ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΤΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ Γ΄

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΗ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΤΗ

Ειδικότητες Μηχανοτεχνίτη καὶ Ἠλεκτροτεχνίτη

1.— *Μαθηματικὰ* τόμοι Α΄, Β΄, Γ΄.

2.— *Μηχανουργικὴ Τεχνολογία* τόμοι Α΄, Β΄, Γ΄.

3.— *Κινητήριες Μηχανὲς* τόμοι Α΄, Β΄.

4.— *Τεχνικὸ Σχέδιο* τόμοι Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄.

Τετράδια Ἀσκήσεων Σχεδίου Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄.

5.— *Χημεία.*

6.— *Ἠλεκτροτεχνία* τόμοι Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄.

7.— *Φυσική.*

8.— *Στοιχεῖα Μηχανῶν.*

9.— *Μηχανική.*

10.— *Ὑλικά.*

11.— *Μηχανολογικὸ Μνημόνιο.*

12.— *Ἠλεκτρολογικὸ Μνημόνιο.*

13.— *Πρόληψη Ἀτυχημάτων.*

14.— *Ἠλεκτροτεχνία Μηχανοτεχνίτη.*

15.— *Ἠλεκτρικὸ Σύστημα τοῦ Αὐτοκινήτου.*

16.— *Αὐτοκίνητο.*

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

'Ο Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἱδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «'Ιδρύματος Εὐγενίδου» προεῖδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισε τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν, ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἠθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν 'Ιδρύματος, ποὺ θὰ εἶχε σκοπὸν νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς 'Ελλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. 'Απὸ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιούμενοι οἱ σκοποὶ ποὺ ὡραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

* * *

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ Ἵδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων τόσον διὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσον καὶ πρακτικούς. 'Εκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Τὸ ὅλον ἔργον ἤρχισε μὲ τὴν ὑποστήριξιν τοῦ 'Υπουργείου Βιομηχανίας, τότε ἁρμοδίου διὰ τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν, καὶ συνεχίζεται ἤδη μὲ τὴν ἔγκρισιν καὶ τὴν συνεργασίαν τοῦ 'Υπουργείου 'Εθνικῆς Παιδείας, βάσει τοῦ Νομοθετικοῦ Διατάγματος 3970/1959.

Αἱ ἐκδόσεις τοῦ 'Ιδρύματος διαιροῦνται εἰς τὰς ἀκολούθους βασικὰς σειράς, αἱ ὁποῖαι φέρουν τοὺς τίτλους:

«Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνίτη», «Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ», «Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ βοηθοῦ Χημικοῦ», «Τεχνικὴ Βιβλιοθήκη».

'Εξ αὐτῶν ἡ πρώτη περιλαμβάνει τὰ βιβλία τῶν Σχολῶν Τεχνιτῶν,

ἡ δευτέρα τὰ βιβλία τῶν Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν, ἡ τρίτη τῶν Σχολῶν Τεχνικῶν βοηθῶν Χημικῶν, ἡ τετάρτη τὰ βιβλία τὰ προοριζόμενα διὰ τὰς ἀνωτέρας Τεχνικὰς Σχολὰς (ΚΑΤΕ, ΣΕΛΕΤΕ, Σχολαὶ Ὑπομηχανικῶν). Παραλλήλως, ἀπὸ τοῦ 1966 τὸ Ἵδρυμα ἀνέλαβε καὶ τὴν ἔκδοσιν βιβλίων διὰ τὰς Δημοσίας Σχολὰς Ε.Ν.

Αἱ σειραὶ αὗται θὰ ἐμπλουτισθοῦν καὶ μὲ βιβλία εὐρυτέρου τεχνικοῦ ἐνδιαφέροντος χρήσιμα κατὰ τὴν ἄσκησιν τοῦ ἐπαγγέλματος.

* * *

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος καταβάλλουν κάθε προσπάθειαν, ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῆ εἰς ἁπλῆν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως δι' ἣν προορίζεται ἑκάστη σειρὰ τῶν βιβλίων. Ἡ τιμή των ὡρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς ἀπόρους μαθητάς.

Οὕτω προσφέρονται εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν τῶν καθηγητῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῆς τεχνικῆς μας παιδείας αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος, τῶν ὁποίων ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ σκοποῦ τοῦ Εὐγενίου Εὐγενίδου ἐλπίζεται νὰ εἶναι μεγάλη.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α   Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΤΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΚΡΙΤΙΚΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΠΟ ΤΟ ΓΑΛΛΙΚΟ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ
ΤΟΥ κ. R. CLUZEL, ΜΕ ΑΔΕΙΑ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΑΘΗΝΑ
1980

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ τρίτος καὶ τελευταῖος αὐτὸς τόμος τοῦ διδακτικοῦ συγγράμματος «Μαθηματικὰ γιὰ τὸν τεχνίτη» εἶναι μιὰ ἐλεύθερη προσαρμογὴ στὰ Ἑλληνικὰ τοῦ γαλλικοῦ βιβλίου «Les Mathématiques en 3^{e} Année d'Apprentissage», Les Éditions Foucher, Paris, 1956, ποὺ ἔγραψε ὁ καθηγητὴς κ. René Cluzel γιὰ τὴν Γ' τάξη τῶν Σχολῶν Μαθητείας τῆς Γαλλίας.

Ὁ τόμος ἀπαρτίζεται ἀπὸ δύο Μέρη ποὺ μποροῦν νὰ διδαχθοῦν εἴτε τὸ ἕνα μετὰ τὸ ἄλλο εἴτε παράλληλα. Τὸ πρῶτο Μέρος εἶναι διηρημένο σὲ 15 διδακτικὲς ἑνότητες, σὲ 15 Μαθήματα, καὶ πραγματεύεται Ἀριθμητικὴ καὶ Ἄλγεβρα. Στὰ 9 πρῶτα Μαθήματα δὲν εἰσάγονται οὐσιαστικὰ καμιὰ νέα ἀριθμητικὴ ἢ ἀλγεβρικὴ ἔννοια καὶ μέθοδος, ἁπλῶς ἐφαρμόζονται αὐτὰ ποὺ ἔχουν ἐκτεθῆ στοὺς δύο πρώτους τόμους σὲ θέματα Ἐμπορικῆς Ἀριθμητικῆς καὶ σὲ ὑπολογισμοὺς χρήσιμους στὸ Ἐργαστήριο. Ἔτσι ὁ μαθητὴς ἀσκεῖται ξανὰ στὴν ἐκτέλεση ἀριθμητικῶν πράξεων πάνω σὲ ἀκέραιους ἢ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ πάνω σὲ κλάσματα, ἐνῶ σύγχρονα διδάσκεται ὅ,τι ἕνας ἐπαγγελματίας μηχανοτεχνίτης ἢ ἠλεκτροτεχνίτης εἶναι σκόπιμο νὰ ξέρῃ. Τὰ ὑπόλοιπα 6 Μαθήματα τοῦ $1^{\text{ου}}$ Μέρους εἰσάγουν καὶ πραγματεύονται τὶς ἔννοιες $1^{\text{ο}}$ τῆς συνάρτησης μιᾶς μεταβλητῆς, $2^{\text{ο}}$ τῆς γραφικῆς της παράστασης σ' ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, $3^{\text{ο}}$ τοῦ συστήματος 2 ἢ 3 πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων μὲ ἰσάριθμους ἀγνώστους καὶ $4^{\text{ο}}$ τοῦ διαγράμματος ποὺ παριστάνει γεωμετρικὰ μιὰν σχέση μεταξὺ τριῶν μεταβλητῶν. Ἐννοεῖται ὅτι ὅλα αὐτὰ ἀναπτύσσονται ὄχι κατὰ τρόπο ἀφηρημένο ἀλλὰ πάνω σὲ ἁπλὰ καὶ συγκεκριμένα προβλήματα ἐφαρμογῶν. Δυὸ Μαθήματα, τὸ $7^{\text{ο}}$ καὶ τὸ $15^{\text{ο}}$, καθὼς καὶ μερικοὶ παράγραφοι τῶν ἄλλων Μαθημάτων ἔχουν τυπωθῆ μὲ μικρότερα στοιχεῖα, γιὰ νὰ ὑποδειχθῆ ἔτσι ὅτι μποροῦν νὰ παραλειφθοῦν κατὰ τὴ διδασκαλία χωρὶς νὰ βλαφθῆ ἡ ἀλληλουχία της.

Τὸ δεύτερο Μέρος τοῦ βιβλίου εἶναι διηρημένο σὲ 25 Μαθήματα καὶ πραγματεύεται θέματα Ἐπιπεδομετρίας, Τριγωνομετρίας καὶ Στερεομετρίας. Μερικὰ ἀπὸ τὰ γεωμετρικὰ θέματα εἶναι βέβαια ἤδη γνωστὰ στοὺς μαθητὲς ἀπὸ τοὺς δυὸ προηγούμενους τόμους, ἡ ἐπανάληψη αὐτὴ γίνεται ὅμως ἀπὸ μιὰ κάπως ἐπιστημονικότερη μαθηματικὴ σκοπιὰ καὶ συντελεῖ, σύμφωνα μὲ τὸ γνωστὸ λατινικὸ ρητό: *repetitio mater studiorum,* στὸ νὰ κατανοηθοῦν ἀπὸ τὸ μαθητὴ καλύτερα οἱ σχετικὲς ἔννοιες καὶ οἱ ἰδιότητές τους. Νέα θέματα εἶναι ἐκεῖνα ποὺ ἀναφέρονται στὰ ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα καὶ στὰ Στοιχεῖα τῆς Τριγωνομετρίας· τὰ τελευταῖα αὐτὰ παρουσιάζονται πολὺ φυσικά, σὰν μιὰ ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὅμοιων τριγώνων. Ἀπὸ τὴ Στερεομετρία ἀναπτύσσονται ξανά, μὲ τρόπο συστηματικότερο, ὅσα ἤδη ξέρει ὁ μαθητὴς ἀπὸ τὸν $1^{\text{ο}}$ τόμο, συμπληρώνονται δὲ αὐτὰ μὲ ὅ,τι ἀκόμα χρειάζεται ἡ μαθηματικὴ ἐκπαίδευση ἑνὸς τεχνίτη. Καὶ σ' αὐτὸ τὸ Μέρος τοῦ βιβλίου μερικὰ τμήματα τοῦ κειμένου τυπώθηκαν μὲ μικρότερα στοιχεῖα· ὁ διδάσκων μπορεῖ νὰ τὰ παραλείψη, ἂν δὲν διαθέτη τὸν ἀπαιτούμενο χρόνο γιὰ τὴ διδασκαλία τους ἢ ἂν διαπιστώνη πὼς ξεπερνοῦν τὶς δυνάμεις τῶν μαθητῶν του. Πάντως ἔχω τὴ γνώμη ὅτι ἡ τελευταία αὐτὴ περίπτωση δὲν θὰ παρουσιασθῆ, ἂν ὁ διδάσκων θέση γιὰ σκοπὸ τῆς διδασκαλίας του ὄχι νὰ ἐκμάθη ὁ μαθητὴς τὸ περιεχόμενο τοῦ βιβλίου ἀλλὰ μόνο νὰ τὸ κατανοῆ σωστὰ καὶ νὰ ἀποκτήση τὴν ἱκανότητα νὰ τὸ ἐφαρμόζη στὰ ζητήματα ποὺ τοῦ δίνονται, χρησιμοποιώντας ἐλεύθερα τὸ κείμενο.

Θὰ ἤθελα τώρα νὰ εἰπῶ καὶ ἀπὸ τὸ δημόσιο αὐτὸ βῆμα τὶς εὐχαριστίες μου πρὸς τὸν Γάλλο συγγραφέα κ. R. Cluzel, διότι μοῦ ἐπέτρεψε νὰ χρησιμοποιήσω τὴν πλούσια διδακτική του πείρα, τὴ συγκεντρωμένη στὸ ἐξαίρετο σύγγραμμά του, γιὰ νὰ προσφέρω στοὺς νεαροὺς Ἕλληνες τεχνίτες ἕνα εὔχρηστο καὶ ἀπαραίτητο γιὰ τὴν τεχνική τους μόρφωση βοήθημα. Εὐχαριστίες χρωστῶ καὶ στὸν κ. Μαρίνο Καλλικούρδη καθὼς καὶ σ' ἄλλα πρόσωπα ποὺ μ' ἐβοήθησαν κατὰ τὴ συγγραφὴ καὶ τὴν ἐκτύπωση τοῦ τόμου αὐτοῦ.

Θὰ τελειώσω μὲ τὴν ἔκφραση τῶν αἰσθημάτων μου εὐγνωμοσύνης πρὸς τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου γιὰ τὴν εὐκαιρία ποὺ μοῦ χορήγησε νὰ συμβάλω καὶ ἐγὼ κατά τι στὴν προαγωγὴ τῆς 1ης βαθμίδας τῆς τεχνικῆς μας ἐκπαίδευσης.

Ν. ΚΡΙΤΙΚΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

Ἀριθμητικὴ καὶ Ἄλγεβρα

Κεφάλαιο 1. Ἐφαρμογὲς τῶν βασικῶν πράξεων τῆς Ἀριθμητικῆς

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Μάθημα 1.

Ἐφαρμογὲς τῆς πρόσθεσης καὶ τῆς ἀφαίρεσης σὲ ζητήματα Λογιστικῆς.

Οἱ ἔμποροι, οἱ ἐπαγγελματίες καί, γενικά, οἱ ἐπιχειρηματίες εἶναι ὑποχρεωμένοι ἀπὸ τὸ νόμο νὰ κρατοῦν (τηροῦν) *λογιστικὰ βιβλία*. Οἱ λογαριασμοί, ποὺ πρέπει νὰ κάνουν γι' αὐτὸν τὸ σκοπό, δὲν εἶναι στὸ βάθος τίποτε ἄλλο παρὰ ἐφαρμογὲς τῆς Ἀριθμητικῆς. Σ' αὐτὸ καὶ στὸ ἑπόμενο μάθημα θὰ μιλήσουμε γιὰ λογιστικὰ βιβλία καὶ γιὰ τοὺς λογαριασμοὺς ποὺ καταγράφονται σ' αὐτά.

1. Βιβλίο ταμείου. Κατὰ τὴ διάρκεια μιᾶς ἡμέρας ἕνας ἐπιχειρηματίας:

1ο βάζει στὸ ταμεῖο του χρήματα ποὺ τοῦ πληρώνουν πελάτες του εἴτε ἄλλοι χρεῶστες του,

2ο παίρνει ἀπὸ τὸ ταμεῖο του χρήματα, γιὰ νὰ πληρώση ἐκείνους ποὺ τοῦ προμηθεύουν ὑλικὰ ἢ κάτι ἄλλο, ὅπως π.χ. τὴν ἐργασία τους.

Γιὰ νὰ μπορῇ λοιπὸν ὁ ἐπιχειρηματίας νὰ ξέρῃ σὲ κάθε στιγμὴ πόσα χρήματα ἔχει στὸ ταμεῖο του, χωρὶς νὰ τὰ μετρᾷ κάθε φορά, ἐγγράφει (σημειώνει) σ' ἕνα εἰδικὸ κατάστιχο, ποὺ

ΕΙΣΠΡΑΞΕΙΣ			ΠΛΗΡΩΜΕΣ		
Ἡμ/νίες	Πράξεις	Ποσὰ	Ἡμ/νίες	Πράξεις	Ποσὰ
15.10	Ταμεῖο (τὸ πρωί)	15 457	15.10	Στὸν Α.Β.	
—	Ἀπὸ τὸν Γ. Δ.			(τιμολόγιό του τῆς 11.10)	4 550
	(τιμολόγιό μου τῆς 20.9)	5 050	—	Στὸν Π.Τ.	
—	Ἀπὸ τὸν Κ.Μ.			(προπληρωμὴ ἐνοικίου γιὰ τὸ	
	(τιμολόγιό μου τῆς 5.10)	425		4ο τρίμηνο)	5 045
	Σύνολο εἰσπράξεων	20 932	—	Στὸν Ε.Ζ.	
	Μεταφορὰ τῶν πληρωμῶν	10 595		(Προκαταβολὴ ἀπὸ τὸ μισθὸ)	1 000
	Ὑπόλοιπο	10 337		Σύνολο πληρωμῶν	10 595

Σχ. 1-α. Μιὰ σελίδα ἀπὸ βιβλίο ταμείου.

τὸ λένε *βιβλίο ταμείου*, τὶς εἰσπράξεις καὶ τὶς πληρωμὲς ποὺ ἔγιναν. Συγκρίνοντας τὸ ἐξαγόμενο ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὶς ἐγγραφὲς σ' αὐτὸ τὸ βιβλίο, μὲ τὸ ποσὸ ποὺ ὑπάρχει πραγματικὰ στὸ ταμεῖο του (τὸ ποσὸ αὐτὸ λέγεται σύντομα «ταμεῖο»), ὁ ἐπιχειρηματίας ἔχει καὶ ἕναν ἔλεγχο γιὰ τὸ ἂν οἱ εἰσπράξεις καὶ οἱ πληρωμὲς ἔγιναν σωστά. Εἰδικὰ στὸ τέλος τῆς ἡμέρας πρέπει νὰ βρῆ:

(Ταμεῖο τὸ πρωὶ) +
(σύνολο εἰσπράξεων τὴν ἡμέρα) —
(σύνολο πληρωμῶν τὴν ἡμέρα) =
ταμεῖο τὸ βράδυ.

Στὸν παραπάνω πίνακα τοῦ σχήματος 1-α δείχνομε πῶς κρατοῦμε ἕνα βιβλίο ταμείου καὶ πῶς τὸ κλείνομε στὸ τέλος τῆς ἡμέρας.

2. Καρτέλα ἀποθήκης.

Γιὰ κάθε εἶδος ὑλικοῦ ὁ ἐπιχειρηματίας καταγράφει σὲ ξεχωριστὴ καρτέλα τί μπαίνει στὴν ἀποθήκη (τὶς παραλαβὲς) καὶ τί βγαίνει ἀπὸ αὐτὴν (τὶς χορηγήσεις ἢ παραδόσεις). Κάνοντας τότε κανεὶς τὸν ἀκόλουθο ἁπλὸ λογαριασμό:

ΣΥΜΒΟΛΟ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ Β.Π — ΘΕΣΗ Γ-2

Ὀνομασία : ΒΙΔΕΣ

Μῆκος 8mm, βῆμα 1mm

Ἐλάχιστο 50

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΙΝΗΣΗ	ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗ	ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΕΞΑΓΩΓΗ	ΑΠΟΘΕΜΑ
1.10	Ἀπόθεμα	135		
3.10	Παράδοση		48	
—	»		36	
4.10	Παραλαβή	100		
5.10	Παράδοση		36	
—	»		22	
		235	142	93
6.10	Ἀπόθεμα	93		

Σχ. 1-β. Καρτέλα ἀποθήκης.

ἀρχικὸ ἀπόθεμα + παραλαβὲς — παραδόσεις = τελικὸ ἀπόθεμα,

βρίσκει ἀμέσως, σὲ ὅποια στιγμὴ θέλει, πόσο ὑλικὸ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος ὑπάρχει στὴν ἀποθήκη, χωρὶς νὰ εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ τὸ καταμετρᾶ ξανά.

Στὸ σχ. 1-β βλέπετε μιὰ τέτοια καρτέλα γιὰ βίδες. Ὅπως παρατηρεῖτε, ἀναγράφονται σ' αὐτὴν τὰ ἑξῆς:

—Τὸ ὄνομα τοῦ ὑλικοῦ, τὰ χαρακτηριστικά του στοιχεῖα καὶ τὸ σύμβολο μὲ τὸ ὁποῖο παριστάνεται·

—ἡ θέση (θυρίδα) ὅπου εἶναι τοποθετημένο·

—στὴν 1η στήλη οἱ ἡμερομηνίες τῶν πράξεων·

—στὶς τρεῖς ἑπόμενες στῆλες τὸ εἶδος τῶν πράξεων ποὺ ἔγιναν καὶ οἱ ἀντίστοιχες ποσότητες ἀπὸ τὸ ὑλικό·

—στὴν τελευταία στήλη τὸ ἀπόθεμα (στὸκ) ποὺ μένει ἀπὸ τὸ ὑλικὸ στὴν ἀποθήκη. Τὸ ἀπόθεμα αὐτὸ δὲν ἐπιτρέπεται νὰ κατέβη κάτω ἀπὸ τὴν ἐλάχιστη ποσότητα ὑλικοῦ, ἡ ὁποία ἀναγράφεται στὸ πάνω μέρος τῆς καρτέλας· ἐπομένως, πρὶν συμβῆ τοῦτο, πρέπει νὰ γίνη νέα προμήθεια ἀπὸ τὸ ὑπόψη ὑλικό.

3. Λογαριασμοὶ προμηθευτῶν καὶ πελατῶν. Γιὰ νὰ μπορῆ ὁ ἐπιχειρηματίας νὰ ξέρη σὲ κάθε στιγμὴ τί χρωστάει στοὺς προμηθευτές του καθὼς καὶ τί τοῦ χρωστοῦν οἱ πελάτες του, κρατᾶ ξεχωριστὸ *λογαριασμὸ* γιὰ τὸν καθένα ἀπ' αὐτούς.

Ἔτσι π.χ. στὸ λογαριασμὸ τοῦ πελάτη Καρανικόλα (σχ. 1-γ) καταγράφονται, στὸ ἀριστερὸ μισὸ τῆς σελίδας, τὰ ποσὰ ποὺ χρωστάει ὁ πελάτης (τὸ δοῦναι του) καὶ στὸ δεξιὸ μισό, τὰ ποσὰ ποὺ πληρώνει (τὸ λαβεῖν του). Ἡ διαφορὰ ἀνάμεσα στὸ συνολικὸ δοῦναι τοῦ πελάτη καὶ στὸ συνολικὸ λαβεῖν του δείχνει ποιό εἶναι τὸ χρεωστικό του ὑπόλοιπο.

4. Ἀπογραφὴ καὶ ἰσολογισμός. Γιὰ νὰ μπορῆ ὁ ἐπιχειρηματίας νὰ ξέρη τὴν πραγματικὴ κατάσταση τῆς ἐπιχείρησής του, κάνει μία φορὰ τὸ ἔτος *ἀπογραφή*:

α) τοῦ τί ἔχει, μὲ ἄλλα λόγια, τοῦ *ἐνεργητικοῦ* του, καὶ

β) τοῦ τί χρωστάει, μὲ ἄλλα λόγια, τοῦ *παθητικοῦ* του.

Ὕστερα ὑπολογίζει τὴ διαφορὰ ἀνάμεσα στὸ ἐνεργητικὸ καὶ στὸ παθητικό του. Ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς λέγεται *ἰσολογισμὸς* καὶ ἐπιτρέπει στὸν ἐπιχειρηματία νὰ ξέρη ποιά εἶναι ἡ πραγματικὴ κατάσταση τῆς ἐπιχείρησής του.

ΔΟΥΝΑΙ		Λογαριασμὸς	Καρανικόλα		ΛΑΒΕΙΝ
Ἡμ/νίες	Πράξεις	Ποσὰ	Ἡμ/νίες	Πράξεις	Ποσὰ
4.10	Τιμολόγιό μου Νο 453	2 895	7.10	Πληρωμὴ σὲ μετρητὰ	3 000
5.10	Τιμολόγιό μου Νο 457	8 435	10.10	Πληρωμὴ σὲ μετρητὰ	5 000
15.10	Τιμολόγιό μου Νο 480	2 040	20.10	Πληρωμὴ μὲ ἐπιταγὴ	10 000
16.10	Τιμολόγιό μου Νο 481	7 000	22.10	Πληρωμὴ σὲ μετρητὰ	5 000
30.10	Τιμολόγιό μου Νο 502	8 050		Σύνολο	23 000
	Σύνολο	28 420	31.10	Χρεωστικὸ ὑπόλοιπο	5 420
	Μεταφορὰ τοῦ λαβεῖν	23 000			
	Ὑπόλοιπο	5 420			

Σχ. 1-γ. Λογαριασμὸς πελάτη.

ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟ		ΠΑΘΗΤΙΚΟ	
Μετρητὰ στὸ ταμεῖο	40 000	Κεφάλαιο δανεισμένο καὶ	
Καταθέσεις σὲ τράπεζες	105 000	τοποθετημένο στὴν ἐπιχείρηση	750 000
Ἀξία ἀκινήτου	550 000	Πιστωτικὰ ὑπόλοιπα προμηθευ-	
Ἀξία σκευῶν καὶ ἐμπορευμάτων	350 000	τῶν :	
Χρεωστικὰ ὑπόλοιπα πελατῶν :		Χ . . .	55 000
Α . . .	25 500	Υ . . .	45 500
Β . . .	10 250	Ζ . . .	25 000
Σύνολο ἐνεργητικοῦ	1 080 750	Σύνολο παθητικοῦ	875 500
Μεταφορὰ τοῦ παθητικοῦ	875 500		
Ὑπόλοιπο	205 250		

Σχ. 1-δ. Ἰσολογισμός.

Στὸ σχ. 1-δ (σελ. 6) δίνομε ἕνα παράδειγμα τέτοιου ἰσολογισμοῦ.

Ἀσκήσεις. *1*. Καταρτίστε, μὲ ὑπόδειγμα τὴν καρτέλα τοῦ σχήματος 1-β, τὴν καρτέλα ἀποθήκης γιὰ τὸ ἀκόλουθο ὑλικό:

Ὄνομα ὑλικοῦ: Ἠλεκτρικὲς ἀσφάλειες. Σύμβολο: *SV* 12.

Χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα: τῶν 12 ἀμπέρ, τύπος 2 057, διάμετρος 8 mm, μῆκος 29 mm.

Θέση: Θυρίδα Α/13. Ἐλάχιστο 15.

Κίνηση: τὴν 1 Ἰανουαρίου 1958 ἀπόθεμα 15,
15.1 εἰσαγωγὴ 25, ἐξαγωγὴ 24,
16.1 εἰσαγωγὴ 24,
17.1 ἐξαγωγὴ 12,
20.1 εἰσαγωγὴ 50,
27.1 ἐξαγωγὴ 36.

Ποιό εἶναι τὸ ἀπόθεμα ὕστερα ἀπὸ τὴν τελευταία πράξη;

2. Στὸ λογαριασμὸ τοῦ πελάτη Καρανικόλα (σχ. 1-γ) βρῆτε τὸ ὑπόλοιπο ὕστερα ἀπὸ τὴν πράξη τῆς 16ης Ὀκτωβρίου.

3. Νὰ κάμετε τὸν ἰσολογισμὸ τῆς ἐπιχείρησης τοῦ κ. Π., ἐπιπλοποιοῦ, μὲ τὰ ἑξῆς δεδομένα: Ὁ κ. Π. ἔχει στὸ ταμεῖο του 38 500 δρχ., στὴν Τράπεζα 17 450 δρχ, στὴν ἀποθήκη του ἑτοιμοπαράδοτο ἐμπόρευμα ἀξίας 55 000 δρχ· ἔχει νὰ εἰσπράξη ἀπὸ μιὰ παραγγελία 11 000 δρχ καὶ νὰ πληρώση δυὸ τιμολόγια (φατοῦρες), 16 500 δρχ τὸ ἕνα καὶ 9 850 δρχ τὸ ἄλλο. Τὰ ὑλικὰ καὶ ἡ κινητὴ περιουσία τῆς ἐπιχείρησής του ἀξίζουν 95 000 δρχ. Τέλος, γιὰ νὰ ἐπεκτείνη τὴν ἐπιχείρησή του, ὁ κ. Π. ἔχει δανεισθῆ 150 000 δρχ.

Μάθημα 2

Ἐφαρμογὲς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαίρεσης σὲ ζητήματα ἀγοραπωλησιῶν.

Ἕνας βιοτέχνης, ἕνας ἐπαγγελματίας, γιὰ νὰ ἐκτελέση τὶς παραγγελίες ποὺ παίρνει, χρησιμοποιεῖ διάφορα ὑλικά: πρῶτες ὕλες καὶ μισοκατεργασμένα προϊόντα. Τὰ ἐμπορεύματα αὐτὰ τοῦ τὰ προμηθεύουν οἱ προμηθευτές του συνοδεύοντάς τα μὲ *τιμολόγια.*

1. Τιμολόγιο. Σ' ἕνα τιμολόγιο ὁ προμηθευτὴς σημειώνει κυρίως τὰ ἑξῆς:

— τὴν *ὀνομασία τῶν ὑλικῶν* ποὺ παραδίνει·

— τὴ *μοναδιαία τιμὴ* (δηλαδὴ τὴν τιμὴ τῆς μονάδας) γιὰ τὸ ***κάθε εἶδος ὑλικοῦ χωριστὰ*** *καὶ* τὴν ὁλική του τιμὴ ·(ἡ ὁλικὴ αὐτὴ τιμὴ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς μοναδιαίας τιμῆς ἐπὶ τὴν ποσότητα τοῦ εἴδους ποὺ παραδίνεται)·

— *τὴ συνολικὴ ἀξία* ὅλων τῶν ὑλικῶν ποὺ παραδίνονται (δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν παραπάνω γινομένων).

Ἡ συνολικὴ αὐτὴ ἀξία αὐξάνεται κάποτε κατὰ ἕνα ποσὸ ποὺ ἀντιπροσωπεύει τέλη (π.χ. φόρους) καὶ ἄλλα ἔξοδα (π.χ. μεταφορικὰ) καὶ ἐλαττώνεται κατὰ ἕνα ποσὸ ποὺ ἀντιπροσωπεύει ἐκπτώσεις ἢ ἄλλες παραχωρήσεις τοῦ προμηθευτῆ πρὸς τὸν ἀγοραστή. Ὕστερα ἀπὸ τὴν πρόσθεση καὶ τὴν ἀφαίρεση αὐτῶν τῶν ποσῶν ἀπομένει, γραμμένο στὸ κάτω μέρος τοῦ τιμολογίου, τὸ ***καθαρὸ*** *ποσὸ* ποὺ πρέπει νὰ πληρώση ὁ ἀγοραστής. Ἐκτὸς ἀπ' αὐτό, ὁ ἀγοραστὴς πρέπει συνήθως νὰ πληρώση καὶ τὸ ἀνάλογο χαρτόσημο σύμφωνα μὲ τὸ νόμο.

2. Ἐξόφληση τιμολογίου. Ἡ ἐξόφληση ἑνὸς τιμολογίου μπορεῖ νὰ γίνη ἢ κατὰ τὴν παράδοση τοῦ ἐμπορεύματος *(ἀγοραπωλησία τοῖς μετρητοῖς)* ἢ ὕστερα ἀπὸ κάποιο ὁρισμένο χρονικὸ διάστημα (συνήθως 30, 60 ἢ 90 ἡμέρες, κατόπιν συμφωνίας μὲ τὸν προμηθευτὴ — *ἀγοραπωλησία μὲ πίστωση, ἐπὶ πιστώσει).*

3. Ἀγοραπωλησία τοῖς μετρητοῖς. Ἡ πληρωμὴ γίνεται, κατὰ τὴν παράδοση τοῦ ἐμπορεύματος, συνήθως σὲ *μετρητὰ* (ρευστὸ χρῆμα) ἢ μὲ ἐπιταγή· κάποτε ὅμως καὶ μὲ ἄλλο τρόπο: πολλὲς φορὲς π.χ. ὁ ἀγοραστὴς συμψηφίζει τὸ ποσὸ ἢ ἕνα μέρος τοῦ ποσοῦ, ποὺ πρέπει νὰ πληρώση, μὲ κάποιο ποσὸ ποὺ ἔχει ὁ ἴδιος νὰ παίρνη ἀπὸ τὸν προμηθευτή. Ὁ πωλητὴς βεβαιώνει τὴν ἐξόφληση τοῦ τιμολογίου γράφοντας τὴ λέξη «ἐξωφλήθη» καὶ τὴ σχετικὴ ἡμερομηνία (εἴτε μὲ τὸ χέρι εἴτε μὲ τὴν ἀντίστοιχη σφραγίδα) καὶ βάζοντας κάτω ἀπ' αὐτὰ τὴν ὑπογραφή του.

(Ὄνομα ἢ τίτλος τοῦ προμηθευτῆ)

. . . .

Τ ι μ ο λ ό γ ι ο

Ἀριθμὸς . . .

Ἀθῆναι, 4/2/1959

ὔξ. ριθ.	Ε ἶ δ ο ς	Μονάδα	Ποσότητα	Τιμὴ μονάδας	Ὁλικὴ τιμ
1	*Ξυλεία Σουηδίας*	m³	3	2 200,00	6 600,00
2	*Λαμαρίνα γαλβανισμένη*	kg	120	8,50	1 020,00
	Μεταφορικὰ				150,00
	Σύνολο				7 770,00
	Ἔκπτωση 10°/₀ πάνω στὴν ἀξία 7 620 δρχ				762,00
	Καθαρὸ πληρωτέο ποσὸ				7 008,00

Ἐξωφλήθη, 4/2/59

(ὑπογραφὴ) ....

Σχ. 2-α. Τιμολόγιο.

Συχνά, ὅταν ἡ πώληση γίνεται τοῖς μετρητοῖς, ὁ προμηθευτὴς κάνει στὸν ἀγοραστὴ μιὰν *ἔκπτωση* ποὺ συνήθως εἶναι ἕνα ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ πάνω στὴν ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος (βλ. Τόμ. Α', Μάθ. 57 καὶ Τόμ. Β', Μάθ. 27 καὶ 28). Τὸ ποσὸ αὐτῆς τῆς ἔκπτωσης ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὴν ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος, κάποτε πάνω στὸ ἴδιο τὸ τιμολόγιο, ὅπως εἴπαμε καὶ στὸν § 1. Παράδειγμα ἑνὸς τέτοιου τιμολογίου βλέπετε στὸ σχῆμα 2-α.

4. Ἀγοραπωλησία μὲ πίστωση. Ὁ προμηθευτὴς καὶ ὁ ἀγοραστὴς συμφωνοῦν ὅτι τὸ τιμολόγιο θὰ ἐξοφληθῆ, ἀφοῦ περάση ἕνα ὁρισμένο χρονικὸ διάστημα ὕστερα ἀπὸ τὴν παράδοση τοῦ ἐμπορεύματος. Ἡ συμφωνία ἐπικυρώνεται συνήθως μ' ἕνα ἔγγραφο κατὰ τὸν ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀκόλουθους δυὸ τρόπους:

1ος τρόπος. Ὁ ἀγοραστὴς ὑπογράφει σὰν *ὀφειλέτης* (χρεώστης) ἕνα *γραμμάτιο*, ὅπου ὑπόσχεται νὰ πληρώση ἕνα ὁρισμένο ποσὸ (ποὺ λέγεται *ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου) σὲ μιὰν ὁρισμένη ἡμερομηνία (ποὺ λέγεται *λήξη* τοῦ γραμματίου, βλ. σχ. 2-β). Ἂν ὁ ὀφειλέτης δὲν μπορέση νὰ κάμη αὐτὴ τὴν πληρωμή, τότε ἀναλαμβάνει νὰ τὴν κάμη ἕνα τρίτο πρόσωπο, ποὺ λέγεται ἐγγυητὴς καὶ ποὺ προσυπογράφει τὸ γραμμάτιο (βλ. σχ. 2-β).

Λῆξις 5 Μαρτίου 1959 *Γραμμάτιον εἰς διαταγὴν δρχ 10 000*

Τὴν πέμπτην Μαρτίου 1959 ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι ὁ ὑπογεγραμμένος Παῦλος Γεωργόπουλος νὰ πληρώσω δυνάμει τοῦ παρόντος εἰς διαταγὴν γραμματίου εἰς διαταγὴν τοῦ Ὁμήρου Ἰωαννίδη καὶ εἰς τὸ ἐν Ἀθήναις Κατάστημα τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχμῶν δέκα χιλιάδων ἐντόκως ἀπὸ τῆς λήξεως μετὰ τοῦ νομίμου τόκου ὑπερημερίας.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 5 Ἰανουαρίου 1959

Τριτεγγυῶμαι ὑπὲρ τοῦ ὀφειλέτου *Ὁ ὀφειλέτης*
(ὑπογραφὴ Μ. Παπαδοπούλου) *(ὑπογραφὴ Π. Γεωργοπούλου)*

Σχ. 2-β. Γραμμάτιο.

2ος τρόπος. Ὁ προμηθευτὴς ὑπογράφει σὰν *ἐκδότης* ἕνα ἔγγραφο ποὺ λέγεται *συναλλαγματική*· μὲ αὐτὸ ὁ προμηθευτὴς δίνει ἐντολὴ στὸν ἀγοραστὴ νὰ πληρώση ἕνα ὁρισμένο ποσὸ (ποὺ λέγεται *ὀνομαστικὴ ἀξία* τῆς συναλλαγματικῆς) σὲ μιὰν ὁρισμένη ἡμερομηνία (ποὺ λέγεται *λήξη* τῆς συναλλαγματικῆς). Ὁ ἀγοραστὴς ὑπογράφει τὴ συναλλαγματικὴ σὰν *ἀποδέκτης*, δηλώνοντας μὲ τοῦτο ὅτι δέχεται (ἀποδέχεται) τὴν ἐντολὴ νὰ πληρώση τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τῆς συναλλαγματικῆς στὴ λήξη της. (Ἕνα παράδειγμα συναλλαγματικῆς βλέπετε στὸ παρακάτω σχ. 2-γ).

Λῆξις 5 Μαρτίου 1959 *Συναλλαγματικὴ δραχμῶν 10 000.*

Τὴν πέμπτην Μαρτίου 1959 πληρώσατε δυνάμει τῆς παρούσης καὶ μόνης συναλλαγματικῆς εἰς διαταγὴν ἐμοῦ τοῦ ἰδίου εἰς τὸ ἐν Ἀθήναις Κατάστημα τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχμῶν δέκα χιλιάδων ἐντόκως ἀπὸ τῆς λήξεως μετὰ τοῦ νομίμου τόκου ὑπερημερίας.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 5ῃ Ἰανουαρίου 1959
Ὁ ἐκδότης
(ὑπογραφὴ Ὀμ. Ἰωαννίδη)

Πρὸς τὸν Κύριον
Παῦλον Γεωργόπουλον
Δεκτὴ
Ἐν Ἀθήναις, τῇ 5ῃ Ἰανουαρίου 1959
Ὁ ἀποδέκτης
(ὑπογρ. Π. Γεωργοπούλου)

Τριτεγγυῶμαι ὑπὲρ τοῦ ἀποδέκτου
(ὑπογρ. Μ. Παπαδοπούλου)

Σχ. 2-γ. Συναλλαγματική.

Καὶ μὲ τοὺς δυὸ αὐτοὺς τρόπους (γραμμάτιο ἢ συναλλαγματική) ὁ προμηθευτὴς ἀποκτᾶ ἐγγράφως τὸ δικαίωμα νὰ εἰσπράξη ἀπὸ τὸν ἀγοραστὴ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς στὴ λήξη τους. Μπορεῖ ὅμως, ἂν συμβῇ νὰ ἔχη ἀνάγκη ἀπὸ χρήματα, νὰ «προεξοφλήση», δηλαδὴ νὰ ἐξαργυρώση, τὸ γραμμάτιο ἢ τὴ συναλλαγματικὴ πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη τους. Ἡ ἐμπορικὴ αὐτὴ πράξη λέγεται *προεξόφληση* καὶ γίνεται ὡς ἑξῆς: Ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς τὰ «ὀπισθογράφει» καὶ τὰ μεταβιβάζει ἔτσι σ' ἕναν ἄλλο, ὁ ὁποῖος τοῦ πληρώνει τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τους *ἀφαιρώντας ἀπ' αὐτὴν* τὰ ἀκόλουθα ποσά: 1ον ἕναν *τόκο* τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα ποὺ μεσολαβεῖ μεταξὺ τῆς προεξόφλησης καὶ τῆς λήξης καὶ 2ον κάποιαν *προμήθεια*. Ὁ νέος κάτοχος τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς ἔχει τὰ ἴδια δικαιώματα μὲ τὸν παλαιό: μπορεῖ νὰ εἰσπράξῃ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τους στὴ λήξη τους ἢ νὰ τὰ προεξοφλήσῃ κι αὐτός.

Ἀσκήσεις. 1. Ὁ ἠλεκτροτεχνίτης (ἠλεκτρολόγος) για ἐσωτερικὲς ἐγκαταστάσεις κ. Μ. ἀγόρασε ἀπὸ ἕνα κατάστημα ἠλεκτρικῶν εἰδῶν τὰ ἀκόλουθα ὑλικά:

20 m ἠλεκτρικὸ καλώδιο τῶν 25 mm² πρὸς 3,40 δρχ τὸ μέτρο, 10 διακόπτες ἁπλοὺς πρὸς 16 δρχ τὸν ἕνα, 5 διακόπτες κομουτατὲρ πρὸς 22 δρχ τὸν ἕνα, 36 m σωλήνα μπέρκμαν πρὸς 3,50 δρχ τὸ μέτρο καὶ διάφορα ἄλλα μικρούλικὰ συνολικῆς ἀξίας 235 δρχ.

Καταρτίστε τὸ τιμολόγιο γιὰ τὴν προμήθεια τῶν παραπάνω ὑλικῶν.

2. Μὲ τὰ δεδομένα τῆς προηγούμενης ἄσκησης συμπληρῶστε ἕνα ἄλλο τιμολόγιο λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη 1ο ὅτι στὴν ἀξία τῶν ὑλικῶν ποὺ ἀγοράσθηκαν προστέθηκε ἕνας φόρος 6 % πάνω στὴν ἀξία αὐτὴ καὶ 2ο ὅτι ὁ προμηθευτὴς δέχθηκε νὰ κάμῃ στὸν ἀγοραστὴ μιὰν ἔκπτωση 5 % πάνω στὴν ἀξία τῶν ὑλικῶν, ἐπειδὴ πληρώθηκε τοῖς μετρητοῖς.

3. Ὁ ἠλεκτροτεχνίτης τῆς ἄσκησης 1 χρησιμοποίησε ὅλα τὰ ὑλικά, ποὺ ἀναφέρονται μὲ τὶς τιμές τους στὴν ἄσκηση, γιὰ νὰ μετατρέψῃ τὴν ἐγκατάσταση φωτισμοῦ σ' ἕνα διαμέρισμα πολυκατοικίας. Ξέροντας ἀκόμη ὅτι γιὰ τὴν ἐργασία αὐτὴ ἀπασχόλησε ἕναν τεχνίτη μὲ τὸ βοηθό του ἐπὶ 16 ὧρες καὶ ὅτι πλήρωσε τὸν πρῶτο 15 δρχ. τὴν ὥρα, τὸν δεύτερο 6,25 δρχ. τὴν ὥρα, ὑπολογίστε:

1ο τί τοῦ κόστισε σὲ ἀξία ὑλικῶν καὶ ἐργατικὰ ἡ ἐργασία ποὺ ἔκαμε,

2ο τί κέρδισε, ἂν ἀνάλαβε τὴν ἐργασία αὐτὴ κατ' ἀποκοπὴ γιὰ 1 600 δρχ μεῖον 8 %, προκειμένου νὰ πληρωθῇ ἀμέσως τοῖς μετρητοῖς.

Μάθημα 3.

Ἐφαρμογὲς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαίρεσης σὲ ὑπολογισμοὺς τοῦ μηχανουργείου.

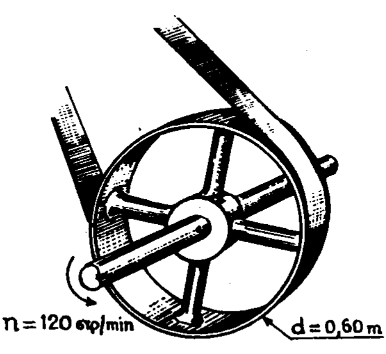
1. Περιφερειακὴ ταχύτητα μιᾶς τροχαλίας.

Πρόβλημα. Ὑπολογίστε τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα σὲ m/sec μιᾶς τροχαλίας ποὺ ἔχει διάμετρο d m καὶ στρέφεται μὲ n στρ/min.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $d = 0{,}60\ m$ *καὶ* $n = 120$ *στρ/min* (σχ. 3-α).

1ο. Ὑπενθυμίζομε ὅτι περιφερειακὴ ταχύτητα μιᾶς τροχαλίας εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτητα ἑνὸς (ὁποιουδήποτε) σημείου τῆς περιφέρειάς της (τῆς ζάντας της). (Βλ. Τόμ. Β′, Μάθ. 3, Ἄσκ. 5).

Ἂν λοιπὸν ἡ τροχαλία ἔκανε μίαν στροφὴ στὸ λεπτὸ (1 στρ/min), ἡ περιφερειακή της ταχύτητα θὰ ἦταν ἴση μὲ πd μέτρα στὸ λεπτὸ (m/min), ἄρα μὲ $\frac{\pi d}{60}$ μέτρα στὸ δευτερόλεπτο (m/sec). Ἑπομένως, ὅταν ἡ τροχαλία κάνη n στρ/min, ἡ περιφειακή της ταχύτητα θὰ εἶναι n φορὲς μεγαλύτερη, δηλαδὴ ἴση μὲ



Σχ. 3-α. Ὑπολογίστε τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα αὐτῆς τῆς τροχαλίας.

$$v = \frac{\pi d n}{60}\ m/sec.$$

2ο. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ μὲ $d = 0{,}60\,m$ καὶ $n = 120$ στρ/min. Ἐφαρμόζοντας τὸν τελευταῖο τύπο βρίσκομε:

$$v = \frac{\pi \cdot 0{,}60 \cdot 120}{60} = \pi \cdot 1{,}2\ m/sec.$$

Παίρνοντας λοιπόν, ὅπως συνήθως, τὸ $\pi \simeq 3,14$ θὰ ἔχωμε τὸ ἐξαγόμενο:

$$v \simeq 3,14 \cdot 1,2 = 3,768 \ m/sec.$$

Τὸ ψηφίο 8 τῶν χιλιοστῶν μέσα σ' αὐτὸ δὲν εἶναι ἀκριβές· τὸ σωστὸ θὰ ἦταν 9. Ἐμᾶς ὅμως μᾶς φθάνει νὰ ἔχωμε τὸ v μὲ προσέγγιση μισοῦ ἑκατοστοῦ· γι' αὐτὸ γράφομε τὴν ἀπάντηση μὲ δυὸ μόνο δεκαδικὰ ψηφία, ἔτσι:

$$v \simeq 3,77 \ m/sec,$$

δηλαδὴ παραλείπομε τὸ τρίτο δεκαδικὸ ψηφίο καὶ αὐξάνομε τὸ προηγούμενό του 6 κατὰ μία μονάδα τῆς τάξης του, ἐπειδὴ τὸ παραλειπόμενο 8 εἶναι > 4.

Σημείωση. Ὅτι τὸ σωστὸ ψηφίο τῶν χιλιοστῶν στὸ v εἶναι 9, τὸ συμπεραίνομε ἔτσι: Ὅπως ξέρομε ἤδη ἀπὸ τὸν Τόμο Α', Μάθ. 10, ὁ ἀριθμὸς π εἶναι:

$$\pi > 3,141\,5 \qquad \text{καὶ} \qquad \pi < 3,141\,6,$$

ἄρα τὸ ζητούμενο $v = \pi \cdot 1,2$ εἶναι:

$$v > 3,141\,5 \cdot 1,2 = 3,769\,80 \qquad \text{καὶ} \qquad v < 3,141\,6 \cdot 1,2 = 3,769\,92.$$

Οἱ δυὸ ἀριθμοὶ 3,769 80 καὶ 3,769 92, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται τὸ v, συμπίπτουν μέχρι καὶ τοῦ ψηφίου τῶν χιλιοστῶν· ἄρα τὸ v θὰ ἔχῃ τὸ ἴδιο ψηφίο χιλιοστῶν μὲ αὐτούς, δηλαδὴ τὸ 9.

2. Περιστροφικὴ ταχύτητα μιᾶς φρέζας.

Πρόβλημα. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα n σὲ στρ/min τὴν ὁποία πρέπει νὰ δώσωμε σὲ μιὰ φρέζα διαμέτρου d mm γιὰ νὰ πετύχωμε κοπτικὴ ταχύτητα (ταχύτητα κοπῆς) v m/min (σχ. 3-β).

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $d = 100$, $v = 25$.

1ο. Βρίσκομε πρῶτα τὸν τύπο ποὺ μᾶς δίνει τὸ v «συναρτήσει τῶν n καὶ d», δηλαδὴ ὅταν ξέρωμε τὰ n καὶ d.

Ἂν ἡ φρέζα ἔκανε 1 στρ/min, ἡ κοπτική της ταχύτητα θὰ ἦταν:

$$\pi d \ mm/min = \frac{\pi d}{1\,000} \ m/min.$$

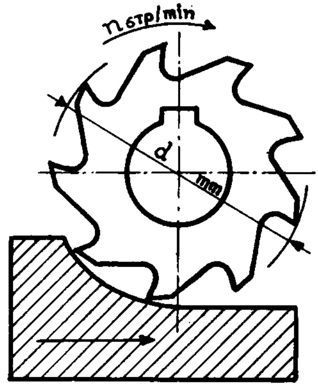
Ὅταν λοιπὸν ἡ φρέζα κάνῃ n στρ/min, ἡ κοπτικὴ ταχύτητα θὰ εἶναι:

$$v = \frac{\pi d n}{1\,000} \ m/min.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτή, διαιρώντας καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ $\frac{\pi d}{1\,000}$, βρίσκομε:

$$n = \frac{1\,000}{\pi} \frac{v}{d}.$$

Γιὰ τὸ $\frac{1}{\pi} = 0{,}318\,309...$ἔχομε τὴν προσεγγιστικὴ τιμὴ $\frac{1}{\pi} \simeq 0{,}318$ καὶ ἑπομένως $\frac{1\,000}{\pi} \simeq 318.$



Σχ. 3-β. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα αὐτῆς τῆς φρέζας.

Ὥστε:

$$n \simeq \frac{318\, v}{d} \ \sigma\tau\varrho/min.$$

Στὴν πράξη χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο:

$$n \simeq \frac{315\, v}{d} \ \sigma\tau\varrho/min$$

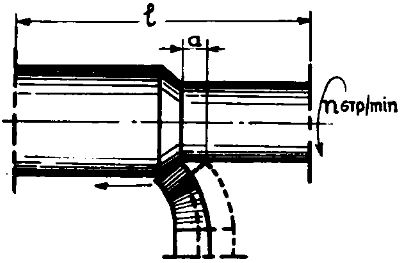
μὲ τὸν ἁπλούστερο πολλαπλασιαστὴ 315. Πάντως δὲν πρέπει νὰ ξεχνοῦμε ὅτι μέσα στοὺς παραπάνω τύπους ἡ ταχύτητα v ἐκφράζεται σὲ m/min καὶ ἡ διάμετρος d σὲ mm.

2ο. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ μὲ $d = 100\ mm$ καὶ $v = 25\ m/min$:

$$n \simeq \frac{315 \cdot 25}{100} \simeq 79 \ \sigma\tau\varrho/min.$$

3. Χρόνος πού χρειάζεται γιά μηχανουργικές κατεργασίες: τορνάρισμα, φρεζάρισμα, τρυπάνισμα.

Πρόβλημα 1. Πόσος χρόνος χρειάζεται γιά νά περάσωμε, μ' ένα πάσο στόν τόρνο, τήν επιφάνεια ενός κυλινδρικού κομματιού μήκους $l = 450\ mm$, όταν τό τσόκ τού τόρνου κάνη $n = 280$ στρ/min καί όταν σέ κάθε στροφή τό κοπτικό εργαλείο προχωρή κατά ένα μήκος $a = 0{,}3\ mm$ (σχ. 3-γ);



Σχ. 3-γ. Υπολογίστε τόν χρόνο πού χρειάζεται ένα πάσο τορναρίσματος.

Τό κυλινδρικό κομμάτι, όπως έχει συνδεθή στερεά μέ τό τσόκ τού τόρνου, κάνει 280 στρ/min. Σέ κάθε στροφή τού κομματιού τό κοπτικό εργαλείο τού τόρνου προχωρεί κατά 0,3 mm, άρα σέ 280 στροφές, δηλαδή σέ 1 λεπτό, τό κοπτικό εργαλείο θά προχωρήση κατά

$$280 \cdot 0{,}3\ mm = 84\ mm.$$

Ώστε, γιά νά προχωρήση τό εργαλείο κατά ένα μήκος ίσο μέ τό μήκος 450 mm τού κυλινδρικού κομματιού, θά χρειασθή χρόνο ίσο μέ

$$450 : 84 \simeq 5\ min\ 21\ sec.$$

Γενίκευση. Άν τό προχώρημα τού κοπτικού εργαλείου γιά 1 στροφή τού τσόκ είναι $a\ mm$, τότε τό προχώρημά του γιά n στρ/min δηλαδή σέ 1 min, θά είναι $a \cdot n\ mm$. Επομένως ό χρόνος t (σέ min) πού χρειάζεται γιά νά περάσωμε μία φορά στόν τόρνο ένα κομμάτι μήκους $l\ mm$ θά είναι:

$$t = \frac{l}{a \cdot n} \quad (\text{σέ } min).$$

Πρόβλημα 2. Υπολογίστε τό χρόνο πού χρειάζεται ένα πάσο φρεζάρισμα πάνω σ' ένα κομμάτι μήκους $l = 150\ mm$, όταν 1ο ή τράπεζα τής φρέζας προχωρή κατά $a = 0{,}2\ mm$ σέ κάθε στροφή τής *φρέζας, 2ο ἡ διάμετρος τῆς φρέζας εἶναι $D = 120\ mm$ καὶ 3ο ἡ κοπτική της ταχύτητα εἶναι $v = 15\ m/min$.*

Σύμφωνα μὲ τὸν § 2 τοῦ Μαθήματος αὐτοῦ, ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τῆς φρέζας εἶναι:

$$n = \frac{315\,v}{D} = \frac{315 \cdot 15}{120} \simeq 39\ \sigma\tau\rho/min.$$

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι ἡ φρέζα μπορεῖ νὰ περιστραφῆ μὲ αὐτὴν τὴν ταχύτητα *ἀκριβῶς*, πράγμα ποὺ δὲν εἶναι γενικὰ κατορθωτό.

Ὅταν ἡ φρέζα κάνη 1 στροφή, ἡ τράπεζά της προχωρεῖ κατὰ 0,2 mm.

Ἑπομένως σὲ 1 λεπτό, ὁπότε ἡ φρέζα θὰ ἔχη κάμει 39 στροφές, ἡ τράπεζά της θὰ ἔχη προχωρήσει κατὰ $39 \cdot 0{,}2 = 7{,}8\ mm$.

Γιὰ νὰ προχωρήση λοιπὸν ἡ τράπεζα τῆς φρέζας κατὰ 150 mm, θὰ χρειασθῆ χρόνο ἴσο μέ:

$$150 : 7{,}8 \simeq 19\ min\ 14\ sec.$$

Ἐννοεῖται ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ θὰ ἀλλάξη κάπως, ἂν ἀναγκασθοῦμε νὰ διαλέξωμε μιὰ περιστροφικὴ ταχύτητα ὀλίγο διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν 39 στρ/min, ποὺ χρησιμοποιήσαμε στὸν ὑπολογισμό.

Γενίκευση. Ἡ φρέζα ἂς ἔχη διάμετρο $D\ mm$ καὶ κοπτικὴ ταχύτητα $v\ m/min$· ἡ περιστροφική της ταχύτητα θὰ εἶναι τότε $\frac{315\,v}{D}$ στρ/min. Ἂν ἡ τράπεζα τῆς φρέζας προχωρῆ κατὰ $a\ mm$ σὲ κάθε στροφὴ τῆς φρέζας, τότε σὲ ἕνα λεπτὸ ($1\ min$) θὰ προχωρήση κατὰ

$$a \cdot \frac{315\,v}{D} = \frac{315\,av}{D}\ mm.$$

Ἑπομένως ἕνα πάσο φρεζάρισμα πάνω σ' ἕνα κομμάτι μήκους $l\ mm$ θὰ χρειασθῆ χρόνο t (σὲ min) ἴσο μὲ

$$l : \frac{315\,av}{D}, \quad \text{δηλαδὴ} \quad t = \frac{lD}{315\,av}\ min.$$

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογὲς αὐτοῦ τοῦ τύπου μποροῦν νὰ γίνουν στὶς ἀσκήσεις.

Πρόβλημα 3. Πόσος χρόνος χρειάζεται γιὰ ν' ἀνοίξωμε μὲ τὸ δράπανο μιὰ τρύπα ποὺ ἔχει διάμετρο $D = 18\,mm$ καὶ βάθος $l = 32\,mm$, ὅταν 1ο ἡ κοπτικὴ ταχύτητα τοῦ τρυπανιοῦ εἶναι $v = 12\,m/min$ καὶ 2ο γιὰ καθεμιὰ στροφὴ τοῦ τρυπανιοῦ τὸ προχώρημά του σὲ βάθος εἶναι $a = 0,1\,mm$;

Ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τρυπανιοῦ (σύμφωνα πάλι μὲ τὸν τύπο τοῦ § 2) εἶναι:

$$n = \frac{315\,v}{D} = \frac{315 \cdot 12}{18} = 210 \text{ στρ}/min.$$

Τώρα, ὅταν τὸ τρυπάνι κάνη μία στροφή, τὸ προχώρημά του σὲ βάθος εἶναι 0,1 mm. Ἑπομένως σὲ 1 min, ὁπότε τὸ τρυπάνι θὰ ἔχη κάμει 210 στροφές, τὸ προχώρημά του σὲ βάθος θὰ εἶναι:

$$210 \cdot 0,1 = 21\,mm.$$

Ἄρα, γιὰ νὰ ἀνοίξωμε μὲ αὐτὸ τὸ τρυπάνι μιὰ τρύπα βάθους 32 mm, θὰ χρειασθοῦμε χρόνο:

$$32 : 21 \simeq 1\,min\ 31\,sec.$$

Γενίκευση. Ὅπως βρήκαμε παραπάνω τὸ γενικὸ τύπο γιὰ τὸ χρόνο ποὺ χρειάζεται ἕνα πάσο φρεζάρισμα, ἔτσι βρίσκομε καὶ ἐδῶ γιὰ τὸ χρόνο t τοῦ τρυπανίσματος τὸ γενικὸ τύπο

$$t = \frac{l\,D}{315\,a v}\,min,$$

ὅπου l εἶναι τὸ βάθος τῆς τρύπας σὲ mm, D ἡ διάμετρός της σὲ mm, v ἡ κοπτικὴ ταχύτητα τοῦ τρυπανιοῦ σὲ m/min καὶ a τὸ προχώρημά του σὲ mm ἀνὰ 1 στροφή.

4. Στοιχεῖα ἑνὸς ὀδοντωτοῦ τροχοῦ.

Πρόβλημα. Ὅπως ξέρετε, τὸ μοντοὺλ m ἑνὸς ὀδοντωτοῦ τροχοῦ εἶναι τὸ πηλίκο $\frac{D_a}{z}$ τοῦ μήκους D_a τῆς ἀρχικῆς διαμέτρου τοῦ τροχοῦ (σὲ mm) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ z τῶν δοντιῶν του. Ἔχοντας τώρα ὑπόψη ὅσα σημειώνονται στὸ σχῆμα 3-δ, ὑπολογίστε τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα ἑνὸς ὀδοντωτοῦ τροχοῦ ποὺ ἔχει μοντοὺλ $m = 5$ καὶ ἀριθμὸ δοντιῶν $z = 21$:

1ο τὴν ἀρχικὴ διάμετρο D_a,

2ο τὸ περιφερειακὸ βῆμα h (ἢ βῆμα ὀδοντώσεως),

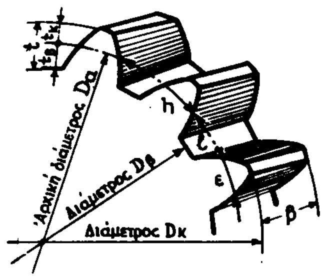
3ο τὸ πάχος ε ἑνὸς δοντιοῦ καὶ τὸ πλάτος l τοῦ διακένου ἀνάμεσα σὲ δυὸ διαδοχικὰ δόντια,

4ο τὸ ὕψος $t_\varkappa$ τῆς κεφαλῆς, t_β τῆς βάσης καὶ t ἑνὸς ὁλόκληρου δοντιοῦ,

5ο τὸ πλάτος β ἑνὸς δοντιοῦ,

6ο τὴ διάμετρο $D_\varkappa$ τῆς περιφέρειας τῶν κεφαλῶν τῶν δοντιῶν,

καὶ 7ο τὴ διάμετρο D_β τῆς περιφέρειας τῶν βάσεων (τῶν ποδιῶν) τῶν δοντιῶν.



Σχ. 3-δ. Ὑπολογίστε τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ὀδοντοτροχοῦ μὲ $m = 5$ καὶ $z = 21$, σύμφωνα μὲ τὶς ἀκόλουθες σχέσεις γιὰ μιὰ «κανονικὴ» ὀδόντωση:

$t_\varkappa = m, \quad t_\beta = 1{,}15\, m,$

$t = 2{,}15\, m, \quad l = \varepsilon = h/2,$

$\beta = 10\, m.$

1ο. Ἀρχικὴ διάμετρος D_a. Ἀπὸ τὴ σχέση $m = \dfrac{D_a}{z}$, πολλαπλασιάζοντας καὶ τὰ δυὸ μέλη της μὲ z, βρίσκομε:

$$D_a = m \cdot z.$$

Ἑπομένως γιὰ $m = 5$ καὶ $z = 21$ θὰ εἶναι:

$$D_a = 5 \cdot 21 = 105\ mm.$$

2ο. Περιφερειακὸ βῆμα h. Ὅπως φαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ σχ. 3-δ, τὸ περιφερειακὸ βῆμα h τὸ βρίσκομε διαιρώντας διὰ τοῦ ἀριθμοῦ z τῶν δοντιῶν τὸ μῆκος πD_a τῆς ἀρχικῆς περιφέρειας (δηλαδὴ τῆς περιφέρειας ποὺ ἔχει διάμετρο τὴν ἀρχικὴ διάμετρο D_a) τοῦ τροχοῦ. Ἄρα:

$$h = \frac{\pi D_a}{z} = \pi \cdot \frac{D_a}{z} = \pi m.$$

Μεταξὺ περιφερειακοῦ βήματος καὶ μοντοὺλ ἔχομε λοιπὸν τὶς σχέσεις:

$$h = \pi m \qquad \text{καὶ} \qquad m = \frac{h}{\pi}.$$

Ἀπὸ τὴν πρώτη, παίρνοντας τὸ $m = 5$ καὶ τὸ $\pi \simeq 3{,}14$, βρίσκομε:

$$h \simeq 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7\ mm.$$

3ο. Πλάτος διακένου l καὶ πάχος ε. Σύμφωνα μὲ τὶς σχέσεις ποὺ εἶναι γραμμένες κάτω ἀπὸ τὸ σχῆμα 3-δ, ἔχομε:

$$l = \varepsilon = \frac{h}{2} = \frac{15{,}7}{2} \simeq 7{,}9\ mm.$$

4ο. Ὕψος t_κ τῆς κεφαλῆς, t_β τῆς βάσης καὶ t τοῦ δοντιοῦ ὁλόκληρου. Σύμφωνα πάλι μὲ ὅσα σημειώνονται κάτω ἀπὸ τὸ σχῆμα 3-δ ἔχομε:

$$t_\kappa = m = 5\ mm, \qquad t_\beta = 1{,}15\ m = 1{,}15 \cdot 5 \simeq 5{,}8\ mm,$$

$$t = t_\kappa + t_\beta \simeq 5 + 5{,}8 = 10{,}8\ mm.$$

5ο. Πλάτος β ἑνὸς δοντιοῦ. Ὅπως σημειώνομε κάτω ἀπὸ τὸ σχ. 3-δ, σὲ μιὰ κανονικὴ ὀδόντωση ἔχομε $\beta = 10\,m$, ἄρα μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος:

$$\beta = 10\,m = 10 \cdot 5 = 50\ mm.$$

6ο. Διάμετρος D_κ τῆς περιφέρειας τῶν κεφαλῶν. Ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 3-δ, τὴ μισὴ διάμετρο $D_\kappa / 2$ τὴ βρίσκομε προσθέτοντας στὴ μισὴ ἀρχικὴ διάμετρο $D_\alpha / 2$ τὸ ὕψος t_κ τῆς κεφαλῆς ἑνὸς δοντιοῦ· ἐπομένως:

$$D_\kappa = D_\alpha + 2t_\kappa$$

καὶ γιὰ τὸν τροχὸ τοῦ προβλήματος:

$$D_\kappa = D_\alpha + 2t_\kappa = 105 + 2 \cdot 5 = 115\ mm.$$

7ο. Διάμετρος D_β τῆς περιφέρειας τῶν βάσεων τῶν δοντιῶν. Τὸ σχ. 3-δ μᾶς δείχνει ὅτι

$$D_\beta / 2 = D_\alpha / 2 - t_\beta, \text{ ἄρα } D_\beta = D_\alpha - 2t_\beta$$

καὶ γιὰ τὸν τροχὸ τοῦ προβλήματος:

$$D_\beta \simeq 105 - 2 \cdot 5{,}8 = 93{,}4\ mm.$$

Ἀσκήσεις 1. Ἕνας τρυπανιστὴς χρειάσθηκε 6 *min* γιὰ νὰ τρυπήση ἕνα ἀτσαλένιο κομμάτι πάχους 72 *mm*. Βρῆτε τὴν κοπτικὴ ταχύτητα καθὼς καὶ τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τρυπανιοῦ ξέροντας τὴ διάμετρό του 16 *mm* καὶ τὸ προχώρημά του 0,1 *mm* ἀνὰ στροφή.

2. Γιὰ νὰ ἀνοίξωμε τρύπες σ' ἕνα κομμάτι ἀπὸ χυτοσίδηρο (μαντέμι) χρησιμοποιοῦμε τρυπάνι διαμέτρου 25 *mm*, τὸ ὁποῖο κάνει 2 στρ/*sec* (δηλ. 2 στροφὲς ἀνὰ δευτερόλεπτο) καὶ προχωρεῖ κατὰ 0,6 *mm* ἀνὰ στροφή. Πόσος χρόνος θὰ χρειασθῇ γιὰ τὸ ἄνοιγμα μιᾶς

τρύπας ποὺ ἔχει βάθος 240 *mm* καὶ πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ μετάλλου ποὺ μὲ τὸ τρύπημα θ' ἀφαιρεθῆ ἀπὸ τὸ κομμάτι; (Εἰδικὸ βάρος τοῦ χυτοσίδηρου 7,2. Δὲν θὰ λάβετε ὑπόψη τὸ κωνικὸ μέρος τῆς μύτης τοῦ τρυπανιοῦ καὶ θὰ δεχθῆτε ὅτι ἡ τρύπα ἔχει πέρα ὡς πέρα διάμετρο 25 *mm*.)

3. Ὑπολογίστε πόσος χρόνος χρειάζεται γιὰ ν' ἀνοίξετε μιὰ τρύπα διαμέτρου 15 *mm* καὶ βάθους 120 *mm* σ' ἕνα κομμάτι ἀπὸ ἀλουμίνιο μ' ἕνα τρυπάνι ἀπὸ ταχυχάλυβα· ἡ κοπτικὴ ταχύτητα εἶναι 100 *m/min* καὶ τὸ προχώρημα 0,25 *mm* ἀνὰ στροφή.

Ὑπολογίστε καὶ τὸ χρόνο ποὺ χρειάζεσθε γιὰ ν' ἀνοίξετε τὴν παραπάνω τρύπα μ' ἕνα τρυπάνι ἀπὸ χυτοχάλυβα, ὁπότε πρέπει νὰ μικρύνετε τὴν κοπτικὴ ταχύτητα κατὰ 30 %.

4. Ἕνας παράλληλος τόρνος στρέφεται μὲ ταχύτητα 175 *στρ/min*. Προσδιορίστε

1ο τὴν κοπτικὴ ταχύτητα σὲ *m/min* τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου στὸ τορνάρισμα ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ ποὺ ἔχει διάμετρο 60 *mm*,

2ο τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα σὲ *στρ/min* ποὺ ταιριάζει νὰ δώσωμε στὸν τόρνο γιὰ νὰ πετύχωμε κοπτικὴ ταχύτητα 33 *m/min* στὸ παραπάνω τορνάρισμα,

3ο πόσα μέτρα μῆκος θὰ ἔχη τὸ «ἀνάπτυγμα τῆς κοπῆς» (δηλ. πόσα μέτρα μῆκος θὰ διατρέξη τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο), ὅταν κατεργασθοῦμε μὲ τὸν τόρνο, σ' ἕνα μόνο πάσο, ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι διαμέτρου 60 *mm* καὶ μήκους 100 *mm* καὶ ὅταν τὸ προχώρημα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου εἶναι 0,15 *mm* ἀνὰ στροφή,

4ο πόσος χρόνος θὰ χρειασθῆ γιὰ τὸ τορνάρισμα αὐτοῦ τοῦ κυλινδρικοῦ κομματιοῦ, ἂν ἡ κατεργασία γίνη μὲ κοπτικὴ ταχύτητα 25 *m/min*.

5. Ἐφαρμόζοντας τὸν τύπο $t = \frac{l\,D}{315\,a v}$ τοῦ Μαθήματος αὐτοῦ ὑπολογίστε τὸ χρόνο ποὺ χρειάζεται ἕνα πάσο φρεζάρισμα 1ο μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ Προβλήματος 2 (φυσικά, θὰ πρέπη νὰ ξαναβρῆτε τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ βρέθηκε τότε ἀπευθείας, δηλ. χωρὶς χρήση τοῦ τύπου) καὶ 2ο μὲ τὰ ἀκόλουθα ἀριθμητικὰ δεδομένα:

$$l = 250\ mm, \quad a = 0{,}3\ mm, \quad D = 150\ mm, \quad v = 18\ m/min.$$

6. 1ο. Χρησιμοποιώντας τὶς σχέσεις $m = D_a / z$, $t_\kappa = m$, $D_\kappa = D_a + 2t_\kappa$ καὶ $D_\beta = D_a - 2t_\beta$ τοῦ § 4 δεῖξτε ὅτι σὲ μιὰ κανονικὴ ὀδόντωση ἔχομε:

$$D_\kappa = m\,(z+2) \quad \text{καὶ} \quad D_\beta = m\,(z-2{,}3).$$

2ο. Ἐκφράστε μὲ τὸ μοντοὺλ m καὶ τὸν ἀριθμὸ z τῶν δοντιῶν τὶς διαμέτρους D_κ καὶ D_β σὲ μιὰ «χαμηλὴ» ὀδόντωση, ξέροντας ὅτι σὲ μιὰ τέτοια ὀδόντωση ἔχομε:

$$t_\kappa = 0{,}75\, m \quad \text{καὶ} \quad t_\beta = 0{,}95\, m.$$

3ο. Ὑπολογίστε τὶς D_κ καὶ D_β σὲ μιὰ κανονικὴ καθὼς καὶ σὲ μιὰ χαμηλὴ ὀδόντωση, ὅταν $m = 7{,}5$ καὶ $z = 25$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Μάθημα 4.

Ἐφαρμογὲς τῶν κλασμάτων σὲ διάφορα προβλήματα.

1. Πρόβλημα. *Ἡ καρτέλα ἐργασίας γιὰ τὴν κατασκευὴ ἑνὸς διωστήρα (μιᾶς μπιέλας) προβλέπει διάρκεια ἐργασίας 3 h 20 min. Τὰ 3/5 αὐτοῦ τοῦ χρόνου ἀναφέρονται στὶς διάφορες μηχανουργικὲς κατεργασίες καὶ τὸ ὑπόλοιπο στὰ διάφορα μονταρίσματα.*

Ἕνα συνεργεῖο τεχνιτῶν κατάφερε νὰ οἰκονομήσῃ 30 min ἀπὸ τὴ διάρκεια ποὺ προοριζόταν γιὰ τὶς μηχανουργικὲς κατεργασίες καὶ τὸ 1/5 τῆς διάρκειας ποὺ εἶχε προβλεφθῆ γιὰ τὰ μονταρίσματα. Βρῆτε

1ο πόσο χρόνο ἐργάσθηκε τὸ συνεργεῖο,

2ο τί κλάσμα τῆς διάρκειας ποὺ πρόβλεπε ἡ καρτέλα ἐργασίας εἶναι τὸ χρονικὸ κέρδος ποὺ πραγματοποίησε τὸ συνεργεῖο.

1ο. Ἡ διάρκεια ποὺ πρόβλεπε ἡ καρτέλα εἶναι:

$$3 \cdot 60 + 20 = 200 \ min$$

καὶ ἀναλύεται στ' ἀκόλουθα δυὸ μέρη:

γιὰ μηχανουργικὲς κατεργασίες : $\frac{200 \cdot 3}{5} = 120 \ min,$

γιὰ μονταρίσματα : $\frac{200 \cdot 2}{5} = 80 \ min.$

Ἡ πραγματικὴ διάρκεια τῆς ἐργασίας τοῦ συνεργείου εἶναι:

μηχανουργικὲς κατεργασίες : $120 - 30 = 90 \ min,$

μονταρίσματα : $80 - \frac{80}{5} = 64 \ min.$

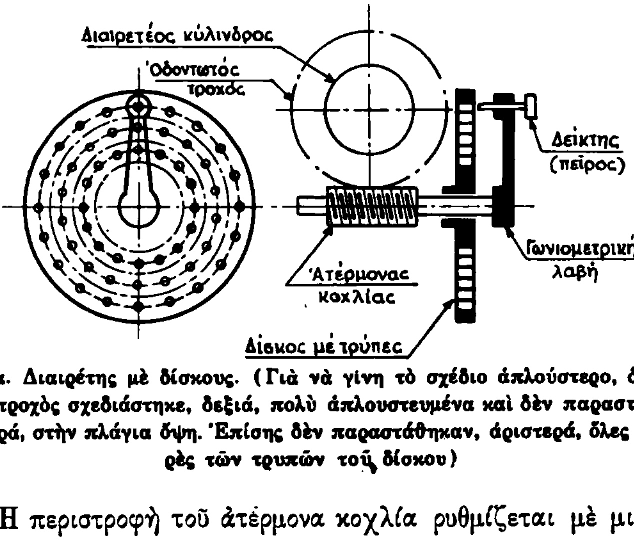
Συνολικὴ διάρκεια : $154 \ min = 2 \ h \ 34 \ min.$

2ο. Ἡ οἰκονομία χρόνου ποὺ πραγματοποίησε τὸ συνεργεῖο εἶναι:

200 — 154 = 46 *min* πάνω σὲ παραχωρημένη διάρκεια 200 *min*.

Ἄρα τὸ χρονικὸ κέρδος εἶναι ἴσο μὲ τὰ $\frac{46}{200} = \frac{23}{100}$ τῆς παραχωρημένης διάρκειας.

2. Διαιρέτης μὲ δίσκους. Γιὰ νὰ χωρίσωμε σὲ ἴσα μέρη τὴν περιφέρεια τῆς διατομῆς καθὼς καὶ τὴ διατομὴ ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ, τὸ μοντάρομε πάνω στὸν ἴδιο ἄξονα μ' ἕνα ὀδοντωτὸ τροχὸ ποὺ συμπλέκεται μὲ τὸν *ἀτέρμονα κοχλία* ἑνὸς *διαιρέτη* (διαιρετικοῦ μηχανήματος) μὲ δίσκους (σχ. 4-α).



Σχ. 4-α. Διαιρέτης μὲ δίσκους. (Γιὰ νὰ γίνη τὸ σχέδιο ἁπλούστερο, ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς σχεδιάστηκε, δεξιά, πολὺ ἁπλουστευμένα καὶ δὲν παραστάθηκε, ἀριστερά, στὴν πλάγια ὄψη. Ἐπίσης δὲν παραστάθηκαν, ἀριστερά, ὅλες οἱ σειρὲς τῶν τρυπῶν τοῦ δίσκου)

Ἡ περιστροφὴ τοῦ ἀτέρμονα κοχλία ρυθμίζεται μὲ μιὰ *γωνιομετρικὴ λαβή*, ἡ ὁποία ἔχει ἕναν κάθετο δείκτη (ἕναν πεῖρο) ποὺ μπορεῖ νὰ χώνεται σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς τρύπες ἑνὸς (κυκλικοῦ) *δίσκου* στερεωμένου πάνω στὸ σκελετὸ τοῦ διαιρέτη.

Ἕνας διαιρέτης ὀνομάζεται τοῦ 1/40, ὅταν ὁ ἀτέρμονας κοχλίας του στρέφεται 40 φορὲς ταχύτερα ἀπὸ τὸν συμπλεκόμενο ὀδοντωτὸ τροχὸ *(ὁ ἀτέρμονας κοχλίας ἔχει μονὸ (ἁπλὸ) σπείρωμα καὶ ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς 40 δόντια).*

Ἂς ὑποθέσωμε τώρα πὼς ἕνας τέτοιος διαιρέτης διαθέτει μιὰ σειρὰ ἀπὸ 3 δίσκους μὲ τρύπες· αὐτὲς βρίσκονται, γιὰ τὸν κάθε δίσκο, σὲ ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις πάνω σὲ 6 ἢ 7 περιφέρειες ὁμόκεντρες μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ δίσκου. Οἱ ἀριθμοὶ τῶν τρυπῶν πάνω στὶς περιφέρειες αὐτὲς (ἀπὸ τὴ μικρότερη πρὸς τὴ μεγαλύτερη) ἂς εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀκόλουθοι:

15	16	17	18	19	20		τρύπες στὸν 1ο δίσκο,
21	23	25	27	29	31	33	» » 2ο » ,
37	39	41	43	47	49		» » 3ο » .

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε *πρῶτος* ἀριθμός, ποὺ δὲν εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ 47, (βλ. πίνακα πρώτων ἀριθμῶν στὸν Τόμ. Β', Μάθ. 17), διαιρεῖ ἀκριβῶς ἕναν τουλάχιστο ἀπὸ τοὺς παραπάνω ἀριθμούς. Π.χ. ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 5 εἶναι (ἀκριβὴς) διαιρέτης τοῦ 15, τοῦ 20 καὶ τοῦ 25· ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 47 εἶναι διαιρέτης τοῦ 47.

Μποροῦμε τώρα νὰ λύσωμε τὰ παρακάτω προβλήματα.

1ο. Τὸ κυλινδρικὸ κομμάτι νὰ στραφῆ κατὰ 1/25 στροφῆς.

Γιὰ νὰ στραφῆ τὸ κομμάτι, ἄρα καὶ ὁ ὀδοντωτὸς τροχός, κατὰ 1/25 στροφῆς, πρέπει νὰ στρέψωμε τὸν ἀτέρμονα κοχλία, ἄρα καὶ τὴ γωνιομετρικὴ λαβή, κατὰ 40/25 οφῆς, δηλαδὴ κατὰ 1 στροφὴ καὶ 15/25 στροφῆς.

Θὰ μοντάρωμε λοιπὸν τὸν 2ο δίσκο στὸ σκελετὸ τοῦ διαιρέτη καὶ θὰ στρέψωμε τὴ λαβὴ κατὰ 1 στροφὴ καὶ 15 διαιρέσεις ἀπὸ τὶς 25 στὶς ὁποῖες εἶναι διαιρεμένη ἡ περιφέρεια μὲ τὶς 25 τρύπες.

Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε τὴ διατομὴ τοῦ κυλινδρικοῦ κομματιοῦ σὲ 25 ἴσα μέρη (ἴσους κυκλικοὺς τομεῖς) καὶ νὰ χαράξωμε μιὰ γωνία ἴση μὲ $\frac{360^\circ}{25} = 14^\circ\ 24'$.

2ο. Τὸ κυλινδρικὸ κομμάτι νὰ στραφῆ κατὰ 1/36 στροφῆς.

Γιὰ νὰ γίνη αὐτό, πρέπει ἡ γωνιομετρικὴ λαβὴ νὰ στραφῆ κατὰ 40/36 στροφῆς, δηλ. κατὰ 1 στροφὴ καὶ $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ στροφῆς.

Περιφέρεια μὲ 9 μόνο τρύπες δὲν ὑπάρχει· μποροῦμε ὅμως νὰ τρέψωμε τὸ κλάσμα 1/9 σ' ἕνα ἴσο του ποὺ νὰ ἔχη παρονομαστὴ ἕναν ἀπὸ τοὺς παραπάνω ἀριθμοὺς τρυπῶν, π.χ. στὸ 2/18. Ἑπομένως 1 στρ $\frac{1}{9} = 1$ στρ. $\frac{2}{18}$.

Θὰ μοντάρωμε τώρα στὸ σκελετὸ τοῦ διαιρέτη τὸν 1ο δίσκο καὶ θὰ στρέψωμε τὴ γωνιομετρικὴ λαβὴ κατὰ 1 στροφὴ καὶ 2 διαιρέσεις ἀπὸ τὶς 18 στὶς ὁποῖες εἶναι διαιρεμένη ἡ περιφέρεια μὲ τὶς 18 τρύπες.

Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο διαιροῦμε τὴ διατομὴ ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ σὲ 36 ἴσα μέρη ἢ χαράζομε μιὰ γωνία $\frac{360^\circ}{36} = 10^\circ$.

3ο. Τὸ κυλινδρικὸ κομμάτι νὰ στραφῆ κατὰ 1/111 στροφῆς.

Ἡ λαβὴ τοῦ διαιρέτη πρέπει τώρα νὰ στραφῆ κατὰ $\frac{40}{111}$ στροφῆς. Τὸ κλάσμα ὅμως $\frac{40}{111} = \frac{2^3 \cdot 5}{3 \cdot 37}$ εἶναι ἀνάγωγο (ὄχι ἁπλοποιήσιμο) καὶ ὁ παρονομαστής του 111 (ποὺ ἀναλύεται στὸ γινόμενο $3 \cdot 37$ πρώτων παραγόντων ὄχι μεγαλύτερων ἀπὸ τὸν 47) δὲν παρουσιάζεται στὸν παραπάνω πίνακα ἀριθμῶν τρυπῶν. Γι' αὐτὸ δὲν μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὅπως στὶς δυὸ παραπάνω περιπτώσεις. Χρησιμοποιοῦμε τότε τὴν ἀκόλουθη μέθοδο ποὺ λέγεται μέθοδος τῆς *σύνθετης διαίρεσης*.

Ἀναλύσμε τὸ $\frac{40}{111}$ σὲ ἄθροισμα (ἢ διαφορὰ) κλασμάτων μὲ παρονομαστὲς ποὺ *εἴτε ἐμφανίζονται στὸν παραπάνω πίνακα ἀριθμῶν τρυπῶν εἴτε, γενικότερα, εἶναι διαιρέτες κάποιων ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς*. Π.χ.

$$\frac{40}{111} = \frac{40}{3 \cdot 37} = \frac{3+37}{3 \cdot 37} = \frac{3}{3 \cdot 37} + \frac{37}{3 . 37} = \frac{1}{37} + \frac{1}{3}.$$

Τρέπομε ἀκόμη τὸ $\frac{1}{3}$ σὲ ἴσο κλάσμα μὲ παρανομαστὴ τὸν ἀριθμὸ $39 = 3 \cdot 13$ ποὺ ἐμφανίζεται στὸν παραπάνω πίνακα ἀριθμῶν τρυπῶν. Ἔτσι ἔχομε

$$\frac{40}{111} = \frac{1}{37} + \frac{13}{39}.$$

Θὰ μοντάρωμε τώρα στὸ σκελετὸ τοῦ διαιρέτη τὸν 3ο δίσκο καὶ θὰ στρέψωμε τὴ γωνιομετρικὴ λαβὴ πρῶτα κατὰ μία διαίρεση τῆς περιφέρειας μὲ τὶς 37 τρύπες, ὕστερα, μὲ τὴν ἴδια φορὰ στροφῆς, κατὰ 13 διαιρέσεις τῆς περιφέρειας μὲ τὶς 39 τρύπες.

Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο διαιροῦμε τὴ διατομὴ τοῦ κυλινδρικοῦ κομματιοῦ σὲ 111 ἴσα μέρη ἢ χαράζομε μιὰ γωνία $\frac{360}{111}$ μοιρῶν $= 3°$ καὶ $\frac{27}{111}$ μοίρας.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα γίνεται φανερὸ πὼς μὲ τοὺς τρεῖς παραπάνω δίσκους μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε τὴ διατομὴ τοῦ κυλινδρικοῦ κομματιοῦ σὲ ν ἴσα μέρη ὅταν ὁ ἀκέραιος ν ἀναλύεται σὲ γινόμενο πρώτων παραγόντων ὄχι μεγαλύτερων, ἀπὸ τὸν 47.

Ἀσκήσεις. 1. Ἡ τράπεζα μιᾶς ξυλουργικῆς πλάνης κάνει 7 διαδρομὲς σὲ 2 *min*· μιὰ διαδρομὴ ἀπαρτίζεται ἀπὸ πηγεμὸ καὶ γυρισμὸ τῆς τράπεζας καὶ ἔχει (συνολικὸ) μῆκος 0,80 *m*. Ἡ ταχύτητα τῆς τράπεζας στὸ γυρισμό, ὁπότε τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο δὲν δουλεύει, εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν ταχύτητά της στὸν πηγεμό. Τέλος τὸ κομμάτι ποὺ πλανίζομε ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὰ $^1/_8$ τοῦ μήκους μιᾶς διαδρομῆς. Ὑπολογίστε τώρα 1ο πόση εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου στὸν πηγεμὸ καὶ πόση στὸ γυρισμό, 2ο πόσο χρόνο δουλεύει τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο σὲ μία διαδρομή.

2. Ἕνας ἀτέρμονας κοχλίας μὲ διπλὸ σπείρωμα θέτει σὲ κίνηση ἕναν ὀδοντωτὸ τροχὸ μὲ 40 δόντια. Πόσο πρέπει νὰ στρέψωμε τὸν ἀτέρμονα κοχλία γιὰ νὰ στραφῇ ὁ τροχὸς κατὰ 1/50 στροφῆς; κατὰ 1/26 στροφῆς; κατὰ 1/45 στροφῆς;

Πόσο πρέπει νὰ στρέψωμε τὸν κοχλία γιὰ νὰ στραφῇ ὁ τροχὸς κατὰ γωνία 36° ; κατὰ 60° ; κατὰ 55° ;

(Νὰ ἔχετε ὑπόψη ὅτι μία στροφὴ τοῦ ἀτέρμονα κοχλία στρέφει τὸν ὀδοντωτὸ τροχὸ κατὰ δύο δόντια).

3. Γιὰ νὰ κόψωμε (χαράξωμε) τὴν ὀδόντωση ἑνὸς ὀδοντωτοῦ τροχοῦ μὲ 48 δόντια πρέπει νὰ διαιρέσωμε τὴν κυκλικὴ διατομή του σὲ

$96 = 2 \cdot 48$ ἴσα μέρη. Πῶς μποροῦμε νὰ τὸ κάμωμε αὐτὸ χρησιμοποιώντας ἕνα διαιρέτη τοῦ 1/60 ποὺ ἔχει τρεῖς δίσκους μὲ τοὺς ἀκόλουθους ἀριθμοὺς τρυπῶν;

14	26	37	43	49	62	(1ος δίσκος)
18	32	38	46	58		(2ος δίσκος)
22	34	41	47	60		(3ος δίσκος).

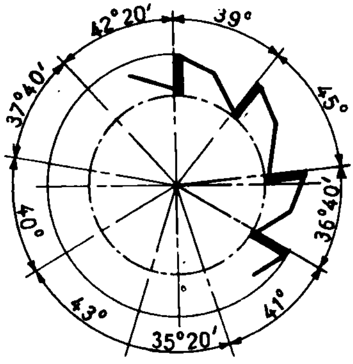
4. Χρησιμοποιώντας τὸν διαιρέτη τοῦ Μαθήματος αὐτοῦ διαιρέστε 1ο ἕναν κύκλο σὲ 52 ἴσα μέρη, 2ο ἕναν κύκλο σὲ 99 ἴσα μέρη.

5. Χρησιμοποιώντας τὸν ἴδιο διαιρέτη διαιρέστε ἕναν κύκλο σὲ 77 ἴσα μέρη· (θὰ ἐφαρμόσετε τὴ μέθοδο τῆς σύνθετης διαίρεσης).

6. Μιὰ τράπεζα μετακινεῖται εὐθύγραμμα μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς ἀτέρμονα κοχλία κατὰ τὴ διεύθυνση τοῦ ἄξονα τοῦ κοχλία. Ἡ μετατόπιση τῆς τράπεζας γιὰ μία στροφὴ τοῦ κοχλία εἶναι ἴση μὲ τὸ βῆμα 5 mm τοῦ κοχλία· τὴν περιστροφὴ τοῦ κοχλία τὴν κανονίζομε μὲ τοὺς τρεῖς τρυπητοὺς δίσκους τοῦ § 2. Πάνω στὴν τράπεζα μοντάρομε ἕνα πρισματικὸ κομμάτι (π.χ. μιὰ λάμα), παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κοχλία, γιὰ νὰ τὸ διαιρέσωμε σὲ μέρη ἴσου μήκους. Βρῆτε πῶς πρέπει νὰ ἐργασθοῦμε γιὰ νὰ διαιρέσωμε

1ο ἕνα κομμάτι μήκους 50 mm σὲ 7 ἰσόμηκα μέρη,

2ο ἕνα κομμάτι μήκους 48 mm σὲ 9 ἰσόμηκα μέρη.



Σχ. 4-β. Διατομὴ ἑνὸς γλυφάνου.

7. Γιὰ νὰ χαράξωμε τὴ διατομὴ ἑνὸς γλυφάνου (ἀλεζουάρ), ὅπως αὐτὸ ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 4-β, χρησιμοποιοῦμε ἕναν διαιρέτη τοῦ 1/40 μὲ ἕνα δίσκο ποὺ ἔχει τὶς ἀκόλουθες 9 κυκλικὲς σειρὲς ἀπὸ

15, 18, 23, 27, 29,
31, 37, 41, 47

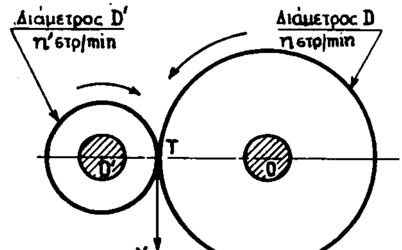
τρύπες ἀντιστοίχως. Βρῆτε πόσο πρέπει γὰ στρέψετε κάθε φορὰ τὴ λαβὴ τοῦ ἀτέρμονα κοχλία τοῦ διαιρέτη γιὰ νὰ χαράξετε πάνω στὴ διατομὴ τοῦ γλυφάνου τὶς 9 ἐπίκεντρες γωνίες ποὺ τὰ μεγέθη τους δίνονται στὸ σχ. 4-β. (Νὰ ἔχετε ὑπόψη σας ὅτι γιὰ ὅλες αὐτὲς τὶς χαράξεις θὰ πρέπη νὰ χρησιμοποιήσετε τὴν ἴδια σειρὰ τρυπῶν τοῦ δίσκου).

Μάθημα 5.

Λόγοι καὶ ἀναλογίες.

Μετάδοση μιᾶς περιστροφικῆς κίνησης μὲ κυλίνδρους τριβῆς ἢ μὲ τροχαλίες καὶ λουρί.

1. **Γιὰ νὰ μεταδώσωμε τὴν περιστροφικὴ κίνηση ἑνὸς ἄξονα Ο σ' ἕναν ἄλλο ἄξονα Ο'**, παράλληλο καὶ ἀρκετὰ γειτονικό, μποροῦμε νὰ μοντάρωμε πάνω σ' αὐτοὺς τοὺς ἄξονες δύο κυλίνδρους (σχ. 5-α) ποὺ μὲ κάποια πίεση νὰ ἐφάπτωνται καθ' ὅλο τὸ μῆκος τους. Μὲ τὴν περιστροφή του ὁ κύλινδρος Ο τρίβεται τότε πάνω στὸν κύλινδρο Ο' καὶ τὸν παρασύρει σὲ μιὰ περιστροφὴ κατ' ἀντίθετη φορά. Ἡ μετάδοση μιᾶς περιστροφικῆς κίνησης μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο λέγεται *μετάδοση μὲ κυλίνδρους (ἢ τροχοὺς) τριβῆς*.



Σχ. 5-α. Μετάδοση περιστροφικῆς κίνησης μὲ κυλίνδρους τριβῆς.

Ἂν ἡ μετάδοση τῆς κίνησης γίνεται χωρὶς γλίστρημα (ὀλίσθηση) τοῦ ἑνὸς κυλίνδρου πάνω στὸν ἄλλο, τότε ἡ γραμμικὴ ταχύτητα v τοῦ σημείου ἐπαφῆς T (σχ. 5-α) εἶναι ἡ ἴδια καὶ γιὰ τοὺς δυὸ κυλίνδρους. Ἔστω τώρα ὅτι οἱ κύλινδροι Ο καὶ Ο' ἔχουν διαμέτρους D m ὁ πρῶτος, D' m ὁ δεύτερος καὶ περιστροφικὲς ταχύτητες n *στρ/min* ὁ πρῶτος, n' *στρ/min* ὁ δεύτερος· τότε θὰ ἔχωμε

$$v = \pi Dn \; m/min = \frac{\pi Dn}{60} \; m/sec \text{ γιὰ τὸν πρῶτο,}$$

$$v = \pi D'n' \; m/min = \frac{\pi Dn}{60} \; m/sec \text{ γιὰ τὸν δεύτερο.}$$

Ἑπομένως:

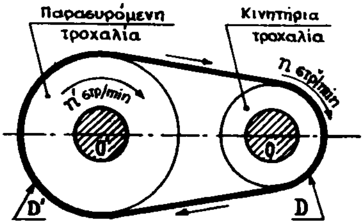
$$\pi Dn = \pi D'n' \text{ ἤ, ἀφοῦ διαιρέσωμε διὰ } \pi, \; Dn = D'n'.$$

Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὶς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν (Τόμ. Β' Μάθ. 23),

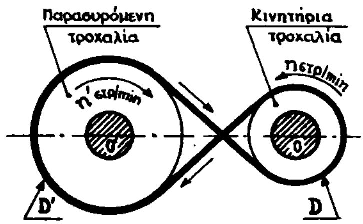
$$\frac{n}{n'} = \frac{D'}{D}.$$

Ὥστε, ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων τῶν δύο κυλίνδρων τριβῆς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν διαμέτρων τους.

2. Μετάδοση τῆς περιστροφικῆς κίνησης μὲ τροχαλίες καὶ λουρὶ (ἱμάντα). Ἂν οἱ ἄξονες O καὶ O' βρίσκωνται μακριὰ ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλο καὶ δὲν μποροῦμε νὰ μεταφέρωμε τὴν περιστροφικὴ κίνηση τοῦ O στὸν O' μὲ τὸν παραπάνω τρόπο, τότε μοντάρομε πάνω στοὺς ἄξονες δυὸ τροχαλίες καὶ τὶς συνδέομε μ' ἕνα λουρὶ (ἱμάντα) κατάλληλα τεντωμένο (σχ. 5-β καὶ σχ. 5-γ).



Σχ. 5-β. Λουρὶ ἀδιασταύρωτο· οἱ δυὸ τροχαλίες στρέφονται μὲ τὴν ἴδια φορά.



Σχ. 5-γ. Λουρὶ διασταυρωμένο· οἱ δυὸ τροχαλίες στρέφονται μὲ ἀντίθετη φορά.

Ἡ *κινητήρια* τροχαλία O θέτει σὲ κίνηση τὸ λουρί, ὅταν μὲ τὴν περιστροφή της τρίβεται πάνω σ' αὐτό· τὸ λουρὶ πάλι, κατὰ τὴν κίνησή του, τρίβεται πάνω στὴν τροχαλία O' καὶ παρασύρει σὲ περιστροφικὴ κίνηση τὴ δεύτερη αὐτὴ τροχαλία, ποὺ λέγεται *παρασυρόμενη*. Ἡ περιστροφὴ τῆς παρασυρόμενης τροχαλίας ἔχει τὴν ἴδια φορὰ μὲ τὴν περιστροφὴ τῆς κινητήριας, ὅταν τὸ λουρὶ εἶναι *ἀδιασταύρωτο* (σχ. 5-β) καὶ τὴν ἀντίθετη, ὅταν τὸ λουρὶ εἶναι *διασταυρωμένο*.

Ἂν τώρα τὸ λουρὶ δὲν γλιστρᾶ (δὲν ὀλισθαίνῃ) πάνω στὶς ζάντες (στὶς περιφέρειες) τῶν τροχαλιῶν, τότε ἡ γραμμικὴ ταχύτητα v *(m/min)* ἑνὸς σημείου τῆς ζάντας καὶ τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης τροχαλίας εἶναι ἴση μὲ τὴ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ λουριοῦ. Ἑπομένως, οἱ δυὸ τροχαλίες θὰ ἔχουν τὴν ἴδια περιφερειακὴ ταχύτητα. Ἂν λοιπὸν οἱ τροχαλίες O καὶ O′ ἔχουν διαμέτρους D *m* καὶ D' *m* ἀντιστοίχως καὶ περιστροφικὲς ταχύτητες n *στρ/min* ἡ πρώτη, n' *στρ/min* ἡ δεύτερη, τότε θὰ ἔχωμε πάλι τὴν ἰσότητα

$$\pi D n = \pi D' n \ m/min \text{ ἤ, ἁπλούστερα, } Dn = D'n'.$$

Ἄρα

$$\frac{n}{n'} = \frac{D'}{D}.$$

Ὥστε, ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων τῶν δυὸ τροχαλιῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν διαμέτρων τους.

3. Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

1ο. Δυὸ κύλινδροι τριβῆς ἔχουν διαμέτρους 90 καὶ 135 χιλιοστῶν (mm) ἀντιστοίχως. Ἂν ὁ πρῶτος στρέφεται μὲ 120 στρ/min, ποιά εἶναι ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ δεύτερου;

Ἐφαρμόζοντας τὴ σχέση $\frac{n}{n'} = \frac{D'}{D}$ ἢ $\frac{n'}{n} = \frac{D}{D'}$, μὲ $n = 120$ *στρ/min*, $D = 0{,}090$ *m* καὶ $D' = 0{,}135$, βρίσκομε

$$\frac{n'}{120} = \frac{0{,}090}{0{,}135} = \frac{90}{135}$$

καὶ $$n' = \frac{120 \cdot 90}{135} = \frac{24 \cdot 90}{27} = \frac{24 \cdot 10}{3} = 80 \text{ στρ/min}.$$

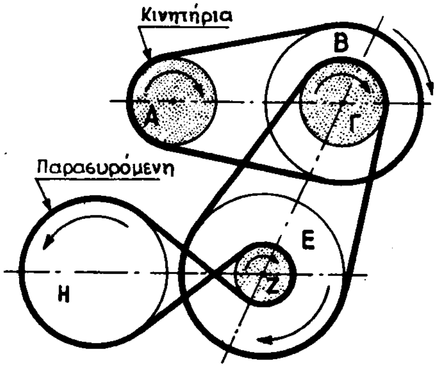
2ο. Ξέροντας ὅτι ἡ κινητήρια τροχαλία ἔχει διάμετρο $D = 240$ mm καὶ ὅτι στρέφεται μὲ $n = 300$ στρ/min, ὑπολογίστε τὴ διάμετρο D' ποὺ πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ παρασυρόμενη τροχαλία γιὰ νὰ πάρῃ περιστροφικὴ ταχύτητα $n' = 450$ στρ/min.

Ἐφαρμόζοντας πάλι τὴ σχέση $\frac{n}{n'} = \frac{D'}{D}$ βρίσκομε

$$\frac{300}{450}=\frac{D'}{240}$$

καὶ $$D'=\frac{240\cdot 300}{450}=\frac{240\cdot 6}{9}=160\ mm.$$

4. Σύστημα τροχαλιῶν. Ἂς πάρωμε τὸ σύστημα τῶν τροχαλιῶν ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 5-δ. Ἡ κίνηση τῆς τροχαλίας A μεταδίδεται στὴν τροχαλία H μὲ τὶς *ἐνδιάμεσες τροχαλίες* B, Γ, E καὶ Z. Ἀπ' αὐτὲς τὶς ἕξι τροχαλίες, τὶς A, Γ καὶ Z θὰ τὶς λέμε *ὁδηγητικές*, τὶς B, E καὶ H, *ὁδηγούμενες*. Ἂς εἶναι D_A, D_B, ... , D_H τὰ μήκη τῶν διαμέτρων τους (μετρημένων μὲ τὴν ἴδια μονάδα μήκους) καὶ n_A, n_B, ... , n_H οἱ ἀντίστοιχες περιστροφικὲς ταχύτητές τους σὲ *στρ/min*. Ἐφαρμόζοντας σὲ κάθε ζευγάρι τροχαλιῶν ποὺ συνδέονται μὲ τὸ ἴδιο λουρὶ τὴ σχέση τοῦ § 2, βρίσκομε γιὰ τὰ ζεύγη (Η, Ζ), (Ε, Γ) καὶ (Β, Α):



Σχ. 5-δ. Σύστημα τροχαλιῶν.

$$\frac{n_H}{n_Z}=\frac{D_Z}{D_H},\quad \frac{n_E}{n_\Gamma}=\frac{D_\Gamma}{D_E},\quad \frac{n_B}{n_A}=\frac{D_A}{D_B}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατὰ μέλη τὶς τρεῖς αὐτὲς ἰσότητες (δηλαδὴ τὰ ἀριστερὰ μέλη μεταξύ τους καὶ τὰ δεξιὰ μέλη ἐπίσης), βρίσκομε τὴν ἰσότητα:

$$\frac{n_H\cdot n_E\cdot n_B}{n_Z\cdot n_\Gamma\cdot n_A}=\frac{D_Z\cdot D_\Gamma\cdot D_A}{D_H\cdot D_E\cdot D_B}.$$

Οἱ τροχαλίες Β καὶ Γ εἶναι ὅμως μονταρισμένες πάνω στὸν ἴδιο ἄξονα, ἑπομένως ἔχουν τὴν ἴδια περιστροφικὴ ταχύτητα:

$$n_B = n_\Gamma.$$

Γιὰ ὅμοιο λόγο οἱ τροχαλίες Ε καὶ Ζ ἔχουν τὴν ἴδια περιστροφικὴ ταχύτητα:

$$n_E = n_Z.$$

Ἑπομένως $n_E \cdot n_B = n_Z \cdot n_\Gamma$. Μποροῦμε λοιπὸν ν' ἀπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα στὸ ἀριστερὸ μέλος τῆς παραπάνω ἰσότητας, ὁπότε βρίσκομε:

$$\frac{n_H}{n_A} = \frac{D_Z \cdot D_\Gamma \cdot D_A}{D_H \cdot D_E \cdot D_B}.$$

Ὁ λόγος $\dfrac{n_H}{n_A}$ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητας τῆς παρασυρόμενης τροχαλίας πρὸς τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τῆς κινητήριας λέγεται *λόγος τοῦ συστήματος τροχαλιῶν.*

Ὥστε, ὁ λόγος ἑνὸς συστήματος τροχαλιῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τοῦ γινομένου τῶν μηκῶν ποὺ ἔχουν οἱ διάμετροι τῶν ὁδηγητικῶν τροχαλιῶν πρὸς τὸ γινόμενο τῶν μηκῶν ποὺ ἔχουν οἱ διάμετροι τῶν ὁδηγούμενων τροχαλιῶν.

5. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. *Στὸ σύστημα τροχαλιῶν ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 5-δ, ἂς εἶναι $n_A = 1\,200$ στρ/min καὶ (σὲ mm):*

$$D_A = 100, \qquad D_B = 140, \qquad D_\Gamma = 125,$$
$$D_E = 250, \qquad D_Z = 45\ , \qquad D_H = 160.$$

Ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ συστήματος καὶ τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τῆς παρασυρόμενης τροχαλίας Η.

Ἐφαρμόζοντας τὴν τελευταία σχέση τοῦ §4 βρίσκομε γιὰ τὸ λόγο τοῦ συστήματος:

$$\frac{n_H}{n_A} = \frac{45 \cdot 125 \cdot 100}{160 \cdot 250 \cdot 140} = \frac{45}{448}$$

καὶ γιὰ τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τῆς τροχαλίας H:

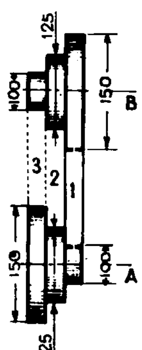
$$n_H = n_A \cdot \frac{45}{448} = \frac{1\,200 \cdot 45}{448} \simeq 121 \text{ στρ/min}.$$

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ἡ τροχαλία *H* στρέφεται κατ' ἀντίθετη φορὰ ὡς πρὸς τὶς τροχαλίες *A*, *B*, *Γ*, *E* καὶ *Z*.

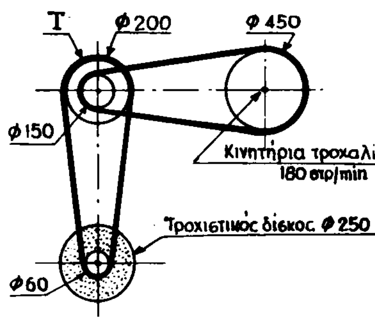
Ἀσκήσεις. *1.* Δυὸ παράλληλοι ἄξονες στροφῆς ἀπέχουν ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλο 250 *mm*. Ὑπολογίστε τὶς διαμέτρους τῶν κυλίνδρων τριβῆς οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ μονταριστοῦν πάνω στοὺς ἄξονες αὐτοὺς γιὰ νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων τῶν δυὸ ἀξόνων ἴσος μὲ $^3/_2$. Ἂν τώρα ὁ κινητήριος ἄξονας στρέφεται μὲ 450 *στρ/min*, ποιὰ θὰ εἶναι ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ παρασυρόμενου ἄξονα, ὅταν εἶναι ἐπὶ πλέον γνωστὸ ὅτι αὐτὸς ἔχει μικρότερη περιστροφικὴ ταχύτητα ἀπὸ τὸν κινητήριο;

2. Ὁ ἄξονας μιᾶς ἁλωνιστικῆς μηχανῆς, ὁ ὁποῖος θέλομε νὰ στρέφεται μὲ 1 190 *στρ/min*, εἶναι ἐφοδιασμένος μὲ μιὰ τροχαλία διαμέτρου 220 *mm*. Στὸν ἄξονα αὐτὸν πρόκειται νὰ μεταδώσωμε μ' ἕνα λουρὶ τὴν περιστροφικὴ κίνηση τοῦ ἄξονα ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ κινητῆρα ποὺ στρέφεται μὲ 1 400 *στρ/min*. Ποιὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τῆς τροχαλίας ποὺ θὰ μοντάρωμε στὸν ἄξονα τοῦ κινητῆρα γιὰ νὰ μεταδώσωμε στὸν ἄξονα τῆς ἁλωνιστικῆς μηχανῆς τὴν ταχύτητα τῶν 1 190 *στρ/min* ποὺ εἴπαμε;

3. Ὁ ἄξονας Α (σχ. 5-ε) μπορεῖ νὰ στρέφεται μὲ τὶς ἀκόλουθες ταχύτητες: 250, 300, 500 καὶ 600 *στρ/min*. Ὑπολογίστε τὶς ἀντίστοιχες περιστροφικὲς ταχύτητες τοῦ ἄξονα Β στὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς τρεῖς θέσεις 1, 2, 3 τοῦ λουριοῦ.



Σχ. 5-ε. Ὑπολογίστε τὶς περιστροφικὲς ταχύτητες τοῦ ἄξονα Β.



Σχ. 5-ς. Ἡ τροχαλία Τ μεταδίνει τὴν κίνηση στὸν τροχιστικὸ δίσκο.

4. Ἕνας τροχιστικὸς δίσκος μπαίνει σὲ κίνηση μὲ τὸν τρόπο τὸν ὁποῖο δείχνει τὸ σχ. 5-ς. Ὑπολογίστε τὰ ἑξῆς:

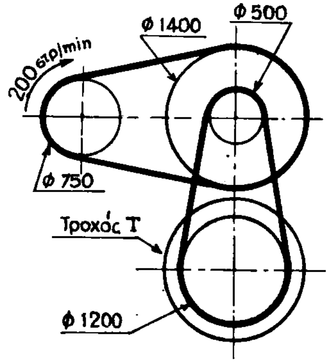
1° τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα τοῦ δίσκου μὲ τὶς διαστάσεις ποὺ δίνει τὸ σχῆμα·

2° ἂν ἀλλάξωμε τὴ διάμετρο τοῦ δίσκου ἀπὸ 250 mm σὲ 180 mm, ποιὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τῆς τροχαλίας Τ γιὰ νὰ διατηρήσῃ ὁ δίσκος τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα ποὺ βρήκατε στὸ 1°;

5. Στὸν τροχὸ Τ τοῦ σχ. 5-ζ δίνομε κίνηση μὲ τὸ σύστημα τροχαλιῶν ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα.

1°. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ Τ ἔχοντας ὑπόψη ὅτι ἀπὸ τὸ γλίστρημα τοῦ λουριοῦ στὸ καθένα ἀπὸ τὰ δυὸ ζευγάρια τροχαλιῶν χάνομε ταχύτητα 2 %.

2°. Ἂν θέλωμε ὁ τροχὸς Τ νὰ ἔχῃ περιστροφικὴ ταχύτητα ὄχι αὐτὴν ποὺ βρήκατε στὸ 1° ἀλλὰ 60 $στρ/min$, ποιὰν περιστροφικὴ ταχύτητα πρέπει νὰ δώσωμε στὴν κινητήρια τροχαλία;



Σχ. 5-ζ. Μὲ τὸ σύστημα αὐτὸ τῶν τροχαλιῶν δίνομε κίνηση στὸν τροχὸ Τ.

Μάθημα 6.

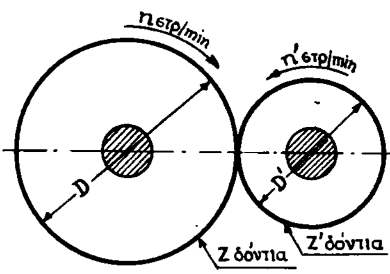
Λόγοι καὶ ἀναλογίες.
Μετάδοση τῆς περιστροφικῆς κίνησης μὲ ὀδοντωτοὺς τροχούς.

Ὅταν θέλωμε κατὰ τὴ μετάδοση μιᾶς περιστροφικῆς κίνησης ἀπὸ ἕναν ἄξονα σ' ἕναν ἄλλο ν' ἀποφύγωμε τὸ γλίστρημα ποὺ παρουσιάζεται μὲ τοὺς κυλίνδρους τριβῆς ἢ μὲ τὶς τροχαλίες καὶ τὰ λουριά, τότε χρησιμοποιοῦμε τροχοὺς ποὺ ἔχουν δόντια στὴν περιφέρειά τους καὶ ποὺ γι' αὐτὸ λέγονται *ὀδοντωτοὶ τροχοί*.

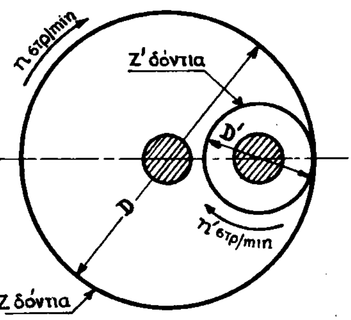
Οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ ὀνομάζονται κυλινδρικοί, ὅταν ἔχουν κυλινδρικὸ σχῆμα καὶ κωνικοὶ ὅταν ἔχουν σχῆμα κόλουρου κώνου. Παρακάτω θὰ ἐξετάσωμε μόνο κυλινδρικοὺς ὀδοντωτοὺς τροχούς.

1. Μετάδοση μιᾶς περιστροφικῆς κίνησης μ' ἕνα ζευγάρι ὀδοντωτῶν τροχῶν.

Ἂς πάρωμε δυὸ ὀδοντωτοὺς τροχοὺς ποὺ μποροῦν νὰ συμπλεχθοῦν ὁ ἕνας μὲ τὸν ἄλλο καὶ μὲ τὰ ἀκόλουθα δεδομένα:



Σχ. 6-α. Μετάδοση μὲ ἐξωτερικὸ τροχίσκο.



Σχ. 6-β. Μετάδοση μὲ ἐσωτερικὸ τροχίσκο.

Ἀρχικὲς διάμετροι: D καὶ D'.
Ἀριθμοὶ δοντιῶν: z καὶ z'.
Περιστροφικὲς ταχύτητες: n καὶ n' στρ/min.

Ἕνα ζευγάρι μὲ τοὺς δυὸ αὐτοὺς συμπλεγμένους τροχοὺς ἰσοδυναμεῖ μὲ ἕνα ζευγάρι κυλίνδρων τριβῆς ποὺ κινοῦνται χωρὶς νὰ γλιστροῦν καθόλου ὁ ἕνας πάνω στὸν ἄλλο καὶ ποὺ ἔχουν διαμέτρους D καὶ D' καὶ περιστροφικὲς ταχύτητες n καὶ n'. Ἑπομένως, σύμφωνα μὲ τὸ Μάθ. 5, θὰ ἔχωμε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{n}{n'}=\frac{D'}{D}. \tag{1}$$

Ἀπὸ τὸ Μάθ. 3, § 4 προκύπτει ὅτι δυὸ ὀδοντωτοὶ τροχοί, ποὺ μποροῦν νὰ συμπλεχθοῦν, ἔχουν τὸ ἴδιο μοντούλ:

$$m=\frac{D}{z}=\frac{D'}{z'}.$$

Ἑπομένως

$$D=mz \text{ καὶ } D'=mz'.$$

Ἂν βάλωμε μέσα στὴν ἀναλογία (1) αὐτὲς τὶς ἐκφράσεις τῶν D καὶ D', θὰ βροῦμε ὅτι:

$$\frac{n}{n'}=\frac{mz'}{mz}$$

καί, ἀφοῦ ἁπλοποιήσωμε διὰ m,

$$\frac{n}{n'}=\frac{z'}{z} \text{ καὶ } \frac{n'}{n}=\frac{z}{z'}. \tag{2}$$

Ὥστε, ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων δύο τροχῶν ποὺ συμπλέκονται εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀριθμῶν τῶν δοντιῶν τους.

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος 6-α (ἐξωτερικὸς τροχίσκος) οἱ τροχοὶ στρέφονται μὲ ἀντίθετη φορὰ ὁ ἕνας πρὸς τὸν ἄλλο, ἐνῶ, στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος 6-β (ἐσωτερικὸς τροχίσκος), οἱ δυὸ τροχοὶ στρέφονται μὲ τὴν ἴδια φορά.

Ὁ λόγος $\frac{n'}{n}$, ὅπου n' ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ *παρασυρόμενου* τροχοῦ καὶ n ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ *κινητήριου* τροχοῦ, λέγεται ***λόγος μετάδοσης ταχυτήτων*** (ἢ *σχέση μεταδόσεως*).

2. Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

1ο. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα n' τοῦ τροχίσκου στὸ σχῆμα 6-α, ὅταν $n = 420$ στρ/min, $z = 60$, $z' = 35$.

Σύμφωνα μὲ τὴ σχέση (2) ποὺ βρήκαμε παραπάνω ἔχομε:

$$\frac{n}{420} = \frac{60}{35}$$

καὶ ἑπομένως

$$n' = \frac{420 \cdot 60}{35} = \frac{420 \cdot 12}{7} = \frac{60 \cdot 12}{1} = 720 \text{ στρ/min}.$$

2ο. Ἐκλέξτε τοὺς δυὸ τροχοὺς ἔτσι ποὺ νὰ ἔχετε ὑποπολλαπλασιασμὸ $\frac{2}{5}$ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητας, δηλαδὴ ὁ λόγος μετάδοσης ταχυτήτων νὰ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ 1 καὶ ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸ $\frac{2}{5}$

Γιὰ νὰ πετύχωμε τὴ σχέση

$$\frac{n'}{n} = \frac{2}{5}$$

πρέπει νὰ πάρωμε δυὸ τροχοὺς μὲ ἀριθμοὺς δοντιῶν z καὶ z' τέτοιους ὥστε ὁ λόγος $\frac{z}{z'}$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ λόγου $\frac{n}{n'} = \frac{5}{2}$, δηλαδὴ

$$\frac{z}{z'} = \frac{2}{5}.$$

Ἄρα, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ εἶναι ἀνάγωγο, πρέπει οἱ ἀριθμοὶ z καὶ z' νὰ εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5 (βλ. Τόμ. Β′, Μάθ. 18, § 4)· μὲ ἄλλα λόγια, πρέπει οἱ z καὶ z' νὰ εἶναι ἀντίστοιχα ἴσοι μὲ τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5 ἐπὶ ἕναν καὶ τὸν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό.

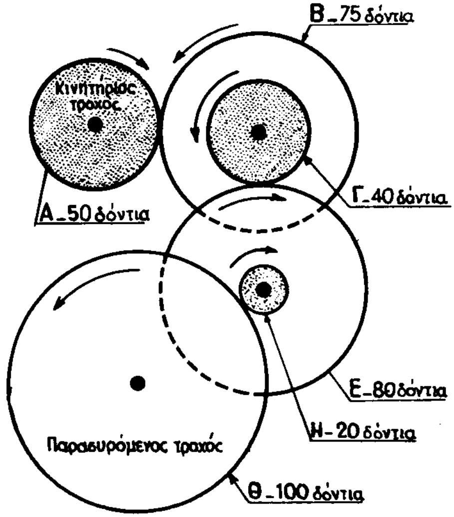
Π.χ. μποροῦμε νὰ διαλέξωμε δυὸ τροχοὺς μὲ

$$z = 2 \cdot 10 = 20 \quad \text{καὶ} \quad z' = 5 \cdot 10 = 50 \text{ δόντια}.$$

3. Σύστημα γραναζιῶν. Λόγος τοῦ συστήματος.

Ἂς ἐξετάσωμε τὸ *σύστημα τῶν γραναζιῶν* ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 6-γ.

Ὁ πρῶτος τροχὸς *Α* *(κινητήριος)* παρασύρει σὲ κίνηση τὸν *Β*. Ὁ τροχὸς *Γ*, ποὺ εἶναι μονταρισμένος πάνω στὸν ἴδιο ἄξονα μὲ τὸν *Β*, θέτει σὲ κίνηση τὸν *Ε* *καί*, μαζὶ μὲ αὐτόν, τὸν *Η*. Τέλος ὁ τροχὸς *Η* παρασύρει σὲ κίνηση τὸν τελευταῖο τροχὸ *Θ* *(παρασυρόμενο τροχό)*. Τοὺς τροχοὺς *Α*, *Γ*, καὶ *Η* θὰ τοὺς λέμε *ὁδηγητικούς*, τοὺς *Β*, *Ε* καὶ *Θ*, *ὁδηγούμενους*.



Σχ. 6-γ. Ὑπολογίστε τὸν λόγο αὐτοῦ τοῦ συστήματος γραναζιῶν.

Ἂς παραστήσωμε τώρα μὲ z_A, $z_B, \ldots, z_\Theta$ ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς δοντιῶν τῶν τροχῶν καὶ μὲ n_A, $n_B, \ldots, n_\Theta$ ἀντιστοίχως τὶς περιστροφικὲς ταχύτητές τους.

Ἐφαρμόζοντας στὰ τρία ζεύγη (A, B), (Γ, E) καὶ (H, Θ) τὴ σχέση ποὺ βρήκαμε στὸν § 1 παίρνομε τὶς τρεῖς ἰσότητες:

$$\frac{n_B}{n_A} = \frac{z_A}{z_B}, \quad \frac{n_E}{n_\Gamma} = \frac{z_\Gamma}{z_E}, \quad \frac{n_\Theta}{n_H} = \frac{z_H}{z_\Theta}.$$

Τὶς πολλαπλασιάζομε κατὰ μέλη καὶ βρίσκομε:

$$\frac{n_B \cdot n_E \cdot n_\Theta}{n_A \cdot n_\Gamma \cdot n_H} = \frac{z_A \cdot z_\Gamma \cdot z_H}{z_B \cdot z_E \cdot z_\Theta}.$$

Ἀλλὰ $n_B = n_\Gamma$ καὶ $n_E = n_H$, ἄρα $n_B \cdot n_E = n_\Gamma \cdot n_H$.

Ἑπομένως τὸ κλάσμα τοῦ ἀριστεροῦ μέλους μπορεῖ ν' ἁπλοποιηθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $n_B \cdot n_E$, ποὺ εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν $n_\Gamma \cdot n_H$. Ἔτσι ἔχομε τελικὰ τὴ σχέση:

$$\frac{n_\Theta}{n_A} = \frac{z_A \cdot z_\Gamma \cdot z_H}{z_B \cdot z_E \cdot z_\Theta}.$$

Ὁ λόγος $\dfrac{n_\Theta}{n_A}$ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητας τοῦ παρασυρόμενου πρὸς τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ κινητήριου τροχοῦ λέγεται *λόγος τοῦ συστήματος γραναζιῶν*.

Ὥστε, ὁ λόγος ἑνὸς συστήματος γραναζιῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν δοντιῶν τῶν ὁδηγητικῶν τροχῶν πρὸς τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμῶν δοντιῶν τῶν ὁδηγούμενων τροχῶν.

4. Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

1ο. Ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ συστήματος γραναζιῶν ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 6-γ μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ σχήματος.

Ἔχομε

$$\frac{n_\Theta}{n_A} = \frac{50 \cdot 40 \cdot 20}{75 \cdot 80 \cdot 100} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{75 \cdot 8} = \frac{5}{75} = \frac{1}{15}.$$

Οἱ τροχοὶ A, E καὶ H στρέφονται μὲ τὴν ἴδια φορά, οἱ B, Γ καὶ Θ στρέφονται μὲ φορὰ ἀντίθετη πρὸς τοὺς προηγούμενους.

*2ο. **Ἀντίστροφο πρόβλημα.** Προσδιορίστε τοὺς ἀριθμοὺς δοντιῶν τῶν τροχῶν ποὺ θὰ χρησιμοποιήσωμε γιὰ ἕνα σύστημα γραναζιῶν μὲ λόγο 5/66, ξέροντας ὅτι διαθέτομε μιὰ σειρὰ ἀπὸ ὀδοντωτοὺς τροχοὺς τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμοὶ δοντιῶν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5 ἀπὸ τὸ 55 ὥς τὸ 120 (δηλαδὴ 15, 20, 25, . . . , 115, 120).*

Ἂς εἶναι n καὶ n' οἱ ἀντίστοιχες περιστροφικὲς ταχύτητες τοῦ πρώτου ὁδηγητικοῦ (τοῦ κινητήριου) τροχοῦ καὶ τοῦ τελευταίου ὁδηγούμενου (τοῦ παρασυρόμενου) τροχοῦ. Ὁ λόγος τοῦ ζητούμενου συστήματος γραναζιῶν εἶναι:

$$\frac{n'}{n} = \frac{5}{66}.$$

Ἀναλύομε τώρα τὸ κλάσμα 5/66 σὲ γινόμενο κλασμάτων· ἔπειτα ἀντικαθιστοῦμε τὰ κλάσματα αὐτὰ μὲ ἴσα τους ποὺ νὰ ἔχουν παρονομαστὲς κάποια ἀπὸ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 τὰ ὁποῖα ἀναφέρει ἡ ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ διάφορους τρόπους· νά δύο ἀπὸ αὐτούς:

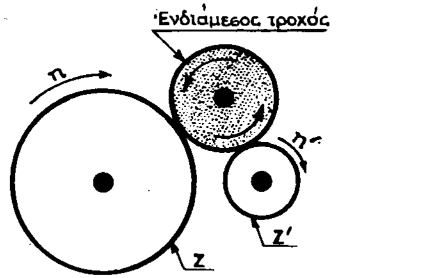
α) $$\frac{5}{66}=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{90}\cdot\frac{25}{55}=\frac{15\cdot 25}{90\cdot 55}.$$

Στὴν ἀνάλυση αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ ἕνα σύστημα γραναζιῶν μὲ 4 τροχούς: 2 ὁδηγητικοὺς μὲ ἀριθμοὺς δοντιῶν 15 καὶ 25 καὶ 2 ὁδηγούμενους μὲ ἀριθμοὺς δοντιῶν 90 καὶ 55.

β) $$\frac{5}{66}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{30}\cdot\frac{20}{60}\cdot\frac{25}{55}=\frac{15\cdot 20\cdot 25}{30\cdot 60\cdot 55}.$$

Στὴν ἀνάλυση αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ ἕνα σύστημα γραναζιῶν μὲ 6 τροχούς: 3 ὁδηγητικοὺς μὲ ἀριθμοὺς δοντιῶν 15, 20 καὶ 25 καὶ 3 ὁδηγούμενους μὲ ἀριθμοὺς δοντιῶν 30, 60 καὶ 55.

Στὴν πρώτη λύση, ὁ πρῶτος ὁδηγητικὸς καὶ ὁ τελευταῖος ὁδηγούμενος τροχὸς στρέφονται μὲ τὴν ἴδια φορά. Στὴ δεύτερη λύση, ὁ πρῶτος ὁδηγητικὸς καὶ ὁ τελευταῖος ὁδηγούμενος τροχὸς ἔχουν ἀντίθετη φορὰ περιστροφῆς.

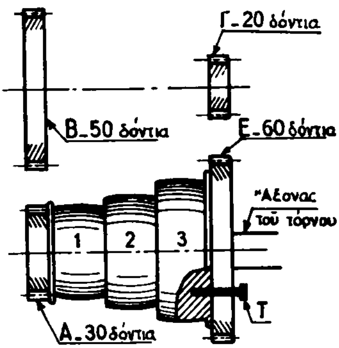


Σχ. 6-δ. Ἕνας ὁδηγητικός καὶ ἕνας ὁδηγούμενος τροχὸς ποὺ τοὺς συνδέει ἕνας ἐνδιάμεσος.

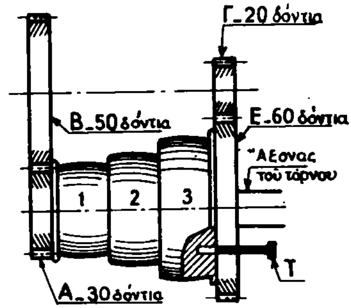
Γιὰ νὰ ἀλλάξωμε τὴ φορὰ περιστροφῆς στὸν παρασυρόμενο τροχό, ἀρκεῖ νὰ παρεμβάλωμε μεταξὺ ἑνὸς ὁδηγητικοῦ καὶ ἑνὸς ὁδηγούμενου τροχοῦ ἕναν ἐνδιάμεσο τροχὸ μὲ ἕναν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸ δοντιῶν (σχ. 6-δ).

Ὅπως εὔκολα μπορεῖ νὰ ἐπαληθεύσῃ κανείς, ἡ παρεμβολὴ αὐτὴ ἑνὸς ἐνδιάμεσου τροχοῦ *δὲν μεταβάλλει τὸ λόγο* $\frac{n'}{n}$ *τῶν* *περιστροφικῶν ταχυτήτων* (βλ. καὶ τὴν Ἄσκηση 1 τοῦ Μαθήματος).

5. Σύστημα γιὰ τὴ μετάδοση τῆς κίνησης σ' ἕνα τόρνο. Ἕνα τέτοιο σύστημα ἀπαρτίζεται κυρίως ἀπὸ δυὸ ζευγάρια ὀδοντωτοὺς τροχοὺς (σχ. 6-ε καὶ σχ. 6-ϛ). Ἀπὸ αὐτοὺς οἱ τροχοὶ Α καὶ Γ εἶναι ὁδηγητικοί, οἱ Β καὶ Ε ὁδηγούμενοι.



Σχ. 6-ε. Διάταξη γιὰ τὴ μετάδοση τῆς κίνησης χωρὶς γρανάζια.



Σχ. 6-ϛ. Διάταξη γιὰ τὴ μετάδοση τῆς κίνησης μὲ γρανάζια.

1ο. Μετάδοση τῆς κίνησης χωρὶς γρανάζια. Οἱ τροχοὶ Β καὶ Γ δὲν συμπλέκονται μὲ τοὺς Α καὶ Ε (σχ. 6-ε)· ὁ συνδετικὸς πεῖρος Τ ἑνώνει στερεὰ τὸν τροχὸ Ε τοῦ ἄξονα τοῦ τόρνου μὲ τὴν κλιμακωτὴ τροχαλία (ποὺ ἔχει τὰ τρία σκαλιὰ 1, 2, 3). Ἔτσι ὁ ἄξονας τοῦ τόρνου ἔχει τὴν ἴδια περιστροφικὴ ταχύτητα μὲ τὴν τροχαλία. Βάζοντας τὸ λουρὶ στὸ σκαλὶ 1 ἢ 2 ἢ 3 τῆς τροχαλίας μεταδίνομε ἀπὸ κάποια ἄλλη κινητήρια τροχαλία περιστροφικὴ κίνηση στὸν ἄξονα τοῦ τόρνου μὲ 3 διαφορετικὲς ἀντίστοιχες ταχύτητες.

2ο. Μετάδοση τῆς κίνησης μὲ γρανάζια. Οἱ τροχοὶ Β καὶ Γ συμπλέκονται τώρα μὲ τοὺς Α καὶ Ε (σχ. 6-ϛ). Ὁ πεῖρος Τ εἶναι βγαλμένος καὶ ἔτσι ἡ τροχαλία τοῦ τόρνου δὲν συνδέεται ἀπευθείας καὶ στερεὰ μὲ τὸν ὀδοντωτὸ τροχὸ Ε τοῦ ἄξονα τοῦ τόρνου. Τώρα ἡ τροχαλία τοῦ τόρνου παρασύρει σὲ κίνηση τὸν ἄξονά του διαμέσου τῶν 4 ὀδοντωτῶν τροχῶν Α, Β, Γ, Ε, ποὺ ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δυὸ γραναζιῶν. Ὁ λόγος αὐτοῦ τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\frac{n_E}{n_A} = \frac{z_A \cdot z_\Gamma}{z_B \cdot z_E} = \frac{30 \cdot 20}{50 \cdot 60} = \frac{1}{5}.$$

Ἑπομένως ἔχομε ὑποπολλαπλασιασμὸ $\frac{1}{5}$ τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς τρεῖς περιστροφικὲς ταχύτητες ποὺ μὲ τὴν πρώτη διάταξη (δηλαδὴ χωρὶς γρανάζια) μποροῦμε νὰ μεταδώσωμε στὸν ἄξονα τοῦ τόρνου.

Συνολικὰ λοιπὸν μποροῦμε μὲ τὶς δυὸ διατάξεις νὰ μεταδώσωμε στὸν ἄξονα τοῦ τόρνου ὄχι 3 ἀλλὰ 6 διαφορετικὲς περιστροφικὲς ταχύτητες, δηλ. διπλάσιο ἀριθμὸ ταχυτήτων ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ μποροῦμε νὰ πετύχωμε μὲ τὴν πρώτη μόνο διάταξη.

6. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. *Ὑπολογίστε τὶς 6 διαφορετικὲς περιστροφικὲς ταχύτητες ποὺ μποροῦμε νὰ μεταδώσωμε στὸν ἄξονα ἑνὸς τόρνου (σχ. 6-ε καὶ 6-ϛ) ξέροντας τὰ ἑξῆς: ὁ κινητήριος ἄξονας στρέφεται μὲ 400 στρ/min· πάνω σ' αὐτὸν εἶναι μονταρισμένη μιὰ κλιμακωτὴ τροχαλία, ὅμοια μὲ τὴν τροχαλία τοῦ τόρνου. Τὰ σκαλιὰ 1, 2, 3 τῆς τροχαλίας τοῦ τόρνου ἔχουν ἀντιστοίχως διαμέτρους* $D_1 = 125\,mm$, $D_2 = 160\,mm$, $D_3 = 200\,mm$· *οἱ διάμετροι τῶν ἀντίστοιχων σκαλιῶν τῆς κινητήριας τροχαλίας εἶναι* $D_1' = 200\,mm$, $D_2' = 160\,mm$, $D_3' = 125\,mm$.

Μετάδοση τῆς κίνησης χωρὶς γρανάζια.	Μετάδοση τῆς κίνησης μὲ γρανάζια
Θέση 1.	
$\frac{n_1}{400} = \frac{200}{125}$	
ἄρα $n_1 = \frac{400 \cdot 200}{125} = 640\,στρ/min.$	$n_1' = 640 \cdot \frac{1}{5} = 128\,στρ/min.$
Θέση 2.	
$\frac{n_2}{400} = \frac{160}{160} = 1,$	
ἄρα $n_2 = 400$ στρ/min.	$n_2' = 400 \cdot \frac{1}{5} = 80\,στρ/min.$
Θέση 3.	
$\frac{n_3}{400} = \frac{125}{200},$	
ἄρα $n_3 = \frac{400 \cdot 125}{200} = 250\,στρ/min.$	$n_3' = 250 \cdot \frac{1}{5} = 50\,στρ/min.$

Ἀσκήσεις. 1. Ἕνας ὀδοντωτὸς τροχὸς μὲ 25 δόντια συμπλέκεται μ' ἕναν ἄλλο ποὺ ἔχει 35 δόντια. Πόσες στροφὲς κάνει ὁ δεύτερος τροχός, ὅταν ὁ πρῶτος κάνῃ 210;

Ἡ ἴδια ἐρώτηση, ἀφοῦ ὅμως παρεμβάλωμε ἀνάμεσα στοὺς δυὸ αὐτοὺς τροχοὺς ἕναν ἐνδιάμεσο τροχὸ μὲ 50 δόντια.

2. Πάνω σὲ ἕναν ἄξονα Α, ποὺ στρέφεται μὲ 240 *στρ/min*, εἶναι μονταρισμένος ἕνας ὀδοντωτὸς τροχὸς E_1 μὲ 20 δόντια καὶ μοντοὺλ 4. Μ' ἕναν τροχὸ E_2, ποὺ θὰ συμπλέκεται μὲ τὸν E_1 καὶ ποὺ εἶναι μονταρισμένος πάνω σ' ἕναν ἄξονα Β, θέλομε νὰ μεταδώσωμε σ' αὐτὸν τὸ δεύτερο ἄξονα περιστροφικὴ ταχύτητα 80 *στρ/min*.

Προσδιορίστε τὸν ἀριθμὸ τῶν δοντιῶν, τὴν ἀρχικὴ διάμετρο, τὴ διάμετρο τῆς περιφέρειας κεφαλῶν τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ E_2, καθὼς καὶ τὴν ἀπόσταση ΑΒ τῶν δύο ἀξόνων Α καὶ Β.

(Θὰ χρησιμοποιήσετε ὅσα εἰπώθηκαν στὸ Μάθ. 3, § 4· ἐπὶ πλέον θὰ ἔχετε ὑπόψη ὅτι ἡ ἀπόσταση ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν E_1 καὶ E_2).

3. Τὸ σύστημα γιὰ τὴ μετάδοση τῆς κίνησης σ' ἕνα τόρνο ἀπαρτίζεται ἀπὸ δυὸ γρανάζια (Α, Β) καὶ (Γ, Ε) (βλ. σχ. 6-ϛ) ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο λόγο λ μετάδοσης ταχυτήτων. Ὑπολογίστε τὸ λόγο αὐτὸν ξέροντας ὅτι οἱ περιστροφικὲς ταχύτητες n_A καὶ n_E τῶν ἀκραίων τροχῶν Α καὶ Ε εἶναι ἀντιστοίχως 200 *στρ/min* καὶ 12,5 *στρ/min*.

4. Θέλομε νὰ κατεργασθοῦμε στὸν τόρνο ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι διαμέτρου 80 *mm* ἀπὸ μαλακὸ ἀτσάλι. Τὸ σύστημα γιὰ τὴ μετάδοση τῆς κίνησης ἀπαρτίζεται ἀπὸ δυὸ ὁδηγητικοὺς τροχοὺς (πρβ. σχ. 6-ε καὶ 6-ϛ) Α καὶ Γ μὲ 20 καὶ 15 δόντια ἀντιστοίχως καὶ δυὸ ὁδηγούμενους Β καὶ Ε μὲ 50 καὶ 55 δόντια ἀντιστοίχως. Ἡ κλιμακωτὴ τροχαλία τοῦ τόρνου ἔχει τρία σκαλιὰ μὲ διαμέτρους 100, 150 καὶ 200 *mm*· τὰ ἀντίστοιχα σκαλιὰ τῆς τροχαλίας τοῦ κινητήριου ἄξονα ἔχουν διαμέτρους 200, 150 καὶ 100 *mm*. Τέλος ὁ κινητήριος ἄξονας στρέφεται μὲ 175 *στρ/min* καὶ ἡ κοπτικὴ ταχύτητα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου θέλομε νὰ εἶναι περίπου 10 *m/min*.

Βρῆτε σὲ ποιό σκαλὶ τῶν τροχαλιῶν θὰ πρέπη νὰ βάλωμε τὸ λουρὶ καὶ καθορίστε ἂν θὰ δουλέψωμε χρησιμοποιώντας τὰ γρανάζια, γιὰ νὰ πετύχωμε τὴν παραπάνω κοπτικὴ ταχύτητα.

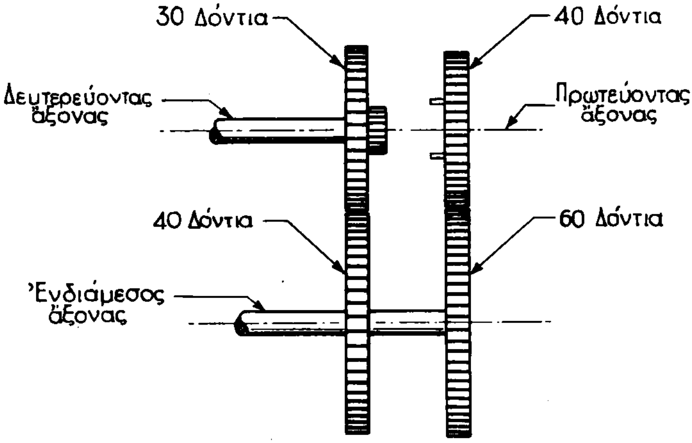
5. Ποιά εἶναι ἡ ταχύτητα σὲ *km/h* ἑνὸς αὐτοκινήτου ποὺ τρέχει μὲ τὴν «τρίτη», ὅταν

1ο ὁ κινητήρας στρέφεται μὲ 2 000 *στρ/min*,

2ο οἱ τροχοὶ τοῦ ὀχήματος ἔχουν διάμετρο 550 *mm*,

3ο ὁ τροχίσκος τοῦ πρωτεύοντα ἄξονα ἔχη 40 δόντια καὶ συμπλέκεται μὲ τὸν τροχὸ 60 δοντιῶν τοῦ ἐνδιάμεσου ἄξονα (σχ. 6-ζ), 4ο οἱ τροχοὶ τῆς «τρίτης» ἔχουν ἀντιστοίχως 40 δόντια στὸν ἐνδιάμεσο ἄξονα καὶ 30 δόντια στὸν δευτερεύοντα (σχ. 6-ζ),

5ο ὁ ὑποπολλαπλασιασμὸς στὴν πίσω γέφυρα τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι $\frac{1}{5}$.



Σχ. 6-ζ. Τὰ γρανάζια γιὰ τὴν «τρίτη» ἑνὸς αὐτοκινήτου.

Μάθημα 7.

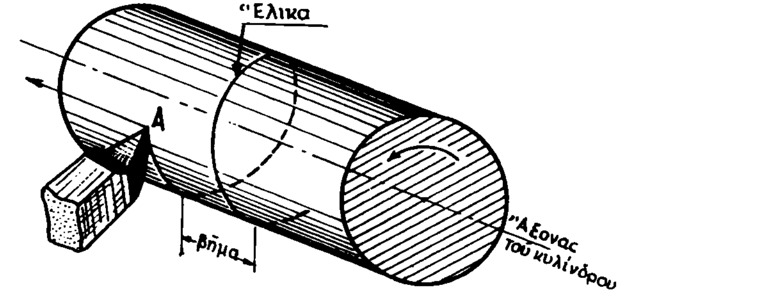
Λόγοι καὶ ἀναλογίες.

Ἐφαρμογὲς στὸ ἄνοιγμα σπειρωμάτων μὲ τὸν τόρνο.

Δύο στοιχεῖα μηχανῶν ποὺ χρησιμοποιοῦνται συχνὰ καὶ ποὺ ἀρκετὲς φορὲς ὡς τώρα ἀναφέραμε εἶναι ὁ κοχλίας καὶ τὸ περικόχλιο (ἡ βίδα καὶ τὸ παξιμάδι). Γιὰ νὰ τὰ κατασκευάσωμε, πρέπει μὲ κατάλληλο ἐργαλεῖο νὰ ἀνοίξωμε (νὰ σκαλίσωμε, νὰ κόψωμε) ἕνα ἑλικωτὸ αὐλάκι, ἐξωτερικὰ σ' ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι γιὰ τὸν κοχλία (τὴ βίδα), ἐσωτερικὰ στὴν κυλινδρικὴ τρύπα (ὀπὴ) ἑνὸς κοίλου κομματιοῦ γιὰ τὸ περικόχλιο (παξιμάδι). Ἀνάμεσα σὲ δυὸ διαδοχικὲς βόλτες (σπεῖρες) αὐτοῦ τοῦ αὐλακιοῦ μένει ἀπὸ τὸ κομμάτι ἕνα μέρος ποὺ ἐξέχει καὶ πού, ὅπως καὶ τὸ αὐλάκι, λέγεται *σπείρωμα* τοῦ κοχλία ἢ τοῦ περικοχλίου. Παρακάτω θὰ μελετήσωμε τὸ ἄνοιγμα σπειρωμάτων (τὸ φιλετάρισμα) μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς τόρνου καὶ θὰ προσδιορίσωμε τοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς ποὺ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε γιὰ νὰ ἀνοίξωμε ἕνα σπείρωμα δοσμένου βήματος.

1. Κατασκευὴ σπειρώματος μ' ἕναν παράλληλο τόρνο.

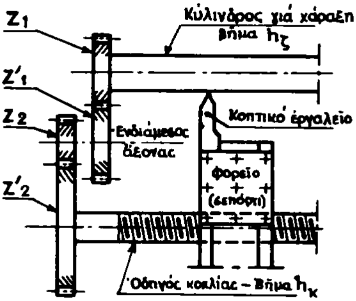
Ὁ κύλινδρος στὸν ὁποῖο πρόκειται νὰ σκαλισθῇ (νὰ κοπῇ) τὸ σπείρω-



Σχ. 7-α. Ἡ μύτη Α τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου γράφει μιὰν ἕλικα.

μα, εἶναι μονταρισμένος πάνω στὸν ἄξονα τοῦ τόρνου διαμέσου τοῦ τσὸκ καὶ στρέφεται, ὅπως καὶ ὁ ἄξονας, μὲ τὴν ἴδια ὁμοιόμορφη κίνηση (σχ. 7-α). Τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο εἶναι μονταρισμένο πάνω στὸ φορεῖο (σεπόρτι) τοῦ τόρνου καὶ μετακινεῖται μὲ ὁμοιόμορφη εὐθύγραμμη κίνηση παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ τόρνου, διαμέσου ἑνὸς ἀτέρμονα κοχλία· αὐτὸς λέγεται *ὁδηγὸς κοχλίας* τοῦ τόρνου καὶ παρασύρεται σὲ περιστροφικὴ κίνηση ἀπὸ τὴν περιστροφικὴ κίνηση τοῦ ἄξονα τοῦ τόρνου μὲ τὴ μεσολάβηση γραναζιῶν (σχ. 7-β). Ἔτσι ἡ μύτη Α τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου χαράζει (γράφει) πάνω στὸν κύλινδρο μιὰν ἕλικα (σχ. 7-α). Μία σπείρα τῆς ἕλικας εἶναι τὸ μέρος της ποὺ χαράζεται (γράφεται) σὲ μίαν ὁλάκερη στροφὴ τοῦ κυλίνδρου. Τὸ βῆμα τῆς ἕλικας ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόσταση τὴν ὁποία διατρέχει, παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἡ μύτη Α τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου σὲ μίαν ὁλάκερη στροφὴ τοῦ κυλίνδρου (σχ. 7-α).

Ἂς φανταστοῦμε τώρα ὅτι χαράζομε ἕνα σπείρωμα ποὺ τὸ βῆμα του εἶναι $h\zeta$, μ' ἕναν τόρνο ποὺ δουλεύει ὡς ἑξῆς: 1ο ὁ ὁδηγὸς κοχλίας ἔχει βῆμα $h_\varkappa$, 2ο ἡ περιστροφικὴ κίνηση τοῦ ἄξονα τοῦ τόρνου μεταδίνεται στὸν ὁδηγὸ κοχλία μὲ δυὸ ζευγάρια γραναζιῶν: τὸ ἕνα ζευγάρι ἔχει τροχοὺς μὲ z_1 καὶ z_1 δόντια, τὸ ἄλλο ἔχει τροχοὺς μὲ z_2 καὶ z_2' δόντια (σχ. 7-β).



Σχ. 7-β. Φιλετάρισμα μὲ τὸν τόρνο.

Ὅταν ὁ ἄξονας τοῦ τόρνου κάνῃ 1 στροφή, ὁ ὁδηγὸς κοχλίας κάνει ἕναν ἀριθμὸ n στροφῶν, τὸν ὁποῖο ξέρομε νὰ ὑπολογίσωμε σύμφωνα μὲ τὸ Μάθημα 6 § 2:

$$\frac{n}{1} = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1' \cdot z_2'}, \quad \text{ἄρα} \quad n = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1' \cdot z_2'}.$$

Ἑπομένως ἡ μύτη τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου θὰ μετακινηθῇ κατὰ ἕνα μῆκος ποὺ εἶναι ἴσο μὲ

$$n \cdot h_\varkappa = h_\varkappa \cdot \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1' \cdot z_2'}.$$

Αὐτὸ ὅμως τὸ μῆκος εἶναι ἀκριβῶς τὸ βῆμα $h\zeta$ τοῦ σπειρώματος (τῆς ἕλικας) ποὺ χαράζομε· ὥστε:

$$h\zeta = h_\varkappa \cdot \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1' \cdot z_2'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{h\zeta}{h_\varkappa} = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1' \cdot z_2'}.$$

Ἔτσι ἔχομε γενικὰ τὴ σχέση:

$$\frac{\text{βῆμα τοῦ σπειρώματος ποὺ ἀνοίγομε}}{\text{βῆμα τοῦ ὁδηγοῦ κοχλία}} = \frac{\text{γινόμενο τῶν ἀριθμῶν δοντιῶν τῶν ὁδηγητικῶν τροχῶν}}{\text{γινόμενο τῶν ἀριθμῶν δοντιῶν τῶν ὁδηγούμενων τροχῶν}}.$$

2. Ἐφαρμογή: Ὑπολογισμὸς τῶν ὀδοντώσεων ἑνὸς συστήματος τροχῶν στὸ ἄνοιγμα σπειρωμάτων. Τοὺς ἀριθμοὺς δοντιῶν z_1, z_1', z_2, z_2',... τῶν τροχῶν ποὺ θὰ χρησιμοποιήσωμε γιὰ ν' ἀνοίξωμε ἕνα σπείρωμα μὲ δοσμένο βῆμα h_ζ mm σὲ τόρνο μὲ ὁδηγὸ κοχλία βήματος $h_\varkappa$ mm, τοὺς βρίσκομε ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι ὁ τόρνος μας διαθέτει μιὰ σειρὰ ὀδοντωτοὺς τροχοὺς μὲ τοὺς ἀκόλουθους ἀριθμοὺς δοντιῶν:

15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30,
35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100,
110, 120, 127.

Γιὰ νὰ βροῦμε ποιοὺς ἀπ' αὐτοὺς θὰ χρησιμοποιήσωμε, ἀναλύομε τὸ κλάσμα $\dfrac{h_\zeta}{h_\varkappa}$ (ἢ ἕνα ἄλλο ἴσο του) σὲ ἕνα γινόμενο $\dfrac{a_1}{\beta_1}\cdot\dfrac{a_2}{\beta_2}$ κλασμάτων $\dfrac{a_1}{\beta_1}$, $\dfrac{a_2}{\beta_2}$ μὲ ὅρους a_1, β_1, a_2, β_2 ποὺ νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἀπὸ τὴν παραπάνω σειρὰ ἀριθμῶν δοντιῶν: $\dfrac{h_\zeta}{h_\varkappa}=\dfrac{a_1}{\beta_1}\cdot\dfrac{a_2}{\beta_2}$. Οἱ ὅροι a_1, a_2 μᾶς δίνουν τότε τοὺς ἀριθμοὺς δοντιῶν τῶν ὁδηγητικῶν τροχῶν καὶ οἱ β_1, β_2, τοὺς ἀριθμοὺς δοντιῶν τῶν ἀντίστοιχων ὁδηγούμενων τροχῶν τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε.

Παράδειγμα 1. *Χαράξτε ἕνα σπείρωμα βήματος $h_\zeta = 2{,}5\ mm$ μ' ἕνα τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του ἔχει βῆμα $h_\varkappa = 6\ mm$.*

Ἔχομε:

$$\frac{h_\zeta}{h_\varkappa}=\frac{2{,}5}{6}=\frac{25}{60}$$

Οἱ ἀριθμοὶ 25 καὶ 60 περιλαμβάνονται στὸν παραπάνω πίνακα ἀριθμῶν δοντιῶν. Ἑπομένως μποροῦμε ν' ἀνοίξωμε τὸ ζητούμενο σπείρωμα χρησιμοποιώντας ἕνα μόνο ζευγάρι γραναζιῶν: *ἕναν ὁδηγητικὸ τροχὸ μὲ 25 δόντια καὶ ἕναν ὁδηγούμενο μὲ 60 δόντια.*

Ἔλεγχος: $$h_\zeta = 6\,mm\cdot\frac{25}{60}=2{,}5\,mm.$$

Παράδειγμα 2. *Χαράξτε ἕνα σπείρωμα βήματος $h_\zeta = 0{,}5\ mm$ μ' ἕνα τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του ἔχει βῆμα $h_\varkappa = 12\ mm$.*

Ἔχομε

$$\frac{h_\zeta}{h_\varkappa}=\frac{0{,}5}{12}=\frac{5}{120}=\frac{1}{24}$$

καὶ $$\frac{1}{24}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{15}{60}\cdot\frac{20}{120}.$$

Ἑπομένως μποροῦμε ν' ἀνοίξωμε τὸ ζητούμενο σπείρωμα χρησιμοποιώντας δυὸ ζευγάρια γραναζιῶν: *δυὸ ὁδηγητικοὺς τροχοὺς μὲ 15 καὶ 20 δόντια καὶ δυὸ ἀντίστοιχους ὁδηγούμενους τροχοὺς μὲ 60 καὶ καὶ 120 δόντια.*

Ἔλεγχος: $$h\zeta = 12\ mm \cdot \frac{15 \cdot 20}{60 \cdot 120} = 0{,}5\ mm.$$

3. Σπειρώματα στὸ ἀγγλικὸ σύστημα. Στὸ ἀγγλικὸ σύστημα τὰ σπειρώματα ἐκφράζονται μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν σπειρῶν οἱ ὁποῖες περιέχονται σὲ μιὰ ἴντσα μῆκος τοῦ κοχλία ἢ τοῦ περικοχλίου (βλ. Τόμ. Β', Μάθ. 20). Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ αὐτὸν τῶν σπειρῶν ἀνὰ ἴντσα βρίσκομε εὔκολα τὸ βῆμα τοῦ σπειρώματος.

Παράδειγμα. Ἕνα σπείρωμα μὲ 10 σπεῖρες ἀνὰ ἴντσα ἔχει βῆμα ἴσο μὲ

$$\frac{25{,}399...}{10}\ mm \text{ ἤ, μὲ καλὴ προσέγγιση, } = \frac{25{,}4}{10} = 2{,}54\ mm.$$

Γιὰ νὰ χαράξωμε ἕνα τέτοιο σπείρωμα μ' ἕναν τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του εἶναι τοῦ μετρικοῦ συστήματος (δηλαδὴ ἔχει βῆμα ἴσο μ' ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ χιλιοστῶν τοῦ μέτρου), χρειαζόμαστε ἕναν ὀδοντωτὸ τροχὸ μὲ 127 δόντια, γιατὶ $\frac{254}{2} = 127$.

Ἂν δὲν διαθέτωμε ἕναν τέτοιο τροχό, τότε κάνομε τὴ ζητούμενη χάραξη παίρνοντας τὴν ἴντσα κατὰ προσέγγιση ἴση μὲ

$$\frac{330}{13}\ mm, \qquad \text{γιατὶ } \frac{330}{13} = 25{,}384\ldots$$

ἢ μὲ

$$\frac{1\,600}{63}\ mm, \qquad \text{γιατὶ } \frac{1\,600}{63} = 25{,}396\ldots$$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Χαράξτε ἕνα σπείρωμα τῶν 12 σπειρῶν (ἢ βημάτων) ἀνὰ ἴντσα μ' ἕναν τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του ἔχει βῆμα 6 mm.

1η μέθοδος (ὅταν διαθέτωμε τροχὸ μὲ 127 δόντια). Ἔχομε:

$$\frac{h\zeta}{h\varkappa} = \frac{\frac{25{,}4}{12}}{6} = \frac{254}{120 \cdot 6} = \frac{127}{60 \cdot 6},$$

ἄρα $$\frac{h\zeta}{h\varkappa} = \frac{127}{60} \cdot \frac{1}{6} = \frac{127}{60} \cdot \frac{15}{90} = \frac{127 \cdot 15}{60 \cdot 90}$$

Ὥστε θὰ χρησιμοποιήσωμε δυὸ ζευγάρια γραναζιῶν: *δυὸ ὁδη-*

γητικοὺς τροχοὺς μὲ 127 καὶ 15 δόντια καὶ δυὸ ἀντίστοιχους ὁδηγούμενους μὲ 60 καὶ 90 δόντια.

Ἔλεγχος: $h\zeta = 6\ mm \cdot \dfrac{127 \cdot 15}{60 \cdot 90} = 2{,}116 \ldots mm = \dfrac{25{,}4}{12}\ mm.$

2η μέθοδος (ὅταν δὲν διαθέτωμε τροχὸ μὲ 127 δόντια). Ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμε τὸ κλάσμα $\dfrac{25{,}4}{12}$ μὲ τὸ $\dfrac{330/13}{12}$, ἔχομε:

$$\frac{h\zeta}{h\varkappa} = \frac{\dfrac{330}{13 \cdot 12}}{6} = \frac{330}{13 \cdot 12 \cdot 6} = \frac{55}{12 \cdot 13} = \frac{5 \cdot 11}{12 \cdot 13} = \frac{25 \cdot 55}{60 \cdot 65}.$$

Ὥστε θὰ χρησιμοποιήσωμε τέσσερις τροχούς: *2 ὁδηγητικοὺς μὲ 25 καὶ 55 δόντια καὶ 2 ἀντίστοιχους ὁδηγούμενους μὲ 60 καὶ 65 δόντια:*

Ἔλεγχος: $h\zeta = 6\ mm \cdot \dfrac{25 \cdot 55}{60 \cdot 65} = 2{,}115 \ldots mm.$

Συγκρίνοντας αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα μὲ ἐκεῖνο ποὺ μᾶς ἔδωσε ἡ 1η μέθοδος παρατηροῦμε ὅτι ἡ διαφορὰ 2,116... — 2,115... εἶναι τῆς τάξης τοῦ 0,001 mm (ἑνὸς *μικροῦ*).

4. Κατασκευὴ βημάτων κατὰ προσέγγιση. Σὲ μερικὲς εἰδικὲς ἐργασίες ἢ σὲ περιπτώσεις ἐπισκευῶν τὸ βῆμα $h\zeta$, ποὺ πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ, μπορεῖ νὰ ἐκφράζεται μ' ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμό, π.χ. μὲ 1,49 ἢ 1,51 κτλ. Στὶς περιπτώσεις αὐτὲς δὲν εἶναι πάντα δυνατὸ νὰ ἐφαρμόσωμε στὸ λόγο $\dfrac{h\zeta}{h\varkappa}$ τὴ μέθοδο τοῦ § 2. Ἀντικαθιστοῦμε τότε τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ ποὺ ἐκφράζει τὸ βῆμα $h\varkappa$ μ' ἕνα ἀνάγωγο κλάσμα ποὺ διαφέρει λίγο ἀπὸ τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ καὶ ποὺ θὰ τὸ λέμε *προσεγγιστικὸ κλάσμα* τοῦ ὑπόψη δεκαδικοῦ.

Τὰ προσεγγιστικὰ κλάσματα ἑνὸς δοσμένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ τὰ βρίσκομε ἐκτελώντας μερικὲς διαδοχικὲς μετατροπὲς καὶ διαιρέσεις. Π.χ. γιὰ τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ $1{,}49 = \dfrac{149}{100}$ ἐκτελοῦμε τὶς ἀκόλουθες πράξεις:

$$\frac{149}{100} = 1 + \frac{49}{100} = 1 + \frac{1}{\dfrac{100}{49}} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{2}{49}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{49}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{24 + \dfrac{1}{2}}}.$$

Τὰ ἀντίστοιχα προσεγγιστικὰ κλάσματα εἶναι τὰ ἀκόλουθα τρία:

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{24}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{49}{24}} = 1 + \frac{24}{49} = \frac{73}{49}.$$

Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ	Προσεγγιστικὰ κλάσματα
1,45	$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{13}{9}$
1,46	$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{16}{11}, \frac{19}{13}$
1,47	$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{22}{15}, \frac{25}{17}$
1,48	$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}$
1,49	$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{73}{49}$
1,51	$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{73}{49}$

Πινακίδιο προσεγγιστικῶν κλασμάτων.

Τὴν παραπάνω ἐργασία γιὰ τὴν εὕρεση τῶν προσεγγιστικῶν κλασμάτων τὴν ἀποφεύγομε χρησιμοποιώντας πίνακες ποὺ μᾶς δίνουν ἕτοιμα τὰ προσεγγιστικὰ κλάσματα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παρουσιάζονται πιὸ συχνὰ στὴν πράξη. Ἀπὸ ἕναν τέτοιο πίνακα εἶναι παρμένο τὸ παραπάνω πινακίδιο ποὺ μᾶς δίνει τὰ προσεγγιστικὰ κλάσματα γιὰ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1,45, 1,46, ..., 1,51. Π.χ. γιὰ τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ 1,46 τὸ προσεγγιστικὸ κλάσμα μὲ τὴν καλύτερη προσέγγιση εἶναι τὸ τελευταῖο $\frac{19}{13} = 1{,}461\,5\ldots$ Λιγότερο καλὴ προσέγγιση πρὸς τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ 1,46 μᾶς δίνει τὸ προτελευταῖο $\frac{16}{11} = 1{,}454\,5\ldots$ καὶ ἀκόμα λιγότερο καλή, τὸ προηγούμενο $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

Παράδειγμα. *Κατασκευάστε ἕνα σπείρωμα βήματος 1,46 mm, μ' ἕναν τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του ἔχει βῆμα 6 mm.*

Ἔχομε:

$$\frac{h\zeta}{h\kappa}=\frac{1{,}46}{6}=\frac{146}{600}=\frac{73}{300}.$$

Ὁ ἀριθμὸς 73 εἶναι πρῶτος καὶ τὸ κλάσμα $\frac{73}{300}$ ἀνάγωγο (ὄχι ἁπλοποιήσιμο). Μὴ διαθέτοντας τροχὸ μὲ 73 δόντια δὲν μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσωμε τὴ μέθοδο τοῦ § 2. Γι' αὐτὸ ἀντικαθιστοῦμε τὸν δεκαδικὸ 1,46 μὲ τὸ τελευταῖο προσεγγιστικὸ κλάσμα του $\frac{19}{13}$, ποὺ παίρνομε ἀπὸ τὸ παραπάνω πινακίδιο. Ἔχομε τότε:

$$\frac{h\zeta}{h\kappa}\simeq\frac{19/13}{6}=\frac{19\cdot 1}{13\cdot 6}=\frac{95\cdot 15}{65\cdot 90}.$$

Ὥστε θὰ χρησιμοποιήσωμε 4 ὀδοντωτοὺς τροχούς: *δυὸ ὁδηγητικοὺς μὲ* $z_1=95$ *καὶ* $z_2=15$ *δόντια καὶ δυὸ ὁδηγούμενους μὲ* $z_1'=65$ *καὶ* $z_2'=90$ *δόντια.*

Ἔλεγχος: $\quad h\zeta\simeq 6\,mm\cdot\frac{95\cdot 15}{65\cdot 90}=1{,}461\,5\ldots\,mm.$

Ὅπως βλέπομε, ἡ διαφορὰ ἀπὸ τὸ ζητούμενο βῆμα $h\zeta=1{,}46\,mm$ εἶναι μικρότερη τῶν $0{,}002\,mm$, μὲ ἄλλα λόγια τὸ σφάλμα εἶναι τῆς τάξης τῶν 2 μ *(μικρῶν).*

Παρατήρηση. Ὅταν ἡ χρήση τοῦ τελευταίου προσεγγιστικοῦ κλάσματος δὲν ἐπιτρέπῃ νὰ φθάσωμε σὲ ἀποτέλεσμα, τότε δοκιμάζομε τὸ ἀμέσως προηγούμενό του.

5. Χάραξη βήματος ποὺ ἐκφράζεται μὲ τὸν ἀριθμὸ π. Τὸ βῆμα ἑνὸς ἀτέρμονα κοχλία εἶναι, σχεδὸν πάντα, ἴσο μὲ

$$(\text{ἀκέραιος}\cdot\pi)\ mm.$$

Γιὰ νὰ τὸ κατασκευάσωμε στὸν τόρνο, ἀντικαθιστοῦμε τὸ π μὲ τὸ κλάσμα $\frac{22}{7}=3{,}142\,8\ldots$ ποὺ εἶναι μιὰ πολὺ καλὴ προσέγγιση τοῦ π.

Παράδειγμα. *Κατασκευάστε σπείρωμα μὲ βῆμα* $4\pi=12{,}566\ldots mm$ *σὲ τόρνο ποὺ ἔχει ὁδηγὸ κοχλία μὲ βῆμα* $h\kappa=6\,mm$.

$$\frac{h\zeta}{h\kappa}=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}\simeq\frac{2\cdot\frac{22}{7}}{3}=\frac{44}{7\cdot 3}=\frac{11\cdot 4}{7\cdot 3}=\frac{55\cdot 40}{35\cdot 30}.$$

Θὰ χρησιμοποιήσωμε λοιπὸν 4 τροχούς: *2 ὁδηγητικοὺς μὲ 55 καὶ 40 δόντια καὶ δυὸ ἀντίστοιχους ὁδηγούμενους μὲ 35 καὶ 30 δόντια.*

Ἔλεγχος : $h\zeta = 6\ mm \cdot \frac{55 \cdot 40}{35 \cdot 30} = 12{,}571...\ mm.$

Τὸ σφάλμα εἶναι λοιπὸν ἴσο μὲ

$$12{,}571... - 12{,}566... \simeq 0{,}005\ mm,$$

δηλαδὴ τῆς τάξης τῶν 5 μικρῶν.

Ἀσκήσεις. 1. Ὑπολογίστε τοὺς ἀριθμοὺς δοντιῶν 4 τροχῶν κατάλληλων γιὰ νὰ χαράξετε ἕνα σπείρωμα μὲ βῆμα 3,25 *mm* σὲ τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του ἔχει βῆμα 6 *mm*. Διαθέτετε μιὰ σειρὰ ἀπὸ τροχοὺς μὲ τοὺς ἀκόλουθους ἀριθμοὺς δοντιῶν:

20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 80, 90, 100.

2. Μ' ἕναν τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του ἔχει 3 σπεῖρες στὴν ἴντσα (ἀνὰ 1′) θέλετε νὰ χαράξετε ἕνα σπείρωμα μὲ βῆμα 1,5 *mm*. Ὑπολογίστε τοὺς ἀριθμοὺς δοντιῶν 4 τροχῶν κατάλληλων γι' αὐτὴ τὴ χάραξη στὶς ἀκόλουθες 2 περιπτώσεις:

1η περίπτωση: διαθέτετε τοὺς τροχοὺς τῆς προηγούμενης ἄσκησης καὶ ἐπὶ πλέον ἕναν τροχὸ μὲ 127 δόντια·

2η περίπτωση: διαθέτετε μόνο τοὺς τροχοὺς τῆς προηγούμενης ἄσκησης.

Ὑπολογίστε ἀκόμη τὸ μῆκος τοῦ βήματος σὲ κάθε περίπτωση χωριστὰ καθὼς καὶ τὴ διαφορὰ ποὺ παρουσιάζουν μεταξύ τους αὐτὰ τὰ δυὸ ἐξαγόμενα.

3. Βρῆτε τί τροχοὺς θὰ χρειασθῆτε γιὰ νὰ χαράξετε τὸ σπείρωμα ἑνὸς ἀτέρμονα κοχλία μὲ βῆμα 2π *mm* σ' ἕναν τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του ἔχει βῆμα 6 *mm*.

4. Χρησιμοποιώντας τὴ μέθοδο τῶν προσεγγιστικῶν κλασμάτων (§ 4) βρῆτε τί τροχοὺς θὰ χρειασθῆτε γιὰ νὰ χαράξετε ἕνα σπείρωμα μὲ βῆμα 2,37 *mm* σὲ τόρνο ποὺ ὁ ὁδηγὸς κοχλίας του ἔχει βῆμα 6 *mm*.

Τὰ προσεγγιστικὰ κλάσματα, ποὺ προσεγγίζουν τὸ 2,37 ὁλοένα καὶ καλύτερα, εἶναι τὰ ἀκόλουθα ἕξι:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{19}{8},\ \frac{45}{19},\ \frac{64}{27}.$$

Μάθημα 8.

Μεγέθη ἀνάλογα. Ποσοστὰ στὰ ἑκατό. Ἀπόδοση μηχανῆς. Κωνικότητα. Σύνθεση κραμάτων.

Ἀπὸ τὸν Τόμ. Β΄, Μάθ. 27, ξέρομε τὸ ἑξῆς: ὅταν δυὸ ὁμοειδῆ μεγέθη A καὶ B εἶναι *κατευθεῖαν ἀνάλογα*, τὸ *ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ* τοῦ A ὡς πρὸς τὸ B μᾶς λέει ποιὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ A ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν τιμὴ 100 τοῦ B.

Π.χ. ὅταν λέμε ὅτι ἡ ἔκπτωση πάνω στὴν *ἀξία* ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι 10% (δέκα στὰ ἑκατό), ἐννοοῦμε τὰ ἑξῆς: 1ο ἡ *ἔκπτωση* εἶναι ἕνα μέγεθος κατευθεῖαν ἀνάλογο πρὸς τὸ μέγεθος ποὺ λέγεται *ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος* καὶ 2ο στὴν τιμὴ 100 δρχ τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ 10 δρχ τῆς ἐκπτώσης. Ἑπομένως, ἂν ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος εἶναι x δρχ, ἡ ἔκπτωση θὰ εἶναι:

$$x \cdot \frac{10}{100} = x \cdot 0{,}10 = 0{,}1\,x \text{ δρχ}.$$

1. Ἀπόδοση μηχανῆς. Σὲ κάθε μηχανισμό, ἕνα μέρος τοῦ *κινητήριου ἔργου* ποὺ τοῦ δίνομε, καταναλώνεται (ἀπορροφᾶται) ἀπὸ τὶς λεγόμενες παθητικὲς ἀντιστάσεις. Ἔτσι τὸ *ὠφέλιμο ἔργο*, δηλαδὴ αὐτὸ ποὺ παίρνομε ἀπὸ τὸ μηχανισμό, εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κινητήριο ἔργο ποὺ τοῦ δίνομε.

Ἀπόδοση μιᾶς μηχανῆς εἶναι ὁ λόγος τοῦ ὠφέλιμου ἔργου πρὸς τὸ κινητήριο ἔργο· συνήθως τὸν ἐκφράζομε μ' ἕνα ποσοστὸ στὰ ἑκατό.

Πρόβλημα. Μιὰ ὑδατόπτωση ἀπὸ ὕψος 10 m κινεῖ (θέτει σὲ κίνηση) μιὰ τουρμπίνα (ἕναν ὑδροστρόβιλο). Ἡ παροχὴ τῆς πτώσης εἶναι 5,5 κυβικὰ μέτρα νερὸ στὸ λεπτὸ (5,5 m^3/min) καὶ ἡ ἀπόδοση τῆς τουρμπίνας 75%. Ὑπολογίστε σὲ μετρικοὺς ἵππους PS τὴν ὠφέλιμη ἰσχὺ ποὺ διαθέτομε μὲ αὐτὴν τὴν τουρμπίνα. (Ὑπενθυμίζομε ὅτι 1 μετρικὸς ἵππος = 75 kgm/sec).

Τὸ κινητήριο ἔργο ἀνὰ λεπτὸ εἶναι $5\,500 \cdot 10 = 55\,000\,kgm$.
Τὸ ὠφέλιμο ἔργο ἀνὰ λεπτὸ εἶναι $55\,000 \cdot 0{,}75 = 41\,250\,kgm$.
Τὸ ὠφέλιμο ἔργο ἀνὰ δευτερόλεπτο, δηλαδὴ ἡ διαθέσιμη ἰσχύς, θὰ εἶναι λοιπὸν σὲ *kgm/sec*:

$$41\,250 : 60 = 687{,}5\,kgm/sec$$

καὶ σὲ μετρικοὺς ἵππους:

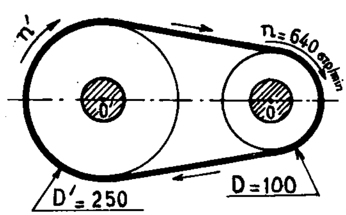
$$687{,}5 : 75 \simeq 9{,}2\,PS.$$

2. Γλίστρημα τοῦ λουριοῦ κατὰ τὴ μετάδοση μιᾶς περιστροφικῆς κίνησης. Στὴ μελέτη ποὺ κάμαμε γιὰ τὴ μετάδοση μιᾶς περιστροφικῆς κίνησης μὲ τροχαλίες καὶ λουρὶ (Μάθ. 5), δὲν λάβαμε ὑπόψη ὅτι τὸ λουρὶ γλιστρᾶ λίγο πάνω στὶς ζάντες τῶν τροχαλιῶν. Ἑπομένως ἡ σχέση

$$\frac{n'}{n} = \frac{D}{D'}$$

ποὺ βρήκαμε εἶναι μόνο *κατὰ προσέγγιση σωστή*. Στὴν πραγματικότητα ἡ παρασυρόμενη τροχαλία στρέφεται μὲ μιὰ ταχύτητα κάπως μικρότερη ἀπὸ ἐκείνην ποὺ προκύπτει, ἂν ἐφαρμόσωμε τὸν παραπάνω τύπο.

Ὅταν λέμε πώς, σὲ μιὰ μετάδοση, ἔχομε *γλίστρημα* $2\,\%$ π.χ., ἐννοοῦμε ὅτι *ἡ πραγματικὴ περιστροφικὴ ταχύτητα τῆς παρασυρόμενης τροχαλίας εἶναι κατὰ* $2\,\%$ *μικρότερη ἀπὸ ἐκείνην ποὺ ὑπολογίζομε μὲ τὸν παραπάνω τύπο, μὴ λαμβάνοντας ὑπόψη τὸ γλίστρημα.*



Σχ. 8-α. Ὑπολογίστε τὴν ταχύτητα n' λογαριάζοντας $2\,\%$ γλίστρημα.

Πρόβλημα. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα n' τῆς τροχαλίας O' (σχ. 8-α) μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ σχήματος λαμβάνοντας ὑπόψη καὶ ἕνα γλίστρημα $2\,\%$.

Ἡ σχέση $\frac{n'}{n} = \frac{D}{D'}$ μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ σχήματος γίνεται:

$$\frac{n'}{640} = \frac{100}{250}.$$

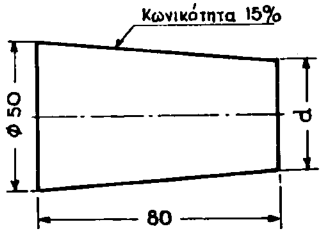
Ἔτσι βρίσκομε ὅτι

$$n' = \frac{640 \cdot 100}{250} = 256 \; στρ/min.$$

Ἡ πραγματικὴ ταχύτητα εἶναι ὅμως κατὰ 2 % μικρότερη ἀπ' αὐτὴν τὴν n', ἐξαιτίας τοῦ γλιστρήματος τοῦ λουριοῦ· ἑπομένως ἡ πραγματικὴ περιστροφικὴ ταχύτητα τῆς τροχαλίας Ο' εἶναι:

$$256 - 256 \cdot 0{,}02 = 256 - 5{,}12 \simeq \mathit{251} \; στρ/min.$$

3. Κωνικότητα. *Πρόβλημα. Ὑπολογίστε τὴ μικρὴ διάμετρο ἑνὸς κόλουρου κώνου (σχ. 8-β) ξέροντας τὴ μεγάλη διάμετρό του 50 mm, τὸ μῆκος του 80 mm καὶ τὴν κωνικότητά του 15 % (βλ. Τόμ. Β', Μάθ. 27).*



Σχ. 8-β. Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο d.

Ὅταν λέμε πὼς ἡ κωνικότητα εἶναι 15 %, ἐννοοῦμε ὅτι σὲ μῆκος 100 mm ἀντιστοιχεῖ διαφορὰ διαμέτρων 15 mm· μὲ ἄλλα λόγια: ἡ διάμετρος τῆς ὀρθῆς διατομῆς ἐλαττώνεται κατὰ 15 mm γιὰ κάθε 100 mm μῆκος.

Ἑπομένως γιὰ 80 mm μῆκος ἡ διάμετρος θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ

$$\frac{15 \cdot 80}{100} = 12 \; mm.$$

Ὥστε ἡ ζητούμενη μικρὴ διάμετρος τοῦ κόλουρου κώνου θὰ εἶναι:

$$d = 50 - 12 = \mathit{38} \; mm.$$

4. Συστατικὰ ἑνὸς κράματος (ἢ μίγματος). Ἕνα κράμα (ἢ ἕνα μίγμα) χαρακτηρίζεται 1ο ἀπὸ τὴ φύση τῶν συστατικῶν του (δηλαδὴ τῶν ὑλικῶν ποὺ τὸ συνθέτουν) καὶ 2ο ἀπὸ τὸ *ποσο-*

στὸ στὰ ἑκατὸ τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ συστατικά, μὲ ἄλλα λόγια ἀπὸ τὸ λόγο τοῦ βάρους κάθε συστατικοῦ πρὸς τὸ ὁλικὸ βάρος τοῦ κράματος (ἢ τοῦ μίγματος).

Ἔτσι π.χ. τὸ ἀντιτριβικὸ κράμα (πρόκειται γιὰ ἕνα κράμα ποὺ ἐλαττώνει τὴν τριβὴ ἀνάμεσα σὲ δυὸ ἐφαπτόμενες μεταλλικὲς ἐπιφάνειες) περιέχει 83 % κασσίτερο (καλάϊ), 12 % ἀντιμόνιο καὶ 5 % χαλκό.

Τὸ μαγιεσὸρ εἶναι ἕνα κράμα ἀπὸ 60 % χαλκό, 20 % τσίγκο (ψευδάργυρο) καὶ 20 % νίκελ (νικέλιο).

Τὸ ντουραλουμίνιο (σκληραλουμίνιο) εἶναι ἕνα κράμα ἀπὸ 95 % ἀλουμίνιο, 4 % χαλκό, 0,5 % μαγγάνιο καὶ 0,5 % μαγνήσιο.

Πρόβλημα. Ἡ κόλληση ποὺ χρησιμοποιοῦν γιὰ τὸν λευκοσίδερο (τενεκὲ) περιέχει 45 % κασσίτερο καὶ 55 % μολύβι, ἐνῶ ἡ κόλληση ποὺ χρησιμοποιεῖται γιὰ τὸν τσίγκο περιέχει 40 % κασσίτερο καὶ 60 % μολύβι. Πόσο βάρος μολύβι πρέπει νὰ λιώσωμε μαζὶ μὲ 12 kg ἀπὸ τὴν κόλληση τοῦ πρώτου εἴδους γιὰ νὰ τὴ μετατρέψωμε σὲ κόλληση τοῦ δεύτερου εἴδους;

12 *kg* ἀπὸ τὴν πρώτη κόλληση περιέχουν κασσίτερο βάρους

$$\frac{12\ kg \cdot 45}{100} = 5{,}4\ kg.$$

Αὐτὰ τὰ 5,4 *kg* κασσίτερος θ' ἀποτελέσουν τὰ 40 ἑκατοστὰ τοῦ βάρους τῆς κόλλησης δεύτερου εἴδους ποὺ θέλομε νὰ πετύχωμε· ἄρα τὸ ὁλικὸ βάρος αὐτῆς τῆς κόλλησης θὰ εἶναι

$$\frac{5{,}4\ kg \cdot 100}{40} = 13{,}5\ kg.$$

Ἑπομένως τὰ 12 *kg* ἀρχικὸ βάρος θὰ αὐξηθοῦν κατὰ

$$13{,}5 - 12 = 1{,}5\ kg\cdot$$

αὐτὸ εἶναι λοιπὸν τὸ βάρος τοῦ μολυβιοῦ ποὺ πρέπει νὰ λιώσωμε μαζὶ μὲ τὴν κόλληση τοῦ πρώτου εἴδους γιὰ νὰ τὴν κάμωμε κόλληση τοῦ δεύτερου εἴδους.

Ἀπάντηση: τὸ βάρος τοῦ μολυβιοῦ ποὺ πρέπει νὰ προσθέσωμε εἶναι 1,5 kg.

Ἀσκήσεις. *1.* Ὅπως εἶναι γνωστό, ἡ ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση ἑνὸς κυλινδρικοῦ ἀγωγοῦ εἶναι ἴση μὲ $\frac{\rho \cdot l}{F}$, ὅπου ρ εἶναι ἡ *εἰδικὴ ἀντίσταση* τοῦ ὑλικοῦ ἀπὸ τὸ ὁποῖο εἶναι φτιαγμένος ὁ ἀγωγός, F ἡ διατομὴ τοῦ ἀγωγοῦ καὶ l τὸ μῆκος του. Ὁ λόγος τῆς *εἰδικῆς* ἀντίστασης τοῦ σφυρήλατου ἀλουμινίου πρὸς τὴν *εἰδικὴ* ἀντίσταση τοῦ σφυρήλατου χαλκοῦ εἶναι $\frac{98}{61}$. Ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σφυρήλατου ἀλουμινίου εἶναι 2,77 καὶ τοῦ χαλκοῦ 9,1. Ὑπολογίστε 1ο τὸ λόγο τῆς διατομῆς ἑνὸς ἀγωγοῦ ἀπὸ σφυρήλατο ἀλουμίνιο πρὸς τὴ διατομὴ ἑνὸς ἀγωγοῦ ἀπὸ σφυρήλατο χαλκὸ ξέροντας ὅτι οἱ δυὸ ἀγωγοὶ ἔχουν τὴν ἴδια ἀντίσταση καὶ τὸ ἴδιο μῆκος, 2ο τὸν ἀντίστοιχο λόγο τῶν διαμέτρων τῶν δυὸ ἀγωγῶν καὶ 3ο τὸν ἀντίστοιχο λόγο τῶν βαρῶν τους.

2. Ὑπολογίστε σὲ μετρικοὺς ἵππους τὴ διαθέσιμη ἰσχὺ μιᾶς τουρμπίνας ποὺ τὴ θέτει σὲ κίνηση μιὰ ὑδατόπτωση ὕψους 75 m καὶ παροχῆς 30 m^3/min, ξέροντας ὅτι ἡ ἀπόδοση τῆς ἐγκατάστασης εἶναι 70 %.

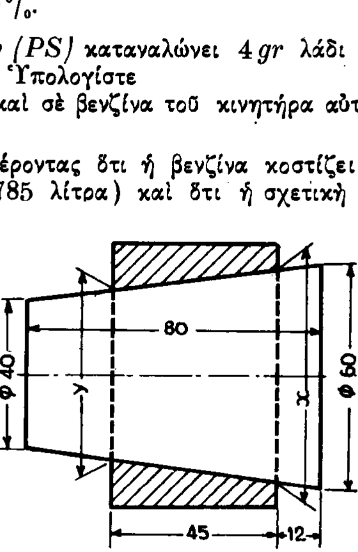
3. Ἕνα μαγγάνι (βαροῦλκο) θέλομε νὰ δίνη ὠφέλιμο ἔργο 500 kgm σὲ 2 min. Ὑπολογίστε σὲ μετρικοὺς ἵππους ποιὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς ποὺ καταναλώνει ἡ λειτουργία αὐτοῦ τοῦ βαρούλκου, ξέροντας πὼς ἡ ἀπόδοση τοῦ μηχανήματος εἶναι 60 %.

4. Ἕνας κινητήρας 40 ἵππων (PS) καταναλώνει 4 gr λάδι καὶ 272 gr βενζίνα ἀνὰ ἵππο καὶ ὥρα. Ὑπολογίστε

1ο τὴν κατανάλωση σὲ λάδι καὶ σὲ βενζίνα τοῦ κινητήρα αὐτοῦ, ὅταν λειτουργήση 2 h 15 min,

2ο τὴν ἀντίστοιχη δαπάνη, ξέροντας ὅτι ἡ βενζίνα κοστίζει 20 δρχ τὸ ἀμερικάνικο γαλόνι (= 3,785 λίτρα) καὶ ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότητα τῆς βενζίνας εἶναι 0,72,

3ο τὴν ἀπόδοση τοῦ κινητήρα, ξέροντας ὅτι ἡ κατανάλωση ἑνὸς λίτρου βενζίνας ἀντιπροσωπεύει 10 500 θερμίδες ($kcal$) καὶ ὅτι μιὰ θερμίδα ἰσοδυναμεῖ μὲ 427 χιλιογραμμόμετρα (kgm).



Σχ. 8-γ.

5. Γιὰ νὰ φτιάξωμε μπροῦντζο ἀλουμινίου (κράμα χαλκοῦ καὶ ἀλουμινίου) λιώνομε μαζὶ 52 kg χαλκὸ καὶ 3 kg ἀλουμίνιο. Ὕστερα ἀπὸ τὸ λιώσιμο, τὸ κράμα ποὺ παίρνομε ζυγίζει 51 kg. Ὑπολογίστε

1ο πόσο κοστίζει ἕνα χιλιόγραμμο ἀπὸ τὸ κράμα αὐτό, ξέροντας ὅτι ὁ χαλκὸς κοστίζει 10,25 δρχ τὸ kg, τὸ ἀλουμίνιο 12 δρχ τὸ kg καὶ ὅτι τὰ ἔξοδα γιὰ τὸ λιώσιμο εἶναι 32 δρχ,

2ο πόσην στὰ 100 ἀπώλεια βάρους ἔχομε μὲ τὸ λιώσιμο.

6. Ἕνα ἀντιτριβικὸ κράμα ἔχει τὴν ἀκόλουθη σύνθεση: κασσίτερος 83 %, ἀντιμόνιο 12 %, χαλκὸς 5 %. Πόσο βάρος κασσιτέρου καὶ πόσο ἀλουμινίου πρέπει νὰ πάρωμε μαζὶ μὲ 29 kg χαλκοῦ γιὰ νὰ πετύχωμε τὴν παραπάνω σύνθεση;

7. Ὑπολογίστε τὴν κωνικότητα τοῦ κόλουρου κώνου ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 8-γ καθὼς καὶ τὶς διαμέτρους x καὶ y τῆς στεφάνης ἡ ὁποία τὸν περιζώνει.

Μάθημα 9.

Μεγέθη ἀνάλογα.
Δάνεια, ἐπενδύσεις, ἀσφάλειες.

1. Δάνεια καὶ τόκος. Ὅπως ὅλοι ξέρομε, *τόκος* λέγεται τὸ κέρδος ποὺ ἔχει κανείς, ὅταν δανείζῃ χρήματα σ' ἄλλους. Τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ ὁ δχνειστὴς δανείζει, λέγεται *κεφάλαιο*. *Τόκος καὶ κεφάλαιο εἶναι δύο μεγέθη κατευθείαν ἀνάλογα*, ὅταν ἡ διάρκεια τοῦ δανεισμοῦ εἶναι ἡ ἴδια. Π.χ. ἕνα κεφάλαιο 3 000 δραχμῶν δίνει σὲ 6 μῆνες τριπλάσιο τόκο ἀπὸ ἕνα κεφάλαιο 1 000 δραχμῶν στὸ ἴδιο χρονικὸ διάστημα τῶν 6 μηνῶν. Ὅμοια, *τόκος καὶ χρονικὴ διάρκεια δανεισμοῦ εἶναι δύο μεγέθη κατευθείαν ἀνάλογα*, ὅταν τὸ κεφάλαιο εἶναι τὸ ἴδιο. Π.χ., 5 000 δρχ κεφάλαιο δίνουν σὲ 12 μῆνες διπλάσιο τόκο ἀπὸ κεῖνον ποὺ δίνουν αὐτὲς οἱ 5 000 δρχ σὲ 6 μῆνες.

Ὁ τόκος ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ 100 δρχ κεφάλαιο γιὰ διάρκεια δανεισμοῦ ἕνα ἔτος λέγεται *ἐπιτόκιο* καὶ σημειώνεται συνήθως μὲ τὸ σύμβολο % τοῦ ποσοστοῦ στὰ ἑκατό. Π.χ., ὅταν λέμε πὼς δανεισθήκαμε χρήματα μὲ ἐπιτόκιο 11 %, αὐτὸ σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε 100 δρχ ποὺ δανεισθήκαμε, θὰ πληρώσωμε στὸ δανειστὴ τόκο 11 δρχ ὕστερα ἀπὸ ἕνα ἔτος (ἢ τόκο 5,50 δρχ ὕστερα ἀπὸ 6 μῆνες, ἂν ἡ διάρκεια τοῦ δανεισμοῦ εἶναι 6 μόνο μῆνες).

Ἂς σημειωθῇ ὅτι συνήθως, ἀντὶ νὰ λέμε ὅτι «δανεισθήκαμε χρήματα μὲ ἐπιτόκιο 11 %», λέμε ἁπλούστερα ὅτι «δανεισθήκαμε χρήματα πρὸς 11 % (ἕνδεκα τοῖς ἑκατόν)».

2. Ὑπολογισμὸς τόκου.

Π ρ ό β λ η μ α. Ὁ κ. Α. δανείσθηκε στὶς 15 Ἰανουαρίου 1958 ἀπὸ τὸν γνωστό του κ. Β. 6 000 δρχ πρὸς 9 % γιὰ 1,5 ἔτη. Πόσο τόκο θὰ πληρώσῃ ὁ κ. Α. στὸν κ. Β. στὶς 15 Ἰουλίου 1959, ὅταν θὰ τοῦ ἐπιστρέψῃ τὶς 6 000 δρχ ποὺ δανείσθηκε ;

Σὲ 1 ἔτος 100 δρχ δίνουν τόκο 9 δρχ,

σὲ 1 ἔτος 1 δρχ δίνει τόκο:

$$\frac{9}{100} = 0{,}09 \text{ δρχ},$$

σὲ 1 ἔτος 6 000 δρχ δίνουν τόκο:

$$\frac{6\,000 \cdot 9}{100} = 6\,000 \cdot 0{,}09 = 540 \text{ δρχ}$$

καὶ σὲ 1,5 ἔτος 6 000 δρχ δίνουν τόκο:

$$\frac{6\,000 \cdot 9 \cdot 1{,}5}{100} = 540 \cdot 1{,}5 = 810 \text{ δρχ}.$$

Ὥστε ὁ κ. Α. θὰ πληρώση τόκο *810 δρχ.*

Γενίκευση. *Ἕνα κεφάλαιο Κ δραχμῶν, ὅταν τὸ τοκίσωμε μὲ ἐπιτόκιο ε%, τί τόκο δίνει σὲ t ἔτη;*

Σὲ 1 ἔτος 100 δρχ δίνουν τόκο ε δρχ,

σὲ 1 ἔτος 1 δρχ δίνει τόκο:

$$\frac{\varepsilon}{100} \text{ δρχ},$$

σὲ 1 ἔτος Κ δρχ δίνουν τόκο:

$$\frac{\mathrm{K} \cdot \varepsilon}{100} \text{ δρχ}$$

καὶ σὲ t ἔτη Κ δρχ δίνουν τόκο:

$$\frac{\mathrm{K} \cdot \varepsilon \cdot t}{100} \text{ δρχ}.$$

Ὥστε, *γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο τ ἑνὸς κεφαλαίου Κ ποὺ τοκίζεται πρὸς ε% γιὰ t ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο μὲ τὸ ἐπιτόκιο καὶ μὲ τὸ χρόνο ἐκφρασμένο σὲ ἔτη καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 100, σύμφωνα μὲ τὸν τύπο:*

$$\tau = \frac{K \cdot \varepsilon \cdot t}{100}.$$

Παρατήρηση. Ἂν ὁ χρόνος ι εἶναι ἐκφρασμένος σὲ μῆνες (ἀντὶ σὲ ἔτη), τότε πρέπει, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, νὰ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο $K \cdot \varepsilon \cdot t$ διὰ 1 200 (= 12 · 100), ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνες. Ἂν πάλι ὁ χρόνος t εἶναι ἐκφρασμένος σὲ μέρες, τότε, γιὰ νὰ ἁπλουστεύσωμε τοὺς ὑπολογισμούς, λογαριάζομε πὼς κάθε μήνας ἔχει 30 μέρες, ἑπομένως τὸ ἔτος $360 = 30 \cdot 12$ μέρες, καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο $K \cdot \varepsilon \cdot t$ διὰ 36 000 ($= 360 \cdot 100$).

3. Καταθέσεις σὲ Ταμιευτήριο. Συχνά, ἀντὶ νὰ κρατοῦμε ἄτοκα τὰ χρήματα ποὺ μᾶς περισσεύουν, τὰ *καταθέτομε*, δηλαδὴ τὰ δανείζομε σ' ἕνα *Ταμιευτήριο* μὲ τοὺς ἀκόλουθους ὅρους: Σὲ ὁρισμένες ἡμερομηνίες τοῦ ἔτους, π.χ. στὴν 1η Ἰανουαρίου καὶ στὴν 1η Ἰουλίου κάθε ἔτους, οἱ τόκοι τῶν χρημάτων ποὺ ἔχομε καταθέσει ἀθροίζονται μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ καὶ τὸ ποσὸ ποὺ προκύπτει ἀποτελεῖ τὸ νέο κεφάλαιο τοῦ λογαριασμοῦ μας γιὰ τὴν ἑπόμενη ἑξαμηνία. Μὲ ἄλλα λόγια, οἱ τόκοι τῶν κεφαλαίων μας γίνονται καὶ αὐτοί, στὸ τέλος κάθε ἑξαμηνίας, κεφάλαιο γιὰ τὴν ἑπόμενη ἑξαμηνία (κεφαλαιοποιοῦνται). Ἕνας τέτοιος τοκισμὸς χρημάτων λέγεται *ἀνατοκισμὸς κατὰ ἑξαμηνία*. Νά ἕνα παράδειγμα.

Πρόβλημα. Ἕνας τεχνίτης εἶχε τὴν 1η Ἰανουαρίου 1958 6 500 δρχ στὸ Ταμιευτήριο μιᾶς Τράπεζας. Στὶς 15 Ἀπριλίου 1958 κατέθεσε στὸ Ταμιευτήριο 2 000 δρχ καὶ τὴν 1η Σεπτεμβρίου 1958 ἄλλες 2 500 δρχ. Πόσο εἶναι τὸ κεφάλαιο τοῦ λογαριασμοῦ του τὴν 1η Ἰανουαρίου 1959, ἂν τὸ ἐπιτόκιο γιὰ τὶς καταθέσεις στὸ Ταμιευτήριο αὐτὸ εἶναι 8%;

Τόκος τῶν 6 500 δρχ πρὸς 8% γιὰ 6 μῆνες (ἀπὸ 1-1-58 ὡς 30-6-58):

$$\frac{6\,500 \cdot 8 \cdot 6}{100 \cdot 12} = 65 \cdot 4 = 260 \text{ δρχ.}$$

Τόκος τῶν 2 000 δρχ γιὰ 2,5 μῆνες (ἀπὸ 15-4-58 ὡς 30-6-58):

$$\frac{2\,000 \cdot 8 \cdot 2{,}5}{100 \cdot 12} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 2{,}5}{3} = \frac{100}{3} \simeq 33{,}30 \text{ δρχ.}$$

Κεφάλαιο τοῦ λογαριασμοῦ τὴν 1η Ἰουλίου 1958:

$$6\,500 + 2\,000 + 260 + 33{,}30 = 8\,793{,}30 \text{ δρχ.}$$

Τόκος τῶν 8 793,30 δρχ γιὰ 6 μῆνες (ἀπὸ 1-7-58 ὡς 31-12-58):

$$\frac{8\,793{,}30 \cdot 8 \cdot 6}{100 \cdot 12} = \frac{8\,793{,}30 \cdot 4}{100} \simeq 351{,}70 \text{ δρχ.}$$

Τόκος τῶν 2 500 δρχ γιὰ 4 μῆνες (ἀπὸ 1-9-58 ὡς 31-12-58):

$$\frac{2\,500 \cdot 8 \cdot 4}{100 \cdot 12} = \frac{200}{3} \simeq 66{,}65 \text{ δρχ.}$$

Ἑπομένως τὸ κεφάλαιο τοῦ λογαριασμοῦ τὴν 1η Ἰανουαρίου 1959 εἶναι:

$$8\,793{,}30 + 2\,500 + 351{,}70 + 66{,}65 = \mathit{11\,711{,}65\ δρχ.}$$

4. Ἐπένδυση σὲ ὁμολογίες κρατικῶν δανείων. Κάποτε, ἀντὶ νὰ τοποθετήσωμε σὲ Ταμιευτήριο τὰ χρήματα ποὺ μᾶς περισσεύουν, προτιμοῦμε νὰ τὰ διαθέσωμε σὲ ἀγορὰ *τοκοφόρων χρεωγράφων*, δηλαδὴ χρεωστικῶν ἐγγράφων ποὺ δίνουν (ἀποφέρουν) τόκο. Τέτοια τοκοφόρα χρεώγραφα εἶναι π.χ. οἱ *ὁμολογίες κρατικῶν δανείων*. Ἀγοράζοντας μιὰν ὁμολογία κρατικοῦ δανείου γινόμαστε δανειστὲς τοῦ Κράτους γιὰ τὸ ποσὸ ποὺ ἀναγράφεται στὴν ὁμολογία καὶ ποὺ λέγεται *ὀνομαστικὴ ἀξία της*. Ἐκδίδοντας τὴν ὁμολογία, τὸ Κράτος ἀναγνωρίζει τὸ χρέος του αὐτὸ καί, ὥσπου νὰ τὸ ἐξοφλήση (ἐπιστρέφοντας τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τῆς ὁμολογίας στὸν τελευταῖο κάτοχό της), πληρώνει τὸν τόκο τῆς ὀνομαστικῆς αὐτῆς ἀξίας, μὲ ἐπιτόκιο καὶ σὲ ἡμερομηνίες ποὺ καθορίζονται στὴν ἴδια τὴν ὁμολογία. Γιὰ νὰ εἰσπράξωμε τὸν τόκο ποὺ ἔχομε νὰ παίρνωμε σὲ κάθε τέτοια ἡμερομηνία, κόβομε ἀπὸ τὴν ὁμολογία τὸ ἀντίστοιχο *τοκομερίδιο* (κουπόνι) καὶ τὸ παραδίνομε στὴν Τράπεζα τοῦ Κράτους. Οἱ ὁμολογίες εἶναι κάποτε καὶ λαχειοφόρες, μὲ κληρώσεις καὶ κέρδη λαχνῶν ποὺ καθορίζονται κι αὐτὰ στὴν ὁμολογία. Τέτοιες ὁμολογίες εἶναι π.χ. ἐκεῖνες ποὺ ἐξέδωσε τὸ 1954 τὸ Ἑλληνικὸ Κράτος μὲ τὸ ὄνομα: «Ἐθνικὸν Παραγωγικὸν Λαχειοφόρον Δάνειον 5 % 1954». Νὰ τώρα ἕνα σχετικὸ πρόβλημα.

Πρόβλημα. Ἕνας ξυλουργὸς ἀγόρασε τὴν 1η Φεβρουαρίου 1958 4 πενταπλὲς καὶ 3 ἁπλὲς (μονὲς) ὁμολογίες τοῦ Ἐθν. Παραγ. Λαχ. Δανείου 5 % 1954. Ἡ ἁπλὴ ὁμολογία ἔχει ὀνομαστικὴ ἀξία 150 δρχ, ἡ πενταπλὴ 5 · 150 δρχ. Τὸ ἐπιτόκιο εἶναι 5 %, ὅπως ἀναφέρει καὶ τὸ ὄνομα τοῦ Δανείου· ὁ τόκος ὑπολογίζεται γιὰ ἕνα ἔτος κάθε φορά, ἀπὸ τὴν 1η Ἰουλίου ὡς στὶς 30 Ἰουνίου τοῦ ἑπόμενου ἔτους, καὶ πληρώνεται ἀπὸ τὴν ἑπόμενη ἡμέρα, τὴν 1η Ἰουλίου, καὶ ἔπειτα. Ὑπολογίστε τί ποσὸ εἰσέπραξε ὁ ξυλουργὸς ἐξαργυρώνοντας στὴν Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, στὶς 2-7-58, τὰ ὑπ' ἀριθμὸ 4 ἑπτὰ τοκομερίδιά του ποὺ ἦσαν πληρωτέα ἀπὸ τὴν 1η Ἰουλίου 1958 καὶ ἔπειτα;

Ἕνα τοκομερίδιο μιᾶς ἁπλῆς ὁμολογίας ἀντιπροσωπεύει τὸν τόκο τῶν 150 δρχ, ὀνομαστικῆς ἀξίας τῆς ὁμολογίας, πρὸς 5 % γιὰ ἕνα ἔτος, δηλαδὴ $\frac{150 \cdot 5 \cdot 1}{100} = 7{,}50$ δρχ. Ἕνα τοκομερίδιο μιᾶς πενταπλῆς ὁμολογίας ἀντιπροσωπεύει ἑπομένως:

$$5 \cdot 7{,}50 = 37{,}50 \text{ δρχ.}$$

Ἄρα ὁ ξυλουργός, ἐξαργυρώνοντας στὶς 2-7-58 τὰ ὑπ' ἀριθμ. 4 ἑπτὰ τοκομερίδιά του, εἰσέπραξε:

$$3 \cdot 7{,}50 + 4 \cdot 37{,}50 = 22{,}50 + 150 = 172{,}50 \text{ δρχ.}$$

5. Ἀσφάλιση. Γιὰ νὰ ἀσφαλίσωμε ἕνα ἀγαθὸ (δηλαδὴ ἕνα πράγμα ποὺ μᾶς εἶναι χρήσιμο, ὅπως π.χ. ἕνα σπίτι, ἕνα αὐτοκίνητο, ἕνα μηχάνημα κτλ.) ὡς πρὸς τὸν κίνδυνο νὰ πάθη βλάβη ἢ νὰ καταστραφῆ ἢ νὰ χαθῆ, πληρώνομε σὲ μιὰν Ἀσφαλιστικὴ Ἑταιρία (συνήθως περιοδικά, κάθε ἔτος π.χ.) ἕνα χρηματικὸ ποσὸ ποὺ τὸ λέμε *ἀσφάλιστρο* ἢ *ἀσφάλιστρα*. Τὸ ποσὸ αὐτὸ εἶναι κατευθείαν ἀνάλογο πρὸς τὴν ἐκτιμημένη ἀξία τοῦ ἀγαθοῦ ποὺ ἀσφαλίζομε. Ὁ λόγος τῶν ἀσφαλίστρων πρὸς τὴν ἀξία τοῦ ἀσφαλιζόμενου ἀγαθοῦ διαφέρει ἀπὸ περίπτωση σὲ περίπτωση καὶ ἐκφράζεται συνήθως σὰν ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ (%) ἢ στὰ χίλια (‰), δηλαδὴ μ' ἕνα κλάσμα ποὺ ἔχει παρανομαστὴ τὸν ἀριθμὸ 100 ἢ τὸν ἀριθμὸ 1 000. Γι' αὐτὸ θὰ τὸν λέμε *ἀσφαλιστικὸ ποσοστό*.

Παράδειγμα. Γιὰ ν' ἀσφαλίσωμε ἕνα αὐτοκίνητο ὡς πρὸς τὸν κίνδυνο νὰ μᾶς τὸ κλέψουν, πληρώνομε ἀσφαλιστικὸ ποσοστό, ἂς ποῦμε, 1,5 ‰ (ἑνάμισι στὰ χίλια) γιὰ ἕνα ἔτος. Τότε γιὰ ἕνα αὐτοκίνητο ἀξίας 60 000 δρχ θὰ πληρώσωμε ἀσφάλιστρα γιὰ ἕνα ἔτος $\frac{60\,000 \cdot 1,5}{1\,000} = 90$ δρχ.

Πρόβλημα. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἀσφαλίζει γιὰ περίπτωση πυρκαϊᾶς: 1ο τὸ κτίριο τῆς κατοικίας του ποὺ ἡ ἀξία του ἐκτιμήθηκε γιὰ 150 000 δρχ, 2ο τὰ ἔπιπλα καὶ τὰ σκεύη τῆς κατοικίας του ποὺ ἐκτιμήθηκαν γιὰ 70 000 δρχ. Τὸ ἐτήσιο ἀσφαλιστικὸ ποσοστὸ εἶναι 0,90 ‰ γιὰ τὸ κτίριο καὶ 1,25 ‰ γιὰ τὰ ἄλλα πράγματα. Ὑπολογίστε τὰ ἐτήσια ἀσφάλιστρα ποὺ πληρώνει αὐτὸς ὁ οἰκογενειάρχης.

Ἀσφάλιστρα γιὰ τὸ κτίριο: $\frac{150\,000 \cdot 0,90}{1\,000} = 135$ δρχ.

Ἀσφάλιστρα γιὰ τὰ ἔπιπλα κτλ.: $\frac{70\,000 \cdot 1,25}{1\,000} = 87,50$ δρχ.

Ἄρα ὁ οἰκογενειάρχης θὰ πληρώνη, γιὰ ἕνα ἔτος, ἀσφάλιστρα:

$$135 + 87,50 = 222,50 \text{ δρχ.}$$

Ἀσκήσεις. 1. Τὴν 1η Μαρτίου 1959 ὁ Χ. δανείστηκε ἀπὸ τὸν Κ. 8 000 δρχ μὲ τὴ συμφωνία νὰ τοῦ τὶς ἐπιστρέψη στὶς 31 Ἰουλίου 1960, πληρώνοντας τότε καὶ τὸν τόκο τους πρὸς 11 %. Τί ποσὸ θὰ δώση (θὰ μετρήση) ὁ Χ. στὸ δανειστή του στὶς 31 Ἰουλίου 1960;

2. Ἕνας ἔμπορος ἔχει στὴν κατοχή του ἕνα γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 17 000 δρχ ποὺ λήγει (εἶναι δηλ. πληρωτέο, βλ. Μάθ. 2, § 3) στὶς 15-8-1959. Στὶς 10-6-1959, ἐπειδὴ ἔχει ἀνάγκη ἀπὸ χρήματα, ὁ ἔμπορος προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιο σὲ μιὰ Τράπεζα· αὐτὴ τοῦ κρατάει τόκο 9 % πάνω στὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα ἀπὸ 10-6-59 ὡς 15-8-59 καθὼς καὶ 1,5 % τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας γιὰ προμήθεια. Τί ποσὸ θὰ εἰσπράξη ὁ ἔμπορος;

3. Στὸ Ταμιευτήριο τῆς Ἐθνικῆς Τράπεζας ἔχετε ἕνα λογαριασμὸ ποὺ τὴν 1-7-1958 παρουσιάζει 8 200 δρχ πιστωτικὸ ὑπόλοιπο. Μεταξὺ 1-7-1958 καὶ 30-6-1959 ὁ λογαριασμός σας παρουσίασε τὴν ἀκόλουθη κίνηση:

1ο. Καταθέσατε 4 500 δρχ τὴν 31-10-1958 καὶ 3 700 δρχ τὴν 15-2-1959·

2ο. Ἀποσύρατε 2 200 δρχ στὶς 15-12-1958 καὶ 1 500 δρχ στὶς 15-5-1959.

Ὑπολογίστε τὸ πιστωτικὸ ὑπόλοιπο τοῦ λογαριασμοῦ σας τὴν 1-7-1959, ξέροντας ὅτι τὸ Ταμιευτήριο κεφαλαιοποιεῖ τὴν 1η Ἰανουαρίου καὶ τὴν 1η Ἰουλίου κάθε ἔτους τοὺς τόκους τῶν χρημάτων ποὺ εἶναι κατατεθειμένα σ' αὐτὸ καὶ ὅτι τὸ ἐπιτόκιο εἶναι 7 %.

4. Ἔχετε ἀγοράσει τὶς παρακάτω ὁμολογίες τῆς ΔΕΗ (Δημόσιας Ἐπιχείρησης Ἠλεκτρισμοῦ):

75 τῶν 150 δρχ καὶ 55 τῶν 500 δρχ.

Ξέροντας ὅτι τὸ δάνειο τῆς ΔΕΗ ἔχει γίνει πρὸς 8 %, ὑπολογίστε πόσο τόκο θὰ παίρνετε κάθε ἑξάμηνο.

5. Ἕνας ἔχει ἀσφαλίσει γιὰ περίπτωση πυρκαϊᾶς τὸ σπίτι του ποὺ ἐκτιμήθηκε γιὰ 175 000 δρχ καὶ τὰ ἔπιπλά του ποὺ ἐκτιμήθηκαν γιὰ 65 000 δρχ. Τὸ ἀσφαλιστικὸ ποσοστὸ εἶναι 1,25 ‰ γιὰ τὸ σπίτι καὶ 1,70 ‰ γιὰ τὰ ἔπιπλα. Τί ἀσφάλιστρο θὰ πληρώνῃ τὸ ἔτος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Μάθημα 10.

Ἀριθμητικοὶ πίνακες καὶ τὰ γραφικά τους.

Γιὰ νὰ ρυθμίζωμε τὶς ἐνέργειές μας καὶ γιὰ νὰ κατευθύνωμε τὶς ἐργασίες μας χρειαζόμαστε συχνὰ ὁρισμένες πληροφορίες, ὁρισμένα ἀριθμητικὰ στοιχεῖα. Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ τὰ παίρνομε ἀπὸ ἀριθμητικοὺς πίνακες ποὺ βρίσκομε σὲ ὁδηγοὺς (δηλ. ἔντυπα ποὺ περιέχουν ὁδηγίες σχετικὲς μ' ἕνα πράγμα), σὲ τυπολόγια, καταλόγους κτλ. Νά μερικὰ παραδείγματα :

1. Ἀριθμητικοὶ πίνακες.

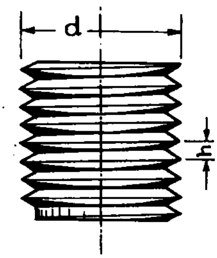
Ὥρα			Χιλιό-				Ὥρα		
91	92	Ν3	μετρα		Σταθμοί		94	96	Ν4
7 11	13 30	20 58	—	ἀν.	Ἀθῆναι	ἀφ.	14 52	22 04	5 55
9 14	15 35	23 02	91	ἀφ.	Κόρινθος	ἀν.	12 38	19 53	3 45
9 20	15 40	23 10		ἀν.		ἀφ.	12 31	19 48	3 39
12 29	18 52	2 40	212	ἀφ.	Τρίπολις	ἀν.	9 28	16 45	0 30
12 35	19 00	2 46		ἀν.		ἀφ.	9 22	16 36	0 24
15 23	21 58	6 23	327	ἀφ.	Καλάμαι	ἀν.	6 25	13 44	21 00

Σχ. 10-α. Ἀπόσπασμα (ἀπόκομμα) ἀπὸ ἕνα ὁδηγὸ σιδηροδρόμων.

α) Ὁ ὁδηγὸς σιδηροδρόμων (σχ. 10-α) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ξέρωμε: 1° Πότε ἀρχίζει καὶ πότε τελειώνει, ἑπομένως καὶ πόσο διαρκεῖ, μιὰ σιδηροδρομικὴ διαδρομή. Π.χ. ξεκινώντας ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὶς 7 *h* 11 *min* τὸ πρωὶ φθάνομε στὴν Τρίπολη στὶς 12 *h* 29 *min*, ἀφοῦ ταξιδεύσωμε 5 ὧρες καὶ 18 λεπτά.

2° Τί ἀπόσταση διατρέχομε ἀπὸ ἕνα σταθμὸ ὡς ἕναν ἄλλο. Π.χ. στὸ παραπάνω ταξίδι ὁ ὁδηγὸς μᾶς λέει ὅτι θὰ ἔχωμε διατρέξει 212 *km*. Στὴ διαδρομὴ Κόρινθο — Καλαμάτα θὰ ἔχωμε διατρέξει 327 — 91 = 236 *km*.

d	h	d	h
3	0,6	12	1,75
4	0,75	16	2
5	0,9	20	2,5
6	1	24	3
8	1,25	30	3,5
10	1,5	36	4



Σχ. 10-β. Ἀπόσπασμα ἀπὸ ἕνα Τεχνικὸ Κανονισμό. Κανονικὸ βῆμα *h* ἑνὸς κοχλία μὲ διάμετρο *d*.

β) Ὁ πίνακας τοῦ σχήματος 10-β ἐπιτρέπει στὸν τορναδόρο νὰ ξέρῃ ποιὸ εἶναι τὸ *κανονικὸ βῆμα* ἑνὸς κοχλία (μιᾶς βίδας) ποὺ θὰ φτιάξῃ ἀπὸ ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι δοσμένης διαμέτρου. Π.χ. ἂν ἡ διάμετρος τοῦ κυλινδρικοῦ κομματιοῦ εἶναι 10 *mm*, τὸ βῆμα τοῦ κοχλία θὰ εἶναι 1,5 *mm*.

γ) Ὁ πίνακας τοῦ σχήματος 10-γ ἐπιτρέπει στὸν ὑδραυλικὸ νὰ ξέρῃ ποιό εἶναι τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο τῶν διάφορων μολυβδοσωλήνων ποὺ χρησιμοποιεῖ. Π.χ., 1 μέτρο μολυβδοσωλήνας μὲ ἐσωτερικὴ διάμετρο 30 *mm* καὶ πάχος 3 *mm* ζυγίζει 3,6 *kg*.

Οἱ δύο πρῶτοι πίνακες (σχ. 10-α καὶ σχ. 10-β) *ἀντιστοιχίζουν σ' ἕναν ἀριθμό,* ποὺ μετρᾶ ἕνα μέγεθος, *ἕναν ἀριθμὸ* ποὺ μετρᾶ ἕνα ἄλλο μέγεθος τὸ ὁποῖο *ἐξαρτᾶται* ἀπὸ τὸ πρῶτο. Π.χ. τὸ μέγεθος: κανονικὸ βῆμα τοῦ σπειρώματος ἑνὸς κοχλία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος: διάμετρος τοῦ κοχλία, καὶ ὁ πίνακας τοῦ σχ. 10-β δίνει μερικὰ ζευγάρια ἀπὸ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν δυὸ αὐτῶν μεγεθῶν.

Ἐσωτερικὴ διάμετρος	Πάχος σωλήνων				
	2	2,5	3	3,5	4
10	0,90	1,10	1,50	1,70	2,00
15	1,20	1,50	1,90	2,30	2,70
20	1,60	2,00	2,40	2,90	3,40
25	1,90	2,50	3,00	3,60	4,10
30	2,3	2,9	3,6	4,2	4,9
35	2,7	3,4	4,1	4,8	5,6
40	3,0	3,8	4,6	5,4	6,3
45	3,4	4,3	5,2	6,1	7,0

Σχ. 10-γ. Ἀπὸ ἕνα τυπολόγιο ὑδραυλικοῦ.

Ὁ τρίτος πίνακας (σχ. 10-γ) εἶναι κάπως πιὸ πολύπλοκος: ***ἀντιστοιχίζει σὲ δυὸ ἀριθμούς***, ποὺ εἶναι τιμὲς δυὸ ἀνεξάρτητων μεγεθῶν (τῆς ἐσωτερικῆς διαμέτρου καὶ τοῦ πάχους ἑνὸς μολυβοσωλήνα), ***ἕναν τρίτο ἀριθμὸ*** ποὺ εἶναι τιμὴ ἑνὸς τρίτου μεγέθους (βάρος τοῦ μολυβοσωλήνα) τὸ ὁποῖο ***ἐξαρτᾶται*** ἀπὸ τὰ δύο πρῶτα.

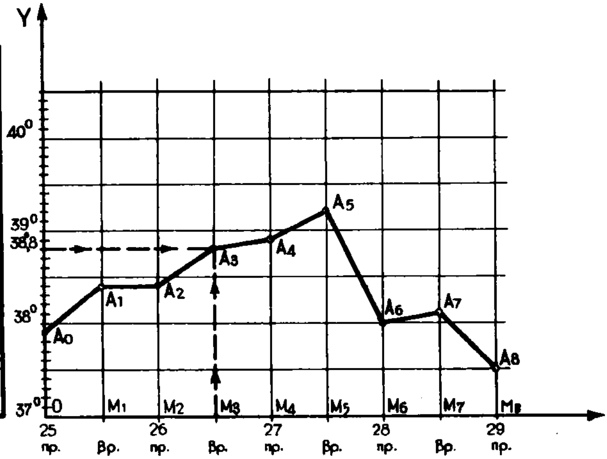
2. Γραφικὲς παραστάσεις ἢ γραφικά. Συχνὰ εἶναι σκόπιμο (χρήσιμο) νὰ παρουσιάσωμε γραφικῶς (δηλαδὴ γεωμετρικά, μ' ἕνα σχέδιο) τὴν ἀντιστοιχία ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν τιμῶν δυὸ ἀλληλοεξαρτώμενων μεγεθῶν. Ἂς δείξωμε σ' ἕνα παράδειγμα πῶς γίνεται συνήθως αὐτό.

Προσέξτε τὸν πίνακα τοῦ σχ. 10-δ: μᾶς δίνει τὴ θερμοκρασία ἑνὸς ἀρρώστου, τὸ πρωὶ καὶ τὸ βράδυ στὶς 7 ἡ ὥρα, κατὰ τὰ τέσσερα πρῶτα εἰκοσιτετράωρα τῆς ἀρρώστιας του. Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ $A_0A_1A_2...A_7A_8$ τοῦ σχ. 10-ε εἶναι μιὰ *γραφικὴ παράσταση*, *ἕνα γραφικό*, αὐτοῦ τοῦ ἀριθμητικοῦ πίνακα. Νά πῶς κατασκευάζεται.

Μέσα στὸ ἐπίπεδο τοῦ σχεδίου μας χαράζομε δυὸ κάθετες εὐθεῖες OX καὶ OY, δυὸ ἄξονες ὅπως συνηθίζεται νὰ λέμε.

Πάνω στὴν ἡμιευθεία OX, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ σημεῖο O, παίρνομε συνεχιστὰ 8 ἴσα τμήματα $OM_1 = M_1M_2 = ... = M_7M_8$, παριστάνοντας μὲ τὸ καθένα τους ἕνα δωδεκάωρο· ἑπομένως τὰ

ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΕΣ	Θερμοκρασία τοῦ ἀρρώστου
25 Πρωί	37°9
Βράδυ	38°4
26 Π.	38°4
Β.	38°8
27 Π.	38°9
Β.	39°2
28 Π.	38°
Β.	38°1
29 Π.	37°5



Σχ. 10-δ. **Σχ. 10-ε. Γραφικὸ τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς ἀρρώστου.**

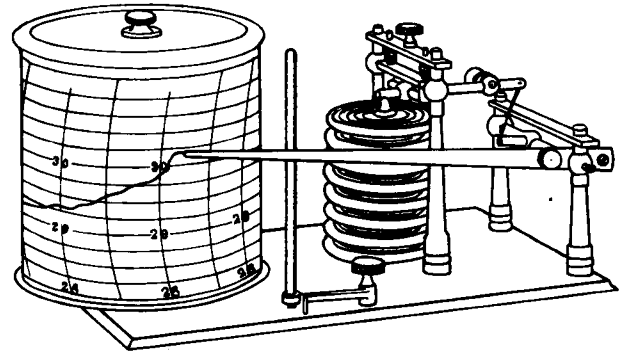
σημεῖα $O, M_1, M_2, ..., M_8$ τοῦ OX θὰ παριστάνουν τὶς χρονολογίες τῆς θερμομέτρησης τοῦ ἀρρώστου. Π.χ. τὸ σημεῖο M_3 παριστάνει τὴ χρονολογία: 26 Μαΐου, βράδυ. Διαιροῦμε ὅμοια τὴν ἡμιευθεία OY σὲ ἴσα τμήματα, παριστάνοντας μὲ τὸ καθένα τους μιὰ διαφορὰ θερμοκρασίας ἑνὸς δεκάτου τοῦ βαθμοῦ Κελσίου (0°,1), ἀπὸ τὴ θερμοκρασία 37° καὶ ἀπάνω· ἑπομένως τὰ διαιρετικὰ σημεῖα τοῦ OY (οἱ διαιρέσεις, ὅπως θὰ λέμε σύντομα), θὰ παριστάνουν τὶς θερμοκρασίες 37°, 37°,1, ..., 38°, 38°,1,..., 39° κτλ.

Στὴ θερμοκρασία 37°,9 ποὺ εἶχε ὁ ἄρρωστος τὸ πρωὶ τῆς 25ης Μαΐου, ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖο A_0 τοῦ ἄξονα OY. Στὴ θερμοκρασία 38°,4 τοῦ ἀρρώστου τὸ βράδυ τῆς 25ης ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖο A_1 ποὺ βρίσκομε φέρνοντας ἀπὸ τὸ σημεῖο M_1 τοῦ ἄξονα OX παράλληλο πρὸς τὸν ἄξονα OY καὶ ἀπὸ τὴ διαίρεση 38°,4 τοῦ OY παράλληλο πρὸς τὸν OX· τὸ σημεῖο ὅπου οἱ δυὸ αὐτὲς εὐθεῖες κόβονται εἶναι τὸ A_1. Ὅμοια, ἡ θερμοκρασία 38°,4 τοῦ ἀρρώστου, τὸ πρωὶ τῆς 26ης, παριστάνεται ἀπὸ τὸ σημεῖο A_2 ὅπου κόβονται οἱ ἀκόλουθες δυὸ εὐθεῖες: ἡ παράλληλος πρὸς τὸν OY ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο M_2 τοῦ OX (πρωὶ τῆς 26ης) καὶ ἡ παράλληλος πρὸς τὸν OX ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὴ διαίρεση 38°,4 τοῦ OY. Τὸ σημεῖο A_3 εἶναι τὸ σημεῖο ὅπου ἡ παράλληλος πρὸς τὸν OY ἀπὸ τὸ σημεῖο M_3 (βράδυ τῆς 26ης) κόβει τὴν παράλληλο πρὸς τὸν OX ἀπὸ τὴ διαίρεση 38°,8 τοῦ OY, κ.ο.κ.

Ἀφοῦ προσδιορίσαμε ἔτσι τὰ σημεῖα $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_8$, ποὺ παριστάνουν τὶς θερμοκρασίες στὶς 9 θερμομετρήσεις ποὺ ἔγιναν, τὰ ἑνώνομε διαδοχικά, χαράζοντας τὴν τεθλασμένη γραμμὴ $A_0\,A_1\,A_2 \ldots A_7\,A_8$. Αὐτὴ μᾶς δείχνει τὰ ἀνεβοκατεβάσματα (τὴ μεταβολὴ) τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀρρώστου πολὺ πιὸ παραστατικὰ (πολὺ πιὸ εὐκολοδιάκριτα) ἀπὸ τὸν ἀριθμητικὸ πίνακα τοῦ σχήματος 10-δ.

Παρατήρηση. Εἶναι φανερὸ πώς, στὴν πραγματικότητα, ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀρρώστου κατὰ τὸ 12ωρο ποὺ χωρίζει δυὸ διαδοχικὲς θερμομετρήσεις, δὲν ἔχει ὑποχρεωτικὰ τὴν ὁμαλὴ πορεία ποὺ δείχνει τὸ ἀντίστοιχο εὐθύγραμμο τμῆμα τοῦ παραπάνω γραφικοῦ· μὲ ἄλλα λόγια, τὴν πραγματικὴ θερμοκρασία τοῦ ἀρρώστου σὲ μιὰ χρονικὴ στιγμὴ μεταξὺ δυὸ διαδοχικῶν θερμομετρήσεων μᾶς τὴ δίνει τὸ ἀντίστοιχο σημεῖο τοῦ γραφικοῦ ὄχι ἐπακριβῶς ἀλλὰ κατὰ προσέγγιση. Πάντως τὸ γραφικὸ θὰ ἀποδίνη τὴν πραγματικότητα στὶς ἐνδιάμεσες χρονικὲς στιγμὲς μὲ τόσο καλύτερη προσέγγιση ὅσο πιὸ μικρὸ εἶναι τὸ χρονικὸ διάστημα ποὺ χωρίζει δυὸ διαδοχικὲς θερμομετρήσεις.

Γι' αὐτό, ὅταν θέλωμε νὰ ἔχωμε μὲ πολὺ καλὴ προσέγγιση τὸ γραφικὸ ἑνὸς φυσικοῦ μεγέθους ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν χρόνο, χρησιμοποιοῦμε *αὐτόματα καταγραφικὰ ὄργανα*· τὰ ὄργανα αὐτὰ κάνουν μόνα τους καὶ τὴ μέτρηση τοῦ μεγέθους σχεδὸν σὲ κάθε χρονικὴ στιγμὴ καὶ τὴν καταγραφή, σ' ἕνα γραφικό, τῶν ἀποτελεσμάτων ὅλων αὐτῶν τῶν μετρήσεων. Π.χ. ὁ λεγόμενος *βαρογράφος* (σχ. 10-ϛ) μᾶς δίνει τὶς ἀτμοσφαιρικὲς πιέσεις κατὰ τὴ διάρκεια ἑνὸς εἰκοσιτετραώρου, μὲ ἕνα γραφικὸ ποὺ ἡ γραφίδα τοῦ ὀργάνου χαράζει αὐτόματα καὶ χωρὶς διακοπὴ πάνω σ' ἕνα σταυρωτὰ χαρακωμένο χαρτί, τυλιγμένο γύρω σ' ἕναν ὁμοιόμορφα περιστρεφόμενο κύλινδρο.



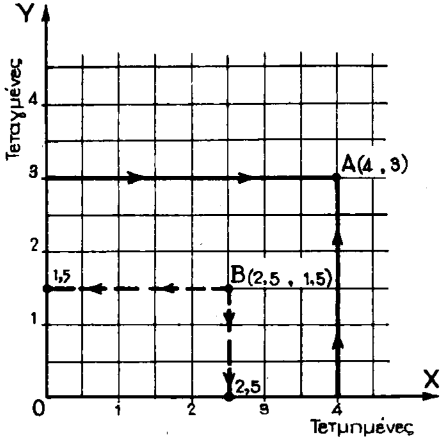
Σχ. 10-ϛ. Βαρογράφος.

3. Προσδιορισμὸς ἑνὸς σημείου μέσα στὸ ἐπίπεδο. Μελετώντας τὴ μέθοδο ποὺ χρησιμοποιήσαμε γιὰ νὰ κατασκευάσωμε τὸ γραφικὸ τοῦ προηγούμενου παραγράφου βλέπομε τὸ ἑξῆς: ἡ θέση ἑνὸς σημείου μέσα στὴ γωνία XOY τοῦ ἐπιπέδου μπορεῖ νὰ καθορισθῇ μὲ δυὸ ἀριθμούς: τὶς ἀποστάσεις τοῦ σημείου ἀπὸ τοὺς δυὸ ἄξονες OY καὶ OX ποὺ χαράξαμε μέσα στὸ ἐπίπεδο.

Π.χ. στὸ σχῆμα 10-ζ τὸ σημεῖο A προσδιορίζεται μὲ τὴν ἀπόσταση 4 μονάδες μήκους τὴν ὁποία ἔχει ἀπὸ τὸν ἄξονα OY καὶ τὴν ἀπόσταση 3 μονάδες μήκους τὴν ὁποία ἔχει ἀπὸ τὸν ἄξονα OX. Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς (ἀπόσταση ἀπὸ τὸν OY μετρημένη μὲ τὴ μονάδα μήκους ποὺ διαλέξαμε πάνω στὸν ἄξονα OX) δια-

διαβάζεται πάνω στὸν ἄξονα OX καὶ λέγεται *τετμημένη* τοῦ σημείου A, ὁ δεύτερος (ἀπόσταση τοῦ σημείου ἀπὸ τὸν OX μετρημένη μὲ τὴ μονάδα μήκους τὴν ὁποία διαλέξαμε πάνω στὸν OY) διαβάζεται πάνω στὸν ἄξονα OY καὶ λέγεται *τεταγμένη* τοῦ σημείου· οἱ δυὸ ἀριθμοὶ μαζὶ λέγονται *συντεταγμένες* τοῦ σημείου A. Τὴν ἀντιστοιχία αὐτὴ μεταξὺ τοῦ σημείου A καὶ τῶν δύο συντεταγμένων του τὴ συμβολίζομε ἔτσι: $A\ (4\ ,\ 3)$, δηλαδὴ μετὰ τὸ γράμμα, ποὺ παριστάνει τὸ σημεῖο, γράφομε μέσα σὲ μιὰ παρένθεση πρῶτα τὴν τετμημένη του καὶ ἔπειτα τὴν τεταγμένη του.

Ἀντιστρόφως τώρα, σὲ κάθε δοσμένο ζευγάρι ἑνὸς πρώτου καὶ ἑνὸς δεύτερου ἀριθμοῦ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο μέσα στὴ γωνία $\widehat{XOY}$ τοῦ ἐπιπέδου. Π.χ. στὸ ζευγάρι (2,5 , 1,5) μὲ πρῶτο ἀριθμὸ τὸν 2,5 καὶ δεύτερο τὸν 1,5 ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖο B τοῦ σχήματος 10-ζ.



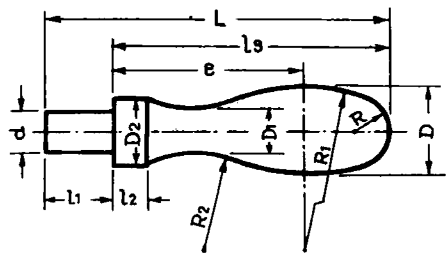
Σχ. 10·ζ. Συντεταγμένες ἑνὸς σημείου.

Ὥστε, ἀφοῦ διαλέξωμε μέσα στὸ ἐπίπεδο δυὸ ἄξονες OX καὶ OY καθὼς καὶ δυὸ μονάδες μήκους πάνω σ' αὐτούς, κάθε σημεῖο μέσα στὴ γωνία $\widehat{XOY}$ τοῦ ἐπιπέδου προσδιορίζεται (παριστάνεται) μὲ δυὸ ἀριθμούς, τὶς συντεταγμένες του· ἀντιστρόφως, κάθε ζευγάρι ἀπὸ ἕναν πρῶτο καὶ ἕνα δεύτερο ἀριθμὸ προσδιορίζει (παριστάνει) ἕνα σημεῖο μέσα στὴ γωνία $\widehat{XOY}$.

Παρατήρηση. Ὁ ἄξονας OX λέγεται ἄξονας τῶν τετμημένων ἢ τῶν x, ὁ ἄξονας OY λέγεται ἄξονας τῶν τεταγμένων ἢ τῶν y. Τὸ σημεῖο O λέγεται *ἀρχὴ* τῶν συντεταγμένων.

Ἀσκήσεις. 1. Διαβάστε στὸν παρακάτω ἀριθμητικὸ πίνακα (σχ. 10-η), ποὺ εἶναι παρμένος ἀπὸ ἕνα τεχνικὸ κανονισμό, τὶς διαστάσεις ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ μανιβέλα μὲ διάμετρο $D = 20\,mm$ καθὼς καὶ ἐκεῖνες ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ μανιβέλα μὲ διάμετρο $D = 30\,mm$.

Συγκρίνοντας τώρα μεταξύ τους τοὺς λόγους τῶν διαστάσεων τῆς πρώτης μανιβέλας ($D = 20\,mm$) πρὸς τὶς ὁμώνυμες διαστάσεις τῆς δεύτερης ($D = 30\,mm$), ἐπαληθεῦστε ὅτι οἱ δυὸ μανιβέλες δὲν εἶναι ἐντελῶς ὅμοιες.



D	d	D_1	D_2	L	l_1	l_2	l_3	e	R	R_1	R_2
10	5	6	8	40	8	4	32	22	4	22	17
12	6	7	9,5	48	9,5	5	38,5	26,5	5	30	17
16	8	9,5	12.5	64	13	6,5	51	35	6,5	37,5	24
20	10	12	16	80	16	8	64	44	8	44	34
24	12	14	19	96	19	10	77	53	10	60	34
30	14	18	24	120	24	12	96	66	12	66	51
36	16	21	28,5	144	28,5	15	115,5	79,5	15	90	51
42	18	25	33	168	34	17	134	92	17	97	65

Σχ. 10-η. Ἀπόσπασμα ἀπὸ ἕνα Τεχνικὸ Κανονισμὸ γιὰ τὶς διαστάσεις μιᾶς μανιβέλας.

2. Καταρτίστε (σχεδιάστε) τὸ γραφικὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν ποὺ ἐγγράφηκαν στὴν Α΄ τάξη τοῦ σχολείου σας στὸ καθένα ἀπὸ τὰ 6 ἔτη 1953 - 1958. (Πάνω στὸν ἄξονα τῶν x: οἱ χρονολογίες 1η Ὀκτωβρίου 1953, 1η Ὀκτωβρίου 1954, . . . , 1η Ὀκτωβρίου 1958. Πάνω στὸν ἄξονα τῶν y: οἱ ἀριθμοὶ τῶν μαθητῶν ποὺ εἶχε ἡ Α΄ τάξη σ' αὐτὲς τὶς 6 χρονολογίες).

3. Χρησιμοποιώντας τὸν ἀριθμητικὸ πίνακα τοῦ σχ. 10-6 καταρτίστε τὸ γραφικὸ γιὰ τὰ βήματα τῶν σπειρωμάτων μιᾶς σειρᾶς κοχλιῶν

μὲ διαμέτρους 3 mm, 4 mm, . . . , 10 mm. Σύμφωνα μὲ τὸ γραφικὸ αὐτό, τί βῆμα θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχη τὸ σπείρωμα ἑνὸς κοχλία μὲ διάμετρο 4,5 mm ; 6,5 mm ;

4. Προσδιορίστε τὴ θέση τῶν σημείων

$$A\ (3\ ,\ 7)\ ,\ B\left(5\ ,\ \frac{3}{2}\right)\ ,\ \Gamma\ (4\ ,\ 2)$$

μέσα στὴ γωνία $\widehat{XOY}$ ὡς πρὸς τοὺς δυὸ κάθετους ἄξονες OX καὶ OY, ἀφοῦ πάρετε πάνω στὸν καθένα τους γιὰ μονάδα μήκους τὸ 1 cm.

Ἂν ἕνα σημεῖο Δ ἔχη συντεταγμένες διπλάσιες ἀπὸ τὶς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ Γ, τί μπορεῖτε νὰ πῆτε γιὰ τὴ σχετικὴ θέση τῶν τριῶν σημείων O, Γ καὶ Δ;

5. Χαράξτε δυὸ κάθετες ἡμιευθεῖες OX καὶ OY καὶ πάρτε πάνω στὸν ἄξονα OX γιὰ μονάδα μήκους τὸ 1 cm, πάνω ὅμως στὸν OY μιὰ μονάδα μήκους 100 φορὲς μικρότερη (ἑπομένως 1 cm πάνω στὸν OY παριστάνει τὸν ἀριθμὸ 100, ἐνῶ 1 cm πάνω στὸν OX παριστάνει τὸν τὸν ἀριθμὸ 1).

Προσδιορίστε τώρα ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ σύστημα ἀξόνων τὶς θέσεις τῶν ἀκόλουθων σημείων :

$$A\ (0\ ,\ 525)\ ,\ B\ (1\ ,\ 350)\ ,\ \Gamma\ (4\ ,\ 200),\ \Delta\left(\frac{9}{2}\ ,\ 300\right).$$

6. Χαράξτε δυὸ κάθετες ἡμιευθεῖες OX καὶ OY καὶ πάρτε πάνω σ' αὐτὲς δυὸ μονάδες μήκους τῆς ἐκλογῆς σας. Ὕστερα προσδιορίστε μέσα στὴ γωνία $\widehat{XOY}$

1ο τὶς θέσεις 4 σημείων ποὺ ἔχουν διαφορετικὲς τετμημένες ἀλλὰ τὴν ἴδια τεταγμένη, ἂς ποῦμε 3. Τί παρατηρεῖτε ;

2ο τὶς θέσεις 5 σημείων ποὺ ἔχουν διαφορετικὲς τεταγμένες ἀλλὰ τὴν ἴδια τετμημένη, ἔστω 2,5. Τί παρατηρεῖτε ;

3ο τὶς θέσεις τριῶν ἢ περισσότερων σημείων ποὺ τὸ καθένα τους ἔχει τὴν τετμημένη του ἴση μὲ τὴν τεταγμένη του. Τί παρατηρεῖτε ;

Μάθημα 11.

Μεγέθη κατευθείαν ἀνάλογα καὶ γραφικὴ παράσταση τῆς ἀλληλεξάρτησής τους.

1. Συνάρτηση. Ἂς μελετήσωμε μερικὰ παραδείγματα δυὸ μεγεθῶν ποὺ *ἐξαρτῶνται* τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.

1ο. Ἡ ἀμοιβὴ μ (σὲ δραχμὲς) ἑνὸς ἐργάτη, ποὺ πληρώνεται 8 δρχ τὴν ὥρα, *ἐξαρτᾶται* ἀπὸ τὴ διάρκεια t (σὲ ὧρες) τῆς ἐργασίας του καὶ ἰσοῦται μὲ

$$\mu = 8 \cdot t = 8t. \qquad (1)$$

2ο. Τὸ πλάτος l (σὲ cm) ποὺ πρέπει νὰ δώσωμε σ' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, γιὰ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸ $100\,cm^2$, *ἐξαρτᾶται* ἀπὸ τὸ μῆκος του L (σὲ cm) καὶ ἰσοῦται μὲ

$$l = \frac{100}{L}. \qquad (2)$$

3ο. Τὸ διάστημα s (σὲ m) ποὺ διατρέχει ἕνα σῶμα, ὅταν πέφτῃ ἐλεύθερα στὸ κενό, *ἐξαρτᾶται* ἀπὸ τὴ διάρκεια t (σὲ sec) τῆς πτώσης καὶ ἰσοῦται μὲ

$$s = 4{,}9\,t^2. \qquad (3)$$

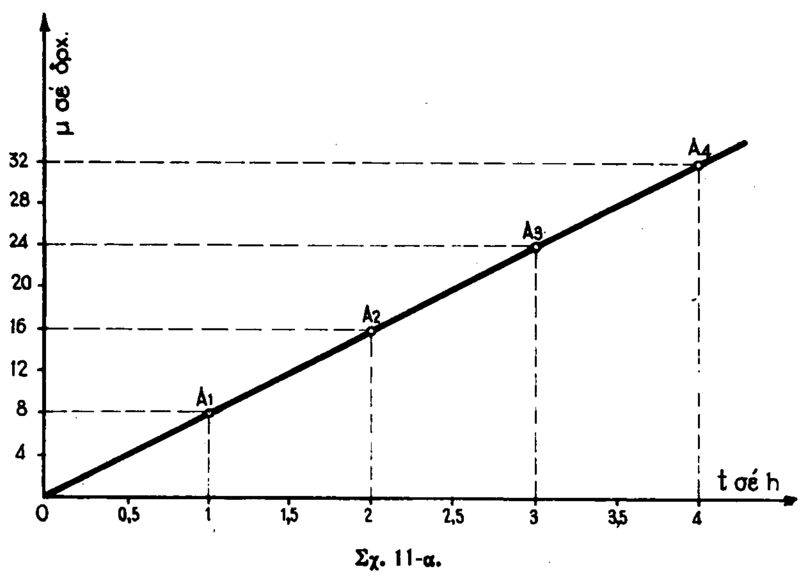
Στὸ καθένα ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἡ ἀλληλεξάρτηση τῶν δύο μεγεθῶν εἶναι ἐντελῶς καθορισμένη ἀπὸ μιὰν ἰσότητα (μιὰν ἐξίσωση) ποὺ συνδέει τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν δυὸ μεγεθῶν. Ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς τρεῖς αὐτὲς ἰσότητες (1), (2) καὶ (3) ἐκφράζει τὸ πρῶτο ἀπὸ τὰ δυὸ μεγέθη μὲ τὸ δεύτερο ἤ, ὅπως καὶ ἄλλοτε εἴπαμε, *τὸ πρῶτο μέγεθος συναρτήσει τοῦ δεύτερου*. Γι' αὐτὸ καὶ θὰ λέμε τώρα ὅτι τὸ πρῶτο μέγεθος εἶναι μιὰ *συνάρτηση* τοῦ δεύτερου μεγέθους· γιὰ διάκριση τὸ δεύτερο αὐτὸ μέγεθος θὰ τὸ λέμε *ἀνεξάρτητη μεταβλητή*. Ἔτσι, ἡ ἀμοιβὴ τοῦ ἐργάτη εἶναι μιὰ συνάρτηση τῆς διάρκειας τῆς ἐργασίας ὁριζόμενη ἀπὸ τὴ σχέση (1)· τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου μὲ δοσμένο ἐμβαδὸ εἶναι μιὰ συνάρτηση τοῦ μήκους του (σχέση (2))· τέλος τὸ διάστημα ποὺ διατρέχει τὸ σῶμα ποὺ πέφτει εἶναι μιὰ συνάρτηση τῆς διάρκειας (τοῦ χρόνου) τῆς πτώσης (σχέση (3)).

Ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς παραπάνω ἰσότητες μᾶς ἐπιτρέπει, ὅταν δώσωμε μιὰν εἰδικὴ τιμὴ στὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δυὸ μεγέθη, νὰ βροῦμε τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου μεγέθους. Ἔτσι μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμε ὅσα θέλομε *ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν τῶν δυὸ ἀλληλοεξαρτώμενων μεγεθῶν*. Π.χ., γιὰ τὸ 1ο παράδειγμα μποροῦμε νὰ καταρτίσωμε τὸν ἀκόλουθο πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν:

t (ὧρες)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
μ (δρχ)	8	12	16	20	24	28	32

Τὰ ζευγάρια (1 καὶ 8), (1,5 καὶ 12), (2 καὶ 16),... εἶναι ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ μεγέθους t καὶ τῆς συνάρτησής του μ.

Γραφικὴ παράσταση μιᾶς συνάρτησης, σὰν τὶς τρεῖς παραπάνω, εἶναι *τὸ γραφικὸ ποὺ βρίσκομε προσδιορίζοντας τὰ σημεῖα ποὺ ἔχουν συντεταγμένες, ὡς πρὸς δύο ἄξονες ΟΧ καὶ*



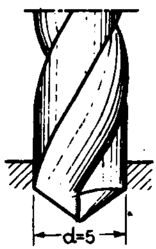
Σχ. 11-α.

ΟΥ, τὰ ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς καὶ τῆς συνάρτησης.

Π.χ. γραφικὴ παράσταση τῆς συνάρτησης $\mu = 8t$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν διάφορων σημείων τῆς ἡμιευθείας OA_1A_4 (σχ. 11-α).

2. Μεταβολὴ ἑνὸς μεγέθους ποὺ εἶναι κατευθεῖαν ἀνάλογο πρὸς ἕνα ἄλλο.

Παράδειγμα. Ἂς ὑπολογίσωμε σὲ m/min τὴν κοπτικὴ ταχύτητα v ἑνὸς τρυπανιοῦ ποὺ ἔχει διάμετρο $d = 5\,mm$ καὶ στρέφεται μὲ n στρ/min (σχ. 11-β).



Σχ. 11-β. Ὑπολογίστε τὴν κοπτικὴ ταχύτητα αὐτοῦ τοῦ τρυπανιοῦ ποὺ στρέφεται μὲ *n στρ/min.*

Ἂν τὸ τρυπάνι ἔκανε 1 στρ/min, θὰ εἶχε κοπτικὴ ταχύτητα σὲ mm/min

$$5 \cdot \pi \simeq 5 \cdot 3{,}14 = 15{,}7 \ mm/min,$$

ἄρα σὲ m/min

$$0{,}015\,7\ m/min \simeq 0{,}016\ m/min.$$

Ἐπειδὴ ὅμως κάνει n στρ/min, ἡ κοπτική του ταχύτητα θὰ εἶναι

$$0{,}016 \cdot n\ m/min.$$

Ὥστε, *ἡ κοπτικὴ ταχύτητα v τοῦ τρυπανιοῦ εἶναι συνάρτηση τῆς περιστροφικῆς του ταχύτητας n, ὁριζόμενη ἀπὸ τὴ σχέση*

$$v = 0{,}016\ n\ m/min. \qquad (1)$$

Ἂν διαιρέσωμε καὶ τὰ δυὸ μέλη αὐτῆς τῆς ἰσότητας διὰ τοῦ n βρίσκομε:

$$\frac{v}{n} = 0{,}016.$$

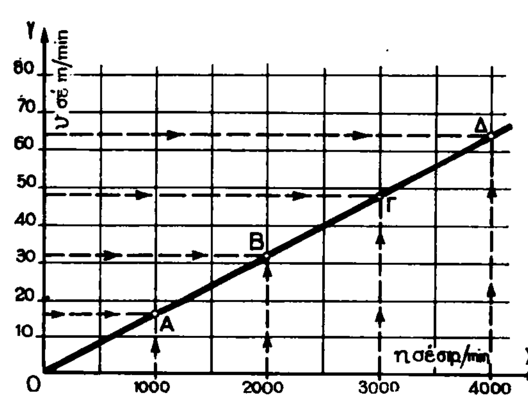
Βλέπομε λοιπὸν ὅτι ὁ λόγος δυὸ ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς κοπτικῆς ταχύτητας καὶ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητας τοῦ τρυπανιοῦ εἶναι πάντα ὁ ἴδιος, ὅποιες καὶ νὰ εἶναι οἱ δυὸ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν μεγεθῶν v καὶ n. Ἑπομένως ἡ κοπτικὴ ταχύτητα τοῦ τρυπανιοῦ εἶναι ***κατευθεῖαν ἀνάλογη*** πρὸς τὴν περιστροφική του ταχύτητα (βλ. Τόμ. Β′, Μάθ. 25).

Ἂς καταρτίσωμε τώρα ἕναν πίνακα (σχ. 11-γ) ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ *υ* καὶ τοῦ *n*, χρησιμοποιώντας τὴν παραπάνω σχέση (1), καὶ ἂς προσδιορίσωμε (σχ. 11-γ) τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τὰ ὁποῖα ἔχουν γιὰ συντεταγμένες τέσσερα ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν ἀπὸ αὐτὸν τὸν πίνακα:

Α (1 000 , 16) , *Β* (2 000 , 32) , *Γ* (3 000 , 48) , Δ (4 000, 64).

Ἐννοεῖται ὅτι, γιὰ νὰ βρίσκωνται αὐτὰ τὰ παραστατικὰ σημεῖα μέσα στὴν ἐπιφάνεια ποὺ διαθέτομε γιὰ τὸ γραφικό, διαλέξαμε

n	υ
1 000	16
2 000	32
3 000	48
4 000	64



Σχ. 11-γ. Ἡ κοπτικὴ ταχύτητα τοῦ τρυπανιοῦ σὰν συνάρτηση τῆς περιστροφικῆς του ταχύτητας.

δυὸ κατάλληλες κλίμακες (δυὸ κατάλληλες μονάδες μήκους) γιὰ νὰ παραστήσωμε τὶς τιμὲς τοῦ μεγέθους *n* πάνω στὸν ἄξονα *ΟΧ* καὶ τὶς τιμὲς τοῦ μεγέθους *υ* πάνω στὸν *ΟΥ*.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ βρίσκονται *πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο*. Προσδιορίζοντας καὶ ἄλλα σημεῖα τῆς γραφικῆς παράστασης τῆς συνάρτησης $υ = 0{,}016\ n$ ἐπαληθεύομε ὅτι καὶ αὐτὰ βρίσκονται πάνω στὴν εὐθεία *ΟΑ*. Ἔτσι φθάνομε στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ γραφικὴ αὐτὴ παράσταση ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς ἡμιευθείας ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὸ *Ο* καὶ περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο *Α* (1 000 , 16).

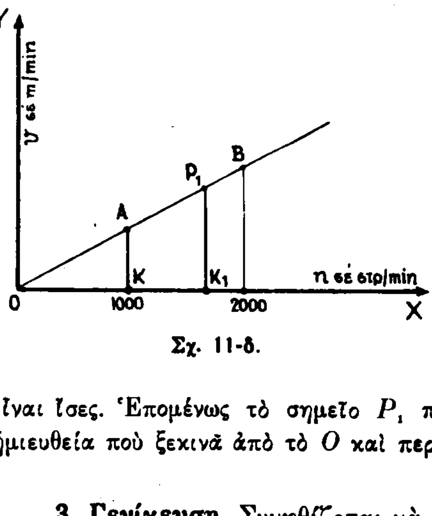
Σημείωση. Τὸ συμπέρασμα αὐτὸ μπορεῖ ν' ἀποδειχθῇ καὶ μ' ἕνα συλλογισμό, ἂν χρησιμοποιήσωμε μιὰν ἰδιότητα τῶν ὅμοιων τριγώνων ποὺ γι' αὐτὴν θὰ μιλήσωμε στὸ 2ο Μέρος τοῦ βιβλίου, Μάθ. 18, § 2.

Καὶ ἀλήθεια (βλ. σχ. 11-δ), ἄς εἶναι P_1 (n_1, v_1) ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο τῆς γραφικῆς παράστασης τῆς συνάρτησης, διαφορετικὸ καὶ ἀπὸ τὸ O (0, 0) καὶ ἀπὸ τὸ A (1000, 16). Θὰ ἔχωμε:

$$v_1 = 0{,}016\, n_1.$$

Ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ P_1 κατεβάζομε καθέτους AK καὶ P_1K_1 στὸν ἄξονα OX. Θὰ ἔχωμε τὶς ἀναλογίες:

$$\frac{OK_1}{OK} = \frac{n_1}{1\,000} \quad \text{καὶ} \quad \frac{P_1K_1}{AK} = \frac{0{,}016 \cdot n_1}{0{,}016 \cdot 1\,000} = \frac{n_1}{1\,000}$$



Σχ. 11-δ.

ἄρα καὶ τὴν

$$\frac{OK_1}{OK} = \frac{P_1K_1}{AK}$$

ἢ

$$\frac{OK_1}{P_1K_1} = \frac{OK}{AK}.$$

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OK_1P_1 καὶ OKA $(\widehat{K_1} = \widehat{K} = 90^\circ)$ ἔχουν λοιπὸν τὶς δυὸ κάθετες πλευρές τους ἀνάλογες. Ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ οἱ γωνίες τους $K_1\widehat{O}P_1$ καὶ $K\widehat{O}A$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσες. Ἑπομένως τὸ σημεῖο P_1 πρέπει νὰ βρίσκεται πάνω στὴν ἡμιευθεία ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὸ O καὶ περνᾶ ἀπὸ τὸ A.

3. Γενίκευση. Συνηθίζεται νὰ παριστάνωμε (νὰ συμβολίζωμε) γενικὰ μὲ x μιὰν ὁποιαδήποτε τιμὴ *τοῦ μεγέθους τὸ ὁποῖο κάνομε νὰ μεταβάλλεται (τὸ ὁποῖο παίρνομε γιὰ ἀνεξάρτητη μεταβλητή)* καὶ μὲ y τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ *δεύτερου μεγέθους ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πρῶτο (ποὺ εἶναι συνάρτηση τοῦ πρώτου)*. Στὸ προηγούμενο παράδειγμα, ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ ἦταν ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα ἑνὸς τρυπανιοῦ μὲ διάμετρο 5 mm καὶ συνάρτηση ἡ κοπτική του ταχύτητα· ἑπομένως, μὲ τὸν παραπάνω συμβολισμό, ἡ συνάρτηση, ποὺ μελετήσαμε καὶ παραστήσαμε γραφικῶς, ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$y = 0{,}016\ x.$$

Γενικότερα, γιὰ ἕνα τρυπάνι μὲ ὁποιαδήποτε διάμετρο d, θὰ εἴχαμε τὴ σχέση

$$y = a \cdot x = ax,$$

ὅπου a εἶναι ἕνας ὁρισμένος (ὄχι μηδενικὸς) ἀριθμὸς ποὺ καθορίζεται ἀπὸ τὴ διάμετρο τοῦ τρυπανιοῦ. Ἡ γραφικὴ παράσταση μιᾶς συνάρτησης ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ μιὰ τέτοια σχέση θὰ εἶναι πάλι μιὰ ἡμιευθεία ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὸ O.

Σύμφωνα τώρα μὲ ὅσα ξέρομε ἀπὸ τὸν Τόμο Β′ (Μάθ. 25), ὅταν δυὸ μεγέθη εἶναι κατευθείαν ἀνάλογα, τότε ὁ λόγος $\frac{y}{x}$ δυὸ ὁποιωνδήποτε ἀντίστοιχων τιμῶν τους y καὶ x εἶναι ὁ ἴδιος γιὰ ὅλα τὰ ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν· ἑπομένως, ἂν τὸν λόγο αὐτὸν τὸν παραστήσωμε μὲ a, θὰ ἔχωμε τὴ σχέση

$$\frac{y}{x} = a \qquad \text{ἢ τὴν} \qquad y = ax.$$

Τὸ γραφικὸ μιᾶς τέτοιας σχέσης (καθὼς καὶ τῆς συνάρτησης τὴν ὁποία ὁρίζει) εἶναι, ὅπως εἴδαμε, μιὰ εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ O. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ συμπεράνωμε τὰ ἑξῆς:

Μιὰ συνάρτηση y ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ μιὰ σχέση τῆς μορφῆς $y = ax$ (καὶ ποὺ εἶναι ἑπομένως ἕνα μέγεθος κατευθείαν ἀνάλογο πρὸς τὴν ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ x) παριστάνεται γραφικῶς μὲ μιὰ εὐθεία ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ O τῶν συντεταγμένων. Ἀντιστρόφως, μιὰ τέτοια εὐθεία μέσα στὴ γωνία $\widehat{XOY}$ παριστάνει γραφικῶς μιὰ σχέση τῆς μορφῆς $y = ax$.

Ἀσκήσεις. *1.* Ποιό εἶναι τὸ βάρος B ἑνὸς σιδερένιου κομματιοῦ ποὺ ἔχει σχετικὴ πυκνότητα 7,8 καὶ ὄγκο V, ὅταν μετρήσωμε τὸν ὄγκο σὲ dm^3 καὶ τὸ βάρος σὲ kg; Γιατί λέμε πὼς τὸ βάρος B εἶναι συνάρτηση τοῦ ὄγκου V; Παραστῆστε γραφικῶς αὐτὴ τὴ συνάρτηση, ὅταν τὸ V μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ὡς 10 (αὐτὸ τὸ γράφομε ἔτσι: $0 \leq V \leq 10$).

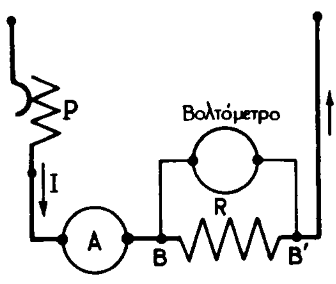
Κλίμακα τῶν ὄγκων: 1 cm πάνω στὸν OX ἂς παριστάνη 1 dm^3.
Κλίμακα τῶν βαρῶν: 1 cm πάνω στὸν OY ἂς παριστάνη 10 kg.

2. Παραστῆστε μ' ἕνα γραφικὸ τὴ συνάρτηση ποὺ μᾶς δίνει τὴν τιμὴ ἑνὸς ὑφάσματος, ὅταν ξέρωμε τὸ μῆκος του σὲ m καὶ ὅτι ἕνα μέτρο ἀπ' αὐτὸ τὸ ὕφασμα κοστίζει 90 δρχ. (Νὰ διαλέξετε κατάλληλες κλίμακες γιὰ τὴν παράσταση τοῦ μήκους τοῦ ὑφάσματος πάνω στὸν OX καὶ τῆς τιμῆς του πάνω στὸν OY, ὑποθέτοντας ὅτι αὐτὸ τὸ μῆκος μεταβάλλεται μεταξὺ 0 καὶ 10 m καὶ ὅτι διαθέτετε γιὰ τὸ γραφικὸ ἐπιφάνεια διαστάσεων 10 cm ἐπὶ 10 cm).

3. Πάρτε μιὰ σειρὰ ἀπὸ κυλίνδρους μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα $R = 4$ cm καὶ ἐξηγῆστε γιατί ὁ ὄγκος τους εἶναι συνάρτηση τοῦ ὕψους των h (σὲ cm). Παραστῆστε γραφικὰ αὐτὴ τὴ συνάρτηση γιὰ $1 \leq h \leq 6\,cm$.
Κλίμακα τῶν ὑψῶν: 1 cm ἂς παριστάνη ὕψος 1 cm.
Κλίμακα τῶν ὄγκων: 1 cm ἂς παριστάνη 50 cm^3 ὄγκο.

4. Παραστῆστε γραφικὰ τὴν ἐπιμήκυνση (τὸ μάκρεμα) ἑνὸς ἐλατηρίου, ξέροντας ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἐλατηρίου αὐξάνει κατὰ 2 mm κάθε φορὰ ποὺ τὸ βάρος, τὸ ὁποῖο τὸ τεντώνει, αὐξάνει κατὰ 20 gr. (Νὰ κάμετε τὸ βάρος νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ὡς 100 gr).

Κλίμακα αὐξήσεων βάρους: 1 cm ἂς παριστάνη 10 gr αὔξηση βάρους.
Κλίμακα ἐπιμηκύνσεων: 1 cm ἂς παριστάνη ἐπιμήκυνση 1 mm.



Σχ. 11-ε. Παραστῆστε γραφικὰ τὴ συνάρτηση $U = RI$.

5. Σύμφωνα μὲ τὸ νόμο τοῦ Ὤμ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U (σὲ βὸλτ) ἀνάμεσα στοὺς ἀκροδέκτες B καὶ B' ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ θερμικοῦ καταναλωτῆ (σχ. 11-ε) εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενο τῆς ἀντίστασής του R (σὲ ὤμ) ἐπὶ τὴν ἔνταση I (σὲ ἀμπὲρ) τοῦ ρεύματος ποὺ διαρρέει τὸν καταναλωτή. Χρησιμοποιώντας ἕνα ρεοστάτη P μπορεῖτε νὰ μεταβάλετε τὴν ἔνταση I ἀπὸ 0 ὡς 5 ἀμπέρ. Ξέροντας ὅτι ἡ ἀντίσταση R εἶναι ἴση μὲ 4 ὤμ, παραστῆστε γραφικὰ τὴ διαφορὰ δυναμικοῦ U, ἡ ὁποία εἶναι τότε συνάρτηση τοῦ I, μὲ I μεταβαλλόμενο ἀπὸ 0 ὡς 5 ἀμπέρ. (Διαλέξτε τὶς κλίμακες γιὰ τὴν παράσταση τοῦ I καὶ τοῦ U ἔτσι ὥστε τὸ γραφικὸ νὰ ἔχη διαστάσεις 5 cm $\times$ 5 cm).

Μάθημα 12.

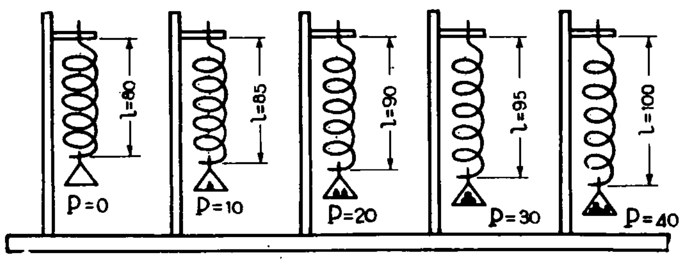
Μεγέθη μὲ αὐξήσεις κατευθείαν ἀνάλογες καὶ γραφικὴ παράσταση τῆς ἀλληλεξάρτησής τους.

1. Πρόβλημα. *Ἕνα ἐλατήριο ἔχει ἀρχικὸ μῆκος* $l = 80\ mm$ (σχ. 12-α). *Κρεμοῦμε σ' αὐτὸ διαδοχικῶς διάφορα βάρη P (σὲ gr). Τὸ ἐλατήριο μακραίνει τότε (ἐπιμηκύνεται). Μετρώντας τὰ μήκη τοῦ ἐλατηρίου ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ διάφορα αὐτὰ βάρη βρίσκομε τὸν ἀκόλουθο πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ βάρους P καὶ τοῦ μήκους l:*

P (σὲ gr)	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*
l (σὲ mm)	*80*	*85*	*90*	*95*	*100*

1ο. Ἐκφράστε τώρα τὸ l συναρτήσει τοῦ P.

2ο. Παραστῆστε γραφικὰ αὐτὴ τὴ συνάρτηση l τοῦ P.



Σχ. 12-α. Ὅταν κρεμοῦμε μεγαλύτερο βάρος, ἡ ἐπιμήκυνση αὐξάνει.

1ο. Ἀπὸ τὸν παραπάνω πίνακα φαίνεται πὼς κάθε φορὰ ποὺ τὸ βάρος αὐξάνει κατὰ 10 *gr* τὸ μῆκος τοῦ ἐλατηρίου αὐξάνει κατὰ 5 *mm*. Ἡ παρατήρηση αὐτὴ μᾶς κάνει νὰ δεχθοῦμε ὅτι, τουλάχιστο γιὰ τὸ διάστημα μεταβολῆς τοῦ βάρους *P* ἀπὸ 0 σὲ 40 *gr*, οἱ *αὐξήσεις τοῦ μήκους τοῦ ἐλατηρίου (οἱ ἐπιμηκύνσεις τοῦ ἐλατηρίου) εἶναι κατευθείαν ἀνάλογες πρὸς τὶς αὐξήσεις τοῦ βάρους ποὺ κρεμοῦμε στὸ ἐλατήριο.*

Σύμφωνα μὲ αὐτὴν τὴν παραδοχή, ἂν τὸ βάρος αὐξηθῇ κατὰ 1 gr, τὸ μῆκος τοῦ ἐλατηρίου θὰ αὐξηθῇ κατὰ

$$\frac{5\,mm}{10} = 0{,}5\,mm,$$

καὶ ἂν τὸ βάρος αὐξηθῇ κατὰ P gr, τὸ μῆκος θὰ αὐξηθῇ κατὰ

$$0{,}5\,mm \cdot P = 0{,}5\,P\,mm.$$

Ὅταν ὅμως τὸ βάρος ἦταν $0\,gr$, τὸ μῆκος ἦταν $80\,mm$, ἐπομένως, ὅταν τὸ βάρος αὐξηθῇ κατὰ $P\,gr$ καὶ γίνῃ $P+0=P\,gr$, τὸ μῆκος 80 θὰ αὐξηθῇ κατὰ $0{,}5 \cdot P$ καὶ θὰ γίνῃ

$$l = 0{,}5\,P + 80\,mm.$$

Αὐτὴ λοιπὸν εἶναι ἡ ζητούμενη ἔκφραση τοῦ l συναρτήσει τοῦ P.

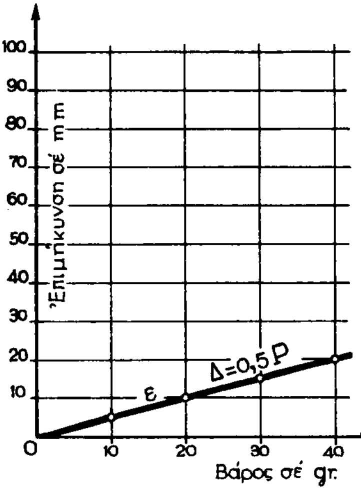
2ο. Γιὰ νὰ παραστήσωμε γραφικὰ τὴν παραπάνω συνάρτηση l τοῦ P, θὰ μπορούσαμε, χρησιμοποιώντας τὰ πέντε ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ l καὶ τοῦ P, τὰ ὁποῖα δίνει ἡ ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος, νὰ προσδιορίσωμε πέντε σημεῖα ἀπὸ τὸ ζητούμενο γραφικὸ καὶ ὕστερα νὰ τὰ ἑνώσωμε μὲ μιὰ γραμμή. Εἶναι ὅμως προτιμότερο νὰ ἐργασθοῦμε ὡς ἑξῆς, χρησιμοποιώντας τὰ γενικὰ ἀποτελέσματα στὰ ὁποῖα φθάσαμε στὸ προηγούμενο μάθημα:

Συμβολίζομε μὲ τὸ γράμμα Δ (mm) τὴν αὔξηση τοῦ μήκους τοῦ ἐλατηρίου ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σὲ αὔξηση τοῦ βάρους κατὰ $P\,(gr)$· τότε, ὅπως βρήκαμε παραπάνω,

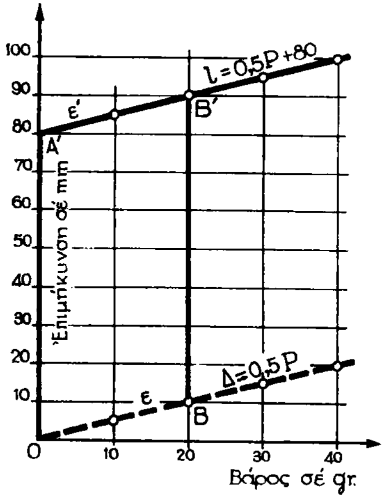
$$\Delta = 0{,}5\,P.$$

Ἡ αὔξηση Δ εἶναι λοιπὸν μιὰ συνάρτηση τοῦ P ἡ ὁποία ἔχει τὴ μορφὴ $y = ax$ καὶ ἐπομένως, σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο μάθημα, παριστάνεται γραφικὰ μὲ μιὰ εὐθεία ε (σχ. 12-β).

Ἡ συνάρτηση $l = 0{,}5\,P + 80$ προκύπτει ὅμως ἀπὸ τὴ συνάρτηση $\Delta = 0{,}5\,P$, ἂν σὲ τούτη προσθέσωμε τὸν σταθερὸ ὅρο 80 (mm). Ἐπομένως, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ γραφικὸ τῆς $l = 0{,}5\,P + 80$, ἀρκεῖ νὰ μετατοπίσωμε κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας ε, ἡ ὁποία εἶναι τὸ γραφικὸ τῆς $\Delta = 0{,}5\ P$, κατὰ $80\,mm$ πρὸς τὰ πάνω, παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα OY πάνω στὸν ὁποῖο παίρνομε τὶς ἐπιμηκύνσεις. Ἔτσι τὸ σημεῖο O τῆς ε ἔρχεται στὴ θέση A' (σχ. 12-γ), τὸ σημεῖο B τῆς ε, στὴ θέση B' καὶ ἡ εὐθεία ε, στὴ θέση ε'.



Σχ. 12-β. Γραφικὸ τῆς ἐπιμήκυνσης $\Delta = 0{,}5 \cdot P$ τοῦ ἐλατηρίου.



Σχ. 12-γ. Γραφικὸ τοῦ μήκους $l = 0{,}5 \cdot P + 80$ τοῦ ἐλατηρίου.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα OA' καὶ BB' εἶναι παράλληλα καὶ ἴσα· ἄρα τὸ τετράπλευρο $OA'B'B$ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο. Ἑπομένως ἡ εὐθεία ε' εἶναι ἡ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεία ε ἀπὸ τὸ σημεῖο A'.

Ὥστε, ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συνάρτησης $l = 0{,}5\ P + 80$ εἶναι εὐθεία γραμμή.

2. Γενίκευση. Ὅμοια μὲ ὅ,τι κάμαμε στὸ προηγούμενο μάθημα, ἄς συμβολίσωμε μὲ x μιὰν ὁποιαδήποτε τιμὴ τοῦ μεγέθους ποὺ παίρνομε γιὰ ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ (στὸ παραπάνω παράδειγμα τὸ μέγεθος αὐτὸ εἶναι τὸ βάρος P) καὶ μὲ y τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ μεγέθους ποὺ εἶναι μιὰ συνάρτηση αὐτοῦ τοῦ πρώτου μεγέθους (στὸ παράδειγμά μας, αὐτὸ τὸ δεύτερο μέγεθος εἶναι τὸ μῆκος l). Μὲ τὸ συμβολισμὸ αὐτόν, ἡ συνάρτηση ποὺ μελετήσαμε παραπάνω γράφεται ἔτσι:

$$y = 0{,}5\,x + 80.$$

Γενικότερα, π.χ. μὲ ἕνα ἄλλο ὁποιοδήποτε ἐλατήριο, θὰ εἴχαμε μεταξὺ τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν x καὶ y τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς καὶ τῆς συνάρτησής της τὴ σχέση

$$y = ax + \beta,$$

ὅπου a καὶ β εἶναι δυὸ δοσμένοι ἀριθμοί.

Τὸ συμπέρασμα ἀπὸ ὅλα τὰ παραπάνω εἶναι τώρα τὸ ἑξῆς: *Μιὰ συνάρτηση ποὺ ἔχει τὴ μορφὴ (τὴν ἔκφραση)* $y = ax + \beta$ *παριστάνεται γραφικὰ μὲ μιὰν εὐθεία.*

Τὸ ἴδιο συμπέρασμα ἀληθεύει καὶ γιὰ συναρτήσεις σὰν τὴ $y = 12\,x - 5$, δηλαδὴ *γιὰ συναρτήσεις τῆς μορφῆς* $y = ax - \beta$, ὅπου a καὶ β εἶναι δυὸ δοσμένοι ἀριθμοί· *καὶ αὐτὲς παριστάνονται γραφικὰ μὲ εὐθεῖες.*

Γιὰ νὰ σχεδιάσωμε λοιπὸν τὸ γραφικὸ μιᾶς συνάρτησης τῆς μορφῆς $y = ax + \beta$ ἢ $y = ax - \beta$, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμε δυὸ σημεῖά του, χρησιμοποιώντας δυὸ ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ x καὶ τοῦ y, καὶ ὕστερα νὰ χαράξωμε τὴν εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ δυὸ παραστατικὰ αὐτὰ σημεῖα.

Ἀσκήσεις. *1.* Πόσο αὐξάνει τὸ ἐμβαδὸ E ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ ἀρχικὲς διαστάσεις 10 m ἐπὶ 3 m, ὅταν, διατηρώντας σταθερὸ τὸ πλάτος του 3 m, αὐξήσωμε τὸ μῆκος του κατὰ x μέτρα; Ἐκφράστε τὸ ἐμβαδὸ αὐτὸ E συναρτήσει τῆς αὔξησης x τοῦ μήκους του. Ὕστερα παραστῆστε γραφικὰ τὴ συνάρτηση ποὺ βρήκατε, γιὰ x μεταβαλλόμενο ἀπὸ 0 ὡς 4 m.

2. Μιὰ σιδερένια ράβδος ἔχει διατομὴ ἕνα ὀρθογώνιο 35 mm ἐπὶ 25 mm. Ἂν ἐλαττώσωμε τὸ πάχος της τῶν 25 mm διαδοχικὰ κατὰ 1 mm, 2 mm, 3 mm,..., x mm, ποιά εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐλάττωση τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς διατομῆς της; Ἐκφράστε τὸ ἐμβαδὸ τοῦτο y συναρτήσει αὐτῆς τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x (μὲ ἄλλα λόγια, τὸ x παριστάνει σὲ mm τὴν ἐλάττωση τοῦ πάχους τῆς ράβδου). Ὕστερα παραστῆστε γραφικὰ τὴ συνάρτηση ποὺ βρήκατε, γιὰ x μεταβαλλόμενο ἀπὸ 0 ὡς 5 mm.

(Κλίμακα γιὰ τὸ x: 1 cm ἂς παριστάνη 1 mm ἐλάττωση πάχους. Κλίμακα γιὰ τὸ y: 1 cm ἂς παριστάνη ἐμβαδὸ 100 mm^2).

Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ παραπάνω ράβδος ἔχει μῆκος 0,50 m, ἐκφράστε τὸ βάρος της B (kg) συναρτήσει τῆς παραπάνω ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x καὶ παραστῆστε γραφικὰ γιὰ $0 \leq x \leq 5$ τὴ συνάρτηση ποὺ βρίσκετε.

(Κλίμακα γιὰ τὸ x: 1 cm ἂς παριστάνη 1 mm. Κλίμακα γιὰ τὸ B: 1 cm ἂς παριστάνη 0,5 kg).

3. Ἕνα δοχεῖο ζυγίζει κενὸ 1,5 kg. Ποιό εἶναι τὸ βάρος του B (kg), ὅταν περιέχη V λίτρα ἀπὸ ἕνα ὑγρὸ μὲ σχετικὴ πυκνότητα 0,9; Ἀφοῦ ἐκφράσετε ἔτσι τὸ B συναρτήσει τοῦ V, παραστῆστε γραφικὰ τὴ συνάρτηση ποὺ βρήκατε, γιὰ V μεταβαλλόμενο ἀπὸ 0 ὡς 5 λίτρα.

(Κλίμακα γιὰ τοὺς ὄγκους V: 1 cm ἂς παριστάνη 1 λίτρο.
Κλίμακα γιὰ τὰ βάρη B: 1 cm ἂς παριστάνη 1 kg).

4. Τὸ ρεζερβουὰρ (ἡ ἀποθήκη) ἑνὸς αὐτοκινήτου περιεῖχε 100 λίτρα βενζίνα στὸ ξεκίνημα. Ξέροντας ὅτι τὸ αὐτοκίνητο αὐτὸ καίει 20 λίτρα βενζίνα στὰ 100 km, ἐκφράστε τὸ περιεχόμενο V (σὲ λίτρα) τοῦ ρεζερβουὰρ συναρτήσει τῆς ἀπόστασης x (σὲ km) ποὺ διέτρεξε τὸ αὐτοκίνητο· (μὲ ἄλλα λόγια, βρῆτε πόσα λίτρα V βενζίνα ἔμειναν στὸ ρεζερβουὰρ ὕστερα ἀπὸ μιὰ διαδρομὴ x χιλιομέτρων).

Παραστῆστε γραφικὰ τὴ συνάρτηση V τοῦ x τὴν ὁποία βρήκατε, γιὰ x μεταβαλλόμενο ἀπὸ 0 ὡς 200 km. (Νὰ διαλέξετε τὶς δυὸ κλίμακες ἔτσι ποὺ τὸ σχέδιό σας νὰ ἔχη διαστάσεις 5 cm ἐπὶ 5 cm).

5. Ἡ τάση U (σὲ βὸλτ) στοὺς ἀκροδέκτες ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ καταναλωτῆ ἐκφράζεται μὲ τὴ σχέση:

$$U = E' + r\,I$$

συναρτήσει τῆς ἔντασης I (σὲ ἀμπὲρ) τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ποὺ διαρρέει τὸν καταναλωτή· τὰ γράμματα E' καὶ r εἶναι δυὸ σταθερές, δηλ. δυὸ ὁρισμένοι ἀριθμοί, ποὺ παριστάνουν ἀντιστοίχως τὴν ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμη (σὲ βὸλτ) καὶ τὴν ἐσωτερικὴ ἀντίσταση (σὲ ὤμ) τοῦ καταναλωτῆ.

Ξέροντας ὅτι μὲ τὸ πείραμα προσδιορίσθηκαν τὰ ἀκόλουθα δυὸ ζεύγη ἀντίστοιχων τιμῶν τῶν I καὶ U:

($I_1 = 6$ ἀμπέρ, $U_1 = 2{,}7$ βὸλτ) καὶ ($I_2 = 4$ ἀμπέρ, $U_2 = 2{,}3$ βὸλτ),

σχεδιάστε τὸ γραφικὸ τῆς παραπάνω συνάρτησης U τοῦ I, γιὰ I μεταβαλλόμενο ἀπὸ 0 ὡς 16 ἀμπέρ.

Μὲ τὴ βοήθεια αὐτοῦ τοῦ γραφικοῦ προσδιορίστε ὕστερα τὴν ἔνταση I_3 ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ τάση $U_3 = 3{,}9$ βὸλτ.

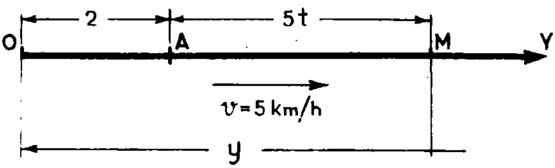
Μάθημα 13.

Διάγραμμα (γραφικό) μιᾶς όμοιόμορφης κίνησης. Σύστημα δυὸ ἐξισώσεων μὲ δυὸ ἀγνώστους.

Ἂς ὑπενθυμίσωμε τὸν ἀκόλουθο ὁρισμὸ τῆς ὁμοιόμορφης κίνησης: ἕνα κινητὸ σημεῖο κινεῖται ὁμοιόμορφα, ὅταν, χωρὶς ν' ἀλλάζη φορὰ κινήσεως πάνω στὴν τροχιά του, διατρέχη τὸ ἴδιο μῆκος δρόμου σὲ ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ὅσο μικρὰ κι ἂν εἶναι αὐτὰ (Τόμ. Β', Μάθ. 2).

1. α) Ὁμοιόμορφη εὐθύγραμμη κίνηση ἑνὸς σημείου.

Ἀπόσταση τοῦ κινούμενου σημείου ἀπὸ κάποιο ἀρχικὸ σημεῖο τῆς τροχιᾶς του. Ἕνα σημεῖο M ξεκινᾶ ἀπὸ τὴ θέση A



Σχ. 13-α. Στὴ χρονικὴ στιγμή: t ὧρες μετὰ τὸ ξεκίνημα, εἶναι $y = OM = 5t + 2\ km$.

(σχ. 13-α) καὶ κινεῖται ὁμοιόμορφα πάνω στὴν εὐθεία OY κατὰ τὴ φορὰ ἀπὸ τὸ O πρὸς τὸ Y. Ἂς ὑποθέσωμε πὼς ἡ ταχύτητά του εἶναι $5\ km/h$. Τότε σὲ μιὰ ὥρα θὰ ἔχη διατρέξει (διανύσει) $5\ km$ καὶ σὲ t ὧρες, $5t\ km$.

Ἂς παραστήσωμε μὲ τὸ γράμμα y τὴν ἀπόσταση OM τοῦ κινούμενου σημείου ἀπὸ ἕνα ἀρχικὸ σημεῖο O τῆς εὐθείας OY. Σύμφωνα μὲ τὸ σχῆμα 13-α θὰ ἔχωμε

$$y = OM = OA + AM = 2 + 5t$$

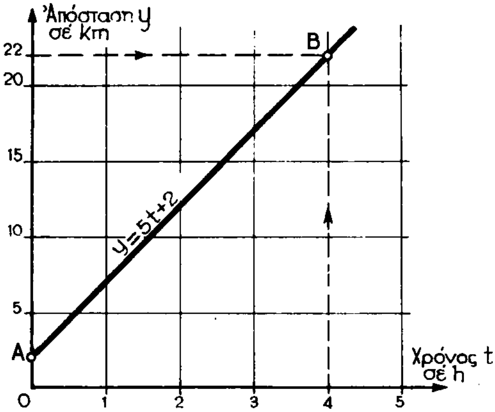
ἢ

$$y = 5t + 2.$$

Ἡ ἀπόσταση $y = OM$ εἶναι λοιπὸν μιὰ συνάρτηση τοῦ χρόνου t ἡ ὁποία ἔχει τὴ μορφὴ $y = ax + \beta$. *Ἄρα τὸ γραφικό της θὰ εἶναι μιὰ εὐθεία· γιὰ νὰ τὸ σχεδιάσωμε, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμε δυὸ σημεῖα του: π.χ. τὰ*

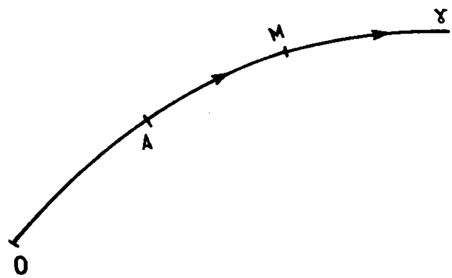
$$A \begin{cases} t = o \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad B \begin{cases} t = 4 \\ y = 22, \end{cases}$$

καὶ νὰ χαράξωμε τὴν εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ αὐτὰ (σχ. 13-β).



Σχ. 13-β. Γραφικὸ τῆς συνάρτησης $y = 5t + 2$.

β) Ὁμοιόμορφη καμπυλόγραμμη κίνηση. Ἂν τὸ σημεῖο *M* κινῆται ὁμοιόμορφα ὄχι πάνω σὲ εὐθεία ἀλλὰ πάνω σὲ καμπύλη γραμμὴ *γ* (ὅπως π.χ. ἕνα αὐτοκίνητο πάνω σ' ἕνα δρόμο ποὺ δὲν εἶναι ἴσιος ἀλλὰ καμπύλος), τότε γιὰ ἀπόσταση *y* τοῦ *M* ἀπὸ ἕνα ἀρχικὸ σημεῖο *O* τῆς γραμμῆς *γ* (σχ. 13-γ) παίρνομε τὸ μῆκος ὄχι τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος *OM* ἀλλὰ τοῦ καμπύλου τόξου $\widehat{OM}$ τῆς γραμμῆς *γ*. Ἡ *καμπυλόγραμμη* αὐτὴ ἀπόσταση *y* εἶναι πάλι μιὰ συνάρτηση τοῦ χρόνου *t* ἡ ὁποία ἔχει τὴ μορφὴ $y = ax + \beta$ καὶ ἑπομένως παριστάνεται γραφικὰ μὲ μιὰ εὐθεία.



Σχ. 13-γ. Τὸ *M* κινεῖται ὁμοιόμορφα πάνω στὴν καμπύλη γραμμὴ *γ*.

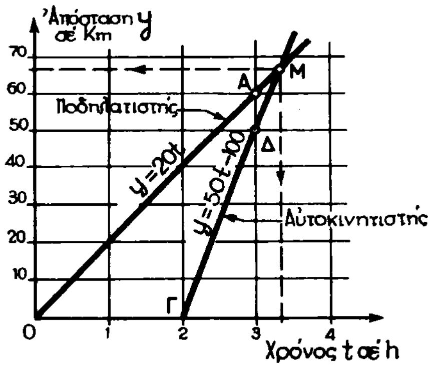
2. Ἐφαρμογή. Γραφικὴ ἐπίλυση ἑνὸς προβλήματος.

Ἕνας ποδηλατιστὴς καὶ ἕνας αὐτοκινητιστὴς ξεκίνησαν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Ο ἑνὸς δρόμου πρὸς τὴν ἴδια κατεύθυνση μὲ ταχύτητα 20 km/h ὁ πρῶτος, 50 km/h ὁ δεύτερος. Ἂν ὁ πρῶτος ξεκίνησε 2 h πρὶν ἀπὸ τὸν δεύτερο, σὲ ποιάν ἀπόσταση ἀπὸ τὸ Ο θὰ συναντηθοῦν;

Παίρνομε τὴ στιγμή, ποὺ ξεκίνησε ὁ ποδηλατιστής, γιὰ ἀρχὴ στὴ μέτρηση τῶν χρόνων t σὲ h καὶ τὸ σημεῖο O γιὰ ἀρχὴ στὴ μέτρηση τῶν ἀποστάσεων y σὲ km κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου. Βρίσκομε τότε τὰ ἑξῆς: Στὴ χρονικὴ στιγμὴ t h, δηλ. t ὧρες μετὰ τὸ ξεκίνημα τοῦ ποδηλατιστῆ, ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸ O θὰ εἶναι $y = 20t$ km. Ὅταν τὸ t γίνῃ > 2 h, ὁ αὐτοκινητιστὴς θὰ ἔχῃ ξεκινήσει καὶ ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸ O, στὴ χρονικὴ στιγμὴ t h, θὰ εἶναι $50 \cdot (t-2) = (50t - 100)$ km. Τὶς δυὸ συναρτήσεις $y = 20t$ καὶ $y = 50t - 100$ τὶς παριστάνομε γραφικὰ ὡς πρὸς ἕνα καὶ τὸ ἴδιο σύστημα ἀξόνων (σχ. 13-δ). Τὸ γραφικὸ τῆς συνάρτησης $20t$ εἶναι ἡ εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ δυὸ σημεῖα

$$O\ (t=0,\ y=0)$$

καὶ $$A\ (t=3,\ y=60).$$



Σχ. 13-δ. Τὰ γραφικὰ τῶν διαδρομῶν τοῦ ποδηλατιστῆ.

Τὸ γραφικὸ τῆς συνάρτησης $y = 50t - 100$ εἶναι ἡ εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ δυὸ σημεῖα

$$\Gamma\ (t=2,\ y=0)$$

καὶ $$\Delta\ (t=3,\ y=50).$$

Ὅπως βλέπομε στὸ σχῆμα 13-δ, οἱ δυὸ αὐτὲς εὐθεῖες κόβονται σ' ἕνα σημεῖο M ποὺ ἔχει τετμημένη περίπου $3\frac{1}{3}$ καὶ τεταγμένη περίπου 67. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι στὴ χρονικὴ στιγμή: $3\ h\ \frac{1}{3}$ μετὰ τὸ ξεκίνημα τοῦ ποδηλατιστῆ, ὁ αὐτοκινητιστὴς καὶ ὁ ποδηλατιστὴς ἔχουν τὴν ἴδια ἀπόσταση $67\ km$ ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ σημεῖο O, ἄρα αὐτὴν τὴ στιγμὴ ἔχουν συναντηθῆ.

Βρήκαμε ἔτσι γραφικῶς ὅτι ἡ ζητούμενη ἀπόσταση τοῦ σημείου συναντήσεως ἀπὸ τὴν ἀρχὴ O τῶν ἀποστάσεων εἶναι περίπου $67\ km$.

3. Παρατηρήσεις. *1ο. Ἀριθμητικὴ ἐπίλυση τοῦ ἴδιου προβλήματος.* Ὅταν ὁ αὐτοκινητιστὴς ξεκινᾶ, ὁ ποδηλατιστὴς προπορεύεται κατὰ $2 \cdot 20\ km = 40\ km$. Κάθε ὥρα ὅμως ὁ αὐτοκινητιστὴς διατρέχει $50 - 20 = 30\ km$ περισσότερα ἀπὸ τὸν ποδηλατιστή. Ἑπομένως ἡ προπόρευση τῶν $40\ km$, τὴν ὁποία ἔχει ὁ ποδηλατιστής, ἐλαττώνεται κάθε ὥρα κατὰ $30\ km$. Γιὰ νὰ τὴν ἐλαττώση στὸ μηδέν, ὁ αὐτοκινητιστὴς θὰ χρειασθῆ λοιπὸν

$$\frac{40}{30}\ h = \frac{4}{3}\ h = 1\ h\ \frac{1}{3} = 1\ h\ 20\ min.$$

Ὥστε ἡ συνάντηση τῶν δυὸ θὰ γίνη

$$2\ h + \frac{4}{3}\ h = \frac{10}{3}\ h = 3\ h\ 20\ min$$

μετὰ τὸ ξεκίνημα τοῦ ποδηλατιστῆ (μετὰ τὴν ἀρχὴ τῶν χρόνων τὴν ὁποία διαλέξαμε). Τὸ διάστημα ποὺ θὰ ἔχουν διατρέξει τότε καὶ οἱ δυό, θὰ εἶναι

$$\frac{50\ km \cdot 4}{3} = 66{,}66\ldots\ km = \frac{20\ km \cdot 10}{3}.$$

Ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου συναντήσεως ἀπὸ τὸ σημεῖο O εἶναι λοιπὸν $66{,}66\ldots\ km$.

Ἂς σημειωθῆ ὅτι ἡ ἀπάντηση αὐτὴ εἶναι *ἀκριβής*, ἐνῶ ἡ ἀπάντηση $67\ km$ ποὺ βρήκαμε μὲ τὴ γραφικὴ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος εἶναι *προσεγγιστική*, γιατὶ καὶ ἡ σχεδίαση τῶν γραφικῶν καὶ ἡ ἀνάγνωση διαστάσεων πάνω σ' αὐτὰ δὲν μποροῦν ποτὲ νὰ γίνουν μὲ ἀπόλυτη ἀκρίβεια.

2ο. Ἀλγεβρικὴ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος. Γιὰ νὰ συναντηθοῦν ὁ ποδηλατιστὴς καὶ ὁ αὐτοκινητιστής, πρέπει οἱ δυὸ ἐξισώσεις $y = 20\,t$ καὶ $y = 50\,t - 100$, ποὺ ἐκφράζουν τὶς ἀποστάσεις τους ἀπὸ τὴν ἀφετηρία O συναρτήσει τοῦ χρόνου t, νὰ ἀληθεύσουν μὲ τὸ ἴδιο ζευγάρι τιμῶν τῶν γραμμάτων t καὶ y. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι οἱ δυὸ αὐτὲς ἐξισώσεις ἀποτελοῦν ἕνα *σύστημα δυὸ ἐξισώσεων μὲ δυὸ ἀγνώστους t καὶ y*:

$$\begin{cases} y = 20\,t \\ y = 50\,t - 100. \end{cases} \qquad (1)$$

Γενικὰ λέμε ὅτι *δυὸ ἢ περισσότερες ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα, ὅταν τὶς παίρνωμε μαζὶ καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε ποιὲς τιμὲς τῶν ἀγνώστων, τοὺς ὁποίους περιέχουν, τὶς ἐπαληθεύουν ὅλες συγχρόνως.*

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ λύση τοῦ συστήματος (1), δηλ. ἕνα ζευγάρι τιμῶν τῶν γραμμάτων t καὶ y ποὺ ἐπαληθεύει καὶ τὶς δυὸ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, ἐργαζόμασθε ὡς ἑξῆς:

Ἐξισώνομε τὶς δυὸ ἐκφράσεις γιὰ τὸ y τὶς ὁποῖες μᾶς δίνουν οἱ δυὸ ἐξισώσεις, ὁπότε λαμβάνομε:

$$50\,t - 100 = 20\,t.$$

Ἔχομε ἔτσι μιὰν ἐξίσωση μὲ ἕναν ἄγνωστο (τὸ t), τὴν ὁποία ξέρομε νὰ ἐπιλύσωμε (Τόμ. Β', Μαθ. 5, 6, 9). Βρίσκομε διαδοχικά:

$$50\,t - 20\,t = 100$$

$$30\,t = 100$$

καὶ

$$t = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} = 3\,h\frac{1}{3}$$

Τὴν τιμὴ αὐτὴ τοῦ ἀγνώστου t τὴν βάζομε μέσα (τὴν εἰσάγομε) στὴ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1), π.χ. στὴν πρώτη, καὶ βρίσκομε τὴν τιμὴ τοῦ ἀγνώστου y:

$$y = 20 \cdot \frac{10}{3} = \frac{200}{3} = 66{,}66 \ldots km.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ λύση $\left(t = \frac{10}{3}, \; y = \frac{200}{3}\right)$ μᾶς δίνει τὶς συντεταγμένες τοῦ σημείου M ὅπου κόβονται (σχ. 13-δ) οἱ οἱ δυὸ εὐθεῖες ποὺ παριστάνουν γραφικὰ τὶς δυὸ ἐξισώσεις $y = 20\,t$ καὶ $y = 50\,t - 100$. Ἔχομε λοιπὸν τὸ συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὶς συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς δυὸ εὐθειῶν ἐπιλύνομε τὸ σύστημα τῶν δυὸ ἐξισώσεων τὶς ὁποῖες οἱ δυὸ εὐθεῖες παριστάνουν γραφικά.

4. Ἐπίλυση ἑνὸς συστήματος δυὸ ἐξισώσεων μὲ δυὸ ἀγνώστους. Μιὰ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις τοῦ παραπάνω συστήματος (1) (ἡ 1η ἐξίσωση) μᾶς ἔδινε τὸν ἕναν ἄγνωστο τοῦ συστήματος ἐκφρασμένο συναρτήσει τοῦ ἄλλου (τὸν y συναρτήσει τοῦ t). Ἄς πάρωμε τώρα ἕνα σύστημα δυὸ ἐξισώσεων μὲ δυὸ ἀγνώστους x καὶ y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 5x - 2y = \;\, 2, \end{cases} \tag{2}$$

ὅπου νὰ μὴ συμβαίνη αὐτό. Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ λύση του, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσωμε τὴν ἀκόλουθη μέθοδο.

Ἐπιλύνομε τὴν πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2) ὡς πρὸς τὸν ἕναν ἄγνωστο, π.χ. τὸν x, *θεωρώντας τὸν ἄλλο* y *σὰν ἕνα γενικὸ ἀριθμό*, δηλαδὴ ἕνα γράμμα ποὺ ἡ ἀριθμητική του τιμὴ δὲν καθορίσθηκε ἀκόμη. Βρίσκομε τότε διαδοχικά:

$$2x = 16 - 3y,$$

$$x = 8 - \frac{3}{2}\,y. \tag{3}$$

Ἐκφράσαμε ἔτσι τὸ x συναρτήσει τοῦ y. Τὴν ἔκφραση αὐτὴ τοῦ x τὴν βάζομε μέσα (τὴν εἰσάγομε) στὴ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2)· ἔτσι βρίσκομε τὴν ἐξίσωση

$$5\left(8 - \frac{3}{2}\,y\right) - 2\,y = 2$$

ποὺ περιέχει ἕνα μόνο ἄγνωστο, τὸ y. Τὴν ἐπιλύνομε:

$$40-\frac{15}{2}y-2y=2$$

$$40-2=\frac{15}{2}y+2y$$

$$38=\left(\frac{15}{2}+2\right)y$$

$$38=\frac{19}{2}y \quad \text{ἢ} \quad \frac{19}{2}y=38$$

καὶ $$y=38\cdot\frac{2}{19}=\frac{38\cdot 2}{19}=2\cdot 2=4.$$

Ὁ ἄγνωστος y ἔχει λοιπὸν τὴν τιμὴ 4· σ' αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ, σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω ἔκφραση (3) τοῦ x συναρτήσει τοῦ y, ἡ ἀκόλουθη τιμὴ γιὰ τὸ x:

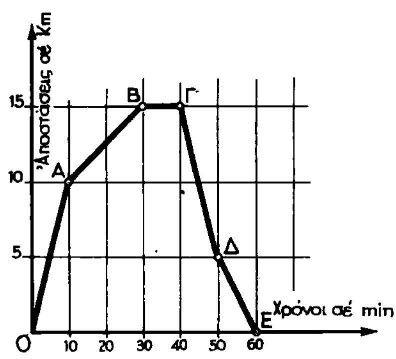
$$x=8-\frac{3}{2}\cdot 4=8-6=2.$$

Ὥστε ἡ λύση τοῦ συστήματος (2) εἶναι τὸ ζευγάρι

$$x=2 \quad , \quad y=4.$$

Γιὰ ἔλεγχο βάζομε αὐτὲς τὶς τιμὲς τῶν δυὸ ἀγνώστων μέσα στὴν πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2) καὶ ἐξετάζομε, ἂν προκύπτει σωστὴ ἰσότητα (μὲ ἄλλα λόγια, ἂν οἱ τιμὲς ποὺ βρήκαμε ἐπαληθεύουν τὴν 1η ἐξίσωση):

$$2\cdot 2+3\cdot 4=16.$$



Σχ. 13·ε. Διάγραμμα (γραφικὸ) τῶν διαστημάτων ποὺ διέτρεξε ἕνα κινητό.

Ἀσκήσεις. 1. Παραστῆστε γραφικὰ τὴν κίνηση τῆς μύτης τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου ἑνὸς λειαντικοῦ μηχανήματος σὲ μία διαδρομὴ λειτουργίας τοῦ ἐργαλείου. Θὰ ὑποθέσετε ὅτι ἡ κίνηση εἶναι ὁμοιόμορφη καὶ ἡ ταχύτητα ἴση μὲ 11 m/min. Τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς εἶναι 220 mm. (Γιὰ ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ x πάρτε τὸ χρόνο t μετρημένο σὲ *sec* ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ τὸ ἐργαλεῖο ξεκίνησε· γιὰ συνάρτηση y τοῦ t πάρτε τὴν ἀπόσταση σὲ *mm* ποὺ ἔχει ἡ μύτη τοῦ ἐργαλείου ἀπὸ τὴν ἀφετηρία της, t *sec* μετὰ τὸ ξεκίνημα. (Κλίμακα γιὰ τὰ t : 1 *cm* ἂς παριστάνη 0,1 *sec*. Κλίμακα γιὰ τὰ y : 1 *cm* ἂς παριστάνη 20 *mm* ἀπόσταση).

2. Ἐξηγῆστε ποιά εἶναι ἡ κίνηση ἑνὸς κινητοῦ πάνω σ' ἕνα δρόμο, ὅταν ἡ ἀπόστασή του y ἀπὸ ἕνα ἀρχικὸ σημεῖο τοῦ δρόμου εἶναι μιὰ συνάρτηση τοῦ χρόνου t ποὺ τὸ γραφικό της μᾶς τὸ δίνει τὸ σχ. 13-ε. Βρῆτε καὶ ποιὰ εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς πέντε διάφορες φάσεις τῆς κίνησής του.

3. Παραστῆστε γραφικὰ τὴν κίνηση τῶν 2 τραίνων ὑπ' ἀριθμοὺς 91 καὶ 92 ποὺ τὸ δρομολόγιό τους σᾶς τὸ δίνει ὁ πίνακας τοῦ σχ. 10-α. Θὰ ὑποθέσετε ὅτι ἡ κίνηση εἶναι ὁμοιόμορφη μεταξὺ δυὸ διαδοχικῶν σταθμῶν.

(Κλίμακα γιὰ τοὺς χρόνους: 1 *cm* ἂς παριστάνη 1 *h*. Κλίμακα γιὰ τὶς ἀποστάσεις: 1 *cm* ἂς παριστάνη 30 *km*).

4. Παραστῆστε γραφικὰ τὴν ἀκόλουθη κίνηση τῆς τράπεζας μιᾶς ξυλουργικῆς πλάνης (ραμποτέζας):

Μῆκος μιᾶς (διπλῆς) διαδρομῆς: 5 *m*.

Διάρκεια πηγεμοῦ: 30 *sec* (κίνηση ὁμοιόμορφη).

Διάρκεια γυρισμοῦ: 15 *sec* (κίνηση ὁμοιόμορφη).

(Κλίμακα τῶν ἀποστάσεων: 1 *cm* ἂς παριστάνη 0,50 *m*. Κλίμακα τῶν χρόνων: 1 *cm* ἂς παριστάνη 10 *sec*.)

5. Ἕνας ἀνελκυστήρας ἀνέβηκε ἀπὸ τὸ 1ο πάτωμα (ὕψος 4 *m*) στὸ 4ο πάτωμα (ὕψος 16 *m*) σὲ 8 *sec*. Παραστῆστε γραφικὰ τὴν κίνησή του ὑποθέτοντας ὅτι εἶναι ὁμοιόμορφη.

(Κλίμακα γιὰ τοὺς χρόνους: 1 *cm* ἂς παριστάνη 1 *sec*. Κλίμακα γιὰ τὰ ὕψη: 1 *cm* ἂς παριστάνη 2 *m*).

6. Ἕνα αὐτοκίνητο ξεκινᾶ καὶ διατρέχει 2 *m* κατὰ τὸ 1ο δευτερόλεπτο τῆς κίνησής του, 4 *m* κατὰ τὸ 2ο δευτερόλεπτο, 6 *m* κατὰ τὸ 3ο, 8 *m* κατὰ τὸ 4ο καὶ 10 *m* κατὰ τὸ 5ο.

1ο. Ὑπολογίστε τὰ διαστήματα τὰ ὁποῖα διέτρεξε τὸ αὐτοκίνητο ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ ξεκίνησε ὡς τὸ τέλος τοῦ 1ου, τοῦ 2ου, τοῦ 3ου, τοῦ 4ου καὶ τοῦ 5ου δευτερολέπτου.

2ο. Παραστῆστε γραφικὰ τὴν κίνηση τοῦ αὐτοκινήτου ὑποθέτοντας (μολονότι αὐτὸ δὲν εἶναι ἐντελῶς σωστὸ) ὅτι ἡ κίνηση ἦταν ὁμοιόμορφη κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ 5 αὐτὰ δευτερόλεπτα.

Κατὰ τί διαφέρει τὸ γραφικὸ αὐτὸ ἀπὸ τὸ γραφικὸ μιᾶς κίνησης ποὺ εἶναι ὁμοιόμορφη καθ' ὅλη τὴ διάρκειά της;

7. Ἐπιλύστε τὰ ἀκόλουθα τρία συστήματα ἐξισώσεων:

$$\begin{cases} -2x+4y=6 \\ 3x-3y=3\,, \end{cases} \quad \begin{cases} 10x-\ \ 3y=4 \\ 2x+12y=5, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3 \\ 3x-\dfrac{y}{9}=35. \end{cases}$$

Μάθημα 14.

Διαγράμματα σχετικὰ μὲ μηχανουργικὲς ἐργασίες.

Παρακάτω θὰ δείξωμε σ' ἕνα ἁπλὸ παράδειγμα (στὴν κατεργασία ἑνὸς κομματιοῦ μὲ τὴ φρεζομηχανὴ) πρῶτα πῶς κατασκευάζομε ἕνα διάγραμμα γιὰ μιὰ ἐργαλειομηχανὴ καὶ ὕστερα πῶς τὸ χρησιμοποιοῦμε. Γιὰ πιὸ πολύπλοκα διαγράμματα θὰ περιορισθοῦμε σὲ ἀσκήσεις γιὰ τὸ πῶς χρησιμοποιοῦνται αὐτά.

1. Διάγραμμα μιᾶς φρεζομηχανῆς.

Πρόβλημα. Τὸ κιβώτιο ταχυτήτων μιᾶς φρεζομηχανῆς ἐπιτρέπει νὰ δώσωμε στὸν ἄξονά της 9 διαφορετικὲς περιστροφικὲς ταχύτητες, αὐτὲς ποὺ βλέπετε στὸν πίνακα τοῦ σχ. 14-α.

1ο. Δεῖξτε ὅτι, γιὰ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ταχύτητες αὐτές, ἡ κοπτικὴ ταχύτητα v (m/min) εἶναι συνάρτηση τῆς διαμέτρου τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου ποὺ χρησιμοποιεῖτε.

	A	B	Γ
1	35	98	28
2	50	140	400
3	70	197	560

Σχ. 14-α. Πίνακας τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων τοῦ ἄξονα μιᾶς φρεζομηχανῆς.

2ο. Δεῖξτε ὅτι ἡ παραπάνω συνάρτηση παριστάνεται γραφικὰ μὲ μιὰ εὐθεία γραμμή.

3ο. Καταρτίστε τὸ διάγραμμα τῆς μηχανῆς χαράζοντας πάνω στὸ ἴδιο σχέδιο (ὡς πρὸς τὸ ἴδιο σύστημα συντεταγμένων) τὶς 9 εὐθεῖες ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς 9 διαφορετικὲς περιστροφικὲς ταχύτητες τοῦ ἄξονα.

4ο. Διαβάστε πάνω στὸ διάγραμμα τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα ποὺ θὰ χρησιμοποιήσετε, ὅταν θέλετε νὰ κατεργασθῆτε ἕνα κομμάτι μαλακὸ ἀτσάλι μὲ ἕνα κοπτικὸ ἐργαλεῖο διαμέτρου $D = 80$ mm καὶ μὲ κοπτικὴ ταχύτητα $v = 25$ m/min.

1ο. Ὅταν ἕνα κοπτικὸ ἐργαλεῖο τῆς μηχανῆς ἔχῃ διάμετρο D *mm* καὶ περιστρέφεται μὲ n *στρ/min*, ἡ κοπτική του ταχύτητα εἶναι $\pi D n$ *mm/min* (πρβ. Μάθ. 3, § 2), ἄρα

$$v = \frac{\pi D n}{1\,000} \quad m/min. \qquad (1)$$

2ο. *Γιὰ κάθε δοσμένη τιμὴ τοῦ n, π.χ. γιὰ n = 35 στρ/min, ἡ κοπτικὴ ταχύτητα v εἶναι λοιπὸν μιὰ συνάρτηση τῆς διαμέτρου D*, π.χ. γιὰ $n = 35$:

$$v \simeq \frac{3{,}14 \cdot D \cdot 35}{1\,000} = 0{,}109\,9\,D \simeq 0{,}11\,D.$$

Ἡ συνάρτηση αὐτὴ v τοῦ D ἔχει, ὅπως βλέπομε, τὴ μορφὴ $y = ax$· ἄρα *παριστάνεται γραφικὰ μὲ μιὰ εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ O τῶν συντεταγμένων* (Μάθ. 11). Γιὰ νὰ τὴ χαράξωμε, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμε ἕνα σημεῖο της διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ O καὶ νὰ τὸ ἑνώσωμε μὲ τὸ O.

Π.χ., γιὰ νὰ χαράξωμε τὴν εὐθεία ποὺ παριστάνει τὴ συνάρτηση $v = 0{,}11\,D$, ὑπολογίζομε τὸ v γιὰ $D = 200$ *mm*:

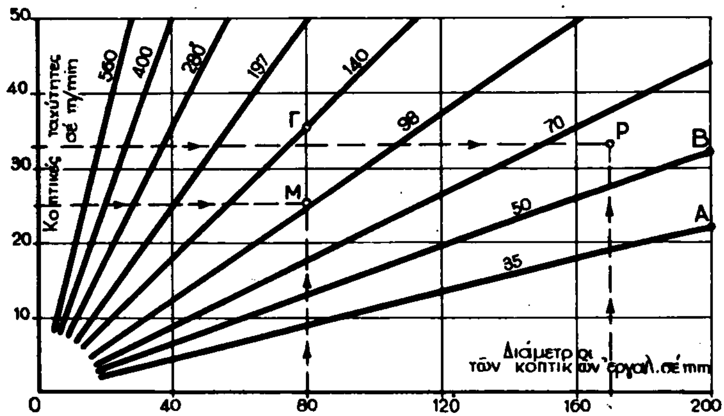
$$v = 0{,}11 \cdot 200 = 22 \ m/min.$$

Ὕστερα προσδιορίζομε τὸ σημεῖο $A\,(200\,,\,22)$ (βλ. σχ. 14-β) ποὺ ἔχει τετμημένη 200 καὶ τεταγμένη 22. Ἡ εὐθεία OA εἶναι ἡ εὐθεία ποὺ θέλομε νὰ χαράξωμε καὶ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν περιστροφικὴ ταχύτητα $n = 35$.

3ο. *Γιὰ νὰ χαράξωμε τὶς 8 ἄλλες εὐθεῖες* ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς 8 ὑπόλοιπες διαφορετικὲς περιστροφικὲς ταχύτητες, ἀντικαθιστοῦμε μέσα στὴ σχέση (1) τὸ n μὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες περιστροφικὲς ταχύτητες τοῦ πίνακα τοῦ σχήματος 14-α καὶ ἐργαζόμασθε ὅπως καὶ παραπάνω.

Π.χ. γιὰ $n = 50$ ἔχομε $v \simeq \dfrac{3{,}14 \cdot D \cdot 50}{1\,000} = 0{,}157\,D.$

Προσδιορίζομε ἕνα σημεῖο τῆς ἀντίστοιχης εὐθείας, διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ O, παίρνοντας πάλι $D = 200$, ὁπότε $v = 31{,}4$. Τὸ σημεῖο μὲ τὶς συντεταγμένες (200 , 31,4) εἶναι τὸ B (βλ. σχ. 14-β) καὶ ἡ εὐθεία OB εἶναι τὸ γραφικὸ ποὺ ζητοῦμε τῆς συνάρτησης $v = 0{,}157\ D$.



Σχ. 14-β. Διάγραμμα μιᾶς φρεζομηχανῆς.

Παρατήρηση. Ὅταν γιὰ μιὰ ἀπὸ τὶς ἄλλες 7 εὐθεῖες τοῦ διαγράμματος ποὺ θέλομε νὰ καταρτίσωμε, τὸ σημεῖο ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ τετμημένη $D = 200$ ἔχει τεταγμένη v μεγαλύτερη ἀπὸ 50, τότε αὐτὸ τὸ σημεῖο δὲν βρίσκεται μέσα στὰ ὅρια τοῦ παραπάνω σχεδίου μας (σχ. 14-β). Π.χ. γιὰ $n = 140$ ἔχομε $v \simeq \dfrac{3{,}14 \cdot D \cdot 140}{1\ 000} \simeq 0{,}440\ D$. Ὅταν $D = 200$, τότε $v = 0{,}44 \cdot 200 = 88$ καὶ τὸ σημεῖο μὲ συντεταγμένες (200 , 88) εἶναι ἔξω ἀπὸ τὰ ὅρια τοῦ σχεδίου μας. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ γιὰ $D = 120$, ὁπότε $v = 0{,}44 \cdot 120 = 52{,}8$. Γι' αὐτὸ παίρνομε ἕνα μικρότερο D, π.χ. $D = 80$, ὁπότε $v = 0{,}44 \cdot 80 = 35{,}2$· τὸ σημεῖο μὲ συντεταγμένες (80 , 35,2) βρίσκεται μέσα στὰ ὅρια τοῦ σχεδίου μας: εἶναι τὸ σημεῖο Γ τοῦ σχ. 14-β καὶ ἡ εὐθεία $O\Gamma$ εἶναι τὸ γραφικὸ τῆς συνάρτησης $v = 0{,}440\ D$ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στὴν τιμὴ $n = 140$.

4ο. *Μιὰ ἁπλὴ ἀνάγνωση πάνω στὸ διάγραμμα* ἐπιτρέπει νὰ βροῦμε τὴ ζητούμενη περιστροφικὴ ταχύτητα, ὅταν ξέρωμε τὴ διάμετρο D καὶ τὴν κοπτικὴ ταχύτητα v. Π.χ. γιὰ $D = 80$ καὶ $v = 25$ ἐργαζόμασθε ὡς ἑξῆς: Σημειώνομε τὸ σημεῖο M

(σχ. 14-β) ποὺ ἔχει τετμημένη 80 (διάμετρος τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου) καὶ τεταγμένη 25 (κοπτικὴ ταχύτητα). Τὸ σημεῖο αὐτὸ εἶναι πολὺ κοντὰ στὴν εὐθεία τοῦ διαγράμματος ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σὲ περιστροφικὴ ταχύτητα 98 *στρ/min*. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα ποὺ ζητοῦμε εἶναι λοιπὸν 98 *στρ/min*.

Παρατηρήσεις. 1η. Ὅταν τὸ σημεῖο ποὺ σημειώνομε πάνω στὸ διάγραμμα μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε, βρίσκεται ἀνάμεσα σὲ δυὸ ἀπὸ τὶς 9 εὐθεῖες τοῦ διαγράμματος, τότε διαλέγομε συνήθως γιὰ περιστροφικὴ ταχύτητα τὴ μικρότερη ἀπὸ τὶς δυὸ ταχύτητες ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς δυὸ εὐθεῖες. Π.χ. ὅταν $D = 170$ καὶ $v = 33$, τὸ ἀντίστοιχο σημεῖο P (170 , 33) (βλ. σχῆμα 14-β) βρίσκεται ἀνάμεσα στὶς εὐθεῖες μὲ $n = 50$ καὶ $n = 70$ καὶ γιὰ περιστροφικὴ ταχύτητα διαλέγομε τὴ μικρότερη $n = 50$ *στρ/min*.

2η. Ἀντὶ νὰ προσδιορίσωμε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαγράμματος τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα ποὺ ζητεῖται στὸ 4°, θὰ μπορούσαμε νὰ τὴ βροῦμε ὑπολογιστικὰ ἀπὸ τὴν ἐξίσωση:

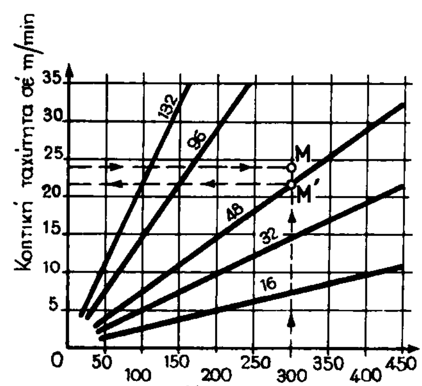
$$\frac{3{,}14 \cdot 80}{1\,000} n = 25$$

μὲ ἄγνωστο τὸ n. Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ προκύπτει ἀπὸ τὴ σχέση (1) τοῦ 1°, ὅταν ἀντικαταστήσωμε τὸ D καὶ τὸ v μὲ τὶς δοσμένες τιμές τους 80 καὶ 25 ἀντιστοίχως. Γιὰ νὰ τὴν ἐπιλύσωμε, διαιροῦμε καὶ τὰ δυὸ μέλη της διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3{,}14 \cdot 80}{1\,000}$ ποὺ πολλαπλασιάζει τὸν ἄγνωστο n, καὶ ἔτσι βρίσκομε:

$$n = \frac{25 \cdot 1\,000}{3{,}14 \cdot 80} = \frac{25\,000}{251{,}2} \simeq 99{,}5 \text{ στρ/min}.$$

2. Διάγραμμα μιᾶς λειαντικῆς μηχανῆς. Μιὰ λειαντικὴ μηχανὴ μπορεῖ νὰ ρυθμισθῆ ἔτσι ποὺ τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο της νὰ κάνη ν διπλὲς διαδρομὲς (πηγεμὸ καὶ γυρισμὸ) στὸ λεπτό· τὸ ν μπορεῖ νὰ ἔχη μιὰν ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες πέντε τιμές: 16, 32, 48, 96, 132. Στὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 5 αὐτὲς ρυθμίσεις *ἡ κοπτικὴ ταχύτητα εἶναι μιὰ συνάρτηση τοῦ μήκους διαδρομῆς*.

Ἔτσι ἔχομε πέντε διάφορες συναρτήσεις ποὺ μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμε μ' ἕνα συλλογισμὸ σὰν ἐκεῖνον ποὺ κάμαμε στὸν προηγούμενο παράγραφο· βλέπομε τότε ὅτι ἔχουν ὅλες τὴ μορφὴ $y = ax$· ἄρα παριστάνονται γραφικὰ μὲ 5 εὐθεῖες ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὴν ἀρχὴ O τῶν συντεταγμένων, αὐτὲς ποὺ βλέπομε στὸ σχ. 14-γ σημειωμένες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 16, 32, 48, 96, 132. *Διάγραμμα τῆς λειαντικῆς μηχανῆς* εἶναι τὸ σύστημα τῶν 5 αὐτῶν εὐθειῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς 5 διάφορες τιμὲς τοῦ ν. Νά πῶς χρησιμοποιεῖται.



Σχ. 14-γ. Διάγραμμα μιᾶς λειαντικῆς μηχανῆς.

Πρόβλημα. Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ διαδρομῶν ἀνὰ λεπτὸ (ἀνὰ min) θὰ πρέπει νὰ ἐργασθῆ ἡ λειαντικὴ μηχανή, ὅταν τὸ μῆκος διαδρομῆς εἶναι 300 mm καὶ τὸ ὑλικὸ τοῦ κομματιοῦ, ποὺ θέλομε νὰ κατεργασθοῦμε, ἐπιτρέπη κοπτικὴν ταχύτητα 24 m/min;

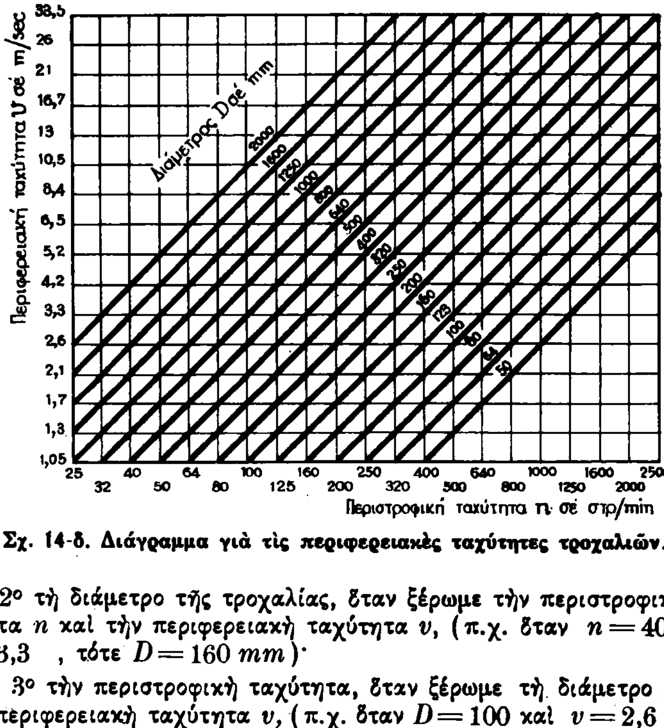
Τὸ σημεῖο M μὲ συντεταγμένες (300 , 24) βρίσκεται ἀνάμεσα στὶς εὐθεῖες ποὺ εἶναι σημειωμένες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 48 καὶ 96. Θὰ βάλωμε λοιπὸν τὴ μηχανὴ νὰ ἐργασθῆ μὲ τὸν μικρότερο ἀριθμὸ διαδρομῶν:

$$\nu = 48 \text{ διαδρομὲς ἀνὰ λεπτό.}$$

Τὴν κοπτικὴ ταχύτητα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ $\nu = 48$ καὶ μῆκος διαδρομῆς 300 *mm*, μᾶς τὴ δίνει τὸ διάγραμμα μὲ τὴν τεταγμένη τοῦ σημείου M' (βλ. σχ. 14-γ)· ἡ κοπτικὴ αὐτὴ ταχύτητα εἶναι λοιπὸν περίπου 22 *m/min*, δηλαδὴ κάπως μικρότερη ἀπὸ τὴν προβλεπόμενη 24 *m/min*.

Ἀσκήσεις. 1. Τὸ σχ. 14-δ δίνει τὸ διάγραμμα τῶν περιφερειακῶν ταχυτήτων τροχαλιῶν μὲ διάφορες διαμέτρους. Χρησιμοποιώντας το μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμε.

1ο τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα v *m/sec* μιᾶς τροχαλίας, ὅταν ξέρωμε τὴ διάμετρό της D *mm* καὶ τὴν περιστροφική της ταχύτητα n *στρ/min*, (π.χ. ὅταν $D = 200$ καὶ $n = 250$, τότε $v = 2{,}6$ *m/sec*)·



Σχ. 14-δ. **Διάγραμμα γιὰ τὶς περιφερειακὲς ταχύτητες τροχαλιῶν.**

2ο τὴ διάμετρο τῆς τροχαλίας, ὅταν ξέρωμε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα n καὶ τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα v, (π.χ. ὅταν $n = 400$ καὶ $v = 3{,}3$, τότε $D = 160$ *mm*)·

3ο τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα, ὅταν ξέρωμε τὴ διάμετρο D καὶ τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα v, (π.χ. ὅταν $D = 100$ καὶ $v = 2{,}6$, τότε $n = 500$ *στρ/min*).

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρῆτε τώρα τὰ ἑξῆς:

1ο τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα τῆς τροχαλίας, ὅταν $n = 200$ καὶ $D = 800$·

2ο τὴ διάμετρο τῆς τροχαλίας, ὅταν $n = 640$ καὶ $v = 2{,}6$·

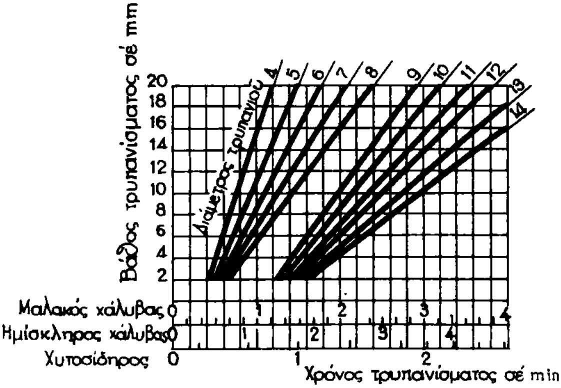
3ο τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα, ὅταν $D = 1\,000$ καὶ $v = 5{,}2$.

2. Τὸ σχῆμα 14-ε δίνει τὸ διάγραμμα τῶν χρόνων ποὺ προβλέπονται γιὰ τὸ ἄνοιγμα τρυπῶν μ' ἕνα δράπανο (500 *στρ/min*).

Θὰ παρατηρήσετε ὅτι ὁ ὁριζόντιος ἄξονας εἶναι φορέας τριῶν διαφορετικῶν διαβαθμίσεων ποὺ ἀντιστοιχοῦν στοὺς χρόνους τρυπανίσματος σὲ τρία διαφορετικὰ μέταλλα. Διαβάστε τώρα πάνω στὸ διάγραμμα:

1ο τὸ χρόνο ποὺ χρειάζεται γιὰ τὸ ἄνοιγμα μιᾶς τρύπας μὲ διάμετρο 10 *mm* καὶ βάθος 14 *mm* σὲ ἡμίσκληρο χάλυβα (ἀτσάλι),

2ο τοὺς χρόνους ποὺ χρειάζονται γιὰ τὸ ἄνοιγμα τῆς ἴδιας τρύπας σὲ μαλακὸ χάλυβα καὶ σὲ χυτοσίδηρο.



Σχ. 14-ε. Διάγραμμα γιὰ τοὺς χρόνους τρυπανίσματος.

3. Ὑποθέστε ὅτι χρησιμοποιώντας φρέζα διαμέτρου D *mm* πετυχαίνετε κοπτικὴ ταχύτητα 20 *m/min*. Ὑπολογίστε σὲ *στρ/min* τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα n αὐτῆς τῆς φρέζας γιὰ τὶς ἀκόλουθες τιμὲς τῆς διαμέτρου D: 30, 60, 90, 120. Παραστῆστε γραφικὰ αὐτὰ τὰ ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς D καὶ τῆς n ἡ ὁποία εἶναι συνάρτηση τῆς D. Τέλος χαράξτε τὸ γραφικὸ αὐτῆς τῆς συνάρτησης χρησιμοποιώντας τὰ 4 παραστατικὰ σημεῖα ποὺ προσδιορίσατε. (Νὰ διαλέξετε πάνω στοὺς ἄξονες συντεταγμένων τέτοιες κλίμακες ὥστε τὸ σχέδιό σας νὰ ἔχῃ διαστάσεις περίπου 10 *cm* × 10 *cm*).

4. Ἀνάμεσα σὲ δυὸ σημεῖα A καὶ B ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος θέλομε νὰ παρεμβάλωμε μιὰν ἀντίσταση 3 ὤμ. Ἡ ἀντίσταση αὐτὴ πρέπει νὰ κατασκευασθῇ μὲ δυὸ ἀγωγοὺς σὲ παράλληλη σύνδεση. Ὁ ἕνας ἀπ' αὐτοὺς ἔχει ἀντίσταση R_1 ποὺ μπορεῖ νὰ πάρῃ τὶς τιμὲς 5, 6, 7, 8, 9, 10 ὤμ. Ὁ ἄλλος θὰ ἔχῃ τότε ἀντίσταση R_2 ποὺ μᾶς τὴ δίνει ἡ ἐξίσωση $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 3$. Προσδιορίστε τὸ R_2 συναρτήσει τοῦ R_1. (Θὰ ἐπιλύσετε αὐτὴν τὴν ἐξίσωση ὡς πρὸς R_2 θεωρώντας τὸ R_1 σὰν ἕνα γενικὸ ἀριθμό). Ὑπολογίστε ὕστερα τὶς τιμὲς τοῦ R_2 ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς ἕξι παραπάνω τιμὲς τοῦ R_1 καὶ παραστῆστε γραφικὰ τὰ ἕξι ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν ποὺ θὰ ἔχετε βρεῖ.

Μάθημα 15.

Συστήματα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους. Μιὰ ἐφαρμογὴ στὴν Ἠλεκτροτεχνία.

1. Πρόβλημα. *Πρόκειται νὰ μοιράσωμε 6 000 δρχ. σὲ τρία πρόσωπα Α, Β καὶ Γ ὡς ἑξῆς: 1ο τὸ διπλάσιο τοῦ μεριδίου τοῦ Α νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μεριδίων τοῦ Β καὶ τοῦ Γ καὶ 2ο τὸ ἄθροισμα τῶν μεριδίων τοῦ Α καὶ τοῦ Β νὰ ξεπερνᾶ τὸ μερίδιο τοῦ Γ κατὰ 3 000 δρχ. Ποιά θὰ εἶναι τὰ τρία μερίδια;*

Ἂς παραστήσωμε τὰ μερίδια τῶν A, B καὶ Γ μὲ x, y καὶ z ἀντιστοίχως. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος, οἱ τρεῖς ἄγνωστοι x, y, z πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὶς ἀκόλουθες τρεῖς ἐξισώσεις:

$$\begin{cases} x+y+z=6\,000 \\ 2x=y+z \\ x+y=z+3\,000. \end{cases}$$

Ἔχομε λοιπὸν ἕνα *σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους*. Ἡ ἐπίλυσή του μπορεῖ νὰ γίνη ὡς ἑξῆς:

Ἀπὸ τὴ 2η ἐξίσωση βλέπομε ὅτι τὸ ἄθροισμα $y+z$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $2x$· γι' αὐτὸ ἀντικαθιστοῦμε μέσα στὴν 1η ἐξίσωση τὸ ἄθροισμα $y+z$ μὲ τὸ $2x$. Προκύπτει ἔτσι ἡ ἐξίσωση

$$2x+x=6\,000 \quad \text{ἢ} \quad 3x=6\,000$$

ποὺ ἔχει ἕναν μόνο ἄγνωστο, τὸ x. Τὴν ἐπιλύνομε καὶ βρίσκομε:

$$x=\frac{6\,000}{3}=2\,000.$$

Τὴν τιμὴ αὐτὴ τοῦ x τὴ βάζομε στὴ 2η καὶ στὴν 3η ἐξίσωση τοῦ συστήματος· προκύπτει ἔτσι τὸ σύστημα τῶν δυὸ ἐξισώσεων

$$\begin{cases} 4\,000=y+z \\ 2\,000+y=z+3\,000 \end{cases}$$

μὲ τοὺς δυὸ ἀγνώστους y καὶ z· τὸ σύστημα αὐτὸ γράφεται ἔτσι:

$$\begin{cases} y+z=4\,000 \\ y-z=3\,000-2\,000=1\,000. \end{cases} \qquad (1)$$

Γιὰ νὰ τὸ ἐπιλύσωμε, προσθέτομε κατὰ μέλη τὶς δυὸ ἐξισώσεις του· βρίσκομε ἔτσι τὴν ἐξίσωση

$$2y+z-z=5\,000 \quad \text{ἢ} \quad 2y=5\,000,$$

ποὺ ἔχει ἕναν μόνο ἄγνωστο, τὸ y. Ἐπιλύνοντάς την βρίσκομε τὴν τιμὴ τοῦ y:

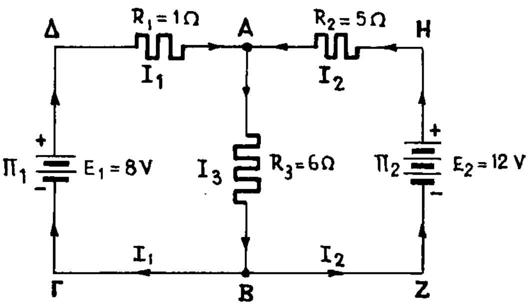
$$y = \frac{5\ 000}{2} = 2\ 500.$$

Ξέροντας τώρα τὴν τιμὴ τοῦ ἀγνώστου y βρίσκομε εὔκολα ἀπὸ τὴν πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος (1) τὴν τιμὴ τοῦ z:

$$2\ 500 + z = 4\ 000 \quad \text{ἄρα} \quad z = 4\ 000 - 2\ 500 = 1\ 500.$$

Ἀπάντηση: Τὰ μερίδια τῶν Α, Β καὶ Γ εἶναι ἀντιστοίχως 2 000 δρχ, 2 500 δρχ, 1 500 δρχ.

2. Πρόβλημα. *Ὑπολογίστε τὶς ἐντάσεις I_1, I_2, I_3 (σὲ ἀμπὲρ) τῶν συνεχῶν ρευμάτων ποὺ διαρρέουν τοὺς κλάδους τοῦ ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος τὸ ὁποῖο παριστάνεται στὸ σχ. 15-α. (Ἂς σημειωθῆ ὅτι οἱ ἐσωτερικὲς ἀντιστάσεις τῶν πηγῶν $Π_1$ καὶ $Π_2$ ἔχουν συμπεριληφθῆ στὶς ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 ἀντιστοίχως καὶ ὅτι οἱ ἀντιστάσεις τῶν δυὸ ἀγωγῶν ποὺ συνδέουν τὸν κόμβο Β μὲ τὶς δυὸ πηγὲς θεωροῦνται παραμελήσιμες).*



Σχ. 15-α. Ἠλεκτρικὸ κύκλωμα μὲ 2 πηγὲς καὶ 3 κλάδους.

Ἂν ἐφαρμόσωμε τὸν λεγόμενο 1ο νόμο τοῦ Κίρχωφ στὸν κόμβο A (ἢ τὸν κόμβο B) τοῦ κυκλώματος (σχ. 15-α), παίρνομε τὴν ἐξίσωση:

$$I_3 = I_1 + I_2.$$

Μᾶς χρειάζονται δυὸ ἀκόμα ἐξισώσεις γιὰ τοὺς τρεῖς ἀγνώστους I_1, I_2, I_3 τοῦ προβλήματος. Τὶς βρίσκομε, ἂν σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

α) Ἡ τάση μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B, σύμφωνα μὲ τὸν νόμο τοῦ Ὤμ, εἶναι $R_3 \cdot I_3$. Ἡ τάση ὅμως αὐτὴ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο ποὺ μένει, ἂν ἀπὸ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμη E_1 τῆς πηγῆς $Π_1$ ἀφαιρέσωμε τὴν πτώση τῆς τάσης στὴν ἀντίσταση R_1, δηλαδὴ τὸ γινόμενο $R_1 I_1$. Ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ προβλήματος εἶναι λοιπὸν ἡ

$$R_3 I_3 = E_1 - R_1 I_1.$$

β) Ἡ τάση πάλι μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B εἶναι ἴση καὶ μὲ τὸ ὑπόλοιπο ποὺ μένει, ἂν ἀπὸ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμη E_2 τῆς πηγῆς Π_2 ἀφαιρέσωμε τὴν πτώση τῆς τάσης στὴν ἀντίσταση R_2. Ἡ τρίτη ἐξίσωση τοῦ προβλήματος εἶναι λοιπὸν ἡ

$$R_3 I_3 = E_2 - R_2 I_2.$$

Οἱ δυὸ τελευταῖες ἐξισώσεις, ὅταν χρησιμοποιήσωμε τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος (βλ. σχ. 15-α), γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$6\,I_3 = 8 - 1 \cdot I_1,$$
$$6\,I_3 = 12 - 5 I_2.$$

Οἱ ἄγνωστοι I_1, I_2, I_3 ἐπαληθεύουν λοιπὸν τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ 6\,I_3 = 8 - I_1 \\ 6\,I_3 = 12 - 5 I_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ λύση του, παίρνομε ἀπὸ τὴν 1η ἐξίσωσή του τὴν ἔκφραση τοῦ I_3 συναρτήσει τῶν I_1 καὶ I_2 καὶ τὴ βάζομε μέσα στὴ 2η καὶ στὴν 3η ἐξίσωση στὴ θέση τοῦ I_3. Προκύπτει ἔτσι τὸ σύστημα τῶν δυὸ ἐξισώσεων

$$\begin{cases} 6\,(I_1 + I_2) = 8 - I_1 \\ 6\,(I_1 + I_2) = 12 - 5\,I_2 \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} 7\,I_1 + 6\,I_2 = 8 \\ 11\,I_2 + 6\,I_1 = 12 \end{cases} \qquad (3)$$

μὲ τοὺς δυὸ ἀγνώστους I_1 καὶ I_2. Αὐτὸ ξέρομε νὰ τὸ ἐπιλύσωμε: μποροῦμε π.χ. νὰ πάρωμε τὴν 1η ἐξίσωσή του καὶ νὰ τὴν ἐπιλύσωμε ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστο I_1, θεωρώντας τὸν I_2 σὰν ἕνα γενικὸ ἀριθμό:

$$7\,I_1 = 8 - 6\,I_2,$$

$$I_1 = \frac{8 - 6\,I_2}{7} = \frac{8}{7} - \frac{6}{7} I_2. \qquad (4)$$

Τὴν ἔκφραση αὐτὴ τοῦ I_1 συναρτήσει τοῦ I_2 τὴ βάζομε μέσα στὴ 2η ἐξίσωση τοῦ συστήματος (3)· ἔτσι παίρνομε τὴν ἐξίσωση

$$11\,I_2 + 6\left(\frac{8}{7} - \frac{6}{7} I_2\right) = 12$$

ποὺ περιέχει ἕνα μόνο ἄγνωστο, τὸ I_2. Τὴν ἐπιλύνομε μὲ γνωστὸ τρόπο:

$$11\,I_2 + \frac{6 \cdot 8}{7} - \frac{6 \cdot 6}{7} I_2 = 12,$$

$$\left(11 - \frac{6 \cdot 6}{7}\right) I_2 = 12 - \frac{6 \cdot 8}{7}$$

$$\frac{77 - 36}{7} I_2 = \frac{84 - 48}{7},$$

$$\frac{41}{7} I_2 = \frac{36}{7},$$

$$I_2 = \frac{36}{7} \cdot \frac{7}{41} = \frac{36}{41} \simeq 0{,}878.$$

Αὐτὴ τὴν τιμὴ τοῦ ἀγνώστου I_2 τὴ βάζομε μέσα στὴν ἐξίσωση (4) ποὺ ἐκφράζει τὸ I_1 συναρτήσει τοῦ I_2· ἔτσι βρίσκομε:

$$I_1 = \frac{8}{7} - \frac{6}{7} \cdot \frac{36}{41} = \frac{8 \cdot 41 - 6 \cdot 36}{7 \cdot 41} = \frac{112}{7 \cdot 41} = \frac{16}{41} \simeq 0{,}390.$$

Τέλος, ξέροντας τὶς τιμὲς τῶν ἀγνώστων I_1 καὶ I_2, βρίσκομε ἀπὸ τὴν 1η ἐξίσωση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος (2) τὴν τιμὴ τοῦ I_3:

$$I_3 = \frac{16}{41} + \frac{36}{41} = \frac{52}{41} \simeq 1{,}268.$$

Ἀπάντηση: Οἱ ζητούμενες ἐντάσεις I_1, I_2, I_3 εἶναι:

$$I_1 = \frac{16}{41} \simeq 0{,}390 \text{ ἀμπέρ}, \quad I_2 = \frac{36}{41} \simeq 0{,}878 \text{ ἀμπέρ},$$

$$I_3 = \frac{52}{41} \simeq 1{,}268 \text{ ἀμπέρ}.$$

Παρατήρηση. Ἀφοῦ βροῦμε τὴ λύση ἑνὸς συστήματος, πρέπει νὰ τὴν ἐλέγχωμε (δοκιμάζωμε). Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸν παίρνομε τὶς τιμὲς τῶν ἀγνώστων τὶς ὁποῖες βρήκαμε καὶ τὶς βάζομε σὲ μιὰ τουλάχιστο ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, πάντως ὄχι αὐτὴν ποὺ χρησιμοποιήσαμε στὸ τέλος· πρέπει τότε, ἐκτελώντας τὶς σημειωμένες πράξεις, νὰ βροῦμε μιὰ σωστὴ ἰσότητα. Π.χ. ἂς ἀντικαταστήσωμε μέσα στὴ 2η ἐξίσωση $I_1 + 6I_3 = 8$ τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος (2) τοὺς ἀγνώστους I_1, I_3 μὲ τὶς παραπάνω τιμές τους· βρίσκομε τὴ σωστὴ ἰσότητα:

$$\frac{16}{41} + 6 \cdot \frac{52}{41} = \frac{16 + 6 \cdot 52}{41} = \frac{16 + 312}{41} = \frac{328}{41} = \frac{8}{1} = 8.$$

3. Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε γιὰ συστήματα ἐξισώσεων μποροῦμε εὔκολα νὰ συμπεράνωμε τὴν ἀκόλουθη γενικὴ μέθοδο γιὰ τὴν ἐπίλυσή τους:

Παίρνομε μιὰν ἐξίσωση τοῦ συστήματος καὶ τὴν ἐπιλύνομε ὡς πρὸς ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους ποὺ περιέχει, θεωρώντας τοὺς ἄλλους σὰν γενικοὺς ἀριθμούς. Βρίσκομε ἔτσι τὴν ἔκφραση τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου συναρτήσει τῶν ἄλλων καὶ τὴ βάζομε μέσα στὶς ὑπόλοιπες ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Θὰ προκύψη τότε ἢ μιὰ ἐξίσωση μὲ ἕναν ἄγνωστο ἢ ἕνα σύστημα μὲ λιγότερες ἐξισώσεις καὶ ἀγνώστους ἀπὸ τὸ ἀρχικό.

Ἐφαρμόζοντας σ' αὐτὸ τὸ σύστημα τὴν ἴδια μέθοδο, ἐλαττώνομε πάλι τὸν ἀριθμὸ τῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν ἀγνώστων· ἔτσι, ἐπαναλαμβάνοντας, ἂν χρειάζεται, τὴν ἴδια ἐργασία, φθάνομε τελικὰ σὲ μίαν ἐξίσωση μὲ ἕναν μόνο ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους. Ἐπιλύνοντας αὐτὴν τὴν ἐξίσωση βρίσκομε τὴν τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ποὺ περιέχει. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας αὐτὴν τὴν τιμὴ καὶ τὶς ἐκφράσεις ποὺ βρήκαμε γιὰ τοὺς ἄλλους ἀγνώστους, ὑπολογίζομε διαδοχικὰ τὶς τιμὲς καὶ αὐτῶν τῶν ἀγνώστων.

Παράδειγμα. Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x-2y+3z=11 \\ 4x+3y-10z=55 \\ 4y+5z-2x=0. \end{cases}$$

Ἀπὸ τὴν 1η ἐξίσωση βρίσκομε τὴν ἔκφραση τοῦ x συναρτήσει τῶν y καὶ z:

$$x=2y-3z+11. \tag{5}$$

Μέσα στὴ 2η καὶ στὴν 3η ἐξίσωση ἀντικαθιστοῦμε τὸ x μὲ αὐτὴ τὴν ἔκφραση· παίρνομε ἔτσι τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 4(2y-3z+11)+3y-10z=55 \\ 4y+5z-2(2y-3z+11)=0 \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} 11y-22z=11 \\ 0\cdot y+11z=22 \end{cases}$$

ποὺ περιέχει μόνο τοὺς ἀγνώστους y καὶ z. Ἐπιλύνομε τὴ 2η ἐξίσωσή του ὡς πρὸς z καὶ βρίσκομε:

$$z=\frac{22}{11}=2\cdot$$

αὐτὴ τὴν τιμὴ τοῦ z τὴ βάζομε μέσα στὴν πρώτη ἐξίσωσή του, ὁπότε λαμβάνομε:

$$11y-22\cdot 2=11 \quad \text{καὶ} \quad 11y=55 \quad \text{ἄρα} \quad y=\frac{55}{11}=5.$$

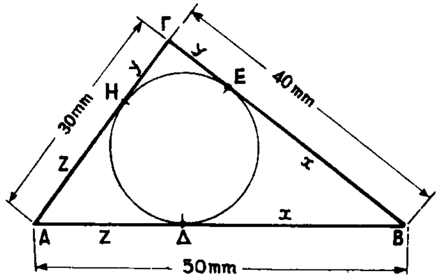
Ξέροντας τὶς τιμὲς τῶν y καὶ z βρίσκομε, ἀπὸ τὴν ἐξίσωση (5) ποὺ δίνει τὸ x συναρτήσει τῶν y καὶ z, τὴν τιμὴ τοῦ x:

$$x=2\cdot 5-3\cdot 2+11=15.$$

Ἔλεγχος: Τὶς τιμὲς τῶν ἀγνώστων τὶς ὁποῖες βρήκαμε τὶς βάζομε μέσα στὴ 2η ἐξίσωση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος καὶ πιστοποιοῦμε ὅτι τὴν ἐπαληθεύουν:

$$4\cdot 15+3\cdot 5-10\cdot 2=60+15-20=55.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Προσδιορίστε, μὲ ἐπίλυση ἑνὸς συστήματος τριῶν ἐξισώσεων, τὰ μήκη x, y, z τῶν τμημάτων στὰ ὁποῖα χωρίζονται οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 15-β) ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Δ, Ε, Η τοῦ ἐσωγραμμένου κύκλου.



Σχ. 15-β

2. Ἐπιλύστε τὰ συστήματα:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ x-y+z=3 \\ x+y-z=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+2y-z=20. \end{cases}$$

3. Λύστε ἕνα πρόβλημα ὅμοιο μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ § 2 σὐτοῦ τοῦ Μαθήματος ἀλλὰ μὲ τὰ ἀκόλουθα ἀριθμητικὰ δεδομένα:

$E_1=10$ βόλτ, $E_2=8$ βόλτ, $R_1=2$ ὤμ, $R_2=5$ ὤμ, $R_3=3$ ὤμ.

Προβλήματα γιὰ ἀνασκόπηση καὶ ἐπανάληψη.

I. Ἐφαρμογὲς τῶν πράξεων τῆς Ἀριθμητικῆς.

1. Ὑπολογίστε πόσο κοστίζει ἕνας γυμνὸς χάλκινος ἀγωγὸς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ὁ ὁποῖος ἔχει διατομὴ $2\ mm^2$ καὶ μῆκος $2\ km$, ξέροντας ὅτι ἡ ἀξία ἑνὸς κιλοῦ χαλκοῦ εἶναι 12 δρχ καὶ ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,7.

2. Μιὰ ἠλεκτρικὴ ἐπιχείρηση, ποὺ πουλᾶ τὴν κιλοβατώρα (kWh) πρὸς 1,80 δρχ, παίρνει κατ' ἀποκοπὴ 6 δρχ τὸ μήνα γιὰ τὴν κατανάλωση μιᾶς λάμπας τῶν 60 βάττ.

Πόσες κιλοβατῶρες πρέπει νὰ δείξη ὁ μετρητὴς σ' ἕνα ἔτος, γιὰ νὰ εἶναι ἡ ἀξία τους ἴση μὲ αὐτὸ ποὺ θὰ πληρώση ὁ καταναλωτὴς κατ' ἀποκοπὴ γιὰ τὸ ἴδιο χρονικὸ διάστημα;

3. Ἕνας τεχνίτης ἐπεξεργάσθηκε δυὸ σειρὲς βίδες· γιὰ τὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς βίδες τῆς μιᾶς σειρᾶς χρειάσθηκε 12 *sec* ἐργασίας καὶ γιὰ τὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς βίδες τῆς ἄλλης σειρᾶς, 42 *sec*. Ὑπολογίστε πόσα κομμάτια ἐπεξεργάσθηκε ἀπὸ τὴ μιὰ σειρὰ καὶ πόσα ἀπὸ τὴν ἄλλη, ξέροντας ὅτι ἐτελείωσε 1 400 κομμάτια σὲ 12 h.

4. Ἕνα φορτηγὸ αὐτοκίνητο μεταφέρει κυλινδρικὲς σιδερένιες ράβδους ποὺ ἔχουν διάφορα μήκη ἀλλὰ τὴν ἴδια διάμετρο 50 mm. Γιὰ νὰ ὑπολογίσουν τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν ράβδων αὐτῶν ἐζύγισαν τὸ φορτίο τοῦ αὐτοκινήτου καὶ βρῆκαν 1 837 kg. Ποιὸ εἶναι τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν ράβδων; (Πάρτε τὸ $\pi = 3{,}14$ καὶ τὴ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σιδήρου $= 7{,}8$).

Ἂν οἱ ράβδοι ἦσαν ὄχι ἀπὸ σίδερο ἀλλὰ ἀπὸ ἀλουμίνιο καὶ εἶχαν τὴν ἴδια διάμετρο (50 mm) καὶ τὸ ἴδιο συνολικὸ βάρος (1 837 kg), ποιὸ θὰ ἦταν τὸ συνολικό τους μῆκος; (Σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ἀλουμίνιου 2,6).

5. Ὑπολογίστε:

α) τὸ βάρος ποὺ ἔχει ἀνὰ τρέχον μέτρο στρογγυλὸ σίδερο μὲ διάμετρο 14 mm,

β) τὸ μῆκος μιᾶς τέτοιας σιδερένιας ράβδου, ὅταν ζυγίζη 1 kg.

γ) τὸ συνολικὸ μῆκος ποὺ ἔχουν τέτοιες ράβδοι, ὅταν ζυγίζουν συνολικὰ 3 τόννους,

δ) τὴν τιμὴ ἀνὰ τρέχον μέτρο, ὅταν 240 kg ἀπὸ τέτοιες ράβδους ἀξίζουν 1 664 δρχ.

(Πάρτε τὸ $\pi = 3{,}14$ καὶ τὴ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σιδήρου $= 7{,}8$).

6. Ἕνας μαθητευόμενος τορναδόρος κόβει ἀπὸ στρογγυλὸ μαλακὸ ἀτσάλι διαμέτρου 20 mm ἄξονες μήκους 63 mm. Σὲ κάθε κόψιμο χάνονται 3 mm ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ ἀτσαλιοῦ. Ὑπολογίστε 1ο πόσους τέτοιους ἄξονες θὰ μπορέση νὰ κόψη ἀπὸ μιὰ ράβδο μήκους 525 mm καὶ 2ο πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὑλικοῦ ποὺ θὰ περισσέψη (ὑπολειφθῆ), ἂν ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ἀτσαλιοῦ εἶναι 7,7.

7. Ἕνα ὀρθογώνιο φύλλο λαμαρίνας ἔχει 860 $mm \times 560$ mm διαστάσεις. Σ' αὐτὸ τὸ φύλλο, κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς ποὺ προχωρεῖ παράλληλα πρὸς τὴν περίμετρο τοῦ φύλλου σὲ ἀπόσταση 40 mm ἀπὸ τὴν ἄκρη του, πρόκειται ν' ἀνοίξωμε 42 ἰσαπόστατες τρύπες γιὰ καρφιά. Τὰ καρφιὰ ἔχουν διάμετρο 19 mm καὶ τέσσερα ἀπὸ αὐτὰ θὰ καρφωθοῦν στὶς τέσσερις κορυφὲς τῆς γραμμῆς ἡλώσεως. Ὑπολογίστε :

1ο τὴν ἀπόσταση ἀνάμεσα στοὺς ἄξονες δυὸ διαδοχικῶν καρφιῶν,

2ο τὸ ἄκοπο μῆκος τῆς λαμαρίνας πάνω τὴ γραμμὴ ἡλώσεως, ὅταν ἡ διάμετρος τῶν τρυπῶν εἶναι κατὰ 0,5 mm μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διάμετρο τῶν καρφιῶν.

8. Τί πάχος πρέπει νὰ δώσωμε σὲ μιὰ κουφωτὴ (ἐσωτερικὰ κοίλη) κολόνα μὲ ἐξωτερικὴ διάμετρο 280 mm, γιὰ νὰ ἔχη ἡ διατομή της ἐμβαδὸ ἴσο μὲ τὴ διατομὴ μιᾶς γεμάτης κολόνας διαμέτρου 200 mm ;

9. Ἕνας χάλκινος σωλήνας ἔχει ἐσωτερικὴ διάμετρο 23 mm καὶ βάρος 680 gr ἀνὰ τρέχον μέτρο. Ποιά εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρός του ; (Σχετικὴ πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ 8,9).

10. Τὸ πλάτος l ποὺ θὰ δώσωμε σὲ μιὰ μονὴ (ἁπλὴ) σταυρωτὴ συγκόλληση ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πάχος ε ποὺ ἔχουν τὰ συγκολλούμενα κομμάτια. Γενικὰ ἐφαρμόζομε τὸν τύπο :

$$l = 10\sqrt{\varepsilon}.$$

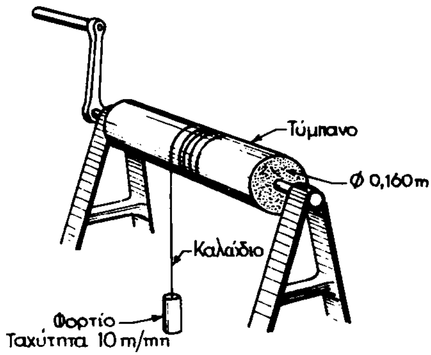
Ὑπολογίστε τὸ l γιὰ τὶς ἀκόλουθες τιμὲς τοῦ ε σὲ mm :

0,25 , 0,5 , 0,75 , 1 , 1,25 , 1,5 , 2 , 2,5.

11. Θέλετε ν' ἀποθηκεύσετε 20 λίτρα βενζίνα καὶ δὲν ἔχετε παρὰ ἕνα μόνο κυλινδρικὸ δοχεῖο μὲ διάμετρο 280 mm καὶ ὕψος 350 mm. Ἄραγε θὰ χωρέσουν καὶ τὰ 20 λίτρα τῆς βενζίνας στὸ δοχεῖο αὐτό ; Ἂν ναί, ποιά θὰ εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα στὴν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τῆς βενζίνας καὶ στὸ ἀπάνω ἄκρο (στὸ χεῖλος) τοῦ δοχείου ; (Ὑποθέτομε, ἐννοεῖται, ὅτι ὁ ἄξονας τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι κατακόρυφος).

12. Ἕνα κυλινδρικὸ δοχεῖο ἔχει διάμετρο 0,100 m καὶ περιέχει νερὸ ὡς ἕνα ὕψος 0,165 m. Ρίχνετε στὸ βυθό του μιὰ πέτρα καὶ παρατηρεῖτε ὅτι ἡ στάθμη (δηλαδὴ ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια) τοῦ νεροῦ ἀνέβηκε στὸ ὕψος τῶν 0,207 *m*. Ὑπολογίστε 1ο τὸν ὄγκο τῆς πέτρας σὲ dm^3 καὶ 2ο τὴ σχετικὴ πυκνότητά της ξέροντας τὸ βάρος της 890 *gr*.

13. Τὸ τύμπανο τοῦ χειροκίνητου βαρούλκου τοῦ σχ. 1 ἔχει διάμετρο 0,160 *m*. Ποιὰν περιστροφικὴ ταχύτητα πρέπει νὰ δώσωμε στὸ βαροῦλκο αὐτὸ γιὰ νὰ ἀνυψώση ἕνα φορτίο μὲ ταχύτητα 10 *m/min*;



Σχ. 1. Χειροκίνητο βαροῦλκο.

14. Ἕνα δράπανο στρέφεται μὲ 600 στρ/*min*. Ποιά εἶναι ἡ πιὸ μεγάλη διάμετρος τρύπας ποὺ μποροῦμε ν' ἀνοίξωμε μὲ αὐτό, ὅταν ἡ πιὸ μεγάλη περιφερειακὴ ταχύτητα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου δὲν πρέπη νὰ ξεπερνᾷ τὰ 35 *m/min*;

15. Ἕνα τρυπάνι, ποὺ ἀνοίγει τρύπες διαμέτρου 35 *mm*, κατεβαίνει 0,4 *mm* σὲ κάθε στροφή του καὶ κάνει 2 στροφὲς ἀνὰ δευτερόλεπτο. Ὑπολογίστε:

1ο πόσο χρόνο θὰ χρειασθῆ γιὰ ν' ἀνοίξη μιὰ τρύπα βάθους 240 *mm* σὲ μιὰ χυτοσιδερένια βάση,

2ο πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ μετάλλου ποὺ θ' ἀφαιρεθῆ; (Σχετικὴ πυκνότητα 7,2).

16. Ἕνα κομμάτι ἀπὸ μαλακὸ ἀτσάλι ἔχει μῆκος 75 *mm* καὶ διατομὴ σχήματος ἰσόσκελου τραπεζίου μὲ τὶς ἀκόλουθες διαστάσεις: μεγάλη βάση 50 *mm*, μικρὴ βάση 35 *mm*, ὕψος 20 *mm*. Ὑπολογίστε:

1ο τὸν ὄγκο του μὲ προσέγγιση 1 cm^3 (ἀπὸ κάτω)·

2ο τὸ βάρος του μὲ προσέγγιση 1 *gr*. (σχετ. πυκν. 7,8)·

3ο πόσο χρόνο θὰ χρειασθῆτε γιὰ ν' ἀνοίξετε μιὰ τρύπα στὸ πάχος 20 *mm* τοῦ κομματιοῦ, ὅταν ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τρυπανιοῦ σας εἶναι 180 στρ/*min* καὶ τὸ προχώρημά του σὲ βάθος 0,05 *mm* ἀνὰ στροφή.

17. Ἕνας παράλληλος τόρνος στρέφεται μὲ 175 στρ/*min*. Ὑπολογίστε:

1ο τὴν κοπτικὴ ταχύτητα σὲ *m/min* μὲ τὴν ὁποία θὰ κατεργασθῆτε σ' αὐτὸν τὸν τόρνο ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι διαμέτρου 60 *mm*·

2ο τὸν ἀριθμὸ τῶν στροφῶν ἀνὰ λεπτὸ ποὺ θὰ ταίριαζε γιὰ τὴν κατεργασία ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ διαμέτρου 60 mm, ἂν θὰ θέλαμε νὰ χρησιμοποιήσωμε κοπτικὴ ταχύτητα 33 m/min·

3ο πόσο εἶναι τὸ ὁλικὸ μῆκος ποὺ θὰ διατρέξη τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο τοῦ τόρνου κατὰ τὸ τορνάρισμα ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ ποὺ ἔχει διάμετρο 60 mm καὶ μῆκος 100 mm, ὅταν τὸ προχώρημα τοῦ ἐργαλείου εἶναι 0,15 mm ἀνὰ στροφή.

18. Δυὸ τροχαλίες ἔχουν διαμέτρους $d_1 = 30\ mm$ ἡ μιὰ καὶ $d_2 = 100\ mm$ ἡ ἄλλη· ἡ ἀπόσταση τῶν ἀξόνων τους εἶναι $a = 1\ 000$ mm. Ὑπολογίστε κατὰ προσέγγιση, σὲ μοῖρες, τὸ τόξο ἐπαφῆς τ^0 τοῦ λουριοῦ μὲ τὴ ζάντα τῆς μικρότερης τροχαλίας χρησιμοποιώντας τὸν τύπο:

$$\tau^o = 180^o - 57^o \cdot \frac{d_2 - d_1}{a}.$$

19. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε κατὰ προσέγγιση τὸ μῆκος L ἑνὸς λουριοῦ ξέροντας τὶς διαμέτρους d_1 καὶ d_2 τῶν τροχαλιῶν τὶς ὁποῖες συνδέει καθὼς καὶ τὴν ἀπόσταση a ἀνάμεσα στοὺς ἄξονές τους, χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο:

$$L = 1{,}57\ (d_1 + d_2) + 2a + \frac{(d_1 - d_2)^2}{4a}.$$

Ἐφαρμόστε τον μὲ τὰ ἀκόλουθα ἀριθμητικὰ δεδομένα:

$$d_1 = 1{,}153\ m \quad , \quad d_2 = 0{,}350\ m \quad , \quad a = 1\ m.$$

20. Ἕνα σύρμα ἀπὸ μαγιεσὸρ ἔχει μῆκος $l = 30\ m$ καὶ εἰδικὴ ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση $\varrho = 0{,}4$. Ποιὰν διάμετρο πρέπει νὰ ἔχη τὸ σύρμα γιὰ νὰ εἶναι ἡ ἠλεκτρικὴ ἀντίστασή του ἴση μὲ 1,5 ὤμ; (Θὰ κάμετε χρήση τοῦ τύπου $R = \varrho \frac{l}{F}$, ὅπου ἡ ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση R ἐκφράζεται σὲ ὤμ, ἡ διατομὴ F σὲ mm^2, τὸ μῆκος l σὲ m καὶ τὸ ϱ σὲ ὤμ γιὰ 1 mm^2 διατομὴ ἀνὰ 1 m μῆκος).

21. Ἕνας σπειροειδὴς ἠλεκτρικὸς ἀγωγὸς ἔχει 100 σπεῖρες διαμέτρου 2 cm. Ποιὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος ἀπὸ τὸ ὁποῖο εἶναι φτιαγμένος ὁ ἀγωγός, γιὰ νὰ εἶναι ἡ ἠλεκτρική του ἀντίσταση ἴση μὲ 2 ὤμ; Ἡ εἰδικὴ ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση τοῦ ὑλικοῦ εἶναι 25 μικροὼμ · cm^2/cm.

II. Ἐφαρμογὲς τῶν κλασμάτων καὶ τῶν λόγων.

22. 15 τρυπάνια ἀπὸ ταχυχάλυβα καὶ 10 ἀπὸ χυτοχάλυβα ἀξίζουν 45 δρχ. Ὑπολογίστε τὴν τιμὴ ἑνὸς τρυπανιοῦ ἀπὸ κάθε εἶδος, ξέροντας ὅτι ἡ τιμὴ ἑνὸς τρυπανιοῦ ἀπὸ χυτοχάλυβα εἶναι ἴση μὲ τὰ 3/4 τῆς τιμῆς ἑνὸς τρυπανιοῦ ἀπὸ ταχυχάλυβα.

23. Τὸ σχέδιο ἑνὸς ἐξαρτήματος μηχανῆς ἔχει γίνει ὑπὸ κλίμακα 3/5. Τὸ ἴδιο ἐξάρτημα σ' ἕνα σχετικὸ κατάλογο παριστάνεται ὑπὸ κλίμακα 7/100. Πόσο εἶναι ἕνα μῆκος στὸ πρῶτο σχέδιο, ὅταν τὸ ἀντίστοιχο μῆκος στὸ σχέδιο τοῦ καταλόγου εἶναι 63 *mm*;

24. Μιὰ κλιμακωτὴ τροχαλία ἔχει πέντε σκαλιὰ μὲ ἀντίστοιχες διαμέτρους D_1, D_2, D_3, D_4 καὶ D_5. Ὑπολογίστε τὶς διαμέτρους αὐτὲς ξέροντας ὅτι 1ο $D_1 = 100\ mm$, 2ο ἡ διαφορὰ τῶν διαμέτρων δύο διαδοχικῶν σκαλιῶν εἶναι πάντα ἡ ἴδια (εἶναι σταθερὴ) καὶ 3ο $\frac{D_5}{D_1} = \frac{9}{5}$.

25. Δυὸ ἀτσαλένιες κυλινδρικὲς ράβδοι ἔχουν τὸ ἴδιο μῆκος 0,7 *m* καὶ λόγο βαρῶν ἴσο μὲ 12/27· ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ τους εἶναι 7,6. Ὑπολογίστε: 1ο τὴ διάμετρο τῆς λεπτότερης ράβδου ξέροντας ὅτι ἡ διάμετρος τῆς ἄλλης εἶναι 3 *mm*· 2ο τὸ βάρος καὶ τὴν τιμὴ ἀγορᾶς τῶν δυὸ ράβδων, ἂν ὁ πωλητής δέχθηκε νὰ κάμη μίαν ἔκπτωση 5 % πάνω στὴ σημειωμένη τιμὴ πωλήσεως ποὺ ἦταν 24 δρχ τὸ *kg*.

26. Ὑπολογίστε τὰ παρακάτω δύο ἀθροίσματα μηκῶν ἐκφρασμένων σὲ ἴντσες· ὕστερα μετατρέψτε τὰ δυὸ ἐξαγόμενα σὲ *mm*, ξέροντας ὅτι μιὰ ἴντσα ἰσοῦται μὲ 25,4 *mm* ($1'' = 25{,}4\ mm$):

1ο $$\frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{17}{32} + \frac{17}{64},$$

2ο $$16 + 1\frac{1}{4} + \frac{5}{8} + \frac{9}{32} + \frac{21}{64}.$$

27. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς διαβαθμισμένου τυμπάνου εἶναι διαιρεμένη σὲ 200 ἴσα μέρη. Στρέφετε τὸ τύμπανο κατὰ μιὰ γωνία $\widehat{AOB} = \frac{572}{1\,716}$ στροφῆς, ἔπειτα κατὰ μιὰ γωνία, τῆς ἴδιας φορᾶς, $\widehat{BO\Gamma} = \frac{168}{924}$ στροφῆς καὶ τέλος κατὰ μιὰ γωνία, τῆς ἴδιας πάλι φορᾶς, $\widehat{\Gamma O\Delta} = \frac{341}{1\,452}$ στροφῆς.

Ὑπολογίστε τὴ γωνία $\widehat{\Delta OA}$ κατὰ τὴν ὁποία πρέπει νὰ στραφῆ ἀκόμα τὸ τύμπανο γιὰ νὰ συμπληρώση μίαν ὁλάκερη στροφὴ καθὼς καὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν διαιρέσεων τοῦ τυμπάνου ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὴν τὴ γωνία; (Πρὶν ἀπ' ὅλα ν' ἁπλοποιήσετε τὰ κλάσματα).

28. Γιὰ νὰ φτιάξωμε (νὰ χαράξωμε) τὶς γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma O\Delta}$ τῆς προηγούμενης ἄσκησης χρησιμοποιοῦμε ἕνα διαιρέτη ποὺ ἔχει ἕνα δίσκο μὲ 6 σειρὲς ἀπὸ 51, 57, 61, 66, 71 καὶ 77 τρύπες ἀντιστοίχως καὶ ἕνα ἀτέρμονα κοχλία, ὁ ὁποῖος συμπλέκεται μ' ἕνα ὀδοντωτὸ τροχὸ τῶν 40 δοντιῶν.

Βρῆτε, σὲ στροφὲς καὶ κλάσματα στροφῆς τοῦ ἀτέρμονα κοχλία, τὴ διαίρεση ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma O\Delta}$, χρησιμοποιώντας γιὰ παρονομαστὲς τοὺς ἀριθμοὺς τρυπῶν, ποὺ ἔχουν οἱ 6 σειρὲς τοῦ δίσκου.

29. Ἕνας κύλινδρος μὲ ἀκτίνα $R = 0{,}32\ m$ κάνει 300 *στρ/min* καὶ παρασύρει μὲ τριβὴ ἕναν ἄλλο (ἐξωτερικὸ) κύλινδρο. Ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα τοῦ δεύτερου αὐτοῦ κυλίνδρου ξέροντας ὅτι κάνει 20 *στρ/min* περισσότερες ἀπὸ τὸν πρῶτο καὶ ὅτι τὸ γλίστρημα κατὰ τὴ μετάδοση τῆς κίνησης εἶναι 2 %

30. Ἡ κλιμακωτὴ τροχαλία τοῦ ἄξονα μιᾶς μηχανῆς ἔχει 3 σκαλιὰ μὲ ἀντίστοιχες διαμέτρους 160, 250 καὶ 340 *mm*. Ἡ κινητήρια τροχαλία στρέφεται μὲ 120 *στρ/min* καὶ ἔχει 3 σκαλιὰ ἀντίστοιχα πρὸς τὰ παραπάνω μὲ διαμέτρους κατὰ σειρὰ 340, 250 καὶ 160 *mm*. Ὑπολογίστε τὶς 3 περιστροφικὲς ταχύτητες τοῦ ἄξονα τῆς μηχανῆς ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς 3 θέσεις τοῦ λουριοῦ.

31. Μ' ἕνα δράπανο ποὺ ἔχει περιστροφικὴ ταχύτητα 600 *στρ/min* ἀνοίγομε τρύπες διαμέτρου 10 *mm*. Τὸ τρυπάνι προχωρεῖ κατὰ 0,15 *mm* ἀνὰ στροφή· ὑπολογίστε 1ο τὴν κοπτική του ταχύτητα σὲ *m/min* καὶ 2ο τὸν χρόνο ποὺ χρειάζεται τὸ ἄνοιγμα μιᾶς τρύπας βάθους 38 *mm*.

32. Ἕνα χειροκίνητο βαροῦλκο ἔχει τύμπανο μὲ 180 *mm* διάμετρο, δυὸ συμπλεκόμενους ὀδοντωτοὺς τροχοὺς τῶν 70 καὶ 14 δοντιῶν καὶ μιὰ μανιβέλα μονταρισμένη στὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ μὲ τὰ 14 δόντια. Πόση εἶναι ἡ ἀνύψωση τοῦ φορτίου σὲ κάθε ὁλάκερη στροφὴ τῆς μανιβέλας;

33. Δυὸ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ ποὺ συμπλέκονται, ἔχουν ὁ ἕνας 66 δόντια, ὁ ἄλλος 24 δόντια· ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ πρώτου εἶναι 12 *στρ/min*. Πόσο εἶναι τὸ χρονικὸ διάστημα ποὺ πρέπει νὰ περάση γιὰ νὰ ἔρθουν σὲ ἐπαφὴ δυὸ φορὲς τὰ ἴδια δυὸ δόντια τῶν τροχῶν;

34. Θέλομε νὰ χύσωμε ἕνα κομμάτι ὀρείχαλκο ποὺ νὰ περιέχη 80 % χαλκὸ καὶ 20 % κασσίτερο (καλάϊ). Ὑπολογίστε τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ ποὺ πρέπει νὰ πάρωμε μὲ 1 050 *gr* κασσίτερο γιὰ νὰ πετύχωμε αὐτὸ τὸ κράμα.

35. Ἕνα κράμα τοῦ τύπου τοῦ ντουραλουμίνιου ἔχει γιὰ βασικὸ συστατικὸ ἀλουμίνιο καί περιέχει 4 % χαλκό, 0,5 % μαγγάνιο, 0,5 % μαγνήσιο καὶ 0,6 % πυρίτιο. Πόσο εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς κομματιοῦ ἀπ' αὐτὸ τὸ κράμα, ὅταν ὁ χαλκός, ποὺ περιέχεται στὸ κομμάτι, ζυγίζη 4,5 *kg*; Καὶ ποιό εἶναι τὸ βάρος τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ ἄλλα μέταλλα ποὺ ἀποτελοῦν τὸ κομμάτι;

36. Τρεῖς κοινότητες Α, Β καὶ Γ κατασκεύασαν μὲ κοινὴ δαπάνη ἕνα σταθμὸ ἠλεκτροπαραγωγῆς. Τὸ ἔργο κόστισε συνολικὰ 1 500 000 δρχ καὶ ἡ δαπάνη μοιράσθηκε στὶς τρεῖς κοινότητες κατὰ τὴν ἀναλογία τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κατοίκων τους. Ποιό εἶναι τὸ μερίδιο τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς 3 κοινότητες, ἂν ὁ πληθυσμὸς τῆς *Γ* εἶναι τὰ 5/9 τοῦ πληθυσμοῦ τῆς *Α* καὶ ὁ πληθυσμὸς τῆς *Α* τὰ 2/3 τοῦ πληθυσμοῦ τῆς *Β*;

37. Σ' ἕνα ἐργαστήριο ἐργάζονται 19 ἐργάτες, 13 ἐργάτριες καὶ 5 μαθητευόμενοι. Ὑπολογίστε τὸ καθαρὸ ποσὸ μισθοῦ τὸ ὁποῖο θὰ πληρωθῆ σ' ὅλο τὸ προσωπικὸ στὸ τέλος μιᾶς δεκαπενθημερίας μὲ 13 πλήρεις ἐργάσιμες ἡμέρες ξέροντας τὰ ἀκόλουθα:

1ο. Τὸ προσωπικὸ ἐργάζεται 8 *h* τὴν ἡμέρα.

2ο. Ὁ μισθὸς μιᾶς ἐργάτριας εἶναι τὰ 5/7 τοῦ μισθοῦ ἑνὸς ἐργάτη καὶ ὁ μισθὸς ἑνὸς μαθητευόμενου τὰ 2/5 τοῦ μισθοῦ μιᾶς ἐργάτριας.

3ο. Γίνεται μιὰ κράτηση 6 % πάνω στὸ μισθὸ γιὰ τὸ ΙΚΑ (τὶς κοινωνικὲς ἀσφαλίσεις).

4ο. Τὸ ὡρομίσθιο τοῦ ἐργάτη εἶναι 9,25 δρχ.

III. Γραφικά.

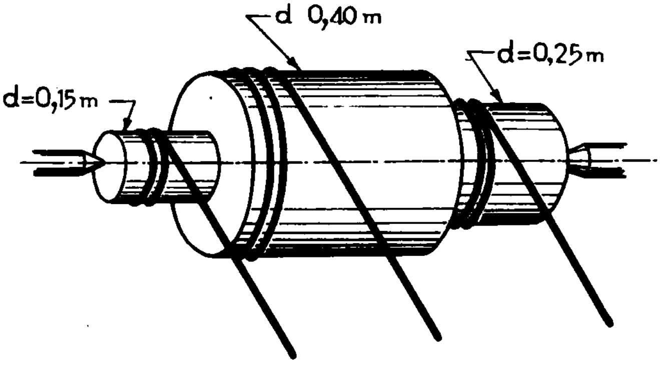
38. Ἕνα αὐτοκίνητο ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν ἠρεμία καὶ ἔχει, στὰ πρῶτα 6 δευτερόλεπτα τῆς κίνησής του, κίνηση ὁμοιόμορφα (ὁμαλὰ) ἐπιταχυνόμενη, μὲ ἐπιτάχυνση 1,5 $m/sec/sec$ (ἢ 1,5 m/sec^2). Ὕστερα ἡ κίνηση τοῦ αὐτοκινήτου γίνεται ὁμοιόμορφη.

Χαράξτε τὸ γραφικὸ τῆς ταχύτητας τοῦ αὐτοκινήτου κατὰ τὰ πρῶτα 10 δευτερόλεπτα τῆς κίνησής του, μὲ κλίμακες τῆς ἐκλογῆς σας γιὰ τοὺς χρόνους καὶ γιὰ τὶς ταχύτητες.

39. Ἕνας σιδηρόδρομος ποὺ κινεῖται μὲ 48 km/h ταχύτητα παίρνει κίνηση ὁμοιόμορφα (ὁμαλὰ) ἐπιβραδυνόμενη στὰ 12 τελευταῖα δευτερόλεπτα προτοῦ σταματήση σ' ἕνα σταθμό.

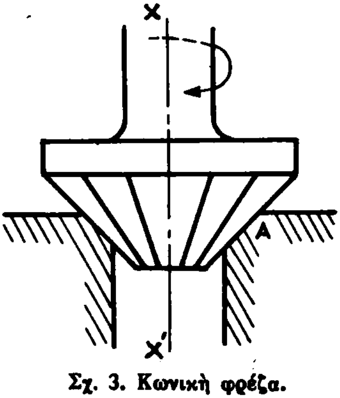
Χαράξτε τὸ γραφικὸ τῆς ταχύτητας στὰ 12 αὐτὰ δευτερόλεπτα, ἐκλέγοντας τὶς κλίμακες τῶν χρόνων καὶ τῶν ταχυτήτων ἔτσι ποὺ τὸ γραφικό σας νὰ χωρέση σ' ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις 14 $cm \times 5$ cm.

40. Παραστῆστε μ' ἕνα γραφικὸ τὴν ταχύτητα v (σὲ m/min) μὲ τὴν ὁποία ξετυλίγεται τὸ καθένα ἀπὸ τὰ 3 καλώδια (σχ. 2), ὅταν τὸ τύμπανο ἔχῃ περιστροφικὴ ταχύτητα n $στρ/min$. Νὰ κάμετε τὴν ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ n νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ὡς 60 $στρ/min$.

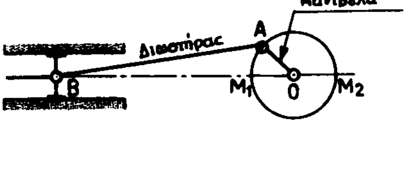


Σχ. 2. Περιστρεφόμενο τύμπανο.

41. Μιὰ κωνικὴ φρέζα (σχ. 3) στρέφεται μὲ ταχύτητα n $στρ/min$. Ἡ κοπτικὴ ταχύτητα v (σὲ m/min) τοῦ σημείου A τῆς φρέζας, τὸ ὁποῖο ἀπέχει 40 mm ἀπὸ τὸν ἄξονα $X'X$, εἶναι μιὰ συνάρτηση τοῦ n. Παραστῆστε την γραφικὰ γιὰ τὶς τιμὲς τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς n ἀπὸ 100 ὡς 500 $στρ/min$.



Σχ. 3. Κωνικὴ φρέζα.



Σχ. 4. Τὸ μηχανικὸ σύστημα διωστῆρα καὶ στροφάλου.

42. Τὸ στρόφαλο OA (σχ. 4) ἔχει μῆκος 20 cm καὶ στρέφεται ὁμοιόμορφα μὲ ταχύτητα 60 $στρ/min$· μιὰ ἄρθρωση στὸ σημεῖο A τὸ συνδέει μὲ τὸν διωστήρα AB ποὺ ἔχει μῆκος 80 cm. Τὸ ἄκρο B τοῦ διωστήρα κινεῖται εὐθύγραμμα πάνω στὴν εὐθεία M_1M_2 καὶ ἡ ἀπόστασή του M_1B ἀπὸ τὸ σταθερὸ σημεῖο M_1 εἶναι μιὰ συνάρτηση τοῦ χρόνου t'' ποὺ ἀρχίζομε νὰ μετρᾶμε ἀπὸ μιὰ στιγμὴ κατὰ τὴν ὁποία τὸ A βρίσκονταν στὴ θέση M_1.

Προσδιορίστε γραφικὰ (χρησιμοποιώντας κανόνα καὶ διαβήτη) τὴν ἀπόσταση αὐτὴ M_1B σὲ διάφορες χρονικὲς στιγμὲς κατὰ τὴ διάρκεια ἑνὸς δευτερολέπτου· ὕστερα σχεδιάστε τὸ γραφικό της συναρτήσει τοῦ χρόνου t'', γιὰ τὶς τιμὲς τοῦ t ἀπὸ $t = 0''$, ὁπότε τὸ A βρίσκεται στὸ M_1, ὡς τὴν τιμὴ $t = 1''$, ὁπότε τὸ A βρίσκεται ξανὰ στὸ M_1 (ἀφοῦ ἔκαμε μίαν ὁλάκερη στροφή). Πάρτε γιὰ κλίμακα χρόνων: 1 cm νὰ παριστάνη 1/8 τοῦ δευτερολέπτου καὶ γιὰ κλίμακα μηκῶν: 1 cm νὰ παριστάνη 5 cm.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

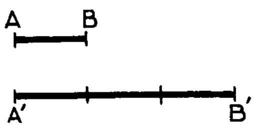
ΟΜΟΙΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Μάθημα 16.

Λόγος δυὸ εὐθύγραμμων τμημάτων.

1. Ἂς συγκρίνωμε δυὸ εὐθύγραμμα τμήματα *AB* καὶ *A′B′*, ἐξετάζοντας ποιὸς ἀριθμὸς μετρᾶ τὸ δεύτερο, ὅταν πάρωμε τὸ πρῶτο γιὰ μονάδα.

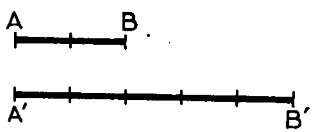
Παράδειγμα 1.



Σχ. 16-α. Τὸ τμῆμα A′B′ περιέχει 3 φορὲς τὸ AB· ἄρα ὁ ἀριθμὸς ποὺ μετρᾶ τὸ A′B′ εἶναι ὁ 3. Λέμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ A′B′ πρὸς τὸ AB εἶναι τὸ 3 καὶ γράφομε:

$$\frac{A'B'}{AB} = 3.$$

Παράδειγμα 2.



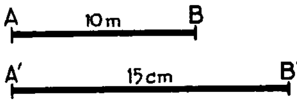
Σχ. 16-β. Τὸ τμῆμα A′B′ περιέχει 5 φορὲς τὸ μισὸ τοῦ AB· ἄρα ὁ ἀριθμὸς ποὺ μετρᾶ τὸ A′B′ εἶναι τὸ 5/2. Λέμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ A′B′ πρὸς τὸ AB εἶναι τὸ 5/2 καὶ γράφομε:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{5}{2}.$$

Ὅπως βλέπετε, γιὰ νὰ συγκρίνωμε τὸ $A'B'$ πρὸς τὸ AB, πήραμε τὸ AB γιὰ μονάδα καὶ μετρήσαμε μ᾿ αὐτὴν τὸ $A'B'$: ὁ ἀριθμὸς ποὺ πρόκυψε ὀνομάσθηκε λόγος τοῦ $A'B'$ πρὸς τὸ AB καὶ σημειώθηκε μὲ τὸ συμβολισμό: $\frac{A'B'}{AB}$.

Ὥστε, λόγος ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος πρὸς ἕνα ἄλλο τμῆμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ μετρᾶ τὸ πρῶτο, ὅταν πάρωμε γιὰ μονάδα τὸ δεύτερο. (Πρβ. καὶ Τόμ. Β', Μάθ. 21, § 2).

2. Στὸν τόμο Β', Μάθ. 21, § 2 εἴδαμε πῶς ὁ λόγος δυὸ ὁμοειδῶν μεγεθῶν, ἑπομένως καὶ δυὸ εὐθύγραμμων τμημάτων, μπορεῖ νὰ βρεθῇ καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: μετρᾶμε τὰ δυὸ μεγέθη μὲ μιὰν ὁποιαδήποτε, ἀλλὰ τὴν ἴδια μονάδα καὶ ὑπολογίζομε τὸ λόγο, δηλαδὴ τὸ ἀκριβὲς πηλίκο, τῶν δυὸ ἀριθμῶν ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς μετρήσεις. Ἔτσι π.χ. στὸ σχ. 16-γ, τὰ τμήματα $A'B'$ καὶ AB, ὅταν πάρωμε γιὰ μονάδα τὸ *cm*, μετριοῦνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 15 καὶ 10· ἑπομένως ὁ λόγος τους $\frac{A'B'}{AB}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸ πηλίκο $\frac{15}{10}$ ἢ $\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{2}$ ἀφοῦ ἁπλοποιήσωμε.

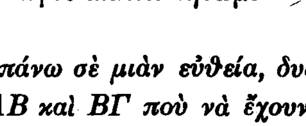


Σχ. 16-γ. Ὁ λόγος $\frac{A'B'}{AB}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{15}{10}$ ἢ $\frac{3}{2}$ ὕστερα ἀπὸ ἁπλοποίηση τοῦ κλάσματος.

3. Κατασκευές. *1η. Σχεδιάστε, πάνω σὲ μιὰν εὐθεία, δυὸ συνεχιστὰ (δυὸ διαδοχικὰ) τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ποὺ νὰ ἔχουν, τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο, δοσμένο λόγο.*

Παράδειγμα. Μᾶς δίνουν τὸ λόγο $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3}{4}$.

Ἂς πάρωμε μιὰν ὁποιαδήποτε μονάδα μήκους, π.χ. τὸ μῆκος δυὸ συνεχιστῶν διαιρέσεων τοῦ τετραγωνισμένου χαρτιοῦ ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 16-δ, καὶ ἂς χαράξωμε πάνω σὲ μιὰν εὐθεία συνεχιστὰ ἕνα τμῆμα AB ἴσο μὲ 3 μονάδες μήκους (6 διαιρέσεις τοῦ



Σχ. 16-δ.

τετραγωνισμοῦ) καὶ ἕνα τμῆμα $BΓ$ ἴσο μὲ 4 μονάδες. Θὰ ἔχωμε τότε

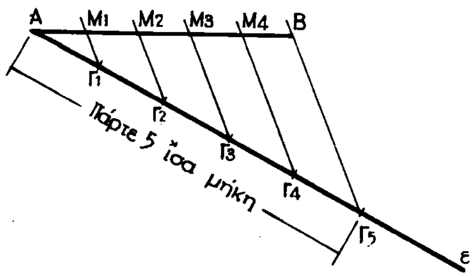
$$\frac{AB}{BΓ}=\frac{3}{4}.$$

Ἐννοεῖται ὅτι, ἂν ἀλλάξωμε τὴ μονάδα μήκους, τὰ τμήματα AB καὶ $BΓ$ ποὺ θὰ χαράξωμε χρησιμοποιώντας τὴ νέα μονάδα, θὰ εἶναι διαφορετικὰ ἀπὸ τὰ παραπάνω, ὅμως ὁ λόγος τους $\frac{AB}{BΓ}$ θὰ ἐξακολουθῇ νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{3}{4}$.

2η· Χωρίστε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB σὲ δυὸ μέρη AM καὶ MB ποὺ νὰ ἔχουν δοσμένο λόγο $\frac{AM}{MB}$.

Παράδειγμα. Μᾶς δίνουν τὸ λόγο $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$.

Ἀπὸ τὸ σημεῖο A χαράζομε μιὰν εὐθεία $ε$ ποὺ νὰ μὴ συμπίπτῃ μὲ τὴν AB. Πάνω στὴν $ε$, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ σημεῖο A, παίρνομε συνεχιστὰ 5 ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα:



Σχ. 16-ε.

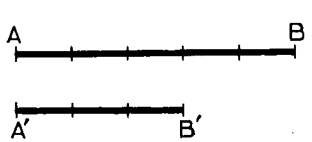
$$AΓ_1=Γ_1Γ_2=Γ_2Γ_3=Γ_3Γ_4=Γ_4Γ_5.$$

Ἀπὸ τὰ σημεῖα $Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4$ φέρνομε παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεία $Γ_5B$. Οἱ εὐθεῖες αὐτὲς ἂς κόβουν τὸ τμῆμα AB στὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4. Ὅπως ξέρομε (βλ. Τόμ. Β', Μάθ. 36), τὰ 5 τμήματα AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4B εἶναι μεταξύ τους ἴσα. Ἑπομένως, ἂν πάρωμε τὸ κοινό τους μῆκος γιὰ μονάδα, θὰ ἔχωμε $AM_2=2$ μονάδες μήκους καὶ $M_2B=3$ μονάδες μήκους, ἄρα $\frac{AM_2}{M_2B} = \frac{2}{3}$. Ὥστε τὸ ζητούμενο σημεῖο M δὲν εἶναι ἄλλο παρὰ τὸ M_2 ποὺ κατασκευάσαμε (χαράξαμε).

3η. Νὰ μικρύνετε (ἢ νὰ μεγαλώσετε) ἕνα τμῆμα AB κατὰ ἕνα δοσμένο λόγο.

Παράδειγμα. Νὰ μικρύνετε τὸ τμῆμα AB κατὰ τὸ λόγο 3/5 (σχ. 16-ς).

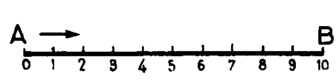
Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε ἕνα τμῆμα $A'B'$ τέτοιο ὥστε $\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{5}$ ἢ $A'B' = \frac{3}{5}AB$. Ἀρκεῖ λοιπόν, σύμφωνα μὲ τὴ μέθοδο τῆς 2ης κατασκευῆς, νὰ χωρίσωμε τὸ AB σὲ 5 ἴσα μέρη καὶ νὰ πάρωμε 3 ἀπ αὐτὰ γιὰ νὰ σχηματίσωμε τὸ ζητούμενο $A'B'$.



Σχ. 16-ς.

Τὴν παραπάνω κατασκευὴ τὴν ἐκφράζομε καὶ μὲ τὰ ἀκόλουθα λόγια: λέμε ὅτι ἐπαναλάβαμε (ξαναχαράξαμε) τὸ τμῆμα AB ὑπὸ κλίμακα 3/5.

Ἀσκήσεις. *1.* Ἕνας πεζὸς διατρέχει, ἀπὸ τὸ σημεῖο A πρὸς τὸ σημεῖο B, τὸ δρόμο AB (σχ. 16-ζ). Ὑποθέτοντας ὅτι τὰ σημειωμένα διαιρετικὰ σημεῖα χωρίζουν τὸ δρόμο σὲ ἴσα μέρη, ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ τμήματος, ποὺ ἔχει ἀκόμα νὰ διανύση ὁ πεζός, πρὸς τὸ τμῆμα ποὺ ἤδη διάνυσε, κάθε φορὰ ποὺ περνᾶ ἀπὸ ἕνα διαιρετικὸ σημεῖο.



Σχ. 16-ζ.

2. Βρῆτε, μεταξὺ δυὸ σημείων A, B καὶ πάνω στὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AB, τὸ σημεῖο M γιὰ τὸ ὁποῖο ἔχομε $\frac{AM}{MB} = 1$. Τί ὄνομα δίνομε στὸ σημεῖο M;

3. Χωρίστε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB, ποὺ θὰ χαράξετε σεῖς οἱ ἴδιοι, σὲ δυὸ μέρη AN καὶ NB τέτοια ὥστε $\frac{NB}{AN} = \frac{3}{5}$.

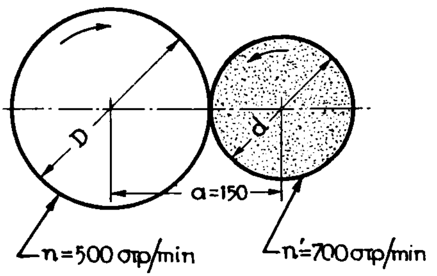
4. Χαράξτε ἕνα τμῆμα *AB*, μήκους 10 *cm*. Ὕστερα ξαναχαράξτε το ὑπὸ κλίμακα 7/10·

5. Χωρίστε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα σὲ δυὸ μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 7 $\left(\text{δηλαδὴ σὲ δυὸ μέρη ποὺ νὰ ἔχουν λόγο } \frac{2}{7}\right)$

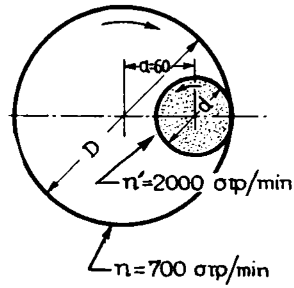
6. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 120 *cm* χωρίσθηκε σὲ 2 μέρη ποὺ ἔχουν λόγο 7/5. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος κάθε μέρους.

7. Προεκτείνετε ἕνα τμῆμα *AB* κατὰ ἕνα μῆκος *BM* ἴσο μὲ τὰ 3/4 τοῦ μήκους τοῦ *AB*. Ποιός εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀπόστασης τοῦ *M* ἀπὸ τὸ *A* πρὸς τὴν ἀπόσταση τοῦ *M* ἀπὸ τὸ *B* ;

8. Πάνω στὴν προέκταση *AX* ἑνὸς τμήματος *AB* πάρτε τὸ σημεῖο *M* ἔτσι ποὺ ὁ λόγος τῆς ἀπόστασης *MA* πρὸς τὴν ἀπόσταση *MB* νὰ ἰσοῦται μὲ 2/5. Ξέροντας ὅτι $AB = 36$ *cm* ὑπολογίστε τὶς ἀποστάσεις *MA* καὶ *MB*.



Σχ. 16-η.



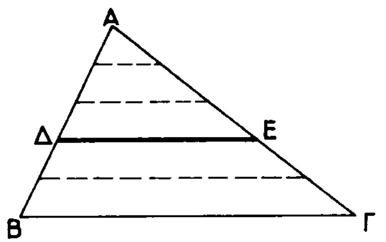
Σχ. 16-θ.

9. Ὅπως ξέρετε, οἱ ἀρχικὲς διάμετροι *D* καὶ *d* δυὸ ὀδοντωτῶν τροχῶν ποὺ συμπλέκονται, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρὸς τὶς περιστροφικές τους ταχύτητες *n* καὶ *n'*. Ξέροντας τὴν ἀπόσταση *a* τῶν ἀξόνων τῶν δυὸ τροχῶν ὑπολογίστε τὶς διαμέτρους *D* καὶ *d*, σύμφωνα μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τῶν σχημάτων 16-η καὶ 16-θ.

Μάθημα 17.

Τμήματα προσδιοριζόμενα ἀπὸ μιὰ παράλληλο πρὸς πλευρὰ τριγώνου. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ.

1. **Ἂς χαράξωμε μιὰν εὐθεία ΔΕ παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ** (σχ. 17-α). Ἡ εὐθεία αὐτὴ προσδιορίζει πάνω στὴν πλευρὰ AB δυὸ τμήματα, τὰ $A\Delta$ καὶ ΔB, καὶ πάνω στὴν πλευρὰ $A\Gamma$ δυὸ ἄλλα, τὰ AE καὶ $E\Gamma$. Ἂν ὑπολογίσωμε τώρα τοὺς λόγους $\frac{A\Delta}{\Delta B}$ καὶ $\frac{AE}{E\Gamma}$, θὰ ἰδοῦμε πὼς εἶναι ἴσοι.



Σχ. 17-α.

Καὶ ἀλήθεια, ἂς περιέχῃ π.χ. τὸ τμῆμα $A\Delta$ 3 φορὲς τὸ μισὸ τοῦ ΔB· θὰ ἔχωμε τότε $\frac{A\Delta}{\Delta B}=\frac{3}{2}$. Ἀπὸ τὰ σημεῖα, ποὺ διαιροῦν τὸ $A\Delta$ σὲ 3 καὶ τὸ ΔB σὲ 2 ἴσα μέρη, ἂς φέρωμε τὶς παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰ $B\Gamma$. Σύμφωνα μὲ ὅσα ξέρομε ἀπὸ τὸν Τόμ. Β', Μάθ. 36, § 4, οἱ 3 αὐτὲς εὐθεῖες μαζὶ μὲ τὶς ΔE καὶ $B\Gamma$, παρμένες δυὸ-δυὸ κατὰ σειρά, κόβουν πάνω στὴν εὐθεία $A\Gamma$ ἴσα τμήματα, ἀπαράλλακτα ὅπως καὶ πάνω στὴν AB. Ἄρα $\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{3}{2}$ καὶ ἑπομένως $\frac{A\Delta}{\Delta B}=\frac{AE}{E\Gamma}$, ὅπως θέλαμε νὰ δείξωμε.

Τὰ παραπάνω τὰ ἐκφράζομε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: ἡ εὐθεία ΔE, ἡ παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ $B\Gamma$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, προσδιορίζει πάνω στὴν πλευρὰ AB δυὸ τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τὰ ὁποῖα προσδιορίζει πάνω στὴν πλευρὰ $A\Gamma$.

Ἡ σπουδαία αὐτὴ ἰδιότητα ἐκφράζεται στὶς Γεωμετρίες μὲ τὴν ἀκόλουθη πρόταση ποὺ ἔχει τὸ ὄνομα τοῦ Ἕλληνα σοφοῦ Θαλῆ (6ος αἰώνας πρὸ Χριστοῦ):

Θεώρημα τοῦ Θαλῆ. *Ἂν μιὰ εὐθεία εἶναι παράλληλη πρὸς μιὰ πλευρὰ τριγώνου, τότε ἡ εὐθεία αὐτὴ προσδιορίζει πάνω στὶς δυὸ ἄλλες πλευρὲς τοῦ τριγώνου τμήματα κατευθείαν ἀνάλογα.*

2. Παρατήρηση. Εἶναι εὔκολο νὰ ἴδοῦμε ὅτι καὶ μερικὰ ἄλλα εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ παρουσιάζονται στὸ σχῆμα 17-α, εἶναι ἀνάλογα πρὸς ἄλλα τοῦ ἴδιου σχήματος.

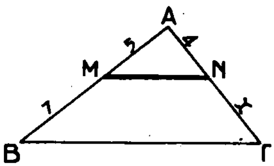
1ο. Ἂν παραβάλωμε τοὺς δυὸ λόγους $\frac{A\Delta}{AB}$ καὶ $\frac{AE}{A\Gamma}$, θὰ ἴδοῦμε ὅτι ὁ καθένας τους εἶναι ἴσος μὲ $\frac{3}{5}$· ἄρα ἔχομε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}.$$

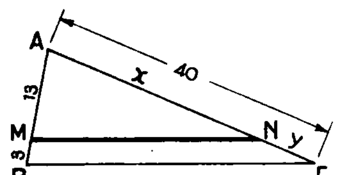
2ο. Παραβάλλοντας τοὺς δυὸ λόγους $\frac{\Delta B}{AB}$ καὶ $\frac{E\Gamma}{A\Gamma}$ βλέπομε ὅτι ὁ καθένας τους εἶναι ἴσος μὲ $\frac{2}{5}$· ἄρα ἔχομε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{\Delta B}{AB}=\frac{E\Gamma}{A\Gamma}.$$

3. Ἐφαρμογές. *1η. Ξέροντας τὰ μήκη (σὲ cm) τῶν τριῶν τμημάτων MA, MB καὶ NA (σχ. 17-β), τὰ ὁποῖα προσδιορίζονται ἀπὸ τὴν εὐθεία MN τὴν παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὑπολογίστε τὸ μῆκος x τοῦ τέταρτου τμήματος ΝΓ.*



Σχ. 17-β. Ὑπολογίστε τὸ x.



Σχ. 17-γ. Ὑπολογίστε τὸ x καὶ τὸ y.

Ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ βρίσκομε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{N\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{5}{7}=\frac{4}{x}.$$

Ἀπὸ τὸ Μάθ. 23 τοῦ Τόμ. Β′ ξέρομε ὅτι σὲ μιὰ ἀναλογία τὸ γινόμενο τῶν δυὸ ἄκρων ὅρων εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν δυὸ μέσων· ἄρα

$$5x = 4 \cdot 7 \quad \text{ἢ} \quad 5x = 28$$

καὶ ἐπομένως

$$x = \frac{28}{5} = 5{,}6 \ cm.$$

2η. Ξέρετε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΓ (σχ. 17-γ) καθὼς καὶ τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΜΑ καὶ ΜΒ ποὺ προσδιορίζει πάνω στὴν πλευρὰ ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ εὐθεία ΜΝ ἡ παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ ΒΓ. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ μήκη x καὶ y τῶν τμημάτων ΝΑ καὶ ΝΓ. (Τὰ μήκη στὸ σχῆμα δίνονται σὲ mm).

Ἂς ἐφαρμόσωμε πάλι τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ· θὰ λάβωμε τὴν ἀναλογία

$$\frac{x}{y} = \frac{13}{3}.$$

Ἀπ᾽ αὐτήν, μὲ ἐναλλαγὴ τῶν μέσων ὅρων (βλ. Τόμ. Β′, Μάθ. 23, § 3), προκύπτει ἡ ἀναλογία

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{3}.$$

Σύμφωνα τώρα μὲ μιὰν ἄλλη ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων (βλ. Τόμ. Β′, Μάθ. 24) μποροῦμε ἀπὸ τὴν τελευταία ἰσότητα νὰ συμπεράνωμε τὰ ἀκόλουθα:

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{13+3} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{40}{16} = 2{,}5.$$

Ἑπομένως

$$x = 13 \cdot 2{,}5 = 32{,}5 \ mm,$$

$$y = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5 \ mm.$$

3η. Ἂς κόψωμε μὲ παράλληλες εὐθεῖες ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ δυὸ εὐθεῖες ε καὶ ε′ (σχ. 17-δ). Τότε τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ τῆς ε θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′, Α′Γ′ τῆς ε′, δηλαδή:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}.$$

Καὶ ἀλήθεια, σύμφωνα μὲ τὴν Παρατήρηση τοῦ § 2, θὰ ἔχωμε τὶς ἀναλογίες:

$$\frac{OB}{AB}=\frac{OB'}{A'B'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{OB}{B\Gamma}=\frac{OB'}{B'\Gamma'}.$$

Ἀπὸ αὐτές, ἐναλλάσσοντας τοὺς μέσους ὅρους, βρίσκομε:

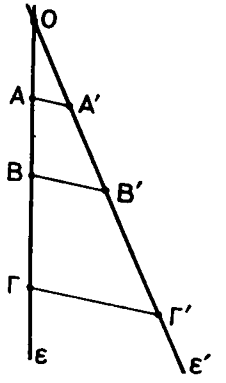
$$\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}, \quad \frac{OB}{OB'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταία ἀναλογία συμπεραίνομε τώρα ὅτι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{AB+B\Gamma}{A'B'+B'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}.$$

$$\text{Ἑπομένως:} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}.$$



Σχ. 17-δ.

Γιὰ ἐπαλήθευση ἂς μετρήσωμε σὲ *mm* τὰ τμήματα AB, $A'B'$, ..., $A'\Gamma'$· θὰ βροῦμε:

$$\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{25}{30}.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Ἡ εὐθεία MN (σχ. 17-ε) εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ $B\Gamma$· ὑπολογίστε τὸ μῆκος x χρησιμοποιώντας τὶς διαστάσεις σὲ χιλιοστὰ τὶς ὁποῖες δίνει τὸ σχῆμα.

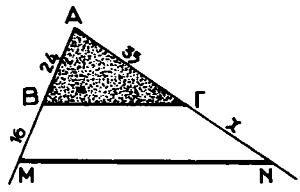
2. Ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ δεῖξτε τὸ ἑξῆς: Ἂν κόψωμε ἕνα ἰσόσκελο τρίγωνο $AB\Gamma$ μὲ μιὰν εὐθεία ΔE παράλληλη πρὸς τὴ βάση $B\Gamma$, τότε τὸ τρίγωνο $AB\Gamma$ θὰ χωρισθῇ σ' ἕνα ἰσόσκελο τρίγωνο καὶ σ' ἕνα ἰσόσκελο τραπέζιο.

3. Τέσσερις παράλληλες εὐθεῖες AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ καὶ $\Delta\Delta'$ κόβουν δυὸ εὐθεῖες ε καὶ ε' στὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ καὶ A', B', Γ', Δ' ἀντιστοίχως. Ξέροντας τὰ μήκη $AB=16\ cm$, $A'B'=12\ cm$, $B\Gamma=10\ cm$ καὶ $\Gamma\Delta=9\ cm$, ὑπολογίστε τὰ μήκη:

$$B'\Gamma'=x \quad \text{καὶ} \quad \Gamma'\Delta'=y.$$

(Θὰ βασισθῆτε στὴν 3η ἐφαρμογὴ τοῦ § 3).

4. Ἀπὸ τὸ μέσο τῆς πλευρᾶς $ΑΔ$ ἑνὸς τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ χαράξτε μιὰ παράλληλο πρὸς τὶς βάσεις του $ΑΒ$ καὶ $ΔΓ$. Γιατί ἡ εὐθεία αὐτὴ περνᾶ ἀπὸ τὸ μέσο καὶ τῆς πλευρᾶς $ΒΓ$;



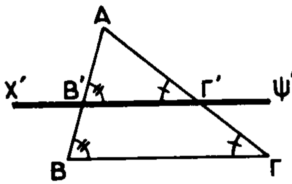
Σ. 17-ε. Ὑπολογίστε τὸ x.

5. Ἔχετε ἕνα τρίγωνο $ΑΒΓ$ μὲ μῆκος πλευρᾶς $ΑΓ$ ἴσο πρὸς $15\,cm$. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο M τῆς πλευρᾶς $ΑΒ$, τὸ ὁποῖο ἀπέχει ἀπὸ τὸ B ἀπόσταση ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς $ΑΒ$, φέρνετε μιὰ παράλληλο MN πρὸς τὴν πλευρὰ $ΒΓ$. Ὑπολογίστε τὰ μήκη τῶν τμημάτων $ΑN$ καὶ $NΓ$ τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεία αὐτὴ προσδιορίζει πάνω στὴν πλευρὰ $ΑΓ$.

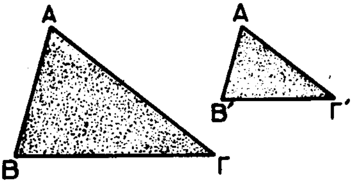
Μάθημα 18.

Ὅμοια τρίγωνα.

1. Ἂς χαράξωμε μιὰν εὐθεία $X'\ B'\ \Gamma'\ \Psi'$ παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ $B\Gamma$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 18-α) καὶ ἂς συγκρίνωμε τὰ τρίγωνα $AB'\Gamma'$ καὶ $AB\Gamma$.



Σχ. 18-α.



Σχ. 18-β. Τρίγωνα ὅμοια.

Παραβάλλομε πρῶτα τὶς γωνίες τους:

Ἡ $\widehat{A}$ εἶναι κοινὴ στὰ δυὸ τρίγωνα.

Οἱ γωνίες $\widehat{B'}$ καὶ $\widehat{B}$ εἶναι ἴσες· καὶ ἀλήθεια ἡ $\widehat{B'}$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντικόρυφή της $X'\widehat{B'}B$ καὶ αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν $\widehat{B}$, γιατὶ οἱ δυὸ αὐτὲς γωνίες $X'\widehat{B'}B$ καὶ $\widehat{B}$ εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων $X'B'\Gamma'\Psi'$ καὶ $B\Gamma$, ὅταν τὶς κόψωμε μὲ τὴν εὐθεία $AB'B$.

Οἱ γωνίες $\widehat{\Gamma'}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἴσες γιὰ ὅμοιο λόγο ($\widehat{\Gamma'} = \Psi'\widehat{\Gamma'}\Gamma$ καὶ $\Psi'\widehat{\Gamma'}\Gamma = \widehat{\Gamma}$).

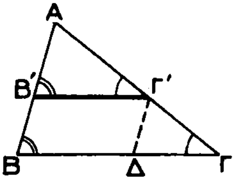
Ὥστε, τὰ δυὸ τρίγωνα $AB'\Gamma'$ καὶ $AB\Gamma$ ἔχουν τὶς γωνίες τους ἀντίστοιχα ἴσες.

Παραβάλλομε ὕστερα τὶς πλευρὲς τῶν δυὸ τριγώνων.

Σύμφωνα μὲ τὴν 1η Παρατήρηση ποὺ κάμαμε στὸν § 2 τοῦ προηγούμενου Μαθήματος, ἔχομε τὴν ἀναλογία

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma}. \qquad (1)$$

Ἂς συγκρίνωμε τώρα τὴ $B'\Gamma'$ πρὸς τὴ $B\Gamma$. Γι' αὐτὸν τὸ σκοπὸ χαράζομε ἀπὸ τὸ σημεῖο $Γ'$ τὴν παράλληλο $Γ'Δ$ πρὸς τὴν AB (σχ. 18-γ). Τὸ τετράπλευρο $BΔΓ'B'$ ἔχει τὶς πλευρές του δυὸ-δυὸ παράλληλες: $B'Γ' \parallel BΔ$ καὶ $BB' \parallel ΔΓ'$. Ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμο καὶ ἑπομένως



Σχ. 18-γ.

$$B'Γ' = BΔ.$$

Σύμφωνα ὅμως μὲ τὴ 2η Παρατήρηση τοῦ § 2 τοῦ προηγούμενου Μαθήματος, ἔχομε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{BΔ}{BΓ} = \frac{AΓ'}{AΓ}$$

ἤ, ἂν ἀντικαταστήσωμε τὸ $BΔ$ μὲ τὸ ἴσο του $B'Γ'$, τὴν

$$\frac{B'Γ'}{BΓ} = \frac{AΓ'}{AΓ}. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι οἱ τρεῖς λόγοι $\frac{AB'}{AB}$, $\frac{AΓ'}{AΓ}$ καὶ $\frac{B'Γ'}{BΓ}$ εἶναι ἴσοι:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AΓ'}{AΓ} = \frac{B'Γ'}{BΓ}.$$

Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι οἱ δυὸ πλευρές, ποὺ ἀποτελοῦν τοὺς ὅρους ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀπὸ τοὺς 3 αὐτοὺς λόγους, βρίσκονται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν τῶν τριγώνων $AB'Γ'$ καὶ $ABΓ$· π.χ. οἱ πλευρὲς AB' καὶ AB ἀντικρύζουν τὶς ἴσες γωνίες $\widehat{Γ'}$ καὶ $\widehat{Γ}$. Δυὸ τέτοιες πλευρὲς λέγονται *ἀντίστοιχες* ἢ *ὁμόλογες*.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ διατυπώσωμε τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Πρόταση. *Ἂν μιὰ εὐθεία εἶναι παράλληλη πρὸς μιὰ πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου $ABΓ$, τότε μαζὶ μὲ τὶς δυὸ ἄλλες πλευρὲς τοῦ $ABΓ$ προσδιορίζει ἕνα δεύτερο τρίγωνο ποὺ ἔχει τὶς γωνίες του ἀντίστοιχα ἴσες μὲ τὶς γωνίες τοῦ $ABΓ$ καὶ τὶς πλευρές του ἀνάλογες πρὸς τὶς ὁμόλογες πλευρὲς τοῦ τριγώνου τούτου.*

2. Ὅμοια τρίγωνα. Τὰ τρίγωνα $ABΓ$ καὶ $AB'Γ'$ (σχ. 18-α καὶ σχ. 18-β) λέγονται *ὅμοια*. Ὁ λόγος $\frac{AB'}{AB}$ ὀνομάζεται *λόγος ὁμοιότητας τοῦ τριγώνου $AB'\Gamma'$ πρὸς τὸ τρίγωνο $AB\Gamma$.* Εἶναι χρήσιμο καὶ πολὺ φυσικὸ νὰ συμπεριλάβωμε στὰ ζευγάρια τῶν ὅμοιων τριγώνων καὶ τὰ ζευγάρια ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ δυὸ ἴσα τρίγωνα. Ὁ λόγος ὁμοιότητας δυὸ ἴσων τριγώνων εἶναι φυσικὰ ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν 1. Φθάνομε ἔτσι στὸν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁ ρ ι σ μ ό ς. Δυὸ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἂν εἶναι ἴσα ἢ ἂν τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τρίγωνο ποὺ προκύπτει, ὅταν κόψωμε τὸ ἄλλο μὲ μιὰν εὐθεία παράλληλη πρὸς μιὰ πλευρά του.

Ἡ παραπάνω πρόταση μπορεῖ τώρα νὰ διατυπωθῆ καὶ ἔτσι:

I. Ἂν δυὸ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, τότε θὰ ἔχουν τὶς γωνίες τους ἀντίστοιχα ἴσες καὶ τὶς ὁμόλογες πλευρές του ἀνάλογες.

Ἀληθεύουν καὶ οἱ ἀκόλουθες ἀντίστροφες προτάσεις:

II. Ἂν δυὸ τρίγωνα ἔχουν τὶς γωνίες τους ἀντίστοιχα ἴσες, θὰ εἶναι ὅμοια.

III. Ἂν οἱ πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς πλευρὲς ἑνὸς ἄλλου τριγώνου, τότε τὰ δυὸ αὐτὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ὅμοια.

Ἐπειδὴ δυὸ τρίγωνα ποὺ ἔχουν δυὸ γωνίες τους ἀντίστοιχα ἴσες, θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτη γωνία τους ἴση, ἡ προτάση II μπορεῖ νὰ διατυπωθῆ καὶ ἔτσι:

IIα. Ἂν δυὸ τρίγωνα ἔχουν δυὸ γωνίες τους ἀντίστοιχα ἴσες, θὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀναφέρομε ἀκόμα τὴν ἀκόλουθη πολὺ χρήσιμη πρόταση:

IV. Ἂν δυὸ τρίγωνα ἔχουν μιὰ γωνία ἴση καὶ τὶς πλευρὲς ποὺ τὴν περιέχουν ἀνάλογες, τότε τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ εἶναι ὅμοια.

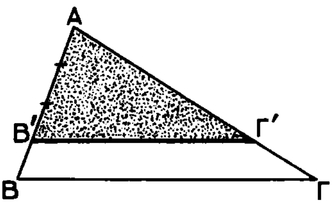
Ἔτσι π.χ., ἂν γιὰ δυὸ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A_1B_1\Gamma_1$ ξέρωμε ὅτι

$$\widehat{A}=\widehat{A}_1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{A\Gamma}{A_1\Gamma_1},$$

τότε μποροῦμε νὰ συμπεράνωμε πὼς εἶναι ὅμοια καί, ἑπομένως, πὼς ἀληθεύουν καὶ οἱ σχέσεις:

$$\widehat{B}=\widehat{B}_1\ ,\quad \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}_1\ ,\quad \frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{A\Gamma}{A_1\Gamma_1}.$$

3. Ἐφαρμογές. *1η. Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο $AB'\Gamma'$ ὅμοιο πρὸς ἕνα δοσμένο $AB\Gamma$ ξέροντας τὸ λόγο ὁμοιότητας $\frac{3}{4}$ τοῦ ζητούμενου τριγώνου πρὸς τὸ δοσμένο (σχ. 18-δ).*



Σχ. 18-δ.

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στοὺς δυὸ προηγούμενους παραγράφους, ἀρκεῖ 1ο νὰ προσδιορίσωμε πάνω στὴν πλευρὰ AB ἕνα σημεῖο B' τέτοιο ὥστε $\frac{AB'}{AB}=\frac{3}{4}$, καὶ 2ο νὰ χαράξωμε ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτὸ τὴν παράλληλο $B'\Gamma'$ πρὸς τὴ $B\Gamma$. Ἐπειδὴ λοιπὸν πρέπει νὰ εἶναι:

$$AB'=\frac{3}{4}AB,$$

διαιροῦμε τὸ τμῆμα AB σὲ 4 ἴσα μέρη καὶ παίρνομε τὸ B' στὴ θέση τοῦ τρίτου διαιρετικοῦ σημείου μετὰ τὸ A. Ἀπὸ τὸ B' χαράζομε τὴν παράλληλο πρὸς τὴ $B\Gamma$. *Τὸ τρίγωνο $AB'\Gamma'$ ποὺ κατασκευάσαμε ἔτσι, εἶναι τὸ ζητούμενο.* Τὴν παραπάνω κατασκευὴ τὴν ὀνομάζομε *μίκρεμα (σμίκρυνση) τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ κατὰ τὸ λόγο 3/4.*

2η. Γνωρίζοντας τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ὑπολογίστε τὰ μήκη τοῦ ὁμοιού του $A_1B_1\Gamma_1$, ὅταν δοθῆ ὁ λόγος ὁμοιότητας τούτου πρὸς τὸ $AB\Gamma$.

Παράδειγμα. Ἂς εἶναι

$$AB=16\ cm,\quad A\Gamma=30\ cm,\quad B\Gamma=22\ cm$$

καὶ ὁ λόγος ὁμοιότητας $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{3}{4}$.

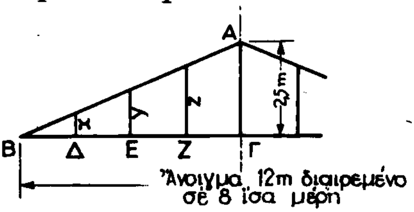
Οἱ τρεῖς ἴσοι λόγοι $\frac{A_1B_1}{AB}$, $\frac{A_1\Gamma_1}{A\Gamma}$, $\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma}$ ἔχουν τιμὴ τὸν ἀριθμὸ 3/4. Ἑπομένως:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{3}{4} \text{ ἢ } A_1B_1=\frac{3}{4}AB=\frac{3}{4}\cdot 16=12\ cm,$$

$$\frac{A_1\Gamma_1}{A\Gamma}=\frac{3}{4} \text{ ἢ } A_1\Gamma_1=\frac{3}{4}A\Gamma=\frac{3}{4}\cdot 30=22{,}5\ cm,$$

$$\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma}=\frac{3}{4} \text{ ἢ } B_1\Gamma_1=\frac{3}{4}B\Gamma=\frac{3}{4}\cdot 22=16{,}5\ cm.$$

3η. Ὑπολογίστε τὰ ὕψη x, y καὶ z ποὺ ἔχουν οἱ ὀρθοστάτες τοῦ ζευκτοῦ στέγης, τὸ ὁποῖο παριστάνεται στὸ σχῆμα 18-ε.



Σχ. 18-ε. Ὑπολογίστε τὰ μήκη x, y, z.

Οἱ ὀρθοστάτες αὐτοὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ΓA ποὺ ἔχει μῆκος $2{,}5\,m$. Ἄρα

$$\frac{x}{2{,}5}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{1}{4}, \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad x=\frac{2{,}5}{4}=0{,}625\,m,$$

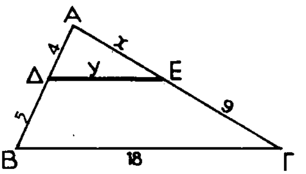
$$\frac{y}{2{,}5}=\frac{BE}{B\Gamma}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad y=\frac{2{,}5}{2}=1{,}25\,m,$$

$$\frac{z}{2{,}5}=\frac{BZ}{B\Gamma}=\frac{3}{4}, \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad z=\frac{2{,}5\cdot 3}{4}=1{,}875\,m.$$

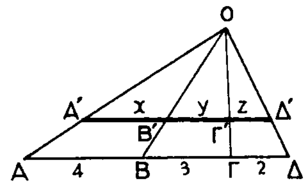
Ἂς σημειωθῇ πὼς τὰ μήκη y καὶ z θὰ μπορούσαμε νὰ τὰ βροῦμε πολλαπλασιάζοντας τὸ μῆκος x, ποὺ βρήκαμε, ἐπὶ 2 καὶ 3 ἀντιστοίχως, ἐπειδὴ $\frac{y}{x}=\frac{BE}{B\Delta}=2$ καὶ $\frac{z}{x}=\frac{BZ}{B\Delta}=3$.

Ἀσκήσεις. *1.* Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο $AB\Gamma$ ξέροντας τὰ μήκη τῶν δυὸ πλευρῶν $AB=16\ cm$ καὶ $A\Gamma=6\ cm$ καθὼς καὶ τὴν περιεχόμενη γωνία $\widehat{A}=90^\circ$. Ὕστερα, κατασκευάστε δυὸ τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ $ΑΒΓ$, μὲ λόγο ὁμοιότητας τοῦ καθενός των πρὸς τὸ $ΑΒΓ$ τὸ $\frac{2}{3}$, χαράζοντας παράλληλο τὴ μιὰ φορὰ πρὸς τὴν πλευρὰ $ΑΒ$ τοῦ $ΑΒΓ$, τὴν ἄλλη φορά, πρὸς τὴν πλευρὰ $ΑΓ$. Τέλος δεῖξτε ὅτι τὰ δυὸ τρίγωνα ποὺ κατασκευάσατε εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

2. Στὸ σχῆμα 18-ς ἡ $ΔΕ$ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ $ΒΓ$. Ὑπολογίστε τὰ μήκη x καὶ y. (Οἱ διαστάσεις στὸ σχῆμα δίνονται σὲ cm).



Σχ. 18-ς.



Σχ. 18-ζ.

3. Τρία συνεχιστὰ τμήματα $ΑΒ$, $ΒΓ$, καὶ $ΓΔ$ μιᾶς εὐθείας ἔχουν ἀντίστοιχα μήκη 4, 3 καὶ 2 cm (σχ. 18-ζ). Ἑνῶστε τὰ ἄκρα τους $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$ μ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο $Ο$, ποὺ δὲν βρίσκεται πάνω στὴν $ΑΒΓΔ$, καὶ χαράξτε μιὰν παράλληλο πρὸς τούτη τὴν εὐθεία, ἔστω τὴν $Α'Β'Γ'Δ'$.

1ο. Δεῖξτε τώρα ὅτι $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

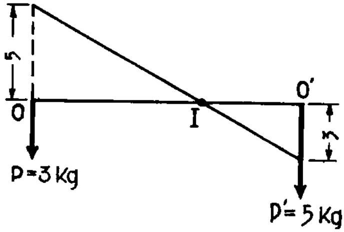
2ο. Ὑπολογίστε τοὺς λόγους $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$.

3ο. Ὑπολογίστε τὰ μήκη x, y καὶ z, ὅταν $Α'Δ' = 6{,}5\ cm$.

4. Νὰ μεταβάλετε τὰ δεδομένα τῆς προηγούμενης ἄσκησης, παίρνοντας τὰ τμήματα $ΑΒ$, $ΒΓ$ καὶ $ΓΔ$ ἴσα μεταξύ τους, καὶ νὰ δείξετε ὅτι τότε θὰ ἔχωμε ἐπίσης $Α'Β' = Β'Γ' = Γ'Δ'$. Χρησιμοποιῆστε ὕστερα αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα γιὰ νὰ χωρίσετε ἕνα ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο τμῆμα σὲ 3 ἴσα μέρη.

5. Γιατί τὸ σημεῖο $Ι$ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης δυὸ παράλληλων καὶ ὁμόρροπων δυνάμεων $Ρ$ καὶ $Ρ'$ μπορεῖ νὰ βρεθῇ μὲ τὴν κατασκευὴ τὴν ὁποία ὑποδείχνει τὸ σχῆμα 18-η; $\left(\text{Θὰ δείξετε ὅτι: } \frac{ΟΙ}{ΙΟ'} = \frac{5}{3}\right)$.

6. Σ' ἕνα τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ οἱ γωνίες $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{Δ}$ εἶναι ὀρθές, οἱ βάσεις $ΑΒ$ καὶ $ΓΔ$ ἔχουν μήκη 30 καὶ 25 cm ἀντιστοίχως. Φαντασθῆτε τώρα ὅτι ἡ πλευρὰ $ΑΔ$ διαιρέθηκε σὲ τέσσερα ἴσα μέρη καὶ ὅτι ἀπὸ τὰ διαιρετικὰ σημεῖα χαράχθηκαν παράλληλοι πρὸς τὶς βάσεις τοῦ τραπεζίου. Νὰ ὑπολογίσετε τί μήκη ἔχουν τὰ κομμάτια τῶν τριῶν αὐτῶν παραλλήλων τὰ ὁποῖα βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τραπεζίου.

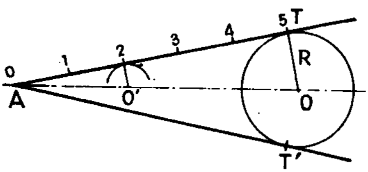


Σχ. 18-η.

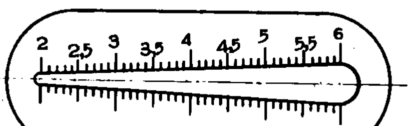
7. Ἀπὸ μιὰ λαμαρίνα ποὺ ἔχει σχῆμα ἰσόσκελου τριγώνου $ΑΒΓ$, μὲ βάση τὴν πλευρὰ $ΒΓ$, πρόκειται νὰ κόψωμε ἕνα τραπέζιο $ΒΓΔΕ$, ποὺ ἡ μικρή του βάση $ΕΔ$ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ $1/3$ τῆς μεγάλης βάσης $ΒΓ$. Ξέροντας ὅτι $ΑΒ = 15\,cm$, ὑπολογίστε τὸ μῆκος $ΑΕ$.

8. Σχεδιάστε ἕνα ἰσόσκελο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ποὺ νὰ ἔχῃ ὕψος 5 cm καὶ βάσεις $ΑΒ = 10\,cm$, $ΔΓ = 4\,cm$. Πῶς μποροῦμε νὰ χαράξωμε ἀπὸ τὴν πλευρὰ $ΑΔ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα $ΖΕ$ παράλληλο πρὸς τὶς βάσεις καὶ ποὺ νὰ ἔχῃ μῆκος 6 cm;

9. Χαράξτε τὴν ἐφαπτομένη στὸ σημεῖο T τῆς περιφέρειας ἡ ὁποία ἔχει κέντρο τὸ σημεῖο O καὶ ἀκτίνα R (σχ. 18-θ). Πάνω σ' αὐτὴν τὴν ἐφαπτομένη πάρτε τὸ μῆκος $TA = 5\,R$. Ὕστερα χαράξτε ἀπὸ τὸ ἄκρο A τὴ δεύτερη ἐφαπτομένη AT' στὴν περιφέρεια. Χωρίστε τὸ τμῆμα AT σὲ 5 ἴσα μέρη καὶ ἀριθμῆστε τὰ διαιρετικὰ σημεῖα κατὰ σειρὰ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, 5 (μὲ ἄλλα λόγια, διαβαθμίστε τὴν εὐθεία AT παίρνοντας γιὰ μονάδα τὴν ἀκτίνα R). Μελετῆστε τώρα τὰ ἀκόλουθα ζητήματα.



Σχ. 18-θ.



Κανόνας Le Chatelier

Σχ. 18-ι.

1ο. Ποιός εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀκτίνας τῆς περιφέρειας, ποὺ ἔχει τὸ κέντρο της O' πάνω στὴν εὐθεία AO καὶ ἐφάπτεται μὲ τὴν AT στὸ σημεῖο 2, πρὸς τὴν ἀκτίνα R τοῦ κύκλου μὲ κέντρο τὸ O;

2ο. Ποιός είναι ὁ λόγος πρὸς τὴν ἀκτίνα R τῆς ἀκτίνας τῆς περιφέρειας ποὺ ἔχει τὸ κέντρο της πάνω στὴν AO καὶ ἐφάπτεται μὲ τὴν AT στὸ σημεῖο τὸ ὁποῖο ἀπέχει ἀπὸ τὸ A ἀπόσταση $2{,}5\,R$; ἢ $4{,}2\,R$;

3ο. Φαντασθῆτε τώρα μιὰν κατασκευὴ ὅμοια μὲ τὴν παραπάνω τοῦ σχήματος 18-θ, ὅπου ὅμως τὸ τμῆμα TA νὰ ἰσοῦται μὲ $20\,R$. Καὶ δεῖξτε ὅτι ἡ διάμετρος τῆς περιφέρειας, ποὺ ἔχει τὸ κέντρο της πάνω στὴν AO καὶ ἐφάπτεται μὲ τὴν εὐθεία AT στὸ ὁποιοδήποτε σημεῖο M αὐτῆς τῆς εὐθείας, εἶναι ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ἀπόστασης AM.

4ο. *Ἐφαρμογή*. Ἐξηγῆστε πῶς ὁ λεγόμενος κανόνας Le Chatelier (Λεσατελιὲ) (σχ. 18-ι) σᾶς ἐπιτρέπει νὰ μετρήσετε μὲ προσέγγιση ἑνὸς δεκάτου τοῦ mm τὴ διάμετρο ἑνὸς μικροῦ κύκλου. Ὁ κανόνας αὐτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μιὰ γυάλινη πλάκα ποὺ πάνω στὴ μιὰ ὄψη της εἶναι χαραγμένες δυὸ συγκλίνουσες εὐθεῖες, διαβαθμισμένες σὲ mm. Ἂν τοποθετήσωμε τώρα τὸν κανόνα πάνω σ' ἕνα μικρὸ κύκλο ἔτσι ποὺ οἱ δυὸ εὐθεῖες τοῦ κανόνα νὰ ἐφάπτωνται μὲ τὸν κύκλο, τότε ὁ ἀριθμός, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὶς χαραγὲς τῆς διαβάθμισης οἱ ὁποῖες συμπίπτουν μὲ τὰ δυὸ σημεῖα ἐπαφῆς, δίνει τὴ διάμετρο τοῦ κύκλου σὲ ***χιλιοστὰ καὶ δέκατα τοῦ χιλιοστοῦ***.

Μάθημα 19.

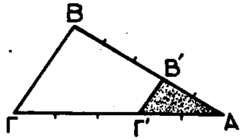
Ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα.

1. Πῶς κατασκευάζομε ἕνα τρίγωνο ὅμοιο πρὸς ἕνα δοσμένο *ΑΒΓ*, ὅταν ξέρωμε τὸ λόγο ὁμοιότητας τοῦ ζητούμενου τριγώνου πρὸς τὸ δοσμένο.

Ἂς εἶναι π.χ. ὁ λόγος αὐτὸς ἴσος μὲ $\frac{2}{5}$. Στὸ προηγούμενο Μάθημα μάθαμε νὰ κατασκευάζωμε τὸ ζητούμενο ὅμοιο τρίγωνο χαράζοντας ἀπὸ ἕνα κατάλληλο σημεῖο B' τῆς πλευρᾶς AB τὴν παράλληλο πρὸς τὴν πλευρὰ $BΓ$.

Νά τώρα δυὸ ἄλλοι τρόποι κατασκευῆς.

1ος τρόπος (σχ. 19-α).



Σχ. 19-α.

Προσδιορίζομε πάνω στὴν πλευρὰ AB τὸ σημεῖο B' γιὰ τὸ ὁποῖο ἔχομε

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{2}{5}$$

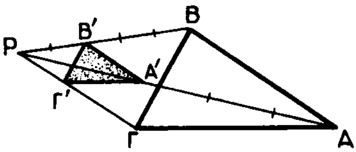
καὶ πάνω στὴν πλευρὰ $AΓ$ τὸ σημεῖο $Γ'$ γιὰ τὸ ὁποῖο ἔχομε:

$$\frac{AΓ'}{AΓ}=\frac{2}{5}.$$

Ὕστερα χαράζομε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $B'Γ'$. Ἐπειδὴ ὄχι μόνο οἱ λόγοι $\frac{AB'}{AB}$ καὶ $\frac{AΓ'}{AΓ}$ εἶναι ἴσοι ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία $B'\widehat{A}Γ'=B\widehat{A}Γ$, τὰ τρίγωνα $ABΓ$ καὶ $AB'Γ'$ θὰ εἶναι ὅμοια· ὥστε τὸ τρίγωνο $AB'Γ'$ εἶναι τὸ ζητούμενο, ἀφοῦ καὶ ὁ λόγος ὁμοιότητας $\frac{AB'}{AB}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{2}{5}$.

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι, παραβάλλοντας αὐτὴν τὴν κατασκευὴ μὲ τὴν κατασκευὴ ποὺ μάθαμε στὸ προηγούμενο Μάθημα, μποροῦμε νὰ συμπεράνωμε ὅτι τὸ τμῆμα $B'Γ'$ ποὺ χαράξαμε εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν πλευρὰ $BΓ$.

2ος τρόπος (σχ. 19-β).



Σχ. 19-β. Κατασκευὴ ἑνὸς τριγώνου ὅμοιου πρὸς τὸ $ΑΒΓ$.

Παίρνομε μέσα στὸ ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο P (διαφορετικὸ ἀπὸ τὰ A, B, $Γ$) καὶ τὸ ἑνώνομε μὲ τὰ σημεῖα A, B καὶ $Γ$. Πάνω στὶς εὐθεῖες PA, PB καὶ $PΓ$ προσδιορίζομε τὰ τρία σημεῖα A', B' καὶ $Γ'$ ἀντιστοίχως, γιὰ τὰ ὁποῖα ἔχομε:

$$\frac{PA'}{PA}=\frac{2}{5}, \quad \frac{PB'}{PB}=\frac{2}{5}, \quad \frac{PΓ'}{PΓ}=\frac{2}{5}.$$

Ὕστερα χαράζομε τὰ τμήματα $A'B'$, $B'Γ'$, $Γ'A'$. Ἀπὸ ὅ,τι εἴπαμε παραπάνω μποροῦμε νὰ συμπεράνωμε ὅτι τὸ τμῆμα $A'B'$ εἶναι παράλληλο πρὸς τὸ AB καὶ ὅτι $\frac{A'B'}{AB}=\frac{2}{5}$. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βλέπομε ὅτι τὸ $B'Γ'$ εἶναι παράλληλο πρὸς τὸ $BΓ$ καὶ ὅτι $\frac{B'Γ'}{BΓ}=\frac{2}{5}$, ἐπίσης ὅτι τὸ $Γ'A$ εἶναι παράλληλο πρὸς τὸ $ΓA$ καὶ ὅτι $\frac{Γ'A'}{ΓA}=\frac{2}{5}$. Τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$ καὶ $A'B'Γ'$ ἔχουν λοιπὸν τὶς πλευρές τους δυὸ-δυὸ παράλληλες:

$$A'B' \parallel AB, \quad B'Γ' \parallel BΓ, \quad Γ'A' \parallel ΓA,$$

τὶς γωνίες τους δυὸ-δυὸ ἴσες:

$$\widehat{A'}=\widehat{A}, \quad \widehat{B'}=\widehat{B}, \quad \widehat{Γ'}=\widehat{Γ},$$

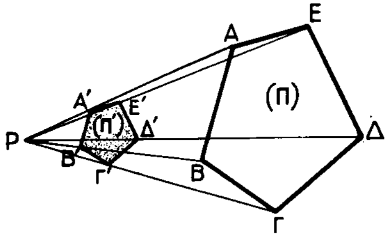
καὶ τὶς ὁμόλογες πλευρές τους ἀνάλογες:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'Γ'}{BΓ}=\frac{Γ'A'}{ΓA}=\frac{2}{5}.$$

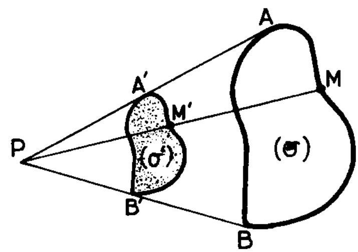
Ἑπομένως τὸ τρίγωνο $A'B'Γ'$ εἶναι ὅμοιο πρὸς τὸ $ΑΒΓ$, μὲ λόγο ὁμοιότητας πρὸς αὐτὸ τὸ $\frac{2}{5}$, ὅπως ζητήθηκε.

Φυσικὰ ὅλα τὰ τρίγωνα, ποὺ εἶναι ὅμοια πρὸς ἕνα δοσμένο καὶ ποὺ ἔχουν πρὸς αὐτὸ τὸν ἴδιο λόγο ὁμοιότητας, εἶναι μεταξύ τους ἴσα.

2. Ἂς ἐφαρμόσωμε τὴν τελευταία κατασκευὴ ξεκινώντας ὄχι ἀπὸ ἕνα τρίγωνο, ἀλλὰ ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε πολύγωνο $ΑΒΓΔΕ$ (σχ. 19-γ). Ὁ λόγος $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \ldots$ ἂς εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{3}$ •



Σχ. 19 γ. Κατασκευὴ ἑνὸς πολυγώνου (Π′) ὅμοιου πρὸς ἕνα δοσμένο (Π).



Σχ. 19-δ. Κατασκευὴ ἑνὸς σχήματος (σ′) ὅμοιου πρὸς ἕνα δοσμένο (σ). Λόγος ὁμοιότητας $\frac{PA'}{PA} = \frac{1}{2}$.

Τὸ πολύγωνο $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$ ποὺ προκύπτει λέγεται *ὅμοιο* πρὸς τὸ $ΑΒΓΔΕ$ μὲ λόγο ὁμοιότητας πρὸς αὐτὸ τὸ $1/3$.

Ὥστε, ὅταν δυὸ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, τότε οἱ γωνίες τους εἶναι ἀντίστοιχα (δυὸ - δυὸ) ἴσες καὶ οἱ ἀντίστοιχες (ὁμόλογες) πλευρές τους ἀνάλογες.

Τὸ σχ. 19-δ δείχνει πῶς μποροῦμε νὰ κάμωμε μιὰν παρόμοια κατασκευὴ ξεκινώντας ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σχῆμα *(σ)*, δηλαδὴ ἕνα σχῆμα ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ γραμμὲς ποὺ δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ εὐθεῖες. Τὸ σχῆμα *(σ′)* ποὺ προκύπτει λέγεται ὅμοιο πρὸς τὸ *(σ)*. Στὸ σχ. 19-δ ὁ λόγος ὁμοιότητας τοῦ *(σ′)* πρὸς τὸ *(σ)* ἰσοῦται μὲ $\frac{PA'}{PA} = \frac{PM'}{PM} = \ldots = \frac{1}{2}$.

Γιὰ τὴν παραπάνω κατασκευὴ χρησιμοποιοῦμε καὶ τὴν ἀκόλουθη ἔκφραση: τὸ σχῆμα *(σ')* δίνει (παριστάνει) τὸ *(σ)* ὑπὸ κλίμακα 1/2, ἢ τὴν ἀκόλουθη: ξανακάμαμε τὸ σχῆμα *(σ)* ὑπὸ κλίμακα 1/2.

Παρατήρηση. Ἀπὸ τὸ σχῆμα 19-γ βρίσκομε ὅτι

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'E'}{\Delta E}=\frac{E'A'}{EA}=\frac{1}{3}.$$

ἑπομένως, ἂν ἐφαρμόσωμε μιὰν ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων (Τόμ. Β', Μάθ. 24), θὰ ἔχωμε:

$$\frac{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A'}{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EA}=\frac{1}{3},$$

δηλαδὴ

$$\frac{\text{περίμετρος τοῦ πολυγώνου } (\Pi')}{\text{περίμετρος τοῦ πολυγώνου } (\Pi)}=\frac{1}{3}.$$

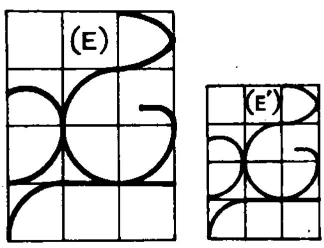
Παρόμοια σχέση ἀληθεύει καὶ γιὰ καμπυλόγραμμα ὅμοια σχήματα.

Ὥστε, ἂν δυὸ σχήματα εἶναι ὅμοια, τότε ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τους εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο ὁμοιότητάς των.

3. Ἄλλοι τρόποι κατασκευῆς ὅμοιων σχημάτων.

1ος τρόπος. Μὲ χρήση τετραγωνισμένου χαρτιοῦ.

Γιὰ νὰ ξανακάμωμε ὑπὸ κλίμακα, ἔστω τὴν 2/3, ἕνα σχέδιο, π.χ. τὸ *(Ε)* τοῦ σχ. 19-ε, μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε καὶ ὡς ἑξῆς:



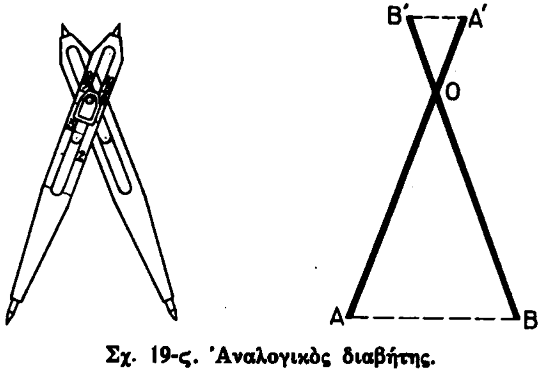
Σχ. 19-ε. Χάραξη ὅμοιων σχημάτων μὲ τὴ μέθοδο τῶν τετραγωνικῶν διαιρέσεων.

Τετραγωνίζομε τὸ χαρτὶ τοῦ σχεδίου *(Ε)*· χαράζομε δηλαδὴ πάνω σ' αὐτὸ τὸ χαρτὶ δυὸ σειρὲς ἀπὸ ἰσαπόστατες παράλληλες εὐθεῖες, τὶς πρῶτες κάθετες πρὸς τὶς δεύτερες. Ἔτσι τὸ σχέδιο *(Ε)* σκεπάζεται μὲ τετραγωνάκια ποὺ ἔχουν πλευρὰ ἴση μὲ τὴν ἀπόσταση μεταξὺ δυὸ διπλανῶν παράλληλων εὐθειῶν (σχ. 19-ε). Τὸν τετραγωνισμὸ αὐτὸν

τὸν ξανακάνομε ὑπὸ κλίμακα 2/3 πάνω σ' ἕνα ἄλλο χαρτί· μὲ ἄλλα λόγια, ἡ πλευρὰ κάθε μικροῦ τετραγώνου στὸν νέο αὐτὸν τετραγωνισμὸ εἶναι τὰ 2/3 τῆς πλευρᾶς τοῦ μικροῦ τετραγώνου στὸν προηγούμενο τετραγωνισμό. Ὕστερα μεταφέρομε τὸ σχέδιο (*E*) πάνω στὸ νέο αὐτὸ τετραγωνισμένο χαρτὶ μὲ τὸν τρόπο ποὺ φαίνεται στὸ δεξιὸ κομμάτι τοῦ σχ. 19-ε. Τὸ σχέδιο (*E'*), ποὺ προκύπτει κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο, εἶναι ὅμοιο πρὸς τὸ (*E*), μὲ λόγο ὁμοιότητας πρὸς αὐτὸ τὸ 2/3.

2ος τρόπος: μὲ χρήση ἑνὸς ἀναλογικοῦ διαβήτη (κομπάσου).

Γιὰ νὰ μικρύνωμε (ἢ νὰ μεγαλώσωμε) ὅλες τὶς διαστάσεις ἑνὸς πρότυπου σχεδίου κατὰ τὸν ἴδιο λόγο (κατὰ τὴν ἴδια ἀναλογία), μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸν λεγόμενο ***ἀναλογικὸ διαβήτη*** (σχ. 19-ς).



Σχ. 19-ς. Ἀναλογικὸς διαβήτης.

Τὸ ὄργανο αὐτὸ ἀπαρτίζεται ἀπὸ δυὸ ἴσα στελέχη *AA'* καὶ *BB'*· αὐτὰ μποροῦν νὰ στρέφωνται γύρω σ' ἕναν ἄξονα *O* μεταθετὸ μέσα σὲ δυὸ ἐγκοπές τους ἔτσι, ὥστε τὰ τμήματα *OA* καὶ *OB* νὰ παραμένουν ἴσα.

Γιὰ νὰ μικρύνωμε ἕνα πρότυπο σχέδιο, π.χ. κατὰ τὸ λόγο 1/3, ρυθμίζομε πρῶτα τὸν διαβήτη ὡς ἑξῆς: Κάνομε τὸν ἄξονα *O* νὰ γλιστρήση μέσα στὶς ἐγκοπὲς τῶν δυὸ στελεχῶν καὶ τὸν φέρνομε σὲ μιὰ τέτοια θέση ὥστε

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{1}{3}.$$

θὰ ἔχωμε τότε, ὅποια καὶ νὰ εἶναι ἡ γωνία τῶν στελεχῶν τοῦ διαβήτη, τὴ σχέση

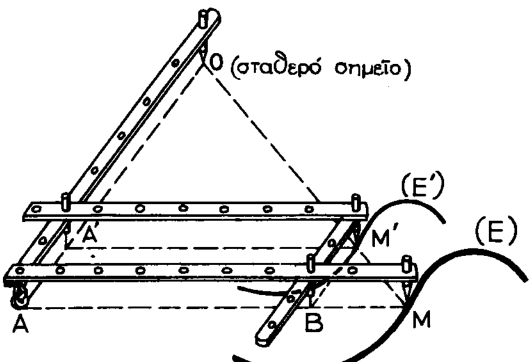
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{3}, \qquad \text{ἄρα } A'B'=\frac{1}{3}\,AB.$$

Ἂν τώρα ἀπὸ τὸ πρότυπο σχέδιο ξεσηκώσωμε μιὰ διάσταση μὲ τὸ ἄνοιγμα AB τοῦ διαβήτη, ἡ ἀντίστοιχη διάσταση στὸ σχέδιο ποὺ θέλομε νὰ κάμωμε, θὰ μᾶς δίνεται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα $A'B'$.

Ἀντίστροφα, ἂν θέλωμε νὰ μεγαλώσωμε ἕνα πρότυπο σχέδιο κατὰ τὸ λόγο 3/1, τότε θὰ ξεσηκώνωμε τὶς διαστάσεις ἀπὸ τὸ πρότυπο σχέδιο χρησιμοποιώντας τὰ ἀνοίγματα $A'B'$ τοῦ διαβήτη καὶ θὰ τὶς μεταφέρωμε στὸ σχέδιο, ποὺ ἔχομε νὰ κάμωμε, μὲ τὰ ἀντίστοιχα ἀνοίγματα AB τοῦ διαβήτη.

3ος τρόπος: μὲ χρήση ἑνὸς παντογράφου.

Τὸ ὄργανο αὐτὸ (σχ. 19-ζ) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀντιγράψωμε (μὲ



Σχ. 19-ζ. Παντογράφος.

συνεχὴ χάραξη καὶ ὄχι, σημεῖο πρὸς σημεῖο, ὅπως στὴν κατασκευὴ τοῦ σχ. 19-δ), ἕνα σχέδιο ὑπὸ κλίμακα μικρότερη ἢ μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ 1/1. Τὰ κύρια μέρη του εἶναι τέσσερα στελέχη ποὺ τὰ συνδέουν 4 ἀρθρώσεις A, B, A', M', σὲ τρόπο ποὺ νὰ εἶναι: 1ο $AA' = BM'$ καὶ $AB = A'M'$, ἄρα $AB \parallel A'M'$ καὶ $AA' \parallel BM'$, καὶ 2ο $OA' : OA = AB : AM$. Τὰ τρία σημεῖα O, M καὶ M' θὰ βρίσκωνται τότε εὐθυγραμμισμένα, καὶ ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων OAM καὶ $OA'M'$ θὰ προκύπτη ἡ σχέση

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OA}.$$

Γιὰ νὰ ἀντιγράψωμε λοιπὸν ἕνα σχέδιο (E) ὑπὸ κλίμακα $\frac{5}{7}$ π.χ., ρυθμίζομε τὶς μεταθετὲς ἀρθρώσεις A' καὶ B ἔτσι ποὺ νὰ ἔχωμε

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{5}{7}, \quad \frac{AB}{AM} = \frac{5}{7}, \quad A'M' = AB, \quad AA' = BM'.$$

Ὕστερα, κρατώντας τὸ σημεῖο O σταθερό, μετακινοῦμε τὸ σημεῖο M πάνω στὶς γραμμὲς τοῦ σχεδίου (E)· τὸ σημεῖο M' θὰ γράφη τότε τὸ ζητούμενο ὑπὸ κλίμακα $\frac{5}{7}$ ἀντίγραφο (E') τοῦ (E). Πράγματι, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸν § 2, τὸ (E') εἶναι ὅμοιο πρὸς τὸ (E), μὲ λόγο ὁμοιότητας πρὸς αὐτὸ τὸ 5/7.

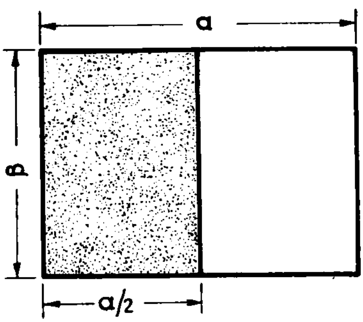
Ἀσκήσεις. *1.* Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο ὅμοιο πρὸς ἕνα δοσμένο ὀρθογώνιο, μὲ λόγο ὁμοιότητας πρὸς αὐτὸ τὸ 1/2, στὶς ἀκόλουθες δυὸ περιπτώσεις: 1ο τὰ δυὸ ὀρθογώνια νὰ ἔχουν μιὰ γωνία κοινή, 2ο τὰ δυὸ ὀρθογώνια νὰ ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο καὶ τὶς πλευρές τους ἀντίστοιχα παράλληλες.

2. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει διαστάσεις: 25 cm μῆκος καὶ 15 cm πλάτος. Ἀφοῦ σχεδιάσετε ἕνα ὅμοιο πρὸς αὐτὸ μὲ μῆκος 30 cm, ὑπολογίστε 1ο τὴν κλίμακα τοῦ σχεδίου σας καὶ 2ο τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου ποὺ σχεδιάσατε.

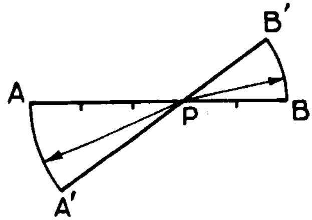
3. Ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι ἐσωγραμμένο σὲ κύκλο ποὺ ἔχει κέντρο τὸ σημεῖο O. Παίρνετε τὰ μέσα A_1, B_1, Γ_1 τῶν ἀκτίνων OA, OB καὶ $O\Gamma$. Δεῖξτε ὅτι τὸ τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ εἶναι ἰσόπλευρο.

4. Σχεδιάστε ἕνα ἰσόσκελο τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο ὥστε $AB = A\Gamma = 10\ cm$ καὶ $B\Gamma = 7\ cm$. Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ὅμοιο πρὸς τὸ $AB\Gamma$ μὲ λόγο ὁμοιότητας πρὸς αὐτὸ τὸ 2/3 στὶς ἀκόλουθες δυὸ περιπτώσεις: 1ο τὰ δυὸ τρίγωνα ἔχουν κοινὴ τὴ γωνία $\widehat{A}$, 2ο τὰ δυὸ τρίγωνα έχουν κοινή τή γωνία $\widehat{B}$. Ἐξηγῆστε γιατί τὰ δυὸ τρίγωνα ποὺ κατασκευάσατε εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

5. Ὑποθέστε ὅτι, διπλώνοντας (τσακίζοντας) στὰ δυὸ ἕνα ὀρθογώνιο γύρω στὸν μικρό του ἄξονα συμμετρίας, λαμβάνετε ἕνα ὀρθογώνιο ὅμοιο πρὸς τὸ ἀρχικό· (τὸ δεύτερο αὐτὸ ὀρθογώνιο, ποὺ λαμβάνετε, παριστάνεται σκιασμένο στὸ σχ. 19·η). 1ο. Ποιός εἶναι τότε ὁ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ τοῦ μήκους τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ πλάτος του; 2ο. Ἄραγε, ἂν ξαναδιπλώσωμε στὰ δυὸ γύρω στὸν μικρό του ἄξονα συμμετρίας τὸ δεύτερο ὀρθογώνιο, θὰ λάβωμε ἕνα τρίτο ὀρθογώνιο ὅμοιο πρὸς τὰ δυὸ προηγούμενα;



Σχ. 19-η.



Σχ. 19-θ.

6. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις ἑνὸς χαρτιοῦ σχεδίου A_0 ξέροντας ὅτι ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, ὅτι οἱ διαστάσεις του ἔχουν λόγο ἴσο πρὸς ἐκεῖνον ποὺ ὑπολογίσατε στὴν προηγούμενη ἄσκηση καὶ ὅτι ἡ ἐπιφάνειά του ἰσοῦται μὲ 1 m^2.

7. Γνωρίζοντας ὅτι $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{2}$ (σχ. 19-θ) καὶ ὅτι τὸ κυκλικὸ τόξο $\widehat{BB'}$ ἔχει μῆκος 15 cm, ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ κυκλικοῦ τόξου $\widehat{AA'}$.

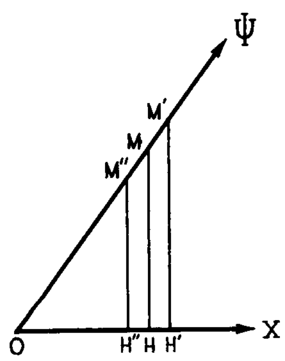
8. Τὰ στελέχη AA' καὶ BB' ἑνὸς ἀναλογικοῦ διαβήτη (σχ. 19-ς), ποὺ κατασκευάζεται σ' ἕνα ἐργαστήριο ξυλουργοῦ, ἔχουν μῆκος τὸ καθένα 60 cm. Σὲ τί ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἄκρο A (ἀντιστοίχως B) πρέπει νὰ γίνουν οἱ τρύπες O γιὰ νὰ μποροῦμε μὲ αὐτὸν τὸν διαβήτη νὰ μικραίνωμε ἕνα σχέδιο κατὰ τοὺς λόγους: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5;

9. Στὸν Τόμο Β', Μάθ. 40, § 9 μάθατε νὰ ἐσωγράφετε σ' ἕναν κύκλο μὲ δοσμένη ἀκτίνα R ἕνα κανονικὸ πεντάγωνο. Ἀφοῦ κάμετε μιὰ τέτοια κατασκευή, ἐξηγῆστε πῶς μπορεῖ ἡ κατασκευὴ αὐτὴ νὰ χρησιμεύση γιὰ τὴ χάραξη ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου μὲ ὁποιοδήποτε δοσμένο μῆκος πλευρᾶς.

Μάθημα 20.

Ἡμίτονο ὀξείας γωνίας.

1. Ὁρισμός. Ἂς πάρωμε ἕνα *ὁποιοδήποτε σημεῖο* M πάνω σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς πλευρὲς μιᾶς ὀξείας γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ (σχ. 20-α) καὶ ἂς χαράξωμε τὴν κάθετο MH πρὸς τὴν ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας. *Μετρᾶμε* ἔπειτα τὰ τμήματα MH καὶ OM *καὶ ὑπολογίζομε* τὸ λόγο $\frac{MH}{OM}$. Βρίσκομε ἔτσι:



Σχ. 20-α.

$$MH = 24\,mm, \qquad OM = 30\,mm,$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{MH}{OM} = \frac{24}{30} = 0{,}8.$$

Ἂς ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ξεκινώντας ἀπὸ ἄλλα σημεῖα M' M'', ... τῆς πλευρᾶς $O\Psi$. Βρίσκομε:

$$M'H' = 28\,mm,\ OM' = 35\,mm, \quad \text{ἄρα} \quad \frac{M'H'}{OM'} = \frac{28}{35} = 0{,}8\,,$$

$$M''H'' = 20\,mm,\ OM'' = 25\,mm, \quad \text{ἄρα} \quad \frac{M''H''}{OM''} = \frac{20}{25} = 0{,}8.$$

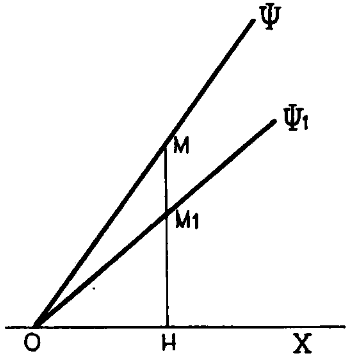
Βλέπομε ὅτι *ὁ λόγος ποὺ βρίσκομε εἶναι πάντα ὁ ἴδιος: 0,8.*

Ὅ,τι βρήκαμε ἐμπειρικὰ παραπάνω μποροῦμε νὰ τὸ δείξωμε θεωρητικὰ μὲ τὸν ἀκόλουθο συλλογισμό: Τὰ τρίγωνα OHM, $OH'M'$, $OH''M''$ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν ὀξεία γωνία $\widehat{O}$ κοινή. Ἑπομένως ἔχουν δυὸ γωνίες τους ἀντίστοιχα ἴσες. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὴν πρόταση II_α τοῦ § 2 τοῦ Μαθ. 18, τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι, δυό-δυό, μεταξύ τους ὅμοια καὶ οἱ ὁμόλογες πλευρές τους θὰ εἶναι ἀνάλογες· ὥστε

$$\frac{MH}{OM} = \frac{M'H'}{OM'} = \frac{M''H''}{OM''}\,,$$ ὅπως θέλαμε νὰ δείξωμε.

Ὁ λόγος λοιπὸν ποὺ βρίσκομε μὲ τὸν παραπάνω τρόπο εἶναι ἕνας ἐντελῶς ὁρισμένος ἀριθμός, ἀντίστοιχος στὴν ὀξεία γωνία $X\widehat{O}\Psi$ ποὺ παίρνομε· μεταβάλλεται, μόνο ὅταν ἀλλάξῃ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας: μικραίνει ἢ μεγαλώνει συγχρόνως μὲ τὴν ὀξεία γωνία. Π.χ. γιὰ τὴν ὀξεία γωνία $X\widehat{O}\Psi_1$ ποὺ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ $X\widehat{O}\Psi$ (σχ. 20-β), ἔχομε

$$\frac{M_1H}{OM_1}=\frac{15}{23}<\frac{24}{30}=\frac{MH}{OM}.$$



Σχ. 20-β.

Ἀπ' ὅλα αὐτὰ συμπεραίνομε τώρα ὅτι τὸ μέγεθος τῆς γωνίας προσδιορίζει τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ παραπάνω λόγου καί, ἀντιστρόφως, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου προσδιορίζει τὸ μέγεθος τῆς γωνίας. Γι' αὐτὸ εἶναι χρήσιμο νὰ δώσωμε ἕνα ὄνομα στὸν λόγο αὐτὸν καὶ νὰ τὸν χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ χαρακτηρίζωμε τὸ μέγεθος μιᾶς ὀξείας γωνίας.

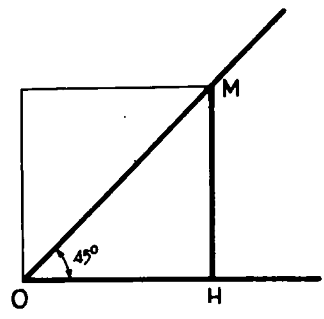
Ὁρισμός. *Ὁ λόγος* $\frac{MH}{OM}$ *γιὰ μιὰ γωνία* $X\widehat{O}\Psi \leq 90^\circ$ *λέγεται ἡμίτονο τῆς γωνίας καὶ σημειώνεται σύντομα ἔτσι:* $\eta\mu\ X\widehat{O}\Psi$.

Εἰδικὰ γιὰ τὴ γωνία $X\widehat{O}\Psi$ τῶν σχημάτων 20-α καὶ 20-β ἔχομε λοιπόν: $\eta\mu\ X\widehat{O}\Psi=\frac{24}{30}=0{,}8$, καὶ γιὰ τὴ γωνία $X\widehat{O}\Psi_1$ τοῦ σχ. 20-β: $\eta\mu\ X\widehat{O}\Psi_1=\frac{15}{23}=0{,}65\ldots$

2. Πῶς βρίσκομε τὸ ἡμίτονο μιᾶς γωνίας ≤ 90;

1ο μὲ σχεδίαση. Σχεδιάζομε τὴ γωνία ὅσο μποροῦμε ἀκριθέστερα, ὕστερα ἐφαρμόζομε τὴν κατασκευὴ καὶ τὸν ὑπολογισμὸ ποὺ περιγράψαμε στὸν προηγούμενο παράγραφο. Π.χ. γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ημ 45^0, σχεδιάζομε μιὰ γωνία 45^0 (σχ. 20-γ), φέρνομε τὴν κάθετο MH πρὸς τὴν πλευρὰ OM καί, ἀφοῦ μετρήσωμε τὰ μήκη MH καὶ OM, ὑπολογίζομε τὸ λόγο

$$\frac{MH}{OM}=\frac{25{,}5\,mm}{36\,mm}=0{,}70\ldots$$



Σχ. 20-γ.

Ἐννοεῖται ὅτι τὸ παραπάνω ἀριθμητικὸ ἀποτέλεσμα δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι παρὰ μιά, λιγότερο ἢ περισσότερο καλή, προσεγγιστικὴ τιμὴ τοῦ θεωρητικὰ ὑπολογισμένου σωστοῦ λόγου· γιατὶ σὲ κάθε σχεδίαση καὶ κάθε μέτρηση γίνονται μικρὰ σφάλματα. Εἰδικά, στὸ παραπάνω παράδειγμα, ἡ θεωρία μᾶς λέει ὅτι ἡ σωστὴ τιμὴ τοῦ ημ 45^0 εἶναι:

$$\text{ημ } 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707\ldots$$

Πράγματι, σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα (Τόμ. Α΄, Μάθ. 38), ἔχομε:

$$OM^2=OH^2+MH^2=MH^2+MH^2=2MH^2,$$

$$\text{ἄρα}\quad OM=\sqrt{2}\cdot MH\quad\text{καὶ}\quad\frac{MH}{OM}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$$

2ο μὲ πίνακες. Οἱ πίνακες αὐτοὶ περιέχονται καὶ σὲ τυπολόγια· μᾶς δίνουν, μὲ τρία ἢ περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν, προχωρώντας ἀπὸ 0^0 στὶς 90^0 κατὰ μιὰ σταθερὴ διαφορά. Στὸ τέλος τοῦ Τόμου αὐτοῦ θὰ βρῆτε ἕνα ἀπόσπασμα ἀπὸ τέτοιους πίνακες ποὺ σᾶς δίνει, μὲ προσέγγιση μισοῦ χιλιοστοῦ, τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἀπὸ 0^0 ὡς 90^0 ἀνὰ 10 πρῶτα λεπτά. Τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα δείχνουν πῶς τοὺς χρησιμοποιοῦμε:

I. Ἀπὸ τὴ γωνία νὰ βρεθῆ τὸ ἡμίτονο:

$ημ\ 54^\circ = 0{,}809$

$ημ\ 35^\circ\ 20' = 0{,}578$

$ημ\ 72^\circ\ 13' \simeq ημ\ 72^\circ\ 10' = 0{,}952.$

II. Ἀπὸ τὸ ἡμίτονο νὰ βρεθῆ ἡ γωνία:

$ημ\ x = 0{,}857\ ,\ x = 59^\circ$

$ημ\ x = 0{,}433\ ,\ x = 25^\circ\ 40'$

$ημ\ x = 0{,}511\ ,\ x \simeq 30^\circ\ 40'.$

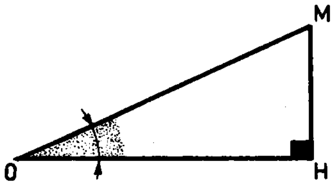
3. Πρόταση. *Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μιὰ ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενο τῆς ὑποτείνουσας ἐπὶ τὸ ἡμίτονο τῆς γωνίας ποὺ βρίσκεται ἀντίκρυ στὴν ὑπόψη πλευρά.*

Αὐτὸ προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἡμιτόνου μιᾶς ὀξείας γωνίας. Π.χ. στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο τοῦ σχ. 20-δ ἔχομε:

$$\frac{MH}{OM} = ημ\ \widehat{O}\ ,$$

ἄρα (ἂν πολλαπλασιάσωμε καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἰσότητας ἐπὶ OM):

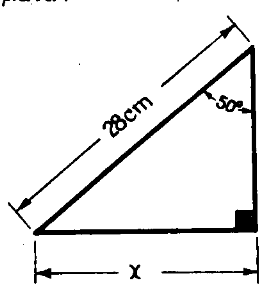
$$MH = OM \cdot ημ\ \widehat{O}.$$



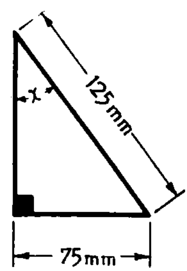
Σχ. 20-δ.

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκομε: $OH = OM\ ημ\ \widehat{M}.$

4. Ἐφαρμογές. *Ὑπολογίστε τὸ μέγεθος x στὰ δυὸ ἀκόλουθα σχήματα:*



Σχ. 20-ε.



Σχ. 20-ς.

Ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμε τὴν παραπάνω πρόταση, ποὺ θὰ τὴ λέμε *θεώρημα τοῦ ἡμιτόνου*, καὶ νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸν πίνακα τῶν ἡμιτόνων:

$$x = 28 \cdot \eta\mu\, 50^\circ$$
$$= 28 \cdot 0{,}766$$
$$x \simeq 21{,}4\ cm.$$

$$75 = 125 \cdot \eta\mu\, x$$
$$\eta\mu\, x = \frac{75}{125} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$
$$x \simeq 36^\circ\, 50'.$$

Ἀσκήσεις *1*. Χαράξτε (μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο) μιὰ γωνία 38°. Ὕστερα κατεβάστε ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς μιᾶς πλευρᾶς κάθετο πρὸς τὴν ἄλλη καί, ἀφοῦ κάμετε τὶς μετρήσεις ποὺ χρειάζονται, ὑπολογίστε τὸ ημ 38°. Τὸ ἀποτέλεσμά σας νὰ τὸ παραβάλετε μὲ ἐκεῖνο ποὺ δίνουν οἱ πίνακες.

2. Κατασκευάστε μιὰν ὀξεία γωνία ποὺ νὰ ἔχῃ ἡμίτονο $0{,}45 = \frac{45\ mm}{100\ mm}$. Ὕστερα μετρῆστε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὴ γωνία αὐτὴ καὶ παραβάλετε τὸ ἀποτέλεσμα μὲ ἐκεῖνο ποὺ βρίσκετε ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν ἡμιτόνων.

3. Χαράξτε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ μιὰ διάμεσό του. Χρησιμοποιώντας αὐτὴν τὴν κατασκευὴ δεῖξτε ὅτι ημ $30^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

4. Ὑπολογίστε τὶς ὀξεῖες γωνίες ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ξέροντας ὅτι ἡ ὑποτείνουσά του εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴ μιὰ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

5. Ὑπολογίστε τὸ κοινὸ μῆκος τῶν διαγωνίων ἑνὸς ὀρθογωνίου ξέροντας τὸ πλάτος του 15 *cm* καὶ τὴν ὀξεία γωνία 46° τῶν δυὸ διαγωνίων του.

6. Ὑπολογίστε τὰ μήκη τῶν διαγωνίων ἑνὸς ρόμβου ποὺ ἔχει μῆκος πλευρῶν 20 *cm* καὶ τὶς ὀξεῖες γωνίες του ἴσες μὲ 40°.

7. Σὲ ποιὰν ἀπόσταση ἀπὸ τὴ βάση ἑνὸς τοίχου πρέπει νὰ τοποθετήσετε τὸ πόδι μιᾶς ἀνεμόσκαλας, ποὺ ἔχει μῆκος 8 *m* καὶ ἀκουμπᾶ πάνω στὸν τοῖχο, γιὰ νὰ σχηματίζῃ ἡ ἀνεμόσκαλα μὲ τὸ ὁριζόντιο ἔδαφος γωνία κλίσεως 75°.

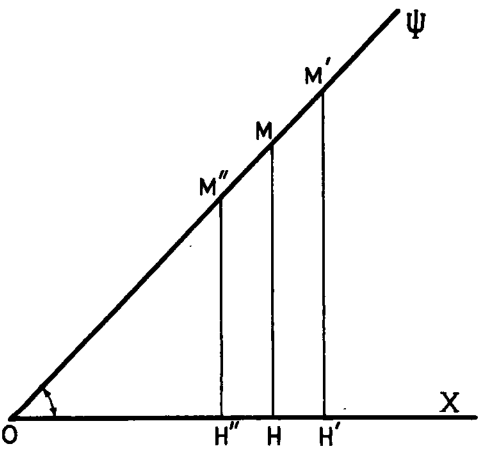
8. Δεῖξτε ὅτι τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ 0,866...

9. Μεταξὺ δυὸ εὐθειῶν, ποὺ εἶναι παράλληλες καὶ ἀπέχουν ἡ μιὰ ἀπὸ τὴν ἄλλη 50 *mm*, χάραξαν μιὰν τέμνουσα μήκους 65 *mm*. Ὑπολογίστε τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζει ἡ τέμνουσα αὐτὴ μὲ τὶς παράλληλες εὐθεῖες.

Μάθημα 21.

Συνημίτονο όξείας γωνίας.

1. Όρισμός. Ἂς πάρωμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο M πάνω σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς πλευρὲς μιᾶς ὀξείας γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ (σχ. 21-α) καὶ



Σχ. 21-α.

ἂς χαράξωμε τὴν κάθετο MH πρὸς τὴν ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας.

Ἂς μετρήσωμε ἔπειτα τὰ τμήματα OH καὶ OM καὶ ἂς ὑπολογίσωμε τὸ λόγο $\frac{OH}{OM}$:

$$OH = 35\ cm \quad , \quad OM = 50\ mm,$$

$$\frac{OH}{OM} = \frac{35}{50} = 0{,}7.$$

Ἂς ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ξεκινώντας ἀπὸ ἄλλα σημεῖα M', M'' ... τῆς πλευρᾶς $O\Psi$:

$$OH' = 42\ mm,\ OM' = 60\ mm,\ \text{ἄρα}\ \frac{OH'}{OM'} = \frac{42}{60} = 0{,}7,$$

$$OH'' = 28\ mm,\ OM'' = 40\ mm,\ \text{ἄρα}\ \frac{OH''}{OM''} = \frac{28}{40} = 0{,}7,$$

. . . . . .

Βλέπομε ἔτσι ἐμπειρικὰ ὅτι ὁ λόγος ποὺ βρίσκομε εἶναι πάντα ὁ ἴδιος: $0{,}7$.

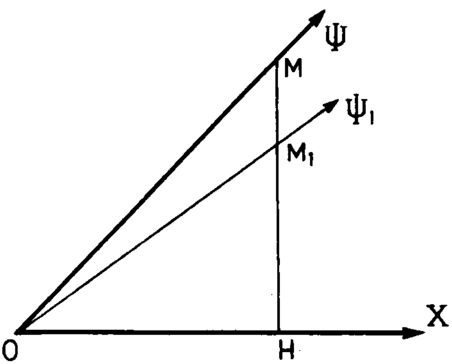
Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ ἀποδείξωμε θεωρητικὰ μὲ τὴν ἀκόλουθη σκέψη: Τὰ τρίγωνα OHM, $OH'M'$, $OH''M''$, ... εἶναι δυὸ-δυὸ ὅμοια μεταξύ τους, ἐπειδὴ ἔχουν τὴ γωνία $\widehat{O}$ κοινὴ καὶ μιὰν ἀκόμα γωνία τους ἴση, τὶς ὀρθὲς $\widehat{H}$, $\widehat{H'}$, $\widehat{H''}$, ... Ἄρα οἱ ὁμόλογες πλευρές τους εἶναι ἀνάλογες καὶ ἑπομένως:

$$\frac{OH}{OM} = \frac{OH'}{OM'} = \frac{OH''}{OM''} = \cdots \quad \text{, ὅπως ἔπρεπε νὰ δείξωμε.}$$

Ὥστε, ὅπως ὁ λόγος $\frac{MH}{OM}$, ἔτσι καὶ ὁ λόγος $\frac{OH}{OM}$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ καὶ μόνο. Εὔκολα μάλιστα βλέπομε ὅτι μεγαλώνει ἢ μικραίνει, καθόσο ἡ ὀξεία γωνία μικραίνει ἢ μεγαλώνει. Π.χ. γιὰ τὴ γωνία $\widehat{XO\Psi_1}$ ποὺ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ $\widehat{XO\Psi}$, ἔχομε φανερὰ (σχ. 21-β):

$$\frac{OH}{OM_1} > \frac{OH}{OM},$$

γιατὶ $OM > OM_1$.



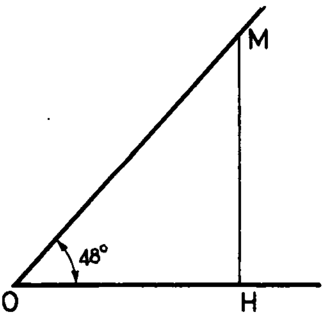
Σχ. 21-β.

Τὸ μέγεθος λοιπὸν τῆς ὀξείας γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ προσδιορίζει τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{OH}{OM}$ καί, ἀντίστροφα, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου προσδιορίζει τὸ μέγεθος τῆς γωνίας. Γι' αὐτὸ εἶναι σκόπιμο νὰ δώσωμε καὶ σ' αὐτὸν τὸ λόγο ἕνα ὄνομα καὶ νὰ τὸν χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ χαρακτηρίζωμε τὸ μέγεθος μιᾶς ὀξείας γωνίας.

Ὁρισμός. *Ὁ λόγος* $\frac{OH}{OM}$ *γιὰ μιὰ γωνία* $X\widehat{O}\Psi \leq 90^{0}$ *λέγεται συνημίτονο τῆς γωνίας καὶ σημειώνεται σύντομα ἔτσι:* $συν\, X\widehat{O}\Psi$.

Εἰδικὰ γιὰ τὴ γωνία $X\widehat{O}\Psi$ τῶν σχημάτων 21-α καὶ 21-β θὰ γράψωμε λοιπόν: $συν\, X\widehat{O}\Psi = 0{,}7$ καὶ γιὰ τὴ γωνία $X\widehat{O}\Psi_1$ τοῦ σχ. 21-β: $συν\, X\widehat{O}\Psi_1 = \frac{OH}{OM_1} = \frac{35\, mm}{43{,}5\, mm} \simeq 0{,}8.$

2. Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, τὸ συνημίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας (π.χ. τῆς γωνίας τῶν 48^{0}) μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε μὲ σχεδίαση (φυσικὰ κατὰ προσέγγιση μόνο) ὡς ἑξῆς: Σχεδιάζομε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὴ γωνία (σχ. 21-γ)· ὕστερα, ἀπὸ ἕνα σημεῖο M μιᾶς πλευρᾶς της κατεβάζομε τὴν κάθετο MH πρὸς τὴν ἄλλη πλευρά, μετρᾶμε τὰ τμήματα OH καὶ OM καὶ ὑπολογίζομε τὸ λόγο $\frac{OH}{OM}$. Βρίσκομε ἔτσι:



Σχ. 21-γ.

$$\frac{OH}{OM} = \frac{30\, mm}{45\, mm} = \frac{2}{3} = 0{,}66\ldots,\ ἄρα\ συν\, 48^{0} \simeq 0{,}67.$$

3. Ἀκριβέστερα βρίσκομε ἀπὸ τὴ γωνία τὸ συνημίτονο καὶ ἀπὸ τὸ συνημίτονο τὴ γωνία χρησιμοποιώντας πίνακες.

Στὸ τέλος τοῦ Τόμου αὐτοῦ ἔχετε ἕνα ἀπόσπασμα ἀπὸ τέτοιους πίνακες τὸ ὁποῖο σᾶς δίνει μὲ προσέγγιση μισοῦ χιλιοστοῦ τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν ἀπὸ 0^{0} ὡς τὶς 90^{0} ἀνὰ 10 πρῶτα λεπτά. Τὰ παρακάτω παραδείγματα δείχνουν τὴ χρήση αὐτῶν τῶν πινάκων.

1ο. Ἀπὸ τὴ γωνία νὰ βρεθῇ τὸ συνημίτονο.

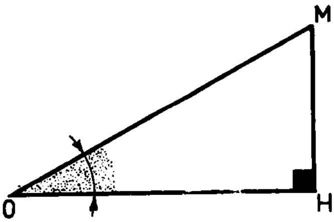
συν $47^\circ = 0{,}682$
συν $22^\circ\,20' = 0{,}925$
συν $35^\circ\,47' \simeq$ συν $35^\circ\,50' = 0{,}811$

2ο. Ἀπὸ τὸ συνημίτονο νὰ βρεθῇ ἡ γωνία.

συν $x = 0{,}530$, $x = 58^\circ$
συν $x = 0{,}942$, $x = 19^\circ\,40'$
συν $x = 0{,}223$, $x \simeq 77^\circ\,10'$.

4. Πρόταση. *Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μιὰ ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενο τῆς ὑποτείνουσας ἐπὶ τὸ συνημίτονο τῆς γωνίας ποὺ σχηματίζει ἡ πλευρὰ αὐτὴ μὲ τὴν ὑποτείνουσα.*

Αὐτὸ προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ συνημιτόνου μιᾶς ὀξείας γωνίας. Π.χ. στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο τοῦ σχ. 21-δ



Σχ. 21-δ.

ἔχομε:

$$\frac{OH}{OM} = \text{συν}\,\widehat{O},$$

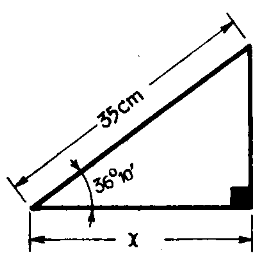
ἄρα, ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμε καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἰσότητας αὐτῆς ἐπὶ OM:

$$OH = OM \cdot \text{συν}\,\widehat{O}.$$

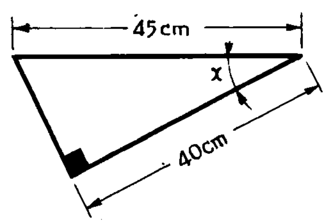
Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκομε:

$$MH = OM \cdot \text{συν}\,\widehat{M}.$$

5. Ἐφαρμογές. *Ὑπολογίστε τὸ μέγεθος x στὰ παρακάτω σχήματα:*



Σχ. 21-ε.



Σχ. 21-ς.

$x = 35 \cdot$ συν $36^\circ\, 10'$

$= 35 \cdot 0{,}807$

$x \simeq 28{,}2$ cm.

$40 = 45 \cdot$ συν x

συν $x = \dfrac{40}{45} = \dfrac{8}{9} = 0{,}888\ldots$

$x = 27^\circ\, 20'$.

Ἀσκήσεις. *1*. Ἀφοῦ χαράξετε μιὰ γωνία 70°, νὰ ὑπολογίσετε τὸ συνημίτονό της, ἐφαρμόζοντας τὴ μέθοδο τοῦ § 2, καὶ νὰ παραβάλετε τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ θὰ βρῆτε μὲ ἐκεῖνο ποὺ δίνουν οἱ πίνακες.

2. Κατασκευάστε μιὰν ὀξεία γωνία ποὺ νὰ ἔχῃ συνημίτον $0{,}75 = \dfrac{30\ mm}{40\ mm}$. Ὕστερα μετρῆστε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὴ γωνία αὐτὴ καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μέτρησης νὰ τὸ παραβάλετε μὲ ἐκεῖνο ποὺ βρίσκετε ὑπολογίζοντας τὴ γωνία ἀπὸ τὸ συνημίτονό της $0{,}75$, μὲ τὴ βοήθεια τοῦ πίνακα τῶν συνημιτόνων.

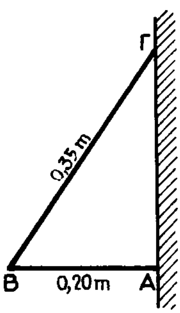
3. 1ο. Γιατί οἱ γωνίες $\widehat{O}$ καὶ $\widehat{M}$ ἑνὸς τριγώνου $\widehat{OHM}$, ποὺ ἔχει τὴ γωνία του $\widehat{H}$ ὀρθή, εἶναι συμπληρωματικές;

2ο. Δεῖξτε ὅτι ημ $\widehat{O} =$ συν $\widehat{M}$.

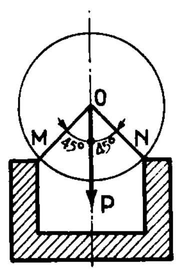
3ο. Ξέροντας ὅτι $\widehat{O} = 40^\circ$ καὶ ὅτι ημ $\widehat{O} = 0{,}643$, ὑπολογίστε τὴ γωνία $\widehat{M}$ καθὼς καὶ τὸ συν $\widehat{M}$.

4. Δεῖξτε ὅτι συν $45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$. Ἐπίσης δεῖξτε ὅτι συν $60^\circ = \dfrac{1}{2}$.

5. Ὑπολογίστε τὴ γωνία κλίσεως $\widehat{AB\Gamma}$ (σχ. 21-ζ) τῆς ράβδου



Σχ. 21-ζ.



Σχ. 21-η.

$B\Gamma$ μιᾶς κρεμάστρας, ξέροντας ὅτι $B\Gamma = 0,35\ m$ καὶ $AB = 0,20\ m$. Ὕστερα ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση $A\Gamma$.

6. Ἀναλύστε τὴ δύναμη $P = 1,5\ kg$ (σχ. 21-η) σὲ δυὸ συνιστῶσες κατὰ τὶς διευθύνσεις OM καὶ ON καὶ ὑπολογίστε τὸ μέγεθος τῶν συνιστωσῶν αὐτῶν.

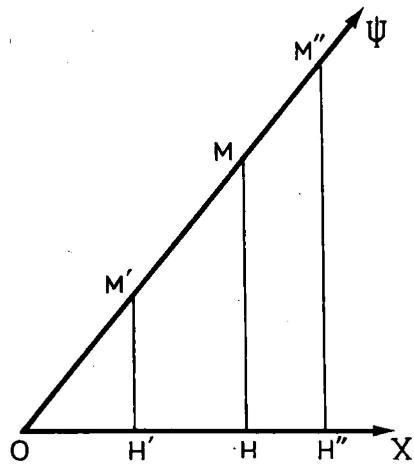
Μάθημα 22.

'Εφαπτομένη ὀξείας γωνίας.

1. 'Ορισμός. Παίρνομε πάλι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο M πάνω σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς πλευρὲς μιᾶς ὀξείας γωνίας $X\widehat{O}\Psi$ (σχ. 22-α) καὶ χαράζομε τὴν κάθετο MH πρὸς τὴν ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας. Μετρᾶμε ἔπειτα τὰ τμήματα MH καὶ OH καὶ ὑπολογίζομε τὸ λόγο $\frac{MH}{OH}$:

$MH = 36\,mm$, $OH = 30\,mm$· ἄρα

$$\frac{MH}{OH} = \frac{36}{30} = \frac{12}{10} = 1{,}2.$$



Σχ. 22-α.

'Επαναλαμβάνομε τὴν παραπάνω ἐργασία ξεκινώντας ἀπὸ ἄλλα σημεῖα $H', H'', \ldots$ τῆς πλευρᾶς $O\Psi$:

$$M'H' = 18\,mm,\ OH' = 15\,mm,\ \text{ἄρα}\ \frac{M'H'}{OH'} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} = 1{,}2\ ,$$

$$M''H'' = 48\,mm,\ OH'' = 40\,mm,\ \text{ἄρα}\ \frac{M''H''}{OH''} = \frac{48}{40} = \frac{12}{10} = 1{,}2\ ,$$

. . . .

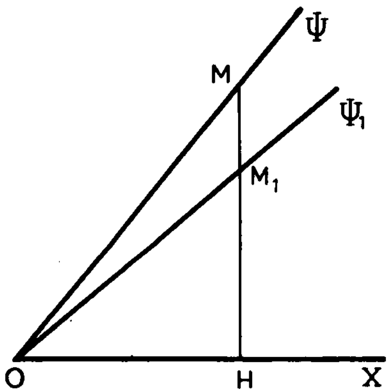
Πιστοποιοῦμε ἔτσι ἐμπειρικὰ ὅτι ὁ παραπάνω λόγος εἶναι πάντα ὁ ἴδιος: *1,2*.

Τὴν πιστοποίηση αὐτὴ μποροῦμε νὰ τὴ δικαιολογήσωμε θεωρητικὰ μὲ τὸν ἀκόλουθο συλλογισμό: Τὰ τρίγωνα OHM, $OH'M'$, $OH''M''$, . . . εἶναι δυὸ-δυὸ ὅμοια μεταξύ τους, ἐπειδὴ ἔχουν τὴ γωνία $\widehat{O}$ κοινὴ καὶ μιὰν ἀκόμη γωνία τους ἴση, τὶς ὀρθὲς $\widehat{H}$, $\widehat{H'}$, $\widehat{H''}, \ldots$

Ἄρα οἱ ὁμόλογες πλευρές τους θὰ εἶναι ἀνάλογες καὶ ἑπομένως:

$$\frac{MH}{OH}=\frac{M'H'}{OH'}=\frac{M''H''}{OH''}=\dots .$$

Ὥστε, ὅπως οἱ λόγοι $\frac{MH}{OH}$, $\frac{OH}{OM}$, ἔτσι καὶ ὁ λόγος $\frac{MH}{OM}$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$ καὶ μόνο. Εὔκολα μάλιστα βλέπομε ὅτι μικραίνει ἢ μεγαλώνει συγχρόνως μὲ τὴ γωνία. Π.χ. γιὰ τὴ γωνία $X\widehat{O}\Psi_1$ ποὺ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ $X\widehat{O}\Psi$ (σχ. 22-β), ἔχομε φανερά:



Σχ. 22-β.

$$\frac{M_1H}{OH}<\frac{MH}{OH}$$

ἐπειδὴ $M_1H<MH$.

Τὸ μέγεθος λοιπὸν τῆς ὀξείας γωνίας $X\widehat{O}\Psi$ προσδιορίζει τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{MH}{OH}$ καί, ἀντίστροφα, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου προσδιορίζει τὸ μέγεθος τῆς γωνίας. Γι' αὐτὸ εἶναι σκόπιμο νὰ δώσωμε καὶ σ' αὐτὸν τὸ λόγο ἕνα ὄνομα καὶ νὰ τὸν χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ χαρακτηρίζωμε τὸ μέγεθος μιᾶς ὀξείας γωνίας.

Ὁρισμός. *Ὁ λόγος* $\frac{MH}{OH}$ *σὲ μιὰ γωνία* $X\widehat{O}\Psi<90^\circ$ *λέγεται ἐφαπτομένη τῆς γωνίας καὶ σημειώνεται σύντομα ἔτσι: εφ* $X\widehat{O}\Psi$.

Εἰδικὰ γιὰ τὴ γωνία $X\widehat{O}\Psi$ τῶν σχημάτων 22-α καὶ 22-β θὰ γράψωμε λοιπόν: εφ $X\widehat{O}\Psi=1{,}2$ καὶ γιὰ τὴ γωνία $X\widehat{O}\Psi_1$ τοῦ σχ. 22-β: εφ $X\widehat{O}\Psi_1=\frac{M_1H}{OH}=\frac{25\ mm}{30\ mm}=\frac{5}{6}=0{,}833\dots$.

Παρατήρηση. Ἀπὸ τὶς σχέσεις $\eta\mu\ X\widehat{O}\Psi = \dfrac{MH}{OM}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\ X\widehat{O}\Psi = \dfrac{OH}{OM}$ συμπεραίνομε ὅτι:

$$\frac{\eta\mu\ X\widehat{O}\Psi}{\sigma\upsilon\nu\ X\widehat{O}\Psi} = \frac{MH}{OM} : \frac{OH}{OM} = \frac{MH}{OM} \cdot \frac{OM}{OH} = \frac{MH}{OH} = \varepsilon\varphi\ X\widehat{O}\Psi.$$

Ἔχομε λοιπὸν τὴ σχέση:

$$\varepsilon\varphi\ X\widehat{O}\Psi = \frac{\eta\mu\ X\widehat{O}\Psi}{\sigma\upsilon\nu\ X\widehat{O}\Psi}.$$

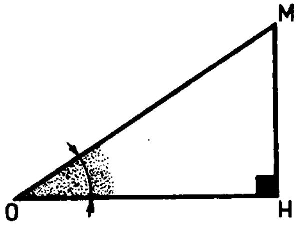
2. Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἐφαπτομένη μιᾶς δοσμένης ὀξείας γωνίας μποροῦμε βέβαια νὰ ἐργασθοῦμε σχεδιαστικά, ξανακάνοντας ἐκεῖνα ποὺ κάμαμε στὸν προηγούμενο παράγραφο. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ οἱ σχεδιάσεις καὶ οἱ μετρήσεις μηκῶν δὲν πραγματοποιοῦνται χωρὶς μικρὰ σφάλματα, γι' αὐτὸ προτιμοῦμε νὰ βρίσκωμε τὶς ἐφαπτομένες τῶν γωνιῶν ἀπὸ ἕτοιμους ἀριθμητικοὺς πίνακες. Ἕνα ἀπόσπασμα τέτοιου πίνακα βρίσκεται στὸ τέλος αὐτοῦ τοῦ Τόμου· σ' αὐτὸ διαβάζει κανεὶς τὴν ἐφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας μὲ προσέγγιση μισοῦ χιλιοστοῦ. Μὲ τὸν ἴδιο πίνακα μποροῦμε φυσικὰ νὰ βροῦμε καὶ τὴ γωνία ξέροντας τὴν ἐφαπτομένη.

Παραδείγματα γιὰ τὴ χρήση τοῦ πίνακα:

1ο. *Ξέροντας τὴ γωνία, βρῆτε τὴν ἐφαπτομένη.*	2ο. *Ξέροντας τὴν ἐφαπτομένη, βρῆτε τὴ γωνία.*
$\varepsilon\varphi\ 39^\circ = 0{,}810$	$\varepsilon\varphi\ x = 0{,}554\ ,\ x = 29^\circ$
$\varepsilon\varphi\ 20^\circ 10' = 0{,}367$	$\varepsilon\varphi\ x = 4{,}449\ ,\ x = 77^\circ 20'$
$\varepsilon\varphi\ 66^\circ 34' \simeq \varepsilon\varphi\ 66^\circ 30' = 2{,}300.$	$\varepsilon\varphi\ x = 0{,}482\ ,\ x \simeq 25^\circ 40'.$

3. Πρόταση. *Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, μιὰ ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς δυὸ κάθετες πλευρὲς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς ἄλλης ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ποὺ βρίσκεται ἀντίκρυ στὴν πρώτη πλευρά.*

Αὐτὸ προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς ὀξείας γωνίας. Π.χ. στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο τοῦ σχ. 22-γ ἔχομε:



Σχ. 22-γ.

$$\frac{MH}{OH} = \text{εφ}\ \widehat{O},$$

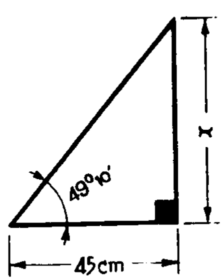
ἄρα, ἂν πολλαπλασιάσωμε ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητας αὐτῆς ἐπὶ OH,

$$MH = OH \cdot \text{εφ}\ \widehat{O}.$$

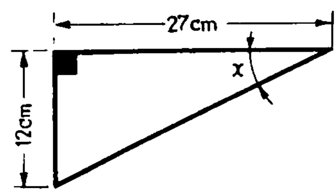
Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκομε ἀπὸ τὴ σχέση $\dfrac{OH}{MH} = \text{εφ}\ \widehat{M}$ τήν:

$$OH = MH \cdot \text{εφ}\ \widehat{M}.$$

4. Ἐφαρμογές. *Ὑπολογίστε τὸ μέγεθος x στὰ παρακάτω σχήματα:*



Σχ. 22-δ.



Σχ. 22-ε.

$$x = 45 \cdot \text{εφ}\ 49^\circ\ 10'$$
$$= 45 \cdot 1{,}157$$
$$x \simeq 52{,}1\ cm.$$

$$12 = 27 \cdot \text{εφ}\ x$$
$$\text{εφ}\ x = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$$
$$x \simeq 24^\circ.$$

5. Παρατήρηση. Οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ημ a, συν a καὶ εφ a ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ μιὰν ὀξεία γωνία a λέγονται *τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ (ἢ τριγωνομετρικοὶ λόγοι) τῆς γωνίας* a, γιατὶ χρησιμοποιοῦνται στὸν ὑπολογισμὸ τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου· εἶναι φυσικὰ *συναρτήσεις τῆς γωνίας α*.

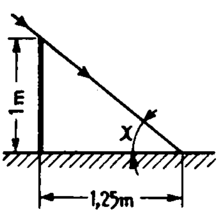
Ἀσκήσεις. *1*. Χαράξτε μιὰ γωνία 35° (μοιρῶν)· ὕστερα, ἀφοῦ κάμετε τὶς ἀπαιτούμενες χαράξεις καὶ μετρήσεις, νὰ ὑπολογίσετε τὴν εφ 35°. Τέλος νὰ παραβάλετε τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ βρίσκετε μὲ ἐκεῖνο ποὺ δίνει ὁ πίνακας τῶν ἐφαπτομένων.

2. Χαράξτε μιὰ ὀξεία γωνία ξέροντας τὴν ἐφαπτομένη της $\frac{5}{4} = \frac{30\,mm}{24\,mm}$. Νὰ μετρήσετε ὕστερα τὸ μέγεθός της μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο καὶ νὰ παραβάλετε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ μὲ ἐκεῖνο ποὺ βρίσκετε ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν ἐφαπτομένων.

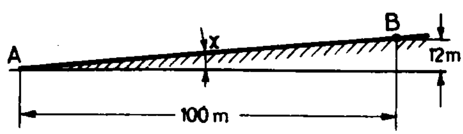
3. Χρησιμοποιώντας τὶς ἐφαπτομένες τους ἀπὸ τὸν πίνακα στὸ τέλος τοῦ βιβλίου κατασκευάστε τὶς ἀκόλουθες γωνίες: 40°, $39^\circ 30'$, $70^\circ 20'$.

4. Δεῖξτε ὅτι εφ $45^\circ = 1$. Ἀπ' αὐτὸ νὰ συμπεράνετε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας $< 45^\circ$ εἶναι ἀριθμὸς < 1 καὶ ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας $> 45^\circ$ εἶναι ἀριθμὸς > 1.

5. Μιὰ κατακόρυφη ράβδος μήκους $1\ m$ (σχ. 22-ϛ) ρίχνει σκιὰ μήκους $1{,}25\ m$. Ὑπολογίστε τὴ γωνία x ποὺ σχηματίζουν οἱ ἡλιακὲς ἀκτίνες μὲ τὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.



Σχ. 22-ϛ.



Σχ. 22-ζ.

6. Πάνω σ' ἕνα δρόμο, μὲ τὴν ἴδια κλίση παντοῦ (σχ. 22-ζ), σὲ μιὰ μετατόπιση $100\ m$ κατὰ ὁριζόντια διεύθυνση ἀντιστοιχεῖ μετατόπιση $12\ m$ σὲ κατακόρυφη διεύθυνση. Ὑπολογίστε τὴ γωνία κλίσεως x τοῦ δρόμου μὲ τὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

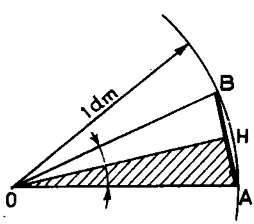
Παρατήρηση. Εἶναι χρήσιμο νὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἐκεῖνο ποὺ στὸν Τόμο Β', Μάθ. 27, Ἄσκ. 9 ὀνομάσαμε κλίση ἑνὸς δρόμου πρὸς τὸν ὁρίζοντα δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας κλίσεως x τὴν ὁποία ὁ δρόμος σχηματίζει μὲ τὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Στὸ παραπάνω παράδειγμα ἡ κλίση τοῦ δρόμου εἶναι $\frac{12}{100}$ ἢ 12 %, μὲ τὸ συμβολισμὸ τῶν ποσοστῶν στὰ ἑκατό.

Μάθημα 23.

Ἐφαρμογὲς τῆς Τριγωνομετρίας στὸν ὑπολογισμὸ τῶν στοιχείων ἑνὸς γεωμετρικοῦ σχήματος.

1. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος λ τῆς χορδῆς *AB* ἑνὸς τόξου κύκλου μὲ ἀκτίνα 1 *dm* τὸ ὁποῖο εἶναι ἀντίστοιχο μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας 24° (σχ. 23-α).

Κατεβάζομε ἀπὸ τὸ κέντρο *O* τοῦ κύκλου τὴν κάθετο *OH* στὴ χορδὴ *AB*. Θὰ σχηματισθοῦν δυὸ ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα *AHO* καὶ *BHO*. Ἐφαρμόζομε στὸ ἕνα ἀπ' αὐτά, π.χ. στὸ *AHO*, τὸ θεώρημα τοῦ ἡμιτόνου (§ 3, Μάθ. 20):



Σχ. 23-α.

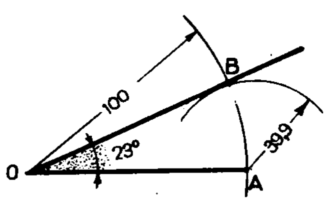
$$AH = OA \cdot \text{ημ}\frac{\widehat{O}}{2},$$

ἄρα $\frac{\lambda}{2} = 1 \cdot \text{ημ}\,12^\circ$ καὶ $\lambda = 2 \cdot \text{ημ}\,12^\circ = 2 \cdot 0{,}208 = \mathit{0{,}416\ dm}$.

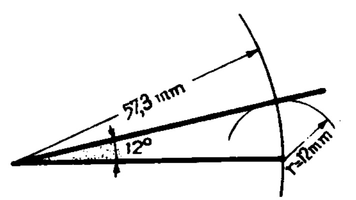
2. Ἐφαρμογές. 1η. Κάνοντας τὸν παραπάνω ὑπολογισμὸ γιὰ τόξα κύκλου μὲ ἀκτίνα 1 *dm*, ποὺ εἶναι ἀντίστοιχα σὲ διάφορες ἐπίκεντρες γωνίες, μποροῦμε νὰ καταρτίσωμε ἕναν ἀριθμητικὸ πίνακα ποὺ νὰ μᾶς δίνῃ τὰ μήκη τῶν χορδῶν τῶν τόξων τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν σὲ γνωστὲς ἐπίκεντρες γωνίες. Ἕνα ἀπόσπασμα αὐτοῦ τοῦ πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχεται σὲ τυπολόγια, βλέπετε δίπλα. Χρησιμοποιώντας τον μποροῦμε νὰ χαράξωμε γωνίες, ὅταν μᾶς δώσουν τὸ μέγεθός τους. Π.χ. γιὰ τὴν κατασκευὴ μιᾶς γωνίας 23° (σχ. 23-β), χαράζομε μὲ ἀκτίνα

γωνία σὲ °	μῆκος χορδῆς	γωνία σὲ °	μῆκος χορδῆς
. .	. . .	. .	. . .
9	0,157	39	0,668
10	0,174	40	0,684
. .	. . .	. .	. . .
23	0,399	53	0,892
24	0,416	54	0,908
. .	. . .	. .	. . .

1 $dm = 100\ mm$ ένα τόξο κύκλου. Ἀπὸ τὸν πίνακα βρίσκομε ὅτι σὲ ἐπίκεντρη γωνία 23^0 ἀντιστοιχεῖ τόξο μὲ χορδὴ $0{,}399 \cdot 100 = 39{,}9\ mm$ σὲ κύκλο ἀκτίνας $100\ mm$. Μὲ κέντρο λοιπὸν ἕνα σημεῖο A τοῦ τόξου ποὺ χαράξαμε καὶ μὲ ἀκτίνα $39{,}9\ mm$ γράφομε ἕνα μικρὸ τόξο κύκλου ποὺ νὰ κόβῃ τὸ πρῶτο τόξο σ' ἕνα σημεῖο, ἔστω τὸ B. *Ἡ ἐπίκεντρη γωνία* $\widehat{AOB}$ *εἶναι ἡ ζητούμενη τῶν* 23^0.



Σχ. 23-β. Κατασκευὴ μιᾶς γωνίας 23°.



Σχ. 23-γ. Κατασκευὴ μιᾶς γωνίας 12°.

2η· Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα $1\ mm$ ἡ χορδὴ ἑνὸς τόξου, ἀντίστοιχου σὲ ἐπίκεντρη γωνία 1^o, ἰσοῦται μὲ

$$2 \cdot \eta\mu\ \frac{1^0}{2} = 2 \cdot \eta\mu\ 30'$$

$$\simeq 2 \cdot 0{,}008\ 73 = 0{,}017\ 46 \simeq \frac{1}{57{,}3}\ mm.$$

Ἑπομένως σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα $57{,}3\ mm$ ἕνα τόξο ἀντίστοιχο σὲ ἐπίκεντρη γωνία 1^0 θὰ ἔχῃ χορδὴ μήκους $57{,}3 \cdot \frac{1}{57{,}3} = 1\ mm$ κατὰ πολὺ καλὴ προσέγγιση. Μὲ ἄλλα λόγια, σ' ἕναν κύκλο ἀκτίνας $57{,}3\ mm$ ἡ ἐπίκεντρη γωνία 1^0 καὶ ἡ ἀντίστοιχη χορδὴ σὲ mm μετριοῦνται, κατὰ πολὺ καλὴ προσέγγιση, ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ 1. Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα, δηλαδὴ ἡ ἐπίκεντρη γωνία σ' ἕνα κύκλο ἀκτίνας $57{,}3\ mm$ καὶ ἡ ἀντίστοιχη χορδὴ νὰ μετριοῦνται ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ὅταν μετρήσωμε τὴ γωνία σὲ μοῖρες καὶ τὴ χορδὴ σὲ mm, ἀληθεύει μὲ ἱκανοποιητικὴ προσέγγιση ὄχι μόνο γιὰ γωνία 1^0 ἀλλὰ καὶ γιὰ γωνίες $< 20^0$.

Μπορεῖ λοιπὸν νὰ χρησιμεύση γιὰ νὰ χαράξωμε κατὰ προσέγγιση γωνίες $< 20^{\circ}$. Τὸ σχῆμα 23-γ δείχνει μιὰν τέτοια κατασκευή.

3. Ξέροντας τὸ βῆμα β ἑνὸς τριγωνικοῦ σπειρώματος στὸ διεθνικὸ σύστημα $S.\ I.$ (σχ. 23-δ), **ὑπολογίστε:**

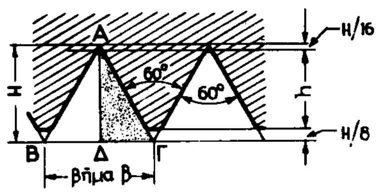
1ο τὸ θεωρητικὸ βάθος H τοῦ σπειρώματος,

2ο τὸ πραγματικὸ βάθος h τοῦ σπειρώματος, δηλ. ὅσο ἀπομένει ἀφοῦ ἀποκοποῦν οἱ κορυφὲς κατὰ $\frac{H}{8}$ καὶ $\frac{H}{16}$ ἀντιστοίχως.

3ο. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ γιὰ $\beta = 2\ mm$.

1ο. Ἂς χαράξωμε τὸ ὕψος $ΑΔ$ τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου $ΑΒΓ$ καὶ ἂς ἐφαρμόσωμε στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$ τὸ « θεώρημα τῆς ἐφαπτομένης » (Μάθ. 22, § 3):

$$ΑΔ = ΔΓ \cdot \text{εφ}\ \widehat{Γ}.$$



Σχ. 23-δ. Ὑπολογισμὸς τῶν διαστάσεων ἑνὸς σπειρώματος βίδας.

Ἑπομένως τὸ θεωρητικὸ βάθος H τοῦ σπειρώματος ἰσοῦται μὲ

$$H = ΑΔ = \frac{\beta}{2} \cdot \text{εφ}\ 60^{\circ} = \frac{\beta}{2} \cdot 1{,}732 = 0{,}866 \cdot \beta.$$

2ο. Γιὰ τὸ πραγματικὸ βάθος h, ὕστερα ἀπὸ τὸ κόψιμο τῶν κορυφῶν, βρίσκομε:

$$h = H - \frac{H}{8} - \frac{H}{16} = H - \frac{3H}{16} = \frac{13H}{16}$$

καί, ἀντικαθιστώντας τὸ H μὲ τὴν τιμὴ ποὺ βρήκαμε στὸ 1°:

$$h = \frac{13 \cdot 0{,}866 \cdot \beta}{16} = 0{,}703\,6 \ldots \cdot \beta \simeq 0{,}704 \cdot \beta.$$

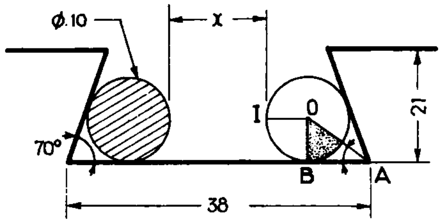
3ο. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Γιὰ $\beta = 2\ mm$ ἔχομε:

$$H = 0{,}866 \cdot 2 = 1{,}732\ mm \simeq 1{,}73\ mm,$$

$$h = 0{,}704 \cdot 2 = 1{,}408\ mm \simeq 1{,}41\ mm.$$

4. Γιὰ νὰ ἐπαληθεύσωμε τὶς διαστάσεις μιᾶς χελιδονουρᾶς (σχ. 23-ε), *χρησιμοποιοῦμε δυὸ κυλινδρικοὺς ἐλεγκτῆρες μὲ διάμετρο 10 mm.*

Ὑπολογίστε γιὰ τὸν ἔλεγχο τὴ διάσταση x.



Σχ. 23-ε. Ἐπαλήθευση τῶν διαστάσεων μιᾶς χελιδονουρᾶς.

Ἀπὸ τὸ σχῆμα συμπεραίνομε ὅτι

$$\begin{aligned} x &= 38 - 2\,AB - 2\,OI \\ &= 38 - 2\,AB - 10 \\ &= 28 - 2\,AB. \end{aligned}$$

Ὑπολογίζομε τώρα τὸ μῆκος AB ἐφαρμόζοντας στὸ τρίγωνο OBA τὸ θεώρημα τῆς ἐφαπτομένης:

$$AB = OB \cdot \text{εφ}\,\widehat{O}.$$

Ἡ γωνία ὅμως $\widehat{O}$ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς $\frac{\widehat{A}}{2}$, ἄρα

$$\widehat{O} = 90^\circ - \frac{70^\circ}{2} = 55^\circ,$$

καὶ τὸ μῆκος $OB = \frac{10}{2} = 5\,mm$. Ἑπομένως

$$AB = 5 \cdot \text{εφ}\,55^\circ = 5 \cdot 1{,}428 = 7{,}14\,mm.$$

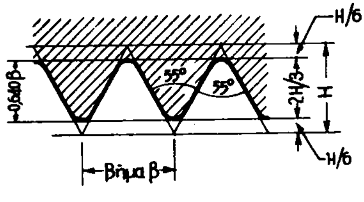
Ὥστε

$$x = 28 - 2 \cdot 7{,}14 = 28 - 14{,}28 = 13{,}72\,mm.$$

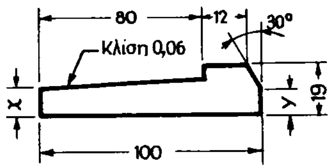
Ἀσκήσεις. 1. Ἡ τρύπα ἑνὸς κλειδιοῦ γιὰ ἑξαγωνικὰ παξιμάδια ἔχει σχῆμα κανονικοῦ ἑξαγώνου μὲ ἀπόσταση παράλληλων πλευρῶν 29 *mm*. Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο τῆς τρύπας.

2. Δεῖξτε ὅτι τὸ ὕψος H ἑνὸς σπειρώματος Γουίτγουερθ *(Whitworth)* (σχ. 23-ϛ) ἰσοῦται μὲ $0{,}960 \cdot \beta$ καὶ ὅτι τὸ ὕψος h μετὰ τὸ κόψιμο τῶν κορυφῶν εἶναι $0{,}640 \cdot \beta$.

3. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις x καὶ y τῆς σφήνας ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 23-ζ.

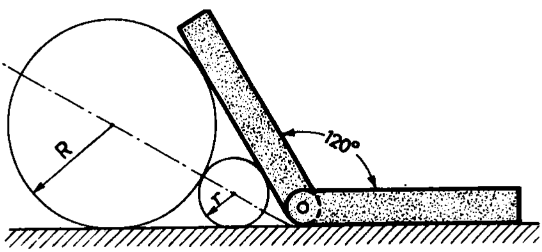


Σχ. 23-ς. Σπείρωμα Γουΐτγουερθ.



Σχ. 23-ζ. Σφήνα μὲ πτέρνα.

4. Γιὰ νὰ ρυθμίσωμε (ρεγουλάρωμε) στὶς 120° μιὰ φαλτσογωνιὰ (σχ. 23-η) χρησιμοποιοῦμε δυὸ κυλινδρικοὺς ἐλεγκτῆρες. Ὁ μικρότερος ἀπ' αὐτοὺς ἔχει ἀκτίνα $r = 10\ mm$· ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα R τοῦ μεγαλύτερου.



Σχ. 23-η. Ρύθμιση μιᾶς φαλτσογωνιᾶς.

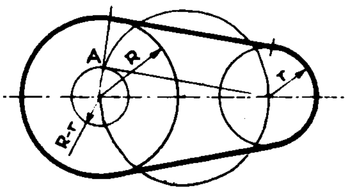
5. Ἂν θέλετε νὰ ρυθμίσετε στὶς 80° τὴ φαλτσογωνιὰ χρησιμοποιώντας δυὸ ἐλεγκτῆρες ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ μεγαλύτερος ἔχει ἀκτίνα 30 mm, ποιά πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ μικρότερου;

6. Τὰ σχήματα 23-θ καὶ 23-ι ὑπενθυμίζουν ἀντιστοίχως τὴν κατασκευὴ γιὰ τὴ χάραξη τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν καὶ ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων δύο περιφερειῶν (Τόμ. Β', Μάθ. 41)· ἐπίσης μπορεῖ τὸ καθένα τους νὰ παριστάνῃ ἕνα ζευγάρι τροχαλιῶν μὲ τὸ λουρὶ (τὸν ἱμάντα) ποὺ τὶς συνδέει. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῶν λουριῶν ξέροντας:

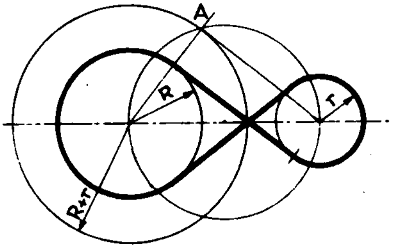
1°. Τὴ μεγάλη διάμετρο 420 mm, τὴ μικρὴ 250 mm καθὼς καὶ τὴν ἀπόσταση τῶν κέντρων 450 mm στὴ διάταξη τοῦ σχ. 23-θ.

2°. Τὴ μεγάλη διάμετρο 400 mm, τὴ μικρὴ 240 καθὼς καὶ τὴν ἀπόσταση 500 mm, στὴ διάταξη τοῦ σχ. 23-ι.

(Θὰ ὑπολογίσετε μιὰν ὀξεία γωνία ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου τὸ ὁποῖο βλέπετε στὸ σχῆμα· ἔπειτα θὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῶν εὐθύγραμμων μερῶν τοῦ λουριοῦ καὶ τέλος τὸ μῆκος τῶν τόξων ἐπαφῆς τοῦ λουριοῦ μὲ τὶς τροχαλίες).



Σχ. 23-θ.



Σχ. 23-ι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

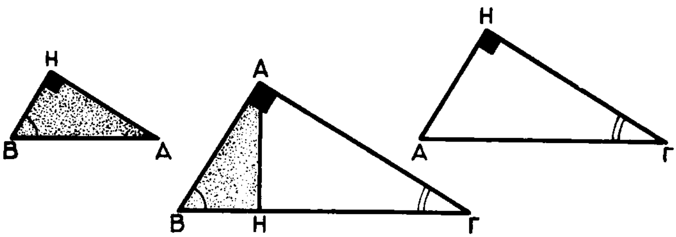
Μάθημα 24.

Σχέση πού συνδέει τὶς πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου: Πυθαγόρειο θεώρημα.

1. Πυθαγόρειο θεώρημα. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δυὸ ἄλλων πλευρῶν.

Τὴν πρόταση αὐτὴ τὴν εἴχαμε βρεῖ ἐμπειρικὰ στὸν Τόμ. Α', Μάθ. 38. Μποροῦμε τώρα νὰ τὴ δικαιολογήσωμε θεωρητικὰ μὲ τὸν ἀκόλουθο συλλογισμό:

1ο. Κατεβάζομε ἀπὸ τὴν κορυφὴ A τῆς ὀρθῆς γωνίας τὴν κάθετο AH στὴν ὑποτείνουσα $B\Gamma$ τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 24-α).



Σχ. 24-α.

Τὰ δυὸ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ HBA ἔχουν δυὸ γωνίες τους ἀντίστοιχα ἴσες: τὴ $\widehat{B}$ κοινὴ καὶ τὴ $B\widehat{A}\Gamma = B\widehat{H}A = 90°$. Ἄρα εἶναι ὅμοια (Πρόταση II_α, Μάθ. 18). Ἑπομένως οἱ ὁμόλογες πλευρές τους θὰ εἶναι ἀνάλογες καὶ θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀναλογία:

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BA}{B\Gamma}$$

Ἀπ' αὐτὴν (γράφοντας ὅτι τὸ γινόμενο τῶν μέσων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων) συμπεραίνομε τὴ σχέση:

$$BA^2 = BH \cdot B\Gamma. \qquad (1)$$

2ο. Μὲ ὅμοιο τρόπο βλέπομε ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $HA\Gamma$ εἶναι ὅμοια καὶ ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέση

$$\Gamma A^2 = \Gamma H \cdot B\Gamma. \qquad (2)$$

3ο. Προσθέτομε τώρα τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) κατὰ μέλη:

$$BA^2 + \Gamma A^2 = BH \cdot B\Gamma + \Gamma H \cdot B\Gamma.$$

Στὸ 2ο μέλος βγάζομε ἔξω ἀπὸ παρένθεση τὸν κοινὸ παράγοντα $B\Gamma$· λαμβάνομε τότε

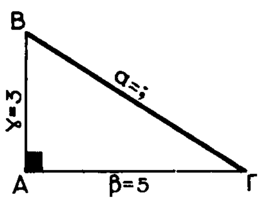
$$BA^2 + \Gamma A^2 = (BH + \Gamma H) \cdot B\Gamma = B\Gamma \cdot B\Gamma.$$

Ἄρα $\quad BA^2 + \Gamma A^2 = B\Gamma^2$, ὅπως θέλαμε νὰ δείξωμε.

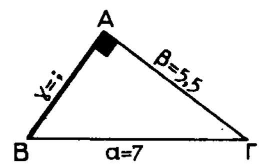
2. Ξέροντας δυὸ πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου, ὑπολογίστε τὴν τρίτη.

1ο. Ὑπολογισμὸς τῆς ὑποτείνουσας (σχ. 24-β μὲ τὶς διαστάσεις του σὲ m):

Τετράγωνο τῆς πλευρᾶς β :	$\beta^2 = 5^2 = 25$
Τετράγωνο τῆς πλευρᾶς γ :	$\gamma^2 = 3^2 = \ \ 9$
Τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας α :	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 34$
Ἄρα	$\alpha = \sqrt{34} \simeq 5{,}83\ m.$



Σχ. 24-β. Ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ α.



Σχ. 24-γ. Ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ γ.

2ο. Ὑπολογίστε μιὰν ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς (σχ. 24-γ μὲ τὶς διαστάσεις του σὲ m):

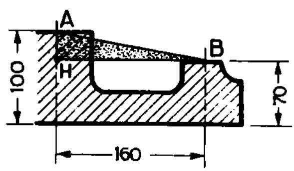
Τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας α :	$\alpha^2 = 7^2 \quad = 49$
Τετράγωνο τῆς πλευρᾶς β :	$\beta^2 = 5{,}5^2 \quad = 30{,}25$
Τετράγωνο τῆς πλευρᾶς γ :	$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 18{,}75$
Ἄρα	$\gamma = \sqrt{18{,}75} \simeq 4{,}33\, m.$

3. Ἐφαρμογές. *1η. Τί ἄνοιγμα πρέπει νὰ δώσωμε στὸ διαβήτη γιὰ νὰ μπορέσωμε νὰ χαράξωμε μιὰν περιφέρεια ποὺ νὰ ἔχη κέντρο τὸ σημεῖο A καὶ ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο B* (σχ. 24-δ μὲ τὶς διαστάσεις δοσμένες σὲ mm).

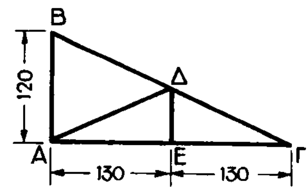
Ἂν λάβωμε ὑπόψη τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ABH, ποὺ φαίνεται στὸ σχῆμα, θὰ βροῦμε ὅτι:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH^2 + AH^2 \\ &= 160^2 + (100 - 70)^2 \\ &= 160^2 + 30^2 \\ &= 25\,600 + 900 = 26\,500. \end{aligned}$$

Ἄρα $\quad AB = \sqrt{26\,500} \simeq 162{,}8\, mm.$



Σχ. 24-δ. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος AB.



Σχ. 24-ε. Ὑπολογίστε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν σιδηρογωνιῶν.

2η. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῶν σιδηρογωνιῶν ποὺ χρειάζεται ἡ κατασκευὴ τοῦ ζευκτοῦ τὸ ὁποῖο παριστάνεται στὸ σχ. 24-ε (οἱ διαστάσεις σημειώνονται σὲ cm).

1ο. Ὑπολογισμὸς τοῦ μήκους $B\Gamma$:

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ βρίσκομε:

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= AB^2 + A\Gamma^2 \\ &= 120^2 + 260^2 \\ &= 14\,400 + 67\,600 = 82\,000. \end{aligned}$$

Ἄρα $\qquad B\Gamma = \sqrt{82\,000} \simeq 286\ cm.$

2ο. Ὑπολογισμὸς τῶν ΔE καὶ $A\Delta$:

Τὸ τμῆμα $E\Delta$, ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὸ μέσο E τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$ καὶ εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν πλευρὰ AB τοῦ τριγώνου $A\Gamma B$, εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τῆς AB (Τόμ. Β', Μάθ. 36, § 2), ἄρα

$$\Delta E = 120\ cm : 2 = 60\ cm.$$

Ἡ διάμεσος $A\Delta$ τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$, ἡ ὁποία ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ A τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι ἴση μὲ τὴ μισὴ ὑποτείνουσα (Τόμ. Β', Μάθ. 35, Ἄσκ. 9), ἄρα

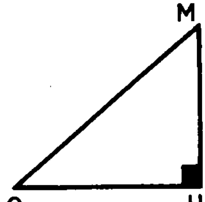
$$A\Delta \simeq 286\ cm : 2 = 143\ cm.$$

3ο. Ἐπομένως τὸ μῆκος τῶν σιδηρογωνιῶν ποὺ χρειάζεται ἡ κατασκευὴ τοῦ ζευκτοῦ εἶναι περίπου ἴσο μὲ

$$260 + 120 + 286 + 60 + 143 = 869\ cm = 8{,}69\ m.$$

4. Ἀπὸ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα μποροῦμε νὰ συμπεράνωμε ἀμέσως τὴν ἀκόλουθη πρόταση:

Πρόταση. Τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ συνημιτόνου κάθε (ὀξείας) γωνίας εἶναι ἴσο μὲ 1.



Σχ. 24-ς.

Καὶ ἀλήθεια, ἂς εἶναι $\widehat{O}$ μιὰ ὀξεία γωνία (σχ. 24-ς). Ἔχομε:

$$\eta\mu\,\widehat{O} = \frac{MH}{OM}, \quad \text{ἄρα} \quad \eta\mu^2\,\widehat{O} = \frac{MH^2}{OM^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\widehat{O} = \frac{OH}{OM}, \quad \text{ἄρα} \quad \sigma\upsilon\nu^2\,\widehat{O} = \frac{OH^2}{OM^2}.$$

Προσθέτοντας βρίσκομε:

$$\eta\mu^2\,\widehat{O} + \sigma\upsilon\nu^2\,\widehat{O} = \frac{MH^2}{OM^2} + \frac{OH^2}{OM^2} = \frac{MH^2 + OH^2}{OM^2}.$$

Ἀλλὰ $MH^2 + OH^2 = OM^2$, σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα· ἄρα

$$\eta\mu^2\,\widehat{O} + \sigma\upsilon\nu^2\,\widehat{O} = \frac{OM^2}{OM^2} = 1, \text{ ὅπως θέλαμε νὰ δείξωμε.}$$

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω πρόταση μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βρίσκωμε τὸ συνημίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας, ὅταν ξέρωμε τὸ ἡμίτονό της καί, ἀντίστροφα, τὸ ἡμίτονο τῆς γωνίας, ὅταν ξέρωμε τὸ συνημίτονό της.

Π.χ. ξέροντας ὅτι $\eta\mu\ 30^\circ = \frac{1}{2}$ (Μάθ. 20, Ἄσκ. 3) βρίσκομε:

$$\sigma\upsilon\nu\ 30^\circ = \sqrt{1 - \eta\mu^2\ 30} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

$$\text{ἄρα} \qquad \sigma\upsilon\nu\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866.$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο, ἀπὸ τὸ $\sigma\upsilon\nu\ 60^0 = \frac{1}{2}$ βρίσκομε :

$$\eta\mu\ 60^\circ = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\ 60} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀσκήσεις. 1. Μιὰ ἀνεμόσκαλα μήκους 3,50 m στηρίζεται μὲ τὸ ἕνα ἄκρο της στὸν τοῖχο, ἐνῶ τὸ ἄλλο ἄκρο της, ποὺ ἀκουμπᾶ στὸ ἔδαφος, ἀπέχει ἀπὸ τὸν τοῖχο 1,25 m. Ὡς ποιό ὕψος φθάνει ἡ ἀνεμόσκαλα;

2. Ποιές διαστάσεις πρέπει νὰ δώσωμε στὶς πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ὥστε ἡ μιὰ ἀπ' αὐτὲς νὰ εἶναι διπλάσια τῆς ἄλλης καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου νὰ ἔχη μῆκος 40 cm;

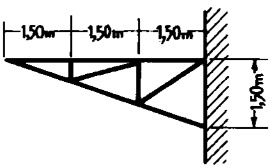
3. Δυὸ δυνάμεις P_1 καὶ P_2, κάθετες ἡ μιὰ πρὸς τὴν ἄλλη, ἔχουν τὸ ἴδιο σημεῖο ἐφαρμογῆς· ἡ συνισταμένη τους R μᾶς δίνεται, ὅπως ξέρομε, ἀπὸ τὴ διαγώνιο τοῦ (ὀρθογώνιου) παραλληλογράμμου τὸ ὁποῖο ἔχει γιὰ συνεχόμενες πλευρὲς τὰ τμήματα ποὺ παριστάνουν τὶς δυὸ δυνάμεις. Ὑπολογίστε τὴ συνισταμένη R, ὅταν $P_1 = 15\ kg$ καὶ $P_2 = 35\ kg$.

4. Δυὸ δυνάμεις, 60 kg ἡ μιὰ καὶ 144 kg ἡ ἄλλη, ἔχουν τὸ ἴδιο σημεῖο ἐφαρμογῆς· ἡ συνισταμένη τους ἰσοῦται μὲ 156 kg. Δεῖξτε ὅτι ἡ γωνία ποὺ σχηματίζουν οἱ δυὸ δυνάμεις εἶναι ὀρθή.

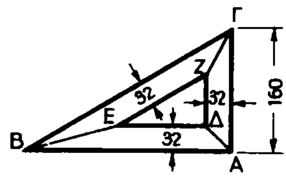
5. Ὑπολογίστε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν σιδερένιων ράβδων ποὺ ἀπαρτίζουν τὴν κονσόλα ἡ ὁποία παριστάνεται στὸ σχ. 24-ζ.

6. Στὸ σχ. 24-η παριστάνεται ἕνα διάκενο ὀρθόγωνο (τρίγωνο σχεδιάσεως) μὲ μιὰ ὀξεία γωνία 60°. Ὑπολογίστε σὲ mm, σύμφωνα μὲ τὰ δεδομένα τοῦ σχήματος, τὶς διαστάσεις $B\Gamma$, AB, $A\Delta$, $Z\Gamma$, ΔZ, ΔE καὶ BE τοῦ ὀρθογώνου.

7. Ἐπαληθεῦστε τὴν πρόταση τοῦ § 4 γιὰ δυὸ ὀξεῖες γωνίες χρησιμοποιώντας τοὺς πίνακες τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων ποὺ βρίσκονται στὸ τέλος τοῦ Τόμου.



Σχ. 24-ζ. Ὑπολογίστε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν ράβδων αὐτῆς τῆς κονσόλας.



Σχ. 24-η. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις αὐτοῦ τοῦ ὀρθογώνου μὲ μιὰ ὀξεία γωνία 60°.

8. Ξέροντας ὅτι τὸ ἡμίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας ἰσοῦται μὲ 0,4 βρῆτε τὸ συνημίτονό της. Ἀντίστροφα, ἀπὸ τὸ συνημίτονο 0,8 μιᾶς γωνίας βρῆτε τὸ ἡμίτονό της.

Μάθημα 25.

Ἐφαρμογὲς τοῦ Πυθαγόρειου θεωρήματος στὸ τετράγωνο, στὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο, στὸν κύκλο.

1. Πῶς ὑπολογίζομε τὴ διαγώνιο ἑνὸς τετραγώνου ἀπὸ τὴν πλευρά του καί, ἀντίστροφα, τὴν πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ἀπὸ τὴν διαγώνιό του.

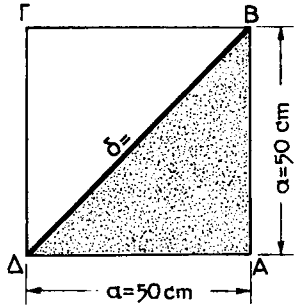
Ἂς ἐφαρμόσωμε τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $BA\Delta$ (σχ. 25-α):

$$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 \cdot$$

$$\text{ἄρα } \delta^2 = 50^2 + 50^2 = 2 \cdot 50^2.$$

Ἑπομένως

$$\delta = \sqrt{2 \cdot 50^2} = \sqrt{50^2} \cdot \sqrt{2} = 50 \cdot \sqrt{2}$$



Σχ. 25-α. Ὑπολογίστε τὴ δ.

Ἀντικαθιστώντας τώρα τὴν $\sqrt{2}$ μὲ τὴν τιμή της 1,414... βρίσκομε

$$\delta \simeq 50 \cdot 1{,}414 = 70{,}7\ cm.$$

Γενίκευση: Παριστάνοντας μὲ τὸ γράμμα α τὴν πλευρὰ καὶ μὲ τὸ δ τὴ διαγώνιο ἑνὸς τετραγώνου βρίσκομε, ὅπως καὶ παραπάνω:

$$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = \alpha^2 \cdot 2$$

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 \cdot 2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{2} = \alpha \cdot \sqrt{2} \simeq \alpha \cdot 1{,}414.$$

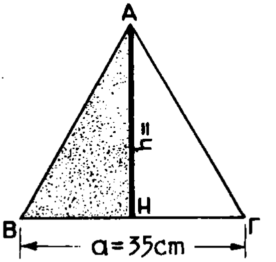
Μὲ τὸν τύπο αὐτὸν ὑπολογίζομε τὴ διαγώνιο δ ἑνὸς τετραγώνου, ὅταν γνωρίζωμε τὴν πλευρά του α. Ἀντίστροφα, μποροῦμε νὰ ὑπολογίζωμε τὴν πλευρὰ α ἀπὸ τὴ διαγώνιο δ, ἐπιλύνοντας ὡς πρὸς α τὴ σχέση $\delta = \alpha \cdot \sqrt{2}$:

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{2}} = \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\delta\sqrt{2}}{2} \simeq \delta \cdot 0{,}707.$$

Παράδειγμα. Όταν ἡ διαγώνιος ἔχῃ μῆκος 35 *cm*, ἡ πλευρὰ ἰσοῦται μὲ $\alpha \simeq 35 \cdot 0{,}707 \simeq 24{,}7$ *cm*.

2. Πῶς ὑπολογίζομε τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου ἀπὸ τὴν πλευρά του καί, ἀντιστρόφως, τὴν πλευρὰ ἀπὸ τὸ ὕψος.

Ἂς ἐφαρμόσωμε τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AHB (σχ. 25-β):



Σχ. 25-β. Ὑπολογίστε τὸ ὕψος h.

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 \cdot$$

$$\text{ἄρα } h^2 = 35^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2$$

$$= 35^2 - \frac{35^2}{4} = \frac{35^2 \cdot 3}{4}.$$

Ἑπομένως

$$h = \sqrt{\frac{35^2 \cdot 3}{4}} = \frac{35\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀντικαθιστώντας τώρα τὴν $\sqrt{3}$ μὲ τὴν τιμή της 1,732 . . . , βρίσκομε:

$$h \simeq \frac{35 \cdot 1{,}732}{2} = 35 \cdot 0{,}866 \simeq \mathit{30{,}3\ cm}.$$

Γενίκευση. Παριστάνοντας γενικὰ μὲ τὸ γράμμα α τὴν πλευρὰ ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου καὶ μὲ τὸ h τὸ ὕψος του βρίσκομε, ὅπως καὶ παραπάνω:

$$h^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2 \cdot 3}{4},$$

$$h = \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot 3}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \simeq \alpha \cdot 0{,}866.$$

Μὲ τὸν τύπο αὐτὸν ὑπολογίζομε τὸ ὕψος h ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἰσόπλευρου τριγώνου, ὅταν ξέρωμε τὴν πλευρά του α. Ἀντίστροφα, μποροῦμε νὰ ὑπολογίζωμε τὴν πλευρὰ α ἀπὸ τὸ ὕψος h ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου μὲ τὸν τύπο:

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3} \simeq h \cdot 1{,}155\ ,$$

τὸν ὁποῖο βρίσκομε ἐπιλύνοντας ὡς πρὸς a τὴν ἐξίσωση : $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Παράδειγμα. Γιὰ $h = 36\ cm$ ἔχομε

$$a \simeq \frac{2 \cdot 36 \cdot 1{,}732}{3} = 24 \cdot 1{,}732 \simeq 41{,}6\ cm.$$

3. Πῶς ὑπολογίζομε τὴν ἀκτίνα R ἑνὸς τόξου κύκλου, ὅταν ξέρωμε τὴ χορδὴ καὶ τὸ βέλος του.

Ἂς ἐφαρμόσωμε στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο OHB (σχ. 25-γ) τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$OB^2 = BH^2 + OH^2.$$

Ἀλλὰ

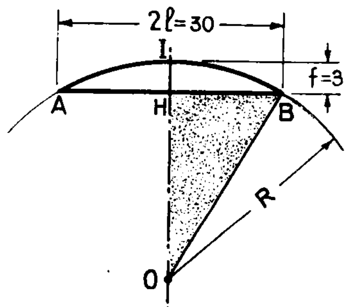
$$BH = \frac{AB}{2} = \frac{30}{2} = 15\ cm,$$

$$OH = OI - HI = (R - 3)\ cm,$$

$$OB = R\ cm.$$

Ἄρα

$$R^2 = 15^2 + (R - 3)^2.$$



Σχ. 25-γ. Ὑπολογίστε τὴν R.

Σύμφωνα ὅμως μὲ τὸν τύπο

$$(a - \beta)^2 = a^2 + \beta^2 - 2a\beta$$

(Τόμ. Β', Μάθ. 15, § 2), ἔχομε $(R - 3)^2 = R^2 + 3^2 - 6R$.

Ἑπομένως $R^2 = 15^2 + R^2 + 3^2 - 6R$

Ἀφαιροῦμε R^2 καὶ ἀπὸ τὰ δυὸ μέλη :

$$0 = 15^2 + 3^2 - 6R$$

καὶ ἐπιλύνομε τὴν ἐξίσωση, ποὺ πρόκυψε, ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστο R :

$$6R = 15^2 + 3^2 = 225 + 9 = 234,$$

$$R = \frac{234}{6} = 39\ cm.$$

Γενίκευση. Παριστάνοντας γενικὰ μὲ $2l$ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς καὶ μὲ f τὸ βέλος τοῦ κυκλικοῦ τόξου καὶ ἐργαζόμενοι ὅπως παραπάνω, βρίσκομε:

$$R^2 = l^2 + (R - f)^2 = l^2 + R^2 + f^2 - 2Rf,$$

$$0 = l^2 + f^2 - 2Rf \quad \text{καὶ} \quad 2Rf = l^2 + f^2.$$

Ἄρα $$R = \frac{l^2}{2f} + \frac{f}{2}.$$

Ἔχομε ἔτσι ἕναν τύπο ποὺ ἐκφράζει τὴ ζητούμενη ἀκτίνα R τοῦ κυκλικοῦ τόξου συναρτήσει τῆς χορδῆς $2l$ καὶ τοῦ βέλους f τοῦ τόξου. Ἂν τὸν χρησιμοποιήσωμε μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ σχήματος 25-γ, θὰ πρέπη φυσικὰ νὰ ξαναβροῦμε τὸ ἀριθμητικὸ ἀποτέλεσμα ποὺ βρήκαμε παραπάνω. Πραγματικά:

$$R = \frac{15^2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2} = \frac{225}{2 \cdot 3} + 1{,}5 = \frac{75}{2} + 1{,}5$$

$$= 37{,}5 + 1{,}5 = 39\ cm.$$

Παρατήρηση. Ὁ παραπάνω τύπος ἀληθεύει καὶ στὴν περίπτωση ὅπου τὸ τόξο ξεπερνᾶ τὶς 180° (ὁπότε $f > R$ καὶ τὸ $R - f$ θὰ πρέπη ν' ἀντικατασταθῆ μὲ τὸ $f - R$).

Ἀσκήσεις. 1. Ὑπολογίστε 1ο τὴ διαγώνιο ἑνὸς τετραγώνου τὸ ὁποῖο ἔχει πλευρὰ 25 *cm* καὶ 2ο τὴν πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου τὸ ὁποῖο ἔχει διαγώνιο 45 *cm*.

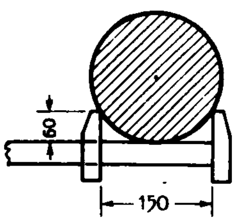
2. Ὑπολογίστε (μὲ τὴ μέθοδο τοῦ § 3) τὴ διάμετρο τοῦ κυκλικοῦ δίσκου (σχ. 25-δ)· ἡ διάμετρος αὐτὴ εἶναι πολὺ μεγάλη γιὰ νὰ μπορῆ νὰ μετρηθῆ μὲ τὸ παχύμετρο (βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 6).

3. Ἡ καμάρα (ἀψίδα) ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 25-ε στηρίζεται σὲ 4 ἰσαπόστατους ὀρθοστάτες. Ὑπολογίστε τὸ συνολικὸ μῆκος τους.

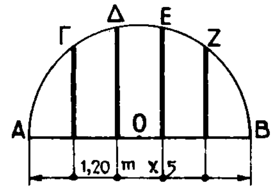
4. Ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος εἶναι περιγραμμένος σὲ ἕνα ἰσόσκελο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$), ξέροντας ὅτι ἡ βάση $ΒΓ$ ἔχει μῆκος 4,8 *cm* καὶ τὸ ὕψος $ΑΗ$, 3,9 *cm*. (Θὰ ἐφαρμόσετε τὸν τύπο τοῦ § 3, ἔχοντας ὑπόψη καὶ τὴν Παρατήρηση).

5. Τὸ σχ. 25-ϛ σᾶς δίνει τὶς διαστάσεις σὲ *mm* ἑνὸς συναρμολογήματος. Ὑπολογίστε γιὰ τὸν ἔλεγχο τῆς κατασκευῆς τὶς διαστάσεις x καὶ y· (οἱ δύο κυλινδρικοὶ ἐλεγκτῆρες ἔχουν διάμετρο 10 *mm*).

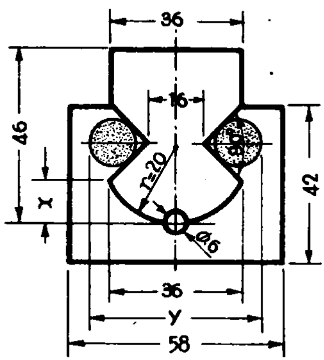
6. Στὸ ἐσωτερικὸ τῆς βιτρίνας ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 25-ζ θέλομε νὰ τοποθετήσωμε μιὰ σειρὰ (μιὰ μπαταρία) ἀπὸ φῶτα κατὰ



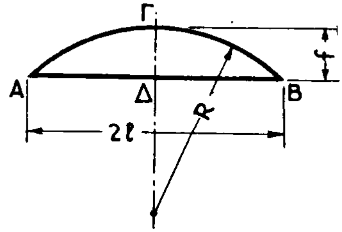
Σχ. 25-δ. Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο τοῦ κύκλου.



Σχ. 25-ε. Ὑπολογίστε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν ὀρθοστατῶν.



Σχ. 25-ς. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις x καὶ y.



Σχ. 25-ζ. Ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα R.

μῆκος τοῦ κυκλικοῦ τόξου $\widehat{A\Gamma B}$. Γιὰ νὰ κάμωμε ἕνα πρόχειρο σχέδιο ποὺ θὰ στείλωμε στὸν κατασκευαστή, μετρήσαμε τὴ χορδὴ $2l = 4{,}70\ m$ καὶ τὸ βέλος $f = 0{,}90\ m$ τοῦ τόξου. Ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα R τοῦ τόξου.

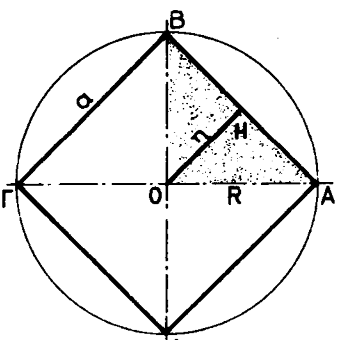
Μάθημα 26.

Κυρτὰ κανονικὰ πολύγωνα.

Στὸ Μάθημα αὐτὸ θὰ ὑπολογίσωμε τὴν πλευρὰ α καὶ τὸ ἀπόθημα η τῶν πιὸ συνηθισμένων κανονικῶν πολυγώνων, συναρτήσει τῆς ἀκτίνας R τοῦ κύκλου στὸν ὁποῖο εἶναι ἐσωγραμμένα.

1. Τετράγωνο (σχ. 26-α).

1ο. Ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι ὀρθὴ καὶ τὸ τρίγωνο AOB εἶναι συγχρόνως ὀρθογώνιο καὶ ἰσόσκελο. Ἡ πλευρὰ AB εἶναι λοιπὸν διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου τὸ ὁποῖο ἔχει πλευρὰ R. Ἑπομένως (σύμφωνα μὲ τὸ Μάθ. 25, § 1):



Σχ. 26-α.

$$\alpha = R\sqrt{2}\ .$$

Παρατήρηση. Ἕνας ἄλλος τρόπος νὰ βροῦμε αὐτὴ τὴ σχέση εἶναι νὰ ἐφαρμόσωμε τὸ θεώρημα τοῦ ἡμιτόνου (Μάθ. 20, § 3) στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AHO:

$$\alpha = AB = 2AH = 2\,R\cdot\eta\mu\,45^\circ = 2\,R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}.$$

2ο. Τὸ ἀπόθημα OH μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου (Μάθ. 21, § 4) στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AOH:

$$\eta = OH = OA\ \sigma\upsilon\nu\ \widehat{HOA} = OA\cdot\sigma\upsilon\nu\,45^\circ,$$

$$\text{ἄρα}\quad \eta = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Γιὰ $R = 16\ cm$ ἔχομε:

$$\alpha \simeq 16 \cdot 1{,}414 \simeq 22{,}6\ cm \qquad \text{καὶ} \quad \eta \simeq \frac{22{,}6}{2} = 11{,}3\ cm.$$

2. Κυρτὸ κανονικὸ ὀκτάγωνο (σχ. 26-β).

1ο. Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AOH ἔχομε:

$$\widehat{AOH} = \frac{360^\circ}{8 \cdot 2} = 22^\circ\, 30',$$

$$AH = \frac{AB}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Ἐφαρμόζοντας τώρα τὸ θεώρημα τοῦ ἡμιτόνου βρίσκομε:

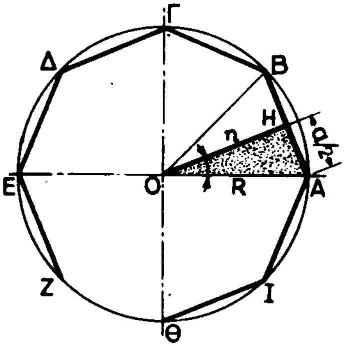
$$AH = OA\ \eta\mu\ \widehat{AOH},$$

ἄρα $\dfrac{\alpha}{2} = R \cdot \eta\mu\, 22^\circ\, 30'$

καὶ $\alpha = 2R \cdot \eta\mu\, 22^\circ\, 30'$.

Ὥστε

$$\alpha \simeq 2R \cdot 0{,}383 = 0{,}766 \cdot R.$$



Σχ. 26-β.

2ο. Ἂς ἐφαρμόσωμε στὸ ἴδιο τρίγωνο AOH τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου· θὰ βροῦμε:

$$OH = OA\ \sigma\upsilon\nu\ \widehat{AOH},$$

δηλαδὴ $\eta = R \cdot \sigma\upsilon\nu\ 22^\circ\, 30'$·

ἐπομένως $\eta \simeq R \cdot 0{,}924 = 0{,}924 \cdot R.$

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές. 1η. Γιὰ $R = 25\ cm$ ἔχομε:

$$\alpha \simeq 25 \cdot 0{,}766 = 19{,}15\ cm \quad , \quad \eta \simeq 25 \cdot 0{,}924 = 23{,}1\ cm.$$

2η. Πλάτος ἑνὸς ὀκταγωνικοῦ παξιμαδιοῦ.

Τὸ πλάτος αὐτὸ l ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιο 2η τοῦ ἀποθήματος. Ὥστε, ὅταν ἡ διάμετρος τοῦ παξιμαδιοῦ εἶναι $30\ mm$ (ἄρα $R = 15\ mm$), τὸ πλάτος του θὰ εἶναι ἴσο μὲ

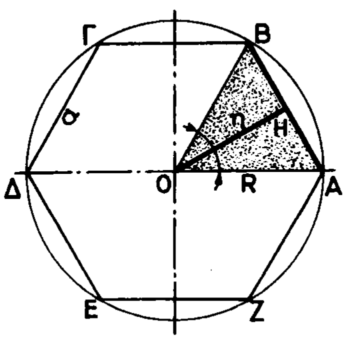
$$l \simeq 2 \cdot 15 \cdot 0{,}924 \simeq 27{,}7\ mm.$$

3. Κανονικὸ ἑξάγωνο (σχ. 26-γ).

1ο. Ὅπως ξέρομε, ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, ποὺ εἶναι ἐσωγραμμένο σὲ κύκλο ἀκτίνας R, ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτίνα R. Ἄρα $\qquad a = R.$

Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ τὸ βρίσκομε καὶ μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἡμιτόνου στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AOH:

$$AB = 2\,AH = 2\cdot OA\cdot \eta\mu\, 30^\circ = 2\cdot OA\cdot \frac{1}{2} = OA$$



Σχ. 26-γ.

2ο. Στὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο AOB τὸ ὕψος OH ἰσοῦται (ὅπως εἴδαμε στὸ προηγούμενο Μάθημα, § 2) μὲ τὴν πλευρὰ R πολλαπλασιασμένη ἐπὶ $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Τὸ ὕψος ὅμως αὐτὸ εἶναι τὸ ἀπόθημα τοῦ ἑξαγώνου. Ἄρα

$$\eta = \frac{R\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866\cdot R.$$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Γιὰ $R = 17\ cm$ ἔχομε:

$$a = 17\ cm \quad , \quad \eta = \frac{17\cdot\sqrt{3}}{2} \simeq 14{,}7\ cm.$$

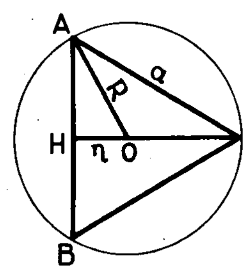
4. Ἰσόπλευρο τρίγωνο (σχ. 26-δ).

1ο. Ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα τοῦ ἡμιτόνου στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AHO, βρίσκομε:

$$AH = OA\cdot\eta\mu\,\frac{360^\circ}{3\cdot 2} = R\cdot\eta\mu\, 60^\circ.$$

Εἶναι ὅμως $\eta\mu\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ

$a = A\Gamma = 2\,AH$. Ἄρα



Σχ. 26-δ.

$$a = 2 \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

2ο. Ἐφαρμόζοντας στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AHO τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου βρίσκομε:

$$\eta = OH = OA \cdot \sigma\upsilon\nu\, 60^\circ = OA \cdot \frac{1}{2}.$$

Ἄρα $$\eta = \frac{R}{2}.$$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Ὅταν $R = 25\ cm$, τότε

$$a \simeq 25 \cdot 1{,}732 = 43{,}3\ cm \quad \text{καὶ} \quad \eta = \frac{25}{2} = 12{,}5\ cm.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Τί διάμετρο πρέπει νὰ δώσωμε σὲ μιὰ περιφέρεια, ἂν θέλωμε νὰ μποροῦμε νὰ ἐσωγράψωμε σ' αὐτὴν ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 16 cm;

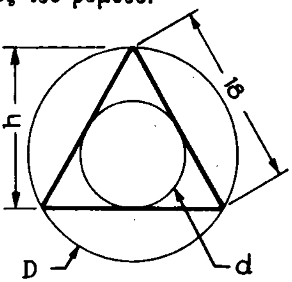
2. Ποιά εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου ποὺ εἶναι περιγραμμένος σὲ ἕνα κυρτὸ κανονικὸ ὀκτάγωνο μὲ πλευρὰ 10 cm;

3. Μελετῆστε τὸ κυρτὸ κανονικὸ δωδεκάγωνο μὲ τὴ μέθοδο ποὺ χρησιμοποιήσαμε γιὰ τὸ κυρτὸ κανονικὸ ὀκτάγωνο (§ 2) καὶ βρῆτε τὴν πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόθημά του συναρτήσει τῆς ἀκτίνας R τοῦ περιγραμμένου κύκλου.

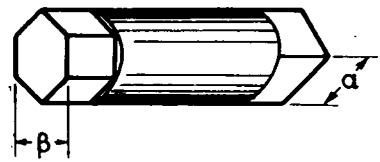
4. Ὑπολογίστε συναρτήσει τοῦ ὕψους h ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου 1ο τὴ διάμετρο D τοῦ περιγραμμένου κύκλου, 2ο τὴ διάμετρο d τοῦ ἐσωγραμμένου κύκλου. Ὕστερα νὰ κάμετε μιὰν ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ τῶν τύπων ποὺ θὰ βρῆτε, παίρνοντας τὴν πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἴση μὲ 18 mm (σχ. 26-ε).

5. Ἔχομε μιὰ κυλινδρικὴ σιδερένια ράβδο μὲ διάμετρο 30 mm (σχ. 26-ϛ) καὶ θέλομε νὰ δώσωμε στὸ ἕνα ἄκρο της μορφὴ τετραγωνικοῦ πρίσματος ἐσωγραμμένου στὸν κύλινδρο καὶ στὸ ἄλλο ἄκρο της, μορφὴ κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος ἐσωγραμμένου ἐπίσης στὸν κύλινδρο. Ὑπολογίστε τὸ πλάτος a τοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος (μὲ ἄλλα λόγια, τὴν ἀπόσταση δυὸ παράλληλων πλευρικῶν ἑδρῶν του) καθὼς καὶ τὸ πλάτος β τοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος.

6. Τὸ μῆκος τῆς μεγάλης διαγωνίου ἑνὸς ρόμβου ἰσοῦται μὲ 60 mm καὶ τῆς μικρῆς, μὲ τὰ $^3/_5$ τοῦ μήκους τῆς μεγάλης. Ὑπολογίστε τὴ διαγώνιο τοῦ τετραγώνου ποὺ ἔχει πλευρὲς ἴσες μὲ τὶς πλευρὲς τοῦ ρόμβου.



Σχ. 26-ε.

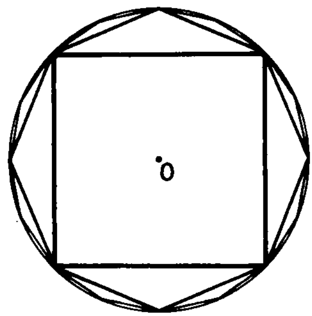


Σχ. 26-ς.

Μάθημα 27.

Μῆκος τῆς περιφέρειας.

1. Ἂς ἐσωγράψωμε σὲ μιὰ περιφέρεια ἕνα κυρτὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ ν πλευρὲς ($\nu = 4$ στὸ σχ. 27-α). Ἡ περίμετρος p_ν τοῦ πολυγώνου τούτου εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ μῆκος γ τῆς περιφέρειας.



Σχ. 27-α. Ἐσωγράφομε στὴν περιφέρεια πολύγωνα 4, 8, 16, ... πλευρῶν.

Ἐσωγράφομε τώρα στὴν ἴδια περιφέρεια ἕνα κυρτὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ διπλάσιο ἀριθμὸ 2ν πλευρῶν (στὸ σχῆμα $2\nu = 8$). Ἡ περίμετρος $p_{2\nu}$ τοῦ δεύτερου πολυγώνου εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν p_ν, ἀλλὰ μικρότερη ἀπὸ τὸ μῆκος γ τῆς περιφέρειας: $p_\nu < p_{2\nu} < \gamma$.

Τὴν παραπάνω κατασκευὴ μποροῦμε νὰ τὴν ἐπαναλάβωμε, τουλάχιστο μὲ τὸ νοῦ μας, ὅσες φορὲς θέλομε, καὶ νὰ ἐσωγράψωμε στὴν περιφέρεια κάθε φορὰ ἕνα κυρτὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ ἀριθμὸ πλευρῶν διπλάσιο ἀπὸ τὸν προηγούμενο. Οἱ περίμετροι

$$p_\nu \quad , \quad p_{2\nu} \quad , \quad p_{4\nu} \quad , \quad p_{8\nu} \quad , \quad \cdots$$

αὐτῶν τῶν πολυγώνων, μ' ὅλο ποὺ πᾶνε αὐξάνοντας:

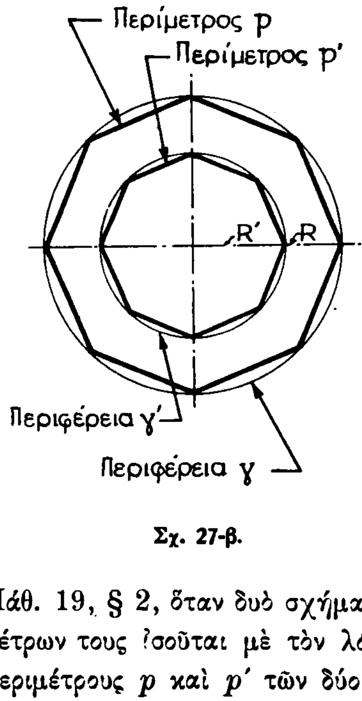
$$p_\nu < p_{2\nu} < p_{4\nu} < p_{8\nu} < \cdots ,$$

παραμένουν ὅμως ὅλες μικρότερες ἀπὸ τὸ μῆκος γ τῆς περιφέρειας καὶ πλησιάζουν πρὸς αὐτὸ ὁλοένα καὶ περισσότερο, σύμφωνα μὲ τὴ γεωμετρική μας παράσταση.

Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ παράσταση ποὺ ἔχομε στὸ νοῦ μας γιὰ τὴν περιφέρεια καὶ τὰ παραπάνω ἐσωγραφόμενα σ' αὐτὴν κυρτὰ κανονικὰ πολύγωνα, μᾶς πείθει γιὰ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα τῶν πολυγώνων αὐτῶν:

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ μήκους γ τῆς περιφέρειας καὶ τῆς περιμέτρου p ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐσωγραμμένου στὴν περιφέρεια, γίνεται ὅσο θέλομε μικρή, φθάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου νὰ παρθῆ ἀρκετὰ μεγάλος.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι τὸ μῆκος γ τῆς περιφέρειας εἶναι τὸ ὅριο πρὸς τὸ ὁποῖο τείνει (πρὸς τὸ ὁποῖο πλησιάζει ἀπεριόριστα) ἡ περίμετρος ἑνὸς ἐσωγραφόμενου κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του αὐξάνῃ ἐπάπειρον.



Σχ. 27-β.

2. Γιὰ νὰ συγκρίνωμε τὰ μήκη γ καὶ γ' δυὸ περιφερειῶν μὲ διάφορες ἀκτῖνες R **καὶ** R', φανταζόμαστε ἐσωγραμμένα στὶς περιφέρειες δυὸ κανονικὰ πολύγωνα μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ πλευρῶν, π.χ. δυὸ κανονικὰ ὀκτάγωνα (σχ. 27-β). Δυὸ τέτοια πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ὅπως φαίνεται ἀμέσως καὶ ἀπὸ τὸ σχῆμα. Ὁ λόγος ὁμοιότητας, ἐκείνου ποὺ εἶναι ἐσωγραμμένο στὸν κύκλο μὲ ἀκτῖνα R πρὸς τὸ ἄλλο, εἶναι $\frac{R}{R'}$. Σύμφωνα ὅμως μὲ τὸ Μάθ. 19, § 2, ὅταν δυὸ σχήματα εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τους ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο ὁμοιότητας· ἑπομένως γιὰ τὶς περιμέτρους p καὶ p' τῶν δύο πολυγώνων ἀληθεύει ἡ ἀναλογία

$$\frac{p}{p'} = \frac{R}{R'}.$$

Αὐτὴ ἡ ἀναλογία ἀληθεύει πάντα, ὅσο μεγάλο καὶ ἂν εἶναι τὸ κοινὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν δύο ἐσωγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων. Ἐξ ἄλλου, ὅπως εἴπαμε, τὰ μήκη γ καὶ γ' τῶν δυὸ περιφερειῶν διαφέρουν ὅσο θέλομε λίγο ἀπὸ τὶς περιμέτρους τῶν ἀντίστοιχων ἐσωγραμμένων πολυγώνων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν γίνη ἀρκετὰ μεγάλος. Ἄρα καὶ γιὰ τὰ μήκη γ καὶ γ' θὰ ἀληθεύη ἡ ἀναλογία

$$\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{R}{R'} \quad \text{καθὼς καὶ ἡ} \quad \frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{2R}{2R'}.$$

Ἐναλλάσσοντας τοὺς μέσους ὅρους στὴν τελευταία, βρίσκομε τὴν ἀναλογία

$$\frac{\gamma}{2R}=\frac{\gamma'}{2R'},$$

ποὺ μᾶς λέει ὅτι:

Ὁ λόγος τοῦ μήκους μιᾶς περιφέρειας πρὸς τὴ διάμετρό της εἶναι ὁ ἴδιος γιὰ ὅλες τὶς περιφέρειες· μὲ ἄλλα λόγια, τὸ πηλίκο τοῦ μήκους μιᾶς περιφέρειας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου της εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ποὺ δὲν ἀλλάζει, ὅταν ἡ περιφέρεια ἀλλάξη.

Ὁ λόγος αὐτὸς παριστάνεται, ὅπως ξέρομε, μὲ τὸ γράμμα π. Ἐμπειρικὰ εἴχαμε βρεῖ στὸν Τόμ. Α', Μάθ. 10 ὅτι εἶναι ἴσος περίπου μὲ 3,14. Μὲ θεωρητικοὺς ὑπολογισμοὺς βρίσκεται ὅτι

$$\pi=3{,}141\,592\ldots$$

Γι' αὐτὸ παίρνομε γιὰ τιμὴ τοῦ π (ἀνάλογα μὲ τὸ βαθμὸ τῆς προσέγγισης ποὺ χρειαζόμαστε):

$$\pi\simeq 3{,}14 \quad \text{ἢ} \quad \pi\simeq\frac{22}{7}=3{,}142\ldots \quad \text{ἢ} \quad \pi\simeq 3{,}141\,6.$$

Γιὰ τὸν ἀριθμὸ $\frac{1}{\pi}$, τὸν ἀντίστροφο τοῦ π, ἔχομε:

$$\frac{1}{\pi}\simeq\frac{1}{3{,}141\,6}\simeq 0{,}318\,3.$$

Συνοψίζομε τὰ παραπάνω μὲ τὴν ἀκόλουθη πρόταση:

Μεταξὺ τοῦ μήκους γ, τῆς διαμέτρου d καὶ τῆς ἀκτίνας R μιᾶς περιφέρειας ἀληθεύουν οἱ σχέσεις:

$$\frac{\gamma}{d}=\frac{\gamma}{2R}=\pi, \quad \gamma=\pi d=2\pi R, \quad d=2R=\frac{\gamma}{\pi}=\gamma\cdot\frac{1}{\pi}.$$

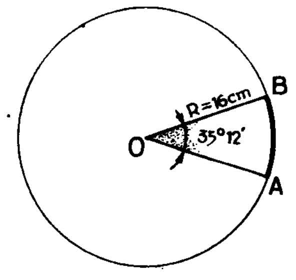
3. Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές. *1η· Ὑπολογίστε τὸ μῆκος μιᾶς περιφέρειας μὲ ἀκτίνα 12,5 cm.*

$$\gamma \simeq 2 \cdot 3{,}141\,6 \cdot 12{,}5 = 78{,}54 \simeq 78{,}5 \; cm.$$

2η· Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο μιᾶς περιφέρειας μήκους 40 cm :

$$d \simeq \frac{40}{3{,}141\,6} = 40 \cdot \frac{1}{3{,}141\,6} \simeq 40 \cdot 0{,}318\,3 = 12{,}732 \simeq 12{,}7 \; cm.$$

4. Μῆκος ἑνὸς τόξου κύκλου. Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ ὑπολογίσωμε τὸ μῆκος λ ἑνὸς τόξου $35^0 12'$ μιᾶς περιφέρειας μὲ ἀκτίνα $R = 16\ cm$ (σχ. 27-γ).



Σχ. 27-γ. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

Ἂς βροῦμε πρῶτα τὸν γενικὸ τύπο ποὺ δίνει τὸ μῆκος λ ἑνὸς τόξου ν^0 (ν μοιρῶν) μιᾶς περιφέρειας μὲ ἀκτίνα R. Συλλογιζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Μιὰ ἡμιπεριφέρεια εἶναι τόξο 180^0 καὶ ἔχει μῆκος πR, ἄρα ἕνα τόξο 1^0 (μιᾶς μοίρας) ἔχει μῆκος $\dfrac{\pi R}{180}$ καὶ ἕνα τόξο ν^0 (ν μοιρῶν) θὰ ἔχῃ μῆκος $\dfrac{\pi R \nu}{180}$.

Ὥστε ὁ γενικὸς τύπος εἶναι:

$$\lambda = \frac{\pi R \nu}{180}, \quad \text{ὅπου τὸ } \nu \text{ σημαίνει μοῖρες.}$$

Μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα

$\nu = 35^0\ 12' = 35^0 \dfrac{12}{60} = 35^0 \dfrac{2}{10} = 35^0{,}2$ καὶ $R = 16\ cm$, θὰ ἔχωμε λοιπόν:

$$\text{μῆκος τόξου } 35^0\ 12' \simeq \frac{3{,}141\,6 \cdot 16 \cdot 35{,}2}{180} \simeq 9{,}8 \; cm.$$

5. Ἐφαρμογή. *Ποιὰν ἀκτίνα ἔχει ὁ κύκλος μὲ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα: ἂν μετρήσωμε μιὰν ὁποιαδήποτε ἐπίκεντρη γωνία του σὲ* *μοῖρες καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀντίστοιχου σ' αὐτὴν κυκλικοῦ τόξου σὲ cm νὰ βρίσκωμε δυὸ ἴσους ἀριθμούς;*

Γιὰ νὰ βροῦμε αὐτὴν τὴν ἀκτίνα, ἀντικαθιστοῦμε μέσα στὸν τύπο $\lambda = \frac{\pi R \nu}{180}$ τὸ ν μὲ τὸ λ, ποὺ θέλομε νὰ τοῦ εἶναι ἴσο:

$$\lambda = \frac{\pi R \lambda}{180}.$$

Ἁπλοποιοῦμε τώρα αὐτὴν τὴ σχέση διαιρώντας καὶ τὰ δυὸ μέλη της διὰ τοῦ λ· παίρνομε ἔτσι γιὰ τὴ ζητούμενη ἀκτίνα R (σὲ cm) τὴν ἐξίσωση:

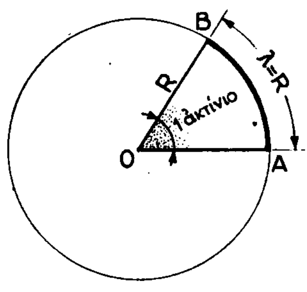
$$1 = \frac{\pi R}{180},$$

ἀπὸ τὴν ὁποία συμπεραίνομε ὅτι:

$$R = \frac{180}{\pi} \simeq \frac{180}{3{,}141\,6} = 180 \cdot \frac{1}{3{,}141\,6} = 180 \cdot 0{,}318\,3 \simeq 57{,}3\ cm.$$

6. Ἀκτίνιο. Μιὰ ἄλλη ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου $\lambda = \frac{\pi R \nu}{180}$ εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

Νὰ ὑπολογισθῇ σὲ μοῖρες ἡ τιμὴ τῆς ἐπίκεντρης γωνίας ποὺ τὸ ἀντίστοιχο τόξο της ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὴν ἀκτίνα R τοῦ κύκλου (σχ. 27-δ).



Σχ. 27-δ. Ἕνα ἀκτίνιο ἰσοῦται μὲ 57°18′ περίπου.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ζητούμενο, ἀρκεῖ μέσα στὸν τύπο $\lambda = \frac{\pi R \nu}{180}$ νὰ πάρωμε τὸ λ ἴσο μὲ τὸ R:

$$R = \frac{\pi R \nu}{180}.$$

Διαιρώντας τώρα καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς τελευταίας ἐξίσωσης διὰ τοῦ R, βρίσκομε:

$$1 = \frac{\pi \nu}{180} \quad \text{καὶ ἐπομένως} \quad \nu = \frac{180^{\circ}}{\pi} \simeq 57^{\circ}{,}3 = 57^{\circ}\ 18'.$$

Ἡ γωνία ποὺ προσδιορίσαμε μ' αὐτὸν τὸν τρόπο λέγεται *ἀκτίνιο*, γιατὶ ὅταν τὴν κάμωμε ἐπίκεντρη σ' ἕναν κύκλο, τὸ τόξο ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὴν ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου. Ὅπως βρήκαμε, μιὰ γωνία ἑνὸς ἀκτινίου εἶναι ἴση μὲ μιὰ γωνία $\frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57{,}3$ μοιρῶν· ἀντιστρόφως, μιὰ γωνία μιᾶς μοίρας ἰσοδυναμεῖ μὲ μιὰ γωνία $\frac{\pi}{180} \simeq \frac{1}{57{,}3}$ ἀκτινίου.

Ἀκτίνιο λέγεται καὶ τὸ τόξο μιᾶς ὁποιασδήποτε περιφέρειας τὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ ἐπίκεντρη γωνία ἑνὸς ἀκτινίου· τὸ τόξο αὐτὸ ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὴν ἀκτίνα R τῆς περιφέρειας καὶ μετριέται σὲ μοῖρες ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ $\frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57^\circ{,}3$. Σύμφωνα μ' αὐτά, σὲ μιὰ περιφέρεια ποὺ ἔχει ἀκτίνα $R\,cm$, ἕνα τόξο a ἀκτινίων ἔχει μῆκος $Ra\,cm$.

Τὸ διεθνικὸ σύμβολο γιὰ τὸ ἀκτίνιο εἶναι τὸ : *rad*.

Ἀσκήσεις. *1.* Σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα $10\,cm$ ἐσωγράφομε ἕνα κυρτὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ 64 πλευρές. Ὑπολογίστε (μὲ τὴ βοήθεια τοῦ θεωρήματος τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ πίνακα τῶν ἡμιτόνων) πρῶτα τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, ἔπειτα τὴν περίμετρό του καὶ τέλος τὸ λόγο τῆς περιμέτρου πρὸς τὴ διάμετρο τοῦ κύκλου. Τί παρατηρεῖτε;

2. Σ' ἕναν κύκλο ποὺ ἔχει ἀκτίνα $15{,}5\,cm$ πόσο εἶναι τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου $63^\circ\,30'$;

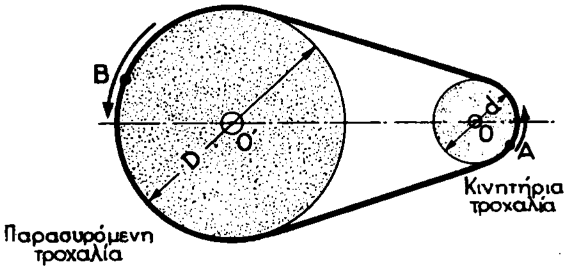
3. Μιὰ τροχαλία μὲ διάμετρο $d = 220\,mm$ στρέφεται μὲ ταχύτητα 100 στρ/min (σχ. 27·ε).

1ο. Ποιά εἶναι σὲ m/min ἡ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ σημείου A αὐτῆς τῆς τροχαλίας;

2ο. Ἂν παραμελήσωμε τὸ γλίστρημα, ποιά εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ σημείου B τῆς παρασυρόμενης τροχαλίας;

3ο. Ποιά εἶναι ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τῆς παρασυρόμενης τροχαλίας, ἂν ἡ διάμετρός της εἶναι $D = 600\,mm$;

4. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπαφῆς λουριοῦ καὶ τροχαλίας



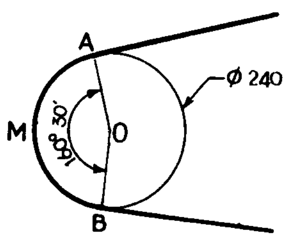
Σχ. 27-ε.

ποὺ παριστάνονται στὸ σχ. 27-ϛ. (Οἱ διαστάσεις δίνονται σὲ mm).

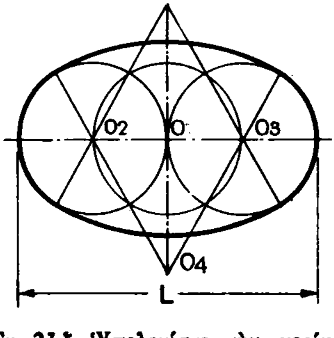
5. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα μιᾶς τροχαλίας εἶναι 175 $στρ/min$. Πόση εἶναι ἡ περιστροφικὴ αὐτὴ ταχύτητα, ἂν τὴν ἐκφράσωμε σὲ ἀκτίνια ἀνὰ δευτερόλεπτο (rad/sec).

6. Ὑπολογίστε τὴν περίμετρο τῆς ᾠοειδοῦς τοῦ σχήματος 27-ζ, ὅταν $L = 40\ cm$.

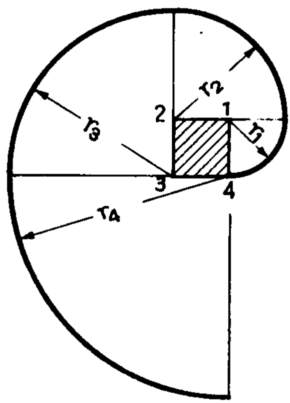
7. Τὸ σκιασμένο τετράγωνο τοῦ σχήματος 27-η ἔχει πλευρὰ μήκους $5\ cm$. Μὲ κέντρα τὶς κορυφές του 1, 2, 3, 4



Σχ. 27-ϛ. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AMB}$.

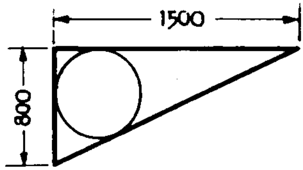


Σχ. 27-ζ. Ὑπολογίστε τὴν περίμετρο αὐτῆς τῆς ᾠοειδοῦς.



Σχ. 27-η. Ἕλικα τῶν τεσσάρων κέντρων.

καὶ μὲ ἀκτίνες ποὺ φαίνονται ἀπὸ τὸ σχῆμα, χαράζομε διαδοχικὰ τέσσερα τεταρτοκύκλια. Αὐτὰ συναρμόζονται (βλ. Τόμ. Β', Μάθ. 42) καὶ ἀποτελοῦν ἕνα τόξο ἀπὸ μιὰν ἕλικα τεσσάρων κέντρων (βλ. καὶ Τόμ. Β', Μάθ. 43, Ἄσκ. 5). Ὑπολογίστε τὸ μῆκος αὐτοῦ τοῦ χαραγμένου τόξου.



Σχ. 27-θ. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῶν σιδερένιων ράβδων γιὰ τὴν κονσόλα αὐτή.

8. Ποιό εἶναι τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν σιδερένιων ράβδων ποὺ χρειάζεται ἡ κατασκευὴ τῆς κονσόλας τοῦ σχήματος 27-θ ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

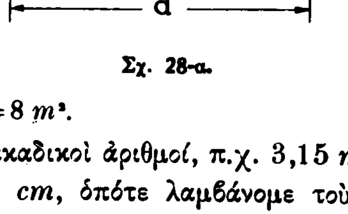
Μάθημα 28.

Ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ τριγώνου.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς σχήματος, τὴ συγκρίνομε μὲ τὴν ἐπιφάνεια ποὺ παίρνομε γιὰ μονάδα ἐπιφανειῶν, δηλαδὴ μὲ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ποὺ ἔχει πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους ποὺ διαλέξαμε (βλ. καὶ Τόμ. Α', Μαθ. 34 - 35). Ὁ ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει ἀπ' αὐτὴ τὴ μέτρηση λέγεται, ὅπως ξέρομε, *ἐμβαδὸ* τοῦ σχήματος.

1. Πρόταση. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν δυὸ διαστάσεών του: τοῦ μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος.

1ο Ἂν οἱ διαστάσεις εἶναι π.χ. 4 *m* καὶ 2 *m* (σχ. 28-α), τότε τὸ ὀρθογώνιο μπορεῖ νὰ χωρισθῇ σὲ δυὸ σειρὲς ἀπὸ 4 τετράγωνα μὲ πλευρὰ 1 *m*. Ἐπομένως τὸ ἐμβαδό του μὲ μὲ μονάδα τὸ 1 m^2 εἶναι:



Σχ. 28-α.

$$(4 \cdot 2)\, m^2 = 8\, m^2.$$

2ο. Ἂν οἱ διαστάσεις εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί, π.χ. 3,15 *m* καὶ 2,50 *m*, τότε τὶς ἐκφράζομε σὲ *cm*, ὁπότε λαμβάνομε τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς 315 *cm* καὶ 250 *cm*. Ἐπομένως μποροῦμε τώρα νὰ χωρίσωμε τὸ ὀρθογώνιο σὲ 250 σειρὲς ἀπὸ 315 τετράγωνα, τὸ καθένα μὲ πλευρὰ 1 cm. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου σὲ cm^2 εἶναι $315 \cdot 250\ cm^2$ καὶ ἑπομένως σὲ m^2

$$\frac{315 \cdot 250}{10\,000} = (3{,}15 \cdot 2{,}50)\ m^2 = 7{,}875\ m^2.$$

Ὥστε καὶ στὶς δυὸ παραπάνω περιπτώσεις, τὸ ἐμβαδὸ τὸ βρίσκομε πολλαπλασιάζοντας τὸ μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ πλάτος του.

Γενικὰ γιὰ τὸ ἐμβαδὸ F ἑνὸς ὀρθογωνίου ἔχομε τὸν τύπο

$$F = \alpha\beta,$$

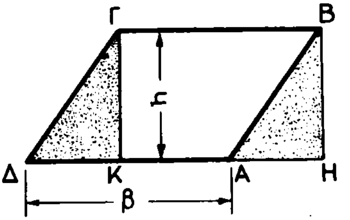
ὅπου α εἶναι τὸ μῆκος, β τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου, μετρημένα μὲ μιὰ μονάδα μήκους τῆς ἐκλογῆς μας καὶ ὅπου μονάδα ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ ἀντίστοιχο τετράγωνο, δηλαδὴ ἐκεῖνο ποὺ ἔχει πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους ποὺ διαλέξαμε.

Συνέπεια. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ α εἶναι $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$, πρᾶγμα ποὺ ἐκφράζομε ἔτσι:

Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνο τῆς πλευρᾶς του.

2. Πρόταση. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο μιᾶς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχο ὕψος.

Στὸ παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 28-β) κατεβάζομε ἀπὸ τὶς κορυφὲς B καὶ Γ τὶς καθέτους BH καὶ ΓK. Τὰ δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα AHB καὶ $\Delta K\Gamma$ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα ἴση καὶ μιὰν ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς ἐπίσης ἴση: $BH = \Gamma K$. Ἄρα εἶναι ἴσα (Τόμ. Β΄, Μάθ. 32, § 3). Ἑπομένως τὸ παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸ μὲ τὸ ὀρθογώνιο $HB\Gamma K$,



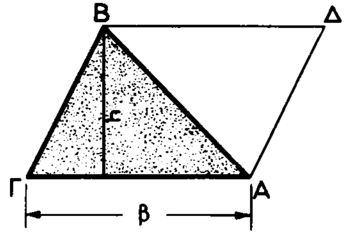
Σχ. 28-β.

δηλαδή: $$F = \beta \cdot h.$$

3. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ γινόμενο μιᾶς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχο ὕψος.

Ἀπὸ τὴν κορυφὴ A τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 28-γ) ἂς χαράξωμε τὴν παράλληλο πρὸς τὴν πλευρὰ $B\Gamma$ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ B, τὴν παράλληλο πρὸς τὴν πλευρὰ ΓA. Τὸ τρίγωνο $A\Delta B$ ποὺ σχηματίζεται τότε, ἔχει τὶς τρεῖς πλευρές του ἀντίστοιχα ἴσες πρὸς τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου $B\Gamma A$:

$A\Delta = B\Gamma,\ \Delta B = \Gamma A,\ BA = AB.$



Σχ. 28-γ. $F = \frac{\beta h}{2}$.

Ἑπομένως τὰ δυὸ αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (Τόμ. Β΄, Μάθ. 32, § 1). Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ θὰ εἶναι λοιπὸν ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου $A\Delta B\Gamma$, δηλαδὴ

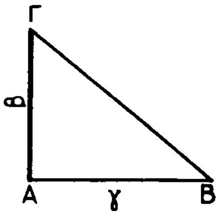
$$F = \frac{\beta \cdot h}{2}.$$

4. Μερικὲς εἰδικὲς περιπτώσεις. *1η. Ἐμβαδὸ ὀρθογώνιου τριγώνου.* Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 28-δ), τὸ ὕψος τὸ ἀντίστοιχο σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς εἶναι ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ὀρθογώνιου στὸ A, ἰσοῦται μὲ

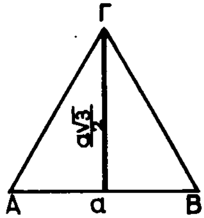
$$F = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}.$$

2η. Ἐμβαδὸ τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου. Τὸ ὕψος τὸ ἀντίστοιχο σὲ μιὰ πλευρὰ α τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 28-ε), εἶναι ἴσο μὲ $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (Μάθ. 25, § 2)· ἄρα τὸ ἐμβαδό του εἶναι:

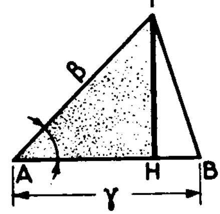
$$F = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$



Σχ. 28-δ. Ἐμβαδὸ ὀρθογώνιου τριγώνου: $F = \frac{\beta\gamma}{2}$.



Σχ. 28-ε. Ἐμβαδὸ ἰσόπλευρου τριγώνου: $F = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.



Σχ. 28-ς. Ἐμβαδὸ ἑνὸς ὁποιουδήποτε τριγώνου: $F = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}$.

5. Ἐμβαδὸ ἑνὸς ὁποιουδήποτε τριγώνου. Στὸ τρίγωνο $AB\Gamma$ μὲ τὴν ὀξεία γωνία $\widehat{A}$ (σχ. 28-ς), τὸ ὕψος ΓH, τὸ ἀντίστοιχο στὴν πλευρὰ γ τοῦ τριγώνου, εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\beta \cdot \eta\mu\, \widehat{A}$ (θεώρημα τοῦ ἡμιτόνου, ἐφαρμοσμένο στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $\Gamma H A$). Ἄρα τὸ ἐμβαδὸ ἰσοῦται μὲ

$$F = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \beta\, \eta\mu\, A = \frac{\beta\gamma\, \eta\mu\, \widehat{A}}{2}.$$

Παρατήρηση. Στὴν περίπτωση ποὺ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι ἀμβλεία, τὸ ὕψος ΓH ἰσοῦται μὲ $\beta \cdot \eta\mu\, (180^\circ - \widehat{A})$ καὶ ὁ τελευταῖος τύπος γίνεται:

$$F = \frac{\beta\gamma\, \eta\mu (180^\circ - \widehat{A})}{2}.$$

(Πρβ. καὶ Ἄσκ. 7).

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

1ο. $\beta = 15\, cm$, $\gamma = 12\, cm$, $\widehat{A} = 36^\circ$.

$$F = \frac{15 \cdot 12 \cdot \eta\mu\, 36^\circ}{2} = 90 \cdot 0{,}588 = 52{,}92\, cm^2$$

2ο. $\beta = 25\, cm$, $\gamma = 18\, cm$, $\widehat{A} = 105^\circ$.

$$F = \frac{25 \cdot 18 \cdot \eta\mu\, 75^\circ}{2} = 225 \cdot 0{,}966 = 217{,}35\, cm^2$$

Ἀσκήσεις. *1.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου μὲ μιὰ ὀξεία γωνία 30° καὶ μὲ ὑποτείνουσα $50\ cm$.

2. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ἰσόσκελου τριγώνου μὲ δυὸ γωνίες 30° καὶ μὲ μῆκος ἴσων πλευρῶν $25\ cm$.

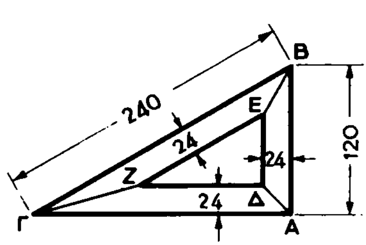
3. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τριγώνου ποὺ ἔχει δυὸ πλευρὲς ἴσες μὲ $40\ cm$, ἀντίστοιχα $30\ cm$ καὶ τὴ γωνία ἀνάμεσα σ' αὐτὲς τὶς δυὸ πλευρὲς ἴση μὲ $29^\circ\ 30'$.

4. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις, μῆκος καὶ πλάτος, ἑνὸς φύλλου χαρτιοῦ γιὰ σχέδιο, ξέροντας ὅτι ἡ ἐπιφάνειά του ἰσοῦται μὲ $1\ m^2$ καὶ ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους πρὸς τὸ πλάτος του εἶναι ἴσος μὲ $\sqrt{2}$.

5. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει ἐμβαδὸ $875\ m^2$, ξέροντας ὅτι ὁ λόγος τῶν διαστάσεών του εἶναι ἴσος μὲ $^5/_7$.

6. Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει πλευρὲς σταθεροῦ μήκους 40 καὶ $60\ cm$, τὸ φανταζόμασθε ὅμως ἀρθρωτὸ στὶς τέσσερις κορυφές του, ἔτσι ποὺ οἱ γωνίες του (ἑπομένως καὶ τὸ σχῆμα του) νὰ μποροῦν νὰ μεταβληθοῦν. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδό του στὶς ἀκόλουθες τρεῖς περιπτώσεις τιμῶν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του: 30°, 45°, 60°.

7. Χαράξτε ἕνα τρίγωνο $ΑΒΓ$ μὲ τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα: $ΑΒ = 5\ cm$, $ΑΓ = 7\ cm$, $\widehat{A} = 137^\circ$. Ἀπὸ τὴν κορυφὴ $Γ$ κατεβάστε τὸ ὕψος $ΓΗ$, τὸ ἀντίστοιχο στὴν πλευρὰ $ΑΒ$, καὶ ὑπολογίστε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ θεωρήματος τοῦ ἡμιτόνου τὸ ὕψος τοῦτο. Ὕστερα ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου.



Σχ. 28-ζ.

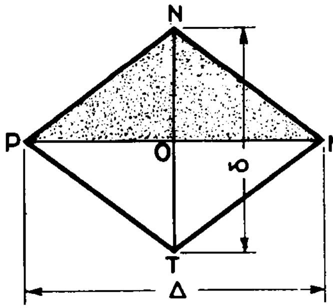
8. Ὑπολογίστε μὲ τὰ δεδομένα τοῦ σχήματος 28-ζ 1ο τὸ μῆκος $ΑΓ$, 2ο τὶς γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{Γ}$, 3ο τὸ ἐμβαδὸ τῆς ξύλινης ἐπιφάνειας αὐτοῦ τοῦ διάκενου τριγώνου σχεδιάσεως (οἱ διαστάσεις τοῦ σχήματος δίνονται σὲ mm).

Μάθημα 29.

Ἐμβαδὸ τῶν πολυγώνων: ρόμβου, τραπεζίου, κυρτῶν κανονικῶν πολυγώνων.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὁποιουδήποτε πολυγώνου, μποροῦμε νὰ ἀναλύσωμε (χωρίσωμε) τὸ πολύγωνο σὲ τρίγωνα καὶ νὰ ἀθροίσωμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων αὐτῶν. Ὅμως, στὴν περίπτωση μερικῶν ἀπὸ τὰ συνηθισμένα πολύγωνα, τὸ ἀποτέλεσμα μπορεῖ νὰ πάρῃ μιὰν ἁπλὴ μορφή.

1. Πρόταση. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ρόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τῶν διαγωνίων του.



Σχ. 29-α.

Καὶ ἀλήθεια, οἱ δυὸ διαγώνιοι PM καὶ NT τοῦ ρόμβου $MNPT$ (σχ. 29-α) τὸν χωρίζουν σὲ 4 ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα: OMN, ONP, OPT, OTM. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ἀπ' αὐτά, π.χ. τοῦ OMN, εἶναι ἴσο μὲ

$$\frac{1}{2}\, OM \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\delta}{2},$$

ἂν παραστήσωμε μὲ Δ καὶ δ τὰ μήκη τῶν δυὸ διαγωνίων. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ρόμβου εἶναι ἴσο μὲ

$$F = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{\Delta \cdot \delta}{2}.$$

2. Πρόταση. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τοῦ ἀθροίσματος τῶν δυὸ βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

Καὶ ἀλήθεια, ἡ διαγώνιος TN (σχ. 29-β) χωρίζει τὸ τραπέζιο $TMNP$ σὲ δυὸ τρίγωνα : TMN καὶ TNP. Γιὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομε :

$$\text{ἐμβ. } TMN = \frac{TM \cdot NH}{2} = \frac{B \cdot h}{2},$$

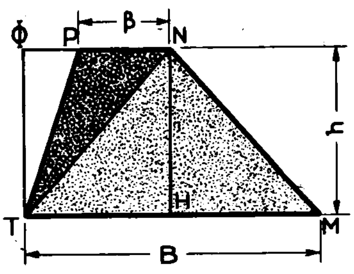
$$\text{ἐμβ. } TNP = \frac{PN \cdot T\Phi}{2} = \frac{\beta \cdot h}{2}.$$

Ἀθροίζοντας βρίσκομε :

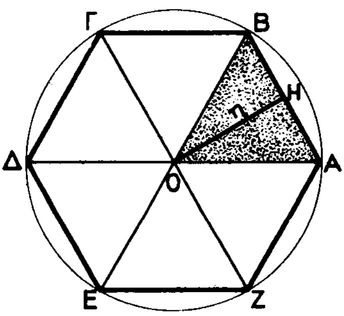
$$F = \text{ἐμβ. τραπεζίου } MNPT = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{\beta \cdot h}{2} = \frac{Bh + \beta h}{2}$$

ἄρα

$$F = \frac{(B+\beta)h}{2}.$$



Σχ. 29-β.



Σχ. 29-γ.

3. Πρόταση. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἀπόθημα τοῦ πολυγώνου.

Καὶ ἀλήθεια, ἂν χαράξωμε τὶς ἀκτίνες ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ περιγραμμένου κύκλου πρὸς τὶς ν κορυφὲς τοῦ πολυγώνου (στὸ σχ. 29-γ τὸ $\nu = 6$), τὸ πολύγωνο θὰ χωρισθῇ σὲ ν ἴσα ἰσόσκελα τρίγωνα (6 τρίγωνα στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος). Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha \cdot \eta}{2}$, ὅπου α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ η τὸ ἀπόθημά του. Ἐπο-

μένως τὸ ἐμβαδὸ F τοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ $\nu \cdot \frac{\alpha \cdot \eta}{2} = \frac{\nu\alpha \cdot \eta}{2}$.
Ἀλλὰ $\nu\alpha$ (δηλ. ν φορὲς ἡ πλευρὰ α) ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρο p τοῦ πολυγώνου, ἄρα

$$F = \frac{p \cdot \eta}{2}.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ρόμβου ποὺ ἔχει μιὰ διαγώνιο 20 *cm* καὶ μιὰ γωνία 120°. (Νὰ διακρίνετε δυὸ περιπτώσεις σχήματος).

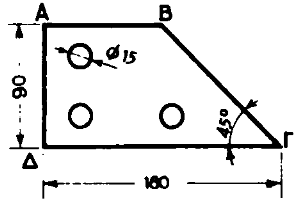
2. Ἡ διαγώνιος ἑνὸς ρόμβου εἶναι 36 *cm* ἡ μιὰ καὶ 48 *cm* ἡ ἄλλη. Ὑπολογίστε: 1ο τὴν πλευρὰ τοῦ ρόμβου, 2ο τὸ ἐμβαδό του, 3ο τὴν ἀπόσταση δυὸ ἀντικρυστῶν (δυὸ παράλληλων) πλευρῶν του.

3. Οἱ βάσεις ἑνὸς ὀρθογώνιου τραπεζίου ἔχουν μῆκος 15 καὶ 23 *cm* ἀντιστοίχως. Ἡ πλάγια πρὸς τὶς βάσεις πλευρά του ἔχει μῆκος 10 *cm*. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ.

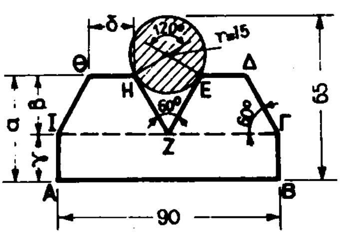
4. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ἰσόσκελου τραπεζίου ποὺ ἔχει μεγάλη βάση 40 *mm*, παρακείμενες σ' αὐτὴν γωνίες 30° καὶ πλάγιες πλευρὲς 10 *mm*.

5. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐσωγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτίνα 12 *m*.

6. Σὲ μιὰ ἀτσαλένια πλάκα $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 29-δ) μὲ πάχος 20 *mm*



Σχ. 29-δ.



Σχ. 29-ε.

ἀνοίγετε τρεῖς τρύπες μὲ διάμετρο 15 *mm*. Ὑπολογίστε:

1ο τὰ μήκη τῶν πλευρῶν AB καὶ $B\Gamma$,

2ο τὸ βάρος τῆς πλάκας πρὶν ἀπὸ τὸ τρύπημα καὶ ὕστερα ἀπ' αὐτὸ (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ἀτσαλιοῦ 7,8), 3ο τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τρυπανιοῦ, ἂν ἡ κοπτική του ταχύτητα εἶναι 20 m/min.

7. Σᾶς δίνουν ἕνα σιδερένιο κομμάτι μὲ διατομὴ ἡ ὁποία παριστάνεται στὸ σχῆμα 29-ε. Ὑπολογίστε :

1ο τὶς διαστάσεις α, β, γ, δ·

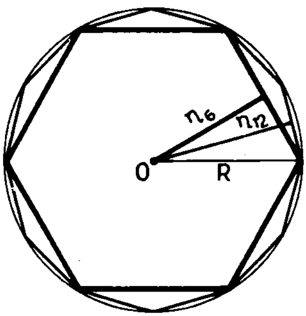
2ο τὸ ἐμβαδὸ τῆς διατομῆς·

3ο τὸν ὄγκο καὶ τὸ βάρος τοῦ κομματιοῦ, ἂν τὸ πάχος του εἶναι 150 mm καὶ ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ 7,8.

Μάθημα 30.

Ἐμβαδὸ κύκλου καὶ κυκλικῶν σχημάτων.

1. Ἂς ἐσωγράψωμε σὲ μιὰ περιφέρεια ἕνα κυρτὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ ν πλευρὲς ($\nu = 6$ στὸ σχ. 30-α). Τὸ ἐμβαδό του F_ν εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου.



Σχ. 30-α.

Ἐσωγράφομε τώρα στὴν ἴδια περιφέρεια ἕνα κυρτὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ διπλάσιο ἀριθμὸ πλευρῶν ($2\nu = 12$ στὸ σχῆμα). Τὸ ἐμβαδό του $F_{2\nu}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ F_ν, ἀλλὰ μικρότερο ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ F τοῦ κύκλου:

$$F_\nu < F_{2\nu} < F.$$

Τὴν παραπάνω κατασκευὴ μποροῦμε νὰ τὴν ἐπαναλάβωμε νοερά, ὅσες φορὲς θέλομε, καὶ νὰ ἐσωγράψωμε στὴν περιφέρεια κάθε φορὰ ἕνα κυρτὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ ἀριθμὸ πλευρῶν διπλάσιο ἀπὸ τὸν προηγούμενο. Τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν τῶν πολυγώνων πᾶνε αὐξάνοντας:

$$F_\nu < F_{2\nu} < F_{4\nu} < F_{8\nu} < \cdots$$

παραμένουν ὅμως ὅλα μικρότερα ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ F τοῦ κύκλου· πρὸς αὐτὸ πλησιάζουν ὁλοένα καὶ περισσότερο, σύμφωνα μὲ τὴν γεωμετρική μας παράσταση. Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ ἰδέα ποὺ ἔχομε στὸ νοῦ μας γιὰ τὸν κύκλο καὶ τὰ ἐσωγραμμένα σ' αὐτὸν κανονικὰ πολύγωνα, μᾶς πείθει ὅτι ἀληθεύει τὸ ἑξῆς:

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ F ἑνὸς κύκλου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ F_μ ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐσωγραμμένου σ' αὐτὸν τὸν κύκλο, γίνεται ὅσο θέλομε μικρή, φθάνει ὁ ἀριθμὸς μ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου νὰ παρθῆ ἀρκετὰ μεγάλος.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ὅριο πρὸς τὸ ὁποῖο τείνει (πρὸς τὸ ὁποῖο πλησιάζει ἀπεριόριστα) τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ἐσωγραφόμενου κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του αὐξάνῃ ἐπάπειρον.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τώρα τὸ ἐμβαδὸ F τοῦ κύκλου συναρτήσει τῆς ἀκτίνας του R, συλλογιζόμασθε ὡς ἑξῆς:

Τὸ ἐμβαδὸ F_μ τοῦ ἐσωγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τῆς περιμέτρου του p_μ ἐπὶ τὸ ἀπόθημα η_μ:

$$F_\mu = \frac{p_\mu \cdot \eta_\mu}{2}.$$

Ὅταν ὅμως ὁ ἀριθμὸς μ τῶν πλευρῶν αὐξάνῃ ἀπεριόριστα, ἡ περίμετρος p_μ διαφέρει ὅσο θέλομε λίγο ἀπὸ τὸ μῆκος $2\pi R$ τῆς περιφέρειας, τὸ ἀπόθημα η_μ διαφέρει ὅσο θέλομε λίγο ἀπὸ τὴν ἀκτίνα R καὶ τὸ ἐμβαδὸ F_μ ὅσο θέλομε λίγο ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ F τοῦ κύκλου. Ἄρα γιὰ τὸ F θὰ ἀληθεύῃ ὁ τύπος:

$$F = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2.$$

Ἂν ὀνομάσωμε $d = 2R$ τὴ διάμετρο τοῦ κύκλου θὰ ἔχωμε $\left(\text{ἐπειδὴ } R = \frac{d}{2}\right)$:

$$F = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

2. Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές. 1ο. *Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κύκλου ποὺ ἔχει διάμετρο 4,5 cm.*

Ὁ τύπος γιὰ τὸ ἐμβαδὸ μᾶς δίνει ἀμέσως:

$$F \simeq \frac{3{,}141\,6 \cdot 4{,}5^2}{4} = \frac{3{,}141\,6 \cdot 20{,}25}{4} \simeq 15{,}9\,cm^2.$$

2ο. *Ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου ποὺ ἔχει ἐμβαδὸ 40 cm^2.*

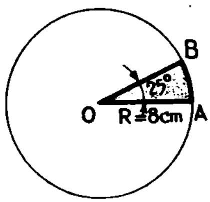
Ἔχομε γιὰ τὸ R τὴν ἐξίσωση:

$$40 = \pi R^2 \simeq 3{,}141\,6 \cdot R^2.$$

Ἄρα $$R^2 \simeq \frac{40}{3{,}141\,6} \simeq 40 \cdot 0{,}318\,3 = 12{,}732$$

καὶ $$R \simeq \sqrt{12{,}732} \simeq 3{,}6\ cm.$$

3. Ἐμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα. *Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τομέα ὁ ὁποῖος ὁρίζεται μέσα σ' ἕναν κύκλο ἀκτίνας $R = 8$ cm ἀπὸ δυὸ ἀκτίνες ποὺ σχηματίζουν γωνία 25^0* (σχ. 30-β).



Σχ. 30-β. $F = \dfrac{\pi R^2 \nu}{360}$.

Ἄς βροῦμε πρῶτα γενικὰ τὸ ἐμβαδὸ F τοῦ τομέα ὁ ὁποῖος ὁρίζεται μέσα σ' ἕναν κύκλο ἀκτίνας R ἀπὸ δυὸ ἀκτίνες ποὺ σχηματίζουν γωνία ν^0 (ν μοιρῶν). Τὸ ἡμικύκλιο εἶναι ἕνας τομέας μὲ ἐπίκεντρη γωνία 180^0 καὶ ἔχει ἐμβαδὸ $\dfrac{\pi R^2}{2}$.

Ὥστε :

ὁ τομέας μὲ ἐπίκεντρη γωνία 180^0 ἔχει ἐμβαδὸ $\dfrac{\pi R^2}{2}$,

» » » » » 1^0 θὰ ἔχῃ » $\dfrac{\pi R^2}{360}$

καὶ » » » » » ν^0 » » » $\dfrac{\pi R^2 \nu}{360}$.

Ἔχομε λοιπόν : $$F = \frac{\pi R^2 \nu}{360}.$$

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

1ο. Ὁ τομέας τοῦ προβλήματος ἔχει ἐπίκεντρη γωνία $\nu^0 = 25^0$ καὶ ἀκτίνα $R = 8\ cm$, ἄρα τὸ ἐμβαδό του ἰσοῦται μὲ

$$F \simeq \frac{3{,}141\,6 \cdot 8^2 \cdot 25}{360} \simeq 13{,}96\ cm^2.$$

2ο. Τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ παίρνομε ἀπὸ τὸν τύπο $F = \dfrac{\pi R^2 \nu}{360}$

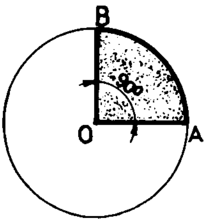
ἁπλουστεύεται στὴν περίπτωση ὅπου τὸ πηλίκο $\frac{360}{\nu}$ εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός.

Π.χ. γιὰ $\nu^0 = 90^0$ (σχ. 30-γ), ὁπότε $\frac{360}{\nu} = 4$, ὁ τομέας εἶναι ἕνα τέταρτο τοῦ κύκλου καὶ ἔχει ἐμβαδὸ

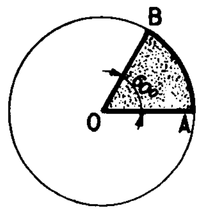
$$F = \frac{\pi R^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi R^2}{360 : 90} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Καὶ στὴν περίπτωση $\nu^0 = 60^0$ (σχ. 30-δ), ὁπότε $\frac{360}{60} = 6$, ὁ τομέας εἶναι ἕνα ἕκτο τοῦ κύκλου καὶ ἔχει ἐμβαδὸ

$$F = \frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi R^2}{360 : 60} = \frac{\pi R^2}{6}.$$



Σχ. 30-γ. $F = \frac{\pi R^2}{4}$.



Σχ. 30-δ. $F = \frac{\pi R^2}{6}$.

4. 'Εμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος. 'Απὸ τὸ σχ. 30-ε συμπεραίνομε ὅτι

ἐμβ. κυκλ. τμήματος $AMB =$ ἐμβ. τομέα $OAMB -$ ἐμβ. τριγ. OAB.

'Επομένως, ἂν ἡ ἐπίκεντρη γωνία τοῦ τομέα εἶναι π.χ. 60^0, τότε τὸ τρίγωνο OAB εἶναι ἰσόπλευρο καὶ γιὰ $R = 10\ cm$ θὰ ἔχωμε:

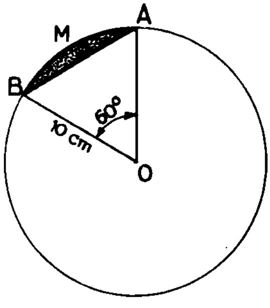
ἐμβ. κυκλικοῦ τμήματος $AMB = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$$\simeq \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 - \frac{10^2 \cdot 1{,}732}{4}$$

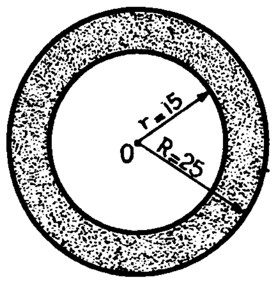
$$\simeq 52{,}33 - 43{,}3 \simeq 9\ cm^2.$$

5. Ἐμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ δακτυλίου. Ἀπὸ τὸ σχ. 30-ς συμπεραίνομε ὅτι

ἐμβ. δακτυλίου = ἐμβ. μεγάλου κύκλου — ἐμβ. μικροῦ κύκλου.



Σχ. 30-ε.
Κυκλικὸ τμῆμα = τομέας — τρίγωνο.



Σχ. 30-ς. Δακτύλιος = μεγάλος κύκλος — μικρὸς κύκλος.

Ἑπομένως, μὲ τὶς διαστάσεις στὸ σχῆμα 30-ς, θὰ ἔχωμε:

$$F = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2 = \pi \cdot (25^2 - 15^2)$$
$$\simeq 3{,}14 \cdot 400 = 1\ 256\ cm^2.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Ἡ περίμετρος ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου εἶναι 45 *cm*. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τῆς μιᾶς ὄψης τοῦ δίσκου.

2. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα μὲ ἐπίκεντρη γωνία 30° καὶ μὲ ἀκτίνα $R = 3\ cm$.

3. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος, ὅταν ἡ ἀκτίνα R εἶναι 40 *cm* καὶ ἡ ἐπίκεντρη γωνία ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κυκλικὸ τμῆμα 90°.

4. Ἕνας κυκλικὸς δακτύλιος ἔχει ἐξωτερικὴ περίμετρο 30 *cm* καὶ ἐσωτερικὴ 20 *cm*·

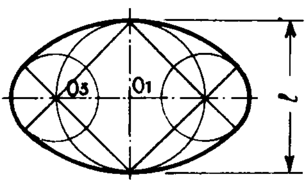
1ο. Ποιό εἶναι τὸ πάχος τοῦ δακτυλίου;

2ο. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδό του;

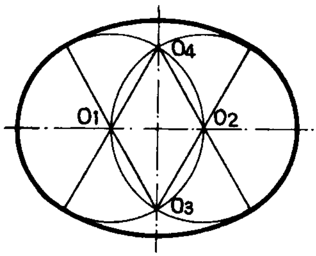
3ο. Δεῖξτε ὅτι τὸ ἐμβαδὸ αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε πολλαπλασιάζοντας τὸ μισὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῆς ἐξωτερικῆς καὶ τῆς ἐσωτερικῆς περιφέρειας ἐπὶ τὸ πάχος τοῦ δακτυλίου. (Θὰ κάμετε χρήση τῆς ταυτότητας $R^2 - r^2 = (R + r)\ (R - r)$ ποὺ ξέρετε ἀπὸ τὸν Τόμ. Β΄, Μάθ. 15, § 3).

5. Ξέροντας ὅτι ὁ μικρὸς ἄξονας l τῆς ὠοειδοῦς, ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 30-ζ, ἔχει μῆκος 10 *cm*, ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας ἡ ὁποία περιορίζεται ἀπὸ αὐτὴ τὴν κλειστὴ γραμμή.

6. Ξέροντας ὅτι ὁ μεγάλος ἄξονας τῆς ὠοειδοῦς τὴν ὁποία παριστάνει τὸ σχ. 30-η ἔχει μῆκος 18 *cm*, ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας ποὺ περιορίζεται ἀπὸ αὐτὴν τὴν κλειστὴ γραμμή.

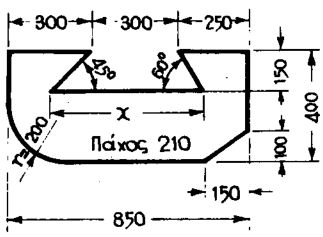


Σχ. 30 ζ.

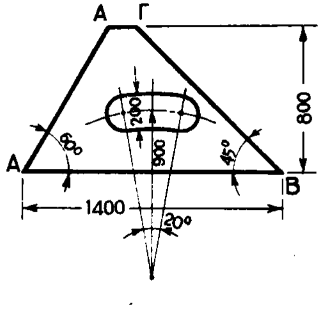


Σχ. 30-η.

7. Μὲ τὶς διαστάσεις σὲ *mm* ποὺ σημειώνονται στὸ σχ. 30-θ ὑπολογίστε $1^{ο}$ τὴ διάσταση x στὴ διατομὴ τοῦ παριστανόμενου χυτοσιδερένιου κομματιοῦ, $2^{ο}$ τὸ ἐμβαδὸ τῆς διατομῆς καὶ $3^{ο}$ τὸ βάρος τοῦ κομματιοῦ ξέροντας τὸ πάχος του 210 *mm* καὶ τὴ σχετικὴ πυκνότητα 7,2 τοῦ ὑλικοῦ.



Σχ. 30-θ.



Σχ. 30-ι.

8. Ἕνα φύλλο λαμαρίνας, σὲ σχῆμα τραπεζίου καὶ μὲ μιὰ ἐγκοπὴ στὸ μέσο, ἔχει πάχος 2,5 *mm*· οἱ διαστάσεις (σὲ *mm*) τοῦ τραπεζίου καὶ τῆς ἐγκοπῆς σημειώνονται στὸ σχ. 30-ι. Ὑπολογίστε τὸ βάρος αὐτοῦ τοῦ φύλλου, ξέροντας ἀκόμα τὴ σχετικὴ πυκνότητα 7,8 τοῦ ὑλικοῦ.

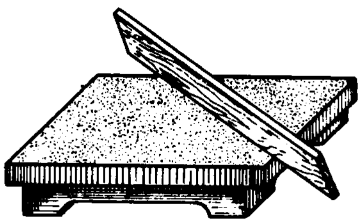
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ. ΠΟΛΥΕΔΡΑ. ΣΤΡΟΓΓΥΛΑ ΣΩΜΑΤΑ

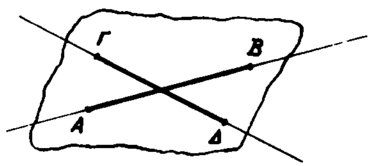
Μάθημα 31.

Ἐπίπεδα καὶ εὐθεῖες.

1. **Ἂς παρατηρήσωμε τὴν ἐπιφάνεια μιᾶς πλάκας ἐφαρμοστηρίου** (σχ. 31-α). Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι ἐπίπεδη· αὐτὸ τὸ ἐλέγχομε τοποθετώντας πάνω στὴν ἐπιφάνεια τὴν εὐθύγραμμη ἀκμὴ ἑνὸς κανόνα καὶ ἐξετάζοντας, ἂν τὰ σημεῖα τῆς ἀκμῆς βρίσκονται ὅλα ἀπάνω στὴν ἐπιφάνεια, ὅποια καὶ νὰ εἶναι ἡ θέση



Σχ. 31-α. Ἔλεγχος μιᾶς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας.



Σχ. 31-β. Ἐπίπεδο.

τῆς ἀκμῆς. Στὴν πράξη φυσικὰ ὁ ἔλεγχος αὐτὸς γίνεται γιὰ δυὸ μόνο τοποθετήσεις τῆς ἀκμῆς, τὴ μιὰ περίπου κάθετη πρὸς τὴν ἄλλη.

Ἂν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ περιέχονται σὲ μιὰ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια τὰ προεκτείνωμε μὲ τὸ νοῦ μας ἀπεριόριστα, θὰ προκύψη μιὰ ἀπεριόριστη ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ποὺ λέγεται ***ἐπίπεδο*** (σχ. 31-β).

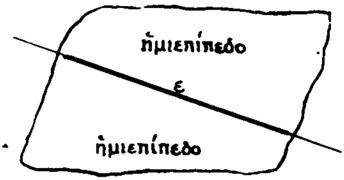
Ὥστε, *ἐπίπεδο εἶναι μιὰ ἀπεριόριστη ἐπιφάνεια μὲ τὴν ἀκό-*

λουθη ἰδιότητα: κάθε εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ δυὸ σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας ἔχει ὅλα της τὰ σημεῖα πάνω σ' αὐτὴν τὴν ἐπιφάνεια (περιέχεται ὁλόκληρη μέσα στὴν ἐπιφάνεια, ὅπως ἐπίσης λέμε).

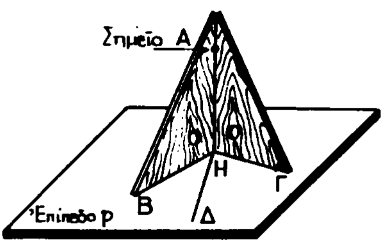
Ἐννοεῖται ὅτι στὰ σχήματα ποὺ σχεδιάζομε, μόνο ἕνα περιορισμένο κομμάτι τοῦ ἐπιπέδου μποροῦμε νὰ ἀναπαριστάνωμε.

Μιὰ εὐθεία ποὺ βρίσκεται μέσα σ' ἕνα ἐπίπεδο, τὸ χωρίζει σὲ δυὸ μέρη τὰ ὁποῖα λέγονται *ἡμιεπίπεδα* (σχ. 31-γ).

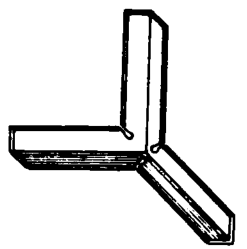
2. Ἐπίπεδο καὶ σημεῖο. Ὅταν ἕνα σημεῖο δὲν βρίσκεται μέσα σ' ἕνα ἐπίπεδο, ὅπως π.χ. τὸ *A* ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο *p* (σχ. 31-δ), τότε ὁρίζομε τὴν *ἀπόστασή* του ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο ὡς ἑξῆς: Παίρνομε δυὸ ὀρθόγωνα (δυὸ σχεδιαστικὰ τρίγωνα) καὶ τὰ στήνομε πάνω στὸ ἐπίπεδο μὲ τὸν τρόπο ποὺ φαίνεται ἀπὸ τὸ σχ. 31-δ. Ἡ κοινὴ ἀκμὴ *AH* τῶν ὀρθογώνων εἶναι μιὰ εὐθεία κάθετη καὶ στὴν εὐθεία *HB* καὶ στὴν εὐθεία *HΓ* τοῦ



Σχ. 31-γ. Ἡ εὐθεία χωρίζει τὸ ἐπίπεδο σὲ δυὸ ἡμιεπίπεδα.



Σχ. 31-δ. Ἡ εὐθεία AH εἶναι κάθετη στὸ ἐπίπεδο *p*.



Σχ. 31-ε. Ὀρθόγωνο μὲ τρία σκέλη.

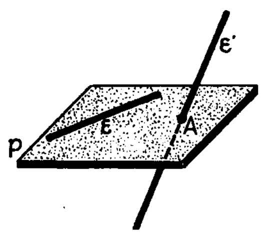
ἐπιπέδου *p*. Εὔκολα μπορεῖ κανεὶς νὰ ἐλέγξῃ ὅτι ἡ εὐθεία *AH* εἶναι *κάθετη καὶ πρὸς κάθε ἄλλη εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο H,* ὅπως π.χ. ἡ *HΔ*. Γι' αὐτὸ ἡ εὐθεία *AH* λέγεται *κάθετη πρὸς τὸ ἐπίπεδο p* καὶ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος *ΑΗ* λέγεται *ἀπόσταση τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο p*. Τὸ πόδι *Η* τῆς καθέτου λέγεται *ὀρθὴ προβολὴ τοῦ σημείου Α πάνω στὸ ἐπίπεδο p*.

Τὸ ὀρθόγωνο μὲ τρία σκέλη (σχ. 31-ε) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμε τὴν κάθετο πρὸς ἕνα ἐπίπεδο ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ ἕνα δοσμένο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου.

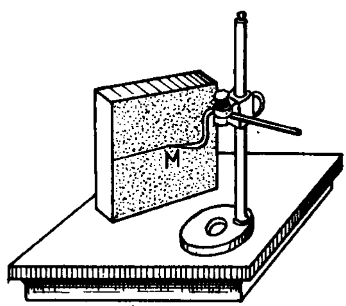
Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομε τὸ ἀκόλουθο χρήσιμο συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε πὼς μιὰ εὐθεία εἶναι κάθετη πρὸς ἕνα ἐπίπεδο, ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύσωμε ὅτι ἡ εὐθεία αὐτὴ ἔχει ἕνα κοινὸ σημεῖο μὲ τὸ ἐπίπεδο καὶ ὅτι εἶναι κάθετη πρὸς δυὸ εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ κοινὸ αὐτὸ σημεῖο.

3. Ἐπίπεδο καὶ εὐθεία. Ἡ εὐθεία μπορεῖ νὰ ἔχῃ ὡς πρὸς ἕνα ἐπίπεδο τὶς ἀκόλουθες τρεῖς θέσεις:



Σχ. 31-ς. Ἡ εὐθεία ε βρίσκεται μέσα στὸ ἐπίπεδο *p*, ἡ ε' τὸ διαπερνᾶ.



Σχ. 31-ζ. Ἡ εὐθεία ποὺ γράφει ἡ μύτη *Μ* εἶναι παράλληλη πρὸς τὸ ἐπίπεδο τῆς πλάκας.

1ο ἡ εὐθεία βρίσκεται μέσα στὸ ἐπίπεδο, ὅλα τὰ σημεῖα της εἶναι σημεῖα καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Αὐτὴ εἶναι ἡ περίπτωση τῆς εὐθείας *ε* καὶ τοῦ ἐπιπέδου *p* στὸ σχ. 31-ς.

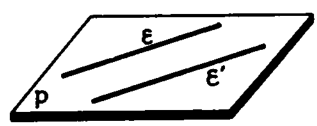
2ο ἡ εὐθεία διαπερνᾶ τὸ ἐπίπεδο, ἔχει ἕνα μόνο κοινὸ σημεῖο μὲ τὸ ἐπίπεδο. Παράδειγμα ἡ εὐθεία ε΄ καὶ τὸ ἐπίπεδο *p* (σχ. 31-ς) ποὺ ἔχουν ἕνα μόνο κοινὸ σημεῖο, τὸ *A*.

3ο ἡ εὐθεία δὲν ἔχει κανένα κοινὸ σημεῖο μὲ τὸ ἐπίπεδο· τότε ὅλα της τὰ σημεῖα βρίσκονται σὲ κάποια σταθερὴ ἀπόσταση ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο. Παράδειγμα ἡ εὐθεία τὴν ὁποία χαράζει τὸ σημαδευτήρι τοῦ ἐφαρμοστῆ πάνω στὴν ἐπίπεδη ὄψη τοῦ κομματιοῦ ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 31-ζ. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ εὐθεία λέγεται *παράλληλη πρὸς τὸ ἐπίπεδο.*

4. Σχετικὴ θέση δυὸ (διαφορετικῶν) εὐθειῶν. *1η περίπτωση. Οἱ δυὸ εὐθεῖες ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο.* Προσδιορίζουν τότε ἕνα ἐπίπεδο μέσα στὸ ὁποῖο περιέχονται. Παράδειγμα οἱ εὐθεῖες *AH* καὶ *HB* ποὺ παριστάνονται στὸ σχῆμα 31-δ καὶ ποὺ προσδιορίζουν τὸ ἐπίπεδο μιᾶς ὄψης τοῦ ὀρθογώνου *AHB*.

2η περίπτωση. Οἱ δυὸ εὐθεῖες δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο κι οὔτε ὑπάρχει κανένα ἐπίπεδο ποὺ νὰ τὶς περιέχῃ καὶ τὶς δυό. Παράδειγμα οἱ εὐθεῖες ε καὶ ε΄ ποὺ παριστάνονται στὸ σχ. 31-ς.

3η περίπτωση. Οἱ δυὸ εὐθεῖες δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο ἀλλὰ ὑπάρχει ἕνα ἐπίπεδο ποὺ νὰ τὶς περιέχῃ καὶ τὶς δυό. Παράδειγμα οἱ εὐθεῖες ε καὶ ε΄ τὶς ὁποῖες παριστάνει τὸ σχ. 31-η. Οἱ δυὸ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες, σύμφωνα μὲ ὅσα ξέρομε ἀπὸ τὸν Τόμ. Β΄, Μάθ. 34, καὶ προσδιορίζουν τὸ ἐπίπεδο ποὺ τὶς περιέχει.

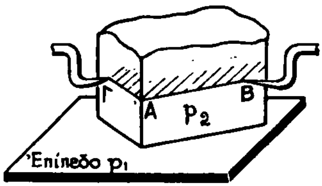


Σχ. 31-η.

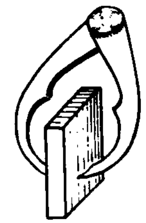
5. Σχετικὴ θέση δυὸ (διαφορετικῶν) ἐπιπέδων. *1η περίπτωση. Τὰ δυὸ ἐπίπεδα ἔχουν κοινὰ ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας·* μὲ ἄλλα λόγια, *τὰ δυὸ ἐπίπεδα κόβονται κατὰ μιὰ εὐθεία.* Παράδειγμα τὰ ἐπίπεδα *AHB* καὶ *AHΓ* τὰ ὁποῖα παριστάνει τὸ σχ. 31-δ.

2η περίπτωση. Τὰ δυὸ ἐπίπεδα δὲν ἔχουν κανένα σημεῖο κοινό.

Τὰ δυὸ ἐπίπεδα λέγονται τότε *παράλληλα*. Παράδειγμα τὸ ἐπίπεδο p_1 καὶ τὸ ἐπίπεδο p_2 τὸ ὁποῖο προσδιορίζουν οἱ εὐθεῖες AB καὶ $AΓ$ ποὺ ὁ ἐφαρμοστὴς ἐχάραξε μὲ τὸ σημαδευτήρι του (σχ. 31-θ) παράλληλες πρὸς τὸ p_1. Γενικά, ὅταν δυὸ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2 εἶναι παράλληλα, τότε ἡ ἀπόσταση τῶν διάφορων σημείων τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ ἄλλο εἶναι πάντα ἡ ἴδια. Αὐτὸ



Σχ. 31-θ. Τὸ ἐπίπεδο p_2 ποὺ προσδιορίζουν οἱ εὐθεῖες AB καὶ $AΓ$ εἶναι ∥ πρὸς τὸ p_1.



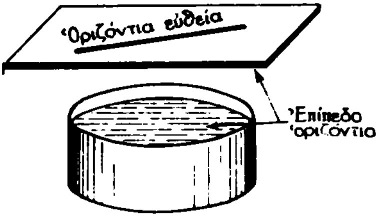
Σχ. 31-ι. Ἔλεγχος τῆς παραλληλίας δυὸ ἐπίπεδων ἐπιφανειῶν μὲ τὸ κομπάσο.

μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐπαληθεύσωμε τὴν παραλληλία δύο ἐπίπεδων ἐπιφανειῶν μιᾶς πλάκας (σχ. 31-ι), ἐξακριβώνοντας μὲ τὸ κομπάσο ὅτι τὸ πάχος τῆς πλάκας εἶναι παντοῦ τὸ ἴδιο.

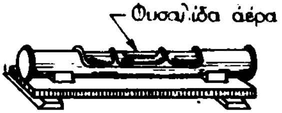
6. Εὐθεῖες καὶ ἐπίπεδα ὁριζόντια. Εὐθεῖες καὶ ἐπίπεδα κατακόρυφα. *1ο. Ἕνα ἐπίπεδο εἶναι ὁριζόντιο, ὅταν εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν ἐπιφάνεια ὑγροῦ ποὺ βρίσκεται σὲ ἠρεμία (ποὺ δὲν κινεῖται).* Ὅλες οἱ εὐθεῖες ἑνὸς τέτοιου ἐπιπέδου λέγονται *ὁριζόντιες* (σχ. 31-ια).

Τὴν ὁριζοντιότητα μιᾶς εὐθείας τὴν ἐπαληθεύομε μὲ μιὰ *ἀεροστάθμη* (σχ. 31-ιβ). Γιὰ νὰ ἐπαληθεύσωμε τὴν ὁριζοντιότητα ἑνὸς ἐπιπέδου, *ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύσωμε ὅτι δυὸ εὐθεῖες του, ποὺ τέμνονται, εἶναι ὁριζόντιες.*

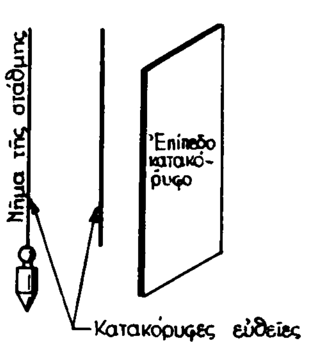
2ο. *Μιὰ εὐθεία εἶναι κατακόρυφη, ὅταν εἶναι παράλληλη πρὸς τὸ νῆμα τῆς στάθμης* (σχ. 31-ιγ). *Ἕνα ἐπίπεδο εἶναι κατακόρυφο, ὅταν εἶναι παράλληλο πρὸς μιὰ κατακόρυφη εὐθεία· ἀπὸ κάθε σημεῖο του περνᾶ τότε μιὰ κατακόρυφη εὐθεία ποὺ βρίσκεται ὁλόκληρη μέσα στὸ ἐπίπεδο.*



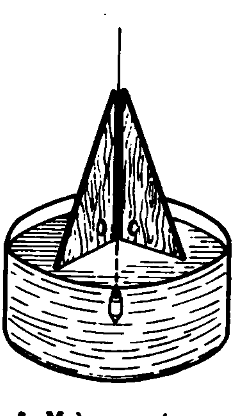
Σχ. 31-ια. Μιὰ εὐθεία εἶναι ὁριζόντια, ὅταν εἶναι παράλληλη πρὸς ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο.



Σχ. 31-ιβ. Ἀεροστάθμη (ἀλφάδι).



Σχ. 31-ιγ. Ἕνα ἐπίπεδο εἶναι κατακόρυφο, ὅταν εἶναι παράλληλο πρὸς μιὰ κατακόρυφη εὐθεία.



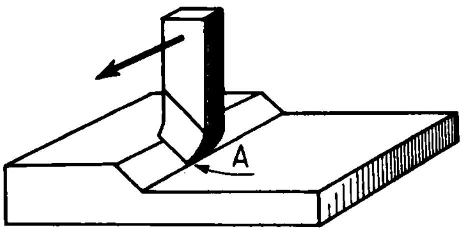
Σχ. 31-ιδ. Μιὰ κατακόρυφη εὐθεία εἶναι κάθετη πρὸς ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

Τὸ σχ. 31-ιδ δείχνει πῶς μποροῦμε μὲ τὸ πείραμα νὰ ἐπαληθεύσωμε ὅτι μιὰ κατακόρυφη εὐθεία εἶναι κάθετη πρὸς κάθε ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

Δυὸ κατακόρυφα, ὄχι παράλληλα ἐπίπεδα κόβονται κατὰ μιὰ κατακόρυφη εὐθεία. Ἔτσι, γιὰ νὰ ἐπαληθεύσωμε ὅτι μιὰ εὐθεία εἶναι κατακόρυφη, ἐξετάζομε ἂν τὴν βλέπομε νὰ βρίσκεται μέσα σὲ δυὸ διαφορετικὰ κατακόρυφα ἐπίπεδα, ποὺ τὸ καθένα τους προσδιορίζεται ἀπὸ τὸ νῆμα τῆς στάθμης καὶ ἀπὸ τὸ μάτι μας.

Ἀσκήσεις. *1.* Δυὸ ὁριζόντια ἐπίπεδα εἶναι ἄραγε πάντοτε παράλληλα; Δυὸ κατακόρυφα ἐπίπεδα εἶναι ἄραγε πάντοτε παράλληλα; Δυὸ κατακόρυφες εὐθεῖες εἶναι ἄραγε πάντοτε παράλληλες; Δυὸ ὁριζόντιες εὐθεῖες εἶναι ἄραγε πάντοτε παράλληλες; Δῶστε ἀπαντήσεις ἀναφέροντας καὶ παραδείγματα γιὰ τὴν καθεμιά.

2. Παρατηρῆστε τὴν κίνηση τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου μιᾶς πλάνης (σχ. 31-ιε) καὶ πῆτε: 1ο τί γραμμὴ γράφει τὸ σημεῖο *Α* τοῦ ἐργαλείου



Σχ. 31-ιε.

σὲ μιὰ διαδρομὴ κοπῆς, 2ο τί εἴδους ἐπιφάνειαν γεννᾶ ἡ γραμμὴ αὐτὴ μὲ τὸ προχώρημα τοῦ κομματιοῦ;

3. Ἕνα ἐπίπεδο προσδιορίζεται μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀκόλουθους 4 τρόπους:

Μᾶς δίνουν:

1ο τρία σημεῖα του ποὺ δὲν βρίσκονται πάνω σὲ εὐθεία·

2ο ἕνα σημεῖο του καὶ μιὰν εὐθεία του ἡ ὁποία δὲν περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτό·

3ο δυὸ εὐθεῖες του ποὺ τέμνονται·

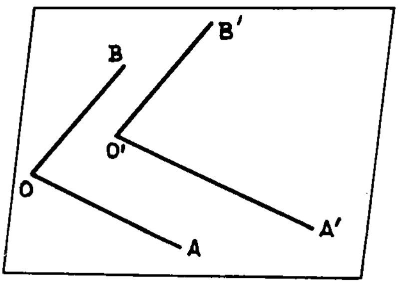
4ο δυὸ εὐθεῖες του παράλληλες.

Φτιάξτε ἕνα σχέδιο γιὰ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς 4 αὐτοὺς τρόπους. Ποιοί εἶναι οἱ ἀντίστοιχοι 4 τρόποι νὰ ὑψώσωμε μὲ κατάλληλα ὑποστηρίγματα τὴν ἐπίπεδη βάση ἑνὸς κομματιοῦ τὸ ὁποῖο θέλομε νὰ κατεργασθοῦμε;

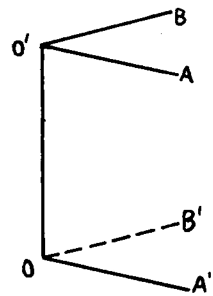
Μάθημα 32.

Γωνία δυὸ εὐθειῶν στὸ χῶρο.
Δίεδρη γωνία.

1. **Δυὸ γωνίες $\widehat{AOB}$ καὶ $A'\widehat{O'}B'$ ποὺ ἔχουν τὶς πλευρές τους OA καὶ $O'A'$, OB καὶ $O'B'$ παράλληλες καὶ ὁμόρροπες** (δηλ. μὲ τὴν ἴδια φορὰ) εἶναι πάντα ἴσες, εἴτε βρίσκονται μέσα σ' ἕνα καὶ τὸ ἴδιο ἐπίπεδο (σχ. 32-α) εἴτε ὄχι (32-β). Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα μᾶς ὁδηγεῖ στὶς ἀκόλουθες παρατηρήσεις:



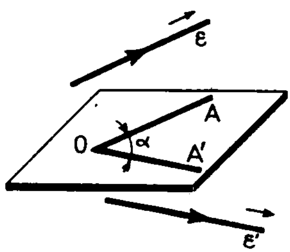
Σχ. 32-α.



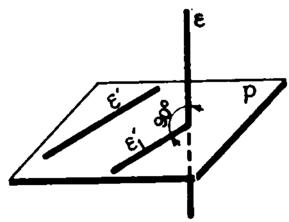
Σχ. 32-β.

Ἄς εἶναι $\vec{\varepsilon}$ καὶ $\vec{\varepsilon}'$ δυὸ προσανατολισμένες εὐθεῖες στὸ χῶρο (σχ. 32-γ), δηλαδὴ δυὸ εὐθεῖες πάνω στὶς ὁποῖες διαλέξαμε καὶ ἀπὸ μία φορὰ (ἡ φορὰ αὐτὴ σημειώνεται στὸ σχῆμα μ' ἕνα βέλος). Ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο O τοῦ χώρου φέρνομε μιὰν ἡμιευθεία OA παράλληλη καὶ ὁμόρροπη μὲ τὴν $\vec{\varepsilon}$ καὶ μιὰν ἡμιευθεία OA' παράλληλη καὶ ὁμόρροπη μὲ τὴν $\vec{\varepsilon}'$. Ἡ γωνία $A\widehat{O}A'$ ἔχει πάντα τὸ ἴδιο μέγεθος, ὅποιο καὶ νὰ εἶναι τὸ σημεῖο O ἀπὸ τὸ ὁποῖο ξεκινοῦν οἱ ἡμιευθεῖες OA καὶ OA'· γι' αὐτὸ τὴ λέμε ***γωνία τῶν προσανατολισμένων εὐθειῶν*** $\vec{\varepsilon}$ ***καὶ*** $\vec{\varepsilon}'$. Ἄν τὴν μετρήσωμε σὲ μοῖρες, θὰ βροῦμε ἕναν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος εἶναι $\geq 0^0$ καὶ

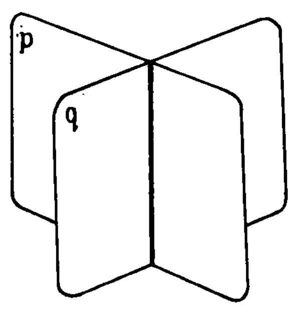
$\leq 180^0$. Στὴν περίπτωση ποὺ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι 90^0 (μὲ ἄλλα λόγια, ὅταν ἡ $\widehat{AOA'}$ εἶναι ὀρθή), τότε οἱ εὐθεῖες ε καὶ ε' λέγονται *ὀρθογώνιες ἡ μιὰ πρὸς τὴν ἄλλη*. Ἔτσι π.χ. μιὰ ὁποιαδήποτε κατακόρυφη εὐθεία εἶναι ὀρθογώνια πρὸς μιὰν ὁποιαδήποτε ὁριζόντια εὐθεία. Ἐπίσης, μιὰ εὐθεία ε κάθετη πρὸς ἕνα ἐπίπεδο p (σχ. 32-δ) εἶναι ὀρθογώνια πρὸς μιὰν ὁποιαδήποτε εὐθεία ε' τοῦ ἐπιπέδου p.



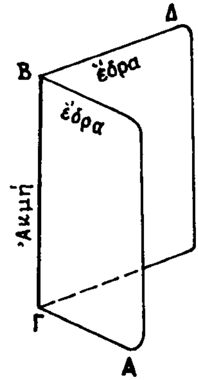
Σχ. 32-γ.



Σχ. 32-δ. Ἡ εὐθεία *ε* εἶναι ὀρθογώνια πρὸς τὴν εὐθεία *ε'* τοῦ ἐπιπέδου *p*.



Σχ. 32-ε.



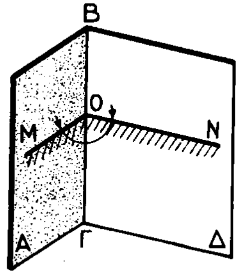
Σχ. 32-ς.

2. Δίεδρη γωνία. Δύο ἐπίπεδα p καὶ q ποὺ κόβονται κατὰ μιὰ εὐθεία (σχ. 32-ε), διαιροῦν (χωρίζουν) τὸ χῶρο σὲ 4 μέρη· τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ λέγεται *δίεδρη γωνία*.

Ὥστε, δίεδρη γωνία εἶναι ἕνα μέρος τοῦ χώρου τὸ ὁποῖο περιορίζεται ἀπὸ δυὸ ἡμιεπίπεδα ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὴν ἴδια εὐθεία (σχ. 32-ς).

Ἡ εὐθεία αὐτὴ λέγεται *ἀκμὴ* τῆς δίεδρης γωνίας καὶ τὰ ἡμιεπίπεδα λέγονται *ἕδρες* της. Στὴ δίεδρη γωνία τοῦ σχ. 32-ς ἀκμὴ εἶναι ἡ εὐθεία $ΒΓ$ καὶ ἕδρες τὰ ἡμιεπίπεδα $ΓΒΑ$ καὶ $ΓΒΔ$· τὴ δίεδρη αὐτὴ γωνία θὰ τὴ σημειώνωμε μὲ τὸ συμβολισμὸ $\widehat{ΑΒΓΔ}$ ἢ $\widehat{ΑΓΒΔ}$.

Ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο $Ο$ τῆς ἀκμῆς μιᾶς δίεδρης γωνίας $\widehat{ΑΒΓΔ}$ (σχ. 32-ζ) ἂς φέρωμε τώρα μέσα στὶς ἕδρες $ΑΓΒ$ καὶ $ΒΓΔ$ τὶς δυὸ καθέτους $ΟΜ$ καὶ $ΟΝ$ πρὸς τὴν ἀκμὴ $ΒΓ$. Ἡ ἐπίπεδη γωνία $\widehat{ΜΟΝ}$ ἔχει τὸ ἴδιο πάντα μέγεθος, ὅποιο καὶ νὰ εἶναι τὸ σημεῖο $Ο$ τῆς ἀκμῆς ἀπὸ τὸ ὁποῖο ξεκινοῦμε· γι' αὐτὸ ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται *ἐπίπεδη γωνία ἀντίστοιχη στὴ δίεδρη* $\widehat{ΑΓΒΔ}$ καὶ χρησιμεύει στὴ μέτρηση τῆς δίεδρης γωνίας. Ἂς παρατηρήσωμε ἀκόμα ὅτι τὸ ἐπίπεδο $ΜΟΝ$ εἶναι κάθετο πρὸς τὴν ἀκμὴ $ΒΓ$· ἄρα ἡ ἐπίπεδη γωνία ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ δίεδρη προκύπτει, ἂν κόψωμε τὴ δίεδρη μ' ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρὸς τὴν ἀκμή της.



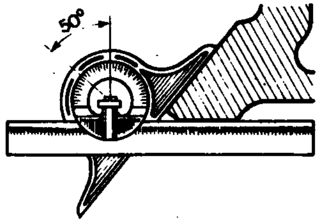
Σχ. 32-ζ. Ἡ $\widehat{ΜΟΝ}$ εἶναι ἡ ἐπίπεδη γωνία ἡ ἀντίστοιχη στὴ δίεδρη $\widehat{ΑΒΓΔ}$.

Τὸ σχῆμα 32-η δείχνει πῶς μετροῦμε μιὰ δίεδρη γωνία χρησιμοποιώντας ἕνα μοιρογνωμόνιο.

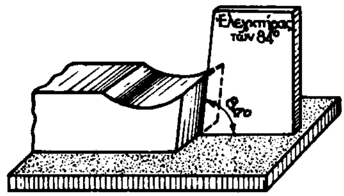
Τὸ σχ. 32-θ δείχνει πῶς ἐπαληθεύομε μὲ ἕνα ἐλεγκτῆρα ἐργαλείων ὅτι ἡ δίεδρη γωνία ποὺ σχηματίζουν δυὸ ἕδρες τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου ἑνὸς τόρνου εἶναι ἡ ζητούμενη.

Μιὰ δίεδρη γωνία λέγεται *ἁπλωτή*, ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη εἶναι ἁπλωτὴ (180^0), λέγεται *ὀρθή*, ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη εἶναι ὀρθὴ (90°)· μιὰ ὀρθὴ δίεδρη εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ μιᾶς ἁπλωτῆς.

Ἕνα ἐπίπεδο λέγεται *κάθετο πρὸς ἕνα ἄλλο*, ὅταν τὸ κόβη καὶ σχηματίζη μὲ αὐτὸ τέσσερις ὀρθὲς δίεδρες γωνίες. Ἕνα κα-



Σχ. 32-η. Μέτρηση μιᾶς δίεδρης μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο.

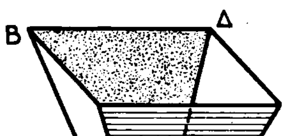


Σχ. 32-θ. Ἐπαλήθευση μιᾶς δίεδρης μὲ ἕνα ἐλεγκτήρα.

τακόρυφο ἐπίπεδο εἶναι κάθετο πρὸς κάθε ὁριζόντιο ἐπίπεδο· ἔτσι π.χ. τὸ ἐπίπεδο τοῦ τοίχου ἑνὸς δωματίου εἶναι κάθετο πρὸς τὸ ἐπίπεδο τοῦ πατώματος.

3. Γραφικὸς προσδιορισμὸς τοῦ μεγέθους μιᾶς δίεδρης γωνίας.

Τὸ μέγεθος τῆς ἐπίπεδης γωνίας, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ δίεδρη, μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε σχεδιαστικὰ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:



Σχ. 32-ι. Μιὰ σκάφη σὲ παράλληλη προβολή.

Ἄς πάρωμε γιὰ παράδειγμα τὴ δίεδρη γωνία ποὺ ἔχει ἀκμὴ τὴν AB καὶ σχηματίζεται ἀπὸ δυὸ πλευρικὲς ἕδρες τῆς σκάφης τὴν ὁποία παριστάνει τὸ σχ. 32-ι.

Παριστάνομε πρῶτα ἕνα μέρος τῆς σκάφης μὲ δυὸ ὀρθὲς προβολές του (σχ. 32-ια): μίαν πρώτη πάνω σὲ ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὴ βάση τῆς σκάφης (τὴν κάτοψη) καὶ μιὰ δεύτερη πάνω σὲ ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρὸς τὴν βάση ἀλλὰ παράλληλο πρὸς μιὰ πλευρά της (τὴν πρόσοψη).

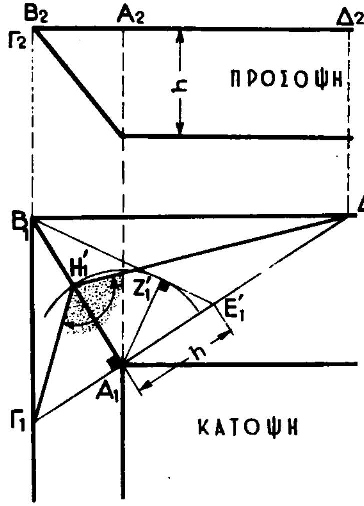
Ὕστερα ἐργαζόμασθε ὡς ἑξῆς:

1ο. Ἀπὸ τὸ σημεῖο A_1 τῆς κάτοψης χαράζομε τὴν κάθετο $Γ_1A_1Δ_1$ πρὸς τὴν εὐθεία A_1B_1. Πάνω σ' αὐτὴν τὴν κάθετο παίρνομε τὸ τμῆμα $A_1E'_1 = h =$ ὕψος τῆς σκάφης.

2ο. Ἀπὸ τὸ A_1 κατεβάζομε τὴν κάθετο $A_1Z'_1$ στὴν εὐθεία $B_1E'_1$ καὶ τὸ μῆκος $A_1Z'_1$ τὸ μεταφέρομε μὲ τὸ διαβήτη στὴ θέση $A_1H'_1$ πάνω στὴν εὐθεία A_1B_1.

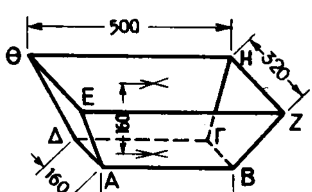
3ο. Ἑνώνομε τὸ H'_1 μὲ τὰ σημεῖα $Γ_1$ καὶ $Δ_1$.

Ἡ γωνία $Γ_1\widehat{H'_1}Δ_1$ *εἶναι ἡ ζητούμενη ἐπίπεδη ἡ ἀντίστοιχη στὴ δίεδρη γωνία τῆς σκάφης, μὲ ἀκμὴ τὴν AB.*



Σχ. 32-ια. Κάτοψη καὶ πρόσοψη ἑνὸς μέρους τῆς σκάφης.

Ἀσκήσεις. 1. Σχεδιάστε (ὑπὸ κλίμακα) μιὰ πρόσοψη τῆς σκάφης οἰκοδόμου, ἡ ὁποία παριστάνεται μὲ τὶς διαστάσεις της στὸ σχ. 32-ιβ. (Μὲ ἄλλα λόγια, σχεδιάστε τὴν ὀρθὴ προβολὴ τῆς σκάφης πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρὸς τὴ βάση $ΑΒΓΔ$ καὶ παράλληλο πρὸς τὴν ἀκμὴ AB). Χρησιμοποιώντας αὐτὸ τὸ σχέδιο ὑπολογίστε ὕστερα τὴν ἐπίπεδη γωνία τὴν ἀντίστοιχη στὴ δίεδρη ποὺ σχηματίζει μιὰ μικρὴ πλευρικὴ ἕδρα τῆς σκάφης μὲ τὸν πυθμένα (τὸν πάτο) της. Ὅμοια σχεδιάστε μιὰ πλάγια ὄψη τῆς σκάφης, δηλ. τὴν ὀρθὴ προβολή της πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρὸς τὴ βάση $ΑΒΓΔ$ ἀλλὰ παράλληλο τώρα πρὸς τὴν ἀκμὴ $AΔ$. Ὕστερα ὑπολογίστε τὴν ἐπίπεδη γωνία τὴν ἀντίστοιχη στὴ δίεδρη τὴν ὁποία σχηματίζει μιὰ μεγάλη πλευρικὴ ἕδρα τῆς σκάφης μὲ τὸν πυθμένα.



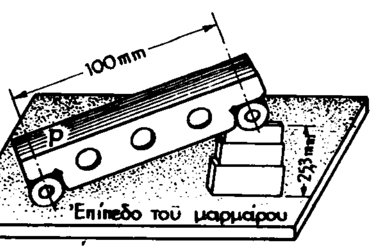
Σχ. 32-ιβ. Σκάφη οἰκοδόμου.

2. Προσδιορίστε γραφικὰ (μὲ τὴ μέθοδο τοῦ § 3) τὸ μέγεθος τῆς δίεδρης γωνίας ποὺ σχηματίζουν δυὸ συνεχόμενες πλευρικὲς ἕδρες τῆς σκάφης τοῦ σχ. 32-ιβ.

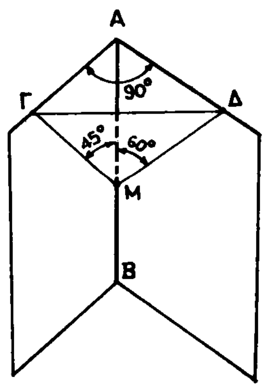
3. Ένα κεκλιμένο επίπεδο κάθεται πάνω σε δυό κατακόρυφα υποστηρίγματα πού απέχουν, τό ένα από τό άλλο, 0,75 *m*. Τά υποστηρίγματα αυτά στέκονται πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο καί έχουν ύψος 0,10 *m* τό ένα, 0,35 *m* τό άλλο. Πόση είναι ή επίπεδη γωνία ή αντίστοιχη στή δίεδρη τήν οποία σχηματίζει τό κεκλιμένο επίπεδο μέ τό οριζόντιο;

4. Χρησιμοποιώντας τή συσκευή πού παριστάνεται στό σχ. 32-ιγ (τή μπάρα ήμιτόνου) μπορούμε νά προσδιορίσωμε τή γωνία a τήν οποία σχηματίζει ή έδρα p τής συσκευής (άρα καί ένα επίπεδο πλαγιασμένο πάνω σ' αυτή τήν έδρα) μέ τό επίπεδο τού μαρμάρου. Ξέροντας ότι ή απόσταση ανάμεσα στούς άξονες τών δυό κυλίνδρων είναι 100 *mm* καί ότι τά υποστηρίγματα (τά λαμάκια) πού τοποθετήθηκαν κάτω από τόν ένα κύλινδρο έχουν συνολικό ύψος 25,3 *mm*, υπολογίστε τή γωνία a.

5. Πόσο συνολικό ύψος πρέπει νά έχουν τά υποστηρίγματα πού παριστάνονται στό σχ. 32-ιγ, γιά νά σχηματίζη τό επίπεδο p γωνία $15^\circ\,35'$ μέ τό επίπεδο τού μαρμάρου;



Σχ. 32-ιγ. Μπάρα ήμιτόνου.



Σχ. 32-ιδ.

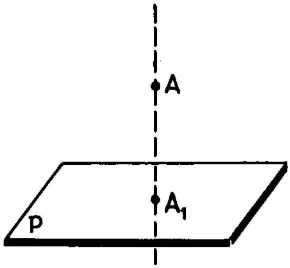
6. Κανονίζομε τή μπάρα ήμιτόνου έτσι πού τό επίπεδο p νά σχηματίζη μέ τό επίπεδο τού μαρμάρου γωνία κλίσεως 22°. Ύστερα προσθέτομε στά υποστηρίγματα ένα λαμάκι τού 1 *mm*. Πόσο θά μεγαλώση ή γωνία κλίσεως τού επιπέδου p;

7. Άς είναι M ένα σημείο τής ακμής AB μιάς ορθής δίεδρης γωνίας (σχ. 32-ιδ), μέ αντίστοιχη επίπεδη γωνία τή $\widehat{\Gamma A \Delta}$, καί μέσα στίς δυό έδρες της δυό ήμιευθείες $M\Gamma$ καί $M\Delta$ τέτοιες ώστε $\widehat{AM\Gamma} = 45^\circ$ καί $\widehat{AM\Delta} = 60^\circ$. Προσδιορίστε γραφικώς τή γωνία $\widehat{\Gamma M \Delta}$ σχεδιάζοντας υπό κλίμακα τό τρίγωνο $\Gamma M \Delta$, αφού πρώτα υπολογίσετε τά μήκη τών τριών πλευρών του συναρτήσει τού μήκους $l = MA$.

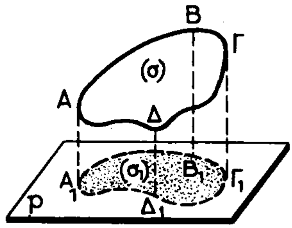
Μάθημα 33.

Προβολὲς πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο.

1. Ὀρθὴ προβολὴ ἑνὸς σχήματος. Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸ Μάθ. 31, ὀρθὴ προβολὴ ἑνὸς σημείου A πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο p (σχ. 33-α) εἶναι τὸ πόδι A_1 τῆς καθέτου στὸ ἐπίπεδο ἀπὸ τὸ σημεῖο A.



Σχ. 33-α. Τὸ A_1 εἶναι ἡ (ὀρθὴ) προβολὴ τοῦ A πάνω στὸ p.

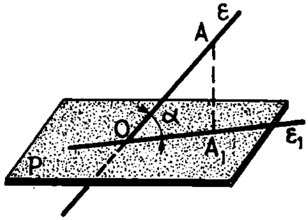


Σχ. 33-β. Τὸ (σ_1) εἶναι (ὀρθὴ) προβολὴ τοῦ (σ) πάνω στὸ p.

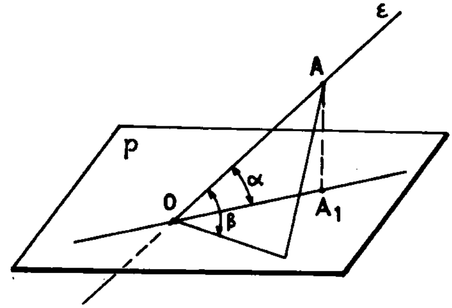
Προβολὴ ἑνὸς γεωμετρικοῦ σχήματος (σ) πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο p (σχ. 33-β) εἶναι τὸ γεωμετρικὸ σχῆμα (σ_1) ποὺ προκύπτει, ὅταν προβάλωμε πάνω στὸ p ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (σ).

2. Προβολὴ μιᾶς εὐθείας. Ἡ προβολὴ μιᾶς εὐθείας ε πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο p (σχ. 33-γ) εἶναι μιὰ εὐθεία ε_1, ἐκτὸς ἂν ἡ ε εἶναι κάθετη πρὸς τὸ προβολικὸ ἐπίπεδο p. Στὴν τελευταία αὐτὴ περίπτωση ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας εἶναι ἕνα σημεῖο· π.χ. ὀρθὴ προβολὴ τῆς εὐθείας A_1A (σχ. 33-α), κάθετης πρὸς τὸ p, εἶναι τὸ σημεῖο A_1.

Ἂς εἶναι τώρα ε μιὰ εὐθεία ὄχι παράλληλη πρὸς τὸ p καὶ O τὸ σημεῖο τῆς συνάντησής της μὲ τὸ p (σχ. 33-γ). Ἡ ὀξεία γωνία $a = A_1\widehat{O}A$ ποὺ σχηματίζει ἡ ε μὲ τὴν προβολή της ε_1, λέγεται ***γωνία τῆς εὐθείας ε μὲ τὸ ἐπίπεδο p***· ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται καὶ *γωνία κλίσεως τῆς ε πρὸς τὸ p*. Μὲ μιὰ φαλτσογωνιὰ μποροῦμε εὔκολα νὰ ἐπαληθεύσωμε ὅτι ἡ γωνία κλίσεως α εἶναι ἡ μικρότερη ἀπὸ ὅλες τὶς γωνίες τῆς εὐθείας ε μὲ τὶς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου p ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ σημεῖο O (σχ. 33-δ).



Σχ. 33-γ. Ἡ ε σχηματίζει μὲ τὸ p τὴ γωνία κλίσεως α.



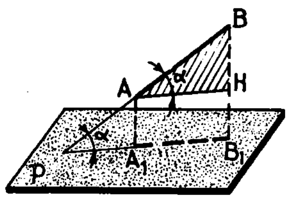
Σχ. 33-δ. Ἡ γωνία κλίσεως α εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ β.

Ὅταν ἡ ε εἶναι παράλληλη πρὸς τὸ p, τότε ἡ γωνία της μὲ τὸ p εἶναι μηδενικὴ (0^0), καὶ ὅταν ἡ ε εἶναι κάθετη πρὸς τὸ p, τότε ἡ γωνία της μὲ τὸ p εἶναι ὀρθὴ (90^0).

Κλίση τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ ἐπίπεδο p (σχ. 33-γ) ὀνομάζομε τὴν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας κλίσεως α:

$$\text{κλίση τῆς } \varepsilon \text{ πρὸς τὸ } p = \frac{AA_1}{OA_1} = \varepsilon\varphi\ \alpha.$$

Ἡ κλίση αὐτὴ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς < 1, ὅταν $\alpha < 45^0$, καὶ > 1. ὅταν $\alpha > 45^0$.



Σχ. 33-ε. Τὸ A_1B_1 εἶναι προβολὴ τοῦ AB.

2. Προβολὴ εὐθύγραμμου τμήματος. Προβολὴ ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος AB πάνω στὸ ἐπίπεδο p εἶναι τὸ τμῆμα A_1B_1 ποὺ ἔχει ἄκρα τὶς προβολὲς A_1 καὶ B_1 τῶν A καὶ B.

Ἂν φέρωμε τὴν παράλληλο AH πρὸς τὴν εὐθεία A_1B_1, θὰ σχηματισθῇ ἕνα τρίγωνο AHB. Τὸ τρίγωνο αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιο στὴν κορυφή του H καὶ ἡ πλευρά του AH εἶναι ἴση μὲ τὴν προβολὴ A_1B_1 τοῦ AB, γιατὶ τὸ τετράπλευρο A_1B_1HA εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἐπομένως, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου, θὰ ἔχωμε τὴ σχέση :

$$A_1B_1 = AH = AB \text{ συν } a.$$

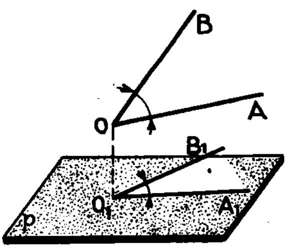
Π.χ. ὅταν $AB = 145\ mm$ καὶ $a = 13^0$, τότε

$$A_1B_1 = 145 \text{ συν } 13^0 = 145 \cdot 0{,}974 = 141{,}23 \simeq 141\ mm.$$

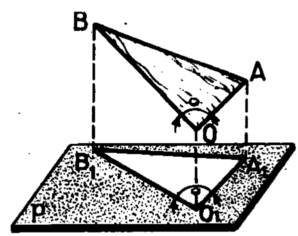
Ὅταν τὸ τμῆμα AB εἶναι παράλληλο πρὸς τὸ p, τότε φυσικὰ

$$A_1B_1 = AB$$

4. Προβολὴ μιᾶς γωνίας. Ἡ προβολὴ μιᾶς γωνίας εἶναι κι' αὐτὴ μιὰ γωνία· π.χ. (σχ. 33-ϛ) προβολὴ τῆς $A\widehat{O}B$ εἶναι ἡ $A_1\widehat{O_1}B_1$. Ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ εἰδικὴ περίπτωση, ὅπου ἡ $A\widehat{O}B$



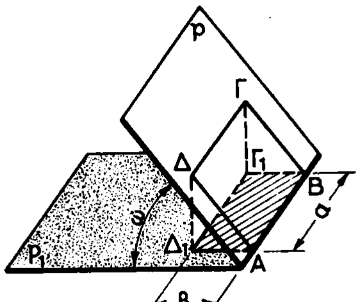
Σχ. 33-ϛ. Ἡ $A_1\widehat{O_1}B_1$ εἶναι προβολὴ τῆς $A\widehat{O}B$.



Σχ. 33-ζ. Ἂν $A\widehat{O}B = 90^0$ καὶ $OA \parallel p$, τότε $A_1\widehat{O_1}B_1 = 90^0$.

εἶναι ὀρθὴ καὶ μιὰ τουλάχιστο πλευρά της παράλληλη πρὸς τὸ προβολικὸ ἐπίπεδο p· τότε καὶ ἡ προβολὴ $A_1\widehat{O_1}B_1$ εἶναι ὀρθή. Π.χ. (σχ. 33-ζ) ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ σχεδιαστικοῦ τριγώνου $A\widehat{O}B$, ποὺ ἔχει τὴν πλευρά του OA παράλληλη πρὸς τὸ p, εἶναι μιὰ ὀρθὴ γωνία $A_1\widehat{O_1}B_1$.

5. Ἐμβαδὸ τῆς προβολῆς ἑνὸς ἐπίπεδου σχήματος. 1ο. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸ F_1 τῆς προβολῆς $ΑΒΓ_1Δ_1$ τοῦ τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ (σχ. 33-η) πάνω στὸ ἐπίπεδο p.



Σχ. 33-η. Ἐμβαδὸ τῆς προβολῆς ἑνὸς ἐπίπεδου σχήματος.

Ἡ προβολὴ $ΑΒΓ_1Δ_1$ εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο μὲ ἐμβαδὸ $F_1 = α \cdot β$. Ἂς ἐφαρμόσωμε στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $ΑΔ_1Δ$ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου:

$$β = ΑΔ_1 = ΑΔ \cdot συν\, ω = α \cdot συν\, ω.$$

Ἄρα

$$F_1 = α \cdot α συν\, ω = α^2 \cdot συν\, ω.$$

Ἀλλὰ $α^2$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸ F τοῦ προβαλλόμενου τετραγώνου $ΑΒΓΔ$· ἑπομένως

$$F_1 = F \cdot συν\, ω.$$

Ὥστε, *τὸ ἐμβαδὸ τῆς προβολῆς ἑνὸς τετραγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραγώνου πολλαπλασιασμένο μὲ τὸ συνημίτονο τῆς ὀξείας γωνίας τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τετραγώνου μὲ τὸ προβολικὸ ἐπίπεδο.*

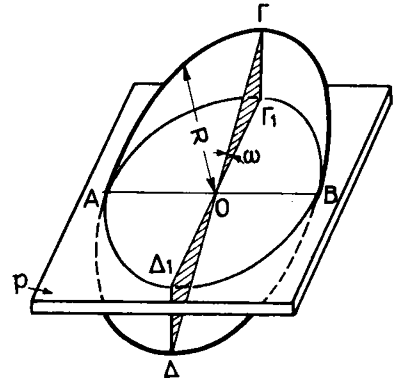
Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ ἰσχύει γενικὰ γιὰ ὅλα τὰ ἐπίπεδα σχήματα (ὄχι μόνο γιὰ τὰ τετράγωνα)· ἔτσι ἔχομε τὴν πρόταση:

Πρόταση. *Τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνὸς ἐπίπεδου σχήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ σχήματος πολλαπλασιασμένο ἐπὶ τὸ συνημίτονο τῆς ὀξείας γωνίας τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος μὲ τὸ προβολικὸ ἐπίπεδο.*

6. Ἐφαρμογή. Μιὰ περιφέρεια ἔχει προβολὴ πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο p μιὰν ἔλλειψη, ὅταν τὸ ἐπίπεδο τῆς περιφέρειας δὲν εἶναι παράλληλο ἢ κάθετο πρὸς τὸ p. Π.χ. ἡ περιφέρεια $ΑΓΒΔ$ (σχ. 33-θ) ἔχει προβολὴ πάνω στὸ ἐπίπεδο p τὴν ἔλλειψη $ΑΓ_1ΒΔ_1$· ὁ μεγάλος ἄξονας $ΑΒ = 2α$ τῆς ἔλλειψης (βλ. Τόμ. Β', Μάθ. 43) ἰσοῦται μὲ $2R$ καὶ ὁ μικρὸς ἄξονας $Γ_1Δ_1 = 2β$, μὲ $2R \cdot συν\, ω$, ὅπου $ω$ εἶναι ἡ ὀξεία γωνία τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφέρειας μὲ τὸ προβολικὸ ἐπίπεδο p. Ἔχομε λοιπόν: $συν\, ω = \frac{2β}{2R} = \frac{β}{R} = \frac{β}{α}$. Ἑπομένως, ἐφαρμόζοντας τὴν τελευταία Πρόταση, βρίσκομε γιὰ τὸ ἐμβαδὸ F_1 τοῦ ἐσωτερικοῦ μιᾶς ἔλλειψης μὲ ἄξονες 2α καὶ 2β τὸν τύπο:

$$F_1 = \pi R^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\ \omega = \pi R^2 \cdot \frac{\beta}{R} = \pi R \cdot \beta = \pi\alpha\beta.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Πάρτε δυὸ προβολικὰ ἐπίπεδα, ἕνα ὁριζόντιο p_1 καὶ ἕνα κατακόρυφο p_2 (π.χ. τὸ πάτωμα καὶ ἕναν τοῖχο τῆς τάξης σας), καὶ τοποθετῆστε ἕνα ἁπλὸ πρισματικὸ κομμάτι (π.χ. μιὰ χονδρὴ λάμα, μιὰ χελιδονουρὰ κτλ.) ἔτσι ποὺ τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεών του νὰ εἶναι κάθετα πρὸς τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο ἀπὸ τὰ δυὸ προβολικὰ ἐπίπεδα. Ὕστερα ἀναζητῆστε πάνω σ' αὐτὸ τὸ κομμάτι:



Σχ. 33-θ.

1° μιὰν ὁριζόντια εὐθεία (δηλ. ‖ πρὸς τὸ p_1)·

2° μιὰν εὐθεία ‖ πρὸς τὸ κατακόρυφο ἐπίπεδο p_2·

3° μιὰν κατακόρυφη εὐθεία (δηλ. ⊥ στὸ p_1)·

4° μιὰν εὐθεία ⊥ πρὸς τὸ κατακόρυφο ἐπίπεδο p_2·

5° μιὰν εὐθεία ποὺ νὰ εἶναι συγχρόνως ὁριζόντια καὶ παράλληλη πρὸς τὸ κατακόρυφο ἐπίπεδο p_2 (ἄρα παράλληλη πρὸς τὴν τομὴ X_1X_2 τῶν δυὸ προβολικῶν ἐπιπέδων)·

6° μιὰν εὐθεία ὀρθογώνια πρὸς τὴν τομὴ X_1X_2 τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων.

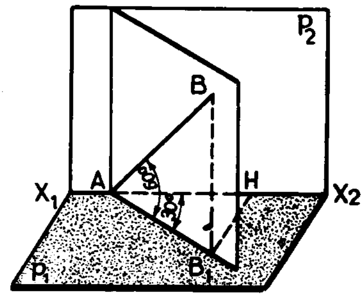
Σὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 6 αὐτὲς περιπτώσεις, προσδιορίστε τὶς προβολὲς τῆς εὐθείας πάνω στὰ δυὸ προβολικὰ ἐπίπεδα καὶ πῆτε ποιά εἶναι ἡ σχετικὴ θέση της ὡς πρὸς τὴν τομὴ X_1X_2 τῶν δυὸ ἐπιπέδων.

2. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 40 *cm* σχηματίζει μ' ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο γωνία $\alpha = 30^\circ$. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῆς προβολῆς του πάνω στὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Νὰ κάμετε τὸν ὑπολογισμὸ καὶ στὴν περίπτωση ὅπου $\alpha = 45^\circ$ ἢ $\alpha = 60^\circ$.

3. Ποιάν γωνία πρέπει νὰ σχηματίζῃ μὲ τὸ ὁριζόντιο προβολικὸ ἐπίπεδο ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα γιὰ νὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς του 3 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος;

4. Χρησιμοποιώντας τὰ δεδομένα τοῦ σχ. 33-ι καὶ ξέροντας ὅτι

$AB = 15\ cm$, ὑπολογίστε πρῶτα τὸ μῆκος τῆς προβολῆς AB_1 τοῦ AB πάνω στὸ ἐπίπεδο p_1 καὶ ὕστερα τὸ μῆκος τῆς προβολῆς AH τοῦ AB_1 πάνω στὸ ἐπίπεδο p_2.



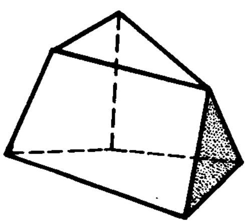
Σχ. 33-ι.

Μάθημα 34.

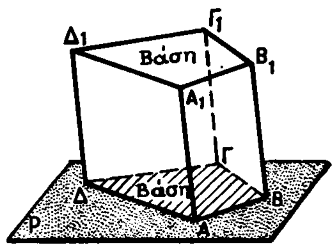
Παραλληλεπίπεδα.

Ἕνα στερεὸ (ἕνα σῶμα) ποὺ περιορίζεται μόνο ἀπὸ ἐπίπεδες ἐπιφάνειες λέγεται *πολύεδρο* (βλ. σχ. 34-α). Οἱ ἐπιφάνειες αὐτὲς εἶναι πολύγωνα καὶ λέγονται *ἕδρες* τοῦ στερεοῦ· οἱ πλευρές τους λέγονται *ἀκμὲς* καὶ οἱ κορυφές τους, *κορυφὲς* τοῦ στερεοῦ.

Τὸ πολύεδρο ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 34-β παρουσιάζει μερικὰ ἰδιαίτερα χαρακτηριστικά. Γιὰ νὰ τὸ κατασκευάσωμε, χαράξαμε σ' ἕνα ἐπίπεδο p ἕνα πολύγωνο $ΑΒΓΔ$· ὕστερα φέραμε ἀπὸ τὶς κορυφὲς $Α,Β,Γ,Δ$, ἔξω ἀπὸ τὸ p καὶ πρὸς τὴν ἴδια μεριά του, εὐθύγραμμα τμήματα $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$, $ΓΓ_1$, $ΔΔ_1$, παράλληλα καὶ



Σχ. 34-α. Πολύεδρο.

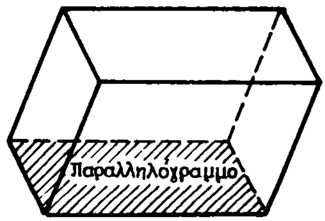


Σχ. 34-β. Πρίσμα.

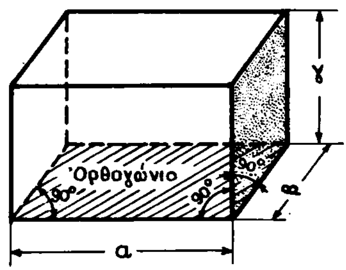
ἴσα μεταξύ τους. Τὰ ἄκρα τους $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$, $Δ_1$ βρίσκονται τότε σ' ἕνα ἐπίπεδο p_1 παράλληλο πρὸς τὸ p, καὶ τὸ πολύγωνο $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $ΑΒΓΔ$. Ἕνα τέτοιο πολύεδρο λέγεται *πρίσμα*. Στὸ πρίσμα τοῦ σχ. 34-β διακρίνομε: 1ο *δυὸ βασικὲς ἕδρες (δυὸ βάσεις)* παράλληλες καὶ ἴσες, τὰ πολύγωνα $ΑΒΓΔ$ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$· 2ο *τέσσερις πλευρικὲς ἕδρες*, τὰ παραλληλόγραμμα $ΑΒΒ_1Α_1$, $ΒΓΓ_1Β_1$, $ΓΔΔ_1Γ_1$, $ΔΑΑ_1Δ_1$· 3ο *δώδεκα ἀκμές*, ἀπὸ τὶς ὁποῖες οἱ τέσσερις $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$, $ΓΓ_1$, $ΔΔ_1$ λέγονται *πλευρικὲς* καὶ εἶναι μεταξύ τους παράλληλες καὶ ἴσες· 4ο *ὀκτὼ κορυφές*, τέσσερις στὴν κάτω καὶ τέσσερις στὴν ἀπάνω βάση.

1. Παραλληλεπίπεδο. *Παραλληλεπίπεδο* εἶναι ἕνα πρίσμα μὲ βάσεις δυὸ παραλληλόγραμμα (σχ. 34-γ). Ὥστε καὶ οἱ 6 ἕδρες ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα· τὰ παραλληλόγραμμα αὐτὰ εἶναι ἀνὰ δυὸ ἀντικρυστὰ καὶ ἴσα. Οἱ 12 ἀκμὲς εἶναι ἀνὰ τέσσερις παράλληλες καὶ ἴσες.

Ἕνα παραλληλεπίπεδο λέγεται *ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο*, ὅταν οἱ βάσεις του εἶναι ὀρθογώνια καὶ οἱ πλευρικὲς ἀκμές του κάθετες πρὸς τὶς βάσεις (σχ. 34-δ).



Σχ. 34-γ. Παραλληλεπίπεδο.



Σχ. 34-δ. Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Σ' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ὅλες οἱ ἕδρες εἶναι ὀρθογώνια. Ἀπὸ μιὰ κορυφὴ ξεκινοῦν τρεῖς ἀκμὲς ποὺ εἶναι ἀνὰ δυὸ κάθετες καὶ ποὺ τὰ μήκη τους α, β, γ λέγονται *διαστάσεις* τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Κύβος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ ἕδρες τετράγωνες. Οἱ 6 ἕδρες ἑνὸς κύβου θὰ εἶναι λοιπὸν τετράγωνα μὲ *τὸ ἴδιο μῆκος* α *πλευρᾶς*· οἱ διαστάσεις του εἶναι α, α, α.

2. Ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου καὶ ἑνὸς κύβου. 1ο Τὸ ἐμβαδὸ ὅλης τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου (σχ. 34-δ) μὲ διαστάσεις α, β, γ ἰσοῦται μὲ

$$F = 2 \cdot \alpha\beta + 2 \cdot \beta\gamma + 2 \cdot \gamma\alpha$$
$$= 2 \cdot (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha).$$

Παράδειγμα. Ὅταν $\alpha = 10\ cm$, $\beta = 5\ cm$, $\gamma = 4\ cm$, τότε

$$F = 2\ (10 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 10) = 2 \cdot 110 = 220\ cm^2.$$

2ο Τὸ ἐμβαδὸ ὅλης τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἑξαπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας του:

$$F = 6\alpha^2.$$

Παράδειγμα. Ὅταν $\alpha = 15\ cm$, τότε

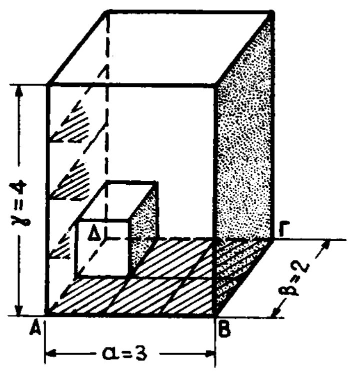
$$F = 6 \cdot 15^2 = 6 \cdot 225 = 1350\ cm^2.$$

3. Ὄγκος ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς πολυέδρου, γενικὰ ἑνὸς στερεοῦ, τὸν συγκρίνομε μὲ τὸν ὄγκο ποὺ διαλέγομε γιὰ μονάδα, δηλαδὴ μὲ τὸν ὄγκο τοῦ κύβου ποὺ ἔχει ἀκμὲς τὴ μονάδα μήκους ποὺ ἤδη ἐκλέξαμε.

Πρόταση. *Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν τριῶν διαστάσεών του.*

1ο. Ἂν οἱ διαστάσεις εἶναι π.χ. $3\ cm$, $2\ cm$ καὶ $4\ cm$ (σχ. 34-ε), τότε ἡ βάση $ΑΒΓΔ$ μπορεῖ νὰ χωρισθῇ σὲ $3 \cdot 2 = 6$ τετράγωνα μὲ πλευρὰ $1\ cm$. Τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου μπορεῖ νὰ διαιρεθῇ σὲ 4 μέρη ποὺ τὸ καθένα τους εἶναι ἴσο μὲ $1\ cm$· ἄρα τὸ παραλληλεπίπεδο μπορεῖ νὰ χωρισθῇ σὲ 4 στρώσεις ἀπὸ 6 κύβους μὲ ἀκμὲς $1\ cm$. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι:

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24\ cm^3.$$



Σχ. 34-ε.

2ο. Ἂν οἱ διαστάσεις εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί, π.χ.

$$\alpha = 3{,}5\ m \quad , \quad \beta = 4{,}75\ m \quad , \quad \gamma = 0{,}3\ m,$$

τότε τὶς ἐκφράζομε σὲ cm, γιὰ νὰ ἔχωμε ἀκέραιους ἀριθμούς:

$$\alpha = 350\ cm \quad , \quad \beta = 475\ cm \quad , \quad \gamma = 30\ cm.$$

Μὲ τὴν ἴδια σκέψη ὅπως καὶ παραπάνω, βλέπομε ὅτι τὸ παραλληλεπίπεδο μπορεῖ νὰ χωρισθῇ σὲ 30 στρώσεις ἀπὸ $(350 \cdot 475)$ κύβους ποὺ ἔχουν ἀκμὲς 1 cm. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι τώρα

$$(350 \cdot 475 \cdot 30)\ cm^3 = \frac{350 \cdot 475 \cdot 30}{1\,000\,000}\ m^3$$
$$= \left(\frac{350}{100} \cdot \frac{475}{100} \cdot \frac{30}{100}\right) m^3$$
$$= (3{,}5 \cdot 4{,}75 \cdot 0{,}3)\ m^3 = 4{,}987\ 5\ m^3.$$

Ὥστε καὶ στὶς δυὸ παραπάνω περιπτώσεις, τὸν ὄγκο τὸν βρήκαμε ὑπολογίζοντας τὸ γινόμενο τῶν τριῶν διαστάσεων τοῦ παραλληλεπιπέδου. Γενικά, ἂν οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β, γ, τότε ὁ ὄγκος του βρίσκεται μὲ τὸν τύπο:

$$V = \alpha\beta\gamma.$$

4. Ὄγκος ἑνὸς κύβου. Σ' ἕναν κύβο μὲ ἀκμὲς ποὺ ἔχουν μῆκος α, οἱ διαστάσεις εἶναι α, $\beta = \alpha$, $\gamma = \alpha$, καὶ ὁ παραπάνω τύπος γίνεται

$$V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3.$$

Ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου εἶναι λοιπὸν ἴσος μὲ τὸν κύβο (δηλ. τὴν τρίτη δύναμη) τοῦ μήκους μιᾶς ἀκμῆς του.

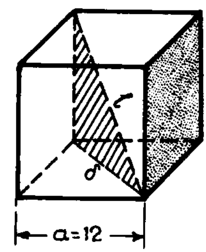
Ἀσκήσεις. *1.* Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 12 cm (σχ. 34-ς).

1ο. Προσδιορίστε γραφικὰ (μὲ σχεδίαση) τὸ μῆκος l μιᾶς διαγωνίου του· (θὰ προσδιορίσετε πρῶτα τὸ μῆκος δ τῆς διαγωνίου μιᾶς ἕδρας του).

2ο. Προσδιορίστε μὲ ὑπολογισμοὺς πρῶτα τὸ δ καὶ ἔπειτα τὸ l.

3ο. Νὰ παραβάλετε τὰ δυὸ ἐξαγόμενα ποὺ βρίσκετε.

2. Ὑπολογίστε τὶς 3 γωνίες ποὺ μιὰ διαγώνιος ἑνὸς κύβου σχηματίζει μὲ τὶς τρεῖς ἀκμὲς οἱ ὁποῖες ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρο τῆς διαγωνίου.



Σχ. 34-ϛ. Ὑπολογίστε τὰ μήκη δ καὶ l.

3. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει διαστάσεις 10 cm, 5 cm, 2 cm. Πάρτε μιὰ διαγώνιό του καὶ ὑπολογίστε τὸ μῆκος της. Ὑπολογίστε ἐπίσης τὴ γωνία κλίσεως αὐτῆς τῆς διαγωνίου μὲ τὸ ἐπίπεδο μιᾶς μεγάλης ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου.

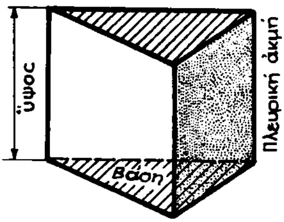
4. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου ποὺ ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸ 354 cm^2.

5. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ χυτοσίδηρο ἔχει διαστάσεις 15 cm, 8 cm, 2 cm. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις ἑνὸς ἄλλου ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἀπὸ τὸ ἴδιο ὑλικό, ξέροντας ὅτι εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς διαστάσεις τοῦ πρώτου παραλληλεπιπέδου καὶ ὅτι τὸ βάρος τοῦ δεύτερου παραλληλεπιπέδου εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ βάρος τοῦ πρώτου.

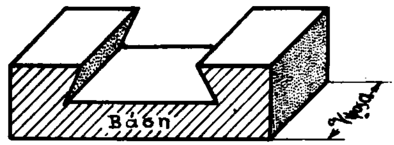
Μάθημα 35.

Ὀρθὸ πρίσμα.

1. Ὀρθὸ πρίσμα. Ἕνα πρίσμα λέγεται *ὀρθό*, ὅταν οἱ πλευρικὲς ἀκμές του εἶναι κάθετες πρὸς τὶς βάσεις του, λέγεται *πλάγιο*, ὅταν δὲν εἶναι κάθετες.



Σχ. 35-α. Ὀρθὸ πρίσμα.



Σχ. 35-β. Αὐτὸς ὁ ὀλισθητήρας ἔχει σχῆμα πρίσματος.

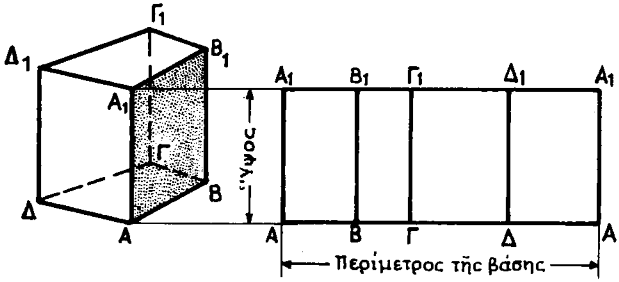
Σ' ἕνα ὀρθὸ πρίσμα (σχ. 35-α): 1ο τὸ κοινὸ μῆκος τῶν πλευρικῶν ἀκμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ *ὕψος* τοῦ πρίσματος, δηλαδὴ μὲ τὴν ἀπόσταση τῶν δυὸ βάσεών του, 2ο οἱ πλευρικὲς ἕδρες εἶναι *ὀρθογώνια* καὶ εἶναι κάθετες πρὸς τὶς βάσεις.

Ἕνα ὀρθὸ πρίσμα λέγεται *κανονικό*, ὅταν οἱ βάσεις του εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

Παρατηροῦμε ὅτι πολλὰ ἐξαρτήματα (στοιχεῖα) μηχανῶν εἶναι πρίσματα ἀπὸ γεωμετρικὴ ἄποψη, ἔχουν δηλαδὴ σχῆμα πρίσματος. Π.χ. ὁ ὀλισθητήρας τὸν ὁποῖο παριστάνει τὸ σχ. 35-β, εἶναι γεωμετρικὰ ἕνα ὀρθὸ πρίσμα, μὲ μιὰ βάση τὸ ὄχι κυρτὸ πολύγωνο ποὺ παριστάνεται γραμμοσκιασμένο στὸ σχῆμα 35-β καὶ μὲ ὕψος τὸ μῆκος *α*.

2. Ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος. Ἐμβαδὸ τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας.

Ἂς φαντασθοῦμε πὼς κόψαμε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος (σχ. 35-γ) κατὰ μῆκος μιᾶς πλευρικῆς ἀκμῆς του, π.χ. τῆς AA_1. Μποροῦμε τότε νὰ ξεδιπλώσωμε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια καὶ νὰ τὴν ἁπλώσωμε σ' ἕνα ἐπίπεδο, φέρνοντας τὶς πλευρικὲς ἕδρες της, διαδοχικὰ τὴ μιὰ μετὰ τὴν ἄλλη, πάνω σ' αὐτὸ τὸ ἐπίπεδο. Θὰ λάβωμε τότε (σχ. 35-δ) ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ



Σχ. 35-γ. **Σχ. 35-δ.**
Ἀνάπτυξη τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος.

λέγεται *ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος* καὶ ποὺ ἔχει γιὰ διαστάσεις 1ο τὴν περίμετρο p τῆς βάσης τοῦ πρίσματος καὶ 2ο τὸ ὕψος h τοῦ πρίσματος.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸ F τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος εἶναι:

$$F = p \cdot h.$$

Ὥστε, τὸ πλευρικὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς περιμέτρου τῆς βάσης ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθοῦ κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ξέροντας ὅτι ἡ ἀκτίνα τῆς ἑξαγωνικῆς βάσης εἶναι 12 cm καὶ τὸ ὕψος 15 cm.

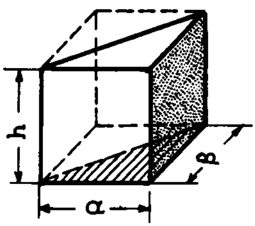
Ξέρομε ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἔχει τὸ ἴδιο μῆκος μὲ τὴν ἀκτίνα του· ἑπομένως ἡ περίμετρος τῆς βάσης εἶναι $p = 12 \cdot 6 = 72\ cm$ καὶ τὸ πλευρικὸ ἐμβαδὸ τοῦ πρίσματος εἶναι:

$$F = 72 \cdot 15 = 1\,080\ cm^2.$$

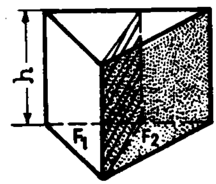
3. Ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο τῶν ὀρθῶν πρισμάτων ποὺ παριστάνονται στὰ τρία παρακάτω σχήματα:

1ο. Ἡ βάση τοῦ πρίσματος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο (σχ. 35-ε).

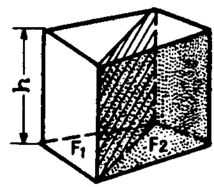
Ὁ ὄγκος V τοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ ὄγκο τοῦ ὀρ-



Σχ. 35-ε. Ἡ βάση εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο.



Σχ. 35-ϛ. Ἡ βάση εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε τρίγωνο.



Σχ. 35-ζ. Ἡ βάση εἶναι ἕνα πολύγωνο.

θογώνιου παραλληλεπιπέδου τὸ ὁποῖο παριστάνεται, στὸ σχ. 35-ε, μὲ συνεχιστὲς καὶ κομματιαστὲς γραμμές. Ἄρα

$$V = \frac{1}{2}\left(\alpha \cdot \beta \cdot h\right) = \frac{\alpha \cdot \beta}{2} \cdot h.$$

Ἀλλὰ $\frac{\alpha\beta}{2}$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸ F τῆς τριγωνικῆς βάσης· ἑπομένως:

$$V = F \cdot h.$$

2ο. Ἡ βάση τοῦ πρίσματος εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε τρίγωνο (σχ. 35-ϛ).

Κατεβάζομε τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφὴ τῆς μεγαλύτερης γωνίας του. Τὸ τρίγωνο χωρίζεται τότε σὲ δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ τὸ πρίσμα, σὲ δυὸ πρίσματα σὰν τὸ πρίσμα τῆς προηγούμενης περίπτωσης. Ἑπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ ἀρχικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δυὸ πρισμάτων μὲ βάσεις τὰ δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα, ποὺ τὰ ἐμβαδά τους ἂς ποῦμε ὅτι εἶναι F_1 καὶ F_2· ἔχομε λοιπὸν

$$V = F_1 \cdot h + F_2 \cdot h = (F_1 + F_2) \cdot h.$$

Ἀλλὰ $F_1 + F_2 =$ ἐμβαδὸ F τῆς ἀρχικῆς τριγωνικῆς βάσης· ἄρα

$$V = F \cdot h.$$

3ο. Ἡ βάση εἶναι ἕνα πολύγωνο (σχ. 35-ζ).

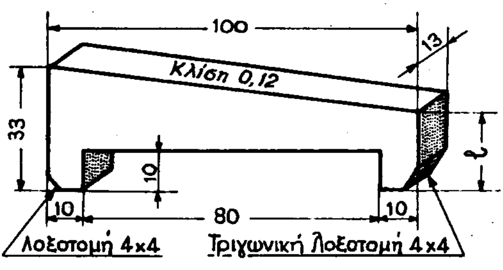
Τὸ πολύγωνο τοῦ σχ. 35-ζ εἶναι ἕνα τετράπλευρο· μποροῦμε νὰ τὸ χωρίσωμε σὲ δυὸ τρίγωνα χαράζοντας μιὰ διαγώνιό του. Ἄρα, ἂν παραστήσωμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δυὸ αὐτῶν τριγώνων μὲ F_1 καὶ F_2, θὰ ἔχωμε πάλι γιὰ τὸν ὄγκο V τοῦ πρίσματος:

$$V = F_1 \cdot h + F_2 \cdot h = (F_1 + F_2) \cdot h$$
$$= F \cdot h.$$

Συμπέρασμα: Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

4. Ἐφαρμογή. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο τῆς ἀσφαλιστικῆς σφήνας (τοῦ συσφικτήρα) ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 35-η.

Αὐτὴ ἡ σφήνα ἔχει σχῆμα πρίσματος μὲ ὕψος 13 mm. Γιὰ



Σχ. 35-η. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο αὐτῆς τῆς σφήνας.

νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸ F τῆς βάσης της, βρίσκομε πρῶτα τὸ μῆκος l ἀπὸ τὴν κλίση 0,12 καὶ ἀπὸ τὶς διαστάσεις 100 mm καὶ 33 mm ποὺ μᾶς δίνονται στὸ σχῆμα:

$$l = 33 - 100 \cdot 0{,}12 = 21 \ mm.$$

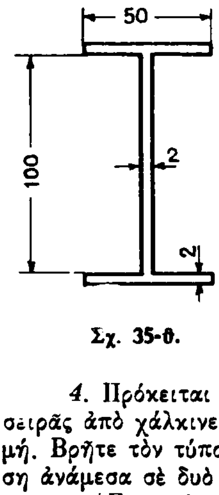
Τὸ ἐμβαδὸ F τῆς βάσης εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου ἀπὸ τὸ ὁποῖο πρέπει ν' ἀφαιρέσωμε τὰ ἐμβαδὰ ἑνὸς μικροῦ ὀρθογωνίου καὶ τριῶν ὀρθογώνιων τριγώνων:

Ἐμβαδὸ τοῦ μεγάλου ὀρθογωνίου :	$100 \cdot 33 =$	$3\,300\ mm^2$.
Ἀφαιρετέα ἐμβαδά :		
ἐμβαδὸ τοῦ μικροῦ ὀρθογωνίου :	$80 \cdot 10 =$	$800\ mm^2$.
ἐμβαδὰ δυὸ μικρῶν ὀρθογώνιων τριγώνων στὰ λοξοκομμένα ἄκρα :	$2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} =$	$16\ mm^2$
ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου :	$\frac{100 \cdot (33 - 21)}{2} =$	$600\ mm^2$
Ἀφαιρετέο σύνολο :		$1\,416\ mm^2$
Ὑπόλοιπο ἐμβαδὸ F :		$1\,884\ mm^2$.

Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς σφήνας εἶναι:

$$1\,884 \cdot 13 = 24\,492\ mm^3 \simeq 24{,}5\ cm^3.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Ὑπολογίστε πρῶτα τὴν πλευρική, ὕστερα τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος μὲ τριγωνικὴ βάση ἐσωγραμμένη σὲ κύκλο διαμέτρου 50 cm· τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 22 cm.



Σχ. 35-θ.

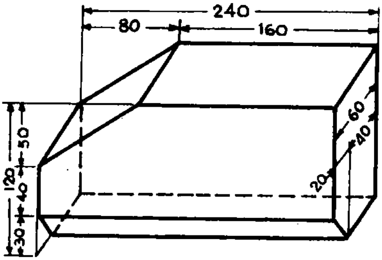
2. Ὑπολογίστε τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς σιδερένιας ράβδου ποὺ ἔχει μῆκος 2 m καὶ ποὺ ἡ διατομή της, μὲ τὶς διαστάσεις σὲ χιλιοστά, παριστάνεται στὸ σχ. 35-θ.

3. Ὑπολογίστε τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο τῆς ράβδου ποὺ περιγράφεται στὴν προηγούμενη ἄσκηση, παίρνοντας τὴ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σιδήρου ἴση μὲ 7,8.

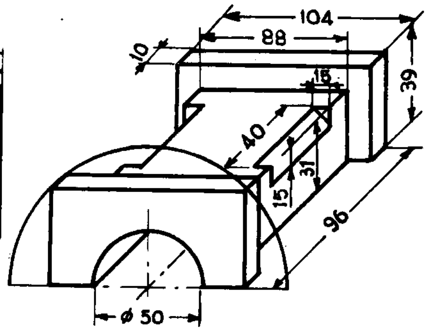
4. Πρόκειται νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος P ἀνὰ τρέχον μέτρο μιᾶς σειρᾶς ἀπὸ χάλκινες ράβδους, μὲ τὴν ἴδια κανονικὴ ἑξαγωνικὴ διατομή. Βρῆτε τὸν τύπο ποὺ δίνει τὸ P σὲ kg, ὅταν ξέρετε ὅτι ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα σὲ δυὸ παράλληλες πλευρὲς τῆς ἑξαγωνικῆς διατομῆς εἶναι a mm. (Σχετικὴ πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ: 8,9). Ἐφαρμόστε τὸν τύπο γιὰ $a = 25$.

5. Γιατί τὸ πολύεδρο ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 35-ι δὲν εἶναι πρίσμα; Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο του· (οἱ διαστάσεις στὸ σχῆμα δίνονται σὲ mm).

6. Ὑπολογίστε τὸ βάρος τοῦ ὀρειχάλκινου (μπρούντζινου) κουσινέτου ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 35-ια· (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ: 8,4).



Σχ. 35-ι.



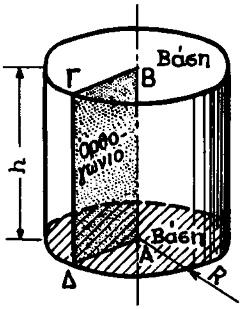
Σχ. 35-ια. Κουσινέτο.

Ποιά εἶναι ἡ ἀξία τοῦ μπρούντζου ποὺ θὰ χρειασθῆ γιὰ νὰ κατασκευάσετε δυὸ τέτοια κουσινέτα, ὅταν ὁ μπροῦντζος κοστίζη 12 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ οἱ ἀπώλειες κατὰ τὴν ἐπεξεργασία τῶν χυμένων κομματιῶν ἀπαιτοῦν ἕνα πρόσθετο βάρος μπρούντζου σὲ ποσοστὸ 6 % πάνω στὸ ὑπολογισμένο;

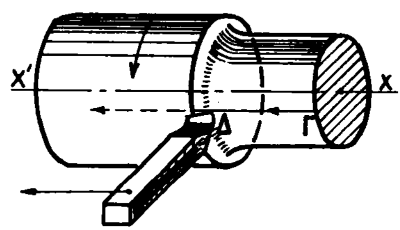
Μάθημα 36.

Κύλινδρος.

1. **Ἄς πάρωμε ἕνα ὀρθογώνιο *ΑΒΓΔ*** (σχ. 36-α) **καὶ ἄς τὸ περιστρέψωμε γύρω ἀπὸ μιὰ πλευρά του,** π.χ. τὴν *ΑΒ*. Θὰ προκύψη ἕνα στερεὸ ποὺ λέγεται *ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος* καί, συντομώτερα, *κύλινδρος*.



Σχ. 36-α. Κύλινδρος.



Σχ. 36-β. Πῶς φτιάχνομε ἕναν κύλινδρο μὲ τὸν τόρνο.

Οἱ πλευρὲς *ΑΔ* καὶ *ΒΓ* τοῦ ὀρθογωνίου γράφουν δυὸ ἴσους κύκλους σὲ ἐπίπεδα παράλληλα· οἱ κύκλοι αὐτοὶ εἶναι οἱ *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου. Ἡ πλευρὰ *ΓΔ* γράφει μιὰν καμπύλη ἐπιφάνεια, τὴν *πλευρικὴ ἐπιφάνεια* τοῦ κυλίνδρου.

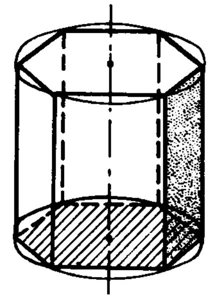
Ἡ ἀκτίνα *R* τῶν δυὸ βάσεων λέγεται καὶ *ἀκτίνα τοῦ κυλίνδρου*· οἱ διάφορες θέσεις ποὺ παίρνει ἡ πλευρὰ *ΓΔ*, κατὰ τὴν ὁλάκερη στροφὴ ποὺ κάνει γύρω στὸν ἄξονα *ΑΒ*, μᾶς δίνουν τὶς *γενέτειρες* τοῦ κυλίνδρου. Τέλος ἡ ἀπόσταση *h* τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων εἶναι τὸ *ὕψος h* τοῦ κυλίνδρου.

Ὥστε, κύλινδρος εἶναι τὸ στερεὸ ποὺ γεννιέται μὲ τὴν περιστροφὴ ἑνὸς ὀρθογωνίου γύρω ἀπὸ μιὰ πλευρά του.

Μ' ἕναν τόρνο μποροῦμε νὰ φτιάξωμε ἀπὸ ἕνα κομμάτι ἕναν κύλινδρο (σχ. 36-β) μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: βάζομε τὸ κομμάτι νὰ στρέφεται γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα $X'X$, ἐνῶ τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο μετακινεῖται παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα αὐτόν. Ἕνα σημεῖο ἀπὸ τὴν κοπτερὴ ἀκμὴ τοῦ ἐργαλείου γράφει τότε μιὰν γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου (τὴ $\Gamma\Delta$ στὸ σχ. 36-β).

2. Ἂς ἐσωγράψωμε ἕνα κανονικὸ πολύγωνο στὴν κυκλικὴ βάση ἑνὸς κυλίνδρου (σχ. 36-γ). Τὸ ὀρθὸ κανονικὸ πρίσμα ποὺ ἔχει τὸ πολύγωνο αὐτὸ γιὰ βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος μὲ τὸν κύλινδρο, λέγεται *ἐσωγραμμένο στὸν κύλινδρο.*

Ἂν αὐξήσωμε διαδοχικὰ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου (π.χ. διπλασιάζοντάς τον κάθε φορά), θὰ λάβωμε μιὰ σειρὰ ἀπὸ κανονικὰ ὀρθὰ πρίσματα ποὺ προσεγγίζουν ὁλοένα καὶ περισσότερο τὸν κύλινδρο. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι *τὸ ἐσωγραμμένο κανονικὸ πρίσμα τείνει πρὸς τὸν κύλινδρο, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρικῶν ἑδρῶν του αὐξάνῃ ἀπεριόριστα.*



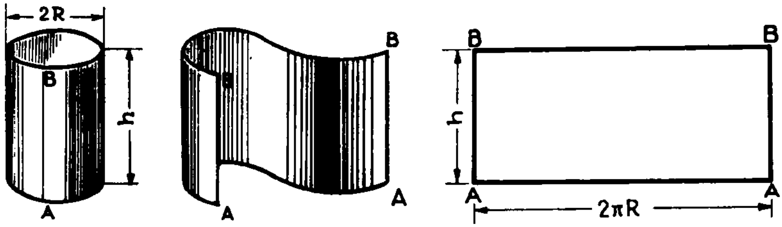
Σχ. 36-γ. Ἐσωγραμμένο κανονικὸ πρίσμα.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομε τώρα τὸ συμπέρασμα ὅτι γιὰ τὸ ἐμβαδὸ τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας καθὼς καὶ γιὰ τὸν ὄγκο ἑνὸς κυλίνδρου ἀληθεύουν τύποι ὅμοιοι μὲ κείνους ποὺ βρήκαμε μελετώντας τὸ ὀρθὸ πρίσμα.

3. Ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου. Πλευρικὸ ἐμβαδό. Ἂς σχίσωμε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου κατὰ μῆκος μιᾶς γενέτειρας, π.χ. τῆς AB (σχ. 36-δ). Μποροῦμε τότε νὰ τὴν *ἀναπτύξωμε*, δηλαδὴ νὰ τὴν ἀνοίξωμε καὶ νὰ τὴν ἁπλώσωμε πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (σχ. 36-ε καὶ σχ. 36-ς). Θὰ προκύψῃ ἔτσι ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ λέγεται *ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας* τοῦ κυλίνδρου καὶ ποὺ ἔχει διαστάσεις: 1ο τὸ μῆκος $2\pi R$ τῆς περιφέρειας τῆς βάσης τοῦ κυλίνδρου καὶ 2ο τὸ ὕψος

h τοῦ κυλίνδρου. Τὸ ἐμβαδὸ F τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας εἶναι λοιπὸν

$$F = 2\pi R \cdot h = \textit{μῆκος περιφέρειας τῆς βάσης ἐπὶ τὸ ὕψος}.$$



Σχ. 36-δ. Σχ. 36-ε. Σχ. 36-ς.

Ἀνάπτυξη τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου.

Ἂν D εἶναι ἡ διάμετρος τῆς βάσης, τότε

$$F = \pi D \cdot h.$$

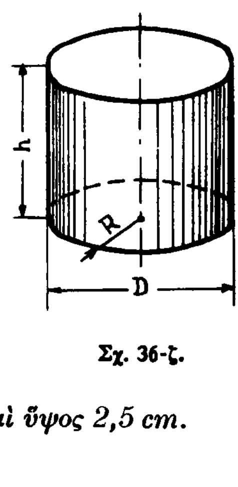
Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τὴν πλευρικὴ καθὼς καὶ τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου ποὺ ἔχει διάμετρο 12 cm καὶ ὕψος 8 cm.

Πλευρικὴ ἐπιφάνεια	$\simeq 3{,}142 \cdot 12 \cdot 8 \simeq 302\ cm^2$
Ἐπιφάνεια τῶν 2 βάσεων	$\simeq 3{,}142 \cdot 6^2 \cdot 2 \simeq 226\ cm^2$
Ὁλικὴ ἐπιφάνεια	$528\ cm^2$.

4. Ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου. Ὁ ὄγκος αὐτὸς (σχ. 36-ζ) ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκο ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος ποὺ θὰ εἶχε γιὰ βάση ἕνα πολύγωνο μὲ ἐμβαδὸ τὸ ἐμβαδὸ πR^2 τῆς βάσης τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ ἴδιο ὕψος h μὲ τὸν κύλινδρο. Ἄρα

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

$$= \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi D^2 h}{4}.$$



Σχ. 36-ζ.

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο ἑνὸς κυλίνδρου ποὺ ἔχει ἀκτίνα 3,6 cm καὶ ὕψος 2,5 cm.

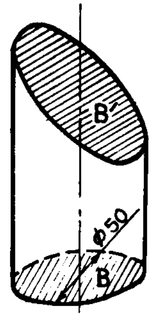
$$V \simeq 3{,}14 \cdot 3{,}6^2 \cdot 2{,}5 \simeq 102\ cm^3.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Σχεδιάστε σὲ κλίμακα 1 : 10 τὸ ἀνάπτυγμα ἑνὸς κυλινδρικοῦ σωλήνα ἀπὸ λαμαρίνα πάχους 5 *mm*, ξέροντας ὅτι ἡ ἐξωτερική του διάμετρος εἶναι 300 *mm* καὶ τὸ ὕψος του 400 *mm*. (Θὰ ἐργασθῆτε μὲ τὴ μέση περιφέρεια τῆς διατομῆς τοῦ σωλήνα).

2. Σ' ἕνα τυπολόγιο διαβάζετε ὅτι τὸ βάρος σὲ *gr* ἀνὰ τρέχον μέτρο μιᾶς κυλινδρικῆς σιδερένιας ράβδου τὸ βρίσκετε πολλαπλασιάζοντας μὲ 6,125 τὸ τετράγωνο τῆς διαμέτρου σὲ *mm* τῆς ράβδου. Ἐξηγῆστε τὸ γιατί.

3. Ὑπολογίστε τί διάμετρο πρέπει νὰ ἔχῃ ἕνα χάλκινο σύρμα γιὰ νὰ ζυγίζῃ 1,77 *kg* ἀνὰ τρέχον μέτρο (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ 8,8).

4. Ἡ ἀπάνω βάση B' ἑνὸς κολοβοῦ (δηλαδὴ λοξὰ κομμένου) κυλίνδρου (σχ. 36-η) σχηματίζει μὲ τὴν ὁριζόντια κυκλικὴ βάση B, διαμέτρου 50 *mm*, γωνία κλίσεως 60°· ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τῆς βάσης B'.

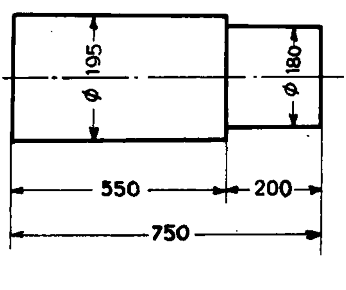


Σχ. 36-η. Κολοβὸς κύλινδρος.

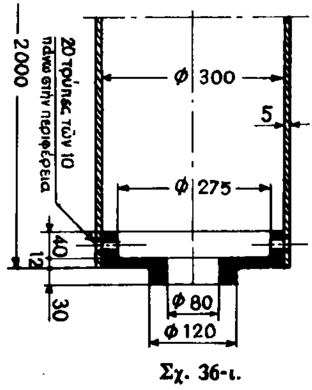
5. Θέλετε νὰ φτιάξετε στὸν τόρνο τὸ σιδερένιο κομμάτι ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 36-θ (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ 7,8).

1ο. Ἂν χρησιμοποιήσετε μιὰ κυλινδρικὴ ράβδο μὲ διάμετρο 200 *mm* καὶ μὲ μῆκος 755 *mm*, ποιό θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ μετάλλου ποὺ θὰ ἀφαιρεθῇ;

2ο. Ἂν χρησιμοποιήσετε ἕνα κομμάτι ἀπὸ χυτοχάλυβα μὲ διαστά-



Σχ. 36-θ.



Σχ. 36-ι.

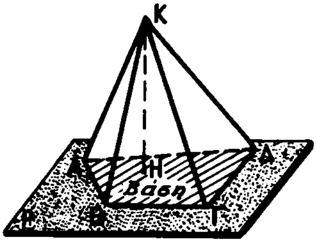
σεις κατὰ 8 mm παντοῦ μεγαλύτερες ἀπὸ τὶς διαστάσεις τὶς ὁποῖες δίνει στὸ σχῆμα 36-θ, ποιό θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ μετάλλου ποὺ θ' ἀφαιρεθῆ;

6. Ὑπολογίστε τὸ βάρος ποὺ ἔχει ὁ πυθμένας ἀπὸ χυτοχάλυβα τοῦ ρεζερβουὰρ ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 36-ι (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ 7,8).

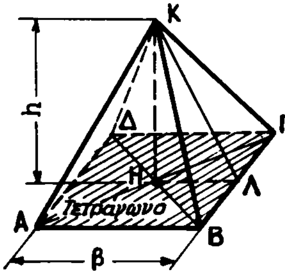
Μάθημα 37.

Πυραμίδα.

1. Πυραμίδα. Σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο *p* ἂς χαράξωμε ἕνα ὁποιοδήποτε πολύγωνο, π.χ. τὸ *ΑΒΓΔ* (σχ. 37-α), καὶ ἂς ἑνώσωμε τὶς κορυφές του μ᾽ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο *Κ* ἔξω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο *p*. Τὸ πολύεδρο *ΚΑΒΓΔ* ποὺ θὰ σχηματισθῇ λέγεται *πυραμίδα*.



Σχ. 37-α. Πυραμίδα.



Σχ. 37-β. Κανονικὴ πυραμίδα μὲ τετραγωνικὴ βάση.

Σ᾽ αὐτὴν διακρίνομε: τὴ *βάση ΑΒΓΔ*, τὴν *κορυφὴ Κ*, τὶς *πλευρικὲς ἀκμὲς ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ* καὶ τὸ *ὕψος ΚΗ* ποὺ εἶναι ἡ κάθετος ἡ ὁποία πέφτει ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὸ ἐπίπεδο τῆς βάσης.

Ὥστε, σὲ μιὰν πυραμίδα ἡ βάση εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε πολύγωνο, οἱ πλευρικὲς ὅμως ἕδρες εἶναι τρίγωνα.

Μιὰ πυραμίδα λέγεται *κανονική*, ὅταν 1ο ἡ βάση της εἶναι ἕνα κανονικὸ πολύγωνο καὶ 2ο τὸ πόδι τοῦ ὕψους της συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρο τῆς βάσης. Ἔτσι π.χ. ἡ πυραμίδα ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 37-β εἶναι κανονικὴ μὲ βάση ἕνα τετράγωνο.

Σὲ μιὰ κανονικὴ πυραμίδα: 1ο οἱ πλευρικὲς ἀκμὲς εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα *ΚΑ, ΚΒ,...* πλάγια πρὸς τὸ ἐπίπεδο τῆς βάσης μὲ πόδια *Α, Β,...* ποὺ ἀπέχουν ἴσα ἀπὸ τὸ πόδι *Η* τῆς καθέτου *ΚΗ*· ἄρα $ΚΑ = ΚΒ = \ldots$· 2ο οἱ πλευρικὲς ἕδρες εἶναι ἰσόσκελα τρίγωνα, ἴσα μεταξύ τους, καὶ τὸ κοινὸ μῆκος τῶν ὕψῶν τους, τῶν ἀντίστοιχων στὶς βάσεις τους, λέγεται *ἀπόθημα* τῆς πυραμίδας· ἔτσι ἡ πυραμίδα τοῦ σχ. 22-β ἔχει γιὰ ἀπόθημα τὸ μῆκος $K\Lambda$.

2. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀποθήματος καὶ τοῦ μήκους τῶν πλευρικῶν ἀκμῶν σὲ μιὰ κανονικὴ πυραμίδα.

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἀπόθημα a καὶ τὸ μῆκος l τῶν πλευρικῶν ἀκμῶν τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας τοῦ σχ. 37-β, ξέροντας τὸ μῆκος $\beta = 8$ cm μιᾶς πλευρᾶς τῆς βάσης καὶ τὸ ὕψος $h = 10$ cm.

1ο. Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $KH\Lambda$ εἶναι:

$$K\widehat{H}\Lambda = 90^\circ,\ KH = 10,\ H\Lambda = 8 : 2 = 4,\ K\Lambda = a.$$

Ἑπομένως, ἐφαρμόζοντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα

$$K\Lambda^2 = KH^2 + H\Lambda^2,$$

βρίσκομε: $a^2 = 10^2 + 4^2 = 116$

καὶ $a = \sqrt{116} \simeq 10{,}8$ cm.

2ο. Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο KHA (σχ. 37-β) ἔχομε, σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$KA^2 = KH^2 + HA^2.$$

Ἀλλὰ $HA^2 = \left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{A\Gamma^2}{4} = \frac{AB^2 + B\Gamma^2}{4} = \frac{2\beta^2}{4} = \frac{\beta^2}{2}.$

Ἑπομένως

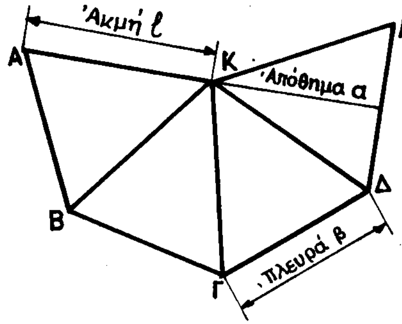
$$l^2 = KA^2 = h^2 + \frac{\beta^2}{2} = 10^2 + \frac{8^2}{2} = 132$$

καὶ $l = \sqrt{132} \simeq 11{,}5$ cm.

3. Ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας μιᾶς πυραμίδας. Πλευρικὸ ἐμβαδό.

Ἂς σχίσωμε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς πυραμίδας κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς της. Μποροῦμε τότε νὰ ξεδιπλώσωμε τὴν ἐπιφάνεια αὐτὴ καὶ νὰ φέρωμε τὶς ἕδρες της, διαδοχικὰ τὴ μιὰ μετὰ τὴν ἄλλη, πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο· τὸ ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ προκύπτει λέγεται *ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας* τῆς πυραμίδας.

Στὴν περίπτωση τοῦ σχ. 37-β θὰ βροῦμε, γιὰ ἀνάπτυγμα, τὸ ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ παριστάνεται δίπλα (σχ. 37-γ) καὶ ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ 4 ἰσόσκελα τρίγωνα, μὲ βάσεις μήκους β καὶ μὲ ὕψη α.



Σχ. 37-γ. Ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας.

Τὸ ἐμβαδὸ F τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς πυραμίδας τοῦ σχ. 37-β εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ἀναπτύγματός της (σχῆμα 37-γ), ἄρα

$$F = 4 \text{ φορὲς τὸ ἐμβαδὸ μιᾶς πλευρικῆς ἕδρας}$$
$$= 4 \cdot \frac{\beta\alpha}{2} = \frac{4\beta \cdot \alpha}{2}\cdot$$

Ἀλλὰ 4β εἶναι ἡ περίμετρος p τῆς βάσης τῆς πυραμίδας·

ἄρα $$F = \frac{p \cdot \alpha}{2}$$

Ὥστε, τὸ πλευρικὸ ἐμβαδὸ μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τῆς περιμέτρου τῆς βάσης ἐπὶ τὸ ἀπόθημα τῆς πυραμίδας.

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τὸ πλευρικὸ ἐμβαδὸ μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας ποὺ ἔχει ὕψος 10 cm καὶ βάση ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 8 cm.

Στὸν προηγούμενο παράγραφο ἔχομε ὑπολογίσει τὸ ἀπόθημα α αὐτῆς τῆς πυραμίδας καὶ ἔχομε βρεῖ:

$$\alpha = 10{,}8 \ cm.$$

Ἐπομένως, γιὰ τὸ ζητούμενο πλευρικὸ ἐμβαδὸ βρίσκομε:

$$F=\frac{(8\cdot 4)\cdot 10{,}8}{2}=16\cdot 10{,}8\simeq 173\ cm^2.$$

4. Ὄγκος τῆς πυραμίδας. Ἡ Θεωρητική Γεωμετρία δείχνει ὅτι ὁ ὄγκος V μιᾶς πυραμίδας εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτο τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ B τῆς βάσης ἐπὶ τὸ ὕψος h τῆς πυραμίδας:

$$V=\frac{B\cdot h}{3}.$$

Ἔτσι π.χ. ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας τοῦ σχ. 37-β, στὴν ὁποία ἡ πλευρὰ τῆς βάσης ἂς εἶναι 8 *cm* καὶ τὸ ὕψος 10 *cm*, ἰσοῦται μὲ

$$V=\frac{8^2\cdot 10}{3}\simeq 213\ cm^3.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Σχεδιάστε σὲ κλίμακα 1 : 10 τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας ποὺ ἔχει πλευρικὴ ἀκμὴ 50 *cm* καὶ βάση ἕνα (κανονικὸ) ἑξάγωνο μὲ πλευρὰ μήκους 30 *cm*. Ὕστερα ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ αὐτῆς τῆς ἐπιφάνειας.

2. Τί ὕψος πρέπει νὰ δώσωμε σὲ μιὰ κανονικὴ πυραμίδα μὲ βάση ἕνα τετράγωνο πλευρᾶς 5 *cm*, ἂν θέλωμε οἱ πλευρικὲς ἀκμὲς νὰ σχηματίζουν μὲ τὸ ἐπίπεδο τῆς βάσης γωνία 45°;

3. Μ' ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὴ βάση της κόβομε τὴν πυραμίδα τοῦ σχ. 37-β ($\beta=8$ *cm*, $h=10$ *cm*). Προκύπτει μιὰ μικρότερη πυραμίδα μὲ τὴν ἴδια κορυφὴ K. Ποιά πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὴν κορυφὴ K γιὰ νὰ ἔχῃ ἡ μικρότερη πυραμίδα ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς ἀρχικῆς πυραμίδας; Ποιός εἶναι τότε ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τῆς μικρῆς πρὸς τὸν ὄγκο τῆς μεγάλης πυραμίδας;

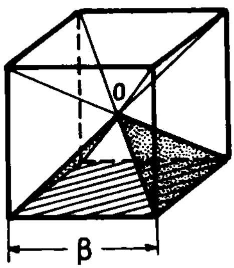
4. Ἑνῶστε τὸ κέντρο O ἑνὸς κύβου, ποὺ οἱ ἀκμές του ἔχουν μῆκος β, μὲ τὶς ὀκτὼ κορυφές του (σχ. 37-δ). Ὕστερα βρῆτε:

1ο. Σὲ πόσες πυραμίδες, μὲ πλευρικὲς ἀκμὲς αὐτὰ τὰ ἑνωτικὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ἔχει χωρισθῆ ὁ κύβος; Εἶναι οἱ πυραμίδες αὐτὲς μεταξύ τους ἴσες καὶ γιατί;

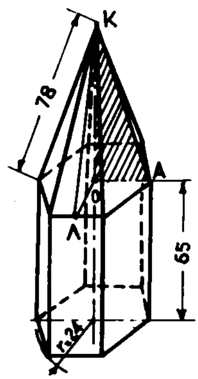
2ο. Ποιός εἶναι λοιπὸν ὁ ὄγκος τῆς καθεμιᾶς πυραμίδας;

3ο. Τὸ ἐξαγόμενο, ποὺ βρίσκετε ἔτσι, συμφωνεῖ ἄραγε μὲ τὸ ἐξαγόμενο ποὺ δίνει ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνα γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὄγκου μιᾶς πυραμίδας (§ 4);

5. Τὸ κομμάτι ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 37-ε, εἶναι ἕνα κανονικὸ ἑξαγωνικὸ πρίσμα πού, πρὸς τὰ πάνω, τελειώνει σὲ μιὰ (ἐπίσης κανονικὴ) ἑξαγωνικὴ πυραμίδα. Τὸ κομμάτι αὐτὸ ἔχει κοπῆ ἀπὸ μιὰ σιδερένια κυλινδρικὴ ράβδο μὲ διάμετρο 48 mm. Ὑπολογίστε :



Σχ. 37-δ.



Σχ. 37-ε.

1ο τὸ ὕψος τῆς πυραμίδας (σὲ mm)·

2ο τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας καθὼς καὶ τοῦ πρίσματος (σὲ mm^2)·

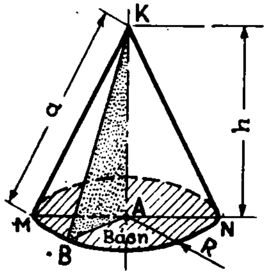
3ο τὸν ὄγκο τοῦ κομματιοῦ (σὲ mm^3)·

4ο τὸ βάρος τοῦ κομματιοῦ (σὲ gr). Ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ εἶναι 7,8.

Μάθημα 38.

Κῶνος.

1. Ἂς περιστρέψωμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο *ΚΑΒ* γύρω ἀπὸ μιὰ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας του $\widehat{A}$ (σχ. 38-α), π.χ. τὴν *ΚΑ*. Θὰ προκύψῃ ἕνα στερεὸ ποὺ λέγεται *ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος* καὶ συντομώτερα, *κῶνος*.

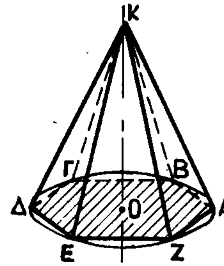


Σχ. 38-α. Κῶνος.

Ἡ πλευρὰ *ΑΒ* τοῦ τριγώνου ποὺ περιστρέφομε, θὰ γράψῃ ἕναν κύκλο, τὴ *βάση τοῦ κώνου*. Ἡ ὑποτείνουσα *ΚΒ* θὰ γράψῃ μιὰν καμπύλη ἐπιφάνεια, τὴν *πλευρικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου*. *Γενέτειρες* τοῦ κώνου λέγονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ ἑνώνουν τὴν κορυφὴ *Κ* τοῦ κώνου μὲ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιφέρειας τῆς βάσης. Ἡ ἀκτίνα *R* τῆς βάσης λέγεται καὶ *ἀκτίνα τοῦ κώνου*. Τὸ μῆκος *ΚΑ* τῆς καθέτου ἀπὸ τὸ *Κ* πρὸς τὸ ἐπίπεδο τῆς βάσης εἶναι τὸ *ὕψος h* τοῦ κώνου καὶ τὸ (κοινὸ) μῆκος τῶν γενετειρῶν εἶναι τὸ *ἀπόθημα α* τοῦ κώνου. Ἡ γωνία $\widehat{MKN}$ στὴν κορυφὴ τοῦ κώνου εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν γωνία $\widehat{AKB}$ τοῦ τριγώνου *ΚΑΒ* πού, μὲ τὴν περιστροφή του, γεννᾶ τὸν κῶνο.

Ὥστε, κῶνος εἶναι τὸ στερεὸ ποὺ γεννιέται μὲ τὴν περιστροφὴ ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου γύρω ἀπὸ μιὰ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας του.

2. Ἂς ἐσωγράψωμε ἕνα κανονικὸ πολύγωνο *ΑΒΓΔΕΖΑ* στὴν κυκλικὴ βάση ἑνὸς κώνου (σχ. 38-β) καὶ ἂς τὸ πάρωμε γιὰ βάση μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας μὲ κορυφὴ τὴν κορυφὴ *Κ* τοῦ κώνου. Ἡ πυραμίδα αὐτὴ λέγεται *ἐσωγραμμένη στὸν κῶνο*. Ἂν τώρα αὐξήσωμε διαδοχικὰ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου (π.χ. διπλασιάζοντάς τον κάθε φορά), θὰ πάρωμε μιὰ σειρὰ ἀπὸ κανονικὲς πυραμίδες ποὺ προσεγγίζουν ὁλοένα καὶ περισσότερο (ποὺ διαφέρουν ὁλοένα καὶ λιγότερο ἀπὸ) τὸν κῶνο. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι *ἡ ἐσωγραμμένη στὸν κῶνο κανονικὴ πυραμίδα τείνει πρὸς τὸν κῶνο, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρικῶν ἑδρῶν της αὐξάνη ἀπεριόριστα.*



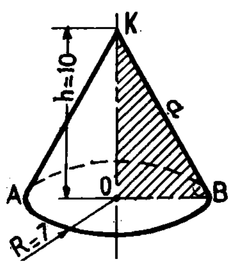
Σχ. 38-β. Κανονικὴ πυραμίδα ἐσωγραμμένη σὲ κῶνο.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομε τώρα τὸ συμπέρασμα ὅτι γιὰ τὸ ἐμβαδὸ τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας καὶ γιὰ τὸν ὄγκο τοῦ κώνου ἀληθεύουν τύποι ὅμοιοι μὲ κείνους ποὺ βρήκαμε μελετώντας τὴν κανονικὴ πυραμίδα.

3. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀποθήματος ἑνὸς κώνου. Ἔστω ὅτι ἔχομε νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἀπόθημα a τοῦ κώνου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 38-γ, ὅπου οἱ διαστάσεις δίνονται σὲ cm. Ἐφαρμόζομε τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο KOB καὶ βρίσκομε:

$$a^2 = KB^2 = KO^2 + OB^2 = 10^2 + 7^2 = 149,$$

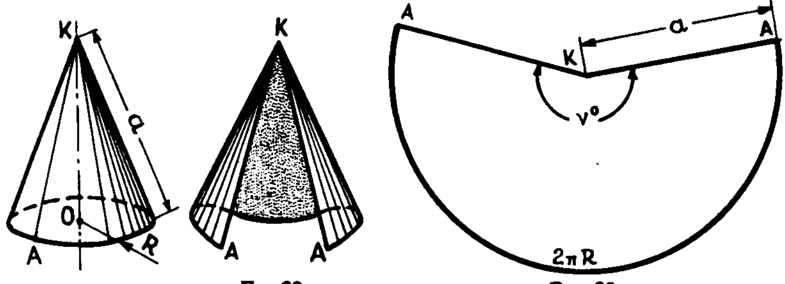
ἄρα $\quad a = \sqrt{149} \simeq 12{,}2\ cm.$



Σχ. 38-γ.

4. Ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κώνου. Πλευρικὸ ἐμβαδό. Γωνία τοῦ ἀναπτύγματος. Ἂς σχίσωμε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου κατὰ μῆκος μιᾶς γενέτειράς της, π.χ. τῆς KA (σχ. 38-δ). Ὕστερα ἀπ' αὐτὸ μποροῦμε ν' ἀνοίξωμε τὴν ἐπιφάνεια (σχ. 38-ε) καὶ νὰ τὴν ἁπλώσωμε πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο. Θὰ προκύψη ἕνας κυκλικὸς τομέας (σχ. 38-ϛ) ποὺ λέγεται *ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.*

1ο. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ ποὺ εἶναι καὶ ἐμβαδὸ τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.



Σχ. 38-δ. Σχ. 38-ε. Σχ. 38-ς.

Ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κώνου.

Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ δὲν ἔχομε παρὰ νὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο:

$$\text{πλευρικὸ ἐμβαδὸ} = \frac{1}{2} \times \text{περίμετρο τῆς βάσης} \times \text{ἀπόθημα},$$

ποὺ βρήκαμε στὸ προηγούμενο Μάθημα ἀναζητώντας τὸ ἐμβαδὸ τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας. Ἔχομε λοιπόν:

$$F = \text{πλευρικὸ ἐμβαδὸ τοῦ κώνου} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot a \;,$$

ἄρα
$$F = \pi R a.$$

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τὸ πλευρικὸ ἐμβαδὸ τοῦ κώνου τοῦ σχ. 38-γ.

Στὸν § 3 εἴχαμε βρεῖ ὅτι τὸ ἀπόθημα αὐτοῦ τοῦ κώνου εἶναι $a = 12{,}2\ cm$. Ἄρα τὸ πλευρικὸ ἐμβαδό του εἶναι:

$$F \simeq 3{,}14 \cdot 7 \cdot 12{,}2 \simeq 268\ cm^2.$$

2ο. Ἂς ὑπολογίσωμε τώρα τὴ ***γωνία τοῦ ἀναπτύγματος***, δηλαδὴ τὴν ἐπίκεντρη γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέα ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.

Τὸ κυκλικὸ τόξο, στὸ ὁποῖο τελειώνει ὁ τομέας, ἔχει ἀκτίνα ἴση μὲ τὸ ἀπόθημα a τοῦ κώνου καὶ μῆκος λ ἴσο μὲ τὸ μῆκος

$2\pi R$ τῆς περιφέρειας τῆς βάσης: $\lambda = 2\pi R$. Ξέρομε ὅμως (Μάθ. 27, § 4) ὅτι τὸ μῆκος ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου, ποὺ ἔχει ἀκτίνα a καὶ ἀντιστοιχεῖ σ' ἐπίκεντρη γωνία ν°, ἰσοῦται μὲ

$$\lambda = \frac{\pi a \nu}{180}.$$

Ἑπομένως, ἀφοῦ ἐδῶ $\lambda = 2\pi R$, θὰ ἔχωμε τὴν ἐξίσωση:

$$2\pi R = \frac{\pi a \nu}{180}.$$

Ἀπ' αὐτὴν βρίσκομε (ἂν διαιρέσωμε καὶ τὰ δυὸ μέλη διὰ τοῦ π καὶ ἐπιλύσωμε ὡς πρὸς ν):

$$\nu^0 = \frac{180^0 \cdot 2 \cdot R}{a} = \frac{360^0 \cdot R}{a}.$$

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε σὲ μοῖρες τὴ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 38-γ.

$$\nu^0 = \frac{360 \cdot 7}{12{,}2} \simeq 206^0\ 33'.$$

5. Ὄγκος τοῦ κώνου. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκο μιᾶς πυραμίδας ποὺ ἔχει βάση ἕνα πολύγωνο ἐμβαδοῦ ἴσου μὲ τὸ ἐμβαδὸ πR^2 τῆς βάσης τοῦ κώνου καὶ ὕψος ἴσο μὲ τὸ ὕψος h τοῦ κώνου. Ἔτσι βρίσκομε γιὰ τὸν ὄγκο τοῦ κώνου τὸν τύπο:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο ἑνὸς κώνου ποὺ ἔχει ἀκτίνα 7 cm καὶ ὕψος 10 cm.

$$V \simeq \frac{3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 10}{3} \simeq 513\ cm^3.$$

Ἀσκήσεις. 1. Ὑπολογίστε τὸ ἀπόθημα ἑνὸς κώνου ποὺ ἔχει διάμετρο βάσης 25 *cm* καὶ γωνία στὴν κορυφὴ 60°.

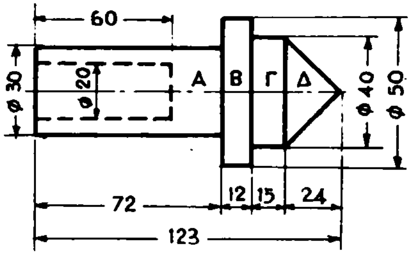
2. Ὑπολογίστε τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ τὸν ὄγκο τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ὅταν περιστρέψωμε, γύρω ἀπὸ μιὰ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας του, ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ποὺ οἱ κάθετες πλευρές του ἔχουν μῆκος 5 καὶ 9 *cm* ἀντιστοίχως. Ἐξετάστε καὶ τὶς δυὸ περιπτώσεις ποὺ παρουσιάζονται.

3. Ὑπολογίστε τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ τὸν ὄγκο τοῦ στερεοῦ ποὺ προκύπτει, ὅταν περιστρέψωμε γύρω ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσά του ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς μήκους 15 καὶ 20 *cm* ἀντιστοίχως.

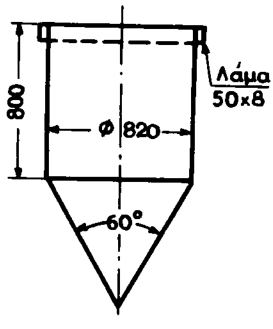
4. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο τοῦ στερεοῦ ποὺ προκύπτει, ὅταν περιστρέψωμε ἕνα ὀρθογώνιο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ γύρω ἀπὸ τὴ μεγάλη του βάση $ΑΒ$, ξέροντας ὅτι :

$$\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ, \quad AB = 35\ cm, \quad \Delta\Gamma = 20\ cm, \quad \text{ὕψος } \Delta A = 15\ cm.$$

5. Ὑπολογίστε τὸ βάρος τοῦ μπρούντζινου κομματιοῦ ποὺ παριστάνεται μὲ τὶς διαστάσεις του στὸ σχ. 38-ζ. Τὰ μέρη του $Α$, $Β$, $Γ$ εἶναι κυλινδρικά, ἐνῶ τὸ μέρος του $Δ$ εἶναι κωνικό. Τὸ μέρος $Α$ ἔχει μιὰ τρύπα κυλινδρικὴ μὲ ἀκτίνα 10 *mm* καὶ βάθος 60 *cm*. Ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ εἶναι 8,2.



Σχ. 38-ζ.



Σχ. 38-η.

6. Πρόκειται νὰ φτιάξετε ἕνα ντεπόζιτο ἀπὸ λαμαρίνα πάχους 3 *mm*, μὲ ἐσωτερικὲς διαστάσεις αὐτὲς ποὺ δίνει τὸ σχῆμα 38-η. Ζητοῦνται :

1ο τὸ σχῆμα καὶ οἱ διαστάσεις τοῦ ἀναπτύγματος τῆς στεφάνης, ἀπὸ λάμα τῶν 50×8, στὸ ἀπάνω χεῖλος τοῦ ντεπόζιτου·

2ο τὸ μῆκος τῆς λάμας ποὺ χρειάζεται γιὰ τὴ στεφάνη·

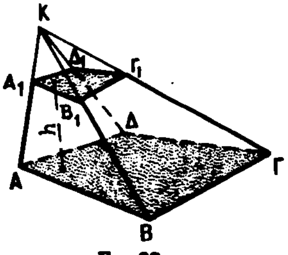
3ο τὸ σχῆμα καὶ οἱ διαστάσεις τοῦ ἀναπτύγματος τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κωνικοῦ πυθμένα·

4ο τὸ συνολικὸ βάρος τοῦ ντεπόζιτου σὲ *gr*. (Δὲν θὰ λογαριάσετε τὶς συνδέσεις. Ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ εἶναι 7,8).

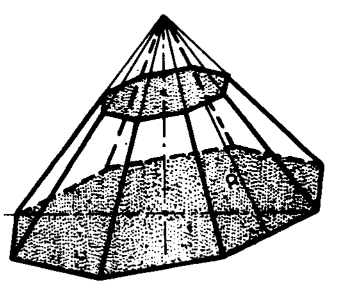
Μάθημα 39.

Κόλουρη πυραμίδα. Κόλουρος κῶνος.

1. Κόλουρη πυραμίδα. Ὅταν κόψωμε μιὰ πυραμίδα μὲ ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὴ βάση της, τὸ μέρος τῆς πυραμίδας τὸ ὁποῖο περιέχεται ἀνάμεσα σ' αὐτὸ τὸ ἐπίπεδο καὶ στὸ ἐπίπεδο τῆς βάσης λέγεται *κόλουρη πυραμίδα* (σχ. 39-α). Τὰ πολύγωνα $ΑΒΓΔ$ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ (σχ. 39-α) εἶναι οἱ *βάσεις* της· τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι *ὅμοια*. Οἱ πλευρικὲς ἕδρες της εἶναι *τραπέζια*. Ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν δυὸ βάσεων εἶναι τὸ *ὕψος* τῆς κόλουρης πυραμίδας.



Σχ. 39-α.
Κόλουρη πυραμίδα.



Σχ. 39-β.
Κόλουρη κανονικὴ πυραμίδα.

Ἡ κόλουρη πυραμίδα λέγεται *κανονική*, ὅταν ἡ πυραμίδα ἀπὸ τὴν ὁποία κόπηκε εἶναι κανονικὴ (σχ. 39-β). Οἱ βάσεις της εἶναι τότε δυὸ *κανονικὰ ὅμοια πολύγωνα* μὲ μῆκος πλευρῶν ἔστω $β$ τὸ ἕνα καὶ $β_1$ τὸ ἄλλο· οἱ πλευρικὲς ἕδρες της εἶναι *ἰσοσκελα τραπέζια, μεταξύ τους ἴσα*. Τὸ κοινὸ ὕψος $α$ αὐτῶν τῶν τραπεζίων λέγεται *ἀπόθημα* τῆς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας.

Ἡ πλευρικὴ ἐπιφάνεια F τῆς κανονικῆς ὀκταγωνικῆς κόλουρης πυραμίδας τοῦ σχ. 39-β εἶναι ἴση μὲ τὸ ὀκταπλάσιο τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς πλευρικῆς ἕδρας· ἄρα

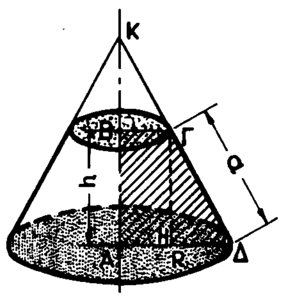
$$F = \frac{(β + β_1) \cdot α}{2} \cdot 8 = \frac{(8β + 8β_1) \cdot α}{2}.$$

Ἀλλὰ 8β καὶ $8\beta_1$ εἶναι οἱ περίμετροι τῶν δυὸ βάσεων τῆς κόλουρης πυραμίδας· ἑπομένως, ἂν παραστήσωμε αὐτὲς τὶς περιμέτρους μὲ p καὶ p_1, θὰ ἔχωμε τὸν τύπο:

$$F = \frac{(p+p_1)\cdot a}{2}.$$

Ὥστε, *τὸ ἐμβαδὸ τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ἀπόθημά της.*

2. Κόλουρος κῶνος. Ὅταν κόψωμε ἕναν κῶνο μ' ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὴ βάση του, τὸ μέρος τοῦ κώνου τὸ ὁποῖο περιέχεται ἀνάμεσα σ' αὐτὸ τὸ ἐπίπεδο καὶ στὸ ἐπίπεδο τῆς βάσης λέγεται *κόλουρος κῶνος* (σχ. 39-γ). Σ' αὐτὸν διακρίνομε δυὸ κυκλικὲς βάσεις, ἕνα ὕψος (h) καὶ ἕνα ἀπόθημα (a).



Σχ. 39-γ. Κόλουρος κῶνος.

Ἀπὸ τὸ σχ. 39-γ φαίνεται ἀμέσως ὅτι ὁ κόλουρος κῶνος εἶναι τὸ στερεὸ ποὺ προκύπτει, ἂν περιστρέψωμε τὸ ὀρθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ γύρω ἀπὸ τὴν πλευρά του AB, τὴν κάθετη πρὸς τὶς βάσεις του $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$. Πρὸς τὸν κόλουρο κῶνο τείνει μιὰ ἐσωγραμμένη κανονικὴ κόλουρη πυραμίδα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρικῶν ἑδρῶν της αὐξάνη ἀπεριόριστα. Ἡ παρατήρηση αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὸν ἀκόλουθο τύπο γιὰ τὸ ἐμβαδὸ F τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κόλουρου κώνου

$$F = \frac{(2\pi R + 2\pi r)\cdot a}{2} = (\pi R + \pi r)\cdot a,$$

ἄρα

$$F = \pi(R+r)a.$$

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κόλουρου κώνου ποὺ οἱ βάσεις του ἔχουν ἀκτίνες 25 καὶ 13 cm καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 16 cm.

Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $ΓΗΔ$ (σχ. 39-γ) εἶναι:

$$ΓΗ = 16$$

$$ΗΔ = R - r = 25 - 13 = 12.$$

Ἐξ ἄλλου, σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα, ἔχομε

$$a^2 = ΓΔ^2 = ΓΗ^2 + ΗΔ^2 = 16^2 + 12^2 = 400,$$

ἄρα

$$a = \sqrt{400} = 20 \ cm.$$

Ἑπομένως

$$F \simeq 3{,}14 \cdot (25 + 13) \cdot 20 \simeq 2\ 386 \ cm^2.$$

3. Ὄγκος μιᾶς κόλουρης πυραμίδας καὶ ἑνὸς κόλουρου κώνου.

Ἡ Θεωρητικὴ Γεωμετρία δείχνει πῶς ὁ ὄγκος μιᾶς κόλουρης πυραμίδας, ποὺ οἱ βάσεις της ἔχουν ἐμβαδὰ B καὶ B_1 καὶ τὸ ὕψος της εἶναι h, ἰσοῦται μὲ

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right).$$

Ὁ ἀντίστοιχος τύπος γιὰ τὸν ὄγκο ἑνὸς κόλουρου κώνου εἶναι λοιπόν:

$$V = \frac{h}{3}\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r\right)$$

ἢ

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο ἑνὸς κόλουρου κώνου ποὺ οἱ βάσεις του ἔχουν ἀκτίνες 15 καὶ 12 cm καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 18 cm.

Ἔχομε, σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω τύπο:

$$V \simeq \frac{3{,}14 \cdot 18}{3}\left(15^2 + 12^2 + 15 \cdot 12\right)$$

$$= 3{,}14 \cdot 6 \cdot (225 + 144 + 180)$$

$$= 18{,}84 \cdot 549 = 10\ 343{,}16 \simeq 10\ 343 \ cm^3.$$

4. Κατασκευὴ ἑνὸς κόλουρου κώνου μὲ τὸν τόρνο. Τὸ κωνικὸ τορνάρισμα ἑνὸς κομματιοῦ μπορεῖ νὰ γίνῃ μὲ δυὸ διάφορους τρόπους.

1ος. Δίνομε στὸν ὀλισθητήρα τοῦ ἐργαλειοφορείου μιὰν κατάλληλη κλίση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ τόρνου (σχ. 39-δ).

Γιὰ νὰ γράψῃ τὸ σημεῖο M τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου τὴ γενέτειρα $A'A$ τοῦ κόλουρου κώνου, πρέπει ὁ ὀλισθητήρας τοῦ ἐργαλειοφορείου νὰ σχηματίζῃ μὲ τὸν ἄξονα τοῦ τόρνου μιὰν κατάλληλη γωνία α. Τὴ γωνία αὐτὴ τὴν προσδιορίζομε ὡς ἑξῆς:

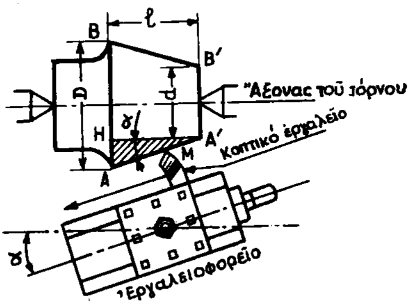
Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AHA', στὸ ὁποῖο $A\widehat{A'}H = \alpha$, ἐφαρμόζοντας τὸν ὁρισμὸ τῆς ἐφαπτομένης, βρίσκομε:

$$\varepsilon\varphi\ \alpha = \frac{AH}{A'H} = \frac{\dfrac{D-d}{2}}{l} = \frac{D-d}{2l}.$$

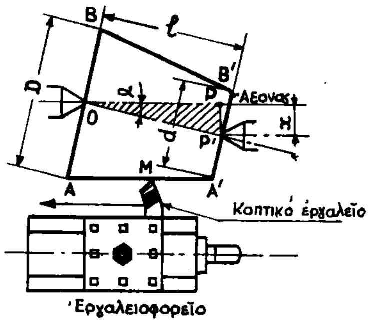
Ἀλλὰ $\dfrac{D-d}{2l}$ εἶναι ἡ κλίση $\varkappa$ τοῦ κόλουρου κώνου (Τόμ. Β', Μάθ. 8, Ἄσκ. 3). Ἄρα

$$\varepsilon\varphi\ \alpha = \varkappa.$$

Ὥστε, ὅταν ξέρωμε τὴν κλίση $\varkappa$ τοῦ κόλουρου κώνου ποὺ ἔχομε νὰ φτιάξωμε, μποροῦμε νὰ ὑπολογίσωμε τὴ γωνία κλίσεως α.



Σχ. 39-δ. Κωνικὸ τορνάρισμα μὲ κλίση τοῦ ὀλισθητήρα.



Σχ. 39-ε. Κωνικὸ τορνάρισμα μὲ μετατόπιση τῆς πόντας τῆς κουκουβάγιας.

Παράδειγμα. *Ὑπολογίστε τὴ γωνία α στὶς ἀκόλουθες δυὸ περιπτώσεις:*

$$I: \quad D = 24\ mm, \quad d = 12\ mm, \quad l = 16\ mm.$$

$$II: \quad \varkappa = 0{,}3 \left(\text{ἢ } \frac{3}{10} \text{ ἢ } 30\,\% \right).$$

Ἀπαντήσεις :

$$\mathrm{I}: \quad \varepsilon\varphi\, a = \frac{24 - 12}{2 \cdot 16} = \frac{12}{32} = 0{,}375,$$

ἄρα $a \simeq 20^\circ\ 30'$.

$$\mathrm{II}: \quad \varepsilon\varphi\, a = 0{,}3,$$

ἄρα $a \simeq 16^\circ\ 40'$.

2ος. Δίνομε μιὰν κατάλληλη μετατόπιση στὸ κέντρο (στὴν πόντα) τῆς κουκουβάγιας (σχ. 39-ε).

Ὁ ὀλισθητήρας τοῦ ἐργαλειοφορείου εἶναι τώρα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ τόρνου καὶ τὸ σημεῖο M τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου μετακινεῖται παράλληλα πρὸς αὐτὸν τὸν ἄξονα. Γιὰ νὰ γράφῃ λοιπὸν τὸ σημεῖο M τοῦ ἐργαλείου τὴ γενέτειρα $A'A$ τοῦ κόλουρου κώνου, πρέπει τὸ κέντρο (ἡ πόντα) τῆς κουκουβάγιας νὰ μετατοπισθῇ ἀπὸ τὴν κανονική του θέση P σὲ μιὰν ἄλλη P', τέτοιαν ὥστε

$$PP' = OP' \cdot \eta\mu\, a,$$

ἐπειδὴ τὸ τρίγωνο OPP' εἶναι ὀρθογώνιο στὸ P. Ἄρα ἡ ζητούμενη κατάλληλη μετατόπιση $x = PP'$ ἰσοῦται μὲ

$$x = l\ \eta\mu\, a.$$

Ἂς εἶναι τώρα ἡ γωνία a μικρὴ ($\leqq 6^\circ$)· τότε, ὅπως δείχνουν οἱ πίνακες τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων στὸ τέλος τοῦ βιβλίου, τὸ $\eta\mu a$ συμπίπτει μὲ τὴν $\varepsilon\varphi a$ κατὰ τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ἀντικαταστήσωμε στὸν τελευταῖο τύπο τὸ $\eta\mu\, a$ μὲ τὴν

$$\varepsilon\varphi\, a = \frac{D - d}{2l} = \text{κλίση } \varkappa \text{ τοῦ κόλουρου κώνου.}$$

Ἔτσι βρίσκομε γιὰ τὴν μετατόπιση x τὴν ἔκφραση :

$$x = l \cdot \frac{D - d}{2l} = \frac{D - d}{2}$$

ἤ, συναρτήσει τῆς κλίσης $\varkappa$:

$$x = l\varkappa.$$

Παράδειγμα. *Ὑπολογίστε τὴ μετατόπιση x τοῦ κέντρου τῆς κουκουβάγιας στὶς ἀκόλουθες δυὸ περιπτώσεις:*

I: $D = 55\ mm,\ d = 45\ mm,\ l = 120\ mm.$

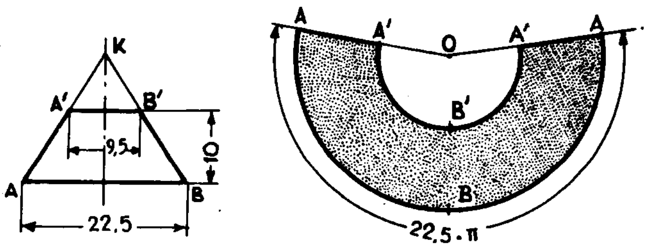
II: $\varkappa = 4\,\%_0.$

Ἀπαντήσεις:

I: $x = \dfrac{55-45}{2} = 5\ mm.$

II: $x = 120 \cdot 0{,}04 = 4{,}8\ mm.$

Ἀσκήσεις. *1.* Σχεδιάστε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κόλουρου κώνου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 39-ς μὲ τὴν ἀκόλουθη μέθοδο:



Σχ. 39-ς. Ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κόλουρου κώνου.

1°· Προεκτείνετε τὶς γενέτειρες AA' καὶ BB' ὡς ποὺ νὰ συναντηθοῦν στὴν κορυφὴ K. Μὲ ἀκτίνες τὰ μήκη KA' καὶ KA καὶ μὲ κέντρο ἕνα σημεῖο O χαράζετε δυὸ ὁμόκεντρα τόξα κύκλου.

2°· Ὑπολογίζετε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς μεγάλης βάσης τοῦ κόλουρου κώνου καὶ τὸ μεταφέρετε πάνω στὸ τόξο μὲ τὴ μεγαλύτερη ἀκτίνα, χρησιμοποιώντας ἕνα εὐλύγιστο μέτρο.

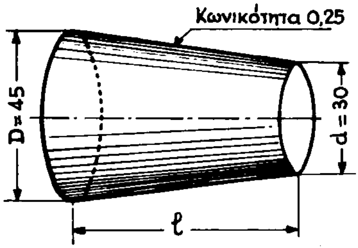
3°· Ἑνώνετε τὰ ἄκρα A καὶ A τοῦ τόξου $\widehat{AA}$ (σχ. 39-ς), ποὺ προσδιορίσατε ἔτσι, μὲ τὸ κέντρο O τῶν δυὸ ὁμόκεντρων τόξων ποὺ χαράξατε. Τὸ σχῆμα $ABAA'B'A'$ ποὺ προκύπτει, εἶναι τὸ ζητούμενο ἀνάπτυγμα.

Μετρώντας τώρα μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὴν ἐπίκεντρη γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέα ποὺ σχεδιάσατε, ἐπαληθεῦστε ὅτι εἶναι ἴση μὲ τὴ γωνία ποὺ βρίσκετε μὲ ὑπολογισμό, ὅταν ἐφαρμόσετε τὸν τύπο τοῦ § 4 τοῦ προηγούμενου Μαθήματος.

2. Θέλετε νὰ κατασκευάσετε στὸν τόρνο ἕναν κόλουρο κῶνο μὲ διαμέτρους βάσεων 160 *mm* τὴ μιά, 100 *mm* τὴν ἄλλη, καὶ μὲ ὕψος 400 *mm*. Ὑπολογίστε τὰ στοιχεῖα ποὺ χρειάζονται γιὰ τὴν κατασκευὴ καὶ μὲ τὶς δυὸ μεθόδους τοῦ § 4.

3. Ἔχετε ἕναν κῶνο μὲ ἀκτίνα R καὶ μὲ ὕψος h. Χωρίζετε τὸ ὕψος του σὲ 3 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ διαχωριστικὰ σημεῖα φέρνετε δυὸ ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὶς βάσεις.

1°. Πρὸς ποιοὺς ἀριθμοὺς εἶναι ἀνάλογοι οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν στερεῶν στὰ ὁποῖα χωρίζεται τότε ὁ κῶνος;

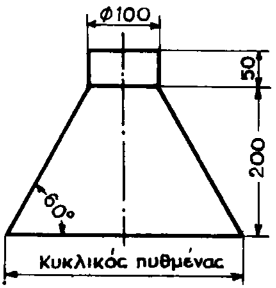


Σχ. 39-ζ.

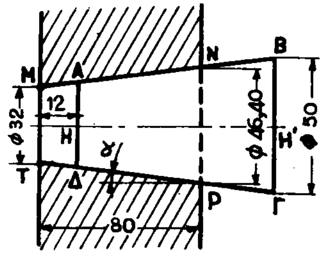
2°. Ἂν ὁ μικρότερος ἀπὸ τοὺς τρεῖς αὐτοὺς ὄγκους ἰσοῦται μὲ 15 dm^3, ποιοὶ εἶναι οἱ ὄγκοι τῶν δυὸ ἄλλων στερεῶν;

4. Ὑπολογίστε τὸ ὕψος l καὶ τὸν ὄγκο V τοῦ κόλουρου κώνου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 39-ζ.

5. Ὑπολογίστε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια τοῦ δοχείου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 39-η. Ἐπίσης ὑπολογίστε τὸν ὄγκον του καθὼς καὶ τὴ διάμετρο ἑνὸς κυλίνδρου ποὺ θὰ εἶχε τὸ ἴδιο ὕψος καὶ τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ τὸ δοχεῖο. (Οἱ διαστάσεις δίνονται σὲ *mm*).



Σχ. 39-η.



Σχ. 39-θ.

6. Ἕνα κολουροκωνικὸ κομμάτι $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 39-θ) χώνεται (ἁρμολογεῖται) μέσα σὲ μιὰ κωνικὴ τρύπα $MNPT$ ποὺ ἔχει ἴση κωνικότητα. Μὲ τὶς διαστάσεις ποὺ σημειώνονται στὸ σχῆμα ὑπολογίστε:

1° τὴν κωνικότητα·

2° τὴ διάμετρο $ΑΔ$·

3° τὸ μῆκος $ΗΗ'$·

4° τὴ γωνία κλίσεως $α$, τοῦ ἐργαλειοφορείου πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ τόρνου, ἡ ὁποία χρειάζεται γιὰ τὸ τορνάρισμα τοῦ κολουροκωνικοῦ κομματιοῦ $ΑΒΓΔ$.

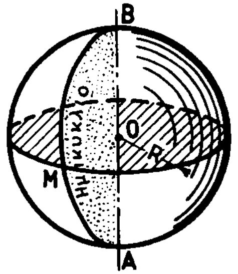
Μάθημα 40.

Σφαίρα.

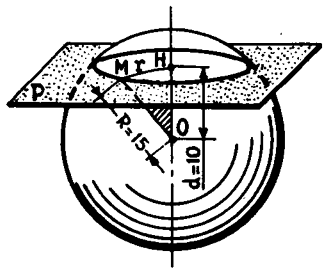
1. **Ἂς περιστρέψωμε ἕνα ἡμικύκλιο *ΑΜΒ* γύρω ἀπὸ τὴ διάμετρό του *ΑΒ*.** Θὰ προκύψη ἕνα στερεὸ ποὺ λέγεται *σφαίρα* (σχ. 40-α).

Ἡ ἀκτίνα *R* τοῦ ἡμικυκλίου λέγεται *ἀκτίνα τῆς σφαίρας*. Εἶναι φανερὸ ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας ἔχουν ἀπὸ τὸ κέντρο *O* τοῦ ἡμικυκλίου ἀπόσταση ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα *R*. Τὸ *O* λέγεται *κέντρο τῆς σφαίρας*.

Ὥστε, *σφαίρα εἶναι τὸ στερεὸ ποὺ γεννιέται μὲ τὴν περιστροφὴ ἑνὸς ἡμικυκλίου γύρω ἀπὸ τὴ διάμετρό του.*



Σχ. 40-α. Σφαίρα.



Σχ. 40-β. Ἡ τομὴ μιᾶς σφαίρας μὲ ἕνα ἐπίπεδο εἶναι κύκλος.

2. **Ἐπίπεδες τομὲς μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτίνα *R*.** *1ο.* Κάθε ἐπίπεδο ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο κόβει τὴ σφαίρα κατὰ ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα *R*· ὁ κύκλος αὐτὸς λέγεται *μεγάλος κύκλος τῆς σφαίρας* (σχ. 40-α).

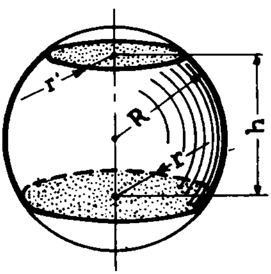
2ο. Ἕνα ἐπίπεδο *p*, ποὺ δὲν περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο *O* (σχ. 40-β), κόβει τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας κατὰ μιὰ γραμμὴ ποὺ τὰ σημεῖα της *M* ἔχουν τὴν ἴδια ἀπόσταση *R* ἀπὸ τὸ κέντρο *O* τῆς σφαίρας. Ἐπομένως αὐτὰ τὰ σημεῖα θὰ ἀπέχουν ἴσα ἀπὸ τὸ πόδι *H* τῆς καθέτου ποὺ πέφτει ἀπὸ τὸ *O* στὸ ἐπίπεδο *p*· ἄρα τὰ σημετὰ αὐτὰ θὰ ἀποτελοῦν μιὰ περιφέρεια μὲ κέντρο τὸ σημεῖο H καὶ μὲ ἀκτίνα r ποὺ μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμε, ὅταν ξέρωμε τὴν ἀκτίνα R καὶ τὴν ἀπόσταση $d = OH$. Καὶ ἀλήθεια, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο OHM, σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα, ἔχομε τὴ σχέση:

$$r^2 = HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - d^2,$$

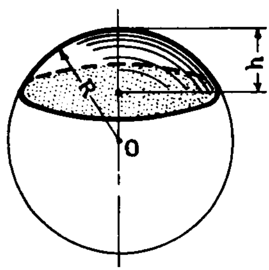
ἄρα $$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Ἐφαρμόζοντας αὐτὸν τὸν τύπο μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ σχ. 40-β βρίσκομε

$$r = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} \simeq 11,2 \ mm.$$



Σχ. 40-γ. Σφαιρικὸ τμῆμα· περιορίζεται ἀπὸ μιὰ ζώνη καὶ δυὸ κύκλους.



Σχ. 40-δ. Σφαιρικὸ τμῆμα· περιορίζεται ἀπὸ ἕνα σφαιρικὸ σκοῦφο καὶ ἕναν κύκλο.

3ο. Τὸ μέρος μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖο περιέχεται μεταξὺ δυὸ παράλληλων ἐπιπέδων, εἶναι ἕνα στερεὸ ποὺ λέγεται *σφαιρικὸ τμῆμα* (σχ. 40-γ). Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια, ποὺ τὸ περιορίζει καὶ ποὺ εἶναι ἕνα μέρος τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας, λέγεται *σφαιρικὴ ζώνη*. Τὸ σφαιρικὸ τμῆμα ἔχει *δυὸ κυκλικὲς βάσεις*, ἐκτὸς ἂν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δυὸ παράλληλα ἐπίπεδα ποὺ τὸ περιορίζουν ἐφάπτεται μὲ τὴ σφαίρα, ὁπότε τὸ σφαιρικὸ τμῆμα ἔχει μόνο *μία βάση*· σ' αὐτὴν τὴν περίπτωση ἡ σφαιρικὴ ζώνη λέγεται *σφαιρικὸς σκοῦφος* (σχ. 40-δ).

3. Ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δὲν μποροῦμε νὰ τὴν ἀναπτύξωμε, δηλαδή, ἀφοῦ τὴν σχίσωμε κατὰ μιὰ γραμμή, νὰ τὴν ἀνοίξωμε καὶ νὰ τὴν ἁπλώσωμε πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο, ὅπως κάμαμε γιὰ τὴν καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου. Ἀναπτύγματα σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν μποροῦμε νὰ πετύχωμε *μόνο κατὰ προσέγγιση*, καὶ τέτοια εἶναι ὅσα χρησιμοποιοῦν οἱ λεβητοποιοί.

Ὅσο γιὰ τὸ ἀκριβὲς ἐμβαδὸ F τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτίνα R, αὐτὸ μᾶς τὸ δίνει ὁ ἀκόλουθος τύπος τὸν ὁποῖο διδάσκει ἡ Θεωρητικὴ Γεωμετρία:

$$F = 4\pi R^2$$

ἤ, συναρτήσει τῆς διαμέτρου $D = 2R$:

$$F = 4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{4\pi D^2}{4} = \pi D^2.$$

Ὥστε, τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγάλου κύκλου της ἢ μὲ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κύκλου ποὺ ἔχει ἀκτίνα ἴση μὲ τὴ διάμετρο τῆς σφαίρας.

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸ F_1 μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης, μὲ ἀκτίνα R καὶ ὕψος h (βλ. σχ. 40-γ καὶ σχ. 40-δ), ἔχομε τὸν τύπο:

$$F_1 = 2\pi R \cdot h.$$

Ὥστε, τὸ ἐμβαδὸ μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας ἑνὸς μεγάλου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.

Παραδείγματα. Ὑπολογίστε 1ο τὴν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας ποὺ ἔχει ἀκτίνα 15 cm, 2ο τὸ ἐμβαδὸ μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης μὲ ὕψος $h = 4$ cm ἀπὸ αὐτὴν τὴ σφαίρα.

1ο $\quad F \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 = 2\,826\ cm^2.$

2ο $\quad F_1 \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \cdot 4 \simeq 377\ cm^2.$

4. Ὄγκος τῆς σφαίρας. Ἡ Θεωρητικὴ Γεωμετρία δείχνει ὅτι ὁ ὄγκος V μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτίνα R ἰσοῦται μὲ

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ἤ, συναρτήσει τῆς διαμέτρου $D = 2R$:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8} = \frac{\pi D^3}{6}.$$

Γιὰ τὸν ὄγκο ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος μὲ ὕψος h καὶ μὲ δυὸ βάσεις ποὺ οἱ ἀκτίνες τους εἶναι r καὶ r' ἀντιστοίχως (σχ. 40-γ), ἔχομε τὸν τύπο:

$$V_1 = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi h}{2}\left(r^2 + r'^2\right).$$

Ὁ τύπος αὐτὸς ἁπλουστεύεται, ὅταν τὸ σφαιρικὸ τμῆμα ἔχῃ μόνο μία βάση (π.χ. ὅταν $r \neq 0$ καὶ $r' = 0$)(σχ. 40-δ)· ἔχομε τότε:

$$V_2 = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi h}{2} r^2$$

ἤ, (ἐπειδὴ $r^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$),

$$V_2 = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi h}{2}(2Rh - h^2)$$

$$= \frac{\pi h^2}{3}(3R - h).$$

Παραδείγματα. Μιὰ σφαίρα ἔχει ἀκτίνα 8 cm. Ὑπολογίστε 1ο τὸν ὄγκο της V, 2ο τὸν ὄγκο V_2 ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματός της ποὺ ἔχει μία βάση καὶ ὕψος $h = 3$ cm.

1ο. $$V \simeq \frac{4}{3}\cdot 3{,}14 \cdot 8^3 \simeq 2\,144\ cm^3.$$

2ο. $$V_2 \simeq \frac{3{,}14\cdot 3^2}{3}(3\cdot 8 - 3) = 3{,}14\cdot 3\cdot 21 \simeq 198\ cm^3.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Ποιάν ἀπόσταση πρέπει νὰ ἔχῃ ἀπὸ τὸ κέντρο μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτίνα $R = 15$ cm ἕνα ἐπίπεδο p, γιὰ νὰ κόψῃ τὴ σφαίρα κατὰ ἕνα κύκλο μὲ ἐμβαδὸ 250 cm^2;

2. Ὑπολογίστε τὴ χωρητικότητα μιᾶς κουτάλας ποὺ ἔχει τὸ σχῆμα ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μία βάση, ὅταν ἡ ἀκτίνα τῆς κουτάλας (δηλαδὴ τῆς ἀντίστοιχης σφαίρας) εἶναι $R = 20\ cm$ καὶ τὸ ὕψος της $h = 8\ cm$.

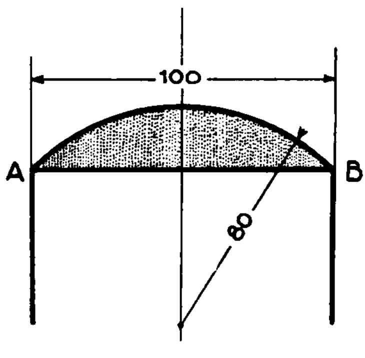
3. Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι $20\ cm$. Ὑπολογίστε 1ο τὴ διάμετρο μιᾶς σφαίρας ποὺ ἔχει τετραπλάσια ἐπιφάνεια, 2ο τὴ διάμετρο μιᾶς σφαίρας ποὺ ἔχει διπλάσια ἐπιφάνεια.

4. Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι $10\ cm$. Ὑπολογίστε 1ο τὴ διάμετρο μιᾶς σφαίρας ποὺ ἔχει ὀκταπλάσιο ὄγκο, 2ο τὴ διάμετρο μιᾶς σφαίρας ποὺ ἔχει διπλάσιο ὄγκο.

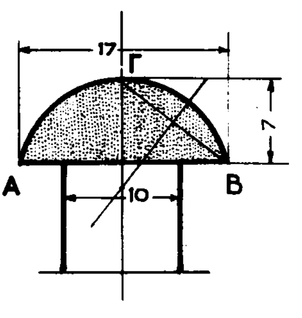
5. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο μιᾶς σφαίρας ποὺ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς της εἶναι ἴσο μὲ $1\ dm^2$.

6. Κόβετε μὲ τὴ φρέζα μιὰ χαλύβδινη σφαίρα διαμέτρου $30\ mm$ κατὰ δυὸ παράλληλα ἐπίπεδα, ἔτσι ποὺ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας νὰ βρίσκεται μεταξὺ τῶν δυὸ ἐπιπέδων καὶ σὲ ἀπόσταση ἀπὸ αὐτὰ $4\ mm$ καὶ $9\ mm$ ἀντιστοίχως. Προκύπτει ἕνα σφαιρικὸ τμῆμα. Αὐτοῦ τοῦ τμήματος ὑπολογίστε 1ο τὶς ἀκτίνες τῶν δυὸ βάσεων, 2ο τὸ βάρος του (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ 7,8).

7. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μία βάση, τὸ ὁποῖο παριστάνεται στὸ σχ. 40-ε καὶ ἀποτελεῖ τὸν πυθμένα ἑνὸς δοχείου (οἱ διαστάσεις δίνονται σὲ mm).



Σχ. 40-ε.



Σχ. 40-ς.

8. Ὑπολογίστε τὸ βάρος τῆς κεφαλῆς τοῦ μπουλονιοῦ, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα σφαιρικοῦ τμήματος καὶ παριστάνεται στὸ σχ. 40-ς (οἱ διαστάσεις δίνονται σὲ mm καὶ ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ εἶναι 7,8).

Προβλήματα Γεωμετρίας καὶ Τριγωνομετρίας γιὰ ἀνασκόπηση καὶ ἐπανάληψη.

I. Ὅμοια σχήματα. Τριγωνομετρία.

43. Δυὸ δυνάμεις $P_1 = 18\ kg$ καὶ $P_2 = 10\ kg$ εἶναι παράλληλες, ἔχουν τὴν ἴδια φορὰ καὶ ἐφαρμόζουν στὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως ἑνὸς στερεοῦ σώματος. Τὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς I τῆς συνισταμένης τους διαιρεῖ τὸ τμῆμα AB σὲ δυὸ μέρη AI καὶ IB τέτοια ὥστε:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{P_2}{P_1}.$$

1ο. Ὑπολογίστε τὸν λόγο $\frac{AI}{IB}$.

2ο. Ξέροντας τὸ μῆκος $AB = 42\ cm$, ὑπολογίστε τὰ μήκη AI καὶ IB.

3ο. Ἂν οἱ δυνάμεις P_1 καὶ P_2 γίνουν οἱ μισὲς ἀπὸ ὅ,τι εἶναι, δεῖξτε ὅτι τὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς I τῆς συνισταμένης τους δὲν ἀλλάζει θέση.

4ο. Ἂν ἡ P_1 γίνη δυὸ φορὲς μικρότερη καὶ ἡ P_2 δυὸ φορὲς μεγαλύτερη, κατὰ ποιό μῆκος θὰ μετατοπισθῆ τὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς τους I;

44. Τέσσερις δυνάμεις $P_1 = 2\ kg$, $P_2 = 3\ kg$, $P_3 = 4\ kg$, $P_4 = 5\ kg$, ἔχουν τὸ ἴδιο σημεῖο ἐφαρμογῆς O, ἐνεργοῦν μέσα σ᾽ ἕνα καὶ τὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ σχηματίζουν μὲ μιὰν ἡμιευθεία OX αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου γωνίες ἀντίστοιχα ἴσες μὲ 30°, 45°, 135°, 240°, κατὰ τὴν ἴδια φορὰ περιστροφῆς γύρω στὸ σημεῖο O.

Προσδιορίστε μὲ γραφικὴ μέθοδο (μὲ σχεδίαση):

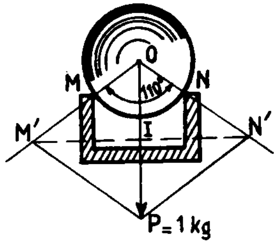
1ο τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης αὐτῶν τῶν δυνάμεων·

2ο τὴ γωνία αὐτῆς τῆς συνισταμένης μὲ τὴν ἡμιευθεία OX κατὰ τὴν ἴδια φορὰ περιστροφῆς ὅπως καὶ παραπάνω. (Κλίμακα τοῦ σχεδίου σας: 2 cm ἂς παριστάνουν 1 kg δύναμη).

45. Μιὰ σφαίρα βάρους $P = 1\ kg$ στηρίζεται πάνω στὶς μυτερὲς ἀκμὲς (σχ. 5) μιᾶς σιδηροδοκοῦ. Οἱ ἀντιδράσεις στὰ σημεῖα στηρίξεως M καὶ N εἶναι δυὸ δυνάμεις ποὺ οἱ φορεῖς τους περνοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο O τῆς σφαίρας καὶ ποὺ ἡ συνισταμένη τους ἰσοῦται μὲ τὴ δύναμη τὴν ἀντίθετη πρὸς τὴν P (ἔχει δηλαδὴ μέγεθος 1 kg καὶ φορὰ ἀντίθετη πρὸς τὴ φορὰ τῆς P).

1ο. Ἂν $\widehat{MON} = 110^\circ$, ὑπολογίστε τὸ μέγεθος τῶν ἀντιδράσεων στὰ σημεῖα M καὶ N.

2ο. Ἂν τὸ μέγεθος τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς δυὸ ἀντιδράσεις εἶναι 800 gr, ὑπολογίστε τὴ γωνία $\widehat{MON}$.

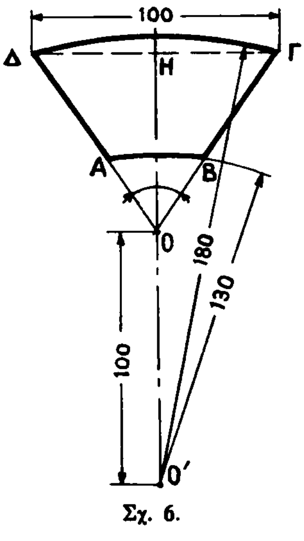


Σχ. 5.

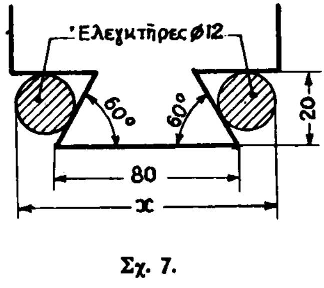
46. Μὲ τὰ δεδομένα ποὺ σημειώνονται στὸ σχ. 6 ὑπολογίστε τὴ γωνία $\widehat{AOB}$. (Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $O'H\Gamma$ μπορεῖτε νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρὰ $O'H$· ὑπολογίζετε ὕστερα τὸ μῆκος OH καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $OH\Gamma$ τὴ γωνία $\widehat{\Gamma OH}$ ποὺ εἶναι $= \frac{1}{2}\widehat{AOB}$).

47. Τὸ σχ. 7 παριστάνει μιὰ χελιδονουρά. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος x μὲ προσέγγιση 0,1 mm. Τὸ μῆκος αὐτὸ πρέπει νὰ σᾶς τὸ δώση καὶ ἡ ἀνάγνωση στὸ παχύμετρο, τὴν ὁποία θὰ κάμετε γιὰ τὸν ἔλεγχο τῆς κατασκευῆς.

48. Πέντε τρύπες, μὲ διάμετρο 6 mm ἡ καθεμιά τους, ἔχουν τὰ κέντρα τους πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια



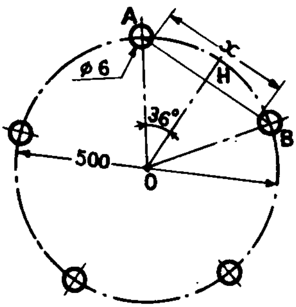
Σχ. 6.



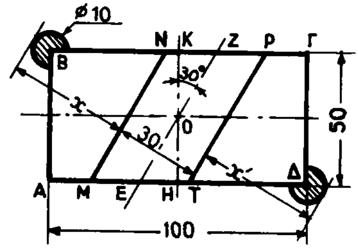
Σχ. 7.

μὲ διάμετρο 500 mm σὲ ἴσες ἀποστάσεις μεταξύ τους (σχ. 8). Ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση x ἀνάμεσα στὶς περιφέρειες δυὸ γειτονικῶν τρυπῶν.

49. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο κομμάτι $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 9) θέλομε ν' ἀνοίξωμε μιὰν ἐγκοπὴ $MNPT$ σὲ σχῆμα αὐλακιοῦ πλάτους 30 *mm* καὶ μὲ πλευρὲς MN καὶ TP παράλληλες. Ἡ γωνία κλίσεως τῆς μέσης γραμμῆς EZ αὐτῆς τῆς ἐγκοπῆς πρὸς τὸ ἄξονα συμμετρίας HK τοῦ ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ θέλομε νὰ εἶναι $= 30^\circ$.



Σχ. 8.



Σχ. 9.

1°. Δεῖξτε ὅτι $EH = KZ$.

2°. Νὰ συμπεράνετε ἀπὸ αὐτὸ ὅτι $AM = P\Gamma$ καὶ $BN = T\Delta$.

3°. Ὑπολογίστε τὰ μήκη NP καὶ KZ.

4°. Γιὰ νὰ ἐλέγξωμε τὴν κατασκευή, τοποθετοῦμε, ὅπως δείχνει τὸ σχ. 9, στὶς ἀκμὲς B καὶ Δ τοῦ κομματιοῦ δυὸ κυλινδρικοὺς ἐλεγκτῆρες σκαμμένους κατὰ ἕνα τομέα 90° καὶ μετροῦμε τὰ μήκη x καὶ x' ποὺ πρέπει νὰ εἶναι ἴσα. Τὸ ἐξαγόμενο τῶν μετρήσεων θὰ τὸ παραβάλωμε μὲ τὸ ἐξαγόμενο ποὺ δίνει ὁ ὑπολογισμὸς τῶν μηκῶν αὐτῶν. Νὰ κάμετε τώρα αὐτὸν τὸν ὑπολογισμό.

50. Τὸ ἡμίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας α εἶναι 0,600. Ὑπολογίστε:

1° τὸ συνημίτονο καὶ τὴν ἐφαπτομένη τῆς ἴδιας γωνίας α·

2° τὴ γωνία α·

3° τὸ ἡμίτονο καὶ τὸ συνημίτονο τῆς γωνίας 2α.

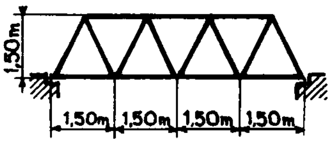
51. Χρησιμοποιώντας πίνακες τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὑπολογίστε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ἔκφρασης

$$x = h \cdot \frac{\eta\mu\,\widehat{B}}{\eta\mu\,\widehat{\Gamma} - \eta\mu\,\widehat{A}},$$

ὅταν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ εἶναι γωνίες ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, $\widehat{A}=59^\circ\ 10'$, $\widehat{B}=37^\circ\ 40'$ καὶ $h=14\ m$.

II. Μετρικὲς σχέσεις στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο.

52. Τὸ σχ. 10 παριστάνει ἕνα ζευκτὸ στέγης. Ὑπολογίστε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν σιδερένιων ράβδων ποὺ θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὴν κατασκευὴ πέντε τέτοιων ζευκτῶν.



Σχ. 10.

53. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ λουριοῦ ποὺ συνδέει δυὸ τροχαλίες, μὲ διαμέτρους $D=500\ mm$ ἡ μεγάλη καὶ $d=100\ mm$ ἡ μικρή, ξέροντας τὴν ἀπόσταση $OO'=960\ mm$ τῶν ἀξόνων τους καθὼς καὶ ὅτι τὸ τόξο ἐπαφῆς τοῦ λουριοῦ μὲ τὴ ζάντα τῆς μικρῆς τροχαλίας ὑπολογίζεται κατὰ προσέγγιση ἀπὸ τὸν τύπο:

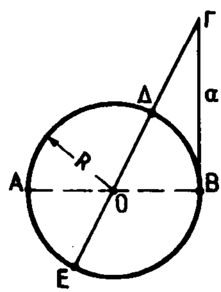
$$\text{τόξο ἐπαφῆς (σὲ μοῖρες)} = 180^\circ - \frac{D-d}{OO'}\cdot 57^\circ.$$

54. Γνωρίζοντας τὸ μῆκος 30 mm τῆς πλευρᾶς ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου, ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα R τοῦ κύκλου τοῦ περιγραμμένου στὸ τρίγωνο.

55. Στὸ ἄκρο B τῆς διαμέτρου AB ἑνὸς κύκλου μὲ ἀκτίνα R ὑψῶστε κάθετο στὴ διάμετρο (σχ. 11) καὶ πάνω στὴν κάθετο πάρτε ἕνα μῆκος $B\Gamma=a$. Ὕστερα χαράξτε τὴν εὐθεία ΓO καὶ σημειῶστε μὲ Δ καὶ E τὰ σημεῖα ὅπου ἡ εὐθεία αὐτὴ κόβει τὴν περιφέρεια.

Ἐκφράστε τὰ μήκη $\Gamma\Delta$ καὶ ΓE συναρτήσει τῶν μηκῶν R καὶ a.

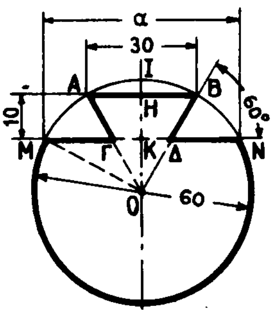
Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: πάρτε τὸ $R=10\ cm$ καὶ τὸ $a=22\ cm$.



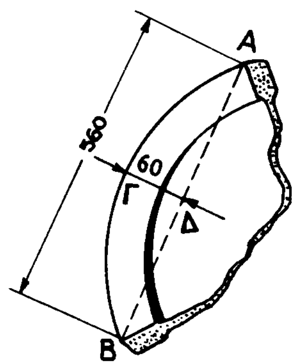
Σχ. 11.

56. Σᾶς δίνουν τὸ σχέδιο (σχ. 12) ἑνὸς κομματιοῦ ποὺ χρειάζεται σὲ ἕνα συναρμολόγημα· ὑπολογίστε τὴ διάσταση a.

57. Ἀπὸ ἕνα σπασμένο βολὰν διαθέτομε μόνο τὸ κομμάτι ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 13. Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο τοῦ βολὰν ἀπὸ τὶς διαστάσεις $AB = 560$ *mm* καὶ $ΓΔ = 60$ *mm*.



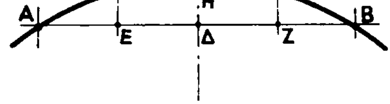
Σχ. 12.



Σχ. 13.

58. Ἕνα ἰσόσκελο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) εἶναι ἐσωγραμμένο σὲ κύκλο. Ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου ξέροντας ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ $ΒΓ$ τοῦ τριγώνου ἔχει μῆκος 4,8 *cm* καὶ ὅτι τὸ ὕψος $ΑΗ$ τοῦ τριγώνου εἶναι 3,9 *cm*.

59. Τὸ τόξο κύκλου $\widehat{AB}$ ἔχει χορδὴ $AB = 3\,000$ *mm* καὶ βέλος $ΓΔ = 500$ *mm* (σχ. 14). Γιὰ νὰ χαράξωμε τὸ τόξο, χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸ κέντρο του O ποὺ βρίσκεται πάνω στὴ $ΓΔ$ σὲ μεγάλη ἀπόσταση ἀπὸ τὸ $Γ$, προσδιορίζομε ὡς ἑξῆς δυὸ ἀκόμα σημεῖα I καὶ $Θ$ τοῦ τόξου (ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τρία A, B, $Γ$, ποὺ δόθηκαν):



Σχ. 14.

Διαιροῦμε τὸ τμῆμα AB σὲ 4 ἴσα μέρη: $AE = EΔ = ΔZ = ZB$. Ἀπὸ τὰ διαχωριστικὰ σημεῖα E καὶ Z ὑψώνομε καθέτους στὴν εὐθεία AB καὶ ὑπολογίζομε τὸ μῆκος $IE = ΘZ$ τῶν δυὸ τμημάτων ποὺ ἀποκόπτονται πάνω σ' αὐτὲς τὶς καθέτους ἀπὸ τὸ τόξο καὶ τὴ χορδή του. Ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς γίνεται ὡς ἑξῆς: 1° ἀπὸ τὰ μήκη τῆς χορδῆς καὶ τοῦ βέλους ὑπολογίζομε τὴν ἀκτίνα R τοῦ τόξου, 2° ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο OIH ὑπολογίζομε τὸ μῆκος OH καὶ 3ο ἀπὸ τὰ μήκη OH καὶ $O\varDelta = O\varGamma - \varDelta\varGamma$ βρίσκομε τὸ μῆκος $\varDelta H$ ποὺ εἶναι $= EI$.

Σχεδιάστε τὸ τόξο ὑπὸ κλίμακα 1 : 20.

ΙΙΙ. Ἐμβαδὰ ἐπίπεδων σχημάτων.

60. Τὸ ἀπόθημα ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 0,25 m. Ὑπολογίστε :

1ο τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου τοῦ περιγραμμένου στὸ ἑξάγωνο·

2ο τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου τούτου·

3ο τὸ λόγο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἴδιου κύκλου πρὸς τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ἑξαγώνου.

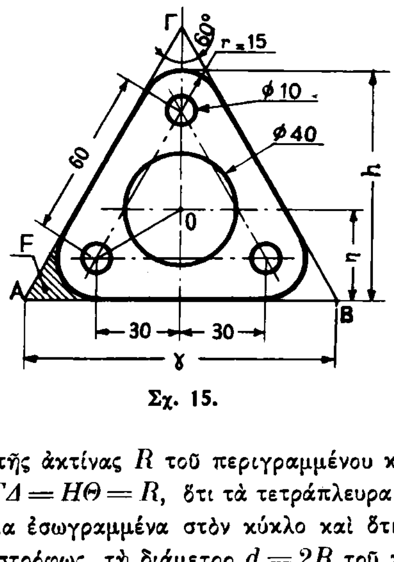
61. Στὸ σχ. 15 ἔχετε τὸ σκαρίφημα μιᾶς τριγωνικῆς φλάντζας (ἢ ἑνὸς τριγωνικοῦ συνδέσμου). Ὑπολογίστε :

1ο τὸ ὕψος h·

2ο τὴν ἀπόσταση η τοῦ κέντρου O ἀπὸ τὴν πλευρὰ AB·

3ο τὴν πλευρὰ γ τοῦ τριγώνου $AB\varGamma$·

4ο τὴ γραμμοσκιασμένη ἐπιφάνεια F ποὺ πρέπει νὰ κοπῆ ἀπὸ κάθε γωνία γιὰ τὸ στρογγύλεμα.



Σχ. 15.

62. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ F τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ σχ. 16 συναρτήσει τῆς ἀκτίνας R τοῦ περιγραμμένου κύκλου, ξέροντας ὅτι $AB = EZ = \varGamma\varDelta = H\varTheta = R$, ὅτι τὰ τετράπλευρα $AB\varGamma\varDelta$ καὶ $EZH\varTheta$ εἶναι ὀρθογώνια ἐσωγραμμένα στὸν κύκλο καὶ ὅτι $AB \parallel \varTheta E$. Ὕστερα ἐκφράστε, ἀντιστρόφως, τὴ διάμετρο $d = 2R$ τοῦ κύκλου συναρτήσει τοῦ F.

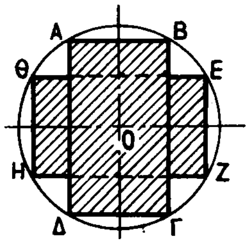
Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: Ὑπολογίστε τὴν d, ὅταν $F = 400\,mm^2$.

63. Τὸ σχ. 17 παριστάνει τὴ διατομὴ ἑνὸς σιδερένιου κομματιοῦ μὲ τὶς διαστάσεις δοσμένες σὲ mm. Ὑπολογίστε :

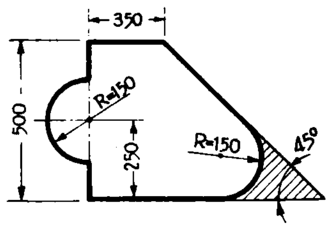
1ο τὴν περίμετρό της·

2ο τὸ ἐμβαδό της·

3ο τὸν ὄγκο καὶ τὸ βάρος τοῦ κομματιοῦ, ἂν τὸ πάχος του εἶναι 20 *mm* καὶ ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ 7,8.



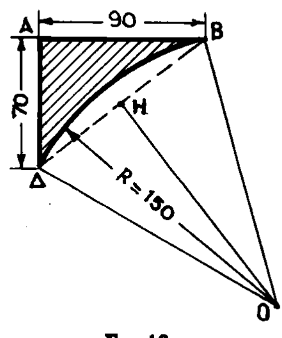
Σχ. 16.



Σχ. 17.

64. Μιὰ τετραγωνικὴ πλάκα ἀπὸ λαμαρίνα ἔχει πλευρὰ 60 *cm* καὶ ζυγίζει 2,700 *kg*. Κόβομε τὶς γωνίες της γιὰ νὰ προκύψῃ μιὰ πλάκα σὲ σχῆμα κανονικοῦ ὀκταγώνου μὲ ἀπόθημα 30 *cm*. Ὑπολογίστε, μὲ προσέγγιση ἑνὸς *mm*, τὴν πλευρὰ τοῦ ὀκταγώνου. Ὑπολογίστε ἐπίσης τὸ βάρος τῆς ὀκταγωνικῆς πλάκας.

65. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ σχ. 18, στὸ ὁποῖο οἱ σημειωμένες διαστάσεις ἐκφράζουν χιλιοστά.



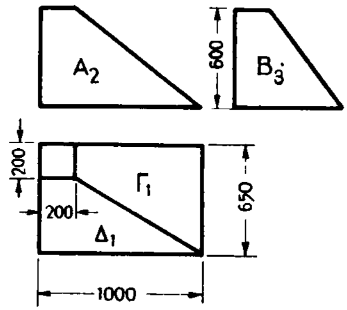
Σχ. 18.

IV. Ἐπίπεδα καὶ εὐθεῖες στὸ χῶρο. Πολύεδρα. Στρογγυλὰ σώματα.

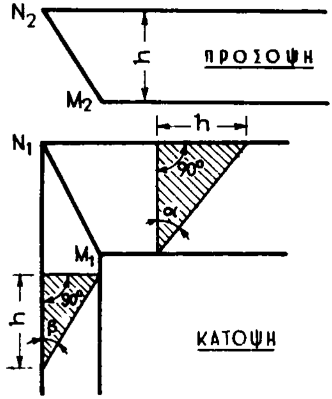
66. Μιὰ λάμα, ποὺ χρησιμοποιεῖται γιὰ ὑποστήριγμα, ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μὲ τὶς ἀκόλουθες διαστάσεις: 44 $mm \times$ 33 $mm \times 30$ *mm*. Ὑπολογίστε, μὲ προσέγγιση ἑνὸς δεκάτου τοῦ *mm*, τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου μιᾶς μεγάλης ἕδρας της καί, ὕστερα, τὸ μῆκος μιᾶς διαγωνίου τῆς πλάκας.

67. Τὸ σχ. 19 σᾶς δίνει (ὑπὸ κλίμακα) τὴν κάτοψη, τὴν πρόσοψη καὶ τὴν πλάγια ὄψη τῆς ἐσωτερικῆς καπνοδόχου ἑνὸς σιδηρουργείου. Ὑπολογίστε τὰ ἐμβαδὰ τῶν πλευρικῶν ἑδρῶν της *Α*, *Β*, *Γ* καὶ *Δ*. (Οἱ σημειωμένες διαστάσεις ἐκφράζουν χιλιοστά).

68. Τὸ σχ. 20 παριστάνει τὴν κάτοψη καὶ τὴν πρόσοψη ἑνὸς μέρους μιᾶς σκάφης ἀπὸ λαμαρίνα.



Σχ. 19.



Σχ. 20.

Δεῖξτε ὅτι οἱ γωνίες *α* καὶ *β* τῶν γραμμοσκιασμένων τριγώνων εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ τὶς γωνίες ποὺ οἱ πλάγιες πλευρικὲς ἕδρες τῆς σκάφης σχηματίζουν μὲ τὸν πυθμένα της.

69. Μιὰ σκάφη οἰκοδόμου ἀπὸ συγκολλημένη λαμαρίνα ἔχει τὶς ἀκόλουθες διαστάσεις σὲ *mm*: πυθμένας 320×160, ἄνοιγμα 500×320, ὕψος 160. Ὑπολογίστε:

1° τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας τῆς σκάφης·

2° τὸ μῆκος μιᾶς πλευρικῆς συγκολλημένης ἀκμῆς·

3° τὶς διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου φύλλου λαμαρίνας τὸ ὁποῖο θὰ χρειασθῆ γιὰ νὰ ἀναπτύξετε (νὰ ἁπλώσετε) πάνω σ' αὐτὸ τὴν ἐπιφάνεια τῆς σκάφης (θὰ φαντασθῆτε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια σχισμένη κατὰ μῆκος τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς 4 πλευρικὲς ἀκμὲς καὶ τὶς πλευρικὲς ἕδρες κατεβασμένες πάνω στὸ ἐπίπεδο τοῦ πυθμένα)·

4° τὴν ἀντίστοιχη ἀπώλεια, δηλαδὴ τὸ ὁλικὸ ἐμβαδὸ τῶν ἀποκομμάτων ποὺ θὰ περισσέψουν ἀπὸ τὸ παραπάνω φύλλο λαμαρίνας, ὅταν κόψετε σ' αὐτὸ τὸ φύλλο τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τῆς σκάφης.

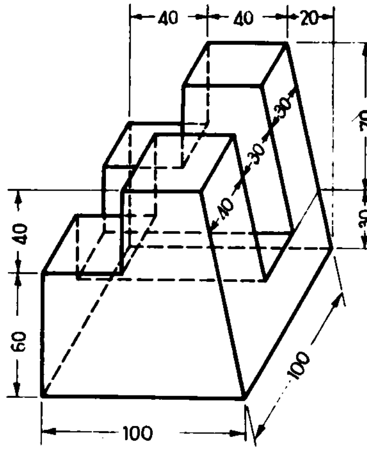
70. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο τοῦ κομματιοῦ ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 21 (οἱ διαστάσεις σὲ *mm*), ὕστερα ὑπολογίστε τὸ βάρος του, ἂν εἶναι φτιαγμένο ἀπὸ χαλκὸ (σχετικὴ πυκνότητα 8,9).

Ἂν τὸ ἴδιο κομμάτι κατασκευασθῇ ἀπὸ ἀλουμίνιο (σχετικὴ πυκνότητα 2,7), ποιὰν ἐλάττωση βάρους θὰ παρουσιάσῃ;

71. Ἕνα ἀτσαλένιο κομμάτι (σχετικὴ πυκνότητα 7,8) ζυγίζει 99,84 *kg*. Τὸ μῆκος του εἶναι 2 *m* καὶ ἡ διατομή του τετράγωνη. Ζητοῦνται:

1ο ἡ πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς διατομῆς·

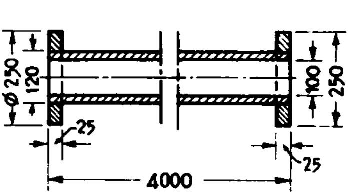
2ο τὸ μῆκος τῆς κυλινδρικῆς ράβδου μὲ διάμετρο 10 *mm* ποὺ μποροῦμε νὰ φτιάξωμε ἀπὸ τὸ κομμάτι μὲ τράβηγμα.



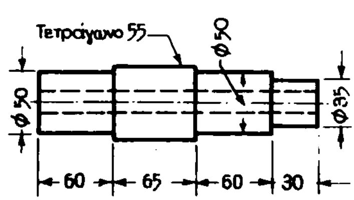
Σχ. 21.

72. Ἡ διατομὴ ἑνὸς κλειστοῦ κιβωτίου ἀπὸ λαμαρίνα εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο τραπέζιο μὲ μεγάλη βάση 0,87 *m*, μικρὴ 0,55 *m* καὶ ὕψος 0,40 *m*. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κιβωτίου, ἂν τὸ μῆκος του εἶναι 2,10 *m*;

73. Ὑπολογίστε τὸ βάρος τοῦ σιδηροσωλῆνα, μὲ τοὺς δυὸ συνδέσμους στὰ ἄκρα του, ὁ ὁποῖος παριστάνεται στὸ σχ. 22 (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ 7,8).



Σχ. 22.



Σχ. 23.

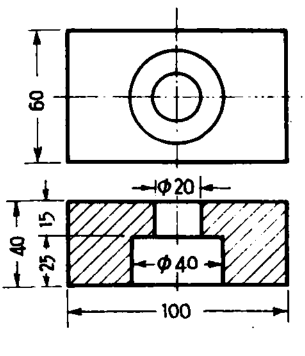
74. Πρόκειται νὰ φτιάξετε τὸ ἀτσαλένιο κομμάτι ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 23, εἴτε ἀπὸ μιὰ στρογγυλὴ ράβδο εἴτε ἀπὸ μιὰ τετράγωνη.

1ο Ὑπολογίστε γιὰ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ περιπτώσεις ποιὸ θὰ εἶναι τὸ βάρος τῆς ράβδου (σχετ. πυκνότ. 7,8) ποὺ θὰ κατεργασθῆτε.

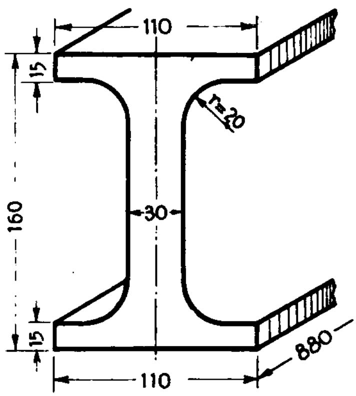
2ο Ὑπολογίστε τί θὰ κοστίση ἡ κατασκευὴ τοῦ κομματιοῦ αὐτοῦ ἀπὸ τετράγωνη ράβδο, ἂν ἡ τιμὴ τοῦ ἀτσαλιοῦ εἶναι 8 δρχ/kg καὶ τὸ κόστος τῆς μηχανουργικῆς κατεργασίας 5 δρχ. Ποιά θὰ εἶναι ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ κομματιοῦ, ἂν στὸ κόστος κατασκευῆς προστεθοῦν 35 °/ₒ γιὰ γενικὰ ἔξοδα καὶ κέρδος τοῦ κατασκευαστῆ;

75. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο καὶ τὸ βάρος τοῦ ἀτσαλένιου κομματιοῦ ποὺ παριστάνεται μὲ κάτοψη καὶ πρόσοψη στὸ σχ. 24 (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ 7,8).

76. Ξέροντας ὅτι τὸ ἀτσαλένιο κομμάτι ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 25 (σχετικὴ πυκνότητα 7,8) χάνει μὲ τὴ μηχανουργικὴ κατεργασία τὰ 12,5 °/ₒ τοῦ βάρους του, ὑπολογίστε:



Σχ. 24.



Σχ. 25.

1ο τὸ βάρος τοῦ κατεργασμένου κομματιοῦ·

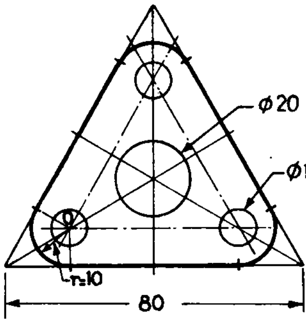
2ο τὸ βάρος τοῦ ἀκατέργαστου κομματιοῦ.

Οἱ διαστάσεις ποὺ σημειώνονται στὸ σχ. 25 εἶναι διαστάσεις τοῦ κατεργασμένου κομματιοῦ.

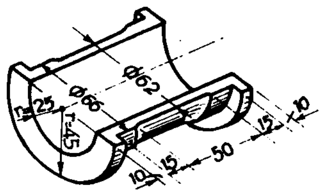
77. Ὑπολογίστε τὸ βάρος τοῦ τριγωνικοῦ συνδέσμου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 26 καὶ ἔχει πάχος 20 *mm*. (Σχετικὴ πυκνότητα τοῦ μετάλλου του 7,8).

78. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο τοῦ μισοῦ κουσινέτου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 27.

79. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο τῆς σφήνας ποὺ μιὰ ὄψη της $ΑΒΓΔΕΖ$ παριστάνεται στὸ σχ. 28 καὶ ποὺ τὸ πάχος της εἶναι 20 mm. (Γιὰ νὰ

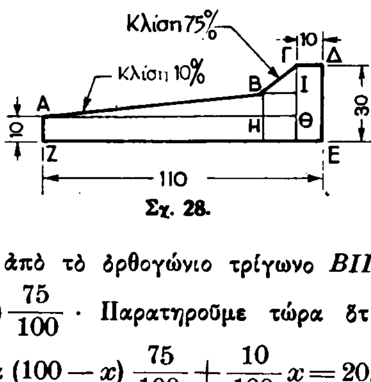


Σχ. 26.



Σχ. 27.

λύσετε αὐτὸ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ βρῆτε ποιά εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου $Β$ ἀπὸ τὴν πλευρὰ $ΖΑ$· αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνη εἴτε μὲ γραφικὴ μέθοδο, ἀφοῦ σχεδιάσετε στὸ πραγματικό της μέγεθος τὴν ὄψη τῆς σφήνας, εἴτε μὲ ὑπολογιστικὴ μέθοδο ὡς ἑξῆς: ἂν παραστήσωμε μὲ x τὴν ἀπόσταση $ΑΗ$ τοῦ $Β$ ἀπὸ τὴν $ΖΑ$, θὰ ἔχωμε ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $ΑΗΒ$: $ΒΗ = \frac{10}{100} x$.



Σχ. 28.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $ΒΙ = 100 - x$ καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $ΒΙΓ$ ἔχομε: $ΓΙ = ΒΙ \cdot \frac{75}{100} = (100 - x)\frac{75}{100}$ · Παρατηροῦμε τώρα ὅτι $ΒΗ = ΙΘ$ καὶ ὅτι $ΓΙ + ΙΘ = 20$, ἄρα $(100 - x)\frac{75}{100} + \frac{10}{100}x = 20$.
Ἡ τελευταία αὐτὴ ἐξίσωση μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμε τὸ x).

80. Ἕνας ὑδραυλικὸς κατασκευάζει τὸ καπέλο μιᾶς καπνοδόχου, τὸ ὁποῖο ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, ἀπὸ ἕνα φύλλο λαμαρίνας κομμένο σὲ σχῆμα ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα μὲ ἀκτίνα 18 cm καὶ μὲ ἐπίκεντρη γωνία 120°. Τὸ πάχος τῆς λαμαρίνας εἶναι 2 mm καὶ ἡ σχετικὴ πυκνότητά της 7,7. Ὑπολογίστε: 1ο τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας ποὺ χρησιμοποιήθηκε, 2ο τὴν ἀκτίνα τῆς κυκλικῆς βάσης τοῦ καπέλου καὶ 3ο τὸ ὕψος τοῦ καπέλου.

81. Τὸ καπέλο μιᾶς καπνοδόχου ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου· τὸ ὕψος του εἶναι 135 mm καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσης του 360 mm. Ἡ ἕνωση ἔγινε μὲ αὐτογενῆ συγκόλληση, δηλαδὴ χωρὶς ἐπικάλυψη. Ζητοῦνται:

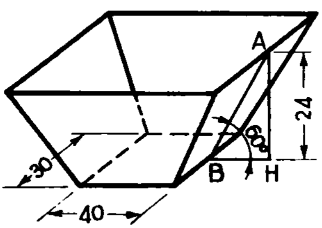
1ο τὸ μῆκος μιᾶς γενέτειρας τοῦ κώνου·

2ο ἡ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου·

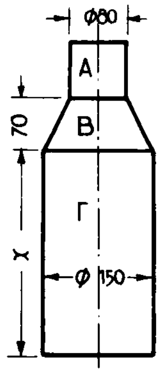
3ο τὸ βάρος τοῦ καπέλου, ἂν εἶναι κατασκευασμένο ἀπὸ λαμαρίνα πάχους 2 mm καὶ πυκνότητας 7,7.

82. Μιὰ σκάφη οἰκοδόμου ἔχει βάση (πυθμένα) ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις 40 cm × 30 cm. Τὸ ὕψος της εἶναι 24 cm καὶ οἱ πλευρικὲς ἕδρες της σχηματίζουν μὲ τὸ ἐπίπεδο τῆς βάσης γωνία κλίσεως 60° (σχ. 29). Ὑπολογίστε τὴ χωρητικότητά της.

83. Τὸ σχ. 30 παριστάνει ἕνα δοχεῖο. Ὑπολογίστε τί ὕψος πρέπει νὰ δώσωμε στὸ κάτω μέρος του, ποὺ σημειώνεται μὲ τὸ γράμμα *Γ*, ἂν θέλωμε νὰ χωρῇ τὸ δοχεῖο 6 λίτρα, ὅταν εἶναι γεμάτο ὡς τὴν ἐπάνω στάθμη τοῦ μεσαίου μέρους του *Β*.



Σχ. 29.



Σχ. 30.

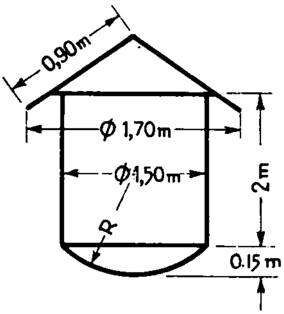
84. Ἕνα κυλινδρικὸ ντεπόζιτο (σχ. 31) ἔχει πυθμένα σὲ σχῆμα ἑνὸς σφαιρικοῦ σκούφου καὶ σκεπάζεται μ' ἕνα κωνικὸ καπάκι. Ὑπολογίστε:

1ο τὴν ἀκτίνα R τοῦ σφαιρικοῦ πυθμένα·

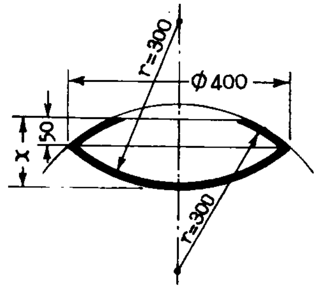
2ο τὴ χωρητικότητα τοῦ ντεπόζιτου·

3ο τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῆς λαμαρίνας ἀπὸ τὴν ὁποία εἶναι κατασκευασμένο.

85. Τὸ σχῆμα 32 παριστάνει ἕνα ἀνοικτὸ δοχεῖο ἀπὸ λαμαρίνα τῶν 0,5 *mm*, ἀνοικτὸ πρὸς τὰ πάνω. Ὑπολογίστε:



Σχ. 31.



Σχ. 32.

1° τὴν ἐξωτερική του ἐπιφάνεια·

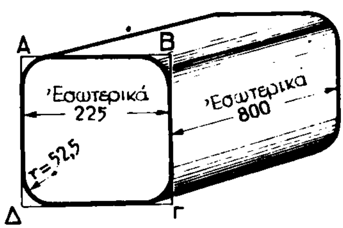
2° τὸν ἐσωτερικὸ ὄγκο του παραμελώντας τὸ πάχος τῆς λαμαρίνας·

3° τὸ ὁλικὸ ὕψος του *x*.

86. Ἕνας σφαιρικὸς σκοῦφος ἔχει ἀκτίνα 5 *mm* καὶ βάση ἕναν κύκλο μὲ διάμετρο 5 *mm*. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνειά του· (γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ πρέπει πρῶτα νὰ βρῆτε τὸ ὕψος τοῦ σκούφου χρησιμοποιώντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα).

87. Τὸ σχ. 33 παριστάνει σὲ παράλληλη προβολὴ ἕνα δοχεῖο γιὰ βενζίνα κατασκευασμένο ἀπὸ λαμαρίνα ποὺ ἔχει πάχος 1 *mm* καὶ σχετικὴ πυκνότητα 7,8. Ὑπολογίστε:

1° τὴν (ἐξωτερικὴ) πλευρικὴ ἐπιφάνεια τοῦ δοχείου·



Σχ. 33.

2° τὴν (ἐξωτερικὴ) ἐπιφάνεια τῶν δυὸ βάσεών του·

3° τὴν (ἐξωτερικὴ) ὁλικὴ ἐπιφάνεια·

4° τὴ χωρητικότητα τοῦ δοχείου·

5° τὸ βάρος τοῦ δοχείου, ὅταν εἶναι ἄδειο·

6° τὸ βάρος του, ὅταν εἶναι γεμάτο (σχετικὴ πυκνότητα τῆς βενζίνας 0,7).

Πίνακας τετραγώνων, τετραγωνικῶν ριζῶν, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν.

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΚΥΒΟΙ	ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
1	1	1,000	1	1,000
2	4	1,414	8	1,260
3	9	1,732	27	1,442
4	16	2,000	64	1,587
5	25	2,236	125	1,710
6	36	2,450	216	1,817
7	49	2,646	343	1,913
8	64	2,828	512	2,000
9	81	3,000	729	2,080
10	100	3,162	1 000	2,154
11	121	3,317	1 331	2,224
12	144	3,464	1 728	2,289
13	169	3,606	2 197	2,351
14	196	3,742	2 744	2,410
15	225	3,873	3 375	2,466
16	256	4,000	4 096	2,520
17	289	4,123	4 913	2,571
18	324	4,243	5 832	2,602
19	361	4,359	6 859	2,668
20	400	4,472	8 000	2,714
21	441	4,583	9 261	2,759
22	484	4,690	10 648	2,802
23	529	4,796	12 167	2,844
24	576	4,899	13 824	2,885
25	625	5,000	15 625	2,924
26	676	5,099	17 576	2,963
27	729	5,196	19 683	3,000
28	784	5,292	21 952	3,037
29	841	5,385	24 389	3,072
30	900	5,477	27 000	3,107
31	961	5,568	29 791	3,141
32	1 024	5,657	32 768	3,175
33	1 089	5,745	35 937	3,208
34	1 156	5,831	39 304	3,240
35	1 225	5,916	42 875	3,271
36	1 296	6,000	46 656	3,302
37	1 369	6,083	50 653	3,332
38	1 444	6,164	54 872	3,362
39	1 521	6,245	59 319	3,391
40	1 600	6,325	64 000	3,420
41	1 681	6,403	68 921	3,448
42	1 764	6,481	74 088	3,476
43	1 849	6,557	79 507	3,503
44	1 936	6,633	85 184	3,530
45	2 025	6,708	91 125	3,557
46	2 116	6,782	97 336	3,583
47	2 209	6,856	103 823	3,609
48	2 304	6,928	110 592	3,634
49	2 401	7,000	117 649	3,659
50	2 500	7,071	125 000	3,684

Πίνακες τετραγώνων, τετραγωνικῶν ριζῶν, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν (συνέχεια).

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΚΥΒΟΙ	ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
51	2 601	7,141	132 651	3,708
52	2 704	7,211	140 608	3,733
53	2 809	7,280	148 877	3,756
54	2 916	7,349	157 464	3,780
55	3 025	7,416	166 375	3,803
56	3 136	7,483	175 616	3,826
57	3 249	7,550	185 193	3,849
58	3 364	7,616	195 112	3,871
59	3 481	7,681	205 379	3,893
60	3 600	7,746	216 000	3,915
61	3 721	7,810	226 981	3,937
62	3 844	7,874	238 328	3,958
63	3 969	7,937	250 047	3,979
64	4 096	8,000	262 144	4,000
65	4 225	8,062	274 625	4,021
66	4 356	8,124	287 496	4,041
67	4 489	8,185	300 763	4,062
68	4 624	8,246	314 432	4,082
69	4 761	8,307	328 509	4,102
70	4 900	8,367	343 000	4,121
71	5 041	8,426	357 911	4,141
72	5 184	8,485	373 248	4,160
73	5 329	8,544	389 017	4,179
74	5 476	8,602	405 224	4,198
75	5 625	8,660	421 875	4,217
76	5 776	8,718	438 976	4,236
77	5 929	8,775	456 533	4,254
78	6 084	8,832	474 552	4,273
79	6 241	8,888	493 039	4,291
80	6 400	8,944	512 000	4,309
81	6 561	9,000	531 441	4,327
82	6 724	9,055	551 368	4,345
83	6 889	9,110	571 787	4,362
84	7 056	9,165	592 704	4,380
85	7 225	9,220	614 125	4,397
86	7 396	9,274	636 056	4,414
87	7 569	9,327	658 503	4,431
88	7 744	9,381	681 472	4,448
89	7 921	9,434	704 969	4,465
90	8 100	9,487	729 000	4,481
91	8 281	9,539	753 571	4,498
92	8 464	9,592	778 688	4,514
93	8 649	9,644	804 357	4,531
94	8 836	9,695	830 584	4,547
95	9 025	9,747	857 375	4,563
96	9 216	9,798	884 736	4,579
97	9 409	9,849	912 673	4,595
98	9 604	9,900	941 192	4,610
99	9 801	9,950	970 299	4,626
100	10 000	10,000	1 000 000	4,642

Ἡμίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	0,707	0,709	0,711	0,713	0,715	0,717
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	0,719	0,721	0,723	0,725	0,727	0,729
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	0,731	0,733	0,735	0,737	0,739	0,741
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	0,743	0,745	0,747	0,749	0,751	0,753
4	0,070	0,073	0,076	0,078	0,081	0,084	49	0,755	0,757	0,759	0,760	0,762	0,764
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	0,766	0,768	0,770	0,772	0,773	0,775
6	0,105	0,107	0,110	0,113	0,116	0,119	51	0,777	0,779	0,781	0,783	0,784	0,786
7	0,122	0,125	0,128	0,131	0,133	0,136	52	0,788	0,790	0,792	0,793	0,795	0,797
8	0,139	0,142	0,145	0,148	0,151	0,154	53	0,799	0,800	0,802	0,804	0,806	0,807
9	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	54	0,809	0,811	0,812	0,814	0,816	0,817
10	0,174	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	55	0,819	0,821	0,822	0,824	0,826	0,827
11	0,191	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	56	0,829	0,831	0,832	0,834	0,835	0,837
12	0,208	0,211	0,214	0,216	0,219	0,222	57	0,839	0,840	0,842	0,843	0,845	0,847
13	0,225	0,228	0,231	0,233	0,236	0,239	58	0,848	0,850	0,851	0,853	0,854	0,856
14	0,242	0,245	0,248	0,250	0,253	0,256	59	0,857	0,859	0,860	0,862	0,863	0,865
15	0,259	0,262	0,264	0,267	0,270	0,273	60	0,866	0,867	0,869	0,870	0,872	0,873
16	0,276	0,278	0,281	0,284	0,287	0,290	61	0,875	0,876	0,877	0,879	0,880	0,882
17	0,292	0,295	0,298	0,301	0,303	0,306	62	0,883	0,884	0,886	0,887	0,888	0,890
18	0,309	0,312	0,315	0,317	0,320	0,323	63	0,891	0,892	0,894	0,895	0,896	0,898
19	0,326	0,328	0,331	0,334	0,337	0,339	64	0,899	0,900	0,901	0,903	0,904	0,905
20	0,342	0,345	0,347	0,350	0,353	0,356	65	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912
21	0,358	0,361	0,364	0,367	0,369	0,372	66	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918	0,919
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388	67	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	68	0,927	0,928	0,929	0,930	0,931	0,933
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420	69	0,934	0 935	0,936	0,937	0,938	0,939
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436	70	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451	71	0,946	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467	72	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955
28	0,469	0,472	0,475	0,477	0,480	0,482	73	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,960
29	0,485	0,487	0,490	0,492	0,495	0,497	74	0,961	0,962	0,963	0,964	0,964	0,965
30	0,500	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513	75	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,970
31	0,515	0,518	0,520	0,523	0,525	0,527	76	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973	0,974
32	0,530	0,532	0,535	0,537	0,540	0,542	77	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,978
33	0,545	0,547	0,550	0,552	0,554	0,557	78	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
34	0,559	0,562	0,564	0,566	0,569	0,571	79	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984	0,984
35	0,574	0,576	0,578	0,581	0,583	0,585	80	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
36	0,588	0,590	0,592	0,595	0,597	0,599	81	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990
37	0,602	0,604	0,606	0,609	0,611	0,613	82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992
38	0,616	0,618	0,620	0,623	0,625	0,627	83	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994
39	0,629	0,632	0,634	0,636	0,638	0,641	84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996
40	0,643	0,645	0,647	0,649	0,652	0,654	85	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997
41	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665	0,667	86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
42	0,669	0,671	0,673	0,676	0,678	0,680	87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
43	0,682	0,684	0,686	0,688	0,690	0,693	88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
44	0,695	0,697	0,699	0,701	0,703	0,705	89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Συνημίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	45	0,707	0,705	0,703	0,701	0,699	0,697
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	46	0,695	0,693	0,690	0,688	0,686	0,684
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	47	0,682	0,680	0,678	0,676	0,673	0,671
3	0,999	0,998	0,998	0,998	0.998	0,998	48	0,669	0,667	0,665	0,663	0,660	0,658
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	49	0,656	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645
5	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	50	0,643	0,641	0,638	0,636	0,634	0,632
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	51	0,629	0,627	0,625	0,623	0,620	0,618
7	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	52	0,616	0,613	0,611	0,609	0,606	0,604
8	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	53	0,602	0,599	0,597	0,595	0,592	0,590
9	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,985	54	0,588	0,585	0,583	0,581	0,578	0,576
10	0,985	0,984	0,984	0,983	0,983	0,982	55	0,574	0,571	0,569	0,566	0,564	0,562
11	0,982	0,981	0,981	0,980	0,979	0,979	56	0,559	0,557	0,554	0,552	0,550	0,547
12	0,978	0,978	0,977	0,976	0,976	0,975	57	0,545	0,542	0,540	0,537	0,535	0,532
13	0,974	0,974	0,973	0,972	0,972	0,971	58	0,530	0,527	0,525	0,523	0,520	0,518
14	0,970	0,970	0,969	0,968	0,967	0,967	59	0,515	0,513	0,510	0,508	0,505	0,503
15	0,966	0,965	0,964	0,964	0,963	0,962	60	0,500	0,497	0,495	0,492	0,490	0,487
16	0,961	0,960	0,960	0,959	0,958	0,957	61	0,485	0,482	0,480	0,477	0,475	0,472
17	0,956	0,955	0,955	0,954	0,953	0,952	62	0,469	0,467	0,464	0,462	0,459	0,457
18	0,951	0,950	0,949	0,948	0,947	0,946	63	0,454	0,451	0,449	0,446	0,444	0,441
19	0,946	0,945	0,944	0,943	0,942	0,941	64	0,438	0,436	0,433	0,431	0,428	0,425
20	0,940	0,939	0,938	0,937	0,936	0,935	65	0,423	0,420	0,417	0,415	0,412	0,409
21	0,934	0,933	0,931	0,930	0,929	0,928	66	0,407	0,404	0,401	0,399	0,396	0,393
22	0,927	0,926	0,925	0,924	0,923	0,922	67	0,391	0,388	0,385	0,383	0,380	0,377
23	0,921	0,919	0,918	0,917	0,916	0,915	68	0,375	0,372	0,369	0,367	0,364	0,361
24	0,914	0,912	0,911	0,910	0,909	0,908	69	0,358	0,356	0,353	0,350	0,347	0,345
25	0,906	0,905	0,904	0,903	0,901	0,900	70	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329
26	0,899	0,898	0,896	0,895	0,894	0,892	71	0,326	0,323	0,320	0,317	0,315	0,312
27	0,891	0,890	0,888	0,887	0,886	0,884	72	0,309	0,306	0,303	0,301	0,298	0,295
28	0,883	0,882	0,880	0,879	0,877	0,876	73	0,292	0,290	0,287	0,284	0,281	0,278
29	0,875	0,873	0,872	0,870	0,869	0,867	74	0,276	0,273	0,270	0,267	0,264	0,262
30	0,866	0,865	0,863	0,862	0,860	0,859	75	0,259	0,256	0,253	0,250	0,248	0,245
31	0,857	0,856	0,854	0,853	0,851	0,850	76	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231	0,228
32	0,848	0,847	0,845	0,843	0,842	0,840	77	0,225	0,222	0,219	0,216	0,214	0,211
33	0,839	0,837	0,835	0,834	0,832	0,831	78	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194
34	0,829	0,827	0,826	0,824	0,822	0,821	79	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177
35	0,819	0,817	0,816	0,814	0,812	0,811	80	0,174	0,171	0,168	0,165	0,162	0,159
36	0,809	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	81	0,156	0,154	0,151	0,148	0,145	0,142
37	0,799	0,797	0,795	0,793	0,792	0,790	82	0,139	0,136	0,133	0,131	0,128	0,125
38	0,788	0,786	0,784	0,783	0,781	0,779	83	0,122	0,119	0,116	0,113	0,110	0,107
39	0,777	0,775	0,773	0,772	0,770	0,768	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	0,766	0,764	0,762	0,760	0,759	0,757	85	0,087	0,084	0,081	0,078	0,076	0,073
41	0,755	0,753	0,751	0,749	0,747	0,745	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	0,743	0,741	0,739	0,737	0,735	0,733	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	0,731	0,729	0,727	0,725	0,723	0,721	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	0,719	0,717	0,715	0,713	0,711	0,709	89	0,017	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003

'Εφαπτομένες ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085	49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120	51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138	52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
8	0,141	0,144	0,146	0,149	0,152	0,155	53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173	54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191	55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,210	56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228	57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246	58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
14	0,249	0,252	0,256	0,259	0,262	0,265	59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284	60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303	61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322	62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341	63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
19	0,344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361	64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,381	65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
21	0,384	0,387	0,391	0,394	0,397	0,401	66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421	67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442	68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463	69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484	70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
26	0,488	0,491	0,495	0,499	0,502	0,506	71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
27	0,510	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528	72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,547	0,551	73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573	74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645	77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
33	0,649	0,654	0,658	0,662	0,666	0,670	78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
34	0,675	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696	79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
35	0,700	0,705	0,709	0,713	0,718	0,722	80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
36	0,727	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749	81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
37	0,754	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777	82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805	83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834	84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864	85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,20	13,73
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895	86	14,30	14,92	15,60	16,35	17,17	18,07
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927	87	19,08	20,21	21,47	22,90	24,54	26,43
43	0,933	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,10
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994	89	57,29	68,75	85,94	114,6	171,9	343,8

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

(Οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρονται σὲ σελίδες)