ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΥΠΟ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΠΑΡΑ ΤΩι ΕΚΔΟΤΗι Σ. ΚΟΥΣΟΥΛΙΝΩι

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΚΑΙ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ

(ΟΠΙΣΘΕΝ ΤΩΝ ΑΓΙΩΝ ΘΕΟΔΩΡΩΝ)

1887

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΥΠΟ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΠΑΡΑ ΤΩι ΕΚΔΟΤΗι Σ. ΚΟΥΣΟΥΛΙΝΩι

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΚΑΙ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ

(ΟΠΙΣΘΕΝ ΤΩΝ ΑΓΙΩΝ ΘΕΟΔΩΡΩΝ)

1887

ΤΩι ΣΕΒΑΣΤΩι ΜΟΙ ΦΙΛΩι

ΚΥΡΙΩΙ, ΚΥΡΙΩΙ

Κ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΩι

ΥΠΟΔΙΕΥΘΥΝΤΗι

ΤΗΣ Γ. Π. ΤΡΑΠΕΖΗΣ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΕΙΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΔΕΙΓΜΑ

ΠΟΛΛΩΝ ΟΦΕΙΛΟΜΕΝΩΝ ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΣΕΩΝ

ΤΗΝΔΕ ΤΗΝ ΣΥΓΓΡΑΦΗΝ

ΑΝΑΤΙΘΗΜΙ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ παρὸν ἔργον συνετάχθη ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑφ' ἡμῶν διδαχθέντων ἐπὶ ἑπταετίαν ἐν τῷ Σχολείῳ τῶν Τεχνῶν μαθημάτων τῆς **Εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας**, ἐν οἷς προσεθέσαμεν καί τινα, ἀπαιτούμενα ὑπὸ τοῦ προγράμματος τοῦ Σ. Ὑπουργείου, ἵνα δὲ τὸ ἔργον ἡμῶν τοῦτο καταστῇ ὅσον ἔνεστι καταλληλότερον πρὸς διδασκαλίαν, περιεγράψαμεν καὶ τὴν διάταξιν καὶ χρῆσιν τῶν Πινάκων τῶν **πραγματικῶν τιμῶν** τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, τὸ μέν, διότι οὗτοι εἶναι ἁπλούστεροι, τὸ δέ, διότι τιμώμενοι ἀντὶ δραχμῆς, εἶναι προσιτοὶ τοῖς πᾶσι.

Ἐνομίσαμεν περιττὸν νὰ περιλάβωμεν γενικότητας, αἵτινες σκοτείζουσι τὸν νοῦν τῶν μαθητῶν ἄνευ ἀναλόγου ὠφελείας, ἐξεθέσαμεν δὲ τὰ ἀπολύτως ἀναγκαῖα μεθ' ὅλης τῆς δυνατῆς σαφηνείας καὶ συνάμα ἀκριβείας.

Εἰς τὰ ἐν τῷ τέλει προστεθέντα προβλήματα ἐνομίσαμεν περιττὸν νὰ κάμωμεν ἰδίᾳ λόγον περὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων καὶ πολυγώνων, διότι καὶ ὁ τυχὼν μαθητὴς γνωρίζει ὅτι πᾶν πολύγωνον ἀποσυντίθεται εἰς τρίγωνα, τὸ δὲ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου δύναται νὰ ορισθῇ ἀμέσως πολλαπλασιάζων μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐπ' αὐτῆς καθέτου, ἥτις ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον ἑκατέρας τῶν δύο ἄλλων ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς θεωρουμένης πλευρᾶς περιεχομένης γωνίας, ὁ δὲ ὑπολογισμὸς τοῦ οὕτω προκύπτοντος γινομένου $\frac{\alpha\beta\ \eta\mu\ \Gamma}{2}$ ἢ τοῦ $\frac{\alpha\gamma\ \eta\mu\ B}{2}$ ἢ τοῦ $\frac{\beta\gamma\ \eta\mu\ A}{2}$ οὐδεμίαν παρέχει δυσκολίαν ἐκτελούμενος εἴτε διὰ τῶν Πινάκων τῶν πραγματικῶν τιμῶν, εἴτε διὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν, ὑπολογιζομένων ὡς πραγματευόμεθα ἐν τῷ οἰκείῳ κεφαλαίῳ.

Ἐν τέλει ἂς μᾶς ἐπιτραπῇ νὰ ἐλπίζωμεν ὅτι μετὰ δεκαπενταετίαν ὅλην ἀναλαβόντες πάλιν τὸ ὅσῳ ἔντιμον, τόσῳ καὶ πολύμοχθον ἔργον τοῦ συγγράφειν, θέλομεν τύχει παρά τε τῶν ἀρχαίων καὶ τῶν νέων συναδέλφων ἡμῶν τῆς αὐτῆς, ἧς ἠξιώθημεν πάντοτε εὐνοίας καὶ προτιμήσεως.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 28 Ὀκτωβρίου 1887.

Α. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΣ.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ
ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

Ἀντικείμενον τῆς Τριγωνομετρίας.

1. *Τριγωνομετρία* καλεῖται τὸ μέρος τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, οὗτινος ἓν τῶν κυριωτέρων ἀντικειμένων εἶναι ἡ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ εὕρεσις τῶν ἀγνώστων μερῶν τριγώνου τινός, ὅταν μᾶς δίδωνται ἐπαρκῆ· καλεῖται δὲ αὕτη *εὐθύγραμμος*, ὅταν πραγματεύηται περὶ εὐθυγράμμων τριγώνων, ὡς ἡ παροῦσα, καὶ *σφαιρική*, ὅταν περὶ σφαιρικῶν.

2. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἡ Γεωμετρία παρέχει ἁπλουστάτας κατασκευάς, δι' ὧν εὑρίσκονται λίαν εὐκόλως τὰ ἄγνωστα μέρη τριγώνου τινός, ἀλλ' αὗται εἶναι οὐ μόνον ἀτελεῖς, ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν δι' ὧν ἐκτελοῦνται ὀργάνων, ἀλλὰ καὶ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀδύνατοι, ὡς ὅταν πρόκηται περὶ τριγώνων ἐν τῷ διαστήματι, οἷα π. χ. ἐκεῖνα, δι' ὧν μετροῦμεν τὰς ἀφ' ἡμῶν ἢ ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις ἀντικειμένων κειμένων μακρὰν ἡμῶν.

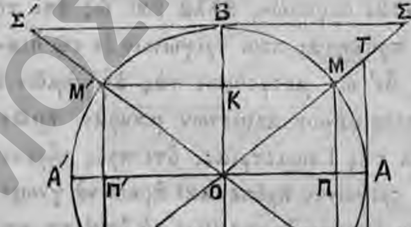
3. Γνωρίζομεν ὡσαύτως ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῶν μερῶν εὐθυγράμμου τινὸς τριγώνου πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τρία τινά, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναγκαίως νὰ ὑπάρχῃ καὶ μία τις πλευρά, ἄλλως, ὅταν δηλ. μᾶς δίδωνται αἱ τρεῖς γωνίαι τριγώνου τινός, τότε δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἄπειρα ὅμοια τρίγωνα. Ἀρκεῖ λοιπὸν πρὸς τὴν διὰ τῶν ὑπολογισμῶν εὕρεσιν τῶν ἀγνώστων μερῶν τριγώνου τινός, ὅταν μᾶς δίδωνται τρία τῶν ἓξ μερῶν αὐτοῦ, νὰ εὕρωμεν τρεῖς διαφόρους σχέσεις μεταξὺ τῶν τριῶν πλευρῶν καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν αὐτοῦ· διότι

τότε ἠθέλομεν ἔχει τρεῖς ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους, ὧν ἡ λύσις ἤθελε μᾶς δώσει τὰ ζητούμενα.

4. Ἐπειδὴ τὰ μεγέθη *πλευραὶ* καὶ *γωνίαι* εἶναι ἑτεροειδῆ, οἱ Μαθηματικοὶ ἐδοκίμασαν πολλὰς δυσκολίας πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀπαιτουμένων τριῶν διαφόρων σχέσεων, καὶ κατ' ἀρχὰς μὲν ἐζήτησαν ν' ἀντικαταστήσωσι τὰς γωνίας διὰ τῶν μετρούντων αὐτὰς τόξων, ἀλλὰ καὶ οὕτω ἡ δυσκολία δὲν ἐξέλιπε· διότι ναὶ μὲν αἱ πλευραὶ καὶ τὰ μετροῦντα τὰς γωνίας τόξα εἶναι *γραμμαί*, ἀλλ'αὗται εἶναι, ὡς γραμμαί, *ἑτεροειδεῖς*, καὶ ἑπομένως ἡ αὐτὴ δυσκολία παρουσιάζετο πάντοτε. Τότε ἐσκέφθησαν ν' ἀντικαταστήσωσι καὶ τὰ μετροῦντα τὰς γωνίας τόξα δι' *εὐθειῶν* γραμμῶν, ἐξαρτωμένων ἐξ αὐτῶν οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι αὗται γνωσταί, ὅταν τὰ τόξα ἦναι γνωστά, καὶ ἀντιστρόφως. Οὕτως αἱ δυσκολίαι ἐξέλιπον, καὶ ἡ λύσις τοῦ σπουδαιοτάτου τούτου ζητήματος κατέστη καὶ δυνατὴ καὶ εὐκολωτάτη.

Τριγωνομετρικαὶ γραμμαί.

5. Αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, δι' ὧν ἀντικατεστάθησαν τὰ μετροῦντα τὰς γωνίας τόξα, ὠνομάσθησαν *τριγωνομετρικαὶ γραμμαί*, ἵνα δὲ ὁρίσωμεν καταλληλότερον ταύτας, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται περὶ τῆς γωνίας ΑΟΜ, τῆς μετρουμένης ὑπὸ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου ΑΜ, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα ΟΑ ἴσην τῇ γραμμικῇ μονάδι. Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι ἡ διάμετρος Α΄Α, ἡ διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων Α τοῦ τόξου ΑΜ διερχομένη, εἶναι ὁριζόντιος, ἡ δὲ Β΄Β κάθετος ἐκ τῆς Α΄Α, καὶ ἂς ἄξωμεν τὰς ἐν τῷ σχήματι 1 παρατηρουμένας εὐθείας γραμμάς, τουτέστι τὴν ΑΤ ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α, τὴν ΒΣ ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Β, κτλ.



Σχ. 1

Ἡ γραμμὴ ΜΠ, ἡ καταβιβαζομένη ἐκ τοῦ ἄκρου Μ τοῦ τόξου ΑΜ καθέτως ἐπὶ τῆς διαμέτρου Α΄Α, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου Α, καλεῖται *ἡμίτονον* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

Ἡ γραμμὴ ΑΤ, ἡ περιεχομένη μεταξὺ τοῦ ἄκρου Α τοῦ τόξου ΑΜ καὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ἀκτῖνος ΟΜ, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου Μ, καλεῖται *ἐφαπτομένη* τοῦ τόξου ΑΜ, ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

Ἡ ΟΤ, ἡ περιεχομένη μεταξὺ τοῦ κέντρου Ο καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΑΤ, καλεῖται *τέμνουσα* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

Ἡ ΟΠ, ἡ περιεχομένη μεταξὺ τοῦ κέντρου Ο καὶ τοῦ ποδὸς Π τοῦ ἡμιτόνου ΜΠ, καλεῖται *συνημίτονον* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

Ἡ ΒΣ, ἡ περιεχομένη μεταξὺ τοῦ σημείου Β καὶ τῆς τεμνούσης ΟΤ, προεκβαλλομένης ἐν ἀνάγκῃ, καλεῖται *συνεφαπτομένη* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ. Τέλος

Ἡ ΟΣ, ἡ περιεχομένη μεταξὺ τοῦ κέντρου Ο καὶ τῆς συνεφαπτομένης ΒΣ, καλεῖται *συντέμνουσα* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

6. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τ τὸ τόξον ΑΜ καὶ διὰ α τὴν γωνίαν ΑΟΜ, αἱ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσαι ἓξ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ παρίστανται συντετμημένως ὡς ἑξῆς

$$\text{ΜΠ} = \text{ἡμ}\,\tau \text{ ἢ } \text{ἡμ}\,\alpha,\ \text{ΑΤ} = \text{ἐφ}\,\tau \text{ ἢ } \text{ἐφ}\,\alpha,\ \text{ΟΤ} = \text{τμ}\,\tau \text{ ἢ } \text{τμ}\,\alpha,$$
$$\text{ΟΠ} = \text{σμ}\,\tau \text{ ἢ } \text{σμ}\,\alpha,\ \text{ΒΣ} = \text{σφ}\,\tau \text{ ἢ } \text{σφ}\,\alpha,\ \text{ΟΣ} = \text{στ}\,\tau \text{ ἢ } \text{στ}\,\alpha.$$

7. Ἐκ τοῦ σχήματος 1 πορίζόμεθα εὐκόλως τὰς ἰσότητας

$$\text{ΟΠ} = \text{ΜΚ} = \text{ἡμ ΒΜ},\ \text{ΟΚ} = \text{ΜΠ} = \text{σμ ΒΜ},\ \text{ΒΣ} = \text{ἐφ ΒΜ},$$
$$\text{ΑΤ} = \text{σφ ΒΜ},\ \text{ΟΣ} = \text{τμ ΒΜ},\ \text{καὶ ΟΤ} = \text{στ ΒΜ},$$

ἐπειδὴ δὲ τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΒΜ εἶναι *συμπληρωματικά*, διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται τῷ τεταρτημορίῳ ΑΒ, θέλομεν ἔχει $\text{ΒΜ} = 90^0 - \tau$ καὶ αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες γράφονται καὶ οὕτω

$$\text{ΟΚ} = \text{ἡμ}\,\tau = \text{σμ}(90^0 - \tau),\quad \text{ΟΠ} = \text{σμ}\,\tau = \text{ἡμ}(90^0 - \tau),$$
$$\text{ΒΣ} = \text{σφ}\,\tau = \text{ἐφ}(90^0 - \tau),\quad \text{ΟΣ} = \text{στ}\,\tau = \text{τμ}(90^0 - \tau),$$
$$\text{ΑΤ} = \text{ἐφ}\,\tau = \text{σφ}(90^0 - \tau),\quad \text{ΟΤ} = \text{τμ}\,\tau = \text{στ}(90^0 - \tau),$$

τουτέστι τὸ ἡμίτονον, ἡ τέμνουσα καὶ ἡ ἐφαπτομένη τόξου τινὸς ἰσοῦται ἀμοιβαίως μὲ τὸ συνημίτονον, συντέμνουσαν καὶ συνεφαπτομένην τοῦ συμπληρώματος τοῦ τόξου τούτου.

Σημεῖα τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν καὶ τόξων.

8. Συνεφωνήθη νὰ θεωρῶνται ὡς *θετικὰ* ἅπαντα τὰ τόξα, τὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α καὶ κατὰ τὴν φορὰν ΑΒΑ΄ μετρούμενα, καὶ ὡς *ἀρνητικὰ* ἐκεῖνα, ἅτινα ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, ἀλλὰ μετροῦνται κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ΑΒ΄Α΄. Οὕτω, ἂν παραστήσωμεν διὰ τ τὸ τόξον ΑΜ, ἠθέλομεν παραστήσει διὰ -τ τὸ ἴσον αὐτῷ τόξον ΑΜ΄΄΄, τὸ ἀντιθέτως τῷ πρώτῳ κείμενον.

9. Ὡσαύτως συνεφωνήθη νὰ θεωρῶνται ὡς *θετικαὶ* ἅπασαι αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαί, ὅταν κατέχωσιν ὁμοίαν τῇ τῷ πρώτῳ τεταρτοκυκλίῳ ἀντιστοιχούσῃ θέσει. Οὕτω

Σχ. 1

Τὸ ἡμίτονον ὁποιουδήποτε τόξου, θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ, εἶναι *θετικόν*, ὅταν κῆται *ὑπεράνω* τῆς ὁριζοντίου διαμέτρου ΑΑ΄ καὶ ἀρνητικόν, ὅταν κῆται ὑποκάτω τῆς αὐτῆς διαμέτρου. Παραδείγματος χάριν, θέλομεν ἔχει

$$\text{ἡμ}\ AM = +M\Pi,\ \text{ἡμ}\ AM' = +M'\Pi',\ \text{ἡμ}\ ABM'' = -M''\Pi',$$
$$\text{ἡμ}\ AB'A'M''' = -M'''\Pi,\quad \text{ἡμ}(-AM''') = M'''\Pi,$$
$$\text{ἡμ}(-AB'M'') = -M''\Pi',\quad \text{ἡμ}(-AB'M') = +M'\Pi \text{ καὶ}$$
$$\text{ἡμ}(-AB'BM) = +M\Pi.$$

Τὸ συνημίτονον ὁποιουδήποτε τόξου, θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ, εἶναι *θετικόν*, ὅταν κῆται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ κέντρου Ο καὶ ἀρνητικόν, ὅταν κατέχῃ θέσιν ἀντίστροφον. Παραδείγματος χάριν, θέλομεν ἔχει

$$\sigma\mu\, AM = +\, O\Pi,\ \sigma\mu\, AM' = -\, O\Pi',\ \sigma\mu\, AA'M'' = -\, O\Pi',$$
$$\eta\mu\, ABA'M''' = +\, O\Pi,\ \sigma\mu(-\, AM''') = +\, O\Pi,$$
$$\sigma\mu(-\, AB'M'') = -\, O\Pi',\ \sigma\mu(-\, AB'M') = -\, O\Pi',\ \text{καὶ}$$
$$\sigma\mu(-\, AB'BM) = +\, O\Pi.$$

Ἡ ἐφαπτομένη ὁποιουδήποτε τόξου, θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ, εἶναι *θετική*, ὅταν μετρῆται ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Α καὶ πρὸς τὰ ἄνω, καὶ *ἀρνητική*, ὅταν μετρῆται ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Α καὶ πρὸς τὰ κάτω. Παραδείγματος χάριν, θέλομεν ἔχει

$$\epsilon\varphi\, AM = +\, AT,\ \epsilon\varphi\, AM' = -\, AT',\ \epsilon\varphi\, AA'M'' = +\, AT,$$
$$\epsilon\varphi\, ABA'M''' = -\, AT',\ \epsilon\varphi(-\, AM''') = -\, AT',$$
$$\epsilon\varphi(-\, AB'M'') = +\, AT,\ \epsilon\varphi(-\, AB'A'M') = -\, AT',\ \text{καὶ}$$
$$\epsilon\varphi(-\, AB'A'M) = +\, AT.$$

Ἡ τέμνουσα ὁποιουδήποτε τόξου, θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ, εἶναι *θετική*, ὅταν τὸ ἄκρον Μ τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος τόξου κῆται μεταξὺ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΤΤ', καὶ *ἀρνητική*, ὅταν τὸ αὐτὸ ἄκρον κῆται ἐκτὸς τῶν δύο σημείων Ο καὶ Τ. Παραδείγματος χάριν, θέλομεν ἔχει

$\tau\mu\, AM = +\, OT$, $\tau\mu\, AM' = -\, OT'$ (διότι τὸ ἄκρον Μ' κεῖται ἐκτὸς τῶν σημείων Ο καὶ Τ'), $\tau\mu\, AA'M'' = -\, OT$, $\tau\mu\, AA'M''' = +\, OT'$,

$$\tau\mu(-\, AM''') = +\, OT',\qquad \tau\mu(-\, AB'M'') = -\, OT,$$
$$\tau\mu(-\, AB'M'') = -\, OT',\quad \text{καὶ}\quad \tau\mu(-\, AA'BM') = +\, OT.$$

Ἡ συνεφαπτομένη εἶναι *θετική*, ὅταν μετρῆται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου Β ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΣΣ', καὶ *ἀρνητική*, ὅταν μετρῆται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Παραδείγματος χάριν, θέλομεν ἔχει

$$\sigma\varphi\, AM = +\, B\Sigma,\quad \sigma\varphi\, AM' = -\, B\Sigma',\quad \sigma\varphi\, AA'M'' = +\, B\Sigma$$
$$\sigma\varphi\, AA'B'M''' = -\, B\Sigma',\qquad \sigma\varphi(-\, AM''') = -\, B\Sigma',$$
$$\sigma\varphi(-\, AB'M'') = +\, B\Sigma,\qquad \sigma\varphi(-\, AB'A'M') = -\, B\Sigma',$$
$$\text{καὶ}\quad \sigma\varphi(-\, AB'A'M) = +\, B\Sigma.$$

Ἡ συντέμνουσα εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ εἰς τὰς αὐτὰς περιπτώσεις, είς ἃς καὶ ἡ τέμνουσα. Παραδείγματος χάριν, θέλομεν ἔχει

$$\sigma\tau\, AM = +O\Sigma,\quad \sigma\tau\, AM' = +O\Sigma',\quad \sigma\tau\, AA'M'' = -O\Sigma,$$
$$\sigma\tau\, AA'M''' = -O\Sigma',\quad \sigma\tau(-AM''') = -O\Sigma',$$
$$\sigma\tau(-AB'M'') = -O\Sigma,\quad \sigma\tau(-AB'M') = +O\Sigma',$$
$$\sigma\tau(-AB'A'M') = +O\Sigma.$$

10. Τούτων τεθέντων, ἀποβαίνει εὐκολώτατον ἡ εὕρεσις τῶν σημείων ἁπασῶν τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν δεδομένου τινὸς τόξου. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητοῦνται τὰ σημεῖα τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τοῦ τόξου 137^0. Ἐπειδὴ τὸ ἄκρον τοῦ τόξου τούτου κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου τεταρτημορίου, μεταξὺ τῶν σημείων B καὶ A', θέλει ἔχει ἡμίτονον θετικόν, συνημίτονον ἀρνητικόν, ἐφαπτομένην ἀρνητικήν, συνεφαπτομένην ἀρνητικήν, τέμνουσαν ἀρνητικὴν καὶ συντέμνουσαν θετικήν.

Ἄν μᾶς ἐδίδετο τόξον 298^0, ἠθέλομεν εὐκόλως παρατηρήσει ὅτι τὸ ἄκρον αὐτοῦ πίπτει ἐπὶ τοῦ τετάρτου τεταρτημορίου, μεταξὺ τῶν σημείων B' καὶ A, καὶ ἠθέλομεν κατ' ἀκολουθίαν εὕρει ὅτι ἔχει ἡμίτονον ἀρνητικόν, συνημίτονον θετικόν, ἐφαπτομένην ἀρνητικήν, συνεφαπτομένην ἀρνητικήν, τέμνουσαν θετικήν, καὶ συντέμνουσαν ἀρνητικήν.

Νομίζομεν καλὸν νὰ γυμνασθῶσιν ἐπαρκῶς οἱ μαθηταὶ θέτοντες οἱ ἴδιοι διάφορα παραδείγματα καὶ ζητοῦντες τὰ σημεῖα τῶν ἀντιστοιχουσῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, ἅτινα θέλουσιν εὑρίσκει εὐκόλως ἀκολουθοῦντες πιστῶς τοὺς ἀνωτέρω δοθέντας γενικοὺς κανόνας.

Τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ τῶν παραπληρωματικῶν τόξων.

11. Δύο τόξα καλοῦνται *παραπληρωματικά*, ὅταν τὸ ἀλγεβρικὸν αὐτῶν ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ ἡμιπεριφέρειαν. Ἔστω π. χ. τόξον τι AM. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου M ἄξωμεν τὴν MM' παράλληλον τῇ διαμέτρῳ AA', εἶναι φανερὸν ὅτι θέλομεν ἔχει M'A'=AM, επο-

μένως, καλοῦντες τ τὸ τόξον ΑΜ, θέλομεν ἔχει ΑΜ′=ΑΒΑ′—Α′Μ′=180°—τ. Τούτου δὲ οὕτως ἔχοντος, ἂς παραβάλωμεν πρὸς ἀλλήλας τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τῶν παραπληρωματικῶν τόξων ΑΜ καὶ ΑΒ′Μ′, ἤτοι τῶν τόξων τ καὶ 180°—τ.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ ἡμίτονα αὐτῶν ΜΠ καὶ Μ′Π′ εἶναι ἴσα καὶ ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, τουτέστι θέλομεν ἔχει πάντοτε τὴν ἰσότητα ἡμ τ=ἡμ(180°—τ).

Τὰ συνημίτονα αὐτῶν εἶναι ΟΠ καὶ ΟΠ′, τουτέστιν ἴσα καὶ ἐναντίων σημείων. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει πάντοτε τὴν ἰσότητα σμ τ=—σμ(180°—τ).

Αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ΑΤ καὶ ΑΤ′ εἶναι ἴσαι καὶ ἐναντίων σημείων. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν ἐφ τ=—ἐφ(180°—τ).

Αἱ συνεφαπτόμεναι αὐτῶν εἶναι ΒΣ καὶ ΒΣ′, τουτέστιν ἴσαι καὶ ἐναντίων σημείων. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει πάντοτε τὴν ἰσότητα σφ τ=—σφ(180°—τ).

Αἱ τέμνουσαι αὐτῶν εἶναι ΟΤ καὶ ΟΤ′, τουτέστιν ἴσαι καὶ ἐναντίων σημείων, ἤτοι θέλομεν ἔχει πάντοτε τὴν ἰσότητα τμ τ=—τμ(180°—τ).

Αἱ συντέμνουσαι αὐτῶν ΟΣ καὶ ΟΣ′ εἶναι ἴσαι καὶ τῶν αὐτῶν σημείων. Λοιπὸν θέλομον ἔχει πάντοτε στ τ=στ(180°—τ).

12. Αἱ ἀνωτέρω μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἰσότητες δύο παραπληρωματικῶν τόξων, ὑφίστανται ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὸ μέγεθος τοῦ τόξου τ. Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι τὸ τ εἶναι θετικὸν καὶ μεγαλείτερον 180°, ἴσον π. χ. μὲ ΑΒΑ′Μ″.

Τὸ παραπλήρωμα αὐτοῦ 180°—τ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν ΑΒΑ′—ΑΒΑ′Μ″, τουτέστι ἀρνητικὸν καὶ ἴσον μὲ Α′Μ″ ἢ ΑΜ‴, εὐκόλως δὲ βλέπομεν ὅτι τὰ ἡμίτονα Μ″Π′ καὶ Μ‴Π τῶν παραπληρωματικῶν τόξων ΑΒΑ′Μ″ καὶ—ΑΜ‴ εἶναι ἴσα καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὰ συνημίτονα αὐτῶν ΟΠ′ καὶ ΟΠ εἶναι ἴσα καὶ ἀντιθέτων σημείων.

Αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΤ καὶ ΑΤ′ ἴσαι καὶ ἀντιθέτων σημείων. Αἱ συνεφαπτόμεναι ΒΣ καὶ ΒΣ′ ἴσαι καὶ ἀντιθέτων σημείων. Αἱ τέμνουσαι ΟΤ καὶ ΟΤ′ ἴσαι καὶ ἀντιθέτων σημείων καὶ αἱ συντέμνουσαι ΟΣ καὶ ΟΣ′ ἴσαι καὶ τῶν αὐτῶν σημείων. Τουτέστιν ἔχομεν τὰς αὐτὰς ἰσότητας, ὡς καὶ ὅταν τὰ συμπληρωματικὰ τόξα ἦναι ἀμφότερα θετικά.

Ὅταν τὸ τόξον τ ἦναι ἀρνητικόν, π. χ., ἴσον μὲ —ΑΒ'Μ'', τὸ παραπλήρωμα αὐτοῦ θὰ ἦναι $180^0—τ$, ἤτοι ΑΒΑ'+ΑΒ'Μ'', τουτέστι θετικὸν καὶ ἴσον ΑΒΑ'Μ''', εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν τόξων —ΑΒ'Μ'' καὶ ΑΒΑ'Μ''' ὑπάρχουσιν αἱ αὐταὶ ὡς ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι σχέσεις.

13. Οἱ τύποι λοιπὸν

$$\text{ἡμ}\,τ = \text{ἡμ}(180^0—τ), \qquad \text{σμ}\,τ = —\text{σμ}(180^0—τ),$$
$$\text{ἐφ}\,τ = —\text{ἐφ}(180^0—τ), \qquad \text{σφ}\,τ = —\text{σφ}(180^0—τ),$$
$$\text{τμ}\,τ = —\text{τμ}(180^0—τ), \qquad \text{στ}\,τ = \text{στ}(180^0—τ),$$

εἶναι ἀληθεῖς ὅσον μέγα καὶ ἂν ᾖ τὸ τόξον καὶ ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἔχῃ τοῦτο σημεῖον.

Πρόοδος τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

14. Εἶναι καλὸν νὰ γνωρίζωμεν τὰς διαφόρους τιμάς, ἃς λαμβάνουσιν αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαί, ὅταν τὸ τόξον τ μεταβάλληται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0^0 μέχρι τῶν 360^0, τοῦτο δὲ εὑρίσκομεν λίαν εὐκόλως δι' ἑκάστην τούτων.

Τὸ ἡμίτομον π. χ. τοῦ τόξου τ, ὅταν τοῦτο ἦναι 0^0, εἶναι 0, καὶ καθόσον τὸ τόξον τ αὐξάνει ἀπὸ τοῦ 0^0 μέχρι τοῦ 90^0, τὸ ἡμίτονόν του αὐξάνει βαθμηδὸν ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, ἥτις ὑπετέθη ἴση τῇ γραμμικῇ μονάδι. Ἐξακολουθούσης τῆς αὐξήσεως τοῦ τόξου τ ἀπὸ 90^0 μέχρι 180^0, τὸ ἡμίτονόν του ΟΒ βαίνει βαθμηδὸν ἐλαττούμενον ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ μέχρι τοῦ 0. Ὅταν δὲ τὸ τόξον τ ἐξακολουθῇ αὐξάνον, τουτέστι τὸ ἄκρον αὐτοῦ Μ βαίνει ἀπὸ τοῦ Α' πρὸς τὸ Β', τὸ ἡμίτονόν του γίνεται ἀρνητικὸν καὶ ἐξακολουθεῖ ἐλαττούμενον μέχρι τοῦ—ΟΒ' ἢ τοῦ—1. Πέραν δὲ τοῦ σημείου Β' τὸ ἡμίτονόν του, ἂν καὶ ἦναι πάντοτε ἀρνητικόν, τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τουτέστι βαίνει αὐξανόμενον ἀπὸ τοῦ — 1 μέχρι τοῦ μηδενός. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$\text{ἡμ}\,0^0 = 0,\ \text{ἡμ}\,90^0 = 1,\ \text{ἡμ}\,180^0 = 0,\ \text{ἡμ}\,270^0 = —1 \text{ καὶ}$$
$$\text{ἡμ}\,360^0 = 0.$$

15. Αἱ τιμαὶ τοῦ συνημιτόνου εὑρίσκονται εὐκόλως καὶ εἶναι

$$σμ\, 0^0 = 1,\ σμ\, 90^0 = 0,\ σμ\, 180^0 = -1,$$
$$σμ\, 270^0 = 0 \quad καὶ \quad σμ\, 360^0 = 1.$$

16. Αἱ τιμαὶ τῆς ἐφαπτομένης εἶναι
$ἐφ\, 0^0 = 0$, $ἐφ\, 90^0 = \infty$ (διότι τότε ἡ ἀκτὶς ΟΒ, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ἄκρου Β τοῦ τόξου ΑΒ, εἶναι παράλληλος τῇ ΑΤ καὶ ἑπομένως δὲν συναπαντᾷ αὐτήν),

$$ἐφ\, 180^0 = 0,\ ἐφ\, 270^0 = \infty \quad καὶ \quad ἐφ\, 360^0 = 0.$$

Παρατηρητέον ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης, ὅτι αὕτη μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$, ὅταν τὸ τόξον τ ὑπερβῇ κατ' ἀπειροστὸν τὰς 90^0· διότι τότε ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ καθίσταται ἀμέσως ἀρνητική. Ὡσαύτως ἡ ἐφαπτομένη τῶν 270^0, ἥτις εἶναι $+\infty$, λαμβάνει ἀποτόμως τὴν τιμὴν $-\infty$, ἅμ' ὡς τὸ τόξον ΑΒΑ'Β' αὐξηθῇ κατ' ἀπειροστόν.

Αἱ τιμαὶ τῆς συνεφαπτομένης εἶναι

$$σφ\, 0 = \infty,\ σφ\, 90^0 = 0,\ σφ\, 180^0 = -\infty,$$
$$σφ\, 270^0 = 0 \quad καὶ \quad σφ\, 360^0 = -\infty,$$

αὕτη δὲ μεταβαίνει ἀποτόμως ἀπὸ τοῦ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$, ὅταν τὸ τόξον τ ὑπερβῇ κατ' ἀπειροστὸν τὰς 180^0 ἢ τὰς 360^0.

Αἱ τιμαὶ τῆς τεμνούσης ἢ συντεμνούσης εἶναι

$$τμ\, 0^0 = 1,\ τμ\, 90^0 = \infty,\ τμ\, 180^0 = -1,$$
$$τμ\, 270^0 = -\infty \quad καὶ \quad τμ\, 360^0 = 1,$$

$$στ\, 0^0 = \infty,\ στ\, 90^0 = 1,\ στ\, 180^0 = \infty,$$
$$στ\, 270^0 = -1 \quad καὶ \quad στ\, 360^0 = -\infty$$

μεταβαίνουσι δὲ ἀποτόμως ἀπὸ τῆς $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$ καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν τὸ τόξον τ ὑπερβῇ κατ' ἀπειροστὸν τὰς 90^0 καὶ 270^0 ἢ τῆς 0^0 καὶ 180^0.

Εὕρεσις τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς δεδομένην τριγωνομετρικὴν γραμμὴν τόξων.

17. Εἴπομεν ἀρχόμενοι, ὅτι οἱ Μαθηματικοὶ πρὸς εὕρεσιν τῶν μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ἀπαιτουμένων τριῶν διαφόρων σχέσεων ἀντικατέστησαν τὰς γωνίας διὰ τῶν τόξων τῶν μετρούντων αὐτάς, καὶ ταῦτα πάλιν δι' εὐθειῶν γραμμῶν, ἃς ἐκάλεσαν ἡμίτονα, συνημίτονα κλ. καὶ εἴδομεν ποίας τιμὰς λαμβάνουσιν αὗται, ὅταν τὸ τόξον λαμβάνῃ ἁπάσας τὰς μεταξὺ τοῦ 0^0 καὶ τῶν 360^0 θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς τιμάς. Προτιθέμεθα νῦν νὰ λύσωμεν τὸ ἀντίθετον ζήτημα· νὰ εὕρωμεν δηλαδὴ τὰς τιμὰς τῶν τόξων, τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς δεδομένας τιμὰς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς ὃν ταῦτα ἀνήκουσι κύκλου ὑποτιθεμένης πάντοτε ἴσης τῇ γραμμικῇ μονάδι.

18. Ἂς παραστήσωμεν τὰ ζητούμενα τόξα διὰ χ, καὶ ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\text{ἡμ}\chi = \alpha$

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ (σχ. 1) τὴν ἀπόστασιν ΟΚ ἢ ΟΚ′ ἴσην τῷ α, καθόσον τὸ α εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καὶ ἄγομεν τὴν παράλληλον ΜΜ′ ἢ τὴν Μ″Μ‴ ἐν τῇ πρώτῃ ἢ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει. Ἂς ὑποθέσωμεν, ἵνα ορίσωμεν τὰς ἰδέας, ὅτι τὸ μέγεθος α εἶναι θετικόν. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἅπαντα τὰ θετικὰ ἢ ἀρνητικὰ τόξα, τὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α καὶ λήγοντα εἰς Μ ἢ Μ′ θέλουσιν ἔχει ἡμίτονον τὸ δεδομένον α. Καλοῦντες λοιπὸν τ τὸ θετικὸν καὶ μικρότερον τούτων ΑΜ, θέλομεν ἔχει διὰ τὸ χ τὰς ἑξῆς τιμάς,

$$\chi = AM = \tau,\ \chi = 180^0 - AM = 180^0 - \tau,$$
$$\chi = -AB'M' = -180^0 - \tau \text{ καὶ } \chi = -AB'A'M' = -360^0 + \tau.$$

Ἂν τὸ δεδομένον ἡμίτονον α ἦτο ἀρνητικόν, τότε ἠθέλομεν ἔχει, καλοῦντες πάντοτε τ τὸ τόξον ΑΜ, διὰ τὸ χ τὰς ἐπομένας τιμὰς

$$\chi = \mathrm{ABA'M''} = 180^0 + \tau,\ \chi = \mathrm{AA'B'M'''} = 360^0 - \tau,$$
$$\chi = -\mathrm{AM'''} = -\tau \text{ καὶ } \chi = -\mathrm{AB'M''} = -180^0 + \tau.$$

19. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς δίδεται τὸ συνημίτονον β τόξου τινὸς χ, τουτέστιν ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν σμ $\chi = \beta$. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν λάβωμεν ΟΠ ἢ ΟΠ′ ἴσον τῷ β, καθόσον τὸ β εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καὶ ἄξωμεν τὴν κάθετον ΜΠΜ‴ ἢ τὴν Μ′Π′Μ″, τὰ τόξα, τὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α καὶ περατούμενα εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ‴ ἢ Μ′ καὶ Μ″, θέλουσιν εἶναι τὰ ζητούμενα.

Καλοῦντες λοιπὸν τ τὸ μικρότερον τούτων, θέλομεν ἔχει, ὅταν τὸ β ἦναι θετικὸν

$$\chi = \mathrm{AM} = \tau,\ \chi = \mathrm{AA'B'M'''} = 360^0 - \tau,\ \chi = -\mathrm{AM'''} = -\tau$$
$$\text{καὶ } \chi = -\mathrm{AB'A'M'} = -360^0 + \tau,$$

ὅταν δὲ τὸ β ἦναι ἀρνητικόν, θέλομεν ἔχει, παριστῶντες διὰ τ τὸ τόξον ΑΒΜ′

$$\chi = \mathrm{ABM'} = \tau,\ \chi = \mathrm{ABA'M''} = 360^0 - \tau,\ \chi = -\mathrm{AB'M''} = -\tau$$
$$\text{καὶ } \chi = -\mathrm{AB'A'M'} = -360^0 + \tau.$$

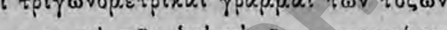
20. Ἂν μᾶς ἐδίδετο ἡ ἐφαπτομένη ἢ ἡ συνεφαπτομένη, ἡ τέμνουσα ἢ συντέμνουσα, ἠθέλομεν λάβει κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῶν γραμμῶν, ἐφ' ὧν μετροῦνται αἱ ἐφαπτόμεναι ἢ συνεφαπτόμεναι, μεγέθη ἴσα τῇ δεδομένῃ ἐφαπτομένῃ ἢ συνεφαπτομένῃ, ἢ γράφοντες μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνας ἴσας τῇ δεδομένῃ τεμνούσῃ ἢ συντεμνούσῃ τόξα τέμνοντα τὴν γραμμὴν τῶν ἐφαπτομένων ἢ συνεφαπτομένων, καὶ ἑνοῦντες τὰ σημεῖα τῶν τομῶν μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἠθέλομεν εὕρει λίαν εὐκόλως ἅπαντα τὰ τόξα, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς δεδομένας τριγωνομετρικὰς γραμμάς. Νομίζομεν ὅμως λίαν περιττὸν νὰ χρονοτριβήσωμεν λαμβάνοντες μερικώτερα παραδείγματα, διότι διὰ τοῦ τρόπου τούτου οὐδέποτε εὑρίσκονται τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς δεδομένας τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τόξα, ἀλλὰ διὰ πινάκων ἐπὶ τούτῳ κατασκευασθέντων, καὶ περὶ ὧν θέλομεν κάμει ἰδιαιτέρως λόγον ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Γενικὴ παρατήρησις. — Ἐπειδὴ ὁποιονδήποτε εὐθύγραμμον τρίγωνον δὲν δύναται νὰ περιέχῃ γωνίαν μεγαλειτέραν ἢ τοὐλάχιστον ἴσην μὲ 180^0, ἕπεται ὅτι δὲν θέλομεν λάβει ποτὲ ἀνάγκην νὰ θεωρήσωμεν τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τόξων μεγαλειτέρων ἡμιπεριφερείας. Καὶ πάλιν, ἐπειδὴ αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ δύο παραπληρωματικῶν τόξων τ καὶ $180^0 - \tau$ εἶναι ἴσαι καὶ ἐναντίων σημείων, ἐκτὸς τῶν σημείων τοῦ ἡμιτόνου, καὶ τῆς συντεμνούσης (§ 13), τὸ δὲ παραπλήρωμα παντὸς τόξου μεγαλειτέρου τεταρτημορίου εἶναι μικρότερον τοῦ τεταρτημορίου, ἕπεται ὅτι, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ τεταρτημορίου μεταβαλλομένων τόξων, θέλομεν εὐκολώτατα ἔχει καὶ τὰς τιμὰς αὐτῶν διὰ πᾶν τόξον περιεχόμενον μεταξὺ 90^0 καὶ 180^0. Καὶ πάλιν, ἐπειδὴ τὸ συμπλήρωμα παντὸς τόξου μεγαλειτέρου 45^0 εἶναι μικρότερον τῶν 45^0, τὸ δὲ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα τόξου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον, τὴν συνεφαπτομένην καὶ τὴν συντέμνουσαν τοῦ συμπληρώματος καὶ ἀντιστρόφως, ἕπεται ὅτι, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ἓξ τριγωνομετρικὰς γραμμὰς παντὸς τόξου περιεχομένου μεταξὺ τοῦ 0^0 καὶ 45^0, θέλομεν ἔχει καὶ τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς παντὸς τόξου περιεχομένου μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 90^0, ἑπομένως διὰ τὰς ἀπολύτους ἀνάγκης τῆς εὐθυγράμμου τριγωνομετρίας ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τῶν γωνιῶν, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν 0^0 καὶ 45^0. Ἀλλ' ἡμεῖς ἐζητήσαμεν καὶ τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς παντὸς τόξου περιεχομένου μεταξὺ τοῦ 0^0 καὶ 360^0 οὐχὶ τόσον, διότι οἱ Μαθηματικοὶ θεωροῦσιν ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς των γωνίας καὶ τόξα τοιαῦτα, καὶ αὐξάνοντα μάλιστα ἐπ' ἄπειρον, ὅσον, διότι νομίζομεν ἀναγκαῖον νὰ γυμνασθῇ ἐπαρκῶς ὁ νοῦς τοῦ μαθητοῦ εἰς τὸ νὰ εὑρίσκῃ καὶ κατασκευάζῃ τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς παντὸς τόξου, οὗτινος τὸ ἄκρον λαμβάνει πᾶσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας δυνατὴν θέσιν, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τὸ νὰ εὑρίσκῃ δηλαδὴ ἅπαντα τὰ τόξα, θετικὰ ἢ ἀρνητικά, τὰ ἔχοντα δεδομένην τινὰ τριγωνομετρικὴν γραμμήν. Ἡ τοιαύτη ἄσκησις ἀποβαίνει ἄλλως καὶ ἀναγκαία διὰ τὴν εὔκολον νόησιν τῶν ἑπομένων.

Αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ τῶν γωνιῶν παριστῶσι λόγους.

21. Ἐν τῇ § 5 ἐλάβομεν ὡς μέτρα τῶν γωνιῶν τὰ τόξα, τὰ ἀνήκοντα εἰς περιφέρειαν, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑπετέθη ἴση τῇ γραμμικῇ μονάδι, καὶ εἴπομεν ὅτι αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ τῶν τόξων εἶναι καὶ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ τῶν ὑπ' αὐτῶν μετρουμένων γωνιῶν. Ὁ λόγος δέ, δι' ὃν *ῥητῶς* ὑπεθέσαμεν ὅτι ἐπρόκειτο περὶ τόξων ἐχόντων ἀκτῖνα τὴν γραμμικὴν μονάδα, εἶναι ὁ ἑξῆς·

Ἔστω παραδείγματος χάριν γωνία τις Ο (σχ. 2). Ἐὰν μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνας ἴσας μὲ ΟΑ, ΟΑ′, ΟΑ″ κτλ. γράψωμεν τὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενα τόξα ΑΜ, Α′Μ′, Α″Μ″ κλ., ἕκαστον τούτων θέλει παριστᾷ τὸ μέτρον τῆς γωνίας Ο, αἱ δὲ κάθετοι ΜΠ, Μ′Π′, Μ″Π″ κλ, τὰ ἡμίτονα τῶν ἀντιστοιχούντων τόξων ΑΜ, Α′Μ′, Α″Μ″, ταῦτα δὲ δὲν δύνανται



Σχ. 2

νὰ ἦναι καὶ τὰ ἡμίτονα τῆς γωνίας Ο, διότι τότε μία καὶ ἡ αὐτὴ γωνία Ο ἤθελεν ἔχει ἄπειρα ἡμίτονα ΜΠ, Μ′Π′, Μ″Π″, κτλ. Ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΠ, ΟΜ′Π′, ΟΜ″Π″ κλ. πορίζόμεθα τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΟΜ}} = \frac{\text{Μ}'\text{Π}'}{\text{ΟΜ}'} = \frac{\text{Μ}''\text{Π}''}{\text{ΟΜ}''} = \text{κλ.}$$

ἤ, ἂν ὑποτεθῇ ΟΜ = ΟΑ = 1, τὴν ἑξῆς

$$\text{ΜΠ} = \frac{\text{Μ}'\text{Π}'}{\text{ΟΜ}'} = \frac{\text{Μ}''\text{Π}''}{\text{ΟΜ}''} = \text{κλ.}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ΜΠ, ἡ παριστῶσα τὸ ἡμίτονον (διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς, τῆς ὑποτεινούσης τόξον διπλάσιον τοῦ ΑΜ) τοῦ τόξου ΑΜ, τοῦ ἀνήκοντος εἰς περιφέρειαν, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑπετέθη ἴση τῇ γραμμικῇ μονάδι, παριστᾷ συγχρόνως καὶ τὸν λόγον τῶν γραμμῶν, ἃς ἐκαλέσαμεν ἡμίτονα τῶν τόξων, εἰς ἃ αὗται ἀνήκουσι, πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν εἰς ἃς τὰ τόξα ταῦτα ἀνήκουσι περιφερειῶν· ἐπειδὴ δὲ μία καὶ ἡ αὐτὴ γωνία Ο δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄπειρα ἡμίτονα, ἀλλ' ἓν καὶ μόνον, ἕπεται ὅτι οἱ λόγοι οὗτοι, οἱ ἴσοι τῷ ἡμιτόνῳ τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν γραμμικὴν μονάδα τόξου καὶ μετροῦντος αὐτήν, παριστῶσι τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Ο, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖ ἡ ἀκτὶς τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου. Ὅ,τι δὲ εἴπομεν περὶ τοῦ ἡμιτόνου, ἐφαρμόζεται κατὰ γράμμα καὶ εἰς τὰς λοιπὰς τριγωνομετρικὰς γραμμάς. Αἱ τριγωνομετρικαὶ λοιπὸν γραμμαὶ τῶν γωνιῶν, ὅπως προηγουμένως ὡρίσθησαν, παριστῶσι τοὺς λόγους τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν μετρούντων αὐτὰς τόξων πρὸς τὰς ἀκτῖνας, τῶν εἰς ἃς τὰ τόξα ταῦτα ἀνήκουσιν περιφερειῶν, ὁποιαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αὗται.

Παρατήρησις.—Ἐπειδὴ αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ τῶν γωνιῶν παριστῶσι λόγους, πᾶς δὲ λόγος ἢ καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε λόγων εἶναι 0 βαθμοῦ (π. χ. τὸ γινόμενον $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha'}{\beta'}\times\frac{\alpha''}{\beta''}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\times\alpha'\times\alpha''}{\beta\times\beta'\times\beta''}$, οὗτινος ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι τρίτου βαθμοῦ, ἐπομένως τὸ πηλίκον αὐτῶν 0 βαθμοῦ), ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν, ἐν αἷς αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ εἰσέρχονται ὡς παράγοντες, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ἡ ἀπαιτουμένη ὁμογένεια, ἀρκεῖ οἱ λοιποὶ παράγοντες νὰ ἀποτελῶσι τοιαύτην, π. χ. ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ σμ } A$$

εἶναι ὁμογενής, διότι ἅπαντες οἱ ὅροι αὐτῆς εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, καὶ τοῦτο διότι ὁ παράγων σμ Α τοῦ τρίτου ὅρου $2\beta\gamma$ σμ Α παριστᾷ λόγον καὶ εἶναι ἐπομένως 0 βαθμοῦ.

Ὡσαύτως ἡ ἰσότης

$$\text{εφ } \tau \text{ εφ } \tau' \text{ εφ } \tau'' = 1,$$

ἥτις ἀποδεικνύεται, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων τ, τ', τ'' ἦναι ἴσον μὲ 180^0, εἶναι ὁμογενὴς καὶ 0 βαθμοῦ· διότι οἱ παράγοντες ἐφ τ, ἐφ τ', ἐφ τ'' παριστῶσι λόγους, ὧν ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ 0.

Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν πρὸς ἀλλήλας γραμμῶν.

22. Μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν πέντε μόνον εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι *διάφοροι* σχέσεις[1], ταύτας δὲ πορίζόμεθα λίαν εὐκόλως ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΤ, ΟΜΠ, ΟΒΣ, ΟΚΜ, τῶν περιεχόντων τὰς ἓξ τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τοῦ τόξου ΑΜ, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος τ, ὡς ἑξῆς.

Ἐν πρώτοις, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΜΠ εἶναι ὀρθογώνιον, ἔχομεν

$$\overline{\text{ΜΠ}}^2 + \overline{\text{ΟΠ}}^2 = \overline{\text{ΟΑ}}^2 \quad \text{ἢ} \quad \text{ἡμ}^2\tau + \text{σμ}^2\tau = 1 \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΠ καὶ ΟΤΑ πορίζόμεθα τὰς ἀναλογίας

$$\text{ΑΤ} : \text{ΜΠ} = \text{ΟΑ} : \text{ΟΠ} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΟΤ} : \text{ΟΜ} = \text{ΟΑ} : \text{ΟΠ}$$

ἤτοι

$$\text{ἐφ}\,\tau : \text{ἡμ}\,\tau = 1 : \text{σμ}\,\tau \quad \text{καὶ} \quad \text{τμ}\,\tau : 1 = 1 : \text{σμ}\,\tau,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα ἀμέσως

$$\text{ἐφ}\,\tau = \frac{\text{ἡμ}\,\tau}{\text{σμ}\,\tau} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \text{τμ}\,\tau = \frac{1}{\text{σμ}\,\tau} \quad (3)$$

Ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΟΒΣ καὶ ΟΚΜ πορίζόμεθα τὰς ἀναλογίας

$$\text{ΒΣ} : \text{ΚΜ} = \text{ΟΒ} : \text{ΟΚ} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΟΣ} : \text{ΟΜ} = \text{ΟΒ} : \text{ΟΚ}$$

[1] Διότι, ἂν εἴχομεν 6 διαφόρους σχέσεις, τότε ἑκάστη τριγωνομετρικὴ γραμμὴ ἤθελεν ἔχει ὡρισμένην τιμήν, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦτο ἡ τιμὴ τοῦ εἰς ὃν αὕτη ἀνήκει τόξου, τοῦθ' ὅπερ μὴ ἀληθές· ἂν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι μόνον 4 διαφόρους σχέσεις ἠδυνάμεθα νὰ ἔχωμεν, τότε δίδοντες εἰς μίαν τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ὁποιανδήποτε κατ' ἀρέσκειαν τιμήν, ἠθέλομεν ἔχει 4 ἐξισώσεις μὲ 5 ἀγνώστους καὶ ἠθέλομεν πορισθῇ δι' ἑκάστην τῶν τεσσάρων ἀπείρους τιμάς, δίδοντες κατ' ἀρέσκειαν ἀπείρους τιμὰς εἰς τὴν πέμπτην τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων· ἕπεται δὲ ἐντεῦθεν ὅτι τότε τόξον τι δύναται νὰ ἔχῃ ἓν π. χ. ἡμίτονον καὶ ἄπειρα συνημίτονα, ἐφαπτομένας κτλ. τοῦθ' ὅπερ ἄτοπον.

ἤτοι

$$\sigma\varphi\,\tau : \sigma\mu\,\tau = 1 : \eta\mu\,\tau \quad \text{καὶ} \quad \sigma\tau\,\tau : 1 = 1 : \eta\mu\,\tau,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα

$$\sigma\varphi\,\tau = \frac{\sigma\mu\,\tau}{\eta\mu\,\tau} \quad (4) \quad \text{καὶ} \quad \sigma\tau\,\tau = \frac{1}{\eta\mu\,\tau} \quad (5)$$

23. Ἂν τὸ δεδομένον τόξον τ ἦτο τὸ ΑΜ′, ἠθέλομεν θεωρήσει τὰ ἀντιστοιχοῦντα ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜ′Π′, ΟΑΤ′, ΟΚΜ′, ΟΒΣ′ καὶ ἠθέλομεν ὡσαύτως εὕρει ἐκ μὲν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΜ′Π′ τὴν σχέσιν (1)

$$\overline{\text{Μ′Π′}}^2 + \overline{\text{ΟΠ′}}^2 = 1 \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu^2\tau + \sigma\mu^2\tau = 1,$$

ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΟΜ′Π′ καὶ ΟΑΤ′ τὰς ἀναλογίας

$$\text{ΑΤ′} : \text{Μ′Π′} = \text{ΟΑ} : \text{ΟΠ′} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΟΤ′} : \text{ΟΜ′} = \text{ΟΑ} : \text{ΟΠ′}$$

ἤτοι

$$\grave{\epsilon}\varphi\,\tau : \eta\mu\,\tau = 1 : \sigma\mu\,\tau \quad \text{καὶ} \quad \tau\mu\,\tau : 1 = 1 : \sigma\mu\,\tau,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα τὰς αὐτὰς (2) καὶ (3) σχέσεις

$$\grave{\epsilon}\varphi\,\tau = \frac{\eta\mu\,\tau}{\sigma\mu\,\tau} \quad \text{καὶ} \quad \tau\mu\,\tau = \frac{1}{\sigma\mu\,\tau}$$

καὶ τέλος ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΟΜ′Κ καὶ ΟΒΣ′ τὰς ἀναλογίας

$$\text{ΒΣ′} : \text{ΚΜ′} = \text{ΟΒ} : \text{ΟΚ} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΟΣ′} : \text{ΟΜ′} = \text{ΟΒ} : \text{ΟΚ}$$

$$\sigma\varphi\,\tau : \sigma\mu\,\tau = 1 : \eta\mu\,\tau \quad \text{καὶ} \quad \sigma\tau\,\tau : 1 = 1 : \eta\mu\,\tau,$$

ἐξ ὧν ἔχομεν τὰς αὐτὰς σχέσεις (4) καὶ (5), ἤτοι

$$\sigma\varphi\,\tau = \frac{\sigma\mu\,\tau}{\eta\mu\,\tau} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\tau\,\tau = \frac{1}{\eta\mu\,\tau}$$

24. Τὰς αὐτὰς σχέσεις ἠθέλομεν εὕρει καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἂν τὸ τόξον τ ἦτο ἴσον τῷ ΑΜ″ ἢ τῷ ΑΜ‴, καὶ οὐ μόνον αἱ σχέσεις εὑρίσκονται αἱ αὐταί, ἀλλὰ καὶ παρέχουσι καθ' ὅλας

τὰς περιπτώσεις τὰ ἁρμόζοντα σημεῖα εἰς τὰς ἐν αὐταῖς τριγωνομετρικὰς γραμμάς. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι εὕρομεν τὰς ἀνωτέρω πέντε σχέσεις, ὅταν τὸ τ ἦτο μικρότερον 90^0, καὶ ἂς ἴδωμεν, ἂν τὰ σημεῖα τῶν ἐν αὐταῖς τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἐπαληθεύωνται, ὅταν τὸ τ λαμβάνῃ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς ΑΜ', ΑΜ'', ΑΜ'''.

Ὅταν τὸ τ = ΑΜ', τὸ συνημίτονον, ἡ ἐφαπτομένη, ἡ συνεφαπτομένη καὶ τέμνουσά του εἶναι ἀρνητικαί. Ἀλλ' ὁ τύπος (1) εἶναι ἀληθὴς ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σημεῖον τοῦ ἡμ τ καὶ σμ τ, διότι περιέχει ταῦτα εἰς τὸ τετράγωνον, ὅπερ πάντοτε εἶναι θετικόν.

Ὁ τύπος $\text{εφ}\,\tau = \dfrac{\text{ημ}\,\tau}{\text{σμ}\,\tau}$ ἀποδεικνύεται ἀληθής, διότι ἡ ἐφ τ καὶ σμ τ εἶναι ἀρνητικά, ἐνῷ τὸ ἡμ τ εἶναι θετικόν.

Ὁ τύπος $\text{τμ}\,\tau = \dfrac{1}{\text{σμ}\,\tau}$ εἶναι ἀληθής, διότι καὶ ἡ τμ τ καὶ τὸ σμ τ εἶναι ἀμφότερα ἀρνητικά.

Ὁ τύπος $\text{σφ}\,\tau = \dfrac{\text{σμ}\,\tau}{\text{ημ}\,\tau}$ εἶναι ἀληθής, διότι ἡ σφ τ καὶ τὸ σμ τ εἶναι ἀρνητικά, ἐνῷ τὸ ἡμ τ εἶναι θετικόν.

Ὁ τύπος $\text{στ}\,\tau = \dfrac{1}{\text{ημ}\,\tau}$ εἶναι ὡσαύτως ἀληθής, διότι καὶ ἡ στ τ καὶ τὸ ἡμ τ εἶναι θετικά.

Ὅταν τ = ΑΜ'', ἔχομεν ἡμ τ ἀρνητικόν, σμ τ ἀρνητικόν, ἐφ τ θετικήν, τμ τ ἀρνητικήν, σφ τ θετικὴν καὶ στ τ ἀρνητικήν, βλέπομεν δὲ εὐκόλως, ὅτι ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω πέντε τύπων παρέχει τὰ αὐτὰ καὶ τὰ ἁρμόζοντα σημεῖα εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτοῦ.

Ὅταν τέλος τ = ΑΜ''', ἔχομεν ἡμ τ ἀρνητικόν, σμ τ θετικόν, ἐφ τ ἀρνητικήν, σφ τ ἀρνητικήν, τμ τ θετικὴν καὶ στ τ ἀρνητικήν, τὰ δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν τύπων παρεχόμενα σημεῖα εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκάστου εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ τὰ ἁρμόζοντα. Οἱ ἀνωτέρω λοιπὸν 5 τύποι εἶναι γενικοί.

25. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντων 5 τύπων μεταξὺ τῶν ἓξ τριγωνομετρικῶν γραμμῶν πορίζόμεθα λίαν εὐκόλως τὰς τιμὰς τῶν 5 τούτων συνεκθέσει τῆς ἕκτης. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν 5 τριγωνομετρικῶν γραμμῶν συνεκθέσει τοῦ ἡμιτόνου.

Ὁ τύπος (1) δίδει ἀμέσως

$$\text{σμ}\,\tau = \sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\tau}$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ταύτην τιμὴν εἰς τοὺς λοιπούς, τοὺς περιέχοντας τὸ σμ τ, θέλομεν ἔχει

$$\text{ἐφ}\,\tau = \frac{\text{ἡμ}\,\tau}{\sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\tau}}, \quad \text{σφ}\,\tau = \frac{\sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\tau}}{\text{ἡμ}\,\tau},$$

$$\text{τμ}\,\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\tau}} \quad \text{καὶ} \quad \text{στ}\,\tau = \frac{1}{\text{ἡμ}\tau}.$$

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ τὸ σμ τ δίδεται διὰ τῆς τιμῆς $\sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\tau}$, τὸ δὲ ῥιζικὸν ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ διπλοῦν σημεῖον $+$ καὶ $-$, συμπεραίνομεν ὅτι εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἡμίτονον ἀντιστοιχοῦσι τόξα ἔχοντα δύο συνημίτονα, δύο ἐφαπτομένας, δύο συνεφαπτομένας, δύο τεμνούσας καὶ μίαν συντέμνουσαν. Τῷ ὄντι, ἂν ὑποθέσωμεν ἡμτ $=$ ΟΚ (σχ. 1), τὰ ἀντιστοιχοῦντα δύο θετικὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ ἔχουσι δύο συνημίτονα ΟΠ καὶ ΟΠ′ ἴσα καὶ ἀντιθέτων σημείων· δύο συνεφαπτομένας ΒΣ καὶ ΒΣ′ ἴσας καὶ ἀντιθέτων σημείων· δύο τεμνούσας ΟΤ καὶ ΟΤ′, ἡ μὲν ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ τόξον ΑΜ καὶ οὖσα θετική, ἡ δὲ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ τόξον ΑΜ′ καὶ οὖσα ἀρνητική, καὶ μίαν συντέμνουσαν ΟΣ ἢ ΟΣ′, διότι ἑκατέρα τούτων εἶναι θετική, ὡς ἔχουσα μεταξὺ τῶν ἄκρων αὐτῆς Ο καὶ Σ ἢ Ο καὶ Σ′ τὸ ἄκρον Μ ἢ Μ′ τοῦ τόξου ΑΜ ἢ ΑΜ′.

26 Ἂν ἠθέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν συνεκθέσει τῆς ἐφαπτομένης, ἠθέλομεν πρῶτον πορισθῆ ἐκ μὲν τοῦ τύπου (2) ἡμ τ$=$ἐφ τ σμ τ, ἐκ δὲ τοῦ τύπου (1), ἐν ᾧ

ἠθέλομεν ἀντικαταστήσει ἡμ τ διὰ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς αὐτοῦ εφ τ σμ τ, τὸν ἑξῆς

$$\text{εφ}^2\tau\ \text{σμ}^2\tau + \text{σμ}^2\tau = 1 \quad \text{ἢ} \quad \text{σμ}^2\tau(1+\text{εφ}^2\tau) = 1,$$

ἐξ οὗ ποριζόμεθα

$$\text{σμ}\ \tau = \frac{1}{\sqrt{1+\text{εφ}^2\tau}},\ \text{ἑπομένως ἡμ}\ \tau = \text{εφ}\ \tau\ \frac{1}{\sqrt{1+\text{εφ}^2\tau}},$$

$$\text{σφ}\ \tau = \frac{\text{σμ}\ \tau}{\text{ἡμ}\ \tau} = \frac{1}{\text{εφ}\ \tau}, \qquad \text{τμ}\ \tau = \sqrt{1+\text{εφ}^2\tau}$$

$$\text{καὶ} \quad \text{στ}\ \tau = \frac{\sqrt{1+\text{εφ}^2\tau}}{\text{εφ}\ \tau},$$

Παρατηρητέον ὡσαύτως ὅτι εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην ἀντιστοιχοῦσι δύο ἡμίτονα, δύο συνημίτονα, μία συνεφαπτομένη, δύο τέμνουσαι καὶ δύο συντέμνουσαι, ταῦθ' ἅτινα ποριζόμεθα λίαν εὐκόλως ἐκ τοῦ σχήματος 1 κατασκευάζοντες τὰ θετικὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ'', τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην ΑΤ, καὶ βλέποντες ὅτι ἔχομεν δύο ἡμίτονα ΜΠ καὶ Μ''Π' ἴσα καὶ ἀντιθέτων σημείων· δύο συνημίτονα ΟΠ καὶ ΟΠ' ἴσα καὶ ἀντιθέτων σημείων· δύο τεμνούσας ΟΤ καὶ ΟΤ ἴσας καὶ ἀντιθέτων σημείων (διότι ἡ δευτέρα ΟΤ, ἡ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ πρώτῃ καὶ ἀνήκουσα εἰς τὸ τόξον ΑΜ'', εἶναι ἀρνητική, ὡς μὴ ἔχουσα μεταξὺ τῶν ἄκρων αὐτῆς Ο καὶ Τ τὸ ἄκρον Μ'' τοῦ τόξου ΑΜ'', εἰς ὃ ἀνήκει)· δύο συντεμνούσας ΟΣ καὶ ΟΣ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ μίαν συνεφαπτομένην ΒΣ.

27. Ἐκ τῶν αὐτῶν τύπων, καταλλήλως συνδυαζομένων, ποριζόμεθα εὐκόλως καὶ ἄλλους τινὰς κοινῆς χρήσεως. Παραδείγματος χάριν, πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (2) καὶ (4) ἔχομεν

$$\text{εφ}\ \tau\ \text{σφ}\ \tau = \frac{\text{ἡμ}\ \tau}{\text{σμ}\ \tau} \times \frac{\text{σμ}\ \tau}{\text{ἡμ}\ \tau} = 1$$

τουτέστιν, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ συνεφαπτόμεναι τοῦ αὐτοῦ τόξου τ εἶναι λόγοι ἀντίστροφοι, διότι τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται τῇ μονάδι.

Ὡσαύτως, ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ τύπου (2) καὶ προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὴν 1, ἔχομεν

$$1 + \text{ἐφ}^2\tau = \frac{\text{ἡμ}^2\tau}{\text{σμ}^2\tau} + 1 = \frac{\text{ἡμ}^2\tau + \text{σμ}^2\tau}{\text{σμ}^2\tau}$$

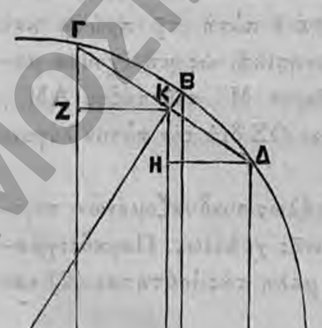
$$= \frac{1}{\text{σμ}^2\tau} = \text{τμ}^2\tau \left(\text{διότι τμ}\,\tau = \frac{1}{\text{σμ}\,\tau}\right)$$

ἤτοι $$1 + \text{ἐφ}^2\tau = \text{τμ}^2\tau,$$

τύπον, ὃν πορίζόμεθα ἀμέσως ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΤ, ἐν ᾧ ΟΑ = 1, ΟΤ = τμ τ καὶ ΑΤ = ἐφ τ.

Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τ καὶ τ' συνεκθέσει τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τῶν τόξων τούτων.

28. Ἔστω (σχ. 3) τὸ τόξον ΑΒ = τ καὶ ΒΓ = ΒΔ = τ', τῆς ἀκτῖνος ὑποτιθεμένης πάντοτε = 1. Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Γ, Β, Δ καὶ Κ καταβιβάσωμεν τὰς καθέτους ΓΡ, ΒΠ, ΔΣ καὶ ΚΕ ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἄξωμεν τὰς ΚΖ καὶ ΔΗ παραλλήλως τῇ ΟΑ, θέλομεν ἔχει προφανῶς



Σχ. 3

τόξον ΑΓ = τ + τ',

τόξον ΑΔ = τ — τ',

ΓΡ = ἡμ ΑΓ = ἡμ(τ + τ'),

ΔΣ = ἡμ ΑΔ = ἡμ(τ — τ'),

ΟΡ = σμ ΑΓ = σμ(τ + τ'),

ΟΣ = σμ ΑΔ = σμ(τ —τ'),

ἡμ τ = ΒΠ, σμ τ = ΟΠ,

ἡμ τ' = ΓΚ, σμ τ' = ΟΚ.

Ἀλλὰ $\Gamma P = \Gamma Z + ZP = \Gamma Z + KE,$

$$\Delta\Sigma = KE - KH = KE - \Gamma Z,$$

$$OP = OE - PE = OE - KZ,$$

$$O\Sigma = OE + EZ = OE + H\Delta = OE + KZ.$$

Ἄρα

$$\text{ἡμ}(\tau + \tau') = \Gamma Z + KE, \quad \text{ἡμ}(\tau - \tau') = KE - \Gamma Z$$

$$\text{σμ}(\tau + \tau') = OE - KZ, \quad \text{σμ}(\tau - \tau') = OE + KZ$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ τὰ μὲν δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΖΚ καὶ ΚΗΔ εἶναι ὅμοια μὲ τὰ δύο ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΚΕ καὶ ΟΒΠ, διότι αἱ πλευραὶ ΓΚ, ΚΔ, ΚΖ καὶ ΔΗ τῶν μὲν εἶναι ἀμοιβαίως κάθετοι ἐκ τῶν πλευρῶν ΟΒ, ΟΚ, ΒΠ καὶ ΚΕ τῶν δέ, θέλομεν ἔχει τὰς μεταξὺ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν ἀναλογίας

$$KE : B\Pi = OK : OB, \quad \text{ἤτοι} \quad KE : \text{ἡμ}\,\tau = \text{σμ}\,\tau' : 1,$$

$$OE : O\Pi = OK : OB, \quad \text{ἤτοι} \quad OE : \text{σμ}\,\tau = \text{σμ}\,\tau' : 1,$$

$$\Gamma Z : O\Pi = \Gamma K : OB, \quad \text{ἤτοι} \quad \Gamma Z : \text{σμ}\,\tau = \text{ἡμ}\,\tau' : 1,$$

$$ZK : B\Pi = \Gamma K : OB, \quad \text{ἤτοι} \quad ZK : \text{ἡμ}\,\tau = \text{ἡμ}\,\tau' : 1,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα ἀμέσως

$$KE = \text{ἡμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau', \quad OE = \text{σμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau',$$

$$\Gamma Z = \text{σμ}\,\tau\ \text{ἡμ}\,\tau', \quad ZK = \text{ἡμ}\,\tau\ \text{ἡμ}\,\tau',$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὰς ἀνωτέρω τέσσαρας ἰσότητας θέλομεν ἔχει τοὺς τέσσαρας τύπους

$$\text{ἡμ}(\tau + \tau') = \text{ἡμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau' + \text{σμ}\,\tau\ \text{ἡμ}\,\tau' \qquad (1),$$

$$\text{ἡμ}(\tau - \tau') = \text{ἡμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau' - \text{σμ}\,\tau\ \text{ἡμ}\,\tau' \qquad (2),$$

$$\text{σμ}(\tau + \tau') = \text{σμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau' - \text{ἡμ}\,\tau\ \text{ἡμ}\,\tau' \qquad (3),$$

$$\text{σμ}(\tau - \tau') = \text{σμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau' + \text{ἡμ}\,\tau\ \text{ἡμ}\,\tau' \qquad (4),$$

δι' ὧν εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων διὰ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν τόξων τούτων.

29. Οἱ ἀνωτέρω εὑρεθέντες 4 τύποι εἶναι μεγίστης σπουδαιότητος καὶ χρήσεως καὶ πρέπει οἱ μαθηταὶ νὰ ἔχωσιν αὐτοὺς πάντοτε προχείρους ἐν τῇ μνήμῃ αὐτῶν, μολονότι δὲ εὑρέθησαν ὑποτεθέντων τῶν τόξων τ καὶ τ′ θετικῶν, τοῦ τ′ μικροτέρου τοῦ τ καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν τ + τ′ μικροτέρου 90^0, εἶναι οὐχ ἧττον καὶ ἀποδεικνύονται *γενικοί*, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὰ τόξα τ καὶ τ′. Νομίζομεν ὅμως ὅλως περιττὸν νὰ ἐκθέσωμεν ἐνταῦθα τὰ καθέκαστα τῆς ἀποδείξεως ταύτης, ἥτις μόνον εἰς τοὺς προτιθεμένους νὰ σπουδάσωσιν ἰδίᾳ τὰς Μαθηματικὰς ἐπιστήμας δύναται νὰ παρέχῃ τὸ προσῆκον ἐνδιαφέρον, καὶ μεταβαίνομεν ἀμέσως εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἐφ. καὶ σφ. τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τ καὶ τ′ συνεκθέσει τῶν ἐφ. καὶ σφ. τῶν τόξων τούτων.

Ἐφαπτόμεναι καὶ συνεφαπτόμεναι τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τ καὶ τ′ συνεκθέσει τῶν ἐφ. καὶ σφ. τῶν τόξων τούτων.

30. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (2) τῆς § 22 ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ τόξου τ διὰ τοῦ τ + τ′ καὶ τ — τ′, θέλομεν ἔχει

$$\text{ἐφ}(\tau+\tau')=\frac{\text{ἡμ}(\tau+\tau')}{\text{σμ}(\tau+\tau')} \quad \text{καὶ} \quad \text{ἐφ}(\tau-\tau')=\frac{\text{ἡμ}(\tau-\tau')}{\text{σμ}(\tau-\tau')}$$

ἤ, ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν ἡμ(τ + τ′), σμ(τ + τ′), ἡμ(τ—τ′), σμ(τ—τ′) τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας τιμὰς αὐτῶν,

$$\text{ἐφ}(\tau+\tau')=\frac{\text{ἡμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'+\text{σμ}\,\tau\;\text{ἡμ}\,\tau'}{\text{σμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'-\text{ἡμ}\,\tau\;\text{ἡμ}\,\tau'},$$

$$\text{ἐφ}(\tau-\tau')=\frac{\text{ἡμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'-\text{σμ}\,\tau\;\text{ἡμ}\,\tau'}{\text{σμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'+\text{ἡμ}\,\tau\;\text{ἡμ}\,\tau'}$$

Διαιροῦντες δὲ τοὺς δύο ὅρους ἑκατέρου τῶν δύο κλασμάτων διὰ τοῦ γινομένου σμ τ σμ τ′, ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας καὶ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν $\frac{\text{ἡμ}\,\tau}{\text{σμ}\,\tau}$ καὶ $\frac{\text{ἡμ}\,\tau'}{\text{σμ}\,\tau'}$, τὰ ἴσα αὐτοῖς ἐφ τ, ἐφ τ', θέλομεν ἔχει τοὺς ζητουμένους τύπους

1√ $\text{ἐφ}(\tau+\tau')=\frac{\text{ἐφ}\,\tau+\text{ἐφ}\,\tau'}{1-\text{ἐφ}\,\tau\,\text{ἐφ}\,\tau'}$ 2) $\text{ἐφ}(\tau-\tau')=\frac{\text{ἐφ}\,\tau-\text{ἐφ}\,\tau'}{1+\text{ἐφ}\,\tau\,\text{ἐφ}\,\tau'}$

31. Ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ (4) τῆς αὐτῆς παραγράφου ποιήσωμεν τὰς αὐτὰς ἀντικαταστάσεις, θέλομεν ἔχει

$$\text{σφ}(\tau+\tau')=\frac{\text{σμ}(\tau+\tau')}{\text{ἡμ}(\tau+\tau')} \quad \text{καὶ} \quad \text{σφ}(\tau-\tau')=\frac{\text{σμ}(\tau-\tau')}{\text{ἡμ}(\tau-\tau')}$$

ἐξ ὧνποριζόμεθα εὐκόλως ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν ἡμ(τ+τ') σμ(τ+τ'), ἡμ(τ−τ') καὶ σμ(τ−τ') τοὺς γνωστοὺς τύπους καὶ διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκατέρου τῶν εὑρεθησομένων κλασμάτων διὰ τοῦ γινομένου ἡμ τ ἡμ τ' κτλ.

$$\text{σφ}(\tau+\tau')=\frac{\text{σφ}\,\tau\;\text{σφ}\,\tau'-1}{\text{σφ}\,\tau+\text{σφ}\,\tau'} \quad \text{καὶ} \quad \text{σφ}(\tau-\tau')=\frac{\text{σφ}\,\tau\;\text{σφ}\,\tau'+1}{\text{σφ}\,\tau-\text{σφ}\,\tau'}$$

32. Καθόσον δ' ἀφορᾷ εἰς τὰς τιμὰς τῶν τεμνουσῶν καὶ συντεμνουσῶν τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων τ καὶ τ', αὗται εὑρίσκονται ἀμέσως ἐκ τῶν τύπων (3) καὶ (5) τῆς § 22, ἀλλ' ἐπειδὴ οὐδέποτε σχεδὸν γίνεται χρῆσις αὐτῶν, εἶναι δὲ αὗται ἀντίστροφοι τῶν συνημιτόνων καὶ ἡμιτόνων τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος τόξων, νομίζομεν ὅλως περιττὸν νὰ κάμωμεν ἰδιαιτέρως λόγον περὶ τούτων.

Τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ τῶν πολλαπλασίων καὶ ὑποπολλαπλασίων τόξου τινὸς τ.

33. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τ' = τ, ποριζόμεθα ἀμέσως ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) τῆς § 28 τοὺς τύπους

3) $\text{ἡμ}\,2\tau=\text{ἡμ}\,\tau\,\text{σμ}\,\tau+\text{σμ}\,\tau\,\text{ἡμ}\,\tau=2\,\text{ἡμ}\,\tau\,\text{σμ}\,\tau, \qquad (1)$

4) $\text{σμ}\,2\tau=\text{σμ}^2\tau-\text{ἡμ}^2\tau, \qquad (2)$

δι' ὧν εὑρίσκομεν διὰ τῶν ἡμ. καὶ σμ. τόξου τινὸς τ τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τοῦ διπλασίου τόξου 2τ.

34. Ἐὰν εἰς τοὺς αὐτοὺς τύπους (1) καὶ (2) τῆς αὐτῆς § 28 ὑποθέσωμεν $\tau' = 2\,\tau$, θέλομεν ἔχει τοὺς τύπους

$$\text{ἡμ}\,3\tau = \text{ἡμ}\tau\ \text{σμ}2\tau + \text{σμ}\tau\ \text{ἡμ}2\tau,$$
$$\text{σμ}\,3\tau = \text{σμ}\tau\ \text{σμ}2\tau - \text{ἡμ}\tau\ \text{ἡμ}2\tau,$$

ἐν οἷς ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ ἡμ 2τ καὶ σμ 2τ τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας τιμὰς αὐτῶν 2ἡμ τ σμ 2τ καὶ $\text{σμ}^2\tau - \text{ἡμ}^2\tau$, θέλομεν ἔχει διαδοχικῶς ἐκ μὲν τοῦ τύπου (1)

$$\text{ἡμ}\,3\tau = \text{ἡμ}\,\tau(\text{σμ}^2\tau - \text{ἡμ}^2\tau) + \text{σμ}\,\tau.\ 2\text{ἡμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau,$$
$$\text{ἡμ}\,3\tau = \text{ἡμ}\,\tau\ \text{σμ}^2\tau - \text{ἡμ}^3\tau + 2\,\text{ἡμ}\,\tau\,\text{σμ}^2\tau,$$
$$\text{ἡμ}\,3\tau = \text{ἡμ}\,\tau(1 - \text{ἡμ}^2\tau) - \text{ἡμ}^3\tau + 2\text{ἡμ}\,\tau(1 - \text{ἡμ}^2\tau),$$
$$\text{ἡμ}\,3\tau = \text{ἡμ}\,\tau - \text{ἡμ}^3\tau - \text{ἡμ}^3\tau + 2\text{ἡμ}\,\tau - 2\text{ἡμ}^3\tau,$$
$$\text{ἡμ}\,3\tau = 3\text{ἡμ}\,\tau - 4\text{ἡμ}^3\tau, \qquad (3)$$

ἐκ δὲ τοῦ τύπου (2) λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$\text{σμ}\,3\tau = \text{σμ}\,\tau(\text{σμ}^2\tau - \text{ἡμ}^2\tau) - \text{ἡμ}\,\tau.\ 2\text{ἡμ}\tau\,\text{σμ}\tau,$$
$$\text{σμ}\,3\tau = \text{σμ}^3\tau - \text{σμ}\,\tau\ \text{ἡμ}^2\tau - 2\text{ἡμ}^2\tau\ \text{σμ}\tau,$$
$$\text{σμ}\,3\tau = \text{σμ}^3\tau - \text{σμ}\,\tau(1 - \text{σμ}^2\tau) - 2\text{σμ}\,\tau(1 - \text{σμ}^2\tau),$$
$$\text{σμ}\,3\tau = \text{σμ}^3\tau - \text{σμ}\tau + \text{σμ}^3\tau - 2\text{σμ}\,\tau + 2\text{σμ}^3\tau,$$
$$\text{σμ}\,3\tau = 4\text{σμ}^3\tau - 3\text{σμ}\,\tau. \qquad (4)$$

Ὅπως διὰ τῶν προευρεθέντων τύπων (1) καὶ (2) ἐπορίσθημεν διὰ τῶν γενομένων ἀντικαταστάσεων τοὺς (3) καὶ (4), οὕτω καὶ διὰ τῶν τύπων (3) καὶ (4) ὑποθέτοντες $\tau' = 3\,\tau$, θέλομεν πορισθῇ ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) τῆς § 28 τοὺς τύπους ἡμ 4τ καὶ σμ 4τ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι διὰ τῶν τύπων (1) καὶ (2) τῆς § 28 δυνάμεθα διαδοχικῶς νὰ πορισθῶμεν τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν πολλαπλασίων τοῦ τ τόξων διὰ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τοῦ τόξου τούτου.

35. Ὑποθέτοντες $\tau = \frac{1}{2}\tau$ πορίζόμεθα ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων (1) καὶ (2) ἀμέσως τοὺς ἑξῆς

$$\text{ἡμ}\, 2\left(\frac{\tau}{2}\right) = 2\, \text{ἡμ}\frac{\tau}{2}\, \text{σμ}\frac{\tau}{2},$$

ἢ

$$\text{ἡμ}\, \tau = 2\, \text{ἡμ}\frac{\tau}{2}\, \text{σμ}\frac{\tau}{2}, \tag{5}$$

$$\text{σμ}\, 2\left(\frac{\tau}{2}\right) = \text{σμ}^2\frac{\tau}{2} - \text{ἡμ}^2\frac{\tau}{2},$$

ἢ

$$\text{σμ}\, \tau = \text{σμ}^2\frac{\tau}{2} - \text{ἡμ}^2\frac{\tau}{2}, \tag{6}$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα ἀμέσως τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς τ διὰ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τοῦ τόξου τούτου.

36. Ἐὰν συνδυάσωμεν τὸν τύπον (6) μετὰ τοῦ τύπου (1) τῆς § 22, ἤτοι τοῦ $1 = \text{ἡμ}^2\frac{\tau}{2} + \text{σμ}^2\frac{\tau}{2}$, θέλομεν ἔχει προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες τούτους κατὰ μέλη

$$1 + \text{σμ}\, \tau = 2\, \text{σμ}^2\frac{\tau}{2},$$

$$1 - \text{σμ}\, \tau = 2\, \text{ἡμ}^2\frac{\tau}{2},$$

ἐπομένως

$$\text{ἡμ}\frac{\tau}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{σμ}\, \tau}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \text{σμ}\frac{\tau}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{σμ}\, \tau}{2}} \tag{7}$$

τουτέστιν εὑρίσκομεν τοὺς τύπους, δι' ὧν πορίζόμεθα τὰς τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς τ διὰ τῆς τιμῆς τοῦ συνημιτόνου τοῦ τόξου τούτου.

37. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους (3) καὶ (4) ὑποθέσωμεν $τ' = \frac{τ}{3}$, θέλομεν ἔχει

$$ημ\, τ = 3ημ\frac{τ}{3} - 4ημ^3\frac{τ}{3}$$

$$σμ\, τ = 4σμ^3\frac{τ}{3} - 3σμ\frac{τ}{3}$$

πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ $ημ\frac{τ}{3}$ ἢ τοῦ $σμ\frac{τ}{3}$ πρέπει νὰ λύσωμεν τὴν πρώτην ἢ τὴν δευτέραν τῶν ἀνωτέρω τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, τοῦθ' ὅπερ διδάσκει ἡ ἀνωτέρα Ἄλγεβρα.

38. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ τῆς § 30 ὑποθέσωμεν $τ' = τ$, θέλομεν ἔχει

$$εφ(τ + τ) = \frac{εφ\, τ + εφ\, τ}{1 - εφ\, τ\, εφ\, τ}, \quad ἢ \quad εφ\, 2τ = \frac{2εφ\, τ}{1 - εφ^2τ},$$

οὗτος δὲ διδει τὴν τιμὴν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ διπλασίου τόξου 2τ συνεκθέσει τῆς ἐφαπτομένης τοῦ αὐτοῦ τόξου.

39. Ὑποθέτοντες $τ' = 2\, τ$ θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$εφ\, 3τ = \frac{εφ\, τ + εφ\, 2τ}{1 - εφ\, τ\, εφ\, 2τ},$$

ἐν ᾧ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ εφ 2τ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν τιμὴν αὐτοῦ θέλομεν ποριcθῇ τὴν τιμὴν τῆς εφ 3τ συνεκθέσει τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόξου τ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

40. Ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ τύπῳ τῆς § 30 ὑποθέσωμεν $τ = \frac{τ}{2}$, θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$εφ\, τ = \frac{2εφ\frac{τ}{2}}{1 - εφ^2\frac{τ}{2}},$$

ὅστις λαμβάνει τὴν μορφήν, παριστωμένου διὰ χ τοῦ ἀγνώστου $\text{ἐφ}\,\frac{\tau}{2}$ καὶ διὰ β τοῦ γνωστοῦ ὅρου $\text{ἐφ}\,\tau$,

$$\beta = \frac{2\chi}{1-\chi^2},$$

καὶ ἐξ οὗ ποριζόμεθα τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\chi^2 + \frac{2}{\beta}\chi - 1 = 0,$$

ἥτις παρέχει διὰ τὴν ἄγνωστον χ τὰς ἑξῆς δύο τιμὰς

$$\chi = \frac{1}{\beta}\left(-1 \pm \sqrt{1+\beta^2}\right)$$

ἤτοι

$$\text{ἐφ}\,\frac{\tau}{2} = \frac{1}{\text{ἐφ}\,\tau}\left(-1 \pm \sqrt{1+\text{ἐφ}^2\tau}\right)$$

Παρατήρησις. — Δὲν πρέπει νὰ φανῇ παράδοξον τὸ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς τ ἔχει δύο τιμάς, ἐνῷ ἡ δεδομένη ἐφαπτομένη αὐτοῦ ἔχει μίαν καὶ μόνην· διότι εἰς τὴν αὐτὴν $\text{ἐφ}\,\tau$ ἀνήκουσι δύο τόξα τ καὶ $180^0 + \tau$, ἑπομένως τὰ ἡμίση αὐτῶν $\frac{\tau}{2}$ καὶ $90^0 + \frac{\tau}{2}$ θὰ ἔχωσι ἀναγκαίως δύο διαφόρους ἐφαπτομένας $\text{ἐφ}\,\frac{\tau}{2}$ καὶ $\text{ἐφ}\left(90^0 + \frac{\tau}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ $\text{ἐφ}\left(90^0 + \frac{\tau}{2}\right)$ εἶναι ἴση μὲ τὴν συνεφαπτομένην τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι $90^0 - \left(90^0 + \frac{\tau}{2}\right)$ ἢ $-\frac{\tau}{2}$, θέλομεν ἔχει

$$\text{ἐφ}\left(90^0 + \frac{\tau}{2}\right) = \text{σφ}\left(-\frac{\tau}{2}\right) = -\,\text{σφ}\,\frac{\tau}{2}$$

τοῦθ᾽ὅπερ φαίνεται καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἐν ᾗ ὁ γνωστὸς ὅρος εἶναι -1, τουτέστιν ἴσος μὲ τὸ γινόμενον $\text{εφ}\,\frac{\tau}{2}\left(-\text{σφ}\,\frac{\tau}{2}\right)$ ἢ $-\text{εφ}\,\frac{\tau}{2}\,\text{σφ}\,\frac{\tau}{2}$, τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων τόξου τινὸς ὁποιουδήποτε οὐσῶν ἀντιστρόφων, ὡς ἀπεδείχθη ἐν τῇ § 27.

41. Ἡ τιμὴ τῆς $\text{εφ}\,\frac{\tau}{2}$ δίδεται καὶ δι' ἑτέρων τύπων εὐχρηστοτέρων, τῶν ἑξῆς

$$\text{εφ}\,\frac{\tau}{2}=\frac{\text{ἡμ}\,\frac{\tau}{2}}{\text{σμ}\,\frac{\tau}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\text{σμ}\,\tau}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\text{σμ}\,\tau}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\text{σμ}\,\tau}{1+\text{σμ}\,\tau}}$$

$$\text{εφ}\,\frac{\tau}{2}=\frac{\text{ἡμ}\,\frac{\tau}{2}}{\text{σμ}\,\frac{\tau}{2}}=\frac{\text{ἡμ}\,\frac{\tau}{2}\,\text{σμ}\,\frac{\tau}{2}}{\text{σμ}^2\,\frac{\tau}{2}}=\frac{\frac{\text{ἡμ}\,\tau}{2}}{\frac{1+\text{σμ}\,\tau}{2}}=\frac{\text{ἡμ}\,\tau}{1+\text{σμ}\,\tau}$$

$$\text{εφ}\,\frac{\tau}{2}=\frac{\text{ἡμ}\,\frac{\tau}{2}}{\text{σμ}\,\frac{\tau}{2}}=\frac{\text{ἡμ}^2\,\frac{\tau}{2}}{\text{σμ}\,\frac{\tau}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\tau}{2}}=\frac{\frac{1-\text{σμ}\,\tau}{2}}{\frac{\text{ἡμ}\,\tau}{2}}=\frac{1-\text{σμ}\,\tau}{\text{ἡμ}\,\tau}$$

οὓς ποριζόμεθα εὐκόλως διὰ τῶν γνωστῶν τύπων

$$\text{ἡμ}\,\frac{\tau}{2}=\sqrt{\frac{1-\text{σμ}\,\tau}{2}},\quad \text{σμ}\,\frac{\tau}{2}=\sqrt{\frac{1+\text{σμ}\,\tau}{2}},$$

$$\text{ἡμ}\,\tau=2\,\text{ἡμ}\,\frac{\tau}{2}\,\text{σμ}\,\frac{\tau}{2}.$$

Παρατήρησις. — Εἶναι ἀναγκαῖον ὁ μαθητὴς νὰ γνωρίζῃ ἐκ μνήμης ἅπαντας τοὺς προηγουμένως ἀποδειχθέντας τύπους, ἵνα δύνηται προχείρως καὶ καταλλήλως νὰ ποιῆται αὐτοῖς χρῆσιν πρὸς τὰς ἑκάστοτε παρουσιαζομένας ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς αὐτοῦ ἀνάγκας, ὡς τοῦτο θέλομεν καταστήσει καταφανὲς ἔν τισι δοθησομένοις εἰς τὸ τέλος παραδείγμασι.

Περὶ ἑτέρων τινῶν λίαν συνεχοῦς χρήσεως τύπων.

42. Οἱ ἐν τῇ § 28 ἀποδειχθέντες τέσσαρες τύποι

$$\text{ἡμ}(\tau+\tau')=\text{ἡμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'+\text{σμ}\,\tau\;\text{ἡμ}\,\tau',$$
$$\text{ἡμ}(\tau-\tau')=\text{ἡμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'-\text{σμ}\,\tau\;\text{ἡμ}\,\tau',$$
$$\text{σμ}(\tau+\tau')=\text{σμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'-\text{ἡμ}\,\tau\;\text{ἡμ}\,\tau',$$
$$\text{σμ}(\tau-\tau')=\text{σμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'+\text{ἡμ}\,\tau\;\text{ἡμ}\,\tau',$$

παρέχουσι διὰ καταλλήλων ὑποθέσεων ἑτέρους εὐχρηστοτάτους. Οὕτως, ὑποθέτοντες $\tau+\tau'=\pi$ καὶ $\tau-\tau'=\varkappa$, θέλομεν ἔχει

$\tau=\dfrac{\pi+\varkappa}{2}$ καὶ $\tau'=\dfrac{\pi-\varkappa}{2}$· ἀντεισάγοντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τοὺς ἀνωτέρω τέσσαρας τύπους, πορίζόμεθα τοὺς ἑξῆς

$$\text{ἡμ}\,\pi=\text{ἡμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{σμ}\frac{\pi-\varkappa}{2}+\text{σμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\pi-\varkappa}{2},$$

$$\text{ἡμ}\,\varkappa=\text{ἡμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{σμ}\frac{\pi-\varkappa}{2}-\text{σμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\pi-\varkappa}{2},$$

$$\text{σμ}\,\pi=\text{σμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{σμ}\frac{\pi-\varkappa}{2}-\text{ἡμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\pi-\varkappa}{2},$$

$$\text{σμ}\,\varkappa=\text{σμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{σμ}\frac{\pi-\varkappa}{2}+\text{ἡμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\pi-\varkappa}{2},$$

ἐξ ὧν, προστιθεμένων καὶ ἀφαιρουμένων κατὰ μέλη, θέλομεν ἔχει τοὺς ἑξῆς

$$\text{ἡμ}\,\pi+\text{ἡμ}\,\varkappa=2\,\text{ἡμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{σμ}\frac{\pi-\varkappa}{2},$$

$$\text{ἡμ}\,\pi-\text{ἡμ}\,\varkappa=2\,\text{σμ}\frac{\pi+\varkappa}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\pi-\varkappa}{2},$$

$$\sigma\mu\,\pi + \sigma\mu\,\kappa = 2\ \sigma\mu\,\frac{\pi+\kappa}{2}\ \sigma\mu\,\frac{\pi-\kappa}{2},$$

$$\sigma\mu\,\kappa - \sigma\mu\,\pi = 2\ \dot{\eta}\mu\,\frac{\pi+\kappa}{2}\ \dot{\eta}\mu\,\frac{\pi-\kappa}{2},$$

δι' ὧν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων δύο τόξον π καὶ κ τρέπεται εἰς γινόμενον τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τοῦ ἡμιαθροίσματος ἢ τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν τόξων τούτων.

43 Ἐὰν διαιρέσωμεν καταλλήλως τοὺς τελευταίους εὑρεθέντας τέσσαρας τύπους θέλομεν πορισθῆ εὐκόλως τὸν τύπον

$$\frac{\dot{\eta}\mu\,\pi + \dot{\eta}\mu\,\kappa}{\dot{\eta}\mu\,\pi - \dot{\eta}\mu\,\kappa} = \frac{\dot{\eta}\mu\,\frac{\pi+\kappa}{2}\ \sigma\mu\,\frac{\pi-\kappa}{2}}{\sigma\mu\,\frac{\pi+\kappa}{2}\ \dot{\eta}\mu\,\frac{\pi-\kappa}{2}} = \dot{\epsilon}\varphi\,\frac{\pi+\kappa}{2}\ \sigma\varphi\,\frac{\pi-\kappa}{2}$$

ἤ, ἐπειδὴ $\sigma\varphi\,\frac{\pi-\kappa}{2} = \dfrac{1}{\dot{\epsilon}\varphi\,\frac{\pi-\kappa}{2}}$

$$\frac{\dot{\eta}\mu\,\pi + \dot{\eta}\mu\,\kappa}{\dot{\eta}\mu\,\pi - \dot{\eta}\mu\,\kappa} = \frac{\dot{\epsilon}\varphi\,\frac{\pi+\kappa}{2}}{\dot{\epsilon}\varphi\,\frac{\pi-\kappa}{2}}$$

τουτέστιν, ὅτι *τὸ ἄθροισμα δύο ἡμιτόνων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τόξων τούτων πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων*, καὶ τοὺς ἀκολούθους

$$\frac{\dot{\eta}\mu\,\pi + \dot{\eta}\mu\,\kappa}{\sigma\mu\,\pi + \sigma\mu\,\kappa} = \frac{\dot{\eta}\mu\,\frac{\pi+\kappa}{2}}{\sigma\mu\,\frac{\pi+\kappa}{2}} = \dot{\epsilon}\varphi\,\frac{\pi+\kappa}{2},$$

$$\frac{\dot{\eta}\mu\,\pi + \dot{\eta}\mu\,\kappa}{\sigma\mu\,\kappa - \sigma\mu\,\pi} = \frac{\sigma\mu\,\frac{\pi-\kappa}{2}}{\dot{\eta}\mu\,\frac{\pi-\kappa}{2}} = \sigma\varphi\,\frac{\pi-\kappa}{2},$$

$$\frac{\text{ἡμ}\,\pi - \text{ἡμ}\,\varkappa}{\text{σμ}\,\pi + \text{σμ}\,\varkappa} = \frac{\text{ἡμ}\,\frac{\pi - \varkappa}{2}}{\text{σμ}\,\frac{\pi - \varkappa}{2}} = \text{ἐφ}\,\frac{\pi - \varkappa}{2}$$

$$\frac{\text{ἡμ}\,\pi - \text{ἡμ}\,\varkappa}{\text{σμ}\,\varkappa - \text{σμ}\,\pi} = \frac{\text{σμ}\,\frac{\pi + \varkappa}{2}}{\text{ἡμ}\,\frac{\pi + \varkappa}{2}} = \text{σφ}\,\frac{\pi + \varkappa}{2}$$

$$\frac{\text{σμ}\,\pi + \text{σμ}\,\varkappa}{\text{σμ}\,\varkappa - \text{σμ}\,\pi} = \frac{\text{σμ}\,\frac{\pi + \varkappa}{2}\;\text{σμ}\,\frac{\pi - \varkappa}{2}}{\text{ἡμ}\,\frac{\pi + \varkappa}{2}\;\text{ἡμ}\,\frac{\pi - \varkappa}{2}} = \frac{\text{σφ}\,\frac{\pi + \varkappa}{2}}{\text{ἐφ}\,\frac{\pi - \varkappa}{2}}.$$

Τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τόξων τινῶν παρεχόμεναι ὑπὸ τῆς Γεωμετρίας.

44. Ἡ Γεωμετρία παρέχει τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τόξων τινῶν, ἃς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν λίαν εὐκόλως. Γνωρίζομεν π. χ. ὅτι, ὅταν ἡ γωνία ΑΟΜ ἦναι 45^0, τὰ ἀντιστοιχοῦντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΟΠ καὶ ΤΟΑ εἶναι ἰσοσκελῆ (σχ. 1), καὶ θέλομεν ἔχει κατὰ γνωστὸν Γεωμετρικὸν θεώρημα

$$\overline{\text{ΜΠ}}^2 + \overline{\text{ΟΠ}}^2 = 1, \quad \text{ἢ} \quad 2\overline{\text{ΟΠ}}^2 = 1, \quad \text{ἢ} \quad \text{σμ}^2 45^0 = \frac{1}{2},$$

$$\text{σμ}\,45^0 = \text{ἡμ}\,45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \text{καὶ} \quad \text{ΑΤ} = \text{ΟΑ} = 1$$

ἤτοι $\text{ἐφ}\,45^0 = \text{τμ}\,45^0 = 1$.

Ἐὰν ἡ γωνία ΑΟΜ ἦναι ἴση μὲ 30^0, τὸ τόξον ΜΜ‴ θὰ ἦτο 60^0 καὶ ἡ πλευρὰ ΜΜ‴ ἴση τῇ ἀκτῖνι 1, διότι θὰ ἦτο ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου. Ἠθέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$\text{ἡμ}\,30^0 = \frac{1}{2}, \quad \text{σμ}\,30^0 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ἐκ δὲ τῶν εὑρεθεισῶν τούτων τιμῶν ἠθέλομεν πορισθῇ τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν γραμμῶν διὰ τῶν γνωστῶν σχέσεων τῆς § 22.

Ὡσαύτως ἡ Γεωμετρία διδάσκει ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ μεγαλείτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τουτέστιν, ἂν παραστήσωμεν διὰ 2χ τοῦτο, ὅτι ἔχομεν πάντοτε τὴν ἀναλογίαν

$$1 : 2\chi = 2\chi : 1 - 2\chi,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\chi^2 + \frac{1}{2}\chi = \frac{1}{4},$$

ἤ, λαμβάνοντες μόνον τὴν θετικὴν τιμὴν τοῦ χ, διότι πρόκειται περὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου τῶν 36^0, τοῦ παριστῶντος τὸ ὑπὸ τῆς χορδῆς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ὑποτεινόμενον,

$$\chi = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right), \text{ ἤτοι } \eta\mu 18^0 = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ συνημιτόνου 18^0, διὰ δὲ τῶν γνωστῶν τύπων καὶ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

45. Εὑρόντες ἤδη τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν τόξων 45^0, 30^0 καὶ 18^0, δυνάμεθα διὰ τῶν γνωστῶν τύπων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς ὑποδιαιρέσεως τῶν τόξων, ὡς καὶ διὰ τῶν τύπων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν (§ 28), νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν πολλαπλασίων καὶ ὑποπολλαπλασίων τῶν τόξων τούτων καὶ νὰ σχηματίσωμεν πίνακας, οἵτινες νὰ παρέχωσι μεθ' ὅλης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς ἁπάντων τῶν ἀπὸ τοῦ 0^0 μέχρι 45^0 διαδοχικῶς μεταβαλλομένων τόξων. Περὶ τῶν πινάκων τούτων ποιούμεθα λόγον ἐν τῷ ἀμέσως ἑπομένῳ δευτέρῳ κεφαλαίῳ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Τριγωνομετρικοὶ πίνακες.

46. Οἱ περὶ ὧν ἀνωτέρω ὁ λόγος *πίνακες* ὠνομάσθησαν *τριγωνομετρικοί*, εἶναι δὲ ἐν χρήσει δύο εἰδῶν τοιοῦτοι· ἐκεῖνοι, οἵτινες παρέχουσι τὰς *πραγματικὰς τιμὰς* τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν γωνιῶν, ὅταν ἡ ἀκτὶς ἦναι ἴση τῇ μονάδι, καὶ ἐκεῖνοι, οἵτινες δίδουσι τοὺς *λογαρίθμους αὐτῶν*, ὅταν ἀνήκωσιν εἰς κύκλον, ἔχοντα ἀκτῖνα, οὐχὶ τὴν μονάδα, ἀλλὰ 10^{10}, τουτέστιν ἴσην μὲ 10 δισεκατομμύρια μονάδας.

47. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων γίνεται κατὰ τρόπον κατά τι διάφορον τοῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος, ὡς ἑξῆς·

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἡμίτονον τοῦ ἐλαχίστου τόξου 10'' στηριζόμενοι εἰς τοῦτο, ὅτι, ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, τὸ δὲ ἡμίτονον τόξου τινὸς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς, τῆς ὑποτεινούσης τόξον διπλάσιον, ἂν ὑπολογίσωμεν τόξον τι λίαν μικρὸν τῆς περιφερείας καὶ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τῆς τιμῆς αὐτοῦ ὡς τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἡμίσεως τόξου, ἢ καὶ αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ τόξου ὡς τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, θέλομεν ὑποπέσει εἰς λάθος, ὅπερ θέλει εἶναι τόσῳ μικρότερον, ὅσῳ μικρότερον ἦναι τὸ τόξον, ὅπερ ἐλάβομεν ὑπ' ὄψει. Ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι τὸ λάθος, εἰς ὃ ὑποπίπτομεν λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τοῦ τόξου τῶν 10'' ὡς τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, εἶναι μικρότερον μιᾶς μονάδος τῆς 13ης δεκαδικῆς τάξεως, τουτέστι θέλομεν ἔχει προσέγγισιν τρισεκατομμυρίου, ἥτις εἶναι πλέον ἢ ἐπαρκὴς εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις, ἐν αἷς γίνεται χρῆσις τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.

48. Ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ τόξου τῶν 10'' εὑρίσκεται λίαν εὐκόλως διὰ τοῦ γνωστοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ὃν εὗρον οἱ Μαθηματικοὶ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 150ης δεκαδικῆς τάξεως, τουτέστι κατὰ προσέγγισιν κατὰ πολὺ μικροτέραν τοῦ ὅ,τι καὶ αὐτὴ ἡ ἡμετέρα φαντα-

σία δύναται νὰ ἐννοήσῃ μικρότερον. Ἂς λάβωμεν λοιπὸν τὴν τιμὴν τοῦ π

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ldots.$$

ἥτις θέλει παριστᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν (διότι, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀκτῖνος ἴσης τῇ μονάδι, ἡ διάμετρος θὰ ἦναι ἴση μὲ 2), ἐπειδὴ δὲ ἡ ἡμιπεριφέρεια περιέχει 180^0 ἤτοι $648000''$, ἢ 64800 τόξα τῶν $10''$, θέλομεν ἔχει

$$\text{τόξον}\,10'' = \frac{\pi}{64800} = 0,00004\ 84813\ 68110\ldots\ldots,$$

καὶ ἐπομένως

$$\text{ἡμ}\,10'' = 0,00004\ 84813\ 681$$

περιοριζόμενοι εἰς τὸ 13ον δεκαδικὸν ψηφίον, τὸ δὲ λάθος θέλει εἶναι μικρότερον μιᾶς μονάδος τῆς 13ης δεκαδικῆς τάξεως, διότι, ὡς προείπομεν, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ προσέγγισις εἶναι μικροτέρα μιᾶς μονάδος τῆς αὐτῆς τάξεως.[1]

49. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ ἡμ$10''$ πορίζόμεθα ἀμέσως τὴν τιμὴν τοῦ σμ$10''$ διὰ τοῦ τύπου $\text{σμ}\,10'' = \sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\,10''}$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\text{σμ}\,10'' = 0,99999\ 99988\ 248,$$

διὰ δὲ τῶν τύπων

$$\text{ἡμ}\,2\tau = 2\,\text{ἡμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau$$
$$\text{σμ}\,2\tau = 2\,\text{σμ}^2\tau - \text{ἡμ}^2\tau$$

ἠθέλομεν εὕρει τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν $20''$ ὑποθέτοντες $\tau = 10''$. Τούτων δὲ γενομένων γνωστῶν, πορίζόμεθα τὰς τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τῶν $30''$ διὰ τῶν τύπων

$$\text{ἡμ}(\tau + \tau') = \text{ἡμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau' + \text{σμ}\,\tau\ \text{ἡμ}\,\tau',$$
$$\text{σμ}(\tau + \tau') = \text{σμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau' - \text{ἡμ}\,\tau\ \text{ἡμ}\,\tau',$$

ἐν οἷς ἠθέλομεν ὑποθέσει $\tau = 20''$ καὶ $\tau' = 10''$.

[1] Ἐνομίσαμεν ὅλως περιττὸν διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων νὰ ἐκθέσωμεν τὰ καθέκαστα τῆς ἀποδείξεως ταύτης, ἠθέλομεν μάλιστα παραλείψει καὶ πολλὰ τῶν λεγομένων ἐνταῦθα, ὡς περιττά, ἂν ἄλλος τις λόγος δὲν μᾶς ἠνάγκαζε νὰ ἐπιβαρύνωμεν κατά τι αὐτούς.

Ἐξακολουθοῦντες οὕτω εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν κατὰ 10'' αὐξανόντων μέχρι τῶν 45^0 τόξων, διὰ δὲ τῶν γνωστῶν σχέσεων (2) καὶ (4) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης μεταξὺ τῶν αὐτῶν ὁρίων, παραλείποντες τὰς τιμὰς τῆς τεμνούσης καὶ τῆς συντεμνούσης δι' ὃν ἐν τῇ § 32 εἴπομεν λόγον.

50. Ἀφοῦ εὗρον τὰς περὶ ὧν ἀνωτέρω ὁ λόγος τιμάς, ἐζήτησαν ἔπειτα διὰ τῶν γνωστῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν, ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν μεταξὺ τῶν ὁρίων 0 καὶ 90^0 εἶναι πάντοτε μικρότερα τῆς μονάδος, καὶ ἔχουσιν ἑπομένως λογαρίθμους ἀρνητικούς, ἢ ἔχοντας χαρακτηριστικὸν ἀρνητικόν, αὐξάνουσι τούτους ἢ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτῶν κατὰ 10, ἤτοι ὑποθέτουσιν, ὅτι αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ ἀνήκουσιν εἰς περιφέρειαν ἔχουσαν ἀκτῖνα 10^{10}, ἤτοι ἴσην μὲ

10,000,000,000 μονάδας,

ὅτε οἱ λογάριθμοι τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου δὲν δύναται νὰ ὦσιν ἀρνητικοί, εἰμὴ διὰ τόξα μικρότερα τοῦ *ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ* τοῦ τόξου τῶν 10'', οὕτω δὲ ἐσχημάτισαν τοὺς καλουμένους *λογαριθμικοὺς πίνακας* τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, τῶν πρώτων πινάκων ὀνομασθέντων πρὸς διάκρισιν *πινάκων τῶν πραγματικῶν* αὐτῶν τιμῶν.

Διάταξις καὶ χρῆσις τῶν πραγματικῶν πινάκων.

51. Οἱ πραγματικοὶ πίνακες, οὓς ἔχομεν ὑπ' ὄψει καὶ ὧν τὴν διάταξιν καὶ χρῆσιν θέλομεν περιγράψει ἐν ὀλίγοις, εἶναι οἱ τοῦ Γάλλου Μηχανικοῦ κ. I Claudel, οἱ ὑπὸ τοῦ κ. Α. Σούλη ἐκδοθέντες καὶ περιέχοντες τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τῶν ἀπὸ 0^0 μέχρι 45^0 καὶ ἀπὸ 1' εἰς 1' μεταβαλλομένων γωνιῶν, τιμώμενοι δὲ ἀντὶ δραχμῆς, εἶναι προσιτοὶ τοῖς πᾶσι.

52. Ἑκάστη αὐτῶν σελὶς περιέχει τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς δύο μοιρῶν, ἐκτὸς τῆς τελευταίας, ἥτις περιέχει μόνον τὰς

τῆς 44⁰, διαιρεῖται δὲ διὰ διπλῆς καθέτου γραμμῆς εἰς δύο μέρη, ἑκάτερον τῶν ὁποίων περιέχει τὰς τιμὰς τῶν ἀπὸ 0 μέχρι 60 λεπτῶν τῆς μοίρας μεταβαλλομένων γωνιῶν, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν σημειοῦται ἄνωθεν. Παραδείγματος χάριν, ἡ 9η σελὶς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος πινάκων φέρει ἐπὶ τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτῆς μέρους τὸν ἀριθμὸν 8⁰ καὶ ἐπὶ τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τὸν τῶν 9⁰, κάτωθεν δὲ ἐπὶ τῆς πρώτης καθέτου στήλης τὸ σημεῖον ′, ὅπερ σημαίνει λεπτὰ πρῶτα τῆς μοίρας, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου στήλης τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, . . 60, οἵτινες παριστῶσι λεπτὰ πρῶτα τῆς μοίρας. Ἡ δευτέρα κάθετος στήλη περιέχει τὴν λέξιν **ἡμ.** ὅπερ σημαίνει ἡμίτονον, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ τὰς τιμὰς αὐτοῦ, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς τιμὰς τῆς γωνίας 8⁰ καὶ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς σημειουμένων πρώτων λεπτῶν, καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς καθέτου γραμμῆς τὴν συντετμημένην λέξιν **συνημ.** ὅπερ σημαίνει *συνημίτονον*. Ἡ τρίτη κάθετος στήλη περιέχει ἄνωθεν τὴν λέξιν **ἐφ.** καὶ κάτωθεν τὴν **συνεφ.** ἡ πέμπτη περιέχει ἄνωθεν τὴν **συνεφ.** καὶ κάτωθεν τὴν **ἐφ.** καὶ ἡ ἕκτη τὰ 60 πρῶτα λεπτὰ τῆς μοίρας, μετρούμενα ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ συμπεριλαμβανόμενα εἰς τὸ συμπλήρωμα τῶν τόξων τῶν 8⁰ καὶ τῶν ἀντιστοιχούντων πρώτων λεπτῶν, ὅπερ σημειοῦται διὰ τῶν ὑπὸ τὴν τελευταίαν ὁριζόντιον γραμμὴν γεγραμμένων 81⁰ καὶ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς ἀντιστοιχούντων πρώτων τῆς μοίρας λεπτῶν. Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ **ἡμ.** τῆς γωνίας 8⁰ καὶ 35′. Θέλομεν εὕρει ἐν τῇ 9 σελίδι, τῇ περιεχούσῃ τὰ τόξα τῶν 8⁰ καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν ′ τὸν ἀριθμὸν 35 καὶ ἀπέναντι αὐτοῦ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τὸν ἀριθμὸν 925, ὅστις γραφόμενος κατ' ἐξακολούθησιν τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἀμέσως ἄνωθεν γεγραμμένων τριῶν ψηφίων 0,14 ἀποτελεῖ τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,14925, ὅστις παριστᾷ τὸ πραγματικὸν μέγεθος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ τόξου 8⁰ 35′ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως.

Ἂν μᾶς ἐζητεῖτο ἡ *συνεφαπτομένη* τῆς γωνίας 81⁰ 25′, ἥτις εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς 8⁰ 35′, ἠθέλομεν ζητήσει ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι κάτωθεν ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ τῶν 81^0 τὸν ἀριθμὸν 25′ καὶ ἐν τῇ στήλῃ, τῇ ἀντιστοιχούσῃ κάτωθεν τῇ **συνεφ.** καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς τῶν 25′ ὁριζοντίου γραμμῆς τὸν ἀριθμὸν 094, ὅστις γραφόμενος πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν ἀμέσως πρὸς τὰ ἄνω ὑπαρχόντων τριῶν ψηφίων 0,15 ἀποτελεῖ τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,15094, ὅστις παριστᾷ τὴν πραγματικὴν συνεφαπτομένην τοῦ τόξου 81^0 25′ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως.

Ὁμοιοτρόπως ἐργαζόμενοι ἠθέλομεν εὕρει ἐν μὲν τῇ σελίδι 11 τὰς ἑξῆς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς

$$\text{σμ}\,12^0\,22' = 0{,}97680, \qquad \text{ἡμ}\,77^0\,33' = 0{,}97618,$$
$$\text{ἐφ}\,12^0\,17' = 0{,}21773, \qquad \text{σφ}\,77'\,46' = 0{,}22658,$$

ἐν δὲ τῇ σελίδι 18

$$\text{ἡμ}\,26^0\,53' = 0{,}45218, \qquad \text{ἡμ}\,63^0\,29' = 0{,}89480,$$
$$\text{ἐφ}\,26^0\,11' = 0{,}49170, \qquad \text{ἐφ}\,63^0\,18' = 1{,}98828.$$

53. Ἂν ἡ δεδομένη γωνία περιέχῃ καὶ λεπτὰ δεύτερα τῆς μοίρας, ἂν π. χ. μᾶς ἐζητεῖτο τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου 35^0 23′ 35″, τότε πρὸς τὴν κατὰ προσέγγισιν εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἠθέλομεν ἐργασθῇ ὡς ἑξῆς. Ἠθέλομεν εὕρει ἐν τῇ 22α σελίδι τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων 35^0 23′ καὶ 35^0 24′ καὶ τὴν μεταξὺ τούτων διαφορὰν 0,00024, ἔπειτα σχηματίσει τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$60'' : 35'' = 0{,}00024 : \chi,$$

τουτέστιν, ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν τόξων ἦναι 60″ ἢ 1′, ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχούντων ἡμιτόνων εἶναι 0,00024, ὅταν δὲ ἡ διαφορὰ ἦναι 35″, πόση θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχούντων ἡμιτόνων; Οὕτως εὑρίσκομεν ἁπλοποιοῦντες

$$\chi = \frac{0{,}00024 \times 7}{12} = \frac{0{,}0002 \times 7}{1} = 0{,}00014,$$

προσθέτοντες δὲ ταύτην εἰς τὴν τιμὴν 0,57904 τοῦ ἡμιτόνου τῶν 35^0 23′ θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν 0,57918 τοῦ ἡμιτόνου τῶν 35^0 23′ 35″ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως καὶ ἐκείνης, ἣν παρέχει τὸ μὴ καθ' ὅλα ἀκριβὲς τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας, διότι αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ δὲν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς αὐτὰς τόξων, ἀλλ' ὅταν αἱ αὐξήσεις τῶν τόξων ἦναι λίαν μικραί, τὰ προκύπτοντα σφάλματα εἶναι ἐλάχιστα καὶ δύνανται νὰ παραλειφθῶσιν ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς ζητουμένης εἰς τοὺς ὑπολογισμούς μας ἀκριβείας.

54. Διὰ τῶν αὐτῶν πινάκων λύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα, ὅπερ συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας, ὅταν μᾶς δίδηται μία τις τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς γραμμῶν.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν ἐν τῇ στήλῃ, τῇ ἀναφερομένῃ εἰς τὴν δεδομένην τριγωνομετρικὴν γραμμήν, τὴν δεδομένην τιμὴν αὐτῆς, καὶ ἐὰν αὕτη ὑπάρχῃ ἐν τοῖς πίναξι, τότε ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς αὐτὴν τιμὴ τῆς γωνίας θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη. Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς δίδεται

$$\sigma\varphi\chi = 0{,}74719$$

καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς γωνίας χ.

Ζητοῦμεν πρῶτον ἐν ταῖς στήλαις τῶν ἄνωθι γεγραμμένων συνεφαπτομένων τὴν δεδομένην τιμὴν 0,74719, καὶ ἐπειδὴ αὕτη δὲν ὑπάρχει ἐν αὐταῖς, διότι ἡ συνεφαπτομένη πάσης γωνίας μικροτέρας τῶν 45^0 εἶναι μεγαλειτέρα τῆς μονάδος, μεταβαίνομεν εἰς τὰς ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω βαινούσας στήλας τῶν συνεφαπτομένων, καὶ εὑρίσκομεν ἐν τῇ σελίδι 23 τὴν δεδομένην τιμὴν 0,74719, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν γωνίαν $53^0\,14'$.

Ὁμοιοτρόπως ἠθέλομεν εὕρει ἐκ τῶν δεδομένων τιμῶν

$$\eta\mu\,\chi = 0{,}92119,\quad \varepsilon\varphi\,\chi = 0{,}63299,\quad \sigma\mu\,\chi = 0{,}64856$$

τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν γωνιῶν χ

$$\chi = 67^0\,6',\quad \chi = 32^0\,20',\quad \chi = 49^0\,26'.$$

55. Ἂν ἡ δεδομένη τιμὴ τῆς τριγωνομετρικῆς γραμμῆς δὲν περιέχηται ἐν τοῖς πίναξι, τότε εὑρίσκομεν τὰς δύο διαδοχικὰς τιμάς, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται αὕτη, καὶ ἔπειτα σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν, ἐν ᾗ πρῶτος ὅρος θὰ ἦναι ἡ διαφορὰ τῶν πινάκων τῶν δύο διαδοχικῶν τιμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται αὕτη, δεύτερος ἡ μεταξὺ τῆς μικροτέρας τῶν δύο

καὶ τῆς δεδομένης, τρίτος τὸ 1′ ἢ 60″ καὶ τέταρτος ἄγνωστός τις φ, οὕτινος ἡ τιμὴ μᾶς γίνεται ἐκ τῆς ἀναλογίας γνωστή, καὶ ἥτις προστιθεμένη εἰς τὴν μικροτέραν τῶν δύο διαδοχικῶν τιμῶν τῶν πινάκων, ἂν αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν βαίνουσιν αὐξανόμεναι, ἢ ἀφαιρουμένη ἀπὸ τῆς μεγαλειτέρας, ἂν αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν βαίνουσι ἐλαττούμεναι, μᾶς δίδει κατὰ προσέγγισιν τὴν τιμὴν τῆς γωνίας, τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν δεδομένην.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν

$$\text{ἡμ}\,\chi = 0{,}54132,$$

καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τῆς γωνίας χ διὰ τῶν πινάκων.

Ἐν αὐτοῖς εὑρίσκομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμιτόνων τῆς σελίδος 21 τὰς δύο διαδοχικὰς τιμὰς

$$0{,}54122, \qquad 0{,}54146,$$

μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἡ δεδομένη

$$0{,}54132$$

καὶ σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$24 : 10 = 60'' : \varphi, \quad \text{ἐξ ἧς } \varphi = \frac{600}{24} = 25''$$

τουτέστι λέγομεν· ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν ἡμιτόνων ἦναι 0,00024 ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν εἶναι 1′ ἢ 60″, ὅταν δὲ ἡ διαφορὰ ἦναι 0,00010, πόση θέλει εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα διαφορὰ τῶν γωνιῶν;

Προσθέτοντες δέ, διότι αἱ τιμαὶ τῶν ἡμιτόνων βαίνουσιν αὐξανόμεναι, τὰ οὕτως εὑρισκόμενα 25″ εἰς τὴν τιμὴν $32^0\,46'$ τῆς γωνίας, τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ ἡμίτονον 0,54132, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν αὐτῆς $32^0\,46'\,25''$, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ δεδομένον ἡμίτονον 0,54132.

Ἂν μᾶς ἐδίδετο

$$\text{σμ}\,\chi = 0{,}94964$$

ἠθέλομεν εὕρει ὅτι ὁ ἀριθμὸς 0,94964 περιέχεται ἐν τοῖς πίναξι ἐν τῇ σελίδι 14 μεταξὺ τῶν 0,94961 καὶ 0,94970, σχηματίζοντες δὲ τὴν περὶ ἧς ἀνωτέρω ὁ λόγος ἀναλογίαν

$$9 : 3 = 60'' : \varphi,$$

ἠθέλομεν εὕρει $\varphi = 20''$, ἅτινα πρέπει οὐχὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν τιμὴν $18^0\ 16'$ τῆς γωνίας, τῆς ἐχούσης τὸ μικρότερον συνημίτονον 0,94961, ἀλλὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτῆς, διότι αἱ τιμαὶ τῶν συνημιτόνων βαίνουσιν ἐλαττούμεναι αὐξανομένων τῶν γωνιῶν, καὶ οὕτω ἠθέλομεν ἔχει

$$0{,}94964 = \sigma\mu\ 18^0\ 15'\ 40''.$$

Ἀπαιτεῖται μεγάλη εἰς τοῦτο προσοχή, ἵνα μὴ ὑποπίπτῃ ὁ ἀπροσέκτως ἐργαζόμενος εἰς λάθη.

Διάταξις καὶ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τοῦ Καλλέτου.

56. Οἱ τριγωνομετρικοὶ πίνακες τοῦ Καλλέτου (Callet) περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν ἐχόντων 10^{10} ἀκτῖνα τόξων, διαφέρουσι δὲ κατὰ πολὺ τῶν προπεριγραφέντων πραγματικῶν πινάκων καθόσον ἀφορᾷ εἰς τὰ καθέκαστον τῆς διατάξεως καὶ χρήσεως αὐτῶν.

Ἐν πρώτοις, οὗτοι περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν τόξων, τῶν μεταβαλλομένων κατὰ $1''$ ἀπὸ τοῦ 0^0 μέχρι τῶν 5^0, καὶ τοὺς τῶν τόξων, τῶν μεταβαλλομένων κατὰ $10''$ ἀπὸ τοῦ 0^0 μέχρι τῶν 45^0. Δεύτερον, ἑκάστη αὐτῶν σελὶς περιέχει ἄνωθεν τὰς τέσσαρας τριγωνομετρικὰς γραμμὰς *ἡμ.*, *σμ.*, *ἐφ.*, *σφ.* καὶ κάτωθεν τῆς ἀντιστοιχούσης *σμ.*, *ἡμ.*, *σφ.*, *ἐφ.*, αἱ δὲ μοῖραι εἰς ἃς αὗται ἀνήκουσι εἶναι γεγραμμέναι ἄνωθεν καὶ κάτωθεν οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελῆται ἄθροισμα 90^0 μετὰ τῶν λεπτῶν καὶ δευτερολέπτων, τῶν ἀντιστοιχούντων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς. Παραδείγματος χάριν, ἐν τῇ σελίδι 430 (αἱ σελίδες εἶναι γεγραμμέναι κάτωθι) ὑπάρχει ἄνωθι ἐκτὸς τοῦ περιθωρίου ὁ ἀριθμὸς 6^0 καὶ κάτωθι ὁ ἀριθμὸς 83^0, ἂν δὲ ἀριθμήσωμεν τὰ πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτά, τὰ ἀντιστοιχοῦντα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς, θὰ ἔχωμεν πάντοτε ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν $59'\ 60''$, ἤτοι $60'$ ἤτοι 1^0, ἥτις μετὰ τοῦ ἀθροίσματος $6^0 + 83^0$ ἀποτελεῖ πάντοτε ἄθροισμα 90^0. Οὕτω δὲ ἡ αὐτὴ τιμὴ τοῦ λογαρίθμου ὁποιασδήποτε τριγωνομετρικῆς γραμμῆς παριστᾷ καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ λογαρίθμου τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ· π. χ. ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τῶν $6^0\ 44'\ 20''$ εἶναι 9,0689234, παριστᾷ δὲ συγχρόνως καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ συνημιτόνου $83^0\ 15'\ 40''$ τοῦ συμπληρώματός του· διότι γνωρίζομεν ἐξ αὐτῶν τῶν ὁρισμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, ὅτι ἔχομεν πάντοτε (§ 7)

$$\text{ἡμ}\ \tau = \text{σμ}(90^0 - \tau), \qquad \text{ἐφ}\ \tau = \text{σφ}(90^0 - \tau),$$
$$\text{σμ}\ \tau = \text{ἡμ}(90^0 - \tau), \qquad \text{σφ}\ \tau = \text{ἐφ}(90^0 - \tau).$$

57. Ἑκάστη αὐτῶν σελὶς περιέχει 10 καθέτους στήλας, ὧν ἡ πρώτη περιέχει τὰ ′ κατὰ μονάδας, ἡ δευτέρα τὰ ″ κατὰ δεκάδας, ἡ τρίτη τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων· ἡ τετάρτη τὰς διαφορὰς μεταξὺ δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων· ἡ πέμπτη τοὺς λογαρίθμους τῶν συνημιτόνων· ἡ ἕκτη τὰς διαφορὰς μεταξὺ δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων τῶν συνημιτόνων· ἡ ἑβδόμη τοὺς λογαρίθμους τῶν ἐφαπτομένων· ἡ ὀγδόη τὰς διαφορὰς μεταξὺ δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων, αἵτινες εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς διαφορὰς δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων τῶν συνεφαπτομένων τῆς παρακειμένης ἐννάτης στήλης, ἡ δεκάτη τὰ ″ καὶ ἡ ἑνδεκάτη τὰ ′ οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μετὰ τῶν ἀντιστοίχων τῶν δύο πρώτων στηλῶν νὰ ἰσοῦται πάντοτε μὲ 59′ καὶ 60″, ἤτοι μὲ 1^0. Ὑποκάτω δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν λέξιν *ἡμ.* ἡ λέξις *σμ*, εἰς τὴν *σμ.* ἡ *ἡμ*, εἰς τὴν *ἐφ.* ἡ *σφ*, καὶ εἰς τὴν *σφ.* ἡ *ἐφ.*

Σημ. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἐφαπτομένων τῶν μεγαλειτέρων τῶν 45^0 τόξων ἔχουσι χαρακτηριστικὸν μεγαλείτερον τῶν 10 (διότι ἡ ἐφαπτομένη τῶν 45^0 εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα 10^{10}), ἀλλ' ἐν τοῖς πίναξι σημειοῦνται μόνον αἱ μονάδες τῶν χαρακτηριστικῶν, ἡ δὲ δεκὰς παραλείπεται καὶ πρέπει οἱ ποιοῦντες χρῆσιν αὐτῶν νὰ ἐνθυμῶνται τοῦτο, ἵνα μὴ ὑποπέσωσιν εἰς λάθος καὶ μάλιστα μέγιστον. Ὅ,τι δὲ εἴπομεν περὶ τῶν ἐφαπτομένων τῶν μεγαλειτέρων τῶν 45^0 τόξων ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰς συνεφαπτομένας τῶν μικροτέρων τῶν 45^0 τόξων, αἵτινες κατέχουσι τὴν αὐτὴν ἐκ τῶν ἄνω κάθετον στήλην.

58. Καὶ ταῦτα μὲν καθόσον ἀφορᾷ εἰς τὴν διάταξιν τῶν λο-

γαριθμικῶν τούτων πινάκων, καθόσον δ' ἀφορᾷ εἰς τὴν χρῆσιν αὐτῶν, αὕτη εἶναι ἁπλουστάτη καὶ θέλομεν καταστήσει αὐτὴν λίαν καταληπτὴν λαμβάνοντες παραδείγματά τινα τοῦ διπλοῦ πρὸς λύσιν δι' αὐτῶν προβλήματος, τουτέστιν ἐκείνου, καθ' ὃ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τριγωνομετρικῆς τινος γραμμῆς δεδομένης γωνίας, καὶ ἐκείνου, καθ' ὃ μᾶς ζητεῖται ἡ γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς δεδομένον λογάριθμον τριγωνομετρικῆς τινος αὐτῆς γραμμῆς.

59. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης τῶν $58^0\ 32'\ 40''$. Ἐπειδὴ τὸ τόξον εἶναι μεγαλείτερον τῶν 45^0 θέλομεν ζητήσει κάτωθι τὴν σελίδα 578, ἐν ᾗ ὑπάρχουσιν αἱ 58^0 καὶ τὰ 32 πρῶτα λεπτὰ καὶ $40''$, ἐν δὲ τῇ καθέτῳ στήλῃ τῶν *σφ* τὸν ἀριθμὸν 9,7865628, ὅστις θέλει παριστᾷ τὸν λογάριθμον τῆς ζητουμένης σφ, ὅταν ἡ ἀκτὶς ἦναι ἴση μὲ $10''$. Ἂν μᾶς ἐζητεῖτο ὁ λογάριθμος τοῦ συνημιτόνου τῶν $37^0\ 23'\ 30''$, ἠθέλομεν εὕρει κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀλλ' ἄνωθι, ἐν τῇ σελίδι 614 τὸν ἀριθμὸν 9,9000955, τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἐν τῇ καθέτῳ τῶν συνημιτόνων στήλῃ εἰς τὰς δεδομένας 37^0 $23'$ καὶ $30''$.

Ἂν μᾶς ἐζητεῖτο ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης τῶν $68^0\ 37'\ 20''$, ἠθέλομεν εὕρει ἐν τῇ σελίδι 518.

$$\text{ἐφ}\ 68^0\ 37'\ 20'' = 10{,}4073255.$$

60. Ἂν τὸ τόξον δὲν περιείχετο ἐν τοῖς πίναξι, πρὸς εὕρεσιν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν (καθόσον αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ βαίνουσιν αὐξανόμεναι ἢ ἐλαττούμεναι) ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τόξου, τοῦ περιεχομένου ἐν τοῖς πίναξι, τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ἀναλογίας, ἧς ὁ πρῶτος εἶναι $10''$, ὁ δεύτερος ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ δεδομένου τόξου καὶ τοῦ ἀμέσως μικροτέρου, καὶ ὁ τρίτος παριστᾷ τὴν διαφορὰν τῶν πινάκων, ὁ δὲ λόγος τούτου ἐξετέθη προηγουμένως.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμ $20^0\ 45'\ 28''$.

Εὑρίσκομεν ἐν τοῖς πίναξι τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου 20^0

45′ 20″, ὅστις εἶναι 9,5494713 καὶ εἰς τοῦτον προσθέτομεν τὴν τιμὴν 0,0000445 τοῦ τετάρτου ὅρου τῆς ἀναλογίας

$$10'' : 8'' = 556 : \chi$$

καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma.\dot{\eta}\mu\, 20^0\, 45'\, 28'' = 9{,}5495158.$$

61. Καὶ ἡ λύσις τοῦ ἀντιστρόφου προβλήματος τῆς εὑρέσεως δηλονότι τῆς γωνίας δεδομένου τοῦ λογαρίθμου μιᾶς τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς γραμμῶν, παρουσιάζει δύο περιπτώσεις ἐκείνην, καθ' ἣν ὁ δεδομένος τῆς τριγωνομετρικῆς γραμμῆς λογάριθμος εὑρίσκει ἐν τοῖς πίναξι, καὶ ἐκείνην, καθ' ἣν εὑρίσκεται περιεχόμενος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων.

Πρώτη περίπτωσις. — Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις.

$$\lambda o\gamma.\dot{\varepsilon}\varphi\, \chi = 9{,}5559988,$$

τουτέστι ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ γωνία, ἧς ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης εἶναι 9,5559988. Ἐπειδὴ ὁ δεδομένος λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν μικρότερον τοῦ 10, ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι μικροτέρα 45⁰ καὶ εὑρίσκομεν διερχόμενοι ἐκ τῶν ἄνω τὰς στήλας τῶν *ἐφ.* ἐν τῇ 508 σελίδι τοῦτον καὶ ἀπέναντι αὐτοῦ ὁριζοντίως καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ ἐν μὲν τῇ δευτέρᾳ στήλῃ τὸν ἀριθμὸν 10″ ἐν δὲ τῇ πρώτῃ ἀμέσως ἄνωθεν τὸν ἀριθμὸν 47′ καὶ εἰς τὸ μέσον τοῦ περιθωρίου τὸν ἀριθμὸν 19⁰. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν γωνία, ἡ ἔχουσα ἐφαπτομένην, ἧς ὁ λογάριθμος εἶναι 9,5559988, περιέχει 19⁰ 47′ 10″.

Ὁμοιοτρόπως ἐργαζόμενοι ἠθέλομεν εὕρει ἂν μᾶς ἐδίδοντο αἱ ἐξισώσεις

$$\lambda o\gamma.\sigma\mu\, \chi = 9{,}6167091, \quad \lambda o\gamma.\sigma\varphi\, \chi' = 11,\ 1275140$$

ἐν μὲν τῇ σελίδι 536 καὶ κάτωθεν καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ διὰ μὲν τὸν πρῶτον $\chi = 63^0\ 33'\ 40''$, διὰ δὲ τὸν δεύτερον ἐν τῇ σελίδι 415 καὶ ἄνωθεν καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ $\chi' = 4^0\ 15'\ 50''$. Οἱ πίνακες ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει περιέχουσι μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν 1 καὶ ὄχι τὸ δεδομένον 11, δι' ὃν λόγον ἐξεθέσαμεν ἐν τῇ σημειώσει τῆς § 57.

Δευτέρα περίπτωσις — Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ δεδομένος λογάριθμος τῆς τριγωνομετρικῆς γραμμῆς τῆς ζητουμένης γωνίας δὲν ἐμπεριέχεται ἐν τοῖς πίναξι, ἀλλὰ *πάντως* ὅτι περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν, ἄλλως δὲν θὰ ἦναι δυνατὸν νὰ παριστᾷ λογάριθμον τῆς αὐτῆς τριγωνομετρικῆς γραμμῆς ὁποιασδήποτε γωνίας, ἂν π. χ. μᾶς ἐδίδετο ὡς λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τῆς ζητουμένης γωνίας χ ὁ ἑξῆς 11,5387629, οὗτος δὲν εὑρίσκεται μὲν ἐν τοῖς πίναξι οὔτε περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν, διὰ τὸν ἁπλούστατον λόγον ὅτι παριστᾷ ἀριθμὸν μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος, ἧς ὁ λογάριθμος εἶναι 10 μονάδες, τὸ δὲ ἡμίτονον ὁποιουδήποτε τόξου δὲν δύναται νὰ ᾖ ποτε μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς ὃν ἀνήκει κύκλου.

Ἔστω λοιπὸν πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\text{λογ.ἡμ}\,\chi = 9{,}9693909$$

τοῦ λογαρίθμου 9,9693909 μὴ περιεχομένου ἐν τοῖς πίναξιν, ἀλλ' εὑρισκομένου μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν

9,9693950,

9,9693868,

ὧν ἡ διαφορὰ εἶναι 82 καὶ οἵτινες εὑρίσκονται ἐν τῇ σελίδι 517 κάτωθεν καὶ ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς γωνίας $68^0\,44'\,30'$, καὶ $68^0\,44'\,20''$, μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλει περιέχεσθαι ἡ ζητουμένη χ. Ἵνα δὲ εὕρωμεν αὐτὴν πρέπει νὰ ζητήσωμεν τί πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν μικροτέραν, τοῦτο δὲ εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναλογίας

$$82 : 41 = 10'' : \varphi,$$

ἧς ἡ ἔννοια εἶναι φανερὰ καὶ ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως $\varphi = 5''$, ἐπομένως $\chi = 68^0\,44'\,25''$.

Οἱ μαθηταὶ καλὸν εἶναι ἔχοντες ἀνὰ χεῖρας τοὺς πίνακας νὰ θέτωσιν οἱ ἴδιοι διάφορα παραδείγματα καὶ νὰ ἀσκῶνται εἰς τὴν χρῆσιν αὐτῶν, διότι ἡ τοιαύτη ἄσκησις εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν ταχεῖαν καὶ ἀκριβῆ ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγκαίων πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων πράξεων.

62. Ἐπειδὴ ὡς εἴπομεν ἐν τῇ § 21 αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ παριστῶσιν ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς λόγους, οἱ δὲ λογαριθμικοὶ

αὐτῶν πίνακες παρέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν τιμῶν αὐτῶν, ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς ὃν ἀνήκουσι τὰ τόξα κύκλου ἦναι ἴση μὲ 10^{10}, ἤτοι μὲ 10 δισεκατομμύρια μονάδας, ἕπεται ὅτι πρέπει, ὁσάκις γίνεται χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ν' ἀφαιρῶμεν 10 ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἑκάστης τούτων, ἵνα ἔχωμεν τοὺς ἀκριβεῖς λογαρίθμους τῶν ζητουμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων. Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\chi = 20 \text{ ἡμ } 14^0\ 32' \qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης τιμῆς τοῦ χ, πορίζόμεθα

$$\text{λογ.}\chi = \text{λογ.}20 + \text{λογ.ἡμ } 14^0\ 32'$$

ἤ, ἐπειδὴ $\text{λογ.}20 = 1,3010300$

καὶ $\text{λογ.}14^0, 32' = 9,3995754$

θέλομεν ἔχει διὰ $\text{λογ.}\chi = 10,7006054$

κατὰ 10 δὲ μονάδας μεγαλείτερον τοῦ πραγματικοῦ. Ὁ πραγματικὸς λοιπὸν λογάριθμος τοῦ χ, ὁ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (1) παρεχόμενος, εἶναι 0,7006054, τουτέστιν ὁ εὑρεθεὶς 10,7006054, οὗτινος τὸ χαρακτηριστικὸν ἠλαττώθη κατὰ 10 μονάδας.

Ἂν εἴχομεν τὴν σχέσιν

$$\chi = 654 \text{ ἡμ}^2 35^0\ 23'\ 20'' \qquad (2)$$

ἠθέλομεν πορισθῆ ἐξ αὐτῆς τὴν ἑξῆς

$$\text{λογ.}\chi = \text{λογ.}654 + 2\ \text{λογ.ἡμ } 35^0\ 23'\ 20'',$$

ἤ, ἐπειδὴ $\text{λογ.}654 = 2,8155778$

καὶ $2\ \text{λογ.ἡμ } 35^0\ 23'\ 20'' = 19,5355418$

θέλομεν ἔχει διὰ $\text{λογ.}\ \chi = 22,3511196$

κατὰ 20 δὲ μονάδας μεγαλείτερον τοῦ πραγματικοῦ, διότι τὸ ἡμ $35^0\ 23'\ 20''$ εὑρίσκεται ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει (2) εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Πρέπει λοιπὸν ν' ἀφαιρέσωμεν 20 ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου 22,3511196, ἵνα ἔχωμεν τὸν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (2) παρεχόμενον πραγματικὸν λογάριθμον τοῦ χ.

Γενικὸς κανών. Καὶ ἐν γένει, ὁσάκις ποιοῦμεν χρῆσιν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τοῦ Καλλέτου, καὶ ἔχομεν νὰ ὑπολογίσωμεν δι' αὐτῶν τὴν τιμὴν ἀγνώστου τινὸς διὰ τῆς συνεκθέσεως τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, πρέπει, ἵνα μὴ ὑποπέσωμεν εἰς λάθη, ν' ἀφαιρῶμεν ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ εὑρεθησομένου τελικοῦ ἐξαγομένου τόσας δεκάδας, ὁσάκις εἰσέρχεται ὡς παράγων εἰς τὸ γινόμενον μία τις ἢ πλειότεραι τριγωνομετρικαὶ γραμμαί, ἂν δὲ ἡ πρὸς λύσιν διὰ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων δεδομένη ἐξίσωσις ἦναι κλάσμα, τότε θ' ἀφαιρῶμεν τόσας δεκάδας, καθ' ὅσας οἱ τριγωνομετρικοὶ παράγοντες τοῦ ἀριθμητοῦ ὑπερβαίνουσι τὰς τοῦ παρονομαστοῦ. Ἑπομένως κατὰ τὴν τελευταίαν περίπτωσιν, ἂν οἱ παράγοντες τοῦ τριγωνομετρικοῦ παρονομαστοῦ ὑπερβαίνωσι τοὺς τοῦ ἀριθμητοῦ, τότε ἠθέλομεν προσθέτει ἀντὶ ν' ἀφαιρῶμεν τόσας δεκάδας, καθ' ὅσας οἱ τοῦ παρονομαστοῦ τριγωνομετρικοὶ παράγοντες ὑπερβαίνουσι τοὺς τοῦ ἀριθμητοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ὑπολογίσωμεν διὰ τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων τοῦ Καλλέτου τὰς ἑξῆς 3 ἐξισώσεις

$$\chi = \frac{30\ \text{ἡμ}^2 38^0\ 20'}{8\ \text{σμ}\ 8^0\ 37'} \quad (1) \qquad \chi = \frac{412\ \text{ἡμ}\ 4^0\ \text{σμ}^2 48^0\ 32'}{5\ \text{ἐφ}^3 8^0\ 39'} \quad (2)$$

$$\chi = \frac{1900\ \text{ἐφ} 15^0\ 20'}{315\ \text{σμ}^2 23^0} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς τῆς (1) περιέχει τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμ $38^0\ 20'$, ὁ δὲ παρονομαστὴς τὸ σμ $8^0\ 37'$ εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, ἕπεται ὅτι πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἐκ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου τοῦ εὑρεθησομένου ἐξαγομένου μίαν δεκάδα. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμητὴς τῆς (2) ἐξισώσεως περιέχει τρεῖς τριγωνομετρικοὺς παράγοντας, ὅσους δηλ. καὶ ὁ παρονομαστής, τὸ εὑρεθησόμενον λογαριθμικὸν ἐξαγόμενον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον. Καὶ τέλος, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς τῆς ἐξισώσεως (3) περιέχει τὴν τριγωνομετρικὴν γραμμὴν σμ 23^0 εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, ὁ δὲ ἀριθμητὴς ἔχει μίαν μόνον τριγωνομετρικὴν γραμμὴν εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, πρέπει εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ εὑρεθησομένου λογαριθμικοῦ ἐξαγομένου νὰ *προσθέσωμεν* ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωμεν μίαν δεκάδα.

Τουτέστιν, ὑπολογίζοντες χάριν ἀσκήσεως ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἐξισώσεων, θέλομεν ἔχει διὰ τὴν ἐξίσωσιν (1)

$$\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma\, 30 + 2\, \lambda o\gamma\, \acute{\eta}\mu\, 38^0\, 20' - \lambda o\gamma\, 8 - \lambda o\gamma\, \sigma\mu\, 8^0\, 37'.$$

$$\begin{array}{rrrr} \lambda o\gamma\, 30 = & 1,4771213 & \lambda o\gamma\, 8 = & 0,9030900 \\ 2\, \lambda o\gamma\, \acute{\eta}\mu\, 38^0\, 20' = & 19,5851132 & \lambda o\gamma\, \sigma\mu\, 8^0\, 37' = & 9,1755784 \\ \hline & 21,0622345 & & 10,0786684 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & +\,21,0622345 \\ & -\,10,0786684 \\ \hline \lambda o\gamma\, \chi = & 10,9835661 \end{array}$$

ἐξ οὗ ἀφαιροῦντες μίαν δεκάδα ἔχομεν τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ $\lambda o\gamma\, \chi = 0,9835661$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) πορίζόμεθα

$$\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma\, 412 + \lambda o\gamma\, \acute{\eta}\mu\, 4^0 + 2\lambda o\gamma.\sigma\mu\, 48^0\, 32 - \lambda o\gamma 5 - \lambda o\gamma \acute{\epsilon}\varphi\, 8^0 39'$$

$$\begin{array}{rr} \lambda o\gamma\, 412 = & 2,6148972 \\ \lambda o\gamma.\ \acute{\eta}\mu.\ 4^0 = & 8,8435845 \\ 2\ \lambda o\gamma.\ \sigma\mu\ 48^0\ 32' = & 19,6419576 \\ \hline & 31,1004393 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \lambda o\gamma\, 5 = & 0,6989700 \\ 3\ \lambda o\gamma.\ \acute{\epsilon}\varphi\, 8^0\ 33' = & 27,5466318 \\ \hline & 28,2456018 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & +31,1004393 \\ & -28,2456018 \\ \hline \lambda o\gamma\, \chi = & 2,8548375 \end{array}$$

ἐκ δὲ τοῦ εὑρεθέντος ὡς λογαρίθμου τοῦ χ ἀριθμοῦ 2,8548375 δὲν ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμέν τι ἐκ τοῦ χαρακτηριστοῦ αὐτοῦ δι' ὃν ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν λόγον.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) πορίζόμεθα

$$\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma\, 1900 + \lambda o\gamma\, \acute{\varepsilon}\varphi\, 15^0\, 20' - \lambda o\gamma\, 315 - 2\, \lambda o\gamma\, \sigma\mu\, 23^0$$

$$\begin{array}{rlrl} \lambda o\gamma\, 1900 = & 3{,}2787536 & \lambda o\gamma.\, 315 = & 2{,}4983105 \\ \lambda o\gamma.\, \acute{\varepsilon}\varphi\, 15^0\, 20' = & 9{,}4380587 & 2\, \lambda o\gamma.\, \sigma\mu\, 23^0 = & 19{,}9280522 \\ \hline & 12{,}7168123 & & 22{,}4263627 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & +12{,}7168123 \\ & -22{,}4263627 \\ \hline \lambda o\gamma\, \chi = & -\ 9{,}7095504 \end{array}$$

εἰς δὲ τὸν οὕτως εὑρεθέντα ἀρνητικὸν λογάριθμον πρέπει νὰ προσθέσωμεν μίαν δεκάδα εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ, δι' ὃν ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν λόγον καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ λογαρίθμου χ

$$\lambda o\gamma\, \chi = 0{,}2904496.$$

63. Ὅταν θέλωμεν, ἀντὶ ν' ἀφαιρῶμεν τοὺς λογαρίθμους, νὰ προσθέτωμεν τὰ ἀριθμητικὰ αὐτῶν συμπληρώματα, τότε πρέπει, ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὰς προσθετέας ἢ ἀφαιρετέας δεκάδας, ν' ἀφαιρῶμεν ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ τελικοῦ λογαρίθμου τόσας δεκάδας, ὁσάκις προσετέθησαν ἀριθμητικὰ συμπληρώματα. Παραδείγματος χάριν, εἴδομεν ὅτι ὑπολογίζοντες τοὺς λογαρίθμους ὡς προηγουμένως, ἔπρεπε νὰ προσθέσωμεν 10 εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου — 9,7095504 τῆς ἐξισώσεως (3), ἂν δὲ ἠθέλομεν κάμει χρῆσιν τῶν ἀριθμητικῶν συμπληρωμάτων, ἅτινα χάριν συντομίας παριστῶμεν οὕτω Α. Σ., ἠθέλομεν ἔχει

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma\, 1900 = & 3{,}2787536 \\ \lambda o\gamma.\, \acute{\varepsilon}\varphi\, 15^0\, 20' = & 9{,}4380587 \\ \text{Α. Σ. } \lambda o\gamma\, 315 = & 7{,}5016895 \\ 2\text{Α. Σ. } \lambda o\gamma.\, \sigma\mu\, 23^0 = & 0{,}0719478 \\ \hline & 20{,}2904496 \end{array}$$

ἀπὸ δὲ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν 30 διὰ τὰ 3 ἀριθμητικὰ συμπληρώματα, καὶ νὰ προσθέσωμεν 10, διότι οἱ τριγωνομετρικοὶ παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ τῆς ἐξισώσεως (3) ὑπερβαίνουσι κατὰ 1 τοὺς τοῦ ἀριθμητοῦ, ἤτοι ν' ἀφαιρέσωμεν μόνον 20, ὅτε θέλομεν ἔχει.

$$\text{λογ}\,\chi = 0{,}2904496,$$

τοῦθ' ὅπερ καὶ προηγουμένως εὑρέθη.

64. Ὅταν ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς ἀγνώστου ἦναι τριγωνομετρική τις γραμμή, ἂν εἴχομεν π. χ. πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν

$$\text{ἡμ}\,\chi = \frac{314\ \text{ἡμ}\,30^0}{411\ \text{σμ}^2 15^0},$$

τότε εἰς τὸ κατὰ τοὺς προηγουμένους κανόνας ὑπολογισθὲν τελικὸν ἐξαγόμενον πρέπει νὰ προσθέτωμεν καὶ 10 εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ, ἵνα ἔχωμεν τὸν κατὰ τοὺς πίνακας τοῦ Καλλέτου λογάριθμον τοῦ ἡμ χ. Οὕτως ἔχομεν

$$\text{λογ ἡμ}\,\chi = \text{λογ}\,314 + \text{λογ ἡμ}\,30^0 + \text{Α.Σλογ}\,411 + 2\text{Α.Σλογ σμ}\,15^0 - 30$$

καὶ

$$\begin{aligned} \text{λογ}\,314 &= 2{,}4969296 \\ \text{λογ ἡμ}\,30^0 &= 9{,}6989700 \\ \text{Α.Σλογ}\,411 &= 7{,}3861582 \\ 2\text{Α.Σλογ σμ}\,15^0 &= 0{,}0301124 \\ \hline & \ 19{,}6121702 \end{aligned}$$

ἀπὸ δὲ τοῦ ἐξαγομένου 19,6121702 ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν 30 διὰ τὰ τρία ἀριθμητικὰ συμπληρώματα καὶ νὰ προσθέσωμεν 10, διότι οἱ τριγωνομετρικοὶ παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ ὑπερβαίνουσι κατὰ μονάδα τοὺς τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ πάλιν 10, διότι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν κατὰ τοὺς πίνακας τοῦ Καλλέτου λογ. τοῦ ἡμ χ. Ἐν ἄλλαις λέξεσι πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν 30 — 10 — 10, ἤτοι 10, καὶ τότε εὑρίσκομεν

$$\text{λογ ἡμ}\,\chi = 9{,}6121702$$

καὶ ἐπομένως $\quad \text{γωνία}\,\chi = 24^0\,40'\,7''$.

Σημ. Ἐξ ὅσων ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν πείθεται πᾶς τις, ὅτι ἀπαιτεῖται τὸ μὲν μεγάλη ἄσκησις καὶ ἐπὶ πλείστων παραδειγμάτων, τὸ δὲ μεγίστη προσοχή, ἵνα τις δύνηται εὐχερῶς καὶ ἀσφαλῶς νὰ ποιῆται χρῆσιν τῶν λογαριθμικῶν τοῦ Καλλέτου πινάκων. Τὴν τοιαύτην ἄσκησιν συνιστῶμεν τοῖς πᾶσι, ἄλλως οἱ κόποι αὐτῶν εἰς τὸ νὰ ἐννοήσωσι τὰ περὶ τούτων λεχθέντα θ' ἀποβῶσιν εἰς μάτην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σχέσεις μεταξὺ τῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

65. Οἱ Μαθηματικοί, ἀντὶ νὰ ζητήσωσιν, ὡς εἴπομεν ἀρχόμενοι, τὰς μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἀπαραιτήτους τρεῖς διαφόρους σχέσεις πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων διὰ τῆς ἐπιλύσεως 3 ἐξισώσεων μὲ 3 ἀγνώστους, εὗρον πολὺ τούτου ἁπλούστερον νὰ ἐξετάσωσιν ἀνὰ μίαν μίαν ὅλας τὰς δυνατὰς νὰ συμβῶσι διαφόρους περιπτώσεις, καὶ εὕρωσιν ἐν ἑκάστῃ διαφόρῳ περιπτώσει τὰς διαφόρους σχέσεις, δι' ὧν *ἀμέσως* παρέχονται αἱ τιμαὶ τῶν ζητουμένων διὰ τῶν δεδομένων. Μάλιστα δέ, ἵνα καταστήσωσι τὸ ζήτημα ἔτι ἁπλούστερον, ἐθεώρησαν ἐν πρώτοις ἰδίᾳ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὧν ἐζήτησαν νὰ εὕρωσι τὰ λοιπὰ ἄγνωστα αὐτῶν μέρη γνωρίζοντες δύο τινὰ αὐτῶν, ἐν οἷς πάντοτε νὰ ὑπάρχῃ καὶ μία πλευρά.

Ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς αἱ γωνίαι, χάριν συντομίας, παρίστανται διὰ τῶν κεφαλαίων γραμμάτων Α, Β, Γ τῶν κορυφῶν αὐτῶν, αἱ δὲ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ διὰ τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν α, β, γ, ἰδίᾳ δὲ εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ γράμμα Α παριστᾷ πάντοτε τὴν ὀρθὴν αὐτῶν γωνίαν

66. Ἡ λύσις τῶν τε ὀρθογωνίων καὶ μὴ τριγώνων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς τεσσάρων θεωρημάτων

Θεώρημα 1ον. *Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτει-*

νούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι τῆς θεωρημένης πλευρᾶς γωνίας.

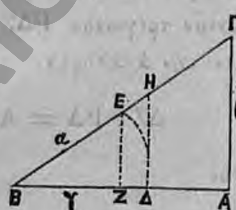
Λέγω π. χ. ὅτι εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 4) θέλομεν πάντοτε ἔχει

$$\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Gamma}\ \text{ἡμ}\,\mathrm{AB\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma}\ \text{ἡμ}\,\mathrm{A\Gamma B}$$

ἤ, ποιοῦντες χρῆσιν τῶν γραμμάτων ἀντὶ τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν καὶ πλευρῶν,

$$\beta = \alpha\ \text{ἡμ}\,\mathrm{B} \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma = \alpha\ \text{ἡμ}\,\Gamma.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτων μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν τὸ τόξον ΔΕ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε καταβιβάζομεν τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΑ. Τὸ οὕτω προκύπτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΕΖ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ δεδομένῳ ΒΑΓ, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν



Σχ. 4

$$\mathrm{EZ} : \Gamma\mathrm{A} = \mathrm{BE} : \mathrm{B\Gamma}, \text{ ἐξ ἧς } \mathrm{A\Gamma} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{BE}}\,\mathrm{B\Gamma}.$$

Ἀλλ' ὁ λόγος $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{BE}}$ παριστᾷ κατὰ τὰ ἐν τῇ § 21 λεχθέντα τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Β. Ἄρα

$$\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Gamma}\ \text{ἡμ}\,\mathrm{B} \qquad \text{ἢ} \qquad \beta = \alpha\ \text{ἡμ}\,\mathrm{B},$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Δι' ὁμοίας κατασκευῆς ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ

$$\gamma = \alpha\ \text{ἡμ}\,\Gamma,$$

ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί, ὡς ἀποτελοῦσαι ἄθροισμα μίαν γωνίαν ὀρθήν, αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι σχέσεις γράφονται καὶ οὕτω

$$\beta = \alpha\ \text{σμ}\,\Gamma \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma = \alpha\ \text{σμ}\,\mathrm{B}$$

τουτέστιν

Ἐν παντὶ ὀρθωγωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρ-

θῆς γωνίας ἰσοῦται τῇ ὑποτεινούσῃ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προκειμένης τῇ θεωρουμένῃ πλευρᾷ γωνίας.

Θεώρημα 2ον. — *Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὴν ἑτέραν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας.*

Λέγω π. χ. ὅτι εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 4) θέλομεν ἔχει

$$\beta = \gamma \ \text{ἐφ}\,\mathrm{B} \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma = \beta \ \text{ἐφ}\,\Gamma.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν τὸ τόξον ΔΕ, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Δ ἄγομεν τὴν ΔΖ ἐφαπτομένην εἰς τὸ τόξον ΔΕ. Τὸ οὕτω σχηματισθὲν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΖ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ ΒΑΓ καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Delta\mathrm{Z} : \mathrm{B}\Delta = \mathrm{A}\Gamma : \mathrm{AB}, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \mathrm{A}\Gamma = \frac{\Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{B}\Delta}.\mathrm{AB}$$

ἤτοι

$$\beta = \frac{\Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{B}\Delta}.\gamma.$$

Ἀλλὰ $\frac{\Delta\mathrm{Z}}{\Delta\mathrm{B}}$ παριστᾷ τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας Β. Ἄρα

$$\beta = \gamma \ \text{ἐφ}\,\mathrm{B},$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν, διότι δι' ὁμοίας κατασκευῆς ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι καὶ

$$\gamma = \beta \ \text{ἐφ}\,\Gamma,$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί, αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες γράφονται καὶ οὕτω

$$\beta = \gamma \ \text{σφ}\,\Gamma \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma = \beta \ \text{σφ}\,\mathrm{B},$$

τουτέστιν ὅτι

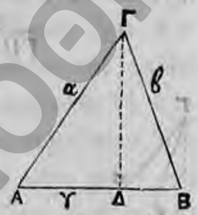
Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται τῇ ἑτέρᾳ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης τῇ θεωρουμένῃ πλευρᾷ γωνίας.

Θεώρημα 3ον. — *Ἐν παντὶ εὐθυγράμμῳ τριγώνῳ δύο ὁποιαιδήποτε αὐτοῦ πλευραὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι αὐτῶν γωνιῶν.*

Ἔστω π. χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 5). Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$\beta : \gamma = \text{ἡμ} B : \text{ἡμ} \Gamma, \quad \alpha : \beta = \text{ἡμ} A : \text{ἡμ} B, \quad \alpha : \gamma = \text{ἡμ} A : \text{ἡμ} \Gamma.$$

Ἄς λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὰς γωνίας Α καὶ Β, καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς α καὶ ϐ. Ἐὰν ἐκ τῆς ἑτέρας κορυφῆς Γ καταβιβάσωμεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, θέλομεν σχηματίσει, ὅταν ἡ κάθετος πίπτῃ ἐντὸς τῆς βάσεως ΑΒ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΔ, ΓΒΔ, ἐξ ὧν πορίζόμεθα κατὰ τὸ προαποδειχθὲν 1ον θεώρημα



Σχ. 5

$$\Gamma\Delta = \beta \;\text{ἡμ} A \quad \text{καὶ} \quad \Gamma\Delta = \alpha \;\text{ἡμ} B.$$

Ἐπειδὴ δὲ ΓΔ = ΓΔ, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\beta \;\text{ἡμ} A = \alpha \;\text{ἡμ} B$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \beta = \text{ἡμ} A : \text{ἡμ} B.$$

Ὅταν ἡ κάθετος πίπτῃ ἐκτὸς τῆς βάσεως, τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ πορίζόμεθα (σχ. 6).

$$\Gamma\Delta = \beta \;\text{ἡμ} \Gamma A\Delta,$$

ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΓΑΔ καὶ ΓΑΒ εἶναι παραπληρωματικαί, ἔχομεν ἡμ ΓΑΔ = ἡμ ΓΑΒ = ἡμ Α. Ἄρα θέλομεν ἔχει πάντοτε

$$\Gamma\Delta = \beta \;\text{ἡμ} A,$$

ἡ δὲ ἰσότης αὕτη μετὰ τῆς ΓΔ = α ἡμ Β, παρέχει τὴν αὐτὴν

$$\beta \;\text{ἡμ} A = \alpha \;\text{ἡμ} B,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ὡσαύτως $\alpha : \beta = \text{ἡμ} A : \text{ἡμ} B$.

Θεώρημα 4ον. *Ἐν παντὶ εὐθυγράμμῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον μιᾶς ὁποιασδήποτε πλευρᾶς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα* *τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, μεῖον δὶς τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας. Τουτέστι θέλομεν πάντοτε ἔχει*

$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγ\ \text{σμ}\ Α.$$

Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσι πρὸς ἐξέτασιν· ὅταν ἡ γωνία Α ἦναι ὀξεῖα καὶ ὅταν αὕτη ἦναι ἀμβλεῖα.

Ἐὰν ἡ γωνία Α ἦναι ὀξεῖα (σχ. 5), τότε κατὰ γνωστὸν γεωμετρικὸν θεώρημα θέλομεν ἔχει

$$\overline{ΓΒ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΑΒ}^2 - 2ΑΒ \times ΑΔ,$$

Σχ. 6

τῆς ΑΔ παριστώσης τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἀπόστασιν τοῦ ποδὸς Δ τῆς καθέτου ΓΔ. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΑΔ πορίζόμεθα $ΑΔ = β\ \text{σμ}\ Α$, ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν τῆς ΑΔ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωστὴν ἰσότητα θέλομεν ἔχει

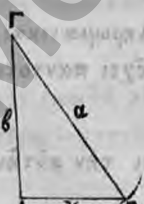
$$\overline{ΓΒ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΑΒ}^2 - 2ΑΒ \times β\ \text{σμ}\ Α$$

ἤτοι
$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2αβ\ \text{σμ}\ Α,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ὅταν ἡ γωνία Α ἦναι ἀμβλεῖα (σχ. 6), ἡ Γεωμετρία παρέχει τὴν ἰσότητα

$$\overline{ΓΒ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΑΒ}^2 + 2ΑΒ \times ΑΔ.$$



Σχ. 7

Ἀλλ' $ΑΔ = β\ \text{σμ}\ ΓΑΔ = -β\ \text{σμ}\ Α$, διότι αἱ γωνίαι ΓΑΔ καὶ Α εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἔχουσιν ἑπομένως συνημίτονα ἴσα καὶ ἀντιθέτων σημείων (§ 11). Ἄρα

$$\overline{ΓΒ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΑΒ}^2 + 2ΑΒ\,(-β\,\text{σμ}\ Α)$$

ἢ

$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2αβ\ \text{σμ}\ Α,$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ ὅταν ἡ γωνία Α, ἡ ἀπέναντι τῆς θεωρουμένης πλευρᾶς α, ἦναι ἀμβλεῖα.

67. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ 4ον θεώρημα ἐπὶ ἑκάστης τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει τὰς τρεῖς ἰσότητας

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ σμ } A,$$
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \text{ σμ } B,$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \text{ σμ } \Gamma,$$

αὗται δὲ παριστῶσι τὰς τρεῖς διαφόρους ἐξισώσεις, δι' ὧν ἠθέλομεν πορισθῇ τὰς τιμὰς τριῶν τῶν ἐξ μερῶν α, β, γ, Α, Β, Γ, ὅταν μᾶς δίδωνται τὰ τρία τούτων, μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ ὑπάρχῃ καὶ μία τις πλευρά, ἐννοεῖται δὲ οἴκοθεν, ὅτι θέλομεν ἔχει διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἐξισώσεων τὰς τιμὰς τῶν ἑτέρων, ἐκτὸς τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς τὸ τρίγωνον θὰ ἦτο ἀδύνατον. Ἀλλ' εἴπομεν ἀρχόμενοι τοῦ παρόντος κεφαλαίου, ὅτι οἱ Μαθηματικοὶ ἐπροτίμησαν νὰ ἐξετάσωσιν ἀνὰ μίαν μίαν τὰς διαφόρους δυνατὰς περιπτώσεις καὶ νὰ πορισθῶσιν *ἀμέσως* τὰς ἑκάστοτε ἀναγκαίας σχέσεις πρὸς τὴν ἀπ' εὐθείας εὕρεσιν τῶν ζητουμένων, καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον χρησιμεύουσι τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα τέσσαρα θεωρήματα, ὡς θέλομεν ἀμέσως ἰδεῖ.

Ὀρθογώνια τρίγωνα.

68. Τέσσαρας διαφόρους περιπτώσεις παρουσιάζουσι τὰ περὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων δυνατὰ διάφορα προβλήματα.

1ον *Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν ὀξεῖαν αὐτῶν γωνίαν.*

2ον *Ὅταν μᾶς δίδηται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τις πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας.*

3ον *Ὅταν μᾶς δίδωνται αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας.*

4ον *Ὅταν μᾶς δίδηται ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἡ μία τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν.*

69. Ἂς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι μᾶς δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία Β, καὶ μᾶς ζητοῦνται αἱ δύο αὐτοῦ πλευραὶ β καὶ γ καὶ ἡ ἑτέρα ὀξεῖα γωνία Γ.

Θέλομεν ἔχει ἀμέσως $\Gamma = 90^0 - B$, κατὰ δὲ τὸ θεώρημα 1ον

$$\beta = \alpha \text{ ημ } B \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \alpha \text{ σμ } B$$

70. Ἂς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι μᾶς δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ πλευρὰ β, καὶ ζητοῦνται ἡ πλευρὰ γ καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta = \alpha$ ἡμ Β πορίζόμεθα ἀμέσως

$$\text{ἡμ}\,B = \frac{\beta}{\alpha}$$

ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ πορίζόμεθα ἀμέσως

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad \text{ἑπομένως } \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2},$$

καὶ γνωστῆς γενομένης τῆς γωνίας Β, θέλομεν εὕρει ἀμέσως

$$\Gamma = 90^0 - B.$$

71. Ἂς ὑποθέσωμεν 3ον ὅτι μᾶς δίδονται αἱ πλευραὶ β καὶ γ.

Κατὰ τὸ 2ον θεώρημα τῆς § 66 θέλομεν ἔχει

$$\beta = \gamma\,\text{ἐφ}\,B, \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \beta\,\text{ἐφ}\,\Gamma$$

ἑπομένως

$$\text{ἐφ}\,B = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐφ}\,\Gamma = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Ἐὰν πρῶτον εὕρωμεν τὴν γωνίαν Β διὰ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς $\frac{\beta}{\gamma}$, θέλομεν ἔχει $\Gamma = 90^0 - B$, ἐὰν δὲ εὕρωμεν κατ' ἀρχὰς τὴν γωνίαν Γ, θέλομεν ἔχει $B = 90^0 - \Gamma$.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\beta = \alpha\,\text{ἡμ}\,B, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}\,B}.$$

72. Ἂς ὑποθέσωμεν 4ον ὅτι μᾶς δίδεται β καὶ Γ. Ἔχομεν κατὰ τὸ 2ον θεώρημα τῆς § 66,

$$\gamma = \beta\,\text{ἐφ}\,\Gamma, \qquad B = 90^0 - \Gamma,$$

καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta = \alpha$ σμ Γ, πορίζόμεθα ἀμέσως

$$\alpha = \frac{\beta}{\text{σμ}\,\Gamma}.$$

Παρατήρησις. Ἡ μόνη περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ κατασκευὴ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι ἐκ τῶν δεδομένων ἀδύνατος, εἶναι ἡ δευτέρα, ὅταν ἡ ὑποτείνουσα α ἦναι μικροτέρα τῆς β, διότι τότε θέλομεν ἔχει

$$\text{ἡμ}\,B = \frac{\alpha}{\beta} > 1,$$

τοῦθ' ὅπερ ἀδύνατον, τοῦ ἡμιτόνου ὄντος πάντοτε μικροτέρου ἢ τὸ πολὺ ἴσου τῇ μονάδι (§ 14).

Πλαγιογώνια τρίγωνα.

73. Καὶ ἐπὶ τῶν πλαγιογωνίων τριγώνων τέσσαρας διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

1ον. *Ὅταν μᾶς δίδηται μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι.*

2ον. *Ὅταν μᾶς δίδωνται δύο πλευραὶ καὶ ἡ περιεχομένη ὑπ' αὐτῶν γωνία.*

3ον *Ὅταν μᾶς δίδωνται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν μίαν τούτων γωνία.*

4ον. *Ὅταν μᾶς δίδωνται καὶ αἱ τρεῖς πλευραί.*

74. Ἄς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι εἰς τὸ πλαγιογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 7) μᾶς δίδονται ἡ πλευρὰ γ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Β, ἢ αἱ Α καὶ Γ, ἢ αἱ Β καὶ Γ.

Ἡ γωνία Γ εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ εἶναι $180^0 - (A + B)$, αἱ δὲ πλευραὶ α καὶ β διὰ τῶν ἀναλογιῶν

$$\alpha : \gamma = \text{ἡμ}\,A : \text{ἡμ}\,\Gamma, \qquad \beta : \gamma = \text{ἡμ}\,B : \text{ἡμ}\,\Gamma,$$

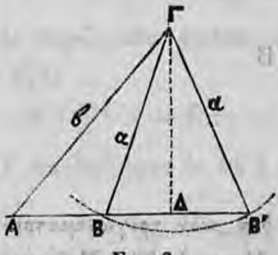
ἐξ ὧν πορίζόμεθα ἀμέσως

$$\alpha = \frac{\gamma\ \text{ἡμ}\,A}{\text{ἡμ}\,\Gamma}, \qquad \beta = \frac{\gamma\ \text{ἡμ}\,B}{\text{ἡμ}\,\Gamma}$$

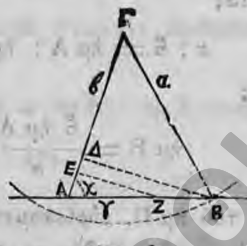
Ὡσαύτως ἠθέλομεν εὕρει τὰς γωνίας Β καὶ Α ἀφαιροῦντες ἀπὸ 180^0 τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων Α καὶ Γ ἢ Β καὶ Γ, καὶ διὰ τῶν αὐτῶν ἀναλογιῶν ἠθέλομεν ἔχει τὰς αὐτὰς τιμὰς διὰ τὰς ἀγνώστους πλευρὰς α καὶ β.

75. Ἄς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι μᾶς δίδονται αἱ πλευραὶ α καὶ β καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία Γ.

ΑΒΓ, ΑΒ'Γ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς τοῦτο διδάσκει καὶ ἡ Γεωμετρία (σχ. 8).



Σχ. 8



Σχ. 9

Τὸ πρόβλημα θὰ ἦτο ἀδύνατον καὶ δὲν θὰ ὑπῆρχεν οὐδεμία δυνατὴ αὐτοῦ λύσις, ἄν, τῆς γωνίας Α οὔσης ἀμβλείας ἢ ὀξείας, εἴχομεν

$$\frac{\beta\ \eta\mu\, A}{\alpha} > 1,$$

διότι τότε ἡ τιμὴ τοῦ ἡμιτόνου Β ἤθελεν εἶναι μεγαλειτέρα τῆς μονάδος καὶ δὲν ὑπάρχει οὐδὲν τόξον, ἔχον τοιοῦτον ἡμίτονον, τοῦτ' αὐτὸ διδάσκει καὶ ἡ Γεωμετρία, ὅταν ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καταβιβαζομένης καθέτου ΓΔ, ἥτις τότε εἶναι ἴση μὲ β ἡμ Α (σχ. 9).

78. Ἂς ὑποθέσωμεν 4ον ὅτι μᾶς δίδονται καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ α, β, γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μᾶς ζητοῦνται αἱ τρεῖς αὐτοῦ γωνίαι Α, Β, Γ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθέντων διὰ τοῦ 4ου θεωρήματος τύπων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\mu\, A,$$
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\ \sigma\mu\, B,$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\ \sigma\mu\, \Gamma,$$

ποριζόμεθα ἀμέσως τὰ συνημίτονα τῶν ζητουμένων γωνιῶν Α, Β, Γ,

$$\sigma\mu\, A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma},\quad \sigma\mu\, B = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma},\quad \sigma\mu\, \Gamma = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$$

ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι Α, Β, Γ δίδονται διὰ τῶν συνημιτόνων καὶ ἑκάστη τούτων εἶναι μικροτέρα 180°, εἰς ἕκαστον δὲ τόξον ἀπὸ τοῦ 0° μέχρι τοῦ 180° ἓν καὶ μόνον συνημίτονον ἀντιστοιχεῖ, ἕπεται ὅτι δι' ἑκάστην γωνίαν Α, Β, Γ θέλομεν ἔχει μίαν καὶ μόνην τιμήν, καὶ ἑπομένως ἓν καὶ μόνον τρίγωνον ὑπάρχει, ὅπως διδάσκει καὶ ἡ Γεωμετρία, ἂν ἐν πάσῃ περιπτώσει τοῦτο ἦναι δυνατόν. Γνωρίζομεν ἀφ' ἑτέρου ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι πάντοτε δυνατόν, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἀνισότητας $\alpha < \beta + \gamma$ καὶ $\alpha > \beta - \gamma$ τοῦ β ὑποτιθεμένου μεγαλειτέρου τοῦ γ, τοῦτ' αὐτὸ δὲ δεικνύουσι καὶ αἱ ἀνωτέρω τρεῖς τιμαί. Διότι, ἐὰν $\alpha > \beta + \gamma$, τότε τὸ α^2 θὰ ἦτο μεγαλείτερον $\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma$, καὶ ἠθέλομεν ἔχει $\sigma\mu\, A > -1$, τουτέστιν ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἀνύπαρκτος. Ἐὰν δὲ $\alpha < \beta - \gamma$, τότε θέλομεν ἔχει $\beta > \alpha + \gamma$, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ $\sigma\mu\, B$ θὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν μείζονα τοῦ παρονομαστοῦ, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου του λαμβανομένου καὶ ἠθέλομεν ἔχει

$$\sigma\mu\, B > -1,$$

ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἡ γωνία Β εἶναι ἀνύπαρκτος.

79. Ἐπειδὴ οἱ ἀνωτέρω εὑρεθέντες τρεῖς τύποι δὲν ὑπολογίζονται διὰ τῶν λογαρίθμων, ἵνα ἔχωμεν τοιούτους καὶ ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς § 36

$$2\eta\mu^2\frac{A}{2} = 1 - \sigma\mu\, A$$

πορίζόμεθα ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ $\sigma\mu\, A$ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ τιμὴν

$$2\eta\mu^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{2\beta\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha^2-(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)}{2\beta\gamma} = \frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{2\beta\gamma} = \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{2\beta\gamma}$$

καλοῦντες δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δεδομένων πλευρῶν 2σ, θέλομεν ἔχει

$$\alpha + \beta - \gamma = 2\sigma - 2\gamma = 2(\sigma - \gamma)$$

καὶ $\quad \alpha + \gamma - \beta = 2\sigma \quad 2\beta = 2(\sigma - \beta),$

ἐπομένως

$$2\eta\mu^2\frac{A}{2}=\frac{4(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}{2\beta\gamma} \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}{\beta\gamma}},$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Α εἶναι μικροτέρα 180°, ἡ $\frac{A}{2}$ θέλει εἶναι μικροτέρα τῶν 90°, καὶ ὁ ἀνωτέρω εὑρεθεὶς τύπος τῆς τιμῆς τοῦ ἡμ $\frac{A}{2}$ θὰ ἦναι πάντοτε πραγματικός, ἐκτὸς ἐὰν τὸ τρίγωνον ἦναι ἀδύνατον.

Ὁμοιοτρόπως ἐργαζόμενοι θέλομεν εὕρει

$$\eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\sigma-\alpha)(\sigma-\gamma)}{\alpha\gamma}} \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)}{\alpha\beta}}$$

τύπους δηλ. ὑπολογιζομένους διὰ τῶν λογαρίθμων, ὡς θέλομεν ἴδει ἀμέσως ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς.

Ἐφαρμογαὶ εἴς τινα προβλήματα.

80. Ἐνταῦθα θέλομεν ἐφαρμόσει τὰ προεκτεθέντα εἴς τινα προβλήματα, λαμβάνοντες ἀνὰ ἓν δι' ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν 8 περιπτώσεων, καὶ λύοντες τοῦτο διά τε τῶν πραγματικῶν καὶ τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.

Πρόβλημα 1ον Ἔστω 400 μέτρων ἡ ὑποτείνουσα α ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου καὶ 53° 35′ ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ Γ. Θέλομεν ἔχει διὰ μὲν τῶν πραγματικῶν πινάκων

$$\text{Γωνία } B = 90^0 - 5 = 90^0 - 53^0\ 35' = 36^0,\ 25'.$$

$$\text{Πλευρὰ } \beta = \alpha\ \eta\mu\,\Gamma = 400\ \eta\mu\, 53^0\ 35' =$$
$$= 400 \times 0{,}80472 = 321^{\mu},888$$

$$\text{Πλευρὰ } \gamma = 400\ \sigma\mu\,\Gamma = 400\ \sigma\mu\, 53^0\ 35' =$$
$$= 400 \times 0{,}59365 = 237^{\mu},46.$$

Διὰ δὲ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων θέλομεν πορισθῇ ἐκ τῶν τύπων $\beta = \alpha\ \eta\mu\,\Gamma$ καὶ $\gamma = \alpha\ \sigma\mu\,\Gamma$ τοὺς ἑξῆς

$$\lambda o\gamma\,\beta = \lambda o\gamma\,\alpha + \lambda o\gamma.\eta\mu\Gamma, \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \lambda o\gamma\,\gamma = \lambda o\gamma\,\alpha + \lambda o\gamma.\sigma\mu\,\Gamma$$

καὶ θέλομεν εὕρει

$$\lambda o\gamma\, \beta = \lambda o\gamma\, 400 + \lambda o\gamma.\ \eta\mu\, 53^0\ 35' - 10$$

$$\lambda o\gamma\, \gamma = \lambda o\gamma\, 400 + \lambda o\gamma.\ \sigma\mu\, 53^0\ 35' - 10$$

Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma\, 400 = 2{,}6020600$

$$\lambda o\gamma.\ \eta\mu\, 53^0\ 35' = 9{,}9056454$$

θέλομεν ἔχει ἀφαιροῦντες ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 12,5077054 μίαν δεκάδα

$$\lambda o\gamma \beta = 2{,}5077054$$

καὶ $\beta = 321^{\mu}{,}88$ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τοῦ μέτρου.

Ὡσαύτως θέλομεν εὕρει

$$\begin{array}{r} \lambda o\gamma\, 400 = 2{,}6020600 \\ \lambda o\gamma.\ \sigma\mu\, 53'\ 35 = \underline{9{,}7735327} \\ 12{,}3755927 \end{array}$$

καὶ $\lambda o\gamma\, \gamma = 2{,}3755927$,

ἑπομένως $\gamma = 237^{\mu}{,}46$ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τοῦ μέτρου.

Πρόβλημα 2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἐδόθη ἡ ὑποτείνουσα α ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἴση μὲ 600 μέτρα καὶ ἡ μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ β ἴση μὲ 200 μέτρα.

Θέλομεν ἔχει ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta = \alpha\ \eta\mu\, B$,

$$\eta\mu\, B = \frac{200}{600} = \frac{1}{3} = 0{,}33333,$$

ἑπομένως $B = 19^0\ 28'\ 15''$ κατὰ προσέγγισιν $1''$ τῆς μοίρας,

$$\text{καὶ } \gamma = \sqrt{600^2 - 200^2} = \sqrt{320000} = 565^{\mu}{,}68$$

$$\text{καὶ } \Gamma = 90^0 - B = 70^0\ 31'\ 45''.$$

Διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἠθέλομεν πορισθῇ ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta = \alpha\ \eta\mu\, B$

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\, B = \lambda o\gamma\, \beta - \lambda o\gamma\, \alpha = \lambda o\gamma\, 200 - \lambda o\gamma\, 600 + 10 =$$

$$= \lambda o\gamma\, 200 + \mathrm{A.\Sigma}\, \lambda o\gamma\, 600$$

$$\begin{array}{r} \lambda o\gamma\, 200 = 2{,}30103000 \\ \mathrm{A.\Sigma}\, \lambda o\gamma\, 600 = \underline{7{,}22184875} \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\, B = 9{,}52287875 \end{array}$$

καὶ $B = 19^0\,28'\,15''$ κατὰ προσέγγισιν $1''$ τῆς μοίρας

καὶ $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} = \sqrt{800 \times 400}$

καὶ $$\lambda o\gamma\,\gamma = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\,800 + \lambda o\gamma\,400)$$

$$\lambda o\gamma\,800 = \quad 2{,}90308999$$
$$\lambda o\gamma\,400 = \quad 2{,}60205999$$

$$\lambda o\gamma\,\gamma = \frac{1}{2}\left(5{,}50514998\right) = 2{,}75257499,$$

καὶ $\gamma = 565{,}68$ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τοῦ μέτρου

καὶ $\Gamma = 90^0 - 19^0\,28'\,14'' = 70^0\,31'\,45''$ κατὰ προσέγγισιν $1''$

Πρόβλημα 3ον. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἐδόθη ἡ πλευρὰ β τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἴση μὲ 300 μέτρα καὶ ἡ πλευρὰ γ ἴση μὲ 800.

Ἐκ τοῦ τύπου

$$\beta = \gamma\ \dot{\varepsilon}\varphi B \qquad \text{ἢ} \qquad \gamma = \beta\ \dot{\varepsilon}\varphi \Gamma$$

πορίζόμεθα ἀμέσως

$$\dot{\varepsilon}\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{300}{800} = \frac{3}{8} = 0{,}37500$$

$$\dot{\varepsilon}\varphi \Gamma = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{800}{300} = \frac{8}{3} = 2{,}66666,$$

εὑρίσκομεν δὲ διὰ τῶν πραγματικῶν πινάκων ἐν τῇ σελίδι 15 τὴν τιμὴν 0,37500 τῆς ἐφΒ περιεχομένην μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν τιμῶν 0,37488 καὶ 37521, τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς γωνίας $20^0\,33'$ καὶ $20^0\,34'$. Ἵνα δὲ συμπληρώσωμεν αὐτὴν σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν (§ 61).

$$33 : 12 = 60'' : \varphi,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα $\varphi = \dfrac{720''}{33} = 22''$ περίπου. Ἐπομένως ἡ ζητουμένη γωνία $B = 20^0\,33'\,22''$, ἡ δὲ $\Gamma = 90^0 - 20^0\,33'\,22'' = 69^0\,26'\,38''$.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ α ἔχομεν τὸν τύπον

$$\beta = \alpha \text{ ἡμ} B, \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ} B} = \frac{300}{0,35110} = 854,46.$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω τύπων τῶν παρεχόντων τὰ ζητούμενα, θέλομεν ἔχει

$$\text{λογ}\,\beta = \text{λογ}\,\gamma + \text{λογ ἐφ}\,B, \quad \text{ἢ} \quad \text{λογ ἐφ}\,B = \text{λογ}\,\beta - \text{λογ}\,\gamma + 10,$$

$$\begin{aligned} \text{ἤτοι λογ ἐφ}\,B &= \text{λογ}\,300 - \text{λογ}\,800 + 10 \\ &= \text{λογ}\,300 + \text{Α. Σ. λογ}\,800 \end{aligned}$$

καὶ κατὰ τοὺς πίνακας Καλλέτου

$$\begin{aligned} \text{λογ}\,300 &= 2,47712125 \\ \text{Α. Σ. λογ}\,800 &= 7,09691000 \\ \hline \text{λογ ἐφ}\,B &= 9,57403125 \end{aligned}$$

$$\text{καὶ } B = 20^0\,33'\,20'' + \frac{10'' \times 112}{640} = 20^0\,33'\,22'' \text{ περίπου.}$$

Ἡ γωνία Γ εὑρίσκεται ὡς καὶ προηγουμένως, ἡ δὲ ὑποτείνουσα α διὰ τοῦ τύπου

$$\text{λογ}\,\alpha = \text{λογ}\,\beta - \text{λογ ἡμ}\,B + 10 = \text{λογ}\,\beta + \text{Α. Σ. λογ ἡμ}\,B$$

εὑρίσκομεν δὲ

$$\begin{aligned} \text{λογ}\,300 &= 2,47712125 \\ \text{Α. Σ. λογ ἡμ}\,B &= 0,45453890 \\ \hline \text{λογ}\,\alpha &= 2,93165015 \end{aligned}$$

$$\text{καὶ} \qquad \alpha = 854,38$$

Ἡ παρατηρουμένη μικρὰ διαφορὰ τῶν 8 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου μεταξὺ τῶν διὰ τῶν δύο διαφόρων τρόπων εὑρεθέντων ἐξαγομένων διὰ τὴν τιμὴν τῆς ὑποτεινούσης α προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ τιμὴ $20^0\,33'\,22''$ τῆς γωνίας Β ἐλήφθη κατὰ προσέγγισιν 1″.

Πρόβλημα 4ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς δίδεται $\beta = 700$ μέτρα καὶ $\Gamma = 65^0\,37'$.

Θέλομεν ἔχει $B = 90^0 - 65^0\ 37' = 24^0\ 23'$, ἐκ δὲ τοῦ τύπου $\gamma = \beta$ ἐφ Γ, ἔχομεν

$$\gamma = 700 \times \text{ἐφ}\, 65^0\, 37' = 700 \times 2{,}20619 = 1544{,}33$$

$$\text{καὶ}\quad \alpha = \frac{\beta}{\text{σμ}\,\Gamma} = \frac{700}{\text{σμ}\,65^0\,37'} = \frac{700}{0{,}41284} = 1695{,}57$$

Διὰ δὲ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἔχομεν

$$\text{λογ}\,\gamma = \text{λογ}\,\beta + \text{λογ ἐφ}\,\Gamma - 10 = \text{λογ}\,\beta - (10 - \text{λογ ἐφ}\,\Gamma)$$

$$\text{ἢ λογ}\,\gamma = \text{λογ}\,700 - \text{Α. Σ. λογ. ἐφ}\,65^0\,37'$$

$$\begin{array}{lrr} \text{καὶ} & \text{λογ}\,700 = & 2{,}84509804 \\ & -\ \text{Α. Σ. λογ. ἐφ}\,65^0\,37' = & -(-0{,}34364360) \\ \hline & \text{λογ}\,\gamma\ \ = & 3{,}18874164 \end{array}$$

ἑπομένως $\gamma = 1544{,}33$ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τοῦ μέτρου.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς α ἐφαρμόζομεν τοὺς λογαρίθμους εἰς τὸν τύπον

$$\alpha = \frac{\beta}{\text{σμ}\,\Gamma}$$

καὶ ἔχομεν

$$\text{λογ}\,\alpha = \text{λογ}\,\beta - \text{λογ. σμ}\,\Gamma + 10 = \text{λογ}\,\beta + \text{Α. Σ. λογ σμ}\,\Gamma$$

$$\text{ἢ λογ}\,\alpha = \text{λογ}\,700 + \text{Α. Σ. λογ σμ}\,65^0\,37'$$

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}\,700 = & 2{,}84509804 \\ \text{Α. Σ. λογ σμ}\,65^0\,37' = & 0{,}38421880 \\ \hline \text{λογ}\,\alpha = & 3{,}22931654 \end{array}$$

$$\text{καὶ}\qquad \alpha = 1695{,}57$$

81. Μεταβαίνοντες ἤδη εἰς ἐξέτασιν μιᾶς ἑκάστης τῶν τεσσάρων περὶ πλαγιογωνίων τριγώνων ἐξετασθεισῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων, θέλομεν περιορισθῆ μόνον εἰς τὰ καθέκαστα τῶν ἐκτελουμένων ὑπολογισμῶν πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ἀφίνοντες τὸν μαθητὴν νὰ παραβάλῃ ταῦτα πρὸς τοὺς τύπους καὶ νὰ ζητῇ τοὺς λόγους τῶν ἐκτελουμένων πράξεων διά τε τῶν πραγματικῶν καὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

Περίπτωσις 1η. Ἔστω $\gamma = 800$ μέτρα, $A = 35^0\ 28'$ καὶ $B = 72^0\ 43'$. Θέλομεν ἔχει διὰ τῶν πραγματικῶν πινάκων γωνία $\Gamma = 180^0 - (A + B) = 180^0 - 108^0\ 11' = 71^0\ 49'$

$$\alpha = \frac{800 \times \dot{\eta}\mu\, 35^0\ 28'}{\dot{\eta}\mu\, 71^0\ 49'} = \frac{800 \times 0{,}58023}{0{,}95006} = 488{,}58$$

$$\beta = \frac{800\ \dot{\eta}\mu\, 72^0\ 43'}{\dot{\eta}\mu\, 71^0\ 49'} = \frac{800 \times 0{,}95485}{0{,}95006} = 804{,}03$$

Διὰ δὲ τῶν λογαριθμηκῶν πινάκων Καλλέτου θέλομεν ἔχει

$$\lambda o\gamma\, \alpha = \lambda o\gamma\, \gamma + \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, A - \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, \Gamma$$
$$= \lambda o\gamma\, 700 + \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 35^0\ 28' + \text{Α.Σ. } \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 71^0\ 49' - 10$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 800 &= 2{,}90308999 \\ \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 35^0\ 28' &= 9{,}76359960 \\ \text{Α. Σ. } \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 71^0\ 49' &= 0{,}02224770 \\ \hline \lambda o\gamma\, \alpha &= 2{,}68893729 \\ \alpha &= 488{,}58 \text{ κατὰ προσέγγ. } 0{,}01, \end{aligned}$$

καὶ

$$\lambda o\gamma\, \beta = \lambda o\gamma\, \gamma + \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, B - \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, \Gamma$$
$$= \lambda o\gamma\, 800 + \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 72^0\ 43' - \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 71^0\ 49'$$
$$= \lambda o\gamma\, 800 + \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 72^0\ 43' + \text{Α.Σ. } \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 71^0\ 49' - 10$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 800 &= 2{,}90308999 \\ \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 72^0\ 43' &= 9{,}97993390 \\ \text{Α.Σ. } \lambda o\gamma\, \dot{\eta}\mu\, 71^0\ 49' &= 0{,}02224770 \\ \hline \lambda o\gamma\, \beta &= 2{,}90527159 \end{aligned}$$

καὶ $\beta = 804{,}03$ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τοῦ μέτρου.

Περίπτωσις 2α. Ἔστω $\alpha = 1000$ μέτρα, $\beta = 900$ μέτρα καὶ $\Gamma = 42^0\ 38'$.

Ἐπειδὴ $A + B = 180^0 - 42^0\ 38' = 137^0\ 22'$ ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\dot{\varepsilon}\varphi \frac{1}{2}(A + B)}{\dot{\varepsilon}\varphi \frac{1}{2}(A - B)}$$

πορίζόμεθα

$$\frac{1900}{100}=\frac{\text{ἐφ}\frac{1}{2}(137^0\ 22')}{\text{ἐφ}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\text{ἐφ}\,68^0\ 41'}{\text{ἐφ}\frac{1}{2}(A-B)},$$

ἤτοι $\text{ἐφ}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{ἐφ}\,68^0\ 41'}{19}=\frac{2,56266}{19}=0,13487,$

ἑπομένως γωνία $\frac{1}{2}(A-B)=7^0\ 40'\ 52'',$

καὶ $A=\frac{137^0\ 22'+7^0\ 40'\ 52''}{2}=72^0\ 16'\ 26''$

$$B=\frac{137^0\ 22'-7^0\ 40'\ 52''}{2}=64^0\ 50'\ 34'',$$

ἡ δὲ τρίτη πλευρὰ γ δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$\gamma=\frac{\alpha\ \text{ἡμ}\,\Gamma}{\text{ἡμ}\,A}=\frac{1000\times 0,67730}{0,95252}=711,06$$

Διὰ δὲ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων θέλομεν ἔχει

$\text{λογ.}\ \text{ἐφ}\frac{1}{2}(A-B)=\text{λογ}\,100+\text{λογ ἐφ}\,68^0\ 41'-\text{λογ}\,1900$

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}\,100= & 2,0000000\\ \text{λογ ἐφ}\,68^0\ 41'= & 10,4086918\\ \hline & 12,4086918\\ \text{λογ}\,1900= & 3,2787536\\ \hline \end{array}$$

$$\text{λογ ἐφ}\frac{1}{2}(A-B)=\ 9,1299382$$

ἑπομένως $\frac{1}{2}(A-B)=7^0\ 40'\ 52''$

καὶ $\text{λογ}\,\gamma=\text{λογ}\,1000+\text{λογ ἡμ}\,42^0\ 38'-\text{λογ ἡμ}\,72^0\ 16'\ 26''$

$$
\begin{aligned}
\lambda o\gamma\, 1000 &= 3{,}0000000\\
\lambda o\gamma\, \acute{\eta}\mu\, 42^0\ 38' &= 9{,}8307837\\
\hline
&\ \ 12{,}8300837\\
\lambda o\gamma\, \acute{\eta}\mu\, 72^0\ 16'\ 26'' &= 9{,}9798810\\
\hline
\lambda o\gamma\, \gamma &= 2{,}8509647
\end{aligned}
$$

ἑπομένως $\gamma = 711{,}06$

Περίπτωσις 3η. Ἔστω $\alpha = 1000$ μέτρα, $\beta = 800$ καὶ γωνία $A = 52^0\ 24'$

Ἔχομεν

$$\acute{\eta}\mu\, B = \frac{\beta\ \acute{\eta}\mu\, A}{2} = \frac{800\ \acute{\eta}\mu\, 52^0\ 24'}{1000} = 0{,}63383,$$

ἑπομένως $B = 39^0\ 20'$ καὶ $\Gamma = 180^0 - 52^0\ 24' - 39^0\ 20' = 88^0\ 16'$. Καὶ

$$\gamma = \frac{\alpha\ \acute{\eta}\mu\, \Gamma}{\acute{\eta}\mu\, A} = \frac{1000\ \acute{\eta}\mu\, 88^0\ 16'}{0{,}79229} = \frac{999{,}5424}{0{,}79229} = 1261{,}58.$$

Καὶ διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων

$$\lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu\, B = \lambda o\gamma\, \beta + \lambda o\gamma\, A - \lambda o\gamma\, \alpha$$

$$
\begin{aligned}
\lambda o\gamma\, 800 &= 2{,}90308999\\
\lambda o\gamma\, \acute{\eta}\mu\, 52^0\ 24' &= 9{,}89888400\\
\hline
&\ \ 12{,}80197399\\
\lambda o\gamma\, 1000 &= 3{,}00000000\\
\hline
\lambda o\gamma\, B &= 9{,}80197399
\end{aligned}
$$

καὶ $B = 39^0\ 20'$, ἑπομένως $\Gamma = 88^0\ 16'$, καὶ

$$\lambda o\gamma\, \gamma = \lambda o\gamma\, 1000 + \lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu\, 88^0\ 16 - \lambda o\gamma.\ \acute{\eta}\mu\, 52^0\ 24'$$

$$
\begin{aligned}
\lambda o\gamma\, 1000 &= 3{,}0000000\\
\lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu\, 88^0\ 16' &= 9{,}9998012\\
\hline
&\ \ 12{,}9998012\\
\lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu\, 52^0\ 24' &= 9{,}8988840\\
\hline
\lambda o\gamma\, \gamma &= 3{,}1009172
\end{aligned}
$$

καὶ $\gamma = 1261{,}58.$

Περίπτωσις 4η. Ἔστω $\alpha=1000$, $\beta=800$ καὶ $\gamma=700$.

Θέλομεν ἔχει

$$\sigma\mu\, A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{640000+490000-1000000}{1120000}$$

$$=\frac{130000}{1120000}=\frac{13}{112}=0{,}11607,\ \text{ἑπομένως } A=83^0\,20'\,16''.$$

$$\sigma\mu\, B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}=\frac{1000^2+700^2-800^2}{1400000}=$$

$$=\frac{850000}{1400000}=\frac{85}{140}=\frac{17}{28}=0{,}60714,$$

ἑπομένως $B=52^0\,37'$ καὶ $\Gamma=180^0-135^0\,57'\,16''=44^0\,2'\,44''$.

Διὰ δὲ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[\lambda o\gamma(\sigma-\beta)+\lambda o\gamma(\sigma-\gamma)-\lambda o\gamma\,\beta-\lambda o\gamma\,\gamma]+10$$

$$\sigma=\frac{2500}{2}=1250,\quad \sigma-\beta=450,\quad \sigma-\gamma=550.$$

$$\begin{array}{ll} \lambda o\gamma\,450=2{,}65321251 & \lambda o\gamma\,800=2{,}90308999 \\ \lambda o\gamma\,550=2{,}74036269 & \lambda o\gamma\,700=2{,}84509804 \\ \hline \quad 5{,}39357520 & \quad 5{,}74818803 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\,5{,}39357520 \\ -\,5{,}74818803 \\ \hline -\,0{,}35461283 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}[\quad]+10=10-0{,}17730641=9{,}82269359,$$

ἔχομεν λοιπὸν

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\frac{A}{2}=9{,}82269359$$

ἑπομένως $\frac{A}{2}=41^0\,40'\,8''$ καὶ $A=83^0\,20'\,16''$

Προσεθέσαμεν 10 μονάδας εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀρνητικοῦ λογαρίθμου $\frac{1}{2}$ (— 0,35461283), διότι προέκειτο νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου κατὰ τοὺς πίνακας τοῦ Καλλέτου (§ 64).

$$\text{λογ ἡμ}\frac{B}{2}=\frac{1}{2}[\text{λογ}(\sigma-\alpha)+\text{λογ}(\sigma-\gamma)-\text{λογ}\,\alpha-\text{λογ}\,\gamma]+10$$

$$=\frac{1}{2}[\text{λογ}\,250+\text{λογ}\,550-\text{λογ}\,1000-\text{λογ}\,700]+10$$

$$\begin{array}{ll} \text{λογ}\,250=2{,}39794001 & \text{λογ}\,1000=3{,}00000000 \\ \text{λογ}\,550=\underline{2{,}74036269} & \text{λογ}\;\;700=\underline{2{,}84509804} \\ \qquad\quad 5{,}13830270 & \qquad\qquad 5{,}84509804 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\;5{,}13830270 \\ -\;\underline{5{,}84509804} \\ -\;0{,}70679434 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}[\quad]+10=10-0{,}35339767=9{,}6466023,$$

$$\text{λογ. ἡμ}\frac{B}{2}=9{,}6466023$$

ἑπομένως $\frac{B}{2}=26^0\ 18'\ 30''$ καὶ $B=52^0\ 37'$.

Ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω ἐπί τινων προβλημάτων.

82. Μετὰ τὰς ἀνωτέρω ἐφ' ἑκάστης τῶν διαφόρων δυνατῶν περιπτώσεων γενομένας ἐφαρμογάς, θέλομεν περιορισθῆ ἐνταῦθα εἰς τὸ νὰ ἐκθέσωμεν ἁπλῶς τὰ καθέκαστα τοῦ τρόπου, δι' οὗ λύεται ἕκαστον τῶν ἐκτεθησομένων προβλημάτων.

83. **Πρόβλημα 1ον.** *Νὰ εὕρωμεν τὴν μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Π ἀπόστασιν, τοῦ ἑνὸς τούτων, τοῦ Α π. χ., ὄντος μόνον προσιτοῦ.*

Μετροῦμεν βάσιν τινὰ ΑΒ κατ'ἀρέσκειαν λαμβανομένην (σχ. 10), ἀλλὰ καὶ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΠ γωνίαν ἀρκούντως μεγάλην, πρὸς δὲ νὰ ἦναι ἴση τοὐλάχιστον μὲ τὸ τρίτον περίπου τῆς ζητουμένης ἀποστάσεως, ἂν τοῦτο ἐννοεῖται οἴκοθεν ἦναι δυνατὸν, ἵνα ἔχωμεν ἐξαγόμενα ὅσον ἔνεστι ἀκριβέστερα. Τούτου γενομένου, μετροῦμεν τὰς γωνίας ΠΑΒ καὶ ΑΒΠ διὰ τοῦ γωνιομέτρου, καὶ οὕτως θέλομεν ἔχει εἰς τὸ τρίγωνον ΠΑΒ γνωστὰ τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας, ἑπομένως εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν ζητουμένην πλευρὰν ΑΠ (§ 81).

Σχ. 10

Πρόβλημα 2ον. *Δεδομένων τῶν ἀποστάσεων ἀγνώστου τινὸς σημείου Γ ἀπὸ δύο γνωστῶν καὶ δεδομένων Α καὶ Β, νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀγνώστου τούτου σημείου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.*

Ἔστω Γ ἡ ἄγνωστος θέσις τοῦ σημείου Γ (σχ. 11). Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μᾶς δίδονται αἱ δύο ἀποστάσεις ΓΑ καὶ ΓΒ, καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα ἀπ'εὐθείας νὰ μετρήσωμεν τὴν τρίτην ΑΒ, διότι τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι γνωστὰ καὶ δεδομένα, θέλομεν ἔχει γνωστὰς καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευράς, ἑπομένως κατὰ τὰ προεκτεθέντα (§ 81) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν αὐτοῦ Α. Τούτου δὲ γενομένου προσδιορίζομεν διὰ καταλλήλου ὀργάνου τὴν διεύθυνσιν τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ λαμβάνοντες ἐπ'αὐτῆς τὴν ἀπόστασιν ΑΓ ἴσην τῇ διδομένῃ, ἔχομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν ζητουμένην θέσιν τοῦ ἀγνώστου σημείου Γ.

Σχ. 11

Ἂν αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Γ ἦσαν λίαν μεγάλαι, τότε ἠθέλομεν εὕρει τὰς γωνίας Α καὶ Β καὶ σχηματίσει εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τὰς ὀπτικὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΑΒΓ διὰ τοῦ καταλλήλου ὀργάνου, τὸ δὲ σημεῖον Γ, ἐν ᾧ συμπίπτουσιν αἱ διευθύνσεις τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων ΑΓ καὶ ΒΓ, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

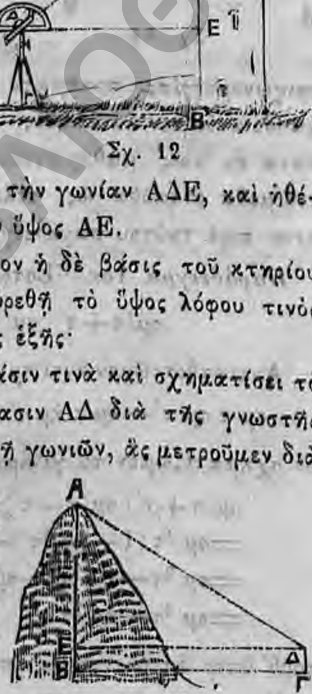
Πρόβλημα 3ον. *Νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος προσιτοῦ κτηρίου.*

῞Ας ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ ἔδαφος εἶναι ἐπίπεδον. Λαμβάνομεν τότε σημεῖόν τι Γ (σχ. 12), ὅπερ νὰ κῆται κατὰ προσέγγισιν εἰς τὸ τρίτον περίπου τοῦ ζητουμένου ὕψους ΑΒ, καὶ μετροῦμεν πρῶτον τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ΓΒ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ κτηρίου καὶ ἔπειτα διὰ τοῦ γωνιομέτρου τὴν γωνίαν ΑΔΕ, ἣν σχηματίζει ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ΓΑ μετὰ τῆς ΔΕ παραλλήλου τῇ ΓΒ, ἥτις καὶ ὑποτίθεται ὁριζόντιος. Τότε ἠθέλομεν ἔχει γνωστὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΕ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΔΕ καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΕ, καὶ ἠθέλομεν ορισθῇ ἀμέσως τὸ ζητούμενον ὕψος ΑΕ.

Σχ. 12

῎Αν τὸ μὲν ἔδαφος δὲν ἦτο ἐπίπεδον ἡ δὲ βάσις τοῦ κτηρίου ἀπρόσιτος, ἂν ἐπρόκειτο π. χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος λόφου τινὸς (σχ. 13), τότε ἠθέλομεν ἐργασθῇ ὡς ἑξῆς·

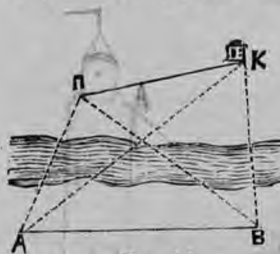
᾿Ηθέλομεν λάβει κατ᾽ ἀρέσκειαν βάσιν τινὰ καὶ σχηματίσει τὸ τρίγωνον, ὅπερ μᾶς δίδει τὴν ἀπόστασιν ΑΔ διὰ τῆς γνωστῆς βάσεως καὶ τῶν δύο προκειμένων αὐτῇ γωνιῶν, ἃς μετροῦμεν διὰ τοῦ γωνιομέτρου, τῆς ἀποστάσεως δὲ ΑΔ γενομένης γνωστῆς, μετροῦμεν διὰ τοῦ γωνιομέτρου τὴν γωνίαν ΑΔΕ, ἣν σχηματίζει ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ΔΑ μετὰ τῆς ΔΕ διευθυνομένης ὁριζοντίως, οὕτω δὲ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΑΕ θὰ εἴχομεν γνωστὰ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ ΔΑ καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΕ, καὶ δυνάμεθα ἀμέσως νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΕ, τὴν τὸ ὕψος τοῦ λόφου παριστῶσαν.



Σχ. 13

Πρόβλημα 4ον. *Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασιν δύο ἀπροσίτων σημείων Π καὶ Κ.*

Λαμβάνομεν πρὸς τοῦτο βάσιν τινὰ ΑΒ (σχ. 14) καὶ σχηματίζομεν τὰ τρίγωνα ΑΒΠ, ΑΒΚ, δι' ὧν εὑρίσκομεν ὡς προείπομεν τὰς ἀποστάσεις ΑΠ καὶ ΑΚ, εὑρισκόμενοι δὲ εἰς τὸ σημεῖον Α μετροῦμεν διὰ τοῦ γωνιομέτρου τὴν γωνίαν ΠΑΚ, καὶ τότε θέλομεν ἔχει γνωστὰ εἰς τὸ τρίγωνον ΠΑΚ τὰς δύο αὐτοῦ πλευρὰς καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν, καὶ δι' αὐτῶν εὑρίσκομεν καὶ τὴν ζητουμένην ΠΚ (§ 81).



Σχ. 14

84. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν πρηγουμένως ἐν τῷ παρόντι ἐλαχίστῳ περὶ τριγωνομετρίας πονήματι ἀποδειχθέντων τύπων δυνάμεθα νὰ ἀποδεικνύωμεν τὸ ἀληθές, ἢ νὰ ἐπαληθεύωμεν, ἑτέρους συχνότατα ἐν τοῖς μαθηματικοῖς συγγράμμασι ἀπαντῶντας. Προτιθέμεθα ἐνταῦθα ὡς τελευταίαν ἄσκησιν νὰ λάβωμεν μερικά τινα περὶ τούτου παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω πρὸς ἐπαλήθευσιν ἡ σχέσις

$$\sigma\mu(\tau+\tau')\ \sigma\mu(\tau-\tau')=\sigma\mu^2\tau-\eta\mu^2\tau'$$

Ἀντικαθιστῶμεν ἀντὶ σμ(τ+τ') καὶ σμ(τ—τ') τὰς τιμὰς αὐτῶν

$$\sigma\mu\,\tau\ \sigma\mu\,\tau'-\eta\mu\,\tau\ \eta\mu\,\tau' \quad \text{καὶ} \quad \sigma\mu\,\tau\ \sigma\mu\,\tau'+\eta\mu\,\tau\ \eta\mu\,\tau'$$

ὧν σχηματίζωμεν τὸ γινόμενον καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$\begin{aligned}\sigma\mu(\tau+\tau')\ \sigma\mu(\tau-\tau')&=\sigma\mu^2\tau\ \sigma\mu^2\tau'-\eta\mu^2\tau\ \eta\mu^2\tau',\\ &=\sigma\mu^2\tau\,(1-\eta\mu^2\tau')-\eta\mu^2\tau'(1-\sigma\mu^2\tau)\\ &=\sigma\mu^2\tau-\eta\mu^2\tau'-\sigma\mu^2\tau\ \eta\mu^2\tau'+\sigma\mu^2\tau\ \eta\mu^2\tau'\\ &=\sigma\mu^2\tau-\eta\mu^2\tau'\end{aligned}$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἐπαληθευθῇ.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω πρὸς ἐπαλήθευσιν ἡ σχέσις

$$\varepsilon\varphi\,(45^0+\tau)=\frac{1+\varepsilon\varphi\,\tau}{1-\varepsilon\varphi\,\tau}$$

Κατὰ τὸν πρῶτον τύπον τῆς § 30 ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\,(45^0+\tau)=\frac{\varepsilon\varphi\,45^0+\varepsilon\varphi\,\tau}{1-\varepsilon\varphi\,45^0\,\varepsilon\varphi\,\tau}$$

καὶ ἐπειδὴ ἐφ $45^0 = 1$, ἔχομεν

$$\text{ἐφ}\,(45^0 + \tau) = \frac{1 + \text{ἐφ}\,\tau}{1 - \text{ἐφ}\,\tau}$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἐπαληθευθῇ.

Παράδειγμα 3ον. Ἔστω πρὸς ἐπαλήθευσιν ἡ σχέσις

$$\text{σμ}\,\tau = \frac{1}{1 + \text{ἐφ}\,\tau\;\text{ἐφ}\,\frac{\tau}{2}}$$

Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ ἐφ τ τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\text{ἡμ}\,\tau}{\text{σμ}\,\tau}$ καὶ ἀντὶ τοῦ τοῦ ἐφ $\frac{\tau}{2}$ τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\text{ἡμ}\,\tau}{1+\text{σμ}\,\tau}$ (§ 41) θέλομεν ἔχει

$$\text{σμ}\,\tau = \frac{1}{1 + \frac{\text{ἡμ}\,\tau}{\text{σμ}\,\tau} \times \frac{\text{ἡμ}\,\tau}{1+\text{σμ}\,\tau}} = \frac{\text{σμ}\,\tau\,(1 + \text{σμ}\,\tau)}{\text{σμ}\,\tau + \text{σμ}^2\,\tau + \text{ἡμ}^2\tau}$$

$$= \frac{\text{σμ}\,\tau(1+\text{σμ}\,\tau)}{\text{σμ}\,\tau + 1} = \text{σμ}\,\tau$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἐπαληθευθῇ.

Παράδειγμα 4ον. Ἔστω πρὸς ἐπαλήθευσιν ἡ σχέσις

$$\text{τμ}\,\tau + \text{τμ}\,\tau' = \frac{2\,\text{σμ}\,\frac{\tau+\tau'}{2}\;\text{σμ}\,\frac{\tau-\tau'}{2}}{\text{σμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'}$$

Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τμ τ καὶ τμ τ′ τὰ ἴσα αὐτοῖς $\frac{1}{\text{σμ}\tau}$ καὶ $\frac{1}{\text{σμ}\,\tau'}$ θέλομεν ἔχει

$$\frac{1}{\text{σμ}\tau} + \frac{1}{\text{σμ}\tau'} = \frac{\text{σμ}\tau' + \text{σμ}\tau}{\text{σμ}\,\tau\;\text{σμ}\,\tau'}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν 3ον τύπον τῆς § 42

$$\text{σμ}\tau + \text{σμ}\tau' = 2\,\text{σμ}\,\frac{\tau+\tau'}{2}\;\text{σμ}\,\frac{\tau-\tau'}{2}$$

Ἄρα

$$\text{τμ}\,\tau + \text{τμ}\,\tau' = \frac{2\text{σμ}\,\frac{\tau+\tau'}{2}\,\text{σμ}\,\frac{\tau-\tau'}{2}}{\text{σμ}\,\tau\,\text{σμ}\,\tau'}$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἐπαληθευθῇ.

Παράδειγμα 5ον. Ἔστω πρὸς ἐπαλήθευσιν ἡ σχέσις

$$\text{ἡμ}\,\tau + \text{σμ}\,\tau' = 2\,\text{ἡμ}\left(45^0 + \frac{\tau-\tau'}{2}\right)\text{σμ}\left(\frac{\tau+\tau'}{2} - 45^0\right)$$

Ἀντὶ τοῦ σμ τ' δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ ἡμ$(90^0-\tau')$, καὶ τότε ἔχομεν κατὰ τὸν 1ον τύπον τῆς § 42

$$\text{ἡμ}\,\tau + \text{ἡμ}(90^0-\tau') = 2\,\text{ἡμ}\,\frac{\tau+90^0-\tau'}{2}\,\text{σμ}\,\frac{\tau-90^0+\tau'}{2}$$

$$= 2\,\text{ἡμ}\left(45^0 + \frac{\tau-\tau'}{2}\right)\text{σμ}\left(\frac{\tau+\tau'}{2} - 45^0\right)$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἐπαληθευθῇ.

Παράδειγμα 6ον. Ἔστω πρὸς ἐπαλήθευσιν ἡ σχέσις

$$\text{ἐφ}\,\tau + \text{ἐφ}\,\tau' + \text{ἐφ}\,\tau'' = \text{ἐφ}\,\tau\,\text{ἐφ}\,\tau'\,\text{ἐφ}\,\tau'',$$

τοῦ ἀθροίσματος $\tau+\tau'+\tau''$ ὑποτιθεμένου ἴσου μὲ 180 μοίρας.

Ἐκ τῆς δεδομένης σχέσεως

$$\tau + \tau' + \tau'' = 180^0$$

πορίζόμεθα διαδοχικῶς

$$\tau + \tau' = 180^0 - \tau'',$$

$$\text{ἐφ}(\tau+\tau') = \text{ἐφ}(180^0 - \tau'') = -\,\text{ἐφ}\,\tau'',$$

$$\frac{\text{ἐφ}\,\tau + \text{ἐφ}\,\tau'}{1-\text{ἐφ}\,\tau\,\text{ἐφ}\,\tau'} = -\,\text{ἐφ}\,\tau'',$$

ἐξ ἧς

$$\text{ἐφ}\,\tau + \text{ἐφ}\,\tau' = -\,\text{ἐφ}\,\tau'' + \text{ἐφ}\,\tau\,\text{ἐφ}\,\tau'\,\text{ἐφ}\,\tau''$$

ἢ $$\text{ἐφ}\,\tau + \text{ἐφ}\,\tau' + \text{ἐφ}\,\tau'' = \text{ἐφ}\,\tau\,\text{ἐφ}\,\tau'\,\text{ἐφ}\,\tau''$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἐπαληθευθῇ καὶ ὅπερ ἀποδεικνύει ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατ' ἀπείρους τρόπους τρεῖς ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Σχέσεις τινὲς πρὸς ἐπαλήθευσιν.

85. Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἀληθὲς ἑκάστης τῶν ἑξῆς σχέσεων

1ον $$\text{ἡμ}(\tau+\tau)\ \text{ἡμ}(\tau-\tau')=\text{ἡμ}^2\tau-\text{ἡμ}^2\tau'$$

2ον $$\text{τμ}\,\tau-\text{τμ}\,\tau'=\frac{2\,\text{ἡμ}\dfrac{\tau+\tau'}{2}\ \text{ἡμ}\dfrac{\tau-\tau'}{2}}{\text{σμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau'}$$

3ον $$\text{σμ}\,\tau=\frac{1-\text{ἐφ}^2\dfrac{\tau}{2}}{1+\text{ἐφ}^2\dfrac{\tau}{2}}$$

4ον $$\text{σμ}^2\tau+\text{σμ}^2\tau'+\text{σμ}^2\tau''+2\text{σμ}\,\tau\ \text{σμ}\,\tau'\ \text{σμ}\,\tau''=1$$

5ον $$\text{ἡμ}\,\tau+\text{ἡμ}\,\tau'+\text{ἡμ}\,\tau''=4\text{σμ}\frac{\tau}{2}\ \text{σμ}\frac{\tau'}{2}\ \text{σμ}\frac{\tau''}{2}$$

τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων τ, τ', τ'' ὑποτιθεμένου ἴσου μὲ 180^0 ἐν ταῖς δύο τελευταίαις σχέσεσι.

Παρόραμα.

Ἐν τῇ σελίδι 14 ἐν τῷ δευτέρῳ στίχῳ κάτωθεν ἀντὶ τῆς μονάδος γραπτέον τὸ γινόμενον

$$\text{ἐφ}\,\tau\ \text{ἐφ}\,\tau'\ \text{ἐφ}\,\tau''.$$

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

Φυσικῆς Στοιχειώδεις Γνώσεις πρὸς χρῆσιν Δημοτικῶν Σχολείων Ἀῤῥένων καὶ Θηλέων, κατ' ἔγκρισιν τοῦ ὑπουργείου τῆς Παιδείας, ἔκδοσις δευτέρα......	0,60
Συλλογὴ Ἀριθμητικῶν Προβλημάτων πρὸς χρῆσιν τῶν ἐν τοῖς Ἑλληνικοῖς Σχολείοις μαθητευόντων, ἔκδοσις τρίτη, ἐπεξεργασθεῖσα..................	1,00
Στοιχειώδης Γεωμετρία πρὸς χρῆσιν τῶν ἐν τοῖς Ἑλληνικοῖς Σχολείοις μαθητευόντων, κατ' ἔγκρισιν τοῦ ὑπουργείου τῆς Παιδείας, ἔκδοσις ἕκτη.........	2,50
Στοιχεῖα Ἀριθμητικῆς πρὸς χρῆσιν τῶν ἐν τοῖς Γυμνασίοις μαθητευόντων, ἔκδοσις τετάρτη ἐπεξειργασμένη................................	5,00
Στοιχειώδης Ἀριθμητικὴ πρὸς χρῆσιν Ἑλληνικῶν Σχολείων, ἐγκεκριμένη, ἔκδοσις τετάρτη ἐπεξεργασθεῖσα	3,00
Στοιχεῖα Γεωμετρίας Λεγένδρου μετὰ τροποποιήσεων καὶ προσθηκῶν πρὸς χρῆσιν Γυμνασίων, ἔκδοσις τετάρτη................................	4,00
Μαθήματα Φυσικῆς Πειραματικῆς πρὸς χρῆσιν Ἑλληνικῶν Σχολείων καὶ Παρθεναγωγείων, κατ' ἔγκρισιν τοῦ ὑπουργείου τῆς Παιδείας, ἔκδοσις τετάρτη, ἐπεξειργασμένη................................	4,00
Στοιχειώδης Φυσικὴ Πειραματικὴ πρὸς χρῆσιν τῶν ἐν τοῖς Γυμνασίοις μαθητευόντων, ἔκδοσις δευτέρα..	9,00
Στοιχειώδης Ἄλγεβρα πρὸς χρῆσιν τῶν ἐν τοῖς Γυμνασίοις μαθητευόντων, ἔκδοσις δευτέρα, ἐπεξειργασμένη................................	5,00
Ἀλγεβρικαὶ Ἀσκήσεις πρὸς χρῆσιν τῶν ἐν τοῖς Γυμνασίοις μαθητευόντων..........................	3,25
Λογαριθμικοὶ Πίνακες Καλλέτου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 1 μέχρι τοῦ 50700, ἔκδοσις στερεότυπος.........	2,00
Στοιχεῖα Φυσικῆς Πειραματικῆς................	15,00

Στοιχεῖα Φυσικῆς Πειραματικῆς

Τιμᾶται δραχ. 1,50

Τιμᾶται δραχμὰς

Ἐν Ἀθήναις, ἐκ τῶν Καταστημάτων ΣΠ. ΚΟΥΣΟΥΛΙΝΟΥ

Ἐν Ἀθήναις ἐκ τῶν Καταστημάτ.