ΝΟΥ

ΗΣ

ΡΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ

ΧΡΗΣΙΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ,

ΥΠΟ

ΑΘ. ΚΥΖΙΚΗΝΟΥ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Ν. Γ. ΠΑΣΣΑΡΗ.

('Οδὸς Νικία καὶ Μιλτιάδου ἀριθ. 6 καὶ 9).

1867.

Πᾶν ἀντίτυπον, μὴ φέρον τὴν ἐνταῦθα ἰδιόχειρον ὑπογραφήν μου, εἶναι μετατύπωσις γενομένη παρὰ τὴν θέλησίν μου καὶ κολαζομένη ὑπὸ τοῦ νόμου.

ΤΟΙΣ ΕΝΤΕΥΞΟΜΕΝΟΙΣ.

Κατὰ τὴν σύνταξιν τοῦ παρόντος πονήματος εἶχον ὑπ' ὄψιν οὐ μόνον τὸ σχεδὸν ἄχρηστον ἤδη καταστὰν πρόγραμμα τοῦ 1857, ἀλλὰ καὶ τὸ σήμερον ἰσχύον ἐν Γαλλίᾳ· διὰ τοῦτο ἀφ' ἑνὸς μὲν δὲν παρέλειψα τὴν ἀπροσδιόριστον καλουμένην ἀνάλυσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ, οὔτε τὴν θεωρίαν τῶν λογαρίθμων ὡς ἐκθετῶν, ἐντεῦθεν δὲ συμπεριέλαβον τὰ συνεχῆ κλάσματα, τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $\alpha^x = 6$ καὶ τὸ περὶ ἀσυμμέτρων ἐκθετῶν, ἀκολουθῶν εἰς ταῦτα τὸ πρόγραμμα τοῦ 1857· ἀφ' ἑτέρου δὲ περιέλαβον τὸ περὶ τῶν τύπων τῶν λύσεων συστημάτων πρωτοβαθμίων, τὸ περὶ συστημάτων ἐξισώσεων ἀναγομένων εἰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τὸ περὶ ἀνισοτήτων, τὸ περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων καὶ τὴν θεωρίαν τῶν λογαρίθμων ὡς ὅρων προόδου ἀριθμητικῆς, ἀκολουθῶν εἰς ταῦτα τὸ γαλλικὸν πρόγραμμα. Διέκρινα δ' ἀπ' ἀλλήλων τὰ μέρη καλῶς, ὥστε εὔκολος νὰ ἦναι ἡ παράλειψις τῶν μὲν, ἢ τῶν δέ. Κατεχώρισα πολλαχοῦ ζητήματα πρὸς λύσιν, ἵνα προτείνωνταί τινα τούτων τοῖς μαθηταῖς. Προέταξα δὲ τοῦ πονήματος πρόλογον, ἐν ᾧ ἐπραγματεύθην περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Τὸ ἐπ' ἐμοὶ ἤθελεν προτιμήσει νὰ γίνηται ἡ διδασκαλία τῆς στοιχειώδους Ἀλγέβρας κατὰ τὸ γαλλικὸν πρόγραμμα, ἀφοῦ καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῶσιν ἱκανά, οἷον τὸ περὶ τῶν τύπων τῶν λύσεων συστημάτων πρωτοβαθμίων, τὸ περὶ συστημάτων ἀναγομένων εἰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, πολλὰ ἐκ τοῦ περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, περιοριζομένης τῆς περὶ τούτων διδασκαλίας εἰς ὀλίγα μόνον προβλήματα.

Τὰ ὡς πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἕτερον τῶν ἀνωτέρω προγραμμάτων πλεονάζοντα μέρη τοῦ πονήματος καὶ τὰ ἐν αὐτῷ πολλὰ πρὸς λύσιν ζητήματα δύνανται νὰ ἦναι ὠφέλιμα ἰδίως εἰς ἐκείνους τῶν σπουδαστῶν, οἵτινες μέλλοντες νὰ ἐπιδοθῶσιν εἰς σπουδὴν ἀνωτέρων τῆς ἐπιστήμης μερῶν, ἔχουσιν ἀνάγκην εὐρυτέρων καὶ ἑδραιοτέρων βάσεων.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Ἰουλίου 1867.

ΑΘ. ΚΥΖΙΚΗΝΟΣ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Α΄. ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα ποσά.

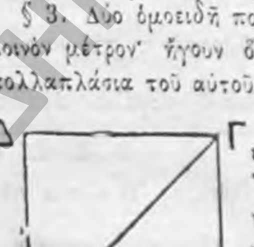
§ 1. Δύο ὁμοειδῆ ποσὰ λέγονται σύμμετρα, ὅταν ἦναι δυνατὸν νὰ ἦναι ἀμφότερα πολλαπλάσια τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, ὅπερ καλεῖται *κοινὸν μέτρον* αὐτῶν.

Ἐάν, π. χ., ἐν τῷ ἑτέρῳ δύο μηκῶν ὁ πῆχυς περιέχηται ἀκριβῶς ἐννεάκις, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ δωδεκάκις, τὰ δύο αὐτὰ μήκη εἶναι σύμμετρα, ἔχοντα κοινὸν μέτρον τὸν πῆχυν.

§ 2. Ποσόν τι λέγεται σύμμετρον, ἄνευ ῥητῆς συγκρίσεως πρὸς ἕτερον, ὅταν ἦναι σύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα, δι' ἧς καταμετροῦνται τὰ ὁμοειδῆ αὐτῷ ποσά. Πᾶν τοιοῦτο ποσὸν παρίσταται δι' ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ· ἀκεραίου μέν, ὅταν ἡ μονὰς περιέχηται ἀκριβῶς ἐν αὐτῷ, κλασματικοῦ δέ, ὅταν πολλοστόν τι τῆς μονάδος (ἓν ἐκ τῶν κοινῶν μέτρων τῆς μονάδος καὶ τοῦ συμμέτρου ποσοῦ) περιέχηται ἀκριβῶς ἐν αὐτῷ.

Ἀντιστρόφως πᾶν ποσόν, παριστώμενον δι' ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, εἶναι σύμμετρον· διότι εἰ μὲν παρίσταται δι' ἀκεραίου, ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς μονάδος μέτρον τὴν μονάδα αὐτήν· εἰ δὲ διὰ κλασματικοῦ, ἔχει πάλιν μετὰ τῆς μονάδος κοινὸν μέτρον τὸ πολλοστὸν αὐτῆς, τὸ ὁριζόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος· π. χ. τὸ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{15}{29}$ παριστώμενον ποσὸν ἔχει μετὰ τῆς μονάδος κοινὸν μέτρον τὸ $\frac{1}{29}$ αὐτῆς.

§ 3. Δύο ὁμοειδῆ ποσὰ λέγονται *ἀσύμμετρα*, ὅταν δὲν ἔχωσι κοινὸν μέτρον· ἤγουν ὅταν δὲν ἦναι δυνατὸν νὰ ἦναι ἀμφότερα πολλαπλάσια τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ.

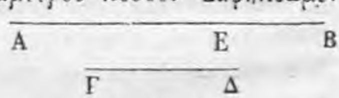


Π. χ. *ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ παντὸς τετραγώνου εἶναι εὐθεῖαι ἀσύμμετροι.* Ὑποτεθήτω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον, ὅπερ ἐν μὲν τῇ πλευρᾷ περιέχεται $\alpha^{\kappa\iota\varsigma}$ ἐν δὲ τῇ διαγωνίῳ $6^{\kappa\iota\varsigma}$. Γνωστὸν ὅτι τὸ μὲν τετράγωνον ΑΒΓΔ περιέχει ἀκριβῶς α^2 μικρὰ τετράγωνα, ὧν πλευρὰ εἶναι τὸ κοινὸν αὐτὸ μέτρον, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς διαγωνίου περιέχει β^2 τοιαῦτα τετράγωνα. Γνωστὸν ἐπίσης ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ΑΓ ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι $\beta^2 = 2\alpha^2$· ὅθεν $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = 2$· ὅπερ ἄτοπον· διότι τὸ α'. μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$, ὁ δὲ 2 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΑΒ καὶ ΑΓ δὲν ἔχουσι κοινὸν μέτρον.

§ 4. Ποσόν τι λέγεται ἀσύμμετρον, ἄνευ ῥητῆς συγκρίσεως πρὸς ἕτερον, ὅταν ἦναι ἀσύμμετρον πρὸς τὴν ἰδίαν μονάδα. Τὸ ἀσύμμετρον ποσὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παριστᾶται δι' ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ κατὰ τὰ ἐν § 2 εἰρημένα.

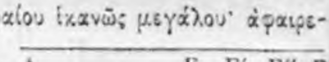
§ 5. Ἐπειδὴ διὰ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν παριστῶνται ποσὰ σύμμετρα, διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καλοῦνται *ἀριθμοὶ σύμμετροι*.

§ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ὑπάρχουσι ποσὰ σύμμετρα, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέροντα δεδομένου ἀσυμμέτρου ποσοῦ.* Σαφηνίσωμεν ἐν πρώτοις τὴν πρότασιν αὐτὴν διὰ παραδείγματος. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, γραμμικὴ δὲ μονὰς ἡ ΓΔ.



Ὑποτεθήτω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἀσύμμετρος (ἤγουν ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα ΓΔ) καὶ ὅτι τὸ μέρος ΑΕ τῆς ΑΒ εἶναι σύμμετρον. *Ὁσονδήποτε πλησίον τοῦ Β κἂν ᾖ τὸ σημεῖον Ε, εἴτε ὁσονδήποτε ὀλίγον κἂν διαφέρῃ ἡ ΑΕ τῆς ΑΒ, ὑπάρχουσιν ἀκόμη ἄπειροι εὐθεῖαι σύμμετροι ἀπὸ τῆς ΑΕ μέχρι τῆς ΑΒ.* Τοῦτο δ' ἔχει οὕτως, οἱουδήποτ' ἂν ᾖ εἴδους τὸ ἀσύμμετρον ποσόν, οἷον ἐπιφάνεια, ὄγκος, βάρος, χρόνος, κ.τ.λ. Τοιαύτη εἶναι ἡ ἔννοια τῆς προκειμένης προτάσεως.

Προβαίνομεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν. Ἔστω πολλοστόν τι τῆς μονάδος ΓΔ τὸ $\frac{1}{\kappa}$, ἱκανῶς μικρόν, κ ὄντος ἀκεραίου ἱκανῶς μεγάλου· ἀφαιρεθήτω τὸ πολλοστὸν αὐτὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ὁσάκις εἶναι δυνατὸν καὶ ἔστω ΒΕ τὸ ὑπόλοιπον.



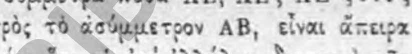
Ἡ εὐθεῖα ΑΕ, οὖσα πολλαπλάσιον τοῦ $\frac{1}{\kappa}$ τῆς μονάδος ΓΔ, εἶναι σύμμετρος. Ληφθήτω ἤδη ἕτερον πολλοστὸν τῆς μονάδος, τὸ $\frac{1}{\kappa'}$, ἔλασσον τῆς ΒΕ, καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς AB ὁσάκις περιέχεται· τὸ νέον ὑπόλοιπον BE′, ὂν ἔλασσον τοῦ πολλοστοῦ αὐτοῦ, εἶναι ἔτι μᾶλλον ἔλασσον τῆς BE· ἑπομένως τὸ σημεῖον E′ κεῖται μεταξὺ τῶν E καὶ B· οὕτως ἡ AE′ εἶναι σύμμετρος μείζων τῆς AE. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσεται καὶ ἄλλη σύμμετρος εὐθεῖα, ἡ AE″, μείζων τῆς AE′, καὶ οὕτω καθεξῆς. Αἱ δὲ διαφοραὶ τῶν συμμέτρων εὐθειῶν AE, AE′, AE″, ... ἀπὸ τῆς ἀσυμμέτρου AB, οὖσαι ἐλάσσονες τῶν τῆς μονάδος πολλοστῶν $\frac{1}{\kappa}$, $\frac{1}{\kappa'}$, $\frac{1}{\kappa''}$, ..., ἅπερ δύνανται νὰ λαμβάνωνται ὁσονδήποτε μικρά, δύνανται ἔτι μᾶλλον ν᾽ ἀποβῶσιν ὁσονδήποτε μικραί.

Ὡς συλλογιζόμεθα ἐπ᾽ ἀσυμμέτρου εὐθείας, δυνάμεθα νὰ συλλογισθῶμεν καὶ ἐπὶ οἱουδήποτε εἴδους ἀσυμμέτρου ποσοῦ.

§ 7. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος δῆλα τὰ ἑξῆς.

α′. *Δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν σειρὰν ἀπέρατον ποσῶν συμμέτρων, αὐξόντων καὶ τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς ἀσύμμετρόν τι ποσόν.* Π. χ. τὰ ἀνωτέρω σύμμετρα ποσὰ AE, AE′, AE″, ..., ἅπερ τείνουσιν ἀπεριορίστως πρὸς τὸ ἀσύμμετρον AB, εἶναι ἄπειρα τὸν ἀριθμόν· ἀλλὰ παρατηρητέον ὅτι αἱ ἀπ᾽ ἀλλήλων διαφοραὶ τῶν ποσῶν αὐτῶν ἐλαττοῦνται ἀπεριορίστως· διότι αἱ διαφοραὶ αὗται εἰσὶ διαφοραὶ τῶν διαφορῶν τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἀπὸ τῆς AB· π. χ. ἡ διαφορὰ τῶν AE′ καὶ AE εἶναι ἴση τῇ τῶν BE′ καὶ BE· ἀλλ᾽ αἱ BE, BE′, ... βαίνουσιν ἐλαττούμεναι ἀπεριορίστως· ἄρα ἔτι μᾶλλον αἱ διαφοραὶ αὐτῶν.

β′. *Δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν σειρὰν ἀπέρατον ποσῶν ἐλαττουμένων καὶ τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς ἀσύμμετρόν τι ποσόν.* Ἐὰν αὐξήσωμεν τὰ ποσὰ AE, AE′ AE″, ... ἕκαστον, κατὰ τὸ πολλοστὸν τῆς μονάδος, οὗ εἶναι πολλαπλάσιον, τὸ AE δηλονότι κατὰ $\frac{1}{\kappa}$ τῆς μονάδος, τὸ AE′ κατὰ $\frac{1}{\kappa'}$ τῆς μονάδος, κ. τ. λ., ἕξομεν ποσὰ μείζω τῆς AB, τὰ AH, AH′, AH″, κ.τ.λ., ἅπερ



διαφέρουσι τῆς AB ἔλασσον τοῦ $\frac{1}{\kappa}$, $\frac{1}{\kappa'}$, ... τῆς μονάδος. Ἐὰν λοιπὸν τὰ $\frac{1}{\kappa'}$, $\frac{1}{\kappa''}$, ... ληφθῶσιν ἕκαστον ἔλασσον τῆς διαφορᾶς τοῦ προηγουμένου ποσοῦ ἀπὸ AB, ἤγουν τὸ $\frac{1}{\kappa'}$ ἔλασσον τοῦ BH, τὸ $\frac{1}{\kappa''}$

ἔλασσον τοῦ ΒΗ', κ.τ.λ., τὰ ποσὰ ΑΗ, ΑΗ', ΑΗ'', ... θέλουσι πλησιάζει ἀπεριορίστως πρὸς τὸ ΑΒ.

§ 8. Καλεῖται *ὅριον* ποσοῦ μεταβλητοῦ σταθερόν τι ποσὸν, πρὸς ὃ τείνει ἀπεριορίστως τὸ μεταβλητόν. Π. χ. τὰ ἐγγραφόμενα ἐν κύκλῳ τινὶ πολύγωνα, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, ἐνῷ ἑκάστη τούτων σμικρύνεται ἀπεριορίςως, εἶναι ποσὰ ἐπιφανείας μεταβλητὰ, ἔχοντα ὅριον τὸν κύκλον. Αἱ περίμμετροι τῶν αὐτῶν πολυγώνων εἶναι γραμμικὰ ποσὰ μεταβλητὰ, ἔχοντα ὅριον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Αἱ ἐν τῷ ἡγηθέντι παραγράφῳ προτάσεις περιέχονται ἐν τῇ ἑξῆς περιληπτικῇ ἐκφωνήσει· *Πᾶν ἀσύμμετρον ποσὸν εἶναι ὅριον ποσῶν συμμέτρων.*

Ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι.

α'. *Προοιμιώδεις παρατηρήσεις.*

§ 9. Α'. Ἔστω Α ποσόν τι ἀσύμμετρον οἱουδήποτε εἴδους· ἔστωσαν ἔτι Β, Β', Β'', ... ποσὰ ὁμοειδῆ σύμμετρα αὔξοντα καὶ τείνοντα πρὸς τὸ Α, καὶ ἕτερα Γ, Γ', Γ'', ... σύμμετρα ἐλαττούμενα καὶ τείνοντα πρὸς τὸ Α (§ 7). Σημειωθήτωσαν διὰ ϐ, ϐ', ϐ'', ... οἱ τὰ σύμμετρα ποσὰ Β, Β', Β'', ... παριστῶντες ἀριθμοὶ (ἕκαστος τὸ σημειούμενον διὰ τοῦ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τόνων φέροντος γράμματος Β) καὶ διὰ γ, γ', γ'', ... οἱ παριστῶντες τὰ Γ, Γ', Γ'', ... Πάντες οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἀναφέρονται εἰς τὴν μονάδα, ὡς πρὸς ἣν τὸ Α εἶναι ἀσύμμετρον· σημειωθήτω ἡ κοινὴ αὕτη μονὰς διὰ Μ.

Λέγω ὅτι *τὰ διὰ τῶν ἀριθμῶν ϐ, ϐ', ϐ'', ... παριστώμενα ποσὰ τείνουσι πάντοτε πρὸς ἓν ὅριον, εἰς οἱανδήποτ' ἄλλην μονάδα κἂν ἀνενεχθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι· ἐπίσης καὶ τὰ διὰ τῶν γ, γ', γ'', ...*

Ἀνεχθήτωσαν οἵ τε ϐ, ϐ', ϐ'', ... καὶ οἱ γ, γ', γ'', ... πρὸς ἄλλην τινὰ μονάδα Μ', ὁμοειδῆ ἢ μὴ τῇ Μ. Οἱ μὲν ϐ, ϐ', ϐ'', ... θέλουσι πάλιν ἐμφαίνει ποσὰ αὔξοντα, οἱ δὲ γ, γ', γ'', ... ποσὰ ἐλαττούμενα καὶ μείζονα τῶν πρώτων (*)· τὰ ποσὰ λοιπὸν, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ ϐ, ϐ', ϐ'', ... βαίνουσιν αὐξάνοντα μὲν, ἀλλ' οὐχὶ ἀπεριορίστως, ὡς ἐλάσσονα πάντοτε ἐκείνων, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ γ, γ', γ'', ...· τὰ δὲ ποσὰ, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ γ, γ', γ'', ... βαί-

(*) Εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅταν ἐκ δύο συμμέτρων ἀριθμῶν ϐ καὶ γ, πρὸς μερικήν τινα μονάδα ἀναφερομένων, ὁ ϐ παριστᾷ ποσὸν μεῖζον τοῦ διὰ τοῦ γ, ὁ ϐ θέλει πάντοτε παριστᾷ τὸ μεῖζον ποσὸν, πρὸς οἱανδήποτ' ἄλλην μονάδα κἂν ἀνενεχθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

νουσιν ἐλαττούμενα μὲν, ἀλλ' οὐχὶ ἀπεριορίστως, ὡς μείζονα πάντοτε ἐκείνων, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ β, β', β'', . . .

Τὰ ποσὰ, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ β, β', β'', . . . ἔχουσιν ὅριον τὸ ἐλάχιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσι. Ἔστωσαν B_1, B_1', B_1'', . . . τὰ ποσὰ, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ β, β', β'', . . . ὅταν ἀνενεχθῶσι πρὸς τὴν μονάδα Μ', καὶ Δ τὸ ἐλάχιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ ἐκεῖνα δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσι. Ἡ διαφορὰ τῶν B_1, B_1', B_1'', . . . ἀπὸ τοῦ Δ δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρά· διότι ἐὰν οὐδέποτε ἀπέβαινεν ἔλασσων ἐλαχίστου τινὸς ποσοῦ ρ, τὰ B_1, B_1', B_1'', . . . οὐδέποτε ἤθελον ὑπερβῇ τὸ Δ — ρ· οὕτω δὲ τὸ Δ δὲν ἤθελεν εἶσθαι τὸ ἐλάχιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ τὰ B_1, B_1', B_1'', . . . δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσι. Τὰ ποσὰ λοιπὸν αὐτὰ ἔχουσιν ὅριον τὸ Δ.

Τὰ ποσὰ, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ γ, γ', γ'', . . . ἔχουσιν ὅριον τὸ μέγιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ δὲν δύνανται νὰ παρέλθωσι. Ἔστωσαν Γ_1, Γ_1', Γ_1'', . . . τὰ ποσὰ, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ γ, γ', γ'', . . . , ὅταν ἀνενεχθῶσι πρὸς τὴν μονάδα Μ', καὶ Ε τὸ μέγιστον τῶν ποσῶν, ὧν ἐλάσσω δὲν δύνανται ν' ἀποβῶσι τὰ Γ_1, Γ_1', Γ_1'', ... Ἡ διαφορὰ τῶν τελευταίων ἀπὸ τοῦ Ε δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρά· διότι ἐὰν οὐδέποτε ἀπέβαινεν ἔλασσων ἐλαχίστου τινὸς ποσοῦ ρ, τὰ Γ_1, Γ_1', Γ_1'', . . . οὐδέποτε ἤθελον ἀποβῇ ἐλάσσω τοῦ Ε+ρ· οὕτω δὲ τὸ Ε δὲν ἤθελεν εἶσθαι τὸ μέγιστον τῶν ποσῶν, τῶν ἐλασσόνων τῶν Γ_1, Γ_1', Γ_1'', ... Τὰ ποσὰ λοιπὸν Γ_1, Γ_1', Γ_1'', . . . ἔχουσιν ὅριον τὸ Ε.

§ 10. Β'. *Ὅταν οἵ, τε*

$$\beta,\ \beta',\ \beta'', \ldots .$$

καὶ οἱ

$$\gamma,\ \gamma',\ \gamma'', \ldots .$$

ἀναφέρωνται πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα, τὰ ὅρια τῶν δύο σειρῶν ποσῶν εἶναι ταὐτά.

Τοῦτο εἶναι δεδομένον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρωνται πρὸς τὴν μονάδα Μ· τὸ κοινὸν ὅριον εἶναι τότε τὸ ποσὸν Α· πρόκειται δὲ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι οὕτως ἔχει, καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἀνενεχθῶσι πρὸς ἄλλην τινὰ μονάδα Μ'.

Ἐπειδὴ, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρωνται πρὸς τὴν μονάδα Μ, τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον, πρέπει ἡ διαφορὰ ἑνὸς τῶν β, β', β'', . . . καὶ ἑνὸς τῶν γ, γ', γ'', . . . ν' ἀποβαίνῃ ὁσονδήποτε μικρά· ἐπομένως δύναται ν' ἀποβῇ ἔλασσων κλάσματός τινος $\frac{1}{\nu}$, οὗ ὁ παρονομαστὴς ν εἶναι ἀκέραιός τις ὁσονδήποτε μέγας· ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\nu}$ ἐμφαίνει ποσὸν ὁσονδήποτε μικρόν, ὅταν ὁ ν λαμβάνηται ὁσονδήποτε μέγας, πρὸς οἱανδήποτε μονάδα κἂν ἀνενεχθῇ (*). Ἡ διαφορὰ λοιπὸν ἑνὸς τῶν ποσῶν, ἅπερ παριστῶσιν οἱ β, β', β'', . . . καὶ ἑνὸς ἐξ ἐκείνων, ἅπερ παριστῶσιν οἱ γ, γ', γ'', . . . , δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρά, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἀνενεχθῶσι πρὸς οἱανδήποτε μονάδα Μ· τὰ ποσὰ λοιπὸν αὐτὰ ἔχουσιν ἀναγκαίως τὸ αὐτὸ ὅριον (**).

§ 11. Γ'. *Τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ποσῶν, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ ἀριθμοὶ β, β', β'', . . . καὶ οἱ γ, γ', γ'', . . . , ὅταν ἀνενεχθῶσι πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα, εἶναι πάντοτε ἀσύμμετρον ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν μονάδα.*

Ἔστω ἀριθμός τις δ, ἀκέραιος ἢ κλασματικός. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἀνενεχθῇ πρὸς τὴν μονάδα Μ, ἐμφαίνει ποσὸν Π σύμμετρον, ὅπερ δι' αὐτὸ εἶναι μεῖζον ἢ ἔλασσον τοῦ Α· εἰ μὲν ἐμφαίνει ποσὸν ἔλασσον τοῦ Α, ὑπερβήσονται πάντως αὐτὸν οἱ β, β', β'', . . . · διότι τὰ ποσὰ Β, Β', Β'', . . . , ἅπερ παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ κατὰ τὴν μονάδα Μ, τείνοντα ἀπεριορίστως πρὸς τὸ Α, ἀποβήσονται ἐπὶ τέλους μείζω τοῦ Π· εἰ δὲ ὁ δ' ἐμφαίνει ποσὸν μεῖζον τοῦ Α, παρελεύσονται πάντως αὐτὸν οἱ γ, γ', γ'', . . . · διότι τὰ ποσὰ Γ, Γ', Γ'', . . . , ἅπερ παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ κατὰ τὴν μονάδα Μ, τείνοντα ἀπεριορίστως πρὸς τὸν Α, ἀποβήσονται ἐπὶ τέλους ἐλάσσω τοῦ Π. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ὁ δ δὲν δύναται νὰ ἦναι τὸ κοινὸν ὅριον τῶν β', β', β'', . . . καὶ τῶν γ, γ', γ'', . . . , οὔτε ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἀνενεχθῶσι πρὸς ἄλλην τινὰ μονάδα (***). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὅριον δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ συμμέτρου ἀριθμοῦ, εἶναι ἀσύμμετρον.

§ 12. Δ'. *Τὸ ὅριον τῶν ποσῶν, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ β, β', β'', . . . , εἴτε οἱ γ, γ', γ'', . . . , ὅταν ἀναφέρωνται πρὸς κοινήν τινα μονάδα, μεταβάλλεται, ὅταν μεταβάλληται καὶ ἡ μονάς, συναυξάνον ἢ συνελαττούμενον.*

(*) Εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅταν ποσὸν οἱονδήποτε μερίζηται εἰς ἴσα μέρη, ὧν ὁ ἀριθμὸς αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον, ἕκαστον μέρος ἀποβαίνει ὁσονδήποτε μικρόν.

(**) Ἔστω Δ τὸ ὅριον τῶν ποσῶν, ἅπερ παριστῶσιν οἱ β, β', β'', . . . , κα Ε τὸ τῶν ποσῶν, ἅπερ παριστῶσιν οἱ γ, γ', γ'', . . . , ὅταν ἅπαντες οἱ ἀριθμο αὐτοὶ ἀνεχθῶσι πρὸς μονάδα τινὰ Μ'. Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀνισότης $Δ<Ε$· διότι τότε ἡ διαφορὰ ἑνὸς τῶν πρώτων ποσῶν καὶ ἑνὸς τῶν δευτέρων δὲν ἤθελεν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποβῇ ἐλάσσων τοῦ ποσοῦ $Ε-Δ$. Ἀδύνατον ἐπίσης νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀντίστροφος ἀνισότης $Δ>Ε$· διότι πρέπει τότε τὰ ποσὰ τῶν β, β', β'', . . . νὰ ὑπερβῶσι τὸ ὅριον Ε τῶν ποσῶν τῶν γ, γ', γ'', . . . · οὕτω δ' ἀναγκαίως θέλουσιν ὑπερβῇ ποσὰ παριστώμενα διὰ τῶν τελευταίων ἀριθμῶν· ὅπερ ἀδύνατον. Πρέπει λοιπὸν τὰ ὅρια Δ καὶ Ε νὰ ἦναι ἴσα.

(***) Ὅρα τὴν ἐν § 9 ὑποσημείωσιν.

Ἀνενεχθήτωσαν οἱ $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ πρὸς δύο ὁμοειδεῖς μὲν, ἀλλ' ἀνίσους μονάδας Μ καὶ Μ'· ἔστω δὲ $M' > M$. Παραστήσωμεν τὰ ποσὰ, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ὅταν μὲν ἡ μονὰς ἦναι Μ, διὰ

$$(1) \quad B,\ B',\ B'',\ \ldots\ldots$$

ὡς καὶ ἀνωτέρω, ὅταν δὲ ἡ μονὰς ἦναι Μ' διὰ

$$(2) \quad B_1,\ B_1',\ B_1'',\ \ldots\ldots$$

ἔτι δὲ σημειωθήτω τὸ μὲν ὅριον τῆς σειρᾶς (1) διὰ Α, τὸ δὲ τῆς (2) διὰ Α'. Ἔχομεν $B_1 > B$, ἡ δὲ διαφορὰ $B_1 - B$ ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ β, ἀναφερομένῳ πρὸς μονάδα $M' - M$ (*). Αἱ διαφοραὶ λοιπὸν $B_1 - B$, $B_1' - B'$, $B_1'' - B''$, ... παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν β, β', β'', ..., ἀναφερομένων πρὸς μονάδα $M' - M$· ἐπειδὴ δ' οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι βαίνουσιν αὐξάνοντες, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος διαφοραὶ βαίνουσιν ἐπίσης αὐξάνουσαι· ὅθεν θέλει πάντως συμβῆ ἀπό τινος τῶν ποσῶν τῆς σειρᾶς (1), οἷον ἀπὸ τοῦ Β(*), ἡ διαφορὰ τῶν ποσῶν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἰδίου ὁρίου Α νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς διαφορᾶς αὐτῶν τούτων ἀπὸ τῶν ἀντιστοιχούντων ποσῶν τῆς σειρᾶς (2) ἔκτοτε τὰ ποσὰ τῆς σειρᾶς (2) ἔσονται μείζω τοῦ ὁρίου Α τῶν τῆς σειρᾶς (1)· ἄρα ἔτι μᾶλλον $A' > A$.

§ 13. Ε'. *Δύο ἄνισα ποσὰ, ἀμφότερα ἀσύμμετρα ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα, δὲν δύνανται νὰ ἦναι ὅρια τῶν αὐτῶν συμμέτρων ἀριθμῶν.*

Οἱ αὔξοντες καὶ τείνοντες πρὸς τὸ μεῖζον ποσὸν σύμμετροι ὑπερβήσονται ἐπὶ τέλους τὸ ἔλασσον ὅριον· τὰ ποσὰ λοιπὸν δὲν εἶναι ὅρια τῶν αὐτῶν συμμέτρων ἀριθμῶν.

§ 14. ς'. *Α ὄντος τοῦ ὁρίου τῶν ἀριθμῶν $\beta, \beta', \beta'', \ldots$, οἱ $2\beta, 2\beta', 2\beta'', \ldots$ ἔχουσιν ὅριον 2Α.*

Ἔστω δ ἡ διαφορὰ τοῦ β(*) ἀπὸ τοῦ Α· ἡ τοῦ 2β(*) ἀπὸ τοῦ 2Α εἶναι 2δ· ἐπειδὴ δὲ δ εἴη ἂν ὁσονδήποτε μικρὸν, ἕπεται ὅτι καὶ 2δ γένοιτ' ἂν ὁσονδήποτε μικρόν· ἄρα οἱ $2\beta, 2\beta', 2\beta'', \ldots$ ἔχουσιν ὅριον 2Α.

Ἡ παρατήρησις αὕτη ὑφίσταται, οἱαδήποτ' ἂν ᾖ ἡ μονὰς, πρὸς ἣν οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρονται.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δειχθήσεται τρόπον ὅτι καὶ οἱ $\beta \times \mu$, $\beta' \times \mu$, $\beta'' \times \mu$, ... ἔχουσιν ὅριον $A \times \mu$, μ ὄντος ἀκεραίου οἱουδήποτε. Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται ὅτι οἱ $\beta \times \mu$, $\beta' \times \mu$, $\beta'' \times \mu$, ... ἔχουσιν

(*) Ὅταν ὁ ἀριθμὸς β ἀνενεχθῇ πρὸς δύο ἀνίσους μονάδας Μ καὶ Μ', ἡ διαφορὰ τῶν δύο ποσῶν, ἅπερ ἐμφαίνει, ἰσοῦται τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ, ἀναφερομένῳ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν μονάδων· π. χ. ἡ διαφορὰ $^2/_3$ τοῦ πήχεως καὶ $^2/_3$ τῆς ὀργυιᾶς εἶναι $^2/_3$ τῆς διαφορᾶς τοῦ πήχεως ἀπὸ τῆς ὀργυιᾶς.

ὅριον $A\times\mu$ καὶ ὅταν ὁ μ ἦναι κλασματικὸς οἱοσδήποτε. Π. χ. οἱ $\beta\times\frac{5}{7}$, $\beta'\times\frac{5}{7}$, $\beta''\times\frac{5}{7}$, ... ἔχουσιν ὅριον $A\times\frac{5}{7}$· διότι οἱ $\beta\times5$, $\beta'\times5$, $\beta''\times5$, ... ἔχουσιν ὅριον $A\times5$, τὸ δ' ἕβδομον τῶν τελευταίων ἀριθμῶν τὸ ἕβδομον τοῦ $A\times5$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δειχθήσεται τρόπον ὅτι A ὄντος τοῦ ὁρίου τῶν ἐλαττουμένων ἀριθμῶν γ, γ', γ'', ..., τὸ τῶν $\gamma\times\mu$, $\gamma'\times\mu$, $\gamma''\times\mu$, ... εἶναι $A\times\mu$.

§ 15. Ζ'. Ὑποτεθήτω ὅτι οἱ αὔξοντες ἀριθμοὶ β, β', β'', ... τείνουσι πρὸς τὸ ὅριον A, οἱ δὲ β_1, β_1', β_1'', ... πρὸς τὸ $2A$, ὅταν πάντες οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἀνενεχθῶσι πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα. *Τὸ ὅριον τῶν β_1, β_1', β_1'', ... ἔσεται πάντοτε διπλοῦν τοῦ τῶν β, β', β'', ... πρὸς οἱανδήποτ' ἄλλην μονάδα κἂν ἀνενεχθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.*

Τὸ ὅριον τῶν β_1, β_1', β_1'', ... εἶναι ταὐτὸν τῷ τῶν 2β, $2\beta'$, $2\beta''$, ... (ϛ'.)· ἀλλὰ τὸ τῶν 2β, $2\beta'$, $2\beta''$, ... εἶναι πάντοτε διπλοῦν τοῦ τῶν β, β', β'', ...· ἄρα καὶ τὸ τῶν β_1, β_1', β_1'', ... ἐπίσης.

Γενικώτερον *ἐὰν ἐπὶ ὡρισμένης τινὸς μονάδος τὸ ὅριον τῶν β_1, β_1', β_1'', ... ἦναι γινόμενον τοῦ τῶν β, β', β'', ... ἐπὶ μ (μ ὄντος ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ), τὸ αὐτὸ ὑπάρχει, πρὸς οἱανδήποτ' ἄλλην μονάδα κἂν ἀνενεχθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί.* Ἡ ἀπόδειξις ὡς ἀνωτέρω.

β'. *Ὁρισμὸς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.*

§ 16. Ἔστω A ποσὸν ἀσύμμετρον πρὸς μονάδα τινὰ M καὶ β, β', β'', ... σύμμετροι ἀριθμοὶ αὔξοντες καὶ γ, γ', γ'', ... ἐλαττούμενοι, τείνοντες οἵ, τε πρῶτοι καὶ οἱ δεύτεροι πρὸς τὸ A, ὅταν ἀναφέρωνται πρὸς τὴν μονάδα M.

Κατὰ τὰ προεκτεθέντα οἵ τε β, β', β'', ... καὶ οἱ γ, γ', γ'', ... τείνουσι πρὸς κοινόν τι ὅριον, πρὸς οἱανδήποτ' ἄλλην μονάδα κἂν ἀνενεχθῶσι, τὸ ὅριον δ' αὐτὸ εἶναι πάντοτε ἀσύμμετρον ὡς πρὸς τὴν μονάδα, εἰς ἣν ἀναφέρονται.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ νοῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ὡς τείνοντας πρὸς ὅριον, χωρὶς νὰ ὁρίζωμεν τὴν πρὸς ἣν ἀναφέρονται μονάδα· ὡς δηλονότι νοοῦμεν ἀφῃρημένους τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, οὕτω δυνάμεθα νὰ νοῶμεν καὶ τὸ ὅριον αὐτῶν. Τὸ οὕτω νοούμενον ὅριον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καλεῖται *ἀριθμὸς ἀσύμμετρος*.

Οὕτως *ἀριθμὸς ἀσύμμετρος εἶναι τὸ ἀφῃρημένον ὅριον, πρὸς ὃ τείνουσιν ἀριθμοὶ ἀφῃρημένοι σύμμετροι, οἵτινες, ὅταν ἦναι συγκεκριμένοι, τείνουσιν ἀπεριορίστως πρὸς ἀσύμμετρόν τι ποσόν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Εἴδομεν καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ὅρια ἀριθμῶν ἀφῃρημένων. Τὰ περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι ὅρια τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ἅπερ προκύπτουσιν, ὅταν δεκαδικά τινα ψηφία ἐπαναλαμβάνωνται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Τὰ ὅρια αὐτὰ εἶναι ἀσύμμετρα ὡς πρὸς τὰς δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς μονάδος· διότι δὲν δύνανται νὰ παριστῶνται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικῶν κλασμάτων· ἀλλὰ δὲν εἶναι καὶ ἀπολύτως ἀσύμμετρα· διότι δυνατὸν πάντοτε νὰ παριστῶνται διὰ κοινῶν κλασμάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἀριθμὸς ἀσύμμετρος εἶναι διπλοῦς, τριπλοῦς, κ.τ.λ. ἑτέρου ἀσυμμέτρου, ὅταν ἐμφαίνῃ ποσὸν διπλοῦν, τριπλοῦν, κ.τ.λ. τοῦ πρώτου, ὅταν ἀμφότεροι ἀνενεχθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα· κατὰ δὲ τὰ ῥηθέντα ἐν § 15, ὅταν ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἐμφαίνῃ ποσὸν διπλοῦν, τριπλοῦν, κ.τ.λ. ἑτέρου τοιούτου ἐπὶ ὡρισμένης μονάδος, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει, καὶ ὅταν ἀλλαγῇ ἡ μονάς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί εἰσι συγκεκριμένοι ἢ ἀφῃρημένοι, ὡς καὶ οἱ σύμμετροι· καὶ εἶναι μὲν ἀσύμμετρός τις ἀριθμὸς συγκεκριμένος, ὅταν ἦναι προσδιωρισμένη ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται, εἴτε πρὸς ἣν ἀναφέρονται οἱ σύμμετροι, ὧν ἐστιν ὅριον· εἶναι δὲ ἀφῃρημένος, ὅταν ἡ μονὰς ἦναι οἱαδήποτε. — Ὁ συγκεκριμένος ἀσύμμετρος ἀριθμὸς παρίστησι πάντοτε ἀσύμμετρον ποσὸν (§ 11).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'. Ἔστω Α τὸ ποσὸν, ὅπερ παρίστησιν ἀριθμός τις ἀσύμμετρος, ὅταν ἡ μονὰς ἦναι Μ. Ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καλεῖται καὶ *λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Μ*.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ε'. *Ὅταν καθ' ὡρισμένην τινὰ μονάδα ἀσύμμετρός τις ἀριθμὸς ἐμφαίνῃ ποσὸν ἔλασσον ἢ μεῖζον ἐκείνου, ὅπερ ἐμφαίνει σύμμετρός τις σ, ἡ αὐτὴ σχέσις μεγέθους ὑπάρχει ἐπὶ τῶν διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἐμφαινομένων ποσῶν, πρὸς οἱανδήποτ' ἄλλην μονάδα κἂν ἀνενεχθῶσιν οὗτοι.* Ἐπειδὴ καθ' ὡρισμένην τινὰ μονάδα ὁ σ ἐςὶν ἐλάσσων, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ ἀσυμμέτρου, οἱ σύμμετροι β, β', β'', ... ὧν ὅριον εἶναι ὁ ἀσύμμετρος, ὑπερβήσονται πάντως αὐτόν· ἀλλ' οὗτοι ἐμφαίνουσι πάντοτε ποσὸν ἔλασσον τοῦ ἀσυμμέτρου· ἄρα καὶ ὁ σ ἐπίσης.—Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι *ὅταν ἀσύμμετρός τις α ἐμφαίνῃ καθ' ὡρισμένην τινὰ μονάδα ποσὸν ἔλασσον ἐκείνου, ὅπερ τότε ἐμφαίνει ἕτερος ἀσύμμετρος β, ἡ αὐτὴ σχέσις μεγέθους ὑπάρχει ἐπὶ τῶν διὰ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἐμφαινομένων ποσῶν, πρὸς οἱανδήποτ' ἄλλην μονάδα κἂν ἀνενεχθῶσιν οὗτοι.* Μεταξὺ τῶν δύο ποσῶν, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ α καὶ β καθ' ὡρισμένην τινὰ μονάδα, ὑπάρχουσι πάντοτε ποσὰ σύμμετρα (§ 6)· οἱ σύμμετροι κ, λ, μ, . . ., οἱ τὰ ποσὰ αὐτὰ παριστῶντες, ἐμφαίνουσι ποσὰ μείζω μὲν τοῦ α, ἐλάσσω δὲ τοῦ β κατὰ πᾶσαν ἄλλην μονάδα, ὡς προείρηται· ἄρα ὁ α παραστήσει πάντοτα ποσὰ ἐλάσσω τοῦ β.

Ἀπαγγελία καὶ γραφὴ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

§ 17. Πολλάκις ἵνα ἐκφράσωμεν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ἀναφέρομεν σχέσιν ὑπάρχουσαν μεταξὺ μονάδος τινὸς καὶ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ τότε παρίστησιν ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Π. χ. λέγοντες *Λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον*, νοοῦμεν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ὅστις ἐμφαίνει τὴν περιφέρειαν, ὅταν μονὰς ἦναι ἡ τῆς περιφερείας αὐτῆς διάμετρος (*). Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἐμφαίνει ποσὰ διάφορα, ὅταν μεταβάλληται τὸ εἶδος καὶ τὸ μέγεθος τῆς μονάδος· ἐμφαίνει, π. χ., ὡρισμένον ὄγκον, ὅταν ἡ μονὰς ἦναι ποσὸν τοιούτου εἴδους, καὶ ὁτὲ μὲν τοσοῦτον ὄγκον, ὁτὲ δὲ τοσοῦτον κατὰ τὸ μέγεθος τῆς μονάδος (§ 12). Ἐπίσης αἱ ἀκόλουθοι ἐκφράσεις δηλοῦσιν ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. *Λόγος τῆς διαγωνίου τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.* — *Λόγος τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.* — *Λόγος τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ δεκαγώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.*

Ἄλλοτε ἵνα ἐκφράσωμεν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ἀναφέρομεν σχέσιν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ ἄλλων ἀριθμῶν, ἀφηρημένων ἢ συγκεκριμένων. Μετ' ὀλίγον θέλομεν ἀναφέρει τοιούτους ἀριθμούς (§ 26) (**).

§ 18. Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ γράφονται διὰ διαφόρων σημείων. Ἐπὶ τοῦ παρόντος ἀναφέρομεν μόνον ὅτι τοιοῦτοι ἀριθμοὶ παριστῶνται ἐνίοτε διὰ γραμμάτων, ἅπερ τότε ἐμφαίνουσιν ὡρισμένους καὶ οὐχὶ οἱουσδήποτε ἀριθμούς. Π. χ. ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον σημειοῦται παρ' ἅπασι τοῖς πεπολιτισμένοις ἔθνεσι διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ μικροῦ γράμματος π.

§ 19. Ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἐμφαίνει μὲν ὡρισμένον ποσόν, ὅταν προσδιορίζηται ἡ μονάς, ἀλλ' οὔτε ἐκ τῆς προφορικῆς, οὔτε ἐκ τῆς γραπτῆς αὐτοῦ παραστάσεως καταφαίνεται ποσάκις ἐν αὐτῷ περιέχεται ἡ μονὰς ἢ πολλοστόν τι αὐτῆς· τοὐναντίον δ' οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ οὐδὲν ἄλλο εἰσὶν ἢ ἔννοιαι ὡρισμένων πολλαπλασίων

(*) Ἡ περιφέρεια καὶ ἡ διάμετρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἰσὶν ἀσύμμετροι γραμμαί· οἱοσδήποτε δ' ἂν ᾖ ὁ κύκλος, ἡ περιφέρεια εἶναι ὅριον τῶν αὐτῶν συμμέτρων ἀριθμῶν, ὅταν μονὰς ἦναι ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος· ἐν ἄλλαις λέξεσι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀσύμμετρος ἀριθμός.

(**) Οὕτω καὶ αἱ ἐκφράσεις λογάριθμος τοῦ 5, ἡμίτονον 7°, κ.τ.λ. ἐμφαίνουσιν ὡρισμένους ἀσυμμέτρους ἀριθμούς.

ἤτοι τῆς μονάδος ἢ πολλοστῶν αὐτῆς. Αὕτη ἐστὶν οὐσιώδης διαφορὰ ὡς πρὸς τὸν τρόπον, καθ' ὃν νοοῦνται οἱ σύμμετροι καὶ οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Ἐκτίμησις κατὰ προσέγγισιν ἀσυμμέτρου διὰ συμμέτρου εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ποσάκις ἡ μονὰς ἢ πολλοστόν τι αὐτῆς περιέχεται ἐν τῷ ἀσυμμέτρῳ. Π. χ. ὁ ἀσύμμετρος π (ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον) ἰσοῦται τῷ συμμέτρῳ 3,1415926 κατὰ προσέγγισιν 0,0000001· τὸ προσθετέον δ' εἰς τὸν σύμμετρον αὐτόν, ἵνα ἔχωμεν ἀκριβῶς τὸν π, εἶναι καὶ αὐτὸ ἀσύμμετρον· διότι τὸ ἄθροισμα συμμέτρων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος.

Ἡ κατὰ προσέγγισιν ἐκτίμησις τῶν ἀσυμμέτρων διὰ συμμέτρων συντελεῖ εἰς τελειοτέραν κατάληψιν αὐτῶν, μὴ ἐπαρκούσης εἰς τοῦτο τῆς προφορικῆς οὔτε τῆς γραπτῆς αὐτῶν παραστάσεως.

Β΄. ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, ΜΗ ΟΝΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ Η ΤΕΛΕΙΩΝ ΚΥΒΩΝ.

Τετραγωνικὴ ῥίζα συμμέτρων ἀριθμῶν, μὴ ὄντων τελείων τετραγώνων.

α΄. *Προοιμιώδεις παρατηρήσεις.*

§ 20. Α΄. *Ὑπάρχουσι ζεύγη ἀριθμῶν, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφερόντων, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχουσι δεδομένον ἀριθμὸν* (*), *μὴ ὄντα τέλειον τετράγωνον.*

Ἔσω, π. χ., ὁ μὴ ὢν τέλειον τετράγωνον $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{\varkappa}{\nu}$ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$. Ὁ $\frac{3}{7}$ περιέχεται μεταξὺ $\left(\frac{\varkappa}{\nu}\right)^2$ καὶ $\left(\frac{\varkappa+1}{\nu}\right)^2$· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν $\frac{\varkappa}{\nu}$ καὶ $\frac{\varkappa+1}{\nu}$, οὖσα $\frac{1}{\nu}$, δύναται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά· ὑπάρχουσι λοιπὸν ἀριθμοί, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέροντες, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχουσι τὸν $\frac{3}{7}$.

§ 21. Β΄. *Ὑπάρχουσι τέλεια τετράγωνα, διαφέροντα ὁσονδήποτε ὀλίγον ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τελείου τετραγώνου.*

(*) Ἀπὸ τοῦδε μέχρι τοῦ § 23 λέγοντες ἀ ρ ι θ μ ὸ ν θέλομεν ἐννοεῖ ἀριθμὸν σύμμετρον, ἤτοι ἀκέραιον ἢ κλασματικόν.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ β καὶ γ, διαφέροντες κατὰ $\frac{1}{\nu}$, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχουσι τὸν μὴ ὄντα τέλειον τετράγωνον α. Ἔχομεν $\gamma=\beta+\frac{1}{\nu}$· ὅθεν $\gamma^2=\beta^2+2\beta\times\frac{1}{\nu}+\left(\frac{1}{\nu}\right)^2$· ὅθεν

$$\gamma^2-\beta^2=\frac{1}{\nu}\left(2\beta+\frac{1}{\nu}\right).$$

α'. Ὑποτεθήτω $\alpha>1$. Ἐπειδὴ $\beta^2<\alpha$, ἕπεται καὶ $\beta<\alpha$· ὅθεν

$$\frac{1}{\nu}\left(2\beta+\frac{1}{\nu}\right)<\frac{1}{\nu}\left(2\alpha+\frac{1}{\nu}\right).$$

Ὅταν ὁ $\frac{1}{\nu}$ σμικρύνηται ἐπ' ἄπειρον, τὸ β'. μέλος τῆς τελευταίας ἀνισότητος ἐλαττοῦται ἐπίσης ἐπ' ἄπειρον· διότι ὁ μὲν παράγων $2\alpha+\frac{1}{\nu}$ τείνει πρὸς τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν 2α, ὁ δ' ἕτερος $\frac{1}{\nu}$ ἐλαττοῦται ἀπεριορίστως, ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον ἐπίσης· ὅθεν καὶ τὸ α'. μέλος τῆς ἀνισότητος αὐτῆς, ὡς ἔλασσον πάντοτε τοῦ ἑτέρου, βαίνει κατὰ μείζονα λόγον ἐλαττούμενον ἀπεριορίστως. Οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν τελείων τετραγώνων β^2 καὶ γ^2, τῶν περιεχόντων τὸν α, εἴη ἂν ὁσονδήποτε μικρά· ἄρα ἔτι μᾶλλον ἡ διαφορὰ ἑκατέρου αὐτῶν ἀπὸ τοῦ α.

β'. Ὑποτεθήτω $\alpha<1$. Ἐπειδὴ $\beta^2<\alpha$, ἕπεται $\beta<1$· ὅθεν

$$\frac{1}{\nu}\left(2\beta+\frac{1}{\nu}\right)<\frac{1}{\nu}\left(2+\frac{1}{\nu}\right).$$

Συλλογιζόμενοι ἐπὶ τῆς ἀνισότητος αὐτῆς, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω, συνάγομεν πάλιν ὅτι τὸ α'. μέλος ἐλαττοῦται ἐπ' ἄπειρον μετὰ τοῦ $\frac{1}{\nu}$ καὶ ἑπομένως ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ ἑτέρου τῶν τελείων τετραγώνων β^2 καὶ γ^2 ἀπὸ τοῦ α δύναται νὰ καταστῇ ὁσονδήποτε μικρά.

§ 22. Γ'. *Δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν σειρὰν ἀπέραντον τελείων τετραγώνων αὐξόντων καὶ τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς ἀριθμόν τινα α, μὴ ὄντα τέλειον τετράγωνον.*

Ἔστω β^2 τέλειον τετράγωνον ἔλασσον τοῦ μὴ τοιούτου α. Ὅσῳ ὀλίγον κἂν διαφέρῃ ὁ β^2 τοῦ α, ὑπάρχει καὶ ἕτερον τετράγωνον β'^2 ἔλασσον τοῦ α καὶ διαφέρον αὐτοῦ ἧττον τοῦ β^2 (Β'.)· ἔχομεν δὲ τότε $\beta'^2 > \beta^2$. Συλλογιζόμενοι ὁμοίως ἐπὶ τοῦ β'^2 καὶ καθεξῆς, συνάγομεν τὴν ἀνωτέρω πρότασιν.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δειχθήσεται τρόπον καὶ ὅτι ὑπάρχει *σειρὰ ἀπέρατος τελείων τετραγώνων ἐλαττουμένων καὶ τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς τὸν α.*

Κατὰ ταῦτα *πᾶς μὴ ὢν τέλειον τετράγωνον ἀριθμὸς εἶναι ὅριον τελείων τετραγώνων.*

§ 23. Δ'. *Οἱ αὔξοντες ἀριθμοὶ β, β', β'', . . . , ὧν τὰ τετράγωνα $\beta^2, \beta'^2, \beta''^2$, . . . τείνουσιν ἀπεριορίστως πρὸς τὸν μὴ ὄντα τέλειον τετράγωνον α, καὶ οἱ ἐλαττούμενοι γ, γ', γ'', . . . , ὧν τὰ τετράγωνα $\gamma^2, \gamma'^2, \gamma''^2$, . . . τείνουσιν ἐπίσης πρὸς τὸν α, τείνουσιν ἅπαντες πρὸς ἓν κοινὸν ὅριον.*

Οἱ β, β', β'', . . . βαίνουσιν αὐξάνοντες οὐχὶ ἀπεριορίστως, ὡς ἐλάσσονες τῶν γ, γ', γ'', . . . οἵτινες δι' αὐτὸ τοῦτο βαίνουσιν ἐλαττούμενοι οὐχὶ ἀπεριορίστως· ἄρα οἱ μὲν β, β', β'', . . . ἔχουσιν ὅριον τὸ ἐλάχιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσι, οἱ δὲ γ, γ', γ'', . . . τὸ μέγιστον τῶν ποσῶν, ὧν οὐδέποτε γίνονται ἐλάσσονες (§ 9).

Τὰ δύο αὐτὰ ὅρια εἶναι ταὐτά· διότι ἡ διαφορὰ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν β, β', β'', . . . καὶ ἑνὸς τῶν γ, γ', γ'', . . . δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρὰ (Α'.)· ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν τὸ ὅριον τῶν β, β', β'', . . . νὰ διαφέρῃ τοῦ τῶν γ, γ', γ'', . . . (*)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ὁπωσδήποτε κἂν μεταβάλλωνται τὰ πρὸς τὸν α τείνοντα τέλεια τετράγωνα, αἱ τετραγωνικαὶ αὐτῶν ῥίζαι τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον, ὅταν ἡ μονὰς δὲν μεταβάλληται.* Ἔστωσαν αἱ σειραὶ

$$\beta,\ \beta',\ \beta'',\ \beta''',\ \ldots$$
$$\zeta,\ \zeta',\ \zeta'',\ \zeta''',\ \ldots$$

ῥιζῶν τελείων τετραγώνων αὐξόντων καὶ τεινόντων πρὸς τὸν α. Θεωρήσωμεν καὶ τὴν σειρὰν

$$\gamma,\ \gamma',\ \gamma'',\ \gamma''',\ \ldots$$

ῥιζῶν τελείων τετραγώνων ἐλαττουμένων καὶ τεινόντων πρὸς τὸν α. Ἀπεδείχθη ἀνωτέρω ὅτι ἑκατέρα τῶν δύο πρώτων σειρῶν ἔχει τὸ αὐτό, ὅπερ καὶ ἡ τρίτη, ὅριον· ἄρα αἱ σειραὶ αὗται ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον.

§ 24. Ε'. *Τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνουσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι β, β', β'', . . . τῶν τελείων τετραγώνων $\beta^2, \beta'^2, \beta''^2$, . . . , τῶν*

(*) Ὅρα τὴν ἐν § 10 δευτέραν ὑποσημείωσιν.

τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς ἀριθμόν τινα α, μὴ ὄντα τέλειον τετράγωνον, εἶναι ὡρισμένος ἀσύμμετρος ἀριθμός.

α'. Τὸ ὅριον αὐτὸ παρίσταται διὰ τοῦ αὐτοῦ πάντοτε ἀριθμοῦ. Ὑποτεθήτω ὅτι κατὰ δύο διαφόρους μονάδας Μ καὶ Μ' τὸ ὅριον αὐτὸ παρίσταται διὰ δύο διαφόρων ἀριθμῶν π καὶ ρ, συμμέτρων ἢ ἀσυμμέτρων, ἔστω δὲ $\pi<\rho$ (*). Κατὰ τὴν μονάδα Μ πᾶς ἀριθμὸς τῆς σειρᾶς β, β', β'', . . . , οἷον ὁ $\beta^{(x)}$, παρίστησι ποσὸν ἔλασσον τοῦ παριστωμένου διὰ π· κατὰ τὴν μονάδα Μ' ὁ αὐτὸς $\beta^{(x)}$ παρίστησι ποσὸν ἔλασσον τοῦ διὰ τοῦ ρ· ἀλλ' εἶναι δυνατὸν τὸ ποσόν, ὅπερ παρίστησιν ὁ $\beta^{(x)}$ κατὰ τὴν μονάδα Μ', νὰ διαφέρῃ τοῦ παριστωμένου διὰ τοῦ ρ ἔλασσον τῆς διαφορᾶς τῶν ποσῶν, ἅπερ τότε παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ π καὶ ρ· τότε δὲ ὁ π θέλει ἐμφαίνει ποσὸν ἔλασσον ἢ ὁ $\beta^{(x)}$· ὅπερ ἀδύνατον.

β'. Ὁ τὸ ὅριον αὐτὸ παριστῶν ἀριθμὸς εἶναι ἀσύμμετρος. Ὑποτεθήτω ὅτι εἶναι σύμμετρος καὶ σημειωθήτω διὰ λ. Ἔστωσαν δ καὶ ε ἀριθμοὶ σύμμετροι ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέροντες, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχουσι τὸν α. Ὁ λ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν δ καὶ ε· διότι εἶναι μείζων μὲν τῶν ἀριθμῶν β, β', β'', . . . , ὧν τὰ τετράγωνα ἐλάσσω τοῦ α, ἐλάσσων δὲ τῶν γ, γ', γ'', . . . , ὧν τὰ τετράγωνα μείζω τοῦ α, ὡς ὅριον τῶν τε πρώτων καὶ τῶν δευτέρων· ἄρα καὶ ὁ λ^2 περιέχεται μεταξὺ δ^2 καὶ ε^2· ἀλλὰ καὶ ὁ α περιέχεται μεταξὺ δ^2 καὶ ε^2· ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν α καὶ λ^2 εἶναι ἐλάσσων τῆς τῶν δ^2 καὶ ε^2· ἀλλ' ἡ τελευταία δύναται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρὰ (§ 21)· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ α καὶ λ^2, διαφέροντες ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ, εἰσὶν ἴσοι (**)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ὁ μὴ ὢν τέλειον τετράγωνον α δὲν δύναται νὰ ἰσῶται τελείῳ τετραγώνῳ λ^2.

β'. Τετραγωνικὴ ῥίζα συμμέτρων ἀριθμῶν, μὴ ὄντων τελείων τετραγώνων.

§ 25. Καλεῖται *τετραγωνικὴ ῥίζα* συμμέτρου ἀριθμοῦ α, μὴ ὄντος τελείου τετραγώνου, τὸ ὅριον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν τελείων τετραγώνων, τῶν τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς τὸν α.

(*) Κατὰ τὴν ἐν § 9 ὑποσημείωσιν καὶ τὴν Ε'. τῶν ἐν § 16 σημειώσεων ἕπεται ὅτι, π καὶ ρ ὄντων δύο ἀριθμῶν οἱωνδήποτε, συμμέτρων ἢ ἀσυμμέτρων, ἡ σχέσις τοῦ μεγέθους τῶν ποσῶν, ἅπερ παριστῶσιν, εἶναι ἡ αὐτή, πρὸς οἱανδήποτε κἂν ἀναφέρωνται αὐτοὶ μονάδα.

(**) Κατὰ τὸ ἀξίωμα ὅταν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι ἐλάσσων παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ, οἱ ἀριθμοὶ ἐκεῖνοί εἰσιν ἴσοι.

Ἀπεδείχθη ὅτι ὑπάρχουσι πάντοτε τέλεια τετράγωνα, τείνοντα ἀπεριορίστως πρὸς ἀριθμόν τινα α, μὴ ὄντα τέλειον τετράγωνον, καὶ ὅτι αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν τετραγώνων αὐτῶν τείνουσι πρὸς ἓν ὅριον, ὅπερ εἶναι ἀσύμμετρον ὡς πρὸς τὴν μονάδα, πρὸς ἣν οἱ σύμμετροι ἀναφέρονται, καὶ παρίσταται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ. Ὁ ἀσύμμετρος αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ καλούμενος τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν καιρῷ θέλομεν ἀναφέρει καὶ ἕτερον ὁρισμὸν τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν μὴ τελείων τετραγώνων, ἀνάλογον τοῦ ὁρισμοῦ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν τελείων τετραγώνων (§ 17).

§ 26. Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν μὴ τελείων τετραγώνων παριστῶνται διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{\ }$ (τοῦ ῥιζικοῦ), ὡς καὶ αἱ τῶν τελείων τετραγώνων· οἷον $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{7}}$, $\sqrt{3+\frac{1}{7}}$.

Αἱ παραστάσεις αὗται ἐμφαίνουσιν ὡρισμένους ἀσυμμέτρους ἀριθμούς (§ 17).

Κυβικὴ ῥίζα συμμέτρων ἀριθμῶν, μὴ ὄντων τελείων κύβων.

§ 27. Αἱ ἑξῆς παρατηρήσεις ἐπὶ ἀριθμῶν, μὴ ὄντων τελείων κύβων, εἰσὶν ὅλως ἀνάλογοι τῶν ἀνωτέρω ἀπὸ τοῦ § 20 μέχρι τοῦ § 24 ἐπὶ τῶν μὴ τελείων τετραγώνων καὶ ἀποδείκνυνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· διὸ παραλείπομεν τὰς ἀποδείξεις.

Α'. *Ὑπάρχουσι ζεύγη ἀριθμῶν, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφερόντων, ὧν οἱ κύβοι περιέχουσι δεδομένον ἀριθμόν, μὴ ὄντα τέλειον κύβον.*

Β'. *Ὑπάρχουσι τέλειοι κύβοι, διαφέροντες ὁσονδήποτε ὀλίγον ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τελείου κύβου.*

Γ'. *Ὑπάρχει σειρὰ ἀπέρατος τελείων κύβων αὐξόντων καὶ τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς ἀριθμόν τινα, μὴ ὄντα τέλειον κύβον, ἢ ἐλαττουμένων καὶ τεινόντων πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἢ ἄλλως πᾶς μὴ τέλειος κύβος εἶναι ὅριον τελείων κύβων.

Δ'. *Αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν τελείων κύβων, τῶν τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς ἀριθμόν τινα, μὴ ὄντα τέλειον κύβον, τείνουσι πάντοτε πρὸς ἓν ὅριον.*

Ε'. *Τὸ ὅριον αὐτὸ εἶναι ὡρισμένος ἀσύμμετρος ἀριθμός.*

§ 28. Τούτων οὕτως ἐχόντων, καλεῖται κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ α μὴ ὄντος τελείου κύβου τὸ ὅριον τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τῶν τελείων κύβων, ὧν ὅριον εἶναι ὁ α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν καιρῷ θέλομεν ἀναφέρει καὶ ἕτερον ὁρισμὸν τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, ἀνάλογον τοῦ ὁρισμοῦ τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τῶν τελείων κύβων (§ 47).

§ 29. Αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν μὴ τελείων κύβων παριστῶνται, ὡς καὶ αἱ τῶν τελείων κύβων, διὰ ῥιζικοῦ φέροντος δείκτην 3· οἷον $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$, $\sqrt[3]{4+\frac{1}{5}}$. Αἱ τοιαῦται λοιπὸν παραστάσεις ἐμφαίνουσι καὶ αὐταὶ ὡρισμένους ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς (§ 17).

Γ'. ΠΕΡΙ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΠΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Πράξεις ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

§ 30. Πράξεις ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ὡς ἐννοοῦμεν αὐτὰς ἐπὶ συμμέτρων, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνωνται· θεωροῦνται ὅμως ἐξαγόμενα τοιούτων πράξεων, ἤτοι ἄθροισμα, διαφορά, γινόμενον, πηλίκον, δυνάμεις καὶ ῥίζαι, ἅπερ ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ παριστῶνται συμβολικῶς, ἤτοι διὰ σημείων.

Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

§ 31. Ἄθροισμα ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἢ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων εἶναι ἀριθμός, παριστῶν ποσὸν ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ποσῶν, ἅπερ παριστῶσιν ἐκεῖνοι. Διαφορὰ δὲ δύο ἀριθμῶν, ὧν ὁ ἕτερος ἢ ἀμφότεροι ἀσύμμετροι, εἶναι ἀριθμὸς παριστῶν ποσὸν ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ποσῶν, ἅπερ παριστῶσιν οἱ δύο πρῶτοι.

Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν οἱωνδήποτε παρίσταται διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως, ὡς ὅταν οἱ προσθετέοι πάντες ἦναι σύμμετροι· οἷον $\sqrt{2}+\sqrt[3]{10}+8$. Ἐπίσης ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν παρίσταται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφαιρέσεως· οἷον $\pi-\sqrt{2}$, $15-\sqrt{9}$, $\sqrt{15}-\sqrt[3]{4}$.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς ἀσυμμέτρων ποσῶν καὶ ἀριθμῶν.

§ 32. Α'. Ἔστωσαν α καὶ α' δύο ὁμοειδῆ ἀσύμμετρα ποσὰ καὶ σ ὁμοειδὲς σύμμετρον. Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν ποσῶν εἶναι ποσὸν σύμμετρον ἢ ἀσύμμετρον, ὡς δείκνυται ἐν συνόψει διὰ τῶν ἑξῆς ἰσοτήτων, ἔνθα τὸ ἐν τοῖς β΄. μέλεσιν Α ἐμφαίνει ἀσύμμετρον ποσόν, τὸ δὲ Σ σύμμετρον

$$(1)\ \alpha+\sigma=\mathrm{A},\quad (2)\ \left.\begin{matrix}\alpha-\sigma\\ \text{ἢ}\\ \sigma-\alpha\end{matrix}\right\}=\mathrm{A},\quad (3)\ \alpha+\alpha'=\mathrm{A}\ \text{ἢ}\ \Sigma,\quad (4)\ \alpha-\alpha'=\mathrm{A}\ \text{ἢ}\ \Sigma.$$

α΄. Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ποσῶν, ὧν τὸ μὲν σύμμετρον, τὸ δὲ ἀσύμμετρον, εἶναι πάντοτε ποσὸν ἀσύμμετρον [(1) καὶ (2)]· διότι ἄλλως ἡ διαφορὰ τοῦ συμμέτρου ἀθροίσματος ἀπὸ τοῦ συμμέτρου μέρους ἤθελον εἶσθαι ποσὸν ἀσύμμετρον· ὅπερ ἄτοπον· ἢ τὸ ἄθροισμα τῆς συμμέτρου διαφορᾶς μετὰ τοῦ συμμέτρου ἀφαιρετέου ἢ ἡ διαφορὰ τῆς συμμέτρου διαφορᾶς καὶ τοῦ συμμέτρου μειωτέου ἤθελεν εἶσθαι ἀσύμμετρον ποσόν· ὅπερ ἐπίσης ἄτοπον (*).

β΄. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀσυμμέτρων ποσῶν εἶναι ἤτοι σύμμετρον ἢ ἀσύμμετρον [(3)]. 1ον Ἔστω Π ποσὸν ἀσύμμετρον· ληφθήτω μέρος αὐτοῦ παριστώμενον διὰ κλάσματος, οἷον τὰ $\frac{5}{7}$· τό, τε μέρος αὐτὸ καὶ τὸ ὑπολειπόμενον εἰσὶν ἀσύμμετρα (**)· οὕτω τὸ ἄθροισμα δύο ἀσυμμέτρων ποσῶν δύναται νὰ ἦναι ἀσύμμετρον. 2ον Ἔστω Π ποσὸν σύμμετρον· ληφθήτω μέρος αὐτοῦ ἀσύμμετρον (***)· τὸ ὑπολειπόμενον εἶναι καὶ αὐτὸ ἀσύμμετρον· διότι ἄλλως ἄθροισμα συμμέτρου καὶ ἀσυμμέτρου εἴη σύμμετρον· οὕτω τὸ ἄθροισμα δύο ἀσυμμέτρων ποσῶν δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ ἀσύμμετρον.

γ΄. Ἡ διαφορὰ δύο ἀσυμμέτρων ποσῶν εἶναι ἤτοι σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος [(4)]· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος (1) ἕπεται ὅτι $\mathrm{A}-\alpha=\sigma$, ἐκ δὲ τῆς $\alpha+\alpha'=\mathrm{A}$ ὅτι $\mathrm{A}-\alpha=\alpha'$.

Β΄. Αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες (1), (2), (3), (4), ὑπάρχουσαι ἐπὶ ποσῶν, ὑπάρχουσι διὰ τοῦτο καὶ ἐπὶ ἀριθμῶν ἐν γένει· δυνάμεθα δηλονότι νὰ θεωρῶμεν τὰ ἐν αὐταῖς γράμματα α, α΄, σ, Α, Σ ὡς παριστῶντα ἀριθμούς, τὰ μὲν α, α΄, Α ἀσυμμέτρους, τὰ δὲ Σ καὶ σ συμμέτρους.

(*) Φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ συμμέτρων ποσῶν εἶναι ποσὸν σύμμετρον.

(**) Τὸ $^1/_2$, $^1/_3$, κ.τ.λ. ἀσυμμέτρου ποσοῦ εἶναι ἐπίσης ἀσύμμετρον· διότι ἄλλως τὸ διπλοῦν, τριπλοῦν κ.τ.λ. συμμέτρου ποσοῦ ἤθελεν εἶσθαι ἀσύμμετρον· ὅπερ ἄτοπον. Ἐν γένει δὲ πᾶν πολλαπλάσιον ἢ πολλοστὸν ἢ πολλαπλάσιον πολλοστοῦ ἀσυμμέτρου ποσοῦ εἶναι ἐπίσης ἀσύμμετρον· διότι ἄλλως πολλοστὸν ἢ πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλάσιον πολλοστοῦ συμμέτρου ποσοῦ ἤθελεν εἶσθαι ἀσύμμετρον· ὅπερ ἄτοπον.

(***) Ὑπάρχουσι ποσὰ ἀσύμμετρα ὁσονδήποτε μικρά· διότι ὑπάρχουσι σύμμετρα, διαφέροντα ὁσονδήποτε ὀλίγον ποσοῦ ἀσυμμέτρου, ἡ δὲ διαφορὰ ἐκείνων ἀπὸ τούτου εἶναι, ὡς ἤδη εἴρηται, ἀσύμμετρος.

Γ'. *Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ πλειόνων ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός.* Ὁ ἀριθμὸς δηλονότι (σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος), ὁ παριστῶν τὸ ποσὸν, τὸ ἰσούμενον τῷ ἀθροίσματι τῶν ποσῶν, ἅπερ παριστῶσιν οἱ προσθετέοι, εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε, ὅταν οἱ προσθετέοι ἀναφέρωνται εἰς διαφόρους μονάδας καὶ παριστῶσιν οὕτω διάφορα ποσά. Ἡ πρότασις εἶναι προφανὴς, ὅταν οἱ προσθετέοι ἦναι πάντες σύμμετροι· ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ, ὅταν πάντες οἱ προσθετέοι ἦναι ἀσύμμετροι. Ἔστωσαν οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ... καὶ κ, λ, μ, ν, ... σύμμετροι ἐλάσσονες ἐκείνων. Τὸ ἄθροισμα κ+λ+μ+ν+... εἶναι ἔλασσον τοῦ α+β+γ+δ+... (§ 16, Σημ. Ε'.), ἡ δὲ διαφορὰ δυνατὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρὰ, λαμβανομένων τῶν κ, λ, μ, ν, ... ὡς ἐγγυτάτω τῶν ὁρίων αὐτῶν. Ὑποτεθήτω ὅτι τὸ ἄθροισμα α+β+γ+δ+... κατὰ δύο διαφόρους μονάδας Μ καὶ Μ' εἶναι δύο διάφοροι ἀριθμοὶ π καὶ ρ καὶ ὅτι π<ρ. Κατὰ τὴν μονάδα Μ τὸ ποσὸν, ὅπερ παρίστησιν ὁ σύμμετρος κ+λ+μ+ν... εἶναι ἔλασσον τοῦ παριστωμένου διὰ π· κατὰ δὲ τὴν μονάδα Μ' τὸ ποσὸν, ὅπερ παρίστησιν ὁ αὐτὸς κ+λ+μ+ν+... εἶναι ἔλασσον τοῦ παριστωμένου διὰ τοῦ ρ καὶ διαφέροι ἂν αὐτοῦ τοσούτῳ ὀλίγον, ὥστε ἡ διαφορὰ νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς διαφορᾶς τῶν ποσῶν τῶν ἀριθμῶν π καὶ ρ κατὰ τὴν αὐτὴν μονάδα Μ' τότε ὁ κ+λ+μ+ν+... παραστήσει ποσὸν μεῖζον ἢ ὁ π· ὅπερ ἄτοπον· διότι δὲν εἶναι δυνατὸν ὁ σύμμετρος κ+λ+μ+ν+... νὰ παριστᾷ ποσὸν ὁτὲ μὲν μεῖζον, ὁτὲ δ' ἔλασσον τοῦ παριστωμένου διὰ π (§ 16, Σημ. Ε'.).

Δ'. *Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός.* Ἡ πρότασις αὕτη, οὖσα προφανὴς, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ἦναι σύμμετροι, χρῄζει ἀποδείξεως μόνον ὅταν ὁ ἕτερος αὐτῶν ἢ ἀμφότεροι ἦναι ἀσύμμετροι. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ π καὶ ε, καὶ π>ε. Ἐὰν κατά τινα μονάδα ἡ διαφορὰ π—ε παριστᾶται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ α, κατ' ἄλλην δέ τινα μονάδα διὰ τοῦ β, μείζονος τοῦ α, ἔξομεν κατὰ μὲν τὴν πρώτην μονάδα ε+α=π, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ε+β=π· ἐπειδὴ δὲ α<β, ἀνάγκη κατὰ τὴν δευτέραν νὰ ἔχωμεν ε+α<π· οὕτω τὸ ἄθροισμα ε+α δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός· ὅπερ ἄτοπον (Γ'.).

Γινόμενον ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

α'. *Γινόμενον ἀσυμμέτρου ἐπὶ σύμμετρον.*

§ 33. *Καλεῖται γινόμενον ἀριθμοῦ ἀσυμμέτρου* **α** *ἐπὶ σύμμετρον* **κ** *πολλαπλάσιον ἢ πολλοστὸν ἢ πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τοῦ* **α** *τοιοῦτον, οἷον ὁ* **κ** *εἶναι τῆς μονάδος.*

Π. χ. τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ $\sqrt{7}$ (ἤγουν τῶν ποσῶν, ἅπερ παρίστησιν ὁ $\sqrt{7}$ κατὰ τὰς διαφόρους μονάδας) εἶναι γινόμενον τοῦ $\sqrt{7}$ ἐπὶ $\frac{5}{9}$.

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς εἶναι ὅλως ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ γινομένου δύο συμμέτρων ἀριθμῶν.

Τὸ γινόμενον ἀσυμμέτρου ἐπὶ σύμμετρον παρίσταται διὰ τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς καὶ τὸ γινόμενον συμμέτρου ἐπὶ σύμμετρον· οἷον $\sqrt{7}\times\frac{5}{9}$.

§ 34. Παρατηρητέον ἐπὶ τῶν τοιούτων γινομένων τὰ ἑξῆς.

Α΄. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ δῆλον ὅτι τὸ ποσόν, ὅπερ ἐμφαίνει τοιοῦτο γινόμενον, εἶναι ἴσον τῷ ποσῷ, ὅπερ ἐμφαίνει ὁ πολλαπλασιαστής, ὅταν μονὰς ἦναι τὸ ποσόν, ὅπερ ἐμφαίνει ὁ πολλαπλασιαστέος. Π. χ. τὸ ποσόν, ὅπερ ἐμφαίνει τὸ γινόμενον $\sqrt{7}\times\frac{5}{9}$, ὅταν ὁ $\sqrt{7}$ ἀνενεχθῇ πρὸς μονάδα τινὰ Μ, εἶναι αὐτὸ ἐκεῖνο, ὅπερ ἐμφαίνει ὁ $\frac{5}{9}$, ὅταν ἀνενεχθῇ πρὸς μονάδα, ἴσην τῷ ποσῷ, ὅπερ ἐμφαίνει ὁ $\sqrt{7}$ κατὰ τὴν μονάδα Μ (*).

Β΄. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ β καὶ γ, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἀσύμμετρός τις α. *Τὸ γινόμενον* $\alpha\times\kappa$ (κ ὄντος συμμέτρου) *περιέχεται μεταξὺ* $\beta\times\kappa$ *καὶ* $\gamma\times\kappa$. Τὰ ποσά, ἅπερ ἐμφαίνουσι τὰ γινόμενα αὐτά, εἶναι ἐκεῖνα, ἅπερ ἐμφαίνει ὁ κ, ὅταν μονάδες ἦναι οἱ πολλαπλασιαστέοι (Α΄.)· ὅθεν τὸ γινόμενον $\alpha\times\kappa$ περιέχεται μεταξὺ τῶν $\beta\times\kappa$ καὶ $\gamma\times\kappa$.

Γ΄. *Τὸ γινόμενον ἀσυμμέτρου ἐπὶ σύμμετρον εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀσύμμετρος ἀριθμός.* Τὸ γινόμενον αὐτὸ ἐμφαίνει πάντοτε ποσὸν ἀσύμμετρον, ὡς πολλαπλάσιον ἢ πολλοστὸν ἢ πολλαπλάσιον πολλοστοῦ ἀσυμμέτρου ποσοῦ· πρόκειται λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἀσύμμετρον αὐτὸ ποσὸν παρίσταται πάντοτε διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ, εἴτε εἶναι ὅριον τῶν αὐτῶν συμμέτρων ἀριθμῶν. Ἔστωσαν β καὶ γ σύμμετροι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀσύμμετρος α· τὸ γινόμενον $\alpha\times\kappa$ (κ ὄντος συμμέτρου) περιέχεται μεταξὺ $\beta\times\kappa$ καὶ $\gamma\times\kappa$· ἐπειδὴ δ' ἡ διαφορὰ τῶν β καὶ γ εἴη ἂν ὁσονδήποτε μικρά, καὶ ἡ τῶν $\beta\times\kappa$ καὶ $\gamma\times\kappa$ εἴη ἂν τοσαύτη· ὑπαρχόντων δ' οὕτω συμμέτρων ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφερόντων τοῦ $\alpha\times\kappa$, ἀποδείκνυται ὡς ἐν § 32 (Γ΄.) ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός.

ϛ΄. *Γινόμενον ἀριθμοῦ οἱουδήποτε ἐπὶ ἀριθμὸν ἀσύμμετρον.*

§ 35. *Καλεῖται γινόμενον ἀριθμοῦ συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου*

(*) Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ ἐπὶ γινομένου συμμέτρου ἐπὶ σύμμετρον· παρακατιοῦντες δὲ θέλομεν ἰδεῖ ὅτι αὐτὸ ἔχει πάντοτε, οἱοιδήποτ' ἂν ὦσιν οἱ παράγοντες.

α ἐπὶ ἀριθμὸν ἀσύμμετρον ρ τὸ ὅριον τῶν γινομένων τοῦ α ἐπὶ συμμέτρους τείνοντας πρὸς τὸν ρ.

Ἔστωσαν β, β', β'', . . . σύμμετροι αὔξοντες καὶ τείνοντες ἀπεριορίστως πρὸς τὸν ρ· γ, γ', γ'', . . . ἐπίσης ἐλαττούμενοι καὶ τείνοντες πρὸς τὸν ρ. Τὰ γινόμενα

$$(1) \quad \alpha\times\beta, \quad \alpha\times\beta', \quad \alpha\times\beta'', \ldots$$

τείνουσι πρὸς ὅριον· διότι, οἱασδήποτε οὔσης τῆς μονάδος, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ α, τὰ ποσὰ, ἅπερ ἐμφαίνουσι τὰ γινόμενα αὐτὰ, εἶναι ἐκεῖνα, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ β, β', β'', . . . , ὅταν ὡς μονὰς ληφθῇ τὸ ὑπὸ τοῦ α κατὰ τὴν πρώτην μονάδα παριστώμενον ποσὸν (§ 34, Α'.)· πρὸς οἱανδήποτε δὲ μονάδα κἂν ἀναφέρωνται οἱ β, β', β'', . . . τείνουσι πρὸς ὅριόν τι (§ 9). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ γινόμενα

$$(2) \quad \alpha\times\gamma, \quad \alpha\times\gamma', \quad \alpha\times\gamma'', \ldots$$

τείνουσι πρὸς ὅριον· τὸ ὅριον δ' αὐτὸ εἶναι ταὐτὸν τῷ τῶν γινομένων (1), ὅταν εἰς πάντα ταῦτα τὰ γινόμενα ὁ α ἀναφέρηται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα· διότι ὅταν οἱ β, β', β'', . . . καὶ οἱ γ, γ', γ'', . . . ἀναφέρωνται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα, τείνουσι πάντοτε πρὸς ἓν κοινὸν ὅριον (§ 10). Τὸ κοινὸν δὴ τοῦτο ὅριον τῶν γινομένων (1) καὶ (2) εἶναι τὸ ὡς ἀνωτέρω ὁρισθὲν γινόμενον τοῦ α ἐπὶ ρ, ὅπερ σημειοῦται $\alpha\times\rho$.

§ 36. Παρατηρητέον ἐπὶ τῶν τοιούτων γινομένων τὰ ἑξῆς.

Α'. *Τὸ ποσὸν, ὅπερ ἐμφαίνει τὸ γινόμενον $\alpha\times\rho$ καθ' ὡρισμένην τινὰ μονάδα, εἶναι ταὐτὸν τῷ παριστωμένῳ διὰ τοῦ ρ, ὅταν ὡς μονὰς ληφθῇ τὸ κατὰ τὴν πρώτην μονάδα διὰ τοῦ α παριστώμενον ποσόν.* Τὸ $\alpha\times\rho$ εἶναι τὸ ὅριον τῶν $\alpha\times\beta$, $\alpha\times\beta'$, $\alpha\times\beta''$, . . . , εἴτε τὸ τῶν β, β', β'', . . . , ὅταν οἱ τελευταῖοι οὗτοι ἀναφέρωνται πρὸς μονάδα ἴσην τῷ διὰ τοῦ α παριστωμένῳ ποσῷ κατὰ τὴν πρώτην μονάδα· τὸ ὅριον δὲ τοῦτο εἶναι κατὰ τὸν ἐν § 16 ὁρισμὸν τὸ ποσὸν, ὅπερ ἐμφαίνει ὁ ρ κατὰ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Β'. Ὑποτεθήτωσαν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου $\alpha\times\rho$ ἀσύμμετροι. Ἔστωσαν β καὶ γ σύμμετροι περιλαμβάνοντες τὸν α, β' καὶ γ' ἕτεροι περιλαμβάνοντες τὸν ρ. *Τὸ γινόμενον $\alpha\times\rho$ περιέχεται μεταξὺ τῶν $\beta\beta'$ καὶ $\gamma\gamma'$.* Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\rho<\gamma'$ ἕπεται κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 35) $\alpha\times\rho<\alpha\times\gamma'$· ἐκ δὲ τῆς $\alpha<\gamma$ ἕπεται $\alpha\times\gamma'<\gamma\gamma'$ (§ 35, Β'.)· ἄρα $\alpha\times\rho<\gamma\gamma'$. Ἐπίσης $\alpha\times\rho>\alpha\times\beta' >\beta\times\beta'$.—Ὅταν ὁ α σύμμετρος, δῆλον ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ὅτι ὁ $\alpha\times\rho$ περιέχεται μεταξὺ $\alpha\times\beta'$ καὶ $\alpha\times\gamma'$.—*Ἐν γένει ὅταν αὐξάνῃ εἷς τῶν παραγόντων, αὐξάνει καὶ τὸ γινόμενον.* Ἔστω ρ' ἀσύμμετρος μείζων τοῦ ρ καὶ κ σύμμετρος περιεχόμενος μεταξὺ ρ καὶ ρ'·

ἔχομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 35) $\alpha \times \rho < \alpha \times \kappa$ καὶ $\alpha \times \kappa < \alpha \times \rho'$· ὅθεν $\alpha \times \rho < \alpha \times \rho'$. Ἔστω ἔτι $\alpha' > \alpha$. Τὰ γινόμενα $\alpha \times \rho$ καὶ $\alpha' \times \rho$ εἶναι τὰ ποσὰ, ἅπερ ἐμφαίνει ὁ πολλαπλασιαστὴς ρ, ὅταν ἀνενεχθῇ πρὸς μονάδας ἴσας τοῖς διὰ τῶν α καὶ α' παριστωμένοις ποσοῖς (Α'.)· ἐπομένως $\alpha \times \rho < \alpha' \times \rho$ (*).

Γ'. *Ἡ διαφορὰ τῶν γινομένων* $\beta \times \beta'$ *καὶ* $\gamma \times \gamma'$ (τῶν γραμμάτων β, β', γ, γ' δηλούντων ἅπερ καὶ ἀνωτέρω) *δυνατὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά.* Οὔσης ε τῆς διαφορᾶς τῶν β καὶ γ, ε' τῆς τῶν β' καὶ γ', ἔχομεν $\gamma = \beta + \varepsilon$, $\gamma' = \beta' + \varepsilon'$· ὅθεν $\gamma\gamma' = \beta\beta' + \beta\varepsilon' + \varepsilon\beta' + \varepsilon\varepsilon'$· ὅθεν $\gamma\gamma' - \beta\beta' = \beta\varepsilon' + \varepsilon\beta' + \varepsilon\varepsilon'$. Ἐπειδὴ αἱ διαφοραὶ ε καὶ ε' δυνατὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικραὶ, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ γινόμενα βε', εβ', εε' ἐπίσης· ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν γινομένων ββ' καὶ γγ' δύναται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρὰ, ὅταν οἱ β, γ, β', γ' λαμβάνωνται ὡς ἐγγυτάτω τῶν ὁρίων αὐτῶν.

Δ'. *Τὸ γινόμενον* $\alpha \times \rho$ *εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός.* Ἐπειδὴ τὰ γινόμενα ββ' καὶ γγ' δύνανται νὰ διαφέρωσιν ὁσονδήποτε ὀλίγον καὶ ἐπειδὴ $\alpha \times \rho$ περιέχεται μεταξὺ τῶν γινομένων αὐτῶν, ἡ διαφορὰ τοῦ συμμέτρου ββ' ἀπὸ τοῦ $\alpha \times \rho$ δύναται ἔτι μᾶλλον νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά. Ὑπαρχόντων οὕτω συμμέτρων ἐλασσόνων τοῦ $\alpha \times \rho$ καὶ ὁσονδήποτε ὀλίγον αὐτοῦ διαφερόντων, δείκνυται ὡς ἐν § 32 (Γ'.) ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παριστᾶται διὰ διαφόρων ἀριθμῶν, ὅταν ἀλλάττηται ἡ μονὰς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ γινόμενον δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἶναι ἤτοι σύμμετρον ἢ ἀσύμμετρον (§ 48, Σημ.)· τὸ δὲ γινόμενον συμμέτρου ἐπὶ ἀσύμμετρον εἶναι πάντοτε ἀσύμμετρον (§ 40, Σημ.).

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

§ 37. Ὁρισθέντων τῶν γινομένων ἀσυμμέτρου ἐπὶ σύμμετρον καὶ συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου ἐπὶ ἀσύμμετρον, τὸ γινόμενον πολλῶν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν χρήζει ἐξηγήσεως, ὡς τὸ τελευταῖον τῶν διαδοχικῶν γινομένων δύο παραγόντων· παρίσταται δὲ διὰ τῶν παραγόντων ὡς καὶ τὸ γινόμενον συμμέτρων ἀριθμῶν· οἷον

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{5} \times 8 \times \pi \times \sqrt{2 + \tfrac{3}{4}} \times \tfrac{7}{15}.$$

(*) Κατὰ τὴν ἐν § 12 παρατήρησιν τὸ διὰ τοῦ ρ παριστώμενον ποσὸν αὐξάνει, ὅταν αὐξάνῃ ἡ μονάς.

§ 38. Παρατηρητέον ἐπὶ τοιούτων γινομένων τὰ ἑξῆς.

Α'. *Πᾶν τοιοῦτο γινόμενον εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός.* Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων παραγόντων εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμὸς (§ 34, Γ'. καὶ § 36, Δ'.) ἄρα καὶ τὸ γινόμενον μέχρι τοῦ τρίτου παράγοντος, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Β'. *Πᾶν τοιοῦτο γινόμενον περιέχεται μεταξὺ τῶν γινομένων παραγόντων ἐλασσόνων καὶ μειζόνων.* Ἐὰν δηλονότι ὁ Α περιέχηται μεταξὺ α καὶ α', ὁ Β μεταξὺ β καὶ β', ὁ Γ μεταξὺ γ καὶ γ, ὁ Δ μεταξὺ δ καὶ δ', καὶ καθεξῆς, τὸ γινόμενον $Α\times Β\times Γ\times Δ\times\ldots$ περιέχεται μεταξὺ τῶν $α\times β\times γ\times δ\times\ldots$ καὶ $α'\times β'\times γ'\times δ'\times\ldots$· διότι τὸ $Α\times Β$ περιέχεται μεταξὺ $α\times β$ καὶ $α'\times β'$ (§ 34, Β'. καὶ § 36, Β'.)· ἄρα καὶ $Α\times Β\times Γ$ περιέχεται μεταξὺ $α\times β\times γ$ καὶ $α'\times β'\times γ'$, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Γ'. Ἐὰν ἐν τῇ ἀνωτέρω παρατηρήσει οἱ ἀριθμοὶ α, α', β, β', γ, γ', δ, δ', ... ἦναι πάντες σύμμετροι, ἡ διαφορὰ τῶν γινομένων αβγδ ... καὶ α'β'γ'δ' ... εἴη ἂν ὁσονδήποτε μικρά· διότι τόση ἂν εἴη ἡ διαφορὰ τῶν $α\times β$ καὶ $α'\times β'$ (§ 36, Γ'.)· ἄρα καὶ ἡ τῶν $α\times β\times γ$ καὶ $α'\times β'\times γ'$, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι ἡ *διαφορὰ τοῦ γινομένου ΑΒΓΔ ... ἀπὸ θατέρου τῶν συμμέτρων γινομένων αβγδ ... καὶ α'β'γ'δ' ... εἴη ἂν ὁσονδήποτε μικρά.*

Δυνάμεις ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

§ 39. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἴσων ἀσυμμέτρων παραγόντων καλεῖται *δύναμις* τοῦ παράγοντος, ὡς καὶ ὅταν οἱ ἴσοι παράγοντες ἦναι σύμμετροι.

Οἱ *βαθμοὶ* τῶν δυνάμεων ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἰσὶν οἷοι καὶ οἱ τῶν συμμέτρων καὶ σημειοῦνται δι' ἐκθετῶν. Π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ $\sqrt[3]{7}$ σημειοῦται οὕτω $(\sqrt[3]{7})^2$· ἡ πέμπτη δύναμις τοῦ $\sqrt{3}$ οὕτω $(\sqrt{3})^5$.

Θεωρήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

§ 40. Πάντα τὰ ἐπὶ συμμέτρων ἀριθμῶν θεωρήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Α'. *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ὅταν ἀλλάττηται ἡ τάξις τῶν παραγόντων.* Ἔστωσαν οἱ ἀσύμμετροι Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ α, β, γ, δ, ε σύμμετροι ἐλάσσονες, α', β', γ', δ', ε' σύμμετροι μείζονες τῶν ὁμογραμμάτων ἀσυμμέτρων. Τὰ γινόμενα ΑΒΓΔΕ καὶ ΓΑΔΕΒ περιέχονται τὸ μὲν πρῶτον μεταξὺ αβγδε καὶ α'β'γ'δ'ε', τὸ δὲ μεταξὺ γαδεβ καὶ γ'α'δ'ε'β' (§ 38, Β'.)· ἀλλὰ βγδε=γαδεβ καὶ α'β'γ'δ'ε'=γ'α'δ'ε'β'· ἄρα τὰ γινόμενα ΑΒΓΔΕ καὶ ΓΑΔΕΒ περιέχονται ἀμφότερα μεταξὺ αβγδε καὶ α'β'γ'δ'ε'· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν τελευταίων γινομένων δυνατὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά (§ 38, Γ'.)· ἄρα τὰ γινόμενα ΑΒΓΔΕ καὶ ΓΑΔΕΒ, διαφέροντα ἀπ' ἀλλήλων ἔλασσον τῆς διαφορᾶς τῶν αβγδε καὶ α'β'γ'δ'ε', διαφέρουσιν ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα εἶναι ἴσα.

Ἐὰν τινες τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἦναι σύμμετροι, οἷον ὁ Β καὶ ὁ Δ, τὰ γινόμενα ΑΒΓΔΕ καὶ ΓΑΔΕΒ περιέχονται ἀμφότερα μεταξὺ τῶν αΒγΔε καὶ α'Βγ'Δε'· ἀποδείκνυται δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἡ ἰσότης αὐτῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ γινόμενον συμμέτρου ἐπὶ ἀσύμμετρον εἶναι πάντοτε ἀσύμμετρον, ὡς ἰσούμενον τῷ τοῦ ἀσυμμέτρου ἐπὶ τὸν σύμμετρον (§ 34, Γ'.).

§ 41. Ἐκ τῶν ἐφεξῆς θεωρημάτων τὰ πέντε πρῶτα ἀποδείκνυνται διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντος ὡς καὶ ἐπὶ συμμέτρων ἀριθμῶν.

Β'. *Ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν ἀντὶ δύο ἢ πλειόνων παραγόντων τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Γ'. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ ἕτερον, ὄντα γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ πρώτου καὶ ἑκάστου διαδοχικῶς τῶν παραγόντων τοῦ δευτέρου.*

Δ'. *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὧν ἑκάτερος εἶναι γινόμενον ἄλλων ἀριθμῶν, ἰσοῦται τῷ μοναδικῷ γινομένῳ πάντων τῶν παραγόντων τῶν δύο ἐκείνων ἀριθμῶν.*

Ε'. *Πολλαπλασιαζομένου ἑνὸς τῶν παραγόντων γινομένου τινὸς ἐπ' ἀριθμόν τινα, πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

ς'. *Τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειόνων δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἧς ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων.*

Ζ'. *Δύναμίς τις γινομένου πολλῶν παραγόντων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ὁμοβάθμων δυνάμεων τῶν παραγόντων·* ἤγουν $(\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma\times\Delta\times\ldots)^2=\mathrm{A}^2\times\mathrm{B}^2\times\Gamma^2\times\Delta^2\times\ldots$, $(\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma\times\Delta\times\ldots)^3=\mathrm{A}^3\times\mathrm{B}^3\times\Gamma^3\times\Delta^3\times\ldots$, ἐν γένει $(\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma\times\Delta\times\ldots)^\mu=\mathrm{A}^\mu\times\mathrm{B}^\mu\times\Gamma^\mu\times\Delta^\mu\times\ldots$. Τὸ θεώρημα αὐτὸ ἀποδείκνυται διὰ τοῦ Δ'. καὶ τοῦ Β'.

Η'. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ ἕτερον, ὄντα ἄθροισμα ἄλλων ἀριθμῶν, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τοῦ πρώτου ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου.* Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ γίνεται παραπλησίως τῇ τοῦ Α'. Ἔστω A ὁ πρῶτος παράγων, $B+\Gamma+\Delta+E$ ὁ ἕτερος· $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ καὶ $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$ σύμμετροι ἐλάσσονες καὶ μείζονες τῶν ὁμογραμμάτων ἀσυμμέτρων. Τὸ μὲν γινόμενον $A\times(B+\Gamma+\Delta+E)$ περιέχεται μεταξὺ $\alpha\times(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$ καὶ $\alpha'\times(\beta'+\gamma'+\delta'+\varepsilon')$, τὸ δὲ ἄθροισμα $AB+A\Gamma+A\Delta+AE$ μεταξὺ $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\alpha\varepsilon$ καὶ $\alpha'\beta'+\alpha'\gamma'+\alpha'\delta'+\alpha'\varepsilon'$· ἀλλὰ $\alpha\times(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\alpha\varepsilon$, $\alpha'\times(\beta'+\gamma'+\delta'\times\varepsilon')=\alpha'\beta'+\alpha'\gamma'+\alpha'\delta'+\alpha'\varepsilon'$· οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν $A\times(B+\Gamma+\Delta+E)$ καὶ $AB+A\Gamma+A\Delta+AE$ περιέχονται ἀμφότεροι μεταξὺ $\alpha\times(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$ καὶ $\alpha'\times(\beta'+\gamma'+\delta'+\varepsilon')$· ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων γινομένων δυνατὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά, οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ αὐτῶν ἀριθμοὶ $A\times(B+\Gamma+\Delta+E)$ καὶ $AB+A\Gamma+A\Delta+AE$ διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα εἰσὶν ἴσοι.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἕπονται τὰ ἑξῆς. α'. *Τὸ γινόμενον ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ ἑνὸς παράγοντος ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ ἑτέρου.* β'. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος A ἐπὶ ἕτερον B, ὄντα διαφορὰν δύο ἄλλων Γ καὶ Δ, ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν γινομένων τοῦ A ἐπὶ Γ καὶ ἐπὶ Δ.* Ἐκ τῆς ἰσότητος $B=\Gamma-\Delta$ ἕπεται $B+\Delta=\Gamma$· ὅθεν $A\times B+A\times\Delta=A\times\Gamma$· ὅθεν $A\times B=A\times\Gamma-A\times\Delta$.

Πηλίκον δύο ἀριθμῶν.

§ 42. Καλεῖται πηλίκον ἀριθμοῦ τινος α δι' ἑτέρου β ἀριθμός, οὗ τὸ γινόμενον ἐπὶ β ἰσοῦται τῷ α.

Ὅταν ὁ ἕτερος τῶν α καὶ β ἢ καὶ ἀμφότεροι ἦναι ἀσύμμετροι, ὑπάρχει πάντοτε ἀριθμός, οὗ τὸ γινόμενον ἐπὶ β ἰσοῦται τῷ α, ὡς ὅταν οἱ α καὶ β ἦναι ἀμφότεροι σύμμετροι. Σημειωθήτωσαν διὰ A καὶ B τὰ ποσά, ἅπερ ἐμφαίνουσιν οἱ α καὶ β, ὅταν ἀνενεχθῶσι πρὸς μονάδα τινὰ M. Ἔστω γ ὁ ἀριθμός, ὁ παριστῶν τὸ ποσὸν A, ὅταν τὸ B ληφθῇ ὡς μονάς. Τὸ γινόμενον $\beta\times\gamma$, ἀναφερόμενον πρὸς τὴν μονάδα M, ἐμφαίνει τὸ ποσὸν A (§ 36, Α'. καὶ § 34, Α'.)· ἀλλὰ καὶ ὁ ἀριθμὸς α ἐμφαίνει τὸ ποσὸν A, ὅταν ἡ μονὰς ἦναι M· ἔχομεν λοιπὸν ὡς πρὸς τὴν μονάδα M

$$\alpha=\beta\times\gamma\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός, ἡ ἰσότης αὕτη ὑπάρχει καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἀνενεχθῶσι πρὸς ἄλλην τινὰ μονάδα.

Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν παρίσταται διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, ὡς ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι σύμμετροι· οἷον $\sqrt{3}:5$ ἢ $\frac{\sqrt{3}}{5}$, $4:\sqrt{7}$ ἢ $\frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{3}{5}:\sqrt[3]{5}$ ἢ $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\sqrt[3]{5}}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πηλίκον αὐξάνει, αὐξάνοντος τοῦ διαιρετέου, ἐλαττοῦται δέ, αὐξάνοντος τοῦ διαιρέτου· διότι ἐν τῇ ἰσότητι $\alpha = \beta \times \gamma$ ὅταν αὐξηθῇ ὁ α καὶ δὲν μεταβληθῇ ὁ β, πρέπει ἀναγκαίως ν' αὐξήσῃ ὁ γ, ὅπως ἡ ἰσότης ἐξακολουθῇ ὑφισταμένη, κ.τ.λ.

Θεωρήματα τῆς διαιρέσεως.

§ 43. Πάντα τὰ ἐπὶ συμμέτρων ἀριθμῶν θεωρήματα τῆς διαιρέσεως ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ ἀσυμμέτρων καὶ ἀποδείκνυνται ὁμοίως· διὸ καταχωρίζομεν ἐνταῦθα μόνας τὰς ἐκφωνήσεις αὐτῶν.

Α'. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος τῶν παραγόντων, ἐξαλείφομεν αὐτόν.*

Β'. *Διαιρουμένου ἑνὸς τῶν παραγόντων γινομένου τινὸς δι' ἀριθμοῦ τινος, διαιρεῖται καὶ τὸ γινόμενον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Γ'. *Τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρου, ὄντος γινομένου πολλῶν παραγόντων, ἰσοῦται τῷ ἐξαγομένῳ τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων τοῦ διαιρετέου δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου, τοῦ ἐντεῦθεν πηλίκου δι' ἄλλου παράγοντος τοῦ διαιρέτου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ πάντες οἱ παράγοντες τοῦ διαιρέτου ληφθῶσιν ὡς διαιρέται.*

Δ'. *Τὸ πηλίκον ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν πηλίκων ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου.*

Ε'. *Πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἢ διαιρουμένου, τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρεῖται· πολλαπλασιαζομένου δὲ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἢ διαιρουμένου, τὸ πηλίκον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἢ πολλαπλασιάζεται.*

Ϛ'. *Πολλαπλασιαζομένων διαιρετέου τε καὶ διαιρέτου ἐπὶ* τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρουμένων ἀμφοτέρων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.

Ζ'. Τὸ γινόμενον δύο πηλίκων ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ γινομένου τῶν διαιρετέων διὰ τοῦ τῶν διαιρετῶν· ἤγουν $\frac{A}{B}\times\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{A\times\Gamma}{B\times\Delta}$.

Η'. Ἵνα ὑψώσωμεν πηλίκον εἰς δύναμίν τινα, ὑψοῦμεν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ἑκάτερον τῶν ὅρων αὐτοῦ· ἤγουν $\left(\frac{A}{B}\right)^2=\frac{A^2}{B^2}$, $\left(\frac{A}{B}\right)^3=\frac{A^3}{B^3}, \ldots \left(\frac{A}{B}\right)^\mu=\frac{A^\mu}{B^\mu}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Κατὰ τὸ Ε'. θεώρημα ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πηλίκον ἐπ' ἀριθμόν τινα, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἢ διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τὸν διαιρέτην· ἤγουν $\frac{A}{B}\times\Gamma=\frac{A\times\Gamma}{B}$ ἢ $\frac{A}{\left(\frac{B}{\Gamma}\right)}$. — Ἐπίσης ἵνα διαιρέσωμεν πηλίκον δι' ἀριθμοῦ τινος διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην· ἤγουν $\frac{A}{B}:\Gamma=\frac{\left(\frac{A}{\Gamma}\right)}{B}$ ἢ $\frac{A}{B\times\Gamma}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ πηλίκου, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου καὶ ἐπὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον. Τὸ πηλίκον τοῦ Α διὰ $\frac{B}{\Gamma}$ εἶναι $A\times\frac{\Gamma}{B}$· διότι $A\times\frac{\Gamma}{B}\times\frac{B}{\Gamma}=\frac{A\times\Gamma\times B}{B\times\Gamma}=A$ (ϛ'.).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Στηριζόμενοι ἐπὶ τοῦ ϛ'. θεωρήματος δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν πηλίκα, εἴτε κλάσματα, ὧν οἱ διαιρέται, εἴτε παρονομασταί, εἰσὶ διάφοροι, εἰς ἰσοδύναμα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων, ὡς πράττομεν ὅταν οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων ἦναι ἀκέραιοι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'. Κατὰ τὸ Α'. θεώρημα ἔχομεν

$$\frac{A}{K}+\frac{B}{K}+\frac{\Gamma}{K}+\ldots=\frac{A+B+\Gamma+\ldots}{K}.$$

Ἐπίσης καὶ $\frac{A}{K}-\frac{B}{K}=\frac{A-B}{K}$· διότι $\frac{A-B}{K}+\frac{B}{K}=\frac{A-B+B}{K}=\frac{A}{K}.$

Ἐπίσης κατὰ τὸ Ζ'. θεώρημα καὶ τὴν Β'. σημείωσιν

$$\frac{A}{B}\times\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{A\times\Gamma}{B\times\Delta},\ \frac{A}{B}:\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{A\times\Delta}{B\times\Gamma}.$$

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ τρέπωμεν εἰς ἓν μόνον κλάσμα τὸ ἄθροισμα, τὴν διαφοράν, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον κλασμάτων, ἐργαζόμενοι ὡς ὅταν οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων ἦναι σύμμετροι.

Λόγος ποσοῦ πρὸς ποσὸν καὶ ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

§ 44. *Λόγος* ποσοῦ πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς εἶναι ὁ τὸ πρῶτον ποσὸν παριστῶν ἀριθμός, ὅταν τὸ δεύτερον λαμβάνηται ὡς μονάς. Ὅταν τὰ ποσὰ ἦναι ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα, ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου. Ὅταν ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν ἦναι ἀσύμμετρος, ὁ λόγος εἶναι ἀσύμμετρος· διότι ἄλλως γινόμενον συμμέτρου καὶ ἀσυμμέτρου ἤθελεν εἶσθαι σύμμετρον· ὅπερ ἄτοπον (§ 34, Γ'., § 40, Σημ.)· ἢ γινόμενον δύο συμμέτρων ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον. Ὅταν δ' ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀσύμμετροι, ὁ λόγος εἶναι ἤτοι σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος (§ 36, Σημ.).

§ 45. Ὡς ἐπὶ συμμέτρων οὕτω καὶ ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν *ὁ λόγος δύο ποσῶν ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, οἱαδήποτε ἂν ᾖ ἡ μονάς*. Τῷ ὄντι· ἔστωσαν δύο ποσὰ Α καὶ Β, ἅπερ παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β· εἴδομεν ἀνωτέρω (§ 42) ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β ἰσοῦται τῷ λόγῳ τοῦ Α πρὸς τὸ Β.

§ 46. Ὁρισθέντος τοῦ λόγου δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ἔχομεν καὶ ἀναλογίας, ὧν ὅροι τινὲς ἢ πάντες εἰσὶν ἀσύμμετροι. Πάντα τὰ θεωρήματα ἀναλογιῶν, περὶ ὧν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, ὑφίστανται καὶ ὅταν ὑπάρχωσιν ὅροι ἀσύμμετροι καὶ ἀποδεικνυνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Δ'. ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ.

Ὁρισμός.

§ 47. Καλεῖται *ρίζα* ἀριθμοῦ συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου ἀριθμός, οὗ τινος δύναμις εἶναι ὁ πρῶτος. Π. χ. ἀριθμός, οὗ ἡ πέμπτη δύναμις εἶναι 8, εἶναι *πέμπτη ρίζα* τοῦ 8· ὁ ἀριθμός, οὗ ἡ ἑβδόμη δύναμις εἶναι $\sqrt{3}$, εἶναι *ἑβδόμη ρίζα* τοῦ $\sqrt{3}$.

Ἐφεξῆς δειχθήσεται ὅτι πᾶς ἀριθμός, σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος, ἔχει ρίζαν οἱουδήποτε βαθμοῦ.

§ 48. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ἡ τετραγωνικὴ ἢ κυβικὴ ρίζα συμμέτρου ἀριθμοῦ, μὴ ὄντος τελείου τετραγώνου ἢ κύβου, εἶναι ἀριθμός, οὗ τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ ἀριθμῷ. Ἐν §§ 25 καὶ 27 αἱ τοιαῦται ρίζαι ὡρίσθησαν κατ' ἄλλον τρόπον καὶ θέλομεν ἀποδεῖξει ἐνταῦθα ὅτι οἱ ὁρισμοὶ ἐκεῖνοι συνᾴδουσι τῷ ἀνωτέρω.

α'. Ἔστω θ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα συμμέτρου ἀριθμοῦ α, μὴ τελείου τετραγώνου, οἵα ὡρίσθη ἐν § 25· ὁ θ εἶναι, ὡς αὐτόθι εἴρηται, ἀσύμμετρος. Ἔστωσαν β καὶ γ σύμμετροι, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχουσι τὸν α. Ὁ θ περιέχεται μεταξὺ β καὶ γ· ἄρα θ^2 περιέχεται μεταξὺ β^2 καὶ γ^2· ἀλλὰ καὶ ὁ α περιέχεται μεταξὺ β^2 καὶ γ^2, ὅθεν ἡ διαφορὰ τοῦ α καὶ τοῦ θ^2 εἶναι ἐλάσσων τῆς τῶν β^2 καὶ γ^2· ἀλλ' ἡ τῶν β^2 καὶ γ^2 διαφορὰ εἴη ἂν ὁσονδήποτε μικρὰ (§ 24)· οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν α καὶ θ^2 διαφέρουσιν ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα $\alpha=\theta^2$. Οὕτως ὁ θ εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α καὶ κατὰ τὸν ἐν § 47 ὁρισμόν.

β'. Ἔστω θ ἡ κυβικὴ ρίζα συμμέτρου α, μὴ τελείου κύβου, οἵα ὡρίσθη ἐν § 27, β καὶ γ σύμμετροι, ὧν οἱ κύβοι περιέχουσι τὸν α. Ὅ,τε α καὶ ὁ θ^3 περιέχονται μεταξὺ β^3 καὶ γ^3, ὧν ἡ διαφορὰ δυνατὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά· ἄρα οἱ α καὶ θ^3, διαφέροντες ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ, εἰσὶν ἴσοι. Οὕτως ὁ θ εἶναι κυβικὴ ρίζα τοῦ α καὶ κατὰ τὸν ἐν § 47 ὁρισμόν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$$

$$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}=5.$$

Αἱ ἰσότητες αὗται καὶ αἱ παραπλήσιοι δύνανται νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς παραδείγματα γινομένων ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, συμμέτροις ἰσουμένων.

Λογισμὸς κατὰ προσέγγισιν τῶν τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ῥιζῶν συμμέτρων μὴ τελείων τετραγώνων ἢ μὴ τελείων κύβων.

α΄. *Λογισμὸς κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{\nu}$.

§ 49. *Ἡ κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{\nu}$ *τετραγωνικὴ ἢ κυβικὴ ῥίζα συμμέτρου ἀριθμοῦ Α διαφέρει τῆς ἀκριβοῦς αὐτοῦ τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης ἔλασσον τοῦ* $\frac{1}{\nu}$ (*).

Ἔστω κ ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Α καὶ λ ἡ ἀκριβὴς αὐτοῦ τετραγωνικὴ ῥίζα. Ἔχομεν $A=\lambda^2$, $A>\kappa^2$, $A<\left(\kappa+\frac{1}{\nu}\right)^2$· ἄρα $\lambda^2>\kappa^2$ καὶ $\lambda^2<\left(\kappa+\frac{1}{\nu}\right)^2$· ὅθεν ὁ λ περιέχεται μεταξὺ κ καὶ $\kappa+\frac{1}{\nu}$· διαφέρει λοιπὸν τοῦ ἑτέρου τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἔλασσον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν τούτων, ἥτις εἶναι $\frac{1}{\nu}$.

Ὁμοία ἀπόδειξις καὶ ὡς πρὸς τὰς κυβικὰς ῥίζας.

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς περιεχομένην ἐν τῇ ἀνωτέρω προτάσει τὴν ἑξῆς. *Ἡ τετραγωνικὴ ἢ κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος συμμέτρου ἀριθμοῦ Α διαφέρει τῆς ἀκριβοῦς τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης τοῦ Α ἔλασσον τῆς μονάδος.* Ἄλλως δὲ ἡ πρότασις αὕτη ἀποδείκνυται κατ' εὐθεῖαν ὡς ἡ προηγουμένη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δῆλος ὁ λόγος, δι' ὃν ἐκλήθησαν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ῥίζαι κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ $\frac{1}{\nu}$ οἱ ὡς αὐτόθι ὁριζόμενοι ἀριθμοί.

(*) Ἐκαλέσαμεν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ τετραγωνικὴν ἢ κυβικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἀριθμοῦ τινος Α τὸ ἕτερον τῶν δύο διαδοχικῶν πολλαπλασίων τοῦ $\frac{1}{\nu}$, μεταξὺ τῶν τετραγώνων ἢ κύβων τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α. Εἴρηται δ' αὐτόθι καὶ τίνας ἀφορᾷ ἀριθμοὺς ὁ ὁρισμὸς οὗτος.

§ 50. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι ἵνα ἐκτιμήσωμεν διὰ συμμέτρου κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀσύμμετρον τετραγωνικὴν ἢ κυβικὴν ῥίζαν συμμέτρου ἀριθμοῦ, ἐργαζόμεθα ὡς δέδεικται ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ πρὸς ἐξαγωγὴν τῶν κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ $\frac{1}{\nu}$ τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ῥιζῶν. Δυνάμεθα δ' οὕτω νὰ ἐκτιμῶμεν τὰς τοιαύτας ῥίζας καθ' ὅσην θέλομεν προσέγγισιν, λαμβάνοντες τὸ $\frac{1}{\nu}$ ὁσονδήποτε μικρόν.

β'. Ἑτέρα μέθοδος.

§ 51. Ὅταν γνωρίζωμεν τιμὴν κατὰ προσέγγισιν ἀσυμμέτρου τινὸς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἱκανῶς προσεγγίζουσαν, δυνάμεθα δι' αὐτῆς νὰ πορίζώμεθα ἑτέραν μᾶλλον προσεγγίζουσαν, ἐκ ταύτης δὲ πάλιν ἄλλην ἔτι μᾶλλον προσεγγίζουσαν, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὡς ἕπεται.

Ἔστω Α ἀριθμός τις ἀκέραιος ἢ κλασματικός, μὴ ὢν τέλειον τετράγωνον, καὶ α ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα κατὰ προσέγγισίν τινα. Θῶμεν $\chi=\sqrt{A}-\alpha$· ὅθεν $A=(\alpha+\chi)^2=\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2$. Θῶμεν ἔτι $A=\alpha^2+2\alpha\chi'$· ὅθεν $\chi'=\frac{A-\alpha^2}{2\alpha}$. Ὅταν ἡ διαφορὰ χ ἦναι ἱκανῶς μικρά, ἡ διαφορὰ τοῦ χ' ἀπὸ τοῦ χ εἶναι λίαν μικρά· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha^2+2\alpha\chi'=\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2$ ἕπεται $\chi'-\chi=\frac{\chi^2}{2\alpha}$· ὅταν δὲ ὁ χ ἦναι ἱκανῶς μικρὸς ἀπολύτως τε καὶ ὡς πρὸς τὸν α, ὁ $\frac{\chi^2}{2\alpha}$ εἶναι πολλῷ ἐλάσσων τοῦ χ. Ἀλλὰ

$$\chi'-\chi=(\alpha+\chi')-(\alpha+\chi)=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{A}{\alpha}\right)-\sqrt{A}·$$

ἡ διαφορὰ λοιπὸν τοῦ $\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{A}{\alpha}\right)$ ἀπὸ τοῦ $\sqrt{A}$ εἶναι τότε ἐλάσσων τοῦ χ, ἤτοι τῆς διαφορᾶς τοῦ α ἀπὸ $\sqrt{A}$· ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{A}{\alpha}\right)$ εἶναι τιμὴ τοῦ $\sqrt{A}$ μᾶλλον προσεγγίζουσα τῆς α· εἶναι δὲ μείζων τῆς τελευταίας, τοῦ χ' ὄντος μείζονος τοῦ χ.

Σημειώσωμεν διὰ β τὴν νέαν αὐτὴν τιμὴν καὶ διὰ φ τὴν διαφορὰν αὐτῆς ἀπὸ $\sqrt{A}$· ἔχομεν $A=(\beta-\varphi)^2=\beta^2-2\beta\varphi+\varphi^2$. Θῶμεν (1) $A=\beta^2-2\beta\varphi'$· ὅθεν $\varphi-\varphi'=\frac{\varphi^2}{2\beta}$. Ἐπειδὴ $\varphi<\chi$, $\frac{\varphi^2}{2\alpha}$ εἶναι πολλῷ ἐλάσσων τοῦ φ, καὶ ἔτι μᾶλλον $\frac{\varphi^2}{2\beta}$· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τοῦ φ' ἀπὸ φ εἶναι ἐλάσσων τοῦ φ. Ἐκ τῆς (1) ἕπεται $\varphi'=\frac{\beta^2-A}{2\beta}$· ὅθεν

$$\varphi-\varphi'=(\beta-\varphi')-(\beta-\varphi)=\left(\beta-\frac{\beta^2-A}{2\beta}\right)-\sqrt{A}=\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{A}{\beta}\right)-\sqrt{A}.$$

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν $\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{A}{\beta}\right)$ διαφέρει τοῦ $\sqrt{A}$ ἔλασσον τοῦ προηγουμένου $\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{A}{\alpha}\right)$· εἶναι δὲ, ὡς καὶ οὗτος, μείζων τοῦ $\sqrt{A}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπὸ τῆς τιμῆς $\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{A}{\beta}\right)$ πορίζόμεθα ἑτέραν μᾶλλον προσεγγίζουσαν, τὴν $\frac{1}{2}\left(\beta'+\frac{A}{\beta'}\right)$, β' οὔσης τῆς προηγουμένης, καὶ οὕτω καθεξῆς. Πᾶσαι αἱ τιμαὶ αὐταὶ εἰσι μείζονες τοῦ $\sqrt{A}$.

Προσεγγίζουσι δὲ πρὸς τὸν $\sqrt{A}$ *ἀπεριορίστως καὶ λίαν ταχέως*. Ἔστωσαν αὗται α, β, β', β'', . . . καὶ χ, δ, δ', . . . αἱ ἀντιστοιχοῦσαι διαφοραὶ ἀπὸ $\sqrt{A}$. Ἡ πρώτη τιμὴ α εἶναι ἐλάσσων τοῦ $\sqrt{A}$, αἱ δὲ λοιπαὶ μείζονες. Ἡ πρώτη διαφορὰ χ εἶναι ἱκανῶς μικρά· ὑποτεθήτω, π. χ., ἐλάσσων τοῦ 0,000001. Ἔχομεν $\delta=\frac{\chi^2}{2\alpha}$.

ὅθεν $\delta<\frac{(0,000001)^2}{2\alpha}$. Ἐπίσης $\delta'=\frac{\delta^2}{2\beta}$· ὅθεν

$$\delta'<\left[\frac{(0,000001)^2}{2\alpha}\right]^2\times\frac{1}{2\alpha},$$

εἴτε $$\delta'<\left(\frac{0,000001}{2\alpha}\right)^2\times\frac{(0,000001)^2}{2\alpha}.$$

Ἐπίσης

$$\delta'' = \frac{\delta'^2}{2\beta'}\cdot \text{ ὅθεν } \delta'' < \left[\left(\frac{0,000001}{2\alpha}\right)^2 \times \frac{(0,000001)^2}{2\alpha}\right]^2 \times \frac{1}{2\alpha},$$

εἴτε $$\delta'' < \left(\frac{0,000001}{2\alpha}\right)^6 \times \frac{(0,000001)^2}{2\alpha}.$$

Εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\delta''' < \left(\frac{0,000001}{2\alpha}\right)^{14} \times \frac{(0,000001)^2}{2\alpha}$$

$$\delta^{\text{v}} < \left(\frac{0,000001}{2\alpha}\right)^{30} \times \frac{(0,000001)^2}{2\alpha}$$

καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὅταν ὁ $\frac{0,000001}{2\alpha}$ ἦναι ἱκανῶς μικρός, αἱ διαφοραὶ αὗται βαίνουσιν ἐλαττούμεναι ἀπεριορίστως καὶ λίαν ταχέως.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον αὐτὴν εἰς τὸν κατὰ προσέγγισιν λογισμὸν τῆς $\sqrt{5}$. Ἡ ῥίζα αὕτη κατὰ προσέγγισιν 0,00001 εἶναι 2,23606. Οὕτως $\alpha=2,23606$. Ἡ ἀκόλουθος προσεγγίζουσα τιμή, ἡ διὰ 6 ἀνωτέρω σημειωθεῖσα, οὖσα $\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{A}{\alpha}\right)$, εἶναι $\frac{1}{2}\left(2,23606+\frac{5}{2,23606}\right)=\frac{24999910809}{11180300000}$. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι λίαν προσεγγίζουσα· διότι ἡ διαφορὰ αὐτῆς ἀπὸ $\sqrt{5}$ εἶναι ἐλάσσων $\frac{0,0000000001}{4,47212}$.

§ 52. Ἀνάλογος ὑπάρχει μέθοδος καὶ πρὸς λογισμὸν τῶν ἀσυμμέτρων κυβικῶν ῥιζῶν.

Ἔστω A ἀκέραιος ἢ κλασματικός, οὗ ἡ κυβικὴ ῥίζα ἀσύμμετρος, α τιμή τις κατὰ προσέγγισιν τῆς $\sqrt[3]{A}$ καὶ χ ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς ἀπὸ $\sqrt[3]{A}$. Ἔχομεν

$$A=(\alpha+\chi)^3=\alpha^3+3\alpha^2\chi+3\alpha\chi^2+\chi^3.$$

Τεθήτω (1) $A=\alpha^3+3\alpha^2\chi'$ ἔπεται

$$\chi'-\chi=\chi^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\chi}{3\alpha^2}\right)=\chi^2\left(1+\frac{\chi}{3\alpha}\right)\times\frac{1}{\alpha}.$$

Ὅταν ἡ διαφορὰ χ εἶναι λίαν μικρά, τὸ γινόμενον $\chi^2\left(1+\frac{\chi}{3\alpha}\right)$ εἶναι πολλῷ ἔλασσον τοῦ χ· ἔτι μᾶλλον λοιπὸν ἡ διαφορὰ $\chi'-\chi$. Ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι ἴση τῇ $(\alpha+\chi')-(\alpha+\chi)$, ἤ, ἐπειδὴ $\chi'=\frac{A-\alpha^3}{3\alpha^2}$, τῇ $\left(\alpha+\frac{A-\alpha^3}{3\alpha^2}\right)-\sqrt[3]{A}$· ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν $\alpha+\frac{A-\alpha^3}{3\alpha^2}$, διαφέρων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ Α πολλῷ ἔλασσον τοῦ χ, εἶναι τιμὴ τῆς ῥίζης αὐτῆς μᾶλλον προσεγγίζουσα τοῦ α· εἶναι δὲ μείζων τῆς ῥίζης αὐτῆς· διότι ἡ διαφορὰ $\chi'-\chi$ εἶναι θετική, εἴτε $\chi'>\chi$.

Σημειωθήτω διὰ β ἡ τιμὴ αὕτη καὶ διὰ φ ἡ διαφορὰ αὐτῆς ἀπὸ $\sqrt[3]{A}$. Ἔχομεν

$$A=(\beta-\varphi)^3=\beta^3-3\beta^2\varphi+3\beta\varphi^2-\varphi^3.$$

Τεθήτω $A=\beta^3-3\beta^2\varphi'$, ἐξ οὗ $\varphi'=\frac{\beta^3-A}{3\beta^2}$ καὶ $\varphi'<\varphi$. Ἡ διαφορὰ $\varphi-\varphi'$ εἶναι πολλῷ ἐλάσσων τῆς φ, ὡς ἴση τῇ $\varphi^2\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\varphi}{3\beta^2}\right)$. εἶναι δὲ καὶ ἴση τῇ $(\beta-\varphi')-(\beta-\varphi)$, εἴτε τῇ $\left(\beta-\frac{\beta^3-A}{3\beta^2}\right)-\sqrt[3]{A}$· ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς $\beta-\frac{\beta^3-A}{3\beta^2}$ εἶναι τιμὴ τῆς $\sqrt[3]{A}$ ἔτι μᾶλλον προσεγγίζουσα, μείζων δὲ καὶ αὐτὴ τῆς $\sqrt[3]{A}$.

Ἀπὸ τῆς νέας ταύτης τιμῆς μεταβαίνομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς ἄλλην πολλῷ μᾶλλον προσεγγίζουσαν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ῥίζαι ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

α'. *Τετραγωνικὴ ῥίζα.*

§ 53. Ἔστω α ἀσύμμετρός τις ἀριθμός· β, β', β'', ... σύμμετροι αὔξοντες καὶ $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ σύμμετροι ἐλαττούμενοι, τείνοντες οἵ,τε πρῶτοι καὶ οἱ δεύτεροι πρὸς τὸν α. Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι

$$(1) \quad \sqrt{\varepsilon}, \ \sqrt{\varepsilon'}, \ \sqrt{\varepsilon''}, \ \sqrt{\varepsilon'''}, \ldots$$

βαίνουσιν αὐξάνουσαι (§ 36, Β'.), εἶναι δὲ πάντοτε ἐλάσσονες τῶν

$$(2) \quad \sqrt{\gamma}, \ \sqrt{\gamma'}, \ \sqrt{\gamma''}, \ \sqrt{\gamma'''}, \ldots$$

αἵτινες βαίνουσιν ἐλαττούμεναι. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι οἵ,τε (1) καὶ οἱ (2) τείνουσι πρὸς ὅρια.

Τὰ ὅρια δὲ ταῦτα εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ πάντοτε παρίστανται ἀριθμοῦ. Πρὸς δεῖξιν τούτου ἀποδεικτέον ἐν πρώτοις ὅτι *ἡ διαφορὰ ἀριθμοῦ τινος ἐκ τῶν (1) καὶ ἑτέρου ἐκ τῶν (2) δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρὰ, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὕτω λαμβάνωνται ὡς ἐγγυτάτω τῶν ὁρίων αὐτῶν.* Ἔστω δ ἡ διαφορὰ τῶν $\sqrt{\varepsilon^{(\varkappa)}}$ καὶ $\sqrt{\gamma^{(\lambda)}}$. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\sqrt{\gamma^{(\lambda)}} = \sqrt{\varepsilon^{(\varkappa)}} + \delta$

ἕπεται $$\gamma^{(\lambda)} = \varepsilon^{(\varkappa)} + 2\delta\sqrt{\varepsilon^{(\varkappa)}} + \delta^2 \ (^*)$$

ὅθεν $$\gamma^{(\lambda)} - \varepsilon^{(\varkappa)} = \delta(2\sqrt{\varepsilon^{(\varkappa)}} + \delta).$$

Ἐὰν ἡ διαφορὰ δ δὲν ἐλαττῶται ἀπεριορίστως, οὔτε τὸ β'. μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος ἤθελεν ἐλαττοῦσθαι οὕτως, ὅταν οἱ $\varepsilon^{(\varkappa)}$ καὶ $\gamma^{(\lambda)}$ λαμβάνωνται ὡς ἐγγυτάτω τοῦ ὁρίου αὐτῶν· ὅπερ ἄτοπον· ἡ διαφορὰ λοιπὸν δ δυνατὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὰ ὅρια τῶν ἀριθμῶν (1) καὶ (2) εἶναι ταὐτά.

Λέγω ἤδη ὅτι τὸ κοινὸν ὅριον τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) παρίσταται πάντοτε διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ὑποτεθήτω ὅτι κατὰ μέν τινα μονάδα Μ τὸ ὅριον εἶναι Π καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ π, κατ' ἄλλην δέ τινα μονάδα Μ' τὸ ὅριον εἶναι Π' καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ π'· ἔστω δὲ $\pi < \pi'$. Ἔστω $\sqrt{\varepsilon^{(\varkappa)}}$ ἀριθμός τις τῆς σειρᾶς (1) καὶ Κ' τὸ ποσὸν, ὅπερ ἐμφαίνει κατὰ τὴν μονάδα Μ'. Ἔστω ἔτι Ρ τὸ ποσὸν, ὅπερ ὁ π ἐμφαίνει κατὰ τὴν μονάδα Μ'· ἔχομεν Ρ<Π' (§16, Σ. Β'.). Τὸ ποσὸν Κ' δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ὁρίου Π' ὁσονδήποτε ὀλίγον· ἐπομένως ἧττον τῆς διαφορᾶς Π'—Ρ· ἔχομεν δὲ τότε Κ'>Ρ· τὸ δὲ ποσὸν, ὅπερ ὁ αὐτὸς $\sqrt{\varepsilon^{(\varkappa)}}$ ἐμφαίνει κατὰ τὴν μονάδα Μ, εἶναι ἔλασσον τοῦ ὁρίου Π· οὕτως ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{\varepsilon^{(\varkappa)}}$ ἐμφαίνει ποσὸν ὁτὲ μὲν μεῖζον, ὁτὲ δ' ἔλασσον τοῦ ἀριθμοῦ π· ὅπερ ἄτοπον (§ 16, Σημ. Ε'.).

Σημειωθήτω διὰ λ ὁ ἀριθμὸς, ὁ παριστῶν τὸ ὅριον τῶν σειρῶν (1) καὶ (2). Τὸ τετράγωνον τοῦ λ περιέχεται μεταξὺ τῶν τετρα-

(*) Κατὰ τὰς ἐν § 41 (Η'.) προτάσεις ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ α καὶ β ἦναι ἀσύμμετροι.

γώνων ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς (1) καὶ ἑνὸς τῶν τῆς (2), εἴτε μεταξὺ ἑνὸς τῶν ϐ, ϐ', ϐ'', . . . καὶ ἑνὸς τῶν γ, γ', γ'', . . .· ὁ α ἐπίσης περιέχεται μεταξὺ δύο τοιούτων ἀριθμῶν· ἀλλ' ἡ διαφορὰ δύο τοιούτων ἀριθμῶν δυνατὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ α καὶ λ^2 διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα τέλος $\alpha = \lambda^2$.

Οὕτω *πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν*, ἥτις εἶναι τὸ ὅριον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν πρὸς αὐτὸν τεινόντων συμμέτρων ἀριθμῶν· ἡ τετραγωνικὴ δ' αὕτη ῥίζα εἶναι ἀσύμμετρος, τοῦ τετραγώνου συμμέτρου ἀριθμοῦ ὄντος πάντοτε συμμέτρου.

§ 54. Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παριστῶνται διὰ τοῦ ῥιζικοῦ, ὡς καὶ αἱ τῶν συμμέτρων· οἷον $\sqrt{5+\sqrt{3}}$, $\sqrt{7-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{10}}$, $\sqrt{\pi}$. Αἱ παραστάσεις αὗται ἐμφαίνουσιν ὡρισμένους ἀσυμμέτρους ἀριθμούς.

ϐ'. *Κυϐικὴ ῥίζα.*

§ 55. Ἀποδείκνυται ὡς ἐν § 54 ὅτι πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἔχει κυϐικὴν ῥίζαν, ἥτις εἶναι τὸ ὅριον τῶν κυϐικῶν ῥιζῶν τῶν πρὸς τὸν ἀσύμμετρον τεινόντων συμμέτρων ἀριθμῶν καὶ εἶναι πάντοτε ἀσύμμετρος.

§ 56. Αἱ τοιαῦται κυϐικαὶ ῥίζαι παριστῶνται διὰ ῥιζικοῦ, φέροντος δείκτην 3, ὡς καὶ αἱ τῶν συμμέτρων· ἔχομεν δ' οὕτω πάλιν παραστάσεις ἐμφαινούσας ὡρισμένους ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, οἷαι αἱ ἑξῆς.

$$\sqrt[3]{5+\sqrt{7}}, \quad \sqrt[3]{13-\sqrt{6}}, \quad \sqrt[3]{\sqrt{2}}, \quad \sqrt[3]{\pi}.$$

Ῥίζαι οἱουδήποτε βαθμοῦ συμμέτρων ἀριθμῶν.

α'. *Πότε ἀριθμὸς σύμμετρος εἶναι τελεία δύναμις βαθμοῦ μ.*

§ 57. Ὡς οἱ μὲν τῶν συμμέτρων εἰσίν, οἱ δ' οὐκ εἰσὶ τέλεια τετράγωνα ἢ τέλειοι κύϐοι, οὕτως οἱ μὲν αὐτῶν εἰσίν, οἱ δ' οὐκ εἰσὶ τέλειαι δυνάμεις βαθμοῦ τινος $\mu^{οῦ}$ οἱουδήποτε· οἱ μὲν αὐτῶν δηλονότι εἰσὶ δυνάμεις $\mu^{οῦ}$ βαθμοῦ ἑτέρων συμμέτρων, οἱ δὲ οὔ.

Οἱ ἀναγκαῖοι καὶ ἀρκοῦντες ὅροι, ὅπως ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ὦσι τέλειαι δυνάμεις βαθμοῦ $\mu^{ου}$, περιέχονται ἐν τοῖς ἑξῆς θεωρήμασι, ἀναλόγοις τῶν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ περὶ τελείων τετραγώνων καὶ κύβων.

§ 58. Α'. *Ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι τελεία δύναμις βαθμοῦ $\mu^{οῦ}$, ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἦναι πάντες διαιρετοὶ διὰ μ· τοῦτο δὲ εἶναι καὶ ἀναγκαῖον, ὅταν οἱ παράγοντες ἦναι πρῶτοι.*

α'. Ἔστω τὸ γινόμενον $\alpha^{5\kappa}.\beta^{5\lambda}.\gamma^{5\pi}.\delta^{5\rho}$, ἔνθα οἱ ἐκθέται πάντες εἰσὶ διαιρετοὶ διὰ 5. Τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι πέμπτη δύναμις τοῦ $\alpha^{\kappa}.\beta^{\lambda}.\gamma^{\pi}.\delta^{\rho}$· διότι $(\alpha^{\kappa}.\beta^{\lambda}.\gamma^{\pi}.\delta^{\rho})^5=(\alpha^{\kappa})^5\times(\beta^{\lambda})^5\times(\gamma^{\pi})^5\times(\delta^{\rho})^5$ (§ 41, Ζ'.)· ἀφ' ἑτέρου δὲ $(\alpha^{\kappa})^5=\alpha^{\kappa}.\alpha^{\kappa}.\alpha^{\kappa}.\alpha^{\kappa}.\alpha^{\kappa}=\alpha^{5\kappa}$ (§ 41, ς'.)· ἐπίσης $(\beta^{\lambda})^5=\beta^{5\lambda}$, κ.τ.λ. ἄρα $(\alpha^{\kappa}.\beta^{\lambda}.\gamma^{\pi}.\delta^{\rho})^5=\alpha^{5\kappa}.\beta^{5\lambda}.\gamma^{5\pi}.\delta^{5\rho}$.

β'. Ὑποτεθήτω ὅτι ὁ ἀκέραιος Α εἶναι $\mu^{η}$ δύναμις τοῦ Β. Ἀναλυθήτω ὁ Β εἰς πρώτους παράγοντας καὶ ἔστω $B=\alpha^{\kappa}.\beta^{\lambda}.\gamma^{\pi}.\delta^{\rho}...$· ἔπεται $B^{\mu}=(\alpha^{\kappa}.\beta^{\lambda}.\gamma^{\pi}.\delta^{\rho}...)^{\mu}=\alpha^{\kappa\mu}.\beta^{\lambda\mu}.\gamma^{\pi\mu}.\delta^{\rho\mu}...$· ἀλλὰ $B^{\mu}=A$· ἄρα οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ Α εἰσὶ πάντες πολλαπλάσιοι τοῦ μ.

§ 59. Β'. *Κλάσμα τι εἶναι τελεία δύναμις βαθμοῦ $\mu^{οῦ}$, ὅταν ἑκάτερος τῶν ὅρων αὐτοῦ ἦναι τελεία τοιαύτη δύναμις· εἶναι δὲ τοῦτο καὶ ἀναγκαῖον, ὅταν τὸ κλάσμα ἦναι ἀνάγωγον.*

α'. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ καὶ ὑποτεθήτω ὅτι $A=\alpha^{\mu}$ καὶ $B=\beta^{\mu}$· ἔχομεν $\frac{A}{B}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}$ (§ 43, Η'.)· τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{A}{B}$ εἶναι $\mu^{η}$ δύναμις τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$.

β'. Ὑποτεθήτω ὅτι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{A}{B}$ εἶναι τελεία δύναμις τοῦ $\mu^{ου}$ βαθμοῦ. Ὁ ἀριθμός, οὗ δύναμις $\mu^{η}$ εἶναι ὁ $\frac{A}{B}$, εἶναι καὶ αὐτὸς κλάσμα· σημειώσωμεν τὸ κλάσμα αὐτό, ἀναγμένον εἰς ἐλαχίστους ὅρους, διὰ $\frac{\alpha}{\beta}$· ἔχομεν $\frac{A}{B}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$. Ὄντος τοῦ α πρώτου πρὸς τὸν β, καὶ α^{μ} εἶναι πρῶτος πρὸς β^{μ}· τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$ εἶναι καὶ αὐτὸ ἀνάγωγον· ἄρα $A=\alpha^{\mu}$ καὶ $B=\beta^{\mu}$· ἀμφότεροι δηλονότι οἱ ὅροι τοῦ $\frac{A}{B}$ εἰσὶ τέλειαι δυνάμεις βαθμοῦ $\mu^{ου}$.

§ 60. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δῆλον ὅτι οἱ μὲν τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν εἰσίν, οἱ δ' οὐκ εἰσὶ τέλειαι δυνάμεις βαθμοῦ $\mu^{ου}$. Ὅταν σύμμετρος ἀριθμὸς ἦναι τελεία δύναμις βαθμοῦ $\mu^{ου}$, ἡ $\mu^{η}$ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος· ἐφεξῆς δειχθήσεται ὅτι καὶ οἱ μὴ ὄντες τέλειαι δυνάμεις βαθμοῦ μ σύμμετροι ἔχουσι ῥίζας βαθμοῦ μ.

β'. Ῥίζαι βαθμοῦ $\mu^{ου}$ συμμέτρων μὴ ὄντων τελείων δυνάμεων βαθμοῦ $\mu^{ου}$.

§ 61. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Πᾶς ἀριθμὸς σύμμετρος, ὅστις δὲν εἶναι τελεία δύναμις βαθμοῦ $\mu^{ου}$, εἶναι $\mu^{η}$ δύναμις ἀριθμοῦ ἀσυμμέτρου.*

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ θέλομεν διέλθει τὴν ἑξῆς σειρὰν προτάσεων, ὧν τὴν ὁμοιότητα πρὸς τὰς ἀπὸ τοῦ § 20 καὶ ἑξῆς εὐκόλως ἄν τις κατίδοι.

Α'. *Ὑπάρχουσι ζεύγη συμμέτρων ἀριθμῶν, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφερόντων, ὧν αἱ $\mu^{αι}$ δυνάμεις περιέχουσι δεδομένον σύμμετρον, μὴ ὄντα τελείαν δύναμιν τοῦ $\mu^{ου}$ βαθμοῦ.* Ἔστω α σύμμετρος, μὴ ὢν τελεία δύναμις βαθμοῦ $\mu^{ου}$ καὶ $\frac{1}{\nu}$ κλάσμα τι ὁσονδήποτε μικρόν, ν ὄντος ἀκεραίου ὁσονδήποτε μεγάλου. Ἔχομεν προφανῶς $\alpha = \frac{\alpha\times\nu^{\mu}}{\nu^{\mu}}$· ἔστωσαν ρ καὶ $\rho+1$ δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι, ὧν αἱ $\mu^{αι}$ δυνάμεις περιέχουσι τὸ γινόμενον $\alpha\times\nu^{\mu}$ (*)· τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\times\nu^{\mu}}{\nu^{\mu}}$, εἴτε ὁ α, περιέχεται μεταξὺ $\frac{\rho^{\mu}}{\nu^{\mu}}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^{\mu}}{\nu^{\mu}}$, ἤγουν μεταξὺ τῶν $\mu^{ων}$ δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$, ὧν ἡ διαφορὰ $\frac{1}{\nu}$ δύναται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά.

(*) Τὸ γινόμενον $\alpha\times\nu^{\mu}$ δὲν εἶναι τελεία δύναμις βαθμοῦ $\mu^{ου}$· διότι ἐὰν ὑποτεθῇ $\mu^{η}$ δύναμις τοῦ συμμέτρου π, ἠθέλομεν ἔχει $\alpha\times\nu^{\mu}=\pi^{\mu}$· ὅθεν $\alpha = \frac{\pi^{\mu}}{\nu^{\mu}} = \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^{\mu}$· ὅπερ ἄτοπον· διότι ὁ α δὲν εἶναι τελεία $\mu^{η}$ δύναμις.

μβ'.

B'. *Ὑπάρχουσι τέλειαι δυνάμεις βαθμοῦ μ^ου, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέρουσαι συμμέτρου ἀριθμοῦ α, μὴ ὄντος τελείας δυνάμεως τοῦ βαθμοῦ αὐτοῦ.* Ἔστωσαν β καὶ γ δύο ἀριθμοί, διαφέροντες κατὰ $\frac{1}{\nu}$, ὧν αἱ μ^αι δυνάμεις περιέχουσι τὸν α. Ἔχομεν $\gamma=\beta+\frac{1}{\nu}$. Γνωστὸν ὅτι

$$\left(\beta+\frac{1}{\nu}\right)^2=\beta^2+2\beta\times\frac{1}{\nu}+\left(\frac{1}{\nu}\right)^2.$$

$$\left(\beta+\frac{1}{\nu}\right)^3=\beta^3+3\beta^2\times\frac{1}{\nu}+3\beta\times\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\left(\frac{1}{\nu}\right)^3.$$

Ἵνα ἔχωμεν τὸ γινόμενον τοῦ β'. μέλους τῆς τελευταίας ἰσότητος ἐπὶ $\beta+\frac{1}{\nu}$, ὅπερ εἶναι ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ $\beta+\frac{1}{\nu}$, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ ἐπὶ β καὶ ἐπὶ $\frac{1}{\nu}$ καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα (§ 41, H'.)· τὰ δύο πρῶτα τῶν ἐπὶ β γινομένων εἶναι β^4 καὶ $3\beta^3\times\frac{1}{\nu}$, τὰ δὲ δύο ἄλλα περιέχουσι τὸν παράγοντα $\frac{1}{\nu}$ τὸ μὲν δίς, τὸ δὲ τρίς· ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ $\frac{1}{\nu}$ γινομένων τὸ μὲν πρῶτον εἶναι $\beta^3\times\frac{1}{\nu}$, ἕκαστον δὲ τῶν λοιπῶν περιέχει τὸν παράγοντα $\frac{1}{\nu}$ τοὐλάχιστον δίς. Ἡ τετάρτη λοιπὸν δύναμις τοῦ $\beta+\frac{1}{\nu}$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὧδε $\beta^4+4\beta^3\times\frac{1}{\nu}+A\times\left(\frac{1}{\nu}\right)^2$, τιθεμένου τοῦ $\left(\frac{1}{\nu}\right)^2$ ἐκτὸς παρενθέσεως εἰς ὅσα γινόμενα ὑπάρχει παράγων. Πολλαπλασιάζοντες $\beta^4+4\beta^3\times\frac{1}{\nu}+A\times\left(\frac{1}{\nu}\right)^2$ ἐπὶ $\beta+\frac{1}{\nu}$, εὑρήσομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὅτι

$$\left(\beta+\frac{1}{\nu}\right)^5=\beta^5+5\beta^4\times\frac{1}{\nu}+A'\times\left(\frac{1}{\nu}\right)^2.$$

ἐπίσης $$\left(\beta+\frac{1}{\nu}\right)^6=\beta^6+6\beta^5\times\frac{1}{\nu}+A''\times\left(\frac{1}{\nu}\right)^2.$$

καὶ ἐν γένει $$\left(\beta+\frac{1}{\nu}\right)^\mu=\beta^\mu+\mu\beta^{\mu-1}\times\frac{1}{\nu}+B\times\left(\frac{1}{\nu}\right)^2.$$

ὅθεν $$\gamma^\mu-\beta^\mu=\mu\beta^{\mu-1}\times\frac{1}{\nu}+B\times\left(\frac{1}{\nu}\right)^2=\frac{1}{\nu}\left(\mu\beta^{\mu-1}+B\times\frac{1}{\nu}\right).$$

Ὅταν ἡ διαφορὰ $\frac{1}{\nu}$ τῶν ἀριθμῶν β καὶ γ λαμβάνηται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μικρὰ (Α'.), ὁ β δὲν αὐξάνει ἀπεριορίστως· διότι $\beta^\mu<\alpha$· τὸ γινόμενον λοιπὸν $\frac{1}{\nu}\left(\mu\beta^{\mu-1}+B\times\frac{1}{\nu}\right)$ ἀποβαίνει ὁσονδήποτε μικρὸν μετὰ τοῦ $\frac{1}{\nu}$. Ἐπειδὴ οὕτως αἱ δυνάμεις β^μ καὶ γ^μ, αἱ περιέχουσαι τὸν α, δυνατὸν νὰ διαφέρωσιν ὁσονδήποτε ὀλίγον, ἔτι μᾶλλον ἡ διαφορὰ ἑκατέρας αὐτῶν ἀπὸ τοῦ α δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρά.

Γ'. *Πᾶς μὴ ὢν τελεία δύναμις μ^οῦ βαθμοῦ σύμμετρος α εἶναι ὅριον τελείων μ^ῶν δυνάμεων.* Ἔστω β^μ τελεία δύναμις τοῦ μ^οῦ βαθμοῦ ἐλάσσων τοῦ α. Ὅσῳ ὀλίγον κἂν διαφέρῃ ὁ β^μ τοῦ α, ὑπάρχει κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν καὶ ἑτέρα τελεία μ^η δύναμις β'^μ, ἐλάσσων τοῦ α καὶ ἧττον αὐτοῦ διαφέρουσα, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὁ α λοιπὸν εἶναι ὅριον τελείων μ^ῶν δυνάμεων αὐξανουσῶν καὶ τεινουσῶν πρὸς αὐτόν. Ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι ὁ αὐτὸς α εἶναι ὅριον τελείων τοιούτων δυνάμεων μειζόνων ἑαυτοῦ, αἵτινες, τείνουσαι πρὸς αὐτόν, βαίνουσιν ἐλαττούμεναι.

Δ'. *Αἱ μ^αὶ ῥίζαι β, β', β'', . . . τῶν τελείων μ^ῶν δυνάμεων β^μ, β'^μ, β''^μ, . . . τῶν αὐξανουσῶν καὶ τεινουσῶν πρὸς τὸν μὴ ὄντα τελείαν μ^ην δύναμιν α, καὶ αἱ ῥίζαι γ, γ', γ'', . . . τῶν τελείων μ^ῶν δυνάμεων γ^μ, γ'^μ, γ''^μ, . . . , αἵτινες βαίνουσιν ἐλαττούμεναι καὶ τείνουσαι πρὸς τὸν α, τείνουσιν ἅπασαι πρὸς ἓν κοινὸν ὅριον.* Οἱ β, β', β'', . . . , οἵτινες βαίνουσιν αὐξάνοντες οὐχὶ ἀπεριορίστως, ἔχουσιν ὅριον τὸ ἐλάχιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσι, οἱ δὲ γ, γ', γ'', . . . , οἵτινες βαίνουσιν ἐλαττούμενοι οὐχὶ ἀπεριορίστως, ἔχουσιν ὅριον τὸ ἐλάχιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ δὲν δύνανται νὰ παρέλθωσι (ὑποτιθεμένου ὅτι πάντες ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα). Τὰ δύο αὐτὰ ὅρια εἶναι ταὐτά· πρὸς δεῖξιν τούτου συλλογιζόμεθα ὡς ἐν § 10. Ἡ διαφορὰ ἑνὸς τῶν $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ καὶ ἑνὸς τῶν $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρά· διότι ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ ἀριθμοῦ τινος $\beta^{(\varkappa)}$ τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ ἑτέρου $\gamma^{(\lambda)}$ τῆς δευτέρας δὲν ἀποβαίνει ἐλάσσων ἀριθμοῦ τινος ρ, ὁσονδήποτε μικροῦ, ἡ τῶν $[\beta^{(\varkappa)}]^{\mu}$ καὶ $[\gamma^{(\lambda)}]^{\mu}$, οὖσα μείζων τοῦ $\rho\times\mu[\beta^{(\varkappa)}]^{\mu-1}$ (*), δὲν ἀποβαίνει ὁσονδήποτε μικρά· ὅπερ ἄτοπον (Β'.). Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὰ ἀνωτέρω δύο ὅρια εἶναι ἴσα.

Ε'. *Τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνουσιν αἱ $\mu^{\text{αι}}$ ῥίζαι τῶν τελείων $\mu^{\text{ῶν}}$ δυνάμεων, τῶν τεινουσῶν ἀπεριορίστως πρὸς ἀριθμόν τινα α, μὴ ὄντα τελείαν $\mu^{\text{ην}}$ δύναμιν, εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, οὗ ἡ $\mu^{\text{η}}$ δύναμις ἰσοῦται τῷ α.* Ἐπειδὴ ὑπάρχουσι σύμμετροι, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέροντες τοῦ ὁρίου αὐτοῦ, δείκνυται, ὡς ἐπὶ ἀναλόγων περιπτώσεων ἐν τοῖς πρόσθεν, ὅτι τὸ ὅριον αὐτὸ εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός. Λέγω ἤδη ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ὅτι ἡ $\mu^{\text{η}}$ δύναμις αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ α. Ἔστω λ ὁ ἀριθμὸς αὐτός. Ἐπειδὴ οἱ $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ εἰσὶν ἐλάσσονες τοῦ λ, οἱ δὲ $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ μείζονες, ἔχομεν $\beta^{\mu}<\lambda^{\mu}<\gamma^{\mu}$· ἀλλὰ καὶ $\beta^{\mu}<\alpha<\gamma^{\mu}$· οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν α καὶ λ^{μ}, περιεχόμενοι ἀμφότεροι μεταξὺ β^{μ} καὶ γ^{μ}, διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων ἔλασσον τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τελευταίων· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τούτων δύναται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά· οἱ α καὶ λ^{μ} διαφέρουσι λοιπὸν ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα $\alpha=\lambda^{\mu}$. Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται ὅτι ὁ λ εἶναι ἀσύμμετρος· διότι ἄλλως ὁ α ἤθελεν εἶσθαι τελεία δύναμις $\mu^{\text{οῦ}}$ βαθμοῦ.

§ 62. Συμφώνως τῷ ἐν § 47 ὁρισμῷ ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμός, οὗ ἡ $\mu^{\text{η}}$ δύναμις ἰσοῦται συμμέτρῳ α, μὴ ὄντι τελείᾳ $\mu^{\text{ῃ}}$ δυνάμει, εἶναι $\mu^{\text{η}}$ ῥίζα τοῦ τελευταίου. Κατὰ τὰ προεκτεθέντα ἡ $\mu^{\text{η}}$ αὕτη ῥίζα εἶναι τὸ ὅριον τῶν $\mu^{\text{ῶν}}$ ῥιζῶν τῶν τελείων $\mu^{\text{ῶν}}$ δυνάμεων, τῶν τεινουσῶν ἀπεριορίστως πρὸς τὸν α.

Αἱ περὶ ὧν ἐνταῦθα ὁ λόγος ῥίζαι παρίστανται διὰ ῥιζικοῦ, φέροντος τὸν τοῦ βαθμοῦ τῆς ῥίζης δηλωτικὸν δείκτην· οἷον

$$\sqrt[6]{37},\quad \sqrt[10]{243},\quad \sqrt[8]{\tfrac{7}{2}},\quad \sqrt[11]{3+\tfrac{5}{13}},\quad \sqrt[\mu]{53}.$$

Ὅταν δ' ὁ τε ὁ ἀριθμός, οὗ τινος οὕτω παρίσταται ἡ ῥίζα, καὶ ὁ

(*) Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν $\beta^{(\varkappa)}$ καὶ $\gamma^{(\lambda)}$ εἶναι δ, ἔχομεν κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῇ Β'. προτάσει $(\gamma^{(\lambda)})^{\mu}-(\beta^{(\varkappa)})^{\mu}=\delta\,[\mu(\beta^{(\varkappa)})^{\mu-1}+B\times\delta]$.

δείκτης ἦναι ὡρισμένοι, αἱ τοιαῦται παραστάσεις ἐμφαίνουσιν ὡρισμένους ἀσυμμέτρους ἀριθμούς.

Ῥίζαι ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

§ 63. Ἔστω α ἀσύμμετρός τις ἀριθμός, ϐ, ϐ', ϐ'', ... σύμμετροι αὔξοντες καὶ γ, γ', γ'', ... σύμμετροι ἐλαττούμενοι, τείνοντες οἵ,τε πρῶτοι καὶ οἱ δεύτεροι πρὸς τὸν α. Αἱ ῥίζαι

$$(1)\qquad \sqrt[\mu]{\beta},\ \ \sqrt[\mu]{\beta'},\ \ \sqrt[\mu]{\beta''},\dots$$

βαίνουσιν αὐξάνουσαι (§ 38, Β'.), αἱ δὲ

$$(2)\qquad \sqrt[\mu]{\gamma},\ \ \sqrt[\mu]{\gamma'},\ \ \sqrt[\mu]{\gamma''},\dots$$

βαίνουσιν ἐλαττούμεναι, οὖσαι πάντοτε μείζονες τῶν (1)· ὅθεν αἱ μὲν (1) ἔχουσιν ὅριον τὸ ἐλάχιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσι, αἱ δὲ (2) τὸ μέγιστον τῶν ποσῶν, ἅπερ δὲν δύνανται νὰ παρέλθωσι· τὰ ὅρια δὲ αὐτὰ εἶναι ταὐτά· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν (1) καὶ ἑνὸς τῶν (2) δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρά. Ἔστωσαν $\beta^{(\kappa)}$ καὶ $\gamma^{(\lambda)}$ ἀριθμοὶ περιέχοντες τὸν α καὶ δ ἡ διαφορὰ τῶν $\mu^{\tilde{\omega}\nu}$ ῥιζῶν αὐτῶν. Συλλογιζόμενοι ὡς ἐν τῇ Β'. προτάσει τοῦ § 64, εὑρήσομεν ὅτι

$$\left[\sqrt[\mu]{\gamma^{(\lambda)}}\right]^2=\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^2+2\delta.\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}+\delta^2$$

$$\left[\sqrt[\mu]{\gamma^{(\lambda)}}\right]^3=\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^3+3\delta.\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^2+\mathrm{A}.\delta^2$$

$$\left[\sqrt[\mu]{\gamma^{(\lambda)}}\right]^4=\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^4+4\delta.\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^3+\mathrm{A}'.\delta^3$$

$$\left[\sqrt[\mu]{\gamma^{(\lambda)}}\right]^\mu=\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^\mu+\mu\delta.\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^{\mu-1}+\mathrm{B}.\delta^2\cdot$$

ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται καὶ οὕτω

$$\gamma^{(\lambda)}=\beta^{(\kappa)}+\mu\delta.\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^{\mu-1}+\mathrm{B}.\delta^2\cdot$$

ὅθεν
$$\gamma^{(\lambda)}-\beta^{(\kappa)}=\mu\delta.\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^{\mu-1}+\mathrm{B}.\delta^2.$$

Ἐὰν ἡ διαφορὰ δ τῶν $\mu^{\tilde{\omega}\nu}$ ῥιζῶν τῶν $\gamma^{(\lambda)}$ καὶ $\beta^{(\kappa)}$ δὲν ἀπέβαινεν ὁσονδήποτε μικρά, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λαμβάνωνται ὡς ἐγγυτάτω τῶν ὁρίων αὐτῶν, τὸ ϐ'. μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος, ὅπερ εἶναι μεῖζον τοῦ ἀριθμοῦ $\mu\delta.\left[\sqrt[\mu]{\beta^{(\kappa)}}\right]^{\mu-1}$, δὲν ἤθελεν ἀποβαίνει ὁσονδήποτε μικρόν· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ διαφορὰ $\gamma^{(\lambda)}-\beta^{(\kappa)}$ δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρά.

Τὸ κοινὸν ὅριον τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός· ἀποδείκνυται δὲ τοῦτο ὡς ἀπεδείχθη ἐν § 53 ὅτι τὸ κοινὸν ὅριον τῶν αὐτόθι σειρῶν (1) καὶ (2) εἶναι ὁ αὐτὸς πάντοτε ἀριθμός.

Σημειωθήτω διὰ λ ὁ τὸ κοινὸν ὅριον τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) παριστῶν ἀριθμός. Ἡ μ^η δύναμις τοῦ λ περιέχεται μεταξὺ τῶν μ^ων δυνάμεων ἀριθμοῦ τινος τῆς σειρᾶς (1) καὶ ἑτέρου τῆς (2), οἷον μεταξὺ $\beta^{(\varkappa)}$ καὶ $\gamma^{(\lambda)}$, μεταξὺ δὲ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν περιέχεται καὶ ὁ α· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τοῦ α καὶ τοῦ λ^{μ}, οὖσα ἐλάσσων τῆς τῶν $\beta^{(\varkappa)}$ καὶ $\gamma^{(\lambda)}$, ἥτις δύναται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά, εἶναι ἐλάσσων παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα $\alpha = \lambda^{\mu}$. Ἐντεῦθεν δὲ δῆλον ὅτι ὁ λ εἶναι ἀσύμμετρος.

Οὕτω *πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἔχει ῥίζαν οἱουδήποτε βαθμοῦ, ἥτις εἶναι τὸ ὅριον τῶν ὁμοβάθμων ῥιζῶν τῶν πρὸς αὐτὸν τεινόντων συμμέτρων ἀριθμῶν*· ἡ ῥίζα δ' αὕτη εἶναι πάντοτε ἀσύμμετρος.

§ 64. Αἱ ῥίζαι τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παριστῶνται διὰ ῥιζικοῦ, ὡς καὶ αἱ τῶν συμμέτρων· οἷον $\sqrt[6]{5+\sqrt{2}}$, $\sqrt[7]{\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἔστωσαν δύο οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ β καὶ γ· *ἐὰν $\beta<\gamma$, καὶ πᾶσα ῥίζα τοῦ πρώτου εἶναι ἐλάσσων τῆς ὁμοβάθμου ῥίζης τοῦ δευτέρου.* Ἐὰν $\sqrt[\mu]{\beta}=\sqrt[\mu]{\gamma}$, τότε γινόμενα τῶν αὐτῶν παραγόντων ἤθελον εἶσθαι διάφορα· ὅπερ ἄτοπον· ἐὰν δὲ $\sqrt[\mu]{\beta}>\sqrt[\mu]{\gamma}$, τότε γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἤθελεν εἶσθαι ἔλασσον γινομένου ἰσαρίθμων παραγόντων ἐλασσόνων· ὅπερ ἄτοπον (§ 38, Β'.). Δυνάμεθα εὐκόλως νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν μ^ων ῥιζῶν (§ 62 καὶ 63).

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ
ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ
ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ.

Ἀντικείμενον τῆς Ἀλγέβρας.

§ 1. Η Ἄλγεβρα πραγματεύεται περὶ ἀριθμῶν, ὡς καὶ ἡ Ἀριθμητική.

§ 2. Εἷς τῶν κυριωτέρων διακριτικῶν χαρακτήρων τῆς Ἀλγέβρας ἀπὸ τῆς κυρίως Ἀριθμητικῆς εἶναι ὁ ἑξῆς. Ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ ἀντὶ νὰ συλλογιζώμεθα καὶ νὰ ἐργαζώμεθα ἐπὶ μερικῶν ἀριθμῶν, ὡς πράττομεν συνήθως ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, συλλογιζόμεθα καὶ ἐργαζόμεθα ἐπ' ἀριθμῶν παριστωμένων ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ διὰ γραμμάτων.

Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.

§ 3. Οἱ ἀριθμοί, αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων παριστῶνται ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ διὰ συμβόλων, ὧν γίνεται πολλάκις χρῆσις καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ.

Τὰ σύμβολα ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς.

α'. Τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἅπερ παριστῶσιν ἀριθμοὺς γενικῶς.

Ἐμφαίνουσι δὲ ταῦτα ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ οὐ μόνον συμμέτρους ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε, ἀλλὰ καὶ ἀσυμμέτρους.

Ἀριθμοὶ διαφόρως νοούμενοι, ἀλλ' ἔχοντες κοινόν τινα χαρακτῆρα, παριστῶνται πολλάκις διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, φέροντος ὑπεράνω τόνους ἢ πρὸς τὰ κάτω διαστολεῖς ἤτοι ἀριθμοὺς πρὸς διάκρισιν· οἷον

α; α', α'', α''', ...; α_1, α_2, α_3, ... (ἀνάγνωθι α πρῶτον, α δεύτερον, α τρίτον .... α ἕν, α δύο, α τρία ....).

β'. Τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως $+$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται *σὺν* καὶ τίθεται μεταξὺ τῶν προσθετέων πρὸς παράστασιν τοῦ ἀθροίσματος· οἷον $\alpha+\beta+\gamma$, $3+5+8$.

γ'. Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως, ὅπερ ἀπαγγέλλεται *πλὴν*, καὶ τίθεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου πρὸς παράστασιν τῆς διαφορᾶς· οἷον $\alpha-\beta$, $8-3$.

δ'. Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\times$ ἢ . (στιγμὴ), ὅπερ ἀπαγγέλλεται *ἐπὶ* καὶ τίθεται μεταξὺ τῶν παραγόντων πρὸς παράστασιν τοῦ γινομένου· οἷον $\alpha\times\beta\times\gamma$ ἢ $\alpha.\beta.\gamma$, $3\times7\times9$ ἢ $3.7.9$.

Ὅταν οἱ παράγοντες ἦναι γενικοὶ ἀριθμοί, ἤγουν παριστῶνται διὰ γραμμάτων, τὸ γινόμενον παρίσταται συνήθως ἄνευ σημείου πολλαπλασιασμοῦ, γραφομένων τῶν παραγόντων ἑξῆς καὶ πλησίον· οἷον $\alpha\beta\gamma$. Μόνον δ' ὅταν οἱ παράγοντες παριστῶνται διὰ γραμμάτων, δυνάμεθα νὰ παραλείπωμεν τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

ε'. Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως : ἢ —, δι' οὗ παρίσταται τὸ πηλίκον καὶ ὅπερ ἀπαγγέλλεται *διά* καὶ τὸ μὲν : τίθεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου, οἷον $\alpha:\beta$, $5:3$· τὸ δὲ — ὑπὸ τὸν διαιρετέον, ὑπ' αὐτὸ δὲ ὁ διαιρέτης, οἷον $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{5}{3}$. Τὸ σημεῖον — εἶναι τὸ συνηθέστερον ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ.

ς'. Ὁ ἐκθέτης, δι' οὗ παριστῶνται αἱ δυνάμεις τῶν ἀριθμῶν· εἶναι δ' οὗτος ἀριθμὸς ἴσος τῷ βαθμῷ τῆς δυνάμεως, γραφόμενος ἄνω καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ τινος δείκνυται ἡ δύναμις· οἷον α^2 (τετράγωνον τοῦ α, ἀνάγνωθι α δύο), α^3 (κύβος τοῦ α, ἀνάγνωθι α τρία), α^4, α^5, α^6, ..., α^μ· $3^2(=9)$, $3^3(=27)$, $3^4(=81)$.

ζ'. Τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$, ὅπερ καλεῖται *ῥιζικὸν* καὶ χρησιμεύει πρὸς δεῖξιν ῥιζῶν· καὶ ὁ μὲν ἀριθμός, οὗ τινος δείκνυται ἡ ῥίζα, γράφεται ἐντὸς τοῦ σημείου αὐτοῦ, ὁ δὲ βαθμὸς τῆς ῥίζης σημειοῦται ἐν τῇ πρὸς ἀριστερὰν γωνίᾳ τοῦ σημείου αὐτοῦ καὶ καλεῖται *δείκτης*· οἷον $\sqrt[3]{\alpha}$ (κυβικὴ ῥίζα τοῦ α), $\sqrt[4]{\alpha}$ (τετάρτη ῥίζα τοῦ α, ἤγουν ἀριθμός, οὗ ἡ τετάρτη δύναμις εἶναι α), $\sqrt[5]{\alpha}$ (πέμπτη ῥίζα τοῦ α, ἤγουν ἀριθμός, οὗ ἡ πέμπτη δύναμις εἶναι α), $\sqrt[\mu]{\alpha}$ (μὴ ῥίζα τοῦ α, ἤγουν ἀριθμός, οὗ ἡ μὴ δύναμις εἶναι α).

η'. Ἡ παρένθεσις, ἐν ᾗ γράφονται πολλάκις ἀριθμοί, ὄντες ἐξαγόμενα πράξεων ἐπ' ἄλλων ἀριθμῶν, δεικνυόμενα διὰ σημείων· π. χ. ἡ παράστασις $(\alpha+\beta)^3$ ἐμφαίνει τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$.

§ 4. Διὰ τῶν ἀνωτέρω συμβόλων παριστῶνται ἀριθμοὶ καὶ πράξεις. Ὑπάρχουσιν ἔτι καὶ τὰ ἑξῆς πρὸς παράστασιν ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων.

α'. Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος $=$, ὅπερ ἀπαγγέλλεται *ἴσον* καὶ τίθεται μεταξὺ δύο ἴσων ἀριθμῶν πρὸς δεῖξιν τῆς ἰσότητος αὐτῶν· οἷον $\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$, $\alpha\times\alpha=\alpha^2$.

Οἱ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος γεγραμμένοι ἴσοι ἀριθμοὶ λέγονται *μέλη αὐτῆς*· καὶ ὁ μὲν ἐξ ἀριστερῶν λέγεται *πρῶτον μέλος*, ὁ δ' ἐκ δεξιῶν *δεύτερον μέλος*.

β'. Τὰ σημεῖα τῆς ἀνισότητος $>$ καὶ $<$, ὧν τὸ μὲν πρῶτον ἀπαγγέλλεται *μεῖζον*, τὸ δὲ *ἔλασσον*· δηλοῦσι δ' ἀμφότερα ὅτι οἱ ἑκατέρωθεν αὐτῶν γεγραμμένοι ἀριθμοὶ εἰσὶν ἄνισοι· γράφεται δὲ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ μὲν $>$ ὁ μείζων, τοῦ δὲ $<$ ὁ ἐλάσσων ἀριθμός· ὥστε ὁ μὲν μείζων γράφεται πάντοτε πρὸς τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας, ὁ δ' ἐλάσσων πρὸς τὴν κορυφήν· οἷον $5>3$, $\frac{3}{7}<1$.

Οἱ ἑκατέρωθεν τῶν σημείων τῆς ἀνισότητος γεγραμμένοι ἀριθμοὶ καλοῦνται *μέλη αὐτῆς*· καὶ ὁ μὲν ἐξ ἀριστερῶν *πρῶτον μέλος*, ὁ δ' ἐκ δεξιῶν *δεύτερον μέλος*.

Παραστάσεις ἢ τύποι.

§ 5. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστῶνται διὰ γραμμάτων, αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελῶνται, ὡς τοῦτο γίνεται ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι προσδιωρισμένοι· ὡς δ' αἱ πράξεις, οὕτω καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων δείκνυνται τότε διὰ σημείων. Π. χ. ἡ ἑξῆς παράστασις

$$\frac{\alpha\beta^4-\sqrt{\alpha+\gamma}}{\alpha^4-\beta^2}$$

ἐμφαίνει τὸ ἐξαγόμενον τῶν ἐν αὐτῇ δεικνυομένων πράξεων ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ.

Τὰ οὕτω δεικνυόμενα ἐξαγόμενα καλοῦνται *παραστάσεις*.

Δυνάμεθα νὰ δεικνύωμεν διὰ σημείων καὶ τὰ ἐξαγόμενα πράξεων ἐπὶ μερικῶν ἀριθμῶν· οἷον

$$\frac{5\times 2^4}{7+\sqrt{8}}.$$

Αἱ τοιαῦται παραστάσεις εἰσὶ *μερικαί*· αἱ δὲ περιέχουσαι γράμματα εἰσὶ *γενικαί*.

Αἱ γενικαὶ παραστάσεις καλοῦνται καὶ *τύποι*, ἔτι δὲ καὶ *ἀλγεβρικαί*· ἀλλ' ἡ λέξις αὕτη ἔχει καὶ ἄλλην σημασίαν (§ 62, Σημ. Α'.).

§ 6. Καλεῖται *μερικὴ τιμὴ* γενικῆς παραστάσεως ὁ ἐξ αὐτῆς προκύπτων μερικὸς ἀριθμὸς, ὅταν τεθῶσι μερικοὶ ἀριθμοὶ ἀντὶ τῶν ἐν αὐτῇ γραμμάτων. Π. χ. ἐν τῇ παραστάσει $\frac{3\alpha^2-\beta}{2\gamma}$ ποιοῦντες $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=4$ εὑρίσκομεν ἀντιστοιχοῦσαν μερικὴν τιμὴν $\frac{9}{8}$· ποιοῦντες δὲ $\alpha=3$, $\beta=5$, $\gamma=1$ εὑρίσκομεν 11.

Διάφορα εἴδη παραστάσεων.

§ 7. Παράστασίς τις λέγεται *σύμμετρος*, ὅταν οὐδεμία ἐξαγωγὴ ῥίζης δεικνύηται ἐν αὐτῇ· ἄλλως καλεῖται *ἀσύμμετρος*.

Π. χ. ἡ παράστασις $\frac{(\alpha^3+\beta^3)(\alpha+\beta-\gamma)}{5\gamma^4}$ εἶναι σύμμετρος· ἡ δὲ $\sqrt[3]{\alpha+\beta}+4\alpha\beta$ εἶναι ἀσύμμετρος.

Ἡ σύμμετρος παράστασις δύναται νὰ παρέχῃ μερικὰς τιμὰς οὐ μόνον συμμέτρους, ἀλλὰ καὶ ἀσυμμέτρους, κατὰ τοὺς ἀριθμοὺς, οὓς ἂν ἀντικατασταίημεν τοῖς γράμμασιν· ἐπίσης καὶ ἐξ ἀσυμμέτρου παραστάσεως δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μερικὰς τιμὰς συμμέτρους ἢ ἀσυμμέτρους. Π. χ. ἐν τῇ συμμέτρῳ παραστάσει $\alpha+\beta$ ποιοῦντες $\alpha=7$ καὶ $\beta=\sqrt{3}$ ἔχομεν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $7+\sqrt{3}$· ἐπίσης ἐν τῇ ἀσυμμέτρῳ $\sqrt{\alpha+\beta}$ ποιοῦντες $\alpha=2$ καὶ $\beta=7$ ἔχομεν τὸν σύμμετρον ἀριθμὸν 3.

§ 8. Παράστασις σύμμετρος, μὴ περιέχουσα σημεῖον διαιρέσεως, καλεῖται *ἀκέραιος*· π. χ. ἡ ἑξῆς παράστασις

$$(5\alpha^2-4\alpha^2\beta)(6\alpha^3-3\alpha\beta)$$

εἶναι ἀκέραιος.

Αἱ ἀκέραιοι παραστάσεις παρέχουσι μερικὰς τιμὰς ἀκεραίους ἢ μή, κατὰ τοὺς ἰδιαιτέρους ἀριθμούς, οἵτινες ἤθελον τεθῆ ἀντὶ τῶν ἐν αὐταῖς γραμμάτων.

§ 9. Παράστασις, μὴ περιέχουσα οὐδὲν σημεῖον προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως, καλεῖται *μονώνυμον*· οἷον $5\alpha^3\beta\gamma^2$, $\frac{3}{4}\alpha^2\beta\delta^3$, $\frac{4\alpha^2\delta}{5\beta\gamma^3}$, $4\alpha^2\sqrt{\beta}$.

Τὸ μονώνυμον εἶναι ἀκέραιον, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἐν αὐτῷ σημεῖον διαιρέσεως, οὔτε ῥιζικὸν (§ 8)· οἷον $5\alpha^3\beta^2\gamma$.

Ἀκεραίων μονωνύμων καλεῖται *συντελεστὴς* ὁ προταττόμενος μερικὸς παράγων· π. χ. τοῦ $5\alpha^3\beta\gamma^2$ συντελεστὴς εἶναι ὁ 5, ἐμφαίνων ταὐτό, ὅπερ καὶ ἐν τῇ παραστάσει $5\times\alpha^3\times\beta\times\gamma^2$.

Καλεῖται γενικώτερον συντελεστὴς πᾶς προταττόμενος παράγων· π. χ. ἐν τῇ παραστάσει $(\alpha^5-2\alpha^3\beta+\beta^2)\chi^5$ ὁ πρῶτος παράγων $\alpha^5-2\alpha^3\beta+\beta^2$ δύναται νὰ κληθῇ συντελεστής.

§ 10. Παράστασις ἀποτελουμένη ἐκ μονωνύμων προστιθεμένων ἢ ἀφαιρουμένων καλεῖται *πολυώνυμον*· οἷον $\alpha^3+\frac{2\alpha}{5\gamma}-\beta\sqrt{\gamma}+4\alpha\beta\gamma^3$.

Τὰ μονώνυμα, ἐξ ὧν ἀπαρτίζεται τὸ πολυώνυμον, καλοῦνται *ὅροι* αὐτοῦ.

Τὸ πολυώνυμον εἶναι ἀκέραιον, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ ἦναι ἀκέραια μονώνυμα· τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς

$$2\alpha^5-6\alpha^4\beta^2+15\alpha^3\beta^3-7\alpha\beta\gamma^3.$$

Οἱ φέροντες τὸ σημεῖον $+$ ὅροι, λέγονται *θετικοί*· οἱ δὲ τὸ $-$, *ἀρνητικοί*. Ὁ πρῶτος ὅρος, ὅστις δὲν φέρει σημεῖον, λέγεται καὶ αὐτὸς θετικός.

Τὸ δύο μόνον ὅρους ἔχον πολυώνυμον καλεῖται ἰδίως *διώνυμον*, τὸ δὲ τρεῖς ὅρους ἔχον *τριώνυμον*.

§ 11. Ὅροι, διαφέροντες μόνον κατὰ τὰ σημεῖα καὶ τοὺς συντελεστάς, καλοῦνται *ὅμοιοι*. Π. χ. ἐν τῷ πολυωνύμῳ

$$3\alpha^2\beta^3\gamma-4\alpha\beta^2\sqrt{\gamma}+5\alpha^2\beta^3\gamma-\tfrac{3}{5}\alpha\beta^2\sqrt{\gamma}-7\alpha^2\beta^3\gamma+\alpha\beta^2\sqrt{\gamma}-6\alpha^3\beta^3$$

οἱ ὅροι $3\alpha^2\beta^3\gamma$, $+5\alpha^2\beta^3\gamma$, $-7\alpha^2\beta^3\gamma$ εἰσὶν ὅμοιοι· ἐπίσης καὶ οἱ $-4\alpha\beta^2\sqrt{\gamma}$, $-\frac{3}{5}\alpha\beta^2\sqrt{\gamma}$, $+\alpha\beta^2\sqrt{\gamma}$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ὁμοίων ὅρων ἕπεται ὅτι οἱ ἀκέραιοι ὅμοιοι ὅροι ἔχουσι τὰ αὐτὰ γράμματα μετὰ τῶν αὐτῶν ἐκθετῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Θέλομεν ἐνίοτε καλεῖ *πολυωνυμικὴν παράστασιν* τὴν ἀποτελουμένην ἐκ διαφόρων ἄλλων παραστάσεων προστιθεμένων ἢ ἀφαιρουμένων, αἵτινές εἰσιν οἱ ὅροι ἐκείνης· οὕτω παράστασις τοιάδε

$$Α—Β+Γ+Δ—Ε\ldots,$$

οἱωνδήποτ' οὐσῶν τῶν μερικωτέρων αὐτῆς παραστάσεων Α, Β, Γ, Δ, Ε, ..., εἶναι πολυωνυμική, ἧς οἱ ὅροι Α, Β, Γ, Δ, Ε,...

Ὠφέλειαι ἐκ τῆς χρήσεως τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων.

§ 12. Ποικίλαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῆς χρήσεως τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων ὠφέλειαι:

ά. *Διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν συντομώτερον καὶ ἐναργέστερον ἐκφωνήσεις θεωρημάτων.*

Π. χ. τὸ ἑξῆς θεώρημα, *τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων αὐτῶν σὺν τῷ διπλασίῳ τοῦ γινομένου αὐτῶν* παρίσταται συντομώτερον καὶ ἐναργέστερον ὡς ἑξῆς

$$(α+β)^2=α^2+β^2+2αβ.$$

Ὡσαύτως καὶ τὸ ἑξῆς *τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἧς ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων* παρίσταται συντόμως καὶ ἐναργῶς ὧδε

$$α^μ \times α^ν = α^{μ+ν}$$

β'. *Διὰ τῆς χρήσεως τῶν σημείων αἱ ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων ἐκτίθενται ἐναργέστερον.*

Ἡ χρῆσις τῶν σημείων πρὸς ἀπόδειξιν θεωρημάτων γίνεται πολλαχοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἐὰν προσπαθήσωμεν ν' ἀποδείξωμέν τι τῶν θεωρημάτων αὐτῶν, μὴ ποιοῦντες χρῆσιν σημείων, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι τότε ἡ ἀπόδειξις καθίσταται ἀσαφὴς καὶ δυςνόητος.

Π. χ. Ἔστω τὸ ἑξῆς θεώρημα διαιρέσεως ἀκεραίων ἀριθμῶν· π ο λ λ α π λ α σ ι α ζ ο μ έ ν ο υ δ ι α ι ρ ε τ έ ο υ τ ε κ α ὶ δ ι α ι ρ έ τ ο υ ἐ π ὶ τ ὸ ν α ὐ τ ὸ ν ἀ ρ ι θ μ ὸ ν, τ ὸ μ ὲ ν π η λ ί κ ο ν δ ὲ ν μ ε τ α β ά λ λ ε τ α ι, τ ὸ δ' ὑ π ό λ ο ι π ο ν π ο λ λ α π λ α σ ι ά ζ ε τ α ι ἐ π ὶ τ ὸ ν α ὐ τ ὸ ν ἀ ρ ι θ μ ό ν. Ἂς ἐπαναλάβωμεν τὴν γνωστὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ, μὴ ποιοῦντες χρῆσιν σημείων καὶ συλλογιζόμενοι ἐπὶ μερικοῦ τινος παραδείγματος·

αῖον ἐπὶ τοῦ πηλίκου τοῦ 47 διὰ 5. Τοῦ πηλίκου τοῦ 47 διὰ 5 ὄντος 9 καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως 2, ὁ 47 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ 5 ἐπὶ 9 σὺν 2· ὅθεν τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπ' ἀριθμὸν οἱονδήποτε, οἷον ἐπὶ 8, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ἐπὶ 8 τοῦ ἀθροίσματος τοῦ γινομένου τοῦ 5 ἐπὶ 9 καὶ τοῦ 2· τὸ δὲ γινόμενον αὐτὸ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τοῦ 5 ἐπὶ 9 ἐπὶ 8 καὶ τοῦ 2 ἐπὶ 8· ἑπομένως τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 8 ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τοῦ 5 ἐπὶ 9 ἐπὶ 8, εἴτε τοῦ 5 ἐπὶ 8 ἐπὶ 9, καὶ τοῦ 2 ἐπὶ 8. Τοῦ διαιρέτου 5, ὄντος μείζονος τοῦ ὑπολοίπου 2, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 8 εἶναι μεῖζον τοῦ γινομένου τοῦ 2 ἐπὶ 8· ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 8 περιέχει ἐννεάκις τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 8 καὶ ἔτι τὸ γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ 8, ἕπεται ὅτι τὸ μὲν πηλίκον τοῦ γινομένου τοῦ 47 ἐπὶ 8 διὰ τοῦ γινομένου τοῦ 5 ἐπὶ 8 εἶναι 9, τὸ δ' ὑπόλοιπον διαιρέσεως εἶναι 2 ἐπὶ 8.

Ἡ ἀπόδειξις αὕτη εἶναι αὐτὴ ἐκείνη, ἥτις γίνεται καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν σημείων· ἀλλ' εἶναι ἀσαφῶς ἐκτεθειμένη, μὴ γενομένης χρήσεως σημείων.

γʹ. *Διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων αἱ λύσεις τῶν προβλημάτων γίνονται συντομώτερον καὶ εὐκολώτερον.*

Ἔστω τὸ ἑξῆς πρόβλημα

Μερίσαι τὸν 587 εἰς τέσσαρα ἄνισα μέρη, οἷα τὸ μὲν πρῶτον ὑπερέχειν τὸ δεύτερον κατὰ 29, τοῦτο δὲ τὸ τρίτον κατὰ 87 καὶ τοῦτο τὸ τέταρτον κατὰ 53.

Λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο μὴ ποιοῦντες χρῆσιν σημείων.

Τὸ τρίτον μέρος ἰσοῦται τῷ τετάρτῳ ηὐξημένῳ κατὰ 53. Τὸ δεύτερον μέρος ἰσοῦται τῷ τρίτῳ ηὐξημένῳ κατὰ 87· ἄρα ἰσοῦται καὶ τῷ τετάρτῳ ηὐξημένῳ κατὰ 53 καὶ 87. Τὸ πρῶτον μέρος ἰσοῦται τῷ δευτέρῳ ηὐξημένῳ κατὰ 29· ἄρα ἰσοῦται καὶ τῷ τετάρτῳ ηὐξημένῳ κατὰ 53, 87 καὶ 29. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μερῶν, ἤτοι ὁ 587, σύγκειται ἐκ τοῦ τετραπλασίου τοῦ τετάρτου μέρους, τοῦ τριπλασίου τοῦ 53, τοῦ διπλασίου τοῦ 87 καὶ τοῦ 29· ὅθεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ 587 τὸ τριπλοῦν τοῦ 53, τὸ διπλοῦν τοῦ 87 καὶ τὸν 29, ἔχομεν ὑπόλοιπον 225, ἴσον τῷ τετραπλασίῳ τοῦ τετάρτου μέρους· ἄρα ἅπαξ τὸ τέταρτον μέρος εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 225, ἤτοι $56+\frac{1}{4}$. Αὐξάνοντες τὸν τελευταῖον τοῦτον ἀριθμὸν διαδοχικῶς κατὰ 53, 87, 29 ἔχομεν καὶ τὰ λοιπὰ μέρη $109+\frac{1}{4}$, $196+\frac{1}{4}$, $225+\frac{1}{4}$.

Λύσωμεν ἤδη τὸ αὐτὸ πρόβλημα χρώμενοι σημείοις.

Παραστήσωμεν τὸ τέταρτον μέρος διὰ τοῦ γράμματος x. Ἔχομεν, καθὰ διαλαμβάνει ἡ τοῦ προβλήματος ἐκφώνησις·

$$
\begin{aligned}
\delta'.\ \text{μέρος} &= \chi \\
\gamma'.\ \ \text{»} &= \chi+53 \\
\beta'.\ \ \text{»} &= \chi+53+87 \\
\alpha'.\ \ \text{»} &= \chi+53+87+29.
\end{aligned}
$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μερῶν, ἤγουν ὁ 587, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν· ἤγουν

$$587=\chi+\chi+\chi+\chi+53+53+53+87+87+29=4\chi+362$$

ὅθεν $$587-362=4\chi$$

ὅθεν $$\chi=\frac{587-362}{4}=56+\tfrac{1}{4}.$$

Τὰ λοιπὰ μέρη εὑρίσκονται ὡς ἀνωτέρω.

Παραβάλλοντες τὴν τελευταίαν λύσιν πρὸς τὴν πρώτην, παρατηροῦμεν ὅτι ἐν τῇ τελευταίᾳ αἱ διάφοροι ἰσότητες παρίστανται συντομώτερον καὶ ἐναργέστερον, ἡ δὲ μετάβασις ἀπὸ ἰσοτήτων εἰς ἄλλας, συναγομένας ἐκ τῶν πρώτων, γίνεται εὐκολώτερον· οὕτω δὲ ἡ δευτέρα λύσις ἀποβαίνει ἁπλουστέρα τῆς πρώτης, καίπερ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν ἐν ἑκατέρᾳ γινομένων.

δ'. *Διὰ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων καθίσταται προφανὴς ἡ γενικότης τῶν ἀποδείξεων.*

Εἴδομεν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ὅτι, ὅταν τὰ παραδείγματα, ἐφ' ὧν συλλογιζόμεθα πρὸς ἀπόδειξιν προτάσεώς τινος, ἦναι μερικοὶ ἀριθμοί, ἡ γενικότης τοῦ συλλογισμοῦ, ἥτις ὑφίσταται πάντοτε, δὲν εἶναι καταφανής, ὡς ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστῶνται γενικῶς διὰ γραμμάτων.

ε'. *Διὰ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων αἱ λύσεις τῶν προβλημάτων γενικεύονται.*

Ἔστω τὸ ἑξῆς πρόβλημα, ὅπερ εἶναι ταὐτὸν τῷ ἀνωτέρω λυθέντι, ἀλλ' ἐν ᾧ τὰ διδόμενα παριστῶνται γενικῶς διὰ γραμμάτων.

Μερίσαι ἀριθμόν τινα α εἰς τέσσαρα μέρη, οἷα τὸ μὲν πρῶτον ὑπερέχειν τὸ δεύτερον κατὰ τὸν ἀριθμὸν β, τοῦτο τὸ τρίτον κατὰ γ καὶ τοῦτο τὸ τέταρτον κατὰ δ.

Ἔστω χ τὸ τέταρτον μέρος. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τὰ τέσσαρα μέρη εἰσὶ

δ'. μέρος . . . . χ

γ'. » . . . . $\chi+\delta$

β'. » . . . . $\chi+\delta+\gamma$

α'. » . . . . $\chi+\delta+\gamma+\beta$.

ὅθεν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μερῶν, εἴτε ὁ μεριστέος α, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $\chi+\chi+\chi+\chi+\delta+\delta+\delta+\gamma+\gamma+\beta$, εἴτε $4\chi+3\delta+2\gamma+\beta$· ἔχομεν δηλονότι τὴν ἰσότητα

$$4\chi+3\delta+2\gamma+\beta=\alpha\cdot$$

ἀφαιροῦντες $3\delta+2\gamma+\beta$ ἐκ τῶν δύο μελῶν αὐτῆς συνάγομεν

$$4\chi=\alpha-(3\delta+2\gamma+\beta)\cdot$$

διαιροῦντες δὲ τὰ δύο μέλη ταύτης διὰ 4, συνάγομεν

$$\chi=\frac{\alpha-(3\delta+2\gamma+\beta)}{4}.$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ τετάρτου μέρους. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι *τύπος*, ἐν ᾧ δείκνυνται αἱ ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν ἐκτελεσταῖαι πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ τετάρτου μέρους. Κατὰ τὸν τύπον αὐτὸν *ἵνα ἔχωμεν τὸ τέταρτον μέρος, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ μεριστέου τὸ τριπλοῦν τῆς διαφορᾶς τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου μέρους, τὸ διπλοῦν τῆς διαφορᾶς τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου καὶ τὴν διαφορὰν τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, τοῦ δ' ἐξαγομένου λαμβάνομεν τὸ τέταρτον.*

Ἵνα λύσωμεν λοιπὸν πρόβλημα μερικόν, περιεχόμενον ἐν τῷ προκειμένῳ γενικῷ προβλήματι, οἷον εἶναι τὸ ἀνωτέρω λυθὲν (γ'), ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν τελευταῖον κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ τετάρτου μέρους, εἴτε ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον

$$(1)\quad \frac{\alpha-(3\delta+2\gamma+\beta)}{4},$$

ὅστις παρίστησιν ἐν συνόψει τὸν αὐτὸν κανόνα. Π. χ. ποιοῦντες ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ $\alpha=587$, $\beta=39$, $\gamma=87$, $\delta=53$ καὶ ἐκτελοῦντες ἐπὶ τῶν ἀντικαθισταμένων μερικῶν ἀριθμῶν τὰς δεικνυομένας ἐν τῷ τύπῳ πράξεις, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον $56+\frac{1}{4}$, ὅπερ εἴχομεν ἀνωτέρω εὕρει, λύσαντες ἀπ' εὐθείας τὸ μερικὸν πρόβλημα. Ὁ τύπος (1) παρίστησι λοιπὸν συλλήβδην τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου πάντων τῶν μερικῶν προβλημάτων, τῶν ὑπαγομένων ἐν τῷ προταθέντι γενικῷ προβλήματι.

Οὕτω διὰ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων δυνάμεθα νὰ κάμνωμεν μίαν μόνην λύσιν καὶ νὰ περιλαμβάνωμεν ἐντὸς ἑνὸς μόνου τύπου τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου πάντων τῶν προβλημάτων, ὧν αἱ ἐκφωνήσεις διαφέρουσι μόνον ὡς πρὸς τοὺς δεδομένους ἀριθμούς· ἐν ἄλλαις λέξεσι δυνάμεθα νὰ γενικεύωμεν τὰς λύσεις.

ς΄. *Διὰ τῆς χρήσεως τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων δυνάμεθα εὐκόλως νὰ διορῶμεν σχέσεις ὑπαρχούσας μεταξὺ θεωρημάτων.*

Ἔστωσαν τὰ ἑξῆς θεωρήματα τῆς Γεωμετρίας.

1ον. *Αἱ περιφέρειαι ἀναλογοῦσι πρὸς τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν, ἤ, ὅπερ ταὐτὸν, ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντα κύκλον.*

2ον. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται τὸ γινομένῳ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.*

3ον. *Οἱ κύκλοι ἀναλογοῦσι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ἐκφωνοῦντες οὕτω τὰ θεωρήματα αὐτὰ, δὲν δυνάμεθα νὰ διΐδωμεν εὐκόλως σχέσιν τινὰ μεταξὺ αὐτῶν τοιαύτην, ὥστε τὸ ἓν, φέρ' εἰπεῖν, ν' ἀποδεικνύηται διὰ τῶν ἄλλων.

Παραστήσωμεν τὰ θεωρήματα αὐτὰ δι' ἀλγεβρικῶν συμβόλων (ά.). Ἔστω Π ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς, Α ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ, Ε τὸ ἐμβαδὸν καὶ π ὁ σταθερὸς λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. Τὸ μὲν πρῶτον θεώρημα παρίσταται διὰ τῆς ἰσότητος

$$(1) \qquad \frac{\Pi}{2A}=\pi\cdot$$

τὸ δὲ δεύτερον διὰ τῆς ἑξῆς

$$(2) \qquad E=\Pi\times\frac{A}{2}.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) συνάγομεν $\Pi=2\pi A$· ἀντεισάγοντες δ' ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς (2) ἀντὶ Π τὸ ἴσον $2\pi A$, συνάγομεν

$$E=2\pi A\times\frac{A}{2}=\pi A^2.$$

Ἔστωσαν Ε΄ καὶ Α΄ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ ἀκτὶς ἑτέρου τινὸς κύκλου· ἔχομεν πάλιν

$$E'=\pi A'^2.$$

ὅθεν $$E:E'::\pi A^2:\pi A'^2::A^2:A'^2.$$

Ἐφθάσαμεν οὕτως εἰς τὸ τρίτον θεώρημα. Ἄνευ τῆς χρήσεως ἀλγεβρικῶν συμβόλων δυσκόλως ἠδύνατό τις, διορῶν τὴν σχέσιν τοῦ τελευταίου θεωρήματος μετὰ τῶν δύο ἄλλων, νὰ παραστήσῃ αὐτὸ ὡς πόρισμα ἐκείνων.

Ἀλγεβρικὸς λογισμός.

§ 13. Δύο γενικαὶ παραστάσεις καλοῦνται *ἰσοδύναμοι*, ὅταν αἱ μερικαὶ αὐτῶν τιμαὶ ἦναι αἱ αὐταί, οἱοιδήποτε μερικοὶ ἀριθμοὶ κἂν τεθῶσιν ἀντὶ τῶν ἐν αὐταῖς γραμμάτων. Π. χ. αἱ παραστάσεις $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$ εἰσὶν ἰσοδύναμοι· διότι ἴσα πάντοτε ἐξ ἑκατέρας προκύπτουσιν ἐξαγόμενα, ὅταν ἀντὶ τῶν ἐν αὐταῖς γραμμάτων τεθῶσιν οἱοιδήποτε μερικοὶ ἀριθμοί.

§ 14. Δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν συμβολικῶς τὸ ἐξαγόμενον πράξεων, γινομένων ἐπὶ διαφόρων παραστάσεων, ὡς ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστῶνται ἕκαστος δι' ἑνὸς γράμματος, ποιοῦντες ἐν δέοντι καὶ χρῆσιν τῶν παρενθέσεων πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως.

Π. χ. ἔστωσαν αἱ παραστάσεις

$$\frac{5\alpha+3\beta}{\alpha^2+3(\beta-\gamma)} \text{ καὶ } \sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}-4\gamma.$$

Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν οὕτω

$$\frac{5\alpha+3\beta}{\alpha^2+3(\beta-\gamma)}+\left(\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}-4\gamma\right)\cdot$$

τὴν διαφορὰν τῆς δευτέρας ἀπὸ τῆς πρώτης οὕτω

$$\frac{5\alpha+3\beta}{\alpha^2+3(\beta-\gamma)}-\left(\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}-4\gamma\right)\cdot$$

τὸ γινόμενον αὐτῶν οὕτω

$$\frac{5\alpha+3\beta}{\alpha^2+3(\beta-\gamma)}\times\left(\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}-4\gamma\right)\cdot$$

τὸ πηλίκον τῆς πρώτης διὰ τῆς δευτέρας οὕτω

$$\frac{\left(\frac{5\alpha+3\beta}{\alpha^2+3(\beta-\gamma)}\right)}{\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}-4\gamma}.$$

Αἱ τοιαῦται ἄμεσοι παραστάσεις ἀθροίσματος, διαφορᾶς, κ.τ.λ. γενικῶν παραστάσεων εἰσὶ πολλάκις ἐπιδεκτικαὶ ἁπλοποιήσεων, ἤγουν δύνανται νὰ τρέπωνται εἰς ἰσοδυνάμους ἁπλουστέρας. Αἱ πράξεις, δι' ὧν αἱ ἁπλοποιήσεις αὗται γίνονται, ἀποτελοῦσι τὸν *ἀλγεβρικὸν λογισμόν*.

Ἀναφέρονται δ' ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ γενικοὶ κανόνες τοιούτων πράξεων ἰδίως ὅταν αἱ παραστάσεις, ἐφ' ὧν γίνονται, ἦναι μονώνυμα ἢ πολυώνυμα, μάλιστα ἀκέραια.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τοῖς ἑξῆς λέγοντες ἁπλῶς *μονώνυμα* ἢ *πολυώνυμα*, θέλομεν ἐννοεῖ ἀκεραίους τοιαύτας παραστάσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Προοιμιώδεις ἀρχαί.

§ 15. Αἱ ἁπλοποιήσεις, περὶ ὧν ἔσεται λόγος ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ, στηρίζονται ἐπὶ τῶν ἑξῆς γνωστῶν ἀρχῶν.

α'. *Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ, καθ' οἵαν τάξιν κἂν προστεθῶσιν οὗτοι.*

Ἐν τῷ ἀξιώματι τούτῳ περιέχονται καὶ ἄλλα (*), ἰδίως δὲ τὸ ἑξῆς. *Τὸ αὐτὸ ἔχομεν ἐξαγόμενον, εἴτε προσθέσωμεν εἰς ἀριθμόν τινα διαδοχικῶς ἄλλους, εἴτε προσθέσωμεν εἰς τὸν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τελευταίων.*

β'. *Τὸ αὐτὸ ἔχομεν ἐξαγόμενον, εἴτε ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τινος διαδοχικῶς ἄλλους, εἴτε ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τὸ ἄθροισμα τῶν τελευταίων.*

γ'. *Ἡ ἀξία πολυωνύμου δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων τῶν ὅρων αὐτοῦ.*

Ἡ ἀρχὴ αὕτη οὐδόλως διαφέρει τῆς ἑξῆς, ὅταν ἐπ' ἀριθμοῦ

(*) Ὅρα Ἀριθμητικήν.

τινὸς γίνωνται διαδοχικῶς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις ἄλλων ἀριθμῶν, τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτὸ, καθ' οἱανδήποτε τάξιν κἂν γίγνωνται αἱ πράξεις αὗται.

Ἐφαρμόζεται δ' ἡ ἀρχὴ αὕτη οὐ μόνον εἰς τὰ ἀκέραια πολυώνυμα, ἀλλὰ καὶ εἰς πᾶσαν πολυωνυμικὴν παράστασιν.

δ'. *Ἀφαιρεῖται ἀπ' ἀριθμοῦ τινος διαφορὰ δύο ἄλλων, προστιθεμένου εἰς ἐκεῖνον τοῦ ἀφαιρετέου τῆς διαφορᾶς καὶ ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ἐντεῦθεν ἀθροίσματος τοῦ μειωτέου.*

Ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν α καὶ $\beta-\gamma$ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν αὐξήσωμεν ἀμφοτέρους κατὰ γ· εἶναι λοιπὸν ἴση τῇ τῶν $\alpha+\gamma$ καὶ β.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις μονωνύμων. Ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων.

§ 16. Τὸ ἐξαγόμενον διαδοχικῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων μονωνύμων παρίσταται διὰ πολυωνύμου, οὗτινος θετικοὶ μὲν ὅροι εἰσὶ τὰ προστιθέμενα μονώνυμα, ἀρνητικοὶ δὲ τὰ ἀφαιρούμενα.

Ἐπίσης τὸ ἐξαγόμενον πολυωνύμου καὶ μονωνύμων προστιθεμένων ἢ ἀφαιρουμένων παρίσταται διὰ πολυωνύμου ἔχοντος ὅρους τούς τε τοῦ πρώτου πολυωνύμου καὶ τὰ λοιπὰ μονώνυμα, τὰ μὲν προστιθέμενα μετὰ τοῦ σημείου $+$, τὰ δ' ἀφαιρούμενα μετὰ τοῦ $-$. Π. χ. τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως τοῦ πολυωνύμου $3\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+3\alpha\beta\gamma$ μετὰ τῶν μονωνύμων $3\alpha^3$ καὶ $6\alpha\beta^2$ καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ ἐντεῦθεν ἀθροίσματος ἀφαιρέσεως τῶν $2\alpha^3$, $7\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta^2$ παρίσταται διὰ τοῦ ἑξῆς πολυωνύμου

$$3\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+3\alpha\beta\gamma+3\alpha^3+6\alpha\beta^2-2\alpha^3-7\alpha\beta\gamma-\alpha\beta^2.$$

§ 17. Εἰς τὰ ἐκ τοιούτων πράξεων προκύπτοντα πολυώνυμα δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσιν ὅμοιοι ὅροι (§ 12). Π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον ὑπάρχουσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι $-2\alpha\beta^2$, $+6\alpha\beta^2$, $-\alpha\beta^2$· ἐπίσης καὶ οἱ $+3\alpha\beta\gamma$, $-7\alpha\beta\gamma$.

Δύο ἢ πλείονες ὅμοιοι ἀλλήλοις ὅροι δυνατὸν πάντοτε ν' ἀνάγωνται εἰς ἕνα μόνον· ἡ ἀναγωγὴ δ' αὕτη γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας.

α'. *Ἵνα ἀναγάγωμεν ὁμοίους ὅρους ὁμοσήμους, προσθέτομεν τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν, ἐξῆς τοῦ ἀθροίσματος γράφομεν τὰ* *γράμματα τῶν ὅρων μετὰ τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν καὶ εἰς τὸ ἐντεῦθεν μονώνυμον δίδομεν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὅρων.*

Ἔστωσαν, π. χ., οἱ ὅμοιοι θετικοὶ ὅροι $+4\alpha^3\beta$, $+5\alpha^3\beta$, $+8\alpha^3\beta$, $+2\alpha^3\beta$. Οἱασδήποτε θέσεις καὶ ἂν ἔχωσιν ἐν τῷ πολυωνύμῳ, δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς διαδοχικοί, κατὰ τὴν ἐν § 15 γ'. ἀρχήν· κατὰ δὲ τὴν α'. ἀρχὴν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἀντ' αὐτῶν ἀριθμὸν ἴσον τῷ ἀθροίσματι αὐτῶν· ἑκάστου δὲ τῶν ὅρων αὐτῶν ὄντος γινομένου τοῦ $\alpha^3\beta$ ἐπὶ τὸν ἴδιον συντελεστήν, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ $\alpha^3\beta$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν $4+5+8+2$· εἶναι δηλονότι $19\alpha^3\beta$· δυνάμεθα λοιπὸν ἀντὶ τῶν προτεθέντων ὅρων νὰ γράψωμεν $+19\alpha^3\beta$.

Ἐὰν οἱ ἀνωτέρω ὅροι ἦσαν πάντες ἀρνητικοί, ἠδυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν ἀντ' αὐτῶν τὸ ἄθροισμα $19\alpha^3\beta$, κατὰ τὴν ἐν § 15 β'. ἀρχήν, εἴτε νὰ γράψωμεν ἀντ' αὐτῶν τὸν $-19\alpha^3\beta$.

β'. *Ἵνα ἀναγάγωμεν δύο ὁμοίους ὅρους ἑτεροσήμους, γράφομεν παρὰ τὴν διαφορὰν τῶν συντελεστῶν αὐτῶν τὰ γράμματα μετὰ τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν καὶ εἰς τὸ ἐντεῦθεν μονώνυμον δίδομεν τὸ σημεῖον τοῦ ἔχοντος τὸν μείζω συντελεστὴν ὅρου.*

Ἔστωσαν, π. χ., οἱ ὅροι $+15\alpha^3\beta^2$ καὶ $-7\alpha^3\beta^2$. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτοὺς ὡς διαδοχικοὺς (§ 15, γ'.)· ὁ $+15\alpha^3\beta^2$ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς τοὺς ἑξῆς δύο $+8\alpha^3\beta^2$ καὶ $+7\alpha^3\beta^2$ (α'.)· οἱ ὅροι $+7\alpha^3\beta^2$ καὶ $-7\alpha^3\beta^2$ δυνατὸν νὰ ἐξαλειφθῶσι· διότι προστίθεται καὶ ἀφαιρεῖται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς $7\alpha^3\beta^2$· ἄρα ἀντὶ τῶν προτεθέντων δύο ὅρων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $+8\alpha^3\beta^2$. — Ἔστωσαν ἔτι οἱ $-15\alpha^3\beta^2$ καὶ $+7\alpha^3\beta^2$. Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ $-15\alpha^3\beta^2$ τοὺς $-8\alpha^3\beta^2$ καὶ $-7\alpha^2\beta^3$ (α'.)· οἱ ὅροι $-7\alpha^3\beta^2$ καὶ $+7\alpha^3\beta^2$ δυνατὸν νὰ ἐξαλειφθῶσιν· ἄρα ἀντὶ τῶν προτεθέντων ὅρων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $-8\alpha^3\beta^2$.

γ'. *Ἵνα ἀναγάγωμεν ὁμοίους ὅρους ὁσουσδήποτε, προσθέτομεν τοὺς συντελεστὰς τῶν θετικῶν καὶ τοὺς τῶν ἀρνητικῶν, εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀθροισμάτων αὐτῶν, γράφομεν παρ' αὐτῇ τὰ γράμματα τῶν ὅρων μετὰ τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν καὶ εἰς τὸ ἐντεῦθεν μονώνυμον δίδομεν τὸ σημεῖον τῶν ὅρων ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν εἶναι μεῖζον.*

Ὁ κανὼν οὗτος συνάγεται ἐκ τῶν δύο προηγηθέντων. Π. χ.

ὑποθέσωμεν ὅτι ἔν τινι πολυωνύμῳ ὑπάρχουσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι $+\alpha^4\beta^2\gamma$, $-5\alpha^4\beta^2\gamma$, $-4\alpha^4\beta^2\gamma$, $+6\alpha^4\beta^2\gamma$, $+7\alpha^4\beta^2\gamma$, $-3\alpha^4\beta^2\gamma$· οἱ μὲν θετικοὶ τῶν ὅρων αὐτῶν ἀνάγονται εἰς τὸν $+14\alpha^4\beta^2\gamma$, οἱ δ' ἀρνητικοὶ εἰς τὸν $-12\alpha^4\beta^2\gamma$, κατὰ τὸν α'. κανόνα· κατὰ δὲ τὸν β'. κανόνα οἱ ἑτερόσημοι $+14\alpha^4\beta^2\gamma$ καὶ $-12\alpha^4\beta^2\gamma$ ἀνάγονται εἰς τὸν $+2\alpha^4\beta^2\gamma$, οὗτινος συντελεστὴς μὲν εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν συντελεστῶν τῶν θετικῶν ὅρων καὶ τοῦ τῶν ἀρνητικῶν, σημεῖον δὲ τὸ τῶν θετικῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα μεῖζον τοῦ τῶν ἀρνητικῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ κανόνες ἀναγωγῆς ὁμοίων ὅρων ἐφαρμόζονται καὶ εἰς ὁμοίους ὅρους, ὧν οἱ συντελεσταὶ εἰσὶ κλασματικοί, τὸ δὲ λοιπὸν ἀκέραιον μονώνυμον. Π. χ. οἱ ὅμοιοι ὅροι $+\frac{5}{7}\alpha^2\beta$, $-\frac{1}{2}\alpha^2\beta$, $+\frac{3}{4}\alpha^2\beta$, $-5\alpha^2\beta$ ἀνάγονται εἰς $-\frac{113}{28}\alpha^2\beta$.

Πρόσθεσις πολυωνύμων.

§ 18. Προτεθείσθω παραστῆσαι τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ οἱουδήποτε Π μετὰ πολυωνύμου τινὸς $\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta\ldots$, οὗ οἱ ὅροι α, β,...; εἰσὶ παραστάσεις οἱαιδήποτε (§ 11, Σημ.). Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ δυνατὸν νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς

$$\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta\ldots+\Pi\text{·}$$

μετατιθεμένου δὲ τοῦ Π ἐν ἀρχῇ (§ 15, γ'.)

$$\Pi+\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta\ldots$$

Οὕτως *ἵνα παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ οἱουδήποτε μετὰ πολυωνύμου, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἑξῆς τοῦ ἀριθμοῦ τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου μετὰ τῶν σημείων αὐτῶν, διδοντες εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τὸ σημεῖον* + (*).

Ὅταν ὁ Π ἦναι μονώνυμον ἢ πολυώνυμον, τὸ ἄθροισμα παρασταθήσεται διὰ πολυωνύμου, ὅπερ σχηματίζεται γραφομένων ἑξῆς μετὰ τὸ πρῶτον πολυώνυμον ἢ τὸ μονώνυμον τῶν ὅρων τοῦ ἑτέρου πολυωνύμου μετὰ τῶν σημείων, ἅπερ φέρουσι. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολυώνυμον δύναται ν' ἁπλοποιῆται, ὅταν ὑπάρχωσιν ἐν αὐτῷ ὅμοιοι ὅροι.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παριστῶμεν διὰ πολυωνύμου τὸ ἄθροισμα

(*) Οἱ πρῶτοι ὅροι τῶν πολυωνύμων λέγονται καὶ αὐτοὶ θετικοὶ (§ 10)· οὕτως ἡ τελευταία τοῦ κανόνος φράσις δυνατὸν νὰ παραλειφθῇ.

καὶ ὁσωνδήποτε μονωνύμων καὶ πολυωνύμων, προσθέτοντες τὸ πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου, τὸ ἐντεῦθεν ἄθροισμα μετὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α′. $3\alpha^2-4\alpha\beta-2\beta^2$

$5\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$

$3\alpha\beta-2\beta^2-3\gamma^2$

Τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων αὐτῶν εἶναι

$$3\alpha^2-4\alpha\beta-2\beta^2+5\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2+3\alpha\beta-2\beta^2-3\gamma^2\text{·}$$

ἀναγωγῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὅρων $8\alpha^2+\alpha\beta-5\beta^2-3\gamma^2$.

Β′. $7\alpha^2\beta-3\alpha\beta\gamma-8\beta\gamma^2-9\gamma^2+\gamma\delta^2$

$8\alpha\beta\gamma-5\alpha^2\beta+3\gamma^3-4\beta\gamma^2+\gamma\delta^2$

$4\alpha^2\beta-8\gamma^3+9\beta\gamma^2-3\delta^3$

$6\alpha^2\beta+5\alpha\beta\gamma-3\beta\gamma^2-14\gamma^3+2\gamma\delta^2-3\delta^3$

Τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἐξετελέσαμεν ἐνταῦθα ἀμέσως, ἀποφυγόντες τὴν γραφὴν πολυόρου πολυωνύμου. Ὁμοίως πράττομεν καὶ εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Γ′. $\frac{3}{4}\alpha^2\beta-5\alpha\beta\gamma+\frac{6}{7}\beta^2$

$\frac{4}{5}\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\frac{3}{7}\alpha\beta\gamma$

$9\alpha^2\beta-\frac{5}{11}\beta^2+\gamma^2$

$\frac{211}{20}\alpha^2\beta-\frac{32}{7}\alpha\beta\gamma+\frac{31}{77}\beta^2+3\alpha\beta^2+\gamma^2$.

Ἀφαίρεσις πολυωνύμων.

§ 19. Προτεθείσθω παραστῆσαι τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως πολυωνύμου τινὸς $\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon-\zeta\ldots$ ἀπ' ἀριθμοῦ οἱουδήποτε Π. Μεταθέτοντες ἐν τέλει πάντας τοὺς ἀρνητικοὺς τοῦ πολυωνύμου ὅρους, ἔχομεν τὸ ἴσον $\alpha+\beta+\varepsilon\ldots-\gamma-\delta-\zeta\ldots$, ὅπερ ἰσοῦται τῇ ἑξῆς παραστάσει

$$(\alpha+\beta+\varepsilon+\ldots)-(\gamma+\delta+\zeta+\ldots)$$

(§ 15, β′.), ἥτις εἶναι διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, τοῦ $\alpha+\beta+\varepsilon+\ldots$ καὶ τοῦ $\gamma+\delta+\zeta+\ldots$· ἵνα ἔχωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Π, προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον μετὰ τοῦ Π καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον (§ 15, δ′.)· ἔχομεν οὕτως ἐξαγόμενον τοιόνδε $\Pi+(\gamma+\delta+\zeta+\ldots)-(\alpha+\beta+\varepsilon+\ldots)$.

ὅπερ ἰσοῦται τῇ ἑξῆς παραστάσει

(1) $\Pi+\gamma+\delta+\zeta+\ldots-\alpha-\beta-\varepsilon-\ldots$

κατὰ τὰς ἐν § 15 δύο πρώτας ἀρχάς.

Οὕτως *ἵνα παραστήσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως πολυωνύμου ἀπ' ἀριθμοῦ οἱουδήποτε, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἑξῆς τοῦ μειωτέου τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου μετ' ἐναντίων σημείων.*

Τὸν κανόνα τοῦτον δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐὰν προσθέσωμεν τὴν κατ' αὐτὸν τὸν κανόνα σχηματιζομένην παράστασιν (1) μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου, ἔχομεν κατὰ τὸν ἐν § 18 κανόνα

$\Pi+\gamma+\delta+\zeta+\ldots-\alpha-\beta-\varepsilon-\ldots+\alpha+\beta+\varepsilon+\ldots-\gamma-\delta-\zeta-\ldots$

Ἐν τῇ πολυωνυμικῇ ταύτῃ παραστάσει δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς ἴσους καὶ ἑτεροσήμους ὅρους $+\gamma$ καὶ $-\gamma$, $+\delta$ καὶ $-\delta$, κ.τ.λ. εὑρίσκομεν οὕτως ἐξαγόμενον τὸν Π. Ἡ παράστασις λοιπὸν (1) εἶναι ὄντως ἡ περὶ ἧς πρόκειται διαφορά· διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῆς μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου ἰσοῦται τῷ μειωτέῳ.

Ὅταν ὁ Π ἦναι μονώνυμον ἢ πολυώνυμον, ἡ διαφορὰ παρασταθήσεται διὰ πολυωνύμου, ὅπερ δύναται ν' ἁπλοποιῆται, ἐὰν ὑπάρχωσιν ὅμοιοι ὅροι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $5\alpha^4\beta\gamma^2-(3\alpha\beta^4-5\alpha^2\beta^3-2\alpha\beta\gamma^2)=5\alpha^4\beta\gamma^2-3\alpha\beta^4+5\alpha^2\beta^3+2\alpha\beta\gamma^2$.

Β'.
$$\begin{array}{r} 9\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2+\beta\gamma \\ -(5\alpha^2+4\alpha\beta-3\beta^2-\beta\gamma) \\ \hline 4\alpha^2-7\alpha\beta+5\beta^2+2\beta\gamma \end{array}$$

Εὔκολον εἶναι νὰ ποιῶμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων ἐπὶ τῶν ἰδίων πολυωνύμων, ἀποφεύγοντες τὴν γραφὴν πολυόρου πολυωνύμου, ὡς ἐποιήσαμεν ἐνταῦθα.

Γ'.
$$\begin{array}{r} 5\alpha^3-\frac{4}{5}\alpha^2\beta+3\beta\gamma^2+\frac{8}{9}\gamma^4 \\ -(\frac{4}{3}\alpha^2\beta-\frac{5}{7}\alpha^3-8\beta\gamma^2+3\gamma^4) \\ \hline \frac{40}{7}\alpha^3-\frac{32}{15}\alpha^2\beta+11\beta\gamma^2-\frac{19}{9}\gamma^4 \end{array}$$

Ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ — ἄθροισμα αὐτῶν.

§ 20. Ἔστω ἡ ἑξῆς παράστασις

(1) $15-3+7-11-2+4-7+8-5$,

ἥτις ἐμφαίνει τὸ ἐξαγόμενον τῶν δεικνυομένων ἐν αὐτῇ διαδοχικῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων μερικῶν ἀριθμῶν. Δυνάμεθα ἀντὶ δύο ἢ πλειόνων τῶν ὅρων αὐτῆς ν' ἀντικαταστήσωμεν ἕνα μόνον. Π. χ. ἀντὶ τῶν $+7$, $+4$, $+8$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $+19$· διότι δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι διαδοχικοὶ (§ 15, γ'.)· τότε δὲ φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντ' αὐτῶν $+19$ (§ 15, ά.). Ἐπίσης ἀντὶ τῶν -11, -2, -7 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν -20 (§ 15, ϐ'.). Ἐπίσης ἀντὶ τῶν $+8$ καὶ -5 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $+3$· διότι δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν τὸν $+8$ εἰς $+3$ καὶ $+5$· ὁ δὲ $+5$ μετὰ τοῦ -5 ἐξαλείφονται. Ἐπίσης ἀντὶ τοῦ $+7$ καὶ -11 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν -4· διότι ὁ -11 ἀναλύεται εἰς -7 καὶ -4· ὁ δὲ -7 μετὰ τοῦ $+7$ ἐξαλείφονται.

Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ τοιαῦται ἀντικαταστάσεις γίνονται πάντοτε κατὰ τὰς ἑξῆς ἀρχάς, οἱοιδήποτ' ἂν ὦσιν οἱ ἀριθμοί, οἱ ἀποτελοῦντες τοὺς ὅρους παραστάσεων παραπλησίων τῇ (1).

α'. Ἀντὶ δύο ἢ πλειόνων ὅρων ὁμοσήμων δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μετὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου.

ϐ'. Ἀντὶ δύο ἑτεροσήμων δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν μετὰ τοῦ σημείου τοῦ μείζονος.

Δυνάμεθα δ' οὕτω ν' ἀντικαθιστῶμεν ἀνθ' ὁσωνδήποτε ὅρων ἕνα μόνον, ἀνάγοντες αὐτοὺς διαδοχικῶς.

§ 21. Θεωρήσωμεν ὅρους τινὰς τῆς παραστάσεως (1)· π. χ. τοὺς ἑξῆς

$$+7, \quad -11, \quad -2, \quad +4.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς εἰς ἕνα ὅρον ἀναγωγῆς αὐτῶν εἶναι -2· τὸ ἐξαγόμενον δὲ τοῦτο εἶναι τὸ αὐτό, οἱουδήποτε πολυωνύμου ὅροι κἂν ὦσιν οὗτοι. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο καλεῖται *ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα* τῶν ἀριθμῶν $+7$, -11, -2, $+4$.

Ἐν γένει καλεῖται *ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα* ἀριθμῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ὁ μοναδικὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὅστις δύναται νὰ τεθῇ ἀντ' αὐτῶν ἐν πολυωνύμῳ, οὗτινος ἤθελον εἶσθαι ὅροι.

§ 22. Ἐν τῷ ἀνωτέρω ὁρισμῷ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος ἀναφέρονται ἀριθμοὶ *θετικοὶ* καὶ *ἀρνητικοί*. Ἡ σημασία, ἣν ἔχουσιν οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ ὁρισμῷ αὐτῷ εἶναι αὐτὴ ἐκείνη, ἣν ἔχουσιν οἱ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ὅροι τῶν πολυωνύμων· δηλονότι *θετικοὶ* μὲν *ἀριθμοὶ εἰσὶν οἱ νοούμενοι ὡς προστιθέμενοι, ἀρνητικοὶ δὲ οἱ νοούμενοι ὡς ἀφαιρούμενοι.*

Οὕτω μὲν νοοῦνται οἱ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἰς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν· ἀλλ' ἐν τούτοις ἡ ἔννοια ἐν γένει τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν δὲν εἶναι τοιαύτη. Αἱ κατὰ συνθήκην πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ ἡ κατὰ συνέπειαν χρῆσις αὐτῶν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ, περὶ ὧν πολὺς ἔσεται λόγος ἐφεξῆς ἐν τοῖς οἰκείοις τόποις, εἶναι ἐκεῖνα, δι' ὧν ἐπὶ τέλους καθορᾶται ἡ κατ' οὐσίαν σημασία τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἐπὶ τοῦ παρόντος ἄλλον γενικὸν χαρακτῆρα δὲν δυνάμεθα ν' ἀποδώσωμεν εἰς αὐτούς, ἢ ὅτι γράφονται οἱ μὲν μετὰ τοῦ $+$, οἱ δὲ μετὰ τοῦ $-$.

Τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς θέλομεν καλεῖ περιληπτικῶς *ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς*.

Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ εἰσὶ μερικοὶ ἢ γενικοί· οἷον -3, $+5$, $-\alpha$, $+6$.

Τοὺς μὴ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καλοῦμεν *ἀπολύτους*.

§ 23. Κατὰ τὰς ἐν § 20 ἀρχὰς ἡ πρόσθεσις ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας.

α'. *Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ πλείονας ὁμοσήμους, προσθέτομεν τοὺς ἀπολύτους ἀριθμοὺς καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον δίδομεν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν προσθετέων.* Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν $+5$, $+3$, $+8$ εἶναι $+16$· τὸ τῶν -3, -5, -8 εἶναι -16.

β'. *Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἑτεροσήμους, εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν καὶ δίδομεν εἰς αὐτὴν τὸ σημεῖον τοῦ μείζονος.* Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν $+8$ καὶ -5 εἶναι $+3$· τὸ τῶν -8 καὶ $+5$ εἶναι -3.

Διὰ τῶν δύο τούτων κανόνων δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, προσθέτοντες αὐτοὺς διαδοχικῶς. Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν -8, $+3$, -7, $+4$, -2, -3 εἶναι -13.

§ 24. *Τὸ ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτό, καθ' οἵαν τινὰ τάξιν κἂν προστεθῶσιν οὗτοι.* Ἔστωσαν τοιοῦτοι ἀριθμοὶ $+5$, $-\frac{1}{2}$, $+4$, $-\sqrt{10}$, -8· ἔστω δὲ καὶ Α ἀπόλυτός τις ἀριθμὸς ἱκανῶς μέγας. Ἐν τῷ πολυωνύμῳ

$$A+5-\tfrac{1}{2}+4-\sqrt{10}-8$$

δυνάμεθα ἀντὶ τῶν μετὰ τὸν Α ὅρων νὰ θέσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν αὐτῶν ἄθροισμα, ὅπερ εὑρίσκομεν προσθέτοντες ἀλγεβρικῶς τοὺς δύο πρώτους, εἰς τὸ ἐντεῦθεν ἄθροισμα τὸν τρίτον κ. τ. λ. Μεταθέσωμεν ἤδη ὁπωσδήποτε τοὺς μετὰ τὸν Α ὅρους. Τὸ ἐντεῦθεν πολυώνυμον εἶναι ἴσον τῷ πρώτῳ (§ 15, γ΄.)· προσθέτοντες λοιπὸν τοὺς μετὰ τὸν Α ὅρους κατὰ τὴν νέαν τάξιν πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Ἀλγεβρικὰ πολυώνυμα – παρατηρήσεις ἐπ' αὐτῶν.

§ 25. Τὸ ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν παρίσταται διὰ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, γραφομένων ἐξῆς μετὰ τῶν σημείων αὐτῶν. Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν -7, $+5$, -3, $+\frac{4}{7}$ παρίσταται οὕτω

$$-7+5-3+\tfrac{4}{7}\cdot$$

τὸ τῶν γενικῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν $-\alpha$, $+\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $+\varepsilon$,... οὕτω

$$-\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon\ldots$$

Τὰς τοιαύτας παραστάσεις θέλομεν καλεῖ *ἀλγεβρικὰ πολυώνυμα*, τὰ δὲ πολυώνυμα, ἅπερ ἐθεωροῦμεν ἐν τοῖς πρόσθεν, θέλομεν καλεῖ *ἀπόλυτα πολυώνυμα*, ὡς παριστῶντα ἀπολύτους ἀριθμούς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ εἰς μὲν τὰ ἀπόλυτα πολυώνυμα σημαίνουσι πράξεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἐπὶ ἀπολύτων ἀριθμῶν, εἰς δὲ τὰ ἀλγεβρικὰ πολυώνυμα εἶναι τὰ σημεῖα τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα παρίσταται διὰ τοῦ πολυωνύμου.—Ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος ἀλγεβρικοῦ πολυωνύμου ἦναι θετικός, γράφεται καὶ ἄνευ σημείου· οἷον $5-7+1-4$.—Ἐπίσης γράφεται καὶ ἄνευ σημείου πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς μεμονωμένος, ὡς ὁ ἀπόλυτος.

§ 26. Ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων φέρομεν τὰς ἐξῆς παρατηρήσεις.

α΄. *Ἀλγεβρικοῦ πολυωνύμου ἡ ἀξία δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων ὁπωσδήποτε τῶν ὅρων αὐτοῦ.* Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἡ ἀποδειχθεῖσα ἐν § 24.

β΄. *Ἐν ἀλγεβρικῷ πολυωνύμῳ δυνάμεθα ἀντὶ δύο ἢ πλειόνων ὅρων ν' ἀντικαθιστῶμεν τὸ ἀλγεβρικὸν αὐτῶν ἄθροισμα.* Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι φανερὰ ἐπὶ τῶν πρώτων διαδοχικῶν ὅρων· ἵνα δὲ βεβαιωθῶμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ ἐπὶ ὅρων οἱανδήποτε τάξιν ἐχόντων, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταθέτωμεν τοὺς τοιούτους ἐν ἀρχῇ (ά.), χωρὶς νὰ μεταβάλληται ἐντεῦθεν ἡ τοῦ πολυωνύμου ἀξία.

γ'. *Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων ἀλγεβρικοῦ πολυωνύμου, τὸ προκύπτον πολυώνυμον εἶναι ἴσον ἀπολύτως* (*) *τῷ πρώτῳ, ἑτερόσημον δέ.* Ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸν πολυώνυμον

$$(1)\quad -\alpha+\beta+\gamma-\varepsilon-\zeta+\eta\cdot$$

ἀλλάττοντες τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἔχομεν τὸ

$$(2)\quad +\alpha-\beta-\gamma+\varepsilon+\zeta-\eta.$$

Παραστήσωμεν διὰ $+A$ τὸ ἄθροισμα (**) τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου (1) καὶ διὰ $-B$ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν· τὸ πολυώνυμον αὐτὸ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀριθμῶν $+A$ καὶ $-B$ (β'.). Τοῦ πολυωνύμου (2) τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων εἶναι $+B$, τὸ δὲ τῶν ἀρνητικῶν $-A$· ὅθεν τὸ πολυώνυμον αὐτὸ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀριθμῶν $+B$ καὶ $-A$. Τὸ ἄθροισμα τοῦ $+A$ καὶ $-B$ καὶ τὸ τοῦ $+B$ καὶ $-A$ ἔχουσι μὲν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον ἀξίαν, ἥτις εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν A καὶ B (§ 23, β'.), εἶναι δὲ ἑτερόσημα· διότι εἰ μὲν $A>B$, τὸ πρῶτον ἄθροισμα εἶναι θετικόν, τὸ δὲ δεύτερον ἀρνητικόν· εἰ δὲ $B>A$, τὸ πρῶτον εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεύτερον θετικόν (§ 23, β'.). Τὰ πολυώνυμα λοιπὸν (1) καὶ (2) εἰσὶν ἴσα ἀπολύτως καὶ ἑτερόσημα.

δ'. *Ἐὰν ἀπόλυτον πολυώνυμον νοήσωμεν ὡς ἀλγεβρικόν, ἔχομεν θετικὸν ἀριθμὸν ἴσον τῷ ἀπολύτῳ πολυωνύμῳ.* Ἔστω τὸ ἀπόλυτον πολυώνυμον $\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta\cdot$ παραστήσωμεν

(*) Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν αἵ τε ἀπόλυτοι αὐτῶν ἀξίαι εἰσὶν ἴσαι καὶ τὸ σημεῖον τὸ αὐτό· περὶ δὲ ἀνισότητος ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ῥηθήσεται ἐν καιρῷ. Αἱ φράσεις ἴσος ἀπολύτως, μείζων ἀπολύτως, ἐλάσσων ἀπολύτως, αἷς χρησόμεθα ἐν τῷ παρόντι πονήματι, ἀναφέρονται εἰς τὴν ἀπόλυτον ἀξίαν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν. Π. χ. $+5$ καὶ -5 εἰσὶν ἴσοι ἀπολύτως· ὁ -8 εἶναι ἀπολύτως μείζων τοῦ $+5$.

(**) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα καλεῖται καὶ ἁπλῶς ἄθροισμα πρὸς συντομίαν· ἐκ δὲ τῆς ἐννοίας δῆλον ὅτι περὶ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος ὁ λόγος. — Ἡ αὐτὴ γίνεται συντομία εἰς τὴν ἔκφρασιν καὶ τῶν ἄλλων ἀλγεβρικῶν πράξεων, περὶ ὧν ἐν τοῖς ἑξῆς.

αὐτὸ διὰ Κ. Τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ μετ' ἀριθμοῦ τινος Π εἶναι Π+Κ, ἔτι δὲ καὶ

$$Π+α—β+γ+δ—ε—ζ$$

(§ 18)· ὅθεν τὸ ἀλγεβρικὸν πολυώνυμον +α—β+γ+δ—ε—ζ ἰσοῦται τῷ θετικῷ ἀριθμῷ +Κ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Φανερὸν ὅτι ἡ γ΄. τῶν ἐν § 15 ἀρχῶν ὑπόκειται εἰς τὸν ἑξῆς περιορισμόν· *οἱ ὅροι πρέπει νὰ μεταθέτωνται οὕτως, ὥστε αἱ δεικνυόμεναι ἀφαιρέσεις νὰ ἦναι δυναταί*· νὰ μὴ δεικνύηται δηλονότι ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ τινος ἀπ' ἄλλου ἐλάσσονος. Ἔστω, π.χ., τὸ ἀπόλυτον πολυώνυμον

$$(1)\quad 5+6—7+3—2·$$

φανερὸν ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ κατὰ τὴν ἑξῆς τάξιν

$$5—7+6+3—2·$$

διότι ὁ 7 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 5· ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ τελευταῖον πολυώνυμον ὡς ἀλγεβρικόν, τὸ πολυώνυμον αὐτό, ἴσον ὂν τῷ +5+6—7+3—2 κατὰ τὴν ά. παρατήρησιν, εἶναι κατὰ τὴν τελευταίαν παρατήρησιν ἀριθμὸς θετικός, ἴσος ἀπολύτως τῷ πολυωνύμῳ (1). Ἄρα *δυνάμεθα νὰ μεταθέτωμεν ὁπωσδήποτε τοὺς ὅρους ἀπολύτου πολυωνύμου, ἐὰν θεωρῶμεν τὸ προκύπτον πολυώνυμον ὡς ἀλγεβρικόν.*

Διαφορὰ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 27. *Καλεῖται ἀλγεβρικὴ διαφορὰ* (ἢ ἁπλῶς διαφορὰ) *ἀριθμοῦ τινος ἀλγεβρικοῦ ἀφ' ἑτέρου τοιούτου ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, οὗ τὸ ἄθροισμα μετὰ τοῦ πρώτου ἰσοῦται τῷ δευτέρῳ.* Π. χ. ἡ διαφορὰ τοῦ +5 ἀπὸ τοῦ —3 εἶναι —8 διότι τὸ ἄθροισμα τοῦ —8 καὶ +5 εἶναι —3.

§ 28. *Ἵνα ἔχωμεν τὴν διαφορὰν ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἀφ' ἑτέρου τοιούτου, προσθέτομεν τῷ τελευταίῳ ἀριθμὸν ἴσον ἀπολύτως τῷ πρώτῳ, ἀλλ' ἑτερόσημον.*

Ἔστωσαν, π. χ., οἱ ἀριθμοὶ +7 καὶ —6· ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν +7 ἀριθμὸν ἴσον τῷ δευτέρῳ, ἀλλ' ἑτερόσημον, ἤτοι +6, ἕξομεν ἄθροισμα +7+6, ὅπερ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ —6 ἀπὸ +7·

διότι τὸ ἄθροισμα τοῦ $+7+6$ καὶ τοῦ -6 εἶναι $7+6-6$, ἤτοι $+7$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ τῶν ὅρων ἀλγεβρικοῦ πολυωνύμου δύνανται νὰ θεωρηθῶσι καὶ ὡς ἐμφαίνονται πράξεις, οἷαι αἱ ἐν § § 21, 27 ὁρισθεῖσαι, ἐπὶ *θετικῶν ἀριθμῶν*. Π. χ. ἐν τῷ $-5+3-7+2$ ὁ ὅρος -7 δηλοῖ ἢ ὅτι προστίθεται ὁ -7 ἢ ὅτι ἀφαιρεῖται ὁ $+7$· διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀφαίρεσις τοῦ $+7$ εἶναι πρόσθεσις τοῦ -7.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων.

§ 29. *Οἱ κανόνες προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἀπολύτων πολυωνύμων ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὰ ἀλγεβρικά.*

α'. Ἔστω $\pm$ Π ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, ᾧ προσθετέον τὸ ἀλγεβρικὸν πολυώνυμον $-\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon$· λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῇ ἑξῆς παραστάσει

$$(1) \qquad \pm \Pi-\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon\text{·}$$

διότι ἡ παράστασις αὕτη, ἐμφαίνουσα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν $\pm\Pi$, $-\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $-\delta$, $-\varepsilon$, ἰσοῦται καὶ τῷ ἀθροίσματι τοῦ ἀριθμοῦ $\pm$ Π μετὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν $-\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $-\delta$, $-\varepsilon$ (§ 26, β'.).

β'. Ἔστω $\pm$ Π ἀριθμός τις, ἀφ' οὗ ἀφαιρετέον τὸ πολυώνυμον $-\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon$· λέγω ὅτι ἡ διαφορὰ ἰσοῦται τῇ ἑξῆς παραστάσει

$$(2) \qquad \pm\Pi+\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon\text{·}$$

διότι ἐὰν προσθέσωμεν τὴν παράστασιν ταύτην μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς ἀναγωγάς, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον $\pm$ Π· ἢ ἄλλως, ἐπειδὴ ἵνα ἔχωμεν τὴν διαφοράν, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν $\pm$ Π ἀριθμὸν ἴσον τῷ πολυωνύμῳ, ἀλλ' ἑτερόσημον (§ 28), ἵνα δ' ἔχωμεν τοιοῦτον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου (§ 26, γ'.), διὰ τοῦτο ἡ διαφορὰ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τοῦ $\pm$ Π καὶ τοῦ $+\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon$, ὅπερ εἶναι $\pm\Pi+\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon$ (α'.).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Τοὺς κανόνας προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων δυνάμεθα νὰ ἐκφέρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. α'. *Ἵνα* προσθέσωμεν πολυώνυμον, προσθέτομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ὅρων αὐτοῦ. 6'. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμον, ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ὅρων αὐτοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀπολύτων πολυωνύμων (§ 17).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Αἱ παραστάσεις (1) καὶ (2) ἐμφαίνουσιν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς· ἐὰν οἱ Π, α, 6,..., ἐξ ὧν ἀποτελοῦνται, ἦναι μονώνυμα, αἱ παραστάσεις αὗται ἔσονται ἀλγεβρικὰ πολυώνυμα (§ 25)· ἄλλως δὲ ἔσονται πολυωνυμικαὶ παραστάσεις ἀλγεβρικαί. Θέλομεν ἐν γένει καλεῖ *παραστάσεις ἀλγεβρικὰς* τὰς παριστώσας ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, *ἀπολύτους* δὲ τὰς παριστώσας ἀριθμοὺς ἀπολύτους.

Γράμματα ἐμφαίνοντα ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.

§ 30. Διὰ τῶν γραμμάτων δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν οὐ μόνον ἀπολύτους ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε, ἀλλὰ καὶ ἀλγεβρικούς, ὧν τό, τε σημεῖον καὶ ἡ ἀπόλυτος ἀξία ἀπροσδιόριστα.

Π. χ. διὰ τοῦ γράμματος α δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν καὶ ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν οἱονδήποτε, οἷον -5, $+\frac{3}{7}$, $-\sqrt{11}$, κ.τ.λ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ὅταν γράμμα μεμονωμένον, ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἐμφαῖνον, φέρῃ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον + ἢ —, οἷον $+\alpha$, $-\alpha$, τὸ μὲν + δηλοῖ ὅτι τὸ γράμμα λαμβάνεται μετὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ, τὸ δὲ — ὅτι λαμβάνεται μετ' ἐναντίου σημείου. Ἐπίσης καὶ ὅταν οἱαδήποτε ἀλγεβρικὴ παράστασις μεμονωμένη φέρῃ πρὸ αὐτῆς σημεῖον + ἢ —, τὰ σημεῖα αὐτὰ δηλοῦσιν ὅ,τι καὶ ἀνωτέρω· οἷον $+(+5)$, $-(-5)$, $-(-4+7-2)$, $+(+3\alpha^4 6-5\alpha^3 6^2+4\gamma^3)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἡ ἑξῆς παράστασις

$$(1)\quad \alpha+6-\gamma-\delta+\varepsilon\ldots$$

ἐν ᾗ τὰ γράμματα α, 6,... εἶναι ἀλγεβρικά, δηλοῖ τὸ ἐξαγόμενον ἀλγεβρικῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων, παριστωμένων διὰ τῶν σημείων + καὶ —. Ἡ αὐτὴ παράστασις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν α, 6, —γ, —δ, ε,...· διότι ἀφελεῖν γ, δ,... ταὐτόν ἐστι τῷ προσθεῖναι —γ, —δ,... (§ 28). Παραστάσεις, οἷα ἡ (1), προστίθενται καὶ ἀφαιροῦνται κατὰ τοὺς κανόνας προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως πολυωνύμων. Π. χ. τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀλγεβρικοῦ Π μετὰ τοῦ πολυωνύμου (1) εἶναι $\Pi+\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon...$· διότι ἡ τελευταία αὕτη παράστασις ἐμφαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν Π, α, β, $-\gamma$, $-\delta$, ε,... (§ 29, Σημ. Α'. ά). Ἐπίσης ἡ διαφορὰ τοῦ (1) ἀπὸ τοῦ Π εἶναι $\Pi-\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon...$· διότι ἡ τελευταία αὕτη παράστασις ἐμφαίνει τὸ ἐξαγόμενον, ὅταν ἀπὸ τοῦ Π ἀφαιρεθῇ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν, ὧν ἄθροισμα εἶναι ἡ παράστασις (1) (§ 29 Σημ. Α'. β'.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

Πολλαπλασιασμὸς μονωνύμων (*).

§ 31. Τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειόνων μονωνύμων δύναται πάντοτε νὰ παριστᾶται διὰ μονωνύμου, ὅπερ θεωρεῖται ὡς τὸ *τετελεσμένον* γινόμενον ἐκείνων.

Ὁ πρὸς εὕρεσιν τοῦ τοιούτου γινομένου κανὼν στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων, ἅπερ εἰσὶν ἀποδεδειγμένα ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ἐφ' οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. α'. Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος εἶναι γινόμενον ἄλλων ἀριθμῶν, ἰσοῦται τῷ μοναδικῷ γινομένῳ πάντων τῶν μερικῶν παραγόντων. β'. Ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν ἀνθ' ὁσωνδήποτε παραγόντων ἀριθμὸν ἴσον τῷ γινομένῳ αὐτῶν. γ'. Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἧς ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων· π. χ. $\alpha^4\times\alpha^3=\alpha^7$.

§ 32. Ἔστωσαν ἤδη δύο μονώνυμα $5\alpha^2\beta^4\gamma\delta^3$ καὶ $4\alpha^3\beta^2\gamma\varepsilon$. Τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται, κατὰ τὸ ά. τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων, τῷ γινομένῳ $5\times\alpha^2\times\beta^4\times\gamma\times\delta^3\times4\times\alpha^3\times\beta^2\times\gamma\times\varepsilon$· κατὰ δὲ τὸ β'. θεώρημα δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῷ τελευταίῳ γινομένῳ ἀντὶ τῶν μερικῶν παραγόντων 5 καὶ 4 τὸ τετελεσμένον γινόμενον αὐτῶν 20, ἀντὶ τῶν α^2 καὶ α^3 τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὅπερ

(*) Ἀπὸ τοῦδε μέχρι τοῦ § 37 πρόκειται περὶ ἀπολύτων ἀριθμῶν καὶ παραστάσεων.

εἶναι α^5, ἀντὶ τῶν β^4 καὶ β^2 τὸ γινόμενον αὐτῶν β^6 καὶ ἀντὶ τῶν γ
καὶ γ τὸ γινόμενον αὐτῶν γ^2· οὕτως ἔχομεν

$$5\alpha^2\beta^4\gamma\delta^3 \times 4\alpha^3\beta^2\gamma\varepsilon = 20\alpha^5\beta^6\gamma^2\delta^3\varepsilon.$$

Ἐν γένει *ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστὰς καὶ ἑξῆς τοῦ ἐντεῦθεν γινομένου γράφομεν τὰ μὲν κοινὰ γράμματα τῶν μονωνύμων ἕκαστον ἅπαξ μετ' ἐκθέτου ἴσου τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐν τοῖς μονωνύμοις ἐκθετῶν αὐτοῦ, τὰ δὲ λοιπὰ γράμματα μετὰ τῶν ἐκθετῶν, οὓς ἔχουσι.*

Εὑρίσκομεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον

$$21\alpha^3\beta^2\gamma\delta \times 8\alpha\beta\gamma^3 = 168\alpha^4\beta^3\gamma^4\delta$$

$$3\alpha^{\mu}\beta^{3\nu} \times \alpha^{\nu}\beta = 3\alpha^{\mu+\nu}\beta^{3\nu+1}.$$

Διὰ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν δι' ἑνὸς μονωνύμου τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μονωνύμων, πολλαπλασιάζοντες αὐτὰ διαδοχικῶς· τὸ μονώνυμον, ὅπερ οὕτως σχηματίζεται, ἔχει συντελεστὴν τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν παραγόντων, οἱ δ' ἐκθέται τῶν γραμμάτων αὐτοῦ εἰσὶν ἀθροίσματα τῶν ἐν τοῖς παράγουσιν ἐκθετῶν αὐτῶν. *Παράδειγμα.*

$$3\alpha^2\beta \times 7\alpha\beta^2\gamma\varepsilon^4 \times 5\alpha^3\gamma^2\varepsilon\zeta^4 \times 9\beta^5\gamma\delta^3 = 945\alpha^6\beta^8\gamma^4\delta^3\varepsilon^5.$$

Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον ἢ πολυώνυμον.

§ 33. Τὸ γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον ἢ ἐπὶ πολυώνυμον δύναται πάντοτε νὰ παριστᾶται διὰ πολυωνύμου, ὅπερ θεωρεῖται ὡς τὸ *τετελεσμένον* γινόμενον ἐκείνων.

Ὁ πρὸς εὕρεσιν τοῦ τοιούτου γινομένου κανὼν στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων, ἅπερ εἰσὶν ἀποδεδειγμένα ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ἐφ' οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. α'. Τὸ γινόμενον ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ πρώτου παράγοντος ἐπὶ τὸν ἕτερον καὶ τὸ γινόμενον ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ ἑνὸς παράγοντος ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ ἑτέρου. β'. Τὸ γινόμενον διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν γινομένων τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἕτερον παράγοντα, α'. *Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον.*

§ 34. Ἔστω πολυώνυμόν τι $\alpha+\beta+\gamma+\ldots-\varkappa-\lambda-\mu-\ldots$ καὶ μονώνυμόν τι π. Τὸ πολυώνυμον ἰσοῦται τῇ ἑξῆς διαφορᾷ (§ 15 β'.).

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)-(\varkappa+\lambda+\mu+\ldots)\cdot$$

ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ π ἰσοῦται, κατὰ τὸ β'. τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων, τῇ ἑξῆς παραστάσει

$$(1)\quad (\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\times\pi-(\varkappa+\lambda+\mu+\ldots)\times\pi\cdot$$

ἀλλὰ κατὰ τὸ α'. τῶν αὐτῶν θεωρημάτων

$$(2)\quad (\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\times\pi=\alpha\pi+\beta\pi+\gamma\pi+\ldots$$

$$(3)\quad (\varkappa+\lambda+\mu+\ldots)\times\pi=\varkappa\pi+\lambda\pi+\mu\pi+\ldots$$

ὅθεν ἡ παράστασις (1) ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τοῦ β'. μέλους τῆς ἰσότητος (3) ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (2)· ἡ διαφορὰ δ' αὕτη εἶναι (§ 19)

$$\alpha\pi+\beta\pi+\gamma\pi+\ldots-\varkappa\pi-\lambda\pi-\mu\pi-\ldots\cdot$$

Ἔχομεν οὕτω τὸ γινόμενον παρεστημένον διὰ πολυωνύμου, σχηματιζομένου κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα. *Πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ γράφομεν τὰ γινόμενα ἑξῆς μετὰ τῶν σημείων τῶν τοῦ πολυωνύμου ὅρων.*

Παρεστήσαμεν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου καὶ τὸν ἕτερον παράγοντα δι' ἑνὸς γράμματος ἕκαστον· ἀλλ' ὁ συλλογισμός, ἀνεξάρτητος τοῦ σχήματος τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, ... π, ἐφαρμόζεται, ὡς καὶ ὁ κανών, οἱονδήποτε σχηματισμὸν καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Ὅταν ἦναι μονώνυμα ἀκέραια, οἱ πολλαπλασιασμοὶ τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸν μονώνυμον παράγοντα γίνονται κατὰ τὸν ἐν § 32 κανόνα. *Παράδειγμα.*

$$(3\alpha^2\beta-6\beta^3+5\beta^2\gamma^2+7\beta\gamma^3-2\alpha\gamma^4)\times9\alpha^3\beta^2\gamma=27\alpha^5\beta^3\gamma-54\alpha^4\beta^5\gamma+45\alpha^3\beta^4\gamma^3$$
$$+63\alpha^3\beta^3\gamma^4-18\alpha^4\beta^2\gamma^5.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μονωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον γίνεται ὡς καὶ ὁ πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον· τουτέστι *πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ γράφομεν τὰ γινόμενα ἑξῆς μετὰ τῶν σημείων τῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὅρων.* Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκομεν γινόμενον ταὐτὸν τῷ τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον· αὐτὸ τοῦτο λοιπὸν εἶναι καὶ τὸ τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸ πολυώνυμον· διότι τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων τῶν παραγόντων.

β'. Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον.

§ 35. Θέλομεν θεωρήσει τρεῖς περιπτώσεις· ά. ὅταν πάντες οἱ ὅροι τῶν πολυωνύμων ἦναι θετικοί· β'. ὅταν τὸ ἕτερον τῶν πολυωνύμων ἔχῃ ὅρους θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς, τὸ δ' ἕτερον μόνον θετικούς· γ'. ὅταν ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα ἔχωσιν ὅρους θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς.

ά. Ἔστωσαν τὰ θετικοὺς μόνον ὅρους ἔχοντα πολυώνυμα $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ καὶ $\pi+\rho+\sigma+\ldots$ Ἐπειδὴ ἑκάτερον τῶν πολυωνύμων αὐτῶν εἶναι ἄθροισμα ἀριθμῶν, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (§ 33, ά.)· ἔχομεν δὲ τὰ διάφορα ταῦτα γινόμενα πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἶτα ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ οὕτω καθεξῆς· προσθέτοντες τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα, ἕξομεν τὸ γινόμενον τῶν προτεθέντων πολυωνύμων, παρεστημένον διὰ πολυωνύμου.

β'. Ἔστω τὸ μὲν τῶν πολυωνύμων $\alpha+\beta+\gamma+\ldots-\kappa-\lambda-\mu\ldots$, περιέχον ὅρους θετικούς τε καὶ ἀρνητικούς, τὸ δὲ $\pi+\rho+\sigma+\ldots$, περιέχον μόνον θετικοὺς ὅρους. Τὸ πρῶτον ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)-(\kappa+\lambda+\mu+\ldots)\cdot$$

ἑπομένως τὸ γινόμενον ἐπὶ $\pi+\rho+\sigma+\ldots$ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν γινομένων

$$(1)\ (\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\ (\pi+\rho+\sigma+\ldots)$$

$$(2)\ (\kappa+\lambda+\mu+\ldots)\ (\pi+\rho+\sigma+\ldots)$$

(§ 33, β'.). Εὑρίσκοντες τὰ πολυώνυμα, τὰ ἰσούμενα τοῖς γινομένοις αὐτοῖς, ὡς εἴρηται εἰς τὴν ἡγηθεῖσαν περίπτωσιν, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ πρώτου κατὰ τὸν κανόνα ἀφαιρέσεως πολυωνύμων, ἕξομεν πολυώνυμον ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν προτεθέντων παραγόντων. Τὰ γινόμενα (1) καὶ (2) ἰσοῦνται, ὡς εἴρηται εἰς τὴν ἡγηθεῖσαν περίπτωσιν, πολυωνύμοις, ὧν ὅροι εἰσὶ τὰ γινόμενα ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ ἑνὸς παράγοντος ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ ἑτέρου, πάντες δ' οἱ ὅροι οὗτοι εἰσὶ θετικοί· ὅθεν οἱ ὅροι τῆς διαφορᾶς τῶν πολυωνύμων αὐτῶν, εἴτε οἱ τοῦ γινομένου τῶν προτεθέντων παραγόντων, εἰσὶ γινόμενα ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτῶν ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ ἑτέρου, φέροντα τὸ σημεῖον μὲν $+$, ὅταν οἱ ἐξ ὧν προκύπτουσι δύο ὅροι τῶν προτεθέντων παραγόντων ἦναι ὁμόσημοι, τὸ σημεῖον δὲ $-$, ὅταν ἐκεῖνοι ἦναι ἑτερόσημοι.

γ΄. Ἔστωσαν τέλος τὰ πολυώνυμα $\alpha+\beta+\gamma+\ldots-\varkappa-\lambda-\mu-\ldots$ καὶ $\pi+\rho+\sigma+\ldots-\varphi-\chi-\psi-\ldots$, ἔχοντα ἀμφότερα ὅρους θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς. Τὰ πολυώνυμα ταῦτα ἰσοῦνται ταῖς διαφοραῖς

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)-(\varkappa+\lambda+\mu+\ldots)$$
$$(\pi+\rho+\sigma+\ldots)-(\varphi+\chi+\psi+\ldots)$$

Θῶμεν πρὸς συντομίαν
$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=\mathrm{A}$$
$$\varkappa+\lambda+\mu+\ldots=\mathrm{B}$$
$$\pi+\rho+\sigma+\ldots=\Gamma$$
$$\varphi+\chi+\psi+\ldots=\Delta.$$

Τὰ προτεθέντα πολυώνυμα εἰσὶν αἱ διαφοραὶ $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ καὶ $\Gamma-\Delta$· ὅθεν τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\Gamma-\Delta)$. Κατὰ τὸ β΄. τῶν ἐν § 33 θεωρημάτων τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ ἐπὶ τὴν διαφορὰν $\Gamma-\Delta$ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν γινομένων $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\times\Gamma$ καὶ $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\times\Delta$· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})\times\Gamma=\mathrm{A}\times\Gamma-\mathrm{B}\times\Gamma$$
$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})\times\Delta=\mathrm{A}\times\Delta-\mathrm{B}\times\Delta\cdot$$

ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν ἀπὸ τῆς πρώτης, συνάγομεν

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})\times\Gamma-(\mathrm{A}-\mathrm{B})\times\Delta=\mathrm{A}\times\Gamma-\mathrm{B}\times\Gamma-\mathrm{A}\times\Delta+\mathrm{B}\times\Delta,$$

ἧς τὰ μέλη εἰσὶν ἴσα τῷ γινομένῳ τῶν προτεθέντων παραγόντων. Σημειωθήτω διὰ Π τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης. Ἐκτελοῦντες, ὡς ἐν τῇ α΄ περιπτώσει, τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τῶν ἐν τῷ Π γινομένων $\mathrm{A}\times\Gamma$, $\mathrm{B}\times\Gamma$, $\mathrm{A}\times\Delta$, $\mathrm{B}\times\Delta$ (τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι πολυώνυμα, ὧν πάντες οἱ ὅροι θετικοὶ) καὶ ἐπὶ τῶν ἐντεῦθεν πολυωνύμων τὰς δεικνυομένας ἐν τῷ Π πράξεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, ἕξομεν πολυώνυμον ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν προτεθέντων παραγόντων.

Τὸ πολυώνυμον τοῦτο περιέχει τοὺς ἑξῆς ὅρους· α΄. τὰ γινόμενα ἑκάστου τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πάντα μετὰ τοῦ σημείου $+$, προκύπτοντα ἐκ τοῦ Α×Γ· 6΄. τὰ γινόμενα ἑκάστου τῶν ἀρνητικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν θετικῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πάντα μετὰ τοῦ —, προκύπτοντα ἐκ τοῦ —Β×Γ· γ΄. τὰ γινόμενα ἑκάστου τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀρνητικῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πάντα μετὰ τοῦ —, προκύπτοντα ἐκ τοῦ —Α×Δ· δ΄. τέλος τὰ γινόμενα ἑκάστου τῶν ἀρνητικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀρνητικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πάντα μετὰ τοῦ +, προκύπτοντα ἐκ τοῦ +Β×Δ.

Οἱ ὅροι λοιπὸν τοῦ γινομένου τῶν προτεθέντων παραγόντων εἰσὶ τὰ γινόμενα ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, φέροντα τὸ σημεῖον μὲν +, ὅταν οἱ πολλαπλασιαζόμενοι ὅροι τῶν παραγόντων ἦναι ὁμόσημοι, τὸ σημεῖον δὲ —, ὅταν οὗτοι ἦναι ἑτερόσημοι.

Οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς σχηματίζεται τὸ πολυώνυμον, τὸ ἰσούμενον τῷ γινομένῳ δύο πολυωνύμων, ἐπὶ τῶν τριῶν περιπτώσεων, ἃς διεξήλθομεν, περιλαμβάνονται ἐν τῷ ἑξῆς κανόνι.

ΚΑΝΩΝ. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, σχηματίζομεν πολυώνυμον ἐκ τῶν γινομένων ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ ἑνὸς παράγοντος ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ ἑτέρου, δίδοντες ἑκάστῳ τῶν γινομένων αὐτῶν τὸ σημεῖον μὲν +, ὅταν οἱ τῶν παραγόντων ὅροι, ὧν εἶναι γινόμενον, ἦναι ὁμόσημοι, τὸ σημεῖον δὲ —, ὅταν οὗτοι ἦναι ἑτερόσημοι.*

Τὰ γράμματα, δι' ὧν παρεστήσαμεν τοὺς ὅρους τῶν πολυωνύμων, δύνανται νὰ ἦναι οἱαιδήποτε παραστάσεις· ἑπομένως ὁ κανὼν δύναται νὰ ἐφαρμόζηται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱωνδήποτε πολυωνυμικῶν παραστάσεων.

Ὅταν τὰ πολυώνυμα ἦναι ἀκέραια, οἱ πολλαπλασιασμοὶ τῶν ὅρων αὐτῶν γίνονται κατὰ τὸν ἐν § 32 κανόνα. Ἐὰν τὸ οὕτως εὑρισκόμενον πολυώνυμον ἔχῃ ὁμοίους ὅρους, ποιοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς αὐτῶν· ἵνα δὲ μὴ δυσκολευώμεθα εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων, γράφομεν αὐτοὺς ἐν τῷ ἐκτελεῖν τὴν πρᾶξιν καθέτως, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δύο παραδείγμασι.

Α'.

$$
\begin{array}{l}
2\alpha^3-3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3\\
4\alpha^2-7\alpha\beta+3\beta^2\\
\hline
8\alpha^5-12\alpha^4\beta-20\alpha^3\beta^2+\ 4\alpha^2\beta^3\\
\quad -14\alpha^4\beta+21\alpha^3\beta^2+35\alpha^2\beta^3-\ 7\alpha\beta^4\\
\qquad +\ 6\alpha^3\beta^2-\ 9\alpha^2\beta^3-15\alpha\beta^4+3\beta^5\\
\hline
8\alpha^5-26\alpha^4\beta+\ 7\alpha^3\beta^2+30\alpha^2\beta^3-22\alpha\beta^4+3\beta^5.
\end{array}
$$

Ἐγράψαμεν τοὺς παράγοντας τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον καὶ ἠγάγομεν ὁριζόντιον, μεθ' ὃ ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἶτα ἐπὶ τὸν δεύτερον, κ. τ. λ., ἀκολουθοῦντες ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τὸν κανόνα, καὶ ἐγράψαμεν τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ κῆνται κατὰ κάθετον· τέλος ἠγάγομεν δευτέραν ὁριζόντιον, ὑφ' ἣν ἐγράψαμεν τὸ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων προκύψαν πολυώνυμον. Οὕτω πάντοτε διατάσσεται ἡ πρᾶξις.

Β'.

$$
\begin{array}{l}
8\alpha+4\beta-\gamma\\
3\alpha-9\beta+2\gamma\\
\hline
24\alpha^2+12\alpha\beta-3\alpha\gamma\\
\qquad -72\alpha\beta \qquad\qquad -36\beta^2+9\beta\gamma\\
\qquad\qquad +16\alpha\gamma \qquad\quad +8\beta\gamma-2\gamma^2\\
\hline
24\alpha^2-60\alpha\beta+13\alpha\gamma-36\beta^2+17\beta\gamma-2\gamma^2
\end{array}
$$

Γ'. $(\chi^4+\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2+\alpha^3\chi+\alpha^4)(\chi-\alpha)=\chi^5-\alpha^5.$

Δ'. $(\frac{5}{7}\alpha^3\beta-\frac{2}{3}\alpha^2\beta^3+7\alpha\gamma^4)(\frac{3}{8}\alpha^2\beta^3-6\alpha\gamma^4+\frac{11}{3}\beta^2\gamma^4)=\frac{15}{56}\alpha^5\beta^4-$ $\frac{1}{4}\alpha^4\beta^6+\frac{1553}{168}\alpha^3\beta^3\gamma^4-\frac{30}{7}\alpha^4\beta\gamma^4-42\alpha^2\gamma^8-\frac{22}{9}\alpha^2\beta^5\gamma^4+\frac{77}{3}\alpha\beta^2\gamma^8.$

Ε'. $(\alpha^\mu+\beta^\pi-2\gamma^\rho)(2\alpha^\mu-3\beta)=2\alpha^{2\mu}+2\alpha^\mu\beta^\pi-4\alpha^\mu\gamma^\rho-3\alpha^\mu\beta$ $-3\beta^{\pi+1}+6\beta\gamma^\rho.$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Α'. Ἐν τῷ ἀνωτέρω κανόνι πολλαπλασιασμοῦ πολυωνύμων περιέχεται καὶ ὁ ἐν § 34 κανὼν πολλαπλασιασμοῦ πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον ἢ τἀνάπαλιν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἐκ τῶν γινομένων τῶν ὅρων δύο πολυωνύμων, ἐξ ὧν ἀπαρτίζεται τὸ τῶν πολυωνύμων αὐτῶν γινόμενον, πολλὰ συγχωνεύονται ἀλλήλοις κατὰ τὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἀναγωγήν· ἀλλ' εἶναι καί τινα, ἅπερ δὲν ἀνάγονται μετ' ἄλλων, ἀποτελοῦντα ἰδίους ὅρους καὶ μετὰ τὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἀναγωγήν. Τοιαῦτα, π. χ., εἶ-

ναι τὰ γινόμενα τῶν τὰς ἀνωτάτας ἢ τὰς κατωτάτας δυνάμεις γράμματός τινος περιεχόντων ὅρων. Π. χ. ὑποτεθήτω ὅτι ὁ τὴν ὑψηλοτάτην δύναμιν τοῦ γράμματος α περιέχων ὅρος ἐν μὲν τῷ πολλαπλασιαστέῳ εἶναι $-8\alpha^5\beta^2\gamma$ (οὐδεὶς δηλονότι ἄλλος ὅρος τοῦ πολλαπλασιαστέου περιέχει τὸ γράμμα α μετ' ἴσου ἢ μείζονος ἐκθέτου), ἐν δὲ τῷ πολλαπλασιαστῇ εἶναι $+3\alpha^4\beta$. Τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ὅρων, ὅπερ εἶναι $24\alpha^9\beta^3\gamma$ καὶ ὑπάρχει ἐν τῷ γινομένῳ τῶν πολυωνύμων φέρον τὸ σημεῖον —, δὲν ἀνάγεται μετ' οὐδενὸς ἄλλου γινομένου τῶν ὅρων τῶν πολυωνύμων· διότι ἐν ἑκάστῳ τοιούτῳ γινομένῳ ὁ ἐκθέτης τοῦ α εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ γράμματος αὐτοῦ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ὅρων (§ 32)· ἑπομένως ἐν τῷ $24\alpha^9\beta^3\gamma$ ὁ α ἔχει ἐκθέτην μείζονα ἢ ἐν τοῖς ἄλλοις γινομένοις· δὲν ἀνάγεται λοιπὸν μετ' οὐδενὸς ἄλλου. — Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι οἱ αὐτοὶ ὅροι περιέχουσι τὰς κατωτάτας δυνάμεις τοῦ α, τὸ γινόμενον αὐτῶν περιέξει ἐπίσης τὸ α μετὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐκθέτου· διὸ μετ' οὐδενὸς ἄλλου τοιούτου γινομένου ἀνάγεται.

§ 36. Ἐκτελοῦντες κατὰ τὸν κανόνα τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμοὺς

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta),\ (\alpha-\beta)(\alpha-\beta),\ (\alpha+\beta)(\alpha-\beta),$$

εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2.$$

Αἱ ἰσότητες αὗται εἰσὶ θεωρήματα ἐξενηνεγμένα δι' ἀλγεβρικῶν συμβόλων καὶ ἀποδεδειγμένα διὰ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πολυωνύμων· ἐκφωνοῦνται δὲ ὡς ἑξῆς.

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων αὐτῶν σὺν τῷ διπλασίῳ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων αὐτῶν πλὴν τοῦ διπλασίου τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Παρατηρητέον ἐνταῦθα τὴν εὐκολίαν, ἣν παρέχει ἡ χρῆσις τῶν γραμμάτων καὶ ἡ τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ πρὸς ἀπόδειξιν θεωρημάτων.

Γινόμενον ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 37. *Καλεῖται γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων ἀξιῶν αὐτῶν, λαμβανόμενον μετὰ τοῦ σημείου* +, *ὅταν οἱ παράγοντες ἦναι ὁμόσημοι, μετὰ τοῦ σημείου δὲ* —, *ὅταν ἦναι ἑτερόσημοι.*

Π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ $+5$ ἐπὶ -3 εἶναι -15· τὸ τοῦ -5 ἐπὶ -3 εἶναι $+15$· τὸ τοῦ $+5$ ἐπὶ $+3$ εἶναι $+15$.

§ 38. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἔχομεν, α καὶ β ὄντων ἀπολύτων ἀριθμῶν οἱωνδήποτε,

$$(1)\quad \begin{aligned} (+\alpha)\times(+\beta)&=+\alpha\beta \\ (+\alpha)\times(-\beta)&=-\alpha\beta \\ (-\alpha)\times(+\beta)&=-\alpha\beta \\ (-\alpha)\times(-\beta)&=+\alpha\beta. \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων συνάγονται τὰ ἑξῆς. α'. Ὅταν ἀλλάττηται τὸ σημεῖον ἑνὸς τῶν παραγόντων, ἀλλάττεται καὶ τὸ τοῦ γινομένου. β'. Ὅταν ἀλλάττωνται τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν παραγόντων, τὸ τοῦ γινομένου μένει ἀμετάβλητον.—Φανερὸν δ' ὅτι κατὰ τὴν ἀλλαγὴν μόνων τῶν σημείων τῶν παραγόντων, ἡ ἀπόλυτος ἀξία τοῦ γινομένου δὲν μεταβάλλεται.

§ 39. Αἱ ἰσότητες (1) ἀληθεύουσι καὶ ὅταν τὰ γράμματα α καὶ β ἐμφαίνωσιν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, τὰ δὲ σημεῖα + καὶ — ἔχωσι τὴν ἐν § 30 (Σημ. Α'.) σημασίαν. Π. χ. ἔχομεν $(-\alpha)\times(+\beta)=-\alpha\beta$· διότι, ἀλλαττομένου, ὡς εἴπομεν, τοῦ σημείου ἑνὸς τῶν παραγόντων, ἀλλάττεται καὶ τὸ τοῦ γινομένου. Ἐπίσης $(-\alpha)\times(-\beta)=+\alpha\beta$· διότι, ἀλλαττομένων τῶν σημείων ἀμφοτέρων τῶν παραγόντων, τὸ τοῦ γινομένου μένει τὸ αὐτό.

§ 40. Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους, τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς. Π. χ. τὸ γινόμενον τῶν $-7, +4, -\frac{3}{5}$ εἶναι $+\frac{84}{5}$· τὸ τῶν $-5, -3, -\frac{1}{2}$, εἶναι $-\frac{15}{2}$.

Ἐπὶ τοῦ γινομένου ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐφαρμόζονται πάντα τὰ θεωρήματα γινομένου ἀπολύτων ἀριθμῶν· ἀρκεῖ δὲ ν' ἀποδείξωμεν ἐνταῦθα τὸ ἑξῆς θεμελιῶδες, ἐξ οὗ συνάγονται τὰ λοιπά.

Γινόμενον ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων ὁπωσδήποτε τῶν παραγόντων. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἡ ἀπόλυτος ἀξία τοιούτου γινομένου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων ἀξιῶν τῶν παραγόντων· ὅθεν ἡ ἀξία αὕτη δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένων τῶν παραγόντων. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τὸ σημεῖον μένει τὸ αὐτό. Ἔστω τὸ γινόμενον

$$(-5)\times(+3)\times(+7)\times(-4)\times(-9)\times(+10).$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὸ καὶ οὕτω

$$(+1)\times(-5)\times(+3)\times(+7)\times(-4)\times(-9)\times(+10)\cdot$$

νὰ ὑποθέσωμεν δηλονότι ὅτι πρῶτος παράγων εἶναι ὁ $+1$. Κατὰ τοὺς διαδοχικοὺς πολλαπλασιασμοὺς τὸ σημεῖον, ὅπερ κατ' ἀρχὰς εἶναι $+$, ἀλλάττεται τοσάκις, ὅσοι εἰσὶν οἱ ἀρνητικοὶ παράγοντες. Πολλαπλασιάσωμεν τοὺς αὐτοὺς παράγοντας κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν, ὑποθέτοντες πάντοτε ὅτι ὁ πρῶτος εἶναι $+1$· ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ὁ αὐτὸς, τὸ σημεῖον ἀλλάττεται πάλιν τοσάκις, ὁσάκις καὶ πρότερον· ἑπομένως τὸ τελικὸν σημεῖον ἔσεται τὸ αὐτό.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. *Τὸ σημεῖον γινομένου πολλῶν παραγόντων δὲν ἀλλάττεται, ὅταν ἀλλαγῶσι τὰ σημεῖα ἀρτίου ἀριθμοῦ παραγόντων· ἀλλάττεται δὲ, ὅταν ἀλλαγῶσι τὰ σημεῖα περιττοῦ ἀριθμοῦ παραγόντων.* Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ὅταν ἀλλάττηται τὸ σημεῖον ἑνὸς μόνου παράγοντος, ἀλλάττεται καὶ τὸ τοῦ γινομένου· διότι τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, τοῦ παράγοντος, οὗ τὸ σημεῖον ἀλλάττεται, καὶ τοῦ γινομένου τῶν λοιπῶν παραγόντων. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι, ὅταν μὲν ἀλλαγῶσι τὰ σημεῖα ἀρτίου ἀριθμοῦ παραγόντων, ἐπειδὴ τὸ τοῦ γινομένου ἀλλάττεται ἀρτιάκις, μένει τὸ αὐτό· τοὐναντίον δὲ, ὅταν ἀλλαγῶσι τὰ σημεῖα περιττοῦ ἀριθμοῦ παραγόντων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Τὸ θεώρημα γινομένου ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα ἀληθεύει καὶ αὐτὸ, ὅταν τἀθροίσματα ἦναι ἀλγεβρικά· περὶ τούτου ὅρα § 42, Σημ. Β'.

Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικῶν μονωνύμων καὶ πολυωνύμων.

§ 41. *Οἱ κανόνες πολλαπλασιασμοῦ ἀπολύτων μονωνύμων καὶ πολυωνύμων ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὰ ἀλγεβρικά.*

Ἔστωσαν ἐν πρώτοις δύο μονώνυμα οἱαδήποτε, οἷον $5\alpha^4\beta^2\gamma$ καὶ $-8\alpha^3\beta\gamma^4\delta$. Ἐὰν τὰ γράμματα ἐμφαίνωσιν ἀπολύτους ἀριθμούς, ἔχομεν κατὰ τὸν ἐν § 37 ὁρισμὸν

$$(+5\alpha^4\beta^2\gamma)\times(-8\alpha^3\beta\gamma^4\delta)=-40\alpha^7\beta^3\gamma^5\delta.$$

Ἐὰν δὲ τὰ γράμματα ἐμφαίνωσιν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, συλλογιζόμενοι ὡς ἐν § 32, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν $5\alpha^4\beta^2\gamma$ καὶ $8\alpha^3\beta\gamma^4\delta$ εἶναι $40\alpha^7\beta^3\gamma^5\delta$ (*)· ἄρα τὸ γινόμενον τῶν $+5\alpha^4\beta^2\gamma$ καὶ $-8\alpha^3\beta\gamma^4\delta$ εἶναι $-40\alpha^7\beta^3\gamma^5\delta$ (§ 39).

Ὁ κανὼν λοιπὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπολύτων μονωνύμων ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰ ἀλγεβρικά, εἰς ἃ ἐκ περισσοῦ πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ πρὸ αὐτῶν σημεῖα.

§ 42. Ἔστωσαν ἤδη δύο ἀλγεβρικὰ πολυώνυμα

$$+\alpha+\beta+\gamma+\ldots-\kappa-\lambda-\mu-\ldots=\Pi$$
$$+\pi+\rho+\sigma+\ldots-\varphi-\chi-\psi-\ldots=\Pi',$$

ἔνθα οἱ ὅροι $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \pi, \rho, \ldots \varphi, \chi, \ldots$ (ἀνεξαρτήτως δηλονότι τῶν σημείων) εἰσὶν ἀπόλυτοι ἀριθμοί.

α΄. Ὅταν ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα ἦναι θετικά, αἱ ἀπόλυτοι αὐτῶν ἀξίαι εἶναι τὰ ἀπόλυτα πολυώνυμα

$$(1) \quad \begin{matrix} \alpha+\beta+\gamma+\ldots-\kappa-\lambda-\mu-\ldots \\ \pi+\rho+\sigma+\ldots-\varphi-\chi-\psi-\ldots \end{matrix} \ (^{**})$$

(§ 26, δ΄.). Πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο ταῦτα ἀπόλυτα πολυώνυμα κατὰ τὸν ἐν § 35 κανόνα, ἔξομεν τὴν ἀπόλυτον ἀξίαν τοῦ γινομένου τῶν προτεθέντων ἀλγεβρικῶν παραγόντων· ταύτην δὲ πρέπει νὰ λάβωμεν μετὰ τοῦ σημείου +, ἵνα ἔχωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν γινόμενον τῶν προτεθέντων παραγόντων, ἅτε ὁμοσήμων τούτων ὄντων (§ 38)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ § 35 ἐσχηματισμένον γινόμενον τῶν πολυωνύμων (1) ὡς ἀλγεβρικὸν πολυώνυμον (§ 26, δ΄.).

(*) Αἱ προτάσεις, ἐφ' ὧν στηρίζεται ὁ ἐν § 32 κανὼν ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ὡς εἴρηται ἐν § 40.

(**) Τοῦ πολυωνύμου Π ὄντος θετικοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ,... εἶναι μεῖζον τοῦ τῶν κ, λ, μ, ..· ἐπομένως αἱ ἐν τῇ ἀπολύτῳ παραστάσει $\alpha+\beta+\gamma+\ldots-\kappa-\lambda-\mu-\ldots$ δεικνυόμεναι ἀφαιρέσεις εἰσὶ δυναταί· ὁμοίως αἱ ἐν τῇ $\pi+\rho+\sigma+\ldots-\varphi-\chi-\psi-\ldots$, β'. Ὑποτεθήτω ὅτι τὸ μὲν πολυώνυμον Π εἶναι θετικόν, τὸ δὲ Π' ἀρνητικόν. Ἀλλάττοντες πάντα τὰ σημεῖα τοῦ Π', ἔχομεν τὸ

$$-\pi-\rho-\sigma-\ldots+\varphi+\chi+\psi+\ldots$$

ὅπερ εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον τῷ —Π' (§ 26, γ'.). Πολλαπλασιάσωμεν Π ἐπὶ —Π'· ἐπειδὴ ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι θετικά, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτῶν τὸν κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποδειχθέντα ἤδη κανόνα (α'.)· τὸ γινόμενον, ὅπερ οὕτως εὑρίσκομεν, εἶναι ἴσον μὲν ἀπολύτως τῷ γινομένῳ τῶν Π καὶ Π', ἀλλ' ἑτερόσημον (§ 38, α'.)· ἀλλάττοντες λοιπὸν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τοῦ γινομένου αὐτοῦ, ἕξομεν τὸ γινόμενον τῶν Π καὶ Π' (§ 26, γ'.). Ἤδη εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ αὐτὸ ἕξομεν πολυώνυμον εἴτε ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ Π', πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ προκύπτον πολυώνυμον τὸ πολυώνυμον Π κατὰ τὸν κανόνα καὶ τοῦ ἐντεῦθεν γινομένου ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων, εἴτε πολλαπλασιάσωμεν ἀμέσως κατὰ τὸν κανόνα τὰ προτεθέντα πολυώνυμα Π καὶ Π'.

γ'. Ὑποτεθήτω ὅτι ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα Π καὶ Π' εἶναι ἀρνητικά. Ἀλλάττοντες τὰ σημεῖα τῶν ὅρων ἀμφοτέρων, ἔχομεν τὰ ἑξῆς

$$-\alpha-\beta-\gamma-\ldots+\varkappa+\lambda+\mu+\ldots$$
$$-\pi-\rho-\sigma-\ldots+\varphi+\chi+\psi+\ldots,$$

ὧν τὸ μὲν πρῶτον ἰσοῦται τῷ —Π, τὸ δὲ τῷ —Π'· ἀμφότερα λοιπὸν τὰ τελευταῖα πολυώνυμα εἶναι θετικά· ἂς εὕρωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν κατὰ τὸν ἀποδεδειγμένον κανόνα (α'.)· τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι ταὐτὸν τῷ τῶν προτεθέντων πολυωνύμων Π καὶ Π'· διότι δὲν μεταβάλλεται τὸ γινόμενον, ὅταν ἀλλαγῶσι τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν παραγόντων (§ 38, β'.). Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἕξομεν πολυώνυμον εἴτε ἐπὶ τῶν —Π καὶ —Π' εἴτε ἐπὶ τῶν Π καὶ Π' ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν κανόνα· διότι, ἀλλαγέντων τῶν σημείων τῶν ὅρων ἀμφοτέρων τῶν πολυωνύμων, οἱ ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι ὅροι πρὸ τῆς ἀλλαγῆς τῶν σημείων εἰσὶ τοιοῦτοι καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγήν. Ὁ κανὼν ἄρα ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα ἦναι ἀρνητικά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδείκνυται ὅτι ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων δύναται νὰ ἐξενεχθῇ καὶ ὡς ἑξῆς. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα.* Τῷ ὄντι· κατὰ τὰ προεκτεθέντα τὸ γινόμενον τῶν πολυωνύμων Π καὶ Π' εἶναι ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὅρων $+\alpha, +\beta, +\gamma, \ldots, -\kappa, -\lambda, -\mu, \ldots$ τοῦ ἑνὸς ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων $+\pi, +\rho +\sigma, \ldots, -\varphi, -\chi, -\psi, \ldots$ τοῦ ἑτέρου.—Ἐπειδὴ τὰ ἀλγεβρικὰ πολυώνυμα εἰσὶν ἀθροίσματα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἕπεται ἐκ τοῦ τελευταίου κανόνος ὅτι *τὸ γινόμενον ἀθροίσματος ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ ἕτερον τοιοῦτον ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων ἑκάστου τῶν προσθετέων τοῦ ἑνὸς παράγοντος ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ ἑτέρου.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Ὑπεθέσαμεν ἀνωτέρω ὅτι τὰ γράμματα α, β, κτλ. δι' ὧν παρεστήσαμεν τοὺς ὅρους τῶν πολυωνύμων Π καὶ Π', εἰσὶν ἀπόλυτοι ἀριθμοί· ἀλλ' ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν τὰ γράμματα ταῦτα ἦναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ (§ 30). Τῷ ὄντι· τὰ πολυώνυμα ἐμφαίνουσι τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots -\kappa, -\lambda, -\mu, \ldots$ καὶ τῶν $\pi, \kappa, \rho, \ldots -\varphi, -\chi, -\psi \ldots$· τὸ γινόμενον λοιπὸν αὐτῶν ἰσοῦται κατὰ τὴν ἀνωτέρω σημείωσιν τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων ἑκάστου τῶν προσθετέων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· ἀλλὰ κατὰ τὸν § 39.

$$(+\alpha)\times(+\pi)=+\alpha\pi$$
$$(+\alpha)\times(-\varphi)=-\alpha\varphi$$
$$(-\kappa)\times(+\pi)=-\kappa\pi$$
$$(-\kappa)\times(-\varphi)=+\kappa\varphi$$

κ.τ.λ.

ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν πολυωνύμων Π καὶ Π' τὸν ἐν § 35 κανόνα, ἕξομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ἑκάστου τῶν προσθετέων τοῦ Π ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ Π', ἤγουν τὸ γινόμενον αὐτῶν τούτων τῶν πολυωνύμων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὰ ἐν § 36 θεωρήματα ἀληθεύουσι, καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ἦναι ἀλγεβρικοί.

Διάταξις τῶν πολυωνύμων (*).

§ 43. Πολυώνυμόν τι λέγεται *διατεταγμένον*, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ διαδέχωνται ἀλλήλους κατὰ τὴν τάξιν τῶν αὐξανόντων ἢ ἐλαττουμένων ἐκθετῶν ἑνὸς τῶν ἐν αὐτοῖς γραμμάτων. Π. χ. ἐν τῷ πολυωνύμῳ $3\alpha^4\beta^2-5\alpha^3\beta^3-4\alpha^2\beta\gamma^2+5\alpha\beta^3$ οἱ ὅροι διαδέχονται ἀλλήλους κατὰ τοιαύτην τάξιν, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος α νὰ βαίνωσιν ἐλαττούμενοι· τὸ πολυώνυμον λοιπὸν αὐτὸ εἶναι διατεταγμένον *κατὰ τοὺς κατιόντας ἐκθέτας* ἢ *κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις* τοῦ γράμματος α. Ἐν δὲ τῷ πολυωνύμῳ $5\alpha\beta^3-6\alpha^2\beta^6+3\alpha^4\beta^2-7\alpha^5\beta^5$ οἱ ὅροι διαδέχονται ἀλλήλους κατὰ τὴν ταξιν τῶν αὐξανόντων ἐκθετῶν τοῦ γράμματος α· ὅθεν τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι διατεταγμένον *κατὰ τοὺς ἀνιόντας ἐκθέτας* ἢ *κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις* τοῦ α.

Τὸ γράμμα, καθ' ὃ διατάσσεται πολυώνυμόν τι, λέγεται *γράμμα τῆς διατάξεως*.

Ὁ μὴ περιέχων τὸ γράμμα τῆς διατάξεως ὅρος θεωρεῖται κατὰ τὴν διάταξιν ὡς περιέχων αὐτὸ μετ' ἐκθέτου 0· διό, εἰ μὲν ἡ διάταξις γίνεται κατὰ τοὺς κατιόντας ἐκθέτας, ὁ τοιοῦτος ὅρος γράφεται τελευταῖος· εἰ δὲ κατὰ τοὺς ἀνιόντας, γράφεται πρῶτος.

§ 44. Ὅταν τὸ γράμμα, καθ' ὃ διατάσσεται πολυώνυμόν τι, ὑπάρχῃ εἰς πολλοὺς ὅρους μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκθέτου, οἱ περιέχοντες τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος αὐτοῦ ὅροι γράφονται κατὰ τὸν ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι δεικνυόμενον τρόπον.

Ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$6\alpha^3\chi^3+5\alpha^2\beta\chi^3-2\beta^3\chi^3+\alpha^2\chi^2-\alpha\beta\chi^2+\alpha^3\chi-2\alpha^2\beta\chi+\beta^3\chi-\alpha^2\beta^2-\beta^5,$$

ὅπερ πρόκειται νὰ διαταχθῇ κατὰ τὸ γράμμα χ. Οἱ ὅροι αὐτοῦ, οἱ περιέχοντες τὸ χ^3, γράφονται ὁμοῦ οὕτω $(6\alpha^3+5\alpha^2\beta-2\beta^3)\chi^3$ (ἐξαλείφομεν δηλονότι ἀφ' ἑκάστου τῶν ὅρων αὐτῶν τὸν παράγοντα χ^3 καὶ τοῦ ἐντεῦθεν προκύπτοντος πολυωνύμου δεικνύομεν τὸ γινόμενον ἐπὶ χ^3)· ὡσαύτως οἱ περιέχοντες τὸ χ^2 ὅροι γράφονται ὁμοῦ οὕτω $(\alpha^2-\alpha\beta)\chi^2$· οἱ περιέχοντες τὸ χ οὕτω $(\alpha^3-2\alpha^2\beta+\beta^3)\chi$· οἱ δὲ μὴ περιέχοντες τὸ χ θεωροῦνται ὡς περιέχοντες αὐτὸ μετ' ἐκθέτου 0. Εἰ

(*) Ἀπὸ τοῦδε μέχρι τέλους τοῦ κεφαλαίου αἱ παραστάσεις εἰσὶν ἀδιαφόρως ἀπόλυτοι ἢ ἀλγεβρικαί, ἐκτὸς ὅταν ῥητῶς γίγνηται διάκρισις.

μὲν οὖν ἡ διάταξις γίνεται κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ, τὸ πολυώνυμον γράφεται ὧδε

$$(6\alpha^3+5\alpha^2\beta-2\beta^3)\chi^3+(\alpha^2-\alpha\beta)\chi^2+(\alpha^3-2\alpha^2\beta+\beta^3)\chi-\alpha^2\beta^2-\beta^4\cdot$$

εἰ δὲ κατὰ τὰς ἀνιούσας, ὧδε

$$-\alpha^2\beta^2-\beta^4+(\alpha^3-2\alpha^2\beta+\beta^3)\chi+(\alpha^2-\alpha\beta)\chi^2+(6\alpha^3+5\alpha^2\beta-2\beta^3)\chi^3.$$

Εἰς τὰ οὕτω γεγραμμένα πολυώνυμα καλοῦνται ἐνίοτε *ὅροι* τὰ γινόμενα ἐπὶ τὰς διαφόρους δυνάμεις τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως, εἴτε τὰ σύνολα τῶν τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως περιεχόντων μονωνύμων· π. χ. εἷς τῶν ὅρων τοῦ ἀνωτέρω πολυωνύμου εἶναι ὁ $(\alpha^3-2\alpha^2\beta+\beta^3)\chi$. Ὁ δὲ παράγων, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως, καλεῖται *συντελεστής*· π. χ. τοῦ ὅρου $(\alpha^3-2\alpha^2\beta+\beta^3)\chi$ συντελεστὴς εἶναι ὁ $\alpha^3-2\alpha^2\beta+\beta^3$.

Πρὸς οἰκονομίαν τόπου γράφονται συνήθως τὰ τοιαῦτα πολυώνυμα ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l|l|l}
6\alpha^3 & \chi^3+\alpha^2 & \chi^2+\alpha^3 & \chi-\alpha^2\beta^2 \\
+5\alpha^2\beta & \quad -\alpha\beta & \quad -2\alpha^2\beta & \quad +\beta^4 \\
-2\beta^3 & & \quad +\beta^3 &
\end{array}$$

Ἤγουν οἱ μὲν ὅροι τῶν συντελεστῶν γράφονται κατὰ κάθετον, ἀντὶ δὲ παρενθέσεως ἄγεται ἐκ δεξιῶν καὶ παραλλήλως τῶν ὅρων αὐτῶν κάθετος, ἐκ δεξιῶν δὲ ταύτης καὶ πρὸς τὰ ἄνω γράφεται ἡ δύναμις τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως.

Πολλαπλασιασμὸς διατεταγμένων πολυωνύμων.

§ 45. Θέλομεν δεῖξει ἐνταῦθα πῶς, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν πολυώνυμα ὁμοίως διατεταγμένα, εὑρίσκομεν μεθ' ὅσης οἷόν τε συντομίας τὸ γινόμενον διατεταγμένον καὶ αὐτὸ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

α'. Ὅταν ἐν οὐδετέρῳ τῶν παραγόντων ὑπάρχωσιν ὅροι περιέχοντες τὰς αὐτὰς δυνάμεις τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως, ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τὸν κανόνα γράφομεν κατὰ κάθετον οὐ μόνον τοὺς ὁμοίους ὅρους, ἀλλὰ καὶ πάντας τοὺς περιέχοντας τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως· ἀκολούθως γράφομεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων ἑκάστης στήλης κατὰ τὸν ἀνωτέρω δειχθέντα τρόπον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$$
\begin{array}{l}
3\alpha^5 - 2\alpha^4\beta + 5\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta\gamma^2 \\
2\alpha^4 + 4\alpha^3\beta - 7\alpha^2\beta\gamma \\
\hline
6\alpha^9 - 4\alpha^8\beta + 10\alpha^7\beta^2 - 2\alpha^6\beta\gamma^2 \\
\quad + 12\alpha^8\beta - 8\alpha^7\beta^2 + 20\alpha^6\beta^3 - 4\alpha^5\beta^2\gamma^2 \\
\qquad\qquad - 21\alpha^7\beta\gamma + 14\alpha^6\beta^2\gamma - 35\alpha^5\beta^3\gamma + 7\alpha^4\beta^2\gamma^3 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
6\alpha^9 + 8\alpha^8\beta + 2\beta^2 & \alpha^7 - 2\beta\gamma^2 & \alpha^6 - 4\beta^2\gamma^2 & \alpha^5 + 7\alpha^4\beta^2\gamma^3. \\
-21\beta\gamma & +20\beta^3 & -35\beta^3\gamma & \\
 & +14\beta^2\gamma & &
\end{array}
$$

β'. Ὅταν οἱ παράγοντες ἦναι πολυώνυμα διατεταγμένα ὡς τὸ ἐν τέλει τοῦ § 44, γράφομεν τὰ γινόμενα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς εἶναι γεγραμμένοι οἱ παράγοντες, διατάττοντες κατὰ κάθετον πάντας τοὺς τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως περιέχοντας ὅρους· ἀκολούθως ποιοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ γράφομεν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ πρᾶξις εἶναι κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην μακροτέρα καὶ ἐπιπονωτέρα. Ὅρα τὸ ἀπέναντι παράδειγμα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν οἱ παράγοντες καὶ τὸ γινόμενον ἦναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διατεταγμένα, *ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ γινομένου τῶν πολυωνύμων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν πρώτων ὅρων αὐτῶν*· διότι τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ὅρων τῶν παραγόντων ἀποτελεῖ ἴδιον ὅρον ἐν τῷ γινομένῳ τῶν πολυωνύμων (§ 35, Σημ. Β'.)· εἶναι δὲ καὶ ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ· διότι ἔχει τὸ γράμμα τῆς διατάξεως μετὰ τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου ἐκθέτου. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον *ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ γινομένου τῶν πολυωνύμων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν τελευταίων ὅρων αὐτῶν*.—Ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἐκτελῶμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυωνύμων, οἷα τὰ ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι, καὶ πολλαπλασιάζοντες χωρὶς ἕκαστον τῶν πολυωνύμων ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἕπεται ὅτι αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις ἐφαρμόζονται καὶ εἰς πολυώνυμα, ὧν οἱ ὅροι δὲν εἶναι μονώνυμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Πολλαπλασιαστέος		α^2 $-2\alpha\beta$ $+\beta^2$	$\chi^3\ +2\alpha^3$ $-4\beta^3$	$\chi^2\ -\alpha^4$ $-\alpha^2\beta^2$ $+\beta^4$	$\chi+3\alpha^2\beta^3$ $-2\alpha\beta^4$		
Πολλαπλασιαστής		α $-\beta$	$\chi^2\ +\alpha^2$ $-\alpha\beta$ $-\beta^2$	$\chi-\alpha^3$ $+\beta^3$			
Μερικὰ γινόμενα ἐπὶ	$\alpha\chi^2$	α^3 $-2\alpha^2\beta$ $+\alpha\beta^2$	$\chi^5+2\alpha^4$ $-4\alpha\beta^3$	$\chi^4-\alpha^5$ $-\alpha^3\beta^2$ $+\alpha\beta^4$	$\chi^3+3\alpha^3\beta^3$ $-2\alpha^2\beta^4$	χ^2	χ
	$-\beta\chi^2$	$-\alpha^2\beta$ $+2\alpha\beta^2$ $-\beta^3$	$-2\alpha^3\beta$ $+4\beta^4$	$+\alpha^4\beta$ $+\alpha^2\beta^3$ $-\beta^5$	$-3\alpha^2\beta^4$ $+2\alpha\beta^5$		
	$+\alpha^2\chi$		$+\alpha^4$ $-2\alpha^3\beta$ $+\alpha^2\beta^2$	$+2\alpha^5$ $-4\alpha^2\beta^3$	$-\alpha^6$ $-\alpha^4\beta^2$ $+\alpha^2\beta^4$	$+3\alpha^4\beta^3$ $-2\alpha^3\beta^4$	
	$-\alpha\beta\chi$		$-\alpha^3\beta$ $+2\alpha^2\beta^2$ $-\alpha\beta^3$	$-2\alpha^4\beta$ $+4\alpha\beta^4$	$+\alpha^5\beta$ $+\alpha^3\beta^3$ $-\alpha\beta^5$	$-3\alpha^3\beta^4$ $+2\alpha^2\beta^5$	
	$-\beta^2\chi$		$-\alpha^2\beta^2$ $+2\alpha\beta^3$ $-\beta^4$	$-2\alpha^3\beta^2$ $+4\beta^5$	$+\alpha^4\beta^2$ $+\alpha^2\beta^4$ $-\beta^6$	$-3\alpha^2\beta^5$ $+2\alpha\beta^6$	
	$-\alpha^3$			$-\alpha^5$ $+2\alpha^4\beta$ $-\alpha^3\beta^2$	$-2\alpha^6$ $+4\alpha^3\beta^3$	$+\alpha^7$ $+\alpha^5\beta^2$ $-\alpha^3\beta^4$	$-3\alpha^5\beta^3$ $+2\alpha^4\beta^4$
	$+\beta^3$			$+\alpha^2\beta^3$ $-2\alpha\beta^4$ $+\beta^5$	$+2\alpha^3\beta^3$ $-4\beta^6$	$-\alpha^4\beta^3$ $-\alpha^2\beta^5$ $+\beta^7$	$+3\alpha^2\beta^6$ $-2\alpha\beta^7$
Τὸ ὅλον γινόμενον μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.		α^3 $-3\alpha^2\beta$ $+3\alpha\beta^2$ $-\beta^3$	$\chi^5+3\alpha^4$ $-5\alpha^3\beta$ $+2\alpha^2\beta^2$ $-3\alpha\beta^3$ $+3\beta^4$	$\chi^4+\alpha^4\beta$ $-4\alpha^3\beta^2$ $-2\alpha^2\beta^3$ $+3\alpha\beta^4$ $+4\beta^5$	$\chi^3-3\alpha^6$ $+\alpha^5\beta$ $+10\alpha^3\beta^3$ $-3\alpha^2\beta^4$ $+\alpha\beta^5$ $-5\beta^6$	$\chi^2+\alpha^7$ $+\alpha^5\beta^2$ $+2\alpha^4\beta^3$ $-6\alpha^3\beta^4$ $-2\alpha^2\beta^5$ $+2\alpha\beta^6$ $+\beta^7$	$\chi-3\alpha^5\beta^3$ $+2\alpha^4\beta^4$ $+3\alpha^2\beta^6$ $-2\alpha\beta^7$

Δυνάμεις καὶ ῥίζαι ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 46. Οἱ ὁρισμοὶ δυνάμεων καὶ ῥιζῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἰσὶν οἱ αὐτοὶ τοῖς τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν.

Π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ -7 ἐπὶ -7, ὅπερ εἶναι $+49$, εἶναι *δευτέρα δύναμις* ἢ *τετράγωνον* τοῦ -7· τὸ γινόμενον τοῦ $+49$ ἐπὶ -7, ὅπερ εἶναι -343, εἶναι *τρίτη δύναμις* ἢ *κύβος* τοῦ -7, κ.τ.λ.

Ἐπίσης ὁ -3 εἶναι *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ $+9$· διότι $(-3)\times(-3)=+9$· ὁ -2 εἶναι *κυβικὴ ῥίζα* τοῦ -8· διότι $(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$, κ.τ.λ.

Ὡς δὲ τῶν ἀπολύτων, οὕτω καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν αἱ μὲν δυνάμεις παρίστανται δι' ἐκθετῶν, αἱ δὲ ῥίζαι διὰ ῥιζικῶν, φερόντων τὸν προσήκοντα δείκτην· οἷον $(-7)^3$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{5}$.

§ 47. *Πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ θετικοῦ εἶναι ἀριθμὸς θετικός.* Αἱ δυνάμεις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α εἰσὶ τὰ γινόμενα $\alpha\times\alpha$, $\alpha\times\alpha\times\alpha$, $\alpha\times\alpha\times\alpha\times\alpha$, κ.τ.λ· κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, τὰ γινόμενα ταῦτα εἶναι θετικά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἀπόλυτος ἀξία δυνάμεως θετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἡ ὁμόβαθμος δύναμις τοῦ ἀπολύτου ἀριθμοῦ, τοῦ φέροντος τὸ σημεῖον $+$.

§ 48. *Δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικὴ μέν, ὅταν ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως εἶναι ἄρτιος, ἀρνητικὴ δέ, ὅταν ὁ βαθμὸς ἦναι περιττός.* Ἔστω Α ἀπόλυτός τις ἀριθμός. Ἔχομεν

$$(-A)^{2\mu}=(+A)^{2\mu}.$$

διότι τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δὲν μεταβάλλεται, ὅταν ἀλλαγῶσι τὰ σημεῖα ἀρτίου ἀριθμοῦ παραγόντων (§ 40, Σημ. Α΄.)· ἀλλὰ $(+A)^{2\mu}$ εἶναι θετικόν· ἄρα καὶ $(-A)^{2\mu}$. Ἔχομεν ἀφ' ἑτέρου

$$(-A)^{2\mu+1}=(-A)^{2\mu}\times(-A)\cdot$$

τοῦ β΄. μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης ὁ πρῶτος παράγων $(-A)^{2\mu}$ εἶναι θετικός, ὡς ἤδη ἀπεδείχθη, ὁ δὲ δεύτερος ἀρνητικός· ἄρα τὸ γινόμενον ἀρνητικόν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἡ ἀπόλυτος ἀξία δυνάμεως παντὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἡ ὁμόβαθμος δύναμις τοῦ ἀπολύτου ἀριθμοῦ, τοῦ φέροντος τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Αἱ ἰσότητες

$$(-A)^{2\mu}=+A^{2\mu}$$
$$(-A)^{2\mu+1}=-A^{2\mu+1}$$

ὑφίστανται καὶ ὅταν ὁ Α ἦναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

Δυνάμεις μονωνύμων.

§ 49. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ἵνα ὑψώσωμεν παράστασιν τοιαύτην* $\alpha^{\varkappa}$ *εἰς δύναμιν βαθμοῦ οἱουδήποτε* μ, *πολλαπλασιάζομεν τὸν ἐκθέτην* $\varkappa$ *ἐπὶ* μ. Ἔχομεν δηλονότι

$$(\alpha^{\varkappa})^{\mu}=\alpha^{\varkappa\mu}.$$

διότι

$$(\alpha^{\varkappa})^{\mu}=\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\varkappa}\times\ldots=\alpha^{\varkappa+\varkappa+\varkappa+\ldots}=\alpha^{\varkappa\mu}\,(*).$$

§ 50. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἵνα ὑψώσωμεν μονώνυμον εἰς δύναμιν βαθμοῦ* μ, *ὑψοῦμεν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην τὸν συντελεστὴν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ* μ *τοὺς ἐκθέτας τῶν γραμμάτων*. Π.χ.

$$(1)\quad (34\alpha^{5}\beta^{2}\gamma^{3}\delta^{4})^{\mu}=(34)^{\mu}\alpha^{5\mu}\beta^{2\mu}\gamma^{3\mu}\delta^{4\mu}.$$

διότι τὸ μονώνυμον $34\alpha^{5}\beta^{2}\gamma^{3}\delta^{4}$ εἶναι γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $34, \alpha^{5}, \beta^{2}, \gamma^{3}, \delta^{4}$· ἔχομεν δὲ

$$(34\times\alpha^{5}\times\beta^{2}\times\gamma^{3}\times\delta^{4})^{\mu}=(34\times\alpha^{5}\times\beta^{2}\times\gamma^{3}\times\delta^{4})\times$$
$$(34\times\alpha^{5}\times\beta^{2}\times\gamma^{3}\times\delta^{4})\times(34\times\alpha^{5}\times\beta^{2}\times\gamma^{3}\times\delta^{4})\times\ldots$$

τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης, ὂν γινόμενον ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος εἶναι γινόμενον ἄλλων ἀριθμῶν, ἰσοῦται τῷ μοναδικῷ γινομένῳ πάντων τῶν μερικωτέρων παραγόντων, ἤτοι

$$(34\times\alpha^{5}\times\beta^{2}\times\gamma^{3}\times\delta^{4})^{\mu}=34.\alpha^{5}.\beta^{2}.\gamma^{3}.\delta^{4}.34.\alpha^{5}.\beta^{2}.\gamma^{3}.\delta^{4}.34.\alpha^{5}.\beta^{2}.\gamma^{3}.\delta^{4}\ldots$$

ἀλλ' ἐν τῷ τελευταίῳ τούτῳ γινομένῳ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ πάντων τῶν παραγόντων 34, τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὅπερ εἶναι $(34)^{\mu}$, ἀντὶ πάντων τῶν α^{5}, τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὅπερ εἶναι $\alpha^{5\mu}$ (§ 49), καὶ οὕτω καθεξῆς· οὕτω φθάνομεν εἰς τὴν ἰσότητα (1).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἐὰν τὸ μονώνυμον φέρῃ σημεῖον, τὸ τῆς $\mu^{\eta\varsigma}$ αὐτοῦ δυνάμεως φέρει τὸ $+$, ἐὰν ὁ μ ἦναι ἄρτιος, τὸ τοῦ μονωνύμου δέ, ἐὰν ὁ μ ἦναι περιττός (§ 48).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα δῆλον ὅτι ἡ μ^{η} *δύναμις γινομένου πολλῶν παραγόντων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν* $\mu^{\omega\nu}$ *δυνάμεων τῶν παραγόντων*.

(*) Τὸ γνωστὸν θεώρημα γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἧς ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων, οὗ ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων γινομένου πολλῶν παραγόντων, ἀληθεύει καὶ ἐπὶ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα μερικώτερον εἰς τὸ τετράγωνον, συνάγομεν ὅτι *ἵνα ἔχωμεν τὸ τετράγωνον μονωνύμου, τετραγωνίζομεν τὸν συντελεστὴν καὶ διπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας τῶν γραμμάτων*. Π. χ. $(3\alpha^4\beta^2\gamma)^2=9\alpha^8\beta^4\gamma^2$.

Τετράγωνον πολυωνύμων.

§ 51. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Τὸ τετράγωνον πολυωνύμου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων αὐτοῦ σὺν τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σύνδυο γινομένων τῶν αὐτῶν ὅρων.*

Τὸ θεώρημα ἀληθεύει ἐπὶ τοῦ τετραγώνου δυωνύμου· διότι $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Ἔστω ἤδη τὸ τριώνυμον $\alpha+\beta+\gamma$. Θῶμεν $\alpha+\beta=\sigma$· ἔχομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\sigma+\gamma)^2=\sigma^2+2\sigma\gamma+\gamma^2\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ $\alpha+\beta$ ἀντὶ τοῦ σ, ἔχομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma.$$

Τὸ θεώρημα λοιπὸν ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τριωνύμου.

Ἵνα ἀποδείξωμεν τὴν γενικότητα αὐτοῦ, θέλομεν ἀποδείξει ὅτι ὅταν ἀληθεύῃ ἐπὶ πολυωνύμου ἔχοντος ν ὅρους, ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τοῦ ἔχοντος ἕνα ὅρον πλέον, ἤτοι $\nu+1$ ὅρους.

Ἔστωσαν τὰ πολυώνυμα

$$\alpha+\beta+\gamma+\dots+\iota+\kappa$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\dots+\iota+\kappa+\lambda,$$

ὧν τὸ μὲν πρῶτον ἔχει ὅρους ν, τὸ δὲ $\nu+1$· ὑποτεθήτω δὲ ὅτι τὸ θεώρημα ἀληθεύει ἐπὶ τοῦ πρώτου. Ἐν τῷ δευτέρῳ πολυωνύμῳ, ὅπερ παραστήσωμεν διὰ Π, θῶμεν $\alpha+\beta+\gamma+\dots+\iota+\kappa=\sigma$· ἔχομεν τότε

$$\Pi^2=(\sigma+\lambda)^2=\sigma^2+2\sigma\lambda+\lambda^2.$$

Ἐπειδὴ τὸ θεώρημα ἀληθεύει ἐπὶ πολυωνύμου ἔχοντος ν ὅρους, τὸ σ^2 περιέχει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τοῦ $\alpha+\beta+\gamma+\dots+\iota+\kappa$ σὺν τῷ διπλασίῳ τῶν σύνδυο γινομένων τῶν ὅρων αὐτῶν· ὁ δὲ $2\sigma\lambda$ εἶναι τὸ διπλοῦν τοῦ ἀθροίσματος ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ $\alpha+\beta+\gamma+\dots+\iota+\kappa$ ἐπὶ λ· ἑπομένως $\sigma^2+2\sigma\lambda+\lambda^2$, εἴτε Π^2, περιέχει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τοῦ Π σὺν τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σύνδυο γινομένων τῶν ὅρων αὐτῶν.

Ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι, ὅταν τὸ θεώρημα ἀληθεύῃ ἐπὶ πολυωνύμου ἔχοντος ν ὅρους, ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τοῦ ἔχοντος $\nu+1$ ὅρους· Ἀλλ' εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἀληθεύει ἐπὶ τριωνύμου· ἄρα ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τετραόρου πολυωνύμου, ἐντεῦθεν δὲ καὶ ἐπὶ πενταόρου, καὶ οὕτω καθεξῆς· εἶναι λοιπὸν γενικόν.

§ 52. Ἵνα ἔχωμεν τὸ τετράγωνον πολυωνύμου, ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πολυωνύμων· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐργαζώμεθα καὶ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον, ὅστις ἐξάγεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. *Εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου, εἶτα τὸ διπλοῦν γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν δεύτερον, εἶτα τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου ὅρου, εἶτα τὰ διπλᾶ γινόμενα ἑκατέρου τῶν δύο πρώτων ὅρων ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου, εἶτα τὰ διπλᾶ γινόμενα ἑκάστου τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τετάρτου καὶ οὕτω καθεξῆς.* Ἵνα δ' εὐκόλως ἀνάγωνται οἱ ὅμοιοι ὅροι, διατίθενται τὰ καθ' ἕκαστα ὡς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω τὸ πολυώνυμον $5\alpha^4-2\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2-7\alpha\beta^3-\beta^4$. Τετραγωνίζοντες αὐτὸ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, διατίθεμεν τὰ μερικὰ ἐξαγόμενα ὡς ἑξῆς καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὰς ἀναγωγάς.

$$\begin{array}{l}
25\alpha^8\\
\quad -20\alpha^7\beta+4\alpha^6\beta^2\\
\qquad\qquad +40\alpha^6\beta^2-16\alpha^5\beta^3+16\alpha^4\beta^4\\
\qquad\qquad\qquad\quad -70\alpha^5\beta^3+28\alpha^4\beta^4-56\alpha^3\beta^5+49\alpha^2\beta^6\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -10\alpha^4\beta^4+4\alpha^3\beta^5-8\alpha^2\beta^6+14\alpha\beta^7+\beta^8\\
\hline
25\alpha^8-20\alpha^7\beta+44\alpha^6\beta^2-86\alpha^5\beta^3+34\alpha^4\beta^4-52\alpha^3\beta^5+41\alpha^2\beta^6+14\alpha\beta^7+\beta^8.
\end{array}$$

Κατὰ τὴν διάταξιν ταύτην ἑκάστη ὁριζόντιος σειρὰ λήγει εἰς τὸ τετράγωνον ἑνὸς ὅρου τοῦ πολυωνύμου, οἱ δὲ ὅμοιοι ὅροι κεῖνται κατὰ κάθετον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἐκ τῶν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρισκομένων μερικῶν ἐξαγομένων *τέσσαρα* τοὐλάχιστον δὲν ἀνάγονται μετ' ἄλλων, ἀποτελοῦντα ἰδίους ὅρους καὶ μετὰ τὰς ἀναγωγάς· ταῦτα δὲ εἶναι, ὅταν τὰ πολυώνυμα ἦναι διατεταγμένα, τὰ δύο πρῶτα καὶ τὰ δύο τελευταῖα, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα. Τῷ ὄντι· ἔστω Π τὸ τετραγωνιζόμενον πολυώνυμον, ὑποτεθήτω ὅτι ἡ διάταξις ἐγένετο κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις καὶ ἔστωσαν π καὶ ρ οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως εἰς τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοῦ Π. Οἱ ἐκθέται τοῦ αὐτοῦ γράμματος εἰς τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τετραγώνου τοῦ Π (ἤγουν εἰς τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου καὶ δὶς τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον) εἰσὶ 2π καὶ $\pi+\rho$· οἱ ἐκθέται οὗτοι εἰσὶ διάφοροι· διότι $\pi>\rho$· εἰσὶ δὲ καὶ μείζονες τῶν ἐκθετῶν τοῦ αὐτοῦ γράμματος εἰς τὰ λοιπὰ ἐξαγόμενα, τὰ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρισκόμενα· διότι οἱ λοιποὶ ὅροι τοῦ Π περιέχουσι τὸ γράμμα τῆς διατάξεως μετ' ἐλασσόνων ἐκθετῶν· οἱ δύο λοιπὸν πρῶτοι ὅροι τοῦ τετραγώνου δὲν ἀνάγονται. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδείκνυται ὅτι οὔτε οἱ δύο τελευταῖοι ἀνάγονται, ἤτοι τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δύο τελευταίων ὅρων τοῦ Π καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἔν τε τῷ θεωρήματι καὶ ἐν τῷ κανόνι, ὃν ἐντεῦθεν ἐξηγάγομεν, τὰ πολυώνυμα εἶναι κυρίως ἀλγεβρικά· διότι τὰ γράμματα α, β, γ,…, δι' ὧν παρεστήσαμεν τοὺς ὅρους αὐτῶν, ἐμφαίνουσι θετικοὺς ἢ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Ἐν τούτοις ἐὰν τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἐφαρμόζωμεν καὶ εἰς τὰ ἀπόλυτα πολυώνυμα, θεωροῦντες αὐτὰ κατὰ τὴν πρᾶξιν ὡς ἀλγεβρικά, θέλομεν ἔχει καὶ αὐτῶν τὸ τετράγωνον· διότι, ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ γίνεται πρᾶξις πρὸς πολλαπλασιασμὸν ἀπολύτων καὶ ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων (§ 41), τὸ τετράγωνον ἀλγεβρικοῦ πολυωνύμου δύναται νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὅλως σχῆμα, ὅπερ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ αὐτοῦ πολυωνύμου, θεωρουμένου ὡς ἀπολύτου· ὅθεν καὶ πᾶσα ἄλλη πρᾶξις πρὸς σχηματισμὸν τοῦ τετραγώνου ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων δύναται νὰ ἐφαρμόζηται καὶ εἰς τὰ ἀπόλυτα. Ἡ παρατήρησις αὕτη ὑπάγεται εἰς ἄλλην γενικωτέραν, περὶ ἧς ἐν § 82.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ.

1. Πολλαπλασιασθήτω $(\alpha-\beta)\chi^2+\alpha(\alpha-\beta)\chi-\alpha\beta^2$ ἐπὶ $(\alpha+\beta)\chi-\alpha^2$.

Τὸ γινόμενον εἶναι $(\alpha^2-\beta^2)\chi^3+\alpha\beta(\alpha-\beta)\chi^2-(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3)\chi+\alpha^3\beta^2$.

2. Καταδειχθήτω ἡ ἰσότης.

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)=2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$$

3. Ἐπίσης

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2=(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2.$$

4. Ἐπίσης

$$4\left[(\alpha^2-\beta^2)\gamma\delta+(\gamma^2-\delta^2)\alpha\beta\right]^2+\left[(\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2-\delta^2)-4\alpha\beta\gamma\delta\right]^2=(\alpha^2+\beta^2)^2(\gamma^2+\delta^2)^2.$$

5. Ἐπίσης

$$\tfrac{1}{6}\left[\chi(\chi+1)(\chi+2)+\chi(\chi-1)(\chi-2)\right]+\tfrac{3}{2}(\chi-1)\chi(\chi+1)=\frac{\chi(11\chi^2-5)}{6}.$$

6. Ἐπίσης

$$(1+\chi^2+\chi\sqrt{2})(1+\chi^2-\chi\sqrt{2})=1+\chi^4$$
$$(1+\chi^2)(1+\chi^2+\chi\sqrt{3})(1+\chi^2-\chi\sqrt{3})=1+\chi^6.$$

7. Ἐὰν οἱ ἀκέραιοι α καὶ β ἦναι ἀμφότεροι ἄρτιοι ἢ περιττοί, τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

8. α, β, μ ὄντων ἀκεραίων, $\alpha^3+\mu\beta^2$ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἐὰν $\alpha^2+2\mu\beta^2$ ἦναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐν τῇ ἀποδείξει γίνεται χρῆσις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος (7).

9. Μετασχηματισθήτω εἰς ἄθροισμα τετραγώνων ἡ παράστασις

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\varepsilon'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\varepsilon\varepsilon')^2.$$

Ὁ μετασχηματισμὸς γίνεται ἀναλόγως τῷ ἐν τῷ γ'. ζητήματι.

10. Ὁ κύβος παντὸς πολυωνύμου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν κύβων τῶν ὅρων αὐτοῦ σὺν τοῖς τριπλοῖς γινομένοις τοῦ τετραγώνου ἑκάστου τῶν ὅρων ἐφ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν σὺν τοῖς ἑξαπλασίοις τῶν σύντρια γινομένων τῶν αὐτῶν ὅρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

Διαίρεσις Μονωνύμων (*).

α'. Διαίρεσις δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ — ἐκθέτης ο.

§ 53. *Τὸ πηλίκον τοῦ α^μ διὰ α^ν εἶναι, ὅταν $\mu>\nu$, $\alpha^{\mu-\nu}$*; διότι $\alpha^{\mu-\nu}\times\alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu+\nu}=\alpha^\mu$ (§ 32).

Ὅταν δὲ $\mu<\nu$, τὸ πηλίκον δύναται ἐν πρώτοις νὰ παρασταθῇ οὕτω $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}$· ἐπειδὴ δέ, διαιρουμένων διαιρετέου τε καὶ διαιρέτου διὰ

(*) Ἀπὸ τοῦδε μέχρι τοῦ § 58 πρόκειται περὶ ἀπολύτων ἀριθμῶν.

τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, διαιροῦντες α^{μ} καὶ α^{ν} διὰ α^{μ}, τρέπομεν τὴν παράστασιν $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}$ εἰς τὴν ἁπλουστέραν $\frac{1}{\alpha^{\mu-\nu}}$ (τὸ πηλίκον τοῦ μὲν α^{μ} διὰ α^{μ} εἶναι 1, ὡς πηλίκον ἴσων ἀριθμῶν, τοῦ δὲ α^{ν} διὰ α^{μ} εἶναι $\alpha^{\nu-\mu}$, ὡς προείρηται).

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν $\alpha^5:\alpha^3=\alpha^2$, $\alpha^8:\alpha^3=\frac{1}{\alpha^5}$.

§ 54. Τὸ πηλίκον δύο ὁμοβάθμων δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἡ μονάς, ὡς πηλίκον δύο ἴσων ἀριθμῶν· οἷον $\alpha^{\mu}:\alpha^{\mu}=1$.

Ἐν τούτοις συνετέθη νὰ παριστᾶται τὸ πηλίκον δύο ὁμοβάθμων δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ φέροντος ἐκθέτην 0· π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ α^3 διὰ α^3 γράφεται οὕτω α^0· καὶ ἐν γένει τὸ πηλίκον τοῦ α^{μ} διὰ α^{μ} οὕτω α^0.

Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι πᾶσα παράστασις τοιαύτη A^0, A ὄντος ἀριθμοῦ οἱουδήποτε, ἰσοῦται τῇ μονάδι.

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν συμβολικὴν παράστασιν A^0 καὶ ὡς συνέπειαν τῆς ἑξῆς συνθήκης· *ὁ κανὼν τῆς διαιρέσεως δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν ὁ τοῦ διαιρετέου ἐκθέτης ἦναι μείζων τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου* (§ 53), *ἐφαρμοζέσθω καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως δύο ὁμοβάθμων δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.* Ἔχομεν τότε κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην $\alpha^4:\alpha^4=\alpha^{4-4}=\alpha^0$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ· Ἡ συμβολικὴ παράστασις A^0 συνᾴδει τοῖς εἰρημένοις ἐν § 43 περὶ τῆς θέσεως τῶν μὴ περιεχόντων τὸ γράμμα τῆς διατάξεως ὅρων.

β'. Διαίρεσις μονωνύμου διὰ μονωνύμου.

§ 55. *Ἵνα διαιρέσωμεν μονώνυμον διά τινος τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων, φέροντος ἐκθέτην ἴσον ἢ ἐλάσσονα τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ ἐκθέτου τοῦ γράμματος αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ.*

Π. χ. τὰ πηλίκα τοῦ $15\alpha^4\beta^2\gamma$ διὰ α, α^2, α^3, α^4 εἶναι $15\alpha^3\beta^2\gamma$, $15\alpha^2\beta^2\gamma$, $15\alpha\beta^2\gamma$, $15\alpha^0\beta^2\gamma$ ἢ $15\beta^2\gamma$· διότι διαιροῦμεν οὕτω τὸν παράγοντα α^4 τοῦ μονωνύμου $15\alpha^4\beta^2\gamma$ διὰ α, α^2, α^3, α^4· οὕτω δὲ καὶ τὸ μονώνυμον ὅλον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· διότι, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, ὅταν εἷς τῶν παραγόντων γινομένου τινὸς διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ, διαιρεῖται καὶ τὸ γινόμενον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου ἦναι ἴσος τῷ ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἢ ὁλωσδιόλου ἐξαλείφομεν τὸ γράμμα ἀπὸ τοῦ διαιρετέου (ὅπερ συνηθέστερον), ἢ γράφομεν αὐτὸ μετ' ἐκθέτου 0· οὕτω τὸ πηλίκον $\frac{15\alpha^4\beta^2\gamma}{\alpha^4}$ ἐγράψαμεν ἀνωτέρω διττῶς, $15\alpha^0\beta^2\gamma$ καὶ $15\beta^2\gamma$· διότι τὸ πηλίκον τοῦ α^4 διὰ α^4 εἶναι α^0, εἴτε 1 (§ 54).

§ 56. Τὸ πηλίκον δύο μονωνύμων, παριστώμενον διὰ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως —, ἁπλοποιεῖται, ὅταν ὑπάρχωσι κοινὰ γράμματα ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ ἐν τῷ διαιρέτῃ, διαιρουμένων ἀμφοτέρων τούτων διὰ τῆς κατωτέρας τῶν ἐν αὐτοῖς δυνάμεων ἑκάστου τῶν κοινῶν γραμμάτων. Ἡ δ' ἁπλοποίησις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τοῦ θεωρήματος, οὗ περ ἐμνήσθημεν ἀνωτέρω (§ 53)· ὅτι δηλονότι δὲν μεταβάλλεται τὸ πηλίκον, ὅταν διαιρῆται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης.

Π. χ. Τὸ πηλίκον τοῦ $5\alpha^4\beta\gamma\delta^3\varepsilon^5$ διὰ $7\beta^2\delta^2\varepsilon^3\zeta^4$ παρίσταται ἀμέσως οὕτω $\frac{5\alpha^4\beta\gamma\delta^3\varepsilon^5}{7\beta^2\delta^2\varepsilon^3\zeta^4}$· διαιρουμένων δ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων διὰ β, δ^2, ε^3, ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{5\alpha^4\gamma\delta\varepsilon^2}{7\beta\zeta^4}$.

Εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$75\alpha^7\beta^4\gamma^2\delta^5 : 25\alpha^4\beta^3\gamma^3 = \frac{3\alpha^3\beta\delta^5}{\gamma}$$

$$24\alpha\beta^3\gamma^2 : 10\alpha^3\gamma^4\delta = \frac{12\beta^3}{5\alpha^2\gamma^2\delta}$$

Ἡπλοποιήσαμεν ἔτι μᾶλλον τὰ πηλίκα, ἐξαλείψαντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν συντελεστῶν.

§ 57. Ὅταν ἅπαντα τὰ ἐν τῷ διαιρέτῃ γράμματα ὑπάρχωσι καὶ ἐν τῷ διαιρετέῳ μετ' ἐκθέτου τοὐλάχιστον ἴσου, ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ διαιρετέου διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον, ἁπλοποιούμενον ὡς ἀνωτέρω, γίνεται καὶ αὐτὸ ἀκέραιον μονώνυμον· οἷον

$$\frac{48\alpha^7\beta^3\gamma^2}{6\alpha^4\beta^3}=8\alpha^3\beta^0\gamma^2=8\alpha^3\gamma^2,\ \frac{15\alpha^5\beta^8\gamma\delta^3}{3\alpha^3\beta^5\delta^2}=5\alpha^2\beta^3\gamma\delta.$$

Τὸ τοιοῦτο πηλίκον *ἔχει συντελεστὴν τὸ πηλίκον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ περιέχει τὰ μὲν κοινὰ ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ γράμματα μετ' ἐκθέτου ἴσου τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν, τὰ δὲ λοιπὰ μετὰ τοῦ ἐκθέτου, ὃν ἔχουσιν ἐν τῷ διαιρετέῳ.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων μονωνύμων ἦναι καὶ αὐτὸ ἀκέραιον μονώνυμον, λέγομεν ὅτι *ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς*· θεωρεῖται δὲ τὸ τελευταῖον μονώνυμον ὡς τὸ *τετελεσμένον* πηλίκον τῶν δύο πρώτων.

Πηλίκον ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 58. *Καλεῖται ἀλγεβρικὸν πηλίκον* (ἢ ἁπλῶς *πηλίκον*) *ἀλγεβρικοῦ τινος ἀριθμοῦ δι' ἑτέρου τοιούτου τρίτος τις ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, οὗ τὸ ἀλγεβρικὸν γινόμενον ἐπὶ τὸν δεύτερον ἰσοῦται τῷ πρώτῳ.*

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ $+5$ διὰ -3 εἶναι $-\frac{5}{3}$· διότι $\left(-\frac{5}{3}\right)\times(-3)=+5$ (§ 37).

§ 59. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἔχομεν, α καὶ β ὄντων ἀπολύτων ἀριθμῶν οἱωνδήποτε,

$$(1)\quad \frac{+\alpha}{+\beta}=+\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{+\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{-\alpha}{+\beta}=-\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{+\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha}{\beta}.$$

ὅθεν *τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν, λαμβανομένῳ μετὰ τοῦ σημείου* $+$, *ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ὁμόσημοι, μετὰ τοῦ* $-$ *δέ, ἐὰν ἑτερόσημοι.*

§ 60. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων συνάγονται ἀμέσως τὰ ἑξῆς·

α΄. Ἀλλαττομένου τοῦ σημείου ἑνὸς μόνου ὅρου (τοῦ διαιρετέου ἢ τοῦ διαιρέτου), ἀλλάττεται καὶ τὸ τοῦ πηλίκου.

β΄. Ἀλλαττομένων τῶν σημείων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων, τὸ τοῦ πηλίκου μένει ἀμετάβλητον.

Φανερὸν δ' ὅτι, ὅταν ἀλλάττωνται μόνα τὰ σημεῖα τῶν ὅρων, ἡ ἀπόλυτος ἀξία τοῦ πηλίκου δὲν μεταβάλλεται.

§ 61. Αἱ ἰσότητες (1) ὑφίστανται καὶ ὅταν τὰ γράμματα α καὶ β ἐμφαίνωσιν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς (§ 30). Π. χ. ἡ ἰσότης $\frac{+\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}$ ὑφίσταται καὶ ὅταν τὰ γράμματα α καὶ β ἦναι ἀριθμοὶ ἀλγεβρικοί· διότι τὸ πηλίκον τοῦ $+\alpha$ διὰ $+\beta$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$· ἑπομένως κατὰ τὴν α'. τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων τὸ τοῦ α διὰ $-\beta$ εἶναι $-\frac{\alpha}{\beta}$.

§ 62. Πάντα τὰ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ θεωρήματα διαιρέσεως ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ τοῦ πηλίκου ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν· διότι αἱ ἀποδείξεις τῶν διαφόρων αὐτῶν θεωρημάτων ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ στηρίζονται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ἐπειδὴ δὲ πάντα τὰ θεωρήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν (§ 40), ἕπεται ὅτι καὶ τὰ τῆς διαιρέσεως ἐπίσης, ἀποδεικνυόμενα ὡς καὶ ἐπὶ ἀπολύτων ἀριθμῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Αἱ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν πράξεις, αἱ ὁρισθεῖσαι ἐν § § 21, 27, 37, 46, 58, δεικνύονται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, δι' ὧν καὶ αἱ ὁμώνυμοι πράξεις ἐπὶ ἀπολύτων ἀριθμῶν. Ὅταν τὰ ἐξαγόμενα πράξεων ἐπὶ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν δεικνύωνται διὰ σημείων, ἔχομεν παραστάσεις ἀλγεβρικάς· οἷον $5\alpha^3\beta\gamma^2$ (α, β, γ ἐμφαινόντων ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς). Αἱ δὲ παραστάσεις ἐξαγομένων πράξεων ἐπὶ ἀπολύτων ἀριθμῶν εἰσὶν *ἀπόλυτοι*. Ὑπάρχουσι τὰ αὐτὰ εἴδη ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἅπερ καὶ ἀπολύτων (§ 7 καὶ ἑξῆς). Παράστασίς τις ἀπόλυτος ἐμφαίνει ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, ὅταν δοθῇ αὐτῇ σημεῖον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Αἱ μὲν ἐπὶ ἀπολύτων ἀριθμῶν πράξεις καλοῦνται *ἀριθμητικαί*, αἱ δ' ἐπὶ ἀλγεβρικῶν *ἀλγεβρικαί*. Ἀνάλογον σημασίαν ἔχουσιν αἱ ἐκφράσεις *ἀριθμητικὸν ἄθροισμα*, *ἀριθμητικὴ διαφορά*, κ.τ.λ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Τὰ ἀπὸ τοῦ § 53 μέχρι τοῦ § 57 ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν· διότι πᾶσαι αἱ προτάσεις, ἐφ' ὧν στηρίζονται οἱ ἐκτιθέμενοι αὐτόθι μετασχηματισμοί, ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν. Ἐπὶ τῆς διαιρέσεως ἀλγεβρικῶν μονωνύμων πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ πρὸ τῶν μονωνύμων σημεῖα, ἐὰν ὑπάρχωσιν· οἷον $\frac{+5\alpha^3\beta\gamma^3}{-3\alpha^2\gamma^4}=-\frac{5\alpha\beta}{3\gamma^2}$, τῶν ὅρων ὄντων ἀνεξαρτήτως τῶν πρὸ αὐτῶν σημείων, ἀπολύτων ἢ ἀλγεβρικῶν.

Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου (*).

§ 63. *Ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ μονωνύμου, διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου.* Εἰς τὰς μερικὰς ταύτας διαιρέσεις ἀκολουθοῦμεν ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τὰ εἰρημένα ἐν § 59· ἤγουν ὅταν μὲν ὁ τοῦ διαιρετέου ὅρος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ὁμόσημοι, δίδομεν εἰς τὸ πηλίκον αὐτῶν τὸ σημεῖον $+$· ὅταν δ' ἑτερόσημοι, τὸ $-$.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ πολυωνύμου $5\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2\gamma+2\beta^3\gamma+\gamma^4$ διὰ $-6\alpha\beta^2$ εἶναι

$$-\frac{5\alpha^3\beta}{6\alpha\beta^2}+\frac{6\alpha^2\beta^2\gamma}{6\alpha\beta^2}-\frac{2\beta^3\gamma}{6\alpha\beta^2}-\frac{\gamma^4}{6\alpha\beta^2},$$

ἤ, ἁπλοποιημένου ἑκάστου τῶν μερικῶν πηλίκων (§ 56),

$$-\frac{5\alpha^2}{6\beta}+\alpha\gamma-\frac{\beta\gamma}{3\alpha}-\frac{\gamma^4}{6\alpha\beta^2}.$$

Ὁ κανὼν οὗτος ἐξάγεται ἐκ τοῦ κανόνος πολλαπλασιασμοῦ πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον. Ἐπειδή, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα (§ 42, Σημ. Β'.), ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα σχηματιζομένου πολυωνύμου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἰσοῦται τῷ διαιρετέῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ὅταν ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρισκόμενον πηλίκον ἔσεται ἀκέραιον πολυώνυμον. Τὸ τοιοῦτο πηλίκον

(*) Ἐν τοῖς ἑξῆς αἱ παραστάσεις ἔσονται ἀλγεβρικαί· διὰ σημειώσεων δὲ καὶ παρατηρήσεων παρενειρομένων θέλομεν δεικνύει ὅτι αἱ ἐκτιθέμεναι πράξεις καὶ πάντες ἐν γένει οἱ μετασχηματισμοὶ ἐφαρμόζονται καὶ εἰς ἀπολύτους παραστάσεις.

θεωρεῖται ὡς τετελεσμένον πηλίκον τῶν προκειμένων παραστάσεων· λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $\frac{28\alpha^4\beta^2-12\alpha^3\beta^3\gamma+20\alpha^2\beta^2\gamma^3}{4\alpha^2\beta}=7\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2\gamma+5\beta\gamma^3$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόζωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἐπὶ τῆς διαιρέσεως πολυωνυμικῆς παραστάσεως οἱασδήποτε διὰ παραστάσεως οἱασδήποτε· διότι τοσαύτης γενικότητος εἶναι ἐπιδεκτικὸς καὶ ὁ κανὼν πολλαπλασιασμοῦ πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον, δι' οὗ ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀποδείκνυται.

Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.

§ 64. Τὸ πηλίκον ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου πολυωνύμου ὁτὲ μὲν εἶναι καὶ αὐτὸ ἀκέραιον πολυώνυμον ἢ μονώνυμον, ὁτὲ δ' οὔ. Ὅταν ἦναι ἀκέραιον πολυώνυμον ἢ μονώνυμον, θεωρεῖται ὑπὸ τοιοῦτον σχῆμα ὡς τὸ τετελεσμένον πηλίκον τῶν προτιθεμένων παραστάσεων καὶ λέγομεν τότε ὅτι ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς.

Ἡ πρὸς εὕρεσιν τοῦ τοιούτου πηλίκου γινομένη πρᾶξις στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο προτάσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'. *Ὅταν δύο πολυώνυμα καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν ἦναι διατεταγμένα ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου ἰσοῦται τῷ μερικῷ πηλίκῳ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.* Ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· ἐπειδὴ δὲ οἵ τε παράγοντες καὶ τὸ γινόμενον εἶναι διατεταγμένα πολυώνυμα, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν πρώτων ὅρων τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου (§ 45, Σημ.)· ἄρα ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου ἰσοῦται τῷ μερικῷ πηλίκῳ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'. *Ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, ἡ ἐκ τῶν λοιπῶν τοῦ πηλίκου ὅρων παράστασις ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ εὑρισκομένου ὑπολοίπου διὰ τοῦ διαιρέτου.* Ὁ διαιρετέος, ὢν γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου· ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸ ὑπόλοιπον ἔσται ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου, εἴτε τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὴν ἐκ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου παράστασιν· ἄρα ἡ τελευταία ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ ὑπολοίπου αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου.

§ 65. Ἴδωμεν νῦν πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου. Ἔστω διαιρετέος τὸ πολυώνυμον $8\alpha^5-26\alpha^4\beta+7\alpha^3\beta^2+30\alpha^2\beta^3-22\alpha\beta^4+3\beta^5$, διαιρέτης δὲ τὸ $2\alpha^3-3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3$. Τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἰσὶν ἀμφότερα διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α (ἢ τὰς ἀνιούσας τοῦ β). Διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον $8\alpha^5$ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $2\alpha^3$ τοῦ διαιρέτου, ἔχομεν πηλίκον $4\alpha^2$, ὅπερ εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ τῶν προτεθέντων πολυωνύμων πηλίκου κατὰ τὴν Α'. Πρότασιν. Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $-14\alpha^4\beta+27\alpha^3\beta^2+26\alpha^2\beta^3-22\alpha\beta^4+3\beta^5$, οὗ τὸ πηλίκον διὰ τοῦ προτεθέντος διαιρέτου ἰσοῦται τῇ ἐκ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ ζητουμένου πηλίκου παραστάσει κατὰ τὴν Β'. Πρότασιν. Διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον $-14\alpha^4\beta$ τοῦ ὑπολοίπου αὐτοῦ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $2\alpha^3$ τοῦ διαιρέτου, ἔχομεν πηλίκον $-7\alpha\beta$, ὅπερ εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου τοῦ ὑπολοίπου αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου κατὰ τὴν Α'. Πρότασιν, εἴτε ὁ δεύτερος τοῦ ζητουμένου πηλίκου κατὰ τὴν Β'. Πρότασιν. Πολλαπλασιάζοντες πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα ὅρον $-7\alpha\beta$ καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου $-14\alpha^4\beta+27\alpha^3\beta^2+26\alpha^2\beta^3-22\alpha\beta^4+3\beta^5$, εὑρίσκομεν δεύτερον ὑπόλοιπον $+6\alpha^3\beta^2-9\alpha^2\beta^3-15\alpha\beta^4+3\beta^5$, οὗ τὸν πρῶτον ὅρον $+6\alpha^3\beta^2$ διαιροῦντες διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $2\alpha^3$ τοῦ διαιρέτου, εὑρίσκομεν πηλίκον $+3\beta^2$, ὅπερ εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου τοῦ ὑπολοίπου αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου κατὰ τὴν Α'. Πρότασιν, εἴτε ὁ δεύτερος τοῦ πηλίκου τοῦ πρώτου ὑπολοίπου διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου, εἴτε ὁ τρίτος τοῦ ζητουμένου πηλίκου κατὰ τὴν Β'. Πρότασιν. Πολλαπλασιάζοντες πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0. Συμπεραίνομεν ἐντεῦθεν ὅτι τὸ πηλίκον δὲν ἔχει ἄλλους ὅρους.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{r|l}
8\alpha^5-26\alpha^4\beta+7\alpha^3\beta^2+30\alpha^2\beta^3-22\alpha\beta^4+3\beta^5 & 2\alpha^3-3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3 \\
\cline{2-2}
-(8\alpha^5-12\alpha^4\beta-20\alpha^3\beta^2+4\alpha^2\beta^3) & 4\alpha^2-7\alpha\beta+3\beta^2 \\
\cline{1-1}
-14\alpha^4\beta+27\alpha^3\beta^2+26\alpha^2\beta^3-22\alpha\beta^4+3\beta^5 & \\
-(-14\alpha^4\beta+21\alpha^3\beta^2+35\alpha^2\beta^3-7\alpha\beta^4) & \\
\cline{1-1}
6\alpha^3\beta^2-9\alpha^2\beta^3-15\alpha\beta^4+3\beta^5 & \\
-(6\alpha^3\beta^2-9\alpha^2\beta^3-15\alpha\beta^4+3\beta^5) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Ὅτι τὸ εὑρεθὲν πολυώνυμον $4\alpha^2-7\alpha\beta+3\beta^2$ εἶναι ὄντως τὸ πηλίκον τῶν προτεθέντων πολυωνύμων δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν ἀμέσως ἐκ τῆς γενομένης πράξεως, παρατηροῦντες ὅτι, ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ διαιρετέου διαδοχικῶς τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου αὐτοῦ, εὕρομεν ἐπὶ τέλους ὑπόλοιπον 0, καὶ οὕτως ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πολυώνυμον.

ΚΑΝΩΝ. *Ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ πολυωνύμου, γράφομεν ἐν πρώτοις τὸν διαιρέτην παρὰ τὸν διαιρετέον, διατεταγμένους ἀμφοτέρους ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ μικρᾶς καθέτου γραμμῆς καὶ ἄγομεν ἑτέραν γραμμὴν ὁριζόντιον ὑπὸ τὸν διαιρέτην, ὑφ' ἣν γράφομεν τοὺς διαδοχικῶς εὑρισκομένους ὅρους τοῦ πηλίκου. Ἀκολούθως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.*

Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ἐντεῦθεν ὑπολοίπου (διατεταγμένου ὄντος καὶ αὐτοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον) διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν ἤδη εὑρεθέντα δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου, ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τῆς προηγουμένης ἀφαιρέσεως καὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ἐντεῦθεν ὑπολοίπου διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου *ὅρου τοῦ διαιρέτου. Τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον εἶναι ὁ τρίτος τοῦ ζητουμένου πηλίκου ὅρος.*

Ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

Ἰδοὺ καὶ ἕτερον παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$$
\begin{array}{l|l}
-40\psi^5+68\chi\psi^4+25\chi^2\psi^3+21\chi^3\psi^2-18\chi^4\psi-56\chi^5 & 5\psi^2-6\chi\psi-8\chi^2 \\
\hline
-(-40\psi^5+48\chi\psi^4+64\chi^2\psi^3) & -8\psi^3+4\chi\psi^2-3\chi^2\psi+7\chi^3 \\
\hline
\qquad 20\chi\psi^4-39\chi^2\psi^3+21\chi^3\psi^2-18\chi^4\psi-56\chi^5 & \\
\quad -(20\chi\psi^4-24\chi^2\psi^3-32\chi^3\psi^2) & \\
\hline
\qquad\qquad -15\chi^2\psi^3+53\chi^3\psi^2-18\chi^4\psi-56\chi^5 & \\
\qquad -(-15\chi^2\psi^3+18\chi^3\psi^2+24\chi^4\psi) & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 35\chi^3\psi^2-42\chi^4\psi-56\chi^5 & \\
\qquad\qquad -(35\chi^3\psi^2-42\chi^4\psi-56\chi^5) & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

§ 66. Εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἑκάστη τῶν δυνάμεων τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως ὑπῆρχεν εἰς ἕνα μόνον ὅρον. Θεωρήσωμεν ἤδη πολυώνυμα, ἐν οἷς αἱ αὐταὶ τοῦ τῆς διατάξεως γράμματος δυνάμεις ὑπάρχουσιν ἐν πολλοῖς ὅροις. Περὶ πολυωνύμων τοιούτων ἐγένετο μνεία ἐν § 44.

Αἱ ἐν § 64 προτάσεις ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῶν τοιούτων πολυωνύμων, ὅταν θεωρήσωμεν ὡς ὅρους αὐτῶν τὸ σύνολον τῶν μονωνύμων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως.

Ἑπομένως ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰ τοιαῦτα πολυώνυμα, λαμβανομένης ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω σημασίαν τῆς λέξεως ὅρου. Ἀλλ' αἱ μερικαὶ διαιρέσεις ὅρων, αἱ ἀναφερόμεναι ἐν τῷ κανόνι, ὡς καὶ οἱ πολλαπλασιασμοί, δὲν εἶναι δυνατὸν ἤδη νὰ ἐκτελῶνται πάντοτε ἐκ μνήμης· διότι οἱ ὅροι δὲν εἶναι πάντοτε μονώνυμα.

Ἰδοὺ ἓν παράδειγμα τοιαύτης διαιρέσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

διαιρετέος.	α^3 $-3\alpha^2\beta$ $+3\alpha\beta^2$ $-\beta^3$	$\chi^5+3\alpha^4$ $-5\alpha^3\beta$ $+2\alpha^2\beta^2$ $-3\alpha\beta^3$ $+3\beta^4$	$\chi^4+\alpha^4\beta$ $-4\alpha^3\beta^2$ $-2\alpha^2\beta^3$ $+3\alpha\beta^4$ $+4\beta^5$	$\chi^3-3\alpha^6$ $+\alpha^5\beta$ $+10\alpha^3\beta^3$ $-3\alpha^2\beta^4$ $+\alpha\beta^5$ $-5\beta^6$	$\chi^2+\alpha^7$ $+\alpha^5\beta^2$ $+2\alpha^4\beta^3$ $-6\alpha^3\beta^4$ $-2\alpha^2\beta^5$ $+2\alpha\beta^6$ $+\beta^7$	$\chi-3\alpha^5\beta^3$ $+2\alpha^4\beta^4$ $+3\alpha^2\beta^6$ $-2\alpha\beta^7$
α΄. ὑπόλοιπον.		$+\alpha^4$ $-3\alpha^3\beta$ $+2\alpha^2\beta^2$ $+\alpha\beta^3$ $-\beta^4$	$\chi^4+\alpha^5$ $-3\alpha^3\beta^2$ $-3\alpha^2\beta^3$ $+2\alpha\beta^4$ $+5\beta^5$	$\chi^3-3\alpha^6$ $+\alpha^5\beta$ $+7\alpha^3\beta^3$ $+2\alpha^2\beta^4$ $-\alpha\beta^5$ $-5\beta^6$	$\chi^2+\alpha^7$ $+\alpha^5\beta^2$ $+2\alpha^4\beta^3$ $-6\alpha^3\beta^4$ $-2\alpha^2\beta^5$ $+2\alpha\beta^6$ $+\beta^7$	$\chi-3\alpha^5\beta^3$ $+2\alpha^4\beta^4$ $+3\alpha^2\beta^6$ $-2\alpha\beta^7$
β΄. ὑπόλοιπον.			$-\alpha^5$ $+2\alpha^4\beta$ $-\alpha^3\beta^2$ $+\alpha^2\beta^3$ $-2\alpha\beta^4$ $+\beta^5$	$\chi^3-2\alpha^6$ $+6\alpha^3\beta^3$ $-4\beta^6$	$\chi^2+\alpha^7$ $+\alpha^5\beta^2$ $-\alpha^4\beta^3$ $-\alpha^3\beta^4$ $-\alpha^2\beta^5$ $+\beta^7$	$\chi-3\alpha^5\beta^3$ $+2\alpha^4\beta^4$ $+3\alpha^2\beta^6$ $-2\alpha\beta^7$
					0	

διαιρέτης.	α^2 $-2\alpha\beta$ $+\beta^2$	$\chi^3+2\alpha^3$ $-4\beta^3$	$\chi^2-\alpha^4$ $-\alpha^2\beta^2$ $+\beta^4$	$\chi+3\alpha^2\beta^3$ $-2\alpha\beta^4$
πηλίκον.	α $-\beta$	$\chi^2+\alpha^2$ $-\alpha\beta$ $-\beta^2$	$\chi-\alpha^3$ $+\beta^3$	

α΄. μερικὴ διαίρεσις.

$$\begin{array}{l|l} \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 & \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline -\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3 & \alpha-\beta \\ 0 & \end{array}$$

β΄. μερικὴ διαίρεσις.

$$\begin{array}{l|l} \alpha^4-3\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3-\beta^4 & \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline -\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3-\beta^4 & \alpha^2-\alpha\beta-\beta^2 \\ -\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3-\beta^4 & \\ 0 & \end{array}$$

γ΄. μερικὴ διαίρεσις.

$$\begin{array}{l|l} -\alpha^5+2\alpha^4\beta-\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3-2\alpha\beta^4+\beta^5 & \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline \alpha^2\beta^3-2\alpha\beta^4+\beta^5 & -\alpha^3+\beta^3 \\ 0 & \end{array}$$

Ἵνα διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον $(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)\chi^5$ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\chi^3$ τοῦ διαιρέτου, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν ἐκείνου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τούτου, ἤτοι $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ διὰ $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $\alpha-\beta$, εἶτα διαιροῦμεν χ^5 διὰ χ^3, καὶ δεικνύομεν τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν πηλίκων· ἔχομεν οὕτω $(\alpha-\beta)\chi^2$, ὅπερ εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα ὅρον τοῦ πηλίκου, ὡς δέδεικται ἐν § 45, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον, ὅπερ δὲν εἶναι σεσημειωμένον ἐν τῷ ἀνωτέρῳ πίνακι τῆς πράξεως, ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, τοῦ δ' ἐντεῦθεν ὑπολοίπου τὸν πρῶτον ὅρον $(\alpha^4-3\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3-\beta^4)\chi^4$ διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, ἐκτελοῦντες καὶ τὴν διαίρεσιν ταύτην ὡς τὴν προηγηθεῖσαν· τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0. Αἱ μερικαὶ διαιρέσεις, οἱ πολλαπλασιασμοὶ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου καὶ αἱ τῶν ἐντεῦθεν γινομένων ἀφαιρέσεις γίνονται δι' ἰδιαιτέρων γραπτῶν πράξεων, ἐξ ὧν ἐσημειώθησαν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ πίνακι μόναι αἱ διαιρέσεις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ὁ κανὼν διαιρέσεως ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰ ἀπόλυτα.* Ἔστωσαν Α, Β, Γ τρία ἀπόλυτα πολυώνυμα καὶ ὑποτεθήτω $A=B\times\Gamma$. Ἡ ἰσότης αὕτη ὑφίσταται καὶ ἐὰν τὰ πολυώνυμα θεωρηθῶσιν ὡς ἀλγεβρικά· διότι ἡ πρᾶξις πρὸς εὕρεσιν τοῦ $B\times\Gamma$ εἶναι ἡ αὐτή, εἴτε ἀπόλυτά εἰσι τὰ Β καὶ Γ, εἴτε ἀλγεβρικὰ (§ 42)· ἄρα καὶ ἡ πρᾶξις, ἡ γινομένη πρὸς εὕρεσιν τοῦ Γ, δοθέντων τῶν Α καὶ Β, εἶναι ἡ αὐτή, εἴτε ἀπόλυτά εἰσι τὰ πολυώνυμα, εἴτε ἀλγεβρικά.

Περὶ διαιρέσεων μὴ γινομένων ἀκριβῶς.

§ 67. Ὅταν τὸ πηλίκον πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου ἦναι καὶ αὐτὸ πολυώνυμον (ἢ μονώνυμον), πρέπει κατὰ τὴν γενομένην θεωρίαν πᾶσαι αἱ ἐν τῷ κανόνι διαιρέσεως ἀναφερόμεναι μερικαὶ διαιρέσεις νὰ γίγνωνται ἀκριβῶς καὶ νὰ εὑρίσκωμεν ἐπὶ τέλους ὑπόλοιπον 0.

Διττῶς ἄρα καταδειχθείη ὅτι διαίρεσίς τις δὲν γίνεται ἀκριβῶς, ὅταν ἐργαζώμεθα κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως· ἢ δηλονότι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου ἤ τινος τῶν ὑπολοίπων οὐκ ἔσεται διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου, ἢ οὐδέποτ' ἂν εὕροιμεν ὑπόλοιπον 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

α'. $8\alpha^4\chi^6-2\alpha^2\chi^5-6\chi^4+2\chi^3$ $\quad$ | $2\chi^4-\chi$

$=2\alpha^2\chi^5-6\chi^4+(4\alpha^4+2)\chi^3$ $\quad$ $4\alpha^4\chi^2-\alpha^2\chi-3$

$=6\chi^4+(4\alpha^4+2)\chi^3+\alpha^2\chi^2$

$(4\alpha^4+2)\chi^3+\alpha^2\chi^2=3\chi$

ϐ'.
$$
\begin{array}{l|l}
4\chi^2-6\chi^3+7\chi^4-\ 2\chi^5 & \chi-3\chi^2+2\chi^3 \\ \cline{2-2}
\quad +6\chi^3-\ \chi^4-\ 2\chi^5 & 4\chi+6\chi^2+17\chi^3 \\
\qquad\quad 17\chi^4-14\chi^5 & \\
\qquad\qquad\quad 37\chi^5-34\chi^6 &
\end{array}
$$

Εἰς τὸ α'. παράδειγμα, ἀφοῦ ἐξετελέσαμεν τρεῖς μερικὰς διαιρέσεις καὶ εὕρωμεν τρεῖς ὅρους ἐν τῷ πηλίκῳ, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Ἡ διαίρεσις λοιπὸν δὲν γίνεται ἀκριβῶς.

Εἰς τὸ ϐ'. παράδειγμα παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ διαιρέτου, ὅπερ εἶναι $+34\chi^6$, δὲν ἀνάγεται μετ' οὐδενὸς ὅρου τοῦ προηγουμένου ὑπολοίπου $17\chi^4-14\chi^5$, ὡς περιέχον τὸ χ μετ' ἐκθέτου μείζονος τοῦ ἐν τῷ τελευταίῳ τοῦ διαιρετέου ὅρῳ. Ἐὰν προβῶμεν εἰς τὴν πρᾶξιν, ἐπειδὴ οἱ ἐκθέται τοῦ χ βαίνουσιν αὐξάνοντες, τὰ γινόμενα ἑκάστου τῶν εὑρισκομένων ἐν τῷ πηλίκῳ ὅρων ἐπὶ τὸν τελευταῖον τοῦ διαιρέτου δὲν θέλουσιν ἀνάγεσθαι μεθ' ὅρων τοῦ προηγουμένου ὑπολοίπου· οὐδέποτε ἄρα εὑρήσομεν ὑπόλοιπον 0. Ἡ διαίρεσις λοιπὸν δὲν γίνεται ἀκριβῶς. Παρατηρητέον ἐν τούτοις ὅτι, ὅσῳ καὶ ἂν προβῶμεν εἰς τὴν πρᾶξιν, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρέτου, ὅστις εἶναι χ, θέλει πάντοτε διαιρεῖ ἀκριβῶς τοὺς πρώτους ὅρους τῶν ὑπολοίπων, οἵτινές εἰσι δυνάμεις τοῦ χ πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ ἀκεραίους ἀριθμούς.

Ὅταν τὰ πολυώνυμα ἦναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις, ὡς εἰς τὸ α'. τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, τὸ μὴ δυνατὸν τῆς ἀκριβοῦς διαιρέσεως καταφαίνεται πάντοτε διὰ μερικῆς διαιρέσεως μὴ γινομένης ἀκριβῶς· διότι τότε οἱ ἐν τοῖς πρώτοις ὅροις τῶν ὑπολοίπων ἐκθέται τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως βαίνουσιν ἐλαττούμενοι· ὅθεν μετά τινας διαιρέσεις θέλει πάντως συμβῇ νὰ περιέχῃ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ὑπολοίπου τὸ τῆς διατάξεως γράμμα μετ' ἐλάσσονος ἐκθέτου ἢ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρέτου, ὅτε δὴ δὲν θέλει διαιρεῖσθαι ἀκριβῶς διὰ τοῦ τελευταίου· ἀλλὰ καὶ πρὶν ἢ συμβῇ τοῦτο, δυνατὸν ὁ πρῶτος ὅρος ὑπολοίπου τινὸς νὰ μὴ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου.

Ὅταν τὰ πολυώνυμα ἦναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις, ὡς εἰς τὸ β'. τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, τὸ μὴ δυνατὸν τῆς ἀκριβοῦς διαιρέσεως καταφαίνεται ἢ ὡς ἐν τῷ αὐτῷ παραδείγματι ἢ καὶ διὰ μερικῆς διαιρέσεως μὴ γινομένης ἀκριβῶς, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι

$$\begin{array}{l|l} 3\alpha^4\chi^2-5\alpha^3\chi^3+6\alpha\chi^4 & \alpha^4\chi-2\chi^4 \\ \hline \quad -5\alpha^3\chi^3+6\alpha\chi^4+6\chi^5 & 3\chi \end{array}$$

ἔνθα ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πρώτου ὑπολοίπου δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Χαρακτηριστικά τινα διαιρέσεων μὴ γινομένων ἀκριβῶς.

§ 68. Εἴπομεν τί ἐν γένει συμβαίνει, ὅταν ἐφαρμόζηται ὁ κανὼν τῆς διαιρέσεως εἰς πολυώνυμα μὴ διαιρούμενα ἀκριβῶς. Ἰδοὺ νῦν ἀξιοσημείωτά τινα χαρακτηριστικὰ διαιρέσεων μὴ γινομένων ἀκριβῶς, συνεπαγόμενα θατέραν τῶν προδιαληφθεισῶν περιπτώσεων.

Ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται ἀκριβῶς

α'. *Ὅταν ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου*· διότι οἱ τελευταῖοι ὅροι γίνονται πρῶτοι, ὅταν διατάξωμεν ἀντιθέτως.

β'. *Ὅταν ὁ τελευταῖος ὅρος ὑπολοίπου τινὸς ἦναι διάφορος τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρετέου.* Ὅταν ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς, ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ διαιρετέου, ὡς καὶ ἑκάστου τῶν ὑπολοίπων, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν τελευταῖον τοῦ πηλίκου (§ 45, Σημ.)· πρέπει λοιπὸν τότε οἱ τελευταῖοι ὅροι τῶν ὑπολοίπων νὰ ἦναι οἱ αὐτοὶ καὶ ἴσοι τῷ τελευταίῳ τοῦ διαιρετέου· ἐν περιπτώσει λοιπὸν τοῦ ἐναντίου, ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται ἀκριβῶς.

γ'. *Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ γράμματα μὴ ὑπάρχοντα ἐν τῷ διαιρετέῳ.* Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ διαιρετέος δὲν δύναται τότε νὰ ἦναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἄλλο πολυώνυμον ἢ μονώνυμον.

δ'. *Ὅταν ὁ ἐν τῷ διαιρετέῳ μέγιστος ἢ ἐλάχιστος ἐκθέτης γράμματός τινος ἦναι ἐλάσσων τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου ἐκθέτου τοῦ αὐτοῦ γράμματος ἐν τῷ διαιρέτῃ*· διότι ἐὰν διατάξωμεν κατὰ τὸ γράμμα αὐτό, ὁ πρῶτος τοῦ διαιρετέου ὅρος δὲν θέλει διαιρεῖσθαι ἀκριβῶς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

ε'. Ὅταν, ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως, εὑρίσκωμεν ἐν τῷ πηλίκῳ ὅρον, ἐν ᾧ γράμμα τι φέρει ἐκθέτην μείζονα τῆς διαφορᾶς τῶν μεγίστων ἐκθετῶν τοῦ γράμματος αὐτοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ, ἢ ἐλάσσονα τῆς διαφορᾶς τῶν ἐλαχίστων ἐκθετῶν τοῦ αὐτοῦ γράμματος. Ὅταν τὸ πηλίκον ἦναι ἀκέραιον πολυώνυμον, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ τοιούτους ὅρους, ὡς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν διατάττοντες κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος γράμματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

α'. $6\alpha^3\chi-10\alpha^2\chi^5+8\alpha^8\chi^9 \;|\; 2\alpha\chi-4\alpha^2\chi^7$

$-10\alpha^2\chi^5+12\alpha^4\chi^7+8\alpha^8\chi^9 \quad 3\alpha^2-5\alpha\chi^4$.

β'. $8\alpha^4\chi^6-2\alpha^2\chi^5-6\chi^4 \;|\; 2\chi^4-\chi$

$4\alpha^4\chi^2$

Εἰς τὸ α'. παράδειγμα εὑρίσκομεν ἐν τῷ πηλίκῳ ὅρον $-5\alpha\chi^4$, ὅστις ἔχει τὸ χ μετ' ἐκθέτου μείζονος τῆς διαφορᾶς τῶν μεγίστων ἐκθετῶν τοῦ γράμματος αὐτοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ. Εἰς τὸ β'. παράδειγμα εὑρίσκομεν ἐν τῷ πηλίκῳ ὅρον $4\alpha^4\chi^2$, ἐν ᾧ τὸ χ ἔχει ἐκθέτην ἐλάσσονα τῆς διαφορᾶς τῶν ἐλαχίστων αὐτοῦ ἐκθετῶν ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ. Οὐδετέρα λοιπὸν τῶν διαιρέσεων τούτων γίνεται ἀκριβῶς.

Πηλίκον πολυωνύμων ἀκεραίων ὡς πρὸς γράμμα τι.

§ 69. Πολυώνυμον οἱονδήποτε (ἀκέραιον ἢ μή) λέγεται *ἀκέραιον* ὡς πρός τι τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων, ὅταν τὸ γράμμα τοῦτο δὲν ὑπάρχῃ ἐν παρονομασταῖς, οὔτε ὑπὸ ῥιζικόν· π. χ. τὸ πολυώνυμον

$$(1)\quad \frac{5\alpha^2\chi^3}{\beta}-\frac{\beta^2\chi^2}{3\alpha}+4\chi\sqrt{\gamma}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}$$

εἶναι ἀκέραιον ὡς πρὸς τὸ γράμμα χ.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ γράμματος, ὡς πρὸς ὃ τὸ πολυώνυμον εἶναι ἀκέραιον, δυνατὸν νὰ ὦσι παραστάσεις οἱαιδήποτε.

§ 70. Πολυωνύμου ἀκεραίου ὡς πρὸς γράμμα τι χ καλεῖται *βαθ-*

μὸς ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ γράμμα ὁ μέγιστος τῶν ἐκθετῶν τοῦ γράμματος αὐτοῦ. Π. χ. τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον (1) εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ χ.

§ 71. Λέγομεν ὅτι πολυώνυμον ἢ μονώνυμον ἀκέραιον ὡς πρὸς γράμματι χ εἶναι διαιρετὸν δι' ἑτέρου ἀκεραίου ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα, ὅταν καὶ τὸ πηλίκον δύναται νὰ λάβῃ τὸ σχῆμα πολυωνύμου ἢ μονωνύμου ἀκεραίου ὡς πρὸς τὸ χ. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει λέγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται ἀκριβῶς.

Π. χ. τὸ $8\alpha\chi^3+4\sqrt{\alpha}\chi^2-4\chi$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $4\sqrt{\alpha}\chi^2+4\chi$ διότι τὸ πηλίκον, ὃν $2\sqrt{\alpha}\chi-1$, εἶναι ἀκέραιον ὡς πρὸς τὸ χ, ὡς πρὸς ὃ εἰσὶν ἐπίσης ἀκέραιοι ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης.

§ 72. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Α καὶ Β ὄντων δύο πολυωνύμων ἀκεραίων ὡς πρὸς γράμματι χ, τοῦ δὲ Β βαθμοῦ ἐλάσσονος τοῦ Α ἢ τὸ πολὺ ἴσου, τὸ πηλίκον* $\frac{A}{B}$ *δύναται πάντοτε νὰ λάβῃ μορφὴν πολυωνύμου Π, ἀκεραίου ὡς πρὸς τὸ χ, ηὐξημένου κατὰ κλάσμα* $\frac{Y}{B}$, *οὗ παρονομαστὴς μὲν εἶναι ὁ διαιρέτης Β, ἀριθμητὴς δὲ πολυώνυμον ἀκέραιον ὡς πρὸς τὸ χ καὶ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ Β.*

Διατάξωμεν τὰ πολυώνυμα Α καὶ Β κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ καὶ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτῶν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως ἀκεραίων πολυωνύμων, προβῶμεν δ' εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον Υ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου Β· ἕξομεν οὕτως ἐν τῷ πηλίκῳ ὅρους ἀκεραίους ὡς πρὸς τὸ χ· διότι οἱ πρῶτοι ὅροι τοῦ διαιρετέου καὶ τῶν ὑπολοίπων περιέχουσι δυνάμεις τοῦ χ οὐχὶ κατωτέρας τῆς ἐν τῷ πρώτῳ ὅρῳ τοῦ διαιρέτου. Σημειωθήτω διὰ Π τὸ ἐκ τῶν ὅρων αὐτῶν ἀποτελούμενον πολυώνυμον. Ἐπειδὴ Υ εἶναι τὸ εὑρισκόμενον ὑπόλοιπον, ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσι διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ Α τὰ γινόμενα τοῦ Β ἐπὶ τοὺς διαφόρους ὅρους τοῦ Π, ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$Y=A-B\Pi\cdot$$

ἐξ ἧς

$$A=B\Pi+Y;$$

ὅθεν

$$\frac{A}{B}=\Pi+\frac{Y}{B}.$$

Τὸ πηλίκον λοιπὸν $\dfrac{A}{B}$ δύναται νὰ μετασχηματισθῇ ὡς εἴρηται.

Ὅταν τὸ πηλίκον δύο πολυωνύμων A καὶ B μετασχηματίζηται κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, τὸ μὲν Π, καλεῖται *ἀκέραιον πηλίκον*, τὸ δὲ Υ *ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως*.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Τὰ γράμματα Β, Π, Υ δύνανται νὰ ἐμφαίνωσι καὶ μονώνυμα ἀκέραια ὡς πρὸς τὸ χ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. *Κατὰ ἕνα μόνον τρόπον γίνεται ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμὸς, ἐφ' ὅσον δὲν ἀλλάττεται τὸ γράμμα τῆς διατάξεως.* Ὑποτεθήτω ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος γένοιτ' ἂν διττῶς. Ἔστωσαν Π καὶ Υ τὸ ἀκέραιον πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, Π΄ καὶ Υ΄ κατὰ τὸν δεύτερον.

Ἔχομεν $\quad A = B\Pi + \Upsilon$

$\qquad\quad\;\; A = B\Pi' + \Upsilon'$

ὅθεν $\quad B\Pi + \Upsilon = B\Pi' + \Upsilon'$

ἐντεῦθεν $\quad B(\Pi - \Pi') = \Upsilon' - \Upsilon.$

Ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἄτοπος· διότι τὸ μὲν πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶναι βαθμοῦ τοὐλάχιστον ἴσου τῷ τοῦ Β, τὸ δὲ δεύτερον μέλος εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ Β, τοῦ Υ καὶ τοῦ Υ΄ ὄντων ἀμφοτέρων βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ Β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

α΄. $$\frac{\chi^5 - 3\chi^4 + 5\chi^2 - 6\chi - 7}{\chi^2 - 3\chi + 3} = \chi^3 - 3\chi - 4 + \frac{-9\chi + 5}{\chi^2 - 3\chi + 3}.$$

β΄. $$\frac{\chi^3\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{5}{7}\chi^2 - 4\chi + \frac{2}{7}}{2\chi^3 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{5}{7}\chi^2 - 4\chi + \frac{2}{7} + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{5}}}{2\chi^3 - \frac{3}{4}}.$$

γ΄. $$\frac{\chi^4 + \psi^4}{\chi^2 + \psi^2} = \chi^2 - \psi^2 + \frac{2\psi^4}{\chi^2 + \psi^2}.$$

Ἐὰν εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα διατάξωμεν ὡς πρὸς τὸ ψ, εὑρίσκομεν

$$\frac{\psi^4 + \chi^4}{\psi^2 + \chi^2} = \psi^2 - \chi^2 + \frac{2\chi^4}{\psi^2 + \chi^2}.$$

Οὕτω τὸ αὐτὸ πηλίκον $\frac{\chi^4+\psi^4}{\chi^2+\psi^2}$ ἀνελύθη διττῶς εἰς ἀκέραιον καὶ κλάσμα· ἀλλὰ τὸ γράμμα τῆς διατάξεως δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ κατὰ τοὺς δύο τούτους μετασχηματισμούς.

Διαίρεσις πολυωνύμων ἀκεραίων ὡς πρὸς γράμμα τι χ διὰ χ—α.

§ 73. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν πολυώνυμον ἀκέραιον ὡς πρὸς γράμμα τι χ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος αὐτοῦ καὶ διαιρεθῇ διὰ τοῦ διωνύμου χ—α, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἔσται ἡ προκύπτουσα παράστασις, ὅταν ἐν τῷ πολυωνύμῳ ἀντικατασταθῇ α ἀντὶ χ.*

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης χ—α εἶναι πρώτου βαθμοῦ, δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν διαίρεσιν, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μὴ περιέχον τὸ χ (§ 72). Ἔστω Π ὁ διαιρετέος, Κ τὸ πηλίκον καὶ Υ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ δὲν περιέχει τὸ χ. Ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$\Pi=(\chi-\alpha)K+\Upsilon.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ὑφίσταται, οἱονδήποτ' ἂν ᾖ τὸ χ. Θῶμεν ἐν αὐτῇ χ=α· σημειοῦντες διὰ Π_1 καὶ K_1 τοῦθ' ὅπερ ἀποβαίνουσι τὸ Π καὶ τὸ Κ, ὅταν ἐν αὐτοῖς ἀντικατασταθῇ α ἀντὶ χ, καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ Υ, μὴ περιέχον τὸ χ, δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ (χ—α)Κ γίνεται 0×Κ, εἴτε 0, ἔχομεν $\Pi_1=\Upsilon$.—Ο. Ε. Δ.

§ 74. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἐὰν πολυώνυμον Π μηδενίζηται, ὅταν τεθῇ ἐν αὐτῷ α ἀντὶ χ, τὸ πολυώνυμον αὐτὸ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ χ—α.* Τὸ ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ α ἀντὶ χ ἐξαγόμενον εἶναι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ χ—α· ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ εἶναι 0· ἄρα τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ χ—α.

Ἀντιστρόφως ἐὰν πολυώνυμον Π ἦναι διαιρετὸν διὰ χ—α, πρέπει νὰ μηδενίζηται, ὅταν τεθῇ ἐν αὐτῷ α ἀντὶ χ. Ἐπειδὴ τὸ ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ α ἀντὶ τοῦ χ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, πρέπει νὰ ἦναι 0· διότι ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκφέρονται καὶ οὕτω· *ἵνα πολυώνυμον ἀκέραιον ὡς πρὸς γράμμα τι χ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ χ—α, πρέπει καὶ* ἀρκεῖ νὰ μηδενίζηται, ὅταν τεθῇ ἐν αὐτῷ α ἀντὶ χ. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι χρησιμωτάτη ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ. Ἰδού τινες ἐφαρμογαὶ αὐτῆς.

α΄. *Ἡ παράστασις* $\chi^\mu - \alpha^\mu$ *διαιρεῖται πάντοτε ἀκριβῶς διὰ* $\chi - \alpha$· διότι μηδενίζεται, ὅταν τεθῇ ἐν αὐτῇ α ἀντὶ χ.

β΄. *Ἡ παράστασις* $\chi^\mu + \alpha^\mu$ *οὐδέποτε εἶναι διαιρετὴ διὰ* $\chi - \alpha$· διότι δὲν μηδενίζεται, ὅταν τεθῇ ἐν αὐτῇ α ἀντὶ χ.

γ΄. *Ἡ παράστασις* $\chi^\mu - \alpha^\mu$ *διαιρεῖται μὲν διὰ* $\chi + \alpha$, *ὅταν ὁ μ ἦναι ἄρτιος, δὲν διαιρεῖται δὲ, ὅταν ὁ μ ἦναι περιττός.* Τὸ δυώνυμον $\chi + \alpha$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω $\chi - (-\alpha)$. Ἐν τῷ $\chi^\mu - \alpha^\mu$ τιθέντες $-\alpha$ ἀντὶ χ ἔχομεν $(-\alpha)^\mu - \alpha^\mu$, ὅπερ εἶναι 0, ὅταν ὁ μ ἦναι ἄρτιος, καὶ $-2\alpha^\mu$, ὅταν ὁ μ ἦναι περιττός.

δ΄. *Ἡ παράστασις* $\chi^\mu + \alpha^\mu$ *διαιρεῖται μὲν διὰ* $\chi + \alpha$, *ὅταν ὁ μ ἦναι περιττὸς, δὲν διαιρεῖται δὲ, ὅταν ὁ μ ἦναι ἄρτιος.* Θέτοντες ἐν τῷ $\chi^\mu + \alpha^\mu$ ἀντὶ τοῦ χ τὸ $-\alpha$, ἔχομεν $(-\alpha)^\mu + \alpha^\mu$, ὅπερ εἶναι 0, ἐὰν ὁ μ περιττὸς, καὶ $2\alpha^\mu$, ἐὰν ὁ μ ἄρτιος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πηλίκον τοῦ $\chi^\mu - \alpha^\mu$ διὰ $\chi - \alpha$ ἔχει σχῆμα τοιόνδε

$$\chi^{\mu-1} + \alpha\chi^{\mu-2} + \alpha^2\chi^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-2}\chi + \alpha^{\mu-1}.$$

Πρὸς δεῖξιν τούτου ἢ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν κανόνα, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸ τελευταῖον πολυώνυμον ἐπὶ $\chi - \alpha$· εὑρίσκομεν τότε γινόμενον $\chi^\mu - \alpha^\mu$. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$\frac{\alpha^5 - \beta^5}{\alpha - \beta} = \alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4,$$

$$\frac{\alpha^6 - \beta^6}{\alpha - \beta} = \alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5,$$

κ.τ.λ., ὡς εὑρίσκομεν καὶ ἐκτελοῦντες τὰς διαιρέσεις.

§ 75. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν πολυώνυμον Π, ἀκέραιον ὡς πρὸς γράμμα τι χ, μηδενίζηται, ὅταν τεθῶσιν ἀντὶ τοῦ χ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ..., τὸ πολυώνυμον αὐτὸ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ* $(\chi - \alpha)(\chi - \beta)(\chi - \gamma) \ldots$.

Ἐπειδὴ τὸ Π μηδενίζεται, ὅταν $\chi = \alpha$, διαιρεῖται διὰ $\chi - \alpha$· παριστῶντες διὰ Κ τὸ πηλίκον, ἔχομεν

$$(1) \quad \Pi = (\chi - \alpha)\mathrm{K}.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ὑπάρχει, οἱονδήποτ' ἂν ᾗ τὸ χ. Θῶμεν ἐν αὐτῇ β ἀντὶ χ· σημειοῦντες διὰ K_1 τοῦθ' ὅπερ γίνεται τότε τὸ K, ἔχομεν

$$0=(\beta-\alpha)K_1\cdot$$

ἄρα $K_1=0$· ἄρα K διαιρεῖται διὰ $\chi-\beta$ (§ 74). Ἔστω M τὸ πηλίκον τοῦ K διὰ $\chi-\beta$· ἔχομεν $K=(\chi-\beta)M$· εἰσάγοντες δ' ἐν τῇ ἰσότητι (1) ἀντὶ τοῦ K τὸ ἴσον, ἔχομεν

$$(2)\quad \Pi=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)M.$$

Θῶμεν πάλιν ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ γ ἀντὶ χ καὶ ἔστω M_1 τοῦθ' ὅπερ ἀποβαίνει τότε τὸ M· ἔχομεν

$$0=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)M_1\cdot$$

ἄρα $M_1=0$· ἄρα M διαιρεῖται διὰ $\chi-\gamma$. Ἔστω N τὸ πηλίκον τοῦ M διὰ $\chi-\gamma$· ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (2) ἀντὶ M τὸ ἴσον $(\chi-\gamma)N$, ἔχομεν

$$\Pi=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)N.$$

Προβαίνοντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι ὁ χ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

α'. Τὸ πολυώνυμον $\chi^\kappa\psi^\lambda+\psi^\kappa\omega^\lambda+\omega^\kappa\chi^\lambda-\chi^\lambda\psi^\kappa-\psi^\lambda\omega^\kappa-\omega^\lambda\chi^\kappa$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $(\chi-\psi)(\chi-\omega)(\psi-\omega)$· διότι μηδενιζόμενον ἐὰν τεθῇ ψ ἢ ω ἀντὶ χ, διαιρεῖται διὰ $(\chi-\psi)(\chi-\omega)$· τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης μηδενίζεται, ὅταν τεθῇ ω ἀντὶ τοῦ ψ· διότι καὶ τὸ πολυώνυμον ὅλον μηδενίζεται, ὅταν τεθῇ ω ἀντὶ ψ.

β'. Τὸ πολυώνυμον $\chi^\pi\psi^\kappa\omega^\rho+\psi^\pi\omega^\kappa\chi^\rho+\omega^\pi\chi^\kappa\psi^\rho-\chi^\rho\psi^\kappa\omega^\pi-\psi^\rho\omega^\kappa\chi^\pi-\omega^\rho\chi^\kappa\psi^\pi$ διαιρεῖται διὰ $(\chi-\psi)(\chi-\omega)(\psi-\omega)$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

γ'. $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$ διαιρεῖται διὰ $(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$, ὅταν ὁ μ ἦναι περιττός.

Περὶ κλασμάτων.

§ 76. Ὅταν τὸ πηλίκον παραστάσεώς τινος A δι' ἑτέρας B δεικνύηται διὰ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως —, ἡ προκύπτουσα παράστασις $\frac{A}{B}$ καλεῖται *κλάσμα*.

Οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος δυνατὸν νὰ ἦναι ἀριθμοὶ μερικοὶ ἢ γενικοί, ἀπόλυτοι ἢ ἀλγεβρικοί.

Ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ἦναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, τὸ κλάσμα ἐμφαίνει ἐπίσης ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν (§ 58).

Ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ἦναι ἀπόλυτοι ἀριθμοί, τὸ κλάσμα παρίστησιν ἀριθμὸν ἀλγεβρικόν, ὅταν ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον.

§ 77. Τὰ κλάσματα, ὧν οἱ ὅροι εἰσὶν ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, μετέχουσι πασῶν τῶν ἰδιοτήτων τῶν κλασμάτων, τῶν παριστανόντων πηλίκα ἀπολύτων ἀριθμῶν, ὡς εἴρηται ἐν § 62.

Ἕπονται ἐντεῦθεν τὰ ἑξῆς.

Α΄. Δύο ἢ πλείονα κλάσματα οἱαδήποτε (ἀλγεβρικὰ ἢ μὴ) δύνανται ν' ἄγωνται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ κανόνα.

Ἔστωσαν, π. χ., τὰ κλάσματα

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\gamma}{\delta},\ \frac{\varepsilon}{\zeta},\ \frac{\eta}{\theta}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν, εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς

$$\frac{\alpha\delta\zeta\theta}{\beta\delta\zeta\theta},\ \frac{\beta\gamma\zeta\theta}{\beta\delta\zeta\theta},\ \frac{\beta\delta\varepsilon\theta}{\beta\delta\zeta\theta},\ \frac{\beta\delta\zeta\eta}{\beta\delta\zeta\theta},$$

ἅπερ εἰσὶν ἴσα τοῖς πρώτοις, ὡς πολλαπλασιασθέντων τῶν δύο ὅρων ἑκάστου ἐκείνων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἔχουσι δὲ πάντα παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν πρώτων.

Ὅταν οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων ἦναι μονώνυμα ἢ πολυώνυμα, δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ ἔχωμεν κοινὸν παρονομαστὴν ἁπλούστερον τοῦ γινομένου πάντων τῶν παρονομαστῶν· πρὸς τοῦτο δ' εὑρίσκομεν παράστασιν διαιρετὴν δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν, ἐργαζόμενοι παραπλησίως τῇ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀκεραίων πράξει. Ἔστωσαν, π. χ., τὰ κλάσματα

$$\frac{A}{15\alpha^4\beta^2\gamma},\ \frac{B}{5\alpha^3\gamma^3\delta^2},\ \frac{\Gamma}{2\alpha^2\beta\gamma},$$

ὧν οἱ ἀριθμηταὶ εἰσὶν οἱαιδήποτε παραστάσεις Α, Β, Γ. Λαμβάνοντες πάντας τοὺς μονογραμμάτους παράγοντας τῶν παρονομαστῶν, ἕκαστον ἅπαξ μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου, καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐφ' ἑαυτούς τε καὶ ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν, ἔχομεν τὸ μονώνυμον $30\alpha^4\beta^2\gamma^3\delta^2$, ὅπερ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν (§ 57). Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ $30\alpha^4\beta^2\gamma^3\delta^2$ διὰ τοῦ ἰδίου παρονομαστοῦ, ἔχομεν τὰ ἑξῆς

$$\frac{A\times 2\gamma^2\delta^2}{30\alpha^4\beta^2\gamma^3\delta^2},\ \frac{B\times 6\alpha\beta^2}{30\alpha^4\beta^2\gamma^3\delta^2},\ \frac{\Gamma\times 15\alpha^2\beta\gamma^2\delta^2}{30\alpha^4\beta^2\gamma^3\delta^2},$$

ἅπερ εἶναι ἴσα τοῖς προτεθεῖσι καὶ ἔχουσι κοινὸν παρονομαστὴν τὸ μονώνυμον $30\alpha^4\beta^2\gamma^3\delta^2$, ὅπερ εἶναι ἁπλούστερον τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν τῶν προτεθέντων κλασμάτων.

Ἔστωσαν ἔτι τὰ κλάσματα

$$\frac{3\alpha}{2\beta^2},\ \frac{\alpha+\beta}{2\beta(\alpha-\beta)},\ \frac{\alpha-\beta}{6\alpha\beta(\alpha+\beta)},\ \frac{2\alpha^2-\beta^3}{4\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)}.$$

Γινώσκομεν (§ 36) ὅτι $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$. Ἔχομεν λοιπὸν τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων αὐτῶν ἀναλελυμένους εἰς παράγοντας μονωνύμους καὶ διωνύμους. Λαμβάνοντες τοὺς μονογραμμάτους παράγοντας τῶν μονωνύμων καὶ τοὺς διωνύμους ἕκαστον ἅπαξ μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐφ' ἑαυτοὺς καὶ ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν, ἔχομεν γινόμενον $12\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, ὅπερ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν· πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ $12\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἰδίου κλάσματος, εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς

$$\frac{18\alpha^3(\alpha^2-\beta^2)}{12\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)},\ \frac{6\alpha^2\beta(\alpha+\beta)^2}{12\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)},\ \frac{2\alpha\beta(\alpha-\beta)^2}{12\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)},\ \frac{3\beta^2(2\alpha^2-\beta^3)}{12\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)},$$

ὧν ὁ κοινὸς παρονομαστὴς εἶναι ἁπλούστερος τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν τῶν προτεθέντων.

§ 78. Β΄. Δυνάμεθα ν' ἁπλοποιῶμεν τὰ κλάσματα ἐν γένει, ἐξαλείφοντες κοινοὺς παράγοντας τῶν ὅρων αὐτῶν.

Ἡ ἁπλοποίησις αὕτη γίνεται ἰδίως ὅταν οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων ἦναι μονώνυμα ἢ πολυώνυμα.

Ἐν § 56 ἐδείξαμεν τοιαύτας ἁπλοποιήσεις, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματός τινος ἦναι μονώνυμα.

Ἔστω ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{8\alpha^3\beta^2\gamma-10\alpha^4\beta+2\alpha^3\beta^3}{6\alpha^3\beta\gamma^2+4\alpha^4\beta^2}$. Παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι πάντες οἱ ὅροι τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διαιροῦνται διὰ τοῦ μονωνύμου $2\alpha^3\beta$· διαιροῦντες λοιπὸν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ $2\alpha^3\beta$, ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον ἁπλούστερον $\frac{4\beta\gamma-5\alpha+\beta^2}{3\gamma^2+2\alpha\beta}$.

Ἔστω ἔτι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^4-2\alpha^3+4\alpha^2-7\alpha+4}{\alpha^2+2\alpha-3}$. Οἱ ὅροι αὐτοῦ ἀμφότεροι μηδενίζονται, ὅταν $\alpha=1$· διαιροῦνται λοιπὸν ἀμφότεροι διὰ $\alpha-1$ (§ 74)· ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν αὐτὸν παράγοντα, ἀνάγομεν τὸ κλάσμα αὐτὸ εἰς τὸ ἁπλούστερον $\frac{\alpha^3-\alpha^2+3\alpha-4}{\alpha+3}$.

Ἔστω ἔτι τὸ κλάσμα $\frac{4\alpha^2\beta\gamma^2-4\alpha^2\beta\delta^2}{2\alpha\beta^3\gamma-2\alpha\beta^3\delta}$. Ὁ ἀριθμητὴς δύναται νὰ γραφῇ οὕτω $4\alpha^2\beta(\gamma^2-\delta^2)$, ὁ δὲ παρονομαστὴς οὕτω $2\alpha\beta^3(\gamma-\delta)$· διαιροῦντες λοιπὸν ἀμφοτέρους διὰ $\gamma-\delta$, εὑρίσκομεν $\frac{4\alpha^2\beta(\gamma+\delta)}{2\alpha\beta^3}$: διαιροῦντες δὲ πάλιν διὰ $2\alpha\beta$, ἔχομεν $\frac{2\alpha(\gamma+\delta)}{\beta^2}$.

§ 79. Γ'. Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόζωμεν ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἐν γένει τοὺς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ κανόνας προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κλασμάτων.

Ἔχομεν δηλονότι

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}}+\frac{\Gamma}{\mathrm{M}}+\frac{\Delta}{\mathrm{M}}+\dots=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\dots}{\mathrm{M}},$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}}-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{M}},\quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\times\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\mathrm{A}\times\Gamma}{\mathrm{B}\times\Delta},\quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}:\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\mathrm{A}\times\Delta}{\mathrm{B}\times\Gamma}.$$

οἱωνδήποτ' ἀριθμῶν καὶ παραστάσεων ὄντων τῶν Α, Β, Γ, Δ,......

Πᾶσαι αἱ ἰσότητες αὗται ἀποδεικνύονται, ὡς καὶ ὅταν τὰ κλάσματα ἐμφαίνωσι πηλίκα ἀπολύτων ἀριθμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

α΄. $\dfrac{2\alpha^3-4\alpha^2+1}{5\alpha^2+\alpha}+\dfrac{2\alpha^2+3\alpha}{5\alpha^2+\alpha}+\dfrac{4\alpha-2}{5\alpha^2+\alpha}=\dfrac{2\alpha^3-2\alpha^2+7\alpha-1}{5\alpha^2+\alpha}$.

β΄. $\dfrac{2\alpha^3-4\alpha^2+1}{5\alpha^2+\alpha}-\dfrac{2\alpha^2+3\alpha+1}{5\alpha^2+\alpha}=\dfrac{2\alpha^3-6\alpha^2-3\alpha}{5\alpha^2+\alpha}=\dfrac{2\alpha^2-6\alpha-3}{5\alpha+1}$.

γ΄. $\dfrac{3\alpha^5\beta^2}{4\gamma^2\delta^3}\times\dfrac{7\gamma\delta^4}{2\alpha^2\beta^3}=\dfrac{21\alpha^5\beta^2\gamma\delta^4}{8\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta^3}=\dfrac{21\alpha^3\delta}{8\beta\gamma}$.

δ΄. $\dfrac{4\alpha^4\beta^3}{7\gamma^2\delta^2}:\dfrac{3\alpha^2\beta}{2\gamma\delta^3}=\dfrac{8\alpha^4\beta^3\gamma\delta^3}{21\alpha^2\beta\gamma^2\delta^2}=\dfrac{8\alpha^2\beta^2\delta}{21\gamma}$.

ε΄. $\dfrac{\chi^2\psi^2\omega^2}{\beta^2\gamma^2}+\dfrac{(\chi^2-\beta^2)(\psi^2-\beta^2)(\omega^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}+\dfrac{(\chi^2-\gamma^2)(\psi^2-\gamma^2)(\omega^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}$
$=\chi^2+\psi^2+\omega^2-\beta^2-\gamma^2$.

§ 80. Ἔστω τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha}{\beta+\sqrt{\gamma}}$, οὗ ὁ παρονομαστὴς ἀσύμμετρος. Πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ $\beta-\sqrt{\gamma}$· ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον $\dfrac{\alpha(\beta-\sqrt{\gamma})}{(\beta+\sqrt{\gamma})(\beta-\sqrt{\gamma})}$· ἀλλὰ $(\beta+\sqrt{\gamma})(\beta-\sqrt{\gamma})=\beta^2-\gamma$· οὕτως

$$\frac{\alpha}{\beta+\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\beta-\sqrt{\gamma})}{\beta^2-\gamma}.$$

Τὸ προτεθὲν κλάσμα ἐτράπη οὕτως εἰς ἰσοδύναμον, οὗ ὁ παρονομαστὴς σύμμετρος.

Τὴν τροπὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐκτελῶμεν, ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἔχῃ ἓν τῶν ἑξῆς σχημάτων $\beta+\varkappa\sqrt{\gamma}$, $\beta-\varkappa\sqrt{\gamma}$, $\theta\sqrt{\beta}+\varkappa\sqrt{\gamma}$, $\theta\sqrt{\beta}-\varkappa\sqrt{\gamma}$, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\beta-\varkappa\sqrt{\gamma}$, $\beta+\varkappa\sqrt{\gamma}$, $\theta\sqrt{\beta}-\varkappa\sqrt{\gamma}$, $\theta\sqrt{\beta}+\varkappa\sqrt{\gamma}$. Ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἰσοδυνάμου, ὢν διαφορὰ τετραγώνων, ἔσεται πάντοτε σύμμετρος. Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἔχῃ σχῆμα τοιόνδε $\theta\sqrt{\beta}$, πολλαπλασιάζομεν πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν τοὺς δύο ὅρους ἐπ' αὐτὸν τοῦτον τὸν παρονομαστήν.

Ἔστω ἔτι τὸ κλάσμα

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}$, ἔχομεν

$$\frac{\delta(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\alpha+\beta-\gamma+2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

πολλαπλασιάζοντες πάλιν ἐπὶ $(\alpha+\beta-\gamma)-2\sqrt{\alpha\beta}$ ἔχομεν

$$\frac{\delta(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})\,(\alpha+\beta-\gamma-2\sqrt{\alpha\beta})}{(\alpha+\beta-\gamma)^2-4\alpha\beta},$$

οὗ ὁ παρονομαστὴς σύμμετρος.

Οἱ μετασχηματισμοὶ οὗτοι εἰσὶ λίαν χρήσιμοι, ὅταν α, β, γ ἦναι ὡρισμένοι σύμμετροι, αἱ δὲ ῥίζαι ἀσύμμετροι. Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$ μετασχηματίζεται εἰς $\frac{5(2+\sqrt{3})}{4-3}=10+5\sqrt{3}$· εὐκολώτερον δ' ἐκτιμᾶται κατὰ προσέγγισιν ἡ παράστασις $10+5\sqrt{3}$ ἢ ἡ ἴση $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$. Εὑρίσκομεν ἐπίσης

$$\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{7}(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{2}=2\sqrt{35}+3\sqrt{14}.$$

$$\frac{4}{5-\sqrt{5}}=\frac{4(5+\sqrt{5})}{20}=\frac{5+\sqrt{5}}{5}=1+\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καὶ χρήσεις τινὲς αὐτῶν.

§ 81. Α'. Εἴπομεν ἐν § 26 ὅτι, ἐὰν ἀπόλυτον πολυώνυμον θεωρήσωμεν ὡς ἀλγεβρικόν, ἔχομεν ἴσον θετικὸν ἀριθμόν. Ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι γενική· ἐὰν δηλονότι παράστασιν ἀπόλυτον οἱανδήποτε νοήσωμεν ὡς ἀλγεβρικήν, θεωροῦντες τοὺς μὴ φέροντας σημεῖα ἀριθμοὺς ὡς θετικούς, ἔχομεν ἴσον ἀριθμὸν θετικόν. Διότι δῆλον ἐκ τῶν ὁρισμῶν καὶ τῶν κανόνων τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοιούτων πράξεων ἐπὶ θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον τῷ ἐξαγομένῳ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀπολύτων ἀξιῶν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὅταν πᾶσαι αἱ ἀριθμητικαὶ ἀφαιρέσεις δύνανται νὰ ἐκτελῶνται· ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰς ἀπολύτους παραστάσεις αἱ ἀφαιρέσεις εἰσὶ δυναταί, ἕπεται ὅτι ὅταν τοιαῦται παραστάσεις νοῶνται ὡς ἀλγεβρικαί, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ἴσοι τοῖς ἀπολύτοις.

§ 82. Β΄. Ὅταν πρόκηται νὰ μετασχηματίσωμεν ἀπολύτους παραστάσεις, δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν αὐτὰς ὡς ἀλγεβρικὰς καὶ νὰ ποιῶμεν μετασχηματισμούς, οἵτινες πολλάκις δὲν δύνανται νὰ νοῶνται, εἰ μὴ μόνον ἐπὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Τὰ ἐξαγόμενα, εἰς ἃ οὕτω φθάνομεν, ἔσονται θετικὰ καὶ ἴσα ταῖς ἀπολύτοις παραστάσεσι, κατὰ τὴν ἠγηθεῖσαν παρατήρησιν. Ἐὰν ἡ τελευταία παράστασις, εἰς ἣν φθάνομεν διὰ τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν, δύναται νὰ νοῆται καὶ ὡς ἀπόλυτος, ἕξομεν διὰ τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν ἀπόλυτον παράστασιν ἴσην τῇ πρώτῃ.

Τὰ ῥηθέντα ἐν τῇ σημειώσει τοῦ § 66 καὶ ἐν τῇ Β΄. σημειώσει τοῦ § 52 ὑπάγονται εἰς τὴν περὶ ἧς ἐνταῦθα παρατήρησιν, καθ' ἣν πάντα μετασχηματισμόν, ἀποδεδειγμένον ἐπὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόζωμεν καὶ εἰς ἀπολύτους.

Ἔστω ἡ ἑξῆς ἀπόλυτος παράστασις

$$\frac{A\chi}{K\chi+(1+\alpha^2-2\chi)^2-(1+\alpha^2-\chi)^2}.$$

Δυνάμεθα ν' ἁπλοποιήσωμεν τὸν παρονομαστὴν εὑρίσκοντες τὰ τετράγωνα $(1+\alpha^2-2\chi)^2$ καὶ $(1+\alpha^2-\chi)^2$ καὶ ἀνάγοντες· ἀλλὰ φθάνομεν τάχιον εἰς τὸ αὐτό, θεωροῦντες τὴν διαφορὰν τετραγώνων $(1+\alpha^2-2\chi)^2-(1+\alpha^2-\chi)^2$, ἥτις ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν (§ 36)· εὑρίσκομεν οὕτως ἀμέσως

$$(1+\alpha^2-2\chi)^2-(1+\alpha^2-\chi)^2=-\chi(2+2\alpha^2-3\chi)\cdot$$

ὅθεν ἡ ἀνωτέρω παράστασις ἰσοδυναμεῖ τῇ

$$\frac{A\chi}{K\chi-\chi(2+2\alpha^2-3\chi)}\cdot$$

διαιρουμένων δὲ τῶν δύο ὅρων ταύτης διὰ χ,

$$\frac{A}{K-2-2\alpha^2+3\chi}.$$

Ἐφθάσαμεν εἰς τὴν ἁπλουστέραν ταύτην παράστασιν, διελθόντες διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν· διότι, ὄντος τοῦ $1+\alpha^2-\chi$ μείζονος τοῦ

$1+\alpha^2-2\chi$, ἡ θεωρηθεῖσα διαφορὰ τετραγώνων δὲν δύναται νὰ νοηθῇ ὡς διαφορὰ ἀπολύτων ἀριθμῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὴν παρατήρησιν ταύτην πάνθ' ὅσα ἐῤῥέθησαν ἀπὸ τοῦ § 72 μέχρι τοῦ § 75 ἐφαρμόζονται καὶ εἰς ἀπολύτους παραστάσεις· δυνατὸν ὅμως τὰ ἐξαγόμενα νὰ μὴ ὦσιν ἐπιδεκτικὰ τῆς ἀπολύτου ἐννοίας τῶν ἀρχικῶν παραστάσεων· ὁπωσδήποτε εἶναι θετικὰ καὶ ἴσα ταῖς πρώταις παραστάσεσι.

§ 83. Γ'. Ἔστωσαν αἱ ἑξῆς παραστάσεις

α'. $5-2+6+7-4-\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

β'. $-2-4+5-\frac{1}{2}+6+7+\sqrt{3}$

γ'. $5-7+2-6+\frac{1}{2}-\sqrt{3}$

δ'. $\dfrac{-7}{-6}$.

Ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα εἰσὶν ἀριθμοὶ θετικοί· ἡ τρίτη εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός, ἡ δὲ τετάρτη θετικός.

Ἡ πρώτη δύναται, ὡς ἔχει, νὰ ἦναι καὶ ἀπόλυτος, οὐχὶ δὲ καὶ ἡ δευτέρα· διότι αἱ ἐν αὐτῇ ἀφαιρέσεις δὲν ἐκτελοῦνται ἀριθμητικῶς· ἀλλ' ἐὰν μεταθέσωμεν ἐν αὐτῇ ὅρους τινάς, δυνάμεθα νὰ ἐννοῶμεν τὴν προκύπτουσαν παράστασιν καὶ ὡς ἀπόλυτον· οἷον $5+6+7-2-4-\frac{1}{2}+\sqrt{3}$.

Ἡ τρίτη παράστασις δὲν δύναται νὰ ἐμφαίνῃ ἀπόλυτον ἀριθμόν, καθ' οἵαν τάξιν κἂν γραφῶσιν οἱ ὅροι αὐτῆς· διότι τὸ ἀριθμητικὸν ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν αὐτῆς ὅρων εἶναι μεῖζον τοῦ τῶν θετικῶν.

Ἡ τετάρτη παράστασις, καί τοι θετική, δὲν δύναται νὰ νοηθῇ, ὡς ἔχει, ἀπόλυτος.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι αἱ μὲν τῶν θετικῶν παραστάσεων δύνανται νὰ νοῶνται καὶ ὡς ἀπόλυτοι, ἢ ἀμέσως ὡς ἔχουσιν, ἢ μετὰ μεταθέσεις ὅρων τινῶν, αἱ δὲ οὔ.

Συνετέθη νὰ καλῶνται θετικοὶ καὶ οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοί· ὡσαύτως καὶ αἱ ἀπόλυτοι παραστάσεις καλοῦνται κατὰ συνθήκην θετικαί.

Κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην λέγοντες ὅτι παράστασίς τις εἶναι θετική, ἐννοοῦμεν ὅτι δύναται νὰ ἐμφαίνῃ ἀπόλυτον ἀριθμὸν ἢ κυρίως θετικόν, ἐκτὸς ἐὰν δὲν ἦναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ τὴν διπλῆν αὐτὴν σημασίαν, ὡς ἡ δ'. τῶν ἀνωτέρω.

Διὰ τῆς συνθήκης ταύτης οἱ ἀριθμοὶ πάντες, ἀπόλυτοι ἢ ἀλγεβρικοί, διαιροῦνται εἰς δύο εἴδη, εἰς *θετικοὺς* καὶ εἰς *ἀρνητικούς*· Ἐπίσης καὶ αἱ παραστάσεις πᾶσαι εἰσὶ θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί.

§ 84. Δ'. Ἡ γενικότης τῶν παραστάσεων, ἡ προσγιγνομένη ἐκ τῆς χρήσεως τῶν ἀλγεβρικῶν γραμμάτων (§ 30), εἶναι πολλαχῶς χρήσιμος. Ἰδοὺ ἐπὶ τοῦ παρόντος δύο κεφαλαιώδη ἐξ αὐτῆς πλεονεκτήματα.

α'. *Δυνάμεθα νὰ περιλάβωμεν πολλὰς ἰσότητας ἐν μιᾷ μόνῃ ἰσότητι.*

Π. χ. ἡ ἰσότης

$$(1) \qquad (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,$$

ἥτις ὑφίσταται καὶ ὅταν τὰ γράμματα α καὶ β ἐμφαίνωσιν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, περιλαμβάνει ἑκατέραν τῶν ἑξῆς

$$(2) \qquad (\alpha_1+\beta_1)^2=\alpha_1^2+2\alpha_1\beta_1+\beta_1^2,$$

$$(3) \qquad (\alpha_1-\beta_1)^2=\alpha_1^2-2\alpha_1\beta_1+\beta_1^2,$$

ἃς εὑρίσκομεν ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1) α_1 ἀντὶ α, καὶ $+\beta_1$ ἢ $-\beta_1$ ἀντὶ β (α_1 καὶ β_1 ὄντων ἀπολύτων ἀριθμῶν)· τὰ δὲ μέλη τῶν τελευταίων ἰσοτήτων δύνανται νὰ νοῶνται καὶ ὡς ἀπόλυτα κατὰ τὴν ἀνωτέρω συνθήκην, ὁπότε αἱ ἰσότητες πάλιν ὑφίστανται, οὐ μόνον διότι ῥητῶς ἀπεδείχθη τοῦτο (§ 36), ἀλλ' ἐν γένει κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν § 82. Ἡ ἰσότης (1) δύναται λοιπὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς περιλαμβάνουσα ἀμφότερα τὰ ἐν § 36 δύο πρῶτα θεωρήματα, νοούμενα ἐπί τε ἀπολύτων καὶ ἐπὶ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

β'. *Αἱ ἀποδείξεις πολλῶν θεωρημάτων δύνανται νὰ περιληφθῶσιν ἐντὸς μιᾶς μόνης.*

Π. χ. ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (1) ἀποδείκνυται ὡς ἐν § 36· πολλαπλασιαζομένου δηλονότι τοῦ $\alpha+\beta$ ἐπὶ $\alpha+\beta$· ἐπειδὴ δὲ περιλαμβάνει ἑκατέραν τῶν (2) καὶ (3), ἔχομεν οὕτω διὰ μιᾶς τὰς ἀποδείξεις ἑκατέρου τῶν διὰ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) θεωρημάτων.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ.

1. Διαιρεθήτω

$\alpha^{\mu+\nu}\beta^{\nu}-4\alpha^{\mu+\nu-1}\beta^{2\nu}-27\alpha^{\mu+\nu-2}\beta^{3\nu}+42\alpha^{\mu+\nu-3}\beta^{4\nu}$ διὰ $\alpha^{\mu}\beta^{\nu}-7\alpha^{\mu-1}\beta^{2\nu}$.

Τὸ πηλίκον εἶναι $\alpha^{\nu}+3\alpha^{\nu-1}\beta^{\nu}-6\alpha^{\nu-2}\beta^{2\nu}$.

2. Πότε $\alpha^{\mu}-\beta^{\mu}$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}$.

'Απόκρ. Ὅταν μ ἦναι πολλαπλάσιον τοῦ ν.

3. 'Απλοποιῆσαι $\dfrac{6\alpha\beta}{3\gamma-\delta}\left(\dfrac{\gamma+\delta}{4}-\dfrac{\delta}{3}\right)$.

Μεθ' ἁπάσας τὰς ἁπλοποιήσεις εὑρίσκομεν $\dfrac{\alpha\beta}{2}$.

4. 'Απλοποιῆσαι $$\frac{\alpha-\dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}}{1+\dfrac{\alpha(\alpha-\beta)}{1+\alpha\beta}}.$$

Εὑρίσκομεν β.

5. 'Απλοποιῆσαι $$\frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha\chi)^2-(\alpha+\chi)^2}.$$

Εὑρίσκομεν $\dfrac{1}{1-\chi^2}$.

6. 'Απλοποιῆσαι

$$\frac{1}{1-\left\{\dfrac{\alpha+\beta+(1+\alpha\beta)\chi}{1+\alpha\beta+(\alpha+\beta)\chi}\right\}^2}\times\frac{(1+\alpha\beta)\{1+\alpha\beta+(\alpha+\beta)\chi\}-(\alpha+\beta)\{\alpha+\beta+(1+\alpha\beta)\chi\}}{\{1+\alpha\beta+(\alpha+\beta)\chi\}^2}.$$

Εὑρίσκομεν $\dfrac{1}{1-\chi^2}$.

7. 'Αποδεῖξαι τὴν ἰσότητα $$\frac{\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}-\dfrac{\gamma}{\alpha+2\beta}}{\dfrac{\gamma}{\alpha+2\beta}-\dfrac{\gamma}{\alpha+3\beta}}=\frac{\left(\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\right)}{\left(\dfrac{\gamma}{\alpha+3\beta}\right)}.$$

8. Μετασχηματίσαι τὴν παράστασιν $\dfrac{\chi^{3\nu}}{\chi^{\nu}-1}-\dfrac{\chi^{2\nu}}{\chi^{\nu}+1}-\dfrac{1}{\chi^{\nu}-1}+\dfrac{1}{\chi^{\nu}+1}$ εἰς τριώνυμον ἀκέραιον.

9. 'Απλοποιῆσαι

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)+\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{\alpha+\gamma}{\alpha\gamma}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2).$$

Εὑρίσκομεν $2(\alpha+\beta+\gamma)$.

10. Δεῖξαι ὅτι

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\chi+\alpha)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\chi+\beta)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\chi+\gamma)}=\frac{1}{(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)}.$$

11. Τὸ πολυώνυμον $1+\chi^{\nu}+\chi^{2\nu}+\ldots+\chi^{(\pi-1)\nu}$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $1+\chi+\chi^{2}+\ldots+\chi^{\pi-1}$, ὅταν π καὶ ν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Τὸ πηλίκον εἶναι $[1+\chi^{\pi}+\chi^{2\pi}+\ldots+\chi^{(\nu-1)\pi}]\,[1+\chi^{\nu}+\chi^{2\nu}+\ldots+\chi^{(\varkappa-1)\nu}]$ $-\chi\,[1+\chi^{\pi}+\chi^{2\pi}+\ldots+\chi^{(\lambda-1)\pi}]\,[1+\chi^{\nu}+\chi^{2\nu}+\ldots+\chi^{(\pi-1)\nu}]$, τῶν ἀριθμῶν ν, π, $\varkappa$, λ συνδεομένων διὰ τῆς ἰσότητος $\varkappa\nu=\lambda\pi+1$ (*)

12. Τὸ γινόμενον $(\chi^{\mu}-1)(\chi^{\mu-1}-1)(\chi^{\mu-2}-1)\ldots(\chi^{\mu-\nu+1}-1)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-1)(\chi^{2}-1)\ldots\ldots(\chi^{\nu}-1)$.

Ἀποδείκνυται ὅτι ὅταν ἡ πρότασις ἀληθεύῃ ἐπὶ τιμῆς τινος τοῦ μ, ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ μονάδα ἀνωτέρας· ἐπειδὴ δὲ ἀληθεύει προφανῶς ὅταν $\mu=\nu$, ἕπεται ὅτι εἶναι γενική.

13. Καταδειχθήτω ἡ ἰσότης

$$\frac{\psi^2\omega^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(\psi^2-\beta^2)(\omega^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}+\frac{(\psi^2-\gamma^2)(\omega^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}=1.$$

14. Ἐὰν ἐν τῇ παραστάσει

$$\frac{(\alpha\varkappa^3+\beta\lambda^3+\gamma\mu^3)+(\alpha\varkappa^4+\beta\lambda^4+\gamma\mu^4)\rho+(\alpha\varkappa^5+\beta\lambda^5+\gamma\mu^5)\sigma}{(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\varkappa+\beta\lambda+\gamma\mu)\rho+(\alpha\varkappa^2+\beta\lambda^2+\gamma\mu^2)\sigma}$$

ποιήσωμεν

$$\rho=\frac{-\alpha\beta\varkappa\lambda(\varkappa-\lambda)^2(\varkappa+\lambda)-\alpha\gamma\varkappa\mu(\varkappa-\mu)^2(\varkappa+\mu)-\beta\gamma\lambda\mu(\lambda-\mu)^2(\lambda+\mu)}{\alpha\beta\varkappa^2\lambda^2(\varkappa-\lambda)^2+\alpha\gamma\varkappa^2\mu^2(\varkappa-\mu)^2+\beta\gamma\lambda^2\mu^2(\lambda-\mu)^2}$$

$$\sigma=\frac{\alpha\beta\varkappa\lambda(\varkappa-\lambda)^2+\alpha\gamma\varkappa\mu(\varkappa-\mu)^2+\beta\gamma\lambda\mu(\lambda-\mu)^2}{\alpha\beta\varkappa^2\lambda^2(\varkappa-\lambda)^2+\alpha\gamma\varkappa^2\mu^2(\varkappa-\mu)^2+\beta\gamma\lambda^2\mu^2(\lambda-\mu)^2},$$

ἡ προκύπτουσα παράστασις ἁπλοποιουμένη γίνεται $\varkappa\lambda\mu$.

15. Ἐὰν πολυώνυμον, ἀκέραιον ὡς πρὸς γράμμα τι χ, οὗ οἱ συντελεσταὶ εἰσὶν ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἰσῶται περιττοῖς ἀριθμοῖς, ὅταν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ 0 ἢ 1, τὸ πολυώνυμον αὐτὸ δὲν μηδενίζεται δι' οὐδεμιᾶς ἀκεραίου τιμῆς τοῦ χ.

Ἐπειδὴ ἰσοῦται περιττῷ, ὅταν $\chi=0$, ἔχει σχῆμα τοιόνδε $M\chi^{\nu}+2\mu+1$, M ὄντος $\alpha\chi^{\varkappa}+\beta\chi^{\lambda}+\ldots+\theta$· ἄρα δὲν μηδενίζεται, ὅταν $\chi=2\rho$. Ἐπειδὴ ἰσοῦται περιττῷ καὶ ὅταν $\chi=1$, ἕπεται ὅτι $\alpha+\beta+\gamma\ldots+\theta$ εἶναι ἄρτιος· ποιοῦντες $\chi=2\rho+1$, εὑρήσομεν εὐκόλως ὅτι $\alpha(2\rho+1)^{\varkappa}+\beta(2\rho+1)^{\lambda}+\ldots+\theta$ εἶναι ἄρτιος· ἄρα $M\chi^{\nu}+2\mu+1$ δὲν μηδενίζεται, οὔτε ὅταν $\chi=2\rho+1$.

(*) Ὅταν δύο ἀκέραιοι π καὶ ν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὑπάρχουσι πάντοτε δύο ἄλλοι ἀκέραιοι $\varkappa$ καὶ λ τοιοῦτοι, ὥστε $\varkappa\nu=\pi\lambda+1$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ.

Ὁρισμοί.

§ 85. Καλεῖται *ταυτότης* ἡ ἰσότης δύο μερικῶν ἀριθμῶν, ἢ ἡ ἰσότης δύο ἰσοδυνάμων γενικῶν παραστάσεων.

Π. χ. αἱ ἰσότητες $5=5$, $5^2=25$, $6+7=13$, $-8+5=-3$ εἰσὶ ταυτότητες· ἐπίσης καὶ αἱ ἑξῆς

$$\alpha^{\kappa} \times \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2,$$

ὧν τὰ μέλη εἰσὶν ἰσοδύναμοι παραστάσεις.

Ὅταν τὰ μέλη τῆς ταυτότητος ἦναι αἱ αὐταὶ ὅλως κατὰ τὸ σχῆμα παραστάσεις, ἡ ταυτότης εἶναι προφανής· οἷον $5=5$, $\alpha^{\kappa}=\alpha^{\kappa}$.

§ 86. Καλεῖται *ἐξίσωσις* ἡ ἰσότης δύο παραστάσεων μὴ ἰσοδυνάμων, ἥτις ἀληθεύει μόνον ὅταν ἀντὶ γραμμάτων τινῶν τεθῶσιν ὡρισμένοι ἀριθμοὶ (μερικοὶ ἢ γενικοί).

Π. χ. ἡ ἰσότης

$$(1) \qquad 5\chi-4 = 3\chi+2$$

ὑφίσταται μόνον ὅταν τεθῇ 3 ἀντὶ τοῦ χ· διότι τότε ἑκάτερον τῶν μελῶν γίνεται 11. Ἐπίσης ἡ ἰσότης

$$(2) \qquad 2\chi = \alpha\beta$$

γίνεται ταυτότης, ὅταν τεθῇ $\frac{\alpha\beta}{2}$ ἀντὶ τοῦ χ· διότι οὕτω καὶ τὸ α΄ μέλος γίνεται αβ. Ἐπίσης ἡ ἰσότης

$$(3) \qquad 5\chi = 4\psi+\chi-4$$

ὑπάρχει, ὅταν $\chi=2$ καὶ $\psi=3$, ὁπότε ἑκάτερον τῶν μελῶν γίνεται 10.

§ 87. Τὰ γράμματα τῆς ἐξισώσεως, ἀνθ' ὧν ἀντικαθιστῶντες ὡρισμένους ἀριθμούς, ποιοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν ταυτότητα, καλοῦνται *ἄγνωστοι τῆς ἐξισώσεως*· οἱ δ' ὡρισμένοι ἀριθμοί, οὓς ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν ἀγνώστων ἔχομεν ταυτότητας, καλοῦνται *τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἢ λύσεις*. Οἱ λοιποὶ ἀριθμοί, οἱ ἐν τοῖς μέλεσι τῶν ἐξισώσεων, μερικοὶ ἢ γενικοί, εἶναι καὶ καλοῦνται *γνωστοί*.

Οἱ ἄγνωστοι τῶν ἐξισώσεων σημειοῦνται συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου σ, τ, ψ, φ, ...

Ἡ ἐξίσωσις εἶναι *μερική*, ὅταν πάντες οἱ γνωστοὶ ἦναι μερικοὶ ἀριθμοί· *γενικὴ* δέ, ὅταν τινὲς τῶν γνωστῶν ἦναι γενικοὶ ἀριθμοί. Οὕτως αἱ μὲν ἐξισώσεις (1) καὶ (3) τῶν ἀνωτέρω εἰσὶ *μερικαί*, ἡ δὲ (2) *γενική*.

§ 88. Ὅταν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἦναι μονώνυμα ἢ πολυώνυμα ἀκέραια ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ἀγνώστων, καλεῖται *βαθμὸς* τῆς μὲν ἕνα ἄγνωστον ἐχούσης ἐξισώσεως ὁ μέγιστος ἐκθέτης τοῦ ἀγνώστου, τῆς δὲ δύο ἢ πλείονας ἀγνώστους ἐχούσης τὸ μέγιστον ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὅρῳ ἀγνώστων. Π. χ. τῶν ἑξῆς ἐξισώσεων

(1) $2\chi-4=5+\chi$, (2) $\alpha\chi+6\psi=\gamma\chi-\delta$, (3) $2\chi^3+\alpha=4\chi+2$,
(4) $\chi\psi^4-2\chi^2=\psi\chi^3-1$, (5) $3\alpha\chi\psi=\alpha\chi^3+6\psi^2-3\chi^2\psi^4$,

ἡ (1) εἶναι μερικὴ πρώτου βαθμοῦ, ἡ (2) γενικὴ πρώτου βαθμοῦ, ἡ (3) γενικὴ τρίτου βαθμοῦ, ἡ (4) μερικὴ πέμπτου βαθμοῦ, ἡ (5) γενικὴ ἕκτου βαθμοῦ.

§ 89. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2+\psi^2+\omega-6=26+11\chi+\omega^2,$$

ἧς οἱ ἄγνωστοι εἶναι χ, ψ, ω. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπαληθεύεται, ὅταν $\chi=+5$, $\psi=-8$, $\omega=+2$· διότι τότε ἑκάτερον τῶν μελῶν γίνεται $+85$. Ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται καὶ ὅταν $\chi=6$, $\psi=\sqrt{74}$, $\omega=-3$. Δύναται δὲ νὰ ἐπαληθεύηται καὶ δι' ἄλλων τιμῶν τῶν ἀγνώστων.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἵτινες ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἐπαληθεύουσι τὴν πολλοὺς ἀγνώστους ἔχουσαν ἐξίσωσιν, καλοῦνται συζλήθην *σύστημα τιμῶν* ἢ *λύσις*. Οὕτως ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ συστήματος τιμῶν $\chi=5$, $\psi=-8$, $\omega=2$, ἢ διὰ τοῦ $\chi=6$, $\psi=\sqrt{74}$, $\omega=-3$.

ΓΕΝΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων εἶναι ἀριθμοὶ ἀλγεβρικοὶ ἢ ἀπόλυτοι. Ὅταν ἦναι ἀλγεβρικά, αἱ τιμαὶ εἰσὶν ὡσαύτως ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί· ὅταν δὲ ἦναι ἀπόλυτα, αἱ τιμαὶ εἰσὶν ἀπόλυτοι ἀριθμοί. Π. χ. τῆς ἐξισώσεως $5\chi-3=27$ τὰ μέλη δύνανται νὰ νοηθῶσιν ὡς ἀριθμοὶ ἀπόλυτοι ἢ ἀλγεβρικοί· κατὰ τὴν πρώτην ἔννοιαν ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ ἀπολύτου 6, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ $+6$. Ἀλλὰ τῆς ἐξισώσεως $2\chi-3=5\chi+4$ τὰ μέλη δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσι καὶ ὡς ἀπόλυτοι παραστάσεις· διότι ἀδύνατον τὸ διπλοῦν ἀριθμοῦ τινος ἠλαττωμένον κατὰ 3 νὰ ἰσῶται τῷ πενταπλῷ ηὐξημένῳ κατὰ 4. Δυνατὸν ὅμως νὰ ἦναι παραστάσεις ἀλγεβρικαί, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ τῆς τιμῆς $-\frac{7}{3}$, ἑκατέρου τῶν μελῶν γινομένου τότε $-\frac{23}{3}$.

Γενικαὶ ἀρχαὶ ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων.

§ 90. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Αἱ λύσεις πάσης ἐξισώσεως διατηροῦνται αἱ αὐταί, ὅταν προστεθῇ εἰς τὰ δύο μέλη ὁ αὐτὸς ἀριθμός.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1)\quad A=B,$$

ἧς τὰ μέλη A καὶ B εἰσὶ παραστάσεις οἱαιδήποτε. Προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἀριθμὸν οἱονδήποτε M· ἔχομεν

$$(2)\quad A+M=B+M.$$

α'. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ καθιστῶσαι ἴσας τὰς παραστάσεις A καὶ B, φανερὸν ὅτι καθιστῶσιν ἴσας καὶ τὰς $A+M$, $B+M$.

β'. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ καθιστῶσαι ἴσας τὰς παραστάσεις $A+M$ καὶ $B+M$, φανερὸν ὅτι καθιστῶσιν ἴσας καὶ τὰς A καὶ B. Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (1) καὶ (2) ἔχουσιν ἀμοιβαίως τὰς αὐτὰς λύσεις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δύο ἐξισώσεις καλοῦνται *ἰσοδύναμοι*, ὅταν ἔχωσιν ἀμοιβαίως τὰς αὐτὰς λύσεις· ὅταν δηλονότι πᾶσα λύσις τῆς μιᾶς εἶναι καὶ τῆς ἑτέρας, καὶ τἀνάπαλιν. Τούτου τεθέντος, τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκφέρεται καὶ ὡς ἑξῆς. *Ὅταν προστεθῇ εἰς τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.*

§ 91. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Όταν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν δύο μελῶν ἐξισώσεώς τινος ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$A = B\cdot$$

ἀφαιροῦντες ἀφ' ἑκατέρου τῶν μελῶν M, ἔχομεν

$$A - M = B - M.$$

Ἡ νέα αὕτη ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ· διότι, ἐὰν προσθέσωμεν M εἰς τὰ δύο μέλη αὐτῆς, ἔχομεν τὴν πρώτην.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις ὑφίστανται, εἴτε ἀλγεβρικὰ εἶναι τὰ μέλη, εἴτε μή. Ὅταν τὰ μέλη ἦναι ἀλγεβρικὰ, τὸ πόρισμα περιέχεται ἐν τῷ θεωρήματι· διότι ἀφελεῖν M ταὐτόν ἐστι τῷ προσθεῖναι $-M$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ὅταν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως νοῶνται ὡς ἀπόλυτοι παραστάσεις, δυνατὸν νὰ μὴ ἐπιδέχωνται πλέον τὴν ἔννοιαν ταύτην μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀριθμοῦ τινος ἀπὸ τῶν δύο μελῶν· π. χ. ἐὰν ἀπὸ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως $5\chi = 27$ ἀφαιρεθῇ 30, ἔχομεν τὴν $5\chi - 30 = 27 - 30$, ἧς τὰ μέλη δὲν εἶναι πλέον δυνατὸν νὰ νοηθῶσιν ὡς παραστάσεις ἀπόλυτοι.

§ 92. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἔχομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῇ πρώτῃ.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1)\quad A = B\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν M, ἔχομεν

$$(2)\quad A \times M = B \times M.$$

α'. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ καθιστῶσαι ἴσας τὰς παραστάσεις A καὶ B, φανερὸν ὅτι καθιστῶσιν ἴσα καὶ τὰ γινόμενα $A \times M$ καὶ $B \times M$. β'. Αἱ τιμαὶ αἱ καθιστῶσαι ἴσα τὰ γινόμενα $A \times M$ καὶ $B \times M$, ὧν οἱ δεύτεροι παράγοντες εἰσὶν οἱ αὐτοὶ, πρέπει νὰ καθιστῶσιν ἴσους καὶ τοὺς ἑτέρους παράγοντας A καὶ B. Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (1) καὶ (2) ἔχουσιν ἀμοιβαίως τὰς αὐτὰς λύσεις, εἴτε εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἕπεται ἐκ τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ ὅτι *δυνάμεθα ν' ἀλλάττωμεν τὰ σημεῖα τῶν δύο μελῶν πάσης ἐξισώσεως*· δηλονότι ἡ ἐξίσωσις $A=B$ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $-A=-B$· διότι ἔχομεν τὴν τελευταίαν, πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ -1.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ Μ πρέπει νὰ ἦναι διάφορος τοῦ 0· διότι ἐὰν $M=0$, ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $A\times 0 = B\times 0$, εἴτε $0=0$· εἶναι λοιπὸν ταυτότης, οἱοιδήποτ' ἀριθμοὶ κἂν ὦσιν οἱ ἄγνωστοι, ἐνῷ ἡ (1) ἐπαληθεύεται μόνον δι' ὡρισμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων (§ 86). Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι, ὅταν ὁ Μ ἦναι παράστασις περιέχουσα ἀγνώστους, ἡ (2) δυνατὸν νὰ ἔχῃ λύσεις, μὴ ἐπαληθευούσας καὶ τὴν (1)· αὗται δέ εἰσιν *αἱ μηδενίζουσαι τὸν Μ, μὴ ἐπαληθεύουσαι δὲ τὴν (1)*. Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις

$$(E)\quad 2\chi+1=3+\frac{1}{\chi}.$$

πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\chi-1$, ἔχομεν

$$(E')\quad (2\chi+1)(\chi-1)=\left(3+\frac{1}{\chi}\right)(\chi-1).$$

Ἡ τελευταία ἐπαληθεύεται διὰ τῆς τιμῆς $\chi=1$, ἥτις, μηδενίζουσα τὸν παράγοντα $\chi-1$, μηδενίζει διὰ τοῦτο καὶ ἑκάτερον τῶν μελῶν τῆς (E'), ἐνῷ ἡ (E) δεν ἔχει τοιαύτην λύσιν. Οὕτως *ὅταν πολλαπλασιάζωνται τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ παράστασιν περιέχουσαν ἀγνώστους, δυνατὸν νὰ εἰσάγωνται λύσεις ἀλλότριαι, ἤτοι μὴ ὑπάρχουσαι πρότερον.*

§ 93. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῇ πρώτῃ*· διότι ἡ διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ τινος Μ εἶναι πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ $\frac{1}{M}$· ἡ νέα λοιπὸν ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ὡς ὅταν πολλαπλασιάζωνται τὰ δύο μέλη ἐπὶ παράστασιν περιέχουσαν ἀγνώστους, δυνατὸν νὰ εἰσάγωνται λύσεις ἀλλότριαι, οὕτω καὶ ὅταν διαιρῶνται διὰ τοιαύτης παραστάσεως δυνατὸν νὰ ἐκλείπωσι λύσεις, ὑπάρχουσαι πρότερον· π. χ. διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς (E') διὰ $\chi-1$, ἔχομεν τὴν (E), ἥτις δὲν ἔχει τὴν λύσιν $\chi=1$. Ἐν γένει ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις ἄγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ ἀντιστρόφως, ἥτε εἰσαγωγὴ ἀλλοτρίων λύσεων καὶ ἡ ἐξάλειψις ὑπαρχουσῶν δύναται νὰ προέλθῃ ἀδιαφόρως ἐκ πολλαπλασιασμοῦ ἢ ἐκ διαιρέσεως· ἀλλ' ὅταν τὰ μέλη ἦναι ἀκέραια ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, ὡς καὶ οἱ πολλαπλασιασταί, οἱ διαιρέται καὶ τὰ ἐκ τῆς διαιρέσεως πηλίκα, φανερὸν ὅτι διὰ μὲν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰσάγονται λύσεις ἀλλότριαι, διὰ δὲ τῆς διαιρέσεως ἐκλείπουσιν ὑπάρχουσαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα μετὰ τοῦ πορίσματος, οὕτω καὶ αἱ τελευταῖαι προτάσεις ὑφίστανται, εἴτε ἀπόλυτα εἰσὶ τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων, εἴτε ἀλγεβρικά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. *Ὅταν ὑψῶμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἀναγκαίως ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.* Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \quad A = B\cdot$$

ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ δύο μέλη αὐτῆς, ἔχομεν

$$(2) \quad A^2 = B^2.$$

Φανερὸν ὅτι πᾶσα λύσις τῆς (1) εἶναι καὶ τῆς (2)· ἀλλ' ἡ (2) δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω $A^2 - B^2 = 0$, ἢ $(A+B)(A-B) = 0$· ἐπαληθεύεται λοιπὸν καὶ διὰ τῶν λύσεων τῆς $A+B=0$, εἴτε τῆς $A = -B$, αἵτινες δυνατὸν νὰ μὴ ἐπαληθεύωσι καὶ τὴν (1). — Ὑψοῦντες ἐν γένει εἰς τὴν μ$^{\text{ην}}$ δύναμιν τὰ δύο μέλη τῆς (1), ἔχομεν $A^\mu = B^\mu$, εἴτε $A^\mu - B^\mu = 0$. Τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου μέλους τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ $A - B$ εἶναι $A^{\mu-1} + A^{\mu-2}B + A^{\mu-3}B^2 + \ldots + B^{\mu-1}$ (§ 74, Σημ.)· ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω

$$(A-B)(A^{\mu-1} + A^{\mu-2}B + A^{\mu-3}B^2 + \ldots + B^{\mu-1}) = 0\cdot$$

ἐπαληθεύεται λοιπὸν ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους μηδενίζηται· ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν αὕτη περιέχει ἐκτὸς τῶν λύσεων τῆς $A - B = 0$, εἴτε τῆς (1), καὶ τὰς τῆς $A^{\mu-1} + A^{\mu-2}B + A^{\mu-3}B^2 + \ldots + B^{\mu-1} = 0$, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \quad \sqrt{2\chi - 6} = \chi - 3\cdot$$

ὑψοῦντες τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν τὴν

$$2\chi - 6 = \chi^2 - 6\chi + 9,$$

ἥτις ἐπαληθεύεται διὰ τῶν τιμῶν 3 καὶ 5, αἵτινές εἰσιν ἀμφότεραι λύσεις καὶ τῆς (1) (*). Ἀλλ' ἐὰν πράξωμεν τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως

$$\sqrt{9-\chi}=\chi-9,$$

εὑρίσκομεν τὴν $9-\chi=\chi^2-18\chi+81$, ἥτις ἐπαληθεύεται διὰ τῶν τιμῶν 8 καὶ 9, ἐξ ὧν ἡ πρώτη δὲν ἀνήκει εἰς τὴν προτεθεῖσαν, ἀλλ' εἰς τὴν $\sqrt{9-\chi}=-(\chi-9)$.

Μετάθεσις ὅρων.

§ 94. *Εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ ἀπὸ τοῦ μέλους, ἐν ᾧ εὑρίσκεται, εἰς τὸ ἕτερον, ἀφοῦ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \qquad 5\chi^2-3=5\chi+16\cdot$$

μεταφέροντες τὸν ὅρον -3 ἀπὸ τοῦ πρώτου μέλους εἰς τὸ δεύτερον, ἀφοῦ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ἔχομεν τὴν

$$5\chi^2=5\chi+16+3,$$

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ (1)· διότι προκύπτει προστιθεμένου εἰς τὴν (1) τοῦ ἀριθμοῦ 3 (**). Ἐπίσης μεταφέροντες τὸν ὅρον $+16$ ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) εἰς τὸ πρῶτον μετ' ἐναντίου σημείου, ἔχομεν τὴν

$$5\chi^2-3-16=5\chi,$$

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ (1)· διότι προκύπτει, προστιθεμένου τοῦ -16 εἰς τὴν (1).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ περὶ ἧς πρόκειται μετάθεσις ὅρων εἶναι, ὡς παρατηροῦμεν, ἐφαρμογὴ τοῦ Α'. τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων. Ὡς οὖν εἴρηται ἐν τῇ Β. σημειώσει τοῦ § 92, δυνατόν, ὅταν τὰ μέλη νοῶνται ὡς παραστάσεις ἀπόλυτοι, νὰ μὴ διατηρῆται ἡ ἔννοια αὕτη

(*) Θέλομεν μάθει ἐν καιρῷ ὅτι αἱ τιμαὶ 3 καὶ 5 εἰσὶν αἱ μόναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $2\chi-6=\chi^2-6\chi+9$ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις αὕτη καὶ ἡ $\sqrt{2\chi-6}=\chi-3$ εἰσὶν ἰσοδύναμοι.

(**) Πρὸς συντομίαν λέγομεν ὅτι προσθέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀριθμόν τινα, ἀντὶ προσθέτομεν εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως· ἐπίσης λέγομεν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἐξισώσεως, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐξίσωσιν, διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν, μετὰ μεταθέσεις ὅρων τινῶν. Π. χ. τῆς ἐξισώσεως $5\chi-3=8$ τὸν ὅρον 5χ μεταθέτοντες εἰς τὸ β'. μέλος ἔχομεν τὴν $-3=8-5\chi$, ἧς τὰ μέλη δὲν εἶναι πλέον ἀριθμοὶ ἀπόλυτοι.

Ἐξαφάνισις παρονομαστῶν.

§ 95. *Ὅταν ἐξίσωσίς τις περιέχῃ ὅρους κλασματικοὺς, δυνάμεθα νὰ πορίζώμεθα ἐξ αὐτῆς ἑτέραν ἰσοδύναμον μὴ περιέχουσαν παρονομαστὰς, πολλαπλασιάζοντες ἐκείνην ἐπὶ ἀριθμὸν διαιρετὸν δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν.* Ἡ πρᾶξις αὕτη καλεῖται *ἐξαφάνισις τῶν παρονομαστῶν.*

Ὁ ἀριθμὸς, ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζομεν πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον τὴν ἐξίσωσιν, εἶναι ἢ τὸ γινόμενον τῶν ἐξαφανιστέων παρονομαστῶν, ἤ τις ἄλλος ἁπλούστερος· ὅταν, φέρ' εἰπεῖν, οἱ παρονομασταὶ πάντες ἦναι ἀκέραιοι, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

α'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{3\chi}{4}-\frac{5}{3}=\frac{2\psi^2}{12}+\frac{\psi\chi}{6}+7.$$

Πρὸς ἐξαφάνισιν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὸν μέγιστον τῶν παρονομαστῶν 12, ὅστις διαιρεῖται δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων. Εὑρίσκομεν οὕτω τὴν ἑξῆς

$$9\chi-20=2\psi^2+2\psi\chi+84,$$

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ, κατὰ τὸ ἐν § 92 θεώρημα. Ἵνα ἔχωμεν τὸ γινόμενον ἑκάστου τῶν κλασματικῶν ὅρων ἐπὶ 12, προτιμότερον εἶναι νὰ διαιρῶμεν πρῶτον τὸν 12 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος καὶ εἶτα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν ἀριθμητήν. Οὕτως ἐργαζόμεθα εἰς πᾶσαν ἐξαφάνισιν παρονομαστῶν.

β'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$5\alpha+\frac{\alpha^2\chi}{18\beta^2}=\frac{3\alpha^2}{4\beta}-\frac{\beta\chi}{9\alpha}+6\alpha\beta\chi.$$

Τὸ μονώνυμον $36\alpha\beta^2$ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν (§ 77, Α'.)· πρὸς ἐξαφάνισιν λοιπὸν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ $36\alpha\beta^2$ καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν ἰσοδύναμον

$$180\alpha^2\beta^2+2\alpha^3\chi=27\alpha^3\beta-4\beta^3\chi+216\alpha^2\beta^3\chi.$$

γ'. Ἔστω ἔτι

$$\frac{\alpha^2\chi}{\alpha\beta+\beta^2}-\frac{3\alpha^2\beta}{2\alpha^2-2\beta^2}=\beta-\frac{\alpha\chi}{6\beta}.$$

Ὁ πρῶτος παρονομαστὴς ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $\beta(\alpha+\beta)$, ὁ δεύτερος τῷ $2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$· ἐπομένως σχηματίζοντες ἐκ τῶν παραγόντων τῶν παρονομαστῶν γινόμενον διαιρετὸν δι' ἑκάστου αὐτῶν (εἴτε περιέχον τοὺς παράγοντας ἑκάστου αὐτῶν) ἔχομεν $6\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=6\beta(\alpha^2-\beta^2)$· πολλαπλασιάζοντες ἐπ' αὐτὸ τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$6(\alpha-\beta)\alpha^2\chi-3\alpha^2\beta\times3\beta=\beta\times6\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-\alpha\chi\times(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\cdot$$

καὶ ἐκτελουμένων τῶν πολλαπλασιασμῶν

$$6\alpha^3\chi-6\alpha^2\beta\chi-9\alpha^2\beta^2=6\alpha^2\beta^2-6\beta^4-\alpha^3\beta\chi+\alpha\beta^2\chi.$$

δ'. Ἔστω ἔτι

$$(1)\qquad 3-\frac{1}{\chi}=\frac{5\chi}{\chi+1}+4.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν $\chi(\chi+1)$ ἔχομεν

$$3\chi(\chi+1)-(\chi+1)=5\chi^2+4\chi(\chi+1),$$

ἢ

$$3\chi^2+3\chi-\chi-1=5\chi^2+4\chi^2+4\chi,$$

ἢ

$$(2)\quad 3\chi^2+2\chi-1=9\chi^2+4\chi.$$

Ὁ παράγων $\chi(\chi+1)$, ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιάσαμεν τὴν (1), περιέχει τὸν ἄγνωστον χ· μηδενίζεται δὲ ὅταν $\chi=0$ ἢ $\chi=-1$· ἀλλ' ἐπειδὴ οὐδετέρα τῶν τιμῶν τούτων ἐπαληθεύει τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), αἱ ἐξισώσεις αὗται εἰσὶν ἰσοδύναμοι (§ 92) (*).

(*) Ἡ τιμὴ $\chi=0$ δὲν μηδενίζει τὰ μέλη τῆς (2)· διότι μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῆς (2) ἐπὶ $\chi(\chi+1)$, τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{1}{\chi}$ ἐπὶ $\chi(\chi+1)$ δὲν περιέχει τὸν παράγοντα χ, ἐνῷ πάντα τὰ λοιπὰ γινόμενα περιέχουσιν αὐτόν. Οὔτε ἡ τιμὴ $\chi=1$ μηδενίζει τὰ μέλη τῆς (2)· διότι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5\chi}{\chi+1}$ ἐπὶ $\chi(\chi+1)$ δὲν περιέχει τὸν παράγοντα $\chi+1$, ὅστις ὑπάρχει εἰς πάντα τὰ λοιπὰ γινόμενα.

ε'. Ἔστω ἔτι

$$(1)\quad \frac{1}{\chi-\alpha}+\frac{1}{\chi+\alpha}=\frac{1}{\chi^2-\alpha^2}.$$

Ὁ $\chi^2-\alpha^2$ διαιρεῖται δι' ἑκατέρου τῶν ἄλλων παρονομαστῶν· πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν ἐπὶ $\chi^2-\alpha^2$, εὑρίσκομεν $\chi+\alpha+\chi-\alpha=1$, εἴτε

$$(2)\quad 2\chi=1.$$

Ἐπειδὴ ὁ $\chi^2-\alpha^2$ μηδενίζεται ὅταν $\chi=+\alpha$ ἢ $\chi=-\alpha$, οὐδετέρα δὲ τῶν τιμῶν τούτων ἐπαληθεύει τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), διὰ τοῦτο αἱ ἐξισώσεις αὗται εἰσὶν ἰσοδύναμοι.

ϛ'. Ἔστω τέλος

$$1-\frac{\chi^2}{\chi-1}=\frac{1}{1-\chi}-6$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\chi-1$, ἔχομεν

$$\chi-1-\chi^2=-1-6\chi+6.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ τῆς τιμῆς $\chi=1$, ἥτις μηδενίζει τὸν παράγοντα $\chi-1$· ἀλλ' ἡ προτεθεῖσα δὲν ἔχει τοιαύτην λύσιν· ἄρα ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.

Ὅταν λοιπὸν οἱ ἐξαφανιστέοι παρονομασταὶ περιέχωσιν ἀγνώστους, διακριβωτέον μετὰ τὴν ἐξαφάνισιν αὐτῶν ὅτι ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ Α'. ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΘ' ΕΝΟΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥ.

Ὁρισμός.

§ 96. Καλεῖται ἐν γένει *ἐπίλυσις* ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκονται αἱ λύσεις δεδομένης ἐξισώσεως ἢ αἱ κοιναὶ λύσεις δεδομένων ἐξισώσεων.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων εἶναι ἓν τῶν σπουδαιοτάτων μελημάτων τῆς Ἀλγέβρας.

Ἐπίλυσις πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου.

§ 97. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1)\quad 6\chi-7=2\chi+13.$$

Μεταφέροντες τὸν ὅρον —7 εἰς τὸ β'. μέλος καὶ τὸν 2χ εἰς τὸ α'. (§ 94), ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον

$$6\chi-2\chi=13+7,$$

εἴτε

$$(2)\quad 4\chi=20\cdot$$

διαιροῦντες δὲ ταύτην διὰ 4, ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον (§ 93)

$$(3)\quad \chi=\frac{20}{4}=5.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται προφανῶς διὰ τῆς τιμῆς 5, καὶ διὰ μόνης αὐτῆς· ἐπειδὴ δ' αἱ ἐξισώσεις (1), (2), (3) εἰσὶν ἰσοδύναμοι, ἡ αὐτὴ τιμὴ ἐπαληθεύει καὶ τὴν προτεθεῖσαν· εἶναι δὲ καὶ ἡ μόνη λύσις αὐτῆς.

Τῷ ὄντι· ἐὰν ἐν τῇ (1) θῶμεν 5 ἀντὶ χ, ἑκάτερον τῶν μελῶν γίνεται 23.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἔστω ἔτι ἡ ἐξίσωσις

$$2\chi+\frac{2}{3}-\frac{3\chi}{8}=\frac{5\chi}{2}+\frac{11}{3}-\chi\cdot$$

Ἐξαφανίζομεν τοὺς παρονομαστάς, πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 24· εὑρίσκομεν οὕτω

$$(1)\quad 48\chi+16-9\chi=60\chi+88-24\chi,$$

ἢ, ἀναγομένων τῶν μελῶν,

$$39\chi+16=36\chi+88.$$

Μεταθέτομεν ἤδη τὸν μὲν 36χ εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τὸν δὲ +16 εἰς τὸ δεύτερον, καὶ ἔχομεν $39\chi-36\chi=88-16,$

εἴτε

$$(2)\quad 3\chi=72\cdot$$

διαιροῦντες ἤδη διὰ 3, συνάγομεν

$$\chi=24.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη ἐπαληθεύει ὄντως τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἧς ἑκάτερον τῶν μελῶν γίνεται δι' αὐτῆς $39+\frac{2}{3}$.

Ἠδυνάμεθα καὶ πρὶν ἀναγάγωμεν τὰ μέλη τῆς (1) νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος πάντας τοὺς περιέχοντας τὸν ἄγνωστον ὅρους καὶ εἰς τὸ δεύτερον πάντας τοὺς γνωστούς· εὑρίσκομεν οὕτω

$$48\chi-9\chi-60\chi+24\chi=88-16\cdot$$

ἀνάγοντες ἤδη τὰ μέλη ταύτης, εὑρίσκομεν τὴν (2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἔστω ἔτι ἡ ἐξίσωσις

$$6-5\chi+\frac{3\chi}{4}=\chi+8-\frac{7\chi}{3}-\frac{63}{84}.$$

Πρὸς ἐξαφάνισιν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ 84 καὶ ἔχομεν

$$504-420\chi+63\chi=84\chi+672-196\chi-63\cdot$$

μεταθέτοντες τοὺς περιέχοντας τὸν ἄγνωστον ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τοὺς δὲ γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, καὶ ἀνάγοντες, εὑρίσκομεν

$$-245\chi=105\cdot$$

ὅθεν $$\chi=-\tfrac{105}{245}=-\tfrac{3}{7}.$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ χ, τὸ μὲν πρῶτον μέλος γίνεται

$$6-5\times(-\tfrac{3}{7})+\frac{3\times(-\frac{3}{7})}{4}=7+\tfrac{23}{28}\cdot$$

τὸ δὲ δεύτερον

$$-\tfrac{3}{7}+8-\frac{7\times(-\frac{3}{7})}{3}-\tfrac{63}{84}=7+\tfrac{23}{28}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἔστω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις

$$\frac{5\chi}{\alpha}-\frac{\beta^2\chi}{\alpha\gamma}+3\alpha=\frac{4\alpha^2\chi}{\gamma^2}-\frac{5\alpha^2}{\beta^2\gamma}+\alpha\beta\gamma.$$

Πρὸς ἐξαφάνισιν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ $\alpha\beta^2\gamma^2$ καὶ ἔχομεν

$$5\beta^2\gamma^2\chi-\beta^4\gamma\chi+3\alpha^2\beta^2\gamma^2=4\alpha^3\beta^2\chi-5\alpha^3\gamma+\alpha^2\beta^3\gamma^3.$$

Μεταθέτοντες τοὺς ἔχοντας τὸν ἄγνωστον ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, συνάγομεν

$$5\beta^2\gamma^2\chi-\beta^4\gamma\chi-4\alpha^3\beta^2\chi=-5\alpha^3\gamma+\alpha^2\beta^3\gamma^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Ὁ χ ὑπάρχει ἤδη παράγων εἰς πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου μέλους· ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν τοῦτον παράγοντα καὶ δεικνύοντες τὸ γινόμενον τῆς προκυπτούσης παραστάσεως ἐπὶ χ, ἔχομεν

$$(5\beta^2\gamma^2-\beta^4\gamma-4\alpha^3\beta^2)\chi=-5\alpha^3\gamma+\alpha^2\beta^3\gamma^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdot$$

διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ, συνάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου αὐτοῦ, ἤτοι

$$\chi=\frac{-5\alpha^3\gamma+\alpha^2\beta^3\gamma^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2}{5\beta^2\gamma^2-\beta^4\gamma-4\alpha^3\beta^2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Ἔστω ἔτι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις

$$\frac{(2\alpha+\beta)\beta^2}{\alpha(\alpha+\beta)^2}\chi+\frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}=3\gamma\chi+\frac{\beta}{\alpha}\chi-\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Ἐξαφανίζομεν τοὺς παρονομαστάς, πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\alpha(\alpha+\beta)^3$, ὅπερ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν· οὕτως ἔχομεν

$$(2\alpha+\beta)\beta^2(\alpha+\beta)\chi+\alpha^3\beta^2=3\alpha\gamma(\alpha+\beta)^3\chi+\beta(\alpha+\beta)^3\chi-3\alpha^2\beta\gamma(\alpha+\beta)^2.$$

Μεταφέρομεν ἤδη εἰς τὸ αὐτὸ μέλος πάντας τοὺς περιέχοντας τὸν ἄγνωστον ὅρους καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον· οὕτως ἔχομεν

$$\alpha^3\beta^2+3\alpha^2\beta\gamma(\alpha+\beta)^2=3\alpha\gamma(\alpha+\beta)^3\chi+\beta(\alpha+\beta)^3\chi-(2\alpha+\beta)\beta^2(\alpha+\beta)\chi\cdot$$

ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ ὁ χ ὑπάρχει παράγων εἰς πάντας τοὺς ὅρους τοῦ β΄. μέλους· ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν τοῦτον παράγοντα καὶ δεικνύοντες τὸ γινόμενον τῆς προκυπτούσης παραστάσεως ἐπὶ χ, ἔχομεν

$$\alpha^3\beta^2+3\alpha^2\beta\gamma(\alpha+\beta)^2=\left[3\alpha\gamma(\alpha+\beta)^3+\beta(\alpha+\beta)^3-(2\alpha+\beta)\beta^2(\alpha+\beta)\right]\chi\cdot$$

διαιροῦντες ἤδη τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ, συνάγομεν

$$\chi=\frac{\alpha^3\beta^2+3\alpha^2\beta\gamma(\alpha+\beta)^2}{3\alpha\gamma(\alpha+\beta)^3+\beta(\alpha+\beta)^3-(2\alpha+\beta)\beta^2(\alpha+\beta)}.$$

Τοιαύτη εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ. Ἁπλοποιήσωμεν αὐτήν. Ὁ ἀριθμητὴς δύναται νὰ γραφῇ οὕτω $\alpha^2\beta\,[\alpha\beta+3\gamma(\alpha+\beta)^2]$. Οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι τοῦ παρονομαστοῦ δύνανται νὰ γραφῶσιν οὕτω

$$\beta(\alpha+\beta)\,[\,(\alpha+\beta)^2-\beta(2\alpha+\beta)\,],$$

ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ $\beta(\alpha+\beta)\alpha^2$· ὁ παρονομαστὴς λοιπὸν δύναται νὰ γραφῇ οὕτω

$$3\alpha\gamma(\alpha+\beta)^3+\alpha^2\beta(\alpha+\beta),$$

ἤ, κοινοῦ ὄντος τοῦ παράγοντος $\alpha(\alpha+\beta)$,

$$\alpha(\alpha+\beta)\,[\alpha\beta+3\gamma(\alpha+\beta)^2]\cdot$$

ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ χ δύναται νὰ γραφῇ οὕτω

$$\chi=\frac{\alpha^2\beta[\alpha\beta+3\gamma(\alpha+\beta)^2]}{\alpha(\alpha+\beta)[\alpha\beta+3\gamma(\alpha+\beta)^2]}.$$

ἐξαλειφομένων δὲ τῶν κοινῶν παραγόντων $\alpha\beta+3\gamma(\alpha+\beta)^2$ καὶ α ἔχομεν

$$\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

ΚΑΝΩΝ. *Ἵνα ἐπιλύσωμεν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου, α'. ἐξαφανίζομεν τοὺς παρονομαστάς, ἐὰν ὑπάρχωσι· β'. μεταφέρομεν εἰς τὸ αὐτὸ μέλος τοὺς περιέχοντας τὸν ἄγνωστον ὅρους, τοὺς δὲ μὴ περιέχοντας αὐτὸν εἰς τὸ ἕτερον· γ'. ἀνάγομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους ἐν ἑκατέρῳ τῶν μελῶν· δ'. διαιροῦμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν, εἰς ἣν οὕτω φθάνομεν, διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου.*

§ 98. Ὅταν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἦναι ἀλγεβρικά, ποιοῦμεν τὰς μεταθέσεις ὅρων ἀδιαφόρως εἰς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέλος· ἀλλ' ὅταν τὰ μέλη ἦναι ἀπόλυτα, δὲν δυνάμεθα νὰ μεταθέτωμεν κατὰ τὸ δοκοῦν, ὡς εἴπομεν ἐν τῇ β'. σημειώσει τοῦ § 91. Π. χ. ἐὰν ἐν τῷ α'. τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων μεταθέσωμεν τὸν 6χ εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τὸν $+13$ εἰς τὸ πρῶτον, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$-7-13=2\chi-6\chi,$$

ἧς τὰ μέλη δὲν δύνανται νὰ νοηθῶσιν ὡς παραστάσεις ἀπόλυτοι.

Ἐν τούτοις *δυνάμεθα κατὰ τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεων, ὧν τὰ μέλη ἀπόλυτα, νὰ θεωρῶμεν αὐτὰ ὡς ἀλγεβρικά· αἱ τιμαί, ἃς οὕτως εὑρίσκομεν, εἰσὶ θετικαὶ καὶ ἴσαι ταῖς ἀπολύτοις.* Ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι *γενικωτάτη* καὶ ἄγει εἰς νέαν λίαν λυσιτελῆ χρῆσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ἐν γένει ἐξίσωσις οἱαδήποτε

$$(1)\ \text{A}=\text{B}.$$

περιέχουσα ὁσουσδήποτε ἀγνώστους χ, ψ, ω, . . . Θεωρήσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ὡς ἀπολύτους παραστάσεις καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ συστήματος τιμῶν $\chi=\alpha$, $\psi=\beta$, $\omega=\gamma$, ... Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ Α καὶ Β ὡς ἀλγεβρικὰ, ἐκλαμβάνοντες ὡς θετικοὺς τοὺς ἐν αὐτοῖς ἀριθμοὺς ἀνεξαρτήτως τῶν σημείων, ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ τῶν τιμῶν $\chi=+\alpha$, $\psi=+\beta$, $\omega=+\gamma$, ...· διότι κατὰ τὴν ἐν § 81 παρατήρησιν, ἐὰν μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν ἀπολύτων τιμῶν ἐν τοῖς Α καὶ Β, νοήσωμεν τὰς παραστάσεις ὡς ἀλγεβρικὰς, ἕξομεν θετικοὺς ἀριθμοὺς, ἴσους τοῖς ἀπολύτοις Α καὶ Β, οἵτινές εἰσιν ἴσοι. Δυνάμεθα λοιπὸν κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς (1) νὰ θεωρῶμεν τὰ Α καὶ Β ὡς ἀλγεβρικὰ, ἔτι καὶ ὅταν ἡ ἔννοια αὐτῶν δὲν ἦναι τοιαύτη. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι *δυνάμεθα πάντοτε νὰ μεταθέτωμεν τοὺς ὅρους ὁπωσδήποτε.*

Οὕτως εἰς τὸ α΄. τῶν ἐν τῷ ἠγηθέντι παραγράφῳ παραδειγμάτων μεταθέτοντες τοὺς ἔχοντας τὸν ἄγνωστον ὅρους εἰς τὸ δεύτερον μέλος, τοὺς δὲ γνωστοὺς εἰς τὸ πρῶτον, ἔχομεν

$$-7-13=2\chi-6\chi\cdot$$

καὶ ἀνάγοντες

$$-20=-4\chi\cdot$$

διαιρέσει δὲ διὰ -4

$$\frac{-20}{-4}=\chi\cdot$$

εἴτε $\chi=+5$. Ἡ τιμὴ αὕτη, θεωρουμένη ὡς ἀπόλυτος ἀριθμὸς, εἶναι ἡ ἐπαληθεύουσα τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν, ὅταν τὰ μέλη αὐτῆς νοηθῶσιν ὡς παραστάσεις ἀπόλυτοι.

Σημειωθήτω ἐν τούτοις ὅτι ἡ θετικὴ τιμὴ δὲν δύναται νὰ νοῆται *πάντοτε* καὶ ὡς ἀπόλυτος. Π. χ. ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{5\chi}{12}-\frac{4\chi}{3}-13=\frac{7}{8}-\frac{13\chi}{6}$$

εὑρίσκομεν $\chi=\frac{111}{10}$. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι θετικὴ, καθιστῶσα ἴσα τὰ μέλη θεωρούμενα ὡς ἀλγεβρικὰ, καὶ *μόνον* οὕτω δύναται νὰ νοηθῇ· διότι ἐὰν νοηθῇ ὡς ἀριθμὸς ἀπόλυτος καὶ ἀντικατασταθῇ, αἱ δεικνυόμεναι ἀφαιρέσεις δὲν ἐκτελοῦνται (ὅρα περὶ τούτου καὶ τὴν ἐν § 89 γενικὴν σημείωσιν).

§ 99. *Πᾶσα πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου μίαν μόνην ἔχει λύσιν*· διότι δύναται πάντοτε ν' ἀναχθῇ εἰς ἰσοδύναμ μον ἔχουσαν σχῆμα τοιόνδε $\chi = A$, Α ὄντος γνωστοῦ· αὕτη δὲ μίαν μόνην προφανῶς ἔχει λύσιν, τὴν Α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Γινώσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν εἶναι ταυτότης, γίνεται δὲ τοιαύτη μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν λύσεων (§ 86)· οὕτως ἡ ἑξῆς ἰσότης

$$(\alpha+\chi)(\alpha-\chi)=\alpha^2-\chi^2$$

δὲν εἶναι ἐξίσωσις, ἀλλὰ ταυτότης· ἐπομένως ὑφίσταται, οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ κἂν τεθῶσιν ἀντὶ τοῦ χ. Ὅταν, ἐκλαμβάνοντες ταυτότητά τινα ὡς ἐξίσωσιν, ἐφαρμόζωμεν τὸν κανόνα πρὸς ἐπίλυσιν αὐτῆς, φθάνομεν ἐπὶ τέλους εἰς προφανῆ ἰσότητα, οἷαι αἱ $0=0$, $5=5$, $-9=-9$, $3\chi=3\chi$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Δυνατὸν ἐνίοτε νὰ μὴ ἐπαληθεύηται ἡ ἐξίσωσις δι' οὐδεμιᾶς λύσεως. Ἔστω, π. χ., ἡ ἐξίσωσις

$$3\chi+5=3\chi-6.$$

Ἡ τιμὴ τοῦ χ πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε τὸ τριπλοῦν αὐτῆς ηὐξημένον κατὰ 5 νὰ ἰσῶται τῷ αὐτῷ ἠλαττωμένῳ κατὰ 6· ἐπειδὴ προφανῶς τοιοῦτος ἀριθμὸς δὲν ὑπάρχει, οὔτε ἀπόλυτος οὔτε ἀλγεβρικός, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὴ λύσεως. Αἱ τοιαῦται ἐξισώσεις καλοῦνται *ἀδύνατοι*. Ὅταν, ἐκλαμβάνοντες τοιαύτην ἐξίσωσιν ὡς δυνατήν, ἐργαζώμεθα πρὸς ἐπίλυσιν αὐτῆς, φθάνομεν εἰς ἰσότητας *προφανῶς ἀτόπους*, οἷαι αἱ $0=8$, $2\chi=3\chi$, κ.τ.λ. Π. χ. ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως 3χ, εὑρίσκομεν τὴν προφανῶς ἄτοπον ἰσότητα $+5=-6$.

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς πρωτοβαθμίους.

§ 100. Ἐξίσωσις μὴ πρωτοβάθμιος δύναται ἐνίοτε ν' ἀνάγηται εἰς πρωτοβάθμιον διὰ μετασχηματισμῶν, στηριζομένων ἐπὶ τῶν ἐν τῷ ἡγηθέντι κεφαλαίῳ θεωρημάτων (§ 90 καὶ ἑξῆς). Ἰδοὺ παραδείγματα.

α΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1)\quad \sqrt{\chi-3}=\sqrt{\chi}-1\ (^*)$$

(*) Ἔν τε τῇ ἐξισώσει ταύτῃ καὶ ἐν πάσαις ταῖς λοιπαῖς μέχρι τέλους τοῦ κεφαλαίου αἱ δεικνυόμεναι ῥίζαι (ἀνεξαρτήτως τῶν πρὸ τῶν ῥιζικῶν σημείων) νοοῦνται ὡς θετικοὶ ἀριθμοί.

ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν

$$(2)\quad \chi-3=\chi+1-2\sqrt{\chi}\cdot$$

μεταφέροντες τοὺς μὲν ἔχοντας τὸν ἄγνωστον ὅρους εἰς τὸ α'. μέλος, τοὺς δὲ γνωστοὺς εἰς τὸ β'. ἔχομεν

$$2\sqrt{\chi}=4\cdot$$

διαιρέσει δὲ διὰ 2

$$\sqrt{\chi}=2\cdot$$

ὑψοῦντες δὲ πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν

$$\chi=4.$$

Ἐπειδὴ ὑψώσαμεν δὶς εἰς τὸ τετράγωνον, δυνατὸν ἡ τιμὴ $\chi=4$ νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς τὴν προτεθεῖσαν (§ 93, Σημ. Γ'.)· ἀλλ' ἀντεισάγοντες αὐτὴν ἐν τῇ (1), παρατηροῦμεν ὅτι ἐπαληθεύει αὐτήν.

Σημειωτέον ἐνταῦθα ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{\chi-3}=-(\sqrt{\chi}-1),$$

ἧς αἱ λύσεις περιλαμβάνονται ἐπίσης ἐν ταῖς τῆς (2) καὶ τῆς (3), εἶναι ἀνεπίδεκτος ἐπαληθεύσεως· διότι ἐὰν ὑπῆρχε λύσις, ἤθελε περιέχεσθαι ἐν τῇ (3), ἥτις, οὖσα πρωτοβάθμιος, μίαν μόνην ἔχει λύσιν, τὴν $\chi=4$, μὴ ἐπαληθεύουσαν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν.

β'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{4+\chi}=4-\sqrt{\chi}.$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν

$$4+\chi=16+\chi-8\sqrt{\chi},$$

μετὰ δὲ τὰς μεταθέσεις καὶ ἀναγωγὰς

$$8\sqrt{\chi}=12,$$

ἢ

$$2\sqrt{\chi}=3\cdot$$

ὑψοῦντες πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν

$$4\chi=9\cdot$$

ὅθεν

$$\chi=\tfrac{9}{4}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη ἐπαληθεύει τὴν προτεθεῖσαν.

γ'. Ἔστω

$$(1)\quad \sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-\sqrt{1-\chi}}=1.$$

Συνάγομεν διὰ μεταθέσεως

$$\sqrt{\chi-\sqrt{1-\chi}}=\sqrt{\chi}-1;$$

ὑψοῦντες δὲ εἰς τὸ τετράγωνον

$$\chi-\sqrt{1-\chi}=\chi-2\sqrt{\chi}+1,$$

μετὰ δὲ τὰς μεταθέσεις καὶ ἀναγωγὰς

$$\sqrt{1-\chi}=2\sqrt{\chi}-1\cdot$$

ὑψοῦντες πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον

$$1-\chi=4\chi-4\sqrt{\chi}+1,$$

ἢ

$$4\sqrt{\chi}=5\chi\cdot$$

ὑψοῦντες τὸ τρίτον εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν

$$16\chi=25\chi^2.$$

μετατιθεμένου τοῦ ἐν τῷ β'. μέλει ὅρου εἰς το πρωτον και γραφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος χ ἐκτὸς παρενθέσεως, ἡ τελευταία ἐξίσωσις λαμβάνει τὸ σχῆμα

$$(2)\quad \chi(16-25\chi)=0.$$

Ἵνα γινόμενον δύο παραγόντων ἰσῶται τῷ 0, πρέπει ο ετερος των παραγόντων νὰ ἦναι ἴσος τῷ 0· ὅθεν ἵνα ἐπαληθεύηται ἡ τελευταία ἐξίσωσις, πρέπει νὰ ἔχωμεν ἢ $\chi=0$, ἢ $16-25\chi=0$, εἴτε $\chi=\frac{16}{25}$. Ποιοῦντες ἐν τῇ (1) $\chi=0$ καὶ $\chi=\frac{16}{25}$ δὲν εὑρίσκομεν ταυτότητας· ἄρα οὐδετέρα τῶν λύσεων τούτων ἀνήκει εἰς τὴν (1). Ἡ λύσις $\chi=0$ ἀνήκει εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi+\sqrt{1-\chi}}=1;$$

ἡ δὲ $\chi=\frac{16}{25}$ εἰς τὴν

$$\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-\sqrt{1-\chi}}=1\cdot$$

ἀμφότεραι δ' αἱ ἐξισώσεις αὗται ἄγουσιν εἰς τὴν (2) διὰ τῶν αὐτῶν μετασχηματισμῶν, οὓς ἐποιήσαμεν, ὁρμηθέντες ἀπὸ τῆς (1).—Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει μόνας τὰς λύσεις $\chi=0$ καὶ $\chi=\frac{16}{25}$, οὐδετέρα δὲ τούτων ἐπαληθεύει τὴν (1), καὶ ἐπειδή, ἐὰν ὑπῆρχον λύσεις τῆς (1), ἤθελον αὗται ἐπαληθεύει καὶ τὴν (2), ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἄμοιρος λύσεων.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΙΝ.

1. $$\frac{3+2\chi}{1+2\chi}-\frac{5+2\chi}{7+2\chi}=1-\frac{4\chi^2-2}{7+16\chi+4\chi^2}.$$

$$\chi=\frac{7}{8}.$$

λύσις ἄγει εἰς ἐπίλυσιν ἐξισώσεως μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου πρωτοβαθμίου ἢ ἀναγομένης εἰς πρωτοβάθμιον.

Προβλήματα μερικά.

§ 102. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ $\frac{1}{2}$, τὰ $\frac{2}{3}$, τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ προσθέτοντες καὶ αὐξάνοντες τὸ ἄθροισμα κατὰ* 45, *ἔχομεν ἐξαγόμενον* 534.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος. Τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{2}$. ἐπίσης τὰ λοιπὰ μέρη, τὰ ἐν τῇ ἐκφωνήσει, εἰσὶ $\frac{2\chi}{3}$, $\frac{3\chi}{4}$, $\frac{4\chi}{5}$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν διαφόρων αὐτῶν μερῶν καὶ τοῦ 45 ἰσοῦται τῷ 534 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{2}+\frac{2\chi}{3}+\frac{3\chi}{4}+\frac{4\chi}{}$$

6. $$\left(\sqrt{2+\chi}+\sqrt{\chi}=\frac{4}{\sqrt{2+\chi}}.\right)$$

$$\chi=\frac{2}{3}.$$

7. $$\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2\chi^2}+\frac{1}{\chi^4}}}.$$

$$\chi=0 \text{ καὶ } \chi=-\frac{4\alpha}{3} \text{ (λύσεις ἀλλότριαι).}$$

8. $$2\chi+2\sqrt{\alpha^2+\chi^2}=\frac{5\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\chi^2}}.$$

$$\chi=\frac{3\alpha}{4}.$$

9. $$\sqrt{\alpha-\chi}+2\sqrt{\alpha+\chi}=\sqrt{\alpha-\chi+\sqrt{\alpha\chi+\chi^2}}.$$

$$\chi=0,\quad \chi=\frac{64\alpha}{1025} \text{ (λύσεις ἀλλότριαι).}$$

ὑψοῦντες δὲ εἰς τὸ τετράγωνον

$$\chi-\sqrt{1-\chi}=\chi-2\sqrt{\chi}+1,$$

μετὰ δὲ τὰς μεταθέσεις καὶ ἀναγωγὰς

$$\sqrt{1-\chi}=2\sqrt{\chi}-1\cdot$$

ὑψοῦντες πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον

$$1-\chi=4\chi-4\sqrt{\chi}+1,$$

ἢ

$$4\sqrt{\chi}=5\chi\cdot$$

ὑψοῦντες τὸ τρίτον εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν

$$16\chi=25\chi^2\cdot$$

μετατιθεμένου τοῦ ἐν τῷ β΄. μέλει ὅρου εἰς τὸ πρῶτον καὶ γραφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος χ ἐκτὸς παρενθέσεως, ἡ τελευταία ἐξίσωσις λαμβάνει τὸ σχῆμα

$\chi=\alpha$ (2) $\chi(16-25\chi)=0.$

...αγόντων ἰσῶται τῷ 0, πρέπει ὁ ἕτερος τῶν ... 0· ὅθεν ἵνα ἐπαληθεύηται ἡ τελευταία ... ἢ $16-25\chi=0$, εἴτε $\chi=\frac{16}{25}$

13. $$\frac{1+\chi-\sqrt{2\chi+\chi^2}}{1+\chi+\sqrt{2\chi+\chi^2}}=\alpha\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{2+\chi}}$$

$$\chi=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\alpha}+\frac{1}{2\sqrt[3]{\alpha}}-1.$$

Ἡ ἐπίλυσις γίνεται διὰ δύο βοηθητικῶν ἀγνώστων, ἴσων τῷ $1+\chi$ καὶ τῷ $\sqrt{2\chi+\chi^2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ Α΄. ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΘ' ΕΝΟΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥ.

Τίνα τὰ προβλήματα, περὶ ὧν πραγματεύεται ἡ Ἄλγεβρα.

§ 101. Τὰ προβλήματα, τῆς λύσεως τῶν ὁποίων ἐπιλαμβάνεται ἡ Ἄλγεβρα, εἶναι τὰ περιέχοντα σχέσεις γνωστῶν μετ' ἀγνώστων, αἵτινες παριστῶνται ἀμέσως ἢ ἐμμέσως δι' ἐξισώσεων.

Ἐνταῦθα θέλομεν διαλάβει περὶ τοιούτων προβλημάτων, ὧν ἡ λύσις ἄγει εἰς ἐπίλυσιν ἐξισώσεως μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου πρωτοβαθμίου ἢ ἀναγομένης εἰς πρωτοβάθμιον.

Προβλήματα μερικά.

§ 102. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ $\frac{1}{2}$, τὰ $\frac{2}{3}$, τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ προσθέτοντες καὶ αὐξάνοντες τὸ ἄθροισμα κατὰ 45, ἔχομεν ἐξαγόμενον 534.*

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος. Τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{2}$· ἐπίσης τὰ λοιπὰ μέρη, τὰ ἐν τῇ ἐκφωνήσει, εἰσὶ $\frac{2\chi}{3}, \frac{3\chi}{4}, \frac{4\chi}{5}$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν διαφόρων αὐτῶν μερῶν καὶ τοῦ 45 ἰσοῦται τῷ 534, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{2}+\frac{2\chi}{3}+\frac{3\chi}{4}+\frac{4\chi}{5}+45=534,$$

ἣν ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν $\chi=180$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Τίς ἡ παροῦσα ἀξία γραμματίου ἐκ 2400 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 7 μῆνας, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 % κατ' ἔτος;*

Ἔστω χ ἡ παροῦσα ἀξία. Ἐπειδὴ 100 δραχμαὶ ἀποφέρουσι κατ' ἔτος 8, δραχμὴ 1 ἀποφέρει κατ' ἔτος μὲν 0, 08, κατὰ μῆνα δὲ $\frac{0{,}08}{12}$· ὅθεν 1 δραχμὴ ἐπὶ 7 μῆνας ἀποφέρει $\frac{0{,}08}{12}\times 7$· ὅθεν ὁ τόκος τῶν χ δραχμῶν ἐπὶ 7 μῆνας εἶναι $\frac{0{,}08}{12}\times 7\times\chi$· ἀλλ' ὁ τόκος οὗτος ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ $2400-\chi$ (*)· ἄρα

$$\frac{0{,}08}{12}\times 7\times\chi=2400-\chi.$$

Ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν $\chi=2293$ ὡς ἔγγιστα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Ἔχομεν ἄκοπον ἄργυρον δύο εἰδῶν· τοῦ μὲν ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,875* (**), *τοῦ δὲ 0,960· πόσον*

(*) Γνωστὸν ὅτι κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν ἡ παροῦσα ἀξία μετὰ τοῦ τόκου αὐτῆς μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας ἰσοῦται τῷ κεφαλαίῳ.

(**) Τοῦτο δηλοῖ, ὡς γνωστόν, ὅτι τὰ 0,875 τοῦ ὅλου εἶναι καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ 0,125 ἕτερον εὐτελὲς μέταλλον.

πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου, ἵνα ἔχωμεν μίγμα 20 δραχμῶν, ἔχον βαθμὸν καθαρότητος 0,920;

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς δραχμῶν, αἵτινες πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἐκ τοῦ ἔχοντος βαθμὸν 0,875· $20-\chi$ εἶναι ὅσαι δραχμαὶ πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἐκ τοῦ ἔχοντος βαθμὸν 0,960.

Ὁ καθαρὸς ἄργυρος, ὁ περιεχόμενος ἐν ταῖς χ δραχμαῖς, εἶναι $0{,}875\chi$· ὁ δὲ περιεχόμενος ἐν ταῖς $20-\chi$ εἶναι $0{,}960(20-\chi)$· ὅθεν ὁ ἐν τῷ μίγματι καθαρὸς ἄργυρος εἶναι $0{,}875\chi+0{,}960(20-\chi)$· ὁ αὐτὸς ἰσοῦται καὶ τῷ γινομένῳ $0{,}920\times20$· διότι ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ μίγματος εἶναι 0,920· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$0{,}875\chi+0{,}960(20-\chi)=0{,}920\times20\cdot$$

ἐξ ἧς $\chi=9+\frac{7}{17}$· ὅθεν $20-\chi=10+\frac{10}{17}$.

Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα εἶναι ἐξ ἐκείνων, περὶ ὧν πραγματεύεται καὶ ἡ Ἀριθμητική. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τῶν ἐξισώσεων αἱ λύσεις τῶν προβλημάτων αὐτῶν ἀποβαίνουσιν εὐχερέστεραι, ἡ δὲ κατάταξις εἰς διάφορα εἴδη, ὡς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, καθίσταται περιττή.

§ 103. Ἡ λύσις παντὸς προβλήματος περιλαμβάνει δύο μερικωτέρας πράξεις, τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως καὶ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῆς. Καὶ ἡ μὲν ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως γίνεται ὡς εἴρηται ἐν τοῖς πρόσθεν· ἀλλ' ἡ εὕρεσις αὐτῆς δὲν ὑπάγεται εἰς γενικοὺς κανόνας. Ἐφ' ἑκάστου προβλήματος γίνεται ἴδιος συλλογισμὸς πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως· καὶ ἄλλοτε μὲν αὕτη εὑρίσκεται εὐκόλως, ἄλλοτε δ' οὔ. Τὸ πρόβλημα εἶναι εὔλυτον ἢ δύσλυτον, καθόσον εὐκόλως ἢ δυσκόλως εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ.

Διὰ μόνης τῆς ἀσκήσεως δύναταί τις ν' ἀποκτήσῃ τὴν περὶ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων εὐχέρειαν. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον καταχωρίζομεν ἐνταῦθα τὰ ἑξῆς προβλήματα μετὰ τῶν λύσεων αὐτῶν.

§ 104. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. *Διόφαντος, ὁ συγγραφεὺς τοῦ ἀρχαιοτάτου σωζομένου βιβλίου Ἀλγέβρας, ἔζησε νέος τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ βίου αὐτοῦ καὶ ἔφηβος τὸ $\frac{1}{12}$· εἶτα νυμφευθεὶς ἔζησεν ἐν συζυγίᾳ τὸ $\frac{1}{7}$ καὶ 5 ἔτη πρὶν ἀποκτήσῃ υἱόν, ὅστις ἔζησε μόνον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ βίου τοῦ πατρός· ἐπέζησε δὲ ὁ πατὴρ 4 ἔτη. Πόσα ἔτη ἔζησεν ὁ Διόφαντος;*

Ἔστωσαν χ τὰ ζητούμενα ἔτη. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ὁ χρόνος τῆς νεότητος τοῦ Διοφάντου εἶναι $\frac{\chi}{6}$, ὁ τῆς ἥβης $\frac{\chi}{12}$, ὁ τῆς συζυγίας, πρὶν ἀποκτήσῃ υἱόν, $\frac{\chi}{7}+5$, ὁ τῆς συμβιώσεως μετὰ τοῦ υἱοῦ $\frac{\chi}{2}$ (τόσα ἔτη ἔζησεν ὁ υἱός)· τὸ ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν χρόνων, ηὐξημένον κατὰ τὰ 4 ἔτη, καθ' ἃ ἐπέζησεν ὁ πατὴρ τῷ υἱῷ, ἰσοῦται προφανῶς τῷ ζητουμένῳ χ· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{6}+\frac{\chi}{12}+\frac{\chi}{7}+5+\frac{\chi}{2}+4=\chi.$$

Πρὸς ἐξαφάνισιν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν, ὅπερ εἶναι 84. Εὑρίσκομεν $\chi=84$.

§ 105. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. *Ὡρολόγιόν τι δεικνύει μεσημβρίαν· ὁ ὡροδείκτης λοιπὸν καὶ ὁ λεπτοδείκτης εἰσὶ συνηντημένοι ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 12· μετὰ πόσον χρόνον συναντηθήσονται αὖθις καὶ πόσαι γίνονται συναντήσεις ἐν 12 ὥραις;*

Ἔστω χ ἀριθμὸς ὡρῶν τόσων, ὅσος ὁ ζητούμενος χρόνος. Τὸν χρόνον τοῦτον θέλει δεικνύει καὶ ὁ ὡροδείκτης κατὰ τὴν συνάντησιν. Ὁ αὐτὸς οὗτος ἀριθμὸς χ εἶναι καὶ τὰ δωδέκατα τῆς περιφερείας, ἅπερ διατρέχει ὁ ὡροδείκτης ἐν χρόνῳ χ. Ὁ λεπτοδείκτης, διατρέχων ἐν 1 ὥρᾳ 12 δωδέκατα τῆς περιφερείας, ἐν ὥραις χ διατρέχει 12χ· ἀφ' ἑτέρου φανερὸν ὅτι ὁ λεπτοδείκτης διατρέχει ἐν τῷ χρόνῳ χ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, ἥτις εἶναι 12 δωδέκατα ἑαυτῆς, καὶ ὅσον ὁ ὡροδείκτης· οἱ δύο λοιπὸν ἀριθμοὶ 12χ καὶ 12+χ, παριστῶντες ἀμφότεροι τὰ δωδέκατα τῆς περιφερείας, ἅπερ διατρέχει ὁ λεπτοδείκτης ἐν ὥραις χ, εἰσὶν ἴσοι· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$12\chi=12+\chi$$

ἐξ ἧς $\chi=\frac{12}{11}=1^{\text{ὥρ.}}\ 5'\ 27''+\frac{3}{11}$.

Φανερὸν ὅτι ὁ αὐτὸς πάντοτε χρόνος παρέρχεται ἐν τῷ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν συναντήσεων· ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν 12 ὥραις συναντήσεων εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ $\frac{12}{11}$, ὅπερ εἶναι 11.

§ 106. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ'. *Δεξαμενή, πλήρης ὕδατος, δύναται* νὰ κενωθῇ διὰ δύο κρουνῶν *A* καὶ *B*. Ἀνοίγεται ὁ κρουνὸς *A* καὶ ἐκρέει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὕδατος· εἶτα ἀνοίγεται καὶ ὁ *B*, καὶ τὸ ὕδωρ ῥέει ἐξ ἀμφοτέρων τῶν κρουνῶν, μέχρις οὗ ἅπαν ἐκχυθῇ· πρὸς τοῦτο δὲ παρέρχονται $\frac{5}{4}$ τῆς ὥρας πλέον τοῦ χρόνου, καθ' ὃν εἶχεν ἐκρεύσει διὰ τοῦ *A* τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὕδατος. Ἐὰν οἱ δύο κρουνοὶ ἠνοίγοντο ὁμοῦ ἐξ ἀρχῆς, ἡ δεξαμενὴ ἤθελε κενωθῇ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας πρότερον. Ἐν πόσῳ χρόνῳ ἡ δεξαμενὴ κενοῦται διὰ μόνου τοῦ κρουνοῦ *A*;

Ἔστω χ (ἀριθμὸς ὡρῶν) ὁ ζητούμενος χρόνος. Τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς δεξαμενῆς κενοῦται διὰ τοῦ αὐτοῦ κρουνοῦ A ἐν χρόνῳ $\frac{\chi}{4}$. Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δεξαμενῆς κενοῦνται διὰ τῶν κρουνῶν A καὶ B, ὁμοῦ ἀνεῳγμένων, ἐν χρόνῳ $\frac{\chi}{4}+\frac{5}{4}$, καθὰ διαλαμβάνει ἡ τοῦ προβλήματος ἐκφώνησις· ὅθεν ὁλόκληρος ἡ δεξαμενὴ κενοῦται διὰ τῶν αὐτῶν ἐν τοῖς $\frac{4}{3}$ τοῦ χρόνου $\frac{\chi}{4}+\frac{5}{4}$, ἤγουν ἐν χρόνῳ $\frac{\chi}{3}+\frac{5}{3}$. Ὁ αὐτὸς χρόνος ἰσοῦται, καθὰ διαλαμβάνει ἡ ἐκφώνησις, καὶ τῷ ὁλικῷ χρόνῳ $\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{4}+\frac{5}{4}$, τῷ παρερχομένῳ κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον ἐκκενώσεως, ἠλαττωμένῳ κατὰ $\frac{1}{4}$, ἤτοι ἐν χρόνῳ $\frac{\chi}{2}+1$· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{3}+\frac{5}{3}=\frac{\chi}{2}+1;$$

ἐξ ἧς $\chi=4^{\omega\rho}$.

§ 107. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ζ'. *Ἀλώπηξ διώκεται ὑπὸ θηρευτῆρος κυνός, ἀφ' οὗ ἀπέχει κατ' ἀρχὰς 60 πηδήματα ἑαυτῆς· πηδᾷ αὐτὴ ἐννεάκις, ἐνῷ ὁ κύων ἑξάκις· ἀλλὰ 3 πηδήματα τοῦ κυνὸς δύνανται 7 τῆς ἀλώπεκος. Μετὰ πόσα πηδήματα ὁ κύων θέλει καταφθάσει τὴν ἀλώπεκα;*

Ἔστωσαν χ τὰ πηδήματα τοῦ κυνός. Ἐπειδὴ 3 πηδήματα τοῦ κυνὸς ἰσοδυναμοῦσιν 7 πηδήμασι τῆς ἀλώπεκος, τὰ χ ἰσοδυναρουσι $\frac{7\chi}{3}$ πηδήμασι τῆς ἀλώπεκος. Ἀφ' ἑτέρου ἐπειδὴ, ἐνῷ ὁ κύων πηδᾷ 6 πηδήματα, ἡ ἀλώπηξ πηδᾷ 9, ἕπεται ὅτι, ἐνῷ ὁ κύων πηδᾷ χ, ἡ ἀλώπηξ πηδᾷ $\frac{9\chi}{6}$· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀλώπηξ ἡγεῖται κατ' ἀρχὰς τοῦ κυνὸς κατὰ 60 ἴδια πηδήματα, τὸ ἄθροισμα $60+\frac{9\chi}{6}$ παρίστησιν ἐπίσης διὰ πηδημάτων ἀλώπεκος τὸ ὑπὸ τοῦ κυνὸς διατρεχόμενον διάστημα, ὅπερ εὕρηται ἤδη ὅτι εἶναι καὶ $\frac{7\chi}{3}$· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{7\chi}{3}=60+\frac{9\chi}{6},$$

ἐξ ἧς $\chi=72$.

§ 108. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'. *Ἱέρων, βασιλεὺς τῶν Συρακουσῶν, παρέδωκεν 20 λίτρας χρυσοῦ χρυσουργῷ τινι πρὸς κατασκευὴν διαδήματος, ὅπερ ἔμελλεν ἀναθεῖναι τῷ Διΐ. Τὸ διάδημα κατασκευασθὲν, εἷλκεν ὄντως 20 λίτρας· ἀλλ' ὁ Ἱέρων, ὑπονοήσας νόθευσιν τοῦ χρυσοῦ ὑπὸ τοῦ χρυσουργοῦ, παρέδωκε τὸ διάδημα τῷ Ἀρχιμήδῃ, ὅπως οὗτος βασανίσῃ τὸν χρυσὸν, διατηρῶν τὸ διάδημα σῶον. Ὁ Ἀρχιμήδης, εἰκάζων ἀνάμιξιν ἀργύρου μετὰ τοῦ χρυσοῦ, εὗρεν ὅτι περιείχοντο ἐν τῷ διαδήματι καθαροῦ μὲν χρυσοῦ λίτραι 15,11, ἀργύρου δὲ 4,89. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τούτου ἐστηρίχθη ἐπὶ τῶν ἑξῆς δεδομένων· α'. ὁ χρυσὸς εἶναι 19κις,26 βαρύτερος ἴσου ὄγκου ὕδατος· β'. ὁ ἄργυρος εἶναι 10κις,47 βαρύτερος ἴσου ὄγκου ὕδατος· γ'. τὸ κατασκευασθὲν διάδημα ἦν 15κις,98 βαρύτερον ἴσου ὄγκου ὕδατος (*). Τίνι τρόπῳ ἀνεῦρεν ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τῶν δεδομένων τούτων τὰ ἐν τῷ διαδήματι ποσὰ καθαροῦ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου;*

Ἔστωσαν χ αἱ λίτραι καθαροῦ χρυσοῦ, αἱ περιεχόμεναι ἐν τῷ διαδήματι· αἱ τοῦ ἀργύρου εἰσὶ $20-\chi$. Λάβωμεν ὡς μονάδα ὄγκου

(*) Οἱ ἀριθμοὶ 19,26, 10,47, 15,98 εἶναι τὰ λεγόμενα ειδικὰ βάρη τῶν ἀναφερομένων σωμάτων.

τὸν ὄγκον μιᾶς λίτρας ὕδατος· μία τοιαύτη μονὰς ὄγκου ἐκ χρυσοῦ ἕλκει λίτρας 19,26· ὅθεν ὁ ὄγκος χ λιτρῶν χρυσοῦ εἶναι $\frac{\chi}{19,26}$· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁ ὄγκος 20—χ λιτρῶν ἀργύρου εἶναι $\frac{20-\chi}{10,47}$, ὁ δὲ τοῦ διαδήματος $\frac{20}{15,98}$· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν ἐν τῷ διαδήματι ποσῶν χρυσοῦ καὶ ἀργύρου ἰσοῦται τῷ ὅλῳ ὄγκῳ τοῦ διαδήματος· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{19,26}+\frac{20-\chi}{10,47}=\frac{20}{15,98},$$

ἐξ ἧς χ=15,11· ἄρα 20—χ (ὁ ἐν τῷ διαδήματι ἄργυρος) εἶναι 4,89.

§ 109. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'. *Δύο ἀτμάμαξαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων, ἀπεχουσῶν ἀπ' ἀλλήλων 280 στάδια· ἡ ταχύτης τῆς πρώτης (ἤτοι τὸ διάστημα, ὅπερ διατρέχει καθ' ὥραν) εἶναι 42,2 στάδια, ἡ δὲ τῆς δευτέρας 65,5· εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πρώτης πόλεως θέλουσι συναντηθῇ;*

Ἔστωσαν χ τὰ ζητούμενα στάδια. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέρους, ἔνθα συναντῶνται, ἀπὸ τῆς δευτέρας πόλεως εἶναι 280—χ. Ἡ πρώτη ἀτμάμαξα θέλει διατρέξει τὰ χ στάδια ἐν ὥραις $\frac{\chi}{42,2}$, ἡ δὲ δευτέρα τὰ 280—χ ἐν ὥραις $\frac{280-\chi}{65,5}$· φανερὸν ὅτι οἱ χρόνοι οὗτοι εἰσὶν ἴσοι· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{42,2}=\frac{280-\chi}{65,5},$$

ἥτις δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω

$$\frac{\chi}{422}=\frac{280-\chi}{655}.$$

§ 110. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'. *Ἀτμάμαξά τις ἀναχωρεῖ ἐκ Παρισίων* μετὰ ταχύτητος 42,2· μετὰ 45′ ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως ἑτέρα, ἥτις πρέπει νὰ φθάσῃ τὴν πρώτην εἰς ἀπόστασιν 180 σταδίων ἐκ Παρισίων. Πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ δευτέρα αὕτη ἀτμάμαξα ;

Ἔστω χ ἡ ζητουμένη ταχύτης, ἤτοι τὰ στάδια, ἅπερ ἡ δευτέρα ἀτμάμαξα πρέπει νὰ διατρέχῃ καθ' ὥραν. Ἡ πρώτη ἀτμάμαξα θέλει διανύσει τὰ 180 στάδια ἐν ὥραις $\frac{180}{42,2}$, ἡ δὲ δευτέρα ἐν ὥραις $\frac{180}{\chi}$· κατὰ τὴν ἐκφώνησιν φανερὸν ὅτι ὁ χρόνος $\frac{180}{\chi}$ εἶναι ἐλάσσων τοῦ $\frac{180}{42,2}$ κατὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας· ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{180}{42,2}-\frac{180}{\chi}=\frac{3}{4}.$$

Προβλήματα γενικά.

§ 111. Οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ τῶν προβλημάτων δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ γενικοί· ἡ ἐξίσωσις ἔσεται τότε γενική, ὡς καὶ τὸ πρόβλημα· ἐπιλύοντες δ' αὐτὴν εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου διὰ τύπου, ὅστις χρησιμεύει πρὸς λύσιν πάντων τῶν μερικῶν προβλημάτων, τῶν ὑπαγομένων ἐν τῷ λυθέντι γενικῷ. Ἰδοὺ τοιαῦτα προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α′. *Ἀριθμὸν α μερίσαι εἰς τρία μέρη, οἷα τὸ μὲν πρῶτον ὑπερέχειν τὸ δεύτερον κατὰ ἀριθμὸν β, τοῦτο δὲ τὸ τρίτον κατὰ γ.*

Ἔστω χ τὸ τρίτον μέρος. Τὸ δεύτερον, ὑπερέχον τὸ τρίτον κατὰ γ, εἶναι $\chi+\gamma$· τὸ δὲ πρῶτον, ὑπερέχον τὸ δεύτερον κατὰ β, εἶναι $\chi+\beta+\gamma$· ὅθεν τὸ ἄθροιστα τῶν τριῶν μερῶν εἶναι $\chi+\beta+\gamma+\chi+\gamma+\chi$, εἴτε $3\chi+\beta+2\gamma$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μερῶν ἰσοῦται τῷ μεριστέῳ α, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3\chi+\beta+2\gamma=\alpha\cdot$$

ἐξ ἧς

$$\chi=\frac{\alpha-\beta-2\gamma}{3}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ εἶναι τύπος, ἐν ᾧ δείκνυνται αἱ ἐπὶ τῶν διδομένων ἀριθμῶν α, β, γ ἐκτελεστέαι πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρίτου μέρους· ἵνα λύσωμεν λοιπὸν μερικὸν πρόβλημα, περιεχόμενον ἐν τῷ γενικῷ αὐτῷ προβλήματι, ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον αὐτὸν εἰς τὰ μερικὰ δεδομένα. Π. χ. ὑποτεθήτω ὅτι ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 587, ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου μέρους 129, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου 85· ἵνα ἔχωμεν τὸ τρίτον μέρος ποιοῦμεν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ $\alpha=587$, $\beta=129$, $\gamma=85$, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{587-129-170}{3}=96\cdot$$

ἵνα δ' ἔχωμεν τὰ ἄλλα μέρη, προσθέτομεν εἰς τὸν 96 διαδοχικῶς 85 καὶ 129· οὕτως εὑρίσκομεν 181 καὶ 310.

§ 112. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Δεξαμενή τις πληροῦται διὰ δύο κρουνῶν Α καὶ Β, δι' ὧν ῥέει ἐν αὐτῇ τὸ ὕδωρ, κενοῦται δὲ δι' ἑνὸς Γ. Διὰ τοῦ Α πληροῦται ἐν ὥραις α, διὰ τοῦ Β ἐν ὥραις β, διὰ δὲ τοῦ Γ κενοῦται ἐν ὥραις γ. Ἐν πόσῳ χρόνῳ πληροῦται ἡ δεξαμενὴ αὕτη, ὅταν καὶ οἱ τρεῖς κρουνοὶ ἦναι ἐν ταὐτῷ ἀνεῳγμένοι;*

Ἔστω χ ὁ χρόνος οὗτος (ἀριθμὸς ὡρῶν). Διὰ τοῦ κρουνοῦ Α πληροῦται ἐν α ὥραις ὅλη ἡ δεξαμενή· ἄρα ἐν ὥραις χ πληροῦται διὰ τοῦ αὐτοῦ κρουνοῦ μέρος τῆς δεξαμενῆς παριστώμενον διὰ $\frac{\chi}{\alpha}$· ἐπίσης διὰ τοῦ κρουνοῦ Β πληροῦται $\frac{\chi}{\beta}$ τῆς δεξαμενῆς ἐν ὥραις χ· διὰ δὲ τοῦ Γ κενοῦται ἐν ὥραις χ μέρος τῆς δεξαμενῆς παριστώμενον διὰ $\frac{\chi}{\gamma}$. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}$, ὅπερ εἶναι ὁ χῶρος, ὁ πληρούμενος ὑπὸ τῶν κρουνῶν Α καὶ Β ἐν χρόνῳ χ (τῆς δεξαμενῆς λαμβανομένης ὡς μονάδος) ἀφαιρεθῇ ὁ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἐκκενούμενος ὑπὸ τοῦ Γ χῶρος $\frac{\chi}{\gamma}$, τὸ ὑπόλοιπον πρέπει νὰ ἰσῶται τῇ μονάδι, ἤγουν τῇ δεξαμενῇ· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}-\frac{\chi}{\gamma}=1;$$

ὅθεν $\chi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta}$.

Ἐὰν $\alpha=4$, $\beta=6$, $\gamma=5$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τελευταίου τύπου $\chi=4^{\text{ὥρ.}}+\frac{8}{13}$.

§ 113. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Πατὴρ διέθετο τὴν περιουσίαν εἰς τοὺς τρεῖς υἱοὺς αὐτοῦ ὡς ἑξῆς. Ὁ πρωτότοκος λαβέτω ὡρισμένον ποσὸν* **α** *καὶ τὸ* $\frac{1}{\nu}$ *τοῦ ὑπολοίπου· ὁ δευτερότοκος λαβέτω* **2α** *καὶ τὸ* $\frac{1}{\nu}$ *τοῦ ὑπολοίπου, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἡ μερὶς τοῦ πρώτου καὶ* **2α**· *ὁ δὲ νεώτατος λαβέτω 3α καὶ τὸ* $\frac{1}{\nu}$ *τοῦ ὑπολοίπου, ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσιν αἱ μερίδες τῶν δύο πρώτων καὶ* **3α**. *Συνέβη οὕτω νὰ διανεμηθῶσιν οἱ τρεῖς υἱοὶ ἅπασαν τὴν περιουσίαν. Πόση ἦν αὕτη;*

Ἔστω χ ἡ περιουσία. Ἡ μερὶς τοῦ πρώτου υἱοῦ εἶναι, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, $\alpha+\dfrac{\chi-\alpha}{\nu}$ ἢ $\dfrac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu}$. Ἡ μερὶς τοῦ δευτέρου υἱοῦ εἶναι, καθὰ διαλαμβάνει ἡ ἐκφώνησις,

$$2\alpha+\frac{\chi-\dfrac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu}-2\alpha}{\nu};$$

ἡ δὲ παράστασις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξῆς

$$\frac{2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2}.$$

Ἡ μερὶς τοῦ τρίτου υἱοῦ εἶναι, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν,

$$3\alpha+\frac{\chi-\dfrac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu}-\dfrac{2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2}-3\alpha}{\nu},$$

ἡ δὲ παράστασις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν

$$\frac{3\alpha\nu^3+\nu^2\chi-6\alpha\nu^2-2\nu\chi+4\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu^3},$$

Ἐπειδὴ οἱ υἱοὶ διενείμαντο ἅπασαν τὴν οὐσίαν, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μερίδων πρέπει νὰ ἰσῶται τῷ χ· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi=\frac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu}+\frac{2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2}+\frac{3\alpha\nu^3+\nu^2\chi-6\alpha\nu^2-2\nu\chi+4\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu^3}.$$

Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ν^3 πρὸς ἐξαφάνισιν τῶν παρονομαστῶν καὶ ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{6\alpha\nu^3-10\alpha\nu^2+5\alpha\nu-\alpha}{\nu^3-3\nu^2+3\nu-1}.$$

Οἱ ὅροι τῆς τιμῆς ταύτης διαιροῦνται ἀμφότεροι ἀκριβῶς διὰ $\nu-1$· ὅθεν διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ $\nu-1$, εὑρίσκομεν τὸν ἁπλούστερον τύπον

$$\chi=\frac{6\alpha\nu^2-4\alpha\nu+\alpha}{\nu^2-2\nu+1}.$$

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἁπλουστέραν ἐξίσωσιν τοῦ προκειμένου προβλήματος, συλλογιζόμενοι ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ οἱ υἱοὶ διανέμονται ἅπασαν τὴν περιουσίαν, πρέπει, ἀφοῦ ὁ τρίτος λάβῃ 3α, νὰ μὴ μείνῃ ὑπόλοιπον· διότι, ἐὰν μείνῃ τοιοῦτον, τούτου μόνον τὸ $\frac{1}{\nu}$ λαμβάνει ὁ τρίτος υἱὸς καὶ ἤθελον ὑπολειφθῇ τὰ $\frac{\nu-1}{\nu}$ τοῦ ὑπολοίπου αὐτοῦ, ἐνῷ καθ' ὑπόθεσιν ἅπασα ἡ περιουσία ἐξαντλεῖται. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἔχωμεν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος καὶ ἐξισοῦντες τῷ 0 τὴν παράστασιν τοῦ ὑπολοίπου, ἀφοῦ ὁ τρίτος υἱὸς λάβῃ 3α· ἡ παράστασις αὕτη εἶναι

$$\chi-\frac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu}-\frac{2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2}-3\alpha.$$

ἐξισοῦντες αὐτὴν τῷ 0, ἔχομεν ἐξίσωσιν ἁπλουστέραν τῆς προευρεθείσης, ἐξ ἧς συνάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ ὑπὸ τὸν ἁπλούστερον αὐτῆς τύπον.

Ἐὰν $\alpha=10000$ καὶ $\nu=5$, εὑρίσκομεν, ἐφαρμογῇ τοῦ εὑρεθέντος τύπου, $\chi=81875$.

§ 114. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. *Πατὴρ διέθετο τὴν περιουσίαν εἰς τοὺς υἱοὺς αὐτοῦ ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος λαβέτω α καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ὑπολοί-*

που· ὁ δεύτερος λαβέτω 2α καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ὑπολοίπου, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἡ μερὶς τοῦ πρώτου καὶ 2α· ὁ τρίτος λαβέτω 3α καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ὑπολοίπου, ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσιν αἱ μερίδες τῶν δύο πρώτων καὶ 3α· ἐπίσης καὶ ὁ τέταρτος καὶ οἱ λοιποί. Οὕτω γενομένης τῆς διανομῆς, συνέβη νὰ λάβωσιν οἱ υἱοὶ ἀνὰ ἴσας μερίδας ἕκαστος. Ζητεῖται ἡ περιουσία τοῦ πατρὸς, ἡ μερὶς ἑκάστου τῶν υἱῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν.

Ζητοῦμεν πρῶτον τὴν περιουσίαν. Σημειωθήτω αὕτη διὰ χ. Ἡ μερὶς τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu}$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου $\frac{2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2}$. Ἐπειδὴ αἱ μερίδες εἰσὶν ἴσαι, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu}=\frac{2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2},$$

ἐξ ἧς $\chi=\alpha(\nu-1)^2$.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν παράστασιν τῆς μερίδος τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου υἱοῦ, εἴτε εἰς ἓν τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν, μεθ' ἁπάσας τὰς ἀναγωγὰς, $\alpha(\nu-1)$· τόση λοιπὸν εἶναι ἡ μερὶς ἑκάστου τῶν υἱῶν.

Διαιροῦντες τὴν περιουσίαν $\alpha(\nu-1)^2$ διὰ τῆς μερίδος $\alpha(\nu-1)$, εὑρίσκομεν πηλίκον $\nu-1$, ὅπερ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν.

Ἵνα ἔχωμεν τὰ ζητούμενα ἐπὶ μερικῶν προβλημάτων, ποιοῦμεν ἐφαρμογὴν τῶν τύπων $\alpha(\nu-1)^2$, $\alpha(\nu-1)$, $\nu-1$. Π. χ. ἐὰν $\alpha=10000$ καὶ $\nu=10$, ἡ μὲν περιουσία εἶναι 810000, ἡ δὲ μερὶς ἑκάστου τῶν υἱῶν 90000, ὁ δ' ἀριθμὸς τῶν υἱῶν 9.

Ἡ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἐπορίσθημεν τὴν τιμὴν τοῦ χ, δὲν περιλαμβάνει ἁπάσας τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος· διότι ἐν μὲν τῇ ἐκφωνήσει λέγεται ὅτι πάντες οἱ υἱοὶ λαμβάνουσιν ἴσας μερίδας, διὰ δὲ τῆς ἐξισώσεως δηλοῦται ὅτι μόνον οἱ δύο πρῶτοι υἱοὶ λαμβάνουσιν ἴσας μερίδας. Ἄδηλον λοιπὸν ἐὰν καὶ ἕκαστος τῶν λοιπῶν υἱῶν λαμβάνῃ τὸ αὐτὸ ποσόν. Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, λογισώμεθα τὰς μερίδας τῶν υἱῶν ἀπὸ τοῦ τρίτου κατὰ τοὺς ἐν τῇ ἐκφω-

νήσει ὅρους, τῆς περιουσίας οὔσης $\alpha(\nu-1)^2$ καὶ τῆς μερίδος ἑκάτε-
ρου τῶν πρώτων $\alpha(\nu-1)$.

Ὁ τρίτος λαμβάνει $3\alpha+\dfrac{\alpha(\nu-1)^2-2\alpha(\nu-1)-3\alpha}{\nu}$. ἡ παρά-
στασις αὕτη ἰσοῦται τῇ $\alpha(\nu-1)$· δυνάμεθα δὲ νὰ φθάσωμεν εἰς
τὴν τελευταίαν διὰ τῆς ἑξῆς σειρᾶς μετασχηματισμῶν

$$3\alpha+\frac{\alpha(\nu-1)^2-2\alpha(\nu-1)-3\alpha}{\nu}=\frac{\alpha(\nu-1)^2-2\alpha(\nu-1)+3\alpha\nu-3\alpha}{\nu}$$

$$=\frac{\alpha(\nu-1)^2-2\alpha(\nu-1)+3\alpha(\nu-1)}{\nu}=\frac{\alpha(\nu-1)^2+\alpha(\nu-1)}{\nu}=\alpha(\nu-1)$$

Ὁ τέταρτος λαμβάνει $4\alpha+\dfrac{\alpha(\nu-1)^2-3\alpha(\nu-1)-4\alpha}{\nu}$. ἡ
παράστασις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν $\alpha(\nu-1)$, εἰς ἣν δυνάμεθα
φθάσωμεν διὰ παραπλησίων τοῖς ἀνωτέρω μετασχηματισμῶν.

Ἐν γένει ὑποτιθεμένου ὅτι οἱ $\mu-1$ πρῶτοι υἱοὶ λαμβάνουσιν
ἀνὰ $\alpha(\nu-1)$ ἕκαστος, ὁ κατέχων τὴν $\mu^{\eta\nu}$ τάξιν υἱὸς λαμβάνει
$\mu\alpha+\dfrac{\alpha(\nu-1)^2-(\mu-1)\alpha(\nu-1)-\mu\alpha}{\nu}$. ἔχομεν δὲ

$$\mu\alpha+\frac{\alpha(\nu-1)^2-(\mu-1)\alpha(\nu-1)-\mu\alpha}{\nu}=\frac{\alpha(\nu-1)^2-(\mu-1)\alpha(\nu-1)+\mu\alpha\nu-\mu\alpha}{\nu}$$

$$=\frac{\alpha(\nu-1)^2-(\mu-1)\alpha(\nu-1)+\mu\alpha(\nu-1)}{\nu}=\frac{\alpha(\nu-1)^2+\alpha(\nu-1)}{\nu}=\alpha(\nu-1).$$

Πάντες λοιπὸν οἱ υἱοὶ λαμβάνουσιν ἀνὰ $\alpha(\nu-1)$ ἕκαστος.

Ἐὰν συνέβαινε νὰ μὴ πληρῶνται διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν ἅπα-
σαι αἱ ἐν τῇ ἐκφωνήσει συνθῆκαι, δὲν ἤθελον ὑπάρχει τιμαὶ πλη-
ροῦσαι ἁπάσας ἐν ταὐτῷ τὰς συνθήκας αὐτάς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1. Ἐν 32 λίτραις ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχεται 1 λίτρα ἅλατος· μετὰ πόσου γλυκέος ὕδατος πρέπει τὸ ὕδωρ τοῦτο νὰ συγκερασθῇ, ἵνα ἐν 32 λίτραις τοῦ κράματος περιέχωνται 2 οὐγγίαι ([illegible] τῆς λίτρας) ἅλατος; (224 λίτρ.).

2. Πεζὸς διανύει 3 στάδια καθ' ὥραν· μετὰ 10 ὥρας πέμπεται ἔφιππος διανύων 7 στάδια καθ' ὥραν· μετὰ πόσας ὥρας ὁ δεύτερος φθάνει τὸν πρῶτον; ($7\frac{1}{2}$)

3. Ἔμπορος ἀφαιρεῖ κατ' ἔτος ἐκ τῶν κεφαλαίων αὐτοῦ 1000 δραχμὰς

ἴδια ἔξοδα. Εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους τὰ κεφάλαια αὐτοῦ αὐξάνουσι κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου· οὕτω δὲ μετὰ τρία ἔτη τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον ἐδιπλασιάσθη· πόσον ἦν τοῦτο; (14800 δρ.).

4. Ἔθετό τις τὴν περιουσίαν αὐτοῦ ὑπὸ τόκον πρὸς 4 % καὶ μετὰ δύο ἔτη ἀνέλαβε τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς, μετ' ἄλλους δὲ 7 μῆνας τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ μετ' ἄλλους 13 τὸ ὑπολειφθέν. Κατὰ τοὺς 44 τούτους μῆνας ἔλαβε τόκους τὸ ὅλον δρ. 24375. Πόση ἦν ἡ περιουσία; (200000 δρ.)

5. Διδάσκαλος διένειμε βραβεῖα εἰς 5 κλάσεις. Εἰς τὴν πρώτην ἔδωκε 4 ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τῶν ὅλων διανεμηθέντων βραβείων, εἰς τὴν δευτέραν 4 ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὑπολοίπου, εἰς τὴν τρίτην 4 ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὑπολοίπου μετὰ τὴν εἰς τὰς δύο πρώτας κλάσεις διανομήν, ὁμοίως καὶ εἰς τὴν τετάρτην 4 ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὑπολοίπου· εἰς δὲ τὴν πέμπτην κλάσιν διένειμε 10. Πόσα ἐν ὅλοις βραβεῖα διένειμε; (10).

6. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, οἵτινες ἐξίσου ὑπερέχουσι τοὺς 3, 5, 8, οἱ δὲ λόγοι ἑκάστου πρὸς τὸν ἀμέσως ἡγούμενον εἰσὶν ἴσοι.

Λαμβάνομεν ἄγνωστον τὴν διαφορὰν τῶν δεδομένων ἀπὸ τῶν ζητουμένων καὶ εὑρίσκομεν $χ=1$.

7. Ὀρθογωνίου ἡ βάσις εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους. Ἐὰν ἑκατέρα τῶν διαστάσεων αὐξηθῇ κατὰ 1 πῆχυν, τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει κατὰ 9 τετραγωνικοὺς πήχεις. Εὑρεῖν τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἡ μὲν εἶναι $2^{πήχ.}+\frac{2}{3}$, ἡ δὲ $5^{πήχ.}+\frac{1}{3}$.

8. Οὔσης μεσημβρίας, οἱ τρεῖς δεῖκται ὡρολογίου τινός, ὁ τῶν ὡρῶν, ὁ τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ ὁ τῶν δευτέρων, εἰσὶ συνηντημένοι ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 12. Μετὰ πόσον χρόνον ὁ τῶν δευτέρων λεπτῶν δείκτης διχοτομήσει τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων δεικτῶν; $(1' + \frac{13}{1427})$.

9. Εὑρεῖν ἀναλογίαν, ἧς οἱ ὅροι ὑπερέχουσιν ἐξίσου τέσσαρας δεδομένους ἀριθμούς α, β, γ, δ.

Ἡ διαφορὰ τῶν α, β, γ, δ ἀπὸ τῶν ἀντιστοιχούντων ὅρων τῆς ἀναλογίας εἶναι

$$\frac{αδ-βγ}{β+γ-α-δ}.$$

10. Ἐργάτης περαίνει ἔργον α ἐν χρόνῳ β· ἕτερος ἔργον γ ἐν χρόνῳ δ· τρίτος ἔργον ε ἐν χρόνῳ ζ. Ἐν πόσῳ χρόνῳ οἱ τρεῖς ὁμοῦ περαίνουσι τὸ ἔργον η;

$$χ=\frac{βδζη}{αδζ+βγζ+βδε}.$$

11. Ἐγγράψαι ὀρθογώνιον, οὗ ἡ περίμετρος π, ἐν τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις β, τὸ δὲ ὕψος γ.

Ἡ παράλληλος τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι

$$\frac{β(2γ-π)}{2(γ-β)}.$$

12. Τίς ἡ ἀκμὴ κύβου, οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν δεδομένου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗ αἱ διαστάσεις α, β, γ, ὃν ἔχει καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸ παραλληλεπίπεδον;

$$\chi=\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}.$$

13. Ταχυδρομικὴ ἅμαξα ἀνεχώρησεν ἀπό τινος πόλεως μετὰ ταχύτητος τ διευθυνομένη πρὸς ἄλλην τινὰ πόλιν· μετά τινα δὲ χρόνον ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως πρὸς τὸ αὐτὸ τέρμα ἑτέρα τοιαύτη, ἔχουσα ταχύτητα τ'· ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων χρόνος ὑπελογίσθη οὕτως, ὥστε αἱ ἅμαξαι νὰ φθάσωσι συγχρόνως εἰς τὸ τέρμα τοῦ δρόμου αὐτῶν. Ἡ πρώτη, ἀφοῦ διήνυσε τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὅλης ὁδοῦ, ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώσῃ κατὰ τὸ ἥμισυ τὴν ταχύτητα αὐτῆς· οὕτω δὲ συνέβη νὰ συναντηθῶσιν αἱ ἅμαξαι α στάδια πρὸ τοῦ τέρματος. Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων.

$$\chi=3\alpha\left(2-\frac{\tau}{\tau'}\right).$$

14. Ἀπαιτεῖται ἀριθμὸς ἀνδρῶν α ἢ γυναικῶν β πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς μ ἐν ἡμέραις ν. Πόσαι γυναῖκες πρέπει νὰ συνεργασθῶσι μετ' ἀνδρῶν α—π, ὅπως ἔργον μ+π περατωθῇ ἐν ἡμέραις ν—π.

$$\chi=\frac{\beta\pi(\alpha\nu+\alpha\mu+\mu\nu-\mu\pi)}{\alpha\mu(\nu-\pi)}.$$

15. Τραπεζίου τινὸς αἱ βάσεις εἰσὶν α καὶ β ($\alpha>\beta$), τὸ δὲ ὕψος γ. Εὑρεῖν τὸ ὕψος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου, ὅταν προεκβληθῶσι μέχρι συναντήσεως αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου.

$$\chi=\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\beta}.$$

16. Δύο ἀγγεῖα Α καὶ Β, ὧν αἱ χωρητικότητές εἰσι δ καὶ δ', εἶναι πεπληρωμένα κεκραμένου οἴνου. Ὁ λόγος τοῦ ὕδατος πρὸς τὸν οἶνον ἐν μὲν τῷ ἀγγείῳ Α εἶναι α : β, ἐν δὲ τῷ Β α' : β'. Πόσην χωρητικότητα πρέπει νὰ ἔχωσι δύο ἰσομεγέθη ἀγγεῖα, ἅπερ πληροῦντες ἑκάτερον ἀφ' ἑκατέρου τῶν Α καὶ Β καὶ ἐκκενοῦντες ἐναλλὰξ εἰς τὰ αὐτὰ Α καὶ Β, ἐξισοῦμεν τοὺς λόγους τοῦ ἐν αὐτοῖς ὕδατος καὶ οἴνου;

$$\chi=\frac{\delta\delta'}{\delta+\delta'}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ.

Ὁρισμοί.

§ 115. Καλεῖται *σύστημα ἐξισώσεων* τὸ σύνολον ἐξισώσεων, αἵτινες πρόκειται νὰ ἐπαληθευθῶσι διὰ τῶν αὐτῶν ἅπασαι τιμῶν τῶν ἀγνώστων. Αἱ τοιαῦται ἐξισώσεις λέγονται καὶ *ἐξισώσεις συνυπάρχουσαι*.

Σύστημα ἐκ δύο μόνων ἐξισώσεων λέγεται καὶ *ζεῦγος ἐξισώσεων*.

§ 116. Ἔστωσαν φ, χ, ψ,... οἱ ἄγνωστοι συστήματός τινος ἐξισώσεων. Ἐὰν ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἐπαληθεύηται διὰ τοῦ συστήματος τιμῶν $\varphi=\alpha$, $\chi=6$, $y=\gamma$,..., αἱ τιμαὶ αὗται καλοῦνται συλλήβδην *σύστημα τιμῶν* ἢ *λύσις* τοῦ συστήματος ἐκείνου ἐξισώσεων.

Π. χ. τὸ ἑξῆς σύστημα τριῶν ἐξισώσεων

$$8\chi+5y=4\omega^2+14$$
$$2\chi-4\omega^2=2y-40$$
$$8y^2-4\chi^2=2\omega^2+274$$

ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ συστήματος τιμῶν $\chi=5$, $y=7$, $\omega=3$.

Λύσις λοιπὸν συστήματός τινος ἐξισώσεων οὐδὲν ἄλλο ἐστὶ ἢ *κοιναὶ λύσεις* τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (§ 89).

Ὅταν οἱ ἄγνωστοι τοῦ συστήματος ἦναι δύο, λέγομεν καὶ *ζεῦγος τιμῶν*.

§ 117. Δύο συστήματα ἐξισώσεων, περιέχοντα τοὺς αὐτοὺς ἀγνώστους, καλοῦνται *ἰσοδύναμα*, ὅταν ἐπαληθεύωνται διὰ τῶν αὐτῶν ἀμοιβαίως συστημάτων τιμῶν.

Ἀρχαὶ ἐπὶ ἰσοδυνάμων συστημάτων.

§ 118. ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΑΡΧΗ. *Δύο συστήματα ἐξισώσεων εἶναι ἰσοδύναμα, ὅταν δυνάμεθα νὰ πορίζωμεν ἐκ τῶν ἰσοτήτων τοῦ* ἑνὸς συστήματος τὰς τοῦ ἑτέρου καὶ τἀνάπαλιν. Διότι τότε πᾶσαι αἱ τιμαὶ, αἱ καθιστῶσαι πραγματικὰς ἰσότητας τὰς ἐξισώσεις τοῦ ἑνὸς συστήματος, πρέπει νὰ καθιστῶσι τοιαύτας καὶ τὰς τοῦ ἑτέρου, αἵτινές εἰσι συνέπειαι τῶν πρώτων· ἐπομένως τὰ συστήματα εἰσὶν ἰσοδύναμα (§. 117).

Π. χ. τὸ σύστημα

(1) $A_1=B_1,\ A_2=B_2,\ A_3=B_3,\ A_4=B_4,\ A_5=B_5, \ldots$

καὶ τὸ (2) $A_1+A_2+A_3=B_1+B_2+B_3,\ A_2=B_2,\ A_3=B_3,\ A_4=B_4,\ A_5=B_5, \ldots$

εἰσὶν ἰσοδύναμα· διότι ἀπὸ τῶν τριῶν πρώτων ἰσοτήτων τοῦ συστήματος (1) πορίζόμεθα τὴν πρώτην τοῦ συστήματος (2), προσθέτοντες ἐκείνας (*)· ἀπὸ δὲ τῶν ἰσοτήτων τοῦ συστήματος (2) πορίζόμεθα τὴν πρώτην τοῦ συστήματος (1), ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς πρώτης τῶν τοῦ συστήματος (2) τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκολούθων.

§ 119. Ἐν τῇ γενικῇ ταύτῃ ἀρχῇ περιέχονται διάφοροι ἄλλαι μερικώτεραι, ἐξ ὧν ἀναφέρομεν τὰς ἑξῆς.

α'. Ἐν συστήματι οἱῳδήποτε δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν ἀντί τινων ἐξισώσεων ἑτέρας ἰσοδυνάμους.

β'. Ἐν συστήματι οἱῳδήποτε δυνάμεθα ἀντὶ δύο ἢ πλειόνων ἐξισώσεων ν' ἀντικαθιστῶμεν ἑτέρας ἐξισώσεις ἀποτελούσας σύστημα ἰσοδύναμον ταῖς ἀντικαθισταμέναις.

γ'. Ἐν συστήματι οἱῳδήποτε

(1) $A_1=B_1,\ A_2=B_2,\ A_3=B_3,\ A_4=B_4,\ A_5=B_5, \ldots$

δυνάμεθα νὰ λάβωμεν

$$(A_1+A_2+A_3+\ldots)-(A_\mu+A_{\mu+1}+A_{\mu+2}+\ldots\ldots)$$
$$=(B_1+B_2+B_3+\ldots\ldots)-(B_\mu+B_{\mu+1}+B_{\mu+2}+\ldots\ldots)\cdot$$

ἀντὶ μιᾶς τῶν προστεθεισῶν ἢ ἀφαιρεθεισῶν ἐξισώσεων.

δ'. Ὅταν μέλος ἐξισώσεώς τινος καὶ μέλος ἑτέρας ἐξισώσεως τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἦναι αἱ αὐταὶ παραστάσεις, δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν θατέρᾳ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν ἐκείνην, ἣν ἔχομεν ἐξισοῦντες τὰ ἕτερα μέλη αὐτῶν.

(*) Ὅταν προσθέτωμεν τὰ μέλη δύο ἢ πλειόνων ἐξισώσεων καὶ ἐξισῶμεν τἀθροίσματα, λέγομεν πρὸς συντομίαν ὅτι προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις· ὅταν δ' ἐξισῶμεν τὰς διαφορὰς τῶν μελῶν, λέγομεν ὅτι ἀφαιροῦμεν θατέραν τῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τῆς ἑτέρας. Παραπλησίαν ἔννοιαν ἔχουσιν αἱ ἐκφράσεις ἄθροισμα ἐξισώσεων, διαφορὰ ἐξισώσεων, κ.τ.λ.

Π. χ. ἀντὶ τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων

$$3\chi+5y=6\omega-4$$
$$6\chi+2y=6\omega-4,$$

ὧν τὰ δεύτερα μέλη εἰσὶν αἱ αὐταὶ παραστάσεις, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὴν $3\chi+5y=6\chi+2y$.

ε'. Δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν ἐν ἐξισώσει συστήματός τινος ἀντὶ γράμματος ἢ παραστάσεως οἱασδήποτε τὴν ἀξίαν τοῦ γράμματος ἢ τῆς παραστάσεως ταύτης, ἐξηγμένην ἔκ τινος ἄλλης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος.

Σαφηνίσωμεν τὴν πρότασιν ταύτην διὰ παραδειγμάτων.

Ἔστω τὸ ἑξῆς σύστημα

$$5\chi-3y^2=6y\omega$$
$$5\chi^3-2y\chi\omega=3y^3+2\omega$$
$$4\varphi\chi-2y\omega=18\varphi^2.$$

Ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς τὸν χ· ἐπιλύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς αὐτὸν τὸν ἄγνωστον, ἔχομεν

$$\chi=\frac{3y^2+6y\omega}{5}.$$

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ ἐν μιᾷ τῶν ἄλλων ἐξισώσεων, ἐν τῇ δευτέρᾳ φέρ' εἰπεῖν, ἔχομεν

$$5\left(\frac{3y^2+6y\omega}{5}\right)^3+2y\omega\left(\frac{3y^2+6y\omega}{5}\right)=3y^2+2\omega.$$

Κατὰ τὴν προκειμένην λοιπὸν πρότασιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τῆς δευτέρας τοῦ συστήματος.

Ἔστω ἔτι τὸ ζεῦγος ἐξισώσεων

$$5\sqrt{\chi^2-y}=8\chi y+\alpha\chi^2$$
$$\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{\chi^2-y}}=\alpha\sqrt{\chi^2-y}+\alpha\beta.$$

Ἐκ τῆς πρώτης συνάγομεν

$$\sqrt{\chi^2-y}=\frac{8\chi y+\alpha\chi^2}{5}.$$

τὴν τιμὴν δὲ ταύτην τοῦ $\sqrt{\chi^2-y}$ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἔχομεν τὴν

$$\frac{15\sqrt{y}}{8y\chi+\alpha\chi^2}=\frac{8\alpha\chi y+\alpha^2\chi^3}{5}+\alpha\beta,$$

ἣν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως.

§ 120. Ἵνα δύο συστήματα ὦσιν ἰσοδύναμα, δὲν ἀρκεῖ νὰ δυνάμεθα νὰ ποριζώμεθα ἀπὸ τοῦ ἑνὸς τὸ ἕτερον· πρέπει καὶ ἀντιστρόφως νὰ δυνάμεθα νὰ ἐπανερχώμεθα ἀπὸ τοῦ δευτέρου εἰς τὸ πρῶτον. Ἰδοὺ παραδείγματα.

α΄. Ἔστωσαν αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις

$$(1)\quad \begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \\ A_3 &= B_3 \\ A_4 &= B_4. \end{aligned}$$

Ἀφαιροῦντες ἑκάστην ἀπὸ τῆς ἀμέσως προηγουμένης καὶ τὴν πρώτην ἀπὸ τῆς τετάρτης, ἔχομεν

$$(2)\quad \begin{aligned} A_1-A_2 &= B_1-B_2 \\ A_2-A_3 &= B_2-B_3 \\ A_3-A_4 &= B_3-B_4 \\ A_4-A_1 &= B_4-B_1. \end{aligned}$$

Τὸ σύστημα (2) εἶναι συνέπεια τοῦ (1)· ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι συνέπεια τοῦ (2). Τῷ ὄντι· ἡ τελευταία τῶν ἐξισώσεων (2) εἶναι συνέπεια τῶν τριῶν πρώτων τοῦ αὐτοῦ συστήματος· διότι εὑρίσκεται προστιθεμένων τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν· δυνατὸν λοιπὸν νὰ παραλειφθῇ (*) ἐκ δὲ τῶν τριῶν πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (2) δὲν δυνάμεθα ν' ἀνεύρωμεν τὰς τέσσαρας ἐξισώσεις (1).

β΄. Ἔστωσαν αἱ δύο ἐξισώσεις

$$(3)\quad \begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \end{aligned}$$

(*) Ὅταν μία τῶν ἐξισώσεων συστήματός τινος ἦναι συνέπεια ἄλλων τοῦ αὐτοῦ συστήματος, δύναται νὰ παραλειφθῇ· διότι πᾶσα λύσις τοῦ ἐκ τῶν λοιπῶν ἐξισώσεων συστήματος ἐπαληθεύει καὶ τὴν συνέπειαν αὐτῶν.

Ὑψώσωμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας εἰς τὴν μ^{ην} δύναμιν καὶ ἀπὸ τῆς προκυπτούσης ἀφέλωμεν τὴν πρώτην· ἔχομεν οὕτω

$$A_2^\mu - A_1 = B_2^\mu - B_1.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται μὲν νὰ ληφθῇ ἀντὶ τῆς $A_2 = B_2$, οὐχὶ δὲ καὶ ἀντὶ τῆς $A_1 = B_1$· διότι ἐκ μὲν τοῦ ζεύγους

$$A_2 = B_2$$
$$A^\mu{}_2 - A_1 = B^\mu{}_2 - B_1$$

πορίζόμεθα τὴν $A_1 = B_1$· ἑπομένως τὸ ζεῦγος τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον τῷ (3)· ἐκ δὲ τοῦ ζεύγους

$$(4) \quad \begin{array}{c} A_1 = B_1 \\ A^\mu{}_2 - A_1 = B^\mu{}_2 - B_1 \end{array}$$

πορίζόμεθα τὴν $A^\mu{}_2 = B^\mu{}_2$, ἥτις δὲν συνεπάγεται ἀναγκαίως τὴν $A_2 = B_2$ (§ 93, Σημ. Γ'.)· ἑπομένως τὸ ζεῦγος (4) δυνατὸν νὰ μὴ ἦναι ἰσοδύναμον τῷ (3).

γ'. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (3) μέλος ἐπὶ μέλος, ἔχομεν τὴν (6) $A_1 A_2 = B_1 B_2$, ἥτις δὲν δύναται πάντοτε νὰ ληφθῇ ἀντὶ μιᾶς τῶν (3)· π. χ. αἱ τιμαί, αἱ μηδενίζουσαι τὰ μέλη τῆς ἑτέρας τῶν (3), ἐὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται, μὴ ἐπαληθεύουσαι δὲ τὴν ἑτέραν, ἐπαληθεύουσιν ἐν τούτοις τὴν (6), ὡς μηδενίζουσαι καὶ ταύτης τὰ μέλη.

Περὶ ἀπαλοιφῆς.

§ 121. Διὰ τῶν προεκτεθεισῶν ἀρχῶν δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν ἐν συστήματι ἐξισώσεων ἀντὶ μιᾶς ἢ πλειόνων ἐξ αὐτῶν ἑτέρας, μὴ περιεχούσας ἕνα ἢ πλείονας τῶν ἐν ἐκείναις ἀγνώστων.

Π. χ. ἐν τῷ παραδείγματι τῷ ἐν τῇ δ'. τῶν ἐν § 119 προτάσεων, ἡ ἐξίσωσις, ἣν δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῆς ἑτέρας τῶν προτεθεισῶν, δὲν περιέχει τὸν ἄγνωστον ω. Ἐπίσης καὶ ἐν τῷ α'. τῶν ἐν τῇ ε'. προτάσει παραδειγμάτων ἡ ἐξίσωσις, ἣν δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τῇ δευτέρᾳ τοῦ συστήματος αὐτοῦ, δὲν περιέχει τὸν ἄγνωστον χ.

Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἀπό τινων ἐξισώσεων συστήματός τινος συνάγομεν ἐξίσωσιν, μὴ περιέχουσαν ἕνα ἢ πλείονας τῶν ἐν ἐκείναις ἀγνώστων, ἣν δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν ἀντὶ μιᾶς ἐκείνων, καλεῖται *ἀπαλοιφὴ* (τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων, τῶν μὴ ὑπαρχόντων ἐν τῇ τελευταίᾳ ἐξισώσει).

Ὁ συνηθέστερος τρόπος ἀπαλοιφῆς εἶναι ὁ λεγόμενος *δι' ἀντικαταστάσεως*· γίνεται δὲ ὡς ἑξῆς. Ἀπὸ μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ συστήματος πορίζόμεθα τὴν τιμὴν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου, ἥτις εἶναι παράστασις περιέχουσα πάντας τοὺς λοιποὺς τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἀγνώστους, καὶ ἀντικαθιστῶμεν αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου αὐτοῦ ἐν μιᾷ τῶν ἄλλων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος. Οὕτως ἐγένετο ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ χ ἐν τῷ προανενεχθέντι παραδείγματι (§ 119, ε'.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΤ' ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΙΣΑΡΙΘΜΩΝ ΤΑΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΣΙ.

Προκαταρκτικά.

α'. Σχῆμα, εἰς ὃ ἀνάγεται πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ α'. βαθμοῦ, περιέχουσα πολλοὺς ἀγνώστους.

§ 122. Πᾶσα πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μετὰ πολλῶν ἀγνώστων ψ, φ, χ,... δύναται ν' ἀνάγηται εἰς ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν ἔχουσαν σχῆμα τοιόνδε

$$(1)\quad Аψ + Вφ + Γχ + \ldots\ldots = К,$$

Α, Β, Γ,... Κ ὄντων γνωστῶν καὶ μὴ ἐχόντων παρονομαστάς.

Πρὸς τοῦτο ἐξαφανίζομεν τοὺς παρονομαστάς, ἐκτελοῦμεν πάσας τὰς πράξεις, ὥστε τὰ μέλη νὰ ἦναι πολυώνυμα ἀκέραια ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, μεταφέρομεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος πάντας τοὺς περιέχοντας ἄγνωστον ὅρους, τοὺς δὲ λοιποὺς εἰς τὸ δεύτερον καὶ ἀνάγομεν εἰς ἕνα μόνον ὅρον τοὺς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον περιέχοντας ὅρους τοῦ πρώτου μέλους, ὡς γίνεται τοῦτο καὶ ὅταν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{3-\chi}{4}+\frac{5\chi-3y}{5}=\frac{7y-\omega}{2}+3\omega+7.$$

Ἐξαφανιζομένων τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκομεν

$$15-5\chi+20\chi-12y=70y-10\omega+60\omega+140\cdot$$

μεταθέσει δὲ τῶν μὲν ἀγνώστων εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τῶν δὲ γνωστῶν εἰς τὸ δεύτερον,

$$-5\chi+20\chi-12y-70y+10\omega-60\omega=140-15\cdot$$

ἀναγωγῇ δὲ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἄγνωστον ὅρων καὶ ἐκτελέσει τῶν ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν πράξεων,

$$-15\chi-82y-50\omega=125.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει τὸ σχῆμα (1).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐάν, ἐργαζόμενοι ὅπως ἀναγάγωμεν ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον εἰς τὸ σχῆμα (1), εὑρίσκωμεν ταυτότητα ἢ ἄτοπον ἰσότητα, πρέπει νὰ συμπεραίνωμεν ὅτι ἡ ἰσότης ἐκείνη δὲν εἶναι ἐξίσωσις, ἀλλὰ ταυτότης ἢ ἄτοπος ἰσότης.

ϐ'. *Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $Ay+B\varphi+\Gamma\chi+...=K$.*

§ 123. *Πᾶσα πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μετὰ δύο ἢ πλειόνων ἀγνώστων, οἵα ἡ ἑξῆς*

$$(1)\quad Ay+B\varphi+\Gamma\chi+...=K,$$

εἶναι ἐπιδεκτικὴ ἀπείρων λύσεων.

Ποιοῦντες κατ' ἀρέσκειαν ἐν τῇ ἐξισώσει (1) $\varphi=\beta$, $\chi=\gamma$, ..., β, γ, ... ὄντων γνωστῶν οἱωνδήποτε, ἔχομεν

$$Ay+B\beta+\Gamma\gamma+...=K\cdot$$

ἐξ ἧς $y=\dfrac{K-B\beta+\Gamma\gamma-...}{A}\cdot$ ἔχομεν οὕτω τὴν ἑξῆς λύσιν τῆς (1)

$$y=\frac{K-B\beta-\Gamma\gamma-...}{K},\ \varphi=\beta,\ \chi=\gamma,....$$

Δίδοντες ἤδη ἄλλας τιμὰς κατ' ἀρέσκειαν εἰς τοὺς ἀγνώστους φ, χ, ... καὶ πορίζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ y, εὑρίσκομεν καὶ δευτέραν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1). Δυνάμεθα οὕτω νὰ εὕρωμεν ὅσας θέλομεν λύσεις τῆς (1)· ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν αὕτη εἶναι ἐπιδεκτικὴ ἀπείρων λύσεων.

Ἐπίλυσις ἁπλῶν συστημάτων ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων μετ' ἰσαρίθμων ταῖς ἐξισώσεσιν ἀγνώστων.

§ **124.** Σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἐν ᾧ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων εἶναι ἴσος τῷ τῶν ἐξισώσεων, καλοῦμεν *ἁπλοῦν*, ὅταν μία τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ περιέχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον, ἄλλη τις τὸν ἐν τῇ προηγουμένῃ καὶ ἕνα μόνον ἄλλον ἄγνωστον, ἄλλη τις τοὺς ἐν ταῖς προηγουμέναις δύο καὶ ἕνα μόνον ἄλλον ἄγνωστον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων μετὰ τεσσάρων ἀγνώστων

$$5\chi=6$$
$$4\chi+2y=9$$
$$3\chi-2y+5\omega=15$$
$$7\chi-y-2\omega+3\varphi=10.$$

Εἰς τὰ τοιαῦτα συστήματα δυνατὸν ἐξίσωσίς τις νὰ μὴ περιέχῃ πάντας τοὺς ἐν ταῖς προηγούμεναις ἐξισώσεσιν ἀγνώστους, ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ *ἕνα μόνον νέον ἄγνωστον*. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς·

$$3\chi=5$$
$$5y=12$$
$$4\chi+7\varphi=43.$$

§ **125.** Ἡ ἐπίλυσις τῶν τοιούτων συστημάτων, ἤγουν ἡ εὕρεσις τῶν λύσεων αὐτῶν, γίνεται κατὰ τὸν ἑξῆς ἁπλούστατον τρόπον. Ἔστω τὸ πρῶτον τῶν ἀνωτέρω

$$5\chi=6$$
$$4\chi+2y=9$$
$$3\chi-2y+5\omega=15$$
$$7\chi-y-2\omega+3\varphi=10.$$

Ἐπιλύοντες τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, ἥτις ἔχει ἕνα μόνον ἄγνωστον, εὑρίσκομεν $\chi=\frac{6}{5}$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει καὶ ἐπιλύοντες τὴν προκύπτουσαν, ἥτις ἔξει μόνον τὸν ἄγνωστον y, εὑρίσκομεν $y=\frac{21}{10}$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ τοῦ y ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει καὶ ἐπιλύοντες τὴν προκύπτουσαν μετὰ μόνου τοῦ ἀγνώστου ω, εὑρίσκομεν $\omega=\frac{78}{25}$. Τέλος ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τοῦ χ, τοῦ y καὶ τοῦ ω ἐν τῇ τετάρτῃ ἐξισώσει καὶ ἐπιλύοντες τὴν προκύπτουσαν μετὰ μόνου τοῦ ἀγνώστου φ, εὑρίσκομεν $\varphi=\frac{497}{150}$. Φανερὸν ἐκ τῶν γενομένων πράξεων ὅτι τὸ σύστημα τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν ἐπαληθεύει πάσας τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις. Εἶναι δὲ καὶ ἡ μόνη λύσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ· διότι ἄλλη τιμὴ τοῦ χ δὲν δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ τὴν πρώτην ἐξίσωσιν· ἑπομένως οὔτε ἄλλη τις τιμὴ τοῦ y δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν ἐξίσωσιν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐπιλύεται πᾶν ἁπλοῦν σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων· ἡ γενικότης τοῦ τρόπου αὐτοῦ εἶναι καταφανής.

Ἐπίσης φανερὰ εἶναι ἡ γενικότης τῆς ἐπὶ τοῦ ληφθέντος παραδείγματος γενομένης παρατηρήσεως ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη λύσις· ἤγουν *πᾶν ἁπλοῦν σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων μίαν μόνην ἔχει λύσιν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Θέλομεν ἰδεῖ ἐν τοῖς ἑξῆς ὅτι ἡ τελευταία πρότασις ἐκτείνεται εἰς *οἱονδήποτε σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ταῖς ἐξισώσεσιν ἀγνώστων.*

Ἐπίλυσις συστημάτων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ταῖς ἐξισώσεσιν ἀγνώστων, περιεχομένων πάντων ἐν ἑκάστῃ τῶν ἐξισώσεων.

α. Ἐπίλυσις δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων.

§ 126. Μέθοδος δι' ἀντικαταστάσεως. Ἔστω τὸ ζεῦγος ἐξισώσεων

$$(1) \qquad \begin{aligned} 3y-7\chi&=4 \\ 2y+5\chi&=2 \end{aligned}.$$

Ἐκ τῆς πρώτης συνάγομεν

$$(2) \qquad y=\frac{4+7\chi}{3}\,;$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y, ἔχομεν τὴν

$$(3) \quad 2\times\left(\frac{4+7\chi}{3}\right)+5\chi=2,$$

ἥτις δὲν περιέχει τὸν y καὶ δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ τῆς ἑτέρας τῶν προτεθεισῶν (*)· οὕτω τὸ προτεθὲν ζεῦγος ἰσοδυναμεῖ τῷ ἁπλῷ, ὅπερ ἔχομεν λαμβάνοντες μίαν τῶν προτεθεισῶν καὶ τὴν (3). Ἐκ τῆς (3) εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{2}{29}$· ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν προτεθεισῶν, ἢ ἐν τῷ β'. μέλει τῆς (2), εὑρίσκομεν $y=\frac{34}{29}$. Τὸ προτεθὲν λοιπὸν ζεῦγος ἐπαληθεύεται διὰ τῆς λύσεως $\chi=-\frac{2}{29}$ καὶ $y=\frac{34}{29}$, καὶ διὰ μόνης τῆς λύσεως ταύτης, ἅτε ἰσοδυναμοῦν ἁπλῷ συστήματι.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν τοῦ y τιμὴν ἀπ' εὐθείας, ὡς εὕρομεν τὴν τοῦ χ, ἀπαλείφοντες τὸν χ. Πρὸς τοῦτο ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως πορίζόμεθα $\chi=\frac{3y-4}{7}$, ἀντεισάγοντες δ' ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἔχομεν

$$2y+5\times\left(\frac{3y-4}{7}\right)=2,$$

ἐξ ἧς $y=\frac{34}{29}$.

Ἐπειδὴ ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ἀγνώστου γίνεται δι' ἀντικαταστάσεως, ἡ μέθοδος αὕτη ἐπιλύσεως καλεῖται *μέθοδος δι' ἀντικαταστάσεως*.

§ 127. Ἡ ἀπαλοιφὴ δυνατὸν νὰ γίνῃ καὶ κατ' ἄλλους δύο τρόπους· ἐξ οὗ προκύπτουσι δύο ἄλλαι μέθοδοι ἐπιλύσεως, αἱ ἑξῆς.

(*) Ἡ (3) δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ οὐ μόνον τὴν δευτέραν (§ 119, ε'.) ἀλλὰ καὶ τὴν πρώτην τῶν (1)· διότι ἐκ τῆς δευτέρας τῶν προτεθεισῶν καὶ τῆς (3) δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν τὴν πρώτην ὡς ἑξῆς. Ἐκ τῆς δευτέρας ἔχομεν $y=\frac{2-5\chi}{2}$, ἐκ τῆς (3) δὲ $\frac{4+7\chi}{3}=\frac{2-5\chi}{2}$· ἄρα $y=\frac{4+7\chi}{3}$, εἴτε $3y-7\chi=4$ (§ 119, ε'.).

Μέθοδος δι' ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστήν. Ἵνα ἀπαλείψωμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων, πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν πρώτην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὸν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει συντελεστὴν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου, ταύτην δὲ ἐπὶ τὸν ἐν τῇ πρώτει ἐξισώσει συντελεστὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου· ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν τὴν μίαν τῶν εὑρισκομένων ἐξισώσεων ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἢ προσθέτομεν αὐτάς, καθόσον οἱ τὸν ἀπαλειπτέον ἄγνωστον ἔχοντες ὅροι εἰσὶν ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

Ἀπαλείψωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸν y τοῦ ἀνωτέρω ζεύγους (1). Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ 2, συντελεστὴν τοῦ ἀπαλειπτέου y ἐν τῇ δευτέρᾳ, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ 3, συντελεστὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου ἐν τῇ πρώτῃ· οὕτως εὑρίσκομεν

$$(4)\quad \begin{aligned} 6y-14\chi&=8 \\ 6y+15\chi&=6. \end{aligned}$$

Ἀφαιροῦντες θατέραν τούτων ἀπὸ τῆς ἑτέρας, οἷον τὴν δευτέραν ἀπὸ τῆς πρώτης, εὑρίσκομεν τὴν

$$(5)\quad -29\chi=2,$$

ἥτις δὲν περιέχει τὸν y.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ τῆς ἑτέρας τῶν (1)· διότι τὸ ζεῦγος (1) εἶναι (§ 119, α'.) ἰσοδύναμον τῷ (4), ἀντὶ μιᾶς δὲ τούτων δυνάμεθα (§ 119, γ'.) νὰ λάβωμεν τὴν (5), ἀντὶ δὲ τῆς διατηρουμένης τῶν (4) τὴν ἰσοδύναμον τοῦ ζεύγους (1).

Ἔχομεν οὕτω ζεῦγος ἁπλοῦν ἰσοδύναμον τῷ προτεθέντι. Ἐκ τῆς (5) εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{2}{29}$· τὴν τιμὴν ταύτην ἀντεισάγοντες ἐν μιᾷ τῶν (1), εὑρίσκομεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ y.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπ' εὐθείας καὶ τὴν τιμὴν τοῦ y, ἀπαλείφοντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸν χ. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ (5), τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ 7, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} 15y-35\chi&=20 \\ 14y+35\chi&=14· \end{aligned}$$

ἤδη προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτάς, ἵνα ἔχωμεν ἐξίσωσιν μὴ περιέχουσαν τὸν χ, ἑτεροσήμων ὄντων τῶν ὅρων -35χ καὶ $+35\chi$ οὕτως εὑρίσκομεν $29y=34$· ὅθεν $y=\frac{34}{29}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου δὲν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ ἄγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστὴν καὶ *πολλαπλασιάζοντες ἑκατέραν τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου διὰ τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει συντελεστοῦ τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου.* Ἔχομεν οὕτως ἐξισώσεις ἁπλουστέρας ἐκείνων, ἃς εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἑκατέραν ἐπὶ τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ συντελεστὴν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου. Ἔστωσαν, π. χ., αἱ ἐξισώσεις

$$18\chi+5y=8$$
$$30\chi-13y=12.$$

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν 18 καὶ 30 εἶναι 90· πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὴν μὲν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 90 διὰ 18, ἤτοι ἐπὶ 5, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 90 διὰ 30, ἤτοι ἐπὶ 3· οὕτως εὑρίσκομεν

$$90\chi+25y=40$$
$$90\chi-39y=36.$$

ὅθεν ἀφαιρέσει τῆς δευτέρας τούτων ἀπὸ τῆς πρώτης

$$64y=4\cdot$$

ὅθεν $y=\frac{1}{16}$· ἐντεῦθεν $\chi=\frac{41}{96}$.

§ 128. Μέθοδος διὰ συγκρίσεως. Ἵνα ἀπαλείψωμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων, πορίζόμεθα ἐξ ἑκατέρας τῶν ἐξισώσεων τὴν τιμὴν αὐτοῦ, τοῦ ἑτέρου ἀγνώστου ὑποτιθεμένου ὡς γνωστοῦ, καὶ ἐξισοῦμεν τὰς δύο τιμάς.

Ἔστω πάλιν τὸ ζεῦγος

$$(1)\quad \begin{aligned} 3y-7\chi&=4\\ 2y+5\chi&=2. \end{aligned}$$

Ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔχομεν

$$(6)\quad y=\frac{4+7\chi}{3},$$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$(7)\quad y=\frac{2-5\chi}{2}.$$

ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη τῶν (6) καὶ (7), ἔχομεν τὴν

$$(8)\quad \frac{4+7\chi}{3}=\frac{2-5\chi}{2},$$

ἥτις δὲν περιέχει τὸν y.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ μιᾶς τῶν (6) καὶ (7), εἴτε τῶν (1). Ἔχομεν οὕτω πάλιν ζεῦγος ἁπλοῦν ἰσοδύναμον τῷ προτεθέντι· ὅθεν ἐπιλύοντες τὴν (8), εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ· ἀντεισάγοντες δ' αὐτὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν (1) καὶ ἐπιλύοντες τὴν προκύπτουσαν, ἔχομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ y.

β'. *Ἐπίλυσις τριῶν ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων.*

§ 129. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$(\Sigma)\quad \begin{aligned} 5\chi-3y+2\omega&=20\\ 4\chi-2y+4\omega&=15\\ 7\chi+6y+8\omega&=38. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς πρώτης συνάγομεν

$$(T)\quad \chi=\frac{20+3y-2\omega}{5}.$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου αὐτοῦ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἄλλων ἐξισώσεων, ἔχομεν τὰς ἑξῆς

$$4\times\left(\frac{20+3y-2\omega}{5}\right)-2y+4\omega=15$$

$$7\times\left(\frac{20+3y-2\omega}{5}\right)+6y+8\omega=38,$$

αἵτινες ἀνάγονται εἰς τὰς

$$(Z)\quad \begin{aligned} (1)\quad 2y+12\omega&=-5\\ (2)\quad 51y+26\omega&=50. \end{aligned}$$

Ἀπαλείψωμεν πάλιν ἐκ τῶν (Z) ἕνα ἄγνωστον, οἷον τὸν y· πρὸς τοῦτο ἐκ μὲν τῆς (1) συνάγομεν

$$(T') \quad y=\frac{-5-12\omega}{2},$$

ἀντικαθιστῶντες δ' ἐν τῇ (2), ἔχομεν

$$(3) \quad 51\times\left(\frac{-5-12\omega}{2}\right)+26\omega=50.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (Z) ἡ (1) δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ τῆς πρώτης ἢ τῆς δευτέρας τῶν (Σ), ἡ δὲ (2) ἀντὶ τῆς δευτέρας ἢ τῆς τρίτης τῶν (Σ)· ἄρα αἱ (Z) δύνανται νὰ ληφθῶσιν ἀντὶ δύο οἱωνδήποτε τοῦ συστήματος (Σ)· ἀλλ' ἀντὶ τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων (Z) δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν (3)· ἄρα τέλος τὸ σύστημα (Σ) ἰσοδυναμεῖ πᾶσι τοῖς ἁπλοῖς συστήμασιν, ἅπερ ἔχομεν λαμβάνοντες μίαν τῶν ἐξισώσεων (Σ), μίαν τῶν (Z) καὶ τὴν (3).

Ἵνα λοιπὸν ἔχωμεν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος (Σ), ἐπιλύομεν ἓν τῶν ἁπλῶν τούτων συστημάτων, τῶν ἰσοδυνάμων τῷ (Σ). Ἤγουν ἐπιλύομεν τὴν (3) καὶ εὑρίσκομεν $\omega=-\frac{71}{112}$· ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην ἐν θατέρᾳ τῶν (Z) καὶ ἐπιλύοντες τὴν προκύπτουσαν μετὰ τοῦ y, εὑρίσκομεν $y=\frac{73}{56}$· τέλος ἀντικαθιστῶμεν ἐν μιᾷ τῶν (Σ) τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν ἀγνώστων ω καὶ y, καὶ ἐπιλύοντες τὴν προκύπτουσαν μετὰ τοῦ χ, εὑρίσκομεν $\chi=\frac{141}{28}$. Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ συστήματος (Σ) εἶναι

$$\omega=-\frac{71}{112},\ y=\frac{73}{56},\ \chi=\frac{141}{28}.$$

μόνην δὲ ταύτην τὴν λύσιν ἔχει, ὡς ἰσοδύναμον ἁπλῷ συστήματι.

Τὰς ἀντεισαγωγὰς τῶν διαδοχικῶς εὑρισκομένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων πρὸς εὕρεσιν τιμῆς ἄλλου ἀγνώστου δυνάμεθα νὰ ποιῶμεν καὶ ἐν τοῖς δευτέροις μέλεσι τῶν (T') καὶ (T).

Ἐν γένει *ἵνα ἐπιλύσωμεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μετὰ* τριῶν ἀγνώστων, πορίζόμεθα δι' ἀπαλοιφῶν ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν δύο ἐξισώσεις μετὰ δύο ἀγνώστων, ἐκ τούτων δὲ πάλιν μίαν μεθ' ἑνός· εἶτα δ' ἐπιλύομεν τὸ ἁπλοῦν σύστημα, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, τῆς ἑτέρας τῶν δύο μετὰ δύο ἀγνώστων καὶ μιᾶς τῶν προτεθεισῶν.

Ἑκάστην τῶν ἀπαλοιφῶν δυνάμεθα νὰ ἐκτελῶμεν οὐ μόνον δι' ἀντικαταστάσεως, ἀλλὰ καὶ δι' ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστὴν ἢ διὰ συγκρίσεως. Ἀκολουθοῦμεν δ' εἰς τὰς ἀπαλοιφὰς τῶν ἀγνώστων καὶ τὸν συνδυασμὸν τῶν ἐξισώσεων πρὸς ἀπαλοιφὴν τάξιν τοιαύτην, ὥστε αἱ ἐργασίαι νὰ ἦναι ὅσον οἷόν τε ἁπλούστεραι.

Ἐν τοῖς ἑξῆς δύο παραδείγμασι ποιοῦμεν τὰς ἀπαλοιφὰς ἐν μὲν τῷ πρώτῳ δι' ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστήν, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ διὰ συγκρίσεως.

$$\text{Α}'.\quad \begin{aligned} 5\chi-3y+2\omega&=10\\ 2\chi+4y-5\omega&=14\\ -3\chi+2y-3\omega&=-64. \end{aligned}$$

Ἀπαλείφομεν ἐν πρώτοις τὸν χ. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἑκατέραν τῶν δύο πρώτων ἐπὶ τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ συντελεστὴν τοῦ χ καὶ ἀφαιροῦμεν τὴν ἑτέραν τῶν προκυπτουσῶν ἀπὸ τῆς ἑτέρας· ἐπίσης συνδυάζοντες τὴν δευτέραν μετὰ τῆς τρίτης, ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἑκατέραν ἐπὶ τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ συντελεστὴν τοῦ χ, προσθέτομεν ἤδη τὰς προκυπτούσας, ἑτεροσήμων ὄντων τῶν περιεχόντων τὸν χ ὅρων· οὕτως εὑρίσκομεν

$$(1)\quad \begin{aligned} -26y+29\omega&=-50\\ 16y-21\omega&=-86. \end{aligned}$$

Ἀπαλείφομεν ἐκ τῶν δύο τούτων τὸν y, πολλαπλασιάζοντες τὴν μὲν πρώτην ἐπὶ 8, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ 13 (§ 127, Σημ.) καὶ προσθέτοντες τὰς προκυπτούσας· οὕτως εὑρίσκομεν

$$-41\omega=-1518.$$

Ἐκ ταύτης συνάγομεν $\omega=\dfrac{1518}{41}$. Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην ἐν μιᾷ τῶν (1), κατὰ προτίμησιν δ' ἐν τῇ δευτέρᾳ, εὑρίσκομεν $y=\dfrac{1772}{41}$. Ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ τοῦ y ἐν μιᾷ τῶν προτεθεισῶν, κατὰ προτίμησιν δ' ἐν τῇ πρώτῃ, εὑρίσ

$\chi=\frac{518}{41}$. Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ προτεθέντος συστήματος

$\omega=\frac{1518}{41}$, $y=\frac{1772}{41}$, $\chi=\frac{538}{41}$.

$$\text{Β'.}\quad \begin{aligned} 2\chi-2y+5\omega&=21\\ 4\chi+4y-7\omega&=25\\ 3\chi-5y+2\omega&=14. \end{aligned}$$

Ἐξ ἑκάστης αὐτῶν συνάγομεν

$$(T)\quad \begin{aligned} \chi&=\frac{21+2y-5\omega}{2}.\\ \chi&=\frac{25-4y+7\omega}{4}.\\ \chi&=\frac{14+5y-2\omega}{3}. \end{aligned}$$

Ἐξισοῦντες τὴν πρώτην τῶν τιμῶν αὐτῶν τοῦ χ μεθ' ἑκατέρας δύο ἄλλων, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{21+2y-5\omega}{2}=\frac{25-4y+7\omega}{4}$$

$$\frac{21+2y-5\omega}{2}=\frac{14+5y-2\omega}{3},$$

αἵτινες ἀνάγονται εἰς τὰς

$$(1)\quad \begin{aligned} 8y-17\omega&=-17\\ 4y+11\omega&=35. \end{aligned}$$

Ἐξ ἑκατέρας τούτων ἔχομεν

$$(T')\quad \begin{aligned} y&=\frac{17\omega-17}{8}\\ y&=\frac{-11\omega+35}{4}. \end{aligned}$$

ὅθεν, ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη,

$$\frac{17\omega-17}{8}=\frac{-11\omega+35}{4},$$

Ἐπιλύοντες αὐτὴν, εὑρίσκομεν $\omega=\frac{29}{13}$. Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ω ἐν μιᾷ τῶν (1), ἢ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει μιᾶς τῶν (T′), εὑρίσκομεν $y=\frac{34}{13}$. Ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ τοῦ y ἐν μιᾷ τῶν προτεθεισῶν, ἢ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει μιᾶς τῶν (T), εὑρίσκομεν $\chi=\frac{98}{13}$. Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ προτεθέντος συστήματος εἶναι

$$\omega=\frac{29}{13},\ y=\frac{34}{13},\ \chi=\frac{98}{13}.$$

γ′. *Ἐπίλυσις ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ταῖς ἐξισώσεσιν ἀγνώστων.*

§ 130. Ὁ ἐκτεθεὶς τρόπος ἐπιλύσεως τριῶν ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων ἐφαρμόζεται εἰς σύστημα ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων, ὅταν ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων περιέχῃ πάντας τοὺς ἀγνώστους τοῦ συστήματος.

Ἐὰν, π. χ., ἔχωμεν σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων μετὰ τεσσάρων ἀγνώστων, πορίζόμεθα πρῶτον ἀπὸ τῶν δεδομένων ἐξισώσεων τρεῖς νέας μετὰ τριῶν ἀγνώστων, ἀπαλείφοντες τὸν αὐτὸν ἄγνωστον ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ προτεθέντος συστήματος συνδυαζομένης μεθ' ἑκάστης τῶν λοιπῶν· εἶτα ἀπὸ τῶν τελευταίων τριῶν ἐξισώσεων πορίζόμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύο νέας ἐξισώσεις μετὰ δύο ἀγνώστων, καὶ ἀπὸ τούτων πάλιν μίαν μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου. Εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου τῆς τελευταίας ἐξισώσεως· ἀντεισάγοντες αὐτὴν εἰς τὴν ἑτέραν τῶν δύο μετὰ δύο ἀγνώστων, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου ἀγνώστου· ἀντεισάγοντες τὰς εὑρεθείσας δύο τιμὰς εἰς μίαν ἐκ τῶν τριῶν μετὰ τριῶν ἀγνώστων, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν καὶ τοῦ τρίτου ἀγνώστου· τέλος ἀντεισάγοντες τὰς εὑρεθείσας τρεῖς τιμὰς εἰς μίαν ἐκ τῶν προτεθεισῶν, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν καὶ τοῦ ὑπολειπομένου τετάρτου ἀγνώστου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$$(1)\quad \begin{aligned} \varphi+2\chi+3\psi+4\omega&=30\\ 2\varphi-3\chi+5\psi-2\omega&=3\\ 3\varphi+4\chi-2\psi-\omega&=1\\ 4\varphi-\chi+6\psi-3\omega&=8. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν

$$(\text{Τ})\quad φ=30-2χ-3ψ-4ω\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες δ' ἐν ἑκάστῃ τῶν λοιπῶν, εὑρίσκομεν

$$(2)\quad \begin{aligned} 7χ+\ \ ψ+10ω&=\ 57\\ 2χ+11ψ+13ω&=\ 89\\ 9χ+\ 6ψ+19ω&=112. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς πρώτης τούτων ἔχομεν

$$(\text{Τ}')\quad ψ=57-7χ-10ω\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες δ' ἐν ἑκατέρᾳ τῶν λοιπῶν, εὑρίσκομεν

$$(3)\quad \begin{aligned} 75χ+97ω&=538\\ 33χ+41ω&=230. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας τούτων ἔχομεν

$$(\text{Τ}'')\quad χ=\frac{230-41ω}{33}\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες δ' ἐν τῇ πρώτῃ, εὑρίσκομεν

$$(4)\quad 126ω=504.$$

Τὸ προτεθὲν σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ ἁπλῷ συστήματι ἀποτελουμένῳ ἐκ μιᾶς τῶν (1), μιᾶς τῶν (2), μιᾶς τῶν (3) καὶ τῆς (4). Ἐκ τῆς (4) ἔχομεν $ω=4$· ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην ἐν μιᾷ τῶν (3) ἢ ἐν τῷ β'. μέλει τῆς (Τ''), εὑρίσκομεν $χ=2$· ἀντικαταστάσει τῶν δύο τούτων τιμῶν ἐν μιᾷ τῶν (2), ἢ ἐν τῷ β'. μέλει τῆς (Τ'), εὑρίσκομεν $ψ=3$· τέλος ἀντικαταστάσει τῶν τριῶν τούτων τιμῶν ἐν μιᾷ τῶν (1), ἢ ἐν τῷ β'. μέλει τῆς (Τ), εὑρίσκομεν $φ=1$.

ΓΕΝΙΚΟΣ ΚΑΝΩΝ. *Ἵνα ἐπιλύσωμεν σύστημα ἐκ μ ἐξισώσεων μετὰ μ ἀγνώστων, πορίζόμεθα δι' ἀπαλοιφῶν τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου ἑτέρας μ—1 ἐξισώσεις μετὰ μ—1 ἀγνώστων, ἀπὸ τούτων πάλιν πορίζόμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μ—2 ἐξισώσεις μετὰ μ—2 ἀγνώστων, ἀπὸ τούτων πάλιν μ—3 ἐξισώσεις μετὰ μ—3 ἀγνώστων, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου. Τὸ προτεθὲν σύστημα ἔσται τότε ἰσοδύναμον ἁπλῷ συστήματι, ἀποτελουμένῳ ἐκ τῆς* τελευταίας ἐξισώσεως, τῆς ἑτέρας τῶν δύο μετὰ δύο ἀγνώστων, μιᾶς τῶν τριῶν μετὰ τριῶν ἀγνώστων, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι μιᾶς τῶν προτεθεισῶν. Ἐπιλύοντες ἓν τῶν ἁπλῶν αὐτῶν συστημάτων, ἔχομεν τὴν λύσιν καὶ τοῦ προτεθέντος συστήματος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνάμεθα νὰ συνδυάζωμεν τὰς ἐξισώσεις πρὸς ἀπαλοιφὴν τῶν ἀγνώστων οὐ μόνον κατὰ τὴν ἐν τῷ ἀνωτέρω κανόνι ἀναφερομένην τάξιν, ἀλλὰ καὶ ἄλλως· οἷον τὴν πρώτην μετὰ τῆς δευτέρας, ταύτην μετὰ τῆς τρίτης, ταύτην μετὰ τῆς τετάρτης, κ.τ.λ. Ἐν τούτοις δὲν δυνάμεθα νὰ συνδυάζωμεν τὰς ἐξισώσεις ὁπωσδήποτε, ἀρκούμενοι νὰ μὴ παραλείψωμεν οὐδεμίαν κατὰ τοὺς συνδυασμούς. Ἐν γένει πρέπει οἱ συνδυασμοὶ νὰ γίνωνται οὕτως, ὥστε τὸ ἀρχικὸν σύστημα νὰ ἦναι συνέπεια μιᾶς οἱασδήποτε τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ καὶ τῶν προκυπτουσῶν μετὰ τὴν ἀπαλοιφήν.

§ 131. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐπιλύονται καὶ συστήματα γενικῶν ἐξισώσεων, οἷον τὸ ἑξῆς

$$(1)\quad \begin{aligned} \chi+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^3&=0\\ \chi+\beta y+\beta^2\omega+\beta^3&=0\\ \chi+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^3&=0. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ ὁ χ ἔχει τὸν αὐτὸν συντελεστὴν ἐν πάσαις ταῖς ἐξισώσεσιν αὐταῖς, ἀπαλείφομεν πρῶτον τὸν ἄγνωστον αὐτόν, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἑκατέραν τῶν ἄλλων· οὕτως εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς δύο

$$(2)\quad \begin{aligned} (\alpha-\beta)y+(\alpha^2-\beta^2)\omega+(\alpha^3-\beta^3)&=0\\ (\alpha-\gamma)y+(\alpha^2-\gamma^2)\omega+(\alpha^3-\gamma^3)&=0\cdot \end{aligned}$$

ἤδη ἀπαλείφοντες τὸν y δι' ἀναγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν συντελεστὴ (ἢ καὶ κατ' ἄλλην μέθοδον), εὑρίσκομεν

$$\omega=-\frac{(\alpha^3-\beta^3)(\alpha-\gamma)-(\alpha^3-\gamma^3)(\alpha-\beta)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha-\gamma)-(\alpha^2-\gamma^2)(\alpha-\beta)}.$$

Ἁπλοποιοῦντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ω, εὑρίσκομεν

$$\omega=-(\alpha+\beta+\gamma).$$

Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην ἐν μιᾷ τῶν (2), εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$y=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\cdot$$

τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ τοῦ γ ἀντεισάγοντες ἐν μιᾷ τῶν (1) καὶ ἀνάγοντες εὑρίσκομεν

$$\chi = -\alpha\beta\gamma.$$

Ἐπίλυσις συστημάτων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων, ἐν οἷς ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων δὲν περιέχει πάντας τοὺς ἀγνώστους.

§ 132. Δυνατὸν ἐν συστήματι πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων οἱ ἄγνωστοι νὰ μὴ ὑπάρχωσι πάντες ἐν ἑκάστῃ τῶν ἐξισώσεων. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ἁπλᾶ συστήματα· τοιοῦτον καὶ τὸ ἑξῆς πέντε ἐξισώσεων μετὰ πέντε ἀγνώστων

$$\begin{aligned} 7\chi - 2\omega + 3\rho &= 17 \\ 4y - 2\omega + \tau &= 11 \\ 5y - 3\chi - 2\rho &= 8 \\ 4y - 3\rho + 2\tau &= 9 \\ 3\omega + 8\rho &= 33. \end{aligned}$$

Τὰ τοιαῦτα συστήματα δυνατὸν πάντοτε νὰ τρέπωνται εἰς ἰσοδύναμα ἁπλᾶ. Τῷ ὄντι· ἐν πρώτοις πᾶν τοιοῦτο σύστημα δυνατὸν νὰ τρέπηται εἰς ἕτερον, ἐν ᾧ ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων περιέχει πάντας τοὺς ἀγνώστους· π. χ. ἐὰν προσθέσωμεν πάσας τὰς ἐξισώσεις, πολλαπλασιάσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἐπὶ προσήκοντά τινα ἀριθμόν, εἰς δὲ τὴν ἐντεῦθεν προκύπτουσαν προσθέσωμεν χωρὶς ἑκάστην τῶν προτεθεισῶν, εὕροιμεν ἂν ἐξισώσεις περιεχούσας ἰδίᾳ πάντας τοὺς ἀγνώστους, ἃς ἔξεστι λαβεῖν ἀντὶ τῶν προτεθεισῶν· ἀκολούθως τὸ τελευταῖον τοῦτο σύστημα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν κατὰ τὰ ἐν § 130 καὶ ὁ/α.

Δείξειε δ' ἄν τις τὸ προκείμενον καὶ ὧδε. Ἔστωσαν ρ, σ, τ, γ, ... οἱ ἄγνωστοι τοιούτου συστήματος, ὧν ὁ ἀριθμὸς (ὡς καὶ ὁ τῶν ἐξισώσεων) εἶναι μ. Δυνάμεθα ἐν πρώτοις νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τοῦ προκειμένου συστήματος εἰς ἰσοδύναμον, ἐν ᾧ μία μόνη ἐξίσωσις νὰ περιέχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων, οἷον τὸν ρ· τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖται α'. ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος, τῶν μὴ περιεχουσῶν τὸν ρ, β'. ἐξ ἐκείνων, ἃς εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τοῦ ρ ἐκ μιᾶς τῶν λοιπῶν ἐξισώσεων καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτὴν εἰς τὰς λοιπάς, γ'. τέλος ἐκ μιᾶς τῶν περιεχουσῶν τὸν ρ ἐξισώσεων. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον τῷ τῶν $\mu-1$ ἐξισώσεων τοῦ ἤδη εὑρεθέντος συστήματος, τῶν μὴ περιεχουσῶν τὸν ρ, ἐν ᾧ εἷς τῶν ἀγνώστων, οἷον ὁ σ, ὑπάρχει ἐν μιᾷ μόνῃ ἐξισώσει· τὸ σύστημα δὲ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω $\mu-1$ ἐξισώσεων τοῦ προηγηθέντος. Προχωροῦντες οὕτω θέλομεν ἐπὶ τέλους φθάσει εἰς ἰσοδύναμον ἁπλοῦν σύστημα.

§ 133. Ὅταν ἐπιλύωμεν τοιαῦτα συστήματα, δὲν ἀκολουθοῦμεν ἐν γένει τὸν δρόμον, ὃν ἀνωτέρω ἠκολουθήσαμεν πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως ἰσοδυνάμου ἁπλοῦ συστήματος, ὅστις εἶναι λίαν μακρός, ἀλλὰ συνδυάζομεν τὰς ἐξισώσεις πρὸς ἀπαλοιφὴν ἀγνώστων οὕτως, ὥστε νὰ φθάνωμεν ὅσον οἷον τε τάχιον εἰς ἐξισώσεις, ἐξ ὧν εὐχερῶς ἂν πορίζοίμεθα τὰς τῶν ἀγνώστων τιμάς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄.
$$
\begin{aligned}
&(1)\quad 7\chi-2\omega+3\varphi=17\\
&(2)\quad 4y-2\omega+\tau=11\\
&(3)\quad 5y-3\chi-2\varphi=8\\
&(4)\quad 4y-3\varphi+2\tau=9\\
&(5)\quad 3\omega+8\varphi=33.
\end{aligned}
$$

Ἀπαλείφοντες τὸν χ ἐκ τῆς πρώτης μετὰ τῆς τρίτης, εὑρίσκομεν

$$(6)\quad 35y-6\omega-5\varphi=107\cdot$$

ἐκ δὲ τῆς (2) μετὰ τῆς (4) ἀπαλείφοντες τὸν τ, εὑρίσκομεν

$$(7)\quad 4y-4\omega+3\varphi=13.$$

Ἀπαλείφοντες ἤδη τὸν y ἐκ τῆς (6) μετὰ τῆς (7), εὑρίσκομεν

$$(8)\quad 116\omega-125\varphi=-27.$$

Ἐπιλύοντες τὰς (5) καὶ (8), αἵτινες περιέχουσι τοὺς αὐτοὺς ἀγνώστους ω καὶ φ, εὑρίσκομεν $\omega=3$, $\varphi=3$· ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς αὐτὰς ἐν τῇ (1), εὑρίσκομεν $\chi=2$· ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τοῦ φ καὶ τοῦ χ ἐν τῇ (3), εὑρίσκομεν $y=4$· ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τοῦ y καὶ τοῦ ω ἐν τῇ (2), εὑρίσκομεν $\tau=1$.

Β΄.
$$
\begin{aligned}
&2\tau-4\varphi+3\chi=-21\\
&\tau+y-2\chi+4\omega=19\\
&6y-2\varphi+\omega=-11\\
&5y+\varphi-7\chi+3\omega=29\\
&3\tau+2\varphi-8\omega=-10.
\end{aligned}
$$

Ἀπαλοιφῇ τοῦ τ ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως μετὰ τῆς δευτέρας καὶ ταύτης μετὰ τῆς πέμπτης, εὑρίσκομεν

$$2y+4\varphi-7\chi+8\omega=59$$
$$3y-2\varphi-6\chi+20\omega=67.$$

Ἀπαλείφοντες ἤδη τὸν φ μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων καὶ τῆς τρίτης καὶ τετάρτης τῶν προτεθεισῶν, π. χ. συνδυάζοντες τὴν τρίτην τῶν προτεθεισῶν μεθ' ἑκάστης τῶν ἄλλων τριῶν, εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς ἐξισώσεις μετὰ τριῶν ἀγνώστων

$$16y-14\chi+7\omega=47$$
$$14y-7\chi+10\omega=37$$
$$-3y-6\chi+19\omega=78.$$

Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν περιέχει καὶ τοὺς τρεῖς ἀγνώστους. Ἐπιλύοντες αὐτάς, εὑρίσκομεν $y=-1$, $\chi=-3$, $\omega=3$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν αὐτῶν ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τοῦ προτεθέντος συστήματος, εὑρίσκομεν καὶ τὰς τῶν ἄλλων ἀγνώστων τιμάς, ἤτοι $\varphi=4$, $\tau=2$.

$$\text{Γ'.}\quad \begin{array}{r} 140\tau+84\chi-56\psi=1223 \\ 6\tau-24\psi+15\omega=68 \\ 63\psi+28\varphi=-31 \\ 3\tau-12\varphi+15\omega=23 \\ 252\varphi-28\chi+224\psi-168\omega=-111. \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau=8 \\ \varphi=\frac{1}{2} \\ \chi=\frac{1}{4} \\ \psi=-\frac{1}{} \\ \omega=\frac{1}{5} \end{array} \right.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ πᾶν ἐν γένει σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ταῖς ἐξισώσεσιν ἀγνώστων τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἁπλοῦν, διὰ τοῦτο πᾶν τοιοῦτο σύστημα μίαν μόνην ἔχει λύσιν.

Ἰδιαίτεραι ἐπιλύσεις.

§ 134. Πολλάκις ἀντὶ νὰ ἐφαρμόζωμεν τὸν γενικὸν κανόνα ποιοῦμεν τὰς ἐπιλύσεις κατ' ἰδίους συντομωτέρους τρόπους, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς παραδείγμασι.

$$\text{Α'.}\quad \begin{array}{r} y+\varphi+\chi-\omega=8 \\ \varphi+\chi+\omega-y=10 \\ \chi+\omega+y-\varphi=11 \\ \omega+y+\varphi-\chi=12. \end{array}$$

Προσθέτοντες καὶ τὰς τέσσαρας, τὴν δὲ προκύπτουσαν διαιροῦντες διὰ 2, εὑρίσκομεν

$$y+\varphi+\chi+\omega=\frac{41}{2}\cdot$$

ἀφαιροῦντες δ' ἐκ ταύτης ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καὶ διαιροῦντες τὴν προκύπτουσαν διὰ 2, ἔχομεν ἀμέσως τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ἤτοι $y=5+\frac{1}{4}$, $\varphi=4+\frac{3}{4}$, $\chi=4+\frac{1}{4}$, $\omega=6+\frac{1}{4}$.

Β'.
$$\begin{aligned}
&\varphi+2\chi+3\psi+4\omega=\alpha\\
&\chi+2\psi+3\omega+4\varphi=\beta\\
&\psi+2\omega+3\varphi+4\chi=\gamma\\
&\omega+2\varphi+3\chi+4\psi=\delta.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντες καὶ τὰς τέσσαρας, τὴν δ' ἐντεῦθεν προκύπτουσαν διαιροῦντες διὰ 10, ἔχομεν

$$(1)\quad \varphi+\chi+\psi+\omega=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{10}.$$

Ἀφαιροῦντες ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἀπὸ τῆς ἀμέσως προηγουμένης καὶ τὴν πρώτην ἀπὸ τῆς τετάρτης, ἑκάστην δὲ τῶν ἐντεῦθεν προκυπτουσῶν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς (1), εὑρίσκομεν ἐξισώσεις, ὧν ἑκάστη περιέχει ἕνα μόνον ἄγνωστον· συνάγομεν λοιπὸν ἐξ αὐτῶν ἀμέσως τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Γ'.
$$\begin{aligned}
&\chi+y+\omega=1\\
&\alpha\chi+\beta y+\gamma\omega=\kappa\\
&\alpha^2\chi+\beta^2 y+\gamma^2\omega=\kappa^2
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ γ καὶ τὴν προκύπτουσαν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἔχομεν

$$(1)\quad (\alpha-\gamma)\chi+(\beta-\gamma)y=\kappa-\gamma.$$

Ἐπίσης πολλαπλασιάζοντες τὴν δευτέραν ἐπὶ γ καὶ τὴν προκύπτουσαν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς τρίτης, ἔχομεν

$$(2)\quad \alpha(\alpha-\gamma)\chi+\beta(\beta-\gamma)y=\kappa(\kappa-\gamma).$$

Ἤδη πολλαπλασιάζοντες τὴν (1) ἐπὶ β καὶ τὴν προκύπτουσαν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς (2), ἔχομεν

$$(\alpha-\beta)(\kappa-\gamma)\chi=(\kappa-\beta)(\kappa-\gamma)\cdot$$

ὅθεν

$$(1)\quad \chi=\frac{(\kappa-\beta)(\kappa-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}.$$

Μέχρι τοῦδε προέβημεν κατὰ τὸν κανόνα, ἐκτελέσαντες τὰς ἀπαλοιφὰς δι' ἀναγωγῆς. Ἤδη ἵνα εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων ἀγνώστων, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν συναλλαγῶσιν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ γράμματα α καὶ β, ἀφ' ἑτέρου δὲ οἱ ἄγνωστοι χ καὶ y· ἐάν, δηλονότι, ὅπου ὑπάρχει α γραφῇ β καὶ τἀνάπαλιν, ἐν ταὐτῷ δὲ καὶ ὅπου ὑπάρχει χ γραφῇ y καὶ τἀνάπαλιν· ὡσαύτως δὲ δὲν μεταβάλλεται τὸ σύστημα, ἐὰν συναλλαγῶσι τὰ γράμματα α καὶ γ καὶ οἱ ἄγνωστοι χ καὶ ω. Τούτου οὕτως ἔχοντος, συναλλάξωμεν ἐν τῷ συστήματι τὰ γράμματα α καὶ β καὶ τοὺς ἀγνώστους χ καὶ y. Ἵνα ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐν τῷ προκύπτοντι μετὰ τὰς συναλλαγὰς αὐτὰς συστήματι, συναλλάττομεν ἐν τῇ ἀνωτέρω τιμῇ τοῦ χ τὰ γράμματα α καὶ β· διότι ὁ πρότερον διὰ χ σημειούμενος ἄγνωστος, σημειοῦται ἤδη διὰ y, ὁ δὲ διὰ α σημειούμενος ἀριθμός, σημειοῦται ἤδη διὰ β καὶ τἀνάπαλιν· ἔχομεν λοιπὸν

$$(2)\quad y=\frac{(\kappa-\alpha)(\kappa-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}.$$

ἀλλὰ τὸ σύστημα, εἰς ὃ φθάνομεν μετὰ τὰς συναλλαγὰς τῶν γραμμάτων, εἶναι ταὐτὸν τῷ προτεθέντι· ἑπομένως ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ y εἶναι καὶ ἡ τοῦ προτεθέντος συστήματος.—Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἵνα ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ω, συναλλάττομεν ἐν τῇ τοῦ χ τὰ γράμματα α καὶ γ· οὕτω δ' εὑρίσκομεν

$$\omega=\frac{(\kappa-\alpha)(\kappa-\beta)}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}.$$

Δ'. $$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\varphi}{\gamma}=\frac{\omega}{\delta}.$$

$$\kappa\chi+\lambda y+\mu\varphi+\nu\omega=\pi.$$

Γνωστὸν ὅτι, ὅταν χ, y, φ, ω ἦναι θετικοί,

$$\frac{\kappa\chi+\lambda y+\mu\varphi+\nu\omega}{\alpha\kappa+\beta\lambda+\gamma\mu+\delta\nu}=\frac{\chi}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\varphi}{\gamma}=\frac{\omega}{\delta}.$$

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου κλάσματος ἰσοῦται τῷ π· ἔχομεν λοιπὸν

$$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\pi}{\alpha\kappa\beta\lambda+\gamma\mu+\_+\delta\nu}.$$

ἐξ οὗ $\chi = \dfrac{\alpha\pi}{\alpha\kappa+\beta\lambda+\gamma\mu+\delta\nu}$.

Ὁμοίως εὑρίσκονται καὶ τῶν ἄλλων ἀγνώστων αἱ τιμαί.

$$\text{Ε}'.\quad \frac{\beta}{\omega}+\frac{\gamma}{y}=\alpha$$

$$\frac{\gamma}{\chi}+\frac{\alpha}{\omega}=\beta$$

$$\frac{\alpha}{y}+\frac{\beta}{\chi}=\gamma.$$

Εἰ καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ δὲν εἶναι πρωτοβάθμιοι, δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν αὐτὰς ὡς ἕπεται. Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ α, τὴν δευτέραν ἐπὶ β καὶ τὴν τρίτην ἐπὶ γ, τῶν ἐντεῦθεν προκυπτουσῶν προσθέτομεν τὰς δύο τελευταίας καὶ ἐντεῦθεν ἀφαιροῦμεν τὴν πρώτην· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\frac{2\beta\gamma}{\chi}=\beta^2+\gamma^2-\alpha^2.$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τῶν ἄλλων ἀγνώστων τὰς τιμάς.

Δυνάμεθα ἔτι νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ προκείμενον σύστημα ποιοῦντες χρῆσιν *βοηθητικῶν ἀγνώστων*, δι' ὧν πολλάκις ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων ἁπλοποιεῖται. Θῶμεν $\dfrac{1}{\omega}=\sigma$, $\dfrac{1}{y}=\tau$, $\dfrac{1}{\chi}=\varphi$· αἱ ἐξισώσεις τότε ἀποβαίνουσι

$$\beta\sigma+\gamma\tau=\alpha$$

$$\gamma\varphi+\alpha\sigma=\beta$$

$$\alpha\tau+\beta\varphi=\gamma$$

καὶ εἶναι ἤδη πρωτοβάθμιοι· ἐπιλύοντες αὐτὰς καὶ ἀντιστρέφοντες τὰς εὑρισκομένας τιμὰς τῶν σ, τ, φ, ἔξομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος.

Ἐν γένει ὅταν αἱ ἐξισώσεις περιέχωσι μόνα τὰ πηλίκα τῆς μονάδος δι' ἑκάστου τῶν ἀγνώστων, ἦναι δὲ πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς τὰ πηλίκα αὐτά, ἐξισοῦμεν τὰ πηλίκα αὐτὰ βοηθητικοῖς ἀγνώστοις καὶ ἀντεισάγοντες τούτους ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τρέπομεν αὐτὰς εἰς πρωτοβαθμίους, εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν βοηθητικῶν ἀγνώστων καὶ ἀντιστρέφοντες αὐτὰς ἔχομεν καὶ τὰς τῶν ἀρχικῶν ἀγνώστων.

Συστήματα ἀδύνατα.

§ 135. Σύστημά τι ἐξισώσεων καλεῖται *ἀδύνατον*, ὅταν δὲν ἦναι ἐπιδεκτικὸν λύσεως.

Αἱ ἐξισώσεις τῶν τοιούτων συστημάτων λέγονται *ἀσυνύπαρκτοι*.

§ 136. Ὅταν, ἐργαζόμενοι ἐπὶ ἐξισώσεων συστήματός τινος πρὸς ἀπαλοιφὴν ἀγνώστων, εὑρίσκωμεν ἄτοπον ἰσότητα, πρέπει νὰ συμπεραίνωμεν ὅτι τὸ σύστημα, ἐφ' οὗ ἐργαζόμεθα, εἶναι ἀνεπίδεκτον λύσεως, εἴτε εἶναι ἀδύνατον.

Π. χ. ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$5\chi-3\omega=7$$
$$10\chi-6\omega=4.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ 2 καὶ ἀπὸ τῆς προκυπτούσης ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν τὴν ἄτοπον ἰσότητα $0=10$· αἱ ἰσότητες λοιπὸν αὗται δὲν ἔχουσι κοινὰς λύσεις. Δυνάμεθα ἄλλως νὰ συμπεράνωμεν τοῦτο καὶ ἐξ ἁπλῆς ὄψεως τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν· διότι τοῦ διπλοῦ τοῦ α'. μέλους τῆς πρώτης ὄντος ἴσου τῷ α'. μέλει τῆς δευτέρας, ἔπρεπεν, ἵνα ἔχωσιν αἱ ἐξισώσεις κοινὰς λύσεις, καὶ τὸ διπλοῦν τοῦ β'. μέλους τῆς πρώτης νὰ ἰσῶται τῷ β'. μέλει τῆς δευτέρας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν γένει ὅταν ἀπὸ δύο ἢ πλειόνων ἐξισώσεων συστήματος οἱουδήποτε (πρωτοβαθμίου ἢ μὴ) συνάγομεν ἄτοπον ἰσότητα, τὸ σύστημα, εἰς ὃ ἀνήκουσιν αἱ ἐξισώσεις αὗται, εἶναι ἀδύνατον· διότι, οἱοιδήποτ' ἀριθμοὶ κἂν τεθῶσιν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων, πρέπει μία τοὐλάχιστον τῶν προκυπτουσῶν ἰσοτήτων νὰ ἦναι ἄτοπος, ἵνα ποριζώμεθα ἐκ τοῦ συνόλου αὐτῶν ἄτοπον ἰσότητα.

137. Τὰ ἀδύνατα συστήματα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων δὲν δύνανται νὰ τρέπωνται εἰς ἰσοδύναμα ἁπλᾶ, ἔχοντα τὸ σχῆμα τῶν ἐν § 125 ἐξισώσεων· διότι τὰ τελευταῖα εἰσὶ πάντοτε ἐπιδεκτικὰ λύσεως (§ 125). Ὅταν ἐργαζώ-

μεθα ἐπὶ ἀδυνάτων συστημάτων πρὸς τροπὴν αὐτῶν εἰς τοιαῦτα ἁπλᾶ, ἀπαντῶμεν ἀτόπους ἰσότητας.

Συστήματα ἀπροσδιόριστα.

§ 138. Σύστημά τι ἐξισώσεων λέγεται *ἀπροσδιόριστον*, ὅταν ἦναι ἐπιδεκτικὸν *ἀπείρων* λύσεων.

§ 139. Τοιαῦτα εἶναι τὰ συστήματα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἐν οἷς ὁ τῶν ἀγνώστων ἀριθμὸς ὑπερβαίνει τὸν τῶν ἐξισώσεων.

Ἔστω, π. χ., τὸ ἑξῆς σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μετὰ τεσσάρων ἀγνώστων

$$5\chi+3y-2\omega+4\varphi=16$$
$$2\chi-y-\omega=1$$
$$7\chi+\omega-3y+2\varphi=10.$$

Δίδοντες εἰς ἕνα τῶν ἀγνώστων, οἷον εἰς τὸν φ, τιμὴν κατ' ἀρέσκειαν, ποιοῦντες φέρ' εἰπεῖν $\varphi=2$, καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν, ἕξομεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων, ὅπερ ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν λοιπῶν ἀγνώστων χ, y καὶ ω· δίδοντες ἀκολούθως ἄλλην τινὰ τιμὴν τῷ φ, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰς ἀντιστοιχούσας τῶν ἄλλων ἀγνώστων· δυνάμεθα οὕτω νὰ εὕρωμεν ἀπείρους λύσεις τοῦ προτεθέντος συστήματος.

§ 140. Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν ὑπάρχουσιν ἐν τῷ συστήματι ἐξισώσεις μὴ ἐπιδεκτικαὶ κοινῶν λύσεων, ὁπότε τὸ σύστημα οὐδεμιᾶς ἐστι λύσεως ἐπιδεκτικόν, εἴτε εἶναι ἀδύνατον. Π. χ. τὸ ἑξῆς ζεῦγος ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων

$$5\chi-2y+4\omega=6$$
$$10\chi-4y+8\omega=3$$

εἶναι ἀνεπίδεκτον λύσεως· διότι, τοῦ α'. μέλους τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ὄντος διπλοῦ τοῦ τῆς πρώτης, ἔπρεπε καὶ τὸ β'. μέλος τῆς δευτέρας νὰ ἦναι διπλοῦν τοῦ τῆς πρώτης, ἵνα ὑπάρχωσι κοιναὶ λύσεις.

§ 141. Ὅταν, ἐργαζόμενοι ἐπὶ ἐξισώσεων συστήματός τινος πρὸς ἀπαλοιφὴν ἀγνώστου, εὑρίσκωμεν ἀντὶ ἐξισώσεως ταυτότητα, πρέπει νὰ συμπεραίνωμεν ὅτι τὸ σύστημα ἐκεῖνο περιέχει ἐξισώσεις, αἵτινές εἰσι συνέπειαι ἄλλων ἐξισώσεων τοῦ αὐτοῦ συστήματος καὶ δύνανται ἑπομένως νὰ παραλειφθῶσι.

Π. χ. ἐὰν ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$A = B,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2$$

πορίζώμεθα τὴν ταυτότητα $M = M$, ἥτις δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν, μία τότε τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν ἤθελεν εἶσθαι συνέπεια τῶν δύο ἄλλων καὶ τῆς ταυτότητος, εἴτε μόνον τῶν δύο ἄλλων· δύναται λοιπὸν νὰ παραλειφθῇ.

Ὅταν, ἐργαζόμενοι πρὸς ἐπίλυσιν συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων, εὑρίσκωμεν ταυτότητας, τὸ σύστημα, ἐφ' οὗ ἐργαζόμεθα, εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ ἀπροσδιόριστον· διότι, παραλειπομένων τῶν ἐξισώσεων ἐκείνων, αἵτινές εἰσι συνέπειαι ἄλλων, τὸ σύστημα τραπήσεται εἰς ἰσοδύναμον, ἐν ᾧ ὁ τῶν ἀγνώστων ἀριθμὸς ὑπερβαίνει τὸν τῶν ἐξισώσεων· τὸ τοιοῦτο δὲ σύστημα εἶναι ἐπιδεκτικὸν ἀπείρων λύσεων (§ 139), ἐὰν δὲν ἦναι ἀδύνατον (§ 140).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α΄.
$$5\chi - 3\omega = 7$$
$$10\chi - 6\omega = 14.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ 2 καὶ ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν τὴν ταυτότητα $0 = 0$· ἄρα αἱ ἐξισώσεις αὗται εἰσὶν ἰσοδύναμοι (ἡ δευτέρα εἶναι γινόμενον τῆς πρώτης ἐπὶ 2)· ἑπομένως τὸ προκείμενον ζεῦγος, ἰσοδύναμον ὂν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ, εἶναι ἐπιδεκτικὸν ἀπείρων λύσεων (§ 123).

β΄.
$$10\chi - 6y = 20$$
$$5\chi - 3y + 6\omega = 15$$
$$5\chi - 3y - 6\omega = 5.$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· δύναται λοιπὸν νὰ παραλειφθῇ· ἑπομένως τὸ προτεθὲν σύστημα, ὂν ἰσοδύναμον τῷ ἑξῆς

$$5\chi - 3y + 6\omega = 15$$
$$5\chi - 3y - 6\omega = 5,$$

εἶναι ἀπροσδιόριστον.

γ΄.
$$2\chi + 4y + 3\omega = 10$$
$$5\chi + 10y - 24\omega = 25$$
$$\chi + 2y - 3\omega = 5.$$

Ἐνταῦθα μία τῶν ἐξισώσεων εἶναι συνέπεια τῶν δύο ἄλλων· ἐὰν ἐργασθῶμεν πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν ταυτότητα.

δ'. $$\begin{aligned} 5\chi-7y+2\omega&=6\\ 10\chi-14y+4\omega&=7\\ 15\chi-21y+6\omega&=13. \end{aligned}$$

Ἡ τρίτη ἐξίσωσις εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· ἑπομένως τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ

$$\begin{aligned} 5\chi-7y+2\omega&=6\\ 10\chi-14y+4\omega&=7, \end{aligned}$$

ὅπερ εἶναι ἀδύνατον· διότι οἱ λόγοι τῶν μελῶν εἰσὶν ἄνισοι· ἄρα καὶ τὸ προτεθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΤΕΑ.

1. $$\begin{aligned} 2\chi-4y+\varphi&=23,08\\ 3\chi+5\sigma-5\omega&=4\\ -9y-3\sigma+2\varphi+\tau&=43,33\\ -5y-8\omega-3\tau&=21,93\\ 2\chi-7y-2\varphi+8\sigma-10\tau&=30,82\\ -8y+2\varphi-24\omega&=42,72. \end{aligned}$$

Λύσις $\chi=0,5,\ y=-3,12,\ \varphi=9,6,\ \sigma=0,56,\ \tau=-2,27,\ \omega=0,06.$

2. $$\begin{aligned} \frac{1}{\chi}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}&=\alpha\\ \frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{y}&=\beta\\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\chi}&=\gamma\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\varphi}&=\delta. \end{aligned}$$

Λύσις $\chi=\frac{1}{\kappa-\delta},\ y=\frac{1}{\kappa-\gamma},\ \omega=\frac{1}{\kappa-\beta},\ \varphi=\frac{1}{\kappa-\alpha}$, κ ὄντος $\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta\right)$.

3. $$(\alpha^2-\beta^2)(5\chi+3y)=2\alpha\beta(4\alpha-\beta)$$
$$\alpha^2 y-\frac{\alpha\beta^2\gamma}{\alpha+\beta}+(\alpha+\beta+\gamma)\beta\chi=\beta^2 y+\alpha\beta(\alpha+2\beta).$$

Λύσις. $\chi=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta},\ y=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}.$

4. $$\chi-y+\omega=0$$
$$(\alpha+\beta)\chi-(\alpha+\gamma)y+(\beta+\gamma)\omega=0$$
$$\alpha\beta\chi-\alpha\gamma y+\beta\gamma\omega=1.$$

Λύσις. $\chi=\dfrac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)},\ y=\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},\ \omega=\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}.$

5. $$\sqrt{y}-\sqrt{20-\chi}=\sqrt{y-\chi}$$
$$3\sqrt{20-\chi}=2\sqrt{y-\chi}.$$

Λύσις. $\chi=16,\ y=25.$

6. $$\alpha\chi+\mu(y+\omega+\varphi)=\kappa$$
$$\beta y+\mu(\omega+\varphi+\chi)=\lambda$$
$$\gamma\omega+\mu(\varphi+\chi+y)=\pi$$
$$\delta\varphi+\mu(\chi+y+\omega)=\rho.$$

Λύσις. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐν πρώτοις τὸ ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων· σημειοῦντες αὐτὸ διὰ ε, ἔχομεν

$$\chi=\frac{\kappa-\mu\varepsilon}{\alpha-\mu},\ y=\frac{\lambda-\mu\varepsilon}{\beta-\mu},\ \omega=\frac{\pi-\mu\varepsilon}{\gamma-\mu},\ \varphi=\frac{\rho-\mu\varepsilon}{\delta-\mu}.$$

7. $$\chi+y+\varphi+\psi+\omega+\sigma+\tau=1$$
$$\chi+\alpha y+\beta\varphi+\gamma\psi+\delta\omega+\varepsilon\sigma+\zeta\tau=0$$
$$\chi+\alpha^2 y+\beta^2\varphi+\gamma^2\psi+\delta^2\omega+\varepsilon^2\sigma+\zeta^2\tau=0$$
$$\chi+\alpha^3 y+\beta^3\varphi+\gamma^3\psi+\delta^3\omega+\varepsilon^3\sigma+\zeta^3\tau=0$$
$$\chi+\alpha^4 y+\beta^4\varphi+\gamma^4\psi+\delta^4\omega+\varepsilon^4\sigma+\zeta^4\tau=0$$
$$\chi+\alpha^5 y+\beta^5\varphi+\gamma^5\psi+\delta^5\omega+\varepsilon^5\sigma+\zeta^5\tau=0$$
$$\chi+\alpha^6 y+\beta^6\varphi+\gamma^6\psi+\delta^6\omega+\varepsilon^6\sigma+\zeta^6\tau=0.$$

Λύσις. $\chi=\dfrac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)(\delta-1)(\varepsilon-1)(\zeta-1)},\ ..$

$$\tau=\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{(\zeta-\varepsilon)(\zeta-\delta)(\zeta-\gamma)(\zeta-\beta)(\zeta-\alpha)(\zeta-1)}.$$

Τῶν λοιπῶν ἀγνώστων αἱ τιμαὶ εὑρίσκονται διὰ συναλλαγῆς γραμμάτων ἐν τῇ τιμῇ τοῦ τ (ὅρα § 134, Γ΄.).

8.
$$\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\mu}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\mu}+\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^{\mu}=1$$

$$\frac{\chi^{\mu}}{\alpha^{\mu+\nu}}=\frac{y^{\mu}}{\beta^{\mu+\nu}}=\frac{\omega^{\mu}}{\gamma^{\mu+\nu}}.$$

Λύσις. Αἱ ἐξισώσεις αὗται γίνονται πρωτοβάθμιοι, ἐὰν ληφθῶσιν ὡς ἄγνωστοι αἱ $\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\mu}$, $\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\mu}$, $\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^{\mu}$· εὑρίσκομεν οὕτω $\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\mu}=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\nu}$, $\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\mu}=\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{\nu}$, $\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^{\mu}=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\nu}$, $(\delta^{\nu}=\alpha^{\nu}+\beta^{\nu}+\gamma^{\nu})$. Ἐντεῦθεν πορίζομεθα τὰς τιμὰς τῶν χ, y, ω δι' ἐξαγωγῆς ῥιζῶν.

9.
$$\alpha\chi^3=\beta y^3=\gamma\omega^3$$
$$\frac{1}{\chi}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\delta}.$$

Λύσις. $\chi=\dfrac{\delta(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma})}{\sqrt[3]{\alpha}}$, $y=\dfrac{\delta(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma})}{\sqrt[3]{\beta}}$,

$$\omega=\frac{\delta(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma})}{\sqrt[3]{\gamma}}.$$

Ἐὰν ἐν τῇ παραστάσει $\alpha\chi^2+\beta y^2+\gamma\omega^2$ ἀντικαταστήσωμεν τὰς ἀνωτέρω τιμάς, εὑρίσκομεν $\delta^2\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}\right)^3$.

10.
$$\frac{\chi^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-\beta^2}+\frac{\omega^2}{\rho^2-\gamma^2}=1$$
$$\frac{\chi^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-\beta^2}+\frac{\omega^2}{\mu^2-\gamma^2}=1$$
$$\frac{\chi^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-\beta^2}+\frac{\omega^2}{\nu^2-\gamma^2}=1.$$

Λύσις. Τὸ σύστημα εἶναι πρωτοβάθμιον ὡς πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀγνώστων καὶ εὑρίσκομεν

$$\chi^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{\beta^2\gamma^2},\ \psi^2=\frac{(\rho^2-\beta^2)(\mu^2-\beta^2)(\nu^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)},\ \omega^2=\frac{(\rho^2-\gamma^2)(\mu^2-\gamma^2)(\nu^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}$$

Δυνάμεθα δὲ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίλυσιν συντόμως ὡς ἑξῆς. Ἡ παράστασις

$$\frac{\chi^2}{x}+\frac{\psi^2}{x-\beta^2}+\frac{\omega^2}{x-\gamma^2}-1,$$

εἴτε ἡ ἰσοδύναμος

$$(1)\qquad \frac{(x-\beta^2)(x-\gamma^2)\chi^2+x(x-\gamma^2)\psi^2+x(x-\beta^2)\omega-x(x-\beta^2)(x-\gamma^2)}{x(x-\beta^2)(x-\gamma^2)}$$

μηδενίζεται δυνάμει τῶν ἐξισώσεων, ὅταν $x=\rho^2$ ἢ $x=\mu^2$ ἢ $x=\nu^2$· πρέπει λοιπὸν τότε νὰ μηδενίζηται ὁ ἀριθμητὴς τῆς (1) ἐπειδὴ δὲ οὗτος εἶναι ἀκέραιος ὡς πρὸς τὸ γράμμα x, ὅπερ δὲν ὑπάρχει ἐν ταῖς τιμαῖς τῶν χ, ψ καὶ ω, ἕπεται (§ 75) ὅτι διαιρεῖται διὰ $(x-\rho^2)(x-\mu^2)(x-\nu^2)$· γράφεται ἄρα καὶ οὕτω

$$M\,(x-\rho^2)(x-\mu^2)(x-\nu^2)\text{·}$$

ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ x^3 εἶναι -1, συνάγομεν $M=-1$· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα

$$\frac{(x-\rho^2)(x-\mu^2)(x-\nu^2)}{x(x-\beta^2)(x-\gamma^2)}=1-\frac{\chi^2}{x}-\frac{\psi^2}{x-\beta^2}-\frac{\omega}{x-\gamma^2}\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ x καὶ ποιοῦντες ἀκολούθως $x=0$, εὑρίσκομεν $\chi^2=\dfrac{\mu^2\nu^2\rho^2}{\beta^2\gamma^2}$

ἐπίσης πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $x-\beta^2$ καὶ ἐπὶ $x-\gamma^2$ καὶ ποιοῦντες ἐπὶ τῶν ἐξαγομένων $x=\beta^2$, $x=\gamma^2$, εὑρίσκομεν καὶ τὰς τιμὰς τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων ἀγνώστων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ Α'. ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ.

---

§ 142. Ἐνταῦθα θέλομεν διαλάβει περὶ προβλημάτων, ὧν ἡ λύσις ἄγει εἰς ἐπίλυσιν συστημάτων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ταῖς ἐξισώσεσιν ἀγνώστων.

Ἵνα λύσωμεν τοιαῦτα προβλήματα, βαίνομεν ὡς καὶ πρὸς λύσιν τῶν λυθέντων ἐν τῷ Γ'. Κεφαλαίῳ· εὑρίσκομεν δηλονότι πρῶτον τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, εἶτα δ' ἐπιλύομεν τὸ σύστημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Ἠγόρασέ τις δύο εἴδη ὑφάσματος, ἐκ μὲν τοῦ πρώτου εἴδους 5 πήχεις, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 7 πήχεις, καὶ ἐπλήρωσε διὰ τὸ ὅλον 71 δραχμάς· ἠγόρασε καὶ ἐκ δευτέρου ἐκ μὲν τοῦ πρώτου εἴδους 4 πήχεις, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 6 πήχεις, καὶ ἐπλήρωσε διὰ τὸ ὅλον 60 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἑκατέρου τῶν ὑφασμάτων;*

Ἔστω χ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως τοῦ πρώτου εἴδους καὶ y ἡ τοῦ δευτέρου. Διὰ τοὺς 5 πήχεις τοῦ πρώτου εἴδους ἐπλήρωσε 5χ, διὰ δὲ τοὺς 7 τοῦ δευτέρου $7y$· ὅθεν ὁμοῦ ἐπλήρωσε $5\chi+7y$· ἐπίσης ἐπλήρωσε τὸ δεύτερον διὰ τὸ ὅλον $4\chi+6y$· ἔχομεν λοιπὸν τὰς ἐξισώσεις

$$5\chi+7y=71$$
$$4\chi+6y=60,$$

ἃς ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν $\chi=3$, $y=8$.

§ 143. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα 45, ἡ δὲ διαφορὰ 20.*

Ἔστω χ ὁ μείζων καὶ y ὁ ἐλάσσων. Ἐπειδὴ τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 45, ἡ δὲ διαφορὰ 20, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\chi+y=45$$
$$\chi-y=20,$$

ἐξ ὧν
$$\chi=32+\frac{1}{2},\ y=12+\frac{1}{2}.$$

Ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα καὶ δι' ἑνὸς μόνου ἀγνώστου. Ὄντος χ τοῦ μείζονος, ὁ ἕτερος, εἶναι $45-\chi$· ἔχομεν δὲ

$$\chi-(45-\chi)=20\cdot$$

ὅθεν $\chi=32+\frac{1}{2}$ ὁ ἕτερος, ὢν $45-\chi$, εἶναι $12+\frac{1}{2}$.

Γενικευθήτω τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὡς ἑξῆς·

Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα α, ἡ δὲ διαφορὰ β.

Ὄντος χ τοῦ μείζονος καὶ y τοῦ ἑτέρου, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\chi+y=\alpha$$
$$\chi-y=\beta,$$

ἐξ ὧν $$\chi=\frac{\alpha+\beta}{2},\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Οὕτως ὁ μὲν ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι, ὁ δὲ τῇ ἡμιδιαφορᾷ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν α καὶ β.

§ 144. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Ἔχει τις τρία κομμάτια ἀργύρου, ὧν οἱ βαθμοὶ καθαρότητος εἰσὶ 0,900, 0,800, 0,720. Ἐὰν ἑνώσῃ τὰ δύο πρῶτα, ὁ βαθμὸς τοῦ μίγματος ἔσται 0,840· ἐὰν δὲ τὸ πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου, ὁ βαθμὸς τοῦ μίγματος ἔσται 0,780. Τὰ τρία κομμάτια ἕλκουσιν ὁμοῦ 45 μνᾶς. Πόσας μνᾶς ἕλκει ἕκαστον αὐτῶν;*

Ἔστωσαν χ, y, ω τὰ ζητούμενα βάρη (ἀριθμοὶ μνῶν). Ἐπειδὴ τὰ τρία κομμάτια ἕλκουσιν ὁμοῦ 45 μνᾶς, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1)\quad \chi+y+\omega=45.$$

Κατὰ τοὺς ἀναφερομένους βαθμοὺς καθαρότητος, ὁ καθαρὸς ἄργυρος ἐν τῷ πρώτῳ κομματίῳ εἶναι 0,900χ, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ 0,800y· ὅθεν ὁ ἐν τῷ ἐξ αὐτῶν μίγματι εἶναι 0,900χ+0,800y· ὁ αὐτὸς εἶναι καὶ 0,840(χ+y)· διότι ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ μίγματος εἶναι 0,840· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$0{,}900\chi+0{,}800y=0{,}840\,(\chi+y),$$

ἥτις ἀνάγεται εἰς τὴν

$$(2)\quad 3\chi-2y=0.$$

Ἐπίσης ὁ ἐν τῷ μίγματι τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου κομματίου καθαρὸς ἄργυρος, ἴσος ὢν τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐν ἑκατέρῳ ποσῶν καθαροῦ ἀργύρου, εἶναι 0,900χ+0,720ω· ὁ αὐτὸς δὲ εἶναι καὶ 0,780 (χ+ω), τοῦ βαθμοῦ καθαρότητος τοῦ μίγματος αὐτοῦ ὄντος 0,780· ἔχομεν λοιπὸν ἔτι τὴν ἐξίσωσιν

$$0{,}900\chi+0{,}720\omega=0{,}780(\chi+\omega),$$

ἥτις ἀνάγεται εἰς τὴν

$$(3)\quad 2\chi-\omega=0.$$

Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2), καὶ (3) εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα, ἤτοι χ=10 y=15, ω=20.

§ 145. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. *Εὑρεῖν ἀριθμὸν τετραψήφιον, οὗ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ψηφίων* τῶν μονάδων καὶ δεκάδων· τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν χιλιάδων καὶ μονάδων· πρὸς δὲ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι 109 μετὰ ὑπολοίπου 9· τέλος ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν αὐτῶν ψηφίων κατὰ τάξιν ἀντίθετον γεγραμμένων, ὑπολείπεται 819.

Ἔστωσαν χ, y, ω, φ τὰ ψηφία τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων καὶ χιλιάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ψηφίων τῶν μονάδων καὶ δεκάδων, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\omega = \chi + y$, εἴτε

$$(1)\quad \chi + y - \omega = 0\cdot$$

τοῦ δὲ ψηφίου τῶν δεκάδων ἰσουμένου τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν μονάδων καὶ χιλιάδων, ἔχομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν $y = 2\chi + 2\varphi$, εἴτε

$$(2)\quad 2\chi - y + 2\varphi = 0.$$

Ὁ ζητούμενος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀξιῶν τῶν ψηφίων αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι $\chi + 10y + 100\omega + 1000\varphi$· ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι 109 μετὰ ὑπολοίπου 9, ἔχομεν ἔτι τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν

$$\chi + 10y + 100\omega + 1000\varphi = (\chi + y + \omega + \varphi)109 + 9,$$

ἥτις ἀνάγεται εἰς τὴν

$$(3)\quad -108\chi - 99y - 9\omega + 891\varphi = 9.$$

Τέλος ἐπειδὴ ἡ ἀξία τοῦ ἐκ τῶν αὐτῶν ψηφίων, κατ' ἀντίθετον τάξιν γεγραμμένων, ἀριθμοῦ εἶναι $\varphi + 10\omega + 100y + 1000\chi$, ἔχομεν κατὰ τὴν τελευταίαν ἐν τῇ ἐκφωνήσει συνθήκην καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$\varphi + 10\omega + 100y + 1000\chi - (\chi + 10y + 100\omega + 1000\varphi) = 819$$

εἴτε

$$(4)\quad 999\chi + 90y - 90\omega - 999\varphi = 819.$$

Ἐπιλύοντες τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3), (4), εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ἤτοι $\chi = 2$, $y = 6$, $\omega = 8$, $\varphi = 1$. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι 1862.

§ 146. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ε΄. *Πέντε παῖκται συνεφώνησαν ὁ ἡττώ-μενος νὰ διπλασιάζῃ τὸ κεφάλαιον, ὅπερ τυγχάνει ἔχων ἕκα-στος τῶν ἄλλων. Ἡττᾶται πρῶτον ὁ Α καὶ ἀποτίει· ἡττᾶ-ται ἀκολούθως ὁ Β, εἶτα ὁ Γ, εἶτα ὁ Δ, εἶτα ὁ Ε, καὶ ἕκαστος τῶν ἡττωμένων ἐκπληροῖ τὸ συμπεφωνημένον. Ἀφοῦ ἐπλήρω-σε καὶ ὁ Ε, εὑρέθη ἕκαστος τῶν παικτῶν κάτοχος τοῦ αὐτοῦ κε-φαλαίου α. Πόσον ἕκαστος αὐτῶν ἐκέκτητο ἐν ἀρχῇ τοῦ παι-γνιδίου;*

Ἔστω τ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον τοῦ Α, y τὸ τοῦ Β, φ τὸ τοῦ Γ, χ τὸ τοῦ Δ, ω τὸ τοῦ Ε. Μετὰ τὸ πρῶτον παιγνίδιον οἱ παίκ-τες εἶχον

ὁ Α $\tau-y-\varphi-\chi-\omega$,
ὁ Β $2y$,
ὁ Γ 2φ,
ὁ Δ 2χ,
ὁ Ε 2ω.

Μετὰ τὸ δεύτερον παιγνίδιον εἶχον

ὁ Α $2\tau-2y-2\varphi-2\chi-2\omega$,
ὁ Β $2y-(\tau-y-\varphi-\chi-\omega)-2\varphi-2\chi-2\omega=3y-\tau-\varphi-\chi-\omega$,
ὁ Γ 4φ,
ὁ Δ 4χ,
ὁ Ε 4ω.

Ἐπίσης μετὰ τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον καὶ τὸ πέμπτον οἱ παίκ-τες εἶχον

	Μετὰ τὸ τρίτον	Μετὰ τὸ τέταρτον	Μετὰ τὸ πέμπτον
ὁ Α	$4\tau-4y-4\varphi-4\chi-4\omega$,	$8\tau-8y-8\varphi-8\chi-8\omega$,	$16\tau-16y-16\varphi-16\chi$
ὁ Β	$6y-2\tau-2\varphi-2\chi-2\omega$,	$12y-4\tau-4\varphi-4\chi-4\omega$,	$24y-8\tau-8\varphi-8\chi$
ὁ Γ	$7\varphi-\tau-y-\chi-\omega$,	$14\varphi-2\tau-2y-2\chi-2\omega$,	$28\varphi-4\tau-4y-4\chi$
ὁ Δ	8χ,	$15\chi-\tau-y-\varphi-\omega$,	$30\chi-2\tau-2y-$
ὁ Ε	8ω,	16ω,	$31\omega-\tau-y-$

Ἐπειδὴ μετὰ τὸ πέμπτον παιγνίδιον ἕκαστος τῶν παικτῶν εἶχε τὸ αὐτὸ κεφάλαιον α, ἔχομεν τὰς ἑξῆς πέντε ἐξισώσεις

$$(1)\qquad 16\tau-16y-16\varphi-16\chi-16\omega=\alpha$$
$$(2)\qquad -8\tau+24y-8\varphi-8\chi-8\omega=\alpha$$
$$(3)\qquad -4\tau-4y+28\varphi-4\chi-4\omega=\alpha$$

$$(4)\quad -2\tau-2y-2\varphi+30\chi-2\omega=\alpha$$
$$(5)\quad -\tau-y-\varphi-\chi+31\omega=\alpha.$$

Ἵνα συντόμως ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα αὐτὸ, προσθέτομεν πρῶτον ...άσας τὰς ἐξισώσεις καὶ εὑρίσκομεν

$$(6)\quad \tau+y+\varphi+\chi+\omega=5\alpha.$$

...ιδὴ προσθέτομεν τὴν (6) μετὰ τῆς (5) καὶ εὑρίσκομεν ἀμέσως ...$=\frac{3\alpha}{16}$· διπλασιάζοντες τὴν (6) καὶ προσθέτοντες μετὰ τῆς (4), ...ρίσκομεν $\chi=\frac{11\alpha}{32}$· τετραπλασιάζοντες τὴν (6) καὶ προσθέτοντες ...ετὰ τῆς (3), εὑρίσκομεν $\varphi=\frac{21\alpha}{32}$· ἀναλόγως ἐργαζόμενοι, εὑρί...κομεν καὶ τῶν ἄλλων δύο ἀγνώστων τὰς τιμὰς, ἤτοι $y=\frac{41\alpha}{32}$, ... $\frac{81\alpha}{32}$.

Ἰδοὺ καὶ ἑτέρα λύσις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος, συντομωτέρα ...ς ἀνωτέρω. Φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων τῶν παι...ῶν κατά τε τὴν ἀρχὴν καὶ μεθ' ἕκαστον παιγνίδιον εἶναι πάντο... τὸ αὐτό· ἐπειδὴ δ' ἐπὶ τέλους κατεῖχεν ἕκαστος τὸ αὐτὸ ...σὸν α, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων τῶν παικτῶν ...ι 5α. Ὁ πρῶτος, ἡττηθεὶς, ἐπλήρωσε τὸ ἄθροισμα τῶν κε...λαίων τῶν λοιπῶν, ἤτοι $5\alpha-\tau$· τῷ ἔμεινε λοιπὸν $\tau-(5\alpha-\tau)$ ...-5α· ἐπειδὴ δὲ τὰ κεφάλαια αὐτοῦ ἐδιπλασιάσθησαν ἔκτοτε ...κις, ἕπεται ὅτι εἰς τὸ τέλος κατεῖχε $(2\tau-5\alpha)\,2^4=32\tau-$ ...· τὸ δὲ ποσὸν τοῦτο ἰσοῦται κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τῷ α· εἴτ' οὖν ...$-80\alpha=\alpha$· ὅθεν $\tau=\frac{81\alpha}{32}$. Ὁ δεύτερος μετὰ τὸ πρῶτον παιγνί...ω... ...εῖχε 2y· ἐπλήρωσεν ἀκολούθως $5\alpha-2y$· ὅθεν τῷ ἔμεινε ...$-(5\alpha-2y)=4y-5\alpha$· διπλασιασθέντων ἔκτοτε τρὶς τῶν κε...ίων αὐτοῦ, εἶχεν εἰς τὸ τέλος $(4y-5\alpha)\,2^3=32y-40\alpha$· ...$2y-40\alpha=\alpha$· ὅθεν $y=\frac{41\alpha}{32}$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρί...

σκονται τὰ ἀρχικὰ κεφάλαια καὶ ἑκάστου τῶν ἄλλων πακτῶν.

§ 147. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ'. *Δεξαμενὴ δέχεται τὸ ὕδωρ διὰ τριῶν κρουνῶν Α, Β, Γ. Οἱ Α καὶ Β ὁμοῦ πληροῦσι τὴν δεξαμενὴν ἐν 70 ὥραις, οἱ Α καὶ Γ ἐν 84 ὥραις, οἱ Β καὶ Γ ἐν 140 ὥραις. Ἐν πόσῳ χρόνῳ μόνος ἕκαστος τῶν κρουνῶν πληροῖ τὴν δεξαμενήν;*

Ἔστωσαν χ, y καὶ ω οἱ χρόνοι (ἀριθμοὶ ὡρῶν), καθ' οὓς ἕκαστος τῶν κρουνῶν Α, Β, Γ πληροῖ μόνος τὴν δεξαμενήν.

Ὁ κρουνὸς Α, πληρῶν ἐν χ ὥραις ὅλην τὴν δεξαμενήν, ἐν 70 ὥραις πληροῖ τὸ μέρος $\frac{70}{\chi}$ τῆς δεξαμενῆς· ἐπίσης καὶ ὁ Β ἐν 70 ὥραις πληροῖ $\frac{70}{y}$ τῆς δεξαμενῆς· ἐπειδὴ δὲ οἱ Α καὶ Β πληροῦσι ἐν 70 ὥραις ὅλην τὴν δεξαμενήν, τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{70}{\chi}$ καὶ $\frac{70}{y}$ πρέπει νὰ ἰσῶται τῇ μονάδι· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1) \quad \frac{70}{\chi}+\frac{70}{y}=1.$$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν ἐκ τῶν λοιπῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος τὰς ἐξισώσεις

$$(2) \quad \frac{84}{\chi}+\frac{84}{\omega}=1.$$

$$(3) \quad \frac{140}{y}+\frac{140}{\omega}=1.$$

Αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (1), (2), (3) ἀποτελοῦσι σύστημα μὴ πρωτοβάθμιον· πρὸς ἐπίλυσιν δ' αὐτοῦ ποιοῦμεν χρῆσιν βοηθητικῶν ἀγνώστων, τιθέντες (§ 134, Δ'.) $\rho=\frac{1}{\chi}$, $\sigma=\frac{1}{y}$, $\tau=\frac{1}{\omega}$· ἔχομεν οὕτω τὰς ἑξῆς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις

$$70\rho+70\sigma=1$$
$$84\rho+84\tau=1$$
$$140\sigma+140\tau=1,$$

ἐξ ὧν $\rho=\frac{1}{105}$, $\sigma=\frac{1}{210}$, $\tau=\frac{1}{420}$· ἀντιστρέφοντες τὰς τιμὰς αὐτὰς, ἔχομεν τὰς τῶν ζητουμένων, ἤτοι $\chi=105$, $y=210$, $\tau=420$.

§ 148. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. *Βόες 8 τρώγουσιν ἐν 7 ἑβδομάσι τὸν χόρτον 4 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἀναβλαστάνει κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο· ἄλλοι 9 βόες τρώγουσιν ἐν 8 ἑβδομάσι τὸν χόρτον 5 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἀναβλαστάνει κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο. Πόσοι βόες τρώγουσι τὸν χόρτον 6 στρεμμάτων ἐν 12 ἑβδομάσι, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ ἀναβλαστάνοντος κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο;*

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς βοῶν. Ὅπως εὐκόλως εὕρωμεν ἐξισώσεις, ἐξ ὧν ἂν πορισθείημεν τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου, λάβωμεν καὶ ἕτερον βοηθητικὸν ἄγνωστον, τὸ ποσὸν τοῦ φυομένου χόρτου ἐν ἑνὶ στρέμματι καὶ ἐν μιᾷ ἑβδομάδι· σημειώσωμεν δ' αὐτὸν διὰ y. Ὡς μονάδα δὲ ποσοῦ χόρτου λάβωμεν τὸν ὑπάρχοντα ἐν ἑνὶ στρέμματι.

Οἱ 8 βόες τρώγουσιν ἐν 7 ἑβδομάσι τὸν χόρτον 4 στρεμμάτων, ἤτοι 4, καὶ ὅσον ἀναβλαστάνει κατὰ τὸν χρόνον αὐτὸν, ὅπερ εἶναι $28y$ (*)· τρώγουσι λοιπὸν τὸ ὅλον $4+28y$· ὅθεν εἷς βοῦς ἐν μιᾷ ἑβδομάδι τρώγει $\frac{4+28y}{56}$, ἢ ἁπλούστερον $\frac{1+7y}{14}$. Ἐπίσης ὁ χόρτος ὅλος, ὃν ἐσθίουσιν οἱ 9 βόες ἐν 8 ἑβδομάσιν, εἶναι $5+40y$· ὅθεν 1 βοῦς ἐν 1 ἑβδομάδι τρώγει $\frac{5+40y}{72}$. Ἔχομεν λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ βοηθητικοῦ ἀγνώστου y τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{1+7y}{14}=\frac{5+40y}{72},$$

ἐξ ἧς $y=\frac{1}{28}$.

Ὁ χόρτος ὅλος, ὃν καταναλίσκουσιν οἱ χ βόες, εἶναι 6 +

(*) Ὑποτίθεται ὅτι ἡ βλάστησις εἶναι ἀνάλογος τοῦ χρόνου.

$6\times12\times y=6+\dfrac{6\times12}{28}=\dfrac{60}{7}$· ὅθεν 1 βοῦς ἐν 1 ἑβδομάδι τρώγει $\dfrac{60}{84\chi}$, εἴτε $\dfrac{5}{7\chi}$· ἀλλ' εὕρομεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ αὐτὸ ποσὸν εἶναι $\dfrac{1+7y}{14}$, εἴτε ἀντικαθισταμένης τῆς τιμῆς τοῦ y, $\dfrac{5}{56}$· ἄρα

$$\frac{5}{7\chi}=\frac{5}{56},$$

ὅθεν $\chi=8$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1. Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ λόγος εἶναι 2:3· αὐξανομένου δ' ἑκατέρου κατὰ 4, ὁ λόγος γίνεται 4:5 (4 καὶ 6).

2. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς χ, y, ω, ὧν ὁ μεσαῖος y ὑπερέχει τὸν χ καθ' ὅσον καὶ ὁ ω τὸν y, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν τρίτον εἶναι 5:9, τὸ δὲ ἄθροισμα καὶ τῶν τριῶν 63 ($\chi=15$, $y=21$, $\omega=27$).

3. Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ μὲν λόγος εἶναι 3:4, τὸ δὲ γινόμενον δωδεκαπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος (21 καὶ 28).

4. Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορά, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5 (10 καὶ 2).

Τὰ δύο τελευταῖα προβλήματα ἄγουσιν εἰς ἐξισώσεις πρωτοβαθμίους μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου.

5. Ἔθετό τις εἰς τόκον κεφάλαιόν τι· ἄλλος, καταθέμενος 10000 πλέον τοῦ πρώτου ἐπὶ ἐπιτοκίῳ ἀνωτέρῳ κατὰ 1, λαμβάνει κατ' ἔτος τόκον ὑπερέχοντα τὸν τοῦ πρώτου κατὰ 800· τρίτος, καταθέμενος 15000 πλέον τοῦ πρώτου ἐπὶ ἐπιτοκίῳ κατὰ 2 ἀνωτέρῳ τοῦ πρώτου, λαμβάνει κατ' ἔτος τόκον ὑπερέχοντα τὸν τοῦ πρώτου κατὰ 1500. Ζητοῦνται τὰ κεφάλαια τῶν δανειστῶν καὶ τὰ ἐπιτόκια.

Λαμβάνομεν δύο μόνον ἀγνώστους, τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ τὸ ἐπιτόκιον· εὑρίσκομεν δὲ κεφάλαιον 30000, ἐπιτόκιον 4.

6. Τραπεζίτης ἔχει δύο ἤδη νομισμάτων· α τοῦ πρώτου εἴδους ἢ β τοῦ δευτέρου ἰσοδυναμοῦσιν 1 τρίτῳ νομίσματι· πόσα πρέπει νὰ λάβῃ ἀφ' ἑκατέρου τῶν δύο πρώτων εἰδῶν, ἵνα ἔχῃ τὴν ἀξίαν τοῦ τρίτου νομίσματος διὰ γ ἀριθμοῦ νομισμάτων;

Ἐκ τοῦ πρώτου $\dfrac{\alpha(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta}$, ἐκ τοῦ δευτέρου $\dfrac{\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha-\beta}$.

7. Ὀρθογωνίου ἡ βάσις ἔχει πρὸς τὸ ὕψος ὡς μ:ν. Ἐὰν αὐξηθῶσιν ἡ μὲν βάσις κατὰ α, τὸ δὲ ὕψος κατὰ β, τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει κατὰ π. Ζητοῦνται αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

Βάσις $\dfrac{\mu(\pi-\alpha\beta)}{\alpha\nu+\beta\mu}$, ὕψος $\dfrac{\nu(\pi-\alpha\beta)}{\alpha\nu+\beta\mu}$.

8. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σφυρηλάτου σιδήρου εἶναι 7.79, τὸ δὲ τοῦ ἀνθρακίτου 1,8. Πόσας πρέπει νὰ λάβωμεν μνᾶς ἐξ ἑκατέρας τῶν οὐσιῶν αὐτῶν, ἵνα σχηματίσωμεν μίγμα ἕλκον 150 μνᾶς καὶ ἔχον εἰδικὸν βάρος 6,86; (Σιδήρου μνᾶς 143 μετὰ κλάσματος, τὸ δὲ λοιπὸν ἀνθρακίτου).

9. Ἐγγράψαι ἐν δεδομένῳ τριγώνῳ ὀρθογώνιον ὅμοιον δεδομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστω χ τὸ ὕψος καὶ y ἡ βάσις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, α ὁ λόγος τοῦ ὕψους πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεδομένου ὀρθογωνίου, β καὶ γ τὸ ὕψος καὶ ἡ βάσις τοῦ δεδομένου τριγώνου. Εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\gamma+\beta},\ y=\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma+\beta}.$$

10. Ἔστω ἡ ἑξῆς σειρὰ ἀριθμῶν

$$\alpha+\beta,\ \alpha\varkappa+\beta\lambda,\ \alpha\varkappa^2+\beta\lambda^2,\ \alpha\varkappa^3+\beta\lambda^3,\ \alpha\varkappa^4+\beta\lambda^4,\ \ldots..$$

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς χ καὶ y τοιούτους, ὥστε ἕκαστος τῶν ὅρων τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς νὰ ἰσῶται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τοῦ ἀμέσως προηγουμένου ὅρου ἐπὶ χ καὶ τοῦ ἔτι προηγουμένου ἐπὶ y ($\chi=\varkappa+\lambda$, $y=-\varkappa\lambda$).

11. Ἔστω ἡ ἑξῆς σειρὰ ἀριθμῶν

$$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\varkappa+\beta\lambda+\gamma\mu,\ \alpha\varkappa^2+\beta\lambda^2+\gamma\mu^2,\ \alpha\varkappa^3+\beta\lambda^3+\gamma\mu^3,\ \ldots..$$

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς χ, y, ω τοιούτους, ὥστε ἕκαστος τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς αὐτῆς νὰ ἰσῶται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τοῦ ἀμέσως προηγουμένου ἐπὶ χ, τοῦ ἔτι προηγουμένου ἐπὶ y καὶ τοῦ κατὰ δύο θέσεις ἡγουμένου ἐπὶ ω [$\chi=\varkappa+\lambda+\mu$, $y=-(\varkappa\lambda+\varkappa\mu+\lambda\mu)$, $\omega=\varkappa\lambda\mu$].

12. Παῖκται μ συνεφώνησαν νὰ διπλασιάζῃ ἕκαστος τῶν ἡττωμένων τὸ κεφάλαιον, ὅπερ τυγχάνει ἔχων ἕκαστος τῶν ἄλλων. Ἡττήθη διαδοχικῶς ἕκαστος αὐτῶν ἅπαξ καὶ ἐπὶ τέλους ἕκαστος εὑρέθη κατέχων τὸ αὐτὸ κεφάλαιον α. Πόσον ἐκέκτητο ἕκαστος ἐν ἀρχῇ τοῦ παιγνιδίου;

Ὁ πρῶτος $\dfrac{\alpha(1+\mu 2^{\mu-1})}{2^\mu}$, ὁ δεύτερος $\dfrac{\alpha(1+\mu 2^{\mu-2})}{2^\mu}$, ὁ τρίτος $\dfrac{\alpha(1+\mu 2^{\mu-3})}{2^\mu}$, ...

ὁ $\nu^{\text{ος}}$ $\dfrac{\alpha(1+\mu 2^{\mu-\nu})}{2^\mu}$, ... ὁ τελευταῖος $\dfrac{\alpha(1+\mu)}{2^\mu}$.

13. Εὑρεῖν τὰς τρεῖς πλευρὰς τριγώνου, γνωστῶν οὐσῶν τῶν ἀποστάσεων ἑκάστης τῶν κορυφῶν ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Ἔστωσα α β, γ αἱ ἀποστάσεις καὶ χ, y, ω αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ (π. χ. α εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς χ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ἀπέναντι γωνίας). Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματός εἰσι

$$y^2+\omega^2=2\alpha^2+\frac{\chi^2}{2}$$

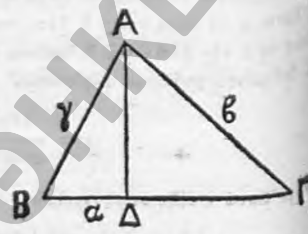
$$\chi^2+\omega^2=2\beta^2+\frac{y^2}{2}$$

$$\chi^2+y^2=2\gamma^2+\frac{\omega^2}{2}.$$

Ἐπιλύομεν αὐτὰς ὡς πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀγνώστων καὶ εὑρίσκομεν

$$\chi^2=\frac{4}{9}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2),\ y^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2),\ \omega^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2).$$

14. Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου, εὑρεῖν τὸ ἐμβαδόν.



Ἔστωσαν α, β, γ αἱ πλευραί. Ἀχθήτω ἡ κάθετος ΑΔ καὶ ληφθήτωσαν βοηθητικοὶ ἄγνωστοι ΑΔ$=\omega$, ΓΔ$=y$. Κατὰ γνωστὸν τῆς Γεωμετρίας θεώρημα ἔχομεν $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha y$· ὅθεν $y=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$. Ἔχομεν ἐπίσης, τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ὄντος ὀρθογωνίου, $\omega=\beta^2-y^2=\sqrt{\beta^2-\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}}$. ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἴσον ὂν τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν βάσιν, εἶναι $\frac{1}{2}\alpha\times\sqrt{\beta^2-\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}}$. Ἡ παράστασις αὕτη δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν $\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)}$, ἥτις γράφεται καὶ οὕτω $\sqrt{\pi(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)}$, π οὔσης τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΔΥΝΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΩΝ ΤΟΥ Α΄. ΒΑΘΜΟΥ.

Προβλήματα ἀδύνατα.

§ 149. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἤγουν δὲν ὑπάρχουσιν ἀριθμοί, δι' ὧν νὰ πληρῶνται αἱ ἐν αὐτῷ συνθῆκαι, εἰς τὰς ἑξῆς ἐν γένει περιπτώσεις.

α΄. Ὅταν ἡ ἐξίσωσις ἢ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος ἦναι ἀδύνατον (§ 99, Σημ. Β΄. καὶ § 135).

β΄. Ὅταν ἡ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος τιμὴ ἑνὸς ἢ πλειόνων ἀγνώστων ἦναι ἀρνητική.

γ'. Ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, καίτοι θετικαί, δὲν καθιστῶσιν ἀπολύτους παραστάσεις τὰ μέλη πασῶν τῶν τοῦ προβλήματος ἐξισώσεων.

Ἰδοὺ παραδείγματα.

Α'. *Λέγει τις πρὸς ἕτερον· ἐὰν μοὶ δῷς 5 δραχμὰς, ἔξω ὅσα καὶ σύ· ὁ δ' ἀπεκρίνατο· ἔξω κἀγὼ, ὅσα καὶ σὺ, ἐὰν τὰ ἐμὰ αὐξηθῶσι κατὰ 10 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔχουσιν ἑκάτερος;*

Ἔστωσαν χ αἱ δραχμαὶ τοῦ πρώτου καὶ y αἱ τοῦ δευτέρου. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματός εἰσι

$$\chi+5=y-5$$
$$y+10=\chi\cdot$$

αἱ ἐξισώσεις αὗται δὲν ἔχουσι κοινὴν λύσιν· τὸ πρόβλημα λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον.

Β'. *Κύριός τις ἐμίσθωσεν ἐργάτην, ὅστις τὸ μὲν θέρος εἰργάσθη 13 ἡμέρας, τὸν δὲ χειμῶνα 17. Τὸ ἡμερομίσθιον, ὅπερ ἐπλήρωνεν αὐτῷ ὁ κύριος τὸ θέρος, ἦν κατὰ 2 δραχμὰς ἀνώτερον τοῦ κατὰ τὸν χειμῶνα· καὶ τὸ μὲν θέρος ἐκράτησεν ἀπὸ τῶν μισθῶν αὐτοῦ 22 δραχμὰς διὰ ζημίας τινὰς, ὑπὸ τούτου ἐπενεχθείσας· τὸν δὲ χειμῶνα προσέθηκεν εἰς τοὺς μισθοὺς τοῦ ἰδίου 28 δραχμὰς πρὸς ἀμοιβὴν τοῦ ζήλου του. Συνέβη οὕτω νὰ λάβῃ ὁ ἐργάτης τὸ αὐτὸ ποσὸν τό τε θέρος καὶ τὸν χειμῶνα. Πόσον ἦν τὸ ἡμερομίσθιον κατὰ τὸ θέρος;*

Ὄντος χ τοῦ ζητουμένου, ὁ ἐργάτης τὸ μὲν θέρος ἔλαβε $13\chi-22$, τὸν δὲ χειμῶνα $17(\chi-2)+28$· ὅθεν

$$13\chi-22=17(\chi-2)+28\cdot$$

ἐντεῦθεν $\chi=-4$.

Ὁ ἄγνωστος καὶ τὰ μέλη τῆς τοῦ προβλήματος ἐξισώσεως, παριστῶντες ποσὰ πραγματικά, εἶναι ἀριθμοὶ ἀπόλυτοι· ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ ἀγνώστου πρέπει νὰ ἦναι ἀπόλυτος ἀριθμός· ἀλλ' οὔσης ἀρνητικῆς τῆς εὑρεθείσης τιμῆς, τῆς δὲ προκειμένης ἐξισώσεως μὴ ἐχούσης ἄλλην λύσιν (§ 99), δὲν ὑπάρχει θετικὸς ἀριθμὸς ἐπαληθεύων τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν· τὸ πρόβλημα ἄρα εἶναι ἀδύνατον.

Γ'. *Ἐγένετο δὶς ἔρανος ὑπὲρ τῶν πτωχῶν συνοικίας τινός·*

συνελέχθησαν δὲ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου ἐράνου 700 δραχμαί, ἐξ ὧν διενεμήθησαν ἀνὰ 10 εἰς ἕκαστον τῶν πτωχῶν, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τόσαι, ὥστε, προστεθεισῶν καὶ τῶν ὑπολειφθεισῶν μετὰ τὴν πρώτην διανομήν, συνεκεφαλαιώθησαν 500 δραχμαί, ἐξ ὧν διενεμήθησαν αὖθις εἰς ἕκαστον τῶν πτωχῶν ἀνὰ 8 καὶ ὑπελείφθησαν τόσαι, ὅσαι καὶ μετὰ τὴν πρώτην διανομήν. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν πτωχῶν.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἶναι

$$700-10\chi=500-8\chi,$$

ἐξ ἧς $\chi=100$. Ἡ τιμὴ αὕτη δὲν καθιστᾷ ἀπολύτους παραστάσεις τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως, ἅπερ νοοῦνται ὡς ἀπόλυτοι ἀριθμοί· μὴ ὑπαρχούσης δ' ἄλλης λύσεως, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω γενικῶν περιπτώσεων τὸ πρόβλημα εἴη ἂν ἀδύνατον καὶ κατὰ πολλὰς ἄλλας μερικωτέρας. Ἰδίως ἀναφέρομεν ἐνταῦθα ἐκείνην, καθ' ἣν εἷς ἢ πλείονες ἄγνωστοι πρέπει νὰ ἔχωσι τιμὰς ἀκεραίους. Ὅταν, φέρ' εἰπεῖν, εἷς τῶν ἀγνώστων παριστᾷ ἀριθμὸν ἀνδρῶν, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν ἡ ἐκ τῶν ἐξισώσεων συναγομένη τιμὴ τοῦ ἀγνώστου αὐτοῦ δὲν ἦναι ἀκέραιος. —Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον καὶ ἐὰν ὑπάρχωσιν ἐν αὐτῷ συνθῆκαι πλείονες τῶν ἀναγκαίων πρὸς εὕρεσιν ἐξισώσεων, αἵτινες δὲν δύνανται νὰ πληρῶνται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ συστήματος τιμῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ὅταν οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἐξισώσεων παριστῶνται διὰ γραμμάτων ἐμφαινόντων ἀπολύτους ἀριθμούς, ἡ τιμὴ ἀγνώστου τινὸς δύναται νὰ ἦναι ἤτοι καθόλου ἀρνητική, ἢ ἀρνητικὴ μόνον ἐπὶ μερικῶν ὑποθέσεων. Π. χ. ἡ τιμὴ $\chi=\dfrac{-2\beta}{3\alpha}$ εἶναι πάντοτε ἀρνητική, ἡ δὲ $\chi=\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}$ μόνον ὅταν $\alpha<\beta$. Ἕπεται ὅτι ἐπὶ γενικῶν προβλημάτων, εἰ μὲν ἡ λύσις εἶναι καθόλου ἀρνητική, τὸ πρόβλημα εἶναι καθόλου ἀδύνατον, εἰ δ' ἐπὶ μερικῶν μόνον ὑποθέσεων, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον κατ' ἐκείνας μόνον τὰς ὑποθέσεις.

Περὶ τοῦ συμβόλου $\dfrac{K}{0}$.

§. 150. Οἱ τύποι τῶν τιμῶν ἑνὸς ἢ πλειόνων ἀγνώστων εἴτε μιᾶς μόνης *γενικῆς* ἐξισώσεως, εἴτε συστήματος *γενικῶν* ἐξισώσεων, δυνατὸν νὰ λαμβάνωσι σχῆμα τοιόνδε $\frac{K}{0}$ (κλάσματος, δηλονότι, οὗ ὁ παρονομαστὴς εἶναι 0, οὐχὶ δὲ καὶ ὁ ἀριθμητής), ὅταν γίνωνται ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν διὰ γραμμάτων παριστωμένων γνωστῶν ἀριθμῶν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις ἢ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων ἀποβαίνει *ἀδύνατον* ἐπὶ ταῖς γινομέναις ὑποθέσεσι.

Ἔστω, π. χ., ἡ ἐξίσωσις (1) $\alpha\chi = 2\beta + \gamma + 3\chi$, ἐξ ἧς

$$\chi = \frac{2\beta + \gamma}{\alpha - 3}.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\alpha = 3$, ὁ τύπος τῆς τιμῆς ταύτης ἀποβαίνει $\frac{2\beta + \gamma}{0}$.

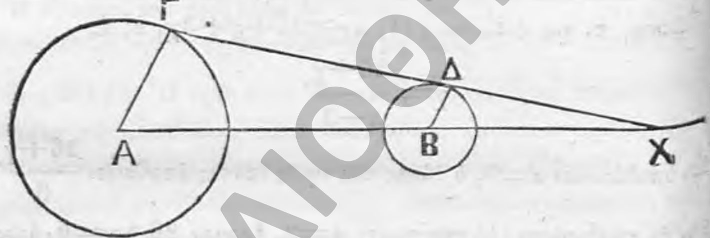
Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει (1) ποιήσωμεν $\alpha = 3$, ἔχομεν $2\beta + \gamma = 0$, ὅπερ εἶναι ἄτοπος ἰσότης, ἐφ' ὅσον $2\beta + \gamma$ εἶναι διάφορον τοῦ 0.

Ἔστω ἐν γένει $\frac{A}{B}$ ἡ τιμὴ τοῦ χ (ἐξισώσεως ἢ συστήματος ἐξισώσεων) πρὸ τῶν ὑποθέσεων, τῶν καθιστωσῶν αὐτὴν $\frac{K}{0}$. Ἡ ἐξίσωσις $\chi = \frac{A}{B}$, εἴτε ἡ ἰσοδύναμος $B\chi = A$, εἶναι συνέπεια τῶν προτεθεισῶν ἐξισώσεων· ἐπὶ ταῖς ὑποθέσεσι λοιπόν, δι' ὧν τὸ μὲν A καθίσταται ἴσον τῷ K, τὸ δὲ B μηδενίζεται, ἔχομεν τὴν ἄτοπον ἰσότητα $0 = K$, ἥτις εἶναι συνέπεια τῶν ἐξισώσεων, ἃς εὑρίσκομεν ποιοῦντες τὰς αὐτὰς ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων· τὸ σύστημα λοιπὸν ἀποβαίνει τότε ἀδύνατον.

§ 151. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ τινὸς ἀγνώστου γενικοῦ προβλήματος ἀποβαίνῃ $\frac{K}{0}$ συνεπείᾳ ὑποθέσεων, γινομένων ἐπὶ τῶν γνωστῶν, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον κατ' ἐκείνας τὰς ὑποθέσεις, ἐὰν οἱ ἄγνωστοι τῶν ἐξισώσεων ἦναι αὐτοὶ ἐκεῖνοι, οἵτινες ζητοῦνται καὶ διὰ τοῦ προβλήματος.

Ἀλλ' ἐὰν οἱ ἄγνωστοι, ὧν αἱ τιμαὶ ἀποβαίνουσι $\frac{K}{0}$, δὲν ἦναι οἱ καθ' αὑτὸ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος, τὸ πρόβλημα δυνατὸν νὰ ἦναι ἐπιδεκτικὸν λύσεως· ἰδοὺ παράδειγμα.

Δοθέντων δύο κύκλων Α καὶ Β, ὧν αἱ ἀκτῖνες α καὶ β, ἡ δ' ἀπόστασις τῶν κέντρων δ, ἀγαγεῖν ἀπό τινος σημείου Γ τῆς περιφερείας τοῦ Α εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν τοῦ Β εἰς Δ οὕτως, ὥστε τὰς ἀκτῖνας ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παραλλήλους.



Ἔστω Χ τὸ σημεῖον, ἔνθα ἡ ΓΔ συναντᾷ τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν ΑΒ. Σημειωθήτω διὰ χ ἡ ἀπόστασις τοῦ Χ ἀπὸ τοῦ Α. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἰσὶ παράλληλοι, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\chi : \chi - \delta :: \alpha : \beta \cdot$$

ὅθεν

$$(1) \quad \chi = \frac{\alpha\delta}{\alpha - \beta} \cdot$$

Ὅταν $\alpha = \beta$, ἡ τιμὴ αὕτη ἀποβαίνει $\frac{\alpha\delta}{0}$· ἡ ποσότης λοιπόν, ἡ παριστωμένη διὰ χ, δὲν ὑπάρχει πλέον· ἀλλ' οὐχ ἧττον τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, ἡ δὲ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι τότε παράλληλος τῇ ΑΒ, ὡς δῆλον ἐκ τοῦ σχήματος.

Ὁ λόγος, δι' ὃν τὸ προκείμενον πρόβλημα εἶναι δυνατόν, ἔτι καὶ ὅταν ὁ ληφθεὶς ὡς ἄγνωστος δὲν ὑπάρχῃ, εἶναι ὁ ἑξῆς. Ἐν τῷ προβλήματι ζητεῖται κυρίως εὐθεῖα *ἀπροσδιόριστος*, διερχομένη διὰ τοῦ Γ· ἵνα δ' εὕρωμεν αὐτήν, ἐθεωρήσαμεν ὡς ἄγνωστον τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασιν τοῦ σημείου, ἔνθα αὕτη συναντᾷ τὴν ΑΒ· ἀλλ' ὅταν ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ἦναι παράλληλος τῆς ΑΒ, τὸ σημεῖον αὐτὸ δὲν ὑπάρχει, ἑπομένως οὔτε ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Α, ἐνῷ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ὑπάρχει.

Διὰ τί τὸ σύμβολον $\frac{K}{0}$ λέγεται σύμβολον τοῦ ἀπείρου.

§ 152. Ἐν τῷ κατὰ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εὑρεθέντι τύπῳ

$$(1)\quad \chi=\frac{\alpha\delta}{\alpha-\beta}$$

νοήσωμεν τὸν β μεταβαλλόμενον καὶ τείνοντα ἀπεριορίστως πρὸς τὸν α, ὅστις νοείσθω ἀμετάβλητος, ὡς καὶ ὁ δ. Τὰ ἐξαγόμενα βαίνουσιν αὐξάνοντα ἀπεριορίστως· διότι ὁ μὲν ἀριθμητὴς αδ εἶναι ἀμετάβλητος, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἐλαττοῦται ἀπεριορίστως. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ χ αὐξάνει ἀπεριορίστως, ὅταν ὁ β τείνῃ πρὸς τὸν α.

Ὅταν ἐκ δύο συμμεταβλητῶν ποσῶν Α καὶ Β, τὸ μὲν Α τείνῃ πρὸς ὅριόν τι κ, τὸ δὲ Β συμμεταβαλλόμενον αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, τότε λέγομεν ὅτι *τὸ Β γίνεται ἄπειρον, ὅταν τὸ Α γένηται ἴσον τῷ κ*. Διὰ τῆς ἐκφράσεως ταύτης δὲν ἐννοοῦμεν κυρίως κατάστασίν τινα τοῦ Β, ὅταν τὸ Α γένηται κ (τὸ Β, ὡς ποσόν, δὲν ὑπάρχει τότε), ἀλλὰ τὸν τρόπον, καθ' ὃν μεταβάλλεται τὸ Β, ὅταν τὸ Α τείνῃ πρὸς τὸ ὅριον κ.

Ποιοῦντες χρῆσιν τῆς ἐκφράσεως ταύτης ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1), λέγομεν ὅτι *ὁ χ γίνεται ἄπειρος, ὅταν $\alpha=\beta$*.

Κατ' αὐτὸν ἐν γένει τὸν τρόπον μεταβάλλονται οἱ τύποι, ὅταν τὰ ἐν αὐτοῖς γράμματα μεταβάλλωνται τείνοντα πρὸς ὅρια, δι' ὧν οὗτοι λαμβάνουσι τὸ σχῆμα $\frac{K}{0}$. Διὰ τοῦτο, ὅταν τύπος τις ἀποβαίνῃ $\frac{K}{0}$ διὰ μερικοτήτων, εἰσαγομένων ἐν αὐτῷ, λέγομεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ἡ παρισταμένη διὰ τοῦ τύπου αὐτοῦ, ἀποβαίνει τότε ἄπειρος, ἐννοοῦντες οὕτως οὐχὶ τιμήν τινα τοῦ ἀγνώστου κατὰ τὰς θεωρουμένας περιπτώσεις, ἀλλὰ τὸν τρόπον, καθ' ὃν συμμεταβάλλεται, ὅταν οἱ γνωστοὶ τείνωσι πρὸς τὰ ὅρια, δι' ὧν ὁ τύπος ἀποβαίνῃ $\frac{K}{0}$.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ παράστασις $\frac{K}{0}$ ἐκλήθη *σύμβολον* τοῦ *ἀπείρου*. Τὸ σύμβολον τοῦ ἀπείρου σημειοῦται καὶ οὕτω ∞.

Κατὰ τὰ ῥηθέντα ἐν § 151, ὅταν ἡ τιμὴ ἀγνώστου τινὸς γίγνηται ἄπειρος, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ὅταν ὁ αὐτὸς ἄγνωστος ζητῆται καὶ διὰ τοῦ προβλήματος· ἀλλ' ὅταν ὁ ἄγνωστος τῶν ἐξισώσεων ἦναι βοηθητικός, εἴτε ἔμμεσος ἄγνωστος, τὸ πρόβλημα δὲν εἶναι πάντοτε ἀδύνατον, ὡς εἴδομεν ἐν τῷ αὐτῷ παραγράφῳ.

Προβλήματα ἀπροσδιόριστα.

§ 153. Πρόβλημά τι λέγεται ἀπροσδιόριστον, ὅταν ὑπάρχωσιν ἄπειροι ἀριθμοὶ πληροῦντες τὰς ἐν αὐτῷ συνθήκας. Συμβαίνει τοῦτο εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις.

α΄. Ὅταν ἡ μοναδικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος ἦναι κυρίως ταυτότης.

β΄. Ὅταν ἡ μοναδικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος περιέχῃ ὑπὲρ τὸν ἕνα ἄγνωστον καὶ δὲν ἦναι ἄτοπος.

γ΄. Ὅταν αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος ἀποτελῶσι σύστημα ἀπροσδιόριστον (§ 138).

Κατὰ τὴν δευτέραν καὶ τρίτην περίπτωσιν πρέπει αἱ ἐξισώσεις αἵτινές εἰσι πάντοτε ἐπιδεκτικαὶ ἀπείρων λύσεων, νὰ ἦναι ἐν τῷ ... ἐπιδεκτικαὶ καὶ *θετικῶν* λύσεων ἀπείρων.

Ἰδού τινα παραδείγματα.

Α΄. Ὑπηρέτης ἔλαβε διὰ μὲν τοὺς πρώτους πέντε μῆνας ὑπηρεσίας δραχμὰς 130 καὶ μίαν περισκελίδα, διὰ δὲ τοὺς ἀκολούθους ἑπτὰ δραχμὰς 175 καὶ ἕνα ἐπενδύτην. Ζητοῦνται αἱ τιμαὶ τῆς περισκελίδος καὶ τοῦ ἐπενδύτου.

Σημειοῦντες διὰ χ καὶ y τὰς ζητουμένας τιμάς, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{130+\chi}{5}=\frac{175+y}{7}.$$

Αὕτη εἶναι ἡ μόνη ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος· ἐπειδὴ δὲ περιέχει δύο ἀγνώστους καὶ εἶναι ἐπιδεκτικὴ ἀπείρων θετικῶν λύσεων, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

Β΄. *Ὅταν ἐνυμφεύθη ὁ πατήρ μου, εἶπέ τις, εἶχε τὸ ἥμισυ τῆς παρούσης ἡλικίας. Ἐὰν ἡ μήτηρ μου ἀπέθνησκε πέντε ἔτη πρότερον, ὁ χρόνος τῆς χηρείας ἤθελεν εἶσθαι ἴσος τῷ τῆς συζυγίας· τὸ αὐτὸ ἤθελε συμβῇ καὶ ἂν ἐνυμφεύετο 10 ἔτη ἀργότερον. Ζητεῖται ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς, ὁ χρόνος τῆς χηρείας καὶ ὁ τῆς συζυγίας.*

Ἔστω χ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς, y ὁ χρόνος τῆς συζυγίας καὶ ω ὁ τῆς χηρείας. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματός εἰσι

$$y+\omega=\frac{\chi}{2}$$

$$y-5=\omega+5$$

$$y-10=\omega.$$

Αἱ δύο τελευταῖαι εἰσὶν ἰσοδύναμοι· παραλείποντες λοιπὸν τὴν τελευταίαν, ἔχομεν δύο ἐξισώσεις μετὰ τριῶν ἀγνώστων. Διδόντες τῷ y τιμὰς θετικὰς ἀνωτέρας μὲν τοῦ 10, ἀλλ' οἱασδήποτε, συνάγομεν θετικὰς τιμὰς διά τε τὸν ω καὶ διὰ τὸν χ· αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν εἰσὶν ἐπιδεκτικαὶ ἀπείρων θετικῶν λύσεων· ὅθεν τὸ πρόβλημα ἀπροσδιόριστον.

Περὶ τοῦ συμβόλου $\frac{0}{0}$.

§ 154. Ὅταν οἱ τύποι τῶν λύσεων *γενικῶν* ἐξισώσεων λαμβάνωσι σχῆμα τοιόνδε $\frac{0}{0}$ (κλάσματος, δηλονότι, οὗ ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἰσὶ 0) συνεπείᾳ ὑποθέσεων γινομένων ἐπὶ τῶν διὰ γραμμάτων παριστωμένων γνωστῶν ἀριθμῶν, αἱ ἐξισώσεις ἀποβαίνουσιν ὡς *ἐπὶ τὸ πολὺ* ταυτότητες ἢ ἀποτελοῦσι σύστημα ἀπροσδιόριστον κατὰ τὰς ὑποθέσεις αὐτάς.

Ἔστω, π. χ., ἡ γενικὴ ἐξίσωσις (1) $\alpha\chi=2\beta-\gamma+3\chi$, ἐξ ἧς $\chi=\frac{2\beta-\gamma}{\alpha-3}$. Ἐὰν ὑποθέσωμεν $2\beta=\gamma$ καὶ $\alpha=3$, ἡ τιμὴ αὕτη λαμβάνει τὸ σχῆμα $\frac{0}{0}$. Ἐὰν τὰς ὑποθέσεις ταύτας ποιήσωμεν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως (1), ἔχομεν τὴν ταυτότητα $3\chi=3\chi$.

Ἐν γένει οὔσης $\frac{A}{B}$ τῆς τιμῆς τοῦ χ πρὸ τῶν ὑποθέσεων, τῶν καθιστωσῶν αὐτὴν $\frac{0}{0}$, ἡ ἐξίσωσις $\chi=\frac{A}{B}$, εἴτε ἡ ἰσοδύναμος $B\chi=A$ εἶναι συνέπεια τῶν ἐξισώσεων, ἐξ ὧν προέκυψε· ὅταν λοιπὸν ποιήσωμεν τὰς ὑποθέσεις, δι' ὧν ὅ,τε A καὶ ὁ B μηδενίζεται, ἔχομεν τὴν ταυτότητα $0=0$, ἥτις εἶναι συνέπεια τῶν ἐξισώσεων, ἃς ἔχομεν ποιοῦντες τὰς αὐτὰς ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων· αἱ τελευταῖαι λοιπὸν ἐξισώσεις δυνατὸν ν' ἀποτελῶσι σύστημα ἀπροσδιόριστον (§ 139).

§ 155. Δυνατὸν ἐν τούτοις, ἐνῷ τύπος τις ἀποβαίνει $\frac{0}{0}$, συνεπείᾳ ὑποθέσεων γινομένων ἐπὶ τῶν γνωστῶν γενικῶν ἀριθμῶν, νὰ μὴ ἀποβαίνῃ τοιοῦτος, ὅταν γραφῇ κατ' ἄλλο σχῆμα.

Ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι, ἐπιλύοντες ἐξίσωσίν τινα γενικὴν μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν $\chi=\frac{\alpha^2-\alpha}{3\alpha-3}$, ἥτις ἀποβαίνει $\frac{0}{0}$ ὅταν $\alpha=1$· ἀλλ' ὁ αὐτὸς τύπος γράφεται καὶ οὕτω $\frac{\alpha(\alpha-1)}{3(\alpha-1)}$, ἤ, ἐξαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος $\alpha-1$, $\frac{\alpha}{3}$· ἡ δὲ παράστασις αὕτη δὲν γίνεται $\frac{0}{0}$, ὅταν $\alpha=1$.

Ἐπίσης ὁ τύπος $\frac{2(\alpha-1)^2}{3(\alpha-1)}$ ἀποβαίνει $\frac{0}{0}$, ὅταν $\alpha=1$· ἀλλὰ διαιρουμένων τῶν δύο ὅρων διὰ $\alpha-1$, ὁ τύπος οὗτος λαμβάνει τὸ σχῆμα $\frac{2(\alpha-1)}{3}$· ὅθεν εἶναι 0, ὅταν $\alpha=1$, Ὁ τύπος $\frac{2(\alpha-1)}{3(\alpha-1)^2}$ γίνεται $\frac{0}{0}$, ὅταν $\alpha=1$· ἀλλ' ἐὰν ἡ αὐτὴ ὑπόθεσις γένηται ἐπὶ τοῦ ἰσοδυνάμου $\frac{2}{3(\alpha-1)}$, εὑρίσκομεν $\frac{2}{0}$, ὅταν $\alpha=1$. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (ἢ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων), ὅθεν ἠθέλομεν πορισθῇ τοιαύτην τιμήν, εἶναι ἀνεπίδεκτος λύσεως.

Ἐν γένει ὅταν τύπος τις ἔχῃ σχῆμα κλάσματος $\frac{A}{B}$, οὗ οἱ ὅροι A καὶ B ἔχωσι κοινὸν παράγοντα, ὅστις μηδενίζεται συνεπείᾳ μερικοτήτων γινομένων ἐπὶ τῶν γενικῶν ἀριθμῶν, ὁ μὲν τύπος αὐτὸς ἀποβαίνει $\frac{0}{0}$ συνεπείᾳ τῶν μερικοτήτων αὐτῶν, ἀλλ' ὁ προκύπτων μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ κοινοῦ παράγοντος δυνατὸν νὰ μὴ ἀποβαίνῃ τοιοῦτος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑπάρχει ἄλλος γενικώτερος λόγος, δι' ὅν, ὅταν τύπος τις ἀποβαίνῃ $\frac{0}{0}$, ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι ὡρισμένη ἢ ἄπειρος. Ὅταν οἱ δύο ὅροι κλάσματός τινος ἀποβαίνωσιν ἐν ταὐτῷ 0, συνεπείᾳ ἰδιαιτέρων τιμῶν τῶν ἐν τοῖς ὅροις αὐτοῖς γραμμάτων, ἐὰν νοήσωμεν τὰ γράμματα αὐτὰ μεταβαλλόμενα καὶ τείνοντα πρὸς τὰς ἰδιαιτέρας ἐκείνας τιμάς, τὸ πηλίκον τῶν δύο ὅρων, εἴτε τὸ κλάσμα, δυνατὸν νὰ τείνῃ πρὸς ὅριόν τι, ὅπερ εἶναι ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος, ὅταν αὐτὸ λαμβάνῃ τὸ σχῆμα $\frac{0}{0}$· δυνατὸν δὲ καὶ ν' αὐξάνῃ ἀπεριορίστως. Περὶ τούτου δὲν δυνάμεθα νὰ διαλάβωμεν πλείονα ἐνταῦθα.

§ 156. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ ἀγνώστου τινὸς γενικοῦ προβλήματος ἀποβαίνῃ $\frac{0}{0}$, συνεπείᾳ ὑποθέσεων γινομένων ἐπὶ τῶν γενικῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, δυνατὸν ἢ ἀδύνατον κατὰ τὰς περιστάσεις.

Διὰ τοῦτο τὸ σύμβολον $\frac{0}{0}$ ἐκλήθη *σύμβολον τοῦ ἀπροσδιορίστου.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ Α΄. ΒΑΘΜΟΥ.

Ὁρισμοί.

§ 157. *Ἁπλᾶ* μὲν προβλήματα θέλομεν καλεῖ ἐκεῖνα, ὧν αἱ ἐκφωνήσεις, οὐδὲν ἀόριστον ἢ γενικὸν περιέχουσαι, ἄγουσιν εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν ἢ εἰς ἓν μόνον σύστημα ἐξισώσεων· τοιαῦτα εἶναι πάντα τὰ μέχρι τοῦδε προταθέντα.

Σύνθετα δὲ προβλήματα θέλομεν καλεῖ ἐκεῖνα, ὧν αἱ ἐκφωνήσεις περιέχουσι γενικά τινα ἢ ἀόριστα, ἅπερ μερικεύοντες ἢ ὁρίζοντες πολλαχῶς κατ' ἀρέσκειαν, εὑρίσκομεν διαφόρους ἐξισώσεις ἢ συστήματα ἐξισώσεων.

Ἰδοὺ παράδειγμα συνθέτου γενικοῦ προβλήματος μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου.

Τρία κινητὰ κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μετὰ ταχυτήτων τ, τ΄, τ΄΄. Κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν αἱ ἀποστάσεις τῶν κινητῶν αὐτῶν ἀπό τινος σημείου Ο τῆς εὐθείας ταύτης, ἀφ' οὗ ἀνέκαθεν αὐτὰ ἀπομακρύνονται, εἰσὶν α, α΄, α΄΄ κατὰ δ' ἄλλην τινὰ χρονικὴν στιγμὴν τὸ ἔχον ταχύτητα τ ἀπέχει τοῦ σημείου Ο κατὰ τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων. Εὑρεῖν τὸν ἀπὸ τῆς μιᾶς μέχρι τῆς ἑτέρας στιγμῆς χρόνον.

Ἐν πρώτοις δὲν ὁρίζεται ἐν τῇ ἐκφωνήσει ταύτῃ τίς τῶν δύο χρονικῶν στιγμῶν εἶναι προτέρα τῆς ἑτέρας.

Ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἡ πρώτη μνημονευθεῖσα στιγμὴ ἡγεῖται τῆς δευτέρας. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος χρόνος. Εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου αὐτοῦ αἱ ἀποστάσεις τῶν κινητῶν ἀπὸ τοῦ Ο εἰσὶν $\alpha+\tau\chi$, $\alpha'+\tau'\chi$, $\alpha''+\tau''\chi$. Ἵνα ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν, ἀνάγκη νὰ ὁρίσωμεν ἔτι ποτέρα τῶν δύο τελευταίων ἀποστάσεων εἶναι μείζων· ἐὰν ἦναι ἡ $\alpha''+\tau''\chi$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1)\quad \alpha+\tau\chi=\tfrac{3}{5}(\alpha''+\tau''\chi-\alpha'-\tau'\chi)\cdot$$

ἐπὶ δὲ τῇ ἐναντίᾳ ὑποθέσει ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$(2)\quad \alpha+\tau\chi=\tfrac{3}{5}(\alpha'+\tau'\chi-\alpha''-\tau''\chi).$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δευτέρα στιγμὴ ἡγεῖται τῆς πρώτης, αἱ ἀποστάσεις τῶν κινητῶν ἀπὸ τοῦ O μετὰ τὸν χρόνον χ· εἰσὶν $\alpha-\tau\chi$, $\alpha'-\tau'\chi$, $\alpha''-\tau''\chi$· ἐπομένως ἔχομεν τότε τὰς ἐξισώσεις

$$(3)\quad \alpha-\tau\chi=\tfrac{3}{5}\,(\alpha''-\tau''\chi-\alpha'+\tau'\chi)$$

$$(4)\quad \alpha-\tau\chi=\tfrac{3}{5}\,(\alpha'-\tau'\chi-\alpha''+\tau''\chi),$$

τὴν μὲν (3), ὅταν $\alpha''-\tau''\chi>\alpha'-\tau'\chi$, τὴν δὲ (4), ὅταν $\alpha'-\tau'\chi>\alpha''-\tau''\chi$.

Χρῆσις τῶν ἀρνητικῶν λύσεων ἐν συνθέτοις προβλήμασιν, ἐφ' ὧν γίνονται δύο μόνον ὑποθέσεις, ἄγουσαι εἰς ἐξισώσεις ἢ συστήματα ἐξισώσεων διαφέροντα μόνον ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τινῶν ἀγνώστων.

§ 158. Συχνῶς παρουσιάζεται εἶδος συνθέτων προβλημάτων, ἀγόντων εἰς δύο μόνον ἐξισώσεις, ἢ δύο μόνα συστήματα ἐξισώσεων, ὧν τὰ μέλη εἰσὶ παραστάσεις διαφέρουσαι κατὰ τὸν σχηματισμὸν μόνον ὡς πρὸς τὰ σημεῖα ἀγνώστων. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Δύο κινητὰ κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπί τινος εὐθείας ΧΩ μετὰ ταχυτήτων τ καὶ τ' κατὰ τὴν φορὰν Χ πρὸς Ω. Ἤδη εὑρίσκονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὧν ἡ ἀπόστασις εἶναι δ· πότε εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς εὐθείας;*

Ζητεῖται ἐνταῦθα τὸ χρονικὸν διάστημα, τὸ ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν τὰ κινητὰ εὑρίσκονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, μέχρις ἐκείνης, καθ' ἣν εἰσὶ συνηντημένα. Σημειώσωμεν διὰ χ τὸν ζητούμενον χρόνον.

Δὲν προσδιορίζεται ἐν τῇ ἐκφωνήσει ἐὰν ὁ χρόνος οὗτος ἦναι παρελθὼν ἢ μέλλων ὡς πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην στιγμήν· τοῦτο δὲ πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ἵνα ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ χρόνος χ εἶναι μέλλων ὡς πρὸς τὴν στιγμήν, καθ' ἣν τὰ κινητὰ εἰσὶν ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Β, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1)\quad \tau\chi-\tau'\chi=\delta.$$

Ἐὰν δ' ὑποτεθῇ ὅτι ὁ χρόνος εἶναι παρελθών, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

(2) $\tau'\chi - \tau\chi = \delta$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ὡς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις, παρατηροῦμεν ὅτι ταῦτα διαφέρουσι μόνον ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ χ· ἐὰν δηλονότι τρέψωμεν ἐν τῇ (1) τὸν χ εἰς $-\chi$, ἔχομεν τὴν (2) καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἰσὶν ἀπολύτως ἴσαι, ἀλλ' ἑτερόσημοι. Ἐάν, π. χ., ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπαληθεύηται διὰ τῆς λύσεως $\chi = \alpha$, ἔχομεν τότε τὴν ταυτότητα $\tau\alpha - \tau'\alpha = \delta$· ἐὰν λοιπὸν θῶμεν ἐν τῇ (2) $-\alpha$ ἀντὶ χ, ἔχομεν τὴν ταυτότητα $-\tau'\alpha + \tau\alpha = \delta$· ἐπομένως $\chi = -\alpha$ εἶναι ἡ λύσις τῆς (2).

Εὔκολον εἶναι νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι γενική· ὅταν, δηλονότι, δύο ἐξισώσεις (ἢ δύο συστήματα ἐξισώσεων) διαφέρωσι μόνον ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τινῶν ἀγνώστων, ἐὰν ἔχωμεν λύσιν τινὰ τῆς μιᾶς ἐξισώσεως (ἢ τοῦ συστήματος), τότε λαμβάνοντες μετ' ἐναντίου σημείου τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, τῶν ἐχόντων ἀλλοῖον σημεῖον εἰς τὴν ἑτέραν ἐξίσωσιν (ἢ εἰς τὸ ἕτερον σύστημα), τὰς δὲ τῶν λοιπῶν ἀγνώστων μετὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἔχομεν λύσιν καὶ τῆς ἑτέρας ἐξισώσεως (ἢ τοῦ ἑτέρου συστήματος).

Ἐπειδὴ αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἰσὶν ἴσαι καὶ ἑτερόσημοι, ἕπεται ὅτι ἐκ τῶν δύο ὑποθέσεων, ἐξ ὧν ἐπορίσθημεν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), μία μόνον εἶναι ἀληθής, ἡ ἄγουσα εἰς τὴν διὰ θετικῆς τιμῆς ἐπαληθευομένην ἐξίσωσιν.

§ 159. Ὅταν προτείνηται τοιοῦτον πρόβλημα *μερικόν*, δυνάμεθα νὰ συντέμνωμεν τὴν λύσιν αὐτοῦ, δίδοντες κατὰ συνθήκην σημασίαν εἰς τὴν ἀρνητικὴν λύσιν, ἣν ἠθέλομεν εὕρει ποιοῦντες τὴν ἑτέραν τῶν ὑποθέσεων. Ἡ συνθήκη, δι' ἧς δίδοται σημασία εἰς τὰς ἀρνητικὰς αὐτὰς λύσεις, δύναται νὰ διατυπωθῇ γενικῶς ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ἐπὶ μερικοῦ συνθέτου προβλήματος, ἄγοντος εἰς δύο ἐξισώσεις ἢ εἰς δύο συστήματα ἐξισώσεων, διαφέροντα μόνον κατὰ τὰ σημεῖα τινῶν ἀγνώστων, εὑρίσκωμεν, ποιοῦντες τὴν ἑτέραν τῶν δύο ὑποθέσεων, λύσεις τῶν τελευταίων ἀγνώστων ἀρνητικάς, νοοῦμεν τὰς ἀρνητικὰς αὐτὰς λύσεις, ὡς νοοῦντες οἱ ἄγνωστοι οὗτοι κατὰ τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν καὶ ἔχομεν οὕτω τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, καθ' ἣν καὶ μόνην τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν (*).

(*) Ὑποθέτομεν ὅτι, ὅταν τὸ πρόβλημα περιέχῃ πολλοὺς ἀγνώστους, οἱ τὰ

Π. χ. μερικεύσωμεν τὸ ἀνωτέρω γενικὸν πρόβλημα, ποιοῦντες $\delta=20$, $\tau=5$, $\tau'=8$ καὶ λαμβάνοντες χρονικὴν μονάδα τὴν ὥραν· ἔχομεν τότε ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι μέλλων ὡς πρὸς τὴν στιγμὴν, καθ' ἣν τὰ κινητὰ εἰσὶν ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Β, $5\chi-8\chi=20$· ὅθεν $\chi=-\frac{20}{3}=-(6+\frac{2}{3})$. Ἤδη πρὶν ἢ προβῶμεν εἰς τὴν ἑτέραν ὑπόθεσιν, λέγομεν, ὅτι ἡ συνάντησις ἐγένετο πρὸ $6+\frac{2}{3}$ ὡρῶν· πρὶν δηλονότι φθάσωσι τὰ κινητὰ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β· διότι ἡ μὲν γενομένη ὑπόθεσις εἶναι ἀνυπόστατος, ὡς ἐκ τῆς εὑρεθείσης ἀρνητικῆς λύσεως, ἐὰν δὲ κάμωμεν τὴν ἑτέραν ὑπόθεσιν, καθ' ἣν ὁ χρόνος εἶναι παρελθὼν, εὑρήσομεν θετικὴν τιμὴν, ἴσην ἀπολύτως τῇ εὑρεθείσῃ ἀρνητικῇ.—Ποιήσωμεν εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα $\delta=20$, $\tau=8$, $\tau'=5$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ χρόνος εἶναι παρελθών· εὑρίσκομεν πάλιν τὴν ἀρνητικὴν λύσιν $-(6+\frac{2}{3})$, ἣν πρέπει ἤδη νὰ ἑρμηνεύσωμεν ὡς ἐμφαίνουσαν χρόνον *μέλλοντα*· διότι ὑπεθέσαμεν τοὐναντίον.

§ 160. Ἔστωσαν ἔτι τὰ ἑξῆς προβλήματα ὡς παραδείγματα τῆς τοιᾶς δε χρήσεως τῶν ἀρνητικῶν λύσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Ὁ Α εἶναι 50 ἐτῶν, ὁ δὲ Β 36· πότε ἡ ἡλικία τοῦ Α εἶναι διπλασία τῆς τοῦ Β;*

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος χρόνος, μονάδος ὄντος τοῦ ἔτους. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ χρόνος οὗτος εἶναι μέλλων ὡς πρὸς τὴν ἐποχὴν, καθ' ἣν αἱ ἡλικίαι εἰσὶ 50 καὶ 36 ἔτη, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$50+\chi=2(36+\chi)\cdot$$

ὅθεν $\chi=-22$. Τῆς τιμῆς ταύτης οὔσης ἀρνητικῆς, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ Α ἦν διπλασία τῆς τοῦ Β πρὸ 22 ἐτῶν· διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ χρόνος χ εἶναι παρελθὼν, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν διαφέρουσαν τῆς ἀνωτέρω μόνον ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ χ καὶ ἑπομένως ἐπαληθευομένην διὰ τῆς λύσεως $\chi=+22$.

§ 161. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Δύο ταχυδρόμοι, ὁδεύοντες ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ κατὰ τὴν φορὰν Α πρὸς Β, εὑρίσκονται ἤδη ὁ μὲν*

αὐτὰ σημεῖα ἔχοντες ἐν τοῖς δύο συστήμασιν ἄγνωστοι ἔχουσιν ἅπαντες λύσεις θετικάς· ἄλλως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον καθ' ἑκατέραν τῶν ὑποθέσεων. Ἐπίσης τὸ πρόβλημα εἶναι ὅλως ἀδύνατον, ὅταν τινὲς μὲν τῶν ἀγνώστων, τῶν ἐχόντων ἐναντία σημεῖα εἰς τὰ δύο συστήματα, ἔχουσι κατὰ τὴν ἑτέραν τῶν ὑποθέσεων λύσεις θετικάς, τινὲς δ' ἀρνητικάς.

εἰς τὸ σημεῖον Α, ὁ δὲ εἰς τὸ Β. Ἡ ταχύτης τοῦ μὲν πρώτου εἶναι 5 στάδια, τοῦ δὲ δευτέρου 7, ἡ δ' ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι 28 στάδια. Ζητεῖται εἰς τί σημεῖον τῆς εὐθείας οἱ ταχυδρόμοι εἰσὶ συνηντημένοι.

A B X

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον Χ κεῖται ἐκ δεξιῶν τῶν σημείων Α καὶ Β· ἔστω δὲ χ μὲν ἡ ἀπόστασις ΑΧ, y δὲ ἡ ΒΧ. Οἱ χρόνοι, καθ' οὓς οἱ ταχυδρόμοι διανύουσι τὰ διαστήματα ΑΧ καὶ ΒΧ εἰσὶ $\frac{\chi}{5}$ καὶ $\frac{y}{7}$· οἱ δὲ χρόνοι οὗτοι εἰσὶν ἴσοι· διότι οἱ ταχυδρόμοι εὑρίσκονται συγχρόνως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὡς καὶ εἰς τὸ Χ· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1)\quad \frac{\chi}{5}=\frac{y}{7}.$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἶναι

$$(2)\quad \chi-y=28.$$

Ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν $\chi=-70$ καὶ $y=-98$. Τὸ πρόβλημα εἶναι λοιπὸν ἀδύνατον κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Ἀλλ' ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Χ κεῖται ἐξ ἀριστερῶν των σημείων Α καὶ Β, εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$(3)\quad \frac{\chi}{5}=\frac{y}{7}$$

$$y-\chi=28.$$

Ἐπειδὴ τὰς αὐτὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἀγνώστων ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν (1) καὶ (2), συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι ἡ λύσις τῶν τελευταίων ἐξισώσεων εἶναι $\chi=70$, $y=98$· ἑπομένως οἱ ταχυδρόμοι *ἦσαν συνηντημένοι* εἰς τὸ σημεῖον Χ, κείμενον ἐκ δεξιῶν τῶν Α καὶ Β καὶ ἀπέχον 70 στάδια ἀπὸ τοῦ Α εἴτε 98 ἀπὸ τοῦ Β.

§ 162. Ὅταν τὸ σύνθετον πρόβλημα ἦναι γενικόν, ὁ τύπος ὃν εὑρίσκομεν ἐπὶ τῇ μιᾷ μόνῃ ὑποθέσει, ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τῆς κατὰ τὴν δυνατὴν ὑπόθεσιν λύσεως τῶν μερικῶν προβλημάτων, τῶν ὑπαγομένων ἐν τῷ γενικῷ, ὅταν ἑρμηνεύωμεν τὰς ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ ἀρνητικὰς τιμὰς ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω.

Λάβωμεν αὖθις τὸ ἐν § 158 γενικὸν πρόβλημα.

Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι μέλλων ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\tau\chi - \tau'\chi = \delta$· ὅθεν

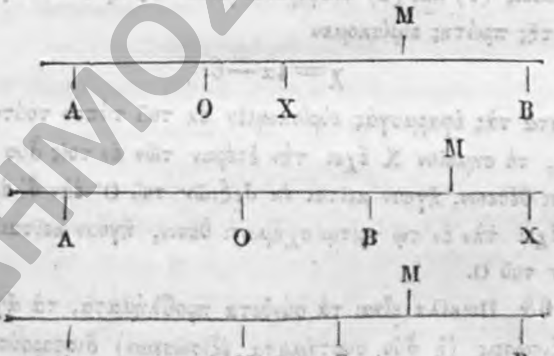
$$(1)\quad \chi = \frac{\delta}{\tau - \tau'}.$$

Ὁ τύπος οὗτος ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τῆς κατὰ τὴν δυνατὴν ὑπόθεσιν τιμῆς τοῦ ἀγνώστου παντὸς μερικοῦ προβλήματος, περιεχομένου ἐν τῷ γενικῷ. Π. χ. ἐὰν $\delta = 30$, $\tau = 8$, $\tau' = 5$, χρονικὴ δὲ μονὰς ἡ ὥρα, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν $\chi = 10$· ἐπειδὴ ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι θετική, τὰ κινητὰ *θέλουσι συναντηθῇ* μετὰ 10 ὥρας. Ἐὰν δὲ $\delta = 30$, $\tau = 5$, $\tau' = 8$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου $\chi = -10$. Ἑρμηνεύοντες τὴν ἀρνητικὴν αὐτὴν τιμὴν ὡς εἴπομεν, μανθάνομεν ὅτι τὰ κινητὰ *εἶχον συναντηθῇ* πρὸ 10 ὡρῶν.

Ἔστω ἔτι καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. *Δύο σημεῖα Α καὶ Β εὐθείας τινὸς κεῖνται ἑκατέρωθεν σημείου τινὸς Ο τῆς εὐθείας ταύτης, τὸ μὲν Α ἐξ ἀριστερῶν, τὸ δὲ Β ἐκ δεξιῶν. Ἡ ἀπόστασις ΑΟ εἶναι* α, *ἡ δὲ ΒΟ* β. *Εὑρεῖν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ ἐκ δεξιῶν τοῦ Α σημεῖον Χ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ Α ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΒΧ νὰ ἰσῶται τῇ ΑΟ.*

Τὸ Χ δύναται νὰ ἔχῃ τὰς κατὰ τὰ ἑξῆς τρία σχήματα θέσεις.



Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΒΧ, χ δὲ ἡ ἀπόστασις τοῦ Χ ἀπὸ τοῦ Ο. Ὅταν τὸ Χ ἔχῃ τὴν ἐν τῷ πρώτῳ σχήματι θέσιν, ἔχομεν

$BX = \beta - \chi$, $BM = \frac{\beta - \chi}{2}$, $AM = \alpha + \beta - \frac{\beta - \chi}{2} = \frac{2\alpha + \beta + \chi}{2}$,

$\frac{AM}{3} = \frac{2\alpha + \beta + \chi}{6}$· ἑπομένως κατὰ τὴν ἐκφώνησιν

$$(1) \quad \frac{2\alpha + \beta + \chi}{6} = \alpha.$$

Ὅταν τὸ Χ ἔχῃ τὴν ἐν τῷ δευτέρῳ σχήματι θέσιν, ἔχομεν

$BX = \chi - \beta$, $BM = \frac{\chi - \beta}{2}$, $AM = \alpha + \beta + \frac{\chi - \beta}{2} = \frac{2\alpha + \beta + \chi}{2}$,

$\frac{AM}{3} = \frac{2\alpha + \beta + \chi}{6}$. Εὑρίσκομεν οὕτω τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (1). Τέλος ὅταν τὸ Χ ἔχῃ τὴν ἐν τῷ τρίτῳ σχήματι θέσιν, τὸ Μ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κῆται μεταξὺ Χ καὶ Ο· ἔχομεν δὲ τότε $BX = \beta + \chi$,

$BM = \frac{\beta + \chi}{2}$, $AM = \alpha + \beta - \frac{\beta + \chi}{2} = \frac{2\alpha + \beta - \chi}{2}$, $\frac{AM}{3} =$

$\frac{2\alpha + \beta - \chi}{6}$· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$(2) \quad \frac{2\alpha + \beta - \chi}{6} = \alpha.$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) διαφέρουσι μόνον ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ χ. Ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν

$$\chi = 4\alpha - \beta.$$

Ἐὰν κατὰ τὰς ἐφαρμογὰς εὑρίσκωμεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου τιμὴν θετικήν, τὸ σημεῖον Χ ἔχει τὴν ἑτέραν τῶν ἐν τοῖς δύο πρώτοις σχήμασι θέσεων, ἤγουν κεῖται *ἐκ δεξιῶν* τοῦ Ο· ἐὰν δ' ἀρνητικήν, τὸ Χ ἔχει τὴν ἐν τῷ τρίτῳ σχήματι θέσιν, ἤγουν κεῖται *ἐξ ἀριστερῶν* τοῦ Ο.

§ 163. Ποικίλα εἶναι τὰ σύνθετα προβλήματα, τὰ ἄγοντα εἰς δύο ἐξισώσεις (ἢ δύο συστήματα ἐξισώσεων) διαφερούσας μόνον κατὰ τὰ σημεῖα ἀγνώστων. Ἰδίως δὲ εἶναι τοιαῦτα ἐκεῖνα, δι' ὧν ζητοῦνται α΄. ἀποστάσεις ἐπί τινος εὐθείας ἀρχόμεναι ἀπό τινος ὡρισμένου σημείου τῆς εὐθείας αὐτῆς, β΄. χρόνοι ἀρχόμενοι ἀπό τινος ὡρισμένης χρονικῆς στιγμῆς· εἰς μὲν τὰ πρῶτα δὲν ὁρίζεται ἐὰν αἱ ζητούμεναι ἀποστάσεις μετρῶνται ἐκ δεξιῶν ἢ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ σταθεροῦ σημείου· εἰς δὲ τὰ δεύτερα δὲν ὁρίζεται ἐὰν οἱ ζητούμενοι χρόνοι ἦναι μέλλοντες ἢ παρελθόντες ὡς πρὸς τὴν χρονικὴν στιγμὴν, ἀφ' ἧς μετροῦνται.

Δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν γενικῶς διὰ τί, ὅταν εἰς τὰ τοιαῦτα προβλήματα εὑρίσκωμεν ἀρνητικὴν λύσιν κατὰ τὴν μίαν ὑπόθεσιν, ὁ ἄγνωστος εἶναι ἀπολύτως ἴσος τῇ ἀρνητικῇ τιμῇ καὶ πρέπει νὰ νοῆται κατὰ τὴν ἑτέραν ὑπόθεσιν.

Α'. Προκείσθω εὑρεῖν τὴν ἀπὸ σταθεροῦ τινος σημείου Ο ἀπόστασιν σημείου τινὸς Χ, κειμένου ἐκ δεξιῶν ἢ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ πρώτου.

Λάβωμεν ἄλλο τι σημεῖον Π τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Ο καὶ ἱκανῶς ἀπέχον ἀπ' αὐτοῦ. Ἔστωσαν χ καὶ y αἱ ἀποστάσεις τοῦ Χ ἀπὸ τῶν σημείων Ο καὶ Π, καὶ α ἡ ἀπόστασις ΟΠ.

Ἔστω $Ay=B$ ἡ ἐξίσωσις, ἣν εὑρίσκομεν διὰ τῶν ἐν τῷ προβλήματι συνθηκῶν, λαμβάνοντες ἄγνωστον τὸν y καὶ ὑποθέτοντες ὅτι τὸ Χ κεῖται ἐκ δεξιῶν τοῦ Π· ληφθήτω δὲ τὸ Π ἱκανῶς μακρὰν τοῦ Ο, ὥστε ἡ ὑπόθεσις αὕτη νὰ ἦναι ἀληθὴς, ἤγουν ἡ ἐξίσωσις (1) νὰ ἔχῃ λύσιν θετικήν.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Χ κῆται ἐκ δεξιῶν τοῦ Ο, ἔχομεν $y=\alpha+\chi$· ἀντικαθιστῶντες δ' ἐν τῇ (1), ἔχομεν

$$(2)\quad A(\alpha+\chi)=B.$$

Ἐὰν δ' ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ χ κῆται ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Ο, ἔχομεν $y=\alpha-\chi$, καὶ ἀντικαταστάσει εἰς τὴν (1)

$$(3)\quad A(\alpha-\chi)=B.$$

Αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) εἰσὶν αἱ ἐξισώσεις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος, λαμβανομένης ὡς ἀγνώστου τῆς ἀποστάσεως τοῦ Χ ἀπὸ τοῦ Ο, ἡ μὲν (2) ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι τὸ Χ κεῖται ἐκ δεξιῶν τοῦ Ο, ἡ δὲ (3) ὅτι ἐξ ἀριστερῶν. Αἱ ἐξισώσεις αὗται διαφέρουσι μόνον ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ ἀγνώστου· ἡ ἀρνητικὴ λοιπὸν λύσις, ἣν παρέχει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, νοουμένη κατὰ τὴν ἑτέραν ὑπόθεσιν.

Β'. Ἔστω χ ὁ χρόνος, ὁ μεταξὺ χρονικῆς τινος στιγμῆς Χ καὶ ἑτέρας ὡρισμένης χρονικῆς στιγμῆς Σ, μέλλων ἢ παρελθὼν ὡς πρὸς τὴν στιγμὴν Σ. Θεωρήσωμεν καὶ ἑτέραν χρονικὴν στιγμὴν Σ', προηγουμένην τῆς Σ καὶ ἱκανῶς αὐτῆς ἀπέχουσαν· ἔστω y ὁ μεταξὺ τῶν χρονικῶν στιγμῶν Χ καὶ Σ' χρόνος, καὶ α ὁ μεταξὺ τῶν Σ καὶ Σ'. Λάβωμεν ἄγνωστον τὸν χρόνον y καὶ ἔστω Ay=B ἡ ἐξίσωσις, ἣν εὑρίσκομεν διὰ τῶν ἐν τῷ προβλήματι συνθηκῶν ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ὁ χρόνος y εἶναι μέλλων ὡς πρὸς τὴν στιγμὴν Σ', ληφθήτω δὲ ἡ Σ' ἱκανῶς μεμακρυσμένη, ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ y νὰ ἦναι θετική. Συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, εὑρήσομεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, ὅταν ληφθῇ ἄγνωστος ὁ χ, εἰσὶ

$$A(\alpha+\chi)=B$$
$$A(\alpha-\chi)=B,$$

καθόσον ὁ χρόνος χ ὑποτεθῇ μέλλων ἢ παρελθὼν ὡς πρὸς τὴν στιγμὴν Σ· αἱ ἐξισώσεις δ' αὗται διαφέρουσι μόνον ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ χ.

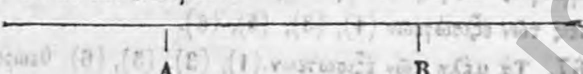
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ἐμφαίνῃ κατὰ τὰ ἀνωτέρω λύσιν τοῦ προβλήματος, πρέπει τοῦτο νὰ ἦναι σύνθετον· ἄλλως ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τεκμηριοῖ τὸ ἀδύνατον (§ 149). Ἔστω, π. χ., τὸ ἑξῆς πρόβλημα. *Δύο κινητὰ ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β εὐθείας τινὸς ΑΒ κατὰ τὴν φορὰν Α πρὸς Β· πότε θέλουσι συναντηθῆ, δοθέντος ὅτι ἡ μὲν ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 28 στάδια, ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου 5, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου 8;* Ἐπειδὴ τὰ κινητὰ ἄρχονται κινούμενα ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι ἀναγκαίως μέλλων· ἐπειδὴ δ' εὑρίσκομεν τιμὴν ἀρνητικήν, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Χρῆσις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν πρὸς περίληψιν ἐν ἑνὶ μοναδικῷ τύπῳ τῶν κατὰ διαφόρους ὑποθέσεις τιμῶν τῶν ἀγνώστων γενικοῦ συνθέτου προβλήματος.

§ 164. Ὅταν αἱ κατὰ τὰς διαφόρους ὑποθέσεις εὑρισκόμεναι ἐξισώσεις γενικοῦ συνθέτου προβλήματος διαφέρωσι κατὰ τὸν σχηματισμὸν ὡς πρὸς τὰ σημεῖα μόνον τινῶν γραμμάτων, συμπεριλαμβανομένων ἢ μὴ καὶ τῶν ἀγνώστων, δυνάμεθα πολλάκις νὰ ποιῶμεν χρῆσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν πρὸς ἀναγωγὴν πολλῶν τύπων εἰς ἕνα μοναδικόν, ὡς ἐπράξαμεν ἀνωτέρω εἰς τὰ γενικὰ σύνθετα, περὶ ὧν διελάβομεν (§ 162).

Ἐν τοῖς ἑξῆς θέλομεν ἀναφέρει διάφορα τοιαῦτα προβλήματα.

§ 165. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Δύο κινητὰ κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπί τινος εὐθείας μετὰ ταχυτήτων τ καὶ τ'· εὑρίσκονται ἤδη τὸ μὲν ἐπὶ τοῦ σημείου Α, τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ Β, ὧν ἡ ἀπόστασις εἶναι δ. Ζητεῖται ὁ χρόνος, ὁ μεταξὺ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν τὰ κινητὰ αὐτὰ εὑρίσκονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν εἶναι συνηντημένα.*



Ποιήσωμεν ἐπὶ τοῦ προβλήματος αὐτοῦ πάσας τὰς δυνατὰς ὑποθέσεις.

α'. Ὅταν ἀμφότερα τὰ κινητὰ κινῶνται πρὸς τὰ δεξιά, εἰ μὲν ὁ ζητούμενος χρόνος χ εἶναι μέλλων ὡς πρὸς τὴν στιγμήν, καθ' ἣν αὐτὰ εὑρίσκονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἔχομεν

$$(1)\quad \tau\chi-\tau'\chi=\delta\cdot$$

εἰ δ' ὁ χρόνος οὗτος εἶναι παρελθών, ἔχομεν

$$(2)\quad \tau'\chi-\tau\chi=\delta.$$

β'. Ὅταν ἀμφότερα κινῶνται πρὸς τἀριστερά, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$(3)\quad \tau'\chi-\tau\chi=\delta$$

$$(4)\quad \tau\chi-\tau'\chi=\delta,$$

καθόσον ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι μέλλων ἢ παρελθὼν ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν στιγμήν.

γ'. Ὅταν τὸ μὲν ἐπὶ τοῦ Α κινῆται πρὸς τὰ δεξιά, τὸ δ' ἐπὶ τοῦ Β πρὸς τἀριστερά, ἔχομεν μίαν μόνον ἐξίσωσιν

$$(5)\quad \tau\chi+\tau'\chi=\delta,$$

ἐν ᾗ ὁ χ ἐμφαίνει χρόνον μέλλοντα.

δ'. Ὅταν τὸ μὲν ἐπὶ τοῦ Α κινῆται πρὸς τἀριστερά, τὸ δ' ἐπὶ τοῦ Β πρὸς τὰ δεξιά, ἔχομεν πάλιν τὴν ἐξίσωσιν

$$(6)\quad \tau\chi+\tau'\chi=\delta,$$

ἐν ᾗ ὁ χ ἐμφαίνει χρόνον παρελθόντα.

Αὗταί εἰσι πᾶσαι αἱ ἐπὶ τοῦ προκειμένου προβλήματος δυναταὶ ὑποθέσεις.

§ 166. Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) διαφέρουσι κατὰ τὴν μορφὴν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον μόνον τοῦ ἀγνώστου· ἐπίσης καὶ αἱ (3) καὶ (4). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ περιλάβωμεν τὴν λύσιν τῆς (2) εἰς τὴν τῆς (1) καὶ τὴν τῆς (4) εἰς τὴν τῆς (3) διὰ τῆς συνθήκης *νὰ θεωρῶμεν τὰς ἐκ τῶν λύσεων τῆς (1) καὶ τῆς (3) ἀρνητικὰς τιμὰς ὡς ἐμφαινούσας χρόνους παρελθόντας ὡς πρὸς τὴν στιγμὴν τῆς διὰ τῶν σημείων A καὶ B διαβάσεως* (§ 159). Οὕτως ἀρκεῖ κατὰ τὰς ἐφαρμογὰς εἰς μερικὰ προβλήματα νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μόνας τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων (1), (3), (5), (6).

§ 167. Τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων (1), (3), (5), (6) θεωρούμενα ὡς ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, διαφέρουσι κατὰ τὸν σχηματισμὸν μόνον ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τινῶν τῶν ἐν αὐτοῖς γραμμάτων. Ἡ (3) διαφέρει τῆς (1) κατὰ τὰ σημεῖα τῶν γραμμάτων τ καὶ τ'· διότι, ἐὰν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἐξισώσεων τούτων γράψωμεν —τ καὶ —τ' ἀντὶ τῶν τ καὶ τ', ἔχομεν τὴν ἑτέραν. Ἐπίσης ἡ (5) διαφέρει τῆς (1) κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ τ'· ἡ δὲ (6) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαφέρουσα τῆς (1) κατὰ τὰ σημεῖα τοῦ τ καὶ τοῦ χ.

§ 168. Πρὶν ἢ προβῶμεν περαιτέρω πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ἐνταῦθα ὅτι, ὅταν δύο γενικαὶ ἐξισώσεις διαφέρωσι μόνον ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τινῶν γραμμάτων, δυνάμεθα ἀπὸ λύσεώς τινος τῆς ἑτέρας αὐτῶν νὰ πορίζώμεθα λύσιν τῆς ἑτέρας, ἀλλάττοντες ἐν τῇ πρώτῃ λύσει τὰ σημεῖα τῶν γραμμάτων, ἅπερ ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν ἔχουσιν ἐναντία σημεῖα.

Π. χ. ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$(\mathrm{K})\qquad \alpha^2\chi-\beta=2\alpha\beta\chi+\gamma+\alpha\beta\delta$$

$$(\Lambda)\qquad -\alpha^2\chi+\beta=-2\alpha\beta\chi-\gamma+\alpha\beta\delta.$$

Ἐὰν ἐν τῇ (Κ) θῶμεν —χ, —α, —β, —γ ἀντὶ χ, α, β, γ, ἔχομεν τὴν (Λ)· αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν αὗται διαφέρουσι κατὰ τὸν σχηματισμὸν ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τῶν γραμμάτων χ, α, β, γ. Εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (Κ)

$$(\mathrm{M})\quad \chi=\frac{\beta+\gamma+\alpha\beta\delta}{\alpha^2-2\alpha\beta}.$$

Ἵνα ἔχωμεν τὴν λύσιν τῆς (Λ), ἀρκεῖ ν' ἀλλάξωμεν ἐν τῷ τύπῳ (Μ) τὰ σημεῖα τῶν χ, α, β, γ οὕτως εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{N}) \quad -\chi = \frac{-\beta-\gamma+\alpha\beta\delta}{\alpha^2-2\alpha\beta},$$

εἴτε

$$\chi = \frac{\beta+\gamma-\alpha\beta\delta}{\alpha^2-2\alpha\beta}.$$

διότι ὡς ἡ ἰσότης (Μ) συνάγεται ἐκ τῆς (Κ), οὕτω καὶ ἡ (Ν) ἐκ τῆς (Λ), ἥτις παρίστησι τὴν αὐτὴν σχέσιν μεταξὺ $-\chi$, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, δ, ἣν ἡ (Κ) μεταξὺ χ, α, β, γ, δ.

Ἡ περὶ ἧς πρόκειται παρατήρησις ἐκτείνεται καὶ ἐπὶ δύο συστημάτων ἐξισώσεων, διαφερόντων μόνον ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τινῶν γραμμάτων.

§ 169. Ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ προκείμενον. Ἐπειδὴ αἱ ἐξισώσεις (1), (3), (5), (6) διαφέρουσι κατὰ τὰ σημεῖα τινῶν γραμμάτων, δυνάμεθα νὰ πορίζώμεθα τὰς λύσεις τῶν (3), (5), (6) ἐκ τῆς (1), ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Περιορισθῶμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος εἰς μόνας τὰς ἐξισώσεις (1), (3), (5).

Παραβάλλοντες τὰς ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν αὐταῖς διαφορὰς σημείων τῶν γραμμάτων τ καὶ τ' πρὸς τὰς ὑποθέσεις, τὰς ἀγούσας εἰς τὰς διαφόρους αὐτὰς ἐξισώσεις, παρατηροῦμεν ὅτι ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν (3) καὶ (5) ἐκεῖνα τὰ γράμματα ἔχουσι σημεῖα ἐναντία τῶν ἐν τῇ (1), ὅσα ἐμφαίνουσι ταχύτητας κινητῶν κατευθυνομένων πρὸς τἀριστερά. Ἐπομένως καὶ εἰς τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (5) ἐκεῖνα τὰ γράμματα ἔχουσι σημεῖα ἀντίθετα τῶν ἐν τῇ λύσει τῆς (1), ὅσα ἐμφαίνουσι ταχύτητας κινητῶν κατευθυνομένων πρὸς τἀριστερά.

Ἡ λύσις τῆς (1) εἶναι

$$(\mathrm{T}) \quad \chi = \frac{\delta}{\tau-\tau'}.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἵνα ἔχωμεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (5), ἀλλάττομεν ἐν αὐτῷ τὰ σημεῖα τῶν γραμμάτων, τῶν ἐμφαινόντων ταχύτητας κινητῶν κατευθυνομένων πρὸς τἀριστερά.

Ὅταν λοιπὸν προταθῇ μερικὸν ἁπλοῦν πρόβλημα, ὑπαγόμενον εἰς τὰς ὑποθέσεις α'., β'. καὶ γ'., δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μόνον τὸν ἀνωτέρω τύπον (T)· καὶ κατὰ πρῶτον μὲν νὰ εὑρίσκωμεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου τὸν τύπον τοῦ γενικοῦ προβλήματος, τοῦ περιέχοντος τὸ μερικόν, ἀλλάττοντες τὰ σημεῖα τινῶν γραμμάτων, ὡς εἴρηται· ἔπειτα δὲ νὰ ἐφαρμόζωμεν τὸν εὑρισκόμενον τύπον εἰς τὰ δεδομένα τοῦ μερικοῦ προβλήματος.

Π. χ. δεδόσθω ὅτι *τὸ ἐπὶ τοῦ σημείου A κινητὸν διατρέχει 30 στάδια κατὰ λεπτόν, τὸ ἐπὶ τοῦ B 50, ἡ ἀπόστασις AB εἶναι 1800 στάδια, κατευθύνονται δὲ τὰ κινητὰ τὸ ἓν κατὰ τοῦ ἄλλου.* Εὑρίσκομεν πρῶτον ἐκ τοῦ (T) τὸν τύπον τοῦ γενικοῦ ἁπλοῦ, εἰς ὃ ὑπάγεται τὸ μερικὸν αὐτό, ἀλλάττοντες τὸ σημεῖον τοῦ τ', διότι τὸ ἐπὶ τοῦ B κινητὸν κατευθύνεται πρὸς τἀριστερά· οὕτως ἔχομεν $\chi = \frac{\delta}{\tau + \tau'}$· ἐπὶ τούτου δὲ τοῦ τύπου ποιοῦμεν $\delta = 1800$, $\tau = 30$, $\tau' = 50$ καὶ εὑρίσκομεν $\chi = 22 + \frac{1}{2}$ (λεπτά).

Δεδόσθω ἔτι ὅτι *τὸ ἐπὶ τοῦ A διατρέχει 60 στάδια κατὰ λεπτόν, τὸ ἐπὶ τοῦ B 35, ἡ ἀπόστασις AB εἶναι 950 στάδια καὶ τὰ κινητὰ κατευθύνονται ἀμφότερα πρὸς τἀριστερά.* Ἀλλάττομεν πρῶτον εἰς τὸν τύπον (T) τὰ σημεῖα τοῦ τε τ καὶ τοῦ τ'· διότι ἐν τῷ μερικῷ τούτῳ προβλήματι ἀμφότερα τὰ κινητὰ κατευθύνονται πρὸς τἀριστερά· ἔχομεν οὕτω $\chi = \frac{\delta}{\tau' - \tau}$· ἐπὶ τούτου δὲ τοῦ τύπου ποιοῦμεν $\delta = 950$, $\tau = 60$, $\tau' = 35$ καὶ εὑρίσκομεν $\chi = -38$· ὅθεν κατὰ τὴν γενομένην συνθήκην (166) πρὸς συγχώνευσιν τῶν τύπων τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4), τὰ κινητὰ *ἦσαν συνηντημένα* πρὸ λεπτῶν 38 πρὶν φθάσωσιν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B.

§ 170. Ἀλλὰ διὰ νέας τινὸς συνθήκης δυνάμεθα ν' ἀπαλλαχθῶμεν τῆς ἀνάγκης τοῦ νὰ εὑρίσκωμεν ἐκ τοῦ τύπου (T) τοὺς τύπους τῶν ἁπλῶν γενικῶν προβλημάτων, εἰς ἃ ὑπάγονται τὰ προτεινόμενα μερικά. Ἵνα εὕρωμεν τὴν λύσιν τοῦ πρώτου τῶν ἀνωτέρω μερικῶν προβλημάτων, μετέβημεν ἀπὸ τοῦ τύπου $\chi = \frac{\delta}{\tau - \tau'}$ εἰς τὴν $\chi = \frac{\delta}{\tau + \tau'}$ ἀλλάξαντες ἐν τῷ πρώτῳ τὸ σημεῖον τοῦ τ', εἶτα δ' ἐν τῷ τελευταίῳ τύπῳ ἐποιήσαμεν $\delta = 1800$, $\tau = 30$, $\tau' = 50$. Ἤδη εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον καὶ ἐὰν ἀμέσως ἐν τῷ τύπῳ $\chi = \frac{\delta}{\tau - \tau'}$ ποιήσωμεν $\delta = 1800$, $\tau = 30$, $\tau' = -50$. Ὡσαύτως καὶ κατὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου μερικοῦ προβλήματος ἀντὶ ν' ἀλλάξωμεν πρῶτον τὰ σημεῖα τῶν τ καὶ τ', καὶ ἔπειτα νὰ κάμωμεν $\delta = 950$, $\tau = 60$, $\tau' = 35$, ἔχομεν προφανῶς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ποιοῦντες ἀμέσως ἐν τῷ τύπῳ (T) $\delta = 950$, $\tau = -60$, $\tau' = -35$.

Ἐν γένει ἀντὶ ν' ἀλλάττωμεν πρῶτον τὰ σημεῖα γραμμάτων τινῶν τοῦ τύπου (T), κατὰ τὸ προτεινόμενον μερικὸν πρόβλημα, καὶ ἔπειτα νὰ κάμνωμεν ἐφαρμογὴν τοῦ προκύπτοντος τύπου εἰς τὰ δεδομένα τοῦ μερικοῦ προβλήματος, δυνάμεθα *προφανῶς* (*) ν' ἀντεισάγωμεν ἀμέσως ἐν τῷ τύπῳ (T) τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς τοῦ μερικοῦ προβλήματος, θεωροῦντες ὡς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς ἐκείνους ἐξ αὐτῶν, ὅσοι ἐν τῷ πραγματικῷ τύπῳ ἀντικαθιστῶσι γράμματα ἔχοντα σημεῖον ἐναντίον ἐκείνου, ὅπερ ἔχουσιν ἐν τῷ τύπῳ (T)· ἐπειδὴ δὲ τοιοῦτοί εἰσιν οἱ ἐμφαίνοντες ταχύτητας κινητῶν κατευθυνομένων πρὸς τἀριστερά, ἔπεται ὅτι ὁ τύπος (T) ἀρκεῖ δι' ὅλα τὰ ἁπλᾶ μερικὰ προβλήματα, τὰ ὑπαγόμενα ἐν ταῖς ὑποθέσεσι α'., β'. καὶ γ'., ἐπὶ τῷ ὅρῳ *νὰ θεωρῶμεν ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐμφαίνοντας ταχύτητας κινητῶν κατευθυνομένων πρὸς τἀριστερά.*

Μὴ ἐπιλαθώμεθα ὅτι, ὅταν ἐκ τοῦ τύπου τούτου, ἐφαρμοζομένου ὡς ὥρισται διὰ τῆς ἤδη τεθείσης συνθήκης, εὑρίσκωμεν τιμὰς ἀρνητικάς, πρέπει νὰ θεωρῶμεν αὐτὰς ὡς ἐμφαινούσας παρῳχημένους χρόνους, ἑπόμενοι τῇ προγενομένῃ συνθήκῃ (§ 166) πρὸς συγχώνευσιν τῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ τῶν (3) καὶ (4).

§ 171. Ἐξετάσωμεν νῦν καὶ τὴν δ'. ὑπόθεσιν, τὴν ἄγουσαν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (6). Λέγω ὅτι διὰ τῶν τεθεισῶν συνθηκῶν ὁ τύπος

(*) Εἶναι προφανὴς ἡ ἀλήθεια τῆς ἑξῆς προτάσεως. Ἐὰν ἐν ἀλγεβρικῇ παραστάσει ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τινῶν γραμμάτων, οἷον τῶν κ, λ, μ, ... καὶ ἐν τῇ προκυπτούσῃ παραστάσει ἀντικαταστήσωμεν τοῖς γράμμασι μερικοὺς ἀριθμούς, ἤτοι ποιήσωμεν $\alpha = \theta_1$, $\beta = \theta_2$, $\gamma = \theta_3$, ... $\kappa = \rho_1$, $\lambda = \rho_2$, $\mu = \rho_3$, ..., εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ καὶ ἐὰν ἐν τῇ πρώτῃ παραστάσει θῶμεν $\alpha = \theta_1$, $\beta = \theta_2$, $\gamma = \theta_3$, ... $\kappa = -\rho_1$, $\lambda = -\rho_2$, $\mu = -\mu_3$, ...

(Τ) παρέχει τὰς λύσεις καὶ κατ' αὐτὴν τὴν ὑπόθεσιν. Τῷ ὄντι· παραστήσωμεν διὰ κ καὶ κ' τὰς ταχύτητας προβλήματός τινος κατ' αὐτὴν τὴν ὑπόθεσιν· ποιοῦντες χρῆσιν τοῦ τύπου (Τ) συνῳδὰ πρὸς τὰ συντεθέντα, πρέπει ν' ἀντικαταστήσωμεν —κ ἀντὶ τ (διότι τὸ πρῶτον κινητὸν κατευθύνεται πρὸς τἀριστερὰ) καὶ κ' ἀντὶ τ'· εὑρίσκομεν οὕτω $\chi = -\frac{\delta}{\kappa+\kappa'}$· ταύτην τὴν τιμὴν, ἀρνητικὴν οὖσαν, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὡς χρόνον παρελθόντα· τοιαύτη δὲ εἶναι κατά τε τὸ ποσὸν καὶ κατὰ τὴν ἔννοιαν ἡ τιμὴ, ἣν παρέχει ἡ ἐξίσωσις (6).

§ 172. Ὁ τύπος λοιπὸν (Τ), ἐφαρμοζόμενος καὶ ἑρμηνευόμενος ὡς ὥρισται διὰ τῶν τεθεισῶν συνθηκῶν, παρέχει τὰς τιμὰς πάντων τῶν μερικῶν προβλημάτων, τῶν περιεχομένων ἐν τῷ προταθέντι γενικῷ προβλήματι· εἶναι λοιπὸν ἡ *γενικὴ* λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ.

Ὡς δ' ὁ τύπος (Τ), οὕτω καὶ ἡ ἐξ ἧς συνάγεται ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοὺς τεθέντας ὅρους.

Ὁ τύπος (Τ), ὡς γενικὴ λύσις τοῦ προβλήματος, δὲν εἶναι πλέον παράστασις ἀπόλυτος, ἀλλ' ἀλγεβρική· ἐπίσης τὰ ἐν αὐτῷ γράμματα τ καὶ τ' ἐμφαίνουσιν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νοητέον καὶ τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) θεωρουμένης ὡς γενικῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος.

§ 173. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Κινητὸν ἀναχωροῦν ἀπὸ σημείου Ο εὐθείας τινὸς διατρέχει ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης τὰ διαστήματα α, β, γ, δ, ε, ..., κατευθυνόμενον ὁτὲ μὲν πρὸς τὸ ἓν ἄκρον τῆς εὐθείας, ὁτὲ δὲ πρὸς τὸ ἀντίθετον. Πόσον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Ο, ἀφοῦ διατρέξῃ τὰ διαστήματα ταῦτα;*

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιέχει πάντα τὰ ἁπλᾶ, ἅπερ προκύπτουσιν ὅταν ὁρίζηται τίνα τὸ κινητὸν διαστήματα διατρέχει κατὰ τὴν μίαν φορὰν καὶ τίνα κατὰ τὴν ἀντίθετον. Οἱ τύποι, οὓς εὑρίσκομεν κατὰ τὰς διαφόρους ὑποθέσεις, δύνανται νὰ περιληφθῶσι πάντες ἐν τῷ ἐξῆς

$$(\mathrm{T})\quad \chi = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \dots$$

διὰ τῶν ἐξῆς δύο συνθηκῶν. α'. *Τοὺς μὲν ἐμφαίνοντας* διαστήματα διανυόμενα κατὰ τὴν μίαν φορὰν ἀριθμοὺς θεωρητέον ὡς θετικούς, τοὺς δὲ κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ὡς ἀρνητικούς.

β΄. *Αἱ μὲν ἐκ τοῦ τύπου (Τ) θετικαὶ τιμαὶ ἐμφαινέτωσαν διαστήματα ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς ἐκεῖνο τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας, πρὸς ὃ κατευθυνόμενον τὸ κινητὸν διατρέχει τὰ κατὰ τὴν πρώτην συνθήκην θετικὰ διαστήματα, αἱ δ' ἀρνητικαὶ τὰ ἀπὸ τοῦ Ο κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν διαστήματα.*

Ἵνα φθάσωμεν εἰς τὰ συμπεράσματα ταῦτα, συλλογιζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν κ, λ, μ, ν, ... τὰ κατὰ τὴν φορὰν Φ πρὸς Χ

Φ O X

διανυόμενα ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διαστήματα, κ΄, λ΄, μ΄, ν΄, ... τὰ κατ' ἀντίθετον φοράν· σημειωθήτω δὲ διὰ χ ἡ ἀπὸ τοῦ Ο ἀπόστασις τοῦ κινητοῦ, ἀφοῦ τοῦτο διατρέξῃ πάντα ταῦτα τὰ διαστήματα. Θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας σημεῖόν τι Μ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Ο καὶ ἱκανῶς αὐτοῦ ἀπέχον, ὥστε τὸ κινητόν, διατρέχον τὰ διαστήματα κ, λ, μ, ..., κ΄, λ΄, μ΄ ..., νὰ μὴ παρέλθῃ οὐδέποτε τὸ σημεῖον αὐτό· σημειωθήτω δὲ διὰ Α ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ τοῦ Μ. Τὸ κινητόν, ἀφοῦ διατρέξῃ πάντα τὰ διαστήματα, θέλει ἀπέχει τοῦ Μ ἢ $Α+χ$, ἐὰν σταθῇ ἐκ δεξιῶν τοῦ Ο, ἢ $Α-χ$, ἐὰν σταθῇ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Ο. Ἀλλ' ἐπειδή, ὁπόταν μὲν διατρέχῃ ἓν τῶν διαστημάτων κ, λ, μ, ... ἀπομακρύνεται τοῦ Μ, ὁπόταν δὲ διατρέχῃ ἓν τῶν κ΄, λ΄, μ΄, ..., πλησιάζει πρὸς τὸ Μ, φανερὸν ὅτι ἡ τελευταία ἀπόστασις τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ Μ εἶναι

$$Α+κ+λ+μ+ν+...-κ'-λ'-μ'-ν'-...$$

Ἔχομεν λοιπὸν

$$Α+χ=Α+κ+λ+μ+ν+...-κ'-λ'-μ'-ν'-...$$

ἢ

$$Α-χ=Α+κ+λ+μ+ν+...-κ'-λ'-μ'-ν'-...,$$

καθόσον τὸ κινητὸν σταθῇ ἐκ δεξιῶν ἢ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Ο.

Ἕπεται ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν πολυώνυμον

$$+κ+λ+μ+ν+ ... -κ'-λ'-μ'-ν'- ...$$

εἶναι ἀπολύτως ἴσον τῷ χ καὶ θετικὸν μέν, ὅταν τὸ κινητὸν σταθῇ ἐκ δεξιῶν τοῦ Ο, ἀρνητικὸν δέ, ὅταν τὸ κινητὸν σταθῇ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ O· οὕτως ἔχομεν

$$χ=κ+λ+μ+ν+\ldots-κ'-λ'-μ'-ν'-\ldots$$

ἐπὶ τῷ ὅρῳ τοῦ νὰ θεωρῶμεν τὰς ἐκ τοῦ τύπου τούτου θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς τιμὰς ὡς ἐμφαινούσας ἀποστάσεις μετρουμένας ἐκ δεξιῶν ἢ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ O. Ἀλλὰ φανερὸν ὅτι ὁ τύπος οὗτος παρέχει τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, ἅπερ καὶ ὁ

$$(\text{T}) \quad χ=α+β+γ+δ+\ldots$$

ὅταν συμβαλλώμεθα νὰ θεωρῶμεν κατὰ τὰς ἐφαρμογὰς εἰς μερικὰ προβλήματα ὡς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐμφαίνοντας διαστήματα διανυόμενα κατὰ τὴν διεύθυνσιν Χ πρὸς Φ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὁ τύπος (T) καὶ ὅταν λάβωμεν ἀντιθέτως τὰ θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ διαστήματα· πρέπει τότε νὰ ληφθῇ τὸ M ἐκ δεξιῶν τοῦ O.

§ **174.** Τὸν αὐτὸν τρόπον συλλογιζόμενοι, εὑρίσκομεν ἕνα μοναδικὸν τύπον τιμῆς δι' ἕκαστον τῶν ἑξῆς προβλημάτων.

Διάφοροι ἐπιχειρήσεις, ἃς ἐπεχείρησεν ἔμπορός τις, ἐπήνεγκον ὠφελείας ἢ ζημίας α, β, γ, δ, ... Ζητεῖται τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον τῶν ἐπιχειρήσεων αὐτῶν.

Διάφοροι δυνάμεις ἐνεργοῦσιν ἐπί τινος σημείου κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἀλλ' αἱ μὲν κατὰ μίαν, αἱ δὲ κατ' ἀντίθετον φοράν· αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων αὐτῶν εἶναι α, β, γ, δ, ... Ζητεῖται ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

Ἐμπόρου τινὸς τὰ ἐνεργητικὰ καὶ τὰ παθητικὰ κεφάλαια εἶναι α, β, γ, δ, ... Ζητεῖται ἡ περιουσία αὐτοῦ.

Ὁ μοναδικὸς τύπος δι' ἕκαστον τῶν γενικῶν αὐτῶν συνθέτων προβλημάτων εἶναι

$$χ=α+β+γ+δ+ε\ldots$$

Πρὸς τοῦτο ποιητέον εἰς μὲν τὸ πρῶτον πρόβλημα τὰς ἑξῆς συνθήκας. α'. Τοὺς ἀριθμοὺς κερδῶν καὶ ζημιῶν θεωρητέον ὡς ἀλγεβρικοὺς ἑτεροσήμους· π. χ. τοὺς μὲν ἐμφαίνοντας κέρδη ὡς θετικούς, τοὺς δὲ ζημίας ὡς ἀρνητικούς. β'. Τὰς μὲν θετικὰς ἐκ τοῦ τύπου τιμὰς νοητέον, ὡς νοοῦνται οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ κατὰ τὴν πρώτην συνθήκην, τὰς δ' ἀρνητικὰς ὡς οἱ ἀρνητικοί.

Εἰς δὲ τὸ δεύτερον πρόβλημα τὰς ἑξῆς. α'. Τοὺς ἀριθμοὺς ἐντάσεων κατ' ἀντιθέτους φορὰς θεωρητέον ὡς ἀλγεβρικοὺς ἑτεροσήμους. β'. Τὰς ἐκ τοῦ τύπου θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς τιμὰς νοητέον ὡς τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν πρώτην συνθήκην.

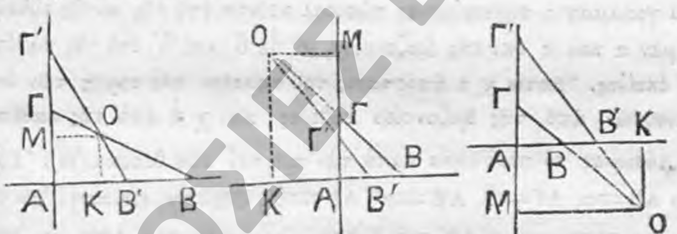
Ἐπίσης καὶ εἰς τὸ τρίτον πρόβλημα τὰ ἐνεργητικὰ καὶ τὰ παθητικὰ κεφάλαια πρέπει νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ ἑτερόσημοι, τοιαύτην δὲ σημασίαν νὰ ἔχωσι καὶ τὰ ἐκ τοῦ τύπου θετικὰ ἢ ἀρνητικὰ ἐξαγόμενα.

§ 175. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Δύο ὀρθογωνίων τριγώνων αἱ πλευραὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν κεῖνται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Λογίσασθαι τὰς καθέτους, τὰς ἀγομένας ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑποτεινουσῶν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ δύο ἄλλαι πλευραί.*

Ἔχομεν ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ διαφόρους περιπτώσεις, κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις τῶν τριγώνων καὶ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως τῶν ὑποτεινουσῶν.

α'. Ἐὰν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἦναι κοιναί, ἔχομεν τὰς ἐν τοῖς ἑξῆς τρισὶ σχήμασι θέσεις

(Θ)

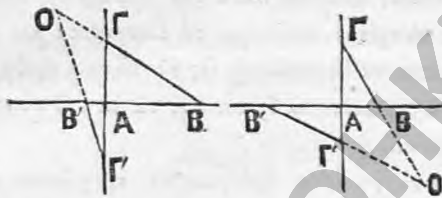


β'. Ἐὰν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι πρόσκηνται, ἔχομεν τὰς ἑξῆς τέσσαρας θέσεις, ἐξ ὧν κατὰ μὲν τὰς δύο πρώτας τὰ τρίγωνα εἶναι ἀμφότερα ὑπεράνω τῆς ὁριζοντίου, κατὰ δὲ τὰς δύο ἄλλας τὸ μὲν ὑπεράνω, τὸ δὲ ὑποκάτω

(Κ

γ'. Ἐὰν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἦναι κατὰ κορυφὴν, ἔχομεν τὰς ἑξῆς δύο θέσεις

(Λ)



Εἰς τὰς διαφόρους αὐτὰς σχετικὰς τῶν δύο τριγώνων θέσεις ἓν τῶν τριγώνων, τὸ ΑΒΓ, διατηρεῖ τὴν αὐτὴν θέσιν, ἤγουν κεῖται ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ δεξιᾷ γωνίᾳ· ἐὰν τοποθετηθῇ καθ' ἑκάστην τῶν τριῶν ἄλλων θέσεων, ἃς δύναται νὰ λάβῃ, εἰς ἑκάστην τῶν θέσεων αὐτῶν ἀντιστοιχοῦσιν ἐννέα σχετικαὶ θέσεις τῶν δύο τριγώνων, ἀνάλογοι ταῖς ἀνωτέρω.

Ἔστωσαν α καὶ ϐ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τοῦ διατηροῦντος τὴν αὐτὴν θέσιν, α' καὶ ϐ' αἱ τοῦ ἑτέρου τριγώνου· αἱ διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος σημειούμεναι πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, αἱ μὲν α καὶ α' ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου, αἱ δὲ ϐ καὶ ϐ' ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπ' ἐκείνης. Ἔστω y ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑποτεινουσῶν ἀπὸ τῆς ὁριζοντίου εὐθείας καὶ χ ἡ ἀπὸ τῆς καθέτου.

Λύσωμεν τὸ πρόϐλημα κατὰ τὴν πρώτην τῶν θέσεων (Θ). Ἔχομεν $AB=\alpha$, $A\Gamma=\beta$, $AB'=\alpha'$, $A\Gamma'=\beta'$, $OM=\chi$, $OK=y$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων Γ'ΑΒ' καὶ Γ'ΜΟ, ὡς καὶ ἐκ τῶν ΑΒΓ καὶ ΒΟΚ ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$\chi : \alpha' :: \beta'-y : \beta'$$
$$y : \beta :: \alpha-\chi : \alpha.$$

ὅθεν

$$(1)\quad \begin{aligned} \beta'\chi &= \alpha'\beta'-\alpha' y \\ \alpha y &= \alpha\beta-\beta\chi. \end{aligned}$$

Ἐπιλύοντες τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς, εὑρίσκομεν

$$(2)\quad \chi=\frac{\alpha\alpha'(\beta'-\beta)}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\ y=\frac{\beta\beta'(\alpha-\alpha')}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Ἐὰν ἤδη ἀναζητήσωμεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ τὰς λοιπὰς ὀκτὼ θέσεις τοῦ δευτέρου τριγώνου ΑΒ'Γ', θέλομεν ἰδεῖ ὅτι καθ' ὅλας αὐτὰς τὰς θέσεις αἱ ἐξισώσεις διαφέρουσι τῶν εὑρεθεισῶν μόνον ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τῶν γραμμάτων α', β', χ, y· καὶ ὅταν μὲν αἱ διὰ τῶν γραμμάτων αὐτῶν σημειούμεναι ἀποστάσεις ἔχωσι τὴν αὐτὴν θέσιν ἀπὸ τοῦ Α, ἣν καὶ αἱ διὰ τῶν γραμμάτων α καὶ β τοῦ πρώτου τριγώνου, τὰ γράμματα αὐτὰ (α', ἢ β', ἢ χ, ἢ y) ἔχουσι τότε τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ καὶ ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν (1)· ὅταν δ' αἱ ἀποστάσεις ἐκεῖναι ἔχωσιν ἀντιθέτους θέσεις, ὡς πρὸς τὰς παριστωμένας διὰ α καὶ β, τὰ γράμματα α', β', κ.τ.λ. ἔχουσι τότε σημεῖον ἀντίθετον τοῦ ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν (1). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ περιλάβωμεν ἐν τοῖς τύποις (2) τὰς λύσεις κατὰ τὰς λοιπὰς περιπτώσεις διὰ τῶν ἑξῆς συνθηκῶν. α'. *Τὰ γράμματα α' καὶ β' θεωρείσθωσαν ὡς παριστῶντα θετικοὺς μὲν ἀριθμούς, ὅταν ἐμφαίνωσιν ἀποστάσεις ἐχούσας τὴν αὐτὴν θέσιν, ἣν καὶ τὰ α καὶ β, ἀρνητικοὺς δέ, ὅταν ἐμφαίνωσιν ἀποστάσεις ἀντίθετον θέσιν ἐχούσας*. β'. *Τὴν αὐτὴν ἀποδοτέον σημασίαν εἰς τὰς ἐκ τῶν τύπων* (2) *θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς τιμάς*.

Ὑπεθέσαμεν ὅτι τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ σημειοῦνται διὰ α καὶ β, ἔχει τὴν ἐν τοῖς ἀνωτέρω σχήμασι θέσιν· ἀλλὰ ταὐτὰ ἔχομεν λέγειν, οἱαδήποτ' ἂν ᾖ ἡ θέσις τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

Περὶ Διερευνήσεων.

§ 176. Ὅταν προταθῇ μερικὸν πρόβλημα σύνθετον, ποιοῦμεν πρὸς λύσιν αὐτοῦ πάσας τὰς δυνατὰς ὑποθέσεις καὶ λύομεν αὐτὸ καθ' ἑκάστην τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν. Ἐὰν αἱ ἀρνητικαὶ λύσεις κατά τινας ὑποθέσεις ἦναι ἐπιδεκτικαὶ ἑρμηνείας, ἑρμηνεύομεν αὐτάς, ὡς ἐποιήσαμεν ἐν § § 159, 160, 161.

Προκειμένου γενικοῦ προβλήματος, ὄντος μὲν αὐτοῦ ἁπλοῦ, δυνάμεθα, ἀφοῦ λύσωμεν αὐτό, νὰ ποιῶμεν διαφόρους ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν καὶ νὰ ἑρμηνεύωμεν τοῦθ' ὅπερ ἀποβαίνουσιν αἱ λύσεις κατὰ τὰς ὑποθέσεις αὐτάς, μάλιστα ὅταν αὗται ἀποβαίνωσιν ἀρνητικαί, ἢ λαμβάνωσι τὸ σχῆμα $\frac{K}{0}$ ἢ $\frac{0}{0}$· ὄντος δὲ τοῦ προβλήματος συνθέτου, ἀφοῦ εὕρωμεν τὰς λύσεις καθ' ἁπάσας τὰς ὑποθέσεις, δυνάμεθα νὰ βασανίζωμεν ἑκάστην τῶν λύσεων, ποιοῦντες ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, ἀγούσας εἰς ἀξιοσημείωτα ἐξαγόμενα, ἢ χρώμενοι ἀλγεβρικοῖς ἀριθμοῖς πρὸς συγχώνευσιν τύπων.

Αἱ διάφοροι αὗται ἀναζητήσεις καὶ ἔρευναι καλοῦνται *διερευνήσεις*.

177. Ἐπὶ πάντων τῶν ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ προβλημάτων ἐποιήσαμεν διερευνήσεις. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰ γενικὰ σύνθετα προβλήματα γίνονται οὐ μόνον συγχωνεύσεις τύπων, ἐὰν ἐγχωρῇ, ἀλλὰ καὶ ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, ἄγουσαι εἰς ἀξιοσημείωτα ἐξαγόμενα, θέλομεν ἐνταῦθα συμπληρώσει τὴν διερεύνησιν τοῦ τελευταίου προβλήματος (§ 175), ποιοῦντες τοιαύτας ὑποθέσεις.

Οἱ τύποι τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἰσὶ

$$\chi=\frac{\alpha\alpha'(\beta'-\beta)}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\ \psi=\frac{\beta\beta'(\alpha-\alpha')}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἰσὶ πάντοτε θετικοί, οἱ δὲ α′ καὶ β′ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ κατὰ τὰς θέσεις τῶν τριγώνων, ὡς εἴρηται ἐν § 175.

α′. Ὑποτεθήτω $\alpha\beta'=\beta\alpha'$ (*) καὶ ὅτι οὐδέτερος τῶν ἀριθμητῶν εἶναι 0. Ἀμφότεροι οἱ τύποι ἀποβαίνουσι τότε $\frac{K}{0}$· ὅθεν τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον κατ' αὐτὴν τὴν ὑπόθεσιν (§ 151). Τῷ ὄντι· τὰ τρίγωνα ἔχουσι κατ' αὐτὴν τὴν ὑπόθεσιν ἤτοι τὰς θέσεις (Θ) ἢ τὰς (Λ)· δὲν δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι τὰς θέσεις (Κ)· διότι ἐν ἑκάστῃ τῶν θέσεων αὐτῶν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν α′, β′ παρίσταται δι' ἀριθμοῦ ἀρνητικοῦ, ἡ δ' ἑτέρα διὰ θετικοῦ· ἑπομένως τὰ γινόμενα αβ′ καὶ βα′, ὄντα ἑτερόσημα, δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἴσα. Ἐὰν τὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς θέσεις (Θ), ἔχομεν τότε $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$· αἱ ὑποτείνουσαι λοιπὸν εἰσὶ παράλληλοι καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Ἐπίσης ὅταν τὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς θέσεις (Λ), ἡ ἰσότης $\alpha\beta'=\beta\alpha'$ συνεπάγεται τὴν ἀναλογίαν τῶν ἀπολύτων ἀξιῶν τῶν ἀριθμῶν α, α′, β, β′· αἱ πλευραὶ λοιπὸν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἰσὶν ἀνάλογοι· ἄρα αἱ ὑποτείνουσαι εἰσὶ πάλιν παράλληλοι.

β′. Ὑποτεθήτω $\alpha=\alpha'$ καὶ $\beta=\beta'$. Ἕπεται ἐντεῦθεν $\alpha\beta'=\beta\alpha'$

(*) Διὰ τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐννοοῦμεν ὅτι οὐ μόνον αἱ ἀπόλυτοι ἀξίαι τῶν γινομένων αβ′ καὶ βα′ εἰσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ τὰ σημεῖα τὰ αὐτά. Οὕτω νοοῦνται αἱ ἰσότητες καὶ κατὰ τὰς λοιπὰς ὑποθέσεις.

ἀμφότεροι λοιπὸν οἱ τύποι λαμβάνουσι τότε τὸ σχῆμα $\frac{0}{0}$. Τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι ἐνταῦθα σύμβολον τοῦ ἀπροσδιορίστου (§ 156). Τῷ ὄντι· τὰ τρίγωνα ἔχουσι τότε τὰς θέσεις (Θ)· διότι κατὰ τὰς λοιπὰς θέσεις αἱ πλευραὶ α καὶ α', ἢ αἱ β καὶ β', ἢ αἵ,τε α καὶ α' καὶ αἱ β καὶ β' εἰσὶν ἑτερόσημοι· ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ἐν ταὐτῷ $α=α'$ καὶ $β=β'$. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα τότε ταυτίζονται· ἑπομένως αἱ ὑποτείνουσαι ἔχουσι τότε ἄπειρα κοινὰ σημεῖα.

γ'. Ἔστω $αβ'=αβ'$ καὶ $β=β'$. Ἕπεται καὶ ὅτι $α=α'$ ἡ περίπτωσις λοιπὸν αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρω.

δ'. Ἔστω $β=β'$, ἀλλὰ α διάφορον τοῦ α'. Τὰ γινόμενα $αβ'$ καὶ $βα'$ εἰσὶ τότε ἄνισα· ἑπομένως ἡ μὲν τιμὴ τοῦ χ εἶναι τότε 0, ἡ δὲ τοῦ y διάφορος τοῦ 0. Τῷ ὄντι· τὰ τρίγωνα ἔχουσι τότε τὰς θέσεις (Θ) ἢ τὰς δύο πρώτας τῶν (Κ)· διότι κατὰ τὰς λοιπὰς θέσεις οἱ ἀριθμοὶ β καὶ β' εἰσὶν ἑτερόσημοι. Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $β=β'$ ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' συμπίπτουσιν· οὕτω τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ὑποτεινουσῶν, κειμένου ἐπὶ τῆς καθέτου ΑΓ, ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς καθέτου αὐτῆς εἶναι 0.

Ἀνάλογος ταύτῃ εἶναι καὶ ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν $α=α'$, τὸ δὲ β διάφορον τοῦ β'.

Περιπτώσεις ἄλλαι ἀξιοσημείωτοι πρὸς διερεύνησιν δὲν ὑπάρχουσι. Δὲν δυνάμεθα, φέρ' εἰπεῖν, νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι πλευρά τις εἶναι 0· διότι δὲν ὑπάρχει τότε τρίγωνον. Περὶ δὲ τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν εἴρηται ἐν § 175.

§ 178. Δυνάμεθα νὰ διερευνῶμεν μερικὸν ἢ γενικὸν ἁπλοῦν πρόβλημα καὶ *ἀναζητοῦντες σύνθετον πρόβλημα, ἐν ᾧ τὸ πρῶτον περιέχεται.*

Ἔστω π. χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα. *Ὁ Α εἶναι 50 ἐτῶν, ὁ δὲ Β 36· μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἡλικία τοῦ Α ἔσεται διπλασία τῆς τοῦ Β;* Ἡ μὲν ἐξίσωσις εἶναι $50+χ=2(36+χ)$, ἡ δὲ λύσις $χ=-22$. Ἐπειδὴ οὐδὲν ἀόριστον ὑπάρχει ἐν τῇ ἐκφωνήσει τοῦ προβλήματος, μέλλοντος ὄντος ῥητῶς τοῦ ζητουμένου χρόνου, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Ἀλλ' ὑπάρχει σύνθετον πρόβλημα, ἐν ᾧ περιέχεται τὸ ἀνωτέρω, τὸ ἐν § 160, ἔνθα δὲν ὁρίζεται ἐὰν ὁ ζητούμενος χρόνος ἦναι μέλλων ἢ παρελθὼν, ἡ δ' ἀνωτέρω ἀρνητικὴ λύσις ἀναφέρεται εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ χρόνος εἶναι παρελθών.

§ 179. Διερευνήσεις γίγνοιντ' ἂν καὶ ἁπλῶς ἐπὶ τῶν λύσεων γενικῶν ἐξισώσεων, ἀνεξαρτήτως παντὸς προβλήματος, γινομένων διαφόρων ὑποθέσεων ἐπὶ τῶν γνωστῶν γενικῶν ἀριθμῶν καὶ ἑρμηνευομένων τῶν ἐξαγομένων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΝ.

1. Ἔχει τις δύο μεταλλικὰ μίγματα, ὧν τὸ πρῶτον περιέχει α δραχμὰς χρυσοῦ καὶ β ἀργύρου, τὸ δὲ δεύτερον α' δραχμὰς χρυσοῦ καὶ β' ἀργύρου· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου, ἵν' ἀποτελέσῃ μίγμα ἐκ γ δραχμῶν χρυσοῦ καὶ δ ἀργύρου;

Λύσις. Ἔστωσαν χ αἱ ἐκ τοῦ πρώτου μίγματος δραχμαὶ καὶ y αἱ ἐκ τοῦ δευτέρου. Ἔχομεν

$$\chi=\frac{(\alpha+\beta)(\gamma\beta'-\delta\alpha')}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\ y=\frac{(\alpha'+\beta')(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Διερεύνησις. ά. Ὅταν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\gamma}{\delta}$, αἱ τιμαὶ ἀποβαίνουσι $\frac{0}{0}$. Δεῖξαι ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι τότε ἀπροσδιόριστον β'. Ὅταν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}\gtrless\frac{\gamma}{\delta}$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. γ'. Ὅταν $\alpha\delta-\beta\gamma$ ἢ $\gamma\beta'-\delta\alpha'$ δὲν ἦναι ὁμόσημον τῷ $\alpha\beta'-\beta\alpha'$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

2. Τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εὐθείας τινὸς ἀπέχουσιν ἀπό τινος ἄλλου σημείου Ο τῆς αὐτῆς εὐθείας δεδομένας ἀποστάσεις α, β, γ, δ. Εὑρεῖν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον Χ τοιοῦτον, ὥστε παντὸς σημείου τῆς εὐθείας, κειμένου ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ, Δ, Χ, ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ Χ νὰ ἦναι ἴση τῷ μέσῳ ὅρῳ τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ, Δ. (Μέσος ὅρος δεδομένων ποσῶν ἢ ἀριθμῶν καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν· π. χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6 εἶναι $\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$).

Ἔστω χ ἡ ἀπόστασις τοῦ Χ ἀπὸ τοῦ Ο. Ἡ γενικὴ λύσις εἶναι $\chi=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$ ὑπὸ τοὺς ἑξῆς ὅρους. α'. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ οἱ μὲν ἐμφαίνοντες ἀποστάσεις σημείων κειμένων ἐκ δεξιῶν τοῦ Ο ἔστωσαν θετικοί, οἱ δ' ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Ο ἀρνητικοί. β'. Αἱ ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ τιμαὶ σημαινέτωσαν ὅτι τὸ Χ κεῖται ἐκ δεξιῶν ἢ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Ο.

3. Δύο ταχυδρόμοι, ὁδεύοντες ὁμαλῶς ἐπ' εὐθείας τινὸς μετὰ ταχυτήτων β καὶ γ, εὑρίσκονται κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας αὐτῆς, ὧν ἡ ἀπόστασις α. Εὑρεῖν τὰς ἀποστάσεις ἀπὸ Α καὶ Β τοῦ σημείου, δι' οὗ οἱ ταχυδρόμοι διέρχονται συγχρόνως.

Οἱ τύποι τῶν λύσεων καθ' ἁπάσας τὰς περιπτώσεις εἰσὶ

$$\chi=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma},\ y=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma},$$

χ οὔσης τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ Α καὶ y τῆς ἀπὸ τοῦ Β, ὑπὸ τοὺς ἑξῆς ὅρους. α'. Τὰ γράμματα β καὶ γ παριστάτωσαν θετικοὺς μὲν ἀριθμούς, ὅταν οἱ ταχυδρόμοι ὁδεύωσι πρὸς τὰ δεξιά, ἀρνητικοὺς δέ, ὅταν τοὐναντίον. β'. Αἱ θετικαὶ λύσεις τοῦ χ ἑρμηνευέσθωσαν ὡς ἀποστάσεις σημείου κειμένου ἐκ δεξιῶν τοῦ Α· ὁμοίως καὶ αἱ θετικαὶ τοῦ y ὡς ἀποστάσεις σημείου κειμένου ἐκ δεξιῶν τοῦ Β· αἱ δ' ἀρνητικαὶ λύσεις ἑρμηνευέσθωσαν ὡς ἀποστάσεις σημείων κειμένων ἀντιθέτως.—Ὅταν $\beta-\gamma=0$, οἱ δὲ α καὶ β διάφοροι τοῦ 0, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Ὅταν $\beta=\gamma$ καὶ $\alpha=0$, οἱ τύποι ἀποβαίνουσι $\frac{0}{0}$· τὸ πρόβλημα εἶναι τότε ἀπροσδιόριστον. Δῆλα ταῦτα καὶ ἐκ τῶν προτέρων.—Τίνες ἔσονται οἱ τύποι, ὅταν τὰ θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ διαστήματα ὁρισθῶσιν ἀντιθέτως;

4. Σημεῖον κινεῖται ὁμαλῶς ἐπί τινος εὐθείας μετὰ ταχύτητος τ. Κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν εὑρίσκεται ἐπί τινος σημείου Ο τῆς εὐθείας ταύτης, κατ' ἄλλην δὲ στιγμὴν ἐπὶ ἄλλου σημείου Χ· ὁ μεταξὺ τῶν δύο τούτων στιγμῶν χρόνος εἶναι $\varkappa$· εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν τοῦ Χ ἀπό τινος ἄλλου σημείου Α τῆς αὐτῆς εὐθείας, οὗ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ Ο εἶναι δ.

Ἡ γενικὴ τοῦ προβλήματος αὐτοῦ λύσις εἶναι $\chi=\delta-\varkappa\tau$ ὑπὸ τοὺς ἑξῆς ὅρους. α'. Ὁ χρόνος $\varkappa$ ἔστω θετικὸς μέν, ὅταν ἦναι μέλλων ὡς πρὸς τὴν στιγμήν, καθ' ἣν τὸ κινητὸν εἶναι εἰς Ο, ἀρνητικὸς δέ, ὅταν ἦναι παρελθών. β'. Ἡ ταχύτης τ ἔστω θετικὴ μέν, ἐὰν τὸ κινητὸν κατευθύνηται πρὸς τὰ δεξιά, ἀρνητικὴ δέ, ἐὰν πρὸς τἀριστερά. γ'. Ἡ ἀπόστασις δ ἔστω θετικὴ μέν, ἐὰν τὸ Α κῆται ἐκ δεξιῶν τοῦ Ο, ἀρνητικὴ δέ, ἐὰν ἐξ ἀριστερῶν. δ'. Αἱ μὲν θετικαὶ ἐκ τοῦ τύπου τιμαὶ σημαινέτωσαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α σημείου κειμένου ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Α, αἱ δ' ἀρνητικαὶ σημείου κειμένου ἐκ δεξιῶν.—Ὅταν τὰ ἀπὸ τοῦ Ο θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ διαστήματα ὁρισθῶσιν ἀντιθέτως, τίνι τρόπῳ θετέον τὰς λοιπὰς συνθήκας, ὅπως ὁ αὐτὸς τύπος $\delta-\varkappa\tau$ ᾖ ἡ γενικὴ λύσις τοῦ προβλήματος;—Τίνα τῶν κατὰ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ποσῶν ὁριστέον ἀντιθέτως, ὅπως ἡ γενικὴ λύσις ᾖ $\delta+\varkappa\tau$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ.

Τύποι τῶν λύσεων δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων.

§ 180. Ἔστωσαν αἱ ἑξῆς δύο γενικαὶ ἐξισώσεις μετὰ δύο ἀγνώστων

$$(Z)\qquad \begin{aligned} \alpha\chi+\beta y&=\gamma \\ \alpha'\chi+\beta' y&=\gamma'. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ β' καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ β, εἶτα δὲ τὴν δευτέραν τῶν προκυπτουσῶν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς πρώτης, συνάγομεν

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\chi=\gamma\beta'-\beta\gamma';$$

ὅθεν

$$(1)\quad \chi=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$(2)\quad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Οἱ τύποι οὗτοι δεικνύουσι τίνι τρόπῳ σχηματίζονται αἱ τιμαὶ διὰ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν τῶν ἐξισώσεων (Ζ), καὶ δυνάμεθα νὰ ποιῶμεν ἐφαρμογὴν αὐτῶν πρὸς ἐπίλυσιν ζεύγους, ἔχοντος τὴν μορφὴν τῶν (Ζ). Ἔστω, π. χ., τὸ ζεῦγος

$$5\chi-3y=8$$
$$4\chi+7y=10.$$

Ποιοῦντες ἐν τοῖς τύποις (1) καὶ (2) $\alpha=5$, $\beta=-3$, $\gamma=8$, $\alpha'=4$, $\beta'=7$, $\gamma'=10$, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{8\times7+3\times10}{5\times7+3\times4}=\frac{86}{47}$$

$$y=\frac{5\times10-8\times4}{5\times7+3\times4}=\frac{18}{47}.$$

Διερεύνησις τῶν τύπων τῶν λύσεων δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων.

§ 181. Ἐπιλύσαντες τὰς ἐξισώσεις (Ζ), εὕρομεν τοὺς τύπους

$$(1)\quad \chi=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\qquad (2)\quad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Διερευνήσωμεν τοὺς τύπους αὐτούς, ποιοῦντες ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν γνωστῶν α, β, α', β', γ, γ', ἀγούσας εἰς ἀξιοσημείωτα ἐξαγόμενα.

Α'. *Ὑποτεθήτω $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ καὶ ὅτι οὐδεὶς τῶν συντελεστῶν α, β, α', β' εἶναι 0.*

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν τὰ ἑξῆς θεωρήματα

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Οἱ ἀριθμηταὶ τῶν τύπων (1) καὶ (2) ἢ ἀμφότεροι εἶσι 0, ἢ οὐδέτερος.* Παραστήσωμεν διὰ Α καὶ Α' τοὺς ἀριθμητὰς τῶν τύπων (1) καὶ (2). Ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha\beta'=\beta\alpha'$ συναγομεν $\beta' = \frac{\beta\alpha'}{\alpha}$· τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ β' ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ Α ἔχομεν

$$A = \frac{\gamma\beta\alpha'}{\alpha} - \beta\gamma' = \frac{\beta(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')}{\alpha}.$$

ἀλλὰ $\gamma\alpha' - \alpha\gamma' = -A'$· ἄρα

$$A = -\frac{\beta}{\alpha}A'.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ Α καὶ Α' ἤτοι ἀμφότεροί εἰσι 0, ἢ οὐδέτερος.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν λοιπὸν ταύτην οἱ τύποι (1) καὶ (2) ἢ ἐν ταὐτῷ ἀποβαίνουσι $\frac{0}{0}$, ἢ ἐν ταὐτῷ $\frac{K}{0}$· δὲν εἶναι δυνατὸν δηλονότι ὁ εἷς ν' ἀποβαίνῃ $\frac{0}{0}$, ἐνῷ ὁ ἕτερος γίνεται $\frac{K}{0}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Αἱ ἐξισώσεις (Ζ) εἰσὶν ἰσοδύναμοι ἢ ἀσυνύπαρκτοι.* Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ δευτέρᾳ τῶν (Ζ) τὴν ἀνωτέρω τιμὴν τοῦ β', ἔχομεν

$$\alpha'\chi + \frac{\beta\alpha'}{\alpha}y = \gamma',$$

ἢ

$$(3) \quad \alpha\alpha'\chi + \beta\alpha'y = \alpha\gamma'.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην τῶν (Ζ) ἐπὶ α' ἔχομεν

$$(4) \quad \alpha\alpha'\chi + \beta\alpha'y = \alpha'\gamma.$$

Ἐὰν $\alpha\gamma' = \gamma\alpha'$, αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εἰσὶν αἱ αὐταί· ἐπομένως αἱ (Ζ) ἰσοδύναμοι. Ἐὰν δὲ $\alpha\gamma' <> \gamma\alpha'$, αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εἰσὶ προφανῶς ἀσυνύπαρκτοι· ἐπομένως καὶ αἱ (Ζ).

Οὕτως ὅταν κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην οἱ τύποι ἀποβαίνωσι $\frac{0}{0}$, τὸ ζεῦγος (Ζ) εἶναι ἀπροσδιόριστον· ὅταν δὲ $\frac{K}{0}$, ἀδύνατον (§ § 150, 151).

§ 182. Β'. *Ὑποτεθήτω $\alpha\beta' = \beta\alpha'$ καὶ ὅτι εἷς τῶν συντελεστῶν εἶναι 0.*

Ἔστω $\beta' = 0$· ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha\beta' = \beta\alpha'$, ἕπεται ὅτι καὶ $\beta\alpha' = 0$·

ὅθεν ὁ ἕτερος τῶν συντελεστῶν β ἢ α' πρέπει νὰ ἦναι ἐπίσης 0. Ἐρευνήσωμεν ἰδίᾳ ἑκατέραν τῶν περιπτώσεων αὐτῶν, ὑποθέτοντες ἐκ περισσοῦ ὅτι οὐδέτερος τῶν λοιπῶν δύο συντελεστῶν εἶναι 0.

α'. Ἐὰν $\alpha'=0$, αἱ μὲν ἐξισώσεις εἰσὶ τότε

$$\alpha\chi+\beta y=\gamma,\ 0=\gamma',$$

οἱ δὲ τύποι ἀποβαίνουσι

$$\chi=\frac{-\beta\gamma'}{0},\ y=\frac{\alpha\gamma'}{0}.$$

Ἐὰν γ' δὲν ἦναι 0, λαμβάνουσιν ἀμφότεροι τὸ σχῆμα $\frac{K}{0}$. ἐὰν δὲ $\gamma'=0$, ἀμφότεροι ἀποβαίνουσι $\frac{0}{0}$. Κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ ἐξισώσεις εἰσὶν ἀσυνύπαρκτοι, τῆς ἑτέρας οὔσης ἀτόπου ἰσότητος, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀνάγονται εἰς μίαν μόνην, τῆς δευτέρας οὔσης ταυτότητος. Οὕτως αἱ μορφαὶ $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{K}{0}$, ἃς λαμβάνουσιν οἱ τύποι, εἰσὶν ἔτι ἡ μὲν σύμβολον τοῦ ἀδυνάτου, ἡ δὲ τοῦ ἀπροσδιορίστου.

β'. Ἐὰν $\beta=0$, αἱ μὲν ἐξισώσεις ἀποβαίνουσι

$$(\text{H})\quad \alpha\chi=\gamma,\ \alpha'\chi=\gamma',$$

οἱ δὲ τύποι

$$\chi=\frac{0}{0},\ y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{0}.$$

Ἐὰν $\alpha\gamma' \lessgtr \gamma\alpha'$, ἡ τιμὴ τοῦ y λαμβάνει τὸ σχῆμα $\frac{K}{0}$. Αἱ ἐξισώσεις (Η), περιέχουσαι μόνον τὸν χ καὶ μὴ οὖσαι ἰσοδύναμοι (ὡς ἐκ τῆς ἀνισότητος $\alpha\gamma' \lessgtr \gamma\alpha'$, ἐξ ἧς $\frac{\gamma}{\alpha}$ διάφορον τοῦ $\frac{\gamma'}{\alpha'}$), δὲν ἔχουσι τότε κοινὰς λύσεις. Ἐὰν δὲ $\alpha\gamma'=\gamma\alpha'$, αἱ μὲν ἐξισώσεις (Η) εἰσὶν ἰσοδύναμοι, ἀμφότεροι δ' οἱ τύποι ἀποβαίνουσι $\frac{0}{0}$.

Οὕτως ὅταν δύο μόνοι τῶν συντελεστῶν ἦναι 0, οὗτοι δὲ ἦναι ἢ οἱ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει ἢ οἱ τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου, ἐὰν μὲν ἀμφότεροι τύποι ἀποβαίνωσι $\frac{0}{0}$, αἱ ἐξισώσεις εἰσὶν ἰσοδύναμοι, ἐὰν δ' ἀποβαίνωσι $\frac{K}{0}$, ἤτοι ἀμφότεροι ἢ ὁ ἕτερος (ὁπότε ὁ ἕτερος γίνεται $\frac{0}{0}$), αἱ ἐξισώσεις εἰσὶν ἀσυνύπαρκτοι.

§ 183. Γ'. *Ὑποτεθήτω ὅτι $\alpha\beta'=\beta\alpha'$ καὶ ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου ἐν μιᾷ ἐξισώσει καὶ ὁ τοῦ ἑτέρου ἀγνώστου ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἐξισώσει εἶναι 0.*

Ἔστω $\alpha=0$, $\beta'=0$. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha\beta'=\beta\alpha'$ ἕπεται $\beta\alpha'=0$· ἐντεῦθεν ἢ $\alpha'=0$ ἢ $\beta=0$· ἀναγκαίως δηλονότι καὶ ὁ δεύτερος συντελεστὴς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου εἶναι τότε 0. Ἔστω $\beta=0$. Αἱ μὲν ἐξισώσεις εἰσὶ τότε

$$0=\gamma,\ \alpha'\chi=\gamma',$$

αἱ δὲ λύσεις ἀποβαίνουσι

$$\chi=\frac{0}{0},\ y=\frac{-\gamma\alpha'}{0}.$$

α'. Ἐὰν οὔτε γ οὔτε α' ἦναι 0, ἡ τιμὴ τοῦ y γίνεται $\frac{K}{0}$. Τῆς πρώτης ἐξισώσεως οὔσης τότε ἀτόπου, τὸ ἀδύνατον τοῦ συστήματος καταφαίνεται δι' ἀμφοτέρων τῶν συμβόλων $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{K}{0}$, ὡς καὶ κατά τινα τῶν προηγηθεισῶν περιπτώσεων.

β'. Ἐὰν $\gamma=0$, ἀμφότεροι οἱ τύποι λαμβάνουσι τὸ σχῆμα $\frac{0}{0}$· ἀλλ' αἱ ἐξισώσεις τότε εἰσὶ

$$0=0,\ \alpha'\chi=\gamma'\cdot$$

μόνη λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ y εἶναι ἀπροσδιόριστος. Οὕτω τὸ ἀπροσδιόριστον, ὅπερ ὑποδείκνυσιν ἐνταῦθα τὸ σύμβολον $\frac{0}{0}$, εἶναι μερικόν, ἤτοι μόνον διὰ τὸν y, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ χ εἶναι $\frac{\gamma'}{\alpha'}$.

γ'. Ἐὰν $\alpha'=0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ὅταν οὐδέτερον ἢ τὸ ἕτερον μόνον τῶν δευτέρων μελῶν ἦναι 0· οἱ δὲ τύποι λαμβάνουσιν ἀμφότεροι τὸ σχῆμα $\frac{0}{0}$. Κατὰ ταύτην λοιπὸν τὴν περίπτωσιν τὸ σύμβολον $\frac{0}{0}$ προέρχεται ἐξ ἀδυνάτου (§ 156). Ἐὰν ὅ,τε γ καὶ ὁ γ′ ἦναι 0, αἱ ἐξισώσεις γίνονται ταυτότητες, οἱ δὲ τύποι ἔχουσι πάλιν τὸ σχῆμα $\frac{0}{0}$, ὅπερ ἐνταῦθα εἶναι σύμβολον ἀπροσδιορίστου.

§ 184. Ἐκτὸς τῶν διερευνηθεισῶν περιπτώσεων ἀξιοσημείωτος εἶναι καὶ ἐκείνη, καθ' ἣν $\gamma=0$ καὶ $\gamma'=0$. Οἱ τύποι γίνονται τότε

$$\chi=\frac{0}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\quad y=\frac{0}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ δὲν ἦναι 0, ἔχομεν $\chi=0$, $y=0$· ἐὰν δὲ $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, ἔχομεν $\chi=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$. Κατὰ τὴν τελευταίαν περίπτωσιν αἱ ἐξισώσεις εἰσὶν ἰσοδύναμοι· ἐπομένως τὸ σύμβολον $\frac{0}{0}$ παρίστησι πάλιν τὸ ἀπροσδιόριστον.

Τύποι τῶν λύσεων τριῶν ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων.

§ 185. Ἔστωσαν αἱ ἑξῆς τρεῖς γενικαὶ ἐξισώσεις μετὰ τριῶν ἀγνώστων

$$(\mathrm{M})\quad \begin{aligned} \alpha\chi+\beta y+\gamma\omega&=\delta\\ \alpha'\chi+\beta' y+\gamma'\omega&=\delta'\\ \alpha''\chi+\beta'' y+\gamma''\omega&=\delta''. \end{aligned}$$

Δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα αὐτὸ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα· ἀλλ' ἐνταῦθα θέλομεν ἐκτελέσει τὴν ἐπίλυσιν ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιάσωμεν τὴν δευτέραν ἐπὶ ἀπροσδιόριστόν τινα κ, τὴν τρίτην ἐπὶ ἕτερον τοιοῦτον λ καὶ προσθέσωμεν ἀκολούθως τὰς προκυπτούσας καὶ τὴν πρώτην τῶν προτεθεισῶν. Εὑρίσκομεν οὕτω

$$(\Pi)\quad (\alpha+\alpha'\kappa+\alpha''\lambda)\chi+(\beta+\beta'\kappa+\beta''\lambda)y+(\gamma+\gamma'\kappa+\gamma''\lambda)\omega=\delta+\delta'\kappa+\delta''\lambda.$$

Ἐὰν ἐκλέξωμεν τοὺς ἀπροσδιορίστους κ καὶ λ οὕτως, ὥστε οἱ συντελεσταὶ δύο τῶν ἀγνώστων τῆς τελευταίας ἐξισώσεως νὰ ὦσι 0, ἢ ἐξίσωσις αὕτη περιέξει ἕνα μόνον ἄγνωστον· θῶμεν οὖν

$$\beta+\beta'\kappa+\beta''\lambda=0,\quad \gamma+\gamma'\kappa+\gamma''\lambda=0,$$

ὅθεν πορίζόμεθα κατὰ τοὺς ἐν § 180 τύπους

$$(\mathrm{P})\quad \kappa=\frac{-\beta\gamma''+\gamma\beta''}{\beta'\gamma''-\gamma'\beta''},\quad \lambda=\frac{-\beta'\gamma+\beta\gamma'}{\beta'\gamma''-\gamma'\beta''}.$$

Ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς αὐτὰς ἐν τῇ τιμῇ

$$\chi=\frac{\delta+\delta'\kappa+\delta''\lambda}{\alpha+\alpha'\kappa+\alpha''\lambda},$$

ἣν συνάγομεν ἐκ τῆς (Π), καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν

$$(2)\quad \chi=\frac{\delta\beta'\gamma''-\delta\gamma'\beta''+\gamma\delta'\beta''-\beta\delta'\gamma''+\beta\gamma'\delta''-\gamma\beta'\delta''}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha''}.$$

Τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω εὑρίσκομεν ἀμέσως παρατηροῦντες ὅτι αἱ ἐξισώσεις (Μ) εἰσὶ συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὰ γράμματα χ καὶ y καὶ τὰ α καὶ ϐ (*)· ἐπίσης δὲ καὶ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ω καὶ χ καὶ τὰ α καὶ γ· ὅθεν ἵνα μὲν ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y, συναλλάττομεν ἐν τῇ τιμῇ τοῦ χ τὰ γράμματα α καὶ ϐ, ἵνα δ' ἔχωμεν τὴν τοῦ ω, συναλλάττομεν ἐν τῇ τοῦ χ τὰ α καὶ γ· οὕτως εὑρίσκομεν

$$(3)\quad y=\frac{\alpha\delta'\gamma''-\alpha\gamma'\delta''+\gamma\alpha'\delta''-\delta\alpha'\gamma''+\delta\gamma'\alpha''-\gamma\delta'\alpha''}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha''}.$$

$$(4)\quad \omega=\frac{\alpha\beta'\delta''-\alpha\delta'\beta''+\delta\alpha'\beta''-\beta\alpha'\delta''+\beta\delta'\alpha''-\delta\beta'\alpha''}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha''}.$$

Πάντες οἱ τύποι οὗτοι ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Περιέχουσι δὲ τόσας πολλὰς πράξεις ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν τῶν ἐξισώσεων, ὥστε δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόζωνται ἐπωφελῶς πρὸς ἐπίλυσιν μερικῶν συστημάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ τρόπος, καθ' ὃν ἐπελύθη τὸ σύστημα (Μ) δύναται νὰ ἐφαρμόζηται εἰς ἐπίλυσιν συστήματος ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων καὶ καλεῖται *μέθοδος τῶν ἀπροσδιορίστων συντελεστῶν*. Ἰδοὺ ἡ γενικὴ ἔκθεσις τῆς μεθόδου ταύτης. *Πολλαπλασιάζομεν* τὰς

(*) Δὲν μεταβάλλεται δηλονότι τὸ σύστημα, ἐὰν συναλλαγῶσι τὰ γράμματα χ καὶ y καὶ τὰ α καὶ ϐ, διατηρουμένων τῶν αὐτῶν τόνων.

ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, ἐκτὸς μιᾶς, ἐπὶ ἀπροσδιορίστους ἀριθμοὺς κ, λ, μ, ..., προσθέτομεν τὰς προκυπτούσας καὶ ἐκείνην, ἣν δὲν ἐπολλαπλασιάσαμεν, εἶτα ἐξισοῦμεν τῷ 0 τοὺς συντελεστὰς τῆς προκυπτούσης, ἐκτὸς ἑνός· ἡ τελευταία ἐξίσωσις ἀνάγεται οὕτως εἰς ἐξίσωσιν μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου, οὗτινος εὑρίσκομεν τὴν τιμήν· ἐν τῇ τιμῇ ταύτῃ εἰσέρχονται οἱ ἀπροσδιόριστοι κ, λ, μ, ..., ὧν αἱ τιμαὶ προσδιορίζονται διὰ τῶν ἰσοτήτων, ἃς ἔχομεν ἐκ τῶν ἐκμηδενισθέντων συντελεστῶν. Αἱ ἐξισώσεις, δι' ὧν προσδιορίζονται αἱ τιμαὶ τῶν ἀπροσδιορίστων, εἶναι κατὰ μίαν ὀλιγώτεραι τῶν τοῦ συστήματος· ἑπομένως διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἡ ἐπίλυσις συστήματός τινος ἀνάγεται εἰς ἐπίλυσιν συστήματος ἔχοντος μίαν ἐξίσωσιν ὀλιγώτερον.

Νόμος, καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ τύποι τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων.

§ 186. Ἴδωμεν πρῶτον πῶς σχηματίζονται οἱ παρονομασταὶ τῶν γενικῶν τιμῶν.

Οἱ τύποι, οὓς εὕρομεν ἐπὶ δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων, ἔχουσι κοινὸν παρονομαστὴν $\alpha\beta'-\beta\alpha'$· οἱ δ' ἐπὶ τριῶν ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων ἔχουσι κοινὸν παρονομαστὴν $\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha''$.

Ὁ πρῶτος τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν σχηματίζεται ὡς ἑξῆς. Γράφομεν τὰ γράμματα α καὶ β κατὰ τὰς ἑξῆς δύο διατάξεις αβ, βα, τονίζομεν τὰ δεύτερα γράμματα τῶν διαταξέων αὐτῶν καὶ γράφομεν τὰ ἐξαγόμενα ἑξῆς, παρενθέτοντες τὸ σημεῖον —.

Ὁ δεύτερος παρονομαστὴς σχηματίζεται ὡς ἑξῆς. Εἰς ἑκάστην τῶν διατάξεων αβ καὶ βα γράφομεν τὸ τρίτον γράμμα ἐν τέλει, ἐν τῷ μέσῳ καὶ ἐν ἀρχῇ, τὰ δ' ἐντεῦθεν ἐξαγόμενα γράφομεν κατὰ σειράν, ἤγουν ὡς ἕπεται

$$\alpha\beta\gamma,\ \alpha\gamma\beta,\ \gamma\alpha\beta,\ \beta\alpha\gamma,\ \beta\gamma\alpha,\ \gamma\beta\alpha\cdot$$

καὶ τὰ μὲν δεύτερα τῶν γραμμάτων ἑκάστου τῶν ἐξαγομένων αὐτῶν τονίζομεν ἅπαξ, τὰ δὲ τρίτα δίς· τέλος τίθεμεν παραλλὰξ τὰ σημεῖα + καὶ — πρὸ τῶν ἐντεῦθεν ἐξαγομένων, καθ' ἣν αὐτὰ ἐγράφησαν τάξιν.

Οἱ δ' ἀριθμηταὶ τῶν τιμῶν σχηματίζονται ἐκ τῶν παρονομαστῶν ὡς ἑξῆς. *Ἀντὶ τοῦ γράμματος, τοῦ παριστῶντος συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου, οὗ τινος πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμή, γράφομεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως.* Π. χ. ἵνα ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ, ἐπὶ μὲν δύο ἐξισώσεων ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῷ παρονομαστῇ $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ ἀντὶ τῶν α καὶ α' τὰ γ καὶ γ', ἐπὶ δὲ τριῶν ἐξισώσεων ἀντὶ τῶν ἐν τῷ παρονομαστῇ α, α', α'' γράφομεν δ, δ', δ''. Ὁμοίως σχηματίζονται οἱ ἀριθμηταὶ τῶν τιμῶν καὶ τῶν ἄλλων ἀγνώστων.

§ 187. Ὁ νόμος οὗτος, καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ τύποι τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, εἶναι γενικός.

Ἔστωσαν, π. χ., αἱ ἑξῆς τέσσαρες μετὰ τεσσάρων ἀγνώστων ἐξισώσεις

$$\alpha\chi+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi=\varepsilon$$
$$\alpha'\chi+\beta'y+\gamma'\omega+\delta'\varphi=\varepsilon'$$
$$\alpha''\chi+\beta''y+\gamma''\omega+\delta''\varphi=\varepsilon''$$
$$\alpha'''\chi+\beta'''y+\gamma'''\omega+\delta'''\varphi=\varepsilon'''.$$

Ἵνα μὲν ἔχωμεν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν τύπων, λαμβάνομεν ἑκάστην τῶν διατάξεων τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ, ἃς ἀνωτέρω ἐγράψαμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ τῶν λύσεων τριῶν ἐξισώσεων, καθ' ἣν εἰσὶ γεγραμμέναι τάξιν, καὶ γράφομεν ἐν τέλει, πρὸ τοῦ τελευταίου, πρὸ τοῦ προτελευταίου καὶ ἐν ἀρχῇ τὸ τέταρτον γράμμα δ, διατάσσομεν τὰ ἐντεῦθεν ἐξαγόμενα κατὰ σειρὰν καὶ τονίζομεν τὰ δεύτερα γράμματα ἅπαξ, τὰ τρίτα δὶς καὶ τὰ τέταρτα τρίς· τέλος δίδομεν παραλλὰξ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ πρὸ ἑκάστου τῶν ἐξαγομένων αὐτῶν, διατεταγμένων ἑξῆς καθ' ἣν εἴρηται τάξιν. Ἵνα δ' ἔχωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑκάστου τύπου, ἀλλάττομεν ἐν τῷ παρονομαστῇ τὰ συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου, οὗτινος σχηματίζομεν τὴν τιμήν, ἐμφαίνοντα γράμματα εἰς δεύτερα μέλη τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ νόμου αὐτοῦ καθ' ὅλην αὐτοῦ τὴν γενικότητα ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τῶν Στοιχείων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $AX+BY=\Gamma$.

Πότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta y=\gamma$ εἶναι ἐπιδεκτικὴ ἀκεραίων λύσεων.

§ 188. Ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \quad \alpha\chi+\beta y=\gamma$$

εἶναι ἐπιδεκτικὴ ἀπείρων λύσεων, ὡς πᾶσα ἐξίσωσις περιέχουσα ὑπὲρ τὸν ἕνα ἄγνωστον.

Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θέλομεν δείξει πῶς εὑρίσκονται *λύσεις ἀκέραιοι* (ζεῦγος τιμῶν ἀμφοτέρων ἀκεραίων) ἢ *ἀκέραιοι καὶ θετικαὶ ἐν ταὐτῷ* τῆς ἐξισώσεως (1), ὅταν α, β, γ ἦναι ὡρισμένοι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

§ 189. Ἡ τοιαύτη ἐξίσωσις δὲν εἶναι πάντοτε ἐπιδεκτικὴ ἀκεραίων λύσεων, ὡς δῆλον ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ὅταν οἱ ἀκέραιοι α, β, γ δὲν ἔχωσιν οὐδένα κοινὸν διαιρέτην, πρέπει, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta y=\gamma$ ᾖ ἐπιδεκτικὴ ἀκεραίων λύσεων, οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῶν ἀγνώστων νὰ ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Ὑποθέσωμεν ὅτι, ἐνῷ δὲν ὑπάρχει διαιρέτης καὶ τῶν τριῶν ἐν ταὐτῷ ἀριθμῶν α, β, γ, οἱ α καὶ β ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην δ. Ἔστω $\frac{\alpha}{\delta}=\alpha'$ καὶ $\frac{\beta}{\delta}=\beta'$. Ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ γραφῇ οὕτω $\alpha'\delta\chi+\beta'\delta y=\gamma$, ἢ διαιρέσει διὰ δ, (2) $\alpha'\chi+\beta'y=\frac{\gamma}{\delta}$. Τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ δὲν εἶναι ἴσον ἀκεραίῳ· διότι ἄλλως ὁ δ ἤθελεν εἶσθαι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν τριῶν ἀριθμῶν α, β, γ· ἐὰν λοιπὸν ἐν τῷ α'. μέλει τῆς (2) θῶμεν ἀντὶ χ καὶ y ἀκεραίους ἀριθμούς, τὸ μέλος αὐτὸ ἴσον ὂν τότε ἀκεραίῳ ἀριθμῷ, οὐδέποτε ἐξισωθήσεται τῷ β'. μέλει ὄντι κλασματικῷ· ἄρα ἡ ἐξίσωσις (2), εἴτε ἡ ἰσοδύναμος (1), εἶναι ἀνεπίδεκτος ἀκεραίων λύσεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐφεξῆς γνωσθήσεται ὅτι, ὅταν οἱ α καὶ β ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι *πάντοτε* ἐπιδεκτικὴ *ἀπείρων* ἀκεραίων λύσεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Οἱ ἄγνωστοι τῆς ἐξισώσεως (1) καλοῦνται καὶ *ἀπροσδιόριστοι*, ὡς ἐπιδεκτικοὶ ἀπείρων τιμῶν.

Ἀκέραιοι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta y=\gamma$.

§ 190. Ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι εἷς τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων ἰσοῦται τῇ μονάδι· π. χ. $\alpha=1$· ἡ ἐξίσωσις εἶναι τότε $\chi+\beta y=\gamma$· ὅθεν $\chi=\gamma-\beta y$. Ἰσοῦντες τὸν y ἀκεραίοις οἱοισδήποτε, θετικοῖς ἢ ἀρνητικοῖς, εὑρήσομεν ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ χ ἐπίσης ἀκεραίους· διότι ἡ παράστασις $\gamma-\beta y$ παρέχει τότε ἐξαγόμενα ἀκέραια, τῶν α καὶ β ὄντων ἀκεραίων. Οὕτω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην λύσεις ἀκεραίους ὁσασδήποτε, διδόντες τιμὰς ἀκεραίους κατ' ἀρέσκειαν τῷ ἀπροσδιορίστῳ, οὗ ὁ συντελεστὴς εἶναι διάφορος τῆς μονάδος, καὶ λογιζόμενοι τὰς ἀντιστοιχούσας τοῦ ἑτέρου.

Ὅταν ἀμφότεροι οἱ συντελεσταὶ ἰσῶνται τῇ μονάδι, ὁποτέρῳ τῶν ἀγνώστων κἂν δῶμεν τιμὰς ἀκεραίους, ἕξομεν ἀντιστοιχούσας τοῦ ἑτέρου ἐπίσης ἀκεραίους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ,

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi-3y=5$. Ποιοῦντες

$$y=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots;$$

εὑρίσκομεν

$$\chi=8,\ 11,\ 14,\ \ldots,\quad 2,\ -1,\ -4,\ \ldots;$$

§ 191. Ὑποτεθήτω ἤδη ὅτι οὐδέτερος τῶν συντελεστῶν εἶναι 1. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(\text{A})\quad 8\chi-29y=38,$$

ἧς οἱ συντελεσταὶ 8 καὶ 29 εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 189). Ἐπιλύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον, τὸν ἔχοντα τὸν ἐλάσσω συντελεστήν, ἤτοι τὸν χ· ἔχομεν

$$\chi=\frac{38+29y}{8}.$$

Ὁ ἀκέραιος τοῦ πηλίκου τοῦ 38 διὰ 8 εἶναι 4 μεθ' ὑπολοίπου 6, ὁ δὲ τοῦ 29 διὰ 8 εἶναι 3 μεθ' ὑπολοίπου 5· ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ χ γραφείη ἂν καὶ ὧδε

$$(\text{A}')\quad \chi=4+3y+\frac{6+5y}{8}.$$

Ἰσώσωμεν τὸ κλασματικὸν μέρος $\frac{6+5y}{8}$ τῆς τιμῆς ταύτης ἀπροσδιορίστῳ τινὶ τ· ἔχομεν οὕτω τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{6+5y}{8}=\tau,\ \text{ἢ}\ 8\tau-5y=6\quad (\text{B})$$

Οἱ συντελεσταὶ 8 καὶ 5 τῆς νέας ταύτης ἐξισώσεως εἰσὶν ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (*)· ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (B) εἶναι καὶ αὐτὴ ἐπιδεκτικὴ ἀκεραίων λύσεων.

Αἱ ἐξισώσεις (A) καὶ (B) ἔχουσι τὴν ἑξῆς πρὸς ἀλλήλας σχέσιν. *Ἐὰν ἔχωμεν ἀκέραιον λύσιν τῆς (A) καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ (B) τὴν τιμὴν τοῦ y τῆς λύσεως αὐτῆς, ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ τ ἔσεται ἐπίσης ἀκέραιος· ἀντιστρόφως ἐὰν ἔχωμεν ἀκέραιον λύσιν τῆς (B) καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y τῆς λύσεως αὐτῆς ἐν τῇ (A), ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ χ ἔσεται ἀκέραιος.* Ἔστω $\chi=\kappa$, $y=\lambda$ λύσις τις ἀκέραιος τῆς (A), εἴτε τῆς (A′) [αἱ ἐξισώσεις (A) καὶ (A′) εἰσὶν ἰσοδύναμοι]. Ἔχομεν τὴν ταυτότητα

$$\kappa=4+3\lambda+\frac{6+5\lambda}{8};$$

ὅθεν

$$\frac{6+5\lambda}{8}=\kappa-4-3\lambda\cdot$$

ὁ ἀριθμὸς $\kappa-4-3\lambda$ εἶναι ἀκέραιος, τῶν κ καὶ λ ὄντων ἀκεραίων· τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{6+5\lambda}{8}$ ἰσοῦται ἀκεραίῳ· ἐὰν λοιπὸν τὴν τιμὴν λ τοῦ y ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ (B) ἀντὶ τοῦ y, ἡ ἀντιστοιχοῦσα τοῦ τ, οὖσα $\frac{6+5\lambda}{8}$, εἶναι ἀκέραιος.—Ἀντιστρόφως· ἔστω $y=\lambda$,

(*) Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 29 καὶ 8 ἰσοῦται τῷ μ. κ. δ. τῶν 8 καὶ 5 κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς.

$\tau = \mu$ λύσις ἀκέραιος τῆς (Β). Ἔχομεν τὴν ταυτότητα $\dfrac{6+5\lambda}{8} = \mu$·

τὸ κλάσμα λοιπὸν $\dfrac{6+5\lambda}{8}$ ἰσοῦται ἀκεραίῳ. Ἀντικαθιστῶντες τὴν

τιμὴν λ τοῦ y ἐν τῷ 6'. μέλει τῆς (Α'), ἔχομεν $4+3\lambda+\dfrac{6+5\lambda}{8}$·

τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εἶναι ἀκέραιον, ἀκεραίου ὄντος τοῦ $\dfrac{6+5\lambda}{8}$· οὕτως ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀκέραιος.

Ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως (Β) πράξωμεν ὅσα ἐπράξαμεν καὶ ἐπὶ τῆς (Α), μέχρις οὗ εὕρωμεν τὴν (Β). Ὁ ἐλάσσων συντελεστὴς τῆς (Β) (μετὰ τὴν ἐξαφάνισιν τοῦ παρονομαστοῦ) εἶναι ἀναγκαίως ὁ τοῦ y· διότι οὗτος εἶναι ὑπόλοιπον διαιρέσεως, καθ' ἣν διαιρέτης ἦν ὁ συντελεστὴς τοῦ τ. Ἐπιλύομεν λοιπὸν τὴν (Β) ὡς πρὸς τὸν y καὶ ἔχομεν

$$y = \frac{8\tau-6}{5} = \tau - 1 + \frac{3\tau-1}{5}.$$

ἐξισοῦμεν ἤδη τὸ κλάσμα $\dfrac{3\tau-1}{5}$ ἀπροσδιορίστῳ τινὶ τ', καὶ ἔχομεν

$$\frac{3\tau-1}{5} = \tau', \text{ ἢ } 3\tau - 5\tau' = 1 \qquad (\Gamma).$$

Αἱ ἐξισώσεις (Β) καὶ (Γ) ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὴν αὐτὴν σχέσιν, ἣν καὶ αἱ (Α) καὶ (Β), ἤγουν *πάσης ἀκεραίου λύσεως τῆς (Β) ἡ τιμὴ τοῦ τ ἀνήκει καὶ εἰς ἀκέραιον λύσιν τῆς (Γ) καὶ τἀνάπαλιν*. Ἀποδείκνυται δὲ τοῦτο ὡς καὶ ἀνωτέρω.

Ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως (Γ) πράξωμεν ἤδη ταὐτά, ἅπερ ἀνωτέρω ἐπὶ τῶν (Α) καὶ (Β). Ἐνταῦθα ὁ ἐλάσσων συντελεστὴς εἶναι ὁ τοῦ τ' ἐπιλύοντες λοιπὸν ὡς πρὸς τὸν τ, ἔχομεν

$$\tau = \frac{5\tau'+1}{3} = \tau' + \frac{2\tau'+1}{3}.$$

ἐξισοῦντες δὲ τὸ κλάσμα $\dfrac{2\tau'+1}{3}$ νέῳ ἀπροσδιορίστῳ τ'', ἔχομεν

$$\frac{2\tau'+1}{3} = \tau'', \text{ ἢ } 2\tau' - 3\tau'' = -1 \qquad (\Delta).$$

Ἡ ἐξίσωσις (Δ) μετὰ τῆς προηγουμένης (Γ) ἔχουσι τὴν αὐτὴν σχέσιν, ἣν καὶ αἱ πρὸ τούτων· ἤτοι πάσης ἀκεραίου λύσεως τῆς (Γ) ἡ τιμὴ τοῦ τ' ἀνήκει καὶ εἰς ἀκέραιον λύσιν τῆς (Δ) καὶ τἀνάπαλιν.

Πράξωμεν καὶ ἐπὶ τῆς (Δ) ὅσα καὶ ἐπὶ τῶν προηγηθεισῶν. Ἐπιλύοντες ὡς πρὸς τὸν ἤδη ἔχοντα τὸν ἐλάσσω συντελεστὴν ἀπροσδιόριστον τ', ἔχομεν

$$\tau'=\frac{3\tau''-1}{2}=\tau''+\frac{\tau''-1}{2},$$

ἐξισοῦντες δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\tau''-1}{2}$ νέῳ ἀπροσδιορίστῳ τ''', ἔχομεν

$$\frac{\tau''-1}{2}=\tau''', \text{ ἢ } \tau''=2\tau'''+1 \qquad \text{(Ε)}.$$

Ἡ ἐξίσωσις (Ε) μετὰ τῆς προηγουμένως (Δ) ἔχουσι κοινὰς τὰς ἀκεραίους τιμὰς τοῦ τ'', ὡς καὶ αἱ πρὸ τούτων.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ τ'' ἐν τῇ (Ε) εἶναι 1, ἕπεται ὅτι εἰς πᾶσαν ἀκέραιον τιμὴν τοῦ τ''' ἀντιστοιχεῖ ἀκέραιος τιμὴ τοῦ τ'' (§ 190). Ἵνα λοιπὸν ἔχωμεν ἀκεραίους λύσεις τῆς ἐξισώσεως (Α), δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς. Δίδομεν τιμὴν ἀκέραιον κατ' ἀρέσκειαν, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν, τῷ ἀπροσδιορίστῳ τ''' τῆς (Ε) καὶ λογιζόμεθα τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ ἑτέρου ἀπροσδιορίστου τ''· τὴν ἐντεῦθεν τιμὴν τοῦ τ'' εἰσάγομεν ἀντ' αὐτοῦ εἰς τὴν (Δ) καὶ λογιζόμεθα τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ τ', ἥτις πρέπει νὰ ἦναι ἐπίσης ἀκέραιος κατὰ τὰ προειρημένα· τὴν ἐντεῦθεν τιμὴν τοῦ τ' εἰσάγομεν ἐν τῇ (Γ) ἀντ' αὐτοῦ καὶ λογιζόμεθα τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ τ, ἥτις πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιος· τὴν ἐντεῦθεν τιμὴν τοῦ τ εἰσάγομεν ἐν τῇ (Β) ἀντ' αὐτοῦ καὶ λογιζόμεθα τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ y, ἥτις πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιος· τέλος τὴν ἐντεῦθεν τιμὴν τοῦ y ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῇ (Α) καὶ λογιζόμεθα τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ χ, ἥτις πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιος. Ἔχομεν οὕτω λύσιν ἀκέραιον τῆς (Α). Δυνάμεθα δ' οὕτω νὰ εὕρωμεν ὁσασδήποτε τοιαύτας, διδόντες διαφόρους ἀκεραίους τιμὰς τῷ τ''' τῆς τελευταίας ἐξισώσεως (Ε) καὶ ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω.

Π. χ. ποιοῦντες τ'''=1, εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τ''=3, τ'=4, τ=7, y=10, χ=11. Ἔχομεν οὕτω τὴν ἀκέραιον λύσιν y=10 καὶ χ=11 τῆς ἐξισώσεως (Α).

Ἰδοὺ καὶ ἕτερα παραδείγματα.

α'. $$129\chi-13y=1587.$$

$$y=\frac{129\chi-1587}{13}=9\chi-122+\frac{12\chi-1}{13}.$$

$$\frac{12\chi-1}{13}=\tau,\ 12\chi-1=13\tau,\ \chi=\frac{13\tau+1}{12}=\tau+\frac{\tau+1}{12}.$$

$$\frac{\tau+1}{12}=\tau',\ \tau=12\tau'-1.$$

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν γράφοντες καθ' ὁριζόντιον τὰς ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις, ἀρχόμενοι δὲ στίχου κατὰ τὴν θέσιν νέου ἀπροσδιορίστου· ὅταν φθάσωμεν εἰς ἐξίσωσιν, ἐν ᾗ ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑτέρου τῶν ἀπροσδιορίστων εἶναι 1, ἡ πρᾶξις εἶναι τετελεσμένη.

β'. $$37\chi+364y=509.$$

$$\chi=\frac{509-364y}{37}=13-9y+\frac{28-31y}{37}.$$

$$\frac{28-31y}{37}=\tau,\ 28-31y=37\tau,\ y=\frac{28-37\tau}{31}=-\tau+\frac{28-6\tau}{31}.$$

$$\frac{28-6\tau}{31}=\tau',\ 28-6\tau=31\tau',\ \tau=\frac{28-31\tau'}{6}=4-5\tau'+\frac{4-\tau'}{6}.$$

$$\frac{4-\tau'}{6}=\tau'',\ 4-\tau'=6\tau'',\ \tau'=4-6\tau''.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅπως ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος ᾖ γενική, πρέπει νὰ φθάνωμεν ἐπὶ τέλους εἰς ἐξίσωσιν, ἧς ὁ ἕτερος τῶν ἀπροσδιορίστων νὰ ἔχῃ συντελεστὴν 1· τοῦτο δὲ πάντως συμβήσεται, ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἄλλως εἶναι ἀπαραίτητον, ὅπως ἡ ἐξίσωσις ᾖ ἐπιδεκτικὴ ἀκεραίων λύσεων (§ 189). Π. χ. Θεωρήσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (Α). Οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀπροσδιορίστων ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (Β), (Γ), (Δ), (Ε) εἰσὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων, ὅταν ὁ τοῦ y διαιρεθῇ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ, οὗτος δὲ διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς προηγηθείσης διαιρέσεως καὶ οὕτω καθεξῆς· τὰ ὑπόλοιπα λοιπὸν αὐτὰ εἶναι αὐτὰ ἐκεῖνα, ἅπερ εὑρίσκομεν, ὅταν ἐργαζώμεθα ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν συντελεστῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν· ὄντων δὲ τούτων πρώτων πρὸς ἀλλήλους, θέλομεν πάντως εὕρει ἐπὶ τέλους ὑπόλοιπον 1.

Τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων.

§ 192. Δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τὰς ἀκεραίους λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta y=\gamma$ διὰ τύπων περιεχόντων τὸν τελευταῖον ἀπροσδιόριστον.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $8\chi-29y=38$, ἐφ' ἧς εἰργάσθημεν ἀνωτέρω καὶ ἐφθάσαμεν ἐπὶ τέλους εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν (Ε), ἤτοι $\tau''=2\tau'''+1$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ τ'' ἐν τῇ (Δ) ἀντὶ τοῦ τ'', εὑρίσκομεν $\tau'=3\tau'''+1$· ἀντικαθιστῶντες πάλιν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ τ' ἐν τῇ (Γ), εὑρίσκομεν $\tau=5\tau'''+2$· ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ τ ἐν τῇ (Β), εὑρίσκομεν $y=8\tau'''+2$· τέλος ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ y ἐν τῇ (Α), εὑρίσκομεν $\chi=29\tau'''+12$. Οὕτως *οἱ τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων* τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως εἰσὶ

$$y=8\tau'''+2,\ \chi=29\tau'''+12.$$

Δι' αὐτῶν λογιζόμεθα ἀμέσως τὰς τιμὰς τοῦ y καὶ τοῦ χ, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ τελευταίου ἀπροσδιορίστου τ''' οὕτω ποιοῦντες

$$\tau'''=1,\ 2,\ 3, \ldots\ -1,\ -2,\ -3, \ldots$$

εὑρίσκομεν

$$y=10,\ 18,\ 26, \ldots\ -6,\ -14,\ -22, \ldots$$
$$\chi=41,\ 70,\ 99, \ldots\ -17,\ -46,\ -75, \ldots$$

Εὑρίσκομεν ἐπίσης ὅτι οἱ τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $129\chi-13y=1587$ (§ 191, παράδειγ. α'.) εἰσὶ $\chi=13\tau-1$, $y=129\tau-132$· τῆς δ' ἐξισώσεως $37\chi+364y=509$ (αὐτόθι, παράδ. β'.) $\chi=364\tau-183$, $y=-37\tau+20$.

§ 193. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν $\chi=A$, $y=B$ ἦναι λύσις τις ἀκέραιος τῆς ἐξισώσεως (1) $\alpha\chi+\beta y=\gamma$, οἱ τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς δύνανται νὰ γραφῶσιν ὡς ἑξῆς*

$$(\mathrm{T})\quad \chi=A-\beta\tau,\quad y=B+\alpha\tau.$$

Ἐν τοῖς τύποις τούτοις συντελεσταὶ τοῦ ἀπροσδιορίστου τ εἰσὶν ἐν μὲν τῷ τοῦ χ ὁ ἐν τῇ ἐξισώσει (1) συντελεστὴς τοῦ y, ἐν δὲ τῷ τοῦ y ὁ τοῦ χ ἐν τῇ ἐξισώσει· σημεῖον δ' αὐτῶν εἶναι ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ τῶν τύπων ταὐτὸν τῷ ἐν τῇ ἐξισώσει, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἀντίθετον.

Ἐν πρώτοις πᾶσα τιμὴ συναγομένη ἐκ τῶν τύπων (T) ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1)· διότι ἀντικαθιστῶντες τοὺς τύπους (T), ὡς ἔχουσιν, ἐν τῇ ἐξισώσει (1), εὑρίσκομεν $\alpha A - \alpha\beta\tau + \beta B + \alpha\beta\tau = \gamma$· ἡ ἰσότης δ' αὕτη εἶναι ταυτότης· διότι τὸ πρῶτον μέλος ἀνάγεται εἰς $\alpha A + \beta B$, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ γ, τῶν A καὶ B ἀποτελούντων καθ' ὑπόθεσιν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἀφ' ἑτέρου πᾶσα λύσις ἀκέραιος τῆς (1) περιέχεται ἐν τοῖς τύποις (T). Ἔστω $\chi = \varkappa$, $y = \lambda$ λύσις τις ἀκέραιος τῆς (1)· ἔχομεν τὰς ταυτότητας

$$\alpha\varkappa + \beta\lambda = \gamma$$
$$\alpha A + \beta B = \gamma\cdot$$

ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν ἀπὸ τῆς πρώτης, συνάγομεν

$$\alpha(\varkappa - A) + \beta(\lambda - B) = 0\cdot$$

ὅθεν

$$\alpha(\varkappa - A) = -\beta(\lambda - B)\cdot$$

ὅθεν

$$(2) \quad \varkappa - A = -\frac{\beta(\lambda - B)}{\alpha}.$$

Κατ' αὐτὴν τὴν ἰσότητα τὸ γινόμενον $\beta(\lambda - B)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ α· ὄντος δὲ τοῦ β πρώτου πρὸς τὸν α, πρέπει ὁ ἕτερος παράγων $\lambda - B$ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ α· ἔστω ρ τὸ πηλίκον τοῦ $\lambda - B$ διὰ α· ἔχομεν $\lambda - B = \alpha\rho$, εἴτε $\lambda = B + \alpha\rho$· ὅθεν ἡ ἰσότης (2) γράφεται καὶ οὕτω $\varkappa - A = -\beta\rho$· ἄρα $\varkappa = A - \beta\rho$. Ἐπειδὴ $\lambda = B + \alpha\rho$ καὶ $\varkappa = A - \beta\rho$, ἕπεται ὅτι ἡ λύσις $\chi = \varkappa$ καὶ $y = \lambda$ ἐξάγεται ἐκ τῶν τύπων (T), τιθεμένου αὐτόθι ρ ἀντὶ τοῦ ἀπροσδιορίστου τ.

§ 194. Ἕπεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὅτι, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (1) ἦναι ἐπιδεκτικὴ μιᾶς ἀκεραίου λύσεως, εἶναι τότε ἐπιδεκτικὴ καὶ ἀπείρων ἄλλων. Δυνάμεθα δὲ ν' ἀποδείξωμεν ὡς ἑξῆς ὅτι, ὅταν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπιδέχεται μίαν ἀκέραιον λύσιν. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου, οἷον ὁ α, εἶναι θετικός· ὅπερ ἔξεστι· διότι ἐὰν ἦναι ἀρνητικός, γίνεται θετικός, ἀλλαττομένων τῶν σημείων τῶν δύο μελῶν. Ἔχομεν $\chi = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha}$. Ἐὰν ἐν τῇ τιμῇ ταύτῃ τοῦ χ θῶμεν ἀντὶ τοῦ y τοὺς α διαδοχικοὺς ἀκεραίους $0, 1, 2, 3, \ldots \alpha-1$, λέγω ὅτι μία τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν του χ ἔσεται ἀκέραιος. Διαιρέσωμεν διὰ α ἕκαστον τῶν ἐκ τοῦ $\gamma-\beta y$ ἐξαγομένων, ὅταν ἀντικατασταθῶσιν οἱ ἀνωτέρω ἀκέραιοι ἀντὶ τοῦ y, ποιήσωμεν δὲ τὰς διαιρέσεις οὕτως, ὥστε τὰ ὑπόλοιπα νὰ ἦναι πάντα θετικά (*). Τὰ ὑπόλοιπα, ἅπερ οὕτως εὑρήσομεν, εἶναι πάντα διάφορα· διότι ἔστωσαν y' καὶ y'' δύο τῶν ἀριθμῶν $0, 1, 2, \ldots \alpha-1$, καὶ ὑποτεθήτω ὅτι τὰ ὑπόλοιπα τοῦ $\gamma-\beta y'$ καὶ $\gamma-\beta y''$ διὰ α εἰσὶν ἴσα· ἔχομεν τὰς ἰσότητας $\gamma-\beta y'=\alpha\pi+\upsilon$, $\gamma-\beta y''=\alpha\pi'+\upsilon$, υ ὄντος τοῦ κοινοῦ ὑπολοίπου, π καὶ π' τῶν ἀκεραίων πηλίκων· ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἔχομεν $\beta(y'-y'')=\alpha(\pi'-\pi)$· ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον $\beta(y'-y'')$ διαιρεῖται διὰ α· ὄντος δὲ τοῦ β πρώτου πρὸς τὸν α, ἕπεται ὅτι ὁ $y'-y''$ διαιρεῖται διὰ α· ὅπερ ἄτοπον· διότι τῶν y' καὶ y'' ὄντων θετικῶν καὶ ἐλασσόνων τοῦ α, ἡ διαφορὰ $y'-y''$ εἶναι ἔτι μᾶλλον ἐλάσσων τοῦ α. Ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι πάντα τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀνενεχθεισῶν διαιρέσεων εἶναι διάφορα· εἶναι δὲ καὶ μικρότερα τοῦ α· ἐπειδὴ δὲ εἶναι α τὸν ἀριθμόν, πρέπει ἓν τούτων νὰ ἦναι 0. Ἔστω λ ἡ τιμὴ τοῦ y, ἡ παρέχουσα τὸ ὑπόλοιπον 0· ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ χ ἔσεται τότε ἀκέραιος. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (1) εἶναι πάντως ἐπιδεκτικὴ μιᾶς ἀκεραίου λύσεως, ὅταν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐπειδὴ κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ὅταν ἡ ἐξίσωσις (1) ἦναι ἐπιδεκτικὴ μιᾶς ἀκεραίου λύσεως, εἶναι καὶ ἀπείρων ἄλλων, ἕπεται ὅτι *ὅταν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῆς ἐξισώσεως (1) ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἐπιδεκτικὴ ἀπείρων ἀκεραίων λύσεων*. Τὴν πρότασιν ταύτην συνηγάγομεν καὶ ἐκ τῆς πράξεως τῆς γινομένης πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων (§ 191, Σημ.).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως δύνανται νὰ παριστῶνται πολλαχῶς. α΄. Οἱ ὅροι αὐτῶν, οἱ μὴ περιέχοντες τὸν ἀπροσδιόριστον, δυνατὸν νὰ ἦναι ἀκέραιος λύσις οἱαδήποτε τῆς ἐξισώσεως. β΄. Οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀπροσδιορίστου εἰσὶ

(*) Π. χ. ὁ ἀκέραιος τοῦ πηλίκου τοῦ -23 διὰ 6 εἶναι -3 μεθ' ὑπολοίπου -5, ἢ -4 μεθ' ὑπολοίπου $+1$.

πάντοτε οἱ αὐτοί, ἀλλὰ δυνατὸν νὰ λαμβάνωνται καὶ μετ' ἀντιθέτων σημείων· ἀντὶ δηλονότι τῶν τύπων

$$(\text{T}) \quad \chi=\text{A}-\text{б}\tau,\ y=\text{B}+\alpha\tau$$

δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς

$$(\text{T}') \quad \chi=\text{A}+\text{б}\tau,\ y=\text{B}-\alpha\tau.$$

Αἱ λύσεις, ἃς πορίζόμεθα ἐκ τῶν τύπων (T), εἰσὶν αἱ αὐταὶ ταῖς ἐκ τῶν (T')· ἀλλ' αἱ αὐταὶ λύσεις ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τιμὰς τοῦ ἀπροσδιορίστου τ ἀπολύτως μὲν ἴσας, ἀλλ' ἑτεροσήμους· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἐν τοῖς τύποις (T) ποιήσωμεν $\tau=8$, ἕξομεν τὴν αὐτὴν λύσιν, ἣν καὶ ἐκ τῶν τύπων (T'), ὅταν ποιήσωμεν αὐτόθι $\tau=-8$.

Ἁπλοποιήσεις εἰς τὴν πρὸς εὕρεσιν ἀκεραίων λύσεων πρᾶξιν.

§ 195. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \quad 72\chi-41y=21.$$

Δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὰς ἑξῆς τρεῖς ἁπλοποιήσεις εἰς τὴν πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τῶν ἀκεραίων λύσεων αὐτῆς πρᾶξιν.

α'. Ὁ συντελεστὴς τοῦ χ καὶ τὸ б'. μέλος ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 3. Θῶμεν $y=3\omega$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ (1)· ἔχομεν

$$(2) \quad 72\chi-41.3\omega=21\cdot$$

διαιρέσει δὲ διὰ 3

$$24\chi-41\omega=7\cdot$$

Ἔστω $\chi=\kappa, \omega=\lambda$ λύσις τις ἀκέραιος τῆς (2)· φανερὸν ὅτι $\chi=\kappa$, $y=3\lambda$ εἶναι λύσις τῆς (1). Ἀντιστρόφως ἔστω $\chi=\alpha$, $y=\gamma$ λύσις ἀκέραιος τῆς (1)· φανερὸν ὅτι $\chi=\alpha$, $y=\frac{\gamma}{3}$ εἶναι λύσις τῆς (2)· ὁ δὲ $\frac{\gamma}{3}$ εἶναι ἀκέραιος· διότι ὁ 3 διαιρεῖ 41γ· ὢν δὲ πρῶτος πρὸς τὸν 41, διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν γ. Οὕτως οἱ τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς (1) συνάγονται ἐκ τῶν τῆς (2), τριπλασιαζομένου τοῦ τύπου τοῦ ω. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ ἐργασθῶμεν ἐπὶ τῆς (1), ἐργαζόμεθα ἐπὶ τῆς ἁπλουστέρας $24\chi-31\omega=7$.

Ἐν γένει ὅταν εἷς τῶν συντελεστῶν, οἷον ὁ τοῦ χ, *καὶ τὸ δεύτερον μέλος ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην* δ, *τίθεμεν* $y=\delta\omega$, *ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῇ ἐξισώσει* $\delta\omega$ *ἀντὶ* y *καὶ εὑρίσκομεν τοὺς τύπους τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς προκυπτούσης· οἱ τῆς προτεθείσης ἔσονται τοῦ μὲν* χ *ὁ αὐτός, τοῦ δὲ* y *ὁ τοῦ* ω *πολλαπλασιασμένος ἐπὶ* δ.

β'. Ἔχομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $24\chi-41\omega=7$

$$\chi=\frac{7+41\omega}{24}=\omega+\frac{7+17\omega}{24}.$$

Τοῦ 17, ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ 41 διὰ 24, ὄντος μείζονος τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου 24, ἡ διαφορὰ 24—17, ἤτοι 7, εἶναι ἐλάσσων τοῦ ἡμίσεως τοῦ 24, ἔτι δὲ μᾶλλον τοῦ 17. Ἔχομεν δὲ $17\omega=24\omega-7\omega$· ὅθεν

$$\frac{7+17\omega}{24}=\frac{7+24\omega-7\omega}{24}=\omega+\frac{7-7\omega}{24}.$$

ὅθεν

$$\chi=2\omega+\frac{7-7\omega}{24}·$$

ἡ νέα λοιπὸν ἐξίσωσις ἔσεται

$$\frac{7-7\omega}{24}=\tau,$$

ἥτις εἶναι ἁπλουστέρα τῆς $\frac{7+17\omega}{24}=\tau$, ἣν ἠθέλομεν ἔχει, εἰ μὴ ἐγίνετο ἡ τελευταία ἁπλοποίησις.

Ἐν γένει ὅταν ἐξάγοντες τοὺς ἐν κλάσματί τινι ἀκεραίους ἔχωμεν ὑπόλοιπον διαιρέσεως μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου, τὸν μὲν ἀκέραιον τοῦ πηλίκου αὐξάνομεν κατὰ μονάδα, ἀντὶ δὲ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως γράφομεν ἐν τῷ ἀριθμητῇ τὴν διαφορὰν τοῦ ὑπολοίπου αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ διαιρέτου μετ' ἐναντίου σημείου.

γ'. Εὕρομεν ἀνωτέρω

$$\chi=2\omega+\frac{7-7\omega}{24}.$$

τὸ ἐν τῷ β΄. μέλει κλάσμα γράφεται καὶ οὕτω $\frac{7(1-\omega)}{24}$· πρέπει δὲ νὰ ἦναι ἴσον ἀκεραίῳ· ἀλλ' ὄντος τοῦ 7 πρώτου πρὸς τὸν 24, πρέπει καὶ τὸ κλάσμα $\frac{1-\omega}{24}$ νὰ ἦναι ἀκέραιον· διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{1-\omega}{24}=\tau$· ἐξ ἧς $\omega=1-24\tau$· ἡ πρᾶξις λοιπὸν εἶναι πεπερατωμένη. Ἡ τελευταία ἰσότης εἶναι ὁ τύπος τῶν ἀκεραίων λύσεων τοῦ ω· ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ τιμῇ τοῦ χ, εὑρίσκομεν $\chi=2-41\tau$· καθὰ δὲ εἴρηται ἐπὶ τῆς α΄. ἁπλοποιήσεως, οἱ τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως εἰσὶ

$$\chi=2-41\tau,\ y=3-72\tau.$$

Ἡ τελευταία ἁπλοποίησις διατυποῦται γενικῶς ὡς ἑξῆς. *Ὅταν τὸ κλάσμα, ὅπερ πρόκειται νὰ ἐξισωθῇ νέῳ τινὶ ἀπροσδιορίστῳ, δύναται νὰ γράφηται οὕτω* $\frac{\kappa(\lambda-\mu\omega)}{\pi}$, *οἱ δὲ κ καὶ π ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ ἐξισῶμεν νέῳ ἀπροσδιορίστῳ μόνον τὸ* $\frac{\lambda-\mu\omega}{\pi}$.

Ἀκέραιοι καὶ θετικαὶ ἐν ταὐτῷ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta y=\gamma$.

§ 196. Αἱ ἀκέραιοι καὶ θετικαὶ ἐν ταὐτῷ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta y=\gamma$ εὑρίσκονται ἐκ τῶν τύπων τῶν ἀκεραίων ἐν γένει λύσεων. Περὶ δὲ τῆς ὑπάρξεως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοιούτων λύσεων διακριτέον δύο περιπτώσεις· α΄. ὅταν οἱ ὅροι τοῦ α΄. μέλους ἦναι ἑτερόσημοι· β΄. ὅταν οἱ ὅροι οὗτοι ἦναι ὁμόσημοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. *Ὅταν οἱ ὅροι τοῦ α΄. μέλους τῆς ἐξισώσεως* $\alpha\chi+\beta y=\gamma$ *ἦναι ἑτερόσημοι, ὑπάρχουσιν ἄπειροι λύσεις ἀκέραιοι καὶ θετικαὶ ἐν ταὐτῷ.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi-\beta y=\gamma$, τῶν γραμμάτων α καὶ β ὄντων ἤδη θετικῶν ἀριθμῶν καὶ πρώτων πρὸς ἀλλήλους· ἔστω δὲ καὶ $\chi=A$, $y=B$ λύσις τις ἀκέραιος τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως. Οἱ τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων εἶναι

$$(1)\quad \chi=A+\beta\tau,\quad y=B+\alpha\tau,$$

ἢ

$$(2)\quad \chi=A-\beta\tau,\quad y=B-\alpha\tau.$$

Θεωρήσωμεν τοὺς (1). Οἱαδήποτ' ἂν ἦ τὰ σημεῖα τῶν Α καὶ Β, ἐὰν δῶμεν τῷ τ τιμὴν ἀκέραιον καὶ θετικὴν κ, ἱκανῶς μεγάλην, ὥστε τό,τε γινόμενον 6κ νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ Α καὶ τὸ ακ τοῦ Β, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ y ἔσονται ἀμφότεραι θετικαί· ποιοῦντες ἀκολούθως $\tau=\kappa+1$, $\tau=\kappa+2$,... ἔξομεν πάντοτε λύσεις θετικάς· διότι τὰ γινόμενα 6τ καὶ ατ ἔσονται μείζω τῶν 6κ καὶ ακ. Αἱ ἀκέραιοι λοιπὸν καὶ θετικαὶ λύσεις εἰσὶν ἄπειροι.

Τὰ αὐτὰ συμπεραίνομεν καὶ ἐκ τῶν τύπων (2)· ἀλλ' εἰς αὐτοὺς πρέπει νὰ δίδωμεν τῷ τ τιμὰς ἀρνητικὰς αὐξούσας, ὅπως αἱ τε ἀντιστοιχοῦσαι τοῦ χ καὶ αἱ τοῦ y ὦσιν ἀμφότεραι θετικαί.

§ 197. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ὅταν οἱ ὅροι τοῦ α'. μέλους τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta y=\gamma$ ἦναι ὁμόσημοι, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἐν ταὐτῷ λύσεων εἶναι ὡρισμένος· ἐνίοτε δὲ καὶ οὐδόλως ὑπάρχουσι τοιαῦται λύσεις.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta y=\gamma$, α καὶ 6 ὄντων θετικῶν ἀριθμῶν. Οἱ τύποι τῶν ἀκεραίων λύσεων αὐτῆς εἰσὶ

$$\chi=A-\beta\tau,\quad y=B+\alpha\tau.$$

Ἔστω κ θετικὸς ἀριθμὸς ἱκανῶς μέγας, ὥστε τὸ γινόμενον 6κ νὰ ἦναι μεῖζον τῆς ἀπολύτου ἀξίας τοῦ Α· ποιοῦντες ἐν τοῖς ἀνωτέρω τύποις $\tau=\kappa$, ἔξομεν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ χ ἀρνητικήν· ἔτι δὲ μᾶλλον, ἐὰν $\tau=\kappa+1$, $\tau=\kappa+2$, κ.τ.λ. Ἔστω ἔτι ἀρνητικὸς τις ἀριθμὸς $-\kappa'$ ἱκανῶς μέγας, ὥστε τὸ γινόμενον $\alpha\times(-\kappa')$, εἴτε $-\alpha\kappa'$ νὰ ἦναι ἀπολύτως μεῖζον τοῦ Β· ποιοῦντες ἐν τοῖς τύποις $\tau=-\kappa'$, ἔξομεν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ y ἀρνητικήν· ἔτι δὲ μᾶλλον, ἐὰν $\tau=-\kappa'-1$, $\tau=-\kappa'-2$, κ.τ.λ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν ὅρια τῶν τε θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν τιμῶν τοῦ τ, πέραν τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν λύσεις ἀκεραίους καὶ θετικὰς ἐν ταὐτῷ τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta y=\gamma$. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἐν ταὐτῷ λύσεων τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι πεπερασμένος.

§ 198. Ἵνα δείξωμεν πῶς εὑρίσκονται τὰ ὅρια τῶν τιμῶν τοῦ τ, τῶν παρεχουσῶν λύσεις ἀκεραίους καὶ θετικὰς ἐν ταὐτῷ κατὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν, ὡς καὶ ὅτι δυνατὸν οὐδόλως νὰ ὑπάρχωσι λύσεις τοιαῦται, ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα τοῦ Α καὶ τοῦ Β. Ὑπάρχουσιν οἱ ἑξῆς τέσσαρες συνδυασμοὶ τῶν σημείων αὐτῶν

$$\begin{cases}+A\\+B\end{cases}\quad\begin{cases}+A\\-B\end{cases}\quad\begin{cases}-A\\+B\end{cases}\quad\begin{cases}-A\\-B.\end{cases}$$

Α'. Ὅταν οἱ τύποι ἦναι

$$\chi=+A-\beta\tau,\quad y=+B+\alpha\tau;$$

πρέπει αἱ μὲν θετικαὶ τιμαὶ τοῦ τ νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν ἀνισότητα $\beta\tau<A$, εἴτε $\tau<\frac{A}{\beta}$· αἱ δ' ἀρνητικαὶ τὴν $\alpha\tau<B$, εἴτε $\tau<\frac{B}{\alpha}$. Π. χ. ἐὰν οἱ τύποι ἦναι $\chi=9-2\tau$, $y=8+3\tau$, αἱ μὲν θετικαὶ τιμαὶ τοῦ τ πρέπει νὰ ἦναι ἐλάσσονες τοῦ $\frac{9}{2}$, αἱ δ' ἀρνητικαὶ ἐλάσσονες τοῦ $\frac{8}{3}$, ὅπως αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τοῦ, τε χ καὶ τοῦ y ὦσιν ἀμφότεραι θετικαί· αἱ τιμαὶ λοιπόν, ἃς ἔξεσται δοῦναι τῷ τ, εἰσὶ 0, 1, 2, 3, 4, —1, —2· αἱ δ' ἀντιστοιχοῦσαι ἀκέραιοι καὶ θετικαὶ λύσεις εἰσὶν

$$\chi=9,\quad 7,\quad 5,\quad 3,\quad 1,\quad 11,\quad 13$$
$$y=8,\quad 11,\quad 14,\quad 17,\quad 20,\quad 5,\quad 2.$$

(ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς ληπτέον μετὰ τοῦ ὑπ' αὐτόν)· ἄλλαι τοιαῦται λύσεις δὲν ὑπάρχουσι.

Β'. Ὅταν οἱ τύποι ἦναι

$$\chi=A-\beta\tau,\quad y=-B+\alpha\tau.$$

θετικὰς μόνον τιμὰς δυνάμεθα διδόναι τῷ τ· διότι εἰς πᾶσαν ἀρνητικὴν τοῦ τ ἀντιστοιχεῖ ἀρνητικὴ τοῦ y· αἱ θετικαὶ δ' αὗται τιμαὶ πρέπει νὰ πληρῶσι τοὺς ἑξῆς ὅρους $\alpha\tau>B$ καὶ $\beta\tau<A$· πρέπει λοιπὸν νὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν ὁρίων $\frac{B}{\alpha}$ καὶ $\frac{A}{\beta}$. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ὁρίων αὐτῶν δὲν ὑπάρχωσιν ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἢ ἐὰν τὸ ἀνώτερον ὅριον $\frac{A}{\beta}$ ἦναι ἔλασσον τοῦ ἑτέρου $\frac{B}{\alpha}$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἄμοιρος λύσεων ἀκεραίων καὶ ἐν ταὐτῷ θετικῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

α'. Ἔστωσαν οἱ τύποι

$$\chi=13-2\tau,\ y=-7+3\tau.$$

Ὁ τ πρέπει νὰ περιέχηται μεταξὺ $\frac{7}{3}$ καὶ $\frac{13}{2}$· μεταξὺ τῶν ὁρίων αὐτῶν ὑπάρχουσιν οἱ ἀκέραιοι 3, 4, 5, 6· ὅθεν ἰσοῦντες τὸν τ τοῖς ἀκεραίοις αὐτοῖς, εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς ἀκεραίους καὶ θετικὰς λύσεις

$$\chi=7,\ 5,\ 3,\ 1$$
$$y=2,\ 5,\ 8,\ 11.$$

β'. Ἔστωσαν οἱ τύποι

$$\chi=5-3\tau,\ y=-6+4\tau.$$

Ὁ τ πρέπει νὰ περιέχηται μεταξὺ $\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{5}{3}$· ἐπειδὴ δὲ μεταξὺ τῶν ὁρίων τούτων δὲν ὑπάρχουσιν ἀκέραιοι, οὐδεμία ὑπάρχει λύσις ἀκέραιος καὶ ἐν ταὐτῷ θετική.

γ'. Ἔστωσαν ἔτι οἱ τύποι

$$\chi=7-3\tau,\ y=-16+5\tau.$$

Ἐνταῦθα τὸ ἀνώτερον ὅριον εἶναι $\frac{7}{3}$, τὸ δὲ κατώτερον $\frac{16}{5}$· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα οὐδ' ἐνταῦθα ὑπάρχουσι λύσεις ἀκέραιοι καὶ θετικαί.

Γ'. Ὅταν οἱ τύποι ἦναι

$$\chi=-A-\beta\tau,\ y=B+\alpha\tau,$$

ἀρνητικὰς μόνον τιμὰς δυνάμεθα διδόναι τῷ τ· διότι εἰς πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ τ ἀντιστοιχεῖ ἀρνητικὴ τοῦ χ· αἱ ἀρνητικαὶ δ' αὗται τιμαὶ πρέπει νὰ πληρῶσι τοὺς ἑξῆς ὅρους $\beta\tau>A$ καὶ $\alpha\tau<B$· ὁ τ λοιπὸν πρέπει νὰ περιέχηται μεταξὺ $\frac{A}{\beta}$ καὶ $\frac{B}{\alpha}$. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ὁρίων τούτων δὲν ὑπάρχωσιν ἀκέραιοι, ἢ ἐὰν τὸ κατώτερον ὅριον ἦναι μεῖζον τοῦ ἀνωτέρου, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀνεπίδεκτος λύσεων ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἐν ταὐτῷ.

Δ'. Ὅταν οἱ τύποι ἦναι

$$\chi=-A-\beta\tau,\ y=-B+\alpha\tau$$

ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀνεπίδεκτος λύσεων ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἐν ταὐτῷ.

διότι εἰς πᾶσαν μὲν θετικὴν τιμὴν τοῦ τ ἀντιστοιχεῖ ἀρνητικὴ τοῦ χ, εἰς πᾶσαν δ' ἀρνητικὴν τοῦ τ ἀρνητικὴ τοῦ y· ἐὰν δὲ $\tau=0$, ἔχομεν $\chi=-A$, $y=-B$.

Προβλήματα.

§ 199. Τὰ κατωτέρω προβλήματα περιέχουσι δύο ἀγνώστους καὶ ἄγουσιν εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν, ἧς αἱ λύσεις πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιοι καὶ θετικαὶ ἐν ταὐτῷ.

α'. *Μερίσαι τὸ κλάσμα* $\frac{58}{77}$ *εἰς δύο ἄλλα, ἔχοντα παρονομαστὰς 7 καὶ 11*. Ἔστωσαν $\frac{\chi}{7}$ καὶ $\frac{y}{11}$ τὰ ζητούμενα κλάσματα. Ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{7}+\frac{y}{11}=\frac{58}{77},$$

ἧς αἱ λύσεις πρέπει νὰ ὦσιν ἀκέραιοι καὶ θετικαί· διότι τοιοῦτοι πρέπει νὰ ἦναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμηταί. Ἐξαφανίζοντες τοὺς παρονομαστάς, ἔχομεν $11\chi+7y=58$.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς πράξεως, γινομένης μετὰ τῶν ἁπλοποιήσεων (§ 195).

$$y=\frac{58-11\chi}{7}=8-\chi+\frac{2-4\chi}{7}=8-\chi+\frac{2(1-2\chi)}{7};$$

$$\frac{1-2\chi}{7}=\tau,\ 1-2\chi=7\tau,\ \chi=\frac{1-7\tau}{2}=-3\tau+\frac{1-\tau}{2};$$

$$\frac{1-\tau}{2}=\tau',\ \tau=1-2\tau'.$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν τοὺς τύπους $\chi=-3+7\tau'$ καὶ $y=13-11\tau'$. Τὰ ὅρια τοῦ τ', ὅπως αἱ λύσεις ὦσιν ἀκέραιοι καὶ θετικαὶ ἐν ταὐτῷ, εἶναι $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{13}{11}$· μεταξὺ τῶν ὁρίων τούτων δὲν ὑπάρχει ἄλλος ἀκέραιος ἢ ἡ μονάς· ὅθεν ποιοῦντες $\tau'=1$, εὑρίσκομεν τὴν μόνην ὑπάρχουσαν ἐνταῦθα ἀκέραιον καὶ θετικὴν λύσιν $\chi=4$, $y=2$· τὰ ζητούμενα λοιπὸν κλάσματα εἶναι $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{2}{11}$.

β'. *Ὀφείλων τις 155 δραχμάς, θέλει ν' ἀποτίσῃ τὸ χρέος* *αὐτὸ διὰ νομισμάτων 5 καὶ 20 δραχμῶν. Πόσα πρέπει νὰ δώσῃ πεντάδραχμα καὶ πόσα εἰκοσάδραχμα;* Ἔστωσαν χ τὰ πεντάδραχμα καὶ y τὰ εἰκοσάδραχμα. Ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $5\chi+20y=155$, ἥτις ἀνάγεται εἰς τὴν $\chi+4y=31$· ὅθεν $\chi=31-4y$. Ὅπως αἱ τιμαὶ τοῦ χ, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς θετικὰς τοῦ y, ὦσι καὶ αὐταὶ θετικαί, πρέπει νὰ ἔχωμεν $4y<31$, εἴτε $y<\frac{31}{4}$· οὕτως ὁ y δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7· αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ χ εἰσὶ 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3.

γ'. *Ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐδαπάνησαν ὁμοῦ 1000 δραχμάς· ἐπλήρωσε δ' ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἀνὰ 19, ἑκάστη δὲ τῶν γυναικῶν ἀνὰ 11· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;* Ἔστωσαν χ οἱ ἄνδρες καὶ y αἱ γυναῖκες. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $19\chi+11y=1000$. Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πράξεως πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τῶν ἀκεραίων λύσεων μετὰ τῶν ἁπλοποιήσεων.

$$y=\frac{1000-19\chi}{11}=90-\chi+\frac{10-8\chi}{11}=91-2\chi+\frac{3\chi-1}{11}.$$

$$\frac{3\chi-1}{11}=\tau,\ 3\chi-1=11\tau,\ \chi=\frac{11\tau+1}{3}=4\tau+\frac{1-\tau}{3}.$$

$$\frac{1-\tau}{3}=\tau',\ \tau=1-3\tau'.$$

Εὑρίσκομεν ἐντεῦθεν $\chi=4-11\tau'$, $y=84+19\tau'$· ἐκ τούτων τῶν τύπων συνάγομεν τὰ ὅρια τοῦ τ' (§ 198, Α'.)· τὸ ἀνώτερον ὅριον τῶν θετικῶν τιμῶν τοῦ τ' εἶναι $\frac{4}{11}$, τὸ δὲ τῶν ἀρνητικῶν $\frac{8}{19}$... ποιοῦντες λοιπὸν $\tau=0, -1, -2, -3, -4$, εὑρίσκομεν ἑξῆς ἀκεραίους καὶ θετικὰς λύσεις

$$\begin{array}{l} \chi=48,\ 37,\ 26,\ 15,\ 4 \\ y=\ 8,\ 27,\ 46,\ 65,\ 84, \end{array}$$

αἵτινές εἰσιν αἱ μόναι.

δ'. *Μερίσαι τὸν ἀριθμὸν 26 εἰς δύο μέρη διαιρετὰ τὸ μὲν διὰ 2, τὸ δὲ διὰ 5.* Ἔστωσαν χ καὶ y τὰ πηλίκα τῶν μερῶν αὐτῶν διὰ 2 καὶ 5· γνωρίζοντες τὰ πηλίκα αὐτά, ἔχομεν τὰ μέρη πολλαπλασιάζοντες τὸ μὲν ἐπὶ 2, τὸ δὲ ἐπὶ 5. Τὸ διαιρετὸν διὰ 2 μέρος εἶναι 2χ, τὰ δὲ διὰ 5 εἶναι $5y$· ὅθεν $2\chi+5y=26$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν τοὺς τύπους $y=2\tau$, $\chi=13-5\tau$. Ἐπειδὴ αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ τ πρέπει νὰ καθιστῶσιν θετικὸν τὸν τύπον $13-5\tau$, πρέπει νὰ ἦναι ἐλάσσονες τοῦ $\frac{13}{3}$· ποιοῦντες λοιπὸν $\tau=1$ καὶ $\tau=2$, εὑρίσκομεν $y=2$, $\chi=8$ καὶ $y=4$, $\chi=3$. Ἡ λύσις $y=0$, $\chi=13$ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ πρόβλημα· διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῇ τὸ ἕτερον τῶν μερῶν ἴσον τῷ 0.

ε΄. Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ μὲν ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 εἶναι 7, τὸ δὲ διὰ 10 εἶναι 5. (25, 115, 205, ...).

ϛ΄. Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως διὰ 5, 8, 11, εἰσὶ 3, 7, 8, (63, 503, 943, 1383, ...).

ζ΄. Εὑρεῖν κλάσμα, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\frac{1}{3}$, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐξηθῇ κατὰ 2, ὁ δὲ παρονομαστὴς κατὰ 10. ($\frac{2}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{11}$, ...).

η΄. Ἀποτελέσαι μῆκος ἓξ πήχεων διὰ κανόνων 2 καὶ 7 παλαμῶν, ἐφεξῆς κειμένων.

Ἔστωσαν χ οἱ κανόνες 2 παλαμῶν καὶ y οἱ 7 παλαμῶν. Ὑπάρχουσιν αἱ ἑξῆς τέσσαρες λύσεις $\chi=23$ καὶ $y=2$, $\chi=16$ καὶ $y=4$, $\chi=9$ καὶ $y=6$, $\chi=2$ καὶ $y=8$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 200. *Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα θετικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται τῇ τετρ. ῥίζῃ τοῦ ἀπολύτου λαμβανομένῃ μετὰ τοῦ σημείου + ἢ* —. Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $+9$ εἶναι ± 3· διότι $(\pm 3)^2 = +9$ (§ § 47 καὶ 48)· μόνας δὲ τὰς δύο ταύτας ῥίζας ἔχει ὁ $+9$· διότι οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι 9.

Ἐπίσης ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $+5$ εἶναι $\pm\sqrt{5}$.

§ 201. *Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι τετραγωνικὰς ῥίζας*· διότι οὐδενὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι ἀρνητικὸν (§ § 47 καὶ 48).

Παραστάσεις λοιπὸν τοιαῦται $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-\alpha^2}$, $\sqrt{-\frac{5}{7}}$ οὐδένα ἐμφαίνουσιν ἀριθμόν· καλοῦνται διὰ τοῦτο *ἀριθμοὶ ἰδανικοὶ* πρὸς διαστολὴν ἀπὸ τῶν *πραγματικῶν* ἀριθμῶν.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μονωνύμων.

§ 202. *Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν μονωνύμου, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ συντελεστοῦ καὶ διαιροῦμεν τοὺς ἐκθέτας διὰ* 2. Ὁ κανὼν οὗτος εἶναι συνέπεια τοῦ κανόνος τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν μονωνύμων (§ 50, Σημ. Γ').

Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $25\alpha^4\beta^6\gamma^2$ εἶναι $5\alpha^2\beta^3\gamma$· διότι $(5\alpha^2\beta^3\gamma)^2 = 25\alpha^4\beta^6\gamma^2$.

Τὸ κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρισκόμενον μονώνυμον δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν καὶ μετὰ τοῦ σημείου —· π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $25\alpha^4\beta^6\gamma^2$ εἶναι ἤτοι $5\alpha^2\beta^3\gamma$ ἢ $-5\alpha^2\beta^3\gamma$· διότι (§ 48)

$$(-5\alpha^2\beta^3\gamma)^2 = 25\alpha^4\beta^6\gamma^2.$$

Ἵνα ἐφαρμόζηται ὁ ἀνωτέρω κανὼν πρέπει ὁ μὲν συντελεστὴς νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον, οἱ δ' ἐκθέται πάντες ἄρτιοι· τὸ μονώνυμον λέγεται τότε *τέλειον τετράγωνον*. Ἐὰν οἱ ὅροι οὗτοι δὲν πληρῶνται, ἡ ῥίζα δείκνυται διὰ ῥιζικοῦ· π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $28\alpha^4\beta^3\gamma$ δείκνυται οὕτω $\sqrt{28\alpha^4\beta^3\gamma}$.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυωνύμων.

§ 203. Λάβωμεν πολυώνυμον, ὃν τετράγωνον ἄλλου πολυωνύμου, καὶ ἴδωμεν τίνι τρόπῳ εὑρίσκεται τὸ δεύτερον, ἤγουν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου.

Ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$25\alpha^4-30\alpha^3\beta+49\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4,$$

ὅπερ εἶναι τέλειον τετράγωνον (ἤτοι τετράγωνον ἑτέρου πολυωνύμου) καὶ διατεταγμένον· σημειώσωμεν δ' αὐτὸ διὰ Π. Νοήσωμεν καὶ τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν διατεταγμένην κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ σημειώσωμεν αὐτὴν διὰ Ρ. Κατὰ τὸ ἐν § 51 θεώρημα τὸ πολυώνυμον Π περιέχει τὰ τετράγωνα τῶν ὅρων τοῦ Ρ καὶ τὰ διπλάσια τῶν σύνδυο γινομένων τῶν αὐτῶν ὅρων· ἐκ τούτων δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Ρ δὲν ἀνάγεται μετ' ἄλλων (§ 52, Σημ. Α'.), εἶναι δὲ καὶ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ Π, ὡς περιέχον τὸ γράμμα α μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου· ἄρα ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ Ρ ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Π, ἤτοι τοῦ $25\alpha^4$, ἥτις εἶναι $5\alpha^2$ (§ 202).

Οἱ λοιποὶ ὅροι τοῦ Π, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου, εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τὸ ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τοῦ Ρ καὶ τῶν διπλασίων τῶν σύνδυο γινομένων τῶν αὐτῶν ὅρων· ἐκ τούτων δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Ρ ἐπὶ τὸν δεύτερον δὲν ἀνάγεται μετ' ἄλλων, ἅτε περιέχον τὸ α μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου, καὶ εἶναι δι' αὐτὸ τοῦτο ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ Π ἤτοι $-30\alpha^3\beta$· ἵνα ἔχωμεν λοιπὸν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ Ρ, διαιροῦμεν τὸν $-30\alpha^3\beta$ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Ρ, ἤτοι διὰ $10\alpha^2$· οὕτως εὑρίσκομεν $-3\alpha\beta$.

Ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ Π τὸ τετράγωνον τοῦ ἐκ τῶν εὑρεθέντων δύο πρώτων ὅρων τοῦ Ρ ἀποτελουμένου διωνύμου $5\alpha^2-3\alpha\beta$ (ὅρα κατωτέρω τὸν πίνακα τῆς πράξεως)· τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $+40\alpha^2\beta^2$

$-24\alpha\beta^3+16\beta^4$, ὅπερ σημειωθήτω διὰ Υ. Τὸ Υ περιέχει τὰ διπλάσια τῶν γινομένων ἑκατέρου τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης Ρ ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου κ.τ.λ. ἐκ τούτων τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν τρίτον, περιέχον τὸ α μετὰ μείζονος ἐκθέτου, δὲν ἀνάγεται μετ' ἄλλων, καὶ εἶναι ἴσον τῷ πρώτῳ ὅρῳ τοῦ Υ· ἵνα ἔχωμεν λοιπὸν τὸν τρίτον ὅρον τῆς ῥίζης, διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ Υ, ἤτοι τὸν $40\alpha^2\beta^2$, διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης Ρ, ἤτοι διὰ $10\alpha^2$, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν $+4\beta^2$.

Γράψωμεν παρὰ τὰ διπλάσια τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης τὸν τρίτον καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπ' αὐτὸν τοῦτον τὸν τρίτον ὅρον, τὸ δ' ἐντεῦθεν γινόμενον $40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4$ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ Υ· εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι $5\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2$.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πράξεως

$$
\begin{array}{r|l}
25\alpha^4-30\alpha^3\beta+49\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 & 5\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2 \\
\cline{2-2}
-25\alpha^4+30\alpha^3\beta-\ 9\alpha^2\beta^2 \qquad\qquad\qquad\quad & 10\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2 \\
\cline{1-1}
+40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 & \qquad\qquad\quad +4\beta^2 \\
\cline{2-2}
-40\alpha^2\beta^2+24\alpha\beta^3-16\beta^4 & 40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ἐὰν ἀντὶ 0 ηὑρίσκομεν κατὰ τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν ὑπόλοιπόν τι Υ', ἠθέλομεν διαιρέσει τὸν πρῶτον ὅρον αὐτοῦ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, καὶ οὕτως ἠθέλομεν ἔχει τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ῥίζης· ἀκολούθως ἠθέλομεν γράψει ἐξῆς τὰ διπλάσια τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης καὶ τὸν τέταρτον καὶ πολλαπλασιάσει τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸν αὐτὸν τέταρτον ὅρον, τὸ δ' ἐντεῦθεν γινόμενον ἀφαιρέσει ἀπὸ τοῦ Υ', καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΚΑΝΩΝ. *Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν πολυωνύμου, διατάττομεν αὐτὸ καὶ ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου· αὕτη ἔσεται ὁ πρῶτος ὅρος τῆς τοῦ πολυωνύμου. Διαιροῦμεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· τὸ πηλίκον ἔσεται ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης. Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου τὸ τετράγωνον τοῦ διωνύμου, τοῦ ἀποτελουμένου* ἐκ τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης, καὶ τοῦ ἐντεῦθεν ὑπολοίπου τὸν πρῶτον ὅρον διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· τὸ πηλίκον ἔσεται ὁ τρίτος ὅρος τῆς ῥίζης. Γράφομεν ἑξῆς τὰ διπλάσια τῶν δύο πρώτων ὅρων καὶ τὸν τρίτον, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ προηγουμένου ὑπολοίπου, τοῦ δ' ἐντεῦθεν ὑπολοίπου τὸν πρῶτον ὅρον διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· τὸ πηλίκον ἔσεται ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ῥίζης. Προχωροῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0.

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα αὐτὸν ἐπὶ τοῦ πολυωνύμου $25\alpha^8\beta^{10}\gamma^6 - 30\alpha^7\beta^9\gamma^5 - 61\alpha^6\beta^8\gamma^4 + 62\alpha^5\beta^7\gamma^3 + 37\alpha^4\beta^6\gamma^2 - 28\alpha^3\beta^5\gamma + 4\alpha^2\beta^4$ εὑρίσκομεν τετραγωνικὴν ῥίζαν $5\alpha^4\beta^5\gamma^3 - 3\alpha^3\beta^4\gamma^3 - 7\alpha^2\beta^3\gamma + 2\alpha\beta^2$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα γίνεται ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ὅταν τὸ γράμμα τῆς διατάξεως ἔχῃ ἐν πολλοῖς ὅροις τὸν αὐτὸν ἐκθέτην. Γράφομεν τότε τὸ πολυώνυμον ὡς ἐν § 44 καὶ θεωροῦμεν ὡς ὅρους αὐτοῦ τὸ σύνολον τῶν μονωνύμων ὅρων, τῶν περιεχόντων τὸ γράμμα τῆς διατάξεως μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκθέτου. Περιττὸν νὰ ἐνδιατρίψωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον, οὗτινος ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἦναι τέλειον τετράγωνον, πρέπει, κατὰ τὴν γενομένην θεωρίαν, ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ νὰ ἦναι ἐπίσης τέλειον τετράγωνον καὶ θετικός, οἱ δὲ πρῶτοι ὅροι ἑκάστου τῶν ὑπολοίπων νὰ διαιρῶνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου εὑρισκομένου ὅρου τῆς ῥίζης· ἄλλως τὸ πολυώνυμον δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἐν γένει δὲ πᾶς ὅρος, περιέχων γράμμα τι μετὰ τοῦ ἐλαχίστου ἢ μεγίστου ἐκθέτου, πρέπει νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον καὶ θετικός, ἵνα καὶ τὸ πολυώνυμον ᾖ τέλειον τετράγωνον. Ὡσαύτως δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον τὸ πολυώνυμον, ἐὰν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος εὑρεθῇ ὡς ὅρος τῆς ῥίζης μονώνυμον, περιέχον γράμμα τι μετ' ἐκθέτου ἐλάσσονος τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἐλαχίστου ἐκθέτου τοῦ γράμματος αὐτοῦ ἐν τῷ πολυωνύμῳ, ἢ μείζονος τοῦ ἡμίσεως τοῦ μεγίστου· τὸν λόγον τούτου ἔχομεν ἀμέσως, ἐὰν νοήσωμεν τὸ πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὡς πρὸς τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος ἐκείνου, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ὡς πρὸς τὰς κατιούσας. Σημειωθήτω ἔτι ἐνταῦθα ὅτι οὐδέποτε δυώνυμον (μὴ ἀναγόμενον εἰς μονώνυμον) εἶναι τέλειον τετράγωνον· διότι ἡ ῥίζα αὐτοῦ οὔτε μονώνυμον εἴη ἂν (τὸ τετράγωνον μονωνύμου εἶναι καὶ αὐτὸ μονώνυμον), οὔτε πολυώνυμον· τὸ γὰρ δυωνύμου τετράγωνον ἔχει τρεῖς ὅρους, τὸ δὲ πολυωνύμου οὐχὶ ἐλάσσους τῶν τεσσάρων (§ 52, Σημ. Α'.) —Τοῦ μὴ τελείου τετραγώνου πολυωνύμου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δείκνυται διὰ τοῦ ῥιζικοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Ἐκτὸς τοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρισκομένου πολυωνύμου, ὑπάρχει καὶ ἕτερον πολυώνυμον, οὗ τὸ τετράγωνον ἰσοῦται τῷ δεδομένῳ πολυωνύμῳ· εἶναι δὲ τοῦτο τὸ ἔχον τοὺς αὐτοὺς τῷ εὑρισκομένῳ ὅρους μετ' ἀντιθέτων σημείων (§ 200)· θέλομεν δ' εὕρει τὸ τελευταῖον τοῦτο, ἐὰν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολυωνύμου, οὗ ἡ ῥίζα ἐξάγεται, λάβωμεν μετὰ τοῦ σημείου —(§ 202).

Ἁπλοποιήσεις ῥιζικῶν τοῦ β'. βαθμοῦ.

§ 204. Αἱ ἁπλοποιήσεις τῶν ῥιζικῶν τοῦ β'. βαθμοῦ στηρίζονται ἐπὶ τῶν ἑξῆς ἀρχῶν.

α'. *Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα γινομένου πολλῶν παραγόντων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν παραγόντων.* Ἔχομεν δηλονότι τὴν ἰσότητα

$$\sqrt{\alpha.\beta.\gamma.\delta...}=\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}.\sqrt{\gamma}.\sqrt{\delta}...$$

διότι τὰ τετράγωνα ἑκατέρου τῶν μελῶν αὐτῆς εἶναι $\alpha.\beta.\gamma.\delta....$

β'. *Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πηλίκου ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς τοῦ διαιρέτου.* Ἔχομεν δηλονότι τὴν ἰσότητα

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}.$$

διότι τὰ τετράγωνα ἑκατέρου τῶν μελῶν αὐτῆς εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$.

Τὰ μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων εἶναι ὁμόσημα, ὅταν πᾶσαι αἱ ῥίζαι ἦναι θετικαί· ἀλλ' ὅταν τινὲς ῥίζαι λαμβάνωνται μετὰ τοῦ σημείου —, τὰ μέλη δυνατὸν νὰ ἦναι ἑτερόσημα· ὅθεν ἵνα ἀληθεύωσιν αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες, πρέπει αἱ ἀρνητικαὶ ῥίζαι νὰ λαμβάνωνται οὕτως, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα νὰ ἦναι ὁμόσημα.

§ 205. Ῥιζικά, ὧν τὸ ὑπόῤῥιζον εἶναι μονώνυμον ἢ πολυώνυμον μὴ τέλειον τετράγωνον, εἰσὶ πολλάκις ἐπιδεκτικὰ τῆς ἑξῆς ἁπλοποιήσεως. *Ἀναλύομεν τὸ ὑπόῤῥιζον, εἰ δυνατόν, εἰς δύο παράγοντας, ὧν ὁ ἕτερος τέλειον τετράγωνον· ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τελείου τετραγώνου καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἑτέρου παράγοντος, ἣν δεικνύμεν διὰ ῥιζικοῦ.*

Ἔστω, π. χ., τὸ μονώνυμον $75\alpha^6\beta^3\gamma$· αὐτὸ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $25\alpha^6\beta^2 \times 3\beta\gamma$, οὗ ὁ πρῶτος παράγων εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἔχομεν λοιπὸν κατὰ τὴν α'. τῶν ἀνωτέρω ἀρχῶν

$$\sqrt{75\alpha^6\beta^3\gamma} = \sqrt{25\alpha^6\beta^2}.\sqrt{3\beta\gamma} = 5\alpha^3\beta\sqrt{3\beta\gamma}.$$

Ἔστω ἔτι τὸ πολυώνυμον $\alpha^3\beta + 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3$, ὅπερ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $\alpha\beta(\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2)$, οὗ ὁ δεύτερος παράγων εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἔχομεν λοιπὸν

$$\sqrt{\alpha^3\beta + 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3} = (\alpha + 2\beta)\sqrt{\alpha\beta}.$$

§ 206. *Γινόμενον ῥιζικῶν τοῦ β'. βαθμοῦ ἁπλοποιεῖται, πολλαπλασιαζομένων τῶν ὑποῤῥίζων καὶ ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ γινομένου.*

Ἔστω τὸ γινόμενον $2\alpha^5\sqrt{8\alpha^3\beta} \times 3\alpha\beta\sqrt{2\alpha\beta}$· αὐτὸ ἰσοῦται τῷ $2\alpha^5 \times 3\alpha\beta \times \sqrt{8\alpha^3\beta} \times \sqrt{2\alpha\beta}$· τὸ δὲ γινόμενον τῶν δύο τελευταίων παραγόντων ἰσοῦται κατὰ τὴν α'. τῶν ἐν § 204 ἀρχῶν τῷ $\sqrt{8\alpha^3\beta \times 2\alpha\beta} = \sqrt{16\alpha^4\beta^2} = 4\alpha^2\beta$·

ὅθεν $$2\alpha^5\sqrt{8\alpha^3\beta} \times 3\alpha\beta\sqrt{2\alpha\beta} = 24\alpha^8\beta^2.$$

Εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$6\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \times 3\beta\sqrt{\alpha + \beta} = 18\alpha\beta(\alpha + \beta)\sqrt{\alpha - \beta} = (18\alpha^2\beta + 18\alpha\beta^2)\sqrt{\alpha - \beta}$$

$$\sqrt{45} \times \sqrt{20} = \sqrt{900} = 30.$$

§ 207. Ἐφαρμόζοντες τὴν ε'. τῶν ἐν § 204 ἀρχῶν, δυνάμεθα νὰ μετασχηματίζωμεν πηλίκα τετραγωνικῶν ῥιζῶν ἢ τετραγωνικὰς ῥίζας πηλίκων. Ἔχομεν, π. χ.,

$$\frac{6\alpha^3\sqrt{8\alpha^5\beta^4\gamma}}{3\beta\sqrt{2\alpha^3\gamma}} = \frac{6\alpha^3}{3\beta} \times \frac{\sqrt{8\alpha^5\beta^4\gamma}}{\sqrt{2\alpha^3\gamma}} = \frac{2\alpha^3}{\beta}\sqrt{4\alpha^2\beta^4} = \frac{2\alpha^3}{\beta} \times 2\alpha\beta^2 = 4\alpha^4\beta.$$

$$\frac{5\alpha\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{3\beta\sqrt{\alpha+\beta}}=\frac{5\alpha\sqrt{\alpha-\beta}}{3\beta}.$$

$$\sqrt{\frac{4\alpha^4\beta}{18\gamma^4}}=\frac{2\alpha^2\sqrt{\beta}}{3\gamma^2\sqrt{2}}=\frac{2\alpha^2}{3\gamma^2}\sqrt{\frac{\beta}{2}}.$$

§ 208. Αἱ ἐν § 204 ἀρχαὶ καὶ οἱ ἐπ' αὐτῶν στηριζόμενοι μετασχηματισμοὶ ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, μόνον ὅταν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς δὲν προκύπτουσιν ἰδανικαὶ παραστάσεις. Π. χ. δὲν δυνάμεθα δυνάμει τῆς α'. ἀρχῆς νὰ ἔχωμεν $\sqrt{-12}\times\sqrt{-3}=\sqrt{(-12)\times(-3)}=\sqrt{+36}=\pm 6$· διότι ὡς οὐδέτερος τῶν παραγόντων τῆς παραστάσεως $\sqrt{-12}\times\sqrt{-3}$, οὕτως οὐδ' ἡ παράστασις αὐτὴ ἐμφαίνει ἀριθμόν τινα. Ἐν τούτοις λέγομεν *κατὰ συνθήκην* ὅτι τὸ γινόμενον $\sqrt{-12}\times\sqrt{-3}$ *ἰσοῦται* τῷ ἀριθμῷ ± 6.

Ἐν γένει ὅταν ἐφαρμόζοντες ἐπὶ ἰδανικῶν παραστάσεων μετασχηματισμοὺς ἀποδεδειγμένους ἐπὶ πραγματικῶν παραστάσεων, φθάνωμεν εἰς οἱαδήποτε ἐξαγόμενα, τὰ τελευταῖα *λέγονται* ἴσα ταῖς πρώταις παραστάσεσι. Αἱ τοιαῦται λοιπὸν ἰσότητες εἰσὶ κατὰ συνθήκην ἰσότητες καὶ οὐχὶ πραγματικαί.

Συνεπείᾳ τῆς συνθήκης ταύτης ἔχομεν $\sqrt{-\alpha}=\sqrt{\alpha}\sqrt{-1}$· ἤγουν *ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ* $\sqrt{-1}$.

Ῥίζαι τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐν γένει.

§ 209. *Ῥίζα περιττοῦ βαθμοῦ ἀριθμοῦ τινος Α ἔχει σημεῖον ταὐτὸν τῷ τοῦ Α.* Ἔστω ρ ῥίζα τοῦ Α βαθμοῦ $2\mu+1$· ἔχομεν

$$\rho^{2\mu+1}=\mathrm{A}\cdot$$

ἀλλὰ $\rho^{2\mu+1}$ εἶναι ὁμόσημος τῷ ρ (§§ 47 καὶ 48)· οὕτως οἱ ἀριθμοὶ ρ καὶ Α εἰσὶν ὁμόσημοι.

§ 210. *Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι ῥίζας ἀρτίου βαθμοῦ.* Ἔστω ὁ ἀρνητικὸς —Α· ἐὰν οὗτος ἔχῃ ῥίζαν ἀρτίου βαθμοῦ, σημειωθήτω αὐτὴ διὰ α· ἔχομεν, 2μ ὄντος τοῦ βαθμοῦ τῆς ῥίζης

$$\alpha^{2\mu}=-\mathrm{A}\cdot$$

ὅπερ ἄτοπον· διότι, ὁπότερον ἂν ᾖ τὸ σημεῖον τοῦ α, ἡ δύναμις $\alpha^{2\mu}$ εἶναι θετικὴ (§ 47 καὶ 48).

Ἔπεται ἐντεῦθεν ὅτι πᾶσα τοιαύτη παράστασις $\sqrt[2\mu]{-A}$ (Α ὄντος ἀπολύτου ἀριθμοῦ) ἐμφαίνει ἰδανικὸν ἀριθμόν.

§ 211. *Ὅταν ἀριθμός τις ρ ἦναι ῥίζα ἀρτίου βαθμοῦ θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ Α, καὶ ὁ —ρ εἶναι τοιοῦτος·* διότι $(\rho)^{2\mu}=(-\rho)^{2\mu}$· ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν $\rho^{2\mu}=A$· ἄρα καὶ $(-\rho)^{2\mu}=A$.

Κατὰ ταῦτα ἡ παράστασις $\sqrt[2\mu]{A}$, Α ὄντος θετικοῦ, ἐμφαίνει ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Ἐν τούτοις ὅταν ἡ παράστασις αὕτη γράφηται ἄνευ σημείου $+$ ἢ $-$ πρὸ αὐτῆς, ὑποτίθεται ὅτι λαμβάνεται μετὰ τοῦ σημείου $+$· ὅταν λαμβάνηται θετικῶς τε καὶ ἀρνητικῶς, τίθεται πρὸ αὐτῆς ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$· οἷον $\pm\sqrt[2\mu]{A}$· σπανιώτερον γράφεται ἄνευ σημείου, ἐνῷ θεωροῦνται ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ αὐτῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ Β'. ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΘ' ΕΝΟΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥ.

Σχῆμα, εἰς ὃ ἀνάγεται πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ β'. βαθμοῦ μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου.

§ 212. Πᾶσα ἐξίσωσις μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου τοῦ β'. βαθμοῦ δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς τὸ σχῆμα

$$\chi^2+\pi\chi=\kappa,$$

π καὶ κ ὄντων γνωστῶν. Γίνεται δὲ τοῦτο ἐξαφανιζομένων τῶν παρονομαστῶν, μετατιθεμένων εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῶν ὅρων τῶν περιεχόντων χ^2 καὶ χ, τῶν δὲ λοιπῶν εἰς τὸ δεύτερον, ἀναγομένων εἰς ἕνα ὅρον τῶν ἐχόντων χ^2, ἐπίσης καὶ τῶν ἐχόντων χ, καὶ τέλος διαιρουμένων τῶν δύο μελῶν τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ^2. Ὅταν $\pi=0$, ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς $\chi^2=\kappa$, ἥτις περιέχει μόνον τὸ τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{5\chi^2}{6}-\frac{\chi}{2}+\frac{3}{4}=8-\frac{2\chi}{3}-\chi^2+\frac{273}{12}.$$

Ἐξαφανίσει τῶν παρονομαστῶν

$$10\chi^2-6\chi+9=96-8\chi-12\chi^2+273\cdot$$

μεταθέσει

$$10\chi^2+12\chi^2-6\chi+8\chi=96+273-9\cdot$$

ἀναγωγῇ

$$22\chi^2+2\chi=360\cdot$$

διαιρέσει διὰ 22

$$\chi^2+\frac{2}{22}\chi=\frac{360}{22}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει τὸ σχῆμα $\chi^2+\pi\chi=\kappa$.

β΄. Ἔστω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις

$$\frac{\alpha}{\chi-\beta}+\frac{\beta}{\chi-\alpha}=2.$$

Ἐξαφανίσει τῶν παρονομαστῶν

$$\alpha\chi-\alpha^2+\beta\chi-\beta^2=2\chi^2-2\beta\chi-2\alpha\chi+2\alpha\beta\cdot$$

μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ

$$2\chi^2-3(\alpha+\beta)\chi=-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2\cdot$$

διαιρέσει διὰ 2

$$\chi^2-\frac{3(\alpha+\beta)\chi}{2}\chi=-\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{2}.$$

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\kappa$.

§ 213. Προσθέσωμεν $\frac{\pi^2}{4}$ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆ[ς]

ἔχομεν οὕτω τὴν ἰσοδύναμον

$$\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}+\kappa,$$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι τετράγωνον τοῦ διωνύμου $\chi+\frac{\pi}{2}$ ἡ ἐξί[σωσις]

σωσις λοιπὸν αὕτη γράφεται καὶ οὕτω

$$\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}+\varkappa.$$

Ἡ τιμὴ τοῦ χ πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ $\chi+\frac{\pi}{2}$ νὰ ἰσῶται τῷ $\frac{\pi^2}{4}+\varkappa$· ἄρα $\chi+\frac{\pi}{2}$ ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\varkappa$· ἀλλ' ὁ $\frac{\pi^2}{4}+\varkappa$ ἔχει δύο τετρ. ῥίζας ἴσας ἀπολύτως καὶ ἑτεροσήμους, ἤτοι $\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\varkappa}$ (§ 200)· ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ χ πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ μίαν τῶν ἰσοτήτων

$$\chi+\frac{\pi}{2}=+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\varkappa}$$

$$\chi+\frac{\pi}{2}=-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\varkappa}\cdot$$

ἐκ τῆς πρώτης συνάγομεν

$$(1)\qquad \chi=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\varkappa}\cdot$$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$(2)\qquad \chi=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\varkappa}\cdot$$

Τοιαῦταί εἰσιν αἱ τιμαί, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$, δύο τὸν ἀριθμόν, καὶ δύο μόναι. Αἱ τιμαὶ αὗται καλοῦνται καὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

§ 214. Ἐφαρμογαί. Ἵνα ἐπιλύσωμεν ἐξίσωσιν τοῦ β'. βαθμοῦ μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου, ἀνάγομεν πρῶτον αὐτὴν εἰς τὸ σχῆμα $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$, εἶτα δ' ἐφαρμόζομεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους (1) καὶ (2)·

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{5\chi^2}{6}-\frac{\chi}{2}+\frac{3}{4}=8-\frac{2\chi}{3}-\chi^2+\frac{273}{12},$$

ἥτις, ὡς εἴδομεν, ἀνάγεται εἰς τὴν

$$\chi^2+\tfrac{2}{22}\chi=\tfrac{360}{22}\cdot$$

(§ 212, παράδ. α'.)· ἑπομένως κατὰ τοὺς τύπους (1) καὶ (2), αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ εἰσὶ

$$-\tfrac{1}{22}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{22}\right)^2+\tfrac{360}{22}}.$$

Ἐκτελοῦντες τὰς ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν δεικνυομένας πράξεις, εὑρίσκομ[εν] ἐξαγόμενον $\frac{7921}{(22)^2}$, οὗ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι $\frac{89}{22}$· ὅθεν αἱ δύο [τι]μαὶ εἰσὶν

$$\chi'=-\tfrac{1}{22}+\tfrac{89}{22}=\tfrac{88}{22}=4$$

$$\chi''=-\tfrac{1}{22}-\tfrac{89}{22}=-\tfrac{90}{22}=-\tfrac{45}{11}.$$

β'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\alpha}{\chi-\beta}+\frac{\beta}{\chi-\alpha}=2,$$

ἥτις, ὡς εἴδομεν, ἀνάγεται εἰς τὴν

$$\chi-\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\chi=-\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{2}$$

(§ 212, παράδ. β'.)· ὅθεν κατὰ τοὺς τύπους (1) καὶ (2)

$$\chi=\frac{3(\alpha+\beta)}{4}\pm\sqrt{\frac{9(\alpha+\beta)^2}{16}-\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{2}}.$$

ἀνάγοντες τὸ ὑπόρριζον, εὑρίσκομεν $\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{16}$, οὗ ἡ τετρ. ῥί[ζα] εἶναι $\frac{\alpha+\beta}{4}$· ὅθεν

$$\chi'=\frac{3(\alpha+\beta)}{4}+\frac{\alpha+\beta}{4}=\alpha+\beta$$

$$\chi''=\frac{3(\alpha+\beta)}{4}-\frac{\alpha+\beta}{4}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

γ'. Ἔστω ἔτι ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2-8\chi=-6;$$

Ἐπειδὴ αὐτὴ ἔχει τὸ σχῆμα $\chi^2+\pi\chi=\kappa$, ἐφαρμόζομεν ἀμέσως τοὺς τύπους (1) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν

$$\chi=4\pm\sqrt{16-6}=4\pm\sqrt{10}.$$

Αἱ ῥίζαι αὗται εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἵνα ἔχωμεν αὐτὰς κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ 10 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ καὶ προσθέτομεν αὐτὴν εἰς τὸν 4 ἢ ἀφαιροῦμεν· π. χ. ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ 10 κατὰ προσέγγισιν 0,001 εἶναι 3,162· ὅθεν ἔχομεν κατὰ προσέγγισιν 0,001

$$\chi'=7,162,\ \chi''=0,838.$$

δ'. Ἔστω ἔτι

$$35\chi^2-6\chi=4\cdot$$

ὅθεν

$$\chi^2-\tfrac{6}{35}\chi=\tfrac{4}{35}\cdot$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{6}{70}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{70}\right)^2+\frac{4}{35}}.$$

Εὑρίσκομεν ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις

$$\left(\frac{6}{70}\right)^2+\frac{4}{35}=\frac{596}{(70)^2}.$$

ἑπομένως

$$\sqrt{\left(\frac{6}{70}\right)^2+\frac{4}{35}}=\sqrt{\frac{596}{(70)^2}}=\frac{\sqrt{596}}{70}.$$

ὅθεν

$$\chi'=\frac{6}{70}+\frac{\sqrt{596}}{70},\ \chi''=\frac{6}{70}-\frac{\sqrt{596}}{70}.$$

Καὶ αἱ ῥίζαι αὗται εἰσὶν ἀσύμμετροι· λογισώμεθα αὐτὰς κατὰ προσέγγισιν. Ἐξάγοντες τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ 596 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, ἔχομεν 24,41· ἄρα

$$\chi'=\frac{6+24,41}{70}=\frac{30,41}{70}$$

$$\chi''=\frac{6-24,41}{70}=-\frac{18,41}{70}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗταί εἰσι κατὰ προσέγγισιν 0,001· διότι τὸ πηλίκον τοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἀριθμοῦ διὰ 70 εἶναι κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{70}$ τοῦ 0,01, ἔτι δὲ μᾶλλον κατὰ προσέγγισιν 0,001· ἐκτελοῦντες λοιπὸν τὴν διαίρεσιν διὰ 70 μέχρις εὑρέσεως χιλιοστῶν, ἔχομεν

$$\chi'=0,434,\ \chi''=-0,263.$$

ε΄. Ἔστω ἔτι ἡ ἐξίσωσις

$$3\chi^2-7\chi=-10,$$

ἐξ ἧς
$$\chi^2-\tfrac{7}{3}\chi=-\tfrac{10}{3}.$$

ὅθεν
$$\chi=\frac{7}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{10}{3}}=\frac{7\pm\sqrt{-71}}{6}.$$

Αἱ ῥίζαι αὗται εἰσὶν ἰδανικαί· διότι ἡ ῥίζα $\sqrt{-71}$ εἶναι ἰδανικὸς ἀριθμός. Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{-71}=\sqrt{71}\sqrt{-1}$ (§ 208), αἱ αὐταὶ ῥίζαι γράφονται καὶ ὧδε

$$\chi'=\frac{7+\sqrt{71}\sqrt{-1}}{6},\ \chi''=\frac{7-\sqrt{71}\sqrt{-1}}{6}.$$

ς΄. Ἔστω ἔτι

$$(\alpha^2-\beta^2)\chi^2-2\alpha^2\beta\chi+\alpha^2\beta^2=0:$$

ὅθεν
$$\chi^2-\frac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\chi=-\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

ὅθεν
$$\chi=\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)^2-\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}}.$$

ἀλλὰ
$$\left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)^2-\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2\beta^4}{(\alpha^2-\beta^2)^2},$$

ἐξ οὗ
$$\sqrt{\left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)^2-\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}}=\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

ὅθεν
$$\chi'=\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$$

$$\chi''=\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Διερεύνησις τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\kappa$.

§ 215. Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$(\text{E}) \quad \chi^2+\pi\chi=\kappa$$

εἰσίν

$$(\text{T}) \quad \chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}.$$

α΄. Ὅταν τὸ δεύτερον μέλος κ ἦναι θετικόν, τὸ ὑπόῤῥιζον $\frac{\pi^2}{4}+\kappa$ εἶναι πάντοτε θετικόν, ὡς ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν (ὁ $\frac{\pi^2}{4}$, ὢν τετράγωνον τοῦ $\frac{\pi}{2}$, εἶναι πάντοτε θετικός)· ἑπομένως αἱ ῥίζαι τότε εἰσὶ *πραγματικαί*· εἰσὶ δὲ καὶ *ἑτερόσημοι*· διότι τὸ ὑπόῤῥιζον $\frac{\pi^2}{4}+\kappa$ εἶναι ἀπολύτως μεῖζον τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$· ὅθεν ἡ ἀπόλυτος ἀξία τῆς ῥίζης $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$ εἶναι μείζων τῆς τοῦ $-\frac{\pi}{2}$· ὑπερισχύει λοιπὸν ἐν ἑκατέρῳ τῶν τύπων (Τ) τὸ σημεῖον τοῦ ῥιζικοῦ, καὶ οὕτως ἡ μὲν πρώτη ῥίζα εἶναι θετική, ἡ δὲ δευτέρα ἀρνητική.

β΄. Ὅταν τὸ κ ἦναι ἀρνητικὸν καὶ ἀπολύτως ἔλασσον τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ὑπόῤῥιζον εἶναι πάλιν θετικόν, ὑπερισχύοντος τοῦ σημείου τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$· ἑπομένως αἱ ῥίζαι εἰσὶ πάλιν *πραγματικαί*· ἀλλ᾽ ἤδη εἰσὶν ὁμόσημοι· διότι ἡ ἀπόλυτος ἀξία τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\kappa$ εἶναι ἐλάσσων τῆς τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$· ἑπομένως καὶ ἡ τῆς ῥίζης $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$ τοῦ $-\frac{\pi}{2}$· ὑπερισχύει λοιπὸν ἐν ἑκατέρῳ τῶν τύπων (Τ) τὸ σημεῖον τοῦ $-\frac{\pi}{2}$· οὕτω τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ῥιζῶν κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην *εἶναι ἐναντίον τοῦ σημείου* τοῦ π *ἐν τῇ (Ε)*.

γ'. Ὅταν τὸ κ ἦναι ἀρνητικὸν καὶ μεῖζον ἀπολύτως τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ὑπόῤῥιζον $\frac{\pi^2}{4}+\kappa$ εἶναι ἀρνητικόν· ὅθεν ἡ ῥίζα $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$ ἰδανική· ἐπομένως καὶ αἱ τιμαὶ (Τ) εἰσὶν ἀμφότεραι ἰδανικαί. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν ταύτην ἡ ἐξίσωσις (Ε) δὲν ἔχει λύσεις πραγματικάς, ἤγουν δὲν ἐπαληθεύεται δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ. Ἐν τούτοις αἱ ἰδανικαὶ παραστάσεις, αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (Τ), καλοῦνται οὐχ ἧττον *τιμαὶ* ἢ *ῥίζαι* τῆς ἐξισώσεως (Ε)· διότι ὅταν ἀντεισαχθῶσιν ἐν τῇ (Ε) καὶ ἐκτελεσθῶσιν οἱ μετασχηματισμοί, περὶ ὧν εἴρηται ἐν § 208, εὑρίσκεται ταυτότης.

Ὅτι κατὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις (Ε) δὲν ἐπαληθεύεται διὰ πραγματικῆς τιμῆς γίνεται δῆλον καὶ ὡς ἑξῆς. Προσθέτοντες $\frac{\pi^2}{4}$ εἰς τὴν (Ε), ἔχομεν $\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\kappa+\frac{\pi^2}{4}$· τὸ α'. μέλος τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τετράγωνον τοῦ $\chi+\frac{\pi}{2}$, τὸ δὲ β'. ἀρνητικόν, τοῦ κ ὄντος ἀρνητικοῦ καὶ μείζονος τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$· ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος οὐδέποτε εἶναι ἀρνητικόν, ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἀδύνατος.

δ'. Ὅταν τὸ κ ἦναι ἀρνητικὸν καὶ ἴσον ἀπολύτως τῷ $\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ὑπόῤῥιζον εἶναι 0· ἑκάτερος λοιπὸν τῶν τύπων (Τ) ἀποβαίνει $-\frac{\pi}{2}$· ἔχομεν λοιπὸν τότε μίαν μόνον λύσιν. Δῆλον δὲ τοῦτο καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (Ε), ἥτις τότε ἀποβαίνει $\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=0$, εἴτε $\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2=0$· ὅθεν $\chi+\frac{\pi}{2}=0$ καὶ $\chi=-\frac{\pi}{2}$.

ε'. Ὅταν $\pi=0$, αἱ ῥίζαι εἰσὶν $\pm\sqrt{\kappa}$. Δῆλον τοῦτο καὶ ἐκ τῆς (Ε), ἥτις τότε εἶναι $\chi^2=\kappa$· ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{\kappa}$.

§ 216. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. Αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἰσιν

$$\chi'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\ \chi''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει $\alpha=0$, εἰ μὲν ὁ β εἶναι θετικός, ὁ πρῶτος τῶν τύπων τούτων ἀποβαίνει $\frac{0}{0}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{-2\beta}{0}$· εἰ δ' ὁ β ἀρνητικός, ὁ πρῶτος γίνεται $\frac{-2\beta}{0}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{0}{0}$· οὕτω πάντοτε ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν γίνεται $\frac{0}{0}$, ἡ δὲ $\frac{K}{0}$.

Ἐν § 152 εἴπομεν ὅτι, ὅταν τύπος τις ἀποβαίνῃ $\frac{K}{0}$ συνεπείᾳ ὑποθέσεων γινομένων ἐπὶ τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων, ἡ ἀξία αὐτοῦ βαίνει αὐξάνουσα ἐπ' ἄπειρον, ὅταν τὰ γράμματα τείνωσι πρὸς τὰ ὅρια, δι' ὧν ὁ τύπος αὐτὸς ἀποβαίνει $\frac{K}{0}$. Εὔκολον εἶναι νὰ ἐπαληθεύσωμεν ἐπὶ τοῦ προκειμένου τὴν παρατήρησιν ταύτην· ὅτι, δηλονότι, *ἡ τιμή, ἡ καθιστωμένη $\frac{K}{0}$, βαίνει αὐξάνουσα ἀπεριορίστως, ὅταν ὁ α βαίνῃ ἐλαττούμενος ἀπεριορίστως*.

Εἴπομεν ἐπίσης ἐν § 156 ὅτι, ὅταν τύπος τις ἀποβαίνῃ $\frac{0}{0}$, ἡ ἀξία αὐτοῦ εἶναι ἤτοι ἀπροσδιόριστος ἢ ὡρισμένη, ἢ ἄπειρος. Ἐνταῦθα ἡ ἀξία τοῦ τύπου, τοῦ ἀποβαίνοντος $\frac{0}{0}$, εἶναι ὡρισμένη· Τῷ ὄντι· ὅταν ὁ β ἦναι θετικός, ὁ ἀποβαίνων $\frac{0}{0}$ τύπος εἶναι $\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ $-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, ἔχομεν

$$\frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{2\alpha(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}=\frac{4\alpha\gamma}{2\alpha(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}=-\frac{2\gamma}{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}};$$

ὅθεν, ὅταν $\alpha=0$, $\chi=-\frac{\gamma}{\beta}$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ προΐδωμεν, παρατηροῦντες ὅτι ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ τρέπεται, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει $\alpha=0$, εἰς τὴν πρωτοβάθμιον $\beta\chi+\gamma=0$, ἐξ ἧς $\chi=-\frac{\gamma}{\beta}$.

Σχηματισμὸς τριωνύμου ἀκεραίου καὶ δευτεροβαθμίου ὡς πρὸς γράμματι χ.

§ 217. ΘΕΩΡΗΜΑ Α′. *Πᾶν τριώνυμον τοιόνδε $\chi^2+\pi\chi+\kappa$, ἤτοι ἀκέραιον καὶ δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς γράμμα τι χ, οὗ ὁ δευτεροβάθμιος ὅρος ἔχει συντελεστὴν 1, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ δύο δυωνύμων τοιούτων $\chi-\chi'$ καὶ $\chi-\chi''$, χ' καὶ χ'' ὄντων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$.*

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ εἰσὶ $-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$ ἑπομένως τὰ δυώνυμα $\chi-\chi'$ καὶ $\chi-\chi''$ εἰσὶ $\chi+\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$ καὶ $\chi+\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$· ἡ μὲν τῶν παραστάσεων αὐτῶν εἶναι ἄθροισμα, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν $\chi+\frac{\pi}{2}$ καὶ $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$· ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων $\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2$ καὶ $\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}-\kappa$· ἔχομεν δὲ $\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi^2}{4}-\kappa\right)$ $=\chi^2+\pi\chi+\kappa$. Ο. Ε. Δ.

§ 218. ΘΕΩΡΗΜΑ Β′. *Παντὸς τριωνύμου $\chi^2+\pi\chi+\kappa$ ὁ συντελεστὴς π τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ χ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$, εἰλημμένῳ μετ' ἐναντίου σημείου.*

Τῷ ὄντι· προσθέτοντες τὰς ῥίζας $-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$ καὶ $-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$, ἔχομεν ἄθροισμα $-\pi$.

§ 219. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Παντὸς τριωνύμου $\chi^2+\pi\chi+\kappa$ ὁ μὴ περιέχων τὸ χ ὅρος κ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$.* Τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν $-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$ καὶ $-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων τοῦ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ τοῦ $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$· διότι ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν αὐτῶν εἶναι ἄθροισμα, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa}$· ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν εἶναι κ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ πρώτου θεωρήματος δυνάμεθα ν' ἀναλύωμεν πᾶν τριώνυμον ἀκέραιον καὶ δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς γράμμα τι εἰς παράγοντας πρωτοβαθμίους. Ἔσω, π.χ., τὸ τριώνυμον $5\alpha^2-\frac{59}{4}\alpha+7$. Δυνάμεθα ἐν πρώτοις νὰ γράψωμεν αὐτὸ οὕτω $5(\alpha^2-\frac{59}{20}\alpha+\frac{7}{5})$· ἀκολούθως ἀναλύοντες τὸν δεύτερον παράγοντα $\alpha^2-\frac{59}{20}\alpha+\frac{5}{7}$ εἰς δύο δυωνύμους κατὰ τὸ Α'. Θεώρημα, ἔχομεν

$$\alpha^2-\frac{59}{20}\alpha+\frac{7}{5}=\left(\alpha-\frac{59+\sqrt{1241}}{40}\right)\left(\alpha-\frac{59-\sqrt{1241}}{40}\right).$$

ὅθεν

$$5\alpha^2-\frac{59}{4}\alpha+7=5\left(\alpha-\frac{59+\sqrt{1241}}{40}\right)\left(\alpha-\frac{59-\sqrt{1241}}{40}\right).$$

Ὅταν αἱ ῥίζαι ἦναι ἰδανικαί, οἱ παράγοντες περιέξουσιν ἰδανικά.

Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.

§ 220. Νοήσωμεν ὅτι ἐν τῷ τριωνύμῳ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ οἱ μὲν α, β, γ διατηροῦσι τὰς αὐτὰς τιμάς, ἀντὶ δὲ τοῦ χ τίθενται διάφοροι ἀριθμοί· ὑπάρχουσι τότε ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τῶν ἐξαγομένων τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ὅταν αἱ ῥίζαι χ' καὶ χ'' τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἦναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τῷ χ ἀριθμὸν περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ῥιζῶν* (*), *τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ πρώτου ὅρου αὐτοῦ $\alpha\chi^2$· ἐὰν δ' ἀντικαταστήσωμεν ἀριθμὸν μὴ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ῥιζῶν, τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου εἶναι ταὐτὸν τῷ τοῦ πρώτου ὅρου αὐτοῦ.*

Ἔχομεν (§ 217)

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'').$$

Ἐὰν ἐν τῇ τελευταίᾳ παραστάσει ἀντικαταστήσωμεν τῷ χ ἀριθμὸν περιεχόμενον μεταξὺ χ' καὶ χ'', ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων $\chi-\chi'$ καὶ $\chi-\chi''$ ἔσεται θετικός, ὁ δ' ἕτερος ἀρνητικός· ἐπομένως τὸ γινόμενον $(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$ ἔσεται ἀρνητικόν· ὅθεν τὸ $\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$ ἕξει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, εἴτε τοῦ $\alpha\chi^2$. Ἐὰν δ' ἀντικαταστήσωμεν ἀριθμὸν μὴ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν χ' καὶ χ'', οἱ παράγοντες $\chi-\chi'$ καὶ $\chi-\chi''$ ἔσονται ἤτοι ἀμφότεροι θετικοὶ ἢ ἀμφότεροι ἀρνητικοί· ἐπομένως τὸ μὲν $(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$ ἔσεται θετικόν, τὸ δὲ $\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$ ὁμόσημον τῷ α, εἴτε τῷ $\alpha\chi^2$.

§ 221. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ὅταν αἱ ῥίζαι χ' καὶ χ'' τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἦναι ἴσαι, τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἔχει πάντοτε σημεῖον ταὐτὸν τῷ τοῦ πρώτου ὅρου αὐτοῦ.* Εἴδομεν ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\kappa$ εἰσὶν ἴσαι, ὅταν $\kappa=-\frac{\pi^2}{4}$ (§ 215, δ'.)· ἐπομένως αἱ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0$ εἰσὶν ἴσαι, ὅταν $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$· ἀλλὰ τότε τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς ἀποβαίνει $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$· ὅθεν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$· ὁ $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶναι πάντοτε θετικός, οἱοσδήποτ' ἀριθμὸς κἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ·

(*) Ὅρα τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀνισότητος ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐν § 213.

ἄρα τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ α εἶναι πάντοτε ὁμόσημον τῷ α, εἴτε τῷ $\alpha\chi^2$, ἐὰν δὲν ἦναι 0.

§ 222. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Ὅταν αἱ ῥίζαι χ' καὶ χ'' τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἦναι ἰδανικαί, τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι πάντοτε ὁμόσημον τῷ πρώτῳ ὅρῳ αὐτοῦ.* Εἴδομεν ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\kappa$ εἰσὶν ἰδανικαί, ὅταν ὁ κ ἦναι ἀρνητικὸς καὶ μείζων ἀπολύτως τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$· ἑπομένως ὅταν αἱ ῥίζαι χ' καὶ χ'' ἦναι ἰδανικαί, $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι θετικὸς καὶ μείζων τοῦ $\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$· τὸ τριώνυμον λοιπὸν $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}$, γραφόμενον ὡς ἑξῆς $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$, ἔσεται ἄθροισμα δύο θετικῶν ἀριθμῶν, οἱονδήποτ' ἂν ᾖ τὸ χ· ὅθεν τὸ $\alpha\left(\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ ἔσεται πάντοτε ὁμόσημον τῷ α, εἴτε τῷ $\alpha\chi^2$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ ἀνωτέρω τρία θεωρήματα δύνανται νὰ περιληφθῶσιν ἐν μιᾷ μόνῃ ἐκφωνήσει, τῇ ἑξῆς. *Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι ὁμόσημον τῷ πρώτῳ ὅρῳ αὐτοῦ, ἐκτὸς ἐὰν τὸ χ περιέχηται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅταν αὗται ἦναι πραγματικαί.*

Ἐξισώσεις διτετραγωνικαί.

§ 223. *Ἐξισώσεις διτετραγωνικαὶ* καλοῦνται αἱ ἀναγόμεναι εἰς σχῆμα τοιοῦτον $\chi^4+\pi\chi^2=\kappa$· ἤγουν αἱ τεταρτοβάθμιοι, αἱ περιέχουσαι μόνην τὴν τετάρτην καὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀγνώστου.

Ἐπειδὴ $\chi^4=(\chi^2)^2$ (§ 49), αἱ ἐξισώσεις αὗται εἰσὶ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου, ἅτε περιέχουσαι τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ· διὸ ἡ ἐπίλυσις αὐτῶν δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς ἐπίλυσιν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Ἔστω ἐν γένει ἡ ἐξίσωσις

$$(1)\quad \chi^4+\pi\chi^2=\kappa;$$

Θῶμεν $\chi^2=y$, ὅθεν $\chi^4=y^2$· ἀντικαταστάσει ἐν τῇ (1) ἔχομεν $y^2+\pi y=\kappa$· ὅθεν $y=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$, εἴτε $\chi^2=-\frac{\pi}{2}$ $+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$ καὶ $\chi^2=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$· ἐκ τῆς πρώτης τούτων συνάγομεν

$$(2)\quad \chi=\pm\sqrt{-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}},$$

ἐκ δὲ τῆς ἑτέρας

$$(3)\quad \chi=\pm\sqrt{-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}}\cdot$$

ἔχομεν οὕτω τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως (1) *τέσσαρας* λύσεις καὶ *μόνας αὐτάς*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-25\chi^2=-144$. Ἐφαρμογῇ τῶν ἀνωτέρω τύπων (2) καὶ (3)

$$\chi=\pm\sqrt{\frac{25}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2-144}}=\pm\sqrt{\frac{25}{2}\pm\frac{7}{2}}\cdot$$

ἔχομεν λοιπὸν τὰς ἑξῆς τέσσαρας λύσεις $\chi=\pm 4$ καὶ $\chi=\pm 3$.

β΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-7\chi^2=8$· ὅθεν

$$\chi=\pm\sqrt{\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+8}}=\pm\sqrt{\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2}}\cdot$$

οὕτω $\chi=\pm\sqrt{8}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{-1}$· αἱ δύο πρῶται εἰσὶν ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δύο τελευταῖαι ἰδανικαί.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΓΣΙΝ.

1. $$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+\chi}+\frac{1}{\alpha+2\chi}=0.$$

$$\chi=\frac{\alpha}{2}(-3\pm\sqrt{3}).$$

2. $$\sqrt{1+\chi+\chi^2} = \alpha - \sqrt{1-\chi+\chi^2}.$$

$$\chi = \pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2-1}}.$$

3. $$\frac{1-\alpha\chi}{1+\alpha\chi}\sqrt{\frac{1+\beta\chi}{1-\beta\chi}} = 1.$$

$$\chi=0 \text{ καὶ } \chi = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}-1}.$$

Αἱ δύο τελευταῖαι λύσεις ἀνήκουσιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν, ἧς τὸ β'. μέλος εἶναι -1.

4. $$\sqrt{(1+\chi)^2-\alpha\chi} + \sqrt{(1-\chi)^2+\alpha\chi} = \chi.$$

$$\chi = \pm 2\sqrt{\left(1-\alpha\right)\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)} \text{ καὶ } \chi=0.$$

Αἱ λύσεις αὗταί εἰσιν ἀλλότριαι, ἀληθεύουσαι ὅταν τὸ ἕτερον τῶν ῥιζικῶν λαμβάνηται μετὰ τοῦ — .

Αἱ ἀνωτέρω τρεῖς ἐξισώσεις (2, 3, 4) ἄγουσιν εἰς τελικὴν ἐξίσωσιν περιέχουσαν μόνον τὸ τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου.

5. $$\frac{\sqrt{\chi^2+\chi+6}}{3} = \frac{20-\frac{4}{3}\sqrt{\chi^2+\chi+6}}{\sqrt{\chi^2+\chi+6}}.$$

Λαμβάνομεν βοηθητικὸν ἄγνωστον $\sqrt{\chi^2+\chi+6}$ καὶ εὑρίσκομεν $\chi=5$ καὶ $\chi=-6$· εὑρίσκομεν ἔτι καὶ $\chi=\frac{-1\pm\sqrt{377}}{2}$· ἀλλ' ὡς πρὸς αὐτὰς τὰς δύο λύσεις ληπτέον μετὰ τοῦ — τὸ ῥιζικὸν τῆς ἐξισώσεως.

6. $$2\chi\sqrt[3]{\chi} - 3\chi\sqrt[3]{\frac{1}{\chi}} = 20.$$

Τίθεμεν $\sqrt[3]{\chi} = y$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν διτετραγωνικήν. Οὕτω δ' εὑρίσκομεν $\chi = \pm 8$ καὶ $\chi = \pm\frac{5}{2}\sqrt{-\frac{5}{2}}$.

7. $$\frac{\chi}{\alpha+\chi} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+\chi}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\chi = \frac{\alpha(\alpha^2+2\alpha\beta-2\beta^2\pm\alpha\sqrt{5\alpha^2-4\alpha\beta})}{2(\alpha-\beta)^2}.$$

Χρηστέον βοηθητικῷ ἀγνώστῳ ἴσῳ τῷ $\dfrac{\sqrt{\alpha+\chi}}{\sqrt{\alpha}}$.

8. $$\frac{1}{\chi-\sqrt{2-\chi^2}}-\frac{1}{\chi+\sqrt{2-\chi^2}}=1.$$

$$\chi=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \text{ καὶ } \chi=\pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

9. $$\frac{1}{1-\sqrt{1-\chi^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-\chi^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\chi^2}.$$

$$\chi=\pm\frac{1}{2}.$$

10. $$\chi^2+\sqrt{5\chi+\chi^2}=42-5\chi.$$

$$\chi=4,\ \chi=-9,\ \chi=\frac{-5\pm\sqrt{221}}{2}.$$

Ὡς πρὸς τὰς τελευταίας τιμὰς ληπτέον τὸ ῥιζικὸν μετὰ τοῦ —.

11. $$\sqrt[\mu]{(1+\chi)^2}-\sqrt[\mu]{(1-\chi)^2}=\sqrt[\mu]{1-\chi^2}.$$

$$\chi=\frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{\mu}-1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{\mu}+1}.$$

Χρηστέον βοηθητικῷ ἀγνώστῳ ἴσῳ τῷ $\sqrt{\dfrac{1+\chi}{1-\chi}}$.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ.

1. Τίς ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, ἧς αἱ ῥίζαι $5+\sqrt{7}$ καὶ $5-\sqrt{7}$;

2. Τίς σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ π καὶ $\varkappa$, ἵνα αἱ ῥίζαι χ' καὶ χ'' τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$ ἐπαληθεύωσι τὴν ἰσότητα $\mu\chi'+\nu\chi''=\rho$;

Ἀπόκρ. $(\mu\pi+\rho)^2=\varkappa(\mu-\nu)^2-\pi(\mu\pi+\rho)(\mu-\nu)$.

3. Εὑρεῖν ἐξίσωσιν δευτεροβάθμιον, ἧς ἑκατέρα τῶν ῥιζῶν ἔχει δεδομένην σχέσιν πρὸς ἑκατέραν τῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$.

Ὁρίζοντες τὴν δεδομένην σχέσιν, ἔχομεν διάφορα μερικώτερα ζητήματα. Π. χ. ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως ἦναι γινόμενα τῶν ῥιζῶν τῆς δεδομένης ἐπὶ μ, ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\chi^2+\mu\pi\chi=\varkappa\mu^2$.

4. Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων καὶ τὸ τῶν ἀντιστρόφων τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν ῥιζῶν χ' καὶ χ'' τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\kappa$.

$$\chi'^4+\chi''^4=\pi^4+4\kappa\pi^2+2\kappa^2.$$

$$\frac{1}{\chi'^4}+\frac{1}{\chi''^4}=\frac{\pi^4+4\kappa\pi^2+2\kappa^2}{\kappa^4}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ Β'. ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΘ' ΕΝΟΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥ.

224. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Ἠγόρασέ τις ἀριθμὸν τινα πήχεων ὑφάσματος ἀντὶ δραχμῶν 240· ἐὰν ἠγόραζε τρεῖς πήχεις ὀλιγώτερον, ὁ πῆχυς ἤθελεν ὑπερτιμηθῆ κατὰ 4 δραχμάς· πόσους πήχεις ἠγόρασε;* Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πήχεων· ἡ τιμὴ ἑνὸς πήχεως εἶναι $\frac{240}{\chi}$· ἐὰν δ' ἠγόραζοντο τρεῖς πήχεις ὀλιγώτερον, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἤθελεν εἶσθαι $\frac{240}{\chi-3}$· κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἡ δευτέρα τιμὴ ὑπερέχει τὴν πρώτην κατὰ 4· ἔχομεν ἄρα τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{240}{\chi-3}-\frac{240}{\chi}=4·$$

ἐξ ἧς $\chi=15$ καὶ $\chi=-12$· ἀλλ' ἐπειδὴ ἐνταῦθα οἱ ἀριθμοί εἰσι συγκεκριμμένοι, μόνη ἡ θετικὴ τιμὴ ἀνήκει εἰς τὸ πρόβλημα.

Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν σύνθετον πρόβλημα, περιέχον τὸ ἀνωτέρω, ἐν ᾧ ἡ εὑρεθεῖσα ἀρνητικὴ τιμὴ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ἑξῆς. *Ἠγόρασέ τις ἀριθμὸν τινα πήχεων ὑφάσματος ἀντὶ δραχμῶν 240· ἐὰν ἠγόραζεν ἀριθμὸν πήχεων διαφέροντα τοῦ προηγουμένου κατὰ 3, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἤθελε μεταβληθῆ κατὰ 4 δραχμάς· πόσους πήχεις ἠγόρασε;* Ἐὰν μὲν ὑποθέσωμεν ὅτι ἠγόρασε 3 πήχεις ὀλιγώτερον, ἔχομεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν· ἐὰν δ' ὑποθέσωμεν ὅτι ἠγόρασε 3 πήχεις περισσότερον, ὁπότε ἀντὶ ὑπερτιμήσεως πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ὑποτίμησις, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{240}{\chi}-\frac{240}{\chi+3}=4,$$

ἥτις διαφέρει τῆς προηγουμένης μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ χ· ὅθεν αἱ λύσεις αὐτῆς εἰσὶ $\chi=-15$ καὶ $\chi=12$· οὕτως ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐμφαίνει ὑποτίμησιν τοῦ πήχεως, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγοραζομένων πήχεων αὐξάνῃ.

§ 225. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Ἡ παροῦσα ἀξία γραμματίου ἐκ δραχμῶν 8776, πληρωτέου μετὰ 9 μῆνας, ὑπερβαίνει τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἑτέρου γραμματίου ἐκ δραχμῶν 7488, πληρωτέου μετὰ 8 μῆνας, κατὰ δραχμὰς 1200. Εὑρεῖν τὸ ἐπιτόκιον, καθ' ὃ γίνεται ἡ ὑφαίρεσις.* Ἔστω χ τὸ κατὰ μῆνα ἐπιτόκιον. Αἱ παροῦσαι ἀξίαι τῶν δύο γραμματίων εἰσὶ $\frac{877600}{100+9\chi}$ καὶ $\frac{748800}{400+8\chi}$· ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{877600}{100+9\chi}-\frac{748800}{400+8\chi}=1200·$$

διαιροῦντες αὐτὴν διὰ 400, ἔχομεν τὴν ἁπλουστέραν

$$\frac{2194}{100+9\chi}-\frac{1872}{400+8\chi}=3·$$

ἐξαφανίσει τῶν παρονομαστῶν καὶ ἀναγωγῇ

$$\chi^2+\frac{4396}{216}\chi=\frac{2200}{216}.$$

ἐκ ταύτης δὲ, παραλειπομένης τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς,

$$\chi=\frac{-2198+\sqrt{5306404}}{216}.$$

ὅθεν

$$12\chi=\frac{-2198+\sqrt{5306404}}{18},$$

ὅπερ εἶναι τὸ κατ' ἔτος ἐπιτόκιον. Ἵνα ἔχωμεν τὴν τιμὴν ταύτην κατὰ προσέγγισιν 0,01, ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν 0,1· εὑρίσκομεν οὕτω $\chi=5,86$.

§ 226. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἀφίεται λίθος ἐκ τοῦ στομίου φρέατός τινος, μέχρι τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν τὸ οὖς ἀντιλαμβάνεται τοῦ ἐκ τῆς καταπτώσεως τοῦ λίθου κρότου, παρέρχονται θ δεύτερα λεπτά. Εὑρεῖν τὸ βάθος τοῦ φρέατος.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ δεῖ εἰδέναι τὰ ἑξῆς ἐκ τῆς Φυσικῆς. α'. Τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ σώματος καταπίπτοντος δυνάμει τοῦ ἰδίου βάρους ἰσοῦται βασιλικοῖς πήχεσι (mètres) $\frac{\gamma\kappa^2}{2}$, κ ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ δευτέρων λεπτῶν, καθ' ἃ διαρκεῖ ἡ πτῶσις, γ δὲ παριστῶντος 9,809 βασιλικοὺς πήχεις. β'. Ὁ ἦχος διαδίδεται ἐν τῷ ἀέρι ὁμαλῶς, διατρέχων κατὰ μέσον ὅρον 335 βασ. πήχεις ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ.

Ἔστω χ τὸ ζητούμενον βάθος διὰ βασ. πήχεων. Σημειώσωμεν διὰ θ' τὰ δεύτερα λεπτά, ἅπερ παρέρχονται, μέχρις οὗ ὁ λίθος φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος, καὶ διὰ θ'' ὅσα παρέρχονται, μέχρις οὗ ὁ ἦχος φθάσῃ ἀπὸ τοῦ πυθμένος εἰς τὸ οὖς, ὅπερ εἶναι παρὰ τὸ στόμιον τοῦ φρέατος. Ἔχομεν $\theta'+\theta''=\theta$. Κατὰ τὸ πρῶτον τῶν ἀνωτέρω δεδομένων τῆς Φυσικῆς ἔχομεν $\chi=\frac{\gamma\theta'^2}{2}$· ὅθεν $\theta'=\sqrt{\frac{2\chi}{\gamma}}$· κατὰ δὲ τὸ δεύτερον δεδομένον, $\chi=\beta\theta''$, β ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ 335· ὅθεν $\theta''=\frac{\chi}{\beta}$· ἑπομένως

$$\theta=\sqrt{\frac{2\chi}{\gamma}}+\frac{\chi}{\beta}.$$

Τοιαύτη ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος. Συνάγομεν ἐξ αὐτῆς

$$(1)\quad \theta-\frac{\chi}{\beta}=\sqrt{\frac{2\chi}{\gamma}}.$$

ὅθεν, ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον,

$$\theta^2 - \frac{2\theta}{\beta}\chi + \frac{1}{\beta^2}\chi^2 = \frac{2\chi}{\gamma}.$$

μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ

$$\chi^2 - \left(2\beta\theta + \frac{2\beta^2}{\gamma}\right)\chi = -\beta^2\theta^2\text{·}$$

ὅθεν

$$\chi = \beta\theta + \frac{\beta^2}{\gamma} \pm \sqrt{\left(\beta\theta + \frac{\beta^2}{\gamma}\right)^2 - \beta^2\theta^2}\,.$$

Τοῦ ὑποῤῥίζου ὄντος θετικοῦ, αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶ πραγματικαί· ὄντος δὲ τοῦ ῥιζικοῦ ἐλάσσονος τοῦ συμμέτρου μέρους, ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ εἰσὶ θετικαί· ἀλλ' ἡ πρώτη καθίστησιν ἀρνητικὸν τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1)· δὲν ἀνήκει λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ἧς τὰ μέλη εἰσὶν ἀπόλυτοι παραστάσεις· μόνη λοιπὸν λύσις τοῦ προκειμένου προβλήματος εἶναι ἡ δευτέρα τῶν ἀνωτέρω τιμῶν, ἤτοι

$$\chi = \beta\theta + \frac{\beta^2}{\gamma} - \sqrt{\left(\beta\theta + \frac{\beta^2}{\gamma}\right)^2 - \beta^2\theta^2}.$$

§ 227. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. *Μερίσαι δεδομένην εὐθεῖαν α κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

A Γ B

Ἔστω ἡ εὐθεῖα AB καὶ Γ τὸ σημεῖον, ἔνθα γίνεται ἡ διαίρεσις αὐτῆς κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον· οὕτω, δηλονότι, ὥστε τὸ μεῖζον μέρος νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους. Θῶμεν ΑΓ$=\chi$· ἔπεται ΒΓ$=\alpha-\chi$· ὅθεν $\alpha : \chi :: \chi : \alpha-\chi$· ὅθεν

$$(1)\quad \chi^2 = \alpha^2 - \alpha\chi.$$

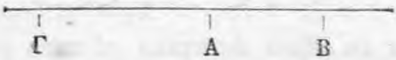
ἐντεῦθεν

$$\chi = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Ὡς ἐξεφωνήθη τὸ πρόβλημα, μόνη ἡ θετικὴ τιμὴ $\frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2}$

εἶναι διατηρητέα· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ γενικεύσωμεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς, ὥστε καὶ ἡ ἀρνητικὴ νὰ λάβῃ σημασίαν. *Εὑρεῖν ἐπὶ δεδομένης ἀπροσδιορίστου εὐθείας σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀφ' ὡρισμένου τινὸς σημείου Α τῆς εὐθείας αὐτῆς νὰ ἦναι μέση ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀφ' ἑτέρου ὡρισμένου σημείου Β τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ τῆς ἀποστάσεως α τῶν σημείων Α καὶ Β.*

Ἐν τῷ γενικωτέρῳ τούτῳ προβλήματι ἐὰν μὲν τὸ ζητούμενον σημεῖον ὑποτεθῇ κείμενον μεταξὺ Α καὶ Β, ἔχομεν τὸ ἀνωτέρω λυθέν· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ κείμενον ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Α κατὰ τὸ σχῆμα τουτὶ



ἔχομεν $\text{ΑΓ}=\chi$, $\text{ΒΓ}=\alpha+\chi$· ὅθεν $\alpha : \chi :: \chi : \alpha+\chi$·
ὅθεν (2) $\chi^2=\alpha^2+\alpha\chi$.

Δὲν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐκ δεξιῶν τοῦ Β· διότι ἐκ τοῦ σχήματος δῆλον ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν τότε $\text{ΑΓ}^2=\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$.

Ἡ ἐξίσωσις (2) διαφέρει τῆς (1) μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ χ· ἔχομεν λοιπὸν τὰς λύσεις τῆς (2), ἀλλάττοντες τὰ σημεῖα τῶν λύσεων τῆς (1)· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{-\alpha(-1\pm\sqrt{5})}{2}=\frac{\alpha(1\pm\sqrt{5})}{2}.$$

ἐξ ὧν διατηρητέον μόνην τὴν θετικήν. Ἐπειδὴ ἡ θετικὴ λύσις τῆς (2) ἰσοῦται ἀπολύτως τῇ ἀρνητικῇ τῆς (1), διὰ τοῦτο ποιοῦντες τὴν ἑξῆς συνθήκην *ἡ ἀρνητικὴ λύσις τῆς (1) νὰ ἐμφαίνῃ ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α σημείου κειμένου ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Α*, ἔξομεν ἀμφοτέρας τὰς λύσεις τοῦ συνθέτου προβλήματος διὰ τῶν τιμῶν μόνης τῆς ἐξισώσεως (1).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ σημεῖον Γ κῆται μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ μὲν τοῦ Α εἶναι $\frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2}$, ἀπὸ δὲ τοῦ Β εἶναι $\alpha-\frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2}=\frac{\alpha(3-\sqrt{5})}{2}$; ὁ δὲ λόγος τῶν δύο τούτων ἀποστάσεων εἶναι $\frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$. Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι ὁ λόγος οὗτος εἶναι *ἀνεξάρτητος* τοῦ α, ἤτοι τοῦ μήκους τῆς εὐθείας ΑΒ.

§ 228. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. *Εὑρεῖν τὰς ἀκτῖνας δύο ἐφαπτομένων σφαιρῶν, ὧν αἱ ἐπιφάνειαι φωτίζονται ἐπίσης ὑπὸ δύο φωτεινῶν σημείων, κειμένων ἐπὶ τῶν κέντρων αὐτῶν. Δίδοται δὲ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κέντρων, εἴτε τῶν δύο φώτων, καὶ αἱ ἐντάσεις τούτων εἰς ἀπόστασιν* 1.

Πρὸς κατάληψιν τοῦ προβλήματος τούτου καὶ πρὸς λύσιν αὐτοῦ δεῖ εἰδέναι ἐκ τῆς Φυσικῆς τὰ ἑξῆς. α'. Καλεῖται *ἔντασις* φωτεινοῦ σημείου κατά τινα ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν τὸ ποσὸν φωτὸς ἐκπεμπομένου ὑπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ, τὸ προσπίπτον εἰς τὴν μονάδα ἐπιφανείας. ϐ'. Αἱ ἐντάσεις τοῦ αὐτοῦ φωτὸς κατὰ διαφόρους ἀποστάσεις εἰσὶν ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων.

Ἔστωσαν Φ καὶ Φ' τὰ φωτεινὰ σημεῖα, εἴτε τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, α ἡ ἀπόστασις αὐτῶν, ϐ ἡ ἔντασις τοῦ φωτὸς Φ καὶ γ ἡ ἔντασις τοῦ Φ'.

Γνωστὸν ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν σφαιρῶν κεῖται ἐπ' εὐθείας μετὰ τῶν κέντρων. Τὸ σημεῖον τοῦτο θέλομεν καλεῖ *σημεῖον ἐξίσου φωτιζόμενον*.

Τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἤτοι μεταξὺ τῶν φώτων Φ καὶ Φ' ἢ ἐκ δεξιῶν τοῦ Φ', ἢ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Φ· ἔχομεν οὕτω τρία *ἁπλᾶ* προβλήματα, περιεχόμενα ἐν τῷ προκειμένῳ *συνθέτῳ* προβλήματι.

α'. Ὑποτεθήτω ὅτι τὸ ἐξίσου φωτιζόμενον σημεῖον κεῖται μεταξὺ τῶν φώτων. Ἔστω Σ τὸ σημεῖον αὐτό· αἱ ζητούμεναι ἀκτῖνές εἰσι ΣΦ καὶ ΣΦ'. Θῶμεν ΣΦ=χ· ὅθεν ΣΦ'=α—χ, ὡς δῆλον ἐκ τοῦ *σχήματος τουτουὶ*

Ἔστω y ἡ κοινὴ ἔντασις τῶν δύο φώτων ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφαιρῶν. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον τῶν ἐντάσεων τοῦ αὐτοῦ φωτὸς εἰς διαφόρους ἀποστάσεις, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$\beta : y :: \chi^2 : 1$$
$$\gamma : y :: (\alpha-\chi)^2 : 1.$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἕπεται $y=\frac{\beta}{\chi^2}$, ἐκ δὲ τῆς ἑτέρας $y=\frac{\gamma}{(\alpha-\chi)^2}$,

ὅθεν
$$(1)\qquad \frac{\beta}{\chi^2}=\frac{\gamma}{(\alpha-\chi)^2}.$$

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν συντόμως ὡς ἐξῆς. Πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ $(\alpha-\chi)^2$ καὶ διαιροῦμεν διὰ β: οὕτως ἔχομεν
$$\left(\frac{\alpha-\chi}{\chi}\right)^2=\frac{\gamma}{\beta}.$$

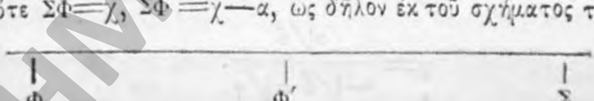
ὅθεν
$$\frac{\alpha-\chi}{\chi}=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

εἴτε
$$\frac{\alpha-\chi}{\chi}=\pm\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\beta}}$$

ἐξαφανίσει τῶν παρονομαστῶν
$$\alpha\sqrt{\beta}-\chi\sqrt{\beta}=\pm\chi\sqrt{\gamma}.$$

μεταθέσει, ἀναγωγῇ καὶ διαιρέσει
$$\chi=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}}.$$

β'. Ὑποτεθήτω ὅτι τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐκ δεξιῶν τοῦ Φ'· ἔχομεν τότε $\Sigma\Phi=\chi$, $\Sigma\Phi'=\chi-\alpha$, ὡς δῆλον ἐκ τοῦ σχήματος τουτου

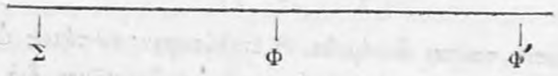


Ἐντεῦθεν αἱ ἀναλογίαι κατὰ τὸν νόμον τῶν ἐντάσεων
$$\beta : y :: \chi^2 : 1$$
$$\gamma : y :: (\chi-\alpha)^2 : 1;$$

ἐξ ὧν ἡ ἐξίσωσις
$$(2)\qquad \frac{\beta}{\chi^2}=\frac{\gamma}{(\chi-\alpha)^2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ (1)· διότι $(\alpha-\chi)^2$ εἶναι ταὐτὸ τῷ $(\chi-\alpha)^2$. Ἐὰν λοιπὸν ὑπάρχῃ σημεῖον ἐξίσου φωτιζόμενον, κείμενον ἐκ δεξιῶν τοῦ Φ', εὑρίσκεται καὶ αὐτὸ διὰ τῆς ἐξισώσεως (1).

γ'. Ὑποτεθήτω τέλος ὅτι τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Φ. Ἔχομεν τότε $\Sigma\Phi=\chi$, $\Sigma\Phi'=\alpha+\chi$, ὡς δῆλον ἐκ τοῦ σχήματος τουτουί



Ἐντεῦθεν αἱ ἀναλογίαι

$$\beta : y :: \chi^2 : 1$$
$$\gamma : y :: (\alpha+\chi)^2 : 1,$$

ἐξ ὧν

$$(3) \quad \frac{\beta}{\chi^2}=\frac{\gamma}{(\alpha+\chi)^2}.$$

Δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν συντόμως καὶ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ὡς τὴν (1)· ἀλλὰ δυνάμεθα καὶ νὰ πορισθῶμεν ἀμέσως τὰς λύσεις αὐτῆς ἐκ τῆς (1), παρατηροῦντες ὅτι αὕτη διαφέρει τῆς (1) κατὰ μόνον τὸ σημεῖον τοῦ χ· ἑπομένως αἱ λύσεις αὐτῆς εἰσι

$$\chi=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{-\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}}.$$

Ἡ δευτέρα τούτων εἶναι ἀρνητική, ἀνεξαρτήτως πάσης ὑποθέσεως ἐπὶ τῶν δεδομένων α, β, γ· εἶναι λοιπὸν ἀπολύτως ἀποῤῥιπτέα· ἑπομένως κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν

$$\chi=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}.$$

§ 229. Διερεύνησις τῶν ἀνωτέρω τιμῶν. Εὕρομεν κατὰ μὲν τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις τὰς τιμὰς

$$(\mathrm{T}) \begin{cases} \chi=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} \\ \chi=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}; \end{cases}$$

κατὰ δὲ τὴν τρίτην περίπτωσιν τὴν

$$(\mathrm{T}') \quad \chi=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}.$$

Α'. Ἔστω $\beta>\gamma$.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ τιμὴ (T') εἶναι ἀρνητική· δὲν ὑπάρχει λοιπὸν σημεῖον κείμενον ἐξ ἀριστερῶν τοῦ φωτὸς Φ.

Ἀμφότεραι δ' αἱ τιμαὶ (T) εἰσὶ θετικαί· παρέχουσι λοιπὸν δύο σημεῖα ἐξίσου φωτιζόμενα.

Ἡ πρώτη παρέχει σημεῖον κείμενον μεταξὺ τῶν φώτων· διότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}=\alpha\times\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}.$$

ἐπειδὴ δὲ $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}<1$, διὰ τοῦτο $\alpha\times\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}<\alpha$· ἤγουν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐξίσου φωτιζομένου σημείου ἀπὸ τοῦ φωτὸς Φ εἶναι ἐλάσσων τῆς ἀποστάσεως τῶν φώτων· ἄρα τὸ σημεῖον αὐτὸ κεῖται μεταξὺ τῶν φώτων.

Ἡ δὲ δευτέρα τῶν τιμῶν (T) παρέχει σημεῖον κείμενον ἐκ δεξιῶν τοῦ Φ'· διότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}=\alpha\times\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}.$$

ἀλλὰ $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}>1$· ὅθεν $\alpha\times\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}>\alpha$·

ἤγουν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐξίσου φωτιζομένου σημείου ἀπὸ τοῦ φωτὸς Φ εἶναι μείζων τῆς ἀποστάσεως τῶν φώτων· ἑπομένως τὸ σημεῖον αὐτὸ κεῖται ἐκ δεξιῶν τοῦ Φ'.

Τὸ μεταξὺ τῶν φώτων κείμενον σημεῖον εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ Φ'· διότι

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}>\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}}$$

εἴτε

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}>\frac{1}{2}.$$

ὅθεν $$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} > \frac{\alpha}{2}\cdot$$

ἡ ἀπόστασις λοιπὸν τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Φ εἶναι μείζων τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀποστάσεως τῶν φώτων Φ καὶ Φ΄· ὅθεν τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ Φ΄. Ἄλλως δὲ τοῦτο καὶ προεβλέπετο, τῆς ἐντάσεως τοῦ Φ΄ οὔσης ἐλάσσονος τῆς τοῦ Φ.

Β΄. Ἔστω $\beta < \gamma$.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ μὲν πρώτη τῶν τιμῶν (Τ) εἶναι θετική, ἡ δὲ δευτέρα ἀρνητική· ἡ δὲ διμὴ (Τ΄) εἶναι θετική. Ἔχομεν λοιπὸν πάλιν δύο σημεῖα ἐξίσου φωτιζόμενα, ὧν τὸ μὲν παρέχει ἡ πρώτη τῶν τιμῶν (Τ), τὸ δὲ ἡ (Τ΄).

Τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης τιμῆς προσδιοριζόμενον σημεῖον κεῖται μεταξὺ τῶν φώτων· δείκνυται δὲ τοῦτο ὡς καὶ κατὰ τὴν προηγηθεῖσαν περίπτωσιν· ἀλλ' ἤδη τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ Φ, ὡς δῆλον ἐκ τῶν προτέρων· διότι $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} < \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}}\cdot$ ὅθεν

$$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} < \frac{\alpha}{2}.$$

Τὸ ὑπὸ τῆς τιμῆς (Τ΄) παρεχόμενον σημεῖον κεῖται ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Φ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόλυτος ἀξία τῆς τιμῆς ταύτης εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τῆς δευτέρας τῶν (Τ), τῆς κατὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἀρνητικῆς, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸ σημεῖον αὐτὸ ἐκ τῆς ἀρνητικῆς αὐτῆς τιμῆς, ἐὰν συμβαλώμεθα *νὰ θεωρῶμεν τὰς ἀρνητικὰς ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ τιμὰς ὡς παριστώσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ Φ σημείων κειμένων ἐξ ἀριστερῶν τοῦ Φ.*

Γ΄. Ἔστω $\beta=\gamma$. Ἡ πρώτη τῶν τιμῶν (Τ) ἀποβαίνει $\frac{\alpha}{2}$, ἡ δὲ δευτέρα,, ὡς καὶ ἡ (Τ΄), γίνονται ἄπειροι. Ἓν μόνον λοιπὸν τότε ὑπάρχει σημεῖον, τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΦΦ΄.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω διερευνήσεως προκύπτει ὅτι ὁ τύπος (Τ΄) παρέχει σημεῖον μόνον ὅταν $\beta<\gamma$· ἀλλὰ διὰ τῆς κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτης τεθείσης συνθήκης τὸ σημεῖον αὐτὸ προσδιορίζεται διὰ τῆς δευτέρας τῶν τιμῶν (Τ)· διὰ τῆς συνθήκης λοιπὸν αὐτῆς ὁ τύπος (Τ′) ἀποβαίνει ὅλως περιττὸς, καὶ μόνοι οἱ τύποι (Τ) ἀρκοῦσι καθ' ἁπάσας τὰς περιπτώσεις.

§ 230. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ'. *Δίδοται ἡ τάσις ἀερίου συγκοινωνοῦντος μετὰ τοῦ κατὰ συμπεπιεσμένον ἀέρα μανομέτρου καὶ ζητεῖται πόσον ὑψοῦται ὁ ὑδράργυρος ἐν τῷ μανομετρικῷ σωλῆνι.*

Ἔστω α (ἑκατοστόμετρα) τὸ μῆκος τοῦ μανομετρικοῦ σωλῆνος Μ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ καδίσκῳ Κ ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου, ὅταν τὸ ὄργανον συγκοινωνῇ μετὰ τῆς ἀτμοσφαίρας διὰ τοῦ σωλῆνος Α· ἔστω ἔτι Τ ἡ τάσις τοῦ μετὰ τοῦ ὀργάνου συγκοινωνοῦντος ἀερίου, παριστωμένη δι' ἑκατοστομέτρων, καὶ τέλος χ (ἑκατοστόμετρα) τὸ ζητούμενον ὕψος.

Λύσωμεν ἐν πρώτοις τὸ πρόβλημα, μὴ λογιζόμενοι τὴν ταπείνωσιν τῆς τοῦ ἐν τῷ καδίσκῳ Κ ὑδραργύρου ἐπιφανείας, ὅταν οὗτος ἀνυψῶται ἐν τῷ μανομετρικῷ σωλῆνι, ἥτις ἄλλως ταπείνωσις εἶναι ἀσήμαντος, ὅταν ὁ μὲν καδίσκος ἦναι ἱκανῶς πλατὺς, ὁ δὲ μανομετρικὸς σωλὴν ἱκανῶς στενός.

Οἱ ὄγκοι τοῦ ἐν τῷ μανομετρικῷ σωλῆνι ἀερίου, ὅταν ὁ σωλὴν οὗτος συγκοινωνῇ μετὰ τῆς ἀτμοσφαίρας καὶ μετὰ τοῦ ἔχοντος τάσιν Τ ἀερίου, ἀναλογοῦσι πρὸς τὰ ὕψη α καὶ α—χ (*)· ὁ πρῶτος τῶν ὄγκων αὐτῶν ἔχει τάσιν 76, τοῦ δὲ δευτέρου ἡ τάσις σημειωθήτω διὰ τ. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου οἱ ὄγκοι οὗτοί εἰσιν ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τάσεων· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἀναλογίαν

$\alpha-\chi : \alpha :: 76 : \tau$· ὅθεν $\tau = \dfrac{76\alpha}{\alpha-\chi}$. Ἡ τάσις Τ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν θλίψεων τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης χ καὶ τῆς τάσεως τ τοῦ ἀέρος· ὅθεν

$$T = \frac{76\alpha}{\alpha-\chi} + \chi.$$

(*) Ὁ μανομετρικὸς σωλὴν Μ εἶναι ἐσωτερικῶς ἐξίσου παχὺς καθ' ὅλον αὐτοῦ τὸ μῆκος, τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐν τῷ καδίσκῳ ὑδραργύρου.

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος. Ἐπιλύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς δύο τιμὰς

$$\chi' = \frac{T+\alpha+\sqrt{(T+\alpha)^2-4\alpha(T-76)}}{2}$$

$$\chi'' = \frac{T+\alpha-\sqrt{(T+\alpha)^2-4\alpha(T-76)}}{2}.$$

τούτων μόνον ἡ δευτέρα ἀνήκει εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα· διότι ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $\chi=0$, ὅταν $T=76$, ὡς εἰκός· ἐνῷ ἡ πρώτη δὲν παρέχει τοιοῦτον ἐξαγόμενον.

Λύσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἀκριβέστερον, λογιζόμενοι τὴν ταπείνωσιν τῆς τοῦ ἐν τῷ καδίσκῳ ὑδραργύρου ἐπιφανείας. Ἔστω χ' ἡ ταπείνωσις αὕτη, Α ἡ ἀκτὶς τῆς ὁριζοντίου τομῆς τοῦ καδίσκου καὶ α ἡ τῆς τοῦ μανομετρικοῦ σωλῆνος. Τὰ ὕψη χ' καὶ χ εἰσὶν ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων Α καὶ α (*)· ἤγουν $\chi' : \chi :: \alpha^2 : A^2$· ὅθεν $\chi' = \frac{\alpha^2\chi}{A^2}$. Ἡ θλίψις Τ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν θλίψεων χ καὶ χ', καὶ τῇ τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος, ἥτις εἶναι, ὡς προείρηται, $\frac{76\alpha}{\alpha-\chi}$. ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$T = \frac{76\alpha}{\alpha-\chi} + \chi + \frac{\alpha^2\chi}{A^2}.$$

ὅθεν

$$\chi = \frac{\alpha + \frac{A^2T}{A^2+\alpha^2} \pm \sqrt{\left(\alpha + \frac{A^2T}{A^2+\alpha^2}\right)^2 - \frac{4\alpha A^2}{A^2+\alpha^2}(T-76)}}{2}.$$

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων ληπτέον μόνην τὴν δευτέραν, δι' ὃν καὶ ἀνωτέρω λόγον.

(*) Γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν βάσιν. Ὄντων τοῦ τε καδίσκου καὶ τοῦ σωλῆνος κυλινδρικῶν, Β δὲ καὶ β τῶν βάσεων αὐτῶν, ὁ ὄγκος τοῦ ἀπὸ τοῦ καδίσκου εἰς τὸν σωλῆνα μεταβαίνοντος ὑδραργύρου εἶναι $B\chi'$ ἢ $\beta\chi$· ὅθεν $B\chi' = \beta\chi$· ὅθεν $\chi : \chi' :: B : \beta$. ἀλλ' αἱ βάσεις Β καὶ β εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων Α καὶ α· ὅθεν $\chi : \chi' :: A^2 : \alpha^2$.

Οἱ ἀνωτέρω τύποι χρησιμεύουσιν εἰς βαθμολογίαν τοῦ κατὰ συμπεπιεσμένον ἀέρα μανομέτρου, ἀντικαθισταμένου ἐν αὐτοῖς 76×2, 76×3, κ.τ.λ. ἀντὶ Τ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1. Κεφάλαιόν τι ἐτοκίσθη πρὸς 4 % κατ' ἔτος· ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τόκον, ὃν ἀποφέρει ἐν διαστήματι 5 μηνῶν, εὑρίσκεται γινόμενον 117041 $^2/_3$· πόσον εἶναι; (2650).

2. Δραχμαὶ 864 πρόκειται νὰ διανεμηθῶσιν εἰς τοὺς πτωχοὺς συνοικίας τινός· ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πτωχῶν ἐλαττωθῇ κατὰ 6, τὸ ἀναλογοῦν εἰς ἕκαστον αὐτῶν αὐξάνει κατὰ 2 δραχμάς· ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν πτωχῶν (54).

3. Ἠγόρασέ τις ἔπιπλον, ὅπερ μεταπωλήσας ἀντὶ δραχμῶν 144 ἐκέρδισε τόσα ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ὅσον ἐπλήρωσεν ἀγοράσας αὐτό· πόσον ἐπλήρωσε πρὸς ἀγορὰν αὐτοῦ; (δρ 80).

4. Δύο ἔμποροι, πωλήσαντες ὑφάσματα, ὁ πρῶτος 3 πήχεις ἔλασσον τοῦ δευτέρου, ἔλαβον ὁμοῦ δραχμὰς 35. Ἐὰν ὁ πρῶτος ἐπώλει ὅσον ὁ δεύτερος, ἤθελε λάβει 24 δραχμάς· ἐὰν δ' ὁ δεύτερος, ὅσον ὁ πρῶτος, ἤθελε λάβει δρ. 12,50. Πόσους ἐπώλησε πήχεις ἑκάτερος; (Ὁ πρῶτος 15 ἢ 5, ὁ δεύτερος 18 ἢ 8).

Ἐὰν ἐδίδετο ὅτι ὁ πρῶτος ἠγόρασε 3 πήχεις πλέον τοῦ δευτέρου, τὸ πρόβλημα ἤθελεν εἶσθαι ἀδύνατον.

5. Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ ἄθροισμα μετὰ τῆς ἰδίας τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι 1332 (1296).

6. Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ ἡ διαφορὰ ἀπὸ τῆς ἰδίας τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι 1332 (1369).

7. Ἔμπορος, χρεωστῶν δύο γραμμάτια, τὸ μὲν ἐκ δραχμῶν 6240 πληρωτέον μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ ἐκ δρ. 7632 πληρωτέον μετὰ 9 μῆνας, ἀλλάσσει αὐτὰ ἀντὶ τρίτου ἐκ δραχμῶν 14256 πληρωτέον μετὰ 1 ἔτος· ἐπὶ τίνι ἐπιτοκίῳ ἐγένετο ἡ ἀνταλλαγή;

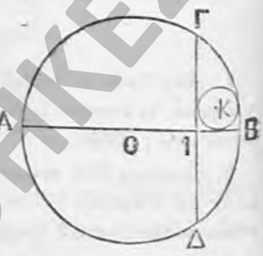
Εἰ μὲν ἡ ἀνταλλαγὴ ἐγένετο δι' ὑφαιρέσεως, τὸ ἐπιτόκιον εἶναι δρ. 10,33· εἰ δὲ διὰ προσθήκης τῶν τόκων τοῦ πλεονάζοντος χρόνου, τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 9,63.— Δεῖξαι ἐκ τῶν προτέρων ὅτι τὰ ἐπιτόκια ταῦτα εἶναι ἄνισα.

8. Μερίζει τις κεφάλαιον 13000 εἰς δύο ἄνισα μέρη, ἅπερ τοκίζει κατὰ διάφορα ἐπιτόκια καὶ λαμβάνει ἐτησίως ἐξ ἑκατέρου τὸν αὐτὸν τόκον. Ἐὰν ἐτόκιζε τὸ πρῶτον ἐπὶ τῷ ἐπιτοκίῳ τοῦ δευτέρου, ἤθελε λαμβάνει κατ' ἔτος 360· ἐὰν δὲ τὸ δεύτερον ἐπὶ τῷ ἐπιτοκίῳ τοῦ πρώτου, ἤθελε λαμβάνει ἐτησίως 490. Ζητοῦνται τὰ δύο ἐπιτόκια (7 καὶ 6).

9. Ὑλικὸν σημεῖον, προσπίπτον εἰς τὸ κοῖλον ἐλαστικῆς περιφερείας, ἧς ἡ ἀκτὶς Α, ἐπανακάμπτει ἀπωθούμενον οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι προσπτώσεως καὶ ἀνακάμψεως νὰ ὦσιν ἴσαι. Κατὰ τίνα φορὰν πρέπει νὰ βληθῇ ἀπό τινος σημείου Β τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασις εἶναι α, ὥστε μετὰ δύο ἀνακάμψεως ἐπὶ σημείων Γ καὶ Δ τῆς περιφερείας νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Β;

Εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἔστω χ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς ΓΔ· εὑρίσκομεν $\chi = \frac{A(\sqrt{A^2+8\alpha^2}-A)}{4\alpha}$.—

Ὅταν $\alpha = A$, ἤγουν ὅταν τὸ σημεῖον Β κῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ τιμὴ αὕτη γίνεται $\frac{A}{2}$.



10. Δίδοται κύκλος, οὗ τὸ κέντρον Ο, διάμετρός τις αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ χορδὴ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ. Εὑρεῖν κύκλον ἁπτόμενον ἐν ταὐτῷ τοῦ δεδομένου κύκλου, τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ τῆς χορδῆς ΓΔ.

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τοῦ δεδομένου κύκλου, χ ἡ τοῦ ζητουμένου, α ἡ ἀπόστασις ΟΙ. Ἐὰν ὁ ζητούμενος κύκλος ἔχῃ τὴν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ σχήματι θέσιν (ἦναι δηλονότι ὁ μικρὸς κύκλος, οὗ τὸ κέντρον Κ), εὑρίσκομεν $\chi = -(A+\alpha) \pm \sqrt{2A(A+\alpha)}$. Ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν ἡ μὲν θετικὴ ἀνήκει εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν, ἡ δ' ἀρνητικὴ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ζητούμενος κύκλος ἅπτεται ἐξωτερικῶς τοῦ τόξου ΑΓ καὶ τῶν προεκβολῶν τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ τῆς χορδῆς ΙΓ.—Ἐὰν ὁ ζητούμενος κύκλος κῆται ἐν τῷ ἡμιτμήματι ΑΙΓ, εὑρίσκομεν $\chi = A-\alpha \pm \sqrt{2A(A-\alpha)}$· ἡ μὲν θετικὴ τῶν τιμῶν αὐτῶν ἀνήκει εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν, ἡ δ' ἀρνητικὴ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ζητούμενος κύκλος ἅπτεται ἐξωτερικῶς τοῦ τόξου ΒΓ καὶ τῶν προεκβολῶν τῆς διαμέτρου καὶ τῆς χορδῆς. Ἡ θετικὴ τιμὴ πρέπει ἐκ περισσοῦ νὰ ἦναι ἐλάσσων τοῦ Α.

11. Κύκλου τινὸς περιεχομένου ἐν ἑτέρῳ, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς διὰ τῶν κέντρων εὐθείας σημεῖον, οὗ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν σημείων, ἔνθα αἱ περιφέρειαι τέμνονται ὑπὸ καθέτων ἐπὶ τῆς διὰ τῶν κέντρων, ἔχουσι σταθερὸν λόγον.

Ἔστωσαν Α καὶ α αἱ ἀκτῖνες τοῦ μεγάλου καὶ τοῦ μικροῦ κύκλου, δ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων, ρ ἡ ἀπροσδιόριστος ἀπόστασις τῶν καθέτων ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ μικροῦ κύκλου καὶ χ ἡ ἀπόστασις τοῦ ζητουμένου σημείου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ μικροῦ κύκλου. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον κῆται ἐκτὸς τῶν κέντρων καὶ ἀπώτερον τοῦ κέντρου τοῦ μεγάλου κύκλου, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀποστάσεων εἶναι $\frac{A^2-(\rho+\delta)^2+(\chi-\rho)^2}{\alpha^2-\rho^2+(\chi-\rho)^2}$. ἵνα δὲ ἡ παράστασις αὕτη ᾖ ἀνεξάρτητος τοῦ ρ, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta+\chi}{\chi} = \frac{A^2+\chi^2-\delta^2}{\alpha^2+\chi^2}.$$

ἐντεῦθεν συνάγομεν

$$\chi = \frac{A^2-\alpha^2-\delta^2 \pm \sqrt{(A+\alpha+\delta)(A+\alpha-\delta)(A+\delta-\alpha)(A-\alpha-\delta)}}{2\delta}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται εἰσι πραγματικαί· διότι $A > \alpha+\delta$· καὶ ἡ μὲν πρώτη θετική, ἡ δὲ δευτέρα ἀρνητική. Ἑρμηνευθήτω ἡ τελευταία.

12. Διαιρεθήτω κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον ἡ ἐπιφάνεια δεδομένου κύκλου δι' ὁμοκέντρου περιφερείας.

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τοῦ δεδομένου κύκλου καὶ χ ἡ τοῦ ζητουμένου.

Ἐὰν μέση ἀνάλογος ἦναι ἡ ὑπὸ τῶν δύο περιφερειῶν ὁριζομένη στεφάνη, εὑρίσκομεν $\chi=\frac{A(-1\pm\sqrt{5})}{2}$ καὶ $\chi=\frac{A(1\pm\sqrt{5})}{2}$. Ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν ληπτέον μόνον τὴν πρώτην τῶν θετικῶν. Γενικευθήτω τὸ πρόβλημα οὕτως, ὥστε καὶ ἡ δευτέρα θετικὴ νὰ ἔχῃ σημασίαν.

Ἐὰν μέση ἀνάλογος ἦναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζητουμένου κύκλου, εὑρίσκομεν $\chi=A\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, παραλειπομένων τῶν ἰδανικῶν ἢ ἀρνητικῶν τιμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΓΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ Β′. ΒΑΘΜΟΥ.

Ζεῦγος ἐξισώσεων τοῦ β′. βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων.

§ 231. Τὸ γενικὸν σχῆμα, εἰς ὃ ἀνάγεται ἐξίσωσις τοῦ β′. βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων, εἶναι τὸ ἑξῆς

$$A\chi^2+B y\chi+\Gamma y^2+\Delta\chi+E y+Z=0.$$

Ἀλλὰ δυνατὸν τινὲς τῶν ὅρων νὰ λείπωσι, τουτέστι τινὲς τῶν συντελεστῶν νὰ ἦναι 0.

§ 232. Ἔστωσαν ἐν γένει δύο ἐξισώσεις τοῦ β′. βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων

$$(Z)\quad \begin{aligned} &A\chi^2+B y\chi+\Gamma y^2+\Delta\chi+E y+Z=0\\ &A'\chi^2+B' y\chi+\Gamma' y^2+\Delta'\chi+E' y+Z'=0. \end{aligned}$$

Πρὸς ἐπίλυσιν αὐτῶν, ἤγουν πρὸς εὕρεσιν τῶν κοινῶν αὐτῶν λύσεων, ἀπαλείφομεν ἕνα τῶν ἀγνώστων· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις, ἣν οὕτως εὑρίσκομεν, εἶναι ἐν γένει *τεταρτοβάθμιος πλήρης*, ἤτοι περιέχουσα πάσας τὰς δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου ἀπὸ τῆς τετάρτης.

Τῷ ὄντι· ἀπαλείψωμεν πρῶτον δι' ἀναγωγῆς τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀγνώστου, οἷον τὸ τοῦ y· πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ Γ′, τὴν δευτέραν ἐπὶ Γ, καὶ ἀφαιροῦμεν· οὕτως ἔχομεν

$$(A\Gamma'-\Gamma A')\chi^2+(B\Gamma'-\Gamma B')\chi y+(\Delta\Gamma'-\Gamma\Delta')\chi+(E\Gamma'-\Gamma E')y+Z\Gamma'-\Gamma Z'=0.$$

ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέχει μόνην τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ y· ἐπιλύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς τὸν y, ἔχομεν

$$y=\frac{(\Gamma A'-A\Gamma')\chi^2+(\Gamma\Delta'-\Delta\Gamma')\chi+\Gamma Z'-Z\Gamma'}{(B\Gamma'-\Gamma B')\chi+E\Gamma'-\Gamma E'},$$

ἢ ἁπλούστερον, παρισταμένου ἑκάστου συντελεστοῦ δι' ἑνὸς γράμματος

$$y=\frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\delta\chi+\varepsilon}.$$

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν (Z), οἷον ἐν τῇ πρώτῃ, ἔχομεν

$$A\chi^2+\frac{B\chi(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)}{\delta\chi+\varepsilon}+\frac{\Gamma(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)^2}{(\delta\chi+\varepsilon)^2}+\Delta\chi$$

$$+\frac{E(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)}{\delta\chi+\varepsilon}+Z=0\cdot$$

εὔκολον εἶναι νὰ ἴδωμεν ὅτι, ὅταν ἐξαφανίσωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως, πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $(\delta\chi+\varepsilon)^2$, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν τεταρτοβάθμιον πλήρη.

Ἡ πλήρης τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις δὲν ἀνάγεται πάντοτε εἰς δευτεροβάθμιον, ὡς ἡ διτετραγωνική (§ 223)· διὸ τὸ ζήτημα τῆς ἐπιλύσεως δύο δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων δὲν ἀνάγεται πάντοτε εἰς ἐπίλυσιν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως. Ἀλλ' εἰς πολλὰς ἰδιαιτέρας περιπτώσεις τὸ ζήτημα αὐτὸ καταλήγει εἰς ἐξισώσεις δευτεροβαθμίους.

Ἐπιλύσεις ζευγῶν τοῦ β'. βαθμοῦ ἀγόντων εἰς ἐξισώσεις β'. βαθμοῦ.

§ 233. Ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων ἦναι πρωτοβάθμιος, ἡ δὲ δευτεροβάθμιος, ἡ *τελικὴ* ἐξίσωσις, ἤτοι ἡ προκύπτουσα μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου, εἶναι πάντοτε δευτεροβάθμιος.

Ἔστω τὸ ζεῦγος

$$\alpha\chi+\beta y=\gamma$$
$$A\chi^2+By\chi+\Gamma y^2+\Delta\chi+Ey+Z=0.$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $\chi=\gamma-\beta y$ καὶ ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν δευτέραν, ἔχομεν τὴν δευτεροβάθμιον

$$A(\gamma-\beta y)^2+By(\gamma-\beta y)+\Gamma y^2+\Delta(\gamma-\beta y)+Ey+Z=0.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. α'. Ἔστω τὸ ζεῦγος

$$\chi+y=2\alpha$$
$$\chi y=\beta.$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν (1) $y=2\alpha-\chi$· ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἑτέραν, ἔχομεν $2\alpha\chi-\chi^2=\beta$· ὅθεν

$$\chi=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\beta}\cdot$$

τὰς τιμὰς αὐτὰς ἀντεισάγοντες εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν

$$y=\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\beta}\cdot$$

τὰ σημεῖα τῶν ῥιζικῶν δὲν λαμβάνονται ὡς τύχοι, ἀλλὰ τὰ ἄνω ὁμοῦ, ἢ τὰ κάτω· οὕτω δ' ἔχομεν δύο λύσεις· ἀλλὰ καὶ αὗται κατὰ τὸ *φαινόμενον* διαφέρουσι· διότι ἡ πρώτη τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ δευτέρᾳ τοῦ y, καὶ ἡ δευτέρα τῇ πρώτῃ· οὕτως ἐὰν ἡ μία λύσις ἦναι $\chi=\kappa$, $y=\lambda$, ἡ ἑτέρα εἶναι $y=\kappa$, $\chi=\lambda$, ἤγουν οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

Ἠδυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς καὶ ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν $\varphi^2-2\alpha\varphi+\beta=0$, ἥτις ἔχει τὸ σχῆμα $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$, ἔνθα $\pi=2\alpha$ καὶ $\kappa=\beta$. Τῷ ὄντι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπαληθεύουσι τὸ προτεθὲν ζεῦγος (§ 218 καὶ 219).

β'. Ἔστω

$$\chi+y=\alpha$$
$$\chi^2+y^2=\beta^2.$$

Ἀντὶ ν' ἀπαλείψωμεν ὡς ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν

$$(\chi+y)^2=\alpha^2\cdot$$

ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτῆς τὴν δευτέραν, συνάγομεν

$$2\chi y=\alpha^2-\beta^2\cdot$$

γινώσκομεν οὕτω τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων· ὅθεν οὗτοί εἰσιν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi^2-\alpha\varphi+\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2}=0.$

§ 234. Ἡ τελικὴ ἐξίσωσις εἶναι δευτεροβάθμιος καὶ ὅταν εἰς τῶν ἀγνώστων ὑπάρχῃ εἰς ἕνα μόνον ὅρον ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, οἱ δύο δ' οὗτοι ὅροι ἦναι ὅμοιοι, ἢ ὅταν αἱ ἐξισώσεις δὲν περιέχωσι τετράγωνα τῶν ἀγνώστων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α'. Ἔστω

$$\chi^2+2\chi y+3\chi=48$$
$$2\chi^2-\chi y+\chi=6.$$

Ὁ y ὑπάρχει ἅπαξ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, οἱ δύο δ' οὗτοι ὅροι, οἱ περιέχοντες τὸν y, εἰσὶν ὅμοιοι, ὡς περιέχοντες ἀμφότεροι τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων. Ἀπαλείφομεν δι' ἀναγωγῆς τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων χy καὶ εὑρίσκομεν

$$5\chi^2+5\chi=60,$$

ἐξ ἧς $\chi'=3$ καὶ $\chi''=-4$· ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν ἑτέραν τῶν προτεθεισῶν, συνάγομεν τὰς ἀντιστοιχούσας τοῦ y, ἤτοι $y'=5$, $y''=-5,5$.

β'. Ἔστω

$$2\chi y-3\chi+2y=38$$
$$\chi y+4\chi-3y=24.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται δὲν περιέχουσι τὰ τετράγωνα τῶν ἀγνώστων. Ἀπαλείφομεν δι' ἀναγωγῆς τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων καὶ ἔχομεν ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον, ἣν λαμβάνομεν ἀντὶ μιᾶς τῶν προτεθεισῶν.

§ 235. Ὅταν αἱ δύο ἐξισώσεις δὲν περιέχωσιν ὅρους πρωτοβαθμίους, ἡ τελικὴ εἶναι *τεταρτοβάθμιος διτετραγωνική*.

Ἔστωσαν ἐν γένει αἱ ἐξισώσεις

$$A\chi^2+B y\chi+\Gamma y^2+Z=0$$
$$A'\chi^2+B'y\chi+\Gamma'y^2+Z'=0.$$

Ἀπαλοιφὴ τοῦ y^2 δι' ἀναγωγῆς

$$(A\Gamma'-\Gamma A')\chi^2+(B\Gamma'-\Gamma B')y\chi+Z\Gamma'-\Gamma Z'=0\cdot$$

ὅθεν
$$y=\frac{(\Gamma A'-A\Gamma')\chi^2+\Gamma Z'-Z\Gamma'}{(B\Gamma'-\Gamma B')\chi},$$

ἢ ἁπλούστερον
$$y=\frac{\alpha\chi^2+\beta}{\gamma\chi}.$$

ἀντικαταστάσει δὲ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ y εἰς τὴν πρώτην τῶν προτεθεισῶν

$$A\chi^2+\frac{B(\alpha\chi^2+\beta)}{\gamma}+\frac{\Gamma(\alpha\chi^2+\beta)^2}{\gamma^2\chi^2}+Z=0\cdot$$

ἀφανίσει τῶν παρονομαστῶν ταύτης προκύπτει ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος διτετραγωνική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω

$$\chi^2+y^2=\alpha^2$$
$$\chi y=\beta^2.$$

Ἀπαλείφοντες ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν τεταρτοβάθμιον διτετραγωνικήν· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν εἰς τὴν πρώτην τὴν δευτέραν πολλαπλασιασμένην ἐπὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν

$$(\chi+y)^2=\alpha^2+2\beta^2\cdot$$

Αὕτη ἰσοδυναμεῖ ταῖς ἑξῆς δύο

$$\chi+y=\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}$$
$$\chi+y=-\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}\cdot$$

Ἐπιλύομεν ἑκατέραν αὐτῶν μετὰ τῆς δευτέρας τῶν προτεθεισῶν, ὡς γνωστὸν (§ 233), καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς τέσσαρας λύσεις

$$\chi=\frac{\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}\pm\sqrt{\alpha^2-2\beta^2}}{2}$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}\mp\sqrt{\alpha^2-2\beta^2}}{2}.$$

§ 236. Εἰς πολλὰς ἄλλας περιπτώσεις ἡ ἐπίλυσις ζεύγους δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἀπολήγει εἰς ἐξίσωσιν δευτεροβάθμιον. Ἐν τῶν συνηθεστέρων πρὸς τοῦτο μέσων εἶναι ἡ χρῆσις *βοηθητικῶν ἀγνώστων*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω τὸ ζεῦγος

(1) $\chi^2+y^2+5\chi y-2(\chi+y)=33$

(2) $\chi^2+y^2-\chi y+3(\chi+y)=22.$

Ἀφαιρέσει τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1)

(3) $6\chi y-5(\chi+y)=11\cdot$

ὅθεν

$$3\chi y-\frac{5}{2}(\chi+y)=\frac{11}{2}.$$

προσθέσει ταύτης μετὰ τῆς (2)

$$\chi^2+y^2+2\chi y+\frac{1}{2}(\chi+y)=\frac{55}{2},$$

ἥτις γράφεται καὶ οὕτω

$$(4)\quad (\chi+y)^2+\frac{1}{2}(\chi+y)=\frac{55}{2}.$$

Τὸ προτεθὲν ζεῦγος ἰσοδυναμεῖ τῷ τῶν (3) καὶ (4). Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τελευταίου θῶμεν $\chi+y=\omega$· ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται, τιθεμένου ω ἀντὶ $\chi+y$,

$$\omega^2+\frac{1}{2}\omega=\frac{55}{2}.$$

ὅθεν $\omega=5$ καὶ $\omega=-\frac{11}{2}$. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (4) ἰσοδυναμεῖ ταῖς ἑξῆς δύο $\chi+y=5$ καὶ $\chi+y=-\frac{11}{2}$· ὅθεν ἐπιλύοντες τὴν (3) μεθ' ἑκατέρας τούτων, οὐσῶν πρωτοβαθμίων, εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ ζεύγους $\chi+y=5$ καὶ $\chi y-\frac{5}{6}(\chi+y)=\frac{11}{6}$ τὰς λύσεις

$$\begin{cases}\chi=3\\ y=2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\chi=2\\ y=3.\end{cases}$$

ἐκ δὲ τοῦ ζεύγους $\chi+y=-\frac{11}{2}$ καὶ $\chi y-\frac{5}{6}(\chi+y)=\frac{11}{6}$ τὰς ἀσυμμέτρους $\chi=\frac{-11\pm\sqrt{165}}{4}$, $y=\frac{-11\mp\sqrt{165}}{4}$.

Συστήματα δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων περιέχοντα πλείονας τῶν δύο ἀγνώστους.

§ 237. Ἐνίοτε ἡ ἐπίλυσις συστημάτων ἐξισώσεων τοῦ β'. βαθμοῦ, περιεχόντων πλείονας τῶν δύο ἐξισώσεις καὶ ἀγνώστους, κατορθοῦται δι' ἐπιλύσεως δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α'. Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}\chi+y+\omega&=\alpha\\ \chi^2+y^2+\omega^2&=\beta^2\\ \chi y&=\gamma\omega.\end{aligned}$$

εἰς τὴν πρώτην μεταφέροντες τὸν ω εἰς τὸ β'. μέλος, ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀντὶ χ^2+y^2 καὶ χy ἀντικαθιστῶντες τὰς ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἐξισώσεων συναγομένας τιμὰς αὐτῶν, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$\omega^2-(\alpha+\gamma)\omega=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}.$$

ὅθεν
$$\omega=\frac{\alpha+\gamma\pm\sqrt{(\alpha+\gamma)^2-2(\alpha^2-\beta^2)}}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ ω ἐν τῇ πρώτῃ καὶ τῇ τρίτῃ, ἔξομεν γνωστὸν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν χ καὶ y· ἐντεῦθεν δὲ συνάγομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν (§ 233).

β'. Ἔστω ἔτι

$$\chi^2+\chi y+y^2=37$$
$$\chi^2+\chi\omega+\omega^2=28$$
$$y^2+y\omega+\omega^2=19.$$

Ἀφαιρέσει τῆς δευτέρας ἀπὸ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπὸ τῆς δευτέρας ἔχομεν

$$(y-\omega)(\chi+y+\omega)=9$$
$$(\chi-y)(\chi+y+\omega)=9\cdot$$

ὅθεν $y-\omega=\chi-y$· ὅθεν $\chi+\omega=2y$· ἐντεῦθεν $(y-\omega)y=3$· ὅθεν $\omega=y-\frac{3}{y}$. Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ω ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τρίτην τῶν προτεθεισῶν, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς $3y^4-28y^2+9=0$· ἐντεῦθεν $y=\pm3$ καὶ $y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (§ 223)· ἑκάστην τῶν τιμῶν αὐτῶν ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω τιμὴν τοῦ ω, εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοιχούσας $\omega=\pm2$, $\omega=\mp\frac{8}{3}\sqrt{3}$· τέλος ἐπειδὴ $\chi=2y-\omega$, ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμάς, ἔχομεν τὰς ἀντιστοιχούσας τοῦ χ, ἤτοι $\chi=\pm4$, $\chi=\pm\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

Συστήματα ἐξισώσεων ἀνωτέρων τοῦ β'. βαθμοῦ.

§ 238. Οὐ μόνον δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, ἀλλὰ καὶ ἀνωτέρων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ συστήματα δυνατὸν νὰ καταλήγωσιν εἰς ἐξισώσεις δευτεροβαθμίους. Ἡ χρῆσις βοηθητικῶν ἀγνώστων εἶναι πάντοτε τὸ ἐπιτυχέστερον πρὸς τοῦτο καὶ τὸ συνηθέστερον μέσον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. α΄. Ἔστω τὸ ζεῦγος

$$\chi^2 y + \chi y^2 = 30$$
$$\frac{1}{\chi} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}.$$

ἐξαφανίσει τῶν παρονομαστῶν τῆς δευτέρας

$$\chi y(\chi + y) = 30$$
$$6(\chi + y) = 5\chi y.$$

Θῶμεν (1) $\chi y = \sigma$, $\chi + y = \tau$· ἀντεισάγοντες ἔχομεν

$$\sigma\tau = 30$$
$$6\tau = 5\sigma\cdot$$

ὅθεν $\sigma = \pm 6$, $\tau = \pm 5$. Ἀντεισάγοντος ἑκατέραν τῶν λύσεων αὐτῶν ἐν τοῖς δευτέροις μέλεσι τῶν (1), συνάγομεν τὰς ἀντιστοιχούσας τῶν χ καὶ y, ἤτοι $\chi = 2$ καὶ $y = 3$ ἢ ἀντιστρόφως, $\chi = -6$ καὶ $y = 1$ ἢ ἀντιστρόφως.

β΄. Ἔστω ἔτι τὸ ζεῦγος

$$\chi^4 + y^4 + 4\chi y = 2430$$
$$\chi^2 + y^2 = 50.$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς δευτέρας τὴν πρώτην ἔχομεν τὴν $\chi^2 y^2 - 2\chi y = 35$, ἥτις δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ τῆς πρώτης (§ 120, β΄.). Θῶμεν $\chi y = \omega$· ἡ τελευταία ἐξίσωσις γίνεται $\omega^2 - 2\omega = 35$· ὅθεν $\omega = 7$ καὶ $\omega = -5$, εἴτε $\chi y = 7$ καὶ $\chi y = -5$. Οὕτω τὸ προτεθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$(\Sigma)\ \begin{cases} \chi^2 + y^2 = 50 \\ \chi y = 7 \end{cases} \qquad (\Sigma')\ \begin{cases} \chi^2 + y^2 = 50 \\ \chi y = -5. \end{cases}$$

Ἐκ τοῦ (Σ) εὑρίσκομεν τὰς λύσεις

$$\chi = 7,\ 1,\ -1,\ -7$$
$$y = 1,\ 7,\ -7,\ -1.$$

Ἐκ δὲ τοῦ (Σ΄) τὰς ἀσυμμέτρους

$$\chi = \frac{\pm\sqrt{40} \pm \sqrt{60}}{2},\ y = \frac{\pm\sqrt{40} \mp \sqrt{60}}{2}.$$

Προβλήματα.

§ 239. Τὰ προβλήματα, περὶ ὧν θέλομεν ἀσχοληθῆ ἐνταῦθα, περιέχουσι δύο ἢ πλείονας ἀγνώστους καὶ ἄγουσιν εἰς συστήματα ἐξισώσεων, περὶ ὧν προέκειτο ἐν τοῖς προηγηθεῖσι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. *Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας τριγώνου ὀρθογωνίου, γνωστῆς οὔσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τῆς καθέτου β, τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

Ἔστωσαν χ καὶ y αἱ ἄγνωστοι πλευραί. Ἔχομεν ἐν πρώτοις κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου

$$(1)\quad \chi^2+y^2=\alpha^2.$$

Ἀφ' ἑτέρου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου παρίσταται διὰ $\frac{\chi y}{2}$ καὶ διὰ $\frac{\alpha\beta}{2}$· ὅθεν $$(2)\quad \chi y=\alpha\beta.$$

Ἐπιλύοντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), παραλείποντες τὰς ἀρνητικὰς λύσεις καὶ ὑποθέτοντες ὅτι $\chi > y$, ἔχομεν

$$\chi=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta}+\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta}\right)$$
$$y=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta}-\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta}\right).$$

Διερεύνησις. Ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, πρέπει αἱ τιμαὶ νὰ ἦναι πραγματικαί, ἤτοι $2\alpha\beta \leqq \alpha^2$, ἐξ οὗ $\alpha \geqq 2\beta$. Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως ἕπεται ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ α, ἀμεταβλήτου ὄντος τοῦ β, εἶναι 2β· οὕτως *ἐκ τῶν διαφόρων ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὕψος β, τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην ὑποτείνουσαν εἶναι ἐκεῖνο, οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους.* Τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελές· διότι αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ y εἰσὶ τότε ἴσαι. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσεται ὅτι *ἐκ τῶν διαφόρων ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν α, τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ὕψος, εἶναι ἐκεῖνο, οὗ τὸ ὕψος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.*

§ 240. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. *Εὑρεῖν τὰς τρεῖς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου, γνωστῆς οὔσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ μ^2 καὶ τῆς περιμέτρου 2π.*

Ἔστωσαν χ καὶ y αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ω ἡ ὑποτείνουσα. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματός εἰσι

$$(1)\quad \chi^2+y^2=\omega^2.$$
$$(2)\quad \chi+y+\omega=2\pi.$$
$$(3)\quad \chi y=2\mu^2.$$

Ἐκ τῆς (2) ἕπεται $\chi+y=2\pi-\omega$· ὅθεν

$$\chi^2+y^2+2\chi y=4\pi^2-4\pi\omega+\omega^2\cdot$$

ἀντεισάγοντες ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ ἀντὶ χ^2+y^2 καὶ χy τὰς ἐκ τῶν (1) καὶ (3) τιμὰς, ἔχομεν

$$\omega^2+4\mu^2=4\pi^2-4\pi\omega+\omega^2\cdot$$

ὅθεν
$$(4)\quad \omega=\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi}.$$

Τὴν τιμὴν ταύτην ἀντεισάγοντες ἐν τῇ (2), ἔχομεν

$$(5)\quad \chi+y=\frac{\pi^2+\mu^2}{\pi}:$$

αὕτη δὲ μετὰ τῆς (3) παρέχουσι τὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ y· ἤγουν, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει $\chi > y$,

$$(6)\quad \chi=\frac{\pi^2+\mu^2}{2\pi}+\sqrt{\frac{(\pi^2+\mu^2)^2}{4\pi^2}-2\mu^2}$$

$$(7)\quad y=\frac{\pi^2+\mu^2}{2\pi}-\sqrt{\frac{(\pi^2+\mu^2)^2}{4\pi^2}-2\mu^2}.$$

Διερεύνησις. Ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατὸν, πρέπει ἐν πρώτοις ἡ τιμὴ τοῦ ω νὰ ἦναι θετική· ἤτοι $\pi > \mu$. Ἀλλ' ὁ ὅρος οὗτος μόνος δὲν ἐπαρκεῖ· πρέπει ἔτι αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ y νὰ ἦναι πραγματικαί· πρὸς τοῦτο δὲ τὸ ὑπόῤῥιζον $\frac{(\pi^2+\mu^2)^2}{4\pi^2}-2\mu^2$ πρέπει νὰ ἦναι θετικόν· ὅθεν ἐπίσης καὶ ἡ διαφορὰ $(\pi^2+\mu^2)^2-8\pi^2\mu^2$. Ἡ διαφορὰ αὕτη, ὡς διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν $\pi^2+\mu^2$ καὶ $2\sqrt{2}\,\pi\mu$, γράφεται καὶ οὕτω $(\pi^2+\mu^2+2\sqrt{2}\pi\mu)(\pi^2+\mu^2-2\sqrt{2}\pi\mu)$· ὁ πρῶτος παράγων τοῦ γινομένου αὐτοῦ εἶναι θετικός· ἄρα καὶ ὁ δεύτερος πρέπει νὰ ἦναι τοιοῦτος, ὅπως τὸ γινόμενον ᾖ θετικόν· οὕτω

$$\pi^2+\mu^2 > 2\sqrt{2}\,\pi\mu.$$

Θῶμεν $\frac{\pi}{\mu}=\rho$. Διαιρουμένων τῶν δύο μελῶν τῆς τελευταίας ἀνισότητος διὰ μ^2, ἕπεται

$$\rho^2+1>2\sqrt{2}\,\rho\cdot$$

πρέπει λοιπὸν ἡ παράστασις

$$\rho^2-2\sqrt{2}\,\rho+1$$

νὰ ἦναι θετική· πρὸς τοῦτο ἡ τιμὴ τοῦ ρ πρέπει νὰ ἦναι ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\rho^2-2\sqrt{2}\,\rho+1=0$ (§ 220), αἵτινές εἰσι $\sqrt{2}+1$ καὶ $\sqrt{2}-1$· οὕτως ἡ τιμὴ τοῦ ρ πρέπει νὰ ἦναι ἤτοι μείζων τοῦ $\sqrt{2}+1$, ἢ ἐλάσσων τοῦ $\sqrt{2}-1$· ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ ἦναι ἐλάσσων τοῦ $\sqrt{2}-1$· διότι εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὁ π πρέπει νὰ ἦναι μείζων τοῦ μ· οὕτως ὁ δεύτερος ὅρος, ὅπως τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, ἄγεται εἰς τὴν ἑξῆς ἀνισότητα

$$\text{(A)}\qquad \frac{\pi}{\mu}>\sqrt{2}+1\cdot$$

ἀλλ' ἡ ἀνισότης αὕτη συνεπάγεται τὴν ἀνωτέρω $\pi>\mu$· εἶναι λοιπὸν αὕτη ὁ μόνος ἀναγκαῖος καὶ ἐπαρκῶν ὅρος, ὅπως τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν.

Ἡ ἀνισότης (Α) δὲν ἀποκλείει τὴν ἰσότητα

$$\frac{\pi}{\mu}=\sqrt{2}+1,$$

καθ' ἣν αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ y εἰσὶν ἴσαι. Ἡ ἰσότης αὕτη παρίστησι τὴν ἐλαχίστην τιμήν, ἣν δύναται νὰ ἔχῃ ὁ λόγος $\frac{\pi}{\mu}$· ἄρα ἡ ἐλαχίστη τοῦ π, δεδομένου ὄντος τοῦ μ, εἶναι $(\sqrt{2}+1)\mu$· ἡ δὲ μεγίστη τοῦ μ, δεδομένου ὄντος τοῦ π, εἶναι $\frac{\pi}{\sqrt{2}+1}=\pi(\sqrt{2}-1)$. Ἔχομεν οὕτως ἀποδεδειγμένας τὰς ἑξῆς προτάσεις.

α'. *Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν* μ^2, *τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον εἶναι ἐκεῖνο, οὗ ἡ περίμετρος εἶναι* $2\mu(\sqrt{2}+1)$. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ y εἰσὶν ἴσαι.

β'. *Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτ* *τὴν περίμετρον 2π, τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν, εἶναι ἐκεῖνο, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\pi^2(\sqrt{2}-1)^2$.*

§ 241. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. *Ἐγγράψαι ἐν σφαίρᾳ, ἧς ἡ ἀκτὶς A, κύλινδρον, οὗ ἡ ὅλη ἐπιφάνεια, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν βάσεων, ἰσοῦται δεδομένῳ κύκλῳ, οὗ ἡ ἀκτὶς α.*

Ἔστω χ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ y τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι $\pi\chi^2$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, $2\pi\chi y$ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ καὶ $\pi\alpha^2$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δεδομένου κύκλου· ὅθεν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $2\pi\chi^2+2\pi\chi y=\pi\alpha^2$, εἴτε

$$(1)\quad 2\chi^2+2\chi y=\alpha^2.$$

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας φέρωμεν εὐθείας εἰς τὸ κέντρον μιᾶς τῶν βάσεων καὶ εἰς ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς αὐτῆς βάσεως, εἰς τὸ αὐτὸ δὲ σημεῖον ἀκτῖνα ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς αὐτῆς βάσεως, σχηματίζεται τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἡ μὲν ὑποτείνουσα A, αἱ δὲ δύο πλευραὶ χ καὶ $\frac{y}{2}$· ἔχομεν λοιπὸν ἔτι τὴν ἐξίσωσιν

$$(2)\quad \chi^2+\frac{y^2}{4}=A^2.$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) περιέχουσι μόνον δευτεροβαθμίους ὅρους· ἀπαλείφοντες λοιπὸν τὸν ἕνα ἄγνωστον, θέλομεν εὕρει τελικὴν ἐξίσωσιν διτετραγωνικὴν (§ 235). Ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$(3)\quad y=\frac{\alpha^2-2\chi^2}{2\chi};$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2)

$$\chi^2+\frac{(\alpha^2-2\chi^2)^2}{16\chi^2}=A^2.$$

ἐξαφανίσει τῶν παρονομαστῶν καὶ ἀναγωγῇ

$$20\chi^4-(4\alpha^2+16A^2)\chi^2+\alpha^4=0\cdot$$

ὅθεν
$$\chi^2=\frac{(\alpha^2+4A^2)\pm\sqrt{(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4}}{10};$$

ὅθεν
$$\chi=\sqrt{\frac{(\alpha^2+4A^2)\pm\sqrt{(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4}}{10}}.$$

Διερεύνησις. Ὅπως αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ χ ὦσι πραγματικαί, πρέπει τοιαῦται νὰ ἦναι καὶ αἱ τοῦ χ^2· πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ ἔχωμεν $(\alpha^2+4A^2)^2>5\alpha^4$, μὴ ἀποκλειομένης τῆς ἰσότητος. Ὁ ὅρος οὗτος δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ἄλλως. Ἡ παράστασις $(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4$, ἥτις πρέπει νὰ ἦναι θετική, θεωρουμένη ὡς διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν α^2+4A^2 καὶ $\alpha^2\sqrt{5}$, γράφεται καὶ οὕτω $(\alpha^2+4A^2+\alpha^2\sqrt{5})(\alpha^2+4A^2-\alpha^2\sqrt{5})$· ὁ πρῶτος τῶν παραγόντων αὐτῶν εἶναι θετικός· ἄρα καὶ ὁ δεύτερος πρέπει νὰ ἦναι τοιοῦτος· ὅθεν $\alpha^2+4A^2>\alpha^2\sqrt{5}$· ὅθεν $\alpha^2<\dfrac{4A^2}{\sqrt{5}-1}$, εἴτε

$$\alpha^2<A^2(\sqrt{5}+1).$$

Τοιοῦτος εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δυνατοῦ τοῦ προβλήματος.

Ἐξ ἁπλῆς ὄψεως τῶν τιμῶν τοῦ χ^2 δῆλον ὅτι, ὅταν αὗται ἦναι πραγματικαί, εἶναι ἐν ταὐτῷ καὶ θετικαί· ἐπομένως, ὅταν ὁ ἀνωτέρω ὅρος πληρῶται, καὶ αἱ τοῦ χ τιμαὶ εἶναι πραγματικαί. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ἀρκεῖ· πρέπει πρὸς τούτοις αἱ τιμαὶ τοῦ χ νὰ ἦναι θετικαί· τὸ δεύτερον δηλονότι μέλος τῆς (3) νὰ ἦναι θετικόν· ἄρα $\alpha^2>2\chi^2$· ὅθεν

$$(4)\quad \chi<\frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Ἡ δευτέρα τιμὴ τοῦ χ (ἡ ἐλάσσων) ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν ταύτην ἄνευ νέου ὅρου· ἔχομεν δηλονότι

$$(5)\quad \frac{\alpha^2+4A^2-\sqrt{(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4}}{10}<\frac{\alpha^2}{2}.$$

Τῷ ὄντι ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης συνάγομεν

$$\alpha^2+4A^2-\sqrt{(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4}<5\alpha^2.$$

ὅθεν $\qquad 4A^2<4\alpha^2+\sqrt{(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4}$·

ἡ ἀνισότης αὕτη εἶναι ἀληθής· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ α΄. μέλους εἶναι ἔλασσον τοῦ τετραγώνου τοῦ β΄. μέλους· ἄρα καὶ ἡ ἀφ' ἧς ὡρμήθημεν (5) εἶναι ἐπίσης ἀληθής.

Ἀλλ' ἵνα καὶ ἡ πρώτη τιμὴ τοῦ χ (ἡ μείζων) ἐπαληθεύῃ τὴν σχέσιν (4), ἀπαιτεῖται νέος ὅρος. Πρέπει τότε νὰ ἔχωμεν

$$(6)\quad \frac{\alpha^2+4A^2+\sqrt{(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4}}{10}<\frac{\alpha^2}{2}.$$

Ἐὰν $\alpha^2 < A^2$, ἡ σχέσις αὕτη δὲν ἐπαληθεύεται· διότι τότε $\frac{\alpha^2+4A^2}{10} > \frac{5\alpha^2}{10}$· ἄρα ἔτι μᾶλλον

$$\frac{\alpha^2+4A^2+\sqrt{(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4}}{10} > \frac{\alpha^2}{2}.$$

Ὑποτεθήτω $\alpha > A$. Ἐκ τῆς σχέσεως (6) συνάγομεν, πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 10, κ.τ.λ.

$$\sqrt{(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4} < 4(\alpha^2-A^2)\cdot$$

ὅθεν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον

$$(\alpha^2+4A^2)^2-5\alpha^4 < 16(\alpha^2-A^2)^2\cdot$$

ἐντεῦθεν δὲ

$$\alpha^2 > 2A^2.$$

Ἵνα λοιπὸν ὑπάρχωσι δύο λύσεις, πρέπει α^2 νὰ περιέχηται μεταξὺ $A^2(\sqrt{5}+1)$ καὶ $2A^2$.

§ 242. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. *Εὑρεῖν τοὺς τέσσαρας ὅρους ἀναλογίας, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων 2σ, τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων $2\sigma'$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων $4\gamma^2$.*

Λάβωμεν βοηθητικὸν ἄγνωστον τὸ γινόμενον τῶν μέσων, ὅπερ ἔστω χ. Οἱ μέσοι εἰσὶν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi^2-2\sigma\varphi+\chi=0$· οἱ δ' ἄκροι αἱ ῥίζαι τῆς $\varphi^2-2\sigma'\varphi+\chi=0$. Αἱ ῥίζαι τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἰσὶν $\sigma+\sqrt{\sigma^2-\chi}$ καὶ $\sigma-\sqrt{\sigma^2-\chi}$, αἱ δὲ τῆς δευτέρας $\sigma'+\sqrt{\sigma'^2-\chi}$ καὶ $\sigma'-\sqrt{\sigma'^2-\chi}$. Τετραγωνίζοντες ἑκάστην τῶν τεσσάρων αὐτῶν παραστάσεων καὶ προσθέτοντες τὰ τετράγωνα, εὑρίσκομεν μεθ' ἁπάσας τὰς ἀναγωγὰς $4\sigma^2+4\sigma'^2-4\chi$· ὅθεν κατὰ τὸ πρόβλημα

$$4\sigma^2+4\sigma'^2-4\chi=4\gamma^2\cdot$$

ἐντεῦθεν $\chi=\sigma^2+\sigma'^2-\gamma^2$· τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ χ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἀνωτέρω παραστάσεις τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας, εὑρίσκομεν

$$\sigma+\sqrt{\gamma^2-\sigma'^2},\quad \sigma-\sqrt{\gamma^2-\sigma'^2},\quad \sigma'+\sqrt{\gamma^2-\sigma^2},\quad \sigma'-\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}.$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1. $\chi+y=\alpha,\ \chi^3+y^3=\delta^3.$

Λύσις. $\begin{matrix}\chi\\ y\end{matrix}=\frac{\alpha}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\delta^3-\alpha^3}{3\alpha}}.$

2. $\chi+y=\alpha,\ \chi^4+y^4=\delta^4.$

Λύσις. Συνάγομεν $\chi y=\alpha^2\pm\sqrt{\frac{\alpha^4+\delta^4}{2}}$· ἐντεῦθεν δὲ καὶ ἐκ τῆς πρώτης τῶν προτεθεισῶν συνάγονται αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ y.

3. $\frac{\chi y}{\omega}=\alpha,\quad \frac{\chi\omega}{y}=\beta,\quad \frac{y\omega}{\chi}=\gamma.$

Λύσις. $\chi^2=\alpha\beta,\quad y^2=\alpha\gamma,\quad \omega^2=\beta\gamma.$

4. $\chi(y+\omega)=2\kappa,\quad y(\omega+\chi)=2\lambda,\quad \omega(\chi+y)=2\mu.$

Λύσις. Συνάγομεν $\chi y=\kappa+\lambda-\mu,\quad \chi\omega=\kappa+\mu-\lambda,\quad y\omega=\mu+\lambda-\kappa.$ ἐντεῦθεν δὲ

$$\chi^2=\frac{(\kappa+\mu-\lambda)(\kappa+\lambda-\mu)}{\mu+\lambda-\kappa},\ y^2=\frac{(\mu+\lambda-\kappa)(\kappa+\lambda-\mu)}{\kappa+\mu-\lambda},\ \omega^2=\frac{(\mu+\lambda-\kappa)(\kappa+\mu-\lambda)}{\kappa+\lambda-\mu}.$$

5. $\chi^3+y^3+\chi^2y+y^2\chi=13$

$\chi^4y^2+\chi^2y^4=468.$

Λύσις. Ἑκάτερον τῶν πρώτων μελῶν διαιρεῖται διὰ χ^2+y^2. Διαιροῦμεν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν διὰ τῆς πρώτης καὶ τὴν ἐντεῦθεν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν ἀντὶ τῆς πρώτης τῶν προτεθεισῶν, εἶτα δὲ ποιοῦμεν χρῆσιν βοηθητικῶν ἀγνώστων ἴσων τῷ χy καὶ τῷ $\chi+y$. Οὕτως εὑρίσκομεν

$$\chi=3 \text{ καὶ } \chi=\frac{\sqrt[3]{13^2}+\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2},\ y=-2 \text{ καὶ } y=\frac{\sqrt[3]{13^2}-\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}.$$

6. $\chi+y+\omega=13,\quad \chi^2+y^2+\omega^2=61,\quad 2y\omega=\chi(y+\omega).$

Λύσις. $\chi=9,\ \begin{matrix}y\\ \omega\end{matrix}=2\pm\sqrt{-14},$

$\chi=4,\ \begin{matrix}y\\ \omega\end{matrix}=\begin{matrix}6\\ 3\end{matrix}.$

7. Εὑρεῖν ἀριθμὸν διψήφιον, ὃν διαιροῦντες διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων, εὑρίσκομεν πηλίκον 5 1/3· ἐλαττοῦντες δὲ κατὰ 9, ἔχομεν τὸν διὰ τῶν αὐτῶν κατ' ἀντίθετον τάξιν ψηφίων γραφόμενον (32).

8. Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον, οὗ τὸ δεύτερον ψηφίον εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι ὡς

124:7, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτοῦ μετὰ τοῦ 594 εἶναι ὁ διὰ τῶν αὐτῶν ψηφίων κατ' ἀντίθετον τάξιν γραφόμενος ἀριθμός (248).

9. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὧν ὁ μεσαῖος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων, τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν τριῶν εἶναι 21, τὸ δὲ τῶν τετραγώνων αὐτῶν 189 (12,6,3).

10. Δεξαμενὴ δέχεται ὕδωρ ἐκ δύο κρηνῶν· ἀνοίγεται ἡ πρώτη καὶ ῥέει δι' αὐτῆς τὸ ὕδωρ ἐν τῇ δεξαμενῇ ἐπὶ τὰ $^3/_5$ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἡ δευτέρα κρήνη μόνη πληροῖ τὴν δεξαμενήν· ἀκολούθως κλείεται ἡ κρήνη αὕτη καὶ ἀνοίγεται ἡ δευτέρα, δι' ἧς ῥέει τὸ ὕδωρ, μέχρις οὗ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή. Ἐὰν αἱ δύο κρῆναι ἠνοίγοντο ὁμοῦ ἐξ ἀρχῆς, ἡ δεξαμενὴ ἤθελε πληρωθῇ 6 ὥρας πρότερον καὶ ἐκ τῆς πρώτης ἤθελον ἐκρεύσει τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἐκρεύσαντος ἐκ τῆς δευτέρας, ὅταν ἐκλείσθη ἡ πρώτη. Ἐν πόσῳ χρόνῳ ἑκατέρα τῶν κρηνῶν αὐτῶν πληροῖ μόνη τὴν δεξαμενήν; (ἡ πρώτη ἐν ὥραις 15, ἡ δευτέρα ἐν 10).

11. Δίδοται τὸ ἄθροισμα μ^2 τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὀρθογωνίων, τὸ ἄθροισμα α τῶν βάσεων αὐτῶν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι μ'^2 καὶ μ''^2 τῶν ὀρθογωνίων, ἅπερ ἔχουσι βάσιν τὴν τοῦ ἑνὸς τῶν πρώτων καὶ ὕψος τὸ τοῦ ἑτέρου. Εὑρεῖν τὰς διαστάσεις τῶν ὀρθογωνίων.

Ἔστωσαν φ καὶ χ τὸ ὕψος καὶ ἡ βάσις τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου, y καὶ ω τοῦ δευτέρου. Εὑρίσκομεν

$$\varphi=\frac{\mu^2+2\mu'^2\pm\sqrt{\mu^4-4\mu'^2\mu''^2}}{2\alpha},\quad \chi=\frac{\alpha\left(\mu^2+2\mu''^2\pm\sqrt{\mu^4-4\mu'^2\mu''^2}\right)}{2(\mu^2+\mu'^2+\mu''^2)},$$

$$y=\frac{\mu^2+2\mu''^2\mp\sqrt{\mu^4-4\mu'^2\mu''^2}}{2\alpha},\quad \omega=\frac{\alpha\left(\mu^2+2\mu'^2\mp\sqrt{\mu^4-4\mu'^2\mu''^2}\right)}{2(\mu^2+\mu'^2+\mu''^2)}.$$

12. Εὑρεῖν τοὺς τέσσαρας ὅρους ἀναλογίας, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 4α, τοῦ τῶν τετραγώνων αὐτῶν $4\beta^2$ καὶ τοῦ τῶν κύβων αὐτῶν $4\gamma^3$.

Λαμβάνομεν βοηθητικοὺς ἀγνώστους τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων καὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀθροισμάτων τῶν μέσων καὶ τῶν ἄκρων. Ἔστω χ ὁ πρῶτος καὶ y ὁ δεύτερος ἄγνωστος. Εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{8\alpha^3-6\alpha\beta^2+\gamma^3}{3\alpha},\quad y^2=\frac{16\alpha^3-24\alpha\beta^2+8\gamma^3}{3\alpha}.$$

Διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν εὑρίσκονται αἱ τῶν τεσσάρων ὅρων τῆς ἀναλογίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ.

Ὁρισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς ἀνισότητος.

§ 243. Ἀριθμός τις λέγεται *μείζων* ἄλλου, ὅταν ἡ διαφορὰ τούτου ἀπ' ἐκείνου ἦναι θετική· *ἐλάσσων* δέ, ὅταν ἡ διαφορὰ αὕτη ἦναι ἀρνητική.

Π. χ. ὁ -3 εἶναι μείζων τοῦ -5· διότι $(-3)-(-5)=+2$· ὁ $+2$ εἶναι μείζων τοῦ -1· διότι $(+2)-(-1)=+3$· ὁ -5 εἶναι ἐλάσσων τοῦ $+1$· διότι $(-5)-(+1)=-6$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τῆς ἀλγεβρικῆς ἀνισότητος πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μείζων παντὸς ἀρνητικοῦ, οἱ θετικοὶ ἀριθμοί εἰσι τοσούτῳ μείζονες, ὅσῳ μείζων εἶναι ἡ ἀπόλυτος ἀξία αὐτῶν, οἱ δ' ἀρνητικοὶ τοὐναντίον τοσούτῳ ἐλάσσονες, ὅσῳ μείζων εἶναι ἡ ἀπόλυτος ἀξία αὐτῶν· τέλος οἱ ἀρνητικοὶ εἰσὶν ἐλάσσονες τοῦ μηδενός, οἱ δὲ θετικοὶ μείζονες.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀνισότητες δείκνυνται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων $<$ καὶ $>$, δι' ὧν καὶ αἱ ἀνισότητες μεγεθῶν καὶ ἀπολύτων ἀριθμῶν· οἷον $3<6$, $-5<-3$, $-4>-6$, $-2<0$.

Ἀρχαὶ ἐπὶ τῶν ἀνισοτήτων.

§ 244. ΑΡΧΗ Α'. *Ἀνισότης τις ἐξακολουθεῖ ὑφισταμένη, ὅταν προστεθῇ εἰς τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἢ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.*

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$·

λέγω ὅτι ὑπάρχει καὶ ἡ ἑξῆς, μ ὄντος ἀριθμοῦ ἀλγεβρικοῦ οἱουδήποτε,

$$\alpha+\mu>\beta+\mu\cdot$$

διότι, ὄντος α μείζονος τοῦ β, ἔχομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν $\alpha-\beta>0$·

ἀλλὰ $$\alpha-\beta=\alpha-\beta+\mu-\mu=(\alpha+\mu)-(\beta+\mu)\cdot$$

οὕτω καὶ ἡ διαφορὰ $(\alpha+\mu)-(\beta+\mu)$ εἶναι θετική, εἴτε

$$\alpha+\mu>\beta+\mu.$$

Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι *δυνάμεθα νὰ μεταθέτωμεν ὅρον τινὰ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ ἕτερον, ἀφοῦ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ.*

§ 245. ΑΡΧΗ Β'. *Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ δύο μέλη ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν θετικὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$.

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι θετική, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ θετικόν τινα ἀριθμὸν μ, τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)\mu$ ἔσεται ἐπίσης θετικόν· ἀλλὰ $(\alpha-\beta)\mu=\alpha\mu-\beta\mu$· οὕτως $\alpha\mu-\beta\mu$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, εἴτε $\alpha\mu>\beta\mu$. Ο. Ε. Δ.

Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ δύο μέλη ἀνισότητος ἐπὶ τον αὐτὸν ἀρνητικὸν ἀριθμόν· ἀλλὰ τότε πρέπει ἐν ταὐτῷ ν' ἀντιστρέφωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος. Ἔστω ἡ ἀνιτότης $\alpha > \beta$. Τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta$ οὔσης θετικῆς, τὸ γινόμενον ἐπὶ ἀρνητικόν τινα ἀριθμὸν μ εἶναι ἀρνητικόν· ἀλλὰ $(\alpha-\beta)\mu = \alpha\mu - \beta\mu$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι ἀρνητικόν, ἔχομεν $\alpha\mu < \beta\mu$. Ο. Ε. Δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ διαίρεσις διὰ μ εἶναι πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ $\frac{1}{\mu}$, ἕπεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι, ὅταν μὲν διαιρῶμεν τὰ δύο μέλη ἀνισότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀνισότης ἐξακολουθεῖ ὑφισταμένη, ὅταν δὲ δι' ἀρνητικοῦ, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται.

§ 246. ΑΡΧΗ Γ΄. *Ὅταν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητός τινος ἦναι θετικά, δυνάμεθα νὰ ὑψῶμεν αὐτὰ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν βαθμοῦ οἱουδήποτε μ.* Διότι ἡ ἀνισότης ὑπάρχει τότε καὶ ἐπὶ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν· ἐπομένως ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη εἰς δύναμίν τινα βαθμοῦ μ, ἔξομεν ἐξαγόμενα ἐπίσης ἄνισα. Π. χ. ἐπειδὴ $3 > 7$, διὰ τοῦτο καὶ $3^4 > 7^4$.

Ὅταν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος δὲν ἦναι ἀμφότερα θετικά, διακριτέον διαφόρους περιπτώσεις, ὡς ἑξῆς.

α΄. *Οἱαδήποτ' ἂν ᾖ τὰ σημεῖα τῶν μελῶν, δυνάμεθα νὰ ὑψῶμεν αὐτὰ εἰς τὴν αὐτὴν περιττοῦ βαθμοῦ δύναμιν.* Ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν μελῶν ἦναι θετικόν, τὸ δὲ (ὅπερ τὸ ἔλασσον) ἀρνητικόν, τὰ σημεῖα διατηροῦνται τὰ αὐτά, ὅταν τὰ μέλη ὑψωθῶσιν εἰς περιττοῦ βαθμοῦ δύναμιν (§§ 47, 48)· ὅθεν ἡ ἀνισότης ἐξακολουθεῖ ὑφισταμένη. Ἐὰν δ' ἀμφότερα τὰ μέλη ἀρνητικά, οἷον $-3 > -7$, ἡ ἀπόλυτος ἀξία τοῦ μείζονος μέλους εἶναι ἐλάσσων τῆς τοῦ ἐλάσσονος· ἐπομένως τὴν αὐτὴν σχέσιν ἔχουσι καὶ αἱ ἀπόλυτοι ἀξίαι τῶν ὁμοβάθμων δυνάμεων τῶν μελῶν· ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ σημεῖα διατηροῦνται τὰ αὐτὰ (ἀμφότερα ἀρνητικά), ἡ ἀνισότης ἐξακολουθεῖ ὑφισταμένη.

β΄. *Ὅταν ὑψῶμεν εἰς τὴν αὐτὴν ἀρτίου βαθμοῦ δύναμιν τὰ μέλη ἀνισότητος, ἧς ἀμφότερα τὰ μέλη ἀρνητικά, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται.* Ἔστω, π. χ., ἡ ἀνισότης $-3 > -7$. Αἱ ἀπόλυτοι ἀξίαι τῶν μελῶν ἔχουσιν ἀντίθετον σχέσιν μεγέθους· δηλονότι $3 < 7$ (§ 243)· ὅθεν $3^{2\mu} < 7^{2\mu}$· ἀλλὰ $(-3)^{2\mu} = 3^{2\mu}$ καὶ $(-7)^{2\mu} = 7^{2\mu}$ (§ 48)· ἄρα

$$(-3)^{2\mu} < (-7)^{2\mu}.$$

Ἀλλ' ὅταν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος, ἅπερ ὑψοῦμεν εἰς ἀρτίου βαθμοῦ δύναμιν, ἦναι ἑτερόσημα, τὰ ἐξαγόμενα ἔχουσι ἤτοι τὴν αὐτὴν σχέσιν ἢ ἀντίθετον, ἐσθ' ὅτε δὲ γίνονται καὶ ἴσα. Π. χ. ἐκ τῶν ἀνισοτήτων

$$3 > -2, \quad 3 > -8, \quad 5 > -5$$

ἕπονται αἱ

$$3^{2\mu} > (-2)^{2\mu}, \quad 3^{2\mu} < (-8)^{2\mu}, \quad 5^{2\mu} = (-5)^{2\mu}.$$

§ 247. ΑΡΧΗ Δ'. *Δυνάμεθα νὰ ἐξάγωμεν ῥίζας περιττοῦ βαθμοῦ τῶν μελῶν πάσης ἀνισότητος.* Π. χ. ἐκ τῶν

$$\left.\begin{array}{r} 27 > \ \ 8 \\ -\ 3 < +5 \\ -13 < -4 \end{array}\right\} \text{ ἕπονται } \left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{8} \\ \sqrt[5]{-3} < \sqrt[5]{5} \\ \sqrt[7]{-13} < \sqrt[7]{-4}. \end{array}\right.$$

Ὅταν ἐξάγωμεν ῥίζαν ἀρτίου βαθμοῦ τῶν μελῶν ἀνισότητός τινος, πρέπει τὰ μέλη νὰ ἦναι θετικά· ἄλλως αἱ ῥίζαι εἰσὶν ἰδανικαί (§ 210)· τότε δὲ ἑκάστη ῥίζα δύναται νὰ ληφθῇ μετὰ τοῦ σημείου $+$ ἢ $-$ (§ 211). Ἐὰν λαμβάνωμεν ἀμφοτέρας τὰς ῥίζας μετὰ τοῦ $+$, ἡ ἀνισότης ἐξακολουθεῖ ὑφισταμένη· ἐὰν δὲ μετὰ τοῦ $-$, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται· ἐὰν δὲ τὴν μὲν μετὰ τοῦ $+$, τὴν δὲ μετὰ τοῦ $-$, ἡ θετικὴ ἔσται ἡ μείζων. Π. χ. ἐκ τῆς $9 < 25$ ἕπονται

$$3 < 5, \quad -3 > -5, \quad -3 < 5, \quad 3 > -5.$$

§ 248. ΑΡΧΗ Ε'. *Ἐὰν προσθέσωμεν τὰ ἐλάσσω μέλη χωρὶς καὶ τὰ μείζω δύο ἢ πλειόνων ἀνισοτήτων, ἔχομεν νέαν ἀνισότητα.* Ἔστωσαν αἱ δύο ἀνισότητες

$$(1) \quad \alpha > \beta, \quad \gamma > \delta.$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha - \beta$ καὶ $\gamma - \delta$ εἰσὶ θετικοί, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὅπερ εἶναι $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$, εἶναι ἐπίσης θετικόν· ἄρα $\alpha+\gamma > \beta+\delta$. Ο. Ε. Δ. Ὁμοία ἡ ἀπόδειξις καὶ ὅταν αἱ ἀνισότητες ἦναι πλείονες τῶν δύο.

§ 249. ΑΡΧΗ ΣΤ΄. *Δυνάμεθα ἀπὸ τῶν μελῶν ἀνισότητός τινος ν' ἀφαιρῶμεν τὰ μέλη ἀνισότητος ἀντιστρόφου.* Π. χ. ἔστωσαν αἱ ἀντίστροφοι ἀνισότητες

$$\alpha > \beta, \quad \gamma < \delta\cdot$$

λέγω ὅτι $\alpha-\gamma > \beta-\delta$. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν ἔχομεν $\alpha+\delta > \beta+\gamma$· ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῶν μελῶν ταύτης $\delta+\gamma$, συνάγομεν τὴν ἀποδεικτέαν.

§ 250. ΑΡΧΗ Ζ΄. *Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα μέλη δύο ἀνισοτήτων, ὧν τὰ σημεῖα ἀνισότητος ταὐτά, ὅταν ἅπαντα τὰ μέλη ἦναι θετικά· ὅταν δ' ἅπαντα τὰ μέλη ἦναι ἀρνητικά, πρέπει ἐν ταὐτῷ ν' ἀντιστρέφωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος.* α΄. Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες

$$\alpha > \beta, \quad \gamma > \delta,$$

ὧν πάντα τὰ μέλη θετικά· ἐπειδὴ ὁ ἀπόλυτος ἀριθμὸς α εἶναι μείζων τοῦ β, καὶ ὁ γ τοῦ δ, διὰ τοῦτο $\alpha\gamma > \beta\delta$. β΄. Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες

$$-\alpha > -\beta, \quad -\gamma > -\delta,$$

ὧν τὰ μέλη πάντα ἀρνητικά. Οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ α καὶ β, γ καὶ δ ἔχουσιν ἀντίθετον σχέσιν, ἤτοι $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$· ὅθεν $\alpha\gamma < \beta\delta$.

§ 251. ΑΡΧΗ Η΄. *Δυνάμεθα νὰ διαιρῶμεν ἕκαστον τῶν μελῶν ἀνισότητός τινος διὰ τῶν ἀντιστοιχούντων μελῶν ἑτέρας ἀντιστρόφου, ὅταν πάντα τὰ μέλη ἦναι θετικά· ὅταν δὲ πάντα τὰ μέλη ἦναι ἀρνητικά, ἡ προκύπτουσα ἀνισότης ἔχει τὸ σημεῖον τῆς δευτέρας.* α΄. Ἔστωσαν αἱ ἀντίστροφοι ἀνισότητες

$$\alpha > \beta, \quad \gamma < \delta,$$

ὧν πάντα τὰ μέλη θετικά. Συνάγομεν ἐκ τῆς πρώτης $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$· ἀλλὰ $\frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$· ἄρα καὶ $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$.

β΄. Ἔστωσαν αἱ ἀντίστροφοι ἀνισότητες

$$-\alpha > -\beta, \quad -\gamma < -\delta,$$

ὧν πάντα τὰ μέλη ἀρνητικά· ἕπονται

$$\alpha < \beta, \quad \gamma > \delta;$$

ὅθεν, ὡς προαπεδείχθη,

$$\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἀνισότητες, ἃς πορίζόμεθα ἐξ ἄλλων δεδομένων ἀνισοτήτων κατὰ τὰς ἀρχὰς Ε΄., ϛ΄., Ζ΄., καὶ Η΄., δὲν δύνανται ν' ἀντικαταστήσωσι μίαν τῶν δεδομένων ἀνισοτήτων, ὡς γίνεται, ὅταν ἀπὸ δεδομένων ἰσοτήτων πορίζώμεθα ἄλλας ἰσότητας. Π. χ. ἐκ τῶν ἀνισοτήτων

$$\alpha > \beta, \quad \gamma > \delta$$

πορίζόμεθα κατὰ τὴν Ε΄. ἀρχὴν $\alpha+\gamma > \beta+\delta$· ἀλλ' ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης καὶ μιᾶς τῶν προτεθεισῶν, οἷον τῆς $\alpha > \beta$, δὲν ἕπεται ἡ ἑτέρα $\gamma > \delta$.

Ἀνισότητες διαφόρων βαθμῶν.

§ 252. Ἔστω ἡ ἑξῆς παράστασις

$$\frac{\alpha\chi^2-\beta}{4\chi^3+\beta\gamma+4\chi}.$$

Ὅταν δίδωμεν εἰς τὸ γράμμα χ τῆς παραστάσεως αὐτῆς διαφόρους τιμάς, τὰ δὲ λοιπὰ γράμματα νοῶμεν ὡς παριστῶντα ἀμεταβλήτους ἀριθμούς, ἡ παράστασις λαμβάνει διαφόρους τιμάς. Κατὰ τὴν μεταβολὴν ταύτην τῶν τιμῶν τοῦ γράμματος χ καὶ τῆς παραστάσεως, τὸ μὲν χ καλεῖται *ἀπόλυτον μεταβλητὸν* ἢ ἁπλῶς *μεταβλητὸν* (ποσόν), ἡ δὲ παράστασις *συμμεταβλητὸν* (ποσόν)· λέγομεν ἐπίσης καὶ *μεταβλητὴ* καὶ *συμμεταβλητὴ* (ποσότης), *μεταβλητὸς* καὶ *συμμεταβλητὸς* (ἀριθμός).

§ 253. Εἰς διάφορα ζητήματα ἀπαιτεῖται συμμεταβλητή τις νὰ ἦναι μείζων ἢ ἐλάσσων ἑτέρας συμμεταβλητῆς, ἐξαρτωμένης ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀπολύτου μεταβλητοῦ.

Ὅταν εἰς τοιαύτην τινὰ ἀνισότητα αἱ παραστάσεις ἦναι πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς τὸν ἀπόλυτον μεταβλητὸν (ὅστις λέγεται καὶ ἄγνωστος), ἔχομεν ἀνισότητας τοῦ *πρώτου βαθμοῦ* μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου. Ἀνάλογον σημασίαν ἔχουσιν αἱ ἀνισότητες τοῦ β΄. βαθμοῦ κτλ.

Πᾶσα ἀνισότης τοῦ πρώτου βαθμοῦ μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς σχῆμα τοιόνδε

$$(1) \quad \alpha\chi+\beta > \alpha'\chi+\beta',$$

Πᾶσα δὲ ἀνισότης τοῦ β'. βαθμοῦ δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς

(2) $A\chi^2+B\chi+\Gamma>0$ ἢ $A\chi^2+B\chi+\Gamma<0$.

Πρὸς ἐπαλήθευσιν τῶν ἀνισοτήτων αὐτῶν πρέπει αἱ τιμαὶ τοῦ χ νὰ ἦναι τοιαῦται, ὥστε τὸ α'. μέλος τῆς (1) νὰ ἦναι *μεῖζον* τοῦ β'., κατὰ τὴν ἀλγεβρικὴν σημασίαν τῆς ἀνισότητος (§ 243), ἢ τὸ πρῶτον μέλος τῶν (2) μεῖζον ἢ ἔλασσον τοῦ 0, ἤγουν θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Ἀνισότητες τοῦ α'. βαθμοῦ.

§ 254. Ἔστω ἡ ἀνισότης τοῦ α'. βαθμοῦ

(1) $\alpha\chi+\beta>\alpha'\chi+\beta'$·

συνάγομεν ἐντεῦθεν

$$(\alpha-\alpha')\chi>\beta'-\beta\cdot$$

διαιροῦντες ταύτην διὰ $\alpha-\alpha'$, συνάγομεν (§ 245), εἰ μὲν $\alpha-\alpha'>0$,

$$\chi>\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'},$$

εἰ δὲ $\alpha-\alpha'<0$,

$$\chi<\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'}.$$

Οὕτως ἵνα ἐπαληθεύηται ἡ ἀνισότης (1), πρέπει αἱ τιμαὶ τοῦ χ νὰ ὦσι μείζονες τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'}$, ἐὰν $\alpha-\alpha'>0$· ἢ ἐλάσσονες, ἐὰν $\alpha-\alpha'<0$.

Ἐφαρμογή. *Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀφίστανται ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν 2γ· τρίτον δέ τι σημεῖον Μ ἔχει τοιαύτην θέσιν, ὥστε ΑΜ+ΒΜ=2α, α ὄντος μείζονος τοῦ γ. Μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλονται αἱ ἀποστάσεις ΑΜ καὶ ΒΜ, ὅταν τὸ σημεῖον Μ μετατοπίζηται οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα ΑΜ+ΒΜ νὰ διατηρῆται ἀμετάβλητον;* Ὑποθέσωμεν ΑΜ > ΒΜ. Θῶμεν ΑΜ$=\chi$, ΒΜ$=y$. Ἔχομεν ἐν πρώτοις

(1) $\chi+y=2\alpha$·

ἑκάστης δὲ πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ΑΜΒ οὔσης ἐλάσσονος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἔχομεν ἔτι

$$2\gamma<\chi+y,\quad y<2\gamma+\chi,\quad \chi<2\gamma+y.$$

Ἡ πρώτη τῶν ἀνισοτήτων αὐτῶν εἶναι φανερά· διότι $\gamma<\alpha$ καθ' ὑπόθεσιν· ἡ δευτέρα ἐπίσης, ὑποτεθέντος $\chi>y$· μένει λοιπὸν νέα ἀνισότης ἡ

$$(2)\quad \chi<2\gamma+y\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν αὐτῇ τὴν ἐκ τῆς (1) τιμὴν τοῦ y, ἔχομεν

$$\chi<2\gamma+2\alpha-\chi\cdot$$

ὅθεν

$$2\chi<2\gamma+2\alpha\cdot$$

ὅθεν

$$\chi<\gamma+\alpha.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) δῆλον ὅτι, ὅταν ὁ χ ἔχῃ τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμήν, ὁ y ἔχει τὴν ἐλαχίστην, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (1) ἀντικαθιστῶντες τὴν ἀνωτέρω μεγίστην τιμὴν τοῦ χ· αὕτη λοιπὸν εἶναι $\alpha-\gamma$.

Ἀνισότητες τοῦ β'. βαθμοῦ.

§ 285. Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες

$$(1)\quad 3\chi^2+6\chi-24<0$$
$$(2)\quad 6\chi^2+\chi-2>0$$
$$(3)\quad 4\chi^2-4\chi+1>0$$
$$(4)\quad 4\chi^2-4\chi+1<0$$
$$(5)\quad -5\chi^2+\chi-25>0.$$

Αἱ ῥίζαι τοῦ α'. μέλους τῆς (1) εἰσὶ 2 καὶ —4· ἵνα λοιπὸν ἐπαληθεύηται ἡ ἀνισότης αὕτη, πρέπει αἱ τιμαὶ τοῦ χ νὰ περιλαμβάνωνται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ —4 (§ 220). Αἱ ῥίζαι τοῦ α'. μέλους τῆς (2) εἰσὶ $\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{2}{3}$· ἵνα λοιπὸν ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύηται, πρέπει αἱ τιμαὶ τοῦ χ νὰ ἦναι ἐκτὸς τῶν ὁρίων $\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{2}{3}$ (§ 220). Αἱ ῥίζαι τοῦ α'. μέλους τῆς ἀνισότητος (3) εἰσὶν ἴσαι· πᾶσα λοιπὸν τιμὴ τοῦ χ, καθιστῶσα τὸ τριώνυμον αὐτὸ ὁμόσημον τῷ πρώτῳ αὐτοῦ ὅρῳ (§ 221), ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα, ἐκτὸς τῆς μηδενιζούσης τὸ τριώνυμον. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ἀνισότης (4), ἧς τὸ α'. μέλος εἶναι ταὐτὸν τῷ α'. τῆς προηγουμένης (3), δὲν ἐπαληθεύεται δι' οὐδεμιᾶς τιμῆς τοῦ χ. Τέλος ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τοῦ α'. μέλους τῆς ἀνισότητος (5) εἰσὶν ἰδανικαί, ὁ δὲ πρῶτος ὅρος ἀρνητικός, ἡ ἀνισότης αὕτη δὲν δύναται νὰ ἐπαληθευθῇ (§ 222).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ.

Ὁρισμός.

§ 256. Ὅταν συμμεταβλητή τις καθίσταται διά τινος τιμῆς α τοῦ ἀπολύτου μεταβλητοῦ χ μείζων ἢ ἐλάσσων πάσης ἄλλης τιμῆς, ἣν λαμβάνει, ὅταν δίδωνται τῷ χ τιμαὶ μείζονες ἢ ἐλάσσονες τοῦ α καὶ ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέρουσαι αὐτοῦ, τότε ἡ τιμὴ ἐκείνη τῆς συμμεταβλητῆς καλεῖται *μεγίστη* ἢ *μέγιστον*, *ἐλαχίστη* ἢ *ἐλάχιστον*.

§ 257. Ἐν τοῖς ἑξῆς θέλομεν πραγματευθῆ περὶ προβλημάτων, πρὸς λύσιν τῶν ὁποίων πρέπει νὰ εὑρίσκωνται αἱ μέγισται καὶ ἐλάχισται τιμαί, ὧν εἰσιν ἐπιδεκτικαὶ παραστάσεις συναγόμεναι ἐκ τῶν προβλημάτων.

Παρατηροῦμεν ἐν τούτοις ἐνταῦθα ὅτι ἡ πλήρης ἔρευνα τοῦ ζητήματος τῶν μεγίστων καὶ τῶν ἐλαχίστων τιμῶν, ἃς λαμβάνουσι συμμεταβληταί, περιέχουσαι μίαν ἢ πλείονας μεταβλητάς, ἀνήκει εἰς ἄλλο μέρος τῶν μαθηματικῶν· ἐνταῦθα δὲ θέλομεν δείξει μόνον πῶς *εἴς τινας μερικὰς περιπτώσεις* εἶναι δυνατὸν τοιαῦτα ζητήματα νὰ λύωνται διὰ μεθόδων μὴ ὑπερβαινουσῶν τὰ ὅρια τῶν Στοιχείων.

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα παραστάσεων περιεχουσῶν ἕνα μεταβλητόν.

§ 258. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. *Διαιρεθήτω ἀριθμός τις α εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τὸ μέγιστον.*

Ὅτι ὑπάρχει ὅριον μέγιστον, δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν ἀμέσως παρατηροῦντες ὅτι, ἐπειδὴ ἑκάτερον τῶν μερῶν εἶναι ἔλασσον τοῦ α, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ἔλασσον τοῦ α^2.

Λύσις α΄. Ἔστω y ἡ διαφορὰ τοῦ μείζονος μέρους ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ α· τὸ μεῖζον μέρος ἔσται $\frac{\alpha}{2}+y$, τὸ δ' ἔλασσον $\frac{\alpha}{2}-y$· ὅθεν τὸ γινόμενον τῶν δύο μερῶν ἔσται

$$(1)\quad \left(\frac{\alpha}{2}+y\right)\left(\frac{\alpha}{2}-y\right)=\frac{\alpha^2}{4}-y^2.$$

Ἡ διαφορὰ $\frac{\alpha^2}{4}-y^2$, ἧς ὁ μειωτέος εἶναι σταθερός, εἶναι τοσούτῳ μείζων, ὅσῳ ἐλάσσων εἶναι ὁ y· λαμβάνει δὲ τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμήν, ὅταν $y=0$, ὅτε τὸ μὲν γινόμενον εἶναι $\frac{\alpha^2}{4}$, τὰ δὲ δύο μέρη ἀμφότερα ἴσα τῷ ἡμίσει τοῦ α· οὕτω *τὸ γινόμενον εἶναι τὸ μέγιστον, ὅταν ὁ α διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη· τὸ δὲ μέγιστον γινόμενον εἶναι* $\frac{\alpha^2}{4}$.

Λύσις 6ʹ. Ἔστω χ τὸ ἓν μέρος· τὸ ἕτερον ἔσται $\alpha-\chi$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν $\chi(\alpha-\chi)$. Ἰσώσωμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀριθμῷ τινι μ· ἔχομεν

$$(2)\qquad \chi(\alpha-\chi)=\mu,$$

ἢ

$$\chi^2-\alpha\chi+\mu=0\cdot$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\mu}}{2}.$$

Ἐφ' ὅσον ὁ 4μ δὲν ὑπερβαίνει τὸν α^2, αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι πραγματικαί· ἤγουν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ ὁ α εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ γινόμενον ἴσον τῷ μ· ἀλλ' ὅταν ὁ 4μ ὑπερβῇ α^2, αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι ἰδανικαί· ἤγουν ἀδύνατον τότε νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις τοῦ α οὕτως, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν μερῶν νὰ ἦναι ἴσον τῷ μ· ἡ μεγίστη λοιπὸν τιμὴ τοῦ 4μ εἶναι α^2· ἄρα ἡ τοῦ μ εἶναι $\frac{\alpha^2}{4}$, ἡ δ' ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ χ εἶναι $\frac{\alpha}{2}$.

Εὐκόλως φαίνεται ἐκ τῆς ἰσότητος (1) τίνι τρόπῳ ἀλλοιοῦται τὸ γινόμενον τῶν μερῶν, ὅταν ἡ διαφορὰ αὐτῶν μεταβάλληται. Ὅσῳ μείζων εἶναι ἡ διαφορὰ αὕτη, τόσῳ μᾶλλον μειοῦται τὸ γινόμενον καὶ δύναται μάλιστα ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρόν. Φαίνεται τοῦτο καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος (2)· διότι ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων, οἷον ὁ χ, ἦναι λίαν μικρός, ἐπειδὴ ὁ ἕτερος εἶναι πάντοτε ἐλάσσων τοῦ α, τὸ γινόμενον ἀποβαίνει ἐπίσης λίαν μικρόν.

§ 259. Μετὰ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνδέονται τὰ ἑξῆς γεωμετρικά.

α΄. *Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων ποῖον τὸ μέγιστον;*

β΄. *Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων καὶ τὴν αὐτὴν ἐχόντων βάσιν τριγώνων ποῖον τὸ μέγιστον;*

Τῶν μὲν ὀρθογωνίων μέγιστον εἶναι τὸ τετράγωνον· διότι ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α τὴν ἡμιπερίμετρον καὶ διὰ χ τὸ ὕψος, τὸ ἐμβαδὸν ἔσται $\chi(\alpha-\chi)$· τὸ γινόμενον δὲ τοῦτο ἔχει τὴν μεγίστην αὐτοῦ ἀξίαν, ὅταν $\chi=\frac{\alpha}{2}$· τότε δὲ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ $\frac{\alpha}{2}$.

Τῶν δὲ τριγώνων μέγιστον εἶναι τὸ ἰσοσκελές· διότι ἐὰν παραστήσωμεν τὴν περίμετρον διὰ 2π, τὴν βάσιν διὰ α, τὰς δὲ ἄλλας πλευρὰς διὰ β καὶ γ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι

$$\sqrt{\pi(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)}\cdot$$

ἡ δὲ μεγίστη τιμὴ τῆς παραστάσεως αὐτῆς, εἴτε τοῦ τετραγώνου αὐτῆς $\pi(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)$, εἶναι ἐκείνη, καθ' ἣν τὸ γινόμενον $(\pi-\beta)(\pi-\gamma)$ τῶν μεταβλητῶν παραγόντων $\pi-\beta$ καὶ $\pi-\gamma$ εἶναι τὸ μέγιστον· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων αὐτῶν εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ α, τὸ γινόμενον $(\pi-\beta)(\pi-\gamma)$ ἔχει τὴν μεγίστην ἀξίαν, ὅταν ἑκάτερος τῶν παραγόντων ἰσῶται τῷ ἡμιαθροίσματι αὐτῶν $\frac{\alpha}{2}$. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\pi-\beta=\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\pi-\gamma=\frac{\alpha}{2}$ συνάγομεν $\beta=\gamma=\pi-\frac{\alpha}{2}$.

§ 260. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. *Διαιρεθήτω ἀριθμός τις α εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν αὐτῶν εἶναι τὸ ἐλάχιστον.*

Λύσις α΄. Ἔστω χ τὸ ἓν μέρος· τὸ ἕτερον ἔσται $\alpha-\chi$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $\chi^2+(\alpha-\chi)^2$· ἔχομεν δὲ

$$\chi^2+(\alpha-\chi)^2=2\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2=2\left(\chi^2-\alpha\chi+\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

$$=2\left[\left(\frac{\alpha}{2}-\chi\right)^2+\left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^2}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}+2\left(\frac{\alpha}{2}-\chi\right)^2 \quad (1).$$

Η τελευταία παράστασις εἶναι ἄθροισμα δύο θετικῶν ἀριθμῶν, ὧν ὁ μὲν $\frac{\alpha^2}{2}$ σταθερός, ὁ δὲ μεταβλητός· ἐπομένως ἡ ἐλαχίστη αὐτῆς τιμὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐλαχίστην τοῦ μεταβλητοῦ μέρους $2\left(\frac{\alpha}{2}-\chi\right)^2$.

Ὅταν $\chi=\frac{\alpha}{2}$, τὸ μέρος τοῦτο εἶναι 0· αὕτη δὲ εἶναι ἡ ἐλαχίστη αὐτοῦ τιμή· διότι κατὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ χ ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι διάφορος τοῦ 0 καὶ θετική· οὕτω *τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἔσεται τὸ ἐλάχιστον, ὅταν $\chi=\frac{\alpha}{2}$· ἤγουν ὅταν ὁ ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη· τὸ δ' ἐλάχιστον ἄθροισμα εἶναι* $\frac{\alpha^2}{2}$.

Λύσις β΄. Θῶμεν

$$\chi^2+(\alpha-\chi)^2=\mu\cdot$$

ὅθεν ἐπιλύοντες

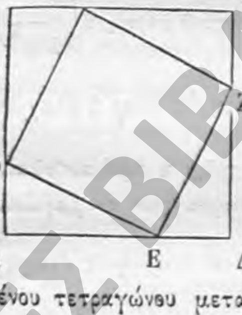
$$\chi=\frac{\alpha\pm\sqrt{2\mu-\alpha^2}}{2}.$$

Ὅπως αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ χ ὦσι πραγματικαί, πρέπει $2\mu=\alpha^2$ ἢ $2\mu>\alpha^2$· ἄρα ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ μ εἶναι $\frac{\alpha^2}{2}$· τότε δὲ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τοῦ χ εἶναι $\frac{\alpha}{2}$.

Ἵνα ἴδωμεν πῶς ἀλλοιοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, ὅταν τὰ μέρη μεταβάλλωνται, θεωρήσωμεν αὐτὸ ὑπὸ τὸ σχῆμα (1). Δῆλον ἐκ τοῦ σχήματος αὐτοῦ ὅτι, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $\frac{\alpha}{2}$, τὸ ἄθροισμα ἐλαττοῦται ἀπὸ α^2 μέχρις $\frac{\alpha^2}{2}$, ὁπότε ἔχει τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμήν· ὅταν δὲ τὸ χ ἐξακολουθῇ αὐξάνον ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$ μέχρι τοῦ α, τὸ ἄθροισμα βαίνει αὐξάνον καὶ τεῖνον πρὸς α^2.

§ 261. Μετὰ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνδέεται τὸ ἑξῆς γεωμετρικόν.

Ἐκ τῶν τετραγώνων, τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν δεδομένῳ τετραγώνῳ, ποῖον τὸ ἐλάχιστον;



Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λάβωμεν τὰ σημεῖα Ε,Ζ,Η,Θ οὕτως, ὥστε ΑΕ=ΔΖ=ΗΓ=ΒΘ, καὶ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΕΖΗΘ ἔσεται καὶ αὐτὸ τετράγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ πρῶτον. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου μεταβάλλεται κατὰ τὴν θέσιν τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ. Ἵνα ἔχωμεν τὸ ἐλάχιστον, παραστήσωμεν διὰ χ τὴν ἀπόστασιν ΑΕ καὶ διὰ α τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου· ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔσται $\sqrt{\chi^2+(\alpha-\chi)^2}$· ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ $\chi^2+(\alpha-\chi)^2$· ἡ δὲ παράστασις αὕτη ἔχει τὴν ἐλαχίστην αὐτῆς ἀξίαν, ὅταν $\chi=\frac{\alpha}{2}$. Οὕτως *ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων τετραγώνων ἐλάχιστον εἶναι ἐκεῖνο, οὗ αἱ κορυφαὶ κεῖνται εἰς τὸ μέσον τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου τετραγώνου.*

Τὰ ἐγγεγραμμένα τετράγωνα ἀλλοιοῦνται, ὅταν ἀλλάττηται ἡ θέσις τῶν κορυφῶν, ὡς ἀλλοιοῦται ἡ παράστασις $\chi^2+(\alpha-\chi)^2$, ὅταν τὸ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρις $\frac{\alpha}{2}$ καὶ ἐντεῦθεν πάλιν μέχρις α (260).

§ 262. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Ἀναλυθήτω ἀριθμός τις α εἰς δύο θετικοὺς παράγοντας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ἐλάχιστον.*

Λύσις α'. Τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ἐλάχιστον, ὅταν οἱ παράγοντες ἦναι ἴσοι, ἤτοι ἕκαστος $\sqrt{\alpha}$· διότι εἴδομεν εἰς τὸ α'. πρόβλημα ὅτι, ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἦναι $2\sqrt{\alpha}$, τὸ μέγιστον γινόμενον τῶν μερῶν εἶναι α· ὅθεν ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἦναι ἔλασσον τοῦ $2\sqrt{\alpha}$, ἐπειδὴ τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν εἶναι ἔλασσον τοῦ $\sqrt{\alpha}$, τὸ μέγιστον γινόμενον εἶναι ἔλασσον τοῦ α· ἐπειδὴ λοιπὸν μετὰ μερῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα ἔλασσον τοῦ $2\sqrt{\alpha}$, ἔχομεν γινόμενα ἐλάσσω τοῦ α, μετὰ μερῶν δὲ ὧν τὸ ἄθροισμα $2\sqrt{\alpha}$, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν γινόμενον ἴσον τῷ α, διὰ τοῦτο $2\sqrt{\alpha}$ εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα δύο τοιούτων μερῶν.

Λύσις β'. Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ τοῦ προβλήματος αὐτοῦ τὴν μέθοδον, ἣν ἠκολουθήσαμεν εἰς τὰς δευτέρας λύσεις τῶν δύο προηγηθέντων προβλημάτων. Ἔστω χ τὸ ἓν μέρος· τὸ ἕτερον εἶναι $\frac{\alpha}{\chi}$. Θῶμεν $\chi+\frac{\alpha}{\chi}=\mu$·

ὅθεν $\chi^2+\alpha=\mu\chi$· ὅθεν $\chi=\frac{+\mu\pm\sqrt{\mu^2-4\alpha}}{2}$.

Ἵνα αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ χ ὦσι πραγματικαί, πρέπει τὸ ὑπόρριζον νὰ ἦναι θετικὸν ἢ 0· ὅθεν ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ μ^2 ἦναι 4α· ἄρα ἡ τοῦ μ εἶναι $2\sqrt{\alpha}$, ἡ δ' ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ χ εἶναι $\sqrt{\alpha}$.

Ἡ τιμὴ τοῦ μ δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὴ ἀνωτέρου ὁρίου· ἤγουν δὲν δύναται νὰ καταστῇ *μεγίστη*· διότι ὁσονδήποτε μεγάλη κἂν ὑποτεθῇ, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ χ εἰσὶ πραγματικαί· δύναται λοιπὸν νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μεγάλη.

§ 263. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα συνδέεται μετὰ τοῦ ἑξῆς γεωμετρικοῦ. *Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν μ^2, ποῖον τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον;* Τὸ ἄθροισμα τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου πρέπει νὰ ἦναι τὸ ἐλάχιστον, ἐνῷ τὸ γινόμενον εἶναι μ^2· ἄρα κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, τὸ ζητούμενον εἶναι τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ μ.

§ 264. ΠΡΟΒΛΗΜΑ δ'. *Ἐγγράψαι ἐν τριγώνῳ, οὗ τὸ ὕψος α, ἡ δὲ βάσις β, ὀρθογώνιον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ μέγιστον.*

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τοιοῦτον μέγιστον· διότι, ἵνα ἐγγράψωμεν ὀρθογώνιον ἐν τριγώνῳ, φέρομεν παράλληλον τῆς βάσεως, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων, ἔνθα ἡ παράλληλος συναντᾷ τὰς δύο ἄλλας πλευράς, καθέτους ἐπὶ τὴν βάσιν· ὅθεν ὅταν ἡ παράλληλος ὀλίγον ἀπέχῃ τῆς κορυφῆς, οὔσης τότε τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου λίαν μικρᾶς, τοῦ δὲ ὕψους ἐλάσσονος πάντοτε τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι λίαν μικρόν· ἐπίσης ὅταν ἡ παράλληλος ὀλίγον ἀπέχῃ τῆς βάσεως, τὸ ἐμβαδὸν καθίσταται λίαν μικρόν· ἐν τῷ μεταξὺ λοιπὸν πρέπει νὰ διέλθῃ διά τινος μεγίστης τιμῆς.

Ἔστωσαν χ τὸ ὕψος καὶ y ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου· καλοῦντες μ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἔχομεν

$$(1)\quad \chi y=\mu\cdot$$

εὑρίσκομεν ἔτι εὐκόλως διὰ τοῦ σχήματος τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \alpha-\chi :: \beta : y,$$

εἴτε

$$(2)\quad \alpha y=(\alpha-\chi)\beta.$$

Ἀπαλείφοντες ἐκ τῶν (1) καὶ (2) τὸν y, συνάγομεν

$$(3)\quad \chi^2-\alpha\chi+\frac{\alpha\mu}{\beta}=0\cdot$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\frac{4\alpha\mu}{\beta}}}{2}.$$

Ὅπως αἱ τιμαὶ αὗται ὦσι πραγματικαί, πρέπει $\frac{4\alpha\mu}{\beta}<\alpha^2$, ἢ $\frac{4\alpha\mu}{\beta}=\alpha^2\cdot$ ὅθεν ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ μ εἶναι $\frac{\alpha\beta}{4}$, καθ' ἣν $\chi=\frac{\alpha}{2}$. Οὕτω *τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ μέγιστον, ὅταν τὸ ὕψος αὐτοῦ ἦναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου· τότε δὲ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.*

Δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα αὐτὸ καὶ ἄνευ ἐπιλύσεως τῆς (3). Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1) τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (2), ἔχομεν $\frac{\beta\chi(\alpha-\chi)}{\alpha}$. Ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς παραστάσεως αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγίστην τῆς $\chi(\alpha-\chi)$, τῶν α καὶ β ὄντων σταθερῶν· τὸ δὲ γινόμενον $\chi(\alpha-\chi)$, οὗ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων εἶναι α, ἔχει τὴν μεγίστην τιμὴν, ὅταν $\chi=\frac{\alpha}{2}$.

§ 265. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. *Ἐκ τῶν περὶ δεδομένην σφαῖραν γεγραμμένων κώνων τίς ὁ ἐλάχιστος;*

Ἵνα περιγράψωμεν εἰς σφαῖραν κῶνον, φέρομεν ἐπὶ μεγίστου κύκλου διάμετρον καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς κάθετον, ἀπό τινος δὲ σημείου τῆς περιφερείας ἐφαπτομένην, ἣν περατοῦμεν ἀφ' ἑνὸς εἰς τὴν ἐπὶ τὴν διάμετρον κάθετον, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τὴν διάμετρον αὐτὴν προεκβεβλημένην· ὁ κῶνος, ὁ παραγόμενος ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου περὶ τὴν πλευρὰν, τὴν περιέχουσαν τὴν διάμετρον, εἶναι περιγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν.

Ἔστω χ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, y ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ καὶ α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι $\frac{1}{3}\pi y^2\chi$. Θῶμεν

$$(1)\qquad \tfrac{1}{3}\pi y^2\chi=\mu.$$

Εὑρίσκομεν εὐκόλως ἐκ τοῦ σχήματος $y:\alpha::\chi:\sqrt{\chi(\chi-2\alpha)}$,

εἴτε
$$(2)\qquad y^2=\frac{\alpha^2\chi}{\chi-2\alpha}.$$

Ἀπαλοιφὴ τοῦ y^2 μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2)

$$(3)\qquad \tfrac{1}{3}\pi\frac{\alpha^2\chi^2}{\chi-2\alpha}=\mu.$$

Ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς τὸν χ καὶ διερευνῶντες τοὺς ὅρους, ἐφ' οἷς τὸ πρόβλημα δυνατὸν, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα, θέλομεν ἀνεύρει τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τοῦ μ. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ προβῶμεν καὶ ὡς ἕπεται.

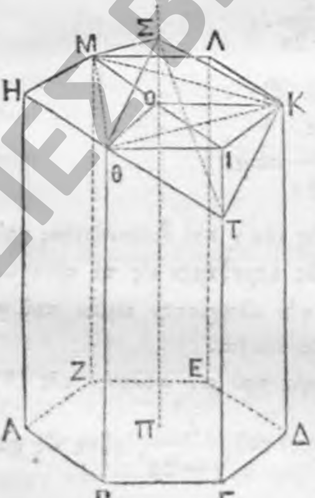
Πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ α'. μέλους τῆς (3), ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τοῦ $\frac{\chi^2}{\chi-2\alpha}$, αὕτη δὲ πάλιν εἰς τὴν μεγίστην τοῦ ἀντιστρόφου κλάσματος $\frac{\chi-2\alpha}{\chi^2}$· ἔχομεν δὲ

$$\frac{\chi-2\alpha}{\chi^2}=\frac{1}{\chi}\cdot\frac{\chi-2\alpha}{\chi}=\frac{1}{2\alpha}\times\frac{2\alpha}{\chi}\times\left(1-\frac{2\alpha}{\chi}\right).$$

ὅθεν ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ $\frac{\chi-2\alpha}{\chi^2}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγίστην τοῦ

$\frac{2\alpha}{\chi}\times\left(1-\frac{2\alpha}{\chi}\right)$· ἡ τελευταία αὕτη παράστασις εἶναι γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα σταθερὸν καὶ ἴσον τῇ μονάδι· ἑπομένως ἔχομεν τὸ μέγιστον γινόμενον, λαμβάνοντες ἕκαστον τῶν παραγόντων ἴσον τῷ $\frac{1}{2}$· ἐντεῦθεν δ' ἕπεται $\chi=4\alpha$. Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3), εὑρίσκομεν $\mu=\frac{8}{3}\pi\alpha^3$. Οὕτως ὁ *ἐλάχιστος τῶν περιγεγραμμένων κώνων ἔχει ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας καὶ ὄγκον διπλάσιον τοῦ τῆς σφαίρας.* Ἡ ὁλικὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια εἶναι $\pi y\sqrt{\chi^2+y^2}+\pi y^2=8\pi\alpha^2$, εἶναι λοιπὸν *διπλασία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.* Τέλος ἡ βάσις, οὖσα $\pi y^2=2\pi\alpha^2$, εἶναι καὶ αὐτὴ *διπλασία μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.*

§ 266. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤ'. *Κύτταροι τῶν μελισσῶν.*

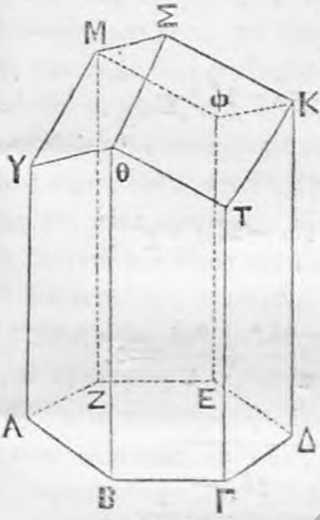


(Σχ. 1).

Ἔστω τὸ ὀρθὸν ἑξαγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜ, οὗ ἡ βάσις κανονικὸν ἑξάγωνον. Προεκβληθήτω ἡ τὰ κέντρα τῶν βάσεων ἑνοῦσα εὐθεῖα ΟΠ μέχρι Σ, ἀπὸ δὲ τοῦ Σ καὶ τῶν πλευρῶν ΘΚ, ΜΚ, ΘΜ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΘΚΜ ἀχθήτωσαν τὰ ἐπίπεδα ΣΘΚ, ΣΜΚ, ΣΜΘ. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ τέμνουσι τὸ πρίσμα· π. χ. τὸ ΣΘΚ τέμνει τὸ πρίσμα κατὰ τὴν τομὴν ΘΚΤ.

Τὸ σχῆμα ΣΘΚΤ εἶναι ῥομβοειδές· διότι φανερὸν ὅτι ΣΘ=ΣΚ καὶ ΤΘ=ΤΚ· ἵνα δὲ δείξωμεν ὅτι καὶ ΣΘ=ΤΘ, θεωρήσωμεν τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ΣΟΘΚ καὶ ΤΘΙΚ, ὧν αἱ βάσεις εἰσὶν ΟΘΚ καὶ ΘΙΚ, αἱ δὲ κορυφαὶ Σ καὶ Τ· αἱ βάσεις ΟΘΚ καὶ ΘΙΚ εἰσὶν ἴσαι (ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου)· πρὸς δὲ ἡ κλίσις ΟΘΚΣ τῶν ἑδρῶν ΟΘΚ καὶ

ΣΘΚ εἶναι ἴση τῇ κλίσει ΤΘΚΙ τῶν ἑδρῶν ΙΘΚ καὶ ΤΘΚ, ὡς κατὰ κορυφήν· ἐὰν λοιπὸν στραφῇ ἡ κάτω πυραμὶς περὶ τὴν ΘΚ, μέχρις οὗ ἡ βάσις ΘΙΚ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΘΟΚ, ἡ κάθετος ΙΤ θέλει κατευθυνθῇ κατὰ τὴν κάθετον ΟΣ, καὶ ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν, ἡ ἕδρα ΘΚΤ πεσεῖται ἐπὶ τῆς ΘΚΣ· ὅθεν ΘΤ=ΘΣ.



(Σχ. 2).

Ἀφαιρεθήτωσαν ἀπὸ τοῦ πρίσματος αἱ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΣΘΚ, ΣΜΚ ΣΜΘ χωριζόμεναι πυραμίδες, ἀντ' αὐτῶν δὲ ληφθήτωσαν αἱ ἴσαι ΣΟΘΚ, ΣΟΜΚ, ΣΟΜΘ· σχηματισθήσεται οὕτω στερεόν, ὅπερ ἀφ' ἑνὸς περατοῦται εἰς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕΖ, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τὰ τρία ῥομβοειδῆ ΣΘΚΤ, ΣΜΘΥ, ΣΚΜΦ (Σχ. 2), στερεὸν ἰσοδύναμον τῷ πρίσματι, ὁπουδήποτε τῆς προεκβολῆς τῆς ΟΠ κἂν ληφθῇ τὸ σημεῖον Σ.

Ἀλλ' εἰ καὶ δὲν μεταβάλλεται ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω σχηματιζομένου στερεοῦ, ἡ ἐπιφάνεια ὅμως αὐτοῦ μεταβάλλεται. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Σ οὕτως, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ νὰ ἦναι ἡ *ἐλαχίστη*.

Ἔστω χ ἡ ἀπόστασις ΣΟ, α ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ β τὸ ὕψος ΒΘ τοῦ ἀρχικοῦ πρίσματος (Σχ. 1). Ἡ πλευρικὴ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ (Σχ. 2), συγκειμένη ἐξ ἓξ τραπεζίων, οἷον τὸ ΒΘΤΓ, ἔχει μέτρον $3\alpha(\text{ΒΘ}+\text{ΓΤ})$, εἴτε $3\alpha(2\beta-\chi)$· τὰ δὲ τρία ῥομβοειδῆ, εἰς ἃ λήγει τὸ στερεὸν πρὸς τὰ ἄνω, ἔχουσι μέτρον $3\text{ΘΚ}\times\text{ΣΡ}$· ἀλλὰ $\text{ΘΚ}=\alpha\sqrt{3}$ (ὁ λόγος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι $\sqrt{3}$) καὶ $\text{ΣΡ}=\sqrt{\overline{\text{ΣΟ}}^2+\overline{\text{ΟΡ}}^2}=\sqrt{\chi^2+\frac{\alpha^2}{4}}$· οὕτως ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ (Σχ. 2), ἐξαιρουμένης τῆς κάτω βάσεως, εἶναι

$$3\alpha(2\beta-\chi)+3\alpha\sqrt{3}\sqrt{\chi^2+\frac{\alpha^2}{4}}.$$

Ἵνα εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ, καθ' ἣν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ἐλαχίστη, ἰσώσωμεν τὴν παράστασιν αὐτὴν ἀριθμῷ τινι, ὃν πρὸς συντομίαν παραστήσωμεν διὰ $3\alpha\mu$· ἔχομεν οὕτω τὴν ἐξίσωσιν

$$2\beta-\chi+\sqrt{3}\sqrt{\chi^2+\frac{\alpha^2}{4}}=\mu,$$

ἢ

$$(1)\quad \sqrt{3\chi^2+\frac{3\alpha^2}{4}}=\mu-2\beta+\chi.$$

ὑψοῦντες δ' εἰς τὸ τετράγωνον

$$3\chi^2+\frac{3\alpha^2}{4}=(\mu-2\beta)^2+2(\mu-2\beta)\chi+\chi^2.$$

ἐντεῦθεν

$$(2)\quad \chi^2-(\mu-2\beta)\chi-\frac{(\mu-2\beta)^2}{2}+\frac{3\alpha^2}{8}=0\cdot$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{(\mu-2\beta)\pm\sqrt{3(\mu-2\beta)^2-\frac{3\alpha^2}{2}}}{2}.$$

Τὸ α'. μέλος τῆς (1) εἶναι μεῖζον τοῦ χ· ἄρα καὶ τὸ β'. ἐπίσης· ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς $\mu-2\beta$ εἶναι θετικός. Θῶμεν $\mu-2\beta=\mu'$, αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ τοῦ χ ἀνάγονται εἰς τὰς

$$\chi=\frac{\mu'\pm\sqrt{3\left(\mu'^2-\frac{\alpha^2}{2}\right)}}{2}\cdot$$

ἵνα τὸ χ ᾖ πραγματικόν, πρέπει

$$\mu'^2>\frac{\alpha^2}{2}.$$

ὅθεν ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ μ' (ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐλαχίστην τοῦ μ) εἶναι $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$· ἡ δ' ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ χ εἶναι $\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{4}$. Τοσαύτη λοιπὸν πρέπει νὰ ἦναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ ἀπὸ τῆς ἄνω βάσεως τοῦ πρίσματος, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ ᾖ ἡ ἐλαχίστη.

Ἐπὶ τοιούτῳ σχεδίῳ κατασκευάζουσιν αἱ μέλισσαι τοὺς κυττάρους, ἐν οἷς ἀποταμιεύουσι τὸ μέλι. Ἕκαστος πλακοῦς φέρει ἑκατέρωθεν τοὺς κυττάρους, οἵτινές εἰσι κατεσκευασμένοι κατὰ τὸ Σχ. 2, στομίου μὲν ὄντος τοῦ ἑξαγώνου, τοῦ δὲ πυθμένος ὁριζομένου ὑπὸ τῶν τριῶν ἴσων ῥομβοειδῶν τετραπλεύρων, ὅπως ἡ ἐπιφάνεια ᾖ ὅσον οἷόν τε μικρά, πρὸς οἰκονομίαν τοῦ κηροῦ. Οἱ ἀντικείμενοι πυθμένες εἰσὶν οὕτω συνηρμοσμένοι, ὥστε μεταξὺ αὐτῶν νὰ μὴ ὑπάρχῃ κενόν· ἐπίσης καὶ οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς προσόψεως τοῦ πλακοῦντος κύτταροί εἰσι συνηρμολογημένοι οὕτως, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ μεταξὺ κενόν, ἑκάστης τῶν ἑδρῶν τοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος κοινῆς οὔσης εἰς δύο παρακειμένους κυττάρους.

§ 267. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ϛ'. *Εὑρεῖν μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλεται τὸ τριώνυμον* $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.

Πάντα τὰ προβλήματα, ἅπερ μέχρι τοῦδε ἐπραγματεύθημεν, ἀνάγονται εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἀλλοιώσεων τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, συμμεταβαλλομένου μετὰ τοῦ χ. Θέμεν

$$(1)\quad \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\mu\cdot$$

ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$(2)\quad \chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha\mu}}{2\alpha}.$$

Ἵνα αἱ τιμαὶ αὗται ὦσι πραγματικαί, πρέπει

$$\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha\mu>0\cdot$$

ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης ἕπεται

$$(3)\quad 4\alpha\mu>4\alpha\gamma-\beta^2.$$

α'. Ἐὰν ὁ α ἦναι θετικός, ἔχομεν

$$\mu>\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}.$$

ἑπομένως $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ εἶναι τότε ἡ *ἐλαχίστη τιμὴ* τοῦ μ.

β'. Ἐὰν δ' ὁ α ἦναι ἀρνητικὸς, διαιροῦντες τὴν ἀνισότητα (3) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ 4α, συνάγομεν (§ 245)

$$\mu < \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}.$$

ἑπομένως $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ εἶναι τότε *ἡ μεγίστη τιμὴ* τοῦ μ.

Κατὰ τὴν μεγίστην ἢ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τοῦ μ, τὸ ῥιζικὸν τῆς τιμῆς (2) μηδενίζεται· ἑπομένως ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ χ εἶναι $\frac{-\beta}{2\alpha}$.

§ 268. **Συμμεταβολὴ τοῦ τριωνύμου (1).** Ἴδωμεν νῦν πῶς συμμεταβάλλεται τὸ τριώνυμον (1), ὅταν ὁ χ μεταβάλληται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Τὸ τριώνυμον αὐτὸ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὸ ἑξῆς σχῆμα

$$\alpha\left[\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right].$$

Ἴδωμεν ἐν πρώτοις πῶς συμμεταβάλλεται ὁ ἐν παρενθέσει παράγων. Ὅταν ὁ χ μεταβάλλεται ἀπὸ τοῦ $-\infty$, τὸ $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, ὅπερ εἶναι πάντοτε θετικὸν, συμμεταβάλλεται ἀπὸ $+\infty$ καὶ βαίνει ἐλαττούμενον· διότι ἡ ἀπόλυτος ἀξία τοῦ $\chi+\frac{\beta}{2\alpha}$ βαίνει ἐλαττουμένη ἀπὸ τοῦ $-\infty$· ὅθεν καὶ ἅπας ὁ ἐν παρενθέσει ἀριθμὸς βαίνει ἐλαττούμενος. Ὅταν $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἔχομεν $\chi+\frac{\beta}{2\alpha}=0$· ἑπομένως καὶ $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0$· οὕτω $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, ὅπερ εἶναι πάντοτε θετικὸν, ἔχει τότε τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμήν· ὅθεν ἐπίσης καὶ ἅπας ὁ ἐν παρενθέσει ἀριθμὸς, ὅστις τότε γίνεται $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$. Ὅταν ὁ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι $+\infty$, ἡ ἀπόλυτος ἀξία τοῦ δυωνύμου $\chi+\frac{\beta}{2\alpha}$ βαίνει αὐξάνουσα ἐπ' ἄπειρον· ἑπομένως καὶ ἡ τοῦ $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$· ὅθεν ὁ ἐν παρενθέσει παράγων συμμεταβάλλεται ἀπὸ τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$ μέχρι τοῦ $+\infty$:

Εἴδομεν πῶς συμμεταβάλλεται ὁ ἐν παρενθέσει παράγων· τὸ τριώνυμον (1), ὃν γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸν παράγοντα αὐτόν, συμμεταβάλλεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅταν ὁ α ἦναι θετικός· ἤγουν ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καὶ ἐντεῦθεν πάλιν μέχρι τοῦ $+\infty$· ὅταν δ' ὁ α ἦναι ἀρνητικός, τὸ τριώνυμον συμμεταβάλλεται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καὶ ἐντεῦθεν πάλιν μέχρι τοῦ $-\infty$:

§ 269. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Π'. *Εὑρεῖν μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλεται τὸ κλάσμα* $\frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'}$.

Ἀκολουθοῦντες τὴν συνήθη μέθοδον τίθεμεν

$$(1)\qquad \frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'}=\mu\cdot$$

ἐντεῦθεν συνάγομεν

$$(\alpha-\alpha'\mu)\chi^2+(\beta-\beta'\mu)\chi+\gamma-\gamma'\mu=0;$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{-(\beta-\beta'\mu)\pm\sqrt{(\beta-\beta'\mu)^2-4(\alpha-\alpha'\mu)(\gamma-\gamma'\mu)}}{2(\alpha-\alpha'\mu)},$$

ἤ, διατασσομένου τοῦ ὑποῤῥίζου ὡς πρὸς τὸ μ,

$$(2)\ \chi=\frac{-(\beta-\beta'\mu)\pm\sqrt{(\beta'^2-4\alpha'\gamma')\mu^2-2(\beta\beta'-2\alpha\gamma'-2\gamma\alpha')\mu+(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2(\alpha-\alpha'\mu)}.$$

Ἵνα αἱ τιμαὶ τοῦ χ ὦσι πραγματικαί, πρέπει τὸ ὑπόῤῥιζον νὰ ἦναι θετικὸν ἢ 0· ἤτοι

$$(3)\quad (\beta'^2-4\alpha'\gamma')\mu^2-2(\beta\beta'-2\alpha\gamma'-2\gamma\alpha')\mu+\beta^2-4\alpha\gamma \geqq 0;$$

Διακριτέον ἐνταῦθα τρεῖς περιπτώσεις.

α΄. Ὅταν $\beta'^2 - 4\alpha'\gamma'$ ἦναι θετικόν, ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς (3) ἦναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, τὸ α΄. μέλος εἶναι θετικὸν ἐκ πάσης τιμῆς τοῦ μ, περιεχομένης μεταξὺ τοῦ $-\infty$ καὶ τῆς ἐλάσσονος ῥίζης, ἢ μεταξὺ τοῦ $+\infty$ καὶ τῆς μείζονος ῥίζης (§ 220)· οὕτως ὁ μ δύναται νὰ ἔχῃ πᾶσαν τιμὴν κατωτέραν τῆς ἐλάσσονος ἢ ἀνωτέραν τῆς μείζονος ῥίζης, αἱ δὲ ῥίζαι αὗται ἔσονται ἡ μὲν ἐλάσσων *μεγίστη*, ἡ δὲ μείζων *ἐλαχίστη* τιμὴ τοῦ μ (*). Ἐὰν δ' αἱ ῥίζαι τῆς (3) ἦναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ἢ ἰδανικαί, τὸ τριώνυμον (3) εἶναι θετικόν, οἱαδήποτ' ἂν ᾖ ἡ τιμὴ τοῦ μ (§§ 221 καὶ 222)· ἑπομένως ὁ μ δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν καὶ δὲν ὑπάρχει κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

β΄. Ὅταν $\beta'^2 - 4\alpha'\gamma'$ ἦναι ἀρνητικόν, αἱ ῥίζαι τῆς (3) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ἰδανικαὶ ἢ πραγματικαὶ καὶ ἴσαι· διότι τότε τὸ τριώνυμον (3) ἤθελεν εἶσθαι ἀρνητικὸν ἐκ πάσης τιμῆς τοῦ μ, ἐκτὸς μιᾶς μόνης, τῆς μηδενιζούσης αὐτό, ἐὰν τυχὸν αἱ ῥίζαι ἦναι ἴσαι (§§ 221 καὶ 222)· ἑπομένως ὁ χ καὶ ὁ μ οὐδέποτε ἤθελον εἶσθαι ἀμφότεροι πραγματικοί, ἢ ἅπαξ μόνον· ὅπερ ἀπαράδεκτον· διότι φανερὸν ἐκ τοῦ σχήματος τῆς παραστάσεως (1) ὅτι εἰς πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ πραγματικὴ τοῦ μ. Αἱ ῥίζαι λοιπὸν τοῦ τριωνύμου (3) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Τὸ τριώνυμον εἶναι τότε θετικὸν ἐκ πάσης τιμῆς τοῦ μ, περιεχομένης μεταξὺ τῶν ῥιζῶν, ἀρνητικὸν δ' ἐκ πάσης τιμῆς τοῦ μ, μὴ περιεχομένης μεταξὺ τῶν ῥιζῶν (§ 220)· ὅθεν ὁ μ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλας τιμὰς ἢ τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ῥιζῶν αὐτῶν, ὧν ἡ μείζων ἔσεται *μέγιστον*, ἡ δ' ἐλάσσων *ἐλάχιστον*.

γ΄. Ὅταν $\beta'^2 - 4\alpha'\gamma' = 0$, τὸ τριώνυμον (3) γίνεται πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν μ· ἐκ δὲ τῆς ἀνισότητος τοῦ α΄. βαθμοῦ (3),

---

(*) Κατὰ τὸν ἐν § 256 ὁρισμὸν τιμή τις τοῦ συμμεταβλητοῦ, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τιμὴν α τοῦ ἀπολύτου μεταβλητοῦ, εἶναι μεγίστη οὐ μόνον ὅταν ἦναι ἡ μεγίστη πασῶν τῶν τιμῶν, ἃς δύναται νὰ λάβῃ ἡ συμμεταβλητή, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἦναι μείζων πασῶν ἐκείνων, ἃς λαμβάνει, ὅταν ὁ ἀπόλυτος μεταβλητὸς λαμβάνῃ τιμὰς ὀλίγον διαφερούσας τοῦ α, μείζονας ἢ ἐλάσσονας. Ἐντεῦθεν δυνατὸν μεγίστη τις τιμὴ νὰ ἦναι ἐλάσσων ἑτέρας, ἐλαχίστης τιμῆς τοῦ αὐτοῦ συμμεταβλητοῦ, ὡς συμβαίνει καὶ ἐνταῦθα.

εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον ἢ τὸ μέγιστον ὅριον τοῦ μ, καθόσον ὁ συντελεστὴς τοῦ μ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός (§ 254).

§ 270. *Συμμεταβολὴ τῆς παραστάσεως* $\frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'}$.

Ἵνα ἴδωμεν τίνι τρόπῳ συμμεταβάλλεται ἡ κλασματικὴ παράστασις

$$(1)\qquad \frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'},$$

εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, οὗτινος εἶναι ἐπιδεκτική, καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ χ, ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῷ ἡγηθέντι παραγράφῳ. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἵτινες καθιστῶσιν αὐτὴν 0 ἢ ∞· πρὸς τοῦτο δ' ἐξισοῦμεν τῷ 0 τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστήν. Εὑρίσκομεν ἔτι τὰς τιμὰς τῆς παραστάσεως αὐτῆς, ὅταν $\chi=\pm\infty$· πρὸς τοῦτο δὲ διαιροῦμεν τοὺς δύο ὅρους διὰ χ^2, καὶ ἀκολούθως ποιοῦμεν $\chi=\pm\infty$. Τέλος εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν αὐτῆς, ὅταν $\chi=0$. Γράφομεν κατὰ δύο σειρὰς τὰ διάφορα αὐτὰ ἐξαγόμενα, κατὰ μὲν τὴν μίαν τὰς τιμὰς τοῦ χ, ὑπ' αὐτὴν δὲ τὰς ἀντιστοιχούσας τῆς (1). Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἰδιαιτέρων αὐτῶν τιμῶν εὔκολον εἶναι νὰ διΐδωμεν τίνι τρόπῳ συμμεταβάλλεται ἡ παράστασις (1).

Ἔστω, π. χ., ἡ παράστασις

$$y=\frac{\chi^2-3\chi+2}{\chi^2-2\chi-8}.$$

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα τὸ $\beta'^2-4\alpha'\gamma'$ εἶναι θετικόν, εἴμεθα εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐν τῷ ἡγηθέντι παραγράφῳ περιπτώσεων. Ἐξισοῦντες τὴν παράστασιν y τῷ μ καὶ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς τὸν χ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{3-2\mu\pm\sqrt{36\mu^2-36\mu+1}}{2-2\mu}.$$

ἐξισοῦντες τὸ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τριώνυμον τῷ 0, εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας

$$\mu'=\frac{3-2\sqrt{2}}{6},\quad \mu''=\frac{3+2\sqrt{2}}{6}.$$

μ' εἶναι μέγιστον, μ'' ἐλάχιστον. Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ χ εἰσὶ

$$\chi'=10-6\sqrt{2},\quad \chi''=10+6\sqrt{2}.$$

Αἱ τιμαὶ τοῦ χ, αἱ μηδενίζουσαι τὴν y, εἰσὶν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-3\chi+2=0,$$

αἵτινές εἰσιν 1 καὶ 2. Αἱ τιμαὶ τοῦ χ, αἱ καθιστῶσαι τὴν y ἄπειρον, εἰσὶν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-2\chi-8=0,$$

αἵτινές εἰσὶ -2 καὶ 4 (*). Ἵνα ἴδωμεν τί ἀποβαίνει ἡ y, ὅταν $\chi=\pm\infty$, διαιροῦμεν τοὺς δύο ὅρους τῆς y διὰ χ^2 καὶ εὑρίσκομεν

$$y=\frac{1-\frac{3}{\chi}+\frac{2}{\chi^2}}{1-\frac{2}{\chi}-\frac{8}{\chi^2}}.$$

Ὅταν ὁ χ αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, ὅ,τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τῆς y τείνουσιν ἀπεριορίστως πρὸς $+1$· ὅθεν καὶ τὸ πηλίκον, ἤτοι ἡ y, τείνει πρὸς $+1$. Τέλος ποιοῦντες $\chi=0$, εὑρίσκομεν ἀντιστοιχοῦσαν τῆς y τιμὴν $-\frac{1}{4}$.

Γράφοντες νῦν κατὰ σειρὰν τὰς θεωρηθείσας τιμὰς τοῦ χ καὶ ὑποκάτω τὰς ἀντιστοιχούσας τοῦ y, ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

$$\chi=-\infty,\ -2,\ 0,\ 1,\ 10-6\sqrt{2},\ 2,\ 4,\ 10+6\sqrt{2},\ +\infty.$$

$$y=+1,\ \pm\infty,\ -\tfrac{1}{4}\ 0,\ \frac{3-2\sqrt{2}}{6}\ 0,\ \mp\infty,\ \frac{3+2\sqrt{2}}{6},\ +1.$$

Οὕτως ὅταν ὁ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ -2, ἡ συμμεταβλητὴ βαίνει ἀπὸ τοῦ $+1$ μέχρι τοῦ $+\infty$· αὐξάνοντος

(*) Ὅταν ὁ χ λαμβάνῃ τιμὰς προσεγγιζούσας πρὸς τὰς -2 καὶ 4, ὁ μὲν ἀριθμητὴς τῆς y τείνει πρὸς τὰ ὅρια 12 καὶ 6, ὁ δὲ παρονομαστὴς βαίνει ἐλαττούμενος ἀπεριορίστως· ἄρα ἡ y βαίνει αὐξάνουσα ἀπεριορίστως· τοῦτο δ' ἐννοοῦμεν λέγοντες ὅτι, ὅταν $\chi=-2$ ἢ $\chi=4$, ἡ y γίνεται ∞ (§ 152). Ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ ἀπείρου αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι, ὄντος τοῦ ἀριθμητοῦ θετικοῦ, ὅταν αἱ τιμαὶ πλησιάζωσι πρὸς τὰς -2 καὶ $+4$, ἐὰν μὲν χωρῶμεν ἀπὸ ἐλασσόνων τοῦ -2 τιμῶν πρὸς τὸν -2, ὁ παρονομαστὴς εἶναι διηνεκῶς θετικός (§ 221) ἑπομένως ἡ y βαίνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον· ἐὰν δὲ χωρῶμεν ἀπὸ μειζόνων τοῦ -2 τιμῶν πρὸς τὸν -2, ὁ παρονομαστὴς εἶναι διηνεκῶς ἀρνητικός· ἑπομένως ἡ y βαίνει τότε πρὸς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον. Διὰ ὅμοιον λόγον ὅταν μὲν χωρῶμεν ἀπὸ ἐλασσόνων τοῦ 4 τιμῶν πρὸς τὸν 4, ἡ y βαίνει πρὸς τὸ $-\infty$, ὅταν δ' ἀπὸ μειζόνων τοῦ 4, ἡ y βαίνει πρὸς τὸ $+\infty$.

τοῦ χ ἀπὸ τοῦ -2 μέχρι τοῦ 0, ἐκεῖθεν δὲ μέχρι τοῦ 1 καὶ ἔτι πρόσω μέχρι $10-6\sqrt{2}$, ἡ συμμεταβλητὴ μεταπηδῶσα αἴφνης εἰς τὸ $-\infty$, βαίνει αὐξάνουσα μέχρις $-\frac{1}{4}$, 0 καὶ $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$, ὁπότε λαμβάνει τιμὴν μεγίστην· αὐξάνοντος ἔτι τοῦ χ ἀπὸ $10-6\sqrt{2}$ μέχρι 2 καὶ ἐκεῖθεν μέχρι 4, ἡ συμμεταβλητὴ βαίνει ἐλαττουμένη μέχρι 0 καὶ ἐκεῖθεν μέχρι τοῦ $-\infty$· αὐξάνοντος ἔτι τοῦ χ ἀπὸ 4 μέχρι $10+6\sqrt{2}$, ἡ συμμεταβλητὴ μεταπηδᾷ πάλιν αἴφνης εἰς τὴν τιμὴν $+\infty$ καὶ ἐκεῖθεν βαίνει ἐλαττουμένη μέχρι $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$, ὁπότε ἀποβαίνει ἐλάχιστον· αὐξάνοντος τέλος τοῦ χ ἀπὸ $10+6\sqrt{2}$ μέχρι $+\infty$, ἡ συμμεταβλητὴ βαίνει αὐξάνουσα ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης τιμῆς μέχρι $+1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λυθέντων προβλημάτων ἐνοήθη τίς ὁ γενικὸς τρόπος, καθ' ὃν ἐν τῇ στοιχειώδει Ἀλγέβρᾳ βαίνομεν εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων μεγίστων καὶ ἐλαχίστων. Ἵνα εὕρωμεν τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα, ὧν εἶναι ἐπιδεκτικὴ δεδομένη τις συμμεταβλητή, ἐξισοῦμεν αὐτὴν γράμματί τινι μ, ἐπιλύομεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸν ἀπόλυτον μεταβλητὸν χ καὶ ἐρευνῶμεν ἀκολούθως τίς εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ μ, ὑπεράνω τῆς ὁποίας αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τοῦ χ ἀποβαίνουσιν ἰδανικαί, ἢ τίς ἡ ἐλαχίστη, κάτω τῆς ὁποίας αἱ τοῦ χ ἀποβαίνουσιν ἐπίσης ἰδανικαί· ἡ πρώτη εἶναι μέγιστον, ἡ δὲ δευτέρα ἐλάχιστον. Ἀλλὰ τότε μόνον δυνάμεθα νὰ φθάνωμεν εἰς τὰ συμπεράσματα αὐτά, ὅταν ἔχωμεν ἐξίσωσιν τοῦ β'. βαθμοῦ· ἐκεῖνα λοιπὸν μόνον τὰ προβλήματα μεγίστων καὶ ἐλαχίστων δυνατὸν νὰ λύωνται ἐν τῇ στοιχειώδει Ἀλγέβρᾳ, ὅσα κατὰ τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος μέθοδον ἄγουσιν εἰς ἐξισώσεις τοῦ β'. βαθμοῦ. Ἀλλὰ δυνατὸν νὰ γίνωνται καὶ ἰδιαίτεραι λύσεις, μὴ ἐφαρμοζομένης τῆς γενικῆς μεθόδου, ὡς ἐγένετο εἰς τὰ τρία πρῶτα προβλήματα· οὕτω δὲ δυνατὸν νὰ λύωνται ἐν τῇ στοιχειώδει Ἀλγέβρᾳ καὶ προβλήματα, εἰς ἃ δὲν ἐφαρμόζεται ἡ ἀνωτέρω μέθοδος.

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα συμμεταβλητῶν βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου.

§ 271. ΠΡΟΒΛΗΜΑ θ'. *Μερίσαι ἀριθμὸν α εἰς μέρη ν τοιαῦτα,* *ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τὸ μέγιστον.* Λέγω ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι τὸ μέγιστον, ὅταν τὰ μέρη ἦναι ἴσα· διότι, ὅταν αὐτὰ ἦναι ἄνισα, δυνάμεθα ν' αὐξήσωμεν τὸ γινόμενον, λαμβάνοντες ἀνθ' ἑκατέρου δύο ἀνίσων παραγόντων τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν, τοὺς δὲ λοιποὺς ἀφίνοντες τοὺς αὐτούς (§ 258)· ἐπομένως ἵνα τὸ γινόμενον ᾖ τὸ μέγιστον, πρέπει οἱ παράγοντες νὰ ἦναι ἴσοι, ἤγουν ἕκαστος ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{\nu}$.

Ἐφαρμογή. *Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων μέγιστον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.* Τῆς σταθερᾶς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου οὔσης π, καὶ α, β, γ τῶν μεταβλητῶν πλευρῶν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι

$$\sqrt{\pi(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)}.$$

Ἡ μεγίστη ἀξία τῆς παραστάσεως αὐτῆς, εἴτε τοῦ τετραγώνου αὐτῆς, ἀντιστοιχεῖ τῇ μεγίστῃ τοῦ τῶν μεταβλητῶν παραγόντων γινομένου $(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν παραγόντων εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ π, τὸ γινόμενον ἔξει τὴν μεγίστην ἀξίαν, ὅταν $\pi-\alpha=\pi-\beta=\pi-\gamma=\frac{\pi}{3}$· αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι τότε ἴσαι.

§ 272. Ὅταν εἰς οὐδένα ἄλλον ὅρον ὑπόκηνται οἱ παράγοντες, ἢ μόνον εἰς τοὺς ἐν τῷ ἡγηθέντι προβλήματι, ἤγουν τὸ μὲν γινόμενον αὐτῶν νὰ ἦναι τὸ μέγιστον, τὸ δὲ ἄθροισμα ἴσον τῷ α, τὸ γινόμενον εἶναι τὸ μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες ἦναι ἴσοι. Ἀλλὰ δυνατὸν οἱ παράγοντες νὰ ὑποβάλλωνται καὶ εἰς ἄλλους ὅρους· τότε, ἐὰν μὲν οἱ νέοι οὗτοι ὅροι δὲν ἀντίκηνται εἰς τοὺς ἀνωτέρω, τὸ πρόβλημα λύεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· ἀλλ' ἐὰν οἱ νέοι ὅροι δὲν συνάδωσι τοῖς ἀνωτέρω, τότε τὸ μέγιστον γινόμενον δὲν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἰσότητα τῶν παραγόντων, ἀλλ' εἰς ἄλλην σχέσιν μεταξὺ αὐτῶν. Π. χ. ὑποτεθήτω ὅτι τὰ μέρη εἶναι τρία χ, y, ω καὶ ὅτι ἐκτὸς τοῦ ὅρου $\chi+y+\omega=\alpha$ ὑπόκεινται καὶ εἰς τὸν ἑξῆς $\chi+2y+3\omega=\beta$· ἐὰν $\beta=2\alpha$, δυνατὸν τὰ μέρη νὰ ἦναι ἴσα· ἀλλ' ἐὰν ὁ β ἦναι διάφορος τοῦ 2α, τὰ μέρη δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἴσα, καὶ ἄλλη εἶναι τότε ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχέσις, καθ' ἣν τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τὸ μέγιστον· φανερὸν δ' ὅτι τὸ μέγιστον γινόμενον κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι ἔλασσον τοῦ κατὰ τὴν πρώτην. Ἡ ἔρευνα τῶν τοιούτων προβλημάτων δὲν ἀνήκει εἰς τὰ Στοιχεῖα· ἐν τούτοις δυνατὸν καὶ τοιαῦτα προβλήματα νὰ λύωνται ἄνευ νέων μεθόδων, μετασχηματιζομένων τῶν παραστάσεων εἰς ἄλλας, ἐχούσας τὰ μέγιστα ἢ τὰ ἐλάχιστα αὐτῶν ἐν ταυτῷ μετὰ τῶν πρώτων. Ἰδοὺ ἓν παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. *Τραπεζίου ἰσοσκελοῦς δίδοται ἡ μικρὰ βάσις α καὶ τὸ κοινὸν μῆκος β τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν· εὑρεῖν τὸ μέγιστον τραπέζιον.*

Ἔστω χ ἡ ἡμιδιαφορὰ τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου· ἡ μεγάλη βάσις εἶναι $\alpha+2\chi$, τὸ δὲ ὕψος $\sqrt{\beta^2-\chi^2}$· ἐπομένως παριστῶντες διὰ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἔχομεν

$$E=(\alpha+\chi)\sqrt{\beta^2-\chi^2}.$$

Τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ χ, εἰς ἣν καὶ τὸ μέγιστον τοῦ τετραγώνου

$$E^2=(\alpha+\chi)^2(\beta^2-\chi^2),$$

ἢ

$$E^2=(\alpha+\chi)(\alpha+\chi)(\beta+\chi)(\beta-\chi).$$

Τὸ β΄. μέλος εἶναι γινόμενον τεσσάρων παραγόντων, ὧν οὔτε τὸ ἄθροισμα σταθερόν, οὔτε δυνατὸν νὰ ἦναι πάντες ἴσοι. Ἵνα καταστήσωμεν τό τε ἄθροισμα σταθερὸν καὶ τὴν ἰσότητα τῶν παραγόντων δυνατήν, πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο τελευταίους παράγοντας, τὸν μὲν ἐπὶ κ, τὸν δὲ ἐπὶ λ, κ καὶ λ ὄντων ἀπροσδιορίστων, οὓς μετ' ὀλίγον προσδιορίσομεν· ἔχομεν

$$\kappa\lambda E^2=(\alpha+\chi)(\alpha+\chi)(\kappa\beta+\kappa\chi)(\lambda\beta-\lambda\chi)\cdot$$

ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων αὐτῶν παραγόντων ᾖ σταθερόν, πρέπει ὁ συντελεστὴς τοῦ χ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν νὰ ἦναι 0· οὕτως ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$(1)\qquad 2+\kappa-\lambda=0\cdot$$

ἵνα δὲ οἱ παράγοντες ὦσιν ἴσοι, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$(2)\qquad \alpha+\chi=\kappa\beta+\kappa\chi$$

$$(3)\qquad \alpha+\chi=\lambda\beta-\lambda\chi.$$

Διὰ τῶν τριῶν τούτων σχέσεων προσδιορίζομεν τοὺς ἀπροσδιορίστους κ καὶ λ καὶ τὴν τιμὴν τοῦ χ, τὴν καθιστῶσαν $\kappa\lambda E^2$ μέγιστον· ἢ αὐτὴ καθιστᾷ μέγιστον καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε. Εἶναι δὲ περιττὸν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ κ καὶ λ· ἀρκεῖ ν' ἀπαλείψωμεν αὐτούς, ὅπως εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ.

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν

$$\kappa=\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi},\quad \lambda=\frac{\alpha+\chi}{\beta-\chi}.$$

ἀντικαθιστῶντες δ' εἰς τὴν (1)

$$2+\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}-\frac{\alpha+\chi}{\beta-\chi}=0\text{·}$$

ὅθεν

$$2\chi^2+\alpha\chi-\beta^2=0\text{·}$$

ἑπομένως, παραλειπομένης τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς,

$$\chi=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\beta^2}}{4}.$$

Τοιαύτη εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἡ καθιστῶσα μέγιστον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

§ 273. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'. *Διαιρεθήτω ἀριθμός τις α εἰς δύο μέρη χ καὶ y τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον $\chi^\kappa y^\lambda$ εἶναι τὸ μέγιστον.*

Τὸ ζητούμενον μέγιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ τοῦ y, εἰς ἃς καὶ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου

$$\left(\frac{\chi}{\kappa}\right)^\kappa\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\lambda\text{·}$$

διότι ἡ παράστασις αὕτη εἶναι πηλίκον τῆς πρώτης διὰ τοῦ σταθεροῦ $\kappa^\kappa\lambda^\lambda$· τὸ νέον τοῦτο γινόμενον γράφεται καὶ οὕτω

$$\frac{\chi}{\kappa}.\frac{\chi}{\kappa}.\frac{\chi}{\kappa}\ldots\ldots\frac{y}{\lambda}.\frac{y}{\lambda}.\frac{y}{\lambda}\ldots\ldots;$$

τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων αὐτῶν εἶναι $\kappa\frac{\chi}{\kappa}+\lambda\frac{y}{\lambda}=\chi+y=\alpha\text{·}$

εἶναι λοιπὸν σταθερόν· ἵνα ἄρα ᾖ μέγιστον πρέπει $\frac{\chi}{\kappa}=\frac{y}{\lambda}$ (§ 262).

Οὕτω τὸ γινόμενον $\chi^\kappa y^\lambda$ εἶναι τὸ μέγιστον, ὅταν ὁ α διαιρεθῇ ἀναλόγως τῶν ἐκθετῶν κ καὶ λ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδείκνυται ὅτι *ἵνα μερισθῇ ἀριθμὸς* *τις α εἰς ὁσαδήποτε μέρη χ, y, ω, ..., τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον $\chi^{\kappa}.y^{\lambda}.\omega^{\pi}$.... νὰ ἦναι μέγιστον, πρέπει νὰ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν ἐκθετῶν κ, λ, π, ...*

Ἐφαρμογαί. α'. Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἀχθήτωσαν αἱ τῶν πλευρῶν παράλληλοι ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ἴσον ἀφιστάμεναι τῶν πλευρῶν, ὧν εἰσι παράλληλοι· ἀκολούθως ἀφαιρεθήτωσαν τὰ μικρὰ τετράγωνα ΑΚΡΕ, ΜΒΠΖ, ΟΘΓΛ, ΝΙΔΗ, εἶτα στραφήτωσαν τὰ ἐξέχοντα ὀρθογώνια ΚΜΠΡ, ΖΘΟΠ, ΟΛΙΝ, ΕΗΝΡ περὶ τὰς ἐσωτερικὰς πλευρὰς αὐτῶν ΠΡ, ΠΟ, ΟΝ, ΡΝ, ὥστε νὰ καταστῶσι κάθετα ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ΝΟΠΡ· σχηματισθήσεται οὕτω ὀρθογωνικὸν κιβώτιον. Ἔστω 2α ἡ πλευρὰ ΑΒ, χ ἡ ἀπόστασις ΑΚ· τὸ κιβώτιον ἔχει βάσιν τὸ τετράγωνον ΝΟΠΡ, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι $2\alpha-2\chi$, τὸ δὲ ὕψος χ· ὅθεν ὁ ὄγκος αὐτοῦ $4\chi(\alpha-\chi)^2$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν χ καὶ $\alpha-\chi$ εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον

$\chi(\alpha-\chi)^2$ εἶναι μέγιστον, ὅταν $\chi=\frac{\alpha-\chi}{2}$, ἐξ οὗ $\chi=\frac{\alpha}{3}$. Οὕτως

ἵνα τὸ σχηματιζόμενον κιβώτιον ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον, πρέπει αἱ παράλληλοι ν' ἀπέχωσι τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

β'. *Τίς ὁ μέγιστος τῶν ἐν δεδομένῃ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων;* Ἔστω α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, χ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, $2y$ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Αἱ μεταβληταὶ y καὶ χ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως (1) $\chi^2+y^2=\alpha^2$· ὁ δὲ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι $2\pi\chi^2y$. Ζητήσωμεν τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου χ^2y, εἴτε τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ χ^4y^2. Τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τῶν ἀριθμῶν χ^2 καὶ y^2, τοῦ μὲν πρώτου ὑψωμένου εἰς τὸ τετράγωνον, τοῦ δὲ εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, ὧν τὸ ἄθροισμα σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ α^2· ἐπομένως τὸ γινόμενον αὐτὸ ἔσεται τὸ μέγιστον, ὅταν $\frac{\chi^2}{2}=y^2$. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης καὶ τῆς (1) συνάγομεν $\chi=\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$. Ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν ἐξάγεται ὅτι τὸ ὕψος τοῦ μεγίστου κυλίνδρου εἶναι ἔλασσον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως καὶ ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, τὸ ὕψος αὐτὸ εἶναι τὰ δύο τρίτα τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

§ 274. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ′. *Ἀναλυθήτω ἀριθμός τις α εἰς ν παράγοντας τοιούτους, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τὸ ἐλάχιστον.*

Λέγω ὅτι ἕκαστος τῶν παραγόντων εἶναι $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Τῷ ὄντι· α′. τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι α. β′. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $\nu\sqrt[\nu]{\alpha}$· ἔστω $A<\nu\sqrt[\nu]{\alpha}$· ὅθεν $\frac{A}{\nu}<\sqrt[\nu]{\alpha}$· ὅθεν $\left(\frac{A}{\nu}\right)^\nu<\alpha$· ἀλλὰ $\left(\frac{A}{\nu}\right)^\nu$ εἶναι τὸ μέγιστον γινόμενον ν παραγόντων, ὧν τὸ ἄθροισμα Α· ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν παράγοντας ν, ὧν τὸ ἄθροισμα ἔλασσον τοῦ $\nu\sqrt[\nu]{\alpha}$, τὸ γινόμενον ἔσεται πάντοτε ἔλασσον τοῦ α· ὅθεν $\nu\sqrt[\nu]{\alpha}$ εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα ν παραγόντων, ὧν τὸ γινόμενον α.

§ 275. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ′. *Δίδοται τὸ γινόμενον $\chi^\kappa.y^\lambda=\alpha$· εὑρεῖν τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος $\chi+y$.*

Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα $\chi+y$ εἶναι τὸ ἐλάχιστον, ὅταν $\frac{\chi}{\kappa}=\frac{y}{\lambda}$.

Ἔστωσαν β καὶ γ δύο ἀριθμοὶ ἐπαληθεύοντες ἀμφοτέρας τὰς σχέσεις $\beta^\kappa.\gamma^\lambda=\alpha$ καὶ $\frac{\beta}{\kappa}=\frac{\gamma}{\lambda}$. Εἴδομεν ὅτι ἐκ τῶν ἀριθμῶν χ καὶ y, ὧν τὸ ἄθροισμα $\chi+y$ εἶναι ἴσον τῷ $\beta+\gamma$, οἱ β καὶ γ εἰσὶν οἱ δι' ὧν τὸ γινόμενον $\chi^\kappa.y^\lambda$ εἶναι τὸ μέγιστον. Ἔστω $A<\beta+\gamma$· ἐὰν μερίσωμεν τὸν Α εἰς δύο μέρη β′ καὶ γ′, τοιαῦτα ὥστε $\frac{\beta'}{\kappa}=\frac{\gamma'}{\lambda}$, ἔξομεν $\beta'<\beta$ καὶ $\gamma'<\gamma$· ὅθεν καὶ $\beta'^\kappa.\gamma'^\lambda<\beta^\kappa.\gamma^\lambda$· ἐὰν ὁ Α ἀναλυθῇ ἄλλως πως εἰς δύο μέρη β″ καὶ γ″, τὸ γινόμενον $\beta''^\kappa.\gamma''^\lambda$ ἔσεται ἔλασσον τοῦ $\beta'^\kappa.\gamma'^\lambda$ καὶ ἔτι μᾶλλον τοῦ $\beta^\kappa.\gamma^\lambda$· ὅταν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν χ καὶ y εἶναι ἔλασσον τοῦ $\beta+\gamma$, τὸ γινόμενὸν $\chi^{\varkappa}.y^{\lambda}$ εἶναι πάντοτε ἔλασσον τοῦ α· ἄρα τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν χ καὶ y, τῶν ἐπαληθευόντων τὴν ἰσότητα $\chi^{\varkappa}.y^{\lambda}=\alpha$, εἶναι $\beta+\gamma$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ δύο τελευταῖα προβλήματα εἶναι, οὕτως εἰπεῖν, ἀντίστροφα τῶς προηγηθέντων Θ΄ καὶ ΙΑ΄. Τὸ τοιοῦτον ἀντίστροφον τινῶν προβλημάτων μεγίστων καὶ ἐλαχίστων διατυπώσειεν ἄν τις ὧδε. *Ὅταν δοθείσης ὡρισμένης τιμῆς μεταβλητῆς τινος Υ, ἄλλη τις μεταβλητὴ Χ γίνεται μέγιστον ὑφ' ὡρισμένους ὅρους, ἀντιστρόφως δοθείσης τιμῆς τινος τῆς Χ, ἡ Υ γίνεται ἐλάχιστον ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους, ἐάν, ἐλαττουμένης τῆς τιμῆς τοῦ Υ, συνελαττῶται καὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν μέγιστον τῆς Χ.* Ἔστω Β ἡ δεδομένη τιμὴ τῆς Υ καὶ Α ἡ μεγίστη τῶν ἀντιστοιχουσῶν τῆς Χ. Ἐὰν θεωρήσωμεν τιμήν τινα β τῆς Υ, ἐλάσσω τῆς Β, ἡ μεγίστη τῶν εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχουσῶν τῆς Χ εἶναι, καθ' ὑπόθεσιν, ἐλάσσων τῆς Α· ἄρα πᾶσα τιμὴ τῆς Χ, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν β τῆς Υ, εἶναι ἐλάσσων τῆς Α· ἐπομένως εἰς τὴν τιμὴν Α τοῦ Χ δὲν δύναται ν' ἀντιστοιχῇ τιμὴ τοῦ Υ ἐλάσσων τῆς Β· ἡ τιμὴ λοιπὸν Β εἶναι ἐλάχιστον.—Κατὰ ταῦτα ἐὰν ἡ μεταβλητὴ Υ ἦναι $\chi+y$ καὶ $\chi^{\varkappa}.y^{\lambda}$ ἡ Χ, ἐπειδὴ ὅταν $Y=\alpha$, ἡ Χ ἔχει τὴν μεγίστην τιμὴν ὅταν $\frac{\chi}{\varkappa}=\frac{y}{\lambda}$, ἡ δὲ μεγίστη αὕτη τιμὴ ἐλαττοῦται μετὰ τοῦ α, διὰ τοῦτο ὅταν $X=\alpha$, ἡ ἐλαχίστη τοῦ Υ εἶναι ἡ ἐπαληθεύουσα τὴν αὐτὴν ἰσότητα $\frac{\chi}{\varkappa}=\frac{y}{\lambda}$. Ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν μετὰ δεδομένης περιμέτρου εἶναι ὁ κύκλος, ἡ ἐλαχίστη περίμετρος, δεδομένου ὄντος τοῦ ἐμβαδοῦ, εἶναι ἡ περιφέρεια.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἀθροίσματος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ὕψους τριγώνου ὀρθογωνίου, εὑρεῖν τὸ μέγιστον τρίγωνον.

Ἔστω α τὸ δεδομένον ἄθροισμα· τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{\alpha^2}{9}$, ἡ ὑποτείνουσα $\frac{2\alpha}{3}$, τὸ δὲ ὕψος $\frac{\alpha}{3}$.

2. Ἐν κύκλῳ, οὗ ἡ ἀκτὶς α, ἐγγράψαι τὸ μέγιστον τῶν τραπεζίων, ὧν τὸ μῆκος ἑκατέρας τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν εἶναι β.

Τὸ τραπέζιον εἶναι τὸ μέγιστον, ὅταν ἑκατέρα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἦναι $\sqrt{4\alpha^2-6^2}$· τὸ τραπέζιον εἶναι τότε ὀρθογώνιον, οὗ αἱ διαστάσεις 6 καὶ $\sqrt{4\alpha^2-6^2}$.

3. Ἐξ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων δύο τεμνομένων περιφερειῶν ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὰς περιφερείας αὐτάς· εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῶν γινομένων τῶν μερῶν τῆς τεμνούσης αὐτῆς, τῶν ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅθεν αὕτη ἄγεται, μέχρι τῶν δύο ἄλλων σημείων, ἔνθα συναντᾷ τὰς περιφερείας.

Ἔστωσαν α καὶ α' αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο περιφερειῶν, γ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων. Τὸ γινόμενον ἔχει δύο μεγίστας τιμάς, αἵτινές εἰσι $\gamma^2-(\alpha-6)^2$ καὶ $(\alpha+6)^2-\gamma^2$, τὴν μὲν πρώτην, ὅταν τὰ μέρη κῆνται ἑκατέρωθεν τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν περιφερειῶν, τὴν δ' ἑτέραν, ὅταν ἐπίκηνται.

4. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, ποῖον τὸ μέγιστον; ἐκ δὲ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν ὄγκον, ποῖον τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν;

Ὁ κύβος (ἐφαρμογὴ τῶν προβλημάτων Θ'. καὶ ΙΒ'.).

5. Διαιρεθήτω ἀριθμός τις α εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

Τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων εἶναι τὸ ἐλάχιστον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη.

6. Τίς ὁ μέγιστος τῶν ἐν δεδομένῳ κώνῳ ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων;

Τοῦ ὕψους τοῦ κώνου ὄντος γ καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ α, τὸ μὲν ὕψος τοῦ μεγίστου κυλίνδρου εἶναι $\frac{\gamma}{3}$, ἡ δ' ἀκτὶς τῆς βάσεως $\frac{2\alpha}{3}$.

7. Ἐκ τῶν κώνων, τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν ὄγκον $\frac{1}{3}\pi\alpha^3$, τίς ὁ ἔχων τὴν ἐλαχίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

Ὕψος $\alpha\sqrt[3]{2}$, ἀκτὶς τῆς βάσεως $\dfrac{\alpha}{\sqrt[6]{2}}$.

8. Ἐκ τῶν ἐν δεδομένῳ κώνῳ γεγραμμένων κυλίνδρων τίς ὁ ἔχων τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν;

Τοῦ ὕψους τοῦ κώνου ὄντος γ καὶ α τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως, δὲν ὑπάρχει μέγιστον ἐὰν $\alpha>\gamma$, ἢ $\frac{\alpha\gamma}{2(\gamma-\alpha)}>\alpha$· ἐὰν δὲ $\frac{\alpha\gamma}{2(\gamma-\alpha)}<\alpha$, ὁ τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν ἔχων κύλινδρος εἶναι ἐκεῖνος, οὗ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως $\frac{\alpha\gamma}{2(\gamma-\alpha)}$.

9. Περὶ σφαῖραν, ἧς ἡ ἀκτὶς α, γραφήτω ὁ ἐλάχιστος τῶν κώνων, ὧν αἱ βάσεις διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ὁ ὄγκος τοῦ ἐλαχίστου κώνου εἶναι $\frac{\pi\alpha^3\sqrt{3}}{2}$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ. ΕΚΘΕΤΑΙ ΕΝ ΓΕΝΕΙ. ΠΡΟΟΔΟΙ. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

Ὁρισμοί.

§ 276. Ἔστω ἡ ἑξῆς παράστασις

$$2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}.$$

Ἡ παράστασις αὕτη ἐμφαίνει τὸ ἐξαγόμενον τῶν δεικνυομένων ἐν αὐτῇ διαδοχικῶν προσθέσεων καὶ διαιρέσεων· προστεθήσεται δηλονότι τὸ κλάσμα $\frac{1}{5}$ μετὰ τοῦ ἀκεραίου 4 καὶ διὰ τοῦ ἀθροίσματος διαιρεθήσεται ἡ μονάς, τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον προστεθήσεται μετὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ ἐντεῦθεν ἀθροίσματος διαιρεθήσεται ἡ μονάς, τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον προστεθήσεται μετὰ τοῦ 6 καὶ διὰ τοῦ νέου ἀθροίσματος διαιρεθήσεται πάλιν ἡ μονάς, τέλος τὸ τελευταῖον τοῦτο πηλίκον προστεθήσεται μετὰ τοῦ 2. Ἐκτελοῦντες τὰς διαφόρους αὐτὰς πράξεις, εὑρίσκομεν $\frac{926}{429}$· αὐτὸν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν ἐμφαίνει ἡ ἀνωτέρω παράστασις.

Παραστάσεις, οἷα ἡ ἀνωτέρω, καλοῦνται *συνεχῆ κλάσματα.*

Συνεχὲς κλάσμα παρίσταται γενικῶς οὕτω

$$2+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\dots}}}}$$

Συνηθέστερον γράφεται πρὸς συντομίαν οὕτω

$$(1)\quad \alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\dots}}}}$$

Δυνατὸν δὲ νὰ λείπῃ ὁ ἀκέραιος α· τότε τὸ συνεχὲς κλάσμα ἔσεται

$$\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\dots}}}}$$

§ 277. Τὰ κλάσματα $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}, \dots$ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος (1) καλοῦνται *συστατικὰ κλάσματα*· ὁ ἀριθμητὴς αὐτῶν εἶναι πάντοτε 1, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀκέραιός τις, μὴ ἐξαιρουμένης μήτε τῆς μονάδος.

Οἱ παρονομασταὶ $\beta, \gamma, \delta, \dots$ τῶν συστατικῶν κλασμάτων καλοῦνται *ἀτελῆ πηλίκα*.

Τὸ ἰδιαίτερον συνεχὲς κλάσμα, τὸ ἀρχόμενον ἀπό τινος ἀτελοῦς πηλίκου καὶ λῆγον εἰς τὸ αὐτὸ συστατικὸν κλάσμα, εἰς ὃ καὶ τὸ συνεχές, καλεῖται *τέλειον πηλίκον*. Π. χ. τοῦ (1) τέλεια πηλίκα εἰσὶ τὰ ἑξῆς (ὑποτιθεμένου ὅτι $\frac{1}{\varepsilon}$ εἶναι τὸ τελευταῖον συστατικὸν κλάσμα)

$$\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon}}},\qquad \gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon}},\qquad \delta+\frac{1}{\varepsilon},\quad \varepsilon.$$

§ 278. Ἡ ἀξία τοῦ ἰδιαιτέρου συνεχοῦς κλάσματος, τοῦ ἀρχομένου ὡς καὶ τὸ προκείμενον συνεχές, λήγοντος δὲ εἰς ἓν οἱονδήποτε τῶν συστατικῶν κλασμάτων, καλεῖται *ἠγμένον*.

Π. χ. ἔστω τὸ μερικὸν συνεχὲς κλάσμα

$$2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}.$$

Αἱ ἀξίαι τῶν ἑξῆς συνεχῶν κλασμάτων

$$2+\frac{1}{6},\quad 2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3}},\quad 2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}},\quad 2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

εἰσὶ $\frac{13}{6}$, $\frac{41}{19}$, $\frac{177}{82}$, $\frac{926}{429}$· τὰ κλάσματα λοιπὸν αὐτὰ εἰσὶν ἠγμένα. Πρῶτον ἠγμένον θεωρεῖται ὁ ἀκέραιος 2, ἀφ' οὗ ἄρχεται τὸ συνεχὲς κλάσμα, δεύτερον ἠγμένον εἶναι τὸ $\frac{13}{6}$, τρίτον τὸ $\frac{41}{19}$, κτλ.

Ὅταν τὸ συνεχὲς κλάσμα δὲν ἔχῃ ἀκέραιον, πρῶτον αὐτοῦ ἠγμένον εἶναι τὸ πρῶτον συστατικὸν κλάσμα.

Κανὼν πρὸς σχηματισμὸν τῶν διαδοχικῶν ἠγμένων.

§ 279. Ἔστω τὸ γενικὸν συνεχὲς κλάσμα

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\ldots}}}}$$

Τὸ πρῶτον ἠγμένον εἶναι $\frac{\alpha}{1}$ (1).

Τὸ δεύτερον εἶναι $\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ (2).

Τὸ τρίτον εἶναι ἡ ἀξία τοῦ συνεχοῦς

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}.$$

Ἵνα ἔχωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ προηγουμένου ἠγμένου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσότης (2) ἀληθεύει, οἱονδήποτ' ἂν ᾖ τὸ β· ἀληθεύει λοιπὸν καὶ ἐὰν τεθῇ $\beta+\frac{1}{\gamma}$ ἀντὶ β· οὕτως ἔχομεν

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}=\frac{\alpha\left(\beta+\frac{1}{\gamma}\right)+1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}=\frac{\alpha\beta+1+\frac{\alpha}{\gamma}}{\beta+\frac{1}{\gamma}}.$$

πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τῆς τελευταίας παραστάσεως ἐπὶ γ, συνάγομεν

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}=\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}\quad(3).$$

Τοιοῦτον εἶναι τὸ τρίτον ἡγμένον.

Ἵνα ἔχωμεν τὸ τέταρτον ἡγμένον, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν, ὡς καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρίτου· ἀντικαθιστῶμεν δηλονότι $\gamma+\frac{1}{\delta}$ ἀντὶ γ ἐν τῷ τρίτῳ ἡγμένῳ καὶ οὕτως ἔχομεν

$$\frac{(\alpha\beta+1)\left(\gamma+\frac{1}{\delta}\right)+\alpha}{\beta\left(\gamma+\frac{1}{\delta}\right)+1}=\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha+\frac{\alpha\beta+1}{\delta}}{\beta\gamma+1+\frac{\beta}{\delta}}.$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τοὺς δύο ὅρους τῆς παραστάσεως αὐτῆς ἐπὶ δ, εὑρίσκομεν

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta}}}=\frac{[(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha]\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta}\quad(4).$$

Τοιοῦτον εἶναι τὸ τέταρτον ἡγμένον.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πέμπτον, ἕκτον, κ.τ.λ.

Συγκρίνοντες ἤδη τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα (1), (2), (3), (4), παρατηροῦμεν τὸν ἀκόλουθον νόμον εἰς τὸν σχηματισμὸν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ τρίτου καὶ ἑξῆς. *Ὁ ἀριθμητὴς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ προηγουμένου ἡγμένου ἐπὶ τὸ τελευταῖον ἀτελὲς πηλίκον καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἔτι προηγουμένου ἡγμένου· κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον σχηματίζεται καὶ ὁ παρο-*

νομαστὴς ἐκ τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἀμέσως προηγουμένων ἡγμένων.

Π. χ. ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τρίτου ἡγμένου εἶναι ἄθροισμα τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμητοῦ $αβ+1$ τοῦ δευτέρου ἡγμένου ἐπὶ τὸ τελευταῖον ἀτελὲς πηλίκον $γ$ καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ $α$ τοῦ πρώτου ἡγμένου· ἐπίσης καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ τρίτου ἡγμένου εἶναι ἄθροισμα τοῦ γινομένου τοῦ παρονομαστοῦ $β$ τοῦ δευτέρου ἡγμένου ἐπὶ τὸ τελευταῖον ἀτελὲς πηλίκον $γ$ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ 1 τοῦ πρώτου ἡγμένου.

Ὁ νόμος οὗτος εἶναι γενικός. Ἔστωσαν τρία διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{K}{K'}$, $\frac{\Pi}{\Pi'}$, $\frac{P}{P'}$, καὶ ὑποτεθήτω ὅτι τὸ τρίτον $\frac{P}{P'}$ σχηματίζεται ἐκ τῶν δύο προηγουμένων κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον· ὅτι δηλονότι, $ρ$ ὄντος τοῦ τελευταίου ἀτελοῦς πηλίκου τοῦ $\frac{P}{P'}$, ἔχομεν $P=\Pi ρ+K$, $P'=\Pi'ρ+K'$. Λέγω ὅτι καὶ τὸ ἀκόλουθον ἡγμένον σχηματίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον. Ἵνα ἔχωμεν αὐτὸ δυνάμεθα, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου, ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ ἡγμένον $\frac{\Pi ρ+K}{\Pi'ρ+K'}$ ἀντὶ τοῦ $ρ$ τὸ $ρ+\frac{1}{σ}$, $σ$ ὄντος τοῦ ἑπομένου τῷ $ρ$ ἀτελοῦς πηλίκου· οὕτως ἔχομεν

$$\frac{\Pi\left(ρ+\frac{1}{σ}\right)+K}{\Pi'\left(ρ+\frac{1}{σ}\right)+K'}=\frac{\Pi ρ+K+\frac{\Pi}{σ}}{\Pi'ρ+K'+\frac{\Pi'}{σ}}.$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ $σ$, εὑρίσκομεν

$$\frac{(\Pi ρ+K)σ+\Pi}{(\Pi'ρ+K')σ+\Pi'}=\frac{Pσ+\Pi}{P'σ+\Pi'},$$

ὅπερ σχηματίζεται ἐκ τῶν προηγουμένων $\frac{P}{P'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ ὡς τὸ $\frac{P}{P'}$ ἐκ τῶν $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $\frac{K}{K'}$.

Ὅταν λοιπὸν ὁ νόμος ἀληθεύῃ ἐπὶ ἡγμένου τινός, ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου· ἀλλ' εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἀληθεύει ἐπὶ τοῦ τετάρτου· ἄρα καὶ ἐπὶ τοῦ πέμπτου· ἐντεῦθεν καὶ ἐπὶ τοῦ ἕκτου καὶ οὕτω καθεξῆς· εἶναι λοιπὸν γενικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω τὸ συνεχὲς κλάσμα

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}.$$

Τὸ πρῶτον ἡγμένον εἶναι $\frac{3}{1}$, τὸ δὲ δεύτερον $\frac{7}{2}$· ἐπομένως κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὸ τρίτον ἡγμένον εἶναι $\frac{7\times4+3}{2\times4+1}=\frac{31}{9}$· τὸ τέταρτον ἐπίσης $\frac{31\times5+7}{9\times5+2}=\frac{162}{47}$· τὸ πέμπτον $\frac{162\times7+31}{47\times7+9}$ $=\frac{1165}{338}$. Εἰς τὰ αὐτὰ φθάνομεν ἐξαγόμενα καὶ ἐκτελοῦντες κατ' εὐθεῖαν τὰς πράξεις, ὡς ἐν § 276.

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς συνεχές.

§ 280. Πᾶν κοινὸν κλάσμα δύναται νὰ τρέπηται εἰς ἰσοδύναμον συνεχές.

Ἔστω, π. χ., τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{85}{23}$. Ἐργαζόμενοι πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ, ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα τῆς πράξεως

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
\hline
85 & 23 & 16 & 7 & 2 & 1. \\
16 & 7 & 2 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Τὸ $\frac{85}{23}$ ἰσοῦται τῷ μικτῷ $3+\frac{16}{23}$. Διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{16}{23}$ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 16, ἔχομεν τὸ ἴσον $\frac{1}{\left(\frac{23}{16}\right)}$· ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν $\frac{23}{16}=1+\frac{7}{16}$· ὅθεν $\frac{16}{23}=\frac{1}{1+\frac{7}{16}}$· ἐπομένως

$$\frac{85}{23}=3+\frac{1}{1+\frac{7}{16}};$$

Εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\frac{7}{16}=\frac{1}{\left(\frac{16}{7}\right)}=\frac{1}{2+\frac{2}{7}};$$

ὅθεν

$$\frac{83}{23}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{2}{7}}}.$$

Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{1}{3+\frac{1}{2}}.$$

ἄρα τέλος

$$\frac{83}{23}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}.$$

Ἔστω ἔτι τὸ κλάσμα $\frac{315}{840}$. Ὁ πίναξ τῆς πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων αὐτοῦ πράξεως εἶναι

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 2 & 1 & 2 \\ 840 & 315 & 210 & 105 \\ 210 & 105 & 0 & \end{array}$$

ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν πρᾶξιν ταύτην συνάγομεν

$$\frac{315}{840}=\frac{1}{\left(\frac{840}{315}\right)}=\frac{1}{2+\frac{210}{315}}=\frac{1}{2+\cfrac{1}{\left(\frac{315}{210}\right)}}=\frac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{105}{210}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}.$$

ΚΑΝΩΝ. *Ἵνα τρέψωμεν κοινὸν κλάσμα εἰς συνεχὲς ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων αὐτοῦ· εἶτα, ἐὰν μὲν τὸ κλάσμα ἦναι καταχρηστικὸν, σχηματίζομεν συνεχὲς ἀρχόμενον ἀπὸ ἀκεραίου, ἴσου τῷ πρώτῳ τῶν πηλίκων τῆς γενομένης πράξεως, καὶ περιέχον συστατικὰ κλάσματα, ὧν παρονομασταί εἰσι τὰ ἑπόμενα πηλίκα τῆς γενομένης πράξεως κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα ἦναι κύριον, σχηματίζομεν συνεχὲς, μὴ περιέχον ἀκέραιον, οὗ τὰ ἀτελῆ πηλίκα εἰσὶ τὰ πηλίκα τῆς γενομένης πράξεως κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.*

Θεωρήματα ἐπὶ τῶν ἡγμένων.

§ 281. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. *Ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἡγμένων.*

Ἔστωσαν δύο διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$· ρ ὄντος τοῦ ἐπομένου ἀτελοῦς πηλίκου, τὸ ἀκόλουθον ἡγμένον εἶναι $\frac{\Pi\rho+K}{\Pi'\rho+K'}$. Ἀφαιροῦντες τὸ $\frac{K}{K'}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ τοῦτο πάλιν ἀπὸ τοῦ τρίτου, ἔχομεν

$$\frac{\Pi}{\Pi'}-\frac{K}{K'}=\frac{\Pi K'-K\Pi'}{\Pi'K'}$$

$$\frac{\Pi\rho+K}{\Pi'\rho+K'}-\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\Pi\Pi'\rho+K\Pi'-\Pi\Pi'\rho-\Pi K'}{(\Pi'\rho+K')\Pi'}=\frac{K\Pi'-\Pi K'}{(\Pi'\rho+K')\Pi'}.$$

Αἱ δύο διαφοραὶ ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν μετ' ἀντιθέτων σημείων· διότι αἱ παραστάσεις ΠΚ΄—ΚΠ΄ καὶ ΚΠ΄—ΠΚ΄ εἰσὶν ἴσαι ἀπολύτως καὶ ἑτερόσημοι· παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἡγμένων. Ἵνα εὕρωμεν τὸν σταθερὸν ἀριθμητήν, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ἡγμένων ἤτοι μερικοῦ τινος συνεχοῦς κλάσματος, ἢ τοῦ γενικοῦ $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cdots}}$

Π. χ. τὰ δύο πρῶτα ἡγμένα τοῦ γενικοῦ συνεχοῦς εἶναι $\frac{\alpha}{1}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$, ὧν ἡ διαφορὰ $\frac{1}{\beta}$· ὁ σταθερὸς λοιπὸν ἀριθμητὴς εἶναι 1. Ο.Ε.Δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ αἱ εὑρεθεῖσαι διαφοραὶ εἰσὶν ἑτερόσημοι, ἕπεται ὅτι τὰ ἡγμένα εἰσὶν ἐναλλὰξ μείζω καὶ ἐλάσσω τῶν προηγουμένων· ἀλλὰ δῆλον ὅτι τὸ δεύτερον $\alpha+\frac{1}{\beta}$ εἶναι μεῖζον τοῦ πρώτου α΄ ἄρα τὸ τρίτον ἔλασσον τοῦ δευτέρου, τὸ τέταρτον μεῖζον τοῦ τρίτου, κ.τ.λ.· οὕτω τὰ ἡγμένα τάξεως ἀρτίου εἶναι μείζω τῶν ἀμέσως ἡγουμένων καὶ ἑπομένων, τὰ δὲ περιττῆς ἐλάσσω.

§ 282. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Πᾶν ἡγμένον εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.*

Ἔστω τὸ ἡγμένον $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ἐσχηματισμένον ἐκ τῶν δύο προηγουμένων κατὰ τὸν ἐν § 279 νόμον. Λέγω ὅτι εἶναι ἀνάγωγον. Ἔστω $\frac{K}{K'}$ τὸ ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ· ἀπεδείχθη ὅτι $\Pi K'-K\Pi'=\pm 1$· ἐὰν οἱ Π καὶ Π' ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην, οὗτος, διαιρῶν καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῶν $\Pi K'$ καὶ $K\Pi'$, ἤθελε διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν τῶν γινομένων αὐτῶν, ἥτις εἶναι 1· ὅπερ ἄτοπον.

§ 283. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Τὸ συνεχὲς κλάσμα περιέχεται πάντοτε μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων.*

Ἔστω τὸ γενικὸν συνεχὲς

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\dots}}}$$

Φανερὸν ὅτι τὸ πρῶτον ἡγμένον α εἶναι ἔλασσον τοῦ συνεχοῦς. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον β εἶναι ἔλασσον τοῦ τελείου πηλίκου $\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\dots}}$; ὅπερ σημειωθήτω διὰ γ'· ἑπομένως $\frac{1}{\beta}$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{1}{\gamma'}$· ὅθεν καὶ $\alpha+\frac{1}{\beta}$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\alpha+\frac{1}{\gamma'}$, ἤτοι τοῦ συνεχοῦς. Ἐπίσης γ εἶναι ἔλασσον τοῦ τελείου πηλίκου $\gamma+\cfrac{1}{\delta+\dots}$; ὅπερ σημειωθήτω διὰ γ'; ὅθεν $\frac{1}{\gamma}>\frac{1}{\gamma'}$· ὅθεν καὶ $\beta+\frac{1}{\gamma}>\beta+\frac{6}{\gamma'}$· ὅθεν $\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}<\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma'}}$·

ὅθεν καὶ
$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}<\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma'}}.$$

ἤγουν τὸ τρίτον ἡγμένον εἶναι ἔλασσον τοῦ συνεχοῦς, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς. Ἔστωσαν $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ δύο διαδοχικὰ ἡγμένα. Τὸ ἀκόλουθον ἡγμένον εἶναι (1) $\frac{\Pi\rho+K}{\Pi'\rho+K'}$, ρ ὄντος τοῦ ἑπομένου ἀτελοῦς πηλίκου. Ἐὰν ἐν τῇ παραστάσει (1) θῶμεν ἀντὶ ρ τὸ τέλειον πηλίκον $\rho+\cfrac{1}{\sigma+\cfrac{1}{\tau+\cdots}}$, ὅπερ σημειωθήτω διὰ y, ἔχομεν τὴν ἀξίαν τοῦ συνεχοῦς, ἤτοι $\frac{\Pi y+K}{\Pi' y+K'}$· ἀφαιροῦντες ἀπὸ τούτου ἑκάτερον τῶν ἡγμένων $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\Pi y+K}{\Pi' y+K'}-\frac{K}{K'}=\frac{(\Pi K'-K\Pi')y}{(\Pi' y+K')K'}=\frac{\pm y}{(\Pi' y+K')K'},$$

$$\frac{\Pi y+K}{\Pi' y+K'}-\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{K\Pi'-\Pi K'}{(\Pi' y+K')\Pi'}=\frac{\mp 1}{(\Pi' y+K')\Pi'}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο διαφοραὶ εἰσὶν ἑτερόσημοι· ἄρα τὸ συνεχὲς περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἡγμένων $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ τὰ μὲν ἀρτίου τάξεως ἡγμένα εἶναι μείζω τῶν ἀμέσως ἡγουμένων καὶ ἑπομένων, τὰ δὲ περιττῆς ἐλάσσω (§ 281, Σημ.), ἕπεται ὅτι τὸ συνεχὲς εἶναι ἔλασσον μὲν τῶν ἡγμένων ἀρτίου τάξεως, μεῖζον δὲ τῶν περιττῆς.

§ 284. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Ἡγμένον τι διαφέρει τοῦ συνεχοῦς κλάσματος ἔλασσον παντὸς προηγουμένου ἡγμένου.*

Ἔστωσαν τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι αἱ διαφοραὶ αὐτῶν ἀπὸ τοῦ συνεχοῦς εἰσίν, ἀνεξαρτήτως τῶν σημείων,

$$\frac{y}{(\Pi' y+K')K'} \text{ καὶ } \frac{1}{(\Pi' y+K')\Pi'},$$

ὁ ἀριθμητὴς y τῆς πρώτης διαφορᾶς εἶναι μείζων τῆς μονάδος, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἐλάσσων τοῦ παρονομαστοῦ τῆς δευτέρας διαφορᾶς· διότι $K' < \Pi'$. Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\frac{y}{(\Pi' y + K')K'} > \frac{1}{(\Pi' y + K')\Pi'},$$

οὕτω τὸ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ διαφέρει τοῦ συνεχοῦς ἔλασσον τοῦ $\frac{K}{K'}$· τοῦτο δὲ πάλιν ἔλασσον τοῦ πρὸ αὐτοῦ· ἄρα ἔτι μᾶλλον τὸ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἐπειδὴ τὰ ἡγμένα βαίνουσι πλησιάζοντα πρὸς τὸ συνεχές, καὶ ἐπειδὴ τὰ μὲν περιττῆς τάξεως εἰσὶν ἐλάσσω αὐτοῦ, τὰ δ' ἀρτίου μείζω, ἕπεται ὅτι *τὰ μὲν περιττῆς τάξεως βαίνουσιν αὐξάνοντα, τὰ δ' ἀρτίου ἐλαττούμενα.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. *Ἡ διαφορὰ ἡγμένου τινὸς ἀπὸ τοῦ συνεχοῦς εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος διηρημένης διὰ τοῦ γινομένου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἡγμένου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν αὐτοῦ καὶ τοῦ προηγουμένου.* Εἴδομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ ἡγμένου $\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἀπὸ τοῦ συνεχοῦς εἶναι $\frac{1}{(\Pi' y + K')\Pi'}$· ἀλλὰ $y > 1$·

ἄρα
$$\frac{1}{(\Pi' y + K')\Pi'} < \frac{1}{(\Pi' + K')\Pi'}.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ ἡγμένου τινὸς ἀπὸ τοῦ συνεχοῦς εἶναι ἔτι μᾶλλον ἐλάσσων τῆς μονάδος διηρημένης διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἡγμένου αὐτοῦ· διότι

$$\frac{1}{(\Pi' + K')\Pi'} < \frac{1}{\Pi'^2}.$$

§ 285. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Ἡγμένον τι διαφέρει τοῦ συνεχοῦς κλάσματος ἔλασσον παντὸς κλάσματος, ἔχοντος ἐλάσσονα τοῦ ἡγμένου αὐτοῦ παρονομαστήν.*

Ἔστω ἡγμένον τι $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ κλάσμα $\frac{\mu}{\mu'}$, οὗ ὁ παρονομαστὴς μ' εἶναι ἐλάσσων τοῦ Π′. Ἔστω $\frac{K}{K'}$ τὸ ἀμέσως πρὸ τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἡγμένον καὶ σημειωθήτω διὰ χ ἡ ἀξία τοῦ συνεχοῦς. Οἱ ἀριθμοὶ

$$(1)\qquad \frac{K}{K'},\ \chi,\ \frac{\Pi}{\Pi'}$$

εἰσὶ γεγραμμένοι κατὰ τάξιν μεγέθους ἀπὸ τοῦ μείζονος ἢ τοῦ ἐλάσσονος. Ἐὰν ὁ $\frac{\mu}{\mu'}$ διαφέρῃ τοῦ χ ἔλασσον ἢ ὁ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, διαφέρει ἔτι μᾶλλον ἔλασσον ἢ ὁ $\frac{K}{K'}$· διότι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{K}{K'}$ ἀπὸ τοῦ χ εἶναι μείζων τῆς τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ (§ 284)· πρέπει λοιπὸν ὁ $\frac{\mu}{\mu'}$ νὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$· ἐπομένως ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{\mu}{\mu'}$ καὶ τοῦ $\frac{K}{K'}$ πρέπει νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς διαφορᾶς τῶν $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$· ἀλλὰ

$$\frac{\Pi}{\Pi'}-\frac{K}{K'}=\frac{\pm 1}{\Pi'\times K'}$$

$$\frac{\mu}{\mu'}-\frac{K}{K'}=\frac{\mu K'-K\mu'}{\mu' K'}.$$

ὁ ἀριθμητὴς $\mu K'-K\mu'$ τῆς δευτέρας διαφορᾶς εἶναι τοὐλάχιστον ± 1· διότι ἐὰν ἦ 0, ἔχομεν $\frac{\mu}{\mu'}=\frac{K}{K'}$· οὕτω δὲ τὸ $\frac{\mu}{\mu'}$ δὲν ἤθελε διαφέρει τοῦ συνεχοῦς ἔλασσον τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$· ὁ δὲ παρονομαστὴς $\mu' K'$ τῆς δευτέρας διαφορᾶς εἶναι ἐλάσσων τοῦ παρονομαστοῦ $\Pi'\times K'$ τῆς πρώτης· διότι $\mu' < \Pi'$· ἀδύνατον λοιπὸν νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀνισότης

$$\frac{\mu K'-K\mu'}{\mu' K'} < \frac{1}{\Pi'\times K'},$$

τῶν μελῶν αὐτῆς θεωρουμένων κατὰ τὴν ἀπόλυτον αὐτῶν ἀξίαν· ἄρα ἀδύνατον τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\mu'}$ νὰ διαφέρῃ τοῦ συνεχοῦς ἔλασσον τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

Συνεχῆ κλάσματα, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων ἄπειρος.

§ 286. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων συνεχοῦς κλάσματος δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ ἄπειρος.

Τοιαῦτα συνεχῆ εὑρίσκομεν, ὅταν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν διὰ συνεχοῦς κλάσματος ἀσύμμετρόν τινα ἀριθμόν. Ἔστω ἐν γένει Α ἀσύμμετρός τις ἀριθμὸς καὶ α ὁ μέγιστος ἐν αὐτῷ ἀκέραιος· καλοῦντες y τὴν διαφορὰν τοῦ α ἀπὸ τοῦ Α, ἔχομεν $A=\alpha+y$· ὁ y εἶναι ἀσύμμετρος ἐλάσσων τῆς μονάδος. Θῶμεν $y=\frac{1}{\chi}$ ἐξ οὗ $\chi=\frac{1}{y}$· ὁ χ εἶναι λοιπὸν ἀσύμμετρος μείζων τῆς μονάδος· ἔχομεν δὲ

$$A=\alpha+\frac{1}{\chi}.$$

Ὡς ὁ Α, οὕτω καὶ ὁ χ, ὡς ἀσύμμετρος μείζων τῆς μονάδος, ἰσοῦται τῷ ἐν αὐτῷ μεγίστῳ ἀκεραίῳ β σὺν κλάσματί τινι $\frac{1}{\chi'}$, οὗ ὁ παρονομαστὴς χ' εἶναι ἀσύμμετρος μείζων τῆς μονάδος· ὅθεν

$$A=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\chi'}}.$$

ἔχομεν ἐπίσης $\chi'=\gamma+\frac{1}{\chi''}$, γ ὄντος τοῦ ἐν τῷ χ' ἀκεραίου καὶ χ'' ἀσυμμέτρου μείζονος τῆς 1· ὅθεν

$$A=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\chi''}}}.$$

Προχωροῦντες οὕτω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὁσαδήποτε συστατικὰ κλάσματα, ἅπερ δὲν ἔχουσι τέλος· διότι ἄλλως τὸ συνεχὲς ἤθελεν εἶσθαι ἴσον συμμέτρῳ ἀριθμῷ (§ 276.).

§ 287. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων ἦναι ἄπειρος, τινὰ δὲ τούτων ἐπαναλαμβάνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐπ᾽ ἄπειρον, τὸ συνεχὲς κλάσμα καλεῖται τότε *περιοδικόν*. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς

$$3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}$$

οὗ ἡ περίοδος εἶναι $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}$.

§ 288. Τὰ συνεχῆ κλάσματα, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων εἶναι ἄπειρος, μετέχουσι πασῶν τῶν ἐν §§ 281 μέχρι 285 ἰδιοτήτων τῶν συνεχῶν κλασμάτων, τῶν ἐχόντων πεπερασμένον ἀριθμὸν συστατικῶν· διότι αἱ ἰδιότητες ἐκεῖναι εἰσὶν ἀνεξάρτητοι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συστατικῶν κλασμάτων· ἀληθεύουσι λοιπὸν ὁσοςδήποτ᾽ ἂν ᾖ ὁ τῶν κλασμάτων αὐτῶν ἀριθμός· ἑπομένως καὶ ὅταν αὐτὰ ἦναι ἄπειρα.

§ 289. Ἐν § 286 εἴδομεν ὅτι εἶναι δυνατὸν ἀσύμμετρος ἀριθμὸς νὰ τρέπηται εἰς συνεχές· ἀλλ᾽ ἡ ἀνεύρεσις τῶν παρονομαστῶν τῶν συστατικῶν κλασμάτων τοῦ τοιούτου συνεχοῦς εἶναι ἐν γένει ἔργον δυσχερές. Εἴς τινας ὅμως περιπτώσεις ἡ ἀναζήτησις αὕτη δὲν παρουσιάζει δυσκολίας, ὡς, π. χ., ὅταν ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἦναι *τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου μὴ ὄντος τελείου τετραγώνου.*

Ἔστω, π. χ., ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 6. Ὁ ἀκέραιος τοῦ ἀσυμμέτρου αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 2. Θῶμεν $\sqrt{6}=2+\frac{1}{\chi}$· συνάγομεν ἐντεῦθεν $\chi=\frac{1}{\sqrt{6}-2}$· πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ χ ἐπὶ $\sqrt{6}+2$, ὅπως καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν σύμμετρον, ἔχομεν $\chi=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$. Ὁ ἀριθμητὴς $\sqrt{6}+2$ τῆς τιμῆς αὐτῆς περιέχεται μεταξὺ 4 καὶ 5· ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ χ περιέχεται μεταξὺ $\frac{4}{2}$ καὶ $\frac{5}{2}$· ὅθεν ὁ ἐν τῷ χ μέγιστος ἀκέραιος εἶναι 2.

Θῶμεν ἤδη $\chi = 2 + \frac{1}{\chi'}$, ἢ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ χ,

$$\frac{\sqrt{6}+2}{2} = 2 + \frac{1}{\chi'}.$$

ὅθεν $\chi' = \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \sqrt{6}+2$. Ἐπειδὴ $\sqrt{6}+2$ περιέχεται μεταξὺ 4 καὶ 5, ὁ ἐν τῷ χ' ἀκέραιος εἶναι 4.

Θῶμεν πάλιν $\chi' = 4 + \frac{1}{\chi''}$, εἴτε

$$\sqrt{6}+2 = 4 + \frac{1}{\chi''}.$$

ὅθεν $\chi'' = \frac{1}{\sqrt{6}-2}$. Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ'' εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ χ· ἑπομένως καὶ ἡ τοῦ χ''' ἔσεται ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ χ', ἡ τοῦ χ^{IV} τῇ τοῦ χ'' καὶ οὕτω καθεξῆς· οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{\chi},\ \chi = 2 + \frac{1}{\chi'},\ \chi' = 4 + \frac{1}{\chi''},\ \chi'' = 2 + \frac{1}{\chi'''},\ \chi''' = 4 + \frac{1}{\chi^{IV}},\ \text{κτλ.}$$

ἄρα τέλος
$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}$$

Τὸ συνεχὲς λοιπὸν κλάσμα, τὸ ἰσούμενον τῇ ἀσυμμέτρῳ ῥίζῃ $\sqrt{6}$, εἶναι περιοδικόν, οὗ ἡ περίοδος $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}$, ἀρχομένη ἀμέσως μετὰ τὸν ἐν αὐτῷ ἀκέραιον 2.

Εὑρίσκομεν ἐπίσης

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}}}}}$$

κατὰ τὸν ἑξῆς πίνακα τῆς πράξεως·

$$\sqrt{7}=2+\frac{1}{\chi},\ \chi=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}=1+\frac{1}{\chi'},$$

$$\chi'=\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{3(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{\sqrt{7}+1}{2}=1+\frac{1}{\chi''}.$$

$$\chi''=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{\sqrt{7}+1}{3}=1+\frac{1}{\chi'''}.$$

$$\chi'''=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}=\sqrt{7}+2=4+\frac{1}{\chi^{\text{IV}}}.$$

Κατ' αὐτὸν ἐν γένει τὸν τρόπον τρέπεται εἰς συνεχὲς κλάσμα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου μὴ ὄντος τελείου τετραγώνου, τὸ δὲ συνεχὲς κλάσμα εἶναι πάντοτε περιοδικόν· ἀλλὰ δὲν θέλομεν πειραθῆ ν' ἀποδείξωμεν ἐνταῦθα τοῦτο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀφοῦ εὕρωμεν ἱκανὰ συστατικὰ κλάσματα τοῦ συνεχοῦς, τοῦ ἰσουμένου ἀσυμμέτρῳ ἀριθμῷ, σχηματίζοντες τὰ ἡγμένα, θέλομεν ἔχει τιμὰς τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν. Οὕτω τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα τοῦ περιοδικοῦ συνεχοῦς, τοῦ ἰσουμένου τῷ $\sqrt{6}$, εἶναι $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{22}{9}$, $\frac{49}{20}$, $\frac{218}{89}$, $\frac{485}{198}$, ... Ἡ ῥίζα $\sqrt{6}$ περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων οἱωνδήποτε (§ 283), ἡ δὲ διαφορὰ ἑνὸς τούτων ἀπὸ τοῦ συνεχοῦς εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος διῃρημένης διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἡγμένου (§ 284, Σημ. 6'.)· π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{485}{198}$ διαφέρει τοῦ $\sqrt{6}$ ἔλασσον τοῦ $\frac{1}{(198)^2}$. Σημειωτέον ἔτι ὅτι δὲν ὑπάρχουσιν ἁπλούστερα κλάσματα, πλησιάζοντα πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{6}$ μᾶλλον τῶν ἡγμένων αὐτῶν (§ 285).

§ 290. Ὅταν ἀσύμμετρός τις ἀριθμὸς περιέχηται μεταξὺ δύο συμμέτρων, ὧν τὰ συνεχῆ ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀκέραιον καὶ τὰ αὐτὰ πρῶτα συστατικὰ κλάσματα, αὐτὰ ταῦτα ἔχει καὶ τὸ συνεχές, τὸ ἰσούμενον τῷ ἀσυμμέτρῳ. Π. χ. ὑποτεθήτω ὅτι ὁ ἀσύμμετρος Α περιέχεται μεταξὺ τῶν συμμέτρων Σ καὶ Σ' καὶ ὅτι

$$\Sigma=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\pi+\cfrac{1}{\rho+\dots}}}}}\qquad \Sigma'=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\sigma+\cfrac{1}{\tau+\dots}}}}}$$

λέγω ὅτι $A=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\dots}}}$

Ἔχομεν $\Sigma=\alpha+\frac{1}{\varphi}$, $\Sigma'=\alpha+\frac{1}{\omega}$, φ καὶ ω ὄντων συμμέτρων μειζόνων τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ ὁ A περιέχεται μεταξὺ $\alpha+\frac{1}{\varphi}$ καὶ $\alpha+\frac{1}{\omega}$, ὁ ἐν αὐτῷ μέγιστος ἀκέραιος εἶναι ἐπίσης α. Θῶμεν $A=\alpha+\frac{1}{\chi}$, χ ὄντος ἀσυμμέτρου μείζονος τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ ὁ A περιέχεται μεταξὺ Σ καὶ Σ', ἕπεται ὅτι $\frac{1}{\chi}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{1}{\varphi}$ καὶ $\frac{1}{\omega}$· ἄρα καὶ χ μεταξὺ φ καὶ ω· ἀλλ' ὁ μέγιστος ἀκέραιος, ὁ περιεχόμενος ἔν τε φ καὶ ἐν ω εἶναι καθ' ὑπόθεσιν ὁ αὐτὸς β· ἄρα αὐτὸς οὗτος εἶναι καὶ ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ χ. Θῶμεν $\varphi=\beta+\frac{1}{\varphi'}$, $\omega=\beta+\frac{1}{\omega'}$, $\chi=\beta+\frac{1}{\chi'}$· ὁ $\frac{1}{\chi'}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{1}{\varphi'}$ καὶ $\frac{1}{\omega'}$· ἄρα καὶ ὁ χ' μεταξὺ φ' καὶ ω'· ἐπειδὴ δὲ γ εἶναι καθ' ὑπόθεσιν ὁ μέγιστος ἀκέραιος, ὁ περιεχόμενος ἐν φ' καὶ ω', ὁ αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ περιεχόμενος ἐν χ', καὶ οὕτω καθεξῆς· ἄρα

$$A=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\dots}}}$$

Παράδειγμα. Ὁ λόγος π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ἀσύμμετρος, περιεχόμενος μεταξὺ 3,1415926 καὶ 3,1415927· ἀλλὰ

$$3{,}1415926 = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{243+\dots}}}}$$

$$3{,}1415927 = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{354+\dots}}}}$$

ἄρα

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

Τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα μέχρι τοῦ τετάρτου εἶναι

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113}.$$

Ἔχομεν οὕτω κατὰ διαφόρους προσεγγίσεις τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. Τὸ τέταρτον ἡγμένον $\frac{355}{113}$ διαφέρει τοῦ π ἔλασσον τοῦ $\frac{1}{113\times 219} = \frac{1}{24747}$ (§ 284, Σημ. β΄.)· εἶναι δὲ καὶ πλησιέστερον τοῦ π παντὸς κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν ἐλάσσονα (§ 285).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ, ΡΙΖΩΝ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ, ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $A^x = B$.

Θεωρήματα ἐπὶ ῥιζῶν.

§ 291. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. *Ῥίζα τις βαθμοῦ μ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ὁμοβάθμων ῥιζῶν τῶν παραγόντων·* ἤτοι

$$\sqrt[\mu]{\alpha\beta\gamma\delta\ldots} = \sqrt[\mu]{\alpha}\cdot\sqrt[\mu]{\beta}\cdot\sqrt[\mu]{\gamma}\cdot\sqrt[\mu]{\delta}\ldots;$$

Διότι ἡ μ^η δύναμις ἑκατέρου τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς αβγδ...·

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων ἦναι ἀρνητικοί, ὁ δὲ δείκτης μ ἄρτιος, τὸ β'. μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἀποβαίνει ἰδανικόν (§ 210)· ἑπομένως τὸ θεώρημα κυρίως τότε δὲν ὑφίσταται· ἐν τούτοις ἡ προκύπτουσα ἰδανικὴ παράστασις καλεῖται *κατὰ συνθήκην ἴση* τῇ πρώτῃ (ὅρα καὶ § 208).—Τὰ σημεῖα τῶν ῥιζῶν, ὅταν αὗται δύνανται νὰ ἦναι ἐν ταὐτῷ θετικαὶ καὶ ἀρνητικαί, πρέπει νὰ λαμβάνωνται οὕτως, ὥστε τὰ μέλη νὰ ἦναι ὁμόσημα.—Τὰ αὐτὰ σημειωτέον καὶ ἐπὶ τῶν ἑφεξῆς προτάσεων.

§ 292. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἔχομεν δύναμίν τινα βαθμοῦ μ παραστάσεως τοιᾶς δε* $\sqrt[\varkappa]{\alpha}$, *ἐὰν ὑψώσωμεν τὸ ὑπόρριζον α εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν*· ἤτοι

$$\left(\sqrt[\varkappa]{\alpha}\right)^{\mu} = \sqrt[\varkappa]{\alpha^{\mu}}.$$

Διότι

$$\left(\sqrt[\varkappa]{\alpha}\right)^{\mu} = \sqrt[\varkappa]{\alpha}\times\sqrt[\varkappa]{\alpha}\times\sqrt[\varkappa]{\alpha}\times\ldots;$$

ἀλλὰ

$$\sqrt[\varkappa]{\alpha}\times\sqrt[\varkappa]{\alpha}\times\sqrt[\varkappa]{\alpha}\times\ldots = \sqrt[\varkappa]{\alpha\times\alpha\times\alpha\times\ldots} = \sqrt[\varkappa]{\alpha^{\mu}}$$

(§ 291)· ἄρα

$$\left(\sqrt[\varkappa]{\alpha}\right)^{\mu} = \sqrt[\varkappa]{\alpha^{\mu}}.$$

§ 293. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. *Ῥίζα βαθμοῦ μ ῥίζης βαθμοῦ κ ἀριθμοῦ τινος α ἰσοῦται τῇ ῥίζῃ βαθμοῦ μ×κ τοῦ α.*

Ἔχομεν δηλονότι

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\varkappa]{\alpha}} = \sqrt[\mu\varkappa]{\alpha};$$

Θῶμεν

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\varkappa]{\alpha}} = \pi;$$

ἐντεῦθεν
$$\sqrt[\varkappa]{\alpha} = \pi^{\mu}$$
καὶ
$$\alpha = (\pi^{\mu})^{\varkappa} = \pi^{\mu\varkappa}.$$
ὅθεν
$$\sqrt[\mu\varkappa]{\alpha} = \pi.$$
ἄρα
$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\varkappa]{\alpha}} = \sqrt[\mu\varkappa]{\alpha}.$$

§ 294. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. *Δὲν μεταβάλλεται ἡ ἀξία παραστάσεως τοιᾶςδε $\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}$, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὁ δείκτης μ τοῦ ῥιζικοῦ καὶ ὁ ἐκθέτης κ τοῦ ὑποῤῥίζου.*

Πολλαπλασιάζοντες δείκτην τε καὶ ἐκθέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ρ, ἔχομεν $\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\varkappa\rho}}$. Τὸ ὑπόῤῥιζον $\alpha^{\varkappa\rho}$ ἰσοῦται $(\alpha^{\varkappa})^{\rho}$ (§ 49)· ἀντὶ δὲ ἑνὸς ῥιζικοῦ φέροντος δείκτην μρ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν δύο ἀλλεπάλληλα, φέροντα δείκτας ρ καὶ μ (§ 293)· ὅθεν
$$\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\varkappa\rho}} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\varkappa})^{\rho}}}.$$
ἀλλὰ προφανῶς
$$\sqrt[\rho]{(\alpha^{\varkappa})^{\rho}} = \alpha^{\varkappa}.$$
ἄρα
$$\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\varkappa\rho}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἔστω ἡ παράστασις $\sqrt[3]{(-\alpha)^{5}}$, α ὄντος θετικοῦ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δείκτην καὶ ἐκθέτην ἐπὶ 2, ἔχομεν $\sqrt[6]{\alpha^{10}}$· ἐπειδὴ τὸ πρῶτον ῥιζικὸν εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός, πρέπει τὸ δεύτερον (ὅπερ δύναται νὰ ἦναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν) νὰ ληφθῇ μετὰ τοῦ —, συμφώνως τοῖς ῥηθεῖσιν ἐν τῇ σημειώσει τοῦ § 291.

§ 295. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. *Δὲν μεταβάλλεται ἡ ἀξία παραστάσεως τοιᾶςδε $\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}$, ἐὰν διαιρεθῇ ὅ,τε δείκτης μ καὶ ὁ ἐκθέτης κ τοῦ ὑποῤῥίζου διὰ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν μ′ καὶ κ′ τὰ πηλίκα τοῦ μ καὶ κ διά τινος κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου π· ἔχομεν μ=πμ′ καὶ κ=πκ′· ὅθεν

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}} = \sqrt[\mu'\pi]{\alpha^{\varkappa'\pi}}.$$

ἀλλὰ

$$\sqrt[\mu']{\alpha^{\varkappa'}} = \sqrt[\mu'\pi]{\alpha^{\varkappa'\cdot\pi}}.$$

(§ 294)· ἄρα

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}} = \sqrt[\mu']{\alpha^{\varkappa'}}.$$

§ 296. ΠΟΡΙΣΜΑ Β′. *Ἵνα ὑψώσωμεν εἰς δύναμιν βαθμοῦ τινος ρ παράστασιν τοιάνδε* $\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}$, *δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν δείκτην μ διὰ ρ, ἐὰν ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς.*

Ἔστω μ′ τὸ πηλίκον τοῦ μ διὰ ρ. Ἔχομεν (§ 292)

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}\right)^{\rho} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa\rho}}.$$

ἀλλὰ

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa\rho}} = \sqrt[\mu']{\alpha^{\varkappa}}$$

(§ 295)· ἄρα

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}\right)^{\rho} = \sqrt[\mu']{\alpha^{\varkappa}}.$$

§ 297. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ′. *Ἵνα ἐξαγάγωμεν ῥίζαν βαθμοῦ τινος ρ παραστάσεως τοιᾶσδε* $\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}$, *δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐκθέτην κ διὰ ρ, ἐὰν ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς.*

Ἔστω κ′ τὸ πηλίκον τοῦ κ διὰ ρ· Ἔχομεν

$$\sqrt[\rho]{\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}} = \sqrt[\rho\mu]{\alpha^{\varkappa}};$$

(§ 293)· ἀλλὰ

$$\sqrt[\rho\mu]{\alpha^{\varkappa}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa'}}$$

(§ 295)· ἄρα

$$\sqrt[\rho]{\sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa}}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\varkappa'}}.$$

Ἐξαγωγὴ ῥίζης μονωνύμου.

§ 298. *Ἵνα ἐξαγάγωμεν ῥίζαν βαθμοῦ μ μονωνύμου, ἐξάγομεν τὴν μ^την ῥίζαν τοῦ συντελεστοῦ καὶ διαιροῦμεν τοὺς ἐκθέτας διὰ μ.*

Π. χ. ἡ τετάρτη ῥίζα τοῦ $16\alpha^{12}\beta^{4}\gamma^{8}$ εἶναι $2\alpha^{3}\beta\gamma^{2}$· διότι ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ τελευταίου μονωνύμου ἰσοῦται τῷ πρώτῳ (§ 50).

Ἄλλως ὁ κανὼν οὗτος ἀποδείκνυται διὰ τοῦ ἐν § 291 θεωρήματος.

Ὅταν ὁ συντελεστὴς δὲν ἦναι τελεία δύναμις τοῦ μ^ου βαθμοῦ, ἢ οἱ ἐκθέται δὲν ἦναι πολλαπλάσια τοῦ μ, ὁ κανὼν δὲν ἐφαρμόζεται· ἡ ῥίζα δείκνυται τότε διὰ ῥιζικοῦ.

Ἀγωγὴ τῶν ῥιζικῶν εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην.

§ 299. Δυνάμει τοῦ ἐν § 294 θεωρήματος δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν ῥιζικὰ διαφόρων βαθμῶν εἰς ἰσοδύναμα, ἔχοντα πάντα τὸν αὐτὸν δείκτην. Ἡ πρᾶξις αὕτη γίνεται ἀναλόγως τῆς ἀγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ εἶναι ἐπιδεκτικὴ τῶν αὐτῶν ἁπλοποιήσεων.

Ἐν γένει ἵνα τρέψωμεν ῥιζικὰ διαφόρων δεικτῶν εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην, πολλαπλασιάζομεν τὸν δείκτην καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἑκάστου ῥιζικοῦ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν δεικτῶν τῶν ἄλλων ῥιζικῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, α΄. Ἔστωσαν τὰ ῥιζικὰ

$$\sqrt[5]{\alpha^2},\quad \sqrt[3]{\alpha^4},\quad \sqrt[4]{\alpha}.$$

Πολλαπλασιάζομεν τόν τε δείκτην 5 τοῦ πρώτου ῥιζικοῦ καὶ τὸν ἐκθέτην 2 τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων δεικτῶν 3×4· ταὐτὸ πράττομεν ἐφ' ἑκάστου τῶν ἄλλων ῥιζικῶν καὶ οὕτως εὑρίσκομεν

$$\sqrt[60]{\alpha^{24}};\quad \sqrt[60]{\alpha^{80}},\quad \sqrt[60]{\alpha^{15}}.$$

β΄. Ἔστωσαν ἔτι

$$\sqrt[\varkappa]{\alpha^{\rho}},\quad \sqrt[\lambda]{\alpha^{\sigma}\beta^{\tau}},\quad \sqrt[\mu]{\alpha\beta^{\pi}};$$

Εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον

$$\sqrt[\kappa\lambda\mu]{(\alpha^{\rho})^{\lambda\mu}},\quad \sqrt[\kappa\lambda\mu]{(\alpha^{\sigma}\beta^{\tau})^{\kappa\mu}},\quad \sqrt[\kappa\lambda\mu]{(\alpha\beta^{\pi})^{\kappa\lambda}}\,;$$

ἀλλὰ

$$(\alpha^{\rho})^{\lambda\mu} = \alpha^{\lambda\mu\rho},\quad (\alpha^{\sigma}\beta^{\tau})^{\kappa\mu} = \alpha^{\kappa\mu\sigma}\beta^{\kappa\mu\tau},\quad (\alpha\beta^{\pi})^{\kappa\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}\beta^{\pi\kappa\lambda}.$$

(§ 50)· ἄρα τὰ προτεθέντα ῥιζικὰ ἰσοῦνται τοῖς ἑξῆς

$$\sqrt[\kappa\lambda\mu]{\alpha^{\lambda\mu\rho}},\quad \sqrt[\kappa\lambda\mu]{\alpha^{\kappa\mu\sigma}\beta^{\kappa\mu\tau}},\quad \sqrt[\kappa\lambda\mu]{\alpha^{\kappa\lambda}\beta^{\kappa\lambda\pi}}\,;$$

γ'. Ἔστωσαν ἔτι

$$\sqrt[15]{\alpha\beta^2},\quad \sqrt[6]{\alpha^5\beta},\quad \sqrt[4]{\alpha\beta},\quad \sqrt[12]{\beta^5}.$$

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεικτῶν εἶναι 60. Διαιροῦντες αὐτὸ δι' ἑκάστου τῶν δεικτῶν καὶ ἐπὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζοντες δείκτην καὶ ἐκθέτην τοῦ ὑποῤῥίζου, εὑρίσκομεν

$$\sqrt[60]{\alpha^4\beta^8},\quad \sqrt[60]{\alpha^{50}\beta^{10}},\quad \sqrt[60]{\alpha^{15}\beta^{15}},\quad \sqrt[60]{\beta^{25}}.$$

Μετασχηματισμοὶ ῥιζικῶν ἐν γένει.

§ 300. Γίνονται ἐπὶ τῶν ῥιζικῶν ἐν γένει μετασχηματισμοὶ ἀνάλογοι τῶν ἐπὶ ῥιζικῶν ἰδίᾳ τοῦ β'. βαθμοῦ (§ 205 καὶ ἑξῆς).

Α'. Ἔστω τὸ ῥιζικὸν $\sqrt[3]{54\alpha^7\beta^2\gamma^4}$. Τὸ ὑπόῤῥιζον ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $27\alpha^6\gamma^3 \times 2\alpha\beta^2\gamma$· ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $27\alpha^6\gamma^3$ εἶναι $3\alpha^2\gamma$ (§ 298)· ἀλλὰ (§ 291)

$$\sqrt[3]{54\alpha^7\beta^2\gamma^4} = \sqrt[3]{27\alpha^6\gamma^3} \times \sqrt[3]{2\alpha\beta^2\gamma}\cdot$$

ἄρα

$$\sqrt[3]{54\alpha^7\beta^2\gamma^4} = 3\alpha^2\gamma\sqrt[3]{2\alpha\beta^2\gamma}.$$

Ἐν γένει ὅταν τὸ ὑπόῤῥιζον ῥιζικοῦ βαθμοῦ μ ἀναλύηται εἰς δύο παράγοντας, ὧν ὁ ἕτερος ἔχει μ^ην ῥίζαν σύμμετρον, εὑρίσκομεν αὐτὴν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὴν μ^ην ῥίζαν τοῦ ἑτέρου παράγοντος, δεικνυομένην διὰ ῥιζικοῦ.

§ 301. Β'. Ἔστω τὸ γινόμενον $\sqrt[3]{\alpha^2\beta} \times \sqrt[4]{\alpha\beta\gamma}$. Ἄγοντες τὰ ῥιζικὰ εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην, ἔχομεν

$$\sqrt[3]{\alpha^2\beta}\times\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma} = \sqrt[12]{\alpha^8\beta^4}\times\sqrt[12]{\alpha^3\beta^3\gamma^3};$$

ἀλλὰ κατὰ τὸ ἐν § 291 θεώρημα τὸ β'. μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἰσοῦται τῇ $\sqrt[12]{\alpha^{11}\beta^7\gamma^3}$· ἄρα

$$\sqrt[3]{\alpha^2\beta}\times\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma}=\sqrt[12]{\alpha^{11}\beta^7\gamma^3}.$$

Ἐν γένει δυνάμεθα νὰ μετασχηματίζωμεν γινόμενον ῥιζικῶν διαφόρων βαθμῶν εἰς ἓν μόνον, ἄγοντες τὰ ῥιζικὰ εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ ἐν § 291 θεώρημα.

Εὑρίσκομεν οὕτω

$$4\sqrt{\alpha\beta}\times 3\sqrt[4]{\alpha^3\beta^3}=12\sqrt[4]{\alpha^5\beta^5}=12\alpha\beta\sqrt[4]{\alpha\beta}.$$

$$\sqrt{3}\times\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[6]{729}.$$

Ὁ μετασχηματισμὸς γίνεται καὶ ἀντιθέτως· ἤγουν ῥιζικόν τι δύναται νὰ μετασχηματίζηται εἰς γινόμενον ῥιζικῶν βαθμῶν ἴσων ἢ κατωτέρων.

§ 302. Γ'. Δυνάμεθα νὰ μετασχηματίζωμεν πηλίκα ῥιζικῶν διαφόρων βαθμῶν, στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ὅτι τὸ πηλίκον τῆς μ.ῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος A διὰ τῆς μ.ῆς ῥίζης ἑτέρου ἀριθμοῦ B ἰσοῦται τῆς μῆ ῥίζῃ τοῦ $\frac{A}{B}$· ἤτοι

$$\frac{\sqrt[\mu]{A}}{\sqrt[\mu]{B}}=\sqrt[\mu]{\frac{A}{B}}.$$

πρὸς ἀπόδειξιν δὲ τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ μαι δυνάμεις τῶν δύο αὐτῆς μελῶν εἰσὶν ἀμφότεραι $\frac{A}{B}$.

Ἔστω τὸ πηλίκον $\frac{5\sqrt{\alpha\beta}}{4\sqrt[3]{\alpha\beta^2}}$. Ἄγοντες τὰ δύο ῥιζικὰ εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην, εὑρίσκομεν $\frac{5\sqrt[6]{\alpha^3\beta^3}}{4\sqrt[6]{\alpha^2\beta^4}}$· κατὰ δὲ τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν

$$\frac{5\sqrt[6]{\alpha^3\beta^3}}{4\sqrt[6]{\alpha^2\beta^4}}=\frac{5}{4}\sqrt[6]{\frac{\alpha^3\beta^3}{\alpha^2\beta^4}}=\frac{5}{4}\sqrt[6]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

οὕτως

$$\frac{5\sqrt{\alpha\beta}}{4\sqrt[3]{\alpha\beta^2}}=\frac{5}{4}\sqrt[6]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Ἐν γένει δυνάμεθα νὰ μετασχηματίζωμεν πηλίκον ῥιζικῶν διαφόρων βαθμῶν, ἄγοντες εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν ἐν ἀρχῇ τοῦ παραγράφου πρότασιν.

Εὑρίσκομεν οὕτω

$$\frac{6\sqrt[4]{\alpha\beta}}{15\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{2}{5}\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha\beta}}=\frac{2}{5\sqrt[4]{\alpha\beta}}.$$

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{\frac{4}{3}}.$$

Ὁ μετασχηματισμὸς γίνεται καὶ ἀντιθέτως· ἤγουν ῥίζα πηλίκου μετασχηματίζεται εἰς πηλίκον ῥιζῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ἐφαρμόζωμεν τοὺς ἀνωτέρω μετασχηματισμοὺς εἰς παραστάσεις περιεχούσας ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, φθάνομεν πολλάκις εἰς ἐξαγόμενα παράδοξα· ἤγουν ἰδανικαὶ παραστάσεις νὰ ἰσῶνται πραγματικαῖς καὶ τἀνάπαλιν. Αἱ ἰσότητες τότε πρέπει νὰ νοῶνται ὡς εἴρηται ἐν ὁμοίαις περιπτώσεσι (§ 208 καὶ § 291, Σημ.)· ἤγουν ὡς *ἰσότητες κατὰ συνθήκην*. Τοιαῦταί εἰσιν αἱ ἑξῆς

$$\sqrt{-\sqrt[3]{32}}\times\sqrt[3]{\sqrt{-2}}=\sqrt[6]{64}=2.$$

$$\sqrt{-\alpha}\times\sqrt[4]{\alpha^2}=\sqrt[4]{\alpha^4}=\alpha.$$

Περὶ κλασματικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἐκθετῶν.

α'. Ὁρισμοί.

§ 303. *Ἡ παράστασις* $\sqrt[\lambda]{\alpha^\kappa}$ *συνετέθη νὰ γράφηται καὶ οὕτω* $\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}$, Ὁ κλασματικὸς λοιπὸν ἐκθέτης δηλοῖ ὅτι δυνάμεως τοῦ φέροντος αὐτὸν ἀριθμοῦ, ἧς ὁ βαθμὸς δείκνυται διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἐκθέτου, ἐξάγεται ῥίζα, ἧς ὁ βαθμὸς δείκνυται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἐκθέτου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Κατὰ τὰς ἐν §§ 294 καὶ 295 προτάσεις δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τοὺς δύο ὅρους κλασματικοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ νὰ διαιρῶμεν διὰ κοινοῦ διαιρέτου, ὡς πράττομεν ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἐν γένει· περὶ δὲ τοῦ σημείου εἴρηται ἔν τε τῇ σημειώσει τοῦ § 294 καὶ γενικώτερον ἐν τῇ τοῦ § 291.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Διὰ τῆς παραδοχῆς κλασματικῶν ἐκθετῶν τὸ ῥιζικὸν σημεῖον καθίσταται περιττόν.

§ 304. *Παράστασις τοιάδε* $\alpha^{-\mu}$, *μ ὄντος θετικοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, σημαίνει κατὰ συνθήκην τὴν ἑξῆς* $\frac{1}{\alpha^{\mu}}$.

Ὁ ἀρνητικὸς λοιπὸν ἐκθέτης ἐμφαίνει κατὰ συνθήκην τὸ πηλίκον τῆς μονάδος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἔχομεν λαμβάνοντες τὸν αὐτὸν ἐκθέτην μετὰ τοῦ σημείου +.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\alpha^{-\frac{5}{7}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\alpha^5}}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ μὲν παράστασις $\alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}$ λέγεται *κλασματικὴ δύναμις* τοῦ α, ἡ δὲ $\alpha^{-\mu}$ *ἀρνητική*. Τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίους δυνάμεις θέλομεν καλεῖ *τελείας δυνάμεις*.

ϐ'. Αἱ ἰσότητες $\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\lambda}=\alpha^{\varkappa+\lambda}$, $\frac{\alpha^{\varkappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\varkappa-\lambda}$, $(\alpha^{\varkappa})^{\lambda}=\alpha^{\varkappa\lambda}$, *κ.τ.λ. ἀληθεύουσιν, οἱοιδήποτ' ἂν ὦσιν οἱ ἐκθέται κ καὶ λ.*

§ 305. Α'. Ἡ ἰσότης $\alpha^{\varkappa}.\alpha^{\lambda}=\alpha^{\varkappa+\lambda}$, ἀποδεδειγμένη, ὅταν οἱ ἐκθέται κ καὶ λ ἦναι ἀκέραιοι θετικοί, ἀληθεύει καὶ ὅταν οὗτοι ἦναι κλασματικοὶ ἢ ἀρνητικοί. Ἵνα ἀποδείξωμεν ἐντελῶς τὴν πρότασιν ταύτην, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν πάσας τὰς περιπτώσεις, αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς ὑποθέσεως ὅτι ὁ εἷς ἢ ὁ ἕτερος τῶν ἐκθετῶν κ καὶ λ ἦναι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, θετικὸς ἢ ἀρνητικός. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόδειξις γίνεται εἰς πᾶσαν περίπτωσιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἑξῆς δύο, αἵτινες δὲν εἶναι ἐκ τῶν ἁπλουστέρων.

α΄. Ὑποτεθήτω ὅτι ὁ μὲν ἐκθέτης κ εἶναι κλασματικὸς καὶ θετικὸς, ὁ δὲ λ κλασματικὸς καὶ ἀρνητικός. Τεθήτω $\kappa = \frac{\pi}{\rho}$, $\lambda = -\frac{\sigma}{\tau}$, π, ρ, σ, τ ὄντων ἀκεραίων. Ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης εἶναι κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην

$$(1)\qquad \alpha^{\frac{\pi}{\rho}} \times \alpha^{-\frac{\sigma}{\tau}} = \alpha^{\frac{\pi}{\rho}-\frac{\sigma}{\tau}}.$$

Μετασχηματίσωμεν ἑκάτερον τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς οὕτως, ὥστε ἐν τῇ μετεσχηματισμένῃ παραστάσει νὰ μὴ ὑπάρχωσιν ἐκθέται κλασματικοὶ ἢ ἀρνητικοί. Ἔχομεν

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}} = \sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}},\quad \alpha^{-\frac{\sigma}{\tau}} = \frac{1}{\sqrt[\tau]{\alpha^{\sigma}}}.$$

ἄρα

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}} \times \alpha^{-\frac{\sigma}{\tau}} = \sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt[\tau]{\alpha^{\sigma}}} = \frac{\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}}{\sqrt[\tau]{\alpha^{\sigma}}} = \sqrt[\tau\rho]{\frac{\alpha^{\pi\tau}}{\alpha^{\sigma\rho}}}.$$

Ἐπίσης

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}-\frac{\sigma}{\tau}} = \alpha^{\frac{\pi\tau-\sigma\rho}{\tau\rho}} = \sqrt[\tau\rho]{\frac{\alpha^{\pi\tau}}{\alpha^{\sigma\rho}}}.$$

ἤ, ἐὰν $\frac{\pi}{\rho} - \frac{\sigma}{\tau}$ ἦναι ἀρνητικὸν,

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}-\frac{\sigma}{\tau}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\pi}{\rho}}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\sigma\rho-\pi\tau}{\tau\rho}}} = \frac{1}{\sqrt[\tau\rho]{\frac{\alpha^{\sigma\rho}}{\alpha^{\pi\tau}}}} = \sqrt[\tau\rho]{\frac{1}{\left(\frac{\alpha^{\sigma\rho}}{\alpha^{\pi\tau}}\right)}} = \sqrt[\tau\rho]{\frac{\alpha^{\pi\tau}}{\alpha^{\sigma\rho}}};$$

ἄρα ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἀληθής, ἑκατέρου τῶν μελῶν αὐτῆς ἴσου ὄντος τῇ παραστάσει $\sqrt[\tau\rho]{\frac{\alpha^{\pi\tau}}{\alpha^{\sigma\rho}}}$.

β'. Ὑποτεθήτωσαν ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται κ καὶ λ κλασματικοὶ καὶ ἀρνητικοί· ἤτοι $\kappa=-\frac{\pi}{\rho}$, $\lambda=-\frac{\sigma}{\tau}$. Ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης εἶναι τότε

$$(2) \qquad \alpha^{-\frac{\pi}{\rho}}\times\alpha^{-\frac{\sigma}{\tau}}=\alpha^{-\left(\frac{\pi}{\rho}+\frac{\sigma}{\tau}\right)}.$$

Τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται τῇ παραστάσει $\frac{1}{\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}\times\sqrt[\tau]{\alpha^{\sigma}}}$, εἴτε τῇ $\frac{1}{\sqrt[\tau\rho]{\alpha^{\pi\tau}\times\alpha^{\sigma\rho}}}$· τὸ δὲ δεύτερον μέλος τῇ $\frac{1}{\alpha^{\frac{\pi\tau+\sigma\rho}{\tau\rho}}}=\frac{1}{\sqrt[\tau\rho]{\alpha^{\pi\tau}\times\alpha^{\sigma\rho}}}$· τὰ δύο λοιπὸν μέλη τῆς (2) εἰσὶν ἴσα.

§ 306. Β'. Ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda},$$

ἀποδεδειγμένη ὅταν οἱ ἐκθέται κ καὶ λ ἦναι ἀκέραιοι καὶ $\kappa>\lambda$, ἀληθεύει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν. Τῷ ὄντι· οἱοιδήποτ' ἂν ὦσιν οἱ ἐκθέται οὗτοι, ἀπεδείχθη ἀνωτέρω ὅτι $\alpha^{\kappa-\lambda}\times\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa}$· ἄρα $\alpha^{\kappa-\lambda}$ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α^{κ} διὰ α^{λ}.

§ 307. Γ'. Ἡ ἰσότης $(\alpha^{\kappa})^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$ (§ 49) ἀληθεύει ἐπίσης εἰς πᾶσαν περίπτωσιν· ὡς δ' ἐπράξαμεν καὶ ἐν § 305, ἀρκούμεθα ν' ἀποδείξωμεν αὐτὴν εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

α'. Θῶμεν $\kappa=\frac{\pi}{\rho}$, $\lambda=-\frac{\sigma}{\tau}$, π, ρ, σ, τ ὄντων ἀκεραίων. Ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι

$$(1) \qquad \left(\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\right)^{-\frac{\sigma}{\tau}}=\alpha^{-\frac{\pi\sigma}{\tau\rho}}.$$

Τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος ἰσοῦται, κατὰ τὴν σημασίαν τῶν κλασματικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἐκθετῶν, τῇ παραστάσει $\dfrac{1}{\sqrt[\tau]{\left(\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}\right)^{\sigma}}} = \dfrac{1}{\sqrt[\tau\rho]{\alpha^{\pi\sigma}}}$;

τῇ αὐτῇ δὲ παραστάσει ἰσοῦται καὶ τὸ β'. μέλος· ἄρα ἡ (1) εἶναι ἀληθής.

β'. Θῶμεν $\varkappa = -\dfrac{\pi}{\rho}$, $\lambda = -\dfrac{\sigma}{\tau}$. Ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης εἶναι τότε

$$(2) \qquad \left(\alpha^{-\frac{\pi}{\rho}}\right)^{-\frac{\sigma}{\tau}} = \alpha^{\frac{\pi\sigma}{\tau\rho}}.$$

Τῷ ὄντι· τὸ α'. μέλος ἰσοῦται τῇ παραστάσει

$$\frac{1}{\sqrt[\tau]{\left(\dfrac{1}{\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}}\right)^{\sigma}}};$$

ἡ παράστασις δ' αὕτη ἰσοῦται τῇ $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt[\tau\rho]{\alpha^{\pi\sigma}}}\right)}$, εἴτε τῇ $\sqrt[\tau\rho]{\alpha^{\pi\sigma}}$· τοῦτ' αὐτὸ δ' ἐμφαίνει καὶ τὸ β'. μέλος τῆς (2)· ἡ ἰσότης λοιπὸν αὕτη εἶναι ἀληθής.

§ 308. Δ'. Αἱ ἰσότητες (§§ 50, 79)

$$(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\ldots)^{\mu} = \alpha^{\mu}.\beta^{\mu}.\gamma^{\mu}.\delta^{\mu}\ldots.$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$$

ὑφίστανται, οἱονδήποτ' ἂν ᾖ τὸ μ.

Ἔστω $\mu = \dfrac{\varkappa}{\lambda}$, κ καὶ λ ὄντων ἀκεραίων καὶ θετικῶν. Ἔχομεν

$$(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\ldots)^{\mu} = \sqrt[\lambda]{(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\ldots)^{\varkappa}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\varkappa}.\beta^{\varkappa}.\gamma^{\varkappa}.\delta^{\varkappa}\ldots}$$

$$= \sqrt[\lambda]{\alpha^{\varkappa}}\times\sqrt[\lambda]{\beta^{\varkappa}}\times\sqrt[\lambda]{\gamma^{\varkappa}}\times\sqrt[\lambda]{\delta^{\varkappa}}\times\ldots = \alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}.\beta^{\frac{\varkappa}{\lambda}}.\gamma^{\frac{\varkappa}{\lambda}}.\delta^{\frac{\varkappa}{\lambda}}\ldots = \alpha^{\mu}.\beta^{\mu}.\gamma^{\mu}.\delta^{\mu}\ldots;$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}}=\sqrt[\lambda]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}}=\sqrt[\lambda]{\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}}=\frac{\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}}{\sqrt[\lambda]{\beta^{\kappa}}}=\frac{\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}}{\beta^{\frac{\kappa}{\lambda}}}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}.$$

Ἔστω ἤδη $\mu=-\rho$, ρ ὄντος θετικοῦ οἱουδήποτε. Ἔχομεν

$$(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\ldots)^{\mu}=\frac{1}{(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\ldots)^{\rho}}=\frac{1}{\alpha^{\rho}.\beta^{\rho}.\gamma^{\rho}.\delta^{\rho}\ldots}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{\rho}}\times\frac{1}{\beta^{\rho}}\times\frac{1}{\gamma^{\rho}}\times\frac{1}{\delta^{\rho}}=\alpha^{\mu}.\beta^{\mu}.\gamma^{\mu}.\delta^{\mu}\ldots.$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}=\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\rho}}=\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\rho}}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\rho}}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}.$$

Περὶ ἀσυμμέτρων ἐκθετῶν.

α΄. *Προοιμιώδεις παρατηρήσεις.*

§ 309. Ἔστω α θετικός τις ἀριθμὸς σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος. Ἐκ τῶν κλασματικῶν δυνάμεων αὐτοῦ (θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν) αἱ ἔχουσαι ἐκθέτην, οὗ ὁ παρονομαστὴς ἄρτιος, ἔχουσι διπλοῦν σημεῖον· ἐν τοῖς ἑξῆς ὑποτίθεται ὅτι αἱ τοιαῦται δυνάμεις λαμβάνονται πάντοτε μετὰ τοῦ $+$.

α΄. *Πᾶσα δύναμις τοῦ α ἀκέραιος ἢ κλασματική, θετικὴ ἢ ἀρνητική, εἶναι θετική.*

Πᾶσα τοιαύτη δύναμις τοῦ α εἶναι ῥίζα τελείας τινὸς δυνάμεως αὐτοῦ ἢ πηλίκον τῆς μονάδος διὰ τοιαύτης ῥίζης· καὶ πᾶσα μὲν τελεία δύναμις τοῦ α εἶναι θετική, θετικοῦ ὄντος καὶ τοῦ α· ἐκ δὲ τῶν ῥιζῶν θετικοῦ ἀριθμοῦ αἱ μὲν περιττοῦ βαθμοῦ εἰσι θετικαὶ (§ 209), αἱ δ' ἀρτίου θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ (§ 211)· ἀλλ' εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι ἐνταῦθα θεωροῦνται μόνον αἱ θετικαί· ἄρα πᾶσα δύναμις θετικὴ τοῦ α εἶναι θετική· ἄρα καὶ πᾶσα ἀρνητική, ὡς πηλίκον τῆς μονάδος διὰ θετικοῦ.

β΄. *Ὅταν $\alpha>1$, πᾶσα μὲν θετικὴ δύναμις τοῦ α εἶναι μείζων* *τῆς μονάδος, πᾶσα δ' ἀρνητικὴ ἐλάσσων· ἀντιστρόφως δὲ, ὅταν $\alpha < 1$.*

Ὑποτεθήτω ἐν πρώτοις ὁ α σύμμετρος καὶ > 1, ἔστω δὲ $\alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}$ κλασματική τις δύναμις αὐτοῦ· ἔχομεν $\alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}=\sqrt[\lambda]{\alpha^{\varkappa}}$· ἐπειδὴ $\alpha>1$, διὰ τοῦτο καὶ $\alpha^{\varkappa}>1$· ἑπομένως καὶ $\sqrt[\lambda]{\alpha^{\varkappa}}>1$· διότι τελεία δύναμις ἀριθμοῦ ἐλάσσονος τῆς μονάδος εἶναι ἔτι μᾶλλον ἐλάσσων τῆς μονάδος. Ἔσω ἤδη ἀσύμμετρός τις α μείζων τῆς μονάδος· σημειωθήτω διὰ δ ὁ ἐν αὐτῷ ἀκέραιος· ἔχομεν $\alpha^{\varkappa}>\delta^{\varkappa}$. ὅθεν $\sqrt[\lambda]{\alpha^{\varkappa}}>\sqrt[\lambda]{\delta^{\varkappa}}$ (*)· ἀλλὰ $\delta^{\frac{\varkappa}{\lambda}}>1$· ἄρα καὶ $\alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}>1$.

Ἔστω νῦν ἡ ἀρνητικὴ δύναμις $\alpha^{-\mu}$, α ὄντος συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου μείζονος τῆς μονάδος· εἴδομεν ὅτι $\alpha^{\mu}>1$· ἄρα $\frac{1}{\alpha^{\mu}}<1$, εἴτε $\alpha^{-\mu}<1$.

Ὅταν $\alpha<1$, θῶμεν $\alpha=\frac{1}{\alpha'}$, α' ὄντος μείζονος τῆς μονάδος· ἐντεῦθεν $\alpha^{\mu}=\frac{1}{\alpha'^{\mu}}$ (§ 308) καὶ $\alpha^{-\mu}=\alpha'^{\mu}$· ἀλλὰ $\alpha'^{\mu}>1$· ἄρα $\alpha^{\mu}<1$ καὶ $\alpha^{-\mu}>1$.

γ'. *Ὅταν $\alpha>1$, αἱ δυνάμεις συναυξάνουσι μετὰ τῶν ἐκθετῶν· ὅταν δὲ $\alpha<1$, αἱ δυνάμεις ἐλαττοῦνται, αὐξανομένων τῶν ἐκθετῶν.*

Ἔστω $\alpha>1$ καὶ $\pi>\rho$· λέγω ὅτι $\alpha^{\pi}>\alpha^{\rho}$. Ἔχομεν $\frac{\alpha^{\pi}}{\alpha^{\rho}}=\alpha^{\pi-\rho}$· ὄντος δὲ τοῦ $\pi-\rho$ θετικοῦ, ἕπεται $\alpha^{\pi-\rho}>1$· ἐπειδὴ οὕτω τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^{\pi}}{\alpha^{\rho}}$ εἶναι μεῖζον τῆς μονάδος, οἱ δ' ἀριθμοὶ α^{π} καὶ α^{ρ} θετικοί, ἕπεται $\alpha^{\pi}>\alpha^{\rho}$.

Ὅταν $\alpha<1$, τότε $\alpha^{\pi-\rho}<1$· ἑπομένως $\alpha^{\pi}<\alpha^{\rho}$.

(*) Ὅρα τὸν πρόλογον, ἔνθα ἀναφέρεται ὅτι, ὅταν ἀριθμὸς σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος ἦναι μείζων ἑτέρου τοιούτου, καὶ πᾶσα δύναμις ἢ ῥίζα τοῦ πρώτου εἶναι μείζων τῆς ὁμοβάθμου τοῦ δευτέρου.

δ'. *Ἡ διαφορὰ τῶν παραστάσεων α^{μ} καὶ $\alpha^{\mu+\varepsilon}$ ἐλαττοῦται ἀπεριορίστως, ὅταν ὁ ε ἐλαττῶται ἀπεριορίστως.*

Ὅταν δηλονότι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως α^{μ} ὑφίσταται ἐλαχίστην τινὰ μεταβολήν, ἐλαχίστη εἶναι καὶ ἡ ἐντεῦθεν μεταβολὴ τῆς δυνάμεως α^{μ}.

Ἔστω $\alpha>1$. Ἔχομεν $\alpha^{\mu+\varepsilon}-\alpha^{\mu}=\alpha^{\mu}(\alpha^{\varepsilon}-1)$. Ὅταν ὁ ε ἐλαττῶται ἐπ' ἀόριστον, α^{ε} τείνει ἐπ' ἀόριστον πρὸς τὴν μονάδα· διότι, ὁσονδήποτ' ἂν ᾖ μικρὸν τὸ ε, ἔχομεν πάντοτε $\alpha^{\varepsilon}>1$ (β'.)· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ ὅτι α^{ε} δὲν γίνεται ἔλασσον τοῦ $1+\rho$, ρ ὄντος ὁσονδήποτε μικροῦ, ἔπρεπε τότε καὶ $(1+\rho)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ νὰ μὴ γίγνηται μεῖζον τοῦ α· ὅπερ ἄτοπον· διότι, ε ὄντος ὁσονδήποτε μικροῦ, $\frac{1}{\varepsilon}$ δύναται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μέγας ἀριθμός, αἱ δὲ δυνάμεις τοῦ $1+\rho$ αὐξάνουσιν ἀπεριορίστως, ὅταν αὐξάνωσιν ἐπ' ἄπειρον οἱ ἐκθέται (*). Ἐπειδὴ λοιπὸν α^{ε} τείνει πρὸς τὴν 1, $\alpha^{\varepsilon}-1$ τείνει πρὸς τὸ 0 ὅθεν καὶ τὸ γινόμενον $\alpha^{\mu}(\alpha^{\varepsilon}-1)$, εἴτε ἡ διαφορὰ τῶν $\alpha^{\mu+\varepsilon}$ καὶ α^{μ}, ἐλαττοῦται ἀπεριορίστως.

Ἐὰν $\alpha<1$, ἔχομεν $\alpha=\frac{1}{\alpha'}$ $(\alpha'>1)$· ὅθεν $\alpha^{\mu}=\frac{1}{\alpha'^{\mu}}$, $\alpha^{\mu+\varepsilon}=\frac{1}{\alpha'^{\mu+\varepsilon}}$,

$$\alpha^{\mu}-\alpha^{\mu+\varepsilon}=\frac{1}{\alpha'^{\mu}}-\frac{1}{\alpha'^{\mu+\varepsilon}}=\frac{\alpha'^{\mu+\varepsilon}-\alpha'^{\mu}}{\alpha'^{2\mu+\varepsilon}}=\frac{\alpha'^{\mu}}{\alpha'^{2\mu+\varepsilon}}(\alpha'^{\varepsilon}-1).$$

Ὅταν ὁ ε ἐλαττῶται ἀπεριορίστως, ὁ παράγων $\frac{\alpha'^{\mu}}{\alpha'^{2\mu+\varepsilon}}$ εἶναι πάντοτε ἐλάσσων τοῦ $\frac{\alpha'^{\mu}}{\alpha'^{2\mu}}$, ὁ δ' ἕτερος $\alpha'^{\varepsilon}-1$ ἐλαττοῦται ἀπεριορίστως· ἄρα καὶ τὸ γινόμενον ἐπίσης.

(*) Τὸ τετράγωνον τοῦ $1+\varepsilon$ εἶναι μεῖζον τοῦ $1+2\varepsilon$· εὑρίσκεται εὐκόλως καὶ ὅτι $(1+\varepsilon)^3>1+3\varepsilon$, $(1+\varepsilon)^4>1+4\varepsilon$, ... $(1+\varepsilon)^{\kappa}>1+\kappa\varepsilon$· αἱ τέλειαι λοιπὸν δυνάμεις τοῦ $1+\varepsilon$ αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον μετὰ τοῦ ἐκθέτου (ὅρα περὶ τούτου καὶ § 324, Σημ.)· ἄρα καὶ αἱ μὴ τέλειαι ἐπίσης, ὡς μείζονες τῶν τελείων, ὧν οἱ ἐκθέται περιέχονται ἐν τοῖς τῶν πρώτων (γ'.).

ε'. Ὁρισμὸς τῶν ἀσυμμέτρων ἐκθετῶν.

§ 310. Ἔστω α θετικός τις ἀριθμὸς οἱοσδήποτε, μ ἕτερος ἀσύμμετρος, $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... σύμμετροι αὔξοντες καὶ τείνοντες πρὸς τὸν μ (*). *Ἡ παράστασις α^{μ} ἐμφαίνει τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνουσιν αἱ δυνάμεις $\alpha^{\varkappa}$, $\alpha^{\varkappa'}$, $\alpha^{\varkappa''}$, ...*

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως τοῦ ὁρίου αὐτοῦ θεωρήσωμεν καὶ συμμέτρους λ, λ', λ'', ... μείζονας τοῦ μ καὶ τείνοντας πρὸς αὐτόν· φανερὸν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι βαίνουσιν ἐλαττούμενοι. Ὑποτεθήτω $\alpha>1$. Αἱ δυνάμεις $\alpha^{\varkappa}, \alpha^{\varkappa'}, \alpha^{\varkappa''}, \ldots$ βαίνουσιν αὐξάνουσαι, αἱ δὲ α^{λ}, $\alpha^{\lambda'}$, $\alpha^{\lambda''}$, ... ἐλαττούμεναι (§ 309, γ'.), οὖσαι δὲ πάντοτε μείζονες τῶν πρώτων· διότι οἱ $\lambda, \lambda', \lambda''$, ... εἰσὶ μείζονες τῶν $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... Ἡ διαφορὰ μιᾶς δυνάμεως τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ μιᾶς τῆς δευτέρας δύναται ν' ἀποβῇ ὁσονδήποτε μικρά· διότι καὶ ἡ τῶν ἐκθετῶν γίνεται τοιαύτη (§ 309, δ'.). Αἱ δυνάμεις $\alpha^{\varkappa}, \alpha^{\varkappa'}, \alpha^{\varkappa''}, \ldots$ ἔχουσιν ὅριον τὸν ἐλάχιστον τῶν ἀριθμῶν, οὓς δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσιν, αἱ δὲ $\alpha^{\lambda}, \alpha^{\lambda'}, \alpha^{\lambda''}, \ldots$ τὸν μέγιστον τῶν ἀριθμῶν, οὓς δὲν δύνανται νὰ παρέλθωσι· τὰ δύο δὲ ταῦτα ὅρια εἶναι ταὐτά· ἄλλως αἱ διαφοραὶ δυνάμεώς τινος τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ ἑτέρας τῆς δευτέρας δὲν ἤθελον μειοῦσθαι ἐπ' ἄπειρον.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδείκνυται ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁρίου καὶ ὅταν $\alpha<1$· ἀλλὰ τότε αἱ μὲν δυνάμεις $\alpha^{\varkappa}, \alpha^{\varkappa'}, \alpha^{\varkappa''}, \ldots$ βαίνουσιν ἐλαττούμεναι, αἱ δὲ $\alpha^{\lambda}, \alpha^{\lambda'}, \alpha^{\lambda''}, \ldots$ αὐξάνουσαι καὶ οὖσαι πάντοτε ἐλάσσονες τῶν πρώτων (§ 309, γ'.).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Μόνοι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἀσυμμέτρους δυνάμεις. Ἔστω $-\alpha$ ἀρνητικός τις ἀριθμός· ἡ παράστασις $(-\alpha)^{\mu}$, μ ὄντος ἀσυμμέτρου, δὲν δύναται νὰ ἦναι ὅριον· διότι ἐκ τῶν δυνάμεων $(-\alpha)^{\varkappa}, (-\alpha)^{\varkappa'}, (-\alpha)^{\varkappa''}, \ldots$ αἱ μὲν εἰσὶ πραγματικαί, αἱ δὲ ἰδανικαί· πραγματικαὶ μέν, ὅταν ὁ ἐκθέτης ἦναι κλάσμα, οὗ ὁ ἀριθμητὴς ἄρτιος ἢ ὁ παρονομαστὴς περιττός· ἰδανικαὶ δέ, ὅταν ὁ μὲν παρονομαστὴς ἄρτιος, ὁ δ' ἀριθμητὴς περιττός· τοῦτο δ' ἔχει οὕτως, ὁσονδήποτε πλησίον τοῦ μ κἂν ληφθῶσιν οἱ σύμμετροι οὗτοι· ἑπομένως δὲν ὑπάρχει ὅριον.

(*) Ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς εἶναι ὅριον ἀριθμῶν συμμέτρων (ὅρα τὸν πρόλογον).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Οἱ ἀσύμμετροι ἐκθέται δύνανται νὰ ἦναι καὶ ἀρνητικοί· οὕτως $\alpha^{-\mu}$ ἐμφαίνει $\frac{1}{\alpha^{\mu}}$ καὶ ὅταν ὁ μ ἦναι ἀσύμμετρος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'. Αἱ ἰσότητες

$$\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\lambda}=\alpha^{\varkappa+\lambda},\ \frac{\alpha^{\varkappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\varkappa-\lambda},\ (\alpha^{\varkappa})^{\lambda}=\alpha^{\varkappa\lambda},\ \text{κ.τ.λ.}$$

(§ 305) ὑφίστανται καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται ἦναι ἀσύμμετροι. Ὑποτεθήτω ὅτι κ καὶ λ εἶναι ἀσύμμετροι. Ἔστω θ σύμμετρος ἐλάσσων τοῦ κ καὶ ι ἕτερος ἐλάσσων τοῦ λ, διαφέροντες δ' ἄλλως τῶν ἀσυμμέτρων ὁσονδήποτε ὀλίγον. Εἶναι ἀποδεδειγμένον ὅτι $\alpha^{\theta}\times\alpha^{\iota}=\alpha^{\theta+\iota}$. Ἡ διαφορὰ τοῦ α^{θ} ἀπὸ τοῦ $\alpha^{\varkappa}$ δύναται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά, ἐπίσης καὶ ἡ τοῦ α^{ι} ἀπὸ τοῦ α^{λ} ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον $\alpha^{\theta}\times\alpha^{\iota}$ δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ $\alpha^{\varkappa}.\alpha^{\lambda}$ ὁσονδήποτε ὀλίγον. Ἐπίσης καὶ $\alpha^{\theta+\iota}$ διαφέρει τοῦ $\alpha^{\varkappa+\lambda}$ ὁσονδήποτε ὀλίγον, ὅταν $\theta+\iota$ διαφέρῃ τοῦ $\varkappa+\lambda$ ὁσονδήποτε ὀλίγον. Θῶμεν $\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\lambda}-\alpha^{\theta}\times\alpha^{\iota}=\varepsilon$, $\alpha^{\varkappa+\lambda}-\alpha^{\theta+\iota}=\varepsilon'$· ἐντεῦθεν ἕπεται $\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\lambda}-\alpha^{\varkappa+\lambda}=\varepsilon-\varepsilon'$· ἐπειδὴ ε καὶ ε' δύνανται νὰ ἦναι ὁσονδήποτε μικρά, ἡ διαφορὰ $\varepsilon-\varepsilon'$ εἶναι ἐλάσσων παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ· οὕτως $\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\lambda}$ καὶ $\alpha^{\varkappa+\lambda}$ διαφέρουσιν ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα $\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\lambda}=\alpha^{\varkappa+\lambda}$. Ἀποδειχθείσης τῆς ἰσότητος αὐτῆς, συνάγεται ἀμέσως ἡ $\frac{\alpha^{\varkappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\varkappa-\lambda}$· ἡ δὲ $(\alpha^{\varkappa})^{\lambda}=\alpha^{\varkappa\lambda}$ ἀποδείκνυται ὡς καὶ ἡ πρώτη· ἐπίσης καὶ αἱ $(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\ldots)^{\mu}=\alpha^{\mu}\times\beta^{\mu}\times\gamma^{\mu}\times\delta^{\mu}\times\ldots$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$, μ ὄντος ἀσυμμέτρου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'. Αἱ ἐν § 309 παρατηρήσεις ὑφίστανται καὶ ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἐκθετῶν· εὐκόλως δὲ γίνεται ἡ γενίκευσις αὕτη, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἀσυμμέτρων ἐκθετῶν. Π. χ. πᾶσα ἀσύμμετρος δύναμις θετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετική, ὡς ὅριον θετικῶν ἀριθμῶν· ἐπίσης πᾶσα θετικὴ τοιαύτη δύναμις ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος εἶναι καὶ αὐτὴ μείζων τῆς μονάδος, ὡς ὅριον ἀριθμῶν αὐξανόντων καὶ μειζόνων τῆς μονάδος, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Περὶ τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως $\alpha^{\chi}=\beta$.

§ 311. Ἐν τῇ *ἐκθετικῇ* ἐξισώσει $\alpha^{\chi}=\beta$ ἄγνωστος εἶναι ὁ ἐκθέτης. Ἐν τοῖς ἑξῆς ἐκτεθήσεται τίνι τρόπῳ εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἡ ἐπαληθεύουσα τὴν τοιαύτην ἐξίσωσιν, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ἦναι θετικοί· εἰρήσθω δ' ἐνταῦθα ἐκ προοιμίων ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ δύναται νὰ ἦναι ἀριθμὸς οἱοσδήποτε, σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος, θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

§ 312. Ἔστω ἐν πρώτοις ἡ μερικὴ ἐξίσωσις (1) $2^{\chi}=6$.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἐνταῦθα μείζων τῆς μονάδος· διότι $2^1=2$ (§ 309, γ'.)· ἔτι δὲ καὶ ἀσύμμετρος· διότι ἐὰν $\chi=\frac{\kappa}{\lambda}$, ἕπεται $2^{\kappa}=6^{\lambda}$· ὅπερ ἄτοπον· διότι ὁ 2^{κ} δὲν ἔχει τὸν παράγοντα 3, ὅστις ὑπάρχει ἐν τῷ 6^{λ}.

Δῶμεν τῷ 2 ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ θετικοὺς 1, 2, 3, ... , μέχρις οὗ εὕρωμεν δύο διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ 2, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται τὸ β'. μέλος τῆς ἐξισώσεως. Αἱ δύο αὗται δυνάμεις εἰσὶν 2^2 καὶ 2^3· ἐπομένως ὁ χ περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3 (§ 309, γ'.).

Θῶμεν $\chi=2+\frac{1}{\chi'}$, χ' ὄντος μείζονος τῆς μονάδος. Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1), ἔχομεν $2^{2+\frac{1}{\chi'}}=6$, ἢ $4 \cdot 2^{\frac{1}{\chi'}}=6$· ὅθεν $2^{\frac{1}{\chi'}}=\frac{3}{2}$· ὅθεν (2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi'}=2$.

Ἐν τῇ νέᾳ ταύτῃ ἐξισώσει ἀντικαταστήσωμεν πάλιν ἀντὶ τοῦ χ' ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἐκθέτας 1, 2, 3, ... καὶ λογισώμεθα τὰς δυνάμεις αὐτὰς τοῦ $\frac{3}{2}$, μέχρις οὗ εὕρωμεν δύο διαδοχικὰς περιεχούσας τὸ β'. μέλος 2. Εὑρίσκομεν οὕτως ὅτι ὁ 2 περιέχεται μεταξὺ $(\frac{3}{2})^1$ καὶ $(\frac{3}{2})^2$· ἐπομένως ὁ χ' περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 2.

Θῶμεν ἤδη $\chi'=1+\frac{1}{\chi''}$, χ'' ὄντος μείζονος τῆς μονάδος. Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (2), ἔχομεν $\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{\chi''}}=2$· ὅθεν $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\chi''}}=\frac{4}{3}$, ὅθεν (3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\chi''}=\frac{3}{2}$.

Ὑψώσωμεν πάλιν τὸ $\frac{4}{3}$ εἰς τελείας δυνάμεις διαδοχικῶς ἀπὸ τῆς δευτέρας, μέχρις οὗ εὕρωμεν δύο διαδοχικὰς περιεχούσας τὸν $\frac{3}{2}$· Εὑρίσκομεν οὕτως ὅτι ὁ $\frac{3}{2}$ περιέχεται μεταξὺ $(\frac{4}{3})^1$ καὶ $(\frac{4}{3})^2$· ἄρα ὁ χ'' περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 2.

Θῶμεν πάλιν $\chi''=1+\frac{1}{\chi'''}$· ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (3), ἔχομεν

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{\chi'''}}=\frac{3}{2}\cdot\ \text{ὅθεν}\ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{\chi'''}}=\frac{9}{8}\cdot\ \text{ὅθεν (4)}\ \left(\frac{9}{8}\right)^{\chi'''}=\frac{4}{3}.$$

Λογιζόμενοι πάλιν τὰς διαδοχικὰς τελείας δυνάμεις τοῦ $\frac{9}{8}$ ἀπὸ τῆς δευτέρας, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ $\frac{4}{3}$ περιέχεται μεταξὺ $(\frac{9}{8})^2$ καὶ $(\frac{9}{8})^3$· ἄρα ὁ χ''' περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3.

Θῶμεν $\chi'''=2+\frac{1}{\chi^{IV}}$· ὅθεν ἀντικαταστάσει εἰς τὴν (4),

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2+\frac{1}{\chi^{IV}}}=\frac{4}{3}\cdot\ \text{ὅθεν}\ \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{\chi^{IV}}}=\frac{256}{243}\cdot\ \text{ὅθεν (5)}\ \left(\frac{256}{243}\right)^{\chi^{IV}}=\frac{9}{8}.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ἀκέραιον τοῦ χ^{IV}, ἐργαζόμενοι ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), (4).

Εὕρομεν ὅτι $\chi=2+\frac{1}{\chi'}$, $\chi'=1+\frac{1}{\chi''}$, $\chi''=1+\frac{1}{\chi'''}$, $\chi'''=2+\frac{1}{\chi^{IV}}$· ὅθεν

$$\chi=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\chi^{IV}}}}}.$$

Εὑρίσκοντες καὶ τὸν ἐν τῷ χ^{IV} ἀκέραιον καὶ προβαίνοντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὁσαδήποτε συστατικὰ κλάσματα τοῦ συνεχοῦς, τοῦ ἰσουμένου τῇ τιμῇ τοῦ χ. Λαμβάνοντες ἠγμένον τι ἀντὶ τοῦ συνεχοῦς, ἔχομεν κατὰ προσέγγισιν τὴν τιμὴν τοῦ χ.

Ἡ εὕρεσις τῶν παρονομαστῶν τῶν συστατικῶν κλασμάτων, ἥτις μέχρι τοῦ τρίτου παρονομαστοῦ δὲν παρέσχε δυσκολίας, ἀποβαίνει ἐπὶ τέλους δυσκολωτάτη· π. χ. πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀκεραίου τοῦ χ^{IV} λογιστέον τὰς δυνάμεις τοῦ κλάσματος $\frac{256}{243}$· ὅπερ λίαν ἐπίπονον· ἀλλὰ τὰ ἐφεξῆς ἀποβαίνουσιν ἀσυγκρίτως δυσχερέστερα. Ἡ μέθοδος λοιπὸν αὕτη εἶναι πρακτικῶς δυσκολωτάτη.

§ 313. Ἀσχοληθῶμεν ἤδη εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν (1) $\alpha^{\chi}=\beta$, ἔνθα α καὶ β εἰσὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἰσὶν ἢ ἀμφότεροι μείζονες τῆς μονάδος, ἢ ἀμφότεροι ἐλάσσονες, ἢ ὁ μὲν μείζων, ὁ δ' ἐλάσσων· ἐρευνήσωμεν ἰδίᾳ ἑκάστην τῶν περιπτώσεων αὐτῶν.

Α'. Ἔστω $\alpha>1$ καὶ $\beta>1$.

α'. Ἐὰν $\alpha<\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι μείζων τῆς μονάδος· διότι $\alpha^1=\alpha$· ἐπειδὴ δ' αἱ δυνάμεις τοῦ α συναυξάνουσι μετὰ τῶν ἐκθετῶν (§ 309, γ'.), ἡ δύναμις τοῦ α, ἡ ἰσουμένη τῷ β, πρέπει νὰ ἔχῃ ἐκθέτην >1.

Λογιζόμενοι τὰς διαδοχικὰς τελείας δυνάμεις τοῦ α ἀπὸ τῆς δευτέρας, εὑρήσομεν δύο τοιαύτας, περιεχούσας τὸν β· ἔστωσαν αὗται α^{μ} καὶ $\alpha^{\mu+1}$· ὁ χ περιέχεται μεταξὺ μ καὶ $\mu+1$ (§ 309, γ'.). Θῶμεν $\chi=\mu+\frac{1}{\chi'}$, χ' ὄντος μείζονος τῆς μονάδος· ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1), ἔχομεν $\alpha^{\mu+\frac{1}{\chi'}}=\beta$· ὅθεν

$$\alpha^{\frac{1}{\chi'}}=\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}\text{· ὅθεν (2) }\left(\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}\right)^{\chi'}=\alpha.$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) εὑρίσκεται εἰς ἃς καὶ ἡ (1) περιστάσεις· δηλονότι οἱ γνωστοὶ $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}$ καὶ α εἰσὶν ἀμφότεροι >1, καὶ $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}<\alpha$· διότι ὁ β περιέχεται μεταξὺ α^{μ} καὶ $\alpha^{\mu+1}$· ἄρα $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}}$ καὶ $\frac{\alpha^{\mu+1}}{\alpha^{\mu}}$, ἤτοι μεταξὺ 1 καὶ α. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀκέραιον τοῦ χ', καθ' ὃν ἤδη τρόπον εὕρομεν καὶ τὸν τοῦ χ· ἔστω μ' οὗτος. Θῶμεν $\chi'=\mu'+\frac{1}{\chi''}$· ὅθεν $\chi=\mu+\cfrac{1}{\mu'+\cfrac{1}{\chi''}}$. Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (2) $\mu'+\frac{1}{\chi''}$ ἀντὶ χ' καὶ ἀνάγοντες, εὑρήσομεν ἐξίσωσιν ἔχουσαν σχῆμα τοιόνδε $A^{\chi''}=B$, ἔνθα πάλιν $A>1$, $B>1$ καὶ $A<B$· εὑρίσκομεν λοιπὸν ἐξ αὐτῆς τὸν ἀκέραιον τοῦ χ''. Προχωροῦντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς παρονομαστὰς ὁσωνδήποτε συστατικῶν κλασμάτων τοῦ συνεχοῦς, τοῦ ἰσουμένου τῇ τιμῇ τοῦ χ.

Ὅταν ὁ χ ἦναι σύμμετρος, ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων εἶναι ὡρισμένος καὶ θέλομεν ἐπὶ τέλους φθάσει εἰς ἐξίσωσιν, ἔνθα ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἐκθέτου εἶναι ἀκέραιος· ἀλλ' ὅταν ὁ χ ἦναι ἀσύμμετρος, οὐδέποτε θέλομεν φθάσει εἰς τοιαύτην ἐξίσωσιν· διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων εἶναι τότε ἄπειρος.

β'. Ἐὰν $\alpha>\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος· διότι ὁ ἐκθέτης 1 παρέχει ἐξαγόμενον μεῖζον τοῦ β. Θῶμεν οὖν $\chi=\frac{1}{\chi'}$, ὅθεν, ἀντικαταστάσει εἰς τὴν (1), $\beta^{\chi'}=\alpha$. Ἐπειδὴ ἐν ταύτῃ τῇ ἐξισώσει ὁ φέρων τὸν ἄγνωστον ἐκθέτην ἀριθμὸς εἶναι ἐλάσσων τοῦ β' μέλους, ἡ ἐξίσωσις ὑπάγεται εἰς τὴν προδιερευνηθεῖσαν περίπτωσιν· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ' διὰ συνεχοῦς ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν· ὑποτεθήτω ὅτι εὕρηται $\chi'=\mu+\cfrac{1}{\mu'+\cfrac{1}{\mu''+\dots}}$ ἕπεται ὅτι

$$\chi=\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\mu'+\cfrac{1}{\mu''+\dots}}}$$

§ 314. Β'. Ἔστω $\alpha<1$ καὶ $\beta<1$.

α'. Ἐὰν $\alpha>\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι μείζων τῆς μονάδος· διότι $\alpha^1=\alpha$· ἐπειδὴ δ' αἱ δυνάμεις τοῦ α αὐξάνουσιν, ἐλαττουμένου τοῦ ἐκθέτου (§309, γ'.), ἡ δύναμις τοῦ α, ἡ ἰσουμένη τῷ β, ἔχει ἐκθέτην >1.

Λογιζόμενοι τὰς διαδοχικὰς τελείας δυνάμεις τοῦ α, εὑρήσομεν δύο τοιαύτας, περιεχούσας τὸν β. Ἔστωσαν αὗται α^{μ} καὶ $\alpha^{\mu+1}$ ($\alpha^{\mu+1}$ εἶναι ἔλασσον τοῦ α^{μ}, τοῦ α ὄντος <1)· ὁ χ περιέχεται μεταξὺ μ καὶ $\mu+1$. Θῶμεν $\chi=\mu+\frac{1}{\chi'}$· ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1), ἔχομεν $\alpha^{\mu+\frac{1}{\chi'}}=\beta$· ὅθεν (2) $\left(\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}\right)^{\chi'}=\alpha$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εὑρίσκεται εἰς ἃς περιστάσεις καὶ ἡ (1)· δηλονότι οἱ $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}$ καὶ α εἰσὶν ἀμφότεροι <1, ὁ δὲ $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}>\alpha$· διότι ὁ β περιέχεται μεταξὺ α^{μ} καὶ $\alpha^{\mu+1}$· ἄρα $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}$ μεταξὺ 1 καὶ α· ἤγουν $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}<1$ καὶ $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}>\alpha$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως λοιπὸν (2) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ἀκέραιον τοῦ χ', ὡς εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (1) τὸν τοῦ χ. Προχωροῦντες δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὁσαδήποτε συστατικὰ κλάσματα τῆς τιμῆς τοῦ χ.

Ἄλλως δὲ ἡ περίπτωσις αὕτη δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν α'. τῶν ἐν § 313· διότι ἐκ τῆς $\alpha^{\chi}=\beta$ συνάγομεν $\frac{1}{\alpha^{\chi}}=\frac{1}{\beta}$, εἴτε $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\chi}=\frac{1}{\beta}$. τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως οἱ γνωστοὶ $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\beta}$ εἰσὶν >1, ὁ δὲ $\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$.

β'. Ἐὰν $\alpha<\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι <1. Θῶμεν $\chi=\frac{1}{\chi'}$, καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ (1)· εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς τὴν $\beta^{\chi'}=\alpha$, ἥτις ὑπάγεται εἰς τὴν ἡγηθεῖσαν περίπτωσιν. Εὑρίσκομεν λοιπὸν ἐξ αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ χ' καὶ διαιροῦντες δι' αὐτῆς τὴν μονάδα, ἔχομεν τὴν τοῦ χ.

§ 315. Γ'. Ἔστω $\alpha>1$ καὶ $\beta<1$. Ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀρνητική (§ 309, β'.). Θῶμεν $\chi=-y$· ἕπεται $\alpha^{-y}=\beta$· ὅθεν $\alpha^{y}=\frac{1}{\beta}$.

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις ἀνήκει εἰς τὴν Α΄. περίπτωσιν· εὑρίσκομεν λοιπὸν τὴν τιμὴν τοῦ y, ὡς εἴρηται ἐν § 313, καὶ λαμβάνοντες αὐτὴν μετὰ τοῦ —, ἔχομεν τὴν τοῦ χ.

Παραπλησίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν $α<1$ καὶ $β>1$, ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι πάλιν ἀρνητική.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅπως ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως $α^χ=β$ ᾖ ἐφικτή, πρέπει οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β νὰ ἦναι σύμμετροι· ἀλλὰ καὶ οὕτως ἡ μέθοδος εἶναι δυσκολωτάτη καὶ οὕτως εἰπεῖν ἀκατόρθωτος ἕνεκα τῶν μακροτάτων καὶ ἐπιπονωτάτων πράξεων, ἃς συνεπάγεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ.

Α΄. ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ.

Ὁρισμοί.

§ 316. Καλεῖται *πρόοδος ἀριθμητικὴ* ἢ κατὰ *διαφορὰν* σειρὰ ἀριθμῶν, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἀπὸ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου εἶναι πάντοτε ἡ αὐτή.

Ὅταν γράφηται τοιαύτη τις σειρὰ ἀριθμῶν, μεταξὺ μὲν τῶν ἀριθμῶν παρεντίθενται στιγμαί, ἐν ἀρχῇ δὲ τῆς προόδου γράφεται τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν τοιούτων προόδων σημεῖον ÷.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

÷ 3 . 7 . 11 . 15 . 19 . . . .

÷ 16 . 14 . 12 . 10 . 8 . . . .

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, καλοῦνται *ὅροι* τῆς προόδου αὐτῆς.

Ἡ σταθερὰ διαφορὰ ἑκάστου ὅρου ἀριθμητικῆς προόδου ἀπὸ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου καλεῖται *λόγος* τῆς προόδου. Τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω προόδων ὁ λόγος εἶναι 4, τῆς δὲ δευτέρας —2.

Ὅταν ὁ λόγος ἦναι θετικός, οἱ ὅροι τῆς προόδου βαίνουσιν αὐξάνοντες· ἡ πρόοδος λέγεται τότε *αὔξουσα*. Ὅταν δ᾽ ὁ λόγος ἦναι ἀρνητικὸς, οἱ ὅροι τῆς προόδου βαίνουσιν ἐλαττούμενοι· ἡ πρόοδος λέγεται τότε *φθίνουσα*.

Τύπος τῆς τιμῆς τοῦ $\nu^{\text{ου}}$ ὅρου προόδου ἀριθμητικῆς.

§ 317. Ἔστω ἡ γενικὴ ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\div\ \alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta.\ \varepsilon.\ \ldots$$

καὶ π ὁ λόγος αὐτῆς. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἔχομεν

$$\beta=\alpha+\pi,\ \gamma=\beta+\pi=\alpha+2\pi,\ \delta=\gamma+\pi=\alpha+3\pi, \ldots;$$

πᾶς λοιπὸν ὅρος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοῦ γινομένου τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων ὅρων.

Κατὰ ταῦτα λ ὄντος ὅρους τινὸς καὶ ν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων μέχρις αὐτοῦ, ἔχομεν

$$(1)\quad \lambda=\alpha+(\nu-1)\pi.$$

Ἔστω, π. χ., ἡ πρόοδος $\div$ 3. 7. 11. 15. . . . · ὁ 100ὸς ὅρος εἶναι κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον $3+99\times4=399$. Ἔστω ἐπίσης $\div$ 18. 15. 12. 9. . . . · ὁ 100ὸς ὅρος εἶναι $18-99\times3=-279$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἰσότητι (1) εἰσέρχονται τέσσαρες ἀριθμοί, ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ ὅρος λ, ὁ μέχρι τοῦ λ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν καὶ ὁ λόγος π· διὰ τῆς ἰσότητος λοιπὸν αὐτῆς δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὸν ἕνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὅταν οἱ τρεῖς ἄλλοι ἦναι δεδομένοι. Αἱ λύσεις τῶν τεσσάρων προβλημάτων, ἅπερ οὕτως ἔχομεν, εἰσὶν αἱ ἑξῆς

$$\lambda=\alpha+(\nu-1)\pi,\quad \alpha=\lambda-(\nu-1)\pi,\quad \pi=\frac{\lambda-\alpha}{\nu-1},\quad \nu=\frac{\lambda-\alpha}{\pi}+1.$$

§ 318. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων πεπερασμένης προόδου, ἐξίσου ἀπεχόντων τῶν ἄκρων ὅρων τῆς προόδου αὐτῆς, εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἄκρων.*

Ἔστω ἡ πρόοδος

$$\div\ \alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \ldots\ \iota.\ \kappa.\ \lambda,$$

ἧς ὁ τελευταῖος ὅρος λ καὶ π ὁ λόγος. Ἔστω χ ὅρος τις αὐτῆς κατέχων τὴν $\nu^{\text{ην}}$ θέσιν ἀπὸ τοῦ α καὶ y ἕτερος κατέχων τὴν $\nu^{\text{ην}}$ θέσιν ἀπὸ τοῦ λ. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἔχομεν $\chi=\alpha+(\nu-1)\pi$· ἔχομεν ἔτι $y=\lambda-(\nu-1)\pi$· διότι ἐὰν οἱ ὅροι γραφῶσι κατ' ἀντίθετον τάξιν, ἀποτελοῦσι πρόοδον, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος λ; ὁ δὲ λόγος —π· ἐντεῦθεν ἕπεται $\chi+y=\alpha+\lambda$.

Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

§ 319. Ἔστω ἡ πεπερασμένη πρόοδος

$$(\Pi) \quad \div\ \alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \ldots\ldots\ \iota.\ \kappa.\ \lambda,$$

ἧς ὁ λόγος π, ὁ δ' ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν. Σημειωθήτω διὰ Α τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς· ἔχομεν

$$A=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\iota+\kappa+\lambda\cdot$$

ἔτι δὲ

$$A=\lambda+\kappa+\iota+\ldots+\gamma+\beta+\alpha\cdot$$

ὅθεν

$$2A=(\alpha+\lambda)+(\beta+\kappa)+(\gamma+\iota)+\ldots+(\iota+\gamma)+(\kappa+\beta)+(\lambda+\alpha)\cdot$$

τὰ ἐν τῷ β'. μέλει τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐν παρενθέσει ἀθροίσματα εἰσὶν ἅπαντα ἴσα τῷ πρώτῳ $\alpha+\lambda$ (§ 318), ὁ δ' ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι ν· τὸ μέλος λοιπὸν αὐτὸ γράφεται καὶ οὕτω $(\alpha+\lambda)\nu$· οὕτω $2A=(\alpha+\lambda)\nu$· ὅθεν

$$(2) \qquad A=\frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}.$$

ἤγουν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων.

Ἔστω, π. χ., ἡ πρόοδος

$$\div\ 3.\ 8.\ 13.\ 18.\ \ldots\ldots$$

Ἵνα ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν χιλίων πρώτων ὅρων αὐτῆς, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν $1000^{\text{ὸν}}$ ὅρον διὰ τοῦ ἐν § 317 τύπου (1)· εἶτα δ' ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω τύπον (2). Εὑρίσκομεν οὕτως ὅτι ὁ μὲν $1000^{\text{ὸς}}$ ὅρος εἶναι $3+999\times5=4998$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν 1000 πρώτων ὅρων $\dfrac{(3+4998)1000}{2}=2500500$.

Ἐφαρμογαί. α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν $1+2+3+4\ldots+\nu$ εἶναι $\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.

ϛ'. Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν $1+3+5+\dots+(2\nu-1)$ εἶναι ν^2.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἰσότητες

$$(1)\qquad \lambda=\alpha+(\nu-1)\pi$$

$$(2)\qquad A=\frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$$

περιέχουσαι πέντε ἀριθμοὺς α, λ, π, ν, Α, χρησιμεύουσιν εἰς εὕρεσιν δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὅταν δίδωνται οἱ τρεῖς ἄλλοι. Δέκα εἶναι τὰ διάφορα προβλήματα, ἅπερ οὕτω δυνατὸν νὰ προταθῶσι, τὰ ἑξῆς

α'.	Δεδομένων	τῶν	α, λ, π	εὑρεῖν	ν, Α
β'.	»	»	α, λ, ν	»	π, Α
γ'.	»	»	α, π, ν	»	λ, Α
δ'.	»	»	λ, π, ν	»	α, Α
ε'.	»	»	α, λ, Α	»	π, ν
ϛ'.	»	»	α, π, Α	»	λ, ν
ζ'.	»	»	λ, π, Α	»	α, ν
η'.	»	»	α, ν, Α	»	λ, π
θ'.	»	»	λ, ν, Α	»	α, π
ι'.	»	»	π, ν, Α	»	α, λ.

Ἐκ τούτων τὸ ϛ'. καὶ τὸ ζ'. εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, τὰ δὲ λοιπὰ πάντα τοῦ πρώτου. Ἐν τῷ ε'. ἡ ἐξίσωσις (1) περιέχει τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ (2) ἔχει μόνον τὸν ἕνα ἄγνωστον, τὸ ζεῦγος ἐπιλύεται ὡς πρωτοβάθμιον ἁπλοῦν.

Παρένθεσις διαφορικῶν μέσων.

§ 320. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ παρεντεθῶσι μεταξὺ αὐτῶν μ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ν' ἀποτελῆται πρόοδος κατὰ διαφοράν.*

Οἱ οὕτω παρεντιθέμενοι ἀριθμοὶ καλοῦνται *διαφορικοὶ μέσοι.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ γνωσθῇ ὁ λόγος. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς ζητουμένης προόδου εἶναι $\mu+2$, ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ δὲ τελευταῖος β· ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ τύπῳ (§ 317, Σημ.).

$$\pi = \frac{\lambda - \alpha}{\nu - 1}$$

ϐ ἀντὶ λ καὶ μ+2 ἀντὶ ν, ἔχομεν

$$\pi = \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}.$$

οὕτως ὁ *λόγος τῆς προόδου ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς διαφορᾶς τῶν δεδομένων ἀριθμῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρενθετέων μέσων ηὐξημένου κατὰ 1.*

Π. χ. ἵνα παρενθέσωμεν 5 μέσους μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 20, εὑρίσκομεν τὸν λόγον διαιροῦντες 20—2 διὰ 5+1, ἤτοι 18 διὰ 6· ὁ λόγος λοιπὸν εἶναι 3· ὅθεν ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20.$$

§ 321. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστω πρόοδός τις ἀριθμητικὴ ÷α.ϐ.γ.δ...· ἐὰν μεταξὺ τῶν α καὶ ϐ, τῶν ϐ καὶ γ, τῶν γ καὶ δ, . . . παρεντεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μ μέσων, αἱ ἰδιαίτεραι ἀπὸ τοῦ α μέχρι τοῦ ϐ, τοῦ ϐ μέχρι τοῦ γ, κ.τ.λ πρόοδοι ἀποτελοῦσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πρόοδον.*

Οἱ λόγοι τῶν ἰδιαιτέρων προόδων εἶναι $\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}, \frac{\gamma-\beta}{\mu+1}, \frac{\delta-\gamma}{\mu+1}, \ldots$ ἀλλὰ τῶν α, ϐ, γ, . . . χωρούντων κατὰ πρόοδον, ἔχομεν $\beta-\alpha = \gamma-\beta = \delta-\gamma = \ldots$· οἱ λόγοι λοιπὸν τῶν προόδων αὐτῶν εἰσιν ἴσοι· πρὸς δὲ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης αὐτῶν εἶναι ἐν ταὐτῷ καὶ πρῶτος τῆς ἀκολούθου· ἄρα αἱ ἰδιαίτεροι πρόοδοι διαδέχονται ἀλλήλας οὕτως, ὥστε ν' ἀποτελῆται ἐξ αὐτῶν μία μόνη πρόοδος.

Πότε τρεῖς ἀριθμοὶ α, ϐ, γ δύνανται νὰ ἦναι ὅροι τῆς αὐτῆς προόδου.

§ 322. Ὑποτεθήτω ὅτι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α, ϐ, γ εἶναι γεγραμμένοι καθ' ἣν τάξιν διαδέχονται ἀλλήλους ἐν τῇ προόδῳ, ἧς ἤθελον εἶσθαι ὅροι. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δύνανται νὰ ἦναι ὅροι τῆς αὐτῆς προόδου, μεταξὺ τοῦ α καὶ τοῦ ϐ ἤθελον ὑπάρχει διάφοροι ἄλλοι ὅροι, ἐπίσης καὶ μεταξὺ ϐ καὶ γ· ἔστω μ—1 ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων μεταξὺ α καὶ ϐ, ν—1 ὁ μεταξὺ ϐ καὶ γ· κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι $\frac{\beta-\alpha}{\mu}$ ἢ $\frac{\gamma-\beta}{\nu}$· ὅθεν

$$(1) \qquad \frac{\beta-\alpha}{\mu}=\frac{\gamma-\beta}{\nu}.$$

Ἵνα λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελῶσιν ὅρους τῆς αὐτῆς προόδου, πρέπει ἡ ἰσότης αὕτη νὰ ἐπαληθεύηται δι' ἀκεραίων καὶ θετικῶν τιμῶν τοῦ μ καὶ τοῦ ν.

Τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατὸν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι σύμμετροι· διότι τότε ὁ λόγος $\beta-\alpha : \gamma-\beta$ δύναται νὰ τραπῇ εἰς λόγον ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐὰν οἱ $\beta-\alpha$ καὶ $\gamma-\beta$ δὲν ἦναι ἀκέραιοι· ὑπαρχόντων δὲ δύο ἀκεραίων, ὧν ὁ λόγος $\beta-\alpha : \gamma-\beta$, ὑπάρχουσι καὶ ἄπειροι ἄλλοι (*). Οὕτως ὅταν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἦναι σύμμετροι, ὑπάρχουσι πάντοτε ἄπειροι πρόοδοι, ὧν δύνανται νὰ ἦναι ὅροι.

Β'. ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ.

Ὁρισμοί.

§ 323. Καλεῖται *πρόοδος γεωμετρικὴ* ἢ *κατὰ πηλίκον* σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἑκάστου ὁ λόγος πρὸς τὸν ἀμέσως ἡγούμενον εἶναι πάντοτε ὁ αὐτός.

Ὅταν γράφηται τοιαύτη τις σειρὰ ἀριθμῶν, μεταξὺ μὲν τῶν ἀριθμῶν παρεντίθεται τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως : , ἐν ἀρχῇ δὲ τῆς προόδου γράφεται τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν τοιούτων προόδων σημεῖον $\div\!\div$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \ldots$$
$$\div\!\div\ 8 : 2 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{32} : \ldots$$

(*) Ὅτι ἡ ἰσότης (1) ἐπαληθεύεται δι' ἀπείρων ἀκεραίων θετικῶν τιμῶν τῶν μ καὶ ν, δείκνυται καὶ οὕτω. Ὅταν ἡ ἰσότης (1) ἀναχθῇ εἰς τὸ σχῆμα $\varkappa\mu+\lambda\nu=\rho$, $\varkappa, \lambda, \rho$, ὄντων ἀκεραίων, τὸ μὲν β'. μέλος ἔσεται 0, οἱ δὲ δύο ὅροι τοῦ α'. μέλους ἑτερόσημοι· διαιρουμένων λοιπῶν τῶν δύο μελῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν $\varkappa$ καὶ λ, ἡ προκύψουσα ἐξίσωσις ἔσται ἐξ ἐκείνων, αἵτινές εἰσιν ἐπιδεκτικαὶ ἀπείρων λύσεων, ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἐν ταὐτῷ (§§ 189, 196).

Οἱ ἀριθμοί, οἳ ἀποτελοῦντες τοιαύτην πρόοδον, καλοῦνται *ὅροι* τῆς προόδου αὐτῆς.

Ὁ σταθερὸς λόγος ἑκάστου ὅρου πρὸς τὸν ἀμέσως ἡγούμενον καλεῖται *λόγος* τῆς προόδου. Τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω προόδων ὁ λόγος εἶναι 3, τῆς δὲ δευτέρας $\frac{1}{4}$.

Ὅταν ὁ λόγος ἦναι ἀρνητικός, οἱ ὅροι τῆς προόδου εἰσὶν ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί. Π. χ. ὁ λόγος τῆς προόδου

$$\div\div \tfrac{1}{2} : -\tfrac{1}{6} : +\tfrac{1}{18} : -\tfrac{1}{54} : \ldots$$

εἶναι -3.

Ὅταν ὁ λόγος ἦναι μείζων τῆς μονάδος, οἱ ὅροι τῆς προόδου βαίνουσιν αὐξάνοντες· ἡ πρόοδος λέγεται τότε *αὔξουσα*· τοιαύτη εἶναι ἡ πρώτη τῶν ἀνωτέρω. Ὅταν δ' ὁ λόγος ἦναι ἐλάσσων τῆς μονάδος, οἱ ὅροι τῆς προόδου βαίνουσιν ἐλαττούμενοι· ἡ πρόοδος λέγεται τότε *φθίνουσα*· τοιαύτη εἶναι ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη τῶν ἀνωτέρω (*).

§ 324. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Τῆς μὲν αὐξούσης γεωμετρικῆς προόδου οἱ ὅροι βαίνουσιν αὐξάνοντες ἀπεριορίστως, τῆς δὲ φθινούσης ἐλαττούμενοι ἀπεριορίστως.*

α΄. Θεωρήσωμεν τρεῖς διαδοχικοὺς ὅρους ι, κ, λ αὐξούσης προόδου, ἧς ὁ λόγος π. Ἔχομεν $\lambda = \kappa\pi$, $\kappa = \iota\pi$· ἄρα $\lambda - \kappa = (\kappa - \iota)\pi$· ἐπειδὴ $\pi > 1$, τὸ γινόμενον $(\kappa-\iota)\pi$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\kappa - \iota$· οὕτω τὸ προστιθέμενον εἰς ἕκαστον ὅρον πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἑπομένου βαίνει αὐξάνον· ἐὰν ἔμενεν ἀμετάβλητον, τὰ ἐξαγόμενα ἤθελον βαίνει αὐξάνοντα ἀπεριορίστως (**)· ἄρα ἔτι μᾶλλον, ὅταν τὸ προστιθέμενον αὐξάνῃ.

β΄. Ἔστω ἡ φθίνουσα πρόοδος

$$\div\div \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \ldots,$$

ἧς ὁ λόγος π. Τὰ πηλίκα τῆς μονάδος διὰ τῶν ὅρων αὐτῶν ἀποτελοῦσι πρόοδον, ἧς ὁ λόγος $\frac{1}{\pi}$· ἐπειδὴ δὲ $\pi < 1$, ἔπεται $\frac{1}{\pi} > 1$·

(*) Ἐνταῦθα, ὡς καὶ ἐν τῷ ἐφεξῆς θεωρήματι, οἱ ὅροι νοοῦνται ἀνεξαρτήτως τῶν σημείων.

(**) Εἶναι προφανὲς ὅτι ὅταν ἀριθμός τις ἐπαναλαμβάνηται ἐπ' ἄπειρον, τὰ ἐξαγόμενα βαίνουσιν αὐξάνοντα ἀπεριορίστως, ὁσονδήποτ' ἂν ᾖ μικρὸς ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος.

οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \ldots$ βαίνουσιν αὐξάνοντες ἀπεριορίστως· ἄρα οἱ παρονομασταὶ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ βαίνουσιν ἐλαττούμενοι ἀπεριορίστως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἕπεται ὅτι αἱ δυνάμεις τῶν μειζόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν αὐξάνουσιν ἀπεριορίστως μετὰ τοῦ βαθμοῦ, αἱ δὲ τῶν ἐλασσόνων ἐλαττοῦνται ἀπεριορίστως αὐξάνοντος τοῦ βαθμοῦ· διότι αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ $1+\alpha$ εἰσὶν ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, ἧς ὁ λόγος $1+\alpha$, ἤτοι αὐξούσης· ἐπομένως αὐξάνουσιν ἀπεριορίστως· αἱ δὲ τοῦ $\frac{1}{\kappa}$ (κ ὄντος >1) εἰσὶν ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, ἧς ὁ λόγος $\frac{1}{\kappa}$, ἤτοι φθινούσης· ἐπομένως ἐλαττοῦνται ἀπεριορίστως.

Τύπος τῆς τιμῆς τοῦ $\nu^{\text{ου}}$ ὅρου προόδου γεωμετρικῆς.

§ 325. Ἔστω ἡ πρόοδος

$$\div\!\div\, \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \ldots .$$

καὶ π ὁ λόγος αὐτῆς. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἔχομεν $\beta=\alpha\pi$, $\gamma=\beta\pi=\alpha\pi^2$, $\delta=\gamma\pi=\alpha\pi^3, \ldots$· πᾶς λοιπὸν ὅρος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ πρώτου ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου, ἧς ὁ βαθμὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν προηγουμένων ὅρων· ἐπομένως λ ὄντος ὅρου τινὸς καὶ ν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων μέχρις αὐτοῦ, ἔχομεν

$$(1) \qquad \lambda=\alpha\pi^{\nu-1}.$$

Ἔστω, π. χ., ἡ πρόοδος $\div\!\div\, 3 : 6 : 12 : 24 : \ldots$· ὁ $10^{\text{ος}}$ ὅρος αὐτῆς εἶναι $3\times 2^9=1536$. Ἔστω ἔτι $3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \ldots$· ὁ $10^{\text{ος}}$ ὅρος εἶναι $3\times(\frac{1}{2})^9=\frac{3}{512}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἰσότης (1) περιλαμβάνει τέσσαρας ἀριθμούς, τὸν πρῶτον ὅρον α, τὸν ὅρον λ, τὸν μέχρι τοῦ λ ἀριθμὸν τῶν ὅρων ν καὶ τὸν λόγον π· δι' αὐτῆς λοιπὸν εὑρίσκεται εἷς ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν ἀριθμῶν, ὅταν οἱ τρεῖς ἄλλοι ἦναι δεδομένοι. Ἔχομεν οὕτω τέσσαρα προβλήματα· αἱ λύσεις τῶν τριῶν εἰσὶν

$$\lambda=\alpha\pi^{\nu-1},\ \alpha=\frac{\lambda}{\pi^{\nu-1}},\ \pi=\sqrt[\nu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

ὅταν δ' ἄγνωστος ἦναι ὁ ν, ἡ τιμὴ αὐτοῦ πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιος καὶ εὑρίσκεται διὰ λογισμοῦ τῶν τελείων δυνάμεων τοῦ π, μέχρις οὗ εὑρεθῇ δύναμις ἴση τῷ $\frac{\lambda}{\alpha}$ (§ 313)· ἡ τιμὴ τοῦ ν εἶναι κατὰ μονάδα ἀνωτέρα τοῦ βαθμοῦ τῆς δυνάμεως αὐτῆς. Ἀλλ' ὑπάρχει καὶ ἄλλος σύντομος τρόπος προσδιορισμοῦ τοῦ ν, περὶ οὗ ἐν § 364.

§ 326. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Τὸ γινόμενον δύο ὅρων πεπερασμένης προόδου, ἐξίσου ἀπεχόντων τῶν ἄκρων ὅρων τῆς προόδου αὐτῆς, εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν ἄκρων.*

Ἔστω ἡ πρόοδος

$$\div\!\div\ \alpha : \beta : \gamma : \ldots\ldots : \iota : \kappa : \lambda.$$

Ἔστω ὅρος τις χ τῆς προόδου αὐτῆς, πρὸ τοῦ ὁποίου ὑπάρχουσιν ὅροι ν, καὶ y ἕτερος, μεθ' ὃν ὑπάρχουσιν ὅροι ν· ἔχομεν $\chi=\alpha\pi^{\nu}$· ἔτι δὲ $y=\lambda\times\frac{1}{\pi^{\nu}}$· διότι οἱ ὅροι κατ' ἀντίθετον τάξιν ἀποτελοῦσι πρόοδον, ἧς ὁ λόγος $\frac{1}{\pi}$· ἐντεῦθεν ἕπεται $\chi y=\alpha\lambda$.

Γινόμενον τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

§ 327. Σημειωθήτω διὰ Γ τὸ γινόμενον τῶν ὅρων τῆς προόδου $\div\!\div\ \alpha : \beta : \gamma : \ldots\ldots : \iota : \kappa : \lambda$, ἧς ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν· ἔχομεν

$$\Gamma=\alpha\times\beta\times\gamma\times\ \ldots\ldots\ \times\iota\times\kappa\times\lambda\cdot$$

ἔτι δὲ $\quad \Gamma=\lambda\times\kappa\times\iota\times\ \ldots\ldots\ \times\gamma\times\beta\times\alpha\cdot$

ὅθεν $\quad \Gamma^2=(\alpha\times\lambda)\,(\beta\times\kappa)\,(\gamma\times\iota)\ \ldots\ldots$

τὰ ἐν παρενθέσει γινόμενα $\alpha\times\lambda$, $\beta\times\kappa$, $\gamma\times\iota$,.... εἶναι ν τὸν ἀριθμὸν καὶ ἅπαντα ἴσα τῷ $\alpha\times\lambda$ (§ 326)· τὸ β'. λοιπὸν μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος εἶναι $(\alpha\times\lambda)^{\nu}$· οὕτως ἔχομεν $\Gamma^2=(\alpha\times\lambda)^{\nu}$· ὅθεν

$$\Gamma=\sqrt{(\alpha\times\lambda)^{\nu}}\cdot$$

οὕτω *τὸ γινόμενον τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ἧς ὁ ἀριθ-*

μὸς τῶν ὅρων ν, ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς νῆς δυνάμεως τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄκρων ὅρων.

Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

§ 328. Ἔςω Α τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου $\div\div α : β : γ : \ldots : ι : κ : λ$, ἧς ὁ λόγος $π$. Ἔχομεν $β = απ$, $γ = βπ$, ..., $κ = ιπ$, $λ = κπ$· προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς, συνάγομεν

$$β + γ + \ldots + κ + λ = (α + β + \ldots ι + κ)π\text{·}$$

τὸ α΄. μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι $Α - α$, ὁ δ' ἐν παρενθέσει παράγων τοῦ β΄. μέλους $Α - λ$· οὕτως ἡ αὐτὴ ἰσότης γράφεται καὶ οὕτω

$$Α - α = (Α - λ)π\text{·}$$

ἐντεῦθεν

$$(2) \quad Α = \frac{πλ - α}{π - 1}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ Α γράφεται καὶ ἄλλως. Ὁ ὅρος λ ἰσοῦται τῷ $απ^{ν-1}$· ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$(3) \quad Α = \frac{α(π^ν - 1)}{π - 1}.$$

Ὅταν ἡ πρόοδος ἦναι φθίνουσα, αἱ τιμαὶ αὗται γράφονται οὕτω

$$(4) \quad Α = \frac{α - πλ}{1 - π}$$

$$(5) \quad Α = \frac{α(1 - π^ν)}{1 - π}.$$

διότι οἱ ὅροι τῶν κλασματικῶν αὐτῶν τύπων εἰσὶ τότε θετικοὶ, ἐνῷ οἱ τῶν (2) καὶ (3) εἰσὶν ἀρνητικοί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἰσότητες

$$(1) \quad λ = απ^{ν-1}$$

$$(2) \quad Α = \frac{πλ - α}{π - 1},$$

περιέχουσαι τοὺς πέντε ἀριθμοὺς α, λ, π, ν, Α, δύνανται νὰ χρησιμεύωσιν εἰς εὕρεσιν δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὅταν δίδωνται οἱ τρεῖς ἄλλοι· ἀλλ' ἐκ τῶν δέκα διαφόρων προβλημάτων, ἅπερ οὕτω δυνατὸν νὰ προταθῶσι (§ 319, Σημ.), ὀλίγα μόνον δυνάμεθα νὰ λύωμεν· διότι αἱ ἐξισώσεις, ἃς δέον νὰ ἐπιλύωμεν, εἰσὶ βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ β΄. ἢ ἐκθετικαί, περὶ ὧν ἐν § 364.

§ 329. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων προόδου φθινούσης ἀπεράτου* $\div\div\, \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \ldots$, *τείνει πρὸς τὸ ὅριον* $\frac{\alpha}{1-\pi}$, *π ὄντος τοῦ λόγου.*

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου αὐτῆς εἶναι $\frac{\alpha(1-\pi^{\nu})}{1-\pi}$ [§ 328, (5)], ὁ δὲ τύπος οὗτος γράφεται καὶ οὕτω,

$$\frac{\alpha}{1-\pi}-\frac{\alpha}{1-\pi}\cdot\pi^{\nu}.$$

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν προστιθεμένων ὅρων, ἤγουν ὁ ν, αὐξάνῃ, ὁ μὲν ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{1-\pi}$ μένει ἀμετάβλητος, ὁ δ' ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρούμενος $\frac{\alpha}{1-\pi}\cdot\pi^{\nu}$ ἐλαττοῦται ἀπεριορίστως· διότι ὁ π^{ν} ἐλαττοῦται ἀπεριορίστως (§ 324, Σημ.)· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν ὅρων τείνει πρὸς τὸ ὅριον $\frac{\alpha}{1-\pi}$, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν προστιθεμένων ὅρων αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον.

Παραδείγματα. α΄. Ἔστω ἡ πρόοδος $\div\div\, 2 : \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \ldots$ ἧς ὁ λόγος $\frac{1}{3}$. Τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου αὐτῆς, εἶναι $\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$.

β΄. Ἔστω $\div\div\, 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \ldots$, ἧς ὁ λόγος $\frac{1}{2}$. Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων εἶναι $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

γ΄. Ἔστω $\div\div\, \frac{3}{2} : -\frac{3}{4} : \frac{3}{8} : -\frac{3}{16} : \ldots$, ἧς ὁ λόγος $-\frac{1}{2}$. Τὸ ἄθροισμα

$$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16}+\ldots$$

ἔχει ὅριον $\frac{(\frac{3}{2})}{1+\frac{1}{2}}=1$. Τὰ ἀθροίσματα εἰσὶν ἐναλλὰξ μείζω καὶ ἐλάσσω τοῦ ὁρίου 1.

δ'. Ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, οἷον τὸ 0, 5673 5673 5673 ..., εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα

$$\frac{5673}{10000}+\frac{5673}{(10000)^2}+\frac{5673}{(10000)^3}+\frac{5673}{(10000)^4}+\ldots$$

οἱ προσθετέοι τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ βαίνουσι κατὰ πρόοδον, ἧς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος εἶναι $\frac{5763}{10000}$, ὁ δὲ λόγος $\frac{1}{10000}$· τὸ ὅριον λοιπόν, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα αὐτό, εἴτε ἡ ἀξία τοῦ προτεθέντος περιοδικοῦ, εἶναι $(\frac{5673}{10000}):(1-\frac{1}{10000})=\frac{5673}{9999}$, ὡς γνωστὸν καὶ ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς.

Παρένθεσις γεωμετρικῶν μέσων.

§ 330. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ παρεντεθῶσι μεταξὺ αὐτῶν μ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ν' ἀποτελῆται πρόοδος κατὰ πηλίκον.*

Οἱ οὕτω παρεντιθέμενοι ἀριθμοὶ καλοῦνται *γεωμετρικοὶ μέσοι.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ γνωσθῇ ὁ λόγος. Ἐν τῷ τύπῳ (§ 325, Σημ.)

$$\pi=\sqrt[\nu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

ἀντικαθιστῶντες μ+2 ἀντὶ τοῦ ν καὶ β ἀντὶ τοῦ λ, ἔχομεν

$$\pi=\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

οὕτως *ὁ λόγος τῆς ζητουμένης προόδου εἶναι ῥίζα τοῦ πηλίκου τοῦ δευτέρου τῶν διδομένων ἀριθμῶν διὰ τοῦ πρώτου, ἧς ὁ βαθμὸς εἶναι κατὰ μονάδα ἀνώτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρεντιθεμένων μέσων.*

Π. χ. προκείσθω παρενθεῖναι μεταξὺ 5 καὶ 10935 ἓξ γεωμετρικοὺς μέσους. Διαιροῦντες τὸν δεύτερον διὰ τοῦ πρώτου, ἔχομεν πηλίκον 2187, οὗ ἡ ἑβδόμη ῥίζα εἶναι 3· ὁ λόγος λοιπὸν εἶναι 3· ἐπομένως ἡ ζητουμένη πρόοδος

$$\div\!\div\ 5 : 15 : 45 : 135 : 405 : 1215 : 3645 : 10935.$$

§ 331. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστω ἡ πρόοδος* $\div\!\div\ \alpha : \beta : \gamma : \delta : \ldots$ *ἐὰν μεταξὺ α καὶ β παρεντεθῇ ἀριθμός τις γεωμετρικῶν μέσων, ὁ αὐτὸς δ' ἀριθμὸς τοιούτων μέσων παρεντεθῇ μεταξὺ β καὶ γ, γ καὶ δ, κ.τ.λ., αἱ ἰδιαίτεραι πρόοδοι ἀπὸ τοῦ α μέχρι τοῦ β, τοῦ β μέχρι τοῦ γ, κ.τ.λ. ἀποτελοῦσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πρόοδον.*

Ὁ λόγος τῆς ἀπὸ τοῦ α μέχρι τοῦ β προόδου εἶναι $\sqrt[\mu+1]{\frac{\alpha}{\beta}}$, μ ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρεντιθεμένων μέσων· ὁ τῆς ἀπὸ τοῦ β μέχρι τοῦ γ εἶναι $\sqrt[\mu+1]{\frac{\gamma}{\beta}}$, ὁ τῆς ἀπὸ τοῦ γ μέχρι τοῦ δ εἶναι $\sqrt[\mu+1]{\frac{\delta}{\gamma}}$, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἀλλ' ἐκ τῆς δεδομένης προόδου ἕπεται

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} = \ldots\,;$$

ἄρα

$$\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt[\mu+1]{\frac{\gamma}{\beta}} = \sqrt[\mu+1]{\frac{\delta}{\gamma}} = \ldots\,;$$

οἱ λόγοι λοιπὸν τῶν ἰδιαιτέρων προόδων εἰσὶν ἴσοι· πρὸς τούτοις ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης αὐτῶν εἶναι ἐν ταὐτῷ καὶ ὁ πρῶτος τῆς ἀκολούθου· ἄρα αἱ ἰδιαίτεραι πρόοδοι ἀποτελοῦσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πρόοδον.

Πότε τρεῖς δεδομένοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ἦναι ὅροι τῆς αὐτῆς προόδου.

§ 332. Ὑποτεθήτω ὅτι τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ εἰσὶν ὅροι τῆς αὐτῆς προόδου καὶ ὅτι προηγεῖται ὁ α· ἔστωσαν $\mu+1$ καὶ $\nu+1$ οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὅρων ἀπὸ τοῦ α μέχρι τοῦ β καὶ τοῦ γ· ἔχομεν $\beta=\alpha\pi^{\mu}$, $\gamma=\alpha\pi^{\nu}$, π ὄντος τοῦ λόγου· ἐντεῦθεν ἕπεται $\beta^{\nu}=\alpha^{\nu}\pi^{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu}=\alpha^{\mu}\pi^{\mu\nu}$, ὅθεν ἀπαλοιφῇ τοῦ $\pi^{\mu\nu}$

$$(1)\qquad \frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}=\frac{\gamma^\mu}{\alpha^\mu}\ \text{ἢ}\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu=\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^\mu.$$

Τοιαύτη σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ὅπως οὗτοι ὦσιν ὅροι τῆς αὐτῆς προόδου, ἡγουμένου τοῦ α. Ἀντιστρόφως ὅταν ὁ ὅρος οὗτος πληρῶται, ὑπάρχει πάντοτε τοιαύτη πρόοδος· διότι ἐὰν γράψωμεν πρόοδον, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ δὲ λόγος $\sqrt[\mu]{\frac{\beta}{\alpha}}$, θέλομεν πάντως εὕρει τὸν β· ἐπίσης ἐὰν γράψωμεν πρόοδον, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ δὲ λόγος $\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\alpha}}$, θέλομεν εὕρει τὸν γ· αἱ δύο δ' αὗται πρόοδοι εἰσὶν αἱ αὐταί· διότι ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἕπεται

$$\sqrt[\mu]{\frac{\beta}{\alpha}}=\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Ἐὰν παρεντεθῶσι μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς προόδου, ἧς ὁ λόγος $\sqrt[\mu]{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἰσάριθμοι γεωμετρικοὶ μέσοι, σχηματίζεται νέα πρόοδος (§ 331)· ἑπομένως ὅταν ὑπάρχῃ ἡ σχέσις (1), ὑπάρχουσιν ἄπειροι πρόοδοι, ἔχουσαι ὅρους τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἦναι σύμμετροι, δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν τοὺς λόγους $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἰς κλάσματα ἀνάγωγα. Ἔστωσαν $\frac{\eta}{\theta}$ καὶ $\frac{\kappa}{\lambda}$ τὰ ἴσα ἀνάγωγα κλάσματα· ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἕπεται $\frac{\eta^\nu}{\theta^\nu}=\frac{\kappa^\mu}{\lambda^\mu}$· ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι ἀνάγωγα, ἕπεται $\eta^\nu=\kappa^\mu$, $\theta^\nu=\lambda^\mu$. Ἐπειδὴ οἱ η, κ, θ, λ εἰσὶν ἀκέραιοι, πρέπει, ἵνα ἀληθεύωσιν αἱ τελευταῖαι ἰσότητες, α΄. οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν η καὶ κ, ὡς καὶ οἱ τῶν θ καὶ λ, νὰ ἦναι οἱ αὐτοί· β΄. οἱ ἐκθέται τῶν αὐτῶν παραγόντων νὰ ἔχωσι σταθερὸν λόγον, ἴσον τῷ $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἐφαρμογαί. α'. *Οἱ ἀριθμοὶ* $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$ *δύνανται νὰ ἦναι ὅροι τῆς αὐτῆς προόδου;* Διὰ νὰ ἦναι τοῦτο δυνατόν, πρέπει ἡ σχέσις

$$(1)\quad \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^{\nu} = \left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}\right)^{\mu}$$

νὰ ἐπαληθεύηται δι' ἀκεραίων καὶ θετικῶν τιμῶν τῶν ἐκθετῶν μ καὶ ν. Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς συνάγομεν, ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον,

$$\frac{7^{\nu}}{2^{\nu}} = \frac{11^{\mu}}{2^{\mu}}.$$

ὄντων δὲ τῶν κλασμάτων αὐτῶν ἀναγώγων, πρέπει

$$7^{\nu}=11^{\mu} \text{ καὶ } 2^{\nu}=2^{\mu}.$$

ἐπειδὴ οἱ ὅροι οὗτοί εἰσιν ἀδύνατοι, οἱ προτεθειμένοι ἀριθμοὶ δὲν δύνανται νὰ ἦναι ὅροι τῆς αὐτῆς προόδου.

β'. *Τίνες σύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται ν' ἀποτελῶσιν ὅρους προόδου ἐχούσης τοὺς ὅρους* 1 *καὶ* 10; Ἔστω χ ὅρος τις τοιαύτης προόδου· πρέπει κατὰ τὰ ἀνωτέρω

$$\left(\frac{\chi}{1}\right)^{\nu} = \left(\frac{10}{1}\right)^{\mu}, \text{ εἴτε } \chi^{\nu}=10^{\mu}\ (1).$$

Ἐὰν ὁ χ ἦναι σύμμετρος, δὲν δύναται νὰ ἦναι κλάσμα· διότι τότε οὐδεμία δύναμις αὐτοῦ ἤθελεν εἶσθαι ἀκέραιος· ἐπομένως ἡ σχέσις (1) δὲν ἤθελεν ἐπαληθεύεσθαι. Ὁ χ λοιπὸν πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιος, ἐὰν ἦναι σύμμετρος· ἕπεται δ' ἐκ τῆς σχέσεως (1), ὅτι δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς 2 καὶ 5. Θῶμεν $\chi=2^{\alpha}\,.\,5^{\beta}$· ἕπεται ἐκ τῆς (1)

$$2^{\alpha\nu}\,.\,5^{\beta\nu} = 2^{\mu}\,.\,5^{\mu}.$$

ὅθεν $\alpha\nu=\beta\nu=\mu$· ὅθεν $\alpha=\beta=\frac{\mu}{\nu}$. Οἱ α καὶ β εἶναι λοιπὸν ἀκέραιοι ἴσοι· ἐπομένως χ εἶναι δύναμις τοῦ 10· οὕτως *αἱ τέλειαι δυνάμεις τοῦ* 10 *εἰσὶν οἱ μόνοι σύμμετροι ἀριθμοί, οἵτινες δύνανται ν' ἀποτελῶσιν ὅρους προόδου ἐχούσης τοὺς ὅρους* 1 *καὶ* 10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ.

Ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων.

§ 333. Ὅταν ἔχωμεν δύο προόδους, ὧν ἡ μὲν γεωμετρικὴ ἀρχομένη ἀπὸ 1, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ ἀρχομένη ἀπὸ 0, οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καλοῦνται *λογάριθμοι* τῶν τὴν αὐτὴν θέσιν ἐχόντων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς.

Π. χ. ἔστωσαν αἱ ἑξῆς πρόοδοι

$$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \ldots$$

$$\div 0 : 3 : 6 : 9 : 12 : 15 : 18 : 21 : \ldots$$

ὁ 3 εἶναι λογάριθμος τοῦ 2, ὁ 15 τοῦ 32, ὁ 21 τοῦ 128, κ.τ.λ.

Ἐὰν ἀντὶ τῆς ληφθείσης ἀριθμητικῆς προόδου λάβωμεν τὴν ἑξῆς

$$\div 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 \ldots ;$$

οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἔσονται διάφοροι· π. χ. ὁ λογάριθμος τοῦ 32 ἔσεται 10, ὁ τοῦ 128 ἔσεται 14, κ.τ.λ.

Ὁ αὐτὸς λοιπὸν ἀριθμὸς δύναται νὰ ἔχῃ πολλοὺς λογαρίθμους. Ὅταν οἱ λογάριθμοι ἀριθμῶν, ἀποτελούντων ὅρους τῆς αὐτῆς γεωμετρικῆς προόδου, εἰσὶν οἱ ἀντιστοιχοῦντες ὅροι τῆς αὐτῆς ἀριθμητικῆς προόδου, λέγονται *λογάριθμοι τοῦ αὐτοῦ συστήματος*.

Εἰς πᾶν σύστημα λογαρίθμων ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι 0.

§ 334. Ἔστωσαν αἱ πρόοδοι

$$(1)\quad \begin{cases} (\Gamma) \div\div 1 : \pi : \pi^2 : \pi^3 : \pi^4 : \ldots \\ (\mathrm{A}) \div 0 : \rho : 2\rho : 3\rho : 4\rho : \ldots \end{cases}$$

ὧν ἡ μὲν (Γ) γεωμετρικὴ ἀρχομένη ἀπὸ 1, ἧς ὁ λόγος π, ἡ δὲ (Α) ἀριθμητικὴ ἀρχομένη ἀπὸ 0, ἧς ὁ λόγος ρ.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου (Γ) παρεντεθῶσι γεωμετρικοὶ μέσοι καὶ ἰσάριθμοι ἀριθμητικοὶ μεταξὺ τῶν ἀντιστοιχούντων τῆς προόδου (Α), οἱ δεύτεροι μέσοι ἔσονται λογάριθμοι τῶν ἀντιστοιχούντων γεωμετρικῶν.*

Π. χ. παρεντεθήτωσαν μ γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ π^{κ} καὶ $\pi^{\kappa+1}$, οἵτινές εἰσιν οἱ ἑξῆς

$$\pi^{\kappa}\sqrt[\mu+1]{\pi},\quad \pi^{\kappa}\sqrt[\mu+1]{\pi^2},\quad \pi^{\kappa}\sqrt[\mu+1]{\pi^3},\ldots$$

παρεντεθήτωσαν ἐπίσης ἰσάριθμοι ἀριθμητικοὶ μέσοι μεταξὺ κρ καὶ (κ+1)ρ, οἵτινές εἰσι

$$\kappa\rho+\frac{\rho}{\mu+1},\quad \kappa\rho+\frac{2\rho}{\mu+1},\quad \kappa\rho+\frac{3\rho}{\mu+1},\ldots$$

λέγω ὅτι ὁ πρῶτος ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι λογάριθμος τοῦ πρώτου γεωμετρικοῦ, ὁ δεύτερος τοῦ δευτέρου, κ.τ.λ. Περεντεθήτωσαν μ μέσοι γεωμετρικοὶ μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου (Γ) καὶ τοσοῦτοι ἀριθμητικοὶ μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς (Α)· ἔξομεν οὕτω δύο προόδους, τὴν μὲν γεωμετρικὴν ἀρχομένην ἀπὸ 1, τὴν δὲ ἀριθμητικὴν ἀρχομένην ἀπὸ 0 (§§ 321 καὶ 331), αἵτινες περιέξουσι τοὺς ἀνωτέρω παρεντεθέντας μεταξὺ π^{κ} καὶ $\pi^{\kappa+1}$ ἀφ' ἑνὸς καὶ κρ καὶ (κ+1)ρ ἀφ' ἑτέρου οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος γεωμετρικὸς μέσος μεταξὺ π^{κ} καὶ $\pi^{\kappa+1}$ ν' ἀντιστοιχῇ εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμητικὸν μεταξὺ κρ καὶ (κ+1)ρ, ὁ δεύτερος εἰς τὸν δεύτερον, κ.τ.λ.· ἑπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων οἱ ἀριθμητικοὶ μέσοι εἰσὶ λογάριθμοι τῶν ἀντιστοιχούντων γεωμετρικῶν.

§ 335. Παρατηροῦμεν πρὸς τούτοις ὅτι οἱ νέοι λογάριθμοι καὶ οἱ ἐκ τῶν ἀρχικῶν προόδων (1) εἰσὶ λογάριθμοι τοῦ αὐτοῦ συστήματος· ἀλλὰ τοῦτο ἔχει οὕτως, οὐ μόνον ὅταν ἅπαξ παρεντεθῶσιν ἰσάριθμοι μέσοι μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῶν προόδων (1), ἀλλὰ καὶ ὅταν παρεντεθῶσι διάφοροι τὸν ἀριθμὸν μέσοι, κατὰ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν παρεντεθῇ ἀριθμός τις μέσων μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῶν προόδων (1), εἶτα δ' ἄλλος τις ἀριθμὸς μέσων, οἱ ἐκ τῆς πρώτης παρενθέσεως λογάριθμοι καὶ οἱ ἐκ τῆς δευτέρας εἰσὶ λογάριθμοι τοῦ αὐτοῦ συστήματος.*

Παρεντεθήτωσαν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων α καὶ β τῆς γεωμετρικῆς προόδου (Γ) κ—1 μέσοι, εἶτα δὲ μεταξὺ τῶν αὐτῶν ὅρων κ′—1 μέσοι. Λέγω ὅτι ἐὰν μεταξὺ τῶν αὐτῶν ὅρων α καὶ β παρεντεθῶσι κκ′—1 μέσοι, εὑρεθήσονται ἐν αὐτοῖς οἵ, τε κ—1 πρῶτοι μέσοι καὶ οἱ $\varkappa'-1$ δεύτεροι. Ὅταν παρεντεθῶσι $\varkappa\varkappa'-1$ μέσοι, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ἀπὸ τοῦ α μέχρι τοῦ β εἶναι $\varkappa\varkappa'+1$· ἑπομένως ἀπὸ τοῦ μετὰ τὸν α μέχρι τοῦ β ὑπάρχουσιν ὅροι $\varkappa\varkappa'$· ἐὰν λοιπὸν μετρήσωμεν $\varkappa'$ ὅρους ἀπὸ τοῦ μετὰ τὸν α, εἶτα τοὺς ἀκολούθους $\varkappa'$, κ.τ.λ., θέλομεν ἐπὶ τέλους φθάσει μετὰ $\varkappa$ τοιαῦτα συστήματα ὅρων εἰς τὸν β. Οἱ τελευταῖοι ὅροι ἑκάστου τῶν συστημάτων αὐτῶν εἰσι, ν ὄντος τοῦ λόγου τῆς προόδου, $\alpha\nu^{\varkappa'}$, $\alpha\nu^{2\varkappa'}$, $\alpha\nu^{3\varkappa'}$, ... $\alpha\nu^{\varkappa\varkappa'}(=\beta)$· παρατηροῦμεν ὅτι χωροῦσι κατὰ πρόοδον, ἧς ὁ λόγος $\nu^{\varkappa'}$· εἶναι λοιπὸν οἱ ὅροι τῆς προόδου, ἣν ἔχομεν παρενθέτοντες $\varkappa$ μέσους μεταξὺ α καὶ β. Ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι καὶ οἱ $\varkappa'-1$ μέσοι εὑρίσκονται ἐν τοῖς $\varkappa\varkappa'-1$. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται ὅτι, ἐὰν παρεντεθῶσι μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $\varkappa-1$ μέσοι καὶ $\varkappa'-1$, οἵ,τε πρῶτοι καὶ οἱ δεύτεροι εὑρεθήσονται, ἐὰν παρεντεθῶσι μεταξὺ τῶν αὐτῶν ὅρων $\varkappa\varkappa'-1$ μέσοι ἀριθμητικοί. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι οἵ,τε $\varkappa-1$ πρῶτοι καὶ οἱ $\varkappa'-1$ δεύτεροι εἰσὶ λογάριθμοι τοῦ αὐτοῦ συστήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ὅταν, παρεντιθεμένου ἀριθμοῦ τινος μέσων $\varkappa-1$ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων α καὶ β τῆς προόδου (Γ), εἷς τῶν μέσων αὐτῶν ἦναι ἀριθμός τις γ, ὁ αὐτὸς δ' ἀριθμὸς γ εὑρίσκηται ὡς εἷς τῶν μέσων καὶ ὅταν παρεντεθῇ μεταξὺ τῶν αὐτῶν α καὶ β διάφορος ἀριθμὸς μέσων, οἷον $\varkappa'-1$, ὁ λογάριθμος τοῦ γ κατὰ τὴν πρώτην καὶ κατὰ τὴν δευτέραν παρένθεσιν εἶναι ὁ αὐτός.* Ὁ πρῶτος λογάριθμος καὶ ὁ δεύτερος εἰσὶ λογάριθμοι τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ γ ἐν τῷ αὐτῷ συστήματι· ἐν τῷ αὐτῷ δὲ συστήματι πᾶς ἀριθμὸς ἕνα μόνον ἔχει λογάριθμον· διότι εἰς ἕκαστον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδου εἷς μόνος τῆς ἀριθμητικῆς ἀντιστοιχεῖ.

Δείκνυται τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς. Ὁ λόγος δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου (Γ) εἶναι π· ἑπομένως ὁ λόγος τῆς προκυπτούσης προόδου, ὅταν παρεντεθῶσι $\varkappa-1$ ὅροι μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς (Γ) εἶναι $\sqrt[\varkappa]{\pi}$ (§ 330)· ὅθεν ὁ κατέχων τὴν $\nu^{\eta\nu}$ θέσιν ὅρος τῆς νέας ταύτης προόδου εἶναι $\sqrt[\varkappa]{\pi^{\nu-1}}$. Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου (Α) εἶναι ρ, ὁ λόγος τῆς προκυπτούσης προόδου, ὅταν παρεντεθῶσι μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς (Α) $\varkappa-1$ ἀριθμητικοὶ μέσοι, εἶ-

23

ναι $\frac{\rho}{\kappa}$· ἐπομένως ὁ ν^{ος} ὅρος τῆς νέας προόδου εἶναι $\frac{(\nu-1)\rho}{\kappa}$· ὥστε ὁ $\frac{(\nu-1)\rho}{\kappa}$ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ $\sqrt[\kappa]{\pi^{\nu-1}}$. Ἐὰν παρεντεθῶσι $\kappa'-1$ ὅροι μεταξὺ τῶν ὅρων τῶν προόδων (1), εὑρεθήσεται ὅτι τοῦ μέσου $\sqrt[\kappa']{\pi^{\nu'-1}}$ λογάριθμος εἶναι ὁ $\frac{(\nu'-1)\rho}{\kappa'}$. Λέγω ἤδη ὅτι ἐὰν $\sqrt[\kappa]{\pi^{\nu-1}} = \sqrt[\kappa']{\pi^{\nu'-1}}$, τότε καὶ $\frac{(\nu-1)\rho}{\kappa} = \frac{(\nu'-1)\rho}{\kappa'}$, εἴτε $\frac{\nu-1}{\kappa} = \frac{\nu'-1}{\kappa'}$.

Τῷ ὄντι· ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\sqrt[\kappa]{\pi^{\nu-1}} = \sqrt[\kappa']{\pi^{\nu'-1}}$$

ἕπεται, ὑψουμένων τῶν δύο μελῶν εἰς τὴν $\kappa\kappa'$ δύναμιν,

$$\pi^{(\nu-1)\kappa'} = \pi^{(\nu'-1)\kappa}.$$

ὅθεν $$(\nu-1)\kappa' = (\nu'-1)\kappa$$

ὅθεν $$\frac{\nu-1}{\kappa} = \frac{\nu'-1}{\kappa'}.$$

§ 336. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἡ διαφορὰ τῶν διαδοχικῶν μέσων, τῶν παρεντιθεμένων ἐν τοῖς ὅροις τῶν προόδων (1), δύναται νὰ καταστῇ ὁσονδήποτε μικρά, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρεντιθεμένων μέσων αὐξάνῃ ἐπ' ἀόριστον.*

Ὅταν παρεντεθῶσι $\kappa-1$ ὅροι μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς προόδου (Γ), ὁ λόγος τῆς νέας προόδου εἶναι $\sqrt[\kappa]{\pi}$, ἡ δὲ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων αὐτῆς $\sqrt[\kappa]{\pi^{\mu}}$ καὶ $\sqrt[\kappa]{\pi^{\mu+1}}$ εἶναι $\sqrt[\kappa]{\pi^{\mu+1}} - \sqrt[\kappa]{\pi^{\mu}} = \sqrt[\kappa]{\pi^{\mu}}(\sqrt[\kappa]{\pi}-1)$. Ὁ $\sqrt[\kappa]{\pi}$ εἶναι >1 (§309, 6'.) καὶ τείνει ἀπεριορίστως πρὸς 1, αὐξάνοντος ἐπ' ἄπειρον τοῦ κ· π. χ. ε ὄντος ἐλαχίστου τινὸς ἀριθμοῦ, λέγω ὅτι, ὅταν ὁ κ ἦναι ἱκανῶς μέγας, θέλομεν ἔχει (Β) $\sqrt[\kappa]{\pi} < 1+\varepsilon$. Τῷ ὄντι· ἐκ τῆς ἀνισότητος αὐτῆς πορίζόμεθα $\pi < (1+\varepsilon)^{\kappa}$· ἡ ἀνισότης δ' αὕτη θέλει πάντως ὑπάρχει, ὅταν ὁ κ ἦναι ἱκανῶς μέγας· διότι αἱ δυνάμεις τῶν μειζόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον μετὰ τῶν ἐκθετῶν (§ 324, Σημ.)· ὑπαρχούσης δὲ τῆς ἀνισότητος αὐτῆς, ὑπάρχει καὶ ἡ (Β). Ἐπειδὴ $\sqrt[\varkappa]{\pi}$ τείνει ἀπεριορίστως πρὸς τὴν μονάδα, $\sqrt[\varkappa]{\pi}-1$ τείνει ἀπεριορίστως πρὸς τὸ 0· ὅθεν καὶ τὸ γινόμενον $\sqrt[\varkappa]{\pi^{\mu}}(\sqrt[\varkappa]{\pi}-1)$· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν διαδοχικῶν μέσων ἐλαττοῦται ἐπ' ἄπειρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον.

Ἡ πρότασις ὑφίσταται καὶ ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (Δ). Ὅταν παρεντεθῶσι μεταξὺ τῶν ὅρων αὐτῆς $\varkappa-1$ μέσοι, ὁ λόγος τῆς νέας προόδου, εἴτε ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν μέσων, εἶναι $\frac{\rho}{\varkappa}$· ἡ διαφορὰ δ' αὕτη ἐλαττοῦται ἀπεριορίστως, ὅταν ὁ κ αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον.

§ 337. Κατὰ τὰ ῥηθέντα ἐν §§ 334 καὶ 335 ὅταν δοθῶσι δύο πρόοδοι, οἷαι αἱ (1), προσδιορίζεται δι' αὐτῶν σύστημα λογαρίθμων οὐ μόνον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινές εἰσιν ὅροι τῆς προόδου (Γ), ἀλλὰ καὶ πάντων, οὓς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν παρενθέτοντες μέσους μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς (Γ). Οὕτω διὰ τῶν προόδων (1) προσδιορίζεται σύστημα λογαρίθμων καὶ ἀπείρων ἄλλων ἀριθμῶν, ἐκτὸς τῶν ὅρων τῆς (Γ). Πάντας τούτους τοὺς ἀριθμοὺς θέλομεν καλεῖ *ὅρους τῆς προόδου* (Γ), τοὺς δὲ λογαρίθμους αὐτῶν ὅρους τῆς (Δ).

Ὑπάρχουσιν ἐν τούτοις καὶ ἄπειροι ἄλλοι ἀριθμοί, οἵτινες δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ὅροι τῆς προόδου (Γ)· δὲν εἶναι δυνατὸν δηλονότι νὰ εὑρεθῶσιν ὡς μέσοι, ὁσονδήποτε κἂν αὐξηθῇ ὁ τῶν παρεντιθεμένων μέσων ἀριθμός, εἴτε ὁσονδήποτε ὀλίγον κἂν διαφέρωσιν οὗτοι ἀπ' ἀλλήλων. Π. χ. ἔστω ἡ πρόοδος ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : ...· ὁσουσδήποτε μέσους κἂν παρενθέσωμεν μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς προόδου αὐτῆς, οὐδέποτε θέλομεν εὕρει συμμέτρους ἀριθμοὺς (§ 332)· ἑπομένως ἐὰν ἡ πρόοδος αὕτη ληφθῇ ὡς ἡ πρώτη τῶν (1), διὰ τῶν δύο προόδων (1) ὁρίζεται τότε σύστημα λογαρίθμων ἀριθμῶν, ἐν οἷς οὐδεὶς ἄλλος σύμμετρος ὑπάρχει ἢ αἱ τέλειαι δυνάμεις τοῦ 10.

Ἔστω Α ἀριθμός τις ἐξ ἐκείνων, οἵτινες δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ὅροι τῆς προόδου (Γ). Ὑπάρχουσιν ὅροι τῆς προόδου (Γ), οἵτινες διαφέρουσιν ὁσονδήποτε ὀλίγον τοῦ Α· διότι ἡ διαφορὰ τῶν δύο διαδοχικῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α, δύναται ν' ἀποβῇ οσονδήποτε μικρά (§ 336)· ἄρα ἔτι μᾶλλον ἡ διαφορὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Α. Ἔστωσαν α, α′, α″, . . . ὅροι τῆς προόδου (Γ), τείνοντες ἀπεριορίστως πρὸς τὸν Α, καὶ λ, λ′, λ″, . . . οἱ λογάριθμοι αὐτῶν. Οἱ λ, λ′, λ″, . . . τείνουσι καὶ αὐτοὶ πρὸς ἓν ὅριον, ὅπερ εἶναι ὁ ἐλάχιστος τῶν ἀριθμῶν, οὓς δὲν δύνανται νὰ ὑπερβῶσι· τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται λογάριθμος τοῦ Α ἐν τῷ συστήματι τῶν ληφθεισῶν προόδων (1).

Οὕτω *καλεῖται λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος Α, μὴ περιεχομένου ἐν τῇ προόδῳ (Γ), τὸ ὅριον τῶν λογαρίθμων τῶν ὅρων τῆς (Γ), τῶν τεινόντων ἀπεριορίστως πρὸς τὸν Α*·

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ λόγος ρ τῆς προόδου (Α) ἦναι σύμμετρος, πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ μὴ ὄντες ὅροι τῆς προόδου (Γ), ἔχουσι λογαρίθμους ἀσυμμέτρους. Τῷ ὄντι· πᾶς σύμμετρος ἀριθμὸς δύναται τότε νὰ ἦναι ὅρος τῆς (Α)· π. χ. ἐὰν $\rho = \frac{\sigma}{\tau}$ (σ καὶ τ ὄντων ἀκεραίων), ἕνα ἀριθμός τις $\frac{\varkappa}{\lambda}$ ἦ ὅρος τῆς προόδου (Α), πρέπει νὰ παρεντεθῶσιν ὅροι τόσοι, ὥστε ὁ λόγος νὰ γίνῃ $\frac{1}{\lambda}$ ἢ πολλοστόν τι τοῦ $\frac{1}{\lambda}$, οἷον $\frac{1}{\lambda\lambda'}$· διότι τότε οἱ ὅροι τῆς (Α) ἔσονται τὰ πολλαπλάσια τοῦ $\frac{1}{\lambda}$, ἐξ ὧν ἓν καὶ ὁ $\frac{\varkappa}{\lambda}$, ἢ τὰ τοῦ $\frac{1}{\lambda\lambda'}$, ἐξ ὧν ἓν τὸ $\frac{\varkappa\lambda'}{\lambda\lambda'} = \frac{\varkappa}{\lambda}$· εἶναι δὲ πάντοτε δυνατὸν νὰ παρεντεθῶσιν ὅροι τόσοι, ὥστε ὁ λόγος νὰ γίνῃ $\frac{1}{\lambda}$ ἢ $\frac{1}{\lambda\lambda'}$· διότι, μ ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρεντιθεμένων, ὁ λόγος εἶναι $\frac{\sigma}{\tau(\mu+1)}$· ἡ δὲ σχέσις $\frac{\sigma}{\tau(\mu+1)} = \frac{1}{\lambda\lambda'}$, ἐξ ἧς $\mu+1 = \frac{\sigma\lambda\lambda'}{\tau}$, δυνατὸν πάντοτε νὰ ἐπαληθεύηται δι' ἀκεραίων τιμῶν τοῦ μ, ἐκλεγομένου τοῦ ἀπροσδιορίστου λ′ οὕτως, ὥστε σλλ′ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τ. Πᾶς λοιπὸν σύμμετρος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἦναι ὅρος τῆς προόδου (Α)· ἔσεται λοιπὸν λογάριθμος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὅρου τῆς (Γ)· ἑπομένως οἱ ἀριθμοί, οἱ μὴ δυνάμενοι νὰ ἦναι ὅροι τῆς (Γ), ἔχουσι λογαρίθμους ἀσυμμέτρους.

§ 338. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ καὶ τῶν εἰρημένων ἐν § 334 ἕπεται ὅτι, ὁπωςδήποτε κἂν ληφθῶσι δύο πρόοδοι, οἷαι αἱ (1), ἤγουν ἡ μὲν γεωμετρικὴ ἀρχομένη ἀπὸ 1, ἡ δ' ἀριθμητικὴ ἀρχομένη ἀπὸ 0, διὰ τῶν δύο τούτων προόδων προσδιορίζεται σύστημα λογαρίθμων, καθ' ὃ πᾶς ἀριθμὸς μείζων τῆς 1 ἔχει τὸν αὑτοῦ λογάριθμον καὶ ἕνα μόνον.

Θεωρήματα ἐπὶ τῶν λογαρίθμων.

§ 339. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Ὁ λογάριθμος γινομένου δύο ἢ πλειόνων ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων.*

Ἔστωσαν αἱ πρόοδοι

$$(1)\quad \begin{array}{l} (\Gamma)\ 1 : \pi : \pi^2 : \pi^3 : \ldots \\ (\mathrm{A})\ 0 : \rho : 2\rho : 3\rho : \ldots \end{array}$$

δι' ὧν προσδιορίζεται ἓν σύστημα λογαρίθμων. Τὸ γινόμενον τῶν ὅρων $\pi^\varkappa$ καὶ π^λ τῆς πρώτης εἶναι $\pi^{\varkappa+\lambda}$· ἐπειδὴ δὲ οἱ ἐκθέται τῶν ὅρων τῆς (Γ) καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀντιστοιχούντων τῆς (Α) εἰσὶν ἴσοι, ἕπεται ὅτι τοῦ μὲν $\pi^\varkappa$ λογάριθμος εἶναι ὁ $\varkappa\rho$, τοῦ δὲ π^λ ὁ $\lambda\rho$ καὶ τοῦ $\pi^{\varkappa+\lambda}$ ὁ $(\varkappa+\lambda)\rho$· ἀλλὰ $(\varkappa+\lambda)\rho=\varkappa\rho+\lambda\rho$· οὕτως ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν ὅρων $\pi^\varkappa$ καὶ π^λ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν ὅρων αὐτῶν.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις καὶ ὅταν οἱ παράγοντες ἦναι τρεῖς ἢ πλείονες.

Τὸ θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες δὲν δύνανται νὰ ἦναι ὅροι τῆς (Γ). Ἔστωσαν ἐν πρώτοις δύο τοιοῦτοι Α καὶ Α'· λάβωμεν δύο ἄλλους Β καὶ Β', οἵτινές εἰσιν ὅροι τῆς (Γ) καὶ διαφέρουσιν ἐλάχιστα ὁ μὲν τοῦ Α', ὁ δὲ τοῦ Α· ἀπεδείχθη ὅτι

$$\lambda o\gamma.\ \mathrm{BB}' = \lambda o\gamma.\ \mathrm{B} + \lambda o\gamma.\ \mathrm{B}'.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ΒΒ' διαφέρει καὶ αὐτὸ ἐλάχιστα τοῦ ΑΑ', ἕπεται ὅτι καὶ ὁ λογ ΒΒ' διαφέρει ὁσονδήποτε ὀλίγον τοῦ λογ ΑΑ'· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ λογ Β+λογ Β' διαφέρει ὁσονδήποτε ὀλίγον τοῦ λογ Α+λογ Α'· ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι λογ ΑΑ' καὶ λογ A + λογ A′ διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων ἔλασσον παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα

$$\lambda o\gamma.\ AA' = \lambda o\gamma\ A + \lambda o\gamma\ A'.$$

Ἔστωσαν ἤδη ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ A, A′, A″, A‴, ..., μὴ ὄντες ὅροι τῆς (Γ). Ἔχομεν, ὡς ἤδη ἀπεδείχθη,

$$\lambda o\gamma\ AA'A''A''' \ldots = \lambda o\gamma\ A + \lambda o\gamma\ A'A''A''' \ldots$$
$$\lambda o\gamma\ A'A''A''' \ldots = \lambda o\gamma\ A' + \lambda o\gamma\ A''A''' \ldots$$
$$\lambda o\gamma\ A''A''' \ldots = \lambda o\gamma\ A'' + \lambda o\gamma\ A''' \ldots$$
$$\kappa.\tau.\lambda.$$

ὅθεν

$$\lambda o\gamma AA'A''A''' \ldots = \lambda o\gamma A + \lambda o\gamma A' + \lambda o\gamma A'' + \lambda o\gamma A''' + \ldots$$

§ 340. ΘΕΩΡΗΜΑ Β′. *Ὁ λογάριθμος πηλίκου ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τοῦ διαιρετέου πλὴν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου.*

Ἔστω τὸ πηλίκον $\frac{A}{B}$· παραστήσωμεν αὐτὸ καὶ διὰ Π· ἔχομεν $A = B \times \Pi$· ὅθεν λογ A = λογ B + λογ Π (Θεώρ. Α′.) ἄρα λογ Π = λογ A — λογ B.

§ 341. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ′. *Ὁ λογάριθμος τελείας δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως.*

Ἔστω ἡ δύναμις A^κ. Ἐπειδὴ $A^\kappa = A.A.A.\ldots$, ἕπεται λογ. A^κ = λογ A + λογ A + λογ A + ... = κ. λογ A.

§ 342. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ′. *Ὁ λογάριθμος ῥίζης ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.*

Ἔστω ἡ ῥίζα $\sqrt[\kappa]{A}$· σημειοῦντες αὐτὴν διὰ ρ, ἔχομεν $\sqrt[\kappa]{A} = \rho$· ὅθεν $A = \rho^\kappa$· ὅθεν λογ A = κ. λογ ρ (§ 341)· ὅθεν

$$\lambda o\gamma \sqrt[\kappa]{A} = \frac{\lambda o\gamma\ A}{\kappa}.$$

Περὶ τῶν λογαρίθμων θεωρουμένων ὡς ἐκθετῶν.

§ 343. *Καλεῖται λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος A ὁ ἐκθέτης, ὃν πρέπει νὰ λάβῃ σταθερός τις ἀριθμὸς α, ἵνα παραχθῇ ὁ A.*

Ἐν ἄλλαις λέξεσι ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\alpha^{\chi} = \beta$$

ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι λογάριθμος τοῦ β.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς α καλεῖται *βάσις*· τὸ δὲ σύνολον τῶν λογαρίθμων, τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὴν αὐτὴν βάσιν, καλεῖται *λογαριθμικὸν σύστημα*.

Ἡ βάσις εἶναι πάντοτε θετικὸς ἀριθμός.

§ 344. Κατὰ τὸν νέον αὐτὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει τὸν ἴδιον λογάριθμον. Πρὸς δεῖξιν τούτου πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις α^{χ} δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ ∞, ὅταν ὁ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

Παρατηρηθήτω ἐν πρώτοις ὅτι, ὅταν ὁ χ μεταβάλληται διερχόμενος διὰ πασῶν τῶν τιμῶν ἀπό τινος ἀριθμοῦ κ μέχρις ἄλλου τινὸς ἀριθμοῦ κ', ἡ παράστασις α^{χ} συμμεταβάλλεται διερχομένη καὶ αὐτὴ διὰ πασῶν τῶν τιμῶν ἀπὸ τῆς α^{κ} μέχρι τῆς $\alpha^{\kappa'}$· διότι ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τοῦτο δὲν ἔχει οὕτως, ἔπρεπε τότε ὁ α^{χ} νὰ μεταβαίνῃ ἀπό τινος τιμῆς β, ἀντιστοιχούσης εἰς τιμήν τινα λ τοῦ χ, εἰς μίαν ἄλλην γ οὕτως, ὥστε ἡ διαφορὰ $\beta-\gamma$ νὰ μὴ ἀποβαίνῃ ὁσονδήποτε μικρά, ὅταν ἐλάχιστα μεταβάλληται ὁ λ· ὅπερ ἐναντίον τῆς ἐν § 309 (δ'.) ἀποδειχθείσης προτάσεως.

Ὑποτεθήτω ἤδη $\alpha > 1$. Αἱ δυνάμεις

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6,\ \ldots$$

βαίνουσιν αὐξάνουσαι ἀπεριορίστως (§ 324)· δίδοντες δὲ τῷ α ἐκθέτας περιεχομένους μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 0, 1, 2, 3, ... θέλομεν εὕρει πάντας τοὺς μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων ἀριθμούς· οὕτως ὁ τύπος α^{χ} παρέχει πάντας τοὺς ἀπὸ 1 μέχρι τοῦ $+\infty$ ἀριθμούς, ὅταν ὁ χ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$.

Ἀφ' ἑτέρου αἱ δυνάμεις

$$\alpha^0,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-4},\ \alpha^{-5},\ \alpha^{-6},\ \ldots$$

βαίνουσιν ἐλαττούμεναι ἀπεριορίστως· διότι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$1,\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha^2},\ \frac{1}{\alpha^3},\ \frac{1}{\alpha^4},\ \frac{1}{\alpha^5},\ \frac{1}{\alpha^6},\ \ldots$$

οἵτινες βαίνουσι κατὰ πρόοδον φθίνουσαν (§ 324)· δίδοντες δὲ τῷ α ἐκθέτας περιεχομένους μεταξὺ 0 καὶ —1, —1 καὶ —2, —2 καὶ —3, κ.τ.λ., εὑρήσομεν πάντας τοὺς μεταξὺ ἀριθμούς· οὕτως ὁ τύπος α^{χ} παρέχει πάντας τοὺς ἀπὸ 1 μέχρι 0 ἀριθμούς, ὅταν ὁ χ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$.

Ἐὰν $\alpha<1$, αἱ μὲν δυνάμεις

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5, \ldots$$

βαίνουσιν ἐλαττούμεναι ἀπεριορίστως, αἱ δὲ

$$\alpha^0,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-4},\ \alpha^{-5}, \ldots$$

αὐξάνουσαι ἀπεριορίστως (§324)· ἑπομένως ὁ τύπος α^{χ} παρέχει πάλιν πάντας τοὺς ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$ ἀριθμούς· τοὺς μὲν ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τοῦ $+\infty$, μεταβαλλομένου τοῦ χ ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$· τοὺς δ' ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τοῦ 0, μεταβαλλομένου τοῦ χ ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$.

Ἐν κεφαλαίῳ ὁ τύπος α^{χ} παρέχει πάντας τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, ὅταν ὁ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

§ 345. Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν σειρῶν

$$\begin{array}{cccccccccccc} \ldots \alpha^{-4}, & \alpha^{-3}, & \alpha^{-2}, & \alpha^{-1}, & \alpha^0, & \alpha^1, & \alpha^2, & \alpha^3, & \alpha^4, & \alpha^5, & \ldots \\ \ldots -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \end{array}$$

καὶ τῶν προειρημένων συνάγονται τὰ ἑξῆς.

α΄. Ἐν παντὶ λογαριθμικῷ συστήματι ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι 0, ὁ δὲ λογάριθμος τῆς βάσεως 1.

β΄. Ὅταν ἡ βάσις ᾖναι μείζων τοῦ 1, οἱ μὲν μείζονες τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουσι λογαρίθμους θετικούς, οἱ δ' ἐλάσσονες ἀρνητικούς· καὶ ὅταν μὲν οἱ ἀριθμοὶ αὐξάνωσιν ἐπ' ἄπειρον, συναυξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον καὶ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν· ὅταν δ' ἐκεῖνοι τείνωσι πρὸς τὸ 0, οἱ λογάριθμοι αὐτῶν τείνουσι πρὸς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον· ἑπομένως λογ $\infty=\infty$ καὶ λογ $0=-\infty$.

γ΄. Ὅταν ἡ βάσις ᾖναι ἐλάσσων τοῦ 1, οἱ μὲν ἐλάσσονες τοῦ 1 ἀριθμοὶ ἔχουσι λογαρίθμους θετικούς, οἱ δὲ μείζονες ἀρνητικούς· ἐλαττουμένων δ' ἐπ' ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν, οἱ λογάριθμοι αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον· αὐξανόντων δ' ἐκείνων ἐπ' ἄπειρον, οἱ λογάριθμοι τείνουσι πρὸς $-\infty$· ὅθεν λογ $0=\infty$, λογ $\infty=-\infty$.

§ 346. Οἱ ἐν § 343 ὁρισθέντες λογάριθμοι εἶναι αὐτοὶ ἐκεῖνοι, περὶ ὧν προέκειτο ἐν τοῖς προηγηθεῖσι (§ 333 καὶ ἑξῆς).

Πρὸς δεῖξιν τούτου θεωρήσωμεν δύο προόδους, ὁριζούσας ἓν σύστημα λογαρίθμων, τὰς ἑξῆς

$$(\Gamma) \div\div 1 : \pi : \pi^2 : \pi^3 : \pi^4 : \ldots .$$
$$(\Lambda) \div 0 : \rho : 2\rho : 3\rho : 4\rho : \ldots .$$

Ἔστω α ὁ ἀριθμός, οὗ ὁ κατὰ τὸ σύστημα αὐτὸ λογάριθμος εἶναι 1· σημειοῦντες διὰ μ τὸν ἐκθέτην, ὃν πρέπει νὰ λάβῃ ὁ π, ἵνα ἔχωμεν $\pi^\mu = \alpha$, συνάγομεν $\pi = \alpha^{\frac{1}{\mu}}$, $\mu\rho = 1$, $\rho = \frac{1}{\mu}$, $\pi = \alpha^\rho$; ἀντικαθιστῶντες α^ρ ἀντὶ π ἐν τῇ προόδῳ (Γ), ἔχομεν

$$(\Gamma) \div\div 1 : \alpha^\rho : \alpha^{2\rho} : \alpha^{3\rho} : \ldots .$$
$$(\Lambda) \div 0 : \rho : 2\rho : 3\rho : \ldots .$$

οὕτως οἱ ὅροι τῆς προόδου (Λ) εἰσὶν οἱ ἐκθέται, οὓς πρέπει νὰ λάβῃ ὁ σταθερὸς α, ἵνα παραχθῶσιν οἱ ὅροι τῆς προόδου (Γ).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι κατὰ τὸν ἐν § 333 ὁρισμὸν οἱ ἐλάσσονες τῆς μονάδος ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λογαρίθμους· ἐνῷ κατὰ τὸν ἐν § 343 ἔχουσι καὶ αὐτοὶ λογαρίθμους· ἀλλ' ἐὰν νοήσωμεν τὰς προόδους (Γ) καὶ (Λ) παρατεινομένας καὶ ἐξ ἀριστερῶν, ὡς ἕπεται

$$(\Gamma) \ldots\ \alpha^{-3\rho},\quad \alpha^{-2\rho},\quad \alpha^{-\rho},\ \alpha^0,\ \alpha^\rho,\ \alpha^{2\rho},\ \alpha^{3\rho}, \ldots$$
$$(\Lambda)\ -3\rho,\quad -2\rho,\quad -\rho,\quad 0,\ \rho,\ 2\rho,\ 3\rho,\ \ldots$$

τότε καὶ οἱ ἐλάσσονες τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔξουσι λογαρίθμους κατὰ τὸν πρῶτον ὁρισμόν, ὡς ἔχουσι κατὰ τὸν δεύτερον.

§ 347. Τὰ θεωρήματα τῶν λογαρίθμων (§ 339 καὶ ἑξῆς) ἀποδείκνυνται εὐκόλως καὶ κατὰ τὸν νέον ὁρισμόν.

Α'. Θῶμεν $\chi = \lambda o\gamma\, A$, $\chi' = \lambda o\gamma\, B$, $\chi'' = \lambda o\gamma\, \Gamma$, $\chi''' = \lambda o\gamma\, \Delta$, κ.τ.λ., τῆς βάσεως οὔσης α· ἔχομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$A = \alpha^\chi,\ B = \alpha^{\chi'},\ \Gamma = \alpha^{\chi''},\ \Delta = \alpha^{\chi'''}, \ldots \cdot$$

ὅθεν $\quad AB\Gamma\Delta \ldots = \alpha^{\chi+\chi'+\chi''+\chi'''+\ldots}\cdot$

ἄρα $\quad \lambda o\gamma\, AB\Gamma\Delta \ldots = \lambda o\gamma\, A + \lambda o\gamma\, B + \lambda o\gamma\, \Gamma + \lambda o\gamma\, \Delta + \ldots;$

ἤγουν *ὁ λογάριθμος γινομένου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων.*

Β΄. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $Α=α^χ$ καὶ $Β=α^{χ'}$ ἕπεται $\frac{Α}{Β}=α^{χ-χ'}$:

ὅθεν $$λογ\frac{Α}{Β}=λογ Α - λογ Β·$$

ἤγουν *ὁ λογάριθμος πηλίκου ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τοῦ διαιρετέου πλὴν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου.*

Γ΄. Ἐκ τῆς ἰσότητος $Α=α^χ$ ἕπεται $Α^μ=α^{μχ}$, ὅθεν

$$λογ Α^μ = μ . λογ Α·$$

ἤγουν *ὁ λογάριθμος τῆς μῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως.*

Δ΄. Ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰσότητι ὁ ἐκθέτης μ δύναται νὰ ἦναι οἱοσδήποτε· ἐὰν $μ=\frac{1}{ν}$, ἕπεται

$$λογ \sqrt[ν]{Α} = \frac{λογ Α}{ν}.$$

ἤγουν *ὁ λογάριθμος τῆς νῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.*

Σημείωσις. Εἰς τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα οἱ λογάριθμοί εἰσιν οὐ μόνον θετικοί, ὡς ὑπετίθετο εἰς τὰς πρώτας ἀποδείξεις αὐτῶν (§ 339 καὶ ἑξῆς), ἀλλὰ καὶ ἀρνητικοί. Πρὸς δὲ ἐπειδὴ ἐν τῷ Γ΄. θεωρήματι ὁ ἐκθέτης μ δύναται νὰ ἦναι ἀριθμὸς οἱοσδήποτε, τὸ Δ΄. θεώρημα περιέχεται ἐν τῷ Γ΄.

Πίνακες λογαρίθμων.

§ 348. Ἐὰν εἴχομεν πίνακας, περιέχοντας ἀφ' ἑνὸς τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 0, ἀφ' ἑτέρου δὲ τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν κατὰ τὸ αὐτὸ σύστημα, ἠθέλομεν δύνασθαι νὰ κάμνωμεν τὰς ἑξῆς ἁπλοποιήσεις ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, στηριζομένας ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων.

α΄. Ἵνα ἔχωμεν τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειόνων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ἐν τοῖς πίναξι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, προσθέτομεν αὐτοὺς καὶ ζητοῦμεν ἐν τοῖς πίναξι τὸν ἀριθμόν, οὗ ὁ λογάριθμος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν εὑρεθέντων λογαρίθμων· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον (Θεώρ. Α΄.).

β΄. Ἵνα ἔχωμεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν, ἀφαιροῦμεν τὸν τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ τοῦ διαιρετέου, καὶ ζητοῦμεν τίνος ἀριθμοῦ λογάριθμος εἶναι ἡ εὑρισκομένη διαφορά (Θεώρ. Β΄.).

γ΄. Ἵνα ἔχωμεν τὴν μ^ην^ δύναμιν ἀριθμοῦ τινος Α, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ Α, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ μ καὶ ζητοῦμεν τίνος ἀριθμοῦ λογάριθμος εἶναι τὸ εὑρισκόμενον γινόμενον (Θεώρ. Γ΄.).

δ΄. Ἵνα ἔχωμεν τὴν μ^ην^ ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος Α, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ Α, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ μ καὶ ζητοῦμεν τίνος ἀριθμοῦ λογάριθμος εἶναι τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον (Θεώρ. Δ΄.).

Οὕτω διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ὁ πολλαπλασιασμὸς ἄγεται εἰς πρόσθεσιν, ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν, ἡ εἰς δύναμιν ὕψωσις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ ἡ ἐξαγωγὴ ῥίζης εἰς διαίρεσιν.

Ἀλλ' εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχωσι πίνακες περιέχοντες πάντας τοὺς ἀριθμούς, ἔστω καὶ μέχρις ὁρίου τινός· διότι ἀπὸ τοῦ 0 μέχρις οἱουδήποτε ὁρίου ὑπάρχουσιν ἄπειροι σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Ἀλλὰ θέλομεν ἰδεῖ μετ' ὀλίγον ὅτι ἀρκεῖ πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ἀνωτέρω ἁπλοποιήσεων νὰ ἔχωμεν πίνακας περιέχοντας τοὺς λογαρίθμους μόνων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρις ὁρίου τινός.

§ 349. Ἔστω α ἡ βάσις καὶ β θετικός τις ἀριθμὸς οἱοσδήποτε. Ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ, πρέπει νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^x=\beta$. Ἐδείξαμεν ἐν § 343 καὶ ἑξῆς πῶς εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν ἡ τιμὴ τοῦ χ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ συνεχοῦς κλάσματος.

Δυνάμεθα πρὸς τούτοις νὰ εὑρίσκωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ καὶ παρενθέτοντες μέσους ἐν ταῖς προόδοις (Γ) καὶ (Λ) (§ 346), μέχρις οὗ εὑρεθῇ ἐν τῇ γεωμετρικῇ προόδῳ ὁ ἀριθμὸς β, ἢ δύο ἐλάχιστα διαφέροντες, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ β· ὁ ἀντιστοιχῶν τῷ β μέσος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ἔσεται ἀκριβῶς ὁ λογάριθμος τοῦ β, ὁ δ' ἀντιστοιχῶν τῷ ἑτέρῳ τῶν περιεχόντων τὸν β ἔσεται ὁ κατὰ προσέγγισιν. Ἵνα δὲ μὴ ποιῶμεν ἐξαγωγὰς ῥιζῶν βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, παρενθέτομεν ἐν τῇ γεωμετρικῇ προόδῳ διαδοχικῶς ἀνὰ ἕνα μέσον. Π. χ. ἔστωσαν αἱ πρόοδοι

$$(\Pi)\begin{matrix}\ldots:\frac{1}{10000}:\frac{1}{1000}:\frac{1}{100}:\frac{1}{10}:1:10:100:1000:10000:\ldots\\ \ldots.\ -4\ .\ -3\ .\ -2\ .\ -1\ .\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\end{matrix}$$

Ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος, οἷον τοῦ 87, παρενθέτομεν ἕνα μόνον γεωμετρικὸν μέσον μεταξὺ 10 καὶ 100· πρὸς τοῦτο δὲ πολλαπλασιάζομεν τὸν 10 ἐπὶ $\sqrt{10}$ (§ 330) καὶ εὑρίσκομεν 31,6227766 κατὰ προσέγγισιν 0,0000001. Ἐπειδὴ ὁ 87 περιέχεται μεταξὺ 31,6227766 καὶ 100, παρενθέτομεν πάλιν μεταξὺ τούτων ἕνα μέσον καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὅταν οὕτως εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορὰ λίαν μικρά, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ 87, ὁ λογάριθμος τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἔσεται καὶ ὁ τοῦ 87 κατὰ προσέγγισιν.

Ἀλλ' εἴτε διὰ τῆς ἐξισώσεως $\alpha^{\chi}=6$, εἴτε διὰ παρενθέσεως μέσων λογιζώμεθα τοὺς λογαρίθμους, αἱ πράξεις εἰσὶ λίαν μακραὶ καὶ ἐπίπονοι. Εἰρήσθω οὖν ἐνταῦθα ὅτι οἱ τῶν λογαρίθμων λογισταὶ πρὸς κατάρτισιν λογαριθμικῶν πινάκων ἄλλαις χρῶνται μεθόδοις πρὸς λογισμὸν τῶν λογαρίθμων, ὧν ὁ οἰκεῖος τόπος εἶναι ἐκτὸς τῶν Στοιχείων.

§ 350. Ἀφοῦ εὑρεθῶσιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὴν βάσιν α, ἵνα ἔχωμεν τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν κατ' ἄλλην τινὰ βάσιν α', δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐργασθῶμεν ἀπ' εὐθείας πρὸς εὕρεσιν τῶν τελευταίων, ὡς ἐργαζόμεθα πρὸς εὕρεσιν τῶν πρώτων· ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς κατὰ τὴν βάσιν α λογαρίθμους ἐπὶ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\text{λογ } \alpha'}$· ἐπὶ τὸ πηλίκον δηλονότι τῆς μονάδος διὰ τοῦ λογαρίθμου τοῦ α' κατὰ τὴν πρώτην βάσιν α.

Τῷ ὄντι· ἔστω χ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ Α κατὰ τὴν βάσιν α'· ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha'^{\chi}=A$ ἕπεται, λαμβανομένων τῶν λογαρίθμων κατὰ τὴν βάσιν α, $\chi\,.\,\text{λογ } \alpha'=\text{λογ } A$· ὅθεν $\chi=\text{λογ } A\times\frac{1}{\text{λογ } \alpha'}$· ἵνα ἔχωμεν λοιπὸν τὸν λογάριθμον τοῦ Α κατὰ τὴν βάσιν α', πολλαπλασιάζομεν τὸν κατὰ τὴν βάσιν α ἐπὶ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\text{λογ } \alpha'}$.

Κοινοὶ λογάριθμοι.

§ 351. Οἱ λογάριθμοι, ὧν ἡ βάσις εἶναι 10, καλοῦνται *κοινοὶ λογάριθμοι*.

Αὐτῶν τῶν λογαρίθμων γίνεται χρῆσις διὰ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις (§ 348).

§ 352. Ἐπειδὴ ἄλλοι σύμμετροι ἀριθμοὶ δὲν δύνανται νὰ ἦναι ὅροι προόδου ἐχούσης τοὺς ὅρους 1 καὶ 10 ἢ αἱ τέλειαι δυνάμεις τοῦ 10 (§ 332, ἐφαρ. 6΄.), οἱ δὲ κοινοὶ λογάριθμοι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραγράφῳ προόδων (Π), ἕπεται ὅτι κατὰ τὸ κοινὸν σύστημα οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ ἔχουσι πάντες λογαρίθμους ἀσυμμέτρους, ἐκτὸς τῶν τελείων δυνάμεων τοῦ 10, ὧν οἱ λογάριθμοι εἰσὶν ἀκέραιοι, ἴσοι τῷ ἐκθέτῃ τῆς δυνάμεως.

Δείκνυται τοῦτο εὐκόλως καὶ θεωρουμένων τῶν λογαρίθμων ὡς ἐκθετῶν. Ἔστω Α σύμμετρός τις ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος· ἐὰν ὁ κοινὸς αὐτοῦ λογάριθμος ἦναι σύμμετρος, σημειωθήτω διὰ $\frac{\varkappa}{\mu}$, $\varkappa$ καὶ μ ὄντων ἀκεραίων· ἕπεται $10^{\frac{\varkappa}{\mu}}=\mathrm{A}$· ὅθεν, ὑψουμένων τῶν δύο μελῶν εἰς τὴν $\mu^{\text{ην}}$ δύναμιν, $10^{\varkappa}=\mathrm{A}^{\mu}$, εἴτε $2^{\varkappa}.\,5^{\varkappa}=\mathrm{A}^{\mu}$· ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἕπεται ὅτι ὁ Α εἶναι ἀκέραιος, ἔτι δὲ καὶ δύναμις τοῦ 10· διότι ἄλλως οὔτε A^{μ} εἴη ἂν δύναμις τοῦ 10. Οὕτω μόναι αἱ τέλειαι δυνάμεις τοῦ 10 ἔχουσι λογαρίθμους συμμέτρους.

Τῶν ἐλασσόνων τοῦ 1 ἀριθμῶν μόνοι οἱ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... ἔχουσι λογαρίθμους συμμέτρους. Ἔστω $\frac{\varkappa}{\mu}<1$· ἔχομεν $\frac{\varkappa}{\mu}=\frac{1}{\left(\frac{\mu}{\varkappa}\right)}$. $\log\frac{1}{\left(\frac{\mu}{\varkappa}\right)}=-\log\frac{\mu}{\varkappa}$· ἵνα δ' ὁ λογάριθμος οὗτος ᾖ σύμμετρος, πρέπει $\frac{\mu}{\varkappa}$ νὰ ἦναι δύναμις τοῦ 10. Τῶν τοιούτων ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι εἰσὶν ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι· ἐν γένει δὲ πάντων τῶν ἐλασσόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν οἱ κοινοὶ λογάριθμοι εἰσὶν ἀρνητικοί (§ 345).

§ 353. Καλεῖται *χαρακτηριστικὸν* κοινοῦ τινος λογαρίθμου ὁ ἀκέραιος αὐτοῦ.

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος εἶναι κατὰ μονάδα ἔλασσον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ ἐν τῷ ἀριθμῷ αὐτῷ περιεχομένου ἀκεραίου.

Ἡ πρότασις αὕτη προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν προόδων

$$\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots.$$
$$\div\, 0 \,.\, 1 \;\; 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \;\ldots.$$

Οἱ ἀριθμοί, ὧν ὁ ἀκέραιος εἶναι μονοψήφιος, εἰσὶν οἱ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 10· ἐπειδὴ δ' οἱ λογάριθμοι αὐτῶν περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ 1, τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0. Οἱ ἀριθμοί, ὧν ὁ ἀκέραιος διψήφιος, εἰσὶν οἱ ἀπὸ τοῦ 10 μέχρι τοῦ 100· ἐπειδὴ δ' οἱ λογάριθμοι αὐτῶν περιέχονται μεταξὺ 1 καὶ 2, τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 1, καὶ οὕτω καθεξῆς.

§ 354. Ἔστωσαν οἱ ἑξῆς μείζονες τῆς μονάδος ἀριθμοί

58437, 5843,7, 584,37, 58,437, 5,8437,

οἵτινες γράφονται διὰ τῶν αὐτῶν ψηφίων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουσι δὲ κατὰ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς. *Οἱ λογάριθμοι τοιούτων ἀριθμῶν διαφέρουσι μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικόν.* Δύο οἱωνδήποτε τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶναι γινόμενον τοῦ ἑτέρου ἐπὶ 10, 100, κ.τ.λ.· ἑπομένως ὁ λογάριθμος τοῦ πρώτου ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τοῦ δευτέρου ηὐξημένῳ κατὰ λογ 10, λογ 100, ..., ἤτοι κατὰ 1, 2, ...· οἱ λογάριθμοι λοιπὸν αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸν ἀκέραιον, εἴτε τὸ χαρακτηριστικόν.

Εἴπομεν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἐκτὸς τῶν τελείων δυνάμεων τοῦ 10. Οἱ ἀσύμμετροι λογάριθμοι ὑπολογίζονται κατὰ προσέγγισιν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, οἷον μέχρι 5, 6, 7, κ.τ.λ. δεκαδικῶν ψηφίων· ἕπεται δ' ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι *τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος δὲν μεταβάλλεται, μετατιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς.*

Πίνακες Καλλέτου.

§ 355. Οὕτω καλοῦνται ἀπὸ τοῦ ὀνόματος τοῦ τελευταίου λογιστοῦ πίνακες κοινῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων ἀπὸ 1 μέχρις 108000, ὧν γίνεται μεγίστη χρῆσις.

§ 356. Οἱ πίνακες οὗτοί εἰσι διατεταγμένοι κατὰ τὴν ἀκόλουθον τάξιν.

Ἐν ἀρχῇ ἡ διάταξις εἶναι ἁπλουστάτη. Οἱ ἀκέραιοι ἀπὸ τῆς 1 διαδέχονται ἀλλήλους κατὰ καθέτους στήλας, καὶ παρ' αὐτοῖς οἱ λογάριθμοι, ἐκτετιμημένοι κατὰ προσέγγισιν 0,00000001, ἤγουν μετὰ 8 δεκαδικῶν ψηφίων, καὶ παραλειπομένων τῶν χαρακτηριστικῶν, ὡς εὐχερῶς ἀνευρισκομένων (353). Ἑκάστη στήλη σύγκειται ἐξ ἀριθμῶν ἑξήκοντα· τοσούτους λοιπὸν λογαρίθμους περιέχει καὶ ἡ παρακειμένη αὐτῇ· ὑπεράνω δὲ ἑκάστης μὲν στήλης ἀριθμῶν γέγραπται τὸ γράμμα N, ἀρκτικὸν τῆς γαλλικῆς λέξεως nombre (ἀριθμός), ἑκάστης δὲ στήλης λογαρίθμων ἡ συλλαβὴ Log., ἀρκτικὴ τῆς λέξεως logarithme (λογάριθμος). Οὕτω προβαίνουσιν οἱ πίνακες μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 1200. Τὸ μέρος αὐτὸ τῶν πινάκων ἐπιγράφεται ΧΙΛΙΑΣ Α'. (CHILIADE I), ὡς περιέχον τὴν πρώτην χιλιάδα τῶν ἀριθμῶν.

Ἐφεξῆς ἡ διάταξις μεταβάλλεται. Ἐν ἑκάστῃ σελίδι μία μόνη στήλη, ἡ πρώτη ἐξ ἀριστερῶν, ἐπιγράφεται N καὶ ἐν αὐτῇ διαδέχονται οἱ ἀκέραιοι κατὰ τάξιν μεγέθους ἀπὸ τοῦ 1020 μέχρι τοῦ 10800, παρ' αὐτοῖς δ' οἱ λογάριθμοι ἐν στήλῃ ἐπιγραφομένῃ 0, ἀπαραλλάκτως ὡς εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῶν πινάκων, οὗτινος ἐξακολούθησίς εἰσιν αἱ στῆλαι αὗται· ἀλλ' οἱ λογάριθμοι εἰσὶν ἐνταῦθα ἐκτετιμημένοι κατὰ προσέγγισιν 0,0000001, ἤγουν μετὰ 7 δεκαδικῶν ψηφίων· πρὸς δὲ τῶν μὲν ἀριθμῶν δὲν ἐπαναλαμβάνονται τὰ κοινὰ δύο πρῶτα ψηφία (ἢ τὰ τρία πρῶτα ἀπὸ τοῦ 10000) ἢ ἅπαξ ἀνὰ πέντε, ἀφιεμένης εἰς τοὺς λοιποὺς κενῆς τῆς θέσεως τῶν ψηφίων αὐτῶν, τῶν δὲ λογαρίθμων τὰ κοινὰ τρία πρῶτα ψηφία εἰσὶν ἐπίσης γεγραμμένα ἅπαξ, ἀφιεμένης ὑποκάτω κενῆς τῆς θέσεως αὐτῶν, ἐπαναλαμβάνονται δέ, ὅταν ὁ ἐξ αὐτῶν ἀποτελούμενος ἀριθμὸς αὐξάνῃ κατὰ 1. Οὕτω προβαίνουσιν οἱ πίνακες μέχρι 10800.

Αἱ λοιπαὶ στῆλαι ἐν ἑκάστῃ σελίδι, αἱ ἐπιγραφόμεναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, χρησιμεύουσι πρὸς προσδιορισμὸν τῶν λογαρίθμων τῶν μειζόνων τοῦ 10800 ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 108000. Ἔστω, π. χ., ὁ ἀριθμὸς 56746. Εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 5674· λαμβάνομεν τὰ τρία πρῶτα ψηφία τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, ἅπερ εἶναι 753· ἀκολούθως προβαίνομεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ (τοῦ 5674) ὁριζοντίως, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν στήλην, τὴν φέρουσαν ἐπιγραφὴν 6, τελευταῖον ψηφίον τοῦ προκειμένου ἀριθμοῦ 56746· τὰ ἐν αὐτῇ τῇ στήλῃ τέσσαρα ψηφία 9353 εἶναι τὰ συμπληροῦντα τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου· ἐπειδὴ δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 4 (§353), ὁ λογάριθμος τοῦ 56746 εἶναι 4,7539353.

Ἔστω ἔτι 64950. Τὰ τρία πρῶτα ψηφία τοῦ λογαρίθμου τοῦ 6495 εἶναι 812· τὰ ἀκόλουθα τέσσαρα εὑρίσκονται ἐν τῇ στήλῃ 0· διότι ὁ προκείμενος ἀριθμὸς λήγει εἰς 0· εἶναι λοιπὸν 5792· οὕτως ὁ λογάριθμος τοῦ 64950 εἶναι 4,8125792. Παρατηρητέον δὲ ὅτι τὰ αὐτὰ δεκαδικὰ ψηφία ἔχει καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ 6495· εἰκότως· διότι ὁ 64950, ὢν ἴσος τῷ γινομένῳ 6495×10, ἔχει λογάριθμον κατὰ 1 μείζονα τοῦ 6495.

Ἐν γένει *ἵνα ἔχωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ μείζονος τοῦ 10800, εὑρίσκομεν ἐν τῇ στήλῃ N τὸν ἀριθμὸν δεκάδων τοῦ προκειμένου ἀριθμοῦ, λαμβάνομεν τὰ τρία πρῶτα ψηφία τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ δεκάδων, προβαίνομεν ἀπ' αὐτοῦ ὁριζοντίως μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν στήλην, ἧς ἡ ἐπιγραφὴ εἶναι τὸ ληκτικὸν ψηφίον τοῦ προκειμένου ἀριθμοῦ, καὶ γράφομεν τὰ τέσσαρα ψηφία, τὰ περιεχόμενα ἐν αὐτῇ τῇ στήλῃ, ἑξῆς τῶν προευρεθέντων τριῶν.*

Ἐκτὸς τῶν στηλῶν τῶν ἐπιγραφομένων 0, 1, 2, ... 8, 9 ὑπάρχει καὶ μία τελευταία, ἐπιγραφομένη dif. [ἀρκτικὴ συλλαβὴ τῆς λέξεως différence (διαφορά)], ἥτις περιέχει α'. τὰς διαφορὰς τῶν διαδοχικῶν λογαρίθμων, β'. τὰ γινόμενα ἑκάστης τῶν διαφορῶν αὐτῶν ἐπὶ $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{10}$ καὶ $\frac{9}{10}$. Τὰ γινόμενα αὐτὰ κεῖνται ὑφ' ἑκάστην τῶν διαφορῶν ἐν ἰδίοις μικροῖς πίναξι, συγκειμένοις ἐκ δύο στηλῶν, τῆς μὲν ἀριστερᾶς περιεχούσης τοὺς πολλαπλασιαστὰς 1 (δέκατον), 2 (δέκατα), ... μέχρις 9 (δεκάτων), τῆς δὲ δεξιᾶς τὰ γινόμενα παρὰ τοῖς πολλαπλασιασταῖς κατὰ προσέγγισιν 0,0000001. Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ τίς ἡ χρῆσις τῶν διαφορῶν καὶ τῶν γινομένων αὐτῶν.

Χρῆσις τῶν πινάκων τοῦ Καλλέτου πρὸς εὕρεσιν τῶν λογαρίθμων ἀριθμῶν μὴ περιεχομένων ἐν τοῖς πίναξι, ἢ πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀριθμῶν, δοθέντων τῶν λογαρίθμων.

§ 357. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ. *Δεδομένου ἀριθμοῦ εὑρεῖν τὸν λογάριθμον.*

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀκεραίων ἀπὸ 1 μέχρι 108000 εὑρίσκονται, ὡς ἐξετέθη ἀνωτέρω. Ἐνταῦθα λοιπὸν θέλομεν δείξει τίνι τρόπῳ διὰ τῶν πινάκων εὑρίσκονται οἱ λογάριθμοι ἀκεραίων μειζόνων τοῦ 108000 ἢ κλασμάτων.

Α'. *Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ἀκεραίου μείζονος τοῦ 108000.*

Ἡ ἐκτεθησομένη πρᾶξις στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς προτάσεως. *Αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων εἰσὶ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν ἀριθμῶν.* Ἔστωσαν, π. χ., οἱ ἀριθμοὶ α, α' καὶ λ, λ' οἱ λογάριθμοι αὐτῶν, ἔτι δὲ οἱ β, β' καὶ μ, μ' οἱ λογάριθμοι αὐτῶν· ἔχομεν κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν τὴν ἀναλογίαν α—α' : β—β' :: λ—λ' : μ—μ'. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως αὐτῆς ὑπερβαίνει τὰ στοιχεῖα, θέλομεν παραδεχθῆ αὐτὴν ἐνταῦθα ἄνευ ἀποδείξεως· ἀλλὰ σημειωτέον ὅτι ἡ πρότασις αὕτη δὲν εἶναι ὅλως ἀκριβής· τουτέστιν ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἴσος τῷ λόγῳ τῆς διαφορᾶς τῶν λογαρίθμων· ἀλλ' ἡ διαφορὰ εἶναι λίαν μικρά· τοσούτῳ δὲ μᾶλλον οἱ λόγοι οὗτοι τείνουσι πρὸς τὴν ἰσότητα, ὅσῳ οἱ μὲν ἀριθμοὶ εἰσὶ μείζονες, αἱ δὲ διαφοραὶ αὐτῶν ἐλάσσονες.

Ἔστω ἤδη ὁ ἀριθμὸς 8964784. Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ εἶναι ταὐτὸν τῷ τοῦ 89647,84 (§ 354)· διὰ τοῦτο θέλομεν ζητήσει τὸν λογάριθμον τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ. Ἔστω χ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ὁ 89647,84 περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων 89647 καὶ 89648, ὧν οἱ λογάριθμοι σημειωθήτωσαν διὰ λ καὶ λ', ἔχομεν κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν τὴν ἀναλογίαν

$$89648-89647:89647{,}84-89647::\lambda'-\lambda:\chi-\lambda;$$

εἴτε
$$1:0{,}84::\lambda'-\lambda:\chi-\lambda'$$

ὅθεν
$$\chi-\lambda=0{,}84\,(\lambda'-\lambda).$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ $\chi-\lambda$ προσθέτομεν μετὰ τοῦ λ καὶ ἔχομεν τὴν τοῦ χ. Ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ προτεθέντος 8964784 πρέπει νὰ λάβωμεν χαρακτηριστικὸν 6 ἀντὶ τοῦ 4 (§ 353).

Οἱ πίνακες παρέχουσι τὸ μέσον τοῦ ἐκτελεῖν τὴν πρᾶξιν αὐτὴν ὅσον οἷόν τε συντόμως. Εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις τὸν λογάριθμον τοῦ 89647, οὗ τινος γράφομεν μόνον τὸ δεκαδικὸν μέρος· ζητοῦμεν ἀκολούθως ἐν τῇ στήλῃ τῶν διαφορῶν (τῇ ἐπιγραφομένῃ dif.) τὰ γινόμενα τῆς διαφορᾶς $\lambda'-\lambda$, ἥτις εἶναι ἐνταῦθα 49, ἐπὶ 0,8 καὶ ἐπὶ 0,04, γράφομεν αὐτὰ ὑπὸ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 89647, προσθέτομεν καὶ σημειοῦμεν τέλος τὸ χαρακτηριστικόν. Ἵνα ἔχωμεν τὸ γινόμενον ἐπὶ 0,04 λαμβάνομεν τὸ ἐπὶ 0,4 καὶ νοοῦμεν αὐτὸ ὡς ἐμφαῖνον ὑποδιαιρέσεις δεκάκις ἐλάσσονας, ἤγουν ἑκατοστὰ ἑκατομμυριοστοῦ.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πράξεως

δεκ. λογ 89647	. . . .	9525358
γινόμ. ἐπὶ 0,8	. . . .	39
» » 0,04	. . . .	20
λογ 8964784	. . . .	6,9525399.

Παραλείπονται ἐν τῷ ἀθροίσματι τὰ ψηφία ὑποδιαιρέσεων κατωτέρων τῆς ἑβδόμης τάξεως· ὅταν δὲ τὸ παραλειπόμενον ἦναι μεῖζον τοῦ ἡμίσεως μιᾶς ὑποδιαιρέσεως ἑβδόμης τάξεως, προστίθεται 1 εἰς τὸ ψηφίον ἑβδόμης τάξεως.

Ἔστω ἔτι ὁ ἀκέραιος 38549676. Γράφομεν ὑποδιαστολὴν πρὸ τῶν τριῶν τελευταίων αὐτοῦ ψηφίων, τοῦ οὕτω προκύπτοντος 38549,676 εὑρίσκομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, γράφομεν ὑπ' αὐτὸ τὰ γινόμενα τῆς διαφορᾶς τοῦ πίνακος ἐπὶ 0,6, 0,07, 0,006, προσθέτομεν καὶ ἐπὶ τέλους γράφομεν καὶ τὸ χαρακτηριστικόν· ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πράξεως.

δεκ. λογ 38549	. . . .	5860131
γινόμ. ἐπὶ 0,6	. . . .	68
» » 0,07	. . . .	79
» » 0,006	. . . .	68
λογ 38549676	. . . .	7,5860207.

Τὰ δεκαδικὰ ψηφία, ἅπερ πρέπει νὰ χωρίζωνται δι' ὑποδιαστολῆς, πρέπει νὰ ἦναι *μόνον τὰ ἀναγκαῖα*, ὅπως ὁ πρὸς τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος περιέχηται ἐν τοῖς πίναξι· π. χ. τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ 38519676 πρέπει νὰ χωρισθῶσι μόνον τὰ τρία τελευταῖα ψηφία· διότι ἐὰν ἀποχωρισθῶσι πλείονα, οἱ ἀριθμοί, οὓς θέλομεν ἔχει, ἔσονται ἐλάσσονες· εἴπομεν δ' ἐν ἀρχῇ τοῦ παραγράφου ὅτι ἡ ἀναλογία τῶν διαφορῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν διαφορῶν τῶν λογαρίθμων εἶναι τοσούτῳ ἀκριβεστέρα, ὅσῳ μείζονές εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Ὅταν, τοῦ ἀριθμοῦ ὄντος λίαν μεγάλου, χωρίζωνται πλείονα τῶν τριῶν δεκαδικὰ ψηφία, ἀρκεῖ κατὰ τὴν πρᾶξιν νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν μόνον τὰ τρία πρῶτα τῶν δεκαδικῶν αὐτῶν ψηφίων· τὰ λοιπὰ δὲν ἐπιδρῶσιν ἐπὶ τοῦ ἐξαγομένου· ἐνίοτε δὲ καὶ αὐτὸ τὸ τρίτον δεκαδικὸν δὲν ἐπιδρᾷ.

Β'. *Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 56,37964. Μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν οὕτως, ὥστε τὸ ἐξαγόμενον νὰ ἦναι μὲν ἔλασσον τοῦ ὁρίου τῶν πινάκων 108000, ἀλλὰ νὰ ἦναι τὸ πλησιέστερον πρὸς τὸ ὅριον αὐτό· ἐνταῦθα πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά· τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ 56379,64 εὑρίσκομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω· αὐτὸ τοῦτο εἶναι καὶ τὸ τοῦ προτεθέντος (§ 354)· ἀλλὰ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ τελευταίου εἶναι 1 (§ 353). Οὕτως ὁ λογάριθμος τοῦ 56,37964 εἶναι 1,7511223.

Γ'. *Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κλασματικοῦ.*

Ἢ τρέπομεν τὸν κλασματικὸν εἰς δεκαδικὸν καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω, ἢ, ἀφοῦ ἀναγάγωμεν τὸν κλασματικὸν εἰς κοινὸν κλάσμα, ἐὰν δὲν ἦναι τοιοῦτος, εὑρίσκομεν ἰδίᾳ τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν δεύτερον ἀπὸ τοῦ πρώτου (§ 340).

§ 358. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ. *Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος, εὑρεῖν τὸν ἀριθμόν.*

Διακριτέον δύο περιπτώσεις, α'. ὅταν ὁ λογάριθμος ἦναι θετικός, β'. ὅταν ἦναι ἀρνητικός.

Α'. Ὅταν ὁ λογάριθμος ἦναι θετικός, τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 4, ἢ ἔλασσον τοῦ 4 ἢ μεῖζον τοῦ 4, κ'. *Ἔστω τὸ χαρακτηριστικὸν 4.*

Ἔστω ὁ λογάριθμος 4,6514137. Ζητοῦμεν αὐτὸν ἐν τοῖς πίναξι καὶ ἐν τοῖς λογαρίθμοις, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν 4. Εὑρίσκομεν τῷ ὄντι αὐτὸν ἐν τοῖς λογαρίθμοις, ὧν τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ εἰσὶν 651· ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα τελευταῖα 4137 κεῖνται ἐν τῇ στήλῃ, τῇ ἐπιγραφομένῃ 4, τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἔχοντος λογάριθμον τὸν δεδομένον, εἶναι 4· ἵνα ἔχωμεν τὰ λοιπὰ αὐτοῦ ψηφία, βαίνομεν πρὸς τἀριστερὰ ὁριζοντίως μέχρι τῆς στήλης N καὶ εὑρίσκομεν ἐν αὐτῇ τὸν 4481· οὕτως ὁ ζητούμενος εἶναι 44814.

Ἔστω ἔτι ὁ λογάριθμος 4,7964825. Ἀναζητοῦντες αὐτὸν ἐν τοῖς πίναξι, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει, ὡς περιεχόμενος μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν λογαρίθμων 4,7964772 καὶ 4,7964841. Οἱ ἀκέραιοι, οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς τοὺς δύο τελευταίους λογαρίθμους, εἰσὶ 62586 καὶ 62587· ἐπειδὴ ὁ δεδομένος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ τῶν 4,7964772 καὶ 4,7964841, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ τῶν 62586 καὶ 62587· ὅθεν ὁ ἀκέραιος αὐτοῦ εἶναι 62586. Ἵνα ἔχωμεν τὸ κλασματικὸν αὐτοῦ μέρος, ποιοῦμεν πάλιν χρῆσιν τῆς ἐν ἀρχῇ τοῦ § 357 προτάσεως, καθ' ἣν ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν, χ ὄντος τοῦ κλασματικοῦ μέρους τοῦ ζητουμένου καὶ λ, λ' τῶν δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ δεδομένος περιέχεται,

$$\lambda' - \lambda : 4{,}7964825 - \lambda :: 62587 - 62586 : \chi$$

εἴτε

$$69 : 53 :: 1 : \chi\text{·}$$

(ὁ χ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ 62586)· ὅθεν $\chi = \frac{53}{69}$. Οὕτω τὸ κλασματικὸν μέρος τοῦ ζητουμένου ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς διαφορᾶς τοῦ δεδομένου λογαρίθμου καὶ τοῦ ἐλάσσονος τῶν δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων τῶν πινάκων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται, διὰ τῆς διαφορᾶς τοῦ πίνακος (τῆς διαφορᾶς δηλονότι τῶν διαδοχικῶν λογαρίθμων τῶν πινάκων, τῶν περιεχόντων τὸν δεδομένον λογάριθμον). Ἐπειδὴ ἡ ἀναλογία, ἐφ' ἧς στηριζόμεθα, πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ δὲν εἶναι ἀκριβὴς (§ 357), ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ δὲν εἶναι ἀκριβής, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν.

Τὸ κλασματικὸν μέρος τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἐκτιμᾶται διὰ δεκαδικοῦ, ἡ δ' ἐκτίμησις γίνεται μόνον μέχρις ἑκατοστῶν· διότι τὰ λοιπὰ δεκαδικὰ ψηφία, ἅπερ εὑρίσκονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν διαφορῶν, δὲν εἶναι ἀκριβῆ· οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα $\frac{53}{69} =$ 0,77· ὅθεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 62586,77 κατὰ προσέγγισιν 0,01. Οἱ πίνακες παρέχουσι πάλιν τὸ μέσον, ὅπως καὶ ἡ πρᾶξις αὕτη γίγνηται ὅσον οἷόν τε συντόμως. Γράφομεν ὑπὸ τὸν δεδομένον λογάριθμον μόνον τὰ τέσσαρα τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἐλάσσονος ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν τῶν πινάκων, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ δεδομένος περιέχεται, καὶ σημειοῦμεν τὸν εἰς τὸν λογάριθμον ἐκεῖνον ἀντιστοιχοῦντα ἀκέραιον. Εἶτα ἐκτελοῦμεν ταχέως τὴν πρᾶξιν πρὸς εὕρεσιν τῶν δεκάτων καὶ ἑκατοστῶν, βοηθούμενοι ὑπὸ τῆς στήλης τῶν διαφορῶν· π. χ. ἵνα ἔχωμεν τὸ πηλίκον τοῦ 53 διὰ 69, παρατηροῦμεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν διαφορῶν ὑπὸ τὴν διαφορὰν 69, ὅτι ὁ 53 περιέχεται μεταξὺ 48 καὶ 55, εἴτε μεταξὺ $69 \times 0{,}7$ καὶ $69 \times 0{,}8$· ἄρα τὸ πηλίκον τοῦ 53 διὰ 69 περιέχει 0,7, ἅπερ σημειοῦμεν παρὰ τὸν 62586· ἀφαιροῦμεν ἀμέσως ἀπὸ τοῦ 53 τὸν 48 (γινόμενον τοῦ 69 ἐπὶ 0,7), καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 5· τὰ ἑκατοστὰ τοῦ πηλίκου τοῦ 53 διὰ 69 εἶναι ὅσα καὶ τὰ τοῦ 5 διὰ 69· ἵνα δ' ἔχωμεν αὐτά, προσγράφομεν 0 εἰς τὴν διαφορὰν 5 καὶ τὸν ἐντεῦθεν 50 διαιροῦμεν διὰ 69, τὰ δὲ δέκατα τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, ἅπερ εὑρίσκομεν ἀμέσως ὡς ἀνωτέρω τὰ τοῦ 53 διὰ 69, θεωροῦμεν ὡς ἑκατοστά· ἐπειδὴ ὁ 50 περιέχεται μεταξὺ τῶν γινομένων 48 καὶ 55, τὰ δέκατα τοῦ πηλίκου τοῦ 50 διὰ 69 εἶναι 7, ἅπερ γράφομεν ὡς ἑκατοστὰ ἑξῆς τοῦ 62586,7 καὶ οὕτως ἔχομεν 62586,77.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πράξεως

Λογάριθμος	ἀριθμός.
4,7964825	62586,77
4772	
53	
50	

Ἔστω ἔτι ὁ λογάριθμος 4,9847786. Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πράξεως.

Λογάριθμος	ἀριθμός.
4,9847786	96555,84.
7748	
38	
20	

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ διαφοραὶ τῶν διαδοχικῶν λογαρίθμων βαίνουσιν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐλαττούμεναι, ἐνῷ οἱ λογάριθμοι αὐξάνουσι· αἱ ἐξαιρέσεις εἰσὶν ὀλίγαι· ἀλλ' οὐχ ἧττον ἕνεκα τῶν ὀλίγων αὐτῶν ἐξαιρέσεων δυνατὸν ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων νὰ μὴ ἦναι ἡ πλησιεστέρα τῶν ἐν τοῖς πίναξι τοῦ Καλλέτου· διὰ τοῦτο καλὸν εἶναι νὰ βεβαιώμεθα περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ τελευταίου ψηφίου τῆς διαφορᾶς τῶν πινάκων, ἐκτελοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν καθ' ὅσον ἀφορᾷ μόνον τὸ ψηφίον αὐτό· ἄλλως δὲ, ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι, ἑπομένως καὶ αἱ διαφοραὶ, εἰσὶ κατὰ προσέγγισιν, δυνατὸν ἡ ἐν τοῖς πίναξι πλησιεστέρα τῷ λογαρίθμῳ διαφορὰ, νὰ ἦναι ἡ ἀκριβεστέρα, καίτοι διάφορος τῆς εὑρισκομένης τῇ ἀμέσῳ ἀφαιρέσει.

ϛ'. *Ἔστω τὸ χαρακτηριστικὸν ἔλασσον τοῦ 4.*

Ζητοῦμεν ἐν πρώτοις τὸν λογάριθμον ἐν τοῖς πίναξι καὶ ἐν τοῖς λογαρίθμοις, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι ἴσον τῷ τοῦ δεδομένου· ἐὰν ὑπάρχῃ ἐν τοῖς πίναξι, ὁ ἀντιστοιχῶν ἀκέραιος εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἐὰν δὲ δὲν ὑπάρχῃ, αὐξάνομεν τὸ χαρακτηριστικὸν εἰς 4, εὑρίσκομεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν, ὡς ἀνωτέρω, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ δυνάμεως τοῦ 10, ἧς ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δεδομένου λογαρίθμου προστιθεμένων μονάδων, ὅπως τοῦτο καταστῇ 4.

Ἔστω ὁ λογάριθμος 3,6494322. Ζητοῦμεν αὐτὸν ἐν τοῖς λογαρίθμοις, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν 3, ἤγουν τοῖς ἐν τῇ στήλῃ τῇ ἐπιγραφομένῃ 0, καὶ εὑρίσκομεν τῷ ὄντι αὐτὸν παρὰ τὸν ἀριθμὸν 4461, ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἔστω ἔτι ὁ λογάριθμος 1,8379462. Ζητοῦμεν αὐτὸν ἐν τοῖς λογαρίθμοις, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν 1, ἤγουν τοῖς τῶν διψηφίων ἀριθμῶν, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει, ὡς περιεχόμενος μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν τῶν πινάκων 1,83250891 καὶ 1,83884909. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν, οὗ ὁ λογάριθμος 4,8379462, ὅστις εἶναι 68856,70· διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ 10^3, εἴτε μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν 3 θέσεις πρὸς τἀριστερὰ (τόσαι μονάδες προσετέθησαν εἰς τὸν δεδομένον λογάριθμον, ὅπως τὸ χαρακτηριστικὸν καταστῇ 4), καὶ ἔχομεν οὕτω τὸν 68,85670, ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος· διότι ὁ λογάριθμος αὐτοῦ, ἴσος ὢν τῷ λογαρίθμῳ τοῦ 68856,70 πλὴν τοῦ λογαρίθμου τοῦ 10^3, εἶναι $4,8379462-3=1,8379462$. Ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς εἶναι κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τοῦ τελευταίου αὐτοῦ δεκαδικοῦ ψηφίου, ἤτοι κατὰ προσέγγισιν 0,00001· διότι ὁ 68856,70 εἶναι κατὰ προσέγγισιν 0,01.

γ΄. *Ἔστω τὸ χαρακτηριστικὸν μεῖζον τοῦ 4.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου λογαρίθμου τόσας μονάδας, ὥστε τὸ χαρακτηριστικὸν νὰ καταστῇ 4, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸν τελευταῖον αὐτὸν λογάριθμον, καὶ πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ δύναμιν τοῦ 10, ἧς ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν ἀπὸ τοῦ δεδομένου λογαρίθμου ἀφαιρεθεισῶν μονάδων, ἔχομεν τὸν ζητούμενον.

Ἔστω ὁ λογάριθμος 7,6473962. Ζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἔχοντα λογάριθμον 4,6473962, ὅστις εἶναι 44401,35· πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 10^3 καὶ ἔχομεν 44401350, ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος· διότι ὁ λογάριθμος αὐτοῦ, ἴσος ὢν τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τοῦ 44401,35 καὶ τοῦ 10^3, εἶναι $4,6473962+3=7,6473962$. Ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 44401350 εἶναι κατὰ προσέγγισιν μιᾶς δεκάδος· διότι ὁ 44401,35 εἶναι κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Ἔστω ἔτι ὁ λογάριθμος 9,3782643. Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἔχων λογάριθμον 4,3782643, εἶναι 23892,65· πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ 10^5, ἔχομεν 2389265000, ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος κατὰ προσέγγισιν μιᾶς χιλιάδος· διότι τὸ λάθος, ἔλασσον ὂν τοῦ 0,01 ἐν τῷ 23892,65, εἶναι ἔλασσον τοῦ γινομένου $0,01\times10^5$, εἴτε τοῦ 1000, ἐν τῷ $23892,65\times10^5$.

Β΄. Ὅταν ὁ λογάριθμος ἦναι ἀρνητικὸς, ὁ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶναι ἐλάσων τῆς μονάδος (§ 345, ϛ΄.)· ἵνα δ' εὕρωμεν αὐτὸν, προσθέτομεν εἰς τὸν δεδομένον λογάριθμον ἱκανὰς μονάδας, ὥστε τὸ ἐξαγόμενον νὰ καταστῇ θετικὸν, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν 4, εὑρίσκομεν τὸν εἰς τὸν τελευταῖον αὐτὸν λογάριθμον ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ δυνάμεως τοῦ 10, ἧς ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ

ἀριθμῷ τῶν εἰς τὸν προτεθέντα λογάριθμον προστεθεισῶν μονάδων.
Ἔστω, π. χ., ὁ ἀρνητικὸς λογάριθμος $-3,6798432$· προσθέτοντες εἰς αὐτὸν 8, ἔχομεν $4,3201568$· εὑρίσκομεν ὅτι $4,3201568 = \text{λογ}\,20900,50$· διαιροῦντες τὸν 20900,50 διὰ 10^8 ἔχομεν 0,0002090050, ὅςις εἶναι ὁ ζητούμενος· διότι $\text{λογ}\,0,0002090050 = \text{λογ}\,20900,50 - \text{λογ}\,10^8 = 4,3201568 - 8 = -3,6798432$. Ὁ βαθμὸς τῆς προσεγγίσεως εἶναι ἐνταῦθα 0,0000000001.

Δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸν αὐτὸν λογάριθμον, εἰλημμένον μετὰ τοῦ σημείου $+$, καὶ διαιροῦμεν τὴν μονάδα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. Οὕτως εὑρίσκομεν $3,6798432 = \text{λογ}\,4784,572$· ὅθεν $-3,6798432 = \text{λογ}\,\frac{1}{4784,572}$· διότι $\text{λογ}\,\frac{1}{4784,572} = \text{λογ}\,1 - \text{λογ}\,4784,572 = 0 - 3,6798432 = -3,6798432$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ 1 διὰ 4784,572, εὑρίσκομεν 0,0002090051.

Ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι προτιμότερος, ὡς συντομώτερος.

Λογάριθμοι, ὧν μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικόν.

§ 359. Πρὸς εὐκολίαν τῶν λογισμῶν οἱ ἀρνητικοὶ λογάριθμοι γράφονται οὕτως, ὥστε μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν νὰ ἦναι ἀρνητικόν. Ἔστω, π. χ., ὁ ἀρνητικὸς λογάριθμος $-3,5679643$· δύναται νὰ γραφῇ ὁ αὐτὸς καὶ οὕτω $-4+1-0,5679643$, καὶ ἐκτελουμένης τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 0,5678643 ἀπὸ 1, $-4+4320357$· ὅθεν $-3,5679643 = -4+4320357$· ὁ ἀρνητικὸς δηλονότι λογάριθμος παρίσταται δι' ἀκεραίου ἀρνητικοῦ καὶ δεκαδικοῦ θετικοῦ. Ὁ $-4+4320357$ γράφεται οὕτω $\overline{4},4320357$.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ δῆλον ὅτι *ἵνα λογαρίθμου ἀρνητικοῦ τὸ χαρακτηριστικὸν μόνον καταστῇ ἀρνητικόν, ἀφαιροῦμεν τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος ἀπὸ 1 καὶ αὐξάνομεν κατὰ 1 τὸ χαρακτηριστικόν.* Ἡ ἀφαίρεσις τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἀπὸ 1 γίνεται εὐκόλως ὡς ἑξῆς· ἀφαιρεῖται τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον ἀπὸ 10, ἕκαστον δὲ τῶν λοιπῶν ἀπὸ 9. Π. χ. πρὸς ἀφαίρεσιν τοῦ 0,5679643 ἀπὸ 1, ἀφαιροῦμεν 3 ἀπὸ 10, ἕκαστον δὲ τῶν λοιπῶν ψηφίων ἀπὸ 9· εὑρίσκομεν οὕτως εὐκόλως τὴν διαφορὰν 0,4320357.

§ 360. Αἱ πράξεις ἐπὶ ἀριθμῶν, ὧν τὸ μὲν δεκαδικὸν μέρος θετικόν, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, γίνονται ὡς ἕπεται.

α΄. Πρόσθεσις. Εἰς τὴν πρᾶξιν αὐτὴν πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι *πάντες* οἱ δεκαδικοὶ τῶν προσθετέων εἶναι θετικοί, μόνα δὲ τὰ φέροντα ὑπεράνω τὸ σημεῖον — χαρακτηριστικὰ εἶναι ἀρνητικά· διὰ τοῦτο προσθέτομεν τοὺς δεκαδικούς, τὰς δ' ἐκ τῆς προσθέσεως αὐτῆς μονάδας μετὰ τῶν θετικῶν χαρακτηριστικῶν, τὸ δ' ἐντεῦθεν ἄθροισμα προσθέτομεν *ἀλγεβρικῶς* μετὰ τῶν ἀρνητικῶν χαρακτηριστικῶν.

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r}
3,6479645\\
\overline{2},2785432\\
5,3697235\\
\overline{4},7856984\\
\hline
4,0819296.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\overline{6},7432956\\
3,8164725\\
\overline{2},4853643\\
\overline{1},2614309\\
\hline
\overline{4},3065633.
\end{array}$$

β΄. Ἀφαίρεσις. Ἀφαιροῦμεν τὸν δεκαδικὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ τοῦ μειωτέου, ηὐξημένου ἐν ἀνάγκῃ κατὰ μονάδα, ἣν προσθέτομεν *ἀλγεβρικῶς* μετὰ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἀφαιροῦμεν ἐπίσης ἀλγεβρικῶς ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ μειωτέου.

Οὕτω μὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελῶμεν τὰς τοιαύτας ἀφαιρέσεις· ἐν τούτοις εἰς τὰς διὰ λογαρίθμων πράξεις ἀντὶ τοιούτων ἀφαιρέσεων γίνονται πρὸς εὐκολίαν προσθέσεις τῶν ἑτεροσήμων ἀριθμῶν ὡς ἀνωτέρω. Π. χ. ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν 3,7649325, προσθέτομεν τὸν ἴσον ἀρνητικὸν $\overline{4}$,2350675, ὃν εὑρίσκομεν ὡς προείρηται (§ 359). Ἐπίσης ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν $\overline{4}$,6435986, προσθέτομεν τὸν ἴσον θετικόν, ὃν εὑρίσκομεν ταχέως ἀφαιροῦντες τὸν δεκαδικὸν τοῦ δεδομένου ἀπὸ 1 καὶ ἐλαττοῦντες τὸ χαρακτηριστικὸν κατὰ 1· διότι $4-0,6435986=3+1-0,6435986=3,3564014$.

γ΄. Πολλαπλασιασμός. Εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ, οὗ τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικόν, ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, πολλαπλασιάζοντες χωρὶς τὸ δεκαδικὸν μέρος καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἀνάγοντες.

Παράδειγμα.

$$
\begin{array}{r}
-4,8275964 \\
12 \\
\hline
16551928 \\
8275964 \\
\hline
9,9311568 \\
-48 \quad\quad\quad\quad\quad \\
\hline
\overline{39},9311568
\end{array}
$$

δʹ. Διαίρεσις. Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν, οὗ τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικόν, δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν πρῶτον τὸ χαρακτηριστικόν· ἐὰν ἡ διαίρεσις γίγνηται ἀκριβῶς, τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον εἶναι τὸ ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου πηλίκου· διαιροῦντες ἀκολούθως καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, ἔξομεν τὸ δεκαδικὸν τοῦ πηλίκου. Ἐὰν δὲ μὴ γίγνηται ἀκριβῶς ἡ διαίρεσις, αὐξάνομεν κατὰ μονάδα τὸν ἀκέραιον τοῦ πηλίκου τοῦ ἀρνητικοῦ χαρακτηριστικοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου πηλίκου· τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς ἔσται τότε θετικόν· συνάπτοντες αὐτὸ μετὰ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦντες, ἔξομεν καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ πηλίκου.

Παραδείγματα.

$$
\overline{42},4967325 \,\Big|\, \frac{7}{\overline{6},0709648} \qquad\qquad \overline{45},8275963 \,\Big|\, \frac{7}{\overline{7},6896566}
$$

Εἰς τὸ βʹ. παράδειγμα τὸ πηλίκον τοῦ $\overline{45}$ διὰ 7 εἶναι $\overline{7}$, τὸ δὲ ὑπόλοιπον $+4$, ὅπερ συνάπτομεν μετὰ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦμεν διὰ 7 πρὸς εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ τοῦ πηλίκου.

Συμπληρώματα λογαρίθμων.

§ 361. Ἡ διαφορὰ ἀριθμοῦ τινος ἀπὸ 10 καλεῖται *συμπλήρωμα* τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν 10.

Ἵνα εὕρωμεν τὸ τοιοῦτον συμπλήρωμα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἐργαζόμεθα συντόμως ὡς ἑξῆς. α΄. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἦναι ἐλάσσων τοῦ 10, ἀφαιροῦμεν τὸ μὲν τελευταῖον αὐτοῦ δεκαδικὸν ψηφίον ἀπὸ 10, ἕκαστον δὲ τῶν λοιπῶν ἀπὸ 9· π. χ. ἵνα ἔχωμεν τὸ συμπλήρωμα τοῦ 7,6472934, ἀφαιροῦμεν 4 ἀπὸ 10, ἕκαστον δὲ τῶν ἄλλων ψηφίων ἀπὸ 9· οὕτως εὑρίσκομεν 2,3527066. β΄. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἦναι μείζων τοῦ 10, ἀφαιροῦμεν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον ἀπὸ 10, ἕκαστον τῶν λοιπῶν δεκαδικῶν ψηφίων ἀπὸ 9, γράφομεν ἀκολούθως ὑποδιαστολὴν καὶ πρὸ αὐτῆς ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν, ἴσον τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀκεραίου ἀπὸ 10, ηὐξημένη κατὰ 1. Π. χ. ἵνα ἔχωμεν τὸ συμπλήρωμα τοῦ 12,3796435, ἀφαιροῦμεν 5 ἀπὸ 10, ἕκαστον τῶν λοιπῶν δεκαδικῶν ψηφίων ἀπὸ 9, εἶτα γράφομεν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν $\overline{3}$· οὕτως ἔχομεν $\overline{3}$,6203565.

§ 362. Εἴδομεν ἐν § 360 ὅτι πρὸς εὐκολίαν ἡ ἀφαίρεσις λογαρίθμων ἄγεται εἰς πρόσθεσιν τῶν ἴσων ἑτεροσήμων ἀριθμῶν· ἀλλ᾽ ἀντὶ τῆς τοιαύτης εὐκολίας οἱ λογισταὶ χρῶνται πολλάκις συμπληρώμασι.

Ἔστω λογάριθμός τις λ, ὅστις πρόκειται ν᾽ ἀφαιρεθῇ ἀπ᾽ ἀριθμοῦ τινος Α· σημειοῦντες διὰ λ΄ τὸ συμπλήρωμα αὐτοῦ, ἔχομεν $\lambda = 10 - \lambda'$· ὅθεν $A - \lambda = A + \lambda' - 10$· οὕτως *ἵνα ἀφαιρέσωμεν λογάριθμόν τινα, προσθέτομεν τὸ συμπλήρωμα αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τοῦ ἐντεῦθεν ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν* 10. Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ ἐργάζεσθαι εἶναι εὐκολώτερος τῆς ἀμέσου ἀφαιρέσεως τοῦ λογαρίθμου.

Ἔστω, π. χ., ὁ λογάριθμος 3,7836452, ὅστις πρόκειται ν᾽ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ 4,6953214. Ἐὰν μὲν ποιήσωμεν χρῆσιν ἀρνητικοῦ χαρακτηριστικοῦ, ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν (§360,β΄.)

$$\begin{array}{r} 4{,}6953214 \\ \overline{4}{,}2163548 \\ \hline 0{,}9116762 \end{array}$$

ἐὰν δ᾽ ἐργασθῶμεν διὰ συμπληρώματος, ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἕπεται

$$\begin{array}{lr} & 4{,}6953214 \\ \text{Συμ. } 3{,}7836452 \ldots & 6{,}2163548 \\ \hline & 10{,}9116762 \\ \text{ἀφαιρέσει } 10 \ldots\ldots & 0{,}9116762. \end{array}$$

Χρῆσις τῶν συμπληρωμάτων γίνεται ἰδίως ὅταν οἱ ἀφαιρετέοι λογάριθμοι ἦναι θετικοὶ ἐλάσσονες τοῦ 10.

Χρῆσις τῶν λογαρίθμων.

α'. *Χρῆσις πρὸς ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων.*

§ 363. Ἐν § 348 εἴπομεν πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμεύωσιν οἱ λογάριθμοι πρὸς ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων· καιρὸς δ' ἤδη νὰ δείξωμεν τὴν χρῆσιν αὐτὴν διὰ παραδειγμάτων.

α'. Λογίσασθαι τὸ κλάσμα $\dfrac{96789 \times 3794643 \times 729}{895652 \times 387943}$.

Ἔστω χ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος αὐτοῦ. Ὁ λογάριθμος τοῦ χ ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀριθμητοῦ πλὴν τοῦ λογαρίθμου τοῦ παρονομαστοῦ· οἱ λογάριθμοι τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἰσοῦνται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων αὐτῶν· προσθέτοντες λοιπὸν τοὺς λογαρίθμους τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἀφαιροῦντες τοὺς τοῦ παρονομαστοῦ, ἐκτελοῦντες δὲ τὰς ἀφαιρέσεις ὡς εἴρηται ἐν § 360 ἢ ἐν § 362, ἕξομεν τὸν λογάριθμον τοῦ χ. Ἀπὸ δὲ τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ἤγουν τὸν χ, ὡς δέδεικται ἐν § 358. Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῆς πράξεως, ἔνθα αἱ ἀφαιρέσεις γίνονται διὰ συμπληρωμάτων.

λογ 96789=		4,9858260
δεκ. λογ 37946	5791660	
4	46	
3	34	
λογ 3794643=		6,5791709
λογ 729=		2,8627275
δεκ. λογ 89565	9521383	
2	10	
λογ 895652=	5,9521393	
συμ. λογ 895652=		4,0478607
δεκ. λογ 38794	5887646	
3	34	
λογ 387943=	5,5887680	
συμ. λογ 387943=		4,4112320
λογ χ=		2,8868171
77057,90		8121
χ= 770,5790.		50
		40

β'. Ἔστω $\chi = \dfrac{0,84963 \times 5.8732}{0,47632 \times 0,00964}$.

λογ 84963 =	4,9292298	
λογ 0,84963 =		$\bar{1}$,9292298
λογ 5,8732 =		0,7688748
λογ 0,47632 =	$\bar{1}$,6778988	
—λογ 0,47632 =		0,3221012
λογ 0,00964 =	$\bar{3}$,9840770	
—λογ 0,00964 =		2,0159230
λογ χ =		3,0361288
	10867,48	1097
χ = 1086,748.		191
		310

γ'. Ἔστω $\chi = \left(\dfrac{3}{48}\right)^6$.

Ἔχομεν λογ χ = 6(λογ 3 — λογ 48)· ὅθεν ἐργαζόμεθα ὡς ἕπεται.

λογ 3 =		0,47712125
λογ 48 =	1,68124124	
—λογ 48 =		$\bar{2}$,31875876
λογ 3 — λογ 48 =		$\bar{2}$,79588001
		6
6(λογ 3 — λογ 48) =		$\bar{8}$,77528006
	59604,63	2754
		46
χ = 0,000000059604 63.		20

δ'. Ἔστω $\chi = \dfrac{\sqrt[5]{(6428,2)^3} \times \sqrt[7]{84379}}{\sqrt[3]{(78594,48)^2}}$.

Ἔχομεν ἐνταῦθα

$$\lambda o\gamma.\,\chi = \lambda o\gamma.\sqrt[5]{(6428{,}2)^3} + \lambda o\gamma.\sqrt[7]{84379} - \lambda o\gamma.\sqrt[3]{(78594{,}48)^2}$$

ἀλλὰ κατὰ τὰ ἐν § 339 καὶ ἑξῆς θεωρήματα

$$\lambda o\gamma.\sqrt[5]{(6428{,}2)^3} = \frac{\lambda o\gamma\,(6428{,}2)^3}{5} = \frac{3}{5}\,\lambda o\gamma.\,6428{,}2$$

$$\lambda o\gamma.\sqrt[7]{84379} = \frac{1}{7}\,\lambda o\gamma.\,84379$$

$$\lambda o\gamma.\sqrt[3]{(78594{,}48)^2} = \frac{2}{3}\,\lambda o\gamma.\,78594{,}48.$$

ὅθεν $\lambda o\gamma.\,\chi = \frac{3}{5}\,\lambda o\gamma.6428{,}2 + \frac{1}{7}\,\lambda o\gamma.84379 - \frac{2}{3}\,\lambda o\gamma.78594{,}48.$

διὸ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

λογ 6428,2 = . .	3,8080894	
	3	
3 × λογ 6428,2 = . .	11,4242682	
$\frac{3}{5}$ λογ 6428,2 = ...		2,2848536
λογ 84379 = . .	4,9262344	
$\frac{1}{7}$ λογ 84379 = ...		0,7037478
λογ 78594 = . .	4,8953894	
4 . .	22	
8 . .	44	
λογ 78594,48 = .	4,8953920	
— λογ 78594,48 = .	$\overline{5},1046080$	
	2	
2 × — λογ 78594,48 = .	$\overline{10},2092160$	
— $\frac{2}{3}$ λογ 78594,48 = ...		$\overline{4},7364053$
λογ χ = ...		$\overline{1},7250067$
53089,27		45
χ = 0,5308927.		22
		60

β'. Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha^{\chi}=\beta$.

§ 364. Ἡ ἐν § 313 καὶ ἑξῆς ἐκτεθεῖσα μέθοδος ἐπιλύσεως τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως $\alpha^{\chi}=\beta$ ἐτέθη αὐτόθι, μόνον ὅπως δειχθῇ ἀργότερον στοιχειώδης τις τρόπος προσδιορισμοῦ τῶν λογαρίθμων, θεωρουμένων ὡς ἐκθετῶν (§ 349)· ἐπειδὴ ἡ μέθοδος αὕτη συνεπάγεται μακροτάτας πράξεις, οὐδέποτε γίνεται πραγματικὴ χρῆσις αὐτῆς, ὡς ἔφθημεν εἰπόντες ἐν § 349, οἱ δὲ λογάριθμοι προσδιορίζονται δι' ἄλλων προσφορωτέρων μεθόδων.

Ἀλλ' ὅσῳ ἐπίπονος εἶναι ἡ μνημονευθεῖσα μέθοδος, τόσῳ εὔκολος εἶναι ἡ ἐπίλυσις τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος ἐξισώσεως διὰ λογαρίθμων. Ἔστω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\alpha^{\chi}=\beta$, α καὶ β ὄντων θετικῶν συμμέτρων ἀριθμῶν· συνάγομεν ἐξ αὐτῆς $\chi.\ \lambda o\gamma\ \alpha=\lambda o\gamma\ \beta$, τῶν λογαρίθμων λαμβανομένων ἐν οἱῳδήποτε συστήματι· ὅθεν $\chi=\dfrac{\lambda o\gamma\ \alpha}{\lambda o\gamma\ \beta}$.

Ἔστω, π. χ., ἡ ἐξίσωσις $7^{\chi}=25$. Λαμβάνοντες κοινοὺς λογαρίθμους, ἔχομεν

$$\chi=\frac{\lambda o\gamma\ 25}{\lambda o\gamma\ 7}=\frac{1,39794001}{0,84509804}=\frac{139794001}{84509804}.$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ δεκαδικοῦ, ἐκτελοῦντες καὶ τὴν τροπὴν αὐτὴν διὰ λογαρίθμων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΧΡΕΩΛΥΣΙΑΣ.

Α'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ.

Σύνθετοι τόκοι — τύπος τῶν συνθέτων τόκων.

§ 365. Ὅταν κεφαλαίου τετοκισμένου ὁ τόκος ἀνατοκίζηται, ἤγουν ὁ ἐν ἑκάστῃ χρονικῇ μονάδι τόκος προστίθεται κατὰ τὴν λῆξιν τῆς χρονικῆς μονάδος μετὰ τοῦ κεφαλαίου, ὅπως ἀποφέρῃ καὶ αὐτὸς τόκον, οἱ οὕτω παραγόμενοι τόκοι καλοῦνται *τόκοι σύνθετοι*.

§ 366. Ἔστω α κεφάλαιόν τι, ε ὁ ἀριθμὸς τῶν χρονικῶν μονάδων, καθ' ἃς αὐτὸ διατελεῖ ἐν τόκῳ καὶ τ ὁ τόκος τῆς μονάδος νομίσματος ἐν τῇ χρονικῇ μονάδι (*). Ἴδωμεν πόσον γίνεται τὸ κεφάλαιον αὐτὸ μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρόνου ε.

Πρὸς πλείονα σαφήνειαν ὁρισθήτω ἡ χρονικὴ μονὰς καὶ ἔστω αὕτη τὸ ἔτος. Ἐπειδὴ ἑκάστη μονὰς τοῦ κεφαλαίου α ἐν ἑνὶ ἔτει ἀποφέρει τόκον τ, τὸ κεφάλαιον α ἐν 1 ἔτει ἀποφέρει τόκον ατ· ἐπομένως εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους τὸ κεφάλαιον α γίνεται $\alpha+\alpha\tau$, εἴτε $\alpha(1+\tau)$.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)$, τοκιζόμενον ἐπὶ 1 ἔτος, γίνεται $\alpha(1+\tau)(1+\tau)=\alpha(1+\tau)^2$· ὅθεν τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α, τοκιζόμενον ἐπὶ δύο ἔτη, γίνεται κατὰ τὴν λῆξιν τοῦ δευτέρου ἔτους $\alpha(1+\tau)^2$. Ἐπίσης τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)^2$, τοκιζόμενον ἐπὶ 1 ἔτος, γίνεται $\alpha(1+\tau)^2(1+\tau)=\alpha(1+\tau)^3$· ὅθεν τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον μετὰ τὴν λῆξιν τοῦ τρίτου ἔτους γίνεται $\alpha(1+\tau)^3$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσεται ὅτι τὸ κεφάλαιον α κατὰ τὴν λῆξιν τοῦ τετάρτου ἔτους γίνεται $\alpha(1+\tau)^4$, τοῦ πέμπτου $\alpha(1+\tau)^5$, κτλ.· καὶ ἐν γένει μετὰ παρέλευσιν ε ἐτῶν τὸ κεφάλαιον αὐτὸ ἀποβαίνει $\alpha(1+\tau)^\varepsilon$.

Σημειωθήτω διὰ Α ἡ ἀξία τοῦ α μετὰ παρέλευσιν ε χρονικῶν μονάδων· κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$(1)\qquad A=\alpha(1+\tau)^\varepsilon.$$

Τοιοῦτος εἶναι *ὁ τύπος τῶν συνθέτων τόκων*.

Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ.

§ 367. Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (1) περιλαμβάνει τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς Α, α, τ, ε καὶ χρησιμεύει πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὅταν οἱ τρεῖς ἄλλοι ἦναι δεδομένοι, εἴτε πρὸς λύσιν τῶν ἑξῆς τεσσάρων *προβλημάτων ἀνατοκισμοῦ*.

Α'. *Κεφάλαιον α, τοκιζόμενον ἐπὶ ἐπιτοκίῳ 100τ, πόσον ἀποβαίνει μετὰ παρέλευσιν χρόνου ε;*

Ἐὰν μὲν ὁ χρόνος ε ἦναι ἀκέραιος, ὁ ζητούμενος εὑρίσκεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1).

(*) Ἐπομένως ὁ τόκος τῶν 100 ἐν τῇ χρονικῇ μονάδι, ὁ λεγόμενος ἐπιτόκιον, εἶναι 100 τ.

Ἐὰν δ' ὁ ε σύγκηται ἐξ ἀκεραίου κ καὶ ἐξ ἡμερῶν λ, ζητοῦμεν πρῶτον πόσον γίνεται τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου κ· ἀκολούθως αὐξάνομεν τὸ ἐξαγόμενον κατὰ τὸν τόκον αὐτοῦ ἐν ἡμέραις λ, ὃν εὑρίσκομεν συλλογιζόμενοι ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς νομίσματος ἐν χρόνῳ 1 ἀποφέρει τόκον τ, ἐν 1 ἡμέρᾳ ἀποφέρει τόκον $\frac{\tau}{\mu}$ (μ ὄντος τοῦ ἐν τῇ χρονικῇ μονάδι ἀριθμοῦ ἡμερῶν)· ὅθεν ἡ αὐτὴ μονὰς ἐν ἡμέραις λ ἀποφέρει $\frac{\lambda\tau}{\mu}$· ἄρα κεφάλαιον οἱονδήποτε π ἐν ἡμέραις λ ἀποφέρει τόκον $\pi\times\frac{\lambda\tau}{\mu}$. Ἵνα ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ἀξίαν τοῦ κεφαλαίου α μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρόνου ε, πρέπει, ἀφοῦ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρόνου κ, νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ $1+\frac{\lambda\tau}{\mu}$. Οὕτως ἔχομεν, Α ὄντος τοῦ ζητουμένου,

$$(2)\qquad A=\alpha(1+\tau)^{\kappa}\left(1+\frac{\lambda\tau}{\mu}\right).$$

Β'. *Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον σήμερον ἐπὶ ἐπιτοκίῳ 100τ γίνεται Α μετὰ παρέλευσιν χρόνου ε;*

Ἐὰν μὲν ὁ ε ἦναι ἀκέραιος, συνάγομεν ἐκ τοῦ τύπου (1) (§355).

$$(3)\qquad \alpha=\frac{A}{(1+\tau)^{\varepsilon}}.$$

Ἐὰν δ' ὁ ε σύγκηται ἐξ ἀκεραίου κ καὶ ἐξ ἡμερῶν λ, συνάγομεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (2)

$$(4)\qquad \alpha=\frac{A}{(1+\tau)^{\kappa}\left(1+\frac{\lambda\tau}{\mu}\right)}.$$

Γ'. *Κεφάλαιον α γίνεται Α, ὅταν τοκισθῇ ἐπὶ χρόνον ε· ἐπὶ τίνι ἐπιτοκίῳ τοκίζεται;*

Ἐὰν μὲν ὁ χρόνος ε ἦναι ἀκέραιος, συνάγομεν ἐκ τοῦ τύπου (1)

$$(5)\qquad \tau=\sqrt[\varepsilon]{\frac{A}{\alpha}}-1.$$

Ἀλλ' ἐὰν ὁ χρόνος ε δὲν ἦναι ἀκέραιος, ἡ ἐξίσωσις (2), ἐξ ἧς πρέπει νὰ πορισθῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ τ, εἶναι βαθμοῦ $\kappa+1$ ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον αὐτόν· ἑπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ τ. Δυνάμεθα ὅμως κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην νὰ εὑρίσκωμεν δι' ἐπανειλημμένων δοκιμῶν τιμὴν τοῦ τ κατὰ προσέγγισιν. Ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ β'. μέλους τῆς (2) δῆλον ὅτι ὁ Α αὐξάνει, ὅταν αὐξάνῃ ὁ τ, ὅπερ ἄλλως φανερὸν καὶ ἐκ τῶν προτέρων· ἐὰν λοιπὸν [illegible] τῷ τ τιμὴν κατ' ἀρέσκειαν τ' καὶ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ Α, ποιοῦντες τὸν λογισμὸν αὐτὸν διὰ λογαρίθμων, ἐὰν μὲν εὕρωμεν τιμὴν μείζονα τοῦ δεδομένου Α, συμπεραίνομεν ὅτι $\tau'>\tau$· ἐὰν δ' ἐλάσσονα, ὅτι $\tau'<\tau$· λαμβάνοντες ἀκολούθως ἄλλην τιμὴν ἀντὶ τοῦ τ, θέλομεν μάθει κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐὰν αὕτη ἦναι μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς· ἐπαναλαμβάνοντες τὰς δοκιμὰς αὐτάς, δυνάμεθα νὰ πλησιάσωμεν ἐπὶ τοσοῦτον τὰ ὅρια, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ τ, ὥστε νὰ ἔχωμεν τιμὴν αὐτοῦ ἱκανῶς προσεγγίζουσαν.

Δ'. *Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκισθῇ κεφάλαιον α ἐπὶ ἐπιτοκίῳ 100τ, ὅπως ἀποβῇ ἴσον δεδομένῳ κεφαλαίῳ Α ;*

Ἐκ τοῦ τύπου (1) συνάγομεν

$$\lambda o\gamma\, A = \lambda o\gamma\, \alpha + \varepsilon \times \lambda o\gamma(1+\tau)\cdot$$

ὅθεν

$$(6)\qquad \varepsilon = \frac{\lambda o\gamma\, A - \lambda o\gamma\, \alpha}{\lambda o\gamma(1+\tau)}.$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι ἀκριβὴς μόνον ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ε, ἣν ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκομεν, ἦναι ἀκέραιος· διότι κατ' αὐτὴν μόνον τὴν περίπτωσιν ἡ ἰσότης (1), ἐξ ἧς ἐπορίσθημεν τὴν ἀνωτέρω (6), εἶναι ἀληθής.

Ὅταν ἡ ἐκ τοῦ τύπου (6) τιμὴ τοῦ ε δὲν ἦναι ἀκέραιος, οὔτε ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι ἀκέραιος· ἀλλὰ δὲν εἶναι ἴσος τῷ εὑρισκομένῳ ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ. Ἐν τούτοις *ὁ ἀκέραιος ὁ ἐκ τοῦ τύπου* (6) *εἶναι ἴσος τῷ ἀκεραίῳ τοῦ ζητουμένου χρόνου.* Τῷ ὄντι· ἔστωσαν κ καὶ $\kappa+1$ οἱ διαδοχικοὶ ἀκέραιοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται τὸ β'. μέλος τῆς ἰσότητος (6)· ἔχομεν

$$\kappa < \frac{\lambda o\gamma\, A - \lambda o\gamma\, \alpha}{\lambda o\gamma\,(1+\tau)} < \kappa+1\cdot$$

ἐντεῦθεν συνάγομεν, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι λογ $(1+\tau)$ εἶναι θετικός, ἤγουν ὅτι ἡ βάσις εἶναι >1, οἷον 10,

$$\kappa.\,\lambda o\gamma(1+\tau) < \lambda o\gamma\, A - \lambda o\gamma\, \alpha < (\kappa+1)\,\lambda o\gamma(1+\tau);$$

ἀλλὰ $$\kappa.\lambda o\gamma(1+\tau) = \lambda o\gamma(1+\tau)^{\kappa}$$

$$\lambda o\gamma\, A - \lambda o\gamma\, \alpha = \lambda o\gamma \frac{A}{\alpha}$$

$$(\kappa+1)\lambda o\gamma(1+\tau) = \lambda o\gamma(1+\tau)^{\kappa+1}.$$

ὅθεν $$\lambda o\gamma(1+\tau)^{\kappa} < \lambda o\gamma \frac{A}{\alpha} < \lambda o\gamma(1+\tau)^{\kappa+1},$$

ἐπειδὴ ὅταν ἡ βάσις εἶναι >1, οἱ λογάριθμοι αὐξάνουσι μετὰ τῶν ἀριθμῶν, ἕπεται ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος

$$(1+\tau)^{\kappa} < \frac{A}{\alpha} < (1+\tau)^{\kappa+1},$$

ὅθεν τέλος $$\alpha(1+\tau)^{\kappa} < A < \alpha(1+\tau)^{\kappa+1}.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ὁ χρόνος ε περιέχεται μεταξὺ κ καὶ κ+1.

Δυνάμεθα λοιπὸν κατὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν νὰ ποιῶμεν χρῆσιν τοῦ τύπου (6) πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀκεραίου τοῦ ε· ἀκολούθως ἵνα εὕρωμεν καὶ τὰς ἡμέρας λ, ποιοῦμεν χρῆσιν τοῦ τύπου (2), ἐξ οὗ συνάγομεν

$$\lambda o\gamma A = \lambda o\gamma\,\alpha + \kappa \times \lambda o\gamma(1+\tau) + \lambda o\gamma\left(1+\frac{\lambda\tau}{\mu}\right),$$

ὅθεν

$$\kappa = \frac{\lambda o\gamma A - \lambda o\gamma\,\alpha - \lambda o\gamma\left(1+\frac{\lambda\tau}{\mu}\right)}{\lambda o\gamma.(1+\tau)}.$$

Ὁ ἀκέραιος τοῦ πηλίκου τοῦ $\frac{\lambda o\gamma A - \lambda o\gamma\,\alpha}{\lambda o\gamma(1+\tau)}$ εἶναι κ· σημειοῦντες διὰ Υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς (*), ἔχομεν

$$\kappa = \kappa + \frac{\Upsilon - \lambda o\gamma\left(1+\frac{\lambda\tau}{\mu}\right)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}.$$

(*) Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης δὲν εἶναι ἀκέραιοι, καλοῦμεν δὲ ὑπόλοιπον διαιρέσεως ἐνταῦθα τὴν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου διαφορὰν τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ πηλίκου.

ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\lambda o\gamma\left(1+\frac{\lambda\tau}{\mu}\right)=\Upsilon.$$

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ λογαρίθμου τοῦ $1+\frac{\lambda\tau}{\mu}$, εὑρίσκομεν ὡς γνωστὸν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ ἐντεῦθεν τὴν τιμὴν τοῦ λ.

§ 368. Ἐφαρμογαί. Ὅταν, ἐργαζόμενοι ἐπὶ μερικῶν παραδειγμάτων, ἐφαρμόζωμεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους, ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις διὰ λογαρίθμων.

α'. *Κεφάλαιον 5876 δραχμῶν, τοκιζόμενον ἐπὶ 25 ἔτη πρὸς 4,50 %, πόσον γίνεται μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρόνου αὐτοῦ;*

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (1), ἔχομεν

$$A=5876(1,045)^{25}$$

ὅθεν $\lambda o\gamma A=\lambda o\gamma 5876+25\times\lambda o\gamma(1,045)$.

λογ 5876=	. . . .	3,7690818
λογ1,045	. . . 0,0191163 . .	
	25 . .	
	955815	
	382326	
25×λογ1,045	. . . .	0,4779075
λογA=	. . . .	4,2469893
17659,95		9661
		232
A= 17659,95.		110

β'. *Δραχμαὶ 48963,50 εἶναι πληρωτέαι μετὰ 12 ἔτη· τίς ἡ παροῦσα ἀξία αὐτῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 7 %;*

Ζητεῖται κεφάλαιον, ὅπερ μετὰ τῶν συνθέτων αὐτοῦ τόκων ἐπὶ ἐπιτοκίῳ 7 % γίνεται μετὰ 12 ἔτη 48963,50. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος (3), τοῦ δεδομένου χρόνου ὄντος ἀκεραίου. Εὑρίσκομεν οὕτω

$$\alpha=\frac{48963,50}{(1,07)^{12}}.$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν λογίζόμεθα διὰ λογαρίθμων ὡς ἔπεται·

λογ18963 = . . . 4,6898680
5 . . . 45
λογ18963,5= 4,6898725
λογ1,07 = . . . 0,0293838
12
587676
293838
12×λογ1,07= . . . 0,3526056
−12×λογ1,07= . . . . $\overline{1}$,6473944
λογ α= 4,3372669
21740,37 2595
74
α=21740,37. 140

γ'. *Εὑρεῖν τὴν παροῦσαν ἀξίαν κεφαλαίου 45896 δραχμῶν, πληρωτέου μετὰ 15 ἔτη καὶ 210 ἡμέρας, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 °/₀.*

Μὴ ὄντος ἐνταῦθα τοῦ χρόνου ἀκεραίου, πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος (4)· ὅθεν

$$\alpha=\frac{45896}{(1{,}08)^{15}\left(1+\frac{168}{3650}\right)}=\frac{45896\times3650}{(1{,}08)^{15}\times3818}.$$

λογ45896= 4,6617748
λογ 3650= 3,5622929
λογ 1,08= . . . 0,03342376
15
16711880
3342376
15×λογ1,08= 0,50135640
−15×λογ1,08= . . . . $\overline{1}$,4986436
−λογ3818= . . . . $\overline{4}$,4181641
λογ α= 4,1408754
13831,70 8536
218
α=13831,70.

δ'. *Ἐν πόσῳ χρόνῳ τὸ κεφάλαιον 25837, τοκιζόμενον πρὸς 8 % κατ' ἔτος, γίνεται 49853;*

Ἵνα ἔχωμεν τὸν ἀκέραιον τοῦ ζητουμένου ε, εὑρίσκομεν τὸν ἀκέραιον τῆς παραστάσεως

$$\frac{\lambda o\gamma 49853 - \lambda o\gamma 25837}{\lambda o\gamma(1,08)}$$

(§ 367, Δ'.), ὡς ἕπεται.

$$\begin{aligned}
&\lambda o\gamma 49853 = \ldots\ldots\ldots\ldots 4,6976913\\
&\lambda o\gamma 25837 = \ldots\ldots\ldots\ldots 4,4122421\\
&\lambda o\gamma 49853 - \lambda o\gamma 25837 = \ldots\ldots 0,2854492\\
&\lambda o\gamma (1,08) = \ldots\ldots\ldots\ldots 0,0334238
\end{aligned}$$

Ὁ ἀκέραιος τοῦ πηλίκου τοῦ 0,2854492 διὰ 0,0334238 εἶναι 8, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0,0180588· ὁ ἀκέραιος λοιπὸν τοῦ ζητουμένου χρόνου εἶναι 8 ἔτη. Ἵνα ἔχωμεν καὶ τὰς ἡμέρας, ποιοῦμεν χρῆσιν τοῦ τύπου $\lambda o\gamma\left(1+\frac{\lambda\tau}{\mu}\right) = \Upsilon$, καθ' ὃν $\lambda o\gamma\left(1+\frac{\lambda\times 0,08}{365}\right) =$ 0,0180588·

ὅθεν $\lambda o\gamma(365+\lambda\times 0,08) = 0,0180588 + \lambda o\gamma 365$
$= 0,0180588 + 2,5622928 = 2,5803516$·

ὅθεν $365+\lambda\times 0,08 = 380,4973,$

εἴτε $\lambda\times 0,08 = 15,4973$·

ὅθεν $\lambda = \frac{1549,73}{8} = 193,7..$

Αἱ ἡμέραι λοιπὸν εἰσὶ 193 ἢ 194· ἐπομένως $\varepsilon = 8^{\text{ἔτ.}}\ 193^{\text{ἡμ.}}$

Β'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΧΡΕΩΛΥΣΙΑΣ.

Χρεωλυσία — τύπος τῆς χρεωλυσίας.

§ 369. Καλεῖται *χρεωλυσία* ἡ ἀπόσβεσις χρέους ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου δι' ἴσων μερίδων, πληρονομένων εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος.

Τὸ σταθερὸν ποσὸν, τὸ διδόμενον εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος, καλεῖται *χρεώλυτρον*.

§ 370. Ἔστω α κεφάλαιόν τι, ε τὰ ἔτη (ἢ γενικώτερον αἱ χρονικαὶ μονάδες) ἀπὸ τῆς ἐποχῆς, καθ' ἣν δανείζεταί τις τὸ κεφάλαιον αὐτὸ, μέχρις οὗ ὅλον ἀποπληρωθῇ χρεωλυτικῶς, τ ὁ τόκος τῆς μονάδος νομίσματος ἐν τῇ χρονικῇ μονάδι καὶ τέλος X τὸ χρεώλυτρον, ἤγουν τὸ ποσὸν, ὅπερ πληρόνων ὁ ὀφειλέτης εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ἀποσβέννει τὸ χρέος αὐτὸ μετὰ παρέλευσιν ε ἐτῶν.

Τὸ κεφάλαιον α μετὰ ε ἔτη γίνεται $\alpha(1+\tau)^\varepsilon$. Ὁ ὀφειλέτης, πληρόνων εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους τὸ χρεώλυτρον X, πληρόνει ποσὸν, ὅπερ εἰς τὸ τέλος τῶν ε ἐτῶν γίνεται $X(1+\tau)^{\varepsilon-1}$. δύναται λοιπὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς πληρώσας κατὰ τὴν λῆξιν τῶν ε ἐτῶν τὸ ποσὸν $X(1+\tau)^{\varepsilon-1}$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ κατὰ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους πληρονόμενον χρεώλυτρον, ἰσοδυναμεῖ τῷ ποσῷ $X(1+\tau)^{\varepsilon-2}$, πληρονομένῳ κατὰ τὴν λῆξιν τῶν ε ἐτῶν· ἐπίσης καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν χρεωλύτρων, ἀναγόμενον εἰς τὸ τέλος τῶν ε ἐτῶν, γίνεται $X(1+\tau)^{\varepsilon-3}$, $X(1+\tau)^{\varepsilon-4}$, ... $X(1+\tau)$, X· πρέπει λοιπὸν τὸ ἄθροισμα

$$X+X(1+\tau)+X(1+\tau)^2+\ldots X(1+\tau)^{\varepsilon-1}$$

νὰ ἰσῶται τῷ $\alpha(1+\tau)^\varepsilon$. Οἱ προσθετέοι τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ βαίνουσι κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος X, ὁ λόγος $1+\tau$ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ε· ἑπομένως κατὰ τὸν ἐν § 328 τύπον (2) ἢ (3) τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἰσοῦται τῷ $\dfrac{X[(1+\tau)^\varepsilon-1]}{\tau}$. ὅθεν κατὰ τὰ ῥηθέντα

$$\frac{X[(1+\tau)^\varepsilon-1]}{\tau}=\alpha(1+\tau)^\varepsilon$$

ἢ $$(1)\qquad X[(1+\tau)^\varepsilon-1]=\alpha\tau(1+\tau)^\varepsilon.$$

Τοιοῦτος εἶναι *ὁ τύπος τῆς χρεωλυσίας*.

Προβλήματα χρεωλυσίας.

§ 371. Ὁ ἀνωτέρω τύπος (1) χρησιμεύει εἰς εὕρεσιν ἑνὸς ἐκ τῶν ἐν αὐτῷ τεσσάρων ἀριθμῶν X, α, τ, ε, ὅταν οἱ τρεῖς ἄλλοι ἦναι γνωστοὶ, εἴτε εἰς λύσιν τῶν ἑξῆς τεσσάρων *προβλημάτων χρεωλυσίας*.

Α'. *Εὑρεῖν τὸ χρεώλυτρον, δι' οὗ ἀποσβέννυται χρέος α ἐν ἔτεσιν ε, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 100τ.*

Συνάγομεν ἐκ τοῦ τύπου (1)

$$(2)\qquad X=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^{\varepsilon}}{(1+\tau)^{\varepsilon}-1}.$$

Ὅταν λογιζώμεθα τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ X διὰ λογαρίθμων, εὑρίσκομεν πρῶτον διὰ λογαρίθμων τὸν $(1+\tau)^{\varepsilon}$ καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ 1, ἵνα ἔχωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ X, εἶτα δὲ προβαίνομεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ X· ὁ δ' εὑρεθεὶς κατὰ τὴν πρώτην πρᾶξιν λογάριθμος τοῦ $(1+\tau)^{\varepsilon}$ χρησιμεύει ἔτι καὶ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ X· διότι ὁ $(1+\tau)^{\varepsilon}$ εἶναι παράγων τοῦ ἀριθμητοῦ τῆς τιμῆς τοῦ X.

Β'. *Εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον, ὅπερ δανειζόμενός τις πρὸς 100τ °/₀ κατ' ἔτος, ἀποσβέννει ἐν ἔτεσιν ε, πληρόνων εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους χρεώλυτρον X.*

Συνάγομεν ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας

$$(3)\qquad \alpha=\frac{X[(1+\tau)^{\varepsilon}-1]}{\tau(1+\tau)^{\varepsilon}}.$$

Ἀνάλογον τῇ ἀνωτέρω παρατήρησιν ποιητέον καὶ ἐνταῦθα ὡς πρὸς τὸν διὰ λογαρίθμων λογισμόν.

Γ'. *Ἐπὶ τίνι ἐπιτοκίῳ δανειζόμενός τις κεφάλαιον α δύναται ν' ἀποπληρώσῃ αὐτὸ ἐν ἔτεσιν ε, πληρόνων εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους χρεώλυτρον X ;*

Ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἶναι ὁ τ, ἤτοι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἐπιτοκίου, ἡ δ' ἐξίσωσις (1) εἶναι βαθμοῦ ε+1 ὡς πρὸς τὸν τ· ἐπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπιλύωμεν αὐτήν, ἢ εἰς μερικὰς περιπτώσεις. Ἀλλ' ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ὁμοίου προβλήματος ἀνατοκισμοῦ (§ 367, Γ'.) δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ τ.

Πρὸς τοῦτο παρατηρητέον ἐν πρώτοις ὅτι, *ὅταν ὁ τ αὐξάνῃ ἢ ἐλαττῶται, ὁ δὲ α καὶ ὁ X δὲν μεταβάλλωνται, ὁ ἀριθμὸς ε τῶν χρεωλύτρων αὐξάνει καὶ αὐτὸς ἢ ἐλαττοῦται.* Τῷ ὄντι τὸ ὀφειλόμενον μετὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ πρώτου χρεωλύτρου εἶναι $\alpha(1+\tau)-X$, τὸ ποσὸν δ' αὐτὸ αὐξάνει μετὰ τοῦ τ· ἵνα ἔχωμεν τὸ ὀφειλόμενον μετὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ δευτέρου χρεωλύτρου, πολλαπλασιάζομεν $\alpha(1+\tau)-X$ ἐπὶ $1+\tau$ καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιροῦμεν X· ἄρα καὶ τὸ ποσὸν αὐτὸ αὐξάνει μετὰ τοῦ τ, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἐὰν λοιπὸν ε χρεώλυτρα ἀρκῶσι πρὸς ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους α, ὅταν ὁ τ ἔχῃ ὡρισμένην τιμήν, τὰ ε αὐτὰ χρεώλυτρα οὐκέτι ἐξαρκοῦσιν, ὅταν αὐξηθῇ ἡ τιμὴ τοῦ τ.

Τούτου οὕτως ἔχοντος, ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς τὸν $(1+\tau)^\varepsilon$, εὑρίσκομεν

$$(1+\tau)^\varepsilon=\frac{X}{X-\alpha\tau}\ (*)$$

ὅθεν (§ 364)

$$(4)\qquad \varepsilon=\frac{\lambda o\gamma\, X-\lambda o\gamma(X-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}.$$

Δῶμεν τῷ τ τιμήν τινα τ′ καὶ λογισώμεθα τὸ β′. μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος· καθόσον τὸ ἐξαγόμενον εἶναι μεῖζον ἢ ἔλασσον τοῦ ε, ὁ τ′ εἶναι μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς τιμῆς τοῦ τ κατὰ τὴν ἡγηθεῖσαν παρατήρησιν· διδόντες ἀκολούθως ἄλλην τινὰ τιμὴν τῷ τ, εὑρήσομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἐὰν αὕτη ἦναι μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς· προβαίνοντες δ' οὕτω, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀριθμοὺς ὀλίγον ἀπ' ἀλλήλων διαφέροντας, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἡ τιμὴ τοῦ τ.

Δ′. *Διὰ πόσων χρεωλύτρων X ἀποσβέννυται χρέος α, τετοκισμένον πρὸς 100τ °/₀ κατ' ἔτος;*

Ζητεῖται ἐνταῦθα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν ε, ὅστις εἶναι καὶ ὁ τῶν χρεωλύτρων. Ἡ τιμὴ τοῦ ε δίδοται διὰ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (4), ἤτοι

$$(4)\qquad \varepsilon=\frac{\lambda o\gamma\, X-\lambda o\gamma(X-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}.$$

Ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ τιμὴ τοῦ ε ἦναι ἀκέραιος, αὐτὴ εἶναι ἡ ἀληθὴς τιμή· διότι ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι συνέπεια τῆς (1), ἔνθα ὁ ε

(*) Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἕπεται ὅτι ὁ $X-\alpha\tau$ πρέπει νὰ ἦναι θετικός· τοῦτο δὲ δῆλον καὶ ἐκ τῶν προτέρων· διότι τὸ χρεώλυτρον X πρέπει νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ τόκου ατ τοῦ κεφαλαίου α ἐν 1 ἔτει, ὅπως ᾖ δυνατὴ ἡ ἀπόσβεσις τοῦ χρέους αὐτοῦ.

ἔχει ἀναγκαίως τιμὴν ἀκέραιον· ἀλλ' ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ε δὲν ἦναι ἀκέραιος, πρέπει νὰ συμπεραίνωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Δυνάμεθα ἐν τούτοις ν' ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐὰν κ καὶ κ+1 ἦναι οἱ διαδοχικοὶ ἀκέραιοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται τὸ β'. μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος, κ μὲν χρεώλυτρα δὲν ἀρκοῦσι πρὸς ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους, κ+1 δὲ ἀποσβέννουσι μεῖζον τοῦ α χρέος. Ἔχομεν καθ' ὑπόθεσιν

$$\kappa < \frac{\lambda o\gamma X - \lambda o\gamma(X-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)} < \kappa+1\cdot$$

ἕπεται ἐντεῦθεν

$$\kappa.\ \lambda o\gamma(1+\tau) < \lambda o\gamma X - \lambda o\gamma(X-\alpha\tau) < (\kappa+1)\lambda o\gamma(1+\tau)$$

εἴτε

$$\lambda o\gamma(1+\tau)^{\kappa} < \lambda o\gamma\frac{X}{X-\alpha\tau} < \lambda o\gamma(1+\tau)^{\kappa+1},$$

ὅθεν

$$(1+\tau)^{\kappa} < \frac{X}{X-\alpha\tau} < (1+\tau)^{\kappa+1},$$

ἐντεῦθεν πάλιν

$$(X-\alpha\tau)(1+\tau)^{\kappa} < X < (X-\alpha\tau)(1+\tau)^{\kappa+1}.$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος $(X-\alpha\tau)(1+\tau)^{\kappa} < X$ ἕπεται

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{X[(1+\tau)^{\kappa}-1]}{\tau} < \alpha(1+\tau)^{\kappa}.$$

ἐκ δὲ τῆς $X < (X-\alpha\tau)(1+\tau)^{\kappa+1}$

$$(\mathrm{A}') \qquad \frac{X[(1+\tau)^{\kappa+1}-1]}{\tau} > \alpha(1+\tau)^{\kappa+1}.$$

Αἱ ἀνισότητες (Α) καὶ (Α') ἀποδεικνύουσι τὸ προκείμενον.

Κατὰ ταῦτα ὅταν ὁ τύπος (4) παρέχῃ τιμὴν κλασματικήν, δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὸν ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ ἀκέραιον ὡς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν χρεωλύτρων· ὑπολογίζομεν ἀκολούθως τὴν διαφορὰν (κ ὄντος τοῦ εὑρισκομένου ἀκεραίου)

$$\alpha(1+\tau)^{\kappa} - \frac{[X(1+\tau)^{\kappa}-1]}{\tau},$$

ἥτις εἶναι τὸ ποσόν, ὅπερ ἔτι ὀφείλεται κατὰ τὴν λῆξιν τῶν κ ἐτῶν.

§ 372. Ἐφαρμογαί. α΄. *Κεφάλαιον 65000, τοκισθὲν πρὸς 7 % κατ' ἔτος, πρόκειται νὰ πληρωθῇ χρεωλυτικῶς ἐν 36 ἔτεσι· πόσον εἶναι τὸ χρεώλυτρον;*

Ἔχομεν κατὰ τὸν τύπον (2) (§ 371, Α΄.)

$$X=\frac{65000\times 0{,}07\times(1{,}07)^{36}}{(1{,}07)^{36}-1}.$$

Λογιζόμεθα πρῶτον $(1{,}07)^{36}-1$, ὡς ἕπεται.

λογ 1,07	0,02938378
	36
	17630268
	8815134
$36\times$λογ(1,07)=	1,05781608
11423,68	7802
$(1{,}07)^{36}=11{,}42368.$	259
$(1{,}07)^{36}-1=10{,}42368.$	300

Προβαίνομεν ἤδη εἰς τὸν λογισμὸν τοῦ Χ. Ἔχομεν

λογX=λογ65000+λογ0,07+λογ$(1{,}07)^{36}$—λογ$[(1{,}07)^{36}-1]$.

λογ65000=	4,8129134
λογ 0,07=	$\bar{2}$,8450980
λογ$(1{,}07)^{36}$ (*) = ...	1,0578161
λογ$[(1{,}07)^{36}-1]$=λογ10,42368=1,0180211	
—λογ10,42368 = ...	$\bar{2}$,9819789
λογX=	3,6978064
49866,22	8045
X=4986,62.	19
	20

β΄. *Πόσον κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς 5 % κατ' ἔτος, ἐξοφλεῖται ἐν ἔτεσι 40 διὰ χρεωλύτρου 1500 δραχμῶν.*

Κατὰ τὸν τύπον (3) (§ 371, Β΄.).

$$\alpha=\frac{1500[(1{,}05)^{40}-1]}{0{,}05(1{,}05)^{40}}.$$

(*) Ὁ λογάριθμος οὗτος, εὑρεθεὶς ἀνωτέρω, ἀντιγράφεται ἁπλῶς ἐνταῦθα.

Λογισμὸς τοῦ $(1,05)^{40}-1$

λογ1,05=	. . . .	0,0211893
		40
40×λογ1,05=	. . . .	0,8475720
70399,91		5665
$(1,05)^{40}=7,039991$.		55
$(1,05)^{40}-1=6,039991$.		10

Λογισμὸς τοῦ α.

λογ1500=	. . . .	3,1760913
λογ6,039991=	. . . .	0,7810363
—λογ0,05=	. . . .	1,3010300
—λογ$(1,05)^{40}$=	. . . .	$\bar{1}$,1524280
λογ α=	. . . .	4,4105856
25738,64		5748
		108
α=25738,64.		70

γ΄. *Μετὰ πόσα ἔτη ἀποσβέννυται χρέος ἐκ δραχμῶν 65940, δανεισθὲν πρὸς 4 % κατ' ἔτος, πληρονομένων κατὰ τὴν λῆξιν ἑκάστου ἔτους δραχμῶν 4500 ;*

Ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου εἶναι ὁ ἀκέραιος, ὁ περιεχόμενος ἐν τῇ παραστάσει

$$\frac{\lambda o\gamma 4500-\lambda o\gamma(4500-65940\times 0,04)}{\lambda o\gamma(1,04)}$$

(§ 371, Δ΄.). Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν 22 ἔτη. Πρέπει ἤδη νὰ ὑπολογίσωμεν ἀφ' ἑνὸς τὴν ἀξίαν τοῦ κεφαλαίου 65940 μετὰ 22 ἔτη, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν ἀξίαν τῶν 22 χρεωλύτρων κατὰ τὴν λῆξιν τῶν 22 ἐτῶν καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον ἐξαγόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου, ἵνα ἴδωμεν πόσον ἔτι ὀφείλεται τῷ δανειστῇ κατὰ τὴν λῆξιν τῶν 22 ἐτῶν. Εὑρίσκομεν οὕτω 2156,40.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1. Δραχμαὶ 5600, τοκιζόμεναι πρὸς 5 $^0|_0$ κατ' ἔτος, πόσαι γίνονται μετὰ 100 ἔτη; (736407,20).

2. Μετὰ πόσα ἔτη τὸ κεφάλαιον 35800, τοκιζόμενον πρὸς 7 $^0|_0$ κατ' ἔτος, γίνεται 56000; (Μετὰ 6 ἔτη καὶ 220 ἢ 221 ἡμέρας).

3. Μετὰ πόσα ἔτη κεφάλαιον α, τοκιζόμενον πρὸς 100 τ $^0|_0$ κατ' ἔτος, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κ.τ λ.;

Ὄντος μ τοῦ ἀκεραίου, ἐφ' ὃν τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζεται, ὁ μὲν ἀριθμὸς ἐτῶν εἶναι ὁ ἐν τῷ πηλίκῳ $\frac{\text{λογ}\,\mu}{\text{λογ}(1+\tau)}$ ἀκέραιος, ὁ δ' ἀριθμὸς ἡμερῶν συνάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος $\Upsilon = \text{λογ}\left(1+\frac{\lambda.\tau}{365}\right)$, Υ ὄντος τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ λογ μ διὰ λογ (1+τ) καὶ λ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἡμερῶν.

4. Ὁ πληθυσμὸς πόλεώς τινος αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ 1 $^1|_4$ $^0|_0$· μετὰ πόσα ἔτη ἀπὸ σήμερον ὁ πληθυσμὸς αὐτὸς διπλασιασθήσεται; (Μεταξὺ τοῦ 56ου καὶ τοῦ 57ου ἔτους).

5. Τίς ἡ σημερινὴ ἀξία ἐτησίου εἰσοδήματος, διδομένου εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ἐπὶ 35 ἔτη, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 4 $^0|_0$ κατ' ἔτος; (37329,23).

6. Κεφάλαιον ἐκ δραχμῶν 38000 ἐτοκίσθη σήμερον πρὸς 4 $^1|_2$ $^0|_0$ κατ' ἔτος καὶ ἕτερον ἐκ δραχμῶν 99398 πρὸς 3 $^1|_2$ $^0|_0$· μετὰ πόσα ἔτη αἱ ἀξίαι τῶν κεφαλαίων αὐτῶν ἐξισωθήσονται; (100).

7. Εὑρεῖν τὸ χρεώλυτρον, δι' οὗ ἀποσβέννυται ἐν 80 ἔτεσι χρέος 200000, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5 $^0|_0$ κατ' ἔτος. (10205,92).

8. Τίς ἡ παροῦσα ἀξία ν ἐτησίων εἰσοδημάτων, ἀποδιδομένων εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ὧν τὸ μὲν πρῶτον εἶναι α, τὸ δὲ δεύτερον αx, τὸ τρίτον αx², τὸ τέταρτον αx³, καὶ οὕτω καθεξῆς, τὸ δ' ἐπιτόκιον 100 τ;

$$\text{Ἀπόκρ.}\quad \frac{\alpha\left[\left(\frac{x}{1+\tau}\right)^{\nu}-1\right]}{x-\tau-1}.$$

9. Διάφορα κεφάλαια εἶναι ἀποδοτέα κατὰ διαφόρους ἐποχάς· ζητεῖται νὰ συγχωνευθῶσιν εἰς ἓν μόνον, πληρωτέον καθ' ὡρισμένην ἐποχήν.

Ἔστωσαν α, α', α'', . . . τὰ κεφάλαια, ε, ε', ε'', . . . τὰ ἔτη, μεθ' ἃ εἶναι ἀποδοτέα, χ τὸ ἰσοδύναμον κεφάλαιον καὶ x ὁ χρόνος, μεθ' ὃν εἶναι ἀποδοτέον. Ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ χ πρέπει νὰ ἦναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν παρουσῶν ἀξιῶν τῶν α, α', α'', . . . ἐπομένως ἡ τιμὴ τοῦ χ προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\alpha}{(1+\tau)^{\varepsilon}}+\frac{\alpha'}{(1+\tau)^{\varepsilon'}}+\frac{\alpha''}{(1+\tau)^{\varepsilon''}}+\ldots=\frac{\chi}{(1+\tau)^{x}}.$$

10. Πόσον εἶναι τὸ αἰώνιον εἰσόδημα κεφαλαίου α, τοκιζομένου πρὸς 100 τ $^0|_0$ κατ' ἔτος;

Τὸ ζητούμενον εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ χρεώλυτρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ε τῶν ἐτῶν, μεθ' ἃ τὸ χρέος ἀποσβέννυται, αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον. Τὸ ὅριον αὐτὸ εἶναι ατ, ἤτοι ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου α ἐπὶ 1 ἔτος.

ΤΕΛΟΣ.

ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ
ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ.

Σελ. 16 στίχ. 11 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ $-9\gamma^2$ γράφε $-9\gamma^3$.

» 26 » 19 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ $945\alpha^6\beta^8\gamma^4\delta^3\varepsilon^5$ γράφε $945\alpha^6\beta^8\gamma^4\delta^3\varepsilon^5\zeta^4$.

» 48 » 2 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ $\frac{1}{\alpha^{\mu-\nu}}$ γράφε $\frac{1}{\alpha^{\nu-\mu}}$.

» 48 » 5 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ $\alpha^8 : \alpha^3$ γράφε $\alpha^3 : \alpha^8$.

» 50 » 9 ἐκ τῶν κάτω ἀντὶ τοῦ ἐν τῷ τέλει τοῦ στίχου $\frac{+\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}$

γράφε $\frac{-\alpha}{-\beta} = +\frac{\alpha}{\beta}$.

» 58 » 2 ἐκ τῶν κάτω ἀντὶ $+\alpha^2\chi^2$ γράφε $-\alpha^2\chi^2$.

» 64 » 14 ἐκ τῶν κάτω ἀντὶ $0 \times K$ γράφε $0 \times K_1$.

» 83 » 4 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ $\chi-{}^2 18\chi$ γράφε $\chi^2-18\chi$.

» 85 » 13 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ $-\alpha^3\beta\chi$ γράφε $-\alpha^3\chi$.

» 152 » 16 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ Κεφάλαιον Ἕκτον γράφε Κεφάλαιον Ἕβδομον· διόρθου δ' ὁμοίως τὸν ἀριθμὸν καὶ τῶν λοιπῶν κεφαλαίων τοῦ Β'. βιβλίου.

» 183 » 9 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ $\alpha\beta'=\alpha\beta'$ γράφε $\alpha\beta'=\beta\alpha'$.

» 220 » 6 ἐκ τῶν κάτω ἀντὶ $-\frac{3(\alpha+\beta)\chi}{2}\chi$ γράφε $-\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\chi$.

» 222 » 14 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ $\chi-$ κ.τ.λ. γράφε χ^2- κ.τ.λ.

» 236 » 6 ἐκ τῶν ἄνω ἀντὶ ἐμφαίνει ὑποτίμησιν τοῦ πήχεως κ.τ.λ. γράφε εἶναι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν.

» 245 » 2 ἐκ τῶν κάτω ἀντὶ Τ γράφε τ.

» 292 » 4 ἐκ τῶν κάτω ἀντὶ (§ 262) γράφε (§ 258).