Αριθ. εισ. 1328

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΠΕΜΠΤΟΣ.

ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

*Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητευόντων ἐν τοῖς
γυμνασίοις τῆς Ἑλλάδος.*

ΥΠΟ

Χ. ΒΑΦΑ.

ΑΘΗΝΗΣΙΝ.
ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Κ. ΒΑΦΑ.
(Παρὰ τῇ ὁδῷ Ντέκα).
1846

Πρὸς τὸν ἀναγινώσκοντα.

Ὁ πέμπτος οὗτος τόμος τῆς σειρᾶς τῶν στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν ἐμπεριέχει τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ τῆς Ἀλγέβρας ὄχι ὅλα, ὅσα συνήθως ἐν ταῖς στοιχειώδεσιν Ἀλγέβραις ἀπαντῶνται, ἀλλ᾽ ὅσ᾽ αὐτῶν ἔκρινα ἱκανὰ καὶ ὠφέλιμα τοῖς φοιτῶσιν εἰς τὰ παρ᾽ ἡμῖν γυμνάσια. Τῶν δὲ παραλειφθέντων τὰ μὲν ἐξετέθησαν ἀρκούντως ἐν τῷ τετάρτῳ τόμῳ τῆς σειρᾶς, τῷ Συμπληρώματι τῆς Ἀριθμητικῆς, καὶ ἦτον περιττὸν νὰ ἐπαναληφθῶσιν ἐνταῦθα, τὰ δὲ ἤθελον εἶσθαι χρήσιμα μόνον εἰς τοὺς μέλλοντας νὰ σπουδάσωσι τὰ ὑψηλότερα Μαθηματικά, ὁποίους μέχρι τοῦδε εἴδομεν ὀλιγωτάτους, καὶ περὶ ὧν ἄλλοις ἐστὶ φροντίς.

Τῶν δ᾽ ἐμπεριεχομένων εὐάριθμα εἶναι τ᾽ ἀνήκοντα εἰς ἐμέ, τὰ ὁποῖα εὐκόλως ὁ εἰδήμων τῆς Ἀλγέβρας ἀναγνώστης διακρίνει. Τὰ δὲ πλεῖστα ὀλίγον τι τροποποιημένα εἶναι ἐκ τῆς Ἀλγέβρας τοῦ Φούρκυος, σπάνια δέ τινα καὶ ἐκ τῆς τοῦ Βουρδῶνος· τὰ δὲ πλεῖστα τῶν προβλημάτων ἐλήφθησαν ἔκ τινος τοῦ Γεωργίου Ῥίττου συλλογῆς προβλημάτων καὶ πρὸς ἄσκησιν ἐν τῷ ἀλγεβρικῷ ὑπολογισμῷ παραδειγμάτων.

Καὶ παρὰ μὲν ἄλλοις ἔθνεσι τοιαῦται συλλογαὶ εἶναι ἱκαναὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ εὔωνοι· διὰ τοῦτο οἱ συγγράφοντες Ἀλγέβρας περιορίζουσι τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐν αὐταῖς προβλημάτων εἰς ὀλίγα ἐκλεκτά. Παρ᾽ ἡμῖν ὅμως, ἕως ν᾽ ἀναπληρωθῇ ἡ ἔλλειψις αὕτη, εἶναι ἀναγκαῖον, νομίζω, τὰ διδακτικὰ τῶν Μαθηματικῶν βιβλία νὰ ἐμπεριέχωσιν ἱκανὰ προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Καὶ ἡ διάταξις δ᾽ αὐτῶν καὶ ἡ ἐκλογὴ ἐν μέρει ἀπήτουν πλειοτέραν ἐπεξεργασίαν. Ἀλλ' ὄχι μόνον τοῦτο δὲν ἦτον δυνατὸν νὰ γείνῃ διά τινα αἴτια, ἀλλ' οὐδὲ τὰ πολλὰ τυπογραφικὰ λάθη τὰ ἐν τῷ τρίτῳ κεφαλαίῳ νὰ λείψωσιν.

Τοῦ δ' εὐκαταλήπτου χάριν πολλάκις ἔκρινα θυσιαστέαν τὴν συντομολογίαν, ὑπ' ὄψιν ἔχων τὸ τῶν μαθητῶν συμφέρον.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

Παρακαλεῖται ὁ ἀναγνώστης νὰ διορθώσῃ πρῶτον τὰ ἡμαρτημένα κατὰ τὰ ἑφεξῆς.

Σελ.	Στίχ.			
4	4	ἄνωθεν	γράψε	ὑπολειπόμενος
7	10	—	—	σημειόνηται
	13	—	—	σημειόνωνται
8	3	κάτωθεν	—	ἡ α.β ἀντὶ αβ
	2	—	—	ἡ —αβγ ἀντὶ ἡ αβγ
24	7 καὶ 6	—	—	$5α^3β^2γ$ ἀντὶ $5α^3βγ$ καὶ $5α^3β^3γ$
27	8	—	—	χρησιμώταται
38	1	ἄνωθεν	—	$—2α^2$
52	16	—	—	ἀριθμοῦ ἡ τῆς γνώσεως τοῦ κεφαλαίου ἀντὶ ἡ μερῶν τοῦ κεφ.
55	11	—	—	κατασκευάζεται
	21	—	—	$χ+4χ=2500$.
56	4	κάτωθεν	—	$\frac{1}{5}$ ἀντὶ $\frac{1}{6}$
62	3	ἄνωθεν	—	$41 \times 2χ$
64	7	κάτωθεν	—	$=α$ ἀντὶ $=κ$
67	13	—	—	2560
69	17 καὶ 15	—		ὁ τρίτος ἀντὶ τὸ τρίτον, καὶ κατωτέρω ἕκαστος ἀντὶ ἕκαστον

70 Περὶ τῶν ἐξισώσεων τοῦ 80 προβλήματος ἰδὲ σελ 95.

Σελ.	Στ.		
72	8 κάτωθεν	γράψε	$\frac{\omega}{9}$ ἀντὶ $\frac{\chi}{9}$.
74	2 καὶ 6 ἄνωθεν	—	39 ἀντὶ 19
75	21 —	—	$196\chi^2$ ἀντὶ 116χ
77	3 καὶ 7 —	—	52 καὶ $\chi\omega+52$ ἀντὶ 4 καὶ $\chi\omega+4$
	16 —	—	9 ἀντὶ 6
	19 —	—	112 ἀντὶ 212.
103	6 —	—	$\chi=\dfrac{\zeta+\upsilon\times\dfrac{\beta\xi-\delta\zeta}{\alpha\delta-\gamma\delta}}{\beta}$
105	15 —	—	περαιτέρω
145	Οἱ πρῶτοι πέντε στίχοι νὰ λείψωσιν.		
166	9 κάτωθεν	—	$\frac{5\alpha}{2\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$.
168	8 —	—	49725 ἀντὶ 59725
179	13 ἄνωθεν	—	52 ἀντὶ 25
182	3 καὶ 5	—	$\frac{\pi^2}{4}$ ἀντὶ $\frac{\pi^2}{2}$

6 -

ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ
ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΛΥΕΙΝ ΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

1. Εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ ὑποτίθενται γνωστὰ ἐκ τοῦ Συμπληρώματος ὡς ἀναγκαῖα ἡ θεωρία τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν, ἡ χρῆσις τῶν γραμμάτων πρὸς παράστασιν τῶν γενικῶς νοουμένων ἀριθμῶν, ἡ ἐκτέλεσις καὶ ἡ σημείωσις τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν καὶ ἡ σημείωσις αὐτῶν ἐπὶ τῶν μονογραμμάτων ἐγγραμμάτων, τί εἶναι ταυτότης καὶ τί ἰσότης, τί εἶναι μερικὸν καὶ γενικὸν πρόβλημα; τί ὅμοια προβλήματα, καὶ τί σημαίνει ἡ λέξις τύπος, κτλ. Ἄλλα δέ τιν' ἀναγκαῖα εἰς τὰ ἑξῆς, ἂν καὶ ἐξηγήθησαν εἰς τὸ Συμπλήρωμα, θέλομεν ὅμως τὰ πραγματευθῇ καὶ ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ τελειότερα.

2. *Ἀριθμητικὸν πρόβλημα* εἶναι ἐκεῖνο, καθ' ὃ ζητεῖται ἀριθμὸς οὕτω πως συσχετισμένος πρὸς ἄλλους γνωστοὺς καὶ δεδομένους ἀριθμούς, συσχετισμένους καὶ αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους, ὥστε δυνατὸν ἐκ τούτων δι' ἀριθμητικῶν πράξεων νὰ προσδιορίζηται ἐκεῖνος. Πολλάκις δὲ ζητεῖται ὄχι εἷς ἀριθμός, ἀλλὰ δύο ἢ τρεῖς ἢ καὶ πλειότεροι. *Ἔκθεσις* δὲ τοῦ προβλήματος

ἢ καὶ *πρότασις* αὐτοῦ λέγεται ἡ διὰ λέξεων παράστασίς του. *Λύσις* δὲ αὐτοῦ καλεῖται ἡ ἀνακάλυψις ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, ὅσαι ἀνάγκη νὰ ἐκτελῶνται ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου, συνήθως δὲ ἡ ἀνακάλυψις καὶ ἡ ἐκτέλεσις αὐτῶν.

3. Καὶ πολλῶν μὲν προβλημάτων διὰ τὰς ἁπλᾶς σχέσεις τῶν ἐν αὐτοῖς ἀριθμῶν εἶναι εὔκολος ἡ λύσις, ἡ δὲ Ἀριθμητικὴ διδάσκει τὰς μεθόδους τοῦ λύειν αὐτά· τοιαῦτα δὲ εἶναι ὅσα συνήθως ἀπαντῶνται εἰς τὰς στοιχειώδεις Ἀριθμητικάς. Ἀλλ' εἶναι καὶ πολλὰ ἄλλα ἐκείνων διάφορα, τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι τόσον πολλὰς καὶ ποικίλας σχέσεις πρὸς ἀλλήλους, ὥστε ἀδύνατον νὰ λυθῶσι κατὰ τῆς Ἀριθμητικῆς τὰς μεθόδους. Ἐκ τούτων ἁπλούστατον εἶναι τὸ ἀκόλουθον,

Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 82 *εἰς τρεῖς ἀνίσους ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων ὁ μὲν μέσος νὰ ὑπερέχῃ τὸν μικρότερον κατὰ* 14 *μονάδας, ὁ δὲ μεγαλήτερος τὸν μέσον κατὰ* 18. *ἢ ἄλλως τὸ αὐτὸ,*

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἄνισοι ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων ὁ μὲν μέσος νὰ ὑπερέχῃ τὸν μικρότερον κατὰ 14 *μονάδας, ὁ δὲ μεγαλήτερος τὸν μέσον κατὰ* 18, *τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἦναι* 82.

Η Ἀριθμητικὴ διδάσκει τὰς μεθόδους τοῦ μερίζειν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη καὶ εἰς ἀνάλογα ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν, ἀλλ' ὄχι καὶ ὡς ἐνταῦθα ζητεῖται νὰ μερισθῇ ὁ 82. Εἰς λύσιν λοιπὸν ὅλων τούτων τῶν δυσκολωτέρων προβλημάτων εἶναι ἀναγκαία ἄλλη μέθοδος, τὴν ὁποίαν ὑποδεικνύοντες ἐνταῦθα θέλομεν ἀναπτύξει ἀρκούντως ἐν τοῖς ἀκολούθοις κεφαλαίοις.

4. Πρῶτον μὲν λοιπὸν παρατηροῦμεν ὅτι κυρίως τῶν τριῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εἷς τις ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ, οἷον ὁ μικρότερος· διότι εἰς τοῦτον ἔπειτα προσθέτοντες 14 εὑρίσκομεν τὸν μέσον, καὶ εἰς τοῦτον πάλιν προσθέτοντες 18 ἔχομεν τὸν μεγαλήτερον.

Έπειτα πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου δοκιμάζομεν διαφόρους κατὰ τύχην εἰλημμένους ἀριθμούς, ἠξεύροντες ὅτι ἐκεῖνος εἶναι ὁ ζητούμενος μικρότερος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀφοῦ προστεθῇ ὁ 14 πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέσου, καὶ εἰς τοῦτον προστεθῇ ὁ 18 πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγαλητέρου, θέλουσιν οὕτω προκύψει τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ ἦναι 82. Οὕτω λοιπὸν δοκιμάζοντες κατὰ σειρὰν τὸν 8, 9, 10, 11, 12, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι δὲν εἶναι 8 ἢ 9 κτλ ὁ ζητούμενος μικρότερος, ἀλλ' εἶναι 12. Ἐπομένως 26 εἶναι ὁ μέσος καὶ 44 ὁ μεγαλήτερος.

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι πολλάκις δυνατὸν νὰ ἦναι πολλαὶ αὗται αἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου ἀναγκαῖαι δοκιμασίαι, καὶ τότε θέλομεν κατατρίβει πολὺν χρόνον πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναί τις ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος μικρότερος, ἂν καὶ ἄγνωστος, ἂν τὸν ὑποθέσωμεν γνωστὸν καὶ τὸν σημειώσωμεν διὰ τοῦ χ, σημειοῦντες ὅλας τὰς πρὸς δοκιμασίαν πράξεις, διότι ἀδύνατον τώρα νὰ ἐκτελεσθῶσι, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν οὕτω προκυπτόντων ἀριθμῶν θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὸν 82. Δηλαδή, ἐπειδὴ ὁ μικρότερος

ἐσημειώθη διὰ	χ
ὁ μὲν μέσος θέλει σημειωθῆ διὰ	$\chi+14$
ὁ δὲ μεγαλήτερος διὰ	$\chi+14+18$
τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι	$3\chi+28+18$.

λοιπὸν $3\chi+28+18=82$.

Ἀλλὰ διότι ὑποτεθεὶς γνωστὸς ἐσημειώθη διὰ χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ κατ' ἀνάγκην ἔπειτα ἐσημειώθησαν μόνον αἱ πρὸς δοκιμασίαν πράξεις, ἀπαλλαττόμεθα μὲν τῶν πολλῶν δοκιμασιῶν, δὲν μανθάνομεν ὅμως τίς εἶναι ὁ ζητούμενος μικρότερος ἀριθμός, ἐνῷ δοκιμάζοντες τοὺς μερικοὺς ἀριθμοὺς τὸν εὑρίσκομεν· ὥστε ἕως ἐδῶ δὲν φαίνεται ὠφέλειά τις ἐκ τῆς διὰ χ σημειώσεως τοῦ ζητουμένου, ὑποτεθέντος γνωστοῦ. Ἂν ὅμως παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ προκύψασα ἰσότης $3\chi+28+18=82$ ἀναδεικνύει ὅτι ὁ 82 εἶναι ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, τοῦ 18, ἤτοι τῆς γνωστῆς διαφορᾶς τοῦ μέσου καὶ τοῦ μεγαλητέρου, τοῦ 28, ἤτοι τοῦ διπλασίου τῆς γνωστῆς διαφορᾶς τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ 3χ, ἤτοι τοῦ τριπλασίου τοῦ ὑποτεθέντος γνωστοῦ μικροτέρου, μανθάνομεν ὅτι, ἂν ἀπὸ τὸν 82 ἀφαιρεθῇ ὁ 18 καὶ ὁ 28, ὁ ὑπολοιπόμενος 36 εἶναι τριπλάσιος τοῦ ζητουμένου μικροτέρου, ἢ ἀντιστρόφως ὁ μικρότερος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 36, ἤτοι 12. Ὥστε ἐκ τῆς προκυψάσης ἰσότητος μανθάνομεν τίνας πράξεις ἀριθμητικὰς ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν χρειάζεται νὰ ἐκτελέσωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου, καὶ τώρα καταλαμβάνομεν ὅτι εἶναι ὠφελιμωτάτη ἡ μνημονευθεῖσα μέθοδος.

5. Ὅμοιον μὲ τὸ ἤδη λυθὲν μερικὸν πρόβλημα εἶναι πλεῖστα, καὶ ἂν σημειώσωμεν γενικῶς διὰ α μὲν τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ἑκάστου μερικοῦ προβλήματος, διὰ β δὲ τὴν διαφορὰν τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μέσου, διὰ γ δὲ τὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ μεγαλητέρου, θέλομεν ἔχει τὸ ἑξῆς γενικὸν πρόβλημα,

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἄνισοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ὁ μὲν μέσος νὰ ὑπερέχῃ τὸν μικρότερον κατὰ β μονάδας, ὁ δὲ μεγαλήτερος τὸν μέσον κατὰ γ μονάδας, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἦναι α μονάδες.

Καὶ τούτου δὲ τοῦ προβλήματος ὁ μέσος καὶ ὁ μεγαλήτερος εὑρίσκεται εὐκόλως, ἀφοῦ εὑρεθῇ ὁ μικρότερος. Διὰ τοῦτο πρὸς εὕρεσιν τοῦ μικροτέρου κατὰ τὴν προειρημένην μέθοδον ὑποθέτοντες αὐτὸν γνωστὸν τὸν σημειοῦμεν διὰ χ, τὸ ὁποῖον ἐδῶ δὲν σημαίνει μερικόν τιν' ἀριθμόν, ὡς τὸ καθ' ἕκαστον μερικὸν πρόβλημα χ, ἀλλὰ σημειοῖ τὸν μικρότερον ὑποτεθέντα γνωστὸν ἀριθμὸν ἑκάστου μερικοῦ προβλήματος.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ μικρότερος εἶναι	χ
ὁ μὲν μέσος θέλει εἶσθαι	$\chi+\beta$
ὁ δὲ μεγαλήτερος	$\chi+\beta+\gamma$
τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν	$3\chi+2\beta+\gamma$.

ἔχομεν λοιπὸν κατὰ τὴν ἔκθεσιν τοῦ προβλήματος

$$3\chi+2\beta+\gamma=\alpha.$$

Ἂν δὲ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος τὸ 2β καὶ τὸ γ, ἔχομεν

$$3\chi=\alpha-2\beta-\gamma,$$

διαιρέσει δὲ τῶν δύο μελῶν διὰ 3 ἔχομεν

$$\chi=\frac{\alpha-2\beta-\gamma}{3}.$$

β. Παρατηρητέον τώρα ὅτι διαφέρει τῆς λύσεως τοῦ μερικοῦ προβλήματος ἡ λύσις τοῦ γενικοῦ, καθότι ἐνταῦθα μὲν ἔγειναν γνωσταὶ μόνον αἱ ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἑκάστου μερικοῦ προβλήματος ἐκτελεστέαι πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑποτεθέντος γνωστοῦ μικροτέρου, ἤτοι εὑρέθη τύπος τις, ὡς ἀδύνατον ἐπὶ τῶν ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν νὰ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις, κατὰ δὲ τὸ μερικὸν καὶ ἐξετελέσθησαν ἐνταυτῷ, καὶ οὕτως εὑρέθη μερικὸς ἀριθμὸς 12 ὁ μικρότερος. Ἀλλ' ὁ τύπος οὗτος εἶναι ὠφελιμώτατος· διότι πρὸς λύσιν ὁποιουδήποτε τῶν ὁμοίων μὲ τοῦτο μερικοῦ προβλήματος ἄλλο δὲν ἔχει νὰ πράττῃ τις, εἰμὴ ἐν αὐτῷ ἀντὶ τῶν γραμμάτων νὰ θέτῃ τοὺς τοῦ μερικοῦ προβλήματος ἀριθμοὺς καὶ νὰ ἐκτελῇ τὰς σημειωμένας πράξεις, καὶ οὕτω θέλει εὑρίσκει τὸν τοῦ μερικοῦ προβλήματος ζητούμενον ἀριθμόν. Οἷον, ἐὰν θέλῃ τις νὰ λύσῃ τὸ ἐν ἀριθμῷ 3 μερικόν, ἐν τῷ ἀνωτέρω τύπῳ λογίζεται $\alpha=82$, $\beta=14$ ἢ $2\beta=28$, $\gamma=18$, καὶ ἐκτελῶν τὰς δύο σημειωμένας ἀφαιρέσεις καὶ τὴν διὰ 3 διαίρεσιν τοῦ ὑπολοίπου εὑρίσκει $\chi=12$. Οὕτω καὶ περὶ παντὸς ἄλλου μερικοῦ.

Δῆλον λοιπὸν καὶ ἐκ τούτων μόνων ὅτι ἡ λύσις τῶν γενικῶν προβλημάτων, ἥτις φέρει εἰς τύπον, ἐξ οὗ ἔπειτα εὑρίσκονται οἱ τῶν μερικῶν προβλημάτων ζητούμενοι ἀριθμοί, εἶναι ὠφελιμωτάτη.

7. Ἡ ἰσότης $3\chi+28+18=82$ ἢ $3\chi+2\beta+\gamma=\alpha$ καὶ πᾶσα ἄλλη τοιαύτη καλεῖται ἰδίως *ἐξίσωσις*, ἡ μὲν *μερική*, ἡ δὲ *γενική*. Εἶναι δὲ ἐξίσωσις ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ἐμφαίνεται διὰ τοῦ = ὅτι εἶναι ἴσοι δύο ἀριθμοὶ διαφόρως δι' ἄλλων ἀριθμῶν καὶ σημείων παριστανόμενοι, καὶ ἔχοντες ἢ ἀμφότεροι ἢ ὁ ἕτερος

ἓν τοὐλάχιστον γράμμα σημαῖνον ἄγνωστον ἀριθμὸν ὑποτεθέντα τοιοῦτον γνωστόν, ὁποῖος νὰ καθιστάνῃ ἴσους τοὺς προκειμένους ἀριθμούς.

Ἡ ἰδίως δὲ λεγομένη *ἰσότης* κατὰ μὲν τἆλλα εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐξίσωσιν, διαφέρει δὲ αὐτῆς κατὰ ταῦτα, ὅτι δυνατὸν νὰ ἔχωσι τῆς ἰσότητος ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ γράμμα σημαῖνον ἄγνωστον ἢ νὰ μὴ ἔχῃ μηδέτερος, καὶ ὅτι ἡ βεβαιότης ἡμῶν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν δύο ἀριθμῶν ἐξάγεται ἢ ἐξ ἁπλῆς ὄψεως αὐτῶν, οἷον $6+7=15-2$, $9\times4=3\times12$, ἢ ἔκ τινος προτέρας γνώσεως, οἷον ἂν ἦναι γνωστὸν ὅτι $\alpha:\beta::\gamma:\delta$, εἶναι βέβαιον ὅτι τὸ $\alpha\delta=\beta\gamma$, ἢ ἂν ἦναι γνωστὸν ὅτι 12 εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τοῦ ἐν ἀρ. 3 προβλήματος, εἶναι βέβαιον ὅτι $3\times12+28+18=82$, ἢ καὶ ἐκ τῆς ἐκτελέσεως πράξεών τινων ἁπλῶς, οἷον $\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)=\alpha^3-\alpha$· ἐνῷ ἡ βεβαιότης ἡμῶν ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσοι προέρχεται ἐκ μόνου τοῦ ὅτι ἐνυπάρχει γράμμα σημαῖνον ἄγνωστον ἀριθμὸν ὑποτεθέντα γνωστόν, καὶ τοιοῦτον, ὁποῖος νὰ καθιστάνῃ ἴσους τοὺς δύο ἀριθμούς. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις εἶναι καθ' ὑπόθεσιν ἰσότης, ἥτις γίνεται ἀληθῶς ἰσότης, ἀφοῦ προσδιορισθῇ ὁπωσδήποτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ τεθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ παριστάνοντος αὐτὸν γράμματος· καὶ τότε λέγουσιν ὅτι *ἐπαληθεύεται* ἡ *ἐξίσωσις*. Ἐὰν δ' ἐκτελεσθῶσι καὶ ὅλαι αἱ σημειωμέναι πράξεις, τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται ταυτότης, ἤτοι ταυτοτητοποιεῖται, ἢ ἁπλούστερα *ταυτοποιεῖται*. Ὅταν δὲ μὴ ὄντος ἔτι προσδιωρισμένου τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ τίθηται ἁπλῶς ἀντὶ τοῦ γράμματος τοῦ σημαίνοντος αὐτὸν ἀριθμός τις καὶ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις, τότε δοκιμάζεται ὁ ἀριθμὸς οὗτος· ὁ δὲ φέρων εἰς ταυτότητα λέγεται *δεδοκιμασμένος* καὶ εἶναι ὁ ζητούμενος.

8. *Λύσις ἐξισώσεως* ἢ *ἐξισώσεων* λέγεται ἡ ἐξ αὐτῆς ἢ ἐξ αὐτῶν διὰ σειρᾶς πράξεων εὕρεσις ἀριθμοῦ ἴσου μὲ τὸν ζητούμενον ἢ ἀριθμῶν ἴσων μὲ τοὺς ζητουμένους κατὰ τὰ μερικὰ προβλήματα, καὶ τύπου ἢ τύπων κατὰ τὰ γενικά.

Ἡ ἀνωτέρω μερικὴ ἐξίσωσις ἐλύθη, ἀφοῦ διὰ τῶν ἀφαιρέσεων καὶ τῆς διαιρέσεως εὑρέθη $x=12$, ἡ δὲ γενικὴ, ἀφοῦ εὑρέθη $x=\frac{\alpha-2\beta-\gamma}{3}$, ὅπου πρῶτον μὲν μέλος εἶναι *μεμονωμένον* τὸ x, δεύτερον δὲ εἶναι μερικὸς ἀριθμὸς ἢ ὁ προσήκων τύπος.

9. Ἐκ τῶν προηγουμένων καταλαμβάνει τις ὅτι ἡ προϋποδειχθεῖσα μέθοδος συνίσταται εἰς ταῦτα, πρῶτον νὰ γίνηται ἀκριβὴς διάγνωσις τοῦ ἐκληπτέου ὡς ἀγνώστου ἀριθμοῦ, ὅταν ἦναι πολλοὶ οἱ ζητούμενοι καὶ εὐκόλως δἰ ἑνὸς αὐτῶν οἱ ἄλλοι προσδιορίζωνται· ἔπειτα νὰ ὑποτίθηται αὐτὸς γνωστὸς καὶ νὰ σημειοῖται διὰ τινος τῶν τελευταίων τοῦ ἀλφαβήτου γραμμάτων· μετὰ ταῦτα νὰ γίνηται προσπάθεια πρὸς ἀνακάλυψιν τῶν πρὸς δοκιμασίαν αὐτοῦ πράξεων καὶ ἅμ᾽ ἀνακαλυπτόμεναι νὰ σημειόνηται, ἐξ ὧν θέλει προκύπτει ἐξίσωσις ἢ ἐξισώσεις· τελευταῖον νὰ λύηται ἢ νὰ λύωνται αὗται, ἐξ οὗ θέλει γίνεσθαι γνωστὸς ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἢ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ, ἢ θέλει γίνεσθαι γνωστὸς ὁ προσήκων τύπος ἢ τύποι. Σύντομα ἡ μέθοδος συνίσταται εἰς τὴν διάκρισιν τῶν ἀγνώστων καὶ τὴν σημείωσιν αὐτῶν διὰ γραμμάτων, εἰς τὴν κατασκευὴν ἐξισώσεων καὶ εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν.

10. *Ἄλγεβρα* καλεῖται ἡ ἐπιστήμη κυρίως τῶν ἐξισώσεων πρὸς λύσιν μάλιστα τῶν γενικῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ἤτοι ἡ ἐπιστήμη καθ᾽ ἣν μανθάνει τις, σημειῶν διὰ γραμμάτων μὲν τοὺς ἀριθμοὺς, δἰ ἰδιαιτέρων δὲ σημείων τὰς ἐπ᾽ αὐτῶν πράξεις, νὰ κατασκευάζῃ ἐξισώσεις καὶ νὰ λύῃ αὐτὰς, καὶ οὕτω νὰ λύῃ μάλιστα γενικὰ προβλήματα, τῶν ὁποίων τὰ δεδομένα καὶ τὰ ζητούμενα εἶναι ἀριθμοί. Ἡ δὲ προειρημένη μέθοδος τοῦ λύειν τὰ προβλήματα ὀνομάζεται γενικῶς μὲν *ἀναλυτικὴ*, ἰδίως δὲ *ἀλγεβρικὴ*. Ἐνίοτε δὲ καὶ ἡ Ἄλγεβρα καλεῖται *ἀνάλυσις*.

Ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ θέλομεν πραγματευθῆ ἐκεῖνα τὰ μέρη τῆς Ἀλγέβρας, ὅσα κρίνομεν ἱκανὰ εἰς τοὺς σπουδάζοντας ἐν τοῖς παρ' ἡμῖν γυμνασίοις.

Σημ. Οἱ θέλοντες ἀπὸ τοῦδε νὰ γυμνάζωνται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεων τῶν προβλημάτων, εὑρίσκουσι ἐκθέσεις προβλημάτων ἐν τῷ τρίτῳ κεφαλαίῳ καὶ ἐν τῷ τέλει τοῦ βιβλίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ.

11. Ἡ σπουδὴ τῶν ἐξισώσεων προαπαιτεῖ τὴν εἴδησιν τοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑπολογισμοῦ, ἤτοι τῶν μεταλλαγῶν ἐκείνων, ὅσαι ἀνάγκη νὰ γίνωνται ἐπὶ ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν πρὸς εὕρεσιν ἄλλων ἐγγραμμάτων διαφόρως πρὸς τοὺς πρώτους συσχετισμένων. Διὰ τοῦτο θέλομεν ἐξηγήσει ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ ὅσα τοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑπολογισμοῦ θέλουσι χρειασθῆ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἀκολούθων.

Περὶ ὅρων, ὁμοίων ὅρων καὶ πολυόρων.

12. Καὶ ἐν τῷ Συμπληρώματι καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ κεφαλαίῳ εἴδομεν ὅτι ἀριθμοί τινες σημειοῦνται δι' ἑνὸς μόνου γράμματος καὶ ὀνομάζονται *μονογράμματοι*, οἷον οἱ δεδομένοι α, β, γ τοῦ ἐν ἀρ. 5 γενικοῦ προβλήματος, ἄλλοι δὲ διὰ δύο ἢ διὰ πλειοτέρων καὶ διὰ πράξεων ἐκτελεστέων ἐπ' αὐτῶν, οἵτινες λέγονται *πολυγράμματοι* καὶ νοοῦνται ὅτι εἶναι ἐξαγόμενα μιᾶς ἢ πλειοτέρων πράξεων ἐκτελεστέων ἐπὶ μονογραμμάτων ἢ καὶ ἐπὶ ἄλλων ἁπλουστέρων πολυγραμμάτων· τοιοῦτοι δὲ εἶναι οἱ ἀκόλουθοι,

$\alpha\times\beta$ ἢ $\alpha.\beta$ ἢ $\alpha\beta$, $-\alpha\times-\beta$ ἢ $\alpha\beta$, $\alpha\times-\beta$ ἢ $-\alpha\beta$;
$\alpha\times\beta\times-\gamma$ ἢ $\alpha\beta\times-\gamma$ ἢ $\alpha\times-\gamma\beta$ ἢ $-\gamma\alpha\beta$ ἢ $\alpha\beta\gamma$;
$\alpha\times-\beta\times-\gamma$ ἢ $-\alpha\beta\times-\gamma$ ἢ $\alpha\beta\gamma$, $-\alpha\beta\times-\gamma\delta$ ἢ $\alpha\beta\gamma\delta$,

$$\frac{a}{\beta},\quad \frac{-a}{-\beta} \text{ ἢ } +\frac{a}{\beta},\quad \frac{-a}{+\beta} \text{ ἢ } -\frac{a}{\beta},\quad \frac{+a}{-\beta} \text{ ἢ } -\frac{a}{\beta},$$

$$a^2,\ \beta^3,\ \gamma^4,\ a^2\beta^3,\ -a^4\delta^2\gamma^3,\ 5a^2\beta^3,\ -6a^3\beta\gamma^2,$$

$$\sqrt{a},\ \sqrt{\beta},\ \sqrt{a^4},\ -\sqrt{a^3},\ \sqrt[3]{a^2\beta^4\gamma},\ \sqrt[4]{\delta^3\varepsilon^5},\ \pm\sqrt{\eta\theta^2},\ \sqrt{-a^3\beta},$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{\beta}},\ -\sqrt[3]{\frac{\delta^2}{\gamma^3}},\ \sqrt{-\frac{\theta^3}{\varepsilon^2}},\ \frac{5a^3\beta}{9\gamma^2\delta},\ \frac{3\theta\eta^2}{\sqrt{a}},\ \frac{-\sqrt{5a^3}}{+\sqrt[3]{2\beta^3}},$$

$$a+\beta,\ a-\beta,\ -a+\beta,\ -a-\beta,$$

$$5a^2\beta^3+4a^3\gamma^4,\qquad 6\delta^4\varepsilon^2\zeta-9a^2\eta^4,$$

$$7a^3\beta^2-4a^2\beta^3+3a\beta^4,\quad 2\gamma^4\delta+3\delta^3\varepsilon-4\gamma^3\varepsilon^2-5\varepsilon^4,$$

$$\frac{3a^2\beta}{2\gamma^3\delta}+\frac{5a\beta^2}{3\gamma^2\delta^2}-\frac{9a^3}{4\delta^3}+\frac{8a^3}{5\gamma\delta^4}-\frac{9}{8\delta^3} \text{ κτλ.}$$

13. *Ὅρος* ὀνομάζεται μονογράμματος ἀριθμός, ἢ πολυγράμματος ἐν ᾧ εἶναι σημειωμένη πᾶσα ἄλλη πρᾶξις ἐκτὸς τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως, οἷον ὅλοι οἱ τῶν ἀνωτέρω ἑπτὰ πρώτων γραμμῶν· ἀλλὰ καὶ μερικός τις ἀριθμὸς καλεῖται ὅρος, οἷον 12, 5×7, κτλ.

Προσδιόρισμα τοῦ ἐγγραμμάτου ὅρου λέγεται ὁ μερικὸς ἀριθμός, ὅς τις προκύπτει ἀφοῦ μερικοποιηθῶσι τὰ γράμματά του καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σημειωμέναι πράξεις. Ἐκ δὲ τῶν ἀνωτέρω ὅρων καταλαμβάνει τις ὅτι, ἂν τὰ γράμματα a, β, γ, κτλ σημαίνωσιν ἀκεραίους ἀριθμούς, τὸ προσδιόρισμα ὅρου τινὸς δυνατὸν νὰ ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς ἢ ἀντιθετικός, κλασματικὸς θετικὸς ἢ ἀντιθετικός, ἀνάριθμον ποσὸν ἢ καὶ ἀνύπαρκτόν τι (Συμπ. ἀρ. 68 καὶ 83). Ἐννοεῖται δὲ ὅτι κατὰ τὰς διαφόρους μερικοποιήσεις τῶν ἁπλῶν γραμμάτων τὸ προσδιόρισμα εἶναι ἄλλοτε ἄλλο.

14. Οἱ ἀκέραιοι ὅροι, τῶν ὁποίων τὰ γράμματα ὅλα εἶναι

τὰ αὐτὰ καὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος δείκτης εἰς ὅλους εἶναι ὁ αὐτός, καλοῦνται *ὅμοιοι*, οἷον οἱ $5α^3β^2γ$, $-8α^3β^2γ$, $+4α^3β^2γ$.

15. *Πολύορος* δὲ ἀορίστως λέγεται ὁ ἀπαρτιζόμενος ἐκ πολλῶν κατὰ σειρὰν ὅρων ὁμοειδῶν ἢ ἀντιθέτων, ὡρισμένως δὲ *δίορος*, *τρίορος*, κτλ ὁ ἀποτελούμενος ἐκ δύο, ἐκ τριῶν κτλ ὅρων, οἷον οἱ τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων τελευταίων γραμμῶν ἐγγράμματοι. Λέγεται δὲ καὶ οὐδετέρως *δίορον*, *τρίορον*, *πολύορον*.

Πολυόρου οἱ ὅροι δυνατὸν νὰ ἦναι ὅλοι θετικοί, ἢ ὅλοι ἀντιθετικοί, ἢ οἱ μὲν θετικοί, οἱ δὲ ἀντιθετικοί. Τὸ δε προσδιόρισμα αὐτοῦ εὑρίσκεται, ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσι προσθέσεις ἢ καὶ ἀφαιρέσεις ἐπὶ τῶν προσδιορισμάτων τῶν ὅρων του ἐξ ἀριστερῶν κατὰ σειρὰν πρὸς δεξιά. Καὶ τοῦ μὲν ἔχοντος ὅλους του τοὺς ὅρους θετικοὺς ἢ ὅλους ἀντιθετικοὺς τὸ προσδιόρισμα δῆλον ὅτι εἶναι ἄθροισμα τῶν προσδιορισμάτων ὅλων τῶν ὅρων του, θετικὸν μὲν τὸ τῶν θετικῶν, ἀντιθετικὸν δὲ τὸ τῶν ἀντιθετικῶν. Τοῦ δ' ἔχοντος τοὺς μὲν θετικούς, τοὺς δὲ ἀντιθετικούς, τὸ *προσδιόρισμα εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθετικῶν, ὁμοειδὲς δὲ μὲ τὸ μεγαλήτερον προσδιόρισμα*.

Καὶ πρῶτον μὲν τοῦ διόρου $α-β$ εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ προσδιόρισμα εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ὅρων ὁμοειδὲς μὲ τὸν μεγαλήτερον· ὡσαύτως δὲ καὶ τοῦ τριόρου $α+β-γ$.

Περὶ δὲ τοῦ τριόρου $α-β+γ$ βλέπομεν ὅτι, ἂν μὲν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἦναι θετική, θέλει προστεθῇ εἰς τὸν τρίτον, τὸ δὲ ἄθροισμά των εἶναι ἐνταυτῷ καὶ προσδιόρισμα τοῦ τριόρου καὶ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο θετικῶν ὅρων ὑπὲρ τὸν ἀντιθετικόν, εἶναι δὲ ὁμοειδὲς μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα. Ἂν δ' ἦναι ἀντιθετική, θέλει ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν τρίτον, καὶ οὕτω, ἂν μὲν ὁ $-β$ ἦναι μεγαλήτερος τῶν δύο θετικῶν, μέρος τι αὐτοῦ συνηφανίσθη μὲ τὸν πρῶτον ὅρον, ἄλλο μέρος του μὲ τὸν τρίτον, καὶ τὸ ἄλλο του μέρος εἶναι ἐνταυτῷ καὶ προσδιόρισμα τοῦ τριόρου καὶ ὑπεροχὴ τοῦ $-\beta$ ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων, ὁμοειδὲς μὲ τὸν μεγαλήτερον· ἂν δ' ὁ $-\beta$ ἦναι μικρότερος τῶν δύο θετικῶν, μέρος τι αὐτοῦ συνηφανίσθη μὲ τὸν πρῶτον ὅρον, καὶ τὸ ἄλλο του μέρος συναφανίζεται μὲ μέρος τι τοῦ τρίτου ὅρου, μένει δὲ μέρος τοῦ τρίτου ὅρου, ἤτοι τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο θετικῶν, καὶ ὡς προσδιόρισμα τοῦ τριόρου καὶ ὡς διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀντιθετικοῦ, ὁμοειδὲς μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τοῦτον τρόπον θέλει πληροφορηθῇ τις ὅτι καὶ τοῦ τριόρου $\alpha-\beta-\gamma$ τὸ προσδιόρισμα εἶναι διαφορὰ τοῦ θετικοῦ ὅρου καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθετικῶν, ὁμοειδὲς μὲ τὸ μεγαλήτερον.

Περὶ δὲ τῶν τετραόρων $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ ἢ $\alpha-\beta+\gamma+\delta$ παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν μὲν τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἦναι θετικόν, ἀπὸ μὲν τὸν τοῦ πρώτου τετραόρου τελευταῖον ὅρον θέλει ἀφαιρεθῇ, εἰς δὲ τὸν τοῦ δευτέρου θέλει προστεθῇ, ἂν δ' ἦναι ἀντιθετικόν, τἀνάπαλιν, καὶ οὕτω θέλει προκύψει τὸ προσδιόρισμα ἑκατέρου τοῦ τετραόρου. Ἀλλὰ κατὰ μὲν τὰς δύο περιπτώσεις καθ' ἃς προστίθεται, καὶ τὸ προσδιόρισμα τοῦ τετραόρου καὶ ἡ τοῦ μεγαλητέρου ἀθροίσματος τῶν ὅρων ὑπὲρ τὸ μικρότερον ὑπεροχὴ εἶναι κεφάλαιον τοῦ τετάρτου ὅρου καὶ τοῦ προσδιορίσματος τῶν τριῶν πρώτων· λοιπὸν τὸ προσδιόρισμα τοῦ τετραόρου εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθετικῶν, ὁμοειδὲς δὲ μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα. Κατὰ δὲ τὰς δύο περιπτώσεις καθ' ἃς ἀφαιρεῖται τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἀπὸ τὸν τέταρτον, προσδιόρισμα τοῦ τετραόρου εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ τετάρτου ὅρου καὶ τοῦ προσδιορίσματος τῶν τριῶν πρώτων. Ἀλλ' ἡ αὐτὴ διαφορὰ εἶναι διαφορὰ καὶ τῶν ἀθροισμάτων τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων τοῦ τετραόρου. Διότι, ἂν τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἦναι μεγαλήτερον τοῦ τετάρτου, διὰ τῆς εἰρημένης ἀφαιρέσεως συναφανίζεται καὶ τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῶν ὁμοειδῶν μὲ τὸν τέταρτον μὲ μέρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθέτων ὅρων, ἤτοι τοῦ προσδιορίσματος τῶν τριῶν πρώτων ὅρων, καὶ ἡ διαφορὰ τούτου τοῦ προσδιορίσματος καὶ τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι διαφορὰ καὶ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ἀθροισμάτων τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀντεθετικῶν ὅρων τοῦ τετραόρου. Ἂν δ' ἦναι τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων μικρότερον τοῦ τετάρτου, συναφανίζεται μὲ μέρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῶν ὁμοειδῶν μὲ τὸν τέταρτον τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθέτων ὅρων, ἤτοι τὸ προσδιόρισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων, καὶ ἡ διαφορὰ τούτου τοῦ προσδιορίσματος καὶ τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι διαφορὰ καὶ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ἀθροισμάτων τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων τοῦ τετραόρου, ὁμοειδὲς μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα. Λοιπὸν κτλ.

Ὡσαύτως πληροφορεῖταί τις καὶ περὶ τοῦ προσδιορίσματος τούτων τῶν τετραόρων $\alpha-\beta-\gamma-\delta$ ἢ $\alpha-\beta-\gamma+\delta$ καὶ περὶ πενταόρων καὶ περὶ ὁποιωνδήποτε ἄλλων πολυόρων.

Σημ. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι, ἂν ἑνός τινος ἢ πλειοτέρων ὅρων τοῦ πολυόρου τὸ προσδιόρισμα ἦναι ἀνάριθμον, ὁπότε ἀντὶ τούτου εἶναι εἰς χρῆσιν ἀριθμὸς προσεγγίζων, τὸ προσδιόρισμα τοῦ πολυόρου καὶ αὐτὸ θέλει εὑρεθῆ κατὰ προσέγγισιν· ἂν δ' ὅρος τις τοῦ πολυόρου παριστάνῃ ἀνύπαρκτον, καὶ τοῦ πολυόρου τὸ προσδιόρισμα θέλει σημαίνει ἀνύπαρκτον.

ιβ. Ἕπεται ἐκ τῶν ἤδη ἀποδεδειγμένων ὅτι, *ἐὰν μεταθέτωνται οἱ ὅροι πολυόρου ὁπωσδήποτε, ἀλλὰ διατηρῶνται θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοὶ ὡς ἦσαν, τοῦ οὕτω προκύπτοντος πολυόρου τὸ προσδιόρισμα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐξ οὗ προέκυψε καὶ κατὰ τὸν ἀριθμὸν καὶ κατὰ τὸ θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν σημεῖόν του*· οἷον μεταθέσει τῶν ὅρων ἐκ τοῦ $\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon$ προκύπτει τὸ $\gamma-\varepsilon+\alpha-\beta+\delta$, τοῦ ὁποίου τὸ προσδιόρισμα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ πρώτου. Διότι καὶ τῶν δύο πολυόρων τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν καὶ τὸ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων εἶναι τὸ αὐτό, ἐπομένως καὶ ἡ διαφορά των, ἥτις εἶναι προσδιόρισμα ἑκατέρου, εἶναι ἡ αὐτή.

Σημ. Εἶναι βέβαιον ὅτι πολλῶν ὅρων ἢ θετικῶν ὅλων ἢ ἀντιθετικῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ αὐτό, ὁποιανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχωσιν εἰς τὴν πρόσθεσιν.

17. *Ἐὰν ἀλλάσσωνται τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων πολυόρου ἀπὸ θετικῶν εἰς ἀντιθετικὰ καὶ τἀνάπαλιν, τοῦ προκύπτοντος πολυόρου τὸ προσδιόρισμα θέλει εἶσθαι τὸ αὐτὸ μὲν κατὰ τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ τοῦ ἐξ οὗ προέκυψε πολυόρου, ἀντίθετον δὲ κατὰ τὸ σημεῖον.* Διότι τοιαύτη ἀλλαγὴ τῶν σημείων δὲν μεταβάλλει τὰ προσδιορίσματα τῶν ὅρων, ἐπομένως οὐδὲ τὰ κεφάλαιά των, οὐδὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο κεφαλαίων, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν τοῦ προσδιορίσματος, ἀλλὰ μεταβάλλει μόνον τὸ μεγαλήτερον κεφάλαιον ἀπὸ θετικοῦ εἰς ἀντιθετικὸν καὶ τἀνάπαλιν, ἐπομένως καὶ τὸ προσδιόρισμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ αὐτό, εἰς ἀντιθετικὸν καὶ τἀνάπαλιν.

Ὅταν λοιπὸν θέλῃ τις νὰ μεταποιήσῃ τὸ προσδιόρισμα πολυόρου, οἷον τοῦ $3\alpha^2 - 5\alpha\beta + 4\beta^2$, εἰς τὸ ἴσον ἀντίθετόν του, ἀρκεῖ ν' ἀλλάσσῃ ὅλων τῶν ὅρων του τὰ σημεῖα οὕτω $-3\alpha^2 + 5\alpha\beta - 4\beta^2$.

18. Ὀνομάζομεν *συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων* τὴν πρᾶξιν, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἕνα ὅρον ἰσοδύναμον μὲ πολλοὺς ἄλλους ὁμοίους. Καὶ ἂν μὲν ἦναι ὅλοι οἱ ὅμοιοι ὅροι θετικοὶ ἢ ὅλοι ἀντιθετικοί, οἷον

$5\alpha^3\beta^2 + 6\alpha^3\beta^2 + 4\alpha^3\beta^2$ ἢ $-5\alpha^3\beta^2 - 6\alpha^3\beta^2 - 4\alpha^3\beta^2$, ἐννοουμένου ὡς μονάδος τοῦ $\alpha^3\beta^2$, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 5 τοιαῦται μονάδες, ὁ δεύτερος 6 καὶ ὁ τρίτος 4, ὅλαι δὲ εἶναι ὁμόσημοι, δῆλον ὅτι τὸ τρίορον ἰσοδυναμεῖ μὲ $5 + 6 + 4$ ἢ μὲ 15 τοιαύτας μονάδας, ὅσας ἔχει τὸ κεφάλαιον τῶν συνεργῶν των, ἤτοι μὲ $+15\alpha^3\beta^2$ τὸ πρῶτον καὶ μὲ $-15\alpha^3\beta^2$ τὸ δεύτερον. Ἂν δ' ἦναι τῶν ὁμοίων ὅρων ὁ μὲν θετικός, ὁ δὲ ἀντιθετικός, οἷον $8\alpha^4\beta^3\gamma^2 - 6\alpha^4\beta^3\gamma^2$, ἐννοουμένου τοῦ $\alpha^4\beta^3\gamma^2$ ὡς μονάδος, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος εἶναι 8 τοιαῦται μονάδες, ὁ δὲ δεύτερος 6, εἶναι δὲ ἀντίθετοι, δῆλον ὅτι τὸ δίορον ἰσοδυναμεῖ μὲ $8 - 6$ ἢ μὲ 2 τοιαύτας μονάδας, ἤτοι μὲ $2\alpha^4\beta^3\gamma^2$. Τὸ δὲ δίορον $4\alpha^2\beta^3 - 7\alpha^2\beta^3$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν $-3\alpha^2\beta^3$. Λοιπὸν ὁ ἰσοδύναμος μὲ πολλοὺς ὁμοίους ὅρους ὅρος ἔχει. ὅταν μὲν οἱ ὅροι ἦναι ὁμοειδεῖς, σημεῖον τὸ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ συνεργὸν ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν συνεργῶν των, ὅταν δ' ἦναι ἀντίθετοι, συνεργὸν καὶ σημεῖον τὴν διαφορὰν τῶν συνεργῶν τῶν ὁμοίων ὅρων μὲ τὸ σημεῖόν της, δεξιὰ δὲ τοῦ συνεργοῦ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις ἔχει τὰ αὐτὰ μὲ τοὺς ὁμοίους ὅρους γράμματα μὲ τοὺς δείκτας των. *Συστέλλονται λοιπὸν πολλοὶ ὅμοιοι ὅροι εἰς ἕνα ἰσοδύναμον, ἐὰν προστεθῶσιν οἱ συνεργοί των, ὅταν ἦναι ὁμοειδεῖς, ἢ ἂν ἀφαιρεθῶσιν, ὅταν ἦναι ἀντίθετοι, δεξιὰ δὲ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τεθῶσι τὰ γράμματα μὲ τοὺς δείκτας των ὅπως εἶναι ἐν τοῖς ὁμοίοις ὅροις.*

Πολύορον λοιπὸν ἔχον ὁμοίους ὅρους, οἷον τὸ

$$7a^3-8b^3+3b^3-9a^2b-5b^3+ab^2+4b^3,$$

καθίσταται ἁπλούστερον, ἀφοῦ γείνῃ τῶν ὁμοίων ὅρων του ἡ συστολή, Ὅμοιοι ὅροι τούτου εἶναι οἱ

$$-8b^3,\quad +3b^3,\quad -5b^3,\quad +4b^3,$$

μεταθέσει δὲ αὐτῶν οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι ὅλοι κατὰ σειρὰν πρῶτον οἱ δύο ἀντιθετικοί, ἔπειτα οἱ δύο θετικοί, προκύπτει τὸ

$$7a^3-9a^2b+ab^2-8b^3-5b^3+3b^3+4b^3,$$

τούτου δὲ οἱ μὲν ἀντιθετικοὶ ὅμοιοι ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὸν $-13b^3$, οἱ δὲ θετικοὶ μὲ τὸν $+7b^3$, οὗτοι δὲ οἱ δύο μὲ τὸν $-6b^3$. Λοιπὸν τὸ πολύορον ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ

$$7a^3-9a^2b+ab^2-6b^3.$$

Ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων τῶν πολυόρων δὲν πρέπει νὰ παραμελῆται ποτὲ ἐν τοῖς ἑξῆς, διότι παρέχει ἁπλούστερα εἰς χρῆσιν πολύορα. Δύναται δὲ νὰ γίνηται καὶ ἄνευ μεταθέσεως τῶν ὁμοίων ὅρων, ὥστε νὰ ἦναι κατὰ σειράν, ἀρκεῖ νὰ γίνηται κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

19. Συνήθως εἶναι χρήσιμον νὰ μεταθέτωνται οἱ ὅροι πολυόρου οὕτως, ὥστε μετὰ τὴν μετάθεσιν νὰ προβαίνωσιν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ οἱ δεῖκται τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ ἐν τοῖς διαφόροις ὅροις βαθμηδὸν ἐλαττούμενοι ἢ αὐξάνοντες. Ἡ τοι-

αὕτη πρᾶξις λέγεται *διάταξις πολυόρου*, τὸ δὲ πολύορον μετὰ τὴν διάταξιν καλεῖται *διατεταγμένον* ἢ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις γράμματός τινος ἢ κατὰ τὰς κατιούσας· τὸ πολύορον

$$6a^4 - 5a^3\beta + 7a^2\beta^2 + 8a\beta^3 - 9\beta^4$$

εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a καὶ ἐνταυτῷ κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ β.

Ἐὰν δὲ πολυόρου πολλοὶ ὅροι ἔχωσι μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην τὸ γράμμα, πρὸς ὃ ἡ διάταξις γίνεται, οὗτοι διατάσσονται πρὸς τὰς δυνάμεις ἄλλου γράμματος.

20. Ἡ χρῆσις τῶν παρενθέσεων εἶναι συχνὴ ἐν τοῖς ἑξῆς. Παρενθέτεται δ' ἐν αὐταῖς πᾶν ὅ,τι εἶναι ὠφέλιμον νὰ ἐννοῆται ὡς μονογράμματος ὅρος, ἢ πᾶν οὗτινος ἐννοεῖται τὸ προσδιόρισμα, οἷον ὅροι πολυγράμματοι ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί, πολύορα μὲ ἀκεραίους ὅρους ἢ κλασματικούς, ῥίζαι σημειωμέναι διὰ τοῦ ῥιζικοῦ, μερικὸς ἀριθμὸς κτλ. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς

$$(5a^3\beta^2)^2,\quad \left(\frac{3a^2}{5\beta^3}\right)^3,\quad \frac{(4a)^3}{(6\beta)^2}\quad (\sqrt{a^3\beta^2})^3,\quad (8a^3-9\beta^2),$$

$$(4a-5\beta+6\gamma-7\delta)^2,\ (345)^3,\ \text{κτλ.}$$

Ἐνίοτε δὲ εἶναι εἰς χρῆσιν καὶ τοιουτόσχημοι παρενθέσεις [ ], τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν πρὸς διαστολὴν *ἐγγωνίους*.

21. Πρὸς ἄσκησιν εἰς ὅσα ἤδη προείπομεν πρόκεινται τὰ ἀκόλουθα πολύορα.

$$7\chi+\chi^3-11+5\chi^2,\quad a\chi^3-a^4+\chi^4+a^3\chi-a^2\chi^2$$
$$\text{τὸ } \chi=2 \qquad \text{τὸ } \chi=5 \text{ καὶ τὸ } a=3$$

$$a\chi^2+\beta^2\chi+\beta^3+\beta\chi^2-3a^2\beta-a\beta\chi-a^2\chi+a^3$$
$$\chi=7,\ a=5,\ \beta=4$$

$$\frac{12a\chi^2-9a^3+4\chi^3+8a^2\chi}{7a\chi-3a^2+4\chi^2}\quad \chi=2,\ a=2$$

$$-6a^5 - 9a^4\beta + a^3\beta^2 + \tfrac{3}{2}a^2\beta^3 + 3a^3\beta^2 + 10a^4\beta - \tfrac{1}{2}a\beta^4$$
$$-5a^2\beta^3 + 15a^3\beta^2 \qquad a=5 \quad \beta=4.$$

$$4a^2\chi^3 - 10a^4\chi + 15a^3\chi^2 + 24a^2\chi^3 - 6a\chi^4 + 20a^2\chi^3$$
$$-12a^4\chi - 16a^3\chi^2 + 32a\chi^4$$

Περὶ ἀλγεβρικῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

22. Εἴδομεν ἐν τῷ Συμπληρώματι ὅτι δύο ἀριθμοὶ ἀφῃρημένοι καὶ παριστάνοντες ποσὸν μὴ νοούμενον ὡς θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν δύνανται, ὁμώνυμοι ὄντες, νὰ προσθέτωνται ὁ ἕτερος εἰς τὸν ἄλλον ἢ ν' ἀφαιρῶνται, ἀλλ' ὁ μέλλων νὰ προστεθῇ τότε γίνεται θετικὸς, ὁ δὲ μέλλων ν' ἀφαιρεθῇ ἀντιθετικός· διότι σημαίνουσιν ἀντίθετα, ὁ μὲν *αὔξησιν τοῦ πρώτου* καθ' ὅσας ἔχει αὐτὸς μονάδας, ὁ δ' *ἐλάττωσιν τοῦ αὐτοῦ* καθ' ὅσας ἔχει αὐτὸς μονάδας. Καὶ ἄν τις θέλῃ μετὰ ταῦτα νὰ μὴ ἐκτελέσῃ, ἀλλὰ νὰ σημειώσῃ ἑκατέραν τὴν πρᾶξιν, θέλει γράψει κατόπιν τοῦ πρώτου τὸν δεύτερον θετικὸν μὲν, ἂν μέλλῃ νὰ προστεθῇ, ἀντιθετικὸν δὲ, ἂν μέλλῃ ν' ἀφαιρεθῇ, οἷον, ἂν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι 20 καὶ 15, $20+15$, $20-15$.

Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ παριστάνωσι ποσὰ ἐν γένει θετικὰ, ἢ ὁ μὲν θετικὸν, ὁ δὲ ἀντιθετικὸν, οἷον $+20$ καὶ $+15$, ἢ $+20$ καὶ -15, καὶ τοιοῦτοι εἶναι οἱ τῶν πλείστων προβλημάτων, τότε εἶναι ἀνάγκη ὁ $+15$ νὰ προστίθηται εἰς τὸν $+20$, ἀδύνατον δὲ καὶ ν' ἀφαιρῆται, ὁ δὲ -15, ὡς ἀντίθετος τοῦ $+15$, ἀνάγκη ν' ἀφαιρῆται, ἀδύνατον δὲ καὶ νὰ προστίθηται εἰς τὸν $+20$. Ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ -20 καὶ -15 ἀνάγκη νὰ προσθέτωνται, οἱ δὲ -20 καὶ $+15$ ν' ἀφαιρῶνται. Πρὸς σημείωσιν δὲ καὶ τούτων τῶν πράξεων ἀρκεῖ νὰ γράφηται ὁ ἕτερος κατόπιν τοῦ ἄλλου ὡς ἔχουσιν, οἷον $+20+15$, $+20-15$, $-20-15$, $-20+15$.

Οὕτω δὲ πρέπει νὰ γίνηται ἡ σημείωσις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως καὶ τῶν ἐγγραμμάτων ὅρων μονογραμμάτων τε καὶ πολυγραμμάτων, ὅταν ἦναι θετικοὶ, ἀντιθετικοὶ ἢ ἀντίθετοι, δηλ. νὰ γράφηται ὁ ἕτερος κατόπιν τοῦ ἄλλου ὅπως ἔχουσιν, καὶ οὕτω θέλει προκύψει δίορον, τοῦ ὁποίου τὸ προσδιόρισμα εἴπομεν ἤδη πῶς εὑρίσκεται· ἂν δ' ἦναι τρεῖς ἢ πλειότεροι οἱ ὅροι, θέλει προκύψει τρίορον ἢ πολύορον.

23. Τὰ πολύορα ὅμως παρέχουσιν εἰς σκέψιν τρίτην τινὰ περίπτωσιν τῶν δύο προηγουμένων διάφορον. Δηλαδὴ εἴδομεν (15) ὅτι τῶν μὲν ἐχόντων ὅλους τοὺς ὅρους των θετικοὺς πολυόρων τὸ προσδιόρισμα εἶναι θετικόν, τῶν δ' ἀντιθετικοὺς ἀντιθετικόν. Τῶν ἐχόντων ὅμως τοὺς μὲν τῶν ὅρων θετικούς, τοὺς δὲ ἀντιθετικούς, τὸ προσδιόρισμα ἀνάγκη νὰ ἦναι τῶν μὲν θετικόν, τῶν δὲ ἀντιθετικόν, ἀλλ' εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἄδηλον τίνων εἶναι θετικὸν καὶ τίνων ἀντιθετικὸν πρὸ τῆς μερικοποιήσεως τῶν γραμμάτων καὶ τῆς ἐκτελέσεως ὅλων τῶν πράξεων· μάλιστα ἐνίοτε συμβαίνει τοῦ αὐτοῦ πολυόρου τὸ προσδιόρισμα νὰ ἦναι κατὰ τὰς διαφόρους μερικοποιήσεις τῶν γραμμάτων ὁτὲ μὲν θετικόν, ὁτὲ δὲ ἀντιθετικόν.

Οὕτως ἐχόντων τῶν προσδιορισμάτων τῶν πολυόρων, δῆλον μὲν ὅτι δύο πολύορα ἢ πλειότερα ἔχοντα ὅλους των τοὺς ὅρους θετικοὺς ἢ ὅλους των τοὺς ὅρους ἀντιθετικοὺς πρέπει νὰ προσθέτωνται, δύο δὲ πολύορα, ὧν τὸ μὲν ἔχει ὅλους τοὺς ὅρους θετικούς, τὸ δὲ ὅλους ἀντιθετικούς, πρέπει νὰ ἀφαιρῶνται τὸ ἕτερον ἀπὸ τὸ ἄλλο· τί δὲ πρέπει νὰ πράττῃ τις, πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν, ἐπὶ τῶν πολυόρων τῶν ἐχόντων καὶ θετικοὺς καὶ ἀντιθετικοὺς ὅρους, ἐξ αὐτῶν τῶν πολυόρων ἀδύνατον νὰ τὸ μάθῃ. Ἀλλ' εὐθὺς θέλομεν ἰδεῖ τί τὸ πρακτέον περὶ τούτων.

24. Παρατηρητέον πρῶτον ὅτι, ἂν κατόπιν πολυόρου μὲ θετικοὺς ἢ μὲ ἀντιθετικοὺς ὅλους τοὺς ὅρους του, οἷον τοῦ $\alpha+\beta+\gamma$ ἢ τοῦ $-\alpha-\beta-\gamma$, γραφθῇ ὅπως ἔχει ἄλλο πολύορον μὲ θετικοὺς ἢ μὲ ἀντιθετικοὺς ὅλους τοὺς ὅρους του, οἷον τὸ $\delta+\varepsilon+\zeta$ ἢ τὸ $-\delta-\varepsilon-\zeta$, προκύπτει τρίτον πολύορον

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta, \quad \text{ἢ} \quad -\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon-\zeta$$

τοῦ ὁποίου τὸ προσδιόρισμα δῆλον ὅτι εἶναι κεφάλαιον τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πρώτων.

Ἂν δ' ἔπειτα κατόπιν τοῦ πρώτου γραφθῇ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του τὸ δεύτερον, προκύπτει τρίτον πολύορον

$$\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon-\zeta, \quad \text{ἢ} \quad -\alpha-\beta-\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta,$$

τοῦ ὁποίου τὸ προσδιόρισμα δῆλον ὅτι εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πρώτων.

Ἐὰν ὅμως κατόπιν πολυόρου μὲ θετικοὺς καὶ μὲ ἀντιθετικοὺς ὅρους, οἷον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$, γραφθῇ ὅπως ἔχει ἄλλο πολύορον μὲ θετικοὺς καὶ ἀντιθετικοὺς ὅρους, οἷον τὸ $\mu-\nu-\xi+\pi$, τοῦ οὕτω προκύπτοντος τρίτου πολυόρου

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta+\mu-\nu-\zeta+\pi$$

τὸ προσδιόρισμα δυνατὸν νὰ ἦναι ἢ κεφάλαιον τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πρώτων ἢ διαφορά των. Διότι ά. θετικοῦ ὄντος τοῦ προσδιορίσματος τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$, ἂν ἦναι θετικὸν καὶ τὸ τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$, ἐνῷ διὰ τῆς γραφῆς τοῦ ἑτέρου κατόπιν τοῦ ἄλλου αὐξάνει τὸ κεφάλαιον $\alpha+\gamma$ τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ κατὰ τὸ κεφάλαιον $\mu+\pi$ τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ ἄλλου, αὐξάνει κατὰ τοσοῦτον καὶ τὸ προσδιόρισμα αὐτοῦ, ἐνῷ δὲ αὐξάνει καὶ τὸ κεφάλαιον $-\beta-\delta$ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων κατὰ τὸ κεφάλαιον $-\nu-\xi$ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων τοῦ ἄλλου, τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ ἐλαττοῦται κατὰ τὸ αὐτό· ὥστε τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ τὸ προσδιόρισμα οὕτω μετεβλήθη κατὰ τὴν διαφορὰν τοῦ $\mu+\pi$ καὶ τοῦ $-\nu-\xi$, ἤτοι κατὰ τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$. Ἀλλὰ κατὰ τὰς ὑποθέσεις καὶ τοῦτο εἶναι θετικὸν καὶ τὸ τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$· λοιπὸν ηὔξησε τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ κατὰ τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$, καὶ οὕτως ἔγεινε προσδιόρισμα τοῦ τρίτου πολυόρου. Λοιπὸν *τοῦ τρίτου τὸ προσδιόρισμα κατὰ τὰς προειρημένας ὑποθέσεις εἶναι κεφάλαιον τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ἄλλων.*

β'. Ἂν δ' ἦναι τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ τὸ προσδιόρισμα ἀντιθετικόν, ἐνῷ ἡ διὰ τῆς ἀνωτέρω πράξεως αὔξησις τοῦ $-\beta-\delta$ κατὰ $-\nu-\xi$ αὐξάνει τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ κατὰ $-\nu-\xi$, ἡ αὔξησις τοῦ $\alpha+\gamma$ κατὰ $\mu+\pi$ ἐλαττοῖ αὐτὸ κατὰ $\mu+\pi$· ὥστε τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ μετεβλήθη κατὰ τὴν διαφορὰν τοῦ $\mu+\pi$ καὶ τοῦ $-\nu-\xi$, ἤτοι κατὰ τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$. Ἀλλὰ κατὰ τὰς ὑποθέσεις τὸ μὲν εἶναι θετικόν, τὸ δὲ ἀντιθετικόν· λοιπὸν τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ ἠλαττώθη κατὰ τὸ τοῦ $\mu-\nu-\xi+\pi$, καὶ οὕτως ἔγεινε προσδιόρισμα τοῦ τρίτου. Λοιπὸν *τὸ προσδιόρισμα τοῦ τρίτου κατὰ τὰς νέας ὑποθέσεις εἶναι διαφορὰ τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο ἄλλων*. Ο. Ε. Δ.

Ἂν δ' ἔπειτα τὸ $\mu-\nu-\xi+\pi$ γραφθῇ κατόπιν τοῦ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του, τοῦ προκύπτοντος τρίτου πολυόρου

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta-\mu+\nu+\xi-\pi$$

τὸ προσδιόρισμα εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὡς ἀνωτέρω ὅτι *εἶναι διαφορὰ μὲν τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πρώτων, ἂν τὸ προσδιόρισμα τοῦ* $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ *ἦναι θετικόν, κεφάλαιον δὲ αὐτῶν κατὰ την ἀντίθετον ὑπόθεσιν.*

25. Ἐκ τῶν προειρημένων γίνονται δῆλα τὰ τρία ταῦτα·

ά. *Ὅταν γράφηται ὡς ἔχει πολύορον κατόπιν ἄλλου, ὥστε νὰ προκύπτῃ τρίτον, ἢ προσθέτονται εἰς ἄλληλα τὰ προσδιορίσματά των, καὶ τοῦτο γίνεται ὅταν ἦναι ὁμοειδῆ, ἢ ἀφαιρεῖται τοῦ ἑτέρου τὸ προσδιόρισμα ἀπὸ τὸ τοῦ ἄλλου, ὅταν ἦναι ἀντίθετα.*

β'. *Ὅταν γράφηται πολύορον μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του κατόπιν ἄλλου, ὥστε νὰ προκύπτῃ τρίτον, γίνεται ἐπὶ τῶν προσδιορισμάτων των ἀντίθετος πρᾶξις τῆς γινομένης, ἂν ἤθελε γραφθῇ ὅπως εἶναι τὸ ἕτερον κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἤτοι ἀφαίρεσις ἀντὶ προσθέσεως καὶ τἀνάπαλιν.*

γ' *Ὅταν ἀμφοτέρων τῶν πολυόρων οἱ ὅροι ἦναι καὶ* *θετικοὶ καὶ ἀντιθετικοί, ὥστε ν' ἀποβαίνῃ ἄδηλον ἂν ἦναι θετικὰ ἢ ἀντιθετικὰ αὐτῶν τὰ προσδιορίσματα, τότε, ἐνῷ διὰ τῆς γραφῆς τοῦ ἑτέρου κατόπιν τοῦ ἄλλου γίνεται πρόσθεσις ἢ ἀφαίρεσις τῶν προσδιορισμάτων των, εἶναι ἄδηλον τίς τῶν δύο γίνεται.*

26. Ἐπειδὴ λοιπὸν δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἠξεύρωμεν ὡρισμένως ὅτι εἶναι θετικὰ ἢ ὅτι εἶναι ἀντιθετικὰ τὰ προσδιορίσματα τῶν πολυόρων, ἵνα ἐκ τούτων προσδιορίσωμεν τὴν πρόσθεσιν ἢ τὴν ἀφαίρεσίν των, ὡς ἐπὶ τῶν ὅρων, καὶ ἐπειδὴ εἴμεθα ἤδη βέβαιοι ὅτι, γραφομένου μὲν τινος πολυόρου ὅπως ἔχει κατόπιν ἄλλου, ἄλλο δὲν γίνεται εἰμὴ προσθέτονται ἢ ἀφαιροῦνται τὰ προσδιορίσματά των, γραφομένου δὲ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του, ἀντιστρόφως ἀφαιροῦνται ἢ προσθέτονται τὰ προσδιορίσματά των, διὰ ταῦτα διακρίνοντες μὲν τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν πολυόρων ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν προσδιορισμάτων των, ὡς διάφορα, ἐννοοῦντες δ' αὐτὰς πάντοτε ἀντιθέτους πράξεις, ὀνομάζομεν *πρόσθεσιν μὲν πολυόρων ἢ ἀλγεβρικὴν τὸ γράφειν πολύορον ὡς ἔχει κατόπιν ἄλλου, ἀφαίρεσιν δὲ πολυόρων ἢ ἀλγεβρικὴν τὸ γράφειν πολύορον μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του κατόπιν ἄλλου.* Τὸ δ' οὕτω προκύπτον τρίτον πολύορον λέγεται *κεφάλαιον* τῶν πολυόρων ἢ *διαφορὰ αὐτῶν, ἀλγεβρικά·* εἶναι δὲ ἑκάτερον αὐτῶν ἢ ἄθροισμα τῶν προσδιορισμάτων τῶν δύο πολυόρων ἢ διαφορά.

Σημ. Ἡ σημασία αὕτη τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως συνήθως ἐπεκτείνεται ἄνευ ἀνάγκης, ἀλλὰ διὰ τὸ γενικόν, καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων.

27. Σημειοῦται δὲ ἡ τῶν πολυόρων πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, ἀφοῦ *τεθῇ τὸ μέλλον νὰ προστεθῇ ἢ ν' ἀφαιρεθῇ ἐντὸς παρενθέσεως καὶ μὲ τὸ + πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, μὲ τὸ — δ' ἐπὶ τῆς ἀφαιρέσεως γραφθῇ κατόπιν τοῦ ἄλλου· οἷον γράφοντες*

$$α-β+(δ-ε+ζ) \text{ ἢ } α-β-(δ-ε+ζ)$$

σημειοῦμεν νὰ προστεθῇ τὸ $\delta-\varepsilon+\zeta$ εἰς τὸ $\alpha-\beta$ ἢ ν' ἀφαιρεθῇ, τουτέστι νὰ παραμεληθῶσιν αἱ παρενθέσεις καὶ τὸ πρὸ τῆς ἑτέρας σημεῖον, νὰ γραφθῇ δὲ τὸ ἐν αὐταῖς ὅπως ἔχει ἢ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του κατόπιν τοῦ ἄλλου.

Ὅταν σημειῶνται αἱ πράξεις, διακρίνεται τὸ ἕτερον πολύορον τοῦ ἄλλου καὶ δὲν εἶναι συγχωνευμένα εἰς τρίτον.

28. Πᾶν πολύορον δυνατὸν νὰ θεωρῆται κεφάλαιον ἢ διαφορὰ δύο ἄλλων πολυόρων ἢ πολυόρου καὶ ὅρου. Ἵνα δείξωμεν δὲ τοῦτο, γράφομεν ὅπως ἔχει ἢ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του ἐντὸς παρενθέσεων τὸ δεύτερον πολύορον καὶ μὲ τὸ $+$ ἢ μὲ τὸ $-$ πρὸ τῆς παρενθέσεως κατόπιν τοῦ πρώτου. Π. χ. ἂν ἐννοῶμεν τὸ

$$5\alpha^3\beta-4\alpha\beta^2\gamma-6\alpha^2\gamma^2+3\beta^2\gamma^2-9\gamma^4$$

κεφάλαιον ἢ διαφορὰν τοῦ $5\alpha^3\beta-4\alpha\beta^2\gamma$ καὶ τοῦ ἄλλου τριόρου, γράφομεν οὕτω

$$5\alpha^3\beta-4\alpha\beta^2\gamma+(-6\alpha^2\gamma^2+3\beta^2\gamma^2-9\gamma^4),$$

ἢ οὕτω $5\alpha^3\beta-4\alpha\beta^2\gamma-(6\alpha^2\gamma^2-3\beta^2\gamma^2+9\gamma^4)$, κτλ.

29. Εἶναι ὠφέλιμον νὰ μὴ παραβλέπωμεν τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς, ὅταν τύχῃ νὰ ἔχωσιν ὁμοίους ὅρους τὰ εἰς πρόσθεσιν ἢ εἰς ἀφαίρεσιν πολύορα. Τότε εἶναι προτιμότερον νὰ διατάσσωνται πρῶτον τὰ πολύορα πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα, καὶ ἔπειτα νὰ γράφηται τὸ ἕτερον ὑπὸ τὸ ἄλλο καὶ ὄχι κατόπιν, ἐπὶ μὲν προσθέσεως ὅπως ἔχει, ἐπὶ δὲ ἀφαιρέσεως τὸ μέλλον ν' ἀφαιρεθῇ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του.

Πολύορα εἰς πρόσθεσιν καὶ εἰς ἀφαίρεσιν.

$$\begin{array}{r}
8\alpha^2-\tfrac{3}{2}\alpha\beta-2\beta^2-\tfrac{3}{4}\\
-\alpha^2+\tfrac{1}{4}\alpha\beta+7\gamma^2+2\\
\alpha\beta+2\beta^2+4\gamma^2+\tfrac{1}{2}\\
\hline
7\alpha^2-\tfrac{1}{4}\alpha\beta+11\gamma^2+\tfrac{7}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
9\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2+\tfrac{1}{2}\beta\gamma\\
5\alpha^2+4\alpha\beta-3\beta^2-\tfrac{1}{4}\beta\gamma\\
\hline
9\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2+\tfrac{1}{2}\beta\gamma\\
-5\alpha^2-4\alpha\beta+3\beta^2+\tfrac{1}{4}\beta\gamma\\
\hline
4\alpha^2-7\alpha\beta+5\beta^2+\tfrac{3}{4}\beta\gamma
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5a+4\beta+8-3\gamma-7\delta \\ 7\gamma+3a-10\delta-4-12\beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12a-3\delta+9\gamma-\beta \\ 9\gamma-5\beta+7a+12-10\delta \\ \hline \end{array}$$

$$12\beta-3\gamma-7\mu+3\nu+(8\gamma+5\theta-9\nu-3\beta-2\mu)$$

$$-8a+5\beta-3\gamma-(-2\gamma+7a-3\beta)$$

$$\begin{array}{l} 4a^3-9\beta^3+7a\beta^2-6a^2\beta \\ -3a^3+4a^2\beta-4\beta^3-2a\beta^2 \\ 10\beta^3-10a^2\beta+6a^3+8a\beta^2 \\ 5a\beta^2-3a^3-8\beta^3-8a^2\beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15a^4+17a^2\beta^2-18a^3\beta+11a\beta^3 \\ 13a^3\beta+20a\beta^3-19a^2\beta^2+7a^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10^4+2.8^3+9.7^2+12.6 \\ 3.10^4-8.8^3-5.7^2+15.6 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5a^4+3a^2\beta^2\gamma-7a\beta^4 \\ -6a^4+2a^2\beta^2\gamma-17a\beta^4 \\ +9a^4-8a^2\beta^2\gamma-10a\beta^4 \\ +3a^4-5a^2\beta^2\gamma-7a\beta^4 \\ \hline \end{array}$$

$$5a^3-4a\beta^2+8\beta^3-3a^2\beta-(\beta^3-5a^2\beta+2a^3-6a\beta^2).$$

Περὶ ἀλγεβρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

30. Εἴδομεν ἐν τῷ Συμπληρώματι πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀντιθετικῶν καὶ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν καὶ πῶς προσδιορίζεται ἐκ τῶν σημείων + ἢ — τῶν παραγόντων τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου, ἔτι δὲ καὶ τὸ διατί· ἐκ τοῦ αὐτοῦ δὲ εἶναι ἤδη γνωστὸν προσέτι καὶ πῶς σημειοῦται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ αὐτῶν καὶ τῶν μονογραμμάτων ὅρων, καὶ ὅτι ὁ συνεργός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός, εἶναι παράγων, καὶ μάλιστα πολλαπλασιαστής, ἂν καὶ γράφεται ἀριστερὰ ὅλων τῶν παραγόντων, καὶ τελευταῖον ὅτι ἐνίοτε ἐκτελεῖται ἓν μέρος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἤτοι εὑρίσκεται τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου καὶ παραλείπονται τὰ σημεῖα τῶν παραγόντων (ἰδὲ καὶ ἐν ἀρ. 12) καὶ τἀνάπαλιν. Ἐνταῦθα δὲ θέλομεν ἐπαναλάβει τελειότερα τὰ περὶ σημειώσεως καὶ ἐκτελέσεως πολλαπλασιασμοῦ πολυγραμμάτων ἀκεραίων ὅρων καὶ πολυνόμων.

31. Πρὸς σημείωσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ὁποιωνδήποτε (12) πολυγραμμάτων ὅρων ἀνάγκη πάντοτε νὰ θέτωμεν μεταξύ των ἢ τὸ $\times$ ἢ τὴν στιγμὴν, οὕτω $3a^4\beta^3\gamma\times5a^2\beta\delta$ ἢ οὕτω $3a^4\beta^3\gamma.5a^2\beta\delta$, ἵνα διακρίνηται καθαρὰ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ ἄλλου.

Πρὸς ἐκτέλεσιν δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀκεραίων ὅρων ἄνευ ῥιζικοῦ ἀπαιτεῖται νὰ ἐνθυμώμεθα

α'. *ὅτι, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων, δύναται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος πρῶτον ἐπὶ ἕνα τινὰ τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ γινόμενον ἐπὶ ἄλλον τινὰ, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ ἄλλον καὶ οὕτω καθεξῆς.*

β'. *ὅτι, ὁποιανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ παράγοντες ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, τὸ γινόμενον ὅλων εἶναι πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμός.*

γ'. *ὅτι τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἄλλη δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ δείκτην ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δεικτῶν τῶν δύο δυνάμεων*, οἷον

$$a^3\times a^2=a^5.$$

Διότι τὸ μὲν $a^3=aaa$, τὸ δὲ $a^2=aa$, ὥστε $a^3\times a^2=aaa\times aa$· κατὰ δὲ τὴν πρώτην μνημονευθεῖσαν ἀρχὴν ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν ἔχομεν $aaaaa$, τὸ ὁποῖον συντόμως εἶναι a^5· λοιπὸν $a^3\times a^2=a^5$.

Οὕτω δ' ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι $\beta^4\times\beta^3=\beta^7$, $\gamma^2\times\gamma=\gamma^3$, κτλ.

32. Κατὰ ταύτας λοιπὸν τὰς ἀρχὰς εὑρίσκομεν πάντοτε ἕνα ὅρον παριστάνοντα τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, οἷον τοῦ $3a^4\beta^3\gamma$ καὶ τοῦ $5a^2\beta\delta$. Δηλαδὴ, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων, κατὰ τὴν πρώτην ἀρχὴν ἔχομεν $3a^4\beta^3\gamma\cdot5$, ἔπειτα $3a^4\beta^3\gamma\cdot5a^2$, ἀκολούθως $3a^4\beta^3\gamma\cdot5a^2\beta$, καὶ τελευταῖον $3a^4\beta^3\gamma\cdot5a^2\beta\delta$· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $3a^4\beta^3\gamma\cdot5a^2\beta\delta=3\times5a^4a^2\beta^3\beta\gamma\delta$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν τρίτην $a^4a^2=a^6$, $\beta^3\beta=\beta^4$, τὸ δὲ $3\times5=15$, ἔχομεν ἁπλούστερα $3\times5a^4a^2\beta^3\beta\gamma\delta=15a^6\beta^4\gamma\delta$.

Λοιπὸν $3\alpha^4\beta^3\gamma\times5\alpha^2\beta\delta=15\alpha^6\beta^4\gamma\delta$.

Ὡσαύτως βεβαιούμεθα ὅτι

$5\alpha\beta\gamma\delta\times4\varepsilon\zeta\eta=20\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$, $9\alpha^3\beta\gamma^4\times6\alpha^5\gamma^3\delta^2\varepsilon=54\alpha^8\beta\gamma^7\delta^2\varepsilon$.

Ἐκ τούτων λοιπὸν πληροφορεῖταί τις ὅτι *τὸ γινόμενον δύο τοιούτων πολυγραμμάτων ὅρων εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάζωνται οἱ συνεργοί των, ἔπειτα δεξιὰ τοῦ γινομένου θέτωνται τὰ μὲν κοινὰ εἰς τοὺς δύο ὅρους γράμματα ἅπαξ μὲ δείκτην ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δεικτῶν τῶν παραγόντων, τὰ δὲ μὴ κοινὰ ὅπως εἶναι ἐν τοῖς πολλαπλασιαζομένοις ὅροις.*

Κατὰ τοῦτον λοιπὸν τὸν κανόνα καὶ τὸν περὶ τῶν σημείων πολλαπλασιάζονται ὄχι μόνον δύο ὅροι, ἀλλὰ καὶ τρεῖς καὶ πλειότεροι. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι τὸ προσδιόρισμα τοῦ οὕτως εὑρισκομένου γινομένου εἶναι γινόμενον τῶν προσδιορισμάτων τῶν παραγόντων του· γίνεται δὲ φανερὸν καὶ ἂν μερικοποιηθῶσι τὰ γράμματα, οἷον $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$, $\delta=6$, ἐν τῷ $3\alpha^4\beta^3\gamma\times5\alpha^2\beta\delta=15\alpha^6\beta^4\gamma\delta$ καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις. Οὕτως ἔχομεν $3\alpha^4\beta^3\gamma=77760$, $5\alpha^2\beta\delta=1080$, $15\alpha^6\beta^4\gamma\delta=83980800$, τὸ δὲ

$$77760\times1080=83980800.$$

33. Ἀντιστρόφως ὁ ὅρος $15\alpha^6\beta^4\gamma\delta$, ὅστις εἶναι γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, ὡς φαίνεται, δύναται νὰ θεωρῆται γινόμενον δύο μόνον ὅρων, ἀλλὰ τότε μεταξὺ αὐτῶν πρέπει νὰ τίθηται τὸ $\times$ ἢ ἡ στιγμή. Π. χ. δύναταὶ νὰ θεωρηθῇ γινόμενον τοῦ $15\alpha^6\beta^4$ καὶ τοῦ $\gamma\delta$, ἢ τοῦ $-15\alpha^6\gamma$ καὶ τοῦ $-\beta^4\delta$, ἢ τοῦ $3\alpha^3\beta^2\delta$ καὶ τοῦ $5\alpha^3\beta\gamma$, ἢ ὅπως ἄλλως θελήσῃ τις, καὶ τότε γράφεται

$$15\alpha^6\beta^4\gamma\delta=15\alpha^6\beta^4\times\gamma\delta=-15\alpha^6\gamma\times-\beta^4\delta=3\alpha^3\beta^2\delta\times5\alpha^3\beta^3\gamma.$$

Τὸ αὐτὸ δ' ἐννοεῖται καὶ περὶ παντὸς ἄλλου ὅρου, καὶ ὅτι δύναται οὗτος νὰ θεωρῆται καὶ γινόμενον τριῶν ὅρων, κτλ.

Ἐκτελεστέοι πολλαπλασιασμοὶ πρὸς γύμνασιν.

$3\alpha\times-5\beta$, $-7\alpha\times6\alpha\beta$, $-12\alpha^3\beta\times-7\alpha^2\beta\gamma^2$,

$-5\alpha\beta\gamma\times8\alpha\beta\delta$, $14\alpha^3\beta\gamma\times-8\alpha\beta^3\gamma$, $7\alpha\beta\times-8\alpha^2\times7\beta\gamma$.

34. Σημειοῦται ὁ πολλαπλασιασμὸς πολυόρου ἐπὶ ὅρον, ἐὰν τίθηται τὸ *πολύορον ἐντὸς παρενθέσεων καμπύλων ἢ ἐγγωνίων καὶ κατόπιν αὐτοῦ γράφηται ὁ ὅρος, τιθεμένου ἢ μὴ τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*, οἷον $(α+β-γ)\times μ$, $[α+β-γ]\times μ$, $(α+β-γ)μ$· οὕτω διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων οἱ δύο παράγοντες.

Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς πολυόρου μὲ ὅλους τοὺς ὅρους του θετικοὺς ἢ μὲ ὅλους ἀντιθετικοὺς ἐπὶ ὅρον θετικόν, οἷον τοῦ $α+β$ ἢ τοῦ $-α-β$ ἐπὶ $μ$, πρέπει νὰ γίνηται, *ἐὰν πολλαπλασιάζηται ἕκαστος ὅρος τοῦ πολυόρου ἐπὶ τὸν ὅρον κατὰ τὸν ἐν ἀρ. 32 κανόνα, καὶ γράφωνται τὰ μερικὰ γινόμενα ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*. Διότι ἑκάτερον εἶναι κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν, ὅπως εἶναι π. χ. ὁ διψήφιος 49 κεφάλαιον τοῦ 40 καὶ τοῦ 9· καὶ δῆλον ὅτι, ὅπως πολλαπλασιάζεται ὁ 49 ἐπὶ 8, οὕτω πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται καὶ ὁ $α+β$ ἢ ὁ $-α-β$ ἐπὶ $μ$. Ἀρχίζουσιν ὅμως ἐδῶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐξ ἀριστερῶν ὡς εὐκολώτερον, μὴ ὑπαρχούσης τῆς αἰτίας ν' ἀρχίζωσιν ἐκ δεξιῶν. Λοιπὸν $(α+β)μ=αμ+βμ$, καὶ $(-α-β)μ=-αμ-βμ$. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ τρίορον $δ+ε+ζ$ ἐπὶ $κ$, καὶ ὁποιονδήποτε ἄλλο πολύορον.

Ὡσαύτως δὲ τὸ $α+β$ ἢ τὸ $-α-β$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ ἐπὶ τὸν ἀντιθετικὸν ὅρον $-μ$, καὶ τότε τὰ μερικὰ γινόμενα θέλουσιν εἶσθαι ἀντίθετα τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου, δηλ. $(α+β)\times -μ=-αμ-βμ$, καὶ $(-α-β)\times -μ=αμ+βμ$.

35. Ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ τὸ δίορον $α-β$, τὸ ὁποῖον παριστάνει διαφοράν, ἐπὶ $μ$.

Σημειοῦντες τὴν διαφορὰν ταύτην καὶ διὰ $δ$, ἥτις εἶναι $+δ$, ἂν $α>β$, ἢ $-δ$, ἂν $β>α$, καὶ ἑπομένως $α=β+δ$, ἢ $-β=-α-δ$, παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ $α$ ἐπὶ $μ$, πολλαπλασιάζεται οὕτως ἐπὶ $μ$ ὄχι μόνον ἡ διαφορὰ $δ$, ἀλλὰ καὶ ὁ ὅρος $β$, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον $αμ$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀληθοῦς $δμ$

κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἄλλου ὅρου ἐπὶ μ ἤτοι κατὰ τὸ $\beta\mu$. Ἂν λοιπὸν κατόπιν τοῦ $\alpha\mu$ γραφθῇ τὸ $-\beta\mu$, ἐλαττοῦται τὸ $\alpha\mu$ κατὰ $\beta\mu$, καὶ τὸ $\alpha\mu-\beta\mu$ παριστάνει τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ ἐπὶ μ. Λοιπὸν

$$(\alpha-\beta)\mu=\alpha\mu-\beta\mu.$$

Κατὰ δὲ τὴν περίπτωσιν $\beta>\alpha$, ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ $-\beta$ ἐπὶ μ, πολλαπλασιάζεται οὕτως ἐπὶ μ ὄχι μόνον ἡ διαφορὰ $-\delta$, ἀλλὰ καὶ ὁ ὅρος $-\alpha$, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον $-\beta\mu$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀληθοῦς $-\delta\mu$ κατὰ τὸ γινόμενον $-\alpha\mu$. Ἂν λοιπὸν κατόπιν ἢ πρὸ τοῦ $-\beta\mu$ γραφθῇ τὸ $+\alpha\mu$, τὸ προκύπτον $\alpha\mu-\beta\mu$ παριστάνει τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ ἐπὶ μ. Λοιπὸν

$$(\alpha-\beta)\mu=\alpha\mu-\beta\mu.$$

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι καὶ ἐνταῦθα *πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ἕκαστος ὅρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ὅρον κατὰ τὸν περὶ ὅρων κανόνα, καὶ νὰ γράφωνται τὰ μερικὰ γινόμενα κατὰ σειρὰν ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

Ἐννοεῖται δὲ ὅτι κατὰ τὸν αὐτὸν τοῦτον τρόπον πρέπει νὰ εὑρίσκηται τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta$ καὶ ἐπὶ $-\mu$, δηλ.

$$(\alpha-\beta)\times-\mu=-\alpha\mu+\beta\mu.$$

Ἐνθυμούμενοι δὲ ὅτι πολυόρου ὁποιουδήποτε μὲ θετικοὺς καὶ ἀντιθετικοὺς ὅρους τὸ προσδιόρισμα εἶναι διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων του, καταλαμβάνομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται αὐτὸ ἐπὶ μ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἑκάτερον ἄθροισμα ἐπὶ μ καὶ γραφθῶσι τὰ γινόμενα κατὰ σειρὰν ὅπως εὑρίσκονται. Ἀλλ' ἐπειδὴ πολλαπλασιάζεται ἑκάτερον ἄθροισμα ἐπὶ μ, ἐὰν πολλαπλασιάζηται ἕκαστος ὅρος αὐτοῦ ἐπὶ μ κτλ, διὰ ταῦτα πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται καὶ ταῦτα τὰ πολύορα ὡς καὶ τὰ προηγούμενα. Λοιπὸν γενικῶς

Ὁποιονδήποτε πολύορον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ὅρον, ἐὰν ἐξ ἀριστερῶν πολλαπλασιάζηται εἷς ἕκαστος ὅρος τοῦ πολυόρου ἐπὶ τὸν ὅρον κατὰ τὸν περὶ ὅρων κανόνα, καὶ γράφωνται κατὰ σειρὰν τὰ μερικὰ γινόμενα ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα εἶναι ὁμοειδῆ μὲν μὲ τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ὅρος ἦναι θετικός, ἀντίθετα δὲ αὐτῶν, ὅταν ἦναι ἀντιθετικός.

36. Ἐκ τούτου τοῦ κανόνος γίνεται δῆλον ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς ὅρος εἶναι κοινὸς παράγων ὅλων τῶν ὅρων τοῦ γινομένου. Λοιπὸν δυνάμεθα καὶ ἀντιστρόφως νὰ θεωρῶμεν *πᾶν πολύορον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι ἔχουσι κοινόν τινα παράγοντα, γινόμενον τοῦ κοινοῦ παράγοντος καὶ τοῦ μένοντος πολυόρου, ἀφοῦ ἐξαλειφθῇ ὁ κοινὸς παράγων.* Π. χ. τὸ $3a^2\beta-6a\beta^2+9\beta^3$, τοῦ ὁποίου ὁ 3 καὶ ὁ β εἶναι κοινοὶ παράγοντες ὅλων τῶν ὅρων, δύναται νὰ θεωρηθῇ γινόμενον τοῦ 3β καὶ τοῦ μένοντος $a^2-2a\beta+3\beta^2$, ἀφοῦ ἐξηλείφθη ὁ 3β, ἢ τοῦ $-a^2+2a\beta-3\beta^2$ καὶ τοῦ -3β, ἂν ἐκληφθῇ ὁ κοινὸς παράγων ἀντιθετικός· ἂν δὲ τεθῇ τὸ πολύορον ἐντὸς παρενθέσεων καὶ κατόπιν του ὁ ὅρος, ἔχομεν

$$3a^2\beta-6a\beta^2+9\beta^3=(a^2-2a\beta+3\beta^2)\times 3\beta,$$
$$\text{ἢ}=(-a^2+2a\beta-3\beta^2)\times -3\beta,\ \text{ἢ}=-3\beta(-a^2+2a\beta-3\beta^2).$$

Τοῦτο ὀνομάζομεν *ἀναγωγὴν τοῦ πολυόρου εἰς παράγοντας*. Τοιαῦται δ' ἀναγωγαὶ εἶναι χρησιμώταται ἐν τοῖς ἑξῆς καὶ ἀπαιτοῦσι νὰ γυμνάζωνται οἱ ἀρχάριοι.

Παραδείγματα πρὸς γύμνασιν.

$(6a+2\beta-8\gamma)7a$, $(-5a^2+3a\beta-8\beta^2)\times -9a\beta$,

$(5a\beta+3a\gamma-4\beta\gamma-6\delta^2)8a\beta$, $(5a^3\beta+6a\beta^2)9\gamma^3\delta$

$(5a^3\beta^3\gamma-6a^4\beta^2\gamma^5+7a^8\beta^5\gamma^6)\times -4a^2\beta^3\gamma$

$7a^2\beta-12a\beta^3$, $8a^3+7a\beta^2$, $5a^2\beta^2-15\beta^4-20a\beta^3$,

$4a^3\beta\chi+2a\beta^2\chi-2\beta^3\chi$, $4a^4+3a^3\beta-12a^2\beta^2$.

37. Ἵνα σημειωθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πολυόρων, τίθενται πάντοτε καὶ τὰ δύο ἐντὸς παρενθέσεων καὶ τὸ ἕτερον κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὴν . ἢ τὸ $\times$ μεταξὺ ἢ ἄνευ τινὸς σημείου, οἷον

$(\alpha-\beta)\times(\gamma-\delta+\varepsilon)$, ἢ $(\alpha-\beta).(\gamma-\delta+\varepsilon)$, ἢ $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta+\varepsilon)$.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ δὲ τὸ πολύορον $\alpha-\beta+\gamma$ ἢ ἐπὶ $\mu+\nu+\pi$ ἢ ἐπὶ $-\mu-\nu-\pi$, ἢ ἐπὶ $\mu-\nu$. Ἐπειδὴ ἑκάτερον τῶν πρώτων εἶναι κεφάλαιον τῶν τριῶν ὅρων του, ὡς π. χ. ὁ 472 εἶναι κεφάλαιον τοῦ 400, τοῦ 70 καὶ τοῦ 2, δῆλον ὅτι τὸ $\alpha-\beta+\gamma$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἑκάτερον, ὡς πολυψήφιος ἀριθμὸς ἐπὶ 472, δηλ. πρέπει ἕκαστος ὅρος τοῦ πολλαπλασιαστέου πολυόρου νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον ἑκατέρου πολλαπλασιαστοῦ πολυόρου ὡς ἤδη εἴρηται, καὶ τὰ τρία μερικὰ γινόμενα νὰ προστεθῶσιν, ἤτοι νὰ γραφθῶσι κατόπιν τὸ ἓν τοῦ ἄλλου ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτως εὑρίσκεται $(\alpha-\beta+\gamma)(\mu+\nu+\pi)=$

$$\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu+\alpha\nu-\beta\nu+\gamma\nu+\alpha\pi-\beta\pi+\gamma\pi.$$

καὶ $(\alpha-\beta+\gamma)(-\mu-\nu-\pi)=$

$$-\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu-\alpha\pi+\beta\pi-\gamma\pi.$$

Ὁ δὲ τρίτος πολλαπλασιαστὴς $\mu-\nu$ παριστάνει τὴν διαφορὰν τοῦ μ καὶ τοῦ ν, ἥτις σημειουμένη διὰ δ θέλει εἶσθαι $+\delta$, ἂν $\mu>\nu$, ἢ $-\delta$, ἂν $\nu>\mu$, καὶ ἑπομένως $\mu=\nu+\delta$, ἢ $-\nu=-\mu-\delta$.

Ἂν λοιπὸν κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ πολύορον $\alpha-\beta+\gamma$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ μ, τὸ προκύπτον γινόμενον $\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἐπὶ ν, ἤτοι τὸ $\alpha\nu-\beta\nu+\gamma\nu$. Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου μετὰ τὸν ἐπὶ μ πολλαπλασιασμὸν τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἀνάγκη νὰ γραφθῇ κατόπιν τοῦ γινομένου των τὸ γινόμενον τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ ν μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του, ἤτοι τὸ $-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu$, τὸ ὁποῖον εἶναι γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἐπὶ $-\nu$, καὶ ἔχομεν

$$(\alpha-\beta+\gamma)(\mu-\nu)=\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu.$$

Ἂν δὲ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ $\alpha-\beta+\gamma$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $-\nu$, τὸ προκύπτον γινόμενον $-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἐπὶ $-\mu$, ἤτοι κατὰ τὸ $-\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu$. Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου μετὰ τὸν ἐπὶ $-\nu$ πολλαπλασιασμὸν τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἀνάγκη νὰ γραφθῇ κατόπιν ἢ πρὸ τοῦ γινομένου των τὸ γινόμενον τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ $-\mu$ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του, ἤτοι τὸ $\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu$, τὸ ὁποῖον εἶναι γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta+\gamma$ ἐπὶ μ, καὶ ἔχομεν

$$(\alpha-\beta+\gamma)(\mu-\nu)=\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu-\alpha\nu+\beta\nu-\gamma\nu.$$

Ἐκ τούτων δὲ δῆλον ὅτι τὸ $\alpha-\beta+\gamma$ καὶ ἐπὶ $\mu-\nu$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ὡς καὶ ἐπὶ τὰ προηγούμενα πολύορα $\mu+\nu+\pi$ καὶ $-\mu-\nu-\pi$, δηλ. νὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον τοῦ $\mu-\nu$, καὶ νὰ γράφωνται τὰ μερικὰ γινόμενα κατόπιν ἀλλήλων ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐνθυμούμενοι δὲ τώρα ὅτι τὸ $\mu-\nu$ παριστάνει πᾶν πολύορον μὲ θετικοὺς καὶ ἀντιθετικοὺς ὅρους, ἐὰν νοηθῇ ὅτι τὸ μὲν μ εἶναι κεφάλαιον ὅλων τῶν θετικῶν ὅρων αὐτοῦ, τὸ δὲ $-\nu$ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων του, καταλαμβάνομεν ὅτι τὸ $\alpha-\beta+\gamma$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ πολυόρου κτλ. Γενικῶς λοιπὸν

Ἵνα πᾶν πολύορον πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ὁποιονδήποτε ἄλλο, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ἐξ ἀριστερῶν κατὰ σειρὰν εἷς ἕκαστος ὅρος τοῦ πρώτου ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον τοῦ δευτέρου κατὰ τὸν περὶ ὅρων κανόνα, καὶ νὰ γράφωνται τὰ μερικὰ γινόμενα κατόπιν ἀλλήλων ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅλα δὲ τὰ προειρημένα πείθουσιν ὅτι ὁ κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον καὶ τὸν τοῦ ἀρ. 35 πολλαπλασιασμὸς τῶν πολυόρων εἶναι κυρίως πολλαπλασιασμὸς τῶν προσδιορισμάτων αὐτῶν.

Πολλάκις εἶναι ὠφελιμώτατον νὰ διατάττωνται πρῶτον τὰ πολύορα πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα, ἐὰν ἔχωσι κοινόν τι, καὶ ἐπὶ τῶν διατεταγμένων νὰ ἐκτελῆται ὁ πολλαπλασιασμός· τὰ δ' ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ γινόμενα νὰ γράφωνται τότε ὑπ' ἄλληλα ὡς εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα, διότι οὕτως εὐκολύνεται ἡ τῶν ὁμοίων ὅρων συστολή.

$$
\begin{array}{l}
4a^3-5a^2\beta-8a\beta^2+\frac{2}{3}\beta^3 \\
2a^2-3a\beta-4\beta^2 \\
\hline
8a^5-10a^4\beta-16a^3\beta^2+\frac{4}{3}a^2\beta^3 \\
\qquad -12a^4\beta+15a^3\beta^2+24a^2\beta^3-2a\beta^4 \\
\qquad\qquad -16a^3\beta^2+20a^2\beta^3+32a\beta^4-\frac{8}{3}\beta^5 \\
\hline
8a^5-22a^4\beta-17a^3\beta^2+\frac{136}{3}a^2\beta^3+30a\beta^4-\frac{8}{3}\beta^5
\end{array}
$$

38. Παρατηρητέον δὲ ὅτι ὁ $8a^5$ καὶ ὁ $-\frac{8}{3}\beta^5$ ἀδύνατον ἦτον νὰ ἔχωσιν ἄλλους ὅρους ὁμοίους των, ἐνῷ ἄλλοι ὅροι εἶναι ὅμοιοι· διότι ἑκάτερος, ὡς γινόμενον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τῶν ἐχόντων τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a ἢ τοῦ β, ἔχει καὶ αὐτὸς τὴν ἀνωτάτην δύναμιν ὁ μὲν τοῦ a, ὁ δὲ τοῦ β, ἐνῷ οὐδὲν ἄλλο γινόμενον ὅρων ἠδύνατο νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν. Δυνατοῦ λοιπὸν ὄντος νὰ ἦναι οἱ ἄλλοι ὅροι τοῦ γινομένου ἐξαγόμενα τῆς ὁμοίων ὅρων συστολῆς, ὁ ἔχων τὴν ἀνωτάτην δύναμιν γράμματός τινος ἀνάγκη νὰ ἦναι γινόμενον τοῦ ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐκείνων, οἵτινες ἔχουσι τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Ἐκτελεστέοι πολλαπλασιασμοὶ πρὸς ἄσκησιν.

$(2a-3\beta-8\gamma-\theta+9\varepsilon)(7\zeta+2\eta-\theta)$ $\quad(a-\beta)(a-\beta)$

$(5a\beta+3a\gamma-4\beta\gamma)(7a\beta-18a\gamma+2\beta\gamma+\theta)$ $\quad(a+\beta)(a+\beta)$

$(\chi^3-3\chi-7)(\chi-2)$, $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)$ $\quad(a+\beta)(a-\beta)$

$(a^4-2a^3\beta+4a^2\beta^2-8a\beta^3+16\beta^4)(a+2\beta)$

$$
\begin{array}{l}
a^5+a\beta^4+10a^3\beta^2-\beta^5-10a^2\beta^3-5a^4\beta \\
3a\beta^2-\beta^3+4a^3-3a^2\beta \\
\hline
\end{array}
$$

$5a^3\beta^3\gamma^2 - 6a^4\beta^2\gamma^5 + 7a^3\beta^5\gamma^6$
$2a^3\beta^3\gamma^2 + 3a^4\beta^2\gamma^5 - 6a^7\beta^4\gamma^2$

$(2\chi^2 + a\chi - a^2)(\chi^2 + 2a\chi - a^2) - (\chi^2 + 3a\chi - 2a^2)(\chi^2 - a^2)$

39. Ἐὰν διὰ a καὶ διὰ β σημειωθῇ ὁποιοσδήποτε ὅρος ἢ καὶ πολύορον, $a+\beta$ ἢ $a-\beta$ εἶναι δίορον ὁποιονδήποτε ἢ καὶ πολύορον παριστάνον τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων ὅρων ἢ πολυόρων. Κατὰ δὲ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν

$$(a+\beta)(a+\beta) = (a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2,$$
$$(a-\beta)(a-\beta) = (a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2,$$
$$(a+\beta)(a-\beta) = a^2 - \beta^2.$$

Ταῦτα δὲ τὰ ἐξαγόμενα εἶναι χρησιμώτατα ἐν τοῖς ἑξῆς, διότι δι' αὐτῶν πολλάκις συντέμνονται οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ ἀνάγονται τὰ γινόμενα εἰς τοὺς παράγοντάς των.

Ἐὰν π. χ. ἐπρόκειτο νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δίορον $3a^3\gamma^2 + 4a\gamma^3$ ἐφ' ἑαυτό, ἤτοι νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνόν του, δὲν θέλει πολλαπλασιασθῆ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, ἀλλ' ἁπλούστερα κατὰ τὸ πρῶτον ἐξαγόμενον θέλει κατασκευασθῆ τὸ τετράγωνον τοῦ $3a^3\gamma^2$, τὸ διπλάσιον γινόμενον τοῦ $3a^3\gamma^2$ καὶ τοῦ $4a\gamma^3$, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $4a\gamma^3$ (Συμ. ἀρ. 77), θετικὰ δὲ θέλουσι γραφθῆ ἅμα εὑρισκόμενα κατὰ σειράν· οὕτως ἔχομεν

$$(3a^3\gamma^2 + 4a\gamma^3)^2 = 9a^6\gamma^4 + 24a^4\gamma^5 + 16a^2\gamma^6.$$

Ὡσαύτως θέλει εὑρεθῆ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $5a^2 - 6\delta^3$ κατὰ τὸ δεύτερον ἐξαγόμενον

$$(5a^2 - 6\delta^3)^2 = 25a^4 - 60a^2\delta^3 + 36\delta^6.$$

Ὡσαύτως τῶν δύο διόρων $4a^2 + 3\gamma$ καὶ $4a^2 - 3\gamma$, ἤτοι τοῦ ἀθροίσματος δύο ὅρων καὶ τῆς διαφορᾶς των τὸ γινόμενον θέλει εὑρεθῆ κατὰ τὸ τρίτον ἐξαγόμενον, ἤγουν θέλει κατασκευασθῆ τὸ τετράγωνον τοῦ $4a^2$ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 3γ, τοῦτο δ' ἀντιθετικὸν θέλει γραφθῆ κατόπιν τοῦ πρώτου, ἤτοι

$$(4a^2 + 3\gamma)(4a^2 - 3\gamma) = 16a^4 - 9\gamma^2.$$

Ἐνίοτε δὲ εἶναι εὔχρηστα καὶ τὰ τρία ἢ τὰ δύο μόνον πρὸς συντομίαν τῶν ὑπολογισμῶν.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ τὸ $5\alpha^2-4\alpha\delta+3\delta^2$ ἐπὶ $5\alpha^2-4\alpha\delta-3\delta^2$. Παρατηροῦντες ὅτι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι καὶ τῶν δύο εἶναι οἱ αὐτοί, ὁ δὲ τρίτος μόνον κατὰ τὸ σημεῖον διαφέρει, δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὸ μὲν ὡς κεφάλαιον τοῦ $5\alpha^2-4\alpha\delta$ καὶ τοῦ $+3\delta^2$, τὸ δὲ ὡς διαφορὰν τῶν αὐτῶν. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τοῦ γινομένου των κατασκευάζεται τὸ τετράγωνον τοῦ $5\alpha^2-4\alpha\delta$ κατὰ τὸ δεύτερον ἐξαγόμενον, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $3\delta^2$ κατασκευασθὲν γράφεται κατόπιν ἀντιθετικόν· λοιπὸν

$$(5\alpha^2-4\alpha\delta+3\delta^2)(5\alpha^2-4\alpha\delta-3\delta^2)$$
$$=25\alpha^4-40\alpha^3\delta+16\alpha^2\delta^2-9\delta^4.$$

Καὶ τῶν πολυόρων δὲ

$3\alpha^3\gamma+2\alpha^2\gamma^2+\alpha\gamma^3-\gamma^4$ καὶ $3\alpha^3\gamma+2\alpha^2\gamma^2-\alpha\gamma^3+\gamma^4$,

ὧν τὸ μὲν εἶναι κεφάλαιον τῶν διόρων $3\alpha^3\gamma+2\alpha^2\gamma^2$ καὶ $\alpha\gamma^3-\gamma^4$, τὸ δὲ διαφορὰ τῶν αὐτῶν, τὸ γινόμενον θέλει εὑρεθῆ κατὰ τὰ τρία προηγούμενα ἐξαγόμενα πολὺ συντομώτερα παρὰ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα.

40. Ἀντιστρόφως, ἀνάγονται τρίορα καὶ δίορα εἰς τοὺς παράγοντάς των κατὰ τὰ αὐτά, ὅταν τῶν μὲν τριόρων δύο ὅροι ἦναι τετράγωνοι, ὁ δὲ τρίτος, θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς ὤν, ἦναι διπλάσιος τοῦ γινομένου τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν δύο τετραγώνων ὅρων, τὰ δὲ δίορα ἦναι διαφορὰ δύο τετραγώνων· διότι τότε δῆλον ὅτι τοιοῦτον μὲν τρίορον εἶναι ἢ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν τετραγώνων ὅρων ἢ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, τοιοῦτον δὲ δίορον εἶναι γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν δύο ὅρων ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν. Π. χ.

$9\alpha^2+12\alpha\varepsilon^2+4\varepsilon^4=(3\alpha+2\varepsilon^2)^2=(3\alpha+2\varepsilon^2)(3\alpha+2\varepsilon^2)$.

$16\chi^4-24\chi^2\omega^3+9\omega^6=(4\chi^2-3\omega^3)^2=(4\chi^2-3\omega^3)(4\chi^2-3\omega^3)$.

$64\alpha^2\zeta^4-36\alpha^4\gamma^2=(8\alpha\zeta^2+6\alpha^2\gamma)(8\alpha\zeta^2-6\alpha^2\gamma)$.

$\alpha^2-1=(\alpha+1)(\alpha-1)$, διότι ἡ 1 εἶναι καὶ τετράγωνον ἑαυτῆς.

$\alpha^4-\chi^2=(\alpha^2+\chi)(\alpha^2-\chi)$

$$\chi^2+2\chi+1=(\chi+1)^2=(\chi+1)(\chi+1)$$
$$\beta^2-2\beta+1=(\beta-1)^2=(\beta-1)(\beta-1)$$
$$2\omega^2-8\chi^2=2(\omega^2-4\chi^2)=2(\omega+2\chi)(\omega-2\chi)$$
$$3a^3\chi^3-12a\chi^3=3a\chi^3(a^2-4)=3a\chi^3(a+2)(a-2).$$

Περὶ ἀλγεβρικῆς διαιρέσεως.

41. Ἐπειδὴ ἐν τῷ Συμπληρώματι ἐξηγήθη πῶς διαιροῦνται ἀντιθετικοὶ καὶ ἀντίθετοι ἀριθμοί, πῶς ἐκ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου προσδιορίζεται καὶ τοῦ πηλίκου τὸ σημεῖον καὶ διατί, ἔτι δὲ πῶς σημειοῦται ἡ διαίρεσις, καὶ πῶς ἐκτελεῖται ἐν μέρος αὐτῆς, ἤτοι πῶς εὑρίσκεται τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου καὶ παραλείπονται τὸ τοῦ διαιρετέου καὶ τὸ τοῦ διαιρέτου, καὶ τ' ἀνάπαλιν, διὰ ταῦτα παραπέμποντες εἰς αὐτὸ περὶ ὅλων τούτων, θέλομεν ἐπαναλάβει ἐνταῦθα τελειότερα τὰ περὶ διαιρέσεως πολυγραμμάτων ὅρων καὶ περὶ πολυόρων.

42. Εἶναι βέβαιον ἤδη ὅτι *τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι τοσοῦτον, ὥστε πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει γινόμενον ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον*. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ ὅτι *ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, καθ' ἣν εὑρίσκεται τοιοῦτος ἀριθμὸς πρὸς τὸν διαιρετέον, ὅ,τι εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην*. Διότι, ὄντος α τοῦ διαιρετέου καὶ β τοῦ διαιρέτου, ὅτε ἡ μονὰς εἶναι τὸ $\frac{1}{\beta}$ τοῦ διαιρέτου ἤτοι $\frac{1}{\beta}$ τοῦ β ἢ $\frac{\beta}{\beta}=1$, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι τὸ $\frac{1}{\beta}$ τοῦ α ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}$, τοῦτο δὲ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ β παράγει $\frac{\alpha\beta}{\beta}$ ἢ $\alpha.\frac{\beta}{\beta}=\alpha$. Διὰ ταῦτα ἐν τοῖς ἑξῆς ὡς πηλίκον θέλομεν ζητεῖ τοιοῦτον ὅρον ἢ πολύορον, ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ παράγῃ τὸν διαιρετέον.

43. Ἂς διαιρεθῇ ὁ $48\alpha^4\beta^3\gamma^2\delta^2$ διὰ $8\alpha^3\beta\gamma^2$. Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον πηλίκον πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην πρέπει νὰ παραγάγῃ τὸν διαιρετέον, δυνατὸν οὗτος νὰ ἐννοῆται γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, καὶ τότε ὁ μὲν συνεργὸς 48 εἶναι γινόμενον τοῦ 8 τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ 6, ὁ α^4 δὲ εἶναι γινόμενον τοῦ α^3 τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ α, ὡσαύτως καὶ ὁ β^3 εἶναι β ἐπὶ β^2, ὁ γ^2 δὲ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου γ^2, τελευταῖον ὁ δ^2 δὲν εἶναι ἐν τῷ διαιρέτῃ· λοιπὸν

$$48\alpha^4\beta^3\gamma^2\delta^2=8\times6\alpha^3\alpha\beta\beta^2\gamma^2\delta^2=8\alpha^3\beta\gamma^2\times6\alpha\beta^2\delta^2.$$

Ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι $6\alpha\beta^2\delta^2$, διότι αὐτὸ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην παράγει τὸν διαιρετέον.

Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι

$$\frac{35\alpha^2\beta^4\gamma^3}{7\alpha^2\beta\gamma^2}=5\beta^3\gamma,\quad \frac{24\beta^3\gamma\chi^3}{6\beta\chi^2}=4\beta^2\gamma\chi.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ πηλίκον ἔχει συνεργὸν μὲν τὸ πηλίκον τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, τῶν δὲ κοινῶν γραμμάτων τὰ μὲν μὲ ἀνώτερον δείκτην ἐν τῷ διαιρετέῳ ἔχει μὲ δείκτην ἴσον μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτου ὑπὲρ τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ, τὰ δὲ μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην ἐν ἀμφοτέροις δὲν ἔχει, τὰ δ' ἐν μόνῳ τῷ διαιρετέῳ γράμματα ἔχει καὶ τὸ πηλίκον ὁποῖα καὶ ὁ διαιρετέος, ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς περὶ διαιρέσεως πολυγραμμάτων ὅρων κανόνα. *Ἵνα διαιρῶμεν πολυγράμματον ὅρον δι' ἄλλου τοιούτου, διαιροῦμεν τὸν συνεργὸν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, δεξιὰ δὲ τοῦ πηλίκου γράφομεν τ' ἀνώτερον δείκτην ἐν τῷ διαιρετέῳ ἔχοντα κοινὰ γράμματα μὲ δείκτην τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτου ὑπὲρ τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ, τὰ δ' ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην ἐν ἀμφοτέροις δὲν γράφομεν, τὰ δ' ἐν μόνῳ τῷ διαιρετέῳ γράμματα γράφομεν καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ ὅπως εἶναι ἐν αὐτῷ.*

Κατὰ τοῦτον τὸν κανόνα καὶ τὸν περὶ τῶν σημείων νὰ εὑρεθῶσι τῶν ἀκολούθων τὰ πηλίκα.

$$\frac{8\alpha^7}{4\alpha^2},\quad \frac{35\alpha^5\chi^3}{-7\alpha^2\chi^2},\quad \frac{-8\alpha\beta^3\gamma^5}{-12\alpha\beta\chi}.\quad \frac{-48\alpha^6\beta^3\gamma^3}{6\alpha^4\beta^3},\quad \frac{30\alpha^2\beta^3\gamma^{20}}{5\alpha\beta^2\gamma}.$$

44. Τὸ πηλίκον τοῦ α^3 δι' α^3 εἶναι 1, διότι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσοι. Ἀλλ' ἐὰν θελήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον των ὅπως εὑρίσκομεν π. χ. τὸ τοῦ α^5 διὰ α^3, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^3}=\alpha^0,$$

τὸ ὁποῖον α^0 πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην α^3 παράγει τὸν διαιρετέον. Τὸ α^0 λοιπὸν, ἄν ποτε τὸ μεταχειρισθῶμεν, θέλομεν τὸ ἐκλαμβάνει ὡς ἀλγεβρικὸν σύμβολον παραστατικὸν τῆς 1, ἤτοι $\alpha^0=1$. Ἀλλὰ καὶ $\beta^0=1$, $\gamma^0=1$, κτλ.

Εἶναι δὲ καὶ ἐκ τοῦ Συμπληρώματος (118) γνωστὸν ἤδη ὅτι ἡ μονὰς εἶναι *μηδενιστὴ* δύναμις παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ὅταν λοιπὸν διαιροῦντες ὅρον δι' ἄλλου, οἵτινες νὰ ἔχωσι γράμμα τι μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην, θέλωμεν νὰ διατηρήσωμεν τὸ γράμμα τοῦτο καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ, ἵνα δείξωμεν ὅτι ἦτον ἔν τε τῷ διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ, γράφομεν αὐτὸ μὲ δείκτην 0, οἷον

$$\frac{6\alpha^3\beta^2\gamma}{2\alpha\beta^2}=3\alpha^2\beta^0\gamma,\ \text{ἀντὶ}\ 3\alpha^2\gamma.$$

Ὡσαύτως τὸ $4\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2$ δύναται νὰ γραφθῇ $4\alpha^2\beta^0-5\alpha\beta+3\alpha^0\beta^2$. Ἀλλὰ καὶ ἂν δὲν γράψωμεν οὕτως, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ μὲν $4\alpha^2$ ἔχει τὴν κατωτάτην δύναμιν τοῦ β, ὁ δὲ $3\beta^2$ τὴν κατωτάτην τοῦ α, ἤτοι τὴν α^0.

45. Ὅλων τῶν προηγουμένων διαιρέσεων τὰ πηλίκα ἦσαν ἀκέραια, καὶ ἐπομένως ὁ διαιρετέος ἦτον *διαιρέσιμος* διὰ τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει πάντοτε. Π. χ. ἂν πρόκηται νὰ διαιρεθῇ ὁ $12\alpha^2\beta^3\gamma$ διὰ $8\alpha^3\beta^2\delta^3$, τὸ πηλίκον τούτων ἀδύνατον νὰ ἦναι ἀκέραιον διὰ τὰ τρία ταῦτα, ά. ὅτι ὁ συνεργὸς 12 δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ 8, β'. ὅτι ὁ α^2 δὲν εἶναι γινόμενον τοῦ α^3 καὶ ἄλλης δυνάμεως τοῦ α, ἢ ὁ α^2

ἔχει δείκτην μικρότερον παρὰ τὸν α^3, καὶ γ΄. ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει τὸν δ^2, ὅςτις δὲν εἶναι ἐν τῷ διαιρετέῳ. Ὁ διαιρετέος λοιπὸν δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ καὶ ἓν μόνον τῶν προειρημένων ἂν ὑπάρχῃ, μάλιστα τῶν δύο τελευταίων, ὁ ὅρος δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ πηλίκον τότε θέλει εἶσθαι κλασματικόν, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δυνατὸν νὰ γείνωσιν ἁπλούστεροι κατὰ ταύτην τὴν ἀρχήν, ὅτι *τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν καὶ τὸ πηλίκον τῶν αὐτῶν πολλοστῶν τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός*. Ἂν λοιπὸν ἐξαλείφωνται ἐξ ἀμφοτέρων οἱ κοινοὶ παράγοντες, τὸ ὁποῖον σημαίνει νὰ διαιρῶνται οἱ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θέλει προκύψει πηλίκον κλασματικὸν μὲ ἁπλουστέρους ὅρους. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{12\alpha^2\beta^3\gamma}{8\alpha^3\beta^2\delta^2}=\frac{3\beta\gamma}{2\alpha\delta^2},\quad \frac{48\alpha^3\beta^2\gamma\delta^3}{36\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta\varepsilon}=\frac{4\alpha\delta^2}{3\beta\gamma\varepsilon},\quad \frac{7\alpha^2\beta}{14\alpha^3\beta^2}=\frac{1}{2\alpha\beta}.$$

Σημ. Εἶναι δυνατὸν διὰ τῆς χρήσεως τῶν ἀντιθετικῶν δυνάμεων (Συμπλ. ἀρ. 118) νὰ γράφωμεν πάντοτε καὶ ταῦτα τὰ πηλίκα ὡς ἀκέραια. Ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν θέλομεν ἔχει χρείαν ἐν τοῖς ἑξῆς τῶν δυνάμεων τούτων, περιοριζόμεθα εἰς ὅσα εἴπομεν.

46. Ἄς διαιρεθῇ τώρα καὶ τὸ πολύορον

$$8\alpha^4\beta-12\alpha^3\beta^2+4\alpha^2\beta^3 \text{ διὰ τοῦ ὅρου } -4\alpha^2\beta.$$

Τὸ ζητούμενον πηλίκον ἀνάγκη νὰ ἦναι τρίορον, διότι μόνον τρίορον πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $-4\alpha^2\beta$ δύναται νὰ παραγάγῃ τὸν διαιρετέον. Ἔπειτ' ἀνάγκη ἕκαστος ὅρος τοῦ διαιρετέου νὰ ἦναι γινόμενον ὅρου τινὸς τοῦ τριόρου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, διότι τὸ τρίορον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ὅρον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος ὅρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ὅρον. Λοιπὸν, *ἵνα εὑρεθῇ τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ διαιρεθῇ ἕκαστος ὅρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου ὅρου, καὶ τὰ μερικὰ πηλίκα νὰ γραφθῶσι κατὰ σειρὰν ὅπως προκύπτουσιν ἐκ τῆς διαιρέσεως*. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{8a^4\beta-12a^3\beta^2+4a^2\beta^3}{-4a^2\beta}=-2a^2+3a\beta-\beta^2$$

ἢ $8a^4\beta-12a^3\beta^2+4a^2\beta^3 \,\Big|\, \dfrac{-4a^2\beta}{-2a^2+3a\beta-\beta^2}$

Ὅταν δ' ὅρος τις τοῦ διαιρετέου δὲν ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου, οὐδὲ τὸ πολύορον εἶναι διαιρέσιμον διὰ τοῦ ὅρου, ἀλλ' εἶναι κλασματικὸν τὸ πηλίκον, τοῦ ὁποίου πολλάκις οἱ ὅροι δυνατὸν νὰ γείνωσιν ἁπλούστεροι. Π. χ.

$$\frac{6a^3\beta-9a^2\beta^2+12a\beta^3}{6a^2\beta^3}=\frac{3a\beta(2a^2-3a\beta+4\beta^2)}{3a\beta\times2a\beta^2}=$$

$$\frac{2a^2-3a\beta+4\beta^2}{2a\beta^2},\qquad \frac{8a^2\chi^2-6a\chi^3}{4a^3\chi^2}=\frac{2a\chi^2(4a-3\chi)}{2a\chi^2\times2a^2}=$$

$$\frac{4a-3\chi}{2a^2}.\qquad \frac{a^5\beta-a^4\beta^2+a^3\beta^3-a^2\beta^4}{a^2\beta}=a^3-a^2\beta+a\beta^2-\beta^3$$

47. Ἂς διαιρεθῇ τώρα διὰ τοῦ πολυόρου $4a\beta-5a^2+3\beta^2$ τὸ $51a^2\beta^2+10a^4-48a^3\beta-15\beta^4+4a\beta^3$.

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον πηλίκον πρέπει νὰ ἦναι τοιοῦτον, ὁποῖον πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ παραγάγῃ τὸν διαιρετέον, δυνατὸν νὰ ἐννοῆται τὸ διαιρετέον πολύορον γινόμενον τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Τούτου οὕτως ἔχοντος, πρῶτον μὲν κατὰ τὴν ἐν ἀρ. 38 παρατήρησιν ὁ ὅρος $+10a^4$, ὅστις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a, ἀνάγκη νὰ ἦναι γινόμενον τοῦ ὅρου τοῦ πηλίκου, ὅστις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a, καὶ τοῦ ὅρου $-5a^2$ τοῦ διαιρέτου, ὅστις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a. Ὄντος δὲ γνωστοῦ τοῦ γινομένου $+10a^4$ καὶ τοῦ ἑτέρου παράγοντός του $-5a^2$, εὑρίσκεται ὁ ἄλλος παράγων, ἤτοι ὁ ὅρος τοῦ πηλίκου ὁ ἔχων τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a, ἂν διαιρεθῇ ὁ $+10a^4$ διὰ τοῦ $-5a^2$

κατὰ τὸν περὶ διαιρέσεως ὅρων κανόνα· οὕτως ἔχομεν $-2a^2$ ἕνα ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ἔπειτα τὸ διαιρετέον πολύορον ὡς γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ὅλους τοὺς ὅρους, ὅσοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ εὑρεθέντος ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ τοιούτους, ὁποῖοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂν δὲν εἶχε χώραν συστολὴ ὁμοίων ὅρων, ἢ τοιούτους, ὁποῖοι εἶναι μετὰ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἥτις τοὺς συστέλλει εἰς ἕνα ἰσοδύναμον, ἀλλὰ δὲν τοὺς ἀφανίζει. Ἂν λοιπὸν πολλαπλασιασθῇ ὁ εὑρεθεὶς ὅρος $-2a^2$ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα $-8a^3b+10a^4-6a^2b^2$ γραφθῶσι μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖά των ἢ κατόπιν τοῦ διαιρετέου ἢ κάλλιον ὑπ' αὐτὸν καὶ ἐκτελεσθῇ ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, οὕτω συνεξαφανίζονται οἱ ὅροι, οἵτινες εἶναι γινόμενα τοῦ εὑρεθέντος ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ μένον πολύορον $57a^2b^2-40a^3b-15b^4+4ab^3$ θέλει εἶσθαι γινόμενον τῶν ἔτι ἀγνώστων ὅρων τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Τὸ πολύορον δὲ τοῦτο λέγεται *ὑπόλοιπος διαιρετέος*.

Ἐκ δὲ τοῦ ὅτι ὁ ὑπόλοιπος διαιρετέος εἶναι γινόμενον τῶν ἔτι ἀγνώστων ὅρων τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι ὁ ὅρος αὐτοῦ $-40a^3b$, ὅς τις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a, εἶναι γινόμενον τοῦ ἔτι ἀγνώστου ὅρου τοῦ πηλίκου, ὅς τις ἔχει τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a ὡς πρὸς τοὺς λοιποὺς ἀγνώστους, ἐπὶ τὸν ὅρον $-5a^2$ τοῦ διαιρέτου, ὅς τις ἔχει καὶ αὐτὸς τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ a· καὶ δῆλον ὅτι, ἂν διαιρεθῇ ὁ $-40a^3b$ διὰ τοῦ $-5a^2$, τὸ πηλίκον αὐτῶν $+8ab$ θέλει εἶσθαι ὁ προειρημένος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ὁ αὐτὸς δὲ ὑπόλοιπος διαιρετέος ἔχει ἐξ ἀνάγκης τοὺς ὅρους, ὅσοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $+8ab$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ ὡς προέκυψαν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ ὡς εἶναι μετὰ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἂν λοιπὸν ὁ εὑρεθεὶς ὅρος $+8a\beta$ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα $+32a^2\beta^2-40a^3\beta+24a\beta^3$ γραφθῶσι μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖά των ὑπὸ τὸν ὑπόλοιπον διαιρετέον καὶ ἐκτελεσθῇ ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, οὕτω συνεξαφανίζονται καὶ τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ $+8a\beta$ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ ὁ δεύτερος ὑπόλοιπος διαιρετέος $25a^2\beta^2-15\beta^4-20a\beta^3$ θέλει εἶσθαι γινόμενον τῶν ἔτι ἀγνώστων ὅρων τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

Ἐκ δὲ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων δῆλον ὅτι, ἂν ὁ ὅρος $25a^2\beta^2$ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου διαιρετέου, ὅς τις ἔχει τὴν ἀνωτάτην τοῦ a δύναμιν, διαιρεθῇ διὰ τοῦ $-5a^2$ ὅρου τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον αὐτῶν $-5\beta^2$ θέλει εἶσθαι ἄλλος ὅρος τοῦ πηλίκου· καὶ ὅτι, ἂν ὁ $-5\beta^2$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δὲ τὰ μερικὰ γινόμενα μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖά των γραφθῶσιν ὑπὸ τὸν δεύτερον ὑπόλοιπον διαιρετέον καὶ συσταλῶσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι, οὕτω συνεξαφανίζονται καὶ τὰ γινόμενα τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Ἀλλὰ τούτου γενομένου, εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 0, τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι τὸ διαιρετέον πολύορον εἶναι γινόμενον τοῦ τριόρου $-2a^2+8a\beta-3\beta^2$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἤδη εὑρεθὲν τριόρον $-2a^2+8a\beta-5\beta^2$. Ἡ πρᾶξις λοιπὸν ἐτελείωσεν.

Παρατηρητέον δὲ τώρα ὅτι, ἂν ὅ τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦσαν διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a, τότε ὁ τοῦ διαιρετέου καὶ ὁ ἑκάστου ὑπολοίπου διαιρετέου ὅρος, ὅς τις μέλλει νὰ διαιρεθῇ, εἶναι ὁ ἀριστερὸς πάντοτε, ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ τοῦ διαιρέτου $-5a^2$, δι' οὗ θέλουσι διαιρεθῇ. Διὰ ταῦτα εἶναι προτιμότερον τὰ πολύορα νὰ ἦναι διατεταγμένα πρὸς τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελεσθῇ ὡς εἴπομεν ἤδη ἡ διαίρεσις, ὡς ἐδῶ φαίνεται.

$$
\begin{array}{l|l}
10a^4-48a^3\beta+51a^2\beta^2+4a\beta^3-15\beta^4 & -5a^2+4a\beta+3\beta^2 \\
\cline{2-2}
-10a^4+8a^3\beta+6a^2\beta^2 & -2a^2+8a\beta-5\beta^2 \\
\cline{1-1}
\quad -40a^3\beta+57a^2\beta^2+4a\beta^3-15\beta^4 & \\
\quad +40a^3\beta-32a^2\beta^2-24a\beta^3 & \\
\cline{1-1}
\qquad +25a^2\beta^2-20a\beta^3-15\beta^4 & \\
\qquad -25a^2\beta^2+20a\beta^3+15\beta^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι, ἂν ἀντὶ νὰ διαιρῶμεν τὸν ἔχοντα τὴν ἀνωτάτην δύναμιν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ a διὰ τοῦ ἔχοντος ἐπίσης τὴν ἀνωτάτην τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ a ἠθέλαμεν διαιρεῖ τὸν ἔχοντα τὴν κατωτάτην δύναμιν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ a διὰ τοῦ ἔχοντος τὴν κατωτάτην τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ a, οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς προηγουμένους συλλογισμοὶ ἤθελαν μᾶς πείσει ὅτι τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶσθαι ὅρος τοῦ πηλίκου ὁ μὲ τὴν κατωτάτην δύναμιν τοῦ a. Τότε ἔπρεπε νὰ διατάττωμεν τόν τε διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ a. Ἰδοὺ παράδειγμα τοιοῦτον, τοῦ ὅρου $2\beta^2$ τοῦ διαιρέτου ἔχοντος τὴν κατωτάτην δύναμιν τοῦ a, ἤτοι τὸ a^0, τὸ ὁποῖον ἴσον μὲ τὴν μονάδα ὂν δὲν γράφεται.

$$
\begin{array}{l|l}
-2a\beta^4-3a^2\beta^3+21a^3\beta^2-27a^4\beta+14a^5 & 2\beta^2-3a\beta+2a^2 \\
\cline{2-2}
+2a\beta^4-3a^2\beta^3+2a^3\beta^2 & -a\beta^2-3a^2\beta+7a^3 \\
\cline{1-1}
\quad -6a^2\beta^3+23a^3\beta^2-27a^4\beta+14a^5 & \\
\quad +6a^2\beta^3-9a^3\beta^2+6a^4\beta & \\
\cline{1-1}
\qquad +14a^3\beta^2-21a^4\beta+14a^5 & \\
\qquad -14a^3\beta^2+21a^4\beta-14a^5 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

48. Ἐκ τῶν προηγουμένων καταλαμβάνει τις ὅτι πολύορον δι᾽ ἄλλου πολυόρου πρέπει νὰ διαιρῆται κατὰ τὸν ἀκόλουθον γενικὸν κανόνα.

Ἀφοῦ διαταχθῶσιν ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης κατὰ τὰς κατιούσας ἢ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, διαιρεῖται κατὰ τὸν περὶ διαιρέσεως ὅρων κανόνα ὁ ἀριστερὸς ὅρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ὅρου τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν διαιρέτην ὅλον, τοῦ γινομένου οἱ ὅροι μὲ τ' ἀντίθετά των σημεῖα γράφονται ὑπὸ τὸν διαιρετέον καὶ γίνεται ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἔπειτα πάλιν τοῦ ὑπολοίπου διαιρετέου διαιρεῖται ὁ ἀριστερὸς ὅρος διὰ τοῦ ἀριστεροῦ τοῦ διαιρέτου, τοῦ πηλίκου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ τ' ἀντίθετα τῶν ὅρων του σημεῖα γράφεται ὑπὸ τὸν ὑπόλοιπον διαιρετέον καὶ γίνεται ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Σημ. Ἀφίνομεν εἰς τὸν διδάσκοντα τὴν φροντίδα νὰ δείξῃ τὰς χάριν συντομίας γινομένας τροποποιήσεις τοῦ κανόνος τούτου κατὰ τὴν πρᾶξιν.

49. Καὶ ὅταν μὲν ὁ ἀριστερὸς ὅρος τοῦ διαιρετέου καὶ ὁ ἀριστερὸς ἑκάστου ὑπολοίπου διαιρετέου ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ὅρου τοῦ διαιρέτου, μετά τινας δὲ διαιρέσεις εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 0, τὸ πηλίκον τότε θέλει ἔχει ὅλους του τοὺς ὅρους ἀκεραίους, καὶ ὁ διαιρετέος θέλει εἶσθαι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου, ἤτοι θέλει εἶσθαι γινόμενον ἀκεραίου πολυόρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ ἀκέραιον τὸν διαιρέτην (ἰδὲ τὰ τοῦ ἀρ. 47 παραδείγματα).

Ὅταν δὲ ὁ ἀριστερὸς ὅρος ἢ τοῦ διαιρετέου ἢ ὑπολοίπου τινὸς διαιρετέου δὲν ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ἀριστεροῦ ὅρου τοῦ διαιρέτου, τότε δῆλον ὅτι τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ἢ ὅλον κλασματικόν, ἢ θέλει ἔχει ὅρους τινὰς ἀριστερούς του ἀκεραίους καὶ τὸ λοιπόν του μέρος κλασματικόν, ὡς συμβαίνει ἐν τῷ ἀκολούθῳ παραδείγματι.

$$
\begin{array}{r|l}
2\chi^3+\chi^2-9\chi+8 & \chi^2+2\chi-3 \\ \cline{2-2}
-2\chi^3-4\chi^2+6\chi & 2\chi-3 \\ \cline{1-1}
-3\chi^2-3\chi+8 & \\
+3\chi^2+6\chi-9 & \\ \cline{1-1}
+3\chi-1 &
\end{array}
$$

ὁ δεύτερος ὑπόλοιπος διαιρετέος ἔχει ἐν τῷ ἀριστερῷ αὐτοῦ ὅρῳ 3χ τὸν χ μὲ δείκτην μικρότερον τοῦ ἐν τῷ ἀριστερῷ ὅρῳ χ^2 τοῦ διαιρέτου, καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶναι διαιρέσιμος ὁ 3χ διὰ χ^2, ἐπομένως οὐδὲ ὁ $3\chi-1$ διὰ τοῦ $\chi^2+2\chi-3$.

Κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν τὸ πηλίκον ἢ παριστάνεται ὅλον κλασματικὸν οὕτω

$$\frac{2\chi^3+\chi^2-9\chi+8}{\chi^2+2\chi-3},$$

ἢ εἰς τοὺς δύο εὑρεθέντας ἤδη ἀκεραίους ὅρους αὐτοῦ προστίθεται καὶ τὸ κλασματικὸν πηλίκον τοῦ $3\chi-1$ διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ θέλει εἶσθαι $2\chi-3+\dfrac{3\chi-1}{\chi^2+2\chi-3}$, τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει μὲ μικτὸν ἀριθμόν, διότι ἔχει μέρος τι ἀκέραιον καὶ μέρος κλασματικόν, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς ἔχει τὸ χ μὲ δείκτην μικρότερον παρὰ τὸν παρονομαστήν. Τοῦτο δὲ τὸ μικτὸν πηλίκον εἶναι συνήθως εἰς χρῆσιν ἀντὶ τοῦ ὅλου κλασματικοῦ.

50. Ἐνίοτε εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίσωμεν τὸ μὴ διαιρέσιμον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξ ἄλλου σημείου ὡς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι,

$$\begin{array}{l|l}
\chi^9+\chi^7-a\chi^5+a\chi^4 & \chi^4+\chi^3+a \\
\hline
-\chi^9-\chi^8-a\chi^5 & \chi^5-\chi^4 \\
\cline{1-1}
-\chi^8+\chi^7-2a\chi^5+a\chi^4 & \\
+\chi^8+\chi^7+a\chi^4 & \\
\cline{1-1}
+2\chi^7-2a\chi^5+2a\chi^4. &
\end{array}$$

Δηλαδὴ εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $a\chi^4$, ὅστις ἔχει τὸν κατώτατον τοῦ χ δείκτην ἐν τῷ διαιρετέῳ, διὰ τοῦ a, ὅστις ἔχει τὸν κατώτατον δείκτην τοῦ χ ἐν τῷ διαιρέτῃ, εἶναι ὁ ὅρος τοῦ πηλίκου, ὅστις ἔχει καὶ αὐτὸς τὸν κατώτατον δείκτην τοῦ χ, καὶ ἐπομένως ὁ τελευταῖός τοῦ ὅρος. Τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι χ^4, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἦναι ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ὅλου πηλίκου. Ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὴν δευτέραν διαίρεσιν εὑρέθη ὁ χ^4, ἂν καὶ ἀντιθετικὸς, καὶ μετὰ τοῦτο δὲν εὑρέθη ὑπόλοιπον 0, ἀλλὰ διαιρετέος, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριστερὸς ὅρος $2\chi^2$ εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ ὅρου χ^4 τοῦ διαιρέτου, δίδων καὶ ἄλλον ὅρον $2\chi^2$ τοῦ πηλίκου, διὰ τοῦτο, ὅτι τὸ πηλίκον θέλει ἔχει καὶ ἄλλον ὅρον μὲ δείκτην τοῦ χ κατώτερον παρὰ τὸν τοῦ τελευταίου του ὅρου, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ διαιρετέος δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου. Παύομεν δὲ τὴν πρᾶξιν, καίτοι δυνάμενοι νὰ ἐξακολουθήσωμεν, ἂν δὲν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους ὅρους τοῦ πηλίκου καὶ χωριστὰ τὸν κλασματικὸν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

51. Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς πηλίκα τῆς διαφορᾶς ὁποιωνδήποτε ὁμοβάθμων δυνάμεων δύο ἀριθμῶν α καὶ β διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν πρώτων αὐτῶν δυνάμεων, εὑρεθέντα διὰ τῆς κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα διαιρέσεως,

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta,\quad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2,$$

$$\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3,$$

$$\frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta}=\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4,\quad \text{κτλ.}$$

βλέπομεν ὅτι ὅλα ἔχουσι τόσους ὅρους, ὅσας μονάδας ἔχουσιν οἱ δεῖκται τῶν διαιρετέων, ὅτι ὅλοι οἱ ὅροι των εἶναι θετικοὶ, ὅτι ὁ πρῶτος ἑκάστου ὅρος εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου μὲ δείκτην κατὰ μονάδα μικρότερον, ὅτι ἐν τοῖς ἑξῆς ὅροις οἱ μὲν δεῖκται τοῦ πρώτου ὅρου προβαίνουσιν ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα, οἱ δὲ τοῦ δευτέρου αὐξάνοντες κατὰ μονάδα, ὥστε ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι ὁ δεύτερος τοῦ διαιρετέου.

μὲ δείκτην κατὰ μονάδα μικρότερον, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν ἑκάστου τῶν ἄλλων ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὸν τοῦ πρώτου ἢ τοῦ τελευταίου ὅρου δείκτην. Ἐν τοῖς ἑξῆς λοιπόν, ἂν τύχῃ νὰ χρειασθῇ τὸ πηλίκον τοιούτων διόρων, δὲν θέλει εὑρίσκεσθαι κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, ἀλλὰ θέλει κατασκευάζεσθαι παρευθὺς κατὰ τὰ προηγουμένα πηλίκα.

Σημ. Διαιρέσεις πολυόρων δυσκολωτέρας, τῶν ὁποίων τὴν ἀνάγκην ἐν τοῖς ἑξῆς δὲν θέλομεν ἀπαντήσει, καὶ τροποποιήσεις τινὰς τοῦ γενικοῦ κανόνος πρὸς συντομίαν εἰς σπανίας περιπτώσεις, ἐκρίναμεν καλὸν νὰ τὰς παραβλέψωμεν.

Διαιρέσεις ἐκτελεστέαι πρὸς ἄσκησιν.

$$\frac{4\chi^3+4\chi^2-29\chi+21}{2\chi-3},\quad \frac{\alpha^8-16\chi^8}{\alpha^2-2\chi^2},$$

$$\frac{-78\gamma^3\delta+17\gamma\delta^3+72\gamma^4-10\gamma^2\delta^2+3\delta^4}{6\gamma^2-\delta^2-4\gamma\delta},\quad \frac{32\alpha^5+\beta^5}{2\alpha+\beta},$$

$$\frac{-38\chi\omega^3+31\chi^2\omega^2+2\chi^4+24\omega^4-13\chi^3\omega}{2\chi^2-3\chi\omega+4\omega^2},\quad \frac{\alpha^6+2\alpha^3\omega^3+\omega^6}{\alpha^2-\alpha\omega+\omega^2}$$

$$\frac{5\alpha^5\beta^3\gamma^5-22\alpha^4\beta^3\gamma^6+5\alpha^3\beta^3\gamma^7+12\alpha^2\beta^3\gamma^8-7\alpha^2\beta^2\gamma^6+28\alpha\beta^2\gamma^9}{\alpha^2\beta\gamma^2-4\alpha\beta\gamma^3}$$

Περὶ ἐγγραμμάτων κλασματικῶν.

52. Ἐὰν α καὶ β σημαίνωσιν ὁποιουσδήποτε ὅρους ἢ πολύορα, τῶν ὁποίων τὰ προσδιορίσματα νὰ μὴ ἦναι ἀνάριθμα ἢ ἀνύπαρκτα ποσά, ὁ $\frac{\alpha}{\beta}$ θέλει παριστάνει πάντα κλασματικὸν μεγαλήτερον τῆς μονάδος ἢ μικρότερον, ὅστις πρέπει νὰ ἐννοῆται ὅτι εἶναι ἢ πολλὰ πολλοστά τινα τῆς μονάδος, ἢ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἢ ὁ λόγος τοῦ ἀριθμητοῦ πρὸς τὸν παρονομαστήν, ὡς καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ (ἰδὲ κατωτέρω διάφορα εἴδη κλασματικῶν).

Περὶ δὲ τῶν ἐπ' αὐτῶν ἐκτελεστέων διαφόρων πράξεων κρίνομεν περιττὸν νὰ εἴπωμεν καὶ ὀλίγα, διότι δὲν παρουσιάζουσιν οἱ κλασματικοὶ οὗτοι τίποτε νεώτερον μὴ ἐξηγηθὲν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, ἀλλ' ἔχον χρείαν ἰδιαιτέρας ἐξηγήσεως, καὶ ὅταν ἀκόμη ἔχωσι τοὺς ὅρους των κλασματικούς. Ἀναγκαιότατον ὅμως θεωροῦμεν τὴν ἄσκησιν εἰς τὸ ἐκτελεῖν ἐπ' αὐτῶν ταχέως καὶ ἀλανθάστως τὰς πράξεις ταύτας κατὰ τοὺς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ καὶ τοὺς προηγουμένως συστηθέντας κανόνας. Πρὸς τοῦτο δὲ καὶ ἐκτελοῦμεν ὑπολογισμούς τινας, καὶ ἀφίνομεν πολλοὺς ἄλλους νὰ ἐκτελέσωσιν οἱ μαθηταὶ κατ' ἰδίαν ἢ ἐνώπιον τοῦ διδάσκοντος.

1. Τὸ $\frac{\alpha}{\beta}+\chi=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta\chi}{\beta}=\frac{\alpha+\beta\chi}{\beta}$, ἀφοῦ τραπῇ ὁ χ εἰς κλασματικὸν ὁμώνυμον μὲ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, προστεθῶσιν οἱ ἀριθμηταὶ καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τεθῇ ὁ παρονομαστὴς β.

2. Τὸ $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\beta\gamma-\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$, ἀφοῦ οἱ ἑτερώνυμοι τραπῶσιν εἰς ὁμωνύμους κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, ἔπειτα αἱ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν πράξεις ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμητῶν καὶ γραφθῇ ὁ κοινὸς παρονομαστής.

3. Τὸ $\frac{\alpha^3}{(\alpha+\beta)^3}+\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ · ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἐπὶ $\alpha+\beta$ καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ τρίτου ἐπὶ $(\alpha+\beta)^2$ ἤτοι ἐπὶ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, τρέπεται εἰς τὸ $\frac{\alpha^3}{(\alpha+\beta)^3}+\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}-\frac{\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3}{(\alpha+\beta)^3}$, ἀφοῦ δὲ προστεθῶσιν οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμηταὶ καὶ ἐκ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν ἀφαιρεθῇ ὁ τρίτος, ἔχομεν

$\frac{a^3+a^2\beta+a\beta^2-a^2\beta-2a\beta^2-\beta^3}{(a+\beta)^3}$· γενομένης δὲ τῆς συστολῆς τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ ἀριθμητοῦ, ἔχομεν $\frac{a^3-a\beta^2-\beta^3}{(a+\beta)^3}$.

4. Τὸ $\left(\frac{a+\chi}{a-\chi}+\frac{\beta-\chi}{\beta+\chi}\right)\left(\frac{a-\chi}{a+\chi}+\frac{\beta+\chi}{\beta-\chi}\right)=\frac{4\chi^4+8a\beta\chi^2+4a^2\beta^2}{\chi^4-a^2\chi^2-\beta^2\chi^2+a^2\beta^2}$

Πρῶτον προσθέτονται οἱ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων κλασματικοί, ἀφοῦ τραπῶσιν εἰς ὁμωνύμους κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, καὶ εὑρίσκεται μετὰ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$\frac{2a\beta+2\chi^2}{a\beta-\beta\chi+a\chi-\chi^2}\times\frac{2a\beta+2\chi^2}{a\beta+\beta\chi-a\chi-\chi^2}$$

Ἔπειτα πολλαπλασιάζεται ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς ἐπὶ παρονομαστὴν κατὰ τὰ ἐν ἀρ. 39, διότι οἱ ἀριθμηταὶ εἶναι ἴσοι, τῶν δὲ παρονομαστῶν ὁ μὲν εἶναι κεφάλαιον τοῦ $a\beta-\chi^2$ καὶ τοῦ $a\chi-\beta\chi$, ὁ δὲ διαφορὰ τῶν αὐτῶν· μετὰ δὲ τὴν ἐν τῷ παρονομαστῇ συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων γράφοντες διατεταγμένον τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὑπὸ τὸ τῶν ἀριθμητῶν ἔχομεν τὸ ἀνωτέρω δεύτερον μέλος.

5. Τὸ $\frac{\left(\gamma-\frac{\delta^2}{2\gamma}\right)\left(\gamma-\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma+\delta}\right)}{1-\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}=\gamma^2-\gamma\delta-\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^3}{2\gamma}$.

Τρέπονται τ' ἀκέραια εἰς κλασματικὰ ὁμώνυμα μὲ τ' ἀκόλουθα κλασματικὰ καὶ ἐκτελοῦνται αἱ ἀφαιρέσεις, ἔπειτ' ἀναστρέφονται οἱ ὅροι τοῦ παρονομαστοῦ καὶ οὕτω τρέπεται ἡ διαίρεσις εἰς πολλαπλασιασμόν, καὶ ἔχομεν

$$\frac{2\gamma^2-\delta^2}{2\gamma}\times\frac{\gamma\delta-\delta^2}{\gamma+\delta}\times\frac{\gamma+\delta}{\delta}=\frac{(2\gamma^2-\delta^2)(\gamma-\delta)\delta(\gamma+\delta)}{2\gamma(\gamma+\delta)\delta}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ δ καὶ ὁ $\gamma+\delta$ εἶναι κοινοὶ παράγοντες τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, ἐξαλείφονται καὶ μένει $\frac{(2\gamma^2-\delta^2)(\gamma-\delta)}{2\gamma}=\frac{2\gamma^3-2\gamma^2\delta-\gamma\delta^2+\delta^3}{2\gamma}$, ἀφοῦ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός· γενομένης δὲ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ 2γ, εὑρίσκεται τὸ ἀνωτέρω.

6. Τὸ $\frac{\left(1-\frac{\varepsilon}{\eta}+\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon-\eta}{2\eta}\right)}{\left(\varepsilon-2\eta+\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\eta}+\frac{\eta}{\varepsilon-\eta}\right)}$, ἀφοῦ τ' ἀκέραια καὶ τὰ κλασματικὰ τὰ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις καὶ αἱ ἀφαιρέσεις καὶ ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, τρέπεται εἰς τὸ

$$\frac{\frac{\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2}{\varepsilon\eta}\times\frac{\eta^2+\varepsilon^2}{2\varepsilon\eta}}{\frac{\varepsilon^2-2\varepsilon\eta+\eta^2}{\varepsilon}\times\frac{\varepsilon^2+\eta^2}{\varepsilon^2-\eta^2}}=\frac{\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\eta^2+\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2\eta^2}}{\frac{(\varepsilon^2-2\varepsilon\eta+\eta^2)(\varepsilon^2+\eta^2)}{\varepsilon(\varepsilon^2-\eta^2)}}=$$

$$\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\eta^2+\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2\eta^2}\times\frac{\varepsilon(\varepsilon^2-\eta^2)}{(\varepsilon^2-2\varepsilon\eta+\eta^2)(\varepsilon^2+\eta^2)}=$$

$$\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\varepsilon^2-\eta^2)}{2\varepsilon\eta^2(\varepsilon^2-2\varepsilon\eta+\eta^2)}=\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\varepsilon+\eta)(\varepsilon-\eta)}{2\varepsilon\eta^2(\varepsilon-\eta)(\varepsilon-\eta)}=$$

$$\frac{(\varepsilon\eta-\varepsilon^2+\eta^2)(\varepsilon+\eta)}{2\varepsilon\eta^2(\varepsilon-\eta)}=\frac{-\varepsilon^3+2\varepsilon\eta^2+\eta^3}{2\varepsilon^2\eta^2-2\varepsilon\eta^3}=-\frac{\varepsilon^3-2\varepsilon\eta^2-\eta^3}{2\varepsilon^2\eta^2-2\varepsilon\eta^3}.$$

7. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}-\frac{\eta}{\theta}-x=\frac{\alpha\delta\zeta\theta+\beta\gamma\zeta\theta-\beta\delta\varepsilon\theta-\beta\delta\zeta\eta-\beta\delta\zeta\theta x}{\beta\delta\zeta\theta}$

8. $$\gamma+2\alpha\beta-3\alpha\gamma-\frac{\beta^2\gamma-5\alpha\beta^2\gamma+\alpha^3}{\beta^2-\beta\gamma}=\frac{2\alpha\beta^3-\beta\gamma^2+3\alpha\beta\gamma^2-\alpha^3}{\beta^2-\beta\gamma}.$$

9. $$\frac{3\zeta-4\theta}{7}-\frac{2\zeta-\theta-\kappa}{3}+\frac{15\zeta-4\kappa}{12}=\frac{85\zeta-20\theta}{84}.$$

10. $$\frac{3\theta+2\chi}{\theta+\chi}-\frac{5\theta-\chi}{\theta-\chi}+\frac{\theta}{2\chi}=\frac{\theta^3-4\theta^2\chi-11\theta\chi^2-2\chi^3}{2\theta^2\chi-2\chi^3}.$$

11. $$\frac{2\kappa\omega+\omega^2}{(\kappa-\omega)^2}-\frac{\kappa^2+5\kappa\omega}{(\kappa+\omega)^2}-\frac{\omega}{\kappa-\omega}=\frac{\kappa^4+2\kappa^3\omega-13\kappa^2\omega^2-2\omega^4}{\kappa^4-2\kappa^2\omega^2+\omega^4}$$

12. $$\frac{3\gamma}{\gamma-2\chi}+\frac{2\gamma+\chi}{(\gamma+\chi)(\gamma-2\chi)}-\frac{5}{\gamma+\chi}.$$

13. $$\left(\frac{3\alpha+2\chi}{\alpha-\chi}+\frac{4\chi}{2\alpha}\right)\left(\frac{5\alpha-3\chi}{4\alpha-\chi}+\frac{7\chi}{5\alpha}\right)=\frac{75\alpha^4+139\alpha^3\chi-19\alpha^2\chi^2-54\alpha\chi^3+14\chi^4}{20\alpha^4-25\alpha^3\chi+5\alpha^2\chi^2}.$$

14. $$\frac{\dfrac{\delta^3\zeta^3}{\gamma^2\eta^2}-\dfrac{\delta^4\zeta}{\gamma\eta}+\delta^2\eta}{\dfrac{\delta^2\varepsilon}{\gamma\eta^2\theta}-\dfrac{\delta^6\eta}{\gamma\varepsilon\kappa}+\dfrac{\delta^3}{\gamma\eta}}=\frac{\delta\varepsilon\zeta^3\theta\kappa-\gamma\delta^2\varepsilon\zeta\eta\theta\kappa+\gamma^2\varepsilon\eta^3\theta\kappa}{\gamma\varepsilon^2\kappa-\gamma\delta^4\eta^3\theta+\gamma\delta\varepsilon\eta\theta\kappa}$$

15. $$\frac{\dfrac{\chi}{\chi-\alpha}+\dfrac{\alpha}{\chi+\alpha}}{\dfrac{\chi}{\chi-\alpha}-\dfrac{\alpha}{\chi+\alpha}}=\frac{\chi^2+2\alpha\chi-\alpha^2}{\chi^2+\alpha^2}.$$

16. $$\frac{\dfrac{\omega^2}{\delta^2}-\dfrac{\omega^3}{a+\beta}}{\dfrac{\omega^2}{a+\beta}-\dfrac{\omega^4}{\delta\varepsilon^2}}=\frac{a^2\varepsilon^2+2a\varepsilon^2\beta-a\varepsilon\delta\omega-\beta^2\varepsilon^2-\beta\delta\varepsilon^2\omega}{a\delta^2\varepsilon^2-a^2\delta\omega^2-2a\beta\delta\omega^2+\beta\delta^2\varepsilon^2-\beta^2\delta\omega^2}$$

Γενικὴ παρατήρησις. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ἐννοεῖ τις τώρα σαφέστερα ὅ,τι εἴπομεν ἐν τῷ ἀρ. 11, ὅτι δηλ. ὁ ἀλγεβρικὸς ὑπολογισμὸς συνίσταται κυρίως εἰς μεταλλαγὰς ἐπὶ ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν γινομένας, δι' ὧν εὑρίσκομεν ἄλλους ἐγγραμμάτους διαφόρως πρὸς τοὺς πρώτους συσχετισμένους, καὶ ὅσον τὸ δυνατὸν ἁπλουστέρους, ἤτοι τοιούτους, ὥστε, ὅταν ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθῶσι μερικοὶ ἀριθμοί, νὰ χρειάζωνται ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτεροι ἀριθμητικοὶ ὑπολογισμοὶ νὰ γίνωνται, καὶ ὄχι εἰς εὕρεσιν ἀριθμοῦ παριστανομένου δι' ἑνὸς μόνου γράμματος, καὶ κατὰ τοῦτο διαφέρει τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

53. Ἐν ὀλίγοις τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον τοῦ λύειν τὰ προβλήματα ἐν τῷ πρώτῳ κεφαλαίῳ ὑποδείξαντες, ἐν τούτῳ καὶ ἐν τοῖς ἑπομένοις θέλομεν καθ' ἣν ἀκολουθεῖ σειρὰν ὁ λύων πρόβλημα ἀναπτύξει αὐτὴν ὅσον χρειάζεται.

Τὸ δυσκολώτερον τῆς λύσεως προβλήματος εἶναι ἀναντιῤῥήτως ἡ κατασκευὴ τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεών του· διότι δια τὴν μεγάλην ποικιλίαν τῶν προβλημάτων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπαχθῇ εἰς γενικὸν κανόνα, τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαρμογὴ νὰ μὴ παρέχῃ πλέον δυσκολίαν τινά. Ὅ,τι δὲ μέχρι τοῦδε πρὸς κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεων παραγγέλλεται κοινῶς ὡς χρήσιμον εἶναι τὸ ἑξῆς· *Νὰ προσδιορίζηται πρῶτον τί ποσὸν ἢ τίνα ποσὰ πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωνται ὡς ἄγνωστα, καὶ τοῦτο ἢ ταῦτα μόνα νὰ ὑποθέτωνται γνωστὰ καὶ νὰ σημειῶνται διά τινος γράμματος ἕκαστον· μετὰ ταῦτα δὲ μάλιστα νὰ ἐξετάζηται καθ' ὅλα τὰ μέρη του τὸ πρόβλημα, ἵνα ἐννοηθῇ τίνες πράξεις ἔπρεπε νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ ὅλων τῶν τοῦ προβλήματος τῶν ποσῶν, θεωρουμένων ἤδη ὡς γνωστῶν, ἵνα δοκιμασθῇ ἀριθμός τις ἢ ἀριθμοί τινες δεδομένοι ἂν ἦναι οἱ ζητούμενοι, αὗται δὲ αἱ πράξεις νὰ σημειῶνται ἅμα ἀνακαλυπτόμεναι διὰ τῶν ἁρμοδίων σημείων. Οὕτω δὲ θέλουν προκύψει τὰ δύο ἑκάστης ἐξισώσεως μέλη, μεταξὺ τῶν ὁποίων τίθεται τὸ* $=$ *(Ἰδὲ καὶ ἐν* 9).

Ἀλλ' ἕκαστος βλέπει ὅτι, καὶ ἵνα ἐννοηθῶσιν ἀκριβῶς ταῦτα, καὶ ἵνα δύνηταί τις νὰ ὠφελῆται ὑπ' αὐτῶν εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεων τῶν προβλημάτων, εἶναι ἀνάγκη νὰ θεωρήσῃ πολλὰ καὶ διάφορα προβλήματα βοηθούμενος ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος· ἡ δ' ἐνασχόλησίς του αὕτη βαθμηδὸν θέλει τὸν ποιήσει ἐν αὐτῷ ἱκανότητά τινα τοῦ κατασκευάζειν ἔπειτα καὶ τῶν δυσκολωτέρων τὰς ἐξισώσεις. Ἰδοὺ διατί ἐκρίναμεν ὠφέλιμον νὰ κατατάξωμεν ἐφεξῆς διαφόρων εἰδῶν προβλήματα, προτάσσοντες αὐτῶν παρατηρήσεις χρησίμους εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεών των. Πρὸ πάντων δὲ ἐκθέτομεν τὰ ἑξῆς ὡς ἀνάπτυξίν τινα καὶ τροποποίησιν τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

51. Τῶν κατὰ τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον δυναμένων νὰ λυθῶσι προβλημάτων αἱ ἐκθέσεις παριστάνουσιν ἢ ῥητῶς καὶ εὐλήπτως ἢ ἀσαφῶς πως καὶ δυσλήπτως ὅτι ποσά τινα εἶναι ἴσα, ἢ δύο ἢ τέσσαρα ἀνὰ δύο κτλ· τὰ ποσὰ δὲ ταῦτα εἶναι τὰ μέλη τῆς κατασκευασθησομένης ἐξισώσεως ἢ ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος. Τούτων δὲ τῶν ποσῶν τὰ μὲν παριστάνονται διὰ μερικοῦ τινος ἀριθμοῦ ἕκαστον ἢ δι ἑνὸς μόνου γράμματος, τὰ πλεῖστα δὲ ἀδύνατον ἄλλως νὰ σημειῶνται, εἰμὴ διὰ ὅρου ἕκαστον πολυγραμμάτου ἢ μὲ πολλοὺς ἀριθμοὺς καὶ πράξεις σημειωμένας, ἢ διὰ πολυόρου. Πρὸς ἀνακάλυψιν δὲ τῶν μελλουσῶν νὰ σημειωθῶσιν εἰς καταρτισμὸν τούτων τῶν ὅρων ἢ τῶν πολυόρων πράξεων, αἵτινες κυρίως εἶναι αἱ ἀνωτέρω μνημονευόμεναι ὡς ἁρμόδιαι πρὸς δοκιμασίαν ἂν δεδομένος τις ἀριθμὸς ἦναι ὁ ζητούμενος, ἔχουσιν αἱ ἐκθέσεις τῶν προβλημάτων πάντοτε τ' ἀναγκαῖα διδόμενα. Καὶ ὅταν μὲν τοῦ προβλήματος οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἀφῃρημένοι, οἷον τῶν κατωτέρω 14, 16, 17, 26 κτλ. αἱ πρὸς κατασκευὴν τῶν ὅρων ἢ τῶν πολυόρων ἀναγκαῖαι πράξεις κοινῶς εἶναι ἐκφρασμέναι, εἶναι δεδομέναι, καὶ εὐκολώτερά τις τὰς ἐννοεῖ. Ὅταν δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἦναι συγκεκριμένοι καὶ ὑπερσυγκεκριμένοι μάλιστα, ὡς συμβαίνει ἐν τοῖς πλείστοις, αἱ διάφοροι περιστάσεις αἱ ἐν τῇ ἐκθέσει μνημονευόμεναι καὶ ἐνίοτε ὁ τρόπος τῆς ἐκφράσεως καθισταίνουσι πολλάκις δύσκολον τὴν ἀνακάλυψιν τῶν πράξεων· καὶ τότε ὠφελεῖ νὰ προσέχῃ τις ἐν τῇ ἐκθέσει νὰ καταλαμβάνῃ καὶ διακρίνῃ τὰ συντελοῦντα εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν πράξεων, παραβλέπων τὰς ἀνωφελεῖς εἰς τοῦτο περιστάσεις, νὰ μεταβάλλῃ δὲ πολλάκις εἰς ἄλλας σαφεστέρας φράσεις ἰσοδυνάμους τὰς περιπεπλεγμένας, νὰ ἐνθυμῆται δὲ καὶ τὰ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ περὶ λύσεως τῶν ἁπλουστέρων προβλημάτων παραγγελλόμενα.

55. Τριῶν εἰδῶν προβλήματα διακρίνονται, α'. ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἐξισώσεις εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσι τόσαι, ὅσοι εἶναι οἱ ῥητῶς ζητούμενοι ἄγνωστοι, καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ πλεῖστα τῶν ἀκολούθων· β'. ἐκεῖνα τῶν ὁποίων αἱ δυνατὸν νὰ καταρτισθῶσιν ἐξισώσεις εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν ῥητῶς ζητουμένων ἀγνώστων, καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ εἰς τὸ τέλος· καὶ γ'. ὅσων αἱ δυνατὸν νὰ γείνωσιν ἐξισώσεις εἶναι πλειότεραι τῶν μνημονευομένων ἀγνώστων, καὶ τοιαῦτα εἶναι ὀλίγα. Περὶ τούτων δὲ θέλομεν εἰπεῖ τὰ δέοντα ἐν ἄλλοις κεφαλαίοις κατωτέρω· ἀλλ' ἐδῶ σημειοῦμεν μόνον ὅτι πολλάκις δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκλαμβάνωμεν ἀγνώστους ὅλους τοὺς παριστανομένους ῥητῶς ὡς ἀγνώστους ἐν τῇ ἐκθέσει, καὶ ἑπομένως νὰ σημειῶμεν δι' ἰδιαιτέρου γράμματος ἕκαστον καὶ νὰ κατασκευάζωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἐξισώσεις· διότι εἶναι δυνατὸν ἐξ ἑνὸς μόνου ἀγνώ-

στου, ἅμα γείνῃ γνωστός, δι' ἁπλῶν πράξεων δεικνυομένων ἐν τῇ ἐκθέσει νὰ προσδιορίζωνται καὶ οἱ λοιποί. Ἰδοὺ διατί πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν τίς παρέχει εἰς τοῦτο πλειοτέρας εὐκολίας, καὶ αὐτὸν μόνον ἐκλαμβάνοντες ὡς ἄγνωστον καὶ ὑποθέτοντες γνωστὸν θέλομεν σημειοῖ διὰ γράμματος, οἱ δὲ ἄλλοι θέλουσι παριστάνεσθαι διὰ τούτου, διὰ γνωστῶν καὶ διὰ πράξεων ἐκτελεσθησομένων ἐπ' αὐτῶν, καὶ προσδιοριζομένων ἐκ τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει δεδομένων· καὶ τότε θέλει κατασκευάζεσθαι κυρίως μία μόνη ἐξίσωσις ἀντὶ πολλῶν (ἰδὲ καὶ ἐν 9).

56. Μετὰ τὰς γενικὰς ταύτας παρατηρήσεις καὶ παραγγελίας λέγομεν καὶ ὀλίγα τινὰ περὶ ἑκάστης τάξεως προβλημάτων· ὥστε καὶ τὰ γενικὰ διὰ τούτων νὰ γείνωσι σαφέστερα, καὶ τὴν ἀναγκαίαν εἰς τὸ κατασκευάζειν τὰς ἐξισώσεις τῶν προβλημάτων ἱκανότητα ν' ἀποκτήσωσιν οἱ ἀρχάριοι.

Α. Τῆς τάξεως ταύτης προβλήματα εἶναι κυρίως ἐκεῖνα, ἐν οἷς διὰ τῆς γνώσεως μερῶν τινων ἀριθμοῦ ἢ μερῶν τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ καὶ τινων μερῶν του πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἢ μόνος αὐτὸς ἢ καί τις μὲ αὐτὸν συσχετισμένος.

Ἴσα δὲ ποσὰ εἶναι ἢ ὁ ζητούμενος διττῶς παριστανόμενος, ἁπλῶς τε καὶ διὰ τῶν μερῶν του (1,5,6,10), ἢ μέρη αὐτοῦ πρὸς ἄλληλα διττῶς παριστανόμενα (2,9,11), ἢ τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ καὶ ἄλλων συσχετισμένων μὲ αὐτόν, διττῶς παριστανόμενον (3,4,7,8).

Τῶν ἴσων δὲ ποσῶν τὰ μὲν εἶναι κεφάλαια ἄλλων, τὰ δὲ καὶ διαφορὰ ἄλλων (9 καὶ 10)· τὰ μὲν παριστάνονται δι' ἑνὸς μερικοῦ ἀριθμοῦ, τὰ δὲ διὰ πολυόρων, καὶ μόνον τοῦ 11 καὶ τὰ δύο εἶναι πολύορα· τὰ μὲν τέσσαρα πρῶτα εἶναι ἁπλούστερα, τὰ δὲ συνθετώτερα· τελευταῖον τὸ 10 καὶ 11, ἂν καὶ ἔχουσι δύο ἀγνώστους, ὅμως ὁ ἕτερος ἐκλαμβάνεται ἄγνωστος καὶ σημειοῦται διὰ χ. Ἄλλαι δέ τινες λεπτομέρειαι ἀφίνονται εἰς τὸν διδάσκοντα νὰ τὰς παρατηρήσῃ πρὸς τοὺς μαθητάς του.

1. Δύο τινὲς ὁμοῦ ἠγόρασαν ἵππον, καὶ ὁ μὲν εἶχε καὶ ἔδωκε τὸ πέμπτον τῆς ἀξίας του, ὁ δὲ τὸ ἕβδομον, ἐπειδὴ δὲ δὲν

ξήρκεσαν ταῦτα, ἐδανείσθησαν ἀκόμη καὶ ἔδωκαν 276 δραχμάς· πόσον ἀξίζει αὐτὸς ὁ ἵππος;

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{7}+276=x.$$

2. Τὸ τέταρτον καὶ τὸ πέμπτον τῶν ὅσα ἔχω ἐν τῷ βαλαντίῳ μου εἶναι δρ 2, 25· πόσα ἔχω ἐν αὐτῷ;

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=2,25.$$

3. Ἐκ τῶν ἐπιχειρήσεών του ἔμπορός τις ἐκέρδισεν 20 ἀνὰ 100 τοῦ κεφαλαίου του, καὶ οὕτως ἡ νῦν χρηματική του κατάστασις ἀναβαίνει εἰς δρ 15571· πόσον ἦτον τὸ κεφάλαιόν του; (τὸ κέρδος του ἁπλούστερα εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ κεφαλαίου του).

$$x+\frac{x}{5}=15571.$$

4. Κεφάλαιόν τι ὁμοῦ μὲ τοὺς πέντε ἐτῶν ἁπλοῦς τόκους του πρὸς 4 τ. 0/0 συμποσοῦνται εἰς δρ. 8208· πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον;

$$x+\frac{x}{5}=8208.$$

5. Εἰς μὲν τὴν τροφήν του ἐργάτης τις δαπανᾷ τὸ τρίτον τοῦ ἐτησίου κέρδους του, εἰς φορέματα δὲ καὶ εἰς ἐνοίκιον τὸ ὄγδοον, εἰς ἄλλα δὲ ἔκτακτα ἔξοδα τὸ δέκατον, ἐναποταμιεύει δὲ καὶ 318 δρ· πόσον εἶναι τὸ ἐτήσιον κέρδος του;

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{8}+\frac{x}{10}+318=x.$$

6. Ἀοίδιμός τις ἐν τῇ διαθήκῃ του διέταξεν ἡ μὲν γυνή του νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ τῆς περιουσίας του, ἑκάτερος δὲ τῶν παίδων του τὸ ἕκτον αὐτῆς, ὁ δὲ οἰκέτης του τὸ δωδέκατον, καὶ αἱ ὑπόλοιποι 600 δρ νὰ διανεμηθῶσιν εἰς πένητας· πόσα ἦσαν ὅλα του τὰ χρήματα;

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+600=x.$$

7. Τὰ μὲν $\frac{4}{5}$ τῶν χρημάτων του τοκίσας τις πρὸς 4 τ. 0/0,

τὸ δὲ ἄλλο πέμπτον πρὸς 5 τ. 0/0, ἔλαβε κεφάλαια καὶ τόκους ὅλα δρ 2940· πόσα ἐτόκισεν;

$$x+\frac{4x}{125}+\frac{x}{100}=2940.$$

8. Ἐρωτηθεὶς τις πόσα χρήματα ἔχει ἀπεκρίθη, Ἂν ἀπὸ τὸ πενταπλάσιον τῶν ὅσα ἔχω ἀφαιρεθῶσι 3, καὶ εἰς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου προστεθῶσι 2, θέλει προκύψει ὁ 23, μὴ λογιζομένου τοῦ ἐν δεξιᾷ αὐτοῦ 0· πόσα ἔχει;

$$(5x-3)4+2=230.$$

9. Τρὶς πωλήσας ἐντὸς τῆς αὐτῆς ἡμέρας ἔμπορος, καὶ ζημιωθεὶς μὲν κατὰ τὴν πρώτην πώλησιν τὸ ἕκτον τῆς ὅλης ἀξίας τῶν πωληθέντων καὶ κατὰ τὴν δευτέραν τὸ δέκατον, κερδίσας δὲ κατὰ τὴν τρίτην τὸ τρίτον, εὗρε λογισάμενος ὅτι ἐκέρδισε δρ 3· πόσον ἤξιζαν τὰ πωληθέντα τὴν ἡμέραν ἐκείνην;

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{10}-\frac{x}{3}=3, \text{ ἢ ὀρθότερον } \frac{x}{3}-\frac{x}{6}-\frac{x}{10}=3.$$

10. Τρεῖς κληρονόμοι Α, Β, Γ μέλλουσι νὰ μοιρασθῶσι κληρονομίαν τινὰ οὕτως, ὁ μὲν Α νὰ λάβῃ 3000 δρ ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος ὅλης, ὁ δὲ Β 1000 ὀλιγώτερον τοῦ τρίτου ὅλης, ὁ δὲ Γ 800 πλειότερον τοῦ τετάρτου αὐτῆς· πόση ἦτον ἡ κληρονομία καὶ πόσον τὸ ἑκάστου μερίδιον;

$$\frac{x}{2}-3000+\frac{x}{3}-1000+\frac{x}{4}+800=x.$$

11. Οἱ παῖδές τινος ἐμοιράσθησαν τὴν ὁποίαν ὁ πατήρ των ἄφησε κληρονομίαν οὕτως, ὁ μὲν πρωτότοκος πρῶτος ἔλαβεν 100 δρ καὶ τὸ δέκατον τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δὲ δεύτερος ἔπειτα 200 δρ καὶ τὸ δέκατον τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δὲ τρίτος μετ' αὐτοὺς 300 καὶ τὸ δέκατον τοῦ ὑπολοίπου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς οἱ λοιποί, ἔλαβον δὲ ὅλοι ἴσα· πόση ἦτον ἡ κληρονομία καὶ πόσοι οἱ παῖδες; Τὰ τοῦ πρωτοτόκου καὶ τοῦ δευτέρου μερίδια εἶναι ἴσα.

$$100+\frac{x-100}{10}=200+\frac{x-100-\frac{x-100}{10}-200}{10}$$

Β. Τὰ τῆς τάξεως ταύτης (12—31) εἶναι ἐκεῖνα, ἐν οἷς εἶναι γνωστὸν τὸ κεφάλαιον δύο ἢ τριῶν ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν καὶ διάφοροι σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους, ζητοῦνται δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

Ἴσα δὲ ποσὰ εἶναι τὸ δεδομένον κεφάλαιον καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερῶν του, εὑρισκομένων κατὰ τὰς ἄλλας δεδομένας σχέσεις· ἐν δὲ τῷ 17, 19 καὶ 20 εἶναι δύο διάφορα κεφάλαια. Τὸ ἕτερον δὲ μόνον ποσὸν παριστάνεται διὰ πολυόρου. Ἂν δὲ καὶ οἱ ἄγνωστοι εἶναι ἢ δύο ἢ τρεῖς κτλ, ὅμως εἷς μόνος ἐκλαμβάνεται ἄγνωστος, καὶ μία ἐξίσωσις ἑπομένως κασκευάζεται.

12. Δύο τραπεζῖται λογισάμενοι τὰ ἐν τοῖς ταμείοις αὐτῶν εὑρίσκουσιν ὅτι τῶν δύο ὁμοῦ αἱ δραχμαὶ συμποσοῦνται εἰς 38700, αἱ δὲ τοῦ ἑτέρου τὸν ἀριθμὸν διπλάσιαι τῶν τοῦ ἄλλου· πόσας ἔχει ἑκάτερος ἐν τῷ ταμείῳ του;

$$x+2x=38700.$$

13. Δύο τινῶν μοιρασθέντων δρ 2500 ὁ ἕτερος ἔλαβε τοσάκις 20 δρ, ὁσάκις 5 δρ ἔλαβεν ὁ ἄλλος· πόσας ἑκάτερος;

$$x+4x=2500.$$

14. Νὰ μερισθῇ ὁ 237 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἕτερον νὰ ἦναι τοῦ ἄλλου μεγαλήτερον καθ' ἓν τέταρτον.

$$x+\frac{5x}{4}=237.$$

15. Νὰ μερισθῇ ὁ 1800 εἰς δύο τινας ἀναλόγως τῆς ἡλικίας αὐτῶν, ὄντος τοῦ μὲν 10 ἐτῶν, τοῦ δὲ 35.

$$x+\frac{35x}{10}=1800.$$

16. Τίνες εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ μὲν κεφάλαιον εἶναι 96, ἡ δὲ διαφορὰ 16;

$$x+x+16=96.$$

17. Νὰ μερισθῇ ὁ 46 εἰς δύο ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι 10 τὸ κεφάλαιον τῶν πηλίκων αὐτῶν διῃρημένων τοῦ μὲν διὰ 7, τοῦ δὲ διὰ 3.

$$\frac{x}{7}+\frac{46-x}{3}=10.$$

18. Δύο μικρέμποροι ἐμοιράσθησαν 500 δρ οὕτως, ὥστε ὁ ἕτερος ἔλαβε τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ ἄλλου καὶ ἔτι 50 δρ διὰ τοὺς κόπους του· πόσας ἑκάτερος;

$$x+\frac{x}{2}+50=500.$$

19. Φρουρά τις σύγκειται ἐκ πεζῶν καὶ ἱππέων ὅλων ὁμοῦ 1250, καὶ ἕκαστος μὲν τῶν πεζῶν λαμβάνει κατὰ μῆνα δρ 10, ἕκαστος δὲ ἱππεὺς δρ 15, εἰς ὅλους δὲ ὁμοῦ δαπανῶνται δρ 13500· πόσοι εἶναι οἱ πεζοὶ καὶ πόσοι οἱ ἱππεῖς;

$$10x+(1250-x)15=13500.$$

20. Οἴνου 36 λεπτῶν τὴν ὀκὰν καὶ οἴνου 20 λεπ οἰνοπώλης θέλει ν' ἀναμίξῃ μέρος τοσοῦτον, ὥστε ν' ἀποτελέσῃ 50 ὀκάδων κρᾶμα, πωλητέων ἄνευ κέρδους ἢ ζημίας πρὸς λεπτὰ 30 τὴν ὀκάν· πόσας ὀκάδας ἐξ ἑκατέρου θέλει λάβει;

$$\frac{36x+20(50-x)}{50}=30.$$

21. Εἰς γάμον τινὰ ἦσαν ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παῖδες ὅλοι 266, καὶ ὁ μὲν τῶν ἀνδρῶν ἀριθμὸς ἦτον τετραπλάσιος τοῦ τῶν παίδων, ὁ δὲ τῶν γυναικῶν διπλάσιος· πόσοι οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία;

$$x+2x+4x=266.$$

22. Καθ' ὅλην του τὴν περιήγησιν διεπορεύθη περιηγητής τις στάδια 12540, τὰ μὲν ἔφιππος, τρὶς καὶ $\frac{1}{2}$ δὲ τόσα διαπόντιος, καὶ πεζὸς δὶς καὶ $\frac{1}{3}$ τόσα, ὅσα κατὰ θάλασσαν· πόσων σταδίων ὁδὸν διήνυσε πλέων, πόσων πεζὸς καὶ πόσων ἔφιππος;

$$x+\frac{7x}{2}+\frac{49x}{6}=12540.$$

23. Τρεῖς δῆμοι Α, Β, Γ χρεωστοῦν ν' ἀποστείλωσι 21 στρατευσίμους ἀναλόγως τῆς πληθύος τῶν κατοίκων των, ὄντων τῶν τοῦ Α πρὸς τοὺς τοῦ Β ὡς 3 πρὸς 4, τῶν δὲ τοῦ Β πρὸς τοὺς τοῦ Γ ὡς 8 πρὸς 7· πόσους θέλει στείλει ἕκαστος;

$$x+\frac{3x}{4}+\frac{7x}{8}=21.$$

24. Χήρα ὁμοῦ μὲ τὰ πέντε τέκνα της, δύο ἄῤῥενα καὶ τρία θήλεα, ἔχουν νὰ μοιρασθῶσιν 7500 δρ οὕτως, ὥστε τὸ τῶν ἀῤῥένων μερίδιον νὰ ἦναι διπλάσιον τοῦ τῶν κορασίων, τὸ δὲ ἰδικόν της κατὰ 500 δρ μεγαλήτερον τῶν ὅσας θέλουσι λάβει ὅλα τὰ τέκνα της· πόσον εἶναι τὸ ἰδικόν της καὶ πόσον τῶν τέκνων της τὸ μερίδιον;

$$x+2x+3x+500=7500.$$

25. Τρεῖς γεωργοὶ Α, Β, Γ ἔχουν 8000 στρέμματα γῆς νὰ μοιρασθῶσι, καὶ ὁ μὲν Β θέλει λάβει 276 ὀλιγώτερα τοῦ Α, ὁ δὲ Γ 1112 πλειότερα τοῦ Β· πόσα θέλει λάβει ἕκαστος;

$$x+x-276+x-276+1112=8000.$$

26. Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὧν τὸ κεφάλαιον 70, ὁ δὲ δεύτερος διῃρημένος διὰ τοῦ πρώτου νὰ δώσῃ πηλίκον 2 καὶ κατάλοιπον 1, ὁ δὲ τρίτος διῃρημένος διὰ τοῦ δευτέρου νὰ δώσῃ καὶ πηλίκον καὶ κατάλοιπον 3.

$$x+2x+1+6x+6=70.$$

27. Τρεῖς ἔμποροι ἑταιρείαν ποιήσαντες καὶ εἰς τὸ κοινὸν ἀφήσαντες ὁ μὲν Α 1200 δρ μῆνας 8, ὁ δὲ Β 800 δρ μῆνας 10, ὁ δὲ Γ 600 δρ μῆνας 14, ἐκέρδισαν δρ 500· πόσας τούτων ἕκαστος δικαιοῦται νὰ λάβῃ;

$$x+\frac{5x}{6}+\frac{7x}{8}=500.$$

28. Τριῶν ἑταίρων εἰς ἐμπόριον κατέβαλεν ὁ μὲν Β κατὰ τὸ ἥμισυ πλειοτέρας δρ τοῦ Α, ὁ δὲ Γ 800 δρ πλειοτέρας παρὰ τὸν Α καὶ τὸν Β ὁμοῦ, καὶ λαμβάνει 2570 δρ ἐκ τοῦ ὅλου κέρδους αὐτῶν 5020 δρ· πόσας κατέβαλεν ἕκαστος;

$$\frac{5140x}{5x+1600}+\frac{7710x}{5x+1600}+2570=5020.$$

Θ

29. Οὔσης τῆς καταβολῆς ἑταίρου τινὸς Γ δρ 5600, τ δὲ τοῦ συνεταίρου του Α κατὰ 320 δρ μικροτέρας τῆς τ τρίτου Β, ὁ μὲν Α τὴν ἀφίνει εἰς τὴν ἑταιρείαν 7 μῆνας, ὁ Β 14, ὁ δὲ Γ 12· τοῦ κέρδους αὐτῶν ὅλου δρ 2402 καὶ μερισθέντος ἀναλόγως τῶν καταβολῶν καὶ τῶν χρόνων, ὁ ἔλαβε μερίδιον δρ 879 καὶ $\frac{2}{3}$· πόσα ἔλαβεν ὁ Α καὶ πόσα ὁ

$$\frac{(7\chi-2240)2639}{42\chi}+\frac{2639}{3}+\frac{67206\times2639}{42\chi}=2402+$$

30. Πέμπει τις 1000 δρ πρὸς τοὺς τέσσαρας υἱούς νὰ τὰς μοιρασθῶσιν οὕτως, ὥστε ὁ νεώτερος τὴν ἡλικίαν λαμβάνῃ 20 δρ ὀλιγώτερον τοῦ ἀμέσως πρεσβυτέρου τον εἶναι τοῦ νεωτάτου τὸ μερίδιον;

$$\chi+\chi+20+\chi+40+\chi+60=1000\cdot$$

31. Πέντε κληρονόμων μοιρασθέντων 5600 ὁ μὲν Β βε τὸ διπλάσιον τοῦ Α καὶ ἔτι 200 δρ, ὁ δὲ Γ τὸ τριπλά τοῦ Α καὶ ἔτι 400 δρ, ὁ δὲ Δ τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα ἔλ ὁμοῦ ὁ Β καὶ ὁ Γ καὶ ἔτι 150 δρ, ὁ δὲ Ε τὸ τέταρτον ὅσα ἔλαβον οἱ ἄλλοι τέσσαρες ὁμοῦ καὶ 475 δρ· πόσας ἔκασ

$$\chi+2\chi+200+3\chi+400+\frac{5\chi+600}{2}+150+$$

$$\frac{17\chi+2100}{8}+475=5600,\ \text{ἢ}\ \frac{85\chi+14300}{8}=5600$$

Γ. Τὰ ἀπὸ τοῦ 32 μέχρι καὶ τοῦ 38 εἶναι προβλήματα οἷς γνωστῶν ὄντων δύο ἀριθμῶν, ἑπομένως καὶ τοῦ λόγου αὐτ πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τρίτος, ὅς τις προστεθεὶς εἰς τοὺς γνωσ ἢ ἀφαιρεθεὶς ἀπ' αὐτούς, ἢ προστεθεὶς ἢ ἀφαιρεθεὶς τὸν ἕτερον αὐτῶν, νὰ μεταβάλλῃ τὸν λόγον αὐτῶν εἰς λον λόγον δεδομένον. Τὰ δὲ 39 καὶ 40 διαφέρουσι των μόνον καθότι ἔχουσιν ἕνα δεδομένον ἀριθμόν, ὁ δὲ π θετέος εἰς τοῦτον ζητεῖται τοιοῦτος, ὥστε νὰ κατασ τὸν λόγον τοῦ δεδομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ τε καὶ προσθετέου ἴσον μὲ δεδομένον τινὰ λόγον. Τοῦ δὲ 38 οἱ ἀριθ

οἱ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ 7 πρὸς 3 εὑρίσκονται διῃρημένου τοῦ 80 εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τοῦ 7 καὶ τοῦ 3· τὰ ἴσα δὲ ποσὰ παρέχει ἡ ἀναλογία $56+\chi:24::11:4$ ἢ ἡ $56:24-\chi::11:4$. Ἄργυρος δὲ καθαρὸς κατὰ 0,900 σημαίνει μίγμα ἔχον 0,900 καθαρὸν ἄργυρον καὶ 0,100 ἄλλο τι μέταλλον ἢ μετάλλων μίγμα. Τὰ ἴσα δὲ ποσὰ τοῦ 40 παρέχει ἡ ἀναλογία $35+\chi:35::0,900:0,787\frac{1}{2}$, τοῦ δὲ 39 ἡ $136+\chi:136::120:80$.

32. Γεώργιός τις 40 ἐτῶν ἔχει υἱὸν 9 ἐτῶν· εἰς πόσα ἔτη ἡ τοῦ πατρὸς ἡλικία θέλει εἶσθαι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

$$40+\chi=2(9+\chi).$$

33. Ὁ Κίμων εἶναι 30 ἐτῶν καὶ ὁ Πλάτων 20· μετὰ πόσα ἔτη ἡ τοῦ Κ ἡλικία θέλει εἶσθαι τὰ $\frac{5}{4}$ τῆς τοῦ Π; ἢ πρὸ πόσων ἐτῶν ἦτον διπλασία τῆς τοῦ Π ἡ τοῦ Κ ἡλικία;

$$30+\chi=\tfrac{5}{4}(20+\chi),\ \text{ἢ}\ 30-\chi=2(20-\chi).$$

34. Ἐὰν ὁ Κ καὶ ὁ Π, ἀδελφοὶ ὄντες, ἔχωσι καὶ τρίτον ἀδελφὸν ἑξαετῆ, πότε αἱ τῶν δύο νεωτέρων ἡλικίαι ὁμοῦ θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι μὲ τὴν τοῦ Κ;

$$20+\chi+6+\chi=30+\chi.$$

35. Ὁ θεῖος τῶν τριῶν ἀδελφῶν εἶναι 49 ἐτῶν, καὶ ἑπομένως κατὰ 7 ἔτη ἡ ἡλικία του μικροτέρα τῶν ἡλικιῶν ὁμοῦ τῶν τριῶν ἀνεψιῶν του· πότε ἡ τοῦ θείου ἡλικία θέλει εἶσθαι ἴση μὲ ὅλας ὁμοῦ τὰς ἡλικίας τῶν τριῶν ἀνεψιῶν;

$$49-\chi=30-\chi+20-\chi+6-\chi.$$

36. Ἐν χορῷ τινι κατ' ἀρχὰς ὁ τῶν ἀνδρῶν ἀριθμὸς ἦτον τριπλάσιος τοῦ τῶν γυναικῶν, ἀλλ' ἀπελθόντων 8 ἀνδρογύνων ἔμειναν πεντάκις τόσοι ἄνδρες, ὅσαι γυναῖκες· πόσοι ἄνδρες καὶ πόσαι γυναῖκες ἦσαν κατ' ἀρχάς;

$$5(\chi-8)=3\chi-8.$$

37. Τίς ἀριθμὸς ἐὰν προστεθῇ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλασματικοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$· ἢ τίς ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοὺς δύο, ἢ τίς εἰς τὸν μὲν ἂν προστεθῇ, ἀπὸ τὸν ἄλλον δὲ ἂν ἀφαιρεθῇ, θέλει τρέψει τὸν $\frac{\alpha}{\beta}$ εἰς ἄλλον κλασματικὸν ἴσον μὲ τὸν $\frac{\gamma}{\delta}$;

$$\frac{a+\chi}{\beta+\chi}=\frac{r}{\pi}, \quad \frac{a-\chi}{\beta-\chi}=\frac{r}{\pi}, \quad \frac{a+\chi}{\beta-\chi}=\frac{r}{\pi}, \quad \frac{a-\chi}{\beta+\chi}=\frac{r}{\pi}.$$

38. Ἀνεμίχθησαν ποσὰ νίτρου καὶ θείου ἀνὰ 7 ὀκ… τοῦ πρώτου καὶ 3 τοῦ δευτέρου, καὶ ἀπετέλεσαν μίγμα … ὀκάδων· πόσον νίτρον χρειάζεται νὰ προστεθῇ εἰς τὸ μίγ… ἢ πόσον θεῖον ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ αὐτό, ὥστε νὰ καταντ… τὰ μέρη τοῦ νίτρου πρὸς τὰ τοῦ θείου ὡς 11 πρὸς 4;

$$(56+\chi)4=24\times 11, \text{ ἢ } 56\times 4=(24-\chi)11.$$

39. Ἠγόρασεν οἰνοπώλης τὰς 136 ὀκάδας καλοῦ οἴ… πρὸς δρ 1,20 τὴν ὀκάν, ἀλλ' ἐπειδὴ δυσκόλως ἤθελε τὸ π… λήσει καθαρόν, ὡς ἀκριβόν, θέλει νὰ τὸ συγκεράσῃ μὲ ὕδ… ὥστε νὰ τὸ πωλῇ λεπτὰ 80 τὴν ὀκάν· πόσας ὀκάδας … τος θέλει ῥίψει;

$$(136+\chi)80=136\times 120.$$

40. Χρυσοχόος ἔχων 35 οὐγκίας ἀργύρου κατὰ 0,… καθαροῦ, πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συγχωνεύσῃ μὲ αὐτόν, … τὸ συγχώνευμα νὰ ἦναι κατὰ 0,787 $\frac{1}{2}$ καθαρόν;

$$\frac{1575}{2}(35+\chi)=35\times 900.$$

Δ. Τὰ τῆς τάξεως ταύτης προβλήματα (41 — 47) ἔχ… διδόμενα ποσά τινα συσχετισμένα μὲ ἄλλα, οἷον τὰ ποσ… χυνομένου ὑγροῦ διὰ διαφόρων στροφίγγων καὶ τοὺς χρόνους … οὓς δι' ἑκάστου στρόφιγγος ῥέει (41, 42, 42, 47), τὰ π… τοῦ ἔργου διαφόρων ἐργατῶν ἢ τὰ τῶν χρημάτων (44, … καὶ τοὺς χρόνους καθ' οὓς γίνονται τὰ ἔργα ἢ ἀνήκουσ… χρήματα, τὰ ποσὰ τοῦ βάρους καὶ τοὺς ὄγκους, οἵτινες ἔχ… αὐτὰ τὰ βάρη (76)· πρόκειται δὲ νὰ εὑρεθῇ ἢ ὁ χρόνος … τὸ αὐτὸ ποσὸν τοῦ ὑγροῦ τὸ διὰ τῶν διαφόρων στροφί… ῥέον ἢ ἄλλο δεδομένον χύνεται δι' ὅλων ὁμοῦ, ἢ τὸ αὐτὸ ἔρ… κτλ ἢ ἄλλο δεδομένον γίνεται ὑφ' ὅλων ὁμοῦ τῶν ἐργ… κτλ, ἢ νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κτλ.

Ἴσα δὲ ποσὰ εἶναι τὸ ὅλον ὑγρὸν καὶ τὰ κατὰ τὸν αὐτ… χρόνον διὰ τῶν διαφόρων στροφίγγων χυνόμενα μέρη του, … ὅλον ἔργον καὶ τὰ μέρη του τὰ ὑπὸ τῶν διαφόρων ἐργατῶν

-όμενα κτλ. Τῶν ἴσων δὲ ποσῶν τὰ μέρη κατασκευάζονται καὶ ἀναλογιῶν.

41. Βαρέλα πλήρης οἴνου κενοῦται διὰ δύο στροφίγγων συγχρόνως, διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν ὁποίων κενοῦται εἰς 2 ὥρας, διὰ δὲ τοῦ ἄλλου εἰς 3· εἰς πόσας ὥρας κενοῦται;

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1.$$

42. Δεξαμενὴ πληροῦται συγχρόνως ὑπὸ τοῦ ὕδατος τριῶν βρύσεων, τῶν ὁποίων ἡ μὲν μόνη τὴν πληροῖ εἰς ὥραν $1\frac{1}{3}$, ἡ δὲ εἰς $3\frac{1}{3}$, ἡ δὲ εἰς 5· εἰς πόσας ὥρας πληροῦται ὑπὸ τῶν τριῶν;

$$\frac{3x}{4}+\frac{3x}{10}+\frac{x}{5}=1.$$

43. Δεξαμενὴ χωροῦσα πηχυαίους κύβους $755\frac{1}{4}$ μέλλει νὰ πληρωθῇ ὑπὸ τριῶν πηγῶν, τῶν ὁποίων ἡ μὲν χύνει ὕδατος 12 πηχυαίους κύβους εἰς $3\frac{1}{4}$, ἡ δὲ 15 εἰς $2\frac{1}{2}$, ἡ δὲ 27 εἰς 3 ὥρας· εἰς πόσον χρόνον αἱ τρεῖς ὁμοῦ θέλουσι τὴν πληρώσει;

$$\frac{12\times 4x}{13}+6x+9x=755+\frac{1}{4}.$$

44. Τρεῖς κτίσται ὁμοῦ μέλλουν νὰ κτίσωσιν 756 πηχυαίων κύβων τεῖχος, τοῦ ὁποίου ὁ μὲν κτίζει 8 πηχυαίους κύβους εἰς πέντε ἡμέρας, ὁ δὲ 9 εἰς 4, ὁ δὲ 10 εἰς 6 ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας θέλουσι τὸν ἐκτελέσει;

$$\frac{8x}{5}+\frac{9x}{4}+\frac{10x}{6}=756.$$

45. Πρωτομάστωρ, 12 κτίσται καὶ 4 ὑπηρέται ἐργασθέντες ὁ μὲν πρὸς δρ 3, 25 τὴν ἡμέραν, οἱ δὲ πρὸς δρ 1,25, οἱ δὲ πρὸς 80 λεπτά, ἔλαβον ὅλοι ὁμοῦ δρ 196,65· πόσας ἡμέρας εἰργάσθησαν;

$$325x+12\times 125x+4\times 80x=19665.$$

46. Τριῶν κομματίων μετάλλων τοῦ αὐτοῦ μὲν ὄγκου, ἀλλὰ διαφόρου βάρους, τοῦ μὲν 5 δακτυλιαῖοι κύβοι ζυγίζουσι δραχμὰς $69\frac{3}{4}$, τοῦ δὲ $3\frac{1}{2}$ ἔχουσι βάρος 41 δρ, τοῦ δὲ $4\frac{2}{3}$

εἶναι βαρεῖς 91 δρ, τὰ δὲ τρία κομμάτια ὁμοῦ ζυγίζουσι δρ 949 $\frac{2}{3}$· πόσος εἶναι ἑκάστου ὁ ὄγκος;

$$\frac{279}{20}x+\frac{41\times 8}{7}x+\frac{91\times 7}{30}x=949+\frac{2}{3}.$$

47. Δεξαμενῆς πλήρους ὕδατος, καὶ ἐχούσης δύο στρόφιγγας διαφόρου μεγέθους, χύνεται τὸ τέταρτον τοῦ ὕδατος διὰ τοῦ ἑτέρου μόνου, ἔπειτα τὰ τρία τέταρτα διὰ τῶν δύο ὁμοῦ εἰς ὥραν 1 $\frac{1}{4}$ πλειότερον τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διὰ τοῦ πρώτου ἐχύθη τὸ τέταρτον, ἐνῷ, ἂν ἐχύνετο τὸ ὕδωρ ὅλον ἐξ ἀρχῆς διὰ τῶν δύο, ἤθελε κενωθῆ ἡ δεξαμενὴ ἓν τέταρτον τῆς ὥρας πρωτήτερα· εἰς πόσας ὥρας ἤθελε κενωθῆ διὰ μόνου τοῦ τὸ τέταρτον τοῦ ὕδατος χύσαντος εἰς τὴν ἀρχήν;

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5+x}{3}.$$

Ε. Ταύτης τῆς τάξεως προβλήματα εἶναι (48—58) τὰ ἐν οἷς ὑπάρχει διάστημα, χρόνος καὶ ταχύτης, ἅτινα ἔχουσι χώραν σχεδὸν πάντοτε καὶ τὰ τρία ὁμοῦ ἐπὶ κινήσεως, γινομένης ἐπὶ εὐθείας ἢ ἐπὶ ἄλλης τε γραμμῆς καὶ ἐπὶ περιφερείας· ἄγνωστον δὲ εἶναι ἕν τι τῶν τριῶν καὶ τἄλλα δύο εἶναι δεδομένα, ποτὲ μὲν ἁπλῶς διδόμενα, ποτὲ δὲ περιπεπλεγμένως ὡς ἡ ταχύτης ἐν τῷ 49, 50 κτλ. Τὰ δὲ κινούμενα ἢ διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἀντιθέτως, κινοῦσιν δὲ ἢ ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως, ἢ εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἢ κατὰ διαφόρους χρόνους. Τὰ τρία δὲ τελευταῖα διαφέρουσιν ὀλίγον τι τῶν ἄλλων καὶ ἔτι ὀλιγώτερον τὸ 51.

Ἴσα δὲ ποσὰ εἶναι ἢ τὰ διαστήματα ἢ οἱ χρόνοι διττῶς παριστανόμενα, ἢ αἱ περιστροφαὶ ἢ τοῦ ὕδατος τὰ ποσὰ κτλ. Πρὸς κατασκευὴν δὲ τῶν πρώτων εἶναι ὠφελιμώτατον νὰ γνωρίζῃ τις ὅτι ἐπὶ ὁμαλῆς κινήσεως, ὁπότε ἡ ταχύτης διαμένει ἡ αὐτή, *τὸ διάστημα εἶναι γινόμενον τῆς ταχύτητος ἐπὶ τὸν χρόνον, καὶ ὅτι ἑπομένως ὁ χρόνος εἶναι ὁ λόγος τοῦ διαστήματος* πρὸς τὴν ταχύτητα. Ὥστε, ἂν Δ σημαίνῃ τὸ διάστημα, X τὸν χρόνον καὶ T τὴν ταχύτητα, ἔχομεν

$$\Delta = T \times X, \text{ ἢ } X = \frac{\Delta}{T}, \text{ ἢ } T = \frac{\Delta}{X}.$$

48. Περιηγητής τις κινήσας 10 ἡμέρας ὕστερον ἄλλου ὑπάγει κατόπιν του, ἵνα τὸν φθάσῃ, ὁδοιπορῶν 90 στάδια τὴν ἡμέραν, ἐνῷ ὁ ἄλλος ὁδεύει 40 μόνον· εἰς πόσας ἡμέρας θέλει τὸν φθάσει; Εἰς πόσας δὲ, ἂν αἱ ταχύτητες αὐτῶν ἦναι ὡς 8 πρὸς 3;

$$90x - 40x = 400 \text{ ἢ } \tfrac{8}{3}x - x = 10.$$

49. Ὥρας 9 μετὰ τὴν ἐξ Ἀθηνῶν ἀναχώρησιν ταχυδρόμου, ὅστις ὁδοιπορεῖ 70 στάδια εἰς 5 ὥρας, πέμπεται κατόπιν του ἄλλος ταχυδρόμος διατρέχων 50 στάδια εἰς 3 ὥρας· πόσα στάδια μακρὰν τῶν Ἀθηνῶν θέλει φθάσει ὁ δεύτερος τὸν πρῶτον;

$$\frac{3x}{50} = \frac{(x - 126)5}{70}.$$

50. Ἀλώπηξ διωκομένη ὑπὸ λαγωνικοῦ εἶναι 60 πηδήματα μακρὰν αὐτοῦ, πηδᾷ δὲ 9 πηδήματα, ἐνῷ τὸ λαγωνικὸν πηδᾷ 6, ἀλλὰ 3 πηδήματα τούτου ἰσοδυναμοῦσι τὸ μῆκος μὲ 7 τῆς ἀλώπεκος· μετὰ πόσα πηδήματά του τὸ λαγωνικὸν θέλει συλλάβει τὴν ἀλώπεκα;

$$\frac{x}{14} = \frac{7x - 180}{9 \times 7}.$$

51. Ἀπὸ σταθμοῦ εἰς σταθμὸν παρετηρήθη ὅτι ὀχήματος ὁ μὲν ἔμπροσθεν τροχὸς, οὗτινος ἡ περιφέρεια εἶναι ποδῶν $5\frac{1}{4}$, περιεστάφη 2000 περιστροφὰς ὑπὲρ τὸν ὀπίσθιον τροχὸν, οὗτινος ἡ περιφέρεια εἶναι ποδῶν $7\frac{1}{8}$· πόσον ποδῶν εἶναι τὸ μεταξὺ τῶν δύο σταθμῶν διάστημα;

$$\frac{4x}{21} - \frac{8x}{57} = 2000.$$

52. Ἔκ τινος τόπου A ἐξεκίνησε τάγμα στρατιωτῶν πρὸς τὸν B τόπον, ὁδεῦον $35\frac{1}{2}$ στάδια τὴν ἡμέραν, ἐκ δὲ τοῦ τόπου B μετὰ 8 ἡμέρας ἀνεχώρησεν ἄλλο τάγμα, διευθυνόμενον

πρὸς τὸν Α τόπον καὶ ὁδεῦον στάδια $52\frac{3}{4}$ τὴν ἡμέραν, τὸ δὲ μεταξὺ τῶν δύο τόπων διάστημα εἶναι 800 σταδίων· πόσον μακρὰν τοῦ Α θέλουσι συναπαντηθῆ τὰ δύο τάγματα; ἢ εἰς ποίαν ἡμέραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου θέλουσι συναπαντηθῆ;

$$\frac{2\chi-568}{71}=\frac{(800-\chi)4}{211}$$

53. Ἐχθρικὸς στρατὸς ὁδοιπορῶν 45 στάδια τὴν ἡμέραν φεύγει δύο ἡμέρας πρότερον ἔκ τινος θέσεως, ἐκ τῆς ὁποίας ἔπειτα καὶ ὁ καταδιώκων στρατὸς ὁρμᾶται, ἵνα φθάσῃ τὸν φεύγοντα εἰς ἓξ ἡμέρας· πόσα στάδια τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ὁδοιπορῇ;

$$6\chi=360.$$

54. Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημβρίαν, ὄντος τοῦ τε λεπτοδείκτου καὶ τοῦ ὡροδείκτου κατὰ τὴν δωδεκάτην· εἰς τίνα ὥραν θέλουσιν εὑρεθῆ πάλιν ὁμοῦ οἱ δεῖκται τὸ πρῶτον; καὶ ποσάκις θέλουσιν ἐνταμωθῆ εἰς 12 ὥρας;

$$\chi=\frac{\chi+12}{12}.$$

55. Δύο σώματα ἀρχίζουσι νὰ κινῶνται κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἀντιθέτως ἐπὶ περιφερείας κύκλου μακρᾶς π πήχεων, μακρὰν ἀλλήλων ὄντα εἰς τὴν ἀρχὴν α πήχεις καὶ δανύοντα τὸ μὲν πήχεις β εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον, τὸ δὲ γ· πότε ταῦτα θέλουσι συναπαντηθῆ τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον κτλ, ἐὰν δὲν μεταβάλληται ἡ κίνησίς των;

$$\beta\chi+\gamma\chi=\pi-\alpha, \text{ ἢ } \beta\chi+\gamma\chi=\pi.$$

56. Δεξαμενὴ πληροῦται διὰ δύο κρουνῶν, τῶν ὁποίων τὰ στόμια εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς 5 πρὸς 13, τοῦ ὕδατος ῥέοντος δι' αὐτῶν μὲ ταχύτητα ὡς 8 πρὸς 7· ὄντος δ' ἔτι γνωστοῦ ὅτι διὰ τοῦ ἑτέρου κρουνοῦ ἐν χρόνῳ τινὶ χύνονται 56[illegible] δακτυλιαῖοι κύβοι πλειότερον παρὰ διὰ τοῦ ἄλλου, πόσον ὕδωρ δι' ἑκατέρου ῥέει ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ;

$$40\chi=91(\chi-561).$$

57. Δύο πυροβολιστῶν βομβοβολούντων πολιορκημένην ...λιν ὁ μὲν ἔῤῥιψε 36 βόμβας πρὶν ἀρχίσῃ ὁ ἄλλος τὸ πῦρ, ... δὲ τῷ αὐτῷ χρόνῳ ῥίπτει ὁ πρῶτος 8 βόμβας καὶ ὁ δεύτε...ος 7, ἀλλ' οὗτος ἐν 3 βολαῖς δαπανᾷ ὅσην πυρίτιδα ὁ πρῶτος ...απανᾷ ἐν 4· πόσας βόμβας πρέπει νὰ ῥίψῃ ὁ δεύτερος, ἵνα ...απανήσῃ τὴν αὐτὴν μὲ τὸν πρῶτον ποσότητα πυρίτιδος;

$$36+\frac{8\chi}{7}=\frac{4}{3}\chi.$$

58. Τοκίζει τις 5500 δρ πρὸς 4 τ. 0/0 καὶ μετὰ 4 ἔτη 8000 δρ πρὸς 5 τ. 0/0· εἰς πόσον χρόνον τὰ δύο ταῦτα κεφάλαια θέλουσι φέρει τὸν αὐτὸν τόκον;

$$220\chi=400(\chi-4).$$

Ποικίλων προβλημάτων ἐκθέσεις.

Ἐν μὲν τοῖς τρισὶ πρώτοις ζητοῦνται δύο ἀριθμοί, ἐνῷ εἶναι γνωστὸν ὅτι τοῦ ἑτέρου τὰ γινόμενα ἐπὶ δύο διαφόρους δεδομένους ἀριθμοὺς εἶναι ἢ μεγαλήτερα ἢ μικρότερα ἢ τὸ μὲν μεγαλήτερον, τὸ δὲ μικρότερον τοῦ δευτέρου ζητουμένου κατὰ δεδομένον ἀριθμόν. Τὰ δὲ ἑπτὰ ἀκόλουθα εἶναι τρόπον τινὰ τῶν τριῶν πρώτων ἀντίστροφα ἢ κατά τι ὅμοια. Τὰ δὲ λοιπὰ μέχρι καὶ τοῦ 77 θέλουσι προσδιορίσει οἱ μαθηταὶ ἂν ὁμοιάζουσι μὲ τὰ προηγούμενα καὶ κατὰ τί καὶ μὲ τίνα, ἢ ἂν διαφέρουσιν.

59. Πολυμελοῦς συνελεύσεως ἕκαστον μέλος ἐὰν συνεισέφερεν ὑπὲρ τῶν πενήτων ἀνὰ 16 δρ, ἤθελε συναχθῆ κεφάλαιον κατὰ 430 δρ ὑπὲρ τὸ δέον, ἐὰν δὲ ἀνὰ 14 δρ, ἤθελε συναχθῆ κατὰ 40 δρ ὑπὲρ τὸ δέον· πόσα ἦσαν τὰ μέλη τῆς συνελεύσεως καὶ πόσαι δρ ἐχρειάζοντο;

$$16\chi-430=14\chi-40.$$

60. Θέλων τις νὰ βάλῃ τὸ ὡρολόγιόν του εἰς λαχεῖον λογίζεται ὅτι πρὸς μὲν 4 δρ τὸν κλῆρον ζημιοῦται 30 δρ ἐπὶ

τῆς ἀξίας τοῦ ὡρολογίου του, πρὸς δὲ 5 δρ κερδίζει 50 δρ· πόσους κλήρους ἔκαμε καὶ πόσον ἤξιζε τὸ ὡρολόγιον;

$$4\chi+30=5\chi-50.$$

61. Ἵνα πληρώσῃ τις τὴν ἀξίαν οἰκίας, τὴν ὁποίαν ἠγόρασεν, θέλει νὰ ἐπάρῃ παρὰ τῶν ὀφειλετῶν του ἴσην ποσότητα χρημάτων, καὶ ἂν μὲν αἰτήσῃ ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ 1200 δρ, θέλουσι τοῦ λείψει ἔτι 10000 δρ, ἂν δὲ ἀνὰ 1600 δρ, θέλουσι τοῦ περισσεύσει 4400· πόσοι οἱ ὀφειλέται, πόση ἡ ἀξία τῆς οἰκίας καὶ πόσον πρέπει νὰ αἰτήσῃ ἕκαστον;

$$1200\chi+10000=1600\chi-4400.$$

62. Ὀφείλει τις νὰ ἐξοφλήσῃ τρία ὁμόλογα εἰς τρεῖς διαφόρους προθεσμίας, ἤγουν τὸ μὲν 2832 δρ εἰς 3 μῆνας, τὸ 2560 δρ εἰς 9 μ, τὸ δὲ 1450 δρ εἰς 16 μ· ἐὰν συμφωνήσῃ νὰ πληρώσῃ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν 6842 δρ εἰς ἕνα τινὰ χρόνον, εἰς πόσους μῆνας θέλει γείνει ἡ πληρωμή;

$$\frac{283200+2832\chi}{103}+\frac{256000+2560\chi}{109}+$$
$$\frac{145000+1450\chi}{116}=6842.$$

63. Ἵνα ἐπαρκῶ εἰς ὅλας μου τὰς δαπάνας, ἔλεγέ τις, ἔπρεπε νὰ κερδίζω κατ' ἔτος 540 δρ, τὰς ὁποίας δὲν κερδίζω· ἐὰν δ' ἐκέρδιζα τρὶς καὶ $\frac{1}{2}$ τόσας ὅσας τώρα, ὄχι μόνον εἰς τὰς δαπάνας μου ἤθελα ἐπαρκεῖ, ἀλλ' ἤθελα ἐξοικονομεῖ κατ' ἔτος τόσας, ὅσαι τώρα μοῦ λείπουσι μέχρι τῶν 540 δρ· πόσας κερδίζει;

$$540-\chi=\frac{7\chi}{2}-540.$$

64. Ἐρωτηθεὶς ἀντιγραφεὺς πόσα φύλλα τὴν ἑβδομάδα ἀντιγράφει ἀπεκρίθη, 4 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐργαζόμενος δὲν δύναμαι ν' ἀντιγράφω 70 φύλλα, ἀλλ' ἐὰν εἰργαζόμην 10 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἤθελα ὑπερβῆ τὰ 70 φύλλα καθ' ὅσα τώρα ὀλιγώτερα αὐτῶν ἀντιγράφω· πόσα φύλλα τὴν ἑβδομάδα γράφει;

$$70-\chi=\frac{70\chi}{28}-70.$$

65. Πόσον εἶναι τὸ μεταξὺ δύο τινῶν ὁρίων διάστ. ἐρωτηθεὶς ἀγρομέτρης τις ἀπεκρίθη, Δὲν εἶναι 1000 πήχεων, ἂν δὲ προστεθῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίτον του καὶ ἔτι 176 πήχεις, τὸ δ' ἐξαγόμενον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 $\frac{1}{2}$, θέλει προκύψει ἀριθμὸς πήχεων κατὰ τοσοῦτον μεγαλήτερος τοῦ 1000, καθ' ὅσον τὸ διάστημα εἶναι μικρότερον αὐτοῦ· πόσων πήχεων εἶναι τὸ διάστημα;

$$1000-x=(x+\frac{x}{3}+176)\frac{5}{2}-1000.$$

66. Κεφαλαιοῦχος εἰς ἔμπορον ὑπεσχέθη νὰ δανείσῃ 16000 δρ διὰ 15 μῆνας, μὴ εὐκολυνόμενος δ' εὐθὺς νὰ τῷ δώσῃ τὸ ὅλον, συμβιβάζεται μὲ τὸν ἔμπορον καὶ τῷ δίδει πρῶτον 5000 δρ, μετὰ δὲ 6 μῆνας ἄλλας 3000 δρ, καὶ μετὰ 8 μῆνας τὰς ἄλλας 8000 δρ· μετὰ πόσους μῆνας πρέπει νὰ λάβῃ τὰ χρήματά του ὁ κεφαλαιοῦχος πρὸς ἐκπλήρωσιν τῆς ὑποσχέσεώς του ἄνευ ζημίας οὐδετέρου;

$$\frac{6\times3000}{100}+\frac{8\times8000}{100}=\frac{16000x}{100}.$$

67. Ὀφείλων τις νὰ πληρώσῃ κάμποσα χρήματα δίδωκ 1376 δρ εἰς 5 μῆνας, 2560 δρ 3 μῆνας ὕστερον καὶ τὰς λοιπὰς 5 μῆνας μετέπειτα, ἐὰν ἐπλήρονε ὅλα τὰ χρήματα διὰ μιᾶς, ἔμελλε νὰ τὰ πληρώσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκάτου μηνός· πόσα ἦσαν ὅλα τὰ χρήματα;

$$\frac{(x-3936)3}{100}=\frac{1376\times5}{100}+\frac{2560\times2}{100}.$$

68. Ἔμπορος λαμβάνει ἓν τόπι τσόχας, τὸ ὁποῖον μετρήσας εὑρῆκε κατὰ 5 πήχεις μακρότερον παρ' ὅσον ἐπλήρωσε, ἀλλὰ πολὺ κακῆς ποιότητος, ὥστε, ἐνῷ τὴν ἐπλήρωσε πρὸς 10 δρ τὸν πῆχυν, βιάζεται νὰ τὴν πωλῇ πρὸς 8, καὶ οὕτω ζημιοῦται δρ 13 $\frac{1}{2}$ τ. 0/0· πόσων πήχεων μακρὸν ἦτον τὸ τόπι;

$$10(x-5)-8x=\frac{135x-675}{100}.$$

69. Ὑπηρέτης λαμβάνει ἐτησίως μισθὸν 240 δρ καὶ μί ἐνδυμασίαν, ἀλλ' ἀποπεμφθεὶς εἰς τὸ τέλος τοῦ πέμπτου μ νὸς πληρόνεται δρ 37 λαβὼν καὶ τὴν ἐνδυμασίαν· πόσον ὁ οἰ δεσπότης ἐξετίμησε τὴν ἐνδυμασίαν;

$$5(240+\chi)=12(37+\chi).$$

70. Τυπογράφος παραλαμβάνει στοιχειοθέτην ἐπὶ συμφω νίᾳ νὰ τῷ δίδῃ δρ 1, 50 καθ' ἡμέραν καθ' ἣν ἐργασθῇ, νὰ κρατῇ δὲ 60 λεπτὰ καθ' ἡμέραν ἀπουσίας· εἰς τὸ τέλος ἡμερῶν λαβὼν δρ 49, 80 ὁ στοιχειοθέτης, πόσας ἡμ ἦτον ἀπών;

$$150(50-\chi)-60\chi=4980.$$

71. Ἐρωτηθεὶς μάγειρος βαστῶν πορτογάλλια πόσα ἐν τῷ καλαθίῳ ἀπεκρίθη, Ἀξίζει 90 λεπτὰ ἡ δωδεκάς τῶν δὲ μὲ τὰ ὁποῖα ἐδαπάνησα εἰς αὐτὰ χρήματα ἔπαιρνα 5 ἀκ ἤθελεν ἀξίζει 2 ½ λεπτὰ ὀλιγώτερον ἡ δωδεκάς· πόσα τογάλλια εἶχεν;

$$\frac{90\chi}{12}=\frac{(\chi+5)\frac{175}{2}}{12}.$$

72. Ἕκαστος κτηματίας πόλεώς τινος ἐπλήρονε πρὸ φόρους τὸ ἕβδομον τῶν εἰσοδημάτων του, ἀλλ' εἰς τὸ ἑξῆς πληρόνει τὸ ἕκτον αὐτῶν· πόσον πρέπει ν' αὐξήσῃ τῶν οἰ του τὸ ἐνοίκιον, ἵνα ἔχῃ τὸ αὐτὸ εἰσόδημα ὡς πρότερον;

$$\frac{7a-a}{7}=\frac{a\chi+a}{\chi}-\frac{a\chi+a}{6\chi}$$

73. Ἐκβάλλω ἐκ κιβωτίου τὸ τρίτον τῶν ἐν αὐτῷ χ μάτων καὶ βάλλω ἔπειτα 50 δρ, ὀλίγον δ' ἔπειτα ἐκβάλ πάλιν τὸ τέταρτον τῶν ἐν τῷ κιβωτίῳ καὶ ἐμβάλλω 70 δρ, τότε εἶναι ἐν αὐτῷ δρ 120· πόσαι ἦσαν κατ' ἀρχάς;

$$\frac{2\chi+150}{3}-\frac{2\chi+150}{12}+70=120.$$

74. Χωρικός τις πωλεῖ πρῶτον τὰ ἡμίσεα τῶν ἐν καλαθίῳ ὠῶν καὶ ἔτι 4, ἔπειτα πωλεῖ πάλιν τὰ ἡμίσεα τ ὑπολοίπων καὶ προσέτι 2, τελευταῖον ἀγοράζουσι καὶ τὰ ἡ

σεα τῶν ὅσα τοῦ εἶχαν μείνει καὶ 6 ἀκόμη, καὶ μετὰ ταῦτα τοῦ ἔμειναν 2 ὠά· πόσα εἶχεν εἰς τὴν ἀρχήν;

$$\frac{\chi-16}{4}-\frac{\chi-16}{8}-6=2.$$

75. Στρατηγοῦ θέλοντος νὰ κατατάξῃ τὸν στρατόν του εἰς τετράγωνον, κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀπόπειραν τοῦ περισσεύουσιν 9 στρατιῶται, ἀλλ' αὐξανομένης κατὰ ἕνα ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, τοῦ λείπουσι 50 ἄνδρες· ἐκ πόσων ἀνδρῶν σύγκειται ὁ στρατός;

Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν a καὶ $a+1$ εἶναι ἴση μὲ $2a+1$.

$$\chi+50=\chi-9+2\sqrt{\chi-9}+1.$$

76. Τριῶν πίθων ἐὰν μὲν τις πληρώσῃ τὸν πρῶτον μὲ τὸ ἐν τῷ δευτέρῳ πλήρει ὄντι ὑγρόν, ἐναπομένουσιν ἐν τούτῳ τὰ δύο ἔννατα τοῦ ὅσον χωρεῖ, ἐὰν δὲ τὸν δεύτερον μὲ τὸ ἐν τῷ τρίτῳ, ἐναπολείπεται ἐν τούτῳ τὸ τρίτον του, τελευταῖον τὸ τρίτον πληροῦται ἐκ τοῦ ἐν τῷ πρώτῳ πλήρει καὶ ἐκ 50 ὀκάδων ἔτι· πόσας ὀκάδας αὐτοῦ τοῦ ὑγροῦ χωρεῖ ἕκαστον;

$$50+\frac{2\chi}{3}-\frac{4\chi}{27}=\chi.$$

77. Τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ψηφίων τριψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 13, ὁ ἀριθμὸς δὲ τῶν μονάδων εἶναι τριπλάσιος τοῦ τῶν ἑκατοντάδων του, ἀλλ' ἂν εἰς αὐτὸν προστεθῇ ὁ 396, προκύπτει κεφάλαιον ἔχον ἑκατοντάδας μὲν ὅσας ὁ προειρημένος μονάδας, μονάδας δὲ ὅσας αὐτὸς ἑκατοντάδας, δεκάδας δὲ τὰς αὐτάς· τίς εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

Ἂν χ ἦναι αἱ ἑκατοντάδες του, τῶν μονάδων του 3χ καὶ τῶν μονάδων τοῦ 396 τὸ κεφάλαιον θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ 10 καὶ τῶν ἑκατοντάδων του.

$$3\chi+6=\chi+10.$$

Ἀκολουθοῦσι προβλήματα, τῶν ὁποίων ἄγνωστοι ἐκλαμβάνονται δύο ἢ τρεῖς, καὶ ἑπομένως ἐξισώσεις κατασκευάζονται ἰσάριθμοι. Εἶναι δὲ ὠφέλιμον νὰ παραβληθῶσι μὲ τὰ προηγούμενα, ἵνα γείνῃ γνωστὴ ἡ ὁμοιότης των ἢ ἡ διαφορά των πρὸς ἐκεῖνα.

78. Δύο βαλάντια ἐμπεριέχουσι 300 δρ, ἐὰν δὲ λάβῃς 30 δρ ἐκ τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ καὶ τὰς βάλῃς ἐν τῷ ἄλλῳ, θέλουσιν ἔχει καὶ τὰ δύο ἴσον ἀριθμὸν δραχ· πόσαι εἶναι ἐν ἑκατέρῳ;

$$x+\omega=300,\ x-30=\omega+30.$$

79. Ὁ Α καὶ ὁ Β ὁμοῦ ἔχουσι δρ 570, ἂν δὲ ὁ μὲν εἶχε τὸ τριπλάσιον τῶν ὅσα ἔχει, ὁ δὲ τὸ τετραπλάσιον τῶν ὅσα ἔχει, τότε τῶν δύο ὁμοῦ αἱ δραχμαὶ ἤθελον εἶσθαι 2350· πόσας ἑκάτερος;

$$x+\omega=570,\ 3x+4\omega=2350.$$

80. Ἐρωτηθεὶς ὑπὸ τοῦ υἱοῦ του πατήρ τις πόσων ἐτῶν εἶναι ἀπεκρίθη, Πρὸ 6 ἐτῶν μ' ἔλειπε τὸ τρίτον τῆς ἡλικίας μου ἵνα ἔχω τρὶς τόσα ἔτη ὅσα σύ, ἀλλὰ μετὰ 3 ἔτη πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 $\frac{1}{2}$ ἡ ἰδική σου, ἵνα γείνῃ ἴση μὲ τὴν ἰδικήν μου· πόσων ἐτῶν ἦτον ἑκάτερος;

$$x-6+\frac{x-6}{3}=3(\omega-6),\ \ x+3=\tfrac{15}{6}(\omega+3).$$

81. Α τις χρεωστεῖ 1200 δρ, Β δέ τις 2550 δρ, μηδέτερος δ' ἔχων ἱκανὰς δρ πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους του, ὁ μὲν Α αἰτεῖ τὸν Β τὸ ὄγδοον τῶν ὅσα ἔχει, ὁ δὲ Β τὸν Α τὸ ἕκτον τῶν χρημάτων του, ἵνα δυνηθῇ ἑκάτερος νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του· πόσας εἶχεν ὁ Α καὶ πόσας ὁ Β;

$$x+\frac{\omega}{8}=1200,\ \ \omega+\frac{x}{6}=2550.$$

82. Δανεισθεὶς τις 32000 δρ πρός τι ἐπιτόκιον καὶ καταtοκίσας αὐτὰς καὶ ἄλλας ὁμοῦ ὅλας 92000 πρὸς ἀνώτερον ἐπιτόκιον ἐκέρδισεν δρ 3620, ἄλλοτε δὲ δανεισθεὶς 37600 δρ καὶ τοκίσας 70000 κατὰ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἐκέρδισε 2158 δρ· πρὸς τί ἐπιτόκιον ἐδανείσθη καὶ πρὸς τί ἐτόκισε;

$$920\omega-320x=3620,\ 700\omega-376x=2158.$$

83. Δύο βρύσεις χύνουσι τὸ ὕδωρ των ἐν δεξαμενῇ τινὶ χωρούσῃ 210 ὀκάδας, εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι ἡ μὲν εἰς 4 ὥρας, ἡ δὲ εἰς 5 χύνουσιν αἱ δύο ὅλας 90 ὀκ, καὶ ὅτι ἡ μὲν εἰς 7 ὥρας, ἡ δὲ εἰς 3 $\frac{1}{2}$ ὥρ χύνουσιν 126 ὀκάδας· πόσον ὕδωρ ἑκατέρα χύνει καθ' ὥραν, καὶ εἰς πόσον χρόνον αἱ δύο ὁμοῦ ἤθελαν γεμίσει τὴν δεξαμενήν;

$$4\chi+5\omega=90,\quad 7\chi+\tfrac{7}{2}\omega=126.$$

84. Ἐπλήρωσέ τις δραχ 594,10 δίδων 145 νομίσματα, τὰ μὲν πεντάδραχμα, τὰ δὲ σχελίγκια· πόσα πεντάδραχμα καὶ πόσα σχελίγκια; (τὸ σχελ. ἀξίζει δρ 1,26).

$$\chi+\omega=145,\quad 5\chi+\frac{126\omega}{100}=594,10.$$

85. Περιηγητὴς Ἄγγλος ἀνταλλάσσει γραμμάτιον 150 λιτρῶν στερλιγγῶν ἀντὶ δουκάτων καὶ λαμβάνει παρὰ τοῦ τραπεζίτου 331 δουκ καὶ δραχ 3,50 εἰς ἀποπλήρωσιν, ἄλλοτε δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀνταλλάσσει γραμμάτιον 40 λίτ. στερλ καὶ λαμβάνει 88 δουκ καὶ 4 δρ· πόσον ἐκτιμᾶται ἡ λιτ στερ καὶ πόσον τὸ δουκάτον;

$$150\chi=331\omega+3,50,\quad 40\chi=88\omega+4.$$

86. Ποῖον εἶναι τὸ κλάσμα, ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ ὁποίου ἂν μὲν ἀφαιρεθῶσι 3 μονάδες, μετατρέπεται εἰς $\frac{1}{4}$, ἂν δὲ προστεθῶσι 5 μονάδες, γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$;

$$\frac{\chi-3}{\omega-3}=\frac{1}{4},\quad \frac{\chi+5}{\omega+5}=\frac{1}{2};$$

87. Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορά, τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ γινόμενον νὰ ἔχωσιν ὃν λόγον ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ 2,3 καὶ 5.

$$2\chi+2\omega=3\chi-3\omega,\quad 2\chi\omega=5\chi-5\omega.$$

88. Ὁ μὲν Β ἐτόκισε 12600 δρ ὑπὲρ τὰς τοῦ Α πρὸς 1 τ. 0/0 πλειότερον κατ' ἔτος, καὶ οὕτω κερδίζει πλειότερον κατ' ἔτος δρ 730, ὁ δὲ Γ ἐτόκισε 3000 δρ πλειότερον τοῦ Α πρὸς 2 τ. 0/0 ὑπὲρ τὸν Α κατ' ἔτος, καὶ οὕτως εἰσοδεύει

πλειότερον αὐτοῦ 380 δρ· πόσας ἐτόκισεν ἕκαστος καὶ πρ
τί ἐπιτόκιον;

$$\frac{\chi\omega}{100}+730=\frac{(\chi+12600)(\omega+1)}{100},$$

$$\frac{\chi\omega}{100}+380=\frac{(\chi+3000)(\omega+2)}{100}.$$

89. Ἔχει τις οἶνον δύο εἰδῶν, καὶ ἂν 300 λίτρας τ
καλλιτέρου ἀναμίξῃ μὲ 500 λίτρ τοῦ κατωτέρου, δύν
ται νὰ πωλῇ τοῦ κράματος 100 λίτρ ἀντὶ δραχ 20, 50,
δ' ἀναμίξῃ 375 λίτρ τοῦ καλλιτέρου μὲ 750 λιτ τοῦ κα
τέρου, δύναται νὰ πωλῇ 100 λίτρ τοῦ κράματος ἀντὶ 20
πόσον τιμῶνται ἑκατέρου αἱ 100 λίτραι;

$$3\chi+5\omega=164, \quad 375\chi+750\omega=22500.$$

90. 21 χιλιόδραχμα ἀργύρου ἐν τῷ ὕδατι ζυγίζουσι
νον 19 χιλιόδρ, 9 δὲ χιλιόδρ χαλκοῦ ζυγίζουσι μόνον 8·
δ' ἦναι γνωστὸν ὅτι μίγμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ ἔχον βά
148 χιλιόδρ χάνει ἐν τῷ ὕδατι χιλιόδρ 14 $\frac{2}{3}$; πόσον ἄργ
καὶ πόσον χαλκὸν ἐμπεριέχει τὸ μίγμα;

Ὁ Ἀρχιμήδης πρῶτος εὑρῆκεν ὅτι σῶμά τι ἐντὸς
ὕδατος ζυγίζει ὀλιγώτερον παρ' ὅσον ἐκτὸς αὐτοῦ, καὶ τό
ὀλιγώτερον ὅσον ζυγίζει ὄγκος ὕδατος ἴσος μὲ τὸν ὄγκον αὐ
τοῦ σώματος. *Εἰδικὸν δὲ βάρος σώματος* καλεῖται τὸ βά
ρου πρὸς τὸ ἐκλαμβανόμενον ὡς μονάδα βάρος ἴσου ὄγκου ὕ
τος καθαροῦ κατὰ τὴν μεγίστην του πυκνότητα.

$$\chi+\omega=148; \quad \frac{2\chi}{21}+\frac{\chi}{9}=\frac{44}{3}.$$

91. Τοῦ Ἱέρωνος ὁ στέφανος κατὰ τὸν Οὐϊτρούβιον ἐζύ
γιζε 20 λίτρας, ὁ δὲ Ἀρχιμήδης εὑρῆκεν ὅτι ἔχανεν ἐν τ
ὕδατι τοῦ βάρους του λίτραν 1 $\frac{1}{4}$· ὑποθετομένου δὲ ὅτι συν
κειτο ὁ στέφανος μόνον ἐκ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου, ὧν ὁ μὲν ἔχ
εἰδικὸν βάρος 19, 64, ὁ δὲ 10, 5, πόσος ἦτον ὁ χρυσὸς κ
πόσος ὁ ἄργυρος;

$$\chi+\omega=20,\quad \frac{\chi}{19{,}64}+\frac{\omega}{10{,}5}=1+\frac{1}{4}.$$

92. Πόσον ἐτῶν εἶναι αὐτός, πόσον ὁ πατήρ του καὶ πόσων ὁ πάππος του ἐρωτηθείς τις ἀπεκρίθη, Ἡ ἡλικία μου μὲ τὴν τοῦ πατρός μου εἶναι 56 ἐτῶν, ἡ τοῦ πατρός μου μὲ τὴν τοῦ πάππου μου εἶναι 100 ἐτῶν, ἡ δὲ ἰδική μου μὲ τὴν τοῦ πάππου μου 80 ἐτῶν· πόσων ἐτῶν ἦτον ἕκαστος;

$$\chi+\psi=56,\ \psi+\omega=100,\ \chi+\omega=80.$$

93. Ὁ Α καὶ ὁ Β ἔχουσιν ὁμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν χρημάτων τοῦ Γ, ὁ δὲ Β καὶ ὁ Γ ἔχουσιν ὁμοῦ τὸ ἑξαπλάσιον τῶν τοῦ Δ, ἐὰν δ' ὁ Β εἶχεν ἔτι 680 δρ πλειότερον τῶν ὅσας ἤδη ἔχει, ἤθελεν ἔχει ὅσας ὁ Α καὶ ὁ Γ ὁμοῦ· πόσας ἕκαστος;

$$\chi+\psi=\tfrac{2}{3}\omega,\ \psi+\omega=6\chi,\ \chi+\omega=\psi+680.$$

94. Τρεῖς ἄνθρωποι Α, Β, Γ ἠγόρασαν καφὲ, ζάχαρι καὶ τσάϊ πρὸς ἴσην ἕκαστος τιμὴν τὴν ὀκάν, καὶ ὁ μὲν Α ἐπλήρωσε 51 δρ ἀντὶ 6 ὀκ καφὲ, 9 ζάχαρι καὶ 3 τσάϊ, ὁ δὲ Β δρ 64,10 ἀντὶ 8 ὀκ καφὲ, 7 ζάχαρι καὶ 4 τσάϊ, ὁ δὲ Γ δρ 48,50 ἀντὶ 5 ὀκ καφὲ, 10 ζάχαρι καὶ 2 ὀκ καὶ 20 δραμ τσάϊ· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκὰ ἑκάστου εἴδους;

$$6\chi+9\psi+3\omega=51,\quad 8\chi+7\psi+4\omega=64{,}10,$$
$$5\chi+10\psi+2\tfrac{1}{20}\omega=48{,}50.$$

95. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τριῶν βρύσεων ἡ μὲν Α καὶ ἡ Β ὁμοῦ ἤθελαν γεμίσει δεξαμενήν τινα εἰς 70 λεπτά, ἡ δὲ Α καὶ ἡ Γ ὁμοῦ εἰς 84 λεπ, ἡ δὲ Β καὶ ἡ Γ ὁμοῦ εἰς 140, ἑκάστη αὐτῶν εἰς πόσον χρόνον ἤθελε τὴν γεμίσει, καὶ ὅλαι ὁμοῦ εἰς πόσον;

$$\frac{70}{\chi}+\frac{70}{\psi}=1,\quad \frac{84}{\chi}+\frac{84}{\omega}=1,\quad \frac{140}{\psi}+\frac{140}{\omega}=1.$$

96. Τριῶν κομματίων συγχωνευμένου χρυσοῦ καὶ ἀργύρου καὶ χαλκοῦ τὸ μὲν ἐμπεριέχει 5 οὐγκίας χρυσοῦ, 15

ἀργύρου καὶ 30 χαλκοῦ, τὸ δὲ 20 οὐγ χρυσοῦ, 28 ἀργύρου καὶ 48 χαλκοῦ, τὸ δὲ 12 οὐγ χρύσοῦ, 19 ἀργ καὶ 24 χαλκοῦ· πόσον πρέπει ἐξ ἑκάστου κομματίου νὰ συγχωνεύσῃ τις, ὥςε τὸ μίγμα νὰ ἐμπεριέχῃ 10 οὐγκίας χρυσοῦ, 25 ἀργύρου καὶ 26 χαλκοῦ;

$$\frac{\chi}{10}+\frac{5\psi}{24}+\frac{12\omega}{55}=10,\quad \frac{3\chi}{10}+\frac{7\psi}{24}+\frac{19\omega}{55}=25,$$

$$\frac{3\chi}{5}+\frac{\psi}{2}+\frac{24\omega}{55}=26.$$

97. Παίζουσιν ὁ Α, ὁ Β καὶ ὁ Γ μὲ συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ ὁ χάσας εἰς ἑκάτερον τῶν ἄλλων τὸ τρίτον τῶν χρημάτων ἑνὸς ἑκατέρου· ἐπειδὴ δὲ μετὰ τρία παιγνίδια, τῶν ὁποίων καθεὶς ἔχασεν ἕν, ἀριθμήσας εὗρεν ἕκαστος ὅτι εἶχε δρ 64, ζητεῖται πόσα εἶχε καθεὶς πρὶν ἀρχίσωσι τὸ παιγνίδιον;

$$\frac{48\chi-16\psi-16\omega}{27}=64,\quad \frac{52\psi-12\chi-12\omega}{27}=64,$$

$$\frac{55\omega-9\chi-9\psi}{27}=64.$$

98. Ναύαρχος μέλλων νὰ διανείμῃ 31824 δρ εἰς τὰ πληρώματα τριῶν νηῶν, λογιζόμενος εὑρίσκει ὅτι, ἂν μὲν δώσῃ εἰς ἕκαστον ναύτην τῆς πρώτης ἀνὰ 12 δρ, οἱ τῶν ἄλλων δύο θέλουσι λάβει ἀνὰ 6 ἕκαστος, ἂν δὲ δώσῃ εἰς ἕκαστον τῆς δευτέρας ἀνὰ 12, ἕκαστος τῶν δύο ἄλλων θέλει λάβει ἀνὰ 4, ἂν δὲ δώσῃ εἰς ἕκαστον τῆς τρίτης ἀνὰ 12, μένουσι μόνον ἀνὰ 3 δρ εἰς ἕκαστον τῶν δύο ἄλλων· ἐκ πόσων ἀνδρῶν ἑκάστης νηὸς τὸ πλήρωμα σύγκειται;

$$\frac{31824-12\chi}{\psi+\omega}=6,\quad \frac{31824-12\psi}{\chi+\omega}=4,\quad \frac{31824-12\omega}{\chi+\psi}=3.$$

99. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ τοῦ 6 νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ κεφάλαιον τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ 6, ὃν ὁ 2 πρὸς τὸν 3, ἂν δὲ προστεθῇ 5 εἰς τὸν πρῶτον καὶ τὸν τρίτον, τὰ κεφάλαιά των ταῦτα νὰ

ἦναι ὡς ὁ 7 πρὸς τὸν 11, ἂν δ' ἀφαιρεθῇ 36 ἀπὸ τὸν δεύτερον καὶ τὸν τρίτον, αἱ διαφοραί των νὰ ἦναι ὡς ὁ 6 πρὸς τὸν 7.

$3(\chi+6)=2(\psi+6), 11(\chi+5)=7(\omega+5), 7(\psi-36)=6(\omega-36)$

100. Εὑρεῖν τριψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ τρία ψηφία ν' ἀποτελῶσι συνεχῆ ἰσοδιαφοράν, τὸ δὲ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ κεφαλαίου τῶν τριῶν ψηφίων νὰ ἦναι 48, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 198 ἀπ' αὐτὸν ν' ἔχῃ μονάδας μὲν, ὅσας αὐτὸς ἑκατοντάδας, ἑκατοντάδας δὲ, ὅσας ἐκεῖνος μονάδας, καὶ δεκάδας τὰς αὐτάς.

$$\chi+\omega=2\psi, \frac{100\chi+10\psi+\omega}{\chi+\psi+\omega}=48, 10+\omega-8=\chi.$$

Τῶν ἑξῆς προβλημάτων (101—110) αἱ ἐξισώσεις θέλουσιν ἔχει τὸν ἄγνωστον μὲ δείκτην 2. Εἶναι δὲ παραβλητέα μὲ ἄλλα προηγούμενα ὅμοια τρόπον τινὰ, ἵνα γείνῃ γνωστὴ ἡ διαφορά των.

101. Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 5525 δρ. τριῶν εἰδῶν ἐμπορεύματα, τῶν ὁποίων ἑκάστου ἡ ὀκὰ ἀξίζει τόσας δραχμὰς, ὅσας ὀκάδας ἠγόρασεν, ἐπῆρε δὲ ἐκ μὲν τοῦ δευτέρου ἓν τρίτον περισσότερον ἢ ἐκ τοῦ πρώτου, ἐκ δὲ τοῦ τρίτου $3\frac{1}{2}$ τόσον, ὅσον ἐκ τοῦ δευτέρου· πόσον ἑκάστου ἠγόρασεν;

$$\chi^2+\frac{16\chi^2}{9}+\frac{116\chi^2}{9}=5525.$$

102. Πόσων ἐτῶν εἶναι ἐρωτηθείς τις ἀπεκρίθη, Μ' ἐγέννησεν ἡ μήτηρ μου εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν της πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τῶν ἰδικῶν μου ὑπερβαίνει τὴν ἡλικίαν της ὁμοῦ μὲ τὴν ἰδικήν μου κατὰ 2500 ἔτη· πόσων ἐτῶν ἦτον;

$$\chi(\chi+20)=2\chi+20+2500.$$

103. Ἠγόρασα μανδήλια ἀντὶ 60 δρ, ἀλλ' ἂν μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα ἐλάμβανα 3 πλειότερα, ἕκαστον ἤθελεν ἀξίζει δρ. 1 ὀλιγώτερον· πόσα ἠγόρασα;

$$\frac{60}{\chi}-\frac{60}{\chi+3}=1.$$

104. Ἀποθανών τις ἄφησε νὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου οἱ παῖδές του δρ 46800, ἀλλ' ἀποθανόντων δύο παίδων πρὸ τῆς διαμοιράσεως, συνέβη νὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν λοιπῶν 1950 δρ πλειότερον παρ' ὅσον ἂν ἔζων καὶ οἱ ἄλλοι δύο· πόσοι ἦσαν ὅλοι οἱ παῖδες τοῦ ἀποθανόντος;

$$\frac{46800}{\chi}=\frac{46800}{\chi-2}-1950.$$

105. Δύο χωρικαὶ πωλήσασαι 144 ὠὰ ἔλαβον ἴσον ἀριθμὸν δραχμῶν ἑκατέρα· ἀλλ' ἂν ἡ πρώτη εἶχε τὰ τῆς δευτέρας καὶ τὰ ἐπώλει ὅσον τὰ ἰδικά της, ἤθελε λάβει δρ 2,56 ἂν δ' ἡ δευτέρα ἐπώλει τὰ τῆς πρώτης ὅσον τὰ ἰδικά της, ἤθελε λάβει δρ 4· πόσα ὠὰ εἶχεν ἑκατέρα;

$$\chi+\omega=144, \quad \frac{256\chi}{\omega}=\frac{400\omega}{\chi}.$$

106. Δύο περιηγηταὶ Α καὶ Β ἀπέρχονται ἐκ δύο διαφόρων πόλεων Γ καὶ Δ πρὸς ἀπάντησίν των· ἀπαντηθέντες δὲ καὶ λογισάμενοι τήν τε διανυθεῖσαν καὶ τὴν μέλλουσαν ὁδὸν εὗρον ὅτι ὁ μὲν Α διήνυσε 30 λεύγας ὑπὲρ τὸν Β, καὶ ὅτι κατὰ τὴν ταχύτητά των τὴν προτέραν ὁ Α εἰς 4 ἡμέρας θέλει φθάσει εἰς τὴν Δ πόλιν, ὁ δὲ Β εἰς 9 ἡμέρας δύναται νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Γ· πόσον ἀπέχει ἡ Γ πόλις τῆς Δ;

$$\frac{4\chi+120}{\chi-30}=\frac{9\chi-270}{\chi+30}.$$

107. Δύο τινὲς ἐπεχειρίσθησάν τι μὲ 2000 δρ, καὶ ὁ μὲν ἔλαβε μετὰ 17 μῆνας κεφάλαιον καὶ κέρδος 1710 δρ, ὁ δὲ μετὰ 12 μῆνας ἐπῆρε κεφάλαιον καὶ κέρδος 1040 δρ· πόσα κατέθεσεν ἑκάτερος;

$$\chi+\omega=2000, \quad 17\chi(1040-\omega)=12\omega(1710-\chi).$$

108. Τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ μὲν κεφάλαιον εἶναι 126, τὸ δὲ γινόμενον 13824, ἀποτελοῦσι συνεχῆ ἀναλογίαν· τίνες εἶναι αὐτοί;

$$\chi+\psi+\omega=126, \quad \chi\psi\omega=13824, \quad \omega=\frac{\psi^2}{\chi}.$$

109. Τίς εἶναι ὁ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ μὲν τετράγωνα τῶν ψηφίων ἀποτελοῦσι κεφάλαιον 104, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων εἶναι κατὰ 4 μεγαλήτερον τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 396 ἀπ' αὐτὸν εἶναι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς συναλλασσομένων τῶν μονάδων καὶ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ζητουμένου;

$$\chi^2+\psi^2+\omega^2=104,\quad \psi^2=\chi\omega+4,\quad \chi=\omega+4.$$

110. Ἀγοράσας τις ἵππον καὶ μεταπωλήσας αὐτὸν μετ' ὀλίγον 24 ὀθώνια ἔχασεν ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἀγορὰν τιμῆς τόσον τ. 0|0, ὅσον ἠγόρασε τὸν ἵππον· πόσον τὸν ἠγόρασεν;

$$\frac{\chi^2}{100}=\chi-24.$$

Τῶν ἀκολούθων προβλημάτων αἱ ἐξισώσεις εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν ἐν αὐτοῖς ἀγνώστων.

111. Παίζοντος παιδὸς μὲ καρύδια ὑπὲρ τὰ 100 ἀλλ' ὑπὸ τὰ 400, διαμοιράζοντος μὲν αὐτὰ ἀνὰ 13, ἔμεναν 9, διαχωρίζοντος δ' αὐτὰ ἀνὰ 17, ἔμεναν 14· πόσα καρύδια εἶχεν;

$$13\chi+9=17\omega+14.$$

112. Πόσους στρατιώτας ἔχει ἐρωτηθεὶς στρατηγός τις ἀπεκρίθη, Δύναμαι κατὰ βάθος νὰ τοὺς κατατάξω ὅλους ἐπὶ 5, 6 καὶ 7, ἀλλ' ὅτε τοὺς κατατάσσω ἐπὶ 11 ἢ ἐπὶ 13, μένουσιν 9 ἢ 8 μὴ δυνάμενοι νὰ ταχθῶσιν εἰς γραμμήν· πόσοι εἶναι οἱ στρατιῶται;

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τούτου εἶναι $11\chi+9=13\omega+8$.

113. Νὰ μερισθῇ ὁ 142 εἰς δύο μέρη διαιρετὰ τὸ μὲν διὰ 9, τὸ δὲ διὰ 14.

$$9\chi+14\omega=142.$$

114. Εἰς συμπόσιόν τι ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐδαπάνησεν 19 δεκάλεπτα, ἑκάστη γυνὴ 10 καὶ ἕκαστον παιδίον 8, ἡ δὲ δαπάνη ὅλων τῶν ἀνδρῶν ὑπερέβη τὴν τῶν γυναικῶν ὅλων

κατὰ 7 δεκάλεπτα, ἡ δὲ τῶν γυναικῶν τὴν τῶν παιδίων κατὰ 15· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία;

$$19\chi-10\psi=7,\quad 10\psi-8\omega=15\cdot$$

115. Ἠγόρασέ τις 124 ζῶα, ἤτοι χοίρους, αἰγίδια καὶ πρόβατα, ἀντὶ 4800 δρ, ἕκαστον μὲν χοῖρον πρὸς 54 δρ, ἕκαστον δ' αἰγίδιον πρὸς 38 καὶ ἕκαστον πρόβατον πρὸς 15· πόσα ἑκάστου εἴδους ἠγόρασεν;

$$\chi+\psi+\omega=124,\ 54\chi+38\psi+15\omega=4800.$$

116. Νὰ μερισθῇ ὁ 100 εἰς τρία τοιαῦτα μέρη, ὥστε τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων τοῦ μὲν πρώτου ἐπὶ 17, τοῦ δὲ δευτέρου ἐπὶ 11, τοῦ δὲ τρίτου ἐπὶ 3 νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν 800.

$$\chi+\psi+\omega=100,\ 17\chi+11\psi+3\omega=880.$$

117. Χρυσοχόος ἔχων τριῶν εἰδῶν ἄργυρον, τῶν ὁποίων τὸ μὲν περιέχει 7 οὐγκίας καθαροῦ εἰς ἓν ἡμίλιτρον, τὸ δὲ 5 $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ 4 $\frac{1}{2}$, θέλει νὰ συγχωνεύσῃ μέρη αὐτῶν, ὥστε ν' ἀποτελέσῃ μίγμα ἐκ 30 ἡμιλίτρων, τῶν ὁποίων ἕκαστον νὰ ἐμπεριέχῃ 6 οὐγκίας καθαροῦ ἀργύρου· πόσα πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους ἀκέραια ἡμίλιτρα;

$$\chi+\psi+\omega=30,\quad 7\chi+\frac{11\psi}{2}+\frac{9\omega}{2}=180.$$

118. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τοῦ πρώτου ἐπὶ 7 τὸ γινόμενον νὰ ἦναι κατὰ 1 μικρότερον τοῦ γινομένου τοῦ δευτέρου ἐπὶ 9 καὶ κατὰ 2 μεγαλήτερον τοῦ γινομένου τοῦ τρίτου ἐπὶ 11.

$$7\chi+1=9\psi,\quad 7\chi-2=11\omega.$$

Διαφόρων προβλημάτων ἐκθέσεις ἄνευ τῶν ἐξισώσεών των.

119. Διοφάντου τοῦ τῆς ἀρχαιοτέρας σωζομένης Ἀλγέβρας συγγραφέως ἡ παιδικὴ ἡλικία ἦτον τὸ ἕκτον τῆς ὅλης ζωῆς του, ἡ νεανικὴ τὸ δέκατον, τὸ ἕβδομον δὲ καὶ ἔτι 5 ἔτη

ἢ ἀπὸ τοῦ γάμου του μέχρι τῆς γεννήσεως τοῦ υἱοῦ του, ὅςις ζήσας τὸ ἥμισυ τῆς ζωῆς τοῦ πατρός του ἐτελεύτησε 4 ἔτη πρὸ αὐτοῦ· πόσον ἐτῶν ἀπέθανεν ὁ Διόφαντος; (84)

120. Θαλασσινοῦ ὕδατος 32 ὀκάδες ἐμπεριέχουσι 1 ὀκᾶν ἅλατος· πόσον ὕδωρ γλυκὺ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ θαλασσινὸν, ὥστε 32 ὀκ τοῦ μίγματος νὰ ἐμπεριέχωσι μόνον 50 δράμια; (224).

121. Ἀναλαβών τις νὰ μετακομίσῃ διαφόρου μεγέθους ἐκ πορκελλάνης ἀγγεῖα μὲ συμφωνίαν νὰ πληρόνῃ τὸν κύριον τῶν ἀγγείων τόσον ἕκαστον ἀγγεῖον, τὸ ὁποῖον τυχὸν ἤθελε συντρίψει, ὅσον ἔμελλε νὰ λάβῃ, ἂν τὸ μετακόμιζε σῶον, πρῶτον μὲν λαβὼν 2 μικρὰ, 4 μεσαῖα καὶ 9 μεγάλα νὰ μετακομίσῃ, συνέτριψε τὰ μεσαῖα ὅλα καὶ ἔλαβεν ὡς ἀνήκουσαν πληρωμὴν κατὰ τὴν συμφωνίαν δρ 28· ἔπειτα λαβὼν 7 μικρὰ, 3 μεσαῖα καὶ 5 μεγάλα, συνέτριψεν ὅλα τὰ μεγάλα καὶ ἐπληρώθη μόνον 3 δρ· τελευταῖον μετακομίζων 9 μικρὰ, 10 μεσαῖα καὶ 11 μεγάλα, πάλιν συνέτριψεν ὅλα τὰ μεγάλα καὶ ἐπληρώθη ἑπομένως 4 δρ· πόσον συνεφώνησε νὰ λάβῃ μετακομιστικὰ τὸ ἓν ἑκάστου μεγέθους; (2, 3 καὶ 4).

122. Ἔμπορος ἀντὶ δύο ὁμολόγων, τοῦ μὲν 6240 δρ πληρωτέου εἰς 8 μῆνας, τοῦ δὲ 7632 ἐξοφλητέου εἰς 9 μῆνας, δίδει εἰς ὃν χρεωστεῖ αὐτὰς ἓν ὁμόλογον 14256 δρ ἐξοφλητέον εἰς ἓν ἔτος· πόσον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον; (10, 33 δρ τ 0/0 κατ' ἔτος).

123. Δραχ 13000 χωρισμένας εἰς δύο μέρη τοκίζει τις οὕτως, ὥστε νὰ λαμβάνῃ ἴσον κέρδος ἐξ ἑκατέρου, ἐνῷ, ἂν μὲν ἐτόκιζε τὸ ἕτερον μέρος πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ ἄλλου, ἤθελε λάβει τόκον 360 δρ, ἂν δὲ τἀνάπαλιν ἐτόκιζε τὸ δεύτερον μέρος πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου, ἤθελε λάβει τόκον 490 δρ· πόσον εἶναι ἑκάτερον ἐπιτόκιον; (7 καὶ 6).

124. Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετράγωνόν του νὰ ἔχῃ τοιοῦτον λόγον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαφορῶν αὐτοῦ

τε καὶ δύο δεδομένων ἀριθμῶν $α$. καὶ $β$, ὅν ἔχουσιν ἄλλοι δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ $μ$ καὶ $ν$.

125. Τραπεζίτης ἔχει δύο εἰδῶν νομίσματα, τῶν ὁποίων $α$ τοῦ πρώτου εἴδους ἰσοτιμῶνται μὲ 1 ὀθώνιον χρυσοῦν, $β$ δὲ τοῦ δευτέρου· εἰς τὸν ζητοῦντα $γ$ ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου πόσα ἐξ ἑκατέρου εἴδους πρέπει ὁ τραπεζίτης νὰ δώσῃ;

126. Πόσα ἔχει ἕκαστος τριῶν ἀνθρώπων Α,Β,Γ, τὰ τοῦ Α χρήματα ὁμοῦ μὲ $λ$ φορὰς τὰ τοῦ Β καὶ τοῦ συμποσοῦνται εἰς $π$, τὰ δὲ τοῦ Β καὶ $μ$ φορὰς τὰ τοῦ Α τοῦ Γ ἀποτελοῦσι κεφάλαιον ἴσον μὲ $ρ$, τὸ δὲ κεφάλαιον τοῦ Γ καὶ νιάκις τῶν τοῦ Α καὶ τοῦ Β εἶναι ἴσον μὲ $σ$;

127. Ὀφειλέτης 7000 δραχ. πληρωτέων τῶν μὲν 200 εἰς 3 $\frac{1}{2}$ μῆνας, τῶν δὲ 3500 εἰς 4, τῶν δὲ 1500 εἰς συμφωνεῖ μὲ τὸν δανειστήν του νὰ πληρώσῃ τὸ εἰρημένον χρ εἰς δύο δόσεις ἴσας, ἀλλὰ τὴν δευτέραν ἕνα μῆνα μετὰ τὴν πρ την· εἰς τίνα χρόνον θέλει δοθῆ ἡ πρώτη δόσις;

128. Κτηματίας τις πληρόνει ἴσον ἡμερομίσθιον εἰς δ ἐργάτας, καὶ ἔδωκεν εἰς τὸν μὲν 4 κοιλὰ σίτου καὶ 56 ἀντὶ 56 ἡμερομισθίων, εἰς δὲ τὸν ἄλλον 7 $\frac{1}{2}$ κοιλὰ σίτου 69 δρ ἀντὶ 84 ἡμερομισθίων· πόσον ἐλογίσθη τὸ κοιλὸν ὁ σίτ

129. Ὁ δαπανῶν εἰς ἐκτάκτους δαπάνας τὸ ἕβδομον τ εἰσοδήματός του καὶ ὅλον τὸ λοιπὸν εἰς τὰς τακτικάς του δ πάνας ἐὰν εἶχε κατὰ 400 δρ ἀνώτερον εἰσόδημα, ἠδύνατο δαπανᾷ τὸ πέμπτον αὐτοῦ εἰς τὰς ἐκτάκτους καὶ 160 πλειότερον εἰς τὰς τακτικάς· πόσον εἶναι τὸ εἰσόδημά του;

130. Αὐξάνει τις κατ' ἔτος τὸ εἶναί του κατὰ 20 τ. 0/0 καὶ δαπανᾷ ἐκ τούτου εἰς τὰ τῆς οἰκογενείας του 4000 δρ, δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους ἀφαιρέσας τὰς 4000 δρ εὗρ ὅτι ἡ κατάστασίς του ηὔξησε κατὰ 800 δρ ὑπὲρ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀρχῇ κεφαλαίου του· πόσον ἦτον τοῦτο τὸ κεφάλαιον;

131. Ἄσωτος τοκίσας πᾶσαν αὐτοῦ τὴν περιουσίαν πρ 4 τ. 0/0, μετὰ 2 ἔτη λαμβάνει τὸ τέταρτον ἀφίνων τὰ λοιπ 7 μῆνας, μετὰ τοὺς ὁποίους ἐπαίρει καὶ αὐτῶν τὸ τέταρτον τὸ δὲ ὑπόλοιπον 13 μῆνας μετέπειτα τὸ λαμβάνει ὅλον· ἐν τῷ

τῷ δὲ τῷ χρόνῳ τῶν 44 μηνῶν μόνον οἱ τόκοι, τοὺς ὁποίους ἔλαβεν, ἀναβαίνουσιν εἰς 24375 δρ· πόση ἦτον ἡ περιουσία του;

132. Τὰ μέτρα, πρὸς τὰ ὁποῖα τρία ἔθνη Α, Β, Γ μετροῦσι τὰ ὑφάσματα, εἶναι τοιαῦτα, ὥστε 15 τοῦ Α καὶ 33 τοῦ Β εἶναι ἰσομήκη μὲ 39 $\frac{1}{2}$ τοῦ Γ, 24 δὲ τοῦ Α καὶ 55 τοῦ Β ἰσοδυναμοῦσι μὲ 65 τοῦ Γ· ποῖον λόγον ἔχει τὸ μέτρον τοῦ Α καὶ τὸ τοῦ Β πρὸς τὸ τοῦ Γ, ποῖον τὰ τοῦ Α καὶ τοῦ Β, καὶ πόσον τ. 0|0 διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων τὰ δύο τελευταῖα;

133. Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο βρύσεων, ῥεούσης μόνης ἐν αὐτῇ πρῶτον τῆς ἑτέρας τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἡ ἄλλη ἤθελε τὴν γεμίσει, καὶ ἔπειτα ῥεούσης μόνης τῆς ἄλλης μέχρι τῆς ἀποπληρώσεως τῆς δεξαμενῆς· ἐνῷ, ἂν ἀμφότεραι ἐχύνοντο ἐν αὐτῇ, ἤθελε πληρωθῇ 6 ὥρας προτήτερα, ἡ δὲ πρώτη βρύσις ἤθελεν ἔχει χυμένα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕδατος τοῦ ὑπὸ τῆς δευτέρας χυθέντος μόνης πρὸς ἀποπλήρωσιν τῆς δεξαμενῆς· εἰς πόσας ὥρας ἑκατέρα μόνη ἤθελε γεμίσει τὴν δεξαμενήν;

57. Εἶναι ἀναγκαῖον τώρα νὰ γείνωσι γενικὰ ὅλα τὰ προηγούμενα μερικὰ προβλήματα, καὶ νὰ κατασκευασθῶσι καὶ αὐτῶν αἱ ἐξισώσεις, αἵτινες καλοῦνται καὶ αὗται *γενικαί*. Καὶ ἓν μὲν ἕκαστον νὰ γείνῃ γενικὸν δὲν εἶναι δύσκολον, δύναται δὲ καὶ μόνος ὁ μαθητὴς ν' ἀσχολῆται ἐπιτυχῶς εἰς τοῦτο, ἕως ν' ἀποκτήσῃ τὴν ἀναγκαίαν ἕξιν εἰς τὸ νὰ ἐννοῇ εὐκόλως καὶ τὰ γενικὰ ὡς τὰ μερικὰ καὶ νὰ κατασκευάζῃ αὐτῶν τὰς ἐξισώσεις. Π. χ. τὸ 11 γίνεται γενικὸν, ἂν ἀντὶ μὲν 100 ἐννοηθῇ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς a, καὶ ἑπομένως ἀντὶ 200, 300, κτλ θέλει εἶθαι ὁ $2a$, $3a$, κτλ, ἀντὶ δὲ τοῦ δεκάτου ἐννοηθῇ ὁποιονδήποτε πολλοστὸν $\frac{1}{\nu}$· οὕτως ἔχομεν τὸ γενικὸν τοῦτο,

Οἱ παῖδές τινος ἐμοιράσθησαν τὴν ὁποίαν ὁ πατήρ των ἄφησε κληρονομίαν οὕτως, ὁ μὲν πρωτότοκος ἔλαβεν a δρ καὶ τὸ νιτὸν τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δὲ δεύτερος ἔπειτα $2a$ καὶ τὸ *νιτὸν τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δὲ τρίτος μετ' αὐτοὺς 3α καὶ τὸ νι-τὸν τοῦ ὑπολοίπου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς οἱ λοιποί, ἔλαβον δὲ ὅλοι ἴσα· πόση ἦτον ἡ κληρονομία καὶ πόσοι οἱ παῖδες;*

Ἡ δὲ ἐξίσωσις θέλει εἶσθαι

$$\alpha+\frac{\chi-\alpha}{\nu}=2\alpha+\frac{\chi-\alpha-\frac{\chi-\alpha}{\nu}-2\alpha}{\nu}.$$

Τὸ 16 γίνεται γενικὸν οὕτω

Τίνες εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ μὲν κεφάλαιον εἶναι α ἡ δὲ διαφορὰ β;

Ἡ δὲ ἐξίσωσις

$$\chi+\chi+\beta=\alpha.$$

Τὸ δὲ 32 οὕτω

Γ τις α ἐτῶν ἔχει υἱὸν β ἐτῶν· εἰς πόσα ἔτη ἡ τοῦ πα-τρὸς ἡλικία θέλει εἶσθαι νιπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

Ἡ δὲ ἐξίσωσις $\alpha+\chi=\nu(\beta+\chi)$. κτλ.

58. Ἀλλ' εἶναί τινα προβλήματα, ἐν οἷς ὑπάρχουσιν ἀν-τίθετα ποσά, καὶ ταῦτα δύνανται νὰ γείνωσι γενικὰ οὕτως ὥστε νὰ ἐμπεριλαμβάνωσιν ἀορίστως καὶ τὰ δύο ἀντίθετα πο-σὰ καὶ οὐδέτερον τούτων. Π. χ. τὸ ἀνωτέρω 32, ἐν ᾧ ζητεῖται ὁ χρόνος, καθ' ὃν θέλουσιν ἔχει αἱ ἡλικίαι λόγον τινὰ διάφορον τοῦ ὃν ἔχουσι τώρα, τὸν λόγον αὐτὸν δυνατὸν νὰ τὸν ἔχωσιν ἐν τῷ μέλλοντι χρόνῳ ἢ νὰ τὸν εἶχον ἐν τῷ παρελθόντι. Ταῦ-τα τὰ δύο ἐμπεριλαμβάνονται ἐν ταύτῃ τῇ ἐκθέσει, ἥτις δια-φέρει τῆς ἀνωτέρω καὶ κατά τιν' ἄλλα,

Α τις εἶναι α ἐτῶν, Β δέ τις εἶναι β ἐτῶν· πότε ἡ τοῦ Α ἡλικία εἶναι πρὸς τὴν τοῦ Β ὡς μ πρὸς ν;

Ἵνα δὲ κατασκευασθῇ τούτου ἡ ἐξίσωσις, ἀνάγκη νὰ ὑποτε-θῇ ἢ ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι ἢ ὅτι ἐν τῷ παρελθόντι ἔχουσιν αἱ ἡλικίαι τὸν ζητούμενον λόγον. Ἐὰν ἐν τῷ μέλλοντι, τότε ὁ Α θέλει εἶσθαι $\alpha+\chi$ ἐτῶν, ὁ δὲ Β $\beta+\chi$ ἐτῶν, ἔχομεν δὲ

$$\alpha+\chi:\beta+\chi::\mu:\nu,\ \text{ὅθεν}\ (\alpha+\chi)\nu=(\beta+\chi)\mu.$$

Ὡσαύτως γίνεται γενικὸν καὶ τὸ 38.

τοιοῦτον γίνεται καὶ τὸ 70, ἐὰν ἐννοηθῇ ὅτι μετά τινας ἡμέρας ἢ λαμβάνει ὁ στοιχειοθέτης ἢ δίδει ἢ οὔτε λαμβάνει οὔτε δίδει. Ἐκθέτεται δὲ γενικῶς οὕτω,

Τυπογράφος παραλαμβάνει στοιχειοθέτην ἐπὶ συμφωνίᾳ νὰ τῷ δίδῃ α λεπτὰ καθ' ἡμέραν καθ' ἣν ἐργασθῇ, νὰ τῷ κρατῇ δὲ β λεπτὰ καθ' ἡμέραν ἀπουσίας· μετὰ ν ἡμέρας, τῶν ὁποίων τινὰς μὲν εἰργάσθη, τινὰς δὲ ἦτον ἀπών, συνέβη νὰ λάβῃ ἢ νὰ δώσῃ ὁ στοιχειοθέτης γ λεπτὰ εἰς τὸν τυπογράφον ἢ μήτε τὸ ἓν μήτε τὸ ἄλλο· πόσας ἡμέρας ἦτον ἀπών;

Καὶ τούτου ἡ ἐξίσωσις ἵνα κατασκευασθῇ, ἀνάγκη νὰ ὑποτεθῇ ἓν τῶν τριῶν, π. χ. ὅτι ἔλαβε γ' λεπτὰ μετὰ ν ἡμέρας. Ἔχομεν λοιπὸν χ' ἡμέρας ἀπουσίας, $\nu-\chi$ ἡμέρας ἐργασίας· ἔμελλεν ὁ στοιχειοθέτης νὰ λάβῃ $(\nu-\chi)\alpha$ λεπτά, ἔμελλε νὰ δώσῃ $\beta\chi$, ἔλαβε λοιπὸν $(\nu-\chi)\alpha-\beta\chi$, τοῦτο δὲ εἶναι ἴσον γ'· λοιπὸν

$$(\nu-\chi)\alpha-\beta\chi=\gamma.$$

Ὡσαύτως καὶ ἐπὶ κινήσεως τὸ κινούμενον κινεῖται πρὸς ἓν μέρος ἢ ἀντιθέτως, τὰ δὲ δύο ταῦτα δυνατὸν νὰ μὴ προσδιορίζωνται ἐν τῇ ἐκθέσει, ἀλλὰ νὰ ἐννοῶνται καὶ τὰ δύο ἀορίστως οὕτω πως,

Δύο σώματα, τὸ μὲν ἐκ τοῦ σημείου Α μὲ α ταχύτητα, τὸ δὲ ἐκ τοῦ Β, ἀπέχοντος τοῦ Α γ στάδια, μὲ β ταχύτητα, ἀρχίζουσι νὰ κινῶνται κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· ποῦ τῆς εὐθείας θέλουσιν εἶσθαι ὁμοῦ τὰ δύο σώματα;

Ἵνα καὶ τούτου ἡ ἐξίσωσις κατασκευασθῇ, ἀνάγκη νὰ προσδιορισθῇ ἡ διεύθυνσίς των, ὅτι δηλ. διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἀντιθέτως τὰ δύο. Ὡς εὔκολος δὲ νὰ κατασκευασθῇ παραλείπεται.

Κατωτέρω θέλομεν ἐπανέλθει εἰς τὴν ἀκριβεστέραν τούτων τῶν προβλημάτων ἐξέτασιν, εἰπόντες ἐνταῦθα πῶς κατασκευάζωνται αὐτῶν αἱ ἐξισώσεις.

59. Τελευταῖον πολλὰ τῶν προηγουμένων προβλημάτων

δυνατὸν νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς ἓν γενικώτερον, ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν αἱ μερικαὶ περιστάσεις αὐτῶν, καθ' ἃς διαφέρουσιν, καὶ τηρηθῶσι τὰ κοινά. Οὕτω τὰ 1, 5, 6, 10 συμπεριλαμβάνονται εἰς τοῦτο,

Τίς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ μιτόν του καὶ τὸ νιτόν του καὶ τὸ πιτόν του σὺν α ἢ πλὴν α ἢ ἄνευ τούτων;

Καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$\frac{\chi}{\mu}+\frac{\chi}{\nu}+\frac{\chi}{\pi}+\alpha=\chi.$$

Τὰ δὲ 2, 3, 4, 7, 9 εἰς τοῦτο,

Τίς εἶναι ὁ ἀριθμὸς, οὗ τινος τὸ μιτὸν καὶ τὸ νιτὸν καὶ τὰ α πιτὰ πλὴν τοῦ ῥωτοῦ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν β;

Ἡ δὲ ἐξίσωσίς του

$$\frac{\chi}{\mu}+\frac{\chi}{\nu}+\frac{\alpha\chi}{\pi}-\frac{\chi}{\rho}=\beta.$$

Ὡσαύτως τὸ 12, 13, 14, 15 συμπεριλαμβάνονται εἰς τοῦτο,

Νὰ μερισθῇ ὁ α εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τοῦ μ καὶ τοῦ ν

Ὄντος δὲ τοῦ ἑτέρου χ, τὸ ἄλλο εἶναι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας $\mu : \nu :: \chi : \frac{\nu\chi}{\mu}$, καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$\chi+\frac{\nu\chi}{\mu}=\alpha.$$

Τὸ δὲ 21, 22, 23, κτλ εἰς τοῦτο,

Νὰ μερισθῇ ὁ α εἰς τρία ἢ καὶ τέσσαρα κτλ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ, ν, π, κτλ.

Ἔχομεν δὲ τὰ μέρη ἐκ τῶν ἀναλογιῶν, ὑποτεθέντος τοῦ ἑνὸς χ

$$\mu : \nu :: \chi : \frac{\nu\chi}{\mu}, \quad \mu : \pi :: \chi : \frac{\pi\chi}{\mu}, \quad \text{κτλ.}$$

ὅθεν
$$\chi+\frac{\nu\chi}{\mu}+\frac{\pi\chi}{\mu}+ \text{κτλ}=\alpha.$$

Τὴν ἄσκησιν εἰς τὸ νὰ καθισταίνῃ τις γενικὰ τὰ μερικὰ προβλήματα κατὰ τὰς τρεῖς διαφόρους προειρημένας περιπτώσεις θεωροῦμεν κατὰ πολλὰ ὠφελιμωτάτην, καὶ διὰ τοῦτο προτρέπομεν τοὺς ἀρχαρίους εἰς αὐτήν.

60. *Γενικὴ παρατήρησις.* Ἡ κατασκευὴ τῶν ἐξισώσεων δύναται νὰ θεωρῆται ὡς μετάφρασις τῆς ἐκθέσεως τοῦ προβλήματος διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων· διότι καὶ διὰ τούτων, τὰ ὁποῖα ἐνυπάρχουσιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν, ἐννοεῖ τις σχεδὸν τὸ αὐτὸ, τὸ ὁποῖον καὶ διὰ τῆς ἐκθέσεως τοῦ προβλήματος. Λέγω σχεδὸν, διότι ἡ ἐξίσωσις δὲν ἐμπεριέχει ὅλας τὰς μερικὰς περιστάσεις τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ μόνον τὰς σχέσεις τῶν ἐν αὐτῷ ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο εἶναι παράστασις αὐτοῦ συντομωτέρα καὶ συνήθως γενικωτέρα, ἀνήκουσα εἰς πολλὰ προβλήματα διάφορα μόνον κατά τινας μερικὰς περιστάσεις. Εἶναι δ' ὠφέλιμον ὄχι μόνον νὰ γυμνάζηταί τις νὰ κατασκευάζῃ τὴν ἐξίσωσιν ἐκ τῆς ἐκθέσεως, ἀλλὰ καὶ τἀνάπαλιν πολλάκις, ἐκ τῆς ἐξισώσεως νὰ εὑρίσκῃ τὴν ἔκθεσιν τοῦ προβλήματος· τὸ ὁποῖον ὅμως ἔχει μεγάλην ἀοριστίαν, ὡς εὐκόλως τις τὸ ἐννοεῖ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΛΥΣΕΩΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Γενικαὶ ἀρχαὶ καὶ πράξεις περὶ λύσεως ἐξισώσεων.

61. Εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι τὰ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι σημεῖα x, y, $ω$, κτλ παριστάνουσι καθ' ὑπόθεσιν τοιούτους ἀριθμοὺς, οἵτινες γενόμενοι γνωστοὶ καὶ τεθέντες ἀντ' αὐτῶν ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν *ἐπαληθεύουσιν* αὐτὰς, ἤτοι καθιστάνουσι τὰ δύο μέλη των ἴσα· ἂν δ' ἐκτελεσθῶσι καὶ ὅλαι αἱ σημειωμέναι πράξεις, *ταυτοποιοῦσιν* αὐτάς.

Τούτου γνωστοῦ ὄντος, εὐκόλως καταλαμβάνει τις ὅτι, ὅταν *γράφηται εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὁ αὐτὸς θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς, ἢ ὅταν πολλαπλασιάζωνται ἢ διαιρῶνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως, τὸ διά τινος τῶν τεσσάρων τούτων προκύπτον εἶναι καὶ αὐτὸ ἐξίσωσις, ἐν ᾗ τὸ χ ἢ ψ κτλ θέλει παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὃν καὶ ἐν τῇ δεδομένῃ.*

Π. χ. ἡ $\alpha\chi+\beta=\gamma\chi-\delta$ τρέπεται εἰς
$(\alpha\chi+\beta)+\mu=(\gamma\chi-\delta)+\mu$ ἢ $(\alpha\chi+\beta)-\nu=(\gamma\chi-\delta)-\nu$, γραφομένου εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ $+\mu$ ἢ τοῦ $-\nu$,

ἢ εἰς $(\alpha\chi+\beta)\xi=(\gamma\chi-\delta)\xi$ ἢ $\frac{\alpha\chi+\beta}{\pi}=\frac{\gamma\chi-\delta}{\pi}$,

πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο μελῶν ἐπὶ ξ ἢ διαιρουμένων διὰ τοῦ π. Τούτων δὲ τὰ δύο μέλη θέλουσι γείνει ἴσα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ χ, δι' οὗ καὶ τῆς δεδομένης τὰ μέλη θέλουσι γείνει ἴσα. Διότι, ὡς εἶναι ἤδη γραμμένα, βλέπει τις ὅτι τούτων τὰ μέλη εἶναι τὰ αὐτὰ τῆς δεδομένης αὐξημένα ἢ ἐλαττωμένα κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἢ εἶναι τὰ αὐτὰ πολλαπλάσια ἢ τὰ αὐτὰ πολλοστὰ τῶν μελῶν τῆς δεδοδομένης· ἐπομένως ὁ ἀντὶ τοῦ χ ἀριθμὸς, ὅστις θέλει καταστήσει ἴσα τὰ μέλη τῆς δεδομένης, θέλει καταστήσει ἐξ ἀνάγκης ἴσα καὶ τούτων τὰ μέλη. Ὥστε τὸ χ παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἐν ταύταις, ὅν τινα καὶ ἐν τῇ δεδομένῃ.

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ὅταν ὁ ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζομεν ἢ δι' οὗ διαιροῦμεν ἀριθμὸς ἐμπεριέχῃ αὐτὸν τὸν ἄγνωστον τῆς ἐξισώσεως, τότε *δυνατὸν* ἡ δευτέρα ἐξίσωσις νὰ ἐπαληθεύηται καὶ δι' ἄλλου ἀριθμοῦ, δι' οὗ ἡ πρώτη δὲν ἐπαληθεύεται. Π. χ. ἡ $2\chi=4$ ταυτοποιεῖται μόνον διὰ $\chi=2$· ἀφοῦ δὲ πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο μέλη της ἐπὶ $\chi-1$, ὅστις ἔχει τὸν χ, προκύπτει ἡ $2\chi(\chi-1)=4(\chi-1)$, ἥτις ἐπαληθεύεται μὲν διὰ $\chi=2$ ὡς ἡ πρώτη, ἀλλ' ἐπαληθεύεται ἔτι καὶ διὰ $\chi=1$, δι' οὗ δὲν ταυτοποιεῖται ἡ πρώτη. Κατὰ ταύτας λοιπὸν τὰς περιπτώσεις ἀπαιτεῖται προσοχὴ, μήπως ἔχῃ χώραν τοιαύτη ἐξαίρεσις·

62. Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἀρχῶν πληροφορεῖταί τις ὅτι δύναται νὰ μεταθέτῃ ἐκ τοῦ ἑτέρου εἰς τὸ ἄλλο μέλος ἐξισώσεως ὅρον αὐτῆς τινα ἀλλάσσων μόνον τὸ + ἢ τὸ — τὸ πρὸ αὐτοῦ εἰς τὸ ἀντίθετόν του. Διότι, ἐὰν εἰς τῆς ἐξισώσεως $3a^2\chi-5\beta=2\chi+3\gamma$ π.χ. τὰ δύο μέλη γράψωμεν τοὺς ὅρους $+5\beta$ καὶ -2χ, τουτέστι τοὺς ἀντιθέτους τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει -5β καὶ $+2\chi$, ἔχομεν

$$3a^2\chi-5\beta+5\beta-2\chi=2\chi+3\gamma+5\beta-2\chi\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο τοῦ πρώτου μέλους ὅροι $-5\beta+5\beta$ καὶ οἱ δύο $+2\chi-2\chi$ τοῦ δευτέρου συναναιροῦνται, ἔχομεν ἁπλούστερα

$$3a^2\chi-2\chi=3\gamma+5\beta,$$

ὅπου βλέπει τις ὅτι ὁ -5β ἐκ τοῦ πρώτου *μετετέθη* εἰς τὸ δεύτερον θετικός, ὁ δὲ $+2\chi$ ἐκ τοῦ δευτέρου εἰς τὸ πρῶτον ἀντιθετικός. Οὕτω καὶ περὶ παντὸς ἄλλου.

Εἶναι δ' ἔτι δῆλον ὅτι *δυνάμεθα νὰ ἐξαλείφωμεν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ὅρον κοινὸν μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον* + ἢ —.

63. Κατὰ δὲ τὴν τετάρτην ἀρχὴν *ἐξίσωσις, ἧς ἂν οἱ ὅροι ὅλοι ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα, καθίσταται ἁπλουστέρα διαιρουμένων ὅλων τῶν ὅρων της ἤτοι τῶν δύο μελῶν της διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος*· οἷον ἡ

$$3\chi+6=9\chi-12$$

τρέπεται εἰς τὴν ἁπλουστέραν ταύτην

$$\chi+2=3\chi-4$$

διαιρέσει ὅλων τῶν ὅρων της διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος αὐτῶν 3.

64. Κατὰ δὲ τὴν τρίτην ἀρχὴν πρῶτον μὲν *δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων ἐξισώσεως εἰς τ' ἀντίθετά των*, διότι τοῦτο σημαίνει ὅτι πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς ὅρους της ἐπὶ —1.

Ἔπειτα *δυνάμεθα νὰ μετατρέπωμεν ἐξίσωσιν ἔχουσαν κλασματικοὺς ὅρους εἰς ἄλλην, ἧς οἱ ὅροι ὅλοι νὰ ἦναι ἀκέραιοι*, τὸ ὁποῖον ὠνόμασαν *ἀκεραίωσιν* τῆς ἐξισώσεως.

Διότι, ἀφοῦ τρέψωμεν ὅλους τοὺς ἑτερωνύμους κλασματικοὺς εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους, πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἤτοι ὅλους τοὺς ὅρους της ἐπὶ τὸν κοινὸν παρονομαστήν, οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασματικῶν ὅρων ἐκλείπουσι καὶ οὕτω προκύπτει ἐξίσωσις ἔχουσα ὅλους τοὺς ὅρους ἀκεραίους. Π. χ. τῆς ἐξισώσεως τοῦ 6 προβλήματος

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{12}+600=\chi$$

ἀφοῦ οἱ κλασματικοὶ ὅροι $\frac{\chi}{2}$ καὶ $\frac{\chi}{3}$ τραπῶσιν εἰς τοὺς ἰσοδυνάμους των $\frac{6\chi}{12}$ καὶ $\frac{4\chi}{12}$, πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἐπὶ 12 ἔχομεν

$$6\chi+4\chi+\chi+7200=12\chi,$$

ἧς οἱ ὅροι εἶναι ὅλοι ἀκέραιοι.

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι *πρὸς ἀκεραίωσιν ἐξισώσεως πρῶτον πρέπει νὰ εὑρίσκηται μάλιστα ὁ ἐλάχιστος δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ διαιρέσιμος ἀριθμὸς (Συμ. ἀρ. 54) ἔπειτα οἱ μὲν ἀκέραιοι ὅροι τῆς ἐξισώσεως ὅλοι νὰ πολλαπλασιάζωνται ἐπὶ τοῦτον, ὁ ἀριθμητὴς δ' ἑκάστου κλασματικοῦ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τούτου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, καὶ νὰ παραλείπωνται οἱ παρονομασταί.*

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον πρὸς γύμνασιν ν' ἀκεραιθῶσιν αἱ τῶν προβλημάτων τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι παρονομαστάς.

Τῆς δὲ γενικῆς ἐξισώσεως

$$5\alpha+\frac{\alpha^2\chi}{18\beta^2}=\frac{3\alpha^2}{4\beta}+\frac{\beta\chi}{9\alpha}$$

ὁ μὲν $18\beta^2=2\cdot3^2\beta^2$, ὁ δὲ $4\beta=2^2\beta$, ὁ δὲ $9\alpha=3^2\alpha$· ἑπομένως ὁ ἐλάχιστος διαιρέσιμος δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ εἶναι ὁ $2^2\cdot3^2\alpha\beta^2=36\alpha\beta^2$. Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν τὸν μὲν ἀκέραιον ὅρον 5α ἐπὶ $36\alpha\beta^2$, τὸν δὲ ἀριθμητὴν $\alpha^2\chi$ ἐπὶ τὸ πηλίκον 2α τοῦ $36\alpha\beta^2$ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ $18\beta^2$, τὸν δὲ ἀριθμητὴν $3\alpha^2$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $9\alpha\beta$ τοῦ $36\alpha\beta^2$ διὰ τοῦ παονομαστοῦ 4β, καὶ τέλος τὸν $\beta\chi$ διὰ τοῦ πηλίκου $4\beta^2$ κτλ· ἔχομεν τὴν

$$180a^2\beta^2+2a^3\chi=27a^3\beta-4\beta^3\chi.$$

Τῆς δ' ἐξισώσεως

$$2\beta-\frac{a\chi}{6\beta}=\frac{a^2\chi}{a\beta+\beta^2}-\frac{3a^2\beta}{2a^2-2\beta^2}$$

ὁ μὲν $6\beta=2.3\beta$, ὁ δὲ $a\beta+\beta^2=(a+\beta)\beta$, ὁ δὲ $2a^2-2\beta^2=2(a^2-\beta^2)=2(a+\beta)(a-\beta)$· ἐπομένως οἱ διάφοροι παράγοντες μὲ τοὺς ἀνωτάτους δείκτας των εἶναι οἱ 2, 3, β, $a+\beta$, $a-\beta$, καὶ ὁ ἐλάχιστος διαιρέσιμος δἰ ἑκάστου παρονομαστοῦ εἶναι $6\beta(a+\beta)(a-\beta)=6\beta(a^2-\beta^2)=6a^2\beta-6\beta^3$. Τὰ δὲ πηλίκα αὐτοῦ διὰ τῶν 6β, $a\beta+\beta^2$, $2a^2-2\beta^2$ εἶναι $a^2-\beta^2$, $6a-6\beta$, 3β. Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν τὸν μὲν ἀκέραιον 2β ἐπὶ $6a^2\beta-6\beta^3$, τοὺς δὲ ἀριθμητὰς $a\chi$, $a^2\chi$, $3a^2\beta$ ἐπὶ τὰ προσήκοντα πηλίκα $a^2-\beta^2$, $6a-6\beta$, 3β, ἔχομεν

$$12a^2\beta^2-12\beta^4-a^3\chi+a\beta^2\chi=6a^3\chi-6a^2\beta\chi-9a^2\beta^2.$$

65. Ἐξίσωσις, ἥτις πορίζεται ἐξ ἄλλης διά τινος τῶν προηγουμένων πράξεων, ἤτοι διὰ μεταθέσεως ὅρων, διὰ διαιρέσεως, δἰ ἀλλαγῆς τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων, δἰ ἐξαλείψεως τῶν παρονομαστῶν, ἢ καὶ δἰ ἄλλης τινὸς πηγαζούσης ἐκ τῶν προειρημένων ἀρχῶν, ὀνομάζεται *συνέπεια τῆς ἄλλης*, ἐξ ἧς πορίζεται· καὶ δῆλον ἤδη ὅτι ἡ συνέπεια ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δἰ οὗ καὶ ἡ ἐξ ἧς πορίζεται ἐξίσωσις, καὶ *τἀνάπαλιν*, διότι δύναται νὰ θεωρῆται καὶ ἡ δεδομένη ὡς συνέπεια τῆς συνεπείας αὐτῆς.

66. Ἐξίσωσις λέγεται *τοῦ πρώτου βαθμοῦ τοῦ δευτέρου* κτλ, ὅταν ἦναι 1, 2, κτλ ὁ ἀνώτατος τοῦ ἐν αὐτῇ ἀγνώστου δείκτης, ἤ, ἂν ἔχῃ πολλοὺς ἀγνώστους πολλαπλασιασμένους ἐπ' ἀλλήλους ἐν τῷ αὐτῷ ὅρῳ, τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα τῶν δεικτῶν των. Προσδιορίζεται δὲ ὁ βαθμὸς αὐτῆς συνήθως ἀφοῦ διά τινων πράξεων, ἂν ἦναι χρεία, μεταποιηθῇ ἡ ἐξίσωσις, ὥστε νὰ

καταντήσῃ εἰς ἄλλην, ἥτις νὰ ἔχῃ ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἀκεραίους καὶ τοὺς δείκτας τῶν ἀγνώστων θετικοὺς, οἷαι εἶναι αἱ ἑξῆς

$$2\chi-a=6-\chi,\ 2\chi^2+a=4\chi+2,\ \chi\omega^4-2\chi^3=\omega^3-1.$$

Ἡ πρώτη τούτων εἶναι *πρωτοβάθμιος*, διότι ὁ χ ἀνώτατον δείκτην ἔχει τὴν 1· ἡ δευτέρα εἶναι *δευτεροβάθμιος*, διότι ὁ ἀνώτατος δείκτης τοῦ χ εἶναι ὁ 2· ἡ τρίτη εἶναι *τοῦ πέμπτου βαθμοῦ*, διότι ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι γινόμενον τοῦ χ καὶ τοῦ ω, καὶ τὸ ἄθροισμα 5 τῶν δεικτῶν των εἶναι τὸ μεγαλήτερον. (ἰδὲ καὶ τὰς τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου).

Καὶ τὰ προβλήματα δὲ, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶναι τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ κτλ, λέγονται *πρωτοβάθμια*, *δευτεροβάθμια* κτλ. Τὰ τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου μέχρι καὶ τοῦ 100 εἶναι *πρωτοβάθμια*, τὰ δὲ ἀπὸ τοῦ 101 μέχρι καὶ τοῦ 110 εἶναι *τοῦ δευτέρου βαθμοῦ*, ἂν καί τινων αἱ ἐξισώσεις ἀναφαίνονται κατ' ἀρχὰς ἀνωτέρου βαθμοῦ, οἷον ἡ δευτέρα τοῦ 108.

Ἐφεξῆς λέγομεν πῶς λύονται αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις ὅλων τῶν διαφόρων εἰδῶν.

Περὶ λύσεως πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως ἐχούσης ἕνα ἄγνωστον.

67. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ τοῦ 49 προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{3\chi}{50}=\frac{(\chi-126)5}{70}.$$

Ἐδῶ πρόκειται νὰ μεταποιήσωμεν ταύτην, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ ὑπὸ τοῦ χ παριστανόμενος ἀριθμὸς, εἰς ἄλλην, τῆς ὁποίας τὸ ἕτερον μέλος νὰ ἦναι μεμονωμένον τὸ χ, τὸ δὲ ἄλλο μερικός τις ἀριθμός.

Πρῶτον λοιπὸν *ἀκεραιοῦμεν αὐτὴν* (64) πολλαπλασιάζοντες τὸν 3χ ἐπὶ 7, τὸν δὲ $(\chi-126)5$ ἐπὶ 5, καὶ ἔχομεν

$$21\chi=(\chi-126)25.$$

Ἔπειτα *πολλαπλασιάζομεν τὸν* $\chi - 126$ *ἐπὶ* 25, καὶ ἔχομεν

$$21\chi = 25\chi - 3150\cdot$$

τώρα *μεταθέτομεν τὸν* 25χ *εἰς τὸ πρῶτον μέλος* (62), ὥστε νὰ ἦναι οἱ ἔχοντες τὸ χ ὅροι εἰς τὸ ἕτερον μέλος, οἱ δὲ μὴ ἔχοντες αὐτὸ εἰς τὸ ἄλλο, καὶ γίνεται

$$21\chi - 25\chi = -3150\cdot$$

συστέλλομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους 21χ *καὶ* 25χ, καὶ γίνεται

$$-4\chi = -3150\cdot$$

ἀλλάσσομεν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ σημεῖα, καὶ ἔχομεν

$$4\chi = 3150\cdot$$

τελευταῖον *διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ συνεργοῦ* 4 τοῦ χ, καὶ ἔχομεν

$$\chi = \frac{3150}{4} = 787\tfrac{1}{2}.$$

Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $787\frac{1}{2}$, ἤτοι ὅτι ὁ δεύτερος ταχυδρόμος φθάνει τὸν πρῶτον στάδια $787\frac{1}{2}$ μακρὰν τῶν Ἀθηνῶν. Διότι σημειωθεὶς διὰ χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς κατ' ἀρχὰς δὲν μετεβλήθη παντάπασιν οὔτε κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως οὔτε κατὰ τὴν λύσιν αὐτῆς· καὶ ἐπειδὴ δὲν ἔγεινε κἀνὲν λάθος εἰς τὰς κατὰ τὴν λύσιν πράξεις, ἡ $\chi = 787\frac{1}{2}$ εἶναι συνέπεια τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος, καὶ ταυτοποιεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ καὶ ἡ τοῦ προβλήματος. Ἀλλ' ἡ $\chi = 787\frac{1}{2}$ ταυτοποιεῖται ἂν ἀντὶ χ τεθῇ ὁ $787\frac{1}{2}$ καὶ *μόνον* δι' αὐτοῦ· λοιπὸν καὶ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις πρέπει νὰ ταυτοποιῆται μόνον διὰ τοῦ $787\frac{1}{2}$. Ἀλλ' ὁ ἐπαληθεύων τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ ζητούμενος, ἂν δὲν ἔγεινε λάθος τι κατασκευαζομένης αὐτῆς· λοιπὸν ὁ $787\frac{1}{2}$ εἶναι ὁ ζητούμενος, διότι κατεσκευάσθη ὀρθῶς ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος. Οἱ αὐτοὶ δὲ συλλογισμοὶ πρέπει νὰ γίνωνται εἰς ὅλας τὰς ὁμοίας περιστάσεις.

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν δὲ ὅτι αἱ πρὸς λύσιν πράξεις ἐξετελέσθησαν ὀρθῶς δύναταί τις νὰ θέτῃ ἀντὶ τοῦ χ τὸν $787\frac{1}{2}$ ἐν τῇ τοῦ προβλήματος ἐξισώσει, καὶ νὰ ἐκτελέτῃ ὅλας τὰς ἐκεῖ σημειωμένας πράξεις· πρέπει δὲ νὰ καταντήσῃ εἰς ταυτότητα, ἂν δὲν ἔγεινε λάθος κατὰ τὴν λύσιν, ἢ ἂν δὲν γείνῃ κατὰ τὴν ἐπιβεβαίωσιν, ὡς τῷ ὄντι ἐδῶ συμβαίνει.

$$\frac{3\times\frac{1575}{2}}{50}=\frac{(\frac{1575}{2}-126)5}{70}$$

$$\frac{4725}{100}=\frac{(1575-252)5}{140},$$

$$\frac{4725}{100}=\frac{1323\times5}{140},$$

$$47,25=47,25.$$

Σημ. Τὰ πρὸς ἐπιβεβαίωσιν ἤδη εἰρημένα εἶναι ἀναγκαῖα μάλιστα νὰ γίνωνται μόνον ὅταν ὁ ἄγνωστος ἦναι ἐν τοῖς παρονομασταῖς τῆς ἐξισώσεως. Διότι τότε πρὸς ἀκεραίωσιν αὐτῆς ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάζωνται τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχοντα τὸν ἄγνωστον, τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ μεταβάλλῃ τὸν ὑπὸ τοῦ χ παριστανόμενον ἀριθμόν· ὥστε ὁ εὑρισκόμενος ἀντὶ τοῦ χ ἀριθμὸς εἰς τὸ τέλος τῆς λύσεως νὰ μὴ ἦναι ὁ ζητούμενος. Ἂν ὅμως ὁ ἀντὶ τοῦ χ ἀριθμὸς ταυτοποιῇ τὴν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν, εἶναι ὁ ζητούμενος.

68. Αἱ πρὸς λύσιν πάσης ἄλλης μερικῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον πράξεις εἶναι σχεδὸν αἱ ἐκτελεσθεῖσαι πρὸς λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἕξ, ἀλλ' ἢ χρειάζονται ὅλαι κατὰ τὴν ἀνωτέρω σειράν, ἢ τινὲς μόνον αὐτῶν. Π. χ. πρὸς λύσιν τῆς τοῦ 53 χρειάζεται μόνον ἡ τελευταία, ἤτοι διαίρεσις τῶν δύο μελῶν διὰ 6· πρὸς λύσιν δὲ τῆς τοῦ 12, 13 καὶ 21 χρειάζεται συστολὴ καὶ διαίρεσις· ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ 16 μετάθεσις, συστολὴ καὶ διαίρεσις· ἐπὶ ἄλλων δὲ πλειότεραι. Σπανιώτατα δὲ χρειάζεται καί τις ἑβδόμη, *τετραγωνισμὸς τῶν δύο μελῶν*, ὡς ἐπὶ τῆς τοῦ 75· διότι πρὸς λύσιν ταύτης

$$\chi+50=\chi-9+2\sqrt{\chi-9}+1$$

πρῶτον ὅλοι οἱ ἄλλοι ὅροι ἐκτὸς τοῦ ἔχοντος τὸ ῥιζ κὸν μετατίθενται εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ γίνεται ἡ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, ἔχομεν δὲ

$$58=2\sqrt{\chi-9},$$

ἥτις διαιρουμένων τῶν δύο μελῶν διὰ 2 γίνεται

$$29=\sqrt{\chi-9}.$$

Τώρα εἶναι ἀνάγκη νὰ *τετραγωνίσωμεν* καὶ τὰ δύο μέλη πρὸς ἐξάλειψιν τοῦ ῥιζικοῦ, ὑπὸ τὸ ὁποῖον κεῖται ὁ χ, καὶ ἔχομεν

$$841=\chi-9, \text{ ὅθεν } \chi=850.$$

69. Πρὸς λύσιν δὲ γενικῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον ἐκτὸς τῶν εἰρημένων πράξεων εἶναι συνήθως ἀναγκαία καὶ *ἀναγωγὴ γινομένου εἰς τοὺς παράγοντάς του*, ἔτι δὲ χρήσιμος καὶ *διάταξις τῶν ὅρων*.

Ἔστω εἰς λύσιν π. χ. ἡ

$$\frac{3\beta\chi}{2a^2}-\frac{\chi-\beta}{a+\beta}=\frac{\beta\chi-a^2}{a^2-\beta^2}-\frac{\chi}{4a}.$$

Ὁ ἐλάχιστος δὶ ἑκάστου παρονομαστοῦ διαιρέσιμος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $4a^2(a^2-\beta^2)=4a^4-4a^2\beta^2$. Τὰ δὲ πηλίκα αὐτοῦ δὶ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν κατὰ σειρὰν εἶναι $2a^2-2\beta^2$, $4a^3-4a^2\beta$, $4a^2$, $a^3-a\beta^2$, καὶ πολλαπλασιάζοντες μὲν ἐπ' αὐτὰ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας ἀριθμητάς, ἀλλὰ σημειοῦντες μόνον τὰς πράξεις, παραλείποντες δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν ἔχομεν

$$3\beta\chi(2a^2-2\beta^2)-(\chi-\beta)(4a^3-4a^2\beta)=$$
$$(\beta\chi-a^2)4a^2-\chi(a^3-a\beta^2).$$

Ἐκτελοῦντες τώρα τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἔχομεν

$$6a^2\beta\chi-6\beta^3\chi-4a^3\chi+4a^2\beta\chi+4a^3\beta-4a^2\beta^2=$$
$$4a^2\beta\chi-4a^4-a^3\chi+a\beta^2\chi\cdot$$

μεταθέσει δὲ ὅλων τῶν ἐχόντων τὸν χ ὅρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τῶν δὲ μὴ ἐχόντων αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον γίνεται

$$6a^2\beta\chi-6\beta^3\chi-4a^3\chi+4a^2\beta\chi-4a^2\beta\chi+a^3\chi-a\beta^2\chi=$$
$$-4a^4-4a^3\beta+4a^2\beta^2\cdot$$

συστολῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὅρων γίνεται

$$6a^2\beta\chi-6\beta^3\chi-3a^3\chi-a\beta^2\chi=-4a^4-4a^3\beta+4a^2\beta^2\cdot$$

διατάξει δὲ τῶν τοῦ πρώτου μέλους ὅρων πρὸς τὰς δυνάμεις τοῦ a γίνεται

$$-3a^3\chi+6a^2\beta\chi-a\beta^2\chi-6\beta^3\chi=-4a^4-4a^3\beta+4a^2\beta^2,$$

ἀλλαγῇ δὲ τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων, ἵνα ὁ πρῶτος ἦναι θετικός, γίνεται

$$3a^3\chi-6a^2\beta\chi+a\beta^2\chi+6\beta^3\chi=4a^4+4a^3\beta-4a^2\beta^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χ εἶναι κοινὸς παράγων ὅλων τῶν τοῦ πρώτου μέλους ὅρων, τὸ *πρῶτον μέλος ἀνάγεται εἰς τοὺς παράγοντάς του* (36), καὶ ἡ ἐξίσωσις τρέπεται εἰς τὴν

$$(3a^3-6a^2\beta+a\beta^2+6\beta^3)\chi=4a^4+4a^3\beta-4a^2\beta^2.$$

Τελευταῖον διαιρέσει τῶν δύο μελῶν διὰ τοῦ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων παράγοντος ἔχομεν

$$\chi=\frac{4a^4+4a^3\beta-4a^2\beta^2}{3a^3-6a^2\beta+a\beta^2+6\beta^3}.$$

Σημ. Πᾶσα γενικὴ ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος μὲ ἕνα ἄγνωστον διὰ τῶν προειρημένων πράξεων δύναται νὰ καταντήσῃ εἰς τοιαύτην τινὰ $A\chi=B$, ἐὰν δὶ A μὲν σημειωθῇ τὸ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἐν τῷ πρώτῳ μέλει ὂν πολύορον ἢ καὶ ὅρος τις ἐνίοτε, διὰ B δὲ τὸ δεύτερον μέλος, πολύορον ἢ ὅρος ὄν. Ὥστε πᾶσα τοιαύτη γενικὴ ἐξίσωσις δύναται γενικώτατα νὰ παριστάνηται διὰ τῆς

$$A\chi=B.$$

70. Ἀφοῦ λυθῇ γενικὴ ἐξίσωσις καὶ εὑρεθῇ ὁ τύπος, πρέπει νὰ μὴ λησμονῇ τις νὰ τὸν ἑρμηνεύῃ εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν τοιοῦτον, ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς λύσεως, ἢ καὶ τετραμμένον ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον, ἂν ἦναι δυνατόν.

Δυομένης π. χ. τῆς ἐξισώσεως $\chi+\chi+\beta=a$ τῆς ἐν ἀρ. 57, εὑρίσκομεν $\chi=\frac{a-\beta}{2}$.

τὸ δὲ μεγαλήτερον μέρος εἶναι

$$\beta+\chi=\beta+\frac{a-\beta}{2}=\frac{2\beta+a-\beta}{2}=\frac{a+\beta}{2}.$$

Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι τὸ μὲν μικρότερον μέρος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τοῦ δεδομένου κεφαλαίου καὶ τῆς δεδομένης διαφορᾶς, τὸ δὲ μεγαλήτερον μέρος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δεδομένου κεφαλαίου καὶ τῆς δεδομένης διαφορᾶς.

Ἀλλὰ τὸ μὲν $\frac{\alpha-\beta}{2}$ γράφεται καὶ οὕτω $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{2}$, τὸ δὲ $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$. λοιπὸν τὸ μὲν εἶναι διαφορά, τὸ δὲ εἶναι κεφάλαιον τῶν ἡμίσεων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Περὶ λύσεως δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἑκατέρας μὲ δύο ἀγνώστους.

71. Ἔστωσαν εἰς λύσιν αἱ τοῦ 80 προβλήματος ἐξισώσεις, αἵτινες, ὀρθῶς ἐννοηθείσης καὶ μεταφρασθείσης τῆς ἐκθέσεως, εἶναι αὗται

[1] $$\chi-6+\chi/3=3\omega,\quad \chi=\tfrac{13}{6}(\omega+3),$$

ἐν αἷς καὶ τὸ χ παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὴν ἐνεστῶσαν ἡλικίαν τοῦ πατρός, καὶ τὸ ω ὡσαύτως, τὴν τωρινὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ.

Πρῶτον καὶ αὗται πρέπει ν' ἀκεραιωθῶσι καὶ νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ $\omega+3$ ἐπὶ 13· οὕτω γίνονται

$$3\chi-18+\chi=9\omega,\quad 6\chi=13\omega+39\cdot$$

ἔπειτα νὰ μετατεθῶσιν οἱ μὲν ἔχοντες τοὺς ἀγνώστους χ καὶ ω ὅροι εἰς τὸ πρῶτον μέλος, οἱ δὲ ὅλως γνωστοὶ ὅροι εἰς τὸ δεύτερον, νὰ συσταλθῶσιν δὲ οἱ ὅμοιοι ὅροι· οὕτως ἔχομεν

[2] $$4\chi-9\omega=18,\quad 6\chi-13\omega=39.$$

Τὰς αὐτὰς δὲ ταύτας σχεδὸν πράξεις, ἂν χρειασθῇ, ἀνάγκη νὰ ἐκτελῶμεν πάντοτε, ὥστε νὰ λάβωσιν αἱ ἐξισώσεις τὴν ἔχουσαν ἤδη αἱ ἀνωτέρω μορφήν, τουτέστιν *ἐν τῷ πρώτῳ μέλει νὰ ἦναι εἷς ὅρος μὲ τὸ* χ *θετικὸς ἢ ἀντιθετικός, καὶ εἷς ἄλλος ὅρος μὲ τὸν* ω *ὡσαύτως, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ εἷς μόνος ὅρος γνωστός.*

Μετὰ ταῦτα πρέπει νὰ ἐκτελῆται ἄλλη νέα σύνθετος πρᾶξις πρὸς πορισμὸν τρίτης ἐξισώσεως ἐκ τῶν δύο ἤδη εὑρεθεισῶν, ἥτις νὰ ἔχῃ μόνον τὴν ἑτέραν τῶν δύο ἀγνώστων, ὁποτέραν θελήσωμεν· ἡ πρᾶξις δ' αὕτη καλεῖται *ἀπάλειψις τῆς ἑτέρας ἀγνώστου*.

Ἡ ἀπάλειψις ἐκτελεῖται κατὰ διαφόρους τρόπους, τοὺς ὁποίους ἐκθέτομεν ἐφεξῆς.

72. *Ἀπάλειψις διὰ συστολῆς*. Ἔστω ἀπαλειπτέον ἄγνωστον τὸ χ, ὁπότε πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω τρίτη ἐξίσωσις μὲ μόνον τὸ ω.

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μὲν δύο μέλη τῆς πρώτης *ἐπὶ τὸν ἐν τῇ δευτέρᾳ συνεργὸν* 6 *τοῦ ἀπαλειπτέου* χ, *τὰ δὲ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸν ἐν τῇ πρώτῃ συνεργὸν* 4 τοῦ αὐτοῦ χ, ἵνα γείνωσιν οἱ συνεργοὶ τῆς χ ἴσοι καὶ εἰς τὰς δύο, καὶ ἔχομεν

$$24\chi-54\omega=108,$$
$$24\chi-52\omega=156,$$

ἐν αἷς τὸ χ ἔχει τὸν αὐτὸν συνεργὸν 24. Τώρα πρὸς ἀπάλειψιν τοῦ χ, ἐπειδὴ οἱ μὲ αὐτὸ ὅροι εἶναι θετικοί, *ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἑτέρας ἐξισώσεως*, τῆς πρώτης προτιμότερον, *καὶ συστέλλομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους ἑκατέρων τῶν μελῶν*· οὕτως ἐκλείπει τὸ χ καὶ προκύπτει ἐξίσωσις μὲ μόνον τὸ ω αὕτη

$$2\omega=48.$$

Μετὰ τὴν ἀπάλειψιν τοῦ χ *λύομεν τὴν προκύψασαν ἐξίσωσιν*, ἥτις εἶναι πρωτοβάθμιος μὲ ἕνα ἄγνωστον, καὶ εὑρίσκομεν $\omega=24.$

Ὡσαύτως πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ *ἀπαλείφομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων*

$$4\chi-9\omega=18,\ 6\chi-13\omega=39$$

τὸ ω, πολλαπλασιάζοντες τὰ μὲν δύο μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ 13, τὸν ἐν τῇ δευτέρᾳ συνεργὸν τοῦ ω, τὰ δὲ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸν ἐν τῇ πρώτῃ συνεργὸν 9 τοῦ ω, ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα τῶν μελῶν της πρώτης, διότι οἱ μὲ τὸ ω ὅροι εἶναι ἀντιθετικοὶ καὶ οἱ δύο, συστέλλομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους τῶν

τῶν πρώτων καὶ τοὺς τῶν δευτέρων μελῶν, καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν μὲ μόνον τὸ χ ἐξίσωσιν

$$2\chi=117, \text{ ὅθεν πάλιν } \chi=58\tfrac{1}{2}.$$

Ἢ ἀντὶ τούτων ὡς ἁπλούστερον *θέτομεν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀνωτέρω* [2] *ἐξισώσεων*, ἐν τῇ πρώτῃ προτιμότερον, *ἀντὶ τοῦ* ω *τὸ ἰσοδύναμόν του* 24, καὶ οὕτω τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον μὲ μόνον τὸ χ ταύτην

$$4\chi-9\times24=18,$$

τὴν *ὁποίαν λύοντες* εὑρίσκομεν $\chi=58\frac{1}{2}$, ὡς καὶ διὰ τῆς ἀπαλείψεως.

73. Εἶναι τώρα εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ 24 καὶ 58 $\frac{1}{2}$ ἀντὶ τοῦ ω καὶ τοῦ χ καὶ μόνοι αὐτοί, ὄχι μόνον ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, ἀλλ' εἶναι καὶ οἱ ζητούμενοι, ἤτοι ὅτι ὁ πατὴρ εἶναι 58$\frac{1}{2}$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς 24. Διότι αἱ πρὸ τῆς ἀπαλείψεως πράξεις δὲν μεταβάλλουσι τοὺς ἀγνώστους, καὶ αἱ [2] ἐξισώσεις ὡς συνέπειαι τῶν [1] τοῦ προβλήματος ἐπαληθεύονται διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, δι' ὧν καὶ αἱ τοῦ προβλήματος. Ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ πρὸς ἀπάλειψιν πράξεις δὲν μεταβάλλουσι τοὺς ἀγνώστους. Διότι αἱ πράξεις αὗται εἶναι πολλαπλασιασμοὶ τῶν δύο μελῶν τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ ἀριθμούς, οἵτινες δὲν ἔχουσι τοὺς ἀγνώστους, ἀλλαγὴ τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἑτέρας, πρόσθεσις ἢ ἀφαίρεσις τῶν μελῶν τῶν καὶ συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων· ὥστε αἱ προκύπτουσαι πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις $2\omega=18$ καὶ $2\chi=117$ εἶναι συνέπειαι τῶν ἐξισώσεων [2], καὶ ἐπαληθεύονται δι' ὧν ἀριθμῶν καὶ αἱ [2] ἢ αἱ [1]. Ἀλλ' ἡ μὲν αὐτῶν ταυτοποιεῖται διὰ 24 ἀντὶ ω καὶ μόνον διὰ 24, ἡ δὲ μόνον διὰ 58$\frac{1}{2}$ ἀντὶ χ· λοιπὸν καὶ αἱ τοῦ προβλήματος [1] ἐξισώσεις ταυτοποιοῦνται διὰ τῶν 24 καὶ 58$\frac{1}{2}$ καὶ μόνον δι' αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεων [1] δὲν ἔγεινε κἀνὲν λάθος καὶ τὸ χ καὶ τὸ ω ἀπ' ἀρχῆς μέχρι οὗ κατεσκευάσθησαν

13

αἱ ἐξισώσεις διετήρησαν τὴν ἀρχικήν των σημασίαν, οἱ ἐπαληθεύοντες ἀριθμοὶ τὰς ἐξισώσεις εἶναι οἱ ζητούμενοι.

Ὅταν δ' ὁ δεύτερος ἄγνωστος χ εὑρίσκηται ὄχι δι' ἀπαλείψεως, ἀλλ' ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τῶν [2] δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ 24 ἀντὶ ω καὶ λύσεως αὐτῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μὲν $2\omega=18$ ταυτοποιεῖται διὰ 24 ἀντὶ ω, ἡ δὲ πρώτη τῶν (2) ἐπαληθεύεται διὰ τῶν δύο ἀριθμῶν 24 καὶ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ ω καὶ χ, διότι λογισθέντος τοῦ $\omega=24$ εὑρέθη ὁ $\chi=58\frac{1}{2}$ ἐξ αὐτῆς λυθείσης. Ἡ δὲ δευτέρα τῶν [2], ὡς συνέπεια τῆς πρώτης τῶν [2] καὶ τῆς $2\omega=18$, ἐπαληθεύεται καὶ αὐτὴ διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν 24 καὶ $58\frac{1}{2}$, δι' ὧν καὶ ἐκεῖναι. Ὅτι δὲ εἶναι συνέπεια αὐτῶν γίνεται δῆλον, ἐὰν τῆς πρώτης πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο μέλη ἐπὶ 13 ὡς πρότερον πρὸς ἀπάλειψιν, καὶ γίνεται $24\chi-54\omega=108$, ἔπειτα ἑνωθῶσι μὲ τὰ μέλη της τὰ τῆς $2\omega=18$ καὶ συσταλθῶσιν, ὅθεν προκύπτει ἡ $24\chi-52\omega=156$, καὶ τελευταῖον διαιρεθῶσι ταύτης τὰ μέλη διὰ 4· οὕτως ἔχομεν τὴν δευτέραν $4\chi-13\omega=39$.

Ἐκ τούτων λοιπὸν τῶν συλλογισμῶν, οἵτινες εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαναλαμβάνωνται εἰς πᾶσαν ἄλλην ὁμοίαν περίστασιν, πληροφορεῖταί τις ὅτι, ὅταν ὀρθῶς κατασκευάζωνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ ἀλανθάστως κατὰ τὰ προειρημένα λύωνται, οἱ εὑρισκόμενοι οὕτως ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ζητούμενοι, καὶ εἶναι μόνοι αὐτοί. Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν δέ, ἂν θέλῃ τις, θέτει ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τοῦ προβλήματος ἀντὶ χ καὶ ω τοὺς εὑρεθέντας ἀριθμούς, καὶ θέλει ἰδεῖ ὅτι ταυτοποιοῦνται, ἂν δεν συνέβη ἢ δὲν συμβῇ λάθος εἰς τὰς πράξεις. Ὅταν δὲ αἱ ἐξισώσεις ἔχωσι τοὺς ἀγνώστους εἰς τοὺς παρονομαστάς, τότε ἀνάγκη πάντοτε νὰ ἐκτελῶνται τὰ τῆς ἐπιβεβαιώσεως.

74. Ὅταν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου οἱ συνεργοὶ ἦναι ἴσοι, ὡς ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τοῦ 78, δὲν γίνεται πολλαπλασιασμός, ἀλλ' εὐθὺς συστολὴ τῶν ὁμοίων ὅρων. Ὅταν δὲ ὁ ἕτερος συνεργὸς ἦναι πολλαπλάσιος τοῦ ἄλλου, ὡς ἐν ταῖς τοῦ 79 κτλ, πολλαπλασιάζονται τὰ μέλη τῆς ἑτέρας μόνον ἐξισώσεως, τῆς

ἐχούσης τὸν μικρότερον συνεργὸν κτλ. Ὅταν δ' ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα οἱ συνεργοί, ὡς ἀνωτέρω οἱ τοῦ χ, τότε εἶναι προτιμότερον νὰ πολλαπλασιάζωνται τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης μόνον ἐπὶ τὸν ἐν τῇ δευτέρᾳ μὴ κοινὸν παράγοντα, τὰ δὲ τῆς δευτέρας μόνον ἐπὶ τὸν ἐν τῇ πρώτῃ μὴ κοινὸν παράγοντα, διότι οὕτως εὑρίσκονται συνεργοὶ ἴσοι μικρότεροι. Ἡ μὲν πρώτη τῶν ἀνωτέρω πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ δύο, καὶ γίνονται

$$12\chi - 27\omega = 54$$
$$12\chi - 26\omega = 78.$$

Ὁπότερος δὲ τῶν ἀγνώστων παρέχει κατὰ τοῦτο εὐκολίαν πλειοτέραν, ἐκεῖνος ἐκλαμβάνεται ἀπαλειπτέος κατ' ἀρχάς.

Ὅταν δὲ οἱ μὲ τὸν ἀπαλειπτέον ἄγνωστον ὅροι ἦναι ἀντίθετοι, τότε, ἀφοῦ οἱ συνεργοὶ γείνωσιν ἴσοι, συστέλλονται εὐθὺς οἱ ὅμοιοι ὅροι τῶν ὁμοίων μελῶν· ὅταν δ' ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, τότε ἀνάγκη τῶν μελῶν τῆς ἑτέρας ἐξισώσεως τὰ σημεῖα ν' ἀλλάσσωνται καὶ ἔπειτα νὰ συστέλλωνται οἱ ὅμοιοι ὅροι κτλ.

Ἀφοῦ δὲ γυμνασθῇ τις ἱκανῶς, τότε καὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς ἀλλαγὰς τῶν σημείων καὶ τὰς συστολὰς ἐκτελεῖ διαμιᾶς, μάλιστα μετριάζει τοὺς πολλαπλασιασμοὺς μὴ πολλαπλασιάζων τοὺς μὲ τὸν ἀπαλειπτέον ἄγνωστον συνεργούς, καὶ οὕτως ἡ ἀπάλειψις καθίσταται ἁπλουστέρα.

Ὀνομάζεται δὲ διὰ συστολῆς ἀπάλειψις αὕτη, διότι κυρίως, ὅτε γίνεται ἡ συστολή, τότε ἀπαλείφεται ὁ ἄγνωστος, αἱ δὲ λοιπαὶ πράξεις εἶναι προπαρασκευαστικαί. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῶν ἀκολούθων λέξεων τῶν πρὸς διάκρισιν τῆς ἀπαλείψεως.

75. *Ἀπάλειψις δι' ἀντικαταστάσεως.* Ἐὰν ἐκ τῶν ἐξισώσεων

[2] $$4\chi - 9\omega = 18,\ 6\chi - 13\omega = 39$$

θέλωμεν ν' ἀπαλείψωμεν τὸ χ, *ὑποθέτομεν τὸ ω γνωστὸν* καὶ *λύομεν τὴν ἑτέραν τούτων, τὴν πρώτην*, ἵνα εὕρωμεν τὸ χ, καὶ ἔχομεν

$$[3] \qquad \chi=\frac{18+9\omega}{4}.$$

ἔπειτα *θέτομεν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ τοῦ χ τὸ ἰσοδύναμόν του*

$$\frac{18+9\omega}{4}, \text{ καὶ ἔχομεν}$$

$$[4] \qquad 6\times\frac{18+9\omega}{4}-13\omega=39,$$

ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον μὲ μόνον ἄγνωστον τὸ ω. Τώρα *λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν* ω=24.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ χ κάμνομεν ὅ,τι καὶ προηγουμένως εἴπομεν, δηλ. *θέτομεν ἐν τῇ πρώτῃ* [2] (ἢ κάλλιον ἐν τῇ [3] ἥτις εἶναι συνέπεια τῆς πρώτης, ἀλλ' εἶναι ὁ τύπος τοῦ χ) *ἀντὶ ω τὸν* 24, *καὶ λύοντες αὐτὴν ἔχουσαν μόνον τὸ χ εὑρίσκομεν* $\chi=58\frac{1}{2}$.

Ἂν δὲ καὶ βέβαιοι ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ 24 καὶ $58\frac{1}{2}$ ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, διότι εἶναι οἱ αὐτοί, οἵτινες εὑρέθησαν καὶ προηγουμένως, ἀλλ' ὅμως εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ἰδίως ὅτι ἡ [4] ὡς συνέπεια τῶν [2] ταυτοποιεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ ω, δι' οὗ καὶ αὗται· ἀλλ' ἡ [4] μόνον διὰ 24 ταυτοποιεῖται· λοιπὸν καὶ τὸ ω τῶν [2] εἶναι 24. Ἀλλ' ἐκ τῆς πρώτης αὐτῶν, ἀφοῦ ἐτέθη 24 ἀντὶ ω, εὑρέθη $\chi=58\frac{1}{2}$· λοιπὸν ὁ 24 καὶ ὁ $58\frac{1}{2}$ ἐπαληθεύουσι τὴν πρώτην τῶν [2]. Ἡ δὲ δευτέρα εἶναι αὐτὴ ἡ [4], διαφέρουσα μόνον καθότι ἀντὶ $\frac{18+9\omega}{4}$ ἔχει τὸ χ. Ἀλλ' ὅταν τὸ ω=24, τότε τὸ $\frac{18+9\omega}{4}$ ἤτοι τὸ χ γίνεται ἴσον $58\frac{1}{2}$· λοιπὸν ἢ ἐν τῇ [4] τεθῇ 24 ἀντὶ ω ἢ ἐν τῇ δευτέρᾳ τῶν [2] τεθῇ 24 ἀντὶ ω καὶ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ χ εἶναι τὸ αὐτό.

Ἀλλ' ἡ [1] ταυτοποιεῖται διὰ 24 ἀντὶ ω· λοιπὸν καὶ ἡ δευτέρα τῶν [2] ἐπαληθεύεται διὰ 24 ἀντὶ ω καὶ διὰ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ χ. Οἱ δὲ ἐπαληθεύοντες τὰς ἐξισώσεις [2] ἐπαληθεύουσι καὶ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ εἶναι οἱ ζητούμενοι.

Ἡ δὲ δι' ἀντικαταστάσεως ἀπάλειψις εἶναι μάλιστα ἐν χρήσει, ὅταν ὁ συνεργὸς τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου ἐν μιᾷ τινι ἐξισώσει ἦναι ἡ μονάς, ὡς ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τοῦ 78, 79, 81, 84, 90, 91· διότι τότε τὸ ἀντὶ τοῦ χ μέλλον νὰ τεθῇ ἐν τῇ ἄλλῃ ἐξισώσει θέλει εἶσθαι ἀκέραιον καὶ ὄχι κλασματικόν, τὸ ὁποῖον συνεπιφέρει πλειοτέρας πράξεις.

76. *Ἀπάλειψις διὰ συγκρίσεως.* *Ὑποθέτομεν ὡς ἀνωτέρω τὸ ω γνωστόν, λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις, ἵνα εὕρωμεν τὸ* χ, καὶ ἔχομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης ὡς ἀνωτέρω

$$\left.\begin{array}{l} \chi=\dfrac{18+9\omega}{4}, \\ \text{ἐκ δὲ τῆς δευτέρας } \chi=\dfrac{39+13\omega}{6} \end{array}\right\} (5)$$

Τώρα, ἐπειδὴ τὰ πρῶτα *μέλη εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς* χ, τὰ *δεύτερα μέλη, ἴσα ὄντα πρὸς τὰ πρῶτα, εἶναι ἴσα καὶ πρὸς ἄλληλα*, καὶ ἔχομεν

$$(6)\quad \frac{18+9\omega}{4}=\frac{39+13\omega}{6},$$

ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον μὲ μόνον τὸ ω. *Λύοντες λοιπὸν ταύτην εὑρίσκομεν* ω=24.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τοῦ χ *θέτομεν* 24 *ἀντὶ ω ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν* [5] *ἰσοδυνάμῳ τοῦ* χ, καὶ εὑρίσκομεν πάλιν $\chi=58\frac{1}{2}$. Ἐν ὁποτέρῳ δὲ καὶ ἂν τεθῇ, δῆλον ὅτι θέλει εὑρεθῇ $\chi=58\frac{1}{2}$, διότι καὶ τὰ δύο ὡς μέλη τῆς (6) ἐξισώσεως ταυτοποιοῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ ω.

Εἶναι δ' εὔκολον νὰ ἴδῃ τις ὅτι ὁ 24 ταυτοποιῶν τὴν (6) ἐξίσωσιν, ταυτοποιεῖ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (5), καὶ ἐπομένως ὁ 24 ἀντὶ ω καὶ ὁ $58\frac{1}{2}$ ἀντὶ χ ταυτοποιοῦσι τὰς δύο (5). Ἀλλ' αἱ [2] ἐξισώσεις εἶναι συνέπειαι ἄλλη ἄλλης τῶν δύο (5), τὸ ὁποῖον εἶναι φανερόν· λοιπὸν ὁ 21 καὶ ὁ $58\frac{1}{2}$ ἐπαληθεύουσι τὰς [2] ἐξισώσεις, καὶ ἑπομένως εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί.

Καὶ ἡ τοιουτότροπος δ' ἀπάλειψις, διότι συνεπιφέρει κλασματικοὺς ὅρους, εἶναι ὀλιγώτερον ἐν χρήσει.

Ἐπειδὴ δ' ἐνίοτε εἶναι προτιμητέα ἡ μία τῆς ἄλλης, εἶναι καλὸν νὰ λύωσιν οἱ ἀρχάριοι τὰς τῶν τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου προβλημάτων ἐξισώσεις ἐκτελοῦντες τὴν ἀπάλειψιν καὶ κατὰ τοὺς τρεῖς διαφόρους τρόπους πρὸς ἄσκησιν.

77. Ἔτι δὲ κατὰ τοὺς αὐτοὺς τρόπους ἀπαλείψεως ἂς λυθῶσι καὶ αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τοῦ 86, γενικοῦ γενομένου οὕτω

Ποῖος εἶναι ὁ κλασματικός, ὅστις, ἀφαιρουμένου τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ν ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του, γίνεται ἴσος μὲ τὸν δεδομένον $\frac{\alpha}{\beta}$, *προσθετομένου δὲ ἄλλου δεδομένου ἀριθμοῦ π εἰς τοὺς δύο ὅρους του, γίνεται ἴσος μὲ τὸν δεδομένον* $\frac{\gamma}{\delta}$;

αἵτινες εἶναι αὗται

$$\frac{\chi-\nu}{\omega-\nu}=\frac{\alpha}{\beta},\qquad \frac{\chi+\pi}{\omega+\pi}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

Ἀκεραιώσει μὲν λοιπὸν αὐτῶν εὑρίσκομεν

$$\beta\chi-\beta\nu=\alpha\omega-\alpha\nu,\quad \delta\chi+\delta\pi=\gamma\omega+\gamma\pi\cdot$$

μεταθέσει δὲ τῶν ὅρων

$$\beta\chi-\alpha\omega=\beta\nu-\alpha\nu,\quad \delta\chi-\gamma\omega=\gamma\pi-\delta\pi.$$

θέτοντες δὲ διὰ ἁπλότητα ἀντὶ μὲν τοῦ $\beta\nu-\alpha\nu$ τὸ ζ, ἀντὶ δὲ τοῦ $\gamma\pi-\delta\pi$ τὸ ξ, ἔχομεν

$$\beta\chi-\alpha\omega=\zeta,\qquad \delta\chi-\gamma\omega=\xi.$$

Ἀπαλείψει δὲ διὰ συστολῆς πρῶτον τῆς χ, ἔπειτα τῆς ω, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$\begin{array}{ll}
\beta\delta\chi-\alpha\delta\omega=\delta\zeta & \beta\gamma\chi-\alpha\gamma\omega=\gamma\zeta\\
\beta\delta\chi-\beta\gamma\omega=\beta\xi & \alpha\delta\chi-\alpha\gamma\omega=\alpha\xi\\
\hline
\alpha\delta\omega-\beta\gamma\omega=\beta\xi-\delta\zeta & \alpha\delta\chi-\beta\gamma\chi=\alpha\xi-\gamma\zeta\\
(\alpha\delta-\beta\gamma)\omega=\beta\xi-\delta\zeta & (\alpha\delta-\beta\gamma)\chi=\alpha\xi-\gamma\zeta\\
\omega=\dfrac{\beta\xi-\delta\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}. & \chi=\dfrac{\alpha\xi-\gamma\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}.
\end{array}$$

Ἀπαλείψει δὲ δι' ἀντικαταστάσεως ἔχομεν

$$\beta\chi=\zeta+\alpha\omega \qquad \frac{\delta\zeta+\alpha\delta\omega}{\beta}-\gamma\omega=\xi$$

$$\chi=\frac{\zeta+\alpha\omega}{\beta} \qquad \delta\zeta+\alpha\delta\omega-\beta\gamma\omega=\beta\xi$$

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\omega=\beta\xi-\delta\zeta$$

$$\omega=\frac{\beta\xi-\delta\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}$$

$$\chi=\frac{\zeta+\alpha\times\frac{\beta\xi-\delta\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}{\beta}=\frac{\alpha\delta\zeta-\beta\gamma\zeta+\alpha\beta\xi-\alpha\delta\zeta}{\beta(\alpha\delta-\beta\gamma)}$$

$$=\frac{\beta(\alpha\xi-\gamma\zeta)}{\beta(\alpha\delta-\beta\gamma)} \qquad \chi=\frac{\alpha\xi-\gamma\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}.$$

Ἀπαλείψει δὲ διὰ συγκρίσεως ἔχομεν

$$\beta\chi=\zeta+\alpha\omega \qquad \delta\chi=\xi+\gamma\omega$$

$$\chi=\frac{\zeta+\alpha\omega}{\beta} \qquad \chi=\frac{\xi+\gamma\omega}{\delta}$$

$$\frac{\zeta+\alpha\omega}{\beta}=\frac{\xi+\gamma\omega}{\beta}.$$

$$\delta\zeta+\alpha\delta\omega=\beta\xi+\beta\gamma\omega$$

$$\alpha\delta\omega-\beta\gamma\omega=\beta\xi-\delta\zeta$$

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\omega=\beta\xi-\delta\zeta$$

$$\omega=\frac{\beta\xi-\delta\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}.$$

θέτοντες δὲ ἐν τῇ $\chi=\frac{\zeta+\alpha\omega}{\beta}$ ἀντὶ ω τὸ ἰσοδύναμόν του, εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω

$$\chi=\frac{\alpha\xi-\gamma\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}.$$

Περὶ λύσεως πολλῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων με ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

78. Ἔστωσαν εἰς λύσιν αἱ ἐξισώσεις τοῦ 98 προβλήματος,

αἵτινες μετὰ τὴν ἀκεραίωσίν των, μετὰ τὴν μετάθεσιν τῶν ἀγνώστων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τῶν γνωστῶν εἰς τὸ δεύτερον καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τῶν σημείων τῶν μελῶν των γίνονται

$$12\chi+6\psi+6\omega=31824$$
$$4\chi+12\psi+4\omega=31824$$
$$3\chi+3\psi+12\omega=31824.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὅλοι οἱ ὅροι τῆς μὲν πρώτης εἶναι διαιρετοὶ διὰ 6, τῆς δὲ δευτέρας διὰ 4, τῆς δὲ τρίτης διὰ 3, διαιροῦμεν αὐτούς, διότι οὕτω θέλομεν ἔχει ἁπλουστέρας ἐξισώσεις ταύτας

(1) $$2\chi+\psi+\omega=5304$$
(2) $$\chi+3\psi+\omega=7956$$
(3) $$\chi+\psi+4\omega=10608.$$

Τώρα ἢ διὰ συστολῆς ἢ δι' ἀντικαταστάσεως ἢ διὰ συγκρίσεως ἀπαλείφομεν ἓν τῶν ἀγνώστων, τὸ ω, ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας, ἔπειτα ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης, καὶ εὑρίσκομεν δύο πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις ἑκατέραν μὲ τὰ δύο ἄλλα ἄγνωστα χ καὶ ψ, ταύτας

(4) $$-\chi+2\psi=2652$$
(5) $$7\chi+3\psi=10608.$$

Ἀπαλείφομεν καὶ ἐκ τούτων τὸ χ, καὶ εὑρίσκομεν τὴν πρωτοβάθμιον μὲ μόνον τὸ ψ

$$17\psi=29172,$$

ὅθεν $$\psi=1716.$$

Θέτοντες δὲ ἐν τῇ πρώτῃ τῶν δύο εὑρεθεισῶν ἐξισώσεων, ἐν τῇ $-\chi+2\psi=2652$, 1716 ἀντὶ τοῦ ψ, καὶ λύοντες αὐτὴν ἔχομεν $$\chi=780.$$

Τελευταῖον θέτομεν ἐν τῇ πρώτῃ τῶν τριῶν ἀνωτέρω τοῦ προβλήματος ἐξισώσεων, ἐν τῇ

$$2\chi+\psi+\omega=5304$$

1716 ἀντὶ τοῦ ψ καὶ 780 ἀντὶ τοῦ χ, τοὺς ὁποίους ἤδη εὑρήκαμεν, καὶ λύοντες αὐτὴν ἔχομεν $\omega=2028.$

λοιπὸν συμπεραίνομεν ὅτι τῆς πρώτης νηὸς τὸ πλήρωμα συνέκειτο ἐξ 780, τὸ τῆς δευτέρας ἐκ 1716, καὶ τὸ τῆς τρίτης ἐκ 2028 ἀνδρῶν. Διότι δῆλον μὲν ὅτι ὁ 780 ἀντὶ τοῦ χ καὶ ὁ 1716 ἀντὶ τοῦ ψ ταυτοποιοῦσι τὰς δύο ἐξισώσεις (4) καὶ (5), καὶ ὅτι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ μὲ τὸν 2028 ἀντὶ τοῦ ω ἐπαληθεύουσι τὴν (1) ἐξίσωσιν. Οἱ αὐτοὶ δὲ τρεῖς ἐπαληθεύουσι καὶ τὴν (2) καὶ τὴν (3)· διότι ἡ μὲν (2) εἶναι συνέπεια τῆς (1) καὶ τῆς (4), ἡ δὲ (3) εἶναι συνέπεια τῆς (1) καὶ τῆς (5), ὡς εὑρισκομένη ἡ μὲν (2), ἐὰν προστεθῶσιν ἑκάτερα τὰ μέλη τῆς (1) καὶ τῆς (4), ἡ δὲ (3), ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἑκάτερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ 4, καὶ ἔπειτ' ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτὰ τῆς (5) τὰ μέλη. Οἱ δὲ ἐπαληθεύοντες αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις ἀριθμοὶ ἐπαληθεύουσι καὶ τὰς τοῦ προβλήματος, καὶ ἑπομένως εἶναι οἱ ζητούμενοι.

79. Χωρὶς δὲ νὰ προβῶμεν περαιτέρω λύοντες καὶ τέσσαρας ἐξισώσεις ἑκάστην μὲ τέσσαρας ἀγνώστους καὶ πέντε μὲ πέντε ἀγνώστους κτλ, ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταλαμβάνει τις ὅτι *ὁσαιδήποτε ἐξισώσεις πρωτοβάθμιοι μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους ἑκάστην λύονται κατὰ τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα·* τουτέστιν

Ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων ἀπαλείφεται ἕν τι τῶν ἀγνώστων· καὶ οὕτω προκύπτουσιν ἄλλαι πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις κατὰ μίαν ὀλιγώτεραι τῶν δεδομένων καὶ μὴ ἔχουσαι τὸ ἀπαλειφθὲν ἄγνωστον. Πάλιν ἐκ μιᾶς τούτων τῶν εὑρεθεισῶν καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων ἀπαλείφεται ἄλλο ἄγνωστον τῶν ἐν αὐταῖς, καὶ οὕτω πάλιν προκύπτουσιν ἄλλαι πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις κατὰ μίαν ὀλιγώτεραι τῶν ἤδη εὑρεθεισῶν καὶ μὴ ἔχουσαι μηδὲ τὸ δεύτερον ἀπαλειφθὲν ἄγνωστον. Ἐξακολουθοῦντες δ' οὕτω θέλομεν καταντήσει τέλος πάντων εἰς μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ ἓν ἄγνωστον, τὴν ὁποίαν λύοντες θέλομεν εὑρεῖ ἕνα ἀριθμὸν ἀντ' αὐτοῦ. Ἔπειτα ἐπανερχόμενοι θέτομεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν ἀντὶ τοῦ σημείου τοῦ ἀγνώστου ἐν τῇ ἑτέρᾳ *τῶν δύο προηγουμένων καὶ λύοντές την προσδιορίζομεν καὶ τὸν δεύτερον ἄγνωστον. Οὕτω δ' ἐξακολουθοῦντες θέλομεν ἐπανέρχεσθαι προσδιορίζοντες ἀνὰ ἕνα ἄγνωστον μέχρι τῶν δεδομένων, ἐκ μιᾶς τῶν ὁποίων θέλομεν προσδιορίζει καὶ τὸν τελευταῖον ἄγνωστον.*

80. Ὅταν αἱ ἐξισώσεις, οὖσαι ἰσάριθμοι μὲ τοὺς ἐν αὐταῖς ἀγνώστους, δὲν ἔχουσιν ἑκάστη ὅλους τοὺς ἀγνώστους, ἀλλὰ τινὰς μόνον, τότε ὀλιγοστεύουσι μὲν αἱ ἀναγκαῖαι ἀπαλείψεις· ἀλλ' ἐνίοτε δυσκολεύονται οἱ ἀρχάριοι νὰ προσδιορίσωσι τίς ἄγνωστος εἶναι πρῶτον ἀπαλειπτέος καὶ ἐκ τίνων ἐξισώσεων.

Π. χ. πρὸς λύσιν τῶν τοῦ 92 προβλήματος ἐξισώσεων

$$\chi+\psi=56,\quad \psi+\omega=100,\quad \chi+\omega=80$$

δυνάμεθα ἐκ δύο ὁποιωνδήποτε τῶν τριῶν ν' ἀπαλείψωμεν τὸν ἐν αὐταῖς κοινὸν ἄγνωστον, οἷον ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τὸν ψ, διότι ἡ προκύψουσα ἐξίσωσις

$$\omega-\chi=44$$

θέλει ἔχει τοὺς δύο ἀγνώστους, οὓς ἔχει καὶ ἡ τρίτη· καὶ οὕτω διὰ μιᾶς μόνης ἀπαλείψεως ἔχομεν δύο ἐξισώσεις ἑκατέραν μὲ τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους, κτλ.

Ἀλλ' ἐὰν λυτέαι ἐξισώσεις ἦναι αἱ ἑξῆς

$$7\varphi-13\chi=87$$
$$3\varphi+14\psi=57$$
$$10\omega-3\psi=11$$
$$2\psi-11\chi=50,$$

ἀπαλειπτέος ἄγνωστος πρέπει νὰ ἐκληφθῇ πρῶτον ὁ κοινὸς εἰς δύο ἢ πλειοτέρας ἐξισώσεις, καὶ ὅστις ἀπαλειφθεὶς παρέχει ἐξίσωσιν, ἥτις νὰ ἔχῃ τοὺς αὐτοὺς ἀγνώστους, οὕτινας καί τις τῶν ἄλλων ἐξισώσεων, ἢ ὀλιγωτέρους τῶν ὄντων ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν, ἐξ ὧν εἶναι ἀπαλειπτέοι αὐτοί. Κατὰ ταῦτα δὲ δυνατὸν ν' ἀπαλείψωμεν τὸν φ ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας, διότι ἡ προκύψουσα θέλει ἔχει τὸν χ καὶ τὸν ψ, τοὺς ὁποίους ἔχει καὶ ἡ τετάρτη.

Ἀφοῦ δὲ λύσαντες ταύτας εὕρωμεν ἀντὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ δύο ἀριθμούς, ἔπειτα ἐκ μὲν τῆς τρίτης προσδιορίζομεν καὶ τὸν ω, ἐκ δὲ τῆς πρώτης ἢ τῆς δευτέρας καὶ τὸν φ.

Πρὸς γύμνασιν δὲ θέτομεν καὶ τὰς ἑξῆς

$$2\varphi-3\chi+2\psi=13 \qquad 7\upsilon+2\varphi+3\chi=17$$
$$4\omega+2\varphi=30 \qquad 4\psi+2\varphi+\omega=14$$
$$4\chi+2\psi=14 \qquad 5\psi+3\upsilon-2\chi=8$$
$$5\chi+3\omega=32. \qquad 4\psi-3\chi+2\omega=9$$
$$3\varphi+8\chi=37.$$

Περὶ λύσεως πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ πλειοτέρους αὐτῶν ἀγνώστους.

81. Εἴδομεν καθ' ὅλα τὰ προηγούμενα ὅτι, ὅταν αἱ ἐκθέσεις τῶν προβλημάτων ἐμπεριέχωσι τ' ἀναγκαῖα διδόμενα πρὸς κατασκευὴν τοσούτων ἐξισώσεων, ὅσοι εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, εἴτε κατασκευάζονται ὅλαι εἴτε ὄχι, πάντοτε τὰ παριστάνοντα τοὺς ἀγνώστους σημεῖα ἔχουσιν ἕκαστον ἓν καὶ μόνον προσδιόρισμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται κατὰ τὰ προειρημένα· διὰ τοῦτο ὀνομάζονται οἱ ἄγνωστοι *προσδιωρισμένοι*, ἐκ δὲ τούτου καλοῦνται *προσδιωρισμένα* καὶ τὰ προβλήματα τὰ τοιαῦτα καὶ αἱ ἐξισώσεις αὐτῶν, ὁποῖα εἶναι τὰ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι καὶ τοῦ 100, ὅλα πρωτοβάθμια.

Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ ὅταν ἐμπεριέχωνται ἐν ταῖς ἐκθέσεσι τῶν προβλημάτων διδόμενα ὀλιγώτερα παρ' ὅσα χρειάζονται πρὸς καταρτισμὸν ἐξισώσεων ἰσαρίθμων μὲ τοὺς ἀγνώστους. Π. χ. ἂν τοῦ 111 προβλήματος παραμεληθῇ πρὸς ὥραν τὸ δεδομένον, ὅτι τὰ ζητούμενα καρύδια ἦσαν ὑπὲρ τὰ 100 καὶ ὀλιγώτερα τῶν 400, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι φύσεως τοιαύτης, ὥστε νὰ παρασταθῇ δι' ἐξισώσεως, δὲν εἶναι δεδομένα νὰ κατασκευασθῇ ἄλλη ἐξίσωσις παρὰ ταύτην

$$13\chi+9=17\omega+14,$$

ἐνῷ οἱ ἄγνωστοι εἶναι δύο, τὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν καρυδίων διὰ 13 καὶ διὰ 17 πηλίκα, δι' ὧν γνωστῶν γενομένων θέλει γείνει γνωστὸς καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν καρυδίων. Λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τῶν δύο ἀγνώστων δὲν ἔχομεν ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις δύο ἐξισώσεις, ἀλλὰ μόνον μίαν.

Μεταθέτομεν καὶ ἐνταῦθα τοὺς ἔχοντας τ' ἄγνωστα ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, καὶ συστέλλοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους ἔχομεν

$$13\chi-17\omega=5.$$

Τὸ πολὺ δέ, τὸ ὁποῖον μετὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ κάμωμεν, εἶναι *νὰ ὑποθέσωμεν τὸν ἕτερον ἄγνωστον γνωστόν*, οἷον τὸ ω, *καὶ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ* χ· ἐκ τούτου ἔχομεν

$$\chi=\frac{17\omega+5}{13}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ τύπος τοῦ χ ἐμπεριέχει τὸ ω, τὸ ὁποῖον ἀληθῶς εἶναι ἄγνωστον, βλέπομεν ὅτι ἄλλως δὲν θέλει προσδιορισθῇ τὸ χ εἰμὴ ἀφοῦ προσδιορισθῇ τὸ ω. Εἰς προσδιορισμὸν δὲ τούτου δὲν ἔχομεν κἀνὲν δεδομένον, ἤτοι περιορισμόν, ἐκ τῆς ἐκθέσεως τοῦ προβλήματος, καὶ δυνάμεθα νὰ τὸ προσδιορίσωμεν ὅσον θέλωμεν ἤτοι 1, 2, 3, 4, κτλ, καὶ τότε ἐκ τοῦ τύπου ἀντὶ χ εὑρίσκομεν $1\frac{9}{13}$, 3, $4\frac{4}{13}$, $5\frac{8}{13}$, κτλ. Οἱ ἀντὶ ω καὶ χ λοιπὸν ἐπαληθεύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἀριθμοὶ εἶναι 1 καὶ $1\frac{9}{13}$, ἢ 2 καὶ 3, ἢ 3 καὶ $4\frac{4}{13}$ κτλ· ὁ δὲ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν καρυδίων δυνατὸν νὰ ἦτον, ἢ 31, ἢ 48, ἢ 65, ἢ 82 κτλ. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι προσδιωρισμένος, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις, ἀλλ' *ἀπροσδιόριστος*. Διὰ τοῦτο καλοῦνται *ἀπροσδιόριστα* καὶ τὰ προβλήματα, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, καὶ αἱ ἐξισώσεις αὐταί.

82. Οἱ ποριζόμενοι ἐκ τοῦ τύπου τοῦ χ ἀριθμοὶ προσδιοριζομένου τοῦ ω εἶναι καὶ ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ ἢ μικτοί. Ἂν ὅμως ἦτον παραστατικὸν ἀκεραίων ἀριθμῶν τὸ χ, ὡς ἐν τῷ 112 προβλήματι κτλ, τότε ἔπρεπε νὰ παραμεληθῶσιν οἱ κλασματικοὶ καὶ νὰ ζητῶνται μόνον οἱ ἀκέραιοι, οἱ δὲ ἀντὶ χ καὶ ω ἐπαληθεύοντες τὴν ἐξίσωσιν ἀριθμοὶ ἤθελαν εἶσθαι ὄχι

τόσον πολυάριθμοι ὡς πρότερον. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ χ καὶ τὸ ω εἶναι δυνατὸν νὰ πορίζωνται ἐκ τύπων ἰδιαιτέρων ὡς ἐφεξῆς λέγομεν.

Ἀφοῦ πράξωμεν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν καὶ *λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τύπου τοῦ ἔχοντος τὸν μικρότερον συνεργὸν* ἀγνώστου, τοῦ χ, ἔχομεν

$$\chi=\frac{17\omega+5}{13}=\frac{17\omega}{13}+\frac{5}{13}.$$

Τώρα *διαιροῦμεν τὸ* 17ω *διὰ* 13 *καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον* $\omega+\frac{4\omega}{13}$. λοιπὸν

$$\chi=\omega+\frac{4\omega+5}{13}.$$

Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν τὸ χ νὰ ἦναι ἀκέραιον, τὸ ω πρέπει νὰ ἦναι τοιοῦτος ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις νὰ καθισταίνῃ καὶ τὸν $\frac{4\omega+5}{13}$ ἀκέραιον, ἵνα ἦναι καὶ τὸ χ ἀκέραιον. *Σημειοῦμεν λοιπὸν* τὸ $\frac{4\omega+5}{13}=\tau$, *τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκέραιον καὶ ἀπροσδιόριστον, ὡς τὸ* ω, *δι' οὗ προσδιορίζεται* οὕτω γίνεται τὸ $\chi=\omega+\tau$. *Ἀκεραιοῦντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν* $\frac{4\omega+5}{13}=\tau$, *καὶ λύοντες αὐτήν, ἵνα εὕρωμεν τὸ* ω, *τὸ ἔχον τὸν μικρότερον συνεργόν*, ἔχομεν

$$\omega=\frac{13\tau-5}{4}=\frac{13\tau}{4}-\frac{5}{4}.$$

Διαιροῦντες δὲ διὰ 4 *καὶ τὸν* 13τ *καὶ τὸν* 5, *ὄντα μεγαλήτερον τοῦ* 4, ἔχομεν

$$\omega=3\tau+\frac{\tau}{4}-1-\frac{1}{4}=3\tau-1+\frac{\tau-1}{4}=3\tau-1+\tau',$$

σημειοῦντες τὸ $\frac{\tau-1}{4}=\tau'$, *τοῦ* τ' *ὄντος ἄλλου ἀκεραίου ἀπροσδιορίστου*. Τελευταῖον *ἀκεραιοῦντες ταύτην τὴν ἐξίσωσιν καὶ λύοντές την πρὸς τὸ* τ εὑρίσκομεν

$$\tau=4\tau'+1.$$

Ἀφοῦ δὲ κατηντήσαμεν νὰ εὕρωμεν τύπον τοῦ ἀπροσδιορίστου τ ἀκέραιον, διότι εἶχε συνεργὸν τὴν 1, *θέτομεν ἐν τῷ τύπῳ τοῦ* ω *ἀντὶ* τ *τὸν εὑρεθέντα τύπον του*. καὶ ἔχομεν

$$\omega=3\tau-1+\tau'=12\tau'+3-1+\tau'=13\tau'+2.$$

Τέλος πάντων *θέτοντες ἐν τῷ τύπῳ τοῦ* χ *ἀντὶ* ω *καὶ* τ *τοὺς ἤδη εὑρεθέντας τύπους των* ἔχομεν

$$\chi=\omega+\tau=13\tau'+2+4\tau'+1=17\tau'+3.$$

Ἐν δὲ τοῖς τύποις $\chi=17\tau'+3$ *καὶ* $\omega=13\tau'+2$ *θέτοντες ἀντὶ τοῦ* τ' *ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ* $\tau'=0$, *δῆλον ὅτι θέλομεν εὑρεῖ ἀντὶ* χ *καὶ* ω *ἀκεραίους ἀριθμούς*, ἤγουν,

ὅταν	$\tau'=0$,	1,	2,	3,	4,	5,	κτλ,
τὸ	$\chi=3$,	20,	37,	54,	71,	88,	κτλ,
τὸ	$\omega=2$,	15,	28,	41,	54,	67,	κτλ,

ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν καρυδίων 48, 269, 490, κτλ.

Ἐὰν δὲ τώρα ἐνθυμηθῶμεν καὶ τὸ δεδομένον ὅτι ἦσαν τὰ καρύδια ὑπὲρ τὰ 100 καὶ ὑπὸ τὰ 400, βλέπομεν ὅτι περιορίζεται τὸ πρόβλημα τόσον, ὥστε καταντᾷ προσδιωρισμένον ἐντελῶς, καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν καρυδίων εἶναι μόνον ὁ 269, ὅστις τῷ ὄντι διαμοιραζόμενος μὲν ἀνὰ 13 ἀφίνει 9 κατάλοιπον, χωριζόμενος δὲ ἀνὰ 17 ἀφίνει 14 κατάλοιπον.

83. Ἄς λύσωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ 113 προβλήματος

$$9\chi+14\omega=142$$

πρὸς εὕρεσιν τύπων τοῦ χ καὶ τοῦ ω, ἐξ ὧν νὰ πορίζώμεθα μόνον ἀκέραια προσδιορίσματα.

Μεταθέτοντες τὸ 14ω εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ συνεργοῦ 9 τοῦ χ καὶ τὸν 142 καὶ τὸν 14ω ἔχομεν

$$\chi=\frac{142-14\omega}{9}=15-\omega+\frac{7-5\omega}{9}=15-\omega+\tau,$$

κάμνοντες τὸ $\frac{7-5\omega}{9}=\tau$· ὅθεν $7-5\omega=9\tau$.

Λύοντες δὲ καὶ ταύτην ὡς πρὸς τὸ ω ἔχομεν

$$\omega=\frac{7-9\tau}{5}=1-\tau+\frac{2-4\tau}{5}=1-\tau+\tau',$$

σημειοῦντες τὸ $\frac{2-4\tau}{5}=\tau'$· ὅθεν $2-4\tau=5\tau'$.

Λύοντες δὲ καὶ ταύτην ὡς πρὸς τὸ τ ἔχομεν

$$\tau=\frac{2-5\tau'}{4}=-\tau'+\frac{2-\tau'}{4}=-\tau'+\tau'',$$

σημειοῦντες τὸ $\frac{2-\tau'}{4}=\tau''$· ὅθεν $2-\tau'=4\tau''$, καὶ τελευταῖον

$$\tau'=2-4\tau''.$$

Τώρα θέτοντες κατὰ σειρὰν ἐν τοῖς τύποις τοῦ τ, ω, χ ἀντὶ τ′, τ, ω τὰ ἰσοδύναμά των ἔχομεν

$$\tau=-\tau'+\tau''=-2+4\tau''+\tau''=5\tau''-2.$$
$$\omega=1-\tau+\tau'=1-5\tau''+2+2-4\tau''=5-9\tau''.$$
$$\chi=15-\omega+\tau=15-5+9\tau''+5\tau''-2=8+14\tau''.$$

Ἐκ τῶν τύπων λοιπὸν $\chi=8+14\tau''$
$\omega=5-9\tau''$

κάμνοντες τὸ $\tau''=0, 1, 2,$ κτλ
εὑρίσκομεν $\chi=8, 22, 36,$ κτλ,
$\omega=5, -4, -13,$ κτλ.

Καὶ ὅταν μὲν $\chi=8$ καὶ $\omega=5$, δῆλον ὅτι τὸ μὲν τῶν μερῶν τοῦ 142 εἶναι 72, τὸ διὰ 9 διαιρετόν, τὸ δὲ εἶναι 70, τὸ διὰ 14 διαιρετόν. Περὶ δὲ τῶν ἄλλων προσδιορισμάτων θέλομεν εἰπεῖ τὰ δέοντα ἐν τῷ ἀκολούθῳ κεφαλαίῳ.

84. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύοντες καὶ τὴν τοῦ 112 προβλήματος ἐξίσωσιν

$$11\chi+9=13\omega+8,$$

εὑρίσκομεν $\chi=13\tau-6$ καὶ $\omega=11\tau-5$, τὸ δὲ $11\chi+9$ ἢ τὸ $13\omega+8$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν, θέλει παρασταθῇ πρῶτον διὰ $143\tau-57$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5 καὶ διὰ 6 καὶ διὰ 7, σημειοῦντες διὰ φ καὶ ψ καὶ υ τ' ἀκέραια πηλίκα αὐτοῦ διηρημένου διὰ 5 καὶ 6 καὶ 7, ἔχομεν αὐτὸν παριστανόμενον καὶ διὰ 5φ, 6ψ, 7υ. Καὶ πρῶτον μὲν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5\varphi=6\psi, \quad \text{ὅθεν} \quad \varphi=\frac{6\psi}{5}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ φ εἶναι ἀκέραιον, καὶ τὸ $\frac{6\psi}{5}$ ἐπομένως ἀκέραιον, τὸ 6ψ πρέπει νὰ ἦναι διαιρέσιμον διὰ 5. Ἀλλ' ὁ 6 καὶ ὁ 5 εἶναι ἀσυνδιαίρετοι· λοιπὸν ἀνάγκη τὸ ψ νὰ ἦναι διαιρέσιμον διὰ 5, ἤτοι πολλαπλάσιον τοῦ 5 (Συμ. 42 θεώρ, Α.). Ἔστω λοιπὸν $\psi=5\sigma$· θέτοντες δὲ 5σ ἀντὶ ψ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ φ, ἔχομεν

$$\varphi=\frac{6\psi}{5}=\frac{6\times5\sigma}{5}=6\sigma.$$

Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν 5φ καὶ 6ψ θέλει παρασταθῇ τώρα καὶ διὰ 30σ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ αὐτὸς παριστάνεται καὶ διὰ 7υ, ἔχομεν νέαν ἐξίσωσιν τὴν

$$7\upsilon=30\sigma, \quad \text{ὅθεν} \quad \upsilon=\frac{30\sigma}{7}.$$

Ἀλλ' ὡς ἀνωτέρω πληροφορούμεθα ὅτι τὸ σ πρέπει νὰ ἦναι πολλαπλάσιον τοῦ 7· λοιπὸν θέτοντες $\sigma=7\rho$, ἔχομεν

$$\upsilon=\frac{30\sigma}{7}=\frac{30\times7\rho}{7}=30\rho.$$

Ὥστε τώρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν παριστάνεται καὶ διὰ 210ρ. Ἀλλ' εὑρήκαμεν ἀνωτέρω ὅτι παριστάνεται καὶ διὰ $143\tau-57$· λοιπὸν ἔχομεν τελευταίαν ἐξίσωσιν τὴν

$$143\tau-57=210\rho.$$

Λύοντες δὲ καὶ αὐτὴν ὡς ἤδη εἴδομεν, θέλομεν εὑρεῖ

$$\rho=143\pi+108$$
$$\tau=210\pi+159.$$

θεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν 210ρ ἢ $143\tau-57$ ποριζεται τελευταῖον ἐκ μόνου τοῦ τύπου $30030\pi+22680$, ὑποθετομένου τοῦ $\pi=0, 1, 2, 3$ κτλ· διότι οἱ ἐντεῦθεν ποριζόμενοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρέσιμοι καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 6 καὶ διὰ 7, καὶ διαιρούμενοι διὰ μὲν 11 δίδουσι κατάλοιπον 9, διὰ δὲ 13 δίδουσι κατάλοιπον 8.

85. Ἐκ τῶν ἐν τῷ 82 καὶ 83 προειρημένων εἶναι ἤδη γνωστὴ ἡ μέθοδος, καθ' ἣν λύεται ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος μὲ δύο ἀγνώστους πρὸς εὕρεσιν τύπων αὐτῶν, ὅθεν νὰ ποριζωνται ἀκέραια προσδιορίσματα. Αὕτη συνίσταται πρῶτον εἰς λύσιν καὶ τῆς δεδομένης ἐξισώσεως ὡς πρὸς τὸν ἔχοντα τὸν μικρότερον συνεργὸν ἄγνωστον, τοῦ ἄλλου ὑποθετομένου γνωστοῦ, καὶ ὅλων τῶν ἄλλων, ὅσαι κατὰ σειρὰν προκύπτουσιν ἐκ τῶν μὴ ἀκριβῶν διαιρέσεων καὶ ἐκ τῆς ὑποθέσεως ὅτι τὸ κλασματικὸν μέρος πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀπροσδιόριστον, μέχρισοῦ εὑρεθῇ ἐξίσωσις μὲ ἀπροσδιόριστόν τι, ἔχον συνεργὸν τὴν 1· ἔπειτα εἰς τὸ νὰ θέτηται ὁ ἀκέραιος τύπος τοῦ προτελευταίου ἀπροσδιορίστου ἐν τῷ τοῦ προηγουμένου του, καὶ οἱ τῶν δύο ἤδη εὑρημένων ἐν τῷ τοῦ ἔτι προτέρου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρισοῦ εὑρεθῶσι τῶν ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει ἀπροσδιορίστων ἀγνώστων ἀκέραιοι τύποι μὲ τὸ αὐτὸ ἀπροσδιόριστον· τελευταῖον, ἂν ἦναι χρεία, εἰς τὸ νὰ μεταχειριζώμεθα τὰ ἐκ τῶν τύπων τούτων ἀκέραια προσδιορίσματα ὅπως ἁρμόζει πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ προβλήματος ἀριθμῶν.

Καὶ ὅταν μὲν οἱ συνεργοὶ τῶν ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει ἀπροσδιορίστων ἦναι ἀσυνδιαίρετοι, μετά τινας λύσεις ἐξισώσεων θέλομεν καταντᾷ πάντοτε εἰς ἐξίσωσιν, ἧς τὸ ἕτερον ἀπροσδιόριστον νὰ ἔχῃ συνεργὸν τὴν 1. Διότι, ὡς ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, αἱ λύσεις τῶν κατὰ σειρὰν ἐξισώσεων συνεπιφέρουσι τὴν διαίρεσιν τοῦ μεγαλητέρου συνεργοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου, τὴν διαίρεσιν τούτου διὰ τοῦ καταλοίπου τῆς πρώτης διαιρέσεως, τὴν τοῦ πρώτου καταλοίπου διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἐπὶ τῆς ζητήσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν συνεργῶν· λοιπὸν, ὄντων τῶν ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει συνεργῶν ἀσυνδιαιρέτων, ἐξ ἀνάγκης ἓν τῶν καταλοίπων τούτων θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὴν 1. Ἀλλὰ τὰ κατάλοιπα ταῦτα εἶναι οἱ συνεργοὶ τῶν ἀπροσδιορίστων, τοὺς ὁποίους κατὰ σειρὰν μεταχειριζόμεθα· λοιπὸν ἓν τῶν ἀπροσδιορίστων τούτων θέλει ἔχει συνεργὸν τὴν 1.

Ὅταν δὲ οἱ συνεργοὶ τῶν ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει ἀπροσδιορίστων ἦναι συνδιαιρετοὶ, ὁ δὲ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης δὲν ἦναι καὶ τοῦ γνωστοῦ ὅρου διαιρέτης, οἷον ἐν ταύτῃ $8\chi-6\omega=17$, εἶναι περιττὸν νὰ ζητῶμεν τύπους ἀκεραίους τῶν ἀπροσδιορίστων, εὐδήλου ὄντος ὅτι δὲν ἔχουσι τότε προσδιορίσματα ἀκέραια. Διότι ὁποιουσδήποτε ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ ἂν θέσωμεν ἀντ' αὐτῶν ἐν τῇ ἐξισώσει, τὸ μὲν πρῶτον μέλος ἀκέραιον ὂν θέλει εἶσθαι διαιρέσιμον διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν συνεργῶν, τὸ δὲ δεύτερον ὄχι, ἀλλὰ θέλει εἶσθαι κλάσμα ἢ μικτὸς ἀριθμός· τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δὲν ταυτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν.

Ὡς πρὸς *τοὺς τύπους δὲ τῶν ἀπροσδιορίστων* εἶναι ἀξιοπαρατήρητον ὅτι τὰ ἐξ αὐτῶν ποριζόμενα προσδιορίσματα ἑκατέρου ἀπροσδιορίστου εἶναι ὅροι προόδου ἰσοδιαφόρων, τῆς ὁποίας διαφορὰ εἶναι ὁ συνεργὸς τοῦ ἄλλου ἀπροσδιορίστου. Ὥστε, ἂν διὰ δοκιμασιῶν εὑρεθῇ εἷς ἀριθμὸς ἀντὶ ἑκατέρου ἀπροσδιορίστου, τὰ ἄλλα αὐτῶν προσδιορίσματα θέλουσι προκύψει προσθετομένου ἢ ἀφαιρουμένου τοῦ συνεργοῦ τοῦ ἄλλου ἀπροσδιορίστου ἀπὸ τὸ ἤδη εὑρεθὲν προσδιόρισμα. Ἀλλὰ πλειότεραι διασαφήσεις περὶ τούτων κρίνονται περιτταί.

86. Ἂς λυθῶσι τώρα καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ 115 προβλήματος $\chi+\psi+\omega=124$, $54\chi+38\psi+15\omega=4800$, δύο οὖσαι μὲ τρεῖς ἀγνώστους ἑκατέρα.

Πρῶτον λοιπὸν ἀπαλείφεται τὸ ω ἐκ τῶν δύο καὶ εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις $$39\chi+23\psi=2940.$$
Ἔπειτα λύεται ὡς προείπομεν αὕτη ἡ ἐξίσωσις καὶ εὑρίσκεται
$$\chi=23\tau-6$$
$$\psi=138-39\tau.$$
Τελευταῖον θέτονται ἀντὶ χ καὶ ψ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει $\chi+\psi+\omega=124$ οἱ εὑρεθέντες τύποι των, καὶ λυομένης αὐτῆς εὑρίσκεται $\omega=16\tau-8$, ὅπου τὸ ω προσδιορίζεται διὰ τοῦ αὐτοῦ τ, δι' οὗ καὶ τὸ χ καὶ τὸ ψ. Ἂν δὲ ὁ τύπος τοῦ ω εἶχεν ἄλλον ἀπροσδιόριστον σ, ὁπότε καὶ τὸ τ ἤθελεν ἔχει τύπον τινὰ μὲ τὸ σ, τότε ἔπρεπεν ἐν τοῖς τύποις τοῦ χ καὶ τοῦ ψ ἀντὶ τοῦ τ νὰ τεθῇ ὁ ἤδη εἰρημένος τύπος του, ὥστε καὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ καὶ τοῦ ω οἱ τύποι νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἀπροσδιόριστον σ.

Ὅταν λοιπὸν τὸ ἀπροσδιόριστον $\tau=1,\ 2,\ 3,$
εὑρίσκεται $\chi=17,\ 40,\ 63,$
$\psi=99,\ 60,\ 21,$
$\omega=8,\ 24,\ 40.$

Λοιπὸν ἠγόρασεν ἢ 17 χοίρους καὶ 99 αἰγίδια καὶ 8 πρόβατα, ἢ 40 χοίρους καὶ 60 αἰγίδια καὶ 24 πρόβατα, ἢ 63 χοίρους καὶ 21 αἰγίδια καὶ 40 πρόβατα.

Τῶν δ' ἄλλων προσδιορισμάτων τινὰ εἶναι ἀντιθετικά, περὶ ὧν κατωτέρω.

Ἂν δὲ καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ εἴπωμεν πολλὰ περὶ τῆς λύσεως τῶν ἀπροσδιορίστων ἐξισώσεων, παύομεν ὅμως ἐνταῦθα, διότι νομίζομεν ἱκανὰ τὰ μέχρι τοῦδε, ἂν μόνον καλῶς ἐννοηθῶσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΣΙ ΤΕ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΣΙ ΠΑΡΕΚΤΡΟΠΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΑΥΤΩΝ.

Διάφορα εἴδη παρεκτροπῶν.

87. Ἐκ τῶν προειρημένων περὶ ἀριθμητικῶν προβλημάτων ἀκριβῶς διακρίνομεν τώρα τὰ τρία ταῦτα, πρῶτον τὴν σύστασιν αὐτῶν, δεύτερον τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξισώσεών των, καὶ τρίτον τὴν λύσιν αὐτῶν. Καὶ συνιστᾷ μέν τις πρόβλημα, ἐνῷ συσχετίζει διαφόρους γνωστοὺς μὲ ἀγνώστους ἀριθμοὺς κατὰ ποικίλας σχέσεις οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι δυνατὸν νὰ προσδιορίζωνται οἱ ἄγνωστοι διὰ τῶν γνωστῶν· ἐν δὲ τοῖς προηγουμένοις εἴδομεν ἀρκούντως τὰ περὶ κατασκευῆς ἐξισώσεων καὶ τὰ περὶ τῆς λύσεως τῶν πρωτοβαθμίων. Ἀλλ᾽ εἶναι εὔκολον νὰ καταλάβῃ τις ὅτι πολλάκις ὁ συνιστῶν τὸ πρόβλημα συσχετίζει εἴτε ἐν γνώσει εἴτε ἐν ἀγνοίᾳ τοιούτους ἀριθμοὺς καὶ κατὰ τοιαύτας σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι ἀδύνατον νὰ προσδιορίζηται τοιοῦτος ὁ ζητούμενος, ὁποῖος ζητεῖται. Ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ κατασκευάζων τὴν ἐξίσωσιν δυνατὸν νὰ μὴ ἐννοῇ ὀρθῶς τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει, καὶ ἑπομένως μεταφράζων διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων τὰς ἐννοίας του νὰ παρεκτρέπηται τῆς ὀρθότητος, καὶ οὕτως ἡ ἐξίσωσις νὰ ἦναι ὄχι πιστὴ μετάφρασις τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει. Τελευταῖον δὲ ὁ λύων τὴν ἐξίσωσιν δυνατὸν νὰ λανθάνηται περὶ τὰς πράξεις, καὶ οὕτως ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ ζητουμένου νὰ μὴ ἦναι σωστός.

Ἐξηγούμεθα σαφέστερα ἐν μέρει διὰ παραδειγμάτων. Ἂς ὑποθέτωμεν ὅτι ὁ Α εἶναι 40 ἐτῶν καὶ ὁ Β 10, καὶ ἂς ζητήσωμεν ποτὲ ἡ τοῦ Α ἡλικία πρὸς τὴν τοῦ Β θέλει ἔχει λόγον τινὰ δεδομένον. Ὁ Β ἐγεννήθη ὅτε ὁ Α ἦτον 30 ἐτῶν, καὶ ἐπομένως, ὄντος τοῦ μὲν Β 1, 2, 3 κτλ ἐτῶν, τοῦ δὲ Α 31, 32, 33 ἐτῶν κτλ, ὁ λόγος τῆς τοῦ Α πρὸς τὴν τοῦ Β ἡλικίαν εἶναι κατὰ σειρὰν 31, 16, 11, κτλ, δηλ. προϊόντος τοῦ χρόνου ἐλαττοῦται. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι, ἐπειδὴ τώρα ἡ τοῦ Α ἡλικία εἶναι τετραπλασία τῆς τοῦ Β, ἐν μὲν τῷ μέλλοντι θέλει εἶσθαι τριπλασία, διπλασία κτλ, τουτέστιν ὁ λόγος μικρότερος τοῦ ἐνεστῶτος λόγου 4, ἐν δὲ τῷ παρελθόντι πενταπλασία, ἑξαπλασία κτλ. Ἂν λοιπὸν ζητῇ τις μετὰ πόσα ἔτη ἡ τοῦ Α ἡλικία θέλει εἶσθαι τριπλασία ἢ διπλασία κτλ τῆς τοῦ Β, εἶναι ὀρθόν· ὡσαύτως καὶ ἂν ζητῇ πρὸ πόσων ἐτῶν ἡ τοῦ Α ἡλικία ἦτον πενταπλασία, ἑξαπλασία κτλ. Ἂν ὅμως ζητῇ μετὰ πόσα ἔτη θέλει εἶσθαι πενταπλασία, ἑξαπλασία κτλ, ἢ πρὸ πόσων ἐτῶν ἦτον τριπλασία, διπλασία κτλ, δῆλον ὅτι ζητεῖ ἀσυμβίβαστα μὲ τὴν σχέσιν τῶν δεδομένων, καὶ ἐπομένως ἀδύνατα. Ὁ συνιστῶν λοιπὸν τοιοῦτον πρόβλημα παρεκτρέπεται τοῦ ὀρθοῦ εἴτε ἐν γνώσει εἴτε ἐν ἀγνοίᾳ.

Ἐὰν δὲ, ὄντος Γ τινος 30 ἐτῶν, Δ δέ τινος ἄλλου 20 ἐτῶν, ἐζητεῖτο πότε ἡ τοῦ Γ ἡλικία ἤθελεν εἶσθαι ἴση μὲ τὴν τοῦ Δ, εἶναι πρόδηλον ὅτι ποτέ. Λοιπὸν καὶ ἐν τῇ συστάσει τοῦ προβλήματος τούτου συμβαίνει ἔτι μεγαλητέρα παρεκτροπὴ, ὡς ζητουμένου κατὰ πάντα ἀδυνάτου.

Παρόμοιον εἶναι καὶ ὅταν συνιστᾷ τις πρόβλημα, τοῦ ὁποίου ὁ ἄγνωστος ζητεῖται ἀκέραιος, ἐνῷ οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε, ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσιν ὅλαι αἱ ἀναγκαῖαι πράξεις ἐπ' αὐτῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου, νὰ εὑρεθῇ *μικτὸς ἀριθμός*· ἢ ζητεῖται ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἦναι π. χ. *μεγαλήτερος* τοῦ *1 καὶ μικρότερος* τοῦ 10, ἐνῷ ὁ ἐκ τῶν γνωστῶν μετὰ τὰς ἀναγκαίας ἐπ' αὐτῶν πράξεις προκύψων θέλει εἶσθαι *μεγαλήτερος* τοῦ 10.

Παρόμοια δὲ μὲ τὰ ἤδη προειρημένα συμβαίνουσι καὶ ἐν τοῖς προβλήμασι, τῶν ὁποίων τὰ διδόμενα εἶναι ἱκανὰ πρὸς κατασκευὴν πλειοτέρων ἐξισώσεων ἰσαρίθμων μὲ τοὺς ἐν αὐταῖς ἀγνώστους.

Ἄλλο εἶδος ἀνωμαλίας εἶναι ὅταν τῶν μὲν ἀριθμῶν γνωστῶν τε καὶ ἀγνώστων αἱ σχέσεις διορίζωνται τοιαῦται, ὥστε νὰ ἦναι δυνατὸν νὰ μεταχειρίζηταί τις πάντα ἀριθμὸν ἀντὶ τοῦ ζητουμένου, ζητῆται δὲ *εἷς μόνος*.

Καὶ τοιαῦτα λοιπόν τινα εἶναι τὰ δυνάμενα νὰ συμβαίνωσιν ἐν τῇ συστάσει τῶν προβλημάτων, καὶ τὰ ὁποῖα συνήθως εἶναι δύσκολον ἢ καὶ ἀδύνατον νὰ τὰ καταλάβῃ τις ἐκ τῆς ἐκθέσεως αὐτῶν. Ὁ δὲ κατασκευάζων τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος πολλάκις μὴ ἐννοῶν τὰς σχέσεις τῶν ἀριθμῶν ὁποῖαι εἶναι, ἀλλ' ἄλλως πως, σημειοῖ διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων ἄλλο τι παρ' ὅ,τι ἔπρεπεν, ὡς ἐπίτηδες ἐκάμαμεν ἐν τῷ 9 καὶ ἐν τῷ 80 προβλήματι· καὶ τότε θέλει ἔχει ἐξίσωσιν, ἥτις δὲν παριστάνει τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ προβλήματος ἀκριβῶς, ἑπομένως δὲν εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος. Ἀλλὰ καὶ τοιαῦτα πάθη συνήθως δὲν τὰ διακρίνει πρὸ τῆς λύσεως ὁ κατασκευαστὴς τῶν ἐξισώσεων. Ἐνίοτε δ' ἐν γνώσει παραβλέπει τῶν δεδομένων τινά, ἐνῷ κατασκευάζει τὰς ἐξισώσεις.

88. Ὅτε λοιπὸν παρεκτρέπεταί πως τῆς ὀρθότητος ὁ συνιστῶν τὸ πρόβλημα ἢ ὁ κατασκευάζων τὴν ἐξίσωσιν καὶ λύει αὐτὴν χωρὶς νὰ δυνηθῇ νὰ καταλάβῃ εὐθὺς τὸ λάθος, ἄλλο δὲν μένει παρὰ νὰ ὁδηγηθῇ περὶ τῆς παρεκτροπῆς, ὡς καὶ περὶ τῆς ὀρθότητος ἐν τοῖς προηγουμένοις, ἐκ τοῦ προσδιορίσματος τοῦ ἀγνώστου· διότι αὐτὸ εὑρισκόμενον ἐν τῷ τέλει τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι συνέπεια τῶν τριῶν προηγουμένων, ἤτοι τῆς συστάσεως τοῦ προβλήματος, τῆς κατασκευῆς τῆς ἐξισώσεώς του καὶ τῆς λύσεως αὐτῆς, πᾶν δὲ προηγούμενον σφάλμα, ἂν πρότερον δὲν γείνῃ γνωστόν, μέχρι τέλους ὅμως ἐξ ἅπαντος θέλει φανερωθῇ, ἂν δὲν ἀναιρεθῇ ὑπ' ἄλλου ἀντιθέτου

Περὶ τῆς σημασίας θετικῶν τινων καὶ τῶν ἀντιθετικῶν προσδιορισμάτων τῶν ἀγνώστων.

89. Ἐξηγοῦντες ἐν τοῖς προηγουμένοις κεφαλαίοις πῶς κατασκευάζονται καὶ πῶς λύονται αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις ἐπεχειρίσθημεν προβλήματα, τῶν ὁποίων οἱ ἄγνωστοι εὑρέθησαν ὅτι παρίστανον θετικοὺς ἀριθμούς, καὶ ἐπληροφορήθημεν ἑκάστοτε ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ ἦσαν οἱ ζητούμενοι. Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι τὰ τῶν ἀγνώστων θετικὰ προσδιορίσματα δὲν εἶναι πάντοτε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Ἔστω π. χ. εἰς λύσιν τὸ 60 πρόβλημα ὀλίγον τι παρηλλαγμένον οὕτως.

Θέλων τις νὰ βάλῃ τὸ ὡρολόγιόν του εἰς λαχεῖον λογίζεται ὅτι πρὸς μὲν 4 δραχ τὸν κλῆρον ζημιοῦται 30 δραχμὰς τῆς ἀξίας τοῦ ὡρολογίου του, πρὸς δὲ 6 κερδίζει 107 δρ· πόσους κλήρους ἔκαμε καὶ πόσον ἤξιζε τὸ ὡρολόγιόν του;

Ἡ ἐξίσωσίς του ὀρθῶς κατασκευασθεῖσα εἶναι αὕτη

$$4\chi+30=6\chi-107,$$

ἀλανθάστως δὲ λυθεῖσα δίδει $\chi=68\frac{1}{2}$. Λοιπὸν ἔπρεπε νὰ συμπεράνωμεν κατὰ τὰ προειρημένα ἐν τῷ τετάρτῳ κεφαλαίῳ ὅτι ἔκαμεν $68\frac{1}{2}$ κλήρους. Ἀλλ' ἕκαστος βλέπει ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ $\frac{1}{2}$ κλῆρος, καὶ πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τοιοῦτόν τι, ὁποῖον προτείνεται διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐκθέσεως, οὔτε συνέβη οὔτε θέλει συμβῇ ποτέ, ἐκτὸς μόνον ἂν ἐννοηθῇ ὅτι εἷς κλῆρος εἶχεν ἄλλην τιμὴν παρὰ τοὺς ἄλλους, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν μνημονεύει ἡ ἔκθεσις.

Κατέστη δὲ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον μόνον διότι ἠλλάχθησαν δύο ἀριθμοί. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐν τῷ 57, ἂν μόνον ἀντὶ 36 τεθῇ 35, διότι τότε ὁ $\chi=183\frac{3}{4}$· ὅτι δ' ἔρριψε $\frac{3}{4}$ βόμβας εἶναι ἀδύνατον, ἐκτὸς ἂν ἐννοηθῇ ὅτι ἔμειναν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς πυρίτιδος, ὅση χρειάζεται πρὸς μίαν βολὴν βόμβας. Ἐν ἄλλοις δὲ εἶναι ἔτι σαφέστερον τοιοῦτον ἀδύνατον.

90. Ἐὰν δὲ λυθῶσι καὶ τοῦ 80 προβλήματος αἱ ἐξισώσεις, ὁποῖαι ἐκεῖ εἶναι, εὑρίσκεται $\chi=289\frac{1}{2}$ καὶ $\omega=132$. Ἐκ δὲ τούτου ἔπρεπε νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ μὲν πατὴρ ἦτον $289\frac{1}{2}$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς 132. Ἀλλ' ἡ ἰδέα, ὅτι τῶν νῦν τοὐλάχιστον ἀνθρώπων ἡ ἡλικία δὲν φθάνει εἰς τὸ 289 ἔτος, μᾶς φέρει εἰς ὑποψίαν ἂν τῷ ὄντι τοιαύτην ἡλικίαν εἶχεν ὁ ἐρωτηθεὶς πατὴρ, ἢ μήπως συνέβη τι ἄτοπον· καὶ ἐξετάζοντες βλέπομεν ὅτι τῷ ὄντι παρεννόησις ἔγεινε, διότι ἐξελήφθη ὡς ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ ἀντὶ τῆς ἐνεστώσης ἡ παρελθοῦσα κ τ λ. Ὅθεν διορθοῦντες ὡς ἐν ἀρ 71 εὑρίσκομεν $\omega=24$ καὶ $\chi=58\frac{1}{2}$. Ἀλλ' ἂν τῷ ὄντι τοιαύτη ἦτον ἡ ἀληθὴς ἔννοια τῆς ἐκθέσεως, ὁποία παρίσταται διὰ τῶν ἐξισώσεων, καὶ ὁ λόγος ἦτον ὄχι περὶ τῶν μνημονευομένων ὡς ζησάντων μακρὸν βίον, ἀλλὰ περὶ τῶν κοινῶν ἀνθρώπων, ἔπρεπε νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα δὲν παριστάνει τι ὑπάρξαν ἢ ὑπάρχον, ἤτοι ὅτι εἶναι ἀδύνατον.

91. Τελευταῖον, ὅταν ἐν γνώσει παραλείπωμέν τινα τῶν δεδομένων, διότι εἶναι δυνατὸν καὶ ἄνευ αὐτῶν νὰ κατασκευάσωμεν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, ὡς ἐν τῷ 11 προβλήματι ὅπου κατεσκευάσθη ἐξίσωσις, ὄχι ἐκ τῆς κληρονομίας καὶ ὅλων τῶν μεριδίων, ἀλλ' ἐκ τῶν μεριδίων τοῦ πρωτοτόκου καὶ τοῦ δευτεροτόκου, καὶ οὕτω δὲν κατεσκευάσθησαν κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν ἄλλων υἱῶν τὰ μερίδια· ὅταν τοιοῦτόν τι συμβαίνῃ, τὸ προσδιόρισμα τοῦ χ, ἂν καὶ θετικὸν, δὲν πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωμεν ὡς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν ἔπειτ' ἂν ἐπαληθεύῃ καὶ τὰ παραλειφθέντα δεδομένα, ἤτοι ἂν συμβιβάζηται καὶ μὲ αὐτὰ ὅλα. Καὶ ὅταν τοῦτο ἔχῃ χώραν, εἶναι ὁ ζητούμενος· εἰδεμὴ, δὲν εἶναι ὁ ζητούμενος, καὶ τότε ἐνδεχόμενον τὸ πρόβλημα νὰ ἦναι ἀδύνατον, ἂν δι' ἄλλης ἐξισώσεως δὲν ἦναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς, ὅστις νὰ ἐπαληθεύῃ ὅλα του τὰ μέρη.

Τὸ x τῆς ἐξισώσεως τοῦ 11 προβλήματος εὑρίσκεται ἴσον μὲ 8100, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ πρωτοτόκου καὶ τοῦ δευτεροτόκου 900· ἂν διαιρεθῇ δὲ ὁ 8100 διὰ 900, εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τῶν παίδων 9. Τώρα πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν κατὰ τὴν ἔκθεσιν τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου, τοῦ τετάρτου, τοῦ πέμπτου μέχρι καὶ τοῦ ἐννάτου υἱοῦ· καὶ ἂν εὑρεθῶσιν ὅλα ἴσα μὲ τὸ τοῦ πρωτοτόκου, καὶ ἔπειτα προστεθέντα τῶν ἐννέα τὰ μερίδια ἀποτελέσωσι κέφαλαιον 8100 δρ, τότε εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἡ κληρονομία ἦτον τῷ ὄντι 8100 δρ, οἱ δὲ κληρονόμοι 9. Ταῦτα δὲ ὅλα ἀληθεύουσιν ἐν τούτῳ. Ἂν ὅμως δὲν ἀλήθευε καὶ ἓν μόνον, ἔπρεπε νὰ συμπεράνωμεν ὅτι δὲν ἦτον αὐτὴ ἡ κληρονομία καὶ ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

92. Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων καὶ ἐκ τῶν ἐν ἀρ. 67 καὶ 73 προειρημένων βλέπει τις ὅτι τὰ θετικὰ προσδιορίσματα τῶν ἀγνώστων τὰ διὰ τῆς κατασκευῆς ἐξισώσεων καὶ τῆς λύσεως αὐτῶν εὑρισκόμενα εἶναι κοινῶς οἱ ζητούμενοι ἐν ταῖς ἐκθέσεσι τῶν προβλημάτων ἀριθμοί, καὶ σπανιώτερα συμβαίνει νὰ μὴ ἦναι, ὅταν δὲν συμβιβάζωνται μέ τινα δεδομένα τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ σημειῶνται κατασκευαζομένων τῶν ἐξισώσεων, ἢ ὡς μὴ ἀναγκαῖα ἐν τῇ κατασκευῇ αὐτῶν παραλείπονται προσωρινῶς. Ὅταν λοιπὸν εὑρίσκωμεν θετικοὺς ἀριθμοὺς ἀντὶ τῶν ἀγνώστων, πρὶν παραδεχθῶμεν αὐτοὺς ὡς τοὺς ζητουμένους, πρέπει νὰ προσέχωμεν μήπως ἦναι ἐν τῇ ἐκθέσει περιορισμοί τινες, τοὺς ὁποίους πρότερον δὲν ἐλογίσθημεν, καὶ μὲ τοὺς ὁποίους πρέπει οἱ εὑρημένοι ἀριθμοὶ νὰ συμβιβάζωνται. Καὶ ἂν μὲν συμβιβάζωνται καὶ μὲ αὐτούς, εἶναι οἱ ζητούμενοι· εἰδεμὴ τὰ προβλήματα ὁποῖα ἐπροτάθησαν εἶναι ἀδύνατα.

93. Μεταβαίνομεν εἰς τ' ἀντιθετικὰ προσδιορίσματα, καὶ πρῶτον ἔστω εἰς λύσιν τοῦτο τὸ πρόβλημα·

Ἐργάτης εἰργάσθη παρά τινι 13 ἡμέρας θερινὰς πρός τι ἡμερομίσθιον, καθ' ἃς ὅμως ἔκαμε ζημίαν 22 δραχμῶν, *καὶ πάλιν παρὰ τῷ αὐτῷ 17 ἡμέρας τὸν χειμῶνα πρὸς ἡμερομίσθιον δύο δραχμὰς ὀλιγώτερον παρὰ τὸ θέρος, ἀλλὰ μὲ προσοχὴν καὶ ζῆλον, ὥστε ἐκρίθη ἄξιος ἰδιαιτέρου δώρου 28 δραχμῶν· ἐνῷ δὲ ἐζημιώθη τὸ θέρος ἐκ τῶν ἡμερομισθίων του τὰς 22 δραχμάς, ἔλαβε δὲ τὸν χειμῶνα περιπλέον αὐτῶν 28 δρ, εὑρέθη ὅτι ἔλαβε καὶ τὸν χειμῶνα ἴσα καὶ τὸ θέρος· πόσον ἦτον τὸ θερινὸν ἡμερομίσθιον;*

Ἐὰν ἦναι ἢ ὄχι αδύνατα τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει ταύτῃ, τοῦτο εἶναι δυσκολώτατον νὰ τὸ καταλάβῃ τις τώρα. Ἀλλ᾽ ἐὰν σημειωθῇ διὰ χ τὸ θερινὸν ἡμερομίσθιον, δῆλον ὅτι $13\chi-22$ παριστάνει ὅσα ἔλαβε τὸ θέρος, καὶ $17(\chi-2)+28$ ὅσα ἔλαβε τὸν χειμῶνα· λοιπὸν $13\chi-22=17(\chi-2)+28$.

ὅθεν

$$13\chi-22=17\chi-34+28$$
$$13\chi-17\chi=22-34+28$$
$$-4\chi=16 \text{ ἢ } 4\chi=-16$$
$$\chi=-4.$$

Τὸ ἀντιθετικὸν τοῦτο προσδιόρισμα τοῦ χ τί νὰ σημαίνῃ τάχα; Ἂς ἴδωμεν. Πρῶτον εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὡς ἐν αρ 67 ὅτι ὁ ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς -4 ἀντὶ τοῦ χ επαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, διότι δὲν ἔγεινε λάθος ἐν τῇ λύσει· ἔπειτα δὲ ὅτι ὁ -4 ἔπρεπε νὰ ἦναι καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἐν τῇ ἐκθέσει, διότι κατεσκευάσθη ὀρθῶς ἡ ἐξίσωσις. Ἀλλ᾽ ὁ μὲν ζητούμενος εἶναι τὸ θερινὸν ἡμερομίσθιον, τὸ ὁποῖον ἐλάμβανεν ὁ ἐργάτης, καὶ τοῦτο ἐξελήφθη θετικὸν σημειωθὲν διὰ χ, τὸ δὲ προσδιόρισμα τοῦ χ εὑρέθη ἀντιθετικόν, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν γνωρίζομεν ὅτι δύναται νὰ σημαίνῃ παρὰ τὸ ἀντίθετον τοῦ λαμβανομένου ἡμερομισθίου, ἤτοι καθημερινὴν ζημίαν 4 δραχμῶν. Λοιπὸν ὁ -4 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ὁ ζητούμενος, διότι ἀντιφάσκει εἰς αὐτὸν σημαίνων τὸ ἀντίθετόν του.

Ἀλλ᾽ ἡ ἐξίσωσις $\chi=-4$, ὅπου τέλος πάντων ἀνεφάνη ἡ ἀντίφασις, εἶναι συνέπεια τῶν προηγουμένων· καὶ ἐπειδὴ οὔτε κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως οὔτε κατὰ τὴν λύσιν αὐτῆς συνέβη τι λάθος, ὅθεν νὰ ἐπήγασεν ἡ ἀντίφασις, ὀρθῶς δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ πηγὴ τῆς ἀντιφάσεως ἐνυπάρχει ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ προβλήματος. Καὶ αὐτὴ δὲ ἡ πηγὴ τῆς ἀντιφάσεως εἶναι ἀντίφασις τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει, ἥτις γίνεται φανερὰ ὁποίου εἴδους εἶναι ἐκ τῶν δύο τούτων. Πρῶτον ὁ —4, ἐννοούμενος ὅτι παριστάνει ζημίαν καθημερινὴν τοῦ ἐργάτου ἀντὶ κέρδους, δὲν φέρει εἰς ἀντίφασιν, ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἰς ὀρθὸν ἐξαγόμενον. Διότι τότε ὁ ἐργάτης ἐζημιώθη τὰς 13 θερινὰς ἡμέρας 52 δρ, καὶ 22 τὴν ἄλλην ζημίαν ὅλας 74· τὸν δὲ χειμῶνα ἐζημιοῦτο 6 δραχμὰς καθ' ἡμέραν, διότι ἐλάμβανε 2 δραχμὰς ὀλιγώτερον ἄλλο δὲν σημαίνει παρ ὅτι ἐζημιοῦτο 2 δρ περιτσότερον, τὰς δὲ 17 ἡμέρας ἐζημιώθη 102 δραχ· ἀλλ' ὠφελήθη τὰς 28 τὸ δῶρον· λοιπὸν ἐζημιώθη μόνον 74, ὅσας καὶ τὸ θέρος. Ἔπειτα δὲ ἀντὶ τοῦ x οὐδεὶς θετικὸς ἀριθμὸς, ὅστις ἐδῶ σημαίνει τὸ λαμβανόμενον ἡμερομίσθιον, καταστ αίνει ἴσα τὰ μνημονευόμενα ἐν τῇ ἐκθέσει ὅτι ἔλαβεν ὁ ἐργάτης τὸ θέρος καὶ τὸν χειμῶνα.

Λοιπὸν ὁ —4 σημαίνει ὅτι ἐν τῇ ἐκθέσει εἶναι δεδομένα ἀντιφατικὰ, ἤγουν ὅτι ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον ὁ ἐργάτης κτλ, καὶ ὅτι ἔλαβεν ἴσα τὸ θέρος καὶ τὸν χειμῶνα. Λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπῆρξε ποτὲ τοιοῦτόν τι, ὁποῖον λέγεται ἐν τῇ ἐκθέσει, ὅτι ἐργάτης τις ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον κτλ, καὶ ὅτι ἔλαβεν ἴσα κατὰ τοὺς δύο καιρούς, ἀλλ' ἢ ἐζημιοῦτο 4 δρ τὴν ἡμέραν κτλ, καὶ τότε ἐζημιώθη ἴσα τὸ θέρος καὶ τὸν χειμῶνα, ἢ ἂν ἐλάμβανεν ἀληθῶς ἡμερομίσθιον κτλ, ἀδύνατον νὰ ἔλαβεν ἴσα κατὰ τοὺς δύο καιρούς. Ἂν δὲ φαίνεται ἀπίθανον ὅτι εἰργάζετο καὶ ἐζημιοῦτο καθ' ἡμέραν, τότε ἀνάγκη νὰ μὴ ἔλαβεν ἴσα κατὰ τοὺς δύο καιρούς.

94. Συνήθως δὲν περιορίζουσιν οἱ περὶ τὴν Ἄλγεβραν ἕως ἐδῶ τὰς σκέψεις των, δηλ. ἕως νὰ ἐξηγήσωσιν ὅτι τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα σημαίνει ἀντίφασιν τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει καὶ τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος ὅπως ἐπροτάθη, ἀλλὰ δεικνύουσι

καὶ πῶς δύναταί τις, ἂν θέλῃ, νὰ ἐπανορθώσῃ τὸ ἄτοπον τρέπων τὸ πρόβλημα εἰς ἄλλο δυνατόν. Ἡ διόρθωσις δὲ αὕτη δύναται νὰ γείνῃ πολλαχῶς. Π. χ. ἂν δοθῇ πρῶτον ὅτι τὸν χειμῶνα ἐλάμβανεν 3, 4 κτλ δρ ὀλιγώτερον ἀντὶ 2, ἔπειτα ὅτι τὸ δῶρον ἦτον ὄχι 28 δρ, ἀλλὰ 8, 7, 6 κτλ, ἢ ὅτι ἡ ζημία ἦτον ὀλιγωτέρα τῶν 6 δραχ, κτλ.

Δι᾽ ἑκάστης δὲ τούτων τῶν μεταβολῶν μεταβάλλεται τὸ προσδιόρισμα τοῦ χ εἰς θετικὸν, ἀλλ᾽ ἐνταυτῷ καὶ ὁ ἀριθμὸς 4 εἰς ἄλλον. Ἀλλὰ προτιμᾶται τούτων ἡ ἁπλῆ μεταβολὴ τοῦ σημείου τοῦ χ ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ προβλήματος, ἤτοι τοῦ $+\chi$ εἰς $-\chi$ καὶ τοῦ $-\chi$, ἂν ἦναι, εἰς $+\chi$. Διότι οὕτως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος μεταβάλλεται εἰς ταύτην

$$-13\chi-22=17(-\chi-2)+28,$$

ἢ, διότι ἔχει τὸ πρῶτον μέλος ὅλον ἀντιθετικὸν, ἀλλασσομένων τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων της, εἰς ταύτην

$$13\chi+22=17(\chi+2)-28,$$

ἥτις, ἐνῷ ἔχει ὅλους τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς τοὺς αὐτοὺς κατὰ τὰς μονάδας καὶ μόνον διαφόρους τινὰς κατὰ τὰ σημεῖα, ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 4, ἀλλὰ θετικοῦ. Διότι ἐπειδὴ ὁ -4 ἀντὶ τοῦ χ ἐπαληθεύει τὴν τοῦ προβλήματος

$$13\chi-22=17(\chi-2)+28,$$

ἀφοῦ τεθῇ ἐν αὐτῇ τὴν μεταβάλλει εἰς ταύτην τὴν ἰσότητα

$$-13\times4-22=17(-4-2)+28$$

τῆς ὁποίας τὰ μέλη διαμένουσιν ἴσα καὶ ἀφοῦ ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων της καὶ τραπῇ εἰς ταύτην

$$13\times4+22=17(4+2)-28,$$

ἥτις εἶναι ἡ ἀνωτέρω

$$13\chi+22=17(\chi+2)-28$$

ἔχουσα 4 ἀντὶ χ. Δῆλον λοιπὸν ἐκ τούτων ὅτι ὁ 4 θετικὸς ἀντὶ χ ἐπαληθεύει τὴν τελευταίαν.

Αὕτη δὲ τώρα ἐκλαμβάνεται ὡς ἐξίσωσις προβλήματος, τὸ ὁποῖον διαφέρει τοῦ δεδομένου κατὰ ταῦτα, ὅτι αἱ 22 δρ ἐννοοῦνται ὡς κέρδος, αἱ δὲ 28 ὡς ζημία, καὶ ὅτι τὸν χειμῶνα ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον κατὰ 2 δρ περισσότερον. Εἶναι δεεὔκολον τώρα νὰ συστήσῃ τις τὸ νέον πρόβλημα, ἂν θέλῃ.

Ἀλλ' ἕκαστος ἐννοεῖ ὅτι ἡ καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον γινομένη ἐπανόρθωσις δυνατὸν νὰ θεωρῆται περιττή, διότι κυρίως νὰ λυθῇ τὸ δεδομένον πρόβλημα ἐπρόκειτο, καὶ τοῦτο ἔγεινεν ἅμα ἐπληροφορήθημεν ὅτι εἶναι ἀδύνατον· εἰς τοῦτο δὲ ὡδηγήθημεν ἐκ τοῦ ἀντιθετικοῦ προσδιορίσματος τοῦ χ.

95. Καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα

Πατήρ τις 38 ἐτῶν ἔχει υἱὸν ὀκταετῆ· μετὰ πόσα ἔτη ἡ τοῦ πατρὸς ἡλικία θέλει εἶσθαι ἑπταπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ; ἐὰν λύσωμεν, θέλομεν εὑρεῖ ἐξίσωσιν ταύτην

$$7(8+\chi)=38+\chi,$$

ὅθεν

$$\chi=-3,$$

ἄνευ λάθους καὶ ἐν τῇ κατασκευῇ τῆς ἐξισώσεως καὶ ἐν τῇ λύσει αὐτῆς. Κατὰ δὲ τοὺς προηγουμένους συλλογισμοὺς πληροφορούμεθα ὅτι τὸ -3 εἶναι σημεῖον ὅτι ἐν τῇ ἐκθέσει ἐνυπάρχουσι τ' ἀντιφατικά, τὰ ὁποῖα παρετηρήσαμεν ἐν ἀρ. 87, ἀλλ' ἐνταυτῷ καὶ ὅτι πρὸ 3 ἐτῶν ἦτον ἑπταπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ ἡλικίας ἡ τοῦ πατρός.

Τὸ αὐτὸ παρατηρεῖται καὶ ἐν τῷ 38 προβλήματι, ἂν ζητηθῇ πόσον νίτρον πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἢ πόσον θεῖον νὰ προστεθῇ, ὥστε νὰ καταστήσωσι τὰ μέρη τοῦ νίτρου πρὸς τὰ τοῦ θείου ὡς 11 πρὸς 4.

96. Ἐὰν ἐπρόκειτο νὰ λυθῇ καὶ τὸ 86 πρόβλημα οὕτω παρηλλαγμένον,

Ποῖον εἶναι τὸ κλάσμα, ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ ὁποίου ἂν μὲν ἀφαιρεθῶσι 3 μονάδες μετατρέπεται εἰς $\frac{1}{4}$, ἂν δὲ ἀφαιρεθῶσι 5 μονάδες, γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$; αἱ ἐξισώσεις του εἶναι

$$\frac{\chi-3}{\omega-3}=\frac{1}{4}, \quad \frac{\chi-5}{\omega-5}=\frac{1}{2},$$

αἵτινες λυθεῖσαι φέρουσιν εἰς $\chi=2$ καὶ $\omega=-1$· ὥστε τὸ κλάσμα τὸ ζητούμενον ἔπρεπε νὰ ἦναι $-\frac{2}{1}$ ἢ $-\frac{2}{1}$. Ἀλλ' εὐκόλως καταλαμβάνει τις ὅτι καὶ ἐδῶ τὸ ἀντιθετικὸν -1, ἢ τὸ $-\frac{1}{2}$, δεικνύει ὅτι ζητοῦνται ἀντιφατικά, ἐνθυμούμενος ὅτι ὅσον μεγαλήτερος ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοὺς ὅρους κλάσματος, τόσον μικρότερον θέλει εἶσθαι τὸ προκύπτον (Συμ. ἀρ. 53), καὶ παρατηρῶν ὅτι ἐδῶ ζητεῖται τὸ προκύπτον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 5 νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ προκύπτοντος τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 3, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

97. Ἂς λυθῇ καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β τῆς ὁδοῦ ΑΒΧ κινοῦσι τὴν αὐτὴν στιγμὴν δύο ταχυδρόμοι, ὁ μὲν ἐκ τοῦ Α 10 στάδια τὴν ὥραν ὁδοιπορῶν, ὁ δ' ἐκ τοῦ Β 6, καὶ διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος Γ, τὸ δεξιὰ τοῦ Α καὶ τοῦ Β κείμενον μακρὰν τοῦ μὲν Α 110 στάδια, τοῦ δὲ Β 50· ποῦ τῆς ὁδοῦ θέλουσιν ἐνταμωθῇ οἱ δύο ταχυδρόμοι;

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἂς ἐκλάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὴν ἀπὸ τοῦ Δ μέχρι τοῦ γνωστοῦ σημείου Γ ἀπόστασιν, σημειοῦντες αὐτὴν διὰ x. Τότε τὸ διάστημα ΑΔ παρίσταται διὰ $110-x$, τὸ δὲ ΒΔ διὰ $50-x$· τὸ πρῶτον δὲ διέτρεξεν ὁ ἐκ τοῦ Α κινήσας ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ ὁ ἐκ τοῦ Β κινήσας διήνυσε τὸ δεύτερον· ὥστε

$$\frac{110-x}{10}=\frac{50-x}{6},$$

ὅθεν ἄνευ λάθους ἐν τῇ λύσει ἔχομεν

$$x=-40.$$

Ἐπειδὴ δὲ λάθος ἐν τῇ λύσει δὲν ἔγεινεν, ἂς ἴδωμεν μήπως συνέβη ἐν τῇ κατασκευῇ ἢ ἐν τῇ συστάσει ἄτοπόν τι, ἐξ οὗ προέκυψεν ὁ -40 ἀντὶ τοῦ x.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως ὡς ζητούμενον ἐθεωρήσαμεν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐνταμώσεως μέχρι τοῦ σημείου Γ ἀπόστασιν, ὑποθέσαντες ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ εἴς τι σημεῖον. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν Γ βέβαια ἔπρεπε ἢ θέσιν τινὰ ἢ ἐν τῷ Γ ἢ δεξιόθεν ἢ ἀριστερόθεν αὐτοῦ, ἡ δὲ θέσις αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως τοῦ Α ἀπὸ τοῦ Β καὶ τῆς ταχύτητος τῶν ταχυδρόμων. Ἀλλὰ χωρὶς νὰ προσέξωμεν εἰς ταῦτα ὑπεθέσαμεν ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῆ ἀριστερὰ τοῦ Γ κατὰ τὸ Δ, σημειώσαντες διὰ x θετικοῦ τὸ ἀπὸ τοῦ Γ μέχρι τοῦ Δ διάστημα, ὁπότε τὰ δεξιὰ τοῦ Γ διαστήματα θέλουσιν εἶσθαι ἀντιθετικά. Πιθανὸν λοιπὸν τὸ -40 νὰ σημαίνῃ ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῆ οἱ ταχυδρόμοι δεξιὰ τοῦ Γ 40 στάδια μακρὰν αὐτοῦ, καὶ ἐπομένως ὅτι συνέπεια τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει δὲν εἶναι ἡ γενομένη ὑπόθεσις, ἀλλ' ἡ ἐκ τοῦ δεξιοῦ μέρους τοῦ Γ ἐντάμωσις, καὶ λοιπὸν ὅτι ἦτον ἄτοπος ἡ ὑπόθεσις ἐκείνη.

Καὶ τῷ ὄντι τοῦτο ἀληθεύει. Διότι ὁ ἐκ τοῦ Β ταχυδρόμος τὸ διάστημα ΒΓ, ἤτοι 50 στάδια, τὸ διατρέχει ἐν ὥραις $8\frac{1}{3}$, ἐν αἷς ὁ ἀπὸ τοῦ Α ταχυδρόμος διέτρεξε $83\frac{1}{3}$ στάδια· λοιπὸν, ὅτε ὁ ἐκ τοῦ Β ταχυδρόμος εἶναι ἐν τῷ Γ, ὁ ἐκ τοῦ Α ἤτοι ὁ ταχύτερος εἶναι κατόπιν του· τὸ ὁποῖον δεικνύει ὅτι μέχρι τοῦ Γ δὲν ἔγεινεν ἡ ἐντάμωσις, ἀλλ' ὅτι θέλει γείνει δεξιὰ τοῦ Γ.

Ἀφοῦ δ' ἐκ τοῦ ἀντιθετικοῦ σημείου τοῦ x ἐμάθαμεν τὴν ψευδῆ ὑπόθεσιν, ἔπρεπε τώρα νὰ σημειώσωμεν διὰ x τὸ δεξιὸν τοῦ Γ διάστημα ΓΔ', καὶ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν, ἥτις εἶναι αὕτη

$$\frac{110+x}{10}=\frac{50+x}{6}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη πορίζεται ἐκ τῆς προηγουμένης ἀλλαγῇ τοῦ $-x$ εἰς $+x$, καὶ, ἐνῷ ἐκείνη ἐπαληθεύεται διὰ -40 ἀντὶ x, αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ 40 ἀντὶ x, δῆλον ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ἐνταμώσεως εἶναι μακρὰν τοῦ Γ 40 στάδια πρὸς δεξιάν. Λοιπὸν καὶ χωρὶς κατασκευῆς καὶ λύσεως νέας ἐξισώσεως τὸ -40 ἀρκεῖ νὰ μᾶς δείξῃ τὸ τῆς ἐνταμώσεως σημεῖον, ἂν τὸ μὲν $-$ ἐννοήσωμεν ὅτι σημαίνει τὴν ἀντίθετον θέσιν τῆς ὑποτεθείσης, τὸ δὲ 40 πόσον μακρὰν τοῦ Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

98. Καὶ ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ 9 προβλήματος λυθεῖσα φέρει εἰς $\chi = -45$, τὸ δὲ — δεικνύει τὸ ἐν τῇ κατασκευῇ γενόμενον ἄτοπον, ἤτοι ὅτι τὸ δεύτερον μέλος 3 κέρδος ἐθεωρήθη θετικὸν, ἐνῷ πρότερον τὸ $\frac{\chi}{3}$ κέρδος ἐλογίσθη ἀντιθετικόν. Ἢ λοιπὸν πρέπει νὰ διορθωθῇ τὸ δεύτερον μέλος εἰς —3, ἢ νὰ διορθωθῇ ὡς ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει. Τούτου δὲ γενομένου εὑρίσκεται $\chi = 15$. Λοιπὸν τὸ — τοῦ 45 δεικνύει τὸ ἐν τῇ κατασκευῇ λάθος, ὁ δὲ 45 σημαίνει τὴν ἀξίαν τῶν πωληθέντων.

99. Ἐκ τῶν προηγουμένων λοιπὸν βλέπομεν ὅτι τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα, εἰς ὃ φέρει ἡ ὀρθὴ λύσις ἐξισώσεως ἢ ἐξισώσεων, ἢ σημαίνει ὅτι ἐν τῇ κατασκευῇ τῆς ἐξισώσεως ποσόν τι ἐξελήφθη ἀντιθέτως παρ' ὅπως ἀπήτουν τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει, καὶ τότε ὁ εὑρεθεὶς ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς ἀντιθέτως ἤτοι θετικὸς ἐννοούμενος εἶναι ὁ ζητούμενος, ὡς ἀνωτέρω ὁ —40 καὶ ὁ —45· ἢ, ἂν τοιοῦτόν τι δὲν συνέβη, σημαίνει ὅτι εἶναι ἀντιφατικὰ τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει καὶ ἀδύνατον τὸ πρόβλημα ὅπως ἐπροτάθη, δυνατὸν δὲ, ἂν ἐπιδέχηται ἀντιθετικὸν ἀριθμὸν ἀντὶ τοῦ ζητουμένου, τουτέστι νὰ ἐννοηθῇ τὸ ζητούμενον ἀντιθέτως παρ' ὅπως παρίσταται ἐν τῇ ἐκθέσει. Ὁπότερον δὲ σημαίνει καὶ ὁποίου εἴδους ἄτοπον προηγήθη, τοῦτο θέλει τὰ μάθει ὁ λύων τὸ πρόβλημα ἐρευνῶν μετὰ προσοχῆς τὰ προηγούμενα, ὡς ἀνωτέρω ἐπράξαμεν.

Περὶ τῶν συμβόλων $a = 0$ καὶ $0 = 0$.

100. *Δύο κληρονόμων μελλόντων νὰ μοιρασθῶσι κληρονομίαν τινὰ, ἂν μὲν ὁ ἕτερος λάβῃ τὸ τρίτον τῆς ὑπολείπονται μένουσιν εἰς τὸν ἄλλον τὰ πέντε δωδέκατα τῆς αὐτῆς καὶ 40 δραχμαί· ἂν δ' ὁ δεύτερος λάβῃ τὰ τρία τέταρτα τῆς ὑπολείπονται μένουσιν εἰς τὸν πρῶτον μόνον 49 δραχμαί· πόση ἦτον ἡ κληρονομία;*

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὀρθῶς κατασκευασθεῖσα ἡ ἐξίσωσις τούτου εἶναι

$$\frac{\chi}{3}+\frac{5\chi}{12}+40=\frac{3\chi}{4}+49.$$

ὅθεν
$$4\chi+5\chi+480=9\chi+588$$
$$4\chi+5\chi-9\chi=588-480$$
$$0=108.$$

Εἶναι δὲ παράδοξον ἐνταῦθα ὅτι, ὄχι μόνον δὲν εὕρομεν ἀριθμόν τινα ἀντὶ τοῦ χ, ἀλλ' ἐνῷ τὸ χ ἔγεινεν ἄφαντον, ἔμεινεν ἄτοπον προφανέστατον ὅτι ὁ 108 εἶναι ἴσος μὲ τὸ μηδέν. Τὸ δὲ ἄτοπον τοῦτο εἶναι φανερὸν ὅτι πηγάζει ἐκ τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος, καὶ ἐὰν τὸ ἐν αὐτῇ $\frac{\chi}{3}$ τραπῇ εἰς τὸ ἰσοδύναμον $\frac{4\chi}{12}$, ἑνωθῇ μὲ τὸ $\frac{5\chi}{12}$ εἰς $\frac{9\chi}{12}$, καὶ τούτου διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ 3, οὕτω ἀναφαίνεται καὶ αὐτὴ ἄτοπος· διότι τρέπεται εἰς

$$\frac{3\chi}{4}+40=\frac{3\chi}{4}+49,$$

ἐν ᾗ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς ἂν τεθῇ ἀντὶ χ, ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς, ἀδύνατον νὰ γείνωσι τὰ μέλη ἴσα; ἀλλὰ θέλουσι διαφέρει πάντοτε κατὰ 9. Λοιπὸν οὐδεὶς ἀριθμὸς ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, καὶ ἑπομένως οὐδεὶς ἀριθμὸς εὑρίσκεται ἀντὶ τοῦ ζητουμένου, διότι ἡ ἐξίσωσις εἶναι πιστὴ μετάφρασις τῆς ἐκθέσεως. Λοιπὸν τὸ $0=108$ σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι παντάπασιν ἀδύνατον, ἤτοι ὅτι δὲν ὑπῆρξαν, οὐδὲ δύνανται νὰ ὑπάρξωσι τὰ λεγόμενα ἐν τῇ ἐκθέσει· ὡσαύτως καὶ ἡ ἐξίσωσίς του εἶναι ἀδύνατος.

101. *Πόσα ἐσκότωσεν ἐρωτηθεὶς κυνηγός τις ἀπεκρίθη, Τὰ ἡμίσεα τῶν ὅσα ἐσκότωσα ὑπερβαίνουσι κατὰ 5 τὸ τρίτον τῶν ὅσα προχθὲς ἐσκότωσα, τὸ δὲ προχθεσινὸν κυνήγιόν μου εἶναι κατὰ 5 ὀλιγώτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἡμίσεος τοῦ τωρινοῦ· πόσα ἐσκότωσεν ὁ κυνηγὸς καὶ τώρα καὶ προχθές;*

Ἔστω χ τὸ τωρινὸν κυνήγιον καὶ ω τὸ προχθεσινόν· αἱ ἐξισώσεις του εἶναι αὗται

$$\frac{\chi}{2}=\frac{\omega}{3}+5, \qquad \omega=\frac{3\chi}{2}-5.$$

Θέτοντες δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἀντὶ ω τὸ ἐκ τῆς δευτέρας ἰσοδύναμόν του ἔχομεν

$$\frac{\chi}{2}=\frac{\frac{3\chi}{2}-5}{3}+5=\frac{3\chi-10}{6}+5,$$

$$3\chi=3\chi-10+30$$

$$3\chi-3\chi=30-10$$

$$0=20.$$

Καὶ ἐνταῦθα κατηντήσαμεν εἰς ἄτοπον ἰσότητα χωρὶς νὰ ἠξεύρωμεν τίνα ἀριθμὸν παριστάνει τὸ χ. Εἶναι δὲ τὸ ἄτοπον τοῦτο συνέπεια ἢ τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων ἢ τῶν δύο ὁμοῦ. Ἀλλ' ἡ μὲν πρώτη μεταποιεῖται εἰς ταύτην $3\chi-2\omega=30$, ἡ δὲ δευτέρα εἰς ταύτην $3\chi-2\omega=10$, ὧν οὐδετέρα καθ' αὑτὴν ἐμπεριέχει τι ἄτοπον, ἀλλὰ μάλιστα ὡς ἔχουσα δύο ἀγνώστους ἑκατέρα ἐπαληθεύεται διὰ πολλῶν καὶ διαφόρων ἀριθμῶν· αἱ δὲ δύο ὁμοῦ εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπαληθεύωνται διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀντὶ χ καὶ ω, διότι ἐνῷ τὰ πρῶτά των μέλη εἶναι τὰ αὐτά, τὰ δεύτερα εἶναι ἄνισα. Λοιπὸν τὸ $0=20$ ὡς συνέπεια τῶν δύο ὁμοῦ εἶναι σημεῖον ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἤτοι τὰ ἐν τῷ προβλήματι εἶναι ἀδύνατα, καὶ τοῦτο διότι τὸ πρῶτον δεδομένον μὲ τὸ δεύτερον, ἤτοι ἡ πρώτη ἐξίσωσις μὲ τὴν δευτέραν δὲν συμβιβάζονται, ἀλλ' ἀντιφάσκουσιν· ἐνῷ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι τὸ ἄτοπον $0=108$ ἐσήμαινεν ὅτι τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ κατασταθῶσιν ἴσα δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ χ.

102. Τὸ ἤδη γνωστὸν ἄτοπον $a=0$ ἀπαντᾶται καὶ ἐν τῇ λύσει πλειοτέρων ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, καὶ δεικνύει πάντοτε, ὅταν ὀρθῶς κατασκευάζωνται αἱ ἐξισώσεις καὶ ἀλανθάστως λύωνται, ὅτι τὸ πρόβλημα, ὅθεν πορίζονται

αἱ ἐξισώσεις, εἶναι ἀδύνατον, καὶ τοῦτο διότι τὰ δεδομένα τὰ χρησιμεύοντα εἰς κατασκευὴν μιᾶς τινος ἐξισώσεως εἶναι ἀσυμβίβαστα ἢ ἀντιφατικὰ μὲ τὰ χρησιμεύοντα εἰς καταρτισμὸν ἄλλης τινὸς ἐξισώσεως, ἢ ἄλλων δύο ἐξισώσεων κτλ. Ἐκ δὲ τῶν προηγουμένων ὁδηγούμενός τις θέλει δύνασθαι μετὰ προσοχῆς ἐρευνῶν ν' ἀνεύρῃ ποῖα εἶναι τ' ἀντιφατικά.

Π. χ. ἂν λύσῃ τὰς ἐξισώσεις ταύτας

$$x+3\psi-6\omega-6\upsilon=7,\ 2\chi+\psi-4\omega-2\upsilon=15,$$

$$4\chi-\psi-5\omega+5\upsilon=30,\ 5\chi+10\psi-22\omega-20\upsilon=39,$$

ἀπαλείφων μὲν πρῶτον τὸ ψ ἐκ τῆς δευτέρας καὶ ἑκάστης τῶν ἄλων τριῶν, θέλει εὑρεῖ

$$5\chi-6\omega=8,\ 6\chi-9\omega+3\upsilon=45,\ 15\chi-18\omega=111,$$

ἀπαλείφων δὲ τὸ ω ἐκ τῆς πρώτης καὶ ἑκατέρας τῶν ἄλλων, θέλει εὑρεῖ

$$6\upsilon-3\chi=66,\quad 0=87\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ $0=87$ πηγάζει ἐκ τῶν

$$5\chi-6\omega=8 \text{ καὶ } 15\chi-18\omega=111,$$

αἵτινες ἐπορίσθησαν ἐκ τῆς πρώτης δευτέρας καὶ τετάρτης, θέλει συμπεράνει ὅτι αὗται αἱ τρεῖς εἶναι ἀσυμβίβαστοι, τὸ δὲ πρόβλημα, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐπήγασαν, ἀδύνατον.

103. Καὶ τὸ σύμβολον $a=0$ καὶ τὸ $\chi=-a$ δεικνύουσιν ὅτι τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ προβλήματος εἶναι ἀσυμβίβαστα ἢ ἀντιφατικά, καὶ ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον τοιοῦτον ὁποῖον ἐπροτάθη. Ἀλλὰ διαφέρουσι κατὰ τοῦτο, ὅτι τὸ μὲν $\chi=-a$ ἐπιδεικνύει ὅτι, ἂν τὸ ζητούμενον ἐννοηθῇ ἀντιθέτως παρ' ὅπως ζητεῖται ἐν τῇ ἐκθέσει, τότε ἐκλείπει ἡ ἀντίφασις, συμβιβάζονται τὰ πρότερον ἀσυμβίβαστα καὶ τὸ πρόβλημα γίνεται δυνατόν, ἂν ἡ φύσις τῶν δεδομένων τὸ ἐπιτρέπει (ἰδὲ καὶ τὸ 79 πρόβλ). Τὸ δὲ $a=0$ σημαίνει ὅτι οὔτε ὁποῖος ζητεῖται ἀριθμὸς οὔτε ἀντίθετος αὐτοῦ καθιστάνει τὸ πρόβλημα δυνατόν, διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς δύναται νὰ ἐπαληθεύῃ τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει· λοιπὸν εἶναι σημεῖον τοῦ κατὰ πάντα τρόπον ἀδυνάτου.

104. Ἀπροσδιορίστου δὲ προβλήματος οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοὶ ἂν ζητῶνται ἀκέραιοι, εἴπομεν ἐν ἀρ. 85 μίαν περίπτωσιν, καθ' ἣν γνωρίζεται τὸ ἀδύνατον. Ἀλλ' ὅταν αὕτη δὲν ὑπάρχῃ, τότε ἐκ τῶν τύπων τῶν ἀπροσδιορίστων δυνάμεθα νὰ τὸ καταλάβωμεν, ὡς ἐδῶ λέγομεν. Ἔστω εἰς λύσιν τοῦτο τὸ πρόβλημα·

Ἵν' ἀποτελέσωμεν μῆκος 23 παλαμῶν μὲ ἐφεξῆς τεθειμένους κανόνας τοὺς μὲν 5 παλαμῶν μακροὺς, τοὺς δὲ 7, πόσους ἐξ ἑκατέρων πρέπει νὰ θέσωμεν;

Ἂν χ ἦναι τῶν πρώτων ὁ ἀριθμὸς καὶ ω ὁ τῶν δευτέρων, ἔχομεν $5\chi+7\omega=23$,
ὅθεν $\chi=6-7\tau$, $\omega=5\tau-1$.
Καὶ ἂν μὲν τὸ $\tau=0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots$
ἔχομεν $\chi=6,-1,-8,-15 \ldots$
$\omega=-1,4,\ 9,\ 14 \ldots$
ἂν δὲ τὸ $\tau=-1,-2,-3 \ldots$
ἔχομεν $\chi=13,\ 20,\ 27 \ldots$
$\omega=-6,-11,-16 \ldots$

Ἐνταῦθα βλέπομεν ὅτι, ὅτε τὸ προσδιόρισμα τοῦ χ εἶναι θετικὸν, τὸ τοῦ ω εἶναι ἀντιθετικὸν, καὶ τἀνάπαλιν. Ἐκ δὲ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι ἀδύνατον τὸ πρόβλημα ὅπως ἐπροτάθη, διότι ἀκέραιοι κανόνες καὶ θεμένοι κατὰ σειρὰν, ἐὰν ἦναι ὅσον λέγονται ἐν τῇ ἐκθέσει μακροὶ, ἀδύνατον ν' ἀποτελέσωσι μῆκος 23 παλαμῶν. Ἂν ὅμως ἐκληφθῶσιν οἱ ἑπταπάλαμοι ἀντιθέτως ἢ οἱ πενταπάλαμοι, ἤγουν ἂν οἱ πενταπάλαμοι τεθῶσι κατὰ σειρὰν καὶ ἀπὸ τὸ μῆκος αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τὸ μῆκος τῶν ἑπταπαλάμων, ἢ τἀνάπαλιν, τότε γίνεται δυνατὸν καὶ μάλιστα κατὰ μυρίους διαφόρους τρόπους ἀληθεύει· ἀλλὰ δὲν ζητεῖται τοῦτο.

105. *Τὸ ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ 10 καὶ τὰ δύο τρίτα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ καὶ τοῦ 20 καὶ τὰ πέντε ἕκτα τῆς ὑπεροχῆς αὐτοῦ ὑπὲρ τὸν 34 ἐξισοῦνται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ὑπὲρ τὸν 5 ὑπεροχῆς αὐτοῦ· τίς εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;*

Η ἐξίσωσις τούτου τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\chi+10}{2}+\frac{2(\chi+20)}{3}+\frac{5(\chi-34)}{6}=2(\chi-5),$$

ἥτις λυομένη παρέχει κατὰ σειρὰν

$$3\chi+30+4\chi+80+5\chi-170=12\chi-60$$
$$3\chi+4\chi+5\chi-12\chi=170-80-30-60$$
$$0=0.$$

Ἐνταῦθα κατηντήσαμεν εἰς ταυτότητα χωρὶς νὰ προσδιορισθῇ τί εἶναι τὸ χ, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Διατί ἄρά γε τοῦτο;

Ἐπανερχόμενοι βλέπομεν ὅτι τὸ $0=0$ προῆλθεν ἐκ τοῦ ὅτι ἐν τῇ προτέρᾳ ἐξισώσει τὸ κεφάλαιον τῶν μὲ τὸ χ θετικῶν ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀντιθετικὸν ὅρον -12χ, ὡσαύτως καὶ ὁ 170 μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀντιθετικῶν γνωστῶν ὅρων· τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι ἐν τῇ ἔτι προτέρᾳ ἐξισώσει καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν μὲ τὸ χ ὅρων τοῦ πρώτου μέλους καὶ ἡ διαφορὰ τῶν γνωστῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι ἴσα τὸ μὲν μὲ τὸν 12χ τοῦ δευτέρου μέλους, τὸ δὲ μὲ τὸν -60 τοῦ αὐτοῦ. Τοῦτο δὲ μέλλει νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἐν τῇ τοῦ προβλήματος ἐξισώσει, ἂν καὶ δὲν εἶναι εὔκολον νὰ τὸ διακρίνωμεν, διότι ἡ ἀκεραίωσίς της δὲν μετέβαλε τὰ μέλη. Καὶ τῷ ὄντι τοῦτο βλέπει τις, ἂν καταστάθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους ὁμώνυμοι, ἐκτελεσθῶσιν οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ αἱ προσθέσεις, ἵνα κατασταθῇ ἁπλούστερον τὸ πρῶτον μέλος χωρὶς νὰ μεταβληθῇ. Διότι τὸ πρῶτον μέλος οὕτω καταντᾷ εἰς τὸ $\frac{12\chi-60}{6}$, τὸ ὁποῖον διαιρέσει διὰ 6 γίνεται $2\chi-10$, τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δεύτερον μέλος, ἀφοῦ ἐκτελεσθῇ ὁ σημειωμένος πολλαπλασιασμός. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ ἐπαληθεύηται δι᾽ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἀντὶ τοῦ χ, καὶ ἐπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς δὲν εἶναι εἷς μόνος, ἀλλὰ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς ὁ ζητούμενος· ὥστε μένει ἀπροσδιόριστος αὐτός. Διὰ τοῦτο ὀνομάζονται καὶ τὸ πρόβλημα καὶ ἡ ἐξίσωσίς του, ἥτις κυρίως εἶναι ἰσότης (ἰδὲ ἀρ. 7), ἀπροσδιόριστα.

Λοιπὸν τὸ ἀπαντώμενον ἐν τῇ λύσει προβλήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ $0=0$ εἶναι σημεῖον ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

106. *Δύο χωρικαὶ εἶχον ἐν τοῖς καλαθίοις αὐτῶν ὠὰ καὶ τὰ μὲν τῆς πρώτης ἦσαν ὀλιγώτερα τῶν τριῶν δευτέρων τῶν τῆς ἄλλης κατὰ 15, τὰ δὲ τῶν τῆς δευτέρας ἡμίσεα ὑπερέβαινον τὸ τρίτον τῶν τῆς πρώτης κατὰ 5· πόσα εἶχεν ἑκατέρα;*

Αἱ ἐξισώσεις τούτου τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\chi=\frac{3\omega}{2}-15,\quad \frac{\omega}{2}=\frac{\chi}{3}+5.$$

Θέτοντες δὲ τὸ ἐκ τῆς πρώτης ἰσοδύναμον τοῦ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ κτλ, εὑρίσκομεν

$$\frac{\omega}{2}=\frac{\frac{3\omega}{2}-15}{3}+5=\frac{3\omega-30}{6}+5$$

$$3\omega=3\omega-30+30$$

$$3\omega-3\omega=30-30$$

$$0=0.$$

Ἐνταῦθα τὸ $0=0$ εἶναι συνέπεια τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ ὄχι τῆς ἑτέρας αὐτῶν, διότι τὰ μέλη ἑκατέρας δὲν εἶναι τὰ αὐτὰ ὡς ἐν τῇ τοῦ προηγουμένου προβλήματος. Καὶ ἐπειδὴ ἀφοῦ ἀκεραιωθῶσιν αἱ ἐξισώσεις, μετατεθῶσιν οἱ μὲ τοὺς ἀγνώστους ὅροι εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἀλλαχθῶσι τῶν μελῶν τῆς πρώτης τὰ σημεῖα, τρέπονται εἰς ταύτας

$$3\omega-2\chi=30$$

$$3\omega-2\chi=30,$$

βλέπει τις ὅτι αἱ τοῦ προβλήματος ἐξισώσεις φαίνονται ὅτι εἶναι διάφοροι, ἀληθῶς δὲ εἶναι μία καὶ ἡ αὐτή· ὥστε, ἐνῷ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἀγνώστους, τὰ ἐν τῇ ἐκθέσει δὲν εἶναι φύσέως τοιαύτης, ὥστε νὰ κατασκευασθῶσι δύο πάντη διάφοροι ἐξισώσεις, ἀλλὰ κυρίως μία καὶ ἡ αὐτή· λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, ὡς ἔχον δύο ἀγνώστους καὶ μίαν ἐξίσωσιν (ἰδὲ ἀρ. 81).

Τὸ σημεῖον $0=0$ λοιπὸν σημαίνει καὶ ἐνταῦθα ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, ἀλλὰ τοῦτο διότι ἀντὶ δύο ἐξισώσεων διαφόρων ἔχει δύο ἐξισώσεις, αἵτινες εἶναι συνέπεια ἡ ἑτέρα τῆς ἄλλης, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἔχει κυρίως μίαν.

107. Τὸ σημεῖον $0=0$ ἀπαντᾶται καὶ ἐν τῇ λύσει πλειοτέρων ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, καὶ σημαίνει πάντοτε ὅτι τὸ πρόβλημα, τοῦ ὁποίου εἶναι ἐξισώσεις, εἶναι ἀπροσδιόριστον διὰ τοῦτο, ὅτι ἔχει κατὰ τὸ φαινόμενον τόσας διαφόρους ἐξισώσεις, ὅσους καὶ ἀγνώστους, ἀληθῶς ὅμως ἔχει ὀλιγωτέρας· διότι μία τις αὐτῶν θέλει εἶσθαι συνέπεια ἄλλης τινὸς αὐτῶν ἢ ἄλλων δύο κτλ.

Π. χ. ἂν λυθῶσιν αἱ τέσσαραις αὗται ἐξισώσεις

$$\chi+3\psi-6\omega-6\upsilon=8,\quad 2\chi+5\psi-10\omega-9\upsilon=12,$$
$$2\chi+4\psi-8\omega-9\upsilon=14,\quad 5\chi+12\psi-24\omega-24\upsilon=34,$$

ἀπαλειφομένου μὲν τοῦ χ ἐκ τῆς πρώτης καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων, εὑρίσκονται

$$\psi-2\omega-3\upsilon=4,\quad 2\psi-4\omega-3\upsilon=2,\quad 3\psi-6\omega-6\upsilon=6,$$

ἀπαλειφομένου δὲ τοῦ υ ἐκ τούτων, εὑρίσκονται

$$2\omega-\psi=2,\quad \psi-2\omega=-2,$$

ἀπαλειφομένου δὲ τοῦ ψ ἐκ τούτων, εὑρίσκεται

$$0=0,$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι μία τις εἶναι συνέπεια τῶν ἄλλων τριῶν, διότι εὑρέθη ἐν τῇ τελευταίᾳ ἀπαλείψει.

Πληροφορεῖται δέ τις ὅτι ἡ τετάρτη εἶναι συνέπεια τῶν τριῶν ἄλλων ὁμοῦ, ὑποθέτων τὸ υ γνωστόν, λύων τὰς τρεῖς πρώτας ἐξισώσεις, καὶ θέτων ἐν τῇ τετάρτῃ ἀντὶ χ, ψ, ω τοὺς ὁποίους θέλει εὑρεῖ τύπους αὐτῶν. Οὕτω θέλει εὑρεῖ $0=0$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι οἱ ἐκ τῶν τριῶν πρώτων ἐξισώσεων προσδιοριζόμενοι ἀριθμοὶ ἀντὶ χ, ψ καὶ ω, ἀπροσδιορίστου ὄντος τοῦ υ, ταυτοποιοῦσι καὶ τὴν τετάρτην· λοιπὸν ἡ τετάρτη εἶναι συνέπεια τῶν τριῶν πρώτων ὁμοῦ. Λοιπὸν κυρίως εἶναι τρεῖς αἱ ἐξισώσεις; καὶ τὸ πρόβλημα, ὅθεν ἐπήγασαν αὗται, εἶναι ἀπροσδιόριστον.

Ἀρκοῦσι ταῦτα περὶ τῶν μερικῶν προβλημάτων, μεταβαίνομεν δὲ τώρα καὶ εἰς τὰ γενικά.

Περὶ διεπιλύσεως τῶν γενικῶν προβλημάτων.

108. Ὅταν πρόκηται νὰ λυθῶσι γενικὰ προβλήματα, ὡς τὰ ἐν ἀρ. 57, 58, 59, σπανιώτατα δύναται νὰ συμβῇ ἐν τῇ λύσει τῶν ἐξισώσεών των ν' ἀπαντηθῶσι τὰ προηγούμενα σύμβολα, ἀλλὰ συνήθως εὑρίσκεται ἀντὶ ἑκάστου ἀγνώστου τύπος τις. Μετὰ τὴν εὕρεσιν ὅμως ἑκάστου τύπου εἶναι ἀνάγκη πολλάκις νὰ μερικοποιῶμεν τὸ γενικὸν πρόβλημα (6), καὶ τότε τὰ ἐν τῷ τύπῳ γράμματα προσδιορίζονται διαφόρους προσδιορισμούς, ἐκ τῶν ὁποίων προέρχεται μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων τὸ τοῦ ἀγνώστου μερικὸν προσδιόρισμα, τὸ παριστάνον τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τοῦ μερικοῦ προβλήματος. Ἀλλ' ἐνταῦθα διά τινας προσδιορισμοὺς προκύπτουσι πολλάκις τῶν ἀγνώστων προσδιορίσματα ἰδιόμορφα χρείαν ἔχοντα ἐξηγήσεως τί σημαίνουσιν· ἀλλὰ καὶ τὰ μέχρι τοῦδε γνωστὰ εἶναι καλὸν νὰ ἐπιβεβαιῶνται ὅτι σημαίνουσι τὰ ἐν τοῖς προηγουμένοις εἰρημένα. Τὸ προσδιορίζειν λοιπὸν πάντα προσδιορισμὸν τὰ ἐν ἑκάστῳ τύπῳ γράμματα καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ἑρμηνεύειν τὰ διάφορα τοῦ ἀγνώστου προκύπτοντα προσδιορίσματα, καὶ οὕτω πως ἐξετάζειν τὸ γενικὸν πρόβλημα καθ' ὅλας του τὰς διαφόρους περιπτώσεις καλοῦμεν *διεπιλύειν τὸ γενικὸν πρόβλημα*. Τ' ἀκόλουθα παραδείγματα θέλουσι σαφηνίσει τὰ λεγόμενα καὶ θέλουσιν ὁδηγήσει ἕκαστον εἰς τὸ πῶς νὰ διεπιλύῃ πᾶν ἄλλο πρόβλημα.

109. *Ὄντος Κ τινὸς α ἐτῶν καὶ ἄλλου τινὸς Π β ἐτῶν, πότε ὁ λόγος τῆς τοῦ Κ ἡλικίας πρὸς τὴν τοῦ Π εἶναι ν;*

Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι μετὰ χ ἔτη· τότε ὁ μὲν Κ θέλει εἶσθαι $\alpha+\chi$ ἐτῶν, ὁ δὲ Π $\beta+\chi$, ἡ δὲ πρώτη ἡλικία θέλει εἶσθαι ἴση μὲ τὴν δευτέραν ἐπὶ τὸν λόγον ν, ἤτοι

$$\alpha+\chi=\nu(\beta+\chi).$$

Λύοντες δὲ ταύτην τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\alpha-\beta\nu}{\nu-1}.$$

Διεπίλυσις. Τὰ α, β καὶ ν δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσι πλείστους διαφόρους προσδιορισμούς, ἀλλ' αὐτοὶ γενικώτερον θεωρούμενοι θέλουσιν εἶσθαι τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἦναι $\nu>1$, ἢ $\nu<1$, ἢ $\nu=1$, καὶ $\alpha>\beta\nu$, ἢ $\alpha<\beta\nu$, ἢ $\alpha=\beta\nu$· συνδυάζοντες δὲ ταῦτα, τοὺς πολυαρίθμους προσδιορισμοὺς ἀνάγομεν εἰς τὰ ἑξῆς ἑπτὰ εἴδη, $\alpha>\beta\nu$ καὶ $\nu>1$, $\alpha<\beta\nu$ καὶ $\nu<1$, $\alpha>\beta\nu$ καὶ $\nu<1$, $\alpha<\beta\nu$ καὶ $\nu>1$, $\alpha\lesseqgtr\beta\nu$ καὶ $\nu=1$, $\alpha=\beta\nu$ καὶ $\nu=1$, $\alpha=\beta\nu$ καὶ $\nu\gtrless 1$.

Πρῶτον μὲν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὲν διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν τοῦ Κ καὶ τοῦ Π πάντοτε εἶναι ἡ αὐτή, διότι ἐκ τῆς γεννήσεως τοῦ μικροτέρου αὐξάνουσι κατ' ἔτος καὶ αἱ δύο κατὰ μονάδα· ὁ δὲ λόγος αὐτῶν ἀδιακόπως μεταβάλλεται, διότι ὄντος ἔν τινι χρόνῳ τοῦ λόγου των $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐν ἄλλῳ χρόνῳ εἶναι ηὐξημέναι καὶ αἱ δύο ἡλικίαι ἤτοι οἱ ὅροι αὐτοῦ ἢ ἠλαττωμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τοῦτο δὲ μεταβάλλει τὸν λόγον. Εἶναι δὲ γνωστὸν (Συμ. ἀρ. 51) ὅτι, ἂν $\frac{\alpha}{\beta}<1$, αὐξανομένων τῶν ὅρων του κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, αὐξάνεται, ἐλαττουμένων δέ, ἐλαττοῦται· ἂν δὲ $\frac{\alpha}{\beta}>1$, ἀντιστρόφως αὐξανομένων τῶν ὅρων του κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἐλαττοῦται, ἐλαττουμένων δέ, αὐξάνεται· ἂν δὲ $\frac{\alpha}{\beta}=1$, οὔτ' ἡ αὔξησις οὔτ' ἡ ἐλάττωσις τὸν μεταβάλλει.

Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ r παριστάνει τὸν λόγον τῆς ζητουμένης ἡλικίας τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π, ὅταν μὲν $r>1$, ἐκ τῶν ζητουμένων ἡλικιῶν ἡ τοῦ K ὑποτίθεται μεγαλητέρα τῆς τοῦ Π· ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνεται ὅτι καὶ ἡ ἐνεστῶσα τοῦ K ἡλικία εἶναι μεγαλητέρα τῆς τοῦ Π, ἤτοι $a>b$ ἢ $\frac{a}{b}>1$. ὅταν δὲ $r<1$, τότε ὑποτίθεται ἡ τοῦ K ἡλικία μικροτέρα τῆς τοῦ Π, ἤτοι $a<b$ ἢ $\frac{a}{b}<1$. Ὅταν δὲ $r=1$, τότε ὑποτίθεται ὅτι $a=b$ ἢ $\frac{a}{b}=1$. Ὥστε διὰ τοῦ τοιούτου προσδιορισμοῦ τοῦ r κυρίως προσδιορίζεται καὶ ἡ ἐνεστῶσα ἡλικία τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π.

Ἔτι δὲ παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν σημειωθῇ ὁ λόγος $\frac{a}{b}$ διὰ π, τότε εἶναι ὁ $a=b\pi$, καὶ ὁ $a-br$ τρέπεται εἰς $b\pi-br$ ἢ $b(\pi-r)$, ἀφοῦ ἀντὶ a τεθῇ τὸ ἰσοδύναμόν του $b\pi$. Ἐκ δὲ τοῦ $a>br$, $a<br$ καὶ $a=br$ συμπεραίνεται ὅτι $\pi>r$, $\pi<r$, $\pi=r$, ἤτοι ὅτι ὁ τῶν ἐνεστωσῶν ἡλικιῶν λόγος π εἶναι μεγαλήτερος τοῦ τῶν ζητουμένων r, ἢ μικρότερος, ἢ ἴσος.

Τελευταῖον παρατηροῦμεν ὅτι ὑποθέσαντες πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος ὅτι μετὰ x ἔτη θέλουσιν ἔχει αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον r, ἀκριβῶς θεωρουμένου τοῦ πράγματος, ὑπεθέσαμεν δύο τινά, πρῶτον ὅτι εἶναί ποτε χρόνος, καθ' ὃν ἔχουσιν αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον r, καὶ δεύτερον ὅτι αὐτὸς εἶναι μετὰ τὸ ἐνεστώς, ἐνῷ ταῦτα ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος, ὡς θέλομεν ἰδεῖ.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἂς ἐξετάσωμεν κατὰ σειρὰν τὰ συμβαίνοντα καθ' ὅλα τὰ ἑπτὰ διάφορα εἴδη τῶν προσδιορισμῶν, καὶ πρῶτον ὅταν $a>br$ καὶ $r>1$. Τότε ἐκ μὲν τοῦ τύπου πορίζεται θετικὸς ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ x· ἐπειδὴ δ' ἐκ μὲν τοῦ $r>1$ προσδιορίζεται ὅτι ἡ τοῦ K ἐνεστῶσα ἡλικία a εἶναι μεγαλητέρα τῆς τοῦ Π ἡλικίας β, ἐκ δὲ τοῦ $\alpha > \beta\nu$ ὅτι ὁ λόγος ν εἶναι μικρότερος τοῦ τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ π, τὸ γενικὸν πρόβλημα τρέπεται εἰς τὸ μερικώτερον τοῦτο,

Ὁ K ἔχει α ἡλικίαν μεγαλητέραν τῆς β τοῦ Π ἡλικίας, πότε ἡ τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π ἔχει λόγον μικρότερον τοῦ ἐνεστῶτος;

καὶ δῆλον ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι χρόνῳ θέλει συμβῆ τοῦτο. Διότι, ἀφοῦ $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, ἐὰν αὐξηθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἐλαττοῦται ἕως νὰ γείνῃ ἴσος μὲ τὸν ν. Λοιπὸν αἱ ἐν ἀρχῇ ὑποθέσεις, ὅτι μετὰ χ ἔτη θέλουσιν ἔχει αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον ν, συμβιβάζονται μὲ τὰς τελευταίας $\alpha > \beta\nu$ καὶ $\nu > 1$, καὶ ἐπομένως ὁ ἀντὶ τοῦ χ προκύπτων ἐκ τοῦ τύπου του θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἁρμόζων εἰς τὸ προσδιωρισμένον ὡς ἀνωτέρω πρόβλημα.

β'. Ὅταν δὲ $\alpha < \beta\nu$ καὶ $\nu < 1$, καὶ τότε ἐκ μὲν τοῦ τύπου τοῦ χ πορίζεται ἀριθμὸς θετικός· ἐπειδὴ δ' ἐκ μὲν τοῦ $\nu < 1$ προσδιορίζεται ἡ τοῦ K ἡλικία α μικροτέρα τῆς β τοῦ Π, ἐκ δὲ τοῦ $\alpha < \beta\nu$ ὅτι ὁ λόγος ν εἶναι μεγαλήτερος τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ π, τὸ γενικὸν πρόβλημα προσδιορίζεται οὕτως,

Ὁ K ἔχει α ἡλικίαν μικροτέραν τῆς β τοῦ Π, πότε ἡ τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π ἔχει λόγον μεγαλήτερον τοῦ τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν των;

καὶ δῆλον ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι χρόνῳ θέλει συμβῆ τοῦτο. Διότι, ὄντος $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ἐὰν αὐξηθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐξάνει ἕως νὰ γείνῃ ἴσος μὲ τὸ ν. Λοιπὸν οἱ προσδιορισμοὶ $\alpha < \beta\nu$ καὶ $\nu < 1$ συμβιβάζονται μὲ τὰς ἐν ἀρχῇ ὑποθέσεις ὡς καὶ ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει. Λοιπὸν ὁ ἀντὶ τοῦ χ πορίζόμενος ἐκ τοῦ τύπου του θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἁρμόζων εἰς τὸ προσδιωρισμένον δεύτερον πρόβλημα.

γ΄. Ὅταν δὲ $\alpha > \beta\nu$ καὶ $\nu < 1$, τότε ἐκ μὲν τοῦ τύπου τοῦ χ προκύπτει ἀντιθετικὸς ἀριθμός, τὸ δὲ γενικὸν πρόβλημα προσδιορίζεται οὕτως,

Ὄντος τοῦ μὲν Κ α ἐτῶν, τοῦ δὲ Π β ἐτῶν, ἀλλὰ μεγαλητέρου τὴν ἡλικίαν παρὰ τὸν Κ, πότε ἡ τοῦ Κ ἡλικία ἔχει πρὸς τὴν τοῦ Π λόγον ν μικρότερον τοῦ τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν των;

δῆλον δὲ ὅτι τοῦτο ὑπῆρξεν ἐν τῷ παρελθόντι. Διότι, ἀφοῦ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, πρέπει ν' ἀφαιρῆται ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἵνα εὑρεθῇ μικρότερον κλάσμα, ὅ ἐστιν ἐν τῷ προτέρῳ τοῦ ἐνεστῶτος χρόνου αἱ ἡλικίαι εἶχον τὸν λόγον ν. Ἀλλ' ὁ τύπος τοῦ χ εὑρέθη κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι θέλουσιν ἔχει αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον ν, κατὰ δὲ τοὺς ἀνωτέρω προσδιορισμοὺς ἐν τῷ παρελθόντι εἶχον τὸν λόγον ν· λοιπὸν ὁ ἐκ τοῦ τύπου τοῦ χ πορίζόμενος ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς δεικνύει ὅτι μὲ τοὺς νέους προσδιορισμοὺς $\alpha > \beta\nu$ καὶ $\nu < 1$ δὲν συμβιβάζεται ἡ ἐν ἀρχῇ γενομένη ὑπόθεσις, ὅτι ἐν τῷ μέλλοντι αἱ ἡλικίαι θέλουσιν ἔχει τὸν λόγον ν. Λοιπὸν τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα τοῦ τύπου τοῦ χ σημαίνει ὅτι αἱ ἡλικίαι θέλουσιν ἔχει τὸν λόγον ν ἐν τῷ ἀντιθέτῳ χρόνῳ ἐκείνου, καθ' ὃν ἁρμόζει τὸ θετικὸν προσδιόρισμα τοῦ τύπου τοῦ χ.

δ΄. Ὅταν δὲ $\alpha < \beta\nu$ καὶ $\nu > 1$, καὶ τότε ἐκ μὲν τοῦ τύπου τοῦ χ προκύπτει ἀντιθετικὸς ἀριθμός, τὸ δὲ γενικὸν πρόβλημα προσδιορίζεται οὕτως,

Ἐνῷ ἡ τοῦ Κ ἡλικία α ἦναι μεγαλητέρα τῆς β ἡλικίας τοῦ Π, πότε ἡ τοῦ Κ πρὸς τὴν τοῦ Π ἡλικίαν ἔχει λόγον ν μεγαλήτερον τοῦ τωρινοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$;

τοῦτο δὲ δῆλον ὅτι ὑπῆρξεν ἐν τῷ παρελθόντι. Διότι, ἀφοῦ $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοὺς δύο του ὅρους ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἵνα εὑρεθῇ ἄλλος μεγαλήτερος κλασματικός· τουτέστιν ἐν τῷ παρελθόντι χρόνῳ εἶχον αἱ ἡλικίαι τὸν λόγον r. Ἀλλ' ὁ τύπος τοῦ χ εὑρέθη κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ ἀντιθέτου χρόνου· λοιπὸν ἡ ἐν ἀρχῇ ὑπόθεσις δὲν συμβιβάζεται μὲ τοὺς νέους προσδιορισμοὺς $\alpha < \beta r$ καὶ $r > 1$, καὶ τοῦτο δεικνύει ὁ ἐκ τοῦ τύπου προκύπτων ἀντιθετικὸς ἀριθμός. Λοιπὸν τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα τοῦ χ δεικνύει ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π ἔχει τὸν λόγον r ἐν τῷ ἀντιθέτῳ χρόνῳ ἐκείνου, καθ' ὃν ἁρμόζει τὸ θετικὸν προσδιόρισμα τοῦ τύπου τοῦ χ.

ε. Ὅταν δὲ $\alpha \gtrless \beta r$ καὶ $r = 1$, τότε ἐκ τοῦ τύπου προκύπτει $\frac{+\mu}{0}$ ἢ $\frac{-\mu}{0}$, σημειωθείσης τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta r$ διὰ $+\mu$ ἢ $-\mu$, καὶ πρέπει ἔτι νὰ διαιρεθῇ τὸ $+\mu$ ἢ τὸ $-\mu$ διὰ 0, ἵνα εὑρεθῇ τὸ προσδιόρισμα τοῦ τύπου τοῦ χ. Ἀλλὰ τί σημαίνει νὰ διαιρεθῇ ἀριθμός τις διὰ τοῦ 0, καὶ τί εἶναι τὸ πηλίκον; Ἰδοὺ πῶς δύναταί τις νὰ ἐννοήσῃ ταῦτα.

Εἶναι γνωστὸν ἤδη ὅτι ὅσον μικρότερος τῆς μονάδος εἶναι ὁ διαιρέτης, ἤτοι ὅσον πλειότερον προσεγγίζει εἰς τὸ 0, τόσον μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου εἶναι τὸ πηλίκον· π. χ, ἂν ὁ διαιρέτης ἦναι κατὰ σειρὰν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κτλ, τὸ πηλίκον τοῦ μ δι' αὐτῶν θέλει εἶσθαι 10μ, 100μ, 1000μ κτλ. Ἀκολουθοῦντες λοιπὸν αὐτὴν τὴν σειρὰν βλέπομεν ὅτι, ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι μικρότατος καὶ σχεδὸν 0, τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι μέγιστον καὶ σχεδὸν ἄπειρον. Ἐκ δὲ τούτου δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ μ διὰ 0 εἶναι *ἄπειρον*. Τὸ δὲ ἄπειρον σημειοῦται καὶ διὰ τοῦ 8 ὁριζοντίως τιθεμένου οὕτω ∞· ὥστε $\chi = \frac{+\mu}{0} = +\infty$, καὶ $\chi = \frac{-\mu}{0} = -\infty$.

Ἐκ δὲ τούτου πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ τοῦ K πρὸς τὴν τοῦ Π ἡλικίαν ἔχει τὸν λόγον r μετ' ἄπειρα ἔτη ἢ πρὸ ἀπείρων ἐτῶν, ἤγουν ὅτι ἀδύνατον αἱ ἡλικίαι των νὰ ἔχωσί ποτε τὸν λόγον r.

Καὶ τῷ ὄντι διὰ μὲν τοῦ προσδιορισμοῦ $\nu=1$ προσδιορίζεται ὅτι ὁ K καὶ ὁ Π ἔχουσι τώρα τὴν αὐτὴν ἡλικίαν, διὰ δὲ τοῦ $\alpha \gtrless \beta\nu$ ὅτι ὁ λόγος τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τοῦ λόγου τῶν ζητουμένων ἡλικιῶν, δηλ. ὅτι εἶναι ἄνισοι αἱ ἡλικίαι, τὸ ὁποῖον ἀντιφάσκει εἰς τὸ διὰ τοῦ πρώτου προσδιορισμοῦ προσδιοριζόμενον. Τὸ κατὰ τοὺς νέους λοιπὸν προσδιορισμοὺς τοῦτο πρόβλημα,

Ἔχοντος τοῦ Κ ἡλικίαν α διάφορον τῆς β τοῦ Π, πότε αἱ ἡλικίαι των εἶναι ἴσαι;
εἶναι ἀδύνατον, τὸ ὁποῖον ἄλλως εἶναι καὶ ἐκ τῆς ἐκθέσεώς του ἁπλῶς δῆλον.

Λοιπὸν τὸ σύμβολον $\frac{\mu}{0}$, καθ' αὑτὸ μὲν θεωρούμενον εἶναι σημεῖον ἀπείρως μεγάλου ποσοῦ, θετικοῦ ἢ ἀντιθετικοῦ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ μ, ὡς προσδιόρισμα δὲ τοῦ χ σημαίνει ὅτι εἶναι κατὰ πάντα τρόπον ἀδύνατον τὸ κατὰ τοὺς προσδιορισμοὺς $\alpha \gtrless \beta\nu$ καὶ $\nu=1$ μερικώτερον πρόβλημα.

ς'. Ὅταν δὲ $\alpha=\beta\nu$ καὶ $\nu=1$, τότε ὁ τύπος τρέπεται εἰς $\frac{0}{0}$, τοῦτο δὲ τὸ πηλίκον ἀνάγκη νὰ ἦναι τοσοῦτον, ὥστε πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 νὰ παράγῃ τὸν διαιρετέον 0. Ἀλλὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει πᾶς ἀριθμὸς θετικὸς καὶ ἀντιθετικός· λοιπὸν τὸ $\frac{0}{0}$ εἶναι σύμβολον παραστατικὸν παντὸς ἀριθμοῦ.

Ἐκ τούτου λοιπὸν πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι προσδιόρισμα τοῦ χ εἶναι πᾶς ἀριθμός, ἤτοι ὅτι τὸν λόγον ν αἱ ἡλικίαι τοῦ K καὶ τοῦ Π ἔχουσι καὶ τώρα καὶ μετέπειτα καὶ προτήτερα. Καὶ τῷ ὄντι τὸ $\nu=1$ δεικνύει ὅτι καὶ αἱ τωριναὶ ἡλικίαι των εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ζητούμεναι ὡσαύτως· τὸ δὲ $\alpha=\beta\nu$ δεικνύει ὅτι ὁ λόγος ν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τωρινῶν ἡλικιῶν των, δηλ. δεικνύει ὅ,τι καὶ τὸ $r=1$· ἀφοῦ δ' αἱ ἡλικίαι αἱ τωριναὶ εἶναι ἴσαι, δῆλον ὅτι καὶ πρότερον καὶ ὕστερον καὶ πάντοτε αἱ ἡλικίαι των εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ πρόβλημα ἀπροσδιόριστον.

Τὸ προσδιόρισμα λοιπὸν $\frac{0}{0}$ τοῦ τύπου χ ὡς παριστάνον πάντα ἀριθμὸν εἶναι σημεῖον ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

ζ'. Ὅταν δὲ $a=br$ καὶ $r \gtrless 1$, τότε ὁ τύπος τοῦ χ τρέπεται εἰς $\frac{0}{\mu}$, ὑποτεθέντος τοῦ $r-1=\mu$, τὸ δὲ $\frac{0}{\mu}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ 0, διότι τὸ μιτὸν τοῦ 0 εἶναι καὶ αὐτὸ 0. Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι τώρα αἱ ἡλικίαι ἔχουσι τὸν λόγον r, τὸ ὁποῖον γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τῶν προσδιορισμῶν $a=br$ καὶ $r \gtrless 1$.

110. *Δύο κινητὰ σώματα Κ καὶ Λ κινοῦνται ὁμαλῶς, τὸ μὲν μὲ α ταχύτητα, τὸ δὲ μὲ β, ἐπὶ τῆς ἀπεράτου εὐθείας ΧΨ, διευθυνόμενα πρὸς τὸ Ψ καὶ τὰ δύο· εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι τὸ Κ φθάνει εἴς τι γνωστὸν σημεῖον Α τῆς ΧΨ εὐθείας ω ὥρας πρὶν φθάσῃ τὸ Λ εἰς ἄλλο γνωστὸν τῆς αὐτῆς εὐθείας σημεῖον Β, ἀπέχον τοῦ Α στάδια δ· ποῦ τῆς εὐθείας ΧΨ θέλουσιν ένταμωθῇ τὰ κινητὰ Κ καὶ Λ;*

Χ Α Β Ε Ψ.

Ὑποθέτομεν ὅτι κατὰ τὸ *Ε* σημεῖον τὸ δεξιὰ τοῦ *Β* θέλουσιν ένταμωθῇ, καὶ ὅτι ἄγνωστον χ εἶναι τὸ διάστημα *ΒΕ*. Τὸ διάστημα *ΑΕ* εἶναι ἴσον μὲ $AB+BE$ ἢ $\delta+\chi$, τὸ ὁποῖον διατρέχει τὸ *Κ* ἐν $\frac{\delta+\chi}{a}$ ὥραις· ἐν δὲ τῷ αὐτῷ τούτῳ χρόνῳ τὸ *Λ* διατρέχει ἕν τι διάστημα ἐν ω ὥραις μεχρισοῦ φθάσῃ εἰς τὸ *Β*, καὶ ἔτι τὸ διάστημα *ΒΕ* ἤτοι χ ἐν $\frac{\chi}{b}$ ὥραις. Ὥστε θέλομεν ἔχει

$$\frac{\delta+\chi}{\alpha}=\omega+\frac{\chi}{\beta}, \quad \frac{\delta+\chi}{\alpha}-\frac{\chi}{\beta}=\omega,$$

ὅθεν πορίζεται $\chi=\frac{\beta(\delta-\alpha\omega)}{\alpha-\beta}$.

Ἐκ τῶν $\alpha>\beta$, $\alpha<\beta$ καὶ $\alpha=\beta$ προσδιορίζεται ὅτι τὸ K εἶναι ταχύτερον τοῦ A, ἀργότερον αὐτοῦ καὶ ἰσοταχὲς μὲ αὐτό· ἐκ δὲ τῶν $\delta>\alpha\omega$, $\delta<\alpha\omega$, καὶ $\delta=\alpha\omega$ προσδιορίζεται ἡ πρὸς ἄλληλα θέσις τοῦ K καὶ τοῦ A κατὰ τὸ τέλος τῶν ω ὡρῶν, ὅτε τὸ A εἶναι ἐν τῷ B. Ἵνα ἐννοηθῇ δὲ τοῦτο, παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ α εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ K καὶ ω εἶναι ὧραί τινες, τὸ γινόμενον $\alpha\omega$ παριστάνει ὅσον διάστημα διατρέχει τὸ K ἐν ω ὥραις. Τὸ διάστημα δὲ τοῦτο ἀρχίζει ἐκ τοῦ ὅπου εἶναι τὸ K ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν ω ὡρῶν, καὶ τελειόνει πρὸ τοῦ B, ὅταν $\delta>\alpha\omega$, ἢ ἐκεῖθεν τοῦ B, ὅταν $\delta<\alpha\omega$, ἢ κατὰ τὸ B, ὅταν $\delta=\alpha\omega$, δ ὄντος τοῦ διαστήματος AB. Ἀλλ' κατὰ τὸ τέλος τῶν ω ὡρῶν τὸ A εἶναι ἐν τῷ B· λοιπὸν ἐν τῷ τέλει τῶν ω ὡρῶν, ἐνῷ τὸ A εἶναι κατὰ τὸ B, τὸ K εἶναι ἢ κατόπιν του, ἢ ἔμπροσθέν του, ἢ ὁμοῦ μὲ αὐτό, κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ δ πρὸς τὸ $\alpha\omega$.

ά. Ὅταν μὲν λοιπὸν $\delta>\alpha\omega$ καὶ $\alpha>\beta$, ἢ $\delta<\alpha\omega$ καὶ $\alpha<\beta$ ὁ τύπος τοῦ χ θέλει εἶσθαι θετικὸς ἀριθμός, καὶ δῆλον ὅτι τότε θέλουσιν ἐνταμωθῇ τὰ κινητὰ K καὶ A δεξιὰ τοῦ B. ὅπως ὑπετέθη κατ' ἀρχάς. Διότι ἐκ μὲν τοῦ $\delta>\alpha\omega$ προσδιορίζεται ὅτι τὸ K εἶναι κατόπιν τοῦ A, ἐνῷ τοῦτο εἶναι ἐν τῷ B, ἐκ δὲ τοῦ $\alpha>\beta$ ὅτι τὸ K εἶναι ταχύτερον τοῦ A· ἐπειδὴ δὲ τὸ ταχύτερον εἶναι κατόπιν, μέχρι τοῦ B δὲν ἠνταμώθησαν τὰ κινητά, ἀλλὰ θέλουσιν ἐνταμωθῇ πέραν αὐτοῦ. Ὡσαύτως ἐκ τῶν $\delta<\alpha\omega$ καὶ $\alpha<\beta$ προσδιορίζεται ὅτι τὸ K εἶναι ἀργότερον τοῦ A καὶ ὅτι εἶναι ἔμπροσθεν αὐτοῦ, ὅτε αὐτὸ εἶναι ἐν τῷ B· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀργότερον εἶναι ἔμπροσθεν, δῆλον ὅτι μέχρι τοῦ B δὲν ἠνταμώθησαν, ἀλλ' ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ πέραν αὐτοῦ.

Ὡσαύτως καὶ ἐκ τῶν $\delta < \alpha\omega$ καὶ $\alpha < \beta$ προσδιορίζεται ὅτι τὸ K εἶναι ἀργότερον τοῦ A καὶ ὅτι εἶναι ἔμπροσθεν αὐτοῦ, ὅτε αὐτὸ εἶναι ἐν τῷ B. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀργότερον εἶναι ἔμπροσθεν, δῆλον ὅτι μέχρι τοῦ B δὲν ἠνταμώθησαν, ἀλλ' ὅτι θέλουσιν ἐνταμωθῇ πέραν αὐτοῦ.

β'. ὅταν δὲ $\delta > \alpha\omega$ καὶ $\alpha < \beta$, ἢ $\delta < \alpha\omega$ καὶ $\alpha > \beta$, ὁ τύπος τοῦ χ θέλει εἶσθαι ἀντιθετικὸς ἀριθμός, καὶ δῆλον ὅτι τότε ἠνταμώθησαν τὰ κινητὰ K καὶ A ἀριστερὰ τοῦ B, ἤτοι κατὰ τὴν ἀντίθετον θέσιν τῆς ἐν ἀρχῇ ὑποτεθείσης. Διότι καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις προσδιορίζεται ὅτι, ὅτε τὸ A εἶναι ἐν τῷ B, τὸ ταχύτερον τῶν δύο εἶναι ἔμπροσθεν τοῦ ἀργοτέρου, τὸ ὁποῖον δεικνύει ὅτι πέραν τοῦ B δὲν εἶναι δυνατὸν πλέον νὰ ἐνταμωθῶσιν, ἀλλ' ὅτι ἠνταμώθησαν ἀριστερὰ τοῦ B, διότι κινούμενα τὰ κινητὰ ἐπὶ ἀπεράτου εὐθείας, πρὶν τὸ ταχύτερον ἐξαπεράσῃ τὸ ἀργότερον, ἦτον ἐν μιᾷ στιγμῇ ὁμοῦ καὶ τὰ δύο.

γ'. Ὅταν δὲ $\delta \gtrless \alpha\omega$ καὶ $\alpha = \beta$, ὁ τύπος μεταμορφοῦται εἰς $\frac{\pm\mu}{0}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει τὸ ἄπειρον, καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι εἰς τὸ ἄπειρον τὰ κινητὰ ἐνταμόνονται, ἤτοι ὅτι ποτὲ δὲν ἐνταμόνονται. Καὶ τῷ ὄντι, ἐπειδή, ὅτε τὸ A εἶναι ἐν τῷ B, τὸ K εἶναι ἔμπροσθέν του ἢ ὄπισθέν του, ἔχουσι δὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, διὰ τοῦτο ποτὲ δὲν ἐνταμόνονται.

δ'. Ὅταν δὲ $\delta = \alpha\omega$ καὶ $\alpha = \beta$, ὁ τύπος γίνεται $\frac{0}{0}$, τὸ ὁποῖον παριστάνει πάντα ἀριθμόν, καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου συμπεραίνεται ὅτι πανταχοῦ εἶναι ὁμοῦ τὰ κινητά. Καὶ τῷ ὄντι, ἀφοῦ, ὅτε τὸ A εἶναι ἐν τῷ B, εἶναι καὶ τὸ K ἐν τῷ B, ἤτοι εἶναι ὁμοῦ τὰ δύο ἐκεῖ, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, δῆλον ὅτι πανταχοῦ καὶ πάντοτε εἶναι ὁμοῦ.

ε. Ὅταν δὲ $\delta = \alpha\omega$ καὶ $\alpha \lessgtr \beta$, τότε ὁ τύπος τοῦ χ εἶναι ἴσος μὲ τὸ 0, ἐκ τοῦ ὁποίου συμπεραίνεται ὅτι ἐνταμόνονται τὰ κινητὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν B. Καὶ τῷ ὄντι, τὸ $\delta = \alpha\omega$ σημαίνει ὅτι εἶναι ὁμοῦ τὰ δύο ἐν τῷ B, καὶ τὸ $\alpha \gtrless \beta$ ὅτι ἔχουσι διάφορον ταχύτητα· ὥστε μόνον ἐν τῷ B εἶναι ὁμοῦ καὶ ὄχι ἐν ἄλλῳ σημείῳ τῆς εὐθείας $X\Psi$.

111. Ἔστω εἰς διεπίλυσιν καὶ τὸ 125 πρόβλημα, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις εἶναι αὗται

$$\chi + \omega = \gamma,\quad \frac{\chi}{\alpha} + \frac{\omega}{\beta} = 1,$$

αἵτινες λυθεῖσαι παρέχουσι

$$\chi = \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\alpha - \beta},\quad \omega = \frac{\beta(\alpha - \gamma)}{\alpha - \beta}.$$

Ἐνταῦθα παρατηρητέον ὅτι, ἐὰν τὰ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ χ προσδιορισθῶσιν οὕτω, $\gamma > \beta$ καὶ $\alpha > \beta$, ἢ $\gamma < \beta$ καὶ $\alpha < \beta$, τότε δύναταί τις νὰ προσδιορίσῃ καὶ τὸ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ ω $\alpha - \gamma$ ἢ $\alpha > \gamma$ ἢ $\alpha < \gamma$· διότι κατὰ τοὺς εἰρημένους προσδιορισμοὺς καὶ τὸ γ καὶ τὸ α εἶναι ἢ μεγαλήτερα ἢ μικρότερα τοῦ β, ἀλλὰ δὲν προσδιορίζεται καὶ πότερον εἶναι μεγαλήτερον τὸ α τοῦ γ ἢ τὸ γ τοῦ α. Ἀλλ' ἐὰν τὰ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ χ προσδιορισθῶσιν οὕτω, $\gamma > \beta$ καὶ $\alpha < \beta$, ἢ $\gamma < \beta$ καὶ $\alpha > \beta$, τότε ἕπεται ὅτι κατὰ μὲν τοὺς πρώτους προσδιορισμοὺς τὸ $\gamma > \alpha$, κατὰ δὲ τοὺς δευτέρους τὸ $\gamma < \alpha$, καὶ ἂν ἤθελε προσδιορίσει τις ἄλλως ταῦτα, ἤθελε καταντήσει εἰς φανερὰν ἀντίφασιν. Ὡσαύτως δὲ καὶ ὅταν $\gamma = \beta$ καὶ $\alpha = \beta$, ἕπεται ὅτι $\gamma = \alpha$. Παρομοίως καὶ ὅταν $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma \gtrless \beta$, τότε ἕπεται ὅτι καὶ $\gamma \gtrless \alpha$. Τελευταῖον δὲ τὰ $\gamma = \beta$, $\alpha = \gamma$ καὶ $\alpha \gtrless \beta$ δὲν ἔχουσι χώραν, ὡς ἀντιφατικά.

α. Ὅταν μὲν λοιπὸν $\gamma > \beta$, καὶ $\alpha > \beta$, ἐὰν καὶ $\alpha > \gamma$, τότε καὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ω ὁ τύπος εἶναι θετικός· ὡσαύτως δὲ καὶ ὅταν $\gamma < \beta$, $\alpha < \beta$, καὶ ἐνταυτῷ $\alpha < \gamma$. Κατὰ τὰς δύο δὲ ταύτας περιπτώσεις προσδιορίζεται ὅτι τὰ τῶν δύο εἰδῶν νομίσματα τοῦ τραπεζίτου ἔχουσι διάφορον ἀξίαν, $\alpha \gtrless \beta$, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων γ εἶναι μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ α καὶ τοῦ β, οὕτω δὲ τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν. Διότι, προκειμένου νὰ δώσῃ ὁ τραπεζίτης ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου νομίσματα ἐκ τῶν δύο εἰδῶν, θέλει δώσει ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους ὀλιγώτερα τῶν α ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3 κτλ, τὸ δὲ ἰσότιμον τοῦ 1, 2, 3 κτλ θέλει δώσει ἐκ τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους. Ἀλλ' ἂν $\alpha > \beta$, ἡ ἀξία ἑνὸς τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἑνὸς τῶν τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ διὰ τοῦτο θέλει δώσει ὀλιγώτερα· ὥστε τὰ τοῦ πρώτου εἴδους ὁμοῦ μὲ τὰ τοῦ δευτέρου θέλουσιν ἀποτελέσει κεφάλαιον μικρότερον τοῦ α. Ὡσαύτως δὲ γίνεται φανερὸν καὶ ὅτι θέλει εἶσθαι τὸ κεφάλαιον τοῦτο μεγαλήτερον τοῦ β. Ἐὰν δὲ $\alpha < \beta$, ἡ ἀξία ἑνὸς τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους εἶναι μικροτέρα τῆς ἑνὸς τῶν τοῦ πρώτου, καὶ θέλει δώσει περισσότερα· ὥστε τὸ κεφάλαιον τῶν τοῦ πρώτου εἴδους καὶ τῶν τοῦ δευτέρου νομισμάτων θέλει εἶσθαι μεγαλήτερον τοῦ α. Ὡσαύτως δὲ δεικνύεται καὶ ὅτι τὸ αὐτὸ κεφάλαιον θέλει εἶσθαι μικρότερον τοῦ β.

Λοιπόν, ἐνῷ ὁ τύπος τοῦ χ καὶ ὁ τοῦ ω εἶναι θετικοὶ διὰ τοὺς προειρημένους προσδιορισμούς, διὰ τοὺς αὐτοὺς τὸ γενικὸν πρόβλημα μερικοποιεῖται οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι δυνατόν, ἐκτὸς μόνον ὅταν τὰ προσδιορίσματα δὲν ἦναι ἀκέραια.

β'. Ὅταν δὲ $\gamma > \beta$ καὶ $\alpha > \beta$, ἀλλὰ τὸ $\alpha < \gamma$, ἢ ὅταν $\gamma < \beta$ καὶ $\alpha < \beta$, ἀλλὰ τὸ $\alpha > \gamma$, τότε ὁ μὲν τοῦ χ τύπος θέλει εἶσθαι θετικός, ὁ δὲ τοῦ ω ἀντιθετικός. Διὰ τῶν προσδιορισμῶν δὲ τούτων προσδιορίζεται ὅτι τὰ τῶν δύο εἰδῶν νομίσματα τοῦ τραπεζίτου ἔχουσι διάφορον ἀξίαν, ἀλλ' ὅτι τὰ ζητούμενα γ εἶναι ἢ πλειότερα καὶ τῶν α καὶ τῶν β, ἢ ὀλιγώτερα καὶ τῶν α καὶ τῶν β, οὕτω δὲ τὸ πρόβλημα καθίσταται ἀδύνατον. Διότι, μέλλων νὰ δώσῃ ὁ τραπεζίτης νομίσματα τῶν δύο εἰδῶν, θέλει δώσει, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, πλειότερα μὲν τῶν α, ὀλιγώτερα δὲ τῶν β, ἢ ὀλιγώτερα μὲν τῶν α, πλειότερα δὲ τῶν β, ἀδύνατον δὲ τὰ ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου ζητούμενα γ ἐκ τῶν δύο εἰδῶν νὰ ἦναι ἢ πλειότερα ἢ ὀλιγώτερα καὶ τῶν α καὶ τῶν β.

Γίνεται δὲ δυνατὸν, ἂν τὰ τοῦ δευτέρου εἴδους νομίσματα ἐννοηθῶσιν ἀντιθέτως, διότι τοῦ ω τὸ προσδιόρισμα εἶναι ἀντιθετικόν· δηλ, ἂν δώσῃ ὁ τραπεζίτης τόσα τοῦ πρώτου εἴδους νομίσματα, ὅσα παριστάνει κατὰ ταύτας τὰς περιπτώσεις τοῦ τύπου τοῦ χ τὸ προσδιόρισμα, λάβῃ δὲ παρὰ τοῦ εἰς ὃν δώσῃ τὰ τοῦ πρώτου εἴδους τόσα ἐκ τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους, ὅσα παριστάνει τοῦ τύπου τοῦ ω τὸ προσδιόρισμα θετικὸν θεωρούμενον. Ἀλλὰ τοῦτο μεταβάλλει τὸ πρόβλημα εἰς ἄλλο πάντῃ διάφορον.

γ'. Ὅταν δὲ $\gamma > \beta$ καὶ $\alpha < \beta$, ὁπότε $\alpha < \gamma$, ἢ ὅταν $\gamma < \beta$ καὶ $\alpha > \beta$, ὁπότε $\alpha > \gamma$, τότε ὁ μὲν τύπος τοῦ χ θέλει εἶσθαι ἀντιθετικὸς, ὁ δὲ τοῦ ω θετικὸς, καὶ αἱ περιπτώσεις αὗται εἶναι ὁποῖαι καὶ αἱ προηγούμεναι (β').

Λοιπὸν, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν τύπων, ὁ τοῦ χ ἢ ὁ τοῦ ω, διὰ τοὺς προσδιορισμοὺς τῶν ἐν αὐτοῖς γραμμάτων ἀποβαίνῃ ἀντιθετικὸς, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· ἐκτὸς μόνον ἐὰν ἐννοηθῇ ἀντιθέτως τὸ ὑπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων παριστάμενον, ὁπότε τὸ πρόβλημα μεταβάλλεται εἰς ἄλλο.

δ'. Ὅταν δὲ $\gamma > \beta$ καὶ $\alpha = \beta$, ὁπότε καὶ $\alpha < \gamma$, ἢ ὅταν $\gamma < \beta$ καὶ $\alpha = \beta$, ὁπότε καὶ $\alpha > \gamma$, τότε οἱ δύο τύποι μεταμορφοῦνται εἰς $\frac{\pm \pi}{0}$ καὶ $\frac{\pm \pi}{0}$, οἵτινες δεικνύουσιν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι κατὰ πάντα τρόπον ἀδύνατον. Καὶ τῷ ὄντι, ἀφοῦ τὰ τῶν δύο εἰδῶν νομίσματα ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀξίαν $\alpha = \beta$, δῆλον ὅτι α μόνον πρέπει νὰ δοθῶσιν ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου· ἀλλὰ ζητοῦνται γ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀλιγώτερα ἢ πλειότερα τῶν α· λοιπὸν ζητεῖται ἀδύνατον.

ε'. Ὅταν δὲ $\gamma = \beta$, $\alpha = \beta$, ὁπότε καὶ $\alpha = \gamma$, τότε οἱ δύο τύποι μεταμορφοῦνται εἰς $\frac{0}{0}$, τὸ ὁποῖον δεικνύει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, ὡς τῷ ὄντι εἶναι. Διότι καὶ τὰ δύο εἴδη τῶν νομισμάτων ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀξίαν, καὶ ζητεῖται νὰ δώσῃ ὁ τραπεζίτης a νομίσματα ἐκ τῶν δύο εἰδῶν ἀντὶ ἑνὸς ὀθωνίου, διότι $\gamma=a=b$· δύναται λοιπὸν νὰ δώσῃ ὅσα θέλει ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ἀρκεῖ μόνον τὸ κεφάλαιόν των νὰ ἦναι a.

Σημ. Πρὸς γύμνασιν ἂς διαπιλυθῶσι καὶ τὸ 124 πρόβλημα καὶ τὸ 126, ἔτι δὲ καὶ τὸ 80, ὁποῖον εἶναι ἐν ἀρ. 77.

112. Τῶν ἀγνώστων τῶν προηγουμένων προβλημάτων οἱ τύποι, διότι ἦσαν κλασματικοί, καὶ διότι ἔμελλε νὰ γείνῃ ἀφαίρεσις καὶ ἐν τῷ ἀριθμητῇ καὶ ἐν τῷ παρονομαστῇ, ἐπροσδιορίσθησαν πέντε διαφόρους προσδιορισμούς, δηλ. θετικοί, ἀντιθετικοί, ἴσοι μὲ τὸ 0, ἄπειροι καὶ ἀπροσδιόριστοι, ἐκ τῶν ὁποίων ἐσυμπεράναμεν ὅτι τὰ προβλήματα ἐμερικοποιοῦντο κατὰ πέντε διαφόρους τρόπους. Ἀλλ' ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι τῶν ἀγνώστων ἄλλων προβλημάτων οἱ τύποι δυνατὸν νὰ ἦναι ἁπλούστεροι, οἷοι εἶναι οἱ ἀκόλουθοι,

$$x=a+b,\ x=a-b,\ x=\frac{a-b}{\gamma},\ x=\frac{a}{b-\gamma}\ \text{κτλ.}$$

οἵτινες δὲν εἶναι ἐπιδεκτικοὶ ὅλων τῶν προηγουμένων προσδιορισμάτων, ἀλλ' ἄλλοι ἄλλων, καί τινες μόνον τοῦ θετικοῦ. Τῶν τοιούτων δὲ προβλημάτων ἡ διεπίλυσις εἶναι περιωρισμένη καὶ πολὺ ἁπλουστέρα, θέλει γίνεσθαι δὲ πάντοτε καθ' ἃ εἴπομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις.

113. Εἴδομεν διεπιλύοντες τὰ προηγούμενα προβλήματα ὅτι τὸ σύμβολον $\frac{\mu}{0}$ κυρίως σημαίνει ὅτι εἶναι παντάπασιν ἀδύνατον τὸ ἐξ οὗ πηγάζει πρόβλημα, καὶ κατὰ τοῦτο συμφωνεῖ μὲ τὸ $a=0$, τὸ ὁποῖον εὕρομεν ἐν τῇ λύσει τῶν μερικῶν προβλημάτων· τὸ $\frac{0}{0}$ δὲ σημαίνει ὅτι τὸ ἐξ οὗ πηγάζει πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, συμφωνεῖ δὲ μὲ τὸ ἐν τῇ λύσει τῶν μερικῶν εὑρεθὲν $0=0$. Ἀλλὰ δὲν εἶναι πάντοτε τὸ $\frac{0}{0}$

σημεῖον ἀπροσδιοριστίας, ὡς εἶναι τὸ $0=0$. Ἐὰν π. χ. λύοντες ἐξίσωσίν τινα ἠθέλαμεν εὕρει

$$\chi=\frac{6(\omega^2-4)}{8(\omega-2)},$$

ὅπου τὸ ω ἐπιδέχεται διαφόρους προσδιορισμούς, ὅταν τὸ $\omega=2$, ὁ τύπος τρέπεται εἰς $\frac{0}{0}$, καὶ ἠθέλαμεν σφάλει νομίζοντες ὅτι, ὅταν τὸ ω ἦναι ἴσον 2, τὸ χ εἶναι ἀπροσδιόριστον, διότι τοῦ συμβόλου τούτου αἴτιον εἶναι ἄλλο. Δηλαδὴ ὁ τύπος τοῦ χ δύναται νὰ γραφθῇ καὶ οὕτω

$$\chi=\frac{6(\omega+2)(\omega-2)}{8(\omega-2)},$$

ἀναγομένου τοῦ ω^2-4 εἰς τοὺς παράγοντάς του· ἐπειδὴ δὲ ὁ $\omega-2$ εἶναι κοινὸς παράγων τῶν δύο ὅρων, ἐὰν ἐξαλειφθῇ, μένει

$$\chi=\frac{6(\omega+2)}{8},$$

καὶ ὅταν $\omega=2$, γίνεται $\chi=3$, καὶ ὄχι $\frac{0}{0}$. Ὅτι δὲ 3 εἶναι τὸ ἀληθὲς προσδιόρισμα τοῦ χ, ὅταν $\omega=2$, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν τὸ ω προσδιορισθῇ κατὰ σειρὰν ἄλλους προσδιορισμοὺς μεγαλητέρους ἢ μικροτέρους τοῦ 2, ἤτοι 5, 4, 3, ἢ 0,01, 0,1, 1 κτλ, πορίζεται καὶ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐκ τοῦ ἁπλουστέρου τύπου ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ χ, ἤτοι $5\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, ἢ 1,5075, 1,575, 2,25. Ἐκ τούτου δὲ ὀρθῶς δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι, καὶ ὅταν $\omega=2$, τὸ χ εἶναι ἴσον 3, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκ τοῦ δευτέρου τύπου, καὶ ὅτι τὸ κωλύον νὰ εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ καὶ ἐκ τοῦ πρώτου εἶναι ὁ κοινὸς παράγων $\omega-2$, ὅστις ὡς ἴσος μὲ 0 μετατρέπει καὶ τὸν τύπον εἰς $\frac{0}{0}$. Λοιπὸν τὸ $\frac{0}{0}$ εἶναι σημεῖον ὅτι οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου τύπου ἔχουσι κοινόν τινα παράγοντα, ὅστις, ὅταν $\omega=2$, γίνεται ἴσος μὲ τὸ 0.

Ὡσαύτως καὶ οἱ κλασματικοὶ

$$\frac{3\omega^2-3}{2\omega-2},\quad \frac{\omega^2-2\omega+1}{3\omega^2-3},\quad \frac{3\omega^2-3}{\omega^2-2\omega+1},$$

τρέπονται εἰς $\frac{0}{0}$, ὅταν $\omega=1$· ἀλλ' ἄν, ἀναγομένων τῶν ὅρων εἰς τοὺς παράγοντάς των, γραφθῶσιν οὕτω,

$$\frac{3(\omega+1)(\omega-1)}{2(\omega-1)},\quad \frac{(\omega-1)(\omega-1)}{3(\omega+1)(\omega-1)},\quad \frac{3(\omega+1)(\omega-1)}{(\omega-1)(\omega-1)},$$

καὶ ἐξαλειφθῇ ὁ κοινὸς τῶν δύο ὅρων παράγων $\omega-1$, ὅταν $\omega=1$, ὁ μὲν γίνεται 3, ὁ δὲ 0, ὁ δὲ ∞.

Ἱκανὰ εἶναι ταῦτα νὰ δείξωσιν ὅτι τὸ $\frac{0}{0}$ δὲν εἶναι πάντοτε σημεῖον ἀπροσδιορισίας, ἀλλ' ἐνίοτε εἶναι καὶ σημεῖον ὅτι γίνεται 0 κοινὸς τῶν δύο ὅρων παράγων διά τινα γράμματός τινος προσδιορισμόν. Ὅταν λοιπὸν ἀπαντᾶται, πρέπει νὰ ἐξετάζῃ τις ἂν προέρχεται ἐκ τῆς μηδενίσεως κοινοῦ τινος παράγοντος, ἢ ἂν εἶναι σημεῖον ἀπροσδιορισίας.

114. Ἄς ἴδωμεν τώρα ὁποίαν μεταβολὴν λαμβάνει γενικὸν πρόβλημα, ἐὰν τὰ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ ἀγνώστου του γράμματα μεταβληθῶσιν ἐκ θετικῶν εἰς ἀντιθετικά, καὶ τἀνάπαλιν.

Ἔστω εἰς λύσιν τὸ ἐν ἀρ. 58 δεύτερον πρόβλημα

Τυπογράφος παραλαμβάνει κτλ,

τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις, ὅταν ὑποτίθηται ὅτι ὁ στοιχειοθέτης μετὰ τὰς ν ἡμέρας λαμβάνει γ λεπτά, εἶναι αὕτη

$$a(\nu-\chi)-6\chi=\gamma,$$

ὅθεν

$$a\nu-a\chi-6\chi=\gamma$$
$$-a\chi-6\chi=-a\nu+\gamma$$
$$a\chi+6\chi=a\nu-\gamma$$
$$\chi=\frac{a\nu-\gamma}{a+6}.$$

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι μετὰ τὰς ν ἡμέρας ὁ στοιχειοθέτης δίδει γ λεπτά, τότε τὸ 6χ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $a(\nu-\chi)$, καὶ ἡ ἐξίσωσις θέλει κατασκευασθῇ ἢ ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ $a(\nu-\chi)$ ἀπὸ τὸ 6χ, καὶ τότε τὸ γ θέλει εἶσθαι θετικόν, ἢ προτιμότερον, ἂν ἀφαιρεθῇ πάλιν τὸ 6χ ἀπὸ τὸ $a(\nu-\chi)$, ἵνα τὸ γ ἦναι ἀντιθετικόν, διότι παριστάνει ποσὸν ἀντίθετον τοῦ προτέρου, ἤτοι ὅσον δίδει, ἀντίθετον ὂν τοῦ ὅσον λαμβάνει. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν εἶναι $a(r-\chi)-\beta\chi=-\gamma$,

ὅθεν $ar-a\chi-\beta\chi=-\gamma$

$$-a\chi-\beta\chi=-ar-\gamma$$

$$a\chi+\beta\chi=ar+\gamma$$

$$\chi=\frac{ar+\gamma}{a+\beta}.$$

Ἐντεῦθεν βλέπει τις ὅτι, ἐνῷ ἡ ἐξίσωσις αὕτη διαφέρει τῆς προηγουμένης μόνον καθότι τὸ γ ἐδῶ μὲν εἶναι ἀντιθετικόν, ἐκεῖ δὲ θετικόν, καὶ ὁ τύπος οὗτος τοῦ χ διαφέρει τοῦ προηγουμένου μόνον καθότι τὸ γ ἐδῶ ἔχει ἀντίθετον σημεῖον τοῦ ἐν ἐκείνῳ σημείου του, καὶ τοῦτο διότι αἱ πρὸς λύσιν πράξεις κατὰ μὲν τἆλλα εἶναι αἱ αὐταί, μόνον δὲ τοῦ γ τὸ σημεῖον ἀπαιτοῦσι ν' ἀλλαχθῇ.

Ἐκ τούτων λοιπὸν πληροφορούμεθα ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν διαφέρει μόνον καθότι τὸ γ ποσὸν εἶναι ἀντίθετον τοῦ ὅ,τι ἦτον ἐν τῇ πρώτῃ, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ κατασκευάσωμεν νέαν ἐξίσωσιν καὶ νὰ λύσωμεν αὐτήν, ἀλλὰ μόνον ν' ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἐν τῷ εὑρεθέντι κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τύπῳ γράμματος γ εἰς τὸ ἀντίθετόν του, καὶ οὕτως ὁ τύπος τρέπεται εἰς τὸν ἁρμόζοντα κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Σημ. Ἐὰν δὲ μετὰ τὰς r ἡμέρας δὲν ἔμελλε οὔτε νὰ λάβῃ οὔτε νὰ δώσῃ ὁ στοιχειοθέτης, ὁ αὐτὸς τύπος χρησιμεύει νὰ δείξῃ τὰς ἡμέρας τῆς ἀπουσίας, ἂν μόνον λογισθῇ τὸ $\gamma=0$.

Καὶ τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ προβλήματος

Δύο σώματα κτλ

ἡ ὅτε διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος AB τὰ σώματα ἐξίσωσις εἶναι $\frac{\chi}{a}=\frac{\chi-\gamma}{\beta}$,

ὑποτεθέντος ὅτι χ εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ A μέχρι τοῦ τῆς ἐνταμώσεως σημείου διάστημα, καὶ τότε $\chi-\gamma$ εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ B μέχρι τοῦ αὐτοῦ σημείου διάστημα.

Ἐκ ταύτης δὲ πορίζεται

$$x=\frac{a\gamma}{a-\beta}.$$

Ἂν δὲ τὸ ἐκ τοῦ Β σῶμα ἀλλάξῃ διεύθυνσιν, ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$\frac{x}{a}=\frac{\gamma-x}{\beta}$, ὅθεν πορίζεται $x=\frac{a\gamma}{a+\beta}$,

ὅστις διαφέρει τοῦ προηγουμένου μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ β, ἤτοι τῆς ταχύτητος τοῦ ἀλλάξαντος διεύθυνσιν. Διότι, μὴ ὑπάρχοντος ἐν τῷ τύπῳ γράμματος, τὸ ὁποῖον νὰ παριστάνῃ τὴν διεύθυνσιν, ἵνα ἐκείνου ἀλλαχθῇ τὸ σημεῖον, ἤλλαξε τὸ σημεῖον ἄλλου γράμματος, τὸ ὁποῖον σημαίνει πρᾶγμα στενὰ συνδεδεμένον μὲ τὴν διεύθυνσιν.

Λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τύπου τοῦ ἁρμόζοντος κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἀρκεῖ ν' ἀλλαχθῇ τὸ σημεῖον τοῦ γράμματος τοῦ παριστάνοντος ἐν τῷ εὑρεθέντι ἤδη τύπῳ τὴν ταχύτητα τοῦ ἀλλάξαντος διεύθυνσιν σώματος.

Καὶ ἀντιστρόφως λοιπὸν, ὅταν ἀλλάσσωμεν τὸ σημεῖον γράμματος, ὄντος ἔν τινι τύπῳ, μεταβάλλεται ὁ τύπος εἰς ἄλλον, ὅστις ἁρμόζει εἰς πρόβλημα διαφέρον τοῦ πρώτου, ὅθεν ἐπορίσθη ὁ τύπος, μόνον καθότι τὸ ποσὸν, τοῦ ὁποίου ἠλλάξαμεν τὸ σημεῖον, ἐννοεῖται ἀντιθέτως παρ' ὅπως ἐξελαμβάνετο πρότερον.

Κατὰ ταῦτα δ' ἐννοεῖται εὐκόλως τίνος προβλήματος ἄγνωστος ἔχει ἕνα τῶν τύπων

$$\frac{-\beta(\delta-a\omega)}{a+\beta},\ \frac{\beta(\delta+a\omega)}{-a-\beta},\ \frac{-\beta(\delta+a\omega)}{-a+\beta},\ \frac{\beta(\delta+a\omega)}{a-\beta},$$

οἵτινες πορίζονται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἀρ 110, μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τοῦ β, ἢ τοῦ a, ἢ τοῦ β καὶ τοῦ a, ἢ μόνου τοῦ ω.

Τὸ δὲ οὕτω λύειν τὰ τοιαῦτα προβλήματα δῆλον ὅτι εἶναι ὠφελιμώτατον.

Ὠφέλιμον δὲ κρίνομεν καὶ τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τῶν ἐν τούτῳ τῷ κεφαλαίῳ.

ΚΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΠΟΛΥΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΟΡΩΝ, ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΡΙΖΟΣΗΜΩΝ.

Περὶ τῶν δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων.

Πρὶν ἐπιχειρήσωμεν τὴν λύσιν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων καὶ προβλημάτων, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ διαλάβωμεν περὶ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν πολυγραμμάτων ὅρων καὶ τῶν πολυόρων καὶ περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων.

115. Εἴπομεν ἐν τῷ Συμπληρώματι (83) ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας τετραγωνικὰς ἴσας μὲν κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, ἀντιθέτους δὲ, διότι ἑκατέρα τούτων πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν παράγει τὸν τετράγωνον ἀριθμόν· οἷον ἂν A ἦναι ὁποιοσδήποτε τετράγωνος ἀριθμὸς, ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, a δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς ῥίζης του, ῥίζα τετραγωνικὴ τοῦ A εἶναι καὶ ὁ $+a$ καὶ ὁ $-a$. Ἐὰν δὲ μεταχειριζόμενοι τὸ $\sqrt{\ }$ σημειώσωμεν αὐτὰς, πρὶν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν πρὸς εὕρεσίν των, συνήθως γράφομεν $\pm\sqrt{A}$, καὶ τότε τὸ $\sqrt{A}$ σημαίνει μόνον τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Ἀλλὰ καὶ μόνον τὸ $\sqrt{A}$, ἀκριβῶς θεωρουμένου τοῦ πράγματος, σημαίνει τὸ αὐτὸ καὶ τὸ $\pm\sqrt{A}$, διότι σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ A, αὕτη δὲ εἶναι καὶ θετικὴ καὶ ἀντιθετική.

Ὅταν δὲ παριστάνωμεν ῥίζαν ἀριθμοῦ δι' αὐτοῦ καὶ τοῦ ῥιζικοῦ οὕτω $\sqrt{A}$, ἐν τοῖς ἑξῆς τὸ $\sqrt{A}$ θέλομεν ὀνομάζει *ῥιζόσημον* καὶ ἰδίως ῥιζόσημον δευτεροβάθμιον, διότι σημαίνει ῥίζαν τετραγωνικήν. Μέχρι τοῦδε ὀνομάζεται αὐτὸ *ῥιζικόν*-

Εἶναι δ' εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὅτι ὁ τετράγωνος θετικὸς ἀριθμὸς A ἄλλην παρὰ τὰς δύο εἰρημένας τετραγωνικὰς ῥίζας δὲν ἔχει. Διότι σημειοῦντες διὰ χ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ A, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι, θέλομεν ἔχει τὸ χ^2 ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν A, ἤτοι

$$\chi^2=A, \text{ ἢ μεταθέσει τοῦ } A, \ \chi^2-A=0.$$

Ἀλλὰ τὸ A δύναται νὰ ἐννοηθῇ καὶ ὡς τετράγωνον τῆς τετραγωνικῆς του ῥίζης, καὶ νὰ σημειωθῇ οὕτω $A=(\sqrt{A})^2$· λοιπὸν

$$\chi^2-(\sqrt{A})^2=0.$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων, ἀφοῦ ἀναχθῇ εἰς τοὺς παράγοντάς του, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\chi-\sqrt{A})(\chi+\sqrt{A})=0,$$

τὴν ὁποίαν δῆλον ὅτι οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ χ ταυτοποιεῖ παρὰ τὸν $+\sqrt{A}$ καὶ τὸν $-\sqrt{A}$. Λοιπὸν ὁ A ἔχει δύο ῥίζας ἴσας, ἀλλ' ἀντιθέτους, $+\sqrt{A}$ καὶ $-\sqrt{A}$, καὶ *μόνον αὐτάς*.

116. Θετικοῦ δὲ ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου B ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δι' ἀριθμοῦ νὰ παρασταθῇ εἶναι ἀδύνατον (Συμ. ἀρ. 68), καὶ διὰ τοῦτο τὴν ὠνομάσαμεν ἀνάριθμον, ἀλλ' ἀντ' αὐτῆς εἶναι ἐν χρήσει ἀριθμὸς προσεγγίζων ὅσον ἂν θέλωμεν εἰς αὐτήν, καὶ τὸν ὁποῖον εἴπομεν ἐκεῖ πῶς εὑρίσκομεν. Ἀλλ' ἐνῷ εἶναι ἀδύνατον μὴ τετραγώνου μερικοῦ ἀριθμοῦ νὰ εὑρεθῇ ἀκριβῶς ἡ ῥίζα, τὸ ῥιζόσημον $\sqrt{14}$ ἢ τὸ $\sqrt{B}$ παριστάνει ἀκριβέστατα τὴν τετραγωνικὴν τοῦ 14 ἢ τοῦ B ῥίζαν, (ἥτις πρέπει νὰ ἐννοηθῇ διπλῆ, θετικὴ καὶ ἀντιθετική, ὡς καὶ τῶν τετραγώνων), διότι τὸ ῥιζόσημον παριστάνει τὴν ῥίζαν, ὁποία εἶναι, εἴτε ἐνάριθμος εἶναι εἴτε ἀνάριθμος.

117. Ἀντιθετικὸς δὲ ἀριθμὸς (Συμ. ἀρ 83) εἴδομεν ὅτι δὲν ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν, διότι οὔτε θετικὸν ποσὸν οὔτε ἀντιθετικὸν πολλαπλασιαζόμενον ἐφ' ἑαυτὸ δύναται νὰ παράγῃ ἀντιθετικὸν ἀριθμόν. Τὸ σύμβολον λοιπὸν τοῦτο $\sqrt{-A}$ εἶναι μὲν ῥιζόσημον δευτεροβάθμιον, ἀλλ' ἐνταυτῷ καὶ παραστατικὸν φανταστικοῦ, ἀνυπάρκτου, καὶ ἀπαντᾶται ὁσάκις ζητοῦνται ἀδύνατα, ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἐν τῷ ἀκολούθῳ κεφαλαίῳ.

Ἀλλ' ὡς τὸ $-A$ δύναται νὰ ἐννοηθῇ γινόμενον τοῦ A καὶ τοῦ -1, οὕτω καὶ τὸ $\sqrt{-A}$ δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς γινόμενον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ A ἐπὶ τὸ $\sqrt{-1}$. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν τὸ $\sqrt{-A}$ γινόμενον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ A καὶ ἄλλου τινὸς ἀγνώστου παράγοντος ω, τῶν ῥιζῶν τοῦ A σημειωθεισῶν διὰ $+a$ καὶ διὰ $-a$, θέλομεν ἔχει

$$(+a\omega)^2=-A, \text{ καὶ } (-a\omega)^2=-A,$$

ἢ ἀφοῦ τετραγωνισθῶσι τὰ πρῶτα μέλη (Συμ. ἀρ. 77),

$$a^2\omega^2=-A, \text{ ἢ οὕτως } a^2\omega^2=-1\times A.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ a^2 εἶναι ἴσον A, ἔχομεν $A\omega^2=-1\times A$· διαιροῦντες δὲ διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος A τὰ δύο μέλη ἔχομεν

$$\omega^2=-1, \text{ ὅθεν } \omega=\sqrt{-1},$$

διότι δύο τινῶν ἴσων καὶ αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι εἶναι ἴσαι. Τὸ $\sqrt{-1}$ λοιπὸν εἶναι ὁ παράγων, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἑκατέραν τῶν ῥιζῶν $+a$ καὶ $-a$ παράγει τὸ ἴσον μὲ τὸ

$$\sqrt{-A}, \text{ ἤτοι } \sqrt{-A}=\pm a\sqrt{-1}.$$

Σημ. Τὰ δευτεροβάθμια ῥιζόσημα λοιπὸν εἶναι τριῶν εἰδῶν· τὰ μὲν σημαίνουσιν ἐνάριθμα (115), τὰ δὲ ἀνάριθμα (116), τὰ δὲ εἶναι σύμβολα ἀνυπάρκτων. Τὰ μὲν τελευταῖα θέλομεν ὀνομάζει ἐν τοῖς ἑξῆς *ῥιζόσημα ἀνυπάρκτων*, τὰ δὲ δύο πρῶτα πρὸς ἀντιδιαστολὴν κοινῶς *ῥιζόσημα ὑπαρκτικά*, διότι καὶ αἱ θετικαὶ ῥίζαι καὶ αἱ ἀντιθετικαί, τὰς ὁποίας σημαίνουσι, παριστάνουσιν ὑπάρχοντα ποσά. Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς τοῦ a ἐπὶ $\sqrt{-1}$ εἶναι καὶ αὐτὸς φανταστικός, διότι ἀκριβῶς εἶναι ἀκατανόητον τί σημαίνει πολλαπλασιάζειν ἀνύπαρκτον ἢ ἐπὶ ἀνύπαρκτον.

Περὶ τετραγωνισμοῦ καὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυγραμμάτων ὅρων καὶ πολυόρων.

118. Εἴδομεν ἐν τῷ Συμπληρώματι (77) ὅτι *τὸ τετράγωνον ἀκεραίου πολυγραμμάτου ὅρου εἶναι γινόμενον τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν παραγόντων του*, καὶ ὅτι τὸ τετρά-

γωνον γράμματος μὲ δείκτην εἶναι αὐτὸ τὸ γράμμα με δείκτην διπλάσιον, τὰ ὁποῖα εὐκόλως ἐννοεῖ τις καὶ ἐκ τούτων

$$(\pi\rho\sigma\ldots)^2=\pi\rho\sigma\ldots\times\pi\rho\sigma\ldots=\tau^2\rho^2\sigma^2\ldots$$

$$(\alpha^\nu)^2=\alpha^\nu\times\alpha^\nu=\alpha^{\nu+\nu}=\alpha^{2\nu}.$$

Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ τετραγώνου πολυγραμμάτου ὅρου πρέπει νὰ τετραγωνίζωμεν τὸν συνεργόντων, νὰ διπλασιάζωμεν ὅλους τοὺς δείκτας καὶ νὰ γράφωμεν ὅλα τὰ προκύπτοντα κατόπιν ἀλλήλων. Οὕτως ἔχομεν

$$(4\alpha^3\beta^2\gamma)^2=16\alpha^6\beta^4\gamma^2,\quad (-\tfrac{3}{5}\mu^7\nu^3)^2=\tfrac{9}{25}\mu^{14}\nu^6.$$

119. Ἐκ δὲ τούτων βλέπομεν πρῶτον ὅτι ὅρος, ὅστις δὲν ἔχει τὸν συνεργόν του τετράγωνον ἢ ὅλους τῶν γραμμάτων του τοὺς δείκτας ἀρτίους, δὲν εἶναι τετράγωνος.

Ἔπειτα συμπεραίνομεν καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ὅλων τῶν παραγόντων του, καὶ ὅτι πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυγραμμάτου ὅρου πρέπει νὰ ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ συνεργοῦ του, νὰ διαιρῶμεν ὅλους τοὺς δείκτας διὰ 2 καὶ νὰ γράφωμεν τὰ προκύπτοντα κατόπιν ἀλλήλων. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{\pi\rho\sigma\ldots}=\sqrt{\pi}\times\sqrt{\rho}\times\sqrt{\sigma},\quad \sqrt{9\alpha^4\beta^2}=3\alpha^2\beta,$$

$$\sqrt{\tfrac{4}{81}\gamma^6\delta^4\varepsilon^2}=\tfrac{2}{9}\gamma^3\delta^2\varepsilon.$$

120. Τοὺς δὲ μὴ τετραγώνους ὅρους πρῶτον ἀνάγομεν, ἂν ἦναι δυνατὸν, εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ὧν ὁ ἕτερος νὰ ἦναι τετράγωνος, ὁ δὲ ἄλλος νὰ μὴ ἔχῃ τετράγωνον κἀνένα παράγοντα· ἔπειτα ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου, ὡς ἤδη εἴπομεν, σημειοῦμεν δὲ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ τὴν τοῦ μὴ τετραγώνου καὶ γράφομεν τὸ ῥιζόσημον κατόπιν τῆς ῥίζης τοῦ τετραγώνου. Π. χ. ἐπειδὴ ὁ $50\alpha^5\beta^2\gamma=2.25\alpha^4\alpha\beta^2\gamma=25\alpha^4\beta^2\times2\alpha\gamma$, ἔχομεν

$\sqrt{50\alpha^5\beta^2\gamma}=\sqrt{25\alpha^4\beta^2}\times\sqrt{2\alpha\gamma}=5\alpha^2\beta\sqrt{2\alpha\gamma}$. Ὡσαύτως

$\sqrt{45\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta}=\sqrt{9\alpha^2\beta^2\gamma^2\times5\beta\delta}=3\alpha\beta\gamma\sqrt{5\beta\delta}$.

$\sqrt{864a^2\beta^5\gamma^9}=\sqrt{144a^2\beta^4\gamma^8\times 6\beta\gamma}=12a\beta^2\gamma^4\sqrt{6\beta\gamma}$.

$\sqrt{-49a^2\beta^4}=\sqrt{49a^2\beta^4\times -1}=7a\beta^2\sqrt{-1}$ (ἰδὲ καὶ 117).

$\sqrt{-8a^2\beta}=\sqrt{4a^2\times -2\beta}=2a\sqrt{-2\beta}$,

ἢ ἔτι $=2a\sqrt{2\beta\times -1}=2a\sqrt{2\beta}\sqrt{-1}$.

Σημ. Διὰ τῆς πράξεως ταύτης τὰ πρῶτα ῥιζόσημα καθίστανται ἁπλούστατα, διότι ἀντὶ τοῦ $\sqrt{50a^3\beta^2\gamma}$ π. χ. ἔχομεν τὸ ἁπλούστατον $\sqrt{2a\gamma}$, διότι ἁπλούστερον ἀδύνατον νὰ γείνῃ, ἐκτὸς ὅταν προσδιορισθῶσι τὰ γράμματα a καὶ γ ἰδίους τινὰς προσδιορισμούς. Διὰ τοῦτο ἡ πρᾶξις αὕτη ὠνομάσθη *ἁπλοποίησις τῶν ῥιζοσήμων*. Ὀνομάζουσι δὲ προσέτι τὸν πρὸ τοῦ ῥιζοσήμου παράγοντα *συνεργὸν τοῦ ῥιζοσήμου*, ἀλλὰ νομίζω καλλίτερον τὸ ὄνομα *πρόῤῥιζον*· οἷον ὁ $5a^2\beta$ εἶναι πρόῤῥιζος παράγων τοῦ ὅρου $5a^2\beta\sqrt{2a\gamma}$, κτλ. Ἔτι δὲ καὶ τὰ $\pm$ τοῦ $\pm\sqrt{a}$ θέλομεν ὀνομάζει πρόῤῥιζα σημεῖα.

Ἡ ἁπλοποίησις λοιπὸν τοῦ ῥιζοσήμου εἶναι κυρίως τροπὴ αὐτοῦ εἰς ἄλλο τι ἁπλούστατον ῥιζόσημον καὶ πρόῤῥιζόν τι.

121. *Τετραγωνίζεται ἐγγράμματος κλασματικὸς, ἐὰν τετραγωνισθῇ ὁ ἀριθμητής του καὶ ὁ παρονομαστής του καὶ τεθῇ τὸ δεύτερον τετράγωνον ὑπὸ τὸ πρῶτον*, ὡς ἐδῶ φαίνεται, τοῦ a καὶ τοῦ β ὄντων ὁποιωνδήποτε,

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^2=\frac{a}{\beta}\times\frac{a}{\beta}=\frac{a^2}{\beta^2}.$$

Καὶ ἀντιστρόφως λοιπὸν, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλασματικοῦ ἦναι τετράγωνοι, *ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ του καὶ τιθεμένης τῆς δευτέρας ὑπὸ τὴν πρώτην*. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{\frac{49a^4\beta^6}{16\gamma^2\delta^4}}=\frac{\sqrt{49a^4\beta^6}}{\sqrt{16\gamma^2\delta^4}}=\frac{7a^2\beta^3}{4\gamma\delta^2}.$$

Ὅταν δὲ ἢ ὁ παρονομαστὴς ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι δὲν ἦναι τετράγωνοι, τότε ἢ σημειοῦται διὰ τοῦ $\sqrt{}$ ἑκατέρου ἡ ῥίζα καὶ ἁπλοποιεῖται τὸ ῥιζόσημον, ἢ προτιμότερον (Σημ. ἀρ. 86), πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι ἐπὶ ἄλλον, ὅστις νὰ καταστάλνῃ τὸν παρονομαστὴν τετράγωνον, ἔπειτα ἐξάγεται τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ √ καὶ ἁπλοποιεῖται ἡ τοῦ ἀριθμητοῦ. Ἔστω π. χ νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{3a^4\beta}{50\gamma^3}$. Ἐπειδή, ἂν ὁ 50 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 καὶ ὁ γ^3 ἐπὶ γ, γίνεται ὁ παρονομαστὴς τετράγωνος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 2γ κτλ, καὶ ἔχομεν

$$\sqrt{\frac{3a^4\beta}{50\gamma^3}}=\sqrt{\frac{3a^4\beta\times2\gamma}{50\gamma^3\times2\gamma}}=\frac{\sqrt{6a^4\beta\gamma}}{\sqrt{100\gamma^4}}=\frac{a^2\sqrt{6\beta\gamma}}{10\gamma^2}$$

$$\sqrt{\frac{50a^4\beta^2\gamma}{45\delta^2\varepsilon^3\zeta}}=\sqrt{\frac{50a^4\beta^2\gamma\times5\varepsilon\zeta}{45\delta^2\varepsilon^3\zeta\times5\varepsilon\zeta}}=\frac{5a^2\beta\sqrt{10\gamma\varepsilon\zeta}}{15\delta\varepsilon^2\zeta}.$$

Σημ. Δὲν μετεχειρίσθημεν ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τὸ $\pm$, ἀλλ' ἐννοεῖται ὅτι πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωνται διττῶς ὅλαι αἱ προηγούμεναι ῥίζαι· ὅπου δ' ὑπάρχει τὸ $\sqrt{\ }$, ἐξ αὐτοῦ ἐννοοῦνται αἱ δύο ῥίζαι.

122. Ἐὰν a, β, γ, δ, κτλ παριστάνωσιν ὁποιαδήποτε ἐγγράμματα ποσά, θέλομεν εὑρεῖ τὸ τετράγωνον τοῦ πολυόρου $a+\beta+\gamma+\delta.\ .\ .$ πολλαπλασιάζοντές το ἐφ' ἑαυτὸ κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα (37). Οὕτως ἔχομεν

$$\begin{array}{l}
a+\beta+\gamma+\delta+\ \dots\\
a+\beta+\gamma+\delta+\ \dots\\
\hline
a^2+a\beta+a\gamma+a\delta\ \dots\\
\quad+a\beta+\beta^2+\beta\gamma+\beta\delta\ \dots,\\
\qquad+a\gamma+\beta\gamma+\gamma^2+\gamma\delta\ \dots\\
\qquad\quad+a\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\delta^2\ \dots\\
\hline
a^2+2a\beta+\beta^2+2a\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+2a\delta+2\beta\delta+2\gamma\delta+\delta^2+\dots
\end{array}$$

ἢ $a^2+2a\beta+\beta^2+(2a+2\beta)\gamma+\gamma^2+(2a+2\beta+2\gamma)\delta+\delta^2+..$

Ἐκ τούτων δὲ βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον πολυόρου σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ ἐκ τῶν διπλασίων τῶν γινομένων ἑκάστου ὅρου ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων, ἢ λεπτομερέστερα, σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου, τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου, ἔτι ἐκ τοῦ διπλασίου καὶ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ τρίτου, προσέτι ἐκ τοῦ διπλασίου καὶ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ τετάρτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἂν δέ τινες τῶν ὅρων τοῦ πολυόρου ἤθελαν εἶσθαι ἀντιθετικοί, τότε οἱ μὲν ἄλλοι ὅροι τοῦ τετραγώνου ἤθελον διαμείνει ὡς ἤδη εἴπομεν, τὰ δὲ διπλάσια τῶν γινομένων τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων θετικῶν ἤθελον εἶσθαι ἀντιθετικά.

Οὕτως ἔχομεν παρευθὺς

$$(3a^2-2a\beta+4\beta^2)^2=9a^4-12a^3\beta+4a^2\beta^2+24a^2\beta^2$$
$$-16a\beta^3+16\beta^4,$$

ἢ μετὰ τὴν συστολὴν $9a^4-12a^3\beta+28a^2\beta^2-16a\beta^3+16\beta^4$.

$$(2\chi^3-4\chi^2+7\chi-1)^2=4\chi^6-16\chi^5+16\chi^4+28\chi^4-56\chi^3$$
$$+49\chi^2-4\chi^3+8\chi^2-14\chi+1,$$

ἢ μετὰ τὴν συστολὴν

$$4\chi^6-16\chi^5+44\chi^4-60\chi^3+57\chi^2-14\chi+1.$$

123. Ἔστω τώρα νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα πολυόρου τινός, οἷον τοῦ $25a^4-30a^3\beta+49a^2\beta^2-24a\beta^3+16\beta^4$, διατεταγμένου ὄντος κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ a.

Ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι τετράγωνον· ἐπειδὴ δὲ ἡ ῥίζα του θέλει εἶσθαι πολύορος, εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι αὐτὸ πρέπει νὰ σύγκηται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τῆς ῥίζης καὶ τῶν διπλασίων τῶν γινομένων κτλ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ὅρου τῆς ῥίζης, τοῦ ἔχοντος τὸν ἀνώτατον δείκτην π. χ. τοῦ a, ἔχει καὶ αὐτὸ τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a· λοιπὸν ὁ ἀριστερὸς ὅρος $25a^4$ τοῦ δεδομένου πολυόρου, ὅστις ἔχει τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a, πρέπει νὰ ἦναι τὸ τετράγωνον τοῦ ὅρου τῆς ῥίζης, τοῦ ἔχοντος τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a· λοιπὸν ἀντιστρόφως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $25a^4$, ἤτοι ὁ $5a^2$, εἶναι ὅρος τις τῆς ῥίζης, ὁ ἔχων τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ a·

Έπειτα τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν δεύτερον, ὡς γινόμενον τῶν μὲ τοὺς ἀνωτέρους δείκτας τοῦ α ὅρων αὐτῆς, ἔχει τὸ α μὲ δείκτην κατώτερον μὲν τοῦ δείκτου τοῦ α^4 τοῦ ἐν τῷ τετραγώνῳ $25\alpha^4$ τοῦ πρώτου ὅρου, ἀνώτερον δὲ τῶν τοῦ α δεικτῶν τῶν ἐν τοῖς ἄλλοις ὅροις τοῦ τετραγώνου πολυόρου. Λοιπὸν ὁ δεύτερος ὅρος $-30\alpha^3\beta$ τοῦ δεδομένου πολυόρου, ὅστις ἔχει τοῦτον τὸν δείκτην, πρέπει νὰ ἦναι γινόμενον τοῦ διπλασίου τοῦ $5\alpha^2$, ἤτοι τοῦ $10\alpha^2$, ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης· λοιπὸν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $-30\alpha^3\beta$ διὰ τοῦ $10\alpha^2$, ἤτοι ὁ $-3\alpha\beta$, εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Ἀφοῦ δ' εὑρέθησαν δύο ὅροι τῆς ῥίζης, ἐὰν κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον αὐτῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι $25\alpha^4-30\alpha^3\beta+9\alpha^2\beta^2$, τοῦτο δὲ γραφθῇ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα τῶν ὅρων του ὑπὸ τὸ δεδομένον πολύορον καὶ συσταλθῶσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι των, οὕτως ἀφανίζεται ἐκ τοῦ δεδομένου πολυόρου τὸ τετράγωνον τῶν δύο εὑρεθέντων ὅρων τῆς ῥίζης, καὶ μένει ὑπόλοιπον $+40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ σύγκηται ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν τρίτον, ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ δευτέρου ὅρου ἐπὶ τὸν τρίτον κτλ.

Τούτων δὲ τῶν ὅρων ὁ ἔχων τὸν ἀνώτατον δείκτην τοῦ α, ἤτοι ὁ ἀριστερὸς $+40\alpha^2\beta^2$, εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν τρίτον αὐτῆς· διότι τοῦτο τὸ γινόμενον, ὡς γινόμενον τῶν ὅρων τῆς ῥίζης τῶν ἐχόντων τοὺς ἀνωτέρους δείκτας τοῦ α ὡς πρὸς τὰ γινόμενα τῶν ἄλλων ὅρων τὰ ἐν τῷ ὑπολοίπῳ $+40\alpha^2\beta^2$ κτλ, πρέπει καὶ αὐτὸ νὰ ἔχῃ τὸν ἀνώτερον δείκτην τοῦ α. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς διαιρέσεως τοῦ $+40\alpha^2\beta^2$ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης, ἤτοι τοῦ $10\alpha^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι $+4\beta^2$, θέλει εἶσθαι ὁ τρίτος ὅρος τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Γνωρίζοντες δὲ καὶ τὸν τρίτον ὅρον τῆς ῥίζης δυνάμεθα τώρα ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον $+40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3$

$+16\beta^4$ καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου, τὰ ὁποῖα ἐν αὐτῷ ἐμπεριέχονται. Κατασκευάζομεν δὲ αὐτοὺς τοὺς τρεῖς ὅρους διπλασιάζοντες τοὺς δύο ἤδη εὑρεθέντας ὅρους τῆς ῥίζης, γράφοντες κατόπιν των τὸν τρίτον ἤδη εὑρεθέντα ὅρον αὐτῆς καὶ πολλαπλασιάζοντες ἔπειτα τὸ προκύπτον τρίορον $10\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2$ ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον τῆς ῥίζης $+4\beta^2$· οὕτως ἔχομεν

$$+40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4.$$

Ἀφαιροῦντες δὲ τοῦτο ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν 0.

Ἐκ τούτου λοιπὸν τοῦ 0 συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι ἀληθὲς τετράγωνον τὸ δεδομένον πολύορον, ὡς ἐν ἀρχῇ ὑπετέθη, καὶ ὅτι τὸ ἤδη εὑρεθὲν τρίορον $5\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2$ εἶναι ἡ τετραγωνική του ῥίζα. Διότι πρῶτον ἀφῃρέσαμεν ἐκ τοῦ δεδομένου πολυόρου τὸ τετράγωνον τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ εὑρεθέντος τριόρου, ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπολοίπου ἀφῃρέσαμεν ἄλλους τρεῖς ὅρους, οἵτινες ὁμοῦ μὲ τὸ προαφαιρεθὲν τετράγωνον τῶν δύο ὅρων ἀποτελοῦσι τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τριόρου· λοιπὸν κυρίως ἀπὸ τὸ δεδομένον πολύορον ἀφῃρέσαμεν μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τρίτου ὅρου τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τριόρου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0, σημεῖον τοῦτο ὅτι τὸ δεδομένον πολύορον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τριόρου, ἤτοι ὅτι αὐτὸ μὲν εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τριόρου, τοῦτο δὲ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δεδομένου πολυόρου. Ἰδοὺ δὲ καὶ πῶς ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις.

$$\begin{array}{r|l}
25\alpha^4-30\alpha^3\beta+49\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 & 5\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2 \\ \hline
-25\alpha^4+30\alpha^3\beta-9\alpha^2\beta^2 \qquad\qquad\qquad\quad & 10\alpha^2 \\ \hline
+40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 & 10\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2 \\
-40\alpha^2\beta^2+24\alpha\beta^3-16\beta^4 & +4\beta^2 \\ \hline
0 \qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

124. Πρὸς ἐξαγωγὴν λοιπὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης παντὸς πολυόρου, *ἀφοῦ τὸ διατάξωμεν κατὰ τὰς κατιούσας δυ-*

νάμεις γράμματός τινος, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριστεροῦ ὅρου του, καὶ διὰ τοῦ διπλασίου αὐτῆς διαιροῦμεν τὸν δεύτερον ὅρον του, γράφομεν τὸ πηλίκον κατόπιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου, τετραγωνίζομεν τὸ εὑρεθὲν τοῦτο δίορον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον ἀπὸ τὸ δεδομένον πολύορον. Τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν τὸν ἀριστερὸν ὅρον διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου, γράφομεν τὸ πηλίκον κατόπιν τοῦ διπλασίου τῶν προευρημένων ὅρων τῆς ῥίζης καὶ ὑποκάτω, πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ τρίορον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον πολύορον. Τοῦ νέου ὑπολοίπου διαιροῦμεν τὸν ἀριστερὸν ὅρον διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου, γράφομεν τὸ πηλίκον κατόπιν τοῦ διπλασίου τῶν προευρημένων ὅρων τῆς ῥίζης καὶ ὑποκάτω, πολλαπλασιάζομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον πολύορον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Καὶ ἂν μὲν μετά τινας τοιαύτας πράξεις εὕρωμεν κατάλοιπον 0, εἴδομεν ἀνωτέρω τί ἐκ τούτου συμπεραίνεται. Ἂν δὲ ἢ ὁ ἀριστερὸς ὅρος τοῦ πολυόρου δὲν ἦναι τετράγωνος, ἢ ὁ δεύτερος ὅρος αὐτοῦ ἢ ὁ ἀριστερὸς ὅρος ἑκάστου ὑπολοίπου δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ἐν ἀριστερᾷ ὅρου τοῦ πολυόρου, τότε τὸ πολύορον αὐτὸ δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου πολυόρου, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῶν ἐν τῷ 123 εἰρημένων, καὶ εἶναι περιττὸν νὰ προχωρῇ τις εἰς τὴν πρᾶξιν, ἀφοῦ ἀπαντήσῃ τι τῶν μνημονευθέντων σημείων.

Ἔτι δὲ, ἐπειδὴ τελευταῖος ὅρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πολυόρου πρέπει νὰ ἦναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ πολυόρου, ἐὰν ἀπαντήσαντες αὐτὸν δὲν εὕρωμεν ἀμέσως κατάλοιπον 0, ἢ ἂν εὕρωμεν ὅρον μὲ δείκτην τοῦ πρὸς 8 ἔγεινεν ἡ διάταξις γράμματος μικρότερον τοῦ ἐν τῷ προειρημένῳ ὅρῳ, ὅταν ἦναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος τὸ πολύορον, ἢ μεγαλήτερον, ὅταν ἦναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας, καὶ ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι δὲν εἶναι τετράγωνον τὸ πολύορον.

Σημ. Δίορον κἀνὲν δὲν εἶναι τετράγωνον· τρίορον δὲ ποῖον εἶναι τετράγωνον εἴπομεν ἐν ἀρ. 40. Ἀλλὰ δυνατὸν τρίορόν τι νὰ ἦναι γινόμενον τετραγώνου τριόρου καὶ ἄλλου ὅρου, οἷον

$$\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2)\cdot \text{ ὥστε}$$

$$\sqrt{\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3}=(\alpha+2\beta)\sqrt{\alpha\beta} \text{ (ἰδὲ ἀρ. 121).}$$

Παραδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

$$9\chi^4-30\alpha\chi-3\alpha^2\chi^2+25\alpha^2+5\alpha^3+\frac{\alpha^4}{4}.$$

$$4\chi^4+8\alpha\chi^3+4\alpha^2\chi^2+16\beta^2\chi^2+16\alpha\beta^2\chi+16\beta^4.$$

$$\tfrac{25}{4}\alpha^2\beta^2-\tfrac{5}{3}\alpha\beta\gamma^2+\tfrac{1}{9}\gamma^4, \qquad \alpha^6+6\alpha^3\chi^4+9\chi^8.$$

ἔτι δὲ καὶ τὰ τοῦ ἀριθμοῦ 122.

Περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων.

125. Εἴδομεν προηγουμένως (120 καὶ 124) ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ὅρων καὶ πολυόρων, μὴ ὄντων τετραγώνων, ἀδύνατον νὰ παριστάνηται ἄνευ τοῦ ῥιζικοῦ, καὶ ἐξ ἀνάγκης συχνότατα θέλομεν ἔχει ὅρους, οἵτινες νὰ ἦναι ἢ ἁπλᾶ ῥιζόσημα, οἷον $\sqrt{\ }$ ἢ περίπλοκα ῥιζόσημα, οἷον $\frac{2}{3}\alpha^2\beta\sqrt{\gamma\delta}$ κτλ, γινόμενα ὄντα ῥιζοσήμων ἐπὶ ἄλλους ἀριθμούς. Ἐπὶ δὲ τῶν τοιούτων ὅρων θέλει εἶσθαι ἀνάγκη νὰ ἐκτελῶνται διάφοροι πράξεις, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν μὴ ῥιζοσήμων ὅρων. Περὶ τῶν πράξεων τούτων λέγομεν ἐφεξῆς τὰ δέοντα.

126. Τὰ ῥιζόσημα προσθέτονται καὶ ἀφαιροῦνται ἀπ' ἄλληλα ὡς οἱ ἄλλοι ὅροι, ἤτοι γράφεται τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὸ σημεῖόν του. Οὕτω δὲ, ἂν μὲν ἦναι ὁμόσημα, προσθέτονται, ἂν δ' ἀντίθετα, ἀφαιρεῖται τὸ ἕτερον ἀπὸ τὸ ἄλλο. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ ῥιζόσημα παριστάνουσι δύο ῥίζας ἀντιθέτους, ἀπαιτεῖται προσοχὴ, ἂν ἐκλαμβάνωνται κατὰ τὴν γενικὴν σημασίαν των ἢ κατὰ τὴν μερικὴν, καθ' ἣν παριστάνουσι τὴν ἑτέραν ῥίζαν.

Τὸ $5\sqrt{a}+3\sqrt{\beta}$ παριστάνει τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ὅρων. Ἐπειδὴ ὅμως δυνατὸν νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\pm 5\sqrt{a} \pm 3\sqrt{\beta}$, ὅπου εἶναι σημειωμέναι δύο προσθέσεις καὶ δύο ἀφαιρέσεις, ἂν δὲν ἦναι προσδιωρισμένον ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ τὰ ῥιζόσημα ἐννοοῦνται θετικὰ καὶ τὰ δύο, τότε εἶναι σημειωμένα πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

Ὅταν δὲ τ' ἁπλᾶ ῥιζόσημα ἦναι τὰ αὐτὰ, καὶ μόνον οἱ πρόῤῥιζοι παράγοντες διάφοροι, οἷον $3a\sqrt{\beta}+5\gamma\sqrt{\beta}$, τότε ἐπειδὴ τὸ $\sqrt{\beta}$ εἶναι κοινὸς παράγων τῶν δύο ὅρων μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐκλαμβανόμενος, τὸ ἀνωτέρω δύναται νὰ γραφθῇ ἁπλούστερα οὕτω $(3a+5\gamma)\sqrt{\beta}$.

Ὡσαύτως $7\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=(7-3)\sqrt{2a}=4\sqrt{2a}$.

Ἀλλὰ καὶ τὰ $\sqrt{48a\beta^2}+\beta\sqrt{75a}$, τῶν ὁποίων τὰ ῥιζόσημα εἶναι διάφορα, δύνανται νὰ τραπῶσιν (120) εἰς τὰ ἰσοδύναμα $4\beta\sqrt{3a}+5\beta\sqrt{3a}$, τῶν ὁποίων τὰ ῥιζόσημα εἶναι τὰ αὐτὰ, καὶ ἐπομένως

$$\sqrt{48a\beta^2}+\beta\sqrt{75a}=9\beta\sqrt{3a}.$$

Ὡσαύτως

$$3a^2+5\sqrt{a^2\beta^3}-2\sqrt{\frac{a^2}{\beta}}=3a^2+\left(5a\beta-\frac{2a}{\beta}\right)\sqrt{\beta},$$

διότι τὸ $5\sqrt{a^2\beta^3}=5a\beta\sqrt{\beta}$, καὶ τὸ $2\sqrt{\frac{a^2}{\beta}}=2\sqrt{\frac{a^2\beta}{\beta^2}}=\frac{2a}{\beta}\sqrt{\beta}$.

127. Εἴδομεν (118) ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα γινομένου δύο ἢ πλειοτέρων παραγόντων εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν παραγόντων του· λοιπὸν καὶ ἀντιστρόφως, *τὸ γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν*. Ὥστε πρὸς πολλαπλασιασμὸν δύο ἢ πλειοτέρων δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων, *πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ἀριθμοὶ, καὶ τὸ γινόμενόν των νὰ τίθηται ὑπὸ τὸ* $\sqrt{\ }$. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{a}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{a\beta},\quad \sqrt{a^2}\times\sqrt{\beta^3}\times\sqrt{\gamma}=\sqrt{a^2\beta^3\gamma}.$$

Ἂν δ' ἦναι καὶ πρόῤῥιζοι ἀριθμοί, πρῶτον πολλαπλασιάζονται οὗτοι, ἔπειτα τὰ ῥιζόσημα, καὶ τὸ πρῶτον γινόμενον τίθεται πρόῤῥιζον πρὸ τοῦ δευτέρου· οἷον

$$3\sqrt{5a\beta}\times4\sqrt{20a}=12\sqrt{100a^2\beta} \text{ ἢ ἔτι } =120a\sqrt{\beta}.$$

$$2a\sqrt{\beta\gamma}\times3a\sqrt{\beta\gamma}=6a^2\sqrt{\beta^2\gamma^2}=6a^2\beta\gamma.$$

128. Ὅταν πρόκηται νὰ σημειωθῇ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, δυνάμεθα πάντοτε νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα πηλίκου κλασματικοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ ἢ τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ παρονομαστοῦ ἢ τοῦ διαιρέτου, ἤτοι

$$\sqrt{\frac{a}{\beta}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}.$$

Λοιπὸν καὶ ἀντιστρόφως, τὸ πηλίκον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πηλίκου αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν. Ὥστε πρὸς διαίρεσιν δευτεροβαθμίων ῥιζοσήμων πρέπει νὰ διαιρῆται ὁ ὑπὸ τὸ ἕτερον ῥιζικὸν ἀριθμὸς διὰ τοῦ ὑπὸ τὸ ἄλλο, καὶ τὸ πηλίκον νὰ τίθηται ὑπὸ τὸ $\sqrt{\ }$.
Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{a}{\beta}}.$$

Ἂν δ' ἦναι καὶ πρόῤῥιζοι ἀριθμοί, πρῶτον διαιροῦνται αὐτοὶ κτλ. οἷον

$$\frac{5a\sqrt{\beta}}{2\beta\sqrt{\gamma}}=\frac{5a}{2\beta}\sqrt{\frac{\beta}{a}}.\quad \frac{12a\gamma\sqrt{6\beta\gamma}}{4\gamma\sqrt{2\beta}}=3a\sqrt{\frac{6\beta\gamma}{2\beta}}=3a\sqrt{3\gamma}.$$

129. Τὸ $a\sqrt{\beta}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{a^2\beta}$· ἐκ δὲ τούτου βλέπομεν ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ ῥιζόσημον $\sqrt{\beta}$ ἐπὶ a, ἢ νὰ πολλαπλασιάζηται τὸ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν β ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ a. Λοιπόν, ἵνα πρόῤῥιζον παράγοντα μεταβάλλωμεν εἰς παράγοντα τοῦ ὑπὸ τὸ ῥιζικόν, ἢ ὡς λέγουσιν, ἵνα μεταθέτωμεν αὐτὸν ὑπὸ τὸ ῥιζικόν, πρέπει νὰ τὸν τετραγωνίζωμεν. Οὕτως ἔχομεν

$$3a\sqrt{5\beta}=\sqrt{9a^2}\times\sqrt{5\beta}=\sqrt{45a^2\beta}.$$

Τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἐν ἀρ. 120.

Συχνάκις ἀντὶ νὰ προσδιορίζηται ὡς ἔγγιστα τοιοῦτόν τι $6\sqrt{13}$ εἶναι προτιμότερον νὰ προσδιορίζηται τὸ $\sqrt{36\times 13}$, διότι προσδιορίζεται ἀκριβέστερον.

130. Τελευταῖον εἶναι ὠφέλιμον πολλάκις νὰ τρέπηται κλασματικὸς ἔχων ῥιζόσημα ἐν τῷ παρονομαστῇ εἰς ἄλλον ἰσοδύναμον κλασματικόν, ὅστις νὰ μὴ ἔχῃ τοιαῦτα, εἰμὴ ἐν τῷ ἀριθμητῇ· διότι ὁ τοιοῦτος κλασματικὸς προσδιορίζεται κατὰ προσέγγισιν ἀκριβέστερον τοῦ ἔχοντος ῥιζόσημον ἐν τῷ παρονομαστῇ. Τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον ἐνίοτε.

α΄. Ὅταν ἦναι ἓν ῥιζόσημον ἐν τῷ παρονομαστῇ, οἷον ἐν τῷ $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ τὸ ἐν τῷ παρονομαστῇ ῥιζόσημον, ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{(\sqrt{\beta})^2}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}.$$

β΄. Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἦναι κεφάλαιον δύο ῥιζοσήμων ἢ διαφορά, οἷον $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$ ἢ $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, καὶ ἐπὶ τὸ κεφάλαιον τῶν αὐτῶν κατὰ τὴν δευτέραν, ἐνθυμούμενοι ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}.$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}.$$

Ὡσαύτως δὲ

$$\frac{\alpha}{\beta+\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\beta-\sqrt{\gamma})}{(\beta+\sqrt{\gamma})(\beta-\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha\beta-\alpha\sqrt{\gamma}}{\beta^2-\gamma}.$$

$$\frac{7}{3-\sqrt{5}}=\frac{21+7\sqrt{5}}{4},\quad \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΠΕΡΙ ΛΥΣΕΩΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ.

Περὶ λύσεως δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον.

131. Αἱ ἐν τοῖς ἀρ. 67, 68 καὶ 69 εἰρημέναι ὡς ἀναγκαῖαι πράξεις πρὸς λύσιν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐκτελῶνται, ὅπως ἐκεῖ εἴπομεν, καὶ πρὸς λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἀλλὰ δὲν ἐξαρκοῦσι μόναι αὐταί, διότι δι' αὐτῶν δύναται μόνον δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις νὰ καταντήσῃ εἰς τοιαύτην μορφὴν $\chi^2=\alpha$, ἢ εἰς τοιαύτην $\chi^2+\pi\chi=\rho$, ἀλλ' ὄχι καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ χ μεμονωμένον ἐν τῷ ἑτέρῳ μέλει. Π. χ. ἡ τοῦ 101 προβλήματος ἐξίσωσις

$$\chi^2+\frac{16\chi^2}{9}+\frac{196\chi^2}{9}=5525$$

τρέπεται κατὰ σειρὰν εἰς τὰς ἑξῆς

$$9\chi^2+16\chi^2+196\chi^2=49725$$

$$221\chi^2=49725$$

$$\chi^2=\frac{49725}{221}=225.$$

Ἡ δὲ τοῦ 103 $\quad \frac{60}{\chi}-\frac{60}{\chi+3}=1$

εἰς ταύτας $\quad 60\chi+180-60\chi=\chi^2+3\chi$

$$180=\chi^2+3\chi$$

$$\text{ἢ } \chi^2+3\chi=180.$$

Ὁμοίως ἡ τοῦ 106 $\frac{4x+120}{x-30}=\frac{9x-270}{x+30}$ εἰς ταύτας

$$4x^2+120x+120x+3600=9x^2-270x-270x+8100$$

$$4x^2-9x^2+240x+540x=8100-3600$$

$$-5x^2+780x=4500$$

$$5x^2-780x=-4500$$

$$x^2-156x=-900.$$

Ἐκ τούτων δὲ βλέπομεν ὅτι τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων αἱ μὲν εἶναι *τρίοροι*, καλούμεναι καὶ *πλήρεις*, αἵτινες ἔχουσιν ἕνα ὅρον τὸ τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου θετικὸν καὶ μὲ συνεργὸν τὴν μονάδα, ἄλλον ὅρον τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ ἀγνώστου ἔχουσαν συνεργὸν ὁποιονδήποτε θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν, καὶ τρίτον ὅρον ὅλον γνωστὸν θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν ἀριθμόν· αἱ δὲ εἶναι *δίοροι*, μὴ ἔχουσαι τὸν μὲ τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ ἀγνώστου ὅρον, καλούμεναι δὲ διὰ τοῦτο καὶ *ἐλλιπεῖς*. Ἐφεξῆς δὲ λέγομεν τί ἄλλο ἀπαιτεῖται νὰ γείνῃ ἐπὶ τῶν τοῦ πρώτου εἴδους καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ δευτέρου πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου.

132. Ἀφοῦ λοιπὸν δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις διὰ τῶν προειρημένων πράξεων τραπῇ εἰς τὴν μορφὴν ταύτην $x^2=a$, εἶναι εὔκολον νὰ εὑρεθῇ τὸ x. Διότι, ὄντος τοῦ τετραγώνου τοῦ x ἴσου μὲ a, τὸ x θέλει εἶσθαι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ a. Ἀλλὰ τὸ a ἔχει δύο τετραγωνικὰς ῥίζας $+\sqrt{a}$ καὶ $-\sqrt{a}$, καὶ μόνον αὐτάς· λοιπὸν

$$x=\pm\sqrt{a}.$$

Οὕτως ἐκ τῆς ἀνωτέρω $x^2=225$ ἔχομεν

$$x=\pm\sqrt{225}=\pm15.$$

Καὶ ὁ μὲν $+15$ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τοῦ πρώτου ἐμπορεύματος ὀκάδων, τὰς ὁποίας ἠγόρασεν· ἐκ τοῦ ὁποίο[υ] εὑρίσκονται ἔπειτα ὀκάδες τοῦ δευτέρου ἐμπορεύματος 20, καὶ τοῦ τρίτου 70. Ὁ δὲ -15, ὡς ἀντίθετος τοῦ $+15$, σημαίνει ὀκάδας τὰς ὁποίας ἐπώλησέ τις, καὶ κυρίως δὲν ἁρμόζει εἰς τὸ 101 πρόβλημα, ἀλλ' εἰς ἄλλο, ὅπου ἀντὶ τοῦ ἠγόρασε καὶ ἐπῆρεν εἶναι τὸ ἐπώλησεν ἄνευ ἄλλης διαφορᾶς, καὶ τοῦ ὁποίου ἐξίσωσις εἶναι ἡ αὐτὴ τοῦ 101 προβλήματος.

Ἐκ δὲ τῆς $3\chi^2=5$

ἔχομεν $\chi^2=\frac{5}{3}$

$$\chi=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\pm\sqrt{\frac{5\times3}{9}}=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{15}.$$

Ἐκ δὲ τῆς $\dfrac{2\chi^2}{a}-5\beta=a+\dfrac{3\chi^2}{\beta}$

ἔχομεν $2\beta\chi^2-5a\beta^2=a^2\beta+3a\chi^2$

$$(2\beta-3a)\chi^2=5a\beta^2+a^2\beta$$

$$\chi^2=\frac{5a\beta^2+a^2\beta}{2\beta-3a}$$

$$\chi=\pm\sqrt{\frac{5a\beta^2+a^2\beta}{2\beta-3a}}.$$

Ἐκ δὲ τῆς $3\chi^2+17=5\chi^2+89$

ἔχομεν $\chi^2=-36$

$$\chi=\sqrt{-36}=\pm6\sqrt{-1}.$$

Ἐκ δὲ τούτων βλέπει τις ὅτι τὰ προσδιορίσματα τοῦ ἀγνώστου ἐλλιποῦς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι δύο ἴσα καὶ ἀντίθετα, καὶ τὰ δύο δὲ ἢ ἐνάριθμα ἢ ἀνάριθμα ἢ φανταστικά.

133. Πρὸς λύσιν δὲ δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἥτις διὰ τῶν προειρημένων πράξεων λαμβάνει γενικῶς τοιαύτην μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\rho$, ἤτοι ἀποβαίνει τρίορος ἢ πλήρης, ὁποία ἐπροσδιορίσθη ἀνωτέρω 131, ἀπαιτοῦνται καὶ τὰ ἑξῆς. Πρῶτον οἱ δύο ὅροι $\chi^2+\pi\chi$ τοῦ πρώτου μέλους ἐννοοῦνται ὅτι εἶναι δύο ὅροι τριόρου τετραγώνου, ὁ μὲν χ^2 τετράγωνος τοῦ χ, ὁ

δὲ $\pi\chi$ διπλάσιος τοῦ γινομένου τοῦ χ ἐπὶ ἄλλον ὅρον, ὅστις εἶναι $\frac{\pi}{2}$, διότι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{\pi}{2}$ ἐπὶ χ εἶναι $\frac{\pi\chi}{2}$, τὸ δὲ διπλάσιον τούτου εἶναι $\pi\chi$. Τότε ὁ τρίτος ὅρος τοῦ τετραγώνου πρέπει νὰ ἦναι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{\pi}{2}$ ἤτοι ὁ $\frac{\pi^2}{4}$. Ἂν λοιπὸν γραφθῇ ἐν ἑκατέρῳ μέλει τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ὁ $+\frac{\pi^2}{4}$, τρέπεται αὐτὴ εἰς τὴν

$$\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}+\rho,$$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι τετράγωνον τοῦ $\chi+\frac{\pi}{2}$ καὶ δύναται νὰ γραφθῇ οὕτω

$$\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}+\rho.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ $\chi+\frac{\pi}{2}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, τὸ $\chi+\frac{\pi}{2}$ εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, ἤτοι

$$\chi+\frac{\pi}{2}=\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\cdot$$

ἐκ δὲ τῆς πρωτοβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως μεταθέσει τοῦ $\frac{\pi}{2}$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἔχομεν

$$\chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}.$$

Τοιοῦτος εἶναι ὁ τύπος τοῦ ἀγνώστου τριόρου δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἤτοι αὐτὰς *ἔχει ἕνα ὅρον, ὅστις εἶναι ἀντίθετον τὸ ἥμισυ τοῦ συνεργοῦ π τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἐν τῇ ἐξισώσει χ, καὶ ἔτι ἓν ῥιζόσημον μὲ τὸ διπλοῦν σημεῖον ± καὶ ἔχον ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ συνεργοῦ π καὶ τὸν γνωστὸν ὅρον ρ τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει σημεῖόν του.*

Ὥστε, ἐνθυμούμενοι τὴν σύνθεσιν τοῦ γενικοῦ τούτου τύπου, δυνάμεθα εὐθὺς νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἰσοδύναμον τοῦ ἀγνώστου πάσης μερικῆς τριόρου δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἠγμένης οὔσης εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\rho$. Οὕτως ἐκ τῶν τοῦ ἀρ. 131 ἐξισώσεων

$$\chi^2+3\chi=180 \quad \text{καὶ} \quad \chi^2-156\chi=-900$$

εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$\chi=-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}+180}, \qquad \chi=78\pm\sqrt{(78)^2-900},$$

$$\chi=-\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{729}{4}} \qquad \chi=78\pm\sqrt{5184}$$

$$\chi=-\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{27}{2} \qquad \chi=78\pm72$$

$$\chi=12 \text{ καὶ } \chi=-15. \qquad \chi=150 \text{ καὶ } \chi=6.$$

Ὡσαύτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\chi-2=\frac{4\chi-9}{\chi}$$

εὑρίσκομεν πρῶτον $\chi^2-6\chi=-9$,
ὅθεν κατὰ τ' ἀνωτέρω

$$\chi=3\pm\sqrt{9-9}, \text{ καὶ } \chi=3.$$

Ἐκ δὲ τῆς $\quad 100\chi^2-100\chi=-41$

ἢ $\quad \chi^2-\chi=-\frac{41}{100}$

ἔχομεν $\quad \chi=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{41}{100}}$

$$\chi=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{16}{100}}=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{2}{5}\sqrt{-1}.$$

134. Τὰ γενικὰ προσδιορίσματα τοῦ χ, ἤτοι τὰ $-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}$ καὶ τὸ $-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}$, τὰ ὁποῖα καλοῦνται καὶ *ῥίζαι* τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\rho$, ἐπαληθεύουσιν αὐτήν. Τοῦτο δὲ γίνεται δῆλον ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2+\pi\chi=\rho$ τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο προσδιόρισμα· διότι τὰ δύο μέλη μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ταυτίζονται, δηλ.

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\right)^2+\pi\left(-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\right)=$$

$$\frac{\pi^2}{4}-\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}+\frac{\pi^2}{4}+\rho-\frac{\pi^2}{2}+\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}=\rho.$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\right)^2+\pi\left(-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}\right)=$$

$$\frac{\pi^2}{4}+\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}+\frac{\pi^2}{4}+\rho-\frac{\pi^2}{2}-\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}=\rho.$$

135. Τὰ τοῦ ἀγνώστου εὑρισκόμενα ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως προσδιορίσματα εἶναι δύο, καὶ εἴδομεν (133) ὅτι εἶναι ἢ καὶ τὰ δύο θετικοὶ ἀριθμοί, ἢ τὸ μὲν θετικός, τὸ δὲ ἀντιθετικὸς ἀριθμός, ἢ εἶναι δύο ἀνυπάρκτων σύμβολα καὶ ὄχι ἀριθμοί, κτλ. Ἐνταῦθα δὲ θέλομεν ἐξετάσει πόσους διαφόρους προσδιορισμοὺς δυνατὸν νὰ προσδιορίζωνται οἱ γενικοὶ τύποι

$$\chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}.$$

Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τῶν προσδιορισμάτων τῶν τύπων τούτων τοῦ χ ἀπαιτεῖται πρῶτον νὰ εὑρίσκηται τὸ προσδιόρισμα τοῦ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν διόρου $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, τούτου νὰ ἐξάγηται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ αὐτὴ ἔπειτα νὰ προστίθηται εἰς τὸν ὅρον $-\frac{\pi}{2}$ ἢ ν' ἀφαιρῆται ἀπ' αὐτόν. Ἡ δὲ γενικὴ ἐξίσωσις, ἐπειδὴ ὁ $\pi\chi$ ὅρος δυνατὸν νὰ ἦναι θετικὸς ἢ ἀντιθετικός, καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος ρ ὡσαύτως, θέλει εἶσθαι $\chi^2+\pi\chi=+\rho$, ἢ $\chi^2-\pi\chi=+\rho$, ἢ $\chi^2+\pi\chi=-\rho$, ἢ $\chi^2-\pi\chi=-\rho$, ἢ ἂν ἑνωθῶσιν αἱ δύο πρῶται καὶ αἱ δύο τελευταῖαι $\chi^2\pm\pi\chi=+\rho$, καὶ $\chi^2\pm\pi\chi=-\rho$.

ά. Καὶ ὅταν μὲν ὁ γνωστὸς ὅρος ἦναι θετικὸς $+\rho$ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως, δηλ. $\chi^2\pm\pi\chi=\rho$, τότε τὸ προσδιόρισμα τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$ εἶναι θετικόν, ὡς καὶ τοῦ τετραγώνου $\frac{\pi^2}{4}$.

ὄντος πάντοτε θετικοῦ· ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ δῆλον ὅτι θέλει εἶσθαι μεγαλητέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μόνου τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$ ἤτοι τοῦ $\frac{\pi}{2}$. Ὥστε, ὅταν μὲν ἦναι θετικὸν τὸ π ἐν τῇ ἐξισώσει, ὁπότε ὁ $\frac{\pi}{2}$ εἶναι ἀντιθετικὸς ἐν τῳ τύπῳ, πρέπειν' ἀφαιρῆται οὗτος ἀπὸ τὴν θετικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, καὶ νὰ προστιθῆται εἰς τὴν ἀντιθετικήν, καὶ οὕτω θέλει εὑρίσκεσθαι ἓν θετικὸν προσδιόρισμα τοῦ χ καὶ ἓν ἀντιθετικόν, τὸ ὁποῖον θέλει εἶσθαι μεγαλήτερον τοῦ θετικοῦ. Ὅταν δὲ ἦναι ἀντιθετικὸν τὸ π ἐν τῇ ἐξισώσει, τότε ἀντιστρόφως θέλει προστιθεσθαι τὸ $\frac{\pi}{2}$ εἰς τὴν θετικήν, καὶ θέλει ἀφαιρεῖσθαι ἀπὸ τὴν ἀντιθετικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{\pi^2}{4}+\rho$, μεγαλήτερον δὲ προσδιόρισμα τοῦ χ θέλει εἶσθαι τὸ θετικόν. Σύντομα, *ὅταν ὁ γνωστὸς ὅρος ἦναι θετικὸς ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως, ὁ ἄγνωστος ἔχει δύο προσδιορίσματα ἀντίθετα, ὧν μεγαλήτερον εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ συνεργοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου.*

β΄. *Ὅταν δὲ τὸ $\rho=0$, ἤτοι ὅταν λείπῃ ὁ γνωστὸς ὅρος, ἡ δ' ἐξίσωσις ἦναι $\chi^2\pm\pi\chi=0$, ἢ $\chi(\chi\pm\pi)=0$, καὶ ἐκ τοῦ τύπου καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως δῆλον ὅτι $\chi=0$ καὶ $\chi=\mp\pi$.* Διότι τότε τὸ $\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}$ εἶναι ἴσον μὲ $\pm\frac{\pi}{2}$, τὸ ὁποῖον ὁμοῦ μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ $\frac{\pi}{2}$ θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν ἀποτελεῖ 0 καὶ π θετικὸν ἐκ τῆς $\chi^2-\pi\chi=0$, ἀντιθετικὸν δ' ἐκ τῆς $\chi^2+\pi\chi=0$. Τῆς δὲ ἐξισώσεως τὸ πρῶτον μέλος, γινόμενον ὂν δύο παραγόντων, γίνεται ἴσον μὲ τὸ 0 ἢ ἂν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων γείνῃ ἴσος μὲ τὸ 0 ἢ ἂν ὁ ἄλλος· ὅθεν

$$\chi=0, \text{ καὶ } \chi=\pi \text{ κτλ.}$$

γ΄. Ὅταν δ' ὁ γνωστὸς ὅρος ἦναι ἀντιθετικὸς ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει, δηλ. $\chi^2\pm\pi\chi=-\rho$, τότε 1) ἐὰν μὲν ἦναι $\rho<\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ῥιζόσημον εἶναι μικρότερον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζας τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$ ἤτοι τοῦ $\frac{\pi}{2}$, καὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσίν του καὶ πρόσθεσίν του εἰς τὸν πρὸ αὐτοῦ ὅρον $\frac{\pi}{2}$, θέλουσι προκύψει δύο προσδιορίσματα τοῦ χ ὁμόσημα μὲν πρὸς ἑαυτά, ἀντίθετα δὲ πρὸς τὸ ἐν τῇ ἐξισώσει π.

2. Ἐὰν δὲ $\rho=\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ῥιζόσημον εἶναι ἴσον μὲ τὸ 0 καὶ τὸ χ ἔχει ἓν προσδιόρισμα $\frac{\pi}{2}$, ἀντίθετον τοῦ ἐν τῇ ἐξισώσει π. Τότε, ὄντος $\rho=\frac{\pi^2}{4}$, ἡ ἐξίσωσις θέλει εἶσθαι

$$\chi^2\pm\pi\chi=-\frac{\pi^2}{4} \text{ ἢ } \chi^2\pm\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=0, \text{ ἢ } \left(\chi\pm\frac{\pi}{2}\right)^2=0,$$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος ὡς τετράγωνον μόνον διὰ $\frac{\pi}{2}$ ἢ $-\frac{\pi}{2}$ ἀντὶ χ ταυτίζεται μὲ τὸ δεύτερον καὶ ὄχι δι' ἄλλου.

3. Ἐὰν δὲ $\rho>\frac{\pi^2}{4}$, τὸ ῥιζόσημον ἀποβαίνει σύμβολον ἀνυπάρκτων, καὶ διὰ τοῦτο καὶ τὰ προσδιορίσματα τοῦ χ εἶναι φανταστικά.

136. Παρόμοια μὲ τὰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις λύονται καὶ τοῦ τετάρτου βαθμοῦ αἱ ἐξισώσεις, ὅσαι εἶναι τρίοροι, ἔχουσαι πρῶτον ὅρον τὴν τετάρτην δύναμιν τοῦ ἀγνώστου, δεύτερον τὸ γινόμενον τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου ἐπί τινα γνωστὸν ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀντιθετικόν, καὶ τρίτον γνωστόν τινα ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀντιθετικόν, οἷον

$$\chi^4+\pi\chi^2=\rho.$$

Πρὸς λύσιν ταύτης ὑποθέτομεν πρῶτον τὸ $\chi^2=\omega$, καὶ ἡ ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ταύτην

$$\omega^2+\pi\omega=\rho,$$

ὅθεν $\omega=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}$ καὶ $\omega=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}$.

Θέτοντες τώρα ἀντὶ ω τὸ χ^2, καὶ λύοντες τὰς δύο ἐξισώσεις ὡς ἐν ἀρ. 132, ἔχομεν

$$\chi=\pm\sqrt{-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}}, \quad \chi=\pm\sqrt{-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\rho}},$$

Κατὰ τοὺς τύπους τούτους λοιπὸν εὑρίσκεται τὸ χ τῆς μορικῆς

$$\chi^4-12\chi^2=64$$

ἀφοῦ τεθῇ ἀντὶ $+\pi$ τὸ -12 καὶ ἀντὶ $+\rho$ τὸ $+64$, καὶ ἔχομεν
$$\chi=\pm\sqrt{6+\sqrt{36+64}}=\pm 4,$$
$$\chi=\pm\sqrt{6-\sqrt{36+64}}=\pm 2\sqrt{-1}.$$
Βλέπομεν δὲ ὅτι τὰ ἐκ τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως προσδιορίσματα τοῦ χ εἶναι τέσσαρα, δύο μὲν ὑπαρκτικά, δύο δὲ φανταστικά.

Περὶ λύσεως ἄλλων τινῶν ἐξισώσεων δύο ἢ τριῶν μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

137. Ἡ λύσις δύο γενικῶν ἢ πλήρων δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι δύσκολος νὰ γείνῃ, διότι προαπαιτεῖ γενικῶς τὴν γνῶσιν τοῦ πῶς λύονται ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ τοῦ δευτέρου. Ἀλλ' εἶναί τινες ἐλλιπεῖς ἐξισώσεις, αἵτινες λύονται ὡς αἱ προηγούμεναι, καὶ περὶ αὐτῶν λέγομεν ἐνταῦθα ὀλίγα τινά.

Α'. Ἔστωσαν εἰς λύσιν αἱ ἐξισώσεις
$$\chi+\omega=a,\quad \chi^2+\omega^2=\beta^2,$$
ὧν ἡ μὲν ἔχει πρῶτον μέλος τὸ κεφάλαιον τῶν πρώτων δυνάμεων τῶν ἀγνώστων, ἡ δὲ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Πρῶτον ἀπαλείφομεν τὸν ἕτερον τῶν ἀγνώςων, οἷον τὸν ω, δι' ἀντικαταςάσεως· ἤγουν ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $\omega=a-\chi$ καὶ τὸ τετράγωνον $a^2-2a\chi+\chi^2$ θέτομεν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ τοῦ ω^2· γίνεται δὲ ἡ δευτέρα
$$\chi^2+a^2-2a\chi+\chi^2=\beta^2,\ \text{ἢ}\ \chi^2-a\chi=\frac{\beta^2-a^2}{2},$$
ὅθεν
$$\chi=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{\beta^2-a^2}{2}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}.$$
Θέτοντες δ' ἐν τῇ $\omega=a-\chi$ ἀντὶ τοῦ χ τὰ εὑρεθέντα ἤδη ἰσοδύναμα αὐτοῦ ἔχομεν
$$\omega=a-\frac{a}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}=\frac{a}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ χ καὶ ὁ ω ἔχουσι δύο τύπους, πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὁμοῦ ὁ πρῶτος τοῦ χ καὶ ὁ πρῶτος τοῦ ω, ἢ ὁ δεύτερος καὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ω, δηλ.

$$\left\{\begin{array}{ll} \chi=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}, & \chi=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}, \\ \omega=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}. & \omega=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2-a^2}. \end{array}\right\}$$

Ὡσαύτως λύονται καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ 105 καὶ τοῦ 107 προβλήματος, ἂν καὶ διαφέρει ἡ μία αὐτῶν τῆς μιᾶς τῶν προηγουμένων κατά τι.

Β. Ἔστωσαν εἰς λύσιν καὶ αὗται

$$\chi^2+\omega^2=a^2, \quad \chi\omega=\beta^2,$$

ὧν ἡ μὲν ἔχει πρῶτον μέλος τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων; ἡ δὲ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Λύονται δ' αὗται καὶ ἂν ἐν τῇ πρώτῃ ἀντὶ ω^2 τεθῇ τὸ ἐκ τῆς δευτέρας ποριζόμενον $\frac{\beta^4}{\chi^2}$ ἰσοδύναμον τοῦ ω^2, καὶ ἔπειτα λυθῇ ἡ προκύπτουσα τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἐξίσωσις $\chi^4-a^2\chi^2=-\beta^4$, οἱ δὲ τύποι τοῦ χ τεθῶσιν ἐν τῇ $\omega=\frac{\beta^2}{\chi}$ ἀντὶ τοῦ χ. Ἀλλ' εἶναι προτιμότερον νὰ λυθῶσιν ὡς ἐφεξῆς.

Πρῶτον διπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας, καὶ τὸ μὲν διπλάσιον $2\chi\omega$ γράφομεν πρῶτον θετικόν, καὶ ἔπειτ' ἀντιθετικὸν ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς πρώτης, τὸ δὲ διπλάσιον $2\beta^2$ γράφομεν ὡσαύτως ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς πρώτης· οὕτω δ' ἔχομεν

$$\chi^2+2\chi\omega+\omega^2=(\chi+\omega)^2=a^2+2\beta^2;$$

$$\text{καὶ } \chi^2-2\chi\omega+\omega^2=(\chi-\omega)^2=a^2-2\beta^2.$$

Καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ποριζόμεθα $\chi+\omega=\pm\sqrt{a^2+2\beta^2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $\chi-\omega=\pm\sqrt{a^2-2\beta^2}$.

Τώρα εὑρόντες τὸ ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων καὶ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν προσδιορίζομεν τοὺς ἀγνώστους χ καὶ ω κατὰ τὰ ἐν ἀρ. 70 εἰρημένα. Ἄλλως, προσθέτοντες τὰ πρῶτα μέλη εἰς ἄλληλα καὶ τὰ δεύτερα ὡσαύτως, καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦντες τὰ αὐτά, ἔχομεν

$$2\chi=\pm\sqrt{a^2+2\beta^2}\pm\sqrt{a^2-2\beta^2},$$

καὶ $$\chi=\frac{\pm\sqrt{a^2+2\beta^2}\pm\sqrt{a^2-2\beta^2}}{2},$$

$$2\omega=\pm\sqrt{a^2+2\beta^2}\mp\sqrt{a^2-2\beta^2},$$

καὶ $$\omega=\frac{\pm\sqrt{a^2+2\beta^2}\mp\sqrt{a^2-2\beta^2}}{2}.$$

Γ. Αἱ τοῦ 108 προβλήματος τρεῖς ἐξισώσεις

$$\chi+\psi+\omega=126,\quad \chi\psi\omega=13824,\quad \omega=\frac{\psi^2}{\chi},$$

λύονται ὡς ἐφεξῆς.

Πρῶτον τίθεται ἐν τῇ πρώτῃ καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἐκ τῆς τρίτης ἰσοδύναμόν του $\frac{\psi^2}{\chi}$, καὶ ἔχομεν

$$\chi+\psi+\frac{\psi^2}{\chi}=126,\qquad \chi\psi\times\frac{\psi^2}{\chi}=13824,$$

$$\text{ἢ } \chi^2+\chi\psi+\psi^2=126\chi,\qquad \text{ἢ } \psi^3=13824, \text{ ὅθεν}$$

$$\psi=\sqrt[3]{13824} \text{ ἢ } \psi=24.$$

Ἔπειτα τίθεται ἐν τῇ $\chi^2+\chi\psi+\psi^2=126\chi$ ἀντὶ τοῦ ψ ὁ 24 καὶ ἀντὶ ψ^2 τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, ἤτοι ὁ 576, καὶ τρέπεται εἰς ταύτην $\chi^2+24\chi+576=126\chi$, ἢ εἰς ταύτην

$$\chi^2-102\chi=-576,$$

ὅθεν $$\chi=96 \text{ καὶ } \chi=6.$$

Τελευταῖον, τιθεμένου τοῦ 24 ἀντὶ ψ καὶ τοῦ 96 ἢ τοῦ 6 ἀντὶ χ ἐν τῇ πρώτῃ ἢ ἐν τῇ τρίτῃ, εὑρίσκεται $\omega=6$ ἢ $\omega=96$. Λοιπὸν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι

96, 24, 6, ἢ 6, 24, 96.

4. Ὡσαύτως λύονται καὶ αἱ τοῦ 109 προβλήματος ἐξισώσεις

$$\chi^2+\psi^2+\omega^2=104,\ \psi^2=\chi\omega+52,\ \chi=\omega+4.$$

Πρῶτον τίθεται ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ χ τὸ ἐκ τῆς τρίτης ἰσοδύναμόν του $\omega+4$ καὶ εὑρίσκεται $\psi^2=\omega^2+4\omega+52$. Ἔπειτα τίθεται ἐν τῇ πρώτῃ τὸ ἤδη εὑρεθὲν ἰσοδύναμον τοῦ ψ^2 καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $\omega+4$ τοῦ ἰσοδυνάμου τοῦ χ, ἤτοι τὸ $\omega^2+8\omega+16$, καὶ ἔχομεν $\omega^2+8\omega+16+\omega^2+4\omega+52+\omega^2=104$, ἢ μετὰ τὴν μετάθεσιν, τὴν συστολὴν καὶ τὴν διὰ 3 διαίρεσιν ὅλων τῶν ὅρων

$$\omega^2+4\omega=12,$$

ὅθεν $\omega=-2\pm\sqrt{12+4}$, ἢ $\omega=2$ καὶ $\omega=-6$.

Ἐκ δὲ τῆς $\chi=\omega+4$ εὑρίσκεται $\chi=6$ καὶ $\chi=-2$.

Ἐκ δὲ τοῦ $\psi^2=\chi\omega+25$ εὑρίσκεται $\psi=8$ καὶ $\psi=-8$.

Περὶ λύσεως καὶ διαπιλύσεως δευτεροβαθμίων προβλημάτων.

138. Καὶ τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα λύονται ὡς τὰ πρωτοβάθμια, ἤγουν πρῶτον κατασκευάζεται ἑκάστου ἡ ἐξίσωσις ἢ αἱ ἐξισώσεις καθ' ἃ εἴπομεν ἐν τῷ τρίτῳ κεφαλαίῳ, ἔπειτα, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἢ αἱ ἐξισώσεις ἦναι δευτεροβάθμιαι ὅμοιαι μὲ τὰς ὁποίας προηγουμένως ἐλύσαμεν, λύονται καὶ αὗται καθ' ἃ ἤδη προλαβόντως εἴπομεν. Ἀλλ' ἐκ τοιούτων ἐξισώσεων λυθεισῶν πορίζεται συνήθως ἑκάστου ἀγνώστου διπλοῦν προσδιόρισμα, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις παρετηρήσαμεν, ἂν καὶ τὸ προκείμενον εἰς λύσιν πρόβλημα ἦναι προσδιωρισμένον. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ ἐπιστήσωμεν ὀλίγον τὴν προσοχήν μας ἐπὶ τῶν εὑρισκομένων προσδιορισμάτων τῶν ἀγνώστων, ἵνα ἐννοήσωμεν τίνα χρῆσιν αὐτῶν ἁρμόζει νὰ κάμνωμεν.

139. Ὅταν λύοντες δευτεροβάθμιον πρόβλημα εὕρωμεν ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου δύο ἀριθμούς, τὸν μὲν θετικόν, τὸν δὲ ἀντιθετικόν, συνηθέστατα ὁ θετικὸς μόνον εἶναι ὁ ζητούμενος, ἂν δὲν ἐμποδίζῃ τι τῶν ἐν ἀρ. 92 παρατηρηθέντων, ὁ δὲ ἀντιθετικὸς ἀνήκει εἰς ἄλλο πρόβλημα, διαφέρον τοῦ δεδομένου ἢ ἁπλῶς κατά τι

ποσὸν ἀντίθετον, ἢ καὶ κατ' ἄλλα, καὶ οὗτινος ἡ ἐξίσωσις λαβοῦσα τὴν γενικὴν μορφὴν διαφέρει τῆς τοῦ δεδομένου προβλήματος μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου.

Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι τὸ 102, τὸ 103 καὶ τὸ 104. Διότι τοῦ 102 ἡ ἐξίσωσις λαβοῦσα τὴν γενικὴν μορφὴν εἶναι $\chi^2+18\chi=2520$, ὅθεν $\chi=42$ καὶ $\chi=-60$. Καὶ ὁ μὲν 42 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν. Ὁ δὲ -60 δῆλον ὅτι δὲν ἀνήκει εἰς τὸ 102 πρόβλημα, ἀλλὰ θετικὸς ἐκλαμβανόμενος 60 ἀνήκει καὶ εἰς τοῦτο τὸ πρόβλημα,

Πόσων ἐτῶν εἶναι ἐρωτηθείς τις ἀπεκρίθη, Μ' ἐγέννησεν ἡ μήτηρ μου εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους αὐτῆς, ἂν δ' ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπεροχὴ τῆς ἡλικίας της ὑπὲρ τὴν ἰδικήν μου ἀπὸ τὴν ἰδικήν μου καὶ πολλαπλασιασθῇ ἡ διαφορὰ ἐπὶ τὴν ἡλικίαν μου, εὑρίσκεται γινόμενον ἴσον μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ 2520 ὑπὲρ τὸ διπλάσιον τῆς ἡλικίας μου· πόσων ἐτῶν ἦτον;

τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει τις, ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ προβλήματος θέσῃ $-\chi$ ἀντὶ χ, καὶ ὁδηγούμενος ἐκ τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως $-\chi(-\chi+20)=-2\chi+20+2500$, ἤ, ὅπερ ταὐτόν, ἐκ τῆς $\chi(\chi-20)=-2\chi+2520$, ἀνεύρῃ τὸ πρόβλημα, οὗτινος εἶναι ἐξίσωσις.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη λαβοῦσα τὴν γενικὴν μορφὴν εἶναι $\chi^2-18\chi=2520$, ἥτις διαφέρει τῆς τοῦ 102 προβλήματος μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ μὲ τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ χ ὅρου, καὶ ἥτις λυθεῖσα δίδει $\chi=60$ καὶ $\chi=-42$, δηλ. τὸν ἀντιθετικὸν -60 τοῦ 102 προβλήματος θετικόν, τὸν δὲ θετικὸν 42 ἀντιθετικόν.

Ὡσαύτως καὶ τοῦ 103 ὁ ἄγνωστος χ εὑρέθη (133) ἴσος μὲ 12 καὶ μὲ -15. Καὶ ὁ μὲν 12 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν μανδηλίων, ὁ δὲ -15 θετικὸς θεωρούμενος ἀνήκει καὶ εἰς τὸ πρόβλημα,

Ἠγόρασα μανδήλια ἀντὶ 60 δραχμῶν, ἀλλ' ἐὰν μὲ τὰ

αὐτὰ χρήματα ἐλάμβανα 3 ὀλιγώτερα, ἕκαστον ἤθελεν ἀξίζει 1 δρ περισσότερον· πόσα ἠγόρασα;
τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις ἠγμένη εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν εἶναι $\chi^2-3\chi=180$, διαφέρουσα τῆς τοῦ 108 προβλήματος μόνον καθότι ἔχει -3χ ἀντὶ τοῦ $+3\chi$, καὶ ἥτις λυθεῖσα δίδει $\chi=15$ καὶ $\chi=-12$.

Εὐκόλως δέ τις καὶ τὸν τοῦ 104 ἀντιθετικὸν -6 θετικὸν θεωρούμενον δύναται νὰ ἐννοήσῃ εἰς ὁποῖον πρόβλημα ἀνήκει. Ἐνίοτε ὅμως δὲν εἶναι τόσον εὔκολον νὰ προσδιορισθῇ τὸ πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει τὸ ἀντιθετικὸν προσδιόρισμα τοῦ ἀγνώστου θετικὸν ἐκλαμβανόμενον. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι καὶ περιττόν, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἠξεύρῃ τις ὅτι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος καὶ ὅτι ὁ ἀντιθετικὸς εἶναι ἄλλου προβλήματος, ἀλλ' ὄχι ἐκείνου, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ ἄγνωστος, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι παραβλεπτέος. Σπανιώτερα δὲ καὶ ὁ ἀντιθετικὸς ἀνήκει εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα (ἰδὲ 142, 6).

140. Ὅταν δὲ καὶ οἱ δύο ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ ἦναι θετικοί, τότε καὶ οἱ δύο ἀνήκουσιν εἰς τὸ πρόβλημα, ἂν τι τῶν ἐν ἀρ. 94 παρατηρηθέντων δὲν κωλύῃ. Τοιοῦτοι δὲ εἶναι οἱ τοῦ 110 προβλήματος ἀντὶ τοῦ χ εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ 60 καὶ 40, διότι καὶ οἱ δύο ἁρμόζουσιν εἰς τὸ πρόβλημα. Ἀλλ' ἐκ τῶν δύο εὑρεθέντων (133) ἀριθμῶν 150 καὶ 6 ἀντὶ τοῦ χ τοῦ 106 προβλήματος ὁ πρῶτος μόνος ἁρμόζει εἰς αὐτό, ὁ δὲ δεύτερος 6, καίτοι θετικός, δὲν ἁρμόζει, ὡς μὴ συμβιβαζόμενος μὲ ὅλα τὰ δεδομένα αὐτοῦ.

Τοῦ ἀκολούθου δὲ προβλήματος,

Νὰ μερισθῇ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς π εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ γινόμενον νὰ ἦναι ἴσον μὲ ἄλλον δεδομένον ἀριθμὸν ρ.
οὗτινος ἡ ἐξίσωσις, ὑποτεθέντος χ τοῦ ἑτέρου μέρους, εἶναι

$$\chi(\pi-\chi)=\rho, \text{ ἢ } \pi\chi-\chi^2=\rho, \text{ ἢ } \chi^2-\pi\chi=-\rho,$$

εἶναι τὸ $\chi=\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$, καὶ ἑπομένως τὰ δύο προσδιορίσματα τοῦ χ εἶναι θετικά, ἐὰν $\rho<\frac{\pi^2}{4}$ (ἀρ. 135, γ΄.). Ταῦτα δὲ καὶ τὰ δύο ἁρμόζουσιν εἰς τὸ πρόβλημα, ἤτοι καὶ τὸ $\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-\rho}$ καὶ τὸ $\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$, ἀντὶ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ σημειωθέντος διὰ χ. Ἀλλ' ἐνταυθῷ παρατηρητέον ὅτι, ἂν ἐκληφθῇ τὸ $\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$ ἀντὶ τοῦ χ, τότε τὸ $\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-\rho}$ παριστάνει τὸν ἄλλον, τὸν ἀνωτέρω σημειωθέντα διὰ $\pi-\chi$, ὡς βλέπει τις, ἂν ἀπὸ τὸ π ἀφαιρέσῃ τὸ $\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$· καὶ *τἀνάπαλιν*. Ὥστε τὰ δύο προσδιορίσματα τοῦ χ εἶναι τὰ δύο ζητούμενα μέρη τοῦ δεδομένου π, καὶ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ χ ὁπότερον ἂν θέλωμεν, τὸ δὲ δεύτερον εἶναι πάντοτε τὸ ἄλλο ζητούμενον μέρος. Καὶ οὕτως ἔπρεπε νὰ ἦναι, διότι διὰ τοῦ χ δὲν ἐσημειώσαμεν μᾶλλον τὸ ἓν μέρος παρὰ τὸ ἄλλο, ἀλλὰ τὸ ἕτερον, τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ τὸ μικρότερον καὶ τὸ μεγαλήτερον.

Παρατηρητέον δ' ἐν παρόδῳ ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι δυνατὸν, ἐνόσῳ εἶναι τὸ $\rho<\frac{\pi^2}{4}$, ἢ τὸ πολὺ $\rho=\frac{\pi^2}{4}$, ἤτοι ἐνόσῳ τὸ δεδομένον γινόμενον τῶν δύο μερῶν τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ εἶναι τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ· ὁπότε εἶναι τὸ $\chi=\frac{\pi}{2}$, ἤτοι ἑκάτερον ζητούμενον μέρος ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ. Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι τὸ *μέγιστον γινόμενον τῶν δύο μερῶν ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἴσοι, καὶ ἥμισυ ἑκάτερος τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ*· Οὕτως, ἂν ὁ 24 π. χ. μερισθῇ εἰς 12 καὶ 12, ἢ εἰς 11 καὶ 13, ἢ εἰς 10 καὶ 14 κτλ, τὸ μέγιστον τῶν γινομένων τούτων τῶν μερῶν εἶναι τὸ τοῦ 12 ἐπὶ 12, ἤτοι τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ 24.

Τοῦτο δὲ γίνεται φανερὸν καὶ οὕτως. Ἐπειδὴ εἶναι γνωστὸν τὸ κεφάλαιον π τῶν δύο ζητουμένων μερῶν, ἂν σημειωθῇ διὰ ω καὶ ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν, τότε (70) τὸ μὲν μεγαλήτερόν μέρος θέλει εἶσθαι $\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2}$, τὸ δὲ μικρότερον $\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$, τὸ δὲ γινόμενόν των $\frac{\pi^2}{4}-\frac{\omega^2}{4}$. Ἀλλὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἦναι ἴσον καὶ μὲ τὸ ρ· λοιπὸν $$\frac{\pi^2}{4}-\frac{\omega^2}{4}=\rho.$$

Ἐντεῦθεν δὲ δῆλον ὅτι, ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ ὅρος $\frac{\omega^2}{4}$, τόσον μεγαλήτερον εἶναι τὸ γινόμενον ρ, καὶ ὅτι μέγιστον θέλει εἶσθαι, ὅταν ὁ $\frac{\omega^2}{4}$ ἦναι ἴσος μὲ 0, τὸ ὁποῖον συμβαίνει ὅταν τὸ $\omega=0$, ἤτοι ὅταν τὰ δύο μέρη ἦναι ἴσα. Τότε δὲ εἶναι τὸ ρ ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ π.

141. Ὅταν δ' εὑρίσκηται ἀντὶ τοῦ x εἷς μόνος θετικὸς ἀριθμὸς, τότε αὐτὸς θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος, ἂν δὲν ὑπάρχῃ τι κώλυμα (92). Ὅταν δ' εὑρίσκηται εἷς μόνος ἀντιθετικὸς ἢ δύο ἀντιθετικοὶ, τότε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ὡς ἐν ἀρ. 93 καὶ ἐφεξῆς εἴπομεν. Ὅταν δὲ τελευταῖον τὰ ἰσοδύναμα τοῦ x εὑρεθῶσιν ἀνυπάρκτων σύμβολα, τότε τὸ πρόβλημα εἶναι κατὰ πάντα τρόπον ἀδύνατον, ὡς ἐν ἀρ· 100 καὶ ἐφεξῆς καὶ ἐν ἀρ 109. ἑ. εἴπομεν, οἷον τὸ τοῦ 140 ἀρ·, ὅταν $\rho>\frac{\pi^2}{4}$.

Δὲν ἐκτεινόμεθα πλειότερον περὶ τῶν μερικῶν, ἀλλ' εὐθὺς ἐπιχειροῦμεν τὴν διεπίλυσιν τοῦ ἑξῆς γενικοῦ προβλήματος.

142. *Εὐθείας, ἐφ' ἧς ἵστανται δύο λαμπάδες ἀναμμέναι, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπίσης ὑφ' ἑκατέρας φωτιζόμενον σημεῖον.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀπαιτεῖται νὰ ἠξεύρῃ τις τὸ ἐν τῇ Φυσικῇ ἀποδεικνυόμενον τοῦτο, ὅτι τὸ φῶς ἀπομακρυνόμενον τῆς ἑστίας του ἐξασθενεῖ, γίνεται ἀμυδρότερον, ἢ, ὡς λέγουσιν, ἐλαττοῦται κατὰ τὴν ἔντασιν· δύο δὲ εντάσεις τοῦ αὐτοῦ φωτὸς, τὰς ὁποίας ἔχει εἰς δύο διαφόρως ἀπέχοντα τῆς ἑστίας του σημεῖα, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων. Οἷον, ἂν ὑποτεθῇ 1 ἡ ἔντασις, ἣν ἔχει φῶς τι εἰς σημεῖον ἕνα πῆχυν ἀπέχον τῆς ἑστίας του, ἡ ἔντασίς του εἰς σημεῖον ἀπέχον δύο πήχεις, τρεῖς κτλ θέλει εἶσθαι τὸ τέταρτον, τὸ ἔννατον κτλ τῆς ὑποτεθείσης ὡς μονάδος ἐντάσεώς του.

Γ'' Α Γ Β Γ'

Τούτου οὕτως ἔχοντος, ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ δύο λαμπάδες, καὶ δ τὸ μεταξὺ αὐτῶν διάστημα ΑΒ· ὑποθέτομεν δὲ ὅτι Γ εἶναι τὸ ἐπίσης ὑφ' ἑκατέρας φωτιζόμενον σημεῖον, καὶ ὅτι $ΑΓ=\chi$, ὅθεν ἕπεται ὅτι $ΒΓ=\delta-\chi$. Ἐὰν δὲ ἡ ἔντασις τοῦ ἐκ τῆς Α λαμπάδος φωτὸς κατὰ τ' ἀπέχοντα τοῦ Α μίαν τινὰ μονάδα σημεῖα σημειωθῇ διὰ α, ἡ δὲ τοῦ ἐκ τῆς Β λαμπάδος φωτὸς ἔντασις κατὰ τὰς προειρημένας ἀποστάσεις σημειωθῇ διὰ β, ἡ ἔντασις τοῦ Α φωτὸς κατὰ τ' ἀπέχοντα 2, 3, 4... μονάδας σημεῖα εἶναι $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{9}$, $\frac{\alpha}{16}$, καὶ $\frac{\alpha}{\chi^2}$ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἡ δ' ἔντασις τοῦ Β φωτὸς κατὰ τὸ σημεῖον Γ δῆλον ὅτι εἶναι $\frac{\beta}{(\delta-\chi)^2}$. Ἀλλ' αἱ ἐντάσεις αὗται πρέπει νὰ ἦναι ἴσαι· λοιπὸν ἔχομεν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος τὴν

$$(\alpha) \qquad \frac{\alpha}{\chi^2}=\frac{\beta}{(\delta-\chi)^2},$$

ἐξ ἧς λυθείσης εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\alpha\delta}{\alpha-\beta}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2\delta^2}{(\alpha-\beta)^2}-\frac{\alpha\delta^2}{\alpha-\beta}},$$

ἢ ἁπλούστερα $\chi=\frac{\delta(\alpha\pm\sqrt{\alpha\beta})}{\alpha-\beta}$

Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν ν' ἀπαλλαχθῶμεν τοῦ ῥιζοστίμου, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς (α) ἐξισώσεως ἐπὶ $(\delta-x)^2$ καὶ ἔπειτα τὰ διαιρέτωμεν διὰ $\frac{\alpha}{x^2}$, τῆς δὲ προκυπτούσης ἐξισώσεως $(\delta-x)^2=\frac{\beta}{\alpha}x^2$ τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ σημειώσωμεν διὰ γ^2, ἤτοι $\gamma=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Οὕτως ἡ (α) ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ταύτην

(β) $$(\delta-x)^2=\gamma^2x^2,$$

ὅθεν $$\delta^2-2\delta x+x^2=\gamma^2x^2$$

$$(1-\gamma^2)x^2-2\delta x=-\delta^2$$

$$x^2-\frac{2\delta}{1-\gamma^2}x=\frac{-\delta^2}{1-\gamma^2}$$

$$x=\frac{\delta}{1-\gamma^2}\pm\sqrt{\frac{\delta^2}{(1-\gamma^2)^2}-\frac{\delta^2}{1-\gamma^2}}=\frac{\delta}{1-\gamma^2}\pm$$

$$\sqrt{\frac{\delta^2-\delta^2+\gamma^2\delta^2}{(1-\gamma^2)^2}}=\frac{\delta}{1-\gamma^2}\pm\frac{\gamma\delta}{1-\gamma^2}=\frac{\delta(1\pm\gamma)}{1-\gamma^2}=\frac{\delta(1\pm\gamma)}{(1+\gamma)(1-\gamma)}$$

ὅθεν $$x=\frac{\delta}{1+\gamma}\text{ καὶ }x=\frac{\delta}{1-\gamma}.$$

Ἀλλ' εἰς ταῦτα ἠθέλαμεν καταντήσει ἁπλούστερα ἐξάγοντες ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (β) τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ λύοντες ἔπειτα τὴν προκύπτουσαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\delta-x=\pm\gamma x.$$

Ἐκ δὲ τούτου βλέπει τις ὅτι ἐνίοτε δι' ἰδιαιτέρας μεθόδου φθάνομεν συντομώτερα εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα φέρει καὶ ἡ γενική.

Διερεύνησις. Ἐνόσῳ αἱ λαμπάδες ἀπέχουσί τι ἀπ' ἀλλήλων, ἤτοι τὸ δ δὲν εἶναι 0, οἱ διάφοροι προσδιορισμοὶ τῶν δεδομένων τῶν ἐν τοῖς τύποις

$$x=\frac{\delta}{1+\gamma}\qquad\text{καὶ}\qquad x=\frac{\delta}{1-\gamma}$$

δυνατὸν νὰ καταστήσωσι τὸ $\gamma<1$, ἢ >1, ἢ $=1$. Ἀλλ' ἐν-τος τοῦ γ· ἴσου μὲ τὴν $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. τὸ μὲν $\gamma<1$ σημαίνει ὅτι τοῦ Α φωτὸς ἡ ἔντασις εἶναι μεγαλητέρα τῆς τοῦ Β. διότι, ἵνα ἦναι $\gamma<1$ ἤτοι $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}<1$, ἀνάγκη νὰ ἦναι καὶ τὸ $\frac{\beta}{\alpha}<1$, ἤτοι $\alpha>\beta$. Τὸ δὲ $\gamma>1$ σημαίνει ὅτι $\alpha<\beta$, ἤτοι ὅτι τοῦ Α φωτὸς ἡ ἔντασις εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ Β. Τελευταῖον τὸ $\gamma=1$ σημαίνει ὅτι τὸ $\alpha=\beta$, ἤτοι ὅτι αἱ ἐντάσεις τῶν δύο φώτων εἶναι ἴσαι.

ά. Ὅταν μὲν λοιπὸν $\gamma<1$, 1) ὁ μὲν παρονομαστὴς $1+\gamma$ τοῦ πρώτου τύπου τοῦ χ εἶναι θετικὸς καὶ μεγαλήτερος μὲν τῆς 1, μικρότερος δὲ τοῦ 2· ἑπομένως ὁ τύπος $\frac{\delta}{1+\gamma}$ εἶναι θετικὸς καὶ $<\delta$, ἀλλὰ $>\frac{\delta}{2}$. Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι *τὸ ἐπίσης ὑφ' ἑκατέρας λαμπάδος φωτιζόμενον σημεῖον κεῖται μεταξὺ αὐτῶν, εἶναι δὲ μακρύτερα τῆς Α παρὰ τῆς Β λαμπάδος*. Καὶ τῷ ὄντι τοῦτο συμβαίνει ὅταν $\alpha>\beta$· διότι τὰ φῶτα τῶν λαμπάδων ἀκτινοβολοῦντα πανταχόθεν φωτίζουσι καὶ τὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ σημεῖα, ἀλλὰ τοῦ Α φωτὸς ἡ ἔντασις ὡς μεγαλητέρα τῆς τοῦ Β, εἰς σημεῖον μακρύτερα τοῦ Α παρὰ τοῦ Β θέλει εἶσθαι ἴση μὲ τὴν ἔντασιν τοῦ Β. Λοιπὸν *τὸ ἐπίσης φωτιζόμενον* κτλ.

2) Ὁ δὲ παρονομαστὴς $1-\gamma$ εἶναι μὲν θετικὸς, ἀλλὰ μικρότερος τῆς μονάδος, καὶ διὰ τοῦτο ὁ τύπος $\frac{\delta}{1-\gamma}$ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ δ. Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι *εἶναι καὶ δεύτερον σημεῖον ἐπίσης φωτιζόμενον ὑφ' ἑκατέρας λαμπάδος, τὸ ὁποῖον κεῖται ὄχι μεταξὺ αὐτῶν, ἀλλὰ δεξιὰ καὶ τῶν δύο κατὰ τὸ Γ*. Καὶ τῷ ὄντι οὕτως ἔχει τὸ πρᾶγμα· διότι ἐκ τοῦ ὅτι φωτίζεται ἐπίσης ὑφ' ἑκατέρας λαμπάδος τὸ Γ ἕπεται ὅτι κατὰ τὸ σημεῖον Β τοῦ Α φωτὸς ἡ ἔντασις εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ Β, ἐκεῖθεν δὲ πρὸς δεξιὰ καὶ τῶν δύο φω-

των αἱ ἐντάσεις βαθμηδὸν σμικρύνουσιν, ἀλλὰ τοῦ Β ἡ ἔντασις ἐξασθενεῖ ταχύτερα ὡς μικροτέρα τῆς τοῦ Α. Ὥστε εἰς τι σημεῖον Γ' δεξιὰ τοῦ Β θέλουσι καταντήσει καὶ τῶν δύο αἱ ἐντάσεις ἴσαι, θέλουσι φωτίζει τὸ Γ' ἐπίσης καὶ τὰ δύο φῶτα.

Τοῦτο δὲ γίνεται δῆλον καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ Γ', καὶ ὅτι χ εἶναι τὸ ΑΓ' διάστημα, ὁπότε τὸ ΒΓ' παρίσταται διὰ $\chi-\delta$. Τότε δὲ ἡ ἐξίσωσις θέλει εἶσθαι

$$\frac{\alpha}{\chi^2}=\frac{\beta}{(\chi-\delta)^2},$$

ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀνωτέρω (α), διότι τὸ $(\chi-\delta)^2$ καὶ τὸ $(\delta-\chi)^2$ εἶναι τὸ αὐτό· λοιπὸν καὶ τὸ Γ σημεῖον καὶ τὸ Γ' προσδιορίζονται ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως· λοιπὸν, ἀφοῦ ἐκ τοῦ πρώτου τύπου τοῦ χ προσδιορίζεται τὸ Γ, ἐκ τοῦ δευτέρου ἀνάγκη νὰ προσδιορίζηται τὸ Γ'.

β'. Ὅταν δὲ $\gamma>1$, ἤτοι $\beta>\alpha$, ἕκαστος ἐννοεῖ ὅτι πάλιν συμβαίνουσι τὰ αὐτά, ἤτοι φωτίζεται ὑφ' ἑκατέρας λαμπάδος ἐπίσης ἓν σημεῖον κείμενον μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Β, ἀλλὰ πλησιέστερον τοῦ Α παρὰ τοῦ Β, καὶ ἄλλο ἓν Γ'' κείμενον ἀριστερὰ τοῦ Α, ἐπομένως καὶ τοῦ Β. Τοῦτο δὲ δεικνύουσι καὶ οἱ τύποι· διότι ὁ μὲν πρῶτος εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ $\frac{\delta}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος εἶναι ἀντιθετικός, ὅστις σημαίνει ὅτι τὸ ἐπίσης φωτιζόμενον σημεῖον εἶναι ὄχι δεξιὰ τῆς ἀρχῆς Α, ὡς ὑπετέθη πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐξισώσεως, ἀλλ' ἀριστερὰ της.

γ'. Ὅταν δὲ $\gamma=1$, ἤτοι $\alpha=\beta$, ὁ μὲν πρῶτος τύπος τρέπεται εἰς $\frac{\delta}{2}$ καὶ δεικνύει ὅτι *ἓν σημεῖον ἐπίσης φωτιζόμενον ὑπὸ τῶν δύο λαμπάδων εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ εὐθείας*. Καὶ τῷ ὄντι, ὅταν τῶν φώτων αἱ ἐντάσεις ἦναι ἴσαι, τὸ μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ ἴσον ἀπέχον τῶν δύο φωτίζεται ἐπίσης.

Ὁ δὲ δεύτερος τρέπεται εἰς $\frac{d}{0}$, τὸ ὁποῖον ἤδη ἠξεύρομεν ὅτι παριστάνει τὸ ἄπειρον, ἤτοι ὅτι ἀπέχει ἀπείρως πολὺ τοῦ Α τὸ ἐπίσης φωτιζόμενον σημεῖον, ἤτοι ὅτι ἀδύνατον νὰ φωτίζηται ἄλλο σημεῖον ἐπίσης ὑπὸ τῶν δύο φώτων· τὸ ὁποῖον εὐκόλως τις ἐννοεῖ, ἐνθυμούμενος ὅτι τῶν φώτων αἱ ἐντάσεις εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι εἶναι μακρὰν ἡ μία λαμπὰς τῆς ἄλλης.

Συνιστῶμεν τὴν διεπίλυσιν καὶ τοῦ 121 προβλήματος, ἔτι δὲ καὶ τῶν κατωτέρω 13 καὶ 14.

Ποικίλα προβλήματα εἰς λύσιν.

1. Ἐκ τῶν 32 παιγνιδοχάρτιων τῶν χρησίμων εἰς τὸ πικέτον ἐπαίρει τις τρία κατὰ τύχην καὶ ἐπιθέτει ἐφ' ἑκάστου αὐτῶν ὅσα χαρτία ἀρκοῦσιν εἰς τὸ νὰ γείνῃ 15 τὸ κεφάλαιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐπιτεθειμένων χαρτίων καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων τοῦ ἐφ' οὗ εἶναι ἐπιτεθειμένα χαρτίου· μετὰ ταῦτα μένουσιν ἔτι 8 χαρτία· πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν σημείων καὶ τῶν τριῶν ὁμοῦ εἰλημμένων χαρτίων; Καὶ γενικῶς,

Ὄντος *a* τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χαρτίων παιγνιδίου τινός, *λ* τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λαμβανομένων, *κ* τοῦ κεφαλαίου τῶν σημείων ἑκάστου χαρτίου ὁμοῦ μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπιτεθειμένων, καὶ *υ* τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑπολειπομένων χαρτίων, εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον τῶν σημείων τῶν *λ* χαρτίων τῶν κατ' ἀρχὰς εἰλημμένων.

2. Ἐμερίσθησαν 156 δρ. εἰς 16 πτωχόπαιδα ἀναλόγως τῶν ἡλικιῶν των καὶ οὕτως, ὥστε ἔλαβεν ἕκαστον πρεσβύτερον τοῦ ἀμέσως νεωτέρου του περισσοτέρας δρ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· λαβόντος δὲ τοῦ νεωτάτου 6 δρ, πόσας ἔλαβεν ὁ πρεσβύτατος;

3. Μέλλοντός τινος νὰ πληρώσῃ 2363 δρ ἐν 31 πληρωμαῖς

οὕτως, ὥστ' ἑκάστη τούτων νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀμέσως πρὸ αὐτῆς δρ 3, πόσων δρ εἶναι ἡ πρώτη πληρωμή;

4. Τίς εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις προστεθεὶς εἰς τὸν 15, εἰς τὸν 27 καὶ εἰς τὸν 45 παρέχει τρία κεφάλαια συνεχῆ ἀναλογίαν ἀποτελοῦντα;

5. Δύο πρόοδοι, ἡ μὲν ἰσοδιαφόρων, ἡ δὲ ἀναλόγων, ἔχουσιν ἑκατέρα τρεῖς μόνον ὅρους, καὶ τῶν μὲν 6 ὅρων των τὸ ἄθροισμα εἶναι 96, ὁ δὲ πρῶτος ὅρος τῆς τῶν ἰσοδιαφόρων εἶναι ἥμισυ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς τῶν ἀναλόγων, ὁ δεύτερος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τὸ ἕκτον τοῦ τρίτου· τίς εἶναι ἑκατέρα τούτων τῶν προόδων;

6. Ἵπποι 8 βοσκήσαντες 7 ἑβδομάδας ἐν λειβαδίῳ 400 πηχυαίων τετραγώνων κατέφαγον καὶ τὸ ἤδη ὑπάρχον ἐκεῖ χόρτον καὶ τὸ ἀναφυὲν κατὰ τὰς 7 ἑβδομάδας, ἐνῷ καθ' ὁμοίας περιστάσεις 9 ἵπποι ἤθελον τραφῇ 8 ἑβδομάδας ἐν λειβαδίῳ 500 πηχυαίων τετραγώνων· πόσους ἵππους ἤθελε θρέψει τὸ χόρτον λειβαδίου 600 πηχυαίων τετραγώνων ἐπὶ 10 ἑβδομάδας;

7. Δύο περιηγητῶν ἀπερχομένων ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως ὁ μὲν ὁδεύει τὴν πρώτην ἡμέραν 8 στάδια, τὴν δευτέραν 16, τὴν τρίτην 24 καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὁ δὲ τὴν ἕκτην ἡμέραν μετὰ τὸν πρῶτον κινήσας κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν διευθυνόμενος ὁδεύει 96 στάδια τὴν ἡμέραν· μετὰ πόσον χρόνον ἀφοῦ ὁ πρῶτος ἐκίνησε θέλει τὸν φθάσει ὁ δεύτερος;

8. Ποιμήν τις ἐπαριθμῶν μὲν τὰ πρόβατά του ἀνὰ 4 ἢ ἀνὰ 6 ἢ ἀνὰ 9 εὑρίσκει κατὰ τὰς τρεῖς ἐπαριθμήσεις ὑπόλοιπον 3, ἐπαριθμῶν δ' αὐτὰ ἀνὰ 7 ἢ ἀνὰ 13 εὑρίσκει ὑπόλοιπον ἕν, ἀριθμῶν δ' αὐτὰ ἀνὰ 11 εὑρίσκει ὑπόλοιπον 7· πόσα εἶναι τὰ πρόβατά του;

9. Νὰ μερισθῇ ὁ 70 εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου ἐπὶ 7, τοῦ δευτέρου ἐπὶ 8 καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ 9 ν' ἀποτελῶσι κεφάλαιον 561.

10. Ἀριθμητικός τις ἔδωκεν εἰς μαθητήν τινα δύο ἀριθμοὺς

νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον, ὧν ἡ διαφορὰ ἦτον 75, ἐκτελεσθέντος δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, παραγγέλλεται ὁ μαθητὴς πρὸς δοκιμὴν νὰ διαιρέσῃ τὸ γινόμενον διὰ τοῦ μικροτέρου παράγοντος. Τούτων λοιπὸν γενομένων, καὶ εὑρεθέντος πηλίκου 227 καὶ καταλοίπου 113, ἔκαμες λάθος, εἶπε πρὸς τὸν μαθητὴν ὁ ἀριθμητικὸς, καὶ προσπάθησε νὰ τὸ εὕρῃς. Ἐλογίσθην 1 πλειότερον, ἀπεκρίθη ὁ μαθητής. Ὄχι 1, ἐπανέλαβεν ὁ ἀριθμητικὸς, ἀλλὰ 1000 περισσότερα πολλαπλασιάζων ἐλογίσθης. Τίνες ἦσαν οἱ δεδομένοι νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἀριθμοί;

11. Θέλων τις νὰ μετρήσῃ τὸ βάθος φρέατος, ἀφίνει νὰ πέσῃ ἐν αὐτῷ λίθον, καὶ παρατηρεῖ ὅτι ἀφ' ἧς στιγμῆς ἄφησε τὸν λίθον μέχρι τοῦ ἤκουσε τὸν ἦχον τῆς πτώσεως παρῆλθον τ δευτερόλεπτα. Γνωστοῦ δ' ὄντος ἔτι ὅτι ἐν τῷ κενῷ τὸ καταπίπτον σῶμα διανύει ἐπὶ μὲν τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον διάστημα $\frac{g}{2}$ (ἰδὲ Συμ. σελ. 124), ἐπὶ δὲ 2, 3 κτλ δευτερόλεπτα διαστήματ' ἀνάλογα τῶν τετραγώνων αὐτῶν τῶν χρόνων, καὶ ὅτι ὁ ἦχος ὁμαλῶς κινούμενος διατρέχει η βασιλικοὺς πήχεις ἐπὶ ἕκαστον δευτερόλεπτον, εὑρεῖν τὸ βάθος τοῦ φρέατος (τὸ η εἶναι περίπου 340 βασ. πήχ).

12. Δύο ἐργατῶν ἐργασθέντων ἐπὶ ἄλλῳ ἡμερομισθίῳ ἑκατέρου καὶ πληρωθέντων εἰς τὸ τέλος χρόνου τινὸς, ὁ μὲν ἔλαβε 96 δρ, ὁ δὲ, 6 ἡμέρας ὀλιγώτερον ἐργασθεὶς, 54 δρ· ἤθελε δὲ λάβει ἑκάτερος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν δρ, ἐὰν ὁ δεύτερος ἤθελεν ἐργασθῆ ὅλας τὰς ἡμέρας, ὁ δὲ πρῶτος 6 ἡμέρας ὀλιγώτερον· πόσας ἡμέρας ἑκάτερος εἰργάσθη, καὶ πόσον ἦτον ἑκατέρου τὸ ἡμερομίσθιον;

13. Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν γινομένων τοῦ μὲν ἐπὶ α, τοῦ δὲ ἐπὶ β, νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν π, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν γινομένων τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν ρ.

11. Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν γινομένων αὐτῶν, τοῦ μεν ἐπὶ α, τοῦ δὲ ἐπὶ β, νὰ ἦναι ἴση μὲ τὸν π, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των νὰ ἦναι ἴση μὲ ἄλλον ἀριθμὸν ρ.

ΤΕΛΟΣ.

$\frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} =$

$\frac{x}{4}$ $\frac{4x + 5}{4 \cdot 3}$