ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΤΑ ΕΓΚΥΚΛΙΑ

ΑΣΚΟΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ.

ΥΠΟ

Γ. ΚΟΝΔΗ

αθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν παρὰ τῷ

Β. Γυμνασίῳ Ναυπλίας.

« Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω »

Πλάτ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Κ. ΑΝΤΩΝΙΑΔΟΥ.

ὁδὸς Ἑρμοῦ, ἄνω τῆς Καπνικαρέας.

1842.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΤΑ ΕΓΚΥΚΛΙΑ

ΔΙΔΑΣΚΟΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ.

ΥΠΟ

Γ. ΚΟΝΔΗ

Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν παρὰ
Β. Γυμνασίῳ Ναυπλίας.

» Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω· »
Πλάτ.

1844

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Κ. ΑΝΤΩΝΙΑΔΟΥ.

Ὁδὸς Ἑρμοῦ, ἄνω τῆς Καπνικαρέας.

1842.

ΔΗΜΗΤΡΙΩι.

ΚΑΡΑΣΤΑΘΗι.

ΑΝΔΡΙ. ΠΕΡΙ ΤΗΝ ΠΑΤΡΙΔΑ.

ΕΥΕΡΓΕΤΙΚΩΤΑΤΩι.

ΤΩΝ ΦΙΛΟΜΟΥΣΩΝ. ΤΗΣ ΗΠΕΙΡΟΥ. ΝΕΩΝ.

ΠΡΟΣΤΑΤΗι. ΕΠΑΛΕΙΠΤΗι.

ΤΗΝ ΒΙΒΛΟΝ.

Ο ΣΥΝΤΑΚΤΗΣ.

ΕΙΣ ΣΕΒΑΣΜΟΥ. ΤΕΚΜΗΡΙΟΝ.

ΑΝΑΤΙΘΗΣΙΝ.

» Οὐδέποτε κλέος ἐσθλὸν ἀπόλλυται, οὐδ' ὄνομ' αὐτοῦ «

(Τυρταῖος.)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Μετὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ κλασικοῦ συγγράμματος τῆς Γεωμετρίας τοῦ Λεγένδρου, μεταφρασθείσης ὑπὸ τοῦ ἀοιδίμου Ι. Καρανδηνοῦ, ἐξεδόθησαν ἄλλα στοιχειωδέστερα τὸ τοῦ Μ. Φ. Λαγραγγίου, καὶ τὸ τοῦ Φ. Σνέλου, ἐξελληνισθέντα, τὸ μὲν ἐκ τοῦ Γαλλικοῦ κειμένου ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ Κ. Δ. Δεσποτοπούλου, τὸ δὲ ἐκ τοῦ Γερμανικοῦ ὑπὸ τοῦ Κυρίου Γεράκη πρὸς χρῆσιν τῆς ἀρχαρίου νεολαίας. Ἀλλὰ τὰ συγγράμματα ταῦτα, συντεθέντα διὰ προπαιδευτικὰ καταστήματα, δὲν ἔλαβον πλήρη ἐφαρμογὴν εἰς ὅλα τὰ Ἑλληνικὰ Σχολεῖα· ὥστε εἰς τὰ περισσότερα τούτων μέχρι σήμερον χρησιμεύει ὡς κείμενον τὸ ἴδιον σύγγραμμα τοῦ Λεγένδρου.

Τούτου ἕνεκα φιλοτιμηθεὶς νὰ προσφέρω καὶ ἐγὼ κατὰ δύναμιν εἰς τὴν σπουδάζουσαν νεολαίαν, ἐζήτησα τὴν μετάφρασιν ἄλλου τινος καταλληλοτέρου συγγράμματος, συμβιβαζομένου μὲ τὸν κανονισμὸν τῶν ἀνωτέρων Ἑλληνικῶν Σχολείων· καὶ ἐκ τούτου ἔλαβον ἀφορμὴν νὰ κάμω τινὰς ὡς πρὸς τοῦτο παρατηρήσεις καὶ ἐρανιζόμενος τὰ ἀναγκαιότερα νὰ σχηματίσω μικρόν τι τοιοῦτο πόνημα. Τὸ ἔργον ὅμως ἦτο πολλὰ δυσχερές· καὶ τόσον ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῶν οὐσιωδεστέρων προτάσεων, ὅσον καὶ διὰ τὴν εὐκρινεστέραν διαίρεσιν αὐτῶν, καὶ τὴν εὐληπτοτέραν ἔκθεσιν τῶν ἀποδείξεων ἀπήντησα πολλὰς δυσκολίας· ἑωσοῦ ὁδηγηθεὶς ἀπὸ τὸ ἐπίσημον πρόγραμμα τῆς Γαλλίας τῶν 1838, τὸ ὁποῖον κανονίζει τὴν σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας εἰς τὰς κλάσεις τῆς φιλολογίας, λαβὼν πρῶτον κείμενον τὴν τετάρτην ἔκδοσιν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας τοῦ Μ. Βερνερίου, συντεθείσης ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προγράμματος τούτου (α) μέ τινας τροποποιήσεις καὶ προσθήκας, τὰς ὁποίας ἠρανίσθην ὑπὸ ἄλλων συγγραφέων, εἶδον μὲ εὐχαρίστησιν ἀποπερατωμένους τοὺς κόπους μου, τοὺς ὁποίους ἐκδίδω σήμερον διὰ τοῦ τύπου· ἐλπίζω δὲ, ὅτι ἡ εἰλικρινὴς αὕτη ἐξομολόγησις δύναται νὰ δικαιώσῃ τὴν τόλμην μου καὶ νὰ μετριάσῃ ὁπωσοῦν τὴν αὐστηρὰν περὶ τούτου κρίσιν τῶν εἰδημόνων.

Εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ παρόντος πονήματος ἐπροσπάθησα ὅσον τὸ δυνατὸν, χωρὶς νὰ ἐλαττώσω πολὺ τὴν ἐπιστημονικὴν ἀξίαν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν γενικότητα τῶν ἀφῃρημένων ἰδεῶν, νὰ δώσω μέθοδον τινὰ ὡς πρὸς τὴν διάταξιν τοῦ ὅλου κατὰ τμήματα, καὶ νὰ μεταχειρισθῶ τὰς εὐκολωτέρας ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων· ὅθεν διαιρέσας τὸ ὅλον εἰς ἑπτὰ κεφάλαια καὶ ταῦτα εἰς παραγράφους κατ' ἀλληλουχίαν, πέποιθα, ὅτι διευκρίνισα ἀρκούντως τὸ συγκεχυμένον τῶν ἰδεῶν, ὁποῖον εἶναι ἑπόμενον τῆς ἐπὶ τὸ φιλοσοφικώτερον συνθετικῆς μεθόδου.

Διὰ νὰ ἑνώσω δὲ τὸ ἡδὺ μὲ τὸ σπουδαῖον ἀνέμιξα τινὰς ἐφαρμογὰς εἰς τὸ πρακτικὸν τῆς Ἐπιστήμης, καὶ περὶ τὸ τέλος τοῦ βιβλίου κατεχώρησα παράρτημα περὶ τῶν κυριωτέρων μαθηματικῶν ἐργαλείων· πρῶτον ὅτι τὴν χρῆσιν αὐτῶν ἀπαντῶμεν συχνοτάτην, καὶ δεύτερον ὅτι μὲ τὰ μαθήματα τοῦ κειμένου καὶ τὴν εἴδησιν τῶν ἐργαλείων τούτων δύναται ὁπωσοῦν νὰ ἀναπληρώσῃ ὁ ἀναγνώστης τὴν ἰδιαι-

(α) Géométrie élémentaire a' l'usage des classes d' humanités dans les établissemens d'instruction publique redigée conformément au programme officiel 1838 par M. H. Vernier· quatrième édition.

τέραν σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας εἰς τὴν πρακτικὴν καταμέτρησιν καὶ τὴν χωρογραφίαν.

Σημειόνω περιπλέον, ὅτι ἐπὶ σκοπῷ τοῦ ν' ἀποκαταστήσω κοινοτέραν τὴν χρῆσιν τοῦ βιβλίου καὶ διὰ Γυμνάσια δευτέρου λόγου, ὅπου δι' ἔλλειψιν εἰδικῶν πρὸς τοῦτο Καθηγητῶν, ἢ δι' ἀνάλογον σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας ὡς πρὸς τὰς ἄλλας μαθήσεις, δὲν φαίνεται κατάλληλον τὸ κλασικὸν σύγγραμμα τοῦ Λεγένδρου, ἠναγκάσθην νὰ τὸ ἐκτείνω ὑπὲρ τὰ κοινὰ ὅρια, εἰς τὰ ὁποῖα περιστρέφονται συνήθως τὰ ὁμοίου εἴδους συγγράμματα· καὶ τούτου ἕνεκα δὲν διετήρησα καθ' ὅλα τὸ μνησθὲν κείμενον τοῦ Βερνερίου.

Καὶ ἰδού, ὦ φίλοι ἀναγνῶσται, ὁ πρῶτος οὗτος καρπὸς τῆς πολυετοῦς περὶ τὰ τοιαῦτα ἐπασχολήσεώς μου. Ἐὰν ηὐτύχησα νὰ δώσω διὰ χρόνον τινὰ τὸν προορισμὸν τῶν ἀνὰ χεῖράς σας ἀγώνων μου, εὔχομαι ὁ προορισμός του οὗτος νὰ ἦναι βραχύτατος διὰ τοῦ ἀνταγωνισμοῦ ἄλλων ἐμπειροτέρων, καὶ μάλιστα ὑπὸ τῶν καθ' ἑκάστην ἐν τῷ Πανεπιστημείῳ ὈΘΩΝΟΣ φωτιζομένων ὁμογενῶν μου νέων, εἰς τοὺς ὁποίους ἐδόθη νὰ διδαχθῶσι καὶ μὲ τελειότερα μέσα, καὶ νὰ εἰσάξωσιν ἑπομένως καὶ καλητέρας μεθόδους.

Ἔγραψα ἐν Ναυπλίῳ τῇ 15 Ἰουνίου 1842.

Γ. Κ.

[illegible] τῆς Πανεπιστημίας εἰς τὴν πρακτικὴν κατάστασιν [illegible] γραμματεῖα.

[illegible], ὅτι ἐπὶ σκοπῷ τοῦ ν' ἀποκαταστήσω [illegible] τοῦ βιβλίου καὶ διὰ Γυμνάσια δευτέρου λόγου, ὅπου [illegible] πρὸς τούτο [illegible], ἢ διὰ [illegible] τῆς Πανεπιστημίας [illegible], δὲν φαίνεται [illegible] τὸ κλασικὸν σύγγραμμα τοῦ Λογγίνου, [illegible] ὑπὲρ τὰ κοινὰ ὅρια, εἰς τὰ ὁποῖα περιπλέκονται [illegible] τὰ ὁποῖα ἄλλως συγγράμματα· καὶ τούτου [illegible] καθ' ὅλα τὸ [illegible] τοῦ Εὐγενίου.

Καὶ ἰδοὺ, οἱ [illegible], [illegible] τῆς [illegible] τὰ [illegible] ὅτι [illegible] ὁ [illegible] τοῦ [illegible] τοῦ [illegible] καὶ [illegible] ἐν τῇ Πανεπιστημίᾳ [illegible] εἰς τοὺς ὁποίους [illegible] καὶ με [illegible], καὶ νὰ [illegible] καὶ [illegible].

Ἐγράφη ἐν Ναυπλίῳ τῇ 15 Ἰουνίου 1832.

Γ. Γ.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΓΡΑΜΜΑῚ ΚΑῚ ΓΩΝΊΑΙ.

§ ά. *Πρῶτοι ὁρισμοί·*

Πᾶν σῶμα, ἢ στερεὸν κατέχει ἕν τι μέρος τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ὄγκος τοῦ στερεοῦ.

Ὁ διάφορος τρόπος, καθ' ὃν ὁ ὄγκος οὗτος περιορίζεται πανταχόθεν, χαρακτηρίζει τὸ σχῆμα τοῦ στερεοῦ. Ὅθεν ὑπάρχουσι καὶ διάφορα σχήματα κατὰ τοὺς ποικίλους τρόπους τῆς ἐκτάσεως τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ προσδιορίζεται συνήθως κατὰ τρεῖς ἀρχικὰς διευθύνσεις, λεγομένας διαστάσεις τουτέστι μῆκος, πλάτος, καὶ ὕψος ἢ πάχος. Οὕτως ὁ ὄγκος τινὸς βιβλίου, τείχους, κ. τ. λ. ὥστε ἐγνωσμένης ἑκάστης τῶν διαστάσεων τούτων προσδιορίζεται καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ.

Εἶναι μέν τινα στερεά, εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὁποίων δὲν ἀπαιτεῖται ὡς ἀναγκαία ἡ γνῶσις καὶ τῶν τριῶν διαστάσεων· καθὼς ὁ ὄγκος φυσαλίδος ἐξαρτώμενος ἀπὸ τὸ πάχος μόνον· ὁμοίως ὁ ὄγκος εὐθέος τινος καὶ στρογγύλου ξύλου προσδιοριζόμενος ἀπὸ τὸ πάχος καὶ μῆκος. κ. τ. λ. Ἐπειδὴ ὅμως δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν νοερῶς πᾶν στερεὸν οἱουδήποτε σχήματος εἰς μέρη ἔχοντα διακεκριμένως τὸ μῆκος πλάτος καὶ ὕψος· διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ὅλα τὰ στερεὰ ἔχουσι τρεῖς διαστάσεις.

Ὀνομάζεται ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων ἡ φαινομένη ἔκτασις αὐτῶν κατὰ μῆκος καὶ πλάτος μόνον, ἢ τὰ ὅρια αὐτῶν καὶ τοῦ ἐκτὸς διαστήματος. Οὕτω λέγοντες ἐπιφάνειαν τραπέζης, ἢ βιβλίου, ἐννοοῦμεν τὴν κατὰ μῆκος καὶ πλάτος ἔκτασιν αὐτῶν. Ἐναργὲς παράδειγμα ἐπιφανειῶν προσφέρουσιν αἱ ἐπιπίπτουσαι σκιαὶ ἐκτεινόμεναι κατὰ μῆκος καὶ πλάτος μόνον.

Ὀνομάζονται γραμμαὶ τὰ ὅρια τῶν ἐπιφανειῶν, ἢ ἁπλῶς αἱ διευθύνσεις ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον, ὅπου δὲν θεωροῦμεν, εἰμὴ μῆκος μόνον.

Εἰς τὸ πρακτικὸν μέρος ἡ γραμμὴ σημειόνεται πραγματικῶς καὶ ὑπὸ μὲν τοῦ πρακτικοῦ Γεωμέτρου διὰ τῆς ἁλύσου, ὑπὸ δὲ τοῦ τέκτονος διὰ τοῦ σχοινίου, ὑπὸ τοῦ ἰχνογράφου διὰ τῆς γραφίδος κ. τ. λ. ὅπου παρατηρεῖται μὲν καὶ πλάτος, πλὴν δὲν θεωρεῖται, εἰμὴ τὸ μῆκος μόνον.

Ἡ γραμμὴ λέγεται εὐθεῖα, κεκλασμένη ἢ καμπύλη· καὶ εὐθεῖα μὲν, ὅταν μετρᾷ τὸ συντομώτερον διάστημα μεταξὺ δύο σημείων ὡς ΑΒ (σχ. 1).

Κεκλασμένη δὲ, ὅταν ἦναι σύνθετος ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν ὡς ἡ ΑΔΓΒ, σύνθετος ἐκ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΔΓ, καὶ ΓΒ. (σχ. 1).

Καὶ τέλος ὀνομάζεται καμπύλη, ὅταν δὲν ἦναι μήτε εὐθεῖα μήτε σύνθετος ἐξ εὐθειῶν ὡς ἡ ΑΕΒ. (σχ. 1).

Παρομοίως καὶ ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἢ ἐπίπεδος, ἢ καμπύλη.

Ἐπιφάνεια ἐπίπεδος ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον λέγεται ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ἂν ἐπιζευχθῶσι δύο κατ' ἀρέσκειαν σημεῖα αὐτῆς δι' εὐθείας γραμμῆς, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Πᾶσα ἐπιφάνεια ἡ μήτε ἐπίπεδος μήτε σύνθετος ἐξ ἐπιπέδων λέγεται καμπύλη ἐπιφάνεια. Τοιαύτην παρουσιάζουσι τὰ στρογγύλα στερεά.

Τέλος πάντων μεταχειριζόμεθα τὴν λέξιν σημεῖον θέλοντες νὰ φανερώσωμεν σκοπόν τινα, ὅπου δὲν θεωροῦμεν κάμμίαν διάστασιν. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς, ἢ τὰ ὅρια αὐτῆς καὶ τοῦ ἐκτὸς διαστήματος. Παρομοίως λέγομεν, ὅτι δύο γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 1) τέμνονται καθ' ἓν σημεῖον Β. Τὸ σημεῖον ἄρα δὲν ἔχει κάμμίαν διάστασιν. Ἀλλ' ὡς ἐπὶ τῶν γραμμῶν, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν σημείων εἰς τὸ πρακτικὸν μέρος δὲν διατηρεῖται τοῦ ὁρισμοῦ ἡ ἀκρίβεια· καθότι τοῦτο εἶναι εἰς τὴν φύσιν ἀδύνατον. Σημειόνομεν δὲ ταῦτα ἐπὶ μὲν τοῦ χάρτου διὰ ςιγμῶν, ἐπὶ δὲ τοῦ ὁρίζοντος διὰ πασσάλων· πρὸς τούτοις δὲ καὶ πολλὰ πράγματα ὡς δένδρα, οἰκίαι, καὶ ἄλλα λαμβάνονται ὡς προσδιορισμοὶ σημείων.

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων γίνεται ἤδη φανερὸν, ὅτι ἡ ἔκτασις θεωρεῖται τριχῶς, τουτέστιν ἢ ὡς στερεὸν ἔχον καὶ τὰς τρεῖς διαληφθείσας διαστάσεις, ἢ ὡς ἐπιφάνεια ἔχουσα τὰς δύο μῆκος καὶ πλάτος, ἢ ὡς γραμμὴ θεωρουμένη ὡς μῆκος μόνον. Τὰ τρία ταῦτα εἴδη τῆς ἐκτάσεως εἶναι ἀντικείμενον τῆς στοιχειώδους ταύτης πραγματείας. Καὶ κατὰ μὲν πρῶτον θέλομεν θεωρήσει τὰς γραμμὰς ἢ τὰ μήκη καὶ τὰ ἐπίπεδα, δεύτερον δὲ τὰς καμπύλας ἐπιφανείας καὶ τὰ στερεά.

Μετὰ τοὺς πρώτους τούτους ὁρισμοὺς λέγομεν ἤδη, ὅτι Γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ἀντικείμενον ἔχουσα τὴν κατα-

1*

μέτρησιν τῆς ἐκτάσεως, ἤτοι τὴν ἐξήγησιν τῶν ἀληθειῶν, ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἔκτασιν καὶ δίδουσα ἐπομένως τὰ μέσα τῆς καταμετρήσεώς της.

Ἡ Γνῶσις τῶν Γεωμετρικῶν θεωριῶν καὶ κανόνων εἶναι ὠφέλιμος εἰς πάσης τάξεως ἀνθρώπους καὶ συχνάκις ἀναπόφευκτος. Οὕτως εἰς τὸν τεχνίτην διὰ τὴν κατὰ σκοπὸν συναρμολόγησιν τῆς ὕλης. Εἰς τὸν Γεωγράφον καὶ Ναυτικὸν διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν διαστημάτων καὶ τὸν προσδιορισμὸν τῶν τόπων. Εἰς τὸν ἀρχιτέκτονα διὰ τὸν αναλογικὸν διαγραμμισμὸν τῶν οἰκοδομημάτων. Εἰς τὸν ἔμπορον διὰ τῶν προσδιορισμὸν διαφόρων μονάδων τῆς ἐκτάσεως καὶ τὴν καταμέτρησιν τῆς χωρητικότητος πολλῶν σωμάτων. Εἰς τὸν Γεωργὸν διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ἀγρῶν κ. τ. λ. Ἀλλὰ παρεκτὸς τούτου ἡ σπουδὴ τῆς Γεωμετρίας ἀποτελεῖ οὐσιωδέστατον μέρος τῆς πνευματικῆς ἀναπτύξεως· διότι ὀξύνουσα τὸν νοῦν εἰς τὸν ἀκριβῆ καὶ αὐστηρὸν τρόπον τοῦ συλλογίζεσθαι πρὸς εὕρεσιν καὶ ἀποδοχὴν τῆς ἀληθείας τὸν προπαρασκευάζει θαυμασίως εἰς τὴν κατανόησιν πάσης ἐπιστημονικῆς ἰδέας.

Ὅλα τὰ ἑξῆς μαθήματα θέλομεν διακρίνει εἰς θεωρήματα, προβλήματα, λήμματα, πορίσματα καὶ σχόλια.

Θεώρημα εἶναι πᾶσα ἀλήθεια γινομένη φανερὰ διὰ συλλογισμοῦ, καλουμένου ἀπόδειξις.

Πρόβλημα εἶναι πᾶν ζήτημα, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ λύσιν ἢ τὴν εὕρεσιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀγνώστων ἐχουσῶν σχέσιν πρὸς ἄλλας γνωστὰς ἢ δεδομένας.

Λῆμμα εἶναι ἀλήθεια, τὴν ὁποίαν προαποδεικνύοντες μεταχειριζόμεθα πρὸς ἀπόδειξιν θεωρήματος ἢ λύσιν προβλήματος.

Πόρισμα εἶναι συνέπεια πηγάζουσα ἐκ μιᾶς ἢ πολλῶν προηγησαμένων προτάσεων.

Καὶ σχόλιον εἶναι πᾶσα σημείωσις ἀναφερομένη εἰς μίαν ἢ περισσοτέρας προηγουμένας προτάσεις ὡς πρὸς τὴν σχέσιν αὐτῶν, τὴν ἐφαρμογήν των, τὴν ἔκτασίν των κ. τ. λ.

Τέλος πάντων λέγομεν ἀξιώματα ἐκείνας τὰς προτάσεις ἢ μᾶλλον ἐκείνας τὰς ἀληθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι φανεραὶ ἀφ' ἑαυτῶν, καὶ ἑπομένως ἀνεπίδεκτοι ἀποδείξεως. Τοιαῦτα δὲ ἀξιώματα εἶναι τὰ ἑξῆς.

ά. Δύο ποσότητες ἴσαι πρὸς τρίτην τινα εἶναι ἴσαι καὶ μεταξύ των.

6'. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ μέρους, ἢ τὸ μέρος μικρότερον τοῦ ὅλου.

γ'. Τὸ ὅλον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερῶν αὐτοῦ.

δ'. Ἐὰν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἢ ἀφαιρεθῶσιν ἴσα τὰ ἀθροίσματα, ἢ τὰ ὑπόλοιπα θέλουσιν εἶσθαι ἴσα.

έ. Ἀφ' ἑνὸς εἰς ἄλλο σημεῖον μίαν μόνον εὐθεῖαν γραμμὴν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀγάγωμεν, ἢ δύο σημεῖα προσδιορίζουσι τὴν θέσιν μιᾶς καὶ μόνης εὐθείας.

ς'. Δύο μεγέθη, οἷον γραμμαί, ἐπιφάνειαι ἢ στερεὰ εἶναι ἴσα, ὅταν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζωσι καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν ἢ ταυτίζωνται καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα.

§. 6'. *Περὶ τοῦ κύκλου καὶ τῆς συγκρίσεως τῶν γραμμῶν.*

Κύκλος ὀνομάζεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΒΓΔΕ (σχ. 2) περικλειομένη πανταχόθεν ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐπίσης ἀφ' ἑνὸς ἐντὸς αὐτῆς Α, τὸ ὁποῖον καλεῖται κέντρον.

Ἡ περατοῦσα τὸν κύκλον καμπύλη λέγεται περιφέρεια. Περιφέρεια δὲ καὶ κύκλος ἂν καὶ ἦναι ὀνόματα σχετικὰ, δὲν πρέπει ὅμως νὰ συγχέεται ἡ σημασία των διὰ συνωνυμίας. Διαφέρουσι δὲ ἀλλήλων ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς γραμμῆς.

Πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας λέγεται ἀκτὶς ἢ ἡμιδιάμετρος ὡς ἡ ΑΒ. (σχ. 2).

Ἕπεται ἄρα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς περιφερείας, ὅτι ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων εἶναι ἴσαι.

Ἡ εὐθεῖα ΕΑΓ (σχ. 2) ἡ ἐπιζευγνυμένη ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου λέγεται διάμετρος.

Ἕπεται ὁμοίως ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοῦ τῆς περιφερείας, ὅτι ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις καὶ διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

Ἀποδεικνύομεν εὐκόλως, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ἂν στρέψωμεν τὸ σχῆμα ΕΟΒΓ περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ. ὥστε νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σχῆμα ΕΜΔΓ, ἡ καμπύλη ΕΟΒΓ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν καμπύλην ΑΜΔΓ. Ἐπειδὴ ἄλλως θέλομεν ἔχει σημεῖα τῆς περιφερείας μὴ ἐπίσης ἀπέχοντα τοῦ κέντρου· ἕπεται ἄρα, ὅτι αἱ καμπύλαι αὗται εἶναι ἡμιπεριφέρειαι καὶ τὰ σχήματα εἶναι ἡμικύκλια.

Ἡ εὐθεῖα ΕΔ ἐπιζευγνύουσα δύο σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου λέγεται χορδὴ (σχ. 2).

Καλεῖται τόξον μέρος τι τῆς περιφερείας ὡς ΕΠΜ (σχ. 2). Πᾶν τόξον ὑποτείνεται ὑπὸ χορδῆς, ἡ πᾶσα χορδὴ ὑποτείνει οἰκεῖόν τι ἐν τῇ περιεφερείᾳ τόξον.

Ἐξ ὅλων τῶν καμπύλων γραμμῶν μόνη ἡ περιφέρεια καὶ τὰ μέρη αὐτῆς, ἤτοι τὰ τόξα γίνονται ἀντικείμενον ἐρεύνης εἰς τὰ στοιχειώδη ταῦτα μαθήματα.

Διὰ νὰ περιγράψωμεν περιφέρειαν ἢ τόξον, ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην καὶ στηρίζοντες τὸ ἓν τῶν σκελῶν αὐτοῦ περιστρέφομεν τὸ ἕτερον ἑωσοῦ ἀποπερατωθῇ ἡ ὅλη περιφέρεια, ἢ τὸ ζητούμενον τόξον. Ἐπὶ δὲ τῆς πεδιάδος προσαρτῶμεν σχοινίον τι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα εἴς τινα πάσσαλον ὡς εἰς κέντρον καὶ περιστρέφομεν αὐτὸ ἐκ τοῦ ἑτέρου ἄκρου τεταμένον ἕως τῆς ἀκεραίας περιστροφῆς.

Ἡ χρῆσις τοῦ διαβήτου, ἢ ἡ περιγραφὴ τῶν τόξων εἶναι συχνοτάτη, καθὼς θέλομεν ἰδεῖ ἐφεξῆς τὴν ἐφαρμογήν των. Σημειόνομεν δὲ ἐνταῦθα ὡς κοινοτέρας τὰς περιστάσεις ταύτας. Νὰ αὐξήσωμεν, ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν δεδομένην γραμμὴν κατὰ δεδομένον μῆκος. Νὰ ἐγγράψωμεν χορδὴν ὡρισμένου μεγέθους εἰς δεδομένην περιφέρειαν καὶ τὰ τοιαῦτα.

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ. Λαμβάνομεν ὡρισμένην ἰδέαν ποσότητος τινος συγκρίνοντες αὐτὴν πρὸς ἄλλην τινα ὁμοειδῆ, καὶ ἐκ τούτου πηγάζει ὁ λόγος τῶν δύο ποσοτήτων, ἢ ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἐμφαίνει ποσάκις ἡ μικροτέρα ἐμπεριέχεται εἰς τὴν μεγαλητέραν, ἢ πόσον μέρος τῆς μεγαλητέρας ἀποτελεῖ ἡ μικροτέρα ποσότης, ὥστε ἐγνωσμένης τῆς μιᾶς τούτων καὶ τοῦ λόγου αὐτῆς πρὸς τὴν ἑτέραν ποσότητα προσδιορίζεται τῆς ἑτέρας ταύτης τὸ μέγεθος. Τὸν λόγον λοιπὸν τοῦτον δύο εὐθειῶν, ἢ δύο τόξων τοῦ αὐτοῦ, ἢ ἴσων κύκλων θέλομεν ἐξετάσει ἐνταῦθα ἀφίνοντες νὰ ἐκθέσωμεν καὶ περὶ τοῦ λόγου τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν στερεῶν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον.

Ἔςτωσαν λοιπὸν κατὰ πρῶτον αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, (σχ. 3) τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λόγον εἰς ἀριθμούς.

Φέρομεν κατὰ πρῶτον διὰ τοῦ διαβήτου τὴν μικροτέραν ΑΒ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας ΓΔ ὁσάκις δύναται νὰ εἰσέλθῃ ἐξ ὑποθέσεως τρὶς ἀπὸ Γ ἕως Σ ἀπὸ Σ ἕως Ο καὶ ἀπὸ Ο ἕως Δ, καὶ τότε λέγομεν ὅτι ἡ μικροτέρα ΑΒ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ΓΔ, ἢ ἡ ΓΔ ἰσοῦται μὲ τρὶς τὴν ΑΒ. Ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 3 ἐκφράζουσι τὸν λόγον τῶν δύο εὐθειῶν. Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει σπανίως, ὥστε δηλ. ἡ μικροτέρα νὰ ἐμπεριληφθῇ ἀμέσως κατ' ἀκέραιον ἀριθμόν: ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲ μένουσιν ὑπόλοιπα. Οὕτως ἂς ὑποτεθῇ ἤδη ἡ μεγαλητέρα ΓΔ', ὅτι ἐμπεριλαμβάνει δὶς τὴν μικροτέραν ΑΒ πλέον τοῦ ὑπολοίπου ΟΔ' μικροτέρου τῆς ΑΒ· τότε φέρομεν πάλιν διὰ τοῦ διαβήτου τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἐπὶ τῆς μικροτέρας ΑΒ ὁσάκις δύναται νὰ εἰσέλθῃ καὶ ἔστω καθ' ὑπόθεσιν δὶς, ΑΙ καὶ ΙΒ, συμπεραίνομεν λοιπὸν τότε, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΔ' περιλαμβάνουσα δὶς τὴν ΑΒ καὶ ἔτι τὸ ὑπόλοιπον ΟΔ' ἰσοῦται μὲ πεντάκις τὴν ΟΔ'. Ὅθεν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ' ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον, ὃν οἱ ἀριθμοὶ 2 : 5.

Ἡ τελευταία αὕτη γραμμὴ ΟΔ' εἰσερχομένη κατ' ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰς δύο δεδομένας ὀνομάζεται κοινὸν μέτρον. Ὅθεν νὰ εὕρωμεν εἰς ἀριθμοὺς τὸν λόγον δύο εὐθειῶν, ἢ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κοινὸν αὐτῶν μέτρον εἶναι φράσεις ταὐτόσημοι καὶ ἐκφράζουσι τὴν σύγκρισιν δύο γραμμῶν.

Ἐπειδὴ ἡ πρᾶξις αὕτη συμβαίνει νὰ ἐκτείνεται πολὺ ἔτι μακρότερον, δίδομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα, τοῦ ὁποίου διατάττομεν τὰς πράξεις ὡς ἕπεται,

Ἔστω ΓΔ (σχ. 4) ἴση μὲ δὶς ΑΒ πλέον ΕΔ, ὁμοίως ἡ ΑΒ, ἴση μὲ δὶς ΕΔ πλέον ΖΒ, ἡ ΕΔ ἴση μὲ δὶς ΖΒ πλέον ΗΔ καὶ τέλος ἡ ΖΒ ἴση μὲ δὶς τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ΗΔ. Ὅθεν ἔχομεν τὰς ἰσότητας

$$\mathrm{Γ Δ}=2.\ \mathrm{AB}+\mathrm{EΔ}$$
$$\mathrm{AB}=2.\ \mathrm{EΔ}+\mathrm{ZB}$$
$$\mathrm{EΔ}=2.\ \mathrm{ZB}+\mathrm{HΔ}$$
$$\mathrm{ZB}=2.\ \mathrm{HΔ}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ὀπισθοδρομικῶς ἐξάγομεν τὰς ἑξῆς.

$$\mathrm{ZB}=2.\ \mathrm{HΔ}.$$
$$\mathrm{EΔ}=2.\ \mathrm{ZB}+\mathrm{HΔ}=4.\ \mathrm{HΔ}+\mathrm{HΔ}=5.\ \mathrm{HΔ}.$$
$$\mathrm{AB}=2.\ \mathrm{EΔ}+\mathrm{ZB}=10.\ \mathrm{HΔ}+2.\ \mathrm{HΔ}=12.\ \mathrm{HΔ}.$$
$$\mathrm{ΓΔ}=2.\ \mathrm{AB}+\mathrm{EΔ}=24.\ \mathrm{HΔ}+5.\ \mathrm{HΔ}=29.\ \mathrm{HΔ}.$$

ὅθεν ΗΔ εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΑΒ καὶ ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 29 καὶ 12· ἤτοι $\mathrm{ΓΔ}=\frac{29}{12}\ \mathrm{AB}$ ἢ $\mathrm{AB}=\frac{12}{29}\ \mathrm{ΓΔ}$.

Ὑποτεθέντος ἤδη, ὅτι μία τούτων ἔγινεν ἤδη γνωστὴ διὰ τῆς καταμετρήσεως διά τινος γραμμικῆς μονάδος, ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=35 πόδας. Ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ οὖσα ἴση μὲ $\frac{29}{12}$ ΑΒ γίνεται ἐπίσης γνωστὴ καὶ ἔχομεν $\mathrm{ΓΔ}=\frac{29}{12}\ \mathrm{AB}=\frac{29}{12}\times 35 =84\frac{7}{12}$.

Ἡ μέθοδος αὕτη τῆς συγκρίσεως τῶν γραμμῶν συμφωνεῖ κατὰ πάντα μὲ ἐκείνην τῆς ἀριθμητικῆς πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

ΓΡΑΜΜΑΙ ἘΚΜΕΤΡΟΙ. Εἰς τὰ προλαβόντα παραδείγματα ἐθεωρήσαμεν τὰς δύο εὐθείας συμμετρικὰς, τουτέστιν ὅτι μετά τινα ἀριθμὸν διαδοχικῶν διαιρέσεων, ἢ ἐπαγωγῶν τῆς ἑξῆς ἐπὶ τῆς προτέρας καταντῶμεν εἰς ὑπόλοιπόν τι, τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ κατ' ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ἔχει πάντοτε χώραν καὶ θέλομεν ἰδεῖ, ὅτι δίδονται περιστάσεις, καθ' ἃς αἱ εὐθεῖαι δὲν ἔχουσι κοινόν τι μέτρον μεταξύ των, λαμβάνομεν δὲ διαδοχικῶς ὑπόλοιπα, καθόσον καὶ ἂν ἐκτείνωμεν τὴν πρᾶξιν. Εἰς τὰς περιστάσεις ταύτας αἱ εὐθεῖαι λέγονται ἔκμετροι. Δὲν δυνάμεθα δὲ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λόγον αὐτῶν, εἰμὴ καθ' οἱανδήποτε προσέγγισιν θέλομεν παραβλέποντες ἓν τῶν ἐλαχίστων τούτων ὑπολοίπων.

Εἷς ἐκ τῶν τρόπων τῆς προσεγγίσεως εἶναι καὶ ὁ ἑξῆς. Διαιροῦμεν τὴν μίαν τούτων ἐξ ὑποθέσεως τὴν μεγαλητέραν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσος εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ ὁρίου τῆς προσεγγίσεως, ἐξ ὑποθέσεως εἰς 10, 100, 1000. κ. τ. λ. ἂν τὸ ὅριον εἶναι $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, κ. τ. λ. ἐφαρμόζομεν μετὰ ταῦτα τὴν μικροτέραν καὶ παρατηροῦμεν πόσα τῶν μερῶν τούτων ἀπαρτίζουσι τὴν μικροτέραν ὡς ἔγγιστα ἑνὸς ὑπολοίπου μικροτέρου $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, κ. τ. λ. Παραβλέποντες δὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο λέγομεν, ὅτι αἱ δύο δεδομέναι εὐθεῖαι εἶναι εἰς λόγον μεταξύ των ὡς οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἴσων μερῶν, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνει ἑκάστη· ἓν δὲ τῶν μερῶν τούτων εἶναι τὸ κοινὸν αὐτῶν μέτρον.

ΣΎΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΤΌΞΩΝ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον προσδιορίζομεν τὸν λόγον δύο εὐθειῶν εἴτε συμμετρικῶν, εἴτε ἐκμέτρων δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἐπίσης καὶ ἐκεῖνον δύο τόξων τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ μόνον νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι δύο τόξα τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων ἐφαρμόζουσι μεταξύ των ὡς δύο εὐθεῖαι, καὶ ὅτι αἱ ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα.

Ὡς πρὸς τὸ πρῶτον ἂς λάβωμεν τὰ τόξα ΕΝΟ, καὶ ΕΠΜΔ (σχ. 2). Ἂν περιστρέψωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΕΒΓ περὶ τὴν διάμετρον ΕΓ, ὥστε νὰ ἐφαρμοσθῇ μὲ τὸ κάτω ἡμικύκλιον ΕΜΔΓ, τὰ σημεῖα τῆς ἡμιπεριφερείας ΕΒΓ θέλουσιν ἐφαρμόσει ἐπὶ τὰ τῆς ΕΜΔΓ. ἐπειδὴ ἄλλως θέλομεν ἔχει σημεῖα τῆς περιφερείας ἀνίσως ἀπέχοντα τοῦ κέντρου Γ. ὅθεν καὶ τὸ τόξον ΕΝΟ θέλει συμπέσει μὲ τὸ τόξον ΕΜΔ κατὰ τὸ μέρος ΕΠΜ καθ' ὅλα του τὰ σημεῖα.

Ἅμα δὲ βλέπομεν διὰ τῆς αὐτῆς ἐφαρμογῆς, ὅτι ἡ χορδὴ ΕΜ ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΕΟ ὑποτείνει τόξον ΕΠΜ ἴσον μὲ ΕΝΟ, ἤτοι αἱ ἴσαι χορδαὶ χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἢ ἴσων περιφερειῶν τόξα ἴσα.

Τούτου τεθέντος δυνάμεθα ἤδη νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λόγον τῶν δύο τόξων ΕΝΟ, καὶ ΕΜΔ διὰ τοῦ διαβήτου, ὡς ἐπράξαμεν καὶ διὰ τὰς εὐθείας γραμμάς. Ἀνοίγομεν δηλ. τὸν διαβήτην κατὰ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΕΟ τοῦ μικροτέρου τόξου, καὶ στηρίζοντες τὸ ἓν τῶν ἄκρων αὐτοῦ εἰς Ε, διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου τέμνομεν τὸ ΕΜΔ κατὰ τὸ σημεῖον Μ. Ὅθεν ἐπειδὴ ΕΟ=ΕΜ ἕπεται καὶ ΕΝΟ=ΕΠΜ· φέρομεν δὲ τοσάκις τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΜΔ, ὁσάκις δύναται νὰ εἰσέλθῃ καὶ παρομοίως τὸ ὑπόλοιπον ἐπὶ τοῦ μικροτέρου ΕΝΟ καὶ ἐφεξῆς· ὅθεν σχηματίζομεν τὰς αὐτὰς ἰσότητας ὡς καὶ εἰς τὰς εὐθείας γραμμὰς, ἐκ τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὸν λόγον τῶν τόξων εἰς ἀριθμοὺς, ἢ τὸ κοινὸν αὐτῶν μέτρον. Ἂν δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἦναι ἔκμετρα, πράττομεν ὡς καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν γραμμῶν προσεγγίζοντες ὅσον θέλομεν τὴν σύγκρισίν των.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΠΑΛΑΜΗΣ. Η έκτεθεῖσα μέθοδος χρήσιμος εἰς πολλὰς περιστάσεις εἰς τὸ πρακτικὸν μέρος ἀναπληροῦται διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν εὐθειῶν, ἢ τῶν τόξων πρὸς κοινήν τινα μονάδα εὐθεῖαν ἢ τόξον. Οὕτω μονάδα τῶν εὐθειῶν ἢ τοῦ μήκους ἔχομεν τὴν παλάμην, ἴσην μὲ ἓν γαλλικὸν μέτρον, τὴν ὁποίαν διαιροῦμεν εἰς 10, 100, 1000, κ. τ. λ. ἴσα μέρη.

Ὅθεν πρὸς τὴν κοινὴν ταύτην μονάδα καὶ τὰ μέρη αὐτῆς ἀναφέρομεν πᾶσαν εὐθεῖαν μεγαλητέραν ἢ μικροτέραν ταύτης. Καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἐξαγομένων ἀριθμῶν ἀπὸ τὴν καταμέτρησίν των εἶναι ὁ λόγος τῶν εὐθειῶν. Ἀκεραία δὲ ἡ παλάμη, ἢ μία τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτῆς θέλει εἶσθαι τὸ κοινὸν μέτρον.

Ὁμοίως διὰ τὰ τόξα εἶναι ὡρισμένη ἡ διαίρεσις τῆς ὅλης περιφερείας, τῆς ὁποίας ταῦτα ἀποτελοῦσι μέρη· καθὼς θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον.

§. γ.' *Περὶ τῶν Γωνιῶν.*

Ὁσάκις δύο εὐθεῖαι ὡς ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 5) συμπίπτουσιν εἰς ἓν σημεῖον Α, ἢ μᾶλλον ἢ ἧττον ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασίς των ἐγκλείει μέρος τι τῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται γωνία ὡς ΓΑΒ.

Τὸ σημεῖον Α. τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν λέγεται κορυφὴ· αἱ δὲ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΒΑ λέγονται πλευραὶ τῆς γωνίας.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται πρῶτον, ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι διάφοροι κατὰ τὸ μέγεθος καὶ ἐπομένως γίνονται ἀντικείμενον καταμετρήσεως, καὶ ἐπιδεκτικαὶ προσθέσεως ἀφαιρέσεως πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως· δεύτερον δὲ, ὅτι τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν δύο πλευρῶν αὐτῆς. Ἐπειδὴ ἀμέσως ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν γενέσεώς της ἐχαρακτηρίσθη τὸ ποσὸν τῆς ἀπομακρύνσεως τῶν δύο εὐθειῶν.

Σημειόνεται μία γωνία ἢ δι' ἑνὸς γράμματος εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς, ἢ διὰ τριῶν, τοῦ ἑνὸς μὲν εἰς τὴν κορυφὴν, τῶν δὲ εἰς τὰ δύο ἄκρα τῶν πλευρῶν της. Εἰς τὴν δευτέραν ταύτην γραφὴν τῆς γωνίας ἀναγινώσκομεν αὐτὴν προσέχοντες νὰ προφέρωμεν μέσον τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς, οὕτως ΓΑΒ ἢ ΒΑΓ (σχ. 5.)

Ἐάν τις εὐθεῖα ΓΔ συναπαντῶσα ἄλλην ΑΒ κάμνῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΑΔΓ, καὶ ΒΔΓ ἴσας, τότε ἑκατέρα τούτων λέγεται ὀρθή· ἡ δὲ συναπαντῶσα ΓΔ λέγεται κάθετος ἐπὶ τῆς ἑτέρας ΑΒ. (σχ. 6).

Πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ὡς ἡ ΕΔΒ (σχ. 6) λέγεται ὀξεῖα. Πᾶσα δὲ μεγαλητέρα τῆς ὀρθῆς ὡς ΑΔΕ λέγεται ἀμβλεῖα· καὶ τότε ἡ συναπαντῶσα εὐθεῖα ΔΕ λέγεται πλαγία.

Λέγονται γωνίαι κατὰ κορυφὴν αἱ γινόμεναι ὑπὸ τῆς συναπαντήσεως δύο εὐθειῶν κατά τι ἐν τῷ μέσῳ σημεῖον καὶ θεωρούμεναι ἀντιθέτως ἡ μία τῆς ἄλλης, ὡς ἡ ΑΟΓ πρὸς τὴν ΔΟΒ (σχ. 7) ἢ ὡς ΑΟΔ καὶ ΓΟΒ.

Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαὶ ἢ ἀμοιβαῖα συμπληρώματα, ὅταν τὸ ἄθροισμά των ἰσοδυναμῇ μὲ μίαν ὀρθὴν, οὕτω ΓΔΕ (σχ. 6) λέγεται συμπληρωματικὴ ἢ τὸ συμπλήρωμα τῆς ΕΔΒ καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἡ ΕΔΒ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς ΓΔΕ.

Δύο γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαὶ ἢ ἀμοιβαῖα παραπληρώματα, ὅταν τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Οὕτως ἡ ὀξεῖα γωνία ΕΔΒ (σχ. 6) εἶναι παραπληρωματική, ἢ τὸ παραπλήρωμα τῆς ἀμβλείας ΑΔΕ καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

Μετὰ τοὺς ὁρισμοὺς τούτους ἀποδεικνύομεν ἤδη ὡς πρὸς τὰς γωνίας τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

Θεώρημα Α'.

Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ ποιοῦσα τὰς ὀρθὰς ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ, καὶ ὁμοίως ἡ ΗΘ κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΖ ποιοῦσα τὰς ὀρθὰς ΕΗΘ καὶ ΘΗΖ· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΕΗΘ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἂς ληφθῶσι τὰ τέσσαρα διαστήματα ΑΓ, ΓΒ, ΕΗ, καὶ ΗΖ, ἴσα· τότε καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΖ θέλει εἶσθαι ἴση τῇ ΑΒ. Ἂς ἐπιτεθῇ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὥστε τὰ δύο ἄκρα Ε καὶ Ζ νὰ πέσωσιν ἐπὶ τῶν ἄκρων Α καὶ Β. τότε τὸ σημεῖον Η μέσον τῆς ΕΖ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ μέσου τῆς ΑΒ. Λέγω ἤδη, ὅτι καὶ ἡ κάθετος ΗΘ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν κάθετον ΓΔ· αἱ δὲ γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΕΗΘ ἢ αἱ ΔΓΒ καὶ ΘΗΖ θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι, ὡς ἐφαρμοζομένων τῶν πλευρῶν των. Ἄλλως, εἰ δυνατὸν, ἡ ΗΘ ἂς λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΚ· τότε ΑΓΚ πρέπει νὰ ἦναι ἴση τῇ ΚΓΒ. Ἀλλὰ ΑΓΚ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ὀρθῆς ΑΓΔ καὶ ΚΓΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ΔΓΒ ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΑΓΔ. Ὅθεν καταντῶμεν εἰς ἄτοπον συμπέρασμα, ὅτι δύο γωνίαι ΑΓΚ καὶ ΚΓΒ ἀντιθέτως ἄνισοι πρὸς ἄλλην τρίτην ΑΓΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐκ τούτου ἔπεται ἄρα ὅτι ἡ κάθετος ΗΘ λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΔ καὶ αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. — Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου δὲν δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν πλέον μιᾶς καθέτου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Θεώρημα Β'.

Δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι καθ' ἓν σημεῖον ποιοῦσι δύο ἐφεξῆς γωνίας, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, ἢ ἡ μία εἶναι παραπλήρωμα τῆς ἑτέρας (σχ. 9).

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ σημεῖον Γ καὶ ποιοῦσαι τὰς γωνίας ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Διότι ὑψουμένης τῆς καθέτου ΓΕ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ, αἱ γωνίαι ΑΓΕ καὶ ΕΓΒ ἀποτελοῦσι δύο ὀρθὰς καὶ ἐπειδὴ ΕΓΒ=ΕΓΔ+ΔΓΒ· ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΕ+ΕΓΔ+ΓΒΔ δίδουσιν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· ἢ τέλος ΑΓΔ+ΔΓΒ=2. ὀρθ. ἐπειδὴ ΑΓΕ+ΕΓΔ=ΑΓΔ.

Πόρισμα ά.— Ἀποδεικνύομεν παρομοίως, ὅτι καὶ ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ΓΜ, ΓΝ, κ. τ. λ. συντρέχουσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ σχηματίζουσι γωνίας, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· γίνεται δὲ φανερὸν, ὑψουμένης μιᾶς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ.

Πόρισμα β'.— Ἐὰν μία τῶν προσκειμένων γωνιῶν ἦναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἄλλη θέλει εἶσθαι ἐπίσης ὀρθή. Ὅθεν εἰς τὸ (σχ. 6)· προεκβαλλομένης τῆς ΓΔ κατὰ τὸ Γ' ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΓ εἶναι ὀρθὴ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΔΓ' εἶναι παρομοίως ὀρθή· ὅθεν ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΓ'. Ὥστε μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΔ, καὶ ΓΔ· εἶναι ἀδιάφορον νὰ λάβωμεν τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην κάθετον ἐπὶ τῆς ἑτέρας.

Θεώρημα Γ'.

Ἂν τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ ἐξωτερικαὶ πλευραί των εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· τουτέστιν ἡ μία τῶν πλευρῶν θέλει εἶσθαι προεκβολὴ τῆς ἑτέρας (σχ. 10).

Ἔστωσαν αἱ προσκείμεναι παραπληρωματικαὶ γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ ὥστε ΑΓΔ+ΔΓΒ=2· ὀρθ. λέγω, ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ πλευραί των ΑΓ καὶ ΒΓ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἤτοι ἡ ΓΒ εἶναι προεκβολὴ τῆς ΑΓ.

Ἐπειδὴ ἂν ἄλλη τις εὐθεῖα, ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΓΚ ἦτον προεκβολὴ τῆς ΑΓ, τότε ἡ γωνία ΔΓΚ ἤθελεν εἶσθαι τὸ παραπλήρωμα τῆς ΑΓΔ, ἀλλὰ καὶ ΔΓΒ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ἰδίας ΑΓΔ· ἄρα ἡ ΔΓΒ εἶναι ἴση τῇ ΔΓΚ, τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὸ δεύτερον ἀξίωμα.

Θεώρημα Δ'.

Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι· (σχ. 7.)

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Ο. λέγω, ὅτι αἱ σχηματιζόμεναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΟΓ, καὶ ΒΟΔ ἢ αἱ ΑΟΔ καὶ ΓΟΒ εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ ΑΟΓ+ΑΟΔ=2 ὀρθ. (θεώρ. 6'.) καὶ παρομοίως ΑΟΓ+ΓΟΒ=2 ὀρθ. ἕπεται κατὰ τὸ πρῶτον ἀξίωμα ΑΟΓ +ΑΟΔ=ΑΟΓ+ΓΟΒ· ἀφαιρουμένης δὲ ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς γωνίας ΑΟΓ, συνάγομεν ΑΟΔ=ΓΟΒ. Παρομοίως ἀποδεικνύομεν καὶ ΑΟΓ=ΔΟΒ, ἢ ὡς παραπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΟΔ.

Σχόλιον. — Αἱ τέσσαρες σχηματιζόμεναι γωνίαι ὑπὸ τῆς διατομῆς δύο εὐθειῶν δίδουσιν ἄθροισμα ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Ἐπειδὴ ΑΟΓ+ΑΟΔ=2 ὀρθ. καὶ ΓΟΒ+ΒΟΔ =2 ὀρθ. ἄρα ΑΟΓ+ΑΟΔ+ΓΟΒ+ΒΟΔ=4 ὀρθ.

Καὶ ἐὰν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ὡς ΓΑ, ΓΒ. κ. τ. λ. (σχ. 11) συνέλθωσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΒΓΔ, ΔΓΕ, καὶ ΕΓΑ ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν δύο καθέτους κατὰ τὸ σημεῖον Γ τὴν ΑΜ καὶ ΝΠ, ὅπου βλέπομεν, ὅτι τὸ αὐτὸ χωρίον συμπληροῦται καὶ διὰ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ὁποῖον καὶ διὰ τῶν διαδοχικῶν προηγουμένων.

Θέωρημα Ε'.

Δύο κεντρικαὶ γωνίαι τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων χωρίζουσι διὰ τῶν πλευρῶν τόξα ἴσα· καὶ τὸ ἀνάπαλιν τὰ ἴσα τόξα ἀναφέρονται εἰς ἴσας κεντρικὰς γωνίας. (σχ. 12).

Ὀνομάζομεν κεντρικὰς γωνίας ἐκείνας, τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ἔστωσαν αἱ ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, λέγω, ὅτι καὶ τὰ χωριζόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν των τόξα ΓΒ καὶ ΕΖ θέλουσιν εἶσθαι παρομοίως ἴσα. Διότι ἂς ἐπιτεθῇ ὁ κύκλος ΔΕ ἐπὶ τοῦ κύκλου ΑΒ, ὥστε ἡ ἀκτὶς ΔΕ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴσην αὐτῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ ΔΖ θέλει συμπέσει ἐπίσης μὲ τὴν ΑΓ καὶ τὸ σημεῖον Ζ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ. ἄρα τὰ τόξα ΒΓ καὶ ΕΖ ἴσων περιφερειῶν, ἔχοντα δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ θέλουσιν ἐφαρμόσει καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Λέγω δεύτερον, ἂν τὰ τόξα ΒΓ καὶ ΕΖ ἦναι ἴσα καὶ αἱ σχετικαὶ αὐτῶν γωνίαι εἰς τὸ κέντρον ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι. Ἐπειδὴ ἂς ἐπιτεθῇ ὁ κύκλος ΔΕ ἐπὶ τοῦ κύκλου ΑΒ. ὥστε αἱ ἀκτῖνες ΔΕ καὶ ΑΒ νὰ ἐφαρμοσθῶσι τότε τὰ τόξα ΒΓ καὶ ΕΖ θέλουσιν ἐφαρμόσει ἐπίσης καὶ ἐπειδὴ ΒΓ=ΕΖ, τὸ σημεῖον Ζ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ. Ὅθεν ἡ ἀκτὶς ΔΖ ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Γ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΓ ἐφαρμόζεται ἐπίσης καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι κατ' ἐπίθεσιν ἴση τῇ ΒΑΓ.

Σχόλιον. — Διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν πρὸς τούτοις, ὅτι ἡ μεγαλητέρα γωνία χωρίζει διὰ τῶν πλευρῶν της μεγαλήτερον ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξον· καὶ ἀντιστρόφως τὸ μεγαλήτερον τόξον ἀναφέρεται εἰς μεγαλητέραν κεντρικὴν γωνίαν.

Θεώρημα ΣΤ'.

Δύο κεντρικαὶ γωνίαι εἰς τὸν αὐτὸν ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν πλευρῶν των χωριζόμενα τόξα (σχ. 13).

Ἔστωσαν αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ἴσων κύκλων, ΑΓΒ, καὶ ΔΓΕ, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ΑΓΒ : ΔΓΕ : : ΑΒ : ΔΕ. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον ΑΚ, καὶ εἶναι εἰς λόγον ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 5 : 7· ἄγοντες ἐκ τοῦ κέντρου Γ. τὰς ἀκτῖνας ΓΚ, ΓΡ, κ. τ. λ. πρὸς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τοῦ τόξου ΔΕ θέλομεν διαιρέσει τὴν ὅλην γωνίαν ΔΓΕ εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ πέντε ἀποτελοῦσι τὴν ΑΓΒ, ἂν καὶ εἰς τὴν γωνίαν ΑΓΒ ὑποτεθῇ, ὅτι γίνεται ἡ αὐτὴ διαίρεσις τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τῆς γωνίας ΑΓΒ· ὅθεν ἔχομεν ΔΓΕ : ΑΓΒ : : 7 : 5· ἀλλὰ καὶ ΔΕ : ΑΒ : : 7 : 5· ἄρα ΔΓΕ : ΑΓΒ : : ΔΕ : ΑΒ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι τὰ τόξα εἶναι ἔκμετρα, λέγω, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον θέλουσιν ἔχει καὶ αἱ εἰς ταῦτα ἀναφερόμεναι γωνίαι εἰς τὸ κέντρον. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἂς ἐννοήσωμεν τὸ τόξον ΔΕ διαιρούμενον εἰς μέγαν ἀριθμὸν μερῶν ἴσων, ἐξ ὑποθέσεως 1000 καὶ ὅτι φέροντες ἓν τούτων τῶν μεριδίων ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ ὁσάκις δύναται νὰ εἰσέλθῃ λαμβάνομεν ἐξαγόμενον ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν ἐξ ὑποθέσεως 873 πλέον ὑπόλοιπόν τι μικρότερον τοῦ μεριδίου τούτου. Ὅθεν ὁ λόγος τῶν δύο τόξων ΔΕ καὶ ΑΒ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{873}{1000}$ καὶ $\frac{874}{1000}$ ἢ ὀλιγώτερον 0, 001· ἐξ ἑτέρου μέρους ἂν εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τοῦ τόξου φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας, θέλομεν διαιρέσει τὴν ὅλην γωνίαν ΔΓΕ εἰς 1000 ἴσα μέρη ἐξ ὧν 873 πλέον μία τις γωνία μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{1000}$ θέλουσιν ἀποτελέσει τὴν ΑΓΒ· ὅθεν ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν θέλει περιλαμβάνεσθαι μεταξὺ τῶν $\frac{873}{1000}$ καὶ $\frac{874}{1000}$ ἢ ὀλιγώτερον 0, 001, ὡς καὶ ὁ λόγος τῶν τόξων. Καὶ ἐπειδὴ παρομοίως, ἂν ἠθέλαμεν διαιρέσει τὸ τόξον ΔΕ εἰς 10,000, ἢ 100,000 κ. τ. λ. ἴσα μέρη ἠθέλαμεν προσδιορίσει παρομοίως τὸν λόγον τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων ὀλιγώτερον 0,0001 ἢ 0,00001 κ. τ. λ. Ἕπεται ὅτι οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι. Ἐπειδὴ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, ὅταν ἡ διαφορά των ἦναι ἐλαχίστη πάσης δοθείσης ποσότητος. (α)

§. δ'. *Καταμέτρησις τῶν Γωνιῶν καὶ διαίρεσις τῆς περιφερείας.*

Λέγοντες καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν ἐννοοῦμεν, ὅταν δοθῇ γωνία ὁσηδήποτε κατὰ τὸ μέγεθος νὰ τὴν συγκρίνωμεν πρὸς ἄλλην τινα σταθερὰν, λαμβανομένην ὡς μονάδα ὅλων τῶν γωνιῶν καὶ τοιαύτη εἶναι ἡ ὀρθή. Οὕτως κατεμετρήσαμεν μίαν γωνίαν Α, γνωρίσαντες τὸν λόγον αὐτῆς πρὸς τὴν ὀρθὴν ἐξ ὑποθέσεως 3 : 5. ὅθεν λέγομεν, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ὁμοίως διὰ τὰς ἄλλας. Ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ὁ λόγος τῶν γωνιῶν ἀπεδεί-

(1) Σημ. Ἂν ἡ ἀπόδειξις αὕτη εἰς τὴν δευτέραν περίστασιν ἐμπερικλείῃ ἀσάφειάν τινα ὡς ἐκ τῆς ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον διαιρέσεως, δύναται ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐφαρμώσῃ ἐκείνην τοῦ Λεγένδρου, τὴν ὁποίαν διὰ τοῦτο ἠκολουθήσαμεν εἰς τὸν §. κγ'. θεώρ. ε.

χθῃ ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὑπὸ τῶν πλευρῶν των χωριζομένων ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξων, ἕπεται ὅτι συγκρίνομεν μίαν γωνίαν πρὸς τὴν ὀρθὴν ἀναζητοῦντες τὸν λόγον τοῦ τόξου αὐτῆς πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται πρὸς τὴν ὀρθήν.

Διὰ τοῦτο ἐδιαίρεσαν τὴν περιφέρειαν εἰς 360 μέρη ἴσα (σχ. 14) ὀνομαζόμενα μοίρας· ἑκάστην δὲ μοῖρα εἰς 60 λεπτὰ καὶ ἕκαστον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα, τὰ ὁποῖα σημειοῦνται διὰ τῶν σημείων. ^{0}, $'$, $''$. οὕτως 35^{0}, $47'$, $25''$ ἐκφράζει τόξον 35 μοιρῶν 47 λεπτῶν καὶ 25 δευτέρων.

Τούτου τεθέντος, διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, ἐκ τοῦ σημείου τῆς κορυφῆς λαμβανομένου ὡς κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν περιγράφομεν τόξον μεταξὺ τῶν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον ἐκτιμώμενον εἰς μοίρας καὶ μέρη αὐτῆς, ἐξ ὑποθέσεως 31^{0}, $47'$, $18''$, προσδιορίζει τὸ μέγεθος τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὀρθὴν ἐκφραζομένην διὰ 90^{0}.

Ἂν θέλωμεν δὲ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸν λόγον αὐτῆς πρὸς τὴν ὀρθὴν εἰς ἀριθμοὺς ἀκεραίους, τρέπομεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 31^{0}, $47'$. $18''$ εἰς εἰσοδύναμον ἀριθμὸν δευτέρων λεπτῶν $114438''$ καὶ παρομοίως τὰς 90^{0} εἰς $324000''$. ὅθεν λέγομεν, ὅτι ἡ γωνία αὕτη ἔχει λόγον πρὸς τὴν ὀρθὴν ὡς $114438:324000$· ἢ ἡ προτεθεῖσα ὀξεῖα γωνία εἶναι $\frac{114438}{324000}$ τῆς ὀρθῆς.

Μεταχειριζόμεθα ἔτι καὶ νεωτέραν ἄλλην διαίρεσιν τῆς περιφερείας εἰς 400^{0} καὶ ἑκάστης μοίρας εἰς $100'$. ἑκάστου δὲ λεπτοῦ εἰς $100''$. Κατὰ τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν μοῖραι, λεπτὰ, καὶ δεύτερα γράφονται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῆς ἀριθμήσεως τῶν κλασμάτων καὶ εὐκολυνόμεθα εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς. Οὕτω γωνία ἡ τόξον $33^o, 6', 67''$ ἐκφράζεται δι' ἀμιγοῦς ἀριθμοῦ $33^o, 0667''$ ἢ $330667''$.

Ἐκ τῆς διττῆς ταύτης διαιρέσεως τῆς περιφερείας ἕπεται ἤδη ἀναγκαιότατον ζήτημα, δοθείσης γωνίας κατὰ τὴν πρώτην διαίρεσιν λεγομένην τῶν ἑξήκοντα, νὰ τὴν ἐκτιμήσωμεν κατὰ τὴν νεωτέραν δεκαδικὴν, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

Ὡς πρὸς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ζητήματος παρατηροῦμεν, ὅτι μία μοίρα τῶν 360^0 ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{10}{9}$ τῆς τῶν 400^0· ἐπειδὴ ὑπάρχει ἡ ἀναλογία $90^0 : 100^0 : : 1 : X = \frac{100}{90} = \frac{10}{9}$.

Ὅθεν, δοθέντος τινος τόξου, ἢ γωνίας εἰς μοίρας λεπτὰ καὶ δεύτερα τοῦ συστήματος τῶν ἑξήκοντα ἐξ ὑποθέσεως τοῦ τόξου $41^o, 6', 39''$ καὶ προκειμένου νὰ τὸ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ, τρέπομεν κατὰ πρῶτον τὸν δεδομένον ἀριθμὸν $41^o, 6', 39''$ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν δευτέρων, τουτέστι $147999''$ ἢ $\frac{147999}{3600}$ τῆς μοίρας. Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον λεπτὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ τοῦ $\frac{1}{60}$ τῆς μοίρας, ἢ τὸ $\frac{1}{3600}$ τῆς ἰδίας. Πολλαπλασιαζομένου δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὸν λόγον τῆς μοίρας $\frac{10}{9}$, λαμβάνομεν $\frac{1479990}{32400} = \frac{147999}{3240}$ ἢ $45^0, 6787$ τουτέστιν ἴσον μὲ $45^0, 67', 87''$.

Ἐν γένει λοιπὸν, διὰ νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα μοιρῶν καὶ διαιρέσεων αὐτῆς τοῦ συστήματος τῶν ἑξήκοντα εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ, τρέπομεν κατὰ πρῶτον τὰς μοίρας, λεπτὰ καὶ δεύτερα τοῦ δεδομένου τόξου εἰς δεύτερα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ τὴν $\frac{10}{9}$ καὶ ἀνάγομεν τὸ ἐξαγόμενον εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Ἀντιστρόφως ἤδη ἔστω νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα μοιρῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἰσοδύναμον τοῦ τῶν ἑξήκοντα.

Ἐπειδὴ ὡς ἐκ τῆς ἀναλογίας $100^0 : 90^0 :: 1 : X = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ συνάγομεν, ὅτι μία μοίρα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{9}{10}$ τῆς τοῦ ἑτέρου, ἕπεται ὅτι διὰ νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα μοιρῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἰσοδύναμον τοῦ τῶν ἑξήκοντα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{9}{10}$ καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ τὸ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ μοιρῶν, λεπτῶν καὶ δευτέρων.

Ἔστω τόξον $11^0, 47', 94''$ τοῦ νεωτέρου συστήματος, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{9}{10}$ λαμβάνομεν ἐξαγόμενον $\frac{1033146}{100000} = 10^0, \frac{33146}{100000}$ καὶ πολλαπλασιαζομένου τοῦ κλάσματος $\frac{33146}{100000}$ διαδοχικῶς ἐπὶ 60, λαμβάνομεν $19', 53''$ πλέον ὑπόλοιπον $\frac{256}{1000}$ ὅθεν $11^0, 4794'' = 10^0, 19', 53'' \frac{256}{100000}$.

Τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα καὶ εἰς τὰς ἄλλας ὁμοίας περιστάσεις.

§. ε. *Περὶ Καθέτων καὶ πλαγίων.*

Εἰς τὸν §. γ'. ἐδώκαμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς καθέτου καὶ πλαγίας. Ἐνταῦθα ἐρχόμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ἰδιότητας τινὰς τῶν γραμμῶν τούτων εἰς τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

Θεώρημα Ζ'.

Ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας μίαν μόνην κάθετον δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. Αὕτη δὲ μετρᾷ τὸ συντομώτερον διάστημα μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ δεδομένου σημείου (σχ. 15.)

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΚ εἰς τὸ σημεῖον Β, λέγω, ὅτι πᾶσα ἄλλη ὡς ἡ ΑΣ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α θέλει εἶσθαι πλαγία, τουτέστι σχηματίζουσα ἀνίσους ἑκατέρωθεν γωνίας μὲ τὴν ΠΚ εἰς τὸ σημεῖον Σ. Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΒ ἕως τοῦ σημείου Γ, ὥστε ΑΒ=ΒΓ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Σ καὶ Γ διὰ τῆς ΣΓ τούτου τιθέντος ἂς περιστραφῇ τὸ σχῆμα ΑΣΒ περὶ τὴν ΣΒ, οὕτως ἡ γραμμὴ ΑΒ θέλει συμπέσει μὲ τὴν γραμμὴν ΒΓ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΣ καὶ ΣΒΓ εἶναι ὀρθαί· καὶ ἔτι τὸ σημεῖον Α θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ. ἐπειδὴ ΑΒ=ΒΓ. ὅθεν καὶ ἡ ΑΣ ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα Σ καὶ Γ μὲ τὴν ΣΓ θέλει συμπέσει ὡσαύτως καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΑΣΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΒΣΓ· ὑποτιθεμένου ἤδη, ὅτι ἡ ΑΣ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΚ, τότε ἡ γωνία ΑΣΒ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑπομένως καὶ ἡ ΒΣΓ εἶναι παρομοίως ὀρθή. Ὅθεν αἱ πλευραὶ ΑΣ καὶ ΣΓ (§. γ'. θεώρ. γ') εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον· ἐπειδὴ μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Γ μίαν μόνην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν καὶ τοιαύτη εἶναι ἡ ΑΓ· ἄρα ἡ δευτέρα ΑΣ εἶναι πλαγία..

Λέγω ἤδη, ὅτι ἡ κάθετος ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΑΣ· ἐπειδὴ οὔσης τῆς ΑΒ=ΒΓ, ΑΣ=ΣΓ, ἕπεται ὅτι ΑΓ=2. ΑΒ καὶ ΑΣ+ΣΓ=2. ΑΣ. Ἀλλὰ ΑΓ ὡς εὐθεῖα εἶναι μικροτέρα τῆς κεκλασμένης ΑΣ+ΣΓ· ἄρα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ΑΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεως τῆς ἑτέρας ΑΣ· τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύομεν καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην πλαγίαν· ὅθεν λέγομεν δεύτερον, ὅτι ἡ κάθετος μετρᾷ τὸ συντομώτερον διάστημα ἀπὸ δεδομένου σημείου πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν.

Θεώρημα Η'.

Αἱ πλάγιαι αἱ ἐπίσης ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι καὶ σχηματίζουσι μὲ αὐτὴν γωνίας ἴσας (σχ. 15).

Ἔστω ἡ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΚ· καὶ λαμβανομένων τῶν ἴσων ἀποστημάτων ΣΒ καὶ ΒΤ, ἄς ἀχθῶσιν αἱ πλάγιαι ΑΣ καὶ ΑΤ· λέγω ὅτι ΑΣ=ΑΤ. διότι περιστρεφομένου τοῦ σχήματος ΑΒΤ περὶ τὴν γραμμὴν ΑΒ, ὥστε νὰ συμπέσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒΣ, ἡ γραμμὴ ΒΤ θέλει συμπέσει μὲ τὴν ΒΣ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΣ καὶ ΑΒΤ εἶναι ὀρθαί· καὶ τὸ σημεῖον Τ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Σ. Ἐπειδὴ ΒΤ=ΒΣ. Ὅθεν καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΣ καὶ ΑΤ ἔχουσαι δύο κοινὰ σημεῖα ἐφαρμόζουσι καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι.

Βλέπομεν ἐνταυτῷ, ὅτι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΣΑΒ καὶ ΤΑΒ ὑπὸ τῶν δύο πλαγίων καὶ τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι ὡς καὶ αἱ ΑΣΒ καὶ ΑΤΒ.

Λῆμμα.

Ἐὰν ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ ληφθῇ σημεῖόν τι Γ καὶ ἐκ τούτου ἀχθῶσιν αἱ δύο εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΓΒ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς, καὶ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τούτων ληφθῇ δεύτερον σημεῖον Δ καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι πάλιν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΔΒ, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων θέλει εἶσθαι μικρότερον τοῦ τῶν πρώτων ἤτοι $ΑΔ+ΔΒ<ΑΓ+ΓΒ$· (σχ. 16).

Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΔ ἕωσοῦ συμπέσῃ μὲ τὴν ΓΒ εἴς τι σημεῖον Ε. Ὅθεν λέγομεν ἡ εὐθεῖα ΔΒ εἶναι μικροτέρα τῆς κεκλασμένης $ΔΕ+ΕΒ$ ἢ $ΔΒ<ΔΕ+ΕΒ$. Προστιθεμένης εἰς ἑκάτερον μέλος τῆς αὐτῆς ποσότητος ΑΔ, συνάγομεν $ΑΔ+ΔΒ<ΑΔ+ΔΕ+ΕΒ$ ἢ $ΑΔ+ΔΒ<ΑΕ+ΕΒ$.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν παρομοίως $ΑΕ<ΑΓ+ΓΕ$. προστιθεμένης τῆς αὐτῆς ποσότητος ΕΒ εἰς ἑκάτερον μέλος συνάγομεν $ΑΕ+ΕΒ<ΑΓ+ΓΕ+ΕΒ$ ἢ $ΑΕ+ΕΒ<ΑΓ+ΓΒ$. καὶ ἐπειδὴ $ΑΔ+ΔΒ$ ἀπεδείχθη μικρότερον τοῦ $ΑΕ+ΕΒ$, ἄρα πολλῷ πλέον $ΑΔ+ΔΒ<ΑΓ+ΓΒ$.

Θεώρημα Θ'.

Ἐκ δύο πλαγίων ἀγομένων ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἡ μᾶλλον ἀπομακρυνομένη εἶναι ἡ μεγαλητέρα. (σχ. 15).

Ἔστωσαν τὰ ἄνισα ἀποστήματα ΠΒ καὶ ΒΤ, λέγω ὅτι ΑΠ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΤ, ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΑΣ. Ἐπειδὴ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΒ ἕως τοῦ σημείου Γ, ὥστε ΑΒ =ΒΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Σ καὶ Π μὲ τὸ σημεῖον Γ διὰ τῶν εὐθειῶν ΠΓ καὶ ΣΓ. Ἐπειδὴ ΠΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ (θεώρ. β.' πόρ. β'. §. γ'.) καὶ τὰ ἀποστήματα ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι αἱ πλάγιαι ΑΣ καὶ ΣΓ εἶναι ἴσαι (θεώρ. Η'. §. ε') καὶ παρομοίως αἱ ΑΠ καὶ ΓΠ· τουτέστιν ΑΣ+ΣΓ=2 ΑΣ καὶ ΑΠ+ΓΠ+2. ΑΠ. ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα ΑΠ+ΠΓ>ΑΣ+ΣΓ ἕπεται ὅτι 2. ΑΠ>2. ΑΣ· καὶ ἑπομένως ΑΠ>ΑΣ ἢ τέλος ΑΠ>ΑΤ, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα ά.—Βλέπομεν ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τοῦ προηγουμένου, ὅτι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν πλείονας τῶν δύο ἴσων πλαγίων. Ἐπειδὴ ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι τρεῖς, τότε αἱ δύο τούτων ἤθελον εὑρεθῇ πρὸς τὸ αὐτὸ δεξιὸν ἢ ἀριστερὸν μέρος τῆς καθέτου εἰς ἄνισα ἀποστήματα καὶ ἑπομένως ἤθελον εἶσθαι ἄνισοι. Ὅλαι δὲ αἱ ἴσαι πλάγιαι χαρακτηρίζονται κατὰ ζεύγη ἑκατέρωθεν τῆς καθέτου.

Πόρισμα β'. — Εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κατὰ πλείονα τῶν δύο σημείων. Διότι ἂν συναπαντήσῃ εἰς τρία, τότε ἐπιζευγνυομένων τῶν σημείων τούτων μὲ τὸ κέντρον θέλομεν ἔχει τρεῖς ἴσας πλαγίας τῆς ὑποτιθεμένης εὐθείας, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Ἡ ἀγομένη αὕτη εὐθεῖα λέγεται διατέμνουσα τοῦ κύκλου, ἢ τῆς περιφερείας. Διαφέρει δὲ τῆς χορδῆς ὡς ἐκβαλλομένη καὶ ἔξω τῆς περιφερείας.

Θεώρημα Ι'.

Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ὑψουμένης εἰς τὸ μέσον εὐθείας τινος ἀπέχει ἐπίσης τῶν δύο ἄκρων τῆς εὐθείας. Πᾶν σημεῖον δὲ ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀπέχει ἀνίσως. (σχ. 17).

Ἔστω Γ τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ ΔΓ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ. Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ΓΔ ἐπίσης ἀπέχει τῶν ἄκρων Α, καὶ Β. Διότι τὰ ἀποστήματα ΑΓ καὶ ΓΒ ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως καὶ αἱ πλάγιαι ΑΔ καὶ ΔΒ ἢ αἱ ΑΙ καὶ ΙΒ εἶναι ἴσαι. τουτέστι τὰ σημεῖα Δ, Ι κ.τ.λ. τῆς καθέτου ἀπέχουσιν ἐπίσης τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

Ἔστω ἤδη σημεῖον Ο ἐκτὸς τῆς καθέτου. λέγω ὅτι ἀπέχει ἀνίσως τῶν ἄκρων Α καὶ Β. Διότι ἐπιζευχθείσης τῆς ΙΒ, ἔχομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας ΟΒ<ΟΙ+ΙΒ. Καὶ ἐπειδὴ ὡς ἀπεδείχθη, ΑΙ=ΙΒ συνάγεται ἄρα δι' ἀντικαταστάσεως ΟΒ<ΟΙ+ΙΑ ἢ ΟΒ<ΑΟ.

Πόρισμα. — Ἐξάγεται λοιπὸν ἐκ τούτου, ὅτι ἂν σημεῖόν τι ἀπέχῃ ἐξίσου τῶν δύο ἄκρων εὐθείας τινος τοῦτο ἀνήκει εἰς τὴν ὑψουμένην κάθετον κατὰ τὸ μέσον τῆς εὐθείας.

Θεώρημα ΙΑ'.

Ἡ ἀκτὶς κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς τινος τόξου, διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη (σχ. 18).

Ἔστω ἡ ἀκτὶς ΓΔ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ λέγω ὅτι ΑΕ=ΕΒ καὶ ΑΜΔ=ΔΝΒ.

Ἐπειδὴ ΑΓ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσαι ὡς ἀκτῖνες, θεωρούμεναι δὲ ὡς πλάγιαι σχετικῶς πρὸς τὴν κάθετον ΓΕ ἀπέχουσιν ἐπίσης τοῦ ποδός της Ε· ἄρα ΑΕ=ΕΒ ἢ τὸ σημεῖον Ε εἶναι μέσον τῆς ΑΒ.

Παρομοίως λέγομεν οὔσης τῆς ΕΔ καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ὡς δέδεικται, τὸ σημεῖον αὐτῆς Δ ἀπέχει ἐπίσης τῶν δύο ἄκρων Α καὶ Β. Ὅθεν ΑΔ=ΔΒ· καὶ ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι τὰ τόξα ΑΜΔ καὶ ΔΝΒ εἶναι ἴσα (§. β΄. σύγκρισις τῶν τόξων), τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Θεώρημα ΙΒ΄.

Ἡ εὐθεῖα κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ἐφάπτεται τῆς περιφερείας ἢ τοῦ τόξου. (σχ. 19).

Ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εὐθεῖα λέγεται ἐκείνη, ἥτις ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν, ἢ μὲ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον λέγεται ἤδη σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

Ἔστω ἤδη ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΓΔ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Δ. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχει καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν. τότε ἐπιζευγνυομένου τοῦ σημείου τούτου μὲ τὸ κέντρον Ο, ἡ γραμμὴ αὕτη σχετικῶς μὲν πρὸς τὴν περιφέρειαν εἶναι ἀκτὶς καὶ διὰ τοῦτο ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΔ. σχετικῶς δὲ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ὡς πλαγία εἶναι μεγαλητέρα τῆς καθέτου ΓΔ. Ἕπεται ἄρα ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλο τι σημεῖον κοινὸν τῆς περιφερείας καὶ τῆς καθέτου· ἄρα ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς περιφερείας.

Θεώρημα ΙΓ΄.

Ἀντιστρόφως ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἐπαφῆς. (σχ. 19).

Ἔστω ΑΒ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ΓΔ, λέγω, ὅτι ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἐπειδὴ, ἂν αὕτη ἦναι πλαγία, ἀγομένης τότε μιᾶς καθέτου ἀπὸ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ κάθετος αὕτη θέλει εἶσθαι μικροτέρα τῆς πλαγίας (§. έ. θεώρημα Ζʹ.) Ὅθεν ὁ ποῦς τῆς καθέτου ἤθελεν εἶσθαι ἐντὸς τῆς περιφερείας καὶ τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἤθελεν εἶσθαι διατέμνουσα.

§. ϛʹ. *Περὶ Παραλλήλων.*

Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι μεταξύ των, ὅταν κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ προεκβαλλόμεναι ἑκατέρωθεν ἐπ' ἄπειρον δὲν δύνανται νὰ συμπέσωσιν ὡς αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ. (σχ. 20).

Ἐκ τῶν διαφόρων ἰδιοτήτων τῶν παραλλήλων, τὰς ὁποίας ἀναπτύσσομεν εἰς τὰ ἑξῆς θεωρήματα ἐξαρτᾶται τὸ οὐσιωδέστατον τῆς Γεωμετρίας μέρος. Πρὸς περισσοτέραν κατάληψιν τούτων δίδομεν τὰς ἑξῆς ὀνομασίας.

Ἔστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 20) τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης τινος ΗΘ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ· ὅθεν

Αἱ γωνίαι ΓΕΖ καὶ ΕΖΒ ἢ αἱ ΑΖΕ καὶ ΔΕΖ λέγονται ἐντὸς ἐναλλὰξ· καθὸ κείμεναι ἐντὸς τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ σχετικῶς ἀπέναντι·

Αἱ γωνίαι ΓΕΗ καὶ ΒΖΘ ἢ αἱ ΑΖΘ καὶ ΗΕΔ λέγονται ἐκτὸς ἐναλλὰξ διὰ παρόμοιον λόγον·

Αἱ γωνίαι ΓΕΖ καὶ ΕΖΑ ἢ αἱ ΔΕΖ καὶ ΒΖΕ λέγονται ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος·

Αἱ γωνίαι ΓΕΗ καὶ ΑΖΘ ἢ αἱ ΗΕΔ καὶ ΒΖΘ λέγονται ἐκτὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος·

Καὶ τέλος πάντων αἱ γωνίαι ΓΕΖ καὶ ΑΖΘ ἢ αἱ ΗΕΔ καὶ ΕΖΒ κ. τ. λ. τουτέστι μία ἐντὸς καὶ μία ἐκτὸς, ἀλλὰ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν λέγονται ἐντὸς καὶ ἐκτὸς ἢ ἐκτὸς καὶ ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος.

Θεώρημα ΙΔ'.

Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπί τινος τρίτης εἶναι μεταξύ των παράλληλοι (σχ. 21).

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, καὶ ΓΔ κάθετοι ἐπὶ τῆς τρίτης ΜΝ, λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, τουτέστι προεκβαλλόμεναι δὲν συναπαντῶνται. Διότι ἂν συναπαντηθῶσιν εἴς τι σημεῖον μακρὰν κατὰ τὴν προεκβολήν των, τότε ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα ν' ἀγάγωμεν ἐκ τοῦ σημείου τούτου δύο καθέτους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. (§. έ. θεώρ. Ζ'.)

Θεώρημα ΙΕ'.

Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζουσαι τὰς ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, εἶναι παράλληλοι (σχ. 20).

Ἔστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς τρίτης ΗΘ καὶ σχηματίζουσαι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ ΒΖΕ καὶ ΖΕΓ ἴσας· λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΒΖΕ=ΖΕΓ πρέπει καὶ τὰ παραπληρώματα αὐτῶν, τουτέστιν αἱ γωνίαι ΖΕΔ καὶ ΕΖΑ νὰ ἦναι ἴσαι. ἢ σαφέστερον ΑΖΕ+ΕΖΒ=2. ὀρθ. καὶ παρομοίως ΓΕΖ+ΖΕΔ=2. ὀρθ. Ὅθεν ΑΖΕ+ΕΖΒ=ΓΕΖ+ΖΕΔ, ἢ ἀφαιρέσει τῶν ἴσων ΕΖΒ καὶ ΖΕΓ, μένει ΑΖΕ =ΖΕΔ.

Τούτου τεθέντος, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν ΕΖΒ καὶ ΖΒΔ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ΑΖΕ καὶ ΖΕΓ· ὅθεν ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ προεκβαλλόμεναι συναπαντῶνται, ἐξ ὑποθέσεως δεξιόθεν, διὰ τὸν λόγον τῆς ἰσότητος τῶν δύο ἀθροισμάτων τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι προσδιορίζουσι τὴν διεύθυνσιν τῶν εὐθειῶν, πρέπει αἱ εὐθεῖαι νὰ συναπαντῶνται καὶ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους· ὅθεν ταυτίζονται, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Παρομοίως ἂν αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ ΗΕΔ καὶ ΑΖΘ ἦναι ἴσαι, πάλιν αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλαι. Διότι οὔσης τῆς ΗΕΔ=ΓΕΖ καὶ τῆς ΑΖΘ=ΕΖΒ ὡς κατὰ κορυφὴν, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως καὶ αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Θεώρημα ΙΣΤ'.

Ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος ἰσοδυναμῇ μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι. (σχ. 20)

Ἔστω ΔΕΖ+ΕΖΒ=2. ὀρθ. Ἐπειδὴ ΕΖΒ εἶναι κοινὸν παραπλήρωμα τῆς ΔΕΖ καὶ τῆς ΕΖΑ, ἄρα ΕΖΑ=ΔΕΖ, τουτέστιν αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Θεώρημα ΙΖ'.

Δύο εὐθεῖαι ἡ μὲν κάθετος, ἡ δὲ πλαγία ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας προεκβαλλόμεναι συμπίπτουσι. (σχ. 22).

Ἔστω ΑΒ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΚ καὶ ΓΔ πλαγία ποιοῦσα τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΔΓΑ. λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ. προεκβαλλόμεναι συναπαντῶνται.

Ἂς ὑψωθῇ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἡ κάθετος ΓΕ ἐπὶ τῆς ΠΚ καὶ ἀχθήτωσαν ἐκ τοῦ σημείου Γ αἱ εὐθεῖαι ΓΛ, ΓΜ, ΓΝ, ΓΞ, κ. τ. λ. ποιοῦσαι τὰς κατὰ συνεκδοχὴν γωνίας ΔΓΛ, ΛΓΜ, ΜΓΝ κ. τ. λ. ἴσας μεταξύ των καὶ μὲ τὴν γωνίαν ΕΓΔ. προσθετομένης οὕτω τῆς γωνίας ΕΓΔ εἰς τὸν ἑαυτόν της πολλάκις, θέλει παραχθῇ ἀμβλεῖα γωνία ΕΓΟ μεγαλητέρα τῆς ὀρθῆς ΕΓΚ. Ἐξ ἑτέρου μέρους, ἂν ἀρξάμενοι ἀπὸ τοῦ σημείου Α, λάβωμεν τὰ διαστήματα ΑΠ, ΜΣ, κ. τ. λ. ἴσα μεταξύ των καὶ μὲ ΓΑ καὶ ὑψώσωμεν τὰς καθέτους ΠΡ, ΣΤ κ. τ. λ. αἱ ὀρθογώνιοι ζῶναι, ἂν καὶ ἀπέραντοι, ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι, δὲν δύνανται νὰ ἀντικαταστήσωσι τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΕΓ καὶ ΓΟ περιεχόμενον ἀπροσδιόριστον διάστημα τῆς ἀμβλείας ΕΓΟ. Ἀλλὰ τὸ διάστημα ΕΓΟ συμπληροῦται διὰ τῆς ΕΓΔ λαμβανομένης πολλάκις, ἄρα τὸ τελευταῖον τοῦτο ΕΓΔ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΕΓΑΒ καὶ ἑπομένως, προεκβαλλομένων τῶν πλευρῶν ΕΓ καὶ ΓΔ, δὲν δύναται νὰ ἀποκλεισθῇ ἐντὸς τῶν ΕΓ καὶ ΑΒ. τουτέστιν ἡ πλαγία ΓΔ προεκβαλλομένη ἱκανῶς θέλει συναπαντήσει τὴν κάθετον ΑΒ.

Ἂν πάλιν ἡ πλαγία ΓΔ ἤθελε σχηματίσῃ γωνίαν ἀμβλεῖαν τὴν ΔΓΑ (σχ. 23.) τότε προεκβαλλομένων τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΑΒ ἐκ τοῦ ἀντιθέτου μέρους κατὰ τὰ σημεῖα Δ΄ καὶ Β΄, ἡ γωνία Δ΄ΓΑ θέλει εἶσθαι ὀξεῖα. Ὅθεν ἡ πλαγία Δ΄Γ καὶ ἡ κάθετος Β΄Α προεκβαλλόμεναι ἱκανῶς συναπαντῶνται εἰς τὸ ἀντίθετον μέρος.

Σχόλιον. — Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου ἔχει μὲν τὴν ἔλλειψιν ταύτην, ὅτι στηρίζεται εἰς σχέσεις ἀπροσδιορίστων διαστημάτων. Ἀλλ᾽ ἡ θεωρία τῶν παραλλήλων παριστᾷ τὴν μοναδικὴν ταύτην περίστασιν, τὴν ὁποίαν οἱ Γεωμέτραι δὲν ηὐτύχησαν νὰ ἐκθέσωσιν ἀκριβέστερον. Ὅπως δὲ καὶ ἂν ἐκτεθῇ, ἐμπερικλείει πάντοτε ἀσάφειάν τινα, ἢ τὸ λεγόμενον παρὰ τοῖς παλαιοῖς « ἐν ἀρχῇ αἰτεῖσθαι. » (pétition de principe), Εἰς τὸ σύγγραμμα τοῦ Κυρίου Λεγένδρου ἀπαντᾶται ἐναργεστέρα ταύτης ἀπόδειξις. Ἡ διαίρεσις ὅμως, τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν σκοπὸν νὰ ἀκολουθήσωμεν, διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὸ δύσληπτον ἄλλων θεωρημάτων μᾶς ἀναγκάζει νὰ ἐκθέσωμεν τὴν ἀνωτέρω τοῦ θεωρήματος τούτου ἀπόδειξιν, τὴν ὁποίαν ἔδωκεν ὁ Κ. Βερτράνδος ἐκ Γενεύης.

Θεώρημα ΙΗ'.

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου μίαν μόνην παράλληλον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. (σχ. 24.)

Ἔστω τὸ δεδομένον σημεῖον Α καὶ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΓΔ. ὑποτεθέντος, ὅτι ἤχθη ἡ παράλληλος ΑΒ, λέγω ὅτι πᾶσα ἄλλη ΑΜ ἢ ΑΜ' εἶναι ἀδύνατος· διότι ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς καθέτου ΑΠ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, τότε ἡ καθ' ὑπόθεσιν παράλληλος ΑΜ ἢ ΑΜ' πρέπει νὰ ἦναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΠ· ἐπειδὴ ἂν ὑποτεθῇ πλαγία, προεκβαλλομένη πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ΓΔ. Ἀλλὰ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλος, καὶ ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΑΠ, ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΠ δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν δύο καθέτους, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Θεώρημα ΙΘ'.

Δύο παράλληλοι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης ποιοῦσι τὰς ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἐναλλὰξ καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐκτὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος γωνίας ἴσας.

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 25.) τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς τρίτης ΗΘ εἰς τὰ σημεια Ε καὶ Ζ· λέγω, ὅτι ΑΖΕ καὶ ΖΕΔ ἢ αἱ ΓΕΖ καὶ ΕΖΒ εἶναι ἴσαι· ὡς ἐπίσης καὶ αἱ ἐκτὸς ἐναλλάξ.

Διότι ἔστω, εἰ δυνατὸν, ΑΖΕ μεγαλητέρα τῆς ΖΕΔ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΚ ποιοῦσα μὲ τὴν ΕΖ τὴν γωνίαν ΖΕΚ ἴσην τῇ ΑΖΕ. τότε ΕΚ θέλει εἶσθαι παράλληλος τῇ ΑΒ (§. ϛ' θεώρ. ιϛ.) ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΕΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ, δυνάμεθα λοιπὸν νὰ φέρωμεν δύο παραλλήλους ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ ὡς πρὸς τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ ΓΕΗ καὶ ΒΖΘ. Διότι ὅταν αὗται ἦναι ἴσαι, καὶ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ ΖΕΔ καὶ ΕΖΑ εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφὴν, καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι. Παρομοίως ἂν ἔχωμεν τὰς ἐντὸς καὶ ἐκτὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος ΗΕΔ καὶ ΕΖΒ. Ἐπειδὴ ἡ ΗΕΔ=ΓΕΖ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ ΗΕΔ=ΕΖΒ ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται ἄρα καὶ ΓΕΖ=ΕΖΒ. ὅθεν κ. τ. λ.

Σχόλιον. — Καθολικεύοντες τὴν ἀρχὴν τοῦ θεωρήματος τούτου δυνάμεθα ἤδη νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἐκ τῶν ὀκτὼ σχηματιζομένων γωνιῶν διὰ τῆς συναπαντήσεως δύο παραλλήλων ὑπὸ τρίτης τινος εὐθείας, αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς καὶ αἱ τέσσαρες ἀμβλεῖαι.

Θεώρημα Κ'.

Δύο παράλληλοι τεμνόμεναι ὑπό τινος εὐθείας, δίδουσι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς, ἢ τῶν δύο ἐκτὸς γωνιῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. (σχ. 20).

Ἔστωσαν πάλιν αἱ παράλληλοι ΑΒ καὶ ΓΔ συναπαντώμεναι ὑπὸ τῆς διατεμνούσης ΗΘ, λέγω ὅτι ΒΖΕ+ΖΕΔ=2. ὀρθ. Διότι ἔχομεν κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα ΒΖΕ+ΕΖΑ=2. ὀρθ. ἀλλὰ ΕΖΑ=ΖΕΔ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ, συνάγομεν ἄρα δι' ἀντικαταστάσεως ΒΖΕ+ΖΕΔ=2. ὀρθ.

Πόρισμα α'. — Ἂν μία τῶν ὀκτὼ γωνιῶν ἦναι ὀρθὴ, καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι θέλουσιν εἶσθαι ὀρθαὶ, αἱ μὲν ὡς προσκείμεναι, αἱ δὲ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ ἄλλαι ὡς ἀποτελοῦσαι ἀνὰ δύο ἄθροισμα δύο ὀρθῶν. Ὅθεν μία εὐθεῖα κάθετος εἰς μίαν τῶν παραλλήλων, εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν ἄλλην. (σχ. 21).

Πόρισμα. β'. — Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης καὶ μὴ ποιοῦσαι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος γωνιῶν ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, προεκβαλλόμεναι συναπαντῶνται. Διότι ἂν ἐκ τοῦ ἐναντίου ὑποτεθῶσι παράλληλοι, τότε τὸ ἄθροισμά των ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο ὀρθὰς, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Δύο δὲ παράλληλοι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ε δὲν δύνανται νὰ ἀχθῶσι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ (§. ϛ'. θεώρ. ιθ'.)

Θεώρημα ΚΑ'.

Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι μιᾶς τρίτης εἶναι παράλληλοι καὶ μεταξύ των. (σχ. 26).

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι πρὸς τὴν τρίτην ΕΖ. λέγω, ὅτι καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ.

Διότι ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι προεκβαλλόμεναι συναπαντῶνται, τότε ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΕΖ, ἤτοι τοῦ σημείου τῆς συναπαντήσεως τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο παραλλήλους ΑΒ καὶ ΓΔ πρὸς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν ΕΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Θεώρημα ΚΒ'.

Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἀπέχουσιν ἐπίσης καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα. (σχ. 27).

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς ΑΒ δύο σημεῖα οἱαδήποτε Μ καὶ Π. Ἐπειδὴ τὸ συντομώτερον διάστημα ἑνὸς σημείου πρὸς μίαν εὐθεῖαν μετρᾷ ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, διὰ τοῦτο ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΜΝ καὶ ΠΚ ἐπὶ τῆς ΓΔ, αἱ ὁποῖαι θέλουσιν εἶσθαι κάθετοι καὶ εἰς τὴν παράλληλον ΑΒ. Τούτου τεθέντος λέγω, ὅτι ΜΝ=ΠΚ. ἐκ τοῦ σημείου Σ μέσου τῆς εὐθείας ΜΠ ἂς ἀχθῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἡ κάθετος ΡΣ, καὶ ἂς περιστραφῇ τὸ σχῆμα ΡΣΠΚ περὶ τὴν ΡΣ ὥστε νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σχῆμα ΣΜΝΡ. Ἐξ αἰτίας τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΡΣΠ καὶ ΡΣΜ ἡ γραμμὴ ΣΠ θέλει συμπέσει μὲ τὴν ΣΜ καὶ ἐπειδὴ ΣΠ=ΣΜ, τὸ σημεῖον Π θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Μ. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γραμμὴ ΡΚ συμπίπτει μὲ τὴν ΡΝ καὶ τὸ σημεῖον Κ μὲ τὸ Ν. Ὅθεν αἱ δύο εὐθεῖαι ΠΚ καὶ ΜΝ ἔχουσαι δύο κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἐφαρμόζουσι μεταξύ των καὶ ἐπομένως τὰ ἀποστήματα ΜΝ καὶ ΠΚ εἶναι ἴσα.

Θεώρημα ΚΓ'.

Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα. (σχ. 28).

Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον αἱ δύο παράλληλοι ΑΒ καὶ ΓΔ διατέμνουσαι τὴν περιφέρειαν, λέγω, ὅτι τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσα. Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἂς ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΜ κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ ἐπομένως καὶ εἰς τὴν παράλληλον αὐτῆς ΑΒ (§. ϛ'. θεώρ. κ'. πόρ. ά.) Ἕπεται ἤδη, ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΜ διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΜΒ εἰς δύο ἴσα μέρη (§. έ. θεώρ. ιά.), τουτέστι ΑΜ=ΜΒ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΓΜ=ΜΔ καὶ δι' ἀφαιρέσεως συνάγομεν ΑΜ—ΓΜ=ΒΜ—ΜΔ ἤτοι ΑΓ=ΒΔ.

Ἔστω δεύτερον ἡ μὲν διατέμνουσα, ἡ δὲ ἐφαπτομένη ὡς ΑΒ καὶ Γ'Δ' λέγω, ὅτι τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΜΒ εἶναι ἴσα. Διότι ἀγομένης τῆς ἀκτῖνος ΟΜ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Μ. αὕτη θέλει εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης Γ'Δ' (§. ϛ'. θεώρ. ιγ'.) καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ΑΒ (§. ϛ'. θεώρ. κ'. πόρ. ά.) ὅθεν τὸ τόξον ΑΜ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΜΒ (§. έ. θεώρ. ιά.)

Ἔστωσαν τέλος καὶ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι ὡς Γ'Μ' καὶ Γ''Μ''. ἑνόνοντες τὸ κέντρον Ο μὲ τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Μ καὶ Ν ἡ γραμμὴ ΜΝ θέλει εἶσθαι εὐθεῖα καὶ διάμετρος τῆς περιφερείας. Ἐπειδὴ ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς Γ'Μ' (§. έ. θεώρ. ιγ'.) προεκβαλλομένη ἕπεται νὰ ἦναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου Γ''Μ'' (§. ς'. θεώρ. κ'. πόρ. ά.) ἀλλὰ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης Γ''Μ'' ἄρα ἡ κάθετος αὕτη ταὐτίζεται μὲ τὴν προεκβολὴν τῆς ΟΜ καὶ ἐκ τούτου ἡ γραμμὴ ΜΟΝ εἶναι εὐθεῖα καὶ διάμετρος τῆς περιφερείας. Ἕπεται ἄρα ὅτι ΜΓΑΝ εἶναι ἡμιπεριφέρεια ὡς ἐπίσης καὶ ΜΔΒΝ.

§. ζ'. *Συμπλήρωσις τοῦ §. δ'. περὶ Γωνιῶν.*

Ἡ θεωρία τῶν παραλλήλων μᾶς χορηγεῖ τὰ μέσα τῆς ἀποδείξεως τῆς ἰσότητος δύο γωνιῶν καὶ τοῦ μέτρου αὐτῶν εἴς τινας ἰδιαιτέρας ἔτι περιστάσεις.

Θεώρημα ΚΔ'.

Δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ διευθυνομένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι ἴσαι. (σχ. 29).

Ἔστωσαν αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΕΖ, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ καὶ ὁμοίως ΑΓ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος· λέγω ὅτι ΒΑΓ=ΔΕΖ· ἂς προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἕωσοῦ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΕΖ εἰς ἓν σημεῖον Η. ἐκ τῆς ἰδιότητος τῶν παραλλήλων ἔχομεν ΒΑΓ=ΒΗΖ (§. ς'. θεώρ. ιθ'.) διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΒΗΖ=ΔΕΖ. Ὅθεν ΒΑΓ=ΔΕΖ.

Σχόλιον.— Προσδιορίζομεν ὡς συνθήκην τοῦ θεωρήματος, τὴν διεύθυνσιν τῶν πλευρῶν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Ἐπειδὴ δυνατὸν αὗται νὰ ἦναι παράλληλοι, καὶ χωρὶς νὰ ἦναι ἴσαι αἱ γωνίαι ὡς αἱ ΔΕΖ καὶ ΒΑΓ', τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ΑΓ' καὶ ΕΖ προχωροῦσι κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν· εἰς τὴν περίστασιν ταύτην αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ' καὶ ΔΕΖ δίδουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς ἢ ΒΑΓ'+ΔΕΖ= 2. ὀρθ. Διότι ἔχομεν ἐκ τῶν παραλλήλλων ΔΕΖ+ΕΗΒ=2. ὀρθ. (§. ς'. θεώρ. κ'.) ἀλλὰ ΕΗΒ=Γ'ΑΒ ἄρα Γ'ΑΒ+ΔΕΖ=2. ὀρθ.

Θεώρημα ΚΕ.'

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν πλευρῶν της ἀπολαμβανομένου τόξου. (σχ. 30).

Ὀνομάζομεν ἐγγεγραμμένην γωνίαν ἐκείνην, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ὡς ΒΑΓ. Ἂς ὑποτεθῇ κατὰ πρῶτον, ὅτι ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἶναι διάμετρος ὡς εἰς τὴν ΒΑΓ ἡ πλευρὰ ΑΓ. Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΔΕ παραλλήλως τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τὰ τόξα ΒΔ καὶ ΑΕ μεταξὺ παραλλήλων εἶναι ἴσα (§. ς'. θεώρ. κγ'.) καὶ παρομοίως αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΟΓ εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς καὶ ἐκτὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος (§. ς'. θεώρ. ιθ'.) Ἀλλὰ ΔΟΓ καὶ ΑΟΕ εἶναι παρομοίως ἴσαι ὡς κατὰ κορυφὴν (§. γ'. θεώρ. δ'.) ἄρα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα μετροῦσι τὰς κεντρικὰς γωνίας εἶναι ἴσα τουτέστιν ΔΓ= ΑΕ=ΒΔ. Ἐκ τούτου καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ ἴση μὲ τὴν εἰς τὸ κέντρονΔΟΓ δύναται νὰ ἔχῃ διὰ μέτρον τὸ τόξον ΔΓ ἥμισυ τοῦ ΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν

Ἔστω ἤδη ἡ γωνία ΒΑΓ (σχ. 31), τῆς ὁποίας ἀμφότεραι αἱ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου Ο. Ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΔ. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω περίστασιν ἡ κεντρικὴ ΒΑΔ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{2}$ ΒΔ. καὶ παρομοίως ἡ ΓΑΔ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{2}$ ΓΔ. Δὶ ἀφαιρέσεως ἄρα συνάγομεν ΒΑΓ διαφορὰ τῆς ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ ἔχει διὰ μέτρον τὴν διαφορὰν $\frac{1}{2}$ ΒΓ—$\frac{1}{2}$ ΔΓ τουτέστιν $\frac{1}{2}$ ΒΓ.

Τέλος πάντων ἔστω τὸ κέντρον μεταξὺ τῶν πλευρῶν, τουτέστιν ἡ γωνία ΒΑΕ. Ἀγομένης παρομοίως τῆς διαμέτρου ΑΔ, συνάγομεν μέτρον τῆς ΒΑΔ τὸ τόξον $\frac{1}{2}$ΒΔ κατὰ τὴν πρώτην περίστασιν, καὶ παρομοίως διὰ τὴν ΔΑΕ τὸ τόξον $\frac{1}{2}$ ΔΕ. Ὅθεν διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν ΒΑΔ+ΔΑΕ= $=\frac{1}{2}$ ΒΔ+ $\frac{1}{2}$ ΔΕ, ἢ ΒΑΕ$=\frac{1}{2}$ ΒΕ.

Πόρισμα α'. — Αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα κύκλου ἐγγραφόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ὀνομάζομεν τμῆμα κύκλου τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ χωριζόμενον ὑπὸ μιᾶς χορδῆς, ὡς ΑΜΝΒ (σχ. 32). Ὅλαι δὲ αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΑΜΒ, ΑΝΒ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ ὅλαι ἔχουσι μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΓΒ.

Πόρισμα β'. — Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθὴ ὡς ΑΞΓ· διότι ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ τὸ τέταρτον τῆς ὅλης. Παρομοίως ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς μικρότερον τμῆμα εἶναι ἀμβλεῖα ὡς ΑΜΒ, ΑΝΒ, κ. τ. λ. Ἐπειδὴ ἔχει διὰ μέτρον πλέον τοῦ τεταρτημορίου. Ἡ δὲ ἐγγεγραμμένη εἰς μεγαλήτερον τμῆμα εἶναι ὀξεῖα ὡς ΑΜ'Β, ΑΝ'Β. κ. τ. λ. ὡς ἔχουσα μέτρον μικρότερον τοῦ τεταρτημορίου.

Θεώρημα ΚΣΤ.

Ἡ σχηματιζομένη γωνία ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της τόξου. (σχ. 33).

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΑΒ καὶ τῆς χορδῆς ΑΓ λέγω ὅτι ΒΑΓ$=\frac{1}{2}$ ΑΔΓ. Διότι ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΕ. Αὕτη θέλει εἶσθαι κάθετος εἰς τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ (§. ε'. θεώρ. ιγ'.)

καὶ ἑπομένως ΒΑΕ εἶναι ὀρθή, ἔχουσα ἄρα διὰ μέτρον τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας ἢ $\frac{1}{2}$ ΑΓΕ· ἀλλὰ ΓΑΕ ὡς ἐγγεγραμμένη ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{2}$ ΓΕ. Συνάγομεν ἄρα δι' ἀφαιρέσεως ΒΑΓ, διαφορὰ ΒΑΕ καὶ ΓΑΕ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{2}$ ΑΔΓ διαφορὰν τοῦ $\frac{1}{2}$ ΑΓΕ καὶ $\frac{1}{2}$ ΓΕ.

Ἂν ἔχωμεν δὲ τὴν ἀμβλεῖαν ΒΑΓ', παρομοίως λέγομεν γωνία ΒΑΓ'$=\frac{1}{2}$ ΑΕΓ'. Ἀποδεικνύομεν δὲ τὸ θεώρημα διὰ προσθέσεως τῶν γωνιῶν ΒΑΕ καὶ ΕΑΓ', καὶ παρομοίως τῶν τόξων ΑΕ καὶ ΕΓ'.

§. *η. περὶ τῆς τομῆς καὶ ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν.*

Δίδονται πολλὰ προβλήματα, ὡς θέλομεν ἰδεῖ παρακατιόντες, εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὁποίων μεταχειριζόμεθα συμβοηθητικὰς εὐθείας καὶ περιφερείας, ἤτοι τὸν κανόνα καὶ τὸν διαβήτην. Διὰ νὰ λάβωμεν ἀκριβῆ ἔννοιαν, ἢ γνῶσιν τῶν ἐκτελουμένων τούτων ἐργασιῶν, πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν εἴδησιν τῶν ἀρχῶν ὡς πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν καὶ τὴν ἐπαφὴν δύο περιφερειῶν, περὶ τῶν ὁποίων διαλαμβάνομεν ἀμέσως εἰς τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

Ὀνομάζομεν ἐπαφὴν τῶν περιφερειῶν τὴν σχετικήν των θέσιν ἐκείνην, καθ' ἣν ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Θεώρημα ΚΖ'.

Διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ περιγραφῇ περιφέρεια κύκλου (σχ. 34).

Ἔστωσαν τὰ δεδομένα σημεῖα Α, Β, Γ. καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. αἱ ὁποῖαι ἂς διαιρεθῶσιν εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, καὶ ἂς ὑψωθῶσιν αἱ κάθετοι ΔΟ καὶ ΕΟ, αἱ ὁποῖαι λέγω, ὅτι πρέπει πάντοτε νὰ συμπέσωσιν εἴς τι σημεῖον Ο. Διότι ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΕΟ. ἑωσότου συμπέσωσιν εἴς τι σημεῖον Κ, ἡ προεκβολὴ ΒΚ τῆς εὐθείας ΑΒ θέλει εἶσθαι διάφορος τῆς ΒΓ. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, δὲν εὑρίσκωνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΟΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἢ τ' ἀνάπαλιν ἡ ΒΓ κάθετος εἰς τὴν ΟΚ, ἕπεται ὅτι ἡ προεκβολὴ ΒΚ εἶναι πλαγία καὶ ΒΚΟ ἢ ΔΚΟ εἶναι ὀξεῖα, ἀλλὰ ἡ ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΚ, ἄρα ΟΔ καὶ ΟΕ προεκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν (§. ς'. θεώρ. ιζ'.).

Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Ἐπειδὴ ΔΟ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἐπίσης τῶν ἄκρων Α καὶ Β (§. ε'. θεώρ. Ι.) καὶ παρομοίως, ἐπειδὴ ΕΟ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἐπίσης τῶν ἄκρων Β καὶ Γ. Ὅθεν αἱ πλάγιαι ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ, εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Ο ὡς κέντρου καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ περιγράφεται περιφέρεια διερχομένη καὶ διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ.

Πόρισμα ά. — Βλέπομεν προσέτι, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν, εἰμὴ μίαν μόνην περιφέρειαν. Ἐπειδὴ πᾶν ἄλλο σημεῖον ὡς κέντρον ἄλλης περιφερείας ἀπέχει ἀνίσως τῶν δύο ἄκρων.

Πόρισμα β'. — Δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ τμηθῶσι κατὰ πλείονα τῶν δύο σημείων. Ἐπειδὴ ἂν ἔχωσι καὶ τρίτον σημεῖον, τότε ταυτίζονται μεταξύ των.

Θεώρημα ΚΗ'.

Ἂν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνόνουσα τὰ σημεῖα τῆς τομῆς εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων καὶ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη (σχ. 35).

Ἔστωσαν αἱ δύο περιφέρειαι, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εἶναι Α καὶ Β τεμνόμεναι κατὰ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἀγομένων τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΑΒ, λέγω ὅτι ΓΔ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΒ καὶ περιπλέον ΓΕ ἴση τῇ ΕΔ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ καὶ ΒΔ. Ἐπειδὴ ΑΓ=ΑΔ καὶ ΒΓ=ΒΔ, ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀνήκουσιν εἰς τὴν κάθετον, ὑψουμένην εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ. (§. έ. θεώρ. Ι πόρ. ά.) καὶ τὸ ἀνάπαλιν ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Θεώρημα ΚΘ'.

Ἂν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, καὶ ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ τῆς μικροτέρας ἀκτῖνος, αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται (σχ. 35).

Ἐπειδὴ διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ τομὴ πρέπει τὰ σημεῖα τῆς τομῆς νὰ εὑρίσκωνται ἔξω τῆς εὐθείας τῶν κέντρων. Ὅθεν πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ μικροτέραν τῆς κεκλασμένης ΑΓ+ΓΒ, ἢ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων.

Λέγομεν προσέτι, ὅτι ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ΑΓ πρέπει νὰ ἦναι μεκροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς μικροτέρας ἀκτῖνος ΒΓ καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων ΑΒ, διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ἡ μικροτέρα ἐμπερικλείεται εἰς τὴν μεγαλητέραν περιφέρειαν, ὡς δείκνυται εἰς τὸ σχῆμα, ὅπου ἔχομεν μὲν ΑΒ$<$ΑΓ+ΒΔ. ἀλλὰ ΑΓ$>$ΑΒ+ΒΔ. (σχ. 36.)

Θεώρημα Λ'.

Ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ΑΓ καὶ ΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ΑΒ, αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. (σχ. 37).

Εἶναι φανερὸν, ὅτι θέλουσιν ἔχει τὸ σημεῖον Α κοινὸν, καὶ τοῦτο μόνον, διότι ἂν εἶχον καὶ δεύτερον σημεῖον, τότε αἱ περιφέρειαι τέμνονται καὶ ἐπομένως ΑΒ<ΑΓ+ΓΒ (§. ή. θεώρ. κθ'.) ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Θεώρημα ΛΑ'.

Ἂν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ΑΒ ἦναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων ΑΓ καὶ ΒΓ, αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς. (σχ. 38).

Ἐπειδὴ εἶναι μὲν φανερόν, ὅτι τὸ σημεῖον Γ εἶναι κοινὸν καὶ τῶν δύο περιφερειῶν, τοῦτο δὲ μόνον. Ἐπειδὴ ἂν εἶχον καὶ δεύτερον, ἔπρεπεν ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ΑΓ νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς μικροτέρας ΒΓ καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων ΑΒ. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον. Ἐπειδὴ ἔχοντες ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=ΑΓ—ΒΓ, διὰ προσθέσεως τῆς ΒΓ συνάγομεν ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ, ἄρα αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.

Πόρισμα.—Τὰ κέντρα δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Σχόλιον.—Εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἀπείρους τὸ πλῆθος ἐσωτερικῶς ἐφαπτομένους κύκλους εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς· ἂν λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ διάφορα σημεῖα Α, Β, Δ, Ε. περιγράψωμεν περιφερείας διὰ τῶν ἀκτίνων ΑΓ, ΒΓ, ΔΓ. κ. τ. λ. Ἂν δὲ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Γ ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΓΜ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, αὕτη θέλει εἶσθαι κοινὴ ἐφαπτομένη ὅλων τῶν συνεφαπτομένων περιφερειῶν.

§. θ'. *Προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὸ ά. Κεφάλαιον καὶ ζητήματα πρὸς λύσιν.*

Ὅταν καλῶς ἐννοήσωμεν τοὺς λόγους, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐπεστηρίχθησαν τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα, πρέπει νὰ κάμωμεν χρῆσιν τῶν ἀληθειῶν τούτων εἰς τὴν ἐπίλυσιν διαφόρων Γεωμετρικῶν προτάσεων, τὰς ὁποίας δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καταχωρήσωμεν ὅλας εἰς τὰ διδακτικὰ ταῦτα στοιχεῖα. Αἱ προτάσεις δὲ αὗται σκοπὸν ἔχουσι τὴν ἀπόδειξιν τινὸς θεωρήματος ἢ τὴν λύσιν τινὸς προβλήματος. Οἱ νέοι, οἱ ὁποῖοι καταγίνονται ἐπιμελῶς εἰς τὴν σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας, εὐαρεστοῦνται εἰς τὴν ἀναζήτησιν τοιούτων ἀποδείξεων καὶ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, λαμβάνοντες ἀφορμὴν μάλιστα ἐκ τούτου, διὰ νὰ κάμωσι χρῆσιν τῶν ἐξηγηθεισῶν ἀρχῶν. Ἡ ἀναζήτησις αὕτη εἶναι πολλάκις ἔργον δυσχερὲς καὶ ἀπαιτεῖ μεγάλην ἐπιμονὴν καὶ δραστηριότητα. Ἡμεῖς δίδομεν ἐν τοσούτῳ τὴν λύσιν τῶν ἑξῆς διδακτικῶν προβλημάτων, τῶν ὁποίων ἡ χρεία εἶναι συχνοτάτη, καὶ προτείνομεν ἑπομένως ζητήματα τινὰ ἀναφέροντες τὴν λύσιν αὐτῶν δι' ἁπλῆς κατασκευῆς εἰς τὰ ἀναφερόμενα σχήματα, ἀφήνοντες δὲ εἰς τὴν κρίσιν τοῦ ἀναγνώστου νὰ ἀποδώσῃ τοὺς λόγους.

Πρόβλημα ά.

Ἀπό τινος σημείου Α κειμένου ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΓΔ νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας (σχ. 39).

Ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς κέντρου καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΑΕ ἂς περιγραφθῇ τόξον τέμνον τὴν εὐθείαν ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ· καὶ ἐκ τῶν σημείων τούτων Ε καὶ Ζ καὶ δι' ἀκτῖνος μεγαλητέρας τῆς ΕΑ ἂς περιγραφθῶσι τόξα, τὰ ὁποῖα θέλουσι τμηθῆ κατὰ τὸ σημεῖον Η ἔξωθεν τῆς εὐθείας ΓΔ (§. ή. θεώρ. κθ'.)· ἂς ἐπιζευχθῶσιν ἤδη τὰ σημεῖα Α καὶ Η, ἡ εὐθεῖα ΑΗ θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη κάθετος· ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι ΕΗ καὶ ΗΖ εἶναι ἴσαι ὡς ἀκτῖνες, καὶ τὰ ἀποστήματα ΑΕ καὶ ΑΖ παρομοίως ἴσα ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἔπεται ὅτι τὰ σημεῖα Η καὶ Λ ἀνήκουσιν εἰς τὴν κάθετον κατὰ τὸ μέσον τῆς ΕΖ (§. έ. θεώρ. Ί. πόρ.).

Πρόβλημα β'.

Ἀπὸ δεδομένου σημείου Γ ἐκτός τινος εὐθείας ΑΒ νὰ ἀγάγωμεν κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας (σχ. 40).

Ἐκ τοῦ δεδομένου σημείου Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἱκανῶς μεγάλην γράφομεν τόξον τέμνον τὴν δεδομένην εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Ἐκ τῶν σημείων τούτων ὡς κέντρων καὶ μὲ ἀκτῖνα μεγαλητέραν τοῦ ἡμίσεος ΜΝ περιγράφομεν τόξα τεμνόμενα εἴς τι σημεῖον Δ. Ἑνόνομεν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ προεκβάλλομεν τὴν ΓΔ. Οὕτως ἡ ΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀπέχουσιν ἐπίσης τῶν ἄκρων Μ καὶ Ν (§. έ. θεώρ. Ί. πόρ.)

Πρόβλημα. γ'.

Νὰ διαιρέσωμεν δεδομένην εὐθεῖαν εἰς δύο ἴσα μέρη (σχ. 41).

Ἔστω ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ. Ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β και μὲ ἀκτῖνα μεγαλητέραν τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΒ περιγράφομεν τόξα τεμνόμενα κατά τι σημεῖον Γ, καὶ πάλιν ἐκ τῶν αὐτῶν ἄκρων ὡς κέντρων καὶ μὲ ἀκτῖνα διάφορον τῆς πρώτης, μεγαλητέραν δὲ τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΒ, περιγράφομεν τόξα τεμνόμενα κατά τι σημεῖον Δ. Ἐπιζευγνύομεν τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν ἕως τῆς συναπαντήσεώς της μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον θέλει εἶσθαι τὸ μέσον τῆς δεδομένης ΑΒ, τουτέστι θέλομεν ἔχει ΑΕ=ΕΒ. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀπέχουσιν ἐπίσης τῶν ἄκρων Α καὶ Β· ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (§. έ. θεώρ. Ί. πόρ.)

Πρόβλημα. δ'.

Νὰ διαιρέσωμεν δεδομένην γωνίαν, ἢ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 42.)

Ἔστω ἡ δεδομένη γωνία ΑΓΒ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α καὶ δι' ἀκτῖνος κατ' ἀρέσκειαν ΑΠ ἂς περιγραφθῇ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν της τόξον ΠΜΘ. καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΗΘ. Τούτου τεθέντος ἂς ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΗΘ ἡ ἀκτὶς ΓΜ· αὕτη δὲ θέλει διαιρέσει τὴν γωνίαν ΑΓΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ἡ ἀκτὶς ΓΜ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΗΘ διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΜΘ εἰς δύο ἴσα μέρη (§. έ. θεώρ. ιά.) Ὅθεν ΑΜ=ΜΘ· ταῦτα δὲ μετρῶτι τὰς εἰς τὸ κέντρον γωνίας ΑΓΜ καὶ ΜΓΒ· ἄρα αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι· ἢ ΑΓΜ=$\frac{1}{2}$ ΑΓΒ.

Ἔστω ἤδη τὸ τόξον ΑΜΒ (σχ. 43.) νὰ τὸ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ ἄκρα Α καὶ Β· ἂς διαιρεθῇ δὲ ἡ χορδὴ αὕτη εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΕ καὶ ΕΒ διὰ τῆς καθέτου ΔΜ (§. θ'. πρόβ. γ')· λέγω ὅτι καὶ τὸ τόξον διαιρεῖται ἐπίσης εἰς δύο ἴσα μέρη, τουτέστιν ΑΜ=ΜΒ· ἐπειδὴ ἡ ὑψουμένη κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ ὑποτεινομένου τόξου. (§. έ. θεώρ. ιά).

Σχόλιον.—Γνωρίζοντες ἤδη τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τοῦ τόξου, γνωρίζομεν καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς εἰς 4, 8, 16. κ. τ. λ. ἴσα μέρη κατὰ τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ 2.

Πρόβλημα. έ.

Ἐπί τινος εὐθείας ΑΒ νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην μὲ δεδομένην Κ. (σχ. 44).

Ἐκ τοῦ σημείου Κ ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν ΚΛ ἂς γραφῇ τὸ τόξον ΛΜ. Ὁμοίως ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΝ, ἴσην τῇ ΚΛ ἂς γραφθῇ τὸ ἀόριστον τόξον ΝΟ καὶ τέλος ἐκ τοῦ σημείου Ν ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ χορδῇ ΛΜ ἂς γραφθῇ τόξον τέμνον τὸ ἀόριστον ΝΟ κατά τι σημεῖον Γ· ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Α καὶ Γ καὶ οὕτως ἡ γωνία ΓΑΝ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ Κ.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα ΝΟ καὶ ΛΜ εἶναι τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος καὶ αἱ χορδαὶ ΛΜ καὶ ΝΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσαι, ἕπεται ἄρα, ὅτι τὰ τόξα εἶναι ἴσα (§. ϐ'. σύγκρισις τόξων) ταῦτα δὲ μετρῶσι τὰς κεντρικὰς γωνίας ΛΚΜ καὶ ΒΑΓ, ἴσων περιφερειῶν, ἄρα ΛΚΜ=ΒΑΓ (§. ε θεώρ. ε).

Πρόβλημα στ'.

Ἀπὸ δεδομένου σημείου Γ νὰ ἀγάγωμεν παράλληλον ἄλλης δεδομένης ΑΒ (σχ. 45).

Ἐκ τοῦ σημείου Γ ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἱκανῶς μεγάλην ΓΜ ἂς γραφῇ ἀόριστον τόξον ΜΟ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Μ ὡς κέντρου καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ΜΓ ἂςγραφῇ τὸ τόξον ΓΑ, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΓΑ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Μ ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ χορδῇ ΑΓ ἂς γραφῇ τόξον, τέμνον τὸ ἀόριστον ΜΟ κατά τι σημεῖον Δ, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ, καὶ αὕτη θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Ἐπειδὴ τὰ τόξα ΓΑ καὶ ΜΔ εἶναι ἴσης ἀκτῖνος καὶ ἡ χορδὴ ΓΑ=ΜΔ. Ἕπεται ὅτι τὰ τόξα ΓΑ καὶ ΜΔ (§. ϐ' σύγκρισις τόξων) εἶναι ἴσα. Ταῦτα δὲ μετρῶσι τὰς κεντρικὰς γωνίας ΓΜΑ καὶ ΜΓΔ. (§. γ' θεώρ. ε.) ἄρα ΑΜΓ =ΜΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι, ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι.

Σχόλιον.—Πρὸς εὐχερεστέραν λύσιν τῶν ἀνωτέρων προθλημάτων δίδονται ἐργαλεῖα, διὰ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν ἀμέσως τὴν ζητουμένην γραμμήν. Περὶ τούτων καὶ τῆς κατασκευῆς των, ἡ ὁποία ἐπιστηρίζεται εἰς τὰ γεωμετρικὰ θεωρήματα, ἴδε τὸ παράρτημα εἰς τὸ τέλος.

Πρόβλημα ζ'.

Διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων νὰ κάμωμεν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου (σχ. 34).

Ἔστωσαν τὰ δεδομένα σημεῖα Α καὶ Β καὶ Γ· Ἂς ἐπιζευχθῶσι διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, τὰς ὁποίας τέμνομεν εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως τῶν καθέτων εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας· ἀκτὶς δὲ ἡ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ ἓν τῶν τριῶν δεδομένων Α, Β, ἢ Γ (§. ή. θεώρ. κή).

Πρόβλημα ή.

Νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον κύκλου, ἢ τόξου δεδομένου (σχ. 34).

Λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τρία κατ' ἀρέσκειαν σημεῖα Α, Β, καὶ Γ. ἐπιζευγνύομεν αὐτὰ διὰ χορδῶν ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ ὑψόνομεν εἰς τὸ μέσον αὐτῶν καθέτους ὡς εἰς τὸ προηγούμενον· τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεώς των εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον. (§. ή. θεώρ. κζ').

Πρόβλημα θ'.

Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΑΒ νὰ περιγράψωμεν περιφέρειαν, ὥστε ἡ εἰς τὸ ὑπ' αὐτῆς χωριζόμενον τμῆμα ἐγγραφομένη γωνία νὰ ἦναι ἴση μὲ δεδομένην Κ (σχ. 46).

Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΒ κατὰ τὴν ΒΛ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΜΒΛ ἴση τῇ δεδομένῃ Κ. εἰς τὸ μέσον Δ τῆς εὐθείας ΑΒ ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΔΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ΜΒ ἂς ὑψωθῇ παρομοίως ἡ κάθετος ΒΟ εἰς τὸ σημεῖον Β, τέμνουσα τὴν ΔΕ εἰς τὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐπίσης τῶν ἄκρων Α καὶ Β (§. έ. θεώρ. ί). Ἐκ τοῦ σημείου λοιπὸν Ο ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΟΒ ἂς περιγραφῇ περιφέρεια καὶ αὕτη θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη. Τουτέστι τὸ τμῆμα ΑΠΡΒ, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφονται αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΠΒ, ΑΡΒ κ. τ. λ. χωρεῖ τὴν δεδομένην Κ. ἢ ἁπλούστερον ΑΠΒ=Κ.

Ἐπειδὴ ἔχομεν ΜΒΑ=ΑΒΝ ὡς κατὰ κορυφὴν (§. γ΄. θεώρ. δ΄.) ἀλλὰ ΜΝ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας, ἐπειδὴ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, ἡ δὲ ΑΒ χορδὴ, ἕπεται ὅτι ΑΒΝ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ (§. ζ΄. θεωρ. κϛ΄). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΠΒ ὡς ἐγγεγραμμένη ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, ἄρα ΑΠΒ=ΑΒΝ=ΜΒΑ=Κ.

Πρόβλημα. ί.

Ἐκ δεδομένου σημείου Α ἐκτὸς δεδομένης περιφερείας νὰ ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην εἰς τὴν περιφέρειαν (σχ. 47).

Ἂς ἐπιζευχθῇ τὸ δεδομένον σημεῖον Α μὲ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας Γ διὰ τῆς ΑΓ. Ἂς διαιρεθῇ δὲ ἡ ΑΓ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Ο, καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ὡς κέντρου καὶ δι' ἀκτῖνος ΟΓ ἢ ΟΑ ἂς περιγραφῇ περιφέρεια, τέμνουσα τὴν δεδομένην κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Δ· ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα ταῦτα μὲ τὸ δεδομένον Α διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΑΒ. Ἑκατέρα δὲ τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ΓΒ ἀπὸ τοῦ δεδομένου σημείου Α. Ἐπειδὴ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Β καὶ Δ διὰ τῶν ἀκτίνων ΓΒ καὶ ΓΔ. Ἐπειδὴ ΓΑ ἐκ τῆς κατασκευῆς εἶναι διάμετρος τῆς περιφερείας ΟΑ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΓΒΑ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθὴ (§. ζ΄. θεώρ. κέ.

πόρ. β'.) καὶ ἑπομένως ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα ΓΒ. ἄρα ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (§. έ. θεώρ. ιβ'.)

Σχόλιον. —Βλέπομεν, ὅτι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐκτὸς τῆς περιφερείας δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν ἑκάστοτε δύο ἐφαπτομένας. Ἂν δὲ τὸ σημεῖον ἦναι ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἀρκεῖ νὰ ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ το κέντρον καὶ νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, ἤτοι εἰς τὸ δεδομένον σημεῖον.

Ζητήματα πρὸς λύσιν.

Παρεκτὸς τῶν διδακτικῶν τούτων προβλημάτων, καὶ τῶν ὁποίων ἡ χρεία εἰς τὴν σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἀναγκαία, ὡς ἡ εἴδησις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀριθμῶν, φέρομεν πρὸς τούτοις τὰ ἑξῆς ζητήματα σημειόνοντες τὴν λύσιν δι' ἁπλῆς κατασκευῆς εἰς τὰ ἀναφερόμενα σχήματα. Ὁ ἀναγνώστης βοηθούμενος ἀπὸ τὰ μέχρι τοῦδε ἐκτεθέντα θέλει ἀναπτύξει τὰς σχέσεις τῶν ζητημάτων τούτων καὶ ἀποδώσει τὸν λόγον.

Ζήτημα ά. — Δεδομένων δύο σημείων Α καὶ Β καὶ μιᾶς εὐθείας ΠΡ, νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας σημεῖόν τι Γ, ὥστε αἱ τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ τὰ δεδομένα σημεῖα Α καὶ Β ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι νὰ σχηματίζωσι μὲ τὴν ΠΡ γωνίας ἴσας. (σχ. 48.)

Περιπλέον τὸ διάστημα ΑΓ+ΓΒ τοῦ σημείου τούτου Β ἀπὸ τῶν δεδομένων Α καὶ Β εἶναι τὸ ἐλάχιστον ὅλων τῶν διαστημάτων ΑΔ+ΔΒ παντὸς ἄλλου σημείου Δ, Ε. κ. τ. λ.

Ζήτημα β'.—Δεδομένων τριῶν σημείων Α, Β, Γ, ἐξ ἑνὸς τούτων ἐξ ὑποθέσεως Α νὰ ἀγάγωμεν εὐθεῖαν, ὥστε ἐπ' αὐτῆς ἀγόμεναι κάθετοι ἐκ τῶν ἄλλων σημείων Β καὶ Γ νὰ ἦναι ἴσαι; (σχ. 49).

Ζήτημα γ'. — Δεδομένων δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἑνὸς σημείου Ε ἢ Ε' νὰ ἀγάγωμεν ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου μίαν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετὰ τῶν δύο δεδομένων γωνίας ἴσας. (σχ. 50).

Ζήτημα δ'. — Δεδομένων δύο σημείων Α καὶ Β ἐκτὸς τινὸς εὐθείας ΓΔ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας σημεῖόν τι Ε ἀπέχον ἐπίσης τῶν δύο δεδομένων; (σχ. 51).

Ζήτημα ε'. — Δεδομένης τινὸς περιφερείας καὶ δύο σημείων ἐκτὸς αὐτῆς Α καὶ Β νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖόν τι ἀπέχον ἐπίσης τῶν δεδομένων; (σχ. 52).

Πότε εὑρίσκονται δύο σημεῖα; πότε ἕν; καὶ πότε δὲν δίδεται λύσις τοῦ ζητήματος;

Ζήτημα ς'. — Δεδομένης μιᾶς περιφερείας μεταξὺ τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας ΒΑΓ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖόν τι ἀπέχον ἐπίσης τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΒ καὶ ΑΓ. (σχ. 53).

Πότε προσδιορίζεται ἓν σημεῖον, πότε δύο, καὶ πότε δὲν δίδεται λύσις τοῦ ζητήματος;

Ζήτημα ζ'. — Δεδομένων δύο περιφερειῶν ΕΟ καὶ ΗΠ καὶ μιᾶς εὐθείας ἐκτὸς αὐτῶν τῆς ΑΒ νὰ φέρωμεν παράλληλον αὐτῆς τέμνουσαν τοὺς δεδομένους κύκλους, ὥστε αἱ περιεχόμεναι χορδαὶ νὰ δίδωσιν ἄθροισμα ἴσον μὲ δεδομένην εὐθεῖαν ΝΞ. (σχ. 54).

Κατασκευή. — Ἄγομεν τὴν ΕΓ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, λαμβάνομεν ΓΔ$=\frac{1}{2}$ ΝΞ, ὑψόνομεν τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἄγομεν ἐκ τοῦ κέντρου Η τὴν ΗΖ παράλληλον τῆς ΑΒ, ἐκ τοῦ κέντρου Ζ καὶ δι' ἀκτῖνος ΗΠ περιγράφομεν περιφέρειαν·

ἐκ τοῦ σημείου Ι τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν ἄγομεν τὴν ΘΜ παράλληλον τῆς ΑΒ καὶ αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη. — Ἔχομεν τουτέστι ΘΙ+ΙΡ ἢ ΘΙ+ΛΜ=ΝΞ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡῚ ΤΩ͂Ν ἘΠΙΠΈΔΩΝ ΣΧΗΜΆΤΩΝ.

§ Ι'. *Περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων.*

Σχῆμα ἐπίπεδον ὀνομάζεται πᾶσα ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περικλεισμένη πανταχόθεν ὑπὸ γραμμῶν.

Τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ἢ εὐθύγραμμα ἢ καμπυλόγραμμα ἢ μικτόγραμμα κατὰ τὸ εἶδος τῶν διοριζουσῶν αὐτὰ ἐξωτερικῶν γραμμῶν εὐθειῶν ἢ καμπύλων ἢ εὐθειῶν ἅμα καὶ καμπύλων, τῶν ὁποίων τὸ σύνολον ἀποτελεῖ τὴν περίμετρον ἑκάστου σχήματος.

Τὰ ἐπίπεδα σχήματα εἶναι μὲν ἄπειρα τὸ πλῆθος κατὰ τὰς πολυτρόπους συζεύξεις τῶν γραμμῶν· δὲν δύνανται ὅμως ὅλα νὰ γίνωσιν ἄμεσον ὑποκείμενον τῆς Γεωμετρικῆς θεωρίας. Ἐκ πάντων δὲ τούτων σχήματα ὑποκείμενα εἰς τὴν ἄμεσον Γεωμετρικὴν ἔρευναν, ἢ σχήματα Γεωμετρικὰ καλούμενα εἶναι ἐκ μὲν τῶν εὐθυγράμμων τὰ διάφορα τρίγωνα, τὰ τετράπλευρα καὶ τὰ πολύγωνα. Ἐκ δὲ τῶν καμπυλογράμμων καὶ μικτογράμμων ὁ κύκλος μόνον καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ· ἀρχόμεθα δὲ πρῶτον ἀπὸ τῶν τριγώνων.

Εὐθύγραμμον τρίγωνον ὀνομάζεται σχῆμά τι ἐπίπεδον διοριζόμενον πανταχόθεν ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν ὡς ΑΒΓ. (σχ. 55)

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ καὶ ΒΓ ὀνομάζονται πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τὰ δὲ ἄκρα τῶν γωνιῶν του Α, Β, Γ λέγονται κορυφαὶ αὐτοῦ.

Μερικώτερον δὲ τὰ τρίγωνα διακρίνονται κατὰ μὲν τὰς πλευρὰς εἰς ἰσόπλευρα ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνά.

Ἰσόπλευρον τρίγωνον λέγεται τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ὡς ΑΒΓ. (σχ. 56)

Ἰσοσκελὲς δὲ τὸ ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας ΑΓ καὶ ΒΓ, τὴν δὲ τρίτην ΑΒ ἄνισον, ἥτις λέγεται βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς ΑΒΓ. (σχ. 57.)

Τὸ ἄκρον Γ ἀπέναντι τῆς βάσεως ὀνομάζεται εἰδικώτερον κορυφὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς.

Καὶ τέλος λέγεται σκαληνὸν τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους, ὡς ΑΒΓ. (σχ. 55).

Κατὰ δὲ τὰς γωνίας διακρίνονται πάλιν εἰς ὀρθογώνια ὀξυγώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

Ὀρθογώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ ἔχον μίαν γωνίαν ὀρθήν, ὡς ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς Α. (σχ. 58).

Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ ΒΓ λέγεται ὑποτείνουσα.

Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὡς ΑΒΓ. (σχ. 59).

Καὶ τέλος ὀξυγώνιον τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας. (σχ. 55, 56, 57).

Μετὰ τοὺς ὁρισμοὺς τούτους ἐρχόμεθα ἤδη εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

Θεώρημα Α΄.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην. (σχ. 60).

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν

ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α=Δ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Ἂς ἐπιτεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὥστε ἡ πλευρὰ ΔΕ, καθὸ ἴση νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΑΒ· τὰ σημεῖα λοιπὸν Δ καὶ Ε θέλουσι πέσει ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Α=Δ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΔΖ θέλει προχωρήσει κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΓ, καὶ τέλος ἐπειδὴ ΑΓ=ΔΖ, τὸ σημεῖον Ζ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ· ἄρα καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΕΖ, ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ μὲ τὴν ΒΓ, θέλει ἐφαρμόσει· καὶ ἐπομένως τὰ δύο τρίγωνα εἶναι κατ' ἐφαρμογὴν ἴσα.

Θεώρημα Β΄.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς δύο γωνίας ἴσας καὶ τὴν εἰς αὐτὰς προσκειμένην πλευρὰν ἴσην. (σχ. 60).

Ἔστωσαν εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ αἱ συνθῆκαι ΒΓ=ΕΖ, Β=Ε, καὶ Γ=Ζ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. — Ἂς ἐπιτεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ὥστε ἡ ΕΖ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ νὰ πέσωσιν ἐπὶ τῶν σημείων Β καὶ Γ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Β=Ε, ἕπεται ὅτι ἡ πλευρὰ ΔΕ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς ΒΑ. Παρομοίως ἐπειδὴ Ζ=Γ, ἡ ΖΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΑ καὶ τὸ σημεῖον Δ θέλει εὑρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς ΓΑ, ἄρα τὸ σημεῖον τοῦτο κοινὸν καὶ τῶν δύο εὐθειῶν ΒΑ καὶ ΓΑ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α τῆς κοινῆς τομῆς των, καὶ τὰ δύο τρίγωνα εἶναι κατ' ἐφαρμογὴν ἴσα.

Σχόλιον.—Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ προλαβόντος· τουτέστιν ὅταν ἔχωμεν Β=Ε, Γ=Ζ, καὶ ΒΓ=ΕΖ· πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ Α=Δ, ΑΒ=ΔΕ καὶ ΑΓ =ΔΖ.

Θεώρημα. Γ'.

Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευράς των μεταξύ των ἴσας, ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας, καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα. (σχ. 61).

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, καὶ ΒΓ=ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Ἂς μετατεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κάτωθεν τοῦ ΔΕΖ· ὥστε ἡ πλευρὰ ΑΒ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην αὐτῆς ΔΕ, τὸ δὲ τρίγωνον νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΔΕΗ. Ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η διὰ τῆς εὐθείας ΖΗ τεμνούσης τὴν κοινὴν πλευρὰν ΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Θ. Ἐπειδὴ ΒΓ=ΕΖ, καὶ ΒΓ=ΕΗ, ἄρα ΕΖ=ΕΗ, καὶ πάλιν ἐπειδὴ ΑΓ=ΔΖ καὶ ΑΓ=ΔΗ ἄρα ΔΖ=ΔΗ. ὅθεν ἕπεται, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΖΗ (§. έ. θεώρ. θ'.) καὶ ἡ γωνία ΖΕΔ=ΔΕΗ, παρομοίως δὲ καὶ ΖΔΕ=ΕΔΗ (§. έ. θεώρ. ή.), τουτέστι τὰ τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΔΕΗ εἶναι ἴσα. Ἔχομεν δὲ ΑΒΓ καὶ ΔΕΗ ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσα, ἄρα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι παρομοίως ἴσα.

Θεώρημα. Δ'.

Δύο τρίγωνα ὀρθογώνια εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἑτέραν τινὰ πλευρὰν ἴσας. (σχ. 62).

Ἔστωσαν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι ΒΓ=ΖΕ, καὶ ΓΑ=ΖΔ. λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ πρὸς συμπλήρωσιν τῶν συνθηκῶν τοῦ προλαβόντος θεωρήματος ἀπαιτεῖται νὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ἴσην, τουτέστι ΑΒ=ΔΕ. Ἔστω δὲ, εἰ δυνατὸν ΑΒ > ΔΕ· ὅθεν ἂς ληφθῇ τὸ μέρος ΑΗ=ΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Γ καὶ Η. Τὰ τρίγωνα ΑΓΗ καὶ ΔΖΕ ἔχοντα οὕτως ΑΗ=ΔΕ καὶ ΑΓ=ΔΖ καὶ ἔτι Α=Δ, ὡς ὀρθὰς, θέλουσιν εἶσθαι ἴσα. (§. ί. θεώρ. ά.) καὶ ἑπομένως ΓΗ=ΖΕ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΖΕ=ΓΒ. Ὅθεν ΓΗ=ΓΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Ἐπειδὴ ΓΒ καὶ ΓΗ εἶναι δύο πλάγιαι ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου ΑΓ· ἄρα αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἄνισοι, καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ὡς ἰσόπλευρα μεταξύ των, εἶναι ἴσα.

Θεώρημα Ε'.

Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ἦναι αἱ δύο πλευραὶ ἴσαι καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ἄνισος, πρέπει καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ νὰ ἦναι ἄνισος· ἐκείνου δὲ θέλει εἶσθαι μεγαλητέρα, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὴν μεγαλητέραν γωνίαν. (σχ. 63).

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α>Δ· λέγω, ὅτι καὶ ΒΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΕΖ.

Ἂς σχηματισθῇ ἡ γωνία ΓΑΗ ἴση τῇ γωνίᾳ Δ ἂς ληφθῇ ΑΗ=ΔΕ=ΑΒ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ τὸ σημεῖον Η μὲ τὸ σημεῖον Γ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΗΓ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Ἐπειδὴ ΑΗ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, καὶ ΗΑΓ=ΕΔΖ.

Δύνανται ἤδη νὰ ἀκολουθήσωσι τρεῖς περιστάσεις τὸ σημεῖον Η δυνατὸν νὰ πέσῃ ἢ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἢ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ἢ ἐντὸς αὐτοῦ.

Εἰς μὲν τὴν πρώτην περίστασιν εἶναι φανερὸν, ὅτι ἡ ΗΓ ὡς μέρος τῆς ὅλης ΒΓ εἶναι μικροτέρα ταύτης, καὶ ἑπομένως ΕΖ ἴση τῇ ΗΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΓ.

Εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίστασιν ἔχομεν ΗΙ+ΙΓ>ΗΓ καὶ ὁμοίως ΑΙ+ΙΒ>ΑΒ. προστιθεμένων δὲ τῶν ἀνισοτήτων τούτων μέλους πρὸς μέλος, συνάγομεν ΗΙ+ΙΓ+ΑΙ+ΒΙ>ΗΓ+ΑΒ καὶ δι' ἀναγωγῆς ΑΗ+ΒΓ>ΗΓ+ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=ΑΗ, ἀφαιρουμένων τῶν ἴσων, συνάγομεν ΒΓ>ΗΓ ἢ ΒΓ>ΕΖ.

Εἰς δὲ τὴν τριτην περίστασιν ἐπειδὴ ΑΒ+ΒΓ>ΑΗ+ΗΓ (§. έ. λῆμμα) καὶ ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=ΑΗ· ἕπεται ὅτι ΒΓ>ΗΓ, ἢ ΒΓ>ΕΖ. (σχ. 64).

Σχόλιον. — Ἀντιστρόφως ἂν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΔΕ, ΕΖ ἡ δὲ τρίτη ΒΓ μεγαλητέρα τῆς ΕΖ, πρέπει καὶ ἡ γωνία Α νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς Δ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α δὲν δύναται νὰ ἦναι οὔτε ἴση τῇ Δ· διότι τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως ΒΓ=ΕΖ. οὔτε μικροτέρα τῆς ἰδίας Δ. διότι τότε ἡ ΒΓ πρέπει νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς ΕΖ κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα· ἄρα ΒΑΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΕΔΖ.

Θεώρημα ΣΤ'.

Παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι. (σχ. 65).

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, λέγω ὅτι Β=Γ. Ἂς διαιρεθῇ ἡ βάσις ΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Α καὶ Δ διὰ τῆς ΑΔ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας, τουτέστιν τὴν ΑΔ κοινὴν, ΒΔ=ΔΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ ΑΒ=ΑΓ ἐκ τῆς συνθήκης τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ὅθεν τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (§. Ἰ θεώρ. γ'.) καὶ ἑπομένως ἡ γωνία Β εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Γ.

Πόρισμα ά. — Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἐξάγεται πρὸς τούτοις, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι κάθετος εἰς τὴν βάσιν καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἐπειδὴ ἔχομεν γωνίαν ΑΔΒ ἴσην τῇ ΑΔΓ καὶ γωνίαν ΒΑΔ ἴσην τῇ ΔΑΓ· ὥστε μία τῶν τριῶν ἰδιοτήτων τῆς εὐθείας ΑΔ χαρακτηρίζει καὶ τὰς ἄλλας δύο.

Πόρισμα 6'. — Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Θεώρημα Ζ'.

Ἀντιστρόφως ἂν δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ἦναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων πλευραὶ πρέπει νὰ ἦναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. (σχ. 66).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ἴση τῇ ΒΑΓ· λέγω ὅτι καὶ ΑΓ=ΒΓ. Ἐπειδὴ ἔστω, εἰ δυνατὸν, ΑΓ>ΒΓ. ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ μέρος τι ΑΔ ἴσον μὲ ΒΓ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Β καὶ Δ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΒ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινὴν, τὴν ΑΔ ἴσην τῇ ΒΓ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Β· πρέπει νὰ ἦναι ἴσα (§. Ί. θεώρ. ά.) τουτέστι τὸ μέρος ἴσον μὲ τὸ ὅλον, ὅπερ ἄτοπον. ὅθεν ΑΓ δὲν δύναται νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς ΒΓ.

Θεώρημα Η'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μεγαλητέρα γωνία εἶναι ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς, καὶ ἀντιστρόφως ἡ μεγαλητέρα πλευρὰ ὑποτείνει μεγαλητέραν γωνίαν. (σχ. 67.)

Ἔστω εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία ΓΑΒ μεγαλητέρα τῆς ΑΒΓ, λέγω ὅτι καὶ ΒΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓ· ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΓ ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΒΑΔ ἴση τῇ ΑΒΓ. Οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΔΒ κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχομεν ΑΔ=ΒΔ· τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ΑΓ<ΓΔ+ΑΔ, δι' ἀντικαταστάσεως τῆς ΑΔ λαμβάνομεν ΑΓ<ΓΔ+ΒΔ ἢ ΑΓ<ΒΓ· τουτέστι ΒΓ>ΑΓ.

Ἀντιστρόφως ἂν ΒΓ>ΑΓ, πρέπει ἡ γωνία ΒΑΓ νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς ΓΒΑ· διότι ἂν ΓΑΒ δὲν ἦναι μεγαλητέρα, πρέπει νὰ ἦναι ἢ ἴση, ἢ μικροτέρα τῆς ΓΒΑ. Καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίστασιν πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ ΑΓ=ΒΓ (§. ί. θεώρ. ς'.) Εἰς δὲ τὴν δευτέραν πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ ΒΓ< ΑΓ· ὥστε κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιστάσεις ἐναντιοῦται εἰς τὰς συνθήκας τοῦ θεωρήματος· ἄρα ΓΑΒ>ΓΒΑ.

Θεώρημα Θ'.

Παντὸς τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. (σχ. 68).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, λέγω ὅτι ΒΑΓ+ΑΓΒ+ΓΒΑ= 2. ὀρθ. Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΒ κατὰ τὴν ΒΔ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ παράλληλος τῆς ΑΓ· αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ κατὰ τὸ σημεῖον Β εἶναι ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς· τουτέστιν ΑΒΓ+ΓΒΕ+ΕΒΔ=2. ὀρθ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΕ, ἔχομεν διὰ τοῦτο ΑΓΒ=ΓΒΕ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ καὶ ΒΑΓ=ΕΒΔ ὡς ἐντὸς καὶ ἐκτός, (§. ς'. θεώρ. ή.) δι' ἀντικαταστάσεως ἄρα λαμβάνομεν ΑΒΓ+ΓΒΕ+ ΕΒΔ=ΑΒΓ+ΑΓΒ+ΒΑΓ=2. ὀρθ.

Πόρισμα ά. — Εὐθύγραμμον τρίγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ δύο ὀρθὰς γωνίας καὶ πολλῷ μᾶλλον δύο ἀμβλείας.

Πόρισμα. β'.—Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθήν· ὥστε ἀμοιβαίως ἡ μία εἶναι συμπλήρωμα τῆς ἑτέρας.

Πόρισμα. γ'.—Δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἢ τὰ ἀθροίσματα τῶν δύο γωνιῶν ἴσα, ἔχουσι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην. Ἐπειδὴ ἡ τρίτη ἑκατέρου εἶναι παραπλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων· τὰ δὲ παραπληρώματα ταῦτα ἀναγκαίως πρέπει νὰ ἦναι ἴσα.

Πόρισμα. δ'.—Ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο τρίτα τῆς ὀρθῆς, ἐπειδὴ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. έ.—Προεκβαλλομένης μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου π. χ. τῆς ΑΒ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΓΒΔ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι Α καὶ Γ. ἢ ΓΒΔ=Α +Γ. Ἐπειδὴ προσλαμβανομένης ἑκατέρωθεν τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΒΓ, παράγονται ἀθροίσματα δύο ὀρθαί.

§. ιά. *Προβλήματα τῆς κατασκευῆς τῶν τριγώνων.*

Πρόβλημα. ά.

Δεδομένης μιᾶς γωνίας Κ τινὸς τριγώνου καὶ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον. (σχ. 69).

Λύσις. — Ἐπὶ ἀπροσδιορίστου εὐθείας ἂς σχηματισθῇ κατὰ τὸ δοκοῦν σημεῖον ἡ γωνία ΓΑΒ ἴση τῇ δεδομένῃ Κ. (§. Θ'. πρόβ. έ.) ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἡ ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσαι μὲ τὰς δεδομένας ΑΒ καὶ ΓΔ· ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ δύο ἄκρα Β καὶ Γ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, περιέχον τὰς δεδομένας συνθήκας, εἶναι τὸ ζητούμενον. Διότι ἀποκλείει πᾶν ἄλλο διαφέρον τούτου. (§. Ί. θεώρ. ά).

Πρόβλημα β'.

Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν τινὸς τριγώνου καὶ τῆς εἰς αὐτὰς προσκειμένης πλευρᾶς ΑΒ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον. (σχ. 70).

Λύσις. — Ἐπὶ ἀπροσδιορίστου εὐθείας ἂς ληφθῇ ΑΒ ἴση τῇ δεδομένῃ καὶ εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β ἂς κατασκευασθῶσι γωνίαι ἴσαι μὲ τὰς δεδομένας Α καὶ Β· ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν ἕως τῆς συμπτώσεώς των εἰς Γ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. (§. Ί. θεώρ. β'.)

Πρόβλημα γ'.

Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν Α, Β, καὶ Γ τινὸς τριγώνου νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον. (σχ. 71).

Λύσις.—Ἐπὶ ἀπροσδιορίςου εὐθείας ἂς ληφθῇ τὸ μέρος ΑΒ ἴσον τῇ μιᾷ τῶν πλευρῶν Α. Καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς κέντρου καὶ δι' ἀκτῖνος ΑΓ ἴσης τῇ πλευρᾷ Β ἂς περιγραφθῇ τόξον, ὁμοίως ἐκ τοῦ σημείου Β ὡς κέντρου καὶ δι' ἀκτῖνος ἴσης τῇ τρίτῃ πλευρᾷ Γ ἂς περιγραφθῇ τόξον τέμνον τὸ πρῶτον κατὰ τὸ σημεῖον Γ· ἂς ἐπιζευχθῇ τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς τομῆς μὲ τὰ ἄκρα Α καὶ Β καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ ἔχει τὰς πλευρὰς ΑΒ=Α, ΑΓ=Β, καὶ ΒΓ=Γ· ἀποκλείεται δὲ πᾶν ἄλλο διάφορον τούτου. (§. Ί. θεώρ. γ').

Σχόλιον.—Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιλύεται ὁσάκις τὰ δύο τόξα τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον. Τοῦτο δὲ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ πάντοτε, διὰ νὰ ἦναι πραγματικαὶ αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ ἡ μὲν παριστᾷ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων, αἱ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων. (§. Ίί. θεώρ. κή.).

Πρόβλημα δ'.

Δεδομένης τῆς ὑποτεινούσης Α ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου καὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας τῆς Β, νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον. (σχ. 72).

Λύσις.—Ἐπὶ ἀπροσδιορίστου εὐθείας ἂς κατασκευασθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία Α (§. Θ'. πρόβ. ά). Ἂς ληφθῇ ΑΒ ἴση τῇ δεδομένῃ Β καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ὡς κέντρου καὶ δι' ἀκτῖνος ἴσης τῇ ὑποτεινούσῃ Α ἂς περιγραφθῇ τόξον τέμνον τὴν πλευρὰν ΑΓ κατὰ τὸ σημεῖον Γ· ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. (§. Ί. θεώρ. δ'.)

Σχόλιον. — Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀνεπίδεκτον λύσεως, ὅταν δὲν δοθῇ σημεῖον τομῆς· ἀλλὰ τότε ἡ ὑποτείνουσα Α εἶναι μικροτέρα τῆς Β καὶ ἑπομένως οὔτε ὀρθογώνιον τρίγωνον δύναται νὰ ὑπάρξῃ ὑπὸ τοιαύτην συνθήκην. (§ ί. θεώρ. ή.).

Πρόβλημα έ.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς Α προσκειμένης εἰς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν Γ καὶ τῆς ὑποτεινούσης αὐτὴν Β νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον (σχ. 73).

Λύσις. — Ἂς κατασκευασθῇ ὡς ἀνωτέρω ἡ ἀμβλεῖα γωνία Α ἴση τῇ δεδομένῃ Γ (§ θ'. πρόβ. έ.), ἂς ληφθῇ ΑΓ ἴση τῇ δεδομένῃ Α καὶ ἐκ κέντρου μὲν τοῦ Γ, δι' ἀκτῖνος δὲ ἴσης τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ Β ἂς περιγραφθῇ τόξον τέμνον τὴν ἀπροσδιόριστον πλευρὰν εἰς τὸ σημεῖον Β, ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Γ καὶ Β καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον ἀμβλυγώνιον, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχον τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος ἀποκλείει πᾶν ἄλλο διάφορον τούτου. Διότι τῆς ἀγομένης καθέτου ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ πιπτούσης κατὰ τὴν προεκβολὴν αὐτῆς, δὲν δύναται νὰ δοθῇ δεξιόθεν καὶ ἄλλη πλαγία ἴση τῇ δεδομένῃ Β, ἥτις εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ἀμβλυγωνίου τριγώνου (§ έ. θεώρ. θ'. πόρ. ά.). Ἡ δὲ ἴση μὲ αὐτὴν ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς καθέτου ὑποτείνει ὀξεῖαν γωνίαν.

Πρόβλημα στ'.

Δεδομένων τῶν πλευρῶν Α καὶ Β τριγώνου τινος καὶ τῆς ὀξείας γωνίας Κ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς Β νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον (σχ. 74).

Λύσις. — Γενομένης καὶ ἐνταῦθα τῆς αὐτῆς κατασκευῆς εἰς ΛΟ, ὥστε δηλ. ἡ γωνία Λ νὰ ἦναι ἴση τῇ δεδομένῃ Κ, καὶ λαμβανομένης τῆς ΑΔ ἴσης τῇ δεδομένῃ Α, παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι διὰ νὰ ὑπάρξῃ λύσις τοῦ προβλήματος πρέπει ἡ δευτέρα πλευρὰ Β νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΟ, καὶ δεύτερον, ἂν ἡ πλευρὰ Β ἦναι μεγαλητέρα τῆς Α, τότε λύεται τὸ πρόβλημα, κατασκευαζομένου τοῦ τριγώνου ΑΔΜ. Ἂν δὲ ἡ Β ὑποτεθῇ μικροτέρα τῆς Α, τότε προσδιορίζονται δύο σημεῖα τομῆς ἐπὶ τῆς ΑΟ τὸ Ε καὶ Ζ, καὶ ἑπομένως δύο τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΔΖ πληροῦντα ἀμφότερα τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος. Ὅθεν δίδονται δύο λύσεις.

Σχόλιον. — Ἰδοὺ διατί εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ παρόντος κεφαλαίου προσδιορίζομεν τὴν ἴσην γωνίαν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν.

Πρόβλημα ζ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν μίαν γωνίαν Κ, τὴν ἀπέναντι ταύτης πλευρὰν Α καὶ τὴν κάθετον Β ἀγομένην ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς δεδομένης γωνίας πρὸς τὴν ἀπέναντι ταύτης πλευράν (σχ. 75).

Λύσις.—Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἴσης τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ Α ἂς περιγραφθῇ τμῆμα κύκλου ἱκανὸν νὰ χωρήσῃ τὴν δεδομένην γωνίαν Κ (§. θ'. πρόβ. θ'.). Ἐπὶ δὲ τοῦ ἄκρου αὐτῆς Α ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἡ ΑΖ καὶ ἂς ληφθῇ ΑΣ ἴσον μὲ τὴν δεδομένην κάθετον ἐν τῷ τριγώνῳ. Ἐκ τοῦ ἄκρου Σ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΣΡ τέμνουσα την περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Π καὶ Ρ· λέγω ἤδη, ὅτι ἂν ἐπιζευχθῶσι τὰ ἄκρα Α καὶ Β μὲ ἓν τῶν σημείων τούτων Π ἢ Ρ, θέλει σχηματισθῇ τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΠΒ, ἢ ΑΡΒ.

Ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα ἴσα τρίγωνα ἔχουσι τὴν γωνίαν ΑΠΒ ἴσην τῇ δεδομένῃ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἔχουσι τὴν ἀπέναντι ταύτης πλευρὰν ΑΒ παρομοίως. Καὶ τέλος τὴν κάθετον ΠΜ ἢ ΡΛ ἀγομένην ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς δεδομένης γωνίας πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν, ἴσην τῇ δεδομένῃ Β. Ἐπειδὴ ΠΜ, ΡΛ, καὶ ΣΛ εἶναι ἴσαι (§. ϛ΄. θεώρ. κϐ΄.).

Σχόλιον. — Δὲν δίδεται λύσις τοῦ προβλήματος τούτου, ὅταν ἡ ἀγομένη παράλληλος δὲν δύναται νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν περιφέρειαν. Καὶ προσδιορίζεται τρίγωνον ἰσοσκελές, ὅταν ἐφάπτεται τῆς περιφερείας. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου.

§. ιϐ΄. *Ἰδιότητες τῶν τετραπλεύρων.*

Ἐν γένει τετράπλευρον εὐθύγραμμον ὀνομάζεται πᾶν σχῆμα περιοριζόμενον ὑπὸ τεσσάρων εὐθειῶν, αἵτινες λέγονται πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου· μεταξὺ δὲ τούτων διακρίνομεν μερικώτερον.

α΄. Τὸ τετράγωνον ἔχον τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας ὀρθάς (σχ. 76.).

β΄. Τὸ ὀρθογώνιον ἔχον μὲν τὰς γωνίας ὀρθάς, οὐχὶ δὲ καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἴσας. (σχ. 77).

γ΄. Τὸ παραλληλόγραμμον ἢ ῥόμβος, ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. (σχ. 78).

δ΄. Τὸ ῥομβοειδὲς ἔχον τὰς μὲν τέσσαρας πλευρὰς ἴσας οὐχὶ δὲ καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς. (σχ. 79).

ε΄. Τὸ τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς δύο μόνον ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. (σχ. 80).

Πᾶσα εὐθεῖα ἐπιζευγνύουσα τὰς κορυφὰς δύο ἀντικειμένων γωνιῶν τινὸς τετραπλεύρου ὀνομάζεται διαγώνιος ὡς ἡ ΑΓ ἢ ΒΔ.

Θεώρημα Ι.

Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. (σχ. 78).

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι ΑΒ=ΔΓ καὶ ΑΔ=ΒΓ καὶ παρομοίως Α=Γ καὶ Β=Δ. Ἀχθείσης τῆς διαγωνίου ΒΔ, σχηματίζονται οὕτω δύο τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ, ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινὴν τὴν γωνίαν ΑΒΔ ἴσην τῇ ΒΔΓ ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. (§. ς'. θεώρ. ή.) ἔτι δὲ καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΒ ἴσην τῇ ΔΒΓ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ· ὅθεν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. (§. Ι. θεώρ. β'.) ἕπεται ἄρα καὶ ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΓΔ, καὶ ΑΔ ἴση τῇ ΒΓ. Ἔτι δὲ ἡ γωνία Α ἴση τῇ ἀπέναντι αὐτῆς Γ, καὶ τέλος αἱ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου αἱ κατὰ τὸ Δ καὶ Β ὡς ἀθροίσματα ἴσων γωνιῶν εἶναι παρομοίως ἴσαι.

Θεώρημα ΙΑ'.

Ἀντιστρόφως ἂν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τινὸς τετραπλεύρου ἦναι ἴσαι, πρέπει νὰ ἦναι καὶ παράλληλοι, τὸ δὲ σχῆμα παραλληλόγραμμον. (σχ. 78).

Ἐπειδὴ ἐπιζευγνυμένης παρομοίως τῆς διαγωνίου ΒΔ, σχηματίζονται δύο τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας· οὕτως ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν δὲ τρίτην ΒΔ κοινήν. Ἐκ τούτου τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (§. Ι. θεώρ. γ'.) Ἕπεται ἄρα καὶ γωνία ΑΒΔ νὰ ἦναι ἴση τῇ ΒΔΓ καὶ παρομοίως ΑΔΒ ἴση τῇ ΔΒΓ καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς ἐπίσης ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι (§· ς'. θεώρ. ιέ.) καὶ τὸ σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον.

Θεώρημα ΙΒ'.

Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ τινὸς τετραπλεύρου ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ἄλλαι δύο εἶναι παρομοίως ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ δὲ σχῆμα παραλληλόγραμμον. (σχ. 78.)

Ἔστω ΑΒ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΓ· λέγω ὅτι καὶ ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΓ. Ἐπιζευχθείσης παρομοίως τῆς διαγωνίου ΒΔ, σχηματίζονται δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινὴν, τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΓΔ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν ΑΒΔ ἴσην τῇ ΒΔΓ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ· ὅθεν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· (§. Ί. θεώρ. ά.) ἄρα ΑΔ=ΒΓ, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἴση τῇ ΔΒΓ, ἕπεται ἄρα ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ. (§. ϛ'. θεώρ. ιέ).

Θεώρημα ΙΓ'.

Αἱ δύο δαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 81).

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ δύο διαγώνιοι, ΑΓ καὶ ΒΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Ο· λέγω, ὅτι ΑΟ=ΟΓ καὶ ΔΟ=ΟΒ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν γωνίαν ΑΟΔ ἴσην τῇ ΒΟΓ ὡς κατὰ κορυφὴν (§. γ'. θεώρ. δ'.) καὶ τὰς γωνίας ΑΔΟ=ΟΒΓ καὶ ΔΑΟ=ΟΓΒ, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ· ἔτι δὲ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΔ ἴσην τῇ ΒΓ. (§. ιβ'. θεώρ. ί.). Ἐκ τούτου συνάγομεν ἤδη καὶ ΑΟ=ΟΓ καὶ ΔΟ=ΟΒ, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Θεώρημα ΙΔ'.

Παντὸς ὀρθογωνίου αἱ δύο διαγώνιοι εἶναι ἴσαι (σχ. 77.).

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα

ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινὴν, τὴν ΑΒ=ΓΔ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων περιεχομένας γωνίας ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ ἴσας, ὡς ὀρθάς· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΑΓ=ΒΔ.

Θεώρημα ΙΕ'.

Αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ ῥομβοειδοῦς τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων κατ' ὀρθὰς γωνίας (σχ. 79.).

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΑΟΔ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τουτέστιν ΑΒ=ΑΔ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν ΑΟ κοινὴν καὶ τὴν ΔΟ=ΟΒ κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα ιγ'. ἕπεται ἄρα, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Ὅθεν καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἴση τῇ ΑΟΔ· καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΔ καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

§. ιγ'. *Ἰδιότητες τῶν πολυγώνων.*

Πολύγωνον ὀνομάζεται πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα, ἢ ἐπίπεδόν τι περιοριζόμενον πανταχόθεν ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι λέγονται πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, ὡς ΑΒΓΔΕ (σχ. 82.).

Ἐκ τῶν πολυγώνων ἀποκλείομεν τὰ ἔχοντα εἰσεχούσας γωνίας ὡς ΑΒΓΔΕ (σχ. 83.), τὰ ὁποῖα διὰ τὸ πολυειδὲς τοῦ σχηματισμοῦ των δὲν γίνονται ὑποκείμενα ἀμέσου γεωμετρικῆς θεωρίας.

Ὀνομάζεται περίμετρος πολυγώνου τὸ σύνολον τῶν πλευρῶν του, ἢ ἅπασα ἡ περιορίζουσα τὸ σχῆμα κεκλασμένη γραμμὴ, καὶ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου τὰ ἄκρα τῶν γωνιῶν του.

Τὰ γεωμετρικὰ πολύγωνα, ἢ τὰ ἔχοντα ἐξεχούσας γωνίας χαρακτηρίζονται ἐκ τούτου, ὅτι ἂν ἀχθῇ ὁπωσδήποτέ τις εὐθεῖα, δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου, εἰμὴ κατὰ δύο σημεῖα.

Καλεῖται διαγώνιος τοῦ πολυγώνου πᾶσα εὐθεῖα ἐπιζευγνύουσα τὰς κορυφὰς δύο ἀντικειμένων γωνιῶν ὡς ἡ ΑΓ καὶ ΑΔ. (σχ. 82.)

Τὸ πολύγωνον λέγεται πεντάγωνον, ἑξάγωνον κτλ. κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν γωνιῶν, ἴσον ὄντα μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολυγώνου καὶ τὰ τρίγωνα καὶ τὰ τετράπλευρα συναριθμοῦνται μὲ τὰ πολύγωνα.

Τὸ πολύγωνον λέγεται κανονικὸν, ὅταν ἔχῃ ὅλας τὰς γωνίας καὶ ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας. Οὕτω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ πολύγωνα. Παρομοίως ἔχομεν κανονικὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα κτλ.

Πᾶν πολύγωνον μὴ ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας εἴτε ὅλας, εἴτε μέρος αὐτῶν λέγεται ἀκανόνιστον.

Τὸ πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν ἅπασαι αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἡ δὲ περιφέρεια λέγεται τότε περιγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον. (σχ. 84.)

Τ' ἀνάπαλιν τὸ πολύγωνον λέγεται περιγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν ἅπασαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτωνται τῆς περιφερείας· τότε δὲ ἡ περιφέρεια εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον. (σχ. 87.)

Μετὰ τοὺς ὁρισμοὺς τούτους ἀναπτύσσομεν ἤδη τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

Λῆμμα.

Πᾶν πολύγωνον ἀναλύεται διὰ τῶν διαγωνίων εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του μεῖον δύο. (σχ. 82.)

Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ· ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ Α· ἂς ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ. Διὰ τῶν διαγωνίων τούτων τὸ πολύγωνον ἀναλύεται εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, κ. τ. λ. ὅσος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν μεῖον δύο. Ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν διαγωνίους ἀπὸ τῆς κοινῆς ἀρχῆς Α εἰς τὰς δύο προσκειμένας αὐτῆς γωνίας· τοῦτο δὲ ἀκολουθεῖ καὶ διὰ πᾶν ἄλλο πολύγωνον.

Θεώρημα ΙΣΤ'.

Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐντὸς γωνιῶν παντὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ δὶς τοσαύτας ὀρθὰς, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του μεῖον δύο. (σχ. 82.)

Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, τὸ ὁποῖον ἂς ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ, κ. τ. λ. εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων συμπληροῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο ὀρθὰς (§. ιά. θεώρ. θ'.)· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν τριγώνων, ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ δὶς τόσας ὀρθὰς, ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα καὶ κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου μεῖον δύο.

Σχόλιον. — Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς ἐπὶ $4-2$ ἢ μὲ $2\times(4-2)$ τουτέστι μὲ 4 ὀρθάς· ἂν δὲ ἦναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, τότε ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή. Τὸ τοῦ πενταγώνου ἰσοῦται μὲ 2 ἐπὶ $5-2$· ἤτοι μὲ 6 ὀρθάς. Ὅθεν ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ἰσοῦται μὲ $\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς· καὶ ἐν γένει ἔστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου $2\times(\nu-2)$.

Θεώρημα ΙΖ'.

Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ εἰς περιφέρειαν κύκλου. (σχ. 84.)

Ἔστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ· ἂς τμηθῶσιν αἱ προσεχεῖς πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΓ κατὰ τὸ μέσον Σ καὶ Ι, καὶ ἂς ὑψωθῶσιν εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα αἱ κάθετοι ΣΟ καὶ ΙΟ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ σημεῖον Ο (§. ή. θεώρ. κή.)· λέγω, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου τούτου ὡς κέντρου καὶ δι' ἀκτῖνος ἴσης μὲ μίαν τῶν ἴσων πλαγίων ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ περιγράφεται περιφέρεια, ἡ ὁποία θέλει διέλθει καὶ διὰ τῶν ἑξῆς κορυφῶν Δ, Ε, κ. τ. λ. τοῦ πολυγώνου· διότι περιστρεφομένου τοῦ τετραπλεύρου ΟΙΓΔ περὶ τὴν ΟΙ, ἡ πλευρὰ ΙΓ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΙΒ, ἐπειδὴ γωνία ΟΙΓ=ΟΙΒ ὡς ὀρθαί· τὸ δὲ σημεῖον Γ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Β, ἐπειδὴ ΙΓ=ΙΒ ἐκ τῆς κατασκευῆς· καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου Β καὶ Γ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ ΓΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ, καὶ τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α· διότι ἔχομεν ΑΒ=ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΔ ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα Ο καὶ Α μὲ τὴν ΟΑ θέλει συμπέσει μὲ αὐτήν, καὶ ἑπομένως ΟΑ=ΟΔ· ὅθεν ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν σημεῖον Α, Β καὶ Γ διέρχεται παρομοίως καὶ διὰ τοῦ Δ. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῶν σημείων Ε, Ζ, κ. τ. λ. ὅθεν τὸ δεδομένον πολύγωνον ΑΒΓΔ..... κ. τ. λ· ἐγγράφεται εἰς τὴν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας ἀκτὶς εἶναι ΟΑ.

Δεύτερον ἐκ τοῦ σημείου Ο κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΣ, ΟΙ, ΟΚ, ΟΛ, κ. τ. λ. εἰς ὅλας τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου· λέγω, ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσαι, θεωρούμεναι ἤδη ὡς πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τέμνονται διὰ τῶν καθέτων εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑπομένως τὰ ἡμίση τούτων εἶναι ἴσα· ὅθεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΙΓ, ΟΓΚ, ΟΚΔ, κ. τ. λ. ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας ὡς ἀκτῖνας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ΟΙ, ΟΚ, ΟΛ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι. Ὥστε ἐκ τοῦ σημείου Ο ὡς κέντρου καὶ δι' ἀκτῖνος μιᾶς τῶν καθέτων τούτων περιγράφεται περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν σημείων Ι, Κ, Λ, κ. τ. λ. ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων καὶ ἑπομένως εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον, ἢ τὸ πολύγωνον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

Σχόλιον.—Ἡ εὐθεῖα ΟΙ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου ὀνομάζεται ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου.

§. ιδ'. *Περὶ τῆς ἐγγραφῆς καὶ περιγραφῆς τῶν κανονικῶν πολυγώνων.*

Ἂν καὶ ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα δύνανται νὰ ἐγγραφθῶσι καὶ περιγραφθῶσιν εἰς τὸν κύκλον, δὲν ἔχομεν ὅμως πρὸς τοῦτο μέσα, ἢ τὴν Γεωμετρικὴν κατασκευὴν, εἰμὴ μόνον διὰ τὰ κανονικὰ τρίγωνα, τετράγωνα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα, δεκάγωνα, δεκαπεντάγωνα καὶ τὰ ἔχοντα διπλάσιον καὶ ἐπιδιπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν. Ἐκ τούτων ἡμεῖς θέλομεν δείξει πῶς ἐγγράφονται ἢ περιγράφονται μόνον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον, καὶ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον· ἔτι δὲ τὰ διπλασίου καὶ ἐπιδιπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν κατὰ τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ 2. περὶ δὲ τῶν λοιπῶν ὅρα τὴν Γεωμετρίαν Λεγένδρου Βιβλ. Δ'.

Πρόβλημα α'.

Νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς δεδομένον κύκλον, ἔτι δὲ τὰ ἐπιδιπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. (σχ. 85).

Λύσις.—Ἀφ' οὗ φέρωμεν τὰς δύο διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ καθέτους ἀμοιβαίως, ἐπιζευγνύομεν τὰ ἄκρα αὐτῶν διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· καὶ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον εἶναι τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον. Ἐπειδὴ αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ τοῦ τεταρτημορίου τῆς αὐτῆς περιφερείας, αἱ δὲ γωνίαι ὀρθαὶ, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ ἡμικύκλιον. (§. ζ'. θεώρ. κϛ'. πόρ. β'.)

Διὰ νὰ λάβωμεν ἤδη τὰ ἐγγεγραμμένα πολύγωνα ἐπιδιπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου καὶ κατὰ συνέπειαν τούτου τὰ ὑποτεινόμενα τόξα εἰς δύο ἴσα μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ· διὰ τῶν καθέτων ἀκτίνων ΟΕ, ΟΖ, κ. τ. λ. καὶ ἐπιζευγνύοντες τὰ ἄκρα σχηματίζομεν τὸ ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι κανονικὸν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν τὸ πολύγωνον 16, 32, 64, κ. τ. λ. πλευρῶν.

Πρόβλημα. β'.

Νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δεδομένον κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον, ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὰ ἐπιδιπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. (σχ. 86).

Ἔστω κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ΑΓ. Ἂς ἐγγραφθῇ χορδὴ ΑΒ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινόμενον τόξον ΑΠΒ εἶναι τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας. Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΓ καὶ ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον. Ὅθεν ἡ γωνία ΑΓΒ ἰσοῦται μὲ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς (§. ι.

θεώρ· θ'. πόρ. δ'.) ἡ μὲ $\frac{4}{6}$ τῆς ἰδίας· ταὐτὸν εἰπεῖν ἡ γωνία ΑΓΒ ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τεσσάρων ὀρθῶν. Ἀλλὰ περὶ τὸ κέντρον Γ κατασκευάζονται τέσσαρες ὀρθαὶ ἔχουσαι μέτρον ὅλην τὴν περιφέρειαν. Ἄρα ΑΓΒ οὖσα τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτῶν ἔχει μέτρον τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΓ ἐγγράφεται ἑξάκις ὡς χορδὴ εἰς τὴν ὅλην περιφέρειαν, τουτέστιν ἀπὸ Α ἕως Β, ἀπὸ Β ἕως Γ κ. τ. λ καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον κατὰ τὰ αὐτὰ ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ προλαβόντος προβλήματος.

Ἂν ἑνώσωμεν ἤδη ἐναλλὰξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν του, θέλομεν λάβει τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν δὲ τὰ ἐπιδιπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν πράττομεν ὡς ἀνωτέρω, διαιροῦμεν καὶ ὑποδιαιροῦμεν τὰ τόξα εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἐπιζευγνύομεν διὰ χορδῶν τὰ σημεῖα τῶν ὑποδιαιρέσεων καὶ οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνα ἐκ πλευρῶν 12, 24, 48, 96, 192· κ. τ. λ.

Πρόβλημα γ'.

Δεδομένου ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου νὰ περιγράψωμεν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ὅμοιον καὶ ὅλα τὰ διπλασίου καὶ ἐπιδιπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν (σχ. 87.).

Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ. κ. τ. λ. ἀριθμοῦ πλευρῶν ὁποιουδήποτε. Διὰ νὰ περιγράψωμεν ὅμοιον, διαιροῦμεν τὰς πλευρὰς καὶ τὰ ὑποτεινόμενα τόξα εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ καθέτων ἀκτίνων, ἐπὶ τὰ ἄκρα τῶν ὁποίων ὑψόνομεν καθέτους, αἱ ὁποῖαι θέλουσιν εἶσθαι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας, καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον περιγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν, τουτέστιν ἔχει ὅλας τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας. Ἐπιζευχθείσης τῆς ΟΛ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΛΠ καὶ ΟΛΡ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΟΛ κοινὴν, καὶ τὰς πλευρὰς ΟΠ καὶ ΟΡ ἴσας ὡς ἀκτῖνας. Ὅθεν καὶ ἡ γωνία ΠΟΛ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΛΟΡ, καὶ ἑπομένως τὰ χωριζόμενα ὑπ' αὐτῶν τόξα εἶναι ἴσα. Ὅθεν ἡ ΟΛ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΠΒΡ. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι καὶ κορυφὴ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἄρα τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ αἱ κορυφαὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀκτίνων, εἶναι διὰ τοῦτο παράλληλοι (§. ϛ'. θεώρ. ιδ'.) ὅθεν αἱ γωνίαι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου (§. ζ. θεώρ. κέ). καὶ ἑπομένως ἴσαι μεταξύ των. Τέλος πάντων καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου εἶναι ἴσαι, τουτέστι ΛΜ=ΜΝ= κ. τ. λ. Διότι συγκρίνοντες τὰ δύο τρίγωνα ΟΛΜ καὶ ΟΜΝ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι πλευρὰ κοινὴ, ἡ γωνία ΖΟΑ=ΑΟΒ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τόξων ΑΖ καὶ ΑΒ καὶ τέλος ἐπειδὴ ΟΜΝ=ΟΑΖ καὶ ΟΜΛ=ΟΑΒ, ἔχομεν δὲ καὶ ΟΑΖ=ΟΑΒ, ἕπεται ὅτι ΟΜΝ=ΟΜΛ· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα ΟΜΝ καὶ ΟΜΛ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΜΝ=ΜΛ· τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ διὰ τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ πολυγώνου. Ἄρα τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ΛΜΝ.... κ. τ. λ. εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικόν.

Διὰ νὰ περιγράψωμεν ἤδη τὰ διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν πρέπει νὰ ἐγγράψωμεν πρῶτον ἄλλο τι τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν κατὰ τὰ προλαβόντα προβλήματα, ἔπειτα δὲ κατὰ τὴν ἐξηγηθεῖσαν κατασκευὴν νὰ περιγράψωμεν ὅμοιον καὶ τοῦτο θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον. Οὕτω δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα, ὅσα γνωρίζομεν καὶ νὰ ἐγγράψωμεν· ἀνάγονται δὲ εἰς τὰς δύο σειράς,

3, 6, 12, 24, 48, 96. . . . . κ. τ. λ.
καὶ 4, 8, 16, 32, 64, 128 . . . . κ. τ. λ.

αἱ ὁποῖαι ἐμφαίνουσι τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν των.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

§. ιέ. *Περὶ ἀναλόγων γραμμῶν.*

Ἀφ' οὗ εἰς τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια ἐξετάσαμεν τὰς σχέσεις τῶν γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς πρώτας ἰδιότητας τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐξηγοῦμεν ἤδη τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἀρχῶν τούτων εἰς τὴν καταμέτρησιν, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ τελικὸς σκοπὸς τῆς Γεωμετρίας. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ μέρος τοῦτο θέλομεν κάμει συχνὴν χρῆσιν τῶν ἀναλογιῶν, ὑπενθυμίζομεν τὸν ἀναγνώστην ὅλας τὰς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἐξηγουμένας ἀρχὰς αὐτῶν, τὰς ὁποίας θέλομεν μεταχειρισθῆ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἑξῆς θεωρημάτων καὶ τὴν λύσιν πολλῶν προβλημάτων.

Ἂν φαίνεται ἴσως παράδοξον κατὰ πρῶτον πῶς τέσσαρες γραμμαὶ δύνανται νὰ καθέξωσι τοὺς τέσσαρας ὅρους τῆς ἀναλογίας, πῶς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, καὶ ὅλαι αἱ λοιπαὶ ἐκφράσεις, τὰς ὁποίας ἐφαρμόζομεν καὶ εἰς τὰς γραμμὰς ὁμοίως· δυνάμεθα πρὸς τὸ παρὸν νὰ λάβωμεν καθαρωτέραν ἰδέαν αὐτῶν, ἂν κατὰ τοὺς ἐξηγηθέντας κανόνας εἰς τὸν §. 6΄. ἀντικαταστήσωμεν τὰς γραμμὰς ταύτας δι' ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουσι τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεώς των πρὸς κοινόν τι μέτρον καὶ ἐφαρμόσωμεν μετὰ ταῦτα ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων τὰς κατὰ τὴν περίστασιν ἀπαιτουμένας πράξεις ἐπὶ τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας· θέλομεν ἰδεῖ ὅμως εἰς τὰ ἑξῆς θεωρήματα, ὅτι ἡ ἀναλογικὴ σύγκρισις εὑρίσκεται συνδεδεμένη εἰς τὰς γραμμὰς διὰ σχέσεων πρὸς ἀλλήλας, καὶ ὅτι ἡ Γεωμετρία ἀναχωροῦσα ἐκ τῶν σχέσεων τούτων ἔχει ἴδια καὶ ἀσφαλέστερα μέσα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὅλων αὐτῶν τῶν πράξεων. Μάλιστα διὰ τῆς Γεωμετρικῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἀκριβέστατα ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα δι' ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ πολλάκις λαμβάνομεν μόνον κατὰ προσέγγισιν.

Μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν ἔκθεσιν τῶν ἑξῆς προτάσεων.

Λῆμμα.

Ἂν μία τῶν πλευρῶν τινος τριγώνου διαιρεθῇ εἰς δύο ἢ περισσότερα μέρη ἴσα καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς μίαν τῶν ἄλλων δύο, θέλει διαιρεθῇ διὰ τῶν παραλλήλων τούτων καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ εἰς μέρη ἴσα μεταξύ των. (σχ. 88.)

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω ΑΔ=ΔΒ καὶ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι θέλομεν ἔχει καὶ ΑΕ=ΕΓ. Ἐκ τῶν σημείων Δ, Α, Ε, ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΔΖ, ΑΘ, ΕΗ ἐπὶ τῆς ΒΓ. Κατὰ πρῶτον τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΟ καὶ ΔΒΖ εἶναι ἴσα· ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην ΑΔ=ΔΒ καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΟ ἴσην τῇ ΔΒΖ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΔΕ καὶ ΒΓ· ὅθεν ἕπεται ΑΟ=ΔΖ. Ἀλλὰ ΔΖ=ΟΘ=ΕΗ, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΔΕ καὶ ΒΓ, ἄρα ΑΟ=ΕΗ· τούτου τεθέντος, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΕ καὶ ΕΗΓ ἔχοντα παρομοίως τὴν γωνίαν ΔΕΟ=ΕΓΗ ὡς ἐντὸς καὶ ἐκτὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος καὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην εἶναι ἴσα, ὅθεν ΑΕ=ΕΓ τουτέςιν ἡ ΑΓ τέμνεται εἰς δύο ἴσα μέρη· παρομοίως ἀποδεικνύομεν τὴν ἰσότητα καὶ τῶν ἄλλων μερῶν, ἂν λάβωμεν περισσότερα σημεῖα διαιρέσεως τῆς ΑΒ ἐκ τῶν ὁποίων ἄγομεν τὰς παραλλήλους· ἄρα κ. τ. λ.

Θεώρημα Α'.

Ἡ ἀγομένη εὐθεῖα παραλλήλως πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τέμνει τὰς ἄλλας δύο εἰς μέρη ἀνάλογα (89).

Ἔστω ἡ ΔΕ παράλληλος τῆς ΒΓ, λέγω ὅτι ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ. ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον συμμετρικὸν τὸν λόγον τῶν δύο γραμμῶν ΑΔ καὶ ΔΒ π. χ. ὡς 7:5. ὅθεν ἂς διαιρεθῆ ἡ ΑΒ εἰς 12 ἴσα μέρη, 7 τῶν ὁποίων ἀποτελοῦσι την ΑΔ καὶ 5 τὴν ΔΒ, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῆς ΒΓ, μία τῶν ὁποίων θέλει εἶσθαι καὶ ἡ ΔΕ. Τούτου τεθέντος, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ θέλει διαιρεθῆ εἰς 12 μέρη ἴσα, ἐκ τῶν ὁποίων ἑπτὰ ἀποτελοῦσι τὴν ΑΕ καὶ πέντε τὴν ΕΓ· ὅθεν ἔχομεν τὰς ἀναλογίας, ΑΔ: ΔΒ: 7: 5 καὶ ΑΕ : ΕΓ : : 7 : 5· ἐκ τῶν ὁποίων συνάγομεν ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι τὰ μέρη ΑΔ καὶ ΔΒ εἶναι εἰς λόγον ἔκμετρον, λέγομεν παρομοίως, ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ τὰ μέρη ΑΕ καὶ ΕΓ. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι διαιρεθείσης τῆς ΑΔ εἰς μέρη ἐλάχιστα ἐξ ὑποθέσεως χιλιοστημόρια, εὑρίσκομεν τὸ χιλιοστημόριον τοῦτο ἐμπεριλαμβανόμενον πολλάκις εἰς τὴν ΑΔ ἐξ ὑποθέσεως 957 πλέον τινὸς ὑπολοίπου μικροτέρου τοῦ $\frac{1}{1000}$· ὥστε ὁ λόγος τῶν γραμμῶν ΑΔ καὶ ΔΒ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{957}{1000}$ καὶ $\frac{958}{1000}$ μεῖον $\frac{1}{1000}$. ἀγομένων ἤδη τῶν παραλλήλων τῆς ΒΓ ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς διαιρέσεως τῆς

ΑΒ, πρέπει καὶ ἡ γραμμὴ ΑΓ νὰ διαιρεθῇ ἐπίσης εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν πλέον τινος ὑπολοίπου μικροτέρου τοῦ $\frac{1}{1000}$· ὥστε ἔχομεν παρομοίως τὸν λόγον τῶν γραμμῶν ΑΕ καὶ ΕΓ μεταξὺ $\frac{957}{1000}$ καὶ $\frac{958}{1000}$. Ὅθεν συμπεραίνομεν, ἂν ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῶν γραμμῶν ΑΔ καὶ ΔΒ καὶ ὁμοίως ὁ τῶν ΑΕ καὶ ΕΓ ἐκφράζεται μεῖον $\frac{1}{1000}$, ἢ μικροτέρου ἔτι ὁρίου κατὰ τὴν εἰς περισσότερα μέρη διαίρεσιν τῆς ΑΔ, πολλῷ πλέον πρὸς ἀλλήλους οἱ λόγοι οὗτοι θέλουσι διαφέρει κατὰ μᾶλλον ἀνυπολόγιστον διαφοράν. Ἄρα οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ.

Πόρισμα. ά. — Κατὰ τὰς ἀρχὰς τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν παρομοίως ΑΔ + ΔΒ : ΑΔ : : ΑΕ + ΕΓ : ΑΕ, ἢ ΑΒ : ΑΔ : : ΑΓ : ΑΕ· τουτέστιν αἱ ὅλαι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν τμημάτων.

Πόρισμα. 6'. — Ἀγομένων τῶν παραλλήλων ΔΕ, ΖΗ, ΘΙ κ. τ. λ. (σχ. 90.) συνάγομεν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὴν σειρὰν ἴσων λόγων ΑΔ : ΑΕ : : ΔΖ : ΕΗ : : ΖΘ : ΗΙ : : ΘΒ : ΙΓ, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν εὐκόλως κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα. Οὕτως ἐκ τῆς ἀναλογίας ΑΔ : ΑΕ : : ΔΖ : ΕΗ συνάγομεν κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα ΑΖ : ΑΗ : : ΔΖ : ΕΗ : : ΑΔ : ΑΕ. ἀλλὰ ΑΖ : ΑΗ : : ΖΘ : ΗΙ· ἄρα ΑΔ : ΑΕ : : ΔΖ : ΕΗ : : ΖΘ : ΗΓ καὶ παρομοίως καὶ διὰ τὰ ἄλλα μέρη.

Θεώρημα Β'.

Ἀντιστρόφως ὅταν τὰ μέρη δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι εἰς τὴν ἀναλογίαν ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἐπιζευγνύουσα τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως θέλει εἶσθαι παράλληλος τῆς πλευρᾶς ΒΓ. (σχ. 91.)

Ἐπειδὴ ἔστω εἰ δυνατὸν ἄλλη τις παράλληλος τῆς ΒΓ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἡ ΔΟ· κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα ἔχομεν ΑΔ : ΔΒ : : ΑΟ : ΟΓ, ἀλλὰ καὶ ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ, συνάγεται ἄρα ἡ ἀναλογία ΑΕ : ΕΓ : : ΑΟ : ΟΓ· καὶ ἐπειδὴ ΑΕ > ΑΟ· πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ ΕΓ > ΟΓ· τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Παρομοίως ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὅτι ἡ παράλληλος αὕτη δὲν δύναται νὰ ὑποτεθῇ οὔτε μεταξὺ τῶν σημείων Ε καὶ Γ ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΑΟ· ἄρα εἶναι ἡ ΔΕ.

Σχόλιον. — Τὰ δύο ταῦτα θεωρήματα διὰ τῆς ἀμοιβαιότητός των ἐξηγοῦσιν ἀρκούντως τὴν σχέσιν τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ ἀναλογικὸν μέγεθος τῶν γραμμῶν. Προχωροῦντες θέλομεν λάβει ἀφορμὴν νὰ γνωρίσωμεν καθαρώτερον ἔτι τὸν σύνδεσμον τοῦτον τῆς ἀναλογίας καὶ τῶν παραλλήλων. Ἐν τοσούτῳ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν θεωρημάτων τούτων ἔχομεν τὴν γεωμετρικὴν λύσιν τῶν ἑξῆς προβλημάτων, ὡς ἕπεται.

Πρόβλημα. Α'.

Δεδομένων τῶν τριῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ· νὰ εὕρωμεν τετάρτην ἀνάλογον. (σχ. 92).

Λύσις. — Ἐπὶ τῶν ἀπροσδιορίστων πλευρῶν ΑΗ καὶ ΑΘ τινὸς γωνίας ἂς ληφθῶσι τὰ διαστήματα ΑΒ ἴσον τῇ δεδομένῃ Α, ΑΓ ἴσον τῇ Β καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ διὰ τῆς ΒΓ, ὁμοίως ἐπὶ τῆς πρώτης ΑΗ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση τῇ δεδομένῃ Γ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΔΧ· οὕτως ΑΧ θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος· διότι ἔχομεν ΑΒ : ΑΓ : : ΑΔ : ΑΧ, ἢ Α : Β : : Γ : Χ.

Σχόλιον. — Ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ ἀριθμητικῶς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τῆς ἐκτιμήσεως τῶν γραμμῶν εἰς ἀριθμούς. Οὕτως ἔστω Α=8, 53, Β=6, 3, καὶ Γ=2, 4· ἡ ἀναλογία Α : Β : : Γ : Χ· τρέπεται εἰς 8, 53 : 6, 3 : : 2, 4 : Χ, ἐξ ἧς συνάγεται Χ=1, 77 ὡς ἔγγιστα.

Σκεπτόμενοι ἤδη πρῶτον, ὅτι ἡ σύγκρισις τῶν γραμμῶν ὡς ἐκ τῆς ἀσυμμετρίας δὲν δίδει ἀκριβῆ ἐξαγόμενα εἰς ἀριθμοὺς, καὶ δεύτερον, ὅτι ὡς ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν γραμμῶν τούτων εἰς τὰς ἀναλογίας ἀποκαθίσταται ἔτι μᾶλλον μεγαλητέρα ἡ τοιαύτη διαφορὰ, ἐννοοῦμεν εὐκόλως πόσον εἶναι προτιμητέα ἡ Γεωμετρικὴ λύσις· καὶ ἰδοὺ διατὶ προοιμιασθέντες εἰς τὸν παρόντα παράγραφον εἴπομεν, ὅτι ἡ Γεωμετρία ἔχει ἴδια αὐτῆς μέσα, διὰ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν ἀκριβέστατα ἐξαγόμενα.

Πρόβλημα β΄.

Νὰ διαιρέσωμεν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Π. (σχ. 93.)

Λύσις. — Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς δεδομένης εὐθείας ἃς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος εὐθεῖα ΑΧ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἃς ληφθῶσι τὰ μέρη ΑΔ, ΔΕ, καὶ ΕΖ ἴσα μὲ τὰς δεδομένας εὐθείας Μ, Ν, Π· ἃς ἐπιζευχθῶσι τὰ ἄκρα Ζ καὶ Β, καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι ΔΗ καὶ ΕΘ, οὕτω τὰ μέρη ΑΗ, ΗΘ, καὶ ΘΒ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ εἶναι τὰ ζητούμενα· διότι κατὰ τὰς προεξηγηθείσας ἀρχὰς ἔχομεν ΑΔ : ΑΗ : : ΔΕ : ΗΘ : : ΕΖ : ΘΒ· καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν ἴσων Μ : ΑΗ : : Ν : ΗΘ : : Π : ΘΒ· ὅθεν κ. τ. λ.

Πόρισμα ά. — Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν εὐθεῖαν τινα εἰς ὁσαδήποτε μέρη ἴσα. Οὕτως διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἰδίαν ΑΒ εἰς 10 ἴσα μέρη λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΑΧ, μέρος τι ΑΙ κατὰ τὸ δοκοῦν, τὸ ὁποῖον φέρομεν ἐπ᾽ αὐτῆς δεκάκις καὶ ἐπιζευγνύοντες τὸ τελευταῖον ἄκρον Β φέρομεν τὰς παραλλήλους· οὕτω λαμβάνομεν τὰ δέκα ἴσα μέρη τῆς δεδομένης ΑΒ. (σχ. 93.)

Πόρισμα. β΄. — Ἐὰν ἐπρόκειτο νὰ διαιρέσωμεν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ ἀναλόγως δεδομένων ἀριθμῶν κλασμάτων, ἢ κλασματικῶν ἐξ ὑποθέσεως $3\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{8}$, $1\frac{3}{4}$ τρέπομεν αὐτοὺς κατὰ πρῶτον εἰς ὁμοειδεῖς καὶ ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς ἀριθμοὺς $\frac{28}{8}$, $\frac{21}{8}$ καὶ $\frac{14}{8}$ καὶ διαιροῦμεν μετὰ ταῦτα ἀναλόγως τῶν ἀριθμητῶν 28, 21, καὶ 14. Οὕτω λαμβάνομεν μῆκός τι κατὰ τὸ δοκοῦν, τὸ ὁποῖον φέρομεν ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΛΟ πολλάκις, τουτέστι ΛΣ=28, ΣΤ=21 καὶ ΤΥ=14· ἄγομεν τὰς παραλλήλους ὡς ἀνωτέρω καὶ οὕτω τὰ μέρη ΑΠ, ΠΡ καὶ ΡΒ εἶναι τὰ ζητούμενα· ἐπειδὴ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΛΣ : ΑΠ : : ΣΤ : ΠΡ : : ΤΥ : ΡΒ :, ἢ 28 : ΑΠ : : 21 : ΠΡ : : 14 : ΡΣ : (σχ. 94.).

§. ιστ'. *Περὶ τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων.*

Δύο εὐθύγραμμα σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ὀνομάζομεν δὲ ὁμολόγους πλευρὰς τὰς προσκειμένας εἰς τὰς ἴσας γωνίας κατὰ τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ ὅμοια σχήματα. Οὕτω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 95) εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχωμεν Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ καὶ ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΒΓ : ΕΖ. Παρομοίως λέγομεν καὶ διὰ τὰ πολύγωνα ὁσωνδήποτε πλευρῶν.

Ἕπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, ὅτι ὅλα τὰ αὐτοῦ εἴδους κανονικὰ σχήματα εἶναι ὅμοια, οἷον τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα, ὁμοίως τὰ τετράγωνα, τὰ κανονικὰ πεντάγωνα κ. τ. λ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ πλευραί των σχηματίζουσι ταυτόσημον πρόοδον ἴσων λόγων.

Λέγομεν παρομοίως τόξα ὅμοια, τομεῖς ὁμοίους, ἢ τμήματα ὅμοια, ὅταν εἰς διαφόρους κύκλους λαμβανόμενα, ἀναφέρωνται εἰς ἴσας εἰς τὸ κέντρον γωνίας· οὕτω τὰ τόξα ΑΜΒ καὶ ΔΝΕ, ἢ οἱ τομεῖς ΑΓΒ καὶ ΔΓΕ. κ. τ. λ. (σχ. 96.)

Σημ. — Ὁ ἀποδοθεὶς ὁρισμὸς τῆς ὁμοιότητος τῶν σχηματων πηγάζει ἀπὸ τὴν φύσιν αὐτὴν τῶν γραμμῶν τῆς ἐκτάσεως εἰς τὰ διάφορα σχήματα, αἱ ὁποῖαι χωρὶς τινος ἀλλοιώσεως τῶν ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένων γωνιῶν συστέλλονται, ἢ ἐκτείνονται ἀναλόγως πρὸς ἀλλήλας.

Θεώρημα Γ'.

Δύο τρίγωνα ἰσογώνια μεταξύ των ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοια (σχ. 97.).

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΕΓΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας ΑΒΓ=ΕΓΔ, ΑΓΒ=ΕΔΓ καὶ ΒΑΓ=ΓΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὁμόλογοι πλευραί των δίδουσι τὴν ἀναλογίαν· ΑΒ : ΓΕ : : ΒΓ : ΓΔ : : ΑΓ : ΕΔ.

Ἂς διαταχθῶσι τὰ δύο τρίγωνα, ὥστε αἱ δύο ὁμόλογοι πλευραὶ ΒΓ καὶ ΓΔ νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ ἕωσοῦ συμπέσωσιν εἴς τι σημεῖον Ζ. Τὸ τετράπλευρον ΑΓΕΖ θέλει εἶσθαι παραλληλόγραμμον, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΖΒ καὶ ΕΓ εἶναι παράλληλοι ἐξ αἰτίας τῶν ἐντὸς καὶ ἐκτὸς ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΕΓΔ καὶ παρομοίως αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΖΕ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΑΓΒ καὶ ΖΔΒ. Ἐκ τούτου ἔχομεν ΑΓ=ΖΕ καὶ ΑΖ=ΓΕ. (§. ιϐ'. θεώρ. ιά.) Ὅθεν εἰς τὸ τρίγωνον ΖΒΔ, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΖΔ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΑΖ : : ΒΓ : ΓΔ (§. ιέ. θεώρ. ά.) καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς ΑΖ συνάγομεν ΑΒ : ΓΕ : : ΒΓ : ΓΔ. Καὶ παρομοίως ἐπειδὴ ΒΖ παράλληλος τῆς ΓΕ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΒΓ : ΓΔ : : ΖΕ : ΕΔ ἢ ΒΓ : ΓΔ : : ΑΓ : ΕΔ· ὅθεν τὰ τρίγωνα ταῦτα, ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα. — Δύο τρίγωνα διὰ νὰ ἦναι ὅμοια ἀρκεῖ νὰ ἔχωσι μόνον δύο γωνίας ἴσας· καθότι ἡ τρίτη ἕπεται νὰ ἦναι ἴση, καὶ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσογώνια.

Σχόλιον. — Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν· διὰ τῆς παρατηρήσεως ταύτης σχηματίζομεν εὐκόλως τὴν ἀναλογίαν αὐτῶν.

Θεώρημα Δ'.

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ἰσογώνια καὶ ἑπομένως ὅμοια. (σχ. 98.)

Εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔστω ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΒΓ : ΕΖ, λέγω ὅτι καὶ Α=Δ, Β=Ε, καὶ Γ=Ζ. Εἰς τὸ σημεῖον Ε ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΖΕΗ=Β καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ ἡ ΕΖΗ=Γ, ἡ τρίτη γωνία Η θέλει εἶσθαι ἴση τῇ τρίτῃ Α· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΕΖΗ ὄντα ἰσογώνια δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΕΗ : : ΑΓ : ΖΗ : : ΒΓ : ΕΖ.

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ : ΔΕ : : ΓΑ : ΔΖ : : ΒΓ : ΕΖ· διὰ τὴν ταυτότητα τῶν ἡγουμένων συνάγομεν ΔΕ : ΕΗ : : ΔΖ : ΖΗ : : ΕΖ : ΕΖ· ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ΔΕ=ΕΗ καὶ ΔΖ=ΖΗ· τουτέστι τὰ τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΔΗΖ εἶναι ἰσόπλευρα καὶ ἑπομένως ἴσα· ὅθεν ἡ γωνία ΔΕΖ ἴση τῇ ΖΕΗ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Β καὶ ὁμοίως ἡ γωνία ΔΖΕ ἴση τῇ ΕΖΗ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Ζ· τουτέστι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἰσογώνια καὶ ἑπομένως ὅμοια.

Σχόλιον. — Παρατηροῦμεν ἐκ τῶν δύο τούτων θεωρημάτων, ὅτι διὰ τὰ τρίγωνα ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν εἶναι συνέπεια τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν καὶ τὸ ἀνάπαλιν· δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ ἄλλα σχήματα μεγαλητέρου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Οὕτω π. χ. δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ θλίβοντές το κατὰ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· καὶ τὸ ἀνάπαλιν δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν τὰς πλευράς, χωρὶς νὰ μεταβληθῶσιν αἱ γωνίαι, ὡς παῤῥησιάζεται εἰς τὸ σχῆμα διὰ τῆς ΕΖ παραλλήλου πρὸς τὴν ΓΔ, ὅπου αἱ γωνίαι εἰς Ε καὶ Ζ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΕΖ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας Γ καὶ Δ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (σχ. 99.)

Θεώρημα Ε'.

Δύο τρίγωνα ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων εἶναι ὅμοια. (σχ. 100.)

Ἔστω ἡ γωνία Α=Δ καὶ περιπλέον ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ, λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.

Ἂς ληφθῇ ΑΚ=ΔΕ καὶ ΑΛ=ΔΖ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. Οὕτω τὰ τρίγωνα ΑΚΛ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα (§. ί. θεώρ. ά.) καὶ ἔχομεν τὴν γωνίαν ΑΚΛ=Ε καὶ ΑΛΚ=Ζ· ἐξ ἑτέρου μέρους ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ἴσων συνάγομεν ΑΒ : ΑΚ : : ΑΓ : ΑΛ, ἕπεται ὅτι ἡ ΚΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ· ἐκ τούτου ἡ γωνία ΑΛΚ, ἢ ἡ ἴση αὐτῆς Ε εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Β καὶ ὁμοίως ἡ Γ ἴση τῇ ΑΛΚ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Γ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἰσογώνια καὶ ἑπομένως ὅμοια.

Θεώρημα ΣΤ'.

Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς πλευράς των παραλλήλους, ἢ καθέτους εἶναι ὅμοια. (σχ. 101.)

Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι· ὡς ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσαι καὶ παρομοίως αἱ γωνίαι ΒΓΑ καὶ ΕΖΔ (§ ζ'. θεώρ. κδ'.)· τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, ὅθεν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσογώνια καὶ ἐπομένως ὅμοια.

Ἔστωσαν δεύτερον τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 102.) ἔχοντα τὰς πλευράς των καθέτους πρὸς ἀλλήλας, τὴν ΔΕ ἐπὶ τῆς ΒΓ τὴν ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ τὴν ΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΒ· τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι παρομοίως ὅμοια. Ἐπειδὴ εἰς τὸ τετράπλευρον ΛΣΖΡ, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς (§ ιγ'. θεώρ. ις'.), ἐπειδὴ αἱ δύο γωνίαι εἰς Σ καὶ Ρ εἶναι ὀρθαί, ἕπεται ὅτι αἱ δύο ἄλλαι δίδουσι παρομοιως ἄθροισμα δύο ὀρθάς, τουτέςι ΣΛΡ+ΣΖΡ=2 ὀρθ. ἀλλὰ καὶ ΣΖΡ+ΡΖΕ=2 ὀρθ. ἄρα τὰ δύο ἀθροίσματα εἶναι ἴσα, καὶ ἀφαιρέσει τῆς κοινῆς ΣΖΡ μένει ΣΛΡ ἢ ἡ γωνία Λ ἴση τῇ ΕΖΡ τουτέστι τῇ Ζ. Παρομοίως ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΣΒΠΕ συνάγομεν Β+ΠΕΣ=2 ὀρθ. ἔχομεν δὲ καὶ ΠΕΣ+ΣΕΡ=2 ὀρθ. ἄρα τὰ ἀθροίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα, καὶ ἀφαιρέσει τοῦ κοινοῦ μέρους ΠΕΣ, μένει ἡ γωνία Β=ΣΕΡ. τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ διὰ τὴν τρίτην γωνίαν Γ=ΖΕΔ· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἰσογώνια καὶ ἐπομένως ὅμοια.

Σχόλιον. — Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι διὰ μὲν τὴν πρώτην περίστασιν αἱ παράλληλοι, διὰ δὲ τὴν δευτέραν αἱ κάθετοι. Δυνατὸν εἰς τὴν δευτέραν περίστασιν τὰ τρίγωνα νὰ ἦναι τὸ ἓν ἐκτὸς τοῦ ἄλλου ὡς ΑΒΓ καὶ ΜΝΞ· (σχ. 103.) ὅπου διὰ τὴν ἔλλειψιν τῶν τετραπλεύρων δὲν ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην κατασκευάζομεν διὰ παραλλήλων ὅμοιον αὐτοῦ ΔΕΖ καὶ συγκρίνοντες τὸ νέον τοῦτο μὲ τὸ ὅλον ΑΒΓ ἀποδεικνύομεν τὴν ὁμοιότητα τῶν δεδομένων ΑΒΓ καὶ ΜΝΞ.

Θεώρημα. Ζ'.

Ἡ ἀγομένη κάθετος ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ διαιρεῖ τὸ ὅλον τρίγωνον εἰς δύο ἄλλα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ὅμοια ἀλλήλοις καὶ ὅμοια τῷ ὅλῳ ΑΒΓ. (σχ. 104.)

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΒΔΑ ὀρθὰς, καὶ τὴν γωνίαν Β κοινὴν, ἔχουσι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην, τουτέστι ΒΑΔ=Γ· ὅθεν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσογώνια. Παρομοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ὀρθογώνια εἰς Α καὶ Δ ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν Γ κοινὴν, εἶναι ἰσογώνια καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια· ἐκ τούτου καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι μεταξύ των ὅμοια· ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς γωνίας ΒΔΑ=ΑΔΓ ὡς ὀρθάς, καὶ τὰς γωνίας ΒΑΔ=Γ καὶ ΔΑΓ=Β ὡς προαπεδείξαμεν.

Θεώρημα Η'.

Δύο ὅμοια πολύγωνα συντίθενται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων. (σχ. 105.)

Ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Ζ δύο ἴσων γωνιῶν ἂς ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΑΓ, ΖΙ, ΖΘ. τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΖΗΘ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην Β=Η καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ ἀναλόγους τῶν ΖΗ καὶ ΗΘ εἶναι ὅμοια. (§ ιϛ'. θεώρ. έ.) Ἐκ τούτου ἕπεται καὶ γωνία ΒΓΑ=ΗΘΖ· καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν γωνίαν ΒΓΔ=ΗΘΙ, ἀφαιρέσει τῶν ἴσων ΒΓΑ καὶ ΗΘΖ συνάγομεν τὴν γωνίαν ΑΓΔ=ΖΘΙ, ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΖΘΙ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΖΗΘ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΓ:ΖΘ:: ΒΓ:ΗΘ, καὶ ἐξ ἑτέρου μέρους ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΒΓ:ΗΘ::ΓΔ:ΘΙ, ἐκ τῶν δύο τούτων συνάγομεν ΑΓ:ΖΘ::ΓΔ:ΘΙ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΖΘΙ εἶναι ὅμοια. (§ ιϛ'. θεώρ. έ.) Ὡσαύτως ἀποδεικνύομεν τὴν ὁμοιότητα καὶ τῶν ἄλλων τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΖΙΚ·

κ. τ. λ. ὅθεν δύο ὅμοια πολύγωνα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Πόρισμα. — Ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἶναι ἐπίσης ἀληθής, τουτέστι δύο πολύγωνα, συγκείμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, εἶναι ὅμοια· διότι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων συνάγεται ἡ γωνία ΑΒΓ=ΖΗΘ, ΒΓΑ=ΗΘΖ καὶ ΑΓΔ=ΖΘΙ. κ. τ. λ. καὶ ἐκ τούτου ἡ γωνία ΒΓΔ=ΗΘΙ, ὡσαύτως ΓΔΕ=ΘΙΚ. κ. τ. λ. ἅμα δὲ ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν ΑΒ : ΖΗ : : ΒΓ : ΗΘ : : ΑΓ : ΖΘ : : ΓΔ : ΘΙ : : κ. τ. λ. ὅθεν τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον. — Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ὅλαι αἱ ἐξηγηθεῖσαι ἰδιότητες τῶν τριγώνων ἐμπεριλαμβάνονται συνεπτυγμένως καὶ εἰς τὰ πολύγωνα, ἀναλυόμενα εἰς ἀριθμόν τινα τριγώνων. Διὰ τοῦτο τὰ θεωρήματα τῆς ἰσότητος ἢ ὁμοιότητος τῶν τριγώνων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν των δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς αἱ στοιχειώδεις ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας καὶ εἶναι αἱ γονιμώτεραι προτάσεις εἰς τὴν ἐπίλυσιν σχεδὸν ὅλων τῶν προβλημάτων.

Θεώρημα Θ'.

Ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι ὅμοια· καὶ αἱ περίμετροι αὐτῶν εἶναι εἰς λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμμένων κύκλων. (σχ. 87.)

Ἔστωσαν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕΖ καὶ ΜΛΚΙΟΝ, ἐπειδὴ δι' ἑκάτερον τούτων τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ 8 ὀρθὰς αἱ δὲ γωνίαι εἶναι ἴσαι· ἔπεται ὅτι ἑκάστη ἰσοῦται μὲ $\frac{8}{6}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἑπομένως Α=Μ, Β=Λ. κ. τ. λ. διὰ τὴν ἰσότητα δὲ τῶν πλευρῶν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΜΛ : : ΒΓ : ΛΚ : : ΓΔ : ΚΙ : : ΔΕ : ΙΟ : : ΕΖ : ΟΝ : : ΖΑ : ΝΜ· ὥστε τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Καθόσον δὲ ἀφορᾷ τὴν ἀναλογίαν τῶν περιμέτρων, ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας ἔχομεν κατὰ πρῶτον ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + κ. τ. λ. : ΜΛ + ΛΚ + ΚΙ + κ. τ. λ. : : ΑΒ : ΜΛ τουτέστι περίμ. ΑΒΓΔΕΖ: περίμ: ΜΛΚΙΟΝ: : ΑΒ : ΜΛ· ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΜΟΛ καὶ ὁμοίως τῶν ΠΟΛ καὶ ΡΟΒ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΜΛ : : ΟΒ : ΟΛ : : ΟΠ : ΟΡ· ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία τρέπεται εἰς περίμ. ΑΒΓΔ . . : περίμ. ΜΛΚΙ . . . : : ΟΒ : ΟΛ : : ΟΠ : ΟΡ· τουτέστιν αἱ περίμετροι εἶναι εἰς λόγον τῶν ἀκτίνων.

§. ιζ'. *Συνέπειαι τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.*

Τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα ἀποδεικνύουσιν ἀρκούντως πόσον ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν εἶναι σχετικῶς συνδεδεμένη μὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα εἰς πολλὰς περιστάσεις νὰ ἀποδείξωμεν ἀνάλογα τοιαῦτα μεγέθη εὐθειῶν, τῶν ὁποίων τὴν χρῆσιν ἀπαντῶμεν συχνότατα εἰς τὴν καταμέτρησιν· ὅθεν τὰ ἑπόμενα θεωρήματα ἀφορῶντα τὴν ἀναλογίαν τῶν εὐθειῶν θεωρουμένων ὡς πλευρῶν τινος τριγώνου ἢ ὡς χορδῶν ἢ διατεμνουσῶν ἢ ἐφαπτομένων τινος κύκλου, καθὸ πορίζόμενα ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τὰ ἐπεγράψαμεν συνεπείας αὐτῆς.

Θεώρημα. Γ'.

Ἡ ἀγομένη κάθετος ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων αὐτῆς ΒΔ καὶ ΔΓ. Ἑκατέρα δὲ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὅλης ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος ΒΔ ἢ ΓΔ. (σχ. 104.)

Α'. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἀπεδείχθησαν ὅμοια. (§ ιϛ'. θεώρ, ζ'.) δίδουσι τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΒΔ καὶ ΑΔ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ΒΑΔ καὶ ΔΒΑ πρὸς τὰς ὁμολόγους ΑΔ καὶ ΔΓ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ΔΓΑ καὶ ΔΑΓ· ὅθεν ἔχομεν ΒΔ : ΑΔ : : ΑΔ : ΔΓ.

Β'. Παρομοίως ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν ΒΔ καὶ ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ πρὸς τὰς ὁμολόγους ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ὅθεν ἔχομεν ΒΔ : ΑΒ : : ΑΒ : ΒΓ. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ διὰ τὴν τρίτην ἀναλογίαν τοῦ θεωρήματος, κατὰ σύγκρισιν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν ΔΓ : ΑΓ : : ΑΓ : ΒΓ.

Θεώρημα ΙΑ'.

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α. (σχ. 104.)

Ἀγομένης τῆς καθέτου ΑΔ, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα συνάγομεν τὰς ἀναλογίας ΒΔ : ΑΒ : : ΑΒ : ΒΓ καὶ ΓΔ : ΑΓ : : ΑΓ : ΒΓ· ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν $\overline{\text{ΑΒ}}^2 = \text{ΒΔ} \times \text{ΒΓ}$ καὶ $\overline{\text{ΑΓ}}^2 = \text{ΔΓ} \times \text{ΒΓ}$· ὅθεν διὰ προσθέσεως ἔχομεν $\overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΑΓ}}^2 = \text{ΒΔ} \times \text{ΒΓ} + \text{ΓΔ} \times \text{ΒΓ} = \text{ΒΓ}(\text{ΒΔ} + \text{ΔΓ}) = \text{ΒΓ} \times \text{ΒΓ} = \overline{\text{ΒΓ}}^2$.

Σχόλιον. — Ἐπειδὴ τὸ θεώρημα τοῦτο παρουσιάζει τετράγωνα καὶ γινόμενα γραμμῶν, περὶ τῆς σημασίας τῶν ὁποίων γίνεται λόγος εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον, ὁ ἀναγνώστης ἂς ἐννοήσῃ πρὸς τὸ παρὸν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα, ὡς τὰ γινόμενα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἐξαγομένων ἀριθμῶν ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν γραμμῶν τούτων διά τινος γραμμικῆς μονάδος.

Θεώρημα ΙΒ'.

Ἂν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΗ, ΑΟ πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ, ὅλαι αὗται διαιροῦσι τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς εἰς μέρη ἀνάλογα. (σχ. 106.)

Ἐπειδὴ ΔΙ παράλληλος τῆς ΒΖ, τὰ τρίγωνα ΑΔΙ καὶ ΑΒΖ εἶναι ἰσογώνια, ὅθεν δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΒΖ : ΔΙ : : ΑΖ : ΑΙ· καὶ παρομοίως τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΖΗ καὶ ΑΙΚ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΖ : ΑΙ : : ΖΗ : ΙΚ· ὅθεν ἔχομεν καὶ ΒΖ : ΔΙ : : ΖΗ : ΙΚ· παρομοίως δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν πρόοδον καὶ τοὺς λόγους τῶν ἄλλων μερῶν ΗΘ καὶ ΚΛ. κ.τ.λ.

Σχόλιον. — Τὸ θεώρημα τοῦτο χορηγεῖ νέαν γεωμετρικὴν λύσιν τῆς διαιρέσεως τινὸς εὐθείας εἰς μέρη ἀνάλογα ἢ ἴσα. Εἰς τὴν δευτέραν περίστασιν ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΒΓ παραλλήλου πρὸς τὴν δεδομένην ΔΕ λαμβάνομεν κατὰ τὸ δοκοῦν μέρος τι ΒΖ, τὸ ὁποῖον φέρομεν ἐπ' αὐτῆς τοσάκις, ὅσος ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων μερῶν τῆς ΔΕ.

Θεώρημα ΙΓ'.

Ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἡ δίχα τέμνουσα τὴν γωνίαν ΒΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ εἰς δύο τμήματα ΒΔ καὶ ΔΓ ἀνάλογα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς τμηθείσης γωνίας. (σχ. 107.)

Ἐκ τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ παράλληλος τῇ ΑΔ ἑωσοῦ συμπέσῃ μὲ τὴν ΑΓ προεκβαλλομένην κατά τι σημεῖον Ε. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΓ : ΑΕ : : ΓΔ : ΔΒ. (§ ιέ. θεώρ. ά.) Ἀλλὰ ἡ γωνία ΑΒΕ=ΒΑΔ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ καὶ ΒΕΑ=ΔΑΓ ὡς ἐντὸς καὶ ἐκτὸς ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος, ἔχομεν δὲ ΒΑΔ=ΔΑΓ, συνάγομεν ἄρα καὶ ΑΒΕ=ΒΕΑ· ὅθεν τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχομεν ΑΕ=ΑΒ. Ἐκ τούτου δὲ ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία τρέπεται εἰς ΑΓ : ΑΒ : : ΓΔ : ΔΒ· τουτέστιν αἱ δύο πλευραὶ ἀνάλογοι τῶν τμημάτων.

Θεώρημα ΙΔ'.

Αἱ δύο διατέμνουσαι ΑΒ καὶ ΑΓ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἐκτὸς τῆς περιφερείας καὶ περατούμεναι εἰς τὸ κοῖλον τόξον εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ εἶναι εἰς ἀντίστροφον λόγον τῶν ἐκτὸς τμημάτων ΑΔ καὶ ΑΕ· τουτέστι δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΑΓ : : ΑΕ : ΑΔ. (σχ. 108.)

Ἡ ἀναλογία αὕτη λέγεται ἀντίστροφος, ἐπειδὴ ἡ πρώτη ΑΒ καὶ τὸ ἐκτὸς μέρος αὐτῆς ΑΔ κατέχουσι τὰ δύο ἄκρα, ἡ δὲ ἑτέρα ΑΓ καὶ τὸ ἐκτὸς μέρος ΑΕ κατέχουσι τὰ μέσα τῆς ἀναλογίας. Ἂς ἐπιζευχθῶσιν ἤδη τὰ σημεῖα Δ καὶ Γ καὶ ὁμοίως Β καὶ Ε διὰ τῶν εὐθειῶν ΔΓ καὶ ΒΕ· τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ ἔχοντα τὴν γωνίαν Α κοινὴν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἴσας ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΔΒΓΕ (§ ζ'. θεώρ. κς'.) εἶναι ὅμοια (§ ις'. θεώρ. γ'. πόρ.), καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΑΓ : : ΑΕ : ΑΔ, τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. — Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης συνάγεται ἡ ἰσότης ΑΒ×ΑΔ=ΑΓ×ΑΕ· τουτέστι τὰ γινόμενα τῶν τεσσάρων τούτων γραμμικῶν παραγόντων οὕτως ἀνὰ δύο εἶναι ἴσα.

Θεώρημα ΙΕ'.

Τὰ μέρη δύο χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων εἰς τὸν κύκλον εἶναι πρὸς ἄλληλα εἰς λόγον ἀντίστροφον καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΟ : ΓΟ : : ΔΟ : ΟΒ. (σχ. 109.)

Ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ὁμοίως Γ καὶ Δ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ· τὰ δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΓΟΒ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν γωνίαν ΓΟΒ=ΑΟΔ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ τὰς γωνίας ΒΓΟ=ΟΑΔ καὶ ΓΒΟ=ΟΔΑ ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὰ αὐτὰ τμήματα· ὅθεν δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΟ : ΓΟ : : ΟΔ : ΟΒ, τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. — Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας συνάγομεν ὡς καὶ προλαβόντως τὴν ἰσότητα ΑΟ×ΟΒ=ΓΟ×ΟΔ.

Θεώρημα ΙΣΤ'.

Ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο ἐκτὸς τῆς περιφερείας ἀχθῶσιν ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ καὶ ἡ διατέμνουσα ΟΓ, ἡ ἐφαπτομένη θέλει εἶσθαι μεση ἀνάλογος τῆς ὅλης διατεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τμήματος ΟΔ. (σχ. 110.)

Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΓ· τὰ δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα ΟΑΔ καὶ ΟΑΓ ἔχουσι τὴν γωνίαν Ο κοινὴν, τὴν ΟΑΔ=ΑΓΟ ὡς μετρουμένων καὶ τῶν δύο διὰ τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου ΑΔ, ἄρα καὶ ἡ τρίτη γωνία ΑΔΟ=ΟΑΓ καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΟΔ:ΟΑ::ΟΑ:ΟΓ, τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δεδομένων εὐθειῶν Α καὶ Β. (σχ. 110.)

Ἐπὶ ἀπροσδιορίστου εὐθείας ἂς ληφθῇ τὸ μέρος ΑΓ=Α καὶ ΓΒ=Β· ἐπὶ τῆς ὅλης ΑΒ ἂς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ κάθετος ΓΧ· αὕτη δὲ θέλει εἶσθαι ἡ μέση ἀνάλογος. Διότι ἐπιζευχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΑΧ καὶ ΒΧ, τὸ τρίγωνον ΑΧΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Χ, ἡ δὲ ΓΧ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ἀπὸ τῆς κορυφῆς Χ τῆς ὀρθῆς γωνίας· ὅθεν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΓ:ΓΧ::ΓΧ:ΓΒ. (§ ιζ'. θεώρ. ί.) καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ἴσων· Α:ΓΧ::ΓΧ:Β.

Σχόλιον. — Δυνάμεθα καὶ ἀριθμητικῶς νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ΓΧ, ἐκτιμῶντες τὰς δεδομένας εὐθείας Α καὶ Β εἰς ἀριθμούς· ἔστω δὲ Α=2, 3 καὶ Β=1, 45· ἐκ τούτου ἔχομεν 2, 3 : X : : X : 1, 45· ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν $X = \sqrt{3,335} = 1, 82$ ὡς ἔγγιστα ἑκατοστημορίου· βλέπομεν ὅμως, ὅτι ἡ Γεωμετρία προσδιορίζει ἀκριβέστατον ἐξαγόμενον, ἐν ᾧ ἡ Ἀριθμητικὴ μᾶς ἄγει εἰς ποσότητας ἐκμέτρους· τὸ πρόβλημα τοῦτο μαρτυρεῖ μάλιστα ὅ,τι εἴπομεν εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ παρόντος παραγράφου περὶ τῆς γεωμετρικῆς ἀκριβείας εἰς τὰ ἐξαγόμενα τῶν κατασκευῶν αὐτῆς.

§. ιη΄. *Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.*

Εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν διαφόρων γραμμῶν τῶν σχημάτων, ὅσα ἐθεωρήσαμεν μέχρι τοῦδε ὑπάρχουσι σχέσεις διάφοροι, ὡς ἐκ τῶν ὁποίων μία ἢ περισσότεραι τῶν γραμμῶν τούτων δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἀπόλυτον μέγεθος, ὅταν αἱ ἄλλαι, μετὰ τῶν ὁποίων αὗναι συνδέονται, ἔχωσιν ὡρισμένας τιμὰς ἢ μεγέθη. Οὕτω π. χ. ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ περιγεγραμμένου εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον κύκλου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. κ. τ. λ. Ἐκ τούτου γεννῶνται διάφορα ζητήματα, νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ἀριθμοὺς μίαν ἢ περισσοτέρας εὐθείας οὔσας εἰς σχέσιν πρὸς ἄλλας δεδομένας ἐπίσης εἰς ἀριθμούς· τὰ ἑξῆς ζητήματα ἀποδεικνύουσι ἀποχρώντως τὸν σκοπὸν τοῦ παρόντος παραγράφου.

Ζήτημα ά.

Δεδομένων εἰς ἀριθμοὺς τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, νὰ προσδιορισθῇ εἰς ἀριθμοὺς ἡ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ ὑποτεινούσης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας. (σχ. 104.)

Ἔστω $\mathrm{AB}=3$ καὶ $\mathrm{A\Gamma}=4$. Ἐπειδὴ $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2=\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2$, (§ ιζ΄. θεώρ. ιά.) δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ἀριθμῶν ἔχομεν $\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2=3^2+4^2=25$· ὅθεν καὶ $\mathrm{B\Gamma}=\sqrt{25}=5$. Ἐπειδὴ δὲ

$\mathrm{B\Gamma : AB :: AB : B\Delta}$· (§ ιζ'. θεώρ. Ι.) συνάγομεν τὴν εἰς ἀριθμοὺς ἀναλογίαν $5 : 3 :: 3 : \mathrm{B\Delta}$· ὅθεν $\mathrm{B\Delta} = \frac{9}{5}$· καὶ ἑπομένως $\mathrm{\Delta\Gamma} = \mathrm{B\Gamma} - \mathrm{B\Delta} = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$. Καὶ τέλος ἡ ἀναλογία $\mathrm{B\Delta : A\Delta :: A\Delta : \Delta\Gamma}$· (§ ιζ'. θεώρ. Ι.) τρέπεται εἰς $\frac{9}{5} : \mathrm{A\Delta} :: \mathrm{A\Delta} : \frac{16}{5}$· ὅθεν λαμβάνομεν $\mathrm{A\Delta} = \sqrt{\frac{9}{5} \times \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5} = 2\,\frac{2}{5}$.

Ζήτημα β'.

Νὰ εὕρωμεν εἰς ἀριθμοὺς τὴν περίμετρον ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἰς κύκλον δεδομένης ἀκτῖνος. (σχ. 112.)

Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου τὴν περίμετρον ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν δι' ἀριθμῶν. Τὸ τρίγωνον ΔΟΒ ὀρθογώνιον ἅμα καὶ ἰσοσκελὲς δίδει $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AO}}^2 + \overline{\mathrm{BO}}^2$ (§ ιζ'. θεώρ. ιά.) ἢ $\overline{\mathrm{AB}}^2 = 2.\overline{\mathrm{AO}}^2$· ἐκ τούτου ἕπεται ἡ ἀναλογία $\overline{\mathrm{AB}}^2 : \overline{\mathrm{AO}}^2 :: 2 : 1$· καὶ δι' ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν $\mathrm{AB : AO} :: \sqrt{2} : 1$· ὅθεν $\mathrm{AB} = \sqrt{2}.\times \mathrm{AO}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι εἰς λόγον ἔκμετρον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου· λαμβάνεται δὲ κατὰ προσέγγισιν ὅσην θέλομεν, πολλαπλασιαζομένης τῆς ἀκτῖνος ΑΟ ἐπὶ $\sqrt{2}$, λαμβανομένην ἐπίσης κατὰ προσέγγισιν. Οὕτω λαμβάνοντες $\sqrt{2} = 1{,}4142135$ συνάγομεν $\mathrm{AB} = \mathrm{AO} \times 1{,}4142135$· ἐκ τούτου ἡ ζητουμένη περίμετρος ἰσοῦται μὲ τετράκις τὴν πλευρὰν ΑΒ τουτέστι 5,6558540 τὴν ἀκτῖνα ΑΟ.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν δὲ τὴν περίμετρον τοῦ περιγεγραμμένου ΜΝΠΡ, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον, ἢ δὶς τὴν ἀκτῖνα ΑΟ· ὅθεν ἡ ὅλη περίμετρος ἰσοῦται μὲ ὀκτάκις τὴν ἀκτῖνα.

Ζήτημα γ'.

Νὰ εὕρωμεν εἰς ἀριθμοὺς τὴν περίμετρον ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς δεδομένον κύκλον. (σχ. 113.)

Ἂς ἐγγραφῇ τὸ κανονικὸν ἑξαγόμενον, καὶ ἐπιζευγνυομένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἐναλλὰξ, σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΔΖ, τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον· ἀγομένης τῆς διαμέτρου ΑΔ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ· ὅθεν ἔχομεν (§ ιζ'. θεώρ. ιά.) $\overline{\text{ΑΔ}}^2 = \overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΒΔ}}^2$ ἢ $\overline{\text{ΒΔ}}^2 = \overline{\text{ΑΔ}}^2 - \overline{\text{ΑΒ}}^2$· καὶ ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΔΟ (§ ιδ'. πρόβ. β'.) καὶ ΑΔ$=2.$ ΑΟ, ἢ $\overline{\text{ΑΔ}}^2 = 4.\ \overline{\text{ΑΟ}}^2 = 4.\ \overline{\text{ΑΒ}}^2$· συνάγομεν $\overline{\text{ΒΔ}}^2 = 4.\ \overline{\text{ΑΟ}}^2 - \overline{\text{ΑΟ}}^2$, ἢ $\overline{\text{ΒΔ}}^2 = 3.\ \overline{\text{ΑΟ}}^2$· καὶ τέλος ΒΔ$=$ ΑΟ$\times\sqrt{3}$.

Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου βλέπομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΔ τοῦ ἐγγεγραμμένου τριγώνου εἶναι εἰς λόγον ἔκμετρον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΑΟ ὡς $1:\sqrt{3}$· λαμβάνεται δὲ διὰ προσεγγίσεως καθόσον προχωρήσωμεν τὴν εἰς δεκαδικὰ ψηφεῖα τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3· ὅθεν ἡ ὅλη περίμ. αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τρὶς τὴν πλευρὰν ΒΔ· ἔσω δὲ $\sqrt{3} = 1,73$ μεῖον 0, 01 καὶ ΑΟ$=6$· συνάγομεν 3. ΒΔ$=5, 19\times$ ΑΟ$=5, 19\times6=31, 14$.

Ἂς προσδιορίσωμεν ἤδη τὴν περίμετρον τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ΜΝΠ· λέγομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΜΖΒ, ΒΖΔ, ΝΒΔ, καὶ ΠΔΖ εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΜΖΒ, ΜΒΖ, καὶ ΒΔΖ εἶναι ἴσαι ὡς ἔχουσαι μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΖΒ, ἕπεται ὅτι ἑκάστη γωνία τοῦ τριγώνου ΜΒΖ εἶναι γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἤτοι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Παρομοίως λέγομεν καὶ διὰ τὰ ἄλλα· ἀλλὰ τὰ ἰσόπλευρα ταῦτα ἐξωτερικὰ τρίγωνα συγκρινόμενα μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχουσι μίαν πλευρὰν κοινήν· ἄρα εἶναι καὶ μεταξύ των ἰσόπλευρα καὶ ἑπομένως ἴσα. Τούτου τεθέντος, ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου τριγώνου ΜΝ ἰσοῦται μὲ δὶς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου· ὅθεν ἡ περίμετρος αὐτοῦ ἴση $5,19 \times ΑΟ \times 2 = 10,38 \times ΑΟ$.

Ζήτημα δ'.

Δεδομένης εἰς ἀριθμοὺς τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου, νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ἀριθμοὺς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. (σχ. 114)

Ἔστω ἡ δεδομένη πλευρὰ ΑΒ· ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ἀκτὶς ΓΟ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΟ· αὕτη δὲ θέλει εἶσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν, τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ ἐκτιμήσωμεν. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ δίδει $\overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. (§ ιζ'. θεώρ. ιά.). ὅθεν $\overline{ΓΔ}^2 = \overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΑΔ}^2$ καὶ $ΓΔ = \sqrt{\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΑΔ}^2}$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ γραμμαὶ ΓΑ καὶ ΑΔ εἶναι γνωσταί, ἡ μὲν ὡς ἀκτὶς ἡ δὲ ὡς ἥμισυ τῆς δεδομένης ΑΒ· ἄρα καὶ ἡ ΓΔ γίνεται γνωστή, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ΔΟ ἴση μὲ ΓΟ — ΓΔ γίνεται γνωστή. Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΟ ἔχομεν παρομοίως $\overline{ΑΟ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΟΔ}^2$, ἢ $ΑΟ = \sqrt{\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΟΔ}^2}$· ἄρα καὶ ἡ ζητουμένη ΑΟ γίνεται γνωστή.

Πόρισμα. Γνωστῆς οὔσης μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, προσδιορίζεται ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Σχόλιον. — Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ὡς καὶ εἰς τὸ ἑπόμενον ἀναφέρομεν μόνον τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ζητουμένης πλευρᾶς· δὲν μερικεύομεν δὲ τὰ ζητήματα εἰς ἀριθμούς. Ἐπειδὴ ὡς ἐκ τῆς ἀσυμμετρίας τῶν ἀριθμῶν πρέπει νὰ προεκτείνωμεν ἐπὶ πολὺ τὴν προσέγγισιν καὶ ἐκ τούτου ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος ἀποκαθίσταται ἐπίπονος. Ἀρκούμεθα δὲ μόνον νὰ γνωρίσωμεν τὸ δυνατὸν τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἄμεσον ἐφαρμογὴν εἰς τὸν ἑπόμενον παράγραφον.

Ζήτημα ε'.

Δεδομένης εἰς ἀριθμοὺς τῆς πλευρᾶς περιγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου, νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν (σχ. 115).

Ἔστω ἡ δεδομένη πλευρὰ ΜΝ· ἡ ζητουμένη θέλει εἶσθαι ἡ ΠΡ (§ ιδ'. πρόβ. γ'.). Ὅθεν ἐπειδὴ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΜΟ ἔχομεν ΓΜ : ΓΑ : : ΓΟ : ΓΔ ἢ ΓΜ : ΓΑ : : ΓΑ : ΓΔ. ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν $\Gamma M = \overline{\Gamma A}^2 : \Gamma\Delta$ καὶ ἐπειδὴ αἱ γραμμαὶ ΓΑ καὶ ΓΔ εἶναι γνωσταὶ ἡ μὲν ὡς ἀκτὶς, ἡ δὲ ὡς προσδιοριζομένη ἐκ τοῦ τύπου $\Gamma\Delta = \sqrt{\overline{\Gamma A}^2 - \overline{A\Delta}^2}$. ὡς εἴδομεν εἰς τὸ προλαβὸν ζήτημα, ἄρα καὶ ἡ ΓΜ γίνεται ἐπίσης γνωστή. Ἐξ ἑτέρου μέρους εἰς τὸ τρίγωνον ΜΓΟ, ἐπειδὴ ἡ γωνία εἰς Γ τέμνεται διὰ τῆς ΓΠ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν (§ ιζ'. θεώρ. ιγ'.) ΓΜ : ΓΟ : : ΜΠ : ΠΟ. ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν ΓΜ + ΓΟ : ΓΟ : : ΜΠ + ΠΟ : ΠΟ· ἢ ΓΜ + ΓΟ : ΓΟ : : ΜΟ : ΠΟ. καὶ διπλασιαζομένων τῶν δευτέρων ὅρων, ἔχομεν ΓΜ + ΓΟ : ΓΟ : : 2ΜΟ : 2ΠΟ ἢ τέλος ΓΜ + ΓΟ : ΓΟ : : ΜΝ : ΠΡ. ἀναλογία, ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τὴν ΠΡ διὰ γνωστῶν ἤδη γραμμῶν ἐκ τοῦ τύπου $\Pi P = \frac{MN \times \Gamma O}{\Gamma M + \Gamma O}$.

Πόρισμα. — Προσδιορισθείσης οὕτω μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζοντες αὐτὴν ἐπὶ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, προσδιορίζομεν τὴν περίμετρον τοῦ ἰδίου.

§ *ιθ'. Λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.*

Τὸ σημαντικώτερον καὶ ἀξιολογώτερον ζήτημα τῆς ἐπιπέδου Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον ἐνησχόλησε τοὺς μαθηματικοὺς, εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς ἢ τὴν ἀκτῖνα· τουτέστι δεδομένης τῆς ἀκτῖνος νὰ προσδιορίσωμεν τὴν περιφέρειαν αὐτῆς διὰ τῶν γραμμικῶν μονάδων τῆς ἀκτῖνος ἢ τῆς διαμέτρου, ἢ νὰ εὕρωμεν ποσάκις ἡ ἀκτὶς ἢ ἡ διάμετρος ἐμπεριέχεται εἰς τὴν περιφέρειαν. Τὸν λόγον τοῦτον δὲν ἠδυνήθησαν νὰ προσδιορίσωσι μέχρι σήμερον, εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν, πλὴν τοιούτου βαθμοῦ, ὥστε τὸ πρόβλημα τοῦτο θεωρεῖται μεταξὺ τῶν λελυμένων γεωμετρικῶν προβλημάτων. Ἡμεῖς θέλομεν δείξει ἐνταῦθα πόθεν κινηθέντες ἐζήτησαν τὸν λόγον τοῦτον καὶ θέλομεν ἀναφέρει τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, διὰ τῶν ὁποίων φθάνομεν εἰς τὴν προσέγγισιν ταύτην. Ἰδοὺ δὲ πῶς διατάττομεν πρὸς τὸ εὐκρινέστερον τὴν θεωρίαν ταύτην.

Λῆμμα Α'.

Πᾶσα καμπύλη, ἢ πολυγώνιος γραμμὴ περιέχουσα ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἕως τοῦ ἑτέρου ἄκρου τὴν κυρτὴν ΑΜΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς περιεχομένης (σχ. 116).

Αἱ δύο γραμμαὶ τοῦ λήμματος τούτου ὑποτίθενται τοιαῦται, ὥστε τεμνόμεναι ὑπὸ εὐθείας τινὸς ὁπωσδήποτε νὰ μὴ δύνανται νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς περισσότερα τῶν δύο σημείων. Ὅθεν ἂν ἡ γραμμὴ ΑΜΒ δὲν ἦναι ἡ μικροτέρα πάσης περικυκλούσης, ἔστω μεταξὺ τῶν πολλῶν ἡ περικυκλοῦσα γραμμὴ ΑΞΠΡΒ μικροτέρα πάσης ἄλλης καὶ τῆς περικυκλουμένης ΑΜΒ ἢ τοὐλάχιστον ἴση μὲ τὴν ΑΜΒ· δι' ἑνὸς σημείου τῆς περικυκλουμένης ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη αὐτῆς ἡ ΚΝΛ συναπαντῶσα τὴν ἐξωτερικὴν εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ·

τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ΚΛ<ΚΠΡΛ. προστιθεμένων τῶν αὐτῶν ποσοτήτων ΑΞΚ καὶ ΛΒ εἰς ἑκάτερον μέλος, λαμβάνομεν ΑΞΚΛΒ<ΑΞΠΡΒ· ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι ἡ περικυκλοῦσα ΑΞΠΡΒ δὲν εἶναι ὡς ὑπετέθη, ἡ πασῶν βραχυτέρα· ἐπειδὴ δὲ τὸν αὐτὸν συλλογισμὸν δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν ὁμοίως διὰ τὴν ΑΞΚΛΒ, καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι καθόσον πλησιάζομεν τὰς περικυκλούσας γραμμὰς πρὸς τὰ σημεῖα τῆς περικυκλουμένης ΑΜΒ, κατὰ τοσοῦτον λαμβάνομεν μικροτέρας, συμπεραίνομεν εὐκόλως, ὅτι ἡ ΑΜΒ εἶναι τὸ τελευταῖον ὅριον αὐτῶν καὶ πασῶν μικροτέρα.

Λῆμμα Β'.

Μεταξὺ δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὴν μεγαλητέραν, ἢ νὰ περιγράψωμεν εἰς τὴν μικροτέραν κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴν ἔχωσι σημεῖόν τι κοινὸν μὲ τὴν ἑτέραν περιφέρειαν (σχ. 117).

Ἔστωσαν ΓΑ καὶ ΓΒ αἱ ἀκτῖνες τῶν συγκεντρικῶν περιφερειῶν. Εἰς τὸ σημεῖον Α ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη τέμνουσα τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν κανονικόν τι ἐκ τῶν ἐγγραψίμων πολυγώνων· ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ ὑπὸ τῶν πλευρῶν των ὑποτεινόμενα τόξα καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ τῶν ἡμιτόξων, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἐξακολουθοῦντες οὕτω τὰς διαιρέσεις καὶ ὑποδιαιρέσεις ταύτας, θέλομεν φθάσει εἰς μέρος τι τῆς περιφερείας τὸ τόξον ΜΒΝ μικρότερον τοῦ ΔΒΕ καὶ ἐπομένως, ἂν ἡ χορδὴ ΔΕ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἡ ΜΝ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ τόξου ΔΒΕ δὲν ἔχει κἀνὲν σημεῖον κοινὸν μὲ τὴν ἐντὸς περιφέρειαν· ἄρα κτλ.

Βλέπομεν παρομοίως ὅτι δυνάμεθα εἰς τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν νὰ περιγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ΠΡ, χωρὶς νὰ ἔχῃ σημεῖόν τι κοινὸν μὲν τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν.

Θεώρημα ΙΖ'.

Αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν διαμέτρων (σχ. 118).

Ἔστωσαν ΓΑ καὶ ΓΒ αἱ ἀκτῖνες δύο περιφερειῶν θέλομεν ἔχει ΓΑ : ΓΒ :: περιφ. ΓΑ. περιφ. ΓΒ. Διότι ἂν αὕτη ἡ ἀναλογία δὲν ἔχῃ χώραν, ἔστω τέταρτος ὅρος μικρότερος ἢ μεγαλήτερος τῆς περιφ. ΓΒ, καὶ κατὰ μὲν πρῶτον μικρότερος, τουτέστιν ΓΑ : ΓΒ :: περιφ. ΓΑ. περιφ. ΓΔ. Ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τὴν περιφέρειαν ΓΒ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴν ἐφάπτωνται τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας ΓΔ· ὅμοιον δὲ ἂς ἐγγραφθῇ εἰς περιφ. ΓΑ· αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων τούτων εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, (§ ις'. θεώρ. θ'.) τουτέστιν ΑΞΣΤ : .. κ.τ.λ. : ΒΜΝΠ : . . . : : ΓΑ : ΓΒ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΓΑ : ΓΒ :: περιφ. ΓΑ : περιφ. ΓΔ· ἄρα· ΑΞΣΤ. . . . : ΒΜΝΠ . . . . . : : περιφ. ΓΑ : περιφ. ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΞΣΤ . . . $<$ περιφ. ΓΑ, ἄρα καὶ ΒΜΝΠ $<$ περιφ- ΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Παρομοίως λέγομεν, ὅτι δὲν δίδεται οὔτε μεγαλήτερος τέταρτος ὅρος· ἐπειδὴ, ἂν ἔχωμεν ΓΑ:ΓΒ:: περιφ. ΓΑ:περιφ: ΓΔ' ἀντιςρεφομένων τῶν ὅρων, θέλομεν ἔχει ΓΒ:ΓΑ : : περιφ. ΓΔ': περιφ. ΓΑ· καὶ δι' ἀναλόγου ἐλαττώσεως τῶν δύο δευτέρων, συνάγομεν ΓΒ : ΓΑ : : περιφ. ΓΒ : Χ=περιφ. (μικροτέραν τῆς ΓΑ). Οὕτω πίπτομεν εἰς τὸ ἄτοπον τῆς πρώτης περιστάσεως· ὅθεν αἱ περιφέρειαι εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν ἢ τῶν διαμέτρων.

Πόρισμα. — Εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τῶν ἀκτίνων εἶναι καὶ τὰ ὅμοια τόξα, ὡς ἀποτελοῦντα ἴσα πηλίκα τῆς ὅλης περιφερείας.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. (118.)

Ἔστω περιφέρεια, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς ΑΓ εἶναι γνωστὴ εἰς ἀριθμὸν γραμμικῶν μονάδων· ἂς περιγραφθῇ δὲ δευτέρα τις περιφέρεια π ἔχουσα διάμετρον τὴν μονάδα· κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα ἔχομεν· περιφ : ΑΓ : π : : ΓΑ : $\frac{1}{2}$ · ἢ περιφ : ΑΓ : π : : 2 ΑΓ : 1· ἐξ ἧς περιφ : ΑΓ=2. π. ΑΓ· ὅθεν ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου βλέπομεν, ὅτι περιφέρεια ἀκτῖνος οἱασδήποτε ἰσοῦται μὲ δὶς τὴν περιφέρειαν τῆς γραμμικῆς μονάδος, πολλαπλασιαζομένην ἐπὶ τὴν γνωστὴν ἀκτῖνα. Καὶ ἐπειδὴ κατὰ το προλαβὸν θεώρημα ἡ περιφέρεια π ἐκφράζει σταθερὸν λόγον πρὸς τὴν διάμετρον ὁσηνδήποτε τὸ μέγεθος, ἕπεται ὅτι διὰ τοῦ τύπου 2 π. ΓΑ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν περιφέρειαν ἀκτῖνος οἱασδήποτε, ἅμα εὑρεθῇ ὁ σταθερὸς οὗτος λόγος π, περὶ τοῦ ὁποίου ἀμέσως διαλαμβάνομεν.

Τὰ δύο τελευταῖα ζητήματα Δ' καὶ Ε' τοῦ § ιή. ἀπέδειξαν, πῶς δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν περίμετρον ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου διπλασίου καὶ ἐπιδιπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Οὕτω γνωστῆς οὔσης τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ τρίτον ζήτημα, δυνάμεθα ἐπαναλαμβάνοντες διαδοχικῶς τὴν σειρὰν ὅλων αὐτῶν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ὅσας ἐξηγήσαμεν εἰς τὰ ζητήματα ταῦτα Δ' καὶ Ε', νὰ προσδιορίσωμεν τὰς περιμέτρους τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πολυγώνων μὲ ἀριθμὸν πλευρῶν 6, 12, 24, 48 . . . . . 12288 κατὰ τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ 2.

Οἱ Γεωμέτραι ἐκτείναντες τὸν ὑπολογισμὸν τοῦτον εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν π, ἔλαβον τοιαύτην προσέγγισιν· ὥστε δυνάμεθα νὰ τὴν ἐκλάβωμεν ὡς τὴν ἀκριβῆ λύσιν τοῦ ζητήματος. Ὁ Ἀρχιμήδης, ὅστις πρῶτος ἔδωκε καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, προσδιώρισεν ὡς ἔγγιστα λόγον τῆς περιφερείας $3\frac{1}{7}$ ἢ $\frac{22}{7}$, τουτέστιν ἡ περιφέρεια ἰσοῦται μὲ τρὶς τὴν διάμετρον πλέον $\frac{1}{7}$ αὐτῆς ὡς ἔγγιστα. Μετὰ τοῦτον ὁ Μέτιος προεκτείνας τὴν προσέγγισιν ἔλαβεν $3\frac{16}{113}$ ἢ $\frac{355}{113}$. Καὶ τέλος ἄλλοι μεταγενέστεροι λαβόντες τὴν ὑπομονὴν νὰ προεκτείνωσι τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀριθμῶν, καὶ μάλιστα ὁ Βέγας (Yega) ἕως ἑκατοντεσσαράκοντα δεκαδικῶν ψηφείων μετὰ μακρὰς ἐργασίας εὗρον ἐξαγόμενον, ὅτι αἱ περίμετροι τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εἰς τὴν περιφέρειαν π μὲ ἀριθμὸν πλευρῶν 12288 ἐκφράζονται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3, 141592· τουτέστι διαφέρουσαι ἀπ' ἀλλήλων κατὰ τὸ ἕβδομον δεκαδικὸν ψηφεῖον, ἢ μεῖον 0, 0000001. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐκ τούτου, ὅτι ἂν μεταξὺ τῶν περιμέτρων ὑπάρχῃ ἀνεπαίσθητος τοιαύτη διαφορὰ, πολλῷ πλέον μικροτέρα πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ ἑκατέρας αὐτῶν καὶ τῆς περιεχομένης περιφερείας· ὥστε μία τῶν περιμέτρων τούτων δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς ὁ ἀριθμητικὸς προσδιορισμὸς τῆς περιφερείας τουτέστι $\pi = 3, 141592$· καὶ ὁ πρὶν εὑρεθεὶς τύπος τῆς περιφερείας ΑΓ τρέπεται εἰς $6,283185 \times$ ΑΓ· ὅθεν ἂν ΑΓ$=15$ ἔχομεν περιφ. ΑΓ$=94, 247775$.

§ κ. *Κατασκευὴ καὶ χρῆσις τῶν κλιμάκων.*

Κατὰ τὸν ἀποδοθέντα ὁρισμὸν τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων, διὰ νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου διαφόρους γραμμὰς τινὸς χωρίου, πρέπει φυλάττοντες ἀκριβῶς τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν νὰ γράψωμεν τὰς γραμμὰς ταύτας δι' ἄλλων ἀναλόγων. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα κανόνα ὡρισμένου μεγέθους π. χ. ἡμίσεως ποδὸς, διῃρημένον εἰς ἴσα μέρη ἐξ ὑποθέσεως 100. Οὕτω διὰ νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου δύο τρίβους τινὸς χωρίου, τὴν μὲν 75 παλαμῶν, τὴν δὲ 46, συναπαντωμένας ὑπὸ γωνίαν 18^{0}, σύρομεν δύο εὐθείας τεμνομένας ὑπ' αὐτὴν τὴν γωνίαν καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης 75 μέρη τοῦ κανόνος, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας 46. καὶ οὕτως ἐπὶ τοῦ γραμμικοῦ ἰχνογραφήματος προσδιορίζομεν ἀναλόγως τὰς δύο τρίβους τοῦ χωρίου.

Ἠδυνάμεθα ἀντὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ποδὸς καὶ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ εἰς 100 μέρη νὰ λάβωμεν ἄλλο μῆκος κατὰ τὰς περιστάσεις μεγαλήτερον ἢ μικρότερον κατὰ τὸ μέγεθος τῶν διαγραφομένων γραμμῶν, ὅπως ἐξαρκέσωσι τὰ ὅρια τοῦ φύλλου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου μέλλομεν νὰ παραστήσωμεν τὰς γραμμὰς ταύτας. Ἐκ τούτου ἐννοοῦμεν τὴν χρείαν τῆς ὅσον τὸ δυνατὸν ἀκριβεστέρας διαιρέσεως τοῦ κανόνος τούτου, τὴν ὁποίαν ὡς ἐκ τῆς σμικρότητος τῶν μερῶν δυσκόλως κατορθόνομεν εἰς τὸν ἁπλοῦν τοῦτον κανόνα· ὅθεν πρὸς ἀποφυγὴν παντὸς ἀτόπου, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ προξενηθῇ ἐκ τῆς ἀτελείας ταύτης, ἐφευρέθη ἐπιτηδειότερον ἐργαλεῖον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται κλίμαξ τοῦ δεκατημορίου πρὸς διάκρισιν τοῦ ἐξηγηθέντος κανόνος, ὅστις λέγεται κλίμαξ ἁπλῆ.

Ἡ κλίμαξ τοῦ δεκατημορίου εἶναι ὀρθογώνιον ἐξ ὀρειχάλκου ΑΒΓΔ, (σχ. 119.) τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τοῦ πλάτους ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι διῃρημέναι εἰς δέκα ἴσα μέρη. Ἐξ ἑκάστου δὲ σημείου τῆς διαιρέσεως ἄγονται παράλληλοι πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ μήκους ΑΔ καὶ ΒΓ· ὥστε τὸ ὅλον χωρίζεται εἰς δέκα ἴσας ταινίας· διαιρεῖται καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ μήκους ΒΓ παρομοίως εἰς μέρη ἴσα ἐξ ὑποθέσεως πέντε καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ὑψόνονται κάθετοι ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅθεν σχηματίζονται πέντε ὀρθογώνια. Εἰς τὸ πρῶτον τούτων ΒΕΖΑ διαιροῦνται αἱ πλευραὶ ΒΕ καὶ ΑΖ εἰς δέκα ἴσα μέρη καὶ ἐπιζευγνύονται τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων ἐναλλὰξ, τουτέστι τὸ πρῶτον τῆς κάτω πλευρᾶς μὲ τὸ δεύτερον τῆς ἄνω, καὶ ὁμοίως τὸ δεύτερον τῆς κάτω μὲ τὸ τρίτον τῆς ἄνω, καὶ τέλος τὸ παρατελευταῖον τῆς κάτω μὲ τὸ τελευταῖον τῆς ἄνω. Ἐκ τούτου αἱ γραμμαὶ αὗται ΛΒ καὶ ΒΜ, ἢ ΖΕ καὶ ΖΝ τεμνόμεναι ὑπὸ παραλλήλων χωρίζουσι μέρη ἀνάλογα αϐ, γδ, εζ, ηθ, κ. τ. λ. διότι ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΖΝΕ καὶ Ζαϐ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν αϐ : ΝΕ : : Ζϐ : ΖΕ : : 1 : 10· τουτέστιν αϐ$=\frac{1}{10}$ ΝΕ· καὶ ὁμοίως γδ$=\frac{2}{10}$ ΝΕ. κ. τ. λ. Ἀλλὰ ΝΕ εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ΒΕ, ἄρα αϐ εἶναι $\frac{1}{100}$ αὐτῆς, καὶ παρομοίως γδ$=\frac{2}{100}$· κτλ. ἢ αϐ εἶναι τὸ $\frac{1}{500}$ τῆς ὅλης ΒΓ καὶ τέλος τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς παλάμης ἢ τοῦ ποδὸς, ἂν ἡ ΒΓ ὑποτεθῇ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς παλάμης ἢ τοῦ ποδός.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν ἤδη εὐθεῖαν π. χ. 473 μονάδων, λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον τετράκις τὴν ΒΕ ἀπὸ φ ἕως ζ, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ 400 μονάδας· μετὰ ταῦτα $\frac{7}{10}$ τῆς ΒΕ ἢ ἑπτάκις τὸ ΝΕ ἀπὸ τοῦ ζ ἕως ω, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ 70 μονάδας καὶ τέλος τὴν ωχ δυναμένην $\frac{3}{10}$ τῆς ΝΕ ἢ $\frac{3}{100}$ τῆς ΒΕ. Οὕτως ἡ γραμμὴ φχ ἔχουσα 473 μονάδας τῆς κλίμακος ἐκφράζει $\frac{473}{500}$ τοῦ ἡμίσεως τῆς κυρίας μονάδος ἢ τῆς παλάμης ἢ $\frac{473}{1000}$ τῆς ὅλης· λοιπὸν κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦτον ἡ ἀναλογία τῶν γραμμῶν τοῦ ἰχνογραφήματος πρὸς τὸ φυσικόν των μέγεθος εἶναι ὡς 1 πρὸς 1000· ἤτοι

$\frac{1}{1000}$ τῆς μονάδος τοῦ μήκους εἶναι διὰ τὴν ἰχνογραφίαν ἀκεραία μονάς.

§ κά. *Ζητήματα γραμμικῶν καταμετρήσεων.*

Ζήτημα ά. — Νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος τινὸς κτιρίου ΒΚ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις Β εἶναι προσιτή. (σχ. 120.)

Καταμετροῦμεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεως Β μέχρι τινὸς σημείου Α, τὸ ὁποῖον ἐκλέγομεν κατὰ τὸ δοκοῦν ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος. Διὰ τοῦ γραφομέτρου (1), λαμβάνομεν τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα ΟΣ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ μὲ τὴν ΟΚ ἀγομένην ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ γραφομέτρου πρὸς τὴν κορυφὴν Κ τοῦ κτιρίου. Ὅθεν ἐγνωσμένων τῶν δύο γωνιῶν καὶ μιᾶς πλευρᾶς ΟΣ τοῦ εἰς τὸ διάστημα ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΣΚ, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ χάρτου ὅμοιον αὐτοῦ οσκ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ οσ παριστῶσα τὴν γνωστοῦ μήκους ΟΣ διὰ μονάδων τῆς κλίμακος ἔχει πρὸς αὐτὴν λόγον ὡρισμένον ὡς 1 : 1000, ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΣΚ : σκ : : ΟΣ : οσ· ἢ ΣΚ : σκ : : 1000 : 1· ἕπεται ὅτι ἡ ΣΚ γίνεται γνωστή, ὅταν ἡ παριστῶσα αὐτὴν σκ γίνῃ γνωστή· ὅθεν φέροντες τὴν σκ ἐπὶ τῆς κλίμακος καὶ ὑποθέτοντες αὐτὴν ἴσην μὲ 69 μονάδας αὐτῆς, λαμβάνομεν παρομοίως διὰ τὴν ΟΚ χιλιάκις τὰς 69 μονάδας τῆς κλίμακος ἢ 69 ἀκεραίας μονάδας, τουτέστι παλάμας, πόδας κ. τ. λ. κατὰ τὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν διὰ τὸ μῆκος τῆς κλίμακος. Τέλος προσθέτομεν εἰς ΣΚ καὶ τὸ ὕψος τοῦ γραφομέτρου ΑΟ ἢ ΒΣ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ὕψος τοῦ κτιρίου ΒΚ.

Ζήτημα β΄. — Νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ προσιτοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἀπροσίτου Β. (σχ. 121.)

(1) Ἴδε τὴν περιγραφὴν αὐτοῦ εἰς τὸ παράρτημα.

Αναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ προσιτοῦ σημείου Α καταμετροῦμεν ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος εὐθεῖάν τινα ΑΓ μεγάλην ἢ μικρὰν ἀναλόγως τοῦ μήκους ΑΒ. Ἔστω δὲ ΑΓ=248 παλάμαι· στηρίζομεν τὸ γραφόμετρον εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Γ, καὶ προσδιορίζομεν τὰς κατὰ τὰ ἄκρα γωνίας ΒΑΓ καὶ ΑΓΒ· ὅθεν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχοντες γνωστὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας, κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ὅμοιον αβγ, λαμβάνοντες αγ ἴσην μὲ 248 μονάδας τῆς κλίμακος. Ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας ΑΒ : αβ : : ΑΓ : αγ : : 248 : $\frac{248}{1000}$, προσδιορίζομεν τὸ μῆκος τῆς ΑΒ ἴσον μὲ τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσα μέρη τῆς κλίμακος, ἀποτελοῦσι τὴν αβ.

Ζήτημα γ'. — Νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο ἀπροσίτων σημείων Β καὶ Γ. (σχ. 122.)

Ἱστάμενοι εἰς δύο ἕτερα σημεῖα Α καὶ Α', τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὴν ἀπόστασιν ΑΑ' προσδιορίζομεν κατὰ πρῶτον τὰ μήκη τῶν γραμμῶν ΑΒ καὶ ΑΓ κατὰ τὸ προλαβὸν ζήτημα, λαμβάνομεν μετὰ ταῦτα διὰ τοῦ γραφομέτρου τὴν εἰς Α γωνίαν τῶν ἤδη προσδιορισθεισῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ κατὰ τὰς συνθήκας ταύτας κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου δι' ἀναλόγων μερῶν τῆς κλίμακος τὸ τρίγωνον αβγ· ὅθεν ἐκ τῆς ἀναλογίας ΒΓ : βγ : : ΑΒ : αβ ἢ ΒΓ : βγ : : ΑΓ : αγ, προσδιορίζομεν τὴν ΒΓ ἴσην μὲ τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσα εἶναι τὰ εἰς τὴν βγ ἐμπεριεχόμενα μέρη τῆς κλίμακος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

§ κϐ'. *Περὶ ἰσοδυνάμων σχημάτων.*

Ὀνομάζομεν σχήματα ἰσοδύναμα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἶναι μὲν ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, οὐχὶ δὲ καὶ ὁμοίως σχηματισμένα, ἢ ἴσα κατ' ἐφαρμογήν. Οὕτω θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὰ ἑξῆς θεωρήματα, ὅτι σχῆμα τι εὐθύγραμμον, δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἢ τετράγωνον κτλ.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος, καθόσον μετρᾶται ἢ συγκρίνεται μὲ ἄλλας ἐπιφανείας, ὀνομάζεται ἐμϐαδόν.

Ὕψος τοῦ τριγώνου λέγεται ἡ ἀγομένη κάθετος ΑΔ ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ Α ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ, τὴν ὁποίαν λαμϐάνομεν ὡς βάσιν (σχ. 123).

Παρομοίως λέγομεν ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου τὴν ἀγομένην κάθετον ΑΖ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ, τὰς ὁποίας λαμϐάνομεν ὡς βάσεις, (σχ. 124).

Καὶ τέλος ὀνομάζομεν ὕψος τοῦ τραπεζίου τὴν ἀγομένην κάθετον ΕΖ μεταξὺ τῶν ἀπέναντι παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 125).

Σημ. Αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη τῶν σχημάτων τούτων εἶναι αἱ γραμμαί, τὰς ὁποίας θέλομεν μεταχειρισθῆ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐμϐαδοῦ αὐτῶν· μερικώτερον δὲ ἐμφαίνουσι τὰς δύο διαστάσεις αὐτῶν, μῆκος καὶ πλάτος· καὶ τοῦ μὲν τριγώνου δύνανται νὰ διακριβῶσιν αἱ δύο διαστάσεις κατὰ τρεῖς ἐννοίας· ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ λάϐωμεν κατ' ἀρέσκειαν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ὡς βάσιν,, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀγομένην κάθετον. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων κατὰ δύο, καὶ τέλος τοῦ τραπεζίου κατὰ μίαν μόνον. Καθόσον δὲ ἀφορᾷ τὰς διαστάσεις τῶν πολυγωνικῶν ἐπιφανειῶν καὶ τοῦ κύκλου, αὗται εἶναι συνεπτυγμέναι· ἐπομένως δὲ θέλομεν ἀναφέρει πῶς μετρῶμεν τὸ ἐμϐαδὸν τῶν σχημάτων τούτων.

Θεώρημα Α'.

Δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΕΖ καὶ ΑΒΓΔ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι ἰσοδύναμα· (σχ. 126).

Ἐπειδὴ τὰ δύο παραλληλόγραμμα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω βάσεις των ΔΓ καὶ ΖΕ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΕ· τούτου τεθέντος, εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΖΔ καὶ ΒΓΕ ἔχομεν τὴν πλευρὰν ΑΔ=ΒΓ καὶ τὴν ΑΖ=ΒΕ ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου· καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ΔΓ=ΑΒ καὶ ΖΕ=ΑΒ, ἐκ τούτου συνάγομεν ΔΓ=ΖΕ καὶ προσθέτοντες ἢ ἀφαιροῦντες τὸ κοινὸν μέρος ΖΓ συνάγομεν ΔΖ=ΓΕ· ὅθεν τὰ δύο τρίγωνα ΑΖΔ καὶ ΒΓΕ, καθὸ ἰσόπλευρα εἶναι ἴσα· Λοιπὸν ἂν ἐκ τοῦ ὅλου τραπεζίου ΑΒΕΔ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΒΕΓ, ἢ ΑΖΔ, μένουσι τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ, τὰ ὁποῖα διὰ τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα.— Πᾶν παραλληλόγραμον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον τῶν αὐτῶν διαστάσεων (σχ. 124).

Θεώρημα Β'.

Πᾶν τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους (σχ. 127).

Ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Γ ἂς ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι ΑΕ καὶ ΓΕ πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου· σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον. Ὅθεν, ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΕ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΓ κοινὴν καὶ τὴν ΑΒ=ΓΕ καὶ ὁμοίως ΒΓ=ΑΕ ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, τουτέστιν ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ.

Πόρισμα. — Δύο τρίγωνα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ὡς ἡμίση ἰσοδυνάμων παραλληλογράμων εἶναι ἰσοδύναμα.

Θεώρημα Γ'.

Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας (σχ. 128).

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἂν καὶ ἀποδεδειγμένον (§ ιζ'. θεώρ. ιά.) ἐπαναλαμβάνομεν ἐνταῦθα νὰ ἀναπτύξωμεν διὰ Γεωμετρικῆς κατασκευῆς, διὰ τῆς ὁποίας διευκρινίζεται μὲ περισσοτέραν ἐνάργειαν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς Α. Ἂς κατασκευασθῶσιν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὰ τρία τετράγωνα, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἕωσοῦ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΕΔ· ἀποδεικνύομεν ἤδη τὸ τετράγωνον ΑΚ ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΟ καὶ παρομοίως τὸ τετράγωνον ΑΗ ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΓΟ. Ἂς ἐπιζευχθῶσι κατὰ πρῶτον αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΚΓ· τὰ δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΚΒΓ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΒ=ΒΚ καὶ ὁμοίως τὴν ΒΕ=ΒΓ ὡς πλευραὶ τῶν τετραγώνων, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ΚΒΓ καὶ ΑΒΕ ἴσας, ἐπειδὴ ἑκατέρα σχηματίζεται ἀπὸ μίαν ὀρθὴν ἢ γωνίαν τετραγώνου καὶ ἀπὸ τὴν κοινὴν ΑΒΓ τοῦ τριγώνου· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (§ Ι'. θεώρ. ά). Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΚΒΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΚ καὶ τὸ ὕψος ΑΒ ἢ ΓΠ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΚ· καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΕ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΔ ἢ ΑΡ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΟ· ἄρα τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΚ καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΟ, ἢ ἀκέραια τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμα. Παρομοίως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὰ τρίγωνα ΒΓΗ καὶ ΑΓΔ ἴσα καὶ ἐπομένως τὸ τετράγωνον ΑΗ διπλοῦν τοῦ τριγώνου ΒΓΗ ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΓΟ διπλοῦν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ· ὅθεν συνάγομεν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΒΕΔΓ ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒΚΙ καὶ ΑΓΗΘ· τῶν ἄλλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

Θεώρημα Δ'.

Πᾶν εὐθύγραμμον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον. (σχ. 129.)

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἂς ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΑΔ· ἐκ τοῦ ἄκρου Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ συναπαντῶσα τὴν ΓΔ προεκβαλλομένην κατά τι σημεῖον Η, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΗ· τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΔΗ ἔχοντα βάσιν κοινὴν τὴν ΑΔ καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἐπειδὴ αἱ κορυφαὶ Ε καὶ Η εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραλλήλου ΕΗ, εἶναι διὰ τοῦτο ἰσοδύναμα· τούτου τεθέντος, ἂν εἰς τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ ἀντικαταστήσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ μὲ τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ ΑΔΗ, θέλομεν ἔχει τὸ δεδομένον πεντάγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ κατασκευασθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΗ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἄγοντες τὴν ΒΘ παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, προεκβάλλοντες τὴν ΓΔ καὶ ἐπιζευγνύοντες τὴν ΑΘ τρέπομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΗ εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον ΑΘΗ. Παρομοίως πράττομεν καὶ διὰ πᾶν ἄλλο πολύγωνον ἀνωτέρου ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Σχόλιον. — Ἐξηγεῖται ἤδη σαφέστερον ὅ,τι ἀνεφέραμεν εἰς τὸ σχόλιον τοῦ ή. θεωρήμ. §. ις'. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ τελικὸν σχῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀναχθῇ πᾶν ἄλλο εὐθύγραμμον, διὰ τοῦτο αἱ ἰδιότητες τῶν τριγώνων εὑρισκόμεναι συνεπτυγμένως καὶ εἰς τὰ πολύγωνα, θεωροῦνται ὡς τὸ κυριώτερον στοιχεῖον τῆς ἐπιπέδου Γεωμετρίας καὶ μάλιστα ὡς πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς καὶ τὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων.

§. κγ'. *Καταμέτρησις τῶν Σχημάτων.*

Εἰς τὴν ἐξήγησιν τῶν ἑξῆς θεωρημάτων θέλομεν γνωρίσει οὐχὶ μόνον τὸν τρόπον τῆς καταμετρήσεως τῶν ἐπιπέδων, ἀλλὰ καὶ τὴν μονάδα αὐτῶν, τὴν ὁποίαν χορηγεῖ ἡ ἰδία ἐπιστήμη. Ἐνθυμούμενοι δὲ ὅ,τι ἀνεφέραμεν εἰς τὸν προλαβόντα παράγραφον, ὅτι πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα, τρίγωνον, παραλληλόγραμμον, ἢ πολύγωνον ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον, ἐννοοῦμεν εὐκόλως, ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν σχημάτων τούτων, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν καταμέτρησιν τοῦ ὀρθογωνίου· ὅθεν τὰ ἑξῆς δύο θεωρήματα, ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται ἡ καταμέτρησις αὐτοῦ, δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἡ πρώτη βάσις, ἢ ὡς ἡ θεμελιώδης ἀρχὴ, ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ καταμέτρησις τῶν ἐπιπέδων ἐν γένει.

Θεώρημα Ε'.

Δύο ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των. (Σχ. 130.)

Ἔστωσαν τὰ δύω ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΑΕΖΔ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ καὶ βάσεις διαφορετικὰς ΑΒ καὶ ΑΕ· πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΕ. Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι αἱ βάσεις ΑΒ, καὶ ΑΕ εἶναι ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ π.χ. 10 : 7. Διαιρεθείσης τῆς ΑΒ εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς διαιρέσεως ἂς ὑψωθῶσι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ. Οὕτω τὸ ὅλον ὀρθογώνιον ΑΓ διαιρεῖται εἰς δέκα μερικὰ ὀρθογώνια ἴσα· ἐπειδὴ ἔχουσι βάσεις καὶ ὕψη ἴσα· ἑπτὰ δὲ τῶν ὀρθογωνίων τούτων συμπληροῦσι τὸ μικρότερον ΑΕΖΔ· ὥστε ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : 10 : 7. Ἀλλ' ἔχομεν παρομοίως καὶ ΑΒ : ΑΕ : : 10 : 7. ἄρα ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΕ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη τὰς βάσεις ἐκμέτρους· πρέπει τὸν αὐτὸν λόγον νὰ ἔχωσι καὶ τὰ ὀρθογώνια. Διότι ἔστω, εἰ δυνατὸν, τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τοῦ ΑΕ καὶ κατὰ μὲν πρῶτον μεγαλήτερος ΑΟ, ὥστε νὰ ἔχωμεν ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΟ. Ἂς διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς μέρη ἴσα μικρότερα τοῦ ΕΟ· οὕτως ἓν ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τὸ Λ θέλει εὑρεθῇ μεταξὺ τῶν σημείων Ε καὶ Ο· ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΛΚ· οὕτω τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ΑΛΚΔ, καὶ τὸ ὅλον ΑΒΓΔ ἔχοντα τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΑΛ συμμετρικὰς, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓΔ : ΑΛΚΔ : : ΑΒ : ΑΛ· ἀλλ' ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως καὶ

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΟ· ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν διὰ τὴν ταυτότητα τῶν ἡγουμένων συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν τῶν ἑπομένων, τουτέστι ΑΛΚΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΛ : ΑΟ. Ἀλλὰ ΑΛ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΟ, διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἀναλογία πρέπει καὶ ΑΛΚΔ νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ ΑΕΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον· ὅθεν λέγομεν ὅτι δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας μεγαλήτερος τῆς ΑΕ.

Ἔστω ἤδη, εἰ δυνατὸν, τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ΑΌ μικρότερος τοῦ ΑΕ, ὥςε νὰ ἔχωμεν ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΌ· διαιροῦντες παρομοίως τὴν ΑΒ εἰς μέρη ἴσα μικρότερα τοῦ ΕΌ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Λ' μεταξὺ τοῦ Ε καὶ Ό ὑψόνοντες τὴν κάθετον Λ'Κ' σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΛ'Κ'Δ, τὸ ὁποῖον συγκρινόμενον μὲ τὸ ΑΒΓΔ δίδει τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓΔ:ΑΛ'Κ'Δ : : ΑΒ : ΑΛ'· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΌ· ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν τῶν ἑπομένων ΑΛ'Κ'Δ : ΑΕΖΔ : : ΑΛ' : ΑΌ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΛ' εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΌ, πρέπει καὶ ΑΛ'Κ'Δ νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ΑΕΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον· ἄρα ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας δὲν δύναται νὰ ἦναι οὔτε μικρότερος τοῦ ΑΕ. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐκ τούτου, ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πάντοτε εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τῶν βάσεών των.

Θεώρημα ΣΤ'.

Δύο ὀρθογώνια διαφόρου βάσεως καὶ ὕψους εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεών των ἐπὶ τὰ ὕψη. (σχ. 131.)

Ἔστωσαν τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΑΕΗΖ, τὰ ὁποῖα διαττάσσομεν, ὥστε νὰ ἔχωσι μίαν γωνίαν κατὰ κορυφὴν εἰς Α· πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ : : ΑΒ $\times$ ΑΔ : ΑΖ $\times$ ΑΕ.

Ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΕΗ καὶ ΓΔ ἕωσοῦ νὰ συναπαντηθῶσιν εἴς τι σημεῖον Θ· οὕτω τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΑΔΘΕ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ εἶναι ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ καὶ ΑΕ, ὥστε ἔχομεν ΑΒΓΔ : ΑΕΘΔ : : ΑΒ : ΑΕ. Παρομοίως τὰ ὀρθογώνια ΑΔΘΕ καὶ ΑΕΗΖ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΔΘΕ : ΑΕΗΖ : : ΑΔ : ΑΖ· πολλαπλασιαζομένων ἤδη τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν, ὅρου ἐφ' ὅρον, καὶ ἐπαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος ΑΔΘΕ, συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ : : ΑΒ$\times$ΑΔ : ΑΕ$\times$ΑΖ· τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον ά.—Ἂν ὑποθέσωμεν ἤδη ΑΒ$=$8, ΑΔ$=$4, ΑΖ$=$7 ΑΕ$=$5 συνάγομεν διὰ τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ : : 32 : 35· καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον ὡρισμένον ὡς δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς προσδιορίζεται σχετικῶς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑτέρου· οὕτως ἔχομεν ΑΒΓΔ$=\frac{32}{35}$ τοῦ ΑΕΗΖ, ἢ ΑΕΗΖ$=\frac{35}{32}$ τοῦ ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ ἀπόλυτον τὸ μέτρον τινος ὀρθογωνίου, ὅταν τὸ συγκρίνωμεν πρὸς τὸ τεράγωνον τῆς γραμμικῆς μονάδος, διὰ τῆς ὁποίας ἐμετρήσαμεν τὰς δύο διαστάσεις αὐτοῦ· οὕτως ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 132.) τοῦ ὁποίου αἱ δύο διαστάσεις καταμετρηθεῖσαι διὰ τῆς παλάμης ἔδωκαν ἐξαγόμενον ΑΒ$=$6 καὶ ΑΔ$=$5, σχηματίζοντες τὸ τετράγωνον τῆς μονάδος Τ συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓΔ : Τ : : ΑΒ$\times$ΑΔ : 1$\times$1 : : 6$\times$4 : 1· ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγεται ὅτι τὸ τετράγωνον Τ ἐμπεριλαμβάνεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ὡς ἡ μονὰς εἰς τὸ γινόμενον τῶν δύο διαστάσεων αὐτοῦ 6$\times$4· ἢ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ 24 τετραγωνικὰς μονάδας, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα· βλέπομεν λοιπὸν ἐκ τούτου, ὅτι ἡ Γεωμετρία οὐχὶ μόνον δίδει τὸ μέσον τῆς καταμετρήσεως τῆς ἐπιφανείας, ἀλλὰ καὶ τὸ εἶδος τῆς μονάδος, οἷον τετραγωνικὴν παλάμην, τετραγωνικὸν πόδα, ἢ δάκτυλον κ.τ.λ. καθὼς ἀνεφέραμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ παρόντος παραγράφου.

Σχόλιον β'.—Εἶναι ἄξιον παρατηρήσεως, ὅτι εἰς τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου, ἐνῷ ὁ πολλαπλασιαστέος ἐκφράζει μονάδας γραμμικὰς, τὸ γινόμενον δὲν διατηρεῖ τὸ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου κατὰ τοὺς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ ὅτι γραμμή τις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ γραμμὴν δίδει διὰ γινόμενον ἐπιφάνειαν, καὶ ὅταν μὲν οἱ παράγοντες ἦναι ἄνισοι, τὸ γινόμενόν των εἶναι ὀρθογώνιον, ὅταν δὲ ἴσοι, τὸ γινόμενόν των εἶναι τετράγωνον. Ἐκ τούτου καὶ αἱ ἐκφράσεις αὗται ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον μετέβησαν καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν σημαίνουσαι τὸ γινόμενον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν καὶ τὴν δευτέραν δύναμιν· ἐξ ὅλων τούτων διεσαφίσθη ἤδη ἀρκούντως ἡ σημασία τῶν γινομένων τούτων, ὡς εἴπομεν (§ ιζ'. θεώρ. ιά· σχόλ.)

Θεώρημα Ζ'.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του (σχ. 124).

Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΖ (§ κβ'. θεωρ. ά. πόρ.) ἕπεται ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒ×ΑΖ εἶναι καὶ μέτρον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Πόρισμα. — Τὰ παραλληλογραμμα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι ὡς αἱ βάσεις των καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι ὡς τὰ ὕψη των. Διότι ἔστωσαν Β καὶ Υ αἱ διαστάσεις τοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου Ο· αἱ δὲ τοῦ ἄλλου Ο' ἔστωσαν Β' καὶ Υ'· θέλομεν ἔχει· Ο : Ο' :: Β$\times$Υ : Β'$\times$Υ'· εἰς τὴν περίστασιν δὲ, καθ' ἣν Β=Β' ἢ Υ=Υ'· συνάγομεν. Ο : Ο' :: Υ : Υ', ἢ Ο : Ο' :: Β : Β'.

Θεώρημα Η'.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του (σχ. 127).

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους, (§ κβ'. θεώρ. 6') τούτου δὲ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον ΒΓ$\times$ΑΔ· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου ΒΓ$\times$ΑΔ ἢ ἐμβ. ΑΒΓ=ΒΓ$\times\frac{1}{2}$ΑΔ.

Πόρισμα. — Συνάγομεν παρομοίως ὡς καὶ εἰς τὸ προλαβὸν πόρισμα, ὅτι δύο τρίγωνα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὸ ἀνάπαλιν δύο τρίγωνα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι ὡς αἱ βάσεις των.

Θεώρημα Θ'.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους του πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων βάσεών του (σχ. 133). — Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, λέγω ὅτι ἐμβ. ΑΒΓΔ=ΕΖ$\times\frac{1}{2}$(ΑΒ+ΓΔ)· ἐκ τοῦ σημείου Ι μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἂς ἀχθῇ ἡ ΛΚ παράλληλος τῆς ΑΔ καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΔΓ ἕωσοῦ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΚΛ· οὕτω θέλει σχηματισθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΚΛΔ· τὰ τρίγωνα ΙΒΚ καὶ ΙΛΓ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΙΒ=ΙΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν γωνίαν ΚΙΒ=ΓΙΛ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ τὴν γωνίαν ΙΒΚ=ΙΓΛ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΛ· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (§ ι θεώρ. 6') καὶ ἑπομένως τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΚΛΔ, ἔχει διὰ μέτρον ΕΖ$\times$ΑΚ. Μένει ἤδη νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $ΑΚ=\frac{1}{2}(ΑΒ+ΓΔ)$. Ἐπειδὴ ἔχομεν $ΑΚ=ΔΛ$, συνάγομεν $2.ΑΚ=ΑΚ+ΔΛ$ ἢ $2.ΑΚ=ΑΚ+ΔΓ+ΓΛ$· καὶ ἐπειδὴ $ΓΛ=ΚΒ$, ἕπεται ἄρα $2 \cdot ΑΚ=ΑΚ+ΔΓ+ΚΒ$· καὶ δι' ἀναγωγῆς $2.ΑΚ=ΑΒ+ΓΔ$· ἢ τέλος $ΑΚ=\frac{1}{2}(ΑΒ+ΓΒ)$· ὅθεν δι' ἀντικαταστάσεως τῆς ΑΚ εἰς τὸν τύπον $ΕΖ \times ΑΔ$ συνάγομεν ἐμϐ. $ΑΒΓΔ=ΕΖ \times \frac{1}{2}(ΑΒ+ΓΔ)$.

Σχόλιον.—Ἂν ἐκ τοῦ μέσου Ι ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΙΘ, ἐπειδὴ ἔχομεν $ΙΘ=ΑΚ$, δυνάμεθα νὰ λάϐωμεν ὡς ἐμϐαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΚΛΔ, ἅμα δὲ καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου τραπεζίου ΑΒΓΔ τὸ γινόμενον $ΕΖ \times ΙΘ$· τουτέστι τὸ ἐμϐαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους του πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν ἐπιζευγνύουσαν τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

Θεώρημα Ι'.

Τὸ ἐμϐαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ἐγγεγραμμένου κύκλου (σχ. 87).

Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἂς ἀχθῶσιν εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ αἱ ἀκτῖνες τοῦ περιγγραμμένου κύκλου ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κ.τ.λ. οὕτω τὸ ὅλον πολύγωνον διαιρεῖται εἰς ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα, τῶν ὁποίων βάσεις θέλουσιν εἶσθαι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου καὶ ὕψος ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ὥστε ἕκαστον τῶν τριγώνων τούτων ἔχει διὰ μέτρον $ΑΒ \times \frac{1}{2}ΟΡ$.—τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τριγώνων τούτων ἀποτελεῖ τὸ ὅλον πολύγωνον, ἄρα ἐμϐ. $ΑΒΓΔ\ldots = ΑΒ \times \frac{1}{2}ΟΡ + ΒΓ \times \frac{1}{2}ΟΡ$ κ. τ. λ. ἢ ἐμϐ. $ΑΒΓΔ\ldots = (ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ\ldots) \times \frac{1}{2}ΟΡ$· ἢ τέλος ἐμϐ. $ΑΒΓΔ\ldots =$ περίμ. $ΑΒΓΔ\ldots \times \frac{1}{2}ΟΡ$.

Σχόλιον. — Τὸ ἐμϐαδὸν τοῦ μὴ κανονικοῦ πολυγώνου δὲν ἔχει μὲν ἴδιον τύπον· δυνάμεθα ὅμως νὰ τὸ προσδιορίσωμεν τρέποντες κατὰ πρῶτον τὸ πολύγωνον τοῦτο εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον (§ κϐ'. θεώρ. δ') καὶ λαμϐάνοντες μετὰ ταῦτα τὸ ἐμϐαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου. Ἐπομένως θέλομεν διαλάϐει καὶ περὶ τῶν ὅλως ἀκανονίστων ἢ τῶν μὲ εἰσεχούσας γωνίας εὐθυγράμμων πολυγώνων.

Θεώρημα ΙΑ'.

Τὸ ἐμϐαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος (σχ. 134).

Ἔστω ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· λέγομεν ὅτι ἐπιφ. ΓΑ $=$ περιφ. ΓΑ $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ· διότι ἂν τὸ ὀρθογώνιον περιφ. ΓΑ $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ δὲν ἦναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΓΑ· ἔστω, εἰ δυνατὸν, ἰσοδύναμον μὲ κύκλον μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον, καὶ κατὰ μὲν πρῶτον ἔστω ἐπιφ. ΓΒ $=$ περιφ. ΓΑ $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ. Εἰς τὸν ἐσωτερικὸν κύκλον ἂς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον ΔΕΖΗ... κ.τ.λ. τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴν ἐφάπτωνται τῆς ἐκτὸς περιφερείας. Κατὰ τὸ προλαϐὸν θεώρημα ἔχομεν ἐμϐ. ΔΕΖΗ.. $=$ περιμ. ΔΕΖΗ... $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύκλος ΓΒ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ ἐντὸς πολυγώνου ἄρα περιφ. ΓΑ $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ $>$ περιμ. ΔΕΖΗ... $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ· καὶ ἐπομένως περιφ. ΓΑ $>$ περιμ. ΔΕΖΗ..., τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον· διότι ἡ περίμετρος περικλείει πανταχόθεν τὴν περιφέρειαν· ἄρα περιφ. ΓΑ $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ δὲν δύναται νὰ προσδιορίσῃ μεγαλήτερον κύκλον.

Ἔστω ἤδη, εἰ δυνατὸν, τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο νὰ προσδιορίζῃ μικρότερον κύκλον, τουτέστιν ἐπιφ. ΓΑ $=$ περιφ. ΓΒ $\times \frac{1}{2}$ ΓΒ· γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, συνάγομεν ἐπιφ. ΔΕΖΗ... $=$ περίμ. ΔΕΖΗ... $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ· καὶ ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ κύκλου ΓΑ· ἄρα περίμ. ΔΕΖΗ... $\times \frac{1}{2}$ ΒΑ $>$ περιφ. ΓΒ $\times \frac{1}{2}$ ΕΒ· τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Ἐπειδὴ οἱ δύο παράγοντες περιφ. ΓΒ καὶ $\frac{1}{2}$ ΓΒ εἶναι μεγαλήτεροι τῶν παραγόντων περίμ. ΔΕΖΗ . . . καὶ $\frac{1}{2}$ ΓΑ. Ἐκ τούτων ὅλων συμπεραίνομεν ἤδη, ὅτι ἡ περιφέρεια πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς προσδιορίζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰδίου κύκλου.

Πόρισμα. — Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια προσδιωρίσθη ἴση μὲ 2. π. ΓΑ (§ ιθ'. πρόβλ.) ἄρα ἐπιφ. ΓΑ$=$2. π. ΓΑ. $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ $=$π. $\overline{\text{ΓΑ}}^2$. ὥστε γνωστῆς οὔσης μόνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, προσδιορίζεται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Θεώρημα ΙΒ'.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος (σχ. 13).

Κατὰ τὰ θεωρήματα έ καὶ ς' τοῦ § γ'. ἀποδεικνύεται ταυτοχρόνως, ὅτι δύο συγκεντρικοὶ τομεῖς τοῦ αὐτοῦ, ἢ ἴσων κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ὑπ' αὐτῶν χωριζόμενα τόξα ἐπὶ τῆς περιφερείας. Καὶ ὁμοίως τομεύς τις ἔχει λόγον πρὸς τὸν ὅλον κύκλον ὡς τὸ τόξον αὐτοῦ πρὸς τὴν περιφέρειαν. Οὕτως ἔχομεν ἐπιφ. ΓΑ : ἐπιφ. ΑΓΒ : : περιφ. ΓΑ : ΑΒ. καὶ πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο δευτέρων ὅρων ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ΓΑ. συνάγομεν ἐπιφ. ΓΑ : ἐπιφ. ΑΓΒ : : περιφ. ΓΑ $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ : ΑΒ $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ. ἀλλὰ ἐπιφ. ΓΑ$=$ περιφ. ΓΑ $\times \frac{1}{2}$ ΓΑ. ἄρα καὶ ἐπιφ. ΑΓΒ $=$ ΑΒ $\times \frac{1}{2}$ ΑΓ.

Πόρισμα. —Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος ΑΜΒ. (σχ. 96) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν τομέα ΑΓΒΜ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΒ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος ΑΜΒ.

§ κδ'. *Σύγκρισις τῶν σχημάτων.*

Ἂν καὶ κατὰ τὰ ἀναπτυχθέντα ἤδη θεωρήματα περὶ τῆς καταμετρήσεως τῶν σχημάτων δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λόγον αὐτῶν, συγκρίνοντες τοὺς ἐκ τῆς καταμετρήσεώς των ἐξαγομένους ἀριθμούς, θέλομεν ἰδεῖ ὅμως ἐνταῦθα, ὅτι ἡ Γεωμετρία παρέχει ἴδια μέσα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ λόγου τούτου. Ὅθεν θέλομεν παρατηρήσει κατὰ πρῶτον, ὅτι ἡ κατὰ σταθερόν τινα λόγον σύγκρισις αὐτῶν εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων, καὶ δεύτερον, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν τὸν λόγον τοῦτον εἰς ἐκεῖνον δύο εὐθειῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐφαρμόζομεν μετὰ ταῦτα τὰ τοῦ § ϛ'.

Θεώρημα ΙΓ'.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν τῆς ἴσης γωνίας ΑΒ × ΑΓ καὶ ΑΔ × ΑΕ (σχ. 135.)

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΕ· τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΕ ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ Ε καὶ ἑπομένως τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ὡς αἱ βάσεις των· ὅθεν δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΔΕ : ΑΒΕ :: ΑΔ : ΑΒ. Παρομοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΒΓ ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὴν Β εἶναι ὡς αἱ βάσεις των καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν· ΑΒΕ : ΑΒΓ :: ΑΕ : ΑΓ· πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ἀναλογιῶν ὅρου ἐφ' ὅρον καὶ ἀπαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος ΑΒΕ, συνάγομεν ΑΔΕ : ΑΒΓ :: ΑΔ × ΑΕ : ΑΒ × ΑΓ· τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. — Τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα θέλουσιν εἶσθαι ἰσοδύναμα, ὅταν τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν τῆς ἴσης γωνίας ΑΔ × ΑΕ καὶ ΑΒ × ΑΓ ἦναι ἴσα·

Θεώρημα. ΙΔ'.

Δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· (σχ. 101).

Κατὰ πρῶτον διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ· ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓ : ΔΕΖ :: ΑΒ × ΑΓ : ΔΕ × ΔΖ· ἐκ δὲ

τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ὑπάρχει ἡ ἀναλογία· ΑΒ : ΔΕ :: ΑΓ : ΔΖ ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν ταυτοσήμαντον ΑΓ : ΔΖ :: ΑΓ : ΔΖ· δίδει ΑΒ × ΑΓ : ΔΕ × ΔΖ :: $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΔΖ}^2$· ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία τῶν τριγώνων τρέπεται εἰς ΑΒΓ : ΔΕΖ : $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΔΖ}^2$· τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Θεώρημα ΙΕ'.

Δύο ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (σχ. 105).

Ἐπειδὴ τὰ ὅμοια πολύγωνα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (§ ιϛ'. θεώρ. ή) κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα συνάγομεν τὰς ἀναλογίας ΑΒΓ : ΖΗΘ :: $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΗΘ}^2$· παρομοίως ΑΓΔ : ΖΘΙ :: $\overline{ΓΔ}^2$: $\overline{ΘΙ}^2$ καὶ ΑΔΕ : ΖΙΚ :: $\overline{ΔΕ}^2$: $\overline{ΙΚ}^2$ καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων ἔχομεν $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΗΘ}^2$ :: $\overline{ΓΔ}^2$: $\overline{ΘΙ}^2$ :: $\overline{ΔΕ}^2$: $\overline{ΙΚ}^2$· ἄρα οἱ πρῶτοι λόγοι συγκροτοῦσιν ἀναλογίαν· ὅθεν ἔχομεν τὴν πρόοδον ΑΒΓ :: ΖΗΘ :: ΑΓΔ : ΖΘΙ :: ΑΔΕ : ΖΙΚ· ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ :: ΑΒΓ : ΖΗΘ :: $\overline{ΑΒ}^2$: $\overline{ΖΗ}^2$ :: $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΗΘ}^2$· κ.τ.λ.

Θεώρημα ΙΣΤ'.

Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμμένων κύκλων (σχ. 87).

Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων· οὕτω τὰ πολύγωνα θέλουσιν ἀναλυθῇ εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἰσοσκελῶν τριγώνων ὁμοίων, ὥστε ἔχομεν τὰς ἀναλογίας ΛΟΒ : ΜΟΛ :: $\overline{ΟΛ}^2$: $\overline{ΟΜ}^2$· καὶ ΒΟΓ : ΛΟΚ :: $\overline{ΟΓ}^2$: $\overline{ΟΚ}^2$· καὶ ὁμοίως διὰ τὰ ἄλλα· ἐκ τῶν ὁποίων συνάγομεν ΛΟΒ : ΜΟΛ :: ΒΟΓ : ΛΟΚ :: ΓΟΔ : ΚΟΙ κ.τ.λ. καὶ διὰ προσθέσεως τῶν ἡγουμένων καὶ ἑπομένων ἔχομεν· ἐπιφ. ΑΒΓΔ...

: ἐπιφ. ΜΛΚΙ . . . : : ΛΟΒ : ΜΟΛ : : $\overline{ΟΛ}^2$: $\overline{ΟΜ}^2$· ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΛΟΡ καὶ ΜΟΠ συνάγομεν $\overline{ΟΛ}^2$: $\overline{ΟΜ}^2$: : $\overline{ΟΡ}^2$: $\overline{ΟΠ}^2$, ἄρα ἐπιφ. ΑΒΓΔ . . . : ἐπιφ. ΜΛΚΙ . . . : : $\overline{ΟΡ}^2$: $\overline{ΟΠ}^2$. ἄρα τὰ πολύγωνα εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες κ. τ. λ.

Θεώρημα ΙΖ'.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρέθη ἴσον μὲ π. $\overline{ΑΓ}^2$· ὅθεν ὑποθέτοντες τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων ΑΓ καὶ ΑΒ θέλομεν ἔχει ἐπιφ. ΑΓ : ἐπιφ. ΑΒ : : π. $\overline{ΑΓ}^2$: π. $\overline{ΑΒ}^2$: : $\overline{ΑΓ}^2$: $\overline{ΑΒ}^2$.

Πρόβλημα ά.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον δύο τετραγώνων; (σχ. 104).

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, ἃς ληφθῶσι τὰ μέρη ΑΒ, ΑΓ ἴσα μὲ τὰς πλευρὰς τῶν δεδομένων τετραγώνων, καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· οὕτω κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ· ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τὰ μέρη ΒΔ καὶ ΔΓ εἶναι αἱ ζητούμεναι γραμμαί· διότι ἔχομεν (§ ιζ'. θεώρ. ιά). $\overline{ΑΒ}^2$=ΒΔ$\times$ΒΓ καὶ $\overline{ΑΓ}^2$=ΔΓ$\times$ΒΓ· ὅθεν συνάγομεν $\overline{ΑΒ}^2$: $\overline{ΑΓ}^2$: : ΒΔ$\times$ΒΓ : ΔΓ$\times$ΒΓ : : ΒΔ : ΔΓ.

Σχόλιον.—Ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα ὁ λόγος δύο σχημάτων ἀνάγεται εἰς ἐκεῖνον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν, ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι γενικὸν δι' ὅλα τὰ ὅμοια σχήματα, λαμβάνομεν δὲ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας μέρη ἴσα μὲ δύο ὁμολόγους πλευράς, καὶ διὰ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς ἀνάγομεν τὸν λόγον τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἰς ἐκεῖνον δύο εὐθειῶν ΒΔ καὶ ΔΓ.

Πρόβλημα β'.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον δύο ὀρθογωνίων διαφόρου βάσεως καὶ ὕψους. (σχ. 136.)

Ἔστωσαν αἱ διαστάσεις τῶν ὀρθογωνίων, τοῦ μὲν B καὶ Y· τοῦ δὲ B' καὶ Y'· ὅθεν τὰ ὀρθογώνια ἐκφράζονται διὰ τῶν γινομένων $B \times Y$ καὶ $B' \times Y'$. Μεταξὺ τῶν γραμμῶν Y, B' καὶ Y' ἂς εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος X· λέγω, ὅτι ὁ λόγος τῶν γραμμῶν B καὶ X· θέλει εἶσθαι ὁ αὐτὸς καὶ τῶν ὀρθογωνίων· διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας $Y : B' :: Y' : X$, ἔχομεν $Y \times X = B' \times Y'$; ὅθεν ἀντικαθιστῶντες τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ταυτοσημάντου ἀναλογίας $B \times Y : B' \times Y' :: B \times Y : B' \times Y'$· συνάγομεν $B \times Y : B' \times Y' :: B \times Y : Y \times X :: B : X$.

Πόρισμα. — Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ συνάξωμεν καὶ τὸν ἤδη εὑρεθέντα λόγον τῶν τετραγώνων. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἐπειδὴ $B = Y$ καὶ $B' = Y'$, ζητοῦμεν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ B, B' καὶ B'· οὕτως $B : B' :: B' : X$, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται $B'^2 = B \times X$· καὶ ἑπομένως ἡ ἀναλογία $B^2 : B'^2 :: B \times B : B' \times B'$ τρέπεται εἰς $B^2 : B'^2 :: B \times B : B \times X :: B : X$.

Σχόλιον. — Ἐπειδὴ πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον ἢ ὀρθογώνιον· (§ κδ'. θεώρ. δ'. σχόλ.) ἄρα διὰ τοῦ προβλήματος τούτου δυνάμεθα νὰ ἀναζητήσωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον δύο σχημάτων οἱωνδήποτε, ἀνάγοντες διὰ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τῶν μὲ ταῦτα ἰσοδυνάμων ὀρθογωνίων.

§. κέ. *Προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὸ Δ'. κεφάλαιον.*

Πρόβλημα. ά.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον εὐθύγραμμον σχῆμα. (σχ. 111.)

Ἐπειδὴ πᾶν σχῆμα εὐθύγραμμον τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον ἢ ὀρθογώνιον· (§ κϐ'. θεώρ. Δ'. σχόλ.) διὰ τοῦτο λαμϐάνοντες νὰ θεωρήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον πῶς τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον, γενικεύομεν τὸ πρόϐλημα δι' ὁποιονδήποτε εὐθύγραμμον σχῆμα· ὅθεν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν Β καὶ Α βάσεως καὶ ὕψους τοῦ ὀρθογωνίου ἂς ζητηθῇ μέση ἀνάλογος ΓΧ (§ ιζ'. πρόϐλ.), καὶ αὕτη θέλει εἶσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου· διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας ΑΓ : ΓΧ : : ΓΧ : ΓΒ συνάγεται $\overline{ΓΧ}^2 = ΑΓ \times ΓΒ$ ἢ $\overline{ΓΧ}^2 = Α \times Β$.

Πόρισμα. — Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου διὰ μὲν τὸ παραλληλόγραμμον θέλει εἶσθαι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους, διὰ δὲ τὸ τρίγωνον μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους, καὶ τέλος διὰ τὸ πολύγωνον μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους τοῦ μὲ τοῦτο ἰσοδυνάμου τριγώνου.

Σχόλιον. — Ἡ ἀναζήτησις αὕτη λέγεται τετραγωνισμὸς τῶν σχημάτων· ἰδοὺ δὲ εἰς τί συνίσταται τὸ πρόϐλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον μέχρι σήμερον μένει ἄλυτον διὰ Γεωμετρικῆς κατασκευῆς.

Πρόϐλημα β'.

Νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε τετραγώνων. (σχ. 137.)

Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ, αἱ πλευραὶ τῶν προσθετέων τετραγώνων. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ἂς ληφθῶσι τὰ μέρη ΑΒ = Α καὶ ΑΕ = Β καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΒ· ὁμοίως εἰς τὸ ἄκρον Β ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΒ ἡ ΒΓ ἴση τῇ Γ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΓ, καὶ τέλος ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΓΔ ἴση τῇ Δ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΔ· αὕτη δὲ θέλει εἶσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου· ἐπειδὴ ἔχομεν· (§. ιζ'.

θεώρ. ιά.) $\overline{EB}^2=\overline{EA}^2+\overline{AB}^2$, ἢ $\overline{EB}^2=A^2+B^2$, καὶ πάλιν $\overline{E\Gamma}^2=\overline{EB}^2+\overline{B\Gamma}^2=A^2+B^2+\Gamma^2$· καὶ τέλος $\overline{E\Delta}^2=\overline{E\Gamma}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2=A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2$· παρομοίως ἐξακολουθοῦμεν, ἂν ἦσαν καὶ περισσότερα τὰ προσθετέα τετράγωνα.

Πόρισμα. — Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς λαμβάνομεν εἰς τετράγωνον τὸ πολλαπλάσιον δεδομένου τετραγώνου· τότε δὲ αἱ πλευραὶ τῶν προσθετέων τετραγώνων εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα β'. — Δυνάμεθα ἤδη νὰ τετραγωνίσωμεν ἀκανόνιστον εὐθύγγραμμον σχῆμα οἱονδήποτε. π. χ. ΑΒΓΔΕΖΗ· (σχ. 138.) τὸ ἀναλύομεν κατὰ πρῶτον εἰς τρίγωνα, τῶν τριγώνων τούτων προσδιορίζομεν τὰ ἰσοδύναμα τετράγωνα, τὰ ὁποῖα μετὰ ταῦτα προσθέτομεν διὰ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς.

Πρόβλημα γ'.

Νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων. (σχ. 139.)

Ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ἂς ληφθῇ ΑΓ ἴσον τῇ Α πλευρᾷ τοῦ ἀφαιρετέου τετραγώνου καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου Γ καὶ δι' ἀκτῖνος ΓΒ ἴσης τῇ πλετρᾷ τοῦ μειωτέου Β ἂς περιγραφθῇ τόξον τέμνον τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Β· οὕτως ἡ ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\overline{\Gamma B}^2=\overline{A\Gamma}^2+\overline{AB}^2$ συνάγομεν $\overline{AB}^2=\overline{\Gamma B}^2-\overline{A\Gamma}^2$.

Σχόλιον. — Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν δύω ἢ περισσότερα τετράγωνα, τότε λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφαιρετέων καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ὡς ἀνωτέρω.

Πρόβλημα δ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς δεδομένον ὡς ἡ γραμμὴ Μ πρὸς τὴν Ν. (σχ. 140.)

Ἐπί τινος εὐθείας ἂς ληφθῶσι τὰ μέρη ΒΓ καὶ ΓΑ ἴσα μὲ τὰς δεδομένας εὐθείας Μ καὶ Ν· καὶ ἂς περιγραφθῇ ἡμιπεριφέρεια. Εἰς τὸ σημεῖον Γ ἂς ὑψωθῇ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΑ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΑΔ προεκβαλλόμεναι ἀορίστως· ἐπὶ τῆς πρώτης ΒΔ ἂς ληφθῇ ΔΕ ἴση τῇ πλευρᾷ Α τοῦ δεδομένου τετραγώνου· καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΒΑ· λέγω ἤδη, ὅτι ΔΖ θέλει εἶσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΕΖ καὶ ΒΑ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $ΔΕ:ΔΖ::ΔΒ:ΔΑ$ ἢ $\overline{ΔΕ}^2:\overline{ΔΖ}^2::\overline{ΔΒ}^2:\overline{ΔΑ}^2$. Ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΓΔ καὶ ΓΔΑ μὲ τὸ ὅλον ΒΔΑ (§ ιζ'. θεώρ. ιά.) ἔχομεν τὰς ἀναλογίας $ΒΓ:ΒΔ::ΒΔ:ΒΑ$ καὶ $ΓΑ:ΔΑ::ΔΑ:ΒΑ$· ἐκ τούτων συνάγομεν $\overline{ΔΒ}^2=ΒΓ\times ΒΑ$ καὶ $\overline{ΔΑ}^2=ΓΑ\times ΒΑ$· καὶ ἑπομένως τὴν ἀναλογίαν $\overline{ΔΒ}^2:\overline{ΔΑ}^2::ΒΓ:ΓΑ$· ὅθεν ἡ ἀνωτέρα ἀναλογία τρέπεται εἰς $\overline{ΔΕ}^2:\overline{ΔΖ}^2::ΒΓ:ΓΑ$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων τρέπεται εἰς τὴν ζητουμένην $Α^2:\overline{ΔΖ}^2::Μ:Ν$.

Πόρισμα. — Μία τῶν ἐφαρμογῶν τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι καὶ ἡ διαίρεσις δεδομένου τετραγώνου δι' ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὴν γραμμὴν Ν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, κ. τ. λ. τῆς Μ, καὶ τότε τὸ τετράγωνον τῆς ΔΖ θέλει εἶσθαι παρομοίως τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κ. τ. λ. τοῦ δεδομένου.

Πρόβλημα έ.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον τετράγωνον, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ δίδωσι δεδομένον ἄθροισμα ΑΒ. (σχ. 141.)

Ἐπὶ τῆς δεδομένης ΑΒ ἂς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια· εἰς τὸ ἄκρον Α ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἡ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τοῦ δεδομένου τετραγώνου καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος τῆς ΑΒ τέμνουσα τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, ἐξ ἑνὸς τούτων ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ π. χ. ἡ ΕΗ· οὕτω τὰ τμήματα ΑΗ καὶ ΗΒ θέλουσιν εἶσθαι αἱ διαστάσεις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· διότι ἔχομεν μὲν $ΑΗ+ΗΒ=ΑΒ$, ἔτι δὲ ΑΗ : ΕΗ : : ΕΗ : ΗΒ· (§ ιζ'. πρόβ.) ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $ΑΗ\times ΗΒ=\overline{ΕΗ}^2=\overline{ΑΔ}^2=Γ$.

Σχόλιον. — Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν ἐπιλύεται ὁσάκις ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς δεδομένης ΑΒ· ἐπειδὴ τότε δὲν προσδιορίζεται σημεῖον ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας· δίδεται δὲ μία μόνον λύσις, ἢ τὸ ἴδιον τοῦτο τετράγωνον Γ· ὅταν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἦναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ.

Πρόβλημα στ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον τετράγωνον Γ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσι δεδομένην διαφορὰν ΑΒ. (σχ. 142.)

Ἐπὶ τῆς ΑΒ ἂς γραφθῇ περιφέρεια· εἰς τὸ ἄκρον Α ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΑΔ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου, ἂς ἐπιζευχθῇ τὸ ἄκρον Δ μὲ τὸ κέντρον Ο, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΔΟ ἕως τοῦ σημείου Ε· λέγω, ὅτι ΔΕ καὶ ΔΖ θέλουσιν εἶσθαι αἱ δύο διαστάσεις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· διότι ἔχομεν $ΔΕ-ΔΖ=ΖΕ=ΑΒ$· ἔτι δὲ τὴν ἀναλογίαν ΔΕ : ΑΔ : : ΑΔ : ΔΖ· (§ ιζ'. θεώρ. ις'.) ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται $ΔΕ\times ΔΖ=\overline{ΑΔ}^2=Γ$.

Πρόβλημα ζ'.

Δεδομένου τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΖΗ ὁμολόγου τῆς πλευρᾶς ΑΒ νὰ κατασκευάσωμεν ὅμοιον πολύγωνον. (σχ. 105.)

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΑΔ· εἰς τὸ σημεῖον Ζ ἂς κατασκευασθῆ ἡ γωνία ΘΖΗ ἴση τῇ ΒΑΓ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Η ἡ ΖΘΗ ἴση τῇ ΑΒΓ. Οὕτω τὸ τρίγωνον ΖΗΘ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. Παρομοίως ἐπὶ τῆς ΖΘ ἂς κατασκεύασθῆ τὸ τρίγωνον ΖΘΙ ὅμοιον τῷ ΑΓΔ, καὶ τέλος τὸ ΖΙΚ ὅμοιον τῷ ΑΔΕ· τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον ΖΗΘΙΚ θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον (§ ις'. θεώρ. ή.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

§ κς'. *Περὶ καθέτων καὶ πλαγίων εἰς τὸ διάστημα.*

Εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα, τὰ ὁποῖα μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν, ὅλαι αἱ γραμμαὶ αὐτῶν καὶ ἐκεῖναι τῆς κατασκευῆς εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ γραμμαὶ, τὰς ὁποίας θεωροῦμεν εἴτε ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν στερεῶν εἴτε ἐντὸς αὐτῶν εὑρίσκονται εἰς διάφορα ἐπίπεδα, θέλομεν θεωρήσει διὰ τοῦτο ἐνταῦθα γραμμὰς διευθυνομένας ὁπωσδήποτε εἰς τὸ διάστημα καὶ ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων. Ὅθεν πρὶν μεταβῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν στερεῶν καὶ τὴν καταμέτρησίν των θέλομεν ἀναπτύξει προηγουμένως ἀναγκαίας τινας προτάσεις, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἅπασα ἡ θεωρία τῶν στερεῶν, καὶ πρῶτον μὲν ὡς πρὸς τὰς καθέτους καὶ πλαγίας εἰς τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον, ὅταν ἦναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς διὰ τοῦ ποδός της διερχομένας εὐθείας, πλαγία δὲ εἰς τὴν ἐναντίαν περίστασιν.

Ὀνομάζομεν πόδα τῆς καθέτου τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς συμπτώσεως τῆς καθέτου καὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Θεώρημα Α'.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΒΓ συμπίπτουσαι κατά τι σημεῖον Α προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου (σχ. 5.)

Ἂν ἐννοήσωμεν διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ διερχόμενα ἄπειρα τὸ πλῆθος ἐπίπεδα, ἢ ἐπίπεδόν τι καθ' ὅλας τὰς θέσεις τῆς περιστροφῆς αὐτοῦ περὶ τὴν γραμμὴν ΑΒ. Οὕτω τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κατὰ τὴν περιστροφὴν θέλει συναπαντήσει σημεῖόν τι Γ τῆς ἑτέρας εὐθείας ΑΓ, καὶ τότε ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ ἐπίπεδον, κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτοῦ ἐφαρμόζεται καθ' ὅλα της τὰ σημεῖα. Ὥστε αἱ δύο εὐθεῖαι, ΑΒ καὶ ΑΓ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἢ προσδιορίζουσι τὴν θέσιν αὐτοῦ.

Πόρισμα ά.—Ὡσαύτως τρία μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα Α, Β, Γ προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου, ἐπειδὴ ἐπιζευγνύμενα δίδουσι δύο συμπιπτούσας εὐθείας. Καὶ παρομοίως δύο παράλληλοι γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐπειδὴ ἀγομένης τῆς διατεμνούσης ΕΖ, τὸ ἐπίπεδον τῆς ΑΒ καὶ ΕΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς ΓΔ καὶ ΕΖ καὶ ἑπομένως τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 20.)

Πόρισμα β'. — Ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Ἐπειδὴ ἂν ὑποτεθῇ κεκλασμένη ἢ καμπύλη, τότε ὑπάρχουσι πολλὰ μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα κοινὰ καὶ τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα ταυτίζονται.

Θεώρημα Β'.

Ἡ εὐθεῖα ΑΔ κάθετος εἰς τὰς δύο ΔΕ καὶ ΔΖ διασταυρουμένας εἰς τὸν πόδα της, εἶναι κάθετος καὶ εἰς ὅλας τὰς διὰ τοῦ ποδός της διερχομένας εὐθείας κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν πρώτων, καὶ ἑπομένως κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον (σχ. 143.)

Ἔστω καὶ ἄλλη τις εὐθεῖα ΔΗ διερχομένη διὰ τοῦ ποδὸς Δ· ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ τέμνουσα τὰς τρεῖς εὐθείας ΕΔ, ΔΗ καὶ ΔΖ ὁπωσδήποτε· καὶ προεκβαλλομένης τῆς ΑΔ ἂς ληφθῇ ΔΓ=ΑΔ· καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ. Ἐπειδὴ ΑΔ ἦναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ καὶ ΔΖ, καὶ τὸ ἀντίστροφον ἡ ΔΕ καὶ ΔΖ εἶναι παρομοίως κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΓ· καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΑΔ=ΔΓ, ἄρα αἱ πλάγιαι εἶναι ἴσαι τουτέστι ΑΕ=ΕΓ καὶ ΑΖ=ΖΓ· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΕΖ καὶ ΓΕΖ ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἴσας εἶναι ἴσα καὶ ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν γωνίαν ΑΕΖ=ΓΕΖ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΕΗ καὶ ΓΕΗ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων εἶναι παρομοίως ἴσα· ὅθεν ΑΗ=ΓΗ· ἀλλὰ καὶ ΑΔ=ΔΓ, ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΓ ἢ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΗ. Παρομοίως λέγομεν καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ ποδὸς Δ· ἄρα ΑΔ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

Πόρισμα ά. — Ἡ κάθετος ΑΔ μετρᾷ τὸ συντομώτερον διάστημα τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

Πόρισμα β'. — Ἐκ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ μία μόνη κάθετος δύναται νὰ ὑψωθῇ ἡ ΔΑ· διότι, ἂν ὑποτεθῇ καὶ δευτέρα τὶς ἡ ΔΚ, διερχομένου τοῦ ἐπιπέδου ΑΔΚ τῶν γραμμῶν ΑΔ καὶ ΔΚ τέμνοντος τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κατά τινα τομὴν ΔΡ, ἡ ΔΚ θέλει εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τῆς τομῆς, ὡς διερχομένης διὰ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου Δ, ἀλλὰ καὶ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ἰδίας διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν δύο καθέτους ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α τῆς εὐθείας ΠΡ, κειμένας δὲ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΔΡ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Παρομοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐκτός τινος ἐπιπέδου μίαν μόνην κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. — Ἐπειδὴ ἂν ὑποτεθῶσι δύο ΑΔ καὶ ΑΖ, τότε τὸ ὑπ' αὐτῶν προσδιοριζόμενον ἐπίπεδον ΑΔΖ τέμνει τὸ πρῶτον κατά τινα εὐθεῖαν ΖΔ, ἐπὶ τῆς ὁποίας παρουσιάζονται δύο κάθετοι ΑΖ καὶ ΑΔ ἀγόμεναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Θεώρημα Γ'.

Αἱ πλάγιαι αἱ ἀπέχουσαι ἐξ ἴσου τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι, κατ' ἄνισα δὲ ἀποστήματα ἡ μᾶλλον ἀφισταμένη εἶναι ἡ μεγαλητέρα (σχ. 144).

Ἔστωσαν τὰ ἀποστήματα ΠΒ, ΠΓ, ΠΔ κ.τ.λ. ἴσα· πρέπει καὶ αἱ πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ κ.τ.λ. νὰ ἦναι ἴσαι· ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΠΒ, ΑΠΓ, ΑΠΔ κ.τ.λ. ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΠ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΠΒ, ΠΓ, κ.τ.λ. ἴσας, εἶναι διὰ τοῦτο ἴσα· ὅθεν ΑΒ=ΑΓ=ΑΔ. κ.τ.λ.

Ἔστω ἤδη ΠΕ>ΠΓ πρέπει καὶ ΑΕ νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓ· ἐπειδὴ ἂς ληφθῇ ΠΔ=ΠΓ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ· οὕτως ἔχομεν ΑΕ>ΑΔ (§ έ θεώρ. θ'.) ἀλλὰ ΑΔ=ΑΓ, ἄρα ΑΕ>ΑΓ.

Πόρισμα ά. — Αἱ ἴσαι πλάγιαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου περατοῦνται εἰς τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τῆς διαγραφομένης ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ὡς κέντρου καὶ διὰ τοῦ ἀποστήματός των ὡς ἀκτῖνος. Ὅθεν διὰ νὰ ἀγάγωμεν κάθετον ἐπί τινος ἐπιπέδου ἀπὸ δεδομένου σημείου, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρία σημεῖα ἀπέχοντα ἐξίσου ἀπὸ τοῦ δεδομένου, διὰ τῶν σημείων τούτων γράφομεν περιφέρειαν καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς θέλει εἶσθαι ὁ ποὺς τῆς καθέτου, τὸν ὁποῖον ἐπιζευγνύομεν μὲ τὸ ἐκτὸς σημεῖον.

Θεώρημα Δ'.

Ἂν ἐκ τινος σημείου Α ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΒ καὶ ἡ πλαγία ΑΣ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, διὰ δὲ τοῦ ποδὸς τῆς πλαγίας Σ διέλθῃ ἡ ΟΚ κάθετος εἰς τὸ ἀπόστημα αὐτῆς ΒΣ, πρέπει ἡ πλαγία ΑΣ νὰ ἦναι κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΚ. (σχ. 145).

Ἂς ληφθῇ ΣΚ=ΣΟ· ἐκ τούτου αἱ πλάγιαι ΒΟ καὶ ΒΚ εἶναι ἴσαι (§ ἑ θεώρ. ή·) καὶ κατὰ τὸ ἀνωτέρω καὶ αἱ πλάγιαι ΑΟ καὶ ΑΚ εἶναι παρομοίως ἴσαι· ἀλλ' ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΣΚ =ΣΟ· ἄρα ΑΣ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΚΟ. (§ ἑ θεώρ. Ί πόρ.)

Πόρισμα. — Ἡ εὐθεῖα ΚΟ κάθετος εἰς τὰς εὐθείας ΒΣ καὶ ΑΣ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΒΣ.

Σχόλιον. — Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΚΟ προεκβαλλόμεναι δὲν δύνανται νὰ συμπέσωσιν, ὡς μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὸ βραχύτερον δὲ μεταξὺ τούτων διάστημα μετρᾶται διὰ τῆς καθέτου ΒΣ· αἱ εὐθεῖαι αὗται, ἂν καὶ ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων, ὑποτίθενται ὡς σχηματίζουσαι γωνίαν ὀρθὴν, ἣ ὁποίαν ἤθελε σχηματίσει ἡ ἀπὸ τοῦ ποδὸς Β ἀγομένη παράλληλος τῆς ΚΟ. Παρομοίως αἱ εὐθεῖαι ΑΟ καὶ ΒΣ ὑπολαμβάνονται ὡς σχηματίζουσαι τὴν γωνίαν ΑΟΤ, τῆς πλαγίας ΑΟ μετὰ τῆς ΤΟ παραλλήλου τῆς ΒΣ.

Θεώρημα Ε'.

Ἐάν τις εὐθεῖα ΑΠ ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ πᾶσα ἄλλη ΔΕ παράλληλος αὐτῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (σχ. 146.)

Ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν τέμνον τὸ ΜΝ κατὰ τὴν τομὴν ΠΔ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΔ, αὕτη κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα, εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΠΔ καὶ ἑπομένως εἰς τὴν εὐθεῖαν ΕΔ· ἡ ΕΔ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΓ. Τούτου τεθέντος, ἡ ΕΔ κάθετος εἰς ΠΔ ὡς παράλληλος τῆς καθέτου ΑΠ, ἅμα δὲ εἰς τὴν ΒΓ, εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ. (§ κς' θεώρ. 6').

Πόρισμα. — Ἀντιστρόφως δύο εὐθεῖαι ΑΠ καὶ ΔΕ κάθεται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ ἄλλως ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἀγάγωμεν παράλληλον τῆς ΑΠ, αὕτη θέλει εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ· ὅθεν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν δύο καθέτους, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

§ κζ'. *Περὶ παραλλήλων εἰς τὸ διάστημα.*

Εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ὅταν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλόμενα ἑκατέρωθεν δὲν δύνανται νὰ συμπέσωσι.

Παρομοίως δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ὅταν ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλόμενα καθ' ὅλα των τὰ μέρη δὲν δύνανται νὰ συμπέσωσι.

Θεώρημα ΣΤ'.

Δύο εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΖ παράλληλοι πρὸς τρίτην ΓΕ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι (σχ. 147.)

Διότι ἂν φαντασθῶμεν ἐπίπεδον ΜΝ κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν Γ, τοῦτο θέλει εἶσθαι κάθετον καὶ εἰς τὰς δύο παραλλήλους Α καὶ Β· ὅθεν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι.

Θεώρημα Ζ'.

Ἡ Εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος τῆς ΓΔ κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ εἶναι παράλληλος καὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. (σχ. 148.)

Διότι ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΒ προεκβαλλομένη συμπίπτη μὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, τὸ κοινὸν σημεῖον θέλει εἶσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, ἤτοι ἓν τῶν σημείων τῆς προεκβολῆς τῆς ΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Θεωρημα Η'.

Αἱ κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΚ ὑπὸ τρίτου ΒΔ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι. (σχ. 149.)

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ προεκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο θέλει εἶσθαι κοινὸν καὶ τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΚ καὶ ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα δὲν εἶναι παράλληλα.

Πόρισμα. — Ἡ εὐθεῖα ΑΔ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ παράλληλον αὐτοῦ ΠΚ· ἐπειδὴ ἂν διὰ τῆς ΑΔ διέλθῃ ἐπίπεδον τέμνον τὰ παράλληλα κατὰ τὰς παραλλήλους τομὰς ΑΓ καὶ ΔΕ, ἡ εὐθεῖα ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΓ ὡς διερχομένης διὰ τοῦ ποδός της Α, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἀποδεικνύεται κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΔΖ· ἄρα ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ. (σχ. 147.)

Θεώρημα Θ'.

Αἱ παράλληλοι ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων ΜΝ καὶ ΠΚ εἶναι ἴσαι. (σχ. 149).

Ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνον τὰ παράλληλα ΜΝ καὶ ΠΚ κατὰ τὰς παραλλήλους τομὰς ΑΒ καὶ ΔΓ· οὕτω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ θέλει εἶσθαι παραλληλόγραμμον, καὶ ἑπομένως αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι. (§ ιδ'. θεώρ. Ι.)

Πόρισμα. — Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ ὑποτεθῶσι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ ἑπομένως καὶ εἰς τὸ παράλληλον αὐτοῦ ΠΚ, αὗται μετρῶσι τὸ ἀπόστημα τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων· ὅθεν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀπέχουσιν ἐξίσου καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα.

Θεώρημα Ι.

Δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΖΔΕ ἐπὶ δύο ἐπιπέδων ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ διευθυνομένας ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδά των παράλληλα. (σχ. 147.)

Ἂς ληφθῇ ΑΓ=ΔΕ καὶ ΑΒ=ΔΖ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΕΖ, καὶ ὁμοίως ΑΔ, ΓΕ καὶ ΒΖ. Ἐπειδὴ ΑΓ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΕ, ἄρα καὶ ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΕ (§ ιϐ'. θεώρ. ιϐ'.) παρομοίως ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΖ, ἄρα καὶ ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΖ. Ὅθεν αἱ εὐθεῖαι ΓΕ καὶ ΒΖ ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τρίτην ΑΔ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον ΓΒΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ἔχομεν ΓΒ=ΕΖ· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΕΔΖ εἶναι μεταξύ των ἰσόπλευρα καὶ ἐπομένως ἴσα· ἐκ τούτου συνάγομεν καὶ γωνίαν ΒΑΓ ἴσην τῇ ΖΔΕ.

Λέγομεν δεύτερον, ὅτι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν ΜΝ καὶ ΠΚ εἶναι παράλληλα· διότι ἂν ὑποθέσωμεν ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΜΝ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Δ, τοῦτο συναπαντῶν τὰς γραμμὰς ΓΕ καὶ ΒΖ εἰς δύο ἕτερα σημεῖα Η καὶ Θ, προσδιορίζει τὰς γραμμὰς ΑΔ, ΓΗ, καὶ ΒΘ ἴσας· ἀλλ' ἔχομεν καὶ ΓΕ ἢ ΒΖ ἴσην τῇ ΑΔ· ὅθεν συνάγεται ΓΕ ἴση τῇ ΓΗ καὶ ΒΖ ἴση τῇ ΒΘ· τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Πόρισμα ά. — Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα ΑΖ καὶ ΑΕ συναπαντώμενα ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΚ δίδουσι τὰς γωνίας τῶν τομῶν ἴσας, ὡς ἐχούσας τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ διευθυνομένας ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος.

Πόρισμα β'. — Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΖ καὶ ΓΕ μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα διὰ τῆς ἑνώσεως τῶν κορυφῶν των εἶναι ἴσα, καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα.

Θεώρημα ΙΑ΄.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ περιεχόμεναι μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα. (σχ. 150.)

Ἂς ἐπιζευχθῶσι κατὰ πρῶτον τὰ σημεῖα Α καὶ Δ διὰ τῆς ΑΔ συναπαντώσης τὸ ἐπίπεδον ΠΚ εἰς τὸ σημεῖον Η, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ τομαὶ ΕΗ, ΒΔ, ΑΓ καὶ ΗΖ τῶν ἐπιπέδων ΒΑΔ καὶ ΑΔΓ ὑπὸ τῶν τριῶν παραλλήλων. Οὕτως ἔχομεν (§ κζ΄. θεώρ. ή.) τὴν ΕΗ παράλληλον τῇ ΒΔ καὶ ὁμοίως τὴν ΗΖ παράλληλον τῇ ΑΓ· ὅθεν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ δίδει τὴν ἀναλογίαν ΑΕ : ΕΒ : : ΑΗ : ΗΔ· (§ ιέ. θεώρ. ά.) καὶ παρομοίως τὸ τρίγωνον ΑΔΓ δίδει ΔΗ : ΗΔ : : ΓΖ : ΖΔ· ὑπάρχοντος δὲ κοινοῦ τοῦ δευτέρου λόγου εἰς τὰς δύο ἀναλογίας, συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν τῶν πρώτων ΑΕ : ΕΒ : : ΓΖ : ΖΔ· τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

§. κη΄. *Περὶ τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων.*

Κλίσις ὀνομάζεται ἡ μᾶλλον ἢ ἧττον μεγάλη ποσότης, κατὰ τὴν ὁποίαν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων· τὴν κλίσιν ταύτην σημειώνομεν διὰ τεσσάρων γραμμάτων, δύο τῶν ἐπιπέδων καὶ δύο τῆς κοινῆς τομῆς, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται μέσα, οὕτως ΜΑΒΝ παριστᾷ τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΜΒ καὶ ΝΒ. (σχ. 151.)

Εἰς τὰ ἑπόμενα θεωρήματα θέλομεν ἀποδείξει, ὅτι ἡ κλίσις δύο ἐπιπέδων μετρᾶται διὰ τῆς γωνίας δύο εὐθειῶν ὑψουμένων καθέτως ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, κειμένων δὲ τῆς μὲν ἐπὶ τοῦ ἑνὸς, τῆς δὲ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἐπιπέδου. Οὕτως ἡ κλίσις ΜΑΒΝ ἔχει διὰ μέτρον τὴν γωνίαν ΖΔΗ ἢ ΘΕΙ. κ. τ. λ. (σχ. 151.) Τούτου τεθέντος, ἡ κλίσις εἶναι ὀρθὴ, ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα κατὰ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας τῶν καθέτων, ἡ ὁποία χρησιμεύει ὡς μέτρον.

Θεώρημα ΙΒ'.

Αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ὑπὸ τῶν καθέτων εἰς πᾶν σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων εἶναι ἴσαι. (σχ. 151.)

Εἰς τὴν κλίσιν ΜΑΒΝ, ἂς ληφθῶσι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τῆς κοινῆς τομῆς ΑΒ, καὶ ἂς ὑψωθῶσιν αἱ κάθετοι ΔΖ, ΔΗ, ΕΘ, ΕΙ ἐπὶ τῆς τομῆς ΑΒ, κείμεναι δὲ αἱ μὲν ἐπὶ τοῦ ἑνὸς, αἱ δὲ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἐπιπέδου· οὕτω σχηματίζονται αἱ γωνίαι ΖΔΗ καὶ ΘΕΙ, αἱ ὁποῖαι εἶναι· ἐπειδὴ αἱ πλευραί των κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι παράλληλοι, ἅμα δὲ διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. (§ κζ'. θεώρ. Ι.)

Θεώρημα ΙΓ'.

Αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς αἱ ὑπὸ τῶν καθέτων σχηματιζόμεναι γωνίαι. (σχ. 152.)

Ἔστωσαν αἱ δύο κλίσεις ΠΑΒΜ καὶ ΠΑΒΔ· ἂς ὑψωθῶσιν αἱ κάθετοι ΑΠ, ΑΔ, ΑΜ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΒ καὶ ὁμοίως αἱ κάθετοι ΒΡ, ΒΕ καὶ ΒΝ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ὥστε ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς κέντρων καὶ δι' ἀκτῖνος ΑΜ ἢ ΒΝ νὰ περιγράφωνται τὰ ἴσα τόξα ΜΔΠ καὶ ΝΕΡ, τὰ ὁποῖα μετρῶσι τὰς εἰς τὸ κέντρον γωνίας ΜΑΠ καὶ ΝΒΡ· λέγομεν ἤδη, ὅτι πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν ΠΑΜ : ΠΑΔ ἢ ΠΜ : ΠΔ : : ΠΑΒΜ : ΠΑΒΔ. Εἶναι μὲν φανερὸν κατὰ πρῶτον ὅτι, ἂν αἱ γωνίαι τῶν καθέτων ἦναι ἴσαι, καὶ αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων εἶναι ἴσαι· οὕτως ἂν ἔχωμεν ΠΑΔ=ΔΑΜ, πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ τὰς κλίσεις ΠΑΒΔ καὶ ΔΑΒΜ ἴσας· ἐπειδὴ ἂν ἐφαρμοσθῇ ἡ βάσις ΜΑΔ ἐπὶ τῆς ἴσης ΔΑΠ, πρέπει καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΝ καὶ ΑΕ νὰ ἐφαρμόσωσιν μὲ τὰ ἐπίπεδα ΑΡ καὶ ΑΕ, διότι ἄλλως ἡ γωνία ΔΑΜ ἢ ΔΑΠ δὲν ἤθελεν εἶσθαι μέτρον σταθερὸν δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς ΑΒ. Τούτου τεθέντος, λέγομεν ἤδη, ἂν αἱ γωνίαι ΜΑΠ καὶ ΔΑΠ ἦναι ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον θέλουσιν εἶσθαι καὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς αὐτὰς κλίσεις. Διότι διαιροῦντες τὴν ὅλην γωνίαν ΜΑΠ, ἢ τὸ τόξον ΜΠ εἰς μέρη ἴσα καὶ ὑποθέτοντες διερχόμενα ἐπίπεδα διὰ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΒ καὶ τῶν διαιρέσεων τῆς γωνίας, ἢ τοῦ τόξου παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ ἡ κλίσις ΜΑΒΠ διαιρεῖται παρομοίως εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τόσα ἀποτελοῦσι τὴν ΠΑΒΔ, ὅσα ἐκ τῶν μερῶν τῆς γωνίας ΠΑΜ συμπληροῦσι τὴν ΠΑΔ· ὅθεν συνάγομεν τὴν ῥηθεῖσαν ἀναλογίαν.

Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, ἂν ὁ λόγος οὗτος ὑπάρχῃ, καὶ ὅταν αἱ γωνίαι ἢ τὰ τόξα αὐτῶν ἦναι ἔκμετρα. Ἀλλὰ καθὼς καὶ ἄλλοτε οὕτω καὶ εἰς τὴν περίστασιν ταύτην δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν καὶ ἀπόδειξιν διὰ τῆς εἰς τὸ ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὡς πρὸς τὸν τέταρτον ὅρον τῆς προκειμένης ἀναλογίας, ὅτι δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει οὔτε μικρότερος, οὔτε μεγαλήτερος τοῦ ΠΑΒΔ· καὶ ἐκ τούτου νὰ συμπεράνωμεν τὴν ὕπαρξιν τῆς ἀναλογίας ΠΑΜ : ΠΑΔ ἢ ΠΜ : ΠΔ : : ΠΑΒΜ : ΠΑΒΔ.

Πόρισμα ά. — Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται, ὅτι ἡ γωνία τῶν καθέτων ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ὅρος συγκρίσεως τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων.

Πόρισμα β΄. Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ τῶν κλίσεων τὰ αὐτὰ θεωρήματα τῶν γωνιῶν· ὅτι δηλαδὴ αἱ κατὰ κορυφὴν κλίσεις εἶναι ἴσαι, τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων κλίσεων, σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς συναπαντήσεως δύο ἐπιπέδων, ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς· καὶ παρομοίως τὰς αὐτὰς ἰδιότητας τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τεμνομένων ὑπὸ τρίτου τινὸς κ. τ. λ. ὡς καὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας.

§. κθ'. *Περὶ καθέτων ἐπιπέδων.*

Δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των, ὅταν κατὰ τὸ προσδιορισθὲν ἤδη μέτρον τῆς κλίσεως σχηματίζωσι κλίσεις ὀρθάς.

Θεώρημα ΙΔ'.

Ἐάν τις εὐθεῖα ΑΠ ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς καθέτου εἶναι παρομοίως κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. (σχ. 153.)

Ἔστω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ δεδομένου ΜΝ καὶ τοῦ ΑΠΒ διερχομένου διὰ τῆς ΑΠ. Εἰς τὸ σημεῖον Π ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἡ ΔΠ ἐπὶ τῆς τομῆς ΒΓ· ἡ γωνία ΑΠΔ θέλει εἶσθαι ὀρθή, ἐπειδὴ ἡ ΑΠ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς διερχομένης διὰ τοῦ ποδός της ΔΠ· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΠΔ κατὰ τὸν ἀνωτέρω προσδιορισμὸν μετρᾷ τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΑΒ, ἄρα ἡ κλίσις αὕτη εἶναι ὀρθή, καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον ΑΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ΜΝ.

Σχόλιον. — Ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι ὡς ΑΠ, ΒΠ, καὶ ΔΠ ἦναι κάθετοι μεταξύ των, ἑκάστη τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων, τὰ δὲ προσδιοριζόμενα ὑπὸ τούτων τρία ἐπίπεδα εἶναι συναλλήλως κάθετα.

Θεώρημα ΙΕ'.

Ἀντιστρόφως, ἂν δύο ἐπίπεδα ἦναι κάθετα μεταξύ των, ἡ ὑψουμένη κάθετος ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου κατά τι σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἐπιπέδου. (σχ. 153.)

Ἐπειδὴ ἂν ἡ κάθετος αὕτη εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ δευτέρου ἐπιπέδου, τότε καὶ ἄλλη τις κάθετος ἀγομένη κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς, κειμένη δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρέπει νὰ ἦναι ἐπίσης κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ· ὅθεν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Π δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν δύο καθέτους ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Θεώρημα ΙΣΤ'.

Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπί τινος τρίτου ἔχουσι τὴν κοινὴν τομήν των κάθετον ἐπ' αὐτοῦ. (σχ. 152.)

Διότι, ἂν ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου Α καὶ τῶν τριῶν ἐπιπέδων ΠΑΜ, ΜΑΝ, καὶ ΠΑΒ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΑΠ, αὕτη κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΝ καὶ ΑΡ, καὶ ἑπομένως ταυτίζεται μὲ τὴν κοινὴν τομὴν ΑΒ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΑΠ.

Θεώρημα ΙΖ'.

Διά τινος εὐθείας ΑΒ κειμένης ὁπωσδήποτε ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἓν μόνον ἐπίπεδον ΑΓΔΒ δύναται νὰ διέλθῃ καθέτως ἐπὶ τοῦ ΜΝ. (σχ. 154).

Ἔστω, εἰ δυνατὸν, καὶ τὸ ἐπίποδον ΑΕΖΒ κάθετον ἐπὶ τοῦ ΜΝ. Ἔκ τινος σημείου Η τῆς δεδομένης εὐθείας ἂς ἀχθῶσιν αἱ δύο κάθετοι ΗΘ καὶ ΗΚ ἐπὶ τῶν τομῶν ΓΔ καὶ ΕΖ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Θ καὶ Κ· αἱ κάθετοι αὗται ἀνήκουσαι εἰς ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τοῦ ΜΝ πρέπει νὰ ἦναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, καὶ ἑπομένως ἐπὶ τῆς ΘΚ διερχομένης διὰ τοῦ ποδός των. Οὕτως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΘΚ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο καθέτους ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Θεώρημα ΙΗ'.

Διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἓν μόνον ἐπίπεδον ΑΒΓΔ διέρχεται καθέτως ἐπὶ τοῦ ΜΝ. (σχ. 155.)

Διότι ἔστω, εἰ δυνατὸν, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕΖ κάθετον ἐπὶ τοῦ ΜΝ. Ἔκ τινος σημείου Η τῆς εὐθείας ΑΒ ἂς ὑψωθῶσιν ἐπ' αὐτῆς αἱ κάθετοι ΗΘ καὶ ΗΚ καὶ ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΘΗΚ τέμνον τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατὰ τὴν τομὴν ΗΛ. Αἱ κάθετοι ΗΘ καὶ ΗΚ ἀνήκουσαι εἰς τὰ ἐπίπεδα ΑΓ καὶ ΑΕ, ἀμφότερα καθ' ὑπόθεσιν κάθετα ἐπὶ τοῦ ΜΝ, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ὅθεν καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΛ διερχομένης διὰ τοῦ ποδός των· ἀλλὰ ΗΛ, ΗΘ καὶ ΗΚ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἄρα δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η δύο καθέτους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΛΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

§ Λ'. *Περὶ στερεῶν γωνιῶν.*

Γωνία στερεὰ ὀνομάζεται τὸ περιεχόμενον διάστημα ὑπὸ πολλῶν ἐπιπέδων γωνιῶν συνερχομένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Οὕτως ἡ στερεὰ γωνία Σ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ καὶ ΓΣΑ. (σχ. 156.)

Ἡ στερεὰ γωνία λέγεται τρίεδρος τετράεδρος, κ.τ.λ. κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα λέγονται ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας.

Αἱ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κ.τ.λ. λέγονται πλευραί, τὸ δὲ σημεῖον Σ κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας.

Διὰ τὸν σχηματισμὸν στερεᾶς γωνίας ἀπαιτοῦνται τοὐλάχιστον τρεῖς ἐπίπεδοι. Ὅθεν ἡ τρίεδρος εἶναι ἡ ἁπλουστέρα.

Θεώρημα ΙΘ'.

Ἡ μία τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι τρίεδρον στερεάν, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο. (σχ. 156.)

Ἂν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ἦναι ἴσαι μεταξύ των, τότε τὸ θεώρημα γίνεται ἀφ' ἑαυτοῦ φανερόν, καὶ πολλῷ μᾶλλον ὅταν ἡ συγκρινομένη τρίτη ἦναι μικροτέρα ἑκατέρας τῶν ἄλλων· ὥστε μένει νὰ θεωρήσωμεν μόνην τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ἡ συγκρινομένη τρίτη εἶναι μεγαλητέρα ἑκατέρας τῶν ἄλλων. Ὅθεν εἰς τὴν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν Σ ἂς ὑποτεθῇ

ΑΣΒ μεγαλητέρα ἑκατέρας τῶν ἄλλων· πρέπει νὰ ἔχωμεν ΑΣΒ<ΒΣΓ+ΑΣΓ· ἂς σχηματισθῇ ἡ γωνία ΒΣΔ ἴση τῇ ΒΣΓ· ἂς ἀχθῇ κατὰ τὸ δοκοῦν ἡ ΒΔΑ· ἂς ληφθῇ ΣΓ=ΣΔ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΑΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΣΓ καὶ ΒΣΔ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων εἶναι ἴσα· ὅθεν καὶ ἡ πλευρὰ ΒΔ=ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ<ΑΓ+ΒΓ ἢ ΑΔ+ΔΒ<ΑΓ+ΒΓ, ἀφαιρουμένων τῶν ἴσων ΒΔ καὶ ΒΓ, συνάγεται ΑΔ<ΑΓ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΣΔ καὶ ΑΣΓ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ἴσας, τὴν δὲ τρίτην ἄνισον, ἔχουσι καὶ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἄνισον, τουτέστι ΑΣΔ<ΑΣΓ. Τούτου τιθέντος, προσδιορίζεται ἤδη καὶ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἀνισότης. ΑΣΔ+ΔΣΒ<ΑΣΓ+ΓΣΒ ἤτοι ΑΣΒ<ΑΣΓ+ΓΣΒ.

Θεώρημα Κ'.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ κ.τ.λ. αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι τὴν πολύεδρον στερεὰν Σ εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν. (σχ. 157.)

Ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κατὰ τὸ δοκοῦν, τέμνον τὴν στερεὰν γωνίαν κατὰ τὴν τομὴν ΑΒΓΔΕ. Ἂς ληφθῇ ἐντὸς αὐτῆς σημεῖόν τι Ο, τὸ ὁποῖον ἂς ἐπιζευχθῇ μὲ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ. Οὕτω σχηματίζονται πέντε τρίγωνα, τόσα δὲ συγκροτοῦσι παρομοίως καὶ τὴν παράεδρον τῆς στερεᾶς γωνίας. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν τριγώνων τῆς παραέδρου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν τριγώνων τῆς τομῆς. Τούτου τεθέντος, καλοῦντες Α τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὴν κορυφὴν Σ ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς στερεᾶς, Β τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὰ ἄκρα Α, Β, Γ, Δ, κ.τ.λ. καὶ Ά τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, Α, Β, Γ, κ.τ.λ. ἔχοντες δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ σημεῖον Ο ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, συνάγομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω συλλογισμόν $A+B=A'+4$ορ. Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν $\Sigma AB+\Sigma AE>BAE$ καὶ ὁμοίως διὰ τὰς ἄλλας τριέδρους στερεὰς εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ κ.τ.λ. τουτέστι $B>A'$· ἔπεται ἄρα, ὅτι ἀφαιρουμένων τῶν ἀνίσων τούτων ἀπὸ τῆς ἰσότητος $A+B=A'+4$· ὀρθ. λαμβάνομεν $A<4$ ὀρθ. τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. — Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο ὑποθέτομεν πάντοτε τὴν στερεὰν γωνίαν κυρτὴν, ὥστε δηλαδὴ μία τῶν ἑδρῶν αὐτῆς προεκβαλλομένη νὰ μὴ δύναται νὰ συναπαντήσῃ τινα τῶν ἄλλων. Ἄλλως τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς στερεᾶς εἶναι ἐκτὸς παντὸς ὁρίου, λαμβάνον μέγεθος ὁσονδήποτε.

Θεώρημα ΚΑ'.

Δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν ἴσων, ἔχουσι καὶ τὰς κλίσεις τῶν ἐπιπέδων ἴσων γωνιῶν ἴσας. (σχ. 158.)

Ἔστω $A\Sigma\Gamma=\Delta TZ$, $A\Sigma B=\Delta TE$ καὶ $B\Sigma\Gamma=ETZ$. Ἂς ληφθῇ ἡ ΣΒ κατὰ τὸ δοκοῦν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ ΒΟ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ· ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς Ο, ἂς ἀχθῶσι παρομοίως αἱ εὐθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΓ κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΣΑ καὶ ΣΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΒ, αἱ ὁποῖαι θέλουσιν εἶσθαι κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΣΒ καὶ ΣΓ (§ κς' θεώρ. Δ')· οὕτως ἡ γωνία ΒΑΟ μετρᾷ τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ καὶ ΑΣΓ, καὶ παρομοίως ἡ γωνία ΒΓΟ μετρᾷ τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΒΣΓ καὶ ΑΣΓ. Ἂς ληφθῇ ὡσαύτως ἐπὶ τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΤΕ εἰς τὴν στερεὰν Τ τὸ μέρος ΤΕ=ΣΒ. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΡ κάθετος ἐπὶ τοῦ ΔΤΖ· ἐκ τοῦ ποδὸς Ρ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΡΔ καὶ ΡΖ ἐπὶ τῶν πλευρῶν

ΤΔ καὶ ΤΖ· καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΕΖ· οὕτως αἱ γωνίαι ΕΔΡ καὶ ΕΖΡ μετρῶσιν ὡσαύτως τὰς κλίσεις τῶν ἐπιπέδων ΔΤΕ καὶ ΕΤΖ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΔΤΖ. Τούτου τεθέντος, λέγομεν ἤδη, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΟ εἶναι ἴση τῇ ΕΔΡ καὶ ὁμοίως ἡ ΒΓΘ ἴση τῇ ΕΖΡ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΣΒ καὶ ΔΤΕ ὀρθογώνια εἰς Α καὶ Δ, ἔχουσι τὴν γωνίαν ΑΣΒ=ΔΤΕ ἐξ ὑποθέσεως, ἔτι δὲ τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην ΣΒ=ΤΕ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἄρα εἶναι ἴσα· ὅθεν ΑΣ=ΤΔ καὶ ΑΒ=ΔΕ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τρίγωνα ΣΒΓ καὶ ΤΕΖ ὀρθογώνια εἰς Γ καὶ Ζ ἔχουσι τὴν γωνίαν ΒΣΓ=ΕΤΖ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΣΒ=ΤΕ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἄρα εἶναι ἴσα· καὶ ἐπομένως ΣΓ=ΤΖ καὶ ΒΓ=ΕΖ. Τούτου τεθέντος, τὰ τετράπλευρα ΑΣΓΟ καὶ ΔΤΣΡ ἀποδεικνύονται ἴσα· διότι ἂς ἐφαρμοσθῇ τὸ τετράπλευρον ΔΤΖΡ ἐπὶ τοῦ ΑΣΓΟ· ὥστε ἡ γωνία ΔΤΖ νὰ ἐφαρμοσθῇ μὲ τὴν ἴσην αὐτῆς ΑΣΓ. Οὕτω τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α καὶ τὸ Ζ ἐπὶ τοῦ Γ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΤΔΡ καὶ ΤΖΡ εἶναι ὀρθαὶ, καθὼς ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι ΣΑΟ καὶ ΣΓΟ, αἱ εὐθεῖαι ΔΡ καὶ ΖΡ θέλουσι λάβει τὴν διεύθυνσιν τῶν εὐθειῶν ΑΟ καὶ ΓΟ· τὸ δὲ σημεῖον Ρ κοινὸν καὶ τῶν δύο εὐθειῶν ΔΡ καὶ ΡΖ θέλει πέσει ἀναγκαίως ἐπὶ τοῦ Ο. Ὅθεν τὰ τετράπλευρα ταῦτα ἐφαρμόζουσι, καὶ ἐκ τούτου συνάγεται ΑΟ=ΔΡ καὶ ΓΟ=ΖΡ. Συγκρίνοντες ἤδη τὰ τρίγωνα ΒΑΟ καὶ ΕΔΡ ὀρθογώνια εἰς Ο καὶ Ρ ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ ἴσην τῇ ΔΕ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΟ ἴσην τῇ ΔΡ, ὡς δέδεικται ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, καὶ ἐπομένως συνάγομεν τὴν γωνίαν ΒΑΟ ἴσην τῇ ΕΔΡ. Παρομοίως ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΒΓΟ καὶ ΕΖΡ συνάγομεν τὴν γωνίαν ΒΓΟ ἴσην τῇ ΕΖΡ, τουτέστιν αἱ κλίσεις τῶν ἴσων γωνιῶν εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. — Ἀπεδείξαμεν τὸ θεώρημα τοῦτο, ὑποθέσαντες τὰς καθέτους ΒΟ καὶ ΕΡ πιπτούσας ἐντὸς τῶν γωνιῶν ΑΣΓ καὶ ΔΤΖ· ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει μόνον εἰς τὰς ὀξείας κλίσεις· ἂν δὲ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΑΣΓ καὶ ΑΣΒ καὶ ὁμοίως ἡ τῶν ἐπιπέδων ΔΤΖ καὶ ΔΤΕ ἦναι ἀμβλεῖα, τότε αἱ κάθετοι ΒΟ καὶ ΕΡ πίπτουσιν ἐκτὸς τῶν γωνιῶν. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην αἱ γωνίαι ΒΛΟ καὶ ΕΔΡ μετρῶσι τὰς δύο ὀξείας ἐξωτερικὰς κλίσεις, ἢ τὰς κλίσεις τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ καὶ ΔΤΕ μετὰ τῆς προεκβολῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΣΓ καὶ ΔΤΖ· καὶ ἐπειδὴ αἱ κλίσεις αὗται δύνανται κατὰ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν νὰ ἀποδειχθῶσιν ἴσαι, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων κλίσεων εἰς το ἓν καὶ τὸ ἄλλο σχῆμα ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ ἀμβλεῖαι εἶναι παρομοίως ἴσαι· ὥστε καὶ κατὰ τὴν περίστασιν ταύτην γενικεύεται τὸ θεώρημα.

§ λά. *Γωνίαι συμμετρικαί.*

Ἔστωσαν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. (σχ. 159.) αἱ τρεῖς πλευραὶ τῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας Α. Ἂν ἔκτινος σημείου Π λαμβανομένου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἀχθῇ ἡ ΠΟ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΑΔ ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ διάστημα ΟΚ=ΠΟ καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΚ· εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ΑΚ σχηματίζει μὲ τὴν ΑΓ καὶ ΑΔ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΚΑΓ καὶ ΚΑΔ ἴσας μὲ τὰς γωνίας ΓΑΒ καὶ ΒΑΔ. Τῷ ὄντι, ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΓ, καὶ ΑΔ αἱ εὐθεῖαι ΟΙ καὶ ΟΛ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι αἱ εὐθεῖαι ΠΙ, ΠΛ, ΚΙ, ΚΛ, αἱ ὁποῖαι θέλουσιν εἶσθαι παρομοίως κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΔ (§ κς' θεώρ. δ'). Τὰ τρίγωνα ΑΙΠ καὶ ΑΙΚ εἶναι ἰσόπλευρα, διότι ἡ πλευρὰ ΑΙ εἶναι κοινὴ, ὁμοίως ἡ ΙΠ ἴση τῇ ΙΚ, ὡς πλάγιαι κατ' ἴσα ἀποστήματα ΟΠ καὶ ΟΚ, καὶ ὁμοίως ἡ ΑΠ ἴση τῇ ΑΚ, ὡς πλάγιαι ἀπέχουσαι ἐξ ἴσου τῆς καθέτου ΑΟ. Ὅθεν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν τὴν γωνίαν ΠΑΔ ἴσην τῇ ΚΑΓ. παρομοίως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὴν γωνίαν ΠΑΔ ἴσην τῇ ΚΑΔ.

Τούτου τεθέντος, ἂν θεωρήσωμεν τὴν εἰς Α σχηματιζομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΒ, ΑΔ καὶ τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν τριῶν ΑΓ, ΑΚ, ΑΔ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΓΑΔ, ΓΑΒ, καὶ

ΔΑΒ τῆς πρώτης εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους ΓΑΔ, ΓΑΚ, καὶ ΚΑΔ τῆς δευτέρας καὶ περιπλέον αἱ κλίσεις τῶν ἑδρῶν εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι. Ἐν τοσούτῳ αἱ δύο αὗται τρίεδροι γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς ἰσότητος εἰς τὴν ἔκτασιν, μὴ δυνάμεναι νὰ ἐφαρμόσωσι μεταξύ των. Ἐπειδὴ διὰ τὴν ἀντίθετον διάταξιν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν των, ἂν μεταφέρωμεν τὴν τρίεδρον γωνίαν τῶν πλευρῶν ΑΚ, ΑΓ, ΑΔ, ὥστε ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΓΑΚ καὶ ΚΑΔ νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΓΑΒ καὶ ΔΑΒ, τὸ ἐπίπεδον ΓΑΚ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΑΔ, τὸ δὲ ΚΑΔ μὲ τὸ ΓΑΒ, ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν ὅτι δὲν ἐπιτίθενται αἱ ἴσαι γωνίαι· καὶ ἑνὶ λόγῳ δὲν δίδεται μέσον ἐφαρμογῆς τῶν δύο τούτων τριέδρων γωνιῶν.

Διὰ τοῦτο ὀνομάζομεν συμμετρικὰς στερεὰς γωνίας ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι καίτοι ἔχουσαι τὰς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας καὶ ὁμοίως τὰς ἀμοιβαίας αὐτῶν κλίσεις, δὲν δύνανται ὅμως νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ κατ' ἐφαρμογὴν ἴσα διὰ τὴν ἀντίθετον διάταξιν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν των.

Τοιαῦτα συμμετρικὰ μεγέθη ἀπαντῶμεν καθ' ἑκάστην κοινότατα, τῶν ὁποίων ὁ τεχνίτης γνωρίζει τὴν ἰδιότητα. Παραδείγματα συμμετρίας παρουσιάζονται ἐπίσης αἱ χεῖρες, ἢ οἱ πόδες τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου καὶ ἄλλα τοιαῦτα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ.

§. λβ'. *Ὁρισμοὶ καὶ πρῶται ἰδιότητες τῶν πολυέδρων.*

Πολύεδρον. — Ὀνομάζομεν πολύεδρον στερεόν, ἢ ἁπλῶς πολύεδρον πᾶν στερεὸν περατούμενον πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν τριγωνικῶν, τετραγωνικῶν, ἢ πολυγωνικῶν, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται ἕδραι τοῦ πολυέδρου.

Ἐκ τούτων ὀνομάζεται μερικώτερον τετράεδρον τὸ συνιστάμενον ἐκ τεσσάρων ἑδρῶν, πεντάεδρον τὸ ἐκ πέντε καὶ ὁμοίως ἑξάεδρον καὶ ἐν γένει πολύεδρον. Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ πολυέδρου ἀπαιτοῦνται τοὐλάχιστον τέσσαρες ἕδραι· διὰ τοῦτο καὶ τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἁπλούστερον πάντων.

Ὀνομάζομεν πλευρὰς τοῦ πολυέδρου τὰς κοινὰς τομὰς τῶν προσκειμένων ἑδρῶν, καὶ κορυφὰς αὐτοῦ τὰ ἄκρα τῶν στερεῶν γωνιῶν του.

Ὡς πολύεδρα Γεωμετρικὰ παραδεχόμεθα ἐκεῖνα μόνον, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἐξεχούσας στερεὰς γωνίας, ἢ τῶν ὁποίων ἡ ἐπιφάνεια συναπαντᾶται εἰς δύο μόνον σημεῖα ὑπό τινος ὁπωσδήποτε ἀγομένης εὐθείας· ὅθεν κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην, δοθεισῶν τῶν κορυφῶν τινὸς πολυέδρου, προσδιορίζεται τὸ πολύεδρον, ὡς ἀνῆκον τοῦτο καὶ μόνον εἰς τὰς δεδομένας ταύτας κορυφάς· καὶ διὰ νὰ τὸ διαγράψωμεν, ἀρκεῖ νὰ ἐπιζεύξωμεν δι' εὐθειῶν γραμμῶν τὰς κορυφὰς ταύτας, ὥστε νὰ σχηματίζωνται ἐξέχουσαι γωνίαι, ἢ ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τῶν ἀγομένων τούτων εὐθειῶν νὰ ἔχῃ ἔμπροσθεν, ἢ ὄπισθεν αὐτοῦ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ πολυέδρου.

Ὀνομάζεται διαγώνιος τοῦ πολυέδρου πᾶσα εὐθεῖα ἐπιζευγνύουσα δύο ἀπέναντι κορυφὰς αὐτοῦ.

Τὰ πολύεδρα διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ σχῆμα τῶν ἑδρῶν· ὅθεν λαμβάνουσι διαφόρους ὀνομασίας.

Πυραμίς. — Ὀνομάζεται πυραμὶς τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΕ, τοῦ ὁποίου μία τῶν ἑδρῶν εἶναι πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἢ καὶ τρίγωνον ΖΗΘ· αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι εἶναι τρίγωνα λήγοντα εἰς κοινόν τι σημεῖον Σ ἢ Τ, τὸ ὁποῖον λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδος. (σχ. 160.)

Τὸ σύνολον τῶν περὶ τὴν κορυφὴν τριγωνικῶν ἑδρῶν συνιστᾷ τὴν παράεδρον τῆς πυραμίδος.

Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ λέγεται βάσις τῆς πυραμίδος, καὶ ὕψος αὐτῆς ἡ ἐπὶ τῆς βάσεως ἀγομένη κάθετος ΣΟ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος. 10

Ἡ πυραμὶς εἶναι τριγωνική, ἢ πολυγωνικὴ κατὰ τὸ σχῆμα τὸ χρησιμεῦον εἰς αὐτὴν ὡς βάσις. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΤΖΗΘ εἶναι τὸ ἁπλούστερον στερεὸν, ἤτοι τὸ τετράεδρον.

Ἡ πυραμὶς λέγεται ὀρθὴ, ὅταν τῆς βάσεως οὔσης κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ ἐπ' αὐτῆς ἀγομένη καθετος ἐκ τῆς κορυφῆς συναπαντᾷ τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον.

Ἂν δι' ἐπιπέδου ἀγομένου παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν ἀποτέμνωμεν τὴν μικρὰν πυραμίδα Σαϐγδε τὸ ἐναπομένον στερεὸν ΑΒΓΔΕαβγδε λέγεται κορμὸς πυραμίδος. Ὁ κορμὸς οὗτος εἶναι τριγωνικὸς, ἢ πολυγωνικὸς κατὰ τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

Πρίσμα. — Ὀνομάζεται πρίσμα τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ πολλῶν παραλληλογράμμων περατουμένων κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη εἰς δύο πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα, τὰ ὁποῖα λέγονται βάσεις τοῦ πρίσματος. (σχ. 161.)

Τὸ σύνολον τῶν παραλληλογράμμων τῆς κυρτοεπιφανείας αὐτοῦ συνιστᾷ τὴν παράεδρον τοῦ πρίσματος· αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΖ, ΒΗ, κ. τ. λ. λέγονται πλευραὶ τοῦ πρίσματος.

Τὸ πρίσμα εἶναι τριγωνικὸν ἢ πολυγωνικὸν κατὰ τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως.

Ἡ ἀγομένη κάθετος ΣΤ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων τοῦ πρίσματος λέγεται ὕψος αὐτοῦ.

Τὸ πρίσμα λέγεται μὲν ὀρθὸν, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΖ, ΒΓ, κ. τ. λ. ἦναι κάθετοι ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων βάσεων, καὶ τότε ἑκάστη τούτων μετρᾷ ταυτοχρόνως καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ· πλάγιον δὲ εἰς τὴν ἐναντίαν περίστασιν.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πρίσμα ὀρθὸν, ἢ πλάγιον ἐπὶ δεδομένης βάσεως ΑΒΓΔΕ, ἀρκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν κατ' ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου πρίσματος νὰ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, κ. τ. λ. ἴσαι καὶ παράλληλοι μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. τῆς δεδομένης βάσεως καὶ νὰ ἐπιζευχθῶσι τὰ ἄκρα τῶν γωνιῶν κατὰ τάξιν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ. αἱ ὁποῖαι θέλουσι προσδιορίσει τὴν παράεδρον τοῦ πρίσματος.

Παραλληλεπίπεδον. — Μεταξὺ τῶν πρισμάτων διακρίνομεν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον, ἢ παραλληλόγραμμον, ὅθεν καὶ τὸ στερεὸν τοῦτο λέγεται ὀρθογώνιον ἢ πλάγιον. (σχ. 162.)

Τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἔχουσιν ὅλας των τὰς ἕδρας ὀρθογωνίους· τὰ δὲ πλάγια ἔχουσιν εἴτε ὅλας, εἴτε τὰς δύο μόνον ἀπέναντι παραλληλόγραμμα.

Κῦβος. — Τὸ κανονικώτατον μεταξὺ τῶν παραλληλεπιπέδων εἶναι τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον ἢ ὁ κῦβος, ὅστις ἔχει ὅλας του τὰς ἕδρας τέλεια τετράγωνα, ὡς ΑΒΓΔΕΖΗΘ. (σχ. 163.)

Μετὰ τοὺς ὁρισμοὺς τούτους ἀναπτύσσομεν ἤδη τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

Θεώρημα Α'.

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀγόμεναι διαγώνιοι διὰ τῶν ἀπέναντι στερεῶν γωνιῶν των τέμνονται εἰς ἴσα μέρη. (σχ. 162.)

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ παραλληλεπιπέδου αἱ ἀπέναντι βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα καὶ παράλληλα, καὶ ἐκ τούτου ΑΒ=ΕΖ καὶ ΑΔ=ΕΘ· κ. τ. λ. ἄρα τὰ τετράπλευρα ΑΒΖΕ καὶ ΑΔΘΕ κ. τ. λ. εἶναι παραλληλόγραμμα (§ ιϛ'. θεώρ. ιϛ'.) καὶ ἐκ τούτου αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ὥστε αἱ ἀπέναντι τετράπλευροι ἕδραι ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ ὁμοίως τὰς γωνίας ἴσας, ὡς σχηματιζομένας ὑπὸ παραλλήλων πλευρῶν· ἄρα αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι.

Ἂς ἀχθῶσιν ἤδη αἱ δύο διαγώνιοι ΒΘ καὶ ΔΖ, αὗται θέλουσιν εἶσθαι διαγώνιοι καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΔΒΖΘ, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἀγομένου τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΔΘ καὶ ΒΖ· ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον ΔΒΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἐπειδὴ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους· ἄρα αἱ διαγώνιοι ΒΕ καὶ ΗΔ τέμνονται εἰς ἴσα μέρη. (§ ιϐ'. θεώρ. ιγ'.)

Σχόλιον.—Εἶναι ἀξιοσημείωτον ἐνταῦθα, ὅτι αἱ ἀντικείμεναι στερεαὶ γωνίαι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι συμμετρικαί, καὶ τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀποσυντίθεται τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ἴσα κατὰ τὴν στερεότητα. Τὸ πρῶτον τῶν θεωρημάτων τούτων εἶναι φανερόν· διότι αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι π. χ. Α καὶ Η σχηματίζονται ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν ἴσων, ἀλλὰ διατεταγμένων συμμετρικῶς, ὥστε δὲν δύνανται νὰ ἐπιτεθῶσι· καθόσον δὲ ἀφορᾷ τὸ δεύτερον, τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΔΘΕΖ καὶ ΔΒΓΗΘΖ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς ἕδρας ἴσας καὶ τὰς ἀμοιβαίας αὐτῶν κλίσεις ἴσας, δυνάμεθα νὰ τὰ ὑπολάβωμεν ὡς ἰσοδύναμα, καί τοι διὰ τὴν συμμετρικὴν διάταξιν τῶν ἑδρῶν των δὲν δίδεται ἐντελής, ἢ κατ' ἐφαρμογὴν ἰσότης, ὁποίαν ἀπαιτοῦμεν κατὰ τὸ ϛ'. ἀξίωμα. Ἐνταῦθα παραδεχόμεθα τὴν ἀλήθειαν ταύτην, χωρὶς νὰ ἐκτανθῶμεν περισσότερον περὶ τούτου, ἐπὶ σκοπῷ τοῦ νὰ ἀποκαταστήσωμεν, ὅσον ἔνεστι, στοιχειωδέστερα τὰ θεωρήματα τῆς στερεομετρίας. Παραπέμπομεν δὲ τὸν ἀναγνώστην εἰς τὸ σύγγραμμα τοῦ Κ. Λεγένδρου, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται ἀκριβέστατα τὴν θεωρίαν ταύτην τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων.

Θεώρημα Β'.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἴσαι, ὅταν αἱ τρίεδροι στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι σχηματίζωνται ὑπὸ τριγώνων ἴσων καὶ ὁμοίως κειμένων. (σχ. 164.)

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν συνθήκην τοῦ θεωρήματος αἱ τριγωνικαὶ ἕδραι εἶναι ἴσαι, τουτέστι ΑΒΓ=ΔΕΖ, ΑΣΒ=ΤΔΕ· κ. τ. λ. ἕπεται ὅτι καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι, σχηματιζόμεναι ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσαι· καὶ ἑπομένως καὶ αἱ κλίσεις τῶν προσκειμένων ἑδρῶν εἶναι παρομοίως ἴσαι· ὥστε αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ καὶ ΤΔΕΖ δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι μεταξύ των. Οὕτω τιθεμένης τῆς βάσεως ΔΕΖ ἐπὶ τῆς ἴσης ΑΒΓ, αἱ ἕδραι ΤΔΕ καὶ ΣΑΒ, καὶ ὁμοίως αἱ ἄλλαι, θέλουσιν ἐφαρμόσει διὰ τὴν ἰσότητα τῶν κλίσεών των. Ἐκ τούτου δὲ συμπίπτουσι καὶ αἱ κορυφαὶ Σ καὶ Τ· ὥστε τὰ δύο τετράεδρα ἔχοντα τὰς αὐτὰς κορυφὰς σχηματίζουσιν ἓν καὶ μόνον.

Θεώρημα Γ'.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἴσαι, ὅταν ἔχωσι δύο ἕδρας ἴσας ὁμοίως κειμένας καὶ ἐξ ἴσου κλινούσας. (σχ. 164.)

Ἔστωσαν ΑΒΓ=ΔΕΖ, ΑΣΒ=ΤΔΕ· καὶ κλίσις ΓΣΑΒ=ΖΤΔΕ· ἂς ἐπιτεθῇ ἡ βάσις ΔΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΒΓ· ἡ ἕδρα ΤΔΕ, ὡς ἴση μὲ τὴν ΣΑΒ καὶ ἔχουσα τὴν αὐτὴν κλίσιν μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓ θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν ΣΑΒ· ὅθεν καὶ ἡ τετάρτη κορυφὴ Τ τοῦ τετραέδρου ΤΔΕΖ θέλει συμπέσει μὲ τὴν κορυφὴν Σ· καὶ ἐκ τούτου τὰ τετράεδρα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Θεώρημα Δ'.

Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι μίαν στερεὰν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἐπιπέδων ἑδρῶν ἴσων καὶ ὁμοίως κειμένων. (σχ. 165.)

Ἔστωσαν αἱ ἕδραι ΑΒΓΔΕ=αβγδε, ΑΒΗΖ=αβηζ, καὶ

ΒΓΘΗ=βγθη. Ἂς ἐφαρμοσθῇ ἡ βάσις αβγδε ἐπὶ τῆς ἴσης ΑΒΓΔΕ. Ἐπειδὴ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ἑδρῶν αἱ κλίσεις αὐτῶν εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι ἡ ἕδρα αβηζ θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν ἕδραν ΑΒΗΖ· καὶ ἐπομένως αἱ πλευραὶ ΒΗ καὶ βη θέλουσιν συμπέσει. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θέλουν συμπέπει παρομοίως καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ γθ, δι, κ. τ. λ. μὲ τὰς πλευρὰς ΓΘ, ΔΙ, κ. τ. λ. καὶ τὰ δύο στερεὰ ἔχοντα τὰς αὐτὰς κορυφὰς ταυτίζονται· ἄρα τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Πόρισμα. — Δύο ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι βάσεις καὶ ὕψη ἴσα· διότι τότε ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι καὶ ὁμοίως αἱ ἕδραι ἀνὰ δύο εἶναι ἴσαι.

Θεώρημα Ε'.

Ἡ τομὴ αϐγδε, γινομένη εἰς τὸ πρίσμα δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῆς βάσεως ΑΒΓ.. εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν. (σχ. 161.)

Ἐπειδὴ αἱ τομαὶ αϐ, βγ, γδ, κ. τ. λ. εἶναι παράλληλοι τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. (§. κζ'· θεώρ. ή.) καὶ διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι· ὅθεν ἔχομεν Α=α, Β=β, Γ=γ, κ. τ. λ. ἐξ ἑτέρου μέρους αἱ παράλληλοι Αα, Ββ, Γγ, κ. τ. λ. μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε εἶναι ἴσαι· (§ κζ'. θεώρ. θ'.) ἄρα τὰ τετράπλευρα ΑΒβα, ΒΓγβ κ. τ. λ. εἶναι παραλληλόγραμμα, καὶ ἐκ τούτου ἔχομεν ΑΒ=αβ, ΒΓ=βγ, κ. τ. λ. ὅθεν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε ὄντα ἰσόπλευρα, ἅμα δὲ καὶ ἰσογώνια, εἶναι ἴσα.

Θεώρημα ΣΤ'.

Ἐάν τις πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. (σχ. 160.)

ά. Αἱ πλευραὶ αὐτῆς ΣΑ, ΣΒ, κ. τ. λ. καὶ τὸ ὕψος ΣΟ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα· Καὶ β'. Ἡ παραγομένη τομὴ αβγδε εἶναι πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ αβ καὶ ὁμοίως Βγ, καὶ βγ, κ.τ.λ. εἶναι παράλληλοι· τὰ τρίγωνα ΣΑΒ καὶ Σαβ καὶ ὁμοίως ΣΒΓ καὶ Σβγ, κ. τ. λ. εἶναι ὅμοια καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΣΑ : Σα : : ΣΒ : Σβ : : ΣΓ : Σγ : : κ. τ. λ. ἐπειδὴ δὲ ὡσαύτως καὶ τὸ ὕψος ΣΟ τέμνεται κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἰς τὸ σημεῖον Ο, ὥστε ἔχομεν ΣΑ : Σα : : ΣΟ : Σο· ἄρα αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα. Δεύτερον ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ αβ, ὁμοίως ΒΓ καὶ βγ, κ. τ. λ. εἶναι παράλληλοι, διευθυνόμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι· (§ κζ'. θεώρ. ἱ.) ὅθεν ἔχομεν Α=α, Β=β, κ. τ. λ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν τριγώνων ΣΑΒ καὶ Σαβ καὶ ὁμοίως ΣΒΓ καὶ Σβγ, κ. τ. λ. ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΣΑ : ΑΒ : : Σα : αβ : : ΣΒ : Σβ : : ΒΓ : βγ, κ. τ. λ. ἄρα τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα. — Δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΣΧΨΩ, ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους, τεμνόμεναι ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῶν βάσεων, παράγουσι τομὰς ἰσοδυνάμους· (σχ. 166.) διότι τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒΓΔΕ : αβγδε : : $\overline{ΑΒ}^2$: $\overline{αβ}^2$: : $\overline{ΣΟ}^2$: $\overline{Σο}^2$ (§ κδ'. θεώρ. ιέ.) καὶ παρομοίως τὰ ὅμοια τρίγωνα ΧΨΩ καὶ χψω δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΧΨΩ : χψω : : $\overline{ΧΨ}^2$: $\overline{χψ}^2$: : $\overline{ΣΟ}^2$: $\overline{Σο}^2$· ἐκ τούτων συνάγομεν ΑΒΓΔΕ:αβγδε::ΧΨΩ:χψω· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ καὶ ΧΨΩ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἄρα καὶ οἱ ἑπόμενοι ὅροι τῆς ἀναλογίας, τουτέστιν αἱ τομαὶ αβγδε καὶ χψω εἶναι παρομοίως ἰσοδύναμοι.

§. λγ'. *Πολύεδρα ἰσοδύναμα καὶ καταμέτρησις τῶν πολυέδρων.*

Ὀνομάζομεν πολύεδρα ἰσοδύναμα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἶναι μὲν κατασκευασμένα ἀνομοίως, ἴσα δὲ κατὰ τὸν ὄγκον. Οὕτω θέλομεν ἀποδείξει, ὅτι πυραμὶς ἢ πρίσμα ἰσοδυναμεῖ μὲ παραλληλεπίπεδον ἢ κῦβον. κ. τ. λ. Ἀναχωροῦντες δὲ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τούτων φθάνομεν εἰς τὴν καταμέτρησιν τῶν πολυέδρων διά τινος μονάδος, τὴν ὁποίαν ὡς καὶ εἰς τὰς ἐπιφανείας χορηγεῖ ἡ ἰδία Ἐπιστήμη.

Θεώρημα Ζ'.

Δύο παραλληλεπίπεδα ΑΘ καὶ ΑΜ, ἔχοντα μίαν κοινὴν βάσιν ΑΒΓΔ, καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἄνω βάσεις ΕΖΗΘ καὶ ΙΚΛΜ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ μεταξὺ τῶν ἰδίων παραλλήλων ΖΛ καὶ ΕΜ εἶναι ἰσοδύναμα. (σχ. 167.)

Δυνατὸν ἡ ΕΘ νὰ ἦναι ἴση, ἢ μικροτέρα, ἢ μεγαλητέρα τῆς ΕΙ· ἀλλὰ καὶ κατὰ τὰς τρεῖς περιστάσεις ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτή· ὅθεν λέγομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΖΚΙΕΔ καὶ ΗΒΛΜΘΓ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι τὴν ἕδραν ΑΔΕΖ ἴσην τῇ ΒΓΘΗ, τὴν ΑΔΙΚ ἴσην τῇ ΒΓΜΛ, ὡς ἀπέναντι ἕδρας τῶν παραλληλεπιπέδων, καὶ τέλος τὴν ἕδραν ΖΑΚ ἴσην τῇ ΗΒΛ, ὡς ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν πλευρῶν των, τὴν ὁποίαν εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν. Ἐκ τούτου καὶ αἱ τρίεδροι γωνίαι εἰς Α καὶ Β εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα. (§ λϐ'. θεώρ. δ'.) Τούτου τεθέντος, ἂν ἐκ τοῦ ὅλου στερεοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα ΑΖΚΙΕΔ, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΙΚΛΜ, καὶ παρομοίως ἂν ἐκ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα ΒΗΛΜΘΓ, μένει τὸ ἕτερον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ· ἄρα τὰ παραλληλεπίπεδα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

Θεώρημα Ζ'.

Δύο παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι ἰσοδύναμα (σχ. 168.)

Ἔστω ΑΒΓΔ κοινὴ βάσις τῶν δύο παραλληλεπιπέδων ΑΜ καὶ ΑΘ. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω βάσεις των ΙΚΛΜ καὶ ΕΖΗΘ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅθεν αἱ πλευραὶ ΕΘ καὶ ΖΗ, καὶ ὁμοίως ΚΙ καὶ ΛΜ ἐκϐαλλόμεναι συναπαντῶνται, καὶ καθὸ παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων, σχηματίζουσι τὸ παραλληλόγραμμον ΠΡΣΤ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ ἔχομεν ΠΡ=ΕΖ=ΑΔ καὶ ὁμοίως ΡΣ=ΚΛ=ΑΒ. Τούτου τεθέντος, ἂς ἐννοηθῇ τρίτον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΠΡΣΤ· τὸ τελευταῖον τοῦτο συγκρινόμενον μὲ ἑκάτερον τῶν δεδομένων ΑΜ καὶ ΑΘ εἶναι ἰσοδύναμον· ἐπειδὴ ἔχει τὴν κάτω βάσιν ΑΒΓΔ κοινὴν καὶ τὴν ἄνω μεταξὺ τῶν ἰδίων παραλλήλων ΠΚ καὶ ΤΛ, ἢ ΠΘ καὶ ΡΗ· ἄρα καὶ τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΜ καὶ ΑΘ εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. — Ἕπεται ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου, ὅτι πᾶν πλάγιον καὶ παραλληλογραμμικὸν παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθὸν καὶ ὀρθογώνιον· διότι πᾶν πλάγιον ἔχον βάσιν παραλληλόγραμμον, τρέπεται κατὰ πρῶτον εἰς τὸ ἰσοδύναμον ὀρθὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘ. τοῦτο δὲ εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓ'Δ'ΕΖΗΘ', τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ βάσιν τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΑΒΓ'Δ' καὶ ὕψος τὸ αὐτό· διότι τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΘ καὶ ΑΘ', θεωρούμενα ὡς πρὸς τὴν κοινὴν βάσιν ΑΒΗΖ, λαμϐάνουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ'· καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμα. (σχ. 169.)

Θεώρημα Η'.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒΓΔ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των. (σχ. 170.)

Ἃς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὰ ὕψη τῶν παραλληλεπιπέδων ΑΘ καὶ ΑΜ ἔχουσι λόγον ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, τουτέστιν ΑΖ : ΑΚ : : 9 : 5. Ἃς διαιρεθῇ τὸ ὕψος ΑΖ εἰς ἐννέα ἴσα μέρη, πέντε τῶν ὁποίων ἀποτελοῦσι τὴν ΑΚ· ἐξ ἑκάστου δὲ σημείου τῆς διαιρέσεως ἃς ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα τῆς κοινῆς βάσεως ΑΒΓΔ. Οὕτω τὸ ὅλον παραλληλεπίπεδον θέλει διαιρεθῇ εἰς ἐννέα παραλληλεπίπεδα ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι βάσεις καὶ ὕψη ἴσα· πέντε δὲ τῶν παραλλεπιπέδων τούτων ἀποτελοῦσι τὸ ΑΜ· ἐκ τούτου ἔχομεν ΑΘ : ΑΜ : : 9 : 5· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΑΖ : ΑΚ : : 9 : 5· ἐκ τούτων συνάγομεν ΑΘ : ΑΜ : : ΑΖ : ΑΚ.

Ἂν δὲ τὰ ὕψη ΑΖ καὶ ΑΚ ἦναι εἰς λόγον ἔκμετρον, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν παρομοίως, ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ τὰ παραλληλεπίπεδα, ἐπαναλαμβάνοντες καὶ ἐνταῦθα τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν διὰ τῆς εἰς τὸ ἄτοπον ἐπαγωγῆς, τὴν ὁποίαν καὶ ἄλλοτε μετεχειρίσθημεν. Οὕτως ἃς ὑποθέσωμεν τέταρτον ὅρον τῆς ἀναλογίας ΑΟ ἢ ΑΟ' μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τοῦ ΑΚ ὥστε νὰ ἔχωμεν ΑΘ : ΑΜ : : ΑΖ : ΑΟ ἢ ΑΟ'· διαιροῦντες τὴν ΑΖ εἰς μέρη μικρότερα τῆς ΚΟ ἢ ΚΟ' καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἄγοντες ἐπίπεδα παράλληλα τῆς βάσεως συνάγομεν τὰς ἀναλογίας· παραλ. ΑΘ : παραλ. ΑΙ : : ΑΖ : ΑΙ ἢ παραλ. ΑΘ : παραλ. ΑΙ' : : ΑΘ : ΑΙ'· συγκρίνοντες δὲ ἑκατέραν τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν μὲ τὴν ἐξ ὑποθέσεως ΑΘ : ΑΜ : : ΑΖ : ΑΟ ἢ ΑΟ' συνάγομεν παραλ. ΑΙ : παραλ. ΑΜ : : ΑΙ : ΑΟ καὶ παραλ. ΑΙ' : παραλ. ΑΜ : : ΑΙ' : ΑΟ' αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀσυμβίβαστοι· διότι ὑποτεθέντος ΑΙ $<$ ΑΟ ἕπεται καὶ παραλ. ΑΙ $<$ παραλ. ΑΜ, ἢ ὁμοίως ὑποτεθέντος ΑΙ' $>$ ΑΟ', ἕπεται καὶ παραλ. ΑΙ' $>$ ΑΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον· ὥστε ΑΚ εἶναι ὁ μόνος τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας, καὶ πρέπει νὰ ἔχωμεν ΑΘ : ΑΜ : : ΑΖ : ΑΚ.

Θεώρημα Θ'.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΘ καὶ ΑΝ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΕ εἶναι ὡς αἱ βάσεις των. (σχ. 171.)

Ἀφ' οὗ διαταχθῶσι τὰ παραλληλεπίπεδα, ὥστε αἱ βάσεις των ΑΒΓΔ καὶ ΑΡΚΛ νὰ ἦναι προσκείμεναι κατά τινα γωνίαν, ὡς δείκνυται εἰς τὸ σχῆμα· ἂς προεκβληθῇ τὸ ἐπίπεδον ΚΛΜΝ ἕωσοῦ νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΔΓΘΕ κατὰ τὴν τομὴν ΧΨ· οὕτω προκύπτει τρίτον παραλληλεπίπεδον ΑΛΨΔΕΖΜΧ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ δύο στερεὰ ΑΘ καὶ ΑΧ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΔΕΖ, εἶναι ὡς τὰ ὕψη των ΑΒ καὶ ΑΛ· καὶ παρομοίως τὰ δύο στερεὰ ΑΧ καὶ ΑΝ, ἔχοντα ἴσας βάσεις ΠΡΚΝ καὶ ΖΑΛΜ, εἶναι ὡς τὰ ὕψη των ΡΑ καὶ ΑΔ· συνάγομεν ἄρα τὰς ἑξῆς ἀναλογίας. στερ. ΑΘ : στερ. ΑΧ : : ΑΒ : ΑΛ. καὶ στερ. ΑΧ : στερ. ΑΝ : : ΑΔ : ΑΡ. πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ἀναλογιῶν ὅρου ἐφ' ὅρον, καὶ ἀπαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος στερ. ΑΧ, λαμβάνομεν στερ. ΑΘ : στερ. ΑΝ : : ΑΒ × ΑΔ : ΑΧ × ΑΡ. τουτέστι τὰ δύο ὀρθογώνια εἶναι ὡς τὰ γινόμενα τῶν δύο διαστάσεων τῶν βάσεών των, ἢ ὡς αἱ βάσεις των.

Θεώρημα Ι'.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα διαφόρου βάσεως καὶ ὕψους εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη των, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν διαστάσεων. (σχ. 172.)

Ἀφ' οὗ διαταχθῶσι παρομοίως τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΙ καὶ ΔΜ ὡς ἀνωτέρω· ἂς προεκβληθῶσι τὰ ἀναγκαῖα ἐπίπεδα, διὰ νὰ σχηματισθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΔΨ. Συκρίνοντες δὲ τὸ τελευταῖον τοῦτο μὲ τὰ δεδομένα, κατὰ τὰ προλαβόντα θεωρήματα ἔχομεν τὰς ἀναλογίας. στερ. ΑΘ : στερ. ΔΨ : : ΑΒΓΔ : ΔΡΠΣ. καὶ στερ. ΔΨ : στερ. ΔΛ : : ΔΙ : ΔΝ· καὶ πολλαπλασιαζομένων τῶν ὅρων, μετὰ τὴν ἀπάλειψιν τοῦ κοινοῦ παράγοντος ΔΨ συνάγομεν στερ. ΑΘ : στερ. ΔΛ : : ΑΒΓΔ $\times$ΔΙ : ΔΡΠΣ$\times$ΔΝ : : ΑΔ$\times$ΔΓ$\times$ΔΙ : ΔΣ$\times$ΔΡ$\times$ΔΝ· τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. — Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου γίνεται φανερὸν τὸ εἶδος τῆς μονάδος διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν στερεῶν. Οὕτως ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΘ εἶναι ΑΔ$=$5, ΔΓ$=$3, ΔΙ$=$12, καὶ ὅτι συγκρίνεται μὲ τὸν κῦβον Κ τῆς γραμμικῆς μονάδος· κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἔχομεν παραλ. ΑΘ : κῦβ. Κ : : ΑΔ$\times$ΔΓ$\times$ ΔΙ : 1$\times$1$\times$1 : : 5$\times$3$\times$12 : 1· ὅθεν ἐξάγεται, ὅτι τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΘ ἰσοῦται μὲ 180 κυβικὰς μονάδας, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν τῶν κυβικῶν μονάδων, ἤτοι μονάδων στερεότητος τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι τῆς πλευρᾶς οὔσης 2, 3, 4, 5. κ.τ.λ. ἡ στερεότης αὐτοῦ θέλει εἶσθαι 8, 27, 64, 125. κ.τ.λ. Ἐκ τούτου ἐπεκράτησε καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν νὰ ὀνομάζεται κῦβος ἡ τρίτη δύναμις τῶν ἀριθμῶν.

Βλέπομεν πρὸς τούτοις, ὅτι διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κῦβον δεδομένης στερεότητος, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τῆς δεδομένης στερεότητος αὐτοῦ, καὶ οὕτω προσδιορίζομεν τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου κύβου. Ἐπειδὴ δὲ ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι τέλειοι κῦβοι, δὲν δυνάμεθα ἐπομένως νὰ προσδιορίσωμεν ἀκριβῶς τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς· ἐκ τούτου προέκυψε τὸ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις περίφημον πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, τουτέστι νὰ προσδιορισθῇ ἡ πλευρὰ κύβου διπλασίου ἄλλου δεδομένου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ὡς καὶ τὸ τῆς τριτομῆς τῆς γωνίας ἐπελύθη ἤδη πρὸ πολλοῦ δι' ἀνωτέρων μεθόδων, παρὰ τὰς ἁπλᾶς ταύτας, αἱ ὁποῖαι περιστρέφονται εἰς τὰς εὐθείας γραμμὰς καὶ τὰς περιφερείας γνωστῶν ἀκτίνων.

Θεώρημα ΙΑ'.

Ἡ στερεότης παντὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἢ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του.

Ἀποδείξαμεν ἤδη (§ λγ'. θεώρ. Ζ'. πόρ.) ὅτι πᾶν πλάγιον παραλληλεπίπεδον τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν τοῦ δεδομένου καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Καὶ ἐπειδὴ ἡ στερεότης τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του, ἄρα τὸ αὐτὸ μέτρον δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ διὰ τὸ ἰσοδύναμον πλάγιον.

Θεώρημα ΙΒ'.

Ἡ στερεότης παντὸς πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του. (σχ. 162.)

Ἐπειδὴ πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΘΕΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου διπλασίας βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους· ἄρα ἡ στερεότης αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς διπλασίας βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ΑΒΓΔ$\times$ΑΕ ἢ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς τριγωνικῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος ΑΒΔ$\times$ΑΕ· τούτου τεθέντος, ἡ στερεότης καὶ τοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος (σχ. 161.) μετρᾶται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἐπειδὴ πᾶν πολυγωνικὸν πρίσμα δύναται νὰ ἀποσυντεθῇ εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, π. χ. ΑΒΕΚΖΗ, ΕΒΔΙΚΗ κτλ. ὅθεν ἡ στερεότης αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων ΑΒΕ$\times$ΑΖ$+$ΕΒΔ $\times$ ΑΖ $+$ ΔΒΓ $\times$ ΑΖ· τουτέστι ἴσον μὲ ΑΒΓΔΕ$\times$ΑΖ.

Πόρισμα. — Δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ βάσεων ἰσοδυνάμων εἶναι ἰσοδύναμα· καὶ δύο πρίσματα διαφόρου βάσεως, ἢ ὕψους εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις, ἢ τὰ ὕψη των.

Θεώρημα ΙΓ'.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ καὶ σαβγ. βάσεων ἰσοδυνάμων καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΥ εἶναι ἰσοδύναμοι (σχ. 173.)

Διότι, εἰ δυνατὸν, ἔστω ΣΑΒΓ$>$σαβγ· ἡ δὲ μεταξύ των διαφορὰ ἂς ἐκφρασθῇ διὰ τριγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις νὰ ἦναι ἡ ΑΒΓ καὶ ὕψος ΑΧ· τοῦτο δὲ εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ὑποθέσωμεν. Ἐπειδὴ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς ποσότητος ΑΧ τὸ πρίσμα τῆς βάσεως ΑΒΓ δύναται νὰ διέλθῃ ὅλας τὰς καταστάσεις τοῦ μεγέθους, ὥστε μεταξὺ τούτων ἐμπεριλαμβάνεται καὶ ἡ μεταξὺ τῶν δύο πυραμίδων διαφορά. Τούτου τεθέντος, ἂς διαιρεθῇ τὸ κοινὸν ὕψος ΑΥ εἰς μέρη ἴσα καὶ μικρότερα τοῦ ΑΧ, ὥστε ἓν σημεῖον διαιρέσεως Ι θέλει πέσει μεταξὺ τοῦ Α καὶ Χ. Ἐκ τῶν σημείων τούτων ἂς ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων· οὕτω θέλουσι παραχθῇ καὶ εἰς τὰς δύο πυραμίδας τομαὶ ὅμοιαι μὲ τὴν βάσιν ἑκάστης. Εἰς τὴν ἐξ ὑποθέσεως μεγαλητέραν πυραμίδα ΣΑΒΓ ἂς κατασκευασθῶσιν ἐξωτερικὰ τριγωνικὰ πρίσματα ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓ, καὶ τῶν ὁμοίων τομῶν ΔΕΖ, ΗΘΙ, κ.τ.λ. Καὶ ὁμοίως εἰς τὴν μικροτέραν σαβγ ἂς κατασκευασθῶσιν ἐσωτερικὰ τριγωνικὰ πρίσματα ἐπὶ τῆς βάσεως αβγ καὶ τῶν ὁμοίων τομῶν δεζ, ηθι, κ.τ.λ. Ἔστω δὲ Α τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν πρισμάτων εἰς τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ καὶ Α' τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν εἰς τὴν σαβγ.

Συγκρίνοντες ἤδη τὰ τριγωνικὰ πρίσματα, τουτέστι τὸ δεύτερον ἐξωτερικὸν εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα μὲ τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν εἰς τὴν δευτέραν καὶ ὁμοίως τὸ τρίτον εἰς τὴν πρώτην, μὲ τὸ δεύτερον εἰς τὴν δευτέραν κ.τ.λ. καὶ τέλος τὸ τελευταῖον εἰς τὴν πρώτην μὲ τὸ τελευταῖον εἰς τὴν δευτέραν, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ πρίσματα ταῦτα κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα εἶναι ἰσοδύναμα· ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους· ὅθεν ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀθροισμάτων εἶναι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔ... ἢ Α—Ά=ΑΒΓ×ΑΙ. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη πρέπει νὰ ἦναι μεγαλητέρα τοῦ ΑΒΓ×ΑΧ. ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ προσέλαβε μέρος εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν πρισμάτων, ἡ δὲ μικροτέρα σαβγ ἀπέβαλεν ἐκ τῆς στερεότητός της· ἐξ ἐναντίας δὲ ΑΒΓ×ΑΙ<ΑΒΓ×ΑΧ· ἄρα εἶναι ἄτοπος ἡ ὑπόθεσις τῆς μεταξὺ τῶν πυραμίδων διαφορᾶς· ὅθεν αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι.

Θεώρημα ΙΔ'.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΣ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους. (σχ. 174.)

Ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τοῦ πρίσματος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, μένει ἡ τετραγωτικὴ πυραμὶς ΣΑΓΔΕ ἔχουσα κορυφὴν τὸ Σ· διὰ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΣΕ καὶ ΣΓ ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον ΣΕΓ· οὕτω διαιρεῖται εἰς τὰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΕΓΔ καὶ ΣΕΑΓ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἰσοδύναμοι· ἐπειδὴ ἔχουσι βάσεις ἴσας ΑΕΓ καὶ ΕΔΓ ὡς ἡμίση τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΔΕ καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ Σ εἶναι κοινή. Ἀλλ' αἱ πυραμίδες ΣΕΔΓ καὶ ΣΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμοι· ἐπειδὴ ἔχουσι βάσεις ἴσας ΑΒΓ καὶ ΔΣΕ, καὶ ὕψος τὸ αὐτό· διότι αἱ κορυφαὶ Σ καὶ Γ εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν παραλλήλων βάσεων· ἀπεδείχθη δὲ καὶ ἡ πυραμὶς ΣΓΔΕ ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΣΕΑΓ· ἄρα αἱ τρεῖς αὗται πυραμίδες τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἰσοδύναμοι, καὶ ἐκ τούτου ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΣ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Θεώρημα ΙΕ'.

Ἡ στερεότης οἱασδήποτε πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ ἔχει διὰ μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της. (σχ. 160.)

Ἐπειδὴ κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΖΗΘ εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους· ἄρα ἡ στερεότης αὐτῆς εἶναι τὸ τριτημόριον τῆς στερεότητος τοῦ πρίσματος, ἢ τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της· Ἐκ τούτου συνάγομεν ἤδη καὶ τὸ μέτρον τῆς στερεότητος πυραμίδος πολυγωνικῆς οἱασδήποτε ΣΑΒΓΔΕ· Οὕτως διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΑΔ ἄς διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα ΣΑΓ καὶ ΣΑΔ, τὰ ὁποῖα ἀποσυνθέτουσι τὴν πυραμίδα εἰς τὰς τριγωνικὰς ΣΑΒΓ, ΣΑΓΔ καὶ ΣΑΔΕ· ἡ στερεότης αὐτῶν ἐκφράζεται διὰ τῶν γινομένων $ΑΒΓ \times \frac{1}{3}ΣΟ$, $ΑΓΔ \times \frac{1}{3}ΣΟ$ καὶ $ΑΔΕ \times \frac{1}{3}ΣΟ$. Ἐκ τούτου ἡ στερεότης τῆς πολυγωνικῆς πυραμίδος, ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν, ἔχει διὰ μέτρον $(ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ) \times \frac{1}{3}ΣΟ$ ἢ $\text{στερ. } ΣΑΒΓΔΕ = ΑΒΓΔΕ \times \frac{1}{3}ΣΟ$.

Πάρισμα ά. — Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Πόρισμα 6'. — Δύο πυραμίδες τῆς αὐτῆς βάσεως ἢ τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι ὡς πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὕψη, ἢ τὰς βάσεις των.

Πόρισμα. γ'. — Πᾶσα πολυγωνικὴ πυραμὶς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τριγωνικὴν πυραμίδα τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ βάσεως ἰσοδυνάμου.

Θεώρημα ΙΣΤ'.

Ὁ κορμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος ΖΗΘζηθ μὲ παραλλήλους βάσεις ἰσοῦται μὲ τρεῖς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ὕψος κοινὸν τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ καὶ βάσεις τὴν κάτω βάσιν τοῦ κορμοῦ τὴν ἄνω βάσιν αὐτοῦ καὶ τὴν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο βάσεων (σχ. 175.)

Διὰ τῶν τριῶν σημείων η, Ζ, Θ, ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν κορμὸν τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ηΖΗΘ ἔχουσαν βάσιν τὴν ΖΗΘ κάτω βάσιν τοῦ κορμοῦ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ ἰδίου· ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ αὐτῆς η εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἄνω βάσεως ζηθ. Ἀφαιρεθείσης τῆς τριγωνικῆς ταύτης πυραμίδος, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ηΖΘθζ. Διὰ τῶν τριῶν σημείων η, ζ, Θ ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς τὰς δύο τριγωνικάς· ἐκ τούτων ἡ ηζθΘ ἔχει διὰ βάσιν τὴν ηζθ ἄνω βάσιν τοῦ κορμοῦ καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ αὐτῆς Θ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως τοῦ κορμοῦ ΖΗΘ. Μένει ἤδη ἡ τρίτη πυραμὶς ηζΖΘ νὰ ἀποδειχθῇ κατὰ τὴν συνθήκην τοῦ θεωρήματος. Ἂς ἀχθῇ ἡ ηΚ παράλληλος τῆς ζΖ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΘΚ καὶ ζΚ· οὕτω σχηματίζεται ἡ πυραμὶς ΚζΖΘ, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ηζΖΘ· ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν βάσιν ζΖΘ κοινὴν καὶ τὰς κορυφὰς η καὶ Κ ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραλλήλου. Ἡ νέα αὐτὴ πυραμὶς ΚζΖΘ, θεωρουμένη ὡς ἔχουσα βάσιν τὴν ΖΚΘ, ἔχει τὴν κορυφὴν αὐτῆς ζ ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως καὶ ἑπομένως ἔχει διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ· καθόσον δὲ ἀφορᾷ τὴν βάσιν αὐτῆς ΖΚΘ, αὕτη ἀποδεικνύεται μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο βάσεων· διότι τὰ τρίγωνα ΖΘΚ καὶ ζηθ, ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην $ζ = Z$, δίδουσι τὴν ἀναλογίαν $ζηθ : ZKΘ :: ζθ \times ζη : ZK \times ZH$. (§ κδ'. θεωρ. ιγ'). καὶ ἐπειδὴ $ηζ =$

ΖΚ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ηΚ καὶ ζΖ, ἀπαλειφομένων τῶν ἴσων παραγόντων ζη καὶ ΖΚ, συνάγομεν ζηθ : ΖΚΘ : : ζθ : ΖΘ (1). Παρομοίως τὰ τρίγωνα ΖΚΘ καὶ ΖΗΘ, ἔχοντα τὴν γωνίαν Ζ κοινήν, δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΖΚΘ : ΖΗΘ : : ΖΚ $\times$ ΖΘ : ΖΗ$\times$ΖΘ : : ΖΚ : ΖΗ : : ζη : ΖΗ(2). Ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ζηθ : καὶ ΖΗΘ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ζη : ΖΗ : : ζθ : ΖΘ· ὅθεν ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ζηθ : ΖΚΘ : : ΖΚΘ : ΖΗΘ· ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ΖΚΘ $=$ $\sqrt{\zeta\eta\theta \times ZH\Theta}$· ἄρα ὁ κορμὸς ΖΗΔζηθ ἰσοῦται μὲ τρεῖς πυραμίδας κτλ.

Ὅ,τι εἴπομεν διὰ τὸν κορμὸν τριγωνικῆς πυραμίδος δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν παρομοίως καὶ διὰ τὸν κορμὸν τῆς πολυγωνικῆς πυραμίδος ΑΒΓΔΕαβγδε (σχ. 168.) ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τριγωνικὴν πυραμίδα ΤΖΗΘ βάσεως ἰσοδυνάμου καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους· τέμνοντες δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τὴν ἰσοδύναμον τριγωνικὴν πυραμίδα, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο μικραὶ πυραμίδες Σαβγδε καὶ Τζηθ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἔχουσαι βάσεις ἰσοδυνάμους (§ λϐ'. θεώρ. έ. πόρ.) καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ὅθεν, ἀφαιρουμένων αὐτῶν ἀπὸ τῶν ὅλων πυραμίδων, μένει ὁ πολυγωνικὸς κορμὸς ἰσοδύναμος μὲ τὸν τριγωνικὸν ΖΗΘζηθ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἀναφέρομεν τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ὡς ἀνωτέρω.

Τούτου τεθέντος, ἂν παρασταθῶσιν ἤδη διὰ Β καὶ β, αἱ δύο βάσεις τοῦ κορμοῦ καὶ διὰ Υ τὸ ὕψος, ἡ στερεότης αὐτοῦ ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου $\frac{1}{3}\,\Upsilon \times (B + \beta + \sqrt{B \times \beta})$.

Θεώρημα ΙΖ'.

Ἐὰν τριγωνικὸν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου ΔΕΖ κλίνοντος πρὸς τὴν βάσιν, τὸ μένον στερεὸν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τρεῖς κορυφαὶ τῆς τομῆς καὶ βάσις ἑκάστης, ἡ κάτω βάσις τοῦ πρίσματος (σχ. 176.)

Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Ε, Γ ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν πρώτην πυραμίδα ΕΑΒΓ, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι ἡ ΑΒΓ καὶ κορυφὴ τὸ Ε. Ἀφαιρεθείσης αὐτῆς, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΕΑΓΖΔ, ἡ ὁποία διὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν σημείων Ζ, Ε, Α διαιρεῖται εἰς τὰς δύο τριγωνικὰς ΕΑΓΖ καὶ ΕΑΔΖ· ἡ πρώτη τούτων ΕΑΓΖ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πυραμίδα ΖΑΒΓ. ἐπειδὴ ἔχουσι κοινὴν βάσιν ΑΓΖ καὶ τὰς κορυφάς των Ε καὶ Β ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραλλήλου ΕΒ· ἀλλὰ ἡ ΖΑΒΓ δύναται νὰ θεωρηθῆ, ὡς ἔχουσα βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ζ· ἄρα ἡ ΕΑΓΖ ἢ ἡ ΖΑΒΓ εἶναι ἡ δευτέρα πυραμὶς τοῦ θεωρήματος. Μένει ἤδη νὰ θεωρήσωμεν τὴν τρίτην πυραμίδα ΕΑΔΖ· αὕτη εἶναι μὲν ἰσοδύναμος μὲ τὴν πυραμίδα ΓΔΕΑ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΔΕ καὶ τὰς κορυφὰς Ζ καὶ Γ ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραλλήλου ΓΖ· ἀλλ' ἡ ΓΔΕΑ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΒΔΑΓ· ἐπειδὴ ἔχουσι κοινὴν βάσιν ΑΓΔ καὶ τὰς κορυφὰς Β καὶ Ε ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραλλήλου ΒΕ· ἄρα ἡ ΕΑΔΖ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΔΑΒΓ θεωρουμένην, ὡς ἔχουσαν βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Τούτου τεθέντος, ἂν παρασταθῶσιν ἤδη διὰ Υ, Υ' Υ'' τὰ ἀποστήματα τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ ἀπὸ τῆς βάσεως ΑΒΓ, ἡ στερεότης τοῦ τετμημένου πρίσματος ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου $ΑΒΓ \times \frac{1}{3}(Υ + Υ' + Υ'')$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΕΡΙΦΕΡΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ.

§. *λδ'. Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν περιφερῶν σωμάτων.*

Ὀνομάζονται σώματα περιφερῆ τὰ παραγόμενα ὑπὸ τῆς περιστροφῆς ἐπιπέδου τινος ἐπιφανείας περί τινα ἀκίνητον εὐθεῖαν, ἡ ὁποία λέγεται ἄξων. Ἐκ τούτων θέλομεν θεωρήσει κυρίως τὰ ἑξῆς τρία, τὸν Κύλινδρον, τὸν Κῶνον, καὶ τὴν Σφαῖραν.

Κύλινδρος. Ὀνομάζομεν κύλινδρον τὸ παραγόμενον στερεὸν ΑΒ' ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τινὸς ὀρθογωνίου ΑΓΓ'Α' περὶ τὴν ἀκίνητον πλευρὰν αὐτοῦ ΓΓ', ἡ ὁποία λέγεται ἄξων ἢ καὶ ὕψος τοῦ κυλίνδρου (σχ. 177.)

Οἱ δύο περιγραφόμενοι κύκλοι ὑπὸ τῶν ἴσων ἀκτίνων ΑΓ καὶ Α'Γ' λέγονται βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΑ', τῆς ὁποίας τὰ ἴχνη περιγράφουσι τὴν κυρτοεπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, λέγεται γεννήτρια.

Δύο κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι, ὅταν οἱ ἄξονες εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεών των.

Ἀπ' αὐτοῦ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ κυλίνδρου ἕπεται.

Πρῶτον. — Πᾶσα τομὴ γινομένη εἰς τὸν κύλινδρον δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν εἶναι κύκλος ἴσος μὲ τὴν βάσιν· διότι, περιστρεφομένου τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΓ'Α' περὶ τὴν ΓΓ'; ἡ γραμμὴ ΚΙ κάθετος εἰς τὴν ΓΓ' περιγράφει παρομοίως κυκλικὸν ἐπίπεδον, ἴσον μὲ τὴν βάσιν, κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ ἐπομένως παράλληλον τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου· τὸ ἐπίπεδον δὲ τοῦτο εἶναι ἡ παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν τομὴ τοῦ κυλίνδρου.

Δεύτερον. — Πᾶσα τομὴ γινομένη δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος· τοῦτο δὲ γίνεται φανερὸν, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΆΒ΄ εἶναι αἱ διάμετροι τῶν δύο παραλλήλων βάσεων τοῦ κυλίνδρου.

Κῶνος. — Ὀνομάζεται κῶνος τὸ παραγόμενον στερεὸν ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ περὶ τὴν μίαν πλευρὰν ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἡ ὁποία λέγεται ἄξων, ἢ ὕψος τοῦ κώνου. (σχ. 178).

Ὁ ὑπὸ τῆς ἑτέρας καθέτου πλευρᾶς ΒΓ περιγραφόμενος κύκλος λέγεται βάσις τοῦ κώνου· ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ, τῆς ὁποίας τὰ ἴχνη περιγράφουσι τὴν κυρτοεπιφάνειαν αὐτοῦ, λέγεται γεννήτρια, τὸ δὲ σημεῖον Α λέγεται κορυφὴ τοῦ κώνου.

Δύο κῶνοι εἶναι ὅμοιοι, ὅταν οἱ ἄξονες αὐτῶν ἦναι ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεών των, ὡς ΑΓΒ καὶ ΔΕΓ. (σχ. 178)

Ἕπεται παρομοίως ἀπὸ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ κώνου,

Πρῶτον. — Πᾶσα τομὴ γινομένη εἰς τὸν κῶνον ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν εἶναι κύκλος, ὡς ἡ διατομὴ ΚΛΚ'.

Δεύτερον. — Πᾶσα τομὴ γινομένη δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΒ' διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ὀρθογωνίου.

Ὀνομάζομεν κόλουρον κῶνον τὸ στερεὸν ΚΒΒ'Κ', τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν ἀποτμηθῇ ὁ μικρὸς κῶνος ΑΚΚ'.

Ὁ κόλουρος κῶνος δύναται νὰ θεωρηθῇ πρὸς τούτοις ὡς παραγόμενον στερεὸν ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ τραπεζίου ΚΒΓΛ περὶ τὴν ἀκίνητον πλευρὰν ΛΓ, ἡ ὁποία λέγεται ἄξων ἢ ὕψος αὐτοῦ. (σχ. 178).

Σφαῖρα. — Τὸ παραγόμενον στερεὸν ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΓ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΑΓ λέγεται σφαῖρα. (σχ. 179.)

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ σχηματισμοῦ τῆς σφαίρας προκύπτει, ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἡμικυκλίου Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τῆς σφαίρας· διὰ τοῦτο λέγεται ἀκτὶς, ἢ ἡμιδιάμετρος πᾶσα εὐθεῖα ἐπιζευγνύουσα τὸ κέντρον καί τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας· λέγεται δὲ ἄξων ἢ διάμετρος πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου περατοῦται εἰς δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν, ὅτι ἂν τέμνωμεν τὴν σφαῖραν διά τινος ἐπιπέδου ὁπωσδήποτε, ἡ παραχθησομένη τομὴ θέλει εἶσθαι κύκλος. Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἡ ἀκτὶς ΟκΛ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς ΜΡΝΠ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης Μ, Ν, Π, κ. τ. λ. μὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· αἱ ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ΟΜ, ΟΝ, ΟΠ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι ὡς ἀκτῖνες, ἀλλὰ σχετικῶς πρὸς τὴν κάθετον Οκ θεωροῦνται ὡς ἴσαι πλάγιαι· ἄρα τὰ ἀποστήματα κΜ, κΝ, κΠ. κτλ. εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως ἡ καμπύλη ΜΡΝΠ εἶναι περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι κ.

Τούτου τεθέντος, ὀνομάζεται μέγιστος κύκλος ἡ παραγομένη τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· καὶ μικρὸς, ὅταν δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου.

Ἡ διάμετρος τοῦ μεγίστου κύκλου εἶναι αὐτὸς ὁ ἄξων τῆς σφαίρας, καὶ διὰ τοῦτο ὅλοι μέγιστοι κύκλοι εἶναι ἴσοι· αἱ δὲ διάμετροι τῶν μικρῶν κύκλων εἶναι χορδαὶ τῆς σφαίρας· ὅθεν καὶ εἰς τὰς περιφερείας, ἢ τὰ τόξα αὐτῶν ὑπάρχει διαφορὰ μεγέθους.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν πρὸς τούτοις, ὅτι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ τὸ τοῦ μικροῦ κύκλου εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μικροῦ κύκλου, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα.

Ὀνομάζεται πόλος μικροῦ ἢ μεγίστου κύκλου σημεῖόν τι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπέχον ἰσάκις ἀφ' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Εἰς πάντα κύκλον ὑπάρχουσι δύο τοιοῦτα σημεῖα ἢ πόλοι· τοὺς προσδιορίζομεν δὲ ἄγοντες ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας Ο τὴν διάμετρον ΑΓ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μικροῦ κύκλου. οὕτω τὰ ἄκρα αὐτῆς Α καὶ Γ θέλουσιν εἶσθαι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου ΜΝ καὶ ὅλων τῶν παραλλήλων αὐτοῦ· διότι ἡ κάθετος αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου κ καὶ ἐπομένως αἱ χορδαὶ ΑΜ, ΑΝ, ΑΠ. κ. τ. λ. καὶ ὁμοίως ΓΜ, ΓΝ, ΓΠ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, ὡς πλάγιαι ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου· ἄρα καὶ τὰ ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινόμενα τόξα μεγίστων κύκλων εἶναι ἴσα· τουτέστι τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ΜΡΝΠ, καὶ ὁμοίως τῶν παραλλήλων αὐτῆς.

Δύο μέγιστοι κύκλοι εἰς τὴν σφαῖραν τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἐπειδὴ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ὂν κοινὸν καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους ἀνήκει εἰς τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς· ὅθεν οἱ μέγιστοι κύκλοι τέμνονται κατὰ διάμετρον, ἢ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Δύο μὴ κατὰ διάμετρον ἀντίθετα σημεῖα λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς σφαίρας προσδιορίζουσιν ἐπ' αὐτῆς τόξον μεγίστου κύκλου. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κείμενα προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ὀνομάζεται ἄτρακτος τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περιεχόμενον ὑπὸ δύο ἡμιμεγίστων κύκλων ὡς ΑΒΓΔ.

Ὀνομάζεται δὲ σφὴν ἢ ὄνυξ τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν ἰδίων ἡμιμεγίστων κύκλων, καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ἄτρακτος χρησιμεύει ὡς βάσις.

Καλεῖται ζώνη τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων π. χ. κύκλ. ΟΒ καὶ κύκλ. κΜ, οἱ ὁποῖοι εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης· δυνατὸν ἓν τούτων νὰ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, καὶ τότε ἡ ζώνη ἔχει μίαν βάσιν.

Καλεῖται δὲ τμῆμα σφαιρικὸν τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα παρομοίως εἶναι αἱ βάσεις τοῦ τμήματος· δυνατὸν ἓν τούτων τῶν ἐπιπέδων νὰ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, καὶ τότε τὸ τμῆμα ἔχει παρομοίως μίαν βάσιν.

Ὕψος τῆς ζώνης ἢ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγεται τὸ ἀπόστημα τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἢ τῶν δύο βάσεων.

Ἂν εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ σημειώσωμεν κυκλικὸν τινὰ τομέα ἐξ ὑποθέσεως ΔΜΟ, τὸ παραχθησόμενον στερεὸν ὑπὸ τῆς περιστροφῆς αὐτοῦ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ λέγεται σφαιρικὸς τομεύς.

Σημ. — Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διαγράφονται διὰ τόξων μεγίστων κύκλων διάφορα σχήματα, οἷον τρίγωνα, τετράπλευρα, καὶ πολύγωνα, τῶν ὁποίων ἡ θεωρία συνιστᾷ τὴν Σφαιρικὴν Γεωμετρίαν, ἐπειδὴ ὅμως ἡ σπουδὴ αὐτῆς γίνεται χρήσιμος εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀνωτέρων ζητημάτων καταμετρήσεως, τῶν ὁποίων ἡ ἐφαρμογὴ ἀνήκει εἰς ὑψηλοτέρας Ἐπιστήμας, διὰ τοῦτο παραλείπομεν τὴν θεωρίαν ταύτην· τελειόνομεν δὲ τὸν παρόντα παράγραφον ἀναφέροντες ἐπὶ τῆς σφαίρας τὰ ἑξῆς τρία θεωρήματα.

Θεώρημα Α'.

Τὸ διὰ τόξου συντομώτερον διάστημα ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τῆς σφαίρας εἶναι τὸ τόξον μεγίςου κύκλου. (σχ. 180.)

Ἔστω τὸ τόξον μεγίστου κύκλου ΑΜΒ ἐπιζευγνύον δύο σημεῖα τῆς σφαίρας Α καὶ Β· καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, καὶ ἄλλη τις βραχυτέρα καμπύλη μεταξὺ Α καὶ Β, τῆς ὁποίας ἓν τῶν σημείων ἔστω Ν. Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἂς ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστου κύκλου ΑΝ καὶ ΝΒ καὶ ἂς ληφθῇ ΑΜ=ΑΝ· εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΝ ἡ μία τῶν πλευρῶν ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο· ἐπειδὴ τὰ τόξα ταῦτα μετρῶσι τὰς ἐπιπέδους γωνίας τῆς τριέδρου στερεᾶς εἰς τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας· ἡ μία δὲ τῶν ἐπιπέδων τούτων γωνιῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο (§. λ. θεώρ. ιθ'.) καὶ ἐπομένως ἔχομεν ΑΜΒ$<$ΑΝ$+$ΝΒ. καὶ δι' ἀφαιρέσεως τῶν ἴσων τόξων ΑΜ καὶ ΑΝ, συνάγομεν ΒΜ$<$ΒΝ. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Ν, παρομοίως δὲ καὶ πᾶν ἄλλο λαμβανόμενον ἐκτὸς τοῦ τόξου ΑΜ τοῦ μεγίστου κύκλου, δὲν ὑπάρχει σημεῖον τῆς συντομωτέρας ὁδοῦ μεταξὺ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β· ἄρα τὸ τόξον ΑΜΒ μετρᾷ τὸ συντομώτερον διάστημα τῶν σημείων Α καὶ Β.

Θεώρημα Β'.

Ἡ γωνία ΑΡΑ' τῶν δύο τόξων ΑΡ καὶ Α'Ρ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΤΡΤ' τῶν δύο ἐφαπτομένων ΤΡ καὶ Τ'Ρ εἰς τὸ σημεῖον Ρ τῆς κοινῆς τομῆς· ἔχει δὲ διὰ μέτρον τὸ τόξον μεγίστου κύκλου ΑΑ' μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας κατὰ τὸ τεταρτημόρνον τῆς περιφερείας ΡΑ καὶ ΡΑ'. (σχ. 181.)

Κατὰ πρῶτον λέγοντες ἡ γωνία τῶν τόξων ΑΡΑ' ἐννοοῦμεν τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν· αὕτη δὲ μετρᾶται διὰ τῆς γωνίας τῶν καθέτων εὐθειῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς·(§ κή. θεώρ. ιγ΄. πόρισ. ά.) ἄρα ἡ γωνία ΤΡΤ΄ τῶν δύο ἐφαπτομένων ΤΡ καὶ Τ'Ρ καθέτων εἰς τὴν κοινὴν τομὴν ΡΡ' ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν τῶν τόξων ΑΡΆ. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως αἱ ἀκτῖνες ΑΓ καὶ ΆΓ εἶναι παρομοίως κάθετοι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΡΡ', διότι αἱ γωνίαι ΑΓΡ καὶ ΆΓΡ μετρώμεναι διὰ τεταρτημορίου τῆς περιφερείας ΑΡ καὶ ΆΡ εἶναι ὀρθαί· ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΓΆ ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον ΑΆ· ἄρα τὸ ἴδιον τοῦτο χρησιμεύει ὡς μέτρον καὶ τῆς γωνίας τῶν τόξων· τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Θεώρημα Γ΄.

Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ἐφάπτεται τῆς σφαίρας. (σχ. 181.)

Ἐπειδὴ πᾶν ἕτερον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ΤΑΤ΄ παρεκτὸς τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος ἐπιζευγνύμενον μὲ τὸ κέντρον προσδιορίζει πλαγίαν μεγαλητέραν τῆς καθέτου ἀκτῖνος ΓΑ· ὅθεν τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν ἀνήκει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ κέντρου· και διὰ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, ἔχον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

Σχόλιον. — Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὴν σφαῖραν τὰ αὐτὰ θεωρήματα τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ἐπαφῆς δύο σφαιρῶν καὶ τῆς τομῆς ἢ ἀπομακρύνσεώς των κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς εἰς τὸν §. ή. περὶ τῆς τομῆς καὶ ἐπαφῆς τῶν κύκλων.

§ λέ. Περὶ τῆς καταμετρήσεως τῆς ἐπιφανείας τῶν περιφερῶν στερεῶν.

Λῆμμα Α΄.

Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ΠΑΒΓΔ περατουμένης εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον. (σχ. 182)

Η πρότασις αὕτη εἶναι τόσον φανερὰ, ὅσον ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἡ βραχυτέρα μεταξὺ δύο σημείων. Διὰ νὰ μὴ πολλαπλασιάσωμεν ὅμως τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀξιωμάτων, λέγομεν, ὅτι ἐπιφάνειά τις εἶναι ἄλλης μεγαλητέρα, ὅταν αἱ διαστάσεις τῆς πρώτης, εἴτε ἡ μία, εἴτε καὶ αἱ δύο, ἦναι μεγαλήτεραι τῶν διαστάσεων τῆς ἑτέρας. Τούτου τεθέντος, βλέπομεν ἐνταῦθα, ὅτι ὅπως ἂν τέμνωμεν δι' ἐπιπέδου τὰς δύο ταύτας ἐπιφανείας, αἱ παραχθησόμεναι τομαὶ ΑΓ καὶ ΑΠΓ, ἢ ΒΔ καὶ ΒΠΔ, αἱ ὁποῖαι μετρῶσι τὰς δύο διαστάσεις τῶν ἐπιφανεεῶν κατά τινα ἔννοιαν, θέλουσιν εἶσθαι ἄνισοι· μικρότεραι δὲ αἱ διαστάσεις τῆς ἐπιπέδου· ἄρα ἡ ἐπίπεδος εἶναι ἡ μικροτέρα.

Λῆμμα Β'.

Πᾶσα κυρτοεπιφάνεια περικλείουσα ἄλλην περατουμένην εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον εἶναι μεγαλητέρα τῆς περικλειομένης. (σχ. 183)

Σημειόνομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι λέγοντες κυρτοεπιφάνειαν ἐννοοῦμεν ἐκείνην, ἡ ὁποία συναπαντᾶται εἰς δύο μόνον σημεῖα διά τινος ὁπωσδήποτε ἀγομένης εὐθείας· δυνατὸν ὅμως εὐθεῖα γραμμὴ νὰ ἐφαρμώσῃ ὁλόκληρος, ὡς ἐπὶ τῆς κυρτοεπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου, συμπίπτουσα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς γεννητρίας· δεύτερον δὲ τὴν σημασίαν τῆς κυρτοεπιφανείας δὲν περιορίζομεν μόνον εἰς τὰς καμπύλας ἐπιφανείας, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς πολυεδρικὰς, ἢ συνθέτους ὑπὸ ἐπιπέδων κατὰ τὴν αὐτὴν συνθήκην.

Τούτου τεθέντος, ἔστω ἡ κυρτοεπιφάνεια ΟΑΒΓΔ περατουμένη εἰς τὴν περίμετρον ΑΒΓΔ· ἂν αὕτη δὲν ἦναι ἡ ἐλαχίστη, ἢ τὸ τελευταῖον ὅριον πασῶν τῶν περικλειουσῶν αὐτὴν, ἔξω, εἰ δυνατὸν, ἡ ΡΑΒΓΔ περικλείουσα τὴν πρώτην πανταχόθεν, τὴν ὁποίαν ἂς ὑποθέσωμεν ὡς τὴν ἐλαχίστην τῶν κατὰ τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ περατουμένων κυρτοεπιφανειῶν· ἔκ τινος σημείου Ο ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας, τέμνον δὲ τὴν ἐξωτερικὴν κατὰ τὴν περίμετρον ΜΣΝΤ· ὅθεν ἔχομεν τὴν ἐπίπεδον ΜΣΝΤ μικροτέραν τῆς κυρτοεπιφανείας ΡΜΣΝΤ· καὶ προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης τὴν αὐτὴν ποσότητα, ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον τῆς κυρτοεπιφανείας, συνάγομεν τὴν νέαν περικλείουσαν ΜΣΝΤΔΑΒΓ μικροτέραν τῆς ΡΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως· ἄρα ἡ περικλείουσα εἶναι μεγαλητέρα τῆς περικλειομένης.

Σχόλιον. — Ἐκ τοῦ λήμματος τούτου πορίζεται

ά. Ἐὰν κυρτοεπιφάνεια περατουμένη εἰς δύο περιμέτρους, ὡς ἡ κυρτοεπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου λήγουσα εἰς τὰς περιφερείας τῶν βάσεών του, περιέχεται ὑπὸ ἄλλης περατουμένης εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα, ἡ περικλειομένη θέλει εἶσθαι μικροτέρα τῆς περικλειούσης.

β'. Ἐὰν κυρτοεπιφάνεια στρογγύλη, ὡς τῆς σφαίρας περικαλύπτεται ὑπὸ ἄλλης, ἡ περικαλυπτομένη αὕτη θέλει εἶσθαι μικροτέρα τῆς περικαλυπτούσης.

γ'. Δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν περιγεγραμμένα πολύεδρα εἰς τὴν σφαῖραν, τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι καὶ οἱ ὄγκοι νὰ διαφέρωσιν, ὅσον θέλομεν κατὰ προσέγγισιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ τοῦ ὄγκου τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας, θεωρουμένης ὡς τῆς μικροτέρας μεταξὺ ὅλων τῶν περὶ αὐτὴν ἔξω σωμάτων.

Θεώρημα Δ'.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον νον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὸ ὕψος του. (σχ. 189.)

Ἔστω ΓΑ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ΓΒ τὸ ὕψος. Ἂς ἐννοήσωμεν εἰς τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον πρίσμα μὲ μέγαν ἀριθμὸν ἑδρῶν· ὥστε ἡ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου διαφορὰ νὰ ἦναι πάσης δεδομένης ποσότητος ἐλάσσων. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἡ περίμετρος τῆς πολυγωνικῆς βάσεως τοῦ πρίσματος θέλει διαφέρει τῆς περιφερείας κατ' ἀνυπολόγιστον ἐπίσης διαφοράν. Τούτου τεθέντος, ἂν σημειώσωμεν διὰ Π τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ διὰ Υ τὸ κοινὸν ὕψος τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου, θέλομεν εὕρει διὰ μέτρον τῆς παραέδρου τοῦ πρίσματος, συνισταμένης ἐκ παραλληλογράμμων τοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὸν τύπον Π × Υ. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ἔχει δι' ἐλάχιστον ὅριον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ· ἄρα περιφ. ΓΑ×Υ ἐκφράζει τὸ ὅριον τῆς παραέδρου τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων, ἢ τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τῆς κυρτοεπιφανείας τοῦ κυλίνδρου· ὥστε ἔχομεν Χ=περ. ΑΓ×ΓΒ.

Σχόλιον. — Ὁ τύπος οὗτος βεβαιοῦται ἐπίσης, ἂν ἐκτυλίξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν γεννήτριαν αὐτοῦ· ὅτε βλέπομεν, ὅτι ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὕψος δὲ τὸ ἴδιον ὕψος αὐτοῦ.

Θεώρημα Ε'.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτοεπιφανείας τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς γεννητρίας αὐτοῦ. (σχ. 190.)

Ἂς ἐννοήσωμεν παρομοίως, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, περιγεγραμμένην εἰς τὸν κῶνον πολυγωνικὴν πυραμίδα μὲ μέγαν ἀριθμὸν ἑδρῶν· ὥστε ἡ παράεδρος αὐτῆς συγκρινομένη πρὸς τὴν κυρτοεπιφάνειαν τοῦ κώνου νὰ ἔχῃ ἀνεπαισθήτως ἐλαχίστην διαφοράν· τοιαύτη δὲ θέλει εἶσθαι παρομοίως καὶ μεταξὺ τῶν ὄγκων τῆς περιγεγραμμένης πυραμίδος καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ παράεδρος τῆς πυραμίδος σχηματιζομένη ἀπὸ τρίγωνα ἰσοσκελῆ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων· ταῦτα δὲ ἔχουσι διὰ μέτρον τὰς βάσεις αὐτῶν, ἤτοι τὰς πλευρὰς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου, πολλαπλασιαζομένας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ γεννήτρια τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου, ἕπεται ὅτι, ἂν παρασταθῇ διὰ Π ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, θέλομεν ἔχει διὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραέδρου τῆς παραμίδος τὸν τύπον $X = \Pi \times \frac{1}{2} \Sigma A$· ὁ ὁποῖος εἰς τὸ ἐλάχιστον ὅριον προσδιορίζει τὴν κυρτοεπιφάνειαν τοῦ κώνου, τότε δὲ ὁ παράγων Π παριστᾷ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἰσοῦται κτλ.

Σχόλιον. — Ὁμοίως δυνάμεθα καὶ ἐνταῦθα νὰ πληροφορηθῶμεν περὶ τοῦ αὐτοῦ ἐξαγομένου διὰ τῆς ἀναπτύξεως τῆς κυρτοεπιφανείας τοῦ κώνου κατὰ τὴν γεννήτριαν αὐτοῦ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Θεώρημα ΣΤ'.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτοεπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων περιφερειῶν, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ. (σχ. 184.)

Ἔστω ὁ κόλουρος κῶνος ΑΒΕΖ· ἂς ὑψωθῇ ἡ ΒΗ κάθετος ἐπὶ τῆς γεννητρίας ΣΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως· ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Σ καὶ Η· ἐκ τοῦ σημείου Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΚ παράλληλος τῆς ΒΗ· ἐκ τῆς κατασκευῆς ταύτης ἕπεται ἤδη καὶ ΕΚ = περ. ΔΕ. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΔΕ καὶ ΣΓΒ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΣΕ :

ΣΒ : : ΔΕ : ΓΒ : : περιφ. ΔΕ : περιφ. ΓΒ· ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΣΕΚ καὶ ΣΒΗ δίδουσι παρομοίως τὴν ἀναλογίαν ΣΕ : ΣΒ : : ΕΚ : ΒΗ· ἐκ τούτου συνάγομεν περιφ. ΔΕ : περιφ. ΓΒ : : ΕΚ : ΒΗ· καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς κατασκευῆς ἐλήφθη ΒΗ=περιφ. ΓΒ· ἄρα καὶ ΒΚ=περιφ. ΔΕ. Τούτου τεθέντος, ἡ κυρτοεπιφάνεια τοῦ ὅλου κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΣΒΗ, καὶ παρομοίως ἡ κυρτοεπιφάνεια τοῦ μικροῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΣΕΚ· ὅθεν δι' ἀφαιρέσεως τῶν ἴσων συνάγεται ἡ κυρτοεπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ἴση μὲ τὸ τραπέζιον ΕΒΗΚ· τοῦτο δὲ προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου $\frac{1}{2}$ (ΒΗ+ΕΚ)×ΕΒ· (§ κγ'. θεώρ. θ'.) δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ἴσων συνάγομεν διὰ τὴν κυρτοεπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου $\frac{1}{2}$ (περιφ. ΓΒ+περιφ. ΔΕ)×ΕΒ· τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. — Ἂν ἐκ τοῦ σημείου Μ μέσου τῆς πλευρᾶς ΕΒ ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΜΝ, ἀποδεικνύομεν παρομοίως ΜΝ= περιφ. ΚΜ· καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἐμβ. ΕΒΗΚ=ΜΝ×ΕΒ· ἄρα καὶ περιφ. ΚΜ×ΕΒ προσδιορίζει τὴν κυρτοεπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου.

Λῆμμα.

Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι κανονικὸν ἡμιπολύγωνον καὶ ἡ περιγεγραμμένη ἡμιπεριφέρεια στρέφονται περὶ τὴν διάμετρον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ κανονικοῦ ἡμιπολυγώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου. (σχ. 185.)

Ἔστω τὸ ἡμιπολύγωνον ΑΒΓΔ . . . ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς διαμέτρου ΑΗ· λέγομεν, ὅτι ἡ κυρτοεπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγώνου ἔχει διὰ μέτρον ΑΗ × περιφ. ΟΙ.

Ἐκ τῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ... κτλ. τοῦ πολυγώνου καὶ ἐκ τοῦ μέσου Ι τῆς πλευρᾶς ΓΒ ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ αἱ κάθετοι ΒΚ, ΙΝ, ΓΛ... κτλ. Καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΜ παράλληλος τῆς διαμέτρου ΑΗ. Τὰ τρίγωνα ΓΜΒ καὶ ΝΙΟ ἔχοντα τὰς πλευράς των καθέτους μεταξύ των εἶναι ὅμοια (§ ις΄. θεώρ. ς΄.) ὅθεν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΓΒ : ΒΜ : : ΙΟ : ΙΝ : ἀλλὰ ΙΟ : ΙΝ : : περιφ. ΙΟ : περιφ. ΙΝ· ἄρα ΓΒ : ΒΜ : : περιφ. ΙΟ : περιφ. ΙΝ· ἐκ ταύτης δὲ συνάγομεν ΓΒ × περιφ. ΙΝ = ΒΜ × περιφ. ΙΟ. Ἡ πλευρὰ ΓΒ στρεφομένη περὶ τὴν διάμετρον ΑΗ παράγει τὴν κυρτοεπιφάνειαν κολούρου κώνου, ἔχουσαν διὰ μέτρον ΓΒ × περιφ. ΙΝ· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια αὕτη μετρᾶται παρομοίως καὶ διὰ τοῦ ἰσοδυνάμου ΒΜ × περιφ. ΙΟ, ἢ ΚΛ × περιφ. ΙΟ. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον προσδιορίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τῶν ἄλλων ζωνῶν τοῦ παραγομένου στερεοῦ. Ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν ζωνῶν, τουτέστιν ΑΚ × περιφ. ΙΟ + ΚΛ × περιφ. ΙΟ + κτλ. = (ΑΚ + ΚΛ + ...) περιφ. ΙΟ = ΑΗ × περιφ. ΙΟ.

Θεωρημα Ζ΄.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου. (σχ. 186)

Ἔστω ἡ σφαῖρα ΓΑ· λέγομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς ἰσοῦται μὲ ΑΒ × περιφ. ΓΑ· ἂς περιγραφθῇ εἰς τὸ ἡμικύκλιον κανονικὸν ἡμιπολύγωνον ἀρτίου ἀριθμοῦ πλευρῶν ΜΝΠΡ... ἡ ἐπιφάνεεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ ὑπὸ τῆς περιφορᾶς τοῦ ἡμιπολυγώνου κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα ἔχει διὰ μέτρον ΜΣ × περιφ. ΑΓ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη, μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, δύναται νὰ ἐλαττωθῇ, ὥστε ἡ μεταξὺ τούτων διαφορὰ νὰ ἀποκατασταθῇ ἐλαχίστη, καθόσον λαμβάνομεν μεγαλήτερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἰς τὸ ἡμιπολύγωνον, ὅτε καὶ ἡ διαγώνιος ΜΣ τοῦ πολυγώνου πλησιάζει τὸ μέγεθος τῆς διαμέτρου ΑΒ, κατὰ τὸ ἐλάχιστον τῆς διαφορᾶς· ἕπεται, ὅτι ΑΒ$\times$περιφ. ΓΛ ἐκφράζει τὸ τελευταῖον ὅριον τῶν περὶ τὴν σφαῖραν περιγραφομένων στερεῶν, ἢ αὐτὴν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας Χ· ὥστε ἔχομεν Χ$=$ΑΒ$\times$περιφ. ΑΓ.

Πόρισμα. — Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίσου κύκλου τῆς σφαίρας ἔχει διὰ μέτρον περιφ. ΑΓ$\times\frac{1}{2}$ΑΓ· ἢ περιφ. ΑΓ$\times\frac{1}{4}$ΑΒ, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ περιφ. ΑΓ$\times$ΑΒ· ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τετράκις τὸν μέγιστον κύκλον τῆς ἰδίας.

Πόρισμα β΄. — Ἂν παραστήσωμεν διὰ Α τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ διὰ Δ τὴν διάμετρον αὐτῆς, συνάγομεν διὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας τὸν τύπον $4\pi' A^2$, ἢ $\pi' \Delta^2$· ἐκ τοῦ ὁποίου πορίζεται ά. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· καὶ β΄ αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν ἀνίσων ἀκτίνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας; ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων αὐτῶν.

Πόρισμα γ΄. — Ἔστω κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν (σχ. 187). Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ἡ κυρτοεπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· διότι ἡ μὲν κυρτοεπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀπεδείχθη ἴση μὲ περιφ. ΓΛ$\times$ΑΕ· ἡ δὲ τῆς σφαίρας ἴση μὲ περιφ. ΜΟ$\times$ΓΔ· ὅπου βλέπομεν, ὅτι οἱ παράγοντες τῶν δύο τούτων γινομένων εἶναι ἴσοι καὶ ἑπομένως τὰ ἐξαγόμενα αὐτῶν, ἤτοι αἱ δύο ἐπιφάνειαι εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ ἑπομένως ἡ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους, προστιθεμένων καὶ τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου, συνάγομεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἴσην μὲ ἓξ μεγίστους κύκλους· ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας ὡς 6 : 4 ἢ ὡς 3 : 2.

Θεώρημα Η'.

Ἡ σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν ἢ δύο βάσεις ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου. (σχ. 188.)

Ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν ζώνην μὲ μίαν βάσιν· ἐγγράφοντες εἰς τὸ τόξον αὐτῆς ΔΑ μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου, συνάγομεν διὰ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑπ' αὐτῆς παραγομένου στερεοῦ περιφ: ΓΙ × ΔΕ. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια αὕτη πλησιάζει βαθμηδὸν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς ζώνης, καθόσον πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς πολυγωνικῆς μερίδος· συμπεραίνομεν ἐκ τούτου, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης, τελευταῖον ὅριον τῆς αὐξήσεως τῆς κυρτοεπιφανείας τῶν ἐγγεγραμμένων ςερεῶν, ἔχει διὰ μέτρον περιφ: ΓΑ × ΔΕ. Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίστασιν ταύτην αἱ ἀκτῖνες ΓΑ καὶ ΓΙ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου ἀποκαθίςανται ἴσαι.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἤδη τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ζώνης μὲ δύο βάσεις, ἤτοι τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΑ'· ἀρκεῖ ἀπὸ τὴν ζώνην τοῦ τόξου ΔΑ' νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ζώνην τοῦ τόξου ΑΔ· ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης ΑΑ' προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου περιφ: ΓΔ × ΔΕ' — περιφ: ΓΔ × ΔΕ = περιφ: ΓΔ × ΕΕ', τουτέςιν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος της.

Πόρισμα. — Δύο ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ὡς τὰ ὕψη των. Ὁμοίως ἡ ζώνη ἔχει λόγον πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὡς τὸ ὕψος αὐτῆς πρὸς τὴν διάμετρον.

Θεώρημα Η'.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀτράκτου ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον μετρᾷ τὴν γωνίαν αὐτοῦ, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. (σχ. 181.)

Ἐπαναλαμβάνοντες καὶ ἐνταῦθα τὸν αὐτὸν συλλογισμὸν, τὸν ὁποῖον μετεχειρίσθημεν καὶ εἰς τὴν σύγκρισιν τῶν συγκεντρικῶν γωνιῶν, ἢ τῶν ὀρθογωνίων τοῦ αὐτοῦ ὕψους, ἢ τῶν κλίσεων τῶν ἐπιπέδων, κ. τ. λ. δυνάμεθα παρομοίως νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὁ ἄτρακος Ρ'ΑΡΑ' ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας 4. π. $\overline{\text{ΑΓ}}^2$, ὡς τὸ τόξον τῆς γωνίας αὐτοῦ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου 2. π. ΑΓ· ὥστε ἔχομεν ἐμβ. Ρ'ΑΡΑ' : 4. π. $\overline{\text{ΓΑ}}^2$ :: ΑΑ' : 2. π. ΑΓ. Τούτου τεθέντος, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο δευτέρων ὅρων ἐπὶ τὰ ἴσα ΡΡ' = 2. ΓΑ, λαμβάνομεν ἐμβ. Ρ'ΑΡΑ' : 4. π. $\overline{\text{ΓΑ}}^2$ :: ΑΑ'$\times$ΡΡ' : 4. π. $\overline{\text{ΓΑ}}^2$· καὶ ἐπειδὴ οἱ ἑπόμενοι ὅροι ταυτίζονται, ἄρα καὶ οἱ ἡγούμενοι εἶναι παρομοίως ἴσοι· ὅθεν ἔχομεν ἐμβ. Ρ'ΑΡΑ' = τόξ. ΑΑ'$\times$ΡΡ', τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. — Δύο ἄτρακτοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τόξα τῶν γωνιῶν των.

§. λϛʹ. *Καταμέτρησις τοῦ ὄγκου τῶν περιφερῶν σωμάτων.*

Θεώρημα Θʹ.

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του. (σχ. 189.)

Ἔστω ὁ κύλινδρος ΑΓΒ· λέγομεν ὅτι στερ : ΑΓΒ = ἐπιφ : ΓΑ $\times$ΓΒ· ἂς ἐννοήσωμεν περὶ αὐτὸν περιγραφόμενον πρίσμα πολλαπλασίου ἀριθμοῦ ἑδρῶν, ὥστε ἡ μεταξὺ τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου διαφορὰ νὰ ἦναι ἐλαχίστη. Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος μετρᾶται διὰ τῆς βάσεώς του πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὸ ὕψος του· τουτέστι διὰ τοῦ γινομένου ΜΝΠΚ... $\times$ΓΒ· ἀλλ' ὁ ὄγκος τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων ἐλαττοῦται, καθόσον πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς πολυγωνικῆς βάσεως, ἢ καθόσον ἡ βάσις αὐτῶν προσεγγίζει εἰς τὸν κύκλον, ἔπεται ἄρα, ὅτι ἔσχατον ὅριον αὐτῶν, ἢ ὁ ἐγγεγραμμένος κύλινδρος θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς κυκλικῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, τουτέστι ςερ. ΑΓΒ $=$ἐπιφ. ΓΑ $\times$ ΓΒ$=$π. $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 \times$ ΓΒ.

Θεώρημα Ι'.

Ἡ στερεότης τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τριτημόριον τοῦ ὕψους του. (σχ. 190.)

Ἔστω ὁ κῶνος ΣΑΓ· λέγω ὅτι στερ: ΣΑΓ $=$ ἐπιφ. ΑΓ $\times\frac{1}{3}$ΣΓ· ἂς περιγραφθῇ εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ κανονικὸν πολύγωνον ΠΣΡΚ.... ὁσουδήποτε ἀριθμοῦ πλευρῶν, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν ἂς σημειωθῇ διὰ Π· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ μετὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου Σ. Οὕτω σχηματίζεται ἡ περιγεγραμμένη πυραμὶς, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου Π$\times\frac{1}{3}$ΣΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ςερεότης τῆς περιγεγραμμένης πυραμίδος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς πολυγωνικῆς βάσεώς της, ἔπεται ὅτι θέλει φθάσει τὸ ἐλάχιστον ὅριον, ἢ τὴν στερεότητα τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου, ὅταν εἰς πολλαπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἡ βάσις αὐτῆς ταυτισθῇ μὲ τὴν κυκλικὴν βάσιν τοῦ κώνου· ὥςε συνάγομεν στερ: ΣΑΓ$=$ἐπιφ: ΑΓ$\times\frac{1}{3}$ΣΓ$=$π. $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2\times\frac{1}{3}$ΣΓ.

Θεώρημα ΙΑ'.

Ὁ κόλουρος κῶνος ΑΔΕΒ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{3}$ π. ΟΠ$\times$ $(\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\Delta\Pi}^2+\mathrm{AO}\times\Delta\Pi)$. (σχ. 191.)

Ἂς κατασκευασθῇ τριγωνικὴ πυραμὶς ΤΖΗΘ τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κώνου καὶ βάσις ΖΗΘ ἰσοδύναμος μὲ τὴν κυκλικὴν βάσιν τοῦ ἰδίου. Τιθεμένων τῶν βάσεων τῶν δύο τούτων στερεῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἂς προεκβληθῇ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς τοῦ κώνου, ὥστε νὰ παραχθῇ εἰς τὴν πυραμίδα ἡ τομὴ ΙΚΛ. Τούτου τεθέντος, ἔχομεν κατὰ πρῶτον ἐπιφ: ΑΟ: ἐπιφ: ΔΠ : : $\overline{\mathrm{AO}}^2 : \overline{\Delta\Pi}^2$· καὶ παρομοίως ΖΗΘ : ΙΚΛ : : $\overline{\mathrm{ZH}}^2 : \overline{\mathrm{IK}}^2$· ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΣΑΟ καὶ ΣΔΠ, καὶ ὡσαύτως τῶν τριγώνων ΤΖΟ καὶ ΤΙΠ συνάγομεν τὰς ἀναλογίας $\overline{\mathrm{AO}}^2 : \overline{\Delta\Pi}^2 :: \overline{\Sigma\mathrm{O}}^2 : \overline{\Sigma\Pi}^2$· καὶ $\overline{\mathrm{ZH}}^2 : \overline{\mathrm{IK}}^2 : : \overline{\mathrm{TZ}}^2 : \overline{\mathrm{TI}}^2 :: \overline{\mathrm{TO}}^2 : \overline{\mathrm{T\Pi}}^2$· ἄρα αἱ ἀνωτέρω ἀναλογίαι δίδουσι τὴν ἑξῆς ἐπιφ.ΑΟ:ἐπιφ:ΔΠ::ΖΗΘ:ΙΚΛ. Καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἐπιφ: ΑΟ=ΖΗΘ· ἄρα καὶ ἐπιφ: ΔΠ=ΙΚΛ. Λοιπὸν ὁ κῶνος ΣΕΔ καὶ ἡ πυραμὶς ΤΙΚΛ ἔχοντα, τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους, εἶναι ἰσοδύναμα. Ἂν ἀφαιρέσωμεν ἤδη ἀπὸ τὸν ὅλον κῶνον ΣΒΑ τὸν μικρὸν ΣΕΔ, καὶ παρομοίως ἀπὸ τὴν ἰσοδύναμον πυραμίδα ΤΖΗΘ τὴν μικρὰν ΤΙΚΛ, λαμβάνομεν ὑπόλοιπα ἴσα· τουτέστι ὁ κόλουρος κῶνος ΑΔΕΒ ἰσοδύναμος μὲ τὸν κορμὸν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος· οὗτος δὲ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{3}$ ΟΠ$\times$(ΖΗΘ$+$ΙΚΛ$+\sqrt{\mathrm{Z H \Theta} \times \mathrm{I K \Lambda}}$)· δι' ἀντικαταστάσεως ἄρα συνάγομεν $\frac{1}{3}$ ΟΠ (π. $\overline{\mathrm{AO}}^2 +$ π· $\overline{\Delta\Pi}^2 +$ π. ΑΟ $\times$ ΔΠ)$=\frac{1}{3}$ ΟΠ. π. ($\overline{\mathrm{AO}}^2 + \overline{\Delta\Pi}^2 +$ ΑΟ $\times$ ΔΠ.).

Θεώρημα ΙΒʹ.

Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΕΓ περὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{3}$ π. $\overline{\mathrm{EZ}}^2 \times$ΑΓ. (σχ. 192.)

Διότι ἡ στερεότης τοῦ παραγομένου κώνου ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΖ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{3}$ π. $\overline{\mathrm{EZ}}^2 \times$ΑΖ καὶ παρομοίως ἡ στερεότης τοῦ κώνου ΕΖΓ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{3}$ π. $\overline{\mathrm{EZ}}^2 \times$ ΖΓ· ὅθεν το ἄθροισμα τῶν δύο στερεοτήτων, ἤτοι τὸ παραγόμενον στερεὸν ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{3}$ π. $\overline{\mathrm{EZ}}^2$(ΑΖ$+$ΓΖ)$=\frac{1}{3}$ π. $\overline{\mathrm{EZ}}^2 \times$ΑΓ.

Σχόλιον. — Ἂν τὸ δεδομένον τρίγωνον ἦναι ἀμβλυγώνιον ΑΕΗ, τότε συνάγομεν παρομοίως στερ. ΑΖΕ$=\frac{1}{3}$ π. $\overline{\mathrm{EZ}}^2 \times$ΑΖ καὶ στερ. ΗΖΕ$=\frac{1}{3}$ π. $\overline{ΕΖ}^2 \times ΖΗ$· ὅθεν δι' ἀφαιρέσεως ἔχομεν $\frac{1}{3}$ π. $\overline{ΕΖ}^2(ΑΖ-ΖΗ)=\frac{1}{3}$ π. $\overline{ΕΖ}^2 \times ΑΗ$.

Θεώρημα ΙΓ'.

Ὑποτεθέντος ὅτι τὸ κανονικὸν ἡμιπολύγωνον ΑΒΓΔ.... στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον ΑΡ, τὸ μέτρον τοῦ παραγομένου στερεοῦ ὑπὸ τῆς περιστροφῆς ἑνὸς τῶν ὁμοκορύφων ἰσοσκελῶν τριγώνων ΟΒΓ, θέλει εἶσθαι $\frac{2}{3}$ π. $\overline{ΟΕ}^2 \times ΗΘ$. (σχ. 193.)

Ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΓ ἕως νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν διάμετρον προεκβαλλομένην κατὰ τὸ σημεῖον Μ· τὸ παραγόμενον στερεὸν ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΜΓΟ κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{3}$ π. $\overline{ΓΘ}^2 \times ΜΟ$. Παρομοίως τὸ παραγόμενον στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΜΒΟ ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{3}$ π. $\overline{ΒΗ}^2 \times ΜΟ$· δι' ἀφαιρέσεως ὅθεν συνάγομεν μέτρον τοῦ στερεοῦ ΓΟΒ τὸν τύπον $\frac{1}{3}$ π. ΜΟ $(\overline{ΓΘ}^2-\overline{ΒΗ}^2)$. Τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἤδη τὴν ἀνωτέρω μορφὴν τοῦ θεωρήματος. Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΓΒ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΛ κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΟ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΙ κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΘ. Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἔχομεν ΕΛ$=\frac{1}{2}$(ΓΘ$+$ΒΗ) (§. κγ'. θεώρ. θ'. σχόλ.) ἢ 2. ΕΛ$=$ΓΘ$+$ΒΗ καὶ ΓΙ$=$ΓΘ$-$ΒΗ, διὰ πολλαπλασιασμοῦ συνάγομεν καὶ 2. ΕΛ$\times$ΓΙ$=$(ΓΘ$+$ΒΗ)(ΓΘ$-$ΒΗ)$=(\overline{ΓΘ}^2-\overline{ΒΗ}^2)$· ὅθεν ὁ ἀνωτέρω τύπος τρέπεται εἰς $\frac{2}{3}$ π. ΜΟ $\times$ ΕΛ $\times$ ΓΙ· ἐξ ἑτέρου μέρους τὰ τρίγωνα ΒΓΙ καὶ ΕΟΛ, ἔχοντα τὰς πλευράς των ἀμοιβαίως καθέτους, εἶναι ὅμοια (§ ιϛ'. θεώρ. ϛ'.) καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΓΙ : ΒΙ :: ΟΛ : ΕΛ, ἐξ ἧς ΓΙ$\times$ΕΛ$=$ΒΙ$\times$ΟΛ· ὅθεν δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον λαμβάνομεν $\frac{2}{3}$ π. ΜΟ $\times$ ΒΙ $\times$ ΟΛ. Τέλος πάντων τὰ τρίγωνα ΒΓΙ καὶ ΜΕΟ ὀρθογώνια εἰς Ι καὶ Ε ἔχουσι τὰς γωνίας ΓΒΙ καὶ ΕΜΟ ἴσας, ὡς ἐντὸς καὶ ἐκτὸς· ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΒΓ : ΓΙ : : ΜΟ : ΕΟ· ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΓΙ καὶ ΟΛΕ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΒΓ : ΓΙ : : ΟΕ : ΟΛ· ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν λαμβάνομεν ΜΟ : ΕΟ : : ΕΟ : ΟΛ· ἐξ ἧς $\overline{ЕО}^2 = МО \times ОΛ$· ὅθεν δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ΜΟ$\times$ΟΛ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον λαμβάνομεν $\frac{2}{3}$ π. $\overline{ЕО}^2 \times$ΒΙ, ἢ $\frac{2}{3}$ π. $\overline{ЕО}^2 \times$ΗΘ, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Θεώρημα ΙΔ'.

Ἡ στερεότης τῆς σφαίρας ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος. (σχ. 193.)

Ἔστω ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΡ· παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἂν ἐγγράψωμεν εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τὰς διαδοχικὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ στερότης ὅλων τῶν παραγομένων στερεῶν τῶν ὁμοκορύφων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἔχει διὰ μέτρον $\frac{2}{3}$ π. $\overline{ОЕ}^2 \times$(ΑΗ+ΗΘ+ΘΚ+....), ἢ $\frac{2}{3}$ π. $\overline{ОЕ}^2 \times$ΑΡ$=\frac{2}{3}$ π. $\overline{ОЕ}^2 \times 2.$ΑΟ$=4.$π.$\overline{ОЕ}^2 \times \frac{1}{3}$ ΑΟ· ἀλλὰ 4 π. $\overline{ОЕ}^2$· ἐκφράζει τετράκις τὸν κύκλον ΟΕ, ὁ ὁποῖος κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἰς τὸ μέγιστον ὅριον ἀποκαθίσταται ἴσος μὲ κύκλον ΟΛ· ἄρα τὸ μέτρον τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ἢ ἡ στερεότης τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τετράκις τὸν μέγιστον κύκλον, ἢ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος.

Πόρισμα ά. — Ἔστω Α ἀκτὶς τῆς σφαίρας· ἡ στερεότης αὐτῆς εἶναι 4 π. Α$^2 \times \frac{1}{3}$ Α$=\frac{4}{3}$. π. Α^2· ὅθεν δύο ἄνισοι σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κῦβοι τῶν ἀκτίνων των.

Πόρισμα β'. — Παρομοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ στερεότης τοῦ σφαιρικοῦ τομέως π. χ. τοῦ ΑΒΔΟ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ζώνης, ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις, πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος. Διότι ἐγγράφοντες εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα ΑΟΔ μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου, θέλομεν συνάξει διὰ μέτρον τοῦ ὑπ' αὐτῆς παραγομένου στερεοῦ $\frac{2}{3}$ π. $\overline{ΟΕ}^2 \times ΑΚ$. Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἀπειράκις, τὸ παραγόμενον στερεὸν λαμβάνει ἐλάχιστον ὅριον τὸν σφαιρικὸν τομέα παριστανόμενον διὰ τοῦ τύπου $\frac{2}{3}$ π. $ΟΑ^2 \times ΑΚ$.

Πόρισμα. γ'. — Ἐπειδὴ ὁ ὄνυξ ἔχει λόγον πρὸς σφαῖραν, ὡς ἡ γωνία αὐτοῦ, ἢ ὁ ἄτρακτος τῆς βάσεώς του πρὸς τὴν ὅλην σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, ἕπεται παρομοίως ὅτι ἡ στερεότης τοῦ ὄνυχος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀτράκτου ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Σχόλιον. — Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἰδιαιτέρους τύπους καὶ διὰ τὴν στερεότητα τοῦ τμήματος μὲ μίαν ἢ δύο βάσεις, π. χ. τοῦ ΑΒΔΕ ἢ τοῦ ΒΔΕΖ, (σχ. 194.) διὰ τὸ πολύπλοκον δὲ τῶν γεωμετρικῶν ὑπολογισμῶν τοὺς παραλείπομεν, σημειόνομεν δὲ μόνον, ὅτι ἡ στερεότης τοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν ΑΔΕ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῆς στερεότητος τοῦ τομέως ΓΑΔ καὶ ἐκείνης τοῦ κώνου ΓΔΕ· καὶ παρομοίως ἡ στερεότης τοῦ τμήματος ΒΔΕΖ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων ΔΕΑ καὶ ΒΖΑ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζομεν καὶ τὴν στερεότητα τοῦ παραγομένου στερεοῦ ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΔ περὶ τὸν ἄξονα ΓΑ· τουτέστιν ἀπὸ τοῦ παραγομένου σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ τόξου ΒΜΔΕΖ ἀφαιροῦμεν τὸν παραγόμενον κόλουρον κῶνον ὑπὸ τοῦ τραπεζίου ΒΔΕΖ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον στερεόν.

ΤΕΛΟΣ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

ΠΕΡῚ ΤΩ͂Ν ΚΥΡΙΩΤΈΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩ͂Ν ἘΡΓΑΛΕΊΩΝ.

ά. *Περὶ τοῦ κανόνος.*

Τὸ κοινότατον τοῦτο ἐργαλεῖον, ὁ κανὼν κατασκευαζόμενος συνήθως ἐκ ξύλου εἰς σχῆμα ὀρθογωνίου, χρησιμεύει διὰ νὰ σύρωμεν διὰ τῆς γραφίδος εὐθείας γραμμὰς ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον. Πληροφορούμεθα περὶ τῆς εὐθύτητος τοῦ κανόνος, ἂν ἀπὸ σημείου Α ἕως Β σύρωμεν δὶς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα κατὰ τὰς δύο θέσεις ΑΓΔΒ καὶ ΑΠΚΒ· πρέπει δὲ αἱ δύο συρόμεναι εὐθεῖαι νὰ ἀποτελῶσι μίαν. (σχ. 195.)

β'. *Περὶ τοῦ γνώμονος (équerre).*

Ὁ γνώμων εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον ΑΒΓ (σχ. 196.) κατασκευαζόμενον παρομοίως ἐκ ξύλου, καὶ χρησιμεύει διὰ νὰ κατασκευάζωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου γωνίας ὀρθὰς, ἢ νὰ ἀγάγωμεν καθέτους ἐπὶ δεδομένης εὐθείας.

Μεταχειριζόμεθα ἔτι τὸν γνώμονα διὰ νὰ σύρωμεν παραλλήλους πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν π. χ. τὴν ΑΒ ἀπὸ δεδομένων σημείων Γ καὶ Δ. (σχ. 197.) Πρὸς τοῦτο πλησιάζοντες κατὰ πρῶτον τὸν γνώμονα ΜΝΠ, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΜΝ νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, προχωροῦμεν αὐτὸν ἑπομένως κατὰ τὸ μῆκος τοῦ σταθεροῦ κανόνος ΡΣ, καὶ ὅτε ἡ κορυφὴ αὐτοῦ Μ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Δ σύρομεν τὰς εὐθείας ΓΕ καὶ ΔΖ· καὶ αὗται θέλουσιν εἶσθαι αἱ ζητούμεναι παράλληλοι τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ.

Διὰ νὰ πληροφορηθῶμεν, ἂν αἱ δύο πλευραὶ τοῦ γνώμονος τέμνωνται κατ' ὀρθὴν γωνίαν, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ἂν ἡ ὀρθὴ γωνία τοῦ γνώμονος ἐγκλείεται ἀκριβῶς εἰς ἑκατέραν τῶν δύο προσκειμένων ὀρθῶν, τὰς ὁποίας κατασκευάζομεν διὰ γεωμετρικῆς κασκευῆς.

γ'. *Περὶ τοῦ γωνιογνώμονος (fausse équerre).*

Ὁ γωνιογνώμων σχηματίζεται ἐκ δύο κανόνων ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 198.) δυναμένων νὰ περιστρέφωνται περί τι σημεῖον, ὥστε ἡ ὑπὸ τῶν ἐσωτερικῶν πλευρῶν σχηματιζομένη γωνία ΒΑΓ νὰ δύναται νὰ λάβῃ ὅλα τὰ μεγέθη· χρησιμεύει δὲ, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου γωνίας ἴσας μὲ δεδομένας· π. χ. ἔστω νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς ΠΡ εἰς τὸ σημεῖον Η γωνίαν ἴσην τῇ δεδομένῃ ΜΟΝ· (σχ. 199.) ἀνοίγομεν τὰ δύο σκέλη τοῦ γωνιογνώμονος, ὥστε αἱ ἐσωτερικαὶ πλευραί των ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ ἐφαρμόζωσι μὲ τὰς πλευρὰς ΟΜ καὶ ΟΝ τῆς γωνίας ΜΟΝ. Οὕτω δὲ ἀνεωγμένον τὸν μεταφέρομεν ἐπομένως ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΡ, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΑΒ νὰ ἐφαρμώσῃ μὲ τὴν ΗΘ, καὶ διὰ τῆς γραφίδος χαράσσομεν τὴν ἐντὸς γωνίαν ΖΗΘ, ἴσην τῇ δεδομένῃ. Διὰ τοῦ γωνιογνώμονος βεβαιούμεθα πρὸς τούτοις περὶ τῆς ἰσότητος δύο γωνιῶν.κ.τ.λ.

δ'. *Περὶ τοῦ ἀναγωγέως·*

Ὁ ἀναγωγεὺς εἶναι ἡμικύκλιον κατασκευαζόμενον ἐξ ὀρειχάλκου ἢ ἐλέφαντος, (σχ. 14.) καὶ χρησιμεύει διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν ἢ τῶν τόξων εἰς μοίρας, αἱ ὁποῖαι εἶναι σημειωμέναι ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας. Οὕτω διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μέγεθος τινὸς γωνίας, θέτομεν τὸν ἀναγωγέα ἐπὶ τῆς γωνίας ταύτης, ὥστε τὸ κέντρον αὐτοῦ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον Ο ἀρχὴ τῶν διαιρέσεων τοῦ ἀναγωγέως νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας· τότε ἡ ἑτέρα πλευρὰ αὐτῆς συναπαντᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τοῦ ἀναγωγέως εἴς τι σημεῖον· ὅθεν παρατηροῦμεν πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον τῆς γωνίας.

Εἴδομεν, ὅτι ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς λεπτὰ καὶ τοῦτο εἰς δεύτερα, τὰ ὁποῖα διὰ τὴν σμικρότητά των δὲν δύνανται νὰ σημειωθῶσιν· τὴν ἔλλειψιν ταύτην ἀναπληροῦμεν διὰ τοῦ Βερνερίου.

έ. Περὶ τοῦ Βερνερίου.

Συχνότατα εἰς τὰς ἐπιστήμας καὶ τέχνας πρόκειται νὰ μετρήσωμεν σμικροτάτας γραμμὰς μὲ μεγίστην ἀκρίβειαν π.χ. τὴν γραμμὴν μν (σχ. 200) περιέχουσαν ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν μπ, πα, αϐ, κ. τ. λ. πλέον τι κλάσμα φν μικρότερον τοῦ μπ, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ ἐκτιμήσωμεν.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἰδέας μας, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τὰ ἴσα μέρη μπ, πα, αϐ κ. τ. λ. εἶναι ὑποχιλιόμετρα καὶ ζητοῦμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν φν ὡς ἔγγιστα δεκατημορίου τοῦ ὑποχιλιομέτρου. Κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον τῆς καταμετρήσεως ἔπρεπε νὰ διαιρέσωμεν τὴν μπ ἢ τὸ ὑποχιλιόμετρον εἰς δέκα ἴσα μέρη καὶ νὰ ζητήσωμεν ποσάκις τὸ δεκατημόριον τοῦ μπ ἐμπεριλαμϐάνεται εἰς φν· ἀλλὰ διὰ τὴν σμικρότητα τῶν μερῶν τὸ μέσον τοῦτο δὲν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ἐνταῦθα· ὅθεν πρὸς ἀναπλήρωσιν αὐτοῦ μεταχειριζόμεθα μικρὸν κανόνα ΚΛ, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος περιέχει μὲν ἀκριϐῶς ἐννέα διαιρέσεις ἴσας μὲ μπ, πλὴν διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη 1, 2, 3, 4, ... 10· ὁ κανὼν οὗτος ἀπὸ τοῦ ἐφευρέτου καλεῖται Βερνέριος *(vernier)*, τοῦ ὁποίου ἰδοὺ ἡ χρῆσις.

Ἂς ἐννοήσωμεν ὅτι τὸν παραϐάλλομεν μὲ τὴν γραμμὴν μν, ὥστε τὸ ἄκρον 10 συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον φ καὶ ἑπομένως τὸ ἄκρον ο συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον γ τῆς ἐννάτης διαιρέσεως ἀπὸ τοῦ φ. Ὅθεν λέγομεν ἐπειδὴ τὰ δέκα μέρη τοῦ Βερνερίου δύνανται ἐννεάκις μόνον τὴν μπ, ἕπεται ὅτι ἓν τῶν μερῶν τοῦ Βερνερίου ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{9}{10}$ τοῦ μπ, ἢ εἶναι ἔλασσον αὐτοῦ κατὰ τὸ $\frac{1}{10}$.

Τούτου τεθέντος, παραβάλλομεν τὸν Βερνέριον πρὸς τὴν εὐθεῖαν μν, ὥστε ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ 1 νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον δ τῆς γραμμῆς μν καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον ο τοῦ Βερνερίου συνέπιπτε πρότερον μὲ τὸ γ τῆς μν, ἄρα διὰ τῆς νέας ταύτης συγκρίσεως ὁ Βερνέριος ἐπροχώρησε κατὰ τὸ δεκατημόριον τῆς πμ, καὶ τότε ἂν ὁ ἀριθμὸς 10 τοῦ Βερνερίου συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον ν τῆς μν, ἕπεται ὅτι τὸ μῆκος φν ἰσοῦται μὲ τὸ δεκατημόριον τῆς μπ. Ἄλλως δὲ ἐξακολουθοῦμεν παραβάλλοντες τὸν Βερνέριον, ὥστε ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ 2 νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον ε ἑπόμενον μετὰ τὸ δ, καὶ τότε ὁ Βερνέριος διὰ τὸν αὐτὸν λόγον προχωρεῖ κατὰ $\frac{2}{10}$ τοῦ μπ, πέραν τοῦ φ· καὶ ἐν γένει καθ' ὃν ἀριθμὸν συμπέσῃ ὁ Βερνέριος μὲ μίαν τῶν διαιρέσεων τῆς μν, ὥστε τὸ ἄκρον αὐτοῦ 10 νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον ν, κατὰ τόσα δεκατημόρια τοῦ μπ ἐκφράζεται τὸ κλάσμα φν.

Δυνατὸν τὸ ἄκρον 10 τοῦ Βερνερίου εἰς δύο διαδοχικὰς συγκρίσεις μὲ τὴν μν νὰ μὴ συμπέσῃ μὲ τὸ ἄκρον ν, καὶ ὅταν π. χ. ὁ 3 τοῦ Βερνερίου συμπέσῃ μὲ τὸ ζ τῆς μν, τὸ ἄκρον αὐτοῦ 10 νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ φ καὶ ν, ὅταν δὲ ὁ 4 συμπέσῃ μὲ τὸ η, τὸ ἄκρον αὐτοῦ 10 νὰ προχωρήσῃ πέραν τοῦ ν· τότε συμπεραίνομεν ὅτι τὸ κλάσμα φν ἐμπεριλαμβάνεται μεταξὺ τῶν $\frac{3}{10}$ καὶ $\frac{4}{10}$· ὅθεν λαμβάνοντες αὐτὴν ὡς 3, ἔχομεν προσέγγισιν μεῖον $\frac{1}{10}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερόν, ὅτι ὅσῳ περισσότερα εἶναι τὰ μέρη τοῦ Βερνερίου, τόσῳ πλέον λαμβάνομεν μεγαλητέραν προσέγγισιν, οὕτως μεῖον $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{50}$· κ. τ. λ. ἂν ὁ Βερνέριος ὑποτεθῇ διῃρημένος εἰς 30, 50, 100. κτλ. μέρη ἴσα.

Ὅ,τι εἴπομεν περὶ τῶν εὐθειῶν γραμμῶν, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων.

Ὅθεν διὰ τοῦ μέσου τούτου γνωρίζομεν τὰ λεπτὰ καὶ δεύτερα, τὰ ὁποῖα δὲν δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας.

ς'. *Περὶ τῆς στάθμης καὶ τοῦ ἰσοπέδου.*

Ὅλα τὰ ὑλικὰ μέρη τῶν σωμάτων ἑφέλκονται πρὸς τὴν γῆν κατὰ διευθύνσεις, τὰς ὁποίας εἰς ἔκτασιν ἱκανῶς μεγάλην δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν παραλλήλους· ἡ ὕπαρξις τῆς ἕλξεως ταύτης φανερόνεται διὰ τῶν πιέσεων, τὰς ὁποίας τὰ σώματα ὑποφέρουσιν εἰς τὰς βάσεις των, καὶ διὰ τῆς πτώσεώς των ἐπὶ τῆς γῆς, ἅμα ἀφεθῶσιν ἀπὸ τὰ προσερείσματα αὐτῶν· ἡ δύναμις αὕτη, διὰ τῆς ὁποίας τὰ σώματα ἑφέλκονται πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ὀνομάζεται βαρύτης.

Εἰς πάντα τόπον τῆς γῆς προσδιορίζομεν τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος διὰ τῆς στάθμης, ἥτις συνίσταται εἰς ἁπλοῦν ῥάμμα, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου προσαρτᾶται βαρύδιόν τι σχήματος οἱουδήποτε. Τῷ ὄντι ἀποδεικνύεται διὰ τῶν πρώτων ἀρχῶν τῆς Μηχανικῆς, ὅτι ὅταν ἡ στάθμη, παύσασα τοῦ νὰ περιδονεῖται, μείνῃ εἰς ἰσοσταθμίαν, ἡ διεύθυνσις αὐτῆς θέλει εἶσθαι παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως τῆς ἑφελκούσης πρὸς τὴν γῆν τὰ ὑλικὰ μέρη τοῦ βαρέος σώματος. Ἡ διεύθυνσις τῆς στάθμης εἰς ὅλα τὰ μέρη τῆς γῆς λέγεται κάθετος· ὀνομάζεται ὁριζόντιον ἐπίπεδον πᾶν, τὸ ὁποῖον ἄγεται καθέτως εἰς τὴν στάθμην, καὶ ὁμοίως γραμμὴ ὁριζόντιος ἐκείνη, ἥτις συρομένη ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς τῆς στάθμης. Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ τὴν κανονικότητα καὶ στερεότητα τῶν οἰκοδομημάτων αἱ περισσότεραι γραμμαὶ καὶ τὰ ἐπίπεδα, ὅσα ἀναφέρονται εἰς τὴν κατασκευήν των, ἔχουσι διεύθυνσιν ἀκριβῶς κάθετον ἢ ὁριζόντιον· διὰ δὲ τῆς στάθμης βεβαιούμεθα εὐκόλως, ἂν ἐπίπεδόν τι, ἡ εὐθεῖα ἦναι κάθετα ἢ ὁριζόντια. Ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἦναι εἴτε παράλληλα, εἴτε κάθετα εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς στάθμης.

Εἶναι μὲν καὶ ἄλλα ἐργαλεῖα, διὰ τῶν ὁποίων βεβαιούμεθα, ἂν ἐπίπεδόν τι ἦναι ἀκριβῶς ὁριζόντιον, τὸ συνηθέστερον ὅμως εἶναι τὸ ἀλβάδιον, τὸ ὁποῖον εἶναι τρίγωνον ἰσοσκελὲς ΒΑΓ, (σχ. 201.) τοῦ ὁποίου τὰ δύο σκέλη ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνόνονται διά τινος κανόνος ΜΝ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ. Εἰς τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου προσαρτᾶται στάθμη· ὅθεν διὰ νὰ γνωρίσωμεν ἂν τὸ ἐπίπεδον ΠΚ ἦναι ὁριζόντιον, στήνομεν ἐπ' αὐτοῦ κατὰ διαφόρους διευθύνσεις τὸ ἰσοσκελὲς ΒΑΓ· καὶ πρέπει ἡ στάθμη ΑΟ μὴ θλωμένη ὑπὸ τῆς ΜΝ, νὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς.

Μεταχειριζόμεθα πρὸς τούτοις διὰ τὴν ἰσοπέδωσιν καὶ τὴν στάθμην διὰ τῆς φυσαλίδος, ἢ τὸ ἰσόπεδον. Τοῦτο εἶναι σωλὴν ὑέλινος ΑΒ (σχ. 202.) ἐφηρμοσμένος εἰς ὀρειχαλκίνην θήκην, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι λίαν ἐπίπεδος· γεμίζεται ὁ σωλὴν μὲ ῥευστόν τι, καὶ ἀφήνεται μικρόν τι διάστημα διὰ νὰ εἰσέλθῃ φυσαλὶς ἀέρος, κατέχουσα μέρος τι ἐντὸς τοῦ σωλῆνος· ὅθεν πληροφορούμεθα, ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶναι ὁριζόντιον, ὅταν τὸ ἰσόπεδον, τιθέμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κατὰ διαφόρους διευθύνσεις, δεικνύῃ πάντοτε τὴν φυσαλίδα κατὰ τὸ μέσον τοῦ σωλῆνος.

ζ'. Περὶ τοῦ Γραφομέτρου.

Διὰ τοῦ ἀναγωγέως μετρῶμεν εὐκόλως τὰς γωνίας, ὅσας εὑρίσκομεν κεχαραγμένας ἐπὶ τοῦ χάρτου· ἀλλ' ὅταν ἐργαζόμενοι εἰς τὴν καταμέτρησιν καὶ τὴν σχεδιογράφησιν, θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι ἀγόμεναι ἔκ τινος σημείου πρὸς δύο ἄλλα σημεῖα τοῦ διαστήματος μᾶλλον ἢ ἧττον ἀπομεμακρυσμένα, τότε αἱ τροποποιήσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποκαθιςάνουσι τὸν ἀναγωγέα ἱκανὸν εἰς τὴν χρῆσιν ταύτην, σχηματίζουσι τὸ γραφόμετρον. (σχ. 203.)

Τὸ κύριον μέρος τοῦ γραφομέτρου εἶναι τὸ ἐξ ὀρειχάλκου ἡμικύκλιον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς 180° ἢ πρὸς τούτοις καὶ εἰς 200° κατὰ τὴν νεωτέραν διαίρεσιν· ἡ διάμετρος αὐτοῦ ΑΓ μένει ἀκίνητος ἀποτελοῦσα μέρος τοῦ ἡμικυκλίου· ἡ δὲ διάμετρος ΖΗ εἶναι κινητὴ, περιαγομένη εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ ὀνομάζεται πτερύγιον. Ἑκατέρα τῶν διαμέτρων κατὰ τὰ ἄκρα αὐτῆς ἔχει δύο διόπτρας, διὰ τῶν ὁποίων διορῶμεν τὰ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα. Τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ ἡμικυκλίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου σημειοῦνται αἱ διαιρέσεις τῆς ἡμιπεριφερείας, ὀνομάζεται ἄντυξ (Limbe). Μεταξὺ τοῦ ἄντυγος καὶ τῆς σταθερᾶς διαμέτρου ὑπάρχει πυξὶς Ν χρησιμεύουσα εἰς τὴν τοπογραφίαν διὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ γνώμονος, ὡς πρὸς τὰ τέσσαρα ἀρχικὰ Γεωγραφικὰ σημεῖα. Τὸ πτερύγιον φέρει εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ μικρόν τι τόξον ἐξ ὀρειχάλκου συγκεντρικὸν μὲ τὴν περιφέρειαν· ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου εἶναι κεχαραγμέναι αἱ διαιρέσεις τοῦ Βερνερίου καὶ χρησιμεύουσι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν μερῶν τῆς μοίρας ἀπὸ 5 εἰς 5 δεύτερα· τὸ τόξον τοῦτο λέγεται μοιρογνώμων· Οὕτω δὲ κατεσκευασμένον τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο ἵσταται ἐπὶ τρίποδος, ὀνομαζομένου γόνυ, καὶ δύναται διά τινος ἕλικος Π νὰ λάβῃ τὰς διαφόρους ἀναγκαίας κλίσεις, διὰ νὰ ἦναι εἰς τὴν ἰσοπέδωσιν τοῦ γηπέδου.

Ἀπὸ τὴν ἀκρίβειαν τοῦ γραφομέτρου ἐξαρτᾶται μεγάλως ἡ ἀκριβὴς καταμέτρησις καὶ σχεδίασις τῶν γηπέδων. Διὰ νὰ εἴμεθα βέβαιοι περὶ τούτου, πρέπει ἐξαιρέτως νὰ ἐρευνήσωμεν μετὰ προσοχῆς πρῶτον, ἂν ἡ διαίρεσις τοῦ ἄντυγος ἦναι ἀκρι-

6ῆς, καὶ δεύτερον ἂν αἱ διάμετροι ἢ αἱ διόπτραι ἦναι καλῶς συγκεντρωμέναι· τουτέστιν ἂν αἱ γραμμαὶ τῆς διασκοπεύσεως (lignes de mire) τῶν διαμέτρων τέμνωνται ἀκριβῶς κατὰ τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου.

Μετρῶμεν ἤδη διὰ τοῦ γραφομέτρου γωνίαν τινα εἰς τὸ διάστημα στηρίζοντες αὐτὸ κατὰ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ φέροντες τὰς διαμέτρους κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν πλευρῶν αὐτῆς πρὸς δύο ἐξωτερικῶς λαμβανόμενα σημεῖα, οἰκίας, δένδρα, κ. τ. λ. ὡς δείκνυται εἰς τὸ σχῆμα. Ὁ μὲν ἐξησκημένος εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ γραφομέτρου ἐκτελεῖ δι' αὐτοῦ τὰς πράξεις ἀνεπαισθήτως, ἀλλ' ὁ ἀρχάριος ὑπόκειται κατὰ πρῶτον εἰς δυσκολίας. Διὰ τοῦτο εἰς μὲν τὸν τρίποδα τοῦ γραφομέτου προσαρτᾶται ἡ στάθμη ΘΚ, ἥτις ἀνταποκρινομένη εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ πρέπει νὰ πίπτῃ καθέτως εἰς τὸ σημεῖον τῆς κορυφῆς Θ. Ἐπὶ δὲ τοῦ ἄντυγος τίθεται ἰσόπεδον· καὶ οὕτω πληροφορεῖταί τις περὶ τῆς ἀκριβοῦς στηρίξεως τοῦ γραφομέτρου, διὰ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν ἑπομένως εἰς μοίρας τὸ μέτρον τῆς προκειμένης γωνίας.

η. Περὶ τοῦ Ἀναλογικοῦ διαβήτου.

Ὁ ἀναλογικὸς διαβήτης (compas de proportion) σύγκειται ἐκ δύο ἴσων κανόνων στρεφομένων περί τι κοινὸν σημεῖον Ο. Δύο εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ ἀναχωροῦσαι ἀπὸ τοῦ σημείου Ο διαγωνίως ἐπὶ τῶν δύο σκελῶν, εἶναι διηρημέναι εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν· διακόσια τοιαῦτα μέρη δύνανται νὰ διακριθῶσιν εὐκόλως εἰς μῆκος ἡμίσεως ποδός. (σχ. 204.)

Μεταχειριζόμεθα τὸν ἀναλογικὸν διαβήτην, διὰ νὰ λαμβάνωμεν γραμμὰς ἀναλόγους πρὸς δεδομένας κατὰ δεδομένον λόγον δύο ἀριθμῶν· οὕτω διὰ νὰ λάβωμεν ἀνάλογον πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν αβ, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 140 : 129· ἀνοίγομεν τὸν ἀναλογικὸν διαβήτην· ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν σκελῶν κατὰ τὰ σημεῖα 140 διάστημα νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν αβ· μετὰ ταῦτα δὲ λαμβάνομεν διὰ τοῦ κοινοῦ διαβήτου τὸ μῆκος γδ τὸ μεταξὺ τῶν σκελῶν αὐτοῦ κατὰ τὰ σημεῖα 129· καὶ τοῦτο εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος· διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων Οαβ καὶ Ογδ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν οα : ογ :: αβ : γδ· ἢ 140 : 129 :: αβ : γδ.

θ'. *Περὶ τοῦ Ἀναγωγικοῦ διαβήτου.*

Ὁσάκις θέλομεν νὰ γράψωμεν εἰς στενώτερα ἢ ἐκτενέστερα ὅρια κατεσκευασμένον τι σχῆμα, πρέπει κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων, διατηροῦντες τὸ αὐτὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν, νὰ ἐλαττώσωμεν ἀναλόγως τὰς διαστάσεις αὐτῶν κατὰ τὰ διάφορα σημεῖα· πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα τὸν ἀναγωγικὸν διαβήτην. (compas de reduction) (σχ. 205.)

Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης αὐτοῦ ἐπιστηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι δυναμένων τῶν σκελῶν αὐτοῦ Αα καὶ Ββ νὰ ἑνωθῶσι διά τινος ἕλικος ο κατὰ διάφορα σημεῖα, ὥστε τὰ μέρη οΑ οΒ νὰ ἦναι εἰς λόγον δεδομένον πρὸς τὰς προεκβολὰς αὐτῶν οα καὶ οβ, πρέπει καὶ τὰ κατὰ τὰ ἄκρα αὐτῶν μετρώμενα διαστήματα νὰ ἦναι παρομοίως εἰς τὸν αὐτὸν λόγον διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ αοβ. Οὕτως ὑποθέτοντες τὸν λόγον τῶν σκελῶν ὡς 3 : 2· ἢ ὡς 7 : 5· κ. τ. λ. συνάγομεν εἰς τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ μεταξὺ τῶν ἄκρων αὐτῶν διαστήματα, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν εἰς τὴν διαγραφὴν τοῦ ὁμοίου σχήματος εἰς στενώτερα ἢ ἐκτενέστερα ὅρια.

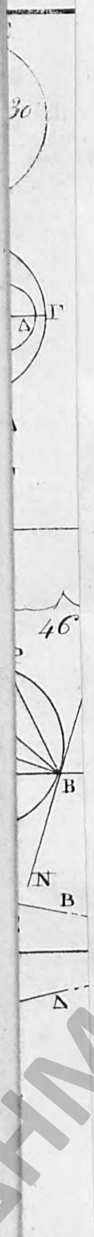
ι. *Περὶ τῆς Γεωμετρικῆς τραπέζης (Planchette).*

Ἡ τράπεζα, τὴν ὁποίαν οἱ Γεωμέτραι μεταχειρίζονται διὰ τὴν καταμέτρησιν καὶ χωρογραφίαν κατασκευάζεται εἰς σχῆμα ὀρθογωνίου, καὶ διά τινος ἕλικος ἐπιστηρίζεται εἰς τρίποδα, ὥστε νὰ δύναται νὰ λάβῃ ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος διαφόρους κλίσεις· (σχ. 206.) τὸ ἑξῆς παράδειγμα δίδει ἱκανὴν ἰδέαν τῆς χρήσεως αὐτῆς.

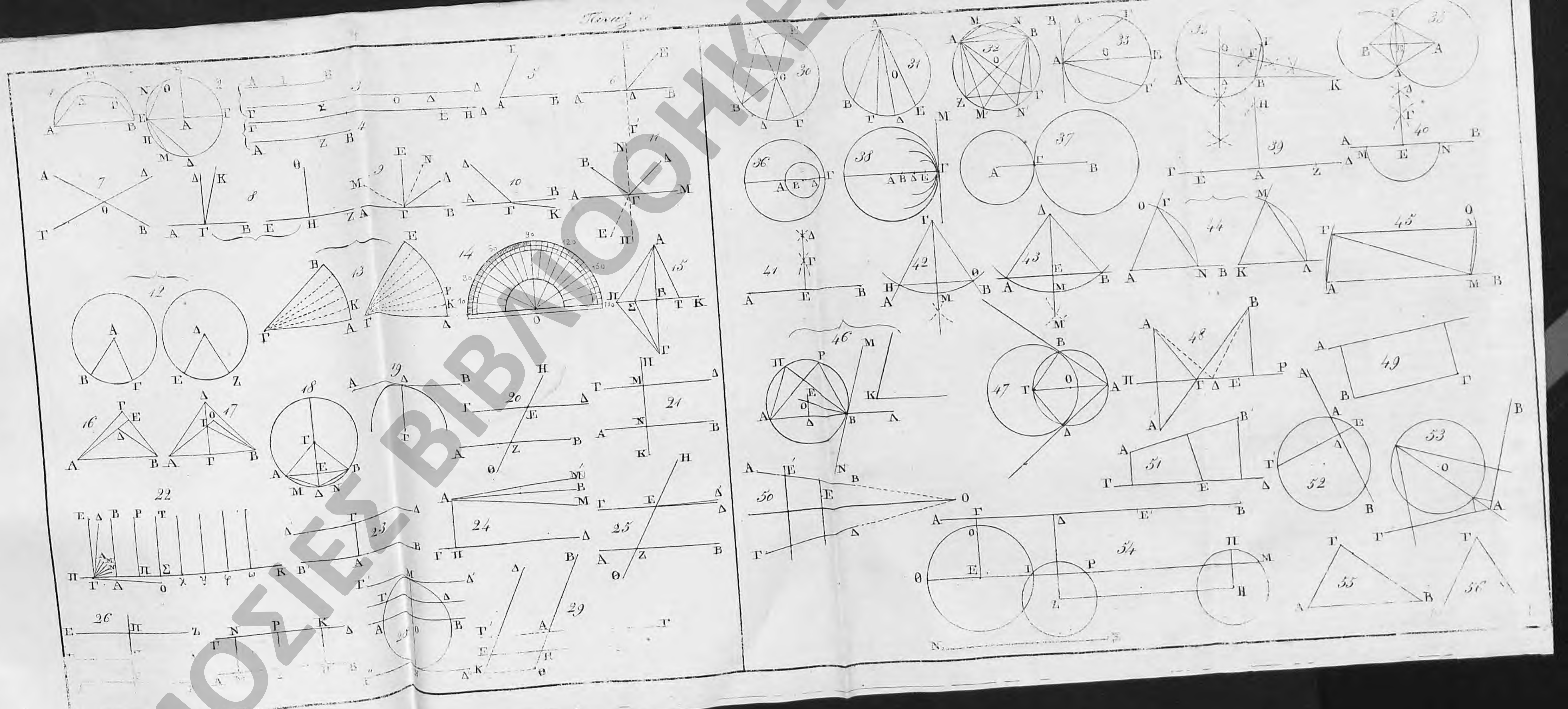
Ἔστωσαν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.... ὁμαλοῦ τινος γηπέδου, (σχ. 207.) τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς αἱ κορυφαὶ τινος πολυγώνου, πλευραὶ τοῦ ὁποίου εἶναι τὰ μεταξὺ αὐτῶν ἀποστήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἰχνογραφήματος δι' ἀναλόγων μονάδων τῆς κλίμακος. Ἐκλέγομεν κατὰ πρῶτον ἐπὶ τοῦ γηπέδου δύο σημεῖα Π καὶ Κ, τῶν ὁποίων μετρῶμεν τὸ ἀπόστημα ἐξ ὑποθέσεως 350 παλαμῶν, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῶν στηρίζομεν τὴν τράπεζαν κεκλιμένην οὕτως, ὥστε θεωροῦντες ἐκ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτῆς νὰ διακρίνωμεν καλῶς τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ, κ. τ. λ. ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τοῦ ἐπιπέδου τῆς τραπέζης. Τούτου τεθέντος, σύρομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου, τὸ ὁποῖον ἔχομεν κεκολλημένον ἐπὶ τῆς τραπέζης, τὴν εὐθεῖαν πκ ἴσην πὲ 350 μέρη τῆς κλίμακος, καὶ ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ Θ' θεωρήματος § ις'. προσδιορίζομεν διὰ τῶν τριγώνων ΠΑΚ, ΠΒΚ, κ. τ. λ. τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα διὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΠΑΚ, ΠΒΚ, κ. τ. λ. λαμβάνουσι τὴν ὁμόλογον θέσιν ἐπὶ τοῦ ἰχνογραφήματος. Τὸ οὕτω προσδιοριζόμενον πολύγωνον ΑΒΓ..... εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ἐπὶ τοῦ γηπέδου ΑΒΓΔΕΚΠ, καὶ ἐμφαίνει ἀκριβῶς τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων κατὰ λόγον τῆς κλίμακος.

ΠΙΝΑΞ.

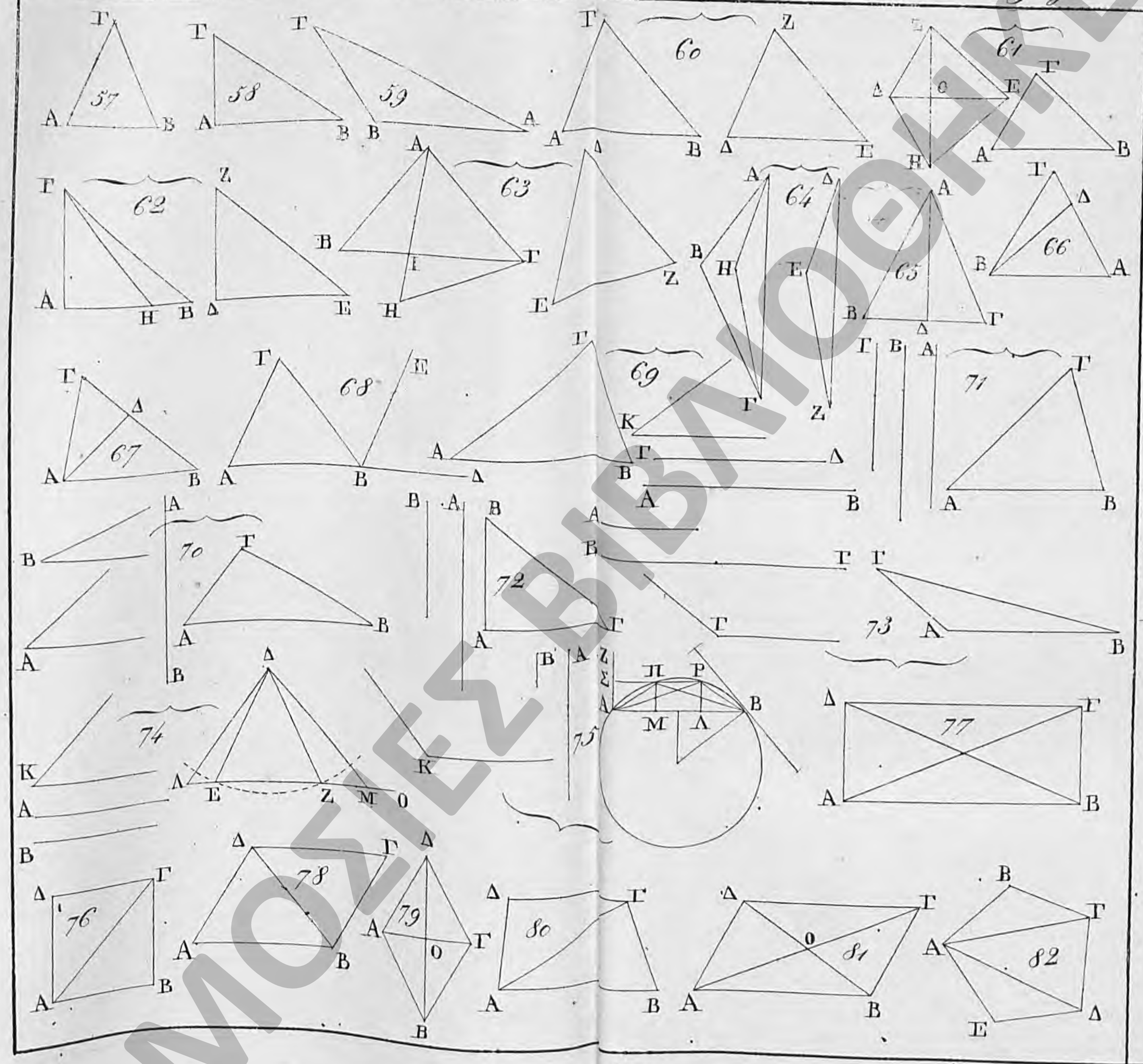
Σελ.


30
Δ
Γ
46
B
N
B
Δ

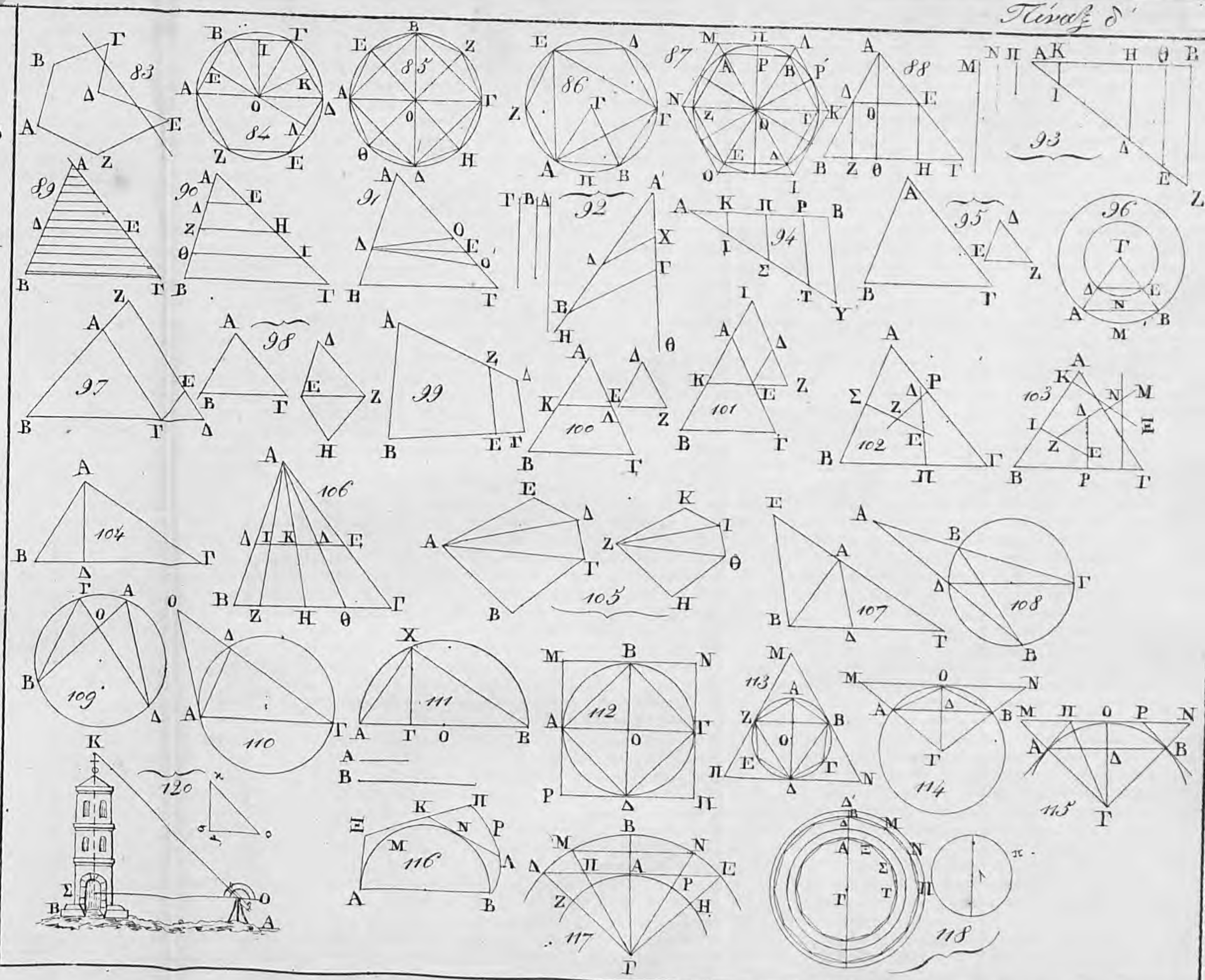
Σελ.



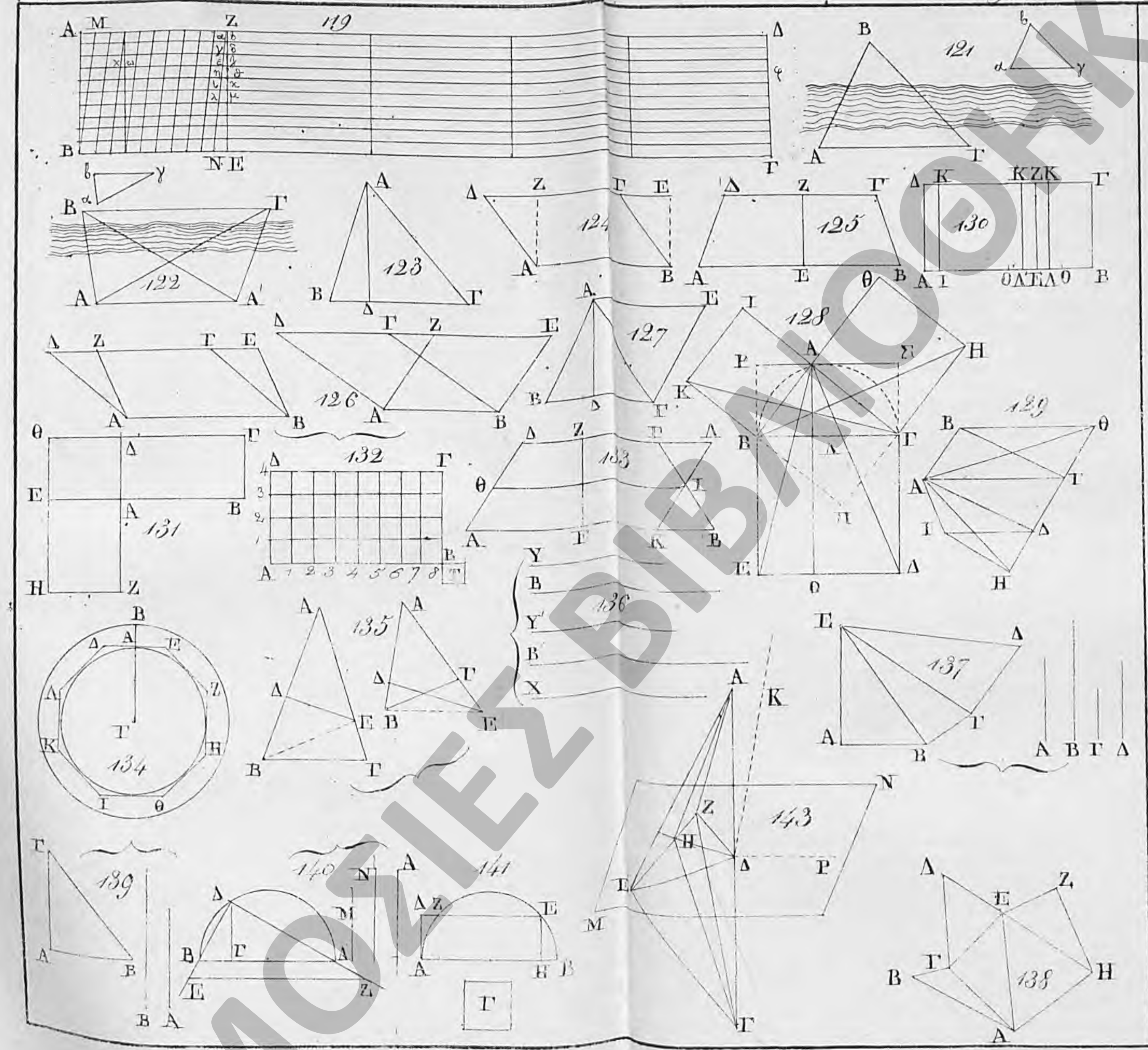
Πίναξ γ'



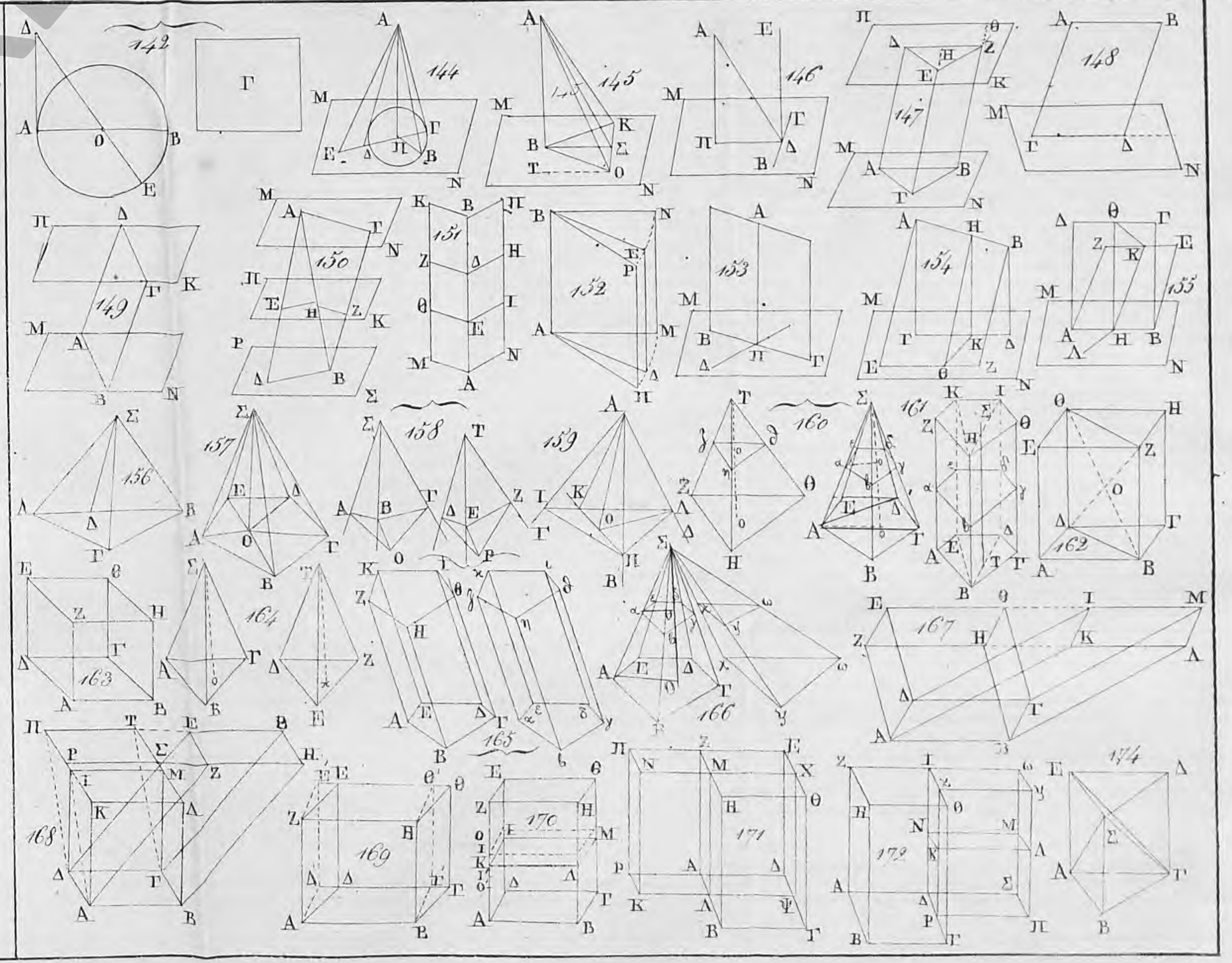
Πίναξ δ'

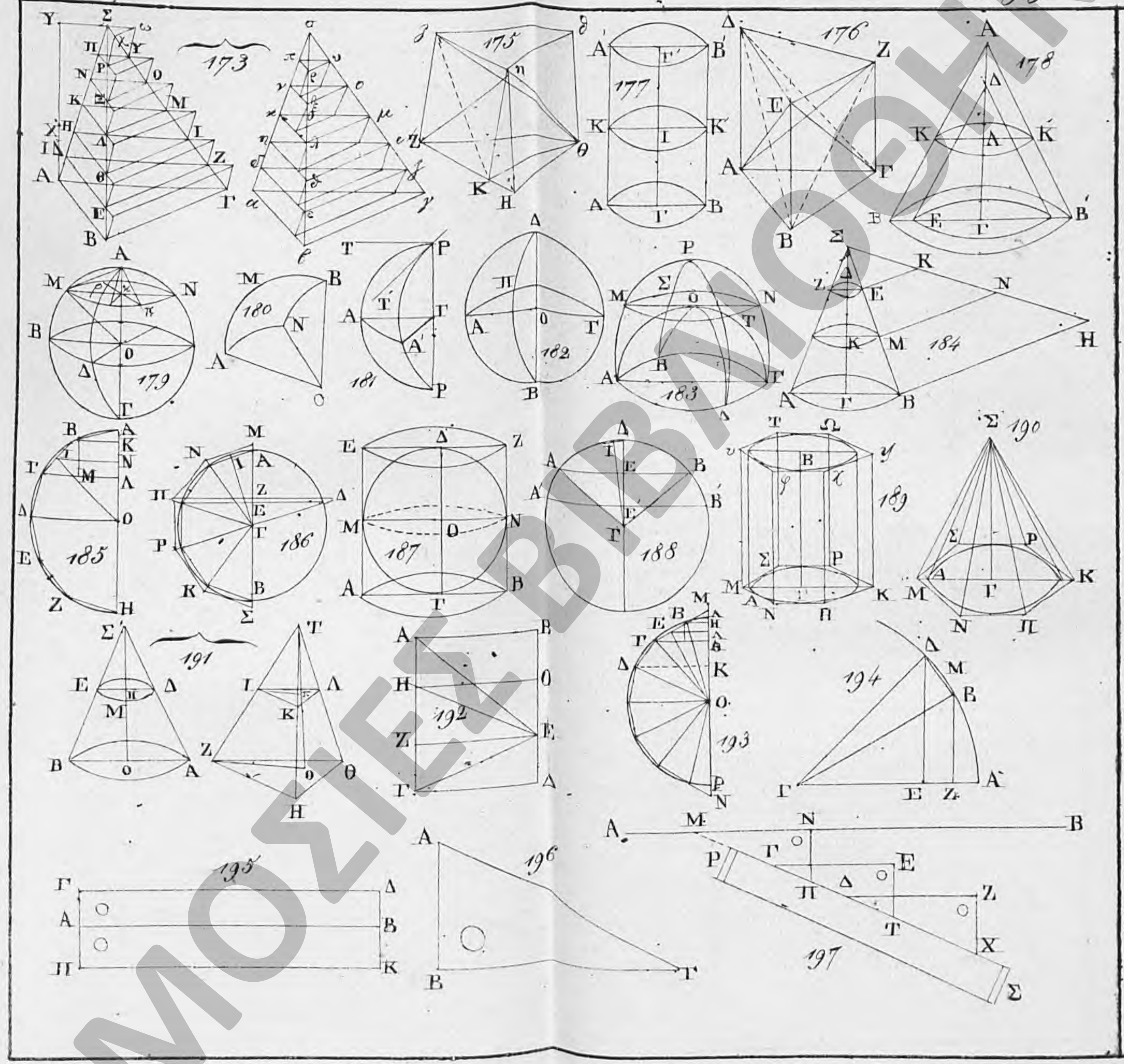


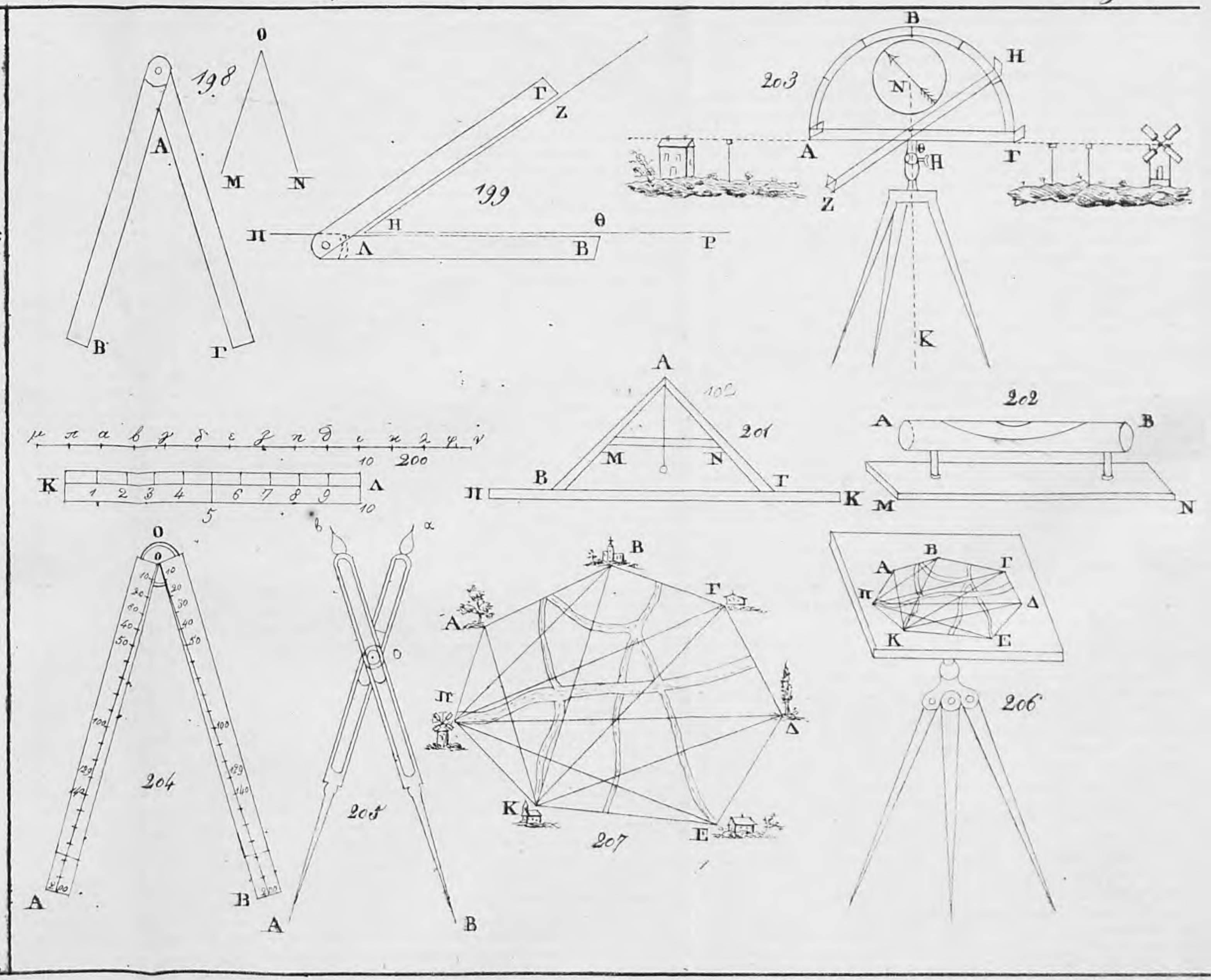
Πίναξ ε΄



Πίναξ ζ΄




173
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197


198
199
200
201
202
203
204
205
206
207

Τιμᾶται Δραχμὰς 4.