐξαρκέσουν αἱ ζωοτροφίαι 9 μῆνας; (οἱ 1200 ἔτρωγον καθημέραν $200^{\delta\rho}$ ψωμὶ κτλ, τὰ ὁποῖα ὅλα ὁμοῦ ὑποθέτονται 1).

10. Βρύσις ῥέουσα ὥρας $3\frac{2}{5}$ γεμίζει δεξαμενήν, τὴν ὁποίαν ἄλλη βρύσις γεμίζει εἰς ὥρας $4\frac{2}{3}$· αἱ δύο ὁμοῦ εἰς πόσας ὥρας ἤθελαν τὴν γεμίσει; (Ἡ δεξαμενὴ χωρεῖ 300 ὀκάδας, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθενται ὡς 1).

$$3\tfrac{2}{5} : 1^{\omega\rho} :: 1^{\delta\epsilon\xi} : \chi^{\mu\acute{\epsilon}\rho.\ \delta\epsilon\xi}$$

$$4\tfrac{2}{3} : 1 :: 1 : \chi$$

Ἡ πρώτη εἰς 1 ὥραν γεμίζει τὰ $\frac{5}{17}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἡ δευτέρα εἰς 1 ὥραν γεμίζει τὰ $\frac{3}{14}$ τῆς δεξαμενῆς. Αἱ δύο ὁμοῦ γεμίζουν εἰς 1 ὥραν τὰ $\frac{121}{238}$ τῆς δεξαμενῆς· λοιπὸν τὴν ὅλην δεξαμενὴν γεμίζουν εἰς ὥρας $\frac{238}{121}$ ἤτοι εἰς $1^{\omega\rho}\frac{117}{121}$, ἤτοι σχεδὸν εἰς $2^{\omega\rho}$.

$$\frac{121}{238} : 1^{\delta\epsilon\xi} :: 1^{\omega\rho} : \chi$$

Περὶ πολλαπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

95. Ἄλλων προβλημάτων οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ εἶναι πέντε, ἢ ἑπτά, κτλ, καὶ εἷς ἄγνωστος, ἀποτελοῦν δὲ δύο σειρὰς συστοίχων ἢ συσχετισμένων ὁμοίως, καὶ ἀνὰ δύο εἶναι ὁμοειδεῖς ἤτοι εἷς τις τῆς μιᾶς σειρᾶς εἶναι ὁμοειδὴς μὲ ἕνα τινὰ τῆς δευτέρας σειρᾶς, δύο δὲ ὁποιοιδήποτε ὁμοειδεῖς εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὸν ἄγνωστον καὶ τὸν ὁμοειδῆ του ἢ κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

20 σκαφεῖς 12 ὥρας καθημέραν ἐργαζόμενοι εἰς 15 ἡμέρας ἔσκαψαν ἀγρὸν 30 πήχεων μακρὸν καὶ 10 πήχ. πλατύν· 35 σκαφεῖς πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ σκάψωσιν εἰς 8 ἡμέρας ἄλλον ἀγρὸν 40 πήχ. μακρὸν καὶ 6 πήχ. πλατύν;

Εἰς τὴν πρώτην εἶναι οἱ σύστοιχοι, εἰς τὴν δευτέραν εἶναι οἱ ὁμοειδεῖς των.

$$\begin{array}{lllll} 20^{\sigma\kappa}, & 12^{\omega\rho}, & 15^{\eta\mu}, & 30^{\mu\eta\kappa}, & 10^{\pi\lambda} \\ 35, & \chi, & 8, & 40, & 6. \end{array}$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται οὕτως, ἀφοῦ κατετάχθησαν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἄνω φαίνονται· *Γράφεται ὁ ἄγνωστος χ καὶ ἀριστερά του ὁ ὁμοειδής του, ἔπειτα ἀριστερά των γράφονται ἄλλοι δύο ὁμοειδεῖς ὁποιοιδήποτε, οἷον οἱ 20*

$$\begin{array}{l} 35^{\sigma\kappa} : 20^{\sigma\kappa} :: 12^{\omega\rho} : \chi^{\omega\rho} \\ 8^{\eta\mu} : 15^{\eta\mu} \\ 30^{\mu\eta\kappa} : 40^{\mu\eta\kappa} \\ 10^{\pi\lambda} : 6^{\pi\lambda} \end{array}$$

οἱ $20^{\sigma\kappa}$ $35^{\sigma\kappa}$, γράφονται δὲ κατὰ τάξιν ἀντίστροφον τῆς τῶν 12 καὶ χ, διότι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αὐτῶν· ἔπειτα ὑποκάτω τῶν 35 καὶ 20 γράφονται οἱ ἄλλοι δύο ὁμοειδεῖς $15^{\eta\mu}$ $8^{\eta\mu}$, καὶ αὐτοὶ κατὰ τάξιν ἀντίστροφον τῶν 12 καὶ χ, διότι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αὐτῶν· ἔπειτα γράφονται οἱ ἄλλοι δύο ὁμοειδεῖς $30^{\mu\eta\kappa}$ καὶ $40^{\mu\eta\kappa}$ κατὰ τὴν τάξιν τῶν 12 καὶ χ, διότι εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι αὐτῶν· τελευταῖον γράφονται ὑποκάτω καὶ οἱ ἄλλοι δύο $10^{\pi\lambda}$ καὶ $6^{\pi\lambda}$ κατὰ τὴν τάξιν τῶν 12 καὶ χ, διότι εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι αὐτῶν. Ἔπειτα διαιροῦνται οἱ πρῶτοι ὅροι διὰ τῶν κοινῶν διαιρετῶν *των, καὶ οὕτως εὑρίσκονται αἱ ἑξῆς Τελευταῖον πολλαπλασιάζονται ὅλοι οἱ πρῶτοι ὅροι ἐπ' ἀλλήλους καὶ ὅλοι οἱ δεύτεροι ὡσαύτως, γράφονται δὲ τὰ γινόμενα 840 καὶ 720 ὑποκάτω καὶ δεξιὰ καταιβάζονται οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι* 12 : χ.

7 : : : 4   12 : χ
8 : 15
3 : 4
5 : 3

840 : 720 : : 12 : χ

Ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας ταύτης, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ἡγούμενοι διὰ 12, καὶ οἱ δύο πρῶτοι διὰ 10, εὑρίσκομεν 7 : 72 : : 1 : χ, ὅθεν χ ἴσον μὲ 10ῶρ $\frac{2}{7}$, ἢ 10ωρ 17λεπ σχεδόν.

Ἐκ τούτου καταλαμβάνει τις πῶς λύεται καὶ πᾶν ἄλλο ὅμοιον πρόβλημα. Ἰδοὺ τινὰ πρὸς γύμνασιν.

1. 100 δραχμαὶ φέρουν τόκον 12 δραχμὰς εἰς ἓν ἔτος· 4580 δραχμαὶ εἰς 5 ἔτη πόσον τόκον θέλουν φέρει;

100 : 4580 : : 12 : χ
1 : 5

1 : 458 : : 6 : χ = 2748

2. 100 δρ. φέρουν τόκον 8 δρ εἰς ἓν ἔτος· πόσαι δραχ. εἰς 3 ἔτη θέλουν φέρει τόκον 1240 δραχ;

8 : 1240 : : 100 : χ
3 : 1

3 : 310 : : 50 : χ = 5166 $\frac{2}{3}$

3. 100 δραχμ. φέρουν τόκον 9 δρ εἰς ἓν ἔτος· 4580 εἰς πόσα ἔτη θέλουν φέρει τόκον 1452;

4580 : 100 : : 1 : χ
9 : 1452

4122 : 14520 : : 1 : χ

4. Ἐὰν 2570 δρ. εἰς 5 ἔτη ἔφεραν τόκον 978 δραχ, 100 δραχ. εἰς ἓν ἔτος πόσον τόκον θέλουν φέρει;

5. 145 δρ. εἰς 2 ἔτη ἔφεραν τόκον 38 δραχ· 4372 δραχ. εἰς 4 ἔτη πόσον τόκον θέλουν φέρει;

6. Ἀγοράσας τις πραγματείας 840 δρ, τὰς ἐπώλησε κερδίσας 12 $\frac{1}{2}$ τὰς 100· πόσας δραχ. ἐκέρδισε;

100 : 840 : : 12$\frac{1}{2}$: χ

7· Ἠγόρασεν ὁ ἀνταποκριτής μου πραγματείας δραχμ. 2544,25, μὲ συμφωνίαν νὰ λάβῃ *μεσιτικὸν* 8 τὰς 100· πόσας δραχ. θέλει εἶσθαι τὸ μεσιτικόν του;

8. 540 δρ. πρὸς 8 τὰς 100 τὸ ἔτος πόσον τόκον φέρουν εἰς 4 μῆνας καὶ 18 ἡμέρας;

$$\begin{array}{r} 100 : 540 :: 8 : \chi \\ 12^{\mu\eta\nu} : 4\frac{18}{30} \\ \hline 5 : 54 :: 4 : \chi \\ 12 : \frac{138}{30} \\ \hline 1800 : 7452 :: 4 : \chi \\ 25 : 414 :: 1 : \chi \end{array}$$

9. 72 δρ. πρὸς 12 τὰς 100 τὸ ἔτος πόσον τόκον φέρουν εἰς 24 ἡμέρας;

Ὁ τόκος τῶν 72 δρ. εἰς ἓν ἔτος εἶναι δρ. 8,64, εἰς μίαν ἡμέραν εἶναι τὸ $\frac{1}{360}$ τῶν 8,64, ἤτοι 2 λεπ. $\frac{1}{3}$ περίπου, καὶ εἰς 24 ἡμέρας εἶναι 24 φορὰς $2\frac{1}{3}$, ἤτοι 55 λεπτά.

10. Δανείζει τις 870 δρ. πρὸς 12 τὰς 100 τὸ ἔτος· εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους πόσας δραχμὰς θέλει λάβει;

Θέλει λάβει τὰς 870 καὶ τὸν τόκον των, ὅστις εἶναι δραχ. 104,40· λοιπὸν θέλει λάβει 974,40.

Πόσας δραχ. θέλει λάβει εἰς τὸ τέλος 4 ἐτῶν;

Θέλει λάβει τὰς 870 καὶ 4 φορὰς τὸν τόκον 104,40, ἤγουν 1287,60.

11. Ἐὰν μέλλῃ νὰ πληρώσῃ τις εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους, ἀρχίζοντος ἀπὸ σήμερον, δραχ. 974,40, διότι σήμερον ἔλαβε δανεικὰς κἄμποσας δραχμὰς μὲ τόκον πρὸς 12 τὰς 100, πόσας δραχ. ἐδανείσθη σήμερον;

Τόσας ἔλαβεν, ὅσαι ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον των ἀποτελοῦσι 974,40, δηλ. 870. $112 : 974{,}40 :: 100 : \chi$.

12. Ἐὰν μέλλῃ τις νὰ πληρώσῃ εἰς τὸ τέλος 4 ἐτῶν ἀπὸ σήμερον δρ. 1287,60, διότι ἐδανείσθη σήμερον κἄμποσας δρ. πρὸς 12 τὰς 100, πόσας δραχμὰς ἐδανείσθη;

Τόσας ἐδανείσθη, ὅσαι ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον των τεσσάρων ἐτῶν ἀποτελοῦσι 1287,60, ἤγουν 870.

$$148 : 1287{,}60 :: 100 : \chi.$$

13. Μέλλω νὰ λάβω εἰς 3 ἔτη 12750 δρ, ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχω χρείαν, συγκατατίθεμαι νὰ λάβω τώρα τόσας μόνον, ὅσαι ὁμοῦ μὲ τῶν τριῶν ἐτῶν τόκον των πρὸς 6 τὰς 100 ν' ἀποτελέσουν τὰς 12750 δραχ, τὸν δὲ τόκον αὐτὸν νὰ τὸν ζημιωθῶ· πόσας δραχμὰς θέλω λάβει;

14. Χρεωστεῖ τις νὰ μὲ δώσῃ εἰς 5 ἔτη 4785 δραχ, ἀλλ'

εὐχαριστοῦμαι νὰ τοῦ ἀφήσω 6 τὰς 100 καὶ νὰ μοῦ δώσῃ τώρα τὰς λοιπάς· πόσας θέλει μοῦ δώσει;

Πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὰς 4785 δρ. ὁ πέντε ἐτῶν τόκος των πρὸς 6 τὰς 100, καὶ ὅσαι μείνουν, τόσας θέλει μοῦ δώσει.

15. Ἐὰν ὁδοιπορῇ τις 728 στάδια εἰς 13 ἡμέρας ὁδοιπορῶν 7 ὥρας τὴν ἡμέραν, πόσα στάδια θέλει ὁδοιπορήσει εἰς 12 ἡμέρας ἀνὰ 10 ὥρας τὴν ἡμέραν;

13 : 12 :: 728 : χ
7 : 10

16. 6 κτίσται κτίζουσι τοῖχον 15 πήχεων μακρόν, 10 πήχεων ὑψηλὸν καὶ 8 παλαμῶν χονδρὸν εἰς 25 ἡμέρας· 24 κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας θέλουν κτίσει ἄλλον τοῖχον 50 πήχεων μακρόν, 22 πήχ. ὑψηλὸν καὶ 12 παλαμῶν χονδρόν;

17. 4 θερισταὶ ἔλαβαν δραχ. 22,80 εἰς 3 ἡμέρας· πόσοι θερισταὶ ἔλαβον δραχ. 547,20 εἰς 16 ἡμέρας κατὰ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον;

18. Ἐὰν 56 ὀκάδες ψωμὶ ἀρκῶσιν εἰς 7 ἀνθρώπους 14 ἡμέρας, πόσον ψωμὶ θέλει ἀρκέσει εἰς 21 ἀνθρώπους 3 ἡμέρας;

19. 9 ἄνθρωποι εἰς 5 μῆνας δαπανῶσι 450 πεντάδραχμα· 14 ἄνθρωποι εἰς 8 μῆνας πόσα θέλουν δαπανήσει ἀναλόγως;

Μέθοδος τοῦ μερίζειν εἰς ἀνάλογα.

96. Ἄλλων προβλημάτων ἡ λύσις συνίσταται εἰς τὸ νὰ μερισθῇ ἀριθμός τις γνωστὸς εἰς δύο ἢ τρεῖς ἢ τέσσαρας κτλ, οἵτινες νὰ ἦναι ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἢ δύο ἢ τρεῖς ἢ τέσσαρας κτλ γνωστούς. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Τρεῖς ποιμένες ἐνοικίασαν λειβάδιον ἀντὶ 450 δραχ· ὁ μὲν εἶχε 200 πρόβατα, ὁ δὲ 250, ὁ δὲ 400· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προβάτων του;

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅποιον λόγον ἔχουν τὰ 200 πρόβατα πρὸς τὰ 250, τοιοῦτον λόγον θέλουν ἔχει καὶ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα θέλουν πληρώσει οἱ δύο πρῶτοι· καὶ ὅποιον λόγον ἔχουν τὰ 200 πρόβατα πρὸς τὰ 400, τοιοῦτον λόγον θέλουν ἔχει καὶ τὰ χρήματα τοῦ πρώτου καὶ τὰ τοῦ τρίτου. Τὰ τρία δὲ μερίδια τῶν χρημάτων πρέπει ν' ἀποτελοῦν ἄθροισμα ἴσον μὲ 450 δρ.

Τὸ πρόβλημα λύεται οὕτω· *Πρῶτον προσθέτονται οἱ ἀριθμοὶ 200, 250 καὶ 400 καὶ ἔχομεν 850· ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἐπὶ 200 καὶ τὸ γινόμενον 90000 διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀθροίσματος 850· ἔπειτα πάλιν ὁ 450 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 250 καὶ τὸ γινόμενον 112500 διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀθροίσματος 850· τελευταῖον πολλαπλασιάζεται ὁ 450 ἐπὶ 400 καὶ τὸ γινόμενον 180000 διαιρεῖται πάλιν διὰ 850.*

Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι ὁ ἔχων τὰ 200 πρόβατα πρέπει νὰ πληρώσῃ δραχ. 105,88, ὁ δὲ ἔχων τὰ 250 πρέπει νὰ δώσῃ δρ. 132,35, ὁ δὲ ἔχων τὰ 400 πρέπει νὰ δώσῃ δραχ. 211,77.

$$\begin{array}{r} 105,88 \\ 132,35 \\ 211,77 \\ \hline 450,00 \end{array}$$

Τὸ δὲ ἄθροισμά των εἶναι 450 δραχ.

Ἐκ τούτων ἐννοεῖται πῶς λύονται καὶ τὰ ἀκόλουθα, τὰ ὁποῖα ὁμοιάζουν μὲ τὸ ἀνωτέρω.

1. Τέσσαρες ἐργάται ἔλαβον 584 δρ, ἐργασθέντες ὁ μὲν 12 ἡμέρας, ὁ δὲ 20 ἡμέρ., ὁ δὲ 8 ἡμέρ., ὁ δὲ 30 ἡμέρας· πόσας δραχ. θέλει λάβει ἕκαςος ἀναλόγως τῶν ἡμερῶν τοῦ ἔργου του;

Πολλαπλασιάζεται ὁ 584 ἐπὶ 12, ἔπειτα ἐπὶ 20, ἔπειτα ἐπὶ 8, καὶ ἔπειτα ἐπὶ 30, καὶ διαιρεῖται ἕκαστον γινόμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος 70.

2. Ἀγρὸς, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἓν τέταρτον ἀνήκει εἰς τὸν Γεώργιον, τὰ δὲ ἄλλα τρία τέταρτα εἰς τὸν Βασίλειον, ἐπωλήθη 56 δραχ· πόσας δραχμ. θέλει λάβει ὁ Γ, καὶ πόσας ὁ Β;

Ὁ Γ. 14, ὁ Β. 42.

3. Ἠγόρασαν δύο τινὲς βαμβάκι, καὶ ὁ μὲν ἐπλήρωσε 600 δραχ, ὁ δὲ 800 δρ· πωλήσαντες δὲ εὐθὺς τὸ βαμβάκι ἐκέρδισαν 200 δραχμάς· πόσας θέλει λάβει ὁ εἷς καὶ πόσας ὁ ἄλλος;

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 600 πρὸς 800 εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 6 πρὸς 8, θέλουν μερισθῇ αἱ 200 δραχ. εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τοῦ 6 καὶ 8. Τοῦτο εὐκολύνει τὴν πρᾶξιν.

4. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν συντροφίαν, καὶ ὁ μὲν κατέθεσε 2500 δρ, ὁ δὲ 4000 δρ, ὁ δὲ 6500· εἰς τὸ τέλος τριῶν ἐτῶν λογαριασθέντες εὗρῆκαν ὅτι ἐκέρδισαν 5000 δραχ· πόσαι ἀνήκουν εἰς καθένα;

Ἐδῶ θέλουν μερισθῆ αἱ 5000 δραχ. εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν 25, 40 καὶ 65.

5. Δύο ἔμποροι ἐφόρτωσαν πλοῖον μὲ 500 ἀσκοὺς ἐλαίου, τῶν ὁποίων οἱ 350 ἀνῆκον εἰς τὸν ἕνα καὶ οἱ λοιποὶ εἰς τὸν ἄλλον· εἰς τρικυμίαν δὲ ἐβιάσθησαν νὰ ῥίψωσιν εἰς τὴν θάλασσαν 100 ἀσκούς· πόσους ἐζημιώθη καθεὶς τῶν ἐμπόρων;

Ὁ μὲν 70, ὁ δὲ 30.

6, Ὁ Κωνσταντῖνος ἐχρεωκόπησε, χρεωστῶν εἰς μὲν τὸν Γ. 780 δραχ, εἰς δὲ τὸν Δ. 460 δρ, εἰς δὲ τὸν Β. 760 δραχ, ἔχει δὲ μόνον 600 δραχ· πόσας δραχ θέλει λάβει ἕκαστος τῶν δανειστῶν; Ὁ μὲν Γ. 234, ὁ δὲ Δ. 138, ὁ δὲ Β. 228.

7. Ὁ Γ. ἤρχισεν ἐμπόριον μὲ 4750 δρ, καὶ μετὰ 6 μῆνας συμπαραλαμβάνει καὶ τὸν Α. σύντροφόν του, ὅστις κατέθεσεν 7400, καὶ μετὰ 4 μῆνας συνενόνεται μὲ αὐτοὺς καὶ ὁ Ζ. ὅςις καταθέτει 10000 δρ· εἰς 30 μῆνας ἀφοῦ ἤρχισεν ὁ Γ. τὸ ἐμπόριον εὑρῆκαν ὅτι τὸ κέρδος των ἦτον 8000 δραχ· πόσας θέλει λάβει ἕκαστος;

Ἐδῶ ἐπειδὴ καὶ τὰ χρήματα τῶν συνεταίρων εἶναι διάφορα καὶ οἱ χρόνοι, διότι ὁ Γ. ἦτον εἰς τὸ ἐμπόριον 30 μῆνας, ὁ Α. 24 μῆνας καὶ ὁ Ζ. 20 μῆνας μόνον, πρέπει νὰ μοιρασθοῦν αἱ 8000 εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων τῶν χρημάτων ἑκάστου ἐπὶ τοὺς μῆνας, ἤγουν ἀνάλογα τῶν 142500, 177600, 200000, ἢ τῶν 1425, 1776, 2000.

8. Πατήρ τις ἀποθνήσκων διέταξε νὰ μοιρασθῶσι τὴν περιουσίαν του ἐκ 12570 δρ. οἱ τέσσαρες υἱοί του οὕτως, ὥςε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὸ διπλάσιον τοῦ πρωτοτόκου, ὁ τρίτος τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα θέλουν λάβει οἱ δύο πρῶτοι, καὶ ὁ νεώτερος τὸ τετραπλάσιον τοῦ τρίτου· πόσας δραχμὰς θέλει λάβει ἕκαστος;

Αἱ 12570 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῶσιν εἰς τέσσαρα μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, $\frac{3}{2}$, 6, ἢ τῶν 2, 4, 3, 12.

Ἄλλα τινὰ προβλήματα.

1. Ἀνεμίχθησαν 400 ὀκάδες οἴνου πρὸς 30 λεπ. τὴν ὀκάν, 250 ὀκ. πρὸς 45 λεπ. τὴν ὀκὰν καὶ 125 ὀκάδ. πρὸς 70 λεπ.

τὴν ὀκᾶν· πόσον πρέπει νὰ πωλῆται ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος, διὰ νὰ συναχθῶσιν ὅσαι δραχμαὶ ἤθελαν συναχθῆ, ἂν ἐπωλεῖτο χωριστὰ ὁ οἶνος;

Πολλαπλασιάζεται ἡ ἀξία	30 *ἐπὶ τὰς ὀκάδας*	400	12000
	45 ————	250	11250
	70 ————	125	8750
τὰ γινόμενα προσθέτονται, καὶ τὸ ἄθροισμα		775	32000

32000 *λεπτὰ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀθροίσματος* 775 *τῶν ἀριθμῶν τῶν ὀκάδων·* τὸ πηλίκον εἶναι ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

2. Ἔχει τις τριῶν εἰδῶν σακχάρεως, τοῦ πρώτου εἴδους 45 ὀκάδ. πρὸς δραχ. 1,50 τὴν ὀκᾶν, τοῦ δευτέρου εἴδους 80 ὀκ. πρὸς δρ. 1,30, καὶ τοῦ τρίτου 24 ὀκάδ. πρὸς δραχ. 1,35· ἂν τ' ἀναμίξῃ εἰς ἕν, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος;

3. Ἐμέτρησέ τις τὸ μῆκος ἀγροῦ εἰς τρία διάφορα μέρη καὶ τὸ εὑρῆκεν εἰς μὲν τὸ πρῶτον 50 πήχεων, εἰς δὲ τὸ δεύτερον 48 πήχ, εἰς δὲ τὸ τρίτον 51 πήχ· πόσον πρέπει νὰ λογίζεται τὸ μῆκος τοῦ ἀγροῦ;

Ὅσον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν 50, 48 καὶ 51 πήχ, ἤγουν $49\frac{2}{3}$ τοῦ πήχεως.

4. Εἰς 300 ὀκάδας οἴνου ἀξίζοντος 50 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν προσετέθησαν 40 ὀκάδες ὕδατος· πόσον πρέπει νὰ πωλῆται ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

ΤΕΛΟΣ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΟΙΧΙΕΩΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Ὁρισμοὶ καὶ μέτρησις γραμμῶν καὶ γωνιῶν.

1. Τὰ ὑλικὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα καθ' ἡμέραν βλέπομεν καὶ πιάνομεν, οἷον οἱ λίθοι, τὰ ξύλα, αἱ οἰκίαι, τὰ βιβλία, τὰ ὀπωρικὰ κτλ, εἶναι *μακρά, πλατέα καὶ ὑψηλὰ ἢ χονδρά.* Ἕκαστον δὲ τούτων ἔχει *σχῆμά τι*, ἤτοι *περατοῦται πανταχόθεν κατά τινα τρόπον*· ἄλλο ὅμως ἔχει ἄλλο σχῆμα.

2. Παντὸς πράγματος τὰ πέρατα ὅλα ὡς ἓν θεωρούμενα ὀνομάζονται *ἐπιφάνεια αὐτοῦ*· ἡ δὲ ἐπιφάνεια εἶναι *μακρὰ* καὶ *πλατεῖα*, ὄχι δὲ καὶ χονδρή, ἀλλὰ πολὺ ψιλωτέρα καὶ ἀπὸ τὸ ψιλώτατον φύλλον χάρτου.

3. Πραγμάτων τινῶν ἡ ἐπιφάνεια, οἷον ἡ τοῦ βιβλίου, ἡ τῆς οἰκίας κτλ, σύγκειται ἐκ διακεκριμένων μερῶν· ἑκάστη δὲ τῶν μερικῶν τούτων ἐπιφανειῶν ἔχει *σχῆμά τι*, ἤτοι *περατοῦται πανταχόθεν κατά τινα τρόπον*. Πάσης τοιαύτης ἐπιφανείας τὰ πέρατα ὅλα ὡς ἓν θεωρούμενα ὀνομάζονται *γραμμή*· ἡ δὲ γραμμὴ εἶναι μόνον *μακρά*, ὄχι ὅμως πλατεῖα καὶ χονδρή, ἀλλὰ πολὺ λεπτοτέρα ἢ ψιλωτέρα καὶ ἀπὸ τὴν λεπτοτάτην ἢ ψιλωτάτην τρίχα ἢ κλωστὴν κτλ.

4. Πάσης γραμμῆς πεπερασμένης τὰ πέρατα ἢ ἄκρα λέγονται *σημεῖα*· τὸ δὲ σημεῖον οὔτε μακρὸν εἶναι, οὔτε πλατύ, οὔτε χονδρόν, ἀλλὰ μικρότερον καὶ ἀπὸ τὸ μικρότατον μόριον ἄχνης ἀλεύρου ἢ ἀπὸ τὴν μύτην ψιλῆς βελόνης κτλ.

Σημ. Μεμονωμένα εἰς τὴν φύσιν ὑπάρχουν μόνον τὰ ὑλικὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα λέγονται καὶ σώματα ὑλικά· αἱ δὲ ἐπιφάνειαι, αἱ γραμμαὶ καὶ τὰ σημεῖα μεμονωμένα εἰς τὴν φύσιν δὲν ὑπάρχουν, διότι καὶ τὰ ψιλώτερα ἢ λεπτότερα ὑλικὰ εἶναι σώματα μακρά, πλατέα καὶ χονδρά. Ὅταν δὲ λέγωμεν ὅτι ὑλικά τινα εἶναι σημεῖα ἢ γραμμαί, τότε νοοῦμεν σώματα, προσεγγίζοντα περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον νὰ ἦναι σημεῖα ἢ γραμμαί, ὄχι ὅμως ἀληθῶς σημεῖα ἢ γραμμάς. Ἀλλὰ διὰ τούτων ὁ νοῦς δύναται βαθμηδὸν νὰ νοήσῃ καὶ λεπτότερα ἢ μικρότερα, ἑωσοῦ τέλος πάντων καταντᾷ νὰ νοήσῃ καὶ τὸ σημεῖον, καὶ τὴν γραμμήν, καὶ τὴν ἐπιφάνειαν μεμονωμένα, ἀλλ' ὁποῖα ἀνωτέρω τὰ ὡρίσαμεν. Μάλιστα ὁ νοῦς δύναται νὰ νοήσῃ καὶ σώματα στερημένα ὕλης, ἀλλ' ἔχοντα σχήματα, ὡς τὰ ὑλικά· ταῦτα ὀνομάζονται μαθηματικὰ ἢ γεωμετρικὰ σώματα.

Γεωμετρικὸν σημεῖον εἶναι τὸ μικρότατον, τὸ ὁποῖον νοῦς ἀνθρώπινος δύναται νὰ νοήσῃ.

Ἡ δὲ γεωμετρικὴ γραμμὴ δυνατὸν νὰ νοῆται ὅτι γεννᾶται ἐκ τῆς πρὸς ἓν μόνον μέρος κινήσεως σημείου, ἀφίνοντος ἴχνη τῆς διαβάσεώς του, καὶ ὅτι ἐπομένως εἶναι σειρὰ σημείων κατὰ συνέχειαν κειμένων πρὸς ἓν μόνον μέρος.

Ἡ δὲ γεωμετρικὴ ἐπιφάνεια δυνατὸν νὰ νοῆται ὅτι γεννᾶται, ἐὰν γραμμή τις πρὸς ἓν μόνον μέρος κινουμένη ἀφίνῃ ἴχνη τῆς διαβάσεώς της, καὶ ὅτι ἐπομένως εἶναι σειρὰ γραμμῶν κατὰ συνέχειαν κειμένων πρὸς ἓν μόνον μέρος.

Ὡσαύτως καὶ τὸ γεωμετρικὸν σῶμα νοεῖται ὅτι γεννᾶται, ἐὰν ἐπιφάνεια κινουμένη ἀφίνῃ ἴχνη τῆς διαβάσεώς της, καὶ ὅτι ἐπομένως εἶναι σειρὰ ἐπιφανειῶν κατὰ συνέχειαν κειμένων.

Ὥστε ὅλα ταῦτα νοοῦνται ὅτι σύγκεινται ἐκ σημείων.

5. Ἁπλουστάτη ὅλων τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ *εὐθεῖα*, ἡ κοινῶς λεγομένη *ἴσια*. Εἶναι δὲ *εὐθεῖα ἡ συνιστῶσα τὸ μεταξὺ δύο σημείων διάστημα γραμμή*. Τοῦ δὲ διαστήματος τούτου τὴν θέσιν σχεδὸν δεικνύει κλωστή, ὅσον τὸ δυνατὸν ψιλὴ καὶ ἐκ τῶν ἄκρων της τεντωμένη.

Ἐπειδὴ δὲ ἓν μόνον εἶναι τὸ μεταξὺ δύο σημείων διάστημα, διὰ τοῦτο *μία μόνη εὐθεῖα εἶναι ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον*. Ἐὰν δέποτε τύχῃ νὰ *ἔχουν δύο εὐθεῖαι τὰ αὐτὰ ἄκρα*, φανερὸν ὅτι *αὐταὶ ταυτίζονται καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν καὶ ἀποτελοῦν μίαν μόνην*.

Λοιπόν, ἔχοντες κατεσκευασμένην ἀκριβῶς εὐθεῖαν γραμμήν, βεβαιούμεθα περὶ πάσης ἄλλης γραμμῆς ὅτι εἶναι εὐθεῖα, ἐὰν θέτοντες τὰ ἄκρα ταύτης ἐπὶ δύο σημείων ἐκείνης ἴδωμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖά της ἐφαρμόζουν εἰς τὰ σημεῖα ἐκείνης· εἰδεμή, δὲν εἶναι εὐθεῖα.

Ἐὰν ὑλικῆς τινος εὐθείας πλησιάσῃ τις εἰς τὸν ὀφθαλμὸν τὸ ἕτερον ἄκρον καὶ διευθύνῃ αὐτὴν οὕτως, ὥστε αὐτὸ τὸ ἄκρον νὰ σκεπάζῃ τὸ ἄλλο νὰ μὴ φαίνηται, τότε αὐτὸ τὸ ἄκρον σκεπάζει καὶ ὅλα τ' ἄλλα τὰ μεταξὺ τῶν ἄκρων της σημεῖα, καὶ ἡ εὐθεῖα φαίνεται ὡς ἓν μόνον σημεῖον. Οὕτω τεχνῖταί τινες δοκιμάζουν ἂν γραμμή τις ἦναι εὐθεῖα ἢ ὄχι.

Τὸ μὲν σημεῖον παριστάνομεν δι' ἑνὸς γράμματος, τὴν δὲ εὐθεῖαν διὰ δύο, γραμμένων εἰς τ' ἄκρα της ἢ καὶ εἰς ἄλλα της σημεῖα· οἷον ΑΒ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν (σχ. 1), εἰς τῆς ὁποίας τ' ἄκρα κεῖνται τὸ Α καὶ τὸ Β.

6. Γραμμὴ συγκειμένη ἐκ δύο ἢ πλειοτέρων εὐθειῶν, τῶν ὁποίων ἄλλη ἔχει ἄλλην διεύθυνσιν (σχ. 2), ὀνομάζεται *κεκλασμένη*, καὶ παριστάνεται διὰ τριῶν ἢ πλειοτέρων γραμμάτων, οἷον ΑΒΓ, ΑΒΓΔ.

7. Πᾶσα ἄλλη γραμμὴ, ἥτις οὔτε εὐθεῖα εἶναι, οὔτε ἐξ εὐθειῶν σύγκειται (σχ. 3), λέγεται γενικῶς *καμπύλη*.

8. *Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι βραχυτάτη* (ἡ πλέον κοντὴ) *ὅλων ὅσαι ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα* (σχ. 4).

9. Ἁπλουστάτη ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἡ *ἐπίπεδος*, ἡ κοινῶς λεγομένη *ἴσια*. Εἶναι δὲ *ἐπίπεδος ἡ ἐπιφάνεια, εἰς τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἐφαρμόζουν ὅλα τὰ σημεῖα εὐθείας θεμένης καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις ἐπ' αὐτῆς*. Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια λέγεται καὶ οὐδετέρως *ἐπίπεδον*.

Σημ. Οὔτε εἰς τὴν φύσιν ὑπάρχουν ἀκριβεῖς ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι, οὔτε ἡ τέχνη δύναται νὰ κατασκευάσῃ. Τὰ δὲ κοινῶς ἐκλαμβανόμενα ὡς ἐπίπεδα πλησιάζουν εἰς τὴν τελειότητα ἄλλο περισσότερον καὶ ἄλλο ὀλιγώτερον.

10. Τὸ ὄργανον, διοῦ δοκιμάζεται (5) γραμμὴ ἂν ἦναι εὐθεῖα ἢ ὄχι, καὶ διοῦ γράφονται ἐπὶ ἐπιπέδου ἢ χάρτου εὐθεῖαι, εἶναι ὁ γνωστὸς εἰς ὅλους *κανὼν*, ἢ μὲ λέξιν ξένην κοινότερα λεγόμενος *ῥῆγα*. Εἶναι δὲ κοινῶς ξύλον ἢ μέταλλον μακρὸν μὲν πολὺ, ὀλίγον δὲ πλατὺ, χονδρὸν δὲ ἢ ὅσον πλατὺ ἢ ὀλιγώτερον, ἔχον τέσσαρας διακεκριμμένας ἐπιπέδους ἐπιφανείας καὶ τέσσαρας *κώχας* εὐθείας. Ὅσον δὲ αἱ τέσσαρες αὗται ἐπιφάνειαί του εἶναι τελειότερα ἐπίπεδα, τόσον ἐντελέστερος εἶναι καὶ ὁ κανών.

Γράφεται δὲ διὰ τοῦ κανόνος εὐθεῖα ἐπὶ ἐπιπέδου οὕτως· Ἐπιτεθεὶς εἰς ὅποιον μέρος τοῦ ἐπιπέδου εἶναι χρεία ὁ κανὼν, διὰ μὲν τῆς ἑτέρας χειρὸς σφίγγεται, ὥστε νὰ μένῃ ἀκίνητος, διὰ δὲ τῆς ἄλλης σύρεται μολυβδοκόνδυλον ἢ ἄλλο τι μυτηρὸν κατὰ μῆκος ἕως ἐκεῖ ὅπου εἶναι χρεία, ἀλλ' ἐγγίζον εἰς τὸν κανόνα καὶ μὴ κλῖνον ποτὲ περισσότερον καὶ ποτὲ ὀλιγώτερον. Ὡσαύτως γράφεται εὐθεῖα καὶ ἐπὶ χάρτου, ἀφοῦ οὗτος τεθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου. Ὅταν δὲ μὲ μελάνι γράφωμεν, πρέπει νὰ προσέχωμεν μὴ γείνῃ ἡ γραμμὴ πολὺ πλατεῖα, ἢ ἀλλοῦ ψιλωτέρα καὶ ἀλλοῦ πλατυτέρα.

Ὅταν δὲ ἡ εὐθεῖα μέλλῃ νὰ περάσῃ ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα, τότε πρὸς τοῖς ἄλλοις πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ πλησιάζωμεν τὸν κανόνα ἐπίσης εἰς τὰ δύο σημεῖα, καὶ τόσον, ὅσον ἀπαιτεῖ τὸ χόνδρωμα τοῦ μυτηροῦ.

Ἀπαιτεῖται δὲ πολὺ ἄσκησις ἕως ν' ἀποκτήσῃ τις τὴν ἕξιν νὰ γράφῃ ὅσον τὸ δυνατὸν τελείας εὐθείας.

Ἐνίοτε δὲν σύρεται τὸ μυτηρὸν, ἀλλ' ἀνασηκόνεται καὶ καταβιβάζεται, ὥστε νὰ σημειόνῃ τινὰ μόνον τῆς εὐθείας σημεῖα (σχ. 5). Τὴν οὕτω σημειωμένην εὐθεῖαν ὀνομάζομεν *διάστιγμον*.

Διὰ τοῦ κανόνος προσέτι ἐκτείνομεν δεδομένην εὐθεῖαν πρὸς τὸ ἕτερον ἢ τὸ ἄλλο μέρος της. Πρὸς τοῦτο πλησιάζομεν εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 6) τὸν κανόνα παντοῦ ἐπίσης καὶ ὅσον ἀπαιτεῖ τοῦ μυτηροῦ τὸ χόνδρωμα, ἔπειτα σημειοῦμεν πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τὴν ΒΓ, ἢ τὴν διάστιγμον ΑΔ. Καὶ ἡ ΒΓ δὲ καὶ ἡ ΑΔ καλεῖται *ἐκβολὴ* τῆς ΑΒ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι *ἡ ἐκβολὴ εὐθείας καὶ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ἀποτελοῦσι μίαν καὶ μόνην μακροτέραν εὐθεῖαν.*

Προσέτι εἶναι φανερὸν ὅτι, *ὅταν ἦναι γνωστὰ δύο σημεῖα εὐθείας, ἡ θέσις της εἶναι προσδιωρισμένη καὶ γράφεται ὡς ἀνωτέρω.*

Κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον τεχνῖταί τινες χαράσσουν τὰς εὐθείας, ὁ δὲ ἐργαζόμενος τὴν ὕελον κόπτει διὰ τοῦ ἀδάμαντος *κατ' εὐθεῖαν* τὴν ἐπίπεδον ὕελον. Ἄλλοι δὲ ἐπὶ μακρᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας σημειόνουν εὐθεῖαν οὕτως· Ἀλείφουν σπάγον μὲ χρωματισμένον ὑγρὸν, τεντόνουν αὐτὸν ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, καὶ κρατοῦντές τον σφιγκτὰ ἀπὸ τὰ ἄκρα τὸν ἀνασηκόνουν ἀπὸ τὸ μέσον καὶ τὸν ἀφίνουν· πίπτων δὲ ὁ σπάγος χρωματίζει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εὐθεῖαν. Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ πῶς σημειόνονται ἐπὶ ἄλλων πραγμάτων εὐθεῖαι.

Εἶναι δὲ καλὸν νὰ γυμνάζῃ τις τὴν χεῖρά του, ὥστε νὰ δύναται καὶ ἄνευ κανόνος νὰ γράφῃ ἐπὶ χάρτου εὐθείας.

11. *Μετρῶ τι* σημαίνει προσδιορίζω τι πόσον εἶναι πρὸς τὴν μονάδα του, ἤτοι προσδιορίζω τι μὲ πόσας μονάδας εἶναι ἴσον.

Καὶ αἱ μὲν μονάδες, πρὸς τὰς ὁποίας μετροῦμεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὰς εὐθείας, εἶναι ὁ πῆχυς, ἡ παλάμη, ὁ δάκτυλος (ἰδὲ Πρακτ. Ἀριθ. σελ. 80). Ἑκάστη δὲ τούτων λέγεται καὶ *μέτρον*, τουτέστι μονὰς πρὸς τὴν ὁποίαν μετροῦμεν. Τὸ δὲ ὄργανον, δι' οὗ μετροῦμεν εὐθείας ἐπὶ χάρτου οὔσας ἢ ἐπὶ ἄλλου τοιούτου, εἶναι ὁ *διαβήτης καὶ ἡ κλίμαξ*.

Καὶ ὁ μὲν διαβήτης, μετάλλινος συνήθως ὤν, σύγκειται ἐκ δύο ἴσων σκελῶν προσηρμοσμένων μὲν καὶ καρφωμένων πλησίον εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον των οὕτως, ὥστε νὰ κινῶνται πλησιάζοντα καὶ ἀπομακρυνόμενα ἀπ' ἀλλήλων, λήγοντα δὲ εἰς ὀξὺ κατὰ τὸ ἄλλο ἄκρον, τὸ ὁποῖον λέγεται *ποῦς* τοῦ διαβήτου. Εἶναι δὲ καὶ διαβήτης μὲ βραχύτερον μὲν τὸ ἕτερον σκέλος, ἔχον δὲ εἰς τὸ ἄκρον του τρύπαν, διὰ νὰ ἐμπήγηται εἰς αὐτὴν μολυβδοκόνδυλον ἤ τι τοιοῦτον· καὶ οὕτω γίνεται ἴσον καὶ αὐτὸ τὸ σκέλος μὲ τὸ ἄλλο.

Ἡ δὲ κλίμαξ εἶναι κανὼν ἢ τοιοῦτόν τι παριστάνον εὐθεῖαν διηρημένην εἰς ἴσα μέρη μὲ μονάδα τινά, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἢ μόνον ἓν εἶναι διηρημένον εἰς ἴσα μέρη μὲ ἄλλην μικροτέραν μονάδα κτλ. Εἰς δὲ τὰ διαιρέσεως σημεῖα εἶναι σημειωμένοι οἱ ἁρμόδιοι ἀριθμοί. Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ πῶς κατασκευάζονται καλαὶ κλίμακες.

Τοιοῦτόν τι εἶναι καὶ ἡ μακρὰ ταινία, τὴν ὁποίαν μεταχειρίζονται τεχνῖταί τινες.

Καὶ διὰ μὲν τῆς κλίμακος μετρεῖται εὐθεῖα οὕτω· Τίθεται τὸ ἕτερον ἄκρον της ἐκεῖνο, ὅπου εἶναι τὸ 0, ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἄκρου τῆς εὐθείας, καὶ διευθύνεται ἡ κλίμαξ κατὰ τὴν εὐθεῖαν· ἔπειτα παρατηρεῖται εἰς ποῖον διαιρέσεως σημεῖον αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς εὐθείας. Ὁ ἐκεῖ ἀριθμὸς δεικνύει μὲ πόσας μονάδας εἶναι ἴση ἡ εὐθεῖα.

Διὰ δὲ τοῦ διαβήτου οὕτως· Ἀνοίγεται ὁ διαβήτης τόσον, ὥςε οἱ πόδες του ν' ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων ὅσον εἶναι μακρὰ ἡ μονάς· ἔπειτα ἐπιφέρεται ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου τῆς εὐθείας μέχρι τοῦ ἄλλου καὶ ἐνταυτῷ ἀριθμοῦνται τὰ ἴσα μέρη μὲ τὴν μονάδα, τὰ οὕτω προσδιοριζόμενα. Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δεικνύει μὲ πόσας μονάδας εἶναι ἴση ἡ εὐθεῖα. Ἂν δὲ περισσεύῃ τι μέρος μικρότερον τῆς μονάδος, πλησιάζομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου, ἑωσοῦ οἱ πόδες ν' ἀπέχουν ἴσον μὲ τὸ μῆκος ἄλλης μικροτέρας μονάδος, καὶ διὰ τούτου μετροῦμεν τὸ περισσεῦον, κτλ.

Ἐὰν δὲ πρόκηται νὰ μετρηθῇ τὸ μεταξὺ δύο ἐπὶ χάρτου ἢ πίνακος σημείων διάστημα, μόνον διὰ τῆς κλίμακος εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθῇ, χωρὶς νὰ γραφθῇ ἡ παριστάνουσα τοῦτο τὸ διάςημα εὐθεῖα, μετρεῖται δὲ ὡς ἀνωτέρω ἡ εὐθεῖα· διὰ δὲ τοῦ διαβήτου; ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ἤδη εἰρημένη εὐθεῖα, καὶ μετρηθῇ ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Ὁ προκύπτων ἐκ τῆς μετρήσεως εὐθείας πρὸς τὴν μονάδα ἢ τὰς μονάδας ἀριθμὸς, ὀνομάζεται καὶ αὐτὸς *μέτρον*, καθὼς καὶ ἡ μονάς· διακρίνονται δὲ τὸ μὲν λεγόμενον *μέτρον τῆς εὐθείας*, ἡ δὲ μονὰς λεγομένη *μέτρον* ἁπλῶς ἢ *γραμμικὸν μέτρον*. Ὁ πῆχυς, ἡ παλάμη κτλ εἶναι γραμμικὰ μέτρα· ἂν δέ τις εὐθεῖα ἦναι ἴση μὲ 6 παλάμας, ὁ 6 εἶναι τὸ μέτρον τῆς εὐθείας. Καὶ ἡ κλίμαξ δὲ δυνατὸν νὰ ὀνομάζηται *εὐθειόμετρον*, ἤτοι ὄργανον δι' οὗ μετροῦμεν εὐθείας. Πρέπει διὰ τοῦτο νὰ προσέχῃ τις καλῶς εἰς τὴν χρῆσιν τῆς λέξεως *μέτρον*.

Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ πῶς μετροῦνται ἄλλαι εὐθεῖαι μεγαλήτεραι.

12. Δύο εὐθεῖαι ἔχουσαι ἓν μὲν σημεῖόν των κοινὸν, τὰ δὲ λοιπὰ τόσον περισσότερον ἀπ' ἀλλήλων ἀπέχοντα, ὅσον περισσότερον ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ κοινοῦ των σημείου, ὀνομάζονται *συμπίπτουσαι* (σχ. 7). Τὸ δὲ μεταξὺ δύο συμπιπτουσῶν εὐθειῶν διάστημα, τὸ ὁποῖον εἰς μὲν τὸ κοινόν των σημεῖον εἶναι μηδὲν, ἐκεῖθεν δὲ βαθμηδὸν αὐξάνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, λέγεται *γωνία εὐθύγραμμος*, ἢ καὶ ἁπλῶς *γωνία*, αἱ δὲ συμπίπτουσαι εὐθεῖαι τότε λέγονται *πλευραὶ τῆς γωνίας*, τὸ δὲ κοινόν των σημεῖον *κορυφὴ αὐτῆς*.

Η γωνία σημειοῦται συνήθως διὰ τριῶν γραμμάτων, τῶν ὁποίων μεσαῖον εἶναι πάντοτε τὸ ἐν τῇ κορυφῇ της κείμενον, ἄκρα δὲ δύο ἄλλα, κείμενα εἰς ἄλλο σημεῖον ἑκατέρας, οἷον ΑΒΓ ἢ ΓΒΑ παριστάνει τὴν γωνίαν τοῦ σχ. 7. Ἐνίοτε δὲ σημειοῦται καὶ διὰ μόνου τοῦ ἐν τῇ κορυφῇ γράμματος· ἀλλὰ τοῦτο γίνεται, ὅταν δεν συμβαίνῃ σύγχυσις.

13. Ἐὰν δὲ πολλαὶ εὐθεῖαι συμπίπτουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Β (σχ. 8), τότε ἀποτελοῦνται πολλαὶ γωνίαι, οἷον ἡ ΑΒΓ, ἡ ΓΒΔ, ἡ ΔΒΕ, ἡ ΕΒΖ, ἡ ΑΒΖ, ἡ ΑΒΕ, ἡ ΑΒΔ, ἡ ΓΒΖ, ἡ ΓΒΕ, ἡ ΔΒΖ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ μὲν ΑΒΖ εἶναι μεγαλητέρα ὅλων, ἡ δε ΓΒΖ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΖ, ἀλλὰ μεγαλητέρα τῶν ἄλλων ΔΒΖ καὶ ΕΒΖ κτλ. Ὡσαύτως ἡ μὲν ΑΒΖ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ΑΒΓ καὶ τῆς ΓΒΖ, ἡ δὲ ΔΒΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῆς ΓΒΖ καὶ τῆς ΓΒΔ. Ἐὰν δὲ ὅλαι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ, ΕΒΖ ἦναι ἴσαι, φανερὸν ὅτι ἡ μὲν ΑΒΖ εἶναι τετραπλασία τῆς ΑΒΓ ἢ ἄλλης τινὸς τῶν τεσσάρων, ἡ δὲ ΓΒΖ εἶναι τριπλασία, ἡ δε ΔΒΖ διπλασία. Καὶ ἀντιστρόφως ἡ ΑΒΓ ἢ ἡ ΕΒΖ εἶναι τέταρτον τῆς ΑΒΖ, τρίτον τῆς ΓΒΖ καὶ ἥμισυ τῆς ΔΒΖ.

14. Γωνίαι ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ κείμεναι ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης, οἷον ἡ ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ, ΕΒΖ, λέγονται *ἐφεξῆς γωνίαι.*

15. Θέλων τις νὰ μάθῃ ἂν δύο ἐφεξῆς γωνίαι, ἢ δύο μακρὰν ἀλλήλων κείμεναι γωνίαι Β καὶ Ε (σχ. 9), ἦναι ἴσαι ἢ ἄνισοι, α'. Προσδιορίζει διὰ διαβήτου ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἴσα *διαστήματα*, ὅσον ὅμως θέλῃ μεγάλα, ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἔπειτα πληροφορεῖται διὰ τοῦ διαβήτου πάλιν ἂν τὸ σημεῖον Γ ἀπέχῃ ἐπίσης ἀπὸ τοῦ Α, ὅσον τὸ Δ ἀπὸ τοῦ Ζ, ἢ ἀπέχῃ περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον. Καὶ ἂν μὲν ἀπέχῃ ἴσον, εἶναι αἱ γωνίαι ἴσαι, ειδεμή, εἶναι ἄνισοι. Οὕτως εὑρίσκει ὅτι ἡ μὲν ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΒΔ (σχ. 8), ἡ δε ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΕΖ (σχ. 9). β'. Πληροφορεῖται ἐνίοτε καὶ οὕτω· Θέτει τὴν κορυφὴν Ε ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β καὶ διευθύνων τὴν ΕΖ κατὰ τὴν ΒΓ τὴν θέτει ἐπ' αὐτῆς, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν· ἔπειτα παρατηρεῖ ἂν ἡ ἄλλη πλευρὰ ΔΕ διευθύνεται κατὰ τὴν ΑΒ καὶ ἐφαρ-

μόζει εἰς αὐτὴν ἢ ὄχι· καὶ εἰ μὲν ἐφαρμόζει, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, εἰδεμή, εἶναι ἄνισοι, καὶ μεγαλητέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ἡ δευτέρα πλευρὰ ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τῆς κοινῆς πρώτης.

Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ πῶς μετροῦνται αἱ γωνίαι, καὶ πῶς κατασκευάζεται γωνία ἴση μὲ ἄλλην.

16. Εὐθεῖα, ἥτις ἵσταται ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν εἴς τι τῶν μέσων σημείων της, οἷον ἡ ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 10), ἀποτελεῖ δύο γωνίας, μίαν μὲ τὸ ΑΓ μέρος τῆς ΑΒ, τὴν ΑΓΔ, καὶ ἄλλην μὲ τὸ ΓΒ μέρος τῆς αὐτῆς, τὴν ΒΓΔ, ἤτοι ἡ ΔΓ ἀπέχει καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΓ καὶ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μέρους τῆς ΑΒ. Αἱ δύο αὗται γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ λέγονται *προσκείμεναι*.

Αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι δυνατὸν νὰ ἦναι ἄνισοι (σχ. 10), ἀλλὰ δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ ἴσαι, ὡς ἡ ΑΓΔ καὶ ἡ ΒΓΔ (σχ. 11). Δύο προσκείμεναι γωνίαι ἴσαι λέγονται *ὀρθαί*, τῶν δὲ ἀνίσων ἡ μὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, ἡ δὲ εἶναι μεγαλητέρα αὐτῆς. Γενικῶς γωνία μικροτέρα μὲν τῆς ὀρθῆς λέγεται *ὀξεῖα*, μεγαλητέρα δὲ τῆς ὀρθῆς λέγεται *ἀμβλεῖα*.

Ἡ εὐθεῖα, ἥτις καὶ ἀπὸ τῶν δύο μερῶν ἄλλης ἀπέχει ἐπίσης, ἢ ἥτις καὶ μὲ τὰ δύο μέρη ἄλλης ἀποτελεῖ γωνίας ἴσας, ἤτοι ὀρθάς, οἷον ἡ ΓΔ (σχ. 11), λέγεται *κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην*, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον λέγεται *ποῦς τῆς καθέτου*· ἡ δὲ ἀπέχουσα περισσότερον ἀπὸ τοῦ ἑνὸς παρὰ ἀπὸ τοῦ ἄλλου μέρους, ἢ ἡ ἀποτελοῦσα μὲ τὰ δύο μέρη ἀνίσους γωνίας, λέγεται *κεκλιμένη*, οἷον ἡ ΓΔ (σχ. 10), ἥτις εἶναι κεκλιμένη πρὸς τὸ μέρος ΓΒ. Ἡ δὲ γωνία ΒΓΔ λέγεται καὶ *κλίσις τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ*. Ἡ κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν δὲν κλίνει οὔτε πρὸς τὸ ἕτερον, οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς.

Ἐὰν ἦναι γνωστὸν ὅτι εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἄλλην, αἱ προσκείμεναι γωνίαι θέλουν εἶσθαι ὀρθαί· καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἦναι γνωστὸν ὅτι δύο προσκείμεναι γωνίαι ἦναι ἴσαι ἢ ὀρθαί, ἡ ἀποτελοῦσα αὐτὰς εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην.

17. *Μία μόνη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἄλλην εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖόν της*. Π. χ. ἂν (σχ. 12) ἡ ΔΓ ἦναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ΓΕ ἢ ΓΖ κλίνει πρὸς τὸ ἕτερον μέρος

τῆς ΑΒ, ἤτοι ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΑΒ παρ᾽ ἀπὸ τοῦ ἄλλου· λοιπὸν μόνη ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ σημεῖόν της.

18. Εὐθεῖα, ὡς ἡ ΔΕ (σχ. 13), ἥτις συμπίπτει μὲ τὴν ΑΒ καὶ μὲ τὴν κάθετον ΔΓ εἰς ἄλλα σημεῖα παρ᾽ εἰς τὸ κοινὸν Γ, λέγεται *πλαγία* ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΔΓ, εἶναι δὲ κεκλιμένη πρὸς τὴν ΑΒ.

19. *Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.* Π. χ. ἂν ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 11) καὶ ἡ ΗΘ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἡ μὲν ὀρθὴ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ὀρθὴν ΕΗΘ, ἡ δὲ ὀρθὴ ΒΓΔ ἴση μὲ τὴν ὀρθὴν ΖΗΘ. Διότι, ἀφοῦ ἡ ΕΖ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ Η σημεῖον νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ Γ, καὶ ἡ ΕΖ μὲ τὴν ΑΒ, ἡ ΗΘ θέλει διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΓΔ, διότι καὶ αἱ δύο εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ, εἰς δὲ τὸ Γ μία μόνη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἑπομένως θέλει ταυτισθῇ ἡ ΗΘ μὲ τὴν ΓΔ, καὶ αἱ ὀρθαὶ γωνίαι θέλουν εἶσθαι ἴσαι.

20. Ὥστε, ἂν ἔχωμεν κατεσκευασμένην μίαν ἀκριβῶς ὀρθὴν γωνίαν, δι᾽ αὐτῆς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὅσας ἄλλας θέλωμεν ὀρθὰς γωνίας. Τὸ ὄργανον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ὀρθὴν γωνίαν, καὶ διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζομεν ἄλλας ὀρθὰς ἢ ἄγομεν κάθετον ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν, λέγεται *γνώμων* (σχ. 14).

Ὁ γνώμων σύγκειται ἐκ δύο κανόνων προσηρμοσμένων καὶ καρφωμένων στερεῶς εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον των, ὥστε νὰ ἦναι ἀκίνητοι, ἀποτελοῦν δὲ ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἔξωθεν τὴν ΚΑΜ, καὶ ἔσωθεν τὴν ΝΟΠ.

Διάφοροι τεχνῖται, οἷον ξυλουργοί, κτίσται κτλ, ἔχουν γνώμονας.

Δι᾽ αὐτοῦ δὲ ἄγομεν ἐπὶ ἐπιπέδου ἢ χάρτου κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 11) οὕτω· Θέτομεν τὸ σημεῖον Α τοῦ γνώμονος ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ Γ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ διευθύνομεν τὸ μέρος του ΑΜ ἀκριβῶς κατὰ τὸ μέρος ΑΓ τῆς εὐθείας· ἔπειτα σφίγγοντές τον σύρομεν διὰ τοῦ μολυβδοκονδύλου κτλ κατὰ τὸ μῆκος τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ γνώμονος ΚΑ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· αὕτη δὲ θέλει εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ.

Ὡσαύτως ἄγομεν (σχ. 15) τὴν κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ΔΓ εἰς τὸ ἄκρον της Δ, ὥστε νὰ σχηματίζῃ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΓΔΕ.

Δοκιμάζεται δὲ ὁ γνώμων ἂν ἦναι ἀκριβὴς οὕτω· Σχηματίζεται πρῶτον ἡ γωνία ΑΓΔ (σχ. 14) ὡς ἤδη εἴπομεν· ἔπειτα στρέφεται ὁ γνώμων ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, τίθεται πάλιν τὸ σημεῖον Λ αὐτοῦ ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ Γ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ διευθύνεται τὸ μέρος του ΛΜ κατὰ τὸ μέρος ΓΒ τῆς εὐθείας. Τότε, ἂν τὸ μέρος ΚΛ τοῦ γνώμονος διευθύνηται ἀκριβῶς κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, εἶναι ἀκριβὴς ὁ γνώμων· εἰδεμή, δὲν εἶναι ἀκριβής.

Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ πῶς ἄγονται κάθετοι καὶ ἄνευ τοῦ γνώμονος, καὶ ἐπὶ εὐθειῶν μὴ κειμένων εἰς τὸν χάρτην.

21. Δύο εὐθεῖαι, αἵτινες τέμνουσιν ἀλλήλας, οἷον ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΔΕ (σχ. 16), ἀποτελοῦν τέσσαρας γωνίας ΑΓΔ, ΔΓΒ, ΒΓΕ, ΕΓΑ, τῶν ὁποίων ἡ ΑΓΔ καὶ ἡ ΒΓΕ λέγονται *κατὰ κορυφὴν γωνίαι*, ὡσαύτως καὶ ἡ ΔΓΒ καὶ ἡ ΑΓΕ, ἢ ὅτι ἡ ΑΓΔ εἶναι *κατὰ κορυφὴν* τῆς ΒΓΕ, καὶ ἡ ΔΓΒ *κατὰ κορυφὴν* τῆς ΑΓΕ. Τὸ κοινὸν των σημεῖον Γ λέγεται *σημεῖον τομῆς* ἢ *κοινὴ τομή* των.

22. Δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων δύο τυχόντα σημεῖα, ἴσον ἀπέχοντα ἀπ' ἄλλων δύο αὐτῶν σημείων, ἀπέχουν καὶ ἀπ' ἀλλήλων ὅσον καὶ τ' ἄλλα δύο, ὀνομάζονται *παράλληλοι*, ἢ ἡ ἑτέρα *παράλληλος τῆς ἄλλης*. Π. χ. ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ (σχ. 17), ἐάν, ἐνῷ ἡ ΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΘ, τὸ Ζ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Θ ὅσον τὸ Ε ἀπὸ τοῦ Η, ἤ, ἐνῷ ἡ ΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΔ, ἀπέχῃ τὸ Β ἀπὸ τοῦ Δ ὅσον τὸ Ε ἀπὸ τοῦ Η, κτλ.

Αἱ παράλληλοι εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, διότι ἀδύνατον εὐθεῖαι μὴ οὖσαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον νὰ ἔχωσι τὴν εἰρημένην ἰδιότητα.

Αἱ παράλληλοι δὲν συμπίπτουν εἰς κἀνὲν σημεῖον οὔτε ἀπὸ τὸ ἕτερον μέρος των οὔτε ἀπὸ τὸ ἄλλο, ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῶσι· διότι τὸ διάστημα τὸ μεταξὺ τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων σημείων των δὲν εἶναι ἀλλοῦ μικρότερον καὶ ἀλλοῦ μεγαλήτερον, ἀλλὰ πανταχοῦ ἴσον.

23. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΗΘ (σχ. 18) τέμνῃ δύο παραλλήλους ΑΒ

καὶ ΓΔ εἰς τὸ Ε καὶ Ζ, ἀποτελοῦνται ὀκτὼ γωνίαι. Καὶ ἡ μὲν ΗΘ λέγεται *τέμνουσα*, τῶν δὲ γωνιῶν ἡ ΑΕΖ καὶ ἡ ΔΖΕ ὀνομάζονται *ἐναλλὰξ ἐντός*, ἐναλλὰξ μέν, διότι ἡ μὲν εἶναι ἀπὸ τὸ ἕτερον μέρος τῆς τεμνούσης, ἡ δὲ ἀπὸ τὸ ἄλλο, ἐντὸς δέ, διότι εἶναι ἐντὸς τῶν παραλλήλων· ὡσαύτως λέγονται καὶ ἡ ΒΕΖ καὶ ἡ ΓΖΕ. Ἡ δὲ ΑΕΗ καὶ ἡ ΔΖΘ λέγονται *ἐναλλὰξ ἐκτός*· ὡσαύτως καὶ ἡ ΒΕΗ καὶ ἡ ΓΖΘ. Ἡ δὲ ΑΕΗ καὶ ΓΖΕ καλοῦνται *ἐντὸς ἐκτός*· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΒΕΗ καὶ ἡ ΔΖΕ, ἡ ΑΕΖ καὶ ἡ ΓΖΘ, ἡ ΒΕΖ καὶ ἡ ΔΖΘ. Ἡ δὲ ΑΕΖ καὶ ΓΖΕ ὀνομάζονται *ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος*· ὡσαύτως καὶ ἡ ΒΕΖ καὶ ἡ ΔΖΕ.

24. *Ἀπὸ τοῦ σημείου Γ, τοῦ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ, ν' ἀχθῇ παράλληλος τῆς ΑΒ* (σχ. 19).

Διὰ τοῦ διαβήτου προσδιορίζεις ἓν σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον ν' ἀπέχῃ ἀπὸ μὲν τοῦ Γ ὅσον τὸ Β ἀπὸ τοῦ Α, ἀπὸ δὲ τοῦ Β ν' ἀπέχῃ ὅσον τὸ Γ ἀπὸ τοῦ Α. Πρὸς τοῦτο δέ, ἀφοῦ ἀνοίξῃς τὸν διαβήτην ὅσον εἶναι τὸ ΑΒ, σταίνεις τὸν ἕτερον πόδα εἰς τὸ Γ καὶ στρέφεις τὸν ἄλλον, ὅστις θέλει γράψει καμπύλην γραμμήν. Ἔπειτα κλείσας τὸν διαβήτην ὥστε νὰ πλησιάσουν οἱ πόδες του ἴσον μὲ τὸ διάστημα ἀπὸ τοῦ Γ ἕως εἰς τὸ Α, σταίνεις τὸν ἕτερόν του πόδα εἰς τὸ Β καὶ στρέφεις τὸν ἄλλον, ὅστις θέλει γράψει ἄλλην καμπύλην γραμμήν, ἥτις θέλει τμήσει τὴν πρώτην. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον θέλει γείνει ἡ τομὴ εἶναι τὸ Δ. Γράφεις ἔπειτα εὐθεῖαν, ἥτις νὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ, καὶ αὐτὴ θέλει εἶσθαι ἡ παράλληλος τῆς ΑΒ.

25. *Σχῆμα ἐπίπεδον* λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατωμένη πανταχόθεν ὑπὸ γραμμῶν. Καὶ εἰ μὲν εἶναι περατωμένη ὑπὸ εὐθειῶν, καλεῖται *εὐθύγραμμον* (σχ. 22 μέχρι 34), εἰ δὲ ὑπὸ καμπύλης ἢ καμπύλων, λέγεται *καμπυλόγραμμον* (σχ. 20), εἰ δὲ ὑπὸ εὐθειῶν καὶ καμπύλων, *μικτόγραμμον* (σχ. 21).

Αἱ τὰ πέρατα τοῦ εὐθυγράμμου συνιστῶσαι εὐθεῖαι ὀνομάζονται *πλευραὶ τοῦ σχήματος*. Ἡ δὲ ἐκ τούτων τῶν πλευρῶν ὅλων συνισταμένη γραμμὴ λέγεται *περίμετρος* τοῦ εὐθυγράμμου.

Πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχει τόσας γωνίας, ὅσας καὶ πλευράς, αἱ δὲ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του λέγονται *κορυφαὶ καὶ τοῦ εὐθυγράμμου*.

26. Εἶναι ἀναγκαῖαι τοὐλάχιστον τρεῖς εὐθεῖαι, διὰ νὰ περατωθῇ πανταχόθεν ἐπίπεδον. Καὶ τὸ μὲν περατωμένον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν λέγεται *τρίπλευρον σχῆμα*, ὑπὸ δὲ τινων καὶ *τρίγωνον*· τὸ δὲ περατωμένον ὑπὸ τεττάρων, *τετράπλευρον*, καὶ μόνον τετράπλευρον· τὸ δ' ὑπὸ πέντε, *πεντάπλευρον* ἢ καὶ *πεντάγωνον*, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Γενικῶς δὲ καὶ ἀορίστως ἕκαστον τούτων καλεῖται *πολύπλευρον* ἢ καὶ *πολύγωνον*.

27. α΄. Τῶν τριπλεύρων τὸ ἔχον τὰς τρεῖς του πλευρὰς ἴσας λέγεται *ἰσόπλευρον* (σχ. 22).

β΄. Τὸ ἔχον δύο μόνον πλευρὰς ἴσας καλεῖται *ἰσοσκελὲς* (σχ. 23). Ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς δυνατὸν νὰ ἦναι μικροτέρα ἢ μεγαλητέρα ἑκατέρας τῶν ἄλλων.

γ΄. Τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους ὀνομάζεται *σκαληνὸν* (σχ. 24).

δ΄. Τὸ ἔχον μίαν γωνίαν ὀρθὴν λέγεται *ὀρθογώνιον* (σχ. 25).

ε΄. Τὸ ἔχον μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν, *ἀμβλυγώνιον* (σχ. 26).

ζ΄. Τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας, *ὀξυγώνιον* (σχ. 22).

η΄. Ἀπέναντι ἑκάστης γωνίας κεῖται πλευρά· ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου πλευρὰ λέγεται *ὑποτείνουσα*, οἷον ἡ ΑΒ (σχ. 25).

θ΄. Μία ὁποιαδήποτε τῶν πλευρῶν τριγώνου λέγεται *βάσις* αὐτοῦ, ἡ δὲ κορυφὴ τῆς ἀπέναντι γωνίας λέγεται ἰδίως *κορυφὴ* τοῦ τριγώνου. Τοῦ ἰσοσκελοῦς ἡ ἄνισος πλευρὰ εἶναι πάντοτε βάσις.

ι΄. Τὸ τρίγωνον σημειοῦται διὰ τῶν τριῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι εἰς τὰς κορυφάς του, οἷον ΑΒΓ ἢ ΒΓΑ ἢ ΓΑΒ (σχ. 22).

ια΄. *Παντὸς τριγώνου ἑκάστη τῶν πλευρῶν εἶναι μικροτέρα τῶν δύω ἄλλων ὁμοῦ.* Διότι αἱ δύο ἄλλαι ὁμοῦ ἀποτελοῦν κεκλασμένην γραμμὴν ἔχουσαν τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ τὴν πρώτην, ἥτις εἶναι εὐθεῖα, ἡ δὲ εὐθεῖα εἶναι βραχυτέρα τῆς κεκλασμένης (5).

28. α΄. Τῶν τετραπλεύρων τὸ ἔχον καὶ τὰς τέσσαράς του πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας ἴσας λέγεται ἰδίως *τετράγωνον* (σχ.

β'. Τὸ ἔχον τὰς τέσσαρας γωνίας ἴσας, ἀλλ' ὄχι καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἴσας, ὀνομάζεται *ἑτερόμηκες* (σχ. 28).

Σημ. Θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω ὅτι αἱ ἴσαι γωνίαι τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ἑτερομήκους εἶναι ἑνταυτῷ καὶ ὀρθαί. Διὰ τοῦτο οἱ νεώτεροι ὀνομάζουσι τὸ ἑτερόμηκες ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν.

γ'. Τὸ ἔχον τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἴσας, ὄχι δὲ καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας ἴσας, καλεῖται *ῥόμβος* (σχ. 29).

δ'. Τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας, ὄχι δὲ καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας ἴσας, λέγεται *ῥομβοειδὲς* (σχ. 30).

ε'. Ὅλα ταῦτα τὰ τετράπλευρα ὀνομάζονται κοινῶς *παραλληλόγραμμα*, διότι ἔχοντα τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας τὰς ἔχουν παραλλήλους (22). Καὶ τὸ ἑτερόμηκες θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω ὅτι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας.

ϛ'. Τὸ ἔχον μόνον δύο πλευρὰς παραλλήλους λέγεται *τραπέζιον* (σχ. 31).

29. *Κυρτὸν* λέγεται τὸ πολύπλευρον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν δὲν τὸ ἀπαντᾷ· τὸ ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κυρτὸν (σχ. 32), τὸ δὲ ΗΘΙΚΛΜΝΞ (σχ. 33) δὲν εἶναι κυρτόν, διότι ἡ ΘΙ ἐκβαλλομένη ἀπαντᾷ τὸ σχῆμα.

30. *Διαγώνιος* πολυπλεύρου κυρτοῦ καλεῖται εὐθεῖα, ἥτις ἀρχίζει ἀπό τινος κορυφῆς αὐτοῦ καὶ διερχομένη δι' αὐτοῦ τελευτᾷ εἰς ἄλλην κορυφήν του, οἷον ἡ ΑΓ (σχ. 30) καὶ ἡ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ (σχ. 32). Εἰς τὸ τρίπλευρον διαγώνιος δὲν ὑπάρχει.

31. *Ἰσόπλευρον* μὲν πολύπλευρον λέγεται τὸ ἔχον ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας, *ἰσογώνιον* δὲ τὸ ἔχον ὅλας του τὰς γωνίας ἴσας· τὸ δὲ ἔχον καὶ τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας ἑνταυτῷ ἴσας ὀνομάζεται *κανονικὸν* (σχ. 34). Τῶν τετραπλεύρων κανονικὸν εἶναι τὸ τετράγωνον· εἶναι δὲ καὶ τρίπλευρον κανονικόν, καὶ πεντάπλευρον, κτλ.

32. Τῶν δὲ καμπυλογράμμων σχημάτων ἐδῶ θέλομεν ἐξετάσει ὀλίγον μόνον τὸν κύκλον.

Εἶναι δὲ *κύκλος* ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐπίσης ἀπὸ τινος ἄλλου σημείου καλουμένου *κέντρου*· ἡ δὲ καμπύλη αὕτη γραμμὴ λέγεται *περιφέρεια* τοῦ κύκλου.

Γράφεται δὲ περιφέρεια κύκλου διὰ τοῦ διαβήτου οὕτως· Ἄνοιξε τὸν διαβήτην ὅσον θέλῃς, ἔπειτα στήσας τὸν πόδα τοῦ ἑτέρου σκέλους του εἰς τὸ Κ (σχ. 35), στρέψε τὸ ἄλλο σκέλος ὁλόγυρα, προσέχων νὰ ἐγγίζῃ πάντοτε ὁ πούς του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, νὰ μὴ πλησιάζῃ δὲ μηδὲ ν' ἀπομακρύνηται παντάπασιν αὐτὸ τὸ σκέλος ἀπὸ τοῦ ἄλλου. Ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν αὐτὸ θέλει σημειώσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ ΑΒΓΔ, εἶναι ἡ περιφέρεια, τὸ δὲ Κ εἶναι τὸ κέντρον, τὸ δ' ἐντὸς τῆς περιφερείας ἐπίπεδον εἶναι ὁ κύκλος. Τὸ κέντρον εἶναι σημεῖον, ἡ περιφέρεια εἶναι γραμμή, ὁ δὲ κύκλος ἐπιφάνεια. Ἐνίοτε ὅμως ὀνομάζουν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν, ὄχι ὀρθῶς.

33. Μέρος ὁσονδήποτε τῆς περιφερείας, οἷον τὸ ΑΒ, τὸ ΓΔ, τὸ ΑΒΓ κτλ, καλεῖται *τόξον*.

34. Εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ κέντρου μέχρι σημείου τῆς περιφερείας, οἷον ἡ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κτλ (σχ. 36), λέγεται *ἀκτίς*· εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι *ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι*.

35. Εὐθεῖα, ἀρχίζουσα ἀπό τινος σημείου τῆς περιφερείας καὶ τελευτῶσα εἰς ἄλλο αὐτῆς σημεῖον, οἷον ἡ ΑΔ, ΑΕ, ὀνομάζεται *χορδή*. Πᾶσα δὲ χορδή, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, οἷον ἡ ΑΚΓ, λέγεται ἰδίως *διάμετρος*. *Πᾶσα διάμετρος εἶναι ἴση μὲ δύο ἀκτῖνας, ἤτοι διπλασία τῆς ἀκτῖνος*. Λοιπὸν *ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι*. *Εἶναι δὲ ἡ διάμετρος μεγαλητέρα πάσης ἄλλης χορδῆς τοῦ αὐτοῦ κύκλου*, οἷον τῆς ΑΕ. Διότι ἡ διάμετρος ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκτίνων ΑΚ καὶ ΚΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλήτερον τῆς ΑΕ (27, ιά).

Πᾶσα χορδὴ χωρίζει καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο τόξα καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο τμήματα. Λέγουν δὲ ὅτι *ἡ χορδὴ ὑποτείνει αὐτὰ τὰ δύο τόξα*, καὶ ὅτι *εἶναι χορδὴ αὐτῶν τῶν τόξων*, ἀλλὰ συνήθως θεωρεῖται χορδὴ μόνον τοῦ μικροτέρου τόξου.

Ἡ δὲ διάμετρος διαιρεῖ καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Τοῦτο γίνεται φανερόν, ἐὰν στραφῆ τὸ τμῆμα ΑΓΒ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, ἕως νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου τμήματος ΑΔΒ· τότε τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΓΒ θέλουν ἐφαρμόσει καὶ ταυτισθῆ μὲ τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΔΒ, διότι καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα ἴσον ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ. Λοιπὸν καὶ τὸ τόξον ΑΓΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΔΒ, καὶ τὸ τμῆμα ΑΓΒΚ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τμῆμα ΑΔΒΚ. Λοιπὸν ἡ διάμετρος διαιρεῖ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο *ἡμιπεριφερείας* καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο *ἡμικύκλια*.

36. Εὐθεῖα ἔχουσα ἐν αὐτῆς μόνον σημεῖον κοινὸν μὲ τὴν περιφέρειαν, ὅλα δὲ τ᾽ἄλλα ἐκτὸς αὐτῆς, οἷον ἡ ΘΑΠ, καλεῖται *ἐφαπτομένη*, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Α, *ἁφῆς σημεῖον*.

37. Μέρος κύκλου περατούμενον ὑπὸ δύο ἀκτίνων καὶ τοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων των τόξου, οἷον τὸ ΑΚΒ, ΒΚΓ κτλ, λέγεται *τομεύς*.

38. Γωνία, τῆς ὁποίας πλευραὶ εἶναι δύο ἀκτῖνες, καὶ ἐπομένως ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ κέντρον κύκλου, οἷον ἡ ΑΚΒ, λέγεται *κεντρική*· τὸ δὲ τόξον ΑΒ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της ὀνομάζομεν *ἀντιγώνιον*. Γωνία δὲ, τῆς ὁποίας πλευραὶ μὲν εἶναι δύο χορδαὶ, ἡ δὲ κορυφὴ εἶναι εἴς τι σημεῖον τῆς περιφερείας, οἷον ἡ ΔΑΕ, λέγεται *ἐγγεγραμμένη*.

Ἐὰν δύο κεντρικαὶ γωνίαι ἦναι ἴσαι, τὰ ἀντιγώνιά των τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι καὶ αὐτὰ ἴσα. Π. χ. ἐὰν ἡ ΑΚΒ (σχ. 37) ἦναι ἴση μὲ τὴν ΒΚΓ, τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΒΓ. Διότι, ἂν στραφῇ ὁ τομεὺς ΑΚΓ περὶ τὴν ΚΒ, ἕως νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΚΒ, ἡ ΚΓ θέλει διευθυνθῆ κατὰ τὴν ΑΚ, διότι αἱ κεντρικαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ θέλει ταυτισθῆ μὲ αὐτήν· ἑπομένως καὶ τὸ Γ θέλει ταυτισθῆ μὲ τὸ Α, διότι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι. Τότε καὶ τὸ τόξον ΓΒ θέλει ταυτισθῆ μὲ τὸ τόξον ΑΒ, διότι ἔχουν τὰ ἄκρα των κοινὰ, τὰ δὲ ἄλλα των σημεῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου. Λοιπὸν τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒ.

Παρομοίως πληροφορεῖταί τις καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι *ἂν τὰ ἀντιγώνια δύο κεντρικῶν γωνιῶν τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι ἴσα, καὶ αἱ κεντρικαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι*.

39. Δύο μὲν κύκλοι, τῶν ὁποίων αἱ περιφέρειαι ἔχουν δύο

σημεῖα κοινὰ (σχ. 38), ὀνομάζονται *τεμνόμενοι*, δύο δὲ, τῶν ὁποίων αἱ περιφέρειαι ἔχουν ἓν μόνον σημεῖον κοινὸν (σχ. 39), λέγονται *ἐφαπτόμενοι*, τὸ δὲ κοινόν των σημεῖον, *ἁφῆς σημεῖον*.

Τῶν ἐφαπτομένων κύκλων ὁ ἕτερος εἶναι ἢ ἐντὸς τοῦ ἄλλου ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ.

40. Δύο ἢ πλειότεροι κύκλοι, οἵτινες ἔχουν κέντρον μὲν τὸ αὐτὸ, ἀκτῖνας δὲ ἀνίσους (σχ. 40), καλοῦνται *ὁμόκεντροι* ἢ *συγκεντρικοί*· ὡσαύτως ὀνομάζονται καὶ αἱ περιφέρειαί των.

Τόξα συγκεντρικῶν περιφερειῶν ἀντιγώνια τῆς αὐτῆς κεντρικῆς γωνίας εἶναι τὰ αὐτὰ πολλοστὰ μέρη τῶν περιφερειῶν των. Διότι, πρῶτον εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΓΔ κάθετος, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΚΓ, ΓΚΒ, ΒΚΔ, ΔΚΑ εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἴσαι, τὰ τόξα ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ εἶναι καὶ αὐτὰ ἴσα καὶ τέταρτον ἕκαστον τῆς περιφερείας του· ὡσαύτως καὶ τὰ τόξα *εη*, *ηζ*, *ζθ*, *θε*, καὶ τὰ *ιλ*, *λκ* κτλ. Ὥστε τὰ ἀντιγώνια τῆς αὐτῆς ὀρθῆς γωνίας *ΑΚΓ* συγκεντρικὰ τόξα ΑΓ, *εη*, *ιλ* εἶναι τέταρτον ἕκαστον τῆς περιφερείας του. Ἔπειτα, ἐὰν διαιρεθῇ τὸ τόξον ΑΓ π. χ. εἰς πέντε ἴσα μέρη, καὶ ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες *α*Κ, *β*Κ, *γ*Κ, *δ*Κ, ἐπειδὴ τὰ τόξα *Αα*, *αβ*, *βγ* κτλ εἶναι ἴσα, ἴσαι εἶναι καὶ αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΑΚ*α*, *α*Κ*β*, κτλ· ἑπομένως ἴσα εἶναι καὶ τὰ τόξα *επ*, *πρ*, κτλ, ἴσα εἶναι καὶ τὰ τόξα *ιυ*, *υφ*, κτλ. Λοιπὸν ὡς τὸ τόξον Α*α* εἶναι πέμπτον τοῦ τετάρτου ΑΓ τῆς περιφερείας του, ἤτοι εἰκοστὸν αὐτῆς, οὕτω καὶ τὸ τόξον *επ* καὶ τὸ *ιυ* εἶναι πέμπτον τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας του, ἤτοι εἰκοστὸν αὐτῆς. *Λοιπὸν τὰ ἀντιγώνια τῆς αὐτῆς κεντρικῆς γωνίας συγκεντρικὰ τόξα εἶναι ἕκαστον τὸ αὐτὸ πολλοστὸν τῆς περιφερείας του.*

41. Τόξον, τὸ ὁποῖον εἶναι τριακοσιοστὸν ἑξηκοστὸν μέρος τῆς περιφερείας του, λέγεται *μοῖρα*, ἄλλο δὲ τόξον μικρότερον καὶ ἑξηκοστὸν τῆς μοίρας ὀνομάζεται *λεπτὸν*, τὸ δὲ ἑξηκοστὸν τοῦ λεπτοῦ καλεῖται *δευτερόλεπτον*, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Καθὼς δὲ κύκλος εἶναι ἄλλου μὲν κύκλου μεγαλήτερος, ἄλλου δὲ μικρότερος, οὕτω καὶ ἡ περιφέρειά του εἶναι τῆς μὲν τοῦ πρώτου περιφερείας μακροτέρα, τῆς δὲ τοῦ δευτέρου βραχυτέρα· ἑπομένως καὶ τὸ τριακοσιοστὸν ἑξηκοστὸν ἤτοι ἡ μοῖρα αὐτῆς εἶναι μακροτέρα μὲν τῆς μοίρας τῆς πρώτης περιφερείας, βραχυτέρα δὲ τῆς μοίρας τῆς δευτέρας· ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ λεπτὸν καὶ τὸ δευτερόλεπτον κτλ.

Τὸ τέταρτον ἑκάστης περιφερείας, ἡ μοῖρά της, τὸ λεπτόν, τὸ δευτερόλεπτον κτλ, εἶναι αἱ μονάδες ἤτοι τὰ μέτρα, πρὸς τὰ ὁποῖα μετροῦνται τὰ τόξα αὐτῆς τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας αἱ μονάδες εἶναι πολλοστά. Εἶναι λοιπὸν τόσα διάφορα τὸ μῆκος τέταρτα, μοῖραι κτλ, ὅσαι εἶναι διάφοροι τὸ μῆκος περιφέρειαι, ἤτοι ἀπειράριθμοι.

Πᾶσα περιφέρεια εἶναι ἴση μὲ τέσσαρα *τέταρτα* αὐτῆς, μὲ 360 μοίρας της, μὲ 21600 λεπτά, μὲ 1296000 δευτερόλεπτα κτλ. Τὸ δὲ τέταρτον τῆς περιφερείας εἶναι ἴσον μὲ 90 μοίρας, μὲ 5400 λεπτά, μὲ 324000 δευτερόλεπτα κτλ, κτλ.

Εἰς τὴν γραφὴν διακρίνονται αἱ μὲν μοῖραι διὰ τοῦ 0 θεμένου ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ ψηφίου τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν, τὰ δὲ λεπτὰ ὡσαύτως διὰ μιᾶς ὀξείας, τὰ δὲ δευτερόλεπτα διὰ δύο ὀξειῶν κτλ. Κατὰ ταῦτα τόξον 32 μοιρῶν 24 λεπτῶν καὶ 58 δευτερολέπτων γράφεται συντομώτερα οὕτω $32^{0}\ 24'\ 58''$.

42. Ἀντὶ τῆς μοίρας, τοῦ λεπτοῦ της κτλ, τὰ ὁποῖα ὀνομάζουν *παλαιὰ μέτρα*, τώρα μεταχειρίζονται καὶ ἄλλα *νέα μέτρα τόξων*, ἤτοι τὸν *βαθμόν*, ὅστις εἶναι τετρακοσιοστὸν τῆς περιφερείας, καὶ ἑκατοστὸν τοῦ τετάρτου αὐτῆς· τὸ *λεπτὸν* τοῦ βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἑκατοστὸν αὐτοῦ· τὸ *δευτερόλεπτον*, τὸ ὁποῖον εἶναι ἑκατοστὸν τοῦ λεπτοῦ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥστε πᾶσα περιφέρεια εἶναι ἴση μὲ 400 βαθμούς της, μὲ 40000 λεπτά, μὲ 4000000 δευτερόλεπτα κτλ. Τὸ δὲ τέταρτον τῆς περιφερείας εἶναι ἴσον μὲ 100 βαθμούς, μὲ 10000 λεπτά, μὲ 1000000 δευτερόλεπτα κτλ.

Ὁ βαθμὸς εἶναι ἴσος μὲ $\frac{9}{10}$ ἢ 0,9 τῆς μοίρας τῆς αὐτῆς περιφερείας· καὶ ἀντιστρόφως ἡ μοῖρα εἶναι ἴση μὲ $\frac{10}{9}$ τοῦ βαθμοῦ. Τὸ λεπτὸν τοῦ βαθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{54}{100}$ ἢ 0, 54 τοῦ λεπτοῦ τῆς μοίρας· καὶ ἀντιστρόφως τὸ λεπτὸν τῆς μοίρας εἶναι ἴσον μὲ $\frac{100}{54}$ ἢ $\frac{50}{27}$ τοῦ λεπτοῦ τοῦ βαθμοῦ, κτλ.

Εἰς τὴν γραφὴν διακρίνονται οἱ βαθμοὶ ἐκ τῶν μοιρῶν καθότι τίθεται ϐ ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν βαθμῶν, οἷον $75^{ϐ}\ 38'\ 59''$

παριστάνει 75 βαθμοὺς 38 λεπτὰ καὶ 59 δευτερόλεπτα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μὲν λεπτὰ εἶναι ἑκατοστὰ τοῦ βαθμοῦ, τὰ δὲ δευτερόλεπτα εἶναι δεκαχιλιοστὰ τοῦ βαθμοῦ, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς γράφεται καὶ οὕτως 75^{g}, 3859.

43. Τόξον τι, γραμμένον ἐπὶ ἐπιπέδου ἢ ἐπὶ χάρτου, εἴτε εἶναι γνωστὸν τὸ κέντρον του εἴτε ὄχι, μετρεῖται διὰ τοῦ διαβήτου, ἂν μόνον ἦναι γνωστὴ ἡ μοῖρά του κτλ. Μετρεῖται δὲ ὡς εὐθεῖα (11), ἤτοι ἀνοίγεται ὁ διαβήτης ὅσον εἶναι ἡ χορδὴ τῆς μοίρας, καὶ ἐπιφέρεται ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου τοῦ τόξου ἕως εἰς τὸ ἄλλο κτλ.

Ἀλλ' ἂν δὲν ἦναι γνωστὴ ἡ μοῖρά του, ἦναι ὅμως γνωστὸν τὸ κέντρον του, ἐπομένως καὶ ἡ διάμετρός του, τότε μετρεῖται τὸ τόξον διὰ τοῦ ὀργάνου, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται *ἀναγωγεύς* (σχ. 41).

Ὁ ἀναγωγεύς, συνήθως μετάλλινος ὤν, εἶναι ἡμικύκλιον· ἡ εὐθεῖα ΑΚΒ εἶναι ἡ διάμετρος αὐτοῦ· ΑΓΒ εἶναι ἡ ἡμιπεριφέρειά του διηρημένη εἰς 180 ἴσα μέρη, ἤτοι εἰς 180°, ἐντὸς δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἄλλα σημεῖα διαιρέσεως ἀνὰ 5 μοίρας, καὶ ἐντὸς τούτων ἄλλα ἀνὰ 10 μοίρας, ὅπου εἶναι καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν μοιρῶν σημειωμένοι. Τὸ μέρος μΚνομ εἶναι ἀνοικτόν. Εἰς τὸ κέντρον Κ εἶναι μικρὸν χαράκιον, ὡσαύτως καὶ εἰς τὸ σημεῖον μ καὶ ν τῆς διαμέτρου, διὰ νὰ φαίνηται τὸ κέντρον καὶ δύο σημεῖα ἄλλης διαμέτρου, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι χρεία νὰ τίθηται ἡ διάμετρος τοῦ ἀναγωγέως. Εἶναι δὲ καὶ ξύλινος ἀναγωγεὺς καὶ κεράτινος, ὅςτις δὲν εἶναι ἀνοικτὸς κατὰ τὸ μΚνομ, διαφανὴς ὤν.

Μετροῦμεν δὲ τὸ τόξον ΗΘΙ διὰ τοῦ ἀναγωγέως οὕτω· Θέτομεν τὸ κέντρον Κ τοῦ ἀναγωγέως ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ κέντρου τοῦ τόξου, καὶ διευθύνομεν τὴν διάμετρον τοῦ ἀναγωγέως ἀκριβῶς κατὰ τὴν τοῦ τόξου διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου του Η· εἰς τοῦτο δὲ συντελοῦν τὰ χαράκια τοῦ ἀναγωγέως. Ἔπειτα παρατηροῦμεν εἰς ποίαν τοῦ ἀναγωγέως μοῖραν ἀντιστοιχεῖ τὸ ἄλλο ἄκρον Ι τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον ἑνόνομεν, ἂν χρειασθῇ, μὲ τὸ κέντρον δι' εὐθείας. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τόξον ΗΘΙ εἶναι 55°. Ὡσαύτως δ' εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τόξον ΕΖΔ εἶναι 120°.

Ἂν δὲ ἦναι ἄγνωστον τὸ κέντρον τοῦ τόξου, τότε πρῶτον εὑρίσκομεν τὸ κέντρον του, ὡς θέλομεν εἰπεῖ κατωτέρω, καὶ ἔπειτα τὸ μετροῦμεν ὡς ἤδη εἴπομεν. Κατωτέρω θέλομεν εἰδεῖ καὶ πῶς μετροῦνται ἄλλων κύκλων μεγάλων τόξα.

44. Ἀφοῦ μετρηθῇ τόξον τι ὡς ἤδη εἴπομεν καὶ προσδιορισθῇ πόσων μοιρῶν μακρὸν εἶναι, δύναται ἔπειτα νὰ μετρηθῇ καὶ πρὸς τὰς γραμμικὰς μονάδας, ἤτοι τὸν πῆχυν, τὴν παλάμην κτλ, καὶ νὰ προσδιορισθῇ πόσων πήχεων, ἢ παλαμῶν, ἢ δακτύλων κτλ εἶναι.

Πρὸς τοῦτο δὲ ἀπαιτεῖται νὰ ἠξεύρῃ τις ὅτι τὸ μέτρον πάσης περιφερείας εἶναι σχεδὸν ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς διαμέτρου της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159, τὸ ὁποῖον θέλομεν πληροφορηθῇ ἀλλοῦ. Π. χ. ἂν ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς ἦναι 3 παλαμῶν, ἡ περιφέρειά του θέλει εἶσθαι ἴση σχεδὸν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ 3,14159, ἤτοι παλαμῶν 9,42477. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μοῖρα εἶναι $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας της, διὰ τοῦτο ἡ μοῖρα τῆς περιφερείας παλαμῶν 9,42477 εἶναι σχεδὸν ἴση μὲ 0,02618 τῆς παλάμης. Τόξον δὲ ὁσωνδήποτε μοιρῶν εὑρίσκεται ἴσον μὲ παλάμας ἢ μὲ μέρος τῆς παλάμης, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ 0,02618 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν. Π. χ. τόξον 75° εἶναι ἴσον σχεδὸν μὲ παλάμην 1,9635.

Γενικῶς λοιπὸν, διὰ νὰ εὕρῃς μὲ πόσας γραμμικὰς μονάδας εἶναι τόξον τι κάμποσων μοιρῶν, *μέτρησε τὴν ἀκτῖνα τοῦ τόξου, διπλασίασέ την, πολλαπλασίασε τὸ διπλάσιον ἐπὶ 3,14159, διαίρεσε τὸ γινόμενον διὰ 360 καὶ πολλαπλασίασε τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου·* ὁ προκύψων ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι τὸ μέτρον τοῦ τόξου πρὸς τὰς γραμμικὰς μονάδας.

Τὸ τέταρτον περιφερείας τινὸς, ἡ μοῖρά της, τὸ λεπτὸν κτλ εἶναι *ἴδια μέτρα* αὐτῆς τῆς περιφερείας, αἱ δὲ γραμμικαὶ μονάδες εἶναι μέτρα, πρὸς τὰ ὁποῖα μετροῦνται ὄχι μόνον ὅλαι αἱ εὐθεῖαι, ἀλλ' ἀκόμη καὶ ὅλα τὰ τόξα ὅλων τῶν διαφόρων περιφερειῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἁρμόζει νὰ λέγωνται *κοινὰ μέτρα* πρὸς ἀντιδιαστολήν. Ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις παριστάνει τὸ μέτρον τόξου, λέγεται *μέτρον* μὲν *σχετικὸν*, ὅταν ἦναι μετρημένον τὸ τόξον πρὸς τὰ ἴδιά του μέτρα, *μέτρον* δὲ *ἀπόλυτον*, ὅταν ἦναι μετρημένον πρὸς τὰ κοινὰ μέτρα. Ἀνωτέρω ὁ 75 εἶναι μέτρον σχετικὸν, ὁ δὲ 1,9635 εἶναι μέτρον ἀπόλυτον τοῦ τόξου.

45. Γωνία, ἥτις εἶναι ἐννενηκοστὸν μέρος τῆς ὀρθῆς, λέγεται *μοῖρα*, ἄλλη δὲ μικροτέρα τῆς μοίρας καὶ ἑξηκοστὸν αὐτῆς λέγεται *λεπτὸν*, τὸ δὲ ἑξηκοστὸν τοῦ λεπτοῦ λέγεται *δευτερόλεπτον*, κτλ.

Ἡ ὀρθὴ γωνία, ἡ μοῖρά της, τὸ λεπτὸν κτλ, εἶναι αἱ μονάδες, πρὸς τὰς ὁποίας μετροῦνται αἱ γωνίαι. Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἴση μὲ 90 μοίρας, μὲ 5400 λεπτὰ κτλ· ἡ μοῖρα εἶναι ἴση μὲ 60 λεπτὰ, μὲ 3600 δευτερόλεπτα κτλ. Διακρίνονται δὲ εἰς τὴν γραφὴν αἱ μοῖραι τῶν γωνιῶν κτλ, ὡς καὶ αἱ μοῖραι τῶν τόξων κτλ. Τὸ $48^{\circ}\ 35'$ παριστάνει καὶ γωνίαν 48 μοιρῶν καὶ 35 λεπτῶν.

Τὰ δὲ νέα μέτρα τῶν γωνιῶν εἶναι ἡ ὀρθὴ, τὸ ἑκατοστὸν αὐτῆς, τὸ ὁποῖον λέγεται *βαθμὸς*, τὸ ἑκατοστὸν τοῦ βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον λέγεται *λεπτὸν*, κτλ.

46. Εἶναι ἤδη γνωστὸν (40) ὅτι ἀντιγώνιον τῆς ὀρθῆς γωνίας τόξον εἶναι τὸ τέταρτον περιφερείας ὁποιασδήποτε. Ἂν δὲ τὸ τέταρτον διαιρεθῇ εἰς 90 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀχθῶσιν ἀκτῖνες, οὕτω διαιρεῖται καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία εἰς 90 ἴσα μέρη (38)· ὥστε ἀντιγώνιον τόξον τῆς μοίρας γωνίας εἶναι ἡ μοῖρα τόξον, καὶ ἑπομένως ἀντιγώνιον γωνίας π. χ. 24° εἶναι τόξον 24°, ἀντιγώνιον δὲ γωνίας 50° εἶναι τόξον 50°. Ὡσαύτως ἐννοεῖται ὅτι καὶ ἡ γωνία λεπτὸν ἔχει ἀντιγώνιον τὸ τόξον λεπτὸν, γωνία δὲ $25'$ ἔχει ἀντιγώνιον τόξον $25'$, κτλ.

Αὕτη ἡ παρατήρησις δεικνύει ὅτι *αἱ γωνίαι καὶ τὰ ἀντιγώνιά των τόξα ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον*· ἤτοι ἂν ἀντιγώνιόν τι τόξον ἦναι $80^{\circ}\ 5'$, καὶ ἡ γωνία, τῆς ὁποίας τὸ τόξον εἶναι ἀντιγώνιον, εἶναι καὶ αὐτὴ $80^{\circ}\ 5'$. Διὰ ταῦτα, ὅταν ἦναι μετρημένον ἀντιγώνιόν τι τόξον, πρέπει νὰ νοῆται ὅτι εἶναι ἐνταυτῷ μετρημένη καὶ ἡ γωνία του, καὶ ὅτι τὸ μέτρον τὸ σχετικὸν τοῦ ἀντιγωνίου τόξου, εἶναι ἐνταὐτῷ μέτρον καὶ τῆς γωνίας του.

Ὥστε αἱ γωνίαι, ἐνῷ μετροῦνται πρὸς τὰς μονάδας των, ἤτοι τὴν ὀρθὴν, τὸ ἐννενηκοστὸν αὐτῆς κτλ, μετροῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ὀργάνου, τοῦ ἀναγωγέως, διὰ τοῦ ὁποίου καὶ τὰ τόξα, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ᾽ ὃν καὶ τὰ ἀντιγώνιά των τόξα, (43)· ἢ μᾶλλον μετροῦνται διὰ τῶν ἀντιγωνίων τόξων των, διότι, ἀφοῦ μετρηθῇ τὸ ἀντιγώνιον γωνίας τόξον, ὁ ἀριθμὸς, ὅςτις παριστάνει τὸ σχετικὸν μέτρον του, νοούμενος ὅτι παριστάνει μοίρας κτλ γωνίας, εἶναι καὶ μέτρον τῆς γωνίας.

Συνήθως λέγουν ὅτι τὸ *ἀντιγώνιον τόξον εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας του*, ὄχι τόσον ὀρθῶς, ἀντὶ νὰ λέγουν *ἡ γωνία καὶ τὸ ἀντιγώνιον τόξον ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μέτρον.*

47. *Νὰ κατασκευασθῇ γωνία, ἥτις νὰ ἔχῃ πλευρὰν μὲν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 42), κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, νὰ ἦναι δὲ ἴση μὲ ἄλλην δεδομένην γωνίαν, τὴν ΔΕΖ.*

Μὲ κέντρον μὲν τὸ Ε καὶ μὲ ἀκτῖνα ὅσον θέλωμεν μεγάλην γράφομεν τὸ τόξον ΔΖ, μὲ κέντρον δὲ τὸ Α καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράφομεν τὸ τόξον ΒΓ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τόξου ΔΖ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον θέλει τμήσει τὸ ΒΓ τόξον κατὰ τὸ Γ. Ἐπιζευγνύομεν δι᾽ εὐθείας τὸ Α καὶ τὸ Γ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ θέλει εἶσθαι ἴση μὲ τὴν ΔΕΖ· διότι τὰ ἀντιγώνιά των τόξα εἶναι μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γραμμένα καὶ ἴσα.

Ἄλλως, πρῶτον μετροῦμεν διὰ τοῦ ἀναγωγέως τὴν γωνίαν ΔΕΖ, ἔπειτα θέτομεν τὸ κέντρον τοῦ ἀναγωγέως εἰς τὸ Α, διευθύνομεν τὴν διάμετρόν του κατὰ τὴν ΑΒ, καὶ ἄγομεν εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀναγωγέως, τὸ ὁποῖον δεικνύει πόσον εἶναι μεγάλη ἡ γωνία ΔΕΖ.

48. Ὠνομάσαμεν ἤδη (15,19,35,38) καὶ θέλομεν ὀνομάζει *ἴσα* δύο γραμμὰς, ἢ δύο γωνίας, ἢ δύο σχήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι χωριστὰ, ὅταν ἔχωμεν τὴν βεβαιότητα ὅτι ἐπιτιθέμενον τὸ ἕτερον τούτων ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζει εἰς αὐτὸ καθ᾽ ὅλην του τὴν ἔκτασιν καὶ ταυτίζεται μὲ αὐτό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ἰδιότητες σχημάτων καὶ προβλήματα.

49. *Τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ὀρθῶν*· οἷον τὸ ἄθροισμα τῆς ΑΓΔ καὶ τῆς ΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ὀρθῶν (σχ. 43). Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ κάθετος ΕΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ, ἡ ΑΓΔ χωρίζεται εἰς δύο γωνίας, τὴν ΑΓΕ καὶ τὴν ΕΓΔ· τούτων δὲ ἡ μὲν ΑΓΕ εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ ΕΓΔ ὁμοῦ μὲ τὴν ΒΓΔ ἀποτελοῦν τὴν ὀρθὴν ΒΓΕ· λοιπὸν *τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων κτλ.*

β'. Ἐὰν λοιπὸν ἦναι γνωστὸν ὅτι *ἡ ἑτέρα τῶν προσκειμένων εἶναι ὀρθή, τότε καὶ ἡ ἄλλη πρέπει νὰ ἦναι ὀρθή.*

γ'. Ἀλλὰ καὶ *ὁσωνδήποτε ἐφεξῆς γωνιῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ* (σχ. 12) *τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ὀρθῶν*. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ΑΓΖ, ΖΓΔ, ΔΓΕ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ΑΓΕ, ἡ δὲ ΑΓΕ ὁμοῦ μὲ τὴν ΕΓΒ, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ὀρθῶν, διότι εἶναι δύο προσκείμεναι ἡ ΑΓΕ καὶ ἡ ΕΓΒ. *Τὸ ἄθροισμά των λοιπὸν ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν.*

δ'. Εἶναι ἔτι φανερὸν ὅτι *τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐφεξῆς καὶ ὁλόγυρα γωνιῶν* (σχ. 44) *εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τεσσάρων ὀρθῶν, καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὴν περιφέρειαν ὅλην*. Διότι, ἂν ἐκβληθῇ ἡ ΑΚ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄνωθεν τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κάτωθεν αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ὅλων εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς.

50. *Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι· οἷον ἡ ΑΓΔ ἴση μὲ τὴν ΒΓΕ* (σχ. 16). Διότι, εἰς ἑκατέραν ἐὰν προστεθῇ ἡ ΔΓΒ, ἀποτελοῦνται ἀθροίσματα ἴσα μὲ δύο ὀρθάς, καὶ ἑπομένως ἴσα πρὸς ἄλληλα· λοιπὸν καὶ ἂν δὲν προστεθῇ ἡ ΔΓΒ, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΒΓΕ εἶναι ἴσαι. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ΔΓΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓΕ.

β'. *Ἐὰν ἡ ΔΕ* (σχ. 45) *ἦναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.* Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ ΑΒ, ἥτις ἀποτελεῖ τὰς δύο γωνίας ΔΓΒ καὶ ΕΓΒ ὀρθὰς, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ (16).

51. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των ἴσας, τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.* Οἷον τὰ δύο τρίγωνα (σχ. 46) ἔχοντα τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΔΕ, τὴν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν ΕΖ, καὶ τὴν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν ΔΖ, εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως ἔχουν τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν Δ, τὴν Β ἴσην μὲ τὴν Ε καὶ τὴν Γ ἴσην μὲ τὴν Ζ. Διότι, ἀφοῦ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γραφθῇ τόξον τὸ ΑΗ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΓ γραφθῇ τόξον τὸ ΑΘ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ πρότερον γραφθὲν εἰς τὸ Α, ἂς ἐπιθέσωμεν τὸ ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, θέτοντες τὸ Ε ἐπὶ τοῦ Β καὶ διευθύνοντες τὴν ΕΖ κατὰ τὴν ΒΓ. Τότε ἡ ΕΖ θέλει ἐφαρμόσει καὶ ταυτισθῇ μὲ τὴν ΒΓ, καὶ τὸ Ζ σημεῖον θέλει πέσει εἰς τὸ Γ, διότι εἶναι ἴση ἡ ΕΖ μὲ τὴν ΒΓ· ἡ δὲ ΕΔ καὶ ἡ ΖΔ θέλουν διευθυνθῇ ἡ μὲν κατὰ τὴν ΒΑ, ἡ δὲ κατὰ τὴν ΓΑ, καὶ θέλουν ταυτισθῇ μὲ αὐτάς. Διότι, οὔσης τῆς ΕΔ ἴσης μὲ τὴν ΑΒ, τὸ ἄκρον Δ θέλει πέσει εἴς τι σημεῖον τοῦ τόξου ΑΗ, οὔσης δὲ καὶ τῆς ΔΖ ἴσης μὲ τὴν ΑΓ, τὸ ἄκρον Δ θέλει πέσει εἴς τι σημεῖον τοῦ τόξου ΑΘ· λοιπὸν τὸ κοινὸν Δ σημεῖον τῆς ΕΔ καὶ τῆς ΖΔ θέλει πέσει εἰς τὸ σημεῖον Α, ὅπου τέμνονται τὰ τόξα· λοιπὸν ἡ ΕΔ ἐφαρμόζει εἰς τὴν ΑΒ καὶ ταυτίζεται, καὶ ἡ ΔΖ ἐφαρμόζει εἰς τὴν ΑΓ καὶ ταυτίζεται μὲ αὐτήν. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουν τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν καὶ ταυτίζονται· λοιπὸν εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας ἴσας.

52. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν τῶν πλευρῶν ἴσας εἶναι ἴσα, καὶ ἔχουν τὴν τρίτην πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς ἄλλας δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν.* Οἷον τὰ τρίγωνα (σχ. 46) ἔχοντα τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΔΕ, τὴν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν ΕΖ, καὶ τὴν ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν ΔΕΖ, εἶναι ἴσα, καὶ ἔχουν ἔτι καὶ τὴν ΑΓ ἴσην

μὲ τὴν ΔΖ, καὶ τὴν Α ἴσην μὲ τὴν Δ, καὶ τὴν Γ ἴσην μὲ τὴν Ζ. Διότι, ἐπιτεθέντος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΓΒ οὕτως, ὥστε τὸ Δ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ Α, καὶ ἡ ΔΕ νὰ διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΑΒ καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς αὐτὴν, τὸ Ε θέλει πέσει εἰς τὸ Β, διότι εἶναι ἴση ἡ ΔΕ μὲ τὴν ΑΒ· ἡ δὲ ΕΖ θέλει διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΒΓ καὶ ἐφαρμόσει εἰς αὐτὴν, διότι ἡ γωνία Ε εἶναι ἴση μὲ τὴν Β· τὸ δὲ Ζ θέλει πέσει εἰς τὸ Γ, διότι εἶναι ἴση ἡ ΕΖ μὲ τὴν ΒΓ. Ἀλλὰ τότε καὶ ἡ ΔΖ θέλει ἐφαρμόσει καὶ ταυτισθῇ μὲ τὴν ΑΓ, διότι ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Γ (5). Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐφαρμόζει εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ταυτίζεται μὲ αὐτό· λοιπὸν τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, καὶ ἔτι ἡ ΔΖ ἴση μὲ τὴν ΑΓ, ἡ Δ ἴση μὲ τὴν Α, καὶ ἡ Ζ ἴση μὲ τὴν Γ.

53. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς δύο γωνίας, τὰς ὁποίας αὕτη ἡ πλευρὰ ἑκατέρου ἀποτελεῖ μὲ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς, ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, εἶναι ἴσα, καὶ ἔχουν τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν καὶ τὴν γωνίαν των ἴσην.* Οἷον τὰ τρίγωνα (σχ. 46) ἔχοντα τὴν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν ΕΖ, τὴν γωνίαν Β ἴσην μὲ τὴν Ε καὶ τὴν Γ ἴσην μὲ τὴν Ζ, εἶναι ἴσα, καὶ ἔχουν ἔτι τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΔΕ, τὴν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν ΔΖ καὶ τὴν Α ἴσην μὲ τὴν Δ. Διότι, ἀφοῦ ἐπιτεθῇ τὸ ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ Ε νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ Β καὶ ἡ ΕΖ νὰ διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΒΓ καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς αὐτὴν, τὸ Ζ θέλει πέσει εἰς τὸ Γ, διότι ἡ ΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ· ἡ ΖΔ θέλει διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΓΑ καὶ θέλει ἐφαρμόσει εἰς αὐτὴν, διότι ἡ γωνία Ζ εἶναι ἴση μὲ τὴν Γ· ὡσαύτως καὶ ἡ ΕΔ θέλει διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΑΒ καὶ θέλει ἐφαρμόσει εἰς αὐτὴν, διότι ἡ Ε εἶναι ἴση τὴν Β· τὸ δὲ κοινὸν τῆς ΕΔ καὶ ΖΔ σημεῖον Δ θέλει πέσει εἰς τὸ Α τὸ κοινὸν τῆς ΑΒ καὶ ΓΑ σημεῖον. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ τὸ ΑΒΓ ἐφαρμόζουν καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν καὶ ταυτίζονται· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ ἔχουν τὴν ΕΔ ἴσην μὲ τὴν ΑΒ, τὴν ΖΔ ἴσην μὲ τὴν ΓΑ, καὶ τὴν Δ ἴσην μὲ τὴν Α.

54. *Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ἐὰν ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ μίαν τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ἴσην, εἶναι ἴσα, καὶ ἔχουν καὶ τ' ἄλλα των μέρη ἴσα.* Οἷον τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα

(σχ. 47), ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΔΖ ἴσην μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ καὶ τὴν πλευρὰν ΕΖ ἴσην μὲ τὴν ΒΓ, εἶναι ἴσα. Διότι, ἀφοῦ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΑΓ γραφθῇ τὸ τόξον ΑΘ, τὸ ὁποῖον θέλει συμπέσει μὲ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Α, ἐπιτίθεται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ΕΖ νὰ ἐφαρμότῃ εἰς τὴν ΒΓ καὶ ταυτισθῇ μὲ αὐτήν. Τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ΕΔ θέλει διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΒΑ καὶ θέλει ἐφαρμόσει εἰς αὐτήν, διότι ἡ γωνία Ε καὶ ἡ Β εἶναι ἴσαι ὡς ὀρθαί. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΔ θέλει διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΓΑ, καὶ τὸ σημεῖον Δ, τὸ κοινὸν τῆς ΕΔ καὶ τῆς ΖΔ, θέλει πέσει εἰς τὸ Α, τὸ κοινὸν τῆς ΒΑ καὶ ΓΑ, διότι πρέπει νὰ πέσῃ τὸ Δ εἴς τι σημεῖον τοῦ τόξου ΑΘ καὶ εἴς τι σημεῖον τῆς ΑΒ· λοιπὸν πρέπει νὰ πέσῃ εἰς τὸ Α, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν τοῦ τόξου ΑΘ καὶ τῆς ΑΒ· λοιπὸν καὶ ἡ ΖΔ ταυτίζεται μὲ τὴν ΓΑ. Λοιπὸν *τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα κτλ.*

Σημ. Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην, ἀλλ' ὄχι καὶ πλευράν τινὰ ἴσην, δὲν εἶναι ἴσα, ἀλλ' ὅμοια (88, α).

55. *Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τεμνόμεναι διὰ τρίτης ἀποτελοῦσι μὲ αὐτὴν τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίας ἴσας.* Οἷον αἱ παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ (σχ. 48) τεμνόμεναι διὰ τῆς ΕΖ ἀποτελοῦν τὴν ΑΗΘ ἴσην μὲ τὴν ΔΘΗ. Διότι, ἐὰν ληφθῇ ἡ ΗΙ ἴση μὲ τὴν ΘΚ καὶ ἐπιζευχθῇ τὸ Ι μὲ τὸ Θ διὰ τῆς ΙΘ, καὶ τὸ Η μὲ τὸ Κ διὰ τῆς ΗΚ, τὰ δύο τρίγωνα ΙΗΘ καὶ ΗΘΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΗΘ κοινήν, τὴν ΙΗ ἴσην μὲ τὴν ΘΚ, καὶ τὴν ΙΘ ἴσην μὲ τὴν ΗΚ, διότι εἶναι ἡ ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι. Λοιπὸν ἡ γωνία ΙΗΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΚΘΗ, ἤτοι αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ὡσαύτως γίνεται φανερὸν ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἐναλλὰξ ἐντὸς ΒΗΘ καὶ ΓΘΗ εἶναι ἴσαι.

β'. Ἐπειδὴ δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΗΘ καὶ ΒΗΕ εἶναι ἴσαι, ὡσαύτως καὶ αἱ ΔΘΗ καὶ ΓΘΖ, ἔτι δὲ καὶ αἱ ΑΗΕ καὶ ΒΗΘ, καὶ αἱ ΓΘΗ καὶ ΔΘΖ, διὰ ταῦτα *εἶναι ἴσαι γωνίαι καὶ αἱ ἐναλλὰξ ἐκτός, καὶ αἱ ἐντὸς ἐκτός.*

γ'. Πρὸς τούτοις *τῶν ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος ΑΗΘ καὶ ΓΘΗ γωνιῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.* Διότι ἡ ΑΗΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΘΗ· ἀλλ' ἡ ΔΘΗ ὁμοῦ μὲ τὴν ΓΘΗ ὡς προςκείμεναι ἀποτελοῦν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν καὶ ἡ ΑΗΘ ὁμοῦ μὲ τὴν ΓΘΗ ἀποτελεῖ ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τῶν ἄλλων δύο ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος ΔΘΗ καὶ ΒΗΘ τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

δ'. Λοιπόν, *ἂν εὐθεῖα ἡ ΕΖ* (σχ. 49) *ἦναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων τὴν ΓΔ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην τὴν ΑΒ*. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ΓΖΕ καὶ ΑΕΖ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· ἀλλ' ἡ ΓΖΕ εἶναι ὀρθή· λοιπὸν καὶ ἡ ΑΕΖ εἶναι ὀρθή· καὶ ἡ ΒΕΖ ἐπομένως (49) εἶναι ὀρθή· λοιπὸν ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

56. Ἀντιστρόφως, *δύο εὐθεῖαι ἀποτελοῦσαι μὲ τὴν τέμνουσάν των δύο ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας εἶναι παράλληλοι*. Οἷον (σχ. 48) ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, αἵτινες ἀποτελοῦν μὲ τὴν τέμνουσαν ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίας ἴσας, ἤτοι τὴν ΑΗΘ ἴσην μὲ τὴν ΔΘΗ, εἶναι παράλληλοι. Διότι, ἐὰν ληφθῇ ΗΙ ἴση μὲ τὴν ΘΚ καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΙΘ καὶ ἡ ΗΚ, τὸ τρίγωνον ΙΘΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΗΘΚ, διότι ἡ ΙΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΘΚ, ἡ ΗΘ εἶναι κοινή, καὶ ἡ ΙΗΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΘΚ· λοιπὸν καὶ ἡ ΙΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΚ. Λοιπόν, ἐπειδὴ τὸ Ι καὶ τὸ Θ, τὰ ὁποῖα ἴσον ἀπέχουν τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ Η, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ Κ, ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων ὅσον τὸ Η ἀπὸ τοῦ Κ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

β'. Ἀλλὰ καὶ *αἱ ἐναλλὰξ ἐκτὸς γωνίαι ἐὰν ἦναι ἴσαι, καὶ αἱ ἐντὸς ἐκτός, αἱ εὐθεῖαι θέλουν εἶσθαι παράλληλοι*· διότι τότε εἶναι καὶ αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς ἴσαι.

γ'. Ὡσαύτως, *δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἂν τεμνόμεναι διὰ τρίτης ἀποτελοῦν τῶν δύο ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος γωνιῶν τὸ ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς*. Διότι τότε εἶναι αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίαι ἴσαι, καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι παράλληλοι. Ἐκ δὲ τούτου ἕπεται ὅτι *δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τρίτην εἶναι παράλληλοι*· διότι τῶν δύο ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος γωνιῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

δ'. Ἔτι δὲ *δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τρίτῃ εἶναι παράλ-*

ληλοι καὶ ἀλλήλων. Οἷον ἡ ΑΒ (σχ. 50) καὶ ἡ ΓΔ παράλληλοι οὖσαι τῆς ΕΖ εἶναι παράλληλοι καὶ ἀλλήλων. Διότι τμηθεῖσαι διὰ τῆς ΗΙ ἀποτελοῦν τὰς γωνίας ΑΙΗ καὶ ΓΘΗ ἴσας μὲ τὴν ΖΗΘ, καὶ ἐπομένως ἴσας πρὸς ἀλλήλας. Ἀλλ' αὗται εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, εἶναι δὲ καὶ ἴσαι· λοιπὸν ἡ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι ἀλλήλων.

57. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ὀρθῶν*. Διότι, ἐὰν ἐκβληθῇ ἡ ΒΓ (σχ. 51) καὶ ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῆς ΑΒ, ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΑΒ, ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς, καὶ ἡ ΔΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΒΑ ὡς ἐντὸς ἐκτός. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΓΑ καὶ ΑΓΕ καὶ ΕΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς (49)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Λοιπὸν α΄. *τρίγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ οὔτε δύο ὀρθὰς γωνίας οὔτε δύο ἀμβλείας, ἀλλὰ μίαν μόνην*.

β΄. *Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν*.

γ΄. *Ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΓΒΑ καὶ ΓΑΒ*.

δ΄. *Ὅταν ἦναι γνωσταὶ δύο γωνίαι τριγώνου ἢ μόνον τὸ ἄθροισμά των, εὑρίσκεται ἡ τρίτη, ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γνωστῶν ἀπὸ δύο ὀρθὰς, ἤτοι ἀπὸ 180°*.

ε΄. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, ἔχουν καὶ τὴν τρίτην ἴσην*.

στ΄. *Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τεσσάρων ὀρθῶν*. Διότι, ἂν ἀχθῇ διαγώνιος, χωρίζεται τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα, καὶ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς.

Λοιπὸν *τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ἑτερομήκους ἑκάστη γωνία εἶναι ὀρθή*· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τεττάρων εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, καὶ ὅλαι εἶναι ἴσαι.

ζ'. *Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πενταγώνου εἶναι ἴσον μὲ 6 ὀρθάς.* Διότι, ἂν ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν αχθῶσι διαγώνιοι, χωρίζεται τὸ πεντάγωνον εἰς τρία τρίγωνα, καὶ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 6 ὀρθάς.

Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ κυρτοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴσον μὲ 8 ὀρθάς.

. . ἑπταγώνου . . . 10. .

. . ὀκταγώνου . . . 12. κτλ.

58. *Ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ ΑΒΓ (σχ. 23) αἱ δύο ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ γωνίαι Γ καὶ Β εἶναι ἴσαι.* Διότι, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς του Α ἀχθῇ εἰς τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως ΒΓ ἡ ΑΔ, τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΑΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΑΓ, τὴν ΒΔ ἴσην μὲ τὴν ΔΓ καὶ τὴν ΑΔ κοινήν. Λοιπὸν ἡ γωνία Β καὶ ἡ Γ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

β'. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ ΑΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΔΑ, καὶ ἡ ΔΑΒ ἴση μὲ τὴν ΔΑΓ, διὰ ταῦτα *ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἠγμένη εὐθεῖα ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν Α τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.*

γ'. Ἀντιστρόφως, *ἂν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, τὴν Β καὶ τὴν Γ, αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ ΑΓ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι.* Διότι, ἂν ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α κάθετος ἡ ΑΔ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, τα δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΑΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΔ κοινήν, τὴν ΑΔΒ ἴσην μὲ τὴν ΓΔΑ, τὴν Β ἴσην μὲ τὴν Γ, ἐπομένως δὲ καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ΒΑΔ ἴσην μὲ τὴν τρίτην ΔΑΓ. Λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓ.

δ'. *Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον (σχ. 22) εἶναι καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐπομένως εἶναι κανονικόν.* Γίνεται δὲ φανερὸν τοῦτο, ἐὰν θεωρηθῇ τὸ τρίγωνον διττῶς ὡς ἰσοσκελές, ἢ διττῶς ὡς ἔχον δύο γωνίας ἴσας. *Ἑκάστη δὲ τῶν γωνιῶν του εἶναι ἴση μὲ τὸ τρίτον δύο ὀρθῶν, ἢ μὲ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ὀρθῆς.*

ε'. Ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν σκαληνοῦ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ (σχ. 24) εἶν ε μεγαλητέρα ἡ ΑΒ ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας Γ, καὶ ἀντιστρόφως. Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΓΔ οὕτως, ὥστε νὰ γείνῃ ἡ γωνία ΒΓΔ ἴση μὲ τὴν Β, εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΔ ὁμοῦ μὲ τὴν ΔΑ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΑ, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΒΔ ὁμοῦ μὲ τὴν ΔΑ ἤτοι ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΑ.

ς'. *Λοιπὸν ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μακροτέρα ἑκατέρας τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρὰ ἀμβλυγωνίου τριγώνου εἶναι ἡ μακροτέρα του πλευρά.*

59. *Ἀπὸ σημείου ἐκτὸς εὐθείας ὄντος μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπ' αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν.* Οἷον ἀπὸ τοῦ σημείου Δ (σχ. 13) μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΓΔ. Διότι πᾶσα ἄλλη ΔΕ ὁμοῦ μὲ τὴν ΔΓ καὶ τὴν ΓΕ ἀποτελεῖ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἀδύνατον νὰ ἔχῃ δύο ὀρθὰς γωνίας· ἂν λοιπὸν ἡ ΔΓΕ ἦναι ὀρθή, ἡ ΓΕΔ ἀδύνατον νὰ ἦναι ὀρθή· ἐπομένως ἀδύνατον ἡ ΔΕ νὰ ἦναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Λοιπὸν μόνη μία κάθετος ἄγεται ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΔΓ.

β'. *Πᾶσα πλαγία εἶναι μακροτέρα τῆς καθέτου.* Διότι ἡ πλαγία ΔΕ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΓΕ, ἥτις εἶναι ἡ μεγαλητέρα πλευρὰ αὐτοῦ. *Ὥστε ἡ κάθετος ἀπὸ σημείου ἐπὶ εὐθεῖαν εἶναι βραχυτάτη ἁπασῶν τῶν εὐθειῶν, ὅσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἄγονται ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.* Λέγουν δὲ ὅτι *ἡ κάθετος παριστάνει τὸ ἀπὸ σημείου εἰς εὐθεῖαν διάστημα.*

γ'. *Ἐκ δὲ δύο πλαγίων ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς καθέτου ἠγμένων ἐπὶ εὐθεῖαν, μακροτέρα εἶναι ἡ ἀπέχουσα τῆς καθέτου περισσότερον.* Οἷον ἡ ΔΒ, ἥτις ἀπέχει τῆς καθέτου ΔΓ πλειότερον παρὰ τὴν ΔΕ, εἶναι μακροτέρα τῆς ΔΕ. Διότι τοῦ τριγώνου ΔΕΒ ἡ γωνία Ε εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ Β εἶναι ὀξεῖα· λοιπὸν ἡ ΔΒ ἡ ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας Ε εἶναι μακροτέρα τῆς ΔΕ τῆς ἀπέναντι τῆς ὀξείας Β.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ ἡ ΓΒ εἶναι μακροτέρα τῆς ΓΕ.

δ'. *Δύο δὲ πλάγιαι ΔΕ καὶ ΔΖ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς καθέτου ΔΓ ἑκατέρωθεν αὐτῆς εἶναι ἴσαι.* Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΓΕ καὶ ΔΓΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΓΔ κοινήν, τὴν ΓΔΕ ἴσην μὲ τὴν ΓΔΖ καὶ τὴν ΔΓΕ ἴσην μὲ τὴν ΔΓΖ. Λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΖ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΖ.

ε'. *Ἐὰν εὐθεῖα ἦναι κάθετος ἐπὶ ἄλλην εἰς τὸ μέσον της, ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς καθέτου ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ἄλλης εὐθείας.* Διότι τὰ διαστήματα ὁποιουδήποτε σημείου τῆς καθέτου ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας τὰ παριστάνουν δύο πλάγιαι· αὗται δὲ εἶναι ἴσαι, διότι τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ἴσον ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς σημείου, ἤτοι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.

60. *Παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων εἶναι ἴσαι.* Οἷον ἐὰν ΑΒ καὶ ΓΔ ἦναι παράλληλοι (σχ. 52) καὶ ΑΓ καὶ ΒΔ ἦναι παράλληλοι, ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΓ καὶ ἡ ΑΓ ἴση μὲ τὴν ΒΔ. Διότι, ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΑΔ, τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΔ κοινήν, τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίας ΑΔΓ καὶ ΔΑΒ ἴσας, ὡσαύτως καὶ τὰς ΔΑΓ καὶ ΑΔΒ. Λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΓ καὶ ἡ ΒΔ ἴση μὲ τὴν ΑΓ. Λοιπὸν παράλληλοι μεταξὺ κτλ.

β'. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ἑτερομήκους ἤτοι ὀρθογωνίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ (57, ϛ.) καὶ ἑπομένως αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἄλλας δύο, διὰ τοῦτο *εἶναι παράλληλοι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου·* ἑπομένως, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων, *εἶναι καὶ ἴσαι.*

γ'. *Αἱ μεταξὺ λοιπὸν παραλλήλων κάθετοι ἐπ' αὐτὰς εἶναι ὅλαι ἴσαι.* Εἶναι δὲ αἱ κάθετοι αὗται βραχύτεραι πάσης ἄλλης εὐθείας οὔσης μεταξὺ τῶν παραλλήλων, καὶ διὰ τοῦτο θεωροῦνται ὅτι παριστάνουν τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων διάστημα. Λοιπὸν *αἱ παράλληλοι ἴσον ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν.*

δ'. *Τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι* (σχ. 29 καὶ 30). Διότι διὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ χωρίζεται ἑκάτερον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας. Λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΔΓ. Ὡσαύτως δὲ γίνεται φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓΔ.

ε. *Τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου αἱ δύο διαγώνιοι εἶναι ἴσαι* (σχ. 27, 28). Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΓ κοινὴν, τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΔΓ καὶ τὴν γωνιαν ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν ΒΓΔ ὡς ὀρθάς. Λοιπὸν ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΔ.

ϛ'. *Τῶν παραλληλογράμμων* (ἤτοι τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς) *αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ μέσον των* (σχ. 27 - 30). Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΔΕΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΓΔ καὶ τὰς τρεῖς των γωνίας ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην. Λοιπὸν καὶ αἱ ἄλλαι δύο πλευραί των εἶναι ἴσαι, ἤτοι ἡ ΑΕ ἴση μὲ τὴν ΕΓ καὶ ἡ ΕΔ ἴση μὲ τὴν ΕΒ· τουτέστιν αἱ διαγώνιοι τῶν παραλληλογράμμων τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ μέσον των.

ζ'. *Τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ῥόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας κατ' ὀρθὰς γωνίας, ἤτοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας* (σχ. 27 καὶ 29). Διότι τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΒΕΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας. Λοιπὸν ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΕΓ· λοιπὸν εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

61. Πληροφορούμεθα διʼ ἐπιθέσεως τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τοῦ ἄλλου ὅτι α'. Δύο τετράγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην. β'. Δύο ὀρθογώνια εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν δύο παρακειμένας πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν. γ'. Δύο ῥόμβοι εἶναι ἴσοι, ἐὰν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ μίαν γωνίαν ἴσην. δ'. Δύο ῥομβοειδῆ εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν δύο παρακειμένας πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν ἴσην. ε'. Δύο τραπέζια εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν τὰς δύο παραλλήλους αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἴσην, καὶ τὴν ἑτέραν τῶν γωνιῶν αὐτῆς καὶ τῆς ἑτέρας τῶν παραλλήλων ἴσην. ϛ'. Τελευταῖον δύο ἄλλα ὁποιαδήποτε τετράπλευρα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν ἢ τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην κατὰ σειρὰν καὶ τὰς δύο γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, ἢ δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας καὶ αὐτῶν καὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἴσας. ζ'. Γενικῶς, δύο πολύπλευρα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν ὅλας τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην κατὰ σειρὰν, πλὴν τῶν τριῶν τῶν τελευταίων, ἤτοι δύο πλευρῶν καὶ τῆς γωνίας των, ἢ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν δύο γωνιῶν αὐτῆς καὶ ἑκατέρας τῶν δύο παρακειμένων εἰς αὐτὴν πλευρῶν.

62. *Λόγος δύο γραμμῶν* εἶναι ἀριθμὸς, ὅστις παριστάνει τὴν ἑτέραν αὐτῶν προσδιωρισμένην πρὸς τὴν ἄλλην. Οἷον γραμμῆς, ἥτις εἶναι διπλασία, ἢ τριπλασία, ἢ τετραπλασια κτλ ἄλλης, ὁ λόγος πρὸς τὴν ἄλλην εἶναι 2, ἢ 3, ἢ 4 κτλ· καὶ ἀντιστρόφως, ἐπειδὴ ἡ δευτέρα εἶναι ἥμισυ, ἢ τρίτον, ἢ τέταρτον κτλ τῆς πρώτης, ὁ λόγος τῆς δευτέρας πρὸς τὴν πρώτην εἶναι $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{3}$, ἢ $\frac{1}{4}$ κτλ. Γραμμῆς δὲ, ἥτις εἶναι διπλασία, ἢ τριπλασία, ἢ τετραπλασία κτλ πολλοστοῦ τινος ἄλλης γραμμῆς, οἷον τοῦ $\frac{1}{10}$, ὁ λόγος προς τὴν ἄλλην εἶναι κλασματικὸς $\frac{2}{10}$, ἢ $\frac{3}{10}$, ἢ $\frac{4}{10}$, κτλ· ἀντιστρόφως δὲ ὁ λόγος τῆς δευτέρας πρὸς τὴν πρώτην εἶναι $\frac{10}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{10}{4}$ κτλ.

Ὅταν δὲ ἡ ἑτέρα τῶν γραμμῶν ἦναι γραμμική τις μονὰς, οἷον ὁ πῆχυς, ἡ παλάμη κτλ, τότε ὁ λόγος τῆς ἄλλης πρὸς αὐτὴν εἶναι τὸ μέτρον της.

63. Ὁ λόγος εὐθείας πρὸς ἄλλην εὑρίσκεται διττῶς. ά. Μετρεῖται, ἂν ἦναι μεγαλητέρα τῆς ἄλλης, διὰ τοῦ διαβήτου (11), ἤτοι ἀνοίγεται ὁ διαβήτης ὅσον εἶναι ἡ δευτέρα εὐθεῖα, καὶ ἐπιφέρεται ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου τῆς πρώτης μέχρι τοῦ ἄλλου. Καὶ ἂν μὲν δὲν περισσεύῃ τι μικρότερον τοῦ ἀνοίγματος τοῦ διαβήτου, ἀλλὰ φθάνῃ ὁ ποῦς αὐτοῦ ἀκριβῶς εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος λόγος τῆς εὐθείας πρὸς τὴν ἄλλην. Ἂν δὲ περισσεύῃ τι μικρότερον, οἷον ἂν εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 4 καὶ περισσεύῃ ἡ ΕΒ (σχ. 53), τότε μετρεῖται ὡσαύτως ἡ δευτέρα εὐθεῖα ΓΔ πρὸς τὴν ΕΒ· καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς 3 καὶ περισσεύει ἡ ΖΔ, μετρεῖται ὡσαύτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρίσκεται σωστὰ ἴση μὲ 2. Τώρα εἶναι φανερὸν ὅτι, ἀφοῦ ἡ ΕΒ ἦναι διπλασία τῆς ΖΔ, ἡ ΓΔ, τῆς ὁποίας τὸ μέρος ΓΖ εἶναι τριπλάσιον τῆς ΕΒ, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι ἡ ΖΔ, εἶναι ἑπταπλασία τῆς ΖΔ· ἡ δὲ ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ μέρος ΑΕ εἶναι τετραπλάσιον τῆς ΓΔ, ἤτοι εἰκοσιοκταπλάσιον τῆς ΖΔ, τὸ δὲ μέρος ΕΒ διπλάσιον τῆς ΖΔ, εἶναι τριακονταπλασία τῆς ΖΔ. Εἶναι δὲ ἔτι φανερὸν ὅτι ἡ ΑΒ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὴν ΓΔ, ὁποῖον λόγον ἔχει ὁ 30 πρὸς τὸν 7, διότι ὁ 30 καὶ ὁ 7 παριστάνουν τὰς αὐτὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, ἀλλὰ μετρημένας πρὸς τὴν ΖΔ. Ἀλλ' ὁ λόγος τοῦ 30

πρὸς 7 εἶναι $\frac{30}{7}$ ἤτοι $4\frac{2}{7}$· λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τετράκις τὴν ΓΔ καὶ $\frac{2}{7}$ αὐτῆς.

Ἀντιστρόφως δὲ ὁ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ εἶναι $\frac{7}{30}$, ἤτοι ἡ ΓΔ εἶναι ἴση μὲ $\frac{7}{30}$ τῆς ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ΖΔ ὀνομάζεται *κοινὸν μέτρον τῶν δύο εὐθειῶν* ΑΒ καὶ ΓΔ, αὗται δὲ αἱ εὐθεῖαι λέγονται *σύμμετροι*, ὡς ἔχουσαι κοινὸν μέτρον.

Ἂν δὲ ζητῆται ὁ λόγος μικροτέρας εὐθείας πρὸς μεγαλητέραν, πρῶτον εὑρίσκεται τὸ κοινὸν μέτρον αὐτῶν ὡς ἀνωτέρω· ἔπειτα διαιρεῖται ὁ μικρότερος ἀριθμὸς διὰ τοῦ μεγαλητέρου.

Σημ. Ἐνίοτε δὲν εὑρίσκεται εὐθεῖα, ἥτις νὰ ἦναι κοινὸν μέτρον τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν, ὅσον καὶ ἂν προαχθῇ ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις· αὗται αἱ εὐθεῖαι καλοῦνται ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ι. Τότε παραμελεῖται μέρος τι μικρὸν μιᾶς τῶν προκυπτουσῶν εὐθειῶν ἐκ τῆς ἀνωτέρω πράξεως, καὶ ἐκλαμβάνεται ὡς κοινὸν μέτρον τῶν δύο εὐθειῶν εὐθεῖα, ἥτις δὲν εἶναι ἀκριβῶς μέτρον κοινὸν αὐτῶν. Τότε καὶ ὁ λόγος τῶν εὐθειῶν δὲν θέλει εἶσθαι ἀκριβής, ἀλλὰ προσεγγίζων εἰς τὸν σωστόν.

Ἐκ τῶν εἰρημένων ἐννοεῖται πῶς πρέπει νὰ πράττῃ τις εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου δύο εὐθειῶν.

β΄. Μετρεῖται ὡς εἴπομεν ἐν ἀρ. 11, εἴτε διὰ τοῦ διαβήτου εἴτε διὰ τῆς κλίμακος, ἑκατέρα εὐθεῖα πρὸς τὰς γραμμικὰς μονάδας, καὶ ἀφοῦ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ἑκατέρας ἢ ἀκριβῶς ἢ ὡς ἔγγιστα, διαιρεῖται τὸ ἕτερον διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος λόγος. Ἂν π. χ. εὑρεθῇ οὕτως ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ 90 γραμμὰς (γραμμικὰ μέτρα), ἡ δὲ ΓΔ ἴση μὲ 21 γραμμάς, ὁ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ εἶναι $\frac{90}{21}$, ὁ δὲ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ $\frac{21}{90}$.

Ὁ λόγος λοιπὸν δύο εὐθειῶν εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἀριθμῶν, οἵτινες παριστάνουν αὐτὰς προσδιωρισμένας ἢ πρὸς μίαν αὐτῶν, ἢ πρὸς τὸ κοινὸν μέτρον αὐτῶν, ἢ πρὸς τὰς γραμμικὰς μονάδας.

64. Τέσσαρες εὐθεῖαι λέγονται *ἀνάλογοι*, ἐὰν ὁ λόγος δύο ἐξ αὐτῶν ἦναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἄλλων δύο. Π. χ. ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἦναι ἴση μὲ 15 *γραμμάς*, ἄλλη ἡ ΓΔ εἶναι ἴση μὲ 5 *γραμμάς*, τρίτη ἡ ΕΖ ἴση μὲ 21 *γραμμάς*, καὶ τετάρτη ἡ ΗΘ

ἴση μὲ 8 γραμμάς, ἐπειδὴ 15 : 5 : : 24 : 8, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, ἤτοι ΑΒ : ΓΔ : : ΕΖ : ΗΘ, ἢ ἄλλως, ὡς ἡ ΑΒ εἶναι τριπλασία τῆς ΓΔ, οὕτω καὶ ἡ ΕΖ εἶναι τριπλασία τῆς ΗΘ.

Λέγουν δὲ ὅτι καὶ ἕξ εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, καὶ ὀκτὼ, καὶ δέκα κτλ· καὶ τότε νοεῖται ὅτι αὗται ἀνὰ δύο ἔχουν λόγους ἴσους. Π. χ. ΑΒ : ΓΔ : : ΕΖ : ΗΘ : : ΙΚ : ΛΜ : : ΝΞ : ΟΠ εἶναι ὀκτὼ εὐθεῖαι ἀνάλογοι, διότι ἀνὰ δύο ἔχουν λόγους ἴσους.

Ὀνομάζεται *μέση ἀνάλογος* δύο ἄλλων εὐθειῶν εὐθεῖα, ἥτις ἀποτελεῖ τὰ δύο μέσα ἀναλογίας, τῆς ὁποίας ἄκρα εἶναι αἱ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι. Οἷον τῆς ἀναλογίας 8 : 4 : : 4 : 2 ἢ τῆς ΑΒ : ΓΔ : : ΓΔ : ΕΖ ὁ μὲν 4 εἶναι μέσος ἀνάλογος τοῦ 8 καὶ τοῦ 2, ἡ δὲ ΓΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΕΖ.

65. *Ἐὰν εὐθεῖα ἦναι διῃρημένη εἰς μέρη ἴσα, καὶ ἀπὸ τῶν διαιρέσεως σημείων ἀχθῶσι παράλληλοι, αἵτινες νὰ συμπίπτουν μὲ ἄλλην ὁποιανδήποτε εὐθεῖαν, τὰ μέρη ταύτης τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων θέλουν εἶσθαι καὶ αὐτὰ ἴσα.* Οἷον ἂν τῆς ΑΒ (σχ. 54) τὰ μέρη ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ εἶναι ἴσα, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι ΓΗ, ΔΘ, κτλ, τῆς ΜΝ τὰ μέρη ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ θέλουν εἶσθαι ἴσα. Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ ΓΟ, ΔΠ, ΕΡ παράλληλοι τῆς ΜΝ, αἵτινες θέλουν εἶσθαι καὶ ἀλλήλων παράλληλοι (56, δ'.), τὰ τρίγωνα ΓΔΟ, ΔΕΠ, ΕΖΡ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην, τὴν ΓΔ καὶ ΔΕ καὶ ΕΖ, τὰς γωνίας ΓΔΟ, ΔΕΠ, ΕΖΡ ἴσας, καὶ τὰς ΔΓΟ, ΕΔΠ, ΖΕΡ ἴσας. Λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΓΟ, ΔΠ, ΕΡ εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' αὗται καὶ αἱ παράλληλοι αὐτῶν ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ εἶναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΓΗ, ΔΘ, ΕΙ, ΖΚ· λοιπὸν καὶ αἱ ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ, ὡς ἴσαι μὲ τὰς ἴσας ΓΟ, ΔΠ, ΕΡ, εἶναι καὶ αὗται ἴσαι.

ϐ'. *Ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ (σχ. 55) ἦναι εἰς ἄνισα μέρη ΓΔ, ΔΕ διῃρημένη, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι ΓΖ, ΔΗ, ΕΘ, αἱ εὐθεῖαι ΖΗ καὶ ΗΘ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ΓΔ καὶ ΔΕ, ἤτοι ΓΔ : ΔΕ : : ΖΗ : ΗΘ.* Διότι, ἂν μετρηθῇ ἡ ΓΔ καὶ ἡ ΔΕ πρὸς τὸ κοινὸν μέτρον των, καὶ εὑρεθῇ ἡ μὲν ΓΔ ἴση μὲ 3, ἡ δὲ ΔΕ ἴση μὲ 5, ἔπειτα διὰ τοῦ διαβήτου διαιρεθῇ ἡ ΓΔ εἰς τρία ἴσα μέρη μὲ τὸ κοινὸν μέτρον των, καὶ ἡ ΔΕ εἰς πέντε ἴσα μέρη, ἀπὸ δὲ τῶν διαιρέσεως σημείων α, β, γ, δ, ε, ζ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι αη, βθ, γι, δκ, ελ, ζμ, εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ Ζη, ηθ, θΗ, Ηι, ικ, κλ, λμ, μΘ εἶναι ἴσαι, καὶ ὅτι ἡ μὲν ΖΗ εἶναι ἴση μὲ 3, ἡ δὲ ΗΘ ἴση μὲ 5. Λοιπόν, ἐπειδὴ ΓΔ:ΔΕ::3:5, καὶ ΖΗ:ΗΘ:3:5, ἔχομεν ΓΔ:ΔΕ::ΖΗ:ΗΘ.

γ'. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση μὲ 8, ἡ δὲ ΓΔ μὲ 3, καὶ πάλιν ἡ ΖΘ ἴση μὲ 8, ἡ δὲ ΖΗ μὲ 3, ἔχομεν καὶ ΓΕ:ΓΔ::ΖΘ:ΖΗ, ἢ καὶ ΓΕ:ΔΕ::ΖΘ:ΗΘ, διότι καὶ ἡ ΔΕ καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση ἑκατέρα μὲ 5.

δ'. Εἶναι δὲ φανερὸν ἐκ τούτων ὅτι, *ἂν μία τις πλευρὰ ἡ ΑΒ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ (σχ. 56) διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ὁποιαδήποτε ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΔΕ τῆς ΒΓ, τὰ δύο μέρη ΑΕ καὶ ΕΓ τῆς πλευρᾶς ΑΓ θέλουν εἶσθαι ἀνάλογα τῶν ΑΔ καὶ ΔΒ*, ἤτοι ΑΔ:ΔΒ::ΑΕ:ΕΓ. Ἢ συμμεταθέτει τῶν μέσων καὶ οὕτω ΑΔ:ΑΕ::ΔΒ:ΕΓ. Ἢ ἔτι ἡ ὅλη ΑΒ:ΑΔ:: ἡ ὅλη ΑΓ:ΑΕ· τουτέστιν *αἱ πλευραὶ* ΑΒ, ΑΓ *τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι των μερῶν των ΑΔ, ΑΕ, τὰ ὁποῖα χωρίζει ἡ παράλληλος τῆς τρίτης πλευρᾶς.*

66. Ὀνομάζουν συνήθως τρίγωνα *ὅμοια* τὰ ἔχοντα τὰς γωνίας των ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην καὶ τὰς ὁμολόγους των πλευρὰς ἀναλόγους. *Ὁμόλογοι* δὲ λέγονται αἱ πλευραί, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εἶναι κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν. Οἷον, ἂν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 57) ἡ Α ἦναι ἴση μὲ τὴν Δ, ἡ Β ἴση μὲ τὴν Ε καὶ ἡ Γ ἴση μὲ τὴν Ζ, ἡ ΑΒ εἶναι ὁμόλογος τῆς ΔΕ, ἡ ΒΓ ὁμόλογος τῆς ΕΖ καὶ ἡ ΑΓ ὁμόλογος τῆς ΔΖ. Ἂν δέ, ἐνῷ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων εἶναι ἴσαι ἄλλη μὲ ἄλλην, ἦναι ἐνταυτῷ καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογοι, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια. Καὶ αἱ κορυφαὶ δὲ τῶν ἴσων γωνιῶν λέγονται *ὁμόλογοι*. Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὅτι ά. *Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην, ἔχουν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους*· β'. Ἀντιστρόφως, *ἂν ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, ἔχουν καὶ τὰς γωνίας ἴσας.*

ά. Τὰ τρίγωνα (σχ. 57) ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουν τὴν Α ἴσην μὲ τὴν Δ, τὴν Β ἴσην μὲ τὴν Ε καὶ τὴν Γ ἴσην μὲ τὴν Ζ. Λέγω δ-τι αἱ ὁμόλογοι πλευραί των εἶναι ἀνάλογοι, ἤτοι ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΒΓ : ΕΖ. Διότι, ἂν τὸ ΔΕΖ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ Δ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ Α καὶ ἡ ΔΕ νὰ διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΑΒ καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς αὐτὴν, φανερὸν ὅτι ἡ ΔΖ θέλει διευθυνθῇ κατὰ τὴν ΑΓ, διότι ἡ Δ εἶναι ἴση μὲ τὴν Α· ἐπομένως ἡ ΕΖ τοῦ ΔΕΖ θέλει ἔχει τὴν θέσιν ΕΖ εἰς τὸ ΑΒΓ καὶ θέλει εἶσθαι παράλληλος τῆς ΒΓ, διότι ἡ γωνία ΑΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΓ, καὶ ἡ ΑΖΕ ἴση μὲ τὴν ΑΓΒ. Λοιπὸν (65, δ΄) ΑΒ : ΑΕ ἢ ΔΕ : : ΑΓ : ΑΖ ἢ ΔΖ. Ἔπειτα, ἂν ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ε παράλληλος τῆς ΑΓ ἡ ΕΗ, δῆλον ὅτι ἡ ΗΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΖ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΕΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΓ, ἔχομεν (65, δ΄.) ΑΒ : ΑΕ ἢ ΔΕ : : ΒΓ : ΗΓ ἢ ΕΖ. Λοιπὸν ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΒΓ : ΕΖ, ἤτοι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν τριγώνων εἶναι ἀνάλογοι.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι καὶ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν. Ἔτι δὲ ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὰ τρίγωνα δύο μόνον γωνίας ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν καὶ θέλουν ἔχει τότε καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ ἐπομένως θέλουν εἶσθαι ὅμοια· διότι, ὅταν ἔχουν δύο γωνίας ἴσας, ἔχουν καὶ τὴν τρίτην ἴσην (57, ε΄.).

ϛ΄. Τὰ τρίγωνα (σχ. 57) ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουν τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἤτοι ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΒΓ : ΕΖ· λέγω ὅτι ἔχουν καὶ τὰς γωνίας ἴσας, ἤτοι τὴν Α ἴσην μὲ τὴν Δ, τὴν Β ἴσην μὲ τὴν Ε καὶ τὴν Γ ἴσην μὲ τὴν Ζ. Διότι, ἂν προσδιορισθῇ ἡ ΑΕ ἴση μὲ τὴν ΔΕ καὶ ἀχθῇ παράλληλος τῆς ΒΓ ἡ ΕΖ, τὰ τρίγωνα ΑΕΖ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας. Δηλ. ἡ μὲν ΑΕ εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΕ. Ἡ δὲ ΑΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΖ, διότι ἔχομεν ἀνωτέρω ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ, ἔχομεν ἔτι ΑΒ : ΑΕ : : ΑΓ : ΑΖ· ἀλλ᾽ αἱ δύο αὗται ἀναλογίαι ἔχουν ἡγουμένους τοὺς αὐτοὺς καὶ ἔτι τὴν ΑΕ ἴσην μὲ τὴν ΔΕ· λοιπὸν καὶ οἱ τέταρτοι ὅροι των πρέπει νὰ ἦναι ἴσοι, ἤτοι ἡ ΑΖ ἴση μὲ τὴν ΔΖ. Ἡ δὲ ΕΖ ἡ εἰς τὸ ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΖ τοῦ ΔΕΖ, διότι ἔχομεν πρῶτον ΑΒ : ΔΕ : : ΒΓ : ΕΖ· ἔπειτα, ἂν ἀχθῇ ἡ ΕΗ παράλληλος τῆς ΑΓ, δῆλον ὅτι ἡ ΗΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΖ, ὥστε παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων, καὶ ὅτι ΑΒ : ΑΕ : : ΒΓ : ΗΓ : ΕΖ· λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ δύο τελευταῖαι ἀναλογίαι ἔχουν τοὺς τρεῖς πρώτους ὅρους ἴσους, ἔχουν καὶ τοὺς τετάρτους ἴσους, ἤτοι τὴν ΕΖ τὴν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν ΕΖ τοῦ ΔΕΖ. Λοιπὸν τὸ ΑΕΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ καὶ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας· λοιπὸν ἡ Α γωνία τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν Δ τοῦ ΔΕΖ, ἡ Β τοῦ ΑΒΓ, ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΕΖ, διότι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ, εἶναι ἴση καὶ μὲ τὴν Ε τοῦ ΔΕΖ, καὶ ἡ Γ ἑπομένως ἴση μὲ τὴν Ζ. Λοιπὸν *τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἔχουν καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν γωνίας ἴσας.*

γ'. Προσέτι *εἶναι δύο τρίγωνα ὅμοια, ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ἀναλόγους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἴσης της.* Οἷον (σχ. 57) ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουν τὴν Α γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Δ, καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ τῆς Α ἀναλόγους πρὸς τὰς ΔΕ, ΔΖ τῆς Δ, ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας γωνίας των ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια. Διότι, ἂν κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΑΕΖ ὡς ἤδη εἴπομεν (6), αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ καὶ ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ. Δηλ. εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ, διότι ἡ ΑΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΕ, ἡ Α γωνία ἴση μὲ τὴν Δ, καὶ ἔτι ἡ ΑΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΖ· διότι ἔχομεν δεδομένον ὅτι ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ ἔχομεν ἔτι ΑΒ : ΑΕ : ΑΓ : ΑΖ· ἀλλὰ τούτων τῶν ἀναλογιῶν οἱ τρεῖς ὅροι εἶναι ἴσοι· λοιπὸν καὶ ὁ τέταρτος ΑΖ εἶναι ἴσος μὲ τὸν τέταρτον ΔΖ. Εἶναι δὲ ὅμοιον τὸ ΑΕΖ μὲ τὸ ΑΒΓ, διότι, οὔσης τῆς ΕΖ παραλλήλου τῆς ΒΓ, ἡ γωνία ΑΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΓ καὶ ἡ ΑΖΕ ἴση μὲ τὴν ΑΓΒ. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ ΑΕΖ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ, εἶναι ὅμοιον μὲ αὐτὸ καὶ τὸ ΔΕΖ τὸ ἴσον μὲ τὸ ΑΕΖ. Λοιπὸν *δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια* κτλ.

δ'. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τοιαύτην θέσιν, ὥστε αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο, τὰ τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας καὶ εἶναι ἑπομένως ὅμοια.* Οἷον (σχ. 58) τὰ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς ΑΒ καὶ ΔΕ παραλλήλους, τὰς ΒΓ καὶ ΕΖ παραλλήλους, καὶ τὰς ΑΓ καὶ ΔΖ παραλλήλους, εἶναι ὅμοια. Διότι, ἀφοῦ ἐκβληθῇ καὶ ἡ ΔΕ καὶ ἡ ΔΖ ἕως νὰ συμπέσουν ἡ μὲν μὲ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η, ἡ δὲ μὲ τὴν ἐκβολήν της εἰς τὸ Θ, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ γωνία Β καὶ ἡ Ε εἶναι ἴση ἑκατέρα μὲ τὴν ΔΗΘ ὡς ἐντὸς ἐκτός, ἑπομένως ἴσαι καὶ πρὸς ἀλλήλας, καὶ ὅτι ἡ γωνία Γ καὶ Ζ εἶναι ἴση ἑκατέρα μὲ τὴν Θ ὡς ἐντὸς ἐκτός, ἑπομένως ἴσαι καὶ πρὸς ἀλλήλας· ἀφοῦ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουν δύο γωνίας ἴσας, ἔχουν καὶ τὴν τρίτην Α καὶ Δ ἴσας· λοιπόν, *ἐὰν δύο τρίγωνα κτλ.*

ε΄. *Ἡ ἠγμένη κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ χωρίζει τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἄλλα τρίγωνα ὅμοια καὶ πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ὅλον.* Οἷον (σχ. 59) ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ χωρίζει τὸ ΑΒΓ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ. Διότι τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ΑΒΔ ἔχουν τὴν Β γωνίαν κοινὴν καὶ ἔτι μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ἤτοι τὴν ΒΑΓ ἴσην μὲ τὴν ΒΔΑ· λοιπὸν εἶναι ὅμοια. Ὡσαύτως τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ΑΓΔ ἔχουν τὴν Γ κοινὴν καὶ τὴν ΒΑΓ ἴσην μὲ τὴν ΑΔΓ ὡς ὀρθάς· λοιπὸν ἔχουν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην καὶ εἶναι ὅμοια. Ὡσαύτως καὶ τὰ ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα, διότι εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ, ἢ διότι ἔχουν τὴν ΑΔΒ καὶ τὴν ΑΔΓ ἴσας ὡς ὀρθάς, τὴν ΒΑΔ ἴσην μὲ τὴν ΑΓΔ, ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, ὡσαύτως καὶ τὴν ΑΒΔ ἴσην μὲ τὴν ΔΑΓ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἤτοι αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ἀνάλογοι, καὶ ἔχομεν ΒΓ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΔ, ΒΓ : ΑΓ :: ΑΓ : ΔΓ, ΒΔ : ΑΔ :: ΑΔ : ΔΓ. Τουτέστι α΄. *Ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος* (64) *τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ κειμένου πρὸς ἑκατέραν τὴν πλευράν.*

β΄. *Ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο μερῶν τῆς ὑποτεινούσης, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ κάθετος αὐτὴ τὴν χωρίζει.*

67. *Ὅμοια* ὀνομάζονται δύο πολύπλευρα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

α΄. Ὅλα τὰ τετράγωνα εἶναι ὅμοια. Τὰ ὀρθογώνια εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν δύο μόνον παρακειμένας πλευρὰς ἀναλόγους. Οἱ ῥόμβοι εἶναι ὅμοιοι, ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην. Τὰ ῥομβοειδῆ εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς δύο πλευράς της ἀναλόγους τῶν δύο πλευρῶν τῆς ἴσης της.

β΄. Τὰ ὅμοια τετράπλευρα, οἷον τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ (σχ. 60), διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΕΗ, ἀπὸ δύο ὁμολόγων κορυφῶν Α καὶ Ε ἠγμένων, χωρίζονται ἑκάτερον εἰς δύο ὅμοια τρίγωνα, ἤτοι τὸ μὲν ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΕΖΗ, τὸ δὲ ΑΔΓ ὅμοιον μὲ τὸ ΕΘΗ. Διότι ἡ Β εἶναι ἴση τὴν Ζ, αἱ δὲ ΑΒ καὶ ΒΓ ἀνάλογοι τῶν ΕΖ καὶ ΖΗ, ὡς τῶν τετραπλεύρων ὄντων ὁμοίων. Ὡσαύτως καὶ ἡ Δ εἶναι ἴση μὲ τὴν Θ, αἱ δὲ ΑΔ καὶ ΔΓ ἀνάλογοι τῶν ΕΘ, ΘΗ.

γ΄. Τὰ ὅμοια πεντάγωνα, οἷον τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ (σχ. 61), διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ καὶ ΖΘ, ΖΙ, τῶν ἠγμένων ἐκ τῶν ὁμολόγων κορυφῶν Α καὶ Ζ, χωρίζονται ἑκάτερον εἰς τρία τρίγωνα ὅμοια ἄλλο μὲ ἄλλο κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Τὰ ἑξάγωνα χωρίζονται ὡσαύτως εἰς τέσσαρα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

68. *Δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν ἐὰν ἦναι ἴσα, ἔχουν καὶ τὰς χορδάς των ἴσας.* Διότι ταῦτα τὰ τόξα τεθέντα τὸ ἕτερον ἐπὶ τοῦ ἄλλου ταυτίζονται, ὡς δύο εὐθεῖαι γραμμαί· καὶ ἐπειδὴ θέλουν ἔχει τότε τὰ αὐτὰ ἄκρα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄκρα καὶ τῶν χορδῶν των, διὰ τοῦτο καὶ αἱ χορδαὶ θέλουν ταυτισθῆ, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι.

β΄. Καὶ τ' ἀνάπαλιν, *ἂν αἱ χορδαὶ δύο τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν ἦναι ἴσαι, θέλουν εἶσθαι ἴσα καὶ αὐτὰ τὰ τόξα.* Διότι, ἀφοῦ τεθῇ ἡ ἑτέρα χορδὴ ἐπὶ τῆς ἄλλης, ταυτίζονται ὡς ἴσαι καὶ θέλουν ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα, τὰ ὁποῖα θέλουν εἶσθαι ἄκρα καὶ τῶν τόξων· λοιπὸν τὰ τόξα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν, ἀφοῦ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα, ἐφαρμόζουν καὶ ταυτίζονται, ὡς εὐθεῖαι γραμμαί· λοιπὸν εἶναι ἴσα.

γ΄. *Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ (σχ. 62) κάθετος ΚΓ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ διαιρεῖ καὶ αὐτὴν καὶ τὸ τόξον της εἰς δύο ἴσα μέρη.* Διότι, ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΑΔ, ΚΒΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΚΔ κοινὴν καὶ τὰς ὑποτεινούσας ΚΑ καὶ ΚΒ ἴσας· λοιπὸν πρῶτον ἡ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΔ. Ἔπειτα, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΚΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΚΓ, εἶναι καὶ τὰ ἀντιγώνιά των τόξα ΑΓ καὶ ΒΓ ἴσα. Λοιπὸν *ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν διαιρεῖ καὶ αὐτὴν καὶ τὸ τόξον της εἰς δύο ἴσα μέρη.*

δ'. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι *ἡ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ ἠγμένη ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΓΔΚ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου.*

ε'. *Τρία μὴ ἐπ' εὐθείας σημεῖα Α, Β, Γ* (σχ. 63) *ἴσον ἀπέχουν τετάρτου τινός.* Διότι, ἀφοῦ ἐπιζευχθοῦν τὰ τρία σημεῖα διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ἀχθῶσιν ἐπ' αὐτὰς εἰς τὸ μέσον των Δ καὶ Ε κάθετοι αἱ ΔΖ, ΕΗ, αἵτινες συμπίπτουν εἰς τὸ Θ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ Θ, ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν δύο καθέτων ΔΖ, ΕΗ, ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β, Γ καὶ Β τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ἤτοι τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ ἴσον ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ τετάρτου σημείου Θ, καὶ ἀπὸ μόνου τοῦ Θ.

Ἂν λοιπὸν μὲ κέντρον μὲν τὸ Θ, μὲ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΘ γραφθῇ περιφέρεια κύκλου, θέλει διέλθει διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β καὶ Γ. Λοιπὸν *τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας εἶναι ἐπὶ περιφερείας, καὶ ἐπὶ μιᾶς μόνης περιφερείας.*

ς'. *Ἡ ἐφαπτομένη ΖΗ* (σχ. 62) *τοῦ κύκλου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Ε ἀγομένην ἀκτῖνα ΚΕ.* Διότι ὅλα τ' ἄλλα σημεῖα τῆς ΖΗ, ἐκτὸς τοῦ τῆς ἁφῆς Ε, ὄντα ἔξω τῆς περιφερείας ἀπέχουν τοῦ κέντρου Κ πλειότερον παρὰ τὸ Ε· λοιπὸν ἡ ΚΕ, ἥτις ἐπιζευγνύει μὲ τὸ Κ τὸ πλησιέστατον σημεῖον Ε τῆς ΖΗ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΕ εἰς τὸ τῆς ἁφῆς σημεῖον.

ζ'. Καὶ τ' ἀνάπαλιν, *ἡ κάθετος ΖΗ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΕ εἰς τὸ ἄκρον της Ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.* Διότι πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς ΚΕ, οἷον ἡ ΚΘ, ΚΙ κτλ, εἶναι πλαγία, καὶ ἑπομένως μεγαλητέρα τῆς ΚΕ· λοιπὸν τὰ ἄκρα Θ, Ι, κτλ' τῶν πλαγίων, ἤτοι τ' ἄλλα σημεῖα τῆς ΖΗ εἶναι ἔξω τῆς περιφερείας, καὶ μόνον κοινὸν μὲ αὐτὴν ἔχει ἡ ΖΗ τὸ Ε· λοιπὸν ἡ ΖΗ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

η΄. *Ἐγγεγραμμένη γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ εἶναι εἰς ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς ἡμιπεριφερείας, αἱ δὲ πλευραί της λήγουν εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, οἷον ἡ ΑΓΒ* (σχ. 64), *εἶναι ὀρθή*. Διότι, ἀφοῦ ἀχθῆ ἡ ἀκτὶς ΚΓ, τὸ τρίγωνον ΑΚΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν γωνίαν ΓΑΚ ἴσην μὲ τὴν ΑΓΚ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΚΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν ΓΒΚ ἴσην μὲ τὴν ΒΓΚ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΚ ὁμοῦ μὲ τὴν ΒΓΚ ἤτοι ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ΓΑΚ καὶ ΓΒΚ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ἡ μία τῶν τριῶν, ἡ Γ, ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο, εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν δύο ὀρθῶν, ἤτοι εἶναι ὀρθή. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ΑΕΒ εἶναι ὀρθή.

Τὰς γωνίας ΑΓΒ, ΑΕΒ, κτλ ὀνομάζουν σύντομα *ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ ἡμικύκλιον*. Λοιπὸν *πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή*.

θ΄. Εἶναι δὲ ἔτι δῆλον ὅτι *γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα μικρότερον ἡμικυκλίου, οἷον ἡ ΖΘΗ, εἶναι ἀμβλεῖα, ἐγγεγραμμένη δὲ εἰς τμῆμα μεγαλήτερον ἡμικυκλίου, οἷον ἡ ΖΕΗ, εἶναι ὀξεῖα* (σχ. 65).

Μέτρον δὲ ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον ἐμπεριλαμβάνουν αἱ πλευραί της.

ι. Ἐπειδὴ ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθαί, ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευρὰς τὴν διάμετρον καὶ δύο χορδὰς ἠγμένας εἰς τὰ ἄκρα της ἀπὸ ὁποιουδήποτε σημείου τῆς ἡμιπεριφερείας, εἶναι ὀρθογώνια. Λοιπόν, *ἂν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ ἡμιπεριφερείας* (σχ. 64) *ἀχθῶσι δύο χορδαὶ ΓΑ, ΓΒ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΓΔ*, ά. *Ἑκατέρα χορδὴ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ κειμένου πρὸς αὐτὴν μέρους τῆς διαμέτρου*· β΄. *Ἡ κάθετος εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο μερῶν τῆς διαμέτρου* (66, ε΄).

69. Ἡ λύσις τῶν ἐφεξῆς προβλημάτων συνίσταται μόνον εἰς ἐκτέλεσιν κατὰ σειρὰν πράξεών τινων, ἡ τελευταία τῶν ὁποίων φέρει εἰς τὸ ζητούμενον. Ἡ προφορεῖται δὲ τις ὅτι τὸ

οὕτως εὑρισκόμενον εἶναι τὸ ζητούμενον, ἐὰν ἐνθυμηθῇ ἕν ἢ πλειότερα τῶν ὅσα μέχρι τοῦδε ἔμαθεν.

Αἱ ἁπλαῖ δὲ πράξεις εἶναι τέσσαρες, ά. *Ἐκ σημείου δεδομένου εἰς ἄλλο δεδομένον ν' ἀχθῇ εὐθεῖα.* β'. *Μὲ δεδομένον σημεῖον ὡς κέντρον καὶ μὲ δεδομένην ἀκτῖνα νὰ γραφθῇ περιφέρεια ἢ τόξον τι μόνον.* γ'. *Νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖα ἢ τόξον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων δεδομένων.* δ'. *Νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖα ἢ τόξον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων δεδομένων.* Πόσαι δὲ τούτων καὶ ποῖαι χρησιμεύουν εἰς ἑκάστου προβλήματος λύσιν θέλομεν τὸ ἰδεῖ εἰς τὰ ἑξῆς.

Τὰ μόνα δὲ ἀναγκαῖα ἐργαλεῖα εἰς ἐκτέλεσιν αὐτῶν τῶν πράξεων εἶναι ὁ κανὼν καὶ ὁ διαβήτης. Ἄλλα συνήθως μεταχειρίζονται καὶ ἄλλα, τῶν ὁποίων τινὰ θέλομεν περιγράψει εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον, ἄλλα δὲ εἴδομεν ἤδη εἰς τὸ πρῶτον κεφάλαιον.

70. *Ν' ἀχθῇ ἄνευ τοῦ γνώμονος ἐπὶ δεδομένην εὐθεῖαν κάθετος ἐκ δεδομένου σημείου* (ἰδὲ καὶ ἀρ. 20).

Πρέπει νὰ εὑρεθῇ πρῶτον ἄλλο σημεῖον τῆς ζητουμένης καθέτου καὶ ἔπειτα ν' ἀχθῇ διὰ τῶν δύο σημείων εὐθεῖα.

ά. Εἰ μὲν τὸ δεδομένον σημεῖον εἶναι ἓν τῶν περὶ τὸ μέσον τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ (σχ. 66), τὸ Γ, στοίνοντες τὸν ἕτερον πόδα τοῦ διαβήτου εἰς τὸ Γ καὶ στρέφοντες ἑκατέρωθεν αὐτὸν κάμποσον ἀνοικτὸν προσδιορίζομεν ἐπὶ τὴν ΑΒ δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ, ἴσον ἀπέχοντα τοῦ Γ· ἔπειτα μὲ κέντρον μὲν τὸ Ε καὶ τὸ Ζ, μὲ ἀκτῖνα δὲ τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μεγαλητέραν τῆς ΕΓ, γράφομεν ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ Δ. Τοῦτο δέ, ὡς ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Ε καὶ τοῦ Ζ, εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Τώρα διὰ τοῦ κανόνος ἐπιζευγνύομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

β'. Εἰ δὲ τὸ δεδομένον σημεῖον εἶναι ἓν τῶν πρὸς τὸ ἄκρον Α τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ (σχ. 67), τὸ Γ (ἢ καὶ τὸ ἄκρον Α), ἐκβάλλομεν, ἂν ἦναι δυνατόν, τὴν ΑΒ πέραν τοῦ Α καὶ ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω. Ἐὰν ὅμως ἦναι ἀδύνατον νὰ ἐκβληθῇ πέραν τοῦ Α ἡ ΑΒ, τότε μὲ κέντρον μὲν σημεῖόν τι Κ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ κείμενον καὶ ὄχι πολὺ μακρὰν αὐτῆς καὶ τοῦ Γ, μὲ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΚΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς σημεῖόν τι, οἷον εἰς τὸ Β, ἔπειτα ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΚΔ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ. Τὸ δὲ Δ εἶναι σημεῖον τῆς ζητουμένης καθέτου· διότι, ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΔΓ, ἡ γωνία ΔΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον, καὶ ἐπομένως εἶναι ὀρθή· λοιπὸν ἡ ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ.

γ'. Εἰ δὲ τὸ δεδομένον σημεῖον εἶναι ἐκτὸς τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ (σχ. 68), οἷον τὸ Δ, μὲ κέντρον μὲν τὸ Δ, μὲ ἀκτῖνα δὲ κάμποσον μεγάλην γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα, εἰς τὸ Ε καὶ τὸ Ζ· ἔπειτα μὲ κέντρον μὲν τὸ Ε καὶ τὸ Ζ, μὲ ἀκτῖνα δὲ κάποσον μεγάλην γράφομεν δύο τόξα ἄνωθεν τῆς ΑΒ, τὰ ὁποῖα νὰ τέμνωνται εἰς τὸ Η. Τὸ δὲ Η καὶ τὸ Δ, ὡς ἴσον ἀπέχοντα τοῦ Ε καὶ τοῦ Ζ, εἶναι σημεῖα τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΕΖ εἰς τὸ μέσον της. Λοιπὸν ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Δ εἰς τὸ Η εὐθεῖα ΔΗΓ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ Δ.

Σημ. Οὕτω σχηματίζεται καὶ ὀρθὴ γωνία.

71. *Ἐκ δεδομένου σημείου ν' ἀχθῇ παράλληλος δεδομένης εὐθείας* (ἰδὲ ἀρ. 24).

Διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος ἄγεται ἀπὸ τοῦ σημείου Γ (σχ. 69) παράλληλος τῆς ΑΒ οὕτω· Τίθεται ἡ πλευρὰ ΛΜ τοῦ γνώμονος ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ, καὶ εἰς τὴν ἄλλην πλευρὰν ΚΛ προσαρμόζεται καὶ κρατεῖται ἀκίνητος ὁ κανὼν ΗΖ· ἔπειτα ἐπισύρεται ἐπὶ τοῦ κανόνος ὁ γνώμων ἕως νὰ καταντήσῃ τὸ σημεῖον Γ εἰς ἓν σημεῖον τῆς πλευρᾶς του ΜΛ, καὶ γράφεται ἡ εὐθεῖα ΓΔ. Αὕτη δὲ θέλει εἶσθαι παράλληλος τῆς ΑΒ, διότι ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ κανόνος.

Ὁ γνώμων εἶναι καὶ ὡς ὀρθογώνιον τρίγωνον κατεσκευασμένος (σχ. 70). Ἐκ τοῦ σχήματος δὲ καταλαμβάνει τις πῶς καὶ δι' αὐτοῦ ἄγεται παράλληλος.

72. *Ἀπὸ δεδομένου σημείου ν' ἀχθῇ εὐθεῖα, ἥτις νὰ κάμνῃ μὲ ἄλλην δεδομένην εὐθεῖαν γωνίαν ἴσην μὲ ἄλλην δεδομένην γωνίαν.*

α΄. Εἰ μὲν τὸ δεδομένον σημεῖον εἶναι ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας, εἴπομεν (ἀρ. 47) πῶς πρέπει νὰ πράττωμεν.

β΄. Εἰ δὲ τὸ δεδομένον σημεῖον εἶναι ἐκτὸς τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ (σχ. 71), οἷον τὸ Γ, πρῶτον ἐκ τούτου ἄγομεν παράλληλον τῆς ΑΒ τὴν ΓΔ, ὡς ἤδη εἴπομεν· ἔπειτα ἐκ τοῦ αὐτοῦ Γ ἄγομεν τὴν ΓΕ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία ΔΓΕ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν Ζ. Ἡ δὲ ΓΕ συμπίπτουσα μὲ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε ἀποτελεῖ τὴν γωνίαν ΑΕΓ ἴσην μὲ τὴν ΔΓΕ, ὡς ἐναλλὰξ ἐντός, ἑπομένως ἴσην καὶ μὲ τὴν δεδομένην Ζ.

73. *Νὰ διαιρεθῇ εὐθεῖα εἰς πολλὰ ἴσα μέρη.*

α΄. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ ΑΒ (σχ. 72) εἰς δύο ἴσα μέρη.* Ἢ εὑρίσκεται τὸ μέσον σημεῖόν της Γ, ἴσον ἀπέχον τῶν ἄκρων της Α καὶ Β, διὰ δοκιμασιῶν, ἀνοιγομένου καὶ κλειομένου τοῦ διαβήτου, ἂν χρειασθῇ. Ἢ μὲ κέντρον μὲν τὸ Α καὶ τὸ Β, μὲ ἀκτῖνα δὲ τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μεγαλητέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, γράφομεν ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ Δ καὶ τὸ εἰς Ε. Ταῦτα δὲ τὰ σημεῖα εἶναι τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον της. Θέτοντες λοιπὸν τὸν κανόνα εἰς τὸ Δ καὶ Ε καὶ σημειοῦντες ἐπὶ τὴν ΑΒ τὸ Γ, ἔχομεν οὕτω τὸ μέσον της, ἢ αὐτὴν διῃρημένην εἰς δύο ἴσα μέρη.

β΄. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ ΑΒ (σχ. 73) εἰς πέντε ἴσα μέρη.* Ἄγομεν ἀπὸ τοῦ ἄκρου της Α καθ᾽ ὁποιανδήποτε ἄλλην παρὰ τὴν τῆς ΑΒ διεύθυνσιν τὴν ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ διαβήτου προσδιορίζομεν ἐπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Α πέντε μέρη ἴσα, ἀλλ᾽ ὅσον θέλωμεν μεγάλα, ἤτοι ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ· ἐπιζευγνύομεν δὲ τὸ ἄκρον Β μὲ τὸ Θ διὰ τῆς ΒΘ καὶ ἄγομεν ἢ ἀπὸ τοῦ Δ ἢ ἀπὸ τοῦ Η παράλληλον τῆς ΒΘ τὴν ΔΜ ἢ τὴν ΗΝ. Οὕτως ἔχομεν τὸ ΑΜ ἢ τὸ ΒΝ ἴσον μὲ τὸ πέμπτον τῆς ΑΒ, ὡς ἡ ΑΔ ἢ ἡ ΗΘ εἶναι πέμπτον τῆς ΑΘ. Ἐπιφέρομεν τελευταῖον τὸ ΑΜ ἢ τὸ ΒΝ διὰ τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς ΑΒ σημειοῦντες τὰ σημεῖα Ξ, Ο, Ν, καὶ οὕτως ἡ ΑΒ εἶναι διῃρημένη εἰς πέντε ἴσα μέρη.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διαιρεῖται εὐθεῖα καὶ εἰς πλειότερα ἢ εἰς ὀλιγώτερα ἴσα μέρη.

74. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων*

δεδομένων εὐθειῶν, οἷον εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν τριῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Ξ (σχ. 74).

Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς ΑΒ ἄγομεν καθ' ὁποιανδήποτε ἄλλην παρὰ τὴν τῆς ΑΒ διεύθυνσιν τὴν ΑΓ, καὶ προσδιορίζομεν ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Α διὰ τοῦ διαβήτου τὴν ΑΔ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην Μ, τὴν ΔΕ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην Ν καὶ τὴν ΕΖ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην Ξ· ἔπειτα ἐπιζευγνύομεν τὸ Β μὲ τὸ Ζ διὰ τῆς ΒΖ καὶ ἐκ τῶν Δ καὶ Ε ἄγομεν παραλλήλους τῆς ΒΖ τὴν ΔΗ καὶ τὴν ΕΘ. Οὕτως ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι διῃρημένη εἰς τρία μέρη ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀνάλογα τῶν τριῶν ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ἤτοι ἀνάλογα τῶν τριῶν δεδομένων Μ, Ν, Ξ.

Σημ. Ἐὰν μικρὰ εὐθεῖα, οἷον ἡ ΑΒ, (σχ. 75), ἐπρόκειτο νὰ διαιρεθῇ εἰς πολλὰ ἴσα μέρη, οἷον εἰς δέκα, ἐπειδὴ ἡ ὡς ἀνωτέρω διαίρεσις ἤθελε δώσει σημεῖα διαιρέσεως πολὺ πλησίον κείμενα καὶ δυσδιάκριτα, πρὸς ἀποφυγὴν τούτου εὑρίσκονται τὸ $\frac{1}{10}$, τὰ $\frac{2}{10}$, ... $\frac{9}{10}$ τῆς ΑΒ ἐπὶ ἄλλων εὐθειῶν οὕτως. Ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ ἄκρον Α ἡ ΑΓ, καὶ διὰ τοῦ διαβήτου προσδιορίζονται ἐπ' αὐτῆς δέκα μέρη ἴσα Αα, αϐ, ϐγ, κτλ· ἀπὸ τοῦ ἄκρου Γ ἄγεται ἡ ΓΒ, ἀπὸ δὲ τῶν διαιρέσεως σημείων α, ϐ, γ, κτλ ἄγονται παράλληλοι τῆς ΑΒ, αἵτινες τέμνουν τὴν ΓΒ εἰς τὰ σημεῖα μ, ν, ξ, κτλ. Αἱ εὐθεῖαι αμ, ϐν, γξ, κτλ εἶναι $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{10}$ ... $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$ τῆς ΑΒ.

Τοιούτων μικρῶν εὐθειῶν εἰς πολλὰ ἴσα μέρη διαίρεσις ἀπαντᾶται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν κλιμάκων, περὶ τῶν ὁποίων κατωτέρω.

75. *Νὰ εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος τριῶν δεδομένων εὐθειῶν Μ, Ν, Ξ.*

Ἄγομεν δύο εὐθείας συμπιπτούσας εἰς Α (σχ. 76), προσδιορίζομεν διὰ τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς ἑτέρας τὴν μὲν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν Μ, τὴν δὲ ΒΓ ἴσην μὲ τὴν Ν, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης τὴν ΑΔ ἴσην μὲ τὴν Ξ· ἐπιζευγνύομεν τὴν Β καὶ τὴν Δ διὰ τῆς ΒΔ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Γ παράλληλον αὐτῆς τὴν ΓΕ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν.

Ὡσαύτως εὑρίσκεται καὶ τρίτη ἀνάλογος δύο εὐθειῶν Μ καὶ Ν, ἤτοι εὐθεῖα, ἥτις εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν Μ, Ν, Ν, ἐνῷ ἡ Ν εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς Μ καὶ τῆς ζητουμένης.

76. *Νὰ εὑρεθῇ μέση ἀνάλογος δύο δεδομένων εὐθειῶν Μ καὶ Ν.*

Πρῶτον ἄγομεν εὐθεῖάν τινα, τὴν ΑΒ (σχ. 77), καὶ προσδιορίζομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὴν μὲν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν Μ, τὴν δὲ ΓΔ ἴσην μὲ τὴν Ν. Ἔπειτα προσδιορίζομεν τὸ μέσον Κ τῆς ΑΔ καὶ γράφομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΕΔ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΔΚ. Τελευταῖον ἄγομεν ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΔ κάθετον εἰς τὸ Γ, ἥτις συμπίπτει μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Ε. Ἡ δὲ ΕΓ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος τῶν δύο μερῶν ΑΓ καὶ ΓΔ τῆς διαμέτρου, ἤτοι τῶν δεδομένων εὐθειῶν Μ καὶ Ν.

Σημ. Πρὸς εὕρεσιν τετάρτης καὶ τρίτης ἀναλόγου, εἶναι εἰς χρῆσιν καὶ ἐργαλεῖον ἰδιαίτερον, καλούμενον διαβήτης ἀναλογικός (σχ. 78), ὅστις διαφέρει τοῦ κοινοῦ διαβήτου καθότι δὲν λήγουν εἰς ὀξὺ τὰ σκέλη του, καὶ ὅτι εἶναι διῃρημένα εἰς ἴσα μέρη, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ σημείου Α τῆς προσαρμογῆς των. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἂν νοηθοῦν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰ ὅμοια σημεῖα τῆς διαιρέσεως, ὡς φαίνονται εἰς τὸ σχῆμα, ἀποτελοῦνται οὕτω τρίγωνα ἰσοσκελῆ ὅμοια, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι.

Διὰ τούτου εὑρίσκεται τετάρτη ἀνάλογος τριῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ, οὕτω· Διὰ τοῦ κοινοῦ διαβήτου προσδιορίζομεν ἀπὸ τοῦ Ο μίαν μὲν εὐθεῖαν ἴσην μὲ τὴν Α, ἥτις λήγει καθ' ὑπόθεσιν εἰς τὸ 3 τοῦ διαβήτου, ἄλλην δὲ ἴσην μὲ τὴν Β ἥτις λήγει εἰς τὸ 5. Ἔπειτα ἀνοίγοντες ἢ κλείοντες, ἂν χρειασθῇ, τὰ σκέλη τοῦ ἀναλογικοῦ διαβήτου προσδιορίζομεν διὰ τοῦ κοινοῦ πάλιν διαβήτου τὸ διάστημα ἀπὸ τοῦ 3 ἕως εἰς τὸ 3 τοῦ ἄλλου σκέλους ἴσον μὲ τὴν τρίτην εὐθεῖαν Γ. Τότε εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἀπὸ τοῦ 5 ἕως εἰς τὸ ἄλλο 5 διάστημα εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος.

77. *Γνωρίζοντες δύο γωνίας τριγώνου τινὸς νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην.*

Ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 79) καὶ σχηματίζομεν τὴν μὲν ΑΓΔ ἴσην μὲ τὴν ἑτέραν τῶν δεδομένων γωνιῶν τοῦ τριγώνου, τὴν δὲ ΔΓΕ ἴσην μὲ τὴν ἄλλην· ἡ τρίτη ΕΓΒ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία.

78. *Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον γνωρίζοντες, ά. τὰς τρεῖς του πλευράς· β'. δύο του πλευρὰς καὶ τὴν γωνίαν των· γ'. μίαν του πλευρὰν καὶ δύο ὁποιασδήποτε τῶν γωνιῶν του.*

ά. *Αἱ δεδομέναι πλευραὶ ἦναι Μ, Ν, Ξ* (σχ. 80). Ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν Μ· ἔπειτα μὲ κέντρον μὲν τὸ Α, μὲ ἀκτῖνα δὲ εὐθεῖαν ἴσην μὲ τὴν Ν γράφομεν τόξον· ὡσαύτως μὲ κέντρον μὲν τὸ Β, μὲ ἀκτῖνα δὲ εὐθεῖαν ἴσην μὲ τὴν Ξ γράφομεν ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ πρῶτον εἰς τὸ Γ· τελευταῖον ἐπιζευγνύομεν τὸ Γ μὲ τὸ Α καὶ μὲ τὸ Β διὰ τῆς ΑΓ καὶ ΒΓ. Τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Ἐννοεῖται δὲ ὅτι ἑκάστη πλευρὰ πρέπει νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο· ἄλλως εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.

β'. *Αἱ δεδομέναι πλευραὶ εἶναι Μ καὶ Ν (σχ. 81), ἡ δὲ δεδομένη γωνία εἶναι Κ.* Πρῶτον κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην Κ· ἔπειτα προσδιορίζομεν τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν Μ, τὴν δὲ πλευρὰν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν Ν, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰ ἄκρα Α καὶ Γ διὰ τῆς ΑΓ. Τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον.

γ'. *Ἡ δεδομένη πλευρὰ εἶναι Μ (σχ. 82), αἱ δὲ δεδομέναι γωνίαι εἶναι Κ καὶ Λ.* Εἰ μὲν δεδομέναι γωνίαι εἶναι αἱ τῆς Μ καὶ ἑκατέρας τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, κατασκευάζομεν δύο γωνίας, τὴν μὲν ἴσην μὲ τὴν Κ, ἔχουσαν κορυφὴν τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς ΑΒ, τῆς ἴσης μὲ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν Μ, τὴν δὲ ἴσην μὲ τὴν Λ, ἔχουσαν κορυφὴν τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ΑΒ. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΓ συμπίπτουν εἰς Γ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Εἰ δὲ δεδομέναι γωνίαι εἶναι αἱ ἀπέναντι τῆς δεδομένης εὐθείας Μ καὶ ἡ γωνία τῆς Μ καὶ τῆς ἑτέρας τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, πρῶτον προσδιορίζομεν τὴν τρίτην γωνίαν (77) καὶ ἔπειτα κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον, ὡς ἤδη εἴπομεν.

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων γωνιῶν πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον δύο ὀρθῶν.

79. *Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομένη ἡ ὑποτείνουσα Μ, καὶ ἡ ἑτέρα πλευρὰ Ν τῆς ὀρθῆς γωνίας (σχ. 83).*

Ἄγομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τὴν ΓΒ κάθετον, καὶ προσδιορίζομεν ἀπὸ τοῦ Β τὴν ΒΔ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην πλευρὰν Ν· ἔπειτα μὲ κέντρον μὲν τὸ Δ, μὲ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΔΕ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην ὑποτείνουσαν Μ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὸ Δ μὲ τὸ Ε διὰ τῆς ΔΕ. Τὸ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι τὸ ζητούμενον.

80. *Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ (σχ. 84).*

Ἄγομεν ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ ἄκρον Α κάθετον τὴν ΒΓ καὶ τὴν προσδιορίζομεν ἴσην μὲ τὴν ΑΒ· ἔπειτα μὲ κέντρον μὲν τὸ Α καὶ τὸ Γ, μὲ ἀκτῖνα δὲ ἴσην μὲ τὴν ΑΒ γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ Δ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὸ Δ μὲ τὸ Α καὶ μὲ τὸ Γ. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ.

Ὡσαύτως σχεδὸν κατασκευάζεται ῥόμβος, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομένη ἡ πλευρὰ καὶ μία γωνία, ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου εἶ- δεδομέναι δύο παρακείμεναι πλευραί, καὶ ῥομβοειδές, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομέναι αἱ δύο παρακείμεναι πλευραὶ καὶ ἡ γωνία των. Τὴν μικρὰν διαφορὰν ἀφίνομεν τὸν διδάσκοντα νὰ δείξῃ, ἂν ἀδυνατοῦν οἱ μαθηταὶ νὰ ἐννοήσουν ἀφ' ἑαυτῶν.

81. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομέναι αἱ τέσσαρες πλευραὶ Μ, Ν, Ξ, Ο, (σχ. 85) ἡ θέσις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας καὶ μία γωνία, ἡ τῶν πλευρῶν Μ καὶ Ν.*

Κατασκευάζεται ἡ γωνία Α ἴση μὲ τὴν δεδομένην καὶ προσδιορίζονται ἡ μὲν ΑΒ ἴση μὲ τὴν Μ, ἡ δὲ ΑΔ ἴση μὲ τὴν Ν· ἔπειτα μὲ κέντρον μὲν τὸ Β, μὲ ἀκτῖνα δὲ ἴσην μὲ τὴν Ο γράφομεν τόξον, μὲ κέντρον πάλιν τὸ Δ, μὲ ἀκτῖνα δὲ ἴσην μὲ τὴν Ξ γράφομεν ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ πρότερον εἰς τὸ Γ καὶ ἐπιζευγνύομεν τὸ Γ μὲ τὸ Β καὶ μὲ τὸ Δ. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράπλευρον.

Ἀφίνομεν εἰς τὸν διδάσκαλον νὰ δείξῃ πῶς κατασκευάζεται καὶ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομέναι τρεῖς πλευραὶ καὶ δύο γωνίαι, ἢ δύο πλευραὶ καὶ τρεῖς γωνίαι, καὶ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομένα τὰ ἐν ἀριθμ. 61 μνημονευόμενα, καὶ πολύγωνον ὁποιονδήποτε.

82. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲ ἄλλο δεδομένον ΑΒΓ, γνωστῆς οὔσης μιᾶς τῶν πλευρῶν του Μ ὁμολόγου τῆς ΑΒ.*

Εἰς τ' ἄκρα τῆς ΔΕ (σχ. 86), ἴσης μὲ τὴν δεδομένην Μ, ἄγονται αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΕΖ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν Α καὶ ἡ Ε ἴση μὲ τὴν Β τοῦ δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ ΔΖ καὶ ἡ ΕΖ συμπίπτουν εἰς τὸ Ζ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓ· διότι ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας μὲ τὰς τοῦ ΑΒΓ ἄλλην μὲ ἄλλην, ἔχει δὲ καὶ τὴν ΔΕ, τὴν ἴσην μὲ τὴν Μ, ὁμόλογον τῆς ΑΒ.

Ἡ κατασκευὴ αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐν ἀρ. 78, γ'. Ἐὰν δὲ ἦσαν δεδομέναι δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΑΓ τοῦ ΑΒΓ, ἢ καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ αἱ ὁμόλογοι τῶν τοῦ ΑΒΓ, ἤθελε κατασκευασθῆ τὸ ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὡς ἐν τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ β'. καὶ α'.

83. *Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον μὲ δεδομένον, ἐνῷ εἶναι δεδομένη μία πλευρὰ ὁμόλογος ὡρισμένης πλευρᾶς τοῦ δεδομένου πολυγώνου.*

Π. χ. νὰ κατασκευασθῇ πεντάγωνον ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ (σχ. 61), *ἐνῷ εἶναι γνωστὴ ἡ ΖΗ ὁμόλογος τῆς ΑΒ.* Πρῶτον ἄγονται αἱ διάγωνιοι ΑΓ, ΑΔ τοῦ δεδομένου· ἔπειτα κατασκευάζεται ὡς ἤδη εἴπομεν τρίγωνον τὸ μὲν ΗΖΘ ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ΖΘΙ ὅμοιον μὲ τὸν ΑΓΔ, τὸ δὲ ΖΙΚ ὅμοιον μὲ τὸ ΑΔΕ. Οὕτω θέλει εἶσθαι κατεσκευασμένον τὸ πεντάγωνον ΖΗΘΙΚ ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ, ἔχον ὁμόλογον τῆς ΑΒ πλευρᾶς τὴν ΖΗ.

Ἐκ τούτων ἐννοεῖται πῶς κατασκευάζεται ὁποιονδήποτε τετράπλευρον ὅμοιον μὲ ἄλλο δεδομένον ἢ ὁποιονδήποτε ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον μὲ ἄλλο δεδομένον.

84. α'. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον κύκλου ἢ τόξου τινὸς δεδομένου.* Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ τόξου ἢ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἄγομεν δύο χορδὰς καὶ ὑψόνομεν κάθετον ἐπὶ ἑκατέραν εἰς τὸ μέσον της. Τὸ σημεῖον, ὅπου συμπίπτουν αἱ δύο κάθετοι, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἢ τοῦ τόξου.

β'. *Νὰ γραφθῇ περιφέρεια, ἥτις νὰ διέλθῃ διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων Α, Β, Γ* (σχ. 63).

Ἐπιζευγνύεται τὸ μέσον σημεῖον Β μὲ τὰ ἄλλα δύο διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ· ἄγεται κάθετος ἐπὶ ἑκατέραν εἰς τὸ μέσον της ἡ ΔΕ καὶ ἡ ΖΗ, αἵτινες συμπίπτουν εἰς τὸ Θ. Ἔπειτα μὲ κέντρον μὲν τὸ Θ, μὲ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΘ γράφεται περιφέρεια, ἥτις θέλει διέλθει διὰ τῶν τριῶν δεδομένων σημείων.

γ΄. *Οὕτω γράφεται καὶ περιφέρεια, ἥτις νὰ διέρχηται διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν δεδομένου τριγώνου τοῦ ΑΒΓ (σχ. 67).* Η περιφέρεια αὕτη λέγεται *περιγεγραμμένη* περὶ τὸ τρίγωνον, τὸ δὲ τρίγωνον *ἐγγεγραμμένον* εἰς τὴν περιφέρειαν.

85. *Ἐκ δεδομένου σημείου ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη κύκλου δεδομένου.*

α΄. Εἰ μὲν τὸ δεδομένον σημεῖον εἶναι ἐπὶ τῆς περιφερείας, οἷον τὸ Ε (σχ. 62), ἐπιζευγνύεται μὲ τὸ κέντρον Κ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΕΚ καὶ ἄγεται κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΚ εἰς τὸ ἄκρον της Ε ἡ ΖΕΗ. Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

β΄. Εἰ δὲ τὸ δεδομένον σημεῖον εἶναι ἔξω τῆς περιφερείας, οἷον τὸ Α (σχ. 87), ἐπιζευγνύεται μὲ τὸ κέντρον Κ τοῦ δεδομένου κύκλου διὰ τῆς ΑΚ, διαιρεῖται αὕτη εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ μέσον της Β, μὲ ἀκτῖνα δὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ΑΒ γράφεται περιφέρεια, ἥτις τέμνει τὴν δεδομένην περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα, εἰς τὸ Γ καὶ εἰς τὸ Δ· ἐπιζευγνύεται τὸ Α μὲ τὸ Γ ἢ μὲ τὸ Δ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἢ ἡ ΑΔ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΓ ἢ ἡ ΚΔ, ἡ γωνία ΑΓΚ ἢ ἡ ΑΔΚ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΚ ἢ εἰς τὸ ΑΔΚ· λοιπὸν ἡ ΑΓ ἢ ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΓ ἢ ΚΔ εἰς τὸ ἄκρον της· λοιπὸν εἶναι ἐφαπτομένη.

86. *Νὰ διαιρεθῇ τόξον δεδομένον, οἷον τὸ ΑΒΓ, εἰς δύο ἴσα μέρη (σχ. 88).*

Ἄγομεν τὴν χορδὴν ΑΓ καὶ ὑψόνομεν τὴν ΒΔΕ κάθετον ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ μέσον της· τὸ σημεῖον Β, ὅπου ἡ ΒΔΕ τέμνει τὸ τόξον, εἶναι τὸ μέσον αὐτοῦ, καὶ οὕτω τὸ τόξον εἶναι διῃρημένον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σημ. α΄. Ἑκάτερον δὲ τῶν μερῶν τοῦ τόξου ΑΒΓ διαιρεῖται ὡσαύτως εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ οὕτω τὸ τόξον ΑΒΓ θέλει εἶσθαι διῃρημένον εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη. Καὶ πάλιν ἂν ἕκαστον τῶν τεσσάρων μερῶν διαιρεθῇ ὡσαύτως εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ὅλον τόξον ΑΒΓ θέλει εἶσθαι διῃρημένον εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη· καὶ οὕτως ἐφεξῆς διαιρεῖται τὸ τόξον εἰς 16 ἴσα μέρη, εἰς 32, εἰς 64, κτλ.

Σημ. 6'. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι δύο διάμετροι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην διαιροῦν τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (40), ἐὰν ἕκαστον τῶν τετάρτων τῆς περιφερείας διαιρεθῇ εἰς 2, εἰς 4 κτλ ἴσα μέρη, ἡ ὅλη περιφέρεια θέλει εἶσθαι οὕτω διῃρημένη εἰς 8 ἴσα μέρη, εἰς 16, εἰς 32 κτλ.

87. *Νὰ διαιρεθῇ γωνία δεδομένη εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Μὲ κέντρον μὲν τὴν κορυφήν της, μὲ ἀκτῖνα δὲ ὅσον θέλωμεν μεγάλην γράφομεν ἀντιγώνιον τόξον αὐτῆς, ἄγομεν τὴν χορδήν του, καὶ ἔπειτα διαιροῦντες αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη ἐπιζευγνύομεν τὸ μέσον της καὶ τὴν κορυφὴν τῆς δεδομένης γωνίας δι' εὐθείας. Αὕτη δὲ διαιρεῖ τὴν γωνίαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἐννοεῖται δὲ πῶς διαιρεῖται γωνία καὶ εἰς 4 ἴσα μέρη, καὶ εἰς 8 κτλ.

88. *Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια εἰς ἓξ ἴσα μέρη.*

Πρῶτον εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι ἡ χορδὴ τοῦ ἕκτου τῆς περιφερείας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνά της.

Διότι, ἂν τὸ τόξον ΑΗ (σχ. 89) ἦναι ἕκτον τῆς περιφερείας του, ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ χορδή του ΑΗ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΗ, ἡ κεντρικὴ γωνία ΑΚΗ εἶναι ἕκτον τεσσάρων ὀρθῶν, ἤτοι $\frac{4}{6}$ τῆς ὀρθῆς· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΚΑΗ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ἢ κλασματικῶς, μὲ $\frac{12}{6}$ τῆς ὀρθῆς, ἂν ἀπὸ τοῦτο ἀφαιρεθῇ ἡ γωνία Κ ἤτοι τὰ $\frac{4}{6}$ τῆς ὀρθῆς, μένουν $\frac{8}{6}$ τῆς ὀρθῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Η. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΚΗ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἑπομένως ἡ Α γωνία ἴση μὲ τὴν Η, ἑκατέρα εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{8}{6}$, ἤτοι ἴση μὲ $\frac{4}{6}$ τῆς ὀρθῆς. Ἀλλὰ καὶ ἡ κεντρικὴ γωνία Κ εἶναι $\frac{4}{6}$ τῆς ὀρθῆς· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΚΗ εἶναι ἰσογώνιον, ἑπομένως καὶ ἰσόπλευρον. Λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΗ τοῦ ἕκτου τῆς περιφερείας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνά της.

Διαιροῦμεν λοιπὸν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα μέρη ἀνοίγοντες τὸν διαβήτην ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ τοῦ κύκλου, περιάγοντες αὐτὸν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ σημειοῦντες τὰ σημεῖα αὐτῆς, ὅπου ὁ ποὺς τοῦ διαβήτου φθάνει ἑκάστοτε, ἤτοι τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἕκαστον τόξον ΑΒΓ, ΓΔΕ, ΕΖΑ εἶναι τρίτον τῆς περιφερείας, διότι καὶ τὰ τρία εἶναι ἴσα.

Σημ. ά. Ἐὰν ἕκαστον ἕκτον τῆς περιφερείας διαιρεθῇ εἰς 2, ἢ εἰς 4, κτλ ἴσα μέρη, οὕτω ὅλη ἡ περιφέρεια θέλει εἶσθαι διῃρημένη εἰς 12 ἴσα μέρη, εἰς 24, κτλ.

Σημ. β΄. Ὥστε γνωρίζομεν τώρα νὰ διαιρῶμεν περιφέρειαν εἰς ἴσα μέρη 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 120, κτλ.

89. *Νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον πλευρὰς 3, ἢ 4, ἢ 6, ἢ 8, κτλ ὡς ἀνωτέρω.*

(Ὀνομάζεται *ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον πολύγωνον*, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.)

Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας πλευρὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ κανονικὸν πολύγωνον, καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς τῶν ἴσων τόξων. Τὸ προκύπτον πολύγωνον θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον κανονικόν.

Π. χ. ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὸν κύκλον ΑΓΕ κανονικὸν ἑξάγωνον (σχ. 90). Πράττοντες ὡς ἤδη εἴπομεν ἔχομεν ἐγγεγραμμένον τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖΑ. Λέγω δὲ ὅτι εἶναι κανονικὸν τοῦτο τὸ ἑξάγωνον. διότι πρῶτον ὅλαι του αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων. Ἔπειτα καὶ αἱ γωνίαι του ὅλαι εἶναι ἴσαι· διότι, ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ κτλ, τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΚΓ. ΓΚΔ, κτλ, εἶναι ἰσοσκελῆ, καὶ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην· ἔχουν λοιπὸν καὶ τὰς γωνίας ΚΑΒ, ΚΒΑ, ΚΒΓ, ΚΓΒ, ΚΓΔ, ΚΔΓ κτλ ὅλας ἴσας. Λοιπὸν καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου Α, Β, Γ κτλ εἶναι ὅλαι ἴσαι. Λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον οὕτως ἑξάγωνον εἶναι κανονικόν.

β΄. *Νὰ περιγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον πλευρὰς 3, ἢ 4, ἢ 6, ἢ 8 κτλ, ὡς ἀνωτέρω.* (Ὀνομάζεται περιγεγραμμένον εἰς κύκλον πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας αὐτοῦ).

Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας πλευρὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ κανονικὸν πολύγωνον, καὶ ἄγομεν εὐθείας, αἵτινες νὰ ἐφάπτωνται τῆς περιφερείας εἰς τὰ διαιρέσεως σημεῖα. Αὗται αἱ ἐφαπτόμεναι συμπίπτουσαι ἀποτελοῦν τὸ ζητούμενον περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον· τὴν ἀπόδειξιν παραλείπομεν ἂν καὶ εὔκολον.

Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου λέγεται καὶ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐὰν ἐπιζευχθοῦν τὰ σημεῖα τῶν ἀφῶν μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἢ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, αἱ ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἰς τὰ μέσα των καί, ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου, εἶναι ὅλαι ἴσαι. Λοιπὸν *αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου κανονικοῦ πολυγώνου κάθετοι ἐπὶ ἑκάστην αὐτοῦ πλευρὰν, εἶναι ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, καὶ ἑπομένως ὅλαι ἴσαι.*

90. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἢ δύο γωνιῶν.*

Ἢ μετροῦνται τὰ δύο τόξα πρὸς τὴν μοῖράν των, τὸ λεπτὸν κτλ, καὶ ἔπειτα διαιρεῖται τὸ μέτρον τοῦ ἑτέρου διὰ τοῦ μέτρου τοῦ ἄλλου. Ἢ εὑρίσκεται τὸ κοινὸν μέτρον αὐτῶν, ὡς εὑρίσκεται τὸ δύο εὐθειῶν γραμμῶν (63), ἀκριβῶς ἢ ὡς ἔγγιστα, μετρεῖται ἑκάτερον πρὸς αὐτὸ τὸ κοινὸν μέτρον των, καὶ διαιροῦνται ὁ ἕτερος διὰ τοῦ ἄλλου οἱ προκύπτοντες ἀριθμοί. Ὁ κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τρόπον προκύπτων ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὁ λόγος τοῦ ἑτέρου τόξου πρὸς τὸ ἄλλο.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ λόγου τῶν δύο γωνιῶν, γράφονται μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα τὰ ἀντιγώνιά των τόξα, εὑρίσκεται ὁ λόγος τῶν τόξων, ὅστις εἶναι λόγος καὶ τῶν γωνιῶν.

Τὰ δὲ τόξα καὶ αἱ γωνίαι δυνατὸν νὰ ἦναι σύμμετροι ἢ καὶ ἀσύμμετροι, καὶ ὁ λόγος των ἑπομένως ἀκριβὴς ἢ προσεγγίζων (63).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Μέτρα τῶν ἐπιπέδων σχημάτων καὶ προβλήματα.

91. Αἱ μονάδες, πρὸς τὰς ὁποίας μετροῦνται αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν γραμμικῶν μονάδων, ἤτοι τοῦ πήχεως, τῆς παλάμης, τοῦ δακτύλου κτλ, τὰ ὁποῖα προτιμότερον εἶναι νὰ διακρίνωμεν δι' ἐπιθέτων λέγοντες *πηχυαῖον, παλαμιαῖον, δακτυλιαῖον* κτλ *τετράγωνον*, καὶ

όχι ώς συνήθως λέγεται *τετραγωνικός πήχυς*, *τετραγωνική παλάμη* κτλ. Είμπορούν δέ νά όνομάζωνται τά τετράγωνα ταύτα καί *μέτρα επιφανειακά* (ίδε καί 11).

β'. *Μέτρον τής επιφανείας επιπέδου σχήματος* θέλομεν όνομάζει τόν άριθμόν τών τετραγώνων, μέ τόν όποϊον είναι ΐση ή επιφάνεια τού επιπέδου σχήματος. Οίον άν ήναι γνωστόν ότι ή επιφάνεια τριγώνου τινός είναι ΐση μέ τήν επιφάνειαν 12 δακτυλιαίων τετραγώνων, ό άριθμός 12 δακτυλιαία τετράγωνα είναι τό μέτρον τού τριγώνου.

γ'. Όποιαδήποτε επίπεδα σχήματα έχοντα τό αυτό μέτρον όνομάζονται *ταυτόμετρα*· οίον τρίγωνον καί τετράπλευρον καί κύκλος, εκάστου τών όποίων ή επιφάνεια είναι 12 δακτυλιαίων τετραγώνων, είναι ταυτόμετρα. Τά ΐσα σχήματα είναι καί ταυτόμετρα, όχι όμως καί τ' άνάπαλιν.

δ'. *Ίσοδύναμα* λέγονται τά σχήματα, τά όποία είναι μέν ταυτόμετρα, άλλ' όχι ΐσα, ήτοι έχουν μέν τάς επιφανείας των ΐσας, άλλά δέν είναι δυνατόν επιτιθέμενα τό έτερον επί τού άλλου νά εφαρμόσουν καί ταυτισθούν, άλλά πληροφορεϊταί τις ότι είναι ΐσα, ή αφού εύρη ότι είναι ταυτόμετρα, ή αφού ίδη ότι τά μέρη των είναι ΐσα.

ε'. *Έμβαδόν* λέγεται ή επιφάνεια επιπέδου σχήματος, όταν νοήται ώς ποσόν, τό όποϊον πρόκειται νά μετρηθή ή είναι ήδη μετρημένον.

ϛ'. Παραλληλογράμμου *βάσις* μέν λέγεται εκατέρα δύο παραλλήλων πλευρών, *ύψος* δέ κάθετος επί τάς βάσεις άφ' όποιουδήποτε σημείου τής ετέρας μέχρι άλλου τής άλλης· οίον (σχ. 91) άν ΑΒ καί ΓΔ ήναι αί βάσεις τού παραλληλογράμμου, ή ΕΖ κάθετος επί τάς βάσεις είναι τό ύψος αυτού.

ζ'. Είπομεν (27, θ'.) τί λέγεται βάσις τριγώνου καί τί κορυφή. Η δέ άπό τής κορυφής τριγώνου ήγμένη κάθετος ΓΔ επί τήν βάσιν, ή ενίοτε επί τήν εκβολήν τής βάσεως (σχ. 92), λέγεται *ύψος* αυτού.

η'. Τραπεζίου *βάσις* μέν λέγεται εκατέρα τών παραλλήλων πλευρών, *ύψος* δέ ή άφ' όποιουδήποτε σημείου τής ετέρας των βάσεων μέχρι άλλου σημείου τής άλλης κάθετος επ' αυτάς.

θ'. *Τὸ γινόμενον τῶν μέτρων δύο γραμμῶν* λέγεται κοινότερον *γινόμενον τῶν δύο γραμμῶν·* οἷον ἂν εὐθεῖα ἦναι 8 δακτύλων μακρὰ καὶ ἄλλη εἶναι 6 δακτύλων μακρά, τὸ γινόμενον 48 τῶν μέτρων των 8 καὶ 6 λέγεται γινόμενον τῶν δύο εὐθειῶν. Ἡ δὲ μονὰς τοῦ γινομένου 48 τῶν δύο γραμμῶν δὲν εἶναι ἡ μονὰς τῶν γραμμῶν, ὁ δάκτυλος, ἀλλ' ἢ πρέπει νὰ νοῆται ἀπροσδιόριστος καὶ ὁ ἀριθμὸς 48 ἀφῃρημένος, ἤ, ὅταν ἦναι αἱ γραμμαὶ βάσις καὶ ὕψος σχήματός τινος, εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς μονάδος, ἤτοι τὸ δακτυλιαῖον τετράγωνον, ὡς θέλομεν ἴδει μετ' ὀλίγον. Ἂν δ' αἱ γραμμαὶ μετρῶνται πρὸς τὴν παλάμην ἢ τὸν πῆχυν, ἡ μονὰς τοῦ γινομένου θέλει εἶσθαι τὸ παλαμιαῖον ἢ τὸ πηχυαῖον τετράγωνον.

92. Εἶναι ἤδη γνωστὸν (61) ὅτι *τὰ τετράγωνα, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση, εἶναι καὶ αὐτὰ ἴσα·* καὶ *τὰ ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων αἱ δύο παρακείμεναι πλευραί, ἤτοι αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη, εἶναι ἴσαι, εἶναι καὶ αὐτὰ ἴσα.*

β'. *Τετραγώνου δέ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ* 2, 3, 4, *κτλ γραμμικὰς μονάδας, τὸ ἐμβαδὸν ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς πλευρᾶς ἐφ' ἑαυτό, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ* 4, 9, 16, *κτλ τετράγωνα τῆς γραμμικῆς μονάδος.* Διότι, ἐὰν τοῦ τετραγώνου ΑΘΙΚ (σχ. 93), τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΘ καὶ ΑΚ εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας γραμμικὰς μονάδας, διαιρεθῇ ἡ πλευρὰ ΑΘ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ὡσαύτως καὶ ἡ πλευρὰ ΑΚ, καὶ ἀπὸ τῶν διαιρέσεως σημείων ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΘ καὶ τὴν ΑΚ, χωρίζεται τὸ τετράγωνον εἰς 16 τετράγωνα τῆς γραμμικῆς μονάδος, τὰ ὁποῖα ὅλα εἶναι ἴσα. Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΘΙΚ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΘ εἶναι ἴση μὲ 4 γραμμικὰς μονάδας, εἶναι ἴσον μὲ 16 τετράγωνα τῆς γραμμικῆς μονάδος, ἤτοι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 4.

Εἶναι δ' ἔτι φανερὸν ὅτι τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ 2 γραμμικὰς μονάδας, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ 4 τετράγωνα τῆς γραμμικῆς μονάδος, ἤτοι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ 2· τοῦ δὲ ΑΕΖΗ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ 3 γραμμικὰς μονάδας, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ 9 τετράγωνα τῆς αὐτῆς γραμμικῆς μονάδος, ἤτοι μὲ 3 ἐπὶ 3.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐνῷ ἡ πλευρὰ ΑΜ εἶναι ἥμισυ τῆς Α, τρίτον τῆς ΑΕ, τέταρτον τῆς ΑΘ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΜΒ εἶναι τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ, ἔννατον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ, δέκατον ἕκτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΘ.

γ'. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ. 94) ἦναι ἴση μὲ 3 γραμμικὰς μονάδας καὶ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς, ἤτοι μὲ μικτὸν ἀριθμὸν τῆς γραμμικῆς μονάδος, πρῶτον προσδιορίζονται τὰ μέρη ΑΘ, ΘΚ, ΚΕ, ΑΛ, ΑΜ, ΜΗ ἴσα ἕκαστον μὲ τὴν γραμμικὴν μονάδα, ἔπειτα διαιρεῖται, τὸ ΕΒ καὶ τὸ ΔΗ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἄγονται κάθετοι ἀφ' ὅλων τῶν διαιρέσεως σημείων. Εἶναι τώρα φανερὸν ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ σύγκειται ἐξ 9 τετραγώνων τῆς γραμμικῆς μονάδος, ἐξ 9 καὶ 9 ὀρθογωνίων ἴσων διότι ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις των καὶ τὰ ὕψη των, καὶ ἐξ 9 ἴσων μικρῶν τετραγώνων. Καὶ ἕκαστον μὲν τῶν ὀρθογωνίων εἶναι $\frac{1}{5}$ τοῦ τετραγώνου τῆς γραμμικῆς μονάδος, διότι 5 τούτων τῶν ὀρθογωνίων ἀποτελοῦν ἓν τετράγωνον τῆς γραμμικῆς μονάδος· ἕκαστον δὲ τῶν μικρῶν τετραγώνων εἶναι $\frac{1}{25}$ τοῦ τετραγώνου τῆς γραμμικῆς μονάδος, διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου εἶναι $\frac{1}{5}$ τῆς γραμμικῆς μονάδος. Ἀλλὰ καὶ τὸ μέτρον τῆς πλευρᾶς ἤτοι τὸ 3 $\frac{1}{5}$ πολλαπλασιαζόμενον ἐφ' ἑαυτὸ παράγει 9 μονάδας, $\frac{9}{5}$, $\frac{9}{5}$ καὶ $\frac{9}{25}$ τῆς μονάδος, τῶν ὁποίων ὁ 9 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραγώνων τῆς γραμμικῆς μονάδος, τὰ $\frac{9}{5}$ καὶ $\frac{9}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀρθογωνίων καὶ τὰ $\frac{9}{25}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μικρῶν τετραγώνων. Καθὼς λοιπὸν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν ὀρθογωνίων, οὕτω καὶ τὸ μέτρον του εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν των, ἤτοι τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πολλαπλασιασθέντος ἐφ' ἑαυτό.

δ'. *Ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του, ἢ συντομώτερα, τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.* Π. χ. ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (σχ. 95) ἡ βάσις ΑΒ ἦναι ἴση μὲ 6 γραμμικὰς μονάδας, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ ἴσον μὲ 4 γραμμικὰς μονάδας, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ 24 τετράγωνα τῆς αὐτῆς γραμμικῆς μονάδος. Τοῦτο γίνεται φανερὸν, ἐὰν διαιρεθῇ ἡ μὲν ΑΒ βάσις εἰς 6 ἴσα μέρη, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εἰς 4 ἴσα μέρη, καὶ ἀχθῶσιν ἐκ τῶν διαιρέσεως σημείων κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τὴν ΑΔ. Οὕτω χωρίζεται τὸ ὀρθογώνιον εἰς 24 τετράγωνα τῆς γραμμικῆς μονάδος, τὰ ὁποῖα εἶναι ἢ τετράκις 6 τετράγωνα αὐτῆς τῆς μονάδος, ἢ ἑξάκις 4 τετράγωνα τῆς μονάδος, δηλ. τόσα τετράγωνα τῆς μονάδος, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους.

ε. Ἐὰν δὲ τὸ μέτρον τῆς βάσεως ΑΒ (σχ. 96) ἦναι μικτὸς ἀριθμὸς $4\frac{2}{5}$ καὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους ὡσαύτως $2\frac{3}{4}$, γίνεται φανερὸν καὶ κατὰ τ' ἀνωτέρω (γ'.) καὶ ἐκ τοῦ σχήματος, ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους (8, $\frac{12}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{20}$) (α) ἤτοι $12\frac{1}{10}$.

93. *Ῥόμβος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ὀρθογώνιον ἔχον τὴν αὐτὴν ἢ ἴσην βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ἢ ἴσον ὕψος μὲ αὐτόν.* Οἷον ὁ ῥόμβος ΑΒΕΖ (σχ. 97) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ μὲ αὐτὸν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ. Διότι τὸ ΑΒΕΔ τραπέζιον εἶναι κοινὸν μέρος τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου. Τὸ δὲ ἄλλο μέρος τοῦ ῥόμβου, τὸ τρίγωνον ΑΔΖ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ τρίγωνον ΒΕΓ· διότι ἔχουν τὴν ΑΖ καὶ τὴν ΒΕ ἴσας, καὶ τὴν ΑΔ καὶ τὴν ΒΓ ἴσας, τὰς μὲν ὡς πλευρὰς τοῦ ῥόμβου, τὰς δὲ ὡς ἀντικειμένας πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου· ἔχουν προσέτι καὶ δύο γωνίας ἴσας, τὴν ΑΔΖ ἴσην μὲ τὴν ΒΓΕ, ὡς ὀρθὰς, καὶ τὴν ΑΖΔ ἴσην μὲ τὴν ΒΕΓ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΖ καὶ ΒΕ. Ἔχουν λοιπὸν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην καὶ εἶναι τὰ τρίγω-

---

(α) Πολλαπλασιάζεται ἐδῶ ὁ $4\frac{2}{5}$ ἐπὶ $2\frac{3}{4}$, ὡς ἀκέραιος ἐπὶ ἀκέραιον· οἷον πρῶτον τὸ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{6}{20}$, ἔπειτα ὁ 4 ἐπὶ $\frac{3}{4}$, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{12}{4}$, ἔπειτα τὸ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 2, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{4}{5}$, τελευταῖον ὁ 4 ἐπὶ 2, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι 8. Τώρα προστίθενται τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα 8, $\frac{12}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{20}$, καὶ σχηματίζεται γινόμενον τοῦ $4\frac{2}{5}$ ἐπὶ $2\frac{3}{4}$ = $12\frac{1}{10}$. Ὡσαύτως [illegible] να ἴσα. Λοιπὸν ὁ ῥόμβος ΑΒΕΖ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, διότι ἔχουν ἓν μέρος των κοινὸν καὶ τὸ ἄλλο ἴσον.

β΄. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι *καὶ τὸ ῥομβοειδὲς ΑΒΕΖ (σχ. 98) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ μὲ τὸ ῥομβοειδές*. Διότι καὶ τὰ δύο ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ τραπέζιον ΑΒΓΖ, τὸ δὲ ἄλλο των μέρος ἴσον, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΖΔ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΕΓ.

γ΄. Λοιπὸν *καὶ ῥόμβου καὶ ῥομβοειδοῦς τὸ ἐμβαδὸν ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του*· ἢ ἄλλως, τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου εἶναι ἴσον μὲ τόσα τετράγωνα τῆς μονάδος, πρὸς τὴν ὁποίαν μετρεῖται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του.

δ΄. Γενικῶς λοιπόν, *παντὸς παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

94. *Παντὸς τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του*. Διότι, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς π. χ. Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 99) ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῆς βάσεως ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ἀχθῇ ἡ ΒΕ παράλληλος τῆς ΑΓ, ἀποτελεῖται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΔ μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΕΒΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας ἄλλην μὲ ἄλλην· λοιπὸν τὸ ΑΒΓ εἶναι ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΓ. Λοιπὸν καὶ τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ του εἶναι ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου, ἤτοι εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἂν λοιπὸν μετρήσαντες εὕρωμεν ὅτι εἶναι ἡ μὲν βάσις τριγώνου τινὸς 5 δακτύλων μακρά, τὸ δὲ ὕψος 8 δακτ., τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θέλει εἶσθαι 20 δακτυλιαίων τετραγώνων.

95. *Τραπεζίου τὸ ἐμβαδὸν ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων ἑκατέρας τῶν παραλλήλων του*

βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος του. Διότι πᾶν τραπέζιον χωρίζεται διὰ διαγωνίου εἰς δύο τρίγωνα (σχ. 100) ἔχοντα ὕψος μὲν τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὸ μὲν τὴν ἑτέραν, τὸ δὲ τὴν ἄλλην τῶν παραλλήλων βάσεων τοῦ τραπεζίου. Ὡς λοιπὸν τὸ τραπέζιον εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο τριγώνων, οὕτω καὶ τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ του εἶναι ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, ἤτοι ἄθροισμα τοῦ $\frac{\text{ΑΒ ἐπὶ ΓΕ}}{2}$ καὶ τοῦ $\frac{\text{ΔΓ ἐπὶ ΑΖ}}{2}$ ἢ $\frac{\text{ΔΓ ἐπὶ ΓΕ}}{2}$, διότι ἡ ΑΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΕ.

Ἂν λοιπὸν μετρήσαντες εὕρωμεν ὅτι τὸ μὲν ὕψος τραπεζίου τινὸς εἶναι 4 δακτύλων, ἡ δὲ ἑτέρα βάσις του 10 δακτύλων, ἡ δὲ ἄλλη 7 δακτύλων, τὸ ἐμβαδόν του θέλει εἶσθαι 20 καὶ 14, ἤτοι 34 δακτυλιαίων τετραγώνων.

96. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ ὁποιουδήποτε ἄλλου τετραπλεύρου ἢ ὁποιουδήποτε πολυγώνου, χωρίζομεν αὐτὸ διὰ διαγωνίων, ἀπὸ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἠγμένων, εἰς τρίγωνα (σχ. 32), εὑρίσκομεν τὰ μέτρα τῶν τριγώνων καὶ τὰ προσθέτομεν. Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν μέτρων εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου.

β'. Χωρίζομεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα καὶ δι' εὐθειῶν ἠγμένων ἀπό τινος σημείου τῶν ἐντὸς αὐτοῦ εἰς τὰς κορυφάς του (σχ. 101), εὑρίσκομεν τὰ μέτρα τῶν τριγώνων καὶ τὰ προσθέτομεν· οὕτως ἔχομεν τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου.

γ'. Ἐὰν ἄξωμεν ἐπὶ δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 102), εἰς τὰ μέσα των Η καὶ Θ καθέτους τὴν ΗΚ καὶ τὴν ΘΚ, αὗται συμπίπτουν εἰς τὸ Κ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον του. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου του Κ ἀχθῶσιν εἰς τὰς κορυφὰς αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ, κτλ, χωρίζεται οὕτω τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα ἴσα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραί του. Ὥστε τὸ ἐμβαδόν του εἶναι τοσάκις τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τῶν τριγώνων τούτων, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραί του. Ἂν λοιπὸν εὑρεθῇ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΚΒ τὸ μέτρον καὶ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του, τὸ γινόμενον εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ του [illegible]

Ἂν λοιπὸν κανονικοῦ τινος πενταγώνου μετρήσαντες μίαν πλευρὰν καὶ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὴν εὕρωμεν ὅτι ἡ μὲν πλευρὰ εἶναι 7 παλαμῶν μακρά, ἡ δὲ κάθετος παλαμῶν 4,92, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου θέλει εἶσθαι παλαμιαίων τετραγώνων 17,22, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου θέλει εἶσθαι παλαμιαίων τετραγώνων 86,10.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτου ἐπὶ τὴν βάσιν· καὶ ἐπειδὴ ἢ τοῦτο τὸ γινόμενον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, ἢ πολλαπλασιασθῇ τὸ μέτρον τῆς βάσεως ἤτοι τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου, εὑρίσκεται ὁ αὐτὸς ἀριθμός· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν εἶναι τὸ μέτρον τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, διὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ οὕτως, ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς περιμέτρου του ἐπὶ ἥμισυ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτου ἐπὶ τὴν πλευράν του.

97. *Τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ ὁποιουδήποτε κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀπολύτου μέτρου (44) τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῆς ἀκτῖνός του.*

Τοῦτο ἀκριβῶς ν' ἀποδειχθῇ ἐνταῦθα εἶναι ἀδύνατον. Ἀλλὰ δύναταί τις τώρα νὰ παρατηρήσῃ ὅτι, ἂν εἰς τὸν κύκλον (σχ. 103) ἐγγράψῃ τις κατὰ σειρὰν κανονικὰ πολύγωνα 4 πλευρῶν, 8 πλευρῶν, 16, 32, 64, 128 κτλ. ὅσον πλειοτέρας πλευρὰς ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον, τόσον πλειότερον ἡ μὲν περίμετρός του προσεγγίζει νὰ γείνῃ ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τὸ δὲ ἐμβαδόν του ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς του προσεγγίζει νὰ γείνῃ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἐκ δὲ τούτου δύναταί τις νὰ θεωρῇ τὸν κύκλον ὡς κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἀπειράριθμοι, καὶ διὰ τοῦτο μικρόταται· τότε ἐννοεῖται ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι ἡ περίμετρός του, ἡ δὲ ἀκτίς του εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ τὴν πλευράν του εἰς τὸ μέσον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτου ἐπὶ τὴν πλευράν του, διὰ τοῦτο καὶ τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου εἶναι γινόμενον τοῦ ἀπολύτου μέτρου τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῆς ἀκτῖνός του.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ δεδομένου κύκλου, πρέπει πρῶτον νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀκτῖνά του, ἔπειτα νὰ τὴν διπλασιάσωμεν, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ μέτρον τῆς διαμέτρου του, μετὰ ταῦτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μέτρον τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159, ἢ μόνον ἐπὶ 3,14, καὶ τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι ὡς ἔγγιστα τὸ ἀπόλυτον μέτρον τῆς περιφερείας του, τελευταῖον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο τὸ μέτρον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῆς ἀκτῖνος, καὶ τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι σχεδὸν τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου.

Ἂν λοιπὸν μετρήσαντες τὴν ἀκτῖνα κύκλου τινὸς εὕρωμεν αὐτὴν ἴσην μὲ 8 δακτύλους, ἡ διάμετρος θέλει εἶσθαι 16 δακτύλων, ἡ περιφέρεια 16 ἐπὶ 3,14, ἤτοι δακτύλων 50,24, καὶ τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου θέλει εἶθαι σχεδὸν 200,96, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θέλει εἶσθαι σχεδὸν ἴσον μὲ δακτυλιαῖα τετράγωνα 200,96, ἢ σχεδὸν μὲ 201.

Ἂν δὲ ἄλλου κύκλου ἡ ἀκτὶς εἶναι 6 παλαμῶν μακρά, τὸ ἐμβαδόν του θέλει εἶσθαι σχεδὸν ἴσον μὲ παλαμιαῖα τετράγωνα 113,04.

ϐ'. Εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὅτι τομεύς τις εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ κύκλου ἢ τοσαῦτα πολλοστὰ αὐτοῦ, ὁποῖον πολλοστὸν τῆς περιφερείας του ἢ ὅσα πολλοστὰ αὐτῆς ὁμώνυμα εἶναι τὸ τόξον τοῦ τομέως. Π. χ. ἂν τόξον τι ἦναι 12ον τῆς περιφερείας ἢ 20ον κτλ, ὁ ἀντίστοιχος τομεὺς εἶναι καὶ αὐτὸς 12ον τοῦ κύκλου ἢ 20ον αὐτοῦ κτλ· ἢ ἂν ἄλλο τόξον εἶναι $\frac{9}{24}$ τῆς περιφερείας, ὁ ἀντίστοιχος τομεὺς εἶναι καὶ αὐτὸς $\frac{9}{24}$ τοῦ κύκλου.

Λοιπὸν τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τομέως εἶναι γινόμενον τοῦ ἀπολύτου μέτρου τοῦ τόξου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου του.

Ἂν λοιπὸν τὸ ἀπόλυτον μέτρον τοῦ τόξου τομέως τινὸς (44) ἦναι παλάμη 1,9635, ἡ δὲ ἀκτὶς παλάμη 1 $\frac{1}{2}$, ὁ τομεὺς εἶναι σχεδὸν ἴσος μὲ παλαμιαῖον τετράγωνον 1,4726.

Σημ. ά. Εἶναι ἤδη δῆλον (92) ὅτι τὸ παλαμιαῖον τετράγωνον εἶναι ἑκατοστὸν τοῦ πηχυαίου τετραγώνου, διότι ἡ παλάμη εἶναι δέκατον τοῦ πήχεως· τὸ δὲ δακτυλιαῖον εἶναι δεκαχιλιοστὸν τοῦ πηχυαίου καὶ ἑκατοστὸν τοῦ παλαμιαίου τετραγώνου, διότι ὁ δάκτυλος εἶναι [illegible] τοῦ πήχεως καὶ [illegible] τῆς παλάμης· οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Ὥστε τὰ ἀνωτέρω παλαμιαῖα τετράγωνα 113,04 εἶναι 113 παλαμιαῖα τετράγωνα καὶ 4 δακτυλιαῖα· τὸ δὲ παλαμιαῖον τετράγωνον 1,4729 εἶναι 1 παλαμιαῖον τετράγωνον, 47 δακτυλιαῖα καὶ 26 γραμμιαῖα.

Σημ. 6'. Διὰ νὰ μετρηθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐπιπέδου σχήματος, ἔπρεπε κατά τινα τρόπον νὰ χωρισθῇ αὐτὸ εἰς τετράγωνα ἴσα μὲ τὸ τῆς μονάδος καὶ ν' ἀριθμηθῶσι ταῦτα τὰ τετράγωνα· ὁ προκύπτων οὕτως ἀριθμὸς ἤθελεν εἶσθαι τὸ μέτρον. Ἀλλὰ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον μόνον τῶν τετραγώνων καὶ ὀρθογωνίων ἤθελεν εὑρεθῇ τὸ μέτρον, ὡς ἐκ τῶν προηγουμένων φαίνεται, τῶν δὲ ἄλλων σχημάτων τὸ ἐμβαδὸν ἤθελεν εἶσθαι ἀδύνατον νὰ μετρηθῇ οὕτως. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ μέτρον ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος, πᾶν δὲ παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον ἔχον ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος, πᾶν δὲ τρίγωνον εἶναι ἥμισυ παραλληλογράμμου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ὅτι τ' ἄλλα σχήματα σύγκεινται ἐκ τριγώνων κτλ. διὰ ταῦτα εὑρίσκεται τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπιπέδου σχήματος διὰ μετρήσεως εὐθειῶν γραμμῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι εὔκολον, καὶ διὰ μιᾶς ἢ πλειοτέρων ἀριθμητικῶν πράξεων. Ἔτι δὲ καὶ ἡ περιφέρεια κύκλου μετρεῖται ὄχι κατ' εὐθεῖαν πρὸς γραμμικὴν μονάδα, διότι εἶναι ἀδύνατον, ἀλλὰ διὰ μετρησεως τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ διὰ πολλαπλασιάσεως τοῦ μέτρου ἐπὶ τὸν 3,14159, ὅστις εἶναι λόγος πάσης περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της· διότι πᾶσα περιφέρεια εἶναι σχεδὸν ἰσοδύναμος μὲ 3 διαμέτρους της καὶ 0,14159 τῆς διαμέτρου της. Ἀλλὰ τοῦτο, ὡς δύσκολον ν' ἀποδειχθῇ, θέλει ἐξηγηθῇ εἰς ἄλλο βιβλίον.

Ὥστε πρὸς μέτρησιν τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν ἐπιπέδων σχημάτων καὶ περιφεριῶν ἢ τόξων ἀρκεῖ νὰ ἠξεύρωμεν νὰ μετρῶμεν μόνον εὐθείας, ἔτι δε καὶ τίνας ἀριθμητικὰς πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελῶμεν ἐπὶ τῶν μέτρων αὐτῶν.

98. Ἐπειδὴ δὲ, ἢ μετρημένα εἶναι δύο ἐπίπεδα σχήματα ἢ ἀμέτρητα, ὁ λόγος τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἄλλο εἶναι ὁ αὐτὸς, διὰ τοῦτο ὁ *λόγος οἱουδήποτε ἐπιπέδου σχήματος πρὸς ἄλλο*

τοιοῦτον εὑρίσκεται, ἀφοῦ εὑρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν δύο πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα καὶ διαιρεθῇ τὸ μέτρον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ μέτρου τοῦ δευτέρου. Ἢ ἄλλως, ἐπίπεδον σχῆμα ἔχει λόγον πρὸς ἄλλο, ὃν ἔχει τὸ μέτρον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ μέτρον τοῦ δευτέρου.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης ἕπεται, ὅτι

α'. Δύο ὁποιαδήποτε παραλληλόγραμμα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα. Διότι εἶναι ταυτόμετρα.

β'. Δύο ὁποιαδήποτε τρίγωνα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα. Διότι εἶναι ταυτόμετρα.

γ'. Δύο παραλληλόγραμμα, ἐὰν μὲν ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις των, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των, ἂν δ' ἔχουν ἴσα τὰ ὕψη των, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των.

δ'. Δύο τρίγωνα ὡσαύτως, ἐὰν μὲν ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις των, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των, ἂν δ' ἔχουν ἴσα τὰ ὕψη των, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των.

Διότι τὰ μέτρα των εἶναι γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη. Ἐὰν λοιπὸν ἦναι αἱ βάσεις ἴσαι, διαιροῦνται τὰ δύο μέτρα διὰ τῶν κοινῶν μέτρων τῶν βάσεων, καὶ τὰ πηλίκα εἶναι τὰ μέτρα τῶν ὑψῶν, ἔχουν δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουν καὶ τὰ μέτρα τῶν παραλληλογράμμων. Καὶ περὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως. Π. χ. ἂν αἱ βάσεις δύο παραλληλογράμμων ἦναι 8 δακτύλων, τὸ δὲ ὕψος τοῦ μὲν ἑτέρου εἶναι 6 δακτύλων, τοῦ δὲ ἄλλου 4 δακτύλων, τὸ μέτρον τοῦ μὲν εἶναι 8 ἐπὶ 6, τοῦ δὲ 8 ἐπὶ 4· ἔχομεν λοιπὸν

Παραλληλόγραμμον πρὸς παραλληλ. ὡς 8 ἐπὶ 6 πρὸς 8 ἐπὶ 4· διαιροῦντες δὲ τὰ μέτρα διὰ 8, ἔχομεν

Παραλ. πρὸς παραλ. ὡς 6 πρὸς 4·

ἤτοι τὰ παραλληλόγραμμα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των.

ε'. Δύο περιφέρειαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι των ἢ ὡς αἱ ἀκτῖνές των.

ς'. Δύο κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν διαμέτρων των.

Διότι πρῶτον, ἂν αἱ διάμετροι δύο κύκλων εἶναι 12 καὶ 8 δακτύλων, τὰ μέτρα τῶν περιφερειῶν των εἶναι 12 ἐπὶ 3,14 καὶ 8 ἐπὶ 3,14. Λοιπὸν

Περιφ. πρὸς περιφ. ὡς 12 ἐπὶ 3,14 πρὸς 8 ἐπὶ 3,14· διαιροῦντες δὲ τὰ μέτρα διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος 3,14 ἔχομεν

Περιφ. πρὸς περιφ. ὡς 12 πρὸς 8, ἢ ὡς 6 πρὸς 4· ἤτοι αἱ περιφέρειαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροί των ἢ ὡς αἱ ἀκτῖνές των.

Ἔπειτα, ἐπειδὴ

Περιφ. πρὸς περιφ. εἶναι ὡς ἡ ἀκτὶς 6 πρὸς τὴν ἀκτῖνα 4, ἐὰν πολλαπλασιασθοῦν οἱ μὲν ἡγούμενοι ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος 6 ἤτοι ἐπὶ $\frac{6}{2}$, οἱ δὲ ἑπόμενοι ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος 4 ἤτοι ἐπὶ $\frac{4}{2}$, οἱ μὲν δύο πρῶτοι ὅροι παριστάνουν τότε τὰ μέτρα τῶν κύκλων, οἱ δὲ δύο τελευταῖοι γίνονται $\frac{6 \text{ ἐπὶ } 6}{2}$ καὶ $\frac{4 \text{ ἐπὶ } 4}{2}$. ἐὰν δ' ἐξαλειφθοῦν οἱ παρονομασταὶ ὡς ἴσοι, μένει

Κύκ. πρὸς κύκλ. ὡς 6 ἐπὶ 6 πρὸς 4 ἐπὶ 4.

Ἀλλὰ 6 ἐπὶ 6 παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς μιᾶς ἀκτῖνος, καὶ 4 ἐπὶ 4 παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης ἀκτῖνος· λοιπὸν οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, ἐπομένως καὶ τῶν διαμέτρων των.

99. *Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.*

Διότι, ἂν κατασκευασθοῦν τὰ τετράγωνα τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 104), καὶ ἔπειτα ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ ἡ ΒΔ, καὶ ἐκβληθῇ ἕως νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν πλευρὰν ΖΗ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ, εἶναι ἤδη γνωστὸν (66. ε.) ὅτι ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ καὶ τοῦ μέρους της ΑΔ, ἡ δὲ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ καὶ τοῦ μέρους της ΓΔ, ἤτοι

ΑΓ : ΑΒ :: ΑΒ : ΑΔ, ΑΓ : ΒΓ :: ΒΓ : ΓΔ.

Πολλαπλασιάζοντες δὲ καὶ τὰ μέσα καὶ τὰ ἄκρα ἔχομεν

ΑΒ ἐπὶ ΑΒ ἴσον μὲ ΑΓ ἐπὶ ΑΔ,
καὶ ΒΓ ἐπὶ ΒΓ ἴσον μὲ ΑΓ ἐπὶ ΓΔ.

Ἀλλὰ ΑΒ ἐπὶ ΑΒ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ, καὶ ΑΓ ἐπὶ ΑΔ ἢ ΑΖ ἐπὶ ΑΔ (διότι ἡ ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΖ) εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΔΕΖ· ὡσαύτως ΒΓ ἐπὶ ΒΓ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΓ, καὶ ΑΓ ἐπὶ ΓΔ ἢ ΓΗ ἐπὶ ΓΔ (διότι ἡ ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΗ) εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου ΓΗΕΔ. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον ΑΒΛΚ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΕΖ, καὶ τὸ τετράγωνον ΒΓΘΙ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΔΓΗΕ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀρθογωνίων ΑΔΕΖ καὶ ΔΓΗΕ ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΒΓ.

β΄. Ἐκ δὲ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ ἕτερον τῶν τετραγώνων ΑΒΛΚ καὶ ΒΓΘΙ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου ΑΓΗΖ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἄλλου τετραγώνου.

γ΄. Ὅταν λοιπὸν ζητῆται νὰ εὑρεθῇ ἓν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων ἢ μὲ τὴν διαφοράν των, κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ τὰς πλευρὰς τῶν δύο δεδομένων τετραγώνων, αἵτινες θέλουν εἶσθαι αἱ τῆς ὀρθῆς γωνίας κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὑποτείνουσα δὲ καὶ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας κατὰ τὴν δευτέραν· ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θέλει εἶσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται, ἂν χρειασθῇ.

δ΄. Ἐὰν τριγώνου τινὸς ἡ μία πλευρὰ ἦναι 5 δακτύλων, ἡ δευτέρα 4 δακ, καὶ ἡ τρίτη 3 δακτ, τὰ μέτρα τῶν τετραγώνων των εἶναι 25, 16 καὶ 9. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μέτρον 25 εἶναι ἴσον μὲ το ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο μέτρων 16 καὶ 9, σημεῖον ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον. Καὶ περὶ ἄλλων ὡσαύτως.

100. Ἐκθέτομεν ἔτι, ἀλλ' ἄνευ ἀποδείξεως, διέλλειψιν τῶν ἀναγκαίων γνώσεων, ὅτι *τῶν ὁμοίων τριγώνων τε καὶ πολυγώνων αἱ μὲν περίμετροι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὅ,τι ἔχουσι δύο ὁποιαιδήποτε ὁμόλογοι αὐτῶν πλευ-*

ραί, τὰ δὲ ἐμβαδὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα δύο ὁποιωνδήποτε ὁμολόγων πλευρῶν.

Π. χ. ἂν πλευρὰ τριγώνου ἦναι τριπλασία τῆς ὁμολόγου της πλευρᾶς ἄλλου ὁμοίου τριγώνου, τότε καὶ ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου εἶναι τριπλασία τῆς περιμέτρου τοῦ δευτέρου· τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι ἐννεαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δευτέρου, διότι καὶ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου εἶναι ἐννεαπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ δευτέρου.

ϐ'. Ὥστε, διὰ νὰ εὕρῃ τις τὸν λόγον τῶν περιμέτρων ἢ τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, δὲν ἦναι ἀνάγκη νὰ εὕρῃ πρῶτον τὰ μέτρα των, ἀλλὰ νὰ μετρήσῃ μόνον δύο ὁμολόγους αὐτῶν πλευράς, καὶ ὁ λόγος αὐτῶν θέλει εἶσθαι ὁ λόγος τῶν περιμέτρων των, ὁ δὲ τῶν τετραγώνων των ὁ τῶν ἐμβαδῶν των. Τὸ αὐτὸ ἐννοεῖται καὶ περὶ δύο περιφερειῶν ἢ δύο κύκλων (98. έ. ς'.), καὶ περὶ δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐχόντων ἰσαρίθμους πλευράς, διότι καὶ ταῦτα εἶναι ὅμοια πολύγωνα.

101. *Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον ὁποιονδήποτε εἰς 4 ἴσα τρίγωνα, ἢ εἰς 9, ἢ εἰς 16 κτλ.*

ά. Διαιρεῖται τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 105) ἡ πλευρὰ ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐκ τοῦ μέσου της Δ ἄγεται παράλληλος ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΒΓ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΑΓ καὶ ἔπειτα ἐπιζευγνύεται τὸ Ε καὶ τὸ Ζ διὰ τῆς ΕΖ. Οὕτως εἶναι διῃρημένον τὸ ΑΒΓ εἰς 4 τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα· διότι εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ, ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των παραλλήλους, ἔχουν δὲ καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας.

ϐ'. Διαιρεῖται τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 105) ἡ πλευρὰ ΑΒ εἰς τρία ἴσα μέρη, ἐκ τῶν διαιρέσεως σημείων Δ καὶ Ε ἄγονται παράλληλοι αἱ μὲν ΔΖ καὶ ΕΗ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΔΙ καὶ ΕΘ τῆς ΑΓ καὶ ἐπιζευγνύονται τὸ Ζ καὶ τὸ Θ διὰ τῆς ΖΘ, τὸ δὲ Η καὶ τὸ Ι διὰ τῆς ΗΙ. Οὕτω τὸ ΑΒΓ εἶναι διῃρημένον εἰς 9 τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὅμοια καὶ ἔχουν ἔτι τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας.

Ἐννοεῖται δὲ ἐκ τούτων πῶς διαιρεῖται τρίγωνον καὶ εἰς 16 ἴσα τρίγωνα καὶ εἰς 25 κτλ.

γ'. *Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς 2 ἰσοδύναμα τρίγωνα, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 4, κτλ.*

Διαιρεῖται μία τις τῶν πλευρῶν του εἰς 2 ἴσα μέρη, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 4 κτλ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς του ἄγονται εὐθεῖαι εἰς τὰ διαιρέσεως σημεῖα. Οὕτω διαιρεῖται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 106) εἰς 2 ἰσοδύναμα τρίγωνα, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 4 κτλ· διότι ὅλα τὰ μερικὰ τρίγωνα ἔχουν τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος μὲ τὸ ΑΒΓ, βάσεις δὲ ἴσας· λοιπὸν εἶναι ταυτόμετρα· λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα.

102. *Νὰ διαιρεθῇ ὁποιονδήποτε παραλληλόγραμμον εἰς 2 ἴσα παραλληλόγραμμα, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 4.*

Διαιρεῖται μία τις τῶν πλευρῶν του εἰς 2 ἴσα μέρη, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 4 κτλ, καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεως σημείων ἄγονται παράλληλοι τῶν παρακειμένων πλευρῶν της· οὕτω διαιρεῖται τὸ παραλληλόγραμμον εἰς ἴσα παραλληλόγραμμα 2, ἢ 3, ἢ 4 κτλ, (σχ. 107).

β'. *Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς ἰσοδύναμα τραπέζια 2, ἢ 3, ἢ 4 κτλ.*

Διαιροῦνται αἱ δύο παράλληλοί του πλευραὶ εἰς 2 ἴσα μέρη ἑκατέρα, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 4 κτλ, καὶ ἐπιζευγνύονται τὰ διαιρέσεως σημεῖα δι' εὐθειῶν. Οὕτω διαιρεῖται τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 108) εἰς 2 ἰσοδύναμα τραπέζια, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 4 κτλ· διότι ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἴσας τὰς παραλλήλους των πλευρὰς εἶναι ταυτόμετρα, καὶ ἑπομένως ἰσοδύναμα.

103. *Νὰ εὑρεθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ ὁποιονδήποτε ἄλλο παραλληλόγραμμον, ἢ μὲ ὁποιονδήποτε τρίγωνον.*

α'. Εὑρίσκεται μέση ἀνάλογος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ παραλληλογράμμου (76), καὶ κατασκευάζεται τὸ τετράγωνον αὐτῆς. Τοῦτο δὲ θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον παραλληλόγραμμον, διότι εἶναι ταυτόμετρον μὲ αὐτό.

β'. Εὑρίσκεται μέση ἀνάλογος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου, καὶ κατασκευάζεται τὸ τετράγωνον αὐτῆς. Τοῦτο δὲ θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον, διότι εἶναι ταυτόμετρον μὲ αὐτό.

γ'. Νὰ εὑρεθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον τραπέζιον, ἢ μὲ κύκλον.

104 *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομένη μόνον ἡ βάσις, ἰσοδύναμον μὲ ἄλλο δεδομένον ὀρθογώνιον.*

Πρέπει πρῶτον νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου. Πρὸς τοῦτο δὲ εὑρίσκεται τετάρτη ἀνάλογος (75) τῆς δεδομένης βάσεως καὶ τῶν δύο παρακειμένων πλευρῶν τοῦ δεδομένου ὀρθογωνίου. Αὕτη δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος, καὶ τώρα κατασκευάζεται τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον· θέλει δὲ εἶσθαι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον, διότι εἶναι ταυτόμετρον μὲ αὐτό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Ὁρισμοί, ἰδιότητες καὶ μέτρα στερεῶν.

105. Ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον δυνατὸν νὰ ἔχῃ διαφόρους θέσεις. Γνωρίζοντες δὲ τριῶν μόνον μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων του τὰς θέσεις, γνωρίζομεν καὶ αὐτοῦ τὴν θέσιν.

β'. Εὐθεῖα, ἥτις ἔχει δύο της σημεῖα ἐπὶ ἐπιπέδου, εἶναι ὅλη ἐπ' αὐτοῦ ἢ ἐν αὐτῷ. Ἐὰν δ' ἔχῃ ἓν μόνον σημεῖον κοινὸν με ἐπίπεδον, ὅλα δὲ τ' ἄλλα της ἐκτὸς αὐτοῦ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, λέγεται ὅτι *συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον*· ἐὰν δ' ἐκτείνηται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου, λέγεται ὅτι *διαπερᾷ τὸ ἐπίπεδον*, ἢ ὅτι *τέμνεται ὑπ' αὐτοῦ*. Τὸ κοινὸν σημεῖον λέγεται *συμπτώσεως σημεῖον*.

γ'. Ἡ συμπίπτουσα εὐθεῖα λέγεται *κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον*, ἐὰν ἦναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐκ τοῦ συμπτώσεως σημείου ἀγομένας εὐθείας· εἶναι δὲ κάθετος ἐπὶ ὅλας, ἂν ἦναι κάθετος ἐπὶ δύο μόνον διάφορον θέσιν ἐχούσας. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἐπίπεδον λέγεται *κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν*. Τὸ δὲ συμπτώσεως σημεῖον λέγεται *ποῦς τῆς καθέτου*. Ἡ ἔχουσα ἄλλην θέσιν παρὰ τὴν κάθετον λέγεται *κεκλιμένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον*.

δ'. Κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖόν του εἶναι μία, κεκλιμέναι δὲ πολλόταται.

ὁ γνώμων χρησιμεύει νὰ δείξῃ ἂν εὐθεῖα ἦναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, εἰς δύο διαφόρους θέσεις ὄρθιος θεμένος.

ε'. Ἀπὸ σημείου ἐκτὸς ἐπιπέδου ὄντος μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπ' αὐτό, ὅλαι δὲ αἱ λοιπαί, ὅσαι ἄγωνται, λέγονται *πλάγιαι*.

Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν πλαγίων, καὶ παριστάνει τὸ ἀπὸ τοῦ σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδον διάστημα. Αἱ ἴσον τῆς καθέτου ἀπέχουσαι πλάγιαι εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ πλειότερον μεγαλήτεραι.

ϛ'. Δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἰς δύο διάφορα σημεῖά του εἶναι παράλληλοι. Παράλληλος δὲ καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι καὶ αὐτὴ κάθετος ἐπ' αὐτό.

ζ'. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευγνύουσα τὸ συμπτώσεως σημεῖον κεκλιμένης εὐθείας μὲ τὸν πόδα καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἠγμένης ἔκ τινος σημείου τῆς κεκλιμένης, λέγεται *προβολὴ τῆς κεκλιμένης*. Ἡ δὲ γωνία τῆς κεκλιμένης καὶ τῆς προβολῆς της λέγεται *κλίσις τῆς κεκλιμένης*.

106. Εὐθεῖα λέγεται *παράλληλος ἐπιπέδου*, ἐὰν ἦναι ἴσαι δύο παράλληλοι ἠγμέναι ὁπωσδήποτε ἐκ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. Ἡ παράλληλος ἐπιπέδου δὲν συμπίπτει μὲ αὐτὸ πούποτε, ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῇ.

107. Δύο ἐπίπεδα, ἐὰν δὲν ταυτίζωνται, ἢ συμπίπτουν ἢ εἶναι παράλληλα.

β'. Καὶ συμπίπτοντα μὲν λέγονται δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν εὐθεῖαν κοινήν, *συμπτώσεως εὐθεῖαν* λεγομένην, ὅλα δὲ τ' ἄλλα των σημεῖα (τὰ ἐπὶ παραλλήλων τῆς συμπτώσεώς των ὄντα) τόσον περισσότερον ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων, ὅσον μακρύτερα τῆς συμπτώσεώς των εἶναι.

γ'. Τὸ διάστημα τὸ μεταξὺ δύο συμπιπτόντων ἐπιπέδων, τὸ ὁποῖον εἶναι μηδὲν κατὰ τὴν σύμπτωσίν των, ἐκεῖθεν δὲ βαθμηδὸν αὐξάνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, λέγεται *γωνία τῶν ἐπιπέδων*. Τὰ ἐπίπεδα λέγονται *ἕδραι* τῆς γωνίας, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία λέγεται καὶ *δίεδρος*· ἡ δὲ τῆς συμπτώσεως εὐθεῖα λέγεται *κόρυφη* τῆς γωνίας.

δ'. Τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μέτρον τῆς γωνίας δύο εὐθειῶν κειμένων τῆς μὲν ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἕδρας, τῆς δὲ ἐπὶ τῆς ἄλλης, καὶ καθέτων ἐπὶ τὴν κώχην εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖόν της. Ὅταν δὲ ἡ τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν κώχην γωνία ἦναι ὀρθή, ἀμβλεῖα ἢ ὀξεῖα, εἶναι καὶ ἡ δίεδρος ὀρθή, ἀμβλεῖα ἢ ὀξεῖα, καὶ τόσον μεγάλη, ὅσον εἶναι ἡ εὐθύγραμμος τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν κώχην.

ε. Τὰ ἐπίπεδα τῆς διέδρου γωνίας εἶναι *κάθετα ἐπ' ἄλληλα*, ἂν ἡ γωνία των ἦναι ὀρθή, εἶναι δὲ *κεκλιμένα*, ἂν ἡ γωνία των ἦναι ὀξεῖα, ἥτις τότε λέγεται καὶ *κλίσις* των.

ς'. Ἐὰν ἐπίπεδον συμπίπτῃ μὲ ἄλλο περὶ τὸ μέσον του, ἀποτελοῦνται δύο δίεδροι γωνίαι προσκείμεναι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἐὰν δὲ τέμνωνται τὰ ἐπίπεδα, ἀποτελοῦνται τέσσαρες δίεδροι γωνίαι ἢ ὀρθαὶ ἢ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Αἱ δὲ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

108. Δύο ἐπίπεδα εἶναι *παράλληλα*, ἐὰν ἦναι ἴσαι τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι ἠγμέναι ἀπὸ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας σημείων τοῦ ἑτέρου εἰς τὸ ἄλλο. Τὰ παράλληλα ἐπίπεδα δὲν συμπίπτουν πούποτε, ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῶσι πανταχόθεν.

β'. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἕτερον δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο. Καὶ ἐπίπεδον δὲ κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.

γ'. Ἀντιστρόφως, δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλα.

δ'. Αἱ κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τρίτου τέμνοντος αὐτὰ εἶναι παράλληλοι.

ε. Αἱ μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων παράλληλοι εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι· ἴσαι δὲ εἶναι καὶ αἱ μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων κάθετοι ἐπ' αὐτά, διότι καὶ αὗται εἶναι παράλληλοι.

109. Ἐὰν νοηθοῦν τρεῖς ἢ πλειότεραι ἐφεξῆς εὐθύγραμμοι γωνίαι, θεμέναι ὄχι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἀλλ' ὁλόγυρα εἰς διάφορα ἐπίπεδα οὕτως, ὥστε νὰ διατηροῦν ὡς κορυφήν των τὸ αὐτὸ

σημεῖον, τὸ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν τῶν γωνιῶν διάστημα, τὸ ὁποῖον ἀπὸ τοῦ κοινοῦ των σημείου βαθμηδὸν αὐξάνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, ὀνομάζεται *στερεὰ γωνία*.

Καὶ τὸ μὲν κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι κορυφὴ ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, λέγεται *κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας*· τὰ δ' ἐπίπεδα τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν λέγονται *ἕδραι αὐτῆς*· ὅθεν καλοῦνται *τρίεδροι, τετράεδροι*, καὶ γενικῶς *πολύεδροι στερεαὶ γωνίαι*, καθόσον ἔχουν τρεῖς ἕδρας, ἢ τέσσαρας, ἢ πολλάς. Αἱ κῶχαι τῶν διέδρων λέγονται *κῶχαι καὶ τῆς στερεᾶς γωνίας*.

110. *Σχῆμα στερεὸν* λέγεται τὸ ἔχον μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος ἢ βάθος, περατωμένον δὲ πανταχόθεν κατά τινα τρόπον.

β'. Τὸ περατωμένον πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων σχημάτων ἤτοι πολυγώνων λέγεται γενικῶς μὲν *πολύεδρον*, ἰδίως δὲ *τετράεδρον μὲν*, ἐὰν περατοῦται ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων, *πεντάεδρον δὲ*, ἂν περατοῦται ὑπὸ πέντε πολυγώνων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὰ πολύγωνα ταῦτα ὀνομάζονται *ἕδραι αὐτοῦ* καὶ ὅλα ὁμοῦ ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειάν του.

γ'. Τὸ πολύεδρον ἔχει ἐκτὸς τῶν *ἑδρῶν στερεὰς γωνίας*, *κορυφὰς*, αἵτινες εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν, *διέδρους γωνίας*, τὰς τῶν παρακειμένων ἑδρῶν, καὶ *κώχας*, τὰς τῶν διέδρων· ἔτι δὲ *διαγωνίους*, αἵτινες εἶναι εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι δύο κορυφὰς μὴ οὔσας εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν. Εἶναι δὲ *κυρτὸν* τὸ πολύεδρον, ἂν ἐκβαλλόμεναι αἱ ἕδραι του δὲν τὸ τέμνουν, ἀλλὰ τὸ ἀφίνουν ὅλον ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος.

δ'. *Κανονικὸν πολύεδρον* εἶναι τὸ ἔχον ὅλας τὰς ἕδρας ἴσα κανονικὰ πολύγωνα καὶ τὰς στερεάς του γωνίας ὅλας ἴσας. Εἶναι δὲ πέντε εἰδῶν τοιαῦτα πολύεδρα, *κανονικὸν τετράεδρον*, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ τρίγωνα ἴσα· *κανονικὸν ἑξάεδρον*, ἔχον ὅλας του τὰς ἕδρας τετράγωνα ἴσα, καλούμενον δὲ ἰδίως *κύβος*· *οκτάεδρον κανονικὸν* ἔχον ὅλας του τὰς ἕδρας τρίγωνα κανονικὰ ἴσα· *δωδεκάεδρον κανονικὸν*, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ἴσα κανονικὰ πεντάγωνα· καὶ *εἰκοσάεδρον κανονικὸν*, ἔχον ὅλας τὰς ἕδρας του κανονικὰ τρίγωνα ἴσα.

111. Πολύεδρον ἔχον δύο μὲν ἕδρας ὁποιασδήποτε, ἀλλ' ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς δὲ λοιπὰς ὅλας παραλληλόγραμμα, ὀνομάζεται ἰδίως *πρίσμα*.

β'. Αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι ὀνομάζονται *βάσεις τοῦ πρίσματος*, τὰ δὲ παραλληλόγραμμα *παράπλευροι ἕδραι*, αἵτινες ὅλαι ὁμοῦ συνιστῶσι τὴν *παράπλευρον ἐπιφάνειάν* του.

γ'. *Ὕψος τοῦ πρίσματος* εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις του ἀπό τινος σημείου τῆς ἑτέρας μέχρι τῆς ἄλλης.

δ'. *Ὀρθὸν* μὲν λέγεται τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι κῶχαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, *κεκλιμένον* δὲ τὸ ἔχον τὰς αὐτὰς κώχας κεκλιμένας εἰς τὰς βάσεις. Τοῦ ὀρθοῦ αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

ε'. Τὸ ὀρθὸν πρίσμα λέγεται *κανονικὸν*, ἂν αἱ βάσεις του ἦναι κανονικὰ πολύγωνα.

ς'. Τὸ πρίσμα λέγεται *τριγωνικὸν*, *τετραπλευρικὸν*, *πενταπλευρικὸν* κτλ, ὅταν αἱ βάσεις του ἦναι τρίγωνα τετράπλευρα, πεντάγωνα, κτλ.

ζ'. Τὸ ἔχον καὶ τὰς βάσεις του παραλληλόγραμμα ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας παραλληλόγραμμα καὶ ὀνομάζεται *παραλληλεπίπεδον*. Τὸ δὲ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς βάσεις ὀρθογώνια, καλεῖται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*.

η'. Ἐὰν πρίσματος ὀρθοῦ αἱ βάσεις, ἀντὶ νὰ ἦναι πολύγωνα, ἦναι κύκλοι ἴσοι καὶ παράλληλοι, ὁπότε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια δὲν συνίσταται ἐκ παραλληλογράμμων, ἀλλ' εἶναι καμπύλη, τὸ τοιοῦτον στερεὸν λέγεται ἰδίως *κύλινδρος ὀρθός*.

θ'. Ὀρθοῦ κυλίνδρου ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν βάσεων εὐθεῖα κάθετος οὖσα ἐπ' αὐτὰς λέγεται *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου.

ι'. Πᾶσα τομὴ πρίσματος ἢ ὀρθοῦ κυλίνδρου διὲπιπέδου γινομένη παραλλήλως τῶν βάσεων εἶναι ἴση μὲ τὰς βάσεις.

112. *Πυραμὶς* καλεῖται πολύεδρον ἔχον μίαν μὲν ἕδραν ὁποιονδήποτε πολύγωνον, τὰς δὲ λοιπὰς τρίγωνα ἔχοντα κορυφὴν μὲν τὸ αὐτὸ σημεῖον, βάσεις δὲ τὰς πλευρὰς τῆς πολυγώνου ἕδρας.

β'. Τὸ ὁποιονδήποτε πολύγωνον λέγεται *βάσις τῆς πυραμίδος*, τὰ δὲ τρίγωνα *παράπλευροι ἕδραι της*, αἵτινες ὅλαι ὁμοῦ συνιστῶσι τὴν *παράπλευρόν της ἐπιφάνειαν*· ἡ δὲ κοινὴ τῶν τριγώνων κορυφὴ λέγεται καὶ *τῆς πυραμίδος κορυφή*.

γ'. Ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, ἢ γενικώτερον, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ἠγμένη κάθετος λέγεται *ὕψος τῆς πυραμίδος*.

δ'. *Κανονικὴ* λέγεται ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ἔχον κέντρον (89, 6) τὸν πόδα τοῦ ὕψους. Τῆς κανονικῆς πυραμίδος τὸ ὕψος λέγεται καὶ *ἄξων*.

ε', Ἡ πυραμὶς λέγεται *τριγωνική*, *τετραπλευρική*, *πενταγωνική*, κτλ, ἐὰν ἡ βάσις της ἦναι τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον κτλ.

ϛ'. Ἐὰν πυραμίδος κανονικῆς ἡ βάσις, ἀντὶ νὰ ἦναι πολύγωνον, ἦναι κύκλος, ὁπότε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια δὲν συνίσταται ἐκ τριγώνων, ἀλλ' εἶναι καμπύλη, τὸ τοιοῦτον στερεὸν λέγεται ἰδίως *κῶνος ὀρθός*.

ζ'. Ὀρθοῦ κώνου ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς του κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν λέγεται *ὕψος*, ἔτι δὲ καὶ *ἄξων*, διότι ὁ πούς της εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῆς βάσεως· ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ἐπιζευγνύουσα ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως μὲ τὴν κορυφὴν λέγεται *πλευρὰ τοῦ κώνου*.

η'. Πᾶσα τομὴ πυραμίδος ἢ ὀρθοῦ κώνου δι' ἐπιπέδου γινομένη παραλλήλως τῆς βάσεως εἶναι ὅμοιον πολύγωνον μὲ τὴν βάσιν ἢ κύκλος. Ἡ τομὴ αὕτη χωρίζει τὴν πυραμίδα εἰς δύο μέρη, εἰς μικροτέραν πυραμίδα καὶ εἰς πολύεδρον καλούμενον *κορμὸς πυραμίδος*, τὸν δὲ ὀρθὸν κῶνον ὡσαύτως εἰς δύο μέρη, εἰς μικρότερον κῶνον καὶ εἰς στερεὸν λεγόμενον *κορμὸς ὀρθοῦ κώνου*. Ὁ κορμὸς πυραμίδος ἢ κώνου ἔχει δύο ὁμοίας ἀνίσους βάσεις, ἀλλὰ παραλλήλους· ἡ δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κορμοῦ κώνου εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα δύο σημεῖα τῶν δύο περιφερειῶν τῶν βάσεων λέγεται *πλευρὰ αὐτοῦ*.

113. *Σφαῖρα* λέγεται στερεὸν ἔχον ἐπιφάνειαν καμπύλην

τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἴσον ἀπέχουν ἀφ' ἑνὸς ἐντὸς αὐτῆς σημείου, καλουμένου *κέντρου*.

β'. Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου μέχρι σημείου τῆς ἐπιφανείας εὐθεῖα καλεῖται *ἀκτίς*. Αἱ ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ὅλαι ἴσαι.

γ'. Εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ λήγουσα ἑκατέρωθεν εἰς σημεῖα τῆς ἐπιφανείας της λέγεται *διάμετρος*. Ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἐπομένως ὅλαι αἱ διάμετροι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι.

δ'. Πᾶσα τομὴ σφαίρας δι' ἐπιπέδου γινομένη εἶναι κύκλος. Καὶ εἰ μὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἡ τομὴ, ὀνομάζεται *μέγιστος κύκλος*, εἰ δὲ μὴ, ὀνομάζεται *μικρὸς*, ὅστις εἶναι τόσον μικρότερος, ὅσον μακρύτερα τοῦ κέντρου γίνεται ἡ τομή.

ε. Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ὅλοι ἴσοι, διότι διάμετρος αὐτῶν εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας.

ς'. Οἱ μέγιστοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους εἰς δύο ἴσα μέρη, τέμνουσι δὲ καὶ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἡμισφαίρια καὶ τὴν ἐπιφάνειάν της εἰς δύο ἡμιεπιφανείας σφαιρικάς.

ζ'. Ἐπίπεδον λέγεται *ἐφαπτόμενον* σφαίρας, ἐὰν ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον με τὴν ἐπιφάνειάν της, ὅλα δὲ τ' ἄλλα του ἐκτὸς αὐτῆς.

η'. *Πόλος κύκλου* τῆς *σφαίρας* λέγεται σημεῖον τῆς ἐπιφανείας της ἴσον ἀπέχον ἀφ' ὅλων τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ἕκαστος δὲ κύκλος μέγιστος ἢ μικρὸς ἔχει δύο πόλους, οἵτινες εἶναι τὰ ἄκρα τῆς καθέτου ἐπὶ τὸν κύκλον διαμέτρου. Ὅλοι δὲ οἱ παράλληλοι κύκλοι ἔχουν τοὺς αὐτοὺς δύο πόλους. Ἡ ἐπιζευγνύουσα τοὺς πόλους διάμετρος λέγεται καὶ ἄξων τῶν κύκλων ἢ καὶ τῆς σφαίρας. Τὰ κέντρα ὅλων τῶν παραλλήλων κύκλων εἶναι σημεῖα τοῦ ἄξονος.

θ'. *Ζώνη* μὲν λέγεται μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν δύο παραλλήλων κύκλων, *τμῆμα δὲ σφαιρικὸν* τὸ μέρος τῆς σφαίρας τὸ μεταξὺ τῶν αὐτῶν δύο παραλλήλων κύκλων. Καὶ ἡ ζώνη αὐτὴ ἔχει δυο βάσεις, τὰς περιφερείας τῶν κύκλων, καὶ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχει δύο βάσεις, τοὺς παραλλήλους κύκλους· ὕψος δὲ ἀμφοτέρων εἶναι ἡ ἀπὸ τῆς ἑτέρας βάσεως ἐπὶ τὴν ἄλλην κάθετος. Ἀλλ' εἶναι καὶ μὲ μίαν βάσιν ζώνη καὶ τμῆμα σφαιρικόν, τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας καὶ τὸ τῆς σφαίρας, τὸ χωριζόμενον διά τινος κύκλου, ὅστις εἶναι ἡ βάσις· τὸ ὕψος τούτων εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετος ἐπ' αὐτὸν μέχρι τῆς συμπτώσεώς της μὲ τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸν πόλον τῆς βάσεως.

114. *Ὄγκος* ὀνομάζεται τὸ στερεόν, ὅταν νοῆται ὡς ποσόν, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ μετρηθῇ ἢ εἶναι ἤδη μετρημένον.

β'. Αἱ μονάδες, πρὸς τὰς ὁποίας μετρεῖται πᾶς ὄγκος στερεοῦ σχήματος, εἶναι οἱ κύβοι τῶν γραμμικῶν μονάδων, ἤτοι οἱ κύβοι τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα τῶν γραμμικῶν μονάδων, ἢ αἱ κῶχαι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γραμμικὰς μονάδας. Καὶ τὸν μὲν ἔχοντα κώχην ἴσην μὲ τὸν πῆχυν λέγομεν *πηχυαῖον κύβον* μᾶλλον παρὰ *κυβικὸν πῆχυν*, ὡς συνήθως λέγεται· ὁ δὲ ἔχων κώχην ἴσην μὲ παλάμην καλεῖται *παλαμιαῖος κύβος*· ὡσαύτως *δακτυλιαῖος*, *γραμμιαῖος κύβος*, κτλ, καὶ ὄχι κυβικὸς δάκτυλος, κυβικὴ γραμμή, κτλ.

γ'. *Μέτρον ὄγκου στερεοῦ τινος* εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν κύβων, μὲ τὸν ὁποῖον εἶναι ἴσος ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ. Οἷον, ἂν ἦναι γνωστὸν ὅτι ὁ ὄγκος στερεοῦ εἶναι ἴσος μὲ 27 δακτυλιαίους κύβους, ὁ ἀριθμὸς 27 κύβοι δακτυλιαῖοι εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ.

δ'. *Τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τριῶν γραμμῶν* λέγεται κοινότερον *γινόμενον τῶν τριῶν γραμμῶν*· οἷον, ἂν γραμμή τις ἦναι 3 δακτύλων μακρά, ἄλλη ἦναι 5, καὶ ἄλλη 6, τὸ γινόμενον τῶν μέτρων 3 καὶ 5 καὶ 6 ἤτοι ὁ 90 λέγεται γινόμενον τῶν τριῶν γραμμῶν. Ἡ δὲ μονὰς τοῦ γινομένου 90 δὲν εἶναι ἡ μονὰς τῶν γραμμῶν, ὁ δάκτυλος, ἀλλ ἢ εἶναι ἀπροσδιόριστος καὶ τὸ γινόμενον 90 ἀριθμὸς ἀφῃρημένος, ἤ, ὅταν αἱ γραμμαὶ ἦναι γραμμαὶ σχήματος στερεοῦ, οἷον βάσεως αὐτοῦ γραμμαὶ καὶ ὕψος, τότε ἡ μονὰς τοῦ γινομένου εἶναι κύβος δακτυλιαῖος μέν, ἂν ἡ μονὰς τῶν γραμμῶν ἦναι δάκτυλος, παλαμιαῖος δέ, ἂν ἡ μονὰς τῶν γραμμῶν ἦναι παλάμη· οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

115. *Οἱ κύβοι εἶναι ἴσοι, ἐὰν αἱ κῶχαί των ἦναι ἴσαι. ἢ, ὅπερ ταυτόν, ἂν αἱ ἕδραι των ἦναι ἴσαι.* Διότι, ἐὰν ἐπιτεθῇ ὁ εἷς κύβος ἐπὶ τοῦ ἄλλου ταυτίζεται μὲ αὐτόν.

β΄. *Ἐὰν ἡ κώχη κύβου ἦναι διπλασία, ἢ τριπλασία, κτλ τῆς κώχης ἄλλου κύβου, ἴσης οὔσης μὲ τὴν μονάδα, τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου αὐτοῦ εἶναι 2 ἐπὶ 2 ἐπὶ 2 ἤτοι 8 κύβοι τῆς γραμμικῆς μονάδος· ἢ 3 ἐπὶ 3 ἐπὶ 3 ἤτοι 27, κτλ.* Διότι, ἂν διαιρεθοῦν εἰς 2 ἢ εἰς 3 κτλ ἴσα μέρη τρεῖς κῶχαι αὐτοῦ συμπίπτουσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεως σημείων ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, οὕτω χωρίζεται ὁ κύβος εἰς 8 ἴσους μὲ τὴν μονάδα κύβους, ἢ εἰς 27 κτλ, (σχ. 109).

Καὶ ἄλλου δὲ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ κώχη ἔχει μέτρον μικτὸν ἀριθμόν, π. χ. 3,6, τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου του εἶναι τὸ γινόμενον τριῶν ἴσων ἀριθμῶν μὲ τὸν 3,6, ἤτοι 46,656· δηλ. τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ κώχη εἶναι 3 παλαμῶν καὶ 6 δακτύλων, ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ 46 παλαμιαίους κύβους καὶ 656 δακτυλιαίους κύβους.

Σημ. ά. Ἐντεῦθεν εἶναι δῆλον ὅτι ὁ παλαμιαῖος κύβος εἶναι $\frac{1}{1000}$, ἢ ἄλλως, 0,001 τοῦ πηχυαίου, ἢ ὁ πηχυαῖος χιλιοπλάσιος τοῦ παλαμιαίου· ὁ δὲ δακτυλιαῖος κύβος εἶναι $\frac{1}{1000}$ ἢ 0,001 μὲν τοῦ παλαμιαίου, $\frac{1}{1000000}$ δέ, ἢ ἄλλως, 0,000001 τοῦ πηχυαίου, κτλ. Ὥστε παλαμιαῖοι κύβοι 46,656 εἶναι 46 παλαμιαῖοι καὶ 656 δακτυλιαῖοι κύβοι. Παλαμιαῖοι δὲ κύβοι 12,427903 εἶναι παλαμιαῖοι 12, δακτυλιαῖοι 427 καὶ γραμμιαῖοι 903 κύβοι, κτλ.

Σημ. β΄. Εἶναι συνήθεια νὰ ὀνομάζουν *κύβους* καὶ τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες εἶναι μέτρα κύβων, ἤτοι γινόμενα τριῶν ἴσων ἀριθμῶν, ὡς ὀνομάζουν *τετραγώνους* τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες εἶναι μέτρα τετραγώνων, ἤτοι γινόμενα δύο ἴσων ἀριθμῶν. Π. χ. τῶν ἀκεραίων

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

τετράγωνοι εἶναι οἱ

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100,

κύβοι δὲ οἱ

1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.

Οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι *παντὸς κύβου ὁ ὄγκος ἔχει μέτρον τὸν ἀριθμὸν κύβον τοῦ μέτρου τῆς κώχης του.*

116. Καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου τρεῖς κῶχαι συμπίπτουσαι εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουν μέτρα ἀκεραίους ἀριθμούς, καὶ *τούτου ὁ ὄγκος* ἀποδεικνύεται ὡς ἀνωτέρω ὅτι *ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν τριῶν κωχῶν*. Π. χ. ἂν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 110) ἡ μὲν κώχη ΑΒ ἦναι 2 δακτύλων, ἡ δὲ ΑΓ ἦναι 3, ἡ δὲ ΑΔ ἦναι 4, ὁ ὄγκος του ἔχει μέτρον 24 δακτυλιαίους κύβους, ἤτοι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ 24 δακτυλιαίους κύβους.

β΄. Ἀλλὰ καὶ μικτοὶ ἀριθμοὶ ἂν ἦναι τὰ μέτρα τῶν τριῶν κωχῶν, τῶν συμπιπτουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, *μέτρον τοῦ ὄγκου αὐτοῦ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν τριῶν αὐτῶν κωχῶν.*

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ μία κώχη εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ γινόμενον δὲ τῶν ἄλλων δύο εἶναι τὸ μέτρον τῆς βάσεώς του· διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι *μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του.*

γ΄. Πᾶν δὲ ἄλλο παρὰ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχον βάσιν ἰσοδύναμον καὶ ὕψος ἴσον. Διὰ τοῦτο καὶ μέτρον τοῦ ὄγκου του εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. *Εἶναι δὲ τοῦτο γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του.* Ἂν παραλληλεπιπέδου ἡ βάσις εὑρεθῇ (93, δ΄.) ὅτι ἔχει μέτρον 12, τὸ δὲ ὕψος ἔχει μέτρον 5 δακτύλων, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θέλει εἶσθαι ἴσος μὲ 60 δακτυλιαίους κύβους.

δ΄. Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι ἥμισυ παραλληλεπιπέδου ἔχοντος τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος, βάσιν δὲ διπλασίαν. Διὰ τοῦτο καὶ *μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του,* τὸ ὁποῖον εἶναι ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ε΄. Πᾶν ἄλλο πρίσμα χωρίζεται εἰς τόσα τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς ὅσα τρίγωνα χωρίζεται ἡ βάσις του, καὶ ἐπομένως μέτρον τοῦ ὄγκου του εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων, τὸ ὁποῖον καταντᾷ εἰς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του.

Λοιπὸν γενικῶς, *μέτρον τοῦ ὄγκου παντὸς πρίσματος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του, ἤτοι ὁ ὄγκος του εἶναι ἴσος μὲ τόσους κύβους, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον.* Οἱ δὲ κύβοι εἶναι κύβοι τῆς μονάδος, πρὸς τὴν ὁποίαν μετρεῖται τὸ ὕψος, κτλ.

ϛ΄. Καὶ *ὀρθοῦ δὲ κυλίνδρου*, ὅστις ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν τῶν πρισμάτων, *ὁ ὄγκος ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του.* Ἂν λοιπὸν εὑρεθῇ (97) τὸ μέτρον τῆς βάσεως ὀρθοῦ κυλίνδρου ἴσον μὲ 200 περίπου, τὸ δὲ μέτρον τοῦ ὕψους του ἴσον μὲ 6 δακτύλους, ὁ ὄγκος του θέλει εἶσθαι ἴσος σχεδὸν μὲ δακτυλιαίους κύβους 1200.

ζ΄. *Τῆς δὲ ἐπιφανείας πρίσματος τὸ μέτρον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων ὅλων τῶν ἑδρῶν του.*

η΄. *Τοῦ δὲ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του.* Εἰς τοῦτο δὲ τὸ μέτρον ἀφοῦ προστεθῇ καὶ τὸ μέτρον τῶν δύο βάσεών του, θέλει εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὅλης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

117. Ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τρίτον μέρος πρίσματος ἔχοντος ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος· διὰ τοῦτο καὶ *μέτρον τοῦ ὄγκου της εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ*

μέτρου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους της. Τὸ δὲ μέτρον τῆς ἐπιφανείας της εἶναι ἄθροισμα τῶν μέτρων ὅλων τῶν ἑδρῶν της.

β'. Ἀλλὰ καὶ ὀρθοῦ κώνου, ὅστις ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν τῶν πυραμίδων, *ὁ ὄγκος ἔχει μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ μέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του. Ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνειά του ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μέτρου τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς πλευρᾶς του.* Εἰς δὲ το μέτρον τοῦτο ἀφοῦ προστεθῇ καὶ τὸ μέτρον τῆς βάσεως, τὸ ἄθροισμα θέλει εἶσθαι τὸ μέτρον ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

γ'. *Κορμοῦ δὲ πυραμίδος ἢ κώνου ὁ ὄγκος ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δύο βάσεών του καὶ μέσης ἀναλόγου αὐτῶν.*

Σημ. Τῆς μέσης ἀναλόγου τῶν δύο βάσεων τὸ μέτρον εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιασθοῦν τὰ μέτρα τῶν δύο βάσεων καὶ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου· ὥστε κορμοῦ πυραμίδος ἢ κώνου ὁ ὄγκος πόσος εἶναι τότε μόνον εἶναι δυνατὸν νὰ τὸ εὕρῃ τις, ὅταν γνωρίζῃ νὰ εὑρίσκῃ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμῶν. Ἀλλ' εὑρίσκεται τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου κορμοῦ πυραμίδος καὶ οὕτω· πολλαπλασιάζεται ἡ μὲν μεγαλητέρα βάσις του ἐπὶ μίαν τινὰ τῶν πλευρῶν της, ἡ δὲ μικροτέρα βάσις ἐπὶ τὴν πλευράν της τὴν ἀντίστοιχον εἰς τὴν τῆς μεγαλητέρας, ἔπειτα ἡ διαφορὰ τῶν γινομένων πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, τελευταῖον διαιρεῖται τὸ γινόμενον διὰ τοῦ τριπλασίου τῆς διαφορᾶς τῶν εἰρημένων πλευρῶν τῶν βάσεων. Τὸ δὲ μέτρον τοῦ ὄγκου κορμοῦ κώνου εὑρίσκεται οὕτω· πολλαπλασιάζεται ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν κύβων τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων ἐπὶ τὸν 3,14 καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, ἔπειτα διαιρεῖται τὸ γινόμενον διὰ τοῦ τριπλασίου τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων.

δ'. *Τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας κορμοῦ πυραμίδος εἶναι ἄθροισμα τῶν μέτρων ὅλων τῶν ἑδρῶν του. Τὸ δὲ μέτρον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κορμοῦ κώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν μέτρων τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς πλευρᾶς του.* Εἰς τοῦτο δὲ τὸ μέτρον ἀφοῦ προστεθοῦν καὶ τὰ μέτρα τῶν δύο βάσεων, τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ μέτρον ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου.

118. *Τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας σφαίρας εἶναι γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς διαμέτρου της ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου της, ἢ ἄλλως, εἶναι τετραπλάσιον τοῦ μέτρου τοῦ ἐμβαδοῦ μεγίστου κύκλου της. Πρέπει λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ μέτρον τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159 ἢ μόνον ἐπὶ 3,14 καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς διαμέτρου.*

Ἂν λοιπὸν ἡ διάμετρος σφαίρας ἦναι παλαμῶν 2,5, τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας της θέλει εἶσθαι σχεδὸν παλαμιαίων τετραγώνων 19,6250.

β'. *Τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου σφαίρας εἶναι γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς ἐπιφανειας της ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ τρίτου τῆς ἀκτῖνός της. Πρέπει λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ μέτρον τῆς διαμέτρου της ἐφ' ἑαυτὸ, καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸ αὐτὸ, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν 3,14 καὶ τὸ τελευταῖον γινόμενον νὰ διαιρεθῇ διὰ 6.*

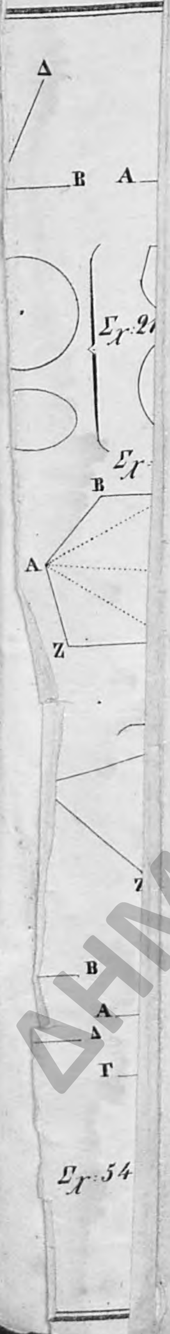
Σφαίρας λοιπὸν, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι παλαμῶν 2,5, ὁ ὄγκος εἶναι σχεδὸν παλαμιαίων κύβων 8,177083, ἤτοι κύβων παλαμιαίων 8 δακτυλιαίων 177 καὶ γραμμιαίων 83.

γ'. *Τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας ὁποιασδήποτε ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς εἰς ἣν ἀνήκει σφαίρας ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους της.*

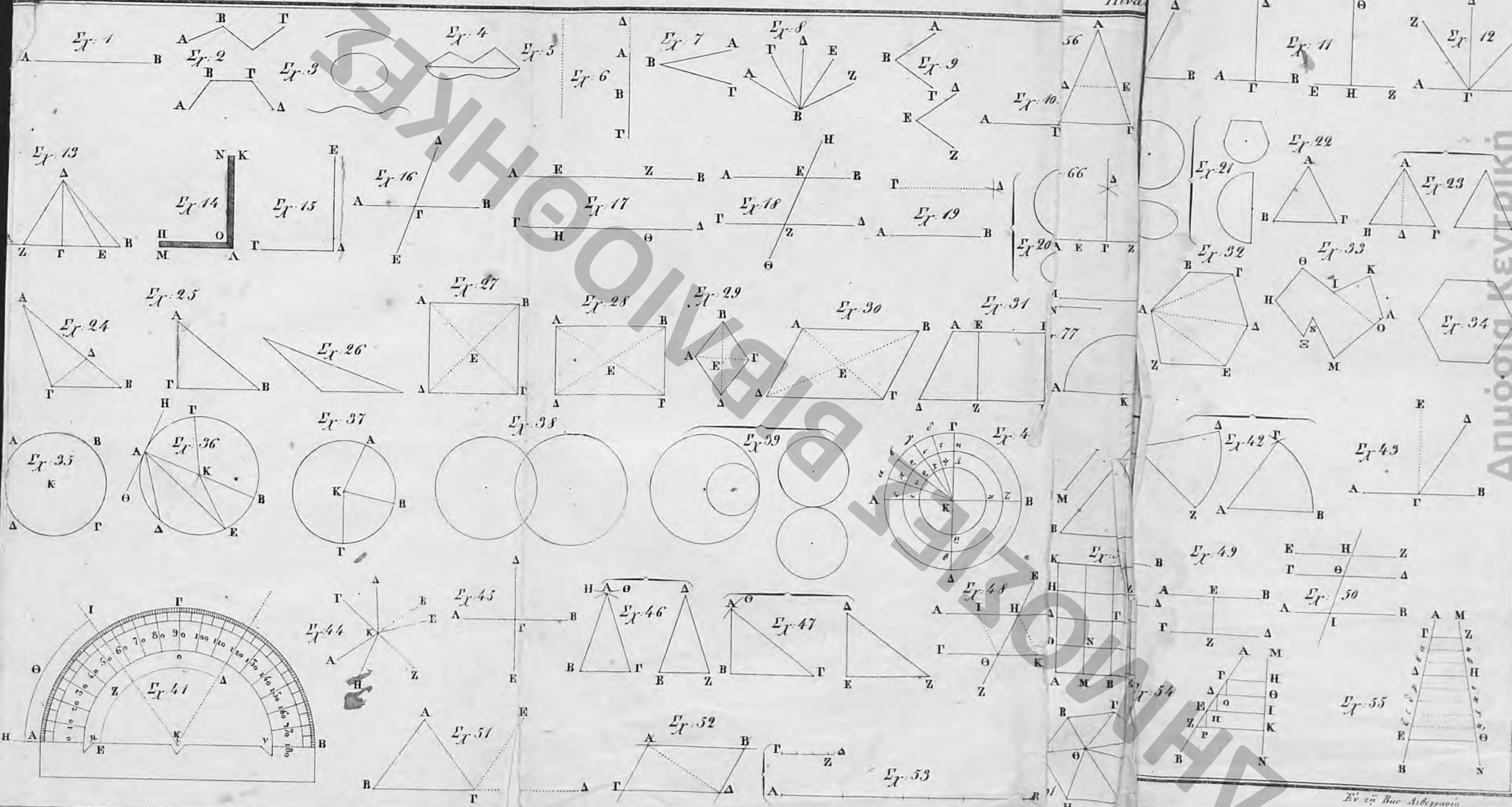
δ'. Τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου σφαιρικοῦ τμήματος μὲ δύο βάσεις εὑρίσκεται ἐὰν προστεθοῦν τὰ μέτρα τῶν βάσεών του, τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους του, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ τὸ μέτρον σφαίρας, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.

Τὸ δὲ μέτρον τοῦ ὄγκου σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ μέτρον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μέτρον τοῦ ὕψους, τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 2, καὶ εἰς τὸ πηλίκον προστεθῇ τὸ μέτρον σφαίρας, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.

119. Ὁ λόγος στερεοῦ πρὸς ἄλλο εὑρίσκεται ἀφοῦ μετρηθοῦν αὐτὰ καὶ διαιρεθῇ τὸ μέτρον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ μέτρου τοῦ δευτέρου· τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁ λόγος.



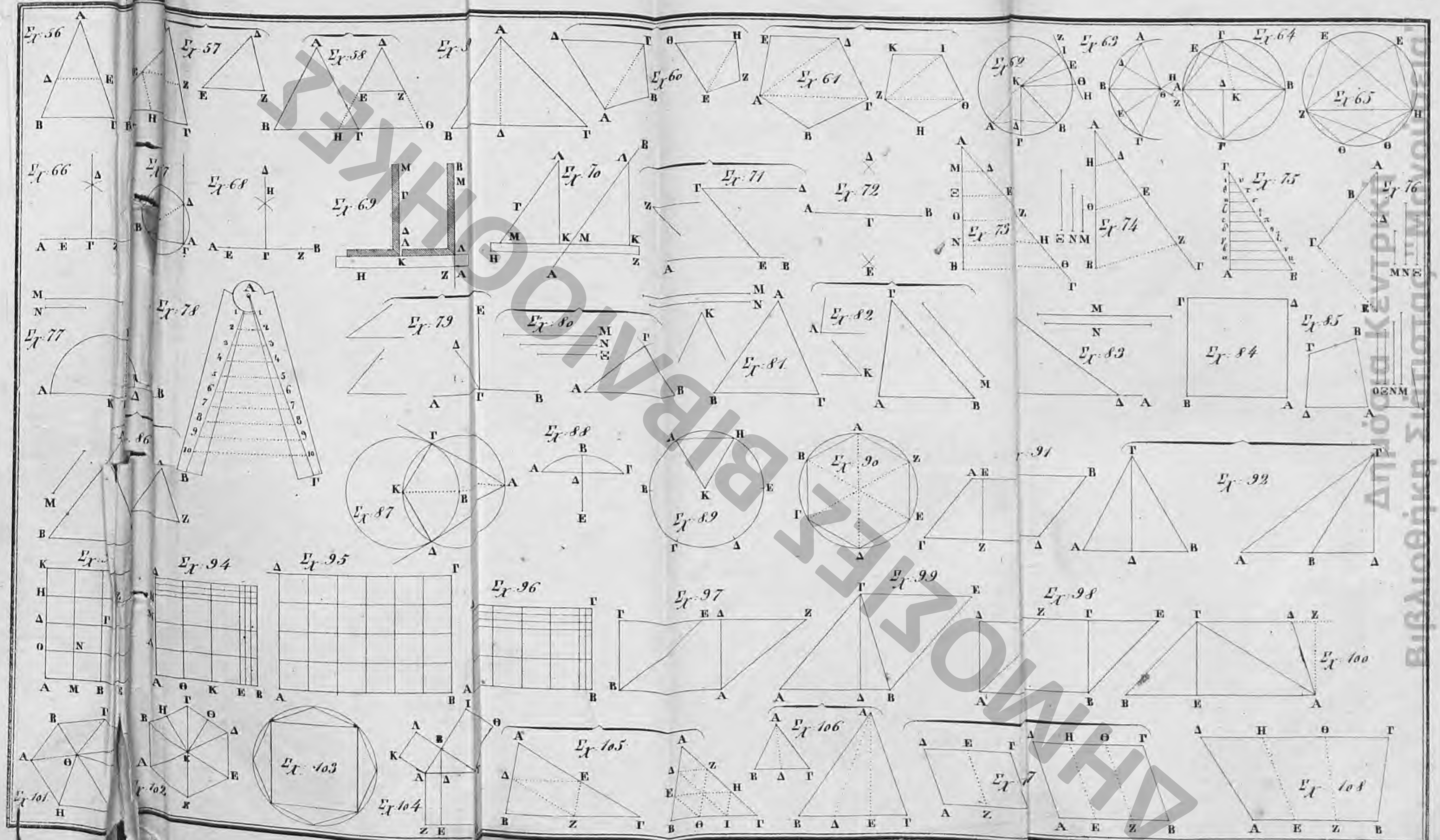
Πίναξ 1.



Εχάρ. Ν. Στεφριάννης

Ετύπ. Α. Αργυρίου

Εν τῇ Βασ. Λιθογραφίᾳ


Σχ. 56
Σχ. 57
Σχ. 58
Σχ. 60
Σχ. 61
Σχ. 62
Σχ. 63
Σχ. 64
Σχ. 65
Σχ. 66
Σχ. 67
Σχ. 68
Σχ. 69
Σχ. 70
Σχ. 71
Σχ. 72
Σχ. 73
Σχ. 74
Σχ. 75
Σχ. 76
Σχ. 77
Σχ. 78
Σχ. 79
Σχ. 80
Σχ. 81
Σχ. 82
Σχ. 83
Σχ. 84
Σχ. 85
Σχ. 87
Σχ. 88
Σχ. 89
Σχ. 90
Σχ. 92
Σχ. 94
Σχ. 95
Σχ. 96
Σχ. 97
Σχ. 98
Σχ. 99
Σχ. 100
Σχ. 101
Σχ. 102
Σχ. 103
Σχ. 104
Σχ. 105
Σχ. 106
Σχ. 108

100 · 20 · 2649 ·

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Νικόλαος Μαρκίδης.

Παράδειγμα.

Ὅποιος ἀπό τούς διδασκάλους ἀπολαύσει φήμην καλήν, οὗτος ὠφελεῖται.

Νικόλαος Μάρκ.

Ἔτει 1855. 8βρίου 15.

Καὶ τόδε σὺν τοῖς ἄλλοις. [illegible]
ἐμοῦ τοῦ Νικολάου Μάρκου [illegible]
1850. Ιανουαρίου 1. [illegible]

Ἔτει 1855 8βρ 15.

[illegible]

[illegible] Κ

Ἄγγελος Δημήτριος

$\frac{11}{12} : \frac{6}{15} :: \frac{30}{42} . x$ Νικόλαος Μάρκου

$\frac{11}{12} . \frac{30}{42} :: \frac{6}{15} : x$ Νικόλαος $\frac{19}{630}$ $\frac{12}{11}$

$\frac{11}{6630}$ 630

$\frac{7}{12} : \frac{3}{32} :: 250 . x$ 3846430 $\frac{63}{1260}$

$\frac{43}{13}$ / 216 3 192

εὑρέθη [illegible] ἐδαπάνησε [illegible] [illegible] [illegible] 1900 95 35 ἐδαπάνησε 1530 [illegible] ὅσα ἐξόδευσε [illegible] [illegible] [illegible] 2 [illegible] [illegible] [illegible] 20 4 [illegible] [illegible]

7
224