ΕΠΙΤΟΜΗ

ΤΗΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Α. Μ. ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΥΠΟ

Α. ΦΑΤΣΕΑ, ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ.

ΑΘΗΝΗΣΙ,

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ Α. ΚΑΝΑΡΙΩΤΟΥ ΚΑΙ Ζ. ΓΡΥΠΑΡΗ.

(Ὁδὸς Χρησοσπηλαιωτίσσης ἀριθ. 14.)

1870.

ΕΠΙΤΟΜΗ

ΤΗΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Α. Μ. ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΥΠΟ

Α. ΦΑΤΣΕΑ, ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ.

ΑΘΗΝΗΣΙ,

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ Α. ΚΑΝΑΡΙΩΤΟΥ καὶ Ζ. ΓΡΥΠΑΡΗ.

(Ὁδὸς Χρυσοσπηλαιωτίσσης ἀριθ. 14.)

1870.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Ἡ Γεωμετρία αὕτη εἶναι ἐπιτομὴ τῆς Γεωμετρίας Α. Μ. Λεγένδρου πρὸς χρῆσιν τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων, κατὰ τὸ ὑπουργικὸν πρόγραμμα τῆς 5ης Σεπτεμβρίου 1857. Διότι τὸ σύγγραμμα εἶναι κλασικόν, συντεταγμένον ὑπὸ περιφήμου μαθηματικοῦ, ἵνα ἐπαναφέρῃ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τῶν ἀρχαίων τὴν ἀκρίβειαν· καὶ διότι ἡ μετάφρασις αὐτοῦ εἶναι κοινῶς ἐν χρήσει ἐν τοῖς Γυμνασίοις καὶ οὕτως εὐκολύνεται ὁ μαθητὴς εὑρίσκων καὶ ἐκεῖ τὴν αὐτὴν μέθοδον τῆς διδασκαλίας.

Ἐν τῇ ἐπιτομῇ δὲ ταύτῃ ἐφυλάχθη μὲν ὁ σύνδεσμος τῶν προτάσεων, μὴ παραλειφθείσης οὐδεμιᾶς ἀπολύτως ἀναγκαίας, ἐγένοντο δὲ αἱ ἑξῆς τροποποιήσεις· ἐξηκριβώθησαν οἱ ὁρισμοὶ καὶ διεσαφίσθησαν κατὰ τὴν ὑπὸ Εὐγενίου Βουλγάρεως ἐκδεδομένην Γεωμετρίαν τοῦ Τακουετίου καὶ τοῦ Εὐκλείδου τὸ πρωτότυπον· ἐξεφράσθησαν αἱ προτάσεις συντομώτερον, γενικώτερον καὶ ἐπὶ τὸ Ἑλληνικώτερον, τῆς συντομίας καὶ ἀκριβείας τῶν προτάσεων οὔσης ἀνεκτιμήτου ἀξίας εἰς διδακτικὸν βιβλίον μάλιστα· ἐξετέθησαν ἁπλούστερα καὶ συντομώτερα αἱ ἀποδείξεις, ὅπως ἐξασκῆται ἡ κρίσις τοῦ μαθητοῦ, εὑρίσκοντος τὰ ἀπολύτως ἀναγκαῖα οὐχὶ δὲ καὶ περιττά, καὶ πολλαὶ ἀποδείξεις ἔμμεσοι ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ ἀμέσων· ἡ θεωρία τῶν παραλλήλων ἐστηρίχθη ἐπὶ τοῦ ἀξιώματος, ὅτι ἐκ σημείου τινὸς ἐκτὸς εὐθείας μία μόνη παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ἄγεται, ὡς ὑπαγορεύει καὶ τὸ ὑπουργικὸν πρόγραμμα, καὶ ὡς εἶναι ὀρθόν· διότι ἡ ΙΘ'. πρότασις τοῦ α'. βιβλίου ἂν ἐκτεθῇ ἀκριβῶς, γίνεται πολλὰ ἐκτεταμένη, καὶ ἡ θεωρία τῶν παραλλήλων ἀποβάλλει τὴν φυσικὴν αὐτῆς ἁπλότητα· ἐξηκριβώθη ἡ θεωρία τῆς τομῆς καὶ τῆς ἁφῆς τῶν κύκλων· προσετέθησαν ὀλίγα περὶ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων καὶ περὶ τῶν γραφικῶν μεθόδων· καὶ περιγράφησαν τὰ κυριώτερα τῶν γεωμετρικῶν ἐργαλείων πρὸς γραφικὴν λύσιν τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων ἐπὶ τοῦ χάρτου· ἡ λύσις τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐγένετο πλήρης, διότι ἡ λύσις αὐτῶν εἶναι ὁ κύριος σκοπὸς τῆς ἐπιπέδου Γεωμετρίας· καὶ ὅσα πολυετὴς πεῖρα διδασκαλίας καὶ εἰλικρινὴς ἔρως τῆς διαδόσεως τῆς ἐπιστήμης ὑπηγόρευσαν. Ταῦτα πάντα ἐν τῇ ἐπιπέδῳ Γεωμετρίᾳ· διότι τοῦτο τὸ μέρος τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἁπλοῦν καὶ δύναται νὰ ἐκτεθῇ συντόμως μὲν ἀλλ' ἀκριβῶς πρὸς ἐξάσκησιν τῆς κρίσεως τῶν νέων καὶ πρὸς διδασκαλίαν τῶν ἀναγκαίων γεωμετρικῶν γνώσεων εἰς τὸν πρακτικὸν βίον. Ἡ δὲ στερεὰ Γεωμετρία περιωρίσθη, κατὰ τὸ ῥηθὲν πρόγραμμα, εἰς τοὺς ὁρισμούς, τοὺς τύπους καὶ τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν πολυέδρων καὶ τῶν τριῶν στρογγύλων σωμάτων καὶ εἰς τὰς ἐφαρμογὰς αὐτῶν ἐπὶ ἐκλεκτῶν παραδειγμάτων.

Οἱ ὁρισμοὶ τῆς ἐκτάσεως ἐν τῷ πρωτοτύπῳ δὲν εἶναι σαφεῖς. Εἰς τὴν μεταῤῥύθμισιν τῆς Γεωμετρίας τοῦ Λεγένδρου ὑπὸ Βλαγγέτου, ὁρίζεται κατὰ τὸν Λακροὰ ἡ γραμμὴ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν καὶ ἡ ἐπιφάνεια ὅριον στερεοῦ. Ἀλλὰ δὲν εἶναι ὀρθόν· διότι αἱ γραμμαὶ θεωροῦνται καθ' ἑαυτὰς καὶ δὲν εἶναι πᾶσα γραμμὴ τομὴ ἐπιφανειῶν, οὔτε πᾶσα ἐπιφάνεια ὅριον στερεοῦ. Διὰ τοῦτο εἰσήγαγον τοὺς περιγραφικοὺς ὁρισμοὺς σαφηνείας χάριν. Καί τοι δὲ εἰσαγομένου ἀλλοτρίου στοιχείου τῆς Γεωμετρίας, τοῦ στοιχείου τῆς κινήσεως, ὁ κύκλος καὶ τὰ τρία στρογγύλα, σώματα ἡ σφαῖρα, ὁ κῶνος καὶ ὁ κύλινδρος ὁμοίως ὁρίζονται· ἂν λοιπὸν οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι ἐπρόσθεσαν σαφήνειαν, νομίζω ὅτι εἶναι συγγνωστέοι.

Διὰ πάντων τούτων ἐζητήθη νὰ κατασταθῇ τὸ βιβλίον τελειότερον τῶν πρὸ αὐτοῦ πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν ἐκδεδομένων. Τὰς δὲ ἐλλείψεις, ὧν οὐδὲν ἔργον ἀνθρώπινον στερεῖται, θέλει καταστήσει ἐπαισθητὰς ἡ διδασκαλία, καὶ θέλει δώσει ἀφορμὴν νὰ λείψωσιν, ἂν ἀξιωθῇ δευτέρας ἐκδόσεως.

Ἐν Ναυπλίῳ, τῇ 7 Μαρτίου 1870.

Δ. ΦΑΤΣΕΑΣ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Ποσὸν καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεκτικὸν αὐξήσεως καὶ ἐλαττώσεως· ὥστε ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἶναι αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τοῦ ποσοῦ.

Τὸ ποσὸν διαστέλλεται εἰς *διακεκριμένον* καὶ *συνεχές*· τὸ *διακεκριμένον* σύγκειται ἐκ πολλῶν μερῶν, ἴσων ἢ ὁμοίων θεωρουμένων, ὅμως πάντοτε ἴσων, καλουμένων μονάδων, οἷον ἑκατὸν πήχεις, ἑκατὸν ὀκάδες, ἑκατὸν δραχμαί, ἑκατὸν δένδρα κτλ.

Συνεχὲς ποσὸν εἶναι ἡ ἔκτασις. Πρὸς κατανόησιν τῆς ἐκτάσεως λαμβάνεται φυσικὸν σῶμα, οἷον οἰκία· ἐν αὐτῷ διακρίνεται ἡ ὕλη ἤτοι τὸ ἀδιαχώρητον, τὸ ἀνθιστάμενον εἰς τὴν θλίψιν, καὶ ὁ τόπος ὃν κατέχει τὸ σῶμα ἐν τῷ ἀπεράντῳ χώρῳ· ὁ τόπος οὗτος καλεῖται *ἔκτασις* ἢ *στερεόν*.

Ἐν τῇ ἐκτάσει τοῦ σώματος τούτου διακρίνονται τρεῖς διαστάσεις *μῆκος*, *πλάτος* καὶ *ὕψος*.

Ἐνίοτε ἀφαιρεῖται μία τῶν διαστάσεων τοῦ σώματος· προκειμένου λόγου χάριν περὶ τῆς σανιδώσεως οἰκίας, δὲν θεωρεῖται εἰμὴ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, παραβλεπομένου τοῦ ὕψους. Ἡ ἔκτασις ἡ κατὰ δύο μόνας διαστάσεις καλεῖται *ἐπιφάνεια*.

Ἐνίοτε πάλιν δὲν θεωρεῖται εἰμὴ μία μόνη διάστασις, ἀφαιρουμένων τῶν λοιπῶν δύο· προκειμένου λόγου χάριν περὶ τῆς ἐκτάσεως τοῦ προσώπου οἰκίας δὲν θεωρεῖται εἰμὴ μόνον τὸ μῆκος ἢ τὸ πλάτος· ἡ ἔκτασις αὕτη ἡ κατὰ μίαν μόνην διάστασιν καλεῖται *γραμμή*. Ἡ γραμμὴ τελευτᾷ εἰς δύο *σημεῖα*. Τὸ σημεῖον λοιπὸν δὲν ἔχει ἔκτασιν καὶ εἶναι τὸ στοιχεῖον τῆς ἐκτάσεως.

Ἐδῶ τελευτᾷ ἡ ἀνάλυσις καὶ ἄρχεται ἡ σύνθεσις, τελευτῶσα εἰς τὸ φυσικὸν σῶμα, διὰ τῆς διαδοχικῆς προσθέσεως τῶν στοιχείων αὐτοῦ.

Ἡ *Ἀριθμητικὴ* ἐξετάζει τοὺς διαφόρους τρόπους τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ διακεκριμένου ποσοῦ, παρισταμένου διὰ τῶν ἀριθμῶν.

Ἡ *Γεωμετρία* ἐξετάζει τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐκτάσεως ἤτοι τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς καταμετρήσεως εἶναι ἀριθμός, ἑπομένως ὕλη τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἡ Ἄλγεβρα θεωρεῖ τὸ ποσὸν ἐν γένει τότε συνεχὲς καὶ τὸ διακεκριμένον καὶ ἐργαζομένη ἐπὶ συμβολικῶν παραστάσεων τοῦ ποσοῦ εὑρίσκει τὰς γενικὰς αὐτοῦ ἰδιότητας καὶ τὰς πρὸς ἄλληλα ἐν γένει σχέσεις τῶν ποσῶν, δι' ὧν λύει διάφορα γενικὰ ἐπ' αὐτοῦ προβλήματα εἴτε ἀριθμητικὰ εἴτε γεωμετρικά.

Ὁ χρόνος θεωρεῖται πάντοτε σύνθετος ἐκ μονάδων· τὰ δὲ βάρη εἶναι ἀναγκαίως σύνθετα ἐκ τῶν βαρέων τῶν ὑλικῶν μονάδων. Συνεχὲς ποσὸν εἶναι μόνη ἡ ἔκτασις, δυναμένη νὰ θεωρηθῇ καὶ σύνθετος ἐκ μονάδων ἤτοι ὡς διακεκριμένον ποσόν.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α′.

Ὁρισμοί.

1. *Σημεῖον* εἶναι τὸ ἐν τῷ μεγέθει ἀδιαίρετον.
2. *Γραμμὴ* εἶναι τὰ ἴχνη κινουμένου σημείου.
3. *Ἐπιφάνεια* εἶναι τὰ ἴχνη κινουμένης γραμμῆς.
4. *Στερεὸν* εἶναι τὰ ἴχνη κινουμένης ἐπιφανείας.

Αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ τὰ στερεὰ καλοῦνται *ἐκτάσεις* καὶ *συνεχὲς ποσόν*.

5. *Ὁ σκοπὸς τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ καταμέτρησις τῆς ἐκτάσεως*, ἤγουν νὰ προσδιορίσῃ ποσάκις ὡρισμένη γραμμή, εἰλημμένη ὡς μονάς, περιέχεται εἰς δοθεῖσαν γραμμήν, ὡρισμένη ἐπιφάνεια, εἰλημμένη ὡς μονάς, περιέχεται εἰς δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν, καὶ ὡρισμένον στερεόν, εἰλημμένον ὡς μονάς, περιέχεται εἰς δοθὲν στερεόν.

6. *Διαστάσεις* λέγονται οἱ τρόποι τῆς ἐκτάσεως τῶν συνεχῶν ποσῶν, ἤτοι τῶν γραμμῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν στερεῶν· καὶ εἶναι τρεῖς, *μῆκος*, *πλάτος* ἢ *πάχος* καὶ *ὕψος* ἢ *βάθος*. Ἡ γραμμὴ ἔχει μίαν μόνην διάστασιν· ἡ ἐπιφάνεια δύο διαστάσεις μῆκος καὶ πλάτος· καὶ τὸ στερεὸν τρεῖς διαστάσεις, δι' ὃ καλεῖται καὶ τριχῇ διαστατόν.

7. *Εὐθεῖα γραμμὴ* εἶναι ἡ παραγομένη ἐκ τῆς κινήσεως σημείου μὴ παρεκτρεπομένου οὔτε δεξιά, οὔτε ἀριστερά, οὔτε ἄνω, οὔτε κάτω τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ διευθύνσεως· *κεκλασμένη* γραμμὴ εἶναι ἡ σύνθετος ἐξ εὐθειῶν· καὶ *καμπύλη* ἡ μὴ συμπίπτουσα μὲ οὐδεμίαν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων αὐτῆς.

8. *Ἐπίπεδον* ἢ *ἐπίπεδος ἐπιφάνεια* εἶναι ἐπιφάνεια, ἐφ' ἧς ἐφαρμόζει εὐθεῖα κατὰ πᾶσαν διεύθυνσιν· *καμπύλη ἐπιφάνεια* εἶναι ἡ μὴ ταυτιζομένη μὲ οὐδὲν ἐπίπεδον, τέμνον αὐτήν.

9. Τὰ σημεῖα παρίστανται διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, οἷον τὸ σημεῖον Α, τὸ σημεῖον Β, σχ. 1.

Σχ. 1.

10. Ἡ εὐθεῖα παρίσταται ὑπὸ τῶν σημείων τῶν ἄκρων αὐτῆς, οἷον ἡ εὐθεῖα ΑΒ. σχ. 1.

Σχ. 2.

11. *Γωνία* εἶναι ἡ κλίσις ἤτοι τὸ ἄνοιγμα δύο εὐθειῶν διαφόρως διευθυνομένων. Ἡ γωνία δὲν εἶναι χωρίον, οὔτε τὸ μέγεθος αὐτῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τῶν σχηματιζουσῶν αὐτὴν εὐθειῶν. Τὸ σημεῖον Α καθ' ὃ συναπαντῶνται αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ σχ. 2 καλεῖται *κορυφὴ* τῆς γωνίας· αἱ δὲ συναπαντώμεναι εὐθεῖαι (ΑΒ, ΑΓ) καλοῦνται *πλευραὶ* ἢ *σκέλη* τῆς γωνίας.

Ἡ Γωνία παρίσταται ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς κορυφῆς, ἐὰν ἦναι μόνη, καὶ πάντοτε ὑπὸ τῶν σημείων τῶν ἄκρων τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ τοῦ γράμματος τοῦ σημείου τῆς κορυφῆς τιθεμένου ἐν τῷ μέσῳ, οἷον ἡ γωνία Α. σχ. 2 ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ. Ἐν δὲ τῷ σχ. 3 πρέπει νὰ εἴπῃ τις πάντοτε ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ, ὁμιλῶν περὶ τῆς σχηματιζομένης γωνίας ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΑΓ, διότι εἰς Α σχηματίζονται πολλαὶ γωνίαι.

Σχ. 3.

Αἱ γωνίαι προστίθενται καὶ ἀφαιροῦνται· ἐπομένως εἶναι ποσὰ ἔχοντα ἰδίαν μονάδα.

12. *Εὐθεῖα κάθετος* ἐπὶ ἄλλης τινὸς καλεῖται ἡ συναπαντῶσα αὐτὴν καὶ σχηματίζουσα τὰς ἐφεξῆς ἢ προσκειμένας γωνίας ἴσας, οἷον ἡ ΓΔ ἐπὶ τῆς ΑΒ σχ. 4.

Σχ. 4

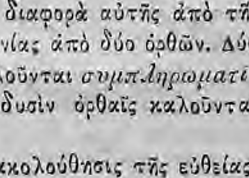
13. Αἱ ἴσαι γωνίαι (ΑΓΔ, ΔΓΒ) καλοῦνται *ὀρθαί*. Ἡ ἐλάσσων τῆς ὀρθῆς οἷον ΕΓΒ, σχ. 4, καλεῖται *ὀξεῖα*· ἡ δὲ μείζων οἷον ἡ ΑΓΕ καλεῖται *ἀμβλεῖα*.

14. *Συμπλήρωμα* γωνίας καλεῖται ἡ διαφορὰ αὐτῆς ἀπὸ τῆς ὀρθῆς· *παραπλήρωμα* δὲ ἡ διαφορὰ τῆς γωνίας ἀπὸ δύο ὀρθῶν. Δύο γωνίαι, ὧν τὸ ἄθροισμα ἴσον μιᾷ ὀρθῇ, καλοῦνται *συμπληρωματικαί*· δύο δὲ γωνίαι, ὧν τὸ ἄθροισμα ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς καλοῦνται *παραπληρωματικαί*.

15. *Προεκβολὴ* εὐθείας καλεῖται ἡ ἐξακολούθησις τῆς εὐθείας.

16. *Γωνίαι κατὰ κορυφὴν* καλοῦνται αἱ ἔχουσαι ἀμοιβαίως πλευρὰς ἡ ἑτέρα τὰς προεκβολὰς τῶν πλευρῶν τῆς ἑτέρας, οἷον αἱ ΑΕΓ καὶ ΔΕΒ ἢ αἱ ΑΕΔ καὶ ΓΕΒ σχ. 5. Αἱ ΑΕΓ καὶ ΑΕΔ ἢ αἱ ΑΕΓ καὶ ΓΕΒ ἢ αἱ ΓΕΒ καὶ ΒΕΔ, ἢ ΒΕΔ καὶ ΔΕΑ καλοῦνται *προσκείμεναι*

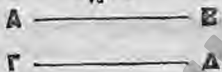
Σχ. 5



ἢ ἐφεξῆς, δηλαδὴ αἱ σχηματιζόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους εὐθείας τεμνομένης ὑπ' ἄλλης.

17. *Παράλληλοι* εὐθεῖαι καλοῦνται αἱ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ μὴ συναντώμεναι ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσιν, οἷον αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ. σχ. 6. Αἱ παράλληλοι δὲν σχηματίζουσι γωνίαν· διευθύνονται ἐπομένως ὁμοίως.

Σχ. 6



18. *Σχῆμα ἐπίπεδον* εἶναι μέρος ἐπιπέδου ἐπιφανείας περιοριζομένης ὑπὸ γραμμῶν· ἐὰν αἱ γραμμαὶ ἦναι εὐθεῖαι τὸ σχῆμα καλεῖται *εὐθύγραμμον*, ἐὰν καμπύλαι καμπυλόγραμμον, ἐὰν μικταὶ ἤτοι εὐθεῖαι καὶ καμπύλαι τὸ σχῆμα καλεῖται *μικτόγραμμον*.

19. Τὸ ἁπλούστερον τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων εἶναι τὸ *τρίγωνον*, ἤγουν τὸ περιοριζόμενον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν, οἷον τὸ ΑΒΓ. σχῆμα. 7.

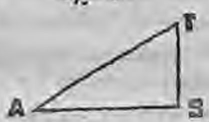
20. Αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι (ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ) καλοῦνται πλευραὶ τοῦ τριγώνου, αἱ δὲ τρεῖς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματιζόμεναι γωνίαι (Α, Β, Γ) καλοῦνται γωνίαι τοῦ τριγώνου. Ἑκάστη πλευρὰ ἀντικρύζει εἰς γωνίαν καλουμένην *ἀπέναντι*, ἡ ΑΒ εἰς τὴν Γ, ἡ ΑΓ εἰς τὴν Β καὶ ἡ ΒΓ εἰς τὴν Α, καὶ ἑκάστη γωνία ἀντικρύζει εἰς πλευρὰν καλουμένην ἐπίσης *ἀπέναντι*, ἡ Α εἰς τὴν ΒΓ, ἡ Β εἰς τὴν ΑΓ καὶ ἡ Γ εἰς τὴν ΑΒ.

Σχ. 7

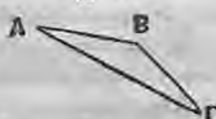
Αἱ μὴ ἀπέναντι γωνίαι καλοῦνται *προσκείμεναι* τῇ πλευρᾷ, οἷον αἱ Α καὶ Β τῇ ΑΒ. Αἱ δὲ μὴ ἀπέναντι γωνίας πλευραὶ καλοῦνται περιέχουσαι τὴν γωνίαν οἷον αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ ὡς πρὸς τὴν Α.

21. Τὸ τρίγωνον καλεῖται *ὀξυγώνιον*, ἐὰν ἔχῃ ὅλας τὰς γωνίας ὀξείας οἷον τὸ ΑΒΓ σχ. 7· *ὀρθογώνιον* ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν οἷον τὸ ΑΒΓ σχ. 8 καὶ *ἀμβλυγώνιον*· ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν, οἷον τὸ ΑΒΓ σχ. 9. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ πλευρὰ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς καλεῖται ὑποτείνουσα οἷον ἡ ΑΓ σχ. 8.

Σχ. 8



Σχ. 9



Τὸ τρίγωνον καλεῖται *ἰσοσκελές*, ἐὰν ἔχῃ δύο πλευρὰς ἴσας οἷον τὸ ΑΒΓ σχ. 10· *ἰσόπλευρον* ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας οἷον τὸ ΑΒΓ σχ. 11· καὶ *σκαληνὸν*, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους οἷον τὸ ΑΒΓ σχ. 7.

Σχ. 10

Σχ. 11

22. *Τετράπλευρον* καλεῖται τὸ ἔχον τέσσαρας πλευράς, σχ. 12 οἷον τὸ ΑΒΓΔ. Ἐκ τῶν τετραπλεύρων καλεῖται *παραλληλόγραμμον* τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους οἷον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 13.

Σχ. 12

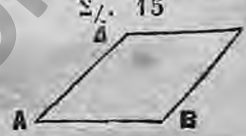
Σχ. 13

Ὀρθογώνιον τὸ ἔχον τὰς γωνίας ὀρθὰς οἷον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 14.

Ῥόμβος τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας τὰς δὲ γωνίας ἀνίσους, οἷον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 15.

Σχ. 14

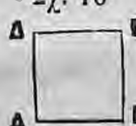
Σχ. 15



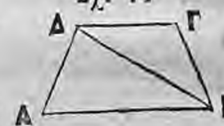
Τετράγωνον τὸ ἔχον τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας, οἷον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 16.

Τραπέζιον τὸ ἔχον τὰς δύο πλευρὰς παραλλήλους, τὰς δὲ λοιπὰς δύο πλευρὰς μὴ παραλλήλους, οἷον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 17.

Σχ. 16



Σχ. 17



23. *Πολύγωνον* καλεῖται ἐν γένει τὸ ἔχον πολλὰς γωνίας· εἰς τὰ πολύγωνα περιλαμβάνονται τὰ τρίγωνα, τὰ τετράπλευρα, τὰ πεντάγωνα, τὰ ἑξάγωνα κτλ.

24. *Πολύγωνον* ἰσόπλευρον καλεῖται τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας· καὶ *ἰσογώνιον* τὸ ἔχον τὰς γωνίας ἴσας.

Δύο πολύγωνα καλοῦνται *ἰσόπλευρα μεταξύ των*, ὅταν ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ· *ἰσογώνια* δὲ ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ. Τότε αἱ ἴσαι γωνίαι καὶ αἱ ἴσαι πλευραὶ καλοῦνται *ὁμόλογοι*.

25. *Διαγώνιος* πολυγώνου καλεῖται ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα δύο μὴ προσκειμένας κορυφάς, οἷον ἡ ΔΒ σχ. 17.

26. Ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται εἰς *ἐπίπεδον* καὶ *στερεάν*· καὶ ἡ μὲν ἐπίπεδος ἐξετάζει τὴν καταμέτρησιν τῶν ἐπιπέδων εὐθυγράμμων σχημάτων καὶ τοῦ κύκλου, ἔτι δὲ τὴν καταμέτρησιν τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ἡ δὲ στερεὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν πολυέδρων καὶ ἐκ τῶν στρογγύλων σωμάτων τὴν καταμέτρησιν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ κώνου καὶ τῆς σφαίρας, ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἐν τῇ στερεᾷ Γεωμετρίᾳ.

27. *Ἀξίωμα* εἶναι πρότασις καθ' ἑαυτὴν φανερά.

28. *Θεώρημα* εἶναι πρότασις χρήζουσα ἀποδείξεως.

29. *Ἀπόδειξις* εἶναι σειρὰ συλλογισμῶν, δι' ἧς τὸ θεώρημα δεικνύεται συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων, ἢ ὅτι δὲν ὑπάρχει τὸ ἐναντίον τοῦ θεωρήματος· καὶ ἡ μὲν πρώτη καλεῖται *ἀπόδειξις ἄμεσος*, ἡ δὲ *ἔμμεσος*. Προτιμητέαι αἱ ἄμεσοι ἀποδείξεις, ὅταν δὲν ἦναι λίαν ἐκτεταμέναι καὶ πολύπλοκοι.

30. *Πρόβλημα* εἶναι πρότασις, δι' ἧς ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς ἀγνώστων ποσοτήτων διὰ γνωστῶν.

31. *Λύσις* καλεῖται ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμητικῶν ἢ γεωμετρικῶν πράξεων, δι' ὧν προσδιορίζονται αἱ ἄγνωστοι ποσότητες. Αἱ πρῶται τούτων καλοῦνται *ἀριθμητικαί*, αἱ δὲ *γεωμετρικαί*. Αἱ ἀριθμητικαὶ λύσεις ἐκτελοῦνται διὰ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, αἱ δὲ γεωμετρικαὶ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου· καλοῦνται δὲ καὶ *γραφικαὶ λύσεις*.

32. Αἱ Γεωμετρικαὶ λύσεις εἶναι *συνθετικαὶ* ἢ *ἀναλυτικαί*· ἡ *συνθετικὴ* λύσις γεωμετρικοῦ προβλήματος συνίσταται εἰς τὰς πράξεις δι' ὧν λύεται, καὶ εἰς τὴν βεβαίωσιν τῆς λύσεως· ἡ δὲ *ἀναλυτικὴ* συνίσταται εἰς τὸ νὰ ὑποτεθῇ τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀναγκαῖαι σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν, δι' ὧν λύεται τὸ πρόβλημα. Ἡ μὲν σύνθεσις βαίνει ἐκ τῶν ἁπλῶν εἰς τὰ σύνθετα καὶ ἐκ τῶν γνωστῶν εἰς τὰ ἄγνωστα, ἡ δὲ ἀνάλυσις τὸ ἐναντίον ἐκ τῶν συνθέτων εἰς τὰ ἁπλᾶ καὶ ἐκ τῶν ἀγνώστων εἰς τὰ γνωστά. Ἡ δευτέρα ἀνακαλύπτει, ἡ δὲ πρώτη τακτοποιεῖ τὰ εὑρεθέντα. Ἡ μέθοδος δι' ἧς ἐκτίθεται ἡ στοιχειώδης Γεωμετρία εἶναι ἡ συνθετική· ἀλλ' αἱ Γεωμετρικαὶ προτάσεις εὑρέθησαν διὰ τῆς ἀναλύσεως· διὰ τοῦτο δὲν φαίνεται καὶ ἡ ἀλληλουχία αὐτῶν καὶ πρέπει ὁ μαθητής, ἀφ' οὗ τελειώσῃ τὴν Γεωμετρίαν νὰ ἐπανέλθῃ, ὅπως ἴδῃ ἐκ περιωπῆς τὴν ὁδὸν ἣν ἐβάδισεν.

33. *Λῆμμα* εἶναι θεώρημα ἢ πρόβλημα, ἐφ' οὗ στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις ἄλλου θεωρήματος ἢ ἡ λύσις ἄλλου προβλήματος.

34. *Πόρισμα* εἶναι ἄμεσος συνέπεια μιᾶς ἢ πλειόνων προτάσεων.

35. *Ὑπόθεσις* λέγεται ὅ,τι λαμβάνεται ὡς ἀληθές, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ ἦναι πάντοτε, εἰς τὴν σειρὰν ἀποδείξεως ἢ λύσεως.

36. *Σχόλιον* εἶναι παρατήρησις γενομένη ἐπὶ μιᾶς ἢ πλειόνων προτάσεων, ἵνα δείξῃ τὴν ἔκτασιν ἢ τὸν περιορισμὸν αὐτῶν ἢ ἐν γένει τὴν σχέσιν αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας.

37. Τὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας εἶναι τὰ ἑξῆς·

α΄. Ἐὰν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἴσα ἢ ἐξ ἴσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα.

β΄. Τὰ τρίτῳ ποσῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

γ΄. Τὸ ὅλον εἶναι μεῖζον τοῦ ἰδίου μέρους.

δ΄. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν μερῶν αὐτοῦ.

ε΄. Ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται καὶ εἶναι ἡ συντομωτέρα μεταξὺ τῶν σημείων ἀπόστασις.

ς΄. Αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ τὰ στερεά, ἅτινα ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζουσιν ἀκριβῶς, εἰσὶν ἴσα.

38. Ἡ Γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ἁπλῆ καὶ τὸ εὐκολώτερον τῶν μαθημάτων, ὡς ἐκ τῆς ὕλης αὐτῆς συμπεραίνεται. Διὰ τοῦτο τίθεται ὡς τὸ θεμέλιον πάσης μαθήσεως, ὅπως ἐξασκηθῇ ἡ κρίσις ἐπὶ ἁπλῶν καὶ εὐλήπτων πραγμάτων, συνειθίσῃ τὸ πνεῦμα εἰς τὴν τάξιν καὶ ὁ νοῦς εἰς τὴν τακτοποίησιν τῶν ἰδεῶν καὶ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀληθείας. Ἑπομένως ὁ μαθητὴς ἂς πλησιάσῃ τὴν ἐπιστήμην αὐτὴν μετὰ θάῤῥους καὶ πεποιθήσεως, καὶ μετ' ὀλίγα μαθήματα θέλει πληροφορηθῆ ἐξ ἰδίας ἀντιλήψεως ὅτι σπουδάζει ἐπιστήμην οὐχὶ φοβερὰν καὶ δυσχερῆ, ἀλλὰ τερπνὴν καὶ εὐχερεστάτην, ἐπωφελῆ εἴς τε τὸν ἐπιστημονικὸν καὶ τὸν πρακτικὸν βίον, καὶ θέλει τὴν ἀγαπήσει ὡς τὸν ὠφελέστατον τῆς ἀληθείας διδάσκαλον.

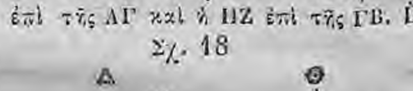
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοὺς παρόντας ὁρισμοὺς θέλει ὁ μαθητὴς μεταχειρίζεσθαι εἰς εἶδος λεξικοῦ, καθ' ὅσον προβαίνει εἰς τὰ μαθήματα, ὅταν τὸ καλεῖ ἡ ἀνάγκη, χωρὶς νὰ ἐπιβαρύνῃ τὴν μνήμην.

Πρότασις α΄.

Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ μεθ' οὗ συγκρίνεται πᾶν ἄλλο σύστημα ὀρθῶν ΕΗΘ καὶ ΘΗΖ, σχ. 18. Ληφθήτω ΑΓ=ΕΗ καὶ ΓΒ=ΗΖ, καὶ ἐπιτεθείτω τὸ δεύτερον ζεῦγος ἐπὶ τοῦ πρώτου οὕτως, ὥστε ἡ ΕΗ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἡ ΗΖ ἐπὶ τῆς ΓΒ. Ἡ ΘΗ πρέπει νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ. Διότι ἂν λάβῃ ἄλλην τινὰ διεύθυνσιν ΓΚ, ἐπειδὴ ΑΓΚ > ΑΓΔ καὶ ΑΓΚ=ΚΓΒ καὶ ΑΓΔ=ΔΓΒ, πρέπει καὶ ΚΓΒ νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ΔΓΒ, ὅπερ ἄτοπον.

Σχ. 18



Πόρισμα α΄. Ἐκ σημείου τινὸς ἐπ' εὐθείας κειμένου μία μόνη κάθετος ὑψοῦται ἐπὶ τῆς εὐθείας. Διότι ἐὰν ὑψωθῶσι δύο κάθετοι, οἷον ΓΔ, καὶ ΓΚ σχ. 18, πρέπει ΔΓΒ καὶ ΚΓΒ ὡς ὀρθαὶ νὰ ὦσιν ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον· διότι τὸ ὅλον μεῖζον τοῦ ἰδίου μέρους.

Πόρισμα. β΄. Δύο σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν εὐθείας. Διότι ἐὰν διὰ τῶν σημείων Α καὶ Γ σχ. 18 διέρχωνται δύο εὐθεῖαι διάφοροι ΑΓΒ καὶ ΑΓΚ, σχηματιζομένης τῆς ΑΓΔ ὀρθῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦ χωρισμοῦ, πρέπει ΔΓΚ καὶ ΔΓΒ νὰ ὦσιν ἴσαι ὡς ὀρθαί, ὅπερ ἄτοπον.

Πρότασις β'.

Τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων γωνιῶν ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς.

Ἔστω ἡ ΑΒ συναπαντωμένη ὑπὸ τῆς ΔΓ καὶ σχηματίζουσα τὰς προσκειμένας ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ σχ. 19. Ὑψωθήτω ἡ ΓΕ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ αἱ δύο ὀρθαὶ $ΑΓΕ+ΕΓΒ=ΑΓΕ+ΕΓΔ+ΔΓΒ$ καὶ αἱ δύο προσκείμεναι $ΑΓΔ+ΔΓΒ=ΑΓΕ+ΕΓΔ+ΔΓΒ$· ἄρα $ΑΓΔ+ΔΓΒ=ΑΓΕ+ΕΓΒ=2$ ὀρ.

Σχ. 19

Πόρισμα ά. Ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ὀρθή, ὀρθὴ θέλει εἶσθαι καὶ ἡ ἑτέρα.

Πόρισμα β'. Ἐὰν εὐθεῖα ἵσταται κάθετος ἐπ' εὐθείας, καὶ ἡ δευτέρα εὐθεῖα θέλει εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τῆς πρώτης. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων γωνιῶν ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς· ἑπομένως αἱ περὶ τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως γωνίαι εἰσὶν ὀρθαὶ ἅπασαι.

Πόρισμα γ'. Αἱ περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους εὐθείας σχηματιζόμεναι γωνίαι ἐπὶ ἐπιπέδου ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς. Διότι ἐὰν ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΓΔ ἐπὶ τῆς ΑΒ σχ. 20, τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος γωνιῶν καὶ τῶν δύο ὀρθῶν ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ ἴσον τῷ αὐτῷ ἀθροίσματι $ΑΓΕ+ΕΓΖ+ΖΓΗ+ΗΓΔ+ΔΓΘ+ΘΓΙ+ΙΓΒ$.

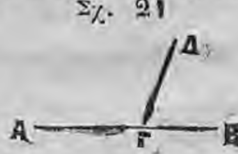
Σχ. 20

Πρότασις γ'.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς, αἱ ἐξωτερικαὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ σχ. 21, ὧν τὸ ἄθροισμα ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι $ΑΓΔ+ΔΓΒ=2$ ὀρ. καὶ ΑΓΔ μετὰ τῆς σχηματιζομένης γωνίας ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΓ ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς, ἡ ΔΓΒ καὶ ἡ σχηματιζομένη γωνία ὑπὸ τῆς ΔΓ καὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΓ ἴσαι· ἄρα ΓΒ καὶ ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ ταυτίζονται ὅ. ε. δ.

Σχ. 21



Ἡ β'. πρότασις καὶ ἡ γ'. καλοῦνται ἀντίστροφοι. Πᾶσα γεωμετρικὴ πρότασις ἔχει ὑπόθεσιν καὶ συνέπειαν· ἀντιστρεφομένης τῆς ὑποθέσεως καὶ τῆς συνεπείας, ἢ μέρους τῆς ὑποθέσεως καὶ τῆς συνεπείας, σχηματίζεται πρότασις ἀντίστροφος. Αἱ ἀντίστροφοι προτάσεις δὲν εἶναι πάντοτε ἀληθεῖς.

Πρότασις δ'.

Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Σχ. 22

Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΕΓ καὶ ΔΕΒ. Ἐπειδὴ ΑΕΓ+ΑΕΔ = 2 ὀρ. ΔΕΒ+ΔΕΑ=2 ὀρ. καὶ ΑΕΔ κοινή, ΑΕΓ =ΔΕΒ ὅ. ἔ. δ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν περί τι σημεῖον σχηματιζομένων γωνιῶν ἐπὶ ἐπιπέδου ἴσον τέσσαρσιν ὀρθαῖς. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΕΔ+ΑΕΓ+ΓΕΒ+ΒΕΑ=4 σχ. 22 καὶ εἰς ταύτας διαμοιράζεται τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν περὶ τὸ σημεῖον Ε, ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν.

Πρότασις ἑ.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην ἴσα εἰσίν.

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ σχ. 23, ἔχοντα ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α=Δ. Ἐπιτεθείτω τὸ ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ μὲν ΔΕ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ. Τὸ μὲν Ε θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Β, τὸ δὲ Ζ ἐπὶ τοῦ Γ, ἡ ΕΖ ἐπομένως θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΓΒ καὶ τὰ τρίγωνα ταὐτίζονται.

Σχ. 23

Πρότασις ϛ'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσα εἰσίν.

Ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ σχ. 23 ἔχωσιν ΑΒ=ΔΕ, Α=Δ καὶ Β=Ε, ἐπιτεθειμένου τοῦ ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως ὥστε ἡ ΔΕ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἡ μὲν γωνία Δ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Α ἡ δὲ Ε ἐπὶ τῆς Β, ἡ ΔΖ ταὐτίζεται μὲ τὴν ΑΓ καὶ ἡ ΕΖ μὲ τὴν ΓΒ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ μὲ τὸ ΑΒΓ.

Πρότασις ζ'.

Ἡ μία τῶν πλευρῶν τριγώνου ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο.

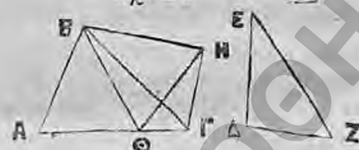
Διότι ἡ μὲν εὐθεῖα, αἱ δὲ σχηματίζουσι κεκλασμένην ἔχουσαν τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ τὴν εὐθεῖαν.

Πρότασις ή.

Δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, ἀνίσους ἔχουσι καὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς· ἡ δὲ πλευρὰ ἡ ἀπέναντι τῆς μείζονος γωνίας ἡ μείζων.

Έστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ σχ. 24, ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΖ καὶ ΑΒΓ>ΔΕΖ. Κατασκευασθήτω ἡ ΓΒΗ=Ε· ληφθήτω ΒΗ=ΔΕ=ΑΒ καὶ ἐπιζευχθήτω Γ καὶ Η. Τὰ τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΓΒΗ ἴσα εἰσὶν ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν· ἄρα ΓΗ=ΔΖ. Τμηθήτω δίχα ἡ γωνία ΑΒΗ διὰ τῆς ΒΘ καὶ ἐπιζευχθήτω Θ μετὰ τοῦ Η. Ἡ ΘΒ θέλει πέσει ἐντὸς τῆς μείζονος γωνίας ΑΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΘ καὶ ΘΒΗ ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν· ἄρα ΑΘ=ΘΗ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΘΗΓ ἡ ΗΓ<ΘΓ+ΘΗ, καὶ ΘΓ+ΘΗ =ΑΓ καὶ ΓΗ=ΔΖ· ἄρα ΔΖ<ΑΓ.

Σχ. 24



Πρότασις θ'.

Ἀντιστρόφως ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ τρίτην πλευρὰν ἄνισον, θέλουσιν ἔχει ἀνίσους καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας· μείζων δὲ ἡ ἀπέναντι τῆς μείζονος τῶν ἀνίσων πλευρῶν.

Διότι ἐὰν ΑΒ=ΔΕ καὶ ΒΓ=ΕΖ, ἀλλὰ ΑΓ>ΔΖ σχ. 24, πρέπει ἡ γωνία ΑΒΓ>ΔΕΖ· διότι ἐὰν μὲν ἦσαν ἴσαι, ἔπρεπεν ἡ ΑΓ νὰ ἦναι ἴση τῇ ΔΖ, ἐὰν δὲ ΑΒΓ<ΔΕΖ, κατὰ τὴν εὐθεῖαν πρότασιν, ἔπρεπεν ΑΓ νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς ΔΖ, ὅπερ ἄτοπον.

Πρότασις ί.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ ἔχουσι καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας καὶ εἶναι ἴσα.

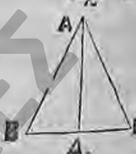
Ἔσωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (ἴδε σχ. 23,) ἔχοντα ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ ΒΓ=ΕΖ. Ἡ γωνία Α=Δ, ἄλλως, ἐπειδὴ ΑΓ=ΔΖ καὶ ΑΒ=ΔΕ, ΓΒ μείζων τῆς ΖΕ ἢ ἐλάσσων αὐτῆς, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον Γ=Ζ, καὶ Β=Ε.

Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Πρότασις ιά.

Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας ἴσας.

Σχ. 25



Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ σχ. 25, ἔχον ΑΒ=ΑΓ. Τμηθήτω δίχα ἡ ΒΓ εἰς Δ καὶ ἐπιζευχθήτω Δ μετὰ τοῦ Α. Τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΑΔΓ ἴσα ὡς ἰσόπλευρα· ἑπομένως Β=Γ καθ' ὃ ἀπέναντι τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΑΔ.

Πόρισμα α'. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Πόρισμα β'. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὴν κορυφὴν μετὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἵσταται κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ΒΑΔ=ΔΑΓ καὶ ΒΔΑ=ΑΔΓ, ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΔ=ΔΓ καὶ ΑΒ=ΑΓ.

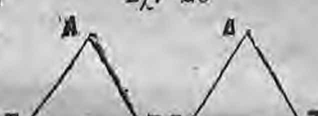
Πόρισμα γ'. Ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἵσταται κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς βάσεως. Διότι τὰ τρίγωνα τότε ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ σχ. 25 ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν.

Πρότασις ιβ'.

Πᾶν τρίγωνον ἔχον δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευρὰς ἴσας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ σχ. 26 ἔχον Β=Γ. Ληφθήτω ΕΖ ἴση τῇ ΒΓ καὶ κατασκευασθήτω ἡ ΖΕΔ=Β καὶ ἡ ΕΖΔ=Γ=Β· τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν καὶ τὰς προκειμένας γωνίας ἴσας. Ἀλλ' ἐπειδὴ Β=Ε=Γ=Ζ, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ ἢ τιθεμένης τῆς γωνίας Ε ἐπὶ τῆς Β ἢ ἐπὶ τῆς Γ· ἑπομένως ἡ ΕΔ ἴση καὶ μὲ τὴν ΑΒ καὶ μὲ τὴν ΑΓ· ἄρα ΑΒ=ΑΓ.

Σχ. 26

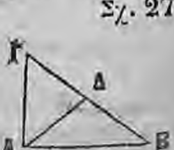


Πόρισμα. Τὸ ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

Πρότασις ιγ'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει καὶ ἀντιστρόφως ἡ μείζων γωνία τὴν μείζονα πλευράν.

Σχ. 27



Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΓΑΒ>Γ. Κατασκευασθήτω ἡ γωνία ΓΑΔ ἴση τῇ Γ. Ἕπεται ὅτι ΑΓ=ΑΔ· ἀλλὰ ΑΒ<ΑΔ+ΔΒ· ἄρα ΑΒ<ΓΔ+ΔΒ ἢ ΓΒ.

Ἀντιστρόφως ἐὰν ΓΒ>ΑΓ καὶ ΓΑΒ>Γ. Διότι ἐὰν ΓΑΒ=Γ, ἔπρεπε καὶ ΓΒ νὰ ἦναι ἴση τῇ

ΑΒ, ἐὰν δὲ ΓΑΒ$<$Γ, ἔπρεπε ΓΒ νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς ΑΒ, ὅπερ ἄτοπον.

Πρότασις ιδ'.

Ἐκ σημείου τινὸς ἐκτὸς εὐθείας κειμένου μία κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ἄγεται.

Ἔστω ἡ ΔΓ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ὑποτεθείτω ὅτι ἐκ τοῦ Γ ἄγεται καὶ δευτέρα κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΔΕ σχ. 28. Προεκβληθήτω ἡ ΔΓ εἰς διάστημα ΓΖ ἴσον τῷ ΓΔ καὶ ἐπιζευχθήτω Ε καὶ Ζ. Τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΕΓΖ ἴσα· ἄρα ΔΕΓ$=$ΓΕΖ $=$ 1 ὀρ. Ἄρα τὰ σημεῖα Δ,Ε,Ζ ἐπ' εὐθείας· ἄρα διὰ τῶν Δ καὶ Ζ φέρονται δύο εὐθεῖαι, ὅπερ ἄτοπον.

Σχ. 28

Πρότασις ιέ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου τινὸς ἐντὸς τριγώνου ἀπὸ τῶν ἄκρων μιᾶς τῶν πλευρῶν ἔλασσον τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ σχ. 29. Ἐπιζευχθήτω Δ μετὰ τῆς Β καὶ Γ καὶ προεκβληθήτω ἡ ΔΓ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΒ. Τὸ τρίγωνον ΔΕΒ δίδει ΒΔ$<$ΕΒ$+$ΕΔ καὶ τὸ ΑΕΓ δίδει ΕΓ$<$ΑΕ$+$ΑΓ· τῇ προσθέσει τῶν μελῶν κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ΒΔ$+$ΕΓ$<$ΕΒ$+$ΕΔ$+$ΑΕ$+$ΑΓ. Ἀλλὰ ΕΓ$=$ΕΔ$+$ΔΓ καὶ ΕΒ$+$ΕΑ$=$ΑΒ. Τῇ ἀντικαταστάσει καὶ τῇ ἀφαιρέσει τοῦ κοινοῦ ΕΔ, ἀποβαίνει ΔΒ$+$ΔΓ$<$ΑΒ$+$ΒΓ.

Σχ. 29

Πρότασις ις'.

Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς ἐκτὸς εὐθείας ἀχθῇ κάθετος καὶ διάφοροι πλάγιαι,

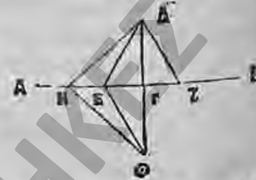
1ον Ἡ κάθετος εἶναι ἐλάσσων πάσης πλαγίας,

2ον Αἱ πλάγιαι αἱ ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἰσὶν ἴσαι, καὶ

3ον Ἐκ τῶν ἀνίσως ἀπεχουσῶν τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου πλαγίων ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα εἶναι ἡ μείζων.

Ἔστω Δ σημεῖον ἐκτὸς τῆς ΑΒ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθήτωσαν ἡ κάθε-

Σχ. 30



τος ΔΓ, αἱ πλάγιαι ΔΕ, ΔΖ ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ὥστε $ΕΓ=ΓΖ$, καὶ ἡ πλαγία ΔΗ μᾶλλον ἀπέχουσα τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἢ ἡ ΔΕ σχ. 30. Προεκβληθήτω ἡ ΓΔ εἰς διάστημα $ΓΘ=ΓΔ$ καὶ ἐπιζευχθήτω Θ μετὰ τοῦ Ε καὶ Η.

1ον Τὰ τρίγωνα ΔΕΓ καὶ ΕΓΘ ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν· ἄρα $ΕΔ=ΕΘ$. Ἀλλὰ $ΕΘ+ΕΔ>ΘΓ+ΓΔ$ ἢ $2\,ΕΔ>2\,ΓΔ$· ἄρα καὶ $ΕΔ>ΓΔ$.

2ον Τὰ τρίγωνα ΕΓΔ καὶ ΔΓΖ ἴσα διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα $ΕΔ=ΔΖ$.

3ον Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τρίγωνα ΗΔΓ καὶ ΗΓΘ ἴσα· ἄρα $ΗΔ=ΗΘ$· ἀλλὰ $ΗΔ+ΗΘ>ΔΕ+ΕΘ$ ἢ $2ΗΘ>2ΕΔ$· ἄρα καὶ $ΗΔ>ΕΔ$.

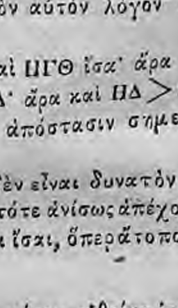
Πόρισμα α'. Ἡ κάθετος μετρεῖ τὴν ἀληθῆ ἀπόστασιν σημείου τινὸς ἀπό τινος εὐθείας.

Πόρισμα β'. Ἐκ σημείου τινὸς ἐκτὸς εὐθείας δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι. Ἐπειδὴ τότε ἀνίσως ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου πλάγιαι ἤθελον εἶσθαι ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον.

Πρότασις ιζ'.

Πᾶν σημεῖον τῆς ὑψουμένης καθέτου ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων αὐτῆς, πᾶν δὲ σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνίσως ἀπέχει τῶν ἄκρων.

Σχ. 31



Ἔστω ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ, σχ. 31. Τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἐπ' αὐτῆς ὄντα ἰσάκις ἀπέχουσι τῶν ἄκρων Α καὶ Β, διότι αἱ ΑΔ καὶ ΔΒ, ΑΕ καὶ ΒΕ εἶναι ἴσαι πλάγιαι. Ἀλλὰ τὸ Κ ἐκτὸς τῆς καθέτου ὂν ἀπέχει ἀνίσως· διότι ἐπιζευχθήτω Ι μετὰ τοῦ Β. $ΚΒ<ΙΚ+ΙΒ$· ἀλλὰ $ΙΒ=ΑΙ$· ἄρα $ΚΒ<ΙΚ+ΙΑ$ ἢ $ΚΒ<ΑΚ$.

Πόρισμα. Πᾶν σημεῖον ἰσάκις ἀπέχον τῶν ἄκρων εὐθείας κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ὑψουμένης καθέτου.

Πρότασις ιη'.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην εἰσὶν ἴσα.

Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ σχ. 32, ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν $ΒΓ=ΕΖ$ καὶ $ΑΓ=ΔΖ$. Ἐπιτεθείτω τὸ ΕΔΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Α, ἡ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ

σχ. 32

καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Τὸ Ζ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ, διότι ΔΖ=ΑΓ, ἡ δὲ ΖΕ θὰ ταὐτισθῇ μὲ τὴν ΒΓ, διότι ἄλλως δύο ἴσαι πλάγιαι ἤθελον ἀπέχει ἀνίσως τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου. Ἄρα τὰ τρίγωνα εἰσὶν ἴσα.

Προτασις ιθ΄.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην εἰσὶν ἴσα.

Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ σχ. 34, ἔχοντα ΓΒ=ΖΕ καὶ Γ=Ζ. Ἐπιτεθείτω τὸ ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ Ζ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Γ, ἡ ΖΕ ἐπὶ τῆς ΓΒ καὶ ἡ ΖΔ ἐπὶ τῆς ΓΑ. Τὸ σημεῖον Ε θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Β, διότι ΓΒ=ΖΕ· ἀλλὰ καὶ τὸ Δ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α· διότι ἂν πέσῃ εἰς Η ἢ Θ, ἄνω ἢ κάτω τοῦ σημείου Α, ἐκ τοῦ σημείου Β ἤθελον καταβιβάζεσθαι δύο κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΓ, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὰ τρίγωνα ἴσα.

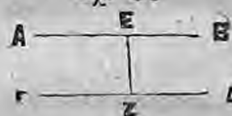
Σχ. 33

Πρότασις κ΄.

Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τρίτης εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἐπὶ τῆς ΕΖ σχ. 34· θέλουσιν εἶσθαι παράλληλοι. Διότι ἂν συναπηντῶντο, ἔπρεπεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐκτὸς τοῦ ΕΖ νὰ ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐπ' αὐτῆς, ὅπερ ἄτοπον.

Σχ. 34



Πρότασις κά.

Ἐκ σημείου τινὸς ἐκτὸς εὐθείας δυνατὸν νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ καὶ μία μόνη.

Σχ. 35

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ Γ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς σχ. 35. Ἐκ τοῦ Γ ἀχθήτω ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ· καὶ ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ΓΕ, ἥτις θέλει εἶσθαι παράλληλος τῇ ΑΒ.

Μία δὲ μόνη κάθετος ἄγεται, διότι αἱ παράλληλοι διευθύνονται ὁμοίως καὶ δὲν σχηματίζουσι γωνίαν· πᾶσα ἑπομένως εὐθεῖα συναπαντῶσα τὴν ΓΕ καὶ σχηματίζουσα γωνίαν μετ' αὐτῆς πρέπει νὰ συναπαντᾷ καὶ τὴν ΑΒ καὶ νὰ σχηματίζῃ τὴν αὐτὴν γωνίαν μετ' αὐτῆς. Τοῦτο λαμβάνεται ὡς ἀξίωμα.

Πόρισμα ά. Πᾶσα εὐθεῖα συναπαντῶσα τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων συναπαντᾷ καὶ τὴν ἑτέραν. Διότι ἄλλως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἤθελον ἀχθῇ δύο παράλληλοι.

Πόρισμα β΄. Ἡ πλαγία συναπαντᾷ τὴν κάθετον· ἐπειδὴ ἡ ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς πλαγίας ὑψουμένη κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι παράλληλος τῆς πρώτης, ἡ δὲ πλαγία συναντᾷ ταύτην τὴν κάθετον.

Πόρισμα γ΄. Ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν παραλλήλων ἵσταται κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας· διότι ἂν ἦτο πλαγία ἔπρεπε νὰ συναπαντῶνται αἱ παράλληλοι.

Ὁρισμοί.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης ΗΘ εἰς Ε καὶ Ζ, σχ. 35, σχηματίζουσιν ὀκτὼ γωνίας, αἵτινες ἀνὰ δύο, μία ἐκ τῶν περὶ τὸ Ε καὶ μία ἐκ τῶν περὶ τὸ Ζ, λαμβάνουσι διάφορα ὀνόματα ὡς ἐκ τῆς θέσεως αὐτῶν πρὸς τὰ εὐθείας ΑΒ, ΓΔ καὶ τὴν ΗΘ, αἱ μὲν καλοῦνται ἐντός, αἱ δὲ ἐκτός, αἱ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, αἱ δὲ ἐναλλάξ· αἱ ΒΖΕ καὶ ΖΕΔ ἢ ΓΕΖ καὶ ΕΖΑ καλοῦνται *ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*· αἱ ΗΕΔ καὶ ΘΖΗ ἢ ΓΕΗ καὶ ΑΖΘ *ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*· αἱ ΗΕΔ καὶ ΕΖΒ, ἢ ΔΕΖ καὶ ΒΖΘ, ἢ αἱ ΓΕΗ καὶ ΑΖΕ ἢ αἱ ΓΕΖ καὶ ΑΖΘ καλοῦνται *ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἀπεναντίον* ἢ ἁπλῶς *ἐντὸς ἐκτός*· αἱ ΓΕΖ καὶ ΕΖΒ ἢ ΔΕΖ καὶ ΑΖΕ καλοῦνται *ἐναλλὰξ ἐντός*· αἱ δὲ ΓΕΗ καὶ ΘΖΒ, ἢ αἱ ΗΕΔ καὶ ΑΖΔ καλοῦνται *ἐναλλὰξ ἐκτός*· καὶ αἱ ΓΕΗ καὶ ΕΖΒ ἢ ΗΕΔ καὶ ΕΖΑ ἢ αἱ ΑΖΘ καὶ ΖΕΔ ἢ ΘΖΒ καὶ ΖΕΓ καλοῦνται *ἐναλλὰξ ἐντὸς ἐκτός*.

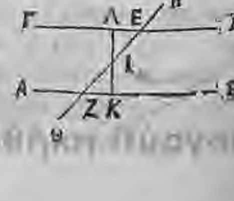
Σχ. 35

Πρότασις κβ΄.

Δύο παράλληλοι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουσι τὰς ἐναλλὰξ ἐντός, τὰς ἐναλλὰξ ἐκτός, τὰς ἐντὸς ἐκτὸς ἴσας· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς ἢ τῶν ἐκτὸς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ τῶν ἐναλλὰξ ἐντὸς ἐκτὸς ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς.

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι ΑΒ καὶ ΓΔ σχ. 36 τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς τρίτης ΗΘ εἰς Ε καὶ Ζ. Ἐκ τοῦ Ι μέσου τῆς ΖΕ ἀχθήτω ἡ κάθετος ΙΚ ἐπὶ τῆς ΑΒ· προεκβαλλομένη τέμνει τὴν ΓΔ καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς. Τὰ τρίγωνα ΖΚΙ καὶ ΕΙΛ εἶναι ἴσα, καθὸ ὀρθογώνια, ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην· ἄρα αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς ΓΕΖ καὶ ΕΖΒ ἴσαι. Ὁμοίως ΔΕΖ καὶ ΕΖΑ ἴσαι ὡς παραπληρώματα τῶν πρώτων. Καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν τούτων ἴσαι. Ὥστε ἅπασαι αἱ ὀξεῖαι καὶ ἅπασαι αἱ ἀμβλεῖαι ἴσαι καὶ μία ὀξεῖα μετὰ μιᾶς ἀμβλείας ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς.

Σχ. 36



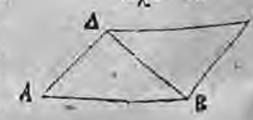
μέρος, καθ' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ἔλασσον δύο ὀρθῶν.

Εἰς ταύτην ἄγονται καὶ αἱ λοιπαὶ περιστάσεις· διότι ἐξ ἑκάστης αὐτῶν συμπεραίνεται ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄθροισμα μεῖζον ἢ ἔλασσον δύο ὀρθῶν.

Πρότασις κέ.

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ παντὸς παραλληλογράμμου καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι.

Σχ. 40



Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ σχ. 40. Ἀχθήτω ἡ διαγώνιος ΔΒ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΓΒ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινὴν καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας τὴν ΓΔΒ=ΔΒΑ ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ· καὶ ΔΒΓ=ΒΔΑ ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ· ἄρα ΑΒ=ΔΓ καὶ ΑΔ=ΒΓ ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν· Α=Γ ὡς ἀπέναντι τῆς κοινῆς πλευρᾶς· καὶ ΑΔΒ+ΒΔΓ=ΔΒΓ+ΑΒΔ ἢ ΑΔΓ=ΑΒΓ.

Πόρισμα α'. Αἱ παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων ἴσαι.

Πόρισμα β'. Αἱ κάθετοι αἱ μεταξὺ παραλλήλων ἴσαι, ὡς παράλληλοι. Ἐπομένως αἱ παράλληλοι φυλάττουσι πανταχοῦ τὴν αὐτὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν· καθ' ὃ μετρουμένην ὑπὸ τῶν μεταξὺ αὐτῶν καθέτων.

Πρότασις κϛ'.

Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας ἤγουν ΑΒ=ΔΓ καὶ ΑΔ=ΒΓ ἴδε σχ. 40. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ εἰσὶν ἰσόπλευρα· ἄρα καὶ ἰσογώνια· ἄρα ΑΒ παράλληλος τῇ ΔΓ, διότι σχηματίζουσι τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίας ΑΒΔ καὶ ΒΔΓ ἴσας· καὶ ΑΔ καὶ ΒΓ ὁμοίως παράλληλοι, διότι σχηματίζουσι τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίας ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ ἴσας ὡς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

Πρότασις κζ'.

Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον δύο τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.

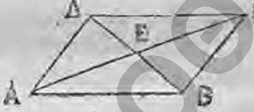
Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ σχ. 40 ἔχον τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσας καὶ παραλλήλους. Ἀχθήτω ἡ διαγώνιος ΔΒ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ΑΒΔ καὶ ΒΔΓ ἴσας ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ, καὶ τὰς περιεχούσας πλευρὰς ἴσας· ἄρα ΑΔ=ΒΓ, καὶ ΑΔΒ=ΔΒΓ· ἑπομένως ΑΔ παράλληλος τῇ ΒΓ.

Πρότασις κή.

Αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ σχ. 41 καὶ ἀχθήτωσαν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ· τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΔΕΓ ἴσα ὡς ἔχοντα ΑΒ=ΔΓ ὡς ἀπέναντι καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ΕΑΒ=ΕΓΔ καὶ ΕΒΑ=ΕΔΓ ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ· ἄρα ΔΕ=ΕΒ καὶ ΑΕ=ΕΓ ὡς ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

Σχ. 41



Πόρισμα. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ τετραγώνου τέμνονται πρὸς ὀρθάς· διότι τότε τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ ἰσοσκελῆ καὶ ἡ ΑΓ ἑνόνει τὰς κορυφὰς μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεως.

Πρότασις κθ'.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ σχ. 42. Προεκβληθήτω ἡ ΑΒ καὶ ἀχθήτω ἐκ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΕ παράλληλος τῇ ΑΓ. Ἡ γωνία ΕΒΔ=Α ὡς ἐντὸς ἐκτὸς, ἡ ΓΒΕ=Γ ὡς ἐναλλὰξ ἐντός· ἄρα Α+Γ+ΓΒΑ= ΕΒΔ+ΓΒΕ+ΓΒΑ=2 ὀρ.

Σχ. 42

Ἡ γωνία ΓΒΔ ἡ σχηματιζομένη ἐκ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΓΒ καλεῖται ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ δὲ γωνίαι Α καὶ Γ ἐντὸς καὶ ἀπέναντι.

Πόρισμα ά. Ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι. Διότι Α=ΕΒΔ καὶ Γ=ΓΒΕ καὶ ΓΒΕ+ΕΒΔ=ΓΒΔ.

Πόρισμα β'. Ἡ τρίτη γωνία τριγώνου εἶναι παραπλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο λοιπῶν. Ἐὰν $^3/_4$ καὶ $^5/_8$ αἱ δύο γωνίαι τριγώνου, ἡ τρίτη ἴση $2-(^3/_4+^5/_8)=\frac{16-11}{8}=^5/_8$.

Πόρισμα γ'. Ὀρθογώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ εἰμὴ μίαν τῶν γωνιῶν ὀρθὴν ἢ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν.

Πόρισμα δ'. Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἰσὶ συμπληρωματικαί.

Πόρισμα έ. Ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἰσογωνίου τριγώνου ἴση δυσὶ τρίτοις τῆς ὀρθῆς· διότι $^2/_3+^2/_3+^2/_3=^6/_3=2$.

Πόρισμα ς'. Δύο τρίγωνα, ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρα ἢ τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἴσον, ἔχουσι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην, ὡς ἔχουσαν ἴσον παραπλήρωμα.

Πόρισμα ζ'. Δύο τρίγωνα ἐν γένει ἔχοντα μίαν πλευρὰν καὶ δύο γωνίας ἴσας εἰσὶν ἴσα. Ἐπειδὴ ἔχουσι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην ἑπομένως τὰς προκειμένας τῇ ἴσῃ πλευρᾷ γωνίας πάντοτε ἴσας.

Πρότασις λ'.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου ἴσον τοσάκις δυσὶν ὀρθαῖς ὅσαι αἱ πλευραὶ πλὴν δύο.

Ἐπειδὴ ἐπιζευγνυομένης μιᾶς τῶν κορυφῶν μετὰ τῶν λοιπῶν μὴ προσκειμένων διαιρεῖται εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα τῷ ἀριθμῷ τῶν πλευρῶν πλὴν δύο.

Ἔστω παραδ. χάριν τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ σχ. 43. Ἀχθήτωσαν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ. Τὸ πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τρία τρίγωνα· ἀλλ' ἕκαστον τρίγωνον δίδει ὀρθὰς δύο· ἄρα τὸ πεντάγωνον δίδει $3 \times 2 = 6$ ὀρθαῖς.

Σχ. 43.

Πόρισμα α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου ἴσον τέσσαρσιν ὀρθαῖς. Ἐὰν ὦσιν ἴσαι, εἰσὶν ὀρθαί.

Πόρισμα β'. Ἐὰν ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν πολυγώνου, $2(\nu-2)$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Ἂν δὲ εἶναι ἰσογώνιον ἑκάστη γωνία ἴση $\dfrac{2(\nu-2)}{\nu}=\dfrac{2\nu-2}{\nu}=2-\dfrac{4}{\nu}$

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

Ὁ κύκλος καὶ τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν.

Ὁρισμοί.

1. *Κύκλος* καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς εὐθείας (ΑΒ σχ. 44,) περὶ τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ ἐπιπέδου. Τὸ κινούμενον ἄκρον τῆς εὐθείας παράγει καμπύλην κα-

Σχ. 44.

λουμένην *περιφέρειαν*. Τὸ ἀκίνητον σημεῖον Α καλεῖται *κέντρον*.

2. *Ἀκτὶς* καλεῖται ἡ εὐθεῖα ὁ ἐπιζευγνύουσα τὸ κέντρον μετά τινος σημείου τῆς περιφερείας οἷον ἡ ΑΒ· *διάμετρος* ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν. Αἱ ἀκτῖνες πᾶσαι εἰσὶν ἴσαι, καὶ αἱ διάμετροι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

3. *Τόξον* καλεῖται μέρος τῆς περιφερείας οἷον τὸ ΒΕΔ. *Χορδὴ* ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου οἷον ἡ ΔΒ. *Τμῆμα* τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τὸ μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς οἷον τὸ ΔΕΒ.

4. *Τομεὺς κυκλικὸς* καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου τὸ μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν περατουμένων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, οἷον ὁ ΒΑΔ.

5. *Εὐθεῖα* ἐγγεγραμμένη καλεῖται ἡ ἔχουσα τὰ ἄκρα ἐπὶ τῆς περιφερείας, οἷον ἡ ΔΒ, ἀπχέτως πρὸς τὸ τόξον.

6. *Γωνία ἐγγεγραμμένη* καλεῖται ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο χορδῶν.

7. *Τρίγωνον* ἐγγεγραμμένον καλεῖται τὸ ἔχον τὰς γωνίας ἐγγεγραμμένας οἷον τὸ ΒΔΓ. Ἐν γένει *σχῆμα ἐγγεγραμμένον* καλεῖται τὸ ἔχον ἐγγεγραμμένας τὰς γωνίας. Ὁ δὲ κύκλος καλεῖται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ σχῆμα.

8. *Γωνία κεντρικὴ* καλεῖται ἡ ἔχουσα ἐν τῷ κέντρῳ τὴν κορυφὴν οἷον ἡ ΒΑΔ.

9. *Διατέμνουσα* ἢ *τέμνουσα* καλεῖται ἀπροσδιόριστος εὐθεῖα συναπαντῶσα τὴν περιφέρειαν οἷον ἡ ΗΘ. *Ἐφαπτομένη* καλεῖται ἡ ἔχουσα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς περιφερείας, οἷον ἡ ΛΚ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Μ.

10. *Πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον* καλεῖται τὸ ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς ἐφαπτομένας. Ὁ κύκλος τότε καλεῖται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ σχῆμα.

Πρότασις ά.

Ἡ διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω ὁ κύκλος ΔΓ, τεμνόμενος ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΑΒ εἰς δύο τμήματα ΑΜΒΓ καὶ ΑΝΒΓ σχ. 45. Περιστραφήτω τὸ τμῆμα ΑΝΒΓ περὶ τὴν διάμετρον μέχρις οὗ πέσει ἐπὶ τοῦ ΑΜΒΓ. Τὰ δύο τμήματα καὶ τὰ δύο τόξα ταὐτίζονται· διότι τὰ μὲν διατρέχονται συγχρόνως ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ κινουμένης, τὰ δὲ ὑπὸ τοῦ ἄκρου αὐτῆς Α.

Σχ. 45.

Πρότασις β΄.

Σχ. 46.

Ἡ χορδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς διαμέτρου.

Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΔ καὶ ΑΒ ἡ διάμετρος σχ. 46 Ἀχθήτω ἡ ΔΓ· τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δίδει ΑΔ$<$ΑΓ$+$ΓΔ· ἀλλὰ ΓΔ$=$ΓΒ· ἄρα ΑΔ$<$ΑΓ$+$ΓΒ ἢ ΑΔ$<$ΑΒ.

Πρότασις γ΄.

Εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ περιφέρειαν κύκλου εἰς πλείονα τῶν δύο σημείων.

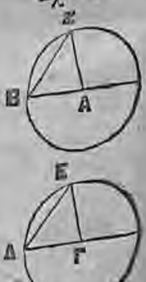
Διότι ἂν συναπήντα αὐτὴν εἰς τρία Λ,Δ,Β σχ. 46, ἐπιζευγνυομένων τούτων μετὰ τοῦ κέντρου, ἤθελον ἀχθῆ ἐξ αὐτοῦ τρεῖς ἴσαι ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης πλάγιαι.

Πρότασις δ΄.

Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις τὰ ἴσα τόξα ἴσας χορδὰς ὑποτείνουσι, καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσα τόξα.

Ἔστωσαν οἱ ἴσοι κύκλοι ΑΒ καὶ ΓΔ σχ. 47· ληφθήτωσαν τὰ τόξα ΔΕ καὶ ΒΖ ἴσα καὶ ἀχθήτωσαν αἱ χορδαὶ ΔΕ, ΒΖ· ἐπιζευχθήτωσαν Α καὶ Β, Α καὶ Ζ, Γ καὶ Δ, Γ καὶ Ε. Ἐπιτεθήτω ὁ τομεὺς ΔΓΕ ἐπὶ τοῦ ΒΑΖ. τὰ τόξα ταὐτίζονται ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν κυρτότητα· ἄρα καὶ αἱ χορδαί.

Σχ. 47.



Ἐὰν δὲ αἱ χορδαὶ ΔΕ καὶ ΒΖ ἴσαι, τὰ τρίγωνα ΑΒΖ καὶ ΔΓΕ ἴσα ὡς ἰσόπλευρα· ἄρα Α$=$Γ. Ὁ τομεὺς ΔΓΕ ταὐτίζεται μὲ τὸν ΒΑΖ καὶ τὸ τόξον ΔΕ μὲ τὸ ΒΖ.

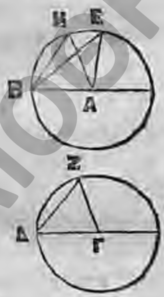
Πόρισμα ά. Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι ὑποτείνουσι τόξα ἴσα καὶ ἀντιστρόφως τὰ ἴσα τόξα ἴσας κεντρικὰς γωνίας.

Πόρισμα β'. Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουσιν ἴσους τομεῖς καὶ ἀντιστρόφως οἱ ἴσοι τομεῖς ἴσα τόξα.

Πρότασις έ.

Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις τὸ μεῖζον τόξον ὑποτείνει μείζονα χορδὴν, καὶ ἀντιστρόφως ἡ μείζων χορδὴ ὑποτείνει μεῖζον τόξον.

Σχ. 48.



Ἔστωσαν οἱ ἴσοι κύκλοι ΑΒ, ΓΔ καὶ τὸ τόξον ΕΒ>ΔΖ σχ. 48. Ληφθήτω ΒΗ ἐπὶ τοῦ κύκλου ΑΒ ἴσον τῷ ΔΖ, καὶ ἐπιζευχθήτω Η καὶ Α, Α καὶ Ε Β καὶ Η. Ἡ χορδὴ ΒΗ=ΔΖ· τὰ δὲ τρίγωνα ΒΑΕ καὶ ΒΑΗ ἔχουσι ΒΑ κοινὴν καὶ ΑΕ=ΑΗ ὡς ἀκτῖνας, τὴν δὲ ΒΑΕ>ΒΑΗ· ἄρα ΒΕ>ΒΗ· ἄρα ΒΕ>ΔΖ.

Ἐὰν δὲ ἡ χορδὴ ΒΕ>ΔΖ, ἡ γωνία ΒΑΕ>Γ, διότι ΒΑ=ΔΓ=ΓΖ=ΑΕ ὡς ἀκτῖνες· ληφθήτω ΒΑΗ=Γ καὶ ἐπιζευχθήτω Β καὶ Η· τὸ τρίγωνον ΒΑΗ=ΔΓΖ ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας πλευρὰς ἴσας· ἄρα ΔΖ=ΒΗ καὶ τόξον ΔΖ=ΒΗ· ἀλλὰ τόξον ΒΗ < τόξου ΒΕ· ἄρα καὶ ΔΖ τόξον < τόξου ΒΕ.

Σχόλιον. Τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τόξα θεωροῦνται ἐλάσσονα τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἐὰν θεωρηθῶσι τὰ μείζονα τῆς ἡμιπεριφερείας συμβαίνει το ἐναντίον.

Πρότασις ς'.

Ἡ ἀκτὶς ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον ὑπ' αὐτῆς τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΒ καὶ ἡ ἀκτὶς ΓΔ κάθετος ἐπ' αὐτῆς σχ. 49. ἐπιζευχθήτωσαν Γ καὶ Α, Γ καὶ Β, Ε καὶ Α, Ε καὶ Β. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοσκελὲς ἡ κάθετος ΓΔ πίπτει ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ΑΒ, ὥστε Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς. Ἐπειδὴ ΔΓ κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ, τὸ σημεῖον Ε ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Β, ὥστε ΑΕ χορδὴ ἴση ΕΒ· ἄρα καὶ τόξον ΑΕ ἴσον τῷ ΕΒ καὶ Ε μέσον τοῦ τόξου ΑΕΒ.

Σχ. 49.

Πόρισμα ά. Τὰ τρία σημεῖα Γ, Δ, Ε κεῖνται ἀπ' εὐθείας. Πᾶσα λοιπὸν εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῶν δύο τούτων διέρχεται καὶ διὰ τοῦ τρίτου.

Πόρισμα β΄. Ἡ ὑψουμένη κάθετος ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. Διότι ἐκ σημείου τινὸς ἐπ᾽ εὐθείας μία μόνη κάθετος ἄγεται.

Πρότασις ζ΄.

Διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ᾽ εὐθείας διέρχεται περιφέρεια κύκλου μία καὶ μόνη.

Ἔστωσαν τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας. Ἐπιζευχθήτωσαν Α καὶ Β, Β καὶ Γ καὶ ἐκ τοῦ μέσου τῶν εὐθειῶν ΑΒ, καὶ ΓΒ, ἀχθήτωσαν αἱ κάθετοι ΔΖ καὶ ΕΗ σχ. 50. Αἱ κάθετοι αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι, διότι ἐπιζευγνυομένων Δ καὶ Ε διὰ τῆς ΔΕ, ἡ ΕΔΖ καὶ ἡ ΗΕΔ ὀξεῖαι· ἐπομένως ΕΔΖ + ΗΕΔ < 2 ὀρθ: ἄρα ΔΖ καὶ ΕΗ τέμνονται εἰς Ο. Ἐπιζευχθήτω Ο μετὰ τοῦ Α, τοῦ Β καὶ τοῦ Γ. Αἱ πλάγιαι ΑΟ καὶ ΟΒ ἴσαι ὡς ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου Δ· ὁμοίως ΒΟ=ΟΓ ὡς ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΟΕ. Ἄρα ΑΟ=ΟΒ=ΟΓ καὶ ἐπομένως διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ διέρχεται περιφέρεια, ἔχουσα κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ.

Σχ. 50.

Μία δὲ μόνη περιφέρεια διέρχεται, διότι πᾶσα περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Α, Β, Γ ἔχει τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς συναπαντήσεως τῶν ὑψουμένων καθέτων ἐκ τοῦ μέσου τῶν χορδῶν ΑΒ, καὶ ΒΓ, ἐπομένως ἔχει κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ, ὥστε ταὐτίζεται μὲ τὸν κύκλον ΑΟ.

Πόρισμα. Δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ τμηθῶσιν εἰς πλείονα τῶν δύο σημείων.

Πρότασις ή.

Ἡ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, καὶ ἀντιστρόφως ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος.

Σχ. 51.

Ἔστω ἡ ΒΓ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος ΑΒ σχ. 51. Πᾶν σημεῖον τῆς ΓΔ οἷον Ε προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς πλαγίας ΑΕ > ΑΒ, κεῖται ἐπομένως ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ἐξαιρουμένου τοῦ Β· ἄρα ΓΔ ἐφαπτομένη.

Πᾶσα δὲ εὐθεῖα ΖΗ διάφορος τῆς ΓΔ

Πόρισμα α'. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τρίτῃ καὶ ἀλλήλαις παράλληλοί εἰσιν. Διότι ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς τρίτης ἵσταται καὶ ἐπ' αὐτῶν κάθετος.

Πόρισμα β'. Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ αἱ ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί· σχ. 37. Διότι ΔΕΖ=ΑΘΕ καὶ ΑΘΕ=Β ὡς ἐντὸς ἐκτός· ἄρα ΔΕΖ=Β. Ἀλλὰ ΗΕΔ+ΔΕΖ=2 ὀρ. ὡς προσκείμεναι· ἄρα ΗΕΔ+Β=2 ὀρ.

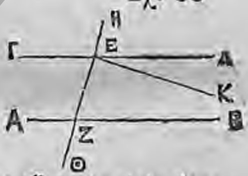
Σχ. 37

Πρότασις κγ'.

Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζουσαι τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς ἢ τὰς ἐναλλὰξ ἐκτὸς ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς ἴσας· ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τῶν ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τῶν ἐναλλὰξ ἐντὸς ἐκτὸς ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἵτινες τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΗΘ σχηματίζουσι τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς ΔΕΖ καὶ ΕΖΑ ἴσας σχ. 38. Ἐὰν ΓΔ δὲν ἦναι παράλληλος τῇ ΑΒ, ἔστω ἡ ΕΚ· τότε ΚΕΖ=ΕΖΑ ὡς ἐναλλὰξ ἐντός· ἀλλὰ ΕΖΑ=ΖΕΔ· ἄρα ΚΕΖ=ΔΕΖ, ὅπερ ἄτοπον.

Σχ. 38



Εἰς ταύτην ἀνάγονται καὶ αἱ λοιπαὶ περιστάσεις, διότι ἕπεται ἐξ αὐτῶν ὅτι αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς εἰσὶν ἴσαι.

Πρότασις κδ'.

Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζουσαι τὰς ἐντὸς ἐκτὸς ἢ τὰς ἐναλλὰξ ἐντὸς ἢ τὰς ἐναλλὰξ ἐκτὸς ἀνίσους, ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς ἢ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τῶν ἐναλλὰξ ἐντὸς ἐκτὸς μεῖζον ἢ ἔλασσον δύο ὀρθῶν δὲν εἶναι παράλληλοι· καὶ συναπαντῶνται καθ' ὃ μέρος τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔλασσον δύο ὀρθῶν.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἵτινες τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΗΘ σχηματίζουσι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΒΕΖ καὶ ΕΖΔ ἔλασσον δύο ὀρθῶν σχ. 39. Ἀχθήτω ἡ ΕΚ οὕτως ὥστε ΚΕΖ+ΕΖΔ=2 ὀρ. Αὕτη εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ· ἄρα ἡ ΑΒ τέμνει τὴν ΓΔ καὶ πρὸς τὸ

Σχ. 39

διερχομένη διὰ τοῦ Β εἶναι πλαγία ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΑΒ· ἄρα ἡ κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἐκ τοῦ κέντρου ΑΟ < ΑΒ. ἄρα ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν· ὥστε ἡ ἐφαπτομένη ἴσαται κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος.

Πρότασις θ'.

Αἱ ἴσαι χορδαὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἐπὶ ἴσων κύκλων ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου, ἐκ δὲ τῶν ἀνίσων χορδῶν ἡ μείζων ἧττον ἀπέχει τοῦ κέντρου.

Σ.χ. 52.

Ἔστωσαν αἱ ἴσαι χορδαὶ ΑΒ, ΔΓ ἐπὶ τοῦ κύκλου ΑΚ σχ. 52. Ἀχθήτωσαν ἐκ τοῦ κέντρου Κ αἱ κάθετοι ἐπὶ τῶν χορδῶν τούτων ΕΚ, ΚΖ καὶ ἐπιζευχθήτω Κ μετὰ τοῦ Α καὶ Γ. Τὰ τρίγωνα ΑΚΕ καὶ ΓΚΖ εἶναι ἴσα· διότι εἶναι ὀρθογώνια ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ΚΑ, ΚΓ ἴσας ὡς ἀκτῖνας καὶ τὰς ΑΕ, ΓΖ ἴσας ὡς ἡμίσεα ἴσων ποσοτήτων.

Ἐὰν ΓΙ > ΑΒ, ληφθήτω ΓΔ = ΑΒ καὶ ἀχθήτωσαν αἱ κάθετοι ΚΗ, ΚΖ ἐπὶ τῶν χορδῶν ΓΔ, ΓΙ ἐκ τοῦ κέντρου. Κατὰ τὴν προηγουμένην ΚΕ = ΚΖ· ἀλλὰ ΚΖ > ΚΘ > ΚΗ· ἄρα ΚΖ ἢ ΕΚ > ΚΗ.

Πρότασις ι'.

Δύο περιφέρειαι τέμνονται ὁσάκις ἡ κεντρικὴ γραμμὴ εἶναι ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μείζων τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἡ κεντρικὴ γραμμὴ εἶναι ἢ ἴση ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς μείζονος τῶν ἀκτίνων.

Σχ. 53.

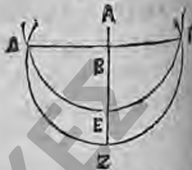
Ἐὰν ἴση, ἔστω ΑΒ ἡ κεντρικὴ γραμμὴ καὶ ἡ μείζων ἀκτὶς σχ. 53. Ὁ κύκλος ΑΒ θέλει διέλθει διὰ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου Β· ἄρα οἱ κύκλοι τέμνονται εἰς Γ καὶ Δ.

Ἐὰν ἡ κεντρικὴ γραμμὴ μείζων τῆς μείζονος ἀκτῖνος, ἔστω ΑΒ ἡ κεντρικὴ γραμμὴ καὶ ΑΕ ἡ μείζων ἀκτὶς σχ. 54. Ὁ πρῶτος κύκλος θέλει τέμνει τὴν ΑΒ εἰς Ε μεταξὺ Α καὶ Β· ὁ δὲ δεύτερος εἰς Ζ μεταξὺ Α καὶ Ε, διότι ἡ κεντρικὴ γραμμὴ ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων· ἄρα οἱ κύκλοι τέμνονται, διότι ὁ ἕτερος εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἑτέρου.

Σχ. 54.

Ἐὰν ἡ κεντρικὴ γραμμὴ ἐλάσσων τῆς μείζονος ἀκτῖνος, ἔστω ΑΒ ἡ κεντρικὴ γραμμή, ΑΕ ἡ μεί-

Σχ. 55.



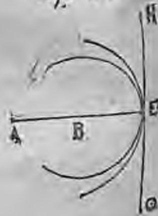
ζων ἀκτὶς σχ. 55 καὶ ΒΖ ἡ ἐλάσσων. Ἐπειδὴ ΑΒ > ΑΕ—ΒΖ, ἕπεται ὅτι ΑΒ+ΖΒ > ΑΕ· ἡ μείζων λοιπὸν περιφέρεια τέμνει τὴν ΑΖ μεταξὺ τοῦ κέντρου Β τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ τοῦ σημείου τῆς περιφερείας αὐτοῦ Ζ· ἄρα οἱ κύκλοι τέμνονται.

Πόρισμα. Ὅταν δύο κύκλοι τέμνονται ἡ κεντρικὴ γραμμὴ ἔσεται κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς κοινῆς χορδῆς ΓΔ σχ. 53, 54, 55. Διότι ἡ ὑψουμένη κάθετος ἐκ τοῦ μέσου τῆς κοινῆς χορδῆς διέρχεται διὰ τῶν κέντρων καὶ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν κεντρικὴν γραμμὴν ΑΒ.

Πρότασις ιά.

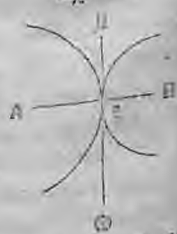
Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς μὲν ὅταν ἡ κεντρικὴ γραμμὴ ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων, ἐξωτερικῶς δὲ ὅταν ἡ κεντρικὴ γραμμὴ ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων.

Σχ. 56.



Ἔστω ΑΒ=ΑΕ—ΒΕ, τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων ΑΕ καὶ ΒΕ σχ. 56. Αἱ δύο περιφέρειαι θέλουσι διέλθει διὰ τοῦ Ε καὶ μόνον αὐτὸ ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, διότι ἂν εἶχον καὶ ἄλλο, ἡ μείζων ἀκτὶς ἤθελεν ἔσθαι ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τῆς κεντρικῆς γραμμῆς καὶ τῆς ἐλάσσονος ἀκτῖνος· ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ΑΒ ἐπιζευγνυόμενα ἤθελον σχηματίσει τρίγωνον.

Σχ. 57.



Ἔστω δεύτερον ΑΒ=ΑΕ+ΒΕ, τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἀκτίνων ΑΕ καὶ ΒΕ σχ. 57. Αἱ δύο περιφέρειαι θέλουσι διέρχεσθαι διὰ τοῦ σημείου Ε καὶ τοῦτο μόνον θέλουσιν ἔχει κοινόν· ἄλλως τὸ νέον κοινὸν σημεῖον ἐπιζευγνυόμενον μετὰ τῶν Α καὶ Β ἤθελε σχηματίσει τρίγωνον καὶ ἡ ΑΒ ἤθελεν εἶσθαι ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΕ+ΒΕ, ὅπερ ἄτοπον.

Πόρισμα ά. Τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς καὶ τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς κεντρικῆς γραμμῆς, ἡ κάθετος αὕτη εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων.

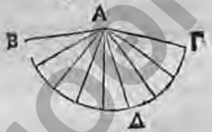
Πόρισμα β΄. Δύο κύκλοι ἔχοντες τὰ κέντρα ἐπὶ εὐθείας τινὸς καὶ διερχόμενοι διὰ τρίτου σημείου τῆς εὐθείας ταύτης ἐφάπτονται· Διότι τότε ἡ κεντρικὴ γραμμὴ ἴση τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων.

Πόρισμα ιβ'.

Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ κεντρικαὶ γωνίαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τόξα καὶ ἀντιστρόφως τὰ τόξα ἀνάλογα πρὸς τὰς κεντρικὰς γωνίας.

Ἢ ὑπάρχει τρίτη γωνία διαιροῦσα ἀκριβῶς τὰς δεδομένας ὅτε καλοῦνται *συμμετρικαί*, ἢ δὲν ὑπάρχει τοιαύτη ὅτε αἱ γωνίαι καλοῦνται *ἀσύμμετροι*.

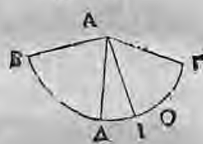
Σχ. 58.



1ον Ἔστωσαν αἱ δύο γωνίαι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ ἀριθμοὶ 8: 5. Ἡ μὲν ΒΑΓ διαιρεῖται εἰς ὀκτὼ ἴσας γωνίας, ἡ δὲ ΒΑΔ εἰς 5 σχ. 58. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται εἰσὶν ἴσαι, ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ τόξα· ἄρα τόξ. ΒΓ=8 καὶ τόξον ΒΔ =5 καὶ ΒΓ:ΒΔ::8:5. Ἄρα ΒΑΓ:ΒΑΔ:: τόξ. ΒΓ: τόξ. ΒΔ.

Ἀντιστρόφως ἐὰν τὰ τόξα ΒΓ καὶ ΒΔ ἔχουσι λόγον ὡς 8:5, ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ κεντρικαὶ γωνίαι ἴσαι, διότι ὑποτείνουσι τόξα ἴσα, αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΑΔ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἑπομένως ΒΑΓ: ΒΑΔ:: τόξ. ΒΓ: τόξ. ΒΔ.

Σχ. 59.



2ον Ἐὰν αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ἦναι ἀσύμμετροι, ἔστωσαν αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΑΔ σχ. 59. Ἀφ' οὗ δὲν ὑπάρχει τότε ἐξ ὑποθέσεως ἡ ἀναλογία ΒΑΓ: ΒΑΔ:: τόξ. ΒΓ: τόξ. ΒΔ, θέλει ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΒΑΓ: ΒΑΔ:: τόξ. ΒΓ: τόξ. ΒΟ (1), ὄντος ΒΟ > ΒΔ ἢ ΒΟ < ΒΔ. Τεθήτω ΒΟ > ΒΔ.

Τὸ τόξον ΒΓ δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη ἐλάσσονα τοῦ ΔΟ, διὰ τῆς ἀπὸ δύο εἰς δύο ἴσα μέρη διαιρέσεως αὐτοῦ· ἀλλ' οὐδὲν σημεῖον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως δύναται νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ· ἄλλως ΒΓ καὶ ΒΔ ἤθελον εἶσθαι συμμετρικά, ἑπομένως καὶ αἱ γωνίαι. Ἐν τούτων τῶν σημείων ἑπομένως θέλει κεῖσθαι πρὸ τοῦ Δ πρὸς τὸ Β, τὸ δὲ ἑπόμενον πέραν τοῦ Δ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἐλάσσων ΔΟ, τὸ δεύτερον σημεῖον θέλει εἶσθαι μεταξὺ Ο καὶ Δ εἰς Ι, ὥστε ΒΓ καὶ ΒΙ νὰ ὦσι συμμετρικά. Ἐπιζευχθήτω Α καὶ Ι. Ἐπειδὴ τὰ τόξα ΒΓ καὶ ΒΙ συμμετρικά, ἔσεται ἡ ἀναλογία

ΒΑΓ: ΒΑΙ:: τόξ. ΒΓ: τόξ. ΒΙ. (2).

Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς ἡγουμένους, οἱ ἑπόμενοι σχηματίζουσι τὴν ἀναλογίαν

ΒΑΔ: ΒΑΙ:: τόξ. ΒΟ: τόξ. ΒΙ. (3).

Ἀλλὰ ΒΑΔ < ΒΑΓ ἄρα τόξ. ΒΟ < τόξ. ΒΙ, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐὰν δὲ τόξ. ΒΟ < τόξ. ΒΔ, τὸ σημεῖον Ι θέλει εἶσθαι μεταξὺ

Δ καὶ Ο πρὸς τὸ Β' καὶ τότε ἐν τῇ (3) ἀναλογίᾳ, ἐπειδὴ ΒΑΔ > ΒΑΙ καὶ τόξ. ΒΟ > τόξ. ΒΙ, ὅπερ ἐπίσης ἄτοπον.

Ἄρα αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ἐν γένει εἰσὶν ἀνάλογοι πρὸς τὰ τόξα.

Πόρισμα α'. Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις οἱ τομεῖς εἰσὶν ἀνάλογοι πρὸς τὰ τόξα καὶ ἀντιστρόφως· διότι εἰς τοὺς ἀνωτέρω συλλογισμοὺς ἀντὶ τῶν γωνιῶν δυνατὸν νὰ ἀντικατασταθῶσιν οἱ τομεῖς.

Πόρισμα β'. Πᾶσα περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 360 μέρη καλούμενα *τοξομοίρας* καὶ αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς 360 μέρη καλούμενα *γωνιομοίρας*· ὅσας μονάδας ἐπομένως ἔχει τόξον τι, ἰσαρίθμους ἔχει καὶ ἡ ἀντίστοιχος κεντρικὴ γωνία· ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ τόξον ἐκφράζει καὶ τὴν γωνίαν. Τοῦτο δὲ ἐκφράζεται οὕτω, *τὸ τόξον μετρεῖ τὴν γωνίαν*, ἀνακριβὴς ἀλλὰ σύντομος ἔκφρασις, διότι ἄλλη ἡ μονὰς τοῦ τόξου καὶ ἄλλη ἡ τῆς γωνίας, ἀλλ' ἐν κοινῇ χρήσει.

Αἱ μοῖραι σημειοῦνται ὑπὸ τοῦ Ο, τὰ ἑξηκοστὰ τῆς μοίρας καλούμενα *λεπτὰ πρῶτα* ὑπὸ μιᾶς ', τὰ δὲ ἑξηκοστὰ τῶν πρώτων καλούμενα *λεπτὰ δεύτερα* ὑπὸ δύο '', τιθεμένων ἄνω καὶ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, οἷον $35^0\ 48'\ 57''$ ἀναγινώσκεται 35 μοῖραι 48 πρῶτα καὶ 57 δεύτερα.

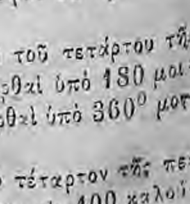
Ἡ ὀρθὴ περιέχει 90 μοίρας καὶ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας, ἡ ἡμίσεια ὑπὸ 45 μοιρῶν, αἱ δύο ὀρθαὶ ὑπὸ 180 μοιρῶν ἢ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ ὑπὸ 360^0 μοιρῶν ἢ ὑπὸ τῆς περιφερείας.

Ἀντὶ νὰ διαιρῆται ἡ ὀρθὴ εἰς 90 μέρη καὶ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, διαιροῦνται εἰς 100 καὶ ἕκαστον τούτων εἰς 100 καλούμενα ὁμοίως μοῖραι, λεπτὰ πρῶτα καὶ λεπτὰ δεύτερα. Ἡ διαίρεσις αὕτη καλεῖται νέα, ἡ δὲ παλαιά· ἡ νέα εἶναι προτιμοτέρα, διότι φέρει εἰς πράξεις ἐπὶ δεκαδικῶν, ἐνῷ ἡ παλαιὰ φέρει ἐπὶ συμμιγῶν· ἀλλ' ἡ παλαιὰ εἶναι ἡ συνηθεστέρα.

Πρότασις ιγ'.

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμπεριλαμβανομένου τόξου.

Σχ. 60.



Ἢ τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν ἢ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς γωνίας.

1ον Ἔστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ, ἔχουσα τὸ κέντρον Κ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν ΑΓ σχ. 60. Ἐπιζευχθήτω Β μετὰ τοῦ Κ. τὸ τρίγωνον ΑΒΚ ἰσοσκελὲς, διότι ΒΚ=ΑΚ ὡς ἀκτῖνες. Ἄρα Β=ΒΑΚ· Ἀλλ' ἡ ἐκτὸς γωνία ΒΚΓ=Β+ΒΑΚ. Ἄρα ΒΚΓ=2 ΒΑΓ καὶ ΒΑΓ=$\frac{1}{2}$ ΒΚΓ. Ἀλλ' αὐτὴ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τόξου ΒΓ· ἄρα ΒΑΓ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἐμπεριλαμβανομένου τοῦ τόξου ΒΓ.

2ον Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΔ, ἔχουσα τὸ κέντρον ἐντὸς τῶν σκελῶν σχ. 60. Ἀχθήτω ἡ διάμετρος ΑΚΓ διαιροῦσα τὴν γωνίαν εἰς τὰς ΒΑΓ καὶ ΓΑΔ. Ἀλλὰ κατὰ τὴν πρώτην περίστασιν ἡ ΒΑΓ μετρεῖται ὑπὸ $\frac{ΒΓ}{2}$, καὶ ἡ ΓΑΔ ὑπὸ τοῦ $\frac{ΓΔ}{2}$· ἄρα ΒΑΔ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ

$$\frac{ΒΓ}{2}+\frac{ΓΔ}{2}=\frac{ΒΔ}{2}.$$

3ον Ἔστω ἡ γωνία ΔΑΕ, ἔχουσα τὸ κέντρον ἐκτὸς τῶν σκελῶν. Ἀχθήτω ἡ διάμετρος ΑΚΓ· ἡ ΔΑΕ=ΓΑΕ−ΓΑΔ· ἀλλ' ἡ μὲν μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τόξου $\frac{ΓΕ}{2}$, ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ $\frac{ΓΔ}{2}$· ἄρα ΔΑΕ μετρεῖται

$$\text{ὑπὸ } \frac{ΓΕ}{2}-\frac{ΓΔ}{2}=\frac{ΔΕ}{2}.$$

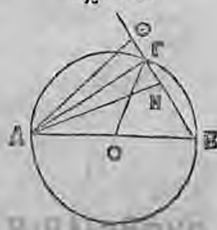
Σχ. 61.

Πόρισμα ά. Αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ τμήματος εἰσὶν ἴσαι. Διότι μετροῦνται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ αὐτοῦ τόξου, οἷον αἱ ΑΜΒ καὶ ΑΝΒ σχ. 61.

Πόρισμα β'. Ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα μεῖζον τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι ὀξεῖα, οἷον ἡ ΑΜΒ, ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα ἔλασσον τοῦ ἡμικυκλίου ἀμβλεῖα, οἷον ΑΓΒ, καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα ἴσον τῷ ἡμικυκλίῳ ὀρθή, οἷον ἡ ΜΑΖ· διότι ἡ μὲν μετρεῖται ὑπὸ τόξου ἐλάσσονος τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ τόξου μείζονος αὐτοῦ, ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας.

Πόρισμα γ'. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παντὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς, διότι μετρεῖται ὑπὸ ἡμιπεριφερείας, οἷον ΑΜΒ+ΑΓΒ ἢ ΜΑΓ+ΓΒΜ σχ. 61.

Σχ. 62.



Πόρισμα δ'. Ἡ γραφομένη περιφέρεια ἐπὶ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ σχ. 62. διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς. Διότι ἐὰν ἤθελε τέμνει τὴν ΓΒ ὑπὸ ἢ ὑπὲρ τὸ Γ εἰς Η ἢ Θ, ἐπιζευγνυομένου Α μετὰ τοῦ Η ἢ μετὰ τοῦ Θ, ἤθελον ἄγεσθαι ἐκ τοῦ Α δύο κάθετοι ἡ ΑΓ καὶ ἡ

ΑΠ ἢ ΑΘ, ἐπειδὴ τότε ἡ ΑΠΒ ἢ ἡ ΑΘΒ ἤθελεν εἶσθαι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. *Τὸ μέσον λοιπὸν τῆς ὑποτεινούσης Ο ἀπέχει ἰσάκις τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.*

Πόρισμα έ. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ ἐφαπτομένης καὶ χορδῆς ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμπεριλαμβανομένου τόξου. Διότι ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ σχ. 63 σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΑΓ. Ἀχθήτω ἡ διάμετρος ΑΕ. Ἡ γωνία ΓΑΕ ὡς ὀρθὴ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΒΕ, ἡ δὲ ΒΑΕ ὡς ἐγγεγραμμένη μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΒΕ· ἄρα ἡ ΓΑΒ διαφορὰ αὐτῶν, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΒΜΑ διαφορᾶς τῶν τόξων ΑΒΕ καὶ ΒΕ.

Σχ. 63.

Ἡ δὲ γωνία ΒΑΔ παραπλήρωμα τῆς ΓΑΒ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τῆς λοιπῆς περιφερείας ΒΕΝΑ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΤΟΥ Α΄ ΚΑΙ ΤΟΥ Β΄ ΒΙΒΛΙΟΥ.

Τὰ ὄργανα δι' ὧν λύονται γραφικῶς τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα εἶναι ὁ *κανὼν* καὶ ὁ *διαβήτης*.

Κανὼν εἶναι ὄργανον δι' οὗ γράφονται εὐθεῖαι. Ἐπαληθεύεται ὡς ἕπεται· γράφεται γραμμὴ δι' αὐτοῦ· ἔπειτα στρέφονται τὰ ἄκρα αὐτοῦ καὶ φερομένου τοῦ κανόνος ἐπὶ τῶν ἄκρων τῆς πρώτης, γράφεται δευτέρα γραμμὴ ἐπ' αὐτῆς· ἐὰν αἱ δύο γραμμαὶ ταυτίζωνται, εἰσὶν εὐθεῖαι καὶ ὁ γνώμων ἀκριβής.

Ὁ *διαβήτης* εἶναι ὄργανον σχηματιζόμενον ἐκ δύο κανόνων ληγόντων εἰς ὀξύ, συνδεδεμένων κατὰ τὰ ἀντίθετα ἄκρα δι' ἥλου, περὶ ὃν δύνανται νὰ περιστρέφωνται μετὰ σκληρᾶς τριβῆς. Διὰ τοῦ διαβήτου γράφονται περιφέρειαι κύκλου σχ. 64.

Σχ. 64.

Πρόβλημα ά. Μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β σχ. 65 θεῖαν ἀγαγεῖν.

Φέρεται ὁ κανὼν ἐπὶ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β, καὶ ἐπ' αὐτοῦ κινεῖται ἡ γραφίς.

Σχ. 65

Ἐὰν ἦναι μακρὰ εὐθεῖα, ἐπὶ τῶν ἄκρων αὐτῆς στηρίζονται τὰ ἄκρα κεχρωματισμένης κλωστῆς καὶ ἀνυψοῦται τὸ μέσον διὰ τῶν δακτύλων, ἔπειτα ἀφίνεται καὶ τὸ πίπτον χρῶμα ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν.

Πρόβλημα β'. Διὰ μικροῦ κανόνος μακρὰν εὐθεῖαν γράψαι.

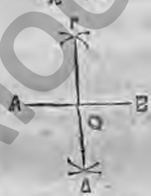
Ἔστω ΑΒ τὸ μῆκος τοῦ κανόνος καὶ ΑΓ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας σχ. 66.

Σχ. 66.

Γράφεται διὰ τοῦ κανόνος ἡ εὐθεῖα ΑΒ· ἔπειτα φέρεται τὸ ἄκρον αὐτοῦ εἰς Δ καὶ ὁ κανὼν ἐπὶ τῆς ΔΒ καὶ γράφεται ἡ ΔΕ· οὕτως ἐκτείνεται ἡ εὐθεῖα μέχρις Ε, διότι αἱ ΑΒ καὶ ΔΕ ταὐτίζονται ὡς ἔχουσαι δύο κοινὰ σημεῖα Δ καὶ Β· καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ Γ.

Πρόβλημα γ'. Εὐθεῖαν δεδομένην ΑΒ δίχα τεμεῖν.

Σχ. 67



Κέντρῳ μὲν τῷ Α καὶ Β διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, ἀλλὰ μείζονι τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, γραφθήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα εἰς Γ καὶ Δ σχ. 67· ἐπιζευχθήτω ΓΔ· τὸ σημεῖον Ο καθ' ὃ ἡ ΓΔ τέμνει τὴν ΑΒ εἶναι τὸ μέσον αὐτῆς. Διότι Γ καὶ Δ ἀπέχουσιν ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Β καὶ προσδιορίζουσι τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ὑψουμένην κάθετον.

Πρόβλημα δ'. Ἐκ σημείου τινὸς Α τῆς εὐθείας ΒΓ ὑψῶσαι ἐπὶ τῆς εὐθείας κάθετον.

Σχ. 68.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ κατ' ἀρέσκειαν γραφθήτω περιφέρεια τέμνουσα τὴν ΒΓ εἰς Δ καὶ Ε σχ. 68. κέντρῳ δὲ τῷ Ε καὶ Δ καὶ διαστήματι τῷ αὐτῷ καὶ μείζονι τῆς ΕΑ γραφθήτωσαν περιφέρειαι τεμνόμεναι εἰς Ζ· ἐπιζευχθήτω Ζ καὶ Α· ΖΑ θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη κάθετος. Διότι Α καὶ Ζ ἀπέχουσιν ἰσάκις τῶν ἄκρων Ε καὶ Δ.

Πρόβλημα ε'. Ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΓ κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀγαγεῖν σχ. 69.

Σχ. 69.

Κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ ἱκανῷ γραφθήτω περιφέρεια τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς Δ καὶ Ε. Κέντρῳ τῷ Δ καὶ Ε διαστήματι δὲ μείζονι τοῦ ἡμίσεος τῆς ΔΕ γραφθήτωσαν περιφέρειαι τεμνόμεναι εἰς Ζ. Ἐπιζευχθήτω Γ καὶ Ζ· ἡ ΓΖ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Ἐπειδὴ Γ καὶ Ζ ἰσάκις ἀπέχουσι τῶν ἄκρων Δ καὶ Ε, ἐπομένως ὁρίζουσι τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΔΕ ὑψούμενον κάθετον· ἐκ δὲ τοῦ σημείου Γ μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ τὸ ἄγειν καθέτους καὶ τὸ κατασκευάζειν ὀρθὰς γωνίας εἶναι συνήθης γεωμετρικὴ πρᾶξις διὰ τοῦτο ὑπάρχει ἐπὶ τούτου ὄργανον καλούμενον γνώμων, συνιστάμενον ἐκ δύο καθέτων κανόνων σχ. 70.

Σχ. 70.

Πρόβλημα ς'. Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΑΒ ἀπὸ δεδομένου σημείου Α γωνίαν ἴσην τῇ δεδομένῃ Κ κατασκευάσαι σχ. 71.

Κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ κατ' ἀρέσκειαν γραφθήτω τὸ τόξον ΓΔ. Κέντρῳ τῷ Α καὶ διαστήματι τῷ αὐτῷ γραφθήτω τὸ τόξον ΟΠ τέμνον τὴν ΑΒ εἰς Ο. Κέντρῳ τῷ Ο καὶ διαστήματι ΔΓ γραφθήτω περιφέρεια τέμνουσα τὸ τόξον ΟΠ εἰς Θ· ἐπιζευχθήτω Α καὶ Θ· ἡ γωνία ΟΑΘ εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι αἱ κεντρικαὶ γωνίαι Κ καὶ ΟΑΘ μετροῦνται ὑπὸ τῶν ἴσων τόξων ΓΔ καὶ ΟΘ γεγραμμένων μ[illegible] ἀκτίνας σχ. 71.

Σχ. 71.

Πρόβλημα ς'. Γωνίαν ΒΑΓ ἢ τόξον δεδομένον ΔΕ δίχα τεμεῖν σχ. 72.

Σχ. 72.

Ἐὰν πρόκηται περὶ τῆς γωνίας ΒΑΓ, κέντρῳ τῷ Α καὶ διαστήματι ΑΔ κατ' ἀρέσκειαν γραφθήτω τὸ τόξον ΔΕ. Κέντρῳ τῷ Δ καὶ Ε καὶ διαστήματι τῷ αὐτῷ γραφθήτωσαν περιφέρειαι τεμνόμεναι εἰς Ζ. Ἐπιζευχθήτω Α καὶ Ζ· ἡ ΑΖ διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ καὶ τὸ τόξον ΔΕ εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ΑΖ ἵσταται κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΔΕ.

Ὁμοίως διχοτομεῖται τὸ τόξον ΔΕ.

Πρόβλημα ή. Διὰ δεδομένου σημείου Γ εὐθεῖαν παράλληλον εὐθείᾳ δεδομένῃ ΑΒ ἀγαγεῖν σχ. 73.

Σχ. 73.

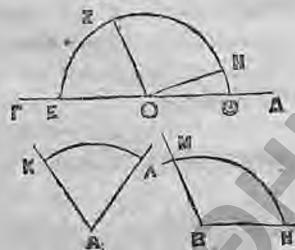
Ἐκ τοῦ Γ ἀχθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΓΔ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἑτέρα κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ. Αἱ εὐθεῖαι ΕΓ καὶ ΑΒ παράλληλοι καθὸ κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΓΔ.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ τὸ ἄγειν παραλλήλους εἶναι σύνηθες ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ὑπάρχει ἐπὶ τούτου ὄργανον καλούμενον παραλληλόγραμμον συνιστάμενον ἐκ δύο κανόνων συνδεδεμένων διὰ τεσσάρων ἥλων ὑπὸ δύο ἰσομήκων ὀρειχαλκίνων διατεμνουσῶν οὕτως ὥστε να δύνανται νὰ πλησιάζωσι καὶ ἀπομακρύνωνται ἀπ' ἀλλήλων σχηματίζοντες μετὰ τῶν διατεμνουσῶν παραλληλόγραμμον. σχ. 74.

Σχ. 74

Πρόβλημα θ'. Δεδομένων δύο τῶν τριῶν γωνιῶν (Α, Β) τριγώνου εὑρεῖν τὴν τρίτην (σχ. 75).

Σχ. 75.



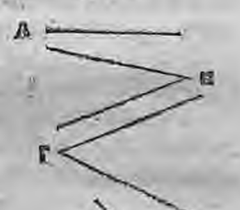
Ἐπὶ τῆς ΑΓ γραφθήτω ἡ ἡμιπεριφέρεια ΕΖΗΘ καὶ τῷ αὐτῷ διαστήματι γραφθήτωσαν μεταξὺ τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τὰ τόξα ΚΛ, ΜΝ· ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ληφθήτω ΕΖ ἴσον τῷ ΚΛ καὶ ΖΗ=ΜΝ, καὶ ἐπιζευχθήτω Ο μετὰ τοῦ Η. Ἡ γωνία Α=ΕΟΖ, Β=ΖΟΗ· ἄρα ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου ἴση τῇ ΗΟΘ, διότι προστιθεμένη μετὰ τῶν λοιπῶν δύο παράγει δύο ὀθάς.

Σχ. 76.

Πρόβλημα ι. Δεδομένων δύο τῶν πλευρῶν (Α, Β) τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας (Γ,) τὸ τρίγωνον κατασκευάσαι. σχ. 76.

Ἀχθήτω ἡ ἀπροσδιόριστος εὐθεῖα ΔΕ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἐπ' αὐτῆς κατασκευασθήτω γωνία ἴση τῇ Γ· ληφθήτω ΔΖ=Α καὶ ΔΗ=Β καὶ ἐπιζευχθήτωσαν Ζ καὶ Η. ΖΔΗ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Σχ. 77.



Πρόβλημα ιά. Δεδομένης μιᾶς πλευρᾶς Α τριγώνου καὶ δύο γωνιῶν Γ καὶ Β, τὸ τρίγωνον κατασκευάσαι σχ. 77.

Ἐὰν αἱ γωνίαι Γ καὶ Β ὦσι προσκείμεναι τῇ Α, ἀχθήτω ἡ ἀπροσδιόριστος ΕΖ καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθήτω ΕΗ=Α, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΖ ἀπὸ τῶν σημείων Ε καὶ Η κατασκευασθήτωσαν αἱ ΘΕΗ καὶ ΕΗΘ ἴσαι ταῖς Β καὶ Γ. ΕΓΘ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Ἐὰν αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι ὦσιν ἡ μὲν προσκειμένη ἡ δὲ ἀπέναντι, εὑρίσκεται καὶ ἡ ἄλλη προσκειμένη, ἀκολούθως λύεται ὡς ἀνωτέρω τὸ πρόβλημα.

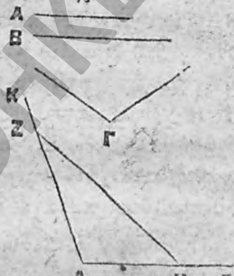
σχ. 78.

Πρόβλημα ιβ'. Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν Α, Β, Γ τριγώνου, τὸ τρίγωνον καυασκευάσαι σχ. 78.

Ἀχθήτω ἡ ἀπροσδιόριστος εὐθεῖα ΔΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθήτω ΔΖ= Α· ἀκολούθως κέντρῳ τῷ Δ καὶ Ζ καὶ διαστήμασι Β καὶ Γ γραφθήτωσαν τόξα τεμνόμενα εἰς Η· ἐπιζευχθήτωσαν Η καὶ Δ, Η καὶ Ζ καὶ τὸ ΔΖΗ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ὦσιν ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅταν καὶ αἱ τρεῖς ἴσαι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

Σχόλιον. Ὅπως τὸ πρόβλημα ἦναι δυνατὸν πρέπει ἑκάστη τῶν πλευρῶν νὰ ἦναι ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο.

Σχ. 79.



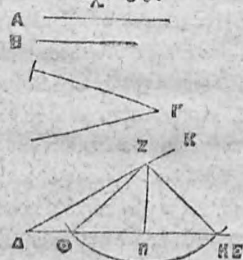
Πρόβλημα ιγ'. Δεδομένων δύο πλευρῶν (Α,Β) τριγώνου καὶ μιᾶς γωνίας (Γ) ἀπέναντι τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν, γράψαι τὸ τρίγωνον.

1ον. Ὅταν Α ὄρθη ἢ ἀμβλεῖα, ἀχθήτω ἡ ἀπροσδιόριστος ΔΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Δ κατασκευασθήτω ἡ ΚΔΕ=Γ, ληφθήτω ἐπὶ τῆς ΔΚ ἡ ΔΖ=Α, καὶ κέντρῳ τῷ Ζ καὶ διαστήματι ΖΗ ἴσῳ τῇ Β γραφθήτω περιφέρεια τέμνουσα τὴν ΔΕ εἰς Η· ἐπιζευχθήτω Η μετὰ τοῦ Ζ καὶ ΔΖΗ εἶναι τὸ ζητούμενον σχ. 79.

2ον. Ὅταν ἡ Γ ὀξεῖα, ἀλλὰ Β>Α ὁμοίως κατασκευάζεται τὸ τρίγωνον.

3ον. Ἀλλ' ὅταν Γ ὀξεῖα καὶ Β<Α, ὑπάρχουσι δύο τρίγωνα· διότι ἡ περιφέρεια ΖΗ τέμνει τὴν ΔΕ εἰς δύο σημεῖα Η καὶ Θ σχ. 80.

Σχ. 80.

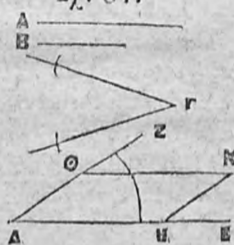


Ὅπως ἡ Β τέμνῃ τὴν ΔΕ, πρέπει Β νὰ ἦναι μείζων τῆς ἀγομένης καθέτου ἀπὸ Ζ ἐπὶ τῆς ΔΕ ἤτοι τῆς ΖΠ. Αἱ ΖΗ καὶ ΖΘ εἶναι δύο ἴσαι πλάγιαι, ἀπέχουσαι ἰσάκις τοῦ σημείου Π.

Σχόλιον. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τρίγωνον ἐν γένει εἶναι προσδιωρισμένον, ὅταν ἔχῃ γνωστὰ τρία μέρη ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι πλευρά.

Πρόβλημα ιγ'. Δεδομένων τῶν προσκειμένων πλευρῶν (Α, Β) παραλληλογράμμου καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας (Γ) γράψαι τὸ παραλληλόγραμμον σχ. 81.

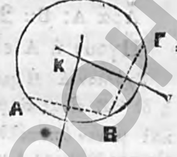
Σχ. 81.



Ἀχθήτω ἡ ἀπροσδιόριστος ΔΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ Δ γραφθήτω ἡ γωνία ΖΔΕ=Γ· ληφθήτω ΔΗ=Α καὶ ΔΘ=Β· κέντρῳ τῷ Θ καὶ Η καὶ διαστήμασιν ΘΚ=Α καὶ ΗΚ=Β γραφθήτωσαν δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι εἰς Κ· ἐπιζευχθήτωσαν Θ καὶ Κ, Κ καὶ Η καὶ ΔΗΚΘ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον. Διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἴσαι καὶ αἱ μὲν προσκείμεναι *ἴσαι πλευραὶ Α καὶ Β*, ἡ δὲ περιεχομένη γωνία ἴση τῇ Γ. Ὅταν ἡ Γ ἦναι γωνία ὀρθὴ τὸ σχῆμα εἶναι ὀρθογώνιον· ὅταν δὲ ἡ γωνία Γ ὀρθὴ καὶ αἱ προσκείμεναι πλευραὶ ἴσαι, τὸ σχῆμα εἶναι τετράγωνον.

Πρόβλημα ιδ΄. Εὑρεῖν τὸ κέντρον κύκλου ἢ τόξου δεδομένου ΑΒΓ σχ, 82.

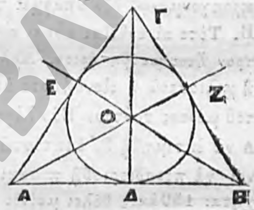
Σχ. 82.



Ἐπιζευχθήτωσαν τὰ σημεῖα Α καὶ Β, Β καὶ Γ καὶ ἐκ τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ἀχθήτωσαν κάθετοι. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν Κ εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

Πρόβλημα ιέ. Ἐγγράψαι κύκλον εἰς δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ σχ. 83.

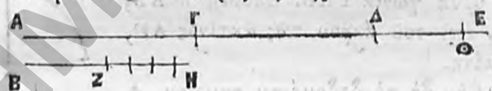
Σχ. 83.



Ἀνάλυσις. Ἔσω Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ΟΕ, ΟΖ, ΟΔ αἱ ἀκτῖνες αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὸ κέντρον μετὰ τῶν σημείων τῆς ἀφῆς. Ἐπιζευχθήτω Ο μετὰ τῶν κορυφῶν Α,Β καὶ Γ. Τὰ τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΑΕΟ ἴσα ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην τὴν ΕΟ=ΔΟ· ἄρα ΕΑΟ=ΟΑΔ καὶ ΟΑ τέμνει δίχα τὴν γωνίαν ΓΑΒ. Ὁμοίως ἡ ΟΒ τέμνει δίχα τὴν ΑΒΓ, διότι τὰ τρίγωνα ΟΔΒ καὶ ΟΒΖ εἰσὶν ἴσα· ὁμοίως ἡ ΓΟ τέμνει δίχα τὴν ΑΓΒ.

Σύνθεσις. Τμηθήτωσαν δίχα αἱ γωνίαι Α καὶ Β. ἐκ τοῦ σημείου τῆς συναπαντησεως αὐτῶν Ο ἀχθήτω κάθετος ἡ ΟΔ. Ὁ γραφόμενος κύκλος κέντρῳ τὸ Ο καὶ διαστήματι ΟΔ εἶναι ὁ ζητούμενος.

Πρόβλημα ις΄. Εὑρεῖν τὸ κοινὸν μέτρον καὶ τὸν γεωμετρικὸν λόγον δύο δεδομένων εὐθειῶν (Α, Β) σχ. 84.



Σχ. 84.

Φέρεται ἡ ἐλάσσων εὐθεῖα Β ἐπὶ τῆς μείζονος Α ὁσάκις εἶναι δυνατὸν καὶ ὑπάρχει πρῶτον Α=2 Β+ΔΕ. . (1).

Φέρεται τὸ ὑπόλοιπον ΔΕ ἐπὶ τῆς Β ὁσάκις εἶναι δυνατὸν καὶ ὑπάρχει δεύτερον. Β=ΔΕ+ΖΗ. . (2).

Φέρεται τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ΖΗ ἐπὶ τῆς ΔΕ ὁσάκις εἶναι δυνατὸν καὶ ὑπάρχει ἡ σχέσις ΔΕ=ΖΗ+ΘΕ. (3).

Φέρεται τὸ τρίτον ὑπόλοιπον ΘΕ ἐπὶ τῆς ΖΗ ὁσάκις εἶναι δυνατὸν καὶ ὑπάρχει ἡ σχέσις. . . ΖΗ=4ΘΕ. . (4).

Τῇ ἀντικαταστάσει τῆς τιμῆς τῆς ΖΗ ἐκ τῆς (4) ἐν τῇ (3)

ΔΕ=4ΘΕ+ΘΕ=5 ΘΕ. . . . (5).

Τῇ ἀντικαταστάσει τῶν τιμῶν τῆς ΔΕ ἐκ τῆς (5) καὶ τῆς ΖΗ ἐκ τῆς (4) ἐν τῇ (2)

Β=5 ΘΕ+4 ΘΕ=9 ΘΕ. . . (6).

Τῇ ἀντικαταστάσει τῆς τιμῆς τῆς Β ἐκ τῆς (6) καὶ τῆς ΔΕ ἐκ τῆς (5) ἐν τῇ (1). . . . Α=2. 9 ΘΕ+5ΘΕ=23 ΘΕ.

Ἄρα Α: Β:: 23 ΘΕ: 9 ΘΕ:: 23: 9.

Ἤγουν ἡ Α εἶναι τὰ $^{23}/_{9}$ τῆς Β λαμβανομένης μονάδος.

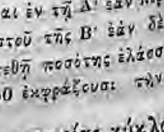
Σχόλιον ά. Ἡ μέθοδος αὕτη ὁμοιάζει μὲ τὴν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου· ἡ δὲ ΘΕ εἶναι τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἤτοι μετρητήριον μεταξὺ Α καὶ Β καὶ μόνον ὑποπολλαπλάσιοι μονάδες τῆς γραμμῆς ταύτης περιέχονται ἀκριβῶς εἰς τὰς Εὐθείας Α καὶ Β.

Σχόλιον β΄. Ἐὰν οὐδὲν τῶν ἑπομένων ὑπολοίπων περιέχηται ἀκριβῶς ἐν τῷ προηγουμένῳ, δὲν ὑπάρχει τρίτη εὐθεῖα ἀκριβῶς περιεχομένη ἐνταυτῷ εἰς Α καὶ Β. Τότε αἱ εὐθεῖαι αὗται εἰσὶν ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ι ἤγουν δὲν ἔχουσι κοινόν μέτρον ἤτοι μετρητήριον. Ἀλλὰ δύναται ἡ Α νὰ ἐκφρασθῇ διὰ δεκάτου, ἢ ἑκατοστοῦ ἢ χιλιοστοῦ ἢ οἱουδήποτε ὑποπολλαπλασίου μέρους τῆς Β ὡς ἔγγιστα μονάδι τοῦ μέρους τούτου. Ἐὰν λόγου χάριν Α καὶ Β ὦσιν ἀσύμμετροι καὶ πρόκηται Α νὰ ἐκτιμηθῇ δι᾽ ἑκατοστῶν τῆς Β ὡς ἔγγιστα ἑκατοστοῦ τῆς Β, τοῦτο σημαίνει νὰ προσδιορισθῇ ποσάκις τὸ ἑκατοστὸν τῆς Β περιέχεται ἐν τῇ Α· ἐὰν περιέχηται 159άκις θέλει μείνει ὑπόλοιπον ἔλασσον τοῦ ἑκατοστοῦ τῆς Β· ἐὰν δὲ ἡ Α ἐκληφθῇ ἴση μὲ 160 ἑκατοστὰ τῆς Β, πρέπει νὰ προστεθῇ ποσότης ἐλάσσων πάλιν τοῦ ἑκατοστοῦ τῆς Β· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ 1,59 καὶ 1,60 ἐκφράζουσι τὴν Α διὰ τῆς Β ὡς ἔγγιστα 0,01 τῆς Β.

Πρόβλημα ιζ΄. Ἐκ δεδομένου σημείου ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ἢ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν.

Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον κῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἐπιζευχθήτω τὸ κέντρον Γ σχ. 85 μὲ τὸ σημεῖον τοῦτο Α, καὶ κατασκευασθήτω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ ὀρθὴ γωνία ΓΑΒ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος ΑΓ, εἶναι ἐφαπτομένη.

Σχ. 85.



Ἀνάλυσις. Ἐὰν δὲ τὸ δεδομένον σημεῖον, Α κῆται ἐκτὸς τῆς περιφερείας σχ. 86. Ἔστω ΑΒ ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη καὶ ἐπιζευχθήτω τὸ κέντρον Γ μετὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς Β· ἡ γωνία ΑΒΓ θέλει εἶσθαι ὀρθή. Ἑπομένως ἐγγεγραμμένη ἐπὶ ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΓ.

Σχ. 86.

Σύνθεσις. Ἑπομένως πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης ἐφαπτομένης ἐπιζευχθήτω Α μετὰ τοῦ κέντρου Γ καὶ γραφθήτω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον· ἐπιζευχθήτωσαν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς Β καὶ Δ μετὰ τοῦ Α· καὶ ΑΒ καὶ ΑΔ θέλουσιν εἶσθαι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ἠγμέναι ἐκ τοῦ σημείου Α· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ὀρθαὶ ὡς ἐγγεγραμμέναι ἐντὸς ἡμικυκλίου.

Σχόλιον. Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι· διότι δύο εἰσὶ καὶ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν κύκλων ΓΒ καὶ ΔΟ. Αἱ δὲ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΓΑΔ ἴσαι· διότι τὰ τρίγωνα ΓΑΒ καὶ ΓΑΔ ἴσα καθὸ ὀρθογώνια ἔχοντα κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ δύο τῶν καθέτων ΓΒ καὶ ΓΔ ἴσας.

Πρόβλημα ιή. Εὑρεῖν τὸ κοινὸν μέτρον δύο γωνιῶν καὶ τὸν γεωμετρικὸν αὐτῶν λόγον.

Κέντροις ταῖς κορυφαῖς καὶ τῷ αὐτῷ διαστήματι γράφονται δύο τόξα μεταξὺ τῶν σκελῶν. Ὁ λόγος τῶν τόξων τούτων εἶναι ὁ τῶν γωνιῶν καὶ ἡ κεντρικὴ γωνία ἡ ἀντίστοιχος τῷ κοινῷ μέτρῳ τῶν τόξων εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν γωνιῶν.

Σχόλιον. Αἱ γωνίαι ὅμως ἀναφέρονται ἑκάστη εἰς τὴν ὀρθήν, ἐκφραζόμεναι διὰ μοιρῶν, καὶ οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκφράζοντες αὐτὰς συγκρίνονται. Πρὸς τοῦτο χρησιμεύει ἡμιπεριφέρεια ὀρειχαλκίνη ἢ ὀστεΐνη διῃρημένη εἰς 180, ἧς δεῖγμα παρέχει τὸ σχῆμα 87. Ὁσάκις λοιπὸν πρόκηται ἡ καταμέτρησις γωνίας, φέρεται τὸ ἡμικύκλιον ἐπ' αὐτῆς οὕτως ὥστε τὸ κέντρον αὐτῆς νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν· ἡ ἑτέρα πλευρὰ δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τὸν μοιρῶν, ἃς ἡ γωνία περιέχει.

Σχ. 87.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

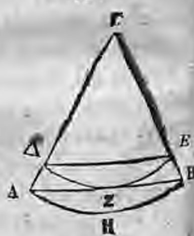
Αἱ ἀναλογίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.

1. *Ἐμβαδὸν* σχήματος καλεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ δεικνύων πόσας μονάδας ἐπιφανείας τὸ δοθὲν σχῆμα περιέχει.

2. *Σχήματα ἴσα* καλοῦνται τὰ δυνάμενα νὰ ἐφαρμόσωσιν· οἷον τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα, καὶ οἱ κύκλοι οἱ ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας. *Σχήματα ἰσοδύναμα* καλοῦνται τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν, οἷον κύκλος καὶ τετράγωνον, τρίγωνον καὶ τετράγωνον· τὰ ἴσα εἰσὶν ἰσοδύναμα οὐχὶ δὲ πάντοτε τὸ ἐναντίον.

3. *Σχήματα ὅμοια* καλοῦνται τὰ ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἤγουν ἐὰν ἡ πρώτη τοῦ ἑτέρου περιέχῃ τρὶς τὴν πρώτην τοῦ ἑτέρου καὶ ἡ δευτέρα πρέπει νὰ περιέχῃ τρὶς τὴν δευτέραν, καὶ καθεξῆς.

Σχ. 88.



4. *Τόξα ὅμοια, τομεῖς ὅμοιοι, τμήματα ὅμοια* καλοῦνται τὰ ἔχοντα ἴσας κεντρικὰς γωνίας οἷον τὰ τόξα ΑΗΒ καὶ ΔΖΕ οἱ τομεῖς ΑΓΒ καὶ ΔΓΕ καὶ τὰ τμήματα ΑΗΒ καὶ ΔΖΕ σχ. 88.

Σχ. 89.

5. *Ὕψος* τριγώνου καλεῖται ἡ ἀγομένη κάθετος ἔκ τινος τῶν κορυφῶν, καλουμένης τότε ἰδίως *κορυφῆς*, ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καλουμένης τότε *βάσεως*· οἷον ἡ ΑΔ καὶ ΒΓ σχ. 89.

6. *Βάσεις* παραλληλογράμμου καλοῦνται δύο τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ὕψος ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀγομένη κάθετος οἷον αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ σχ. 90.

Σχ. 90.

7. *Βάσεις* τραπεζίου καλοῦνται αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ καὶ *ὕψος* ἡ μεταξὺ αὐτῶν κάθετος οἷον αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ σχ. 91.

Σχ. 91.

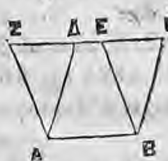
Πρότασις α΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα καὶ ἰσοϋψῆ ὄντα, εἰσὶν ἰσοδύναμα.

Ἔστωσαν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ

ΑΒΕΖ σχ. 92 ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψη ἴσα. Αἱ ἄνω βάσεις αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Τὰ τρίγωνα ΒΓΕ καὶ ΑΔΖ ἴσα, ὡς ἔχοντα ΒΓ=ΑΔ καὶ ΒΕ=ΑΖ ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμων καὶ τὰς γωνίας ΕΒΓ καὶ ΔΑΖ περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν ἴσας, καθ' ὃ ἐχούσας τὰς πλευρὰς παραλλήλους. Ἄρα ΑΒΓΖ—ΑΔΖ= ΑΒΓΖ—ΕΒΓ ἢ ΑΒΓΔ=ΑΒΕΖ ὃ ἔ. δ.

Σχ. 92.



Πόρισμα. Πᾶν παραλληλόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους οἷον τὰ ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ σχ. 93.

Σχ. 93.

Πρότασις β'.

Τὸ τρίγωνον (ΑΒΓ) ἴσον τῷ ἡμίσει παραλληλογράμμου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους σχ. 94.

Σχ. 94.

Ἐκ τοῦ σημείου Γ ἀχθήτω παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Β παράλληλος τῇ ΑΓ. Αἱ παράλληλοι αὗται τέμνονται εἰς Ε, καὶ σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΓ, ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΔ μὲ τὸ τρίγωνον. Ἀλλὰ ΑΒΓ=ΓΒΕ ὡς ἰσόπλευρα· ἄρα ΑΒΓ ἥμισυ τοῦ ΑΒΕΓ.

Πόρισμα ά. Τὸ τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Πόρισμα β'. Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα, εἰσὶν ἰσοδύναμα.

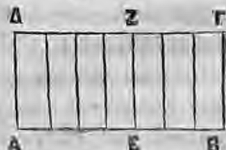
Πρότασις γ'.

Τὰ ἰσοϋψῆ ὀρθογώνια (ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ) εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις σχ. 95. καὶ 96.

Ἢ αἱ βάσεις συμμετρικαὶ ἢ ἀσύμμετροι.

1. Ἔστωσαν αἱ βάσεις τῶν ἰσοϋψῶν ὀρθογωνίων ΑΒΓΔ καὶ ΑΕΖΔ ὡς 7:5 σχ. 95· ἡ βάσις ΑΒ διαιρεῖται εἰς 7 ἴσα μέρη ἐξ ὧν 5 περιέχει ἡ ΑΕ. Ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ὑψοῦνται κάθετοι, καὶ τὸ μὲν ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς 7 ἴσα ὀρθογώνια ὡς ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα, τὸ

Σχ. 95.



δὲ ΑΕΖΔ εἰς 5. Ἄρα ΑΒΓΔ: ΑΕΖΔ:: 7: 5· ἀλλὰ καὶ ΑΒ: ΑΕ:: 7: 5· ἄρα ΑΒΓΔ: ΑΕΖΔ::ΑΒ: ΑΕ.

Σχ. 96.

2. Ἔστωσαν αἱ βάσεις τῶν ὀρθογωνίων ΑΒΓΔ καὶ ΑΕΖΔ σχ. 96, ἀσύμμετροι. Ἀφ' οὗ δὲν ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

ΑΒΓΔ: ΑΕΖΔ::ΑΒ: ΑΕ

θέλει ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

ΑΒΓΔ: ΑΕΖΔ::ΑΒ: ΑΟ (1)

οὔσης τῆς ΑΟ $>$ ΑΕ ἢ ΑΟ $<$ ΑΕ. Ἔστω ΑΟ $>$ ΑΕ.

Διαιρεῖται ἡ ΑΒ εἰς μέρη ἴσα ἐλάσσονα τῆς ΕΟ. Ἐξ ἀνάγκης μεταξὺ Ε καὶ Ο θέλει ὑπάρχει μία τῶν διαιρέσεων τούτων εἰς Ι. Ἐκ τοῦ Ι ὑψωθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ παράγεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΙΚΔ ἔχον τὴν βάσιν ΑΙ συμμετρικὴν τῇ ΑΒ· ἄρα

ΑΒΓΔ: ΑΙΚΔ:: ΑΒ: ΑΙ (2).

Ἐπειδὴ ἡ (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς ἡγουμένους, οἱ ἑπόμενοι σχηματίζουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΕΖΔ: ΑΙΚΔ:: ΑΟ: ΑΙ. (3) ἀλλὰ ΑΕΖΔ $<$ ΑΙΚΔ· ἄρα ΑΟ $<$ ΑΙ, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐὰν ΑΟ $<$ ΑΕ, τὸ Ο θέλει κεῖσθαι μεταξὺ Α καὶ Ε καὶ ΑΙ $>$ ΑΟ καὶ ΑΕΖΔ $>$ ΑΙΚΔ· ἡ ἀνωτέρω δὲ ἀναλογία δίδει ΑΟ $>$ ΑΙ ὅπερ ἐπίσης ἄτοπον.

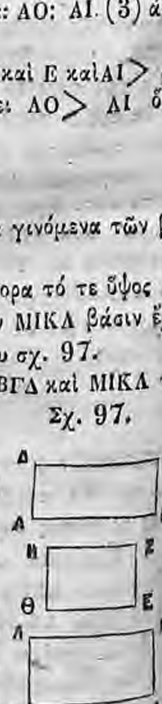
Πρότασις δ΄.

Τὰ ὀρθογώνια ἐν γένει εἰσὶν ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη.

Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ διάφορα τό τε ὕψος καὶ τὴν βάσιν. Κατασκευασθήτω τρίτον ὀρθογώνιον ΜΙΚΛ βάσιν ἔχον τὴν βάσιν τοῦ πρώτου καὶ ὕψος τὸ τοῦ δευτέρου σχ. 97.

Κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἐπειδὴ ΑΒΓΔ καὶ ΜΙΚΛ τῆς αὐτῆς βάσεως

Σχ. 97.



ΑΒΓΔ: ΜΙΚΛ:: ΒΓ: ΙΚ. . . (1)

ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη· καὶ ἐπειδὴ ΜΙΚΛ καὶ ΘΕΖΗ τοῦ αὐτοῦ ὕψους

ΜΙΚΛ : ΘΕΖΗ :: ΜΙ : ΘΕ. . .(2)

ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις.

Τῷ πολλαπλασιασμῷ τῆς (1) καὶ (2) κατὰ τάξιν

ΑΒΓΔ$\times$ΜΙΚΛ:ΜΙΚΛ$\times$ΘΕΖΗ::ΒΓ$\times$ΜΙ:ΙΚ$\times$ΕΘ

Τῇ ἐξαλείψει τοῦ κοινοῦ παράγοντος ΜΙΚΛ ἐν τῷ πρώτῳ λόγῳ καὶ τῇ ἀντικαταστάσει ΑΒ ἀντὶ ΜΙ καὶ ΕΖ ἀντὶ ΙΚ ἐν τῷ δευτέρῳ,

ΑΒΓΔ:ΘΕΖΗ:ΒΓ$\times$ΑΒ:ΕΖ$\times$ΘΕ (3) ὃ ε. δ.

Πόρισμα ά. Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περιέχει τὸ ΘΕΖΗ, λαμβανόμενον ὡς μονὰς τοσάκις, ὁσάκις τὸ γινόμενον ΑΒ$\times$ΒΓ περιέχει τὸ ΕΖ$\times$ΘΕ. Ἔστω ΑΒ=8, ΒΓ=3, ΕΖ=5, ΖΗ=4· ἕπεται ΑΒΓΔ $=\frac{8\times3}{5\times4}$ΖΗΘΕ ἢ ΑΒΓΔ$=\frac{6}{5}$ΖΗΘΕ

Πόρισμα β΄. Ἐὰν ΘΕ=ΕΖ=1, τὸ ΘΕΖΗ τρέπεται εἰς τὸ τετράγωνον τῆς γραμμικῆς μονάδος, τοῦ μέτρου λόγου χάριν, ἡ δὲ ἀναλογία (3) εἰς τὴν ΑΒΓΔ : ΕΖΗΘ :: ΑΒ$\times$ΓΒ : 1 . . . (4), ἐκφράζουσαν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον περιέχει τόσα τετραγωνικὰ μέτρα, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶν μονάδων τῆς βάσεως ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμικῶν μονάδων τοῦ ὕψους· τοῦτο δὲ ἐκφράζεται συντόμως, *τὸ ὀρθογώνιον μετρεῖται ὑπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ σχ. 98 ἔχον βάσιν ΑΒ=9 μέτρα καὶ ὕψος ΒΓ=4 μέτρα. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἴση 9$\times$4=36. Ὅπως τοῦτο κατασταθῇ φανερὸν, διαιρεθήτω ἡ βάσις εἰς 9 ἴσα μέρη καὶ τὸ ὕψος εἰς 4 ἴσα μέρη ὄντα ἴσα μὲ τὰ πρῶτα, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀχθήτωσαν 9 κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ 4 ἐπὶ τῆς ΒΓ· ἡ ὅλη ἐπιφάνεια διαιρεῖται εἰς 4άκις 9 τετραγωνικὰ μέτρα ἤτοι 36.

Σχ. 98.

Διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐκλήθη *ὀρθογώνιον.*

Πόρισμα γ΄. Ἐὰν ΑΒ=ΒΓ, τὸ ὀρθογώνιον ἀποβαίνει τετράγωνον καὶ παρίσταται ὑπὸ τοῦ $\overline{AB}^2$ ἀναγινωσκομένου ΑΒ τετράγωνον. Ἐὰν ΑΒ=4 τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ= 4$\times$4=16· ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 99. *Τὸ τετράγωνον λοιπὸν μετρεῖται ὑπὸ τῆς δευτέρας δυνάμεως τῆς πλευρᾶς.*

Σχ. 99.

Διὰ τοῦτο ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ ἐκλήθη τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ καὶ παρίστατο ὑπὸ μικροῦ τετραγώνου.

Πόρισμα δ΄. Τὸ τετράγωνον γραμμικῆς μονάδος ἰσοῦται μὲ τόσας τετραγωνικὰς μονάδας ὑποδιαιρέσεως αὐτῆς, ὅσον ἐκφράζει ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ λόγου τῆς ἀρχικῆς μονάδος πρὸς τὴν ὑποδιαίρεσιν. Ἡ τετραγωνικὴ υἱάρδα λόγου χάριν περιέχει 3^2=9 τετραγωνικοὺς πόδας. Διότι ἐὰν ΑΒΓΔ σχ. 100 παριστᾷ τὴν τετραγωνικὴν υἱάρδαν, ἑκάστη πλευρὰ περιέχει 3 γραμμικοὺς πόδας καὶ ἡ τετραγωνικὴ υἱάρδα 3$\times$3=9 τετραγωνικοὺς πόδας. Ἐπομένως ἀριθμὸς τετραγωνικῶν μονάδων γραμμικῆς μονάδος τρέπεται εἰς πετραγωνικὰς μονάδας ὑποδιαιρέσεως, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ λόγου τῶν γραμμικῶν μονάδων· ἀριθμὸς δὲ τετραγωνικῶν μονάδων ὑποδιαιρέσεως εἰς τετραγωνικὰς μονάδας ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως, διαιρούμενος διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ λόγου τῶν γραμμικῶν μονάδων· οὕτω 15 τετρ. υἱάρδαι $=15\times9=$ 135 τετρ. πόδας καὶ ἀντιστρόφως 135 τετραγ. πόδας $=135:9=15$ τετρ. υἱάρδας.

Σχ. 100.

Πρότασις ε'.

Πᾶν παραλληλόγραμμον μετρεῖται ὑπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος· διότι ἰσοῦται μὲ ὀρθογώνιον τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους σχ. 93.

Πόρισμα ά. Τὰ παραλληλόγραμμά εἰσιν ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη· διότι ἐὰν Α καὶ Β ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑτέρου καὶ Γ καὶ Δ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑτέρου, τὸ μὲν μετρεῖται ὑπὸ $\text{Α}\times\text{Β}$ τὸ δὲ ὑπὸ $\text{Γ}\times\text{Δ}$. Ἐπομένως ἔχουσι λόγον ὡς $\text{Α}\times\text{Β}:\text{Γ}\times\text{Δ}$.

Πόρισμα β'. Τὰ παραλληλόγραμμα τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσιν ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη· τὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ὡς αἱ βάσεις· διότι ὅταν $\text{Α}=\text{Γ}$ ὁ ἀνωτέρω λόγος τρέπεται εἰς τὸν Β:Δ καὶ ὅταν $\text{Β}=\text{Δ}$ εἰς τὸν Α:Γ.

Πρότασις ς'.

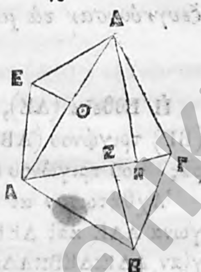
Τὸ τρίγωνον μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Οὕτω τὸ τρίγωνον, τὸ ἔχον βάσιν μ. 5,40 καὶ ὕψος μ. 2,25, ἰσοῦται μὲ $5{,}40\times2{,}25:2=\frac{540}{200}\times2{,}25=6{,}075$ τετραγωνικὰ μέτρα.

Πόρισμα ά. Τὰ τρίγωνα ἐν γένει εἰσὶν ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη. Διότι ἐὰν Α καὶ Β ὦσιν αἱ βάσεις καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρώτου, Γ καὶ Δ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου δύο τριγώνων, τὸ μὲν ἰσοῦται μὲ $\frac{\text{Α}\times\text{Β}}{2}$, τὸ δὲ μὲ $\frac{\text{Γ}\times\text{Δ}}{2}$. Ἐπομένως ἔχουσι λόγον ὃν $\frac{\text{Α}\times\text{Β}}{2}:\frac{\text{Γ}\times\text{Δ}}{2}=\text{Α}\times\text{Β}:\text{Γ}\times\text{Δ}$.

Πόρισμα β'. Τὰ ἰσοϋψῆ τρίγωνα εἰσὶν ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις, τὰ δὲ τῆς αὐτῆς βάσεως ὡς τὰ ὕψη· διότι ὅταν Α=Γ ὁ προηγούμενος λόγος ἴσος Β:Δ, ὅταν δὲ Β=Δ ἴσος Α:Γ.

Σχ. 101.



Σχόλιον. Πᾶν πολύγωνον δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα, ἀγομένων διαγωνίων ἀπὸ μιᾶς τῶν κορυφῶν εἰς τὰς λοιπὰς μὴ προσκειμένας· Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων ἴσον τῷ ἐμβαδῷ τοῦ πολυγώνου. Οὕτω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ σχ. 101 τρέπεται εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ. Ἐπειδὴ δὲ

$$ΑΒΓ=\frac{ΑΓ\times ΒΖ}{2},\ ΑΓΔ=\frac{ΑΓ\times ΔΗ}{2}\ \text{καὶ}\ ΑΔΕ=\frac{ΑΔ\times ΕΘ}{2},\ \text{ἕπεται ὅτι}$$

$$ΑΒΓΔΕ=\frac{ΑΓ\times ΒΖ}{2}+\frac{ΑΓ\times ΔΗ}{2}+\frac{ΑΔ\times ΕΘ}{2}$$

Πρότασις ζ'.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου (ΑΒΓΔ) ἴσον τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν παραλλήλων βάσεων (ΑΒ,ΓΔ) ἐπὶ τὸ ὕψος σχ. 102.

Σχ. 102.

Ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ ἀχθήτω ἡ ΕΖ παράλληλος τῆς ΑΔ καὶ προεκβληθήτω ἡ ΔΓ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ αὐτήν. Τὰ τρίγωνα ΒΕΗ καὶ ΕΖΓ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΕΒ=ΓΕ, τὴν γωνίαν ΒΕΗ=ΖΕΓ, ὡς κατὰ κορυφὴν, καὶ τὴν ΗΒΕ=ΕΓΖ ὡς ἐναλλὰξ ἐντός· ἄρα ΓΖ=ΗΒ, καὶ ΖΕ=ΗΕ. Ἐπειδὴ ἀφαιρουμένου τοῦ τριγώνου ΒΕΗ παράγεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗΖΔ, καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ ΓΕΖ, παράγεται τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ· ἄρα ΑΒΓΔ =ΑΗΖΔ. Ἀλλὰ ΑΗΖΔ=ΑΗ×ΙΚ, τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος· ἄρα καὶ ΑΒΓΔ=ΑΗ×ΙΚ.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ἀλλὰ}\ ΑΒ=ΑΗ+ΗΒ\\ \text{καὶ}\ ΔΓ=ΔΖ-ΓΖ.\end{array}\right\}$$

Τῇ προσθέσει μέλους πρὸς μέλους, ἐπειδὴ ΗΒ=ΓΖ καὶ ΑΗ=ΔΖ

$$\text{ἕπεται}\quad ΑΒ+ΓΔ=2ΑΗ\ \text{καὶ}\ \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}=ΑΗ.$$

$$\text{ἄρα}\quad ΑΒΓΔ=ΙΚ\times\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}.$$

Σχόλιον. Ἐπιζευχθήτω Ε τὸ μέσον τῆς ΓΒ μετὰ τοῦ Θ μέσου τῆς ΔΑ· ἐπειδὴ ΔΑ ἴση τῇ ΖΗ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου, ΘΑ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΗ καὶ τὸ ΑΗΕΘ παραλληλόγραμμον· ἄρα ΑΗ ἴση τῇ ΘΕ καὶ

$$ΑΒΓΔ=ΙΚ\times ΘΕ$$

ἤτοι τὸ τραπέζιον ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν ἐπιζευγνύουσαν τὰ μέσα τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

Πρότασις ή.

Ἡ Εὐθεῖα (ΔΕ), ἡ ἠγμένη παραλλήλως πλευρᾷ (ΒΓ) τριγώνου (ΑΒΓ), διαιρεῖ τὰς λοιπὰς δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα (Σχ. 103.)

Σχ. 103

Ἀχθήτωσαν αἱ διαγώνιοι ΒΕ καὶ ΓΔ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΔΕΒ ὡς ἰσοϋψῆ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΔΕ:ΔΕΒ::ΑΔ:ΔΒ (1) καὶ τὰ ΑΔΕ καὶ ΕΔΓ ὡς ἰσοϋψῆ ὁμοίως δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΔΕ:ΕΔΓ::ΑΕ:ΕΓ. (2). Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΔΕΒ καὶ ΔΕΓ ἴσα ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕ καὶ τὰ ὕψη ἴσα ὡς κάθετα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΔΕ καὶ ΒΓ. Ἄρα οἱ πρῶτοι λόγοι τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) ἴσοι· ἄρα οἱ δεύτεροι σχηματίζουσι τὴν ἀναλογίαν

ΑΔ:ΔΒ::ΑΕ:ΕΓ. (3).

Πόρισμα ά. Ὅταν ἡ ΔΕ ἦναι παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ αἱ ὅλαι πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ εἰσὶν ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα μέρη.

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἀναλογίας (3) ἐν συνθέσει ἔπεται

ΑΔ+ΔΒ:ΑΔ::ΑΕ+ΕΓ:ΕΑ ἤτοι ΑΒ:ΑΔ::ΑΓ:ΕΑ.

καὶ ΑΔ+ΔΒ:ΔΒ::ΑΕ+ΕΓ:ΕΓ ἤτοι ΑΒ:ΔΒ::ΑΓ:ΕΓ

καὶ τῇ μεταθέσει τῶν μέσων

ΑΒ:ΑΓ::ΑΔ:ΕΑ καὶ ΑΒ:ΑΓ::ΒΔ:ΕΓ.

Πόρισμα β΄. Αἱ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ ἠγμέναι παράλληλοι ΔΕ,ΖΗ,ΘΙ,ΚΛ τέμνουσι τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς μέρη ἀνάλογα σχ. 104.

Σχ. 104.

Διότι ἐκ τοῦ ά πορίσματος ἔπεται·

ΑΔ:ΑΕ::ΔΖ:ΕΗ::ΑΖ:ΑΗ,

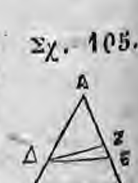
ΑΖ:ΑΗ::ΖΘ:ΗΙ::ΑΘ:ΑΙ,

ΑΘ:ΑΙ::ΘΚ:ΙΛ, ἐξ ὧν ἔπεται ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων ΑΔ:ΑΕ::ΔΖ:ΕΗ::ΖΘ:ΗΙ::ΘΚ:ΙΛ.

Πρότασις θ΄.

Ἀντιστρόφως ἡ εὐθεῖα (ΔΕ) ἡ τέμνουσα τὰς δύο πλευρὰς (ΑΒ,ΑΓ) τριγώνου (ΑΒΓ) εἰς μέρη ἀνάλογα εἶναι παράλληλος τῇ τρίτῃ πλευρᾷ (ΒΓ) σχ. 105.

Σχ. 105.



Διότι ἐὰν ἡ ΔΕ δὲν ἦναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἔσω ΔΖ ἡ ἐκ τοῦ Δ ἠγμένη παράλληλος τῇ ΒΓ. Ἐκ τῆς εὐθείας προτάσεως (ή) ἔπεται

ΑΔ:ΔΒ::ΔΖ:ΖΓ

ἀλλὰ καὶ ΑΔ:ΔΒ::ΑΕ:ΕΓ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα

ΑΖ:ΖΓ::ΑΕ:ΕΓ

ἀλλ' $ΑΖ < ΑΕ$· ἄρα $ΖΓ < ΕΓ$ ὅπερ ἄτοπον.

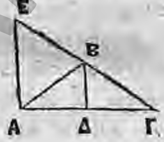
Πόρισμα. ά. Καὶ ὅταν αἱ δύο πλευραὶ τριγώνου (ΑΒΓ) τέμνονται ὑπὸ τρίτης (ΔΕ) οὕτως ὥστε νὰ ὦσιν ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα μέρη, ἡ τέμνουσα (ΔΕ) εἶναι παράλληλος τῇ τρίτῃ ΒΓ.

Διότι ἐκ τῶν ἀναλογιῶν ΑΒ:ΑΔ::ΑΓ:ΑΕ καὶ ΑΒ:ΔΒ::ΑΓ:ΕΓ ἕπεται ἐν διαιρέσει ΑΒ—ΑΔ:ΑΔ::ΑΓ—ΑΕ:ΑΕ καὶ ΑΒ—ΒΔ:ΒΔ::ΑΓ—ΕΓ:ΕΓ ἢ ΔΒ:ΔΑ::ΕΓ:ΑΕ καὶ ΑΔ:ΒΔ::ΑΕ:ΕΓ.

Πρότασις ί.

Ἡ εὐθεῖα (ΒΔ) ἡ δίχα τέμνουσα γωνίαν τριγώνου (ΑΒΓ), διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν (ΑΓ) ἀναλόγως πρὸς τὰς περιεχούσας τὴν γωνίαν (ΑΒΓ) πλευρὰς (ΑΒ,ΒΓ) σχ. 106.

Σχ. 106.



Ἀχθήτω ἐκ τοῦ Α ἡ ΑΕ παραλλήλως τῇ ΒΔ καὶ προεκβληθήτω ἡ ΒΓ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΕ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΕ, ἕπεται ἡ ἀναλογία ΕΒ:ΒΓ::ΑΔ:ΔΓ, (1).

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ἔχει ΑΒ=ΕΒ, καθὸ ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν· διότι Ε=ΔΒΓ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ΕΑΒ=ΑΒΔ ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς καὶ ΑΒΔ =ΔΒΓ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα τῇ ἀντιτασtάσει ἐν τῇ ἀναλογίᾳ (1) ΑΒ:ΒΓ::ΑΔ:ΔΓ.

Σχ. 107.

Πρότασις ια΄.

Τὰ τρίγωνα (ΑΒΓ,ΔΕΖ) τὰ ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἔχουσι καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευρὰς ἀναλόγους καὶ εἰσὶν ὅμοια σχ. 107.

Ληφθήτω ἡ ΑΗ=ΔΕ καὶ ἐκ τοῦ Η ἀχθήτω ΗΘ παραλλήλως τῇ ΒΓ· ἐκ δὲ τοῦ Θ ἀχθήτω παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΘΙ. Ἐπειδὴ Β =Ε ἐξ ὑποθέσεως καὶ Β=ΑΗΘ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς, ΑΗΘ=Ε, καὶ τὰ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ ἴσα ὡς ἔχοντα ΑΗ=ΔΕ καὶ τὰς προκειμένας γωνίας ἴσας· ἄρα ΗΘ=ΕΖ καὶ ΑΘ=ΔΖ.

Ἐπειδὴ ΗΘ παράλληλος τῇ ΒΓ ἕπεται

ΑΒ:ΑΗ::ΑΓ:ΑΘ

καὶ ἐπειδὴ ἡ ΘΙ παράλληλος τῇ ΑΒ ἕπεται

ΑΓ:ΑΘ::ΓΒ:ΙΒ.

Ἐπειδὴ δὲ ΑΓ:ΑΘ κοινός, οἱ τρεῖς λόγοι ἴσοι· ἐπομένως

ΑΒ:ΑΗ::ΑΓ:ΑΘ::ΓΒ:ΙΒ.

Ἀλλ' ΑΗ=ΔΕ, ΑΘ=ΔΖ, καὶ ΙΒ=ΗΘ ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΘΙΒ· ἄρα τῇ ἀντικαταστάσει

ΑΒ:ΔΕ::ΑΓ:ΔΖ::ΓΒ::ΕΖ.

Πόρισμα. ή. Δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο τῶν γωνιῶν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ εἰσὶν ὅμοια· Διότι καὶ αἱ τρίται γωνίαι εἰσὶν ἴσαι.

Σχ. 108

Πρότασις ιβ'.

Τὰ τρίγωνα (ΑΒΓ, ΔΕΖ) τὰ ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἀναλόγους ἔχουσι καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἴσας καὶ εἰσὶν ὅμοια σχ. 108.

Ληφθήτω ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁμολόγου τῆς ΔΕ ἡ ΑΗ=ΔΕ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ὁμολόγου τῆς ΔΖ ἡ ΑΘ=ΔΖ καὶ ἐπιζευχθήτω ΑΘ. Ἐπειδὴ ὑπάρχει ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ:ΔΕ::ΑΓ:ΔΖ::ΒΓ:ΕΖ, τῇ ἀντικαταστάσει ΗΑ ἀντὶ ΔΕ καὶ ΑΘ ἀντὶ ΔΖ, ἕπεται ΑΒ:ΑΗ::ΑΓ:ΑΘ. Ἡ ΘΗ λοιπὸν παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ ΑΗΘ=Β καὶ ΑΘΗ=Γ ὡς ἐντὸς ἐκτός· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΗΘ ἰσογώνια καὶ ὅμοια. Ἐπομένως

ΑΒ:ΑΗ::ΑΓ:ΑΘ::ΒΓ:ΗΘ.

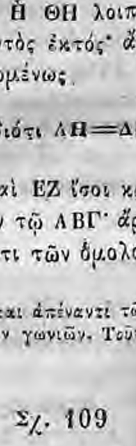
Ἀλλὰ καὶ ΑΒ:ΔΕ::ΒΓ:ΕΖ καὶ ΑΒ:ΑΗ=ΑΒ:ΔΕ, διότι ΑΗ=ΔΕ· ἄρα ΒΓ:ΗΘ::ΒΓ:ΕΖ.

Ἀλλ' οἱ ἡγούμενοι ἴσοι· ἄρα καὶ οἱ ἑπόμενοι ΗΘ καὶ ΕΖ ἴσοι καὶ τὸ τρίγωνον ΗΑΘ ἴσον τῷ ΔΕΖ. Ἀλλὰ ΗΑΘ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ· ἄρα καὶ ΔΕΖ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Σχόλιον. Εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα αἱ ἴσαι γωνίαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν. Τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀναλογιῶν τῶν πλευρῶν.

Πρότασις ιγ'.

Σχ. 109



Τὰ τρίγωνα (ΑΒΓ, ΔΕΖ) τὰ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην (Α,Δ) περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν εἰσὶν ὅμοια σχ. 109.

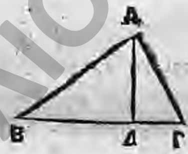
Ληφθήτω ΑΗ=ΔΕ καὶ ἀχθήτω ἡ ΗΘ παράλληλος τῇ ΒΓ.

Τὰ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΑΒΓ ὅμοια ὡς ἰσογώνια· ἐπομένως ΑΒ:ΑΗ::ΑΓ:ΑΘ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ:ΔΕ::ΑΓ:ΔΖ καὶ ΑΒ:ΑΗ=ΑΒ:ΔΕ, διότι ΑΗ=ΔΕ· ἄρα ΑΓ:ΑΘ:ΑΓ:ΔΖ· καὶ ἐπειδὴ οἱ ἡγούμενοι ἴσοι, ἄρα καὶ οἱ ἑπόμενοι ἴσοι, ἤτοι ΑΘ=ΔΖ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἀλλ' ΑΒΓ ὅμοιον τῷ ΑΗΘ· ἄρα ὅμοιον τῷ ἴσῳ τοῦ ΑΗΘ, ΔΕΖ.

Πρότασις ιδ'.

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας (Α) ὀρθογωνίου τριγώνου (ΑΒΓ) ἀχθῇ κάθετος (ΑΔ) ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης (ΒΓ) 1ον *Τὰ δύο μερικὰ τρίγωνα (ΑΒΔ,ΑΒΓ) ὅμοια ἀλλήλοις καὶ τῷ ὅλῳ τριγώνῳ (ΑΒΓ)* 2ον *Ἡ κάθετος (ΑΔ) μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης* ΒΔ καὶ ΓΔ· καὶ 3ον ἑκατέρα τῶν καθέτων (ΑΒ,ΑΓ) μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος (σχ. 111).

Σχ. 111.



1ον. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΑΔ ἔχουσι τὴν γωνίαν Β κοινὴν καὶ τὰς ΒΑΓ καὶ ΒΔΑ ἴσας ὡς ὀρθάς· ἄρα καὶ ἡ τρίτη Γ=ΒΑΔ καὶ τὰ τρίγωνα ὅμοια. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΑΓ ἔχουσι τὴν Γ κοινὴν καὶ τὰς ΒΑΓ καὶ ΑΔΓ ἴσας ὡς ὀρθάς· ἄρα καὶ ἡ τρίτη Β ἴση τῇ τρίτῃ ΔΑΓ καὶ τὰ τρίγωνα ὅμοια. Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΑΔΓ ὅμοια ὡς ἰσογώνια.

2ον. Ἡ ὁμοιότης τῶν δύο μερικῶν τριγώνων ΒΑΔ καὶ ΑΔΓ δίδει τὴν ἀναλογίαν ΒΔ:ΔΑ::ΔΑ:ΔΓ ἐξ ἧς ἕπεται $\overline{ΑΔ}^2 = ΒΔ \times ΔΓ$.

3ον. Ἡ ὁμοιότης τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ δίδει

$$ΒΔ:ΑΒ::ΑΒ:ΒΓ \text{ ἐξ ἧς } \overline{ΑΒ}^2 = ΒΓ \times ΒΔ \quad (1)$$

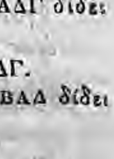
καὶ ἡ ὁμοιότης τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΔΓ δίδει τὴν ἀναλογίαν

$$ΔΓ:ΑΓ::ΑΓ:ΒΓ, \text{ ἐξ ἧς ἕπεται } \overline{ΑΓ}^2 = ΔΓ \times ΒΓ \quad (2).$$

Πόρισμα ά. Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο λοιπῶν πλευρ. Διότι τῇ προσθέσει τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = ΒΔ \times ΒΓ + ΔΓ \times ΒΓ = (ΒΔ + ΔΓ) \times ΒΓ = \overline{ΒΓ}^2. \quad (3)$$

Σχ. 112.



Πόρισμα 6'. Ἐντεῦθεν ἕπεται $\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΒΓ}^2 - \overline{ΑΓ}^2$ καὶ $\overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΒΓ}^2 - \overline{ΑΒ}^2$. ἤτοι τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν καθέτων ἴσον τῷ τετραγώνῳ τῆς ὑποτεινούσης πλὴν τοῦ τετραγώνου τῆς ἑτέρας καθέτου.

Πόρισμα γ'. Ἐὰν ΑΒ=ΑΓ σχ. 112 ὁ τύπος (3) τρέπεται εἰς $\overline{\mathrm{BΓ}}^{2} = \overline{\mathrm{AB}}^{2}$. ἤγουν τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου παντὸς τετραγώνου ἴσον τῷ διπλασίῳ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς.

Πόρισμα δ'. Ἡ ἰσότης $\overline{\mathrm{BΓ}}^{2} = \overline{\mathrm{AB}}^{2}$ τρέπεται εἰς τὴν $\overline{\mathrm{BΓ}}^{2} : \overline{\mathrm{AB}}^{2} :: 2:1$ καὶ τῇ ἐξαγωγῇ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν $\mathrm{BΓ}:\mathrm{AB}::\sqrt{2}:1$ ἤγουν ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν ὡς ἡ δευτέρα ῥίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα. Ἑπομένως ὁ λόγος αὐτῶν ἀσύμμετρος.

Πόρισμα ε'. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται $\overline{\mathrm{AB}}^{2} : \overline{\mathrm{AΓ}}^{2} :: \mathrm{BΔ}\times\mathrm{BΓ} : \mathrm{ΔΓ}\times\mathrm{BΓ}$ καὶ τῇ ἐξαλείψει τοῦ κοινοῦ παράγοντος ΒΓ,

$$\overline{\mathrm{AB}}^{2} : \overline{\mathrm{AΓ}}^{2} :: \mathrm{BΔ}:\mathrm{ΔΓ} \quad (4).$$

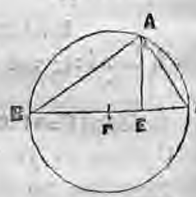
ἤτοι τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων ἀνάλογα πρὸς τὰς προβολὰς αὐτῶν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης.

Πόρισμα ς'. Ἐκ τῆς (4) ἀναλογίας ἐν συνθέσει ἕπεται

$$\overline{\mathrm{AB}}^{2} + \overline{\mathrm{AΓ}}^{2} : \overline{\mathrm{AB}}^{2} \text{ ἢ } \overline{\mathrm{AΓ}}^{2} :: \mathrm{BΔ}+\mathrm{ΔΓ} : \mathrm{BΔ} \text{ ἢ } \mathrm{ΔΓ}\cdot$$

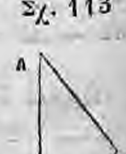
ἀλλὰ $\overline{\mathrm{AB}}^{2} + \overline{\mathrm{AΓ}}^{2} = \overline{\mathrm{BΓ}}^{2}$ ἄρα $\overline{\mathrm{BΓ}}^{2} : \overline{\mathrm{AB}}^{2}$ ἢ $\overline{\mathrm{AΓ}}^{2} :: \mathrm{BΓ}:\mathrm{AB}$ ἢ ΑΓ· ἤγουν *τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν καθέτων ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὴν προβολὴν τῆς καθέτου ἐπ' αὐτῆς·*

Σχ. 112



Πόρισμα ζ'. Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς (Α) τῆς περιφερείας κύκλου (ΒΓ) ἀχθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου (ΒΔ) κάθετος (ΕΑ) καὶ αἱ χορδαὶ (ΑΒ, ΑΔ) ἐπὶ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου (ΒΔ)· 1ον ἡ κάθετος (ΑΕ) μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου (ΒΕ, ΕΔ)· 2ον ἑκατέρα τῶν χορδῶν (ΑΒ, ΑΔ) μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ προκειμένου τμήματος σχ. 112. Διότι τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὀρθογώνιον, οὔσης τῆς γωνίας ΒΑΔ ἐγγεγραμμένης ἐντὸς ἡμικυκλίου.

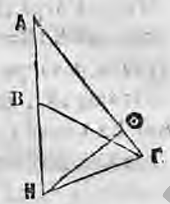
Σχ. 113



Πρότασις ις'.

Δύο τρίγωνα (ΑΒΓ, ΔΕΖ) ἔχοντα μίαν γωνίαν (Α, Δ) ἴσην εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τῶν περιεχουσῶν τὴν ἴσην γωνίαν πλευρῶν σχ. 113.

Ληφθήτω ΑΗ=ΔΕ καὶ ΑΘ=ΔΖ καὶ ἐπιζευχθήτωσαν Η μετὰ τοῦ Θ καὶ μετὰ τοῦ Γ. Τὰ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΗ ὡς ἰσοϋψῆ εἰσὶν ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ ἕπεται ἡ ἀναλογία



ΑΒΓ:ΑΗΓ::ΑΒ:ΑΗ.. (1).

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΓΗ καὶ ΑΗΘ ὡς ἰσοϋψῆ ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἕπεται ἡ ἀναλογία

ΑΗΓ:ΑΘΗ::ΑΓ:ΑΘ.. (2).

Τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) κατὰ τάξιν,

ΑΒΓ$\times$ΑΗΓ:ΑΗΓ$\times$ΑΘΗ::ΑΒ$\times$ΑΓ:ΑΗ$\times$ΑΘ.. (3).

Τῇ ἐξαλείψει τοῦ κοινοῦ παράγοντος ΑΗΓ ἐκ τοῦ πρώτου λόγου καὶ τῇ ἀντικαταστάσει τοῦ ΔΕΖ ἀντὶ τοῦ ΑΘΗ καὶ τῶν ΔΕ καὶ ΔΖ ἀντὶ τῶν ΑΗ καὶ ΑΘ, ἡ ἀναλογία (3) τρέπεται εἰς τὴν

ΑΒΓ:ΔΕΖ::ΑΒ$\times$ΑΓ:ΔΕ$\times$ΔΖ ὁ ἐ. δ.

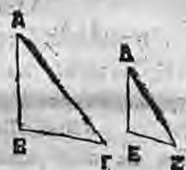
Πρότασις ιζ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνά εἰσιν ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ σχ. 114. Ἐπειδή εἰσιν ὅμοια ἔχομεν ΑΒ:ΔΕ::ΑΓ:ΔΖ.

Ἄλλως ΑΒ:ΔΕ::ΑΒ:ΔΕ.

Σχ. 114.



Τῷ πολλαπλασιασμῷ κατὰ τάξιν τῆς (1) ἐπὶ τὴν (2) ἕπεται

$\overline{\text{ΑΒ}}^2 : \overline{\text{ΔΕ}}^2$ ::ΑΓ $\times$ ΑΒ : ΔΖ$\times$ΔΕ . . . (3)

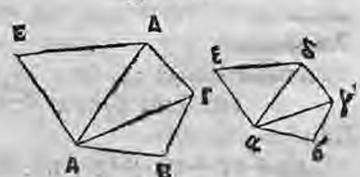
Ἀλλ' αἱ γωνίαι Α καὶ Δ ἴσαι· ἄρα κατὰ τὴν ιϛ'. ΑΒΓ:ΔΕΖ::ΑΒ$\times$ΑΓ: ΔΕ$\times$ΔΖ (4).

Ἀλλ' οἱ δεύτεροι λόγοι τῆς (3) καὶ (4) ἴσοι· ἄρα οἱ πρῶτοι λόγοι δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓ:ΔΕΖ:: $\overline{\text{ΑΒ}}^2$:$\overline{\text{ΔΕ}}^2$.

Πρότασις ιη'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα (ΑΒΓΔΕ, αβγδε) διαιροῦνται εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα, καὶ ἀντιστρόφως δύο πολύγωνα (ΑΒΓΔΕ, αβγδε) συγκείμενα ἐξ ἰσαρίθμων τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων εἰσὶν ὅμοια σχ. 115.

Σχ. 115.



Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ:αβ::

ΒΓ:βγ::ΓΔ:γδ::ΔΕ:δε::ΕΑ:εα καὶ Ε=ε, ΕΔΓ=εδγ, ΔΓΒ=δγβ, Β=β καὶ ΕΑΒ=εαβ, ἕπεται πρῶτον ὅτι ΑΕΔ ὅμοιον τῷ αεδ, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν πρότασις ιδ'., ἑπομένως ΑΕ:αε::ΕΔ:εδ::ΑΔ:αδ καὶ ΕΔΑ=εδα, καὶ ΕΑΔ=εαδ.

Ἀλλὰ ΕΔΓ=εδγ· ἄρα ΕΔΓ—ΕΔΑ=εδγ—εδα ἢ ΑΔΓ=αδγ. Ἐπειδὴ δὲ ΔΓ:δγ::ΕΔ:εδ καὶ ΕΔ:εδ::ΑΔ:αδ· ἄρα ΑΔ:αδ::ΔΓ:δγ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ αδγ ὅμοια καὶ

ΑΔ:αδ::ΔΓ:δγ::ΑΓ:αγ.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι τὰ ΑΓΒ ὅμοιον τῷ αγβ καὶ ἕπεται ἡ ἀναλογία ΑΓ:αγ::ΒΓ:βγ::ΑΒ:αβ.

Ἐὰν δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ, ΑΓΔ καὶ αγδ, ΑΔΕ καὶ αδε εἰσὶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα, ἕπεται πρῶτον ὅτι Β=β, δεύτερον ΒΓΔ=βγδ, ἐπειδὴ ΒΓΔ=ΒΓΑ+ΑΓΔ καὶ βγδ=βγα+αγδ, καὶ ΒΑΓ=βαγ, καὶ ΑΓΔ=αγδ· ὁμοίως ἡ γωνία ΓΔΕ=γδε, Ε=ε καὶ καὶ ΕΑΒ=εαβ, ὡς συγκείμεναι ἐξ ἴσων μερῶν. Ἀκολούθως ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ αβγ ἕπεται ΑΒ:αβ::ΒΓ:βγ: ΑΓ:αγ.

Ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν ΑΓΔ καὶ αγδ ἕπεται

ΑΓ:αγ::ΓΔ:γδ::ΑΔ:αδ.

Ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν ΑΔΕ καὶ αδε ἕπεται

ΑΔ:αδ::ΔΕ:δε::ΑΕ:αε.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ τελευταῖος λόγος τῆς πρώτης σειρᾶς ἴσος τῷ πρώτῳ τῆς δευτέρας, καὶ ὁ τελευταῖος τῆς δευτέρας ἴσος τῷ πρώτῳ τῆς τρίτης, ἕπεται ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων

ΑΒ:αβ::ΒΓ:βγ::ΓΔ:γδ::ΔΕ:δε::ΕΑ:εα·

ἄρα τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε εἰσὶν ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι αἱ ὁμόλογοι διαγώνιοι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἰσὶν ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευράς.

Πρότασις ιθ'.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἀνάλογοι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἢ τὰς ὁμολόγους διαγωνίους, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἢ τῶν ὁμολόγων διαγωνίων.

Ἐπειδὴ ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων σχ. 115.

ΑΒ:αβ::ΒΓ:βγ::ΓΔ:γδ::ΔΕ:δε::ΕΑ:εα

δίδει τὴν ἀναλογίαν

ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΑ:αβ+βγ+γδ+δε+εα::ΑΒ:αβ.

Τὰ δὲ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν (πρότασις ιζ΄.) ΑΒΓ:αβγ:: $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{αβ}^2$.

Τὰ δὲ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΔ καὶ αγδ τὴν ΑΓΔ:αγδ:: $\overline{ΓΔ}^2 : \overline{γδ}^2$.

Τὰ δὲ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ αδε τὴν ΑΔΕ:αδε:: $\overline{ΔΕ}^2 : \overline{δε}^2$

Ἀλλὰ $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{αβ}^2 :: \overline{ΒΓ}^2 : \overline{βγ}^2 :: \overline{ΓΔ}^2 : \overline{γδ}^2 :: \overline{ΔΕ}^2 : \overline{δε}^2 :: \overline{ΕΑ}^2 : \overline{εα}^2$ ἄρα ΑΒΓ:αβγ::ΑΓΔ αγδ::ΑΔΕ:αδε.

Ἑπομένως ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ:αβγ+αγδ+αδε::ΑΒΓ:αβγ.

Ἀλλ' ΑΒΓ:αβγ:: $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{αβ}^2$ ἄρα

ΑΒΓΔΕ:αβγδε:: $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{αβ}^2$,

ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων διαγωνίων, διότι εἰσὶν ἀνάλογα πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευράς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΤΟΥ Γ΄. ΒΙΒΛΙΟΥ.

Πρόβλημα ά. Διελεῖν εὐθεῖαν δεδομένην εἰς πολλὰ ἴσα μέρη ἢ εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων δεδομένων εὐθειῶν.

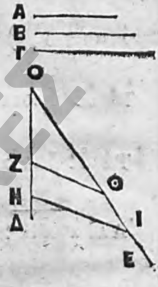
Σχ. 116.

1ον. Προκείσθω νὰ διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς πέντε ἴσα μέρη σχ. 116· ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ Α ἡ ἀπροσδιόριστος εὐθεῖα ΑΓ. Ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Α ληφθήτωσαν καὶ πέντε ἴσαι διαιρέσεις Αβ, βγ, γδ, δε, εΔ, ἐπιζευχθήτω Δ μετὰ τοῦ Β καὶ ἐκ τῶν σημείων ε, δ, γ, β ἀχθήτωσαν παράλληλοι τῇ ΒΔ τέμνουσαι τὴν ΑΒ εἰς ζ, η, θ, ι· τὰ μέρη Αζ, ζη, ηθ, θι, ιβ ἴσα καὶ ἡ ΑΒ διηρέθη εἰς πέντε ἴσα μέρη.

Σχ. 117.

2ον. Προκείσθω νὰ διαιρεθῇ ἡ ΑΒ ἀναλόγως πρὸς τὰς εὐθείας Δ, Ε καὶ Ζ σχ. 117. Ἀχθήτω ἡ ἀπροσδιόριστος ΑΓ ἐκ τοῦ Α καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθήτωσαν ΑΗ=Δ, ΗΘ=Ε καὶ ΘΙ=Ζ· ἐπιζευχθήτω Ι μετὰ τοῦ Β καὶ ἐκ τῶν σημείων Η, Θ ἀχθήτωσαν παράλληλοι τῇ ΒΙ τέμνουσαι τὴν ΑΒ εἰς Κ καὶ Λ. Τὰ ζητούμενα μέρη εἰσὶ τὰ ΑΚ, ΚΛ καὶ ΛΒ.

Σχ. 118.



Πρόβλημα β'. Εὑρεῖν τετάρτην ἀνάλογον τριῶν δεδομένων εὐθειῶν Α, Β καὶ Γ. σχ. 118.

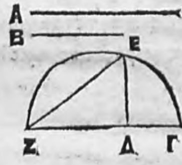
Ἀχθήτωσαν ἐκ τοῦ Ο δύο εὐθεῖαι ἀπροσδιόριστοι ΟΔ, ΟΕ ὑπὸ γωνίαν τινά· ἐπὶ τῆς ΟΔ ληφθήτω ΟΖ=Α, καὶ ΟΗ=Β· ἐπὶ δὲ τῆς ΟΕ ἡ ΟΘ=Γ· ἐπιζευχθήτω Ζ μετὰ τοῦ Θ καὶ ἐκ τοῦ Η ἀχθήτω ἡ ΗΙ παράλληλος τῇ ΖΘ· ΟΙ θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη· διότι

$$ZO:OH::O\Theta:OI \text{ ἢ } A:B::\Gamma:OI.$$

Πόρισμα. Ἵνα τραπῇ ὀρθογώνιον $A\times B$ εἰς ἄλλο ἔχον βάσιν Γ, λαμβάνεται τετάρτη ἀνάλογος μεταξὺ Γ, Α καὶ Β· διότι $\Gamma:A::B:X$· ἐξ ἧς $A\times B=\Gamma\times O$.

Σχόλιον. Ὅταν Β=Γ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα καλεῖται τρίτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν Α, Β· διότι τότε $A:B::B:X$.

Σχ. 119.



Πρόβλημα γ'. Εὑρεῖν μέσην ἀνάλογον δύο δεδομένων εὐθειῶν Α καὶ Β· σχ. 119.

Ἐπὶ τῆς ΖΓ=Α γραφθήτω ἡμιπεριφέρεια ΖΓ· ληφθήτω ΖΔ=Β καὶ ἐκ τοῦ Δ ὑψωθήτω κάθετος ἡ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΖΓ· ἐπιζευχθήτω Ε καὶ Ζ· καὶ ΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι (γ. Πρότ. 14)

$$Z\Gamma:ZE::ZE:\Delta Z \text{ ἢ } A:ZE::ZE:B$$

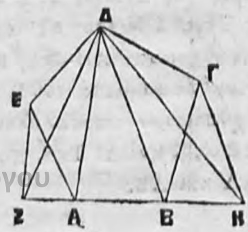
ἐξ ἧς $A\times B=ZE^2$.

Πόρισμα. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἰσοδυνάμου τῷ ὀρθογωνίῳ $A\times B$, λαμβάνεται μέση ἀνάλογος μεταξὺ Α καὶ Β. Διότι τότε $A:X::X:B$ ἐξ ἧς $A\times B=X^2$.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ τρίγωνον βάσεως Α καὶ ὕψους Β, λαμβάνεται μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους. Διότι ἡ ἀναλογία $\frac{1}{2}A:X::X:B$ ἢ $A:X::X\frac{1}{2}B$ δίδει $\frac{1}{2}A\times B$ ἢ $B\times\frac{1}{2}A=X^2$.

Πρόβλημα δ'. Εὑρεῖν τρίγωνον ἑπομένως τετράγωνον ἰσοδύναμον δεδομένῳ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ σχ. 120.

Σχ. 120.



Ἀχθήτωσαν αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΔ. Ἐκ τοῦ σημείου Ε ἀχθήτω παράλληλος τῇ ΑΔ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς Ζ· καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἀχθήτω παράλληλος τῇ ΔΒ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς Η· ἐπιζευχθήτω Δ καὶ Ζ, Δ καὶ Η. Τὸ τρίγωνον ΖΔΗ ἴσον τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ. Διότι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ=ΑΔΖ, καὶ τὸ ΒΔΓ=ΒΔΗ ὡς ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα.

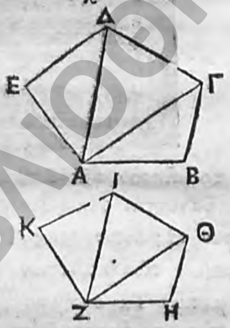
Λαμβανομένης μέσης ἀναλόγου μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου ΖΔΗ, εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ.

Σχόλιον. Ἡ τροπὴ αὕτη σχήματος ἐπιπέδου εἰς τετράγωνον καλεῖται τετραγωνισμὸς τοῦ σχήματος.

Πρόβλημα έ. Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΖΗ ὁμολόγου τῆς ΑΒ γράψαι πολύγωνον ὅμοιον δεδομένῳ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ σχ. 121.

Ἐὰν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ἦναι προσιτὸν, διαιρεῖται εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ. Ἔπειτα ἐπὶ τῆς ΖΗ κατασκευάζονται ἡ ΘΖΗ=ΓΑΒ καὶ ΖΗΘ=Β. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΖΗΘ εἰσὶν ὅμοια ὡς ἰσογώνια. Ἔπειτα ἐπὶ τῆς ΖΘ ἀπὸ Ζ καὶ Θ γράφονται αἱ γωνίαι ΙΖΘ καὶ ΖΘΙ ἴσαι ταῖς ΓΑΔ καὶ ΑΓΔ. Τὰ τρίγωνα ΖΘΙ καὶ ΑΓΔ ὅμοια ὡς ἰσογώνια. Ὁμοίως ἐπὶ τῆς ΙΖ ἀπὸ Ζ καὶ Ι γράφονται αἱ γωνίαι ΚΖΙ καὶ ΚΙΖ ἴσαι ταῖς ΕΑΔ καὶ ΑΔΕ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ ὅμοιον τῷ ΙΖΚ. Τὰ δὲ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ ὅμοια, καθὸ συγκείμενα ἐξ ἰσαρίθμων τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Σχ. 121.



Ἐὰν δὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ἦναι ἀπρόσιτον καὶ γνωρίζονται αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι κατασκευάζεται ἡ ΖΗΘ=Β, καὶ λαμβάνεται ἡ ΘΗ ἴση τῇ τετάρτῃ ἀναλόγῳ τῶν ΑΒ, ΖΗ καὶ ΒΓ. Ἐπὶ τῆς ΗΘ ἀπὸ Θ κατασκευάζεται ἡ γωνία ΗΘΙ=ΒΓΔ καὶ λαμβάνεται ἡ ΙΘ ἴση τῇ τετάρτῃ ἀναλόγῳ ΒΓ, ΗΘ καὶ ΔΓ. Ἐπὶ τῆς ΙΘ ἀπὸ Ι κατασκευάζεται γωνία ἴση τῆς ΓΔΕ καὶ λαμβάνεται ΙΚ ἴση τῇ τετάρτῃ ἀναλόγῳ τῶν ΔΓ ΙΘ καὶ ΕΔ. Ἐπιζευγνύεται Κ μετὰ τοῦ Ζ καὶ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ ὅμοια, καθ' ὃ ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Γραφικαὶ καταμετρήσεις τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.

Ὅταν τὰ εὐθύγραμμα σχήματα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἵνα καταμετρηθῶσιν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν, γνωστῶν ὄντων ἱκανοῦ ἀριθμοῦ μερῶν αὐτῶν, πρέπει νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ χάρτου πολύγωνον ὅμοιον τῷ φυσικῷ πολυγώνῳ καὶ τὸ πρόβλημα νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν λύσιν προβλήματος ἐπὶ τοῦ ἐπὶ τοῦ χάρτου πολυγώνου. Αἱ μέθοδοι αὗται καλοῦνται *γραφικαί*.

Κλίμαξ. Κλίμαξ καλεῖται ὄργανον περιέχον εὐθείαν διῃρημένην εἰς πολλὰ μικρὰ ἴσα μέρη, δυνάμενα νὰ παραστήσωσι μέτρα πήχεις, λεύγας ἢ μοίρας τοῦ ἰσημερινοῦ.

Αἱ κλίμακες εἰσὶν ἁπλαῖ ἢ σύνθετοι διδουσαι καὶ τὰ δέκατα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν. Αἱ ἁπλαῖ ἔχουσι τὴν μορφὴν τοῦ σχήματος 122.

Σχ. 122.

Ὅταν δίδωσι καὶ τὰ δέκατα κατασκευάζονται ὡς ἕπεται σχ. 123

Σχ. 123

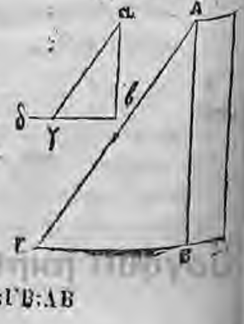
ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς ἁπλῆς κλίμακος 0 ὑψοῦται κάθετος καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνονται δέκα διαιρέσεις τῆς κλίμακος καὶ ἐπιζευγνύεται τὸ ἄκρον τῆς διαιρέσεως 1 μετὰ τοῦ ἄκρου τῆς διαιρέσεως 10· ἐκ τῶν σημείων τῶν καθέτων διαιρέσεων ἄγονται παράλληλοι τῇ ἁπλῇ κλίμακι. Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ὅμοια ὡς ἰσογώνια. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ἔχουσι λόγον ὡς 1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον· ἑπομένως ἡ ἀντίστοιχος τῇ διαιρέσει 1 εἶναι 0, 1 τῆς διαιρέσεως, ἡ τῇ 2 εἶναι 0, 2, ἡ τῇ 3 εἶναι 0, 3 καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Πρὸς καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὑπάρχουσι διάφορα ὄργανα οἷον τὸ γραφόμετρον καὶ ὁ ἐπαναλείπτης κύκλος, ὧν ἡ περιγραφὴ ἤθελεν ὑπερβῆ τὰ ὅρια τοῦ προκειμένου.

Αἱ εὐθυγραμμίαι ἐπὶ τοῦ ἐδάφους προσδιορίζονται διὰ σειρᾶς καθέτων πασάλων, φερόντων εἰς τὰ ἄκρα μικρὰς σημαίας.

Πρόβλημα α΄. Εὑρεῖν τὸ ὕψος ΑΒ κωδονοστασίου, πύργου ἢ τείχους, σχ. 124.

Σχ. 124.



Μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὁριζοντείως μῆκός τι ΒΓ=5 μέτρα παραδείγματος χάριν· διὰ τοῦ γραφομέτρου μετρεῖται ἡ γωνία Γ· ἡ δὲ γωνία Β ὀρθή· ἔπειτα ἐπὶ τοῦ χάρτου λαμβάνονται 5 διαιρέσεις τῆς κλίμακος ἐπὶ τῆς εὐθείας δδ ἴσαι τῇ βγ. Ἀπὸ β ἐπὶ τῆς γδ ὑψοῦται κάθετος ἡ αδ καὶ σχηματίζεται ἡ γωνία βγα ἴση τῇ Γ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ, ὄντα ὅμοια ὡς ἰσογώνια, δίδουσι τὴν ἀναλογίαν γδ:αδ::ΓΒ:ΑΒ ἐπειδὴ $\gamma\beta=\Gamma B=5$, ἕπεται ὅτι καὶ $\alpha\beta=AB$. Ἐὰν αβ περιέχῃ λόγου χάριν 7,8 διαιρέσεις τῆς κλίμακος ἡ $AB=7,^{\mu}8$.

Τὸ ὕψος τοῦτο προσδιορίζεται ἁπλούστερον διὰ τῶν σκιῶν. Ἔστω ΓΒ ἡ σκιὰ τοῦ κωδονοστασίου ἴση 5 μέτροις καὶ ἡ γβ ἡ σκιὰ στύλου καθέτου ἑνὸς μέτρου ὕψους. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ ὅμοια ἑπομένως $\gamma\beta:\alpha\beta::\Gamma B:AB$.

Ἐὰν ἡ σκιὰ $\gamma\beta=\overset{\mu}{0,45}$, $AB=\dfrac{\alpha\beta\times\Gamma B}{\gamma\beta}=\dfrac{1\times5}{0,45}=\overset{\mu}{11,11}$ ὡς ἔγγιστα 0,01.

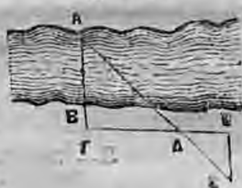
Πρόβλημα β'. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κειμένης κάθετον ἀγαγεῖν διὰ σπαρτίου σχ. 125.

Σχ. 125.

Διαιρεῖται μῆκος σπαρτίου εἰς τρία μέρη ὡς 3:4:5. Συνδέονται τὰ ἄκρα ἐπὶ στύλου ΑΓ, ἀκολούθως διαβιβάζεται τὸ σπαρτίον διὰ στύλου Α ὥστε ΑΓ νὰ περιέχῃ 3 διαιρέσεις. Ἐκτείνεται ἀκολούθως τὸ σπάρτιον οὕτως ὥστε εἰς Δ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν τινὰ καὶ ἡ μὲν ΑΔ νὰ περιέχῃ 4 διαιρέσεις ἡ δὲ ΔΓ νὰ περιέχῃ 5· ἡ γωνία ΔΑΒ ὀρθή. Διότι $3^2+4^2=5^2$ ἢ $9+16=25$.

Πρόβλημα γ'. Εὑρεῖν τὸ πλάτος ποταμοῦ διὰ τοῦ ἁπλοῦ μέτρου. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ καθέτου ἐπὶ τοῦ ῥεύματος ὑψωθήτω κάθετος ἡ ΓΕ· ληφθήτω ΓΔ ἴση τῷ ἡμίσει ἢ τῷ τρίτῳ περίπου τῆς ΑΓ καὶ ΔΕ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ΓΔ περίπου· σταθήτωσαν πάσσαλοι κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΔ, διευθυνομένην εἰς διακριτικόν τι σημεῖον Α καὶ ἐπὶ Ε ὑψωθήτω ἡ κάθετος ΕΖ· μετρηθήτωσαν αἱ ἀποστάσεις ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΖ, σχ. 126.

Σχ. 126.



Τὰ τρίγωνα ΔΑΓ καὶ ΔΕΖ εἰσὶν ὅμοια ἑπομένως

$$\Delta E:EZ::\Gamma\Delta:A\Gamma=\frac{EZ\times\Gamma\Delta}{\Delta E}$$

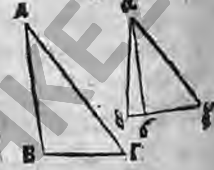
Τὸ δὲ πλάτος τοῦ ποταμοῦ ἴσον $A\Gamma-B\Gamma$.

Ἐὰν $B\Gamma=\overset{\mu}{4}$, $\Gamma\Delta=\overset{\mu}{30}$, $\Delta E=\overset{\mu}{20}$, $EZ=\overset{\mu}{45}$, $A\Gamma=\dfrac{45\times30}{20}=$

$=\dfrac{135}{2}=\overset{\mu}{67,50}$ καὶ $AB=\overset{\mu}{67,50}-4=\overset{\mu}{63,50}$.

Πρόβλημα γ'. Εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους σχ. 127, γνωστῶν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Σχ. 127.



Ληφθήτωσαν ἐπὶ τῆς κλίμακος διαστήματα αβ, αγ, βγ ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ καὶ γραφθήτω τὸ τρίγωνον αβγ ἐπὶ τοῦ χάρτου, ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἀναλόγους.

Ἕπεται ὅτι $ΑΒΓ:\overline{ΑΒ}^2::αβγ:\overline{αβ}^2$ καὶ $ΑΒΓ=\frac{\overline{ΑΒ}^2\times αβγ}{\overline{αβ}^2}$

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ δοθέντος τριγώνου $ΑΒ=90$ μέτρα, $ΑΓ=120$ καὶ $ΒΓ=50$. $αβ=9$ διαιρέσεις τῆς κλίμακος, $αγ=12$ καὶ $βγ=5$· τὸ δὲ ὕψος $αδ=7,8$· $αβγ=\frac{5\times 7,8}{2}=19,5$ τετρ. διαιρέσεις τῆς κλίμακος· καὶ $ΑΒΓ=\frac{90^2\times 19,5}{9^2}=1950$ τετρ. μέτρα ὡς ἔγγιστα δεκάδος μέτρου τετραγωνικοῦ.

Πρόβλημα δ'. Εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν πολυγώνου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γνωστῶν τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Κατασκευασθήτω ἐπὶ τοῦ χάρτου πολύγωνον π ὅμοιον τῷ δεδομένῳ Π. Καταμετρηθήτω τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου διὰ τετραγωνικῶν διαιρέσεων τῆς κλίμακος, διαιρούμενον εἰς τρίγωνα, καὶ ἔστω ε ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Ἔστωσαν Α καὶ α δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν πολυγώνων Π καὶ π. Ἕπεται ὅτι

$$Π:Α^2::ε:α^2 \text{ καὶ } Π=\frac{Α^2\times ε.}{α^2}$$

Διότι τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰσὶν ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Σχόλιον. Αἱ γραφικαὶ μέθοδοι δὲν φέρουσιν εἰς ἀκριβῆ ἐξαγόμενα, διὰ τὰς πολλὰς κατασκευάς, αἵτινες δὲν δύνανται νὰ ὦσιν ἀκριβεῖς. Διὰ τοῦτο ὅπου ἀπαιτεῖται ἀκρίβεια ἐφαρμόζονται αἱ τριγωνομετρικαὶ μέθοδοι, δι' ὧν ἀποφεύγει τις τὴν κατασκευὴν τοῦ ἐπὶ τοῦ χάρτου ὁμοίου τριγώνου ἢ πολυγώνου τῷ δοθέντι καὶ τῶν ἐπ' αὐτοῦ λοιπῶν κατασκευῶν, ἀντικαθισταμένου τοῦ ὑπολογισμοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

Τὰ κανονικὰ πολύγωνα καὶ τὸ μέτρον τοῦ κύκλου.

3. *Κανονικὸν* πολύγωνον καλεῖται τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς γωνίας ἴσας. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ κανονικὸν τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον τὸ κανονικὸν τετράπλευρον.

2. Καλεῖται *μεταβλητὴ* ποσότης δυναμένη νὰ λάβῃ διάφορα μεγέθη δι' αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως. Ἡ ποσότης πρὸς ἣν ἀκαταπαύστως τείνει ἡ μεταβλητὴ καλεῖται *ὅριον* αὐτῆς.

3. *Ἀξίωμα.* Ἐὰν δύο μεταβληταὶ ὦσι πάντοτε ἴσαι θέλουσιν εἶσθαι ἴσα καὶ τὰ ὅρια αὐτῶν ἢ γενικώτερον ἐὰν ὁ λόγος δύο μεταβλητῶν μένῃ σταθερός, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι καὶ τὰ ὅρια αὐτῶν.

4. Τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειόνων μεταβλητῶν ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων αὐτῶν. Ἐὰν Α, Β, Γ αἱ μεταβληταὶ καὶ α,β,γ τὰ ὅρια αὐτῶν, τὸ γινόμενον $Α\times Β\times Γ$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὅριον ἔλασσον τοῦ $α\times β\times γ$· διότι ἐὰν ἔχῃ ὅριον $α'\times β'\times γ'$ ὄντων $α'<α$, $β'<β$ καὶ $γ'<γ$ ἐπειδὴ αἱ Α,Β,Γ δύνανται νὰ πλησιάσωσιν εἰς τὰς α,β,γ καθ' οἱανδήποτε ποσότητα, δύνανται νὰ ἀποβῶσι τοιαῦται ὥστε $Α>α'$, $Β>β'$ καὶ $Γ>β'$, ὥστε τὸ γινόμενον $Α\times Β\times Γ$ νὰ ὑπερβῇ τὸ ὑποτεθὲν ὅριον αὐτοῦ $α'\times β'\times γ'$.

Πρότασις α'.

Τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἰσαρίθμων πλευρῶν εἰσὶν ὅμοια σχήματα.

Τὰ κανονικὰ λόγου χάριν ἑξάγωνα ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας μὲ $\frac{2(6-2)}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{8}$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ πλευραὶ ἑκατέρου εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις, ὁ λόγος οἱασδήποτε τοῦ πρώτου πρὸς τὴν ὁμόλογον αὐτῆς τοῦ δευτέρου εἶναι σταθερός.

Πόρισμα. Αἱ μὲν περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἰσαρίθμων πλευρῶν ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευράς, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν.

Πρότασις β'.

Τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἐγγράφονται καὶ περιγράφονται εἰς κύκλον.

Ἔστω τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ σχ. 128. Διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Α,Β,Γ ἀχθήτω περιφέρεια, ἧς τὸ κέντρον Ο, κείμενον ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς συναπαντήσεως τῶν ἠγμένων δύο καθέτων ΗΟ,ΘΟ ἐπὶ τῶν ΑΒ,ΒΓ ἐκ τῶν μέσων αὐτῶν Η καὶ Θ. Ἐπιζευχθήτω Ο μετὰ τῶν Α,Β,Γ καὶ Δ. Τὰ τετράπλευρα ΑΒΘΟ καὶ ΟΘΓΔ εἰσὶν ἴσα· διότι περιστρεφομένου τοῦ πρώτου περὶ τὴν ΟΘ, ἡ ΒΘ πίπτει ἐπὶ τῆς ΘΓ, ἡ ΒΑ ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ ἡ ΟΒ ἐπὶ τῆς ΟΔ. Ἡ περιφέρεια ἑπομένως διέρχεται καὶ διὰ Δ. Διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τετραπλεύρων ΟΒΓΙ καὶ ΟΙΔΕ ἡ ΟΒ=ΟΕ καὶ ἡ περιφέρειά διέρχεται καὶ διὰ Ε. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι διέρχεται καὶ διὰ Ζ. Ἑπομένως τὸ πολύγωνον ἐγγράφεται εἰς κύκλον. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐκ τοῦ κέντρου Ο κάθετοι ἐπὶ τῶν χορδῶν εἰσὶν ἴσαι, διότι αἱ χορδαὶ ἴσαι καὶ ἀπέχουσιν ἰσάκις τοῦ κέντρου· ἡ κέντρῳ τῷ Ο καὶ διαστήματι ΟΗ γραφομένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν Η, Θ, Ι, Κ, Λ, καὶ Μ καὶ ἐφάπτεται αὐτῶν. Ἄρα τὸ πολύγωνον περιγράφεται εἰς κύκλον ἀκτῖνος ΘΗ.

Σχ. 128

Σχόλιον. Ἡ στιγμὴ Ο κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καλεῖται κέντρον τοῦ πολυγώνου. Ἡ γωνία ΔΟΒ καλεῖται κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου· ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ΟΗ καλεῖται ἀπόθεμα.

Ἡ ἐγγραφὴ κανονικοῦ πολυγώνου εἰς κύκλον ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας εἰς πολλὰ ἴσα μέρη. Διότι τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουσιν ἴσας χορδάς, καὶ αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς ἴσα τμήματα ἴσαι.

Πρότασις γ'.

Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ ΟΑ τετράγωνον ἐγγράψαι σχ. 129. Ἀχθήτωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ διάμετροι ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἐπιζευχθήτωσαν τὰ ἄκρα Α, Δ, Β καὶ Γ. Τὸ παραγόμενον σχῆμα εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον· διότι αἱ πλευραὶ ἴσαι ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων καὶ αἱ γωνίαι ὀρθαὶ ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια.

Σχ. 129.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΔΟΓ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς ΟΑ:ΑΓ::$\sqrt{2}$:1. Ἑπομένως ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Πρότασις δ'.

Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ ΟΑ κανονικὸν ἑξάγωνον ἐγγράψαι σχ. 130

Σχ. 130.

Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου. Ἐπιζευχθήτω Ο μετὰ τῶν Α καὶ Β· τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσόπλευρον, διότι $BOA=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἑπομένως $OAB+ABO=\frac{4}{3}$ καὶ ἐπειδὴ ἴσαι, ἑκατέρα ἴση $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ἄρα $AB=AO$ ἤτοι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Πόρισμα. Ἐπιζευγνυομένων ἐναλλὰξ τῶν κορυφῶν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου παράγεται τὸν κανονικὸν τρίγωνον.

Πρότασις ε'.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἴσον τῷ γενομένῳ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

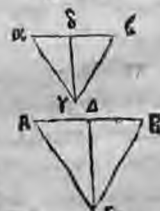
Σχ. 131.

Ἔστω τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ σχ. 131. Ἐπιζευχθήτω τὸ κέντρον μετὰ τῶν κορυφῶν καὶ ἀχθήτωσαν ἐξ αὐτοῦ κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν. Τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς ἓξ τρίγωνα ἴσα, ὧν ἕκαστον ἴσον τῇ πλευρᾷ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ἄρα $AB\Gamma\Delta EZ=6\times AB\times\frac{OH}{2}$.

Πρότασις ς'.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἰσαρίθμων πλευρῶν ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων κύκλων.

Σχ. 132.



Ἔστωσαν ΑΒ καὶ αϐ πλευραὶ κανονικῶν ἑξαγώνων, Γ καὶ γ τὰ κέντρα αὐτῶν· ΔΓ καὶ δγ θέλουσιν εἶσθαι αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων καὶ ΓΑ, γα αἱ τῶν περιγεγραμμένων σχ. 132. Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ αγδ ὅμοια, διότι εἰσὶν ὀρθογώνια καὶ ΑΓΔ=αγδ ὡς ἡμίσεα ἴσων γωνιῶν. Ἄρα

$$A\Delta:\alpha\delta::A\Gamma:\alpha\gamma::\Gamma\Delta:\gamma\delta$$

ἢ ἐπειδὴ ΑΒ=2ΑΔ καὶ αϐ=2αδ,

$$AB:\alpha\beta::A\Gamma:\alpha\gamma::\Gamma\Delta:\gamma\delta.$$

Καὶ τῷ τετραγωνισμῷ τῶν ὅρων

$$\overline{AB}^2:\overline{\alpha\beta}^2::\overline{A\Gamma}^2:\overline{\alpha\gamma}^2::\overline{\Gamma\Delta}^2:\overline{\gamma\delta}^2.$$

Ἀλλ' αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευράς, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν. Ἄρα κτλ.

Πρότασις ζ'.

Ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ κύκλου τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ ΑΟ σχ. 133. Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ἐλάσσονες τῶν ἀντιστοίχων τόξων, ἡ ὅλη περίμετρος τοῦ πολυγώνου πάντοτε ἐλάσσων τῆς περιφερείας· ἡ δὲ ἐπιφάνεια αὐτοῦ καθὸ μέρος πρὸς ὅλον ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου. Τμηθήτωσαν δίχα τὰ τόξα ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, καὶ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθήτωσαν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς μετὰ τῶν ἄκρων τῶν τόξων· παράγεται τὸ κανονικὸν ὀκτάγωνον, οὗ ἡ μὲν περίμετρος μείζων τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου, ἑπομένως πλησιεστέρα εἰς τὴν περιφέρειαν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια μείζων τῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραγώνου, ἑπομένως πλησιεστέρα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου. Ἡ διχοτόμησις τῶν νέων τόξων παράγει πολύγωνον κανονικὸν 16 πλευρῶν, οὗ ἡ μὲν περίμετρος ἔτι πλησιεστέρα εἰς τὴν περιφέρειαν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια ἔτι πλησιεστέρα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου. Ἄρα κ.τ.λ.

ΣΧ. 133.

Πρότασις η'.

Αἱ μὲν περιφέρειαι τῶν κύκλων ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Ἔστωσαν Α. καὶ α. αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων καὶ Π, π αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμένων εἰς τοὺς δύο κύκλους, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον· Ε καὶ ε αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.

Ἐπειδὴ πάντοτε αἱ μὲν περίμετροι τῶν πολυγώνων τούτων ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τούτων, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι καὶ τὰ ὅρια αὐτῶν· ἐπομένως

περ. Α: περ. α::Α:α

καὶ ἐπιφ. Α : ἐπιφ. α::$Α^2$:$α^2$

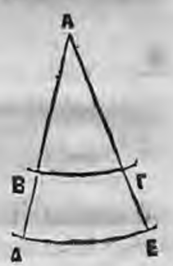
Πόρισμα. Ἐπειδὴ περ. Α: περ. α::Α:α, τῷ διπλασιασμῷ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου λόγου καὶ τῇ μεταθέσει τῶν μέσων,

περ. Α:2Α::περ. α:2α

ἤτοι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἀριθμὸς σταθερός. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται π καὶ ἰσοῦται κατὰ μὲν τὸν Ἀρχιμήδη μὲ $\frac{22}{7}$ ἢ $3\frac{1}{7}$, κατὰ δὲ τὸν Μέτιον μὲ $\frac{355}{113}$· ἀκριβέστερον δὲ ἐκφράζεται διὰ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος 3,1415926. Ἐντεῦθεν ἕπεται περ. Α:2Α::π:1 καὶ περ Α=2Α.π· ἤτοι ἡ περιφέρεια ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς Α=5,25, περ. Α=$\frac{22}{7}$ ×5,25=16,5.

Πρότασις θ΄.

Σχ. 134.



Τὰ ὅμοια τόξα ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀκτῖνας, οἱ δὲ ὅμοιοι τομεῖς ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τόξα ΒΓ καὶ ΔΕ καὶ οἱ ὅμοιοι τομεῖς ΒΑΓ καὶ ΔΑΕ σχ. 134

Ἐκ τῆς ιξ^{ης} τοῦ Β^{ου} βιβλίου ἕπονται αἱ ἀναλογίαι

τοξ. ΒΓ: περ. ΑΒ::Α:4ορ καὶ ΒΑΓ: επ.ΑΒ::Α:4ορ,

τοξ. ΔΕ. περ. ΑΔ::Α:4 ορ καὶ τομ. ΔΑΕ: επ.ΑΔ:: Α:4 ορ.

Ἐπειδὴ οἱ δεύτεροι λόγοι ἴσοι, σχηματίζουσι τὰς ἑξῆς ἀναλογίας

τοξ ΒΓ: περ. ΑΒ:: τοξ. ΔΕ: περ. ΑΔ

καὶ τομ. ΒΑΓ: επ. ΑΒ:: τομ. ΔΑΕ: επ. ΑΔ.

Τῇ μεταθέσει τῶν μέσων τοξ. ΒΓ: τοξ. ΔΕ:: περ. ΑΒ: περ. ΑΔ

καὶ τομ. ΒΑΓ: τομ. ΔΑΕ:: επ. ΑΒ: επ. ΑΔ

ἀλλὰ περ. ΑΒ: περ. ΑΔ::ΑΒ:ΑΔ καὶ ἐπ. ΑΒ: επ. ΑΔ::$\overline{ΑΒ}^2$:$\overline{ΑΔ}^2$·

ἄρα τῇ ἀντικαταστάσει

τοξ. ΒΓ: τοξ. ΔΕ::ΑΒ:ΑΔ

καὶ τομ. ΒΑΓ: τομ. ΔΑΕ::$\overline{ΑΒ}^2$:$\overline{ΑΔ}^2$.

Πρότασις ι'.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἐπ. Α ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ· Ε ἡ ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον· Π ἡ περίμετρος αὐτοῦ καὶ α ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Δυνάμει τῆς ε^{ης} προτάσεως $Ε=\frac{1}{2}α\times Π$.

Ἀλλὰ Ε ἔχει ὅριον επ. Α, α ἔχει ὅριον Α καὶ Π ἔχει ὅριον περ. Α· ἄρα δυνάμει τοῦ ἀξιώματος 3. 4 (ὁρισμὸς 4 βιβλίου).

$$\text{ἐπ. } Α=\tfrac{1}{2}Α\times \text{περ. } Α.$$

Ἀλλὰ περ. $Α=2\times Α\times π$· ἄρα τῇ ἀντικαταστάσει

$$\text{ἐπ. } Α=2\times Α\times π\times \tfrac{1}{2}Α=π.\ Α^2.$$

ἤτοι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἴση τῷ λόγῳ τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος.

Ἐὰν $Α=5,25$, ἐπ. $Α=\frac{22}{7}\times(5,25)^2=86,6250$ τετρ. μέτρα.

Σχόλιον. Τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον βάσιν περ. Α καὶ ὕψος $\frac{1}{2}$ Α ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κύκλου. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἴσον τῷ τετραγώνῳ τῷ ἔχοντι πλευρὰν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ περ Α καὶ $\frac{1}{2}$ Α· ἄρα τὸ τετράγωνον τοῦτο ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κύκλου. Ὁ τετραγωνισμὸς λοιπὸν τοῦ κύκλου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς εὐθυποιήσεως τῆς περιφερείας, ἐξαρτωμένης ἐκ τῆς εὑρέσεως τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Πρότασις ια'.

Ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΒΑΓ ἔχει μέτρον τὸ τόξον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΑΒ σχ. 135.

Ἐπειδὴ επ. ΑΒ:τομ. ΑΒΓ::4:ορ Α

καὶ περ. ΑΒ:τόξ.ΒΓ::4 ορ. Α.

Ἕπεται επ. ΑΒ:τομ. ΑΒΓ::περ. ΑΒ:τόξ. ΒΓ.

Σχ. 135.

Τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου λόγου ἐπὶ $1/2$ ΑΒ, ἕπεται επ. ΑΒ : τομ. ΑΒΓ : : περ. ΑΒ$\times\frac{1}{2}$ ΑΒ : τόξ. ΒΓ $\times\frac{1}{2}$ ΑΒ. Ἀλλ' οἱ ἡγούμενοι ἴσοι· ἄρα καὶ οἱ ἑπόμενοι· καὶ ἑπομένως

$$\text{τομ. } ΒΑΓ=\text{τόξ. } ΒΓ\times \tfrac{1}{2}\ ΑΒ.$$

Σχόλιον. Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 360^0, ἡ $1^0=\frac{\text{περ. } ΑΒ}{360}$ καὶ ἑξον $\alpha^0 = \frac{\pi\epsilon\rho.\ AB}{360} \times \alpha = \pi\epsilon\rho.\ AB \times \frac{\alpha}{360} = 2\pi.AB.\frac{\alpha}{360}$, καὶ τομεὺς $BA\Gamma = 2\pi.\overline{AB}.\frac{\alpha}{360} \times \frac{1}{2}AB = \pi.\overline{AB}^2.\frac{\alpha}{360}$

Ἐὰν $\alpha = 60$ καὶ $AB = 12$, τόξον $60^0 = \frac{2.12.22.}{7.360} \times 60 = 12,5714$ καὶ τομεὺς τόξου 60^0 καὶ ἀκτῖνος 12 ἴσος $6 \times 12,5714 = 75,4284$. Ἐὰν δὲ ὁ λόγος π ληφθῇ ἴσος 3,1415, εὑρίσκεται ἀκριβέστερον ὁ τομεὺς οὗτος ἴσος 75,3960. Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον πρέπει νὰ ἐκτιμᾶται ἀκριβέστερον, ὁσάκις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μεγάλους ἀριθμούς.

Πρότασις ιϐ'.

Δοθεισῶν τῶν ἀκτίνων τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς κανονικὸν πολύγωνον, εὑρεῖν τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγραφομένου κύκλου εἰς ἰσοπερίμετρον πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Ἔστω ΒΔ ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον· ΑΓ καὶ ΒΓ θέλουσιν εἶσθαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγραφομένου κύκλου σχ. 136. Προεκϐληθήτω ἡ ἀκτὶς ΑΓ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς Ι· ἐπιζευχθήτω μετὰ τῶν Β καὶ Δ· ἐκ τοῦ Γ ἀχθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΙ· ἐκ τοῦ Κ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΙ, συναπαντῶσα τὴν ΔΙ εἰς Ε. ΚΙ καὶ ΖΙ εἰσὶν αἱ ζητούμεναι ἀκτῖνες. Διότι Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΙ· καὶ ΚΙΕ ὅμοιον τῷ ΒΔΙ· ἐπομένως ἐπειδὴ ΚΙ ἥμισυ τῆς ὁμολόγου ΒΙ, καὶ ΚΕ ἥμισυ τῆς ΒΔ· καὶ ἡ γωνία $KIE = \frac{1}{2}B\Gamma\Delta$, ἐπειδὴ ἡ μὲν μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου ΒΔ ὡς ἐγγεγραμμένη, ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ ὅλου ὡς κεντρική. Ἄρα ΚΕ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπεριμέτρου πολυγώνου διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Σχ. 136.

Ἀλλὰ $ZI = \frac{A\Gamma + \Gamma I}{2}$ (1) λοιπὸν ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἴση τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν δοθεισῶν ἀκτίνων.

Τὸ δὲ τρίγωνον ΙΓΚ ὡς ὀρθογώνιον, ἔχων τὴν ΚΖ κάθετον ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, δίδει

$$IZ:IK::IK:I\Gamma \text{· ἄρα } \overline{IK}^2 = IZ \times I\Gamma \text{ καὶ } IK = \sqrt{IZ \times I\Gamma}. \quad (2)$$

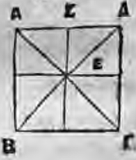
ἤτοι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς δοθείσης ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν πολύγωνον.

Πρότασις ιγ'.

Εὑρεῖν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον διὰ προσεγγίσεως.

Ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος ΑΒ γραφθήτω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 137. Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου $ΖΕ=\frac{1}{2}$ καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου $ΑΕ=\sqrt{2}$. Αἱ τιμαὶ αὗται ἀντικαθιστάμεναι ἐν τοῖς τύποις (1) καὶ (2) δίδουσι τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς ὀκτάγωνον ἰσοπερίμετρον τῷ τετραγώνῳ ἤτοι περιμέτρου 4 μέτρων· ἐκ τούτων μεταβαίνει τις εἰς τὰς τοῦ πολυγώνου 16, ἔπειτα 32, 64, 128 κλ. πλευρῶν, ὧν ἡ περίμετρος 4. Προχωρῶντες οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ μὲν ἀκτῖνες τοῦ πολυγώνου 8,192 πλευρῶν εἰσὶν ἴσαι 0,6366196 καὶ ταὐτίζονται σχεδὸν, αἱ δὲ περιφέρειαι αὐτῶν σχεδὸν ταὐτίζονται καὶ ἰσοῦνται ἐπαισθητῶς μὲ 4 μέτρα. Ἐπομένως $π=4:2\times 0,6366196=3,1415926$, ὡς ἔγγιστα δεκαδικοῦ ἑβδόμης ὑποδιαιρέσεως.

Σχ. 137.



Προβλήματα χάριν ἀσκήσεως.

α'. Εὑρεῖν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ὡς ἀκτὶς $\overset{\mu}{8,35}$. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{626,6075}$.

β'. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος $\overset{\mu}{8,35}$. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{626,6075}\times 4,175=\overset{\mu}{2815,0,863125}$.

γ'. Εὑρεῖν τὸ μῆκος τόξου 65^0 καὶ ἀκτῖνος $\overset{\mu}{7,85}$. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{10,3636}$.

δ'. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τομέως ἀκτῖνος $\overset{\mu}{7,85}$ καὶ τόξου 65^0. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{10,3636}\times 3,925=40,67713$.

ε'. Εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν κυκλικοῦ στεφάνου ἀκτίνων 15 καὶ 20. Κύκλος ἀκτῖνος $20=π.\ 20^2$ καὶ κύκλος ἀκτῖνος $15=π.\ 15^2$. ἐπομένως ὁ κυκλικὸς στέφανος $=π.\ 20^2-π.\ 15^2=π.\ (20^2-15^2)=π.\ 5^2.7=3,1415\times 175=549,7625$.

ϛ'. Εὑρεῖν τετράγωνον ἰσοδύναμον κύκλῳ ἀκτῖνος 5. Ἀπόκρισις $X=\sqrt{25\times3{,}1415}=$

ζ'. Εὑρεῖν τετράγωνον ἰσοδύναμον τομεῖ τόξου 60^0 καὶ ἀκτῖνος $\overset{\mu}{12}$. Ἀπόκρισις $X=\sqrt{\overset{\mu}{12^2}.3{,}1415\times\frac{1}{6}}=\sqrt{72\times3{,}1415}$.

η'. Εὑρεῖν τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι δύο τετραγώνων πλευρᾶς 7 καὶ 8. Ἀπόκρισις $X=\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}$.

θ'. Εὑρεῖν τετράγωνον ἴσον τῇ διαφορᾷ δύο τετραγώνων πλευρᾶς 8 καὶ 7. Ἀπόκρισις $X=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$.

ΣΤΕΡΕΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Ὁρισμοὶ καὶ τύποι τῆς στερεότητος τῶν πολυέδρων καὶ τῶν τριῶν στρογγύλων σωμάτων.

Ὁρισμοὶ ἐπὶ τῶν πολυέδρων.

1. Εὐθεῖα γραμμὴ ἵσταται *κάθετος* ἐπὶ ἐπιπέδου ὅταν ἦναι κάθετος ἐπὶ πάσης εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. *Ποῦς* τῆς καθέτου καλεῖται τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως αὐτῆς μετὰ τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ μὴ κάθετος καλεῖται *πλαγία*.

2. Εὐθεῖα εἶναι *παράλληλος* ἐπιπέδῳ καὶ τὸ ἐπίπεδον *παράλληλον* τῇ εὐθείᾳ ὅταν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσιν ἥτε εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον δὲν συναπαντῶνται.

3. Δύο ἐπίπεδα εἶναι *παράλληλα* ἀλλήλοις ὅταν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσιν δὲν συναπαντῶνται.

4. Τὸ ἄνοιγμα δύο ἐπιπέδων συναπαντωμένων καλεῖται *δίεδρος* γωνία καὶ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζουσι δύο κάθετοι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν, ὧν ἡ μὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἐπιπέδων, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου· ἐὰν ἡ γωνία αὕτη ἦναι ὀρθή, τὰ ἐπίπεδα εἰσὶ κάθετα. Οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων ἵστανται κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ οἱ τοῖχοι τῶν οἰκοδομῶν ἵστανται κάθεται ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου.

5. *Γωνία στερεὰ* καλεῖται τὸ σχηματιζόμενον ἄνοιγμα ὑπὸ πολλῶν ἐπιπέδων συναπαντωμένων κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν. Εἰς

τὰς γωνίας τῶν δωματίων τὰ τρία συναπαντώμενα ἐπίπεδα σχηματίζουσι τριέδρους στερεὰς γωνίας. Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν ἵστανται ἀμοιβαίως κάθετα ἕκαστον ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων, ἡ στερεὰ γωνία καλεῖται *τρισορθογώνιος*. Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰς ἀγκωνὰς τῶν δωματίων ὁσάκις οἱ τοῖχοι γωνιάζουν, ὡς συνήθως λέγεται.

6. Καλεῖται *πολύεδρον* πᾶν στερεὸν περατούμενον ὑπὸ ἐπιπέδων ἤτοι ἑδρῶν. *Τετράεδρον* καλεῖται τὸ ἔχον τέσσαρας ἕδρας, *πεντάεδρον* τὸ ἔχον πέντε ἕδρας, *ἑξάεδρον* τὸ ἔχον ἕξ, καὶ καθεξῆς. Τὸ ἑξάεδρον τὸ ἔχον πάσας τὰς ἕδρας ἴσα τετράγωνα καλεῖται *κύβος*. Ὁ κύβος οὗ ἡ πλευρὰ ἴση τῇ γραμμικῇ μονάδι καλεῖται *κυβικὴ μονὰς* καὶ λαμβάνεται ὡς μέτρον τῶν στερεῶν, καθὼς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τὸ μέτρον ὡς μονὰς τῶν μηκῶν.

7. Καλεῖται *κανονικὸν πολύεδρον* τὸ ἔχον ἁπάσας τὰς ἕδρας ἴσα κανονικὰ πολύγωνα. Ταῦτα δὲ εἶναι τὸν ἀριθμὸν πέντε, τὸ *τετράεδρον* περιοριζόμενον ὑπὸ τεσσάρων ἴσων κανονικῶν τριγώνων, τὸ *ὀκτάεδρον* ὑπὸ ὀκτώ, τὸ *εἰκοσάεδρον* ὑπὸ εἴκοσι, τὸ *ἑξάεδρον* ἢ ὁ *κύβος* περιοριζόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων καὶ τὸ *δωδεκάεδρον* περιοριζόμενον ὑπὸ δώδεκα ἴσων κανονικῶν πενταγώνων.

8. Ἡ κοινὴ τομὴ δύο προσκειμένων ἑδρῶν καλεῖται *κόψις* ἢ *ῥάχις*. Αἱ κοιναὶ τομαὶ ἐν γένει δύο ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖαι.

9. *Πρίσμα* καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ πολλῶν παραλληλογράμμων περατουμένων εἰς δύο πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα, οἷον το ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ σχ. 138.

Σχ. 138.

Τὰ ἴσα παράλληλα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ καλοῦνται *βάσεις* τοῦ πρίσματος· ἡ δὲ μεταξὺ αὐτῶν φερομένη κάθετος καλεῖται *ὕψος*. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ, ΓΔΙΘ, κλπ. συνιστῶσι τὴν *παράπλευρον ἐπιφάνειαν* τοῦ πρίσματος.

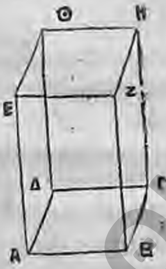
Τὸ πρίσμα καλεῖται *ὀρθὸν* ὅταν αἱ παράπλευροι κόψεις ἵστανται κάθετοι ἐπὶ τῶν βάσεων· ἄλλως καλεῖται *πλάγιον*.

Τὸ πρίσμα καλεῖται *τριγωνικόν*, *τετραγωνικόν*, *πενταγωνικὸν* κτλ, ἐὰν αἱ βάσεις ὦσι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα κτλ.

10. Τὸ πρίσμα καλεῖται *παραλληλεπίπεδον* ὅταν αἱ βάσεις ἦναι παραλληλόγραμμα, οἷον τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ σχ. 139.

Τὰ παραλληλεπίπεδα εἶσὶν *ὀρθὰ* ὅταν αἱ παράπλευροι κόψεις

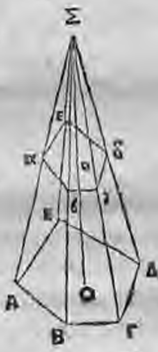
Σχ. 139.



-στανται κάθετοι ἐπὶ τῶν βάσεων· καὶ ὀρθογώ-νια τὰ ὀρθὰ καὶ ἔχοντα βάσεις ὀρθογώνια. Τὰ δωμάτια τῶν οἰκιῶν εἰσὶν ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα· εἰς τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα αἱ τρεῖς διαστάσεις προσδιορίζονται ὑπὸ τῶν τριῶν καθέτων πρὸς ἀλλήλας κόψεων τῶν σχηματιζουσῶν στερεὰν γωνίαν. Εἰς δὲ τὰ λοιπὰ παραλληλεπίπεδα μία τῶν διαστάσεων τῆς βάσεως ἐκλαμβάνεται ὡς *μῆκος*, τὸ ὕψος αὐτῆς ἐκλαμβάνεται ὡς *πλάτος* καὶ τὸ *ὕψος* τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ τρίτη διάστασις.

11. *Πυραμὶς* καλεῖται πολύεδρον περιοριζόμενον ὑπὸ πολλῶν τριγώνων συνερχομένων κατὰ τὴν κορυφήν, ἥτις καλεῖται *κορυφὴ* τῆς πυραμίδος, καὶ περατουμένων κατὰ τὰς βάσεις εἰς πολύγωνον, καλούμενον *βάσις* τῆς πυραμίδος. Ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς βάσεως καλεῖται *ὕψος* τῆς πυραμίδος. Οὕτω τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΕ σχ. 140 καλεῖται πυραμίς· Σ εἶναι ἡ κορυφή, ΑΒΓΔΕ ἡ βάσις, ΣΟ, ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ, εἶναι τὸ ὕψος· τὰ τρίγωνα ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, ΔΣΕ, καὶ ΕΣΑ σχηματίζουσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

Σχ. 140.



Ἡ πυραμὶς καλεῖται *τριγωνική*, *τετραγωνική*, *πενταγωνικὴ* κτλ. ὅταν ἡ βάσις ἦναι τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον κτλ.

Ἡ πυραμὶς καλεῖται *κανονική*, ὅταν ἡ βάσις ἦναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς βάσεως διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου. Ἡ κάθετος αὕτη τότε καλεῖται *ἄξων* τῆς πυραμίδος.

12. Ἐὰν ἡ πυραμὶς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, καὶ ἀφαιρεθῇ τὸ ἄνω τῆς τομῆς μέρος, τὸ ἐναπομένον καλεῖται *κορμὸς πυραμίδος* ἢ *κολοβὴ* πυραμίς. Οἷον ἡ ΑΒΓΔΕ αβγδε. σχ. 140. Τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΑΒΓΔΕ, αβγδε καλοῦνται *βάσεις* καὶ ἡ μεταξὺ αὐτῶν κάθετος Οο καλεῖται *ὕψος* τοῦ κορμοῦ τῆς πυραμίδος.

13. *Διαγώνιος* πολυέδρου καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη διὰ δύο μὴ προσκειμένων κορυφῶν ἤγουν τῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν πολυέδρων.

1. *Ἡ χωρητικότης τοῦ πρίσματος ἴση τῇ βάσει ἐπὶ τὸ ὕψος* ἤγουν περιέχει τόσα κυβικὰ μέτρα, ὅσα τετραγωνικὰ μέτρα περιέχει ἡ βάσις ἐπὶ ὅσα γραμμικὰ μέτρα ἔχει τὸ ὕψος. Οὕτως ἐὰν ἡ βάσις περιέχῃ 5,35 τετρ. μέτρα τὸ δὲ ὕψος 3,12 μέτρα ἡ χωρητικότης αὐτοῦ ἴση 5,35×3,12 κυβικὰ μέτρα 16,6920.

2. *Τὸ παραλληλεπίπεδον ἰδίως ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων αὐτοῦ·* διότι τὸ πλάτος ἐπὶ τὸ μῆκος ἀποτελεῖ τὴν βάσιν. Ἐὰν λόγου χάριν τὸ μῆκος 4,36 μέτρα, τὸ πλάτος 3,50 καὶ τὸ ὕψος 3,25, τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει χωρητικότητα ἤτοι στερεότητα 4, 36×3, 50×3, 25=49,595 κυβικὰ μέτρα.

3. *Ὁ κύβος ἔχει μέτρον τὴν τρίτην δύναμιν τῆς πλευρᾶς·* διότι αἱ τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις ἴσαι. Διὰ τοῦτο ἡ τρίτη δύναμις ἐκλήθη κύβος. Οὕτως ὁ κύβος πλευρᾶς 5 ἴσος $5^3=125$. καὶ κύβος πλευρὰς $4,25^{\mu}$ ἴσος $(4,25)^3 = 76,765625^{\kappa.\ \mu.}$

4. Ἀριθμὸς κυβικῶν μετρῶν πλευρᾶς μονάδος τινὸς γραμμικῆς τρέπονται εἰς κυβικὰ μέτρα πλευρᾶς ὑποδιαιρέσεως, πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ λόγου τῶν γραμμικῶν μονάδων. Ἡ κυβικὴ υἰάρδα ἴσον $3^3=27$ κυβικοὺς πόδας· καὶ 35 κυβικαὶ υἰάρδαι ἴσον 35×57=945. Ἀντιστρόφως ἀριθμὸς μικροτέρων μονάδων τρέπεται εἰς ἀριθμὸν μεγαλειτέρων, διαιρούμενος διὰ τοῦ κύβου τοῦ λόγου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Οὕτω 459 κυβικοὶ πόδες = 350:27 = 17 κυβικὰς υἰάρδας.

5. *Τὰ πρίσματα εἰσὶν ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη· καὶ τὰ μὲν τοῦ αὐτοῦ ὕψους ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις, τὰ δὲ τῆς αὐτῆς βάσεως ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη.* Ἐπειδὴ ἐὰν Β ἡ βάσις καὶ Υ τὸ ὕψος τοῦ πρώτου καὶ Β′ ἡ βάσις καὶ Υ′ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου, αἱ στερεότητες αὐτῶν Β×Υ καὶ Β′×Υ′. Ἐπομένως ἔχουσι λόγον ὡς Β×Υ: Β′×Υ′. Ἐὰν Β=Β′ ὁ λόγος τρέπεται εἰς Υ: Υ′. Ἐὰν δὲ Υ=Υ ὁ λόγος τρέπεται εἰς Β: Β′.

6. *Ἡ πυραμὶς ἔχει μέτρον τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους·* ἐπομένως εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ἴσης βάσεως καὶ ἴσου ὕψους. Ἐπομένως καὶ *αἱ πυραμίδες ἀνάλογοι πρὸς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη, καὶ αἱ μὲν ἰσοϋψεῖς ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις αἱ δὲ τῆς αὐτῆς βάσεως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη.*

7. *Ἡ κόλουρος πυραμὶς ἴση μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν*

ἄνω βάσιν σὺν τῇ κάτω βάσει σὺν τῇ μέσῃ ἀναλόγῳ μεταξὺ τῆς ἄνω βάσεως καὶ τῆς κάτω βάσεως.

8. Πᾶν πολύεδρον διαιρεῖται εἰς πυραμίδας ἐπιζευγνυομένης μιᾶς τῶν κορυφῶν μετὰ τῶν λοιπῶν μὴ προσκειμένων καὶ διαβιβαζομένων ἁρμοδίων ἐπιπέδων. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα πολυγωνικὴ πυραμὶς ἀποσυντίθεται εἰς τριγωνικὰς, διαιρουμένης τῆς βάσεως εἰς τρίγωνα, πᾶν πολύεδρον διαιρεῖται εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας καὶ ἡ στερεότης ἑπομένως τοῦ πολυέδρου ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν στερεοτήτων τῶν τριγωνικῶν τούτων πυραμίδων.

Σχόλιον. Καθὼς τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ στοιχεῖον τῶν πολυγώνων, οὕτως ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ στοιχεῖον τῶν πολυέδρων.

Ὁρισμοὶ ἐπὶ τῆς σφαίρας.

1. *Σφαῖρα* καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς ἡμικυκλίου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, οἷον ΑΚ σχ. 141 παραγομένη ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΒ περὶ τὴν ΑΒ. Ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΓΒ διατρέχει ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΒ τὴν σφαῖραν. Ἑπομένως τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου τοῦ ἡμικυκλίου. Τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΓ καλεῖται *κέντρον* τῆς σφαίρας· ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας καλεῖται *ἀκτίς*. Εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν καλεῖται *διάμετρος*. Αἱ ἀκτῖνες ἴσαι καὶ αἱ διάμετροι ἴσαι καὶ διπλάσιοι τῶν ἀκτίνων. Ἡ διάμετρος ΑΒ περὶ ἣν στρέφεται τὸ ἡμικύκλιον πρὸς παραγωγὴν τῆς σφαίρας καλεῖται *ἄξων* τῆς σφαίρας.

Σχ. 141.

2. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΒ ὑψωθῶσι κάθετοι ΖΕ, ΚΓ, ΟΝ, ἐνῷ περιστρέφεται τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΒ περιστρέφονται καὶ αὗται περὶ τὰ σημεῖα Ζ, Κ, Ο καὶ γράφουσι κύκλους καθέτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος, οἵτινες καλοῦνται *παράλληλοι*.

Ἐν γένει πᾶσα τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος· καὶ εἰ μὲν ἡ τομὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ὁ κύκλος καλεῖται *μέγιστος*, ἔχων ἀκτῖνα τὴν τῆς σφαίρας οἷον ὁ ΓΛΔΜ· εἰ δὲ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, ὁ κύκλος καλεῖται *μικρὸς*, ἔχων ἀκτῖνα ἡμίχορδον οἷον ἡ ΕΗΘΙ. Οἱ κύκλοι οὗτοι γίνονται ἐπαισθητοὶ τεμνομένου πορτοκαλίου, λεμονίου, ἢ κρομμύου. Ἐν γένει οἱ κύκλοι ἐπὶ τῆς σφαίρας καλοῦνται *παράλληλοι*, ἐὰν ἔχωσι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.

3. Οἱ μέγιστοι κύκλοι εἰσὶν ἴσοι, ὡς ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας, τὰς τῆς σφαίρας· διαιροῦνται εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ αἱ τομαὶ αὐτῶν διάμετροι· διαιροῦσι τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι, περιστρεφομένου τοῦ ἑτέρου τῶν τεμαχίων περὶ τὴν τομήν, ταυτίζεται μὲ τὸ ἕτερον.

4. *Πόλοι* κύκλου τῆς σφαίρας καλοῦνται τὰ ἄκρα τῆς ἐπ' αὐτοῦ καθέτου διαμέτρου· Α καὶ Β εἰσὶν οἱ πόλοι τοῦ ΓΛΔΜ καὶ τῶν παραλλήλων αὐτοῦ ΕΖ,ΝΟ.

5. *Σφαιρικὸν τρίγωνον* καλεῖται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιοριζόμενον ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων οἷον τὸ ΑΓΛ. Τὰ τόξα ταῦτα καλοῦνται πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ἃς σχηματίζουσι τὰ ἐπίπεδα τῶν τόξων καλοῦνται γωνίαι τοῦ τριγώνου. Ὅταν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ὀρθὰς καλεῖται τρισορθογώνιον. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας διαιρεῖται εἰς 8 τρισορθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα. Ἐὰν λόγου χάριν οἱ κύκλοι ΑΔΒΜ ΓΛΔΜ καὶ ΑΓΒΔ ἵστανται ἀμοιβαίως κάθετοι ἕκαστος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν λοιπῶν δύο, ἡ σφαῖρα διαιρεῖται εἰς τὰ 8 τρισορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΛΔ, ΔΑΜ, ΑΜΓ, ΓΛΒ, ΛΒΔ, ΒΔΜ, ΒΜΓ.

6. *Σφαιρικὸν πολύγωνον* καλεῖται μέρος σφαιρικῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον ὑπὸ τόξων μεγίστων κύκλων. Τὰ τόξα ταῦτα καλοῦνται πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ἃς τὰ τόξα ταῦτα σχηματίζουσιν ἀνὰ δύο τεμνόμενα καλοῦνται γωνίαι τοῦ πολυγώνου.

7. Ἐὰν ἑνωθῇ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας μὲ τὰς κορυφὰς σφαιρικοῦ τριγώνου ἢ πολυγώνου καὶ διέλθωσιν ἐπίπεδα διὰ τῶν πλευρῶν αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου σχηματίζεται ἐν τῷ κέντρῳ στερεὸν καλούμενον *σφαιρικὴ πυραμίς*, ἧς κορυφὴ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσις τὸ πολύγωνον. Ἡ τριγωνικὴ σφαιρικὴ πυραμίς, ἡ ἔχουσα βάσιν τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, καλεῖται *τρισορθογώνιος σφαιρικὴ πυραμίς*· ἡ σφαῖρα διαιρεῖται εἰς 8 τρισορθογωνίους σφαιρικὰς πυραμίδας, ὡς ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἰς ὀκτὼ τρισορθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα.

Τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα σχηματίζουσι στερεὰς γωνίας ἐχούσας τὴν κορυφὴν ἐν τῷ κέντρῳ.

8. *Ἐπίπεδον* ἐφάπτεται τῆς σφαίρας ὅταν ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς. Ἡ κάθετος ΑΡ σχ. 141 ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος ΑΚ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΒ περιστρεφομένη μετὰ τοῦ ἡμικυκλίου γράφει ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας.

9. *Ζώνη* καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν δύο παραλλήλων κύκλων οἷον ἡ ΕΠΘΓΛΔΜ.

Οἱ παράλληλοι κύκλοι οὗτοι ΕΗΘΙ καὶ ΓΛΔΜ καλοῦνται *βάσεις* τῆς ζώνης, ἡ δὲ μεταξὺ αὐτῶν κάθετος ΖΚ, καλεῖται *ὕψος* τῆς ζώνης. Ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἡ ζώνη ἔχει μίαν μόνην βάσιν οἷον ἡ ΑΕΗΘΙ.

10. *Τμῆμα σφαιρικὸν* καλεῖται τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ μεταξὺ τῆς ζώνης καὶ τῶν βάσεων αὐτῆς. Αἱ βάσεις καὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης εἰσὶν αἱ *βάσεις* καὶ τὸ *ὕψος* τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος. Τὸ τμῆμα ἔχει δύο βάσεις ἢ μίαν, καθὼς ἡ ζώνη αὐτοῦ. Σφαιρικὰ τμήματα εἰσὶ τὰ τεμάχια τοῦ πορτοκαλίου, ὡς συνήθως κόπτεται εἰς τὰς τραπέζας· τὰ δύο ἄκρα τμήματα ἔχουσι μίαν μόνην βάσιν. Τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ πορτοκαλίου τὰ ἐπὶ τῶν τμημάτων εἰσὶ ζῶναι. Τὰ ἄκρα ἔχουσι ζώνας μιᾶς βάσεως.

11. *Ἄτρακτος* καλεῖται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεταξὺ τῶν ἡμιπεριφερειῶν δύο μεγίστων κύκλων οἷον ὁ ΑΓΒΔ. Τὸ δὲ μεταξὺ τοῦ ἀτράκτου καὶ τῶν δύο ἡμικυκλίων αὐτοῦ μέρος τῆς σφαίρας καλεῖται *σφαιρικὸς σφήν*. Ὅταν τέμνηται καρπούζιον διὰ τοῦ ἄνθους καὶ τοῦ ποδὸς, τὰ τεμάχια ταῦτα εἰσὶ σφῆνες σφαιρικοὶ, τὸ δὲ ἐπὶ τῶν σφηνῶν πράσινον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἰσὶν ἄτρακτοι.

Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

1. *Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον.*

Ἐὰν Α ἡ ἀκτὶς, 2πΑ εἶναι ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου καὶ 2Α ἡ διάμετρος· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση $2\pi A \times 2A = 4\pi A^2$ ἤγουν ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους.

Ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας ἀκτῖνος $\overset{\mu}{5},33$ ἴση $4 \times 3,1415 \times (5,28)^2 =$ 36,9993304 τετρ. μέτρα.

2. *Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σφαιρῶν ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων*· διότι ἐὰν Α καὶ α αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, αἱ ἐπιφάνειαι $4\pi A^2$ καὶ $4\pi\alpha^2$· ἀλλὰ $4\pi A^2 : 4\pi\alpha^2 = A^2 : \alpha^2$.

3. *Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου.* Ἐὰν Α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ Υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης, ἡ ζώνη ἴση 2πΑΥ.

Ἐὰν $A=7$ καὶ $Y=4$ ἡ ζώνη ἴση $2 \times 3\ 1415. \times 7 \times 4 = 175,924$.

4. *Ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τῆς ζώνης ὡς ἡ διάμετρος πρὸς τὸ ὕψος τῆς ζώνης*· διότι οἱ τύποι $4\pi A^2$ καὶ $2\pi AY$ ἔχουσι λόγον, ὁ $2A:Y$.

5. *Ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν αἱ ζῶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν.* Διότι ἐὰν Α ἡ Ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ Υ,Υ' τὰ ὕψη τῶν ζωνῶν, οἱ τύποι τῶν ζωνῶν 2π ΑΥ καὶ 2π ΑΥ' ἔχουσι λόγον, ὃν Υ:Υ'.

6. *Ὁ ἄτρακτος ἔχει μέτρον τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας αὐτοῦ,* λαμβανομένης μονάδος τῶν μὲν γωνιῶν τῆς ὀρθῆς, τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου. Ὁ ἄτρακτος, οὗ ἡ γωνία $\frac{5}{8}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἡ ἀκτὶς 7 ἴσος $2\times\frac{5}{8}\times\frac{4\pi.7^2}{8}=$

$$=\frac{5\times3,1415\times49}{8}=96,209.$$

7. *Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ πλὴν δύο ὀρθῶν, λαμβανομένης μονάδος τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου.*

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον, οὗ αἱ γωνίαι $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{8}$ καὶ ἡ ἀκτὶς 8, ἴσον

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}-2\right)\times\frac{4\times3,1415\times8^2}{8}=79,5847 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

8. *Τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ πλὴν τοσάκις δύο ὀρθῶν ὅσαι αἱ πλευραὶ πλὴν δύο.*

9. *Αἱ ἐν τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας σχηματιζόμεναι στερεαὶ γωνίαι εἰσὶν ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ μετροῦνται ὑπ' αὐτῶν, λαμβανομένης μονάδος τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας.*

Τύποι τῆς στερεότητος τῆς σφαίρας καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

1. *Ἡ στερεότης τῆς σφαίρας ἴση τῷ γινομένῳ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.* Ἐπειδὴ ἡ μὲν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δύναται νὰ θεωρηθῇ διῃρημένη εἰς τρίγωνα ἀπειρωστά, ἡ δὲ σφαῖρα ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τριγωνικῶν πυραμίδων ἐχουσῶν βάσεις τὰ τρίγωνα ταῦτα καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον αὐτῆς ὕψος ἑπομένως τὴν ἀκτῖνα· ἡ δὲ πυραμὶς μετρεῖται ὑπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους.

Ἔσω Α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας 4π Α^2 θέλει εἶσθαι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς· ἑπομένως ἡ στερεότης τῆς σφαίρας ἴση $\frac{1}{3}$Α$\times4\pi$.Α$^2=\frac{4}{3}\pi$.Α^3 ἤτοι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸν κύβον τῆς ἀκτῖνος.

Ἡ διάμετρος Δ$=2$Α καὶ Α$=\frac{1}{2}$Δ. Ἑπομένως $\frac{4}{3}\pi$Α$^3=\frac{4}{3}\pi$.

$\frac{\Delta^3}{8}=\frac{1}{6}\pi.\Delta^3$, ἤτοι ἴση τῷ ἕκτῳ τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸν κύβον τῆς διαμέτρου

Ἡ στερεότης τῆς σφαίρας, ἧς ἀκτὶς 5 ἴση $\frac{4}{3}\times3,1415\times125.$ 525,583.

Ἡ στερεότης τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος 8 ἴση $\frac{1}{6}\times3,1415\times8^3$ $=173,0108$ κυβικὰ μέτρα.

2. *Αἱ στερεότητες τῶν σφαιρῶν εἰσὶν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν διαμέτρων*· διότι ἐὰν Α καὶ Α΄ αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν καὶ Δ, Δ΄ αἱ διάμετροι, ὑπάρχουσιν αἱ ἀναλογίαι $\frac{4}{3}\pi A^3:\frac{3}{4}\pi A'^3::A^3:A'^3$ καὶ $\frac{1}{6}\pi\Delta^3:\frac{1}{6}\pi\Delta'^3::\Delta^3:\Delta'^3$.

3. *Ἡ στερεότης τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἴση τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος, πλέον ἡ στερεότης τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος τὸ ὕψος τοῦ τμήματος· τὸ δὲ μὲ μίαν μόνην βάσιν ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως, πλέον ἡ στερεότης τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.*

Ἔστω τὸ ὕψος 4, ἡ ἀκτὶς τῆς ἄνω βάσεως 5 ἡ τῆς κάτω βάσεως 7. Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἴσον $4\times\frac{3,1415\ (5^2+7^2)}{2}+\frac{1}{6}\times 3,1415\times4^3.=5298,6633.$

Ἐὰν ἡ κάτω βάσις 7 καὶ τὸ ὕψος 4, ἡ δὲ ἄνω βάσις μηδέν, τὸ τμῆμα ἴσον $4\times\frac{3,1415\times7^2}{2}+\frac{1}{6}\times3,1415\times4^3=341,37633$

4. *Ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ, ὡς ὁ ἄτρακτος, ἔχει μέτρον τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας αὐτοῦ,* λαμβανομένης μονάδος τῆς τρισορθογωνίου σφαιρικῆς πυραμίδος.

Ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ γωνίας $\frac{3}{4}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἀκτῖνος 5, ἴσος $2\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\times\frac{3,1415}{8}\times5^3=\frac{3,1415\times5^3}{4}=95,6744.$

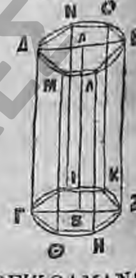
5. *Ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς μετρεῖται ὑπὸ τῆς βάσεως αὐτῆς,* λαμβανομένης μονάδος τῆς τρισορθογωνίου πυραμίδος.

Ἡ σφαιρικὴ πυραμίς, ἧς αἱ γωνίαι $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{59}{40}$ καὶ ἀκτὶς 4 ἔχει μέτρον $(\frac{7}{5}+\frac{5}{8}+\frac{59}{40}-2)\frac{4}{3}\times3,1415\times\frac{4^3}{8}=50,2640.$

Τύποι τοῦ μέτρου τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς στερεότητος τοῦ κυλίνδρου.

1. *Κύλινδρος* καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· οἷον ὁ ΑΒΓΔΕΖ

Σχ. 142.



σχ. 142. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ καλεῖται *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου· αἱ κάθετοι ΑΔ,ΒΓ περιστρεφόμεναι περὶ τὴν ΑΒ παράγουσι δύο κύκλους ΑΔ, ΒΓ καλουμένους *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ παράλληλος τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς ΔΓ παράγει τὴν *κυρτὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν*. Τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων μετρουμένη ὑπὸ τοῦ ἄξονος.

2. Ἐὰν ἐντὸς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐγγραφῇ πολύγωνον ΖΗΘΓΙΚ σχ. 142, καὶ ἐπ' αὐτοῦ σταθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ τὸ ΖΗΘΓΙΚΟΛΜΔΝΕ, τοῦτο καλεῖται πρίσμα ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτοῦ αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον, ὁ κύλινδρος εἶναι τὸ ὅριον αὐτοῦ, καὶ ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου τὸ ὅριον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος.

3. *Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἴση τῷ γενομένῳ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος*· ἐπειδὴ ἐὰν τμηθῇ κατὰ τὴν πλευρὰν καὶ ἀναπτυχθῇ, μεταβάλλεται εἰς ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως καὶ ὕψος τὸ ὕψος κυλίνδρου.

Ἐὰν Α παραστήσῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως Υ τὸ ὕψος, ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση 2πΑΥ.

Ἔστω $Α=3,35$ καὶ $Υ=7,50$, $2πΑΥ=2\times3,1415\times3,35\times7,50=157,860375$ τετρ. μέτρα.

4. *Ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου ἴση τῇ βάσει ἐπὶ τὸ ὕψος*. Διότι ὁ κύλινδρος εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος καὶ ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου, τὸ ὅριον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος, τὸ δὲ ὕψος κοινόν· ἀλλὰ τὸ πρίσμα μετρεῖται ὑπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ ὕψους· ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος μετρεῖται ὑπὸ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐὰν Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου ἐκφράζεται ὑπὸ $πΑ^2Υ$.

Ἔστω $Α=\overset{\mu}{2,50}$ καὶ $Υ=\overset{\mu}{4,25}$, $πΑ^2Υ=3,1415\times(2,50)^2\times4,25=83,44709375$ κυβικὰ μέτρα.

5. *Οἱ κύλινδροι*, ὡς τὰ πρίσματα, *εἰσὶν ἀνάλογοι πρὸς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη καὶ οἱ μὲν ἰσοϋψεῖς κύλινδροι ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις, οἱ δὲ τῆς αὐτῆς βάσεως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη.*

Τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς στερεότητος τοῦ κώνου καὶ τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου.

1. *Κῶνος* καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστρο-

Σχ. 143.

φῆς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ περὶ τὴν ἑτέραν τῶν καθέτων αὐτοῦ ΑΒ σχ. 143. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ καλεῖται *ἄξων*· ἡ κάθετος ΒΓ περιστρεφομένη περὶ τὴν ΑΒ παράγει κύκλον καλούμενον *βάσιν* τοῦ κώνου· ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΑΓ γράφει τὴν *κυρτὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν*. Τὸ σημεῖον Α καλεῖται *κορυφὴ* καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως καλεῖται *ὕψος*· τὸ ὕψος ταυτίζεται μὲ τὸν ἄξονα. Ὁ κῶνος ὁμοιάζει μὲ χονίον ἢ σκηνήν.

2. Ἐὰν ὁ κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἡ τομὴ ΖΘΗ εἶναι κύκλος, καθὸ δυναμένη νὰ παραχθῇ ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς καθέτου ΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἐνῷ περιστρέφεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ κῶνος ΑΖΘΗ, παράγεται ὁ κορμὸς τοῦ κώνου ΓΙΚ ΖΗΘ, οὗτινος βάσεις οἱ κύκλοι ΓΒ καὶ ΖΕ, ὕψος ΕΒ καὶ πλευρὰ ΖΓ. Κορμοὶ κώνου εἰσὶν αἱ στρογγύλαι στῆλαι ἐν γένει.

3. Ἐὰν ἐντὸς τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐγγραφῇ πολύγωνον ΓΙΚΔΛΜ καὶ διὰ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ τῆς κορυφῆς διέλθωσιν ἐπίπεδα, σχηματίζεται πυραμὶς καλουμένη *ἐγγεγραμμένη* ἐν τῷ κώνῳ. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον, ὁ μὲν κῶνος τὸ ὅριον τῆς πυραμίδος, ἡ δὲ βάσις τοῦ κώνου τὸ ὅριον τῆς βάσεως αὐτῆς.

5. *Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς*. Διότι ἐὰν τμηθῇ κατὰ τὴν πλευρὰν καὶ ἀναπτυχθῇ, τρέπεται εἰς κυκλικὸν τομέα, ἔχοντα τόξον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευράν.

Ἐὰν Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος, ἡ πλευρὰ $\Pi = \sqrt{A^2+\Upsilon^{22}}$ καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἴση $\frac{2\pi A}{2} \times \sqrt{A^2+\Upsilon^2}$ ἢ $\pi A \sqrt{A^2+\Upsilon^2}$.

Ἐὰν $A=5,4$ καὶ $\Upsilon=4,35$, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἴση $3,1415 \times 5,4 \times \sqrt{(5,4)^2+(4,35)^2} = 16,96410 \times 6,9342 = 117,63246222$ τετρ. μέτρα ἢ ἁπλῶς 117,632.

6. *Ἡ στερεότης τοῦ κώνου ἴση τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους*· Διότι εἶναι τὸ ὅριον τῆς ἐγγεγραμμένης πολυγωνικῆς πυραμίδος, ἧς ὕψος τὸ τοῦ κώνου καὶ βάσις ἔχουσα ὅριον τὸ τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

Ἐὰν Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος ἡ στερεότης τοῦ κώνου ἴση $\frac{1}{3}\Upsilon \times \pi A^2$.

Ἐὰν $A=5,25$ καὶ $Y=3,50$, $\frac{1}{3}Y\times\pi A^2=\frac{1}{3}\times3,50\times3,1415\times(5,25^2)=303,036578125$ κυβικὰ μέτρα.

7. *Οἱ κῶνοι, ὡς αἱ πυραμίδες, εἰσὶν ἀνάλογοι πρὸς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη· καὶ οἱ μὲν ἰσοϋψεῖς ὡς αἱ βάσεις, οἱ δὲ τῆς αὐτῆς βάσεως ὡς τὰ ὕψη.*

8. *Ἡ στερεότης τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου, ὡς ἡ τῆς κολούρου πυραμίδος, ἴση τῷ τρίτῳ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ἄνω βάσιν σὺν τῇ κάτω βάσει, σὺν μέσῃ ἀναλόγῳ μεταξὺ τῆς ἄνω καὶ τῆς κάτω βάσεως.*

Ἐὰν Α ἡ ἀκτὶς τῆς κάτω βάσεως, Β ἡ τῆς ἄνω βάσεως Υ τὸ ὕψος ὁ κορμὸς τοῦ κώνου ἐκφράζεται ὑπὸ $\frac{Y}{3}(A^2+B^2+AB)$.

Ὅταν $A=5$, $B=4$, $Y=6$ καὶ $\pi=\frac{22}{7}$, ὁ τύπος τρέπεται εἰς $\frac{6}{3}\times\frac{22}{7}(5^2+4^2+5\times4)=383,429$ κυβικὰ μέτρα.

9. Πόσας πλίνθους ἀπαιτεῖ ἡ οἰκοδομὴ στήλης κωνικῆς 5 μέτρων ἀκτῖνος κάτω βάσεως, 4 ἄνω βάσεως καὶ 6 ὕψους οὐσῶν τῶν διαστάσεων τῶν πλίνθων 0,05, 0,25 καὶ 0,15. Ἀπόκρισις $383,429:0,05\times0,25\times0,15=204495\frac{875}{1875}$.

8. *Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου ἴση τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν περιφερειῶν τῶν παραλλήλων αὐτοῦ βάσεων ἐπὶ τὴν πλευράν, ὡς τὸ τραπέζιον.*

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς κάτω βάσεως, Β ἡ τῆς ἄνω, καὶ Π ἡ πλευρά· ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου ἐκφράζεται ὑπὸ $\Pi\times\frac{2\pi A+2\pi B}{2}=\Pi\times\pi(A+B)$. Ἐὰν $A=5$, $B=4$ καὶ $\Gamma=7$, ὁ ἀνωτέρω τύπος τρέπεται εἰς $7\times\frac{22}{7}(5+4)=22\times9=198$ τετρ. μέτρα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ.

ΧΑΡΙΝ ΑΣΚΗΣΕΩΣ.

1. Ποῖον τὸ ὅριον τῆς γωνίας τοῦ ἰσογωνίου πολυγώνου, οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον;

2. Ποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἐκ τῆς προεκβολῆς τῶν πλευρῶν πολυγωνου κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν.

3. Ἀποδεῖξαι ὅτι τὸ σχῆμα τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶνε παραλληλόγραμμον.

4. Ἐκ σημείου τινός, εὐθεῖαν ἀγαγεῖν ἰσαπέχουσαν δύο ἄλλων σημείων.

5. Εὑρεῖν πόσοι κύκλοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν τριγώνου;

6. Εὐθεῖαν δεδομένην διελεῖν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον ἤτοι εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ μεῖζον μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης γραμμῆς καὶ τοῦ ἄλλου μέρους.

7. Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ δεδομένην γωνίαν.

8. Κοινὴν ἐφαπτομένην δύο κύκλων ἀγαγεῖν.

9. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, οὗ βάσεις $57^{\mu},25$ καὶ ὕψος $14^{\mu}\frac{9}{16}$.

10. Εὑρεῖν τὸ ὕψος παραλληλογράμμου, οὗ ἡ βάσις $59^{\mu},456$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν 489,46 τετρ. μέτρα.

11. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, οὗ ὕψος $10^{\mu}\frac{3}{4}$ καὶ βάσεις $15^{\mu}\frac{5}{8}$ καὶ $20^{\mu},15$.

12. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, οὗ τὸ ὕψος $149^{\mu},59$ καὶ ἡ τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἴση 468^{μ}, 457.

13. Εὑρεῖν τὸ ὕψος τραπεζίου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν $159^{\mu},45$ καὶ οὗ αἱ βάσεις ἔχουσιν ἄθροισμα $25^{\mu},47$ καὶ διαφορὰν $19^{\mu},34$.

14. Εὑρεῖν τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ ὀρθογώνιον βάσεως $45^{\mu},45$ καὶ ὕψους $36^{\mu},689$ καὶ οὗ ἡ βάσις 20^{μ}.

15. Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον διαστάσεις $65^{\mu},37$ καὶ $45^{\mu},25$.

16. Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 15.

17. Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων 10, 20, 30 40 καὶ 50.

18. Εὑρεῖν πολύγωνον ἴσον τῷ Π. καὶ ὅμοιον τῷ Κ.

19. Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν 49 καὶ 20.

20. Εὑρεῖν τὰς διαστάσεις ὀρθογωνίου, οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων πλευρῶν ἴσον 45.

21. Εὑρεῖν τὰς διαστάσεις ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ 20 οὗ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν προσκειμένων πλευρῶν $\overset{\mu}{47}$.

22. Εὑρεῖν τὸ ὕψος καὶ τὴν βάσιν ὀρθογωνίου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν $\overset{\tau.\mu}{80}$ καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως $\overset{\mu}{11}$. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{16}$ καὶ $\overset{\mu}{5}$.

23. Εὑρεῖν τὸ ὕψος τραπεζίου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν $\overset{\tau.\mu}{1315}$ καὶ αἱ δύο παράλληλοι βάσεις $\overset{\mu}{13}$ καὶ $\overset{\mu}{21}$. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{77}$, 355.

24. Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ ἡ ἐπιφάνεια $\overset{\mu}{389}$,71. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{30}$.

25. Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν $\overset{\tau.\mu}{166}$,272. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{8}$.

26. Εὑρεῖν τὰς τρεῖς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὧν τὸ ἄθροισμα $\overset{\mu}{156}$ καὶ οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἴση $\overset{\tau.\mu}{1014}$. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{39}$, $\overset{\mu}{52}$ καὶ $\overset{\mu}{95}$.

27. Εὑρεῖν τὴν διάμετρον κύκλου, ἧς τὰ δύο τμήματα ὡς 3:5 καὶ τὰ δύο τμήματα τῆς χορδῆς τῆς σχηματιζούσης ταῦτα τὰ τμήματα 10 καὶ 18. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{27}$, 71

28. Τίς ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐπιφάνεια $\overset{\tau.\mu}{132}$, 7326. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{6}$, 5.

29. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, οὗ αἱ δύο χορδαὶ αἱ ἔκ τινος σημείου τῆς περιφερείας ἀγόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου εἰσὶν $\overset{\mu}{17}$ καὶ $\overset{\mu}{23}$. Ἀπόκρισις $\overset{\tau.\mu}{642}$,456.

30. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, οὗ τὸ τόξον 43^{0} 22′ 48″ παλαιᾶς διαιρέσεως καὶ ἡ ἀκτὶς $\overset{\mu}{20}$. Ἀπόκρ. $\overset{\tau.\mu}{151}$. 425.

31. Τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου οὐσῶν $\overset{\mu}{30}$, $\overset{\mu}{24}$. καὶ $\overset{\mu}{20}$, διαιλεῖν αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παραλλήλου τῇ μείζονι πλευρᾷ. Ἀπόκρισις ἡ διαιροῦσα εὐθεῖα ἴση $\overset{\mu}{21}$, 21.

32. Εὑρεῖν τὰς τρεῖς πλευρὰς τριγώνου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν $\overset{\tau.\mu}{340}$ καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν ὡς 3: 7: 8. Ἀπόκρισις $\overset{\mu}{17}$,16 καὶ $\overset{\mu}{40}$,04 καὶ $\overset{\mu}{45}$,76.

33. Εὑρεῖν τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δωδεκαγώνου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου. Ἀπόκρισις. Τὸ δωδεκάγωνον τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ τετραγώνου.

34. Εὑρεῖν τὴν στερεότητα τριγωνικῆς πυραμίδος, ἧς τὸ ὕψος $11{,}3^{\mu}$ καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τῆς βάσεως, 6,7 καὶ 8.

35. Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν κανονικοῦ τετραέδρου, οὗ ἡ στερεότης 15 κυβικὰ μέτρα.

36. Εὑρεῖν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὴν στερεότητα κώνου, οὗ ἡ πλευρὰ 8^{μ} καὶ τὸ ὕψος 5^{μ}.

37. Εὑρεῖν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὴν στερεότητα κολοβοῦ κώνου, οὗ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων 4 καὶ 6 καὶ ἡ πλευρὰ 9.

38. Εὑρεῖν τὸ ὕψος κυλίνδρου, οὗ ἡ στερεότης 36 κυβικὰ μέτρα καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως 8.

39. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα σφαίρας, ἧς ἡ στερεότης 139 κ. μ.

40. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως κυλίνδρου, οὗ τὸ ὕψος διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως καὶ ἡ στερεότης ἴση μὲ μίαν λίτραν ἤτοι ἓν κυβικὸν ὑποδεκάμετρον. Ἀπόκρισις 41 ὑποχιλιάμετρα.

41. Τῆς διαμέτρου σφαίρας τῶν 36 λιτρῶν οὔσης 168 ὑποχιλιάμετρα, εὑρεῖν τὴν διάμετρον τῶν σφαιρῶν τῶν 24, 16, 12, 8 καὶ 4 λιτρῶν. Ἀπόκρισις 147 ὑποχιλιόμετρα, 128, 116, 102 καὶ 81.

ΤΕΛΟΣ.