Ἀριθ. 1679
Δημοσία ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ Σάμου
~~ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΑΜΟΥ~~

Αριθ. ....

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΑΜΟΥ

Ο ΔΩΡΗΤΗΣ Θεμ. Μάλλη

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Μπάλης

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΑΜΟΥ
Ἀριθ. 5343
Χρονολ. 12/4/11

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητευόντων εἰς τὴν κατωτάτην τάξιν τῶν γυμνασίων

ΥΠΟ

Χ. ΒΑΦΑ,

Τὰ πλεῖστα διωρθωμένη ἐκδίδεται τὸ δεύτερον.

> Πείθειν δὲ προσήκει τοὺς μέλλοντας ἐν τῇ πόλει τῶν μεγίστων μεθέξειν ἐπὶ λογιστικὴν ἰέναι καὶ ἀνθάπτεσθαι αὐτῆς μὴ ἰδιωτικῶς, ἀλλ' ἕως ἂν ἐπὶ θέαν τῆς τῶν ἀριθμῶν φύσεως ἀφίκωνται τῇ νοήσει αὐτῇ, ...
>
> Πλατ. Πολ. βιβλ. ζ'.

ΑΘΗΝΗΣΙΝ

ΤΥΠΟΙΣ Φ. ΚΑΡΑΜΠΙΝΟΥ ΚΑΙ Κ. ΒΑΦΑ.

(Παρὰ τῇ ὁδῷ Βύσσῃ).

1850

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Χίου

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Πᾶν ἀντίτυπον τοῦ βιβλίου τούτου μὴ ἔχον τὴν κάτωθι ἰδιόχειρόν μου ὑπογραφὴν εἶναι παρατυπωμένον, ὁ δὲ παρατυπώσας θέλει καταδιωχθῆ κατὰ τὸν νόμον. Πᾶν δ' ὅ,τι συντείνει πρὸς ἀνακάλυψιν αὐτοῦ θέλει δραστηρίως ἐνεργηθῆ.

Βάβας

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Πρὸς τὸν ἀναγινώσκοντα.

Ὁ τρίτος οὗτος τόμος τῆς σειρᾶς τῶν στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν ἐμπεριλαμβάνει τὴν θεωρίαν ὅλης τῆς ἄλλης Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς ἐκτὸς τοῦ περὶ τῶν δυνάμεων καὶ τῶν ῥιζῶν. Τοῦτο δὲ καὶ ὅσ' ἄλλα τῆς στοιχειώδους Ἀριθμητικῆς σπουδάζονται ἐντελέστερα διὰ τῶν λεγομένων ἀλγεβρικῶν συμβόλων, καὶ διὰ τοῦτο κοινῶς ἀποτελοῦσι μέρος τῆς Ἀλγέβρας, ἐμπεριέχονται ἐν τῷ τετάρτῳ τόμῳ, τῷ Συμπληρώματι τῆς Ἀριθμητικῆς, ἐν ᾧ βαθμηδὸν εἰσάγονται οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

Πολλὰ δ' ἔτη ἐνασχολούμενος καὶ εἰς διδασκαλίαν τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ μάλιστα εἰς τὴν μελέτην αὐτῆς, φρονῶ ὅτι πολλὰ τῶν ὅσ' ἀπαντῶνται εἰς διαφόρους Ἀριθμητικάς, ὅσας ἔτυχε ν' ἀναγνώσω, οἷον ὁρισμοί, ἀποδείξεις κτλ, ἔχουσι χρείαν ἐπανορθώσεως. Π. χ. εἶναι δυνατὸν νὰ νοήσῃ τις ὅ,τι εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, ὅτι εἶναι *τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ὁποιουδήποτε ποσοῦ πρὸς τὴν μονάδα του*; ἐνῷ εἶναι διπλοῦς τρόπος συγκρίσεως, ἐνῷ τί εἶναι τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς εἶναι ἄδηλον καὶ δικαίως τις ἀπορεῖ τί εἶναι αὐτὸ τὸ ἐξαγόμενον, ἐνῷ ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἔννοια πλήθους καὶ ὄχι ὁποιουδήποτε ποσοῦ, κτλ, κτλ. Πιστεύω δὲ ὅτι, ἂν ἐσώζετο πραγματεία τις Ἀριθμητικῆς καὶ Λογιστικῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ὡς ἐσώθη ἡ Γεωμετρία του Εὐκλείδου, αἱ στοιχειώδεις Ἀριθμητικαὶ τῶν νεωτέρων ἤθελον εἶσθαι πολὺ τελειότεραι.

Ἐν τούτῳ τῷ τόμῳ, ὅστις εἶναι τὸ κύριον μέρος τῆς Ἀριθμητικῆς, ἐπροσπάθησα, ὅσον μοι ἦτον πρὸς τὸ παρὸν δυνατὸν, νὰ ἐπανορθώσω ἱκανὰ, καὶ διὰ τῆς ἰδιαιτέρας διατάξεως τῶν μερῶν αὐτῆς ν' ἀναγάγω τὰ διάφορα τὸ φαινόμενον εἰς γενικὰς ἀρχὰς, ὠφεληθεὶς ἐκ τοῦ ὅτι ἀκολουθεῖ μετὰ τὰς πράξεις ἡ θεωρία.

Ἔτι δὲ ἠθέλησα νὰ καταστήσω σαφέστερον ὅτι ἡ Ἀριθμη-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τικὴ εἶναι ἐπιστήμη τῶν ἀριθμῶν καθ' αὐτούς τε, ἀφῃρημένους καὶ ἐφηρμοσμένους εἰς τὰ διαφόρου εἴδους ποσὰ, καὶ πρὸς ἀλλήλους καθ' ὅλους τοὺς διαφόρους λογισμούς.

Νομίζων δὲ χρησιμώτερον παντὸς ἄλλου γυμνασιακοῦ μαθήματος τὰ Μαθηματικὰ εἰς μόρφωσιν τῶν νοητικῶν δυνάμεων τῶν μαθητῶν, ἐπροσπάθησα καὶ διὰ τοῦ πρώτου τούτου μαθήματος νὰ συντελέσω εἰς ἐπιτυχίαν τοῦ σκοποῦ τούτου, ἔχων ὡς κύριον τὴν θεωρίαν τῆς Ἀριθμητικῆς, πάρεργον δὲ τὴν ἄσκησιν εἰς τὴν πρᾶξιν, ἥντινα πρέπει νὰ μανθάνωσιν ἀρκούντως ἐν τοῖς Ἀλληλοδιδακτικοῖς καὶ Ἑλληνικοῖς σχολείοις.

Ἐν συντόμῳ, ἔγραψα ἵνα σαφέστερον δώσω ὀρθοτέραν ἰδέαν τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ ἵνα συνδράμω τὴν ἀνάπτυξιν τῶν νοητικῶν δυνάμεων τῶν νέων. Ἂν δ' ἐπέτυχα ἢ ὄχι, τοῦτο ἀπόκειται εἰς τοὺς εἰδήμονας νὰ τὸ κρίνωσιν.

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ.

Σελ.	Στιχ.	Γράφε	Ἀντὶ
29	1	ἀφαιρετέου	ἀφαιρέτου
37	8	ἀφαιρετέου	ἀφαιρέτου
43	9	ἑκατοντάκις	δεκάκις
63	6	πολλαπλασιαστοῦ	πολλαπλασιασμοῦ
85	16	95	92
95	4	360	376
116	7	ἰσοδύνα	δύναῖσο ἢ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΑΥΤΩΝ.

Τί καλεῖται ποσὸν καὶ διάφορα εἴδη αὐτοῦ.

1. *Ποσὸν* ἢ ἀφῃρημένως *ποσότης* καλεῖται πᾶν ὅ,τι ἔχει διαφόρους βαθμούς (α).

Ποσὸν εἶναι τὸ πλῆθος, ἡ ἔκτασις (γραμμὴ, ἐπιφάνεια, στερεὸν), τὸ βάρος, ὁ χρόνος, ἡ ἀξία, ἡ θερμότης κτλ.

Ἔχων τις ἰδέαν τινὰ ἑκάστου τούτων (β) καταλαμβάνει ὅτι αὐτὸ ἔχει διαφόρους βαθμοὺς, ὅτι εἶναι ποσὸν, ἐὰν παραβάλῃ τὰ εἰς διάφορα πράγματα εὑρισκόμενα ὡς ἰδιότητες αὐτῶν.

Πολλοὶ εἶναι οἱ μαθηταὶ τάξεώς τινος, πολλοὶ οἱ μαθηταὶ ὅλου τοῦ σχολείου, πολλοὶ οἱ κάτοικοι πόλεως, πολλὰ τὰ ἄστρα τοῦ οὐρανοῦ· ἀλλὰ δὲν εἶναι τόσοι οἱ δεύτεροι, ὅσοι οἱ πρῶτοι, οὐδὲ οἱ τρίτοι, ὅσοι οἱ δεύτεροι καὶ οἱ πρῶτοι κτλ· ἄρα τὸ πλῆθος ἔχει διαφόρους βαθμοὺς, ἄρα εἶναι ποσόν.

Μακρὸν εἶναι τὸ βιβλίον, μακρὰ εἶναι ἡ τράπεζα, μακρὰ εἶναι ἡ οἰκία· δὲν εἶναι ὅμως ἐπίσης μακρὰ ὅλα, ἀλλὰ διαφέρει αὐτῶν τὸ μῆκος· ἄρα τὸ μῆκος ἔχει διαφόρους βαθμοὺς, ἄρα εἶναι ποσόν. Οὕτω καὶ περὶ παντὸς ἄλλου.

(α) Τὸ κοινῶς λεγόμενον, ὅτι ποσὸν εἶναι πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον, δὲν ὁρίζει ἀκριβῶς, νομίζω, τὸ ποσόν· πολὺ δ' ὀλιγώτερον, ἐὰν ἀντὶ τοῦ μᾶλλον καὶ ἧττον τίθηται τὸ αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν.

(β) Ἂν καὶ ἀκριβῆ ἰδέαν ἑκάστου τούτων ἀποκτᾷ ὁ σπουδάζων τὴν γεωμετρίαν, τὴν φυσικὴν, τὴν φιλοσοφίαν μάλιστα, ἀλλ' εἰς τὸ νὰ διακρίνῃ ἕκαστον αὐτῶν ὅτι εἶναι ποσον ἀρκεῖ καὶ ἡ ἰδέα, τὴν ὁποίαν ἔχει ἕκαστος περὶ αὐτοῦ·

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

2. Θεωροῦντες ὅτι ἄλλο τι εἶναι τὸ πλῆθος, ἄλλο ἡ ἔκτασις, ἄλλο τὸ βάρος, κτλ, ἂν καὶ ἔχουσιν ὅλα τὴν ἰδιότητα, δι' ἣν καλοῦνται ποσά, τὰ διακρίνομεν καλοῦντες αὐτὰ *εἴδη ποσοῦ*· τὸ πλῆθος εἶναι ἓν εἶδος ποσοῦ, ἡ ἔκτασις ἄλλο εἶδος ποσοῦ, τὸ βάρος ἄλλο κτλ. Δύο πλήθη διάφορα εἶναι δύο *ὁμοειδῆ* ποσά· δύο βάρη διάφορα ὡσαύτως· ἀλλ' ἓν πλῆθος καὶ ἓν βάρος, ἢ ἓν βάρος καὶ εἷς χρόνος εἶναι *ἑτεροειδῆ* ποσά.

Διάφορα εἴδη ποσοῦ εἶναι πλεῖστα· ἀλλ' ἐν τοῖς ἑξῆς θέλομεν περιορισθῆ εἰς τὰ προμνημονευθέντα, ἰδίως δὲ εἰς τὸ πλῆθος.

3. Ἐπειδὴ τὸ ἑκάστου εἴδους ποσὸν ἔχει διαφόρους βαθμούς, εἶναι δὲ ὠφελιμώτατον ἕκαστος βαθμὸς αὐτοῦ νὰ διακρίνηται ἀκριβέστατα ἀπὸ παντὸς ἄλλου βαθμοῦ, καὶ ἐπειδή, ὅταν μᾶς παρουσιασθῇ μόνος ἕκαστος βαθμὸς ποσοῦ, μᾶς παρέχει ἰδέαν τινὰ ὄχι ἀκριβῆ καὶ εὐκόλως τὸν συγχέομεν μὲ ἄλλον τινά, ἐὰν δὲ παραβληθῇ μὲ ἄλλον ὄχι ἴσον, εὐκόλως μὲν διακρίνομεν ἂν ἦναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τοῦ ἄλλου, ἀλλ' ὄχι ἀκριβῶς πόσον εἶναι, ὥστε νὰ μὴ τὸν συγχέωμεν μὲ ἄλλους βαθμοὺς μικροτέρους ἢ μεγαλητέρους τοῦ ἄλλου, διὰ ταῦτα εἶναι ἀνάγκη νὰ εἴπωμεν περὶ ἄλλου τινὸς τρίτου τρόπου, καθ' ὃν προσδιορίζεται ἕκαστος βαθμὸς ποσοῦ ἀκριβέστατα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ πλήθους, ὅπερ εἶναι τὸ ἁπλούστατον ποσὸν καὶ εὐκολώτερον νὰ προσδιορισθῇ.

Τί εἶναι ἀριθμός.

4. *Πολλὰ* (α) ἢ ἀφῃρημένως *πλῆθος* ἢ *πληθὺς* λέγεται πᾶν ὅ,τι σύγκειται ἐξ ἑνὸς καὶ ἄλλου ἑνὸς καὶ ἄλλου ἑνὸς καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἀορίστως. Τὰ ἓν δὲ ταῦτα εἶναι χωριστὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου.

Τί δὲ εἶναι τὸ ἕν, ἐξ οὗ σύγκειται ἕκαστον πλῆθος, εἶναι δύσκολον μὲν νὰ ὁρισθῇ, ἀλλ' ἕκαστος παιδιόθεν μανθάνει νὰ

(α) Τὸ πολλὰ ἐκλαμβάνεται συνήθως καὶ εἰς ἄλλην σημασίαν, ἀντιθέτως πρὸς τὸ ὀλίγα, ὁπότε νοεῖται πρός τι μήτε πολλὰ ὂν μήτε ὀλίγα, ἀλλὰ σωστόν, μέτριον. Το δὲ μέτριον εἰς διάφορα πράγματα εἶναι διάφορον· διὰ τοῦτο ὅσα ἐνίοτε θεωροῦνται πολλά, ἄλλοτε λέγονται ὀλίγα, καὶ εἶναι ἡ σημασία αὕτη πολὺ ἀπροσδιόριστος.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

διακρίνη ἀλανθάστως. Ἀφηρημένως δὲ τὸ ἓν λέγεται *ἑνὰς* ἢ κοινότερον *μονάς*.

Τὸ ἕν, ὅταν συνοδεύηται μὲ ὄνομα πράγματός τινος, οἷον *ἓν δένδρον*, *εἷς ἄνθρωπος*, *μία οἰκία*, λέγεται *συγκεκριμένον*· ὅταν δὲ ἦναι μεμονωμένον, ὁπότε μένει ἀπροσδιόριστον ποῖον εἶναι τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἕν, καὶ δύναταί τις νὰ νοήσῃ ὅποιον ἂν θέλῃ, λέγεται *ἀφηρημένον*.

Ὡσαύτως δὲ καὶ *πολλὰ δένδρα* ἢ *πλῆθος δένδρων* κτλ εἶναι *συγκεκριμένον πλῆθος*, διότι εἶναι γνωστὸν ποῖον πρᾶγμα εἶναι ἕκαστον αὐτῶν· *πολλὰ* δὲ ἢ *πλῆθος* ἁπλῶς εἶναι *ἀφηρημένον*.

5. Ἕκαστος βαθμὸς πλήθους διαφέρει τοῦ πλησίον του, τοῦ ἀμέσως μικροτέρου του ἢ τοῦ ἀμέσως μεγαλητέρου του, κατὰ ἕν. Εἶναι δ' εὔκολον νὰ καταλάβῃ τις ὅτι οἱ βαθμοὶ τοῦ πλήθους εἶναι ἄπειροι, ἐὰν εἰς βαθμόν τινα προσθέσῃ καὶ ἄλλο ἕν, καὶ εἰς τοῦτον καὶ ἄλλο ἕν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

6. Εἰς προσδιορισμὸν τῶν διαφόρων βαθμῶν τοῦ πλήθους εἶναι ὄχι ἀναγκαῖον νὰ ἔχωμεν πλῆθος συγκεκριμένον, ἂν καὶ οἱ τοὺς πρώτους βαθμοὺς τὸ πρῶτον προσδιορίσαντες βεβαιότατα εἶχον ὑπ' ὄψιν πλῆθος συγκεκριμένον. Ὁ δὲ προσδιορισμὸς βαθμοῦ τινος πλήθους συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἠξεύρωμεν πόσα εἶναι τὰ ἕν, ἐξ ὧν αὐτὸ σύγκειται, ἕκαστον δὲ βαθμὸν οὕτω προσδιωρισμένον νὰ ὀνομάσωμεν μὲ ὄνομα ἴδιον, ὥστε δι' αὐτοῦ ἀσυγχύστως νὰ τὸν διακρίνωμεν.

Ἓν καὶ ἕν, ὅπερ καλεῖται *δύο*, εἶναι προσδιωρισμένον πλῆθος, ἓν καὶ ἓν καὶ ἕν, ὅπερ καλεῖται *τρία*, εἶναι ἐπίσης προσδιωρισμένον πλῆθος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ δέκα.

Οὕτω δὲ προσδιωρισμένος ἕκαστος βαθμὸς πλήθους ἀφηρημένου καλεῖται *ἀριθμός*. *Ἀριθμῶ* δὲ σημαίνει ἀπαγγέλλω κατὰ σειρὰν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν νοῶν πόσα εἶναι τὰ δι' ἑκάστου παριστανόμενα ἕν, καὶ *ἀρίθμησις* δὲ ὡσαύτως. Τοῦτο νοοῦμεν, ὅταν λέγωμεν, *ἔμαθα τὴν ἀρίθμησιν*, *ἠξεύρω ν' ἀριθμῶ*.

7. Ὅταν τις ἠξεύρῃ καλῶς τὰ ὀνόματα κατὰ σειρὰν ὅλων τῶν ἀριθμῶν καὶ νοῇ ἀκριβῶς πόσα εἶναι τὰ ἓν τὰ δι' ἑκάστου παριστανόμενα, δύναται νὰ προσδιορίσῃ καὶ ὁποιονδήποτε βαθμὸν πλήθους συγκεκριμένου. Πρὸς τοῦτο δ' ἄλλο δὲν χρειά-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

ζεται εἰμὴ ἀρχίζων ἀφ' ἑνός τινος νὰ λέγῃ *ἕν*, μεταβαίνων εἰς τὸ δεύτερον νὰ λέγῃ *δύο*, ἔπειτα εἰς τὸ τρίτον νὰ λέγῃ *τρία* καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ τελευταῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πραγμάτων, ὅστις παριστάνει τὸ πλῆθος αὐτῶν προςδιωρισμένον. Καὶ ἡ πρᾶξις δὲ αὕτη, δι' ἧς διερχόμενός τις ἀπὸ τοῦ πρώτου ἑνὸς κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ τελευταίου πλήθους τινὸς πραγμάτων ἀριθμεῖ, ἵνα οὕτω προςδιορίσῃ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν τῶν πραγμάτων, καλεῖται καὶ αὐτὴ *ἀρίθμησις*. Οὕτω λέγομεν, *ἀρίθμησον τὰ βιβλία σου, ἵνα μάθῃς πόσα εἶναι.*

Σημ. Εἰς τὴν ὁμιλίαν τὸ ἀ ρ ι θ μ ε ῖ ν καλοῦμεν μ ε τ ρ ε ῖ ν ὄχι ὀρθῶς, διότι τὸ μετρεῖν ἁρμόζει ὄχι εἰς τὰ πλήθη, ἀλλ' εἰς τὴν ἔκτασιν καὶ τὸν χρόνον (ἰδὲ ἀρ. 17).

8. Ἕνα τινὰ βαθμὸν πλήθους π. χ. δένδρων ὅταν τὸ πρῶτον τὸν ἴδωμεν, πρὶν ἀριθμήσωμεν τὰ δένδρα, δὲν ἠξεύρομεν ἀκριβῶς πόσα εἶναι. Οὕτως ἀπροςδιόριστον ἕνα βαθμὸν πλήθους πραγμάτων τινῶν τὸν ὀνομάζομεν *ποσὸν* ἢ κοινότερον *κάμποσον* κατὰ σημασίαν πολὺ διάφορον τῆς προειρημένης (ἀρ. 1). Ἐρωτηθέντες *πόσα εἶναι τὰ δένδρα αὐτά*, ἀποκρινόμεθ' ἀορίστως *εἶναι κάμποσα*, ἢ *εἶναι πολλὰ* ἢ *ὀλίγα* κατὰ τὴν δευτέραν σημασίαν τοῦ πολλά. Ἀφοῦ δὲ τ' ἀριθμήσωμεν, λέγομεν ὡρισμένως ὅτι εἶναι *τριάκοντα* ἢ *πεντήκοντα* κτλ.

Περὶ τῆς ὀνοματολογίας καὶ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

9. Εἶναι ἤδη γνωστὰ τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν ἀριθμῶν (ἰδὲ τὴν Πρακτικὴν Ἀριθμητικήν), ταῦτα δὲ εἶναι τόσα, ὅσοι εἶναι καὶ οἱ ἀριθμοί, διότι ἕκαστος ἔχει ἴδιον ὄνομα διάφορον παντὸς ἄλλου, οἱ δὲ ἀριθμοὶ εἶναι ἀναρίθμητοι.

Ἀλλ' ἐξετάζοντες τὰ ὀνόματα ταῦτα βλέπομεν ὅτι λέξεις διάφοροι, ἐξ ὧν ἔγειναν αὐτά, εἶναι ὀλιγώταται αἱ ἑξῆς, *δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, δέκα, ἑκατόν, χίλια, μιλιόνιον* ἢ *ἑκατομμύριον* (α).

(α) Ἡ λέξις εἴκοσιν εἶναι ἐν χρήσει ἄνευ ἀνάγκης, ὡς παρ' ἄλλοις ἔθνεσιν ἄλλαι τινές· αἱ δὲ τριάκοντα, τεσσαράκοντα κτλ, καὶ διακόσια, τριακόσια κτλ εἶναι αὐταὶ αἱ ἀνωτέρω μὲ καταλήξεις ἰδιαιτέρας· τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ διλιόνιον, τριλιόνιον κτλ.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Πῶς λοιπὸν κατωρθώθη δι' ὀλιγωτάτων λέξεων νὰ ὀνοματισθῶσιν ὅλοι οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι τόσον πολλοί; καὶ διὰ τί ἐπενοήθη τοῦτο;

10. Ἕκαστος εὐκόλως ἐννοεῖ ὅτι, ἐὰν ἕκαστος ἀριθμὸς ἤθελεν ὀνομασθῆ μὲ λέξιν ἰδιαιτέραν, ὄντων ἀπειραρίθμων τῶν ὀνομάτων τῶν ἀπειραρίθμων ἀριθμῶν, ἤθελον χρειασθῆ ἀπειράριθμοι καὶ διάφοροι λέξεις· τὰς ὁποίας καὶ νὰ μάθῃ τις, καὶ εὐκόλως δι' αὐτῶν νὰ διακρίνῃ ἕκαστον ἀριθμόν, ἤθελεν εἶσθαι ἀδύνατον, καὶ ἂν ἤθελε περιορισθῆ π. χ. μέχρι τοῦ διλιονίου. Ἰδοὺ διατί ἐπενοήθη τρόπος τοῦ νὰ ὀνομάσωσιν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς δι' ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγωτάτων λέξεων.

11. Τὰ δ' εἰς τοῦτο συντελέσαντα εἶναι τὰ δύο ταῦτα α'), ὅτι ὁ ἀριθμὸς *δέκα* (α), ὁ δεκαπλάσιος αὐτοῦ, ὁ *ἑκατόν*, καὶ ὁ δεκαπλάσιος τοῦ ἑκατόν, ὁ *χίλια*, ἐθεωρήθησαν ὡς μονάδες καὶ ὠνομάσθησαν διὰ τῶν ἰδιαιτέρων λέξεων *δέκα*, *ἑκατόν*, *χίλια*· β') ὅτι ὁ ἀριθμός, ὅστις εἶναι χιλιοπλάσιος τοῦ χίλια, ὁ *μιλιόνιον*, ὁ ὢν χιλιοπλάσιος τοῦ μιλιονίου, ὁ *διλιόνιον*, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐθεωρήθησαν μονάδες καὶ ὠνομάσθησαν μὲ ἰδιαιτέρας λέξεις. Διότι κατὰ ταῦτα δὲν ἦτον χρεία νὰ ὀνομασθῶσι μὲ λέξεις ἰδιαιτέρας ἄλλοι ἀριθμοὶ παρὰ τοὺς μικροτέρους τοῦ δέκα.

Καὶ πρῶτον τινὲς μὲν τῶν ἀπὸ τοῦ δέκα μέχρι τοῦ ἑκατὸν νοοῦνται καὶ ὀνομάζονται *δύο δεκάδες*, *τρεῖς δεκάδες*. . . . *ἐννέα δεκάδες*, οἱ ἄλλοι δὲ νοοῦνται σύνθετοι ἐξ ἀριθμοῦ δεκάδων καὶ ἀριθμοῦ μονάδων καὶ ὀνομάζονται *δέκα ἓν* ἢ *ἕνδεκα*, *δέκα δύο* ἢ *δώδεκα*, *δεκατρία*. . . . *δεκαεννέα* — *δύο δεκάδες ἕν*, *δύο δεκάδες δύο*. . . . . *δύο δεκάδες ἐννέα* . . . . *ἐννέα δεκάδες ἐννέα*, κατόπιν τοῦ ὁποίου εἶναι *ὁ δέκα δεκάδες* ἢ ὁ *ἑκατόν*.

Ἔπειτα τινὲς μὲν τῶν ἀπὸ τοῦ ἑκατὸν μέχρι τοῦ χίλια νοοῦνται καὶ ὀνομάζονται *δύο ἑκατοντάδες*, *τρεῖς ἑκατοντάδες*. . . . *ἐννέα ἑκατοντάδες*, οἱ δὲ ἄλλοι νοοῦνται σύνθετοι ἐξ

(α) Ἡ προτίμησις τοῦ δέκα ἀπὸ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου αὐτοῦ ὡς μονάδος, πιθανὸν νὰ προῆλθεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δακτύλων τῶν δύο χειρῶν, τοὺς ὁποίους ἀκόμη καὶ τώρα πολλοὶ ἁπλοῖ ἄνθρωποι μεταχειρίζονται ἀριθμοῦντες. Τοῦτο δ' ὑποστηρίζεται καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἄλλας μονάδας ὠνόμασαν δάκτυλον, παλάμην, πόδα, πῆχυν, ὀργυιὰν κτλ, ἤτοι διὰ τῶν ὀνομάτων διαφόρων μελῶν τοῦ σώματος.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἀριθμοῦ τινος ἑκατοντάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου τοῦ ἑκατόν, ἤτοι ἀριθμοῦ τινος μονάδων, ἢ ἀριθμοῦ τινος δεκάδων, ἢ ἀριθμοῦ τινος δεκάδων καὶ ἀριθμοῦ τινος μονάδων, καὶ ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν *ἑκατὸν ἕν*, *ἑκατὸν δύο* . . . . . *ἑκατὸν ἐννέα δεκάδες ἐννέα*, — *δύο ἑκατοντάδες ἕν*, *δύο ἑκατοντάδες δύο*. . . . *δύο ἑκατοντάδες ἐννέα δεκάδες ἐννέα*. . . . *ἐννέα ἑκατοντάδες ἐννέα δεκάδες ἐννέα*, κατόπιν τοῦ ὁποίου εἶναι ὁ *δέκα ἑκατοντάδες* ἢ ὁ *χίλια*.

Αἱ λέξεις *τριάκοντα*, *τεσσαράκοντα* . . . . *ἐννενήκοντα*, καὶ *διακόσια*, *τριακόσια*. . . . . *ἐννεακόσια* δὲν εἶναι ἄλλαι εἰμὴ αἱ ἀνωτέρω, συντεθειμέναι καὶ ὀλίγον τι τροποποιημέναι, δηλ. ἀντὶ μὲν τοῦ *δύο*, *τρία*, κτλ εἶναι τὸ *δίς*, *τρίς*, κτλ, ἀντὶ δὲ τοῦ *δεκάδες*, *ἑκατοντάδες* εἶναι αἱ καταλήξεις *ακοντα* ἢ *ηκοντα* καὶ *ακοσια*.

Μετέπειτα τινὲς μὲν τῶν ἀπὸ τοῦ χίλια μέχρι τοῦ μιλιονίου ἀριθμῶν θεωροῦνται καὶ ὀνομάζονται *δύο χιλιάδες*, *τρεῖς χιλιάδες*. . . . *ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες*, οἵτινες λέγονται *ἀριθμοὶ χιλιάδος*, οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι σύνθετοι ἐξ ἑνός τινος τούτων καὶ ἐξ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου τοῦ χίλια, καὶ ὀνομάζονται μὲ τὰ ὀνόματα τούτων, οἷον *χίλια ἕν*, *χίλια δύο*. . . *χίλια ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*, — *δύο χιλιάδες ἕν*, *δύο χιλιάδες δύο* . . . . *δύο χιλιάδες ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*, . . . *ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*, ὁ κατόπιν τοῦ ὁποίου εἶναι ὁ *χίλιαι χιλιάδες* ἢ *μιλιόνιον* (α).

(α) Ἡ νῦν ἐν χρήσει ὀνοματολογία ἔχει χρείαν διορθώσεως, ἵνα γείνῃ κατὰ πάντα Ἑλληνικὴ καὶ τελεία. Πρῶτον μὲν ἡ λέξις μιλιόνιον, ἑπομένως καὶ ἡ διλιόνιον, τριλιόνιον κλτ εἶναι ξένη (ἐκ τοῦ Ἰταλ. milione ἢ τοῦ Γαλ. million, τῶν παραγομένων ἐκ τοῦ Λατιν. mile ἢ mille). Ἔπειτα δὲ τὰ προτεταγμένα δίς, τρίς κτλ δὲν ἔχουν Ἑλληνικὴν σημασίαν, καθ' ἣν διλιόνιον, τριλιόνιον κτλ ἔπρεπε νὰ σημαίνωσι κυρίως τοὺς ἀριθμοὺς δύο μιλιόνια, τρία κτλ, καὶ ὄχι τὸν χίλια μιλιόνια, χίλια διλιόνια κτλ, ὄντος τοῦ διλιονίου τοῦ αὐτοῦ καὶ τοῦ διμιλιονίου κτλ.

Καὶ ἀντὶ μὲν τῆς ξένης λέξεως μιλιόνιον ὁ ἀοίδιμος Κοραῆς εἰσήγαγε τὴν ἑ κ α τ ο μ μ ύ ρ ι ο ν, ἐξ Ἑλληνικῶν μὲν στοιχείων, ὄχι δὲ ἴσως καὶ Ἑλληνικῶς συντεθειμένην, διότι ἔμελλε κανονικῶς νὰ ἦναι μᾶλλον ἑκατοντακισμύριον. Ἀλλ' ἐὰν παραβλέποντες τὴν ἀνωμαλίαν ταύτην χάριν τοῦ συντομωτέρου

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Ὡσαύτως ὀνομάζονται καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ μιλιονίου μέχρι τοῦ διολιονίου, ἤγουν τινὲς μὲν *δύο μιλιόνια*, *τρία μιλιόνια* . . . *ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα μιλιόνια*, οἵτινες λέγονται *ἀριθμοὶ μιλιονίων*, οἱ δὲ λοιποὶ εἶναι σύνθετοι ἔκ τινος τούτων καὶ ἐξ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου τοῦ μιλιονίου, δηλ. *ἓν μιλιόνιον ἕν*, *ἓν μιλιόνιον δύο*, . . . *ἓν μιλιόνιον ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*—*δύο μιλιόνια ἕν*, *δύο μιλιόνια δύο*, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ *ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα μιλιόνια ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα*, κατόπιν τοῦ ὁποίου εἶναι ὁ *χίλια μιλιόνια* ἢ *διλιόνιον*, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

12. Ἐκ τῶν προειρημένων βλέπει τις α') ὅτι τινὲς ἀριθμοὶ εἶναι *ἁπλοῖ*, ἤτοι ἀριθμοὶ μονάδος μιᾶς τινος τάξεως, οἷον *πέντε μονάδες*, *πέντε δεκάδες*, *πέντε ἑκατοντάδες*, *πεντε χιλιάδες*, κτλ, καὶ οὗτοι εἶναι δύο, τρία . . . τὸ πολὺ ἐννέα· β') ὅτι οἱ ἄλλοι ὅλοι εἶναι σύνθετοι ἐκ τῶν ἁπλῶν τούτων, οἷον *τριάκοντα ὀκτώ*, *ἑπτακόσια πεντήκοντα δύο*, κτλ, καὶ τούτων τὰ ὀνόματα σύγκεινται ἐκ πολλῶν λέξεων. Εἶναι δὲ σύνθετοι ἐξ ἀριθμοῦ τινος τῆς κυρίως μονάδος, ἐξ ἀριθμοῦ τινος χιλιάδος,

---

ἑκατομμύριον ἐξακολουθήσωμεν νὰ μεταχειριζώμεθα ταύτην ἀντὶ τῆς μιλιόνιον, πῶς νὰ ὀνομάσωμεν τὸ διλιόνιον, τὸ τριλιόνιον κτλ; Νὰ διατηρήσωμεν ταύτας τὰς λέξεις; τότε εἶναι περιττὴ καὶ ἡ λέξις ἑκατομμύριον. Νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸ δισεκατομμύριον, ὡς τινες ἀπροσέκτως εἶπον, καὶ τὸ τρισεκατομμύριον κτλ; ἀλλ' εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ταῦτα σημαίνουσιν ἄλλο παρ' ὅ,τι θέλομεν νὰ σημάνωμεν, καὶ διὰ τὴν σύγχυσιν εἶναι ἀπαράδεκτα. Νὰ μεταχειρισθῶμεν ἄλλας λέξεις ἰδιαιτέρας καὶ διαφόρους ἀπ' ἀλλήλων; τότε θέλουσι χρειασθῆ πολλαί, τὰς ὁποίας εἶναι ὠφέλιμον ν' ἀποφύγωμεν.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ χίλια, μιλιόνιον, διλιόνιον κτλ θεωροῦνται μονάδες χιλιοπλάσιαι κατὰ σειρὰν ἄλλη ἄλλης καὶ διαφόρων βαθμῶν, δὲν ἤθελεν εἶσθαι ὀρθότερον καὶ προτιμότερον τὴν ἔννοιαν τοῦ χιλιοπλάσιον νὰ σημάνωμεν διὰ καταλήξεώς τινος καὶ τοὺς διαφόρους βαθμοὺς διὰ τοῦ πρῶτον, δεύτερον κτλ; Ὡς τοιαῦτα δὲ προτείνω τὸ δ ε υ τ ε ρ ό λ ι ο ν ἀντὶ τοῦ μιλιόνιον ἢ ἑκατομμύριον, διότι εἶναι ὁ δεύτερος ἀριθμός, ὅστις εἶναι χιλιοπλάσιος τῆς ἀμέσως προτέρας του καὶ πρώτης χιλιοπλασίας μονάδος, τοῦ χίλια, τ ρ ι τ ό λ ι ο ν ἀντὶ τοῦ διλιόνιον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ταῦτα δὲ εἶναι καὶ Ἑλληνικὰ καὶ σύντομα, παρέχουσι δὲ καὶ εὐκολίαν εἰς παραγωγὴν ἄλλων.

Περὶ δὲ τῆς κατὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας ὀνοματολογίας καὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν ἰδὲ ἐν τῷ τέλει τοῦ βιβλίου.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἐξ ἀριθμοῦ μιλιονίου κτλ, οὗτοι δὲ εἶναι δύο, τρία . . . τὸ πολὺ ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα, καὶ διὰ τοῦτο σύνθετοι τὸ πολὺ ἐκ τριῶν ἁπλῶν, ἤτοι ἐξ ἀριθμοῦ μονάδος, ἀριθμοῦ δεκάδος καὶ ἀριθμοῦ ἑκατοντάδος, ἑνός τινος τούτων, ὡς εἴπομεν, ὄντος τὸ πολὺ ἐννέα, οἷον *ὀκτακόσιαι ἑβδομήκοντα ἓξ μιλιόνια πεντακόσιαι τεσσαράκοντα τρεῖς χιλιάδες διακόσια δέκα ἐννέα.*

13. Ἡ μεγάλη ἔκτασις, ἣν ἀπαιτεῖ ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν ὀνομάτων αὐτῶν, μάλιστα τῶν πολυσυνθέτων, ἡ χρονοτριβὴ εἰς τὸ γράφειν αὐτοὺς καὶ ἡ δυσκολία κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν, οὕτω γραμμένων, ταῦτα βέβαια θὰ παρεκίνησαν τοὺς ἀνθρώπους νὰ ἐπινοήσωσιν ἄλλα παρὰ τὰς λέξεις σημεῖα, σύντομα ὅσον τὸ δυνατὸν, ἵνα γράφωσι τοὺς ἀριθμοὺς, καὶ τοιαῦτα ἤδη εἶναι ἐν κοινῇ σχεδὸν χρήσει τὰ καλούμενα *ἀραβικὰ* (α) *ψηφία* ἢ *χαρακτῆρες*, δέκα ὄντα τὸν ἀριθμὸν, ἤγουν 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, σημαίνοντα δὲ μηδὲν, ἓν, δύο, ... ἐννέα.

14. Ὅτι δὲ χρειάζονται δέκα ψηφία, αὐτὰ δ' ἐξαρκοῦσιν εἰς γραφὴν ὅλων τῶν ἀριθμῶν, ὅπως τώρα ὀνομάζονται (β), τοῦτο πληροφορούμεθα ἐκ τῶν ἑξῆς.

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἁπλοῖ ἢ σύνθετοι ἐκ τῶν ἁπλῶν, ὡς ἀνωτέρω (12) εἴδομεν, ἐάν τις πληροφορηθῇ ὅτι δι' αὐτῶν τῶν ψηφίων δυνατὸν νὰ γράφωνται οἱ ἁπλοῖ, θέλει εὐκόλως τότε καταλάβει ὅτι διὰ τῶν αὐτῶν γράφονται καὶ οἱ σύνθετοι. Ἀλλ' ἁπλοῦς τις ἀριθμὸς ὁποιασδήποτε τάξεως μονάδος ἔχει μίαν, ἢ δύο . . . . ἢ τὸ πολὺ ἐννέα μονάδας. Χρειάζονται λοιπὸν ἐννέα διάφορα ψηφία σημαντικὰ τῶν *ἓν, δύο, τρία, ... ἐννέα*, καὶ αὐτὰ εἶναι τὰ ἀνωτέρω πλὴν τοῦ 0. Μένει τώρα νὰ εὑρεθῇ τρόπος πρὸς διάκρισιν τῶν διαφόρων τάξεων μονάδων, ἤτοι νὰ

(α) Τὰ ψηφία ταῦτα ὠνομάσθησαν ὑπὸ τῶν Εὐρωπαίων ἀραβικὰ, διότι ὑπὸ τῶν Ἀράβων ἐκτὸς τοῦ 0 τὰ παρέλαβον αὐτοί. Ἀλλ' οἱ Ἄραβες τὰ ὠνόμαζον Ἰνδικὰ, καὶ πιθανὸν ὅτι οἱ Ἰνδοὶ τὰ ἐφεῦρον, παρὰ τούτων δὲ τὰ παρέλαβον οἱ Ἄραβες. Λέγεται δὲ ὅτι καὶ οἱ περὶ τὸν Πυθαγόραν μετεχειρίζοντο τοιαῦτα τινὰ ψηφία εἰς γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' εἶναι ἄγνωστον ὁποῖα ἦσαν.

(β) Θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὸ Συμπλήρωμα τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι οἱ ἀριθμοὶ δυνατὸν νὰ ἔχωσι διάφορα ὀνόματα, καὶ ὅτι τότε τ' ἀναγκαῖα ψηφία πρὸς γραφὴν αὐτῶν θέλουν εἶσθαι πλειότερα ἢ ὀλιγώτερα τῶν δέκα.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

προςδιορισθῇ, π. χ. τὸ 6, τὸ ὁποῖον σημαίνει τὸν ἀριθμὸν ἕξ, πότε σημαίνει δεκάδας, πότε ἑκατοντάδας κτλ. Τοῦτο ἐπενοήθη νὰ παριστάνηται διὰ τῆς θέσεως τοῦ ψηφίου ἀριστερὰ ἄλλου, τῆς δευτέρας θέσεως δηλ. διὰ τὰς τῆς δευτέρας τάξεως μονάδας ἤτοι τὰς δεκάδας, τῆς τρίτης θέσεως διὰ τὰς τῆς τρίτης τάξεως μονάδας ἤτοι τὰς ἑκατοντάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλ' ἵνα ἔχῃ ψηφίον τι τὴν δευτέραν θέσιν, τὴν τρίτην κτλ, ἀνάγκη νὰ ἦναι ἄλλο ψηφίον εἰς τὴν πρώτην, εἰς τὴν δευτέραν κτλ, τοῦτο δὲ νὰ μὴ ἦναί τι τῶν ἤδη εἰρημένων ἐννέα, διότι τότε ἀδύνατον νὰ παριστάνωνται ἁπλοῖ ἀριθμοί, ἀλλὰ δέκατον ἄλλο ψηφίον οὐδενὸς ἀριθμοῦ σημαντικόν, καὶ τοιοῦτον εἶναι τὸ 0. Γράφοντες λοιπὸν 6, 60, 600, 6000 κτλ, κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα ἐννοοῦμεν τοὺς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς ἓξ *μονάδες*, *ἓξ δεκάδες* ἢ *ἑξήκοντα*, *ἓξ ἑκατοντάδες* ἢ *ἑξακόσια*, *ἓξ χιλιάδες* κτλ. Ὥστε διὰ τῶν δέκα τούτων ψηφίων δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ὅλους τοὺς ἁπλοῦς ἀριθμούς.

Ἵνα γράφωμεν δὲ καὶ τοὺς συνθέτους, ἄλλο δὲν ἀπαιτεῖται εἰμὴ νὰ θέτωμεν τὸ κατάλληλον σημαντικὸν ψηφίον ὅπου γράφοντες τοὺς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς θέτομεν τὸ 0. Π. χ. ὁ *ἑξακόσια* γράφεται οὕτω 600, ὁ δὲ *ἑξακόσια ἑπτὰ* πρέπει νὰ γραφθῇ οὕτως 607, ὁ δὲ *ἑξακόσια τριάκοντα* οὕτως 630, ὁ δὲ *ἑξακόσια τριάκοντα ἑπτὰ* οὕτως 637. Ἐκ δὲ τούτων νοεῖται εὐκόλως ὅτι διὰ τῶν δέκα τούτων ψηφίων εἶναι δυνατὸν νὰ γράφωμεν καὶ πάντα ἄλλον ἀριθμόν, δι' ἑκάστου μὲν τῶν ἐννέα σημαντικῶν παριστάνοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ὁποιασδήποτε τάξεως, διὰ δὲ τῆς θέσεως αὐτοῦ τὴν τάξιν ἑκάστης μονάδος, καὶ εἰς τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον καὶ τὸ 0.

Περὶ τῶν μονάδων τῶν ἄλλων εἰδῶν ποσοῦ καὶ τοῦ προςδιορισμοῦ τῶν ποσῶν πρὸς αὐτάς.

15. Πλήθους ὁποιουδήποτε ἡ μονὰς εἶναι ἐκ τῆς φύσεως ἢ τῆς τέχνης προςδιωρισμένη, οἷον τὸ δένδρον, τὸ ἄστρον, ὁ ἄνθρωπος κτλ, ἢ ἡ οἰκία, ἡ καθέκλα, τὸ βιβλίον κτλ, εὐδιάκριτος εἰς ἕκαστον ἄνθρωπον (α), πρὸς αὐτὴν δὲ προςδιορίζεται τὸ

(α) Τῆς μονάδος ταύτης νομίζω ὅτι χαρακτῆρες εἶναι τὸ αὐτοτελές, τὸ ἀδιαί-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πλῆθος τὸ συγκείμενον ἐκ τοιούτων μονάδων. Τῆς δ' ἐκτάσεως, τοῦ βάρους, τοῦ χρόνου κτλ ἡ κυρία μονὰς εἶναι ἀδύνατον νὰ γείνῃ ἐπαισθητὴ (α), ἀλλὰ πάντοτε μᾶς παρίστανται διάφοροι βαθμοὶ αὐτῶν, οἷον οἱ ὄγκοι διαφόρων ὑλικῶν πραγμάτων, τὰ βάρη αὐτῶν κτλ. Διὰ τοῦτο ὡς μονὰς ἑκάστου τούτων τῶν ποσῶν ἐκλαμβάνεται *κατὰ συνθήκην* ὑπὸ τῶν ἀνθρώπων εἷς τις βαθμὸς αὐτῶν, καὶ συνήθως παρ' ἄλλοις ἔθνεσιν ἄλλος· αὐτὴν τὴν μονάδα ὀνομάζομεν *ἀρχικήν*.

Καὶ μονὰς μὲν ἀρχικὴ τοῦ χρόνου ἐκλαμβάνεται τὸ ἡμερονύκτιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκ φύσεως προσδιωρισμένον, ὡς χρόνος τῆς περιαγωγῆς τῆς γῆς περὶ τὸν ἄξονά της, ἀμετάβλητον, καὶ τὸ αὐτὸ δι' ὅλους τοὺς κατοίκους τῆς γῆς, εὐδιάκριτον δὲ εἰς τοὺς κατοικοῦντας τὰς εὐκράτους ζώνας καὶ τὴν διακεκαυμένην.

Μονὰς δὲ τοῦ μήκους περὶ τὸ τέλος τοῦ παρελθόντος αἰῶνος (β) συνέλαβον τὴν ἰδέαν οἱ Γάλλοι νὰ ἐκλάβωσι τὸ ἐπὶ τῆς

ρετον καὶ τὸ εἶναι στοιχεῖον ποσοῦ. Η διασάφησις ὅμως δι' ἀναπτύξεως ὅλων τούτων δὲν ἁρμόζει ἐνταῦθα.

(α) Ακριβῶς θεωρουμένων τῶν πραγμάτων, ὁποιουδήποτε εἴδους ποσὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ κυρίως ὡς πλῆθος, διότι δυνατὸν νὰ νοῆται ὡς συγκείμενον ἐκ μονάδων, οἷον ἡ ἔκτασις ἐκ σημείων, ὁ χρόνος ἐκ στιγμῶν, τὸ βάρος πράγματός τινος ἐκ τοῦ βάρους τῶν ὑλικῶν ἀτόμων αὐτοῦ κτλ. Διαφέρει δὲ τοῦ πλήθους κατὰ τοῦτο ὅτι αἱ τοιαῦται μονάδες του εἶναι τόσον μικραί, ὥστε εἶναι ἀδύνατον νὰ ἔχῃ τις εὐκρινῆ αὐτῶν ἰδέαν, συνέχονται δὲ σὺν ἀλλήλαις οὕτως, ὥστε ἀδύνατον νὰ διακρίνῃ τις αὐτάς, ἀλλὰ μόνον ὅλον τι συνεχὲς αἰσθάνεται, ἐνῷ αἱ τοῦ πλήθους μονάδες εἶναι διακεκριμέναι ἀπ' ἀλλήλων καὶ εὐδιάγνωστοι.

(β) Η συντακτικὴ τῶν Γάλλων συνέλευσις τὸ 1790 ἐψήφισε τὸ πρῶτον νὰ προσδιορισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ μέσον πλάτος τῶν 45 μοιρῶν κτυπᾷ τὸ δευτερόλεπτον, καὶ αὐτὸ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς μήκους. Αλλ' ἔπειτα ἐκρίθη προτιμότερον νὰ μετρηθῇ τὸ ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ μέχρι τοῦ βορείου πόλου μέρος τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Παρισίων, καὶ τὸ δέκατον τοῦ μιλιονιστημορίου αὐτοῦ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς μήκους. Προσδιορισθέντος δὲ ἀκριβέστερον τοῦ σχήματος τῆς γῆς, καὶ μετρηθέντος ὑπὸ τοῦ Δελάμβρου καὶ Μηχαίνου μέρους τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Παρισίων ἀπὸ Δυγκέρκης μέχρι Βαρκελώνης, ἐκ τούτων ἐξήγαγον ὅτι τὸ δέκατον τοῦ μιλιονιστημορίου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ μέχρι τοῦ βορείου πόλου διαστήματος ἦτον ὡς ἔγγιστα 3 πόδες 11 γραμμαὶ καὶ 0,295936 τῆς γραμμῆς, ἢ γραμμ. 448,295936. Τοῦτο λοιπὸν τὸ μῆκος, τὸ ὁποῖον, ὡς ἄλλαι μεταγενέστεραι μετρήσεις δεικνύουν, εἶναι ὀλίγον μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς, καὶ ὅλον τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῶν μέτρων καὶ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

γῆς ἀπὸ τοῦ βορείου πόλου μέχρι τοῦ ἰσημερινοῦ διάστημα, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἀστεροσκοπείου τῶν Παρισίων, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ αὐτὸ προσδιωρισμένον ἐκ φύσεως, ἀμετάβλητον, καὶ τὸ αὐτὸ δι' ὅλους τοὺς ἀνθρώπους. Καὶ ἐπειδὴ αὐτὸ εἶναι πολὺ μακρὸν καὶ ἄχρηστον εἰς τὰς κοινὰς χρείας, ἐκλαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ δέκατον τοῦ μιλιονιστημορίου αὐτοῦ (ἰδὲ ἀριθ. 20), τὸ ὁποῖον καλεῖται παρ' ἡμῖν *βασιλικὸς πῆχυς*.

Μονὰς ἐπιφανείας ἐκλαμβάνεται τετράγωνον, οὗ τινος ἡ πλευρὰ εἶναι μακρὰ ἕνα πῆχυν.

Μονὰς ὄγκου ἐκλαμβάνεται ὁ ὄγκος κύβου, οὗ τινος ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση τὸ μῆκος μὲ τὸ δέκατον τοῦ πήχεως, καὶ καλεῖται *λίτρα*.

Μονὰς βάρους ἐκλαμβάνεται τὸ βάρος ὄγκου ὕδατος ἴσου μὲ ἕνα κύβον, οὗ τινος ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση τὸ μῆκος μὲ τὸ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως, ὕδατος δὲ ὑετίου κατὰ τὴν μεγίστην αὐτοῦ πυκνότητα, καλεῖται δὲ παρ' ἡμῖν *δραχμή*, καὶ κοινότερον *δράμμι*.

Αἱ μονάδες αὗται εἶναι συσχετισμέναι πρὸς τὸν πῆχυν οὕτως, ὥστε, ὅταν αὐτὸς ἦναι γνωστός, δι' αὐτοῦ εὑρίσκονται εὐκόλως καὶ αἱ ἄλλαι, ἢ γενικώτερον, ὅταν μία τις αὐτῶν ἦναι γνωστή, εὑρίσκονται εὐκόλως δι' αὐτῆς καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἀλλὰ τὰ πλεῖστα ἔθνη ἐκλαμβάνουσι μονάδα καὶ ἐπιφανείας καὶ ὄγκου καὶ βάρους βαθμόν τινα ἑκάστου τῶν ποσῶν αὐτῶν κατὰ κοινὴν συνθήκην, ἀλλ' ὅστις ἔτυχε, καὶ χωρὶς νὰ ἔχωσι προσδιωρισμένην τινὰ σχέσιν πρὸς ἀλλήλας αἱ τῶν διαφό-

---

σταθμῶν, τῶν Γάλλων, τὸ προετοιμασθὲν ὑπὸ πολυμελοῦς ἐπιτροπῆς σοφῶν ἀνδρῶν διαφόρων ἐθνῶν, ἐνομιμοποιήθη τὸ 1801 ἐν τῇ Γαλλίᾳ, ἀλλ' εἰσέτι δὲν ἔγεινεν ἐντελῶς παραδεκτὸν οὐδ' εἰς αὐτὴν ὅλην τὴν Γαλλίαν. Ὀλίγον δὲ τροποποιημένον κατά τινα διέταξεν ἡ Ἑλληνικὴ Κυβέρνησις κατὰ τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1836 νὰ εἰσαχθῇ βαθμηδὸν καὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἀλλὰ μέχρι τοῦδε εἶναι ὄχι πολλὴ ἡ χρῆσις αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ δὲν ἦτον ἀκριβῶς προσδιωρισμένος ὁ βασιλικὸς πῆχυς ἢ τὸ Γαλλικὸν μέτρον, καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἤθελεν εἶσθαι δυνατὸν νὰ ἀνευρίσκηται ἀκριβῶς τὸ μῆκός του, ὅτε εἰς τὸ μέλλον ἤθελε χρειασθῇ, προσδιωρίσθη αὐτὸ πρὸς τὸ μῆκος τοῦ κτυπῶντος τὸ δευτερόλεπτον ἐκκρεμοῦς κατὰ τὴν 45ην μοῖραν τοῦ πλάτους, καὶ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς 0,993977 τοῦ πήχεως θεωρουμένου ὡς 1· οὕτω δ' ἡ ἀνεύρεσίς του καθίσταται εὐκολωτάτη.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πλῆθος τὸ συγκείμενον ἐκ τοιούτων μονάδων. Τῆς δ' ἐκτάσεως, τοῦ βάρους, τοῦ χρόνου κτλ ἡ κυρία μονὰς εἶναι ἀδύνατον νὰ γείνῃ ἐπαισθητὴ (α), ἀλλὰ πάντοτε μᾶς παρίσανται διάφοροι βαθμοὶ αὐτῶν, οἷον οἱ ὄγκοι διαφόρων ὑλικῶν πραγμάτων, τὰ βάρη αὐτῶν κτλ. Διὰ τοῦτο ὡς μονὰς ἑκάστου τούτων τῶν ποσῶν ἐκλαμβάνεται *κατὰ συνθήκην* ὑπὸ τῶν ἀνθρώπων εἷς τις βαθμὸς αὐτῶν, καὶ συνήθως παρ' ἄλλοις ἔθνεσιν ἄλλος· αὐτὴν τὴν μονάδα ὀνομάζομεν *ἀρχικήν*.

Καὶ μονὰς μὲν ἀρχικὴ τοῦ χρόνου ἐκλαμβάνεται τὸ ἡμερονύκτιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκ φύσεως προσδιωρισμένον, ὡς χρόνος τῆς περιαγωγῆς τῆς γῆς περὶ τὸν ἄξονά της, ἀμετάβλητον, καὶ τὸ αὐτὸ δι' ὅλους τοὺς κατοίκους τῆς γῆς, εὐδιάκριτον δὲ εἰς τοὺς κατοικοῦντας τὰς εὐκράτους ζώνας καὶ τὴν διακεκαυμένην.

Μονὰς δὲ τοῦ μήκους περὶ τὸ τέλος τοῦ παρελθόντος αἰῶνος (β) συνέλαβον τὴν ἰδέαν οἱ Γάλλοι νὰ ἐκλάβωσι τὸ ἐπὶ τῆς

ρετον καὶ τὸ εἶναι στοιχεῖον ποσοῦ. Η διασάφησις ὅμως δι' ἀναπτύξεως ὅλων τούτων δὲν ἁρμόζει ἐνταῦθα.

(α) Ἀκριβῶς θεωρουμένων τῶν πραγμάτων, ὁποιουδήποτε εἴδους ποσὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ κυρίως ὡς πλῆθος, διότι δυνατὸν νὰ νοῆται ὡς συγκείμενον ἐκ μονάδων, οἷον ἡ ἔκτασις ἐκ σημείων, ὁ χρόνος ἐκ στιγμῶν, τὸ βάρος πράγματός τινος ἐκ τοῦ βάρους τῶν ὑλικῶν ἀτόμων αὐτοῦ κτλ. Διαφέρει δὲ τοῦ πλήθους κατὰ τοῦτο ὅτι αἱ τοιαῦται μονάδες του εἶναι τόσον μικραί, ὥστε εἶναι ἀδύνατον νὰ ἔχῃ τις εὐκρινῆ αὐτῶν ἰδέαν, συνέχονται δὲ σὺν ἀλλήλαις οὕτως, ὥστε ἀδύνατον νὰ διακρίνῃ τις αὐτάς, ἀλλὰ μόνον ὅλον τι συνεχὲς αἰσθάνεται, ἐνῷ αἱ τοῦ πλήθους μονάδες εἶναι διακεκριμέναι ἀπ' ἀλλήλων καὶ εὐδιάγνωστοι.

(β) Η συντακτικὴ τῶν Γάλλων συνέλευσις τὸ 1790 ἐψήφισε τὸ πρῶτον νὰ προσδιορισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ μέσον πλάτος τῶν 45 μοιρῶν κτυπᾷ τὸ δευτερόλεπτον, καὶ αὐτὸ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς μήκους. Ἀλλ' ἔπειτα ἐκρίθη προτιμότερον νὰ μετρηθῇ τὸ ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ μέχρι τοῦ βορείου πόλου μέρος τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Παρισίων, καὶ τὸ δέκατον τοῦ μιλιονιστημορίου αὐτοῦ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς μήκους. Προσδιορισθέντος δὲ ἀκριβέστερον τοῦ σχήματος τῆς γῆς, καὶ μετρηθέντος ὑπὸ τοῦ Δελάμβρου καὶ Μηχαίνου μέρους τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Παρισίων ἀπὸ Δυγκέρκης μέχρι Βαρκελώνης, ἐκ τούτων ἐξήγαγον ὅτι τὸ δέκατον τοῦ μιλιονιστημορίου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ μέχρι τοῦ βορείου πόλου διαστήματος ἦτον ὡς ἔγγιστα 3 πόδες 11 γραμμαὶ καὶ 0,295936 τῆς γραμμῆς, ἢ γραμμ. 443,295936. Τοῦτο λοιπὸν τὸ μῆκος, τὸ ὁποῖον, ὡς ἄλλαι μεταγενέστεραι μετρήσεις δεικνύουν, εἶναι ὀλίγον μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς, καὶ ὅλον τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῶν μέτρων καὶ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

γῆς ἀπὸ τοῦ βορείου πόλου μέχρι τοῦ ἰσημερινοῦ διάστημα, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἀστεροσκοπείου τῶν Παρισίων, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ αὐτὸ προσδιωρισμένον ἐκ φύσεως, ἀμετάβλητον, καὶ τὸ αὐτὸ δι' ὅλους τοὺς ἀνθρώπους. Καὶ ἐπειδὴ αὐτὸ εἶναι πολὺ μακρὸν καὶ ἄχρηστον εἰς τὰς κοινὰς χρείας, ἐκλαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ δέκατον τοῦ μιλιονιστημορίου αὐτοῦ (ἰδὲ ἀριθ. 20), τὸ ὁποῖον καλεῖται παρ' ἡμῖν *βασιλικὸς πῆχυς*.

Μονὰς ἐπιφανείας ἐκλαμβάνεται τετράγωνον, οὗ τινος ἡ πλευρὰ εἶναι μακρὰ ἕνα πῆχυν.

Μονὰς ὄγκου ἐκλαμβάνεται ὁ ὄγκος κύβου, οὗ τινος ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση τὸ μῆκος μὲ τὸ δέκατον τοῦ πήχεως, καὶ καλεῖται *λίτρα*.

Μονὰς βάρους ἐκλαμβάνεται τὸ βάρος ὄγκου ὕδατος ἴσου μὲ ἕνα κύβον, οὗ τινος ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση τὸ μῆκος μὲ τὸ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως, ὕδατος δὲ ὑετίου κατὰ τὴν μεγίστην αὐτοῦ πυκνότητα, καλεῖται δὲ παρ' ἡμῖν *δραχμή*, καὶ κοινότερον *δράμι*.

Αἱ μονάδες αὗται εἶναι συσχετισμέναι πρὸς τὸν πῆχυν οὕτως, ὥστε, ὅταν αὐτὸς ἦναι γνωστός, δι' αὐτοῦ εὑρίσκονται εὐκόλως καὶ αἱ ἄλλαι, ἢ γενικώτερον, ὅταν μία τις αὐτῶν ἦναι γνωστή, εὑρίσκονται εὐκόλως δι' αὐτῆς καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἀλλὰ τὰ πλεῖστα ἔθνη ἐκλαμβάνουσι μονάδα καὶ ἐπιφανείας καὶ ὄγκου καὶ βάρους βαθμόν τινα ἑκάστου τῶν ποσῶν αὐτῶν κατὰ κοινὴν συνθήκην, ἀλλ' ὅστις ἔτυχε, καὶ χωρὶς νὰ ἔχωσι προσδιωρισμένην τινὰ σχέσιν πρὸς ἀλλήλας αἱ τῶν διαφό-

---

σταθμῶν τῶν Γάλλων, τὸ προετοιμασθὲν ὑπὸ πολυμελοῦς ἐπιτροπῆς σοφῶν ἀνδρῶν διαφόρων ἐθνῶν, ἐνομιμοποιήθη τὸ 1801 ἐν τῇ Γαλλίᾳ, ἀλλ' εἰσέτι δὲν ἔγεινεν ἐντελῶς παραδεκτὸν οὐδ' εἰς αὐτὴν ὅλην τὴν Γαλλίαν. Ὀλίγον δὲ τροποποιημένον κατά τινα διέταξεν ἡ Ἑλληνικὴ Κυβέρνησις κατὰ τὸν σεπτέμβριον τοῦ 1836 νὰ εἰσαχθῇ βαθμηδὸν καὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἀλλὰ μέχρι τοῦδε εἶναι ὄχι πολλὴ ἡ χρῆσις αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ δὲν ἦτον ἀκριβῶς προσδιωρισμένος ὁ βασιλικὸς πῆχυς ἢ τὸ Γαλλικὸν μέτρον, καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἤθελεν εἶσθαι δυνατὸν νὰ ἀνευρίσκηται ἀκριβῶς τὸ μῆκός του, ὅτε εἰς τὸ μέλλον ἤθελε χρειασθῇ, προσδιωρίσθη αὐτὸ πρὸς τὸ μῆκος τοῦ κτυπῶντος τὸ δευτερόλεπτον ἐκκρεμοῦς κατὰ τὴν 45ην μοῖραν τοῦ πλάτους, καὶ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς 0,993977 τοῦ πήχεως θεωρουμένου ὡς 1· οὕτω δ' ἡ ἀνεύρεσίς του καθίσταται εὐκολωτάτη.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ρου εἴδους ποσῶν μονάδες. Ὥστε εἶναι ἀδύνατον καὶ ἡ μία τούτων νὰ προσδιορισθῇ ἐκ τῆς ἄλλης, καὶ αὐτὴ καθ' αὐτὴν ἑκάστη νὰ προσδιορισθῇ πόση εἶναι, ἂν μετὰ χρόνον ἱκανὸν καὶ μετά τινα καταστροφὴν τοῦ ἔθνους, εἰς ὃ ἀνήκει, συναφανισθῇ καὶ αὐτή.

16. Εἴπομεν ἀνωτέρω (7) ὅτι πλῆθός τι προσδιορίζεται πόσον εἶναι δι' ἀριθμήσεως. Ἀλλὰ βαθμός τις ποσοῦ ἄλλου εἴδους, ὅστις κατὰ πρῶτον μᾶς παρίσταται ὡς ἕν, καὶ τόσον, ὅσον τὸ αἰσθανόμεθα (8), ἀδύνατον νὰ διακρίνηται ἀκριβῶς ἀπὸ παντὸς ἄλλου βαθμοῦ ὁμοειδοῦς ποσοῦ. Τότε δὲ μόνον θέλει εἶσθαι ἀκριβῶς προσδιωρισμένος ἕκαστος βαθμὸς ποσοῦ καὶ θέλει διακρίνεσθαι εὐκόλως ἀπὸ παντὸς ἄλλου ὁμοειδοῦς, ὅταν γείνῃ γνωστὸν ἐκ πόσων μερῶν ἴσων μὲ τὴν ὁμοειδῆ μονάδα του σύγκειται ἕκαστος βαθμὸς μεγαλήτερος αὐτῆς, τί δὲ μέρος τῆς αὐτῆς μονάδος εἶναι ἕκαστος βαθμὸς μικρότερος αὐτῆς.

17. Καὶ τὰ μὲν μεγαλήτερα τῆς μονάδος μήκη, ὅσα εἶναι κατ' εὐθεῖαν καὶ ὄχι πολὺ μεγάλα, μανθάνομεν ἐκ πόσων μερῶν ἴσων μὲ τὴν μονάδα σύγκεινται, ἢ μὲ πόσας μονάδας εἶναι ἴσα, διὰ *μετρήσεως* αὐτῶν, συνισταμένης εἰς τὸ ἐπιφέρειν τὴν μονάδα ἐπὶ τοῦ ποσοῦ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ ἄλλου καὶ ἀριθμεῖν τὰς μονάδας. Ὅσας δὲ μονάδας ἔχει ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμός, μὲ τόσας μονάδας θέλει εἶσθαι ἴσον τὸ ποσόν. Ἄλλο λοιπὸν θέλει εἶσθαι 2 πήχεις μακρόν, ἄλλο 3, ἄλλο 4 κτλ.

Πῶς δὲ προσδιορίζεται ἄλλο μῆκος πολὺ ἐκτεταμένον, οἷον τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὄρους τινὸς μέχρι τῆς κορυφῆς ἄλλου ὄρους διάστημα, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς γῆς μέχρι τῆς σελήνης διάστημα, ἢ τὸ μῆκος καμπύλης γραμμῆς, ἢ αἱ διάφοροι ἐπιφάνειαι καὶ οἱ ὄγκοι, τοῦτο διδάσκουσιν ἡ γεωμετρία καὶ ἡ τριγωνομετρία. (ἰδὲ καὶ τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον).

Προσδιορίζομεν δὲ πόσον εἶναι βάρος μεγαλήτερον τῆς μονάδος, ἀλλ' ὄχι πολὺ μεγάλον, διὰ *σταθμήσεως* ἢ *ζυγίσεως*, γινομένης διὰ τοῦ στατῆρος ἢ τῆς τρυτάνης (ζυγαριᾶς), ὡς βλέπει τις καθ' ἡμέραν.

Πῶς δὲ προσδιορίζεται βάρος πολὺ μεγάλον, οἷον τὸ τῆς γῆς κτλ, διδάσκει ἡ φυσικὴ καὶ ἄλλαι ἐπιστῆμαι.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Ὁ δὲ χρόνος προσδιορίζεται διὰ διαφόρων εἰδῶν ὡρολογίου, ἄλλα δὲ ποσὰ κατ' ἄλλον τινὰ τρόπον.

Ἐκ τούτων δὲ καταλαμβάνει τις ὅτι οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι προσδιωρισμένοι βαθμοὶ πλήθους, χρησιμεύουσι καὶ εἰς τὸ νὰ παριστάνωσιν ἀκριβῶς προσδιωρισμένους καὶ διαφόρους βαθμοὺς ἑνὸς ἑκάστου τῶν ποσῶν πρὸς ἐκεῖνον τὸν βαθμόν, ὅστις κατὰ συνθήκην ἐκλαμβάνεται ὡς μονάς, καὶ ἔτι ὅτι οἱ πλειότεροι βαθμοὶ τῶν ποσῶν καὶ μάλιστα ἰδιαίτερά τινα ποσὰ δὲν εἶναι τόσον εὔκολον νὰ προσδιορισθῶσιν ἄνευ τῆς εἰδήσεως ἄλλων ἐπιστημῶν.

18. Ἐὰν πάντα τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ ἤθελαν προσδιορίζεσθαι πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ὁμοειδῆ μονάδα, ἤθελε συμβαίνει τὰ πολὺ μεγάλα ποσὰ νὰ παριστάνωνται διὰ πολὺ μεγάλων ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις δὲν ἐκτελοῦνται τόσον σύντομα, πλεῖστα δὲ ἄλλα νὰ μὴ προσδιορίζωνται ἀκριβῶς. Ἀλλ' εὐκόλως ἐννοεῖται πρῶτον ὅτι τὸ αὐτὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρός τινα μονάδα προσδιορισθὲν παριστάνεται δι' ἀριθμοῦ τινος, οἷον τοῦ 700, ἐὰν προσδιορισθῇ πρὸς ἄλλην μονάδα δεκαπλασίαν τῆς πρώτης ἢ ἑκατονταπλασίαν κτλ, θέλει παρασταθῆ δι' ἀριθμοῦ τόσον μικροτέρου, ὅσον μεγαλητέρα εἶναι ἡ δευτέρα μονάς, ἤτοι διὰ τοῦ 70, ἢ τοῦ 7. Ὥστε, ἂν μεταχειρισθῶμεν ἐκτὸς τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἑκάστου εἴδους ποσοῦ καὶ ἄλλας μεγαλητέρας αὐτῆς προσδιωρισμένας πρὸς αὐτὴν δι' ἀριθμοῦ, τότε καὶ τὰ πολὺ μεγάλα ποσὰ θέλει εἶσθαι δυνατὸν νὰ παριστάνωμεν διὰ μικρῶν ἀριθμῶν.

Τὸ προτιμότερον δὲ πάντων ἤθελεν εἶσθαι νὰ ἦναι τούτων τῶν μονάδων ἡ μὲν ποσὸν ἴσον μὲ 10 ἀρχικάς, ἡ δὲ ποσὸν ἴσον μὲ 100, ἡ δὲ ἴσον μὲ 1000 κτλ, ὥστε νὰ παριστάνωνται διὰ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκλαμβάνονται ὡς μονάδες. Ἀλλὰ τοῦτο ἐπενοήθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐκείνων, οἵτινες καὶ μονάδα μήκους ἐξέλαβον τὸ ἀπὸ τοῦ πόλου μέχρι τοῦ ἰσημερινοῦ διάστημα· τὰ πλεῖστα ὅμως ἔθνη ἀκόμη καὶ τώρα μεταχειρίζονται μονάδας ἴσας ἢ μὲ 6 ἀρχικάς, ἢ μὲ 12, ἢ μὲ ἄλλον ἀριθμὸν μονάδων διάφορον τοῦ 10, τοῦ 100 κτλ, κατὰ δὲ διάφορα εἴδη ποσῶν διαφόρως.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

19. Ἐὰν ἦτον δυνατὸν ὡς ἀρχικὴν μονάδα καὶ παντὸς ἄλλου εἴδους ποσοῦ νὰ ἔχωμεν τὴν κυρίως μονάδα, τὸ κυρίως ἕν, οἷον τὸ σημεῖον, τὴν στιγμὴν κτλ, καθὼς ἔχομεν ἑκάστου πλήθους τὸ κυρίως ἓν ὡς μονάδα διὰ τὸ εὐδιάκριτον αὐτοῦ, τότε μόνον μεγαλητέρας τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἤθελαμεν ἔχει χρείαν νὰ μεταχειριζώμεθα μονάδας. Ἀλλ' εἴδομεν ὅτι αἱ ἀρχικαὶ μονάδες ἑκάστου ἄλλου εἴδους ποσοῦ εἶναι ὄχι αἱ κυρίως μονάδες, ἀλλὰ ποσὰ μεγαλήτερα αὐτῆς ἐκλαμβανόμενα ὡς μονάδες κατὰ συνθήκην. Πρὸς ταύτας δὲ προσδιορίζονται μὲν ἀκριβῶς τινὰ ποσὰ μεγαλήτερα αὐτῶν, ἀλλ' ὄχι ὅλα τὰ μεγαλήτερα. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐξ ἀνάγκης καὶ μικρότερα αὐτῶν ποσὰ, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουσι χώραν εἰς τὸ πλῆθος, ταῦτα ἤθελον μείνει ἀπροσδιόριστα, ἂν δὲν ἠθέλαμεν μεταχειρισθῇ καὶ μονάδας μικροτέρας τῶν ἀρχικῶν καὶ προσδιωρισμένας πρὸς αὐτάς. Τοιαῦται δὲ εἶναι βαθμηδὸν τὸ *ἥμισυ* μέρος, τὸ *τρίτον*, τὸ *τέταρτον*, τὸ *πέμπτον κτλ*, γενικῶς δὲ πᾶν *πολλοστὸν* μέρος τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἅτινα καλοῦνται *κλασματικαὶ μονάδες*, καὶ εἶναι συνήθως ἐν χρήσει. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἴση μὲ δύο ἡμίσεα αὐτῆς, μὲ τρία τρίτα, μὲ τέσσαρα τέταρτα, καὶ ἀορίστως μὲ πολλὰ πολοστὰ αὐτῆς.

20. Ἂν δὲ καὶ εἶναι ἑκάστη τῶν κλασματικῶν τούτων μονάδων ἐν χρήσει, ἐκρίθη ὅμως εὐχρηστότερον νὰ μεταχειρίζωνται μᾶλλον ἑκάστου εἴδους ποσοῦ ὡρισμένας τινὰς κλασματικὰς μονάδας, καὶ βεβαιότατα αἱ παρέχουσαι περισσοτέρας εὐκολίας εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, καὶ διὰ τοῦτο προτιμότεραι, εἶναι αἱ λεγόμεναι *δεκαδικαί*, ἤτοι *τὸ δέκατον*, *τὸ ἑκατοστὸν*, *τὸ χιλιοστὸν*, *τὸ δέκατον τοῦ χιλιοστοῦ*, *τὸ ἑκατοστὸν τοῦ χιλιοστοῦ* (α), *τὸ μιλιονιστὸν* κτλ, τὰς ὁποίας πρῶτοι

(α) Ἡ ὀρθὴ ὀνομασία τῶν πολλοστῶν τούτων τῆς μονάδος εἶναι ἡ διὰ δύο χωριστῶν λέξεων, δέκατον χιλιοστοῦ, δέκατον μιλιονιστοῦ κτλ, ἑκατοστὸν χιλιοστοῦ, ἑκατοστὸν μιλιονιστοῦ κτλ. Τὸ δὲ δεκάκις χιλιοστὸν καὶ τὸ ἑκατοντάκις χιλιοστὸν, ὡς σημαίνοντα κυρίως, τὸ μὲν τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δέκα χιλιοστὰ ἤτοι ἓν ἑκατοστόν, τὸ δὲ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἑκατὸν χιλιοστὰ ἤτοι ἓν δέκατον, εἶναι ἀπαράδεκτα. Τὸ αὐτὸ δ' ἐννοεῖται καὶ περὶ τοῦ δεκάκις μιλιονιστὰ καὶ ἑκατοντάκις μιλιονιστὰ κτλ. Ἐπίσης λανθασμένα εἶναι καὶ τὰ ὀνόματα δεκαχιλιοστὰ, ἑκατοχιλιοστὰ κτλ.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἐπενόησαν οἱ Γάλλοι (ἰδὲ 15)· καθότι διατηρεῖται ἡ αὐτὴ σχέσις πρὸς ἀλλήλας, ἥτις παριστάνεται διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκλαμβανομένων ὡς μονάδων, ἤτοι τοῦ 10, τοῦ 100 κτλ. Ἀλλὰ τὰ πλεῖστα ἔθνη ἀκόμη καὶ τώρα μεταχειρίζονται ἄλλας κλασματικὰς μονάδας μὴ δεκαδικάς, αἵτινες ἔχουσι διάφορον σχέσιν πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ διαφόρου εἴδους ποσῶν καὶ αἱ τοῦ αὐτοῦ. Ἐκ δὲ τούτου ἡ μεγάλη ἔκτασις τῆς ἀριθμητικῆς καὶ ἡ δυσκολία εἰς τὰς πράξεις.

21. Τὰς τοιαύτας κλασματικὰς μονάδας καθὼς καὶ τὰς μεγαλητέρας τῆς ἀρχικῆς μονάδος ὀνομάζουσι διὰ λέξεων ἰδιαιτέρων, οἷον τὸ δέκατον τοῦ πήχεως ὀνομάζεται *παλάμη*, τὸ ἑκατοστὸν *δάκτυλος*, τὸ χιλιοστὸν *γραμμή*, τὸ χιλιοπλάσιον *στάδιον*, κτλ· τὸ τετρακοσιοστὸν τῆς ὀκᾶς, ὡς ἀρχικῆς μονάδος, *δράμι*, μονὰς δὲ ἴση μὲ 44 ὀκάδας *στατὴρ* ἢ *καντάρι* κτλ. (ἰδὲ ὅλας ταύτας τὰς μονάδας ἐν τῷ τῶν συμμιγῶν καὶ τῷ τῶν δεκαδικῶν κεφαλαίῳ τῆς Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς).

22. Τώρα εὐκόλως καταλαμβάνει τις ὅτι πᾶν σχεδὸν ποσὸν προςδιοριστὸν μεγαλήτερον καὶ μικρότερον τῆς ἀρχικῆς ὁμοειδοῦς μονάδος του εἶναι δυνατὸν νὰ προςδιορισθῇ ἀκριβῶς πρὸς αὐτήν, καὶ ὅτι σπανιώτατα συμβαίνει νὰ μὴ προςδιορίζηται ἀκριβῶς, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν. Ἂν π. χ. πρόκηται νὰ μετρήσωμεν μῆκός τι τῶν μὴ παρεχόντων δυςκολίας εἰς τοῦτο, ἀλλὰ μεγαλήτερον τοῦ σταδίου, πρῶτον μετροῦμεν αὐτὸ πρὸς τὸ στάδιον, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι 8 στάδια μακρὸν καί τι πλέον μικρότερον τοῦ σταδίου· τοῦτο τὸ περισσεῦον μετροῦμεν ἔπειτα πρὸς τὸν πῆχυν, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι 245 πήχεις καί τι μικρότερον τοῦ πήχεως· τοῦτο πάλιν μετροῦμεν πρὸς τὴν παλάμην, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι σωστὰ 7 παλάμαι. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος λοιπὸν μῆκος παριστάνεται ἐντελῶς προςδιωρισμένον διὰ τῶν ἀριθμῶν 8 στάδια 245 πήχεις καὶ 7 παλάμαι. Οὕτω καὶ περὶ παντὸς ἄλλου ποσοῦ.

23. Τὰς προειρημένας μονάδας σημειόνομεν κατὰ τρεῖς τρόπους.

α΄. Γράφομεν κατόπιν τοῦ ἀριθμοῦ ἑκάστης αὐτῶν, ἐνίοτε καὶ πρὸ αὐτοῦ, τὸ ὄνομα ἑκάστης αὐτῶν, οἷον 124 πήχεις, 12

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

δέκατα πέμπτα, 31 ἑκατοστά, 9 πήχεις 6 παλάμαι 7 δάκτυλοι, κτλ· συνήθως δὲ γράφομεν μόνον τ' ἀρκτικὰ γράμματα τοῦ ὀνόματος ἄνω τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς δεξιάν, οἷον 8$^{\text{όκ}}$ 240$^{\text{δρ}}$.

β'. Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν μονάδων εἰς ὡρισμένας θέσεις, καὶ τοῦτο γίνεται ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν μονάδων· οἷον τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκατημορίων, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀλιγώτερα τῶν 10, γράφομεν ἀμέσως δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων, χωρίζοντες τὸν πρῶτον ἐκ τοῦ δευτέρου δι' ὑποδιαστολῆς, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοστημορίων εἰς τὴν δευτέραν θέσιν δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιοστημορίων εἰς τὴν τρίτην θέσιν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἀκολουθοῦντες κατὰ τοῦτο ὅ,τι εἴπομεν εἰς τὸν ἀρ. 4 περὶ τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ· οἷον 4,5, 4,58, 4, 589 κτλ εἶναι 4 μονάδες ὁποιαιδήποτε καὶ 5 δέκατα, ἢ 58 ἑκατοστά, ἢ 589 χιλιοστὰ κτλ. Ὅταν δὲ ἀριθμὸς μονάδων δὲν ὑπάρχῃ, ἀντ' αὐτοῦ γράφεται 0.

γ'. Τὰς κλασματικὰς μονάδας, μάλιστα ὅσαι δὲν ἔχουσιν ὄνομα λέξιν ἰδιαιτέραν, ἀλλὰ παριστάνονται ὡς πολλοστὰ ἄλλης μονάδος, σημειόνομεν γράφοντες ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων γραμμήν, ὑπ' αὐτὴν δὲ ἀριθμὸν τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ πολλοστά, οἷον 8 δωδέκατα οὕτως $\frac{8}{12}$, 24 τριακοστὰ οὕτως $\frac{24}{30}$ κτλ.

Κατὰ ταῦτα πηχ. 34,578

καὶ 34 πηχ. 5 $^{\text{παλ.}}$ 7 $^{\text{δακ.}}$ 8 $^{\text{γρ.}}$

καὶ πηχ. 34 $\frac{578}{1000}$ ἢ καὶ $\frac{34578}{1000}$ τοῦ πήχεως

σημαίνουσι τὸ αὐτό.

Ὡσαύτως καὶ 12$^{\text{στ.}}$ 35$^{\text{όκ.}}$ 240$^{\text{δρ.}}$

καὶ 12 $^{\text{στ.}}$ $\frac{35}{44}$ καὶ $\frac{240}{17600}$ τοῦ στατῆρος εἶναι τὸ αὐτό.

$\frac{5}{8}$ καὶ 5 $^{\text{όγδ.}}$ εἶναι τὸ αὐτό.

0,68 καὶ $\frac{68}{100}$ εἶναι τὸ αὐτό.

0,003 καὶ $\frac{3}{1000}$ εἶναι τὸ αὐτό.

Εἰς ταῦτα πρέπει νὰ ἦναι γυμνασμένος ὅστις ἔμαθε καλῶς τὴν Πρακτ. Ἀριθμητικήν.

Διακρίσεις τῶν ἀριθμῶν ὡς ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν μονάδων αὐτῶν.

Αἱ μονάδες τῶν ἀριθμῶν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων πολλα-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

χῶς, καὶ διὰ τὴν διαφορὰν ταύτην τῶν μονάδων ἐπονομάζονται οἱ ἀριθμοὶ διαφόρως πρὸς διάκρισιν.

24. Ἐὰν μὲν δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν αἱ μονάδες ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους ποσὸν, ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοὶ *ὁμοειδεῖς*, οἷον οἱ $8^{\text{όκ}}$ $12^{\text{όκ}}$ — $20^{\text{στάδ}}$ $45^{\text{πήχ}}$, — $29^{\text{ἄνθρ}}$. $15^{\text{ἄνθρ}}$. κτλ. Ἐὰν δὲ ἦναι διαφόρου εἴδους ποσὸν αἱ μονάδες, λέγονται *ἑτεροειδεῖς*, οἷον οἱ $5^{\text{στάδ}}$ $22^{\text{όκ}}$ — $12^{\text{όκ}}$ $24^{\text{ἄνθρ}}$ — $35^{\text{πήχ}}$ $23^{\text{δρ}}$, κτλ.

25. Ἐὰν μὲν δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν αἱ μονάδες ἦναι αἱ αὐταὶ, ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοὶ *ὁμώνυμοι*, οἷον $12^{\text{στάδ}}$ $38^{\text{στάδ}}$ — $48^{\text{ς}}$ $10^{\text{ς}}$ — $20^{\text{ἄνθρ}}$ $14^{\text{ἄνθρ}}$· κτλ. Ἐὰν δὲ ἦναι αἱ μονάδες ἄνισοι, λέγονται οἱ ἀριθμοὶ *ἑτερώνυμοι*, οἷον $6^{\text{ὥρ}}$ $12^{\text{ἡμ}}$ — $7^{\text{όκ}}$ $285^{\text{δρά}}$, — $15^{\text{ἄνθρ}}$ $26^{\text{δένδ}}$, κτλ.

Οἱ μὲν ὁμώνυμοι εἶναι πάντοτε καὶ ὁμοειδεῖς, οἱ δὲ ἑτερώνυμοι εἶναι καὶ ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς. Ἄλλως, οἱ ὁμοειδεῖς δυνατὸν νὰ ἦναι ὁμώνυμοι ἢ ἑτερώνυμοι, οἱ δὲ ἑτεροειδεῖς εἶναι πάντοτε ἑτερώνυμοι.

26. Ἐὰν μὲν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ διάφοροι καὶ διαφόρων μονάδων παριστάνωσι τὸ αὐτὸ ποσὸν, καλοῦνται *ἰσοδύναμοι*, οἷον 3 ὀργυιαὶ 18 πόδες ἢ $\frac{18}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς, κτλ. Ἐὰν δὲ ἄλλος ἀριθμὸς παριστάνῃ ἄλλο ποσὸν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, οἱ ἀριθμοὶ λέγονται *ἑτεροδύναμοι*, οἷον 8 πήχεις 6 παλάμαι, κτλ.

27. Ἀριθμοῦ αἱ μονάδες εἶναι *ὅμοιαι* ἢ *ἴσαι*. Καὶ ὅμοιαι μὲν εἶναι ὅσαι συνιστῶσι πλῆθός τι, ἴσαι δὲ αἱ συνιστῶσαι πᾶν ἄλλο ποσόν. Ὁ ἀριθμὸς 12 ἄνθρωποι ἢ ὁ 7 βιβλία εἶναι ἀριθμὸς ὁμοίων μονάδων, ὁ δὲ 7 πήχεις ἢ ὁ 9 ὀκάδες κτλ, εἶναι ἀριθμὸς ἴσων μονάδων.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ὁ 7 πήχεις τότε εἶναι ἀριθμὸς ἴσων μονάδων, ὅταν παριστάνῃ μῆκος, ὅπερ ἀποτελεῖται ἀφοῦ νοηθῇ ὁ εἷς κατόπιν τοῦ ἄλλου, οἷον ὅταν νοῶμεν *ὕφασμα 7 πήχεων*. Ἂν ὅμως δὲν παριστάνῃ μῆκος, ἀλλὰ πλῆθος, ἄλλου πήχεως κειμένου ἀλλαχοῦ, τότε εἶναι ἀριθμὸς ὁμοίων μονάδων, οἷον ὅταν λέγωμεν *ὁ πηχοποιὸς ἐπώλησε σήμερον 7 πήχεις*.

28. Εἴπομεν ἀνωτέρω (12) ποῖον ὀνομάζομεν *ἁπλοῦν* ἀριθμὸν καὶ ποῖον *σύνθετον*. Κατὰ ταῦτα δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ 4 δρ.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου
ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

5 πήχεις, 7 ὧραι, $\frac{6}{9}$ τῆς ὀκᾶς, $\frac{3}{10}$ τῆς παλάμης κτλ, εἶναι ἁπλοῖ· καὶ οἱ 8 $\frac{4}{3}$ πήχ, ὧραι 22,74, 20$^{\text{ὀρ}}$ 4$^{\text{ποδ}}$ 9$^{\text{δακ}}$ εἶναι σύνθετοι ἐκ πολλῶν καὶ διαφόρων ἁπλῶν.

29. *Κλασματικὸν* ὀνομάζομεν τὸν ἀριθμόν, οὗτινος ἡ μονὰς εἶναι κλασματική, ἥτις νοεῖται ὡς πολοστόν τι ἄλλης μονάδος, οἷον τὸν $\frac{5}{4}$ τῆς ὀκᾶς, $\frac{7}{10}$ τοῦ πήχεως κτλ· ἰδίως δὲ *κλάσμα* ἐκεῖνον τὸν κλασματικόν, ὅστις παριστάνει ποσὸν μικρότερον τῆς μονάδος, ἧς τινος πολλοστὸν εἶναι ἡ μονάς του. Οἷον $\frac{7}{7}$ τοῦ πήχεως εἶναι αὐτὸς ὁ πῆχυς· λοιπὸν $\frac{3}{7}$ τοῦ πήχεως εἶναι κλάσμα αὐτοῦ· ἀλλ' ὁ $\frac{10}{7}$ αὐτοῦ δὲν εἶναι κλάσμα του (α).

Τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ τὸν μὲν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ὀνομάζουσιν *ἀριθμητήν*, τὸν δὲ δεικνύοντα τί πολλοστὸν ἄλλης μονάδος εἶναι ἡ μονάς του, *παρονομαστήν*, τοὺς δύο δὲ κοινῶς *ὅρους αὐτοῦ*. Ἀλλ' ἤθελεν εἶσθαι σαφέστερον νομίζω, ἂν ἐλέγομεν ἁπλῶς τὸν μὲν πρῶτον *ἀριθμὸν τῶν μονάδων*, τὸν δὲ *ὄνομα τῆς μονάδος*· διότι ὁ $\frac{5}{7}$ π. χ. δὲν διαφέρει τοῦ 5 ἕβδομα, ἢ τοῦ 5 ἄνθρωποι κτλ, ἀλλ' ὁ μὲν 5 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, τὸ δὲ ἕβδομα, ἄνθρωποι κτλ εἶναι τὸ ὄνομα τῆς μονάδος. Τοῦ $\frac{6}{7}$ ὁ 7 δὲν σημαίνει 7 μονάδας ὡς ὁ 5, ἀλλ' αὐτὸς ὁμοῦ μὲ τὴν γραμμὴν σημαίνει ἕβδομον, ἤτοι μονάδα. Ἂν λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον νὰ παραιτήσωμεν τὰ ὀνόματα ταῦτα, ὡς πολὺ συνήθη, τοὐλάχιστον εἶναι ὠφέλιμον νὰ ἐννοήσωμεν ὀρθῶς τὴν ἀληθῆ σημασίαν των.

Πρὸς διαστολὴν τοῦ κλασματικοῦ ὀνομάζουσιν *ἀκέραιον* τὸν ἀριθμόν, οὗτινος ἡ μονὰς νοεῖται καθ' αὑτὴν καὶ ὄχι ὡς πολλοστὸν ἄλλης, οἷον ἡ μονὰς πλήθους, ἡ ἀρχικὴ μονὰς ἄλλου εἴδους ποσοῦ ἢ καὶ ἄλλη τις αὐτῶν· 15 βιβλία, 18 πήχεις, 35 ὧραι κτλ εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι.

(α) Ὁρίζοντές τινες, ἂν καὶ ἀσαφῶς, ὅτι κλάσμα εἶναι μέρος τῆς μονάδος, ἔπειτα ὀνομάζουσι κλάσμα π. χ. καὶ τὰ $\frac{9}{4}$ τοῦ πήχεως, ἅτινα εἶναι ὄχι μέρος τῆς μονάδος, τοῦ πήχεως, ἀλλὰ πολὺ μεγαλήτερον αὐτοῦ ποσόν. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι τὸ διακρίνουσι τοῦ ἀληθοῦς κλάσματος λέγοντές το νόθον κλάσμα· ἀλλ' ἰσχύει τὸ ἐπίθετον νὰ συμβιβάσῃ τὰ ἀσυμβίβαστα; Ὁμολογῶ ὅτι κατὰ συνθήκην δύναταί τις νὰ ὀνομάζῃ ὅ,τι ἂν θέλῃ τὰ πράγματα· ἀλλὰ τοιαύτη συνθήκη, οἵα ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος, θέλει εἶσθαι πάντοτε παράλογος, ὅθεν καὶ ἀπαράδεκτος.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Μικτὸς δὲ λέγεται ὁ σύνθετος ἀριθμὸς ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, οἱουδήποτε ἢ δεκαδικοῦ, οἷον ὀργ. $30\,\frac{7}{9}$, δράμ. $340\,\frac{3}{4}$, τῆς ὥρας λεπτ. $6\,\frac{7}{8}$, πηχ. 64,58 κτλ. Ὁ τελευταῖος οὗτος λέγεται καὶ *δεκαδικὸς*, διότι ὅλαι αἱ μονάδες του εἶναι δεκαδικαί.

Συμμιγὴς δὲ λέγεται ὁ σύνθετος ἀριθμὸς ἐκ δύο ἢ πλειοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν διαφόρων ὁμοειδῶν μονάδων, αἵτινες εἶναι ἄλλη ἄλλης ἄλλο πολλοστὸν συνήθως, καὶ ὄχι δεκαδικαί, ἔχει δ' ἑκάστη ἴδιον ὄνομα, οἷον $6^{\text{ὀργ}}\ 4^{\text{ποδ}}\ 7^{\text{δακ}}\ 5^{\text{γρα}}$, $4^{\text{ταλ}}\ 3^{\text{δρα}}$, $20^{\text{ἡμέ}}\ 12^{\text{ὥρ}}\ 38^{\text{λεπ}}$ κτλ.

30. Ὀνομάζεται *συγκεκριμένος* ὁ ἀριθμὸς (4), οὗτινος ἡ μονὰς εἶναι προσδιωρισμένον πρᾶγμα, οἷον 8 ἄνθρωποι, 20 δραχμαί, 12 πήχεις, 9 ἡμέραι κτλ, *ἀφηρημένος* δὲ πρὸς διαστολὴν ἐκεῖνος, οὗτινος ἡ μονὰς εἶναι ὁποιαδήποτε καὶ μένει ἀπροσδιόριστος, οἷον 8, 30, 9 κτλ. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι ἀφηρημένος εἶναι κυρίως καθ' αὑτὸν ὁ *ἀριθμός*, τὸ προσδιωρισμένον πλῆθος, χωρὶς νὰ νοῆται τί εἶναι ἡ μονάς του· ἔπειτα ἀφηρημένος εἶναι π. χ. καὶ ὁ 8 δεκάδες, $\frac{8}{9}$, οὗτινος ἡ μονὰς εἶναι προσδιωρισμένη μόνον ὡς δεκαπλασία ἢ ὡς ἔνατον ἄλλης ἀπροσδιορίστου· ὁ τοιοῦτος ὅμως εἶναι ὀλιγώτερον ἀφηρημένος τοῦ πρώτου. Ὁ δὲ προσδιορισμὸς τῆς μονάδος τοῦ συγκεκριμένου, ἂν δὲν ἦναι αὐτὴ πλήθους μονάς, εἶναι προσδιορισμὸς τοῦ εἴδους τοῦ ποσοῦ καὶ τοῦ πόσον εἶναι, ἅτινα διὰ μόνου τοῦ ὀνόματός της παριστάνονται. Τοιοῦτος δὲ ἀριθμός, οἷον 7 πήχεις, παριστάνει ποσόν τι προσδιωρισμένον, μῆκος προσδιωρισμένον, ἀλλ' ἀφηρημένως, τουτέστι μῆκος ὁποιουδήποτε πράγματος, καὶ ὄχι ὡρισμένου πράγματος, ὡς ὅταν εἴπωμεν 7 πήχεις τσόχας, ἢ ὀρθότερον εἰπεῖν, τσόχα 7 πήχεων μακρά.

Ταῦτα δεικνύουσιν ὅτι τὸ ἀφηρημένον καὶ τὸ συγκεκριμένον εἶναι ἐνταῦθα ὀλίγον ἀπροσδιόριστα, καὶ ὄχι τόσον ἐπιτυχημένη ἢ ὠφέλιμος πολὺ ἡ τοιαύτη διάκρισις. Ὅ,τι νομίζω ὠφελιμώτερον εἶναι νὰ προσέχῃ τις ἑκάστοτε εἰς τὸν βαθμὸν τοῦ προσδιορισμοῦ, ἔχων ὑπ' ὄψιν ταύτην τὴν σειράν.

Πολλά, - ἀπροσδιόριστον καὶ τὸ πόσαι εἶναι αἱ μονάδες καὶ ὁποία εἶναι ἡ μονάς.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

12,	προσδιωρισμένον μόνον πόσαι εἶναι αἱ μονάδες.
Πολλὰ δένδρα,	μόνον ἡ μονὰς προσδιωρισμένη ποία εἶναι.
8 βιβλία,	προσδιωρισμένον καὶ πόσαι εἶναι αἱ μονάδες καὶ ποία εἶναι ἡ μονάς.
$\frac{5}{7}$	προσδιωρισμένον πόσαι εἶναι αἱ μονάδες καὶ ὅτι ἡ μονὰς εἶναι ἕβδομον ἄλλης ἀπροσδιορίστου.
$\frac{5}{7}$ τῆς ἡμέρας,	τὰ προηγούμενα προσδιωρισμένα καὶ ὅτι ἡ ἄλλη μονὰς εἶναι χρόνος καὶ ὡρισμένος χρόνος.
10 ὀκάδες ἄρτου,	προσδιωρισμένον καὶ πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, καὶ ποίου εἴδους ποσὸν εἶναι ἑκάστη, καὶ πόσον, καὶ ὅτι εἶναι πράγματός τινος βάρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

Περὶ τῶν διαφόρων σχέσεων τριῶν ἀριθμῶν καὶ περὶ τῶν διαφόρων λογισμῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἑνὸς αὐτῶν διὰ τῶν δύο ἄλλων.

31 Ὅταν πρόκηται νὰ μάθωμεν πόσον εἶναι ποσόν τι μὴ παρέχον δυσκολίας τῶν ὅσας εἴπομεν (17) ἢ καὶ ἄλλας, δι' ἀριθμήσεως μὲν τὸ πλῆθος, διὰ μετρήσεως δὲ τὴν ἔκτασιν, τὸν χρόνον, κτλ, διὰ σταθμήσεως δὲ τὸ βάρος, προσδιορίζομεν αὐτὸ, ἤτοι εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις τὸ παριστάνει προσδιωρισμένον. Ἀλλ' ὅταν τὸ ποσὸν δὲν ἦναι ὑπ' ὄψιν μας, ἢ, ἂν ἦναι, ἀπαιτῇ πολὺν χρόνον ἕως νὰ προσδιορισθῇ ὡς ἤδη εἴπομεν, ἢ παρέχῃ τοιαύτας ἄλλας δυσκολίας, ὥστε νὰ ἦναι ἀδύνατον κατ' ἐκεῖνον τὸν τρόπον νὰ προσδιορισθῇ, τότε διά τινων εἰδήσεων ἢ δεδομένων, (ἅτινα παρέχουσι πολλάκις διάφοροι ἐπιστῆμαι), δυνατὸν νὰ καταντήσῃ ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις τὸ παριστάνει προσδιωρισμένον, εἰς λογισμόν τινα ἀριθμητικὸν, ἤτοι εἰς τὸ νὰ ἐννοηθῶσιν αἱ σχέσεις, ἃς ἔχει αὐτὸς πρὸς ἄλλους γνωστοὺς ἀριθμοὺς, παριστάνοντας ἄλλα παρὰ τὸ προσδιοριστέον ποσὸν, καὶ κατ' ἐκείνας νὰ εὑρεθῇ. Περὶ δὲ τοῦ λο-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

γισμοῦ τούτου καθ' ὅλας σχεδὸν τὰς διαφόρους περιπτώσεις λέγομεν ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ τὰ δέοντα, θεωροῦντες πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς ἀφῃρημένους, ἔπειτα δὲ καὶ συγκεκριμένους, ἀλλὰ μὴ παριστάνοντας ὡρισμένων πραγμάτων ποσά. Λέγω σχεδὸν, διότι περὶ δυνάμεων καὶ ῥιζῶν θέλει γείνει λόγος ἐν τῷ Συμπληρώματι τῆς Ἀριθμητικῆς.

32. Ἀριθμὸς, ὅστις νοεῖται πρὸς τὴν μονάδα του, ἤτοι ὅτι σύγκειται ἐκ τῶν μονάδων του, δυνατὸν νὰ νοῆται διαφόρως καὶ πρὸς ἄλλους ἀριθμούς.

Ἀριθμός τις δυνατὸν νὰ νοῆται ὅτι σύγκειται ἐκ δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἷον ὁ 9, ὅστις ὡς 9 νοεῖται πρὸς τὴν μονάδα του, δυνατὸν νὰ νοηθῇ καὶ ὅτι σύγκειται ἐκ τοῦ 5 καὶ τοῦ 4, ὧν ὁ μὲν 5 παριστάνει τὰς πρώτας μονάδας τοῦ 9, ὁ δὲ 4 τὰς τελευταίας, ἤτοι ἡ πρώτη τούτου ἀντιστοιχεῖ μὲ τὴν ἕκτην τοῦ 9, ἡ δευτέρα μὲ τὴν ἑβδόμην κτλ. Ὡσαύτως ὁ 20 δυνατὸν νὰ νοῆται ὅτι σύγκειται ἐκ τοῦ 12 καὶ τοῦ 8, ὧν ὁ μὲν 12 παριστάνει τὰς πρώτας τοῦ 20 μονάδας, ὁ δὲ 8 τὰς τελευταίας.

Πᾶς ἀριθμὸς, νοούμενος ὅτι ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουσι δύο ἄλλοι, λέγεται *κεφάλαιον τῶν δύο ἄλλων*, οὗτοι δὲ εἶναι μέρη αὐτοῦ, ὁ μὲν πρῶτον, ὁ δὲ δεύτερον.

Δυνατὸν δὲ νὰ νοῆται ἀριθμὸς κεφάλαιον καὶ τριῶν καὶ τεσσάρων καὶ πλειοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν.

33. Ἀριθμὸς δὲ μεγαλήτερος ἄλλου δυνατὸν πάντοτε νὰ νοῆται κεφάλαιον τοῦ ἄλλου καὶ τρίτου τινὸς, ὅστις θέλει ἔχει τόσας μονάδας, καθ' ὅσας ὁ μεγαλήτερος ὑπερέχει τὸν ἄλλον, ἢ οὗτος ἐλαττοῦται τοῦ μεγαλητέρου. Ὁ ἀριθμὸς δὲ, ὅστις νοεῖται πρὸς δύο ἄλλους οὕτως, ὅτι ἔχει τόσας μονάδας, καθ' ὅσας ὁ μεγαλήτερος αὐτῶν ὑπερέχει τὸν μικρότερον, ἢ οὗτος ἐλαττοῦται τοῦ μεγαλητέρου, λέγεται *διαφορὰ* αὐτῶν. Ἡ διαφορὰ δὲ καὶ ὁ μικρότερος εἶναι τὰ δύο μέρη τοῦ μεγαλητέρου, καὶ δύναται ἀδιαφόρως ὁ μικρότερος νὰ νοῆται ὡς τὸ πρῶτον μέρος ἢ τὸ δεύτερον.

Τρεῖς ἀριθμοὶ λοιπὸν δυνατὸν νὰ ἔχωσι ταύτην τὴν σχέσιν, ὁ εἷς νὰ νοῆται κεφάλαιον τῶν δύο ἄλλων, ἑκάτερος δὲ τούτων διαφορὰ τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

34. Ἀριθμὸς δυνατὸν νὰ νοῆται κεφάλαιον πολλῶν ἴσων ἀριθμῶν, καὶ τότε νοούμενος πρὸς τὸν ἕνα τούτων λέγεται ἀορίστως μὲν *πολλαπλάσιος αὐτοῦ*, ὡρισμένως δὲ *διπλάσιος αὐτοῦ*, ἂν ἦναι κεφάλαιον δύο ἴσων, *τριπλάσιος*, ἂν ἦναι τριῶν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς (α). Ἀντιστρόφως δὲ ἓν τῶν ἴσων μερῶν τοῦ κεφαλαίου ἢ τοῦ πολλαπλασίου νοούμενον πρὸς αὐτὸ λέγεται ἀορίστως μὲν *πολλοστὸν αὐτοῦ*, ὡρισμένως δὲ *ἥμισυ* ἢ *δεύτερον αὐτοῦ*, ἂν αὐτὸς ἦναι διπλάσιος, *τρίτον*, ἂν ἦναι τριπλάσιος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Παραδείγματα τούτων ἔχει τις εἰς τὰ περὶ ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν, ὅπου ὁ 20 εἶναι διπλάσιος τοῦ 10, ὁ δὲ 10 ἥμισυ τοῦ 20, ὁ 30 τριπλάσιος τοῦ 10, ὁ δὲ 10 τρίτον τοῦ 30 κτλ. Ἔτι δὲ ὁ 4 εἶναι διπλάσιος τοῦ 2, ὁ δὲ 2 ἥμισυ τοῦ 4, ὁ 6 τριπλάσιος τοῦ 2, ὁ δὲ 2 τρίτον τοῦ 6 κτλ.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ἐνταῦθα εἶναι τρία τινά, ὁ ἀριθμὸς, ὅστις νοεῖται κεφάλαιον τῶν ἴσων ἀριθμῶν, ὁ εἷς τῶν ἴσων τούτων ἀριθμῶν, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ 12 εἶναι ἑξαπλάσιος τοῦ 2· ἐνταῦθα 12 εἶναι ὁ πρῶτος, 2 εἶναι ὁ δεύτερος καὶ 6 εἶναι ὁ τρίτος, ὅστις εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν σύγκειται ὁ 12. Ἂν λοιπὸν νοῶμεν τὸν 12 πρὸς τὸν 2, ὅτι εἶναι ἑξαπλάσιος, τότε νοοῦμεν ὅτι ἐκ τοσούτων 2 σύγκειται ὁ 12, ἐξ ὅσων μονάδων σύγκειται ὁ 6· ἐὰν δὲ νοῶμεν τὸν 2 πρὸς τὸν 12, τότε νοοῦμεν ὅτι εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ 12 ὁ 2, ὅ,τι πολλοστὸν τοῦ 6 εἶναι ἡ μονάς του, ἤτοι τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ. Ὁ 6 λοιπὸν ἢ τὸ $\frac{1}{6}$, τὸ ὁποῖον δεικνύει ταύτην τὴν σχέσιν τῶν δύο ἀριθμῶν, ὅτι ὁ ἕτερος ἀριθμὸς εἶναι τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου ἢ τοιοῦτον

(α) Συνειθίζουσί τινες νὰ λέγωσι ἀντὶ τοῦ διπλάσιος, τριπλάσιος κτλ, δύο φορὰς μεγαλήτερος, τρεῖς φορὰς μεγαλήτερος κτλ. Τοιαύτη φράσις, ἂν δὲν ἰσοδυναμῇ μὲ τὴν εἶναι μεγαλήτερος καὶ ἴσος μὲ δύο φορὰς, ἢ μὲ τρεῖς κτλ, εἶναι ἐσφαλμένη· διότι, ἂν ὁ 4 π. χ. ἦναι δύο φορὰς μεγαλήτερος τοῦ 2, ὁ 6 τρεῖς φορὰς κτλ, τίς ἀριθμὸς εἶναι μίαν φορὰν μεγαλήτερος τοῦ 2; Ἀλλ' ὅπως καὶ ἂν θεωρηθῇ, τὴν ἔκρινα ἀπαράδεκτον, προτιμοτέραν δὲ τὴν καὶ συντομωτέραν, διπλάσιος, τριπλάσιος κτλ. Ἂν δὲ θέλῃ τις νὰ μεταχειρισθῇ αὐτὴν ὡς ἁπλουστέραν ἐνίοτε, εἶναι προτιμότερον νὰ λέγῃ ὁ 4 εἶναι δύο φορὰς 2, ὁ 6 τρεῖς φορὰς 2 κτλ. Τὸ αὐτὸ λέγω καὶ διὰ τὴν φράσιν δύο φορὰς μικρότερον, κτλ.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου
ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

πολλοστὸν, ὅσας μονάδας ἔχει αὐτὸς ἢ ὅ,τι πολλοστὸν τῆς μονάδος του εἶναι αὐτὸς, ὀνομάζεται *λόγος τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸν ἄλλον*· ὁ μὲν 6 εἶναι ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 2, τὸ δὲ $\frac{1}{6}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 2 πρὸς τὸν 12. Ἂν ὅμως εἴπωμεν *ὁ λόγος τῶν δύο ἀριθμῶν*, τότε νοοῦμεν ἀορίστως τὸν 6 ἢ τὸν $\frac{1}{6}$.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἦναι γνωστὸς ὁ ἕτερος τῶν δύο τούτων λόγων, γνωστὸς καθίσταται καὶ ὁ ἄλλος.

35. Ἀριθμὸς δυνατὸν νὰ νοῆται πρὸς ἄλλον ὄχι ἀμέσως, ἀλλ' ἐμμέσως, δι' ἀριθμοῦ ὅστις νὰ ἦναι πολλοστόν τι ἑκατέρου. Οἷον ὁ 24 πρὸς τὸν 36 δύναται νὰ νοηθῇ διὰ τοῦ 4, ὅστις εἶναι ἕκτον τοῦ 24 καὶ ἔννατον τοῦ 36· εἶναι δὲ *ἑξαπλάσιος τοῦ ἐννάτου τοῦ* 36. Καὶ ἀντιστρόφως ὁ 36 *εἶναι ἐννεαπλάσιος τοῦ ἕκτου τοῦ* 24.

Δῆλον δὲ ὅτι ὁ 24 νοεῖται πρὸς τὸν 36, ὡς ὁ $\frac{6}{9}$ πρὸς τὴν μονάδα του· καὶ ὁ $\frac{6}{9}$ καλεῖται λόγος τοῦ 24 πρὸς τὸν 36. Ἀντιστρόφως δὲ ὁ 36 νοεῖται πρὸς τὸν 24, ὡς ὁ $\frac{9}{6}$ πρὸς τὴν μονάδα του· ἄρα ὁ $\frac{9}{6}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 36 πρὸς τὸν 24. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος $\frac{9}{6}$ εἶναι ὁ ἀνεστραμμένος τοὺς ὅρους λόγος $\frac{6}{9}$ τοῦ 24 πρὸς τὸν 36, δῆλον ὅτι, ὅταν ἦναι γνωστὸς ὁ πρῶτος λόγος, διὰ τῆς ἀναστροφῆς τῶν ὅρων του τρέπεται εἰς τὸν λόγον τοῦ 36 πρὸς τὸν 24.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι νοεῖται ὁ 36 πρὸς τὸν 24 ὡς ἡ ἀκεραία μονὰς τοῦ $\frac{6}{9}$ πρὸς αὐτόν. Διότι τὸ $\frac{1}{9}$ εἶναι κοινὸν πολλοστὸν καὶ τῆς μονάδος καὶ τοῦ $\frac{6}{9}$, ἔννατον μὲν τῆς μονάδος, ἕκτον δὲ τοῦ $\frac{6}{9}$, διότι ἑξάκις λαμβανόμενον ἀποτελεῖ τὸν $\frac{6}{9}$· ἄρα ἡ μονὰς εἶναι ἐννεάκις τὸ ἕκτον τοῦ $\frac{6}{9}$, ἤτοι εἶναι $\frac{9}{6}$ τοῦ $\frac{6}{9}$, ὡς ὁ 36 εἶναι $\frac{9}{6}$ τοῦ 24.

Παρατηρητέον προσέτι ὅτι τὰ ἐν τῷ ἀριθμῷ τούτῳ εἶναι σύνθετα ἐκ τῶν ἐν τῷ ἀρ. 34 θεωρηθέντων. Διότι ἐκεῖ ἐθεωρεῖτο ἀριθμός τις ἁπλῶς ὡς πολλαπλάσιος ἢ ὡς πολλοστὸν ἄλλου, ἐδῶ δὲ ὡς πολλαπλάσιος πολλοστοῦ ἄλλου· ἐκεῖ ὁ λόγος αὐτῶν ἦτον ἀκέραιος ἢ ἓν πολλοστὸν, ἐδῶ εἶναι κλασματικός. Ἀλλ' ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἦναι κοινὸν πολλοστὸν τῶν δύο ἀριθμῶν, τότε δυνατὸν νὰ νοηθῇ ὁ ἕτερος πρὸς τὸν ἄλλον διὰ τῆς μονάδος των, ἢ νὰ νοηθῇ ἔτι συνθετω-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τέρα. Οἷον τοῦ 27 καὶ τοῦ 8 κοινὸν πολλοστὸν ἄλλο παρὰ τὴν μονάδα δὲν ὑπάρχει, ἥτις εἶναι τοῦ μὲν 27 εἰκοστὸν ἕβδομον, τοῦ δὲ 8 ὄγδοον. Ὁ 27 λοιπὸν πρὸς τὸν 8 δυνατὸν νὰ νοῆται ὡς ὁ $\frac{27}{8}$ πρὸς τὴν μονάδα του, ὁ δὲ 8 πρὸς τὸν 27 ὡς ὁ $\frac{8}{27}$ πρὸς τὴν μονάδα του, ἢ ὡς ἡ μονὰς τοῦ $\frac{27}{8}$ πρὸς αὐτόν. Ἀλλ' ὁ 27 πρὸς τὸν 8 δύναται νὰ νοηθῇ καὶ ὡς ὁ $3\frac{3}{8}$ πρὸς τὴν μονάδα του, δηλ. σύνθετος ἐκ τοῦ 24, ὅςτις εἶναι τριπλάσιος τοῦ 8, καὶ τοῦ 3, ὅςτις εἶναι $\frac{3}{8}$ τοῦ 8. Ὁ δὲ 8 πρὸς τὸν 27 ἄλλως εἶναι ἀδύνατον νὰ νοηθῇ εἰμὴ ὡς ὁ $\frac{8}{27}$, πρὸς τὴν μονάδα του. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ μονὰς τοῦ $\frac{27}{8}$ ἄλλως ἀδύνατον νὰ νοηθῇ πρὸς αὐτὸν εἰμὴ ὡς $\frac{8}{27}$ τοῦ $\frac{27}{8}$.

Γενικῶς λοιπὸν *ἀριθμὸς δυνατὸν νὰ νοῆται πρὸς ἄλλον, ὅπως τρίτος ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα του, ἢ ὅπως αὕτη πρὸς ἐκεῖνον.*

36. Ἐὰν τριῶν ἀριθμῶν ὡς προείδομεν συσχετισμένων πρὸς ἀλλήλους οἱ δύο ἦναι γνωστοί, ὁ δὲ τρίτος ἄγνωστος, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ αὐτὸς διὰ λογισμοῦ τινος γινομένου ἐπὶ τῶν γνωστῶν. Ὁ ἄγνωστος δυνατὸν νὰ ἦναι α') τὸ κεφάλαιον τῶν δύο γνωστῶν, β') ἡ διαφορὰ αὐτῶν, γ') τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ ἑτέρου τῶν γνωστῶν, ἐξ ὅσων μονάδων του σύγκειται ὁ ἄλλος, δ') τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ ἑτέρου, ὅ,τι πολλοστὸν εἶναι τοῦ ἄλλου ἡ μονάς του, ε') ὁ λόγος τοῦ ἑτέρου τῶν γνωστῶν πρὸς τὸν ἄλλον· ἢ νὰ ἦναί τι σύνθετον ἐκ τούτων, οἷον πολλαπλάσιόν τι πολλοστοῦ τινος τοῦ ἑτέρου, ὁποῖον εἶναι ὁ ἄλλος τῆς μονάδος, ἢ ὁποῖον εἶναι ἡ μονὰς πρὸς αὐτόν, κτλ.

37. Καὶ τὸ μὲν κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, ἐὰν ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀμέσως κατόπιν τοῦ ἑτέρου τῶν γνωστῶν ἀριθμήσωμεν τόσους ἀριθμούς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος γνωστός. Π. χ. ἐὰν πρόκηται νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον τοῦ 8 καὶ τοῦ 4, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ 9 καὶ ἀριθμοῦντες τέσσαρας ἀριθμούς, ἤτοι 9, 10, 11, 12, εὑρίσκομεν ὅτι 12 εἶναι τὸ κεφάλαιον τοῦ 8 καὶ τοῦ 4. Ὁ τοιοῦτος λογισμὸς ὀνομάζεται *πρόςθεσις τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἄλλον*· διαφέρει δὲ τῆς ἀριθμήσεως κατὰ ταῦτα, ὅτι δὲν ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ ἑνός, ἀλλ' ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀμέσως κατόπιν τοῦ ἑτέ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ρου τῶν γνωστῶν, ἀριθμοῦμεν δὲ ὄχι ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος, ἀλλὰ τόσους ἀριθμοὺς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος γνωστός (ἰδὲ ἀριθ. 7). Θέλομεν δὲ ἰδεῖ μετ' ὀλίγον ποίαν τροποποίησιν λαμβάνει ὁ λογισμὸς οὗτος εἰς διαφόρους περιπτώσεις.

38. Διὰ τοῦ αὐτοῦ σχεδὸν τούτου λογισμοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκωμεν καὶ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν. Π. χ. ἂν πρόκηται νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τοῦ 9 καὶ τοῦ 12, λογιζόμεθα πόσοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀπὸ τοῦ 9 μέχρι καὶ τοῦ 12, οἷον ὁ 9 ἕν, ὁ 10 δύο, ὁ 11 τρία, ὁ 12 τέσσαρα· λοιπὸν 4 μονάδας ἔχει ὁ 12 πλειοτέρας τοῦ 8· λοιπὸν 4 εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ 8 καὶ τοῦ 12. Εἶπον σχεδὸν, διότι εἶναι διαφορά τις, καθότι ἐν τῇ προςθέσει ὁδηγούμεθα ὑπὸ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ποῦ πρέπει νὰ παύσωμεν ἀριθμοῦντες, ἐνταῦθα δὲ ὁδηγούμεθα ὑπὸ τοῦ μεγαλητέρου ἀριθμοῦ ποῦ πρέπει νὰ παύσωμεν.

Ἀλλὰ συνηθέστερα εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἀριθμοῦντες ἀντιστρόφως, ἤτοι ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀμέσως πρὸ τοῦ μεγαλητέρου τῶν γνωστῶν καὶ ὀπισθοδρομοῦντες τόσους ἀριθμοὺς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μικρότερος γνωστός. Π. χ. ἂν ζητῆται ἡ διαφορὰ τοῦ 8 καὶ τοῦ 12, λογιζόμεθα 11 ἕν, 10 δύο, 9 τρία, 8 τέσσαρα, 7 πέντε, 6 ἕξ, 5 ἑπτὰ, 4 ὀκτώ· λοιπὸν 4 μονάδας, ὅσαι ἔμειναν, ἔχει πλειοτέρας ὁ 12 τοῦ 8· λοιπὸν 4 εἶναι ἡ διαφορά των. Ὁ τοιοῦτος λογισμὸς ὀνομάζεται *ἀφαίρεσις ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἄλλου μικροτέρου*, εἶναι δὲ ἀντίστροφος τῆς προςθέσεως. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ καὶ ἂν γείνῃ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ λογισμὸς, ἀλλὰ μέχρι καὶ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ, ἤγουν 11 ἕν, 10 δύο, 9 τρία, 8 τέσσαρα· λοιπὸν 4 εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ 12 καὶ τοῦ 8 (α).

Κατὰ τὸν πρῶτον καὶ τρίτον τρόπον τοῦ λογίζεσθαι ἡ διαφορὰ νοεῖται τὸ δεύτερον μέρος τοῦ 12, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον νοεῖται τὸ πρῶτον.

Κατωτέρω δὲ θέλομεν ἰδεῖ καὶ τούτου τοῦ λογισμοῦ τὰς τροποποιήσεις.

(α) Ἡ ἀκριβὴς αὕτη τῶν λογισμῶν τούτων ἔκθεσις θέλει μᾶς εἶσθαι πολὺ ὠφέλιμος εἴς τι μέρος τοῦ Συμπληρώματος τῆς Ἀριθμητικῆς.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

39. Ὁ λογισμὸς ὁ πρὸς εὕρεσιν πολλαπλασίου τοῦ ἑτέρου τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν τοιούτου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος γνωστὸς, εἶναι αὐτὴ ἡ πρόσθεσις τοῦ πρώτου γνωστοῦ εἰς ἑαυτὸν, ἔπειτα εἰς τὸ διπλάσιόν του, μετέπειτα εἰς τὸ τριπλάσιόν του, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μεχρισοῦ εὑρεθῇ τὸ προςδιοριζόμενον ὑπὸ τοῦ ἄλλου γνωστοῦ πολλαπλάσιον. Ὁ τοιοῦτος δὲ λογισμὸς ἀορίστως μὲν ὀνομάζεται κυρίως *πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον*, ὡρισμένως δὲ *διπλασιασμὸς, τριπλασιασμὸς κτλ.*

40. Ὁ αὐτὸς λογισμὸς χρησιμεύει καὶ πρὸς εὕρεσιν πολλοστοῦ τοῦ ἑτέρου τῶν γνωστῶν τοιούτου, ὁποῖον εἶναι τοῦ ἄλλου ἡ μονάς του, ἀλλ' ἀνάγκη νὰ λογιζώμεθα οὕτως ὄχι ὡρισμένον ἀριθμὸν, ἀλλὰ ἕνα τινὰ, καὶ ἔπειτα ἄλλον καὶ ἄλλον, ἕως νὰ εὕρωμεν ἕνα, ὅστις νὰ ἦναι τὸ ζητούμενον πολλοστόν. Ἐὰν π. χ. ζητῆται τὸ πέμπτον τοῦ 35, ἤτοι ἀριθμὸς, οὗτινος ὁ 35 εἶναι πενταπλάσιος, παρατηροῦμεν ἂν τυχὸν ἦναι ὁ 4, καὶ θέλει εἶσθαι, ἂν πεντάκις 4 ἀποτελῇ 36· ἐπειδὴ δὲ δὲν εἶναι, δοκιμάζομεν ὡσαύτως τὸν 5 ἢ τὸν 6 ἢ τὸν 7, καὶ βλέπομεν ὅτι ὁ 7 εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ 35. Ὁ τοιοῦτος δὲ λογισμὸς, ὅστις συνίσταται εἰς τὸ νὰ δοκιμάζωμεν ἀριθμούς τινας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἕως νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πολλοστὸν, ὀνομάζεται, ἂν καὶ ὄχι καταλλήλως, κατὰ μερικὴν σημασίαν *διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου.*

41. Ὁ δὲ λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἢ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δευτέρου ἕως νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος, ἀλλὰ κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον πρέπει νὰ λογιζώμεθα τί πολλαπλάσιον τέλος θέλει ἀναδειχθῇ ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὁ προςδιορίσας τὸ πολλαπλάσιον θέλει εἶσθαι ὁ λόγος· ἢ δι' ἐπαναλαμβανομένης ἀφαιρέσεως τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ τῶν προκυπτόντων ἀριθμῶν μετὰ τὰς ἀφαιρέσεις κτλ. Οἷον ἂν ζητῆται ὁ λόγος τοῦ 35 πρὸς τὸν 7, ἀφαιρεῖται 7 ἀπὸ τοῦ 35, ἔπειτα 7 ἀπὸ τοῦ μείναντος 28 μετὰ τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν, ἔπειτα 7 ἀπὸ τοῦ μείναντος 21 καὶ οὕτως ἐφεξῆς, λογιζόμεθα δὲ κατὰ σειρὰν ποσάκις ἀφαιρεῖται ὁ 7 ἀπὸ τοῦ 35 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι πεντάκις· λοιπὸν ὁ 35 εἶναι πεντάκις 7, ἤτοι ὁ λόγος τοῦ 35 πρὸς τὸν 7 εἶναι 5.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Ἂν δ' ἐζητεῖτο ὁ λόγος τοῦ 7 πρὸς τὸν 35, ἤθελεν εὑρεθῇ ὁ τοῦ 35 πρὸς τὸν 7, ὅςτις εἶναι 5, καὶ τότε εἶναι γνωστὸς ὁ τοῦ 7 πρὸς τὸν 35, δηλ. εἶναι $\frac{1}{5}$.

Ὁ λογισμὸς δὲ οὗτος καὶ ἄλλος ἔτι συνθετώτερος, δι' οὗ εὑρίσκεται ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δὲν ἔχει ὄνομα ἴδιον, οὐδὲ εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνηται αὐτὸς ὁ λογισμός· διότι, ὡς θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω, ὁ λόγος εὑρίσκεται πάντοτε διὰ τῆς διαιρέσεως.

42. Ἐκ τούτων ἁπάντων ἐννοεῖ τις ὅτι λογισμοὶ στοιχειώδεις κυρίως εἶναι μόνον δύο, ἡ πρόςθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, ἀντίστροφος ὁ ἕτερος τοῦ ἄλλου, ἀκριβέστερον δὲ, δυνατὸν νὰ ἦναι εἷς μόνος, ἡ πρόςθεσις, ἐκτελουμένη καὶ αὐτὴ δι' ἀριθμήσεως. Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις καὶ ὁ πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου λογισμὸς εἶναι προςθέσεις ἢ ἀφαιρέσεις, γινόμεναι ὅμως πρὸς εὕρεσιν ἀριθμῶν ἐχόντων διαφόρους ἄλλας σχέσεις πρὸς τοὺς δύο γνωστούς.

43. Πᾶς ἄλλος λογισμὸς δὲν εἶναι ἄλλο τι, εἰμὴ σύνθετόν τι ἐκ τῶν ἤδη προειρημένων, οἷος ὁ πρὸς εὕρεσιν τοιούτου πολλαπλασίου τοιτούτου πολλοστοῦ τοῦ ἑτέρου τῶν γνωστῶν, ὁποῖον πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τῆς μονάδος του εἶναι ὁ ἄλλος γνωστὸς, κλασματικὸς ὢν, ἢ ἀντιστρόφως, ὁποῖον πολλαπλάσιον πολλοστοῦ αὐτοῦ εἶναι ἡ μονάς του (ἰδὲ 35).

Ἀποδώσαντες δὲ εἰς τὰς λέξεις πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν γενικωτέραν σημασίαν, ὀνομάζουσι *πολλαπλασιασμὸν μὲν ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον πάντα λογισμὸν ἁπλοῦν ἢ σύνθετον, δι' οὗ εὑρίσκεται τοιοῦτος ἀριθμὸς πρὸς τὸν πρῶτον γνωστὸν, ὁποῖος εἶναι ὁ ἄλλος γνωστὸς πρὸς τὴν μονάδα του, καὶ ὅςτις ἑπομένως συνίσταται εἰς ἐκτέλεσιν τοιούτων πράξεων ἐπὶ τοῦ πρώτου, ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῆς ἀκεραίας μονάδος τοῦ δευτέρου πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ.* Ὥστε παρατηροῦντες ἑκάστοτε διὰ τίνων πράξεων εὑρίσκεται ὁ δεύτερος ἐκ τῆς μονάδος του, μανθάνομεν ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τοῦ πρώτου, ἵνα τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν δεύτερον. Οὗτος δὲ πάντοτε εἶναι ὁ λόγος τοῦ εὑρισκομένου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν πρῶτον, ἐξ οὗ γίνεται.

Διαίρεσιν δὲ ἀριθμοῦ δι' ἄλλου ὀνομάζουσι πάντα λογι-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

σμὸν ἁπλοῦν ἢ σύνθετον πρὸς εὕρεσιν τοιούτου ἀριθμοῦ πρὸς τὸν πρῶτον γνωστόν, ὁποία εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον ἡ μονάς του, καὶ ὅςτις ἐπομένως προςδιορίζεται ἑκάστοτε ὑπὸ τοῦ δευτέρου γνωστοῦ (35)· διότι ἡ μονάς του εἶναι πρὸς αὐτὸν τὸ ἀντίστροφον τοῦ ὅ,τι εἶναι αὐτὸς πρὸς ἐκείνην. Οἷον ἂν αὐτὸς ἦναι 8, ἡ μονάς του εἶναι τὸ ὄγδοόν του, καὶ τότε πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄγδοον τοῦ ἄλλου γνωστοῦ· ἂν δ' ἦναι $\frac{7}{9}$ αὐτός, ἡ μονάς του εἶναι τὰ $\frac{9}{7}$ του, καὶ τότε πρέπει νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐννέα ἕβδομα τοῦ ἄλλου γνωστοῦ, κτλ.

44. Ἀφοῦ εἴδομεν τοὺς διαφόρους λογισμοὺς ὁποῖοι εἶναι καὶ ὁποῖοι ἀριθμοὶ εὑρίσκονται δι' αὐτῶν, καὶ ἔτι ὅτι δύο ἀριθμοὶ γνωστοὶ χρειάζονται εἰς ἕκαστον αὐτῶν καὶ δύο μόνον, εὑρίσκεται δὲ δι' ἑκάστου εἷς μόνος ἀριθμός, παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἐν τῷ λογισμῷ οἱ δύο γνωστοὶ δὲν λογίζονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀλλὰ διαφόρως ἑκάτερος.

Τῶν δύο ἀριθμῶν τῆς προςθέσεως ὁ μὲν νοεῖται ὡς ἀριθμὸς εἰς ὃν προςθέτομεν ἢ ὃν αὐξάνομεν, καὶ τὸν διακρίνομεν διὰ τοῦ ἐπιθέτου *πρῶτος*, ὁ δὲ ὡς ἀριθμός, ὅσον προςθέτομεν εἰς τὸν πρῶτον, ἢ ὅςτις δεικνύει κατὰ πόσον αὐξάνομεν τὸν πρῶτον, καὶ τὸν λέγομεν *δεύτερον*. Ὁ δὲ διὰ τῆς προςθέσεως εὑρισκόμενος, τὸ κεφάλαιον τῶν δύο, λέγεται καὶ *ἄθροισμα αὐτῶν*.

Τῶν δύο δὲ ἀριθμῶν τῆς ἀφαιρέσεως ὁ μὲν νοεῖται ὡς ἀριθμὸς ἐξ οὗ ἀφαιροῦμεν ἢ ὃν ἐλαττοῦμεν, καὶ τοῦτον ὀνομάζομεν *ἀφαιρετέον*, ὁ δὲ ὡς ἀριθμός, ὅσον ἀφαιροῦμεν, ἢ ὅςτις δεικνύει πόσας μονάδας ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου, κατὰ πόσον τὸν ἐλαττοῦμεν, καὶ τοῦτον ὀνομάζομεν *ἀφαιρέτην* (α). Ὁ δὲ προκύπτων ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως, ἡ διαφορὰ τῶν δύο,

(α) Ὀνόματα ἰδιαίτερα οἱ δύο γνωστοὶ τῆς προςθέσεως ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσιν, οὐδὲ εἶναι μεγάλη ἡ χρεία αὐτῶν· διὰ τοῦτο καὶ ἡμεῖς θέλομεν τοὺς διακρίνει ὡς εἴπομεν ἤδη. Τοὺς δὲ τῆς ἀφαιρέσεως ὠνόμασαν ἄλλοι ἄλλως· ἡμεῖς δὲ προτιμῶμεν τὰ συγγενῆ τοῦ ὀνόματος τοῦ λογισμοῦ ὀνόματα ἀφαιρετέος καὶ ἀφαιρέτης, καὶ διότι ὁμοιάζουσι μὲ τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως (ἰδὲ κατωτέρω), καὶ διότι ἡ σημασία των ἀκριβῶς ἁρμόζει ἐνταῦθα. Τοῦ ἀφαιρῶ τὸ παθητικὸν δυνατὸν νὰ ἔχῃ δύο διάφορα ὑποκείμενα, τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ τις, καὶ τὸ πρόσωπον ἢ πρᾶγμα, ὅθεν ἀφαιρεῖται. Η φράσις ἀφαιρῶ σε τὸ ἱμάτιον παθητικῶς δυνατὸν νὰ ἦναι ἀφαιρεῖταί σε ἢ σου τὸ ἱμά-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου
ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

λέγεται καὶ *ὑπόλοιπον* τοῦ ἀφαιρέτου ἢ τῆς ἀφαιρέσεως, διότι αὐτὸς μένει, ἀφοῦ τελειώσῃ ἡ ἀφαίρεσις.

Τῶν δύο δὲ γνωστῶν ἀριθμῶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁ μὲν νοεῖται ὡς ἀριθμός, ὃν πολλαπλασιάζομεν κατὰ τὴν κυρίαν ἢ τὴν γενικὴν σημασίαν, καὶ λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ἤτοι ἀριθμός, ὅςτις πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ, ὁ δὲ ὡς προςδιορίζων ἑκάστοτε τὸν λογισμὸν ὁποῖος πρέπει νὰ ἦναι, ἀφοῦ εἶναι τόσον ποικίλοι λογισμοὶ ὀνομαζόμενοι πολλαπλασιασμοί, καὶ λέγεται *πολλαπλασιαστής* (α). Ὁ δὲ προκύπτων ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμὸς λέγεται *γινόμενον* τῶν δύο ἀριθμῶν ἢ καὶ *παραγόμενον*, ὅθεν καὶ αὐτοὶ λέγονται *παράγοντες* αὐτοῦ. Ἡ σημασία δὲ τοῦ γινομένου εἶναι ποικίλη, διότι καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ποικίλος λογισμός· νοεῖται δ' αὐτὸ πάντοτε πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὴν μονάδα του, καὶ εἶναι πολλαπλάσιος μὲν τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι κλασματικός· κεφάλαιον δὲ πολλαπλασίου τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασίου πολλοστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι μικτὸς ἀριθμός, κτλ.

Ὡσαύτως καὶ τῶν δύο γνωστῶν ἀριθμῶν τῆς διαιρέσεως ὁ μὲν νοούμενος ὡς μέλλων νὰ διαιρεθῇ κατὰ τὴν μερικὴν ἢ τὴν γενικὴν σημασίαν λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ νοούμενος ὡς προςδιορίζων ἑκάστοτε τὴν διαίρεσιν ὁποῖος λογισμὸς πρέπει νὰ ἦναι λέγεται *διαιρέτης*, ὁ δὲ προκύπτων ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον αὐτῆς* ἢ *τῶν δύο ἀριθμῶν*, καὶ ἔχει σημασίαν ποικίλην, ὄχι μόνον διότι ἡ διαίρεσις εἶναι ποικίλος λογισμός, καὶ αὐτὸ νοεῖται πρὸς τὸν διαιρετέον, ὅπως πρὸς

τιον, ἢ ἀφαιρῇ σὺ τὸ ἱμάτιον. Κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην χρῆσιν τοῦ ἀφαιρεῖσθαι, ἀφαιρετέος εἶναι ἐκεῖνος, ἐξ οὗ ἀφαιρεῖ τις, καὶ τοῦτο ἔχομεν χρείαν νὰ σημάνωμεν ἐνταῦθα. (Παράβαλε πρὸς τὴν σημασίαν ταύτην τὴν τοῦ ἀφῃρημένος). Ἀφαιρέτης δὲ σημαίνει ὄχι τὸν λογιζόμενον ἄνθρωπον, τὸν ἀφαιροῦντα, ἀλλὰ τὸν δεικνύοντα ἀριθμὸν πόσον πρέπει ἑκάστοτε ν' ἀφαιρῇ τις.

(α). Πολλαπλασιαστὴς κυρίως εἶναι ἐκεῖνος, ὅςτις πολλαπλασιάζει, πολλαπλασιάζων δὲ εἶναι ὁ ἄνθρωπος· ὡς ὄνομα τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ, ὅςτις δὲν πολλαπλασιάζει, σημαίνει ὅ,τι ἀνωτέρω εἴπομεν, καὶ ὄχι τὸν πολλαπλασιάζοντα. Τὸ αὐτὸ δὲν ἁρμόζει λεγόμενον καὶ περὶ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἀφαιρέτου.

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τὸν διαιρέτην ἡ μονάς του, ἀλλὰ καὶ διότι, ὡς θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω, σημαίνει καὶ τὸν λόγον τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν διαιρέτην, ὡς εὑρισκομένου καὶ τοῦ λόγου δύο ἀριθμῶν διὰ τῆς διαιρέσεως (α).

(α) Οἱ συγγράψαντες ἀριθμητικὰς ὁρίζοντες ἕνα ὁρισμὸν ἕκαστον τῶν ἄλλων λογισμῶν, τὴν διαίρεσιν ὁρίζουσι τετραχῶς, δηλ. λέγουσιν ὅτι διαιρεῖν ἀριθμὸν δι' ἄλλου εἶναι πρᾶξις α΄. πρὸς εὕρεσιν τρίτου ἀριθμοῦ, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ ἐξαναπαράγῃ τὸν πρῶτον·

β΄. πρὸς εὕρεσιν τρίτου ἀριθμοῦ, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ δεύτερος νὰ ἐξαναπαράγῃ τὸν πρῶτον·

ἢ τοὺς δύο ὁμοῦ εἰς ἕνα, δεδομένων γινομένου τινὸς καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων του, διαιρεῖν τὸν μὲν διὰ τοῦ δὲ εἶναι εὑρεῖν τὸν ἄλλον παράγοντα·

γ΄. πρὸς εὕρεσιν τοῦ ποσάκις ὁ πρῶτος ἐμπεριέχει τὸν δεύτερον, ἢ ὡς τινὲς τῶν ἡμετέρων ἀτόπως εἶπον, ποσάκις ὁ δεύτερος εἰσέρχεται εἰς τὸν πρῶτον·

δ΄. τοῦ μερίζειν τὸν πρῶτον εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος· (ἰδὲ ἀρ. Βουρδῶνος 15ην ἔκδοσιν καὶ ἄλλας τῶν παρ' ἡμῖν).

Η πληθὺς αὕτη τῶν ὁρισμῶν τίποτε ἄλλο δὲν δεικνύει νομίζω, εἰμὴ ὅτι δὲν ἐσκέφθησαν ὡρίμως καὶ περὶ τοῦ λογισμοῦ τούτου αὐτοὶ οἱ συγγραφεῖς, καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἠδυνήθησαν νὰ καταντήσωσιν εἰς ἕνα ὁρισμὸν καὶ τῆς διαιρέσεως. Παραβλέπων δὲ τὸ ὅτι δὲν ὁρίζουσι τὴν πρᾶξιν, ὥστε νὰ διακρίνῃ τις αὐτὴν καθ' αὑτὴν ἐκ τῶν λοιπῶν, ἀλλὰ τὴν ὁρίζουσιν ὡς πρὸς τὸν σκοπὸν, ὡς πρὸς τὸν εὑρισκόμενον δι' αὐτῆς ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον πράττουσι καὶ περὶ τῶν ἄλλων πράξεων, παρατηρῶ ὅτι διὰ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκεται μὲν ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὁποῖος διὰ τῶν ὁρισμῶν αὐτῶν παριστάνεται, ἀλλ' αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι πάντοτε ἢ τοιοῦτος πρὸς τὸν πρῶτον, ὁποία εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν δεύτερον (α΄, δ΄), ἢ ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον (β΄, γ΄), καὶ ἔπρεπεν ἑκάτερος τούτων νὰ εὑρίσκηται δι' ἰδιαιτέρου λογισμοῦ. Ἀλλ' ἰδιότης τις τῶν ἀριθμῶν (ἰδὲ κατωτέρω εἰς τὸ περὶ λόγου) πείθει ὅτι καὶ ὁ λόγος δύναται νὰ εὑρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ λογισμοῦ, δι' οὗ καὶ ὁ τοιοῦτος πρὸς τὸν πρῶτον, ὁποία πρὸς τὸν δεύτερον εἶναι ἡ μονάς του, διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις περιορίζεται εἰς ἕνα λογισμὸν, ὁποῖον ἤδη εἴπομεν. Εὑρεθέντα δὲ τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ τοιούτου λογισμοῦ νοοῦμεν τοιοῦτον, ὁποῖος ἁρμόζει εἰς τὰς διαφόρους μερικὰς περιπτώσεις, εἴτε ὡς λόγον, εἴτε ὡς ἀριθμὸν, ὅςτις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον ἐξαναπαράγει τὸν πρῶτον, εἴτε ὡς ἕνα τῶν ἴσων μερῶν τοῦ πρώτου κτλ.

Εἶναι περιττὸν δὲ νὰ παρατηρήσω ὅτι ἄλλο εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς λογισμὸς, καὶ ἄλλο ἡ μοίρασις χρημάτων εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσοι εἶναι π. χ. ἄνθρωποί τινες. Ὁ ἀριθμητικὸς λογισμὸς γίνεται μόνον πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεριδίου ἑνὸς τούτων, τοῦτο δὲ εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ μοιραστέου ἀριθμοῦ, ὅ,τι πολλοστὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνθρώπων εἶναι ὁ εἷς ἄνθρωπος· εὑρεθέντος δὲ τούτου ὑπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ, δύναται ὅςτις ἂν θέλῃ, νὰ μοιράσῃ τὰ χρήματα, δίδων εἰς ἕκαστον ἄνθρωπον, ὅσα εὑρέθησαν διὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ (ἰδὲ περὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν λογισμῶν εἰς λύσιν προβλημάτων ἐν τῷ τετάρτῳ κεφαλαίῳ).

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Σημ. Διαίρεσις ὠνομάσθη ὁ λογισμὸς οὗτος, καὶ ἑπομένως διαιρετέος καὶ διαιρέτης οἱ δύο γνωστοὶ ἀριθμοί, ὅτ' ἐθεωρεῖτο ὡς πρᾶξις τοῦ μερίζειν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἴσα, ἐνῷ τοιοῦτόν τι ποτὲ δὲν γίνεται διὰ τῆς πράξεως ταύτης. Πηλίκον δὲ ὠνομάσθη ὁ προκύπτων ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμός, ὅτ' ἐθεωρεῖτο ὅτι παριστάνει ποσάκις ὁ ἕτερος τῶν γνωστῶν περιέχει τὸν ἄλλον. Τὰ ὀνόματα δὲ ταῦτα, καίτοι ἀναρμόδια νὰ σημαίνωσιν ὅ,τι εἶναι χρεία νὰ σημαίνωσιν, ἀλλ' ὅμως ὡς καθιερωθέντα ὑπὸ τῆς συνηθείας τὰ διατηροῦμεν, ἀλλ' ἐννοοῦντες δι' αὐτῶν ὅ,τι ἀνωτέρω εἴπομεν.

Περὶ προςθέσεως.

45. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ ἀριθμῷ 37 γίνεται δῆλον ὅτι ἐκτελεῖται ἡ προςθέσις ὅπως ἐκεῖ ἐξηγήθη, ἐὰν οἱ δύο γνωστοὶ ἀριθμοὶ ἦναι ὁμώνυμοι, καὶ πάντοτε οὕτως, ἐὰν ἦναι ἁπλοῖ, ἕως νὰ συνειθίσῃ τις νὰ εὑρίσκῃ αὐτὸ ἀμέσως. Οὕτω δέ τις λογιζόμενος ἔχει ἐντελῆ βεβαιότητα ὅτι ὁ οὕτως εὑρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δύο γνωστῶν.

Εἶναι δ' ἔτι φανερὸν ὅτι, ὡς 7 καὶ 8 συναριθμοῦνται εἰς 15, οὕτω καὶ 7 δεκάδες καὶ 8 δεκάδες ἀποτελοῦσι 15 δεκάδας, 7 ἑκατοντάδες καὶ 8 εκατοντάδες συνιστῶσι 15 ἑκατοντάδας κτλ — $\frac{7}{12}$ καὶ $\frac{8}{12}$ συμποσοῦνται εἰς $\frac{15}{12}$, 0,7 καὶ 0,8 συμποσοῦνται εἰς 1,5, κτλ — 7 βιβλία καὶ 8 βιβλία ἀποτελοῦσι 15 βιβλία. Ἐκ δὲ τούτων καταλαμβάνει τις ὅτι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ὁμώνυμοι, κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προςθέσεως δὲν χρειάζεται νὰ προσέχῃ εἰς τὰς μονάδας των., ἀλλὰ νὰ τοὺς προςθέτῃ ὡς *ἀφῃρημένους ὡς ἀριθμούς, τὸ δὲ κεφάλαιον, ἀφοῦ τὸ εὕρῃ, νὰ τὸ θεωρῇ ὁμώνυμον μὲ τοὺς γνωστοὺς ἀριθμούς.*

Ἐὰν δὲ οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι ἑτερώνυμοι, ἀλλ' ὁμοειδεῖς, οἷον 8 δεκάδες καὶ 7 μονάδες, 8 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες ἢ δεκάδες, 8 μονάδες καὶ 7 δεκατημόρια ἢ $\frac{7}{12}$ αὐτῆς, $\frac{8}{9}$ τοῦ πήχεως καὶ $\frac{7}{11}$ αὐτοῦ ἢ 0,7 αὐτοῦ, εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρόςθεσις τοῦ ἑτέρου εἰς τὸν ἄλλον ὡς ἤδη προείρηται, ἀλλὰ πρῶτον τρέπονται δι' ἰδιαιτέρας πράξεως, ἂν χρειασθῇ (ἰδὲ Πρ. Ἀρ. ἀρ. 58 καὶ κατωτέρω), ἢ ἀμέσως, ἂν ἦναι εὔκολον, εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, καὶ ἐπὶ τούτων ἐκτελεῖται ἡ πρόςθεσίς ὡς ἤδη εἴπομεν. Οὕτως 8 δεκάδες καὶ 7 μονάδες συμποσοῦνται εἰς 87, 8 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες ἢ δεκάδες συνιστῶσιν 807 ἢ 870, 8 μονάδες καὶ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

7 δεκατημόρια συνιστῶσιν 8,7— αἱ 8 μονάδες καὶ $\frac{7}{12}$ τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους δι' ἰδιαιτέρας πράξεως, ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν εἶναι καὶ ὁ μικτὸς 8 $\frac{7}{12}$ — ὡσαύτως καὶ ὁ $\frac{8}{9}$ τοῦ πήχεως καὶ $\frac{7}{11}$ ἢ 0,7 αὐτοῦ τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους δι' ἰδιαιτέρας πράξεως.

Ἐκ τῶν αὐτῶν δὲ τοῦ ἀρ. 37 πληροφορῆταί τις καὶ ὅτι ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὶ δὲν προςθέτονται εἰς ἀλλήλους, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τρέπωνται εἰς ὁμωνύμους, καὶ διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἦναι κεφάλαιον ἑτεροειδῶν ποσῶν.

46. Τῶν δὲ συνθέτων ἀριθμῶν ἡ πρόςθεσις ἠδύνατο μὲν νὰ ἐκτελῆται ὡς τῶν ἁπλῶν, ἀλλ' ἐκτὸς τῆς χρονοτριβῆς ἤθελον συμβῆ καὶ περιπλοκαὶ δυςκολεύουσαι τὸν νοῦν. *Ταῦτα δ' ἀποφεύγει τις ἀναλύων τὴν μίαν πρόςθεσιν εἰς ἄλλας προςθέσεις τῶν ἁπλῶν ὁμωνύμων ἀριθμῶν, ὅσοι συνιστῶσι τοὺς συνθέτους.* Δηλ. προκειμένου πρῶτον νὰ προςτεθῇ ὁ 2478 εἰς τὸν 5934, ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν θέλει ἔχει ὅσας μονάδας ἔχουσι καὶ οἱ δύο, καὶ ἐπειδὴ οὗτοι εἶναι σύνθετοι ἐξ ἀριθμῶν μονάδων, ἀριθμῶν δεκάδων κτλ, ἔχοντος τοῦ μὲν 4, τοῦ δὲ 8 μονάδας, δῆλον ὅτι τὸ κεφάλαιον θέλει ἔχει 12 μονάδας· ἔχοντος δ' ἔτι τοῦ μὲν 3, τοῦ δὲ 7 δεκάδας, τὸ κεφάλαιον θέλει ἔχει καὶ 10 δεκάδας· ἔχοντος δὲ προσέτι τοῦ μὲν 9, τοῦ δὲ 4 ἑκατοντάδας, τὸ κεφάλαιον θέλει ἔχει καὶ 13 ἑκατοντάδας· τελευταῖον δ' ἔχοντος τοῦ μὲν 5, τοῦ δὲ 2 χιλιάδας, τὸ κεφάλαιον θέλει ἔχει καὶ 7 χιλιάδας. Τὸ κεφάλαιον λοιπὸν τῶν δύο προειρημένων ἀριθμῶν θέλει ἔχει 12 μονάδας, 10 δεκάδας, 13 ἑκατοντάδας καὶ 7 χιλιάδας. Ἀλλὰ 12 μονάδες εἶναι 1 δεκὰς καὶ 2 μονάδες, προςτιθεμένης δὲ τῆς 1 δεκάδος εἰς τὰς 10 δεκάδας, γίνονται 11 δεκάδες· αὗται δὲ εἶναι 1 δεκὰς καὶ 1 ἑκατοντάς, προςτιθεμένης δὲ ταύτης εἰς τὰς 13 ἑκατοντάδας, γίνονται 14 ἑκατοντάδες· αὗται δὲ εἶναι 4 ἑκατοντάδες καὶ 1 χιλιάς, προςτιθεμένης δὲ ταύτης εἰς τὰς 7 χιλιάδας, γίνονται 8 χιλιάδες.

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς 8412 εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἀριθμῶν 2478 καὶ 5934. Ἐκ δὲ τούτου βλέπει τις ὅτι *εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον ἁπλούστατα διὰ δύο διακεκριμένων πράξεων, ὧν*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἡ μὲν συνίσταται εἰς προσθέσεις τῶν ἁπλῶν ὁμωνύμων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν σύγκεινται οἱ σύνθετοι, ἡ δὲ εἰς ἀποχωρισμοὺς ἀπὸ τῶν μερικῶν κεφαλαίων τοσούτων μονάδων, ὅσαι συνιστῶσι μίαν ἢ πλειοτέρας μονάδας ἀνωτέρας τάξεως, ἂν ἦναι τοσαῦται, καὶ εἰς πρόσθεσιν αὐτῶν εἰς τὰ ὁμώνυμα μερικὰ κεφάλαια.

47. Αἱ δὲ δύο αὗται πράξεις δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτελῶνται χωριστά, ὡς ἀνωτέρω ἐπράχθη, ἀλλ' ἐκτελοῦνται συγχρόνως, ἤγουν ἅμα εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον τῶν μονάδων καὶ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ 9, αἱ μονάδες, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν ἢ πλειοτέρας δεκάδας, ἂν τύχῃ, ἀμέσως ἀποχωρίζονται ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου καὶ προστίθεται ἡ μία ἢ αἱ πλειότεραι δεκάδες εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν δεκάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τοῦτο δὲ γίνεται πάντοτε ἐν τῇ προσθέσει τῶν συνθέτων ἀριθμῶν, καὶ τότε εἶναι προτιμότερον ν' ἀρχίζωμεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν, ἤτοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῆς μικροτάτης μονάδος. Διότι, ἐπειδὴ ἐκ τῶν κεφαλαίων τῶν ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων μονάδων δυνατὸν νὰ προκύψῃ μία ἢ πλειότεραι μονάδες ἀνωτέρας τάξεως, αἵτινες ἀνάγκη νὰ προστεθῶσιν εἰς τὰ ὁμώνυμα μερικὰ κεφάλαια, ἐὰν ἦναι ἤδη γνωστὸν πόσαι προέκυψαν πρὶν προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀνωτέρας τάξεως μονάδων, ὅπερ συμβαίνει ὅταν ἀρχίζωμεν ἐκ δεξιῶν, τότ', ἐνῷ οὗτοι προσθέτονται, ἐνταυτῷ προσθέτονται καὶ αἱ προκύψασαι μονάδες, καὶ τὸ κεφάλαιον ὅλον, ἂν ἦναι μικρότερον μιᾶς μονάδος ἀνωτέρας τάξεως, ἢ μέρος αὐτοῦ, ἂν ἦναι μεγαλήτερον, γράφεται ἅπαξ καὶ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ μεταβληθῇ· ἐνῷ, ἂν ἀρχίσωμεν ἐξ ἀριστερῶν, διὰ τὴν προειρημένην αἰτίαν δυνατὸν νὰ ἦναι ἀνάγκη νὰ μεταβληθῇ.

48. Ὅπως δὲ προσετέθη ὁ ἀριθμὸς 2478 εἰς τὸν 5934, καὶ ὅσον εἶναι τὸ κεφάλαιον αὐτῶν, οὕτω δύναται νὰ προστεθῇ καὶ ὁ $\frac{2478}{9375}$ εἰς τὸν $\frac{5934}{9375}$, ὧν ἡ μονὰς εἶναι ἡ αὐτὴ κλασματικὴ ὁποιαςδήποτε ἄλλης, καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 8412, ἀλλὰ $\frac{8412}{9375}$. Οὕτω καὶ ὁ μικτὸς 24,78 εἰς τὸν 59,34, καὶ τὸ κεφάλαιον θέλει εἶσθαι 84,12. Οὕτω καὶ ὁ μικτὸς 12 $\frac{7}{8}$ εἰς τὸν 23 $\frac{5}{8}$, καὶ τὸ κεφάλαιον θέλει εἶσθαι 36 $\frac{4}{8}$· διότι $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{5}{8}$ συμποσοῦνται εἰς $\frac{12}{8}$, ἢ $\frac{8}{8}$ καὶ $\frac{4}{8}$,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἢ 1 καὶ $\frac{4}{8}$, ἔπειτα 12 καὶ 23 συμποσοῦνται εἰς 35, καὶ 1 ἐκ τοῦ κεφαλαίου τῶν κλασμάτων 36· λοιπὸν τὸ κεφάλαιον εἶναι 36 $\frac{7}{8}$. Οὕτω τελευταῖον προστίθεται καὶ ὁ συμμιγὴς $15^{ορ}$ $4^{ποδ}$ $9^{δακ}$ εἰς τὸν $8^{ορ}$ $5^{ποδ}$ $6^{δακ}$ $8^{γρ}$, καὶ τὸ κεφάλαιον θέλει εὑρεθῇ $24^{ορ}$ $4^{ποδ}$ $3^{δακ}$ $8^{γρ}$.

Ἂν δὲ ὁ μὲν ἕτερος ἦναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα, ὁ δὲ μικτὸς, οἷον ὁ 12 ἢ ὁ $\frac{6}{9}$ καὶ ὁ $4\frac{7}{9}$, τότε προστίθενται οἱ ἀκέραιοι μόνον, καὶ τὸ κεφάλαιον εἶναι 16 $\frac{7}{9}$, ἢ τὰ κλάσματα μόνον, καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν 1 $\frac{4}{9}$ ἡ μονὰς προστίθεται εἰς τὸν ἀκέραιον 4, καὶ οὕτως εὑρίσκεται κεφάλαιον $5\frac{4}{9}$.

Ἂν δὲ ὁ μὲν ἕτερος ἀριθμὸς ἦναι μικτὸς, ὁ δὲ συμμιγὴς, ἢ καὶ οἱ δύο μὲν μικτοὶ, ἀλλ' ὁ ἕτερος αὐτῶν δεκαδικὸς, τότε ἀνάγκη διὰ προπαρασκευαστικῆς ἄλλης πράξεως νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμωνύμους (ἰδὲ Π. Δ. καὶ κατωτέρω), καὶ ἔπειτα προστίθενται ὡς ἤδη εἴπομεν.

49. Τὸ δὲ κεφάλαιον τριῶν ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκεται διὰ προςθέσεων ὡς τῶν προηγουμένων παρὰ μίαν τοσούτων, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ, ὧν τὸ κεφάλαιον ζητεῖται. Τὸ κεφάλαιον π. χ. τῶν 6, 5, 4, 8 εὑρίσκεται διὰ τριῶν, προςθέσεων, ἤγουν 6 καὶ 5 11, ἔπειτα 11 καὶ 4 15, τελευταῖον 15 καὶ 8 23. Ὡσαύτως τὸ κεφάλαιον τῶν 7384, 958, 3089, 94 εὑρίσκεται ἐὰν προστεθῶσιν αἱ μονάδες των 4, 8, 9, 4, τοῦ δὲ κεφαλαίου των 25 αἱ 2 δεκάδες προστεθῶσιν εἰς τὸ κεφάλαιον 30 τῶν δεκάδων 8, 5, 8, 9, τοῦ δὲ κεφαλαίου 32 αἱ 3 ἑκατοντάδες προστεθῶσιν εἰς τὸ κεφάλαιον 12 τῶν ἑκατοντάδων 3, 9, τοῦ δὲ κεφαλαίου 15 ἡ 1 χιλιὰς προστεθῇ εἰς τὸ κεφάλαιον 10 τῶν χιλιάδων 7, 3, καὶ γίνονται 11 χιλιάδες. Ὁ δὲ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς 11525 εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων ἀριθμῶν.

50. Ἐκ τῶν προειρημένων ἁπάντων πληροφορεῖταί τις ὅτι διὰ τοῦ αὐτοῦ λογισμοῦ εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον τῶν ἁπλῶν ὁμωνύμων ἀριθμῶν, οἱαδήποτε ἂν ἦναι ἡ μονάς των καὶ οἱουδήποτε εἴδους ποσοῦ, καὶ ὅτι διὰ τοῦ αὐτοῦ συνθέτου λογισμοῦ εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον τῶν συνθέτων, ὁποιοιδήποτε ἂν ἦναι, καὶ ὅτι, ἂν ὅλαι αἱ μονάδες ἦσαν δεκαδικαὶ, ἤθελεν εἶσθαι εἰς

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

καὶ ὁ αὐτὸς λογισμὸς καὶ ἁπλούστατος· προσέτι δὲ περὶ ὅλων τῶν κανόνων τῶν προςθέσεων τῶν ἐν τῇ Πρ. Ἀρ. (ἰδὲ ἀρ. 16, 17, 18, 60, 61, 74, 83).

Περὶ ἀφαιρέσεως.

51. Εἴπομεν ἐν ἀρ. 38 ὁποῖος λογισμὸς εἶναι ἡ ἀφαίρεσις, ἐνόσῳ δ' ἐκτελεῖ τις αὐτὸν ὅπως ἐκεῖ εἴπομεν, εἶναι βέβαιος ὅτι ὁ προκύπτων ἐξ αὐτοῦ ἀριθμὸς εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο γνωστῶν. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ ἀνάγκη νὰ ἦναι ὁμώνυμοι, ἵνα ἐκτελῆται ἡ ἀφαίρεσις οὕτω· καὶ ὅτι, ὅταν ἦναι ἁπλοῖ, ἢ ὁ ἀφαιρετέος ἦναι τὸ πολὺ 18, ἂν ὁ ἀφαιρέτης ἦναι τὸ πολὺ 9, (ἰδὲ Π. Α. τὴν προπαίδειαν τῆς ἀφαιρέσεως), πάντοτε τὴν ἀφαίρεσιν πρέπει νὰ ἐκτελῇ τις οὕτως, ἐὰν δὲν ἠξεύρῃ τὴν προπαίδειαν τῆς ἀφαιρέσεως, ὅπου εἶναι αἱ κατ' ἐκεῖνον τὸν λογισμὸν εὑρισκόμεναι διαφοραί.

Ὁποιαδήποτε δὲ ἂν ἦναι ἡ μονὰς τῶν γνωστῶν, εἶναι ἀδιάφορον, ἀλλ' ὡς ἡ διαφορὰ τοῦ 6 ἀπὸ τοῦ 9 εἶναι 3, οὕτω καὶ τοῦ 6 δεκάδες ἀπὸ 9 δεκάδων ἡ διαφορὰ εἶναι 3 δεκάδες, κτλ — οὕτω καὶ τοῦ $\frac{6}{12}$ ἀπὸ $\frac{9}{12}$ ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{3}{12}$, καὶ τοῦ 0,6 ἀπὸ τοῦ 0,9 εἶναι 0,3 — οὕτω καὶ τοῦ 6 δένδρα καὶ 9 δένδρα ἡ διαφορὰ εἶναι 3 δένδρα. *Ὥστε κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως δὲν χρειάζεται νὰ προσέχῃ τις εἰς τὸ τί ἦναι ἡ μονάς, ἠξεύρων πρότερον ὅτι εἶναι ὁμώνυμοι οἱ ἀριθμοί, ἀλλὰ νὰ τοὺς θεωρῇ ὡς ἀφῃρημένους, τὴν δ' εὑρεθεῖσαν διαφορὰν ἔπειτα νὰ θεωρῇ ὁμώνυμον μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς γνωστούς.*

52. Ἐὰν δὲ οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι ἑτερώνυμοι, ἀλλ' ὁμοειδεῖς, οἷον 5 μονάδες καὶ 8 δεκάδες ἢ ἑκατοντάδες, ἢ 8 δεκάδες καὶ 9 ἑκατοντάδες κτλ, ἢ 4 μονάδες καὶ $\frac{3}{8}$ ἢ 0,9 τῆς αὐτῆς μονάδος, ἢ $\frac{5}{7}$ τοῦ πήχεως καὶ $\frac{4}{5}$ ἢ 0,8 τοῦ αὐτοῦ κτλ, τότε ὁ λογισμὸς δὲν ἐκτελεῖται ὡς εἴδη εἴπομεν, ἀλλὰ μία τῶν μονάδων τῆς ἀνωτέρας τάξεως τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ὁμωνύμου μονάδος μὲ τὴν τοῦ ἀφαιρέτου, ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεῖται οὗτος, καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη ὁμοῦ μὲ τὸν κατὰ μονάδα ἠλαττωμένον ἀφαιρετέον συνιστῶσι τὴν διαφοράν. Οὕτως ἡ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

διαφορὰ τῶν 5 μονάδων καὶ 8 δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων εἶναι 75 ἢ 795, ἡ διαφορὰ τῶν 8 δεκάδων καὶ 9 ἑκατοντάδων εἶναι 82 δεκάδες ἢ 820, ἡ διαφορὰ τῶν 4 μονάδων καὶ $\frac{7}{8}$ ἢ 0,9 αὐτῆς εὑρίσκεται 3 $\frac{1}{8}$ ἢ 3,1. Ἢ πρῶτον τρέπονται καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ εἰς ἄλλους ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους δι' ἄλλης προπαρασκευαστικῆς πράξεως, καὶ ἐπὶ τούτων ἔπειτα ἐκτελεῖται ἡ ἀφαίρεσις ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν (ἰδὲ Πρ. Α. καὶ κατωτέρω).

Εὐκόλως δ' ἔτι πληροφορεῖταί τις ὅτι εἶναι ἀδύνατον ν' ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀριθμοῦ τινος ἄλλος ἑτεροειδής, διότι ἀδύνατον νὰ τρέπωνται οὗτοι εἰς ὁμωνύμους, καὶ διότι ἀπ' ἀριθμοῦ τινος ἀδύνατον ν' ἀφαιρῶνται μονάδες, ὁποίας δὲν ἔχει, οἷον ἀπὸ 6 βιβλίων ν' ἀφαιρεθῶσι 4 ὧραι, κτλ.

53. Ὡς ἐν ἀρ. 46 λέγομεν καὶ ἐνταῦθα ὅτι πρὸς ἀποφυγὴν δυσκολιῶν καὶ χρονοτριβῆς ἡ διαφορὰ τῶν συνθέτων δὲν εὑρίσκεται διὰ τοῦ προειρημένου λογισμοῦ, ἀλλὰ κατὰ τὸν ἑξῆς. Δηλαδὴ προκειμένου πρῶτον νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ 3436 ἀπὸ τοῦ 6978, ἐπειδὴ αὕτη πρέπει νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, καθ' ὅσας ὁ μεγαλήτερος ὑπερέχει τὸν μικρότερον, καὶ ἐπειδὴ οὗτοι σύγκεινται ἐξ ἀριθμῶν μονάδων, ἀριθμῶν δεκάδων κτλ, ἔχοντος τοῦ μὲν 8 μονάδας, τοῦ δὲ 6, δῆλον ὅτι ἡ διαφορά των θέλει ἔχει 2 μονάδας, ἔχοντος δὲ τοῦ μὲν 7 δεκάδας, τοῦ δὲ 3, ἡ διαφορά των θέλει ἔχει 4 δεκάδας, ἔχοντος δὲ τοῦ μὲν 9 ἑκατοντάδας, τοῦ δὲ 4, ἡ διαφορά των θέλει ἔχει καὶ 5 ἑκατοντάδας, τελευταῖον ἔχοντος τοῦ μὲν 6 χιλιάδας, τοῦ δὲ 3, ἡ διαφορά των θέλει ἔχει καὶ 3 χιλιάδας. Λοιπὸν ἡ διαφορά των θέλει εἶσθαι 3542, *αὕτη δ' εὑρέθη διὰ τοσούτων ἀφαιρέσεων ἁπλῶν ἀριθμῶν διαφόρων τάξεων μονάδων, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ οἱ συνιστῶντες τοὺς συνθέτους.* Οὕτω δὲ πάντοτε ἀναλύεται ἡ ἀφαίρεσις τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς ἄλλας ἀφαιρέσεις ἁπλῶν, ὅσαι ἑκάστοτε χρειάζονται, καὶ εὑρίσκεται ἁπλούστατα ἡ διαφορά των.

Ἀλλὰ συχνότατα συμβαίνει ἁπλοῖ τινες ἀριθμοὶ τοῦ ἀφαιρετέου νὰ ἦναι μικρότεροι τῶν ὁμωνύμων των τοῦ ἀφαιρέτου, ἢ συμβαίνει νὰ μὴ ὑπάρχωσιν ὁμώνυμοι μέ τινας ἁπλοῦς τοῦ ἀφαιρέτου. Τότε αἱ προειρημέναι ἀφαιρέσεις γίνονται κατὰ τὸν

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἑξῆς τρόπον. Δηλαδὴ προκειμένου ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 452 ὁ 297, ἐπειδὴ αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν τοῦ ἀφαιρέτου, ἀφαιροῦνται 2 μὲν μονάδες ἀπὸ τῶν 2 τοῦ ἀφαιρετέου, αἱ δὲ ἄλλαι 5 ἀπὸ 1 τῶν πέντε δεκάδων τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι ἀφαιροῦνται οὕτως 7 μονάδες ἀπὸ 12 τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ εὑρίσκεται διαφορὰ 5, μένουσι δὲ 4 δεκάδες ἀντὶ 5 ἐν τῷ ἀφαιρετέῳ. Ὡσαύτως δ' ἀφαιροῦνται 9 δεκάδες ἀπὸ 14 τοῦ ἀφαιρέτου, καὶ εὑρίσκεται διαφορὰ 5, μένουσι δὲ 3 ἑκατοντάδες ἐν τῷ ἀφαιρετέῳ. Τελευταῖον ἀφαιροῦνται 2 ἑκατοντάδες ἀπὸ τῶν 3 καὶ μένει 1 ἑκατοντὰς διαφορά. Ὥστε ἡ διαφορὰ εἶναι 155.

Τὸ αὐτὸ τοῦτο γίνεται καὶ ὅταν ὁ ἀφαιρετέος δὲν ἔχῃ ἀριθμοὺς ἁπλοῦς μονάδων τινῶν. Οἷον προκειμένου ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 4785 ἀπὸ τοῦ 50070, ὅστις δὲν ἔχει μονάδων ἀριθμὸν καὶ ἑκατοντάδων καὶ χιλιάδων, ἀφαιροῦνται 5 μονάδες ἀπὸ μιᾶς τῶν 7 δεκάδων τοῦ ἀφαιρετέου ἤτοι ἀπὸ 10, καὶ μένει διαφορὰ 5, αἱ δὲ 7 δεκάδες ἐλαττοῦνται εἰς 6. Ἔπειτ' ἀφαιροῦνται 6 δεκάδες ἀπὸ τὰς 6 τοῦ ἀφαιρετέου, αἱ δὲ λοιπαὶ 2 (διότι ὁ ἀφαιρέτης ἔχει 8) ἀφαιροῦνται ἀπὸ μιᾶς τῶν 5 δεκάδων χιλιάδος τοῦ ἀφαιρετέου (52), ἀφοῦ αὕτη νοηθῇ 9 χιλιάδες 9 ἑκατοντάδες καὶ 10 δεκάδες, ἀφ' ὧν ἀφαιροῦνται αἱ 2 καὶ μένει διαφορὰ 4998 δεκάδες· τοῦτο δὲ καταντᾷ εἰς τὸ ν' ἀφαιρῶνται 8 ἀπὸ 16 δεκάδων, ἔπειτα 7 ἀπὸ 9 ἑκατοντάδων, ἔπειτα 4 ἀπὸ 9 χιλιάδων, νὰ ἐλαττωθῶσιν δ' εἰς 4 αἱ 5 δεκάδες χιλιάδος. Οὕτως εὑρίσκεται διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν ὁ 45285.

Σημ. Ἐπειδὴ δὲ ὅσον διαφέρουσι δύο ἀριθμοί, τοσοῦτον διαφέρουσι καὶ οἱ κατὰ μίαν ἢ 2 ἢ πλειοτέρας μονάδας μεγαλήτεροι αὐτῶν, μετὰ τὰς περὶ ὧν ὁ λόγος ἀφαιρέσεις, ἀντὶ νὰ ἐλαττόνωσί τινες κατὰ μονάδα τινὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου, ὡς χρειάζεται, δὲν τὸν μεταβάλλουσιν, ἤτοι τὸν νοοῦσιν αὐξημένον κατὰ μονάδα ὁμώνυμον, ἀλλ' ἐνταυτῷ αὐξάνουσι καὶ τὸν ὁμώνυμον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρέτου κατὰ τὴν αὐτὴν μονάδα, καὶ ἔπειτα εὑρίσκουσι τὴν διαφορὰν ἤτοι ἀφαιροῦσιν. Οἷον ἀνωτέρω ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωσιν 9 ἀπὸ 14 δεκά-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

δων, ἀφαιροῦσι 10 ἀπὸ 15, καὶ ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωσι 2 ἀπὸ 3 ἑκατοντάδων, ἀφαιροῦσι 3 ἀπὸ 4. Ὁ τρόπος δ' οὗτος τοῦ ἀφαιρεῖν εἶναι κοινότερος, καὶ μάλιστα εὐκολώτερος κατωτέρω εἰς τὴν διαίρεσιν.

54. Ὅτι δὲ εἶναι προτιμότερον καὶ τὴν ἀφαίρεσιν συνθέτων ἀριθμῶν ν' ἀρχίζωμεν ἐκ δεξιῶν ἤτοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν μικροτάτων μονάδων, γίνεται δῆλον ἐκ τούτων. Δηλαδὴ συνηθέστατα εἶναι ἀνάγκη ν' ἀφαιρεθῶσιν ὅσας μονάδας ἔχει ἀριθμὸς τάξεώς τινος μονάδος τοῦ ἀφαιρέτου, ὄχι μόνον ἀπὸ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ μιᾶς μονάδος ἀνωτέρας τάξεως, τοῦτο δ' ἂν γείνῃ πρὶν ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ τῆς ἀνωτέρας τάξεως μονάδος ἀριθμοῦ ὅσας ἔχει ὁμωνύμους μονάδας ὁ ἀφαιρέτης καὶ εὑρεθῇ ἡ διαφορά των, ὅπερ συμβαίνει ὅταν ἀρχίζωμεν ἐκ δεξιῶν, ἡ διαφορὰ αὕτη δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ μεταβληθῇ πλέον ἐλαττουμένη· ἂν ὅμως γείνῃ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἐκείνην, ὅπερ συμβαίνει ὅταν ἀρχίζωμεν ἐξ ἀριστερῶν, ἡ ἀνωτέρας τάξεως μονὰς, ἀφ' ἧς ἀνάγκη ν' ἀφαιρεθῇ ἓν μέρος τῶν κατωτέρων μονάδων τοῦ ἀφαιρέτου, θέλει ληφθῆ ἀπὸ τὴν διαφορὰν, τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν, ἥτις ἀνάγκη νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδα. Ἵνα μὴ γράφηται λοιπὸν μερική τις διαφορὰ καὶ ἔπειτα διορθόνηται, ἀλλ' ἵνα γράφηται ἅπαξ ἡ σωστὴ, εἶναι προτιμότερον ν' ἀρχίζωμεν ἐκ δεξιῶν.

55. Ὅσα εἴπομεν μέχρι τοῦδε περὶ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων συνθέτων ἐφαρμόζονται ἀπαραλλάκτως εἰς ὁποιουςδήποτε συνθέτους, ἀλλ' ἀνάγκη νὰ ἐνθυμῆταί τις τὴν σχέσιν τῶν διαφόρων τάξεων μονάδων, ὅταν δὲν ἦναι δεκαδικαί. Π. χ. ἵνα εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ 3,794 ἀπὸ τοῦ 8,36, ἀφαιρεῖται 4 ἀπὸ 10, ἔπειτα 9 ἀπὸ 15 ἢ 10 ἀπὸ 16, ἔπειτα 7 ἀπὸ 12 ἢ 8 ἀπὸ 13, τελευταῖον 3 ἀπὸ 7 ἢ 4 ἀπὸ 8, καὶ εὑρίσκεται διαφορὰ 4,566. Ὡσαύτως ἵνα εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ $4\frac{3}{7}$ ἀπὸ τοῦ 9, ἀφαιρεῖται $\frac{3}{7}$ ἀπὸ $\frac{7}{7}$, ἤτοι ἀπὸ μιᾶς μονάδος τοῦ 9 ἰσοδυναμούσης μὲ $\frac{7}{7}$ ἑαυτῆς, ἔπειτα 4 ἀπὸ 8, καὶ ἡ διαφορὰ εἶναι $4\frac{4}{7}$. Ὡσαύτως εὑρίσκεται $1^{στατ}$ $8^{όκ}$ $350^{δρ}$ διαφορὰ τοῦ $2^{στατ}$ $35^{όκ}$ $300^{δρ}$ ἀπὸ τοῦ $4^{στ}$ $250^{δρ}$· διότι $1^{στ}$ τῶν 4 τοῦ ἀφαιρετέου ἰσοδυναμεῖ μὲ $44^{όκ}$, ἤτοι $43^{όκ}$ καὶ $1^{όκ}$ ἰσοδυναμοῦσαν

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

400δρ, ἅτινα προςθέτονται εἰς τὰ 250δρ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ γίνεται αὐτὸς 3στ 43δκ 650δρ, ἀφαιροῦνται δὲ 300 ἀπὸ τῶν 650δρ, ἔπειτα 35δκ ἀπὸ τῶν 43 καὶ τελευταῖον 2στ ἀπὸ τῶν 3, καὶ οὕτω προκύπτει ἡ διαφορά. Ὡσαύτως τελευταῖον εὑρίσκεται διαφορὰ τοῦ 3μην 7ἡμ 12ὡρ 35λεπ ἀπὸ τοῦ 8μην 4ἡμ ὁ ἀριθμὸς 4μην 26ἡμ 11ὡρ 25λεπ.

56. Πολλοὶ δὲ ἀριθμοὶ ἀφαιροῦνται ἀφ' ἑνὸς καθὼς ἤδη εἴπομεν, ἀλλ' ὁ μὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου, ὁ τρίτος ἀπὸ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου· ὥστε θέλουσι γείνει τόσαι ἀφαιρέσεις ὡς τὰς προηγουμένας, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ παρὰ μίαν, ἤτοι ὅσοι εἶναι οἱ ἀφαιρέται. Ἐπειδὴ δὲ θέλουσιν ἀφαιρεθῆ τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ πρῶτος ἀφαιρέτης καὶ ὅσας ἔχει ὁ δεύτερος καὶ ὅσας ἔχει ὁ τρίτος κτλ, δῆλον ὅτι πρέπει ν' ἀφαιρεθῶσι τόσαι, ὅσας ἔχει τὸ κεφάλαιον τῶν ἀφαιρετῶν. Διὰ ταῦτα προςθέτονται ὅλοι οἱ ἀφαιρέται πρῶτον, καὶ τὸ κεφάλαιόν των ἔπειτ' ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ οὕτως εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη διαφορὰ ὄχι διὰ πολλῶν ἀφαιρέσεων, ἀλλὰ διὰ μιᾶς προςθέσεως πολλῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ μιᾶς ἀφαιρέσεως. Οὕτω δ' εὑρίσκεται συντομώτερον ἡ διαφορὰ παρὰ διὰ τῶν πολλῶν ἀφαιρέσεων, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι προτιμητέος οὗτος ὁ τρόπος τοῦ ἀφαιρεῖν (ἰδὲ καὶ 50).

Κοιναὶ ἀρχαὶ τῆς προςθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

57. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε περὶ τῆς προςθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως βλέπει τις ὅτι πρὸς ἐκτέλεσιν ἑκατέρας αὐτῶν κατὰ πᾶσαν περίπτωσιν εἶναι ὠφελιμώτατον νὰ ἐνθυμῆται ταῦτα.

α΄. *Τὸν ὁρισμὸν ἑκατέρας πράξεως.*

β΄. *Ὅτι εἶναι ἀναγκαῖον οἱ εἰς πρόςθεσιν καὶ οἱ εἰς ἀφαίρεσιν ἀριθμοὶ νὰ ἦναι ὁμώνυμοι.*

γ΄. *Ὅτι κατὰ μὲν τὴν ἐκτέλεσιν ἑκατέρας αὐτῶν εἶναι ἁπλούστερον οἱ ἀριθμοὶ νὰ θεωρῶνται ἀφῃρημένοι, ἔπειτα δὲ τὸ εὑρεθὲν κεφάλαιον ἢ διαφορὰ νὰ ἐκλαμβάνηται ὁμώνυμον μὲ τοὺς γνωστοὺς ἀριθμούς.*

δ΄. *Ὅτι τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν ἡ πρόςθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

στηρίζεται εἰς τοὺς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς 37 καὶ 38 λογισμούς, τῶν δὲ συνθέτων ἐκτελεῖται ἡ μὲν πρόσθεσις διὰ πολλῶν προσθέσεων, ἡ δὲ ἀφαίρεσις διὰ πολλῶν ἀφαιρέσεων τῶν ἐξ ὧν σύγκεινται ἁπλῶν.

ε'. Ὅτι εἶναι προτιμότερον πρῶτον νὰ προσθέτωνται καὶ ν' ἀφαιρῶνται οἱ ἀριθμοὶ τῶν μικροτάτων μονάδων, οἵτινες εἶναι εἰς τὰ δεξιά, καὶ ἔπειτα κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀνωτέρων μονάδων.

Ἰδίως δὲ κατὰ μὲν τὴν πρόσθεσιν ἐὰν μερικόν τι κεφάλαιον ἔχῃ ἱκανὰς μονάδας, ὥστε ν' ἀποτελῶσι μίαν ἢ πλειοτέρας μονάδας ἀνωτέρας τάξεως, αὗται ἀποχωρίζονται ἀπ' αὐτοῦ καὶ ὡς μονάδες ἀνωτέρας τάξεως προσθέτονται εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν ὁμωνύμων μονάδων.

Κατὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν ἐὰν μερικός τις ἀφαιρετέος ἦναι μικρότερος τοῦ ὁμωνύμου του ἀφαιρέτου, αὐξάνεται αὐτὸς κατ' ἀριθμὸν ἴσον μὲ μίαν ἢ πλειοτέρας ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως μονάδας, καὶ τότε ἀνάγκη ἢ νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ μίαν ἢ πλειοτέρας μονάδας ὁ ἀριστερὸς αὐτοῦ μερικὸς ἀφαιρετέος, ἢ ν' αὐξηθῇ κατὰ τὰς αὐτὰς ὁ ὁμώνυμος μὲ τὸν ἀριστερὸν ἀφαιρετέον ἀφαιρέτης.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

58. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις κατὰ τὴν γενικὴν σημασίαν των εἶναι ποικίλοι λογισμοί, προσδιοριζόμενοι μὲν ἑκάστοτε ὁ μὲν ὑπὸ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ διαιρέτου (43), ἐκτελούμενοι δ' ὁ μὲν ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὁ δὲ ἐπὶ τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐπειδὴ καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ διαιρέτης δυνατὸν νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἁπλοῦς ἢ σύνθετος, κλασματικός, μικτὸς ἢ συμμιγής, καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ διαιρετέος ὡσαύτως, διὰ ταῦτα θέλομεν θεωρήσει κατὰ σειρὰν ὅλας αὐτὰς τὰς διαφόρους περιπτώσεις ἀρχίζοντες ἐκ τῶν ἁπλουστέρων.

Πολλαπλασιασμὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ ἁπλοῦν τινα 2, 3. . . 9.

59. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι 2, 3 . . . . 9, ὁ πολλαπλατιασμὸς κυρίως συνίσταται (39) εἰς τὸ προσθέτειν τὸν πολ-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

λαπλασιαστέον πρῶτον εἰς ἑαυτὸν, ἔπειτα εἰς τὸ διπλάσιόν του, μετέπειτα εἰς τὸ τριπλάσιόν του, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μεχρισοῦ καταντήσῃ τις εἰς τὸ ὑπὸ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ προςδιοριζόμενον πολλαπλάσιον· διότι διὰ τῆς προςθέσεως τῆς μονάδος εἰς ἑαυτὴν, ἔπειτα εἰς τὸ 2 κτλ γίνεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος. Οὕτω δ' ἂν πράττῃ τις πάντοτε τὸν πολλαπλασιασμὸν, ὅταν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ἦναι ἁπλοῦς ἀριθμὸς, ἐὰν δὲν ἠξεύρῃ τὴν προπαίδειαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, θέλει εἶσθαι βέβαιος ὅτι τὸ εὑρισκόμενον γινόμενον εἶναι τὸ ζητούμενον πολλαπλάσιον.

Ἀφοῦ δ' οὕτω πληροφορηθῇ τις ὅτι 6 ἐπὶ 7 ἤτοι τὸ ἑπταπλάσιον τοῦ 6 εἶναι 42, τότε καὶ 6 δεκάδες ἐπὶ 7, καὶ 6 ἑκατοντάδες ἐπὶ 7, κτλ, καὶ $\frac{6}{8}$ ἐπὶ 7, καὶ 0,06 ἐπὶ 7, καὶ 6 δένδρα ἐπὶ 7 κτλ, θέλει εἶσθαι 42, ἀλλὰ ὁμώνυμον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἤτοι 42 δεκάδες, 42 ἑκατοντάδες, 42 ὄγδοα ἢ $\frac{42}{8}$, 42 ἑκατοστημόρια ἢ 0,42, 42 δένδρα κτλ. Ὥστε, *ὅταν πολλαπλασιάζῃ τις ἀριθμὸν ἁπλοῦν ὁποιασδήποτε ὡρισμένης μονάδος ἐπὶ 2, 3 .... 9, θεωρεῖ αὐτὸν ὡς ἀφῃρημένον, τὸ δὲ γινόμενον ἔπειτα θεωρεῖ ὁμώνυμον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον.*

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον πληροφορεῖταί τις ἔτι ὅτι καὶ ὁ 7 ἐπὶ 6 παράγει τὸν αὐτὸν μὲν ἀριθμὸν 42, ἀλλ' ὁμώνυμον μὲ τὸν 7. Ὥστε *δύναταί τις ἀδιαφόρως νὰ πολλαπλασιάζῃ ὁπότερον ἂν θέλῃ δύο ἁπλῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τὸν ἄλλον πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ γινομένου, ἔπειτα ἐκλαμβάνει αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν ὁμώνυμον μὲ τὸν ἀληθινὸν πολλαπλασιαστέον.*

60. Ὅταν δὲ ὁ πολλαπλασιαστέος ἦναι σύνθετος ἀριθμὸς, δύναταί τις νὰ εὑρίσκῃ τὸ γινόμενον κατὰ τὸν ἀνωτέρω λογισμὸν, ἀλλὰ θέλει χρονοτριβήσει ἀρκετά. Πρὸς ἀποφυγὴν δὲ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν πολλαπλασιάσωμεν ὡς ἤδη εἴπομεν ἕνα ἕκαστον τῶν ἐξ ὧν ὁ πολλαπλασιαστέος σύγκειται ἁπλῶν ἀριθμῶν, οὕτω πολλαπλασιάζομεν ὅλον αὐτὸν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, καὶ ἄλλο δὲν χρειάζεται εἰμὴ ἐξ ἑκάστου *μερικοῦ* γινομένου ν' ἀποχωρίσωμεν ὅσας ἀνωτέρας τάξεως μονάδας ἔχει, ἂν ἔχῃ, καὶ νὰ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τὰς προςθέσωμεν εἰς τὸ ὁμώνυμόν του μερικὸν γινόμενον, οὕτω δὲ θέλομεν ἔχει τὸ ζητούμενον πολλαπλάσιον. Οὗτος δὲ ὁ λογισμὸς ἐκτελεῖται συντομώτατα, καὶ δῆλον (47) ὅτι εἶναι προτιμότερον ν' ἀρχίζωμεν αὐτὸν ἐκ δεξιῶν.

Οὕτως εὑρίσκομεν εὐθὺς ὅτι 4789 ἐπὶ 6 ἤτοι τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ 4789 εἶναι 28734.

$$\begin{array}{r} 4789 \\ 6 \\ \hline 28734 \end{array}$$

Τὸ δ' ἑξαπλάσιον τοῦ $\frac{4789}{74528}$ εἶναι $\frac{28734}{74528}$.

Ὡσαύτως εὑρίσκεται τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ 4,789 ὅτι εἶναι 28,734.

Τὸ δὲ 8 $\frac{7}{9}$ ἐπὶ 5 ἤτοι τὸ πενταπλάσιον τοῦ 8 $\frac{7}{9}$ ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι εἶναι 43 $\frac{8}{9}$· διότι τὸ πενταπλάσιον τοῦ $\frac{7}{9}$ εἶναι $\frac{35}{9}$ ἤτοι 3 καὶ $\frac{8}{9}$, προςθέτοντες δὲ 3 εἰς τὸν 40, τὸν πενταπλάσιον τοῦ 8, ἔχομεν 43 $\frac{8}{9}$.

Τελευταῖον ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι τὸ τετραπλάσιον τοῦ 12$^{\text{ημ.}}$ 15$^{\text{ωρ}}$ 34$^{\text{λεπ}}$ εἶναι 50$^{\text{ημ.}}$ 14$^{\text{ωρ}}$ 16$^{\text{λεπ}}$.

Πολλαπλασιασμὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ σύνθετον ἀκέραιον.

61. Πρῶτον παρατηροῦμεν γενικῶς ὅτι, *ἐὰν ἀριθμός τις ἔχῃ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος ἀριθμός, ἡ δὲ μονάς του ἦναι πολλαπλασία τῆς μονάδος τοῦ ἄλλου, τὸ ὑπ' αὐτοῦ παριστανόμενον ποσὸν εἶναι τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τοῦ ἄλλου παριστανομένου ποσοῦ, ὁποῖον πολλαπλάσιον εἶναι ἡ μονάς του τῆς μονάδος τοῦ ἄλλου.* Διότι ὁποῖον πολλαπλάσιον εἶναι ἡ μία μονὰς αὐτοῦ τῆς μιᾶς μονάδος τοῦ ἄλλου, τοιοῦτον πολλαπλάσιον εἶναι καὶ ἡ δευτέρα μονὰς αὐτοῦ τῆς δευτέρας μονάδος τοῦ ἄλλου, τοιοῦτον καὶ ἡ τρίτη αὐτοῦ τῆς τρίτης τοῦ ἄλλου, τοιοῦτον καὶ ἡ τελευταία αὐτοῦ τῆς τελευταίας τοῦ ἄλλου· ἀφοῦ δὲ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος, ἄλλας τόσας ἔχει καὶ αὐτός, ἑκάστη δὲ αὐτοῦ εἶναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἑκάστης τοῦ ἄλλου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ὑπ' αὐτοῦ ὅλου παριστανόμενον ποσὸν εἶναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τοῦ ἄλλου παριστανομένου ποσοῦ, ὁποῖον εἶναι ἡ μονάς του τῆς μονάδος τοῦ ἄλλου.

Κατὰ ταύτην τὴν ἀρχὴν ὁ ἀριθμὸς 4 δεκάδες ἢ 40 εἶναι δεκαπλάσιος τῶν 4 μονάδων, διότι ἡ δεκὰς εἶναι δεκαπλασία

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τῆς μονάδος· ὁ 4 ἑκατοντάδες ἢ 400 εἶναι ἑκατονταπλάσιος τῶν 4 μονάδων, διότι ἡ ἑκατοντὰς εἶναι ἑκατονταπλασία τῆς μονάδος. Οὕτω δὲ καὶ περὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ δεκάδος, ἑκατοντάδος, χιλιάδος κτλ.

Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ 20, 30, ... 90, οἵτινες εἶναι 2 3, 9 δεκάδες, δυνατὸν νὰ νοῶνται ὅτι εἶναι καὶ 10 δυάδες, τριάδες . . . ἐννεάδες, ἢ ἄλλως δεκάκις 2, ἢ 3, . . . ἢ 9.

Ὡσαύτως οἱ 200, 300 . . . . 900, οἵτινες εἶναι 2, 3, . . . 9 ἑκατοντάδες, δυνατὸν νὰ νοῶνται ὅτι εἶναι καὶ δεκάκις 2, 3, . . 9, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Κατὰ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν ὁ 48,567 εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ 4,8567· διότι καὶ τῶν δύο ὁ ἀριθμὸς εἶναι 48567, ἀλλὰ τοῦ δευτέρου ἡ μονὰς εἶναι δέκατον χιλιοστοῦ ἀρχικῆς τινος μονάδος, τοῦ δὲ πρώτου εἶναι χιλιοστόν, ὅπερ εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ δεκάτου τοῦ χιλιοστοῦ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁ 485,67 εἶναι ἑκατονταπλάσιος τοῦ 4,8567, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐκ τούτων δ' ἐξάγονται τὰ ἑξῆς.

α΄. Ἀριθμὸς ἀκέραιος δεκαπλασιάζεται, ἑκατονταπλασιάζεται κτλ, ἐὰν δεξιά του τεθῇ ἓν μηδενικόν, δύο μηδενικά, τρία μηδενικά, κτ.λ.

β΄. Μικτὸς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἢ κλάσμα δεκαδικὸν δεκαπλασιάζεται, ἑκατονταπλασιάζεται, χιλιοπλασιάζεται κτλ, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή του πρὸς δεξιὰν μίαν θέσιν, δύο θέσεις, τρεῖς, κτ.λ.

Σημ. Τὰ μηδενικὰ εἰς τοὺς μὴ δεκαδικοὺς μικτοὺς ἢ εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἀνάγκη νὰ θέτωνται δεξιὰ ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν ἐξ ὧν σύγκεινται. Ὁ 40 $\frac{70}{12}$ εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ 4 $\frac{7}{12}$· ὁ 30$^{\text{ημ.}}$ 40$^{\text{ωρ}}$ 240$^{\text{λεπ}}$ εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ 3$^{\text{ημ.}}$ 4$^{\text{ωρ}}$ 24$^{\text{λεπ}}$. Δεξιὰ δὲ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος ἐὰν τεθῶσι μηδενικά, δὲν πολλαπλασιάζεται τὸ ὑπ' αὐτοῦ παριστανόμενον ποσόν, ὡς θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω.

62. Τούτων τεθέντων, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ 6897 ἐπὶ 4732, τουτέστιν ἂς ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τοῦ 6897 οἱ αὐτοὶ λογισμοί, οἵτινες ἐξετελέσθησαν ἐπὶ τῆς μονάδος τοῦ 4732, ἵνα γείνῃ αὐτός.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Ὁ 4732 γίνεται μὲν ἐκ τῆς μονάδος του δι' ἐπαναλήψεως αὐτῆς, καὶ ἐπομένως τὸ γινόμενον ἤθελεν εὑρεθῆ, ἂν ἤθελε προστεθῆ ὁ 6897 πρῶτον εἰς ἑαυτὸν, ἔπειτα εἰς τὸ διπλάσιόν του κτλ, ἀλλ' ἤθελεν εὑρεθῆ μετὰ πολὺν χρόνον καὶ ἐπιπόνως. Ἀλλ' ὁ 4732 νοεῖται καὶ ἄλλως πως ὅτι γίνεται ἐκ τῆς μονάδος του, ὅτι δηλ. εἶναι κεφάλαιον τῶν τεσσάρων ἁπλῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν σύγκειται, τούτων δὲ, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, ὁ μὲν δυνατὸν νὰ νοῆται χιλιάκις 4, ὁ δὲ ἑκατοντάκις 7, ὁ δὲ δεκάκις 3 καὶ ὁ ἄλλος ἁπλῶς 2. Διὸ καὶ τὸ μέλλον νὰ εὑρεθῆ γινόμενον πρέπει νὰ νοηθῆ κεφάλαιον τεσσάρων ἀριθμῶν, ὧν ὁ μὲν πρέπει νὰ ἦναι χιλιάκις τὸ τετραπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου 6897, ὁ δὲ ἑκατοντάκις τὸ ἑπταπλάσιον αὐτοῦ, ὁ δὲ δεκάκις τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ, ὁ δὲ ἁπλῶς τὸ διπλάσιον αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐκ τῶν προηγουμένων εἶναι γνωστὸν πῶς εὑρίσκεται τὸ διπλάσιον τοῦ 6897, τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ καὶ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ τριπλασίου, τὸ ἑπταπλάσιον αὐτοῦ καὶ τὸ ἑκατονταπλάσιον τοῦ ἑπταπλασίου, τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ καὶ τὸ χιλιοπλάσιον τοῦ τετραπλασίου. Ἄλλο λοιπὸν δὲν μένει εἰμὴ νὰ εὑρεθῶσι τὰ *μερικὰ* ταῦτα γινόμενα καὶ ἔπειτα νὰ προστεθῶσιν. Οὕτω δ' εὑρίσκεται πολὺ ἁπλούστερα τὸ γινόμενον.

$$\begin{array}{r} 4000 \\ 700 \\ 30 \\ 2 \\ \hline 4732 \end{array}$$

Παρατηρητέον δὲ ὅτι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ τριπλασίου τοῦ 6897 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 206910, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον 1 παριστάνει δεκάδας, τὸ δὲ ἑκατονταπλάσιον τοῦ ἑπταπλασίου τοῦ 6897 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4827900, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον 9 εἶναι ἀριθμὸς ἑκατοντάδων, τὸ δὲ χιλιοπλάσιον τοῦ τετραπλασίου τοῦ αὐτοῦ 6897 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 27588000, οὗτινος τὸ δεξιὸν 8 εἶναι ἀριθμὸς χιλιάδων. Ἡ παρατήρησις αὕτη δεικνύει ὅτι εἶναι περιττὸν νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 20691 ἐπὶ 10, ὁ 48279 ἐπὶ 100, κτλ, ἀρκεῖ, ὅταν πολλαπλασιάζηται ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων, ἢ τῶν ἑκατοντάδων κτλ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, νὰ γράφηται τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ γινομένου ὑπὸ τὰς δεκάδας ἢ τὰς ἑκατοντάδας κτλ τοῦ γινομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Εἶναι δὲ ὁλωςδιόλου ἀδιάφορον ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ πολ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

λαπλασιαστέος πρῶτον ἐπὶ τὰς 4 χιλιάδας καὶ ἐφεξῆς ἐπὶ τὰς 7 ἑκατοντάδας κτλ, ἢ πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ τὰς 2 μονάδας καὶ ἐφεξῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων κτλ. Συνήθεια ὅμως ἐπικρατεῖ νὰ προτιμᾶται ὁ δεύτερος τρόπος, τὸ ν' ἀρχίζωσι τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκ δεξιῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Ἰδοὺ ὁ τύπος τῆς πράξεως.

$$
\begin{array}{r}
6897 \\
4732 \\
\hline
13794 \\
20691 \\
48279 \\
27588 \\
\hline
32636604
\end{array}
$$

63. Ὅταν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἦναι μηδενικὰ τὰ δεξιά του ψηφία, ἢ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἢ ἀμφοτέρων, εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορῆταί τις ὅτι *πρέπει νὰ παραβλέπωνται τὰ μηδενικὰ καὶ νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ ἄνευ τῶν μηδενικῶν ἀριθμοὶ ὡς ἤδη εἴπομεν, ἐν δὲ τῷ γινομένῳ δεξιὰ νὰ γράφωνται τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι δεξιά των, ἢ ὁ ἕτερος, ἂν ὁ ἄλλος δὲν ἔχῃ*. Διότι ὅταν μὲν ἦναι μηδενικὰ μόνον δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὁ ἄνευ τῶν μηδενικῶν του ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων κτλ, καὶ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ὡς ἤδη εἴπομεν εὑρισκόμενον, θέλει εἶσθαι ὁμώνυμον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἤτοι ἀριθμὸς δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων κτλ, καὶ πρέπει νὰ ἔχῃ ὅσα μηδενικὰ εἶναι ἐν τῷ πολλαπλασιαστέῳ. Ὅταν δ' ἦναι μηδενικὰ μόνον δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, αὐτὸς εἶναι ἢ δεκαπλάσιος τοῦ ἄνευ τῶν μηδενικῶν ἀριθμοῦ ἢ ἑκατονταπλάσιος κτλ· διὰ τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι δεκαπλάσιον, ἑκατονταπλάσιον κτλ τοῦ γινομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν ἄνευ τῶν μηδενικῶν πολλαπλασιαστήν, ἤτοι αὐτὸ τὸ γινόμενον μὲ ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς δεξιά του. Ὅταν δὲ καὶ τῶν δύο ἦναι μηδενικὰ τὰ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

δεξιά των ψηφία, τότε δῆλον ἐξ ὧν ἤδη εἴπομεν τὸ μέλλον ἔτι ν' ἀποδειχθῇ.

64. *Ὁπότερος οἱωνδήποτε ἀκεραίων ἀριθμῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου θέλει εἶσθαι ὁ αὐτός.* Οἷον ἢ ὁ 346 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 482, ἢ ὁ 482 ἐπὶ 346, ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου θέλει εἶσθαι ὁ αὐτός. Διότι ἐὰν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ὁ 346 ἐπὶ 482, τοῦ γινομένου ὁ ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι 166772, ὅστις εἶναι 482 φορὰς 346· ἂν δὲ θεωρηθῇ ὁ 346 ὡς μονάς, ὁ 166772 εἶναι 482 τοιαῦται μονάδες. Τότε δῆλον κατὰ τὴν τοῦ 61 ἀρ. ἀρχὴν ὅτι, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 166772 καὶ 482 εἶναι 482 μονάδες, τοῦ δὲ πρώτου ἡ μονὰς εἶναι 346 καὶ τοῦ δευτέρου 1, ὁ 166772 εἶναι τριακοσιατεσσαρακονταεξαπλάσιος τοῦ 482, ἤτοι γινόμενον τοῦ 482 ἐπὶ 346· ἄρα ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου τοῦ 482 ἐπὶ 346 εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ὁ τοῦ γινομένου τοῦ 346 ἐπὶ 482. Οὕτω δὲ καὶ περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ γινομένου δύο ὁποιωνδήποτε ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἄρα *ὁπότερος οἱωνδήποτε κτλ.*

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι εἰς τὸ ἑξῆς κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν πολλαπλασιασμοῦ δύο οἱωνδήποτε ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες πάντοτε τότε θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι, δυνάμεθα νὰ μεταχειριζώμεθα ὁπότερον ἂν θέλωμεν πολλαπλασιαστέον ἢ πολλαπλασιαστήν· ἀφοῦ δὲ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ γινομένου πρέπει νὰ τὸν νοῶμεν ὁμώνυμον πάντοτε μὲ τὸν ἀληθινὸν πολλαπλασιαστέον.

65. *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὁ πολλαπλασιαστέος δυνατὸν νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἕτερον παράγοντα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τὸ παραχθὲν γινόμενον ἔπειτα ἐπὶ τὸν ἄλλον παράγοντα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν·* διότι καὶ οὕτω θέλει εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Π. χ. ἐὰν ἦναι γνωστὸν ὅτι ὁ 2688 ἦναι γινόμενον τοῦ 56 καὶ τοῦ 48, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος 748 ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 2688, δύναται νὰ πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς μὲν ἐπὶ τὸν ἕτερον παράγοντά του ἀδιαφόρως, τὸν 56 ἢ τὸν 48, τὸ δὲ παραχθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν ἄλλον παράγοντα.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

748	748	748
2688	56	48
5984	4488	5984
5984	3740	2992
4488	41888	35904
1496	48	56
2010624	335104	215424
	167552	179520
	2010624	2010624

Διότι κατὰ τὸ ἐν τῷ προηγουμένῳ ἀριθμῷ ἐξηγηθὲν ὁ 2688 δυνατὸν νὰ νοῆται ὅτι εἶναι ἢ 56 φορὰς 48 μονάδας, ἢ 48 φορὰς 56 μονάδας· καὶ τὸ γινόμενον λοιπὸν τοῦ 748 ἐπὶ 2688 θέλει εἶσθαι ἢ 56 φορὰς τὸ τεσσαρακονταοκταπλάσιον τοῦ 748, ἢ 48 φορὰς τὸ πεντηκονταεξαπλάσιον τοῦ αὐτοῦ 748, ἐπομένως θέλει εὑρεθῆ ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ 748 ἐπὶ 48 καὶ ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 56, ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ 748 ἐπὶ 56 καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενον ἐπὶ 48.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 48 εἶναι καὶ αὐτὸς γινόμενον τοῦ 6 καὶ τοῦ 8, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ 48, δύναται νὰ πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς μὲν ἐπὶ 6 καὶ τὸ γινόμενον ἔπειτα ἐπὶ 8 κτλ.

Ἐκ τούτων λοιπὸν ἡ γενικωτέρα αὕτη ἀρχή· *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν, τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπ᾿ αὐτὸν δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ μὲν πολλαπλασιαστέος ἐπὶ ἕνα τινὰ τῶν παραγόντων του, ἔπειτα τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ ἄλλον τινὰ τῶν παραγόντων του, ἔπειτα πάλιν τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ ἄλλον τινὰ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου.*

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι εἶναι ἀδιάφορον ἐπὶ τίνα παράγοντα θέλει γείνει ὁ πρῶτος πολλαπλασιασμὸς, ὁ δεύτερος, ὁ τρίτος κτλ.

Καὶ ἀντιστρόφως δὲ, *ὅταν πρόκηται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμός τις ἐπὶ ἄλλον, καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενον ἐπὶ ἄλλον κτλ, δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτὸ ἂν πρότερον πολ-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

λαπλασιασθῶσιν οἱ πολλαπλασιασταὶ ἐπ' ἀλλήλους καὶ ἔπειτα πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν.

66. Κλασματικὸς δὲ ἀριθμὸς ἢ μικτὸς δεκαδικὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ σύνθετον ἀκέραιον ὅπως εἴπομεν ἐν ἀρ. 62 καὶ ἐν ἀρ. 63. Οὕτως εὑρίσκεται γινόμενον τοῦ μὲν $\frac{6897}{7545}$ ἐπὶ 4732 ὁ $\frac{32636604}{7545}$· τοῦ δὲ 68,97 ἐπὶ 4732 ὁ 326366,04· τοῦ δὲ 5,432 ἐπὶ 6400 ὁ 34764,8, διότι τὸ γινόμενον τοῦ 5,432 ἐπὶ 64 εἶναι 347,648, ἑκατοντάκις δὲ τοῦτο (61) εἶναι ὁ 34764,8· τοῦ δὲ 0,00045 ἐπὶ 27 εἶναι 0,01215, διότι τὸ γινόμενον τοῦ 45 ἐπὶ 27 εἶναι 1215, ἅτινα ὡς ἑκατοστὰ χιλιοστημορίου πρέπει νὰ γραφθῶσιν 0,01215· ἂν δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦτον 270 ἢ 2700, τότε τὸ γινόμενον ἤθελεν εἶσθαι 0,1215 ἢ 1,215.

Μικτοῦ δὲ μὴ δεκαδικοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ὅλον τὸν πολυψήφιον πολλαπλασιαστὴν πρῶτον τὸ κλάσμα, ἔπειτα τὸ ἀκέραιον καὶ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προςθέτονται καὶ ὅσαι μονάδες προέκυψαν ἐκ τοῦ πρώτου γινομένου, ἂν προέκυψαν. Καὶ συμμιγοῦς δὲ ὡσαύτως πολλαπλασιάζεται πρῶτον ἐπὶ ὅλον τὸν πολυψήφιον πολλαπλασιαστὴν ὁ ἀριθμὸς τῆς μικροτάτης μονάδος, ἔπειτα ὁ ἀριστερός του καὶ εἰς τὸ γινόμενον προςθέτονται ὅσαι μονάδες προέκυψαν ἐκ τοῦ πρώτου γινομένου· ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ὅλον τὸν πολλαπλασιαστὴν ὁ ἔτι ἀριστερώτερος κτλ. Οὕτω δ' ἐκτελεῖται ἁπλούστερα ὁ πολλαπλασιασμὸς παρ' ἐὰν ἐπολλαπλασιάζοντο ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συμμιγοῦς καὶ τοῦ μικτοῦ πρῶτον ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἔπειτα ἐπὶ τὰς δεκάδας του κτλ. Κατωτέρω δὲ θέλομεν ἰδεῖ ἄλλον τρόπον συντομώτερον τοῦ πολλαπλασιάζειν συμμιγῆ ἀριθμὸν ἢ μικτὸν ἐπὶ πολυψήφιον.

Διαίρεσις ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ δι' ἄλλου ἀκεραίου.

67. Ὄντος τοῦ διαιρέτου ἀκεραίου, οὗτινος ἡ μονάς του εἶναι πολλοστόν τι, δῆλον ὅτι καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι πολλοστὸν τοῦ διαιρετέου τοιοῦτον, ὁποῖον πολλοστὸν τοῦ διαιρέτου εἶναι ἡ μονάς του.

α΄. Καὶ ὅταν μὲν ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι ὁ αὐτὸς μὲ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τὸν τοῦ διαιρέτου, ἀλλ' ὁποιασδήποτε μονάδος, δῆλον ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι 1 ὁμώνυμον μὲ τὸν διαιρετέον· διότι αὐτὸ εἶναι τοιοῦτον πολλοστὸν τοῦ διαιρετέου, ὁποῖον εἶναι τοῦ διαιρέτου ἡ μονάς του. Ἕκαστος λοιπὸν τῶν ἀριθμῶν ,24 μονάδες, 24 δεκάδες, 24 ἑκατοντάδες κτλ — $\frac{24}{35}$ ἢ 0,24, ἢ 0,024, ἢ 2,4 κτλ — 24 δένδρα, ἢ 24 ὧραι κτλ, διαιρεθεὶς διὰ 24 δίδει πηλίκον 1 μονάδα, 1 δεκάδα, 1 ἑκατοντάδα κτλ — $\frac{1}{35}$, 0,01, ἢ 0,001, ἢ 0,1, — ἢ 1 δένδρον, ἢ 1 ὥραν κτλ.

68. ϛ'. Ὅταν δ' ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου, ἄλλη δὲ μονὰς μικροτέρα τῆς τοῦ διαιρετέου ὡρισμένη δὲν ἦναι, τότε *τὸ πηλίκον ἐξ ἀνάγκης θέλει εἶσθαι κλάσμα τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.* Καὶ ὅτι μὲν θέλει εἶσθαι κλάσμα τῆς μονάδος εἶναι φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι ἡ μονὰς τοῦ διαιρετέου, καὶ ὅτι ἐνταῦθα ὑποτίθεται τοῦ διαιρετέου ὁ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου· λοιπὸν καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι μικρότερον τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου, ἤτοι θέλει εἶσθαι κλάσμα αὐτῆς. Ὅτι δὲ θέλει ἔχει τοῦτο ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην, γίνεται φανερὸν οὕτως. Ἐὰν ὁ διαιρετέος ἦναι μία τις μονάς, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ἓν τοιοῦτον πολλοστὸν αὐτῆς, ὅ,τι πολλοστὸν τοῦ διαιρέτου εἶναι ἡ μονάς του, τοῦτο δὲ εἶναι κλασματικὴ μονὰς τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου ἔχουσα παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην· ἐὰν δὲ ὁ διαιρετέος ἦναι 2 μονάδες, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι 2 τοιαῦτα πολλοστὰ αὐτῆς· ἐὰν ἦναι ὁ διαιρετέος 3 τοιαῦται μονάδες, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι 3 τοιαῦτα πολλοστὰ αὐτῆς· καὶ ἐν γένει τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι τόσα πολλοστὰ τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου ἢ τόσαι κλασματικαὶ μονάδες αὐτῆς ἔχουσαι παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρετέος, ἤτοι θέλει εἶσθαι κλάσμα τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου ἔχον παρονομαστὴν μὲν τὸν διαιρέτην, ἀριθμητὴν δὲ τὸν διαιρετέον.

Ἄλλως, ἂν ὁ μὲν διαιρετέος π. χ. ἦναι 5, ὁ δὲ διαιρέτης 7,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τὸ ἕβδομον τῶν 5 *μονάδων τοῦ διαιρετέου εἶναι τὰ* $\frac{5}{7}$ *τῆς μονάδος αὐτοῦ*. Διότι τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς μιᾶς μονάδος τοῦ διαιρετέου ἑπτάκις ἐπαναλαμβανόμενον παράγει αὐτὴν τὴν μονάδα, τὰ $\frac{2}{7}$ τῆς αὐτῆς ἑπτάκις ἐπαναλαμβανόμενα παράγουσι 2 μονάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἄρα τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου ἑπτάκις ἐπαναλαμβανόμενα παράγουσι τὰς 5 μονάδας τοῦ διαιρετέου. Ἀλλὰ τὸ ἑπτάκις ἐπαναλαμβανόμενον καὶ παράγον 5 εἶναι ἕβδομον τῶν 5· ἄρα τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου εἶναι τὸ ἕβδομον τῶν 5 μονάδων αὐτοῦ, ἤτοι τὸ ἕβδομον τοῦ διαιρετέου, εἶναι δηλ. τὸ ζητούμενον.

Κατὰ ταῦτα 8 διαιρεθεὶς διὰ 9 παρέχει πηλίκον $\frac{8}{9}$ τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου· 478 διαιρεθεὶς διὰ 659 παρέχει πηλίκον $\frac{478}{659}$ τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου. Ἄλλως, τὸ ἔννατον 8 μονάδων ὁποιωνδήποτε εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ τῆς μιᾶς αὐτῶν· τὸ 659ον τῶν 478 εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{478}{659}$ τῆς μιᾶς αὐτῶν.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου, ἀλλ' ἦναι καὶ μονάς τις μικροτέρα τῆς τοῦ διαιρετέου ὡρισμένη, τότε τὸ πηλίκον εἶναι μὲν μικρότερον τῆς μονάδος τοῦ διαιρετέου, ἀλλὰ δύναται νὰ ἦναι ἀριθμός τις μονάδων τῶν μικροτέρων, ὅστις πῶς εὑρίσκεται λέγομεν εὐθὺς κατωτέρω.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι οἱ συλλογισμοὶ οἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου κατὰ τὴν β'. περίπτωσιν πείθουσιν ὅτι, καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι ὁ αὐτὸς ἢ μεγαλήτερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου, καὶ τότε, ἂν θέλωμεν, δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν τὸ πηλίκον ὡς κλασματικὸν ἔχοντα ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην. Π. χ. ὁ 345 διαιρεθεὶς οὕτω διὰ 24 παρέχει πηλίκον κλασματικὸν τὸ 24ον τοῦ 345, ἤτοι $\frac{345}{24}$ τῆς μονάδος τοῦ 345. Ἀλλὰ τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἄλλως, ὡς λέγομεν εὐθὺς κατωτέρω.

69. γ'. Ὅταν δ' ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι μεγαλήτερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου, ἐπειδὴ τότε θέλει εἶσθαι ἐνταυτῷ ἢ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ἢ ἴσος μὲ αὐτὸ ἢ μεγαλήτερος αὐτοῦ, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ἢ μικρό-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τερον τοῦ 10, ἢ ἴσον μὲ τὸ 10, ἢ μεγαλήτερον τοῦ 10 ἤτοι πολυψήφιος ἀριθμός.

Καὶ πρῶτον μὲν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι δεκαπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου, οἷον ἂν πρόκηται νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 46 ὁ 460, ὅςτις εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ 46, ἐπειδὴ ὁ 460 εἶναι 46 δεκάδες, ἤτοι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ δεκάδων ἀριθμὸς, εἶναι φανερὸν (67) ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι 1 ὁμώνυμον μὲ τὸν διαιρετέον, ἤτοι 1 δεκὰς ἢ 10 μονάδες τοῦ διαιρετέου.

Ἐκ δὲ τούτου καὶ τοῦ ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι ἴσος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι 1 μονὰς τοῦ διαιρετέου, ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι μεγαλήτερος μὲν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, τότε καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι μεγαλήτερον μὲν μιᾶς, μικρότερον δὲ 10 μονάδων τοῦ διαιρετέου, ἀκέραιος ἢ μικτὸς ἀριθμός.

Μετὰ δὲ ταῦτα εἶναι ἐπίσης φανερὸν, ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι μεγαλήτερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, τότε καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι μεγαλήτερον τοῦ 10, ἤτοι πολυψήφιος ἀριθμὸς καὶ γενικῶς σύνθετος ἐξ ἁπλῶν. Ἤθελε δ' εἶσθαι εὔκολον νὰ πληροφορηθῇ τις ὅτι θέλει εἶσθαι τὸ πηλίκον διψήφιον μὲν ἀκέραιον ἢ μὲ κλάσμα, ἂν ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ἦναι μεταξὺ τοῦ δεκαπλασίου καὶ ἑκατονταπλασίου τοῦ διαιρέτου, τριψήφιον δὲ, ἂν ἦναι μεταξὺ τοῦ ἑκατονταπλασίου καὶ χιλιοπλασίου τοῦ διαιρέτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥστε ἐκ τούτου ἠδύνατό τις νὰ γνωρίζῃ εὐθὺς εἰς τὴν ἀρχὴν ἀπὸ τῆς ὄψεως τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου πόσα ψηφία θέλει ἔχει τὸ πηλίκον.

70. *Ἕκαστος ἀριθμὸς, ὅςτις εἶναι μεγαλήτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, ἔχει ψηφία ἢ ὅσα καὶ ὁ διαιρέτης ἢ καὶ ἓν ἔτι.* Διότι ὡς μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου ἔχει ψηφία ἢ ὅσα ὁ διαιρέτης ἢ πλειότερα· ἔχοντος δὲ τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου ἓν ψηφίον πλειότερον τοῦ διαιρέτου, τὸ μηδενικὸν, ὁ ἀριθμὸς ὁ μικρότερος αὐτοῦ ἔχει τὸ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πολὺ ἓν ψηφίον πλειότερον τοῦ διαιρέτου. Ἄρα ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸς ἔχει ψηφία ἢ ὅσα ὁ διαιρέτης ἢ ἔτι καὶ ἕν.

71. Καὶ ὅταν μὲν ὁ διαιρέτης ἦναι μικρότερος τοῦ 10, τοῦ δὲ διαιρετέου ὁ ἀριθμὸς μεγαλήτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, οἷον ἂν ἐπρόκειτο νὰ διαιρεθῇ ἕκαστος ἀριθμὸς τῶν μεταξὺ τοῦ 7 καὶ τοῦ 70 διὰ τοῦ 7, ἔπρεπε νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον διὰ δοκιμασιῶν γινομένων διὰ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς ἐν ἀρ. 40 εἴπομεν· οὕτω δ' ἤθελεν εἶσθαι βέβαιός τις ὅτι τὸ 7ον τοῦ μὲν

14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 εἶναι σωστὰ
2 3 4 5 6 7 8 9,

τοῦ δὲ ἀρ. 15, 16, 17, 18, 19, 20 τὸ 7ον ἤθελεν εὑρεθῇ
$2\frac{1}{7}$, $2\frac{2}{7}$, $2\frac{3}{7}$, $2\frac{4}{7}$, $2\frac{5}{7}$, $2\frac{6}{7}$.

Οὕτω δὲ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

Ἅπαξ δ' εὑρεθέντα ταῦτα εἶναι ὠφελιμώτατον νὰ καταγράφῃ τις εἰς πίνακα καὶ ἐκστηθίζῃ, ἵνα ἐνθυμῆται αὐτά. Ὁ πίναξ δ' οὗτος εἶναι ἡ προπαίδεια τῆς διαιρέσεως (ἰδὲ Πρ. Ἀριθ.).

72. Ἐὰν ὅμως καὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μεγαλητέρου μὲν τοῦ διαιρέτου, μικροτέρου δὲ τοῦ δεκαπλασίου του, τὴν διαίρεσιν ἠθέλαμεν ἐκτελέσει διὰ τῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ δοκιμασιῶν ἀριθμῶν τινων, ἠθέλαμεν πολλάκις πολὺ χρονοτριβήσει, δοκιμάζοντες τρεῖς καὶ τέσσαρας ἢ καὶ πλειοτέρους ἀριθμούς, ἕως νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον. Ἀλλ' ἡ ἑξῆς παρατήρησις ὀλιγοστεύει τὰς δοκιμασίας ταύτας καταντῶσα αὐτὰς συχνότατα εἰς μίαν μόνην.

Ἂς διαιρεθῇ ὁ 5832 διὰ τοῦ 648, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ ἑξακοσιοστὸν τεσσαρακοστὸν ὄγδοον τοῦ 5832. Ἂς δοκιμάσωμεν πρῶτον ἕνα τινὰ ἀριθμόν, οἷον τὸν 7, πολλαπλασιάζοντές τον ἐπὶ 648. Καὶ πρῶτον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 7 ἐπὶ 8, ἔπειτα τὸν 7 ἐπὶ 4 καὶ τελευταῖον τὸν 7 ἐπὶ 6· καὶ ἂν ὁ 7 ἦναι τὸ ζητούμενον πηλίκον ἢ μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος του, ἐκ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ προκύψωσιν αἱ μονάδες τοῦ διαιρετέου, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου αἱ δεκάδες αὐτοῦ, ἐκ δὲ τοῦ τρίτου καὶ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ δευτέρου αἱ 58 ἑκατοντάδες του ἢ ἀριθμὸς ὀλίγον τι μικρότερος. Παραιτοῦντες

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

δὲ τὰ δύο δεξιὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου βλέπομεν ὅτι *τὸ ζητούμενον πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ ἀριστερὸν ψηφίον τοῦ διαιρέτου πρέπει νὰ παράξῃ ἢ σωστὰ τὸν 58, τὸν ἐν ἀριστερᾷ τοῦ διαιρετέου διψήφιον ἀριθμόν, ἢ ἀριθμὸν κατά τινας μονάδας μικρότερον τοῦ 58.*

Ἡ παρατήρησις αὕτη δεικνύει ὅτι ἡ εὕρεσις τοῦ πηλίκου καταντᾷ εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ 58 διὰ 6, ἤτοι τὴν εὕρεσιν τοῦ ἕκτου τοῦ 58, οὗ τινος τὸ ἀκέραιον μέρος εἶναι 9, καὶ εἰς δοκιμασίαν τούτου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 648. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 648 εἶναι σωστὰ 5832, ὁ 9 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον ἤτοι τὸ 648ον τοῦ 5832. Ὥστε οὕτως εὑρέθη εὐθὺς διὰ μιᾶς δοκιμασίας τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Συχνάκις ὅμως τὸ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐν ἀριστερᾷ τοῦ διαιρετέου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τοῦ διαιρέτου πηλίκον δὲν εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἀλλ' εἶναι κατὰ μονάδα ἢ δύο μονάδας μεγαλήτερον· καὶ τότε χρειάζονται δύο δοκιμασίαι. Π. χ. τὸ 398ον τοῦ 2786 εἶναι ἢ τὸ 3ον τοῦ 27, ἢ ἀριθμὸς ὀλίγον μικρότερος. Τὸ 3ον τοῦ 27 εἶναι 9· εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι δὲν εἶναι ὁ 9· διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 98 παράγει πολὺ μεγαλήτερον ἀριθμὸν τοῦ 86 τοῦ διαιρετέου. Τώρα πρέπει νὰ δοκιμασθῇ ὁ 8. Ἀλλ' εὐκόλως καταλαμβάνει τις ὅτι οὐδ' αὐτὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἐὰν *τὸν πολλαπλασιάσῃ μόνον ἐπὶ τὰ δύο ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου* ἤτοι τὸν 39, διότι παράγει 312 δεκάδας, ἐνῷ ὁ διαιρετέος ἔχει μόνον 278 δεκάδας. Τώρα πρέπει νὰ δοκιμασθῇ ὁ 7, ὅστις εἶναι τῷ ὄντι τὸ ζητούμενον πηλίκον, διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην εἶναι ὁ διαιρετέος 2786.

Ἐκ τούτων ἐξάγεται ὁ γενικὸς κανών·

Ὅταν τοῦ διαιρετέου ὁ ἀριθμὸς ἦναι μεγαλήτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου του, παραιτουμένων ὅλων τῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου πλὴν τοῦ ἀριστεροῦ, καὶ ἄλλων τόσων τοῦ διαιρετέου ἐν δεξιᾷ, διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριστεροῦ τοῦ διαιρέτου ὁ ἐν ἀριστερᾷ τοῦ διαιρετέου μένων μονοψήφιος ἢ διψήφιος ἀριθμός, καὶ τὸ πηλίκον

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν διαιρέτην ὅλον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἦναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον ἢ μικρότερον, αὐτὸ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ εἶναι μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ· ἂν δὲ ἦναι μεγαλήτερον, δοκιμάζεται ὡσαύτως ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος, ὅςτις συνηθέστατα εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον ἢ μόνον τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, σπανιώτατα δὲ ὁ ἔτι μικρότερος αὐτοῦ κατὰ μονάδα.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἄν ποτε ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος διαίρεσις δώσῃ πηλίκον 10 ἢ 11, ὅπερ συμβαίνει ὅταν ὁ τοῦ διαιρετέου ἀριθμὸς ἦναι ὀλίγον τι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, οἷον ἂν ἐπρόκειτο νὰ διαιρεθῇ ὁ 44217 διὰ τοῦ 4579, ἠξεύροντες (69) ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ 10, δὲν δοκιμάζομεν ποτὲ τὸν 10 ἢ 11, ἀλλ' εὐθὺς τὸν 9.

Ὅσα δ' εἴπομεν ἐν τῷ ἀριθμῷ τούτῳ σχεδὸν συνιστῶσι κυρίως τὴν διαίρεσιν, ἤτοι εἶναι τὰ μόνα ἐν χρήσει πρὸς ταχυτάτην εὕρεσιν τοῦ πηλίκου ἢ μόνον τοῦ ἀκεραίου μέρους του.

73. Καὶ ὅταν μὲν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ὡς ἤδη εἴρηται εὑρισκομένου ἀριθμοῦ ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην παράγῃ ἀριθμὸν ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, δῆλον ἐκ τούτου ὅτι αὐτὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πολλοστὸν τοῦ διαιρετέου. Ἐὰν δὲ παράγῃ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρετέου, τότε αὐτὸς δὲν εἶναι ὅλον τὸ ζητούμενον πολλοστὸν, ἀλλὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμωνύμων μονάδων μὲ τὰς τοῦ διαιρετέου.

Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν καὶ τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ αἱ μονάδες τοῦ διαιρετέου, ὅσας ἔχει πλειότερον παρὰ τὸ γινόμενον τοῦ εὑρεθέντος ἤδη ἀκεραίου μέρους ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ αἵτινες εὑρίσκονται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ γινομένου τούτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ ὀνομάζονται *κατάλοιπον*.

Καὶ ἂν μὲν δὲν ὑπάρχῃ τις μονὰς μικροτέρα τῆς τοῦ διαιρετέου ὡρισμένη, ἐπειδὴ αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος μονάδες εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ διαιρέτου εἶναι (68) κλάσμα τῆς μονάδος τοῦ διαι-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ρετέου ἔχον ἀριθμητὴν μὲν αὐτὰς τὰς μονάδας, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην. Τὸ κλάσμα δὲ τοῦτο ὁμοῦ μὲ τὸ προευρεθὲν ἀκέραιον θέλει εἶσθαι ὅλον τὸ ζητούμενον πολλοςόν.

Ἂν ὅμως ἦναί τις μονὰς μικροτέρα τῆς τοῦ διαιρετέου ὡρισμένη, οἷον ἂν ὁ διαιρετέος ἦναι ἀριθμὸς δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων κτλ, ὁπότε εἶναι μονὰς ὡρισμένη μικροτέρα ἡ μονὰς ἢ ἡ δεκὰς κτλ, ἢ ἂν ἦναι ἀριθμὸς πήχεων, ὁπότε εἶναι μονὰς μικροτέρα ὡρισμένη ἡ παλάμη, τὸ δάκτυλον κτλ, ἢ ἂν ἦναι ἀριθμὸς ἡμερῶν, ὁπότε εἶναι μικροτέρα ὡρισμένη μονὰς ἡ ὥρα, τὸ λεπτὸν κτλ, τότε πρῶτον τὸ κατάλοιπον τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τῆς κατωτέρας ὡρισμένης μονάδος. *Τοῦτο δὲ γίνεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ ἀριθμόν, ὅςτις νὰ παριστάνῃ πόσαι μικρότεραι μονάδες ἀποτελοῦσι μίαν τοῦ καταλοίπου.* Διότι, ἂν ἦναι ἀριθμὸς δεκάδων τὸ κατάλοιπον, ἐπειδὴ ἡ μία δεκὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ δέκα μονάδας, αἱ δύο μὲ δὶς δέκα, αἱ τρεῖς μὲ τρὶς δέκα κτλ, δῆλον ὅτι μὲ τοσάκις δέκα μονάδας ἰσοδυναμεῖ τὸ κατάλοιπον, ὅσας ἔχει αὐτὸ δεκάδας, δηλ. μὲ τὸ εὑρισκόμενον γινόμενον ὡς ἤδη εἴπομεν· ὡσαύτως καὶ ἂν ἦτον ἀριθμὸς πήχεων, ἡμερῶν κτλ. Μετὰ δὲ ταῦτα διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου ὡς ἤδη εἴπομεν ὁ νέος ἀριθμός, ὅςτις εἶναι συνηθέστατα μεγαλήτερος αὐτοῦ, καὶ τὸ πηλίκον λογίζεται ἀριθμὸς τῆς μικροτέρας μονάδος. Ἂν δὲ μείνῃ κατάλοιπον, ἐπαναλαμβάνεται ἡ αὐτὴ τροπὴ πρὸς εὕρεσιν ἀριθμοῦ καὶ ἔτι μικροτέρας μονάδος, κτλ.

Κατὰ τὰ προειρημένα λοιπὸν ἂν διαιρεθῇ ὁ 624 διὰ 96, δίδει πηλίκον 6 ἀκέραιον καὶ κατάλοιπον 48, ἢ ὅλον τὸ πηλίκον $6\frac{48}{96}$. Ἐὰν δὲ ὁ 624 ἦναι δεκάδες, τὸ πηλίκον 6 εἶναι δεκάδες καὶ τὸ κατάλοιπον 48 ὡσαύτως· 48 δὲ δεκάδες ἰσοδυναμοῦσι μὲ 480 μονάδας, τὸ δὲ πηλίκον τούτου διὰ 96 εἶναι 5 μονάδες. Ὥστε τὸ 96ον τῶν 624 δεκάδων εἶναι 65 μονάδες.

Τὸ 12ον δὲ τῶν 35 πήχεων εὑρίσκεται ὡσαύτως πήχεις 2, παλάμαι 9, δάκτυλος 1 καὶ γραμμαὶ $6\frac{8}{12}$, ἢ πήχεις $2,916\frac{8}{12}$.

Τὸ 23ον τῶν 112 ἡμερῶν εὑρίσκεται ἡμέραι 4, ὧραι 20, λεπτὰ 52 καὶ δευτερόλεπτα $10\frac{10}{23}$, ἢ 4ημ. 20ωρ. 52λεπ. 10δευτ. $\frac{10}{23}$.

74. Διαιρουμένου τοῦ 4893 διὰ τοῦ 754 ὡς ἤδη εἴπομεν,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ 7ον τοῦ 48 εἶναι 6, τοῦτον δὲ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ *ὅλον* τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 4893. Ἀλλὰ συνήθως δὲν ἐκτελεῖται ὅλος ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἔπειτα ἡ ἀφαίρεσις, ἀλλ' ὁ 6 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὰς 4 μονάδας τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ γινόμενον 24 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 33, αὐξανομένου τοῦ 3 τοῦ διαιρετέου εἰς 33· εὑρίσκεται δὲ ὑπόλοιπον 9 μονάδες. Ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ 6 ἐπὶ τὰς 5 δεκάδας τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ γινόμενον 30 δεκάδες αὐξάνεται κατὰ 3 δεκάδας, καθ' ὅσας ηὐξήθησαν πρότερον αἱ 3 μονάδες διὰ τὴν ἀφαίρεσιν, καὶ ὁ 33 ἀφαιρεῖται ἀπὸ 39, ἀντὶ ν' ἀφαιρεθῶσι 30 ἀπὸ 36, ἐλαττουμένων τῶν 9 δεκάδων τοῦ διαιρετέου εἰς 6 διὰ τὴν προτέραν ἀφαίρεσιν· εὑρίσκεται δὲ διαφορὰ 6 δεκάδες. Τελευταῖον πολλαπλασιάζεται ὁ 6 ἐπὶ τὰς 7 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ γινόμενον 42 ἑκατοντάδες αὐξάνεται κατὰ 3 ἑκατοντάδας, καθ' ὅσας ηὐξήθησαν πρότερον διὰ τὴν ἀφαίρεσιν αἱ 6 δεκάδες τοῦ διαιρετέου· ἀφαιρεῖται δὲ ὁ 45 ἑκατοντάδες ἀπὸ ὅλων τῶν 48 ἑκατοντάδων καὶ μένουσι 3 ἑκατοντάδες. Οὕτως εὑρέθη τὸ κατάλοιπον 369 ἁπλούστερα, διότι δὲν ἦτον ἀνάγκη ν' ἀποχωρισθῶσιν ἐκ τῶν μερικῶν γινομένων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ νὰ προστεθῶσιν εἰς τὰ ὁμώνυμά των γινόμενα καὶ νὰ γραφθῇ τὸ γινόμενον. Τὸ δὲ πηλίκον ὅλον εἶναι $6\frac{369}{754}$.

75. δ'. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων εἶναι εὔκολον νὰ καταλάβωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ πηλίκον καὶ ὅταν ὁ τοῦ διαιρετέου ἀριθμὸς ἦναι μεγαλήτερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, καὶ διατὶ οὕτως. Εἶναι ἤδη γνωστὸν (69) ὅτι κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ἀριθμὸς πολυψήφιος, μάλιστα εἶναι δυνατὸν νὰ ἠξεύρωμεν ἑκάστοτε ἂν ἦναι διψήφιος ἢ τριψήφιος κτλ. Νὰ εὑρεθῇ δὲ ὅλον διαμιᾶς δὲν εἶναι τρόπος. Ἀλλ' ἂν εὑρεθῶσιν ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου οἱ διάφοροι ἁπλοῖ ἀριθμοί του καὶ γραφθῶσι κατόπιν ἀλλήλων εἰς τὰς προσηκούσας θέσεις των, οὕτω θέλει εἶσθαι καὶ ὅλον εὑρημένον. Ἵνα δ' εὑρεθῇ πηλίκον ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 10 ὁποιασδήποτε τάξεως μονάδος, ἀνάγκη τοῦ διαιρετέου ὁ ἀριθμὸς νὰ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἦναι μεγαλήτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ. Ἐὰν λοιπὸν θεωρηθῇ ὡς *μερικὸς* διαιρετέος μέρος τι τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦν ἀριθμὸν μεγαλήτερον μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερον δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, τοῦτο δὲ ἦναι τὸ ἐν ἀριστερᾷ, διαιρεθῇ δὲ ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, ἂν ἦναι ἀκέραιον, ἢ τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ, ἂν ἦναι μικτὸν, θέλει εἶσθαι ἀριθμὸς ἁπλοῦς ἢ μονοψήφιος ὁμώνυμος μὲ τὸν μερικὸν διαιρετέον, μέρος δὲ τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Ἂν δὲ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ γινομένου ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου (73) μείνῃ τι κατάλοιπον, ἐπειδὴ ὁ μερικὸς διαιρετέος θέλει εἶσθαι ἀριθμὸς δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων κτλ, καὶ διὰ τοῦτο ὑπάρχει μονάς τις ὡρισμένη μικροτέρα τῆς τοῦ μερικοῦ διαιρετέου ἢ τοῦ καταλοίπου, τρέπεται τοῦτο εἰς ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως κατωτέρας μονάδος· καὶ ἐπειδὴ δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ ἁπλοῦς ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου ὁμώνυμος μὲ αὐτὸν, ἂν ἦναι, προςτίθεται καὶ αὐτὸς εἰς τὸ κατάλοιπον. Ταῦτα δὲ καταντῶσιν εἰς τὸ νὰ γράφηται κατόπιν τοῦ καταλοίπου τὸ ἀμέσως κατόπιν τοῦ μερικοῦ διαιρετέου ψηφίον τοῦ ὅλου διαιρετέου. Καὶ ἂν μὲν ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς, ὅςτις εἶναι δεύτερος μερικὸς διαιρετέος, ἦναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ὅπερ συμβαίνει ἐνίοτε, δῆλον ὅτι ὁμώνυμον μὲ τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον δὲν ἔχει οὐδὲ μίαν μονάδα τὸ ζητούμενον πηλίκον· ὥστε ἐν τῇ θέσει αὐτῆς τῆς τάξεως μονάδος τοῦ πηλίκου ἀνάγκη νὰ γραφθῇ 0, δεξιὰ δὲ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου νὰ γραφθῇ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ὅλου διαιρετέου, ὡς ἤδη προείπομεν, καὶ οὕτω θέλει προκύψει τρίτος μερικὸς διαιρετέος. Ἂν ὅμως ὁ ὡς ἀνωτέρω ἤδη εἴπομεν ἀποτελούμενος ἀριθμὸς ἦναι μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου, ὅπερ συμβαίνει συνήθως, διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ δ' εὑρεθὲν ἀκέραιον πηλίκον ἢ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου γράφεται δεξιὰ τοῦ προευρεθέντος, διότι ἡ μονάς του εἶναι ἡ ἀμέσως κατωτέρα τῆς τοῦ προηγουμένου μερικοῦ πηλίκου, ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου, δεξιὰ δὲ τοῦ κα-

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Χάμου

ταλοίπου γράφεται τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ὅλου διαιρετέου, καὶ οὕτω προκύπτει τρίτος μερικὸς διαιρετέος. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον καὶ πῶς θέλει εὑρίσκεσθαι ἑκάστοτε τὸ πολυψήφιον πηλίκον καὶ διατί.

Ἂς διαιρεθῇ π. χ. ὁ 863696 διὰ τοῦ 368, ἤτοι ἂς εὑρεθῇ τὸ 36^{ον} τοῦ 863696, ὅπερ εἶναι τετραψήφιον· διότι ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλήτερος τοῦ χιλιοπλασίου 368000 τοῦ διαιρέτου καὶ μικρότερος τοῦ μυριοπλασίου 3680000 τοῦ αὐτοῦ (69). Κατὰ τοὺς προηγουμένους συλλογισμοὺς πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 368 πρῶτον ὁ 863 χιλιάδες, ἔπειτα ὁ 1276 ἑκατοντάδες, μετέπειτα ὁ 1729 δεκάδες, καὶ τελευταῖον ὁ 2576 μονάδες· εὑρίσκεται δὲ πηλίκον ὁ 2347. Ἰδοὺ ὁ τύπος τῆς πράξεως.

```
863696|368        863696|368
736    |2347      1276   |2347
----               1729
 1276               2576
 1104                  0
 ----
  1729
  1472
  ----
   2576
   2576
   ----
      0
```

Ἐκ δὲ τοῦ ἀριστεροῦ τύπου βλέπομεν ὅτι ὁ διαιρετέος κατὰ σειρὰν ἐχωρίσθη εἰς 736 χιλιάδας, 1104 ἑκατοντάδας, 1472 δεκάδας, 2576 μονάδας, ὧν τὸ μὲν κεφάλαιον εἶναι ὁ διαιρετέος, τὰ δὲ πηλίκα διὰ τοῦ 368 εἶναι 2^{χιλ}, 3^{εκατ}, 4^{δεκ}, καὶ 7 μονάδες, ἤτοι ὁ 2347. Ὥστε καὶ ἐκ τούτων δῆλον ὅτι ὁ 2347 εἶναι τὸ 368^{ον} τοῦ διαιρετέου.

```
   736
  1104
  1472
  2576
------
863696
```

76. Ἐνῷ καὶ τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν δι' οὓς εἴπομεν λόγους, τὴν διαίρεσιν εἶναι προτιμότερον ν' ἀρχίζωμεν ἐξ ἀριστερῶν, ἤτοι ἐκ τῶν ἀνωτάτων τάξεων μονάδων.

Διότι, ὄντος ἀναγκαίου νὰ χωρισθῇ ὁ διαιρετέος εἰς μερι-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

κοὺς διαιρετέους μεγαλητέρους μὲν τὸν ἀριθμὸν τοῦ διαιρέτου, μικροτέρους δὲ τοῦ δεκαπλασίου του, καὶ μενόντων συνήθως καταλοίπων μικροτέρων τοῦ διαιρέτου, ἅτινα θέλουσι διαιρεθῆ ἀφοῦ τραπῶσι πρῶτον εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μονάδων κατωτέρων, αἵτινες κεῖνται εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ἀνωτέρων, εἶναι ἀνάγκη πάντοτε νὰ εὑρίσκηται τὸ μικροτέρας μονάδος μερικὸν πηλίκον, ἀφοῦ εὑρεθῇ τὸ ἀνωτέρας μονάδος, ἤτοι πρῶτον τὸ ἐν ἀριστερᾷ ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου καὶ κατὰ σειρὰν τὰ δεξιὰ τούτου· τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι εἶναι ἀνάγκη ν' ἀρχίζωμεν ἐξ ἀριστερῶν τὴν διαίρεσιν. Ἄλλως, ἂν ἠθέλαμεν ἀρχίζει τὴν διαίρεσιν ἐκ δεξιῶν, καὶ ἠθέλαμεν διαιρέσει π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ 863696 πρῶτον τὸν 696, καὶ ἔπειτα ἢ ὅλον τὸν 863 χιλιάδας, ἢ χωριστὰ τὸν 3000, τὸν 60000, τὸν 800000, ὁπότε ἠθέλαμεν πάλιν προβαίνει ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ διὰ τὴν προειρημένην αἰτίαν, οὕτως ἠθέλαμεν εὑρεῖ ὄχι ἀμέσως τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἀλλὰ πρῶτον ἰδιαίτερά τινα πηλίκα, ἅτινα προστεθέντα ἔπειτα ἤθελαν μᾶς δώσει τὸ ζητούμενον· ἐνῷ ἐξ ἀριστερῶν ἀρχίζοντες τοῦ εὑρίσκομεν ἀμέσως ἕκαστον ψηφίον.

77. Παρόμοια μὲ τὰ ἐν ἀριθ. 61 δύναταί τις νὰ εἴπῃ καὶ πρὸς τὴν διαίρεσιν, δηλ. ὅτι *διαιρεῖται ἀριθμὸς διὰ* 10, ἢ 100 ἢ 1000 *κτ.λ, ἐάν, αὐτοῦ μένοντος ἀμεταβλήτου, ἡ μονάς του τραπῇ εἰς τὸ δέκατον αὐτῆς, ἢ τὸ ἑκατοστὸν αὐτῆς, ἢ τὸ χιλιοστὸν κτ.λ.* Πρὸς τοῦτο δέ, ὅταν μὲν ὁ ἀριθμὸς ἀκέραιος ὢν ἔχῃ δεξιά του μηδενικά, οἷον ὁ 7000, ἐξαλείφεται ἓν μηδενικόν, ἢ δύο, ἢ τρία κτλ. Ὁ 700 εἶναι δέκατον τοῦ 7000, ὁ 70 εἶναι ἑκατοστὸν αὐτοῦ, ὁ 7 εἶναι χιλιοστὸν αὐτοῦ· διότι τοῦ 7 ἡ μονὰς ἐν τῷ 7000 εἶναι ἡ χιλιάς, ἐν δὲ τῷ 700 εἶναι ἡ ἑκατοντάς, ἥτις εἶναι δέκατον τῆς χιλιάδος, ἐν δὲ τῷ 70 εἶναι ἡ δεκάς, ἥτις εἶναι ἑκατοστὸν τῆς χιλιάδος, κτλ. Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς ἀκέραιος ὢν δὲν ἔχῃ μηδενικά, οἷον ὁ 4789, τίθεται ὑποδιαστολὴ μεταξὺ τῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάδων, ἢ μεταξὺ τῶν δεκάδων καὶ τῶν ἑκατοντάδων κτλ. Ὁ 478,9 εἶναι δέκατον τοῦ 4789, ὁ 47,89 εἶναι ἑκατοστόν, ὁ 4,789 εἶναι χιλιοστὸν κτλ· διότι, ἐνῷ διαμένει ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ μο-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

νάς του τρέπεται εἰς δέκατον, ἢ ἑκατοστὸν, ἢ χιλιοστὸν τῆς μονάδος τοῦ 4789. Ὅταν δὲ ἦναι δεκαδικὸν κλάσμα ἢ μικτὸς δεκαδικὸς, μετατίθεται πρὸς ἀριστερὰν ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν θέσιν, δύο, τρεῖς κτλ, διὰ τὸν προηγούμενον λόγον. Οὕτως 456,32 εἶναι δέκατον τοῦ 4563,2, ὁ δὲ 45,632 ἑκατοστὸν κτλ. Τοῦ 0,345 ἵνα μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ πρὸς ἀριστερὰν, ἀνάγκη νὰ θέτωνται μηδενικὰ ἀριστερὰ τοῦ 345· οὕτω γίνεται τὸ 0,0345 δέκατον τοῦ 0,345, τὸ 0,00345 ἑκατοστὸν κτλ.

78. Ὅταν ὁ ἀκέραιος διαιρέτης ἦναι γινόμενον δύο ἀριθμῶν, τὸ πηλίκον εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται καὶ ἂν διαιρεθῇ ὅπως εἴπομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ ἑτέρου παράγοντος τοῦ διαιρέτου, καὶ ἔπειτα τὸ πηλίκον διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἄλλου παράγοντος αὐτοῦ. Διότι ἀντὶ νὰ νοῆται ἡ μονὰς τοῦ διαιρέτου ἀμέσως πρὸς αὐτὸν, ὅτι εἶναι πολλοστόν τι αὐτοῦ, δύναται νὰ νοηθῇ ἀμέσως πρὸς τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων του, ὅτι εἶναι πολλοστόν τι αὐτοῦ, αὐτὸς δὲ ὅτι εἶναι πολλοστόν τι τοῦ διαιρέτου. Π. χ. ἂν διαιρέτης ἦναι ὁ 48, ὅςτις δύναται νὰ νοηθῇ γινόμενον τοῦ 6 καὶ τοῦ 8, ἡ μονὰς τοῦ 48, ἥτις εἶναι τὸ τεσσαρακοστὸν ὄγδοον αὐτοῦ, δύναται νὰ νοῆται καὶ ὄγδοον τοῦ 8, ὅςτις εἶναι ἕκτον τοῦ 48, ἤτοι ἡ μονὰς τοῦ 48 εἶναι ὄγδοον τοῦ ἕκτου τοῦ 48. Ἐκ δὲ τούτου δῆλον ὅτι καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 48 θέλει εἶσθαι ὄγδοον τοῦ ἕκτου τοῦ διαιρετέου· τοῦτο δὲ θέλει εὑρεθῇ ἐὰν ὁ διαιρετέος διαιρεθῇ διὰ 6, τοῦ ἑτέρου παράγοντος τοῦ 48, τὸ δὲ προκύπτον πηλίκον ἤτοι τὸ ἕκτον τοῦ διαιρετέου διαιρεθῇ διὰ τοῦ 8, τοῦ ἄλλου παράγοντος τοῦ διαιρέτου. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι εἶναι ἀδιάφορον ἂν διαιρεθῇ ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ 6 ἢ διὰ τοῦ 8 καὶ τὸ πηλίκον ἔπειτα διὰ τοῦ 8 ἢ τοῦ 6· διότι ἡ μονὰς δύναται νὰ νοηθῇ ἔτι καὶ ἕκτον τοῦ ὀγδόου τοῦ 48, καὶ τὸ πηλίκον ὡσαύτως τότε θέλει εἶσθαι ἕκτον τοῦ ὀγδόου τοῦ διαιρετέου.

79. Κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἂν ἐπρόκειτο νὰ διαιρεθῇ ἀριθμός τις διὰ διαιρέτου ἔχοντος μηδενικὰ δεξιά του, οἷον τοῦ 3800, ὅςτις εἶναι γινόμενον τοῦ 38 καὶ τοῦ 100, ἤθελε διαι-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ρεθῇ ὁ διαιρετέος αὐτὸς διὰ τοῦ 38, παραβλεπομένων τῶν μηδενικῶν του, ἔπειτα τὸ προκύπτον πηλίκον διὰ τοῦ 100 ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Ὡσαύτως δ' ἂν ἐπρόκειτο νὰ διαιρεθῇ ἀριθμὸς ἔχων μηδενικὰ δεξιά του δι' ἄλλου ἔχοντος ὡσαύτως μηδενικά, οἷον ὁ 9640 ἢ ὁ 47800 ἢ ὁ 347000 διὰ τοῦ 5400, πρῶτον διαιρεῖται ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ 100 ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, καὶ οὕτως εὑρίσκονται πηλίκα οἱ ἀριθμοὶ 96,4, 478, 3470, ἔπειτα ταῦτα διαιροῦνται διὰ τοῦ 54. Τοῦτο δὲ καταντᾷ εἰς τὸ νὰ ἐξαλείφωνται ἔκ τε τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ ἔπειτα ὁ μένων διαιρετέος νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ μένοντος διαιρέτου. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρετέος ἔχῃ ὀλιγώτερα μηδενικὰ παρὰ τὸν διαιρέτην, τότε τίθεται καὶ ὑποδιαστολὴ ἐν τοιαύτῃ θέσει αὐτοῦ, ὥστε δεξιὰ αὐτῆς νὰ ἦναι τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει αὐτὸς ὀλιγώτερον παρὰ τὸν διαιρέτην μηδενικά.

80. Διακρίνουσι τὴν διαίρεσιν εἰς *ἀκριβῆ* καὶ *μὴ ἀκριβῆ*, καὶ ἀκριβῆ μὲν ὀνομάζουσιν ἐκείνην τὴν διαίρεσιν, ἥτις ἄγει εἰς πηλίκον ἀκέραιον, μὴ ἀκριβῆ δὲ τὴν παρέχουσαν πηλίκον μὴ ἀκέραιον. Καὶ τὸν μὲν διαιρετέον ἀριθμόν, ὅστις ἔχει τὴν ἰδιότητα διαιρεθεὶς διὰ τοῦ διαιρέτου νὰ δίδῃ πηλίκον ἀκέραιον, τὸν λέγουσι τότε ἰδίως *διαιρετὸν* ἢ *διαιρέσιμον* διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸν δὲ διαιρέτην αὐτὸ τοῦτο *διαιρέτην* εἰς μερικωτέραν σημασίαν, ἀλλὰ διαιρέτην τοῦ διαιρετοῦ. Οὕτω λέγουσιν, ὁ 48 *εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ* 6, ἢ *ὁ* 6 *εἶναι διαιρέτης τοῦ* 48, νοοῦντες ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιον, ὁ 8. Ἔτι δὲ ὁ 35 *δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ* 8, ἢ *ὁ* 8 *δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ* 35, διότι τὸ πηλίκον δὲν εἶναι ἀκέραιον (α). Λέγουσι προσέτι *ὁ* 48 *διαιρεῖται διὰ τοῦ* 6, *ὁ* 35 *δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ* 8, ἢ *ὁ* 6 *διαιρεῖ τὸν* 48, *ὁ* 8 *δὲν διαιρεῖ τὸν* 35, ἐκλαμβάνοντες τὸ διαιρεῖται καὶ διαιρεῖ ἀντὶ τοῦ εἶναι διαι-

(α) Ἴσως ἤθελεν εἴσθαι ὀρθότερον νὰ διακρίνηται ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ ὀνόματος ἀκεραιοπήλικος καὶ μή, καὶ ὄχι διὰ τοῦ ἀκριβὴς καὶ μή. διότι πάντοτε ἡ διαίρεσις εἶναι ἀκριβής, ὡς πάντοτε δι' αὐτῆς εὑρισκομένου τοῦ πηλίκου, ἀλλὰ τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιον ἢ μή.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ρέσιμος καὶ διαιρέτης. Ἀλλ' εἶναι καλὸν νομίζω νὰ μὴ γίνηται ἡ σύγχυσις αὕτη.

81. Ὅσα εἴπομεν ἤδη περὶ διαιρέσεως ἀκεραίου ἀριθμοῦ δι' ἄλλου ἀκεραίου, ἐφαρμόζονται ἀπαράλλακτα καὶ εἰς διαίρεσιν ὁποιουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου.

Πρῶτον ὁ κλασματικὸς $\frac{35}{60}$ ἢ 35 ἑξηκοστὰ διαιρεθεὶς διὰ 7 δίδει πηλίκον 5 ἑξηκοστὰ ἢ $\frac{5}{60}$, διότι ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 7. Τοῦ δὲ $\frac{47}{50}$ ἤτοι 47 πεντηκοστὰ τὸ 8ον ἔπρεπε νὰ ἦναι 5 $\frac{7}{8}$ πεντηκοστά, ἤτοι 5 πεντηκοστὰ καὶ $\frac{7}{8}$ τοῦ πεντηκοστοῦ, διότι δὲν εἶναι διαιρέσιμος ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ 8. Ἀλλ' ἐπειδὴ καταντᾷ ὀλίγον δυσνόητον τοῦτο τὸ πηλίκον, θέλομεν εἰπεῖ κατωτέρω πῶς εὑρίσκεται ἄλλο πηλίκον, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου.

Ἔπειτα πρὸς εὕρεσιν τοῦ 12ου τοῦ 45,648, ἢ τοῦ 0,04896, εὑρίσκεται τὸ 12ον πρῶτον τῶν 45 μονάδων, ἔπειτα τῶν 96 δεκάτων, ἔπειτα τῶν 4 ἑκατοστῶν, ἔπειτα τῶν 48 χιλιοστῶν, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει 12ον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ τὸν 3,804· ἢ εὑρίσκεται τὸ 12ον τῶν 48 χιλιοστῶν, τῶν 9 δεκάτων χιλιοστοῦ, καὶ τῶν 96 ἑκατοστῶν χιλιοστοῦ, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει 12ον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ τὸ 0,00408.

Ὡσαύτως διαιρεῖται καὶ ὁ 26 $\frac{2}{5}$ διὰ 6, ἤτοι πρῶτον εὑρίσκεται τὸ 6ον τοῦ 26, ὅπερ εἶναι 4 καὶ μένουν 2 μονάδες, ἤτοι 10 πέμπτα, καὶ 2 πέμπτα τὸ κλάσμα, 12 πέμπτα· ἔπειτα τὸ 6ον τῶν 12 εἶναι 2 πέμπτα ἤτοι $\frac{2}{5}$· λοιπὸν τὸ 6ον τοῦ 26$\frac{2}{5}$ εἶναι 4$\frac{2}{5}$. Τὸ δὲ 7ον τοῦ 63$\frac{14}{15}$ εἶναι 9$\frac{2}{15}$.

Τελευταῖον ὡσαύτως εὑρίσκεται τὸ 24ον τοῦ 324ημ 18ωρ 45λεπ· διότι τὸ 24ον τοῦ 324ημ εἶναι 13ημ καὶ μένει κατάλοιπον 12ημ, αἵτινες ἰσοδυναμοῦσι μὲ ὥρας 288, καὶ 18 αἱ ἄλλαι ὧραι τοῦ διαιρετέου συνιστῶσι 306ωρ· τὸ δὲ 24ον τῶν 306 εἶναι 12 ὧραι, καὶ κατάλοιπον 18 ὧραι, αἵτινες ἰσοδυναμοῦσι μὲ λεπτὰ 1080, καὶ 45 τὰ τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 1125λεπ, ὧν τὸ 24ον εἶναι 46 λεπτὰ καὶ κατάλοιπον 21· ταῦτα δὲ ἰσοδυναμοῦσι μὲ δευτερόλεπτα 1260, ὧν τὸ 24ον εἶναι 52 δευτερόλεπτα καὶ $\frac{12}{24}$ αὐτοῦ. Λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 13ημ 12ωρ 46λεπ 52δευτ $\frac{12}{24}$.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ.

82. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι κλασματικὸς ἀριθμὸς δεκαδικῆς μονάδος ἢ μή, ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ πολλαπλασιαστέου συνίσταται εἰς δύο τῶν προηγουμένων λογισμῶν, ἤτοι εἰς διαίρεσιν τοῦ πολλαπλασιαστέου διὰ τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ἔπειτα εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· διότι οὕτω γίνεται καὶ ὁ κλασματικὸς πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος του, ἤτοι πρῶτον εὑρίσκεται πολλοστὸν αὐτῆς τὸ δεικνυόμενον ὑπὸ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, καὶ ἔπειτα αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμητής του.

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως εἶναι δυνατὸν νὰ νοηθῇ ὁ πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὴν μονάδα του, ὅτι δηλ. εἶναι πολλοστόν τι πολλῶν μονάδων του (68), οἷον ὁ $\frac{5}{7}$ νοεῖται ἕβδομον 5 μονάδων· λοιπὸν καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει εἶσθαι πολλοστὸν πολλαπλασίου τοῦ πολλαπλασιαστέου, τοιοῦτον δὲ πολλοστόν, ὁποῖον δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τοιοῦτον δὲ πολλαπλάσιον, ὁποῖον δεικνύει ὁ ἀριθμητής του. Τοῦτο δ' ἄγει μὲν εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζηται πρῶτον ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔπειτα τὸ προκύπτον γινόμενον νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, πείθει δὲ ὅτι καὶ κατὰ τὸν δεύτερον τοῦτον τρόπον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται πρῶτον ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἔπειτα ἡ διαίρεσις, θέλει εὑρίσκεσθαι τὸ αὐτὸ γινόμενον, ὅπερ καὶ κατὰ τὸν πρῶτον, καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον.

Ἀλλ' αἱ πράξεις αὗται εἶναι ἤδη γνωστὸν ἐκ τῶν προηγουμένων πῶς ἐκτελοῦνται ἐπὶ ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν· ὅθεν δὲν μένει ἄλλο, εἰμὴ νὰ ἐκτελῶνται ὡς ἐκεῖ εἴπομεν, καὶ οὕτω θέλει εὑρίσκεσθαι ἑκάστοτε τὸ γινόμενον. Τοῦτο δὲ θέλει εἶσθαι ὄχι πολλαπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀλλὰ πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἢ ἄλλως, πολλοστὸν πολλαπλασίου τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Ἰδίως δέ, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι δεκαδικός, οἷος ὁ 48,56, ὅστις γράφεται καὶ $\frac{4856}{100}$ ἢ 4856 ἑκατοστά, ἐννοεῖ-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ται ὅτι ὁ πολλαπλασιαστέος πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 48,56 ὡς ἂν ἦτον ἀκέραιος 4856, καὶ πρὸς διαίρεσιν τοῦ γινομένου διὰ τοῦ 100 πρέπει (77) νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ πρὸς ἀριστερὰ δύο θέσεις, κτλ.

83. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι κλασματικὸς ἀριθμὸς δεκαδικῆς μονάδος ἢ μή, ἡ διαίρεσις συνίσταται ὡσαύτως εἰς δύο πράξεις, εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν, ἀλλὰ πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου, διαίρεσιν δὲ τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ. Διότι, ὄντος τοῦ ζητουμένου πηλίκου τοιούτου πρὸς τὸν διαιρετέον, ὁποία εἶναι ἡ μονὰς τοῦ διαιρέτου πρὸς αὐτόν, ἐκφράζοντος δὲ τοῦτο τοῦ ἀνεστραμμένου τοὺς ὅρους διαιρέτου, πρέπει νὰ γείνῃ τὸ πηλίκον ἐκ τοῦ διαιρετέου, ὅπως ὁ ἀνεστραμμένος τοὺς ὅρους διαιρέτης ἐκ τῆς μονάδος του, δηλ. πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος (82) ἐπὶ τὸν ἀνεστραμμένον τοὺς ὅρους διαιρέτην, ἤτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ.

Κατὰ τὰ ἤδη προεξηγηθέντα εὑρίσκονται ὅλα τὰ ἑξῆς γινόμενα καὶ πηλίκα.

56 ἐπὶ $\frac{7}{8}$ ἤτοι τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ 56 εἶναι 49· διότι τὸ 8ον τοῦ 56 εἶναι 7, ἑπτάκις δ' 7 εἶναι 49 — 56 διὰ $\frac{7}{8}$ ἤτοι τὰ $\frac{8}{7}$ τοῦ 56 εἶναι 64· διότι τὸ 7ον τοῦ 56 εἶναι 8, ὀκτάκις δ' ὀκτὼ εἶναι 64.

38 ἐπὶ $\frac{6}{9}$ παράγει $\frac{228}{9}$ ἢ 25 $\frac{3}{9}$ (82). διότι τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ 38 εἶναι 228, τὸ ἔνατον δὲ τούτου $\frac{228}{9}$ — 38 διὰ $\frac{6}{9}$ δίδει $\frac{342}{6}$ ἢ 57· διότι τὸ ἐννεαπλάσιον τοῦ 38 εἶναι 342, τὸ ἕκτον δὲ τούτου 57.

$\frac{24}{35}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ παράγει $\frac{18}{35}$· διότι τὸ 4ον τοῦ $\frac{24}{35}$ εἶναι $\frac{6}{35}$, τρὶς δὲ τοῦτο εἶναι $\frac{18}{35}$ — $\frac{24}{35}$ διὰ $\frac{3}{4}$ δίδει $\frac{32}{35}$· διότι τὸ 3ον τοῦ $\frac{24}{35}$ εἶναι $\frac{8}{35}$, τετράκις δὲ τοῦτο εἶναι $\frac{32}{35}$.

$\frac{36}{5}$ ἐπὶ $\frac{9}{4}$ παράγει $\frac{81}{5}$ ἢ $16\frac{1}{5}$ — $\frac{36}{5}$ διὰ $\frac{9}{4}$ δίδει $\frac{16}{5}$ ἢ $3\frac{1}{5}$.

12 $\frac{18}{23}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$ παράγει $8\frac{12}{23}$· διότι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{18}{23}$ εἶναι $\frac{12}{23}$, τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ τοῦ 12 εἶναι 8 — $12\frac{18}{23}$ διὰ $\frac{2}{3}$ δίδει $19\frac{4}{23}$· διότι τὸ 2ον τοῦ $12\frac{18}{23}$ εἶναι $6\frac{9}{23}$, τὸ τριπλάσιον δὲ τούτου εἶναι $19\frac{4}{23}$.

23,781 ἐπὶ $\frac{11}{14}$, παράγει $18{,}685\frac{1}{14}$ — 23,781 διὰ $\frac{11}{14}$ δίδει $30{,}266\frac{8}{11}$.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

38ορ 5πο 9δρ 10γρ ἐπὶ $\frac{6}{7}$ παράγει 33ορ 2πο 5δρ — Ὁ αὐτὸς δὲ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ αὐτοῦ δίδει 45ορ 2πο 9δρ 5γρ $\frac{4}{6}$.

84. Ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος τοῦ πολλαπλασιάζειν ἐπὶ κλασματικὸν καὶ ἄλλον μὲν ἀριθμόν, μάλιστα δὲ συμμιγῆ τινα, ὀνομάζεται δὲ *μέθοδος πολλοστῶν*, συνίσταται δὲ εἰς τὸ νὰ χωρίζηται ὁ κλασματικὸς πολλαπλασιαστὴς εἰς μέρη πολλοστὰ ἄλλο ἄλλου, καὶ ἔπειτα νὰ εὑρίσκωνται παρόμοια πολλοστὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τῶν μερικῶν γινομένων, καὶ νὰ προςθέτωνται εἰς ἄλληλα. Ἂς ἐξηγηθῶμεν σαφέστερα ἐπὶ μερικοῦ παραδείγματος. Ἂς πολλαπλασιασθῇ π. χ. ὁ 35ημ 18ωρ 40λεπ ἐπὶ $\frac{10}{12}$. Ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ νοηθῇ κεφάλαιον τῶν τριῶν κλασμάτων $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{1}{12}$, ὧν τὸ μὲν $\frac{6}{12}$ εἶναι ἥμισυ τῆς μονάδος του, τὸ δὲ $\frac{3}{12}$ ἥμισυ τοῦ $\frac{6}{12}$, τὸ δὲ $\frac{1}{12}$ τρίτον τοῦ $\frac{3}{12}$· λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι κεφάλαιον τοῦ ἡμίσεος τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ, καὶ τοῦ τρίτου τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ. Ὥστε ἄλλο δὲν μένει εἰμὴ νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοὶ καὶ νὰ προστεθῶσιν.

Τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι	17ημ	21ωρ	20λεπ	δευτ
Τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος τούτου	8	22	40	
Τὸ τρίτον τοῦ τελευταίου ἡμίσεος	2	23	33	20
	29	19	33	20

Εἶναι δ' εὔκολον νὰ πληροφορηθῇ τις διὰ τῆς παραθέσεως ὅτι ὁ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν πολλοστῶν πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ κλασματικὸν τοῦ συμμιγοῦς ἄγει ταχύτερα εἰς τὸ γινόμενον παρ' ὁ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ὅθεν καὶ προτιμητέος. Εἶναι δὲ εὔχρηστος κυρίως, ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἦναι γινόμενον ἄλλων ἀριθμῶν, ὡς ἀνωτέρω ὁ 12. Ἐὰν δὲ παρονομαστὴς ἦναι ὁ 5 ἢ ὁ 7 ἢ ὁ 11 κτλ, τότε καταντᾷ εἰς τὸ προειρημένον. Ἰδοὺ καὶ ἕτερον παράδειγμα.

Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 48ορ 4ποδ 9δακ 8γρα ἐπὶ $\frac{19}{24}$.

Ὁ $\frac{19}{24}$ δύναται νὰ νοηθῇ κεφάλαιον τῶν $\frac{12}{24}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{1}{24}$.

Διὰ τὸ $\frac{12}{24}$, τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου,	24ορ	2π	4δ	10γ
διὰ τὸ $\frac{6}{24}$, τὸ ἥμισυ τοῦ εὑρεθέντος ἡμίσεος,	12	1	2	5
διὰ τὸ $\frac{1}{24}$, τὸ ἕκτον τοῦ ἤδη εὑρεθέντος,	2	0	2	4 $\frac{5}{6}$
	38	3	9	7 $\frac{5}{6}$

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Καὶ ἡ διαίρεσις δὲ συμμιγοῦς διὰ κλασματικοῦ, ἐπειδὴ μετὰ τὴν ἀναστροφὴν τῶν ὅρων τοῦ διαιρέτου καταντᾷ εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικόν, δύναται νὰ ἐκτελῆται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν πολλοστῶν, ὅταν ἔχῃ χώραν ἡ μέθοδος αὕτη.

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ μικτοῦ καὶ συμμιγοῦς.

85. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι μικτός, ἐπειδὴ εἶναι κεφάλαιον τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ τοῦ κλάσματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ ἦναι κεφάλαιον πολλαπλασίου τινὸς τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής, καί τινων πολλοστῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου, τόσων καὶ τοιούτων ὅσα καὶ ὁποῖα τῆς μονάδος του ἔχει τὸ κλάσμα. Λοιπόν, *ἵνα εὑρίσκηται τὸ γινόμενον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ὁ πολλαπλασιαστέος πρῶτον* (60) *ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὡς ἤδη εἴπομεν, ἔπειτα ἐπὶ τὸν ἀκέραιον αὐτοῦ, ὡς προηγουμένως εἴπομεν, καὶ τελευταῖον νὰ προστίθηται τὸ ἕτερον μερικὸν γινόμενον εἰς τὸ ἄλλο.*

Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν νὰ ἑνωθῇ ὁ ἀκέραιος καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ εἰς ἕνα κλασματικὸν ἰσοδύναμον, ἐὰν ὁ ἀκέραιος τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα, ὡς εἴπομεν ἐν ἀρ 73, καὶ ἔπειτα προστεθῇ τὸ κλάσμα εἰς αὐτὸν (15), ὅπερ καταντᾷ *εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀκεραίου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς πρόσθεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ εἰς τὸ ἤδη εὑρεθὲν γινόμενον, καὶ εἰς γραφὴν τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος ὑπὸ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν.* Διὰ δὲ τῆς προπαρασκευῆς ταύτης ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ μικτὸν καταντᾷ εἰς πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ κλασματικόν, καὶ ἐκτελεῖται ἑπομένως ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει (82) εἴπομεν. Συχνότατα δὲ οὕτως εὑρίσκεται τὸ γινόμενον ταχύτερα.

86. Καὶ ὁ συμμιγὴς δ' ἀριθμὸς δυνατὸν νὰ νοηθῇ κεφάλαιον πολλῶν ἀριθμῶν, ἑνὸς μὲν ἀκεραίου, τῶν δὲ λοιπῶν, ἀριθμῶν διαφόρων πολλοστῶν τῆς μονάδος τοῦ ἀκεραίου· καὶ τότε

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἔπρεπε καὶ τὸ γινόμενον νὰ θεωρηθῇ κεφάλαιον πολλῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἔπρεπε νὰ εὑρεθῶσι χωριστά.

Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν καὶ προτιμότερον *νὰ ἑνωθῶσιν ὅλα τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς εἰς ἕνα κλασματικὸν ἀριθμὸν ἰσοδύναμον, καὶ ἐπὶ τοῦτον ἔπειτα νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος* (82).

Ἐὰν π. χ. πολλαπλασιαστὴς ἦναι ὁ συμμιγὴς $20^{\text{ημ}}$ $15^{\text{ωρ}}$ $35^{\text{λεπ}}$ $50^{\text{δευ}}$, αὐτὸς τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ἡμερονυκτίου οὕτως· πρῶτον ὁ 20 καὶ $\frac{15}{24}$ ἑνόνονται εἰς τὸν ἰσοδύναμον $\frac{495}{24}$ ἢ 495 ὥρας ὡς εἴπομεν προηγουμένως (85), ἔπειτα αἱ 495 ὧραι καὶ τὰ $\frac{35}{60}$ αὐτῆς ἑνόνονται ὡσαύτως εἰς τὸν ἰσοδύναμον $\frac{29735}{60}$ τῆς ὥρας ἢ εἰς 29735 λεπτά· τελευταῖον ἑνόνονται ὡσαύτως τὰ 29735 λεπτὰ καὶ τὰ $\frac{50}{60}$ αὐτοῦ εἰς τὸν ἰσοδύναμον $\frac{1784150}{60}$ τοῦ λεπτοῦ εἰς ἢ 1784150 δευτερόλεπτα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ δευτερόλεπτον εἶναι $\frac{1}{86400}$ τοῦ ἡμερονυκτίου, τὰ 1784150 δευτερόλεπτα εἶναι $\frac{1784150}{86400}$ τοῦ ἡμερονυκτίου, καὶ μὲ τοῦτον ἰσοδυναμεῖ ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος συμμιγής, καὶ ἐπὶ τοῦτον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Εἶναι δ' ἔτι δυνατὸν νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμός τις ἐπὶ συμμιγῆ καὶ κατὰ *τὴν μέθοδον τῶν πολλοστῶν* (84). Κατὰ ταύτην ἀπαιτεῖται ὁ προειρημένος συμμιγὴς νὰ χωρισθῇ εἰς $20^{\text{ημ}}$ $12^{\text{ωρ}}$ $3^{\text{ωρ}}$ $30^{\text{λεπ}}$ $5^{\text{λεπ}}$ $30^{\text{δευ}}$ $15^{\text{δευ}}$ $5^{\text{δευτ}}$, τούτων δὲ αἱ $12^{\text{ωρ}}$ εἶναι ἥμισυ τοῦ ἡμερονυκτίου, αἱ $3^{\text{ωρ}}$ εἶναι τέταρτον τῶν $12^{\text{ωρ}}$, τὰ $30^{\text{λεπ}}$ εἶναι ἥμισυ τῆς μιᾶς ὥρας, τὰ $5^{\text{λεπ}}$ εἶναι ἕκτον τῶν $30^{\text{λεπ}}$, τὰ 30 δευτ ἥμισυ τοῦ λεπτοῦ, τὰ $15^{\text{δευ}}$ ἥμισυ τῶν $30^{\text{δευ}}$, τὰ $5^{\text{δευ}}$ τρίτον τῶν $15^{\text{δευ}}$. Ὥστε πρέπει ὁ πολλαπλασιαστέος νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 20, ἔπειτα νὰ διαιρεθῇ διὰ 2, τὸ πηλίκον τοῦτο νὰ διαιρεθῇ διὰ 4 κτλ, ὅλα δὲ τὰ μερικὰ γινόμενα νὰ προςτεθῶσιν (ἰδὲ κατωτέρω ἀρ. 88).

87. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι μικτὸς ἢ συμμιγής, πάντοτε εἶναι ἀνάγκη νὰ τρέπηται (85 καὶ 86) εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ ἔπειτα δι' αὐτοῦ νὰ διαιρῆται ὁ διαιρετέος ὡς ἀνωτέρω (83) εἴπομεν. Διότι ὁποῖον θέλει εἶσθαι καὶ τότε τὸ πηλίκον θέλομεν τὸ καταλάβει, ἀφοῦ μάθωμεν ὁποία εἶναι ἡ

5*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

μονὰς τοῦ διαιρέτου πρὸς αὐτόν. Ἐπειδὴ δ' ὁ διαιρέτης εἶναι μικτὸς ἢ συμμιγής, ἡ μονάς του εἶναι πολλοστόν τι μέρος τοῦ ἀκεραίου καὶ πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τοῦ κλάσματος κτλ, ἤτοι δὲν προςδιορίζεται ἅπαξ πρὸς τὸν διαιρέτην ὡς πολλοστὸν αὐτοῦ ἢ πολλαπλάσιον πολλοστοῦ κτλ, ἀλλὰ προςδιορίζεται χωριστὰ πρὸς ἓν μέρος αὐτοῦ καὶ χωριστὰ πρὸς ἄλλο κτλ· ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ νοηθῇ ἁπλῶς ὁποία εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην, καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἠξεύρωμεν καὶ ὁποῖον θέλει εἶσθαι τὸ πηλίκον πρὸς τὸν διαιρετέον, ἵνα ἠξεύρωμεν ποίαν πρᾶξιν πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ ἐκ τοῦ διαιρετέου. Τότε δὲ μόνον εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίζωμεν ὁποία εἶναι ἡ μονὰς τοῦ διαιρέτου πρὸς αὐτόν, ὅταν ἑνωθῶσιν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν τὰ μέρη τοῦ διαιρέτου εἰς ἕνα κλασματικὸν ἰσοδύναμον.

Παραδείγματα πολλαπλασιασμῶν καὶ διαιρέσεων.

25 ἐπὶ $7\frac{4}{5}$ ἢ ἐπὶ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{39}{5}$ παράγει 195 ὁμώνυμον μὲ τὸν 25 — 25 ἐπὶ $3^{\text{ταλ}}$ $4^{\text{δρ}}$ $75^{\text{λεπ}}$ ἢ ἐπὶ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{1975}{500}$ παράγει 98 $\frac{3}{4}$ ὁμώνυμον μὲ τὸν 25 — Τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 25 διὰ τοῦ μικτοῦ ἢ διὰ τοῦ συμμιγοῦς εἶναι $3\frac{8}{39}$ ἢ $6\frac{650}{1975}$ ὁμώνυμον μὲ τὸν 25.

$\frac{54}{23}$ ἐπὶ $4\frac{3}{6}$ ἢ ἐπὶ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{27}{6}$ παράγει $\frac{243}{23}$ ἤτοι $10\frac{13}{23}$ — $\frac{54}{23}$ ἐπὶ $8^{\text{ορ}}$ $4^{\text{πιδ}}$ $8^{\text{δακ}}$ ἢ ἐπὶ τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{632}{72}$ παράγει $\frac{474}{23}$ — Τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{54}{23}$ διὰ τοῦ μικτοῦ ἢ τοῦ συμμιγοῦς εἶναι $\frac{12}{23}$ ἢ σχεδὸν $\frac{6}{23}$.

$24\frac{12}{20}$ ἐπὶ 8 $\frac{3}{4}$ ἢ ἐπὶ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{35}{4}$ παράγει $215\frac{5}{20}$ — $24\frac{12}{20}$ ἐπὶ $5^{\text{μην}}$ $20^{\text{ημ}}$ $18^{\text{ωρ}}$ $30^{\text{λεπ}}$ ἢ ἐπὶ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{245910}{43200}$ παράγει ὀλίγον τι πλέον τοῦ 140.

$34^{\text{σ}}$ $30^{\text{οκ}}$ $240^{\text{δρ}}$ ἐπὶ $12\frac{5}{6}$ παράγει $445^{\text{σ}}$ $11^{\text{οκ}}$ $146^{\text{δρ}}$ $\frac{2}{3}$.

34 30 240 ἐπὶ $8^{\text{οθ}}$ $3^{\text{ταλ}}$ $4^{\text{δρ}}$ $60^{\text{λεπ}}$ παράγει $311^{\text{σατ}}$ $24^{\text{οκ}}$ $347^{\text{δρ}}$ $\frac{1}{5}$ (ἴδε κατωτέρω).

88. Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελῆται καὶ κατὰ *τὴν μέθοδον τῶν πολλοστῶν*, πολὺ δὲ ταχύτερα παρὰ κατὰ τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς τρόπους. Πρὸς τοῦτο δ' ἀπαιτεῖται νὰ χωρισθῶσι τοῦ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πολλαπλασιαστέου οἱ τῶν μικροτέρων μονάδων ἀριθμοὶ εἰς μέρη πολλοστὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου κατὰ σειράν. Ἂς ἀναλάβωμεν τοὺς προηγουμένους πολλαπλασιασμούς.

Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὸν 34 ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 408ς. Ἔπειτα χωρίζομεν τὰς 30ὀκ εἰς 22, αἵτινες εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ στατῆρος, καὶ εἰς 2ὀκ καὶ 2 καὶ 2 καὶ 2, αἵτινες εἶναι τὸ ἐνδέκατον τῶν 22ὀκ, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ 22ὀκ ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ στατῆρος πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 12 παράγει γινόμενον 12 ἡμίσεα τοῦ στατῆρος, ἤτοι 6ς, ὁ ἀριθμὸς δ' οὗτος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ γινομένου ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν 22 ἐπὶ 12, δυνάμεθα νὰ διαιρῶμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν διὰ 2· τὸ δὲ προκύπτον πηλίκον ἐκλαμβάνομεν ὁμώνυμον μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς. Μετέπειτα ἐπειδὴ αἱ 2 ὀκάδες εἶναι ἑνδέκατον τῶν 22, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 12 θέλει εἶσθαι καὶ αὐτὸ ἑνδέκατον τοῦ γινομένου τῶν 22 ἐπὶ 12, ἤτοι ἑνδέκατον τῶν 6ς. Ὥστε πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν αἱ 2ὀκ ἐπὶ 12 διαιρεῖται ὁ 6ς, ἤτοι ὁ 264ὀκ, διὰ 11, καὶ εὑρίσκεται τὸ γινόμενον αὐτῶν 24ὀκ, τοῦτο δ' ἐπαναλαμβάνεται τετράκις, διότι ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχει τετράκις 2 ὀκάδας. Τελευταῖον τὰ 240δρ χωρίζονται εἰς 200δρ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς ὀκᾶς ἢ τὸ τέταρτον 2 ὀκάδων, καὶ εἰς 40δρ, ἅτινα εἶναι πέμπτον τῶν 200δρ· ἐννοεῖται δὲ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν 200δρ ἐπὶ 12 θέλει εἶσθαι τὸ τέταρτον τοῦ γινομένου τῶν 2ὀκ ἐπὶ 12, ἤτοι τὸ 4ον τῶν 24ὀκ, ὅπερ εἶναι 6ὀκ· τὸ δὲ γινόμενον τῶν 40δρ ἐπὶ 12 εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ γινομένου τῶν 200δρ ἐπὶ 12, ἤτοι τὸ 5ον τῶν 6ὀκ, ὅπερ εἶναι 1ὀκ 80δρ. Τώρα ἄλλο δὲν μένει εἰμὴ νὰ προστεθῶσιν ὅλα τὰ εὑρεθέντα ἤδη μερικὰ γινόμενα 408ς, 6ςα 24ὀκ, 24ὀκ, 24ὀκ, 24ὀκ, 6ὀκ, 1ὀκ, 80δρ, καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν 410ς 15ὀκ 80δρ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 34ς 30ὀκ 240δρ ἐπὶ 12. Ἰδοὺ δὲ οἱ τελευταῖοι πολλαπλασιασμοὶ ἐκτελεσμένοι κατὰ τὴν μέθοδον τῶν πολλοστῶν, ἔτι δὲ καὶ ἄλλοι δύο.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

	34 σατ	30 οκ	240 δρ
	$12\frac{5}{6}$		
	408 σατ	οκ	δρ
22 οκ	6		
2	0	24	
2		24	
2		24	
2		24	
200 δρ		6	
40		1	80
$\frac{3}{6}$	17	15	120
$\frac{1}{6}$	5	34	$173\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$	5	34	$173\frac{1}{3}$
	445	11	$146\frac{2}{3}$

	34 σατ	30 οκ	240 δρ
	8 σθ	3 τα 4 δρ	60 λε
	272 σατ.	οκ.	δρ.
22	4		
2	0	16	
2		16	
2		16	
2		16	
200 δρ μ		4	
40		0	320
2 ταλ	17	15	120
1	8	29	260
1 δρ	1	32	132
1	1	32	132
1	1	32	132
1	1	32	132
50 λεπ	0	38	66
10	0	7	$253\frac{1}{5}$
	311	24	$347\frac{1}{5}$

	24 ταλ	2 δρ	40 λεπ
	4 ορ	3 ποδ	7 δακ 9 γρ
	96 ταλ.	δρ.	λεπ. —
1 δρ	0	4	
1		4	
20 λεπ		0	80
20 λεπ			80
3 ποδ	12	1	20
6 δακ	2	0	20
1	0	1	70
6 γρ		0	85
3			$42\frac{1}{2}$
	112	3	$97\frac{1}{2}$

	8 σθ	3 τα	4 δρ	60 λε
	34 σατ	30 οκ	240 δρ	
	272 σθ	ταλ	δρ	λεπ
2 ταλ	17			
1	8	2		
1 δρ	1	2	4	
1	1	2	4	
1	1	2	4	
1	1	2	4	
50 λεπ	0	3	2	
10	0	0	3	40
22 οκ	4	1	4	80
2	0	1	3	$16\frac{4}{11}$
2		1	3	$16\frac{4}{11}$
2		1	3	$16\frac{4}{11}$
2		1	3	$16\frac{4}{11}$
200 δρ αμ		0	2	$4\frac{1}{11}$
40			0	$40\frac{9}{11}$
	311	2	1	$30\frac{4}{11}$

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Εὕρεσις κλασματικῶν μονάδων πολλαπλασίων ἢ πολλοστῶν ἄλλων κλασματικῶν μονάδων.

89. Ἑκάστη τῶν κλασματικῶν μονάδων $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ κτλ παριστάνει ποσὸν παντὸς εἴδους πλὴν τοῦ πλήθους σχετικῶς πρὸς μονάδα ἄλλην ὁμοειδῆ, κυρίως δὲ πολλοστόν τι μέρος αὐτῆς, κατὰ σειρὰν δ' ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μικρότερον, ὅσον μεγαλήτερος εἶναι ὁ παρονομαστής, ἤτοι τὸ $\frac{1}{3}$ μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{4}$ ἔτι μικρότερον, τὸ $\frac{1}{5}$ ὡσαύτως κτλ. Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορώμεθα ὅτι, ὡς οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πολλαπλάσιοι ἄλλος ἄλλου καὶ πολλοστά, οὕτω καὶ *τὰ ὑπὸ τῶν κλασματικῶν μονάδων παριστανόμενα ποσὰ εἶναι πολλοστὰ ἄλλο ἄλλου ἢ πολλαπλάσια, τοιαῦτα δὲ πολλοστά, ὁποῖα πολλαπλάσια εἶναι ἀλλήλων οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασματικῶν μονάδων, τοιαῦτα δὲ πολλαπλάσια, ὁποῖα πολλοστὰ ἀλλήλων εἶναι οἱ παρονομασταὶ τῶν αὐτῶν*. Π. χ. τὸ $\frac{1}{6}$ μονάδος τινός, ἔχον παρονομαστὴν διπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς αὐτῆς, εἶναι ἥμισυ αὐτοῦ· διότι τὸ διπλάσιον τοῦ $\frac{1}{6}$ ἤτοι τὸ $\frac{2}{6}$ τρὶς λαμβανόμενον $\frac{2}{6}$ καὶ $\frac{2}{6}$ καὶ $\frac{2}{6}$ ἀποτελεῖ $\frac{6}{6}$ ἤτοι τὴν μονάδα· ὅθεν δῆλον ὅτι τὸ $\frac{2}{6}$ εἶναι τρίτον τῆς μονάδος ὡς καὶ τὸ $\frac{1}{3}$. Λοιπὸν τὸ $\frac{1}{6}$ ἥμισυ ὂν τοῦ $\frac{2}{6}$ εἶναι ἥμισυ καὶ τοῦ $\frac{1}{3}$, ἐνῷ ὁ παρονομαστής του εἶναι διπλάσιος. Τὸ αὐτὸ $\frac{1}{6}$ εἶναι τρίτον τοῦ $\frac{1}{2}$, ἐνῷ ὁ παρονομαστής του εἶναι τριπλάσιος τοῦ $\frac{1}{2}$· διότι τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{1}{6}$ ἤτοι τὸ $\frac{3}{6}$ εἶναι φανερὰ ἥμισυ τῆς μονάδος ὡς καὶ τὸ $\frac{1}{2}$· λοιπὸν το $\frac{1}{6}$ τρίτον ὂν τοῦ $\frac{3}{6}$ εἶναι τρίτον καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου του $\frac{1}{2}$.

Τὸ $\frac{1}{24}$ μονάδος τινὸς εἶναι ὄγδοον τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς αὐτῆς, ἐνῷ ὁ παρονομαστὴς 24 εἶναι ὀκταπλάσιος τοῦ 3· διότι ὀκτάκις $\frac{1}{24}$ ἤτοι $\frac{8}{24}$ εἶναι τρίτον τοῦ $\frac{24}{24}$ ἤτοι τῆς μονάδος, ὡς καὶ τὸ $\frac{1}{3}$· λοιπὸν τὸν $\frac{1}{24}$, ὅπερ εἶναι ὄγδοον τοῦ $\frac{8}{24}$, εἶναι ὄγδοον καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου του $\frac{1}{3}$. Ὡσαύτως πληροφορούμεθα καὶ περὶ πάσης ἄλλης κλασματικῆς μονάδος.

Ἐκ δὲ τούτων εἶναι δῆλον καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι ὅτι *κλασματικὴ μονάς, ἧς ὁ παρονομαστὴς εἶναι πολλοστὸν τοῦ παρονομαστοῦ ἄλλης κλασματικῆς μονάδος, παριστάνει ποσὸν πολλαπλάσιον τοῦ παριστανομένου ὑπὸ τῆς ἄλλης κλα-*

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

σματικῆς μονάδος, καὶ τοιοῦτον πολλαπλάσιον, ὁποῖον πολλοστὸν εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ παρονομαστοῦ. Διότι ἐκ τοῦ ὅτι τὸ $\frac{1}{6}$ εἶναι ἥμισυ τοῦ $\frac{1}{3}$ καὶ τρίτον τοῦ $\frac{1}{2}$ δῆλον καὶ ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{1}{6}$, καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τριπλάσιον αὐτοῦ. Ὡσαύτως ἐνῷ τὸ $\frac{1}{24}$ εἶναι ὄγδοον τοῦ $\frac{1}{3}$, δῆλον ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ $\frac{1}{24}$, ἐνῷ ὁ παρονομαστὴς 3 εἶναι ὄγδοον τοῦ 24, κτλ.

90. Ὅταν λοιπὸν θέλῃ τις κλασματικὴν μονάδα, ἥτις νὰ ἦναι πολλοστόν τι ἄλλης κλασματικῆς μονάδος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζῃ τὸν παρονομαστὴν ταύτης ἐπὶ τὸν ἁρμόδιον ἀκέραιον ἀριθμόν, καὶ τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι ὁ παρονομαστὴς τῆς ζητουμένης. Ὅταν δὲ θέλῃ κλασματικὴν μονάδα, ἥτις νὰ ἦναι πολλαπλάσιόν τι ἄλλης, τότε πρέπει ταύτης νὰ διαιρῇ τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἁρμοδίου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁ παρονομαστὴς τῆς ζητουμένης. Ἤγουν κλασματικῆς μονάδος πολλοστὸν μέν τι εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ της, πολλαπλάσιον δέ τι διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ, ἀντιστρόφως παρ' ὅπως εὑρίσκονται τὰ πολλαπλάσια καὶ τὰ πολλοστὰ τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδὴ δὲ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον παράγει πάντοτε γινόμενον ἀκέραιον, ἡ δὲ διαίρεσις δι' ἀκεραίου δὲν δίδει πάντοτε πηλίκον ἀκέραιον, εἰμὴ ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἦναι διαιρετὸς (80) διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς μονάδος εἶναι πάντοτε ἀκέραιος, διὰ ταῦτα κλασματικὴ μονάς, ἥτις νὰ ἦναι πολλοστὸν ἄλλης, εὑρίσκεται πάντοτε, ἀλλὰ κλασματικὴ μονάς, ἥτις νὰ ἦναι πολλαπλάσιον ἄλλης, τότε μόνον, ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἁρμοδίου ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Διπλοῦς τρόπος τοῦ εὑρίσκειν πολλαπλάσιον ἢ πολλοστόν τι ποσοῦ τινος.

91. Ποσόν τι διάφορον τοῦ πλήθους εἶναι προσδιωρισμένον, ὅταν ἦναι γνωστόν, ὄχι μόνον ὁ ἀριθμὸς ὅστις τὸ παριστάνει, ἀλλὰ καὶ ἡ κατὰ συνθήκην μονάς του· 4 πήχεις, 8 ὀκάδες, 5 ὧραι παριστάνουσι προσδιωρισμένα ποσά. Ἂν δὲ τις θέλῃ ποσοῦ οὕτω παριστανομένου ἢ πολλαπλάσιόν τι ἢ πολλοστόν τι,

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τὸ εὑρίσκει ἐὰν πολλαπλασιάσῃ ἢ διαιρέσῃ διὰ τοῦ ἁρμοδίου ἀριθμοῦ ἢ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων χωρὶς νὰ μεταβάλῃ τὴν μονάδα, ἢ τὴν μονάδα τοῦ ἀριθμοῦ χωρὶς νὰ μεταβάλῃ τὸν ἀριθμὸν (61). Ἀλλὰ πῶς πολλαπλασιάζεται καὶ πῶς διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁποιασδήποτε μονάδος δι' ἀκεραίου τὸ εἴδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις· πῶς δ' εὑρίσκεται μονὰς πολλαπλασία ἢ πολλοστὸν ἄλλης ἐξ ὅσων ἤδη εἴπομεν εἶναι ἤδη γνωστόν. Ὥστε δυνάμεθα ἤδη νὰ εὑρίσκωμεν ποσὰ πολλαπλάσια ἄλλων ἢ πολλοστὰ ἄλλων κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι εἶναι προτιμότερον νὰ μεταχειριζώμεθα πρὸς εὕρεσιν μὲν τοῦ πολλαπλασίου ποσοῦ τὸν πρὸς εὕρεσιν τῆς πολλαπλασίας μονάδος τρόπον, ὅταν ἦναι δυνατὸν, πρὸς εὕρεσιν δὲ πολλοστοῦ ποσοῦ τὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ πολλοστοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν ἦναι δυνατόν· διότι καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις θέλομεν ἔχει μικροὺς ἀριθμούς. Ὅταν δὲ οἱ τρόποι οὗτοι ἦναι ἀδύνατοι, τότε μεταχειριζόμεθα τοὺς ἄλλους, οἵτινες εἶναι πάντοτε δυνατοί, ἀλλὰ φέρουσιν εἰς ἀριθμοὺς μεγάλους.

Π. χ. ἐὰν μὲν θέλῃ τις ἑξαπλάσιον ποσὸν τῶν 4 ποδῶν, ἐπειδὴ ἡ ὀργυιὰ εἶναι ἑξαπλασία μονὰς, δῆλον ὅτι αὐτὸ θέλει εἶσθαι 4 ὀργυιαί. Ἐὰν δὲ θέλῃ χιλιοπλάσιον ποσὸν τῶν 245 πήχεων, ἐπειδὴ τὸ στάδιον εἶναι χιλιοπλάσιον τοῦ πήχεως, δῆλον ὅτι αὐτὸ θέλει εἶσθαι 245 στάδια. Ἐὰν δὲ θέλῃ ἑπταπλάσιον τῶν $\frac{24}{35}$, ἐπειδὴ ἑπταπλάσιον τοῦ $\frac{1}{35}$ εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$, δῆλον ὅτι τὸ ζητούμενον θέλει εἶσθαι $\frac{24}{5}$, ὅπερ εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 35 διὰ 7, κτλ.

Ὡσαύτως ἐὰν μὲν θέλῃ ποσὸν, ὅπερ νὰ ἦναι 12ον τοῦ 96, πρέπει νὰ διαιρέσῃ τὸν 96 διὰ 12, καὶ οὕτως εὑρίσκει 8. Ἐὰν δὲ θέλῃ τὸ 15ον τῶν 90 πήχεων ἢ ὀκάδων κτλ, εὑρίσκει διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 90 διὰ 15 τὸν 6 πήχ. ἢ ὀκάδες, κτλ. Ἐὰν θέλῃ δὲ τὸ 5ον τῶν $\frac{20}{27}$, εὑρίσκει διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 20 διὰ 5 τὸν $\frac{4}{27}$ κτλ· διότι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρέσιμοι διὰ τῶν διαιρετῶν.

Ἂν ὅμως θέλῃ τὸ δωδεκαπλάσιον τῶν 23 ὀκάδων, ἐπειδὴ μονὰς δωδεκαπλασία τῆς ὀκᾶς δὲν ὑπάρχει ὡρισμένη, ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἀριθμὸν 23 ἐπὶ 12, καὶ εὑρίσκει 276

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμο

οκάδας τὸ ζητούμενον· τοῦτο δὲ διαιρῶν ἔπειτα διὰ 44 τρέπει εἰς τὸ ἰσοδύναμον 6ς $12^{\text{οκ}}$. Ἂν δὲ θέλῃ τὸ πεντηκονταπλάσιον τῶν 20 ὡρῶν, ἐπειδὴ μονὰς πεντηκονταπλασία τῆς ὥρας δὲν ὑπάρχει ὡρισμένη, ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν 20 ἐπὶ 50, καὶ τὸ γινόμενον 1000 ὥρας, ἂν θέλῃ, διαιρεῖ διὰ 24 καὶ τρέπει εἰς τὸ ἰσοδύναμον $41^{\text{ημ}}$ $16^{\text{ωρ}}$, ἢ $1^{\text{μην}}$ $11^{\text{ημ}}$ $16^{\text{ωρ}}$. Ἂν δὲ θέλῃ τὸ πενταπλάσιον τῶν $\frac{3}{8}$, ἐπειδὴ μονὰς πενταπλασία τοῦ $8^{\text{ου}}$ δὲν ὑπάρχει, διότι ὁ 8 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς 3 ἐπὶ 5, καὶ τὸ γινόμενον $\frac{15}{8}$, ἂν θέλῃ τις, τὸ τρέπει εἰς τὸ ἰσοδύναμον $1\,\frac{7}{8}$.

Ὡσαύτως, ἂν θέλῃ τὸ $12^{\text{ον}}$ τῶν 58, ἐπειδὴ δὲν εἶναι διαιρετὸς ὁ 58 διὰ 12, λαμβάνεται μονὰς τὸ $12^{\text{ον}}$ τῆς τοῦ 58, καὶ τὸ $12^{\text{ον}}$ τοῦ 58 εἶναι $\frac{58}{12}$, ὅπερ, ἂν θέλῃ τις, τρέπει εἰς τὸ ἰσοδύναμον $4\,\frac{10}{12}$. Ἂν δὲ θέλῃ τὸ $6^{\text{ον}}$ τῶν $5^{\text{ορ}}$, ἐπειδὴ ὁ 5 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, εἶναι δὲ ὡρισμένη μονὰς ἕκτον τῆς ὀργυιᾶς, λαμβάνεται αὕτη ὡς μονάς, καὶ τὸ $6^{\text{ον}}$ τῶν $5^{\text{ορ}}$ εἶναι 5 πόδες. Τελευταῖον ἂν θέλῃ τὸ $7^{\text{ον}}$ τῶν $\frac{12}{9}$, μὴ ὄντος διαιρετοῦ τοῦ 12 διὰ τοῦ 7, λαμβάνεται μονὰς τὸ $7^{\text{ον}}$ τοῦ $9^{\text{ου}}$, ἤτοι τὸ $63^{\text{ον}}$, καὶ ἔχομεν $7^{\text{ον}}$ τοῦ $\frac{12}{9}$ τὸ $\frac{12}{63}$, κτλ.

92. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλασματικὸς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ὡσαύτως, ἐπειδὴ τότε πρέπει (82) νὰ πολλαπλασιάζηται ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ ἐπειδὴ καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γείνῃ διττῶς, διὰ ταῦτα ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκεῖνος τότε δύναται νὰ γείνῃ τετραχῶς·

α΄. *Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν δυνατὸν νὰ γείνῃ διὰ διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ἡ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαίρεσις διὰ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου.*

β΄. *Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν δυνατὸν νὰ γείνῃ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

γ'. *Ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς δυνατὸν νὰ γείνῃ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἡ δὲ διαίρεσις διὰ διαιρέσεως τοῦ εὑρεθέντος ἤδη γινομένου ἀριθμητοῦ.*

δ'. *Ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς δυνατὸν νὰ γείνῃ διὰ διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἡ δὲ διαίρεσις διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προκύπτοντος πηλίκου παρονομαστοῦ.*

Ὁ δεύτερος τρόπος τοῦ πολλαπλασιάζειν εἶναι ὁ κοινῶς μνημονευόμενος ἐν ταῖς ἀριθμητικαῖς (Π. Α. 64, 3'.) καὶ ὁ πάντοτε δυνατός, διότι συνίσταται εἰς δύο πολλαπλασιασμοὺς ἐπὶ ἀκεραίους. Ὁ πρῶτος ὅμως ὁ διὰ δύο διαιρέσεων εἶναι προτιμότατος πάντων, ὅταν ἦναι δυνατός, διότι παρέχει γινόμενον μὲ μικροὺς ὅρους· μετὰ τοῦτον δὲ ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος, διότι ἔχει χώραν μία διαίρεσις κατ' αὐτούς.

Ὅσα δὲ ἤδη εἴπομεν περὶ πολλαπλασιασμοῦ ἁρμόζουσι λεγόμενα καὶ περὶ διαιρέσεως κλασματικοῦ δι' ἄλλου κλασματικοῦ, διότι αἱ αὐταὶ πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελῶνται καὶ τότε (83).

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{24}{36}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ καὶ ἂς διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ.

Εὑρίσκεται ά. $\frac{6}{12}$, β'. $\frac{72}{144}$, γ'. $\frac{18}{36}$, δ'. $\frac{24}{48}$. (Ὅλα εἶναι $\frac{3}{4}$ τοῦ $\frac{24}{36}$).

Εὑρίσκεται ά. $\frac{8}{9}$, β'. $\frac{96}{108}$, γ'. $\frac{32}{36}$, δ'. $\frac{24}{27}$. (Ὅλα εἶναι $\frac{4}{3}$ τοῦ $\frac{24}{36}$).

93. Εἴδομεν (18, 73, 85) ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἀκέραιον, ἡ δὲ μονάς του διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου, ἢ ὁ μὲν ἀριθμὸς διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἡ δὲ μονάς του μεταβληθῇ εἰς ἄλλην πολλαπλασίαν αὐτῆς, ὁποίαν παριστάνει ὁ ἀκέραιος, οὕτως εὑρίσκονται ἀριθμοὶ ἰσοδύναμοι (25) μὲ τὸν πρῶτον. Π. χ. 20 ἡμέραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ 480 ὥρας, ἐνῷ ὁ μὲν ἀριθμὸς 20 ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 24, ἡ δε μονὰς μετεβλήθη εἰς τὸ 24ον αὐτῆς, τὴν ὥραν· διότι ἡ 1 ἡμέρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 24 ὥρας, αἱ 2 μὲ δὶς 24 ὥρας, κτλ, αἱ 20 μὲ εἰκοσάκις 24 ὥρας, ἤτοι ἐνῷ ἡ μονὰς μεταβάλλεται εἰς τὸ 24ον αὐτῆς, ὁ ἀριθμὸς πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 20, ἵνα παριστάνῃ τὸ αὐτὸ ποσόν. Ὡσαύτως 30 δραχμαὶ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 6 πεντάδραχμα, ἐνῷ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ὁ ἀριθμὸς 30 διῃρέθη διὰ 5, μονὰς δὲ ἐλήφθη πενταπλασία τῆς δραχμῆς.

Ἀλλὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζεται μὲν ὁ ἀριθμός, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, διαιρεῖται δ' ἡ μονάς, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής, καὶ διαιρεῖται μὲν ὁ ἀριθμός, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής, εὑρίσκεται δὲ πολλαπλασία μονάς, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής· διὰ ταῦτα *κλασματικὸς, οὗτινος πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν, ἢ διαιροῦνται οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τρέπεται εἰς ἄλλον ἰσοδύναμον κλασματικόν.* Ἢ ἄλλως, *ἵνα εὕρῃ τις κλασματικὸν ἰσοδύναμον μὲ ἄλλον, πρέπει ἢ νὰ πολλαπλασιάζῃ τούτου τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ ἀκέραιόν τιν' ἀριθμὸν, ἢ νὰ τοὺς διαιρῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ.*

Ἰδὲ τ' ἀνωτέρω γινόμενα, $\frac{3}{4}$ τοῦ $\frac{24}{36}$ ὄντα, καὶ διὰ τοῦτο ἰσοδύναμα, καὶ τὰ πηλίκα, $\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{24}{36}$ ὄντα, καὶ διὰ τοῦτο ἰσοδύναμα. Ὅλα δὲ τὰ ἰσοδύναμα πορίζονται τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου ἢ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο ὅρων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἢ διὰ διαιρέσεως.

Εἶναι δ' ἤδη φανερὸν ὅτι τὸ αὐτὸ ποσὸν δύναται νὰ παριστάνηται διὰ μυρίων διαφόρων κλασματικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ἰσοδύναμοι.

Διάφορα περὶ τῶν γινομένων καὶ τῶν πηλίκων.

94. Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν μὲν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα ἤτοι ἦναι ἡ μονάς, τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον ἤτοι αὐτὸς ὁ πολλαπλασιαστέος· ὅταν δ' ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι μεγαλήτερος τῆς μονάδος του, τότε καὶ τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πολλαπλασιαστέου· ὅταν δ' ὁ πολλλαπλασιαστὴς ἦναι μικρότερος τῆς μονάδος του, τότε καὶ τὸ γινόμενον εἶναι μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου. Διότι ὁπόσος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὴν μονάδα του, τοσοῦτον εἶναι καὶ τὸ γινόμενον πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον.

Ὡσαύτως καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲν μὲ τὸν διαιρετέον ἤτοι εἶναι αὐτὸς ὁ διαιρετέος, ὅταν διαιρέτης ἦναι ἡ μονάς.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

μικρότερον δὲ τοῦ διαιρετέου, ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι μεγαλήτερος τῆς μονάδος του ἤτοι ἡ μονάς του μικροτέρα αὐτοῦ· μεγαλήτερον δὲ τοῦ διαιρετέου, ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι μικρότερος τῆς μονάδος του ἤτοι ἡ μονάς του μεγαλητέρα αὐτοῦ. Διότι ὁπόση εἶναι ἡ μονὰς τοῦ διαιρέτου πρὸς αὐτὸν, τοσοῦτον εἶναι καὶ τὸ πηλίκον πρὸς τὸν διαιρετέον.

95. Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι *ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς, ὁπότερος αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον.*

Τοῦτο εἶναι ἤδη ἀποδεδειγμένον, ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι ἀκέραιοι (64).

Ἂν δ' οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι κλασματικοὶ, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν νοηθῇ ὅτι γίνεται κατὰ τὸν β' τρόπον (92), καθ' ὃν πολλαπλασιάζεται ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς ἐπὶ παρονομαστὴν, ἐπειδὴ καὶ τῶν ἀριθμητῶν ὡς ἀκεραίων τὸ γινόμενον εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, καὶ τῶν παρονομαστῶν ὡσαύτως, ὁπότερος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, διὰ τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον τῶν κλασματικῶν θέλει ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν ἤτοι ἀριθμὸν τῶν μονάδων, καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἤτοι τὴν αὐτὴν κλασματικὴν μονάδα, ὁπότερος αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον. Ἀλλὰ παρατηρητέον ὅτι *τοῦ γινομένου ἡ κλασματικὴ μονὰς εἶναι ἡ αὐτὴ* σημαίνει ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ πολλοστὸν τῆς μονάδος τοῦ παράγοντος, ὅστις ἐκλαμβάνεται πολλαπλασιαστέος. Ἐὰν λοιπὸν τῶν παραγόντων αἱ ἀκέραιαι μονάδες ἦναι διάφοροι, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ γινομένου ἡ μονὰς θέλει παριστάνει ποσὸν διάφορον, ἀλλ' ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον. Ὥστε κυρίως μόνον ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου εἶναι ὁ αὐτός.

Ἐκ δὲ τῶν εἰρημένων δῆλον ὅτι ἀληθεύει τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος καὶ ὅταν ὁ ἕτερος παράγων ἦναι ἀκέραιος καὶ ὁ ἄλλος κλασματικὸς ἢ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες μικτοὶ ἢ συμμιγεῖς· διότι οἱ πολλαπλασιασμοὶ τούτων ἐκτελοῦνται διὰ πολλαπλασιασμῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἐπ' ἀλλήλους.

Παρατηρητέον δὲ μόνον ὅτι, ὅταν μὲν οἱ μικτοὶ ἢ οἱ συμμιγεῖς ἦναι ὁμοειδεῖς καὶ τῆς αὐτῆς ἀνωτάτης μονάδος, τότε

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημοσια Κεντρικη Ιστορικη Βιβλιοθηκη Σάμου

τοῦ γινομένου ὅλοι οἱ ἁπλοῖ ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶσθαι οἱ αὐτοί· ὅταν δὲ ἦναι ἑτεροειδεῖς, τότε τοῦ συμμιγοῦς γινομένου ὁ τῆς ἀνωτάτης μονάδος μόνον ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὁ αὐτός, οἱ δὲ λοιποὶ διάφοροι, ἐὰν αἱ κατώτεραι μονάδες καὶ πρὸς τὴν ἀνωτάτην καὶ πρὸς ἀλλήλας δὲν ἔχωσι τὴν αὐτὴν σχέσιν, ἤτοι δὲν ἦναι τὰ αὐτὰ πολλοστὰ μέρη. Παράδειγμα τούτου ἰδὲ ἐν ἀρ. 88, καὶ παρατήρησε ὅτι, ἂν ὅλοι οἱ τῶν μικροτέρων μονάδων ἀριθμοὶ τῶν δύο γινομένων τραπῶσιν ἑκάτεροι εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς τῆς ἀνωτάτης μονάδος, οὗτοι θέλουσιν εἶσθαι ἰσοδύναμοι, ἀφῃρημένως θεωρούμενοι.

96. Ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμός τις ἐπὶ ἄλλον, ἐὰν ἔπειτα πολλαπλασιασθῇ τὸ γινόμενον ἐπὶ τρίτον τινά, καὶ πάλιν τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τέταρτόν τινα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, διὰ τούτων τῶν διαδοχικῶν πολλαπλασιασμῶν εὑρίσκεται ἀριθμός, ὅςτις λέγεται *γινόμενον ὅλων τῶν ἀριθμῶν*, ὅσοι ἐχρησίμευσαν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου, οὗτοι δὲ *παράγοντες* αὐτοῦ, ὧν εἷς μὲν δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ πολλαπλασιαστέος, ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι πολλαπλασιασταί· τὸ δὲ γινόμενον εἶναι ὁμώνυμον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον. Οἱ δὲ διαδοχικοὶ οὗτοι πολλαπλασιασμοὶ λέγονται *πολλαπλασιασμὸς πολλῶν ἀριθμῶν ἐπ' ἀλλήλους*. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι οἱ πολλαπλασιασμοὶ οὗτοι εἶναι παρὰ ἕνα τόσοι, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ (ἰδὲ καὶ 49καὶ 53). Τὸ δὲ γινόμενον τῶν πολλῶν ἀριθμῶν θέλει εἶσθαι πολλαπλάσιον πολλαπλασίου πολλαπλασίου κτλ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἐὰν οἱ πολλαπλασιασταὶ ἦναι ἀκέραιοι· οἷον ὁ 1680, ὅςτις εἶναι γινόμενον τῶν 5, 6, 7, 8, εἶναι ὀκταπλάσιος τοῦ ἑπταπλασίου τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ 5. Ἂν δὲ οἱ πολλαπλασιασταὶ ἦναι κλασματικοί, τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι πολλαπλάσιον πολλοστοῦ πολλαπλασίου πολλοστοῦ κτλ τοῦ πολλαπλασιαστέου· οἷον ὁ $\frac{630}{1728}$, ὅςτις εἶναι τὸ γινόμενον τῶν $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{9}$, εἶναι $\frac{6}{9}$ τῶν $\frac{7}{8}$ τῶν $\frac{5}{6}$ τοῦ $\frac{3}{4}$. Ἐκ τούτων δ' εὐκόλως ἐννοεῖ τις τί θέλει εἶσθαι ἑκάστοτε τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν κτλ.

97. Εἶναι ἀναγκαῖον νὰ πληροφορηθῶμεν ὅτι *καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν πολλαπλασιασθῶσι πολλοὶ ἀριθμοὶ ἐπ' ἀλ-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

λήλους, τοῦ γινομένου ὅλων ὁ ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὁ αὐτός.

Πρῶτον ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ ἀκέραιοι καὶ τέσσαρες, οὗτοι 5, 6, 7, 8. Λέγω πρῶτον ὅτι τοῦ γινομένου αὐτῶν ὁ ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὁ αὐτός, ἐάν τε πολλαπλασιασθῶσι κατὰ ταύτην

τὴν τάξιν	5, 6, 7, 8,
ἐάν τε κατὰ ταύτην	5, 6, 8, 7,
ἐάν τε οὕτως	5, 8, 6, 7,
ἐάν τε οὕτως	8, 5, 6, 7.

Διότι ά. καὶ κατὰ τὴν πρώτην καὶ κατὰ τὴν δευτέραν τάξιν πρῶτον πολλαπλασιάζεται ὁ 5 ἐπὶ 6, καὶ τοῦ γινομένου των ὁ ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὁ αὐτός· ἔπειτα ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς θέλει πολλαπλασιασθῇ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ πρῶτον ἐπὶ 7 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἔπειτα ἐπὶ 8, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀντιστρόφως, πρῶτον ἐπὶ 8 καὶ ἔπειτα τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 7. Ἀλλ' εἶναι ἀποδεδειγμένον (65) ὅτι καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ γινόμενον· ἄρα τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν καὶ κατὰ τὴν πρώτην καὶ κατὰ τὴν δευτέραν τάξιν πολλαπλασιασθέντων εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

β'. Κατὰ τὴν τρίτην τάξιν πολλαπλασιάζεται ὁ 5 πρῶτον ἐπὶ 8 καὶ ἔπειτα τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 6, ἐνῷ κατὰ τὴν δευτέραν πολλαπλασιάζεται ὁ αὐτὸς 5 πρῶτον ἐπὶ 6 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 8, τοῦτο δὲ ὡς καὶ ἤδη εἴδομεν (65) παράγει τὸ αὐτὸ γινόμενον· ὥστε τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων παραγόντων πολλαπλασιασθέντων κατὰ τὴν δευτέραν καὶ κατὰ τὴν τρίτην τάξιν εἶναι τὸ αὐτό. Ἀλλ' αὐτὸ καὶ κατὰ τὴν δευτέραν καὶ κατὰ τὴν τρίτην τάξιν θέλει πολλαπλασιασθῇ ἔτι ἐπὶ τὸν αὐτὸν 7, τὸ *δὲ γινόμενον τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν εἶναι τὸ αὐτό*· ἄρα τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν κατὰ τὴν τρίτην τάξιν πολλαπλασιασθέντων εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μὲ τὸν κατὰ τὴν δευτέραν, ἐπομένως καὶ μὲ τὸν κατὰ τὴν πρώτην.

γ'. Κατὰ τὴν τετάρτην τάξιν πολλαπλασιάζεται ὁ 8 ἐπὶ 5, ἐνῷ κατὰ τὴν τρίτην πολλαπλασιάζεται ὁ 5 ἐπὶ 8, εἶναι δὲ ἤδη γνωστὸν (64) ὅτι ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου τοῦ 8 ἐπὶ 5 καὶ τοῦ 5 ἐπὶ 8 εἶναι ὁ αὐτός· ὥστε τοῦ γινομένου τῶν δύο

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πρώτων παραγόντων ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ἐν τῇ τρίτῃ καὶ ἐν τῇ τετάρτῃ τάξει. Ἀλλ' ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ κατὰ τὰς δύο θέλει πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ 6 καὶ ἔπειτα τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 7· ἄρα ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν κατὰ τὴν τετάρτην τάξιν πολλαπλασιασθέντων εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην, ἐπομένως ὁ αὐτὸς καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην.

Εἶναι λοιπὸν ἀποδεδειγμένον τώρα ὅτι, τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν πολλαπλασιαζομένων οὕτως, ὥστε ὁ παράγων 8 νὰ ἦναι τέταρτος, τρίτος, δεύτερος καὶ πρῶτος, ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου αὐτῶν καὶ κατὰ τὰς τέσσαρας περιπτώσεις εἶναι ὁ αὐτός· ἢ ἄλλως, ὅτι ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλει τὸν ἀριθμὸν τοῦ γινομένου των.

Ἀλλ' ὅ,τι ἀπεδείχθη πρὸς τὸν 8 δύναται ὡσαύτως ν' ἀποδειχθῇ καὶ πρὸς ἕνα ἕκαστον τῶν ἄλλων τριῶν· ἄρα *καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 5, 6, 7, 8, ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου αὐτῶν θέλει εἶσθαι ὁ αὐτός.*

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον δύναται ν' ἀποδειχθῇ τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος καὶ ἂν ἦναι ἄλλοι τέσσαρες ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἢ πέντε κτλ, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὡς βέβαιον ὅτι *καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν ὁσοιδήποτε καὶ ὁποιοιδήποτε ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου αὐτῶν θέλει εἶσθαι πάντοτε ὁ αὐτός.*

Πολλῶν δὲ κλασματικῶν ἀριθμῶν τὸ γινόμενον, ἐὰν εὑρεθῇ κατὰ τὸν β' τρόπον (92), εἶναι φανερὸν ὅτι θέλει ἔχει ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασματικῶν, καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν τῶν αὐτῶν. Ἐπειδὴ δ' ἑκατέρου τῶν γινομένων τούτων ὁ ἀριθμός, ὡς γινομένων ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἶναι ὁ αὐτὸς καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν ἂν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ παράγοντες· διὰ τοῦτο, *καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν ὁσοιδήποτε καὶ ὁποιοιδήποτε κλασματικοὶ ἀριθμοί, τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν* (περὶ δὲ τῆς μονάδος αὐτοῦ ἰδὲ 95).

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Ἐκ δὲ τῶν εἰρημένων ἁπάντων δῆλον ὅτι καὶ ὁποιοιδήποτε ἄλλοι ἂν ἦναι οἱ παράγοντες καὶ ὁπωςδήποτε πολλαπλασιασθῶσι, τοῦ γινομένου αὐτῶν ὁ ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὁ αὐτός· διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ἐκτελεῖται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἀριθμῶν. Ὥστε τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν γενικῶς ἀποδεδειγμένον.

98. Ὅ,τι εἴπομεν ἐν ἀρ. 65 ἀληθεύει καὶ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι κλασματικὸς ἢ ἄλλος ἀριθμός. Π. χ. ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι $\frac{12}{15}$, ὅςτις δύναται νὰ νοηθῇ γινόμενον τοῦ $\frac{4}{3}$ καὶ τοῦ $\frac{3}{5}$, τὸ αὐτὸ γινόμενον θέλει εὑρεθῇ ἐάν τε πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ $\frac{12}{15}$, ἐάν τε πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς μὲν ἐπὶ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων του καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν ἄλλον παράγοντα. Διότι ὡς ὁ $\frac{12}{15}$ τῆς μονάδος δυνατὸν νὰ νοῆται καὶ $\frac{4}{3}$ τῶν $\frac{3}{5}$ τῆς μονάδος, ἢ $\frac{3}{5}$ τῶν $\frac{4}{3}$ αὐτῆς, οὕτω καὶ τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι ἢ $\frac{12}{15}$ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἢ $\frac{4}{3}$ τῶν $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ, ἢ ἔτι καὶ $\frac{3}{5}$ τῶν $\frac{4}{3}$ αὐτοῦ· διὰ τοῦτο δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἢ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ $\frac{12}{15}$, ἢ αὐτὸς μὲν ἐπὶ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων του, καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ τὸν ἄλλον παράγοντα.

Ἐκ δὲ τῶν ἐν ἀρ. 65 καὶ τῶν ἤδη εἰρημένων δῆλον ὅτι *ὁποιοςδήποτε ἀριθμὸς ἂν ἦναι ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁσωνδήποτε παραγόντων γινόμενον, τὸ αὐτὸ γινόμενον θέλει εὑρεθῇ, ἐάν τε πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἐάν τε πολλαπλασιασθῇ αὐτὸς ἐπὶ ἕνα τινὰ τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἔπειτα τὸ γινόμενον ἐπὶ ἄλλον τινά, καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ ἄλλον καὶ οὕτως ἐφεξῆς.*

99. Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοηθῇ ὅτι, ἂν πρόκηται ἀριθμός τις νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἄλλον καὶ τὸ γινόμενον ἔπειτα νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ, ἢ ἀντιστρόφως, νὰ διαιρεθῇ ἀριθμός τις δι' ἄλλου καὶ τὸ πηλίκον ἔπειτα νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτόν, τότε δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτελῆται μηδετέρα τῶν πράξεων τούτων· διότι ὁ μετὰ τὰς δύο ταύτας πράξεις προκύπτων ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς καὶ ὁ πρὸ τῶν πράξεων, ὡς τῆς ἑτέρας οὔσης ἀντιστρόφου τῆς ἄλλης. Οἷον ἂν πολλα-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πλασιασθῇ ἀριθμός τις ἐπὶ $\frac{7}{12}$, τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι $\frac{7}{12}$ τοῦ πολλαπλασιαστέου· τοῦτο δ' ἂν διαιρεθῇ διὰ $\frac{7}{12}$, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι $\frac{12}{7}$ τοῦ γινομένου, ἤτοι $\frac{12}{7}$ τῶν $\frac{7}{12}$ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἢ $\frac{84}{84}$ αὐτοῦ· τὰ δὲ $\frac{84}{84}$ αὐτοῦ εἶναι αὐτὸς ὁ πολλαπλασιασθεὶς, κτλ.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν, προκειμένου νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπ' ἀλλήλους ἢ $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{8}{11}$, ἢ $\frac{7}{5}$ καὶ $\frac{5}{4}$ καὶ $\frac{4}{6}$ καὶ $\frac{12}{13}$, ἐπειδὴ ὁ 7 διαιρεῖται διὰ 8 καὶ ἔπειτα θέλει πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8, δὲν γίνεται οὐδετέρα τῶν πράξεων, ἤτοι ἐξαλείφεται ὁ 8 ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ διαιρεῖται μόνον ὁ 7 διὰ τοῦ 11· οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{8}$ ἐπὶ $\frac{8}{11}$ καταντᾷ ἁπλούστατον $\frac{7}{11}$. Ὡσαύτως καὶ τῶν ἄλλων οἱ δύο πρῶτοι παράγουσι γινόμενον $\frac{7}{4}$, ἐξαλειφομένου τοῦ 5· ἔπειτα τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{4}$ ἐπὶ $\frac{4}{6}$ ὡσαύτως εἶναι $\frac{7}{6}$, ἐξαλειφομένου τοῦ κοινοῦ 4· ἔπειτα τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{6}$ ἐπὶ $\frac{12}{13}$ εἶναι $\frac{14}{13}$, διότι ὁ 12 εἶναι γινόμενον τοῦ 6 καὶ τοῦ 2, ὁ δὲ 6 ὡς κοινὸς ἔν τε τῷ ἀριθμητῇ καὶ τῷ παρονομαστῇ ἐξαλείφεται καὶ μένει ἀριθμητὴς μὲν τὸ γινόμενον τοῦ 7 καὶ 2, παρονομαστὴς δὲ μόνον ὁ 13.

Ἐκ τούτων λοιπὸν βλέπει τις ὅτι, *ὅταν πρόκηται νὰ πολλαπλασιασθῶσι κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἐπ' ἀλλήλους, ἦναι δὲ ἀριθμός τις ἔν τινι ἀριθμητῇ καὶ ἔν τινι παρονομαστῇ, αὐτὸς ἐξαλείφεται, πολλαπλασιάζονται δ' ἐπ' ἀλλήλους οἱ μένοντες ἀριθμηταὶ καὶ οἱ μένοντες παρονομασταί.*

100. Ἀφοῦ διαιρεθῇ ἀριθμὸς δι' ἄλλου, ἂν ἔπειτα διαιρεθῇ ὁ δεύτερος διὰ τοῦ πρώτου, θέλει εὑρεθῇ πηλίκον ἀντίστροφον τοῦ πρώτου, ἤτοι ἂν μὲν τὸ πρῶτον ἦναι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς, τὸ δεύτερον θέλει εἶσθαι κλασματικὴ μονὰς ἔχουσα παρονομαστὴν τὸ πρῶτον πηλίκον, ἂν δὲ τὸ πρῶτον ἦναι κλασματικὸς, τὸ δεύτερον θέλει εἶσθαι ὁ ἀνεστραμμένος τοὺς ὅρους πρῶτος κλασματικὸς, κτλ. Διότι, ἂν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀκέραιοι, τὸ πηλίκον αὐτῶν πάντοτε δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν κλασματικὸν, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· τότε εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ δεύτερον πηλίκον θέλει εἶσθαι τὸ ἀνεστραμμένον τοὺς ὅρους πρῶτον. Π. χ. ἐνῷ τὸ πηλίκον τοῦ 42 διὰ 6 εἶναι $\frac{42}{6}$, τὸ τοῦ 6 διὰ 42 εἶναι

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

$\frac{6}{42}$. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ὅταν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δευτέρου, ὡς ἐνταῦθα ὁ 42 διὰ 6, ἐνῷ τὸ πρῶτον πηλίκον εἶναι ἀκέραιον, ὡς ἐδῶ ὁ 7, τὸ δεύτερον πηλίκον θέλει εἶσθαι κλασματικὴ μονὰς ἔχουσα παρονομαστὴν τὸ πρῶτον πηλίκον, ὡς ἐδῶ τὸ $\frac{1}{7}$, ὅπερ εὑρίσκεται διαιρουμένων τῶν δύο ὅρων διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, ὡς ἐδῶ τῶν ὅρων τοῦ $\frac{6}{42}$ διὰ 6.

Ἂν δ' οἱ ἀριθμοὶ ἦναι κλασματικοί, ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἐὰν μετὰ τὴν ἀναστροφὴν τῶν ὅρων τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθῇ ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς ἐπὶ παρονομαστήν. Καὶ ὅταν μὲν διαιρῆται ὁ πρῶτος ἀριθμὸς διὰ τοῦ δευτέρου, τούτου ἀναστρέφονται οἱ ὅροι, καὶ ἐπομένως τὸ πρῶτον πηλίκον θέλει ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου. Ὅταν δὲ διαιρῆται ὁ δεύτερος διὰ τοῦ πρώτου, τούτου ἀναστρέφονται οἱ ὅροι, καὶ ἐπομένως τὸ δεύτερον πηλίκον θέλει ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου, ἤτοι τὸ δεύτερον πηλίκον θέλει εἶσθαι τὸ ἀνεστραμμένον τοὺς ὅρους πρῶτον.

Εἶναι δ' εὔκολον μετὰ ταῦτα νὰ πληροφορηθῇ τις τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος καὶ ὅταν ὁ μὲν ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ δὲ κλασματικός, ἢ ὅταν ἦναι καὶ οἱ δύο μικτοὶ ἢ συμμιγεῖς, διότι οὗτοι οἱ τελευταῖοι ἰσοδυναμοῦσι μὲ κλασματικούς.

Ἐνῷ λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτός, ὁπότερος αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, ὁ ἀριθμὸς τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν δὲν εἶναι ὁ αὐτός, ὁπότερος αὐτῶν διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ χρειάζεται προσοχὴ νὰ μὴ ἐκλαμβάνῃ τις διαιρετέον τὸν διαιρέτην. Ἂν δέ ποτε λανθάσῃ τις καὶ διαιρέσῃ ὄχι τὸν μέλλοντα νὰ διαιρεθῇ, ἀλλὰ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν δι' αὐτοῦ, ἵνα διορθώσῃ τὸ λάθος ἄλλο δὲν ἔχει νὰ κάμῃ, εἰμὴ νὰ ἐκλάβῃ τὸ πηλίκον ἀντιστρόφως, χωρὶς νὰ ἐκτελέσῃ πάλιν τὴν διαίρεσιν, ἂν δὲν ἔχῃ πολλὴν δυσκολίαν νὰ ἐκλάβῃ αὐτὸ ἀντιστρόφως.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου
ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

101. Ἀφοῦ ἀριθμός τις διαιρεθῇ δἰ ἄλλου ἀκεραίου, ἐὰν ἔπειτα τὸ πηλίκον διαιρεθῇ δἰ ἄλλου ἀκεραίου, καὶ πάλιν διαιρεθῇ τὸ νέον πηλίκον δἰ ἄλλου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, διὰ τῶν διαδοχικῶν τούτων διαιρέσεων εὑρίσκεται τελευταῖον ἀριθμός, ὅστις εἶναι πολλοστὸν πολλοστοῦ πολλοστοῦ κτλ τοῦ πρῶτον διαιρεθέντος ἀριθμοῦ. Ἐκ δὲ τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς 78 καὶ 90 εἰρημένων δῆλον ὅτι *τὸ αὐτὸ πηλίκον εὑρίσκεται καὶ ἂν ἀντὶ τῶν διαδοχικῶν τούτων διαιρέσεων διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ γινομένου τῶν διαιρετῶν ὅλων*. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τῶν διαιρετῶν εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὅπως ἂν πολλαπλασιασθῶσιν αὐτοί, διὰ τοῦτο συμπεραίνομεν ὅτι *καὶ τὸ τελευταῖον πηλίκον τὸ εὑρισκόμενον διὰ διαδοχικῶν διαιρέσεων θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός, καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν διαιρέσωμεν διὰ τῶν διαιρετῶν*. Π. χ. ὁ ἀρ. 22330 ἢ διαιρεθῇ διὰ 5, 7, 11, ἢ διὰ 7, 5, 11, ἢ διὰ 7, 11, 5, ἢ διὰ 11, 7, 5 κτλ, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι πάντοτε 58· ἢ ἄλλως τὸ ἑνδέκατον τοῦ ἑβδόμου τοῦ πέμπτου τοῦ 32330, ἢ τὸ ἑνδέκατον τοῦ πέμπτου τοῦ ἑβδόμου αὐτοῦ, ἢ τὸ πέμπτον τοῦ ἑνδεκάτου τοῦ ἑβδόμου αὐτοῦ, ἢ τὸ πέμπτον τοῦ ἑβδόμου τοῦ ἑνδεκάτου αὐτοῦ κτλ, εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός. Εὐκόλως δ' ἐννοεῖται ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ διαιρέται ἦναι κλασματικοὶ ἢ ἄλλοι ἀριθμοί.

102. Εἴπομεν (34 καὶ 35) ὅτι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον εἶναι τρίτος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει ὅτι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς νοεῖται πρὸς τὸν δεύτερον, ὅπως αὐτὸς πρὸς τὴν μονάδα του. Εἶναι δὲ ἤδη γνωστὸν ὅτι ὅταν μὲν ἦναι ἄγνωστος ὁ πρῶτος, γνωστὸς δὲ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ἤτοι ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον εὑρίσκεται ὁ πρῶτος· ὅταν δὲ ἦναι ἄγνωστος ὁ δεύτερος, γνωστὸς δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος, διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ τρίτου εὑρίσκεται ὁ δεύτερος· ἔτι δὲ ὅτι ὁ μὲν πρῶτος ἐν μὲν τῷ πολλαπλασιασμῷ λέγεται γινόμενον, ἐν δὲ τῇ διαιρέσει διαιρετέος, ὁ δὲ δεύτερος ἐν μὲν τῷ πολλαπλασιασμῷ ὀνομάζεται πολλαπλασιαστέος, ἐν δὲ τῇ διαιρέσει πηλίκον, ὁ δὲ τρίτος ἤτοι ὁ λόγος τοῦ πρώτου

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πρὸς τὸν δεύτερον ἐν μὲν τῷ πολλαπλασιασμῷ λέγεται πολλαπλασιαστής, ἐν δὲ τῇ διαιρέσει διαιρέτης. Εἴπομεν δὲ προςέτι (41) διὰ τίνος λογισμοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται καὶ ὁ τρίτος ἀριθμὸς ἤτοι ὁ λόγος, ἂν ἤθελεν εἶσθαι ἄγνωστος, ὁ δὲ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος γνωστοί. Ἀλλ' ἡ ἐξέτασις αὐτοῦ τοῦ λογισμοῦ καθ' ὅλας τὰς διαφόρους περιπτώσεις ἤθελε μᾶς ἀπασχολήσει ὄχι ὀλιγώτερον τῆς διαιρέσεως, ἐνῷ ὀλίγαι τινὲς παρατηρήσεις καὶ μικραὶ σκέψεις πείθουσιν ὅτι καὶ ὁ λόγος εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ ἐπομένως ὅτι εἶναι δυνατὸν ν' ἀπαλλαχθῶμεν τῆς ἐκθέσεως τῶν περὶ τοῦ πέμπτου λογισμοῦ τοῦ πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου.

Δηλαδὴ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς δύναται νὰ νοῆται πάντοτε γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον ἤτοι τὸν λόγον τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον. Ἀλλὰ κατὰ τ' ἀποδειχθέντα ἐν ἀρ. 64 καὶ 92 εἶναι δυνατὸν ὁ αὐτὸς νὰ νοῆται γινόμενον καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν δεύτερον· ὁπότε ὁ δεύτερος ἐκλαμβάνεται ὡς λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν τρίτον, ὁ δὲ τρίτος ὡς ἀριθμὸς ἐξ οὗ γίνεται ὁ πρῶτος, ὅπως ὁ δεύτερος ἐκ τῆς μονάδος του. Ὅταν λοιπὸν νοηθῇ ὁ τρίτος ὡς ὁ δεύτερος καὶ ὁ δεύτερος ὡς ὁ τρίτος, εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ τοῦ αὐτοῦ λογισμοῦ, δι' οὗ εὑρίσκεται ὁ δεύτερος, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκεται καὶ ὁ τρίτος. Ἀλλ' ὁ δεύτερος εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως· ἄρα καὶ ὁ τρίτος ἤτοι ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου. Ἀφοῦ δ' εὑρεθῇ, τότε νοεῖται ὄχι ὡς ὁ δεύτερος, ἀλλ' ὡς λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον.

Π. χ. ἂν ζητῆται ὁ λόγος τοῦ 96 πρὸς τὸν 12, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς καθ' ὃν πρέπει νὰ νοῆται ὁ 96 πρὸς τὸν 12, ἤ, διότι εἶναι μεγαλήτερος ὁ 96 τοῦ 12, ἐκ πόσων 12 σύγκειται ὁ 96, ὁ 96 ἀναγκαίως νοεῖται ὅτι γίνεται ἐκ τοῦ 12 ὡς ὁ ζητούμενος λόγος ἐκ τῆς μονάδος του. Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν (64) νὰ νοῆται ὁ 96 καὶ ὅτι γίνεται ἐκ τοῦ ζητουμένου λόγου, ὡς ὁ 12 ἐκ τῆς μονάδος του, ἤτοι ὅτι ὁ 96 εἶναι δωδεκαπλάσιος τοῦ ζητουμένου λόγου· ὁπότε ἀντιστρόφως ὁ ζητούμενος λόγος

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

εἶναι δωδέκατον τοῦ 96· ἄρα ὁ λόγος οὗτος πρέπει νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 96 διὰ τοῦ 12. Οὕτω δ' εὑρίσκεται 8, ὅςτις τώρα νοεῖται ὄχι δωδέκατον τοῦ 96, ἀλλ' ὡς λόγος τοῦ 96 πρὸς τὸν 12, ἤτοι ὅτι ὁ 96 εἶναι ὀκτάκις 12. — Ὡσαύτως ζητουμένου τοῦ λόγου τοῦ $\frac{12}{15}$ πρὸς τὸν $\frac{9}{20}$, ὁ $\frac{12}{15}$ νοεῖται γινόμενον τοῦ $\frac{9}{20}$ ἐπὶ τὸν ζητούμενον λόγον. Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν ὁ $\frac{12}{15}$ νὰ νοῆται καὶ τοῦ ζητουμένου λόγου ἐπὶ τὸν $\frac{9}{20}$ γινόμενον, ἤτοι ὅτι ὁ $\frac{12}{15}$ εἶναι $\frac{9}{20}$ τοῦ λόγου· ὁπότε ἀντιστρόφως ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι τὰ $\frac{20}{9}$ τοῦ $\frac{12}{15}$, ἤτοι ὅ,τι εἶναι ἡ μονὰς τοῦ $\frac{9}{20}$ πρὸς αὐτόν· ἄρα ὁ λόγος οὗτος πρέπει νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{12}{15}$ διὰ τοῦ $\frac{9}{20}$. Οὕτω δ' εὑρίσκεται $\frac{240}{135}$ ἢ (92 καὶ 99) $\frac{16}{9}$ ἢ $1\frac{7}{9}$, ὅςτις νοεῖται ὡς λόγος τοῦ $\frac{12}{15}$ πρὸς τὸν $\frac{9}{20}$, ἤτοι δεικνύει ὅτι ὁ $\frac{12}{15}$ εἶναι ἅπαξ $\frac{9}{20}$ καὶ $\frac{7}{9}$ τοῦ $\frac{9}{20}$ κτλ.

Σημ. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ ὁ λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον καὶ ὁ δεύτερος οὗτος ἀριθμὸς εὑρίσκεται διὰ τοῦ αὐτοῦ λογισμοῦ, τῆς διαιρέσεως, τὸ πηλίκον, σημαῖνον πάντοτε τὸν εὑρισκόμενον διὰ τῆς διαιρέσεως ἀριθμόν, σημαίνει καὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον πρὸς τὸν διαιρετέον, ὁποία εἶναι ἡ μονὰς τοῦ διαιρέτου πρὸς αὐτόν, καὶ τὸν λόγον τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν διαιρέτην. Εἶναι δὲ ἤδη γνωστὸν ὅτι, ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ἑτεροειδεῖς, τότε τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον καὶ σημαίνει τὸ πρῶτον· ὅταν δ' ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ὁμοειδεῖς, τότε τὸ πηλίκον εἶναι ἑτεροειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον καὶ σημαίνει τὸν λόγον αὐτοῦ πρὸς τὸν διαιρέτην. Τοῦτο δὲ θέλομεν ἰδεῖ πολλάκις κατωτέρω εἰς μερικὰς περιστάσεις (ἰδὲ καὶ 130, ϛ').

103. Εἶναι εὔκολον νὰ πεισθῇ τις ὅτι ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς ὡρισμένης μονάδος εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἀριθμῶν ἀφῃρημένως νοουμένων· διότι ἡ μονάς των, ὅταν ἦναι ἡ αὐτή, δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἐπιῤῥοὴν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ λόγου αὐτῶν. Οἷον ὁ λόγος 8 πήχεων καὶ 4 πήχεων, ἢ 8 ὀκάδων καὶ 4 ὀκάδων, ἢ $\frac{8}{10}$ καὶ $\frac{4}{10}$, ἢ $\frac{8}{13}$ καὶ $\frac{4}{13}$ τῆς αὐτῆς μονάδος κτλ, εἶναι ὁ λόγος τοῦ 8 καὶ τοῦ 4. Ὅθεν βλέπει τις ἰδίως ὅτι ὁ *λόγος δύο ὁμωνύμων κλασματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ὁ λόγος τῶν ἀριθμητῶν των.* Ὡσαύτως ἐκ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τῶν εἰρημένων ἐν ἀρ. 89 εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοηθῇ ὅτι *ὁ λόγος δύο κλασματικῶν μονάδων εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν παρονομαστῶν των*. Π. χ. ὁ λόγος τῆς $\frac{1}{15}$ πρὸς τὴν $\frac{1}{45}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ 45 πρὸς τὸν 15· διότι τὸ $\frac{1}{15}$ ἔχον παρονομαστὴν τρίτον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ $\frac{1}{45}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{1}{45}$, ἤτοι ἔχει τὸν ἀντίστροφον λόγον τοῦ λόγου τοῦ 45 πρὸς τὸν 15 κτλ. Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ ὅταν ἦναι κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, ἄλλον παρὰ τὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὰς διαφόρους· γίνεται δὲ φανερὸν ἔκ τε τοῦ ἀρ. 61 καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως. Διὰ τῆς διαιρέσεως δὲ ἀριθμοῦ κλασματικοῦ ὁποιουδήποτε δι᾽ ἄλλου τοιούτου γίνεται δῆλον καὶ ὅτι ὁ λόγος αὐτῶν τῶν κλασματικῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῶν δύο γινομένων τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου. Ὁ λόγος τοῦ $\frac{5}{12}$ πρὸς τὸν $\frac{7}{9}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν τοῦ 45 πρὸς τὸν 84, καὶ ἀντιςρόφως.

104. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι᾽ ἄλλου εἶναι δυνατὸν πάντοτε νὰ παριστάνηται διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἐπειδή, ὅταν πολλαπλασιάζωνται κλασματικοῦ ἀριθμοῦ οἱ δύο ὅροι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἢ διαιρῶνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, προκύπτει ἄλλος κλασματικὸς ἰσοδύναμος (93) μὲ τὸν πρῶτον, ἔχων τοὺς ὅρους του ἢ ταυτοπλασίους τῶν ὅρων τοῦ πρώτου ἢ ταυτὰ πολλοστὰ αὐτῶν, καὶ ἐπειδὴ δύναται ὁ προκύπτων κλασματικὸς νὰ νοῆται πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (68), διὰ ταῦτα ἐξάγεται γενικῶς μὲν ὅτι *τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν καὶ τὸ πηλίκον ἢ τῶν αὐτῶν πολλαπλασίων αὐτῶν ἢ τῶν αὐτῶν πολλοστῶν των εἶναι τὸ αὐτὸ ἢ ἰσοδύναμον*, ἰδίως δὲ ὅτι *ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν καὶ λόγος ἢ τῶν αὐτῶν πολλαπλασίων των ἢ τῶν αὐτῶν πολλοστῶν των εἶναι ὁ αὐτὸς ἢ ἰσοδύναμος*.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Β. ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

Περὶ διαιρετῶν καὶ ἰδίως περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου διαιρεσίμου.

105. Εἴπομεν (80) τί εἶναι διαιρετὸς ἢ διαιρέσιμος ἀριθμὸς δι' ἄλλου καὶ τί εἶναι διαιρέτης ἄλλου κατὰ μερικὴν σημασίαν.

Ἕκαστος δ' ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἑαυτοῦ καὶ διὰ τῆς μονάδος του, ἤτοι δύναται νὰ νοῆται γινόμενον ἑαυτοῦ καὶ τῆς μονάδος του. Τὸν δὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν, ὅςτις δὲν ἔχει ἄλλους παρὰ τοὺς δύο τούτους διαιρέτας, ὀνομάζομεν *πρωτότυπον* (α), οἷον τοὺς 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, κτλ. Τὸν δὲ ἀκέραιον τὸν ἔχοντα ἐκτὸς τῶν δύο τούτων καὶ ἄλλους διαιρέτας καλοῦμεν *παράγωγον*, οἷον τοὺς 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, κτλ, οἵτινες εἶναι γινόμενα ἄλλος ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ὥστε τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν οἱ μὲν εἶναι πρωτότυποι, οἱ δὲ παράγωγοι ἐκ τῶν πρωτοτύπων.

106. Δύο ἢ πλειότεροι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δυνατὸν νὰ ἦναι διαιρετοὶ δι' ἑνὸς ἢ διὰ πλειοτέρων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς ὀνομάζομεν *συνδιαιρετούς*, ἕκαστος δὲ διαιρέτης αὐτῶν καλεῖται *κοινὸς διαιρέτης των*, οἷον ὁ 6 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 18 καὶ τοῦ 30, οὗτοι δὲ εἶναι συνδιαιρετοὶ ἀριθμοί. Δύο δὲ ἢ πλειοτέρους ἀκεραίους ἀριθμούς, μὴ ἔχοντας μηδένα ἄλλον παρὰ τὴν μονάδα κοινὸν διαιρέτην, ὀνομάζομεν *ἀσυνδιαιρέτους* (β), οἷον τοὺς 12 καὶ 7, τοὺς 15 καὶ 8, κτλ.

(α). Κοινῶς ὀνομάζεται πρῶτος τοιοῦτος ἀριθμός. Ἀλλὰ πρῶτοι συνήθως λέγονται καὶ οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ἐνῷ ἄλλως δὲν ἐξηγεῖ ἀκριβῶς τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ὡρίσθη νὰ σημάνῃ ἡ λέξις πρῶτος. Ἐπειδὴ δ' ἕκαστος ἀριθμὸς πρῶτον μὲν νοῆται ὅτι γίνεται ἐκ τῆς μονάδος δι' ἐπαναλήψεως αὐτῆς, διότι σύγκειται ἐκ μονάδων, ἔπειτα ὅτι δύνανταί τινες νὰ γείνωσι καὶ ἐξ ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν δι' ἐπαναλήψεως αὐτῶν, ἐνῷ ἄλλοι δὲν ἔχουσι ταύτην τὴν ἰδιότητα, οὗτοι ὡς μόνον κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον ἢ τύπον δυνάμενοι νὰ γείνωσιν εἶναι ὀρθότερον ὀνομαστέοι πρωτότυποι· οἱ δὲ ἄλλοι δυνατὸν νὰ ὀνομάζωνται δευτερότυποι, καὶ ἔτι τινὲς τούτων τριτότυποι, οἱ ὄντες δυνάμεις ἑνὸς ἀριθμοῦ.

(β). Κοινῶς οἱ ἀσυνδιαίρετοι ἀριθμοὶ ὀνομάζονται κατὰ τὸν Εὐκλείδην πρῶ-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

107. Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχωσι πολλοὺς κοινοὺς διαιρέτας, ὁ μεγαλήτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν ὀνομάζεται αὐτὸ τοῦτο *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν* (α). Π. χ. ὁ μὲν 24 ἔχει διαιρέτας τοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, ὁ δὲ 36 ἔχει τοὺς 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36· κοινοὶ δὲ διαιρέται τῶν δύο ἀριθμῶν 24 καὶ 36 εἶναι οἱ 1, 2, 3, 4, 6, 12· τούτων δὲ μέγιστος εἶναι ὁ 12· ὁ 12 λοιπὸν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 24 καὶ τοῦ 36.

108. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν ἀρ. 102 δῆλον ὅτι ὁ ἀκέραιος διαιρετὸς δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου, ἤτοι καὶ τὸ πηλίκον αὐτὸ εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀριθμοῦ. Ἄρα πᾶς διαιρετὸς δι' ἀκεραίου ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, οἵτινες εἶναι δύο του παράγοντες. Ὁ δὲ μὴ διαιρετὸς δι' ἀκεραίου ἀκέραιος ἀριθμὸς δῆλον ὅτι εἶναι κεφάλαιον τοῦ γινομένου τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν δι' οὗ διηρέθη ἀριθμὸν καὶ τοῦ καταλοίπου τῆς διαιρέσεως, ὅπερ εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τοῦ πηλίκου.

Ὡσαύτως εἶναι φανερὸν (64, 97) ὅτι ὄχι μόνον τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν δι' ἑκατέρου παράγοντος αὐτοῦ, ἀλλ' ὅτι καὶ *τὸ γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν δι' ἑκάστου παράγοντος αὐτοῦ· πηλίκον δ' αὐτοῦ εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παραγόντων του*. Διότι τὸ γινόμενον αὐτὸ δύναται νὰ νοῆται γινόμενον ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν καὶ τοῦ γινομένου ὅλων τῶν ἄλλων.

Εἶναι δ' εὔκολον νὰ πληροφορηθῇ τις καὶ ὅτι *ὁ διαιρέτης τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων γινομένου τινὸς εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ γινομένου αὐτοῦ*. Διότι τοῦ διαιρετοῦ παράγοντος ὄν-

---

τοι πρὸς ἀλλήλους κοινότερον δὲ πρῶτοι μεταξύ των. Ἀλλὰ τὸ ὄνομα τοῦτο, ἂν δὲν ἀπατῶμαι, δὲν εἶναι τόσον κατάλληλον ὅσον τὸ ἀσυνδιαίρετοι, κατὰ τὸ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι τῆς γεωμετρίας ἐσχηματισμένον.

(α). Τινὲς κακῶς τὸν ὀνομάζουσι μέγιστον καὶ κοινὸν διαιρέτην· διότι τὸ μέγιστος δὲν παριστάνει ἰδιότητα τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ ἰδιότητα τοῦ κοινοῦ διαιρέτου.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τος γινομένου τοῦ διαιρέτου αὐτοῦ καὶ τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως, τὸ γινόμενον τῶν πολλῶν παραγόντων δύναται νὰ νοῆται γινόμενον τῶν ἄλλων ὅλων παραγόντων καὶ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου τοῦ διαιρετοῦ παράγοντος ἀντὶ νὰ νοῆται γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παραγόντων καὶ τοῦ διαιρετοῦ παράγοντος. Τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετοῦ παράγοντος ὡς παράγων καὶ τοῦ γινομένου εἶναι διαιρέτης καὶ αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, διὰ τοῦτο τὸ προειρημένον μερικώτερον ἐκφράζεται συνήθως καὶ οὕτως, *ὁ διαιρέτης ἀριθμοῦ τινος εἶναι διαιρέτης καὶ ὁποιουδήποτε πολλαπλασίου αὐτοῦ*.

109. Μέγιστος διαιρέτης ἀριθμοῦ τινος εἶναι αὐτὸς ὁ ἴδιος· διότι πηλίκον αὐτοῦ εἶναι ἡ μονάς του, ἥτις εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· ἐλάχιστος δὲ ἡ μονάς του. Ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι διαιρέται αὐτοῦ εἶναι μεγαλήτεροι μὲν τῆς μονάδος, μικρότεροι δὲ αὐτοῦ. Καὶ ἂν μὲν ἦναι διαιρέτης αὐτοῦ ὁ 2, εἶναι διαιρέτης καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπερ θέλει εἶσθαι ὁ ἀμέσως μικρότερος τοῦ μεγίστου, μέγιστος δὲ ὅλων τῶν ἄλλων, ἂν ἔχῃ· ἂν δὲ ἦναι διαιρέτης αὐτοῦ καὶ ὁ 3, εἶναι διαιρέτης αὐτοῦ καὶ τὸ τρίτον του, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεός του, μέγιστος δὲ τῶν λοιπῶν, ἂν ἔχῃ· καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τῆς τετραγωνικῆς του ῥίζης (Πρ. Α. 89) ἢ τινος προσεγγίζοντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς αὐτήν, ἂν δὲν ἦναι τετράγωνος.

Ἂν λοιπὸν θέλῃ τις νὰ εὕρῃ ὅλους τοὺς διαιρέτας ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, ἄλλο δὲν ἔχει νὰ πράξῃ εἰμὴ νὰ δοκιμάσῃ κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, κτλ μέχρι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτοῦ ἢ τινος προσεγγίζοντος εἰς αὐτὴν ἀριθμοῦ, ἂν ἦναι διαιρέται αὐτοῦ, διαιρῶν αὐτὸν δι' ἑνὸς ἑκάστου τούτων κατὰ σειράν· καὶ ὅσοι τούτων ἀναδειχθῶσι διαιρέται καὶ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ δι' ἑκάστου τούτων θέλουσιν εἶσθαι ὅλοι οἱ διαιρέται αὐτοῦ. Οὕτως εὑρίσκει τις ὅτι ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ ἀριθμοῦ 852 εἶναι 1, 2, 3, 4, 6, 12, 71, 142, 213, 284, 426, 852.

Σημ. Ἐν τῷ Συμπληρώματι τῆς Ἀριθμητικῆς θέλομεν ἐκθέ-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

σει ἄλλον τρόπον τοῦ εὑρίσκειν ὅλους τοὺς διαιρέτας ἀριθμοῦ συντομώτερον.

110. *Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν καὶ τῆς διαφορᾶς των.*

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτων εἶναι ἀναγκαῖον πρῶτον νὰ ἐνθυμῆταί τις ὅτι, *ὅταν ἀριθμός τις ἦναι κεφάλαιον δύο ἄλλων, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου τῶν δύο μερῶν του εἶναι καὶ αὐτὸ κεφάλαιον τῶν δύο πηλίκων τῆς διαιρέσεως τῶν δύο μερῶν του διὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῶν·* διότι, ἐάν τε αὐτὸς διαιρεθῇ διὰ τοῦ διαιρέτου, ἐάν τε ἑκάτερον τῶν μερῶν του καὶ τὰ πηλίκα τούτων προστεθῶσι, τὸ αὐτὸ πηλίκον θέλει προκύψει· οὕτω κυρίως εὑρίσκεται τὸ πηλίκον τῶν συνθέτων ἀριθμῶν.

Ὡς πρὸς τὸ πρῶτον μέρος, ἐπειδὴ οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ δύο πηλίκα των εἶναι ἀκέραια· ἑπομένως καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν εἶναι ἀκέραιον. Ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν τῶν πηλίκων εἶναι αὐτὸ τὸ πηλίκον τοῦ κεφαλαίου τῶν δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν διῃρημένου· ἄρα τὸ πηλίκον τοῦ κεφαλαίου διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν μερῶν του διῃρημένου εἶναι ἀκέραιον· ἄρα ὁ *κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν.*

Ὡς πρὸς τὸ δεύτερον μέρος, παρατηροῦντες ὅτι, ὅταν ἀριθμός τις ἦναι διαφορὰ δύο ἄλλων, ὁ ἕτερος τούτων εἶναι κεφάλαιον τοῦ ἄλλου καὶ τῆς διαφορᾶς των, καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου εἶναι κεφάλαιον τῶν δύο ἄλλων πηλίκων, ἤτοι τοῦ πηλίκου τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου, βλέπομεν ὅτι, ὄντος ἀκεραίου τοῦ πηλίκου τοῦ κεφαλαίου διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου, τὸ κεφάλαιον τῶν δύο μερικῶν πηλίκων εἶναι ἀκέραιον. Ἀλλὰ τὸ ἕτερον τούτων, ἤτοι τὸ πηλίκον τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου, εἶναι καὶ αὐτὸ ἀκέραιον· ἄρα καὶ τὸ ἄλλο, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου, εἶναι ἀκέραιον· εἰδεμὴ οὐδὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο μερικῶν πηλίκων ἤθελεν εἶσθαι ἀκέραιον. Ἄρα ὁ *κοινὸς διαιρέτης*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἀφοῦ τὸ πηλίκον αὐτῆς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου εἶναι ἀκέραιον.

Εἶναι εὔκολον δὲ ν' ἀποδειχθῇ τώρα ὅτι ὁ κοινὸς διαιρέτης καὶ πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν.

111. Εἴπομεν ἐν τῇ Πρακτικῇ Ἀριθμητικῇ (47) ὅτι ὁ 2 εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν *ἀρτίων* ἀριθμῶν· ὁ δὲ 3 καὶ ὁ 9 εἶναι διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ, οὗτινος τὸ κεφάλαιον τῶν ἐξ ὧν σύγκειται ἁπλῶν ἀριθμῶν, ὡς ἀριθμῶν μονάδων θεωρουμένων, εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ διὰ 9· ὁ δὲ 4 εἶναι διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ, οὗτινος ὁ ἐκ τῶν δύο δεξιῶν ψηφίων παριστανόμενος ἀριθμὸς εἶναι διὰ 4 διαιρετός· ὁ δὲ 5 εἶναι διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ, οὗτινος τὸ δεξιὸν ψηφίον εἶναι 0 ἢ 5.

Πρὸς ἀπόδειξιν δὲ τοῦ διαιρετοῦ τῶν ἀριθμῶν διὰ 2, 3 κτλ ἀρκεῖ ἕκαστος αὐτῶν ν' ἀναδειχθῇ ἢ κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν διαιρεσίμων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ 2 ἢ τοῦ 3 κτλ, ἢ πολλαπλάσιος διαιρεσίμου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 2 ἢ τοῦ 3 κτλ.

Καὶ πᾶς μὲν ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 2· ἀλλ' ὁ 2 εἶναι διαιρέτης τοῦ 2· ἄρα ὁ 2 εἶναι διαιρέτης καὶ παντὸς ἀρτίου ἀριθμοῦ, ὡς πολλαπλασίου ὄντος τοῦ 2. Ἐκ τούτου δὲ δῆλον καὶ ὅτι οὐδεὶς περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2, ὡς συγκείμενος ἐξ ἀρτίου καὶ μονάδος.

Ὡσαύτως πληροφορεῖταί τις ὅτι καὶ ὁ ἔχων 0 τὸ δεξιόν του ψηφίον εἶναι διαιρετὸς διὰ 5· διότι τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 10, ὁ δὲ 10 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Ὁ δὲ ἔχων 5 τὸ δεξιόν του ψηφίον εἶναι μὲν καὶ αὐτὸς πολλαπλλάσιος τοῦ 5, καὶ διὰ τοῦτο διαιρετὸς διὰ 5, ἀλλὰ δύναται νὰ νοηθῇ καὶ κεφάλαιον τῶν 5 μονάδων του καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις μένει ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσιν αἱ 5 μονάδες του, καὶ ὅστις εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιος τοῦ 10. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 5 εἶναι διαιρέτης ἑκατέρου τούτων δῆλον ὅτι εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν, ἤτοι τοῦ ἔχοντος 5 τὸ δεξιόν του ψηφίον ἀριθμοῦ.

Ὡσαύτως καὶ ἀριθμός, οὗτινος τὰ δυο δεξιὰ ψηφία παριστάνουσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4, δύναται νὰ νοηθῇ κεφάλαιον αὐτοῦ τοῦ διψηφίου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις μένει ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ αὐτός, καὶ ὅστις εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιος τοῦ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

100, ὡς ἔχων δύο μηδενικὰ ἀντὶ τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 100, ἐπομένως καὶ τοῦ πολλαπλασίου αὐτοῦ, ἤτοι τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ κεφαλαίου· ἐὰν λοιπὸν ἦναι ἐνταυτῷ διαιρέτης καὶ τοῦ ἄλλου μέρους, ὡς ἐδῶ ὑποτίθεται, δῆλον ὅτι εἶναι διαιρέτης ὁ 4 καὶ τοῦ κεφαλαίου ἤτοι τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμοῦ.

Ἐὰν δὲ ὁ διψήφιος ἀριθμὸς ἦναι 25, 50, 75, ἢ ἀντὶ τούτων ἦναι 00, δῆλον ὡσαύτως γίνεται ὅτι ὁ ἔχων τοιοῦτον διψήφιον ἀριθμὸν δεξιά του ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 25.

Ἕκαστος δὲ διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9 διαιρετὸς ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν, τοῦ κεφαλαίου ὅλων τῶν ἐξ ὧν σύγκειται ἁπλῶν, θεωρουμένων ὡς ἀριθμῶν μονάδων, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅςτις μένει ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ, καὶ ὅςτις εἶναι πάντοτε διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 9. Τοῦτο δὲ γίνεται δῆλον οὕτως.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οἱ κατὰ μονάδα μικρότεροι τοῦ 10, τοῦ 100, τοῦ 1000 κτλ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 9, διότι εἶναι 9, 99, 999 κτλ· ἐπομένως εἶναι δι' αὐτῶν διαιρετοὶ καὶ οἱ κατὰ 2 μονάδας μικρότεροι τοῦ 20, 200, 2000 κτλ, καὶ οἱ κατὰ 3 μονάδας μικρότεροι τοῦ 30, 300, 3000 κτλ, . . . καὶ οἱ κατὰ 9 μονάδας μικρότεροι τοῦ 90, 900, 9000 κτλ.

Μετὰ ταῦτα δ' ἐννοεῖται ὅτι, ἂν ἀπὸ παντὸς ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῶσιν αἱ μονάδες του, ἀπὸ δὲ τῶν ἀριθμῶν τῶν δεκάδων του, τῶν ἑκατοντάδων του, τῶν χιλιάδων κτλ τόσαι μονάδες ἀφ' ἑκάστου, ὅσας αὐτὸς ἔχει μονάδας τῆς τάξεώς του, οὕτω θέλουσι μὲν ἀφαιρεθῇ ἀφ' ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν του, ὡς ἀριθμῶν μονάδων θεωρουμένων, θέλουσι δὲ μείνει παρὰ ἕνα τόσοι ἀριθμοί, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός, ὅλοι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 9, ἐπομένως καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν. Τοῦτο δὲ τὸ κεφάλαιον εἶναι διαφορὰ τοῦ προκειμένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν ἀφαιρεθεισῶν πρότερον μονάδων, ἢ ὅπερ ταυτόν, ὁ ἀριθμὸς εἶναι κεφάλαιον τῶν ἀφαιρεθεισῶν μονάδων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν μετὰ τὰς ἀφαιρέσεις μεινάντων ἀριθμῶν. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι πάν-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 καὶ τοῦ 9· ἂν λοιπὸν ἦναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 καὶ τοῦ 9 καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀφαιρεθεισῶν μονάδων, ἤτοι τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν, ὡς ἀριθμῶν μονάδων θεωρουμένων, ὡς ἐδῶ ὑποτίθεται, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν ἤτοι ὁ προκείμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 9. Ἐκ δὲ τούτων βλέπει τις ὅτι τὸ διὰ 3 ἢ 9 διαιρετὸν παντὸς ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοῦ διαιρεσίμου τοῦ κεφαλαίου ὅλων τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν του, ὡς ἀριθμῶν μονάδων θεωρουμένων.

Π. χ. ἂν ἀπὸ τοῦ 46872 ἀφαιρεθῶσιν αἱ 2 μονάδες του, 7 δὲ μονάδες ἀπὸ τῶν 7 δεκάδων του, 8 μονάδες ἀπὸ τῶν 8 ἑκατοντάδων του, 6 μονάδες ἀπὸ τῶν 6 χιλιάδων του καὶ 4 μονάδες ἀπὸ τῶν 4 δεκάδων χιλιάδος, ἀφαιροῦνται οὕτως 27 μονάδες ἀπ' αὐτοῦ, μένουσι δὲ 63, 702, 5994, 39996, ὅλοι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3 καὶ τοῦ 9, ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμά των 46845. Ὁ 46872 λοιπὸν οὕτω κατήντησε κεφάλαιον τοῦ 46845, καὶ τοῦ 27, ὧν ὁ πρῶτος εἶναι πάντοτε διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 καὶ τοῦ 9. Ἀλλὰ καὶ ὁ 27 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 9· ἄρα καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν ἤτοι ὁ 46872.

Σημ. Ὅταν οἱ προειρημένοι χαρακτῆρες τοῦ διαιρεσίμου τῶν ἀριθμῶν διὰ 2, 3, 4, 5, 9, 25 δὲν ἔχωσι χώραν, οἱ ἀριθμοὶ ἐκεῖνοι δὲν εἶναι διαιρετοὶ δι' αὐτῶν. Ἂν δέ τις ἄλλος παρὰ τούτους ἀριθμὸς ἦναι διαιρέτης ἀριθμοῦ τινος δεδομένου ἢ ὄχι ἄλλως δὲν ἔχομεν νὰ τὸ πληροφορηθῶμεν εἰμὴ διὰ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄλλου.

112. Εἶναι ἤδη γνωστὴ ἡ πρᾶξις ἡ πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν (Π. Α. 50). Ἐνταῦθα δὲ θέλομεν ἐκθέσει τοὺς λόγους, οἵτινες πείθουσιν ὅτι ὁ διὰ τῆς πράξεως ἐκείνης εὑρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (α) τῶν δύο ἀριθμῶν. Προκείσθω δὲ νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 360 καὶ 276.

Ἐπειδὴ ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ 276 εἶναι αὐτὸς ὁ ἴδιος (109), διὰ τοῦτο καταλαμβάνομεν πρῶτον ὅτι ὁ ζητούμενος

(α) Συντομίας χάριν θέλομεν μεταχειρίζεσθαι τ' ἀρκτικὰ γράμματα μ. κ. δ. τῶν λέξεων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἀντὶ ὁλοκλήρων αὐτῶν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

μ. κ. δ. ἀδύνατον νὰ ἦναι μεγαλήτερος τοῦ μικροτέρου τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἔπειτα εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν ὁ 276 ἦναι διαιρέτης καὶ τοῦ 360, αὐτὸς θέλει εἶσθαι ὄχι μόνον κοινὸς διαιρέτης τοῦ 376 καὶ τοῦ 276, ἀλλὰ καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν· εἰδεμή, θέλει εἶσθαι τὸ ἥμισυ τοῦ 276, ἢ τὸ τρίτον κτλ (109). Ἐκ δὲ τούτων πληροφορούμεθα ὅτι πρῶτον πρέπει *νὰ διαιρεθῇ ὁ μεγαλήτερος* 360 *διὰ τοῦ μικροτέρου* 276, ἵνα πληροφορηθῶμεν ἂν ἦναι ὁ 276 διαιρέτης τοῦ 360. Ἡ διαίρεσις δ' αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ 276 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 360, διότι μένει κατάλοιπον 84· ἐνταυτῷ δὲ ὅτι ὁ 360 εἶναι κεφάλαιον τοῦ 276 καὶ τοῦ καταλοίπου 84.

Τώρα ἔπρεπε νὰ δοκιμάσωμεν κατὰ σειρὰν τὸ ἥμισυ τοῦ 276, τὸ τρίτον του κτλ, ἂν ἦναι διαιρέτης τοῦ 360. Ἀλλ' ἀρκεῖ νὰ δοκιμάσωμεν ἕνα ἕκαστον αὐτῶν ἂν ἦναι διαιρέτης τοῦ καταλοίπου 84. Διότι ἀδύνατον νὰ ἦναί τις αὐτῶν διαιρέτης τοῦ 360 καὶ νὰ μὴ ἦναι διαιρέτης καὶ τοῦ 84· διότι ἕκαστος αὐτῶν ὡς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ τοῦ 360 θέλει εἶσθαι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν 84. Ὁ δὲ πρῶτος αὐτῶν, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ 276, τὸ τρίτον αὐτοῦ κτλ, ὅςτις θέλει ἀναδειχθῇ διαιρέτης τοῦ 84, θέλει εἶσθαι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276. Ἀλλ' ὁ πρῶτος, ὅςτις θέλει εἶσθαι διαιρέτης τοῦ 84, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι μεγαλήτερος τοῦ 84, ἀλλ' ἴσος μὲ αὐτόν, εἰδεμὴ μὲ τὸ ἥμισυ ἢ μὲ τὸ τρίτον του κτλ, διότι αὐτοὶ μόνοι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρέται τοῦ 84· ὥστε πρέπει τώρα πρῶτον νὰ ζητήσωμεν εἶναί τις τῶν διαιρετῶν τοῦ 276 ἴσος μὲ τὸν 84, ἢ ὅπερ ταυτόν, ὁ 84 εἶναι διαιρέτης τοῦ 276· διότι, ἂν αὐτὸς ἦναι διαιρέτης τοῦ 276, εἶναι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276. Ἰδοὺ διατὶ δεύτερον *πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ μικρότερος* 276 *διὰ τοῦ πρώτου καταλοίπου* 84. Ἡ διαίρεσις δ' αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ 84 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 276, διότι μένει κατάλοιπον 24, ἐπομένως ὅτι ὁ 84 δὲν εἶναι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276· ἐνταυτῷ δὲ ὅτι ὁ 276 εἶναι κεφάλαιον τοῦ καταλοίπου 24 καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ 84 ἤτοι τοῦ 252.

Ἀφοῦ εἴδομεν ὅτι οὐδεὶς τῶν διαιρετῶν τοῦ 276 εἶναι ἴσος μὲ τὸν 84, ἢ ὅπερ ταυτόν, ὅτι ὁ 84 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

276, τώρα ἔπρεπε νὰ ἐξετάσωμεν ἄν τις τῶν διαιρετῶν τοῦ 276 εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ 84 ἢ μὲ τὸ τρίτον αὐτοῦ κτλ, ἢ ὅπερ ταυτὸν, ἂν τὸ ἥμισυ τοῦ 84 ἢ τὸ τρίτον αὐτοῦ κτλ ἦναι διαιρέτης τοῦ 276. Ἀλλ' ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν ἕνα ἕκαστον αὐτῶν ἂν ἦναι διαιρέτης τοῦ καταλοίπου 24. Διότι ἀδύνατον νὰ ἦναι τούτων τις διαιρέτης τοῦ 276 καὶ νὰ μὴ ἦναι καὶ τοῦ 24 διαιρέτης· διότι ἕκαστος αὐτῶν ὡς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 84 καὶ τοῦ 276, ἑπομένως κοινὸς διαιρέτης καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ 84 ἤτοι τοῦ 252 καὶ τοῦ 276, εἶναι καὶ τῆς διαφορᾶς των 24 διαιρέτης, ἤτοι τοῦ δευτέρου καταλοίπου. Ὁ δὲ πρῶτος αὐτῶν, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ 84 ἢ τὸ τρίτον κτλ, ὅστις ἀναδειχθῇ διαιρέτης τοῦ 24, αὐτὸς θέλει εἶσθαι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276 δὲν θέλει εἶσθαι μεγαλήτερος τοῦ δευτέρου καταλοίπου 24, ἀλλ' ἴσος ἢ μικρότερος αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δ' ὁ 24 εἶναι μ. δ. αὐτοῦ, πρῶτον πρέπει νὰ ζητήσωμεν εἶναί τις τῶν διαιρετῶν τοῦ 84 ἴσος μὲ τὸν 24, ἢ ὅπερ ταυτὸν, ὁ 24 εἶναι διαιρέτης τοῦ 84· διότι τότε ὁ 24 θέλει εἶσθαι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276. Ἰδοὺ διατὶ τρίτον *πρέπει νὰ διαιρεθῇ τὸ πρῶτον κατάλοιπον 84 διὰ τοῦ δευτέρου* 24. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ 24 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 84, διότι μένει κατάλοιπον 12, ἑπομένως ὅτι δὲν εἶναι ο ζητούμενος μ. κ. δ. Ἐν τοσούτῳ ὁ 84 ἀνεδείχθη κεφάλαιον τοῦ καταλοίπου 12 καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ διαιρέτου 24 ἤτοι τοῦ 72.

Τώρα ἔπρεπε νὰ δοκιμάσωμεν ἄν τις τῶν διαιρετῶν τοῦ 84 ἦναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ 24 ἢ μὲ τὸ τρίτον αὐτοῦ κτλ, ἢ ὅπερ ταυτὸν, ἂν τὸ ἥμισυ τοῦ 24 ἦναι διαιρέτης τοῦ 84, ἢ τὸ τρίτον αὐτοῦ κτλ· διότι ὅστις αὐτῶν πρῶτος ἀναδειχθῇ διαιρέτης τοῦ 84, αὐτὸς θέλει εἶσθαι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276. Ἀλλ' ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν ἂν τὸ ἥμισυ τοῦ 24 ἦναι διαιρέτης τοῦ καταλοίπου 12 τῆς διαιρέσεως τοῦ 84 διὰ 24, ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, ἢ ὅπερ ταυτὸν, ἂν τὸ κατάλοιπον 12 ἦναι διαιρέτης τοῦ 24. Ἰδοὺ διατὶ τέταρτον *πρέπει νὰ διαιρεθῇ τὸ δεύτερον κατάλοιπον* 24 *διὰ τοῦ τρίτου καταλοίπου* 12. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 12 εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 24, ἤτοι διαιρέτης αὐτοῦ,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

αὐτὸς ὁ 12 εἶναι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276.

113. Ἐκ τῶν εἰρημένων πληροφορεῖταί τις ὅτι *πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἂν μείνῃ κατάλοιπον, νὰ διαιρῇ διὰ τούτου τὸν μικρότερον, καὶ ἂν μείνῃ κατάλοιπον, νὰ διαιρῇ διὰ τούτου τὸ πρῶτον κατάλοιπον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς*· προσέτι δὲ ὅτι, *ὁποῖον τῶν καταλοίπων εἶναι διαιρέτης τοῦ πρὸ αὐτοῦ καταλοίπου, αὐτὸ εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.* Τοῦτο δὲ τὸ τελευταῖον ἀποδεικνύεται καὶ κατ' ἄλλον τρόπον τὸν ἑξῆς.

Ἐκτελοῦντες τὴν προειρημένην πρᾶξιν ἐπὶ τῶν 360 καὶ 276 εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τρίτον κατάλοιπον 12 εἶναι διαιρέτης τοῦ δευτέρου καταλοίπου 24. Λέγω δὲ ὅτι ὁ 12 εἶναι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276.

	1	3	3	2
360	276	84	24	12
84	24	12	0	

Πρὸς βεβαίωσιν τούτου ἀνάγκη ν' ἀποδείξωμεν δύο τινά, πρῶτον ὅτι ὁ 12 εἶναι *κοινὸς* διαιρέτης τοῦ 360 καὶ τοῦ 276, ἔπειτα ὅτι εἶναι ὁ *μέγιστος* τῶν κοινῶν διαιρετῶν τοῦ 360 καὶ τοῦ 276.

Πρῶτον ὁ 12 διαιρέτης ὢν τοῦ 24 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ τριπλασίου αὐτοῦ 72, κοινὸς δὲ διαιρέτης ὢν ἑαυτοῦ καὶ τοῦ 72 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου των 84. Πάλιν ὁ 12 διαιρέτης ὢν τοῦ 84 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ τριπλασίου του 252, κοινὸς δὲ διαιρέτης ὢν τοῦ 24 καὶ τοῦ 252 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν 276. Τελευταῖον κοινὸς διαιρέτης ὢν ὁ 12 τοῦ 84 καὶ τοῦ 276 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν 360. Ἄρα ὁ 12 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ τοῦ 276.

Ἔπειτα πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ τοῦ 276 εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς των 84, ἑπομένως καὶ τοῦ τριπλασίου αὐτῆς 252. Πάλιν πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ τοῦ 276 κοινὸς διαιρέτης ὢν καὶ τοῦ 276 καὶ τοῦ 252 εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς των 24, ἑπομένως καὶ τοῦ τριπλασίου αὐτῆς 72. Τελευταῖον πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ τοῦ 276, κοινὸς διαιρέτης ὢν καὶ τοῦ 84 καὶ τοῦ 72 εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς των 12. Ἐκ δὲ τούτου βλέπομεν

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ὅτι οὐδεὶς τῶν κοινῶν διαιρετῶν τοῦ 360 καὶ τοῦ 276 εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 12, διότι ἀνάγκη νὰ ἦναι διαιρέτης αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 12 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ τοῦ 276, καὶ ἐπειδὴ ἄλλος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν μεγαλήτερος τοῦ 12 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ, διὰ ταῦτα ὁ 12 εἶναι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν ἦναι ἐνταυτῷ διαιρέτης καὶ ἑνὸς ἑκάστου τῶν καταλοίπων τῶν διαιρέσεων, δι' ὧν εὑρίσκεται αὐτός.

Παρατηρητέον ἔτι ὅτι, τῶν δύο ἀριθμῶν ὄντων πολλαπλασίων τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, ἕκαστος διαιρέτης τούτου εἶναι κοινὸς διαιρέτης ἐκείνων (108).

114. Ὅταν δὲ διαιρέτης τοῦ πρὸ αὐτοῦ καταλοίπου εὑρίσκηται ἡ μονάς, δῆλον ὅτι οἱ δύο ἀριθμοί, ὧν ζητεῖται ὁ μ. κ. δ., εἶναι ἀσυνδιαίρετοι. Πολλάκις δὲ πρὶν καταντήσωμεν εἰς τὴν μονάδα πληροφορούμεθα ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἀσυνδιαίρετοι, ἐὰν ἓν τῶν καταλοίπων ἦναι πρωτότυπος ἀριθμὸς καὶ δὲν ἦναι διαιρέτης τοῦ πρὸ αὐτοῦ καταλοίπου. Διότι, ἂν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἦσαν ἀσυνδιαίρετοι, ἀλλ' εἶχον ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα, οὗτος, ὡς ἤδη παρετηρήσαμεν, ἔπρεπε νὰ ἦναι διαιρέτης ἑνὸς ἑκάστου καταλοίπου, ἐπομένως καὶ τοῦ πρωτοτύπου καταλοίπου. Ἀλλὰ τούτου διαιρέτης ἄλλος παρ' ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα δὲν ὑπάρχει· ἄρα ὁ ἕτερος τούτων πρέπει νὰ ἦναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἀλλ' αὐτὸς δὲν εἶναι, διότι ὑποτίθεται ὅτι δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ πρὸ αὐτοῦ καταλοίπου· ἄρα μόνος διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν μένει ἡ μονάς· ἄρα οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἀσυνδιαίρετοι. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εἶναι περιττὸν νὰ προάγωμεν τὴν πρᾶξιν.

115. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων αὐτῶν θέλουσιν εἶσθαι ἀσυνδιαίρετα.* Π. χ. τὰ πηλίκα 30 καὶ 23 τῶν διαιρέσεων τοῦ 360 καὶ τοῦ 276 διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν 12 εἶναι ἀσυνδιαίρετα. Διότι, ἂν εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην, ἐπειδὴ ὁ 360 εἶναι διαιρετὸς διὰ 12, τὸ δὲ πηλίκον 30 διὰ τοῦ ὑποτεθέντος κοινοῦ διαιρέτου αὐτοῦ καὶ τοῦ 23, δῆλον (100) ὅτι ὁ 360 ἤθελεν

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

εἶσθαι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου τοῦ μ. κ. δ. 12 καὶ τοῦ ὑποτεθέντος κοινοῦ διαιρέτου τοῦ 30 καὶ τοῦ 23. Ὡσαύτως δῆλον ὅτι καὶ ὁ 276 ἤθελεν εἶσθαι διαιρετὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ γινομένου. Ἀλλὰ τότε μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ τοῦ 276 ἤθελεν εἶσθαι ὄχι ὁ 12, ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτοῦ καὶ τοῦ ὑποτεθέντος κοινοῦ διαιρέτου, ὅπερ εἶναι ἄτοπον· ἄρα τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος πηλίκα εἶναι ἀσυνδιαίρετα.

116. Πολλοὶ ἀριθμοὶ δυνατὸν νὰ ἦναι διαιρέται κοινοὶ πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν. Π. χ. οἱ 5, 6, 8 εἶναι διαιρέται τοῦ γινομένου αὐτῶν 240, καὶ ἐπομένως ὅλων τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ· δυνατὸν δὲ νὰ ἦναι διαιρέται καὶ ἄλλων ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 240. Εὐκόλως δ' ἐννοεῖται ὅτι εἷς τῶν πολλῶν τούτων διαιρεσίμων δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν διαιρετῶν εἶναι ὁ μικρότατος πάντων τῶν διαιρεσίμων, καὶ ὀνομάζεται διὰ τοῦτο *ἐλάχιστος διαιρέσιμος δι' ἑκάστου πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν*. Περὶ δὲ τοῦ πῶς εὑρίσκεται τοιοῦτος ἀριθμός, ὅςτις εἶναι πολλάκις χρήσιμος, λέγομεν ἐφεξῆς τὰ δέοντα.

117. *Ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' ἑκατέρου δύο ἀσυνδιαιρέτων ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν τῶν δύο ἀριθμῶν.* Οἷον ὁ ἐλάχιστος δι' ἑκατέρου τῶν ἀσυνδιαιρέτων 36 καὶ 49 εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν 1764. Διότι πρῶτον εἶναι φανερὸν (108) ὅτι ὁ 1764 εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 36 καὶ διὰ τοῦ 49. Ἔπειτα ἄλλος μικρότερος αὐτοῦ ἀδύνατον νὰ ἦναι διαιρετὸς δι' ἑκατέρου αὐτῶν. Διότι, ἄν τις τῶν μικροτέρων τοῦ 1764 ἀριθμῶν ἦτον διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 36 καὶ διὰ τοῦ 49, αὐτὸς ἤθελεν ἔχει παράγοντα καὶ τὸν 36 καὶ τὸν 49, ἀλλ' ὡς μικρότερος τοῦ 1764 δὲν ἤθελεν εἶσθαι γινόμενον τοῦ 36 καὶ τοῦ 49, ἀλλὰ γινόμενον τριῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὧν ὁ μὲν νὰ ἦναι μικρότερος τοῦ 36, ὁ δὲ μικρότερος τοῦ 49, ὁ δὲ τρίτος τοιοῦτος, ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος μὲν ἐπὶ τὸν ἕτερον τῶν ἄλλων νὰ παράγῃ τὸν 36, πολλαπλασιαζόμενος δ' ἐπὶ τὸν ἄλλον νὰ παράγῃ τὸν 49· διότι τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι μικρότερος μὲν τοῦ 1764, διαιρετὸς δὲ καὶ διὰ τοῦ 36 καὶ διὰ τοῦ 49. Ἀλλὰ τότε δῆλον ὅτι ὁ 36 καὶ ὁ 49 ἤθελον ἔχει τὸν τρίτον ἀριθμὸν κοινὸν παράγοντα καὶ δὲν ἤθε-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

λον εἶσθαι ἀσυνδιαίρετοι, ἐνῷ ὑποθέτονται ἀσυνδιαίρετοι. Ἄρα ἀδύνατον ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 1764 νὰ ἦναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 36 καὶ διὰ τοῦ 49· ἄρα ὁ 1764, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀσυνδιαιρέτων ἀριθμῶν 36 καὶ 49, εἶναι ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' ἑκατέρου αὐτῶν. Καὶ περὶ ἄλλων δὲ ἀριθμῶν ἀποδεικνύεται ὡσαύτως· ἄρα *ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς* κτλ.

118. *Ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' ἑκατέρου δύο συνδιαιρετῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ μ. κ. δ. των.* Οἷον ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς διὰ τοῦ 96 καὶ τοῦ 84, οἵτινες ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 12, εἶναι 672, τὸ γινόμενον τοῦ 96 ἐπὶ τὸ πηλίκον 7 τῆς διαιρέσεως τοῦ 84 διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν 12. Διότι πρῶτον ὁ 672 εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 96· εἶναι δὲ διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 84, διότι, ὄντος τοῦ 96 γινομένου τοῦ μ. κ. δ. 12 καὶ τοῦ 8, ὁ 672 εἶναι γινόμενον τοῦ 7 τοῦ 12 καὶ τοῦ 8, ἤτοι τοῦ 84 καὶ τοῦ 8. Ἔπειτ' ἀδύνατον ἄλλος μικρότερος τοῦ 672 νὰ ἦναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 96 καὶ διὰ τοῦ 84. Διότι ἂν ἦτόν τις, αὐτὸς ἤθελεν ἔχει παράγοντα καὶ τὸν 96 καὶ τὸν 84, ἀλλ' ὡς μικρότερος τοῦ 672 δὲν ἤθελεν εἶσθαι γινόμενον τοῦ 96 καὶ τοῦ 7, ἀλλὰ γινόμενον τοῦ 96 καὶ ἀριθμοῦ ἀκεραίου μικροτέρου τοῦ 7, ἤγουν γινόμενον τοῦ 12, τοῦ 8 καὶ ἀριθμοῦ ἀκεραίου μικροτέρου τοῦ 7. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ 12 καὶ ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 7 εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 84, καὶ ἀνάγκη αὐτὸ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἔτι καὶ ἐπὶ ἄλλον ἀριθμόν, ἵνα παραχθῇ ὁ 84, ἀριθμὸν δέ, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ μικρότερος τοῦ 7 νὰ παράξῃ τὸν 7, καὶ τότε ὁ 7 εἶναι γινόμενον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ μικροτέρου τοῦ 7. Αὐτὸς δὲ ὁ ἀριθμὸς ἀνάγκη νὰ ἦναι παράγων τοῦ 8, διότι ὁ μικρότερος τοῦ 672 ἀριθμὸς ἄλλους παράγοντας δὲν ἔχει εἰμὴ τὸν 12, τὸν 8 καὶ τὸν μικρότερον τοῦ 7. Ἀλλὰ τότε ὁ 8 καὶ ὁ 7 ἤθελον ἔχει κοινὸν παράγοντα τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, καὶ ἤθελον εἶσθαι συνδιαιρετοί, ἐνῷ ὡς πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν 96 καὶ 84 διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν 12 εἶναι ἀσυνδιαίρετα (115). Ἄρ' ἀδύνατον ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 672 νὰ ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 96 καὶ τοῦ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

84· ἄρα ὁ 672 εἶναι ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' ἑκατέρου αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὡσαύτως ἀποδεικνύεται καὶ περὶ ἄλλων οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, διὰ τοῦτο *ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς κτλ.*

119. Ἂς εὑρεθῇ τώρα ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς διὰ τῶν τεσσάρων 240, 490, 720 καὶ 1125. Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὸς πρέπει νὰ ἦναι τοὐλάχιστον ἴσος μὲ τὸν μεγαλήτερον 1125, διότι ὁ 1125 εἶναι ὁ ἐλάχιστος δι' ἑαυτοῦ διαιρετός. *Ἂν λοιπὸν ὁ μεγαλήτερος ὅλων τῶν ἀριθμῶν ἦναι καὶ δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων διαιρετὸς, αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος ἐλάχιστος διαιρετός. Ἂν δὲ δὲν ἦναι διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων, ὁ ζητούμενος θέλει εἶσθαι μεγαλήτερος τοῦ μεγαλητέρου ὅλων, καὶ μάλιστα πολλαπλάσιος αὐτοῦ· εἰδεμὴ δὲν θέλει εἶσθαι δι' αὐτοῦ διαιρετός.*

Ἐπειδὴ δ' ἐνταῦθα ὁ 1125 δὲν εἶναι διαιρετὸς καὶ δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων, πολλαπλάσιός τις αὐτοῦ θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος ἐλάχιστος διαιρετός. Καὶ ὁ μὲν ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' αὐτοῦ καὶ τοῦ 720 εἶναι (118) τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν 16, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 720 διὰ τοῦ 45 τοῦ μ. κ. δ. τοῦ 1125 καὶ τοῦ 720, διότι οὗτοι εἶναι συνδιαιρετοί. Ἂν δὲ τὸ δεκαεξαπλάσιον τοῦ 1125 ἤτοι ὁ 18000 ἦτον διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 490 καὶ διὰ τοῦ 240, αὐτὸς ἤθελεν εἶσθαι ὁ ζητούμενος ἐλάχιστος διαιρετός. Ἐπειδὴ ὅμως διὰ τοῦ 490 δὲν εἶναι διαιρετὸς, διὰ τοῦτο ὁ ζητούμενος ἐλάχιστος διαιρετὸς εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 18000, καὶ μάλιστα πολλαπλάσιός τις αὐτοῦ· διότι μόνον οἱ πολλαπλάσιοι αὐτοῦ ἔχοντες παράγοντα καὶ τὸν 1125 καὶ τὸν 720 εἶναι διαιρετοὶ καὶ δι' ἑκατέρου τούτων. Ὥστε τώρα ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου ἐλαχίστου διαιρετοῦ καταντᾷ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου διαιρετοῦ διὰ τῶν δύο ἀριθμῶν 490 καὶ 18000. Ἀλλ' αὐτὸς εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 18000 ἐπὶ τὸν 49, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 490 διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτοῦ καὶ τοῦ 18000, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 882000 (118), ὅστις εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 240· ἄρα ὁ 882000 εἶναι ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν 240, 490, 720, 1125.

Ἐκ τούτων βλέπει τις ὅτι *πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

διαιρεσίμου ἀριθμοῦ δι' ἑκάστου πολλῶν ἄλλων πρέπει νὰ εὑρίσκηται πρῶτον ὁ μ. κ. δ. τοῦ μεγίστου αὐτῶν καὶ ἄλλου τινός, διὰ τούτου νὰ διαιρῆται ὁ δεύτερος, καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάζηται ὁ πρῶτος. Ἔπειτα τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ νὰ εὑρίσκηται ὁ μ. κ. δ., δι' αὐτοῦ νὰ διαιρῆται ὁ τρίτος, καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ γινόμενον. Πάλιν τοῦ νέου τούτου γινομένου καὶ τοῦ τετάρτου νὰ εὑρίσκηται ὁ μ. κ. δ., διὰ τούτου νὰ διαιρῆται ὁ τέταρτος, καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ νέον γινόμενον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· τὸ δὲ τελευταῖον οὕτως εὑρισκόμενον γινόμενον θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος ἐλάχιστος διαιρέσιμος δι' ἑκάστου τῶν πολλῶν ἀριθμῶν. Ἐὰν δ' οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀσυνδιαίρετοι, τὸ γινόμενον ὅλων θέλει εἶσθαι ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' ἑκάστου αὐτῶν.

Ἰδοὺ ὅλαι αἱ πράξεις αἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀνωτέρω 882000.

	1	1	1	3	2
1125	720	405	315	90	45
405	315	90	45	0	

```
720|45
   |16
```

	36	1	2	1	3	3
18000	490	360	130	100	30	10
360	130	100	30	10	0	

```
        |3675
882000  |240
 1620
  1800
   1200
```

```
490|10
   |49
```

```
 1125
   16
 ----
 6750
1225
-----
18000
   49
-----
162
72
------
882000
```

Παρατηρητέον δὲ ὅτι δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εὑρίσκηται πρῶτον ὁ μ. κ. δ. τοῦ μεγίστου τῶν ἀριθμῶν καὶ ἄλλου τινός, διότι κατὰ τοὺς αὐτοὺς προηγουμένους συλλογισμοὺς πληροφορούμεθα ὅτι δυνατὸν ν' ἀρχίσωμεν καὶ ἀπ' ἄλλων δύο ὁποιωνδήποτε. Πολλάκις δὲ φθάνομεν ταχύτερα εἰς τὸν ἐλάχιστον διαιρετόν, ἐὰν ἀρχίσωμεν ἀπὸ τῶν μικροτέρων, ὡς ἐδῶ βλέπει τις, διότι αἱ ἐπὶ μικροτέρων ἀριθμῶν πράξεις ἐκτελοῦνται ταχύτερα.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

	2	24				
490	240	10				
10						

	16	3				
11760	720	240				
240						

	31	2	1	3	2	
35280	1125	405	315	90	45	
405	315	90	45	0		

490|10
49

1125|75
25

240
49
———
216
96
———
11760
3
———
35280
25
———
17640
7056
———
882000.

Ἐν πολλαῖς δὲ περιπτώσεσι καταντᾷ ἁπλουστάτη ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου διαιρετοῦ. Οἷον ἐὰν ἐζητεῖτο ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς διὰ τῶν 4, 8, 12, 18, 24 καὶ 36, ἐπειδὴ ὁ μ. κ. δ. τοῦ 24 καὶ τοῦ 36 εἶναι 12, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 24 διὰ τοῦ 12 εἶναι 2, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ 36 ἐπὶ 2 εἶναι 72, διαιρετὸν καὶ δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων, ὁ 72, ὁ τόσον εὐκόλως εὑρεθείς, εἶναι ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 4, 8, 12, 18, 24 καὶ 36.

Περὶ εὑρέσεως ἰσοδυνάμου ἀριθμοῦ μὲ ἄλλον δεδομένον.

120. Τὸ αὐτὸ ποσὸν παριστάνεται διὰ διαφόρων ἀριθμῶν, ἐὰν ἡ μονὰς πρὸς ἣν προσδιορίζεται ἀλλάσσηται· τοὺς δὲ διαφόρους τούτους ἀριθμοὺς ὠνομάσαμεν (25) ἰσοδυνάμους. Εἴδαμεν δ' ἐν ἀρ. 93 δύο τρόπους τοῦ εὑρίσκειν ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μὲ ἄλλον δεδομένον, α'. ἐὰν ἀλλαχθῇ ἡ μὲν μονὰς εἰς ἄλλην, ἥτις νὰ ἦναι πολλοστόν τι αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμὸς εἰς ἄλλον, ὅςτις νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ, ὅ,τι πολλοστὸν τῆς πρώτης μονάδος εἶναι ἡ δευτέρα· β'. ἀντιστρόφως ἐὰν ἀλλαχθῇ ἡ μὲν μονὰς εἰς ἄλλην πολλαπλασίαν αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμὸς εἰς ἄλλον, ὅςτις νὰ ἦναι τοιοῦτον πολλοστὸν αὐτοῦ, ὅ,τι πολλαπλάσιον εἶναι τῆς πρώτης μονάδος ἡ δευτέρα.

Κατὰ δὲ τούτους τοὺς τρόπους εἶναι ὠφέλιμον καὶ μάλιστα πολλάκις ἀναγκαῖον, ἂν ἦναι δυνατόν, α'. νὰ τρέπηται ἀκέραιος εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, β'. κλασματικὸς εἰς ἰσοδύναμον

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἀκέραιον ἢ μικτόν, ἢ ἄλλον κλασματικόν, ἢ συμμιγῆ, γ'. μικτὸς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἢ συμμιγῆ, δ'. συμμιγὴς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἢ μικτόν. Ἐφεξῆς δὲ λέγομεν τὰ δέοντα περὶ ἐκείνων τῶν περιπτώσεων, ὅσας εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξηγήσωμεν τώρα παραπέμποντες περὶ τῶν λοιπῶν εἰς τὸ Συμπλήρωμα τῆς Ἀριθμητικῆς.

121. Ὅταν ἦναι χρεία νὰ τρέπηται ἀκέραιος εἰς ἰσοδύναμόν τινα κλασματικόν, ἐπειδὴ ἡ κλασματικὴ μονὰς ἦναι πολλοστὸν τῆς ἀκεραίας, ἅμα ὁρισθῇ ποία εἶναι ἡ κλασματικὴ μονάς, ἡ προκειμένη τροπὴ ἐκτελεῖται ὡς ἐν ἀρ. 73 εἴπομεν. Π. χ. 6 μονάδες μὲ πόσα ἕβδομα τῆς μιᾶς ἰσοδυναμοῦσιν; Ἐπειδὴ ἡ μία μονὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ ἑπτὰ ἕβδομα, αἱ δύο μὲ δὶς ἑπτὰ ἕβδομα, κτλ, δῆλον ὅτι αἱ 6 μονάδες ἰσοδυναμοῦσι μὲ ἑξάκις ἑπτὰ ἕβδομα, ἤτοι μὲ 42 ἕβδομα, ἢ ἄλλως $\frac{42}{7}$· οὗτος δὲ εἶναι *τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλασματικῆς μονάδος καὶ τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχον παρονομαστὴν τὸν τῆς κλασματικῆς μονάδος*. Ἡ τροπὴ δ' αὕτη δῆλον ὅτι ἐκτελεῖται κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον.

122. Ἵνα τραπῇ δὲ κλασματικὸς μεγαλήτερος τῆς μονάδος εἰς ἰσοδύναμον ἀκέραιον ἢ μικτόν, ἄλλο δὲν ἀπαιτεῖται εἰμὴ *νὰ νοηθῇ ὁ κλασματικὸς ὅτι παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ* (68), *καὶ νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ* (72, 73, 75)· τὸ δὲ προκύψον πηλίκον, ἀκέραιον μέν, ἂν ἦναι διαιρετὸς ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, μικτὸν δέ, ἂν δὲν ἦναι διαιρετός, θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κλασματικόν. Π. χ. τὰ $\frac{42}{7}$ τῆς μονάδος εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ 7ον τῶν 42 μονάδων (68), ἢ ὁ λόγος τοῦ 42 πρὸς τὸν 7 (101), ἤτοι τὸ πηλίκον τοῦ 42 διὰ 7, ὅπερ εἶναι 6· ἄρα τὰ $\frac{42}{7}$ τῆς μονάδος ἰσοδυναμοῦσι μὲ 6 μονάδας. Τὰ δὲ $\frac{38}{5}$ εὑρίσκεται οὕτως ὅτι ἰσοδυναμοῦσι μὲ $7\frac{3}{5}$. Ἡ τροπὴ δ' αὕτη δῆλον ὅτι ἐκτελεῖται κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον.

123. Ἐνταῦθα θέλομεν εἰπεῖ πῶς τρέπεται κλάσμα ἢ καὶ κλασματικὸς μεγαλήτερος τῆς μονάδος μὴ δεκαδικὸς εἰς ἰσοδύναμον ἄλλο κλάσμα κτλ μὴ δεκαδικὸν ἢ δεκαδικόν.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

α'. Ἂς τραπῇ κλασματικὸς μὴ δεκαδικὸς εἰς ἄλλον ἰσοδύναμον μὴ δεκαδικόν, οὗτινος ἡ κλασματικὴ μονὰς νὰ ἦναι πολλοστόν τι τῆς τοῦ πρώτου κλασματικῆς μονάδος· οἷον ὁ $\frac{4}{7}$ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τριακοστῶν πέμπτων, τοῦ τριακοστοῦ πέμπτου ὄντος πέμπτου τοῦ ἑβδόμου (90). Τοῦτο ἐκτελεῖται ἁπλούστατα πάντοτε κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{4}{7}$ ἐπὶ 5, καὶ ὁ προκύπτων $\frac{20}{35}$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν $\frac{4}{7}$ (93 καὶ 121).

β'. Ἂς τραπῇ κλασματικὸς μὴ δεκαδικὸς εἰς ἄλλον ἰσοδύναμον μὴ δεκαδικόν, οὗτινος ἡ κλασματικὴ μονὰς νὰ ἦναι πολλαπλασία τῆς τοῦ πρώτου κλασματικῆς μονάδος· οἷον ὁ $\frac{24}{36}$ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἐννάτων, τοῦ ἐννάτου ὄντος τετραπλασίου τοῦ τριακοστοῦ ἕκτου (90). Τοῦτο ἐκτελεῖται ἁπλούστατα κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, ἐὰν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{24}{36}$ (93 καὶ 122). Ἀλλὰ δῆλον ὅτι ἐκτελεῖται μόνον ὅταν ἦναι διαιρετὸς καὶ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅτις παριστάνει τί πολλαπλάσιον εἶναι ἡ νέα κλασματικὴ μονὰς τῆς πρώτης μονάδος, ὡς ἤδη εἴπομεν. Ἂν ὅμως ἐζητεῖτο μὲ πόσα π. χ. δεύτερα ἰσοδυναμεῖ τὸ $\frac{24}{36}$, τοῦ δευτέρου τῆς μονάδος ὄντος δεκαοκταπλασίου τοῦ τριακοστοῦ ἕκτου αὐτῆς, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς 24 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 18, ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ ἓν κλάσμα δευτέρων τῆς μονάδος ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{24}{36}$ (ἰδὲ τὸ ἀκόλουθον).

γ'. Ἂς τραπῇ κλάσμα μὴ δεκαδικὸν εἰς ἄλλο μὴ δεκαδικόν, οὗτινος ἡ κλασματικὴ μονὰς νὰ μὴ ἦναι μήτε πολλοστόν τι μήτε πολλαπλασία τῆς τοῦ πρώτου κλασματικῆς μονάδος· οἷον τὸ $\frac{5}{7}$ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν δωδεκάτων, τοῦ δωδεκάτου μὴ ὄντος πολλοστοῦ τοῦ ἑβδόμου τῆς αὐτῆς μονάδος. Κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ ἓν κλάσμα δωδεκάτων ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{5}{7}$, ἀλλὰ ἓν κλάσμα δωδεκάτων καὶ ἄλλο κλάσμα τοῦ δωδεκάτου, τοῦτο δ' εὑρίσκεται κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον. Δηλαδὴ ἐπειδὴ ἡ νέα μονὰς εἶναι πάντοτε πολλοστὸν τῆς ἀκεραίας μονάδος τοῦ $\frac{5}{7}$, δωδέκατον αὐτῆς, οὔσης τῆς ἀκεραίας μονάδος ἴσης μὲ 12 δωδέκατα ἑαυτῆς, τὸ ἓν ἕβδομον αὐτῆς εἶναι ἓν ἕβδομον τῶν 12 δωδεκάτων της, καὶ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου
ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

τὰ $\frac{5}{7}$ αὐτῆς ἑπομένως ἰσοδυναμοῦσι μὲ πεντάκις τὸ ἕβδομον τῶν 12 δωδεκάτων της, ἤτοι $\frac{5}{7}$ τῶν 12 δωδεκάτων της, ἅτινα εἶναι $\frac{60}{7}$ τοῦ δωδεκάτου αὐτῆς, ἢ διαιρεθέντος τοῦ 60 διὰ 7, 8 δωδέκατα ἢ $\frac{8}{12}$ αὐτῆς καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου της.

Ἄλλως. Τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ 7ον τῶν 5 μονάδων,ὅπερ εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 διὰ 7. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 5 εἶναι μικρότερος τοῦ 7, εἶναι δ' ἐνταῦθα μονὰς μικροτέρα τὸ δωδέκατον τῆς ἀκεραίας, πολλαπλασιάζεται ὁ 5 ἐπὶ 12 (73), καὶ τὸ γινόμενον 60 διαιρεῖται διὰ 7, τὸ δὲ πηλίκον 8 καὶ $\frac{4}{7}$ θέλει εἶσθαι δωδέκατα, ἤτοι $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου.

Κατὰ τοὺς δύο δὲ τρόπους βλέπει τις ὅτι *πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ 12, καὶ τὸ γινόμενον $\frac{60}{7}$ ἢ 8 καὶ $\frac{4}{7}$ νὰ νοῆται ὅτι εἶναι ὄχι μονάδες ἀκέραιαι, ἀλλὰ δωδέκατα καὶ κλάσμα τοῦ δωδεκάτου*, ὡς ἐν ἀρ. 121.

Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι $\frac{15}{17}$ ἰσοδυναμοῦσι μὲ $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{1}{17}$ τοῦ ὀγδόου αὐτῆς, τοῦ ὀγδόου μὴ ὄντος πολλαπλασίου τοῦ δεκάτου ἑβδόμου.

Ἐάν τις παραιτήσῃ τὸ κλάσμα τοῦ δωδεκάτου ἢ τοῦ ὀγδόου, τότε θέλει εἶσθαι *ὡς ἔγγιστα* ἰσοδύναμον τὸ $\frac{5}{7}$ μὲ τὸ $\frac{8}{12}$ καὶ τὸ $\frac{15}{17}$ μὲ τὸ $\frac{7}{8}$, ἀλλ' ὄχι ἀκριβῶς.

δ'. *Ἂς τραπῇ κλάσμα μὴ δεκαδικὸν εἰς δεκαδικὸν ἰσοδύναμον*· οἷον τὸ $\frac{7}{8}$ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν δεκάτων, ἢ ἑκατοστῶν, ἢ χιλιοστῶν κτλ. Τοῦτο ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ μερικὴ περίπτωσις τῶν προηγουμένων (α', β', γ') καὶ ἐκτελεῖται κατὰ τὰ ἐκεῖ προειρημένα.

Πρῶτον τὰ $\frac{7}{8}$ μὲ πόσα δέκατα ἰσοδυναμοῦσιν; Ἐπειδὴ τὸ 10ον δὲν εἶναι πολλοστὸν τοῦ 8ου, κατὰ τὰ ἐν τῇ γ' περιπτώσει προειρημένα πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς 7 ἐπὶ 10, τὸ γινόμενον 70 νὰ διαιρεθῇ διὰ 8, καὶ τὸ πηλίκον 8 καὶ $\frac{6}{8}$ νὰ νοηθῇ $\frac{8}{10}$ ἢ 0,8 καὶ $\frac{6}{8}$ τοῦ δεκάτου.

Δεύτερον τὰ $\frac{7}{8}$ μὲ πόσα ἑκατοστὰ ἰσοδυναμοῦσιν; Ἐπειδὴ καὶ τὸ 100ον δὲν εἶναι πολλοστὸν τοῦ 8ου, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 7 ἐπὶ 100, τὸ γινόμενον 700 νὰ διαιρεθῇ διὰ 8, καὶ τὸ πηλίκον 87 καὶ $\frac{4}{8}$ νὰ νοηθῇ $\frac{87}{100}$ ἢ 0,87 καὶ $\frac{4}{8}$ τοῦ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἑκατοστοῦ. Τὸ αὐτὸ ἤθελεν εὑρεθῇ καὶ ἂν τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ δεκάτου μόνον ἤθελον τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἑκατοστῶν, ἀφοῦ πρῶτον εὑρέθη ὅτι τὰ $\frac{7}{8}$ ἰσοδυναμοῦσι μὲ $0,8\frac{6}{8}$.

Τρίτον τὰ $\frac{7}{8}$ μὲ πόσα χιλιοστὰ ἰσοδυναμοῦσι; Καὶ τὰ χιλιοστὰ εὑρίσκονται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 7 ἐπὶ 1000, τὸ γινόμενον 7000 διαιρεθῇ διὰ 8, καὶ τὸ πηλίκον 875 νοηθῇ $\frac{875}{1000}$ ἢ 0,875· ἢ ἂν μόνον τὰ $\frac{4}{8}$ τοῦ ἑκατοστοῦ τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν χιλιοστῶν. Ἀλλ' ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ἔμεινε κλάσμα τοῦ χιλιοστοῦ, ἀλλ' ἀκριβῶς τὰ $\frac{7}{8}$ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 0,875. Τοῦτο δὲ συνέβη, διότι τὸ χιλιοστὸν εἶναι πολλοστὸν τοῦ ὀγδόου, ἤτοι εἶναι ἑκατοστὸν εἰκοστὸν πέμπτον αὐτοῦ, καὶ ἡ περίπτωσις αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὴν ά περίπτωσιν. Καὶ τῷ ὄντι ἂν οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{7}{8}$ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 125, τρέπεται τὸ $\frac{7}{8}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{875}{1000}$ ἢ 0,875.

Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι τὰ $\frac{4}{5}$ ἰσοδυναμοῦσιν ἀκριβῶς μὲ 0,8, καὶ ὅτι τὰ $\frac{17}{20}$ ἰσοδυναμοῦσιν ἀκριβῶς μὲ 0,85· τὰ δὲ $\frac{4}{7}$ δὲν ἰσοδυναμοῦσιν ἀκριβῶς οὔτε μὲ ἀριθμὸν δεκάτων, οὔτε μὲ ἀριθμὸν ἑκατοστῶν, οὔτε μὲ ἀριθμὸν ἄλλου δεκαδικοῦ πολλοστοῦ, διότι εὑρίσκεται ἴσον μὲ 0,571428|571428....

(Τὴν πρᾶξιν τῆς τροπῆς ταύτης ἰδὲ ἐν ἀρ. 82 τῆς Π. Α.)

Ἐκ τούτων βλέπει τις ὅτι, ἂν ζητῆται κλάσμα δεκαδικὸν ὡρισμένης μονάδος ἢ οἱασδήποτε, ἀλλ' ἰσοδύναμον μὲ ἄλλο μὴ δεκαδικόν, ἐνίοτε εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἰσοδύναμον, καὶ ἄλλοτε ὄχι· τοῦτο δ' ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὅτι τῆς κλασματικῆς μονάδος τοῦ μὴ δεκαδικοῦ δυνατὸν νὰ ἦναι πολλοστόν τι δεκαδική τις μονὰς ἢ νὰ μὴ ἦναι. Ἀλλὰ τοῦτο θέλομεν τὸ ἐξετάσει ἐντελέστερα ἐν τῷ Συμπληρώματι τῆς Ἀριθμητικῆς, καὶ ἔτι τὸ ἀντίστροφον, πῶς κλάσμα δεκαδικὸν οἱονδήποτε τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον μὴ δεκαδικόν.

Ἐνταῦθα προσθέτομεν μόνον ὅτι, ὅταν δὲν εὑρίσκηται δεκαδικὸν μὲ εὐάριθμα ψηφία ἰσοδύναμον μὲ ἄλλο μὴ δεκαδικόν, τότε μεταχειρίζονται τοῦ δεκαδικοῦ ὀλίγα μόνον ψηφία, δύο ἢ τρία κτλ, τὰ δὲ λοιπὰ παραιτοῦσι, καὶ οὕτως ἔχουσι δεκαδικὸν ὡς ἔγγιστα ἰσοδύναμον μὲ τὸ μὴ δεκαδικόν. Τὰ $\frac{2}{13}$ π. χ.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὸ 0,538461...., τούτου δὲ μεταχειρίζονται ἢ τὰ 0,538, ἢ τὰ 0,53. Ὡς πρὸς τοῦτο δὲ παρατηροῦμεν ὅτι, ἵνα τὸ δεκαδικὸν προςεγγίζῃ περισσότερον εἰς τὸ μὴ δεκαδικὸν, ἂν μὲν μεταχειρισθῶμεν τὸ 0,538, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ μεταβάλωμεν τὰ 8 χιλιοστημόρια, ἂν δὲ μεταχειρισθῶμεν τὸ 0,53, εἶναι προτιμότερον ν' αὐξήσωμεν κατὰ μονάδα τὰ 3 ἑκατοστημόρια μεταχειριζόμενοι τὸ 0,54· διότι ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ 0,538 προςεγγίζει εἰς τὸ $\frac{7}{13}$ πλειότερον τοῦ 0,539, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὸ 0,54 προςεγγίζει εἰς τὸ $\frac{7}{13}$ πλειότερον τοῦ 0,53. Τοῦτο δὲ τὸ καταλαμβάνομεν ἐκ τοῦ πρώτου ψηφίου τῶν παραιτουμένων. Ἐπειδὴ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ πρῶτον ψηφίον 4 τῶν παραιτουμένων παριστάνει ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 5, ὅλον τὸ παραιτούμενον εἶναι ὀλιγώτερον ἡμίσεος χιλιοστοῦ, καὶ τὸ 0,538 διαφέρει τοῦ $\frac{7}{13}$ ὀλιγώτερον ἢ κατὰ ἥμισυ χιλιοστοῦ, ἐνῷ τὸ 0,539 διαφέρει τοῦ $\frac{7}{13}$ πλειότερον ἢ κατὰ ἥμισυ χιλιοστοῦ· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἐπειδὴ τὸ πρῶτον ψηφίον 8 τῶν παραιτουμένων παριστάνει ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 5, ὅλον τὸ παραιτούμενον εἶναι μεγαλήτερον ἡμίσεος ἑκατοστοῦ, καὶ τὸ 0,53 διαφέρει τοῦ $\frac{7}{13}$ πλειότερον ἢ κατὰ ἥμισυ ἑκατοστοῦ, ἐνῷ τὸ 0,54 διαφέρει τοῦ αὐτοῦ ὀλιγώτερον ἢ κατὰ ἥμισυ ἑκατοστοῦ.

ε. Δεκαδικὸν δὲ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον δεκαδικὸν μικροτέρας μονάδος τρέπεται κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον ἁπλούστατα, ἐὰν τεθῶσι μηδενικὰ δεξιά του, ἕν, δύο κτλ, ὅσα χρειάζονται. Μὲ πόσα χιλιοστὰ ἰσοδυναμεῖ τὸ 0,24; Εἶναι φανερὸν ὅτι μὲ 0,240· διότι τούτου ἡ μὲν μονὰς εἶναι δέκατον τῆς τοῦ πρώτου, ὁ δὲ ἀριθμὸς δεκαπλάσιος. Καὶ περὶ ἄλλων ὡσαύτως.

Ἐντεῦθεν βλέπει τις ὅτι ἡ γραφὴ μηδενικῶν δεξιὰ δεκαδικοῦ κλασματικοῦ τρέπει αὐτὸν εἰς ἄλλον ἰσοδύναμον καὶ ὄχι πολλαπλάσιον (Παράβαλε ταῦτα μὲ τὰ ἐν ἀρ. 61).

Δεκαδικὸν δὲ εἰς ἄλλο δεκαδικὸν μεγαλητέρας μονάδος ἤθελε τραπῆ μόνον, ἐὰν ἤθελον παραλειφθῆ τὰ δεξιὰ ψηφία του, ἓν ἢ δύο κτλ κατὰ τὴν χρείαν, καὶ τότε μόνον ἤθελεν εὑρεθῆ ἀκριβῶς ἰσοδύναμον, ἐὰν τὰ δεξιὰ του ψηφία ἤθελον εἶσθαι μηδενικά· ἄλλως ἤθελεν εὑρεθῆ ὡς ἔγγιστα ἰσοδύναμον.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ϛ'. *Ας τραπῇ κλάσμα μὴ δεκαδικὸν εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ*, οἷον τὰ $\frac{11}{13}$ τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ὡρῶν, λεπτῶν κτλ. Ἡ τροπὴ αὕτη ἐκτελεῖται ὡς ἡ προηγουμένη, ἂν δ' ἦσαν αἱ μονάδες ὥρα, λεπτὸν κτλ δεκαδικαί, ἤθελεν εἶσθαι ἡ αὐτή. Πρῶτον εὑρίσκεται ὡς ἀνωτέρω ὅτι τὰ $\frac{11}{13}$ τοῦ ἡμερονυκτίου ἰσοδυναμοῦσι μὲ ὥρας 20 καὶ $\frac{4}{13}$ τῆς ὥρας· ἔπειτα ὅτι τὰ $\frac{4}{13}$ τῆς ὥρας ἰσοδυναμοῦσι μὲ λεπτὰ 18 καὶ $\frac{6}{13}$ τοῦ λεπτοῦ· μετέπειτα ὅτι τὰ $\frac{6}{13}$ τοῦ λεπτοῦ ἰσοδυναμοῦσι μὲ δευτερόλεπτα 27 καὶ $\frac{9}{13}$ τοῦ δευτερολέπτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥστε τὰ $\frac{11}{13}$ τοῦ ἡμερονυκτίου ἰσοδυναμοῦσι μὲ 20^{ωρ} 18^{λεπ} 27^{δευτ} καὶ $\frac{9}{13}$ τοῦ δευτερολέπτου, ὅπερ, ἂν θέλῃ τις, τὸ παραιτεῖ.

Δεκαδικὸν δὲ κλάσμα τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ, ἀφοῦ πρότερον τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον μὴ δεκαδικὸν καὶ τοῦτο ἔπειτα εἰς συμμιγῆ.

124. Πῶς δὲ μικτὸς ἀριθμὸς ἢ συμμιγὴς τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν εἶναι ἤδη γνωστὸν (73, 85, 86, 120). Εἰς ἰσοδύναμον δὲ συμμιγῆ τρέπεται μικτός, ἐὰν τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ τὸ κλάσμα του, ὡς ἤδη εἴπομεν (123, ϛ'). Ἀντιστρόφως δὲ εἰς ἰσοδύναμον μικτὸν τρέπεται συμμιγής, ἐὰν ὅλα του τὰ μέρη ἐκτὸς τοῦ ἀκεραίου τοῦ ἐν ἀριστερᾷ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν.

Τελευταῖον λέγομεν πῶς κλάσμα καὶ κλάσμα αὐτοῦ τοῦ κλάσματος, ἢ συμμιγής, ὅστις ἔχει καὶ κλάσμα τῆς μικροτάτης μονάδος του, τρέπεται εἰς ἕνα ἰσοδύναμον κλασματικόν· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ εἰρημένου ἐν ἀρ. 123, γ'. Τὰ $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου μὲ πόσα ἕβδομα τῆς μονάδος ἰσοδυναμοῦσιν; Εἰς εὕρεσιν τούτου κυρίως ἄλλο δὲν ἀπαιτεῖται εἰμὴ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ $\frac{8}{12}$ τὸ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου· ἂν δὲ πρὸς ὥραν παραμεληθῇ ὁ παρονομαστὴς 12, τότε μένει μικτὸς ἀριθμὸς $8\frac{4}{7}$, ὅστις ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν κλασματικὸν $\frac{60}{7}$, ὄχι τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἀλλὰ τοῦ δωδεκάτου αὐτῆς. Τώρα μένει νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσα ἕβδομα τῆς ἀκεραίας μονάδος ἰσοδυναμοῦσι τὰ $\frac{60}{7}$ τοῦ δωδεκάτου αὐτῆς. Ἐπειδὴ ἡ ἀκεραία μονὰς εἶναι δωδεκαπλασία τοῦ δωδεκάτου αὐτῆς, δῆλον ὅτι ὁ ζητού-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

μενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἦναι δωδέκατον τοῦ $\frac{60}{7}$, ὅπερ εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 60 διὰ 12, εἶναι δὲ 5. Ἄρα τὰ $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου ἰσοδυναμοῦσι μὲ $\frac{5}{7}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Ἡ τροπὴ λοιπὸν αὕτη γίνεται ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου κλασματικοῦ καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα ὡς μικτὸς ἀριθμὸς τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ ἔπειτα διαιρεθῇ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος ὁ ἀριθμητὴς τοῦ εὑρεθέντος κλασματικοῦ, ὅταν ἦναι διαιρετός.

Κατὰ ταῦτα εὑρίσκεται ὅτι ὁ μὲν $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{1}{17}$ τοῦ ὀγδόου ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{15}{17}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος. Ὁ δὲ συμμιγὴς 20ωρ 18λεπ 27δευτ καὶ $\frac{9}{13}$ τοῦ δευτερολέπτου ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{11}{13}$ τοῦ ἡμερονυκτίου, διότι ἀφοῦ ὁ 20ωρ 18λεπ 27δευτ τραπῇ εἰς τὸν ἰσοδύναμον κλασματικὸν $\frac{73107}{86400}$ τοῦ ἡμερονυκτίου ἤτοι εἰς 73107 δευτερόλεπτα, ὁ κλασματικὸς οὗτος καὶ ὁ $\frac{9}{13}$ τρέπονται εἰς $\frac{11}{13}$ τοῦ ἡμερονυκτίου ὡς ἤδη εἴπομεν.

Περὶ εὑρέσεως ἰσοδυνάμου μὲ ἄλλον κλασματικοῦ, ὅστις νὰ ἔχῃ μικροτέρους τοὺς ὅρους του.

125. Ἐκ τῶν ἐν ἀρ. 123, β΄. εἰρημένων γίνεται δῆλον ὅτι *πρὸς εὕρεσιν κλασματικοῦ ἰσοδυνάμου μὲ ἄλλον καὶ ἔχοντος μικροτέρους τοὺς ὅρους του πρέπει νὰ διαιρῶμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δεδομένου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, καὶ νὰ γράφωμεν τὸ πηλίκον τοῦ παρονομαστοῦ ὑπὸ τὸ τοῦ ἀριθμητοῦ*, καὶ ὅτι τοῦτο τότε μόνον εἶναι δυνατόν, ὅταν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλασματικοῦ ἦναι συνδιαιρετοί. Ὅταν δὲ ἦναι ἀσυνδιαίρετοι, δὲν εἶναι γνωστὸς τρόπος νὰ εὑρεθῇ κλασματικὸς μὲ μικροτέρους ὅρους καὶ ἰσοδύναμος ἐνταυτῷ μὲ τὸν δεδομένον· ὀλίγον δέ τι μικρότερος ἢ ὀλίγον τι μεγαλήτερος μὲ μικροτέρους ὅρους εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται (123, γ΄.), ὡς θέλομεν ἰδεῖ καὶ ἐν τῷ Συμπληρ. τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ὅταν λοιπὸν οἱ ὅροι κλασματικοῦ τινος ἦναι μεγάλοι καὶ συνδιαιρετοί, δὲν πρέπει νὰ λησμονῶμεν νὰ διαιρῶμεν αὐτοὺς διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, καὶ πάλιν τὰ πηλίκα των, ἂν ἦναι συνδιαιρετά, νὰ διαιρῶμεν διά τινος κοινοῦ διαιρέτου

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

αὐτῶν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἢ μᾶλλον νὰ διαιρῶμεν τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, διότι τότε θέλουσιν εἶσθαι τὰ πηλίκα, ἤτοι οἱ ὅροι τοῦ νέου κλασματικοῦ, ἀσυνδιαίρετοι καὶ οἱ ἐλάχιστοι. Καὶ ἐπειδὴ καλεῖται *ἀνάγωγος* ὁ κλασματικός, ὁ παριστάνων ποσόν τι μὲ τοὺς ἐλαχίστους ὅρους, διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων κλασματικοῦ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν θέλει εὑρίσκεσθαι *κλασματικὸς ἀνάγωγος*.

Περὶ τροπῆς ἑτερωνύμων κλασματικῶν εἰς ἄλλους ἰσοδυνάμους των καὶ ὁμωνύμους πρὸς ἀλλήλους.

126. Ὅταν ἦναι δύο οἱ ἑτερώνυμοι κλασματικοί, *ἐὰν μὲν ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ μικροτέρου, ὁ ἕτερος τῶν δύο κλασματικῶν τρέπεται εἰς ἄλλον ἰσοδύναμόν του καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸν ἄλλον· ἐὰν ὅμως δὲν ἦναι διαιρετός, τότε τρέπονται καὶ οἱ δύο εἰς ἄλλους ἰσοδυνάμους των καὶ ὁμωνύμους πρὸς ἀλλήλους.*

α. Ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, ἐὰν μὲν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἔχοντος τὸν μεγαλήτερον παρονομαστὴν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλητέρου παρονομαστοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου, εἶναι φανερὸν ὅτι *διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων τοῦ ἔχοντος τὸν μεγαλήτερον παρονομαστὴν διὰ τοῦ προειρημένου πηλίκου θέλει εὑρεθῆ κλασματικὸς ἰσοδύναμος μὲ αὐτὸν καὶ ὁμώνυμος μὲ τὸν ἄλλον κλασματικόν*. Ἂν π. χ. οἱ δύο κλασματικοὶ ἦναι $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{12}{24}$, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 24 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 καὶ ἐνταυτῷ ὁ ἀριθμητὴς 12 ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ πηλίκου 6 τοῦ 24 διὰ 4, διαιρουμένων τῶν δύο ὅρων τοῦ $\frac{12}{24}$ διὰ 6, τρέπεται ὁ $\frac{12}{24}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμον του $\frac{2}{4}$, ὅπερ εἶναι καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸ $\frac{3}{4}$. Τοῦτο συμβαίνει σπανιώτερα.

β'. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἔχοντος τὸν μεγαλήτερον παρονομαστὴν δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ προειρημένου πηλίκου, εἶναι φανερὸν ὅτι *διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο ὅρων τοῦ ἔχοντος τὸν μικρότερον παρονομαστὴν ἐπὶ τὸ προειρημένον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλητέρου παρονομαστοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου θέλει εὑρεθῆ κλασματικὸς ἰσοδύνα-*

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

μος μὲ τὸν ἔχοντα τὸν μικρότερον παρονομαστὴν καὶ ὁμώνυμος μὲ τὸν ἄλλον. Ἂν π. χ. οἱ δύο κλασματικοὶ ἦναι $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{13}{21}$, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων τοῦ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ τὸ 3, τὸ πηλίκον τοῦ 21 διὰ 7, τρέπεται ὁ $\frac{5}{7}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{15}{21}$, ὅπερ εἶναι καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸν $\frac{13}{21}$. Τοῦτο δὲ συμβαίνει συνηθέστερα.

γ'. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει, ἐὰν μὲν οἱ δύο παρονομασταὶ ἦναι συνδιαιρετοὶ, εἶναι φανερὸν ὅτι, *ἐὰν οἱ μὲν δύο ὅροι τοῦ πρώτου κλασματικοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ δευτέρου παρονομαστοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν παρονομαστῶν, οἱ δὲ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου παρονομαστοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου, ἑκάτερος κλασματικὸς θέλει τραπῇ εἰς ἄλλον ἰσοδύναμόν του, οἱ δὲ ἰσοδύναμοι μὲ τοὺς δεδομένους θέλουσιν εἶσθαι ὁμώνυμοι·* διότι ὁ παρονομαστὴς ἑκατέρου θέλει εἶσθαι γινόμενον τριῶν καὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν δύο παρονομαστῶν καὶ τῶν δύο πηλίκων τῶν δύο παρονομαστῶν δι' αὐτοῦ. Ἂν π. χ. οἱ δύο κλασματικοὶ ἦναι $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{17}{20}$, ὧν οἱ παρονομασταὶ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 4, τὰ πηλίκα αὐτῶν δι' αὐτοῦ εἶναι 3 καὶ 5, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων τοῦ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 5, τῶν δὲ δύο ὅρων τοῦ $\frac{17}{20}$ ἐπὶ 3, τρέπονται ὁ μὲν $\frac{5}{12}$ εἰς τὸν ἰσοδύναμόν του $\frac{25}{60}$, ὁ δὲ $\frac{17}{20}$ εἰς τὸν ἰσοδύναμόν του $\frac{51}{60}$, οἵτινες εἶναι ὁμώνυμοι· διότι ὁ 60 εἶναι γινόμενον τοῦ 12 καὶ τοῦ 5, ἤτοι τοῦ 3 καὶ 4 καὶ 5, ἢ τοῦ 20 καὶ τοῦ 3, ἤτοι τοῦ 4 καὶ 5 καὶ 3, ὁ ἀριθμὸς δὲ τῶν γινομένων τούτων εἶναι ὁ αὐτός (97). Καὶ τοῦτο δὲ συμβαίνει πολλάκις.

δ'. Ἐὰν δὲ οἱ δύο παρονομασταὶ ἦναι ἀσυνδιαίρετοι, τότε ἄλλος τρόπος δὲν ὑπάγει εἰμὴ *νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ μὲν δύο ὅροι τοῦ πρώτου κλασματικοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου, οἱ δὲ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν του πρώτου·* εἶναι δὲ ἤδη φανερὸν ὅτι οὕτω τρέπονται οἱ δεδομένοι κλασματικοὶ εἰς ἄλλους ἰσοδυνάμους των καὶ ὁμωνύμους πρὸς ἀλλήλους. Οὕτω π. χ. οἱ $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{4}$ τρέπονται εἰς τοὺς $\frac{20}{28}$ καὶ $\frac{21}{28}$. Ὁ τελευταῖος οὗτος τρόπος εἶναι μὲν γενικὸς

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

καθότι εὔχρηστος καὶ κατὰ τὰς ἄλλας προηγουμένας περιπτώσεις, ἀλλ' ὄχι προτιμητέος ἐκείνων, διότι ἄγει εἰς κλασματικοὺς μὲ μεγαλητέρους ὅρους.

127. Ὅταν δὲ ἦναι τρεῖς ἢ πλειότεροι κλασματικοί, *ἐὰν μὲν ὁ μεγαλήτερος τῶν παρονομαστῶν ἦναι διαιρετὸς δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἄλλων, τρέπεται ἕκαστος τῶν ἄλλων κλασματικῶν εἰς ἄλλον ἰσοδύναμόν του καὶ ὁμώνυμον μὲ τὸν ἔχοντα τὸν μεγαλήτερον παρονομαστὴν ὡς ἤδη ἀνωτέρω εἴπομεν, ἤτοι πολλαπλασιαζομένων τῶν ὅρων ἑκάστου ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλητέρου παρονομαστοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.* Οὕτως οἱ $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{10}{30}$ τρέπονται εἰς τούτους $\frac{25}{30}$, $\frac{27}{30}$, $\frac{26}{30}$, $\frac{10}{30}$.

Ἐὰν δὲ ὁ μεγαλήτερος τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασματικῶν δὲν ἦναι διαιρετὸς δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἄλλων, τότε *ζητεῖται ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς ἀριθμὸς δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ ὡς εἴπομεν ἐν ἀρ. 119, καὶ ἔπειτα τρέπεται ἕκαστος τῶν κλασματικῶν εἰς ἄλλον ἰσοδύναμόν του πολλαπλασιαζομένων τῶν ὅρων του ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ εὑρεθέντος ἐλαχίστου διαιρεσίμου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.* Ἕκαστος δὲ τῶν οὕτω προκυπτόντων ἰσοδυνάμων μὲ τοὺς δεδομένους δῆλον ὅτι θέλει ἔχει παρονομαστὴν τὸν ἐλάχιστον διαιρέσιμον δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ, καὶ ἐπομένως ὅλοι θέλουσιν εἶσθαι ὁμώνυμοι. Ἂν π. χ. οἱ κλασματικοὶ ἦσαν $\frac{23}{240}$, $\frac{873}{1125}$, $\frac{319}{490}$, $\frac{523}{720}$, ἐπειδὴ ὁ δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν ἐλάχιστος διαιρετὸς εἶναι 882000 (119), οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸ πηλίκον 3675 αὐτοῦ διὰ 240, οἱ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ πηλίκον 784 αὐτοῦ διὰ 1125, οἱ τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 1800 αὐτοῦ διὰ 490, καὶ οἱ τοῦ τετάρτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 1225 διὰ τοῦ 720, καὶ οὕτω τρέπονται εἰς τοὺς ἰσοδυνάμους των καὶ ὁμωνύμους πρὸς ἀλλήλους, $\frac{84525}{882000}$, $\frac{684432}{882000}$, $\frac{574200}{882000}$, $\frac{640675}{882000}$.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι επὶ τὸ πηλίκον τοῦ διαιρετοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάζηται μόνον ὁ ἀριθμητής· διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι αὐτὸς ὁ διαιρετὸς ἀριθμός, ὅστις εἶναι γνωστός.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Εἶναι δὲ ἤδη γνωστὸν ὅτι, ὅταν οἱ παρονομασταὶ ἦναι ἀσυνδιαίρετοι, ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν ὁμωνύμων θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

Σημ. Ἐὰν ἡ τροπὴ αὕτη ἤθελε γείνει ὡς κοινῶς ἐν ταῖς Ἀριθμητικαῖς παραγγέλλεται, ἤτοι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο ὅρων ἑκάστου κλασματικοῦ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἤθελαν εὑρεθῆ ὁμώνυμοι κλασματικοὶ ἔχοντες παρονομαστὴν κοινὸν τὸν πολὺ μεγαλήτερον ἀριθμὸν 9525600000, ὡσαύτως δὲ καὶ τοὺς ἀριθμητάς.

128. Ἐὰν ὁ μὲν ἦναι μὴ δεκαδικὸς κλασματικός, ὁ δὲ δεκαδικός, πρέπει νὰ τρέπηται ὁ πρῶτος εἰς δεκαδικὸν ὁμώνυμον μὲ τὸν ἄλλον δεκαδικὸν (123, δ΄.). Τὸ αὐτὸ δὲ γίνεται καὶ ἂν ὁ δεύτερος ἦναι συμμιγής. Ἐὰν δὲ καὶ οἱ δύο ἦναι δεκαδικοὶ ἑτερώνυμοι, γράφονται δεξιὰ τοῦ ἔχοντος τὰ ὀλιγώτερα ψηφία τόσα μηδενικά, ὅσα ὁ ἄλλος ἔχει πλειότερα ψηφία (123, ε΄.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΙΣΟΔΙΑΦΟΡΩΝ.

Διάφορα περὶ λόγου.

129. Εἴδομεν (34, 35 102) τί εἶναι λόγος δύο ἀριθμῶν, καὶ ὅτι εὑρίσκεται αὐτὸς διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἄλλου. Ἀλλ' ὅταν δὲν ἦναι ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν, ἀλλὰ μόνον νὰ νοῶνται αὐτοὶ κατὰ λόγον, ἤτοι ὁ ἕτερος πρὸς τὸν ἄλλον ὡς ἀριθμός τις πρὸς τὴν μονάδα του, ὅςτις δυνατὸν νὰ ἦναι ἄγνωστος, ἵνα δειχθῇ οὗτος ὁ τρόπος τοῦ νοεῖν αὐτούς, τίθεται μεταξύ των τὸ σημεῖον :, ὅπερ εἶναι τὸ κυρίως σημεῖον ὅτι ὁ ἕτερος ἀριθμὸς πρέπει νὰ νοῆται πρὸς τὸν ἄλλον κατὰ λόγον· οἷον τὸ 15:3 παριστάνει ὅτι νοεῖται κατὰ λόγον ὁ 15 πρὸς τὸν 3, τὸ δὲ 3:15 ὅτι νοεῖται κατὰ λόγον ὁ 3 πρὸς τὸν 15. Τῶν αὐτῶν δὲ ὁ λόγος παρίσαται καὶ διὰ τοῦ $\frac{15}{3}$, $\frac{3}{15}$, ὅπου ἡ γραμμὴ εἶναι σημεῖον τοῦ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

λόγου· ἀλλὰ ταῦτα παριστάνουσι καὶ κλασματικὸν ἀριθμὸν, καὶ πηλίκον (43), ἐνῷ τὸ 15 : 3 εἶναι ἐμφαντικὸν μόνον τοῦ λόγου τοῦ 15 πρὸς τὸν 3. Καὶ αὕτη δὲ ἡ διὰ τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ σημείου : ἤ—παράστασις τοῦ λόγου λέγεται καὶ αὐτὴ λόγος.

Οἱ δύο κατὰ λόγον νοούμενοι ἀριθμοὶ λέγονται *ὅροι τοῦ λόγου*, καὶ ὁ μὲν ἀριστερὸς λέγεται *ἡγούμενος* τοῦ λόγου, ὁ νοούμενος πρὸς τὸν ἄλλον, ὁ δὲ δεξιὸς *ἑπόμενος* τοῦ λόγου, ὁ πρὸς ὃν νοεῖται ὁ ἡγούμενος.

130. ά. Εἶναι ἤδη γνωστὸν (35 καὶ 100) ὅτι, *ὅταν ὁ ἡγούμενος γείνῃ ἑπόμενος καὶ τἀνάπαλιν, ὁ λόγος μεταβάλλεται εἰς τὸν ἀντίστροφόν του*· οἷον ἐνῷ ὁ λόγος τοῦ 15 πρὸς τὸν 3 εἶναι 5, ὁ τοῦ 3 πρὸς τὸν 15 εἶναι $\frac{1}{5}$.

β'. Εἶναι δ' ἔτι γνωστὸν (104) ὅτι *ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ λόγος τῶν αὐτῶν πολλαπλασίων των ἢ τῶν αὐτῶν πολλοστῶν των εἶναι ὁ αὐτὸς ἢ ἰσοδύναμος*.

γ'. *Ἐὰν ὁ ἡγούμενος λόγου τινὸς αὐξηθῇ καθ' ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἑπόμενός του ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ τοσαύτας, ὁ λόγος τοῦ προκύπτοντος κεφαλαίου ἢ διαφορᾶς πρὸς τὸν ἑπόμενον θέλει εἶσθαι κατὰ μονάδα μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τοῦ πρώτου λόγου*. Διότι τὸ κεφάλαιον θέλει ἐμπεριέχει τὸν ἑπόμενον τοσάκις ὅσον ὁ ἡγούμενος καὶ ἔτι ἅπαξ, ἡ δὲ διαφορὰ παρὰ ἕνα τοσάκις ὅσον ὁ ἡγούμενος.

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι τὸ δεύτερον καταντᾷ ἀδύνατον νὰ ἐννοηθῇ, ὅταν ὁ ἡγούμενος ἦναι μικρότερος τοῦ ἑπομένου. Περὶ τούτου θέλομεν εἰπεῖ τὰ δέοντα ἐν τῷ Συμπλ. τῆς Ἀριθμητικῆς.

δ'. *Ὁ λόγος τοῦ γινομένου τῶν ἡγουμένων δύο ἢ πλειοτέρων λόγων πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἑπομένων τῶν αὐτῶν λόγων εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων αὐτῶν τῶν λόγων*. Διότι οἱ λόγοι οὗτοι ὡς πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν ἡγουμένων διὰ τῶν ἑπομένων των δύνανται πάντοτε νὰ παριστάνωνται κλασματικῶς· οὕτω δὲ εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν ἡγουμένων ἐπ' ἀλλήλους καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν ἑπομένων ἐπ' ἀλλήλους εἶναι πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀριθμητῶν καὶ πολλαπλασιασμὸς τῶν παρονομαστῶν ἐπ' ἀλλήλους, ὅπερ εἶναι

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

κυρίως πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασματικῶν ἐπ' ἀλλήλους (96), καὶ ὁ προκύπτων κλασματικὸς, ὅςτις ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἀριθμητῶν ἢ τῶν ἡγουμένων, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν ἢ τῶν ἑπομένων, εἶναι γινόμενον ὅλων τῶν κλασματικῶν. Ἀλλ' αὐτὸς παριστάνει καὶ τὸν λόγον τοῦ ἀριθμητοῦ πρὸς τὸν παρονομαστὴν, ἤτοι τοῦ γινομένου τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἑπομένων τῶν δεδομένων λόγων· ἄρα *ὁ λόγος τοῦ γινομένου* κτλ. Π. χ. ὁ λόγος τοῦ 12:4 εἶναι 3, ὁ τοῦ 6:3 εἶναι 2, ὁ τοῦ 10:2 εἶναι 5, ὁ δὲ τοῦ γινομένου 720 τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ γινόμενον 24 τῶν ἑπομένων εἶναι τὸ γινόμενον 30 τῶν τριῶν λόγων 3, 2, 5· ὅπερ καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 720 διὰ τοῦ 24 εὑρίσκεται.

ε΄. Εἴδομεν (103) ὅτι ὁ λόγος δύο κλασματικῶν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν λόγον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ δὲ πᾶς μικτὸς ἢ συμμιγὴς δύναται πάντοτε νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν (124), δύο δὲ κλασματικῶν ὁ λόγος ἰσοδυναμεῖ πάντοτε μὲ τὸν λόγον δύο ἀκεραίων, διὰ τοῦτο καὶ δύο οποιωνδήποτε ἀριθμῶν ὁ λόγος ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν λόγον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, οὕς τινας ἠξεύρομεν πάντοτε νὰ εὑρίσκωμεν.

ς΄. Τελευταῖον, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ λόγου ἦναι συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ, εἶναι πάντοτε ὁμοειδεῖς· διότι ἀδύνατον νὰ νοῆται ἀριθμὸς συγκεκριμένος πρὸς ἄλλον ὡς τρίτος πρὸς τὴν μονάδα του, ἂν οἱ δύο ἦναι ἑτεροειδεῖς, ἐνῷ ὁ ἕτερος νοεῖται ὅτι σύγκειται ἐκ τοῦ ἄλλου ὡς μονάδος του.

Περὶ ἀναλόγων ἀριθμῶν καὶ ἀναλογίας.

131. Ἐὰν ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν ἦναι ὁ αὐτὸς δύναἴσο ἥμος μὲ τὸν λόγον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, τῶν δύο τούτων λόγων οἱ τέσσαρες ὅροι ὀνομάζονται *ἀνάλογοι ἀριθμοὶ*, οἷον οἱ 12:4 καὶ 18:6, ἢ οἱ 3:7 καὶ 12:28. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν δύο ἀριθμῶν 12 καὶ 4 εἶναι διπλοῦς, ἢ ὁ τοῦ 12 πρὸς τὸν 4, ὅςτις εἶναι 3, ἢ ὁ τοῦ 4 πρὸς τὸν 12, ὅςτις εἶναι $\frac{1}{3}$, ἀντίστροφος τοῦ πρώτου, ὅταν μὲν νοῆται ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4 καὶ ὁ τοῦ 18 πρὸς τὸν 6, ἢ ὁ τοῦ 4

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

πρὸς τὸν 12 καὶ ὁ τοῦ 6 πρὸς τὸν 18, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι· ὅταν δὲ νοῆται ὁ λόγος τοῦ 4 πρὸς τὸν 12 καὶ ὁ τοῦ 18 πρὸς τὸν 6, ἢ ὁ τοῦ 12 πρὸς τὸν 4 καὶ ὁ τοῦ 6 πρὸς τὸν 18, τότε, ἂν καὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ αὐτοί, δὲν εἶναι ὅμως ἀνάλογοι, εἰμὴ ἂν ὁ ἕτερος τῶν λόγων νοηθῇ ἀντιστρόφως, ἤτοι ἂν ὁ ἡγούμενος γείνῃ ἑπόμενος καὶ τἀνάπαλιν· διὰ τοῦτο τότε ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοὶ *ἀντιστρόφως ἀνάλογοι*, ἤτοι ἀνάλογοι ἂν νοηθῇ ὁ ἕτερος λόγος ἀντιστρόφως παρ' ὅπως νοεῖται. Ὥστε, ἵνα ἦναι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογοι, ἀνάγκη νὰ ἦναι τεταγμένοι οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον νὰ ἦναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ τρίτου πρὸς τὸν τέταρτον.

Τὸ σημεῖον, δι' οὗ κυρίως ἐμφαίνεται ἡ ταυτότης ἢ ἡ ἰσότης τῶν δύο λόγων εἶναι τοῦτο : :, τιθέμενον μεταξὺ τῶν δύο λόγων, οἷον ἐνταῦθα $12:4::18:6$,

ἢ καὶ τοῦτο $=$, τιθέμενον εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν, ἀλλ' ὅπερ εἶναι σημεῖον πάσης ἰσότητος καὶ ὄχι μόνον λόγων ἰσότητος, οἷον εἶναι τὸ πρότερον. Ὥστε

τὸ $12:4::18:6$, τὸ $\frac{12}{4}::\frac{18}{6}$ καὶ τὸ $12:4=18:6$ εἶναι παράστασις δύο λόγων ἴσων, τὸ δὲ $\frac{12}{4}=\frac{18}{6}$ εἶναι ἰσότης καὶ δύο λόγων καὶ δύο κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ δύο πολλοστῶν.

132. *Ἀναλογία* δὲ κυρίως εἶναι ἡ ἀφῃρημένη ἰδέα τῶν ἀναλόγων ἀριθμῶν ἢ ἡ ταυτότης δύο λόγων, ἀλλὰ συνήθως *ἀναλογία* λέγεται καὶ τὸ σύνολον τεσσάρων ἀναλόγων ἀριθμῶν, γραμμένων ὡς ἀνωτέρω ἢ καὶ ἀπαγγελλομένων μόνον.

Εἶναι γνωστὸν ἤδη (Π. Α. ἀρ. 98) πῶς ἀπαγγέλλεται ἡ ἀναλογία, τίνες ὅροι της καλοῦνται *μέσοι* καὶ τίνες *ἄκροι*, τίνες *ἡγούμενοι* καὶ τίνες *ἑπόμενοι* πρῶτος καὶ δεύτερος, καὶ ὅτι ἕκαστος ὅρος αὐτῆς καλεῖται *τέταρτος ἀνάλογος* τῶν τριῶν ἄλλων.

133. *Ταυτόμεσον* ἀναλογίαν ὀνομάζομεν ἐκείνην, ἧς τινος οἱ δύο μέσοι ὅροι εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός, καὶ ἥτις κοινῶς καλεῖται *συνεχής*, οἷον ἡ $24:12::12:6$. Τοιαύτης δὲ διάφοροι ἀριθμοὶ εἶναι μόνον τρεῖς, καὶ ὁ μὲν αὐτὸς μέσος καλεῖται *μέσος ἀνάλογος* τῶν δύο ἄλλων, ἑκάτερος δὲ τῶν ἄκρων λέγεται *τρίτος ἀνάλογος* τῶν δύο ἄλλων.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

134. Ἐὰν πλειότεροι τῶν τεσσάρων ἀριθμοὶ ἔχωσιν ἀνὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἢ ἰσοδύναμον, εἶναι καὶ αὐτοὶ ἀνὰ τέσσαρες ἀνάλογοι, τὴν δὲ παράστασιν αὐτῶν κατὰ σειρὰν οὕτω, 12:4::15:5::24:8::30:10 κτλ, θέλομεν ὀνομάζει *πολυϊσολογίαν*. Ἐκ ταύτης δὲ προκύπτουσι πολλαὶ ἀναλογίαι, οἷον αἱ 12:4::15:5, 12:4::24:8, 12:4::30:10 κτλ.

135. *Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων πάσης ἀναλογίας εἶναι ἴσον ἢ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων αὐτῆς*. Διότι ὁ μὲν πρῶτος ἡγούμενος πάσης ἀναλογίας εἶναι γινόμενον τοῦ ἑπομένου του καὶ τοῦ πρώτου λόγου (τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου), ὁ δὲ δεύτερος ἡγούμενος ὡσαύτως εἶναι γινόμενον τοῦ ἑπομένου του καὶ τοῦ δευτέρου λόγου. Οὕτω δὲ νοουμένων τῶν ἡγουμένων, τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἄκρων, ἤτοι τοῦ πρώτου ἡγουμένου καὶ τοῦ δευτέρου ἑπομένου, εἶναι τότε γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν, τοῦ πρώτου ἑπομένου, τοῦ πρώτου λόγου καὶ τοῦ δευτέρου ἑπομένου, τὸ δὲ γινόμενον τῶν μέσων, ἤτοι τοῦ πρώτου ἑπομένου καὶ τοῦ δευτέρου ἡγουμένου, εἶναι γινόμενον τοῦ πρώτου ἑπομένου, τοῦ δευτέρου ἑπομένου καὶ τοῦ δευτέρου λόγου. Ἀλλὰ καὶ τῶν δύο γινομένων οἱ τρεῖς παράγοντες εἶναι οἱ αὐτοί, διότι δύο εἶναι οἱ δύο ἑπόμενοι τῆς ἀναλογίας, ὁ δὲ τρίτος εἶναι ὁ πρῶτος λόγος ἢ ὁ δεύτερος, οἵτινες εἶναι οἱ αὐτοὶ ἢ ἰσοδύναμοι, ὡς τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν ὄντων ἀναλόγων. Ἄρα *τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων κτλ*.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἂν τέσσαρες ἀριθμοὶ δὲν ἦναι ἀνάλογοι, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων δεν εἶναι ἴσον ἢ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, ἀλλὰ διάφορον. Διότι τὰ δύο γινόμενα θέλουσιν ἔχει δύο παράγοντας τοὺς αὐτοὺς πάντοτε, ἤτοι τοὺς δύο ἑπομένους, ἀλλ' ὁ τρίτος θέλει εἶσθαι διάφορος, ὡς μὴ ὄντων τῶν ἀριθμῶν ἀναλόγων.

Ὥστε *μόνον* τῆς ἀναλογίας τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον ἢ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῶν μέσων.

Ἐκ δὲ τούτου ἕπεται καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι, *ἐὰν δύο ἀριθμῶν τὸ γινόμενον ἦναι ἴσον ἢ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλο-*

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

γοι τεταγμένοι οὕτως, ὥστε οἱ παράγοντες τοῦ ἑτέρου γινομένου νὰ ἦναι ἄκροι, οἱ δὲ τοῦ ἄλλου μέσοι. Διότι μόνον τῶν ἀναλόγων ἀριθμῶν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον ἢ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῶν μέσων· ἂν δ' αὐτοὶ δὲν ἦσαν ἀνάλογοι, τὰ γινόμενα ταῦτα δὲν ἔπρεπε νὰ ἦναι ἴσα ἢ τὰ αὐτά.

136. *Τέσσαρες ἀνάλογοι ἀριθμοὶ διαμένουσιν ἀνάλογοι καὶ ἀφοῦ συμμετατεθῶσιν οἱ δύο μέσοι, ἢ οἱ δύο ἄκροι, ἢ ἐνταυτῷ οἱ μέσοι καὶ οἱ ἄκροι.* Διότι, ὄντων τῶν ἀριθμῶν ἀναλόγων, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον ἢ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῶν μέσων, διὰ δὲ τῶν μετατεθέσεων τὰ γινόμενα ταῦτα δὲν μεταβάλλονται, ἀλλὰ διαμένουσι τὰ αὐτά, ὡς τῶν μέσων διαμενόντων μέσων καὶ τῶν ἄκρων ἄκρων· ἀφοῦ δὲ μετὰ τὴν μετάθεσιν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον ἢ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῶν μέσων, δῆλον (135) ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ διαμένουσιν ἀνάλογοι. Ὥστε ἐκ τῆς ἀναλογίας 20 : 5 : : 36 : 9
πορίζεται *συμμεταθέσει* τῶν μέσων ἢ 20 : 36 : : 5 : 9,
συμμεταθέσει τῶν ἄκρων ἢ 9 : 5 : : 36 : 20,
συμμεταθέσει ἀμφοτέρων ἢ 9 : 36 : : 5 : 20.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ διαμένουσιν οἱ αὐτοί, συμμετατίθενται δὲ ὡς εἴπομεν, διαμένουσι μὲν ἀνάλογοι, ἀλλ' οἱ λόγοι των ἀλλάσσουσι, διότι ἢ ἀλλάσσουσιν ἢ ὅροι τῶν λόγων, ἢ γίνεται μόνον ἀντιστροφὴ τῶν λόγων, ὡς ἐν τῇ τελευταίᾳ, ἐν ᾗ ἔτι ὁ πρῶτος λόγος γίνεται δεύτερος καὶ τἀνάπαλιν. Ἀλλ' εἴδομεν (131) ὅτι καὶ μόνον ἀντιστροφὴ τῶν λόγων ἂν γείνῃ, χωρὶς ν' ἀλλάξῃ ὁ πρῶτος εἰς δεύτερον καὶ τἀνάπαλιν, οἱ ἀριθμοὶ διαμένουσιν ἀνάλογοι· ὅθεν *ἀντιστροφῇ* τῶν λόγων ἔχομεν 5 : 20 : : 9 : 36, ὁπότε οἱ μέσοι γίνονται ἄκροι, οἱ δὲ ἄκροι μέσοι. Ἀλλ' ἐνταυτῷ εἴδομεν ὅτι δὲν θέλουσιν εἶσθαι πλέον ἀνάλογοι οἱ ἀριθμοί, ἂν ὁ πρῶτος ὅρος γείνῃ δεύτερος καὶ τἀνάπαλιν, ἢ ὁ τρίτος τέταρτος καὶ τἀνάπαλιν· ἢ ἔτι ἂν γείνῃ ὁ πρῶτος τρίτος ἢ ὁ δεύτερος τέταρτος καὶ τἀνάπαλιν, διότι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων δὲν θέλει εἶσθαι ἴσον ἢ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῶν μέσων.

137. Ἐπειδὴ *δύο λόγοι ἴσοι πρὸς τρίτον εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι*, ἐὰν δύο ἀναλογιῶν ὁ ἕτερος λόγος ἦναι λόγος

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, οἱ ἄλλοι λόγοι των ὡς ἴσοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν, οἷον ἐκ τῆς 24:6::36:9

καὶ τῆς 24:6::20:5

πορίζεται ἡ . . . . 36:9::20:5.

138. Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται ὅτι, *ἐὰν οἱ ἡγούμενοι δύο ἀναλογιῶν ἦναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ* (ὁ πρῶτος μὲ τὸν πρῶτον καὶ ὁ δεύτερος μὲ τὸν δεύτερον), *οἱ ἑπόμενοι αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι ἢ ἂν οἱ ἑπόμενοι ἦναι οἱ αὐτοί, οἱ ἡγούμενοι εἶναι ἀνάλογοι.* Διότι *συμμεταθέσει* τῶν μέσων προκύπτουσιν ἀναλογίαι ἔχουσαι ἢ τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοὺς αὐτοὺς (τοὺς ἡγουμένους τῆς πρώτης), ἢ τοὺς δύο τελευταίους τοὺς αὐτοὺς (τοὺς ἑπομένους), καὶ τότε οἱ ἄλλοι τέσσαρες, οἱ ἑπόμενοι ἢ οἱ ἡγούμενοι, εἶναι ἀνάλογοι. Ὥστε ἐκ τῆς 24: 6::12:3

καὶ τῆς 24: 8::12:4

πορίζεται ἡ 6: 3:: 8:4

ἢ καὶ οὕτως 6: 8:: 3:4.

Ἐκ δὲ τῆς 24: 6::12:3

καὶ τῆς 18: 6:: 9:3

πορίζεται ἡ 24:12::18:9

ἢ καὶ οὕτως 24:18::12:9.

139. *Τὰ γινόμενα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἀναλογίας ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἢ τὰ πηλίκα τῶν αὐτῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι ἀνάλογα τῶν δύο τελευταίων ὅρων τῆς αὐτῆς.* Διότι, ἂν μὲν πολλαπλασιάζωνται ἢ διαιρῶνται δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τὰ γινόμενα ταῦτα ἢ τὰ πηλίκα ὡς τὰ αὐτὰ πολλαπλάσια ἢ τὰ αὐτὰ πολλοστὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι (130, 6'.), ἑπομένως τὸν αὐτόν, ὃν ἔχουσι καὶ οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι, τουτέστιν εἶναι ἀνάλογα αὐτῶν. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάζωνται ἢ διαιρῶνται διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τότε τὰ γινόμενα ἢ τὰ πηλίκα ὡς τ' αὐτὰ πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν πολλοστῶν τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον μὲ αὐτούς, ἑπομένως καὶ μὲ τοὺς δύο τελευταίους ὅρους, ἤτοι εἶναι ἀνάλογα αὐτῶν. Πᾶς δὲ ἄλλος ἀριθμὸς ἰσοδυναμεῖ μὲ κλασματικόν. (Παραδείγματα τῶν τεσσάρων περιπτώσεων).

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι *τὰ γινόμενα ἢ τὰ πηλίκα τῶν δύο τελευταίων ὅρων ἀναλογίας διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀνάλογα τῶν δύο πρώτων τῆς αὐτῆς*.

140. Ἐκ τούτων δ' ἔπεται ὅτι *τὰ μὲν γινόμενα ἢ τὰ πηλίκα τῶν δύο ἡγουμένων ἀναλογίας διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἑπομένων των, τὰ δὲ γινόμενα ἢ πηλίκα τῶν δύο ἑπομένων της διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἡγουμένων των*. Διότι *συμμεταθέσει* τῶν μέσων της οἱ μὲν ἡγούμενοι γίνονται οἱ δύο πρῶτοι ὅροι της, οἱ δὲ ἑπόμενοι οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι της, ἐφαρμόζοντες δ' εἰς αὐτὴν τὰ προηγούμενα (139), τῶν δὲ κατ' αὐτὰ πορίζομένων ἀναλογιῶν *συμμεταθέτοντες* τοὺς μέσους ἔχομεν ἀποδεδειγμένα τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος. (Παραδείγματα).

141. *Τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἀναλογίας ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, ἢ πρὸς τὸν πρῶτον, ὃν ἔχει τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον, ἢ πρὸς τὸν τρίτον*. Διότι εἶναι ἤδη γνωστὸν (130, γ'.) ὅτι ὁ λόγος τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πρώτων ὅρων πρὸς τὸν δεύτερον εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τοῦ λόγου τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ἀναλογίας, ὡσαύτως καὶ ὁ λόγος τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τελευταίων ὅρων αὐτῆς πρὸς τὸν τέταρτον εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τοῦ λόγου τῶν δύο τελευταίων ὅρων της. Ἀλλ' ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ὅρων καὶ ὁ τῶν τελευταίων τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι ἢ ὁ αὐτός· ἄρα καὶ οἱ κατὰ μονάδα μεγαλήτεροι ἢ μικρότεροι αὐτῶν εἶναι ἴσοι ἢ ὁ αὐτός· ἄρα *τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων καὶ ὁ δεύτερος εἶναι ἀνάλογα τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τελευταίων καὶ τοῦ τετάρτου*.

Οἷον ἐκ τῆς	$24:8::30:10$
πορίζονται *προσθέσει* μὲν ἡ	$32:8::40:10$,
ἀφαιρέσει δὲ ἡ	$16:8::20:10$.

Συμμεταθέσει δὲ τῶν μέσων τῶν τριῶν ἔχομεν

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

24:30::8:10,
32:40::8:10,
16:20::8:10.

Ἐπειδὴ δ' ὁ δεύτερος λόγος τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἔχει τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς (137), οἱ ἄλλοι τέσσαρες ὅροι των εἶναι ἀνάλογοι, ἤτοι 32:40::24:30.
Ὡσαύτως καὶ ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης πορίζεται ἡ
16:20::24:30.
Συμμεταθέσει δὲ τῶν μέσων καὶ τῶν δύο ἤδη εὑρημένων ἔχομεν 32:24::40:30,
16:24::20:30.

ἤτοι *τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς πρώτης ἀναλογίας* (24:8::30:10) *καὶ ὁ πρῶτος εἶναι ἀνάλογα τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τελευταίων καὶ τοῦ τρίτου.*

142. Ἐκ τούτων δ' ἕπεται ὅτι *τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων ἀναλογίας πρὸς τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων της ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἑκάτερος ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.* Διότι *συμμεταθέσει* τῶν μέσων της οἱ μὲν ἡγούμενοι γίνονται οἱ δύο πρῶτοι ὅροι της, οἱ δὲ ἑπόμενοι οἱ δύο τελευταῖοι, ἐφαρμόζοντες δ' εἰς αὐτὴν τὰ προηγούμενα (141), τῶν δὲ κατ' αὐτὰ πορίζομένων ἀναλογιῶν *συμμεταθέτοντες* τοὺς μέσους ἔχομεν ἀποδεδειγμένα τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος.

Οὕτως ἐκ τῆς 32: 8::24:6
πορίζονται *προσθέσει* μὲν ἡ 56:14::24:6 ἢ 32:8,
ἀφαιρέσει δὲ ἡ 8: 2::24:6 ἢ 32:8.

Ἐκ δὲ τῶν δύο τούτων πορίζεται ἡ 56:14:: 8:2 (137), ἤτοι *τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων τῆς πρώτης πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν τῶν ἑπομένων*, ἢ *συμμεταθέσει* τῶν μέσων τῆς τελευταίας, *τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν διαφοράν των ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων πρὸς τὴν διαφοράν των.*

143. Καὶ πολυϊσολογίας δὲ *τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἡγου-*

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

μένων πρὸς τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἑπομένων ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει εἷς τις τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἑπόμενόν του. Διότι ταύτης π. χ. 20:5::8:2::16:4::24:6 κτλ, ἂν παραλειφθῶσι πρῶτον οἱ τελευταῖοι λόγοι, ἐκ τῶν δύο πρώτων ἔχομεν ὡς ἤδη εἴπομεν (142) 28:7::8:2.

Ἔπειτα ὁ λόγος 28:7 ἴσος ὢν μὲ τὸν 8:2 εἶναι ἴσος καὶ μὲ τὸν ἴσον του 16:4, ἤτοι 28:7::16:4, ἐκ δὲ ταύτης πάλιν ἔχομεν ὡς ἤδη εἴπομεν 44:11::16:4.

Πάλιν ὁ λόγος 44:11 ἴσος ὢν μὲ τὸν 16:4 εἶναι ἴσος καὶ μὲ τὸν ἴσον του 24:6, ἤτοι 44:11::24:6, ἐκ δὲ ταύτης πάλιν πορίζεται αὕτη, 68:17::24:6, κτλ.

Δηλαδὴ *τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἡγουμένων* κτλ, διότι ὁ μὲν 68 εἶναι κεφάλαιον ὅλων τῶν ἡγουμένων 20, 8, 16 καὶ 24, ὁ δὲ 17 εἶναι κεφάλαιον ὅλων τῶν ἑπομένων 5, 2, 4, 6.

Σημ. Τῶν ἐν τοῖς ἀρ. 141 καὶ 142 ὅσα ἀφορῶσι τὴν διαφορὰν δυνατὸν νὰ παράσχωσι δυσκολίαν, ὅταν οἱ ἡγούμενοι ἦναι μικρότεροι τῶν ἑπομένων ἢ ἦναι ὁ πρῶτος ἡγούμενος μικρότερος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ πρῶτος ἑπόμενος τοῦ δευτέρου, ὡς ἐσημειώθη καὶ ἀνωτέρω (130, γ')· ἔτι δὲ μεγαλητέρα ἤθελεν εἶσθαι ἡ δυσκολία, ἐὰν ἠθέλαμεν νὰ βεβαιωθῶμεν καὶ ὅτι πολυϊσολογίας ἡ διαφορὰ ὅλων τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν διαφορὰν ὅλων τῶν ἑπομένων ἔχει ὃν λόγον εἷς τις ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του. Περὶ τούτων θέλομεν εἰπεῖ τὰ δέοντα ἐν τῷ Συμπλ. τῆς Ἀριθμητικῆς.

144. *Τὸ γινόμενον ὅλων τῶν πρώτων ὅρων πολλῶν ἀναλογιῶν πρὸς τὸ γινόμενον ὅλων τῶν δευτέρων ὅρων αὐτῶν ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ γινόμενον ὅλων τῶν τρίτων ὅρων των πρὸς τὸ γινόμενον ὅλων τῶν τετάρτων ὅρων των.* Ἢ συντομώτερα, *τὰ γινόμενα τῶν ὁμοίων ὅρων πολλῶν ἀναλογιῶν εἶναι ἀνάλογα,* ὁμοίων ὅρων νοουμένων τῶν πρώτων ἡγουμένων, τῶν πρώτων ἑπομένων κτλ.

Π. χ. τῶν ἀναλογιῶν 6:2::9 :3,
5:8::10:16,
7:5::21:15,

πολλαπλασιάσει τῶν ὁμοίων ὅρων θέλομεν ἔχει τὰ τέσσαρα

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

γινόμενα 210, 80, 1890, 720, ταῦτα δὲ εἶναι ἀνάλογα, ἤτοι 210.80::1890:720. Διότι ὡς εἴδομεν (130, δ') ὁ μὲν λόγος 210:80 εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν λόγων 6:2, 5:8, 7:5, ὁ δὲ 1890:720 εἶναι γινόμενον τῶν ἄλλων τριῶν λόγων 9:3, 10:16, 21:15. Ἀλλ' οἱ τρεῖς πρῶτοι λόγοι εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς τρεῖς ἄλλους, ἄλλος μὲ ἄλλον· ἄρα καὶ τὰ γινόμενά των εἶναι ἴσα, ἤτοι ὁ λόγος 210:8 εἶναι ἴσος μὲ τὸν 1890:720. Ἄρα *τὰ γινόμενα τῶν ὁμοίων ὅρων πολλῶν ἀναλογιῶν εἶναι ἀνάλογα.*

145. *Διάφοροι σημειώσεις.* α'. Αἱ ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν, ὅσαι ἔχουσιν ἰδιαιτέρας ἀποδείξεις, εἶναι αἱ ἐν τοῖς ἀριθ. 135, 137, 139, 141 καὶ 144, τῶν δ' ἐν τοῖς λοιποῖς ἀριθμοῖς αἱ ἀποδείξεις πορίζονται ἐκ τῶν πρὸ αὐτῶν, καὶ μάλιστα τῶν ἐν τοῖς ἀρ. 138, 140 καὶ 142 ἁπλῶς συμμεταθέσει τῶν μέσων.

β'. Συντομίας χάριν θέλομεν μεταχειρίζεσθαι ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν τὰς δοτικὰς τῶν ὀνομάτων αὐτῶν, ὡς ἤδη ἐκάμαμεν, ἤτοι τὴν του ἀρ. 136 ὅταν μεταχειρισθῶμεν, θέλομεν λέγει *συμμεταθέσει* (τῶν μέσων ἢ τῶν ἄκρων), τὴν δὲ τελευταίαν, *ἀντιστροφῇ* (τῶν λόγων), τὴν τοῦ 138, *παραλείψει* (τῶν ἡγουμένων ἢ τῶν ἑπομένων), τὴν τοῦ 139 καὶ 140, *πολλυπλασιάσει* ἢ *διαιρέσει* (τῶν δύο πρώτων ὅρων ἢ τῶν δύο τελευταίων, τῶν ἡγουμένων ἢ τῶν ἑπομένων), τὴν τοῦ 141, 142 καὶ 143, *προσθέσει* ἢ *ἀφαιρέσει* (τῶν δύο πρώτων ὅρων καὶ τῶν δύο τελευταίων, τῶν ἡγουμένων καὶ τῶν ἑπομένων), τὴν δὲ τοῦ 144 *πολλαπλασιάσει τῶν ὁμοίων ὅρων* (τῶν δεῖνα ἀναλογιῶν).

γ'. Ἂν καὶ οἱ ὅροι τῶν ὡς παραδείγματα εἰλημμένων ἀναλογιῶν ἦσαν ἀκέραιοι διὰ τὸ ἁπλούστερον, ἀλλ' ὅμως εὐκόλως καταλαμβάνει τις ὅτι αἱ ἀποδείξεις ἁρμόζουσι καὶ ὅταν οἱ ὅροι ἦναι κλασματικοὶ ἢ ἄλλοι ἀριθμοί, μάλιστα μετὰ τὰ προειρημένα ἐν ἀρ. 130 περὶ λόγων. Ἄλλως δὲ, εἶναι πάντοτε δυνατὸν, πρὶν μεταβάλῃ τις ὁποιανδήποτε μεταβολὴν τῶν προαποδεδειγμένων τοὺς ὅρους ἀναλογίας ἐχούσης τοὺς ὅρους της μὴ ἀκεραίους, νὰ τρέπῃ πρότερον τοὺς κλασματικοὺς κτλ.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

όρους της εἰς ἄλλους ἀκεραίους, καὶ τότε νὰ τοὺς μεταβάλῃ ὁπωςδήποτε ἔχει χρείαν.

δ'. Τελευταῖον, ὅταν οἱ ὅροι ἀναλογίας ἦναι συγκεκριμένοι, οἷον ταύτης 12ημ.: 4ημ.: : 45δραχ.: 15δρ, ἐπειδὴ σχεδὸν πάντοτε οἱ ὅροι τοῦ ἑτέρου λόγου εἶναι ἑτεροειδεῖς πρὸς τοὺς τοῦ ἄλλου, φαίνεται κατὰ πρῶτον ὅτι δὲν ἀληθεύουσι τινὰ τῶν προειρημένων περὶ τῶν ἀναλογιῶν καὶ περὶ τοιαύτης ἀναλογίας λεγόμενα. Οἷον *συμμεταθέσει* τῶν μέσων τῆς ἀνωτέρω προκύπτει 12ημ.: 45δρ: : 4ημ.: 15, ἥτις δὲν εἶναι ἀναλογία, διότι δὲν δύνανται οἱ δύο πρῶτοι ὅροι νὰ νοῶνται κατὰ λόγον ὡς ἑτεροειδεῖς, ὡσαύτως καὶ οἱ ἄλλοι δύο. Ἔπειτα δὲν ἔχει χώραν ἡ ἐν τῷ 141 ἀρ. ἰδιότης, διότι εἶναι ἀδύνατον νὰ προστεθῶσιν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἢ οἱ δύο τελευταῖοι, ὡς ἑτεροειδεῖς. Ἀλλ' ἡ δυςκολία αὕτη ἐκλείπει, ἐάν, ἀφοῦ ἅπαξ εἶναι βέβαιον ὅτι κατά τινα τάξιν κείμενοι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι, μετὰ ταῦτα θεωρηθῶσιν ἀφῃρημένοι, καὶ ὄχι πλέον συγκεκριμένοι.

146. Ὅταν τρεῖς ὅροι ἀναλογίας τινὸς ἦναι γνωστοί, ὁ δὲ τέταρτος ἄγνωστος, εἶναι εὔκολον νὰ τὸν προςδιορίσωμεν διὰ τῶν τριῶν γνωστῶν. Διότι ἠξεύροντες ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων της εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων της, ἂν μὲν ἦναί τις τῶν ἄκρων ἄγνωστος, νοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν γνωστῶν μέσων ὡς γινόμενον τῶν ἄκρων· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων τότε εἶναι γνωστὸν καὶ ἔτι ὁ ἕτερος παράγων αὐτοῦ τοῦ γινομένου, ὁ γνωστὸς ἄκρος, *διαιρέσει* τοῦ γινομένου αὐτοῦ διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου εὑρίσκεται πηλίκον ὁ ἄλλος ἄκρος, ὁ ἄγνωστος. Ἐὰν δὲ ἦναί τις τῶν μέσων ἄγνωστος, τότε ἐκλαμβάνομεν τὸ γινόμενον τῶν γνωστῶν ἄκρων ὡς γινόμενον τῶν μέσων, κτλ ὡς ἤδη εἴπομεν. Ὥστε *ὁ τέταρτος ἀνάλογος τριῶν ἄλλων εὑρίσκεται πάντοτε διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο γνωστῶν μέσων ἢ ἄκρων καὶ διὰ διαιρέσεως τοῦ προκύπτοντος γινομένου διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου ἢ μέσου.*

Καὶ ὁ τρίτος δὲ ἀνάλογος (133) εὑρίσκεται ὡσαύτως. Ὁ δὲ μέσος ἀνάλογος (133) εὑρίσκεται, ἂν τοῦ γινομένου τῶν

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἄκρων ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα (Π. Α' ἀρ. 91 κτλ). Διότι τῆς ταυτομέσου ἀναλογίας τὸ γινόμενον τῶν μέσων εἶναι τετράγωνον τοῦ ἑτέρου μέσου, ὡς γινόμενον δύο ἴσων ἀριθμῶν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων τότε εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου, ὁ δὲ μέσος ἀνάλογος ἀντιστρόφως εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων.

Περὶ διαφορᾶς καὶ ἰσοδιαφορᾶς.

147. Εἶναι ἤδη (33) γνωστὸν τί εἶναι ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, καὶ ὅτι εὑρίσκεται δι' ἀφαιρέσεως (38). Ἀλλ' ὅταν δὲν ἦναι ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ἀλλὰ μόνον νὰ νοῆται ὁ ἕτερος αὐτῶν πρὸς τὸν ἄλλον κατὰ διαφορὰν, ἤτοι ὅτι ἔχει κάμποσας μονάδας πλειότερον τοῦ ἄλλου ἢ ὀλιγώτερον, τότε εἶναι ἐν χρήσει μία στιγμὴ τιθεμένη μεταξὺ τῶν δύο, ἵνα σημάνῃ τοῦτον τὸν τρόπον τοῦ νοεῖν αὐτούς. Οὕτω 12·8 σημαίνει ὅτι ὁ 12 νοεῖται πρὸς τὸν 8 κατὰ διαφορὰν, ἢ καὶ τὴν διαφορὰν ταύτην 4. Τότε ὁ 12 καὶ ὁ 8 λέγονται *ὅροι* τῆς διαφορᾶς, ὁ μὲν 12 *ἡγούμενος*, ὁ δὲ 8 *ἑπόμενος* αὐτῆς.

Ἐὰν δὲ ἦναι γραμμένον 8·12, τότε πρὸς τὸ παρὸν θέλομεν νοεῖ ὅτι ὁ 8 ἔχει ὀλιγωτέρας μονάδας τοῦ 12, καὶ ὅτι αὐτὸς θέλει ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 12 πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς· ὥστε καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ 12 πρὸς τὸν 8 καὶ ἡ τοῦ 8 πρὸς τὸν 12 νὰ ἦναι ἡ αὐτὴ 4. Ἐν δὲ τῷ Συμπληρ. τῆς Ἀριθμητικῆς θέλομεν ἐξετάσει ἀκριβέστερα τὰ περὶ τῆς διαφορᾶς.

Εἴδομεν ἔτι (53, σημ.) ὅτι, ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τοὺς δύο ὅρους διαφορᾶς, ἐπομένως καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀπὸ τῶν δύο ὅρων της, τὰ προκύπτοντα κεφάλαια ἢ ὑπόλοιπα θέλουσιν ἔχει τὴν αὐτὴν διαφορὰν, ἥντινα καὶ οἱ πρῶτοι ἀριθμοί. Τοῦτο δ' εἶναι πολλὰ φανερὸν καὶ δὲν χρειάζεται ἄλλην ἀπόδειξιν.

148. Ἐὰν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν ἦναι ἡ αὐτὴ ἢ ἴση μὲ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ὀνομάζονται *ἰσοδιάφοροι*. Ἀλλὰ πάντοτε πρέπει νὰ νοῆται ἡ διαφορὰ τῶν μεγαλητέρων ἀριθμῶν πρὸς τοὺς μικροτέρους, ἢ ἡ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τῶν μικροτέρων πρὸς τοὺς μεγαλητέρους, οἷον ἡ τοῦ 12·8 καὶ ἡ τοῦ 20·16, ἢ ἡ τοῦ 8·12 καὶ ἡ τοῦ 16·20, ἀλλ' ὄχι ἡ τοῦ 12·8 καὶ ἡ τοῦ 16·20, ἢ ἡ τοῦ 8·12 καὶ ἡ τοῦ 20·16, διότι τότε οἱ ἀριθμοί, ἂν καὶ οἱ αὐτοί, δὲν εἶναι ὅμως ἰσοδιάφοροι, ὡς μὴ νοουμένων κατὰ τὸν αὐτὸν ὁλωςδιόλου τρόπον τῶν ἀριθμῶν. Ἕκαστος δὲ τῶν τεσσάρων ἰσοδιαφόρων λέγεται *τέταρτος ἰσοδιάφορος τῶν τριῶν ἄλλων*.

Τὸ σημεῖον, ὅπερ δεικνύει τὴν ἰσότητα τῶν διαφορῶν, εἶναι :, κείμενον μεταξὺ τῶν δύο διαφορῶν, οἷον 12·8 : 20·16· ἀλλ' ἔτι καὶ τὸ γενικὸν ἰσότητος σημεῖον = εἶναι ἐν χρήσει ἐνίοτε, οἷον 12·8 = 20·16.

Ἰσοδιαφορὰ δὲ εἶναι κυρίως ἡ ἀφῃρημένη ἰδέα τῶν ἰσοδιαφόρων, ἢ ἡ ἰσότης δύο διαφορῶν· ἀλλὰ συνήθως *ἰσοδιαφορὰ* λέγεται καὶ τὸ σύνολον τεσσάρων ἰσοδιαφόρων ἀριθμῶν, γραμμένων ὡς ἤδη εἴπομεν ἢ ἀπαγγελλομένων.

Ταυτόμεσον δὲ ἰσοδιαφορὰν ὀνομάζομεν τὴν ἔχουσαν τοὺς δύο μέσους ἴσους ἢ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, οἷον τὴν 12·8 : 8·4, ἥτις κοινῶς καλεῖται *συνεχής*. Ὁ δὲ αὐτὸς μέσος λέγεται *μέσος ἰσοδιάφορος* τῶν δύο ἄλλων.

Τὰ ὀνόματα τῶν διαφόρων ὅρων ἰσοδιαφορᾶς εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ τὰ ἀναλογίας. Ἀπαγγέλλεται δὲ ἡ ἰσοδιαφορὰ ὡς καὶ ἡ ἀναλογία, οἷον ἡ ἀνωτέρω, 12 πρὸς 8 ὡς 20 πρὸς 16, ἢ οὕτως, ὁ 12 πρὸς τὸν 8 ἔχει τὴν αὐτὴν διαφοράν, ἣν ἔχει ὁ 20 πρὸς τὸν 16.

149. ***Τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων πάσης ἰσοδιαφορᾶς εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων αὐτῆς.*** Διότι, ἂν οἱ ἡγούμενοι ἦναι μεγαλήτεροι τῶν ἑπομένων των, ἑκάτερος αὐτῶν εἶναι κεφάλαιον τοῦ ἑπομένου του καὶ τῆς διαφορᾶς των, καὶ διὰ τοῦτο τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν ἄκρων θεωρεῖται κεφάλαιον τοῦ πρώτου ἑπομένου, τῆς πρώτης διαφορᾶς καὶ τοῦ δευτέρου ἑπομένου, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν μέσων θεωρεῖται κεφάλαιον τοῦ πρώτου ἑπομένου, τοῦ δευτέρου ἑπομένου καὶ τῆς δευτέρας διαφορᾶς, ἤτοι καὶ τὰ δύο κεφάλαια εἶναι κεφάλαια τῶν αὐτῶν τριῶν ἀριθμῶν, τῶν δύο ἑπομένων καὶ τῆς αὐτῆς διαφορᾶς, διότι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἰσοδιάφοροι· διὰ τοῦτο εἶναι ὁ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων καὶ τὸ τῶν μέσων.

Ἂν δ' οἱ ἑπόμενοι ἦναι μεγαλήτεροι τῶν ἡγουμένων, τότε ὡσαύτως πληροφορούμεθα ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός· διότι ἑκάτερον θέλει εἶσθαι κεφάλαιον τῶν δύο ἡγουμένων καὶ τῆς αὐτῆς διαφορᾶς, διότι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι. Ἄρα τὸ *κεφάλαιον* κτλ.

Ἀλλ' ἐκ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως γίνεται δῆλον ὅτι, *ἂν διαφορά τις δὲν ἦναι ἴση μὲ ἄλλην, τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων*. Ὥστε *μόνον* ἰσοδιαφορᾶς τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ τῶν μέσων.

Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται ὅτι, *ἐὰν τὸ κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν ἦναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον δύο ἄλλων, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ τεταγμένοι οὕτως, ὥστε τὰ δύο μέρη τοῦ ἑτέρου κεφαλαίου νὰ ἦναι ἄκρα, καὶ τὰ δύο μέρη τοῦ ἄλλου νὰ ἦναι μέσα, εἶναι ἰσοδιάφοροι*. Διότι μόνον ἰσοδιαφορᾶς οἱ ὅροι ἔχουσι ταύτην τὴν ἰδιότητα.

150. Εἶναι δ' εὔκολον νὰ πληροφορηθῇ τις ὅτι καὶ ἰσοδιαφορᾶς ἂν συμμετατεθῶσιν οἱ μέσοι, ἢ οἱ ἄκροι, ἢ οἱ μέσοι καὶ οἱ ἄκροι ἐνταυτῷ, ἢ ἂν ἀντιστραφῶσιν αἱ διαφοραί, ἤτοι οἱ ἡγούμενοι γείνωσιν ἑπόμενοι καὶ οἱ ἑπόμενοι ἡγούμενοι, οἱ ἀριθμοὶ διαμένουσιν ἰσοδιάφοροι. Διότι οἱ ὅροι οἱ αὐτοὶ διαμένουσιν ἢ μέσοι καὶ ἄκροι ὡς ἦσαν, ἢ οἱ μέσοι γίνονται ἄκροι καὶ τἀνάπαλιν, ἐπομένως καὶ τὰ κεφάλαια τῶν μέσων καὶ τῶν ἄκρων εἶναι τὰ αὐτά, ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ διαμένουσιν ἰσοδιάφοροι.

Ὡσαύτως εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῇ τις καὶ ὅτι, ἂν προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἢ εἰς τοὺς δύο πρώτους ὅρους, ἢ εἰς τοὺς δύο τελευταίους, ἢ εἰς τοὺς δύο ἡγουμένους, ἢ εἰς τοὺς δύο ἑπομένους, τὰ προκύπτοντα κεφάλαια ἢ ὑπόλοιπα εἶναι ἰσοδιάφορα μὲ τοὺς δύο ἄλλους ὅρους τῆς ἰσοδιαφορᾶς.

151. Ἐὰν ὅρος τις ἰσοδιαφορᾶς ἦναι ἄγνωστος, οἱ δὲ ἄλλοι τρεῖς γνωστοί, εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ διὰ τούτων. Ἂν π. χ. ἦναι ἄγνωστος ὁ ἕτερος τῶν ἄκρων, τὸ κεφάλαιον τῶν γνωστῶν μέσων, ὡς τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῶν ἄκρων, νοεῖται ὡς κεφάλαιον τῶν ἄκρων· ἐπειδὴ δὲ εἶναι γνωστὸς ὁ ἕτερος ἄκρος

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων, ἂν ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τούτου ἀφαιρεθῇ ὁ γνωςὸς ἄκρος, τὸ ὑπόλοιπον δῆλον ὅτι θέλει εἶσθαι ὁ ἄγνωστος ἄκρος. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἤθελε γείνει καὶ ἂν ἄγνωστος ἦτον ὁ ἕτερος τῶν μέσων.

Λοιπὸν *πρὸς εὕρεσιν τετάρτου ἰσοδιαφόρου προςθέτονται οἱ δύο γνωστοὶ μέσοι ἢ ἄκροι καὶ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν ἀφαιρεῖται ὁ γνωστὸς ἄκρος ἢ μέσος.*

Εὐκόλως δ' ἐννοεῖται ὅτι *πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέσου ἰσοδιαφόρου δύο γνωστῶν πρέπει νὰ προςθέτωνται οἱ γνωστοὶ ἄκροι καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 2·* διότι ὁ μέσος ἰσοδιάφορος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύο γνωστῶν.

Σημ. ά. Ἐξεθέσαμεν σύντομα καὶ ὀλίγα τὰ περὶ τῶν ἰσοδιαφορῶν, διότι εἶναι ὀλίγον χρήσιμα· κατόπιν δὲ τῶν ἀναλογιῶν ἵνα δυνηθῶμεν συντόμως καὶ εὐλήπτως νὰ διαλάβωμεν περὶ αὐτῶν, συνειθίσαντες εἰς τὰ περὶ ἀναλογιῶν, τῶν χρησιμωτάτων.

Σημ. β'. Ἐν ἄλλαις Ἀριθμητικαῖς ἡ μὲν διαφορὰ ὀνομάζεται *λόγος ἀριθμητικός*, ὁ δὲ λόγος *λόγος γεωμετρικός*, ἐπομένως ἡ μὲν ἰσοδιαφορὰ καλεῖται *ἀναλογία ἀριθμητική*, ἡ δὲ ἀναλογία *ἀναλογία γεωμετρική*. Ἀλλὰ τὰ παράλογα ταῦτα ὀνόματα εἶναι καιρὸς νὰ ἐκλείψωσι πλέον, ἐνῷ τὰ ὁποῖα μετεχειρίσθημεν καὶ ἡμεῖς ἀνωτέρω εἶναι ἀρκετὰ καλὰ καὶ προτιμητέα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΛΥΣΕΩΣ ΤΙΝΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ.

Τί εἶναι ἀριθμητικὸν πρόβλημα καὶ ὁποῖα τὰ στοιχεῖά του.

152. Ἀφοῦ ἐξετάσαμεν ἀκριβῶς διαφόρους σχέσεις τῶν ἀριθμῶν καὶ ἐξηγήσαμεν διαφόρους τρόπους, καθ' οὓς διὰ δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν ἄλλον συσχετισμένον μὲ αὐτούς, ἤτοι ἀφοῦ ἐθεωρήσαμεν ἱκανῶς τὸν ἀριθ-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

μητικὸν λογισμὸν καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀναλογιῶν, μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν ἐξέτασιν διαφόρων περιστάσεων τοῦ κοινωνικοῦ βίου, καθ' ἃς εἶναι δεδομένοι ἀριθμοὶ παριστάνοντες ὡρισμένων πραγμάτων ποσὰ, δι' ὧν πρόκειται νὰ εὑρίσκωνται ἄλλοι ἄγνωστοι, ἤτοι εἰς τὸ περὶ λύσεως διαφόρων ἀριθμητικῶν προβλημάτων, πρὸς ὃ χρησιμεύουσιν ὅλα ὅσα ἐξηγήθησαν ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ κεφαλαίῳ.

Πρόβλημα λέγεται πᾶν ὅ,τι ἔχει ζητητέον ἄγνωστον συσχετισμένον πρὸς γνωστά τινα, δι' ὧν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ· ὁ δὲ λόγος, δι' οὗ παρίσταται τὸ πρόβλημα, καλεῖται *ἔκθεσις* αὐτοῦ· τὰ δὲ γνωστά, *δεδομένα* αὐτοῦ.

Ἀριθμητικὸν δὲ λέγεται τὸ πρόβλημα, οὗτινος καὶ τὸ ἄγνωστον εἶναι ἀριθμὸς καὶ τὰ δεδόμενα εἶναι ἀριθμοὶ καὶ σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους καὶ πρὸς τὸ ἄγνωστον.

153. Τὸ ἄγνωστον δυνατὸν νὰ ἦναι ὄχι μόνον εἷς, ἀλλὰ καὶ δύο καὶ πλειότεροι ἀριθμοί.

Ἡ δὲ μονὰς ἑκάστου ἀριθμοῦ τοῦ προβλήματος δυνατὸν νὰ ἦναι ὁποιουδήποτε εἴδους ποσὸν, καὶ ὁ ἀριθμὸς ἑπομένως νὰ παριστάνῃ ὁποιονδήποτε ποσὸν προςδιωρισμένον πρός τινα ὁμοειδῆ μονάδα.

Οἱ δεδομένοι δ' ἀριθμοὶ δυνατὸν νὰ ἦναι δύο, τρεῖς καὶ πλειότεροι· ἐνίοτε ὅμως ὡς πολλὰ φανεροί τινες δὲν ἐκθέτονται, ἀλλ' ἀποσιωπῶνται (ἰδὲ προβ. 4, 7.)

Αἱ δὲ σχέσεις τῶν ἀριθμῶν εἶναι διάφοροι, ὧν εἴδομεν ἤδη (23, 24, 25) τὴν τῶν ὁμωνύμων, τὴν τῶν ὁμοειδῶν καὶ τὴν τῶν ἰσοδυνάμων· ἔτι δὲ τὴν τοῦ κεφαλαίου πρὸς τὰ μέρη του, ἢ μέρους τινὸς πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἄλλο μέρος· τὴν τοῦ γινομένου πρὸς τοὺς παράγοντάς του, ἢ ἑκατέρου παράγοντος πρὸς τὸ γινόμενον καὶ τὸν ἄλλον παράγοντα, καθ' ὅλας τὰς διαφόρους περιπτώσεις· καὶ τὴν τῆς ταυτότητος τῶν λόγων. Ἐκτὸς δὲ τούτων ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ σχέσεις συστημένας *ἐκ φύσεως* ἢ *ἐξ ἀνθρώπων*, οἷον ἐν κινήσει τινὶ ἡ τοῦ διαστήματος πρὸς τὸν χρόνον (ἰδὲ προβ. 6, 13, 21, 30, 41, κτλ.) ἢ ἐν ἐργασίᾳ τινὶ ἡ τοῦ ἀποτελουμένου ἔργου πρὸς τὸν χρόνον (11, 44, 54, κτλ)· ἢ σχέσεις συστημένας *ἐκ συνθήκης τινὸς* (ἰδὲ πρ. 9, 10,

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

14, 15, κτλ.)· ἢ σχέσεις συστημένας *κατὰ τύχην ἢ περίστασιν* (ἰδὲ πρ. 18, 62 κτλ).

Εἶναι δ' εὐνόητον ὅτι αἱ σχέσεις τῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος ἀνάγκη νὰ ἦναι τοιαῦται, ὥστε νὰ ἦναι δυνατὸν διὰ τῶν γνωστῶν νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος, εἰδεμὴ δὲν θέλει εἶσθαι πρόβλημα τὸ ἐκτιθέμενον· οἷον τὸ 11ον, ἂν ἐξετίθετο οὕτως, πόσοι ἐργάται ἤθελον τελειώσει ἔργον τι εἰς μίαν ἡμέραν, ἐνῷ 46 πήχ. ὑφάσματος ἀξίζουσιν 60 δραχμάς; κτλ.

Ὅσον δὲ πλειότεραι καὶ ὅσον ποικιλώτεραι καὶ δυσνοητότεραι εἶναι αἱ τῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος σχέσεις, τόσον πολυπλοκώτερον καθίσταται τὸ πρόβλημα.

Περὶ λύσεως ἀριθμητικῶν προβλημάτων.

154. *Λύσις* προβλήματος λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων αὐτοῦ διὰ τῶν γνωστῶν. Ἡ λύσις ἀριθμητικοῦ προβλήματος συνίσταται εἰς δύο τινά, εἰς ἀνίχνευσιν τῶν σχέσεων τῶν ἀριθμῶν πρὸς ἀνακάλυψιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ὅσαι ἀνάγκη νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, ἵνα οὕτω προκύψῃ τελευταῖον ὁ ζητούμενος ἄγνωστος, καὶ εἰς ἐκτέλεσιν αὐτῶν κατὰ τὰ ἐξηγηθέντα ἐν τῷ δευτέρῳ κεφαλαίῳ. Τὸ πρῶτον ὀνομάζεται *ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος*, ἔχουσα χώραν μάλιστα ἐπὶ τῶν πολυπλόκων προβλημάτων. Ὥστε ἡ λύσις προβλήματος συνίσταται εἰς τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καὶ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγκαίων ἀριθμητικῶν πράξεων.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεύτερον μᾶς εἶναι ἤδη γνωστόν, ἐνταῦθα θέλομεν ἐκθέσει ὁδηγίας τινὰς περὶ τοῦ πρώτου, περιοριζόμενοι εἰς τοιαῦτα προβλήματα, ὧν ἡ λύσις δὲν ἔχει χρείαν ἄλλων ἀριθμητικῶν πράξεων παρὰ τὰς ἐν τῷ δευτέρῳ κεφαλαίῳ ἐξηγηθείσας, καὶ ὧν τὰ πλεῖστα ἔχουσι πολλότατα ἄλλα ὅμοιά των κατὰ τὰς σχέσεις, ἀπαντώμενα συνηθέστατα ἐν τῷ κοινωνικῷ βίῳ.

155. Ἐκ τῶν ἑξῆς ὀκτὼ προβλημάτων τὰ μὲν πρῶτα τέσσαρα λύονται διὰ προσθέσεως μόνης δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν, διότι εὐκόλως ἐννοεῖται ὅτι *ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δεδομένων*. Ἤγουν ὁ πατὴρ εἶχε τόσας δρ, ὅσας

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ἔδωκεν εἰς τοὺς υἱούς του καὶ ὅσας ἐκράτησεν αὐτός—Ἦτον τόσων ἐτῶν ὁ ἐρωτηθείς, ὅσων ἦτον πρὶν γεννηθῇ ὁ υἱός του καὶ ὅσα παρῆλθον ἔκτοτε, ἅτινα παριστάνει ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ του —Ἐπώλησε τὸ ἵππον τόσον, ὅσον τὸν ἠγόρασεν, ὅσα ἐδαπάνησε πρὸς τροφήν του καὶ ὅσα ἐκέρδισεν—Εἶναι τόσα τὰ ἔτη, ὅσα εἶναι τὰ πρὸ Χ. καὶ τὰ μετὰ Χ. Τὰ δὲ τρία ἄλλα λύονται διὰ μόνης ἀφαιρέσεως, διότι ὁ *ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι διαφορὰ τῶν δεδομένων*. Ἤγουν ἐδαπάνησε νὰ κτίσῃ τὴν οἰκίαν τόσον ὀλιγώτερα τῶν ὅσα τὴν ἐπώλησεν, ὅσα εἶναι τὸ κέρδος του—Εἶναι τόσον μακρὰν ὁ ἕτερος ὁδοιπόρος τοῦ ἄλλου, ὅσον πλειότερα στάδια ἔχει ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς τοῦ μικροτέρου—Εἶναι τόσα τὰ ἔτη, ὅσα περισσότερον ἔτη ἔχει τὸ ἐνεστὼς ἔτος τοῦ 1492. Τὸ δὲ ὄγδοον λύεται διὰ πολλῶν ἀφαιρέσεων ἢ (56) διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστου τούτων εἶναι ὁμοειδεῖς, ὅπερ εἶναι ἀναγκαῖον ἐν τῇ προσθέσει καὶ ἐν τῇ ἀφαιρέσει. Κρίνομεν δὲ περιττὸν νὰ θέσωμεν πλειότερα τοιαῦτα, διότι ἡ λύσις των εἶναι ἁπλουστάτη· ἄλλως, θέλομεν ἰδεῖ ἐφεξῆς πολλὰ ἄλλα, ὅπου ἀπαιτεῖται νὰ ἐκτελεσθῶσιν αὗται αἱ πράξεις (ἰδὲ πολλὰ ἐν τῇ Π. Α. ἀρ. 24 καὶ 70).

1. Πατήρ τις ἔδωκεν εἰς μὲν τὸν πρωτότοκόν του υἱὸν δραχμὰς 4758, εἰς δὲ τὸν δευτερότοκον 6374, εἰς δὲ τὴν κόρην του 3889, εἰς δὲ τὸν νεώτερόν του υἱὸν 3285 πλειότερον ἢ εἰς τὴν κόρην του, ἐκράτησε δ' αὐτὸς 12594· πόσας δραχμὰς εἶχεν ὅλας;

2. Ἐρωτηθείς τις πόσων ἐτῶν ἦτον, ἀπεκρίθη, Ἤμην 34 ἐτῶν ὅτ' ἐγεννήθη ὁ πρωτότοκός μου υἱός, ὅςτις τώρα εἶναι δεκαπενταετής· πόσων ἐτῶν ἦτον αὐτός;

3. Ἠγόρασέ τις ἵππον ἀντὶ 638 δρ, δαπανήσας δὲ πρὸς τροφήν του δρ 184,50 τὸν ἐπώλησε κερδίσας δρ 55,25· πόσας δραχμὰς τὸν ἐπώλησεν;

4. Πόσα ἔτη εἶναι ἀπὸ τῆς ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχίας γενομένης τὸ 480 ἔτος Π. Χ;

5. Ἐπώλησέ τις οἰκίαν ἀντὶ 5784 δραχ κερδίσας 568· πόσας ἐδαπάνησε να τὴν κτίσῃ;

6. Πόσον μακρὰν εἶναι ὁδοιπόρος τις ἀπ' ἄλλου, οἵτινες ἐκίνησαν τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἀπό τινος τόπου καὶ διευθυνόμενοι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὥδευσαν στάδια ὁ μὲν 56,350, ὁ δὲ 35,245;

7. Πόσα ἔτη εἶναι ἀπὸ τῆς ἀνακαλύψεως τῆς Ἀμερικῆς, γενομένης τὸ 1492;

8. Χρεωστῶν τις 6450 δρ ἀπέδωκε πρῶτον 545, ἔπειτα 935, τελευταῖον 475· πόσας χρεωστεῖ ἀκόμη;

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

156. Ἐκ δὲ τῶν ἑξῆς ἓξ προβλημάτων τὰ μὲν τέσσαρα πρῶτα λύονται διὰ μόνου πολλαπλασιασμοῦ, διότι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ κατασκευασθῇ οὕτως ἐκ τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ, ὅπως ὁ ἄλλος ἐκ τῆς μονάδος του. Ἤγουν ἐν τῷ ἐννάτῳ καὶ ὁ δρ 15,30 καὶ ὁ πήχ $25\frac{5}{8}$ εἶναι συσχετισμένοι πρὸς τὴν μονάδα τούτου, τὸν πῆχυν, ὁ μὲν παριστάνων τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, ὁ δὲ τὸ πόσοι εἶναι, καὶ δῆλον ὅτι, ὅσοι εἶναι οἱ πήχεις, τοσάκις δρ 15,30 εἶναι ἡ ἀξία των· ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ δεκάτῳ. Ἐν δὲ τῷ ἑνδεκάτῳ οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ 46 καὶ 60 εἶναι συσχετισμένοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλ' ὄχι διὰ τῆς μονάδος τοῦ ἑτέρου· πρέπει δὲ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 46 ἐπὶ 60, ἵνα εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον, διότι οἱ 46 ἐργάται εἰς μίαν ἡμέραν ἐτελείωσαν τὸ ἑξηκοστὸν τοῦ ὅλου ἔργου, ἀφοῦ εἰς 60 ἡμέρας τὸ ὅλον, τὸ ἄλλο δ' ἑξηκοστὸν χρειάζονται ἄλλοι 46 νὰ τὸ ἐκτελέσωσι τὴν αὐτὴν ἡμέραν, καὶ τὸ ἄλλο ἄλλοι 46, καὶ ἑπομένως τοσάκις 46 ἐργ, ὅσα εἶναι τὰ ἑξηκοστά, ἤτοι 60, ὅσαι εἶναι αἱ ἡμέραι. — Τὸ δὲ δωδέκατον ὅτι λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ διδάσκει ἡ γεωμετρία, ἥτις πείθει καὶ ὅτι ἡ μονὰς τοῦ γινομένου δὲν εἶναι ἡ τοῦ ἑτέρου τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτῆς. Τὸ δὲ 13ον εἶναι ὡς τὸ 9ον καὶ 10ον, εἶναι δὲ συσχετισμένοι ἐκ φύσεως οἱ ἀριθμοὶ 340 πήχεις καὶ 48 δευτερόλεπτα πρὸς τὴν μονάδα τοῦ 48, ἡ δὲ φυσικὴ μᾶς γνωστοποιεῖ τὴν σχέσιν ταύτην, ἀνακαλύψασα αὐτήν.

Τοῦ δὲ 14ου ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς δῆλον ὅτι εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς τῶν ἀγορασθέντων ἀξίας καὶ τῆς τῶν δοθέντων εἰς ἀνταλλαγήν· καὶ ἡ πρώτη δὲ καὶ ἡ δευτέρα ἀξία εἶναι κεφάλαιον τῶν μερικῶν ἀξιῶν, ἑκάστη δὲ τούτων γινόμενον τῆς ἀξίας τοῦ ἑνὸς πράγματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ. Ὥστε πρὸς λύσιν αὐτοῦ θέλουσι γείνει πέντε πολλαπλασιασμοί, δύο προσθέσεις καὶ μία ἀφαίρεσις.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ὅλων τῶν προβλημάτων ἐκτὸς τοῦ 12ου οἱ εἰς πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοὶ εἶναι ἑτεροειδεῖς, ἀλλὰ καὶ τοῦ 12ου ὁ μὲν σημαίνει μῆκος, ὁ δὲ πλάτος. Τοῦτο συμβαίνει πάντοτε, καὶ διὰ τοῦτο χρειάζεται νὰ προσέχῃ τις ὅτι πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ζητουμένου, ἐκτὸς τῶν

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ὁμοίων τοῦ 12ου, ὁπότε εἶναι ἀδιάφορον τίς εἶναι πολλαπλασιαστέος, διότι ἡ μονὰς τοῦ γινομένου εἶναι ἄλλη παρὰ τὴν τῶν παραγόντων του.

9. Πόσον ἀξίζουσι $25\frac{5}{8}$ πήχεις ὑφάσματος πρὸς δρ 15,30 τὸν πῆχυν;

10. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν 27 ἄνθρωποι, ἵνα λάβῃ ἕκαστος ἀνὰ 115,50;

11. Πόσοι ἐργάται θέλουσι τελειώσει ἔργον τι εἰς μίαν ἡμέραν, ἐνῷ 46 ἐργ τὸ ἐτελείωσαν εἰς 60 ἡμέρας;

12. Ἀμπέλου ἐπιμήκους σχήματος τὸ μὲν μῆκος εἶναι πήχ 258,45, τὸ δὲ πλάτος 75,26· πόσων πηχυαίων τετραγώνων εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

13. Ἀφ' ἧς στιγμῆς ἤστραψεν ἕως ν' ἀκουσθῇ ἡ βροντὴ παρῆλθον 48 δευτερόλεπτα, εἰς ἕκαστον δὲ δευτερόλεπτον ὁ ἦχος βροντῆς διατρέχει μῆκος 340 πήχεων περίπου· πόσον μακρὰν εἶναι τὸ νέφος, ὅπου ἔγεινεν ἡ ἀστραποβρόντησις;

14. Ἠγόρασέ τις $5\frac{3}{4}$ κομμάτια τσόχας πρὸς δρ. $220\frac{7}{9}$ τὸ κομμάτιον, 97 ζεύγη ὑποδημάτων πρὸς δρ $11\frac{3}{4}$ τὸ ζεῦγος καὶ 35 φέσια πρὸς δρ $15\frac{5}{7}$ τὸ ἕν, ἔδωκε δ' ἀντ' αὐτῶν βούτυρον ὀκ 24 καὶ 256 δράμια πρὸς δρ 2,35 τὴν ὀκᾶν, τυρὸν ὀκ 42 καὶ 70 δράμ πρὸς λεπ 85 τὴν ὀκᾶν, καὶ ἱκανὰς δραχμὰς προσέτι· πόσας δραχμὰς ἔδωκεν;

157. Ἐκ τῶν ἑξῆς τεσσάρων προβλημάτων τὰ τρία πρῶτα εἶναι διπλᾶ, λύεται δ' ἕκαστον διὰ μιᾶς μόνης διαιρέσεως, διότι ὁ *ζητούμενος ἀριθμὸς ἢ εἶναι τοιοῦτος πρὸς τὸν ἕτερον τῶν δεδομένων, ὁποία εἶναι ἡ μονὰς τοῦ ἄλλου πρὸς αὐτόν, ἢ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸν ἄλλον.* Ἤγουν τοῦ 15ου οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι συσχετισμένοι πρὸς ἀλλήλους ὄχι διὰ τῆς μονάδος τοῦ ἑτέρου, ἀλλὰ καθ' αὑτούς, ὁ ἕτερος παριστάνων τὸ ποσὸν τοῦ πράγματος, ὁ δὲ τὴν ἀξίαν του· ἡ δὲ ζητουμένη ἀξία τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι τοιαύτη πρὸς τὴν ἀξίαν 84δρ ἢ $\frac{3}{7}$ τῆς δρ, ὁποῖος εἶναι ὁ εἷς πῆχυς πρὸς τοὺς 145 ἢ πρὸς τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως, ἤτοι τὸ $\frac{1}{145}$ τῶν 84δρ ἢ τὰ $\frac{8}{7}$ τῶν $\frac{3}{7}$ τῆς δρ. Ἢ ἀντιστρόφως, τὸ μὲ μίαν δρ ἀγοραζόμενον θέλει εἶσθαι τὸ $\frac{1}{84}$ τῶν 145 πήχ ἢ τὰ $\frac{7}{3}$ τῶν $\frac{7}{8}$, διότι ἡ 1 δρ εἶναι $\frac{1}{84}$ τῶν 84, ἢ τὰ $\frac{7}{3}$ τῶν $\frac{3}{7}$ αὐτῆς (99).

Ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τοῦ 16ου ὁ εἷς ἄνθρωπος, οὗτινος ζητεῖται τὸ μερίδιον, εἶναι τὸ $\frac{1}{69}$ τῶν 69, καὶ διὰ τοῦτο τὸ μερίδιόν του εἶναι τὸ $\frac{1}{69}$ τῶν 797985δρ. Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, ἐπειδὴ ἕκαστος θέλει λάβει ἀνὰ 257δρ, ὁ 797985 ἀνάγκη νὰ νοῆται συγκείμενος ἐκ πολλῶν 257δρ, ἤτοι νὰ νοῆται πρὸς τὸν 257 κατὰ λόγον, καὶ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ λόγος

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

οὗτος, τόσοι εἶναι οἱ ἄνθρωποι. Τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ 17ον. Ἐν δὲ τῷ 18ῳ δῆλον ὅτι, ἂν ἀντὶ ἑνὸς κτίστου ἦσαν 2, τὸ ἔργον ἤθελον ἐκτελέσει εἰς τὸ ἥμισυ τῶν 2μην καὶ 20ημερ, ἂν δ' ἦσαν 3, εἰς τὸ 3ον· ἄρα οἱ 12 κτίσται θέλουν τὸ τελειώσει εἰς τὸ 12ον τῶν 2μην καὶ 20ημερ· ὥστε πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ χρόνου διὰ τοῦ 12, τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κτιστῶν. Τοῦ δὲ 19ου πρῶτον εὑρίσκεται τί μέρος τοῦ πλοιαρίου εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν· καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\frac{8}{15}$, ἡ τὸ πλοιάριον εἶναι $\frac{15}{8}$ τούτου, καὶ ἡ ἀξία του εἶναι τὰ $\frac{15}{8}$ τῆς ἀξίας τοῦ μέρους του $\frac{8}{15}$.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι ἑτεροειδεῖς ἢ ὁμοειδεῖς. Καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ζητούμενος εἶναι ἓν πολλοστόν τι τοῦ ἑτέρου τῶν δύο ἢ πολλά, ὅ,τι εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον ἡ μονάς του, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ὁ ζητούμενος εἶναι λόγος τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸν ἄλλον. Κατὰ τὴν πρώτην διαιρετέος εἶναι ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ζητουμένου, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ὁ ζητούμενος εἶναι ἑτεροειδὴς τῶν δεδομένων, καὶ χρειάζεται προσοχὴ νὰ προσδιορίζηται ὀρθῶς ὁπότερος τῶν δεδομένων εἶναι ὁ διαιρετέος, εἰδεμὴ εὑρίσκεται ὁ ἀντίστροφος λόγος, ὅστις εἶναι ἄλλος παρὰ τὸν ζητούμενον. Ταῦτα δὲ παρατηροῦνται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ὁμοίων μὲ ταῦτα προβλημάτων.

Παρατηρητέον ἔτι ὅτι καὶ τὸ 11ον ὁμοιάζει μὲ ταῦτα τὰ προβλήματα, καὶ ὅμως λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ καὶ ὄχι διὰ διαιρέσεως ὡς ταῦτα. Τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ἐκεῖ, ἐνῷ ἡ ἡμέρα εἶναι πολλοστόν τι τῶν δεδομένων ἡμερῶν, οἱ ζητούμενοι ἐργάται δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ πολλοστὸν τῶν 16, ἀλλ' *ἀντιστρόφως* εἶναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον, καὶ ἔπρεπε νὰ εὑρεθῶσι διὰ τῆς ἀντιστρόφου πράξεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐνδιετρίψαμεν δὲ πλειότερον εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν δέκα προβλημάτων τούτων, ἵνα συνειθίσωσιν οἱ ἀρχάριοι ἐν τοῖς ἁπλοῖς τούτοις εἰς τὸ διακρίνειν τὰς σχέσεις τῶν ἀριθμῶν, καὶ ἀνακαλύπτειν εὐκόλως τὰς ἐκτελεσθησομένας πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου· ὥστε νὰ δύνωνται ἔπειτα εὐκόλως ν' ἀναλύωσι καὶ τὰ πολύπλοκα προβλήματα. Πρὸς πλειοτέραν δὲ ἄσκησιν παραπέμπομεν εἰς τὰ ἐν τῇ Π. Α. προβλήματα ἐν ἀρ. 45 καὶ 70.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

15. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ὑφάσματος, οὗτινος 145 πήχεις ἀξίζουσιν 89 δραχμάς, ἢ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχ. ἀξίζουσι $\frac{3}{7}$ τῆς δρ; Ἢ μὲ μίαν δραχ. πόσον ἀγοράζει τις;

16. Ἂν 797985 δραχ. μοιρασθῶσιν ἐξίσου 69 ἄνθρωποι, πόσας θέλει λάβει ἕκαστος; Ἂν δὲ τούτων λάβῃ ἕκαστος 257, πόσοι εἶναι οἱ μοιρασθέντες αὐτά;

17. Ἵνα φθάσῃ τις ἀπὸ πόλεως εἰς ἄλλην ἀπέχουσαν στάδια 585 $\frac{2}{4}$ εἰς 9 $\frac{1}{2}$ ἡμέρας, πόσον πρέπει νὰ ὁδεύῃ καθ' ἡμέραν; Ἂν δὲ ὁδεύῃ τὴν ἡμέραν στάδια 45,250, εἰς πόσας ἡμέρας θέλει ὁδεύσει αὐτὸ τὸ διάστημα;

18. Τοῖχόν τινα, τὸν ὁποῖον εἷς κτίστης κτίζει εἰς 2 μῆνας 20 ἡμέρας, εἰς πόσον χρόνον ἤθελον τὸν κτίσει 12 κτίσται;

19. Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{5}$ πλοιαρίου ἐπωλήθησαν 4576λιών 3πεντ 2δρ, πόσον κατὰ ταύτην τὴν τιμὴν ἤξιζεν ὅλον;

158. Ἐκ τῶν 19 ἀκολούθων προβλημάτων, ὅλων σχεδὸν διαφόρων ἀπ' ἀλλήλων, τὰ ἀπὸ τοῦ 20ου μέχρι καὶ τοῦ 27ου, ὡς ἰδιόμορφα καὶ εὔκολα εἰς λύσιν παραιτοῦμεν εἰς τοὺς μαθητὰς νὰ τὰ λύσωσιν ἐφαρμόζοντες ὅσα ἤδη προείπομεν.

Τὸ δὲ 28ον καὶ 29ον καὶ τὰ τοιαῦτα, ἅτινα καλοῦνται *ἀναμίξεως προβλήματα*, λύονται *διὰ πολλαπλασιασμῶν, δύο προςθέσεων καὶ μιᾶς διαιρέσεως*. Δηλ. τὰ χρήματα, ὅσα θέλουσι συναχθῇ ἐκ τοῦ κράματος, εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν χρημάτων, ὅσα ἤθελον συναχθῇ, ἂν ἐπωλεῖτο ἰδιαιτέρως ἕκαστος οἶνος, ἅτινα εὑρίσκονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ἀξίας τῆς ὀκᾶς ἑκάστου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων. Ταῦτα δὲ τὰ χρήματα εἶναι ἡ ἀξία τοῦ κεφαλαίου τῶν ἀριθμῶν τῶν ὀκάδων τῶν διαφόρου ἀξίας οἴνων, καὶ ὅ,τι πολλοστὸν τοῦ κεφαλαίου τούτου εἶναι ἡ μία ὀκᾶ, τοιοῦτον θέλει εἶσθαι καὶ ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ κεφαλαίου. Ὅταν δὲ ἠξεύρῃ τις ὅτι ὁ καθαρὸς χρυσὸς εἶναι 24 κερατίων, καὶ ὅτι ὁ 20 π. χ. κερατίων ἔχει 20 μὲν μέρη καθαροῦ χρυσοῦ, 4 δὲ μέρη ἄλλου μετάλλου ἢ ἄλλων μετάλλων, καὶ ὅτι τὰ 20 κεράτια παριστάνουσι κυρίως τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος τοῦ χρυσοῦ, καταλαμβάνει εὐκόλως διατὶ λύεται τὸ 29ον ὡς τὸ προηγούμενον.

Οὕτως καὶ τὸ 30ον λύεται, ὅταν ἠξεύρῃ τις ὅτι μέση θερμότης ἡμέρας τινὸς εἶναι ἐκείνη, ἥτις, ἂν ἐπεκράτει ἡ αὐτὴ ἀπὸ πρωΐας μέχρις ἑσπέρας τῆς ἡμέρας, ἤθελεν ἀποτελέσει ἀριθμὸν βαθμῶν ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν, τὸν ἀποτελούμενον ἐκ τῶν διαφόρων βαθμῶν τῶν παρατηρηθέντων κατὰ διαφόρους ὥρας τῆς ἡμέρας. Ὥστε πρέπει *νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθ-*

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου
ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

καὶ τῶν βαθμῶν ἐπὶ τοὺς τῶν ὡρῶν, τὰ γινόμενα νὰ προστεθῶσι, καὶ τὸ κεφάλαιον νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ κεφαλαίου 14 *τῶν ὡρῶν τῆς ἡμέρας ἐκείνης*, καὶ οὕτως εὑρίσκεται μέση θερμότης βαθ. $69\frac{3}{14}$.

Ἄλλο δὲ εἶναι ὁ μέσος βαθμὸς θερμότητος τῶν 64 βαθ, 70, 75 καὶ 73, ἤτοι οὗτος *εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κεφαλαίου τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν διὰ* τοῦ 4, διότι τέσσαρες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῶν διαφόρων βαθμῶν. Οὕτω δ' εὑρίσκεται καὶ τὸ μέσον διάστημα τοῦ 31ου προβλήματος, καὶ τὸ παντὸς ἄλλου ὁμοίου προβλήματος μὲ αὐτὸ μέσον τι, ὅπερ ἐκλαμβάνεται ὡς παριστάνον ἀκριβέστερα τὸ ἀληθινὸν διάστημα ἢ ὅ,τι ἄλλο ζητεῖται.

32ον. Ἂν ἐπώλει τὸν οἶνον πρὸς 40 λεπτά, ἤθελε λάβει 39400 λεπτά, ταῦτα δὲ θέλει λάβει, καὶ ἂν τὸν πωλήσῃ πρὸς 35 λεπτά, ὁ δὲ λόγος τῶν 39400 λεπτῶν πρὸς τὰ 35 παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων, ὅστις εἶναι ὀκάδ 1125 $\frac{5}{7}$· τώρα δ' ἐννοεῖ τις ὅτι τὸ προστιθέμενον ὕδωρ εἶναι ἡ διαφορὰ τούτου καὶ τοῦ 985, ἤτοι ὀκάδες $140\frac{5}{7}$.

33ον. Εἶναι δῆλον ὅτι τὰ ζητούμενα ἀργύρια εἶναι τὸ κεφάλαιον τοῦ 3ου αὐτῶν καὶ τοῦ 4ου καὶ τοῦ 8ου καὶ τοῦ 12ου καὶ τῶν 20 ἀργυρίων, τῶν δὲ κλασματικῶν μονάδων μόνον τὸ κεφάλαιον εἶναι $\frac{19}{24}$ τῶν ζητουμένων· ὥστε τὰ 20 ἀργύρια εἶναι τ' ἄλλα $\frac{5}{24}$ τῶν ζητουμένων ἀργυρίων· ἀντιστρόφως δὲ τὰ ζητούμενα εἶναι $\frac{24}{5}$ τῶν 20, ἤτοι 96.

34ον. Ἡ πληροῦσα βρύσις τὴν δεξαμενὴν εἰς ὥρας $2\frac{1}{4}$ ἤτοι εἰς $\frac{9}{4}$ τῆς ὥρας, εἰς μίαν ὥραν, ἥτις εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τῶν $\frac{9}{4}$, πληροῖ μόνον τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς δεξαμενῆς· ἡ δὲ πληροῦσα τὴν δεξαμενὴν εἰς ὥρ $3\frac{3}{4}$ ἤτοι $\frac{15}{4}$, εἰς μίαν ὥραν πληροῖ τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἄρα αἱ δύο ὁμοῦ εἰς μίαν ὥραν πληροῦσι τῆς δεξαμενῆς τὰ $\frac{4}{9}$ καὶ τὰ $\frac{4}{15}$, ἤτοι τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $\frac{32}{45}$· ὅλην δὲ τὴν δεξαμενήν, ἥτις εἶναι τὰ $\frac{45}{32}$ τῶν $\frac{32}{45}$ αὐτῆς, θέλουσι γεμίσει εἰς χρόνον, ὅστις εἶναι $\frac{45}{32}$ τῆς ὥρας, ἤτοι εἰς 1 ὥραν 24 λεπτ 22 δευτ καὶ $\frac{1}{2}$

35ον. Ὁ εἷς πῆχυς τῆς τσόχας τῆς Ἐλβεύφης, ὅστις λογίζεται δρ 15,50, ἀνταλλάσσεται μὲ τόσους πήχεις τῆς ἰσπα-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

νικῆς, ὅσοι ν' ἀξίζωσι δρ 15,50 πρὸς δρ 6,50 λογιζόμενοι, καὶ οὗτοι εἶναι ὁ λόγος τοῦ 15,50 πρὸς 6,50, ὅςτις εἶναι πήχ. $2\frac{5}{13}$. Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι πρὸς δρ 5,75 πωλούμενοι φέρουσι δρ 13,71 σχεδὸν, πλειοτέρας τῶν δρ 12,25, ὅσον πωλεῖται ὁ εἷς πῆχυς τῆς Ἐλδευφικῆς τσόχας, ὁ ἔχων ταύτην τὴν τσόχαν κερδίζει, κερδίζει δὲ δρ. 1,16 σχεδόν.

36ον καὶ 37ον. Πρῶτον εὑρίσκεται ἡ Γαλ. πήχη μὲ πόσας Τουρκικὰς ἰσοδυναμεῖ, ἤγουν ἐπειδὴ ἡ Γαλ. πήχη ἰσοδυναμεῖ μὲ βασιλ. πῆχυν 1,191 ἢ $\frac{1191}{1000}$, οὗτος δὲ μὲ $\frac{1000}{669}$ τῆς Τουρκικῆς πήχης, ἡ Γαλλικὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{1191}{1000}$ τῶν $\frac{1000}{669}$ τῆς Τουρκικῆς, ἤτοι μὲ $\frac{1191}{669}$ αὐτῆς ἢ μὲ 1,78 σχεδόν. Ἔπειτα νοοῦνται τὰ φράγ 15,35 ὅτι εἶναι ἡ ἀξία Τουρκικῆς πήχης 1,78, ἢ $\frac{178}{100}$, ἡ δὲ ἀξία τῆς μιᾶς μόνον εἶναι τὰ $\frac{100}{178}$ τῶν φρ 15,35, ὅ,τι εἶναι τὸ 1 πρὸς τὸ $\frac{178}{100}$, ἤτοι φρ. 8,62 σχεδόν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἓν φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ δρ 1,11, τὰ 8,62 ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 1,11 καὶ τοῦ 8,62, ἤτοι μὲ δρ. 9,57 περίπου.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ μνᾶ ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀκ 1,1719, ἡ ἀξία της θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον τοῦ 32γρ 25π ἐπὶ 1,1719, ὅπερ εἶναι περίπου 37γρ 20π. Ταῦτα δὲ ἰσοδυναμοῦσι μὲ δρ. σχεδ 9,61, λογιζομένης τῆς δρ πρὸς 3γρ 35π ἢ παράδες 155. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ μνᾶ ἀξίζει δρ 9,61, αἱ 48μν 5δ 6οδ ἀξίζουσι τὸ γινόμενον τοῦ 9,61 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μνῶν.

38ον. Ἀφοῦ 48 φράγκα ἰσοδυναμοῦσι μὲ 41 σχελίγγια, τὸ 1 φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τεσσαρακοστὸν ὄγδοον τῶν 41, ἤτοι μὲ $\frac{41}{48}$ τοῦ σελιγγίου. Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι τὸ σχελίγγιον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{5}{11}$ τοῦ φιορινίου, ἑπομένως δὲ τὸ φράγκον, ὅπερ εἶναι $\frac{41}{48}$ τοῦ σχελιγγίου, θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰ $\frac{41}{48}$ τῶν $\frac{5}{11}$ τοῦ φιορινίου. Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι τὸ φιορίνιον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{71}{25}$ τῆς δραχμῆς, ἑπομένως δὲ τὸ φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{41}{48}$ τῶν $\frac{5}{11}$ τῶν $\frac{71}{25}$ τῆς δραχμῆς. Γνωστοῦ δ' ὄντος μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμεῖ τὸ ἓν φράγκον, δῆλον ὅτι τὰ 584 φράγκα ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὸ γινόμενον τοῦ εὑρεθέντος ἤδη ἐπὶ 584.

20. Πρὸς ἐνδυμασίαν 896 στρατιωτῶν ἀνὰ 96 δρ ἕκαστον, καὶ 58 ἀξιωματικῶν ἀνὰ 576 ἕκαστον, πόσας δρ πρέπει νὰ πληρώσῃ ἡ κυβέρνησις;

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

21. Ἐνῷ τοῦ ἡλίου τὸ φῶς φθάνει εἰς τὴν γῆν εἰς 8 λεπτά, ἂν ὁ ἥλιος ἀπέχῃ τῆς γῆς 155525000 στάδια, πόσα στάδια διατρέχει τὸ φῶς του εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον;

22. Κωδώνιον ἀξίζον 86 λεπτὰ ἀντηλλάχθη ἀντὶ 8 ὀκάδων καρυδίων, ὧν τὸ μὲν ἥμισυ ἐπωλήθη πρὸς 12 λεπτὰ τὴν ὀκάν, τὰ δὲ λοιπὰ ἀντηλλάχθησαν ἀντὶ μαχαιριδίου πωληθέντος 34 λεπτά· ὁ ἀνταλλάξας τὸ κωδώνιον ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε; καὶ πόσον;

23. Πόσων παλαμῶν εἶναι μακρὰ ῥάβδος, ἧςτινος τὸ ἥμισυ καὶ τὸ ἓν τρίτον εἶναι ἐντὸς τοῦ ὕδατος, μέρος δ' ἴσον μὲ δύο πόδας εἶναι ἐκτός;

24. Νυμφευθέντος τινὸς 23 ἐτῶν ἀπέθανεν ἡ γυνὴ μετὰ 14 ἔτη τοῦ γάμου ἀφήσασα δωδεκαετῆ θυγατέρα, νυμφευθεῖσαν μετὰ 8 ἔτη ἄνδρα 5 ἐτῶν πρεσβύτερόν της· ἐπειδὴ δ' εἰς τὸ τεσσαρακοστὸν ἔτος τούτου ἀπέθανεν ὁ πατὴρ τῆς γυναικός του, πόσων ἐτῶν ἀπέθανεν;

25. Τίς ὥρα εἶναι ἐρωτηθείς τις, ἀπεκρίθη, Τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{6}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ ἡμερονυκτίου· τίς ὥρα ἦτον;

26. Πόσαι ἡμέραι παρῆλθον ἀπὸ τῆς πρώτης Ἰαννουαρίου, ἐρωτηθείς τις, ἀπεκρίθη, Τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν $\frac{3}{7}$ τῶν $\frac{6}{8}$ τοῦ ἔτους· τίνα ἡμέραν καὶ ὥραν τίνος μηνὸς ἠρωτήθη;

27. Πόσας δεσμίδας χάρτου ἀξίας 6 δρ, 7,80 δρ καὶ 8 δρ ἀγοράζει τις ἀντὶ δρ 486,50, ἰσαρίθμους ἐκ τῶν τριῶν τιμῶν;

28. Οἴνου 254 ὀκάδες πρὸς 80 λεπτὰ τὴν ὀκάν, καὶ ἄλλου οἴνου 549 οκ πρὸς 60λεπ τὴν ὀκ, καὶ ἄλλου 719οκ πρὸς 45 τὴν οκ ἀνεμίχθησαν εἰς ἕν· πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλῆται ἡ ὀκὰ τοῦ κράματος, ὥστε νὰ συναχθῶσιν ὅσα λεπτὰ ἤθελον συναχθῆ, ἂν ἐπωλεῖτο ἕκαστος οἶνος χωριστά;

29. Πόσων κερατίων εἶναι τὸ συγχώνευμα τριῶν κομματίων χρυσοῦ, ὧν τὸ μὲν 650δρ 6δδ 5 κόκ ἦτον 20 κερατίων, τὸ δὲ 470δρ 4δδ ἦτον $22\frac{1}{2}$ κερατ, τὸ δὲ 290δρ 8δδ 3κόκ ἦτον 21 κερατίων;

30. Τίς εἶναι ἡ μέση θερμότης τῆς ἡμέρας ἐκείνης, καθ' ἣν τὸ θερμόμετρον 5 ὥρας δεικνύει 64 βαθμούς, 4 ὥρας 70 βαθμούς, 2 ὥρας 75 βαθ καὶ 3 ὥρ 73 βαθμούς;

31. Τρὶς μετρηθὲν τριγωνομετρικῶς τὸ ἀπὸ τόπου εἰς τόπον διάστημα εὑρέθη τὸ μὲν πρῶτον 6784ὀργ 4ποδ 6δακ, τὸ δὲ δεύτερον 6779όρ 3 ποδ 7δακ, τὸ δὲ τρίτον 6790όρ 5ποδ 4 δακτ· τί εἶναι τὸ μέσον τούτων διάστημα;

32. Πόσον ὕδωρ χρειάζεται νὰ συγκεράσῃ τις μὲ 985 ὀκάδες οἴνου πωλουμένου πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκάν, ἵνα πωλῇ αὐτὸν πρὸς 33 λεπ τὴν ὀκάν;

33. Ἐὰν δαπανήσω τῶν ἀργυρίων μου τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ καὶ τὸ $\frac{1}{12}$, ἔλεγέ τις, θέλουσι μὲ μείνει 20· πόσα εἶχεν ἀργύρια;

34. Βρύσις ῥέουσα ὥρας $2\frac{1}{4}$ πληροῖ δεξαμενήν, ἥν τινα ἄλλη βρύσις γεμίζει εἰς ὥρας $3\frac{3}{4}$· εἰς πόσας ὥρας αἱ δύο ὁμοῦ ῥέουσαι ἤθελαν τὴν γεμίσει;

35. Ἀνταλλασσομένης Ἰσπανικῆς τσόχας πωλουμένης μὲν δρ 5,75 τὸν πῆχυν, κατὰ δὲ τὸ ἀντάλλαγμα λογιζομένης πρὸς δρ 6,50, ἀντ' ἄλλης τῆς Ἐλβεύφης πωλουμένης μὲν πρὸς δρ 12,25 τὸν πῆχυν, κατὰ δὲ τὸ ἀντάλ-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

λαγμα λογιζομένης πρὸς δρ 15,50, πότερος θέλει κερδίσει ὁ ἔχων τὴν Ἰσπανικὴν ἢ ὁ ἄλλος; καὶ πόσον;

36. Τσόχα ἀγορασθεῖσα 15 φράγκα καὶ 35 ἑκατοστὰ τὴν πήχην (l' aune) πόσας δραχμὰς ἔρχεται τὴν πήχην (ἀρσχίν); (l' aune εἶναι ἴση μὲ βασιλ. πῆχ. 1,191, ἡ δὲ ἀρσχὶν ἴση μὲ 0,669 τοῦ βασιλ. πήχεως, τὸ δὲ φράγκον εἶναι δρ 1,11).

37. Πρὸς γρόσια 32 καὶ 25 παράδες τὴν ὀκὰν 48μναῖ 5 δρ καὶ 6ὀδ πράγματός τινος πόσας δραχ. ἀξίζουσιν; (Ἡ μνᾶ εἶναι ἴση μὲ ὀκ 1,1719 ἢ μὲ δράμιά της $468\frac{3}{4}$).

38. Ὑποτεθέντος ὅτι 48 φράγκα ἰσοδυναμοῦσι μὲ 41 σχελίγγια ἀγγλικά, καὶ ὅτι 11 σχελίγγια ἰσοδυναμοῦσι μὲ 5 φιορίνια αὐστριακά, καὶ ὅτι 25 φιορίνια αὐστρ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 71 δραχ, 584 φράγκα μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν;

159. Ὅλα σχεδὸν τὰ ἑξῆς προβλήματα λύονται καθ' ἃ εἴπομεν ἐν ἀρ. 156 καὶ 157, ἤτοι δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ καὶ μιᾶς διαιρέσεως.

Τὰ ἐννέα πρῶτα ἔχουσι *δύο συστοιχίας* ἐκ δύο ἀριθμῶν ἑκατέραν ἀπαράλλακτα συσχετισμένων καὶ καλουμένων *συστοίχων*. Τοῦ 39ου πρώτη συστοιχία εἶναι τὸ 48 *πήχεις ἐπωλήθησαν* 576δρ, καὶ σύστοιχοι ὁ 48 καὶ ὁ 576, ὧν ὁ μὲν παριστάνει τὸ ποσὸν, ὁ δὲ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ. Δευτέρα δὲ συστοιχία εἶναι τὸ *πόσον ἀξίζουσι* 580 *πήχεις*, καὶ σύστοιχοι ὁ *πόσον ἀξίζουσιν*, ὁ ἄγνωστος, καὶ ὁ 580, συσχετισμένοι ὡς οἱ δύο τῆς πρώτης συστοιχίας. Τοῦ δὲ 41ου ἡ πρώτη συστοιχία εἶναι 25 *κτίσται ἔκτισαν τοῖχόν τινα εἰς* 3 *μῆνας καὶ* 12 *ἡμέρας*, ἡ δὲ δευτέρα 70 *κτίσται εἰς πόσον χρόνον ἤθελον κτίσει τὸν αὐτὸν τοῖχον*· σύστοιχοι δὲ, 25κτ, 3μ 12ημ, καὶ 70κτ, πόσον χρόνον, ἀπαράλλακτα συσχετισμένοι, ὁ ἕτερος δὲ τῆς δευτέρας συστοιχίας ἄγνωστος.

Ἑκάτερος δὲ τῆς πρώτης συστοιχίας ἔχει τὸν ὁμοειδῆ του ἐν τῇ δευτέρᾳ. *Ἀριθμὸς πήχεων* εἶναι ἐν ἑκατέρᾳ, *ἀριθμὸς δραχμῶν*, *ἀριθμὸς κτιστῶν*, *ἀριθμὸς χρόνων*.

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι διαφέρουσι τῶν ἐν ἀρ. 156 καὶ 157 προβλημάτων τὰ ἑξῆς καθότι ἐν τῇ πρώτῃ συστοιχίᾳ ἐδῶ μὲν εἶναι ἀριθμός τις, 48 πήχεις, 25 κτίσται, ἐκεῖ δὲ ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, εἷς πῆχυς, εἷς κτίστης, ἤτοι ἐκεῖ δίδεται τὸ *πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς*, ἐδῶ τὸ *πόσον οἱ* 48 *πήχεις*, κτλ. Με-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τὰ ταῦτα δὲ εἶναι εὔκολον νὰ καταλάβῃ τις ὅτι λύονται τὰ ἑξῆς προβλήματα δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ καὶ μιᾶς διαιρέσεως.

160. *Πρῶτον*. Ἐὰν ἤξευρέ τις πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς, πολλαπλασιάζων τὴν ἀξίαν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν τοῦ ἀγνώστου σύστοιχον 580 πήχεις ἤθελεν εὑρεῖ τὸν ζητούμενον ἄγνωστον. Ἀλλ' ἐκ τῆς πρώτης συστοιχίας εἶναι γνωστὸν ὅτι 48 πήχεις ἀξίζουσι 576^{δρ}, ἐκ δὲ τούτου δῆλον ὅτι ὁ εἷς πῆχυς, ὅστις εἶναι τὸ 48^{ον} τῶν 48, ἀξίζει τὸ 48^{ον} τῶν 576^{δρ}, ἤτοι ὅσον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 576 διὰ τοῦ 48· ἄρα *ὁ ζητούμενος εὑρίσκεται ἂν διαιρεθῇ ὁ 576 διὰ τοῦ 48 καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 580.*

Ὡσαύτως ἐὰν ἤξευρέ τις εἰς πόσον χρόνον εἷς κτίστης ἤθελε κτίσει τὸν τοῖχον, διαιρῶν αὐτὸν διὰ τοῦ συστοίχου 70 τοῦ ἀγνώστου ἤθελεν εὑρεῖ τὸν ζητούμενον χρόνον (ἰδὲ 18^{ον} προβλ.). Ἀλλ' ἐκ τῆς πρώτης συστοιχίας εἶναι γνωστὸν ὅτι 25 κτίσται ἔκτισαν τὸν τοῖχον εἰς 3^{μ} 12^{ημ}, ἐκ δὲ τούτου δῆλον ὅτι ὁ εἷς κτίστης ἤθελε κτίσει τὸν τοῖχον εἰς χρόνον εἰκοσιπενταπλάσιον τῶν 3^{μ} 12^{ημ} (ἰδὲ 11^{ον} προβλ.)· ἄρα *ὁ ζητούμενος εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ 3^{μ} 12^{ημ} ἐπὶ 25 καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ 70.*

Ἐκ τούτων γίνεται φανερὸν ὅτι τὰ τοιαῦτα προβλήματα λύονται διὰ τῆς λύσεως δύο προβλημάτων ὁμοίων τοῦ μὲν μὲ τὰ ἐν ἀρ. 156, τοῦ δὲ μὲ τὰ ἐν ἀρ. 157. Διὰ μὲν τῆς λύσεως τοῦ πρώτου εὑρίσκεται ὁ *σύστοιχος τῆς μονάδος τοῦ συστοίχου τοῦ ἀγνώστου*, διὰ δὲ τῆς τοῦ δευτέρου *αὐτὸς ὁ ἄγνωστος.*

161. *Δεύτερον*. Ἐπειδὴ ἐκ τῆς δευτέρας συστοιχίας τοῦ 39^{ου} ἠξεύρομεν ὅτι 48 πήχεις ἀξίζουσι 576^{δρ}, εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὸ διπλάσιον τῶν 48 ἀξίζει τὸ διπλάσιον τῶν 576, καὶ τὸ τριπλάσιον τῶν 48 ἢ τετραπλάσιον κτλ ἀξίζει τὸ τριπλάσιον τῶν 576 ἢ τετραπλάσιον κτλ, τουτέστιν ὅτι ὃν λόγον ἔχει ἄλλος ἀριθμὸς πήχεων πρὸς τὸν 48, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ σύστοιχος αὐτοῦ πρὸς τὸν σύστοιχον τοῦ 48, τὸν 576, ἐκ τούτων πειθόμεθα ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος εἶναι *ἀνάλογοι*, ἢ ὡς λέγουσι, *κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι*, ἤτοι

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ὁ 580 τῆς δευτέρας συστοιχίας πρὸς τὸν ὁμοειδῆ του τῆς πρώτης 48 εἶναι ὡς ὁ ζητούμενος πρὸς τὸν ὁμοειδῆ του 576.

Ὡςαύτως ἐπειδὴ ἐκ τῆς πρώτης συστοιχίας τοῦ 14ου ἠξεύρομεν ὅτι 25 κτίσται κτίζουσι τὸν τοῖχον εἰς 3^{μ} $12^{\eta\mu}$, εἶναι δ' εὔκολον νὰ νοηθῇ ὅτι τὸ διπλάσιον τῶν 25 κτιστῶν ἤθελον κτίσει τὸν τοῖχον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν 3^{μ} $12^{\eta\mu}$ καὶ τὸ τριπλάσιον τῶν 25 ἢ τὸ τετραπλάσιον κτλ εἰς τὸ τρίτον τῶν 3^{μ} $12^{\eta\mu}$ ἢ τὸ τέταρτον κτλ, τουτέστιν ὅτι ὁ λόγος ἄλλου χρόνου πρὸς τὸν δεδομένον εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου τοῦ συστοίχου του πρὸς τὸν σύστοιχον τοῦ δεδομένου χρόνου, τὸν 25, ἐκ τούτων πληροφορούμεθα ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος εἶναι *ἀντιστρόφως ἀνάλογοι*, ἤτοι ὁ λόγος τοῦ ζητουμένου χρόνου πρὸς τὸν δεδομένον 3^{μ} $12^{\eta\mu}$ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου τοῦ συστοίχου του 70 πρὸς τὸν ὁμοειδῆ του 25, ἤτοι εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ὁ τοῦ 25 πρὸς τὸν 70.

Μαθόντες ἤδη ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι, διττῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

α'. *Εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαιρέσεως τὸν λόγον τοῦ 580 πρὸς τὸν 48, ἢ τοῦ 25 πρὸς τὸν 70, ὅςτις εἶναι καὶ ὁ λόγος τοῦ ζητουμένου πρὸς τὸν ὁμοειδῆ του, ἔπειτα ἐπ' αὐτὸν τὸν λόγον πολλαπλασιάζομεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου, τὸν 576 ἢ τὸν 3^{μ} $12^{\eta\mu}$, καὶ τὸ γινόμενόν των θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος.*

β'. Κατατάσσομεν τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς, ἀναλόγους ὄντας, εἰς ἀναλογίαν, καὶ ἔπειτα *πολλαπλασιάσει* τῶν μέσων καὶ *διαιρέσει* τοῦ γινομένου διὰ τοῦ πρώτου ἄκρου προκύπτει πηλίκον ὁ ζητούμενος. Ἡ δὲ κατάξις αὕτη γίνεται οὕτω· *Γράφεται ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου τὸ γράμμα χ καὶ ἀριστερὰ του ὁ ὁμοειδής του, ἀριστερὰ δὲ τούτων γράφονται οἱ σύστοιχοί των, ἂν μὲν ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τῶν ἤδη γραμμένων, κατὰ τὴν τάξιν ἐκείνων, ἂν δ' ἦναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, κατὰ τάξιν ἀντίστροφον ἐκείνων.* Κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν θέλουσιν εἶσθαι οἱ μὲν δύο σύστοιχοι ἡγούμενοι, οἱ δ' ἄλλοι δύο ἑπόμενοι, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ὁ ἄγνωστος καὶ ὁ σύστοιχός του ἄκροι, οἱ δὲ ἄλλοι σύστοιχοι μέσοι.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Ἰδοὺ οὕτω κατατεταγμένοι οἱ ἀριθμοὶ τῶν προηγουμένων προβλημάτων $48:580::576:\chi$,

$70:25::3^{\mu}\ 12^{\eta\mu}:\chi$,

ἢ ἀφοῦ διαιρεθῶσιν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἢ οἱ δύο ἡγούμενοι διὰ τῶν κοινῶν διαιρετῶν των,

$1:145::48:\chi$, καὶ ὁ ζητούμενος εἶναι δρ. 6960,

$7:\ \ 5::51:\chi$, καὶ ὁ ζητούμενος $1^{\mu}\ 6^{\eta\mu}\ 10^{\omega\rho}$ σχεδόν.

162. Τώρα εἶναι εὔκολον νὰ προςδιορισθῇ γενικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ διὰ τῶν τριῶν γνωςῶν. Ἀφοῦ διακρίνῃ τις τοὺς συστοίχους ἀριθμοὺς, τοὺς ὁμοειδεῖς καὶ τὸν ἄγνωστον, τὸ ὁποῖον εἶναι εὔκολον, ἔτι δὲ ἂν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιςρόφως ἀνάλογοι, ὅπως ἀνωτέρω ἐπράξαμεν, μετὰ ταῦτα ἐξ ὅλων τῶν προηγουμένων πληςοφορεῖται ὅτι ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου καταντᾷ εἰς τοῦτον τὸν κανόνα,

Πολλαπλασιάζεται ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ἀγνώστου, ἐὰν μὲν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι, ἐπὶ τὸν τοῦ ἀγνώστου σύστοιχον, ἐὰν δὲ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, ἐπὶ τὸν ἑαυτοῦ σύστοιχον, τὸ δὲ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ τρίτου γνωστοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ κανὼν οὗτος λέγεται κοινῶς *κανὼν τῶν τριῶν*, ἡ δὲ ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τῆς εὑρέσεως τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ σειρὰ τῶν λογισμῶν *μέθοδος τῶν τριῶν*, διότι διὰ τριῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος.

Οἱ ἀρχάριοι κάμνουσι καλὰ καὶ τὸν κανόνα τῶν τριῶν νὰ μάθωσι καλὰ, καὶ εἰς ἑκατέραν τὴν ἀνάλυσιν νὰ ἐξασκηθῶσιν ἀρκούντως.

49. Ἰδίως παρατηροῦμεν ὅτι τούτου ἐνῷ οἱ $5^{\pi\eta\chi}$ ἀξίζουσιν 7 δραχμὰς, τὸ ἓν κομμάτιον, ὅπερ εἶναι πήχ. $129\frac{17}{27}$, εὑρίσκεται ὅτι τὸ ἠγόρασεν δρ 181,48 σχεδόν· καὶ πάλιν ἐπειδὴ οἱ 7 πήχεις ἐπωλήθησαν $11^{\delta\rho}$, τὸ αὐτὸ κομμάτιον ἐπωλήθη δρ 203,70 σχεδόν. Λοιπὸν ἐκ τοῦ ἑνὸς κομματίου ἐκέρδισε δρ 22,22· ὁ δὲ λόγος τοῦ ὅλου κέρδους $200^{\delta\rho}$ πρὸς τὸ κέρδος τοῦ ἑνὸς κομματιου δρ 22,22, ὅςτις εἶναι σχεδὸν 9, παριστάνει τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν κομματίων.

Τοῦ δὲ $47^{ου}$ ὁ τῆς πρώτης συστοιχίας λείπων ἀριθμὸς λο-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

γίζεται ὡς μονάς, παριστάνουσα τὴν καθημερινὴν τροφήν, ὁσηδήποτε καὶ ἂν ἦτον.

39. Πόσον ἀξίζουσι 580 πήχεις τσόχας, ἐνῷ 48 πήχεις ἐπωλήθησαν 576 δραχμάς;

40. Ἐὰν 485 ὀκάδες οἴνου ἀξίζουσιν 195 δρ, 89 ὀκάδες πόσον ἀξίζουσιν;

41. Ῥάβδου καθέτου ἐπὶ τὴν γῆν καὶ μακρᾶς $3\frac{2}{3}$ πήχεων ἡ σκιὰ τὴν μεσημβρίαν εἶναι $2\frac{7}{9}$ πήχεων· πόσον ὑψηλὸν εἶναι κωδωνοστάσιον, οὗτινος ἡ σκιὰ κατὰ τὴν αὐτὴν ὥραν εἶναι 78 πήχεων μακρά;

42. Ἀντήλλαξέ τις πήχεις ὑφάσματος $4\frac{3}{4}$ ἀντὶ σακχάρεως ὀκάδ 3 καὶ 80 δρ, πόσον σάκχαρι πρέπει νὰ δώσῃ ἀντὶ πήχ $7\frac{2}{3}$ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

43. Μεσίτης, ὅστις κερδίζει 4 δρ τὰς 100, πόσας θέλει κερδίσει ἐκ τῶν 988;

44. Ἐνῷ 25 κτίσται ἔκτισαν τοῖχόν τινα εἰς μῆνας 3 καὶ ἡμέρας 12, 70 κτίσται εἰς πόσον χρόνον ἤθελαν κτίσει τὸν αὐτὸν τοῖχον;

45. Ἐχρειάσθησαν 520 πήχεις τσόχας $\frac{6}{4}$ τοῦ πήχεως πλατείας πρὸς ἐνδυμασίαν στρατιωτῶν τινων· πόσοι πήχεις τσόχας ἄλλης $\frac{7}{5}$ τοῦ πήχ πλατείας ἐξαρκοῦσι πρὸς ἐνδυμασίαν τῶν αὐτῶν;

46. Φθάνει τις ἀπὸ πόλεως εἰς ἄλλην ὁδεύων 12ὥρ τὴν ἡμέραν εἰς 6 ἡμέρας εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελε φθάσει, ἐὰν ὠδοιπόρει 10 ὥρας τὴν ἡμέραν;

47. Ἐὰν τὸ πλήρωμα πλοίου ἐξηκολούθει νὰ τρώγῃ καθ' ἡμέραν ὅσον μέχρι τοῦδε, αἱ τροφαὶ ἤθελον τῷ ἐξηρκέσει ἔτι 20 ἡμέρας. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ πλοῖον θέλει διαμείνει 35 ἡμέρας εἰς τὴν θάλασσαν, πόσον πρέπει νὰ ἦναι τὸ καθημερινὸν σιτηρέσιον, ἵνα ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαί;

48. Ἀγοράσας τις πραγματείας ἀντὶ 580 δρ καὶ πωλήσας αὐτὰς ἐκέρδισε δρ 12,50 τὰς 100· πόσον τὰς ἐπώλησε καὶ πόσον ἦτον τὸ ὅλον κέρδος του;

49. Ἔμπορος ἠγόρασε κάμποσα κομμάτια βελούτου πήχ $129\frac{17}{27}$ ἕκαστον πρὸς 7 δρ τοὺς 5 πήχεις, καὶ πωλήσας αὐτὰ πρὸς 11 δρ τοὺς 7 πήχεις ἐκέρδισε 200 δρ· πόσα ἦσαν τὰ κομμάτια;

50. Λαβόντος τινὸς ἐν Ἀθήναις 3560 δρ, ἵνα παραγγείλῃ τὸν ἐν Παρισίοις ἀνταποκριτήν του νὰ πληρώσῃ εἴς τινα ἐκεῖ διατρίβοντα τὸ ἀντίτιμον αὐτῶν, ὠφελούμενος 8 δρ τὰς 100, ὁ ἀνταποκριτὴς πόσα φράγκα θέλει δώσει ἀντὶ τῶν 3560 δρ;

163. Τ' ἀκόλουθα προβλήματα διαφέρουσι τῶν προηγουμένων μόνον καθότι ἔχουσιν ἐν ἑκατέρᾳ συστοιχίᾳ πλειοτέρους τῶν δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ τρίτος, ὁ τέταρτος κτλ παριστάνει νέαν τινὰν περίστασιν, ἐξ ἧς προέρχεται νέα διαφορὰ τοῦ ἀγνώστου ἀπὸ τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτοῦ. Οἷον ἐνῷ τούτου τοῦ προβλήματος,

Πρὸς ἐνδυμασίαν 150 στρατιωτῶν ἐχρειάσθησαν 685 πήχεις τσόχας, πόσοι πήχεις τῆς αὐτῆς τσόχας χρειάζονται πρὸς ἐνδυμασίαν 960 στρατιωτῶν;

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ὁ ἄγνωστος διαφέρει τοῦ ὁμοειδοῦς του 685 τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ συστοιχίᾳ μόνον διότι ὁ σύστοιχος τοῦ ἀγνώστου, ὁ 960, διαφέρει τοῦ ὁμοειδοῦς του 150 τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ συστοιχίᾳ. Τοῦ 51ου ὅμως, οὗτινος ἑκατέρα συστοιχία ἔχει καὶ τρίτον ἀριθμὸν παριστάνοντα τὸ πλάτος τῆς τσόχας, ἥτις εἶναι διάφορος ἐν τῇ δευτέρᾳ συστοιχίᾳ, ὁ ἄγνωστος διαφέρει τοῦ ὁμοειδοῦς του 685 καὶ διότι οἱ 960 στρατιῶται εἶναι διάφοροι τῶν 150, καὶ διότι τὸ πλάτος τῆς δευτέρας τσόχας εἶναι διάφορον τοῦ πλάτους τῆς πρώτης. Ἐκ τούτων δὲ νοεῖται ὅτι, ἂν ἦτον καὶ ἄλλη τις περίστασις διάφορος διὰ διαφόρου ἀριθμοῦ παριστανομένη ἐν τῇ δευτέρᾳ ἢ ἐν τῇ πρώτῃ συστοιχίᾳ, ὁ ἄγνωστος ἤθελε διαφέρει τοῦ ὁμοειδοῦς του καὶ διὰ ταύτην, ὡς ἐν τῷ 54 προβλήματι.

164. Ταῦτα λοιπὸν καὶ τὰ τοιαῦτα προβλήματα εἶναι δυνατὸν νὰ λύωνται διὰ τῆς λύσεως δύο ἢ πλειοτέρων προβλημάτων ὡς τῶν προηγουμένων, καθὼς ἐκεῖνα εἴδομεν ὅτι λύονται διὰ τῆς λύσεως δύο ἄλλων ἁπλουστέρων ὡς τῶν ἐν ἀρ. 156 καὶ 157· λύονται δὲ ὡς ἐφεξῆς λέγομεν.

51ον. Τῶν ἓξ ἀριθμῶν αὐτοῦ παραλείπονται δύο ὁμοειδεῖς ἀριθμοί, π. χ. οἱ παριστάνοντες τὰ πλάτη τῶν τσοχῶν, τουτέστιν ὑποτίθεται πρὸς ὥραν ὅτι ἡ δευτέρα τσόχα ἔχει τὸ πλάτος τῆς πρώτης, ἤτοι ὅτι εἶναι αὐτὴ ἡ πρώτη, καὶ τότε τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐκτεθειμένον, ὅπερ λύεται ὡς εἴπομεν προηγουμένως, καὶ εὑρίσκεται ὅτι πρὸς ἐνδυμασίαν τῶν 960 στρατιωτῶν ἐκ τῆς πρώτης τσόχας χρειάζονται πήχεις 4384.

Τώρα λογιζόμεθα καὶ ποίαν μεταβολὴν πρέπει νὰ λάβωσιν οἱ 4384 πήχεις διὰ τὴν διαφορὰν τοῦ πλάτους τῆς δευτέρας τσόχας, τῶν στρατιωτῶν ὄντων τῶν αὐτῶν 960. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ λυθῇ τοῦτο τὸ δεύτερον πρόβλημα,

Πρὸς ἐνδυμασίαν στρατιωτῶν (τῶν 960) ἐκ τσόχας πλατείας $\frac{5}{4}$ τοῦ πήχεως ἐχρειάσθησαν πήχεις 4384, πρὸς ἐνδυμασίαν τῶν αὐτῶν ἐκ τσόχας πλατείας $\frac{7}{8}$ πόσοι πήχεις χρειάζονται;

Λυομένου δὲ καὶ τούτου κατὰ τὰ προηγούμενα, εὑρίσκεται ὅτι χρειάζονται πήχεις 6262 $\frac{6}{7}$, καὶ οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

54ον. Τούτου παραλείπονται όλοι οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ πλὴν τοῦ ἀγνώστου, τοῦ ὁμοειδοῦς του καὶ δύο ἄλλων ὁμοειδῶν, π. χ. τῶν 10ωρ καὶ 12ωρ· τουτέστιν ὑποτίθεται πρὸς ὥραν ὅτι αἱ δεύτεραι ἡμέραι καὶ ὁ δεύτερος αὔλαξ εἶναι τ' αὐτὰ καὶ τὰ πρῶτα· τότε τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἁπλούστατον τοῦτο,

Σκαφεῖς 15 ἀνὰ 10 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐργαζόμενοι ἐτελείωσαν εἴς τινας ἡμέρας (18) *ἔργον τι* (ἤνοιξαν αὔλακα μακρὸν μὲν 450ορ, πλατὺν 3ορ καὶ βαθὺν 2ορ), *πόσοι σκαφεῖς εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἤθελον τελειώσει τὸ αὐτὸ ἔργον ἀνὰ* 12ωρ *καθ' ἡμέραν ἐργαζόμενοι;*

Λυομένου δ' αὐτοῦ κατὰ τὰ προειρημένα, εὑρίσκονται $\frac{15 \text{ ἐπὶ } 10}{12}$, ἤτοι σκαφεῖς $12\frac{1}{2}$, ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις.

Τώρα λογιζόμεθα ποίαν μεταβολὴν πρέπει νὰ λάβωσιν οἱ $12\frac{1}{2}$ σκαφεῖς μόνον διὰ τὴν διαφορὰν τῶν ἡμερῶν. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ λύσωμεν τοῦτο τὸ δεύτερον πρόβλημα,

$12\frac{1}{2}$ *σκαφεῖς εἰς 18 ἡμέρας ἐτελείωσαν ἔργον τι* (τὸν ἀνωτέρω αὔλακα), *πόσοι σκαφεῖς ἤθελον τελειώσει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 8 ἡμέρας* (ἀνὰ 12 ὥρας τὴν ἡμέραν);

Λυομένου δὲ καὶ τούτου κατὰ τὰ προειρημένα, εὑρίσκεται $\frac{15 \text{ ἐπὶ } 10 \text{ ἐπὶ } 18}{12 \text{ ἐπὶ } 8}$, ἢ, ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις, $28\frac{1}{8}$ σκαφεῖς.

Ἔπειτα λογιζόμεθα ποίαν μεταβολὴν πρέπει νὰ λάβωσιν οἱ $28\frac{1}{8}$ σκαφεῖς μόνον διὰ τὴν διαφορὰν τοῦ μήκους τοῦ αὔλακος, λύοντες τοῦτο τὸ πρόβλημα,

$28\frac{1}{8}$ *σκαφεῖς ἔσκαψαν αὔλακα μακρὸν* 450ον (εἰς 8 ἡμέρας ἀνὰ 12 ὥρας ἑκάστην), *πόσοι σκαφεῖς ἤθελον ἀνοίξει ἄλλον αὔλακα μακρὸν* 480ορ, (εἰς τὰς αὐτὰς ἡμέρας καὶ ὥρας); εὑρίσκομεν δὲ $\frac{15 \text{ ἐπὶ } 10 \text{ ἐπὶ } 18 \text{ ἐπὶ } 480}{12 \text{ ἐπὶ } 8 \text{ ἐπὶ } 450}$, ἢ σκαφεῖς 30.

Ὡσαύτως λογιζόμενοι τὴν μεταβολὴν τῶν 30 σκαφέων πρῶτον διὰ τὴν διαφορὰν τοῦ πλάτους τοῦ δευτέρου αὔλακος, καὶ ἔπειτα διὰ τὴν τοῦ δευτέρου βάθους, εὑρίσκομεν τελευταῖον $\frac{15 \text{ ἐπὶ } 10 \text{ ἐπὶ } 18 \text{ ἐπὶ } 480 \text{ ἐπὶ } 2\frac{2}{5} \text{ ἐπὶ } 1\frac{1}{2}}{12 \text{ ἐπὶ } 8 \text{ ἐπὶ } 450 \text{ ἐπὶ } 3 \text{ ἐπὶ } 2}$, ἤτοι 18 σκα-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

φεῖς ἤθελον ἀνοίξει τὸν αὔλακα, τὸν μακρὸν μὲν 480ᵒᵠ, πλατὺν δὲ $2\frac{2}{5}$ᵒᵠ καὶ βαθὺν $1\frac{1}{2}$ εἰς 8 ἡμέρας ἀνὰ 12 ὥρας ἑκάστην.

Ἐκ τῆς λύσεως δὲ τούτων τῶν προβλημάτων δῆλον πῶς καὶ ἄλλο ὅμοιον μὲ ταῦτα ἀναλυόμενον εἰς ἄλλα ἁπλούστερα, ἅτινα ἠξεύρομεν νὰ λύωμεν, δύναται νὰ λυθῇ.

165. Καθὼς δ' ἐν ἀρ. 162, οὕτω καὶ ἐνταῦθα εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ γενικὸς κανών, καθ' ὃν νὰ λύωνται τὰ τοιαῦτα προβλήματα.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι ὅλοι οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ τοῦ 54ᵒᵘ προβλήματος χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου· ἔπειτα ὅτι οἱ μὲν πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλους, οἱ δὲ ὡσαύτως πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλους, καὶ τὸ πρῶτον γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ δευτέρου· μετὰ ταῦτα ὅτι οἱ τοῦ πρώτου γινομένου παράγοντες εἶναι ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ἀγνώστου καὶ τόσοι ἄλλοι, ὅσοι εἶναι οἱ σύστοιχοι αὐτοῦ, οἱ δὲ τοῦ δευτέρου κατὰ ἕνα ὀλιγώτεροι τῶν τοῦ πρώτου· τελευταῖον ὅτι τοῦ πρώτου γινομένου οἱ μὲν εἶναι σύστοιχοι τοῦ ὁμοειδοῦς τοῦ ἀγνώστου, ὅσοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τοῦ ἀγνώστου καὶ τοῦ ὁμοειδοῦς του (10 καὶ 18), οἱ δὲ εἶναι σύστοιχοι τοῦ ἀγνώστου (480, $2\frac{2}{5}$, $1\frac{1}{2}$), ὅσοι εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τοῦ ἀγνώστου καὶ τοῦ ὁμοειδοῦς του. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσι τίνες πρέπει νὰ ἦναι οἱ παράγοντες τοῦ πρώτου γινομένου, καὶ τοῦτο ἀρκεῖ.

Πρὸς τοῦτο τάσσονται οἱ σύστοιχοι κατὰ σειρὰν οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας συστοιχίας νὰ ἦναι ὑπὸ τοὺς ὁμοειδεῖς των τῆς πρώτης, καὶ προσδιορίζονται τίνες εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι καὶ τίνες ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τοῦ ἀγνώστου καὶ τοῦ ὁμοειδοῦς του· ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ἀγνώστου, οἱ σύστοιχοι αὐτοῦ, ὅσοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αὐτοῦ καὶ τοῦ ἀγνώστου, καὶ οἱ σύστοιχοι τοῦ ἀγνώστου, ὅσοι εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι αὐτοῦ καὶ τοῦ ὁμοειδοῦς του, καὶ αὐτῶν τὸ γινόμενον εἶναι τὸ πρῶτον, ὅπερ διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου ὅλων τῶν λοιπῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μένουσιν ἐν τῇ πρώτῃ καὶ τῇ δευτέρᾳ συστοιχίᾳ. Ὁ δ' ἐκ τούτων προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Χίου

Δὲν πρέπει δὲ νὰ λησμονῇ τις, ἀφοῦ προσδιορίσῃ τίνες ἀριθμοὶ θέλουσι πολλαπλασιασθῇ ἐπ' ἀλλήλους, πρὸ τῶν πολλαπλασιασμῶν νὰ ἐξαλείφῃ ἀπὸ τὰ δύο γινόμενα ὅλους τοὺς κοινοὺς ἐν αὐτοῖς παράγοντας καθ' ἃ εἴπομεν ἐν ἀρ. 99, διότι οὕτω καταντῶσιν οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ ἡ διαίρεσις ἁπλούστατα.

Τοῦ $52^{ου}$ αἱ δύο συστοιχίαι εἶναι $14^{\omega\rho}$, $7^{\eta\mu}$, $784^{\sigma\tau}$

χ, 18, 1728.

Ὁ δὲ ἄγνωστος $\dfrac{14 \text{ ἐπὶ } 7 \text{ ἐπὶ } 1728}{18 \text{ ἐπὶ } 784}$, διότι αἱ ἡμέραι καὶ αἱ ὧραι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, τὰ δὲ στάδια καὶ αἱ ὧραι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι. Ἀφοῦ δὲ ὁ 14 καὶ 18 διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 2, ὁ δὲ μένων 7 καὶ ὁ 784 διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των 7, καὶ πάλιν τὸ πηλίκον 112 καὶ τὸ ἄλλο 7 διὰ τοῦ 7, ἔπειτα τὸ πηλίκον 16 καὶ ὁ 1728 διὰ 4 καὶ πάλιν τὰ πηλίκα 4 καὶ 432 διὰ 4, καὶ τελευταῖον τὸ πηλίκον 108 καὶ 9 διὰ 9, εὑρίσκεται ἄνευ ἄλλου πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν εἶναι 12, ἤτοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ὁδοιπορῇ ὁ ταχυδρόμος, ὥστε νὰ διατρέξῃ ἐν 18 ἡμέραις τὰ 1728 στάδια.

Σημ. Ὁ κανὼν οὗτος ὀλίγον τι παρηλλαγμένος ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων σύνθετος κανὼν τῶν τριῶν, οἱ δὲ ἀρχαιότεροι ὠνόμαζον αὐτὸν μέθοδον τῶν πέντε, τῶν ἑπτὰ κτλ, κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεδομένων ἀριθμῶν. Ἴσως ὅμως ἤθελεν εἶσθαι ὀρθότερον νὰ λέγηται πολλαπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

Ὅπως δὲ καὶ ἂν λέγηται, οὐσιῶδες εἶναι νὰ προσπαθήσωσιν οἱ ἀρχάριοι νὰ πληροφορηθῶσι καλὰ περὶ αὐτοῦ καὶ νὰ τὸν ἐνθυμῶνται.

166. Ἰδίως δὲ λέγομεν ὅτι τὰ ἀπὸ τοῦ $55^{ου}$ μέχρι καὶ τοῦ $64^{ου}$ εἶναι προβλήματα, ὧν ἑκατέρα συστοιχία ἔχει τρεῖς ἀριθμούς, τὰ τοκιζόμενα χρήματα, τὸν χρόνον, καθ' ὃν διαμένουσι τοκισμένα, καὶ τὸν τόκον, ὃν φέρουσιν ἐν αὐτῷ τῷ χρόνῳ. Καὶ τῆς μὲν πρώτης συστοιχίας ὁ μὲν εἷς ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε σχεδὸν 100, ὁ δὲ χρόνος εἶναι κοινῶς τὸ ἔτος, ἐνίοτε δὲ καὶ ὁ μὴν καὶ ἡ ἡμέρα, ὁ δὲ τρίτος εἶναι τῶν 100 εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ὁ τόκος, ὃν ὠνομάσαμεν *ἐπιτόκιον*, ὅςτις ἴσως καὶ *ἑκατοστιαῖος* δύναται νὰ ὀνομασθῇ καὶ εἶναι ἄλλοτε ἄλλος. Τῆς δὲ δευτέρας συστοιχίας ὁ ὁμοειδὴς τοῦ 100 λέγεται *κεφάλαιον*, ὁ δὲ ὁμοειδὴς τοῦ ἐπιτοκίου λέγεται κυρίως *τόκος*,

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ῶν τοῦ κεφαλαίου τόκος, ἐξ οὗ καὶ τὰ προβλήματα ταῦτα κοινῶς ὀνομάζονται *τόκου προβλήματα*, ἂν καὶ δὲν ἦναι πάντοτε αὐτὸς ἄγνωστος. Τὸ $55^{ον}$ π. χ. ἐκτίθεται σαφῶς, ὥστε νὰ διακρίνωνται αἱ δύο συστοιχίαι, οὕτως, *ἐνῷ* $100^{δρ}$ *εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον* $9\frac{1}{2}$, $3700^{δρ}$ *εἰς 5 ἔτη πόσον τόκον θέλουσι φέρει;* κτλ.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι οἱ μὲν τόκοι εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τῶν κεφαλαίων καὶ τῶν χρόνων, τὰ δὲ κεφάλαια εἶναι κατ' εὐθεῖαν μὲν ἀνάλογα τῶν τόκων, ἀντιστρόφως δ' ἀνάλογα τῶν χρόνων· ὅθεν δῆλον καὶ ὅτι οἱ χρόνοι εἶναι κατ' εὐθεῖαν μὲν ἀνάλογοι τῶν τόκων, ἀντιστρόφως δ' ἀνάλογοι τῶν κεφαλαίων. Ταῦτα εἶναι καλὸν νὰ ἐνθυμῆται ἕκαστος.

Ὅταν δὲ ἡ μονὰς τοῦ χρόνου τῆς δευτέρας συστοιχίας δὲν ἦναι ἡ αὐτὴ καὶ ἡ τῆς πρώτης, ἀνάγκη πρῶτον νὰ μεταβληθῇ ἡ ἑτέρα εἰς τὴν ἄλλην· οἷον ἐν τῷ ἑξηκοστῷ πρώτῳ ἢ τὸ ἔτος πρέπει νὰ λογισθῇ 365 ἡμέραι, καὶ ἑπομένως τὸ 7 νὰ γείνῃ $\frac{7}{365}$ τὰ 100 εἰς μίαν ἡμέραν, ἢ αἱ 253 ἡμέραι νὰ θεωρηθῶσι $\frac{253}{365}$ τοῦ ἔτους.

Τὰ τέσσαρα πρῶτα διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων οὐσιωδῶς κατὰ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ὅστις εἶναι ἐν μὲν τῷ $55^{ῳ}$ ὁ τόκος, ἐν δὲ τῷ ἄλλῳ τὸ ἐπιτόκιον, ἐν δὲ τῷ τρίτῳ ὁ χρόνος, ἐν δὲ τῷ τετάρτῳ τὸ κεφάλαιον.

Τὸ $55^{ον}$ λυόμενον ὡς ἤδη εἴπομεν παρέχει

$$\text{τόκον } \frac{9\frac{1}{2} \text{ ἐπὶ } 5 \text{ ἐπὶ } 3700}{100}, \text{ ἤτοι δραχ. } 1757\frac{1}{2}$$

Ἐντεῦθεν δὲ δῆλον ὅτι *πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου πρέπει πάντοτε νὰ πολλαπλασιάζωνται ἐπ' ἀλλήλους τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον, τὸ δὲ γινόμενον νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ* 100. Ὡσαύτως δύναται νὰ προσδιορίσῃ τις καὶ τὰς πράξεις τὰς πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ κεφαλαίου.

51. Πρὸς ἐνδυμασίαν 150 στρατιωτῶν ἐχρειάσθησαν 685 πήχεις τσόχας $\frac{5}{4}$ τοῦ πήχεως πλατείας· πόσοι πήχεις τσόχας πλατείας $\frac{7}{8}$ χρειάζονται πρὸς ἐνδυμασίαν 960 στρατιωτῶν;

52. Ταχυδρόμος 14 ὥρας καθ' ἡμέραν ὁδοιπορῶν διήνυσεν ἐν 7 ἡμέραις ὁδὸν σταδίων 784· πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν ὁδοιπορῶν θέλει διατρέξει ἐν 18 ἡμέραις στάδια 1728;

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

53. Αἱ τροφαὶ 840 πολιορκουμένων τοῖς ἐξαρκοῦσιν 6 μῆνας καὶ 18 ἡμέρας· ἐὰν ὅμως αὐξήσωσι κατὰ 185 καὶ διαμείνωσι πολιορκούμενοι μῆνας 10 καὶ ἡμέρ 20, πόσον τοῦ προτέρου σιτηρεσίου πρέπει νὰ τρώγωσιν, ἵνα τοῖς ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαί;

54. 15 σκαφεῖς 10 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐργαζόμενοι ἔσκαψαν εἰς 18 ἡμέρας αὔλακα 450όρ μακρὸν 3όργ πλατὺν καὶ 2 βαθύν· πόσοι σκαφεῖς 12 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐργαζόμενοι εἰς 8 ἡμέρας ἤθελαν ἀνοίξει αὔλακα 480όρ μακρ. $2\frac{2}{5}$όρ πλατὺν καὶ $1\frac{1}{2}$ βαθύν;

55. Τοκίσας τις 3700δρ πρὸς $9\frac{1}{2}$ τὰ 100 τὸ ἔτος μετὰ 5 ἔτη πόσον τόκον θέλει λάβει;

56. Πρὸς πόσον τὰ 100 τοκισθεῖσαι 7480δρ εἰς 3 ἔτη καὶ 3 μῆνας ἔφερον τόκον 3540δρ;

57. Εἰς πόσα ἔτη φέρουσι τόκον 580δρ πρὸς $8\frac{2}{5}$ τὰ 100 δανεισθεῖσαι δρ 2708;

58. Πόσας δραχ. πρέπει νὰ ἐναποθέσῃ τις ἐν τῇ τραπέζῃ, ὥστε μετὰ 10 ἔτη νὰ λάβῃ τόκον 12800δρ, τοῦ ἐπιτοκίου τῆς τραπέζης ὄντος 7 τὰ 100;

59. Ἀντὶ νὰ πληρώσῃ τις 1009δρ τώρα συμφωνεῖ νὰ τὰς πληρώσῃ εἰς τὸ τέλος 9 μηνῶν μὲ τὸν τόκον αὐτῶν πρὸς 12 τὰ 100· πόσας θέλει πληρώσει τότε;

60. Ἐνῷ 7400δρ εἰς 27 μῆνας ἔφερον τόκον δρ 882,59, 850δρ εἰς ἔτη 3 καὶ μῆνας 9 πόσον τόκον θέλουσι φέρει πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον; καὶ πόσον εἶναι αὐτὸ τὸ ἐπιτόκιον;

61. 474δρ πρὸς 7 τὰ 100 τὸ ἔτος εἰς ἡμέρας 253 πόσον τόκον φέρουσιν;

62. Ἐνῷ 11880δρ εἰς 8 ἔτη καὶ 6 μῆνας ἔφερον τόκον 5049δρ, πρὸς πόσον τὰ 100 πρέπει νὰ τοκισθῶσιν αἱ αὐταί, ἵνα ἐν ἴσῳ χρόνῳ τοκοφορήσωσιν 7360δρ;

63. Εἰς 5 μῆνας 400δρ ἔφεραν κέρδος 72δρ· 900δρ πόσον κέρδος ἔφεραν εἰς 9 μῆνας ἀναλόγως τῶν πρώτων;

64. Κερδοσκόπος εἰς 6 ἔτη μὲ 45080δρ ἐκέρδισε 19892δρ, ἄλλος δέ τις εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον μὲ 21613δρ ἐκέρδισεν 7810δρ· πότερος αὐτῶν ἐκέρδισε πλειότερον; καὶ πόσον τὰ 100;

167. Τῶν ἀκολούθων δώδεκα προβλημάτων ἡ λύσις ἀπαιτεῖ νὰ μερισθῇ δεδομένος ἀριθμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν, ἢ δεδομένων ὡς ἐν τῷ 65φ, 72φ, 73φ, 74φ, ἢ δυναμένων νὰ εὑρεθῶσιν ὡς ἐν τοῖς λοιποῖς.

65φ. Αἱ 356 δραχμαὶ εἶναι ὁ μισθὸς τῶν τεσσάρων ἐργατῶν δι' ὅλας τὰς ἡμέρας, ἃς εἰργάσθησαν, ἤτοι διὰ τὸ κεφάλαιον 35 τῶν 5, 8, 9 καὶ 13 ἡμερῶν, τὸ δὲ μερίδιον ἑκάστου θέλει εἶσθαι τοιοῦτον μέρος τῶν 356δρ, ὅ,τι μέρος τῶν 35 εἶναι αἱ ἡμέραι, ἃς εἰργάσθη, ἤτοι τοῦ μὲν τὸ μερίδιον θέλει εἶσθαι $\frac{5}{35}$ τῶν 356δρ, τοῦ δὲ $\frac{8}{35}$ τῶν αὐτῶν, τοῦ δὲ $\frac{9}{35}$, τοῦ δὲ $\frac{13}{35}$.

Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεριδίου ἑκάστου ἀπαιτεῖται ὁ μεριστέος ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν σύστοιχόν του

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τῶν δεδομένων, καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ κεφαλαίου ὅλων τῶν δεδομένων ἀναλόγων· ἢ ὅπερ ταυτὸν, νὰ διαιρεθῇ ὁ μεριστέος ἀριθμὸς διὰ τοῦ κεφαλαίου ὅλων τῶν δεδομένων, καὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν δεδομένων.

Ἢ ἐπειδὴ αἱ 356δρ εἶναι ὁ μισθὸς τῶν 35 ἡμερῶν, ὁ τῆς μιᾶς ἡμέρας εἶναι τὸ τριακοστὸν πέμπτον τῶν 356δρ, ὁ δὲ τῶν 5 ἡμερῶν εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ τριακοστοῦ πέμπτου τῶν 356, ὁ δὲ τῶν 8 εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ αὐτοῦ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς εὑρίσκονται τὰ μερίδια κατὰ τὸν ἤδη προειρημένον κανόνα.

Ἢ ἐὰν σημειωθῶσι τὰ τέσσαρα ζητούμενα μερίδια διὰ φ, χ, ψ, ω, ἐπειδὴ θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα τῶν 5, 8, 9, 13, ἔχομεν

ἔχομεν	5: 8::φ:χ	ἢ *συμμεταθέσει*	5:φ:: 8:χ,
ἔτι	5: 9::φ:ψ	ἢ *συμμεταθέσει*	5:φ:: 9:ψ,
προσέτι	5:13::φ:ω	ἢ »	5:φ::13:ω·

ὅθεν δῆλον ὅτι 5:φ::8:χ::9:ψ::13:ω.

Κατὰ δὲ τὰ ἐν ἀρ. 143 ἀποδεδειγμένα τὸ κεφάλαιον 35 ὅλων τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ κεφάλαιον 356 ὅλων τῶν ἑπομένων ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει εἷς τις τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἑπόμενόν του, ἤτοι

35:356:: 5:φ,
35:356:: 8:χ,
35:356:: 9:ψ,
35:356::13:ω.

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον πάλιν ὅτι τὰ μερίδια πρέπει νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν προειρημένον κανόνα, ὅστις λέγεται *κανὼν τοῦ μερίζειν ἀριθμὸν εἰς ἀνάλογα.*

168. Ὅταν δὲ οἱ ἀριθμοί, ὧν ἀναλόγως πρόκειται νὰ μερισθῇ ἀριθμός τις, δὲν ἦναι ἁπλῶς δεδομένοι, αὐτοὶ προσδιορίζονται ἐκ τῶν δεδομένων ἐν τῇ ἐκθέσει ἄλλοτε ἄλλως, ὡς ἀμέσως λέγομεν, καὶ ἔπειτα μερίζεται ἀναλόγως αὐτῶν ὁ μεριστέος κατὰ τὸν προειρημένον κανόνα.

66ον. Ἐδῶ ἐκλαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ μερίδιον ἑνὸς τῶν τεσσάρων, ἀλλ' ὁποιουδήποτε, οἷον τοῦ δωδεκαετοῦς, καὶ ἂν σημειωθῶσι τῶν ἄλλων τὰ μερίδια διὰ χ, ψ, ω, ἐπειδὴ ταῦ-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τα πρὸς τὰς ἡλικίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἔχομεν 12:10::χ:1, ὅθεν χ ἴσον $\frac{12}{10}$, καὶ 12:8::ψ:1, ὅθεν ψ ἴσον $\frac{12}{8}$, καὶ ὡσαύτως ω ἴσον $\frac{12}{5}$. Τὰ δὲ 1, $\frac{12}{10}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{12}{5}$ ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὰ 1, $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{12}{5}$, ἢ μὲ τὰ ὁμώνυμα $\frac{10}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{15}{10}$, $\frac{24}{10}$, ἅτινα εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμητῶν των 10, 12, 15, 24 (103), καὶ ἀναλόγως τούτων εἶναι μεριστέαι αἱ 60 δραχμαί.

67ον. Ἐκλαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου· τότε τὸ τοῦ δευτέρου θέλει εἶσθαι 3, τὸ τοῦ τρίτου 6 καὶ τὸ τοῦ τετάρτου 5, ἀναλόγως δὲ τούτων εἶναι μεριστέος ὁ ἀριθμὸς 860δρ.

68ον. Ὡσαύτως ἐκλαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου, διότι πρὸς αὐτὸ εἶναι συσχετισμένα τὰ μερίδια τῶν δύο ἄλλων· τότε τὸ τοῦ δευτέρου θέλει εἶσθαι $\frac{8}{11}$ τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου, διότι 1:χ::11:8, ὅθεν τὸ χ εἶναι $\frac{8}{11}$· καὶ τὸ τοῦ τρίτου ὡσαύτως θέλει εἶσθαι $\frac{7}{9}$ τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου. Τὰ δὲ 1, $\frac{8}{11}$ καὶ $\frac{7}{9}$ τραμμένα εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα εἶναι $\frac{99}{99}$, $\frac{72}{99}$, $\frac{77}{99}$ ἅτινα εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμητῶν των 99, 72, 77 (103). Λοιπὸν οἱ 1200 ἵπποι εἶναι μεριστέοι ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν τούτων.

71ον. Τούτου ὡς μονὰς ἐκλαμβάνεται τῆς μητρὸς τὸ μερίδιον, τῆς δὲ θυγατρὸς τότε πρέπει νὰ ἦναι 2 τὸ μερίδιον, τοῦ δὲ υἱοῦ 3, κτλ.

Τοῦ δὲ 69ου, 70ου, 75ου, καὶ 76ου οἱ ἀριθμοί, ὧν ἀναλόγως θέλουσι μερισθῇ οἱ μεριστέοι ἀριθμοί, εἶναι γινόμενα ἄλλων ἀριθμῶν δεδομένων.

69ον. Τὰ χρήματα, ὅσα τῶν 80δρ θέλει λάβει ἕκαστος, εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα καὶ τῶν βαρῶν τῶν μετακομισθέντων καὶ τῶν ἀποστάσεων. Ἐὰν δὲ τὰ τοῦ πρώτου ἐκληφθῶσιν ὡς μονάς, τὰ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ὡς ἐν ἀρ. 164 ἢ 165 εἴπομεν, λύοντες ταῦτα τὰ προβλήματα,

Ἐνῷ ὁ μετακομίζων βάρος 45 μνῶν εἰς ἀπόστασιν 16 σταδίων λαμβάνει 1, ὁ μετακομίζων βάρος 36 μνῶν εἰς ἀπόστασιν 17 σταδίων πόσον θέλει λάβει; ἢ ὁ μετακομίζων βάρος 85 μνῶν εἰς ἀπόστασιν 12 σταδίων πόσον θέλει λάβει;

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ὁ δεύτερος θέλει λάβει $\frac{36 \text{ ἐπὶ } 17}{45 \text{ ἐπὶ } 16}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{85 \text{ ἐπὶ } 12}{45 \text{ ἐπὶ } 16}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μονάς, τὴν ὁποίαν θέλει λάβει ὁ πρῶτος παριστάνεται καὶ διὰ $\frac{45 \text{ ἐπὶ } 16}{45 \text{ ἐπὶ } 16}$, οἱ τρεῖς δὲ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχοντες τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τῶν ἀριθμητῶν των, διὰ τοῦτο αἱ 80 δραχμαὶ πρέπει νὰ μερισθῶσιν εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων 45 ἐπὶ 16, 36 ἐπὶ 17 καὶ 85 ἐπὶ 12.

Ἐντεῦθεν δὲ βλέπει τις ὅτι τὰ μερίδια εἶναι ἀνάλογα τῶν γινομένων τῶν βαρῶν καὶ τῶν ἀποστάσεων τῶν ἀνηκόντων εἰς ἕνα ἕκαστον.

70ον. Τὸ ἔργον ἑκάστου εἶναι ἡ σκαφεῖσα ὑπ' αὐτοῦ τάφρος, ἡ δὲ Γεωμετρία διδάσκει ὅτι τὸ μέτρον αὐτῆς εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους καὶ τοῦ βάθους αὐτῆς· ὥστε *αἱ δρ 1100,50 πρέπει νὰ μερισθῶσιν ἀναλόγως τῶν γινομένων τούτων.* Ἄλλως δὲ δύναταί τις νὰ πληροφορηθῇ περὶ τούτου καὶ ὡς ἤδη περὶ τοῦ 69ου εἴπομεν. Ὡσαύτως δὲ καὶ περὶ τοῦ 75ου καὶ τοῦ 76ου πληροφορούμεθα ὅτι *τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων τῶν καταβολῶν καὶ τῶν χρόνων.*

Σημ. Τὰ ἀπὸ τοῦ 72ου μέχρι καὶ τοῦ 76ου καὶ τὰ παρόμοια λέγονται κοινῶς ἑ τ α ι ρ ί α ς π ρ ο β λ ή μ α τ α, ὧν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἢ αἱ καταβολαὶ καὶ τὰ κέρδη ἢ αἱ ζημίαι, ἢ αἱ καταβολαί, οἱ χρόνοι αὐτῶν καὶ τὰ κέρδη ἢ αἱ ζημίαι. Τὸν δὲ προεκτεθέντα τρόπον τῆς λύσεως αὐτῶν οἱ ἀρχαιότεροι ὠνόμαζον μ έ θ ο δ ο ν ἑ τ α ι ρ ί α ς.

65. Ἐὰν 356δρ μερισθῶσιν εἰς 4 ἐργάτας ἀναλόγως τῶν ὅς εἰργάσθη ἕκαστος ἡμερῶν, πόσον θέλει λάβει ἕκαστος, ἐνῷ ὁ μὲν εἰργάσθη 5 ἡμέρας, ὁ δὲ 8, ὁ δὲ 9, ὁ δὲ 13;

66. Ἐκ τῶν 60 δραχμῶν τῶν μοιρασθέντων εἰς 4 παῖδας ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῆς ἡλικίας των πόσας ἔλαβεν ἕκαστος, ἐνῷ ὁ μὲν ἦτον 12 ἐτῶν, ὁ δὲ 10, ὁ δὲ 8, ὁ δὲ 5;

67. Ἐὰν μερισθῶσιν 860δρ εἰς 4 ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ μὲν δεύτερος νὰ λάβῃ τριπλασίας τῶν τοῦ πρώτου, ὁ δὲ τρίτος διπλασίας τῶν τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ τέταρτος τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα λάβωσιν οἱ ἄλλοι τρεῖς, πόσας θέλει λάβει ἕκαστος;

68. 1200 ἵπποι θέλουσι διανεμηθῆ εἰς τρία τάγματα ἱππέων ἀναλόγως τῆς δυνάμεώς των, οὔσης τῆς τοῦ πρώτου πρὸς μὲν τὴν τοῦ δευτέρου ὡς 11 πρὸς

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

8, πρὸς δὲ τὴν τοῦ τρίτου ὡς 9 πρὸς 7· πόσους ἵππους θέλει λάβει ἕκαστον τάγμα;

69. Τεῖς ἁμαξηλάται μετέφερον ὁ μὲν βάρος 45 μνῶν εἰς ἀπόστασιν 16 σταδίων, ὁ δὲ βάρος 36 μνῶν εἰς ἀπός. 17 σταδίων, ὁ δὲ βάρ. 85 μνῶν εἰς 12 σταδ, καὶ ἔλαβον ἀντὶ τούτου ὅλας δρ. 80· πόσαι ἀνήκουσιν εἰς ἕκαστον ἀναλόγως τοῦ βάρους καὶ τῆς ἀποστάσεως;

70. Τριῶν σκαφέων ὁ μὲν ἔσκαψε τάφρον μακρὰν πήχ. 65,50, πλατεῖαν πήχ 2,9 καὶ βαθεῖαν 1 πῆχυν, ὁ δὲ ἄλλην μακρὰν μὲν πήχ 25,80, πλατεῖαν δὲ 2,70, βαθεῖαν δὲ 1,50, ὁ δὲ ἄλλην μακρὰν μὲν 37,25, πλατεῖαν δὲ 1,80, βαθεῖαν δὲ 1,25, ἔλαβον δὲ οἱ τρεῖς ὁμοῦ δι' ὅλα τὰ ἔργα των δρ 1100,50· πόσον ἀνήκει εἰς ἕκαστον ἀναλόγως τῶν ἔργων των;

71. Ἀποθνήσκων τις ἐγκύου οὔσης τῆς γυναικός του διατάσσει, ἂν μὲν γεννηθῇ ἄρρεν, νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς περιουσίας του συνισταμένης εἰς 12000δρ, καὶ ἡ μήτηρ του τὰ λοιπά, ἂν δὲ γεννηθῇ θῆλυ, νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς περιουσίας καὶ ἡ μήτηρ του τὰ λοιπά. Ἐπειδὴ συνέβη νὰ γεννηθῇ καὶ ἄρρεν καὶ θῆλυ, πῶς θέλει μοιρασθῇ ἡ περιουσία κατὰ ταύτην τὴν ἀπρόβλεπτον περίπτωσιν, ἵνα ἐκτελεσθῇ ἡ τελευταία θέλησις τοῦ πατρός;

- 72. Τρεῖς συνεταῖροι εἰς ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν κατέθεσαν ὁ μὲν 25000δρ, ὁ δὲ 18000, ὁ δὲ 42000, ἐκέρδισαν δὲ ἐπί τινα χρόνον 57220δρ· πόσον τοῦ κέρδους ἀνήκει εἰς ἕκαστον αὐτῶν;

73. Ἔμπορος ἐχρεωκόπησεν ἔχων μὲν 37840δρ, χρεωστῶν δὲ εἰς μὲν τὸν Α 5649δρ, εἰς δὲ τὸν Β 25580, εἰς δὲ τὸν Δ 15600· πόσας δραχ τῶν 37840 θέλει λάβει ἕκαστος τούτων ἀναλόγως τῶν ὅσα εἰς αὐτὸν χρεωστοῦνται;

74. Τρεῖς συνεταῖροι μὲ κεφάλαιον 50000δρ ἐκέρδισεν 21000δρ, ὧν ὁ μὲν ἔλαβε μερίδιον 6600, ὁ δὲ 7500, ὁ δὲ τὸ ὑπόλοιπον· πόσας δρ κατέθεσεν ἕκαστος;

75. Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐμπόριόν τι μὲ 3000δρ, μετὰ δὲ μῆνας 6 συμπεριλαμβάνει καὶ ἄλλον, ὅστις καταθέτει 4000δρ, καὶ 5 μῆνας μετέπειτα συνενοῦται μὲ αὐτοὺς τρίτος καταθέτων 8000δρ· ἐπειδὴ δὲ 6 μῆνας μετὰ ταῦτα ἐξετάσαντες εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 12050δρ, πόσον ἀνήκει εἰς ἕκαστον τούτων;

76. Τρεῖς ἔμποροι, ὧν ὁ μὲν κατέθεσεν 713δρ καὶ ἀπεσύρθη εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους, ὁ δὲ 7505 καὶ ἀπεσύρθη εἰς τὸ τέλος 2 ἐτῶν καὶ 3 μηνῶν, ὁ δὲ 9468 καὶ διέμεινεν ἔτι μόνος 4 μῆνας, μετὰ τὸν χρόνον τοῦτον εὗρον ὅτι ἐζημιώθησαν δρ 4775· πόσον ἐζημιώθη ἕκαστος;

169. Τὰ ἑξῆς ὀκτὼ προβλήματα παριστάνουσι διαφόρους περιπτώσεις προεξοφλήσεως ὁμολόγων, γινομένης μὲ *ὑφαίρεσιν* ἢ *ἔκπεσμὸν* πρὸς κάμποσα τὰ 100, καὶ διὰ τοῦτο κοινῶς λέγονται *ὑφαιρέσεως προβλήματα*.

Ἐξόφλησις ὁμολόγου ἢ γραμματίου εἶναι ἡ δόσις τῶν ἐν αὐτῷ σημειουμένων χρημάτων καὶ παραλαβὴ αὐτοῦ κατὰ τὴν ὡρισμένην ἐν αὐτῷ προθεσμίαν. Προεξόφλησις δὲ εἶναι ἡ δόσις χρημάτων καὶ παραλαβὴ τοῦ ὁμολόγου χρόνον τινὰ πρὸ τῆς προθεσμίας· ὁπότε ὁ δίδων δίδει ὄχι ὅλα τὰ ἐν τῷ ὁμολόγῳ

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

χρήματα, ἀλλὰ μέρος αὐτῶν, τὰ δὲ λοιπὰ λογίζεται ὡς κέρδος, διότι ὅσα χρήματα δίδει τώρα θέλει τὰ λάβει ὀπίσω εἰς τὴν προθεσμίαν τοῦ ὁμολόγου, ἤτοι κάμποσον χρόνον ὑστερώτερα. Κυρίως δ' ἐν ταύτῃ τῇ περιστάσει λαμβάνων τὸ ὁμόλογον ὅστις ἂν προεξοφλῇ, τοκίζει τώρα χρήματα, ἵνα λάβῃ αὐτὰ ὀπίσω κατὰ τὴν προθεσμίαν τοῦ ὁμολόγου ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον των, ἅπερ εἶναι τὰ ἐν τῷ ὁμολόγῳ. Τὸ μέρος τῶν ἐν τῷ ὁμολόγῳ χρημάτων, ὅσα λογίζεται ὡς κέρδος ὁ προεξοφλῶν, καλεῖται *ὑφαίρεσις* τῶν ἐν τῷ ὁμολόγῳ χρημάτων, ἅτινα θέλομεν ὀνομάζει *προεξοφλούμενον ποσόν*, τὸ δὲ μέρος τοῦ προεξοφλουμένου ποσοῦ, ὅπερ δίδει ὁ προεξοφλῶν, θέλομεν ὀνομάζει *παροῦσαν ἀξίαν τοῦ ὁμολόγου*. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ὁμολόγου συνιστῶσι κεφάλαιον τὸ προεξοφλούμενον ποσόν. Ὥστε εἶναι γνωστὸν ἤδη πῶς εὑρίσκεται τὸ ἕτερον αὐτῶν, ἀφοῦ εὑρεθῇ τὸ ἄλλο.

Ἡ ὑφαίρεσις ἄλλο δὲν ἔπρεπε νὰ ἦναι εἰμὴ ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ ὁμολόγου, λογιζόμενος πρός τι συμφωνημένον ἐπιτόκιον διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως· διότι ὁ προεξοφλῶν δὲν ἔπρεπε νὰ θεωρῇ τὸ προεξοφλούμενον εἰμὴ ὡς τὰ χρήματα ὅσα δίδει τώρα καὶ τὸν τόκον αὐτῶν διὰ τὸν χρόνον, ὅστις θέλει παρέλθει ἕως νὰ λάβῃ ὅσα δίδει. Ἀλλὰ κοινῶς ὑφαίρεσις ἐκλαμβάνεται ὁ τόκος τοῦ προεξοφλουμένου ποσοῦ διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως πρός τι ἐπιτόκιον συμφωνημένον, ὄχι ὀρθῶς, διότι δίδει ὁ προεξοφλῶν ὀλιγώτερα καὶ λαμβάνει τόκον περισσοτέρων, καὶ οὕτως ὠφελεῖται περισσότερον, ὁ δὲ ἔχων τὸ ὁμόλογον ζημιοῦται. Ἂν δὲ τοῦτο γίνηται ἐν ἀγνοίᾳ τοῦ ἔχοντος τὸ γραμμάτιον καὶ ἄνευ τῆς συγκαταθέσεώς του, ὁ οὕτω προεξοφλῶν ἀδικεῖ.

Πρὸς διάκρισιν δὲ τῶν δύο τούτων ὑφαιρέσεων ἀπ' ἀλλήλων, ὀνομάζομεν τώρα τὴν μὲν πρώτην *ὑφαίρεσιν ἀντίτοκον*, τὴν δὲ *ὑφαίρεσιν ὑπέρτοκον*. Οἱ δὲ Γάλλοι τὴν μὲν πρώτην ὀνομάζουσι escompte en dedans, τὴν δὲ escompte en dehors, ὀνόματα ἅτινα καὶ αὐτοὶ κρίνουσιν ἀνάρμοστα.

170. Μετὰ ταύτας τὰς προδιασαφήσεις εἶναι εὔκολον νὰ καταλάβῃ τις πῶς λύονται τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

77ον. Η ὑπέρτοκος ὑφαίρεσις εἶναι 2 ἐτῶν καὶ 8 μηνῶν τόκος τῶν 2850δρ πρὸς δρ 8,75 τὰ 100, ὅςτις εἶναι ἤδη γνωστὸν πῶς εὑρίσκεται (166). Ἀφαιρουμένης δὲ ταύτης ἀπὸ τῶν 2850δρ προκύπτει ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ὁμολόγου.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς ἀντιτόκου ὑφαιρέσεως παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἐπειδὴ αἱ 100δρ εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον 8,75, εἰς 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας ἤθελον φέρει σχεδὸν δρ 23,33. 123,33 δὲ δρ ἤθελεν εἶσθαι τὸ κεφάλαιον 100 καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ εἰς 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας. Διπλασιαζομένου δὲ ἢ τριπλασιαζομένου κτλ τοῦ 123,33 δῆλον ὅτι διπλασιάζεται ἢ τριπλασιάζεται κτλ ὁ 100 καὶ ὁ 23,33. Ἀλλὰ καὶ αἱ 2850δρ τοῦ ὁμολόγου πρέπει νὰ νοῶνται ὅτι εἶναι κεφάλαιον τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ ὁμολόγου καὶ τῆς ἀντιτόκου ὑφαιρέσεως ἤτοι τοῦ 2 ἐτῶν καὶ 8 μηνῶν τόκου αὐτῆς τῆς ἀξίας πρὸς 8,75 τὰς 100, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἢ ἁπλῶς πολλαπλάσιον τοῦ 123,33 ἢ πολλαπλάσιον πολλοστοῦ αὐτοῦ, ἤτοι ἔχει λόγον τινὰ ὁ 2850 πρὸς τὸν 123,33. Δῆλον δ' ἐξ ὧν ἤδη παρετηρήσαμεν ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει καὶ ἡ ζητουμένη ὑφαίρεσις πρὸς τὸν 23,33, τὸν αὐτὸν καὶ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ὁμολόγου πρὸς τὸν 100, ἤγουν

123,33 : 2850 : : 23,33 πρὸς τὴν ἀντίτοκον ὑφαίρεσιν·
ἢ 123,33 : 2850 : : 100 : πρὸς τὴν παρ. ἀξίαν τοῦ ὁμολόγου.

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι *πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀντιτόκου ὑφαιρέσεως πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ προεξοφλούμενον ποσὸν ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου τῆς προεξοφλήσεως* (23,33), *τὸ δὲ προκύπτον γινόμενον νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ κεφαλαίου τοῦ 100 καὶ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου τῆς προεξοφλήσεως* (123,33).

Ὡσαύτως δ' εὑρίσκεται καὶ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ὁμολόγου, ἐκτὸς μόνον ὅτι τὸ προεξοφλούμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 100 καὶ ὄχι ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου, καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὕρεσις αὐτοῦ γίνεται συντομώτερα. Ἄλλως, εὑρίσκεται ἡ παροῦσα ἀξία καὶ διὰ τῆς ἀπὸ τοῦ προεξοφλουμένου ποσοῦ ἀφαιρέσεως τῆς ὑφαιρέσεως.

Ἐκ δὲ τοῦ ὅτι καὶ ἡ παροῦσα ἀξία ἔχει πρὸς τὸν 100 ὃν

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
δημόσιο Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

λόγον τὸ προεξοφλούμενον ποσὸν πρὸς τὸν 123,33, καὶ ἡ ὑφαίρεσις πρὸς τὸν 23,33 τὸν αὐτόν, ἕπεται ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία καὶ ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ἀνάλογα τῶν 100 καὶ 23,33. Ὥστε καταντᾷ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος *εἰς τὸ νὰ μερισθῶσιν αἱ 2850δρ εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν 100 καὶ 23,33.*

Δῆλον δ' ὅτι καὶ οὕτω θέλουσιν ἐκτελεσθῇ αἱ αὐταὶ προειρημέναι πράξεις πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀγνώστων.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὕρεσις τῆς ὑπερτόκου ὑφαιρέσεως εἶναι ἁπλουστέρα τῆς ἄλλης, ὡς ἐκ τῶν προειρημένων γίνεται δῆλον, ἔτι καὶ διὰ τοῦτο εἶναι κοινότερον ἐν χρήσει ἡ ὑπέρτοκος ὑφαίρεσις.

78ον. Ἡ διαφορὰ τοῦ 3200 καὶ τοῦ 3080 ἤτοι 120 εἶναι ἡ ὑφαίρεσις, ἤτοι ὁ τόκος τῶν 3200 ἢ τῶν 3080 εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον πρὸς 6 τὰ 100· καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ὡς τὸ 57ον.

79ον. Τὸ ζητούμενον εἶναι τὸ κεφάλαιον τοῦ 3756 καὶ τοῦ 340 ἡμερῶν τόκου αὐτοῦ πρὸς $6\frac{1}{2}$ τὰ 100, ἢ τὸ κεφάλαιον τοῦ 3756 καὶ τοῦ 340 ἡμερῶν τόκου τοῦ προειρημένου κεφαλαίου πρὸς $6\frac{1}{2}$ τὰ 100, καὶ λύεται ὡς τὸ 58ον.

80ον. Τοῦτο λύεται ὡς τὸ 56ον, ἀφοῦ παρατηρηθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ 9495 καὶ τοῦ 9000 εἶναι ἡ ὑφαίρεσις.

83ον. Ὁ ζητούμενος χρόνος οὔτε πρὸ τῶν 5 μηνῶν εἶναι, διότι τότε ζημιοῦται ὁ ῥάπτης, οὔτε μετὰ τοὺς 14 μῆνας, διότι τότε ὠφελεῖται, ἀλλὰ μεταξὺ τῶν 5 καὶ 14 μηνῶν. Ζητεῖται δὲ πρῶτον ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τῶν 60 δρ καὶ τῶν 900 καὶ τῶν 1000, ἔπειτα ζητεῖται εἰς πόσους μῆνας τὸ κεφάλαιον αὐτῶν θέλει γείνει ὁμοῦ μὲ τὸν τόκον του δρ 1960, καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος χρόνος (λύεται κατὰ τὸ 77ον καὶ 57ον).

77. Ἵνα προεξοφλήσῃ τις 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας πρὸ τῆς προθεσμίας ὁμόλογον 2850δρ μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 8,75 τὰ 100, πόσας δρ θέλει δώσει;

78. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς προθεσμίας προεξωφλήθη ὁμόλογον 3200δρ, ἀνθ' ὧν ἔδωκέ τις 3080δρ, τῆς ὑφαιρέσεως λογισθείσης πρὸς 6 τὰ 100;

79. Ἡμέρας 340 πρὸ τῆς προθεσμίας προεξοφληθὲν ὁμόλογον πρὸς $6\frac{1}{2}$ τὰ 100 τὸ ἔτος εὑρέθη δρ 3756· πόσων δραχ. ὁμόλογον ἦτον;

80. Ἀντὶ 9495δρ ἐξοφλητέων εἰς ἓν ἔτος ἔδωκέ τις μόνον 9000 προεξοφλήσας αὐτὸ 5 μῆνας πρότερον· πρὸς πόσον τὰ 100 ἔγεινεν ἡ προεξόφλησις;

81. Ἔδωκέ τις 63 δρ ὀλιγώτερον παρ' ὅσον διελάμβανεν ὁμόλογόν τι, διό-

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

τι προεξώφλησεν αὐτὸ 6 μῆνας πρὸ τῆς προθεσμίας μὲ ἐκπεσμὸν 9 τὰ 100· πόσων δραχ. ὁμόλογον ἐξηργύρωσεν ;

82. Ἔμπορος ἠγόρασεν ὑφάσματα δρ 9430 πληρωτέων εἰς ἓν ἔτος ἢ καὶ πρότερον μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 6 τὰ 100. ἐπλήρωσε δ' εὐθὺς μὲν 370δρ, μετὰ δὲ 2 μῆνας 1700, 4 δὲ μῆνας πρὸ τοῦ τέλους τοῦ ἔτους 4000, τὰς δὲ λοιπὰς θέλει νὰ πληρώσῃ 25 ἡμέρας πρὸ τοῦ τέλους τοῦ ἔτους· πόσας δραχ. θέλει δώσει ;

83. Ῥάπτης, ὅστις χρεωστεῖ εἰς ἔμπορον 600δρ πληρωτέας εἰς 5 μῆνας, 900δρ πληρωτέας εἰς 8 μῆνας, καὶ 1000δρ πληρωτέας εἰς 14 μῆνας, ἐὰν θέλῃ νὰ πληρώσῃ ὅλας ὁμοῦ τὴν αὐτὴν ἡμέραν, πότε πρέπει νὰ τὰς πληρώσῃ, ἵνα γείνῃ ἀντιστάθμωσις τῶν τόκων ;

84. Ἔμπορος πληρόνει διὰ δύο γραμματίων, τοῦ μὲν δρ 3057,50 πληρωτέων εἰς $7\frac{1}{2}$ μῆνας, τοῦ δὲ 4007 πληρωτέων εἰς 60 ἡμέρας, ἅτινα συμφωνεῖ νὰ λογισθῶσι μὲ ἀντίτοκον ὑφαίρεσιν πρὸς $6\frac{1}{2}$ τὰ 100 τὸ ἔτος· πόσων δρ εἶναι αὕτη ἡ πληρωμή ;

171. Τῶν ἀκολούθων ἕνδεκα προβλημάτων παραιτοῦνται τὰ ἐννέα εἰς τοὺς μαθητὰς νὰ λύσωσιν, διότι ὁμοιάζουσι μὲ ἄλλα ἤδη λυμένα καὶ λύονται ὡς ἐκεῖνα. Τὸ δὲ 93ον λύεται οὕτως. Ἂν ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου 96 τῶν τριῶν ζητουμένων ἀφαιρεθῶσι 4 μονάδες, ὅσας ὁ τρίτος ἔχει πλειότερον τοῦ κεφαλαίου τῶν δύο ἄλλων, ὁ μένων 92 εἶναι δὶς τὸ κεφάλαιον τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μεσαίου· ἂν δ' ἔτι ἀφαιρεθῶσι 4 μονάδες, ἤτοι δὶς 2 μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ μεσαῖος πλειότερον τοῦ μικροτέρου, ὁ μένων 88 εἶναι τετραπλάσιος τοῦ μικροτέρου, ὁ δὲ μικρότερος ἀντιστρόφως εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ 88 ἤτοι ὁ 22· ὁ δὲ μεσαῖος ἑπομένως εἶναι 24, ὁ δὲ μεγαλήτερος 50.

49ον. Ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ πενταπλασίου τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ πρώτου εἶναι 21, ὡσαύτως δ' 21 εἶναι καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου· λοιπὸν εἶναι ἰσοδιάφοροι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ οὗτοι, τὸ πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου, ὁ πρῶτος, τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς καθ' ἣν κεῖνται τάξιν· λοιπὸν τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων ἤτοι τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ δευτέρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων ἤτοι τὸ τετραπλάσιον τοῦ πρώτου· λοιπὸν τὸ ἕκτον τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ δευτέρου ἤτοι ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕκτον τοῦ τετραπλασίου τοῦ πρώτου, ἢ ἄλλως μὲ τὰ $\frac{4}{6}$ τοῦ πρώτου ἢ ἁπλούστερα μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ πρώτου. Ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ πρώ-

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

του καὶ τοῦ δευτέρου τώρα καταντᾷ εἰς διαφορὰν τοῦ τριπλασίου τοῦ πρώτου καὶ τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ πρώτου, ἥτις εἶναι $\frac{7}{3}$ τοῦ πρώτου, διότι τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{9}{3}$ αὐτοῦ· λοιπὸν ὁ 21, ὅστις εἶναι ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος διαφορά, εἶναι $\frac{7}{3}$ τοῦ πρώτου· λοιπὸν ἀντιστρόφως ὁ πρῶτος εἶναι τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ 21 ἤτοι 9· ὁ δὲ δεύτερος ἐπομένως εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 9 ἤτοι 6.

85. Τεχνίτης χρεωστῶν 24δρ εἰς ξενοδόχον συμβιβάζεται μετ' αὐτοῦ νὰ τὰς πληρώσῃ εἰς 6 μῆνας, ἂν δὲ προπληρώσῃ μέρος αὐτῶν, νὰ ἐπιπληρώσῃ τὰς λοιπὰς κατὰ λόγον τῆς προπληρωμῆς. Ἐπειδὴ δ' ἐπλήρωσε 4δρ εἰς 2 μῆνας ἀπὸ τοῦ συμβιβασμοῦ καὶ 8δρ 3 μῆνας ἔπειτα, πότε πρέπει νὰ πληρώσῃ τὰς λοιπάς;

86. Ἐπώλησέ τις σάκχαρι ἀντὶ 3600δρ πληρωτέων εἰς 15 μῆνας, ὁ δὲ ὀφειλέτης ἐπλήρωσε μέρος αὐτῶν πρὸ τῆς προθεσμίας καὶ 1200δρ εἰς 3 ἔτη καὶ 9 μῆνας ἕνεκα τῆς προπληρωμῆς· πόσας δρ προεπλήρωσε, καὶ πόσον χρόνον πρὸ τῆς προθεσμίας;

87. Ἔμπορος χρεωστῶν 6200δρ πληρωτέας εἰς 7 μῆνας, 6200 ἄλλας εἰς 15 μῆνας, καὶ 6200 ἄλλας εἰς 29 μῆνας, ἐπλήρωσε τὸ ὅλον εἰς 17 μῆνας· ἔχασεν ἢ ἐκέρδισεν οὕτω πληρώσας;

88. Ἐξώφλησέ τις χρέος τι διὰ τριῶν πληρωμῶν, τῆς μὲν 460δρ, τῆς δ' ἐχούσης λόγον πρὸς τὰς 460 ὡς 4 πρὸς 6, τῆς δ' ἐχούσης λόγον πρὸς τὴν δευτέραν πληρωμὴν ὡς 6 πρὸς 9· πόσας δρ ἐχρεώστει, καὶ πόσων δρ ἦτον ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη πληρωμή;

89. Ἀρτοποιὸς ἀγοράσας ἄλευρον 3790δρ, τῶν μὲν πληρωτέων εὐθύς, τῶν δὲ εἰς 6 μῆνας μὲ τόκον πρὸς 8 τὰ 100, πληρώνει εὐθὺς 2040δρ· πόσας θέλει δώσει εἰς τὸ τέλος τῶν 6 μηνῶν;

90. Ἀναλαμβάνουσι δύο τινὲς νὰ κατασκευάσωσι πρόχωμά τι, ἀνθ' οὗ θέλουσι λάβει ἀντιμισθίαν δρ 64, συμβιβάζονται δὲ ὁ μὲν ὡς ἀξιώτερος νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῶν, ὁ δὲ τὰ λοιπά· Ἀλλὰ μετὰ 6 ἡμέρας ἀσθενεῖ ὁ ἀναξιώτερος, ἀποτελειόνει δ' ὁ ἄλλος τὸ ἔργον εἰς 20 ἡμέρας. Πόσον θέλει λάβει ἑκάτερος;

91. Εἶχέ τις οἶνον εἰς πώλησιν, καὶ ὁ μέν τις τῷ προσέφερε 7000δρ πληρωτέας ἢ εὐθὺς ἢ εἰς ἓν ἔτος μὲ τὸν τόκον αὐτῶν πρὸς 10 τὰ 100, ὁ δὲ τῷ προσέφερε 2000δρ πληρωτέας εὐθὺς καὶ 5540 πληρωτέας εἰς 8 μῆνας. Πωλήσας τὸν οἶνον εἰς τὸν δεύτερον ἔχασεν ἢ ἐκέρδισε, καὶ πόσον;

92. Τίς εἶναι ὁ ἀριθμός, οὗτινος τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὰ $\frac{2}{7}$ ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 575;

93. Τριῶν ἀριθμῶν τὸ κεφάλαιον εἶναι 96, ὁ δὲ μεσαῖος ὑπερέχει τὸν μικρότερον κατὰ 2 μονάδας, ὁ δὲ μεγαλήτερος ὑπερέχει τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἄλλων κατὰ 4· τίνες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

94. Τὸ κεφάλαιον τοῦ 21 καὶ τοῦ ἑτέρου δύο ἀριθμῶν εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἄλλου τῶν δύο, τὸ δὲ κεφάλαιον τοῦ 21 καὶ τούτου τοῦ ἄλλου εἶναι τριπλάσιον τοῦ πρώτου τῶν δύο· τίνες εἶναι οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί;

95. Τὸ αὐτὸ ἔργον τρεῖς διάφοροι ἐργάται τὸ τελειόνουσιν οὕτως, ὁ μὲν πρῶτος μόνος εἰς 12 ἡμέρας 10 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐργαζόμενος, ὁ δὲ μόνος εἰς 15 ἡμέρας 12 ὡρῶν ἑκάστην, ὁ δὲ τρίτος εἰς 9 ἡμέρας 8 ὡρῶν ἑκάστην· εἰς πόσας ἡμέρας καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐργαζόμενοι ἤθελαν τὸ τελειώσει; πόσον τοῦ ἔργου ἕκαστος ἤθελε κάμει; καὶ πόσας δρ τῶν 108 ἤθελε λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ἔργου του;

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Ζαγοράς

Ὁρισμοὶ κατ' Εὐκλείδην (Βιβλ. ε'. Στοιχ. Γεωμ).

α'. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β'. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

δ'. Ἀναλογία δέ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης.

ε'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ς'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ζ'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη, ἀνάλογον καλείσθω.

η'. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

ι'. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ια'. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιγ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιδ'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιε'. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ις'. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιζ'. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

ιη'. Δι᾽ἴσου λόγος ἐστί, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Ἢ ἄλλως, λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιθ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι.

κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Περὶ τῶν παρ' Ἕλλησιν ὀνομάτων καὶ τῶν γραπτῶν σημείων τῶν ἀριθμῶν.

Φαίνεται ὅτι τὰ ὀνόματα τῶν μέχρι καὶ τοῦ 9999 ἀριθμῶν ἦσαν καὶ εἰς τοὺς ἀρχαιοτάτους Ἕλληνας τ' αὐτά, ἅπερ καὶ παρ' ἡμῖν, ἐκτὸς τῆς ἐκ τῶν διαλέκτων διαφορᾶς καὶ τῆς θέσεως τῶν μερικῶν ὀνομάτων τῶν πρὸς ἀπαρτισμὸν τῶν ὀνομάτων τῶν συνθέτων, διότι συνήθως π. χ. ὁ 348 ἐλέγετο *ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα καὶ τριακόσια, κτ.λ.* Τῶν δὲ ἀπὸ τοῦ 10000, ὅστις ἐκαλεῖτο *μυριάς*, τὰ ὀνόματα διέφερον κατὰ τοῦτο, ὅτι ἠριθμοῦντο οἱ μεγαλήτεροι κατὰ μυριάδας μέχρι τοῦ μύριαι μυριάδες ἤτοι τοῦ 100000000. Ὅλοι δὲ οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ ἴσως ἀπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκαλοῦντο *πρῶτοι ἀριθμοὶ ἢ τῆς πρώτης ὀκτάδος ἀριθμοί*, διεκρίνοντο δὲ εἰς δύο περιόδους, οἱ μὲν μέχρι καὶ τοῦ 10000 λεγόμενοι τῆς πρώτης περιόδου, οἱ δὲ ἀπὸ τούτου μέχρι καὶ τοῦ 100000000 λεγόμενοι τῆς δευτέρας περιόδου τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ 100000000 μέχρι καὶ τοῦ 10000000000000000, ἀριθμούμενοι ὡς οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ κατὰ μυριάδας μυριάδων ἤτοι κατὰ 100000000, ὅστις ἐθεωρεῖτο μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, ἐκαλοῦντο *δεύτεροι ἀριθμοὶ ἢ τῆς δευτέρας ὀκτάδος ἀριθμοί*, διακρινόμενοι εἰς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας περιόδου. Ὁ δὲ τελευταῖος τούτων, ὅστις ἐκαλεῖτο *μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν*, ἐθεωρεῖτο μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν ἢ τῆς τρίτης ὀκτάδος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ *μύριαι μυριάδες τῶν μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν*.

Εἰς τοὺς ἀρχαιοτέρους δὲ χρόνους φαίνεται ὅτι ἔγραφον τὸ 1 ὡς καὶ ἡμεῖς, τὸν δὲ 5, 10, 100, 1000, 10000 ἕκαστον διὰ τοῦ ἀρκτικοῦ γράμματος τοῦ ὀνόματός του, ἤτοι τοῦ Π, Δ, Η, Χ, Μ· 2 δὲ δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας κτλ ἢ 3 ἢ 4, διὰ δύο ἢ τριῶν ἢ τεσσάρων τούτων τῶν ἀρκτικῶν στοιχείων, οἷον ΔΔ, ΔΔΔ, ΔΔΔΔ κτλ· 5 δὲ δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας κτλ δι' ἑνὸς τῶν ἀρκτικῶν τούτων στοιχείων κειμένου ἐντὸς τοῦ Π, οἷον $\boxed{\Delta}$, $\boxed{H}$, $\boxed{X}$, $\boxed{M}$, 6 δὲ δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας κτλ ἢ 7 ἢ 8 ἢ 9 διὰ τῶν αὐτῶν τούτων ἀκολουθουμένων ἑνὸς ἢ δύο ἢ τριῶν ἢ τεσσάρων τῶν ἀρκτικῶν [illegible] δὲ συνθέτους διὰ τῶν σημείων τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

Ἀργότερα δὲ φαίνεται ὅτι μετεχειρίσθησαν τ' ἀλφαβητικὰ γράμματα καὶ τὸ Βαῦ ς, τὸ κόππα ϟ καὶ τὸ Σὰν πῖ ϡ, ὅλα εἰκοσιεπτὰ πρὸς γραφὴν τῶν μέχρι καὶ τοῦ 999 ἀριθμῶν, τὰ δὲ πρῶτα ἐννέα μὲ ὑπογεγραμμένον ἰῶτα πρὸς γραφὴν τῶν ἐννέα ἀριθμῶν τῆς χιλιάδος, διατηρήσαντες τὸ Μ διὰ τὰς μυριάδας, οὕτως

α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ, ἀριθμοὶ μονάδος,
ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϟ, ἀριθμοὶ δεκάδος,
ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω ϡ, ἀριθμοὶ ἑκατοντάδος,
͵α, ͵β, ͵γ, ͵δ, ͵ε, ͵ς, ͵ζ, ͵η, ͵θ, ἀριθμοὶ χιλιάδος,

Οἱ δὲ σύνθετοι ἐκ τούτων ἐγράφοντο διὰ τῶν αὐτῶν τούτων κατόπιν ἀλλήλων τιθεμένων, οὕτως,

24,	850,	406,	378,	4007.	8400,	1050,
κδ,	ων,	υς,	τοη,	͵δζ,	͵ηυ,	͵αν,
			8240,	2503,	1084,	2850.
			͵ησμ,	͵βφγ,	͵απδ,	͵αων.

Ὡσαύτως δ' ἐγράφοντο καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῆς μυριάδος, ἀλλὰ συνωδεύοντο ὑπὸ τοῦ Μ, γραμμένου ἢ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἢ ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν οὕτω, σοδΜ ἢ $\overset{\sigma o \delta}{\mathrm{M}}$ ἢ καὶ οὕτω $\overset{\sigma\ o\ \delta}{\mathrm{MMM}}$, ὅστις παριστάνει διακοσίας ἑβδομήκοντα τέσσαρας μυριάδας.

Τῶν δὲ ἀριθμῶν τῆς δευτέρας ὀκτάδος οἱ μὲν τῆς πρώτης περιόδου γραμμένοι ὡς ἤδη εἴπομεν εἶχον δύο Μ[illegible] δὲ τῆς δευτέρας περιόδου τρία. Οἷον ιδΜΜ εἶναι δεκατέσσαρες μυριάδες τῶν μυριάδων, ἢ 14 μονάδες τῆς δευτέρας ὀκτάδος, ἢ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, ἤτοι ὁ [illegible]000000. Ὁ δὲ μηΜΜΜ εἶναι τεσσαράκοντα ὀκτὼ μυριάδες τῶν μυριάδων τῶν μυριάδων, ἢ 48 μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, ἢ 48 μονάδες τῆς δευτέρας περιόδου τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς 4800000000000, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αἱ κλασματικαὶ μονάδες ἐγράφοντο διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων, ἀλλ' ἐτονίζετο τὸ δεξιὸν γράμμα, οἷον τὸ $\frac{1}{3}$ [illegible] $\frac{1}{5}$ κτλ ἐγράφετο γ', δ', ε' κτλ, τὸ $\frac{1}{368}$ ἐγράφετο τξη', τὸ $\frac{1}{24}$ οὕτω κδ' κτλ. Τὸ ἥμισυ δὲ εἶχεν ἴδιον σημεῖον τοῦτο ∠. Ἀριθμὸς δέ τις κλασματικός, οἷον ὁ $\frac{3}{7}$, $\frac{35}{89}$ κτλ ἐγράφετο οὕτω [illegible] λε πθ', ἤτοι πρῶτον ὁ ἀριθμητής, ἔπειτα ὀλίγον μακρὰν ὁ παρονομαστὴς μὲ τονισμένον τὸ τελευταῖον γράμμα.

ΤΕΛΟΣ.

ΔΗΜΟΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΒΙΒΛΙΟ

ΑΡΙΘ.

Δημόσια Κεντρική Ιστορική Βιβλιοθήκη Σάμου

ΣΑΜ