ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΤΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ Β΄

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΗ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΤΗ

Ειδικότητες Μηχανοτεχνίτη καὶ Ἠλεκτροτεχνίτη

1.— *Μαθηματικὰ* τόμοι Α', Β', Γ'.

2.— *Μηχανουργικὴ Τεχνολογία* τόμοι Α', Β', Γ'.

3.— *Κινητήριες Μηχανὲς* τόμοι Α', Β'.

4.— *Τεχνικὸ Σχέδιο* τόμοι Α', Β', Γ', Δ', Ε'.
Τετράδια Ἀσκήσεων Σχεδίου Α', Β', Γ,'Δ'.

5.— *Χημεία.*

6.— *Ἠλεκτροτεχνία* τόμοι Α', Β', Γ', Δ', Ε'.

7.— *Φυσική.*

8.— *Στοιχεῖα Μηχανῶν.*

9.— *Μηχανική.*

10.— *Ὑλικά.*

11.— *Μηχανολογικὸ Μνημόνιο.*

12.— *Ἠλεκτρολογικὸ Μνημόνιο.*

13.— *Πρόληψη Ἀτυχημάτων.*

14.— *Ἠλεκτροτεχνία Μηχανοτεχνίτη.*

15.— *Ἠλεκτρικὸ Σύστημα τοῦ Αὐτοκινήτου.*

16.— *Αὐτοκίνητο.*

῾Ο Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἱδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «῾Ιδρύματος Εὐγενίδου» προεῖδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισε τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν, ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἠθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν ῾Ιδρύματος, ποὺ θὰ εἶχε σκοπὸν νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς ῾Ελλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ ῞Ιδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. ᾿Απὸ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιούμενοι οἱ σκοποὶ ποὺ ὡραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

* * *

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ ῞Ιδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων τόσον διὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσον καὶ πρακτικούς. ᾿Εκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Τὸ ὅλον ἔργον ἤρχισε μὲ τὴν ὑποστήριξιν τοῦ ῾Υπουργείου Βιομηχανίας, τότε ἁρμοδίου διὰ τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν, καὶ συνεχίζεται ἤδη μὲ τὴν ἔγκρισιν καὶ τὴν συνεργασίαν τοῦ ῾Υπουργείου ᾿Εθνικῆς Παιδείας, βάσει τοῦ Νομοθετικοῦ Διατάγματος 3970/1959.

Αἱ ἐκδόσεις τοῦ ῾Ιδρύματος διαιροῦνται εἰς τὰς ἀκολούθους βασικὰς σειράς, αἱ ὁποῖαι φέρουν τοὺς τίτλους:

«Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνίτη», «Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ», «Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ βοηθοῦ Χημικοῦ», «Τεχνικὴ Βιβλιοθήκη».

᾿Εξ αὐτῶν ἡ πρώτη περιλαμβάνει τὰ βιβλία τῶν Σχολῶν Τεχνιτῶν,

ἡ δευτέρα τὰ βιβλία τῶν Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν, ἡ τρίτη τῶν Σχολῶν Τεχνικῶν βοηθῶν Χημικῶν, ἡ τετάρτη τὰ βιβλία τὰ προοριζόμενα διὰ τὰς ἀνωτέρας Τεχνικὰς Σχολὰς (ΚΑΤΕ, ΣΕΛΕΤΕ, Σχολαὶ Ὑπομηχανικῶν). Παραλλήλως, ἀπὸ τοῦ 1966 τὸ Ἵδρυμα ἀνέλαβε καὶ τὴν ἔκδοσιν βιβλίων διὰ τὰς Δημοσίας Σχολὰς Ε.Ν.

Αἱ σειραὶ αὗται θὰ ἐμπλουτισθοῦν καὶ μὲ βιβλία εὐρυτέρου τεχνικοῦ ἐνδιαφέροντος χρήσιμα κατὰ τὴν ἄσκησιν τοῦ ἐπαγγέλματος.

* * *

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος καταβάλλουν κάθε προσπάθειαν, ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῆ εἰς ἁπλῆν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως δι' ἣν προορίζεται ἑκάστη σειρὰ τῶν βιβλίων. Ἡ τιμή των ὡρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς ἀπόρους μαθητάς.

Οὕτω προσφέρονται εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν τῶν καθηγητῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῆς τεχνικῆς μας παιδείας αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος, τῶν ὁποίων ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ σκοποῦ τοῦ Εὐγενίου Εὐγενίδου ἐλπίζεται νὰ εἶναι μεγάλη.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΤΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΚΡΙΤΙΚΟΥ
ΟΜΟΤΙΜΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΠΟ ΤΟ ΓΑΛΛΙΚΟ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ
ΤΟΥ κ. R. CLUZEL, ΜΕ ΑΔΕΙΑ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ
1977

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ δεύτερος αὐτὸς τόμος τοῦ διδακτικοῦ συγγράμματος «Μαθηματικὰ γιὰ τὸν τεχνίτη» εἶναι μιὰ ἐλεύθερη προσαρμογὴ στὰ ἑλληνικὰ τοῦ γαλλικοῦ βιβλίου «Les Mathématiques en 2e Année d'apprentissage», Les Éditions Foucher, Paris, 1955, ποὺ ἔγραψε ὁ καθηγητὴς τῶν τεχνικῶν Σχολῶν καὶ Διδασκαλείων κ. René Cluzel γιὰ τὴ Β΄ τάξη τῶν Σχολῶν Μαθητείας τῆς Γαλλίας.

Ὁ τόμος ἀπαρτίζεται ἀπὸ δυὸ μέρη: τὸ πρῶτο πραγματεύεται ἀριθμητικὰ καὶ ἀλγεβρικὰ θέματα συνδυάζοντάς τα σ' ἕνα ἑνιαῖο σύνολο, τὸ δεύτερο, γεωμετρικὰ θέματα ἀπὸ τὴν Ἐπιπεδομετρία.

Τὰ θέματα τοῦ 1ου μέρους ἔχουν τὶς περισσότερες φορὲς γιὰ ἀφετηρία συγκεκριμένα ἁπλὰ προβλήματα ἐφαρμογῶν ποὺ διεγείρουν φυσικὰ τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ μαθητῆ, καὶ εἶναι καταταγμένα σὲ 28 ἀρκετὰ σύντομες διδακτικὲς ἑνότητες, σὲ 28 Μαθήματα. Ἂς σημειωθῆ ὅτι ὁ ὅρος Μάθημα δὲν σημαίνει μίαν μόνο ὥρα διδασκαλίας, ἀλλ' ἀντιπροσωπεύει 2 - 3 διδακτικὲς ὧρες κατὰ τὶς ὁποῖες ὁ διδάσκων θὰ μπορῆ ὄχι μόνο νὰ ἀναπτύξη τὸ περιεχόμενο τοῦ Μαθήματος, ἀλλὰ καὶ νὰ πραγματευθῆ 3 ἕως 5 ἀσκήσεις ἀπὸ αὐτὲς ποὺ ἀκολουθοῦν τὸ Μάθημα. Στὸ τέλος μιᾶς τέτοιας διδασκαλίας τῶν 28 Μαθημάτων ὁ μαθητὴς θὰ ἔχη συμπληρώσει καὶ ἐπαρκῶς στερεώσει τὶς γνώσεις του ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική, θὰ ἔχη ἀποκτήσει μιὰ πρώτη γνωριμία μὲ τὸν ἀλγεβρικὸ λογισμὸ καὶ τὶς ἁπλούστερες πρωτοβάθμιες ἐξισώσεις μὲ ἕναν ἄγνωστο καὶ θὰ ἔχη μάθει νὰ ἐφαρμόζη τὶς γνώσεις του αὐτὲς στὰ κυριότερα σχετικὰ προβλήματα ποὺ συναντᾶ στὰ ἄλλα του μαθήματα.

Τὸ 2ο μέρος τὸ ἔχω διαιρέσει σὲ 15 κατά τι διεξοδικότερα Μαθήματα, γιατὶ τὰ θέματά του εἶναι σὲ σημαντικὸ ποσοστὸ ἤδη γνωστὰ στὸ μαθητὴ ἀπὸ τὸν 1ο τόμο τοῦ βιβλίου. Ἐνῶ ὅμως ἐκεῖ τὰ θέματα αὐτὰ ἀπὸ τὴν Ἐπιπεδομετρία παρουσιάσθηκαν μὲ ἐμπειρικὸ τρόπο καὶ χωρὶς ἀποδείξεις, τώρα καὶ αὐτὰ καὶ ὅσα τὰ συμπληρώνουν, ἀναπτύσσονται μὲ χρήση τῆς λογικῆς μεθόδου, γιὰ νὰ καλλιεργηθοῦν στὸ μαθητὴ ἡ συμπερασματικὴ σκέψη καὶ ἡ συλλογιστικὴ ἱκανότητα ποὺ εἶναι τόσο χρήσιμες καὶ στὸν πρακτικὸ τεχνίτη. Μολονότι οἱ χρησιμοποιούμενοι ἀποδεικτικοὶ συλλογισμοὶ καὶ σύντομοι καὶ εὐχολοπαρακολούθητοι εἶναι, ὅμως κρίθηκε σκόπιμο νὰ ξεχωρισθοῦν ἀπὸ τὸ διδακτέο κύριο κείμενο καὶ νὰ τυπωθοῦν μὲ μικρότερα στοιχεῖα, γιὰ νὰ ξέρη ὁ καθηγητὴς ὅτι δὲν εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ τοὺς διδάξη, ἂν παρατηρήση ὅτι ξεπερνοῦν τὴ μέση διανοητικὴ στάθμη τῶν μαθητῶν του. Σχετικῶς θὰ ἤθελα νὰ ἐπαναλάβω ἐκεῖνα ποὺ εἶπα στὸν πρόλογο τοῦ 1ου τόμου καθὼς καὶ σὲ μιὰ εἰσαγωγικὴ ὁμιλία ποὺ ἔκαμα στὶς 22 Νοεμβρίου 1957 (ἡ ὁμιλία δημοσιεύθηκε στὸ περιοδικὸ «Παιδεία καὶ Ζωή», 1957, Τεῦχος 64, σελ. 21 - 25). Ἡ διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν σ' ἕνα πρακτικὸ τεχνικὸ σχολεῖο δὲν πρέπει νὰ ἐπιδιώκη παρὰ μόνον τοῦτο: ὁ μαθητὴς νὰ κατανοῆ τὰ διδασκόμενα καὶ νὰ μπορῆ, χρησιμοποιώντας ἐλεύθερα τὸ βιβλίο, νὰ ἐπιλύνη τὰ προβλήματα ποὺ τοῦ δίνονται. Τὸ νὰ ζητοῦμε ἐπὶ πλέον ἀπὸ τὸν μαθητὴ νὰ ἐπαναλαμβάνη πιστὰ τὸ ἀκριβόλογο κείμενο τοῦ διδακτικοῦ βιβλίου, ὄχι μόνο ξεπερνᾶ τὴ στάθμη τῆς διανοητικῆς καὶ γλωσσικῆς του μόρφωσης, ἀλλὰ καὶ εἶναι κάτι ξένο πρὸς τοὺς σκοποὺς ἑνὸς σχολείου ποὺ ἔχει νὰ ἐκπαιδεύση πρακτικοὺς τεχνίτες καὶ ὄχι γραμματεῖς τεχνικῶν γραφείων ἢ δασκάλους.

Μὲ τὴν προϋπόθεση λοιπὸν πὼς ἡ διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν γιὰ τὸν τεχνίτη θὰ κατευθύνεται ἀπὸ τὸ κατάλληλο πνεῦμα, δὲν ἀμφιβάλλω ὅτι, ὅπως ὁ 1ος τόμος στὴν 1η τάξη, ἔτσι καὶ ὁ 2ος αὐτὸς τόμος τοῦ βιβλίου θὰ μπορῆ χωρὶς δυσκολία νὰ διδαχθῆ στὴ 2η τάξη τῶν Σχολῶν μας. Καὶ γρήγορα θὰ διαπιστώσωμε τότε μιὰν αἰσθητὴ βελτίωση στὴ μαθηματικὴ ἐκπαίδευση τῶν μαθητῶν μας.

Θὰ ἤθελα τώρα νὰ εὐχαριστήσω πάλιν τὸν κ. Μαρῖνον Καλλικούρδη, διπλ. Πολ. Μηχ. καὶ Μηχ. Ἠλεκτρ. γιὰ τὴ βοήθεια ποὺ μοῦ ἔδωσε ἡ πρόθυμη συνεργασία του. Ἐπιβοηθητικὲς στάθηκαν καὶ διάφορες ὑποδείξεις ποὺ μοῦ ἔγιναν ἀπὸ μέλη τῆς Ἐπιτροπῆς Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου καθὼς καὶ ἀπὸ ἄλλους καὶ ποὺ γι' αὐτὲς τοὺς ἀπευθύνω τὶς εὐχαριστίες μου. Εὐχαριστίες χρεωστῶ καὶ σ' ἐκείνους ποὺ σχεδίασαν τὰ σχήματα ἢ ἐργάσθηκαν στὴ διόρθωση τῶν τυπογραφικῶν δοκιμίων καθὼς καὶ στὸν Ἐκδοτικὸ Οἶκο Ἀσπιώτη - Ἕλκα γιὰ τὴ συμβολή τους στὴν καλὴ ἐμφάνιση τοῦ βιβλίου.

Στὸ τέλος τοῦ προλόγου μου στὸν Α΄ τόμο εἶχα ἀναφερθῆ πέρυσι στὴ μνήμη τοῦ δασκάλου μου Κυπαρίσσου Στεφάνου. Ἂς μοῦ ἐπιτραπῆ νὰ μνημονεύσω ἐφέτος ἕναν ἄλλο δάσκαλό μου, τὸν Κωνσταντῖνο Καραθεοδωρῆ, ποὺ στάθηκε γιὰ μένα ἕνα δεύτερο φωτεινὸ παράδειγμα ἀφοσίωσης στὴν ἐπιστήμη καὶ ἀκοίμητου ἐνδιαφέροντος γιὰ τὰ ἐκπαιδευτικὰ πράγματα τῆς πατρίδας μας.

Ἀθήνα, 3 Αὐγούστου 1958. Ν. ΚΡΙΤΙΚΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

Μαθήματα Ἀριθμητικῆς καὶ Ἄλγεβρας

Κεφάλαιο 1. Ὑπολογισμοὶ μὲ ἀριθμοὺς καὶ ἐγγράμματες παραστάσεις

Κεφάλαιο 2. Διαιρετότητα καὶ κλάσματα

Κεφάλαιο 3. Λόγοι καὶ Ἀναλογίες

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

Μαθήματα Γεωμετρίας

Κεφάλαιο 4. Τὰ Τρίγωνα

Κεφάλαιο 5. Παράλληλες εὐθεῖες. Τετράπλευρα

Κεφάλαιο 6. Ὁ κύκλος. Τὰ πολύγωνα

Κεφάλαιο 7. Ἐφαρμογὲς στὸ σχέδιο

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΜΕ ΕΓΓΡΑΜΜΑΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Μάθημα 1.

Μονάδες τοῦ μετρικοῦ συστήματος. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν συμβόλων.

Γιὰ νὰ διεθνοποιηθοῦν καὶ ἁπλουστευθοῦν οἱ γραφὲς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν συμβόλων, οἱ ξένοι ἔχουν καθιερώσει μερικοὺς κανόνες ποὺ συμφέρει ν' ἀκολουθοῦμε καὶ ἐμεῖς στὴ χώρα μας. Γιὰ μερικοὺς ἀπ' αὐτοὺς τοὺς κανόνες μιλήσαμε ἤδη στὸν Τόμο Α΄ αὐτοῦ τοῦ βιβλίου (Μάθ. 3, § 4).

1. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

1ο Ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἀρχίζοντας ἀπὸ δεξιὰ χωρίζομε τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ σὲ τριψήφια κομμάτια· γιὰ τὸ χωρισμὸ χρησιμοποιοῦμε μικρὰ διαστήματα καὶ ὄχι τελεῖες.

Παράδειγμα: 45 224 καὶ ὄχι 45.224

2ο Δεκαδικοὶ ἀριθμοί. Ἀρχίζοντας τώρα ἀπὸ τὸ κόμμα χωρίζομε, μὲ μικρὰ διαστήματα, τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ σὲ τριψήφια κομμάτια, καὶ ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ ἀπὸ τὸ κόμμα. Τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τὰ γράφομε μὲ τὸ ἴδιο μέγεθος καὶ στὸ ἴδιο ὕψος τῆς γραμμῆς, ὅπως καὶ τὰ ψηφία τοῦ ἀκέραιου μέρους.

Παραδείγματα: 2 745,2 καὶ ὄχι 2.745,2
0,315 720 καὶ ὄχι 0,315.720
4,35 καὶ ὄχι $4,^{35}$

2. Σύμβολα γιὰ τὶς βασικὲς μονάδες τοῦ μετρικοῦ συστήματος.

Μῆκος: βασικὴ μονάδα τὸ μέτρο μὲ σύμβολο τὸ m
Ἐπιφάνεια: » » τὸ τετραγωνικὸ μέτρο μὲ σύμβολο τὸ m^2
Ὄγκος: » » τὸ κυβικὸ μέτρο μὲ σύμβολο τὸ m^3
Βάρος: » » τὸ χιλιόγραμμο μὲ σύμβολο τὸ kg
Χρόνος: » » τὸ δευτερόλεπτο μὲ σύμβολο τὸ sec
Χωρητικότητα: βασικὴ μονάδα τὸ λίτρο
Γωνία: βασικὴ μονάδα ἡ ὀρθὴ γωνία.

3. Προτακτικὰ τῶν συμβόλων γιὰ τὶς δευτερεύουσες μονάδες μήκους τοῦ μετρικοῦ συστήματος.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ			ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ		
Τιμή	Ὄνομα Προτακτικοῦ	Σύμβολο	Τιμή	Ὄνομα Προτακτικοῦ	Σύμβολο
10	δεκα ...	da	0,1	δεκατο ...	d
100	ἑκατο ...	h	0,01	ἑκατοστο ...	c
1 000	χιλιο ...	k	0,001	χιλιοστο ...	m

Τὸ σύμβολο μιᾶς δευτερεύουσας μονάδας μήκους τὸ σχηματίζομε γράφοντας μπροστὰ στὸ σύμβολο τῆς βασικῆς μονάδας τὸ κατάλληλο προτακτικό, χωρὶς διάστημα ἢ χωριστικὴ γραμμή.

Παραδείγματα: γιὰ τὸ χιλιόμετρο: km,
» » ἑκατοστόμετρο: cm,
» » χιλιοστόμετρο: mm (καὶ ὄχι m/m).

4. Οἱ κυριότερες δευτερεύουσες μονάδες χρόνου καὶ γωνίας.

ΧΡΟΝΟΣ			ΓΩΝΙΑ		
Τιμὴ	Ὄνομα	Σύμβολο	Τιμὴ	Ὄνομα	Σύμβολο
60 sec	λεπτὸ	min	1/90 ὀρθῆς γωνίας	μοίρα	°
60 min	ὥρα	h	1/60 μοίρας	πρῶτο λεπτὸ	′
			1/60 πρώτου λεπτοῦ	δεύτερο λεπτὸ	″

5. Σύμβολα μονάδων γιὰ μεγέθη, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ δύο ἄλλα.

1ο. Τὸ μηχανικὸ ἔργο εἶναι γινόμενο μιᾶς δύναμης μὲ ἕνα μῆκος. Ὅμοια ἡ στατικὴ ροπὴ μιᾶς δύναμης ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα εἶναι γινόμενο τῆς δύναμης μὲ ἕνα μῆκος. Ἂν μετρήσωμε λοιπὸν τὴ δύναμη σὲ χιλιόγραμμα (kg) καὶ τὸ μῆκος σὲ μέτρα (m), τότε τὸ ἔργο ἢ ἡ ροπὴ θὰ μετρηθῇ σὲ χιλιογραμμόμετρα (kgm ἢ kg·m).

Ὥστε, τὴ μονάδα ἑνὸς μεγέθους, τὸ ὁποῖο εἶναι γινόμενο δυὸ ἄλλων μεγεθῶν, τὴ συμβολίζομε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: γράφομε, τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, τὰ σύμβολα τῶν μονάδων τῶν δύο μεγεθῶν, ποὺ πολλαπλασιάζονται καὶ χωρίζομε ἢ ὄχι τὰ σύμβολα αὐτὰ μὲ μία τελεία (ἡ ὁποία εἶναι τὸ σύμβολο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

2ο. Ἡ ταχύτητα περιστροφῆς ἑνὸς σώματος, ποὺ στρέφεται γύρω ἀπὸ ἕναν ἄξονα, μετριέται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν στροφῶν, ποὺ κάνει στὸ λεπτὸ (min). Τὴν ταχύτητα αὐτὴ τὴ βρίσκομε λοιπὸν διαιρώντας τὸν ἀριθμὸ τῶν στροφῶν, τὶς ὁποῖες ἔκαμε τὸ σῶμα, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λεπτῶν, στὰ ὁποῖα τὶς ἔκαμε. Σύμβολό της εἶναι τὸ στρ/min ἢ $\frac{\text{στρ}}{\text{min}}$, ποὺ διαβάζεται ἔτσι: στροφὲς ἀνὰ λεπτὸ (στὸ λεπτό). Ἕνα ὅμοιο παράδειγμα, ποὺ συναντήσαμε στὸν Τόμ. Α΄, Μάθ. 49, εἶναι τὸ εἰδικὸ βάρος ἑνὸς ὑλικοῦ, ἕνα μέγεθος ποὺ τὴ μονάδα του τὴ συμβολίσαμε εἴτε μὲ kg/dm^3 εἴτε μὲ gr/cm^3.

Ὥστε, τὴ μονάδα ἑνὸς μεγέθους τὸ ὁποῖο εἶναι πηλίκο δυὸ ἄλλων μεγεθῶν τὴ συμβολίζομε μ' ἕνα κλάσμα· τὸ κλάσμα αὐτὸ ἔχει ἀριθμητὴ τὸ σύμβολο τῆς μονάδας τοῦ μεγέθους τὸ ὁποῖο διαιρεῖται καὶ παρονομαστὴ τὸ σύμβολο τῆς μονάδας τοῦ μεγέθους μὲ τὸ ὁποῖο διαιροῦμε.

6. Πῶς χρησιμοποιοῦμε τὰ σύμβολα.

1ο. Δὲν γράφομε τελεία ὕστερα ἀπὸ τὸ σύμβολο, ἐκτὸς ἂν βρίσκεται στὸ τέλος τῆς φράσης. Ἐπίσης δὲν γράφομε τὸ γράμμα s στὸ τέλος τοῦ συμβόλου γιὰ τὸν πληθυντικὸ ἀριθμό του.

Παράδειγμα: Γράφομε: «τὰ 450 km ποὺ διέτρεξε τὸ ἀεροπλάνο» καὶ ὄχι «τὰ 450 km. πού...» ἢ «τὰ 450 kms πού...».

2ο. Τὰ σύμβολα τὰ γράφομε ὕστερα ἀπὸ τοὺς ἀντίστοιχους ἀριθμοὺς καὶ στὸ ἴδιο ὕψος τῆς γραμμῆς μὲ αὐτούς.

Παραδείγματα: 4,35 m καὶ ὄχι $4^{m},35$ ἢ 4 m,35
340 στρ/min καὶ ὄχι $340^{στρ/min}$

Ἀσκήσεις. 1. Βρῆτε ποιοὶ ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς δὲν εἶναι γραμμένοι σύμφωνα μὲ τὶς ὁδηγίες ποὺ εἴπαμε καὶ γράψτε τους σύμφωνα μ' αὐτές:

5 6789m	$645\ 28^{sec}$	4,75 kms
$7^{h}\ 40^{min}\ 30^{sec}$	75,428 gr	9,235 420 m^2.

2. Γράψτε τὰ σύμβολα τῶν μονάδων γιὰ τὰ παρακάτω μεγέθη:

1ο τὸ μηχανικὸ ἔργο καὶ τὴ στατικὴ ροπὴ μιᾶς δύναμης, ὅταν ἡ δύναμη μετρηθῆ σὲ γραμμάρια καὶ τὸ μῆκος σὲ ἑκατοστόμετρα·

2ο τὴν ταχύτητα ἑνὸς αὐτοκινήτου, ὅταν τὸ διάστημα ποὺ διατρέχει μετρηθῆ σὲ χιλιόμετρα καὶ ὁ χρόνος σὲ ὧρες·

3ο τὴν τιμὴ ποὺ ἔχει ἡ μονάδα βάρους μιᾶς σιδερένιας ράβδου, ὅταν τὸ βάρος μετρηθῆ σὲ κιλὰ καὶ ἡ τιμὴ σὲ δραχμές.

3. Βρῆτε ἀπὸ τὸ μνημόνιό σας (ἢ χρησιμοποιώντας τὸ Μάθημα 49 τοῦ Τόμου Α΄) τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο:

1ο μιᾶς τετράγωνης σιδερένιας ράβδου μὲ πλευρὰ 10 mm,

2ο μιᾶς στρογγυλῆς σιδερένιας ράβδου μὲ διάμετρο 20 mm,
3ο μιᾶς σιδερένιας λάμας μὲ πλάτος 180 mm καὶ πάχος 25 mm,
4ο » » » » » 110 mm » » 20 mm.
Ὕστερα γράψτε αὐτὰ ποὺ βρήκατε, καθὼς καὶ τὰ σύμβολά τους.

4. Ἀφοῦ κάμετε τοὺς ἀπαιτούμενους ὑπολογισμοὺς (Τόμ. Α΄, Μάθ. 49), καταρτίστε τὸν πίνακα τῶν βαρῶν, ποὺ ἔχουν ἀνὰ τετραγωνικὸ μέτρο φύλλα ἀπὸ ἐλασμένο σίδηρο, χαλκὸ καὶ τσίγκο γιὰ τὰ τρία πάχη 2 mm, 4 mm, 6 mm. Ὕστερα νὰ συγκρίνετε τὰ ἀποτελέσματά σας μὲ ἐκεῖνα, ποὺ δίνει τὸ μνημόνιό σας.

Μάθημα 2.

Ὁμοιόμορφη κίνηση. Ὑπολογισμὸς τῆς ταχύτητας.

1. Τί εἶναι ὁμοιόμορφη κίνηση;

Ἂς ὑποθέσωμε, ὅτι ταξιδεύοντας μὲ τὸ τραῖνο κατορθώνομε καὶ σημειώνομε ἀκριβῶς τὴν ὥρα, κάθε φορὰ ποὺ περνοῦμε διαδοχικὰ μπρὸς ἀπὸ ἕνα χιλιομετρικὸ δείκτη τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς (βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 7). Ἂς ποῦμε πὼς ἐξακριβώσαμε ἔτσι ὅτι βρεθήκαμε

στὸ 151$^{\text{στό}}$ km στὶς 13 h 28 min } διαδρομὴ ἑνὸς km σὲ 1 min
» 152$^{\text{στό}}$ » » 13 h 29 min
» 153$^{\text{στό}}$ » » 13 h 30 min } διαδρομὴ ἑνὸς km σὲ 1 min.

. . . .

Σὲ κάθε λεπτὸ τῆς ὥρας τὸ τραῖνο μας διατρέχει λοιπὸν 1 km, δηλαδὴ *τὸ ἴδιο μῆκος δρόμου*.

Ἂς ὑποθέσωμε τώρα, πὼς μποροῦμε νὰ κάμωμε πληρέστερες παρατηρήσεις καὶ πὼς ἐξακριβώνομε 1ο ὅτι τὸ τραῖνο μας διατρέχει *τὸ ἴδιο μῆκος δρόμου σὲ κάθε δευτερόλεπτο* καὶ 2ο ὅτι καὶ *σὲ κάθε χρονικὴ μονάδα, ὁσοδήποτε μικρὴ καὶ ἂν εἶναι αὐτή*, τὸ τραῖνο μας διατρέχει τὸ *ἴδιο μῆκος δρόμου*· τότε λέμε, πὼς ἡ κίνηση τοῦ τραίνου εἶναι *ὁμοιόμορφη*.

Ὥστε: *Ἕνα κινητὸ ἔχει ὁμοιόμορφη κίνηση (κινεῖται ὁμοιόμορφα), ὅταν, χωρὶς ν' ἀλλάζῃ φορὰ κινήσεως πάνω στὴ τροχιά του, διατρέχῃ τὸ ἴδιο μῆκος δρόμου (ἰσόμηκους δρόμους) σὲ ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ὅσο μικρὰ κι ἂν εἶναι αὐτά.*

2. Ταχύτητα. Στὸ παραπάνω παράδειγμα εἴδαμε πὼς τὸ τραῖνο διατρέχει ἕνα χιλιόμετρο (1 km) στὸ λεπτό (σὲ 1 min)· λέμε τότε πὼς ἡ *ταχύτητά* του εἶναι *ἕνα χιλιόμετρο ἀνὰ λεπτὸ* καὶ τὴν παριστάνομε μὲ τὸ σύμβολο 1 km/min.

Διατηρώντας αὐτὴν τὴν ταχύτητα τὸ τραῖνο θὰ διατρέξῃ 60 χιλιόμετρα (km) σὲ μίαν ὥρα (1 h)· ἡ ταχύτητά του λοιπὸν μπορεῖ νὰ ἐκφραστῆ (μὲ ἄλλες μονάδες) καὶ ἔτσι: 60 km/h.

3. Ὑπολογισμὸς τῆς ταχύτητας σὲ ὁμοιόμορφη κίνηση. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν ταχύτητα ἑνὸς κινητοῦ ποὺ κινεῖται ὁμοιόμορφα, διαιροῦμε τὸ μῆκος τοῦ δρόμου ποὺ διέτρεξε τὸ κινητὸ διὰ τοῦ χρόνου ποὺ χρειάστηκε, γιὰ νὰ τὸν διατρέξη. Γι' αὐτὸ καὶ οἱ ταχύτητες συμβολίζονται μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε:

$$1 \text{ km/min} = 60 \text{ km/h}.$$

Ὅμοια ἔχομε:

$$18 \text{ m/min} = 1800 \text{ cm/min} = 0{,}3 \text{ m/sec}.$$

Παράδειγμα. Ἕνας πεζοπόρος κινεῖται ὁμοιόμορφα καὶ διατρέχει 3,750 km σὲ 50 min. Νὰ βρεθῆ ἡ ταχύτητά του καὶ νὰ ἐκφραστῆ 1ο σὲ m/min καὶ 2ο σὲ km/h.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὰ ζητούμενα, παρατηροῦμε ὅτι 3,750 km = 3 750 m.

Ὥστε σ' ἕνα λεπτὸ (1 min) ὁ πεζοπόρος διατρέχει μῆκος

$$3\,750 \text{ m} : 50 = 75 \text{ m}$$

καὶ σὲ 1 h = 60 min θὰ διατρέξη

$$75 \text{ m} \times 60 = 4\,500 \text{ m} = 4{,}5 \text{ km}.$$

Ἑπομένως ἡ ταχύτητά του εἶναι 75 m/min ἢ 4,5 km/h.

4. Μέση ταχύτητα. Στὴν πραγματικότητα οἱ ὁμοιόμορφες κινήσεις εἶναι σπάνιες. Π. χ. ἕνα τραῖνο, καὶ ὅταν ξεκινᾶ ἀπὸ ἕνα σταθμὸ καὶ ὅταν πάη νὰ σταματήση στὸν ἑπόμενο, διατρέχει στὸ δευτερόλεπτο μικρότερα μήκη δρόμου ἀπὸ κεῖνα, ποὺ διατρέχει, ὅταν βρίσκεται στὸ μέσο τῆς διαδρομῆς του μεταξὺ τῶν δύο σταθμῶν· ἑπομένως ἡ κίνησή του δὲν εἶναι ὁμοιόμορφη σ' ὁλόκληρη τὴ διαδρομή του ἀπὸ τὸν ἕνα σταθμὸ στὸν ἄλλο. Μποροῦμε ὅμως πάντα νὰ φαντασθοῦμε ἕνα ἄλλο κινητό, ποὺ νὰ ἐκτελῆ μὲ ὁμοιόμορφη κίνηση τὴν ἴδια διαδρομὴ μὲ τὸ τραῖνο καὶ σὲ ἴσο χρονικὸ διάστημα μ' αὐτό. Ἡ ταχύτητα αὐτοῦ τοῦ ἄλλου κινητοῦ εἶναι τότε αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομε ***μέση ταχύτητα*** τοῦ τραίνου στὴ διαδρομή του μεταξὺ τῶν δυὸ σταθμῶν. Ὁ ὑπολογισμός της θὰ γίνη ἑπομένως μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, ὅπως καὶ στὴν ὁμοιόμορφη κίνηση: Θὰ διαιρέσωμε τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς διὰ τοῦ ἀντίστοιχου χρονικοῦ διαστήματος.

Παράδειγμα 1. *Ἕνα τραῖνο ξεκίνησε στὶς 7 h τὸ πρωὶ ἀπὸ τὸ σταθμὸ A καὶ ἔφθασε στὶς 8 h 10 min στὸν ἑπόμενο σταθμό του B, ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὸν A 63 km. Ποιὰ εἶναι ἡ μέση ταχύτητά του;*

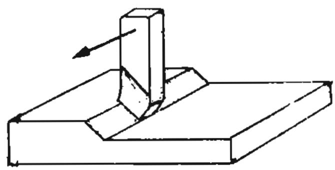
Σὲ 70 min τὸ τραῖνο διέτρεξε 63 km,

σὲ 1 min » » διατρέχει 63 km : 70 = 0,9 km,

ἄρα σὲ 60 min τὸ τραῖνο διατρέχει 0,9 km × 60 = 54 km.

Ἡ μέση ταχύτητα τοῦ τραίνου εἶναι λοιπὸν 54 km/h.

Παράδειγμα 2. *Τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο μιᾶς φρέζας (σχ. 2-α) χρειάζεται 3 sec, γιὰ νὰ κάμη μίαν ἁπλὴ διαδρομὴ μήκους 450 mm. Ποιά εἶναι ἡ μέση ταχύτητά του σὲ μέτρα ἀνὰ λεπτό;*



Σχ. 2-α. Ὑπολογίστε τὴ μέση ταχύτητα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου.

Σὲ 3 sec τὸ ἐργαλεῖο διατρέχει 450 mm,

σὲ 1 sec τὸ ἐργαλεῖο διατρέχει 450 mm : 3 = 150 mm,

ἄρα σὲ 1 min = 60 sec θὰ διατρέξη 150 mm × 60 = 9 000 mm = 9 m.

Ἡ μέση ταχύτητα τοῦ ἐργαλείου εἶναι λοιπὸν 9 m/min.

Ἀσκήσεις. 1. Ἕνας δρομέας ἔτρεξε τὰ 100 m σὲ 11 sec. Ὑπολογίστε τὴν ταχύτητά του σὲ χιλιόμετρα ἀνὰ ὥρα.

2. Ἕνα ἀεροπλάνο κινεῖται μὲ ταχύτητα 350 km/h. Ποιά εἶναι ἡ ταχύτητά του σὲ m/min; σὲ m/sec;

3. Ἡ ταχεία ἁμαξοστοιχία γιὰ τὴ Θεσσαλονίκη ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὶς 8 h 20 min (τὸ πρωὶ) καὶ φθάνει στὴ Θεσσαλονίκη στὶς 19 h 10 min (τὸ βράδυ). Παίρνοντας τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴ Θεσσαλονίκη ἴσο μὲ 600 km, ὑπολογίστε τὴ μέση ταχύτητα τῆς ἁμαξοστοιχίας.

Ἡ ἴδια ἐρώτηση γιὰ ἕνα ἄλλο τραῖνο ποὺ ξεκίνησε στὶς 9h 20 min (τὸ πρωὶ) ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη καὶ ἔφθασε στὶς 18 h 30 min (τὸ βράδυ) στὴν Ἀθήνα. Ποιὸ ἀπὸ τὰ δυὸ τραῖνα εἶναι ταχύτερο;

4. Ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ εἴδατε τὴ λάμψη μιᾶς ἀστραπῆς ὡς τὴ στιγμὴ ποὺ ἀρχίσατε ν' ἀκούετε τὴ βροντή της πέρασαν 9 sec. Ὑπολογίστε τὴν ἀπόστασή σας ἀπὸ τὸ σημεῖο ὅπου ἔγινε ἡ ἀστραποβροντή, ξέροντας ὅτι ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου εἶναι 340 m/sec (καὶ παραμελώντας τὸν ἀνεπαίσθητο χρόνο ποὺ χρειάστηκε τὸ φῶς τῆς ἀστραπῆς, γιὰ νὰ σᾶς ἔρθῃ, μὲ τὴν ταχύτητά του τῶν 300 000 km/sec).

Μάθημα 3.

Ὁμοιόμορφη κυκλικὴ κίνηση.

Ὅπως εἴπαμε, ἕνα κινητὸ κινεῖται ὁμοιόμορφα, ὅταν διατρέχη δρόμους μὲ τὸ ἴδιο μῆκος σὲ ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ὅσο μικρὰ καὶ ἂν εἶναι αὐτά. Ἡ ὁμοιόμορφη κίνηση λέγεται *κυκλική*, ὅταν τὸ κινητὸ κινῆται πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια κύκλου. Ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν, ποὺ κάνει τότε στὴ μονάδα τοῦ χρόνου, εἶναι ἡ *περιστροφικὴ ταχύτητά του* καὶ τὸ μῆκος τοῦ δρόμου ποὺ διατρέχει πάνω στὴν περιφέρεια, ἐπίσης στὴ μονάδα τοῦ χρόνου, εἶναι ἡ *γραμμική του ταχύτητα.*

Πρόβλημα 1. *Ἕνας ποδηλάτης διατρέχει μὲ ὁμοιόμορφη κίνηση σὲ 2 min ἕναν κυκλικὸ ποδηλατόδρομο μήκους 800 m. Ποιὰ εἶναι ἡ περιστροφικὴ καὶ ποιὰ ἡ γραμμική του ταχύτητα;*

Ἡ περιστροφική του ταχύτητα εἶναι μισὴ στροφὴ στὸ λεπτό, πράγμα ποὺ συμβολίζομε ἔτσι: 0,5 στρ/min.

Τὴ γραμμική του ταχύτητα σὲ μέτρα ἀνὰ ὥρα τὴ βρίσκομε ὡς ἑξῆς:

Σὲ 1 min διατρέχει μῆκος 800 m : 2 = 400 m, ἄρα σὲ 60 min θὰ διατρέξη 400 m × 60 = 24 000 m = 24 km.

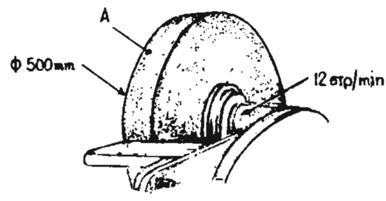
Ἡ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ ποδηλάτη εἶναι λοιπὸν 24 km/h.

Πρόβλημα 2. *Ἕνας ποδηλάτης κινεῖται ὁμοιόμορφα πάνω σὲ μιὰ κυκλικὴ πίστα διαμέτρου 250 m. Ὑπολογίστε τὴ γραμμική του ταχύτητα, σὲ km/h, ξέροντας ὅτι ἡ περιστροφική του ταχύτητα εἶναι 32 στρ/h.*

Μῆκος ἑνὸς γύρου μιᾶς στροφῆς πάνω στὴν πίστα: 250 m × 3,14 = 785 m.

Μῆκος διατρεγμένο σὲ 1 h: 785 m × 32 = 25 120 m = 25,120 km.

Ἡ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ ποδηλάτη εἶναι λοιπὸν περίπου 25,1 km/h.



Σχ. 3-α. Ὑπολογίστε τὴ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ σημείου A.

Πρόβλημα 3. *Ἕνας σμυριδοτροχὸς (σχ. 3-α) μὲ διάμετρο 500 mm περιστρέφεται ὁμοιόμορφα γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονά του, κάνοντας 12 στροφὲς στὸ λεπτό. Ὑπολογίστε, σὲ m/min, τὴ γραμμικὴ ταχύτητα ἑνὸς σημείου A τῆς περιφέρειάς του.*

Ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ ἔχει μῆκος 500 mm × 3,14 = 1 570 mm.

Τὸ μῆκος ποὺ διατρέχει τὸ σημεῖο A σὲ 1 min εἶναι:

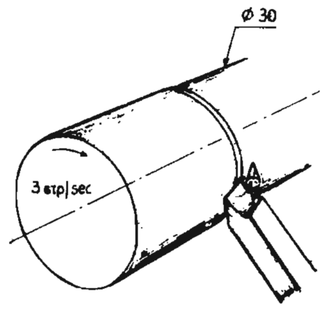
$$1\,570 \text{ mm} \times 12 = 18\,840 \text{ mm} = 18{,}84 \text{ m}.$$

Ἀπάντηση: Ἡ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ A εἶναι 18,84 m/min

Πρόβλημα 4. *Ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι τῶν 30 mm (δηλ. μὲ Ø 30 mm) εἶναι ἐφαρμοσμένο γιὰ κατεργασία πάνω σὲ ἕναν τόρνο καὶ περιστρέφεται ὁμοιόμορφα μὲ 3 στρ/sec (σχ. 3-β).*

Ὑπολογίστε, σὲ m/min, τὴ γραμμικὴ ταχύτητα ἑνὸς σημείου A τῆς περιφέρειας τοῦ κομματιοῦ· ἡ ταχύτητα αὐτὴ εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ ὀνομάζομε ταχύτητα κοπῆς τοῦ ἐργαλείου.

Ἡ περίμετρος τοῦ κομματιοῦ εἶναι 30 mm × 3,14 = 94,2 mm.



Σχ. 3-β. Ὑπολογίστε τὴν ταχύτητα κοπῆς τοῦ ἐργαλείου.

Τὸ σημεῖο A τῆς περιφέρειας διατρέχει λοιπὸν σὲ 1 sec

$$94{,}2 \text{ mm} \times 3 = 282{,}6 \text{ mm}$$

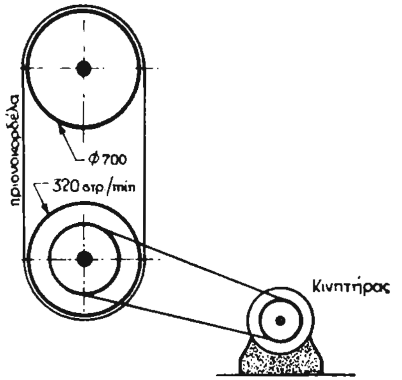
καὶ σὲ 1 min = 60 sec

$$282{,}6 \text{ mm} \times 60 = 16\,956 \text{ mm} = 16{,}956 \text{ m}.$$

Ἀπάντηση: ἡ ταχύτητα κοπῆς εἶναι περίπου 17 m/min.

Ἀσκήσεις. 1. Ὑπολογίστε σὲ sec τὸν χρόνο ποὺ χρειάζεται ἕνας ποδηλάτης, γιὰ νὰ κάμη, μὲ μέση ταχύτητα 27 km/h, ἕνα γύρο πάνω σὲ μιὰ κυκλικὴ πίστα διαμέτρου 300 m.

2. Οἱ λεπτοδεῖκτες καὶ οἱ ὡροδεῖκτες ἑνὸς ρολογιοῦ ἔχουν ἀντιστοίχως 35 mm καὶ 25 mm μῆκος, ὅταν τὸ μετρήσωμε ξεκινώντας ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς τους. Ὑπολογίστε τὶς γραμμικὲς ταχύτητες τῶν ἄκρων τους, πρῶτα σὲ mm/sec καὶ ὕστερα σὲ mm/min.



Σχ. 3-γ. Ὑπολογίστε τὴ γραμμικὴ ταχύτητα τῆς πριονοκορδέλας.

3. Ὑπολογίστε τὴ γραμμικὴ ταχύτητα τῆς πριονοκορδέλης (σχ. 3-γ), ξέροντας ὅτι οἱ δυὸ τροχοί, γύρω στοὺς ὁποίους εἶναι τεντωμένη, ἔχουν διάμετρο 700 mm καὶ ὅτι ὁ τροχὸς ποὺ τὴ θέτει σὲ κίνηση κάνει 320 στροφὲς στὸ λεπτὸ (ἔχει περιστροφικὴ ταχύτητα 320 στρ/min).

4. Τὸ συρματόσχοινο ποὺ τυλίγεται στὸ τύμπανο ἑνὸς βαρούλκου μὲ διάμετρο 300 mm ἀνυψώνει ἕνα βάρος· ἡ ταχύτητα μὲ τὴν ὁποία τοῦτο ὑψώνεται εἶναι 1,50 m/sec. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τυμπάνου σὲ στρ/min.

5. Μιὰ τουρμπίνα (ἕνας στρόβιλος) ἔχει περιστροφικὴ ταχύτητα 2 000 στρ/min. Ἂν ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τῆς τουρμπίνας εἶναι 500 mm, πόση εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτητα ἑνὸς σημείου τῆς περιφέρειάς της (μὲ ἄλλα λόγια: ἡ περιφερειακὴ ταχύτητα τῆς τουρμπίνας);

Μάθημα 4.

Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἐγγράμματου ἀθροίσματος ἢ ἐγγράμματης διαφορᾶς.

Στὰ μνημόνια καὶ τυπολόγια τῶν τεχνικῶν θὰ συναντήσετε γραφές, ποὺ τὶς ἀπαρτίζουν γράμματα, ἀριθμοὶ καὶ σύμβολα ἀριθμητικῶν πράξεων· τὰ γράμματα μέσα σ' αὐτὲς ἀντιπροσωπεύουν ἀριθμοὺς ποὺ δὲν θέλομε νὰ καθορίσωμε ἐντελῶς ἀπὸ πρὶν (καὶ ποὺ γι' αὐτὸ λέγονται κάποτε *γενικοὶ ἀριθμοί*). Π.χ. τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τριγώνου τὸ τυπολόγιο τὸ ἐκφράζει μὲ τὴ γραφὴ

$$\frac{\beta \cdot \upsilon}{2} \quad (\text{τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου})$$

μέσα στὴν ὁποία τὸ γράμμα β παριστάνει τὸ μῆκος τῆς βάσης τοῦ τριγώνου καὶ τὸ υ τὸ ἀντίστοιχο ὕψος. Ὅμοια τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τραπεζίου ἐκφράζεται μὲ τὴ γραφὴ

$$\frac{(\beta_1 + \beta_2) \cdot \upsilon}{2} \quad (\text{τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τραπεζίου})$$

ὅπου τὰ γράμματα β_1 καὶ β_2 παριστάνουν τὰ μήκη τῶν δυὸ βάσεων τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ υ τὴν ἀπόστασή τους.

Τέτοιες γραφὲς λέγονται *ἐγγράμματες παραστάσεις* (ἢ *ἐκφράσεις*). Στὸ μάθημα αὐτό, καθὼς καὶ σὲ μερικὰ ἄλλα αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου, θὰ μελετήσωμε μερικὲς ἐγγράμματες παραστάσεις καὶ θὰ γνωρίσωμε τὴ χρήση τους.

1. Γιὰ νὰ προσθέσωμε ἀριθμοὺς ποὺ παριστάνονται ἀπὸ γράμματα, γράφομε τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο τὰ γράμματα αὐτά, χωρίζοντάς τα μὲ τὸ σύμβολο + τῆς πρόσθεσης.

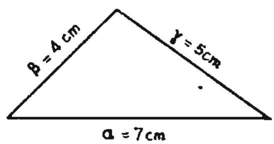
Ἔτσι π.χ. ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου, ποὺ βλέπετε στὸ σχῆμα 4-α, θὰ δοθῇ γενικὰ μὲ τὴν παράσταση:

$$\alpha + \beta + \gamma$$

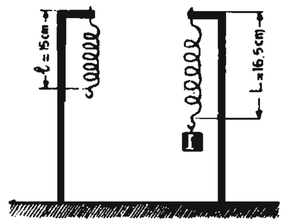
Εἰδικά, ὅταν τὰ γράμματα ἀντικατασταθοῦν μὲ τὰ καθορισμένα μήκη ποὺ εἶναι σημειωμένα στὸ σχῆμα, ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου θὰ ἰσοῦται μέ:

$$7\text{ cm} + 4\text{ cm} + 5\text{ cm} = 16\text{ cm}.$$

Ἡ παράσταση $\alpha + \beta + \gamma$ λέγεται *ἐγγράμματο ἄθροισμα*, τὰ γράμματα α, β, γ εἶναι οἱ *ὅροι* του καὶ 16 cm εἶναι ἡ *ἀριθμητικὴ τιμή* του γιὰ $\alpha = 7\text{ cm}$, $\beta = 4\text{ cm}$, $\gamma = 5\text{ cm}$.



Σχ. 4-α. Περίμετρος $= \alpha + \beta + \gamma = 7\text{ cm} + 4\text{ cm} + 5\text{ cm} = 16\text{ cm}$.



Σχ. 4-β. Ἐπιμήκυνση (μάκρεμα) τοῦ ἐλατηρίου $= L - l = 1{,}5\text{ cm}$.

2. Γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε δυὸ ἀριθμοὺς ποὺ παριστάνονται ἀπὸ γράμματα, χωρίζομε τὰ γράμματα αὐτὰ μὲ τὸ σύμβολο — τῆς ἀφαίρεσης, γράφοντας τὸν μειωτέο ἀριστερὰ καὶ τὸν ἀφαιρετέο δεξιὰ ἀπ' τὸ σύμβολο.

Ἔτσι π.χ. ἡ ἐπιμήκυνση (τὸ μάκρεμα) τοῦ ἐλατηρίου στὸ σχῆμα 4-β θὰ δοθῆ γενικὰ μὲ τὴν παράσταση

$$L - l.$$

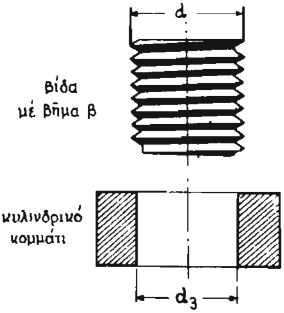
Εἰδικῶς, ὅταν τὰ γράμματα ἀντικατασταθοῦν μὲ τοὺς καθορισμένους ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι σημειωμένοι στὸ σχῆμα, τὸ μάκρεμα θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμό:

$$16{,}5\text{ cm} - 15\text{ cm} = 1{,}5\text{ cm}.$$

Ἡ *ἐγγράμματη παράσταση* $L - l$ λέγεται *διαφορά*, L καὶ l εἶναι οἱ *ὅροι* της, 1,5 cm εἶναι ἡ *ἀριθμητική* της *τιμὴ* γιὰ $L = 16{,}5\text{ cm}$ καὶ $l = 15\text{ cm}$.

3. Ὑπολογισμὸς μιᾶς ἀριθμητικῆς τιμῆς.

Παράδειγμα. Πρόκειται ν' ἀνοίξετε σ' ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι μιὰ τρύπα, ἡ ὁποία, ὕστερα ἀπὸ τὴν κοπὴ ἑνὸς ἁπλοῦ σπειρώματος (ἑνὸς σπειρώματος μὲ μίαν ἀρχή), νὰ μπορῇ νὰ δεχθῇ μιὰ βίδα (ἕναν κοχλία) μὲ ὀνομαστικὴ διάμετρο $d = 8$ mm καὶ βῆμα $\beta = 1,25$ mm. Στὸ τυπολόγιο διαβάζετε, ὅτι ἡ διάμετρος d_3 τῆς τρύπας ἰσοῦται μὲ $d - \beta$. Ὑπολογίστε τὴν d_3.



Σχ. 4-γ. Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο d_3 τῆς τρύπας πρὶν ἀπὸ τὴν κοπὴ τοῦ σπειρώματος.

Ἡ ἔκφραση $d - \beta$ εἶναι μιὰ ἐγγράμματη διαφορά. Ζητεῖται ἡ ἀριθμητικὴ τιμή της γιὰ $d = 8$ mm καὶ $\beta = 1,25$ mm. Ἀντικαθιστοῦμε λοιπὸν τὰ γράμματα μὲ τὶς ἀντίστοιχες τιμές τους καὶ βρίσκομε (παραλείποντας, γιὰ συντομία, τὸ γράψιμο τῆς μονάδας mm τοῦ μήκους):

$$d_3 = 8 - 1,25.$$

Ἐκτελῶντας τώρα τὴν ἀφαίρεση καὶ συμπληρώνοντας τὸ ἀποτέλεσμα μὲ τὸ γράψιμο τῆς μονάδας μήκους ἔχομε:

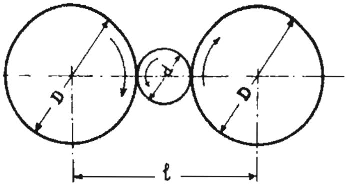
$$d_3 = 6,75 \text{ mm}.$$

Συνοψίζομε ὅσα εἴπαμε ὡς ἑξῆς:

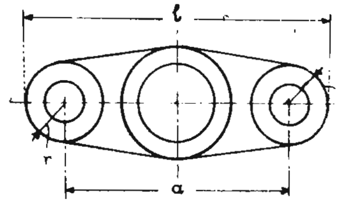
Ἐγγράμματη παράσταση εἶναι ἕνα σύμπλεγμα ἀπὸ γράμματα, ἀριθμοὺς καὶ σύμβολα ἀριθμητικῶν πράξεων· τὰ γράμματα ἀντιπροσωπεύουν ἀριθμοὺς ὄχι ἀπὸ πρὶν καθορισμένους. Ἀριθμητικὴ τιμὴ μιᾶς ἐγγράμματης παράστασης εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ βρίσκομε ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμε τὰ γράμματα μὲ ἀντίστοιχα δοσμένους ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελέσωμε τὶς σημειωμένες πράξεις.

Ἀσκήσεις. *1.* Δυὸ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ μὲ τὴν ἴδια διάμετρο D συμπλέκονται ὁ ἕνας μὲ τὸν ἄλλο διαμέσου ἑνὸς μικροτέρου ὀδοντωτοῦ τροχοῦ, ποὺ ἔχει διάμετρο d. Βρῆτε τὴν ἐγγράμματη παράσταση ποὺ ἐκφράζει τὴν ἀπόσταση l τῶν ἀξόνων τῶν δυὸ μεγάλων τροχῶν (Σχ. 4-δ).

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $D = 400$ mm, $d = 150$ mm.



Σχ. 4-δ. Ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση τῶν ἀξόνων τῶν δυὸ ὀδοντωτῶν τροχῶν.



Σχ. 4-ε. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῆς φλάντζας.

2. Βρῆτε τὴν ἐγγράμματη παράσταση γιὰ τὸ μῆκος l τῆς φλάντζας, ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 4 - ε, ξέροντας τὴν ἀπόσταση α ποὺ ἔχουν οἱ δυὸ τρύπες τῆς φλάντζας, ἀπὸ ἄξονα σὲ ἄξονα, καθὼς καὶ τὴν ἀκτίνα r τῶν δύο στρογγυλευμένων ἄκρων της.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : $\alpha = 66$ mm, $r = 11$ mm.

3. Σ' ἕναν κυκλικὸ δίσκο μὲ διάμετρο D ἀνοίγετε μιὰ κυκλικὴ τρύπα μὲ διάμετρο d ἔτσι ποὺ τὸ κέντρο τῆς τρύπας νὰ ἔχῃ ἀπόσταση α ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ δίσκου. Βρῆτε τὶς δυὸ ἐγγράμματες παραστάσεις, ποὺ δίνουν ἡ μιὰ τὴ μέγιστη, ἡ ἄλλη τὴν ἐλάχιστη ἀπόσταση μεταξὺ τῆς περιφέρειας τῆς τρύπας καὶ τῆς περιφέρειας τοῦ δίσκου.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : $D = 200$ mm, $d = 60$ mm, $\alpha = 15$ mm.

Μάθημα 5.

Ὑπολογισμὸς ἑνὸς ὅρου ἀθροίσματος.

1. Ξέροντας τὸ ἄθροισμα (35) δυὸ ἀριθμῶν καὶ τὸν ἕνα (20) ἀπὸ αὐτούς, ὑπολογίστε τὸν ἄλλο.

Ἂς παραστήσωμε μὲ τὸ γράμμα x τὸν ἄγνωστο ὅρο τοῦ ἀθροίσματος. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμε

$$x + 20 = 35.$$

Αὐτὸ εἶναι μιὰ *ἐγγράμματη ἰσότητα*, ποὺ ἐπαληθεύεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμε τὸ x μὲ τὸν ἀριθμὸ 15. Καὶ ἀλήθεια $15+20=35$. Καμμιὰ ἄλλη ὅμως ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ x δὲν τὴν ἐπαληθεύει· π.χ. γιὰ $x = 7$, ἔχομε $7 + 20 \neq 35$, γιατὶ $27 \neq 35$.

Γενικά, μιὰ ἰσότητα ἔχει δυὸ μέρη, ποὺ χωρίζονται μὲ τὸ σύμβολο = τοῦ ἴσου. Τὰ δυὸ αὐτὰ μέρη λέγονται *μέλη τῆς ἰσότητας*: *ἀριστερὸ (ἢ πρῶτο)* μέλος λέγεται ἐκεῖνο ποὺ εἶναι γραμμένο ἀριστερὰ τοῦ =, *δεξιὸ (ἢ δεύτερο)* μέλος λέγεται ἐκεῖνο ποὺ βρίσκεται δεξιὰ τοῦ =.

Ὑπάρχουν ἐγγράμματες ἰσότητες ποὺ ἀληθεύουν ὁποιες ἀριθμητικὲς τιμὲς κι ἂν δώσωμε στὰ γράμματα ποὺ περιέχουν. Π.χ. ἡ ἰσότητα:

$$x + 3 = 3 + x$$

ἀληθεύει ὁποιον ἀριθμὸ κι ἂν βάλωμε στὴ θέση τοῦ γράμματος x. Τέτοιες ἰσότητες λέγονται *ταυτότητες*.

Ἡ παραπάνω ἰσότητα $x + 20 = 35$ ἀληθεύει, ὅπως εἴπαμε, μόνο γιὰ $x = 15$. Δὲν εἶναι λοιπὸν ταυτότητα.

Ἐγγράμματες ἰσότητες ποὺ δὲν εἶναι ταυτότητες λέγονται *ἐξισώσεις*.

Ἡ ἰσότητα $x + 20 = 35$ εἶναι λοιπὸν μιὰ ἐξίσωση· τὸ γράμμα x εἶναι ὁ *ἄγνωστός* της καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ $x = 15$, ἡ ὁποία τὴν ἐπαληθεύει, λέγεται ***λύση*** της.

Ἐπιλύνω (ἢ λύνω) μιὰν ἐξίσωση σημαίνει βρίσκω τὶς λύσεις της, δηλαδὴ βρίσκω ποιὲς ἀριθμητικὲς τιμὲς τῶν ἀγνώστων της τὴν ἐπαληθεύουν.

2. Μιὰ ἰδιότητα τῶν ἐξισώσεων.

Στὸ παράδειγμα $x + 20 = 35$ ἦταν εὔκολο νὰ βροῦμε τὴ λύση τῆς ἐξίσωσης χρησιμοποιώντας ὅσα ξέρομε ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική. Γιὰ νὰ ἐπιλύσωμε ὅμως ἐξισώσεις πιὸ πολύπλοκες, εἶναι ἀπαραίτητο νὰ γνωρίζωμε κάποιους κανόνες ὑπολογισμοῦ τοὺς ὁποίους θὰ ἐκθέσωμε σ' αὐτὸ τὸ μάθημα καθὼς καὶ στὰ ἑπόμενα.

Ἕνας πρῶτος κανόνας προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα μιᾶς ἰσότητας γενικά, ἄρα καὶ μιᾶς ἐξίσωσης: Ἐπιτρέπεται ν' ἀφαιρέσωμε ἕναν ὁποιοδήποτε ἀριθμὸ ἀλλὰ τὸν ἴδιο ἀπὸ τὸ κάθε μέλος μιᾶς ἰσότητας. Διότι, ἂν ἀπὸ δυὸ ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι ἴσοι ἢ ποὺ θέλομε νὰ εἶναι ἴσοι, ἀφαιρέσωμε ἕναν καὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ (ὁποιος κι ἂν εἶναι αὐτός), τὰ δυὸ ὑπόλοιπα ποὺ βρίσκομε, θὰ εἶναι ἴσα ἢ θὰ πρέπη νὰ εἶναι ἴσα.

Ὥστε, ἐπιτρέπεται ν' ἀφαιρέσωμε ἕναν καὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἢ μίαν καὶ τὴν ἴδια παράσταση ἀπὸ τὸ κάθε μέλος μιᾶς ἐξίσωσης· αὐτὸ δὲν ἀλλάζει τὶς λύσεις της.

3. Ἐπίλυση τῆς ἐξίσωσης $x + 20 = 35$. Ἂς ἀφαιρέσωμε τὸν ἀριθμὸ 20 ἀπὸ τὸ κάθε μέλος τῆς ἐξίσωσης· θὰ λάβωμε

$$x + 20 - 20 = 35 - 20$$

$$\text{ἢ } x = 35 - 20, \text{ δηλαδὴ } x = 15.$$

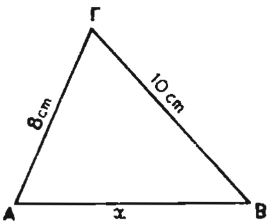
Ὅπως βλέπετε, ὁ ὅρος 20 βρίσκεται στὸ ἀριστερὸ μέλος τῆς ἐξίσωσης $x + 20 = 35$ μὲ μπροστά του τὸ σημάδι (σύμβολο) $+$, ἐνῶ στὴν ἐξίσωση $x = 35 - 20$ βρίσκεται στὸ δεξιὸ μέλος μὲ μπροστά του τὸ σημάδι $-$. Γι' αὐτὸ τὰ σύμβολα $+$ καὶ $-$ θὰ τὰ λέμε *πρόσημα* τῶν ὅρων. Ἀλλάζω τὸ πρόσημο ἑνὸς ὅρου σημαίνει: ἀπὸ $+$ τὸ κάνω $-$ καὶ ἀπὸ $-$ τὸ κάνω $+$. Ἔτσι μποροῦμε τώρα νὰ διατυπώσωμε μὲ ὀλίγα λόγια τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

Ἐπιτρέπεται σὲ μιὰν ἐξίσωση νὰ μεταφέρωμε ἕναν ὅρο ἀπὸ

τὸ ἕνα μέλος της στὸ ἄλλο, ἀλλάζοντας τὸ πρόσημό του (αὐτὸ δὲν μεταβάλλει τὶς λύσεις τῆς ἐξίσωσης).

Ἡ ἐξίσωση $x+20=35$ μπορεῖ νὰ γραφῆ καὶ ἔτσι: $20+x=35$. Γι' αὐτό, ὁ ὅρος x στὴν ἐξίσωση $x+20=35$ πρέπει νὰ θεωρηθῆ ὅτι ἔχει πρόσημο τὸ + καὶ ὁ ὅρος 20 στὴν $20+x=35$ ὅτι ἔχει καὶ αὐτὸς πρόσημο τὸ +. Μὲ ἄλλα λόγια: γιὰ τὸν πρῶτο ἀπ' ἀριστερὰ ὅρο ἑνὸς μέλους μιᾶς ἐξίσωσης, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει κανένα ἀπὸ τὰ σύμβολα + ἢ — μπροστά του, πρέπει νὰ ὑπονοοῦμε (νὰ βάζωμε στὸ νοῦ μας) πὼς ἔχει πρόσημο τὸ +.

4. Ἀλγεβρικὴ ἐπίλυση προβλημάτων. Ἔτσι λέγεται ἡ ἐπίλυσή τους μὲ τὴ βοήθεια ἐξισώσεων. Νὰ δυὸ παραδείγματα.



Σχ. 5-α. Ξέροντας τὴν περίμετρο καὶ τὶς πλευρὲς ΑΓ καὶ ΓΒ ὑπολογίστε τὴν ΑΒ=x.

Παράδειγμα 1. Ξέροντας ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στὸ σχ. 5-α εἶναι 27,5 cm, ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Ἂς παραστήσωμε μὲ x τὸ μῆκος (σὲ cm) τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Θὰ ἔχωμε, μὲ ἄγνωστο τὸ x, τὴν ἐξίσωση $x+8+10=27{,}5$, δηλ. $x+18=27{,}5$, ὅπου γιὰ συντομία, ὅπως συνηθίζεται, δὲν σημειώσαμε τὴ μονάδα μήκους cm. Ἐπιλύνοντας τὴν ἐξίσωση σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα ποὺ διατυπώσαμε, βρίσκομε:

$$x=27{,}5-18$$
$$x=9{,}5.$$

Ἀπάντηση : Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἶναι 9,5 cm.

Παράδειγμα 2. Σὲ ποιὰ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν ἀπάνω ὄψη τῆς βάσης τοῦ ὑποστηρίγματος ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 5-β πρέπει νὰ τρυπήσωμε τὸν ἄξονα ΑΒ γιὰ νὰ ἀπέχη αὐτὸς ὁ ἄξονας 55 mm ἀπὸ τὸ τραπέζι πάνω στὸ ὁποῖο βρίσκεται τὸ ὑποστήριγμα ;

Ἂς παραστήσωμε μὲ x (mm) τὸ ζητούμενο μῆκος· θὰ ἔχωμε τὴν ἐξίσωση:

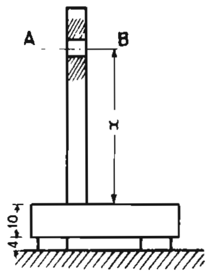
$x + 10 + 4 = 55$, δηλαδή $x + 14 = 55$.

Ἂς τὴν ἐπιλύσωμε μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε :

$$x = 55 - 14$$

$$x = 41.$$

Ἀπάντηση: Ἡ ζητούμενη ἀπόσταση εἶναι 41 mm.



Σχ.5-β. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος x. Οἱ διαστάσεις στὸ σχῆμα δίνονται σὲ mm.

Ἀσκήσεις. 1. Ἐπιλύστε τὶς παρακάτω ἐξισώσεις :

$x + 2 = 5$

$x + 5 = 13$

$x + 7{,}5 = 29$

$23{,}5 = x + 7$

$7 + x = 18{,}5 + 3$

$25 = 4 + x + 2$

$5 + 17{,}2 = 9{,}4 + x$

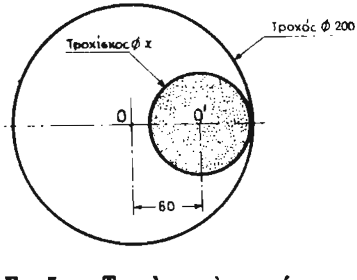
$4 + 7 + x = 29$

2. Σκεφθῆτε ἕνα πρόβλημα, ποὺ νὰ ἔχη ἐξίσωση τὴν

$$x + 3{,}5 = 21$$

καὶ βρῆτε τὴν ἀπάντηση ἐπιλύνοντας τὴν ἐξίσωση.

Σκεφθῆτε ἕνα ἄλλο πρόβλημα ποὺ νὰ ἔχη γιὰ ἀπάντηση τὴ λύση τῆς ἐξίσωσης $x + 5 = 17{,}5$ (ἀφοῦ ὀνοματίσετε κατάλληλα τοὺς ὅρους τῆς ἐξίσωσης).



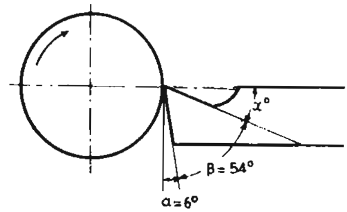
Σχ. 5-γ. Τροχὸς καὶ τροχίσκος συμπλέκονται.

3. Ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα x τοῦ τροχίσκου ποὺ συμπλέκεται μὲ τὸν τροχὸ (σχ. 5-γ), ξέροντας ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ εἶναι 200 mm καὶ ὅτι ἡ ἀπόσταση τῶν ἀξόνων τῶν τροχῶν εἶναι 60 mm.

4. Οἱ τρεῖς γωνίες ἑνὸς τριγώνου εἶναι $45^\circ 15'$, $67^\circ 40'$ καὶ x°. Ξέροντας ὅτι τὸ ἄθροισμά τους εἶναι 2 ὀρθὲς γωνίες, ὑπολογίστε τὸ x°.

5. Μιὰ ἀπὸ τὶς 4 γωνίες ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι 67°. Δυὸ ἄλλες ἔχουν ἄθροισμα δυόμισι φορὲς αὐτὴν τὴν πρώτη. Ὑπολογίστε τὴν τέταρτη γωνία ξέροντας ἀκόμη ὅτι τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν τεσσάρων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθὲς γωνίες.

6. Ξέροντας ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α, β, x (σχ. 5-δ) εἶναι 90° καὶ παίρνοντας τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς τῶν α, β ἀπὸ τὸ σχῆμα, σχηματίστε τὴν ἐξίσωση γιὰ τὴ γωνία x τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου σ' ἕναν τόρνο καὶ ἐπιλύστε την.



Σχ. 5-δ. Ὑπολογίστε τὴ γωνία x.

7. Παριστάνοντας μὲ α τὴν τιμὴ ἀγορᾶς ἑνὸς ἐμπορεύματος, μὲ δ τὴν τιμὴ στὴν ὁποία πουλήθηκε καὶ μὲ κ τὸ ἀντίστοιχο κέρδος (ὅλα σὲ δραχμές), θὰ ἔχωμε τὴν ἰσότητα

$$\alpha + \kappa = \delta$$

1ο. Ὑπολογίστε τὸ κ ξέροντας ὅτι $\alpha = 200$, $\delta = 280$.

2ο. » τὸ α » » $\kappa = 150$, $\delta = 610$.

8. Ὅταν ἕνα κινητὸ ἔχη ὁμοιόμορφα ἐπιταχυνόμενη κίνηση, τότε οἱ ταχύτητές του v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 (m/sec) στὶς χρονικὲς στιγμὲς 0, 1, 2, 3, 4 (sec) ἀντιστοίχως εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

$$v_1 = v_0 + \gamma, \quad v_2 = v_1 + \gamma, \quad v_3 = v_2 + \gamma, \quad v_4 = v_3 + \gamma,$$

ὅπου τὸ γ παριστάνει (σὲ m/sec^2) τὴν ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ.

1ο. Ὑπολογίστε τὸ γ γνωρίζοντας ὅτι $v_0 = 2{,}5$ καὶ $v_1 = 3{,}75$

2ο. Ὑπολογίστε ἔπειτα τὶς ταχύτητες v_2, v_3, v_4.

Μάθημα 6.

Ὑπολογισμὸς ἑνὸς ὅρου σὲ μιὰ διαφορά.

1. Ξέροντας τὴ διαφορὰ (9) δυὸ ἀριθμῶν καὶ τὸν μικρότερο (11) ἀπὸ αὐτούς, ὑπολογίστε τὸν ἄλλο.

Παριστάνομε μὲ x τὸν ἄγνωστο ὅρο τῆς διαφορᾶς. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι λύση τῆς ἐξίσωσης:

$$x - 11 = 9.$$

Χρησιμοποιώντας ὅσα ξέρομε ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική, θὰ μπορούσαμε νὰ βροῦμε εὔκολα ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτὴ ἔχει λύση τὸ $x = 20$. Καὶ ἀλήθεια $20 - 11 = 9$. Θὰ ἐπιδιώξωμε ὅμως πάλι νὰ ἐπιλύσωμε τὴν ἐξίσωση ἀκολουθώντας ἕναν κανόνα ποὺ νὰ μᾶς εἶναι χρήσιμος καὶ σὲ πιὸ πολύπλοκες περιπτώσεις. Ὁ κανόνας αὐτὸς βγαίνει ἀπὸ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα μιᾶς ἰσότητας γενικά, ἄρα καὶ μιᾶς ἐξίσωσης: Ἐπιτρέπεται νὰ προσθέσωμε ἕναν καὶ τὸν ἴδιο ὁποιοδήποτε ἀριθμὸ στὸ κάθε μέλος μιᾶς ἰσότητας. Διότι, ἂν σὲ δυὸ ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι ἴσοι (ἢ ποὺ θέλομε νὰ εἶναι ἴσοι) προσθέσωμε τὸν ἴδιο ἀριθμό, τὰ δυὸ ἀθροίσματα ποὺ προκύπτουν θὰ εἶναι ἴσα (ἢ θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ἴσα).

Ὥστε, *ἐπιτρέπεται νὰ προσθέσωμε ἕναν καὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἢ μίαν καὶ τὴν ἴδια παράσταση στὸ κάθε μέλος μιᾶς ἐξίσωσης· αὐτὸ δὲν ἀλλάζει τὶς λύσεις της.*

2. Ἐπίλυση τῆς ἐξίσωσης $x - 11 = 9$. Ἂς προσθέσωμε τὸν ἀριθμὸ 11 στὸ κάθε μέλος τῆς ἐξίσωσης. Θὰ λάβωμε

$$x - 11 + 11 = 9 + 11$$

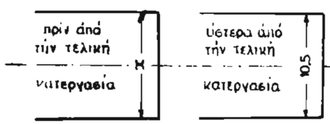
ἢ $\quad x = 9 + 11, \qquad$ δηλ. $x = 20$.

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ὅρος 11, ποὺ βρισκόταν μὲ τὸ πρόσημο — στὸ ἀριστερὸ μέλος τῆς ἐξίσωσης $x - 11 = 9$, βρίσκεται μὲ τὸ πρόσημο + στὸ δεξιὸ μέλος τῆς ἐξίσωσης $x = 9 + 11$. Ξαναβρίσκομε λοιπὸν τὸν κανόνα ποὺ διατυπώσαμε στὸν παράγραφο 3 τοῦ προηγούμενου μαθήματος: *Ἐπιτρέπεται σὲ μιὰν ἐξίσωση νὰ μεταθέσωμε ἕναν ὅρο ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος της στὸ ἄλλο, ἀλλάζοντας τὸ πρόσημό του.*

3. Ἐφαρμογὴ στὴν ἐπίλυση ἐξισώσεων.

$x - 2{,}5 = 10$	$15 - x = 7$
$x = 10 + 2{,}5$	$15 = 7 + x$
$x = 12{,}5.$	$15 - 7 = x$
	$8 = x$, ἄρα $x = 8.$

4. Ἀλγεβρικὴ ἐπίλυση προβλήματος. *Πάνω σ' ἕναν τόρνο κατεργάζεστε ἕναν ἄξονα. Ποιά πρέπει νὰ εἶναι, πρὶν ἀπὸ τὸ τελικὸ πάσο, ἡ διάμετρος τοῦ ἄξονα, ἂν θέλωμε μ' ἕνα τελικὸ τορνάρισμα βάθους 0,6 mm νὰ δώσωμε στὴ διάμετρο τοῦ ἄξονα τὸ μέγεθος τῶν 10,5 mm (σχ. 6-α).*



Σχ. 6-α. Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο x τοῦ κυλινδρικοῦ ἄξονα.

Ἂς παραστήσωμε μὲ x (mm) τὴ διάμετρο ποὺ ζητοῦμε. Τὸ τελικὸ τορνάρισμα βάθους 0,6 mm ἐλαττώνει τὴ διάμετρο κατὰ $0{,}6 \text{ mm} \times 2 = 1{,}2 \text{ mm}$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμε γιὰ τὸ x τὴν ἐξίσωση:

$$x - 1{,}2 = 10{,}5.$$

Ἂς τὴν ἐπιλύσωμε ἐφαρμόζοντας τὸν κανόνα· θὰ βροῦμε:

$$x = 10{,}5 + 1{,}2, \qquad \text{δηλ. } x = 11{,}7.$$

Ἀπάντηση: Ἡ ζητούμενη διάμετρος εἶναι 11,7 mm.

Ἀσκήσεις. 1. Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις:

$x - 9 = 21$	$x - 4{,}5 = 13{,}2$	$35{,}2 - x = 28$
$7 - x = 0{,}25$	$35{,}5 = 98 - x$	$x - 0{,}75 = 1{,}45.$

2. Σκεφθῆτε ἕνα πρόβλημα ποὺ νὰ ἔχῃ ἐξίσωση:

$$8{,}5 - x = 3$$

καὶ βρῆτε τὴν ἀπάντηση ἐπιλύνοντας τὴν ἐξίσωση.

Σκεφθῆτε ἕνα ἄλλο πρόβλημα ποὺ νὰ ἔχῃ γιὰ ἀπάντηση τὴ λύση τῆς ἐξίσωσης $x - 7 = 13{,}5$ (ἀφοῦ ὀνοματίσετε κατάλληλα τοὺς ὅρους τῆς ἐξίσωσης).

3. Ἀπὸ ποιὸν ἀριθμὸ x πρέπει ν' ἀφαιρέσωμε 0,8 mm, γιὰ νὰ βροῦμε 16,4 mm;

4. Ἕνα πηγάδι ἔχει βάθος 9,25 m. Ἀφοῦ παραστήσετε μὲ x (m) τὸ ὕψος τοῦ νεροῦ μέσα στὸ πηγάδι, ἐκφράστε μὲ τὸ x καὶ τὸ 9,25 τὴν ἀπόσταση α (m) τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ἐδάφους ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ. Ὕστερα ὑπολογίστε τὸ x παίρνοντας τὸ α ἴσο μὲ 3,85 m.

5. Ἕνας μολυβδοσωλήνας ἔχει ἐξωτερικὴ διάμετρο x (mm) καὶ πάχος τοιχώματος 4 mm. Ἐκφράστε τὴν ἐσωτερική του διάμετρο d μὲ τὸ x καὶ μὲ τὸ 4. Ὕστερα ὑπολογίστε τὸ x παίρνοντας τὸ d ἴσο μὲ 25 mm.

6. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει περίμετρο 50 cm. Ἂν παραστήσωμε μὲ x (cm) τὸ μῆκος του καὶ μὲ ψ τὸ πλάτος του, πῶς ἐκφράζεται μὲ τὸ x αὐτὸ τὸ ψ; Ὑπολογίστε τὸ x δίνοντας στὸ ψ τὴν τιμὴ 11 cm.

7. Ὅπως ξέρομε, δυὸ παραπληρωματικὲς γωνίες x καὶ ψ ἔχουν ἄθροισμα 180°, ὅταν μετρηθοῦν σὲ μοῖρες:

$$x + \psi = 180.$$

1ο. Ἀπομονῶστε ἀριστερὰ τὸ x· μὲ ἄλλα λόγια: ἐπιλύστε ὡς πρὸς x αὐτὴν τὴν ἐξίσωση.

2ο. Ὑπολογίστε τὸ ψ ξέροντας ὅτι $x = 32^\circ\,25'$.

8. Ἐκφράστε μιὰ γωνία x μὲ τὴ συμπληρωματική της ω (οἱ γωνίες x καὶ ω ἂς εἶναι μετρημένες σὲ μοῖρες). Ὕστερα ὑπολογίστε τὴν ω ξέροντας ὅτι $x = 12^\circ\,30'$.

9. Ὅταν ἕνα κινητὸ ἔχη κίνηση ὁμοιόμορφα ἐπιβραδυνόμενη, τότε οἱ ταχύτητές του v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 (m/sec) στὶς χρονικὲς στιγμὲς 0, 1, 2, 3, 4 (sec) ἀντιστοίχως εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

$$v_1 = v_0 - \gamma, \quad v_2 = v_1 - \gamma, \quad v_3 = v_2 - \gamma, \quad v_4 = v_3 - \gamma,$$

ὅπου τὸ $-\gamma$ παριστάνει τὴν ἐπιβράδυνση (ἀρνητικὴ ἐπιτάχυνση) τοῦ κινητοῦ σὲ m/sec².

1ο. Ὑπολογίστε τὸ γ ξέροντας ὅτι $v_0 = 7{,}5$ καὶ $v_1 = 6$.

2ο. Ὑπολογίστε ἔπειτα τὶς ταχύτητες v_2, v_3, v_4.

3ο. Σὲ ποιὰ χρονικὴ στιγμὴ ἡ ταχύτητα θὰ γίνη μηδέν;

Μάθημα 7.

Πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση ἀθροισμάτων ἢ διαφορῶν.

1. Πρόσθεση ἑνὸς ἀθροίσματος.

Παράδειγμα. Σ' ἕνα ντεπόζιτο, ποὺ περιέχει 50 λίτρα νερό, θέλομε νὰ προσθέσωμε ἄλλα 30 λίτρα. Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ κάμωμε εἴτε μονομιᾶς εἴτε ὄχι. Μποροῦμε π.χ. νὰ χύσωμε στὸ ντεπόζιτο μιὰ πρώτη φορὰ 20 καὶ ὕστερα ἄλλα 10 λίτρα. Ἑπομένως:

$$50+30=(50+20)+10$$
$$=50+20+10.$$

Ἕνα ντεπόζιτο περιέχει α λίτρα νερό. Γιὰ νὰ τοῦ προσθέσωμε ἄλλα (β + γ) λίτρα, μποροῦμε νὰ τοῦ προσθέσωμε στὴν ἀρχὴ β λίτρα καὶ ὕστερα ἄλλα γ λίτρα. Ἔτσι ἔχομε:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$
$$=\alpha+\beta+\gamma. \qquad (1)$$

2. Πρόσθεση μιᾶς διαφορᾶς.

Παράδειγμα. Σ' ἕνα ντεπόζιτο, ποὺ περιέχει 50 λίτρα νερό, θέλομε νὰ προσθέσωμε ἄλλα 15. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ ἔτσι (ἂν π.χ. δὲν διαθέτωμε δοχεῖο τῶν 15 λίτρων, ἔχωμε ὅμως ἕνα δοχεῖο τῶν 20 καὶ ἕνα τῶν 5 λίτρων): Χύνομε πρῶτα μέσα στὸ ντεπόζιτο 20 λίτρα νερὸ καὶ κατόπιν τοῦ παίρνομε 5 λίτρα. Ἑπομένως:

$$50+15=(50+20)-5$$
$$=50+20-5.$$

Γιὰ νὰ προσθέσωμε (β—γ) λίτρα νερὸ στὸ ντεπόζιτο, ποὺ περιέχει κιόλας α λίτρα, μποροῦμε πρῶτα νὰ τοῦ προσθέσωμε β λίτρα καὶ ὕστερα νὰ τοῦ ἀφαιρέσωμε γ λίτρα.

Ἔτσι ἔχομε:

$$\alpha+(\beta-\gamma)=(\alpha+\beta)-\gamma$$
$$=\alpha+\beta-\gamma. \qquad (2)$$

3. Ἀφαίρεση ἑνὸς ἀθροίσματος.

Παράδειγμα. Ἀπὸ ἕνα ντεπόζιτο, ποὺ περιέχει 50 λίτρα νερό, θέλομε νὰ βγάλωμε 30 λίτρα. Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ κάμωμε εἴτε μὲ μία μόνο πράξη εἴτε καὶ μὲ περισσότερες διαδοχικὲς πράξεις. Π.χ. μποροῦμε νὰ βγάλωμε στὴν ἀρχὴ 10 λίτρα καὶ ὕστερα ἄλλα 20. Ἑπομένως:

$$50 - 30 = (50 - 10) - 20$$
$$= 50 - 10 - 20.$$

Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε $(\beta + \gamma)$ λίτρα ἀπὸ τὸ ντεπόζιτο ποὺ περιέχει α λίτρα νερό, μποροῦμε ν' ἀφαιρέσωμε πρῶτα β λίτρα καὶ ἔπειτα ἄλλα γ λίτρα. Ἔτσι ἔχομε:

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$$
$$= \alpha - \beta - \gamma. \qquad (3)$$

4. Ἀφαίρεση μιᾶς διαφορᾶς.

Παράδειγμα. Γιὰ νὰ βγάλωμε 15 λίτρα νερὸ ἀπὸ ἕνα ντεπόζιτο ποὺ περιέχει 50 λίτρα, μποροῦμε νὰ βγάλωμε στὴν ἀρχὴ 20 λίτρα καὶ ὕστερα, ἐπειδὴ ἔτσι τοῦ πήραμε 5 λίτρα παραπάνω, νὰ τοῦ προσθέσωμε αὐτὰ τὰ 5 λίτρα. Ἑπομένως:

$$50 - 15 = (50 - 20) + 5$$
$$= 50 - 20 + 5.$$

Ἐπίσης θὰ μπορούσαμε πρῶτα νὰ προσθέσωμε τὰ 5 λίτρα καὶ ἔπειτα νὰ βγάλωμε τὰ 20 λίτρα:

$$50 - 15 = 50 + 5 - 20.$$

Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε $(\beta - \gamma)$ λίτρα νερό, μποροῦμε ν' ἀφαιρέσωμε στὴν ἀρχὴ β λίτρα καὶ ὕστερα νὰ προσθέσωμε γ λίτρα. Ἔτσι ἔχομε:

$$\alpha - (\beta - \gamma)$$
$$= (\alpha - \beta) + \gamma$$
$$= \alpha - \beta + \gamma. \qquad (4)$$

Ἐπίσης μποροῦμε πρῶτα νὰ προσθέσωμε γ λίτρα καὶ ὕστερα ν' ἀφαιρέσωμε τὰ β λίτρα:

$$\alpha - (\beta - \gamma) = \alpha + \gamma - \beta. \qquad (4')$$

5. Μερικοὶ κανόνες γιὰ τὴ χρήση τῶν παρενθέσεων. Ἂς ἐξετάσωμε τὶς ἰσότητες ποὺ εἶναι γραμμένες στὴ δεξιὰ στήλη τῶν τεσσάρων παραπάνω παραγράφων. Τὰ τελευταῖα μέλη τους δὲν περιέχουν παρενθέσεις, ἐνῶ τὰ προηγούμενά τους περιέχουν. Μὲ ἄλλα λόγια, οἱ παρενθέσεις ἐξαλείφθηκαν στὰ τελευταῖα μέλη τῶν ἰσοτήτων.

1ο. Ἐξετάζοντας τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) βλέπομε ὅτι *μποροῦμε νὰ ἐξαλείψωμε μιὰ παρένθεση ποὺ ἔχει μπροστά της τὸ σύμβολο + χωρὶς ν' ἀλλάξωμε τὰ πρόσημα τῶν ὅρων ποὺ περιέχονται σ' αὐτήν.*

2ο. Ἐξετάζοντας τὶς ἰσότητες (3), (4) καὶ (4′) βλέπομε ὅτι *μποροῦμε νὰ ἐξαλείψωμε μιὰ παρένθεση ποὺ ἔχει μπροστά της τὸ σύμβολο —, ἀρκεῖ ν' ἀλλάξωμε τὰ πρόσημα τῶν ὅρων τοὺς ὁποίους περιέχει.*

Ἂς ὑπενθυμίσωμε ὅτι, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸ Μάθημα 5, § 3, σ' ἕναν ὅρο, ποὺ δὲν ἔχει μπροστά του κανένα πρόσημο, πρέπει νὰ τοῦ δώσωμε μὲ τὸ νοῦ μας τὸ πρόσημο +. Ἔτσι π.χ. στὸ ἄθροισμα $(\beta+\gamma)$ καὶ στὴ διαφορὰ $(\beta-\gamma)$ πρέπει νὰ ἔχωμε νοερὰ ὑπόψη μας τὸ πρόσημο + γιὰ τὸν ὅρο β:

$$(\beta+\gamma)=(+\beta+\gamma) \quad \text{καὶ} \quad (\beta-\gamma)=(+\beta-\gamma).$$

6. Πρόβλημα 1. *Ἕνας ἐργοδηγὸς ἔδωσε σὲ τρεῖς τεχνίτες ἀπὸ ἕνα πακέτο βίδες, μὲ K βίδες τὸ καθένα. Ὁ πρῶτος τεχνίτης χρησιμοποίησε α βίδες καὶ ἐπέστρεψε τὶς ὑπόλοιπες στὸν ἐργοδηγό· τὸ ἴδιο ἔκαμαν καὶ οἱ δυὸ ἄλλοι, ἀφοῦ χρησιμοποίησαν ὁ δεύτερος β καὶ ὁ τρίτος γ βίδες. Πόσες βίδες ἐπέστρεψαν καὶ οἱ τρεῖς τεχνίτες μαζὶ στὸν ἐργοδηγό;*

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $K=50$, $\alpha=18$, $\beta=26$, $\gamma=43$.

Ἡ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος μπορεῖ νὰ γίνη μὲ δυὸ τρόπους.

1ος τρόπος. Ὁ πρῶτος τεχνίτης ἐπέστρεψε $(K-\alpha)$ βίδες, ὁ δεύτερος $(K-\beta)$ καὶ ὁ τρίτος $(K-\gamma)$. Ἄρα καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ ἐπέστρεψαν:

$$(K-\alpha)+(K-\beta)+(K-\gamma) = K-\alpha+K-\beta+K-\gamma$$
$$= K+K+K-\alpha-\beta-\gamma \text{ βίδες.}$$

2ος τρόπος. Οἱ τρεῖς τεχνίτες μαζὶ ἔλαβαν ἀπὸ τὸν ἐργοδηγὸ $(K+K+K)$ βίδες. Ἐχρησιμοποίησαν καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ $(\alpha+\beta+\gamma)$ βίδες. Ἄρα θὰ ἐπιστρέψουν στὸν ἐργοδηγὸ

$$(K+K+K)-(\alpha+\beta+\gamma), \text{ βίδες}$$

ἤ, ἂν ἐξαλείψωμε τὶς παρενθέσεις,

$$K+K+K-\alpha-\beta-\gamma \text{ βίδες.}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: Οἱ 3 τεχνίτες μαζὶ θὰ ἐπιστρέψουν στὸν ἐργοδηγὸ

$$50+50+50-18-26-43=150-87=63 \text{ βίδες.}$$

Πρόβλημα 2. *Παραγγείλαμε σ' ἕνα ἐργοστάσιο κυλινδρικοὺς ἄξονες μὲ τὴν ἴδια διάμετρο d, ὅπου d εἶναι ἕνας ὁρισμένος ἀριθμὸς μεταξὺ 50 mm καὶ 80 mm. Στὴν κατασκευή τους «ἀνεχόμαστε» (δηλ. ἐπιτρέπομε), ἡ πραγματικὴ διάμετρός τους νὰ ξεπερνᾶ τὰ d mm κατὰ 0,020 mm τὸ πολὺ ἢ νὰ εἶναι μικρότερη τῶν d mm κατὰ 0,015 mm τὸ πολύ. Ποιά εἶναι ἡ πιὸ μεγάλη διαφορὰ x ποὺ μποροῦν νὰ παρουσιάσουν οἱ διάμετροι δυὸ ἀξόνων ἀπὸ τὴ μερίδα ποὺ δεχθήκαμε;*

Γιὰ νὰ τὴ βροῦμε, πρέπει ν' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὴ μέγιστη διάμετρο $(d+0{,}020)$ mm, τὴν ὁποία μπορεῖ νὰ ἔχῃ ἕνας ἄξονας τῆς μερίδας, τὴν ἐλάχιστη $(d-0{,}015)$ mm, ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχῃ ἕνας ἄλλος. Ἄρα ἡ ζητούμενη μέγιστη διαφορὰ εἶναι (σὲ mm):

$$x=(d+0{,}020)-(d-0{,}015)$$
$$= d+0{,}020-d+0{,}015$$
$$= d-d+0{,}020+0{,}015$$

καί, ἐπειδὴ $d-d=0$,

$$x=0{,}020+0{,}015=0{,}035.$$

Ἀπάντηση: Ἡ μέγιστη διαφορά, ποὺ μποροῦν νὰ παρουσιάσουν οἱ διάμετροι δυὸ ἀξόνων ἀπὸ τὴ μερίδα τὴν ὁποία παραλάβαμε, εἶναι 0,035 mm.

Ἀσκήσεις. *1.* Ὑπολογίστε μὲ δυὸ διαφορετικοὺς τρόπους τὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες παραστάσεις:

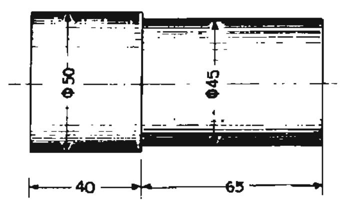
$7+(8-5)$, $14-(10-5)$, $13-(13-9)$.

2. Ἐξαλείφοντας τὶς παρενθέσεις, ἐκτελέστε τὶς πράξεις:

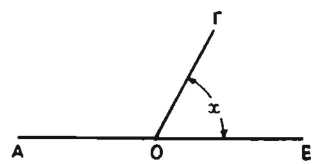
$\alpha-(\alpha-\beta)$, $\beta-(\alpha-\beta)$, $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$.

Ὕστερα ὑπολογίστε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν τριῶν ἐξαγομένων γιὰ $\alpha=2{,}5$ καὶ $\beta=1{,}1$.

3. Ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι (σχ. 7-α) ἔχει διάμετρο 50 mm στὸ ἕνα μέρος τοῦ μήκους του καὶ 45 mm στὸ ἄλλο. Κατεργάζεστε στὸν τόρνο τὸ πρῶτο μέρος, ὥσπου νὰ τὸ φέρετε στὴ Ø 48,5 mm. Πόσα χιλιοστὰ πρέπει νὰ ἐλαττωθῆ ἡ ἄλλη, ἡ μικρὴ διάμετρος, γιὰ νὰ αὐξηθῆ ἡ ἀρχικὴ διαφορὰ τῶν δυὸ διαμέτρων κατὰ 0,5 mm; (Ἐπιλύστε τὸ πρόβλημα μὲ δυὸ τρόπους· στὸν ἕνα νὰ παραστήσετε μὲ x τὸν ἀριθμὸ τῶν mm κατὰ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ ἐλαττωθῆ ἡ μικρὴ διάμετρος).



Σχ. 7-α. Σκαρίφημα (πρόχειρο σχεδίασμα) ἑνὸς τορνευτοῦ κομματιοῦ.

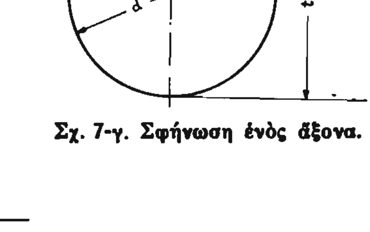


Σχ. 7-β. Ὑπολογίστε τὴ γωνία x.

4. Ὑπολογίστε τὶς δυὸ γωνίες ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὴν ἡμιευθεία ΟΓ καὶ τὴν εὐθεία ΑΟΒ, γνωρίζοντας ὅτι τὸ διπλάσιο $(x+x)$ τῆς πιὸ μικρῆς γωνίας x ξεπερνᾶ τὴν πιὸ μεγάλη κατὰ 30° (Σχ. 7-β).

5. Τὸ σχῆμα 7-γ παριστάνει τὴ σφήνωση ἑνὸς ἄξονα. Σ' ἕνα σχετικὸ πίνακα διαστάσεων διαβάζετε ὅτι γιὰ ἕναν ἄξονα μὲ διάμετρο d mm, ὅπου d εἶναι ἕνας ἀριθμὸς μεταξὺ 44 καὶ 50, παίρνομε τὸ $\alpha=14$ mm, τὸ $t_1=d+3{,}5$ καὶ τὸ $t=d-5{,}5$.

Ποιά εἶναι ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ β;



Σχ. 7-γ. Σφήνωση ἑνὸς ἄξονα.

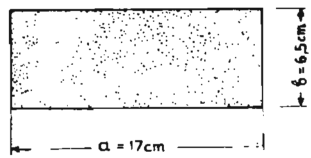
Μάθημα 8.

Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑνὸς ἐγγράμματου γινομένου ἢ πηλίκου.

1. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀριθμοὺς ποὺ παριστάνονται ἀπὸ γράμματα, γράφομε τὰ γράμματα αὐτὰ τὸ ἕνα ὕστερα ἀπὸ τὸ ἄλλο, συνήθως χωρὶς κανένα χωριστικὸ σημάδι, κάποτε ὅμως χωρίζοντάς τα μὲ τὸ σύμβολο · τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. (Τὸ σύμβολο $\times$ τὸ ἀποφεύγομε στὴν Ἄλγεβρα, γιατὶ μοιάζει μὲ τὸ γράμμα x).

Ἔτσι π.χ. τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ σχήματος 8-α δίνεται γενικὰ ἀπὸ τὴν παράσταση

$$\alpha\beta.$$



Σχ. 8-α. Ἐμβαδὸ $= \alpha\beta = 17 \times 6{,}5 = 110.5$ cm².

Εἰδικά, ὅταν τὰ γράμματα ἔχουν τὶς ἀριθμητικὲς τιμές, ποὺ εἶναι σημειωμένες στὸ σχῆμα, τότε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει τὴν τιμή:

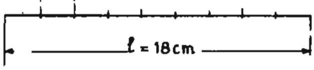
$$17 \times 6{,}5 = 110{,}5 \text{ cm}^2.$$

Ἡ παράσταση αβ εἶναι ἕνα *ἐγγράμματο γινόμενο*· τὰ γράμματα α καὶ β λέγονται *παράγοντές* του· 110,5 cm² εἶναι ἡ *ἀριθμητικὴ τιμή* του γιὰ $\alpha = 17$ cm, $\beta = 6{,}5$ cm.

2. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου δυὸ ἀριθμοὺς ποὺ παριστάνονται μὲ γράμματα, γράφομε τὸν δεύτερο κάτω ἀπὸ τὸν πρῶτο χωρίζοντάς τους μὲ μιὰ ὁριζόντια γραμμούλα.

Ἔτσι π.χ., ἂν διαιρέσωμε ἕνα μῆκος l σὲ ν ἴσα μέρη (τμήματα), τὴν ἀπόσταση δυὸ διαδοχικῶν διαιρετικῶν σημείων θὰ τὴ δίνη γενικὰ ἡ παράσταση

$$\frac{l}{\nu}$$



Σχ. 8-β. Ἀπόσταση δυὸ διαδοχικῶν διαιρετικῶν σημείων $= \frac{l}{\nu} = \frac{18 \text{ cm}}{9} = 2$ cm.

Εἰδικῶς, ὅταν τὰ γράμματα l καὶ ν

ἔχουν τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς ποὺ εἶναι σημειωμένες στὸ σχῆμα 8-6, τότε ἡ ἀπόσταση αὐτὴ θὰ ἔχῃ τὴν τιμή:

$$\frac{18 \text{ cm}}{9} = 2 \text{ cm}.$$

Ἡ παράσταση $\frac{l}{\nu}$ εἶναι ἕνα *ἐγγράμματο πηλίκο*· l καὶ ν εἶναι οἱ *ὅροι τοῦ πηλίκου*: l εἶναι *ὁ διαιρετέος* καὶ ν *ὁ διαιρέτης*. 2 cm εἶναι ἡ *ἀριθμητικὴ τιμὴ* τοῦ πηλίκου γιὰ $l = 18$ cm, $\nu = 9$.

Ὅταν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμε τὰ γράμματα, ποὺ εἶναι παράγοντες ἑνὸς γινομένου (ἢ ὅροι ἑνὸς πηλίκου) μὲ καθορισμένους ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελέσωμε τοὺς πολλαπλασιασμοὺς (ἢ τὴ διαίρεση), τὸ ἐξαγόμενο ποὺ θὰ προκύψη εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐγγράμματου γινομένου (ἢ πηλίκου).

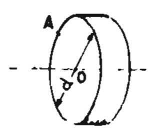
3. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς ἑνὸς γινομένου.

Παράδειγμα. *Ἕνας τροχὸς ἔχει διάμετρο d σὲ m (σχ. 8-γ).*

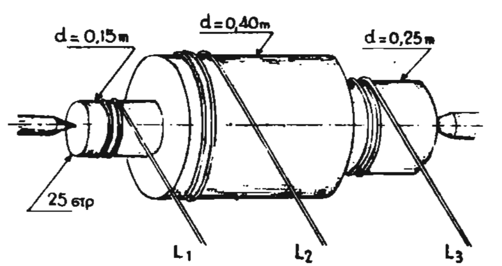
1ο. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ποὺ διατρέχει ἕνα σημεῖο Α τῆς περιφέρειάς του, ὅταν ὁ τροχὸς κάνη μίαν (1) στροφή.

2ο. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος L ποὺ διατρέχει τὸ ἴδιο σημεῖο, ὅταν ὁ τροχὸς κάνη n στροφές.

3ο Ἐφαρμόστε τὸν τύπο ποὺ θὰ βρῆτε στὸ 2ο γιὰ νὰ ὑπολογίσετε τὰ μήκη τοῦ σπάγγου τὰ ὁποῖα τυλίγονται στοὺς κυλίνδρους (στὰ τύμπανα) ποὺ εἰκονίζονται στὸ σχῆμα 8-δ, ὅταν ὁ ἄξονάς τους κάνη 25 στροφές.



Σχ. 8-γ. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ποὺ διατρέχει τὸ σημεῖο Α σὲ μία, ὕστερα σὲ n στροφὲς τοῦ τροχοῦ.



Σχ. 8-δ. Ὑπολογίστε τὰ μήκη L_1, L_2, L_3 τῶν σπάγγων, ὅταν ὁ ἄξονας κάνη 25 στροφές.

1ο. Ὅταν ὁ τροχὸς (σχ. 8-γ) κάνῃ 1 στροφή, τὸ σημεῖο Α διατρέχει ένα μήκος ἴσο πρὸς τὴν περίμετρο τοῦ τροχοῦ, ἄρα

$$d \cdot \pi \quad \text{ἢ} \quad \pi d \ (\text{μέτρα}).$$

2ο. Ὅταν ὁ ἴδιος τροχὸς κάνῃ n στροφές, τὸ σημεῖο A διατρέχει ἕνα μῆκος L, n φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ παραπάνω :

$$L = \pi d \cdot n \quad \text{ἢ} \quad L = \pi d n \ (\text{μέτρα}).$$

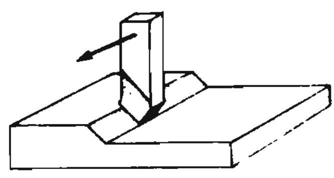
3ο. Τὰ μήκη τοῦ σπάγγου ποὺ τυλίγονται πάνω σὲ κάθε κύλινδρο (τύμπανο) εἶναι ἴσα μὲ τὰ μήκη ποὺ διατρέχει ἕνα σημεῖο (ὁποιοδήποτε) τῆς περιφέρειας τοῦ ἀντίστοιχου κυλίνδρου. Τὰ ζητούμενα μήκη εἶναι λοιπὸν ἴσα μὲ τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς τοῦ γινομένου πdn, ὅταν ἀντικαταστήσωμε μέσα σ' αὐτὸ τὸ π μὲ 3,14, τὸ n μὲ 25 καὶ τὸ d διαδοχικὰ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 0,15 m, 0,40 m καὶ 0,25 m. Ἔτσι βρίσκομε :

$$L_1 = 3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 25 = 11{,}775 \text{ m} \simeq 11{,}78 \text{ m}.$$
$$L_2 = 3{,}14 \cdot 0{,}40 \cdot 25 = 31{,}40 \text{ m},$$
$$L_3 = 3{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 25 = 19{,}625 \text{ m} \simeq 19{,}63 \text{ m}.$$

4. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς ἑνὸς πηλίκου.

Παράδειγμα. Βρῆτε τὸν τύπο ὁ ὁποῖος δίνει τὸν χρόνο t (σὲ min) ποὺ χρειάζεται τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο μιᾶς πλάνης, γιὰ νὰ κάμη μίαν διαδρομή, ξέροντας τὸ μῆκος l (σὲ m) τῆς διαδρομῆς καὶ τὴ μέση ταχύτητα v (σὲ m/min) τοῦ ἐργαλείου (σχ. 8-ε).

Ὕστερα ἐφαρμόστε αὐτὸν τὸν τύπο στὶς περιπτώσεις 1ο $l = 0{,}30\,m$, $v = 6\ m/min$ καὶ 2ο $l = 0{,}30\,m$, $v = 8\ m/min$.



Σχ. 8-ε. Ὑπολογίστε τὴ χρονικὴ διάρκεια μιᾶς διαδρομῆς τοῦ ἐργαλείου.

Ἀφοῦ ἡ μέση ταχύτητα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου εἶναι v (m/min), ἡ χρονικὴ διάρκεια (σὲ min) τῆς διαδρομῆς θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκο τοῦ μήκους τῆς διαδρομῆς διὰ τῆς μέσης ταχύτητας τοῦ ἐργαλείου, δηλ.

$$t = \frac{l}{v}.$$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή:

1ο. Γιὰ $l = 0{,}30$ m, $v = 6$ m/min ἔχομε:

$$t_1 = \frac{0{,}30}{6} = 0{,}05 \text{ min} = 60 \text{ sec} \cdot 0{,}05 = 3 \text{ sec.}$$

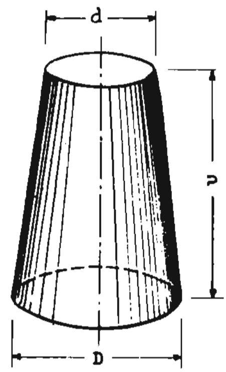
2ο. Γιὰ $l = 0{,}30$ m, $v = 8$ m/min ἔχομε:

$$t_2 = \frac{0{,}30}{8} = 0{,}037\,5 \text{ min} = 60 \text{ sec} \cdot 0{,}037\,5 = 2{,}25 \text{ sec.}$$

Ἀσκήσεις. 1. Ξέροντας (βλ. Τόμ. Α', Μάθ. 39) ὅτι τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τριγώνου τὸ δίνει ὁ τύπος $\frac{\beta\upsilon}{2}$, ὅπου τὸ β παριστάνει τὸ μῆκος τῆς βάσης τοῦ τριγώνου καὶ τὸ υ τὸ ἀντίστοιχο ὕψος, ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τοῦτο, ὅταν 1ο $\beta = 3{,}25$ cm, $\upsilon = 4{,}10$ cm καὶ 2ο $\beta = 7{,}8$ m, $\upsilon = 6{,}5$ m.

2. Ξέροντας (βλ. Τόμ. Α', Μαθ. 53) ὅτι τὸ ἐμβαδὸ τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρο d καὶ ὕψος υ, παράσταση $\pi d\upsilon$, ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια αὐτή, ὅταν 1ο $d = 7{,}6$ cm, $\upsilon = 5{,}3$ cm καὶ 2ο $d = 8{,}4$ dm, $\upsilon = 12$ dm. Πῶς θὰ ἐργασθῆτε γιὰ νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια, ἂν σᾶς δώσουν τὶς διαστάσεις $d = 75$ cm, $\upsilon = 1{,}8$ m;

3. Ἡ «κλίση» ἑνὸς κόλουρου κώνου (βλ. Τόμ. Α', Μάθ. 53) ποὺ ἔχει διάμετρο μεγάλης βάσης τὸ D καὶ μικρῆς τὸ d καὶ ὕψος υ, ἰσοῦται μέ: $\frac{D - d}{2\upsilon}$.



Σχ. 8-ϛ. Κλίση ἑνὸς κόλουρου κώνου.

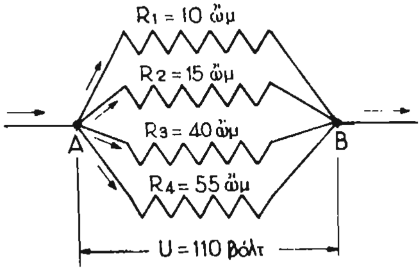
Ὑπολογίστε τὴν κλίση τῶν κόλουρων κώνων μὲ τὶς ἀκόλουθες διαστάσεις:

1ο $D = 4$ cm, $d = 3$ cm, $\upsilon = 12$ cm.

2ο $D = 16$ mm, $d = 14$ mm, $\upsilon = 60$ mm.

3ο $D = 0{,}45$ m, $d = 0{,}30$ m, $\upsilon = 1{,}15$ m.

4. Ἡ ἔνταση I (σὲ ἀμπὲρ) τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖο διαρρέει ἕναν ἀγωγό, ὅταν μεταξὺ δυὸ σημείων του A καὶ B ἡ διαφο-



Σχ. 8-ζ. Ὑπολογίστε τὴν ἔνταση τοῦ ρεύματος στὸν κάθε κλάδο.

ρὰ δυναμικοῦ U (σὲ βόλτ) καὶ ἡ ἀντίσταση R (σὲ ὤμ), δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο

$$I = \frac{U}{R}.$$

Ὑπολογίστε τὶς ἐντάσεις I_1, I_2, I_3, I_4 τῶν ρευμάτων ποὺ διαρρέουν τοὺς τέσσερις κλάδους μὲ ἀντιστάσεις R_1, R_2, R_3, R_4 (σχ. 8-ζ).

Μάθημα 9.

Ὑπολογισμὸς ἑνὸς παράγοντα σ᾽ ἕνα γινόμενο.

1. Γνωρίζοντας τὸ γινόμενο (24) δυὸ ἀριθμῶν καὶ τὸν ἕναν (3) ἀπ᾽ αὐτούς, ὑπολογίστε τὸν ἄλλο.

Ἂς καλέσωμε x τὸν ἄγνωστο παράγοντα τοῦ γινομένου. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος, θὰ ἔχωμε γιὰ τὸ x τὴν ἐξίσωση:

$$3x = 24.$$

Χρησιμοποιώντας ὅσα ξέρομε ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική, θὰ μπορούσαμε νὰ βροῦμε εὔκολα ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτὴ ἔχει λύση τὸ $x = 8$. Καὶ ἀλήθεια $3 \cdot 8 = 24$. Θὰ ἐπιδιώξωμε ὅμως ἐδῶ νὰ ἐπιλύσωμε τὴν ἐξίσωση ἀκολουθώντας ἕναν κανόνα, ποὺ θὰ μᾶς ἐπιτρέπῃ νὰ ἐπιλύνωμε καὶ πιὸ πολύπλοκες ἐξισώσεις. Ὁ κανόνας αὐτὸς εἶναι συνέπεια τῆς ἀκόλουθης ἰδιότητας μιᾶς ἰσότητας:

Ἐπιτρέπεται νὰ διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἴδιου (ὄχι μηδενικοῦ) ἀριθμοῦ καὶ τὰ δυὸ μέλη μιᾶς ἰσότητας. Διότι, ἂν διαιρέσωμε δυὸ ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι ἴσοι, (ἢ ποὺ θέλομε νὰ εἶναι ἴσοι), διὰ τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ, τὰ δυὸ πηλίκα ποὺ προκύπτουν θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ἴσα.

Ὥστε, ἐπιτρέπεται νὰ διαιρέσωμε καὶ τὰ δυὸ μέλη μιᾶς ἐξίσωσης διὰ τοῦ ἴδιου (ὄχι μηδενικοῦ) ἀριθμοῦ ἢ διὰ τῆς ἴδιας (ὄχι μηδενικῆς) παράστασης.

2. Ἐπίλυση τῆς ἐξίσωσης $3x = 24$. Ἂς διαιρέσωμε διὰ 3 καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἐξίσωσης· θὰ λάβωμε:

$$\frac{3x}{3} = \frac{24}{3}$$

ἤ, ἁπλοποιώντας τὸ κλάσμα τοῦ ἀριστεροῦ μέλους καὶ ἐκτελώντας τὴ διαίρεση στὸ δεξιὸ μέλος,

$$x = 8.$$

3. Ἐπίλυση μερικῶν ἐξισώσεων. Ἂς ἐπιλύσωμε τὶς παρακάτω ἐξισώσεις ἐφαρμόζοντας τὸν παραπάνω κανόνα καθὼς καὶ ἐκείνους ποὺ δόθηκαν στὰ Μαθήματα 5 ὡς 7:

1ο
$$3{,}5\,x = 70$$
$$x = \frac{70}{3{,}5}$$
$$x = 20.$$

2ο
$$4 \cdot 7\,x = 3{,}7$$
$$28\,x = 3{,}7$$
$$x = \frac{3{,}7}{28}$$
$$x = 0{,}13\ldots$$

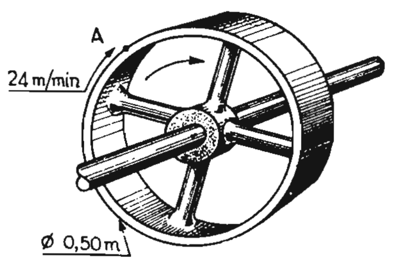
3ο
$$4\,(x+1) = 20$$
$$(x+1) = \frac{20}{4} = 5$$
$$x+1 = 5$$
$$x = 5-1$$
$$x = 4.$$

4ο
$$(x-3)\cdot 5 = 13$$
$$(x-3) = \frac{13}{5}$$
$$x-3 = 2{,}6$$
$$x = 2{,}6+3$$
$$x = 5{,}6.$$

4. Ἐφαρμογές. *1η. Μιὰ τροχαλία (σχ. 9-α) ἔχει διάμετρο 0,50 m. Πόσες στροφὲς στὸ λεπτὸ πρέπει νὰ κάνη ἡ τροχαλία αὐτή, ὥστε ἕνα σημεῖο A τῆς περιφέρειάς της νὰ διατρέχη 24 m στὸ λεπτό;*

Ἂς καλέσωμε x τὸν ζητούμενο ἀριθμὸ στροφῶν ἀνὰ λεπτὸ τῆς τροχαλίας. Ἂν ἡ τροχαλία ἔκανε μία (1) στροφὴ στὸ λεπτό, τὸ σημεῖο A θὰ διέτρεχε ἕνα μῆκος ἴσο μὲ τὴν περιφέρεια τῆς τροχαλίας, δηλαδὴ μὲ

$$0{,}50\ \mathrm{m} \cdot 3{,}14 = 1{,}57\ \mathrm{m}.$$



Σχ. 9-α. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα αὐτῆς τῆς τροχαλίας.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ τροχαλία κάνει x στροφὲς στὸ λεπτό, τὸ μῆκος, ποὺ θὰ διατρέξη τὸ σημεῖο A, θὰ εἶναι x φορὲς μεγαλύτερο, δηλ. 1,57 x (μέτρα). Τὸ μῆκος αὐτό, σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος, πρέπει νὰ εἶναι ἴσο μὲ 24 m. Ὥστε, παραλείποντας γιὰ συντομία τὸ σύμβολο m τῆς μονάδας, θὰ ἔχωμε τὴν ἐξίσωση

$$1{,}57\,x = 24.$$

Τὴν ἐπιλύνομε καὶ βρίσκομε:

$$x = \frac{24}{1,57} = 15,2... \simeq 15 \text{ στρ/min.}$$

2η. Τὸ πλάτος l (mm) τοῦ λουριοῦ, ποὺ μποροῦμε νὰ βάλωμε σὲ μιὰ τροχαλία πλάτους L (mm), (σχ. 9-β), τὸ βρίσκομε μὲ τὸν τύπο

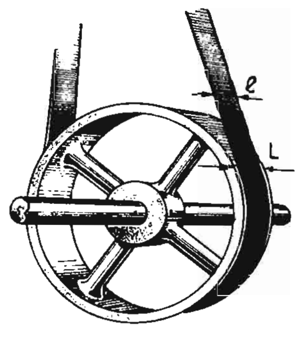
$$L = 1,125\,(l + 10).$$

Ποιό εἶναι λοιπὸν τὸ πλάτος τοῦ λουριοῦ ποὺ μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε σὲ μιὰ τροχαλία πλάτους 150 mm ;

Ἀντικαθιστοῦμε στὴν παραπάνω ἰσότητα τὸ γράμμα L μὲ τὴν τιμὴ 150, ἡ ὁποία μᾶς δίνεται, καὶ ἔτσι ἔχομε γιὰ τὸ ζητούμενο πλάτος l τὴν ἐξίσωση:

$$150 = 1,125\,(l + 10)$$

$$\text{ἢ } 1,125\,(l + 10) = 150.$$



Σχ. 9-β. Ὑπολογίστε τὸ πλάτος l τοῦ λουριοῦ.

Τὴν ἐπιλύνομε ὡς πρὸς τὴν ποσότητα $(l + 10)$ διαιρώντας καὶ τὰ δυὸ μέλη της διὰ 1,125. Ἔτσι βρίσκομε:

$$l + 10 = \frac{150}{1,125} = 133,33...$$

Ἀπ' ἐδῶ ὑπολογίζομε τὸ l (σύμφωνα μὲ τὸ Μαθ. 5).

$$l = 133,33... - 10 = 123,33... \text{ mm.}$$

Ἀναζητοῦμε τώρα, σ' ἕναν κατάλογο λουριῶν, τὸ λουρὶ ποὺ τὸ πλάτος του προσεγγίζει τὸ περισσότερο αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα, χωρὶς νὰ τὸ ξεπερνᾶ, καὶ παίρνομε τὸ $l = 120$ mm.

Ἀσκήσεις. 1. Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις:

$3x = 18$ $\quad$ $5x = 105$ $\quad$ $4,5x = 13,5$

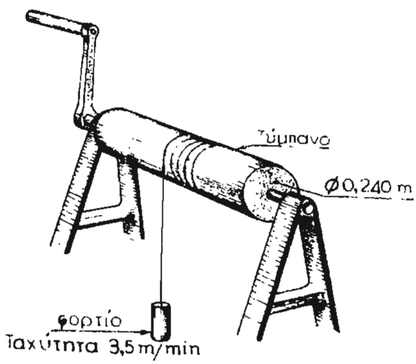
$5 \cdot 18x = 4,5$ $\quad$ $7\,(x - 1) = 3$ $\quad$ $9\,(x + 5) = 270.$

2. Σκεφθῆτε ἕνα πρόβλημα ποὺ νὰ ἔχῃ ἐξίσωση $5x = 13,5$ καὶ βρῆτε τὴν ἀπάντηση ἐπιλύνοντας τὴν ἐξίσωση.

3. Ἂν προσθέσετε τὸ 1 στὸ τετραπλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ x, βρίσκετε 49. Ὑπολογίστε 1ο τὸ γινόμενο 4x, 2ο τὴν τιμὴ τοῦ x.

4. Ὑπολογίστε τὴν ταχύτητα x, σὲ km/h, ἑνὸς ἀεροπλάνου ποὺ διατρέχει, σὲ 5 h, 2 125 km.

5. Ἀφαιρώντας τὸ 2 ἀπὸ τὸ τριπλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ x βρίσκετε 14,5. Γράψτε τὴν ἐξίσωση ποὺ ἐπιτρέπει τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ x καὶ ἐπιλύστε την.



Σχ. 9-γ. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα αὐτοῦ τοῦ βαρούλκου.

6. Μὲ ποιὰ περιστροφικὴ ταχύτητα x (στρ/min) πρέπει νὰ στρέφεται ἕνα βαροῦλκο, ποὺ τὸ τύμπανό του ἔχει διάμετρο 0,240 m, γιὰ νὰ ἀνυψώνῃ τὸ φορτίο μὲ τὴν ταχύτητα 3,50 m/min (Σχ. 9-γ).

7. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος x ποὺ πρέπει νὰ δώσετε στὴ βάση ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ὥστε οἱ δυὸ ἄλλες πλευρὲς μαζὶ νὰ ξεπερνοῦν τὸ διπλάσιο τῆς βάσης κατὰ 4 cm καὶ ἡ περίμετρος νὰ ἰσοῦται μὲ 25 cm.

8. Σ' ἕνα μνημόνιο διαβάζετε ὅτι ἡ πλευρὰ γ ἑνὸς τετραγώνου ἐσωγραμμένου σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα ρ εἶναι ἴση μὲ 1,414 ρ.

Ὑπολογίστε τὴν ἀκτίνα ρ ὅταν γ = 35 mm ἢ 20 cm ἢ 2 m.

9. Ἕνας κοχλίας (μιὰ βίδα) ἔχει βῆμα (δηλ. ἀπόσταση ἀνάμεσα σὲ δυὸ διαδοχικὰ σπειρώματα) 2,5 mm. Κατὰ πόσα χιλιοστὰ θὰ μετακινηθῇ μέσα στὸ περικόχλιό του, ἂν κάμῃ 1 στροφή; 2 στροφὲς (μὲ τὴν ἴδια φορά); x στροφὲς (μὲ τὴν ἴδια φορά); Ὑπολογίστε πόσες στροφὲς πρέπει νὰ κάμῃ ὁ κοχλίας αὐτός, γιὰ νὰ μετακινηθῇ κατὰ 15 mm.

Μάθημα 10.

Ὑπολογισμὸς τοῦ διαιρετέου ἑνὸς πηλίκου.

1. Γνωρίζοντας τὸ πηλίκο (4) δυὸ ἀριθμῶν καὶ τὸν διαιρέτη (13) αὐτοῦ τοῦ πηλίκου, ὑπολογίστε τὸν διαιρετέο του.

Ἂς παραστήσωμε μὲ x τὸν ἄγνωστο διαιρετέο τοῦ πηλίκου. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμε γιὰ τὸ x τὴν ἐξίσωση:

$$\frac{x}{13} = 4.$$

Χρησιμοποιώντας ὅσα ξέρομε ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴ γιὰ τὴ διαίρεση, βρίσκομε εὔκολα ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτὴ ἐπαληθεύεται μὲ τὴν τιμὴ $x = 52$. Θὰ ἀναζητήσωμε ὅμως καὶ ἐδῶ ἕναν κανόνα ποὺ νὰ μᾶς ἐπιτρέπη νὰ λύνωμε μεθοδικὰ παρόμοιες, ἀλλὰ καὶ πιὸ πολύπλοκες ἐξισώσεις. Τὸν κανόνα αὐτὸν τὸν συμπεραίνομε ἀπὸ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα μιᾶς ἰσότητας.

Ἐπιτρέπεται νὰ πολλαπλασιάσωμε μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ καὶ τὰ δυὸ μέλη μιᾶς ἰσότητας. Διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμε δυὸ ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι ἴσοι (ἢ ποὺ θέλομε νὰ εἶναι ἴσοι) μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, τὰ δυὸ γινόμενα ποὺ προκύπτουν θὰ εἶναι καὶ αὐτὰ ἴσα (ἢ θὰ πρέπη νὰ εἶναι ἴσα).

***Ἔτσι**, ἐπιτρέπεται νὰ πολλαπλασιάσωμε καὶ τὰ δυὸ μέλη μιᾶς ἐξίσωσης μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἢ μὲ τὴν ἴδια παράσταση, μόνο ποὺ αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς ἢ αὐτὴ ἡ παράσταση θὰ πρέπη νὰ εἶναι διάφοροι ἀπὸ τὸ μηδέν, γιὰ νὰ μποροῦμε ἀπὸ τὴ νέα ἐξίσωση, ποὺ λάβαμε, ἀκολουθώντας τὸν κανόνα τοῦ Μαθ. 9, § 1, νὰ ἐπιστρέφωμε μὲ διαίρεση στὴν ἀρχικὴ ἐξίσωση.*

2. Ἐπίλυση τῆς ἐξίσωσης $\frac{x}{13} = 4$. Ἂς πολλαπλασιάσωμε μὲ 13 καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἐξίσωσης· θὰ λάβωμε:

$$\frac{x \cdot 13}{13} = 4 \cdot 13$$

ἤ, ἀφοῦ ἁπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα στὸ ἀριστερὸ μέλος,

$$\frac{x}{1} = 4 \cdot 13.$$

δηλαδὴ $\qquad x = 52.$

3. Ἐπίλυση μερικῶν ἐξισώσεων. Ἐφαρμόζοντας τὸν κανόνα τοῦ § 1 καθὼς καὶ τοὺς κανόνες ποὺ διατυπώσαμε στὰ προηγούμενα μαθήματα ἐπιλύνομε τὶς ἀκόλουθες ἐξισώσεις :

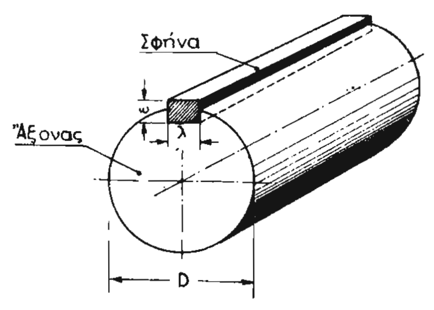
1ο
$$\begin{aligned} \frac{x+1}{4} &= 10 \\ x+1 &= 10 \cdot 4 \\ x+1 &= 40 \\ x &= 40-1 \\ x &= 39. \end{aligned}$$

2ο
$$\begin{aligned} \frac{x-2}{5} &= 3 \\ x-2 &= 3 \cdot 5 \\ x-2 &= 15 \\ x &= 15+2 \\ x &= 17. \end{aligned}$$

3ο
$$\begin{aligned} \frac{3x}{5} &= 20 \\ 3x &= 20 \cdot 5 \\ 3x &= 100 \\ x &= \frac{100}{3} \\ x &= 33{,}3\ldots \end{aligned}$$

4ο
$$\begin{aligned} \frac{4x-1}{3} &= 9 \\ 4x-1 &= 9 \cdot 3 = 27 \\ 4x &= 27+1 = 28 \\ x &= \frac{28}{4} \\ x &= 7. \end{aligned}$$

4. Ἐφαρμογή. *Τὶς διαστάσεις, πάχος καὶ πλάτος σὲ mm, μιᾶς σφήνας, ποὺ χρησιμεύει γιὰ τὴ σφήνωση (ἀκινητοποίηση) ἑνὸς ἄξονα (σχ. 10-α) μὲ διάμετρο D (mm), τὶς δίνουν (τὶς καθορίζουν) οἱ παρακάτω τύποι :*



Σχ. 10-α. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις τῆς σφήνας.

τὸ πάχος $\varepsilon = \dfrac{D}{10} + 4$

τὸ πλάτος $\lambda = \dfrac{D}{5} + 4.$

Χρησιμοποιώντας τους ὑπολογίστε: 1ο τὴ διάμετρο D τοῦ ἄξονα, πάνω στὸν ὁ-

ποῖο εἶναι ἐφαρμοσμένη μιὰ σφήνα μὲ πάχος $\varepsilon = 12\,mm$, *2ο τὸ πλάτος αὐτῆς τῆς σφήνας.*

1ο. Στὴν παραπάνω ἰσότητα, ποὺ δίνει τὸ πάχος ε τῆς σφήνας, ἀντικαθιστοῦμε τὸ ε μὲ τὴν τιμή του 12 (παραλείποντας τὸ γράψιμο τῆς μονάδας mm)· προκύπτει ἔτσι γιὰ τὸ D ἡ ἐξίσωση:

$$12 = \frac{D}{10} + 4$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{D}{10} + 4 = 12.$$

Μεταφέρομε τὸν ὅρο $+4$ στὸ δεύτερο μέλος τῆς ἐξίσωσης:

$$\frac{D}{10} = 12 - 4 = 8.$$

Πολλαπλασιάζομε τώρα μὲ 10 καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἐξίσωσης καὶ ἔτσι βρίσκομε τελικά:

$$D = 8 \cdot 10 = 80\,\text{mm}.$$

2ο. Τὸ πλάτος λ τῆς σφήνας θὰ τὸ βροῦμε (σύμφωνα μὲ τὸν τύπο ποὺ δίνει τὸ λ), ὑπολογίζοντας τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παράστασης $\frac{D}{5} + 4$ γιὰ $D = 80\,\text{mm}$. Ἔτσι λαμβάνομε:

$$\lambda = \frac{80}{5} + 4 = 16 + 4 = 20\,\text{mm}.$$

Ἀπάντηση: ἡ διάμετρος τοῦ ἄξονα εἶναι 80 mm, καὶ τὸ πλάτος τῆς σφήνας 20 mm.

Ἀσκήσεις. *1.* Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις:

$$\frac{x}{5} = 4 \qquad \frac{x}{3,5} = 7,4 \qquad \frac{5x}{4} = 7$$

$$\frac{3x}{9} = 12 \qquad \frac{5x - 2}{7} = 4 \qquad 3x = \frac{45 - 9x}{2}$$

2. Σκεφθῆτε ἕνα πρόβλημα ποὺ νὰ ἔχῃ ἐξίσωση $\frac{x}{4,5} = 7$, καὶ βρῆτε τὴν ἀπάντηση ἐπιλύοντας τὴν ἐξίσωση.

3. Τὸ εἰδικὸ βάρος ἑνὸς σώματος (βλ. Τόμ. Α', Μαθ. 49) εἶναι ἴσο μὲ B/V, ὅπου τὸ B παριστάνει τὸ βάρος καὶ τὸ V τὸν ὄγκο τοῦ σώματος. Ὑπολογίστε (ἐπιλύνοντας μιὰν ἐξίσωση) τὸ βάρος μιᾶς ἀτσαλένιας ράβδου ποὺ ἔχει ὄγκο 7,5 dm^3, ξέροντας ὅτι τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ ἀτσαλιοῦ της εἶναι 7,8 kg/dm^3.

4. Ξέροντας ὅτι τὸ μοντοὺλ m μιᾶς κανονικῆς ὀδόντωσης τροχοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀρχικὴ διάμετρο dp καὶ ἀριθμὸ δοντιῶν z, εἶναι ἴσο μὲ

$$m = \frac{dp}{z},$$

ὑπολογίστε τὴν ἀρχικὴ διάμετρο ἑνὸς ὀδοντωτοῦ τροχοῦ μὲ $z = 35$ δόντια καὶ μοντοὺλ $m = 4$.

5. Ὑπολογίστε (σὲ βόλτ) τὴ διαφορὰ δυναμικοῦ U ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ δυὸ σημείων ἑνὸς ἀγωγοῦ, ξέροντας τὰ ἀκόλουθα: Ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος ποὺ διαρρέει τὸν ἀγωγό, εἶναι $I = 11$ ἀμπὲρ καὶ ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀγωγοῦ μεταξὺ τῶν δυὸ σημείων του εἶναι $R = 20$ ὤμ. (Θὰ ἐφαρμόσετε τὸν τύπο $I = \frac{U}{R}$ τῆς Ἄσκ. 4 τοῦ Μαθ. 8).

6. Ὁ τύπος

$$R = \rho \frac{l}{F}$$

δίνει σὲ μικροὼμ (δηλ. ἑκατομμυριοστὰ τοῦ ὤμ) τὴν ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση R γιὰ θερμοκρασία 0° Κελσίου ἑνὸς χάλκινου ἀγωγοῦ ποὺ ἔχει: εἰδικὴ ἀντίσταση τοῦ ὑλικοῦ του ρ μικροὼμ · cm^2/cm, μῆκος l cm καὶ ἐμβαδὸ διατομῆς F cm^2. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ἑνὸς σύρματος ἀπὸ τὸ παραπάνω χάλκινο ὑλικό, παίρνοντας $\rho = 1{,}561$ μικροώμ · cm^2/cm τὸ $F = 0{,}25$ cm^2 καὶ τὸ $R = 12$ ὤμ $= 12\,000\,000$ μικροώμ.

Παρατήρηση. ***Ἀντὶ μικροώμ · cm^2/cm μποροῦμε νὰ γράφωμε ἁπλούστερα: μικροώμ · cm.***

Μάθημα 11.

Ὑπολογισμὸς τοῦ διαιρέτη ἑνὸς πηλίκου.

1. Γνωρίζοντας τὸ πηλίκο (16) δυὸ ἀριθμῶν καὶ τὸν διαιρετέο (96) αὐτοῦ τοῦ πηλίκου, ὑπολογίστε τὸν διαιρέτη του.

Ἂς παραστήσωμε μὲ x τὸν ἄγνωστο διαιρέτη τοῦ πηλίκου. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος, θὰ ἔχωμε γιὰ τὸ x τὴν ἐξίσωση:

$$\frac{96}{x} = 16.$$

Χρησιμοποιώντας ὅσα ξέρομε ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴ γιὰ τὴ διαίρεση, βρίσκομε εὔκολα ὅτι ἡ ἐξίσωση ἔχει γιὰ λύση τὸν ἀριθμὸ $x = 6$. Τὴ λύση ὅμως αὐτὴ μποροῦμε νὰ τὴ βροῦμε τώρα ἐφαρμόζοντας τοὺς κανόνες ποὺ διατυπώσαμε στὰ προηγούμενα μαθήματα γιὰ τὴν ἐπίλυση τῶν ἐξισώσεων.

Καὶ ἀλήθεια, ἂς πολλαπλασιάσωμε μὲ x (ποὺ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ἄγνωστος μὲν ἀκόμη, ἀλλὰ πάντως ὄχι μηδὲν) καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἐξίσωσης (Μάθ. 10)· θὰ προκύψη ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{96 \cdot x}{x} = 16\,x$$

ἤ, ἀφοῦ ἁπλοποιήσωμε διὰ x τὸ κλάσμα στὸ πρῶτο μέλος,

$$96 = 16\,x.$$

Αὐτὴ ἡ ἐξίσωση γράφεται καὶ ἔτσι:

$$16\,x = 96.$$

Διαιροῦμε τώρα διὰ τοῦ 16 καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς τελευταίας ἐξίσωσης (Μάθ. 9)· θὰ λάβωμε:

$$x = \frac{96}{16} = 6.$$

2. Ἐπίλυση μερικῶν ἐξισώσεων. Ἂς ἐφαρμόσωμε τοὺς κανόνες ποὺ μελετήσαμε στὰ προηγούμενα μαθήματα καὶ ἂς ἐπιλύσωμε τὶς ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

1ο

$$\frac{6,25}{x} = 1,25$$
$$6,25 = 1,25\,x$$
$$1,25\,x = 6,25$$
$$x = \frac{6,25}{1,25}$$
$$x = 5.$$

2ο

$$\frac{25}{4\,x} = 10$$
$$25 = 10 \cdot 4\,x$$
$$25 = 40\,x$$
$$40\,x = 25$$
$$x = \frac{25}{40}$$
$$x = 0,625.$$

3ο

$$\frac{15}{x-1} = 4$$
$$15 = 4\,(x-1)$$
$$4\,(x-1) = 15$$
$$x-1 = \frac{15}{4}$$
$$x-1 = 3,75$$
$$x = 4,75.$$

4ο

$$\frac{52}{4\,x+1} = 4$$
$$52 = 4\,(4\,x+1)$$
$$4\,(4\,x+1) = 52$$
$$4\,x+1 = \frac{52}{4} = 13$$
$$4\,x = 13 - 1 = 12$$
$$x = \frac{12}{4}$$
$$x = 3.$$

3. Ἐφαρμογές. *1η. Ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος D_ε (mm) ἑνὸς ὀδοντωτοῦ τροχοῦ, ὁ ἀριθμὸς z τῶν δοντιῶν του καὶ τὸ μοντοὺλ του m συνδέονται μεταξύ τους μὲ τὴν ἰσότητα:*

$$\frac{D_\varepsilon}{z+2} = m.$$

Ὑπολογίστε τὸν ἀριθμὸ τῶν δοντιῶν ἑνὸς τροχοῦ ποὺ ἔχει ἐξωτερικὴ διάμετρο 144 mm καὶ μοντοὺλ 4.

Ἂς ἀντικαταστήσωμε μέσα στὴν παραπάνω ἰσότητα τὰ γράμματα D_ε καὶ m μὲ τὶς τιμὲς ποὺ μᾶς δόθηκαν· θὰ λάβωμε γιὰ τὸν ἄγνωστο z τὴν ἐξίσωση:

$$\frac{144}{z+2} = 4.$$

Ἂς τὴν ἐπιλύσωμε μὲ τὸν τρόπο ποὺ μάθαμε:

$$144 = 4\,(z+2)$$
$$z+2 = \frac{144}{4} = 36$$
$$z = 36 - 2 = 34.$$

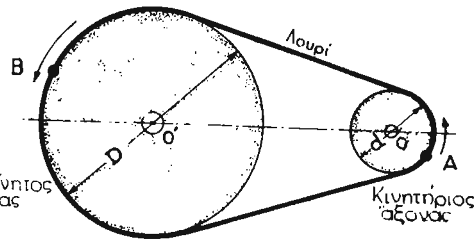
Ἀπάντηση: ὁ τροχὸς ἔχει 34 δόντια.

2η. Ἕνας ἄξονας (ποὺ λέγεται κινητήριος) θέτει σὲ κίνηση ἕναν ἄλλο παράλληλο ἄξονα (ποὺ λέγεται ἑτεροκίνητος) διαμέσου δυὸ τροχαλιῶν μὲ διάμετρο d(mm) ἡ πρώτη καὶ D(mm) ἡ δεύτερη καὶ ἑνὸς λουριοῦ (σχ. 11-α).

1ο. Δεῖξτε ὅτι γιὰ νὰ περιστρέφεται ὁ ἑτεροκίνητος ἄξονας 3 φορὲς πιὸ ἀργὰ ἀπὸ τὸν κινητήριο πρέπει νὰ εἶναι:

$$\frac{D}{d} = 3.$$

2ο. Ὑπολογίστε τὸ d, ὅταν $D = 120$ mm.



Σχ. 11-α. Μεταφέρομε τὴν κίνηση μὲ τροχαλίες καὶ λουρί.

1ο. Ἂς παραστήσωμε μὲ n (στρ/min) τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ ἑτεροκίνητου ἄξονα. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ κινητήριου ἄξονα θὰ εἶναι τρεῖς φορὲς μεγαλύτερη, δηλαδὴ 3n (στρ/min).

Ἂν τὸ λουρὶ δὲν γλυστρᾶ πάνω στὶς τροχαλίες, τότε τὰ σημεῖα A καὶ B, ποὺ βρίσκονται ἀντιστοίχως πάνω στὶς περιφέρειες τῶν 2 τροχαλιῶν, θὰ ἔχουν τὴν ἴδια γραμμικὴ ταχύτητα. Ἡ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ B εἶναι ὅμως $\pi D n$ καὶ ἡ γραμμικὴ ταχύτητα τοῦ A, $\pi d \cdot 3n = 3\pi d n$. Γράφοντας ὅτι οἱ δυὸ αὐτὲς ταχύτητες εἶναι ἴσες, βρίσκομε τὴν ἰσότητα

$$\pi D n = 3\,\pi d n.$$

Διαιροῦμε καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἰσότητας διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ παριστάνεται ἀπὸ τὸ πn:

$$\frac{\pi D n}{\pi n} = \frac{3\,\pi d n}{\pi n}.$$

Ἁπλοποιοῦμε κατόπιν τὰ κλάσματα, ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ τοῦ $=$, διὰ πn :

$$D = 3d.$$

Διαιροῦμε τώρα καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἰσότητας διὰ d καὶ λαμβάνομε τὴν ἰσότητα:

$$\frac{D}{d} = 3,$$

ποὺ μᾶς ζητήθηκε νὰ δείξωμε.

2ο. Ἂς ἀντικαταστήσωμε μέσα στὴν τελευταία ἰσότητα τὸ D μὲ τὴν τιμὴ 120 mm ποὺ μᾶς δόθηκε· θὰ προκύψῃ γιὰ τὸν ἄγνωστο d ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{120}{d} = 3.$$

Ἂς τὴν ἐπιλύσωμε :

$$120 = 3d$$
$$3d = 120$$
$$d = \frac{120}{3} = 40.$$

Ἀπάντηση : ἡ διάμετρος τῆς κινητήριας τροχαλίας εἶναι 40 mm.

Ἀσκήσεις. 1. Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις :

$$\frac{4}{x} = 22 \qquad \frac{5{,}5}{x} = 4 \qquad \frac{3}{4x} = 2{,}7$$

$$\frac{4{,}5}{1{,}5x} = 2{,}5 \qquad \frac{56}{3x-1} = 4 \qquad \frac{0{,}2}{3-2x} = 5.$$

2. Ποιά πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου $\frac{D}{d}$, ὅπου D καὶ d εἶναι οἱ διάμετροι (σὲ mm) τῶν δυὸ τροχαλιῶν ποὺ παριστάνει τὸ σχ. 11-α, γιὰ νὰ περιστρέφεται ὁ κινητήριος ἄξονας (μὲ τὴν τροχαλία διαμέτρου d) 5 φορὲς πιὸ γρήγορα ἀπὸ τὸν ἄλλο ; Ὑπολογίστε μὲ αὐτὴ τὴν προϋπόθεση τὸ d, ξέροντας ὅτι D = 255 mm.

3. Γνωρίζοντας ὅτι ἡ κωνικότητα ἑνὸς κόλουρου κώνου (Τόμ. Α΄, Μάθ. 53) μὲ διάμετρο μεγάλης βάσης D καὶ μικρῆς d καὶ μὲ ὕψος υ εἶναι ἴση μὲ

$$\frac{D-d}{\upsilon},$$

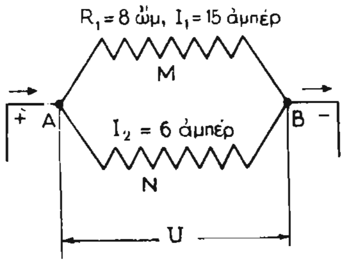
ὑπολογίστε τὸ ὕψος ἑνὸς κόλουρου κώνου μὲ $D = 30$ mm, $d = \frac{D}{2}$ καὶ μὲ κωνικότητα 0,08.

4. Ἐφαρμόζοντας τὸν νόμο τοῦ Ὤμ (Ohm)

$$I = \frac{U}{R}$$

(βλ. καὶ Μάθ. 8, Ἄσκ. 4) στὸν κλάδο AMB ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος (σχ. 11-β) καὶ ξέροντας ὅτι $R_1 = 8$ ὤμ, $I_1 = 15$ ἀμπέρ, ὑπολογίστε τὴ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B τοῦ κυκλώματος.

Γνωρίζοντας τώρα τὴ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B τοῦ κλάδου ANB, ὑπολογίστε τὴν ἀντίσταση R_2 αὐτοῦ τοῦ κλάδου, ἂν τὸ ἠλεκτρικὸ ρεῦμα, ποὺ τὸν διαρρέει, ἔχη ἔνταση $I_2 = 6$ ἀμπέρ.



Σχ. 11-β. Ἐφαρμόστε τὸν νόμο τοῦ Ὤμ.

5. Ξεκινώντας ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$R = \rho \frac{l}{F}$$

ποὺ δίνει τὴν ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση R ἑνὸς ἀγωγοῦ (βλ. Μάθ. 10, Ἄσκ. 6) ἐκφράστε μὲ τὰ R, ρ καὶ l τὸ F. Ὕστερα ὑπολογίστε τὴ διατομὴ F ἑνὸς σύρματος γιὰ τὸ ὁποῖο ἔχομε:

$R = 0{,}75$ ὤμ, $\rho = 40$ μικροώμ · cm, $l = 6\,000$ cm.

Μάθημα 12.

Πολλαπλασιασμὸς ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμό.

1. Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀθροίσματος μὲ ἕναν ἀριθμό.

Παράδειγμα. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ μῆκος δυὸ διαδρομῶν AB (π.χ. πηγεμοῦ καὶ ἐρχομοῦ) (σχ. 12-α) μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ τοὺς ἑξῆς δυὸ τρόπους:

1ο νὰ προσθέσωμε 5 km καὶ 3 km καὶ τὸ ἄθροισμα νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε μὲ 2

ἢ

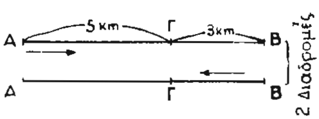
2ο νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ 5 km μὲ τὸ 2, τὸ 3 km μὲ τὸ 2 καὶ νὰ προσθέσωμε τὰ δυὸ γινόμενα.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ μῆκος ν διαδρομῶν AB, (σχ. 12-β), μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ τοὺς ἀκόλουθους δυὸ τρόπους:

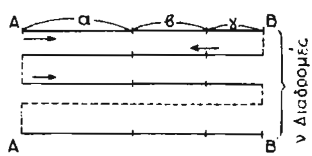
1ο νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἄθροισμα $(\alpha + \beta + \gamma)$, κατόπιν νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε μὲ ν

ἢ

2ο νὰ πολλαπλασιάσωμε χωριστὰ τὸ α, τὸ β καὶ τὸ γ μὲ τὸ ν, καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμε τὰ τρία γινόμενα.



Σχ. 12-α.



Σχ. 12-β.

Ὥστε:

$$(5km + 3km) \cdot 2 = 5km \cdot 2 + 3km \cdot 2.$$

Ὥστε:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\,\nu = \alpha\nu + \beta\nu + \gamma\nu \qquad (1)$$

2. Πολλαπλασιασμὸς μιᾶς διαφορᾶς μὲ ἕναν ἀριθμό.

Παράδειγμα: Γιὰ νὰ ὑπο-

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ

λογίσωμε τὸ κέρδος ποὺ ἔχομε, ἀγοράζοντας 50 πρίζες ἠλεκτρικοῦ ρεύματος πρὸς 12 δρχ τὴν μία καὶ πουλώντας τις πρὸς 17 δρχ τὴν μία, μποροῦμε νὰ ἐνεργήσωμε μὲ τοὺς ἑξῆς δυὸ τρόπους :

1ο ν' ἀφαιρέσωμε 12 δρχ ἀπὸ 17 δρχ καὶ τὴ διαφορὰ νὰ τὴν πολλαπλασιάσωμε μὲ 50

ἢ

2ο νὰ πολλαπλασιάσωμε τὶς 17 δρχ μὲ 50, τὶς 12 ἐπίσης μὲ 50, καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτο γινόμενο ν' ἀφαιρέσωμε τὸ δεύτερο.

Ὥστε :

$$(17-12)\cdot 50 = 17\cdot 50 - 12\cdot 50$$

κέρδος, ποὺ πραγματοποιοῦμε ἀγοράζοντας ν ἀντικείμενα πρὸς β δρχ τὸ ἕνα καὶ πουλώντας τα πρὸς α δρχ τὸ ἕνα, μποροῦμε νὰ ἐνεργήσωμε μὲ τοὺς ἀκόλουθους δυὸ τρόπους :

1ο νὰ ὑπολογίσωμε πρῶτα τὴ διαφορὰ $(\alpha-\beta)$ καὶ ὕστερα νὰ τὴν πολλαπλασιάσωμε μὲ ν

ἢ

2ο νὰ ὑπολογίσωμε πρῶτα τὰ γινόμενα αν καὶ βν, καὶ ὕστερα ἀπὸ τὸ πρῶτο γινόμενο ν' ἀφαιρέσωμε τὸ δεύτερο.

Ὥστε :

$$(\alpha-\beta)\,\nu = \alpha\nu - \beta\nu. \qquad (2)$$

3. Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ μὲ ἄθροισμα (ἢ διαφορά).

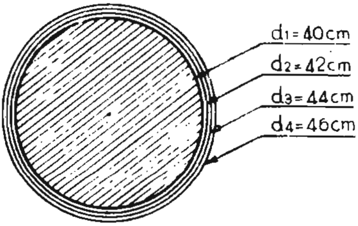
Ξέρομε, ὅτι σ' ἕνα γινόμενο ἐπιτρέπεται ν' ἀλλάξωμε τὴ σειρὰ τῶν παραγόντων· τὸ ἐξαγόμενο δὲν μεταβάλλεται (βλ. Τόμ. Α΄, σελ. 21, 3η ἰδιότητα). Ἐπομένως οἱ παραπάνω ἰσότητες (1) καὶ (2) μποροῦν νὰ γραφοῦν καὶ ἔτσι :

$$\nu\,(\alpha+\beta+\gamma) = \nu\alpha+\nu\beta+\nu\gamma \qquad (3)$$
$$\nu\,(\alpha-\beta) = \nu\alpha-\nu\beta \qquad (4)$$

Καὶ οἱ 4 ἰσότητες (1), (2), (3), (4) εἶναι ταυτότητες, δηλαδὴ ἀληθεύουν ὁποιους καθορισμένους ἀριθμοὺς κι ἂν βάλωμε στὴ θέση τῶν γραμμάτων α, β, γ, ν.

4. Ἀντίστροφος ὑπολογισμός: ἐξαγωγὴ ἑνὸς κοινοῦ παράγοντα.

Πρόβλημα. Ξέροντας ὅτι οἱ 4 σπεῖρες τοῦ πηνίου (τῆς μπομπίνας) ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 12-γ ἔχουν ἀντίστοιχες διαμέτρους: 40 cm, 42 cm, 44 cm, καὶ 46 cm, ὑπολογίστε τὸ ὁλικό τους μῆκος.



Σχ. 12-γ. Ὑπολογίστε τὸ ὁλικὸ μῆκος τῶν 4 σπειρῶν.

Τὸ ζητούμενο μῆκος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν 4 περιφερειῶν μὲ ἀντίστοιχες διαμέτρους 40 cm, 42 cm, 44 cm καὶ 46 cm, ἄρα μὲ

$$40 \cdot 3{,}14 + 42 \cdot 3{,}14 + 44 \cdot 3{,}14 + 46 \cdot 3{,}14. \qquad (5)$$

Γιὰ νὰ τὸ ὑπολογίσωμε ἔτσι ὅπως εἶναι γραμμένο, θὰ εἴχαμε νὰ κάμωμε πρῶτα 4 ξεχωριστοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ κατόπιν μίαν πρόσθεση (μὲ 4 προσθετέους). Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι οἱ 4 ὅροι τοῦ ἀθροίσματος εἶναι γινόμενα ποὺ περιέχουν ἕναν κοινὸ παράγοντα, τὸν 3,14. Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ ἄθροισμα αὐτὸ παρουσιάζεται μὲ τὴ μορφὴ $\alpha\nu + \beta\nu + \gamma\nu$ ποὺ συναντήσαμε στὶς προηγούμενες παραγράφους καὶ πού, ὅπως εἴδαμε, μπορεῖ νὰ γραφῆ καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο (χωρὶς ν' ἀλλάξῃ ἡ ἀριθμητικὴ τιμή του, ὅταν ἀντικαταστήσωμε τὰ γράμματα μὲ ἀριθμούς):

$$\alpha\nu + \beta\nu + \gamma\nu = (\alpha + \beta + \gamma)\,\nu$$

Ἀνάλογα λοιπὸν μποροῦμε νὰ γράψωμε τὸ ἄθροισμα (5) ἔτσι:

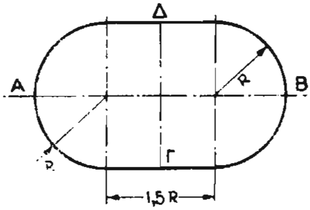
$$(40 + 42 + 44 + 46) \cdot 3{,}14\,.$$

Τώρα ἔχομε νὰ κάμωμε πρῶτα μίαν πρόσθεση (μὲ 4 προσθετέους) καὶ ἔπειτα ἕνα καὶ μόνο πολλαπλασιασμό. Ἔτσι βρίσκομε πολὺ πιὸ σύντομα τὸ ζητούμενο μῆκος:

$$172 \cdot 3{,}14 \simeq 540 \text{ cm}.$$

Ἡ παραπάνω ἐργασία μας λέγεται *ἐξαγωγὴ τοῦ κοινοῦ παράγοντα 3,14* ἔξω ἀπὸ παρένθεση. Γενικῶς, ὅταν ἀπὸ τὴν παράσταση αν + βν + γν μεταβαίνωμε στὴν (α + β + γ) ν, λέμε πὼς βγάζομε τὸ ν κοινὸν παράγοντα ἔξω ἀπὸ παρένθεση. Στοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμοὺς συμφέρει πάντα νὰ τὸ κάμωμε αὐτό.

Ἀσκήσεις. 1. Τὸ σχ. 12-δ. παριστάνει τὴν ἀπάνω ἐπιφάνεια ἑνὸς τραπεζιοῦ. Ὑπολογίστε πρῶτα τὴν ἀκτίνα R τῶν δυὸ ἡμικυκλικῶν ἄκρων της, ξέροντας ὅτι ἡ περίμετρός της εἶναι 5 m. Βρῆτε ἔπειτα τὶς διαστάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ ὥστε νὰ ξέρετε πόσον τόπο πιάνει τὸ τραπέζι.

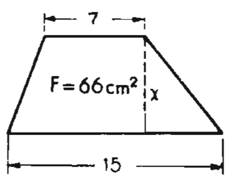


Σχ. 12-δ. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ.

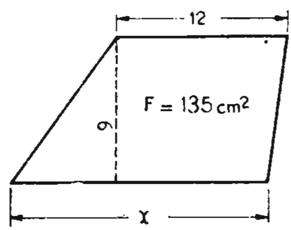
2. Οἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου (σχ. 12-ε) εἶναι 7 cm ἡ μιὰ καὶ 15 cm ἡ ἄλλη· τὸ ὕψος ἂς εἶναι x cm.

1ο. Δῶστε τὴν ἔκφραση τοῦ ἐμβαδοῦ F τοῦ τραπεζίου σὲ cm^2.

2ο. Ξέροντας ὅτι αὐτὸ τὸ ἐμβαδὸ εἶναι ἴσο μὲ 66 cm^2, ὑπολογίστε τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.



Σχ. 12-ε. Ὑπολογίστε τὸ x.



Σχ. 12-ς. Ὑπολογίστε τὸ x.

3. Οἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου (σχ. 12-ς) εἶναι x cm ἡ μιὰ καὶ 12 cm ἡ ἄλλη· τὸ ὕψος εἶναι 9 cm.

1ο. Δῶστε τὴν ἔκφραση τοῦ ἐμβαδοῦ F τοῦ τραπεζίου σὲ cm^2.

2ο. Ξέροντας ὅτι τὸ ἐμβαδὸ αὐτὸ εἶναι 135 cm^2, ὑπολογίστε τὴ βάση x τοῦ τραπεζίου.

4. Ὑπολογίστε τὸ ὁλικὸ βάρος 5 κυλινδρικῶν ράβδων ἀπὸ σκληραλουμίνιο (σχετικὴ πυκνότητα 2,8, βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 49), ξέροντας ὅτι ἡ καθεμιά τους ἔχει μῆκος 2 m καὶ ὅτι οἱ ἀντίστοιχες διάμετροί τους εἶναι 100 mm, 120 mm, 130 mm, 150 mm, 160 mm.

5. Τὸ πλάτος β (mm) τοῦ λουριοῦ ποὺ χρησιμοποιεῖται σὲ μιὰ τροχαλία καὶ τὸ πλάτος α (mm) τῆς τροχαλίας συνδέονται μεταξύ τους μὲ τὴν ἰσότητα (βλ. καὶ Μάθ. 9, § 4, 2η ἐφαρμογή):

$$\alpha = 1{,}125\,(\beta + 10).$$

Ὑπολογίστε πόσο πρέπει ν' αὐξηθῆ τὸ β ὅταν τὸ α αὐξηθῆ κατὰ 20 mm.

6. Σ' ἕνα μνημόνιο διαβάσατε ὅτι τὸ βάρος σὲ κιλὰ ἀνὰ τρέχον μέτρο (kg/m) ἑνὸς σωλήνα ἀπὸ ἐρυθρὸ χαλκὸ χωρὶς τὴ συγκόλληση (σχετικὴ πυκνότητα 8,8), μὲ ἐξωτερικὴ διάμετρο d (mm) καὶ πάχος τοιχώματος ε (mm), τὸ βρίσκομε μὲ τὸν τύπο

$$0{,}028\,\varepsilon\,(d - \varepsilon).$$

Ἐξηγῆστε πῶς βρέθηκε αὐτὸς ὁ τύπος. Ὕστερα ἐφαρμόστε τον παίρνοντας τὸ $d = 90$ mm καὶ τὸ $\varepsilon = 3$ mm.

Μάθημα 13.

Δυνάμεις καὶ ρίζες. Πίνακες τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων.

1. **Ὅταν οἱ παράγοντες ἑνὸς γινομένου εἶναι ἴσοι,** ἁπλοποιοῦμε τὴ γραφή του γράφοντας ἕναν ἀπ' αὐτοὺς καὶ σημειώνοντας δεξιά του, λίγο πιὸ ὑψηλὰ καὶ μὲ μικρότερα ψηφία, τὸν ἀριθμὸ τῶν ἴσων παραγόντων ποὺ περιέχονται στὸ γινόμενο (βλ. καὶ Τομ. Α', Μαθ. 37 καὶ 50).

Παράδειγμα 1. Τὸ γινόμενο $3 \cdot 3$ γράφεται 3^2 καὶ διαβάζεται: τρία στὴ δεύτερη δύναμη ἢ τρία στὸ τετράγωνο.

Τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ γράφεται α^3 καὶ διαβάζεται: ἄλφα στὴν τρίτη δύναμη ἢ ἄλφα στὸν κύβο.

Τὸ γινόμενο $\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta$ γράφεται β^4 καὶ διαβάζεται: βῆτα στὴν τέταρτη δύναμη.

Οἱ παραστάσεις (οἱ γραφὲς) 3^2, α^3, β^4 λέγονται *δυνάμεις*· οἱ μὲ μικρότερα ψηφία καὶ δεξιὰ γραμμένοι ἀριθμοὶ 2, 3, 4 λέγονται *ἐκθέτες* τους. Ὅταν διαβάζωμε μιὰ δύναμη, παραλείπομε συνήθως τὴ λέξη δύναμη ποὺ χρησιμοποιήσαμε στὰ παραπάνω διαβάσματα. Ἔτσι διαβάζοντας τὸ 10^5 λέμε σύντομα «δέκα στὴν πέμπτη».

Εἶναι χρήσιμο γιὰ τὰ παρακάτω μαθήματα καὶ πολὺ φυσικὸ ὕστερα ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ ποὺ δώσαμε γιὰ τὴ δύναμη ἑνὸς ἀριθμοῦ νὰ ποῦμε πρώτη δύναμη ἑνὸς ἀριθμοῦ α αὐτὸν τὸν ἴδιο τὸν ἀριθμὸ καὶ νὰ γράψωμε:

$$\alpha^1 = \alpha.$$

Ἔτσι θὰ ἔχωμε:

$$7^1 = 7 \text{ καὶ } 15 = 3 \cdot 5 = 3^1 \cdot 5^1.$$

Παράδειγμα 2. Ἔχομε:

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$$
$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000 \text{ κτλ.}$$

'Απ' αὐτὰ γίνεται φανερὸ τὸ ἑξῆς: κάθε ἀκέραιος ἀριθμός, ποὺ γράφεται μὲ τὸ ψηφίο 1 ἀκολουθημένο ἀπὸ μηδενικά, εἶναι μιὰ δύναμη τοῦ 10, ἐκθέτης τῆς δύναμης αὐτῆς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενικῶν ποὺ ἀκολουθοῦν τὸ ψηφίο 1. Ἔτσι π.χ. ὁ ἀκέραιος 1 000 000 εἶναι ἴσος μὲ τὴ δύναμη 10^6, ὁ ἀκέραιος 1 000 000 000 (ἕνα δισεκατομμύριο) εἶναι ἴσος μὲ 10^9. Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο συντομεύεται πολὺ ἡ γραφὴ τῶν ἀκέραιων μονάδων διαφόρων τάξεων: τῆς ἑκατοντάδας, τῆς χιλιάδας, τῆς δεκάδας χιλιάδων κτλ. (βλ. Τόμ. Α΄, Εἰσαγωγή, § § 4 — 5).

2. *Παρατηρήσεις*. 1η. Ἂς «ὑψώσωμε στὸ τετράγωνο» (δηλαδὴ ἂς σχηματίσωμε τὸ τετράγωνο) ἑνὸς γινομένου, π.χ. τοῦ 3α. Ἔχομε

$$(3\alpha)^2 = 3\alpha \cdot 3\alpha = 3 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot \alpha = 3^2 \cdot \alpha^2 = 9\alpha^2.$$

Ὥστε: *γιὰ νὰ ὑψώσωμε ἕνα γινόμενο σὲ μιὰ δύναμη, ὑψώνομε σ' αὐτὴ τὴ δύναμη κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου.*

2η. Ἂς ὑψώσωμε στὸ τετράγωνο ἕνα πηλίκο ποὺ δὲν ἔχομε ἀκόμα ὑπολογίσει, π.χ. τὸ $\frac{\alpha}{2}$. Βρίσκομε, ἐφαρμόζοντας ὅσα ξέρομε γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ δυὸ κλασμάτων:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha \cdot \alpha}{2 \cdot 2} = \frac{\alpha^2}{2^2}$$

Ὥστε: *γιὰ νὰ ὑψώσωμε σὲ μιὰ δύναμη τὸ πηλίκο δυὸ ἀριθμῶν (ἢ ἕνα κλάσμα), ὑψώνομε σ' αὐτὴ τὴ δύναμη τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ πηλίκου (ἢ τοῦ κλάσματος).*

3η. Ἀπὸ τὶς δυὸ παραπάνω παρατηρήσεις συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς:

Ὅταν ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ (ἢ διαιρεθῆ διὰ) 10, 100, 1 000 κτλ. τὸ τετράγωνό του πολλαπλασιάζεται ἐπὶ (ἢ διαιρεῖται διὰ) 100, 10 000, 1 000 000 κτλ.

Καὶ ἀλήθεια

$$(10\alpha)^2 = 10^2\alpha^2 = 100\ \alpha^2$$

$$(100\alpha)^2 = 100^2\alpha^2 = 10\ 000\ \alpha^2 \text{ κτλ.}$$

$$\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{10^2} = \frac{\alpha^2}{100}$$

$$\left(\frac{\alpha}{100}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{100^2} = \frac{\alpha^2}{10\,000} \text{ κτλ.}$$

3. Τετραγωνικὴ καὶ κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ. Ἂς γράψωμε τὸ τετράγωνο ἑνὸς ἀριθμοῦ, π.χ. τοῦ 6 :

$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36.$$

Τὸ 36 εἶναι τὸ τετράγωνο τοῦ 6. Ἀντίστροφα λέμε ὅτι τὸ 6 εἶναι ἡ *τετραγωνικὴ ρίζα* τοῦ 36 καὶ γράφομε :

$$\sqrt[2]{36} = 6 \quad \text{ἤ, ἁπλούστερα,} \quad \sqrt{36} = 6.$$

Τὸ μικρὸ ψηφίο 2 στὸ σύμβολο $\sqrt[2]{36}$ λέγεται *δείκτης τῆς ρίζας*· συνήθως δὲν τὸν γράφομε γιὰ συντομία. (Βλ. καὶ Τόμ. Α΄, Μάθ. 37, § 2).

Ὅμοια, ἐπειδὴ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, τὸ 2 λέγεται *κυβικὴ ρίζα* τοῦ 8. Αὐτὴν τὴν συμβολίζομε (ὅπως ἄλλωστε ξέρομε ἀπὸ τὸν Τόμ. Α΄, Μάθημα 50, § 2) μὲ

$$\sqrt[3]{8} = 2.$$

Ἐννοεῖται ὅτι τώρα ὁ δείκτης 3 τῆς ρίζας δὲν πρέπει νὰ παραλείπεται.

Παρατήρηση. Ἀπὸ τὴν τρίτη παρατήρηση τοῦ προηγούμενου παραγράφου προκύπτει ἡ ἀκόλουθη ἰδιότητα :

Ἂν ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῆ μὲ (ἢ διαιρεθῆ διὰ) $100 = 10^2$, $10\,000 = 10^4$, $1\,000\,000 = 10^6$ κτλ., ἡ τετραγωνική του ρίζα πολλαπλασιάζεται μὲ (ἢ διαιρεῖται διὰ) 10, $100 = 10^2$, $1\,000 = 10^3$ κτλ. ἀντιστοίχως.

$$\text{Π.χ. } \sqrt{49 \cdot 100} = 10 \cdot \sqrt{49} = 10 \cdot 7 = 70.$$

$$\sqrt{64 \cdot 10\,000} = 100 \cdot \sqrt{64} = 100 \cdot 8 = 800.$$

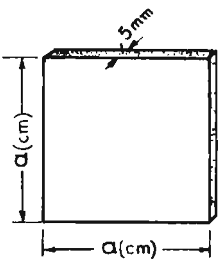
$$\sqrt{25 : 100} = \sqrt{25} : 10 = 5 : 10 = 0{,}5.$$

$$\sqrt{625 : 10\,000} = \sqrt{625} : 100 = 25 : 100 = 0{,}25$$

4. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς μιᾶς παράστασης ποὺ περιέχει δυνάμεις ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι παριστάνονται ἀπὸ γράμματα.

Πρόβλημα. Βρῆτε τὸν τύπο ποὺ δίνει τὸ βάρος (σὲ gr) μιᾶς τετράγωνης λαμαρίνας (σχ. 13-α) ποὺ ἔχει μῆκος πλευρᾶς α cm καὶ πάχος 5 mm. (Σχετικὴ πυκνότητα τῆς λαμαρίνας 7,8).

Ἐφαρμόστε ἔπειτα τὸν τύπο στὶς τρεῖς περιπτώσεις: α=10 cm, α=15 cm, α=25 cm.



Σχ. 13-α. Ὑπολογίστε τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας.

1ο. Ἐπιφάνεια τῆς λαμαρίνας (σὲ cm^2): $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$. Ὄγκος τῆς λαμαρίνας (σὲ cm^3): $\alpha^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5\alpha^2$. Βάρος τῆς λαμαρίνας (σὲ gr): $0{,}5\alpha^2 \cdot 7{,}8 = 3{,}9\alpha^2$.

2ο. Ἂς ἀντικαταστήσωμε, μέσα στὸν παραπάνω τύπο γιὰ τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας, τὸ α μὲ τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς ποὺ μᾶς δόθηκαν.

Ἡ λαμαρίνα μὲ μῆκος πλευρᾶς 10 cm ἔχει βάρος (βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 49):

$$3{,}9 \cdot 10^2 = 3{,}9 \cdot 100 = 390 \text{ gr}.$$

Ἡ λαμαρίνα μὲ πλευρὰ 15 cm ἔχει βάρος:

$$3{,}9 \cdot 15^2 = 3{,}9 \cdot 225 = 877{,}5 \simeq 878 \text{ gr}.$$

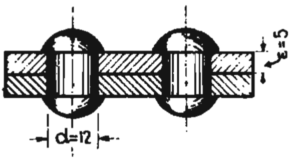
Ἡ λαμαρίνα μὲ πλευρὰ 25 cm ἔχει βάρος:

$$3{,}9 \cdot 25^2 = 3{,}9 \cdot 625 = 2\,437{,}5 \simeq 2\,438 \text{ gr}.$$

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας ἕναν πίνακα τετραγώνων, ὅπως αὐτὸν ποὺ βρίσκετε στὶς τελευταῖες σελίδες αὐτοῦ τοῦ τόμου, μπορεῖτε νὰ κάμετε συντομώτερα παρόμοιους ὑπολογισμούς.

5. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς μιᾶς παράστασης ποὺ περιέχει ρίζες γενικῶν ἀριθμῶν (δηλ. ἀριθμῶν ποὺ παριστάνονται ἀπὸ γράμματα).

Πρόβλημα. Γιὰ νὰ συνδέσωμε (ἑνώσωμε) τὴ μιὰ μὲ τὴν *ἄλλη δυὸ λαμαρίνες πάχους ε mm χρησιμοποιοῦμε δικέφαλα καρφιὰ μὲ διάμετρο d ἡ ὁποία μᾶς δίνεται ἀπὸ τὸν ἐμπειρικὸ τύπο (δηλ. τὸν τύπο ποὺ μᾶς δίδαξε ἡ πράξη, ἡ πείρα):*



Σχ. 13-β. Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο τῶν καρφιῶν γιὰ ε = 5 mm.

$$d = \sqrt{50\varepsilon} - 4.$$

Ποιά εἶναι ἡ διάμετρος τῶν καρφιῶν ποὺ θὰ χρησιμοποιήσωμε γιὰ νὰ συνδέσωμε δυὸ λαμαρίνες πάχους 5 mm, ἂν στρογγυλέψωμε τὸ ἐξαγόμενο τοῦ ὑπολογισμοῦ μας στὴν ἀμέσως μεγαλύτερη διάμετρο ποὺ περιέχεται μέσα στὴν τυποποιημένη σειρὰ διαμέτρων:

$$\ldots\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 16,\ \ldots\ ;$$

Ἂς ἀντικαταστήσωμε, μέσα στὸν τύπο ποὺ μᾶς δόθηκε, τὸ ε μὲ τὴν τιμή του 5:

$$d = \sqrt{50 \cdot 5} - 4 = \sqrt{250} - 4.$$

Στὸ ἑπόμενο Μάθημα θὰ μάθωμε νὰ ὑπολογίζωμε οἱ ἴδιοι τετραγωνικὲς ρίζες. Ὅταν ὅμως διαθέτωμε πίνακα τετραγώνων καὶ τετραγωνικῶν ριζῶν, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴ ζητούμενη τετραγωνικὴ ρίζα, χρησιμοποιώντας τον. Σ' ἕναν τέτοιο πίνακα βλέπομε ὅτι τὸ 250 βρίσκεται μεταξὺ $225 = 15^2$ καὶ $256 = 16^2$. Ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα του $\sqrt{250}$ θὰ βρίσκεται μεταξὺ 15 καὶ 16. Ἄρα:

$$d = 15,\ldots - 4 = 11,\ldots$$

Θὰ διαλέξωμε λοιπὸν καρφιὰ μὲ διάμετρο 12 mm.

Ἀσκήσεις. *1.* Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις:

$$x^2 = 36 \qquad 2x^2 = 50 \qquad 3x^2 - 1 = 74$$

$$\frac{x^2}{3} = 27 \qquad \frac{3x^2}{4} = 108 \qquad \frac{96}{x^2} = 24.$$

2. Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις: $\sqrt{x} = 10$, $\sqrt{x} = 4{,}5$,

$$\sqrt{x+1} = 7, \qquad \sqrt{2x-3} = 1.$$

3. Ξέρετε (Τόμ. Α΄, Μάθ. 44) ὅτι τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ $\pi \simeq 3{,}14$ ἐπὶ τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου. Γράψτε 1ο τὸν τύπο ποὺ δίνει τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κύκλου μὲ ἀκτίνα ρ, 2ο τὸν τύπο ποὺ δίνει τὴν ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου ποὺ ἔχει ἐμβαδὸ F. Ἐφαρμόστε αὐτὸν τὸν δεύτερο τύπο στὶς περιπτώσεις ὅπου

$$F = 1\ m^2, \qquad F = 404\ mm^2, \qquad F = 1\,000\ cm^2.$$

4. Ὑπολόγισαν ὅτι ἕνα δικέφαλο καρφί, μὲ διάμετρο ἄγνωστη x mm, πρέπει νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸ διατομῆς περίπου 290 mm^2. Βρῆτε ποιὰ εἶναι ἡ διάμετρός του x. Ἑπομένως ποιά διάμετρο θὰ διαλέξετε ἀπὸ τὴν τυποποιημένη σειρὰ διαμέτρων ἡ ὁποία δόθηκε στὸν τελευταῖο παράγραφο (σύμφωνα μὲ ὅσα εἰπώθηκαν στὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος ἐκείνου τοῦ παραγράφου);

5. Μιὰ ροδέλα ἔχει μεγάλη διάμετρο D καὶ μικρὴ d. Ἐκφράστε τὸ ἐμβαδὸ F τῆς μιᾶς ὄψης της μὲ τὰ γράμματα π, D καὶ d. Ὕστερα, χρησιμοποιώντας τὸν πίνακα τῶν τετραγώνων, ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ αὐτό, ὅταν $D = 38$ mm καὶ $d = 14$ mm.

6. Γνωρίζοντας τὸ ἐμβαδὸ $F = 785\ mm^2$ τῆς μιᾶς ὄψης μιᾶς ροδέλας καὶ τὴ μικρή της διάμετρο $d = 12$ mm ὑπολογίστε τὴ μεγάλη διάμετρό της.

7. Χρησιμοποιώντας τὸν πίνακα τῶν κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν ποὺ βρίσκετε στὶς τελευταῖες σελίδες αὐτοῦ τοῦ τόμου, ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις:

$$\sqrt[3]{x} = 15, \qquad \sqrt[3]{x} = 32, \qquad \sqrt[3]{x} = 75$$

$$x^3 = 27\,000, \qquad x^3 = 110\ \ 92, \qquad x^3 = 274\,625.$$

8. Ὁ ὄγκος V μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτίνα r δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Χρησιμοποιώντας τὸν πίνακα τῶν κύβων ὑπολογίστε τὸ V γιὰ

$$r = 6\ m, \qquad r = 12\ cm, \qquad r = 18\ mm.$$

9. Τὸ φορτίο Φ (σὲ kg) ποὺ μπορεῖ νὰ βαστάξῃ ἕνας γεμάτος (συμπαγής) στύλος ἀπὸ χυτοσίδηρο (μαντέμι) μὲ διάμετρο d (mm) καὶ ὕψος υ (mm) εἶναι ἴσο μέ:

$$\Phi = \frac{1\,600 d^4}{\upsilon^2}$$

Ὑπολογίστε τὸ Φ γιὰ $d = 150$ mm καὶ $\upsilon = 3\,000$ mm.

Μάθημα 14.

Ἐξαγωγὴ τετραγωνικῆς ρίζας.

1. Ὑπολογίζομε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὅταν διαθέτωμε πίνακα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 ὡς 100, μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο (βλ. καὶ Τόμ. Α΄, Μάθ. 37):

1ο. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος καὶ βρίσκεται μεταξὺ 1 καὶ 100. Τότε ὁ πίνακας μᾶς δίνει ἀμέσως τὴν τετραγωνική του ρίζα, μὲ προσέγγιση ἑνὸς χιλιοστοῦ. Π. χ. $\sqrt{92} \simeq 9{,}592$.

2ο. Ὁ ἀριθμὸς βρίσκεται μεταξὺ $100 = 10^2$ καὶ $10\,000 = 10^4$. Διαιροῦμε τότε τὸν ἀριθμὸ διὰ 100, βρίσκομε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πηλίκου καὶ τὴ ρίζα αὐτὴ τὴν πολλαπλασιάζομε μὲ 10.

Π. χ. $\sqrt{4\,700} = 10\sqrt{47} \simeq 10 \cdot 6{,}856 = 68{,}56.$

Ὅμοια βρίσκομε:

$$\sqrt{736{,}4} = 10\sqrt{7{,}364} \simeq 10 \cdot \sqrt{7} = 10 \cdot 2{,}646 = 26{,}46.$$

3ο. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικός, μικρότερος ἀπὸ τὴ μονάδα· π. χ. ἔχομε νὰ βροῦμε τὴν $\sqrt{0{,}003\,7}$. Καθιστοῦμε τὸν 0,003 7 ἀκέραιο, πολλαπλασιάζοντάς τον μὲ 10 000, βρίσκομε τὴν τετρ. ρίζα τοῦ γινομένου καὶ κατόπιν τὴ διαιροῦμε διὰ 100:

$$\sqrt{0{,}003\,7} = \frac{1}{100}\sqrt{37} \simeq \frac{1}{100} \cdot 6{,}083 = 0{,}060\,83.$$

Ὅμοια βρίσκομε:

$$\sqrt{0{,}518} = \frac{1}{10}\sqrt{5{,}18} \simeq \frac{1}{10}\sqrt{52} \simeq \frac{1}{10}7{,}211 = 0{,}721\,1.$$

Παρατήρηση. Στὰ παραδείγματα 2ο καὶ 3ο χρησιμοποιήσαμε τὴν ἰδιότητα ποὺ διατυπώθηκε στὴν Παρατήρηση τοῦ § 3 τοῦ προηγούμενου μαθήματος.

2. Ὅταν δὲν διαθέτωμε πίνακα τετραγώνων καὶ τετραγωνικῶν ριζῶν, ἡ ἐξαγωγὴ (δηλ. ὁ ὑπολογισμὸς) τῆς τετραγωνικῆς ρίζας ἑνὸς ἀριθμοῦ γίνεται μὲ μιὰ εἰδικὴ μέθοδο ποὺ τὸν μηχανισμό της θὰ τὸν ἐκθέσωμε σ' ἕνα παράδειγμα, στὸν ἑπόμενο παράγραφο. Προηγουμένως εἶναι σκόπιμο νὰ ἔχωμε στὸ νοῦ μας τὰ τετράγωνα τῶν δέκα πρώτων κατὰ σειρὰ ἀκέραιων ἀριθμῶν:

Ἀριθμοί:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Τετράγωνα:	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

3. Ἐξαγωγὴ τῆς $\sqrt{583\,691}$.

Ἀρχίζοντας ἀπὸ δεξιά, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος (ἢ ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ κόμμα, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικός), τὸν χωρίζομε σὲ διψήφια κομμάτια· τὸ τελευταῖο κομμάτι στὰ ἀριστερὰ μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιο. Θὰ βροῦμε τόσα ψηφία τῆς ρίζας ὅσα εἶναι αὐτὰ τὰ κομμάτια. Ἑπομένως, στὸ παράδειγμά μας θὰ βροῦμε τρία ψηφία.

$$\begin{array}{r|l} 58\ 36\ 91 & \\ \hline & \\ \end{array}$$

1ο. Ὑπολογισμὸς τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζας.

Παίρνομε τὸ πρῶτο στ' ἀριστερὰ κομμάτι, τὸ 58. Τὸ μεγαλύτερο τετράγωνο ἀκεραίου τὸ ὁποῖο περιέχεται στὸ 58 εἶναι τὸ 49, ποὺ ἔχει γιὰ τετραγωνικὴ ρίζα τὸ 7.

$$\begin{array}{r|l} 58\ 36\ 91 & 7 \\ \hline -49 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

Τὸ πρῶτο ψηφίο τῆς ρίζας ποὺ ζητοῦμε εἶναι τὸ 7. Ἀφαιροῦμε τὸ τετράγωνό του 49 ἀπὸ 58 καὶ βρίσκομε τὸ πρῶτο ὑπόλοιπο 9.

2ο. Ὑπολογισμὸς τοῦ δεύτερου ψηφίου τῆς ρίζας.

$$\begin{array}{r|l} 58\ 36\ 91 & 76 \\ \hline -49 & 146 \\ \hline 93\,6 & \times 6 \\ \hline -87\,6 & 876 \\ \hline 6\,0 & \end{array}$$

Δεξιὰ ἀπὸ τὸ πρῶτο ὑπόλοιπο 9 γράφομε τὸ δεύτερο διψήφιο κομμάτι, τὸ 36. Προκύπτει ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 936. Σ' αὐτὸν τὸν ἀριθμὸ χωρίζομε τὸ τελευταῖο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίο του, τὸ 6, καὶ παίρνομε τὸν ἀριθμὸ 93 ποὺ μένει ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ χώρισμα. Διπλασιάζομε τὸ μέρος τῆς ρίζας τὸ ὁποῖο ὑπολογίσαμε κιόλας, δηλαδὴ τὸ 7, καὶ ἐξετάζομε πόσες φορὲς αὐτὸ τὸ διπλάσιο, τὸ 14, χωρεῖ στὸ 93. Χωρεῖ 6 φορὲς (γιατὶ $6 \cdot 14 = 84$, ἐνῶ $7 \cdot 14 = 98$). Αὐτὸ τὸ 6 τὸ γράφομε δεξιὰ ἀπὸ τὸ διπλάσιο 14 καὶ τὸν ἀριθμὸ 146 ποὺ προκύπτει τὸν πολλαπλασιάζομε μὲ αὐτὸ τὸ ἴδιο τὸ 6. Τὸ γινόμενο 876 δὲν ξεπερνᾶ τὸ 936· τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ 936 καὶ βρίσκομε τὸ δεύτερο ὑπόλοιπο 60. Τὸ δεύτερο ψηφίο τῆς ρίζας εἶναι τὸ 6.

3ο Ὑπολογισμὸς τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ρίζας.

Δεξιὰ ἀπὸ τὸ δεύτερο ὑπόλοιπο «κατεβάζομε» τὸ τρίτο διψήφιο κομμάτι 91. Προκύπτει ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 6 091. Στὰ δεξιά του χωρίζομε πάλι ἕνα ψηφίο, τὸ 1, καὶ παίρνομε τὸν ἀριθμὸ 609 ποὺ μένει ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ χώρισμα. Διπλασιάζομε τὸ μέρος τῆς ρίζας τὸ ὁποῖο ὑπολογίσαμε κιόλας, δηλαδὴ τὸ 76, καὶ ἐξετάζομε πόσες φορὲς αὐτὸ τὸ διπλάσιο, τὸ 152, χωρεῖ στὸ 609. Χωρεῖ 4 φορὲς (γιατὶ $4 \cdot 152 = 608$, ἐνῶ $5 \cdot 152 = 760$).

58 36 91	76	
—49	146	1 524
9 36	×6	×4
—8 76	876	6 096
609/1		1 523
—456 9		×3
152 2		4 569

Γιὰ νὰ ἐξακριβώσωμε, ἂν τὸ 4 εἶναι τὸ ζητούμενο τρίτο ψηφίο τῆς ρίζας, τὸ γράφομε δεξιὰ ἀπὸ τὸ διπλάσιο 152 καὶ τὸν ἀριθμὸ 1 524 ποὺ προκύπτει τὸν πολλαπλασιάζομε μὲ 4. Τὸ γινόμενο $1\,524 \cdot 4 = 6\,096$ ξεπερνᾶ τὸ δεύτερο ὑπόλοιπο 6 091, καὶ γι' αὐτὸν τὸ λόγο τὸ ψηφίο 4 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ζητούμενο τρίτο ψηφίο τῆς ρίζας. Δοκιμάζομε τὸ ἀμέσως μικρότερο ψηφίο 3: γράφομε τὸ 3 δεξιὰ ἀπὸ τὸ διπλάσιο 152 καὶ τὸν ἀριθμὸ 1 523 ποὺ προκύπτει τὸν πολλαπλασιάζομε μὲ 3, τὸ γινόμενο

$1\,523 \cdot 3 = 4\,569$ δὲν ξεπερνᾶ τώρα τὸ 2ο ὑπόλοιπο 6 091. Τὸ τρίτο ψηφίο τῆς ρίζας εἶναι λοιπὸν τὸ 3. Ἀφαιροῦμε τὸ γινόμενο $1\,523 \cdot 3 = 4\,596$ ἀπὸ τὸ 6 091 καὶ βρίσκομε τὸ τρίτο ὑπόλοιπο 1 522.

Ἀποτέλεσμα: ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 583 691, *μὲ προσέγγιση μιᾶς μονάδας ἀπὸ κάτω,* εἶναι 763· *ὑπόλοιπο* ἔχομε τὸ 1 522.

Ἐπαλήθευση: $763^2 + 1\,522 = 582\,169 + 1\,522 = 583\,691$.

Ὁ κατὰ μονάδα μεγαλύτερος ἀριθμὸς 764 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 583 691 *μὲ προσέγγιση μιᾶς μονάδας ἀπὸ πάνω.* Καὶ ἀλήθεια, $763^2 < 582\,169 < 764^2 = 583\,696$.

4. Παρατηρήσεις. 1η. Ἂν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀκεραίου δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, τότε μποροῦμε, μὲ τὸν τρόπο ποὺ ἐξηγήσαμε παραπάνω, νὰ βροῦμε διαδοχικὰ τὸ ψηφίο τῶν δεκάτων, τὸ ψηφίο τῶν ἑκατοστῶν τῆς τετραγωνικῆς του ρίζας καὶ οὕτω καθεξῆς, «κατεβάζοντας» κάθε φορὰ ἕνα διψήφιο κομμάτι ἀπὸ δυὸ μηδενικά. Π.χ. γιὰ τὴν $\sqrt{457} = \sqrt{457{,}0000}$,

$$\begin{array}{r|lll}
4\;57{,}00\;00 & 21{,}37 & & \\
\hline
-4 & 41 & 423 & 4\,267 \\
0\;5.7 & \times 1 & \times 3 & \times 7 \\
-\;41 & 41 & 1\,269 & 29\,869 \\
1\;60.0 & & & \\
-\;1\;26\;9 & & & \\
33\;10.0 & & & \\
-\;29\;86\;9 & & & \\
3\;23\;1 & & &
\end{array}$$

μὲ προσέγγιση ἑκατοστοῦ ἀπὸ κάτω, ἔχομε $\sqrt{457} \simeq 21{,}37$ σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω ὑπολογισμό.

$$\begin{array}{r|ll}
3{,}65\;10 & 1{,}91 & \\
\hline
-1 & 29 & 381 \\
26.5 & \times 9 & \times 1 \\
-26\;1 & 261 & 381 \\
41.0 & & \\
-38\;1 & & \\
2\;9 & &
\end{array}$$

2η. Γιὰ νὰ βγάλωμε (ὑπολογίσωμε) τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐργαζόμαστε μὲ ἐντελῶς ἀνάλογο τρόπο. Π.χ ἔστω ὅτι μᾶς ζητοῦν τὴν $\sqrt{3{,}651}$ μὲ προσέγγιση ἑκατοστοῦ ἀπὸ κάτω. Γράφομε στὰ δεξιὰ τοῦ 3,651 ἕνα μηδενικὸ (πράγμα πού, ὅπως ξέρομε, δὲν ἀλλάζει τὸ μέγεθος τοῦ ἀριθμοῦ), γιὰ νὰ ἔχωμε δυὸ διψήφια κομμάτια στὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ καί, ἀφοῦ κάμωμε τοὺς ὑπολογισμοὺς ποὺ σημειώνονται παραπάνω, βρίσκομε

$$\sqrt{3,651} \simeq 1,91.$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο ὑπολογίζομε τὴν

$$\sqrt{0,083} = \sqrt{0,08\ 30} \simeq 0,28$$

σύμφωνα μὲ τὸν διπλανὸ ὑπολογισμό.

0,08 30	0,28	
− 4	49	48
43.0	× 9	× 8
− 38 4	441	384
4 6		

Ἀσκήσεις. *1*. Ὑπολογίστε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν 12 414 καὶ 36 015 μὲ προσέγγιση μιᾶς μονάδας ἀπὸ κάτω.

2. Ὑπολογίστε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν 82 512 καὶ 435,1 μὲ προσέγγιση ἑκατοστοῦ ἀπὸ κάτω.

3. Ὑπολογίστε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κλασμάτων:

$$\frac{16}{25}, \quad \frac{121}{100}, \quad \frac{15}{4}, \quad \frac{16}{7}, \quad \frac{3}{8}.$$

4. Ὑπολογίστε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ x σὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες ἰσότητες:

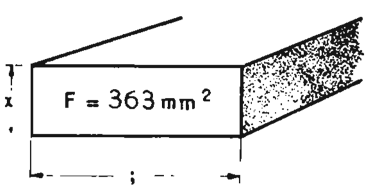
$$x^2 \cdot 4 = 64, \qquad 5x^2 = 3\ 125, \qquad 7x^2 = 0,30,$$

$$\frac{x^2}{9} = 25, \qquad \frac{x^2}{5} = 14. \qquad \frac{2x^2}{7} = 0,25.$$

5. Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις:

$$x^2 + 4 = 20, \qquad 2x^2 - 5 = 65, \qquad 4\pi x^2 = 0,36$$

(τὸ γράμμα π παριστάνει τὸ γνωστὸ ἀριθμὸ 3,14).



Σχ. 14-α.

6. Ἡ διατομὴ μιᾶς σιδερένιας λάμας (σχ. 14-α) εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο μὲ μῆκος τριπλάσιο ἀπὸ τὸ πλάτος του.

1ο. Ἂν παραστήσετε μὲ x τὸ πλάτος του, ποιὰ παράσταση θὰ σᾶς δώση τὸ μῆκος του;

2ο. Ἐκφράστε μὲ τὸ γράμμα x καὶ κατάλληλους ἀριθμοὺς τὸ ἐμβαδὸ F τῆς διατομῆς.

3ο. Ἂν σᾶς δοθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸ F τῆς διατομῆς αὐτῆς εἶναι 363 mm^2, ποιές εἶναι οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου της;

7. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις ποὺ πρέπει νὰ δώσωμε σὲ μιὰν ὀρθογώνια λαμαρίνα μὲ ἐμβαδὸ 486 cm^2 γιὰ νὰ εἶναι τὸ πλάτος της ἴσο μὲ τὰ 3/4 τοῦ μήκους της.

8. Ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸ 1ο μ' ἕνα ὀρθογώνιο 16 cm × 23 cm, 2ο μὲ ἕνα ρόμβο ποὺ οἱ διαγώνιοί του ἔχουν μῆκος 28 cm καὶ 15 cm, 3ο μ' ἕνα τραπέζιο ποὺ οἱ βάσεις του ἔχουν μῆκος 20 cm καὶ 30 cm καὶ ποὺ τὸ ὕψος του εἶναι 22 cm.

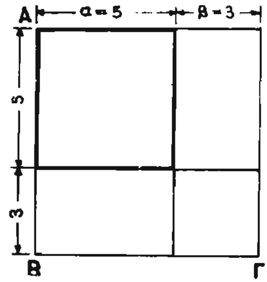
9. Ἂν δὲν λογαριάσωμε τὴν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, τὸ διάστημα s (σὲ m) ποὺ διατρέχει σὲ t (sec) ἕνα σῶμα, ὅταν πέφτῃ ἐλεύθερα, δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο: $s = 4{,}9\ t^2$. Πόσα δευτερόλεπτα χρειάζεται ἕνα σῶμα γιὰ νὰ πέσῃ κατὰ 200 m; κατὰ 50 m; Ἡ πρώτη ἀπ' αὐτὲς τὶς δυὸ χρονικὲς διάρκειες πόσο πιὸ μεγάλη εἶναι ἀπὸ τὴ δεύτερη;

Μάθημα 15.

Τετράγωνο ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς.

Γινόμενο τοῦ ἀθροίσματος δυὸ ἀριθμῶν ἐπὶ τὴ διαφορά τους.

1. Γιὰ νὰ βροῦμε μιὰ ἔκφραση γιὰ τὸ τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος δυὸ ἀριθμῶν, π.χ. τοῦ $(5+3)$, ἐξετάζομε τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰ $(5+3)$ cm (σχ. 15-α).



Σχ. 15-α.
$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

Σύμφωνα μὲ τὸ σχῆμα ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκόλουθων ἐπιφανειῶν :

ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 5 cm : 5^2 cm²
δυὸ ὀρθογωνίων 5 cm × 3 cm : $2 \cdot 5 \cdot 3$ cm²
καὶ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 3 cm : 3^2 cm².

Ἀπ' ἐδῶ συμπεραίνομε ὅτι θὰ βροῦμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα εἴτε ὑψώσωμε στὸ τετράγωνο τὸ $8=(5+3)$ εἴτε ἐκτελέσωμε τὸν ὑπολογισμό : $5^2+2\cdot5\cdot3+2^2$. Αὐτὸ ἄλλωστε ἐπαληθεύεται καὶ ἀμέσως, διότι :

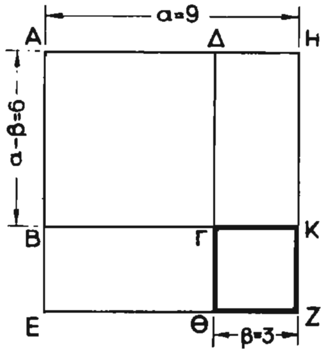
$$(5+3)^2=8^2=64=25+30+9=5^2+2\cdot5\cdot3+3^2.$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκομε γενικὰ τὴν ἰσότητα:

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,$$

ποὺ ἀληθεύει ὁποιες τιμὲς κι ἂν δώσωμε στὰ γράμματα α, β.

2. Γιὰ νὰ βροῦμε μιὰ δεύτερη ἔκφραση γιὰ τὸ τετράγωνο μιᾶς διαφορᾶς, π.χ. τῆς $(9-3)$, ἐξετάζομε πῶς μποροῦμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, μὲ πλευρὰ $9-3=6$ cm, νὰ τὴν ἀποκτήσωμε ξεκινώντας ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ΑΕΖΗ μὲ πλευρὰ 9 cm (σχ. 15-β).



Σχ. 15-β.
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$.

Τὸ σχῆμα δείχνει ὅτι αὐτὸ τὸ πετυχαίνομε ὡς ἑξῆς:

Στὴν ἐπιφάνεια 9^2 cm^2 τοῦ τετραγώνου ΑΕΖΗ προσθέτομε τὴν ἐπιφάνεια 3^2 cm^2 τοῦ τετραγώνου ΓΘΖΚ μὲ πλευρὰ 3 cm καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ἀφαιροῦμε τὶς ἐπιφάνειες τῶν δυὸ ὀρθογωνίων ΒΕΖΚ καὶ ΔΘΖΗ, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαστάσεις 9 cm × 3 cm.

Ἔτσι προκύπτει ὅτι θὰ βροῦμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα εἴτε ὑψώσωμε τὸ $6 = (9 - 3)$ στὸ τετράγωνο εἴτε ἐκτελέσωμε τὸν ὑπολογισμὸ $9^2 + 3^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3$. Αὐτὸ ἄλλωστε μποροῦμε καὶ νὰ τὸ ἐπαληθεύσωμε ἀμέσως:

$$(9 - 3)^2 = 6^2 = 36 = 81 + 9 - 54 = 9^2 + 3^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3.$$

Ὅμοια βρίσκομε γενικὰ τὴν ἰσότητα

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta,$$

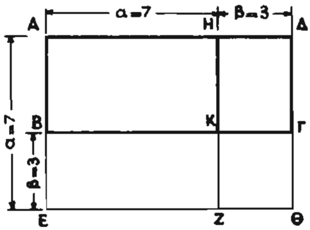
ποὺ ἀληθεύει ὁποιες τιμὲς κι ἂν δώσωμε στὰ γράμματα α, β (ἀρκεῖ μόνο νὰ εἶναι $\alpha \geqq \beta$, γιὰ νὰ μπορῇ νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεση $\alpha - \beta$). Σημειώνομε ὅτι ἡ παραπάνω ταυτότητα γράφεται καὶ ἔτσι:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2.$$

3. Γιὰ νὰ βροῦμε μιὰ δεύτερη ἔκφραση γιὰ τὸ γινόμενο τοῦ ἀθροίσματος δυὸ ἀριθμῶν ἐπὶ τὴ διαφορά τους, π.χ. γιὰ τὸ $(7 + 3) \cdot (7 - 3)$, ἐξετάζομε πῶς μποροῦμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, μὲ διαστάσεις $(7 + 3)$ cm × $(7 - 3)$ cm, νὰ τὴν ἀποκτήσωμε ξεκινώντας ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ΑΕΖΗ μὲ πλευρὰ 7 cm.

Τὸ σχῆμα δείχνει ὅτι αὐτὸ τὸ πετυχαίνομε ὡς ἑξῆς:

Ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια 7^2 cm^2 τοῦ τετραγώνου ΑΕΖΗ μὲ πλευρὰ 7 cm ἀφαιροῦμε τὴν ἐπιφάνεια $7 \cdot 3$ cm^2 τοῦ ὀρθογωνίου ΒΕΖΚ μὲ διαστάσεις 7 cm $\times$ 3 cm, στὸ ὑπόλοιπο προσθέτομε τὴν ἐπιφάνεια $7 \cdot 3$ cm^2 τοῦ ὀρθογωνίου ΗΖΘΔ μὲ τὶς ἴδιες διαστάσεις 7 cm $\times$ 3 cm καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἀφαιροῦμε τὴν ἐπιφάνεια 3^2 cm^2 τοῦ τετραγώνου ΚΖΘΓ μὲ πλευρὰ 3 cm. Τὰ δυὸ ὅμως ὀρθογώνια ΒΕΖΚ καὶ ΗΖΘΔ ἔχουν τὴν ἴδια ἐπιφάνεια· ἄρα ἡ ἀφαίρεση τοῦ πρώτου καὶ ἡ πρόσθεση τοῦ δευτέρου ἐξουδετερώνουν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη. Ἑπομένως γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἀρκεῖ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ΑΕΖΗ ν' ἀφαιρέσωμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ΚΖΘΓ.



Σχ. 15-γ.
$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Ἀπ' ἐδῶ συμπεραίνομε ὅτι θὰ βροῦμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα εἴτε ἐκτελέσωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ $(7+3)\cdot(7-3)$ εἴτε κάμωμε τὸν ὑπολογισμὸ 7^2-3^2. Αὐτὸ ἐπαληθεύεται καὶ ἀμέσως:

$$(7+3)\cdot(7-3)=10\cdot4=40=49-9=7^2-3^2.$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκομε γενικὰ τὴν ἰσότητα:

$$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2,$$

ποὺ ἀληθεύει ὁποιες τιμὲς κι ἂν δώσωμε στὰ γράμματα α, β (φθάνει μόνο νὰ εἶναι $\alpha \geqq \beta$ γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ κάμωμε τὴν ἀφαίρεση $\alpha-\beta$).

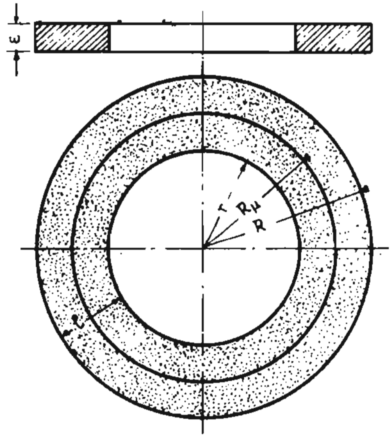
Ἀσκήσεις. *1.* Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις:

$x^2+4x+4=(x+2)^2=64,\qquad x^2-2x+1=(x-1)^2=49,$

$(x+1)(x-1)=x^2-1=35,\ (x+5)(x-5)=x^2-25=24.$

2. Ἂν ἐλαττώσετε κατὰ 2 cm τὴν πλευρὰ ἑνὸς τετραγωνικοῦ πίνακα, θὰ μικράνετε τὴν ἐπιφάνειά του κατὰ 96 cm^2. Ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ τοῦ ἀρχικοῦ πίνακα.

3. Γιὰ νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος τῆς ροδέλας, ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 15-δ, ὑπολογίζετε προηγουμένως τὴν ἐπιφάνεια F τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου (τῆς στεφάνης) ποὺ δίνει τὴν κάτοψή της. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ὑπολογίζεται ἀπὸ τὸν τύπο: $F = \pi R^2 - \pi r^2$ (παράβαλε καὶ τὴν Ἄσκ. 5 τοῦ Μαθ. 13).



Σχ. 15-δ. Ὑπολογίστε μὲ δυὸ διαφορετικοὺς τρόπους τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς κυκλικοῦ δακτυλίου.

Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ἰσοῦται καὶ μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς «μέσης περιφέρειας» τοῦ δακτυλίου (ἡ ἀκτίνα R_μ τῆς μέσης περιφέρειας ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{R+r}{2}$) ἐπὶ τὸ πλάτος $l = R - r$ τοῦ δακτυλίου.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: ἐξωτερικὴ διάμετρος τῆς ροδέλας 12 mm, ἐσωτερικὴ διάμετρος 5,5 mm. Ὑπολογίστε μὲ τοὺς παραπάνω δυὸ τρόπους τὴν ἐπιφάνεια τῆς μιᾶς ὄψης της. Ποιός ἀπὸ τοὺς δυὸ τρόπους εἶναι προτιμότερος;

4. Κατεργάζεστε στὸν τόρνο ἕνα κυλινδρικὸ κομμάτι ποὺ ἔχει διάμετρο d mm. Ἂν μ' ἕνα πάσο βάθους 1 mm ἡ διατομὴ τοῦ κομματιοῦ μικραίνῃ κατὰ 91 mm^2, ποιά εἶναι ἡ ἀρχικὴ διάμετρος d τοῦ κυλινδρικοῦ κομματιοῦ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μάθημα 16.

Πολλαπλάσια καὶ διαιρέτες ἀκεραίων.

Χαρακτῆρες διαιρετότητας.

Δοκιμὴ διὰ τοῦ 9.

1. Πολλαπλάσια καὶ διαιρέτες ἀκεραίων.

Παράδειγμα. Ὁ ἀκέραιος 45 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀκεραίου 9 (πράξη 1)· Αὐτὸ πάει νὰ πῇ ὅτι ὑπάρχει ἕνας ἀκέραιος (ὁ 5) ποὺ πολλαπλασιάζοντας τὸν 9 δίνει γινόμενο τὸν 45 (πράξη 2).

$$\begin{array}{r|l} 45 & 9 \\ \hline -45 & 5 \\ \overline{\ \ 0} & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \times 5 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$45:9=\frac{45}{9}=5 \qquad 5\times9=45$$

(πράξη 1) (πράξη 2)

Τὰ παραπάνω τὰ ἐκφράζομε καὶ μὲ τὰ ἀκόλουθα λόγια:

Ὁ ἀκέραιος 45 εἶναι *διαιρετὸς διὰ* τοῦ 9 (παραλείποντας γιὰ συντομία τὸ «ἀκριβῶς»)· ἐπίσης λέμε: ὁ 45 εἶναι *πολλαπλάσιο* τοῦ 9. Ἀντίστροφα λέμε: ὁ ἀκέραιος 9 εἶναι *διαιρέτης* τοῦ ἀκεραίου 45. (Παράβαλε Τόμ. Α΄, Εἰσαγωγή, § 29).

2. Γράφοντας τὴ σειρὰ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 2:

$0\cdot2=0,\ 1\cdot2=2,\ 2\cdot2=4, \ldots,\ 5\cdot2=10, \ldots,\ 8\cdot2=16,\ 9\cdot2=18, \ldots$

παρατηροῦμε ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ πολλαπλάσια τελειώνουν σ᾽ ἕνα ἀπὸ τὰ ψηφία 0, 2, 4, 6, 8 ποὺ εἶναι διαιρετὰ διὰ τοῦ 2 καὶ ποὺ λέγονται ἄρτια (ζυγὰ) ψηφία.

Ὥστε : *ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2, ὅταν τελειώνῃ σὲ ἄρτιο (ζυγὸ) ψηφίο.*

Παρατήρηση. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ποὺ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2 λέγονται *ἄρτιοι* (ζυγοί) ἀριθμοί, οἱ ὑπόλοιποι ἀκέραιοι λέγονται *περιττοὶ* (μονοί).

3. Γράφοντας τὴ σειρὰ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 :
$0 \cdot 5 = 0$, $1 \cdot 5 = 5$, $2 \cdot 5 = 10$, $3 \cdot 5 = 15$, $4 \cdot 5 = 20$, $5 \cdot 5 = 25$, ... παρατηροῦμε ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ πολλαπλάσια τελειώνουν ἢ σὲ 0 ἢ σὲ 5.

Ὥστε, *ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5, ὅταν τελειώνῃ ἢ σὲ 0 ἢ σὲ 5.*

4. Γράφοντας τὴ σειρὰ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 9 :
$0 \cdot 9 = 0$, $1 \cdot 9 = 9$, $2 \cdot 9 = 18$, $3 \cdot 9 = 27$, $4 \cdot 9 = 36$, $5 \cdot 9 = 45$, ... παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀπ' αὐτὰ εἶναι διαιρετὸ διὰ τοῦ 9. Π. χ. γιὰ τὸ πολλαπλάσιο $32 \times 9 = 288$ ἔχομε: $2 + 8 + 8 = 18$, ὅπου τὸ ἄθροισμα 18 εἶναι διαιρετὸ διὰ τοῦ 9.

Ὥστε : *ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸ διὰ τοῦ 9.*

Ἂν γράφαμε τὴ σειρὰ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 :
$0 \cdot 3 = 0$, $1 \cdot 3 = 3$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 3 = 12$, $5 \cdot 3 = 15$, ... θὰ παρατηρούσαμε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀπ' αὐτὰ εἶναι διαιρετὸ διὰ τοῦ 3. Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 15 εἶναι τὸ 6 ποὺ εἶναι διαιρετὸ διὰ τοῦ 3.

Ὥστε : *ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸ διὰ τοῦ 3.*

Οἱ ἰδιότητες, ποὺ διατυπώσαμε στοὺς παραπάνω παραγράφους 2 ὡς 4, μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ἐξακριβώσωμε ἂν ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 9· γι' αὐτὸ λέγονται *χαρακτῆρες διαιρετότητας διὰ 2 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 9.*

5. Ἂς πάρωμε τώρα ἕναν ὁποιοδήποτε ἀκέραιο. Ἂν εἶναι, ὅπως π. χ. ὁ 288, διαιρετὸς διὰ 9, τότε τὸ ὑπόλοιπο ποὺ βρίσκομε διαιρώντας τον διὰ 9 εἶναι τὸ 0, καὶ τὸ ὑπόλοιπο αὐτὸ εἶναι *ἴσο* μὲ τὸ ὑπόλοιπο ποὺ βρίσκομε διαιρώντας τὸ ἄθροισμα $18 = 2 + 8 + 8$ τῶν ψηφίων του διὰ 9. Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα ἀληθεύει καὶ ὅταν ὁ ἀκέραιος ποὺ παίρνομε δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 9. Π. χ. ὁ 483 καὶ τὸ ἄθροισμα $15 = 4 + 8 + 3$ τῶν ψηφίων του ἀφήνουν, ὅταν διαιρεθοῦν διὰ 9, *τὸ ἴδιο* ὑπόλοιπο 6. Ὅταν ὅμως ἕνας ἀκέραιος δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, τότε ἡ διαίρεσή του διὰ 9 ἔχει ὑπόλοιπο ἕναν ἀπὸ τοὺς *ὀκτὼ* ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (ἐνῶ, ὅταν εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ἡ διαίρεσή του διὰ 9 ἔχει ὑπόλοιπο ***ἕναν*** μόνο ἀριθμό, τὸ 0). Ἑπομένως, ἂν πάρωμε ἕναν ἀκέραιο στὴν τύχη, ἡ περίπτωση νὰ μὴν εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 εἶναι ὀκτὼ φορὲς πιὸ συχνὴ (πιὸ πιθανὴ) ἀπὸ τὴν περίπτωση νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9.

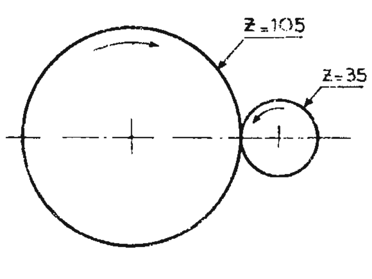
Στὶς παραπάνω ἰδιότητες τῆς διαίρεσης ἑνὸς ἀκεραίου διὰ 9 στηρίζεται ἡ γνωστή μας « δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 » ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ μιᾶς διαίρεσης (βλ. Τόμ. Α΄, Εἰσαγωγή, σελ. 24 καὶ σελ. 33). Παρατηροῦμε ἤδη ὅτι ἡ ἐργασία ποὺ καλέσαμε τότε « μίκρεμα ἑνὸς ἀκεραίου διὰ τοῦ 9 », δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἀντικατάστασή του μὲ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσής του διὰ τοῦ 9. Π. χ. μικραίνοντας τὸν 54 948 διὰ τοῦ 9 εἴχαμε βρεῖ 3. Αὐτὸ τὸ 3 εἶναι ὅμως τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης 54 948 : 9 ἢ τῆς $(5 + 4 + 9 + 4 + 8) : 9 = 30 : 9$, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω.

6. Ἂς χρησιμοποιήσωμε τώρα τὴ δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 γιὰ νὰ ἐλέγξωμε τὴν ἐξαγωγὴ μιᾶς τετραγωνικῆς ρίζας. Ἔστω ὅτι βγάζοντας τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 21 535, μὲ προσέγγιση μιᾶς μονάδας ἀπὸ κάτω, βρήκαμε ρίζα τὸ 146 καὶ ὑπόλοιπο τὸ 219. Θὰ μπορούσαμε βέβαια νὰ ἐλέγξωμε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, ἐξετάζοντας ἂν:

$$146^2 + 219 = 146 \cdot 146 + 219 \text{ εἶναι ἴσο μὲ } 21\,535,$$

πράγμα ποὺ ἀληθινὰ συμβαίνει. Ὅμως πολὺ πιὸ σύντομος εἶναι ὁ ἀκόλουθος ἔλεγχος διὰ τοῦ 9:

Μικραίνομε διὰ τοῦ 9 τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς δυὸ παράγοντες 146, δηλαδὴ τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ποὺ ἐλέγχομε· βρίσκομε 2. Πολλαπλασιάζομε τὸ 2 μὲ τὸ 2 (ἀντὶ τὸ 146 μὲ τὸ 146) καὶ τὸ γινόμενο 4 τὸ μικραίνομε διὰ τοῦ 9, προκύπτει 4. Μικραίνομε διὰ τοῦ 9 τὸν προσθετέο 219, δηλαδὴ τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἐξαγωγῆς ποὺ ἐλέγχομε· προκύπτει 3. Προσθέτομε τὸ 4 μὲ τὸ 3, προκύπτει 7. Πρέπει τώρα, ἂν ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ρίζας $\sqrt{21\,535}$ ἔγινε σωστά, νὰ ξαναβροῦμε αὐτὸ τὸ 7, μικραίνοντας τὸ 21 535 διὰ τοῦ 9· ἔχομε πραγματικὰ $2+1+5+3=11$, $1+1=2$, $2+5=7$. Ὥστε ἡ παραπάνω ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς εἶναι πιθανότατα σωστή. Λέμε «πιθανότατα» καὶ ὄχι «ἐξάπαντος» σωστή, γιατί, ὅπως παρατηρήσαμε καὶ στὸν Τόμ. Α΄, σελ. 77, Ἄσκ. 6, ἡ δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 δὲν μπορεῖ νὰ μᾶς φανερώση τὰ (σπάνια) λάθη ὑπολογισμοῦ ποὺ εἶναι διαιρετὰ διὰ 9. Π. χ. ἂν ἀντὶ 146 παίρναμε γιὰ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 21 535 τὸ $146+18=164$ καὶ γιὰ ὑπόλοιπο τὸ $219-90=129$, ἡ δοκιμὴ διὰ τοῦ 9, σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω μέθοδο, θὰ ἔβγαζε σωστὴ τὴν ἰσότητα $164^2+129=21\,535$, μολονότι δὲν εἶναι, ἐπειδὴ $164^2+129 = 27\,025 \neq 21\,535$.



Σχ. 16-α. Τροχὸς καὶ τροχίσκος.

Ἀσκήσεις. *1.* Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχει 3 ψηφία. Τὸ πρῶτο εἶναι 7 καὶ τὸ τρίτο 5. Ποιό πρέπει νὰ εἶναι τὸ δεύτερο ψηφίο x γιὰ νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9; Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἀπάντησή σας.

2. Ἕνας ὀδοντωτὸς τροχὸς ἔχει 105 δόντια καὶ παρασύρει σὲ κίνηση ἕνα τροχίσκο μὲ 35 δόντια (σχ. 16-α). Κάθε φορὰ ποὺ ὁ τροχὸς κάνει ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ ὁλάκερες στροφές, ἄραγε θὰ κάμη καὶ ὁ τρο-

χίσκος ἀκέραιο ἀριθμὸ ὁλάκερες στροφές; Καὶ γιατί; Τί θὰ συνέβαινε, ἂν ὁ τροχὸς εἶχε 100 δόντια ἀντὶ 105;

3. Σᾶς δίνουν τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 5 076. Ἀλλάζοντας μόνο τὴ σειρὰ τῶν ψηφίων του βρῆτε ἕναν ἄλλο ἀκέραιο ποὺ νὰ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 9.

4. Δεῖξτε ὅτι ἕνας ἀκέραιος διαιρετὸς διὰ 9 εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 3. Δεῖξτε μ' ἕνα παράδειγμα ὅτι τὸ ἀντίστροφο δὲν ἀληθεύει, δηλαδὴ ὅτι ἕνας ἀκέραιος μπορεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 χωρὶς νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9.

5. Ἐλέγξτε διὰ τοῦ 9 τὴν πρόσθεση:

$$7\,549+461+88\,623+43=96\,676.$$

Μὲ ἄλλα λόγια, ἐξετάστε ἂν ἡ παραπάνω ἰσότητα ἀληθεύῃ, ὅταν, ἀφοῦ ἀντικαταστήσετε τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς πέντε ἀριθμούς της μὲ τὸ ἐξαγόμενο ποὺ βρίσκετε μικραίνοντάς τον διὰ τοῦ 9, μικράνετε πάλι διὰ τοῦ 9 τὸ ἄθροισμα ἀριστερὰ τοῦ $=$.

6. Ἐφαρμόστε τὴ δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 στὸν πολλαπλασιασμό:

$$893\cdot 62\cdot 105=5\,813\,430.$$

Μὲ ἄλλα λόγια, ἐξετάστε ἂν ἡ παραπάνω ἰσότητα ἀληθεύῃ, ὅταν, ἀφοῦ ἀντικαταστήσετε τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς τέσσερις ἀριθμούς της μὲ τὸ ἐξαγόμενο ποὺ βρίσκετε μικραίνοντας τον διὰ τοῦ 9, μικράνετε πάλι διὰ τοῦ 9 τὸ γινόμενο ἀριστερὰ τοῦ $=$.

7. Δοκιμάστε διὰ τοῦ 9, ἂν ἡ διαίρεση 79 623 : 48 ἔχῃ στ' ἀλήθεια πηλίκο 1 658 καὶ ὑπόλοιπο 36. Ἂν ἡ δοκιμὴ δείξῃ πὼς αὐτὸ δὲν ἀληθεύει, βρῆτε μὲ διαίρεση τὰ σωστὰ ἐξαγόμενα.

8. Δοκιμάστε διὰ τοῦ 9, ἂν εἶναι σωστὸ τὸ ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τοῦ 1 188 165: τετραγωνικὴ ρίζα μὲ προσέγγιση μιᾶς μονάδας ἀπὸ κάτω: 1 090, ὑπόλοιπο: 65.

9. Δεῖξτε ὅτι ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 (ἢ διὰ τοῦ 25), ὅταν τὰ δυὸ τελευταῖα ψηφία του ἀποτελοῦν ἀριθμὸ διαιρετὸ διὰ τοῦ 4 (ἢ διὰ τοῦ 25).

Μάθημα 17.

Ἀριθμοὶ πρῶτοι. Διαιρέτες ἑνὸς ἀκεραίου.

1. **Ἕνας ἀκέραιος δ, ποὺ δὲν εἶναι μηδέν, λέγεται διαιρέτης ἑνὸς ἀκεραίου α,** ὅταν διαιρῇ τὸ α ἀκριβῶς, μὲ ἄλλα λόγια, ὅταν ὑπάρχῃ ἕνας ἀκέραιος β ποὺ πολλαπλασιάζοντας τὸν δ μᾶς δίνει τὸν α, δηλαδὴ $\alpha = \delta \cdot \beta$ (βλ. καὶ Μάθ. 16).

Σύμφωνα μ' αὐτὸν τὸν ὁρισμὸ τοῦ διαιρέτη, ὁ ἀκέραιος 0 ἔχει διαιρέτες τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους 1, 2, 3, 4, κτλ. Καὶ ἀλήθεια:

$$0 = 1 \cdot 0, \quad 0 = 2 \cdot 0, \quad 0 = 3 \cdot 0, \quad 0 = 4 \cdot 0, \text{ κτλ.}$$

Ὁ ἀκέραιος 1 ἔχει ἕνα μόνο διαιρέτη, τὸν ἑαυτό του. Καὶ ἀλήθεια $1 = 1 \cdot 1$. Ἐξάλλου κανένας ἀκέραιος μεγαλύτερος ἀπὸ 1 δὲν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ 1.

Ἂς ἐξετάσωμε τώρα πόσους διαιρέτες ἔχουν οἱ ἀκέραιοι

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots \qquad (1)$$

ποὺ εἶναι *πιὸ μεγάλοι ἀπὸ τὸ 1.*

Μερικοὶ ἀπ' αὐτούς, ὅπως ὁ 2, ὁ 3, ὁ 5, ὁ 7, ὁ 11, ὁ 13 κτλ. ἔχουν *δυὸ* διαιρέτες: τὸ 1 καὶ τὸν ἑαυτό τους. Π.χ. ὁ 5 εἶναι διαιρετὸς διὰ 1 καὶ διὰ 5, δὲν διαιρεῖται ὅμως οὔτε διὰ 2, οὔτε διὰ 3, οὔτε διὰ 4, οὔτε φυσικὰ δι' ἑνὸς ἀκεραίου μεγαλύτερου ἀπὸ 5.

Οἱ ἄλλοι ἀκέραιοι τῆς σειρᾶς (1) ἔχουν *περισσότερους ἀπὸ 2* διαιρέτες. Π.χ. ὁ 6 ἔχει τέσσερις διαιρέτες: τοὺς 1, 2, 3, 6. Ὁ ἀκέραιος 9 ἔχει τρεῖς διαιρέτες: τοὺς 1, 3, 9.

Ἕνας ἀκέραιος, πιὸ μεγάλος ἀπὸ τὸ 1, λέγεται πρῶτος ἀριθμὸς (ἢ ἀριθμὸς πρῶτος), ὅταν ἔχῃ μόνο δυὸ διαιρέτες: τὸ 1 καὶ τὸν ἑαυτό του· λέγεται σύνθετος, ὅταν ἔχῃ περισσότερους ἀπὸ δυὸ διαιρέτες.

Ὁ παρακάτω πίνακας περιέχει τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι πρῶτοι καὶ μικρότεροι ἀπὸ τὸ 500, γραμμένους σὲ σειρὰ αὐξάνοντος μεγέθους:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
83	89	97								
101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	
211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269
271	277	281	283	293						
307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367
373	379	383	389	397						
401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499.					

2. Ἀνάλυση ἑνὸς σύνθετου ἀριθμοῦ σὲ γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ἕνας σύνθετος ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ ἕνα εντελῶς δρισμένο γινόμενο ἀπὸ πρώτους ἀριθμούς. Π.χ. ὁ σύνθετος 4 ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο $2 \cdot 2$, ὁ σύνθετος 6 μὲ τὸ γινόμενο $2 \cdot 3$, ὁ σύνθετος 12 μὲ τὸ γινόμενο $2 \cdot 2 \cdot 3$. Ἡ εὕρεση αὐτοῦ τοῦ γινομένου καθὼς καὶ τὸ ἴδιο τὸ γινόμενο λέγονται *ἀνάλυση τοῦ σύνθετου ἀριθμοῦ στοὺς πρώτους παράγοντές του*. Ἡ ἀνάλυση αὐτή, ποὺ μᾶς χρειάζεται στὰ παρακάτω μαθήματα, γίνεται μὲ μιὰ μέθοδο ποὺ ἐκθέτομε στὸ ἑπόμενο παράδειγμα.

Ἂς σημειωθῆ πὼς γιὰ ἕναν πρῶτο ἀριθμὸ λέμε *ἀνάλυσή του σὲ πρώτους παράγοντες* αὐτὸν τὸν ἴδιο τὸν ἀριθμό· π.χ. ἀνάλυση τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ 7 στοὺς πρώτους παράγοντές του εἶναι τὸ 7.

Παράδειγμα. *Ν' ἀναλυθῆ ὁ σύνθετος 140 στοὺς πρώτους παράγοντές του.*

Χρησιμοποιώντας τὸν παραπάνω πίνακα πρώτων ἀριθμῶν, *διαιροῦμε διαδοχικὰ τὸ 140 διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν ποὺ εἶναι διαιρέτες του*: ἀρχίζομε μὲ τὸν μικρότερο διαιρέτη καὶ ἐπαναλαμβάνομε τὴ διαίρεση διὰ τοῦ ἴδιου διαιρέτη ὅσες φορὲς τὸ πηλίκο ποὺ βρίσκομε ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸ διὰ τοῦ διαιρέτη ποὺ ἤδη χρησιμοποιήσαμε.

Ἔτσι ἔχομε:

$140 : 2 = 70$

$70 : 2 = 35$

$35 : 5 = 7$

$7 : 7 = 1.$

Καὶ γράφομε μὲ σύντομο τρόπο:

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ἡ ἐργασία τῆς ἀνάλυσης τελειώνει ὅταν φθάσωμε σὲ πηλίκο 1. Τὸ ἀποτέλεσμα στὸ παραπάνω παράδειγμα εἶναι:

$$140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Ὁ ἀριθμὸς 140 ἔχει φυσικὰ ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς πρώτους διαιρέτες ποὺ χρησιμοποιήσαμε στὴν παραπάνω ἀνάλυσή του καὶ ἄλλους διαιρέτες: τὸ 1, τὸ 140, τὸ 4, τὸ 10 κτλ.

3. Γιὰ νὰ καταγράψωμε ὅλους τοὺς διαιρέτες ἑνὸς σύνθετου ἀριθμοῦ, ποὺ ἀναλύσαμε στοὺς πρώτους παράγοντές του, ἐργαζόμαστε μὲ τὴ μέθοδο ποὺ ἐξηγοῦμε στὸ ἀκόλουθο παράδειγμα.

Πρόβλημα. *Νὰ καταγραφοῦν ὅλοι οἱ διαιρέτες τοῦ 140 ποὺ ἀναλύεται στὸ γινόμενο $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ πρώτων παραγόντων.*

Γράφομε πρῶτα σὲ μιὰ στήλη, τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο κατὰ σειρὰ μεγέθους, ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντες στοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 140. Ὕστερα τραβοῦμε μιὰ γραμμὴ παράλληλα πρὸς τὴ στήλη καὶ δεξιά της γράφομε διαδοχικὰ ὅλους τοὺς διαιρέτες τοῦ 140 μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο: Ἀρχίζομε μὲ τὸν πιὸ μικρὸ διαιρέτη, τὸ 1, τὸν ὁποῖο γράφομε πιὸ ψηλὰ ἀπὸ τὴ γραμμὴ τοῦ πρώτου 2. Στὴ γραμμὴ τοῦ πρώτου 2 γράφομε δεξιὰ τὸ γινόμενο

	1
2	2
2	4
5	5, 10, 20
7	7, 14, 28, 35, 70, 140.

$2 \cdot 1 = 2$. Στὴ γραμμὴ τοῦ δεύτερου 2 γράφομε τὰ δυὸ γινόμενά του μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 2 ποὺ γράψαμε κιόλας δεξιά, σβήνομε ὅμως τὸ γινόμενο $2 \cdot 1 = 2$ ποὺ γράφτηκε ἤδη. Στὴ γραμμὴ τοῦ 5 γράφομε δεξιὰ τὰ τρία γινόμενά του μὲ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ποὺ γράφτηκαν κιόλας δεξιά. Τέλος, στὴ γραμμὴ τοῦ 7 γράφομε δεξιὰ τὰ γινόμενά του μὲ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἕξι ἀριθμοὺς ποὺ γράφτηκαν ἤδη δεξιά.

Διαιρέτες τοῦ 140 εἶναι οἱ δώδεκα ἀκέραιοι

1, 2, 4, 5, 10, 20, 7, 14, 28, 35, 70, 140

καὶ μόνον αὐτοί.

Ἀσκήσεις. 1. Ἀναλύστε στοὺς πρώτους παράγοντές τους τοὺς ἀριθμοὺς 300, 420, 217, 431, 815.

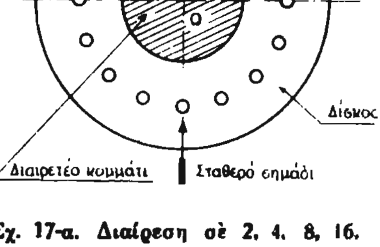
2. Δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $56 = 2^3 \cdot 7$ καὶ πῆτε πῶς μπορεῖτε νὰ βρῆτε ἀμέσως τὸ πηλίκο χρησιμοποιώντας τὶς ἀναλύσεις τους σὲ πρώτους παράγοντες. Ὅμοια δεῖξτε ὅτι ὁ $216 = 2^3 \cdot 3^3$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ $18 = 2 \cdot 3^2$ καὶ βρῆτε τὸ πηλίκο ἀπευθείας ἀπὸ τὶς ἀναλύσεις σὲ πρώτους παράγοντες. Τέλος δεῖξτε ὅτι ὁ $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ δὲν εἶναι διαιρετὸς οὔτε διὰ τοῦ $18 = 2 \cdot 3^2$ οὔτε διὰ τοῦ $14 = 2 \cdot 7$. Βλέπετε τὸ γιατί;

3. Ἀπ' ὅλους τοὺς διαιρέτες τοῦ 360 βρῆτε ἐκείνους ποὺ περιέχονται μεταξὺ 50 καὶ 100.

4. Ἀπὸ τοὺς δυὸ ἀριθμοὺς 315 καὶ 320 ποιὸς ἔχει τοὺς περισσότερους διαιρέτες;

5. Ἕνας (κυκλικὸς) δίσκος ἔχει 16 τρύπες ποὺ βρίσκονται σὲ ἴσες ἀποστάσεις μεταξύ τους πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια ὁμόκεντρη μὲ τὸ δίσκο (σχ. 17-α).

Ἄραγε μπορεῖτε, χρησιμο-



Σχ. 17-α. Διαίρεση σὲ 2, 4, 8, 16. ἴσα μέρη.

ποιώντας τὸ δίσκο, νὰ στρέψετε τὸ μονταρισμένο στὸ δίσκο κυλινδρικὸ κομμάτι κατὰ 180° (μοῖρες); κατὰ 90°; κατὰ 45°; κατὰ 22,5°;

Πῶς μπορεῖτε λοιπόν, χρησιμοποιώντας αὐτὸν τὸ δίσκο, νὰ διαιρέσετε σὲ 2, 4, 8, 16, ἴσα μέρη τὴν περιφέρεια τῆς διατομῆς ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ τὸ ὁποῖο ἔχετε μοντάρει πάνω στὸν ἴδιο ἄξονα μὲ τὸ δίσκο;

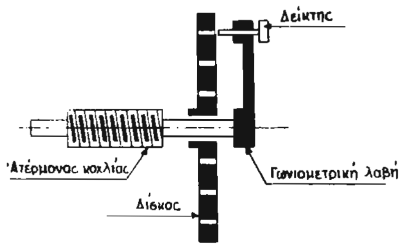
6. Ἔχετε ἕναν δίσκο ποὺ ἔχει 7 ὁμόκεντρες μὲ τὸ δίσκο κυκλικὲς σειρὲς ἀπὸ τρύπες· οἱ τρύπες τῆς καθεμιᾶς σειρᾶς ἔχουν ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις καὶ ὁ ἀριθμός τους πάνω στὶς 7 διάφορες σειρὲς εἶναι ἀντίστοιχα ἴσος μὲ

21, 23, 25, 27, 29, 31, 33.

1ο. Μπορεῖτε ἄραγε, χρησιμοποιώντας τὸν παραπάνω δίσκο, νὰ διαιρέσετε τὴν περιφέρεια ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ σὲ 9 ἴσα μέρη; Καὶ πῶς;

2ο. Μὲ τὸν ἴδιο δίσκο σὲ πόσα ἴσα μέρη μπορεῖτε νὰ διαιρέσετε τὴν περιφέρεια ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ ποὺ εἶναι μονταρισμένο πάνω στὸν ἴδιο ἄξονα μὲ τὸ δίσκο; Νὰ βρῆτε ὅλες τὶς λύσεις αὐτοῦ τοῦ προβλήματος, δηλαδὴ ὅλες τὶς διάφορες διαιρέσεις τῆς περιφέρειας τοῦ κομματιοῦ σὲ ἴσα μέρη τὶς ὁποῖες μπορεῖτε νὰ πετύχετε μὲ τὸν παραπάνω δίσκο.

7. Ἡ περιστροφὴ ἑνὸς ἀτέρμονα κοχλία ρυθμίζεται ἀπὸ μιὰ γωνιομετρικὴ λαβὴ μ' ἕνα κάθετο δείκτη, ὁ ὁποῖος μπορεῖ νὰ χωθῇ σὲ μιὰν ἀπὸ τὶς τρύπες ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου στερεωμένου πάνω στὸν σκελετὸ τοῦ διαιρετικοῦ μηχανήματος (σχ. 17-β).



Σχ. 17-β. Ἀρχὴ πάνω στὴν ὁποία στηρίζεται τὸ διαιρετικὸ μηχάνημα μὲ δίσκους.

Γνωρίζοντας ὅτι ὁ δίσκος ἔχει πέντε κυκλικὲς σειρὲς ἀπὸ ἀντίστοιχα

15, 16, 17, 18, 19, 20

τρύπες, μὲ ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις στὴν κάθε σειρά, πῆτε πῶς μποροῦμε νὰ στρέψωμε τὸν κοχλία κατὰ 1/5 στροφῆς, κατὰ 1/6 στροφῆς, κατὰ 1/4 στροφῆς κτλ.

Μάθημα 18.

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δυὸ ἢ περισσότερων ἀκεραίων.

Ἁπλοποίηση κλασμάτων.

1. Δυὸ ἢ περισσότεροι ἀκέραιοι ἔχουν πάντα ἕναν κοινὸ διαιρέτη, τὸ 1. Μποροῦν ὅμως νὰ ἔχουν καὶ ἄλλους κοινοὺς διαιρέτες. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 36 καὶ 60 ἔχουν διαιρέτες

ὁ πρῶτος τούς : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

ὁ δεύτερος τούς : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Ἄρα ἔχουν *κοινοὺς διαιρέτες* τούς :

1, 2, 3, 4, 6, 12.

Ὁ 12 εἶναι ὁ *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τους* (μὲ συντομογραφία: *μ. κ. δ.*).

2. Εὕρεση τοῦ μ. κ. δ. δυὸ ἢ περισσότερων ἀκεραίων. 1ο. Ἂν ἕνας ἀπὸ τοὺς δοσμένους ἀκεραίους εἶναι τὸ 0, τότε αὐτὸν μποροῦμε νὰ τὸν παραλείψωμε καὶ νὰ βροῦμε τὸν μ. κ. δ. τῶν ὑπολειπόμενων, γιατὶ τὸ 0 ἔχει διαιρέτη κάθε ἀκέραιο ποὺ δὲν εἶναι μηδὲν (βλ. Μάθ. 17, § 1). 2ο. Ἂν ἕνας ἀπὸ τοὺς δοσμένους ἀκεραίους εἶναι τὸ 1, τότε μ. κ. δ. τους εἶναι τὸ 1, γιατὶ τὸ 1 δὲν ἔχει ἄλλο διαιρέτη ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἑαυτό του. 3ο. Μᾶς μένει λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμε τὴν περίπτωση ποὺ ὅλοι οἱ δοσμένοι ἀκέραιοι εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ τὸ 1. Ἔστω π.χ. ὅτι ζητοῦμε τὸν μ. κ. δ. τῶν τριῶν ἀκεραίων 120, 144 καὶ 600.

Τοὺς ἀναλύομε πρῶτα στοὺς πρώτους παράγοντές τους:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 , \quad 144 = 2^4 \cdot 3^2, \quad 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Ἔπειτα σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς :

I. Ἕνας *κοινὸς διαιρέτης* τους δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ἔχη ἄλλους πρώτους παράγοντες ἐκτὸς ἀπὸ τὸν 2 καὶ τὸν 3, ποὺ εἶναι οἱ πρῶτοι παράγοντες οἱ κοινοὶ καὶ στοὺς τρεῖς ἀριθμούς. Καὶ ἀλήθεια, ἂν ἕνας ἀκέραιος ἔχῃ πρῶτο παράγοντα τὸν 5, τότε δὲν θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 144, καὶ ἂν ἔχῃ πρῶτο παράγοντα κάποιον ἄλλο, διαφορετικὸν ἀπὸ τὸ 2 καὶ τὸ 3, ἂς ποῦμε τὸν 7, τότε δὲν θὰ ἦταν διαιρέτης οὔτε τοῦ 120, οὔτε τοῦ 144, οὔτε τοῦ 600.

II. Ἕνας *κοινὸς διαιρέτης* τῶν τριῶν δοσμένων ἀκεραίων δὲν μπορεῖ νὰ περιέχῃ τὸν πρῶτο παράγοντα 2 σὲ μιὰ δύναμη μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν τρίτη, δηλαδὴ ἀπὸ τὴ μικρότερη μὲ τὴν ὁποία ὁ 2 παρουσιάζεται μέσα στὶς ἀναλύσεις τῶν τριῶν ἀκεραίων. Καὶ ἀλήθεια, ἂν ἕνας ἀκέραιος περιέχῃ στὴν ἀνάλυσή του τὸν πρῶτο παράγοντα 2 μὲ ἐκθέτη μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 3, τότε αὐτὸς ὁ ἀκέραιος δὲν θὰ ἦταν διαιρέτης οὔτε τοῦ 120 οὔτε τοῦ 600. Ὅμοια ἕνας κοινὸς διαιρέτης τῶν τριῶν ἀριθμῶν δὲν μπορεῖ νὰ περιέχῃ τὸν πρῶτο παράγοντα 3 σὲ μιὰ δύναμη μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν πρώτη, δηλαδὴ ἀπὸ τὴ μικρότερη μὲ τὴν ὁποία ὁ 3 παρουσιάζεται μέσα στὶς τρεῖς παραπάνω ἀναλύσεις (γιατὶ τότε δὲν θὰ ἦταν διαιρέτης τοῦ 120 καὶ τοῦ 600).

III. Ἑπομένως ἕνας *κοινὸς διαιρέτης* τῶν τριῶν ἀριθμῶν θὰ εἶναι μέγιστος, ὅταν περιέχῃ τὸν πρῶτο παράγοντα 2 στὴ δύναμη 3 καὶ τὸν παράγοντα 3 στὴ δύναμη 1. Ἄρα:

$$\mu.\kappa.\delta. \text{ τῶν } 120,\ 144 \text{ καὶ } 600 = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24.$$

Ὅμοια βρίσκομε ὅτι ὁ μ.κ.δ. τῶν $12 = 2^2 \cdot 3$ καὶ $50 = 2 \cdot 5^2$ εἶναι ὁ 2, γιατὶ ὁ μόνος κοινὸς πρῶτος παράγοντάς τους εἶναι ὁ 2 καὶ ἡ μικρότερη δύναμη μὲ τὴν ὁποία παρουσιάζεται εἶναι ἡ πρώτη. Τέλος μ.κ.δ. τῶν δυὸ ἀριθμῶν $28 = 2^2 \cdot 7$ καὶ $15 = 3 \cdot 5$ εἶναι τὸ 1, γιατὶ οἱ δυὸ αὐτοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ πρῶτο παράγοντα. Ἔτσι φτάνομε στὸν ἀκόλουθο κανόνα:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν μ. κ. δ. δυὸ ἢ περισσότερων ἀκεραίων ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ τὸ 1, τοὺς ἀναλύομε στους πρώτους παράγοντές τους. Ἂν οἱ ἀναλύσεις αὐτὲς δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ πρῶτο παράγοντα, τότε μ. κ. δ. εἶναι τὸ 1, ἂν ἔχουν ἕναν μόνο κοινὸ πρῶτο

παράγοντα, τότε μ. κ. δ. εἶναι ἡ πιὸ μικρὴ δύναμη μὲ τὴν ὁποία ὁ παράγοντας αὐτὸς παρουσιάζεται μέσα στὶς ἀναλύσεις· τέλος, ἂν ὑπάρχουν δυὸ ἢ περισσότεροι κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες, τότε μ. κ. δ. εἶναι τὸ γινόμενο τῶν πιὸ μικρῶν δυνάμεων μὲ τὶς ὁποῖες οἱ κοινοὶ αὐτοὶ παράγοντες παρουσιάζονται μέσα στὶς ἀναλύσεις.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω μποροῦμε νὰ συμπεράνωμε ὅτι *οἱ κοινοὶ διαιρέτες δυὸ ἢ περισσότερων ἀκεραίων εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ μέγιστου κοινοῦ διαιρέτη τους.*

Π. χ. οἱ κοινοὶ διαιρέτες τῶν 120, 144 καὶ 600 εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ μ. κ. δ. τους 24, δηλαδὴ οἱ 8 ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Οἱ κοινοὶ διαιρέτες τῶν 12 καὶ 50 εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ μ. κ. δ. τους 2, δηλαδὴ οἱ δυὸ ἀριθμοὶ 1, 2. Τέλος οἱ κοινοὶ διαιρέτες τῶν 28 καὶ 15 εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ μ. κ. δ. τους 1, δηλαδὴ τὸ 1.

3. Ἐφαρμογή. Γιὰ ν' ἀπλοποιήσωμε ἕνα κλάσμα ὅσο τὸ δυνατὸ περισσότερο, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστή του διὰ τοῦ πιὸ μεγάλου ἀκεραίου ποὺ διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τοὺς δυό, μὲ ἄλλα λόγια, *διαιροῦμε τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μέγιστου κοινοῦ διαιρέτη τους*. (Παράβ. Τόμ. Α', σελ. 115, § 4).

Π. χ. γιὰ νὰ δώσωμε στὸ κλάσμα $\frac{240}{360}$ τὴν πιὸ ἁπλὴ μορφή του, διαιροῦμε τοὺς δυὸ ὅρους του 240 καὶ 360 διὰ τοῦ μ. κ. δ. τους 120:

$$\frac{240}{360}=\frac{240:120}{360:120}=\frac{2}{3}$$

Τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ δὲν μπορεῖ πιὰ ν' ἀπλοποιηθῇ· οἱ δυὸ ὅροι του ἔχουν μ. κ. δ. τὸ 1. Ὅπως ξέρομε ἀπὸ τὸν Τόμ. Α', τὸ $\frac{2}{3}$ λέγεται *ἀνάγωγο κλάσμα.*

4. Γιὰ νὰ βροῦμε ὅλα τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ ἕνα δοσμένο κλάσμα, φέρνομε αὐτὸ τὸ κλάσμα στὴν πιὸ ἁπλὴ μορφή του (τὸ ἁπλοποιοῦμε, ὥστε νὰ γίνη ἀνάγωγο)· ἔπειτα πολλαπλασιάζομε τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ *ἀνάγωγου* κλάσματος, ποὺ πρόκυψε, διαδοχικὰ μὲ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, ... π. χ. τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ $\frac{240}{360}$ τὰ δίνει ὁ τύπος $\frac{2 \cdot \nu}{3 \cdot \nu}$, ὅπου τὸ ν εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος $\geqq 1$.

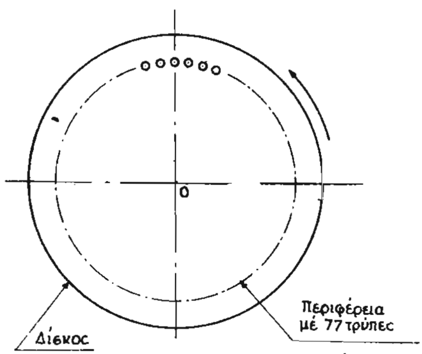
Παράδειγμα. *Σὲ μιὰ ἄσκηση μὲ τὴ φρέζα θέλομε νὰ στρέψωμε κατὰ $\frac{168}{924}$ μιᾶς στροφῆς ἕνα δίσκο ποὺ ἔχει μιὰ κυκλικὴ σειρὰ ἀπὸ 77 ἰσαπόστατες τρύπες. Πῶς πρέπει νὰ ἐνεργήσωμε;* (Σχ. 18-α).

Ἂς φέρωμε τὸ κλάσμα $\frac{168}{924}$ στὴν πιὸ ἁπλὴ μορφή του:

$$\left.\begin{aligned}168&=2^3\cdot 3\cdot 7\\ 924&=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\end{aligned}\right\}\ \begin{gathered}\text{μ. κ. δ.}\\ 2^2\cdot 3\cdot 7=84.\end{gathered}$$

Ἄρα:

$$\frac{168}{924}=\frac{168:84}{924:84}=\frac{2}{11}.$$



Σχ. 18-α. Νὰ στρέψετε τὸ δίσκο κατὰ $\frac{168}{924}$ μιᾶς στροφῆς.

Ἐξετάζομε τώρα ἂν μποροῦμε νὰ μετατρέψωμε τὸ κλάσμα $\frac{2}{11}$ σὲ ἕνα ἴσο, ποὺ νὰ ἔχη ὅμως παρονομαστὴ τὸν ἀριθμὸ τῶν τρυπῶν 77. Αὐτὸ γίνεται, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ $\frac{2}{11}$ μὲ 7:

$$\frac{2}{11}=\frac{2\cdot 7}{11\cdot 7}=\frac{14}{77}.$$

Ἑπομένως τὰ $\frac{168}{924}$ μιᾶς στροφῆς ἀντιστοιχοῦν σὲ 14 ἀπὸ τὰ 77 ἴσα μέρη στὰ ὁποία εἶναι διαιρεμένη ἡ περιφέρεια ποὺ ἀπάνω της βρίσκονται οἱ τρύπες τοῦ δίσκου.

Θὰ στρέψωμε λοιπὸν τὸν δίσκο κατὰ 14 διαστήματα ἀπὸ τὰ 77 ποὺ χωρίζουν τὶς τρύπες τοῦ δίσκου.

Ἀσκήσεις. *1.* Νὰ κάμετε ἀνάγωγα (μὲ ἄλλα λόγια, ἁπλοποιῆστε ὅσο μπορεῖτε) τὰ κλάσματα $\frac{80}{120}$, $\frac{105}{49}$, $\frac{360}{900}$.

2. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει διαστάσεις 24 cm × 30 cm. Θέλετε νὰ τὸ χωρίσετε σὲ ἴσα τετράγωνα. Ποιά πρέπει νὰ εἶναι ἡ πλευρά τους, ἂν σᾶς ζητήσουν τὰ τετράγωνα αὐτὰ νὰ εἶναι ὅσο τὸ δυνατὸ πιὸ μεγάλα;

3. Νὰ κόψετε σὲ κομμάτια ἴσου μήκους δυὸ ράβδους, ποὺ ἔχουν μῆκος ἀντιστοίχως 1 600 καὶ 960 mm, ἔτσι ποὺ τὸ κοινὸ μῆκος τῶν κομματιῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ 100 mm. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῶν κομματιῶν καὶ πόσες διαφορετικὲς λύσεις ἔχει τὸ ζήτημα;

4. Ἂν ἕνας δίσκος σὰν αὐτὸν ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 18-α ἔχῃ ἕξι κυκλικὲς σειρὲς ἀπὸ 51, 57, 61, 66, 71 καὶ 77 ἀντιστοίχως τρύπες, πῶς μπορεῖτε νὰ τὸν κάμετε νὰ στραφῇ

κατὰ $\frac{572}{1\,716}$ μιᾶς στροφῆς ἢ $\frac{682}{1\,452}$ μιᾶς στροφῆς;

Νὰ βρῆτε ὅλες τὶς λύσεις τοῦ προβλήματος.

5. Βρῆτε ὅλους τοὺς κοινοὺς διαιρέτες τῶν ἀκεραίων

90, 420, 900.

Ἐπίσης τῶν 630, 604, 378.

Μάθημα 19.

Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο δυὸ ἢ περισσότερων ἀκεραίων. Τροπὴ κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα μὲ ἐλάχιστο κοινὸ παρονομαστή.

1. Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο δυὸ ἢ περισσότερων (ὄχι μηδενικῶν) ἀκεραίων. Ἂς πάρωμε τοὺς ἀριθμοὺς 6 καὶ 10 καὶ ἂς γράψωμε σὲ δυὸ ξεχωριστὲς σειρὲς τὰ πολλαπλάσια τοῦ καθενός τους:

$$0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots, 54, 60, 66, \ldots, 90, \ldots, 120, \ldots$$
$$0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, \ldots, 120, \ldots$$

Παραβάλλοντας τὶς δυὸ σειρὲς βρίσκομε ὅτι οἱ δυὸ ἀκέραιοι 6 καὶ 10 ἔχουν *κοινὰ πολλαπλάσια, πιὸ μεγάλα ἀπὸ τὸ 0*, τοὺς ἀριθμούς:

$$30, 60, 90, 120, \cdots$$

Τὸ 30 εἶναι τὸ μικρότερο ἀπ' αὐτά· γι' αὐτὸ λέγεται *ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν ἀκεραίων 6 καὶ 10* καὶ σημειώνεται μὲ τὴ συντομογραφὴ *ε.κ.π.*

Γενικά, καλοῦμε ε.κ.π. δυὸ ἢ περισσότερων (ὄχι μηδενικῶν) ἀκέραιων ἀριθμῶν τὸν πιὸ μικρό, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ 0, ἀκέραιο ποὺ εἶναι διαιρετὸς (διαιρεῖται ἀκριβῶς) διὰ τοῦ καθενὸς ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς.

Δυὸ ἀκέραιοι (ὄχι μηδενικοὶ) ἀριθμοὶ α καὶ β ἔχουν πάντοτε κοινὸ πολλαπλάσιο *τὸ γινόμενό τους αβ*· μπορεῖ ὅμως αὐτὸ νὰ μὴν εἶναι τὸ *ἐλάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο*. Γι' αὐτὸ πρέπει νὰ μάθωμε νὰ βρίσκωμε τὸ ε.κ.π. δυὸ ἢ περισσότερων (ὄχι μηδενικῶν) ἀκεραίων μὲ μιὰ μέθοδο πιὸ σύντομη ἀπὸ κείνην ποὺ χρησιμοποιήσαμε παραπάνω γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ε.κ.π. τῶν 6 καὶ 10.

2. Εὕρεση τοῦ ε.κ.π. Ἂν ἕνας ἀπὸ τοὺς δοσμένους ἀκεραίους εἶναι τὸ 1, τότε αὐτὸν μποροῦμε νὰ τὸν παραλείψωμε καὶ νὰ βροῦμε τὸ ε.κ.π. τῶν ὑπολειπόμενων, γιατὶ τὸ 1 ἔχει πολλαπλάσιο κάθε ἀκέραιο ἀριθμό. Ἔστω τώρα ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ε.κ.π. τῶν 24, 36 καὶ 120. Τοὺς ἀναλύομε στοὺς πρώτους παράγοντές τους:

$$24 = 2^3 \cdot 3, \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2, \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

1ο. **Ἕνα** *κοινὸ πολλαπλάσιο* αὐτῶν τῶν τριῶν ἀριθμῶν πρέπει νὰ εἶναι διαιρετὸ καὶ ἀπὸ τοὺς τρεῖς πρώτους παράγοντες 2, 3, 5 ποὺ παρουσιάζονται στὶς τρεῖς παραπάνω ἀναλύσεις. Διότι, ἂν δὲν ἦταν π.χ. διαιρετὸ διὰ τοῦ 5, τότε δὲν θὰ ἦταν διαιρετὸ διὰ τοῦ 120, μὲ ἄλλα λόγια: δὲν θὰ ἦταν πολλαπλάσιο τοῦ 120.

2ο. Ἕνα (ὄχι μηδενικὸ) *κοινὸ πολλαπλάσιο* τῶν 24, 36 καὶ 120 πρέπει λοιπόν, ὅταν ἀναλυθῆ στοὺς πρώτους του παράγοντες, νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντες 2, 3, 5. Σὲ ποιά δύναμη τώρα; Εἶναι εὔκολο νὰ δῆ κανεὶς ὅτι πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ 2 τουλάχιστο στὴν 3η δύναμη (μὲ ἄλλα λόγια, νὰ ἔχῃ πρῶτο παράγοντα τὸ 2 μὲ ἐκθέτη τουλάχιστο 3). Γιατί, ἂν περιεῖχε τὸ 2 μὲ ἐκθέτη μικρότερο ἀπὸ 3, τότε δὲν θὰ ἦταν διαιρετὸ οὔτε διὰ 24 οὔτε διὰ 120. Ὅμοια βλέπομε ὅτι ἕνα κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν 24, 36, 120 πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ 3 τουλάχιστο στὴ δύναμη 2 καὶ τὸ 5 τουλάχιστο στὴ δύναμη 1.

3ο. Ἑπομένως ἕνα (ὄχι μηδενικὸ) *κοινὸ πολλαπλάσιο* τῶν 24, 36, 120 γιὰ νὰ εἶναι *ἐλάχιστο*, δηλ. ὅσο μπορεῖ πιὸ μικρό, πρέπει νὰ ἀναλύεται στοὺς ἑξῆς πρώτους παράγοντες: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Ὥστε:

ε.κ.π. τῶν 24, 36 καὶ $120 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360.$

Ὅμοια βρίσκομε ὅτι ε.κ.π. τῶν $81 = 3^4$ καὶ $27 = 3^3$ εἶναι ἡ πιὸ μεγάλη δύναμη μὲ τὴν ὁποία ὁ μόνος παρουσιαζόμενος πρῶτος παράγοντας 3 περιέχεται στὶς ἀναλύσεις τῶν 81 καὶ 27. Ἔτσι φτάνομε στὸν κανόνα:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ε.κ.π. δυὸ ἢ περισσότερων ἀκεραίων πιὸ μεγάλων ἀπὸ τὸ 1, τοὺς ἀναλύομε στοὺς πρώτους παράγοντές τους. Ἂν οἱ ἀναλύσεις αὐτὲς περιέχουν ἕναν καὶ τὸν ἴδιο πρῶτο παράγοντα, τότε ε.κ.π. εἶναι ἡ μεγαλύτερη δύναμη μὲ τὴν ὁποία ὁ παράγοντας αὐτὸς παρουσιάζεται μέσα στὶς ἀναλύσεις· ἂν περιέχουν διάφορους πρώτους παράγοντες, τότε ε.κ.π. εἶναι τὸ γινόμενο τῶν πιὸ μεγάλων δυνάμεων μὲ τὶς ὁποῖες οἱ παράγοντες αὐτοὶ (κοινοὶ καὶ μὴ κοινοὶ) παρουσιάζονται μέσα στὶς ἀναλύσεις.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω μποροῦμε νὰ συμπεράνωμε ὅτι *οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 24, 36, 120 ἔχουν ἀπειράριθμα κοινὰ πολλαπλάσια καὶ ὅτι αὐτὰ τὰ βρίσκομε ὅλα πολλαπλασιάζοντας τὸ ε.κ.π. τους 360 μὲ τοὺς διάφορους ἀκέραιους ἀριθμούς:*

$$0 \cdot 360 = 0, \quad 1 \cdot 360 = 360, \quad 2 \cdot 360 = 720, \quad 3 \cdot 360 = 1\,080, \ldots$$

3. Ἐφαρμογή. Τροπὴ κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα μὲ ὅσο γίνεται μικρότερο παρονομαστή. Ἂς ἔχουν δοθῆ τὰ κλάσματα:

$$\frac{28}{30} \text{ καὶ } \frac{10}{24}.$$

1ο. Πρῶτα τὰ κάνομε ἀνάγωγα ἁπλοποιώντας τα:

$$\frac{28:2}{30:2} = \frac{14}{15} \text{ καὶ } \frac{10:2}{24:2} = \frac{5}{12}.$$

2ο. Ἔπειτα ἀναζητοῦμε τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν σ' αὐτὰ τὰ ἀνάγωγα κλάσματα:

$$\left.\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 5 \\ 12 &= 2^2 \cdot 3 \end{aligned}\right\} \text{ ε.κ.π.} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

3ο. Τέλος τρέπομε τὰ κλάσματα $\frac{14}{15}$ καὶ $\frac{5}{12}$ σὲ ἴσα, μὲ κοινὸ παρονομαστὴ τὸ 60. Γιὰ νὰ τὸ πετύχωμε, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ πρώτου μὲ τὸ πηλίκο $60 : 15 = 4$ καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ δεύτερου μὲ τὸ πηλίκο $60 : 12 = 5$. Ἔτσι βρίσκομε:

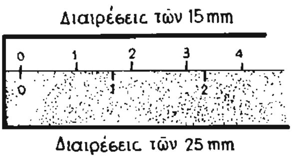
$$\frac{14 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{56}{60} \text{ καὶ } \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Ὑπολογίστε τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 120, 150 καὶ 210, ὕστερα τῶν ἀριθμῶν 360, 3 300 καὶ 240.

2. Τρέψτε σὲ ὁμώνυμα μὲ τὸν ἐλάχιστο κοινὸ παρονομαστὴ τὰ κλάσματα:

$$\frac{15}{65} \text{ καὶ } \frac{7}{26} \text{ καθὼς καὶ τὰ } \frac{7}{98}, \ \frac{5}{21} \text{ καὶ } \frac{3}{10}.$$

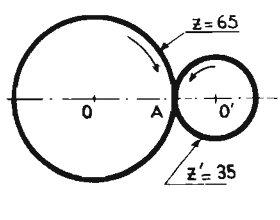
3. Ἔχομε δυὸ διαβαθμισμένους χάρακες (κανόνες), μὲ διαιρέσεις τῶν 15 mm ὁ ἕνας, τῶν 25 mm ὁ ἄλλος. Μὲ ἄλλα λόγια, οἱ δυὸ χάρακες ἔχουν ἀπὸ μιὰ σειρὰ ἰσαπόστατες χαραγὲς ἀριθμημένες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, . . . ,ἡ ἀπόσταση δυὸ διαδοχικῶν χαραγῶν εἶναι 15 mm στὸν ἕναν, 25 mm στὸν ἄλλο χάρακα (σχ. 19-α). Τοποθετοῦμε τώρα τὴ μιὰ διαβάθμιση κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης ἔτσι ποὺ νὰ συμπίπτουν τὰ δυὸ μηδενικά τους (μὲ ἄλλα λόγια: νὰ ἀντικρύζουν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη οἱ χαραγὲς τῶν δυὸ διαβαθμίσεων οἱ σημειωμένες μὲ τὸ 0). Ποιοὶ ἀριθμοὶ ἀντιστοιχοῦν στὶς δυὸ πρῶτες μετὰ τὸ 0 χαραγὲς ποὺ ἀντικρύζουν πάλιν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη;



Σχ. 19-α. Ποιές εἶναι οἱ πρῶτες μετὰ τὸ 0 χαραγὲς ποὺ συμπίπτουν;

4. Φέρνομε σὲ σύμπτωση τὴν πρώτη χαραγὴ ἑνὸς χάρακα διαβαθμισμένου (διαιρεμένου) σὲ ἑκατοστὰ μὲ τὴν πρώτη χαραγὴ ἑνὸς ἄλλου διαβαθμισμένου σὲ ἴντσες (2,54 cm). Βλέπομε τότε ὅτι ἀπὸ τὶς ἄλλες χαραγὲς τῶν δυὸ διαβαθμίσεων μόνον οἱ δυὸ τελευταῖες τους συμπίπτουν. Ξέροντας αὐτό, βρῆτε τί μῆκος ἔχει ὁ κάθε χάρακας ἀνάμεσα στὴν πρώτη καὶ στὴν τελευταία χαραγή του.

5. Δυὸ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ (σχ. 19-β), ποὺ συμπλέκονται ὁ ἕνας μὲ τὸν ἄλλο, ἔχουν ὁ ἕνας 65, ὁ ἄλλος 35 δόντια. Σημαδεύομε τὰ δυὸ δόντια ποὺ βρίσκονται σὲ ἐμπλοκὴ στὸ σημεῖο Α πάνω στὴν εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν τροχῶν. Πόσες στροφὲς θὰ πρέπῃ νὰ κάμῃ κάθε τροχὸς γιὰ νὰ ἔρθουν πάλι, καὶ γιὰ πρώτη φορά, σὲ ἐμπλοκὴ τὰ δυὸ αὐτὰ δόντια;



Σχ. 19-β. Δυὸ συμπλεκόμενοι ὀδοντωτοὶ τροχοί.

6. Ἕνας κύλινδρος διαμέτρου Ø 60 mm παρασύρει, μὲ τὴν τριβή, σὲ κίνηση ἕναν ἄλλο διαμέτρου Ø 36 mm. Πόσες στροφὲς πρέπει νὰ κάμῃ κάθε κύλινδρος ὥστε δυὸ σημεῖα τους ποὺ ἦσαν σὲ ἐπαφὴ πάνω στὴν εὐθεία τῶν κέντρων δυὸ (κυκλικῶν) διατομῶν τῶν κυλίνδρων, νὰ ξανάρθουν γιὰ πρώτη φορὰ σὲ ἐπαφή;

Μάθημα 20.

Προβλήματα πάνω σὲ κλάσματα.

1. Πρόβλημα Ι. *Ξέροντας ὅτι ἡ γνάρδα, βασικὴ ἀγγλοαμερικάνικη μονάδα μήκους, εἶναι ἴση μὲ 0,914 38 m καὶ ὅτι*

τὸ πόδι (ft ἢ ′) εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς γνάρδας,

ἡ ἴντσα (in ἢ ″) εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδιοῦ,

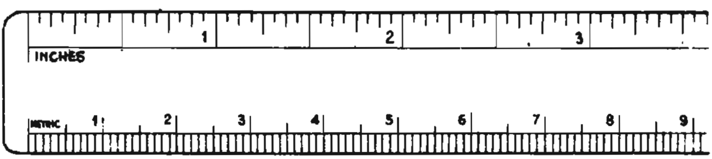
ὑπολογίστε σὲ mm τὸ μῆκος τοῦ ποδιοῦ καὶ τῆς ἴντσας.

Ἔχομε:

$$1 \text{ πόδι} = 0{,}914\,38 \text{ m} \cdot \frac{1}{3} = \frac{0{,}914\,38 \text{ m}}{3}$$
$$\simeq 0{,}304\,79 \text{ m} = 304{,}79 \text{ mm}.$$

$$1 \text{ ἴντσα} = 304{,}79 \text{ mm} \cdot \frac{1}{12} = \frac{304{,}79 \text{ mm}}{12} \simeq 25{,}399 \text{ mm}.$$

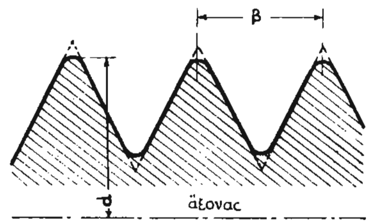
Στὴν πράξη παίρνομε, μὲ πολὺ καλὴ προσέγγιση, τὴν ἴντσα ἴση μὲ 25,4 mm.



Σχ. 20-α. Ἴντσες καὶ ἑκατοστόμετρα.

Ὁ χάρακας (κανόνας) ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 20-α ἔχει δυὸ διαβαθμίσεις ποὺ δείχνουν τὴν ἀντιστοιχία ποὺ ὑπάρχει ἀνάμεσα σὲ ἴντσες καὶ ἑκατοστόμετρα. Π.χ. παρατηροῦμε ὅτι ἡ χαραγὴ 3 ἴντσες, ὅταν μὲ τὸ μάτι μας τὴν προεκτείνωμε ὡς τὴ διαβάθμιση σὲ ἑκατοστόμετρα, πέφτει μεταξὺ 7,6 καὶ 7,7 cm, πολὺ κοντὰ στὴ χαραγὴ 7,6. Ἔτσι βρίσκομε ὅτι 3 ἴντσες κάνουν 7,62 cm. Αὐτὸ ἐπαληθεύεται καὶ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ $3 \cdot 2{,}54 \text{ cm} = 7{,}62 \text{ cm}$.

Ἐφαρμογή. Τὸ σπείρωμα Γουΐτγουερθ (Whitworth) ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 20-β ἔχει ὀνομαστικὴ διάμετρο 3/8'' καὶ 16 βήματα ἀνὰ 1'' (δηλ. 16 βήματα στὴν ἴντσα). Μετατρέψτε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου σὲ mm καὶ ὑπολογίστε ἐπίσης σὲ mm τὸ βῆμα αὐτοῦ τοῦ σπειρώματος:



Σχ. 20-β. Σπείρωμα διαμέτρου 3/8'' καὶ μὲ 16 βήματα στὴν ἴντσα.

Ἡ ὀνομαστικὴ διάμετρος τοῦ σπειρώματος εἶναι.

$$\frac{3''}{8} = \frac{25,4 \text{ mm} \cdot 3}{8} \simeq 9,52 \text{ mm}.$$

Τὸ βῆμα τοῦ σπειρώματος, δηλ. ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα σὲ δυὸ διαδοχικὲς βόλτες, εἶναι:

$$\frac{1''}{16} = \frac{25,4 \text{ mm}}{16} = 1,587\,5 \text{ mm} \simeq 1,59 \text{ mm}.$$

2. Πρόβλημα ΙΙ. *Ὑπολογίστε τὴ χωρητικότητα ἑνὸς ρεζερβουὰρ (μιᾶς ἀποθήκης) βενζίνας ξέροντας ὅτι, ὅταν εἶναι γεμάτο τὸ 1/10 του καὶ τοῦ ρίξετε ἄλλα 65 λίτρα, τότε γεμίζει κατὰ τὰ 3/4 του.*

Ἂς παραστήσωμε μὲ x λίτρα τὴ χωρητικότητα τοῦ ρεζερβουάρ. Πρὶν τοῦ προσθέσωμε νέα βενζίνα τὸ ρεζερβουὰρ περιέχει $\frac{x}{10}$ (λίτρα). Ἀφοῦ τοῦ προσθέσωμε τὰ 65 λίτρα, τὸ ρεζερβουὰρ περιέχει $\frac{3}{4}x = \frac{3x}{4}$ λίτρα βενζίνα. Ἡ διαφορὰ ἀνάμεσα σ' αὐτὸ ποὺ περιέχει τώρα καὶ σ' αὐτὸ ποὺ περιεῖχε ἀρχικά, εἶναι 65 λίτρα· ὥστε

$$\frac{3x}{4} - \frac{x}{10} = 65.$$

Γιὰ νὰ ἐπιλύσωμε αὐτὴν τὴν ἐξίσωση τρέπομε τὰ δυὸ κλάσματα τοῦ ἀριστεροῦ μέλους σὲ ὁμώνυμα μὲ τὸν ἐλάχιστο κοινὸ παρονομαστὴ 20:

$$\frac{15x}{20} - \frac{2x}{20} = 65.$$

Ἐκτελοῦμε τὴν ἀφαίρεση στὸ πρῶτο μέλος:

$$\frac{13\,x}{20} = 65.$$

Πολλαπλασιάζομε μὲ 20 καὶ τὰ δυὸ μέλη αὐτῆς τῆς ἐξίσωσης:

$$13\,x = 65 \cdot 20.$$

Τώρα διαιροῦμε καὶ τὰ δυὸ μέλη διὰ 13 καὶ ἁπλοποιοῦμε τὸ κλάσμα δεξιὰ τοῦ = διὰ 13:

$$x = \frac{65 \cdot 20}{13} = \frac{5 \cdot 20}{1} = 100.$$

Ἀπάντηση: ἡ χωρητικότητα τοῦ ρεζερβουὰρ εἶναι 100 λίτρα.

3. Πρόβλημα III. ***Ὑπολογίστε τὸν ἀριθμὸ ν τῶν διπλῶν διαδρομῶν (πηγεμοῦ καὶ γυρισμοῦ) ποὺ κάνει σὲ ἕνα λεπτὸ τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο μιᾶς μηχανικῆς πλάνης, ξέροντας τὰ ἑξῆς:***
Μῆκος ἁπλῆς διαδρομῆς (πηγεμοῦ ἢ γυρισμοῦ) $l = 2\ m$,
ταχύτητα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου κατὰ τὸ πλάνισμα $v_1 = 12\ m/min$,
ταχύτητα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου στὸν γυρισμὸ $v_2 = 28\ m/min$.

*2ο. **Γενικεῦστε τὸ πρόβλημα ζητώντας τὴν ἔκφραση τοῦ ν διὰ τῶν l, v_1 καὶ v_2.***

1ο. Γιὰ μιὰν ἁπλὴ διαδρομὴ πλανίσματος χρειάζονται:

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}\,min.$$

Γιὰ μιὰν ἁπλὴ διαδρομὴ γυρισμοῦ χρειάζονται:

$$\frac{2}{28} = \frac{1}{14}\,\text{min}.$$

Χρονικὴ διάρκεια μιᾶς διπλῆς διαδρομῆς (πηγεμοῦ καὶ γυρισμοῦ):

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{14} = \frac{7}{42} + \frac{3}{42} = \frac{10}{42}\,\text{min}.$$

Ὥστε σὲ 1 min τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο θὰ κάμη τόσες διπλὲς διαδρομὲς ὅσες φορὲς τὸ $\frac{10}{42}$ min χωρεῖ στὸ 1 min, ἄρα

$$1 : \frac{10}{42} = 1 \cdot \frac{42}{10} = \frac{42}{10} = 4{,}2 \text{ διπλὲς διαδρομές},$$

δηλαδὴ

$$\nu = 4 \text{ διπλὲς διαδρομὲς καὶ } \frac{2}{10} \text{ μιᾶς διπλῆς διαδρομῆς.}$$

2ο. Ἐπαναλαμβάνομε τώρα τοὺς παραπάνω ὑπολογισμοὺς χρησιμοποιώντας ὅμως τὰ γράμματα, ποὺ μᾶς δίνει ἡ ἐκφώνηση, στὴ θέση τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τους· (γιὰ εὐκολία δὲν γράφομε τὴ μονάδα τοῦ χρόνου min).

Διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς διαδρομῆς στὸ πλάνισμα: $\dfrac{l}{v_1}$.

» » » » στὸν γυρισμό: $\dfrac{l}{v_2}$.

Διάρκεια μιᾶς διπλῆς διαδ/μῆς (πηγεμοῦ καὶ γυρισμοῦ) : $\dfrac{l}{v_1} + \dfrac{l}{v_2}$.

Προσθέτομε τὰ κλάσματα, ἀφοῦ τὰ κάμωμε ὁμώνυμα :

$$\frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} = \frac{lv_2}{v_1 v_2} + \frac{lv_1}{v_2 v_1} = \frac{lv_2 + lv_1}{v_1 v_2} = \frac{l(v_1 + v_2)}{v_1 v_2}.$$

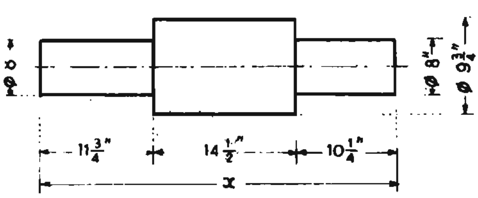
Ἀριθμὸς ν τῶν διπλῶν διαδρομῶν τοῦ ἐργαλείου σὲ 1 min.

$$\nu = 1 : \frac{l(v_1 + v_2)}{v_1 v_2} = 1 \cdot \frac{v_1 v_2}{l(v_1 + v_2)} = \frac{v_1 v_2}{l(v_1 + v_2)}.$$

Ἐφαρμόζοντας αὐτὸν τὸν τύπο μὲ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τῆς ἐκφώνησης ξαναβρίσκομε τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ πρώτου μέρους :

$$\nu = \frac{12 \cdot 28}{2 \cdot (12 + 28)} = \frac{6 \cdot 28}{40} = \frac{3 \cdot 14}{10} = 4{,}2 \text{ διπλὲς διαδρομές.}$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. *1.* Τὸ σχ. 20-γ εἶναι τὸ σχέδιο ἑνὸς κομματιοῦ ποὺ πέρασε ἀπὸ τὸν τόρνο. Ὑπολογίστε πρῶτα σὲ ἴντσες, ὕστερα σὲ min: 1ο τὸ μῆκος x τοῦ κομματιοῦ, 2ο τὸ βάθος τοῦ τορναρίσματος (τῆς τόρ-



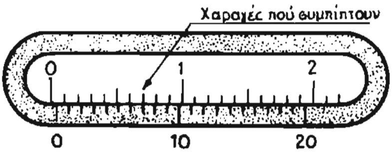
Σχ. 20-γ.

νευσης) πού χρειάζεται νὰ κάμωμε γιὰ νὰ γίνῃ ἡ μεγαλύτερη διάμετρός του ἴση μὲ τὴ μικρότερη.

2. Νὰ συγκρίνετε τὶς μέσες ταχύτητες δυὸ δρομέων πού διέτρεξαν ὁ ἕνας 100 m σὲ 10 καὶ 7/10 sec καὶ ὁ ἄλλος 110 γυάρδες σὲ 9 καὶ 9/10 sec.

Ἡ ἴδια ἄσκηση γιὰ 200 m διατρεγμένα σὲ 22 sec καὶ 220 γυάρδες διατρεγμένες σὲ 20,2 sec.

3. Ὁ βερνιέρος (βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 6) πού παριστάνεται στὸ σχ. 20-δ εἶναι τοῦ 1/20. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ 20 διαστήματα τῆς διαβάθμισης τοῦ βερνιέρου εἶναι ἴσα μὲ 19 διαστήματα τῆς χιλιοστομετρικῆς διαβάθμισης τοῦ στελέχους κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου ὁ βερνιέρος μπορεῖ νὰ μετακινῆται. Ὑποθέστε τώρα ὅτι ἀπὸ τὶς χαραγὲς 0, 1, 2, 3, . . . , 19, 20 τοῦ βερνιέρου ἡ χαραγὴ 7 συμπίπτει μὲ μιὰ χαραγὴ τοῦ στελέχους καὶ βρῆτε: 1ο τὴν ἀπόσταση τῆς χαραγῆς 6 τοῦ βερνιέρου ἀπὸ τὴν ἀμέσως προηγούμενη τοῦ στελέχους, 2ο τὴν ἀπόσταση τῆς χαραγῆς 5 τοῦ βερνιέρου ἀπὸ τὴν προηγούμενη τοῦ στελέχους κ.ο.κ. ὡς τὴν ἀπόσταση τῆς χαραγῆς 1 τοῦ βερνιέρου ἀπὸ τὴν ἀμέσως προηγούμενη τοῦ στελέχους.



Σχ. 20-δ. Βερνιέρος τοῦ 1/20.

Παχύμετρο ἐφοδιασμένο μ' ἕναν βερνιέρο τοῦ 1/20 σᾶς ἐπιτρέπει νὰ μετρήσετε πάχη μὲ προσέγγιση ἑνὸς 1/20 mm, δηλαδὴ μὲ λάθος (σφάλμα) μικρότερο ἀπὸ 1/20 mm. Ὑποθέστε π.χ. ὅτι στὴ μέτρηση ἑνὸς πάχους μ' ἕνα τέτοιο παχύμετρο ὁ βερνιέρος του ἦρθε στὴ θέση πού δείχνει τὸ σχ. 20-δ. Πόσο εἶναι τότε τὸ πάχος πού μετρᾶτε. (Προσέξτε πὼς τὸ 0 τοῦ βερνιέρου πέφτει ἀνάμεσα στὶς χαραγὲς 0 καὶ 1 τοῦ στελέχους τοῦ παχυμέτρου).

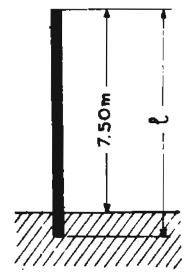
4. Στὸν τύπο $\Pi = 2\pi r$, πού δίνει τὸ μῆκος μιᾶς περιφέρειας μὲ ἀκτίνα r, πάρτε τὸ π ἴσο μὲ 22/7 καὶ ἐκφράστε ἔτσι τὸ Π μὲ τὸ r καὶ μὲ ἀριθμούς. Χρησιμοποιώντας αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα ἐκφράστε ὕστερα τὸ r μὲ τὸ Π καὶ μὲ ἀριθμούς. Τέλος ἐκφράστε καὶ τὴ διάμετρο d τῆς περιφέρειας μὲ τὸ Π καὶ μὲ ἀριθμούς. (Αὐτὰ τὰ λέμε σύντομα ἔτσι: Ἐκφράστε τὸ Π συναρτήσει τοῦ r, τὸ r συναρτήσει τοῦ Π, τὸ d συναρτήσει τοῦ Π).

5. Μιὰ πλάνη δουλεύει μὲ ρυθμὸ 32 διπλὲς κινήσεις τοῦ κοπτικοῦ της ἐργαλείου στὸ λεπτὸ (ἀνὰ 1 min). Ξέροντας ὅτι ἡ διάρκεια τοῦ γυρισμοῦ τοῦ ἐργαλείου εἶναι ἴση μὲ τὰ 4/5 τῆς διάρκειας τοῦ πηγεμοῦ ὑπολογίστε:

1ο τὴ διάρκεια ποὺ ἔχει ἡ διαδρομὴ κοπῆς (δηλ. πηγεμοῦ) τοῦ ἐργαλείου (νὰ τὴν παραστήσετε μὲ x min).

2ο τὴ μέση ταχύτητα κοπῆς, ἔχοντας ὑπόψη ὅτι ἡ διπλὴ διαδρομὴ ἔχει μῆκος 120 mm (νὰ παραστήσετε μὲ v m/min αὐτὴ τὴ μέση ταχύτητα κοπῆς).

6. Οἱ κανονισμοὶ προβλέπουν ὅτι ἕνας στύλος ἐναέριας γραμμῆς γιὰ τὴ μεταφορὰ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος πρέπει νὰ εἶναι μπηγμένος στὴ γῆ σὲ βάθος κατὰ 0,60 m πιὸ πολὺ ἀπὸ τὸ 1/10 τοῦ ὁλικοῦ μήκους τοῦ στύλου. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος l τοῦ στύλου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 20-ε.



Σχ. 20-ε. Στύλος ἐναέριας γραμμῆς.

7. Ἡ κίνηση μιᾶς τροχαλίας μεταδίνεται σὲ μιὰν ἄλλη μ' ἕνα λουρὶ ποὺ ἔχει ὀρθογώνια διατομή. Γιὰ νὰ ὑπολογίσουν τὸ ἐμβαδὸ F (σὲ mm^2) αὐτῆς τῆς διατομῆς χρησιμοποιοῦν τὸν πρακτικὸ τύπο

$$F = \frac{1\,000\ N}{v},$$

ὅπου τὸ N παριστάνει τὴ μεταφερόμενη ἰσχὺ σὲ ἵππους καὶ τὸ v τὴν ταχύτητα σὲ m/sec μὲ τὴν ὁποία κινεῖται τὸ λουρί. Ξέροντας τὸ πάχος ε (mm) τοῦ λουριοῦ ἐκφράστε τὸ πλάτος του l μὲ τὰ N, v καὶ ε.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: N=30 ἵππους, v=18 m/sec, ε=10 mm.

8. Οἱ ἠλεκτρικὲς ἀντιστάσεις δυὸ ἀγωγῶν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$R = \rho\frac{l}{F} \qquad \text{καὶ} \qquad R' = \rho'\frac{l'}{F'},$$

ὅπου τὸ R δίνεται σὲ μικροώμ, τὸ l σὲ cm, F σὲ cm^2 καὶ ἡ εἰδικὴ ἀντίσταση ρ σὲ μικροώμ · cm. Ὁμοίως τὰ R′, l', F′, ρ′. (Παράβαλε Μάθ. 10, Ἄσκ. 6).

1ο. Ὑπολογίστε γενικὰ τὸ πηλίκο τοῦ R διὰ τοῦ R′.

2ο. Ὑποθέτοντας ὅτι $l = l'$ καὶ $F = F'$, ὑπολογίστε αὐτὸ τὸ πηλίκο γιὰ $\rho = 1{,}6$ (χαλκὸς) καὶ $\rho' = 9{,}6$ (σίδηρος).

3ο. Ὑποθέτοντας ὅτι $F = F'$ καὶ $\rho = \rho'$, ὑπολογίστε αὐτὸ τὸ πηλίκο γιὰ $l = 1400$ καὶ $l' = 550$.

4ο. Ὑποθέτοντας ὅτι $l = l'$ καὶ $\rho = \rho'$, ὑπολογίστε αὐτὸ τὸ πηλίκο γιὰ $F = 0{,}2$ καὶ $F' = 0{,}25$.

5ο. Στὰ τρία παραπάνω ἀριθμητικὰ παραδείγματα ὑπολογίστε καὶ τὸ πηλίκο τοῦ R′ διὰ τοῦ R.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Μάθημα 21.

Λόγος δυὸ ἀριθμῶν.

Λόγος δυὸ ὁμοειδῶν μεγεθῶν.

1. Τί εἶναι λόγος δυὸ ἀριθμῶν;

Παράδειγμα 1. Ἂς συγκρίνωμε τοὺς δυὸ ἀριθμοὺς 16 καὶ 8. Ὁ 16 εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 8. Πόσες φορὲς μεγαλύτερος; 2 φορές, γιατὶ $16 : 8 = 2$.

ἢ $16 = 8 \cdot 2$.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 8 \\ \cline{2-2} -16 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Τὸ ὅτι ὁ 16 ὡς πρὸς τὸν 8 εἶναι 2 φορὲς μεγαλύτερος ἐκφράζεται (ἤδη ἀπὸ τὴν ἀρχαία ἑλληνικὴ ἐποχή) καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: *ὁ λόγος τοῦ 16 πρὸς τὸν 8 εἶναι τὸ 2.*

Λόγος τοῦ 16 πρὸς τὸν 8 εἶναι λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν 8 γιὰ νὰ προκύψη ὁ 16.

Παράδειγμα 2. Ἂς συγκρίνωμε τοὺς δυὸ ἀριθμοὺς 0,7 καὶ 0,3. Ὁ 0,7 εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 0,3. Πόσες φορές; Τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαίρεσης $0,7 : 0,3$ δὲν εἶναι ἀκέραιο, ἀλλὰ βρίσκεται μεταξὺ 2 καὶ 3. Ἔτσι δὲν μποροῦμε νὰ ποῦμε οὔτε ὅτι ὁ 0,7 εἶναι 2 φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 0,3 οὔτε ὅτι εἶναι 3 φορὲς μεγαλύτερος. Μποροῦμε ὅμως νὰ παραστήσωμε μὲ τὸ κλάσμα 7/3 τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τοῦ 0.7 διὰ 0,3. Καὶ ἀλήθεια ἔχομε:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \cline{2-2} -6 & 2,33\ldots \\ \hline 10 & \\ -9 & \\ \hline 10 & \\ -9 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$0,3 \cdot \frac{7}{3} = \frac{0,3 \cdot 7}{3} = \frac{3 \cdot 0,7}{3} = 0,7.$$

Γι' αὐτὸ θὰ λέμε ὅτι *ὁ λόγος τοῦ 0,7 πρὸς τὸν 0,3 εἶναι τὸ 7/3.*

Ὥστε, λόγος τοῦ 0,7 πρὸς τὸν 0,3 εἶναι ὁ (κλασματικὸς αὐτὴ τὴ φορὰ) ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν 0,3 γιὰ νὰ προκύψη ὁ 0,7.

Τὰ δυὸ αὐτὰ παραδείγματα μᾶς ὁδηγοῦν στὸν ἀκόλουθο γενικὸ ὁρισμό:

Λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ α πρὸς ἕναν ἀριθμὸν $\beta \neq 0$ λέγεται ὁ ἀριθμὸς (ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι ἀκέραιος ἢ ὄχι) μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν β γιὰ νὰ προκύψη ὁ α. Μὲ ἄλλα λόγια, λόγος τοῦ α πρὸς τὸν $\beta \neq 0$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τοῦ α διὰ τοῦ β.

Ὁ λόγος αὐτὸς γράφεται συνήθως μὲ τὴ μορφὴ ἑνὸς κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ (κάποτε καὶ μὲ τὴ μορφὴ ἑνὸς πηλίκου $\alpha : \beta$) καὶ ἡ γραφὴ αὐτὴ διαβάζεται ἔτσι: ἄλφα πρὸς βῆτα. α εἶναι ὁ λεγόμενος *ἀριθμητὴς* τοῦ λόγου, β ὁ *παρονομαστής* του· α καὶ β εἶναι οἱ *ὅροι* τοῦ λόγου.

Ἔτσι ὁ λόγος τοῦ 1 πρὸς 7,5 εἶναι: $\frac{1}{7,5} = \frac{10}{75} = \frac{2}{15}$.

Ὁ λόγος τοῦ π πρὸς $\frac{3}{4}$ εἶναι: $\frac{\pi}{3/4} = \frac{4\pi}{3} \simeq 4,19$.

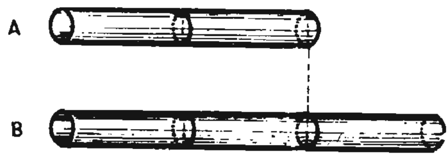
Ἂν *ἐναλλάξωμε* τοὺς δυὸ ὅρους ἑνὸς λόγου, μὲ ἄλλα λόγια: ἂν τὸν ἀριθμητὴ τὸν κάμωμε παρονομαστὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ ἀριθμητή, ὁ λόγος ποὺ θὰ προκύψη λέγεται *ἀντίστροφος* τοῦ ἀρχικοῦ. Π.χ. ὁ λόγος $\frac{4}{3}$ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{3}{4}$. Ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{9}{1} = 9$ εἶναι ὁ $\frac{1}{9}$.

Παρατηρήσεις. Ἐνῶ οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὅροι ἑνὸς λόγου εἶναι δυὸ ὁποιοιδήποτε ἀριθμοὶ (ἀκέραιοι, δεκαδικοὶ ἢ κλασματικοί), μὲ μόνο περιορισμό, ὁ 2ος ὅρος, ὁ παρονομαστής, νὰ μὴν εἶναι μηδέν.

Μὲ τοὺς λόγους μποροῦμε νὰ κάμωμε τὶς ἴδιες πράξεις ὅπως καὶ μὲ τὰ κλάσματα.

2. Ἂς συγκρίνωμε δυὸ ὁμοειδῆ μεγέθη, δηλ. δυὸ μεγέθη τοῦ ἴδιου εἴδους· π.χ. τὰ μήκη δυὸ κυλινδρικῶν ράβδων (σχ. 21-α).

1η μέθοδος. Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι φέρνοντας τὴ ράβδο Α πάνω στὴ Β ἐξακριβώνομε πὼς τὸ μῆκος τῆς Α χωρεῖ μιάμιση φορὰ στὸ μῆκος τῆς Β. Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ μῆκος τῆς Β ἂς εἶναι ἴσο μὲ μιάμιση φορὰ τὸ μῆκος τῆς Α. Λέμε τότε πὼς ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς Β πρὸς τὸ μῆκος τῆς Α εἶναι ὁ ἀριθμὸς $1\frac{1}{2}$ ἢ 1,5.



Σχ. 21-α. Ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ μήκους τῆς Β πρὸς τὸ μῆκος τῆς Α.

Ἀπ' ἐδῶ φθάνομε στὸν ἑξῆς γενικὸ ὁρισμό:

Λόγος ἑνὸς μεγέθους πρὸς ἕνα ἄλλο τοῦ ἴδιου εἴδους εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ βρίσκομε, ὅταν μετρήσωμε τὸ πρῶτο χρησιμοποιώντας γιὰ μονάδα τὸ δεύτερο.

2η μέθοδος. Ἂς μετρήσωμε τὸ μῆκος τῆς κυλινδρικῆς ράβδου Α καὶ ἔστω ὅτι βρίσκομε 31 cm. Μετρώντας τὸ μῆκος τῆς Β ἔστω ὅτι βρίσκομε 46,5 cm. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ 46,5 πρὸς τὸν 31 εἶναι $\frac{46,5}{31} = 1,5$. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ ἐκεῖνο ποὺ βρήκαμε μὲ τὴν 1η μέθοδο.

Εἶναι ἄλλωστε εὔκολο νὰ ἐξηγήσωμε γιατὶ οἱ δυὸ μέθοδοι δίνουν τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα. Καὶ ἀλήθεια ἡ ράβδος Β περιέχει 93 μισὰ ἑκατοστόμετρα, γιατὶ $2 \cdot 46,5 = 93$. Ἡ ράβδος Α περιέχει

$2 \cdot 31 = 62$ μισὰ ἑκατοστόμετρα. Ὥστε ἡ Β περιέχει 93 φορὲς τὸ $\frac{1}{62}$ τῆς Α. Ἄρα, ἂν πάρωμε τὴν Α γιὰ μονάδα στὴ μέτρηση, ὁ ἀριθμὸς ποὺ μετρᾶ τὴ Β θὰ εἶναι ὁ $\frac{93}{62}$ ποὺ ἰσοῦται μὲ 1,5.

Ἔτσι μποροῦμε νὰ δώσωμε στὸ λόγο δυὸ ὁμοειδῶν μεγεθῶν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμό:

Λόγος ἑνὸς μεγέθους πρὸς ἕνα ἄλλο ὁμοειδὲς λέγεται τὸ πηλίκο τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ μετρᾶ τὸ πρῶτο μέγεθος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ μετρᾶ τὸ δεύτερο, ὅταν μετρήσωμε καὶ τὰ δυὸ μεγέθη μὲ τὴν ἴδια μονάδα.

3. Νά τώρα τὰ ὀνόματα τῶν λόγων ποὺ χρησιμοποιοῦνται συχνότερα:

Σχετικὴ πυκνότητα ἑνὸς σώματος: λόγος τοῦ βάρους τοῦ σώματος πρὸς τὸ βάρος ποὺ ἔχει ἕνας ἴσος ὄγκος νεροῦ σὲ θερμοκρασία 4^0 βαθμῶν Κελσίου (βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 49).

Ὁ ἀριθμὸς π: λόγος τοῦ μήκους μιᾶς περιφέρειας πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου της (βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 10).

Ἡ κλίμακα ἑνὸς σχεδίου: λόγος ἑνὸς μήκους στὸ σχέδιο πρὸς τὸ πραγματικὸ μῆκος ποὺ παριστάνεται ἀπ᾽ αὐτὸ τὸ μῆκος στὸ σχέδιο (βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 22).

Ἡ ἀπόδοση μιᾶς ἁπλῆς μηχανῆς: λόγος τῆς ἰσχύος ποὺ παίρνομε ἀπὸ τὴ μηχανὴ πρὸς τὴν ἰσχὺ ποὺ καταναλώνει ἡ μηχανή, ὅταν δουλεύῃ (μὲ ἄλλα λόγια: λόγος τῆς ἰσχύος ποὺ παρέχει ἡ μηχανὴ πρὸς τὴν ἰσχὺ ποὺ ἀπορροφᾶ).

Παρατήρηση. Ἡ λέξη λόγος χρησιμοποιεῖται καταχρηστικὰ καὶ γιὰ δυὸ *ἑτεροειδῆ* μεγέθη, ποὺ δὲν εἶναι δηλαδὴ ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος· σημαίνει τότε τὸ πηλίκο τῶν δυὸ ἀριθμῶν ποὺ μετροῦν τὰ δυὸ μεγέθη, ἀφοῦ ἐννοεῖται ἐκλέξωμε γιὰ τὴ μέτρησή τους δυὸ ἀντίστοιχες ὁμοειδεῖς μ᾽ αὐτὰ μονάδες. Π.χ. τὸ μοντοὺλ ἑνὸς ὀδοντωτοῦ τροχοῦ μὲ 35 δόντια καὶ διάμετρο 105 mm εἶναι τὸ πηλίκο $105 : 35 = 3$ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου (σὲ mm) πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν δοντιῶν καὶ λέγεται καταχρηστικὰ λόγος τῆς διαμέτρου πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν δοντιῶν, ἐνῶ θὰ ἦταν προτιμότερο νὰ τὸ λέμε *πηλίκο* τῆς διαμέτρου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δοντιῶν τοῦ τροχοῦ.

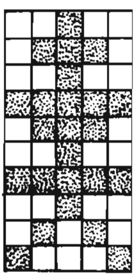
Ἀσκήσεις. 1. Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι 5 φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ ἕναν ἄλλο. Ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερο; ὁ λόγος τοῦ δεύτερου πρὸς τὸν πρῶτο;

2. Σ' ἕνα μηχανουργεῖο ἐργάζονται 10 τορναδόροι, 1 φρεζαδόρος καὶ 2 τρυπανιστές. Ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τεχνιτῶν ἀπὸ τὴν κάθε εἰδικότητα πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν τεχνιτῶν καὶ τῶν τριῶν εἰδικοτήτων;

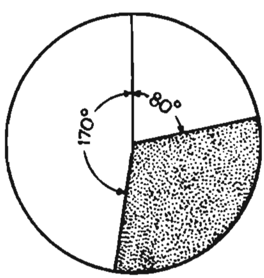
3. Κόβομε μιὰ σιδερένια ράβδο σὲ τρία κομμάτια ποὺ ἔχουν ἀντίστοιχα μήκη 2,5 m, 4,85 m καὶ 0,65 m. Ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ μήκους κάθε κομματιοῦ πρὸς τὸ μῆκος τῆς ράβδου;

4. Βρῆτε τοὺς ἀκόλουθους λόγους:

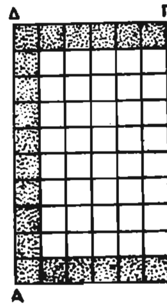
1ο στὸ σχ. 21-β, τὸ λόγο τῆς σκιασμένης ἐπιφάνειας πρὸς τὴ λευκὴ ἐπιφάνεια·



Σχ. 21-δ.



Σχ. 21-γ.



Σχ. 21-δ.

2ο στὸ σχ. 21-γ, τὸ λόγο τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ τομέα 80° (μοιρῶν) πρὸς τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ τομέα 170°, τὸ λόγο τῆς ἐπιφάνειας τοῦ τομέα 80° πρὸς τὴν ἐπιφάνεια τοῦ σκιασμένου τομέα, τὸ λόγο τῆς σκιασμένης ἐπιφάνειας πρὸς τὴν ἐπιφάνεια ὅλου τοῦ κύκλου·

3ο στὸ σχ. 21-δ, τὸ λόγο τοῦ βάρους ἀνὰ τρέχον μέτρο μιᾶς σιδερένιας δοκοῦ μὲ διατομὴ σὲ σχῆμα πί, ἡ ὁποία παριστάνεται ἀπὸ τὸ σκιασμένο μέρος τοῦ σχεδίου, πρὸς τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο μιᾶς ράβδου ἀπὸ τὸ ἴδιο ὑλικὸ μὲ διατομὴ ποὺ παριστάνεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ.

5. Ἕνας πεζοπόρος διατρέχει τὸ διάστημα ΑΒ, 6 χιλιομέτρων, τὸ ὁποῖο παριστάνεται στὸ σχ. 21-ε.

Σχ. 21-ε.

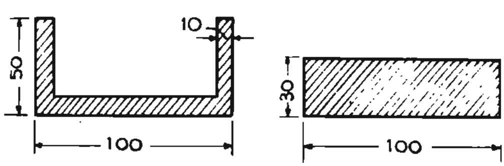
Ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ δρόμου ποὺ διέτρεξε ὁ πεζοπόρος ξεκινώντας ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸν δρόμο ποὺ τοῦ μένει νὰ διατρέξῃ ὡς τὸ Β, ὅταν φθάνῃ διαδοχικὰ στὰ σημεῖα Μ, Ν, Π, Ρ.

Μάθημα 22.

Ὑπολογισμὸς τοῦ λόγου δυὸ ὁμοειδῶν μεγεθῶν.

Ὅπως ἐξηγήσαμε στὸ προηγούμενο μάθημα, ὁ λόγος δυὸ ὁμοειδῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν ἀριθμῶν ποὺ μετροῦν τὰ δυὸ μεγέθη, ὅταν τὰ μετρήσωμε μὲ τὴν ἴδια μονάδα. Σὲ μερικὰ ἀπὸ τὰ παρακάτω παραδείγματα τὴ θέση τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν τὴν παίρνουν ἐγγράμματες παραστάσεις. Τὴν ἔκφραση ἑνὸς τέτοιου λόγου μποροῦμε νὰ τὴν ἁπλοποιήσωμε μὲ τὸν τρόπο ποὺ ξέρομε ἀπὸ τὰ κλάσματα.

1. Πρόβλημα I. *Ὑπολογίστε τὸ λόγο τῆς διατομῆς ἑνὸς σιδήρου ἐμπορίου (ἑνὸς προφὶλ) μὲ σχῆμα πί (⊔) πρὸς τὴ διατομὴ ἑνὸς σιδήρου μὲ ὀρθογώνια διατομὴ (μιᾶς λάμας). Οἱ διατομὲς αὐτὲς παριστάνονται στὸ σχῆμα 22-α μὲ τὶς διαστάσεις δοσμένες σὲ mm.*



Σχ. 22-α. Νὰ συγκρίνετε τὰ δυὸ προφίλ.

Ἂς ὑπολογίσωμε σὲ mm^2 τὰ ἐμβαδὰ τῶν δυὸ διατομῶν.

Ἐμβαδὸ τῆς διατομῆς μὲ σχῆμα πί:

$$100 \cdot 50 - 80 \cdot 40 = 5\,000 - 3\,200 = 1\,800 \text{ mm}^2.$$

Ἐμβαδὸ τῆς ὀρθογώνιας διατομῆς:

$$100 \cdot 30 = 3\,000 \text{ mm}^2.$$

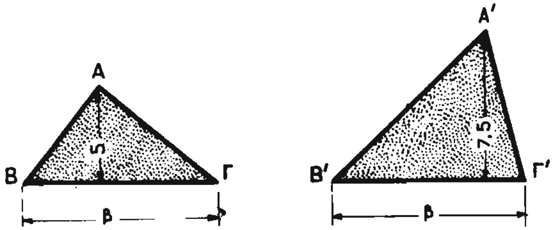
Ὁ λόγος τῶν διατομῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν ἀριθμῶν ποὺ τὶς μετροῦν, ὅταν χρησιμοποιήσωμε τὴν ἴδια μονάδα στὴ μέτρηση, π.χ. τὸ mm^2. Ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι ἴσος μέ:

$$\frac{1\,800}{3\,000} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

2. Πρόβλημα ΙΙ. *Ὑπολογίστε τὸ λόγο τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς ἄλλου τριγώνου Α'Β'Γ' μὲ ἴση βάση, ξέροντας ὅτι τὰ ὕψη τὰ κάθετα σ' αὐτὲς τὶς βάσεις εἶναι 5 cm στὸ πρῶτο τρίγωνο καὶ 7,5 cm στὸ δεύτερο (σχ. 22-β).*

Ἂς παραστήσωμε μὲ β (cm) τὸ μῆκος τῶν ἴσων βάσεων ΒΓ = Β'Γ' τῶν δυὸ τριγώνων. Τὰ ἐμβαδά τους σὲ cm^2 εἶναι τότε ἴσα μέ:

$$\frac{\beta\cdot 5}{2}=\frac{\beta}{2}\cdot 5 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\beta\cdot 7{,}5}{2}=\frac{\beta}{2}\cdot 7{,}5.$$



Σχ. 22-β. Ὑπολογίστε τὸ λόγο τῆς ἐπιφάνειας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν ἐπιφάνεια τοῦ Α'Β'Γ'.

Ὁ λόγος τῆς ἐπιφάνειας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν ἐπιφάνεια τοῦ Α'Β'Γ' ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τῶν ἀριθμῶν ποὺ τὶς μετροῦν σὲ cm^2, δηλαδὴ μέ:

$$\frac{\quad}{\frac{\beta}{2}\cdot 7{,}5}$$

Ἁπλοποιοῦμε, διαιρώντας ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ διὰ $\frac{\beta}{2}$, ὁπότε βρίσκομε:

$$\frac{5}{7{,}5}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δυὸ τριγώνων μὲ τὶς ἴσες βάσεις ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχων ὑψῶν τους 5 cm καὶ 7,5 cm.

3. Πρόβλημα III. *Συγκρίνομε δυὸ λαμαρίνες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὑλικὸ καὶ μὲ τὸ ἴδιο πάχος. Ἡ μιὰ ἔχει σχῆμα κυκλικὸ μὲ διάμετρο 40 cm, ἡ ἄλλη σχῆμα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 60 cm. Ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ βάρους τῆς δεύτερης πρὸς τὸ βάρος τῆς πρώτης.*

Ἂς παραστήσωμε μὲ ε (cm) τὸ πάχος τῶν λαμαρινῶν καὶ μὲ σ τὴ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ τους. Ἔχομε:

βάρος τῆς κυκλικῆς λαμαρίνας σὲ gr : $3{,}14 \cdot 20^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma$,

» » τετράγωνης » » » : $60^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma$.

Ἑπομένως ὁ λόγος τοῦ βάρους τῆς δεύτερης λαμαρίνας πρὸς τὸ βάρος τῆς πρώτης ἰσοῦται μὲ

$$\frac{60^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma}{3{,}14 \cdot 20^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{60^2}{3{,}14 \cdot 20^2},$$

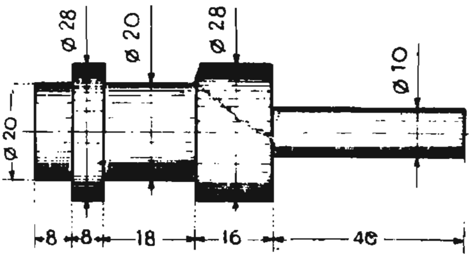
ἀφοῦ ἁπλοποιήσωμε, διαιρώντας τοὺς δυὸ ὅρους διὰ ε · σ. Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις ποὺ εἶναι σημειωμένες στὸν ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ καὶ βρίσκομε τελικὰ γιὰ τὸ ζητούμενο λόγο τὴν τιμή:

$$\frac{3\,600}{3{,}14 \cdot 400} = \frac{36}{3{,}14 \cdot 4} = \frac{9}{3{,}14} = \frac{900}{314} \simeq 2{,}86.$$

Ἂν γνωρίζαμε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πάχους ε τῶν λαμαρινῶν καθὼς καὶ τῆς σχετικῆς πυκνότητας σ τοῦ ὑλικοῦ τους, θὰ μπορούσαμε νὰ λογαριάσωμε τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς ποὺ ἔχουν τὰ βάρη τῶν λαμαρινῶν καὶ κατόπιν τὸ λόγο αὐτῶν τῶν δυὸ βαρῶν. Ἀλλὰ ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς θὰ ἦταν πολὺ πιὸ μακρύς. Ἄλλωστε, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο ἐργασθήκαμε παραπάνω, ὁ ζητούμενος λόγος δὲν θὰ ἄλλαζε, ἂν ἀλλάζαμε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ κοινοῦ πάχους ε καὶ τῆς κοινῆς σχετικῆς πυκνότητας σ τῶν δυὸ λαμαρινῶν.

Ἀσκήσεις. *1.* Ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ βάρους ἑνὸς χυτοῦ κομματιοῦ ἀπὸ μπροῦντζο, μὲ σχετικὴ πυκνότητα 8,4, πρὸς τὸ βάρος τοῦ μοντέλου του φτιαγμένου ἀπὸ χυτοσίδηρο μὲ σχετικὴ πυκνότητα 7,2.

2. Νὰ συγκρίνετε τὰ βάρη δυὸ ράβδων ἀπὸ ντουραλουμίνιο (σκληραλουμίνιο) ποὺ ἔχουν διατομὴ 0,873 cm² καὶ μῆκος 1 m ἡ μιά, διατομὴ 0,678 cm^2 καὶ μῆκος 1,5 m ἡ ἄλλη. Ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ βάρους τῆς δεύτερης ράβδου πρὸς τὸ βάρος τῆς πρώτης;



Σχ. 22-γ. Σχέδιο ἑνὸς κομματιοῦ κατεργασμένου στὸν τόρνο (οἱ διαστάσεις σὲ mm).

3. Δεῖξτε ὅτι ὁ λόγος τῶν βαρῶν δυὸ κυλίνδρων ἀπὸ χαλκό, μὲ τὸ ἴδιο ὕψος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνο τοῦ λόγου τῶν διαμέτρων τους. Ἄραγε ὁ λόγος τῶν βαρῶν θὰ ἄλλαζε, ἂν οἱ κύλινδροι ἦσαν ἀπὸ σίδηρο καὶ εἶχαν τὶς ἴδιες διαστάσεις μὲ τοὺς χάλκινους;

4. Μετρῆστε πάνω στὸ σχ. 22-γ τὸ μῆκος τοῦ κομματιοῦ καὶ πῆτε ποιά εἶναι ἡ κλίμακα τοῦ σχεδίου. Χρησιμοποιώντας αὐτὴ τὴν κλίμακα νὰ ὑπολογίσετε τὰ μήκη ποὺ πρέπει νὰ ἔχουν στὸ σχέδιο τὰ διάφορα μέρη τοῦ κομματιοῦ καὶ νὰ τὰ συγκρίνετε μὲ αὐτὰ ποὺ βρίσκετε μὲ μετρήσεις στὸ σχ. 22-γ.

5. Δυὸ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ συμπλέκονται, ὥστε ἡ περιστροφὴ τοῦ ἑνὸς νὰ κάνη καὶ τὸν ἄλλο νὰ περιστρέφεται. Ἂν ὁ πρῶτος ἔχη διάμετρο d_1 (cm) καὶ ὁ δεύτερος d_2 (cm), ποιός εἶναι ὁ λόγος τῆς περιστροφικῆς ταχύτητας n_1 (στρ/min) τοῦ πρώτου πρὸς τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα n_2 (στρ/min) τοῦ δεύτερου;

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ γιὰ $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 30$ cm. Χρησιμοποιώντας τὴν τιμὴ ποὺ βρίσκετε μὲ τὰ ἀριθμητικὰ αὐτὰ δεδομένα γιὰ τὸ λόγο τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων καὶ ξέροντας ὅτι $n_1 = 90$ στρ/min, ὑπολογίστε τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ n_2.

Μάθημα 23.

'Αναλογίες.

1. Τί εἶναι μιὰ ἀναλογία; Ἄς προσέξωμε τὴ σειρὰ τῶν 4 ἀριθμῶν:

$$3, \quad 4, \quad 7{,}5, \quad 10.$$

Ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερο εἶναι $\frac{3}{4}$ ἢ 0,75.

Ὁ λόγος τοῦ τρίτου πρὸς τὸν τέταρτο εἶναι $\frac{7{,}5}{10}$ ἢ 0,75.

Οἱ δυὸ αὐτοὶ λόγοι εἶναι ἴσοι· ἑπομένως μποροῦμε νὰ γράψωμε τὴν ἰσότητα:

$$\frac{3}{4}=\frac{7{,}5}{10}.$$

Αὐτὴ ἡ ἰσότητα λέγεται *ἀναλογία*.

Ὥστε: ***ἀναλογία εἶναι μιὰ ἰσότητα δυὸ λόγων.***

Ἡ ἀναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

διαβάζεται: *α πρὸς β ἴσο μὲ γ πρὸς δ* (ἢ καὶ ἔτσι: *α πρὸς β ὡς γ πρὸς δ*). Οἱ τέσσερις ἀριθμοὶ α, β, γ, δ λέγονται *ὅροι* τῆς ἀναλογίας· οἱ ἀκρινοὶ ὅροι α καὶ δ (ἀκρινοί, γιατὶ ὁ α διαβάζεται πρῶτος καὶ ὁ δ τελευταῖος) λέγονται *ἄκροι ὅροι* καὶ συντόμως *ἄκροι*, οἱ μεσιανοὶ ὅροι β καὶ γ λέγονται *μέσοι ὅροι* καὶ συντόμως *μέσοι*.

2. Βασικὴ ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν. Ἄς μετατρέψωμε τοὺς δυὸ λόγους τῆς ἀναλογίας

$$\frac{3}{4}=\frac{7{,}5}{10}$$

σὲ δυὸ ἄλλους ἴσους μ' αὐτούς, ποὺ νὰ ἔχουν ὅμως τὸν ἴδιο παρονομαστή· βρίσκομε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{3\cdot 10}{4\cdot 10}=\frac{7,5\cdot 4}{10\cdot 4}.$$

Οἱ δυὸ λόγοι ἔχουν τώρα τὸν ἴδιο παρονομαστὴ 40 καὶ ἐπειδὴ εἶναι μεταξύ τους ἴσοι, θὰ πρέπῃ καὶ οἱ ἀριθμητές τους νὰ εἶναι ἴσοι. Καὶ ἀλήθεια:

$$3\cdot 10=30=7,5\cdot 4.$$

Ἔτσι δείξαμε ὅτι:

Σὲ μιὰ ἀναλογία τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν μέσων.

3. Παρατήρηση. Ἀντίστροφα, ἔστω ὅτι μᾶς ἔχουν δοθῆ τέσσερις διαδοχικοὶ ἀριθμοί, ὅπως π. χ. οἱ:

$$7,5, \quad 2,5, \quad 6, \quad 2,$$

ποὺ ἔχουν τὴν ἰδιότητα, τὸ γινόμενο τοῦ 1ου μὲ τὸν 4ο νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ 2ου μὲ τὸν 3ο:

$$7,5\cdot 2=2,5\cdot 6. \tag{1}$$

Τότε αὐτοὶ οἱ τέσσερις ἀριθμοὶ μποροῦν ν' ἀποτελέσουν τοὺς τέσσερις διαδοχικοὺς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας. Καὶ ἀλήθεια, ἂν διαιρέσωμε καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς ἰσότητας (1) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $2\cdot 2,5$ (δηλ. 5), θὰ λάβωμε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{7,5\cdot 2}{2\cdot 2,5}=\frac{2,5\cdot 6}{2\cdot 2,5}.$$

Ἁπλοποιώντας τώρα ἀριστερὰ διὰ 2 καὶ δεξιὰ διὰ 2,5, βρίσκομε τὴν ἀναλογία ποὺ προείπαμε:

$$\frac{7,5}{2,5}=\frac{6}{2}. \tag{2}$$

Ἂν διαιρούσαμε καὶ τὰ δυὸ μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $6\cdot 2$ (δηλ. 12), θὰ λαμβάναμε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{7,5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{2,5\cdot 6}{6\cdot 2}$$

ἤ, ἀφοῦ ἁπλοποιήσωμε ἀριστερὰ διὰ 2, δεξιὰ διὰ 6, τὴν ἀναλογία:

$$\frac{7,5}{6}=\frac{2,5}{2}. \qquad (3)$$

Αὐτὴ ἡ ἀναλογία προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀναλογία (2) ἂν ἀφήσωμε τους ἄκρους ὅρους στὴ θέση τους, ἐναλλάξωμε ὅμως μεταξύ τους τοὺς δυὸ μέσους ὅρους.

Ὥστε: *ἀπὸ μιὰ ἀναλογία μποροῦμε νὰ λάβωμε μιὰν ἄλλη διατηρώντας στὴ θέση τους τοὺς ἄκρους ὅρους καὶ ἐναλλάσσοντας μεταξύ τους τοὺς μέσους.*

Ἐννοεῖται ὅτι ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν δυὸ λόγων τῆς πρώτης ἀναλογίας δὲν θὰ εἶναι ἐν γένει ἴση μὲ τὴν κοινὴ τιμὴ τῶν λόγων τῆς δεύτερης ἀναλογίας· π.χ. ἡ τιμὴ τῶν λόγων τῆς ἀναλογίας (2) εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, ἐνῶ τῆς ἀναλογίας (3) εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1,25.

Μὲ ὅμοιο τρόπο βλέπομε ὅτι ἀπὸ τὴν ἀναλογία:

$$\frac{7,5}{2,5}=\frac{6}{2} \qquad (2)$$

μποροῦμε νὰ λάβωμε τήν:

$$\frac{2}{2,5}=\frac{6}{7,5}$$

ἐναλλάσσοντας μεταξύ τους τοὺς ἄκρους καὶ ἀφήνοντας τοὺς μέσους στὴ θέση τους· ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν δυὸ λόγων εἶναι τώρα 0,8.

Ἐναλλάσσοντας καὶ τοὺς μέσους καὶ τοὺς ἄκρους ὅρους μιᾶς ἀναλογίας λαμβάνομε μιὰν ἄλλη, ἐπίσης σωστὴ ἀναλογία· ἔτσι ἀπὸ τὴν (2) προκύπτει ἡ:

$$\frac{2}{6}=\frac{2,5}{7,5}\quad\left(\text{μὲ κοινὴ τιμὴ λόγων τὸ } \frac{1}{3}=0,33\ldots\right).$$

Τέλος, ἐπειδὴ ἡ ἰσότητα $7,5\cdot 2=2,5\cdot 6$ γράφεται καὶ ἔτσι:

$$2,5\cdot 6=7,5\cdot 2,$$

συμπεραίνομε ὅτι ἀληθεύει καὶ ἡ ἀναλογία:

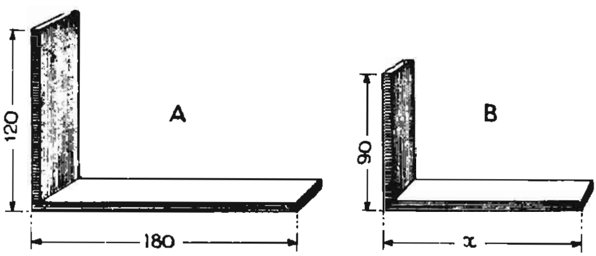
$$\frac{2,5}{7,5}=\frac{2}{6}\left(\text{κοινὴ τιμὴ τῶν δυὸ λόγων τὸ } \frac{1}{3}\right).$$

Παραβάλλοντάς την μὲ τὴν (2) βλέπομε ὅτι: ***ἀπὸ μιὰν ἀναλογία μποροῦμε νὰ λάβωμε μιὰν ἄλλη κάνοντας τοὺς μέσους ὅρους ἄκρους καὶ τοὺς ἄκρους μέσους.***

4. Ἐφαρμογές. *1η. Ξέροντας ὅτι ὁ λόγος τῶν πλευρῶν τῆς σιδηρογωνιᾶς Α (σχ. 23-α) εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγο τῶν ἀντίστοιχων πλευρῶν τῆς σιδηρογωνιᾶς Β, ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ x.*

Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση καὶ τὰ δεδομένα τοῦ σχήματος ἔχομε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{120}{180} = \frac{90}{x}.$$



Σχ. 23-α. Ὑπολογίστε τὴ x.

Ἐφαρμόζομε τὴ βασικὴ ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν καὶ βρίσκομε :

$$120 \cdot x = 180 \cdot 90.$$

Ἐπιλύνομε τὴν ἐξίσωση αὐτὴ διαιρώντας τὰ μέλη της διὰ 120 :

$$x = \frac{180 \cdot 90}{120} = \frac{3 \cdot 90}{2} = 3 \cdot 45 = 135 \text{ mm}.$$

Ὁ $x = 135$ λέγεται *τέταρτος ἀνάλογος* τῶν ἀριθμῶν 120, 180, 90 παρμένων μὲ αὐτὴ τὴ σειρά.

2η. Μεταξὺ δυὸ ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 4 καὶ 9, ἀναζητοῦμε ἕναν τρίτο x τέτοιον ὥστε τὸ πηλίκο τοῦ 4 διὰ x νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ πηλίκο τοῦ x διὰ 9. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ x.

Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση ἔχομε νὰ γράψωμε τὴν ἰσότητα :

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9}.$$

Ἐφαρμόζοντας τὴ βασικὴ ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν βρίσκομε :

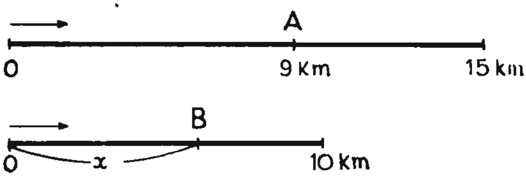
$$x \cdot x = 4 \cdot 9 \quad ἢ \quad x^2 = 36.$$

Ὑπολογίζομε τὸ x ἐξάγοντας τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τῶν δυὸ μελῶν τῆς ἐξίσωσης :

$$x = \sqrt{36} = 6.$$

Ὁ ἀριθμὸς $x = 6$ λέγεται *μέσος ἀνάλογος* τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 9.

Ἀσκήσεις. *1.* Ξέροντας ὅτι δυὸ κινητὰ (π.χ. δυὸ αὐτοκίνητα) κινοῦνται ἔτσι πού, ὅταν φθάνουν στὶς θέσεις τους Α καὶ Β (σχ. 23-β), ὁ λόγος τοῦ δρόμου ποὺ διέτρεξε τὸ καθένα τους πρὸς τὸν ὁλικὸ δρόμο ποὺ ἔχει νὰ διατρέξῃ, εἶναι ὁ ἴδιος καὶ γιὰ τὰ δυό, ὑπολογίστε τὸ δρόμο x ποὺ διέτρεξε τὸ δεύτερο, ὅταν ἔφθασε στὸ σημεῖο Β

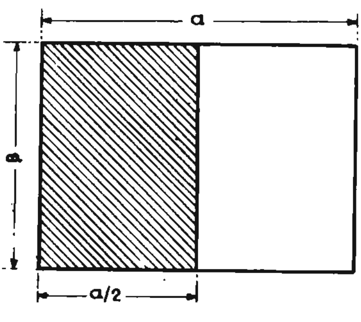


Σχ. 23-β. Ὑπολογίστε τὸ x.

2. Ἐπιλύστε τὶς ἐξισώσεις:

$$\frac{x}{7}=\frac{3}{5},\quad \frac{4}{x}=\frac{9}{15},\quad \frac{6}{11}=\frac{x}{3},\quad \frac{9}{20}=\frac{7}{x}.$$

3. Σὲ δυὸ τάξεις ἑνὸς σχολείου ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν ποὺ προβιβάσθηκαν ἀπὸ τὴν καθεμιά τους πρὸς τὸν ὁλικὸ ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν τῆς τάξης εἶναι ὁ ἴδιος καὶ γιὰ τὶς δυὸ τάξεις. Ξέροντας ὅτι ἀπὸ τοὺς 25 μαθητὲς ποὺ εἶχε ἡ μιὰ τάξη, προβιβάσθηκαν οἱ 15 καὶ ὅτι ἡ ἄλλη τάξη εἶχε 30 μαθητές, βρῆτε πόσοι μαθητὲς ἀπ᾿ αὐτὴν τὴν τάξη προβιβάσθηκαν.



Σχ. 23-γ. Τυποποιημένα «σχήματα» χαρτιῶν σχεδίου. Ὑπολογίστε τὸ λόγο α, β.

4. Ὑπολογίστε τὸν μέσο ἀνάλογο τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 25.

5. Διπλώνοντας στὰ δυὸ ἕνα ὀρθογώνιο φύλλο χαρτὶ μὲ διαστάσεις: μῆκος α καὶ πλάτος β ($\alpha>\beta$) σχηματίζετε ἕνα ἄλλο ὀρθογώνιο φύλλο μὲ διαστάσεις: μῆκος β καὶ πλάτος $\alpha/2$.

Ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ α πρὸς β ξέροντας ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους πρὸς τὸ πλάτος τοῦ πρώτου φύλλου εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τοῦ μήκους πρὸς τὸ πλάτος τοῦ δεύτερου φύλλου.

(Στὰ τυποποιημένα χαρτιὰ σχεδίου ὁ λόγος τοῦ μήκους πρὸς τὸ πλάτος τοῦ χαρτιοῦ εἶναι ἴσος μὲ αὐτὸν ποὺ ὑπολογίσατε. Βλέπε καὶ Τόμ. Α΄, Μάθ. 28, Ἄσκ. 7).

Μάθημα 24.

Ὑπολογισμὸς δυὸ ἀριθμῶν ὅταν εἶναι γνωστὰ ὁ λόγος καὶ τὸ ἄθροισμά τους (ἢ ἡ διαφορά τους).

1. Μιὰ ἰδιότητα ἴσων λόγων. Ἔστω ἡ ἀναλογία:

$$\frac{14}{21}=\frac{8}{12}.$$

Οἱ δυὸ ἴσοι λόγοι της ἔχουν κοινὴ τιμὴ τὸ 2/3. Ἂς σχηματίσωμε τὸ λόγο τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν:

$$\frac{14+8}{21+12}=\frac{22}{33}=\frac{2}{3}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἔχει κι αὐτὸς τιμὴ τὸ 2/3. Ἂς σχηματίσωμε τὸ λόγο τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τὴ διαφορὰ τῶν παρονομαστῶν:

$$\frac{14-8}{21-12}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Ἔχει ἐπίσης γιὰ τιμὴ τὸ 2/3.

Ὥστε: ***ἀπὸ δυὸ ἴσους λόγους σχηματίζομε ἕναν τρίτο ἴσο μ' αὐτοὺς παίρνοντας τὸ λόγο τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν.*** Δηλαδή:

ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ***προκύπτει ἡ ἰσότητα*** $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Ὅμοια: ***ἀπὸ δυὸ ἴσους λόγους*** $\frac{\alpha}{\beta}$ ***καὶ*** $\frac{\gamma}{\delta}$, ***ὅταν*** $\alpha>\gamma$, ***σχηματίζομε ἕναν τρίτο ἴσο λόγο, τὸν*** $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}$, ***παίρνοντας τὸ λόγο τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τὴ διαφορὰ τῶν παρονομαστῶν.*** Δηλαδή: ***ἀπὸ τὴν ἰσότητα*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ***προκύπτει ἡ ἰσότητα*** $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἀληθεύει ὄχι μόνο γιὰ δυὸ ἴσους λόγους ἀλλὰ καὶ γιὰ *περισσότερους ἀπὸ δυό*. Π.χ. ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἴσους λόγους:

$$\frac{10}{20}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}\left(\text{κοινὴ τιμή τους τὸ } \frac{1}{2}\right)$$

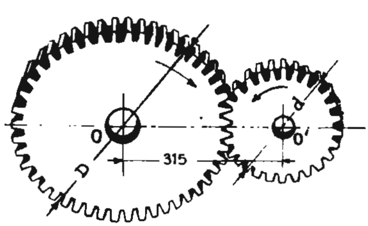
λαμβάνομε τὸν ἴσο μ' αὐτοὺς λόγο:

$$\frac{10+3+5}{20+6+10}=\frac{18}{36}\left(\text{ἔχει κι αὐτὸς τιμὴ τὸ } \frac{1}{2}\right)$$

καθὼς καὶ τόν:

$$\frac{10-3-5}{20-6-10}=\frac{2}{4}\left(\text{ἔχει κι αὐτὸς τιμὴ τὸ } \frac{1}{2}\right).$$

2. Ἐφαρμογὴ Ι. *Ἕνας ὀδοντωτὸς τροχὸς διαμέτρου D (mm) παρασύρεται σὲ κίνηση ἀπὸ ἕναν ὀδοντωτὸ τροχίσκο διαμέτρου d (mm). Ὑπολογίστε τὶς διαμέτρους D καὶ d, ξέροντας ὅτι ἡ ἀπόσταση τῶν ἀξόνων τῶν δυὸ τροχῶν εἶναι 315 mm καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν διαμέτρων τους εἶναι ἴσος μὲ* $\frac{5}{2}$ (σχ. 24-α).



Σχ. 24-α. Γνωρίζοντας τὸ D + d καὶ τὸ $\frac{D}{d}$ ὑπολογίστε τὰ D καὶ d.

Σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα μᾶς εἶναι γνωστὸ τὸ ἄθροισμα D + d τῶν διαμέτρων τῶν τροχῶν:

$$D+d=2\cdot 315=630 \text{ mm},$$

καθὼς καὶ ὁ λόγος αὐτῶν τῶν διαμέτρων:

$$\frac{D}{d}=\frac{5}{2}.$$

Ζητοῦνται οἱ τιμὲς τῶν D καὶ d. Γιὰ νὰ τὶς βροῦμε, ἐναλλάσσομε τὸν ἕνα μὲ τὸν ἄλλο τοὺς μέσους ὅρους τῆς ἀναλογίας $\frac{D}{d}=\frac{5}{2}$, ὁπότε λαμβάνομε τὴν ἀναλογία:

$$\frac{D}{5}=\frac{d}{2}.$$

Ἐφαρμόζοντας σ' αὐτὴν τὴν πρώτη ἰδιότητα ποὺ μελετήσαμε στὸν προηγούμενο παράγραφο βρίσκομε τὶς ἰσότητες

$$\frac{D}{5}=\frac{D+d}{5+2}=\frac{630}{7}=90 \text{ καὶ } \frac{d}{2}=\frac{D+d}{5+2}=\frac{630}{7}=90.$$

Ἀπ' αὐτὲς προκύπτουν ἀμέσως οἱ τιμὲς ποὺ ζητοῦμε:

$$D=5\cdot 90=450 \text{ mm}, \quad d=2\cdot 90=180 \text{ mm}.$$

3. Ἐφαρμογὴ ΙΙ. *Τὸ μάθημα τῆς Μηχανικῆς διδάσκει ὅτι ἡ συνισταμένη R δυὸ δυνάμεων παράλληλων, ἀλλὰ μὲ ἀντίθετες φορὲς καὶ μὲ ἄνισα μεγέθη P_1 καὶ P_2 (ἔστω $P_1 > P_2$), ποὺ εἶναι ἐφαρμοσμένες σὲ δυὸ σημεῖα A καὶ B ἑνὸς στερεοῦ σώματος, εἶναι μιὰ δύναμη παράλληλη πρὸς τὶς P_1 καὶ P_2 μὲ φορὰ τὴ φορὰ τῆς μεγαλύτερης P_1 καὶ μέγεθος τὴ διαφορὰ $P_1 - P_2$* (σχ. 24-β). *Τὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς $Γ$ αὐτῆς τῆς συνισταμένης R βρίσκεται πάνω σὲ μιὰ προέκταση τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος BA καὶ σὲ μιὰ τέτοια θέση ὥστε:*

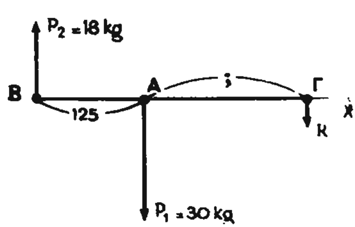
$$\frac{ΓB}{ΓA}=\frac{P_1}{P_2}$$

Προσδιορίστε τὴ θέση τοῦ $Γ$ ξέροντας ὅτι $BA=125$ mm, $P_1=30$ kg καὶ $P_2=18$ kg.

Ἀφοῦ:

$$\frac{ΓB}{ΓA}=\frac{30}{18}=\frac{5}{3},$$

ἡ ἀπόσταση ΓΑ θὰ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ ΓΒ. Ἑπομένως τὸ σημεῖο Γ θὰ βρίσκεται πιὸ κοντὰ στὸ Α παρὰ στὸ Β, ἄρα πάνω στὴν προέκταση ΑΧ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΒΑ πέρα ἀπὸ τὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς Α τῆς μεγαλύτερης δύναμης P_1. Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ Α θὰ βρίσκεται μεταξὺ Β καὶ Γ, ἄρα $ΓB - ΓA = AB = 125$ mm.



Σχ. 24-β. Προσδιορίστε τὴ θέση τοῦ σημείου Γ.

Στὸ παραπάνω λοιπὸν πρόβλημα μᾶς εἶναι γνωστὰ ἡ διαφορὰ $ΓΒ - ΓΑ = 125$ mm καὶ ὁ λόγος $\frac{ΓΒ}{ΓΑ} = \frac{5}{3}$ τῶν ἀποστάσεων ΓΒ καὶ ΓΑ, καὶ θέλομε νὰ ὑπολογίσωμε τὶς ἀποστάσεις αὐτές, γιὰ νὰ προσδιορίσωμε τὴ θέση τοῦ σημείου Γ.

Ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{ΓΒ}{ΓΑ} = \frac{5}{3}$ μὲ ἐναλλαγὴ τῶν μέσων ὅρων παίρνομε τὴν ἀναλογία

$$\frac{ΓΒ}{5} = \frac{ΓΑ}{3}.$$

Ἀφαιρώντας τώρα ἀπὸ τὴ μιὰ μεριὰ τοὺς ἀριθμητὲς καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη τοὺς παρονομαστὲς βρίσκομε, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸν προηγούμενο παράγραφο, τὶς δυὸ ἰσότητες:

$$\frac{ΓΒ}{5} = \frac{ΓΒ - ΓΑ}{5 - 3} = \frac{125}{2} \text{ καὶ } \frac{ΓΑ}{3} = \frac{ΓΒ - ΓΑ}{5 - 3} = \frac{125}{2}.$$

Ἐπιλύνομε τὴν πρώτη ὡς πρὸς τὴν (ἄγνωστη) ἀπόσταση ΓΒ, τὴ δεύτερη ὡς πρὸς τὴν ἀπόσταση ΓΑ καὶ λαμβάνομε τὶς ζητούμενες ἀποστάσεις:

$$ΓΒ = 5 \cdot \frac{125}{2} = 5 \cdot 62{,}5 = 312{,}5 \text{ mm},$$

$$ΓΑ = 3 \cdot \frac{125}{2} = 3 \cdot 62{,}5 = 187{,}5 \text{ mm}.$$

Ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς ἀποστάσεις καὶ ἡ μιὰ μόνο μᾶς ἀρκεῖ φυσικὰ γιὰ νὰ προσδιορίσωμε τὴ θέση τοῦ σημείου Γ, ἐπειδὴ ξέρομε σὲ ποιὰν ἀπὸ τὶς δυὸ προεκτάσεις τοῦ τμήματος ΒΑ βρίσκεται αὐτὸ τὸ Γ.

Ἀπάντηση: Τὸ Γ βρίσκεται πάνω στὴν προέκταση ΑΧ τοῦ τμήματος ΒΑ σὲ ἀπόσταση 187,5 mm ἀπὸ τὸ Α.

Ἀσκήσεις. *1.* Χωρίστε ἕνα χάλκινο σύρμα μήκους 300 m σὲ δυὸ μέρη τέτοια ποὺ τὸ βάρος τοῦ ἑνὸς νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἄλλου λόγο $= 2/3$. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο καὶ γιὰ ἕνα σύρμα μήκους 12 m.

2. Μιὰ λαμαρίνα (ἕνα ἔλασμα) ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 120 mm × 200 mm. Χωρίστε την σὲ δυὸ ὀρθογώνιες λαμαρίνες μὲ λόγο βαρῶν τὸ 5/7. [Νὰ δώσετε καὶ τὶς δυὸ λύσεις ποὺ ἔχει (ποὺ ἐπιδέχεται) τὸ πρόβλημα].

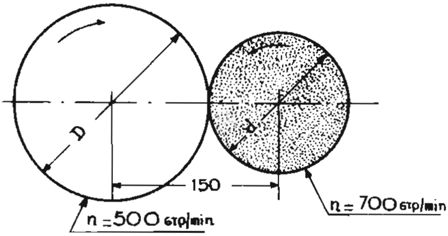
3. Ὑπολογίστε τὰ x καὶ ψ ξέροντας ὅτι $\frac{x}{3} = \frac{\psi}{5}$ καὶ $x + \psi = 56$.

4. Ὑπολογίστε τὰ x καὶ ψ ξέροντας ὅτι $\frac{x}{9} = \frac{\psi}{4}$ καὶ $x - \psi = 35$.

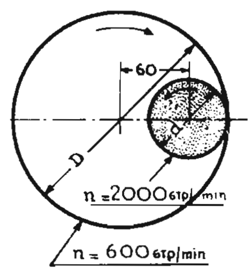
5. Ὑπολογίστε τὰ x, ψ καὶ z ξέροντας ὅτι $\frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{8}$ καὶ $x + \psi + z = 195$.

6. Μοιράστε τὸ ποσὸ 1200 δρχ σὲ τρία πρόσωπα A, B καὶ Γ ἔτσι ποὺ ὁ B νὰ πάρῃ δυὸ φορὲς περισσότερα ἀπὸ τὸν A καὶ ὁ Γ τρεῖς φορὲς περισσότερα ἀπὸ τὸν A.

7. Ὑπολογίστε τὶς ἀρχικὲς διαμέτρους τῶν δυὸ ὀδοντωτῶν τροχῶν ποὺ παριστάνει τὸ σχ. 24-γ, ξέροντας ὅτι 1ο ἡ ἀπόσταση τῶν κέν-



Σχ. 24-γ. Ὑπολογίστε τὰ D καὶ d.



Σχ. 24-δ. Ὑπολογίστε τὰ D καὶ d.

τρων τους εἶναι 150 mm καὶ 2ο ὁ λόγος D/d εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν σημειωμένων περιστροφικῶν ταχυτήτων τῶν δυὸ τροχῶν.

8. Ἡ ἴδια ἄσκηση γιὰ τοὺς δυὸ ὀδοντωτοὺς τροχοὺς ποὺ παριστάνονται στὸ σχῆμα 24-δ καὶ ποὺ ὁ ἕνας τους (ὁ μεγαλύτερος) εἶναι ἐφοδιασμένος μὲ ἐσωτερικὴ ὀδόντωση.

Μάθημα 25.

Μεγέθη (ἢ ποσὰ) κατευθείαν ἀνάλογα.

1. Τί καλοῦμε μεγέθη κατευθείαν ἀνάλογα; Ἄς προσέξωμε τὸν παρακάτω πίνακα, ὅπου ἀναγράφονται τὰ βάρη ποὺ ἔχουν διάφορες μερίδες ἀπὸ μπουλόνια μὲ τὶς ἴδιες διαστάσεις καὶ ἀπὸ τὸ ἴδιο ὑλικό:

Μερίδα	1η	2η	3η	4η	5η	6η
Ἀριθ. μπουλονιῶν τῆς μερίδας	10	20	30	50	100	200
Βάρος τῆς μερίδας σὲ kg	7,5	15	22,5	37,5	75	150

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μπουλονιῶν μιᾶς μερίδας εἶναι ἕνα μέγεθος (ἕνα ποσὸ) ποὺ παίρνει διάφορες τιμές: 10, 20, 30, κτλ. Τὸ βάρος μιᾶς μερίδας εἶναι ἕνα ἄλλο μέγεθος (ποσὸ) ποὺ παίρνει ἐπίσης διάφορες τιμές, 7,5 kg, 15 kg, 22,5 kg, κτλ., ἀντίστοιχες στὶς τιμὲς τοῦ πρώτου μεγέθους. Τὰ δυὸ μεγέθη εἶναι ὅμως συσχετισμένα μεταξύ τους ἔτσι πού, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου (δηλ. ὁ ἀριθμὸς τῶν μπουλονιῶν τῆς μερίδας) γίνῃ 2, 3, 4, 5, ... φορὲς μεγαλύτερη, καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ δεύτερου μεγέθους (τὸ βάρος τῆς μερίδας) γίνεται 2, 3, 4, 5, ... φορὲς μεγαλύτερη. Γι᾽ αὐτὸ λέμε ὅτι τὸ βάρος τῆς μερίδας εἶναι ***κατευθείαν ἀνάλογο πρὸς*** τὸν ἀριθμὸ μπουλονιῶν τῆς μερίδας.

Γενικὰ ἔχομε τὸν ἀκόλουθο ὁρισμό:

Δυὸ μεγέθη (ἢ ποσὰ) εἶναι κατευθείαν ἀνάλογα, ὅταν 1ο τὰ μεγέθη αὐτὰ παίρνουν διάφορες τιμὲς ἔτσι ποὺ οἱ τιμὲς τοῦ ἑνὸς ν᾽ ἀντιστοιχοῦν στὶς τιμὲς τοῦ ἄλλου καὶ 2ο κάθε φορὰ ποὺ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μεγέθους γίνεται 2, 3, 4, 5, ... φορὲς μεγαλύτερη, καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου γίνεται 2, 3, 4, 5, ... φορὲς μεγαλύτερη.

Τὴ λέξη «μεγαλύτερη» μέσα στὸν παραπάνω ὁρισμὸ μποροῦμε νὰ τὴν ἀντικαταστήσωμε μὲ τὴ λέξη «μικρότερη», γιατὶ ὅταν μιὰ τιμὴ γίνη 2, 3, 4, ... φορὲς μεγαλύτερη, τότε ἡ ἀρχικὴ τιμὴ εἶναι 2, 3, 4, ... φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴ νέα τιμή. Ἂς σημειωθῆ ἀκόμη ὅτι ἡ λέξη «κατευθεῖαν» ποὺ συνοδεύει τὴ λέξη «ἀνάλογα» παραλείπεται συχνὰ γιὰ συντομία.

Νὰ τώρα μερικὲς συνέπειες ἀπὸ τὰ παραπάνω.

1ο. Ἂν συγκρίνωμε δυὸ ὁποιεσδήποτε μερίδες, π.χ. τὴ 2η καὶ τὴν 5η, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{20}{100} = \frac{15}{75}$, δηλ. ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν τῶν μπουλονιῶν τῶν δυὸ μερίδων ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τῶν βαρῶν τῶν δυὸ μερίδων.

Ὥστε, ***σὲ δυὸ κατευθεῖαν ἀνάλογα μεγέθη ὁ λόγος δυὸ ὁποιωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου μεγέθους.***

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα δικαιολογεῖ τὴν ὀνομασία «ἀνάλογα» ποὺ δίνομε στὰ δυὸ μεγέθη.

2ο. Τὰ πηλίκα δυὸ ἀντίστοιχων τιμῶν ἀπὸ δυὸ κατευθεῖαν ἀνάλογα μεγέθη εἶναι μεταξύ τους ἴσα. Π.χ. στὸ παραπάνω παράδειγμά μας ἔχομε:

$$\frac{7,5}{10} = \frac{15}{20} = \frac{22,5}{30} = \frac{37,5}{50} = \frac{75}{100} = \frac{150}{200} = 0,75.$$

(Ἂς σημειωθῆ ὅτι ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν πηλίκων αὐτῶν παριστάνει τὸ βάρος ἑνὸς μπουλονιοῦ).

Ὥστε: ***τὸ πηλίκο δυὸ ὁποιωνδήποτε ἀντίστοιχων τιμῶν ἀπὸ δυὸ κατευθεῖαν ἀνάλογα μεγέθη εἶναι πάντα τὸ ἴδιο, ὁποιες καὶ νὰ εἶναι οἱ δυὸ ἀντίστοιχες τιμὲς ποὺ παίρνομε γιὰ νὰ τὸ σχηματίσωμε.***

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐξακριβώσωμε εὔκολα, ἂν δυὸ μεγέθη εἶναι κατευθεῖαν ἀνάλογα· γιὰ νὰ συμβαίνη αὐτὸ ἀρκεῖ τὸ πηλίκο δυὸ ἀντίστοιχων τιμῶν τῶν μεγεθῶν νὰ εἶναι τὸ ἴδιο γιὰ ὅλα τὰ ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν.

2. Μερικὰ παραδείγματα κατευθείαν ἀνάλογων μεγεθῶν: *Ἡ ἀμοιβὴ* ἑνὸς τεχνίτη ποὺ πληρώνεται μὲ τὸ κομμάτι καὶ *ὁ ἀριθμὸς τῶν κομματιῶν* ποὺ παραδίνει στὸν ἐργοδότη. *Ἡ ἀμοιβὴ* ἑνὸς ἐργάτη ποὺ πληρώνεται μὲ τὴν ὥρα καὶ *ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν* ποὺ ἐργάζεται.

Ἡ τιμὴ (ἀξία) ἑνὸς ἐμπορεύματος ποὺ πουλιέται μὲ τὸ κιλὸ (ἢ τὴν ὀκὰ) καὶ *τὸ βάρος* τοῦ ἐμπορεύματος. *Ἡ τιμὴ* ἑνὸς ὑφάσματος (ποὺ πουλιέται μὲ τὸ μέτρο ἢ τὴν πήχη) καὶ *τὸ μάκρος* (τὸ μῆκος) τοῦ ὑφάσματος.

Τὸ βάρος μιᾶς μεταβαλλόμενης ποσότητας νεροῦ καὶ *ὁ ὄγκος* του. Γενικά: *τὸ βάρος* μιᾶς μεταβαλλόμενης ποσότητας ἀπὸ ἕνα ὁμοιογενὲς ὑλικὸ καὶ *ὁ ὄγκος* του.

Τὸ μῆκος τοῦ δρόμου ποὺ διατρέχει ἕνα κινητό, τὸ ὁποῖο κινεῖται ὁμοιόμορφα (τὸ ὁποῖο ἔχει σταθερὴ ταχύτητα), καὶ *τὸ χρονικὸ διάστημα* ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ τὸν διατρέξῃ.

3. Πρόβλημα. *Σ' ἕναν πίνακα σημειώθηκε ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν ποὺ κάνει ἕνας τροχὸς σὲ 60 sec, σὲ 90 sec, σὲ 120 sec. Πόσες στροφὲς θὰ κάμῃ σὲ 150 sec διατηρώντας τὴν ἴδια σταθερὴ περιστροφικὴ ταχύτητα;*

Παρατηρήσεις:	1η	2η	3η	4η
Χρόνος περιστροφῆς	60 sec	90 sec	120 sec	150 sec
Ἀριθμὸς στροφῶν	50	75	100	x στρ.

Ἀπὸ τὶς παρατηρήσεις τῶν στηλῶν 1η, 2η καὶ 3η συμπεραίνομε, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸ τέλος τοῦ § 1, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν καὶ ὁ χρόνος περιστροφῆς εἶναι μεγέθη κατευθείαν ἀνάλογα· καὶ ἀλήθεια, οἱ λόγοι τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τους εἶναι ἴσοι:

$$\frac{50}{60}=\frac{75}{90}=\frac{100}{120}\left(=\frac{5}{6}\right).$$

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τώρα τὸν ἀριθμὸ x τῶν στροφῶν ποὺ κάνει ὁ τροχὸς σὲ 150 sec, μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἑξῆς δυὸ τρόπους.

1ος τρόπος. Ὁ τροχὸς

σὲ 60 sec κάνει 50 στρ.

ἄρα σὲ 1 sec θὰ κάνῃ $\frac{50}{60}$ στρ.

καὶ σὲ 150 sec » » $\frac{50}{60}\cdot 150=\frac{50\cdot 150}{60}$ στρ.

Ὁ τρόπος αὐτὸς λέγεται *μέθοδος ἀναγωγῆς στὴ μονάδα*.

Γιὰ νὰ βροῦμε τώρα τὸ ζητούμενο ἀριθμητικὸ ἐξαγόμενο, ἁπλοποιοῦμε τὸ κλάσμα $\frac{50\cdot 150}{60}$ πρῶτα διὰ 10, ἔπειτα διὰ 3 καὶ τέλος διὰ 2. Ἔτσι βρίσκομε:

$$x=\frac{50\cdot 150}{60}=\frac{50\cdot 15}{6}=\frac{50\cdot 5}{2}=\frac{25\cdot 5}{1}=125 \text{ στρ.}$$

2ος τρόπος. Σύμφωνα μὲ ὅσα συμπεράναμε στὴν ἀρχή, ἔχομε τὴν *ἀναλογία*:

$$\frac{x}{150}=\frac{50}{60}.$$

Αὐτὴ ἡ ἰσότητα εἶναι μιὰ ἐξίσωση γιὰ τὸν ζητούμενο ἀριθμὸ στροφῶν x. Τὴν ἐπιλύνομε πολλαπλασιάζοντας καὶ τὰ δυὸ μέλη της μὲ 150:

$$x=\frac{50}{60}\cdot 150=\frac{50\cdot 150}{60}=125 \text{ στρ.}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ 2ος αὐτὸς τρόπος μᾶς ὁδηγεῖ στὴν *εὐθεία μέθοδο τῶν τριῶν*, τὴν ὁποία μελετήσαμε στὸν Τόμ. Α΄, Μάθ. 56.

Μερικὲς πρακτικὲς συμβουλές:

1ο. Ὅταν ἔχετε νὰ λύσετε ἕνα πρόβλημα, πρῶτα νὰ βρίσκετε ἀπὸ τὰ δεδομένα τὸν τελικὸ τύπο γιὰ τὸ ζητούμενο, σημειώνοντας μόνο τὶς ἀπαιτούμενες ἀριθμητικὲς πράξεις, καὶ ὕστερα νὰ προχωρῆτε στὴν ἐκτέλεση τῶν πράξεων αὐτῶν.

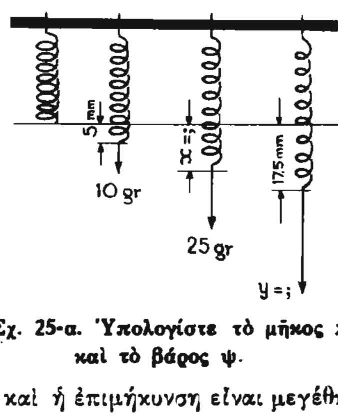
2ο. Νὰ ἁπλοποιῆτε, ὅσο εἶναι δυνατό, τὶς κλασματικὲς παραστάσεις, πρὶν ἀρχίσετε νὰ ἐκτελῆτε τὶς σημειωμένες ἀριθμητικὲς πράξεις.

3ο. Στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου συμφέρει ἐν γένει νὰ ἐκτελῆτε πρῶτα τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ ἔπειτα τὶς διαιρέσεις.

Ἀσκήσεις. 1. Μοντοὺλ ἑνὸς ὀδοντωτοῦ τροχοῦ εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαμέτρου του σὲ mm διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δοντιῶν του (βλ. καὶ τέλος τοῦ Μαθ. 21). Ἑπομένως, σὲ μιὰ σειρὰ ἀπὸ ὀδοντωτοὺς τροχοὺς *μὲ τὸ ἴδιο μοντοὺλ* ὁ ἀριθμὸς τῶν δοντιῶν εἶναι κατευθεῖαν ἀνάλογος πρὸς τὴ διάμετρο. Ξέροντας αὐτό, συμπληρῶστε τὰ κενὰ στὸν ἀκόλουθο πίνακα ποὺ ἀναφέρεται σὲ τροχοὺς μὲ τὸ ἴδιο μοντούλ:

Ἀριθμὸς τῶν δοντιῶν	35			50	75	
Διάμετρος σὲ mm	175	150	200			450

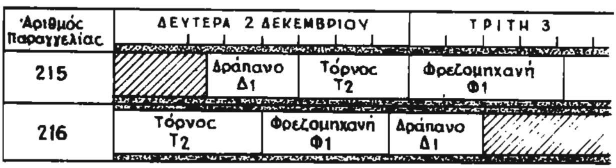
2. Ἕνα τραῖνο διέτρεξε 50 km σὲ 35 min καὶ ἕνα ἄλλο 65 km σὲ 45 min. Οἱ δρόμοι ποὺ διέτρεξαν τὰ δυὸ τραῖνα εἶναι ἄραγε κατευθεῖαν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς χρόνους τοὺς ὁποίους χρειάσθηκαν γιὰ νὰ τοὺς διατρέξουν; Ἂν ὄχι, πόσα χιλιόμετρα θὰ ἔπρεπε νὰ εἶχε διατρέξει τὸ δεύτερο τραῖνο σὲ 45 min, γιὰ νὰ εἶναι οἱ δρόμοι τῶν δυὸ τραίνων κατευθεῖαν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς χρόνους τῶν διαδρομῶν τους;



Σχ. 25-α. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος x καὶ τὸ βάρος ψ.

3. Ἕνα κατακόρυφο ἑλικωτὸ (σπειρωτὸ) ἐλατήριο (σχ. 25-α), ποὺ ἔχει τὸ ἀπάνω ἄκρο του στερεωμένο κάπου, μακραίνει κατὰ 5 mm ὅταν κρεμάσωμε στὸ κάτω ἄκρο του 10 kg. Ξέροντας ὅτι τὸ βάρος ποὺ προξενεῖ τὴν ἐπιμήκυνση (τὸ μάκρεμα) καὶ ἡ ἐπιμήκυνση εἶναι μεγέθη κατευθείαν ἀνάλογα, συμπληρῶστε τὸ σχῆμα μὲ τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς ποὺ λείπουν τῆς ἐπιμήκυνσης x καὶ τοῦ βάρους ψ.

4. Στὸ γραφεῖο προγραμματισμοῦ (προετοιμασίας) τῶν ἐργασιῶν ἑνὸς μηχανουργείου ὁ ἁρμόδιος ὑπάλληλος παριστάνει μὲ χάρτινες λουρίδες διάφορες ἐργασίες, ποὺ περιέχονται σὲ παραγγελίες πελατῶν, δίνοντας στὴ λουρίδα μῆκος κατευθείαν ἀνάλογο πρὸς τὴ χρονικὴ διάρκεια ἡ ὁποία χρειάζεται γιὰ νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ παριστανόμενη ἐργασία (Σχ. 25-β). Ξέροντας τὸ μῆκος 15 cm τῆς λουρίδας, ποὺ παριστάνει μιὰν ἐργασία στὸ μηχανικὸ τρυπάνι μὲ διάρκεια 2 h καὶ 30 min, (ἀπὸ τὴν παραγγελία ὑπ' ἀριθμ. 215), ὑπολογίστε 1ο τὸ μῆκος τῆς λουρίδας ἡ ὁποία παριστάνει μιὰν ἐργασία στὸν τόρνο (διάρκεια 4 h), 2ο τὸ



Σχ. 25-β. Προγραμματισμός.

μῆκος τῆς λουρίδας γιὰ μιὰν ἐργασία στὴ φρέζα (διάρκεια 4 h 15 min).

Ποιά εἶναι τὰ μήκη τῶν λουρίδων οἱ ὁποῖες θὰ παραστήσουν τὶς ἐργασίες τῆς παραγγελίας ὑπ' ἀριθμ. 216.

Μάθημα 26.

Μεγέθη (ἢ ποσὰ) ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

1. Τί καλοῦμε μεγέθη ἀντιστρόφως ἀνάλογα; Ἂς προσέξωμε π.χ. τὸν παρακάτω πίνακα ὅπου ἀναγράφονται οἱ χρονικὲς διάρκειες τὶς ὁποῖες χρειάσθηκαν διάφορες ὁμάδες ἐργατῶν γιὰ νὰ μεταφέρουν ἀπὸ ἕνα πλοῖο σ' ἕνα ἄλλο τὸν ἴδιο ἀριθμὸ σάκκους τσιμέντο.

Ὁμάδα	1η	2η	3η	4η
Ἀριθμὸς ἐργατῶν στὴν ὁμάδα	2	3	4	6
Διάρκεια ἐργασίας	30 min	20 min	15 min	10 min

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν μιᾶς ὁμάδας εἶναι ἕνα μέγεθος (ἕνα ποσὸ) ποὺ παίρνει διάφορες τιμές: 2, 3, 4, 6. Ἡ διάρκεια τῆς μεταφόρτωσης εἶναι ἕνα ἄλλο μέγεθος (ποσὸ) ποὺ παίρνει ἐπίσης διάφορες τιμές: 30 min, 20 min, 15 min, 10 min, ἀντίστοιχες στὶς τιμὲς τοῦ πρώτου μεγέθους. Τὰ δυὸ μεγέθη εἶναι ὅμως συσχετισμένα μεταξύ τους ἔτσι πού, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου (δηλ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν μιᾶς ὁμάδας) γίνη 2, 3, 4,... φορὲς μεγαλύτερη, ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ δεύτερου μεγέθους (ἡ διάρκεια τῆς ἐργασίας τῆς ὁμάδας) γίνεται 2, 3, 4,... φορὲς μικρότερη. Γι' αὐτὸ λέμε πὼς ἡ διάρκεια ἐργασίας εἶναι *ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρὸς* τὸν ἀριθμὸ τῶν ἐργατῶν οἱ ὁποῖοι ἐκτελοῦν τὴν ἐργασία.

Γενικὰ ἔχομε τὸν ἀκόλουθο ὁρισμό:

Δυὸ μεγέθη (ἢ ποσὰ) εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν 1ο τὰ μεγέθη αὐτὰ παίρνουν διάφορες τιμὲς ἔτσι ποὺ οἱ τιμὲς τοῦ ἑνὸς ν' ἀντιστοιχοῦν στὶς τιμὲς τοῦ ἄλλου καὶ 2ο κάθε φορὰ ποὺ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μεγέθους γίνεται 2, 3, 4, 5,... φορὲς μεγαλύτερη, ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου γίνεται 2, 3, 4, 5,... φορὲς μικρότερη.

Να τώρα μερικὲς συνέπειες ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμό.

1ο. Ἂν συγκρίνωμε δυὸ ὁποιεσδήποτε ὁμάδες ἐργατῶν, π. χ. τὴν 1η καὶ τὴν 3η , θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{2}{4} = \frac{15}{30}$, δηλ. ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν στὴ μιὰ ὁμάδα πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν ἐργατῶν στὴν ἄλλη εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀντίστοιχων διαρκειῶν ἐργασίας.

Ὥστε : ***σὲ δυὸ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη ὁ λόγος δυὸ ὁποιωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου μεγέθους.***

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα δικαιολογεῖ τὴν ὀνομασία «ἀντιστρόφως ἀνάλογα» ποὺ δίνομε στὰ δυὸ μεγέθη.

2ο. Ὅταν ἔχωμε δυὸ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη, ὅλα τὰ γινόμενα δυὸ ἀντίστοιχων τιμῶν τους εἶναι μεταξύ τους ἴσα. Π. χ. στὸ παραπάνω παράδειγμά μας ἔχομε :

$$2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 6 \cdot 10 = 60 .$$

(Ἂς σημειωθῆ ὅτι ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν 4 αὐτῶν γινομένων παριστάνει τὸ χρόνο σὲ min τὸν ὁποῖο χρειάζεται *ἕνας* ἐργάτης γιὰ νὰ ἐκτελέση τὴ μεταφόρτωση).

Ὥστε : ***σὲ δυὸ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη, τὸ γινόμενο δυὸ ἀντίστοιχων τιμῶν τους εἶναι πάντα τὸ ἴδιο, ὁποιες καὶ νὰ εἶναι οἱ δυὸ ἀντίστοιχες τιμὲς ποὺ παίρνομε γιὰ νὰ τὸ σχηματίσωμε.***

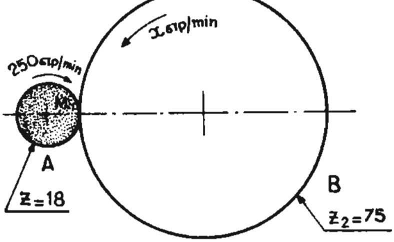
Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐξακριβώσωμε εὔκολα ἂν δυὸ μεγέθη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Γιὰ νὰ συμβαίνη τοῦτο, ἀρκεῖ τὸ γινόμενο δυὸ ἀντίστοιχων τιμῶν τῶν μεγεθῶν νὰ εἶναι τὸ ἴδιο γιὰ ὅλα τὰ ζευγάρια ἀντίστοιχων τιμῶν.

2. Μερικὰ παραδείγματα ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν: Ὁ *χρόνος* τὸν ὁποῖο χρειάζεται ἕνα ὁμοιόμορφα κινούμενο κινητὸ γιὰ νὰ διατρέξη ἕναν ὁρισμένο δρόμο καὶ ἡ *ταχύτητα* μὲ τὴν ὁποία κινεῖται.

Οἱ *περιστροφικὲς ταχύτητες* δυὸ ὀδοντωτῶν τροχῶν (γραναζωτῶν) ποὺ συμπλέκονται εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρὸς τὶς *διαμέτρους* των ἢ πρὸς τοὺς *ἀριθμοὺς τῶν δοντιῶν* τους.

Ἡ ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση ἑνὸς κυλινδρικοῦ ἀγωγοῦ, σταθεροῦ μήκους καὶ ἀπὸ τὸ ἴδιο ὑλικό, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρὸς *τὴν ἐπιφάνεια τῆς διατομῆς του.*

3. Πρόβλημα. *Ὅπως ξέρομε (βλ. Μάθ. 22, Ἀσκ. 5), ὅταν δυὸ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ συμπλέκωνται (σχ. 26-α), οἱ περιστροφικές τους ταχύτητες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν δοντιῶν τους. Ἑπομένως ποιὰ εἶναι ἡ περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τροχοῦ B μὲ 75 δόντια, ὅταν ὁ τροχίσκος A μὲ 18 δόντια ἔχη περιστροφικὴ ταχύτητα 250 στρ/min, δηλ. κάνη 250 στροφὲς στὸ λεπτό;*



Σχ. 26-α. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τροχοῦ B.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τροχοῦ B, δηλαδὴ τὸν ἀριθμὸ x τῶν στροφῶν τὶς ὁποῖες κάνει στὸ λεπτό, μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀκόλουθους δυὸ τρόπους.

1ο. Ἀπὸ τὸ σημεῖο ἐπαφῆς M τῶν δυὸ τροχῶν περνοῦν σὲ 1 min (18 · 250) δόντια τοῦ τροχίσκου A καί, κατὰ συνέπεια, (18 · 250) δόντια τοῦ τροχοῦ B. Κάθε φορὰ ὅμως ποὺ 75 δόντια τοῦ B περνοῦν ἀπὸ τὸ σημεῖο M, ὁ τροχὸς αὐτὸς συμπληρώνει μιὰν ὁλάκερη στροφή. Ἑπομένως ὁ τροχὸς B θὰ κάμη σὲ 1 min τόσες στροφὲς ὅσες φορὲς τὸ 75 χωρεῖ στὸν ἀριθμὸ (18 · 250), δηλαδὴ

$$x = \frac{18 \cdot 250}{75} = \frac{18 \cdot 10}{3} = \frac{6 \cdot 10}{1} = 60 \text{ στρ/min}.$$

2ο. Ἂς γράψωμε ὅτι οἱ περιστροφικὲς ταχύτητες τῶν δυὸ τροχῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν δοντιῶν τους, μὲ ἄλλα λόγια ὅτι ὁ λόγος ποὺ ἔχουν οἱ δυὸ ἀριθμοὶ στροφῶν τῶν τροχῶν σὲ 1 min εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ λόγου ποὺ ἔχουν οἱ δυὸ ἀριθμοὶ τῶν δοντιῶν τους:

$$\frac{x}{250}=\frac{18}{75}.$$

Αὐτὴ ἡ ἰσότητα εἶναι μιὰ ἐξίσωση γιὰ τὸν ζητούμενο ἀριθμὸ στροφῶν x. Τὴν ἐπιλύνομε πολλαπλασιάζοντας τὰ μέλη της ἐπὶ 250. Βρίσκομε:

$$x=\frac{18}{75}\cdot 250=\frac{18\cdot 250}{75}=60 \text{ στρ/min}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ 2ος αὐτὸς τρόπος μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ***ἀντίστροφη μέθοδο τῶν τριῶν***, τὴν ὁποία μελετήσαμε στὸν Τόμ. Α΄, Μάθ. 56.

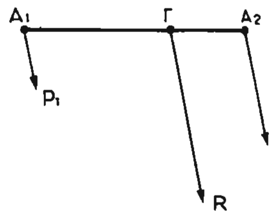
Ἀσκήσεις. *1*. Μιὰ σιδερένια ράβδος μὲ διατομὴ ἕνα τετράγωνο πλευρᾶς 30 mm ἔχει μῆκος 4 m. Τὴν ὑποβάλλομε σὲ τράβηγμα περνώντας την ἀπὸ μιὰ τετράγωνη τρύπα μὲ πλευρὰ 15 mm. Ποιὸ θὰ εἶναι τὸ μῆκος x τῆς ράβδου μετὰ τὸ τράβηγμα; (Ὑποθέτομε ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ δὲν ἀλλάζει μὲ τὴν κατεργασία).

Πραγματευθῆτε (λύστε) τὸ ἴδιο πρόβλημα ἀλλὰ μὲ τράβηγμα τῆς ἀρχικῆς ράβδου διαμέσου τετράγωνης τρύπας τῶν 7,5 mm μιὰ φορά, τῶν 10 mm μιὰν ἄλλη.

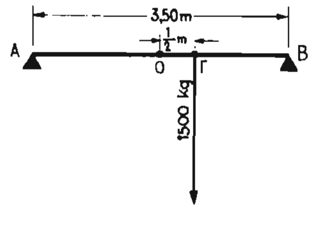
Παραβάλλοντας τώρα τὰ τρία μήκη, ποὺ βρήκατε, πρὸς τὶς ἀντίστοιχες πλευρὲς τῆς τετράγωνης τρύπας, τί παρατηρεῖτε; Μήπως μπορεῖτε, βασιζόμενοι σ' αὐτὴ τὴν παρατήρηση, νὰ προβλέψετε ποιὸ θὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ράβδου, ὅταν τὴν περάσετε ἀπὸ τετράγωνη τρύπα μὲ πλευρὰ 5, 6, 10 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν πρώτη τῶν 15 mm; Ποιὸς κανόνας (νόμος) σᾶς ὁδήγησε σ' αὐτὲς τὶς προβλέψεις; Νὰ τὸν δικαιολογήσετε μὲ ἕναν συλλογισμό. Ἄραγε, ἂν ἡ διατομὴ τῆς ράβδου ἦταν κυκλική, θὰ καταλήγατε σὲ ἄλλον κανόνα (νόμο);

2. Τὰ δυὸ γρανάζια (οἱ δυὸ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ) ἑνὸς μαγγανιοῦ (ἁπλοῦ βαρούλκου) ἔχουν 15 δόντια τὸ ἕνα, 90 τὸ ἄλλο. Ὑπολογίστε πόσες στροφὲς κάνει στὸ λεπτὸ ὁ δεύτερος τροχὸς (μὲ τὰ 90 δόντια) ὅταν ὁ πρῶτος κάνῃ 4 στροφὲς στὸ λεπτό.

3. Δυὸ δυνάμεις P_1 καὶ P_2 παράλληλες καὶ ὁμόρροπες (δηλ. μὲ τὴν ἴδια φορά), ἐφαρμόζουν ἀντιστοίχως στὰ σημεῖα A_1 καὶ A_2 ἑνὸς στερεοῦ σώματος. Ἡ Μηχανικὴ διδάσκει ὅτι τὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς Γ τῆς συνισταμένης R τῶν δυὸ αὐτῶν δυνάμεων χωρίζει τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα A_1A_2 σὲ δυὸ μέρη $A_1Γ$ καὶ $ΓA_2$ ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ μεγέθη τῶν δυνάμεων P_1 καὶ P_2. Ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση x τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς Γ τῆς R ἀπὸ τὸ σημεῖο A_1 ὅταν $P_1 = 125$ kg, $P_2 = 70$ kg, $A_1A_2 = 0,60$ m.

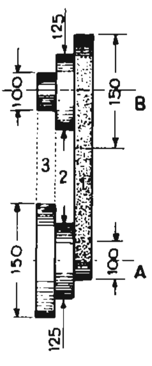


Σχ. 26-β.



Σχ. 26-γ.

4. Μιὰ ὁριζόντια δοκὸς ὑποστηρίζεται στὰ δυὸ σημεῖα της Α καὶ Β ποὺ ἀπέχουν 3,50 m. Πάνω στὴ δοκὸ τοποθετοῦμε ἕνα φορτίο 1 500 kg ἔτσι ποὺ τὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς του Γ ν' ἀπέχῃ 0,50 m ἀπὸ τὸ μέσο Ο τῆς δοκοῦ. Ὑπολογίστε τὶς δυὸ κατακόρυφες δυνάμεις ποὺ ἔχουν γιὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τὰ Α καὶ Β καὶ γιὰ συνισταμένη δύναμη ἀντίθετη πρὸς τὸ βάρος τοῦ φορτίου μὲ σημεῖο ἐφαρμογῆς τὸ Γ. (Λέγοντας « ἀντίθετη πρὸς τὸ βάρος τοῦ φορτίου » ἐννοοῦμε ὅτι ἡ συνισταμένη ἔχει τὸ ἴδιο μέγεθος (1 500 kg) μὲ τὸ βάρος τοῦ φορτίου ἀλλὰ φορὰ ἀντίθετη, ἄρα στραμμένη πρὸς τὰ πάνω).



Σχ. 26-δ. Ὑπολογίστε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ ἄξονα Β, ὅταν ὁ ἄξονας Α κάνῃ 200 στρ/min.

5. Ὅταν μιὰ τροχαλία παρασύρῃ σὲ κίνηση μιὰν ἄλλη διαμέσου ἑνὸς λουριοῦ, οἱ περιστροφικὲς ταχύτητες τῶν δυὸ τροχαλιῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρὸς τὶς διαμέτρους τῶν τροχαλιῶν (σχ. 25-β). Ὑπολογίστε τὶς τρεῖς περιστροφικὲς ταχύτητες τοῦ ἄξονα Β ὅταν ὁ ἄξονας Α περιστρέφεται μὲ ταχύτητα 200 στρ/min καὶ τὸ λουρὶ τοποθετῆται διαδοχικὰ στὶς θέσεις 1, 2, 3.

6. Ἡ ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση ἑνὸς ἀγωγοῦ ποὺ ἔχει εἰδικὴ ἀντίσταση ὑλικοῦ ρ (μικροώμ·cm), μῆκος l (cm) καὶ ἐπιφάνεια διατομῆς F (cm^2) εἶναι ἴση (σὲ μικροὼμ) μὲ

$$R = \rho \frac{l}{F}.$$

Δεῖξτε ὅτι οἱ ἠλεκτρικὲς ἀντιστάσεις δυὸ ἀγωγῶν, τοῦ ἴδιου μήκους καὶ ἀπὸ τὸ ἴδιο ὑλικό, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρὸς τὶς ἐπιφάνειες τῶν διατομῶν τους.

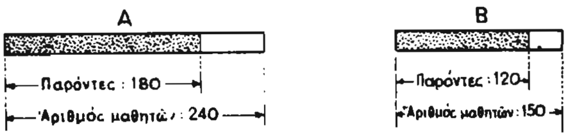
Ἐφαρμογή. Δυὸ χάλκινοι ἀγωγοὶ τοῦ ἴδιου μήκους ἔχουν διαμέτρους 2,5 mm καὶ 4 mm ἀντιστοίχως· ὑπολογίστε τὸ λόγο τῶν ἠλεκτρικῶν τους ἀντιστάσεων. Ἂν ἡ ἀντίσταση τοῦ πρώτου εἶναι 18 ὤμ, ποιά εἶναι ἡ ἀντίσταση τοῦ δεύτερου ἀγωγοῦ;

Μάθημα 27.

Ποσοστὰ στὰ ἑκατό. Κλίση. Κωνικότητα.

1. Τί σημαίνει ἡ ἔκφραση «τόσα στὰ ἑκατὸ» (ἢ τόσα τοῖς ἑκατόν).

Πρόβλημα. *Δυὸ σχολεῖα Α καὶ Β ἔχουν ἀντιστοίχως 240 καὶ 150 μαθητές. Μιὰ μέρα τὸ σχολεῖο Α εἶχε 180 παρόντες καὶ τὸ Β 120. Ποιό ἀπὸ τὰ δυὸ σχολεῖα παρουσίαζε τὴν καλύτερη φοίτηση; Μὲ ἄλλα λόγια, ποιό ἀπὸ τὰ δυὸ εἶχε περισσότερους παρόντες ἀναλογικὰ πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν του;* (Σχ. 27-α).



Σχ. 27-α. Νὰ συγκρίνετε τὴ φοίτηση στὰ δυὸ σχολεῖα.

Σχηματίζομε γιὰ κάθε σχολεῖο τὸ λόγο τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρόντων πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν του· ἔτσι ἔχομε τοὺς δυὸ λόγους:

$$\frac{180}{240} \text{ ἢ, μετὰ ἁπλοποίηση, } \frac{3}{4} \text{ καὶ } \frac{120}{150} \text{ ἢ } \frac{4}{5}.$$

Συγκρίνοντάς τους βλέπομε ὅτι ὁ λόγος $\frac{3}{4}$ $\left(\text{ποὺ εἶναι ἴσος μὲ } \frac{15}{20}\right)$ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν $\frac{4}{5}$ $\left(=\frac{16}{20}\right)$. Ἄρα τὸ σχολεῖο Β εἶχε ἐκείνη τὴν ἡμέρα τὴν καλύτερη φοίτηση, δηλαδὴ *ἀναλογικὰ* περισσότερους παρόντες ἀπὸ τὸ σχολεῖο Α.

Ἡ σύγκριση τῶν δυὸ λόγων ἔγινε, ἀφοῦ τοὺς μετατρέψαμε σὲ δυὸ ἄλλους ἀντίστοιχα ἴσους ἀλλὰ μὲ κοινὸ παρονομαστὴ (τὸ 20). Θὰ μπορούσαμε φυσικὰ νὰ χρησιμοποιήσωμε καὶ ἕναν ὁποιοδήποτε ἄλλο κοινὸ παρονομαστή, συνηθίζεται ὅμως σὲ παρόμοιες συγκρίσεις νὰ παίρνωμε κοινὸ παρονομαστὴ γιὰ τοὺς συγκρινόμενους λόγους τὸ 100. Ἔτσι, στὸ παραπάνω πρόβλημά μας θὰ ἔχωμε νὰ βροῦμε γιὰ κάθε σχολεῖο τὸ ἑξῆς: ἀπὸ 100 μαθητές του πόσοι ἦσαν παρόντες ἐκείνη τὴν ἡμέρα; Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνῃ εἴτε μὲ τὸν ἕνα εἴτε μὲ τὸν ἄλλο ἀπὸ τοὺς ἀκόλουθους δυὸ τρόπους:

1ος τρόπος. Ὅπως εἴδαμε καὶ πιὸ πάνω, ἔχομε γιὰ τὰ δυὸ σχολεῖα τοὺς λόγους:

γιὰ τὸ Α γιὰ τὸ Β

$$\frac{\text{ἀριθμὸς παρόντων}}{\text{ἀριθμὸς μαθητῶν}}=\frac{180}{240}, \quad \frac{\text{ἀριθμὸς παρόντων}}{\text{ἀριθμὸς μαθητῶν}}=\frac{120}{150}.$$

Γιὰ νὰ τρέψωμε τὸ λόγο $\frac{180}{240}$ σ' ἕναν ἄλλο ἴσο ἀλλὰ μὲ παρονομαστὴ τὸ 100, πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους του μὲ τὸν ἀριθμὸ $\frac{100}{240}$ $\left(\text{γιατὶ } 240\cdot\frac{100}{240}=100\right)$. Γιὰ νὰ τρέψωμε τὸ λόγο $\frac{120}{150}$ σ' ἕναν ἴσο ἀλλὰ μὲ παρονομαστὴ τὸ 100, πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους του μὲ τὸν ἀριθμὸ $\frac{100}{150}$. Ἔτσι βρίσκομε:

$$\frac{180}{240}=\frac{180\cdot 100/240}{240\cdot 100/240}=\frac{1\,800:24}{100}=\frac{75}{100},$$

$$\frac{120}{150}=\frac{120\cdot 100/150}{150\cdot 100/150}=\frac{1\,200:15}{100}=\frac{80}{100}.$$

Ἐπομένως, ἀπὸ 100 μαθητὲς τοῦ σχολείου Α ἦσαν παρόντες 75 καὶ ἀπὸ 100 τοῦ σχολείου Β ἦσαν παρόντες 80.

2ος τρόπος. Μὲ τὴν (εὐθεία) μέθοδο τῶν τριῶν βρίσκομε τοὺς ζητούμενους ἀριθμοὺς παρόντων (x γιὰ τὸ σχολεῖο Α, ψ γιὰ τὸ σχολεῖο Β):

$$\text{σχολεῖο Α}\left\{\begin{array}{l}\text{ἀπὸ 240 μαθητὲς ἦσαν παρόντες 180}\\ \text{» 100 » » » } x=\dfrac{180\cdot 100}{240}=75,\end{array}\right.$$

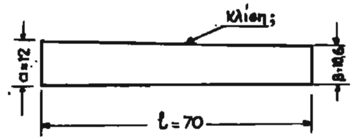
σχολεῖο Β $\left\{\begin{array}{l}\text{ἀπὸ 150 μαθητὲς ἦσαν παρόντες 120} \\ \text{» 100 » » » } \quad \psi = \dfrac{120 \cdot 100}{150} = 80.\end{array}\right.$

Νὰ τώρα πῶς ἐκφράζομε καὶ συμβολίζομε τὰ παραπάνω ἀποτελέσματα:

Τὸ σχολεῖο Α εἶχε *ποσοστὸ παρόντων ἑβδομήντα πέντε στὰ ἑκατὸ (ἢ τοῖς ἑκατόν) 75 %*.

Τὸ σχολεῖο Β εἶχε *ποσοστὸ παρόντων ὀγδόντα στὰ ἑκατὸ (ἢ τοῖς ἑκατόν) 80 %*.

2. Κλίση μιᾶς σφήνας (κλαβέτας). Ἡ *κλίση μιᾶς σφήνας* ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο, ἐκφρασμένο σὲ τόσα στὰ ἑκατὸ ἢ σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, τῆς διαφορᾶς ποὺ παρουσιάζουν τὰ δυὸ ἀκρινὰ πάχη τῆς σφήνας πρὸς τὸ μῆκος τῆς σφήνας.



Σχ. 27-β. Ὑπολογίστε τὴν κλίση τῆς σφήνας.

Πρόβλημα. *Ὑπολογίστε τὴν κλίση τῆς σφήνας ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 27-β.*

1ος τρόπος. Ἂς κάμωμε τὸν ὑπολογισμὸ μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν:

Σὲ μῆκος σφήνας 70 mm ἔχομε διαφορὰ πάχους: $12 - 10{,}6 = 1{,}4$ mm.

» » » 100 mm θὰ ἔχωμε » » $x = \dfrac{1{,}4 \cdot 100}{70} = 2$ mm.

Ὥστε ἡ κλίση τῆς σφήνας, δηλαδὴ ὁ λόγος $\dfrac{1{,}4}{70}$ ἐκφρασμένος σὲ τόσα στὰ ἑκατὸ ἢ σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, εἶναι ἴση μὲ

$$2\,\% \quad \text{ἢ} \quad 0{,}02 \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{100}.$$

2ος τρόπος. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό της, ἡ κλίση τῆς σφήνας εἶναι $\frac{1,4}{70}$. Πρέπει τώρα νὰ μετατρέψωμε αὐτὸν τὸ λόγο σὲ ἕναν ἄλλο *ἴσο, ποὺ νὰ ἔχη ὅμως παρονομαστὴ τὸ 100*. Ἐπομένως πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ $\frac{1,4}{70}$ μὲ (100 : 70). Ἔτσι βρίσκομε:

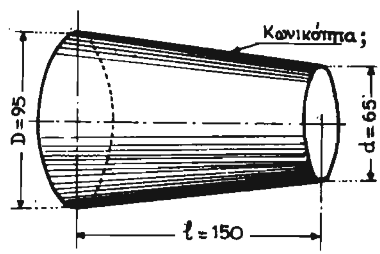
$$\frac{1,4}{70}=\frac{1,4\cdot(100:70)}{70\cdot(100:70)}=\frac{1,4\cdot 10/7}{100}=\frac{14:7}{100}=\frac{2}{100}.$$

Ἀπάντηση: ἡ σφήνα ἔχει κλίση $\frac{2}{100}$ ἢ 0,02 ἢ 2%.

3. Κωνικότητα ἑνὸς κόλουρου κώνου. *Κωνικότητα ἑνὸς κόλουρου κώνου* εἶναι ὁ λόγος, ἐκφρασμένος σὲ τόσα στὰ ἑκατὸ ἢ σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, τῆς διαφορᾶς ποὺ ἔχουν οἱ διάμετροι δυὸ ὀρθῶν διατομῶν, δηλαδὴ 2 διατομῶν κάθετων στὸν ἄξονα τοῦ κώνου, πρὸς τὴν ἀπόσταση ἀνάμεσα σ' αὐτὲς τὶς διατομές.

Πρόβλημα. *Ὑπολογίστε τὴν κωνικότητα τοῦ κόλουρου κώνου ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 27-γ.*

Ἡ διαφορὰ τῶν διαμέτρων τῶν δυὸ διατομῶν εἶναι 95 — 65 = 30 mm καὶ ἡ ἀπόσταση τῶν 2 ἐπιπέδων τους 150 mm. Ἄρα ἡ κωνικότητα τοῦ κόλουρου κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο $\frac{30}{150}$, μόνο ποὺ πρέπει νὰ τὸν ἐκφράσωμε μ' ἕνα ἴσο κλάσμα, ποὺ νὰ ἔχη παρονομαστὴ τὸ 100. Ἔτσι βρίσκομε:



Σχ. 27-γ. Ὑπολογίστε τὴν κωνικότητα τοῦ κόλουρου κώνου.

$$\frac{30}{150}=\frac{1}{5}=\frac{1\cdot(100:5)}{5\cdot(100:5)}=\frac{1\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{20}{100}.$$

Ἀπάντηση: Ἡ κωνικότητα τοῦ κόλουρου κώνου εἶναι:

$$\frac{20}{100} \text{ ἢ } 0{,}20 \text{ ἢ } 20\,\%.$$

4. Ἂς διατυπώσωμε τώρα γενικὰ ὅσα ἐκθέσαμε παραπάνω λύνοντας τρία εἰδικὰ προβλήματα.

Συχνά, γιὰ νὰ συγκρίνωμε τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς α καὶ β δυὸ ὁμοειδῶν μεγεθῶν, σχηματίζομε τὸ λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$. Ὁ λόγος αὐτός, ὅταν ἀντικατασταθῇ μὲ τὸν ἴσο του:

$$\frac{100\,\alpha:\beta}{100},$$

ποὺ ἔχει παρονομαστὴ τὸ 100, λέγεται *ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ τοῦ πρώτου μεγέθους ὡς πρὸς τὸ δεύτερο*. Αὐτὸ τὸ ποσοστὸ γράφεται συνήθως μὲ τὸν συμβολισμὸ $(100\alpha:\beta)\%$, ὁ ὁποῖος διαβάζεται ἔτσι: $(100\alpha:\beta)$ στὰ ἑκατὸ (ἢ τοῖς ἑκατόν).

Παράδειγμα. Γιὰ ἕνα κράμα ἀπὸ χαλκὸ καὶ νικέλιο χρησιμοποιήθηκαν 27 κιλὰ χαλκὸς καὶ 9 κιλὰ νικέλιο. Ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ χαλκοῦ πρὸς τὸ βάρος τοῦ κράματος εἶναι:

$$\frac{27}{36}=\frac{3}{4}=\frac{300:4}{100}=\frac{75}{100}.$$

Λέμε λοιπὸν ὅτι τὸ ποσοστὸ τοῦ χαλκοῦ μέσα στὸ κράμα εἶναι ἑβδομήντα πέντε στὰ ἑκατὸ καὶ γράφομε $75\,\%$. Ὅμοια βρίσκομε ὅτι τὸ ποσοστὸ τοῦ νικέλιου μέσα στὸ κράμα εἶναι 25 στὰ 100, γιατὶ ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ νικέλιου πρὸς τὸ βάρος τοῦ κράματος εἶναι:

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=\frac{100:4}{100}=\frac{25}{100}.$$

Ξέροντας τὰ ποσοστὰ αὐτὰ μποροῦμε εὔκολα νὰ βροῦμε πόσος χαλκὸς καὶ πόσο νικέλιο περιέχεται π. χ. σὲ 12 κιλὰ ἀπὸ τὸ κράμα. Γιὰ τὰ ζητούμενα βάρη x τοῦ χαλκοῦ καὶ ψ τοῦ νικέλιου ἔχομε τὶς ἀναλογίες:

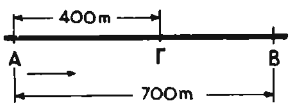
$$\frac{x}{12}=\frac{75}{100} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\psi}{12}=\frac{25}{100},$$

ἀπὸ τὶς ὁποῖες προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

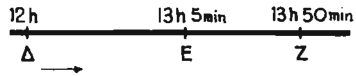
$$x=\frac{75}{100}\,12=\frac{75\cdot 12}{100}=\frac{3\cdot 12}{4}=\frac{3\cdot 3}{1}=9\,\text{kg}.$$

$$\text{καὶ } \psi = \frac{25}{100} \cdot 12 = \frac{25 \cdot 12}{100} = \frac{1 \cdot 12}{4} = 3\,\text{kg}.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Ἕνας πεζοπόρος ἔχει νὰ πάγῃ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α στὸ σημεῖο Β (σχ. 27-δ). Ὅταν φθάσῃ στὸ σημεῖο Γ, τί ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ τοῦ δρόμου του ΑΒ ἔχει διατρέξει;



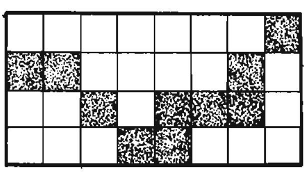
Σχ. 27-δ.



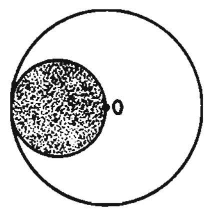
Χχ. 27-ε.

2. Ἕνας πεζοπόρος, ποὺ κινεῖται ὁμοιόμορφα, περνᾶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ (σχ. 27-ε) στὶς ὧρες ποὺ εἶναι σημειωμένες πάνω ἀπ' αὐτὰ στὸ σχῆμα. Τὴ στιγμὴ ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Ε, τί ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ τοῦ δρόμου ΔΖ τοῦ μένει νὰ διατρέξῃ;

3. Στὸ ὀρθογώνιο τοῦ σχ. 27-ς πόσα στὰ ἑκατὸ τῆς ὅλης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ σκιασμένο μέρος καὶ πόσα τὸ λευκό; Ἑπομένως ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ σκιασμένου μέρους πρὸς τὸ λευκό;



Σχ. 27-ς.



Σχ. 27-ζ.

4. Τί ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ τοῦ μεγάλου κύκλου (σχ. 27-ζ) εἶναι σκιασμένο καὶ πόσα στὰ ἑκατὸ αὐτοῦ τοῦ κύκλου ἔμειναν λευκά; Ἑπομένως ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ λευκοῦ πρὸς τὸ σκιασμένο μέρος;

5. Ἀπὸ τὶς 75 δρχ ποὺ κοστίζει ἕνα κατεργασμένο ἀντικείμενο οἱ 40 δρχ ἀντιπροσωπεύουν τὰ ἐργατικά. Πόσα στὰ ἑκατὸ τοῦ κόστους ἀποτελοῦν τὰ ἐργατικά;

6. Ἕνα λουρὶ μηχανῆς πού, ὅταν ἦταν καινούργιο, εἶχε μῆκος 180 cm μάκρυνε, ὕστερα ἀπὸ χρήση, κατὰ 5 %. Ποιό εἶναι τὸ μῆκος του μετὰ τὸ μάκρεμα;

7. Μιὰ σφήνα ἔχει κλίση 1/100 (βλ. § 2). Ὑπολογίστε τὴ διαφορὰ ποὺ παρουσιάζουν τὰ ὕψη (τὰ πάχη) τῆς σφήνας σὲ δυὸ ὀρθὲς διατομές της, οἱ ὁποῖες ἀπέχουν 80 mm ἡ μιὰ ἀπὸ τὴν ἄλλη.

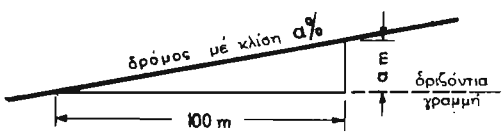
Ἂν τὸ μικρότερο ἀπὸ τὰ δυὸ αὐτὰ ὕψη εἶναι 18 mm, πόσο εἶναι τὸ ἄλλο;

8. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει τὶς ἀκόλουθες διαστάσεις:

$D = 40$ mm, $\quad d = 22$ mm, $\quad$ ὕψος $υ = 55$ mm.

Ὑπολογίστε 1ο τὴν κωνικότητά του (βλ. § 3), 2ο τὴ διάμετρο μιᾶς ὀρθῆς διατομῆς του, ὅταν τὸ ἐπίπεδό της ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο τῆς μικρῆς βάσης τοῦ κόλουρου κώνου ἀπόσταση ἴση μὲ τὸ $^1/_3$ τοῦ ὕψους του.

9. Λέμε ὅτι ἕνας ἴσιος δρόμος ἔχει ***κλίση πρὸς τὸν ὁρίζοντα*** $α$ %, ὅταν σὲ κάθε δυὸ σημεῖα του, μὲ ὁριζόντια μεταξύ τους ἀπόσταση 100 m, ἀντιστοιχεῖ διαφορὰ ὕψους $α$ m. Ἐφαρμόζοντας αὐτὸν τὸν ὁρισμὸ ἀπαντῆστε στὸ ἀκόλουθο ἐρώτημα:



Σχ. 27-η.

Ἕνας ὁδοιπόρος περπατεῖ πάνω σ' ἕναν ἴσιο δρόμο ποὺ ἔχει κλίση 7 %. Στὸ τέλος τοῦ περιπάτου του βρίσκεται 40 m πιὸ ψηλὰ ἀπὸ κεῖ ποὺ ξεκίνησε. Ποιὰ εἶναι ἡ ***ὁριζόντια ἀπόσταση*** ἀνάμεσα στὴν ἀφετηρία καὶ στὸ τέρμα τοῦ περιπάτου του;

Μάθημα 28.

Ἐφαρμογὲς στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ κόστους κατασκευῆς.

1. Στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ κόστους μιᾶς κατασκευῆς παρουσιάζονται τριῶν εἰδῶν στοιχεῖα (κονδύλια).

1ο. Ἡ *ἀξία τῶν ὑλικῶν* ποὺ χρησιμοποιήθηκαν.

2ο. Ἡ *ἀμοιβὴ τοῦ προσωπικοῦ ποὺ ἐργάσθηκε, τὰ ἐργατικά.*

3ο. Ἕνα ποσὸ ποὺ ἀντιπροσωπεύει *γενικὰ ἔξοδα* τοῦ ἐργαστηρίου ἢ ἐργοστασίου ποὺ κάνει τὴν κατασκευή, μὲ ἄλλα λόγια ἕνα μέρος ἀπὸ τὰ ἔξοδά του γιὰ τὸ ἐνοίκιο ἢ τὸ κτίσιμο τοῦ κτιρίου, γιὰ τὸν ἐφοδιασμό του μὲ μηχανήματα, γιὰ τὴν ἀμοιβὴ τοῦ ὑπαλληλικοῦ προσωπικοῦ κτλ. Τὸ ποσὸ αὐτὸ λαμβάνεται συνήθως ἴσο μὲ ἕνα ὁρισμένο ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ τῶν ἐργατικῶν τῆς κατασκευῆς.

Παρατήρηση. Στὸ κόστος κατασκευῆς πρέπει φυσικὰ νὰ προστεθῇ τὸ κέρδος τοῦ κατασκευαστῆ.

2. Πρόβλημα. *Γιὰ τὴν ἐπισκευὴ ἑνὸς κιγκλιδώματος (κάγκελου) χρησιμοποιήθηκαν τὰ ἀκόλουθα ὑλικά:*

5 σιδερένιες λάμες τῶν 40 mm × 4 mm, μήκους 5,50 m ἡ καθεμιά· τιμὴ 8 δρχ τὸ κιλό.

1 λαμαρίνα διαστάσεων 1 m × 0,75 m καὶ πάχους 4 mm· τιμὴ 11 δρχ τὸ κιλό.

75 καρφιὰ λαμαρίνας (δικέφαλα) τῶν 8 × 16, μὲ βάρος 1,100 kg τὰ 100 καρφιά· τιμὴ 22 δρχ τὸ κιλό. Σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σιδήρου στὰ τρία αὐτὰ ὑλικὰ 7,8 (βλ. Τόμ. Α΄, Μάθ. 49).

40 μπουλόνια τῶν 8 × 20. Τιμὴ 125 δρχ τὰ 100 κομμάτια.

Τὴν ἐπισκευὴ τὴν ἔκαμαν σὲ 30 ὧρες ἐργασίας ἕνας τεχνίτης καὶ ἕνας βοηθὸς ποὺ πληρώθηκαν 15 δρχ ὁ πρῶτος καὶ 10 δρχ ὁ δεύτερος τὴν ὥρα.

Τὰ γενικὰ ἔξοδα λογαριάσθηκαν ἴσα μὲ 30 % τῶν ἐργατικῶν.

Ὑπολογίστε τὸ κόστος τῆς ἐπισκευῆς.

1ο. Ἀξία τῶν ὑλικῶν:

α) Οἱ 5 σιδερένιες λάμες ἔχουν βάρος σὲ κιλὰ (kg):

$$0{,}4 \cdot 0{,}04 \cdot 55 \cdot 5 \cdot 7{,}8 = 34{,}320.$$

Ἄρα ἡ ἀξία τους εἶναι $34{,}320 \cdot 8 =$ 274,56 δρχ.

β) Ἡ λαμαρίνα ἔχει

βάρος: $10 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}04 \cdot 7{,}8 = 23{,}4$ kg,

ἄρα ἀξία: $23{,}4 \cdot 11 =$ 257,40 δρχ.

γ) Τὰ 75 καρφιὰ λαμαρίνας ἔχουν

βάρος: $\dfrac{1{,}1 \cdot 75}{100} = 0{,}825$ kg,

ἄρα ἀξία: $0{,}825 \cdot 22 =$ 18,15 δρχ.

δ) Τὰ 40 μπουλόνια ἔχουν ἀξία:

$\dfrac{40 \cdot 125}{100} =$ 50,00 δρχ.

Ἑπομένως ἀξία ὑλικῶν . . . . 600,11 δρχ.

2ο. Ἐργατικά:

1ος ἐργάτης $30 \cdot 15 =$ 450 δρχ.

2ος » $30 \cdot 10 =$ 300 δρχ.

Ἄρα ἐργατικά . . . . 750 δρχ.

3ο. Γενικὰ ἔξοδα:

$\dfrac{750 \cdot 30}{100} =$ 225 δρχ.

Ὥστε τὸ ζητούμενο κόστος τῆς ἐπισκευῆς εἶναι:

$$600{,}11 + 750 + 225 = 1\,575{,}11 \simeq 1\,575 \text{ δρχ.}$$

Παρατήρηση. Ὑπολογισμοὶ σὰν τὸν παραπάνω πρέπει νὰ καταστρώνωνται καθαρὰ καὶ τακτικά, γιατὶ τότε καὶ ἡ πιθανότητα νὰ κάμωμε λάθη μικραίνει καὶ ὁ ἔλεγχος μπορεῖ νὰ γίνῃ γρήγορα καὶ ξεκούραστα.

Ἀσκήσεις. 1. Τὸ βιομηχανικὸ κόστος μιᾶς κατασκευῆς εἶναι 1 500 δρχ καὶ μοιράζεται (κατανέμεται) ὡς ἑξῆς: τὰ 25 % τοῦ κόστους ἀντιπροσωπεύουν τὴν ἀξία τῶν ὑλικῶν, τὰ 35 % τὰ ἐργατικὰ καὶ τὰ 40 % τὰ γενικὰ ἔξοδα. Ὑπολογίστε τὸ ποσὸ τοῦ καθενὸς ἀπὸ αὐτὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ κόστους.

2. Ἕνας τεχνίτης πρόκειται ν' ἀγοράσῃ ἕνα ἐργαλεῖο τιμολογη-

μένο μὲ 2 250 δρχ. Ἂν πληρώση τὴν ἀξία του τοῖς μετρητοῖς, θὰ τοῦ γίνῃ ἔκπτωση 15 % πάνω στὴν τιμὴ τοῦ τιμολογίου. Μπορεῖ ὅμως νὰ τὸ ἀγοράση καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: νὰ πληρώση, παραλαμβάνοντάς το, τὸ $1/_3$ τῆς τιμῆς καὶ τὸ ὑπόλοιπο, αὐξημένο κατὰ 5 %, σὲ 5 μηνιαῖες δόσεις.

Τί θὰ πληρώση ὁ τεχνίτης στὴν πρώτη περίπτωση καὶ τί συνολικὰ στὴ δεύτερη;

3. Γιὰ νὰ κατασκευασθῆ ἕνα ἔπιπλο χρειάσθηκαν 0,25 m^3 ξυλεία πρὸς 2 600 δρχ τὸ m^3, διάφορα ἄλλα ὑλικὰ (πρόκες, εἴδη κιγκαλερίας κτλ.) ἀξίας 210 δρχ καὶ 80 ὧρες ἐργασία ποὺ πληρώθηκε πρὸς 16 δρχ ἡ ὥρα.

Ὑπολογίστε: 1ο τὸ κόστος τῆς κατασκευῆς λογαριάζοντας καὶ γενικὰ ἔξοδα ἴσα μὲ τὸ 15 % τῶν ἐργατικῶν, 2ο τὴν τιμὴ στὴν ὁποία πρέπει νὰ πουληθῆ τὸ ἔπιπλο, γιὰ ν' ἀφήση κέρδος ἴσο μὲ τὸ 20 % τοῦ κόστους κατασκευῆς.

4. Γιὰ μιὰ πόρτα ἕνας ξυλουργὸς χρησιμοποιεῖ: 2 δρύινα μπόγια ($1,95 \times 0,11 \times 0,03$), 4 δρύινες τραβέρσες ($0,75 \times 0,11 \times 0,03$) καὶ 3 ταμπλάδες ἀπὸ κοντραπλακὲ τῶν 4 mm διαστάσεων ἀντιστοίχως ($0,62 \times 0,55$), ($0,75 \times 0,55$) καὶ ($0,55 \times 0,20$). Βρῆτε τὴν ἀξία τῆς ἀπαιτούμενης ξυλείας γνωρίζοντας 1ο ὅτι πρέπει ν' αὐξήσετε κατὰ 9 % τὶς ποσότητες ξυλείας ποὺ θὰ λογαριάσετε σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω δεδομένα, γιὰ νὰ λάβετε ὑπόψη τὶς ἀπώλειες ἀπὸ τὴν κατεργασία τῆς ξυλείας καὶ 2ο ὅτι ἡ δρύινη ξυλεία κοστίζει 8 500 δρχ τὸ κυβικὸ μέτρο καὶ τὸ κοντραπλακὲ 41 δρχ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο.

5. Γιὰ μιὰ κατασκευὴ σ' ἕνα σιδηρουργεῖο χρειάσθηκαν 50 ὧρες ἐργασίας, ἀπὸ τὶς ὁποῖες τὰ 60 % ἀντιπροσωπεύουν ἐργασία σιδηρουργῶν πρὸς 15,50 δρχ ἡ ὥρα καὶ τὰ 40 % ἐργασία συγκολλητῶν πρὸς 18 δρχ ἡ ὥρα. Τὰ ὑλικὰ ποὺ χρησιμοποιήθηκαν κόστισαν 8 550 δρχ καὶ τὰ γενικὰ ἔξοδα ὑπολογίσθηκαν πάνω στὰ ἐργατικὰ μὲ 35 % τῆς ἀμοιβῆς τῶν σιδηρουργῶν καὶ 45 % τῆς ἀμοιβῆς τῶν συγκολλητῶν.

Ποιό εἶναι τὸ κόστος τῆς κατασκευῆς;

Προβλήματα γιὰ ἀνασκόπηση καὶ ἐπανάληψη.

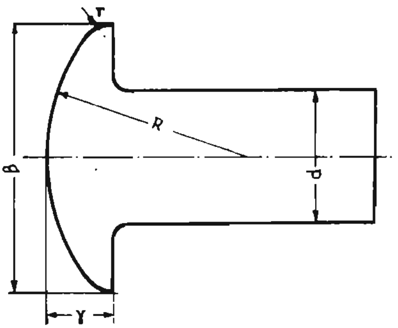
I. Ὑπολογισμοὶ μὲ ἀριθμοὺς καὶ ἐγγράμματες παραστάσεις.

1. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις β, γ, R, r τῆς κεφαλῆς ἑνὸς καζανόκαρφου, σὰν κι' αὐτὸ ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 1, μὲ ὀνομαστικὴ διάμετρο $d = 12$ mm, ξέροντας ὅτι

$$\beta = 2\,d,\quad \gamma = 0,5\,d,\quad R = 1,5\,d,\quad r = 0,25\,d.$$

2. Τὸ μοντοὺλ m μιᾶς κανονικῆς ὀδόντωσης τροχοῦ τὸ δίνει ὁ τύπος $m = \frac{d}{z}$, ὅπου d εἶναι ἡ ἀρχικὴ διάμετρος σὲ mm καὶ z ὁ ἀριθμὸς τῶν δοντιῶν τοῦ τροχοῦ. Ὑπολογίστε:

1ο τὰ μοντοὺλ μιᾶς σειρᾶς ἀπὸ 3 τροχούς, μὲ 20 δόντια ὁ καθένας, ξέροντας ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι διάμετροί τους εἶναι 60 mm, 105 mm καὶ 150 mm.



Σχ. 1. Καζανόκαρφο.
Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις β, γ, R, r.

2ο τὰ μοντοὺλ μιᾶς σειρᾶς ἀπὸ 3 τροχοὺς μὲ τὴν ἴδια ἀρχικὴ διάμετρο 175 mm, ξέροντας ὅτι ἔχουν ἀντιστοίχως 35, 100 καὶ 75 δόντια.

3ο τὶς διαμέτρους μιᾶς σειρᾶς ἀπὸ 3 τροχοὺς μὲ τὸ ἴδιο μοντοὺλ $m = 4$, ξέροντας ὅτι ἔχουν ἀντιστοίχως 15, 20 καὶ 35 δόντια.

3. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε στὰ γρήγορα τὸ βάρος B_1 σὲ gr ἑνὸς μπρούντζινου δίσκου, ποὺ ἔχει διάμετρο D cm καὶ πάχος 1 cm, χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο

$$B_1 = 6{,}8\ D^2.$$

1ο. Δικαιολογῆστε αὐτὸν τὸν τύπο, ἔχοντας ὑπόψη ὅτι τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ μπρούντζου εἶναι $8{,}7\ gr/cm^3$.

2ο. Ἐφαρμόστε τὸν τύπο γιὰ $D = 400$ mm, $D = 300$ mm, $D = 150$ mm.

4. Ἔχοντας ὑπόψη τὸ προηγούμενο πρόβλημα βρῆτε τὸν γενικὸ τύπο ποὺ δίνει τὸ βάρος B σὲ gr ἑνὸς ὁποιουδήποτε μπρούντζινου δίσκου μὲ διάμετρο D cm καὶ πάχος ε cm. Νὰ κάμετε ὕστερα μιὰν ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου γιὰ $D = 12$ cm καὶ $\varepsilon = 0{,}35$ cm.

5. Σ' ἕνα τεχνικὸ μνημόνιο διαβάζετε ὅτι τὸ βάρος B (gr) μιᾶς σφαίρας ἀπὸ μολύβι μὲ διάμετρο D (cm) τὸ δίνει ὁ τύπος

$$B = 5{,}91\ D^3.$$

Ὑπολογίστε τὸ βάρος μιᾶς τέτοιας σφαίρας μὲ διάμετρο $D = 5$ cm.

6. Ξέροντας ὅτι τὸ πλάτος α καὶ τὸ βάθος β (σχ. 2) τοῦ αὐλακιοῦ, ποὺ ἀνοίγει σ' ἕνα σιδερένιο κομμάτι μιὰ φρέζα μὲ διάμετρο D, ἐπαληθεύουν τὴ σχέση

$$D = \frac{\alpha^2}{4\beta} + \beta,$$

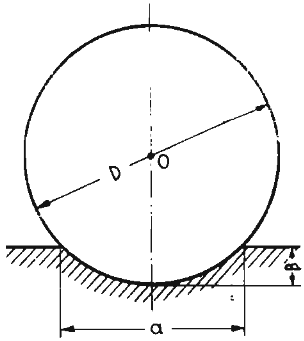
ὑπολογίστε τὸ D γιὰ $\alpha = 24$ mm καὶ $\beta = 3$ mm.

7. Ὑπολογίστε τοὺς ἀριθμοὺς z καὶ z′ τῶν δοντιῶν σὲ δυὸ ὀδοντωτοὺς τροχοὺς (σχ. 3) ξέροντας ὅτι:

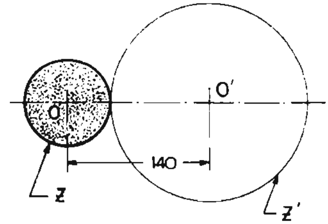
1ο οἱ ἀριθμοὶ z καὶ z′ εἶναι *ἰσοπολλαπλάσια* τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5, δηλαδὴ $z = \mu \cdot 2$ καὶ $z' = \mu \cdot 5$, ὅπου μ εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός,

2ο οἱ ὀδοντώσεις τῶν τροχῶν ἔχουν μοντοὺλ 4,

3ο ἡ ἀπόσταση τῶν ἀξόνων τῶν τροχῶν εἶναι 140 mm.



Σχ. 2. Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο τῆς φρέζας.



Σχ. 3. Ὑπολογίστε τὰ z καὶ z′.

8. Γιὰ νὰ ἑνώσετε (συνδέσετε) μὲ συγκόλληση μονῆς ραφῆς δυὸ λαμαρίνες, πάχους ε mm ἡ καθεμιά, φέρνετε τὴν μιὰ πάνω στὴν ἄλλη κατὰ μιὰ λουρίδα ποὺ ἔχει πλάτος $l = 10\sqrt{\varepsilon}$ mm. Ὑπολογίστε τὸ l γιὰ τὰ ἀκόλουθα πάχη ε:

0,25 , 0,5 , 0,75 , 1 , 1,25 , 1,50.

9. Ἡ Μηχανικὴ μᾶς διδάσκει τὸ ἑξῆς: ὅταν ἕνα κινητό, ξεκινώντας ἀπὸ τὴν ἠρεμία (ἀκινησία), ἔχῃ κίνηση ποὺ ἐπιταχύνεται ὁμοιόμορφα, τότε τὸ διάστημα s (m), ποὺ θὰ ἔχῃ διατρέξει τὸ κινητὸ σὲ t (sec) ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ ξεκίνησε, εἶναι ἴσο μέ:

$$s = {}^1/_2 \cdot \gamma t^2,$$

ὅπου τὸ γ παριστάνει τὴν ἐπιτάχυνση σὲ m/sec², δηλαδὴ τὴν (σταθερὴ) αὔξηση ποὺ παρουσιάζει στὸ δευτερόλεπτο (ἀνὰ 1 sec) ἡ ταχύτητα v (m/sec) τοῦ κινητοῦ. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιτάχυνση ἑνὸς κινητοῦ τὸ ὁποῖο ξεκινώντας ἀπὸ τὴν ἠρεμία διατρέχει μὲ μιὰ τέτοια κίνηση 12,80 m σὲ 8 sec.

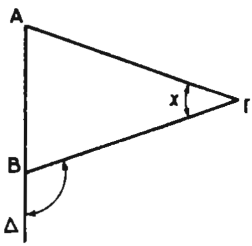
10. Ἂν παραμελήσωμε τὴν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, ἡ ἐλεύθερη πτώση ἑνὸς σώματος εἶναι μιὰ ὁμοιόμορφα ἐπιταχυνόμενη κίνηση, μὲ ἐπιτάχυνση 9,80 m/sec². Ἀπὸ αὐτὸ καὶ ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ προηγούμενου προβλήματος βγαίνει τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα: Ὁ χρόνος t(σὲ sec), ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ φθάση στὸ ἔδαφος ἕνα σῶμα, ποὺ πέφτει ἐλεύθερα ἀπὸ ὕψος H (m), εἶναι ἴσος μὲ

$$t = \sqrt{H/4,9}.$$

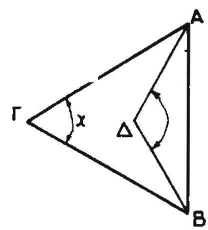
Ὑπολογίστε, μὲ χρήση αὐτοῦ τοῦ τύπου, τὸ χρόνο ποὺ χρειάζεται μιὰ σφαίρα γιὰ νὰ φθάση στὸ ἔδαφος, ὅταν τὴν ἀφήσωμε νὰ πέση ἀπὸ ὕψος 5 m τὴ μιὰ φορὰ καὶ 20 m μιὰν ἄλλη φορά. Τί παρατηρεῖτε; Ἐνῶ τὸ ὕψος τετραπλασιάσθηκε ἀπὸ τὴν πρώτη στὴ δεύτερη φορά, ὁ ἀντίστοιχος χρόνος τῆς πτώσης πόσες φορὲς ἔγινε μεγαλύτερος;

11. Ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 2 γωνίες στὴ βάση ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ τριπλάσιο τῆς γωνίας ποὺ βρίσκεται ἀντίκρυ στὴ βάση. Ὑπολογίστε τὶς γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, ἐνθυμούμενοι ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσο μὲ 180°.

12. Ἂν παραστήσωμε μὲ x (μοῖρες) τὴ γωνία στὴν κορυφὴ Γ ἑνὸς ἰσόσκελου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 4), πόση θὰ εἶναι ἡ καθεμιὰ



Σχ. 4. Ὑπολογίστε τὸ x.



Σχ. 5. Ὑπολογίστε τὸ x.

ἀπὸ τὶς δυὸ γωνίες στὴ βάση ΑΒ τοῦ τριγώνου;

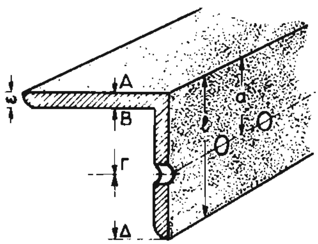
Προσδιορίστε τώρα τὸ x ἔτσι ποὺ ἡ «ἐξωτερικὴ» γωνία ΓΒΔ τοῦ τριγώνου νὰ εἶναι τριπλάσια ἀπὸ τὴ γωνία στὴν κορυφή.

13. Ὑπολογίστε τὴ γωνία x (σχ. 5) τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΒ (ὅπου ΓΑ = ΓΒ), ξέροντας ὅτι ἡ γωνία ΑΔΒ, ποὺ σχηματίζουν οἱ διχοτόμοι ΑΔ καὶ ΒΔ τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$ τοῦ ΑΓΒ, εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴ γωνία x.

14. Σὲ μιὰ σιδηρογωνιὰ μὲ ἴσα σκέλη (ἴσες πλευρὲς) καὶ κανονικοῦ τύπου (ὁπότε $l = 10\,e$, σχ. 6) οἱ τρύπες γιὰ τὸ κάρφωμα (οἱ ὀπὲς ἡλώσεως) σὲ μιὰ πλευρὰ πρέπει νὰ ἔχουν τοὺς ἄξονές τους στὸ μέσο τῆς ἐσωτερικῆς ὄψης τῆς πλευρᾶς. Παριστάνομε μὲ α (mm) τὴν ἀπόσταση τῆς εὐθείας, ποὺ ἑνώνει τοὺς ἄξονες αὐτούς, ἀπὸ τὴ ράχη τῆς σιδηρογωνιᾶς.

1ο. Ὑπολογίστε τὸ α γιὰ μιὰ σιδηρογωνιὰ τῶν $40 \times 40 \times 4$.

2ο. Βρῆτε τὸν τύπο (τὴν ἐγγράμματη παράσταση) ποὺ ἐκφράζει γενικῶς τὸ α μὲ τὸ l καὶ ἔπειτα ἐφαρμόστε τον γιὰ νὰ ὑπολογίσετε ξανὰ τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ α, ὅταν τὸ l ἔχῃ τὴν τιμὴ 40 mm τῆς περίπτωσης 1ο. (Πρέπει φυσικὰ νὰ φθάσετε στὸ ἴδιο ἀριθμητικὸ ἀποτέλεσμα ὅπως καὶ μὲ τὸν προηγούμενο ὑπολογισμό).



Σχ. 6. Τὸ χάραγμα γιὰ τὶς τρύπες σὲ μιὰ σιδηρογωνιά.

Ὑπόδειξη. Ἐφαρμόστε στὰ παρακάτω προβλήματα 15, 16, 17 τὴ σχέση

U (βόλτ) = R (ὤμ) · I (ἀμπέρ)

ποὺ συνδέει τὴν ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση R (σὲ ὤμ) ἑνὸς ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος διαρρέεται ἀπὸ ἠλεκτρικὸ ρεῦμα, μὲ τὴν ἔνταση I (σὲ ἀμπὲρ) καὶ τὴν τάση U (σὲ βόλτ) τοῦ ρεύματος· (ἡ τάση αὐτὴ U ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορὰ δυναμικοῦ ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δυὸ ἄκρων τοῦ ἀγωγοῦ· βλ. καὶ Μάθ. 8. Ἄσκ. 6).

15. Ποιά εἶναι ἡ τάση U (βόλτ) ποὺ πρέπει νὰ διατηροῦμε μεταξὺ τῶν δυὸ ἄκρων ἑνὸς ἀγωγοῦ μὲ ἀντίσταση 500 ὤμ, γιὰ νὰ εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖο διαρρέει τὸν ἀγωγό, ἴση μὲ 3 μιλλιαμπὲρ (χιλιοστὰ τοῦ ἀμπέρ);

16. Ἕνας ἠλεκτρονόμος ἔχει κατασκευασθῆ γιὰ νὰ λειτουργῆ μὲ ρεῦμα τῶν 0,2 ἀμπέρ. Ἂν ἡ τάση ἀνάμεσα στὰ ἄκρα τοῦ πηνίου τοῦ ἠλεκτρονόμου εἶναι 26 βόλτ, πόση εἶναι ἡ ἀντίσταση τοῦ πηνίου;

17. Μιὰ ἠλεκτρικὴ σόμπα, ποὺ ἡ ἀντίστασή της εἶναι τῶν 22 ὤμ, τροφοδοτεῖται ἀπὸ ἠλεκτρικὴ πηγὴ μὲ τάση 110 βόλτ. Ὑπολογίστε τὴν ἔνταση τοῦ ρεύματος ποὺ διαρρέει τὴν ἀντίσταση.

Ὑπόδειξη. Ὅπως ξέρομε, τὸ ἠλεκτρικὸ ρεῦμα εἶναι ἕνα εἶδος ἐνέργεια, δηλαδὴ ἔχει τὴν ἱκανότητα νὰ παράγῃ κάποιο ἔργο (κίνηση μὲ ἕναν ἠλεκτροκινητῆρα, θέρμανση μὲ μιὰ ἠλεκτρικὴ σόμπα, φωτισμὸ μὲ ἕναν ἠλεκτρικὸ λαμπτῆρα κτλ.). Τὸ ἔργο ποὺ μπορεῖ νὰ παραγάγῃ ἕνα ἠλεκτρικὸ ρεῦμα σὲ μιὰ χρονικὴ μονάδα (ἀνὰ μονάδα χρόνου) λέγεται *ἰσχὺς* τοῦ ρεύματος. Ἡ ἰσχὺς αὐτὴ μετριέται συνήθως μὲ μονάδα τὸ *βάττ* ἢ τὸ χιλιαπλάσιό του, τὸ *κιλοβάττ*· τὸ βάττ εἶναι ἡ ἰσχὺς ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖο διαρρέει ἕναν ἀγωγό, ὅταν παρουσιάζῃ διαφορὰ δυναμικοῦ 1 βόλτ ἀνάμεσα στὰ δυὸ ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ καὶ ἔχῃ ἔνταση 1 ἀμπέρ. Ὥστε γιὰ τὴν ἰσχὺ N ἑνὸς συνεχοῦς ρεύματος μὲ ἔνταση I ἀμπὲρ καὶ διαφορὰ δυναμικοῦ U βὸλτ ἔχομε τοὺς τύπους:

$$\text{N σὲ βὰττ} = \text{U} \cdot \text{I} \quad \text{ἢ} \quad \text{N σὲ κιλοβὰττ} = \text{U} \cdot \text{I}/1\,000.$$

Ἡ ἐνέργεια ποὺ προμηθευόμαστε ἀπὸ ἕνα ἠλεκτρικὸ ρεῦμα μὲ ἰσχὺ N κιλοβὰττ σὲ t ὧρες (h) εἶναι τὸ ἔργο ποὺ παράγεται ἀπ' αὐτὸ τὸ ρεῦμα σὲ t ὧρες· συνήθως μετριέται σὲ κιλοβαττώρια (κιλοβὰττ · ὥρα) σύμφωνα μὲ τὸν τύπο:

$$\text{ἐνέργεια} = \text{ἔργο (σὲ κιλοβὰττ} \cdot \text{ὥρα)} = \text{N (σὲ κιλοβὰττ)} \cdot \text{t (σὲ ὧρες)}.$$

Ἐφαρμόστε τώρα τοὺς παραπάνω τύπους τῆς Ἠλεκτροτεχνίας στὰ προβλήματα 18, 19, 20.

18. Ὑπολογίστε: 1ο τὴν ἰσχὺ τὴν ὁποία ἀπορροφᾶ (καταναλώνει) ἕνα ἠλεκτρικὸ σίδερο ποὺ τροφοδοτεῖται ἀπὸ ἠλεκτρικὴ πηγὴ μὲ τάση 220 βὸλτ καὶ μὲ μετρημένη ἔνταση 2,4 ἀμπέρ· 2ο τὴν ἐνέργεια ποὺ καταναλώσατε μὲ τὸ σίδερο σὲ 2 ὧρες (h) καθὼς καὶ τὴν ἀξία της (τὴν τιμή της), ἂν τὸ κιλοβαττώριο κοστίζῃ 1,90 δρχ.

19. Ἕνας ἠλεκτρικὸς βραστήρας τῶν 720 βὰττ διαρρέεται ἀπὸ συνεχὲς ρεῦμα μὲ ἔνταση 6 ἀμπέρ. Ὑπολογίστε τὴν τάση (διαφορὰ δυναμικοῦ) τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς ποὺ τροφοδοτεῖ τὸν βραστήρα. Ὑπολογίστε ἐπίσης τὴν τιμὴ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνέργειας ποὺ καταναλώνει αὐτὸς ὁ βραστήρας δουλεύοντας 40 h. (Τιμὴ τοῦ κιλοβαττώριου 1,90 δρχ).

20. Μιὰ ἠλεκτρικὴ λάμπα ἔχει πάνω στὸν κάλυκά της τὴν ἔνδειξη: 220 βόλτ, 40 βάττ. Χρησιμοποιώντας δυὸ ἀπὸ τοὺς τρεῖς παραπάνω τύπους τῆς Ἠλεκτροτεχνίας, ὑπολογίστε τὴν ἠλεκτρικὴ ἀντίσταση τοῦ νήματος τῆς λάμπας, ὅταν ἡ λάμπα βρίσκεται σὲ λειτουργία.

II. Διαιρετότητα καὶ κλάσματα.

21. Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸν Τόμ. Α', Μάθ. 32 - 33, κανονικὸ πολύγωνο εἶναι ἕνα πολύγωνο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του καὶ ὅλες τὶς γωνίες του μεταξύ τους ἴσες. Ἕνα τέτοιο πολύγωνο μπορεῖ νὰ ἐγγραφῆ σὲ κύκλο, δηλαδὴ οἱ κορυφές του βρίσκονται πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια· τὸ κέντρο της εἶναι αὐτὸ ποὺ λέμε κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Πάρτε τώρα ἕνα κανονικὸ ν - γωνο, δηλ. ἕνα κανονικὸ πολύγωνο μὲ ν πλευρὲς (τὸ ν εἶναι ἕνας ἀκέραιος ≥ 3), καὶ χαράξτε τὶς δυὸ ἡμιευθεῖες ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο καὶ περνοῦν ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς. Οἱ δυὸ ἡμιευθεῖες σχηματίζουν μιὰ γωνία ποὺ λέγεται ἐπίκεντρη καὶ ποὺ τὸ μέγεθός της σὲ μοῖρες εἶναι $\frac{360^\circ}{\nu}$. Τὸ κοινὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι $\frac{180^\circ\,(\nu-2)}{\nu}$. Δεῖξτε (μὲ πρόσθεση), πρῶτα γιὰ τὸ κανονικὸ ὀκτάγωνο ($\nu=8$) καὶ ἔπειτα γιὰ ἕνα ὁποιοδήποτε κανονικὸ ν-γωνο, ὅτι ἡ ἐπίκεντρη γωνία εἶναι τὸ παραπλήρωμα (Τόμ. Α΄, Μάθ. 12) μιᾶς γωνίας τοῦ πολυγώνου.

22. Μιὰ κυλινδρικὴ σιδερένια ράβδος ἔχει μῆκος L (cm) καὶ ἐμβαδὸ διατομῆς F (cm^2). Τὴν ὑποβάλλομε σὲ ἐφελκυσμὸ (δηλαδὴ τὴν τραβοῦμε) μὲ μιὰ δύναμη P (kg). Ἡ ράβδος μακραίνει τότε κατὰ l (cm) ὅπου:

$$l=\frac{1}{2\cdot 10^7}\cdot\frac{P\cdot L}{F}.$$

1ο. Ὑπολογίστε τὸ F γνωρίζοντας τὴ διάμετρο d (cm) τῆς ράβδου. Ὕστερα βρῆτε τὸν τύπο ποὺ ἐκφράζει μὲ τὰ P, L καὶ d τὸ l καὶ ποὺ ἑπομένως σᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσετε τὸ l, ὅταν ξέρετε τὰ P, L, d.

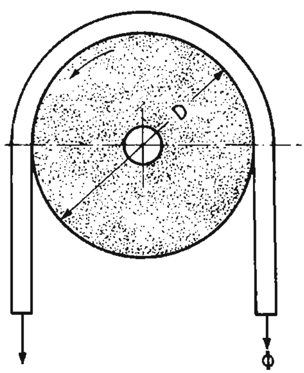
2ο. Νὰ κάμετε μιὰν ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ τύπου γιὰ $L=3$ m, $d=2{,}5$ cm, $P=4\,000$ kg.

23. Ὅμοια ἄσκηση μὲ τὴν προηγούμενη γιὰ τὴν περίπτωση μιᾶς κυλινδρικῆς ράβδου ἀπὸ χαλκό, ὁπότε θὰ ξεκινήσετε ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$l=\frac{1}{1{,}1\cdot 10^7}\cdot\frac{P\cdot L}{F}.$$

24. Τὸ σχ. 7 παριστάνει μιὰν τροχαλία μ' ἕνα σχοινὶ γύρω της. Γιὰ νὰ ἀνασύρωμε ἕνα φορτίο Φ (kg) πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμε μιὰ δύναμη P (kg) ποὺ μᾶς τὴ δίνει ὁ τύπος:

$$P=\Phi\cdot\left(1+0{,}04\frac{\beta}{D}\right),$$

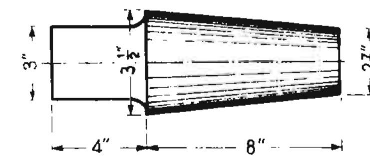


Σχ. 7.

ὅπου β εἶναι τὸ βάρος τοῦ σχοινιοῦ σὲ kg/m (δηλ. σὲ κιλὰ ἀνὰ τρέχον μέτρο) καὶ D ἡ διάμετρος τῆς τροχαλίας σὲ m. Ὑπολογίστε τὴν P γιὰ $\Phi=250$ kg, $\beta=3$ kg/m, $D=0{,}25$ m.

Ἂν χρησιμοποιήσετε τροχαλία μὲ μεγαλύτερη διάμετρο D΄, τότε, γιὰ τὸ ἴδιο φορτίο Φ καὶ μὲ τὸ ἴδιο βάρος β σχοινιοῦ ἀνὰ m, ἡ ἀπαιτούμενη δύναμη P΄ εἶναι μικρότερη· δεῖξτε τοῦτο γενικά, δηλ. χωρὶς νὰ καθορίσετε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ D΄, καὶ κατόπιν ἐπαληθεῦστε το παίρνοντας $D'=0{,}40$ m.

25. Ὑπολογίστε τὴν κωνικότητα τοῦ κωνικοῦ μέρους τοῦ κομματιοῦ ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 8, ὅπου οἱ διαστάσεις σημειώνονται σὲ ἴντσες.



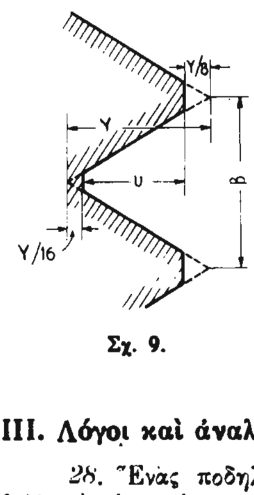
Σχ. 8. Ὑπολογίστε τὴν κωνικότητα τοῦ κωνικοῦ μέρους.

26. Σὲ μιὰ βίδα μὲ τριγωνικὴ βόλτα (σχ. 9), τὸ ὕψος υ τῆς βόλτας ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος Υ τοῦ σχεδιασμένου ἰσόπλευρου τριγώνου ἐλαττωμένο κατὰ Υ/8 στὴν κορυφὴ τῆς βόλτας καὶ κατὰ Υ/16 στὴ βάση της.

1ο. Ἐκφράστε τὸ υ μὲ τὸ Υ (ἐκφράστε τὸ υ συναρτήσει τοῦ Υ).

2ο. Γνωρίζοντας ὅτι $Υ = 0{,}866 \cdot β$ ἐκφράστε τὸ υ μὲ τὸ βῆμα β τῆς βίδας (ἐκφράστε τὸ υ συναρτήσει τοῦ βήματος β τῆς βίδας).

3ο. Ὑπολογίστε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ υ, ὅταν β = 1,75 mm.



Σχ. 9.

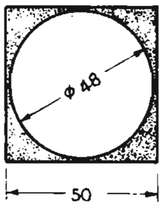
27. Δυὸ χάρακες, μήκους 1 m ὁ ἕνας καὶ 0,60 m ὁ ἄλλος, εἶναι διαβαθμισμένοι μὲ χαραγὲς ποὺ διαιροῦν τὸν καθένα τους χωριστὰ σὲ 40 ἴσα διαστήματα καὶ εἶναι ἀριθμημένες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3,..., 39, 40. Φέρνομε τὸν ἕνα χάρακα δίπλα στὸν ἄλλο ἔτσι ποὺ νὰ συμπίπτουν τὰ δυὸ ἄκρα τους ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ δυὸ μηδενικὰ τῶν διαβαθμίσεων). Τότε ποιὲς ἄλλες χαραγὲς τῶν διαβαθμίσεών τους συμπίπτουν;

III. Λόγοι καὶ ἀναλογίες.

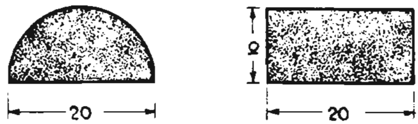
28. Ἕνας ποδηλάτης ἀνεβαίνει ἕναν ἀνηφορικὸ δρόμο μήκους l (km) μὲ ταχύτητα 10 km/h, ὕστερα τὸν κατεβαίνει μὲ ταχύτητα 20 km/h. Ποιά εἶναι ἡ μέση ταχύτητά του στὴ διπλὴ αὐτὴ διαδρομή; Νὰ παρατηρήσετε ὅτι ἡ μέση αὐτὴ ταχύτητα μένει ἡ ἴδια καὶ ὅταν ἀλλάξη τὸ μῆκος l τοῦ δρόμου.

29. Σ' ἕνα σχέδιο μὲ κλίμακα 3/5 μιὰ σφήνα παριστάνεται ἀπὸ ἕνα μῆκος 72 mm. Ποιό εἶναι τὸ πραγματικὸ μῆκος τῆς σφήνας; Καὶ μὲ ποιό μῆκος θὰ παριστάνονταν ἡ ἴδια σφήνα σὲ ἕνα σχέδιο μὲ κλίμακα 1/2;

30. Ἀπὸ μιὰ τετράγωνη λαμαρίνα μὲ πλευρὰ 50 cm κόβετε ἕναν κυκλικὸ δίσκο μὲ διάμετρο 48 cm (σχ. 10). Ὑπολογίστε τὸ λόγο ποὺ ἔχει τὸ βάρος τῶν ἀποκομμάτων πρὸς τὸ βάρος τῆς τετράγωνης λαμαρίνας.



Σχ. 10.

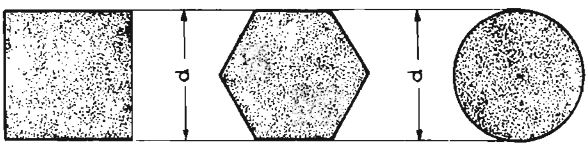


Προφὶλ ἡμικυκλικό. Προφὶλ ὀρθογώνιο.

Σχ. 11.

31. Νὰ συγκρίνετε τὰ βάρη, ποὺ ἔχουν 2 σιδερένιες ράβδοι μὲ τὸ ἴδιο μῆκος καὶ μὲ τὶς διατομὲς ποὺ βλέπετε στὸ σχῆμα 11, ὑπολογίζοντας τὸ λόγο αὐτῶν τῶν βαρῶν.

32. Ἀπὸ ἕνα μνημόνιο παίρνομε τὶς παρακάτω πληροφορίες γιὰ τὸ κατὰ προσέγγιση βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο σιδερένιων ράβδων μὲ τετράγωνη, ἑξάγωνη καὶ κυκλικὴ διατομή.



Τετράγωνο ἑξαγωνικὸ στρογγυλὸ σίδερο.

Σχ. 12.

d (σὲ mm)	Βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο (σὲ kg)		
10	0,780	0,676	0,613
15	1,755	1,520	1,378
20	3,120	2,702	2,450

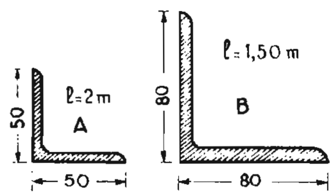
Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ο. Ὁ λόγος τοῦ βάρους μιᾶς τετράγωνης ράβδου πρὸς τὸ βάρος μιᾶς ἑξάγωνης ἴσου μήκους, ὅταν καὶ γιὰ τὶς δυὸ τὸ d εἶναι $= 10$. Ἄραγε ὁ λόγος αὐτὸς μένει περίπου ὁ ἴδιος, ὅταν ἀντὶ γιὰ $d = 10$ πάρτε $d = 15$; ἢ $d = 20$; Μήπως θὰ ἔμενε ὁ ἴδιος καὶ μὲ ὁποιοδήποτε d;

2ο. Ὁ λόγος τοῦ βάρους μιᾶς ἑξάγωνης ράβδου μὲ $d = 15$ πρὸς τὸ βάρος μιᾶς στρογγυλῆς ἴσου μήκους μὲ $d = 15$. Τὸ ἴδιο γιὰ $d = 20$. Τί παρατηρεῖτε πάλιν;

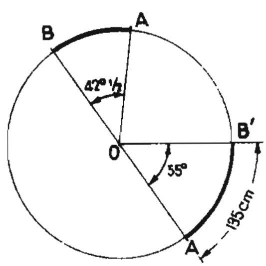
3ο. Ὁ λόγος τοῦ βάρους μιᾶς τετράγωνης ράβδου μὲ $d = 20$ πρὸς τὸ βάρος μιᾶς ἄλλης τετράγωνης ἴσου μήκους μὲ $d = 10$. Ποιὰ σχέση ἔχει αὐτὸς ὁ λόγος μὲ τὸ λόγο $\frac{20}{10}$ τῶν πλευρῶν τῶν ράβδων;

33. Ὑπολογίστε τὸ λόγο τοῦ βάρους τῆς σιδηρογωνιᾶς Α (σχ. 13) μήκους 2 m πρὸς τὸ βάρος τῆς σιδηρογωνιᾶς Β μήκους 1,50 m. Οἱ σιδηρογωνιὲς αὐτὲς εἶναι κανονικοῦ τύπου, δηλαδὴ τὸ πάχος τῆς καθεμιᾶς των εἶναι ἴσο μὲ τὸ $^1/_{10}$ τοῦ κοινοῦ πλάτους τῶν σκελῶν (πλευρῶν) της.

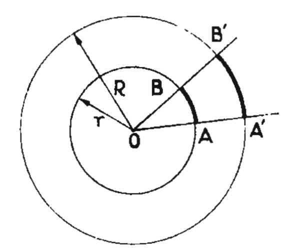


Σχ. 13. Νὰ συγκρίνετε τὰ βάρη τῶν σιδηρογωνιῶν αὐτῶν.

34. Σὲ μιὰ καὶ τὴν ἴδια περιφέρεια τὰ μήκη δυὸ τόξων ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ δυὸ ἐπίκεντρες γωνίες (βλ. Τόμ. Α', Μάθ. 31) εἶναι κατευθεῖαν ἀνάλογα πρὸς τὰ μεγέθη τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Ξέροντας αὐτό, ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ (σχ. 14)



Σχ. 14. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.



Σχ. 15. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{A'B'}$.

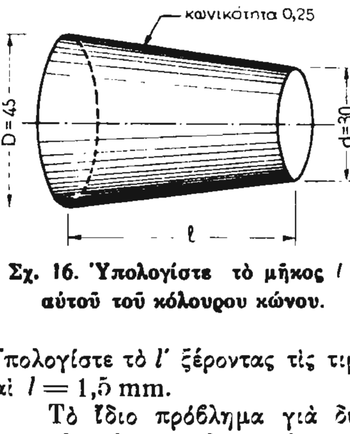
ἀπὸ τὰ ἑξῆς ἀριθμητικὰ δεδομένα: $A\widehat{O}B = 42°\,30'$, $A'\widehat{O}B' = 55°$, μῆκος τόξου $\widehat{A'B'} = 135$ cm.

35. Ὅταν ἔχετε δυὸ ὁμόκεντρες περιφέρειες (σχ. 15) καὶ πάρετε δυὸ τόξα τους $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A'B'}$ ἀντίστοιχα σὲ μιὰ καὶ τὴν ἴδια ἐπίκεντρη γωνία, τότε τὰ μήκη τῶν τόξων αὐτῶν εἶναι κατευθείαν ἀνάλογα πρὸς τὶς ἀκτίνες τῶν περιφερειῶν τους. Μὲ βάση αὐτὴν τὴν ἰδιότητα ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{A'B'}$ ἀπὸ τὰ ἑξῆς δεδομένα: ἀκτίνα r τοῦ μικροῦ κύκλου $=45$ cm, ἀκτίνα R τοῦ μεγάλου $=85$ cm, μῆκος τόξου $\widehat{AB}=47{,}5$ cm.

36. Ἡ κωνικότητα κ ἑνὸς κόλουρου κώνου (σχ. 16), ποὺ ἔχει μεγάλη διάμετρο D, μικρὴ διάμετρο d καὶ μῆκος (ὕψος) l ἐκφράζεται (βλ. καὶ Μάθ. 27, § 3) μὲ τὸν τύπο

$$\kappa=\frac{D-d}{l}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ὑπολογίστε τὸ μῆκος ἑνὸς κόλουρου κώνου ποὺ ἔχει μεγάλη διάμετρο 45 mm, μικρὴ 30 mm καὶ κωνικότητα 0,25.



Σχ. 16. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος l αὐτοῦ τοῦ κόλουρου κώνου.

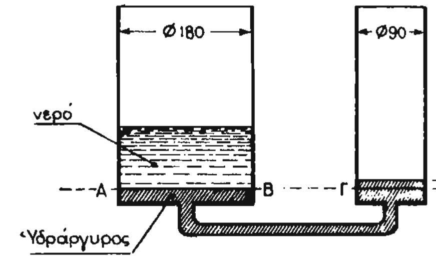
37. Δυὸ κυλινδρικὲς ράβδοι ἀπὸ τὸ ἴδιο μέταλλο ἔχουν διαφορετικὰ ἐμβαδὰ F καὶ F′ διατομῆς. Ἂν τὶς ὑποβάλωμε σὲ ἐφελκυσμὸ (δηλ. ἂν τὶς τραβήξωμε) μὲ τὴν ἴδια δύναμη, τὰ μήκη l καὶ l' κατὰ τὰ ὁποῖα μακραίνουν (οἱ ἐπιμηκύνσεις τους, ὅπως ἐπίσης λέμε), εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν διατομῶν τους. (Παράβαλε καὶ τὰ Προβλήματα 22, 23.) Ὑπολογίστε τὸ l' ξέροντας τὶς τιμὲς τῶν $F=400\ \text{mm}^2$, $F'=525\ \text{mm}^2$ καὶ $l=1{,}5$ mm.

Τὸ ἴδιο πρόβλημα γιὰ δυὸ ράβδους ἀπὸ τὸ ἴδιο μέταλλο ποὺ ἔχουν διαμέτρους ἀντιστοίχως $d=25$ mm καὶ $d'=35$ mm, ὅταν $l=1{,}25$ mm.

38. Δυὸ συγκοινωνοῦντα κυλινδρικὰ δοχεῖα μὲ διαμέτρους ἀντιστοίχως 180 mm καὶ 90 mm, ἔχουν τοὺς πυθμένες τους στὸ ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 17). Χύνομε μέσα σ᾽ αὐτὰ ἀρκετὸ ὑδράργυρο ὥστε ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνειά του νὰ φτάση ἕνα ὕψος 5 ὡς 6 mm πάνω ἀπὸ τοὺς πυθμένες. Ὕστερα χύνομε 6 λίτρα νερὸ μέσα στὸ μεγαλύτερο δοχεῖο.

1°. Ὑπολογίστε τὸ ὕψος τοῦ νεροῦ πάνω ἀπὸ τὴν ὁριζόντια ἐπιφάνεια AB ποὺ χωρίζει τὰ δυὸ ὑγρὰ μέσα στὸ μεγαλύτερο δοχεῖο.

2°. Ξέροντας ὅτι τὰ ὕψη τοῦ νεροῦ καὶ τοῦ ὑδραργύρου πάνω ἀπὸ τὴν ὁριζόντια ἐπιφάνεια ΑΒΓ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὶς σχετικὲς πυκνότητες τῶν δυὸ ὑγρῶν, ὑπολογίστε τὸ ὕψος x τοῦ ὑδραργύρου πάνω ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια ΑΒΓ μέσα στὸ μικρότερο δοχεῖο (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ ὑδραργύρου 13,6).



Σχ. 17.

39. Ἕνα σιδερένιο κομμάτι ὕστερα ἀπὸ κατεργασία στὸν τόρνο ζυγίζει 2,4 kg. Ποιό ἦταν τὸ ἀρχικό του βάρος, ἂν μὲ τὴν κατεργασία χάθηκαν τὰ 3,5 % ἀπὸ τὸ βάρος αὐτό;

40. Σ' ἕναν προϋπολογισμὸ δαπανῶν γιὰ τὶς οἰκοδομικὲς κατασκευὲς ἑνὸς μικροῦ σπιτιοῦ ὑπῆρχαν τὰ ἀκόλουθα κονδύλια:

1ο. 243 m³ πρὸς 200 δρχ τὸ κυβικὸ μέτρο. Ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχο ποσὸ τὰ 80 % ἀντιπροσώπευαν γενικὲς κατασκευὲς (τοιχοδομὴ κτλ.) καὶ τὰ ὑπόλοιπα 20 % εἰδικὲς κατασκευὲς (μπετὸν ἀρμὲ κτλ.).

2ο. Ἀμοιβὴ τοῦ μηχανικοῦ ἴση μὲ 6,7 % τῆς δαπάνης γιὰ τὶς γενικὲς κατασκευὲς καὶ 9 % τῆς δαπάνης γιὰ τὶς εἰδικὲς κατασκευές.

Ποιό ἦταν τὸ προϋπολογισμένο συνολικὸ κόστος;

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

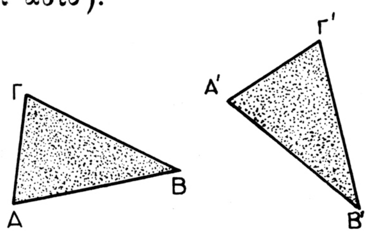
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

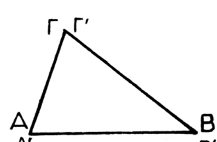
Μάθημα 29.

Δυὸ περιπτώσεις ἰσότητας τριγώνων.

1. Ἀπὸ τὸν Τόμο Α΄ ξέρομε ὅτι δυὸ εὐθύγραμμα τμήματα ἢ δυὸ γωνίες ἢ δυὸ τρίγωνα εἶναι ἴσα σχήματα, ὅταν, χωρὶς νὰ τὰ μεταβάλωμε καθόλου, μποροῦμε, μὲ μιὰ κατάλληλη μετακίνηση, νὰ τὰ κάμωμε νὰ συμπέσουν. Γενικῶς, δυὸ γεωμετρικὰ σχήματα λέγονται *ἴσα*, ὅταν μποροῦν νὰ τεθοῦν τὸ ἕνα πάνω στὸ ἄλλο ὥστε ὅλα τους τὰ μέρη (ὅλα τους τὰ στοιχεῖα) νὰ συμπέσουν. Π.χ. τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 29-α) θὰ εἶναι ἴσα, ἂν τὸ ἕνα μπορῇ νὰ τοποθετηθῇ πάνω στὸ ἄλλο (σχ. 29-β) ἔτσι ποὺ νὰ ταυτίζεται μὲ αὐτὸ (δηλ. νὰ μὴν ξεχωρίζῃ ἀπ᾽ αὐτό).



Σχ. 29-α.



Σχ. 29-β.

Τὰ παραπάνω τὰ ἐκφράζομε σύντομα μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Ὁ ρ ι σ μ ό ς. Δυὸ γεωμετρικὰ σχήματα λέγονται ἴσα, ὅταν μποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν τὸ ἕνα μὲ τὸ ἄλλο (ὅταν εἶναι ἐφαρμόσιμα).

Ἀπὸ ἐδῶ βγάζομε τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα: Ὅταν δυὸ τρίγωνα (*καὶ* γενικότερα δυὸ πολύγωνα) εἶναι *ἴσα*, τότε κάθε πλευρὰ *καὶ* κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς ἔχει μιὰν ἀντίστοιχη *ἴση* πλευρὰ *καὶ* μιὰν ἀντίστοιχη *ἴση* γωνία στὸ ἄλλο.

Π.χ. στὸ παραπάνω παράδειγμά μας εἶναι:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'},\ \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'},\ \mathrm{\Gamma A} = \mathrm{\Gamma'A'},\ \widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}'},\ \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}.$$

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴ τὴ διατυπώνομε σύντομα μὲ τὴν ἀκόλουθη πρόταση (φράση):

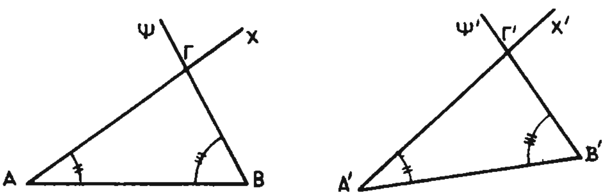
Π ρ ό τ α σ η. Δυὸ ἴσα τρίγωνα ἔχουν τὰ ἕξι κύρια στοιχεῖα τους, δηλαδὴ τὶς 3 πλευρὲς καὶ τὶς 3 γωνίες τους, ἀντιστοίχως ἴσα.

Θὰ μελετήσωμε τώρα μερικὲς πολὺ χρήσιμες ἰδιότητες τῶν τριγώνων. Οἱ ἰδιότητες αὐτὲς μᾶς λένε τὸ ἑξῆς: ὅταν ἀπὸ τὰ 6 κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου (δηλ. τὶς 3 πλευρὲς καὶ τὶς 3 γωνίες του) 3, κατάλληλα διαλεγμένα, εἶναι ἴσα μὲ 3 ἀντίστοιχα στοιχεῖα ἑνὸς ἄλλου τριγώνου, τότε τὰ δυὸ τρίγωνα εἶναι ἀναγκαστικῶς ἴσα· ἑπομένως, καὶ τὰ 3 ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ πρώτου εἶναι ἴσα μὲ τὰ 3 ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ δεύτερου τριγώνου. Οἱ ἰδιότητες αὐτὲς εἶναι πολὺ χρήσιμες γιὰ τοὺς ἑξῆς λόγους:

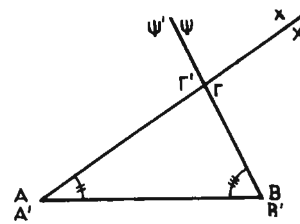
1ο. Ἐπιτρέπουν νὰ βεβαιώσωμε τὴν ἰσότητα δυὸ τριγώνων χωρὶς νὰ κάμωμε τὴν τοποθέτηση τοῦ ἑνὸς ἀπάνω στὸ ἄλλο. Ἡ τοποθέτηση αὐτὴ ἀπαιτεῖ μιὰ μετακίνηση τῶν τριγώνων ποὺ συχνὰ δὲν εἶναι πραγματοποιήσιμη, π.χ. στὴν περίπτωση δυὸ τριγωνικῶν οἰκοπέδων· σὲ μιὰ τέτοια περίπτωση, γιὰ νὰ ἐξακριβώσωμε ἂν τὰ δυὸ οἰκόπεδα εἶναι ἴσα, μετροῦμε τὰ κατάλληλα 3 στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς οἰκοπέδου καὶ ἐξετάζομε ἂν εἶναι ἴσα μὲ 3 ἀντίστοιχα τοῦ ἄλλου οἰκοπέδου.

2ο. Ἐπιτρέπουν οἱ ἴδιες ἰδιότητες νὰ συμπεράνωμε τὴν ἰσότητα δυὸ εὐθύγραμμων τμημάτων ἢ δυὸ γωνιῶν, πάλι δίχως νὰ πραγματοποιήσωμε τὴν ἐφαρμογή τους ἢ δίχως νὰ κάμωμε νέες μετρήσεις. Ἀρκεῖ γιὰ αὐτὸ νὰ βροῦμε ὅτι τὰ 2 τμήματα ἢ οἱ 2 γωνίες εἶναι ἀντίστοιχα στοιχεῖα σὲ 2 τρίγωνα ποὺ τὴν ἰσότητά τους τὴν ἐξακριβώνομε ὄχι μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ ἑνὸς μὲ τὸ ἄλλο, ἀλλὰ μὲ τὶς ἰδιότητες ποὺ πρόκειται τώρα νὰ μελετήσωμε.

2. 1η περίπτωση ἰσότητας τριγώνων.—Πρόταση. *Ἂν δυὸ τρίγωνα ἔχουν μιὰ πλευρὰ ἴση καὶ τὶς παρακείμενες σ' αὐτὴν δυὸ γωνίες ἀντιστοίχως ἴσες (σχ. 29-γ),* **τότε τὰ δυὸ τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα.**



Σχ. 29-γ. Ὑποθέτομε ὅτι $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

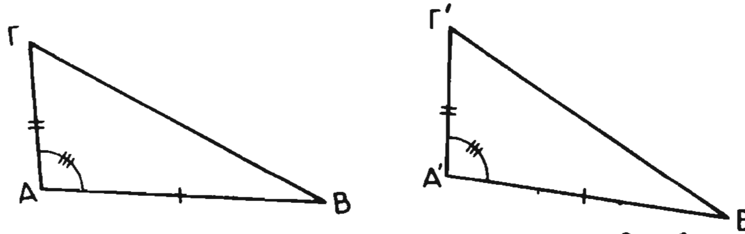


Σχ. 29-δ. Ἡ κορυφὴ Γ' συμπίπτει μὲ τὴ Γ.

Καὶ ἀλήθεια, μποροῦμε νὰ φαντασθοῦμε ὅτι μ' ἕνα διάφανο χαρτὶ (ἢ μ' ἕνα χαρμπὸν) πήραμε τὸ ἀποτύπωμα τοῦ ἑνὸς τριγώνου Α'Β'Γ' καὶ ὅτι τὸ μεταφέραμε πάνω στὸ ἄλλο τρίγωνο ΑΒΓ ἔτσι ποὺ νὰ συμπέσουν ἡ πλευρὰ Α'Β' μὲ τὴν ἴση της ΑΒ καθὼς καὶ ἡ γωνία $\widehat{A'}$ μὲ τὴν ἴση της $\widehat{A}$. Τότε καὶ ἡ γωνία $\widehat{B'}$ θὰ συμπέση μὲ τὴν ἴση της $\widehat{B}$ (σχ. 29-δ). Ἑπομένως ἡ ἡμιευθεία Α'Χ' θὰ ἔρθη πάνω στὴν ἡμιευθεία ΑΧ καὶ ἡ ἡμιευθεία Β'Ψ' πάνω στὴ ΒΨ. Τὸ σημεῖο Γ' θὰ πρέπη λοιπὸν νὰ βρίσκεται πάνω καὶ στὴν εὐθεία ΑΧ καὶ στὴν εὐθεία ΒΨ, ἄρα θὰ συμπίπτη μὲ τὸ σημεῖο Γ, ποὺ εἶναι τὸ μοναδικὸ κοινὸ σημεῖο αὐτῶν τῶν δυὸ εὐθειῶν. Ἑπομένως τὰ δυὸ τρίγωνα Α'Β'Γ' καὶ ΑΒΓ μποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν τὸ ἕνα μὲ τὸ ἄλλο καὶ κατὰ συνέπεια εἶναι ἴσα.

3. 2η περίπτωση ἰσότητας τριγώνων. — Πρόταση. *Ἂν* *δυὸ τρίγωνα ἔχουν δυὸ πλευρὲς ἀντίστοιχα ἴσες καὶ τὴν περιεχόμενη γωνία ἐπίσης ἴση,* **τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

Γιὰ νὰ πεισθοῦμε, φανταζόμαστε πάλι ὅτι πήραμε τὸ ἀποτύπωμα τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ καὶ ὅτι τὸ μεταφέραμε πάνω στὸ τρίγωνο

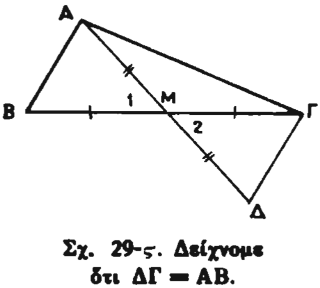


Σχ. 29-ε. Ὑποθέτομε ὅτι ΑΒ = Α'Β', ΑΓ = Α'Γ', $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$.

ΑΒΓ (σχ. 29-ε) ἔτσι ποὺ νὰ συμπέσουν ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ μὲ τὴν ἴση της ΑΒ καὶ ἡ γωνία $\widehat{Α'}$ μὲ τὴν ἴση της $\widehat{Α}$. Τότε ἀναγκαστικὰ καὶ ἡ πλευρὰ Α΄Γ΄ θὰ συμπέση μὲ τὴν ἴση της ΑΓ. Ἄρα τὰ δυὸ τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἐφαρμόσιμα καὶ ἑπομένως ἴσα.

4. Ἐφαρμογή. *Παράδειγμα. Προεκτείνομε τὴ διάμεσο ΑΜ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ κατὰ ἕνα μῆκος ΜΔ ἴσο μὲ ΑΜ. Θὰ δείξωμε ὅτι ΔΓ = ΑΒ.*

Χαράζομε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΔΓ καὶ παραβάλλομε τὰ δυὸ τρίγωνα ΜΒΑ καὶ ΜΓΔ. Παρατηροῦμε ὅτι:



Σχ. 29-ς. Δείχνομε ὅτι ΔΓ = ΑΒ.

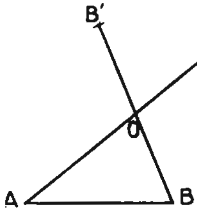
1ο πλευρὰ ΜΒ = πλευρὰ ΜΓ, γιατὶ Μ εἶναι τὸ μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

2ο πλευρὰ ΜΑ = πλευρὰ ΜΔ, γιατὶ τὸ μῆκος ΜΔ τὸ πήραμε ἴσο μὲ τὸ ΜΑ.

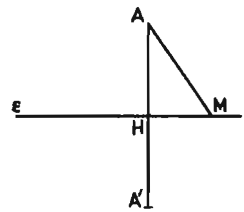
3ο γωνία $\widehat{Μ_1}$ = γωνία $\widehat{Μ_2}$ γιατὶ οἱ δυὸ αὐτὲς γωνίες εἶναι ἀντικόρυφες (βλ. Τόμ. Α΄, Μαθ. 13, § 4). Τὰ δυὸ τρίγωνα ΜΒΑ καὶ ΜΓΔ ἔχουν λοιπὸν δυὸ πλευρὲς ἀντίστοιχα ἴσες καὶ τὴν ἀνάμεσα σ' αὐτὲς γωνία ἴση, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἑπομένως καὶ οἱ τρίτες ἀντίστοιχες πλευρές τους ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι ἴσες, ὅπως θέλαμε νὰ δείξωμε.

Ἀσκήσεις. 1. Ἑνώνετε ἕνα σημεῖο Ο μὲ τὰ ἄκρα Α καὶ Β ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Ὕστερα προεκτείνετε τὸ τμῆμα ΑΟ κατὰ ἕνα μῆκος ΟΑ′ ἴσο μὲ ΑΟ καὶ τὸ ΒΟ κατὰ ἕνα μῆκος ΟΒ′ ἴσο μὲ ΒΟ. Δεῖξτε ὅτι τὰ τμήματα Α′Β′ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσα. (Θὰ παραβάλετε τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ′Β′ γιὰ νὰ ἰδῆτε ποιὰ στοιχεῖα τους εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα. Βλ. σχ. 29-ζ).

2. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α, ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ μιὰν εὐθεία ε, χαράζομε, ὡς τὴν εὐθεία ε, τὴν κάθετο ΑΗ καθὼς καὶ ἕνα πλάγιο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΜ. (Τὰ σημεῖα Η καὶ Μ βρίσκονται λοιπὸν πάνω στὴν ε). Ὕστερα προεκτείνομε τὸ τμῆμα ΑΗ κατὰ ἕνα μῆκος ΗΑ′ ἴσο μὲ ΑΗ. Δεῖξτε ὅτι Α′Μ = ΑΜ. (Θὰ παραβάλετε τὰ τρίγωνα ΗΑΜ καὶ ΗΑ′Μ. Βλ. σχ. 29-η).

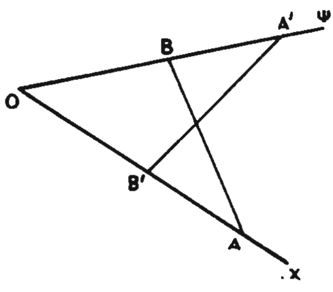


Σχ. 29-ζ.

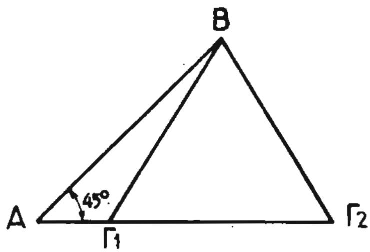


Σχ. 29-η.

3. Πάνω στὶς πλευρὲς ΟΧ καὶ ΟΨ μιᾶς γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ πάρτε δυὸ ὁποιαδήποτε μήκη ΟΑ καὶ ΟΒ (σχ. 29-ζ). Ὕστερα πάρτε πάνω στὴν πλευρὰ ΟΧ τὸ μῆκος ΟΒ′ ἴσο μὲ ΟΒ καὶ πάνω στὴν ΟΨ τὸ μῆκος ΟΑ′ ἴσο μὲ ΟΑ. Νὰ δείξετε τώρα ὅτι:



Σχ. 29-θ.



Σχ. 29-ι.

1ο τὰ μήκη ΑΒ καὶ Α′Β′ εἶναι ἴσα (θὰ παραβάλετε τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ′Β′) καὶ 2ο οἱ δυὸ γωνίες $O\widehat{A}B$ καὶ $O\widehat{A'}B'$ εἶναι ἴσες· ἐπίσης οἱ δυὸ γωνίες $O\widehat{B}A$ καὶ $O\widehat{B'}A'$.

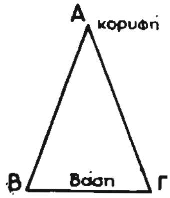
4. Κατασκευάστε (δηλ. σχεδιάστε) ένα τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζοντας τὴ γωνία του $\widehat{A} = 45^\circ$, τὴν πλευρὰ $AB = 50$ mm καὶ τὴν πλευρὰ $B\Gamma = 40$ mm. Πόσα τέτοια, μεταξύ τους ἄνισα, τρίγωνα μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε (σχ. 29-ι); Ἑπομένως ἡ ἀκόλουθη πρόταση δὲν εἶναι πάντοτε ἀληθινή: «Ἂν δυὸ τρίγωνα ἔχουν 2 πλευρὲς ἀντίστοιχα ἴσες καὶ μιὰ γωνία ἴση, θὰ εἶναι ἴσα». Προσέξτε σὲ τί διαφέρει αὐτὴ ἡ πρόταση ἀπὸ τὴν πάντοτε ἀληθινὴ πρόταση τοῦ § 3 (2η περίπτωση ἰσότητας τριγώνων).

5. Ὑποθέτομε ὅτι δυὸ τρίγωνα ἔχουν δυὸ πλευρὲς καὶ δυὸ γωνίες ἀντίστοιχα ἴσες. Νὰ δείξετε ὅτι τότε θὰ εἶναι ἀναγκαστικῶς ἴσα. (Θὰ χρησιμοποιήσετε ἐκεῖνο ποὺ ξέρετε ἀπὸ τὸν Τόμ. Α', ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν 3 γωνιῶν κάθε τριγώνου εἶναι 180°. Ἀπ' αὐτὸ καὶ ἀπὸ ὅσα ὑποθέτομε στὴν παροῦσα ἄσκηση νὰ βγάλετε τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ οἱ τρίτες γωνίες τῶν δυὸ παραπάνω τριγώνων εἶναι ἴσες. Εἶναι κατόπιν εὔκολο νὰ πιστοποιήσετε ὅτι βρίσκεσθε σὲ μιὰ περίπτωση ἰσότητας τριγώνων.)

Μάθημα 30.

Ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

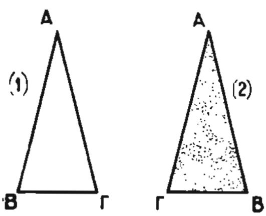
1. Ἰσοσκελὲς τρίγωνο. Ὑπενθυμίζομε ὅτι ἕνα τρίγωνο εἶναι *ἰσοσκελές, ὅταν ἔχῃ δυὸ πλευρὲς ἴσες*. Π.χ. στὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 30-α) οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσες. Ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ λέγεται *βάση τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου* καὶ ἡ ἀντικρυνὴ κορυφὴ Α, *κορυφὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου*.



Σχ. 30-α. Ἰσοσκελὲς τρίγωνο.

2. Πρόταση. *Ἂν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές,* **τότε μπορεῖ νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὸν ἑαυτό του καὶ ἀφοῦ ἀναποδογυρισθῇ.**

Καὶ ἀλήθεια, ἂς πάρωμε τὸ ἀποτύπωμα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (τρίγωνο (1) στὸ σχ. 30-β) καὶ ἂς τὸ ἀναποδογυρίσωμε (τρίγωνο (2) στὸ σχ. 30-β). Φέρνομε τὸ (2) πάνω στὸ (1) ἔτσι ποὺ οἱ δυὸ γωνίες τους $\widehat{A}$, ποὺ εἶναι ἴσες, νὰ ἐφαρμόσουν ἡ μιὰ μὲ τὴν ἄλλη. Τότε ἡ πλευρὰ ΑΓ τοῦ (2) θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴση τῆς ΑΒ τοῦ (1) καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ (2) μὲ τὴν ἴση τῆς ΑΓ τοῦ (1). Τὸ τρίγωνο (2), ποὺ εἶναι τὸ τρίγωνο (1) ἀναποδογυρισμένο, μπορεῖ λοιπὸν νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὸ (1), ὅπως λέει ἡ πρόταση.

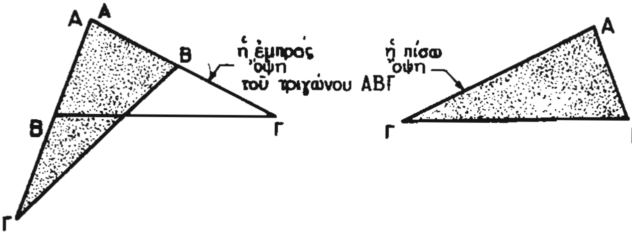


Σχ. 30-β. Ὑποθέτομε ὅτι τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα δὲν ἀληθεύει γιὰ τρίγωνα ὄχι ἰσοσκελῆ. Αὐτὸ φαίνεται ἀμέσως στὸ παρακάτω σχῆμα 30-γ.

Ὥστε, ὅταν ἕνα τρίγωνο μπορῇ νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὸν ἀναποδογυρισμένο ἑαυτό του, τότε τὸ τρίγωνο αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελές.

Τὴν ἰδιότητα λοιπὸν νὰ εἶναι ἐφαρμόσιμο μὲ τὸν ἀναποδογυρισμένο ἑαυτό του τὴν ἔχει μόνο τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο. Γι' αὐτὸ καὶ τὴ λέμε *χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου*.

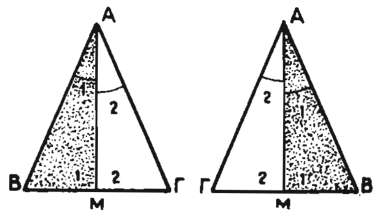


Σχ. 30-γ. Ὑποθέτομε ὅτι $AB \neq A\Gamma$, $AB \neq B\Gamma$, $A\Gamma \neq B\Gamma$.

3. Συνέπειες. 1η. Στὴν ἐφαρμογὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (1) (βλ. σχ. 30-β) μὲ τὸν ἀναποδογυρισμένο ἑαυτό του (2), ἡ γωνία $\widehat{B}$ συμπίπτει μὲ τὴ γωνία $\widehat{\Gamma}$. Ἄρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Ὥστε: *ὅταν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές*, **τότε οἱ δυὸ γωνίες του ποὺ ἀντικρύζουν τὶς δυὸ ἴσες πλευρὲς (οἱ δυὸ γωνίες του οἱ παρακείμενες στὴ βάση) εἶναι κι αὐτὲς ἴσες.**

2η. Ἄς χαράξωμε τὴ διάμεσο ΑΜ ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α στὸ μέσο Μ τῆς βάσης ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 30-δ). Στὴν ἐφαρμογὴ τοῦ τριγώνου μὲ τὸν ἀναποδογυρισμένο ἑαυτό του ΑΓΒ, τὸ σημεῖο Μ, ποὺ εἶναι τὸ μέσο τῆς βάσης, συμπίπτει μὲ τὸν ἑαυτό του. Ἑπομένως ἡ γωνία $\widehat{A}_1$ συμπίπτει μὲ τὴ γωνία $\widehat{A}_2$. Ἄρα $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.



Σχ. 30-δ.

Ὥστε: *ὅταν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές*, **ἡ διάμεσός του ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάση εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας στὴν κορυφή.**

3η. Στὴν παραπάνω ἐφαρμογὴ ἡ γωνία $\widehat{M}_1$ συμπίπτει μὲ τὴ γωνία $\widehat{M}_2$. Ἄρα $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ καὶ ἑπομένως ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς γωνίες εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ μιᾶς ἀποπλατυσμένης (ἁπλωτῆς) γωνίας, εἶναι δηλαδὴ ὀρθή.

Ὥστε: *ὅταν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές*, **ἡ διάμεσός του ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάση εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου.**

4η. Ἀφοῦ ἡ ΑΜ εἶναι κάθετη πρὸς τὴ βάση ΒΓ καὶ Μ εἶναι τὸ μέσο τῆς βάσης, ἡ εὐθεία ΜΑ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου.

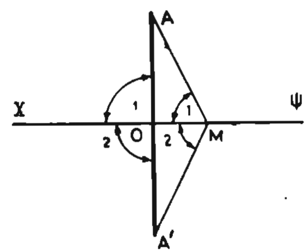
Ὥστε, *ὅταν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές*, **ἡ διάμεσός του ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάση εἶναι συγχρόνως καὶ μεσοκάθετος τῆς βάσης.**

Συνοψίζοντας μποροῦμε λοιπὸν νὰ διατυπώσωμε τὴν πρόταση:

Π ρ ό τ α σ η. Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἡ διάμεσος, ἡ διχοτόμος καὶ τὸ ὕψος ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὴν κορυφὴ ταυτίζονται. Μὲ τὴν εὐθεία τῶν τριῶν αὐτῶν τμημάτων συμπίπτει καὶ ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσης τοῦ τριγώνου.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. *1*. Πῶς δείχνομε ὅτι δυὸ γωνίες μὲ μιὰ κοινὴ πλευρὰ εἶναι ἴσες, διπλώνοντας (τσακίζοντας) σὲ δυὸ τὸ χαρτὶ τοῦ σχεδίου (σχ. 30-ε).

1ο. Χαράξτε πάνω στὸ χαρτί σας μιὰν εὐθεία ΧΨ καὶ σημειῶστε ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτήν. Ὕστερα διπλῶστε τὸ χαρτὶ σὲ δυό, κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ΧΨ (γύρω στὴν εὐθεία ΧΨ). Τὸ σημεῖο Α θὰ ἔρθη τότε σὲ μιὰ καινούργια θέση, ποὺ τὴ σημειώνετε μὲ τὸ γράμμα Α′. Ξεδιπλῶστε τώρα τὸ χαρτί σας καὶ ἔστω Ο τὸ σημεῖο ὅπου ἡ εὐθεία ΑΑ′ κόβει τὴ ΧΨ. Γιατὶ οἱ γωνίες $\widehat{O}_1$ καὶ $\widehat{O}_2$ εἶναι ἴσες; Μὲ τί ἰσοῦται ἡ καθεμιά τους; Ἑπομένως ποιά εἶναι ἡ σχετικὴ θέση τῆς εὐθείας ΑΑ′ πρὸς τὴν εὐθεία ΧΨ;



Σχ. 30-ε. Δεῖξτε ὅτι ἀπὸ τὸ Α μόνο μία κάθετο μποροῦμε νὰ χαράξωμε πρὸς τὴν εὐθεία ΧΨ.

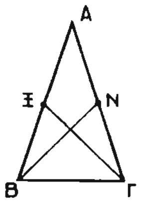
2ο. Πάρτε πάνω στὴ ΧΨ ἕνα σημεῖο Μ διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ Ο. Γιατί οἱ γωνίες $\widehat{M}_1$ καὶ $\widehat{M}_2$ εἶναι ἴσες; Δεῖξτε ὅτι αὐτὲς οἱ δυὸ γωνίες δὲν εἶναι ὀρθές.

3ο. Νὰ συμπεράνετε ἀπὸ τὰ παραπάνω ὅτι ἀπὸ ἕνα δοσμένο σημεῖο Α μόνο μία κάθετο μποροῦμε νὰ χαράξωμε πρὸς μιὰ δοσμένη εὐθεία ΧΨ.

2. Ὑπολογίστε τὴν περίμετρο ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ποὺ δυὸ πλευρές του ἔχουν ἀντίστοιχα μήκη 35 καὶ 45 mm. Πόσες εἶναι οἱ διαφορετικὲς ἀπαντήσεις ποὺ μπορεῖτε νὰ δώσετε στὸ πρόβλημα;

3 Τὸ ἴδιο πρόβλημα γιὰ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ποὺ δυὸ πλευρὲς του ἔχουν ἀντίστοιχα μήκη 100 καὶ 20 mm.

4. Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ, μὲ βάση τὴ ΒΓ, χαράζομε τὶς διαμέσους ΒΝ καὶ ΓΞ (σχ. 30-ς). Δεῖξτε ὅτι εἶναι ἴσες. (Θὰ ἀναποδογυρίσετε τὸ τρίγωνο στρέφοντάς το γύρω στὴ διάμεσο ΑΜ ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν κορυφή).



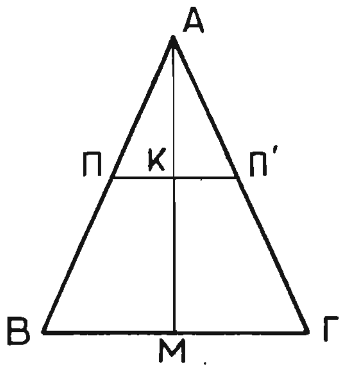
Σχ. 30-ς.

5. Πάρτε μιὰν εὐθεία ε καὶ ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτήν. Ἑνῶστε τὸ Α μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς εὐθείας καὶ κατεβάστε ἀπὸ τὸ Α ὡς τὴν ε τὴν κάθετο ΑΗ πρὸς τὴν εὐθεία. Τέλος νὰ προεκτείνετε τὸ τμῆμα ΑΗ κατὰ ἕνα μῆκος ΗΑ' ἴσο μὲ ΑΗ καὶ νὰ ἑνώσετε τὸ Α' μὲ τὸ Μ. Ἀπαντῆστε τώρα στὰ ἑξῆς ἐρωτήματα:

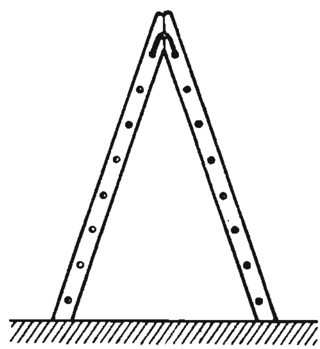
1ο. Πῶς μποροῦμε νὰ φέρωμε σὲ σύμπτωση τὰ τρίγωνα ΜΑΗ καὶ ΜΑ'Η;

2ο. Τί εἴδους τρίγωνο εἶναι τὸ ΜΑΑ';

6. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Π, ποὺ πήρατε πάνω στὴν πλευρὰ ΑΒ (σχ. 30-ζ) ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ μὲ κορυφὴ τὸ Α, φέρνετε τὴν κάθετο ΠΚ πρὸς τὸ ὕψος ΑΜ τοῦ τριγώνου καὶ τὴν προεκτείνετε κατὰ ἕνα μῆκος ΚΠ' ἴσο μὲ ΠΚ. Δεῖξτε ὅτι τὸ σημεῖο Π' βρίσκεται πάνω στὴν πλευρὰ ΑΓ. (Θὰ ἐργασθῆτε ὅπως καὶ στὴν Ἄσκ. 4.)



Σχ. 30-ζ.


Σχ. 30–η. Διπλὴ ἀνεμόσκαλα.

7. Παρατηρῆστε μιὰ διπλὴ ἀνεμόσκαλα μὲ ἰσόμηκα σκέλη (σχ. 30-η) καὶ ἐξηγῆστε γιατὶ τὰ σκέλη αὐτὰ σχηματίζουν ἴσες γωνίες κλίσης μὲ τὴν ὁριζόντια βάση.

8. Κατασκευάστε (δηλ. σχεδιάστε μὲ κανόνα καὶ διαβήτη) ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο γνωρίζοντας τὸ μῆκος 50 mm τῆς διαμέσου, ἡ ὁποία ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν κορυφή, καθὼς καὶ τὸ μῆκος 75 mm τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς δυὸ ἴσες πλευρές.

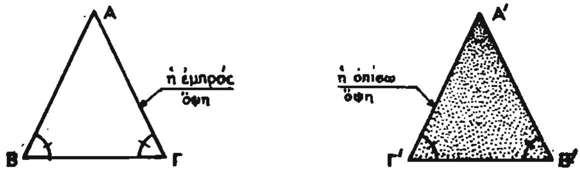
9. Κατασκευάστε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ξέροντας ὅτι ἡ γωνία στὴν κορυφὴ εἶναι 30° μοιρῶν καὶ τὸ μῆκος τῆς βάσης 40 mm.

10. Κατασκευάστε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο γνωρίζοντας τὸ μῆκος 50 mm τῆς διχοτόμου ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ καὶ τὸ μέγεθος 40° τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς δυὸ ἴσες γωνίες στὴ βάση.

Μάθημα 31.

Τρίγωνο μὲ δυὸ ἴσες γωνίες.
Μεσοκάθετος εὐθύγραμμου τμήματος.

1. Τί μποροῦμε νὰ ποῦμε γιὰ ἕνα τρίγωνο ποὺ ἔχει δυὸ γωνίες ἴσες; Π.χ. ἂς εἶναι στὸ τρίγωνο ΑΒΓ οἱ δυὸ γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἴσες (σχ. 31-α). Παίρνομε τὸ ἀποτύπωμά του καὶ τὸ ἀναστρέφομε (τὸ ἀναποδογυρίζομε)· ἀποκτοῦμε ἔτσι τὸ σκιασμένο τρίγωνο Α′Γ′Β′ (σχ. 31-α). Τὸ τρίγωνο αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ



Σχ. 31-α. Ὑποθέτομε ὅτι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

μεταφέρωμε πάνω στὸ ΑΒΓ, ἔτσι ποὺ ἡ πλευρά του Γ′Β′ νὰ συμπέση μὲ τὴν ἴση της ΒΓ καὶ ἡ γωνία $\widehat{\Gamma'}$ μὲ τὴν ἴση της $\widehat{B}$. (Οἱ δυὸ γωνίες $\widehat{\Gamma'}$ καὶ $\widehat{B}$ εἶναι ἴσες, γιατὶ $\widehat{\Gamma'} = \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{B}$). Τότε καὶ ἡ γωνία $\widehat{B'}$ θὰ συμπέση μὲ τὴν ἴση της $\widehat{\Gamma}$. (Οἱ δυὸ γωνίες $\widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἴσες, γιατὶ $\widehat{B'} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$). Ἑπομένως θὰ συμπέσουν ἀπὸ τὴ μιὰ μεριὰ οἱ εὐθεῖες Γ′Α′ καὶ ΒΑ καί, ἀπὸ τὴν ἄλλη, οἱ εὐθεῖες Β′Α′ καὶ ΓΑ. Ἄρα τὸ σημεῖο Α′ θὰ συμπέση μὲ τὸ Α καὶ τὰ δυὸ τρίγωνα θὰ ἔχουν ἐφαρμόσει. Ὥστε θὰ ἔχωμε τὴν ἰσότητα

πλευρὰ Γ′Α′ = πλευρὰ ΒΑ

ἄρα, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ Γ′Α′ ἦταν τὸ ἀποτύπωμα τῆς ΓΑ, θὰ εἶναι

πλευρὰ ΓΑ = πλευρὰ ΒΑ.

Ὥστε, ἀληθεύει ἡ ἀκόλουθη πρόταση :

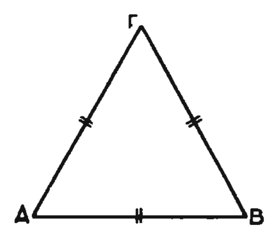
Πρόταση. Ἂν ἕνα τρίγωνο ἔχη δυὸ γωνίες ἴσες, θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

2. Παρατήρηση. Ἂς παραβάλωμε τὶς δυὸ προτάσεις :

1. *Ἂν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές,* **θὰ ἔχη δυὸ γωνίες ἴσες.**
2. *Ἂν ἕνα τρίγωνο ἔχη δυὸ γωνίες ἴσες,* **θὰ εἶναι ἰσοσκελές.**

Παρατηροῦμε πὼς ὅ,τι εἶναι *ὑπόθεση* στὴ μιὰ πρόταση εἶναι *συμπέρασμα* στὴν ἄλλη. Δυὸ τέτοιες προτάσεις λέγονται *ἀντίστροφες ἡ μιὰ τῆς ἄλλης*. Οἱ δυὸ παραπάνω ἀντίστροφες προτάσεις εἶναι καὶ οἱ δυὸ ἀληθινές· αὐτὸ ὅμως δὲν συμβαίνει πάντα : μπορεῖ μιὰ πρόταση νὰ εἶναι ἀληθινή, ἡ ἀντίστροφή της ὅμως ὄχι. Π.χ. ἡ πρόταση « ἂν δυὸ γωνίες εἶναι ὀρθές, θὰ εἶναι ἴσες » εἶναι ἀληθινή. Ὅμως ἡ ἀντίστροφή της : « ἂν δυὸ γωνίες εἶναι ἴσες, θὰ εἶναι ὀρθὲς » δὲν ἀληθεύει· (γιατὶ δυὸ ἴσες γωνίες μπορεῖ νὰ εἶναι π.χ. ὀξεῖες). Γι' αὐτό, ὅταν σχηματίσωμε τὴν ἀντίστροφη μιᾶς ἀληθινῆς πρότασης, δὲν ἐπιτρέπεται νὰ νομίζωμε πὼς καὶ ἡ ἀντίστροφη αὐτὴ εἶναι ἀληθινή, πρὶν τὴ μελετήσωμε καὶ δείξωμε ὅτι ἀληθεύει.

3. Ἰσόπλευρο τρίγωνο. Ὑπενθυμίζομε ὅτι ἕνα τρίγωνο εἶναι *ἰσόπλευρο*, ὅταν ἔχη τὶς τρεῖς πλευρές του μεταξύ τους ἴσες (σχ. 31-β).



Σχ. 31-β. Ἰσόπλευρο τρίγωνο.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς : Ἀφοῦ ΓΑ = ΓΒ, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{B} = \widehat{A}$ (σύμφωνα μὲ τὴν πρώτη πρόταση τοῦ § 2).

Ἀφοῦ ΑΒ = ΑΓ, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{B}$ (σύμφωνα μὲ τὴν ἴδια πρόταση). Ἑπομένως

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{B} = \widehat{A},$$

δηλαδὴ οἱ τρεῖς γωνίες τοῦ τριγώνου εἶναι μεταξύ τους ἴσες.

Ὥστε: *Ἂν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο, οἱ 3 γωνίες του θὰ εἶναι ἴσες.* Ἀντίστροφα: *Ἂν ἕνα τρίγωνο ἔχῃ τὶς 3 γωνίες του μεταξύ τους ἴσες, θὰ εἶναι ἰσόπλευρο.*

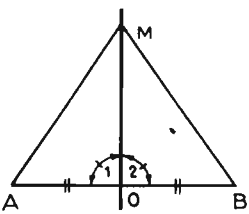
Καὶ ἀλήθεια, ἂς εἶναι $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ στὸ τρίγωνο ΑΒΓ. Ἐπειδὴ $\widehat{A} = \widehat{B}$ θὰ εἶναι ΒΓ = ΓΑ, σύμφωνα μὲ τὴν δεύτερη πρόταση τοῦ § 2. Ἐπειδὴ $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, θὰ εἶναι καὶ ΓΑ = ΑΒ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμε:

$$B\Gamma = \Gamma A = AB,$$

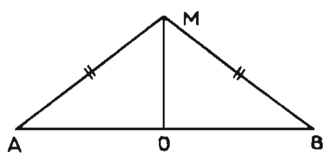
δηλαδὴ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο.

4. Ὑπενθυμίζομε ὅτι μεσοκάθετος ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος λέγεται ἡ εὐθεία ποὺ εἶναι κάθετη πρὸς τὸ τμῆμα στὸ μέσο του.

Πρόταση. Ἂν ἕνα σημεῖο βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο ἑνὸς τμήματος, **τότε οἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰ δυὸ ἄκρα τοῦ τμήματος θὰ εἶναι ἴσες.**



Σχ. 31-γ.
Ὑπόθεση: τὸ Μ βρίσκεται πανω στὴ μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ.



Σχ. 31-δ.
Ὑπόθεση: οἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ εἶναι ἴσες.

Καὶ ἀλήθεια, ἂς βρίσκεται τὸ Μ πάνω στὴ μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 31-γ). Στὰ τρίγωνα ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ θὰ ἔχωμε:

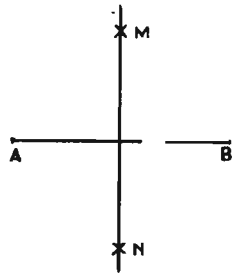
$$\left\{\begin{array}{lll} \text{γωνία } \widehat{O}_1 = \text{γωνία } \widehat{O}_2, & \text{γιατὶ ἡ ΜΟ εἶναι κάθετη πρὸς τὴν ΑΒ.} \\ \text{πλευρὰ ΜΟ} = \text{πλευρὰ ΜΟ}, & \text{γιατὶ εἶναι κοινὴ στὰ δυὸ τρίγωνα.} \\ \text{πλευρὰ ΟΑ} = \text{πλευρὰ ΟΒ}, & \text{γιατὶ τὸ Ο εἶναι τὸ μέσο τοῦ ΑΒ.} \end{array}\right.$$

Ἑπομένως τὰ δυὸ τρίγωνα εἶναι ἴσα (2η περίπτωση ἰσότητας). Ἄρα στὶς δυὸ ἴσες γωνίες $\widehat{O}_1$ καὶ $\widehat{O}_2$ ἀντιστοιχοῦν ἴσες ἀπέναντι πλευρές, δηλαδὴ ΜΑ = ΜΒ, ὅπως ἔπρεπε νὰ δείξωμε.

Ἀντίστροφη πρόταση. Ἂν ἕνα σημεῖο ἔχῃ ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ δυὸ ἄκρα ἑνὸς τμήματος, **τότε θὰ βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο τοῦ τμήματος.**

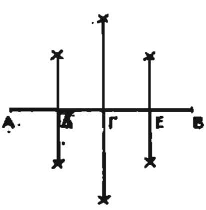
Καὶ ἀλήθεια, ἂς εἶναι ΜΑ = ΜΒ (σχ. 31-δ). Τὸ τρίγωνο ΜΑΒ θὰ εἶναι τότε ἰσοσκελές. Ἂς χαράξωμε τὴ διάμεσό του ΜΟ. Σύμφωνα μὲ μιὰ πρόταση, ποὺ διατυπώσαμε στὸ τέλος τοῦ Μαθήματος 30, ἡ διάμεσος ΜΟ εἶναι καὶ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ. Τὸ σημεῖο Μ βρίσκεται λοιπὸν πάνω στὴ μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ.

5. Χάραξη τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς τμήματος. Ἡ τελευταία πρόταση δικαιολογεῖ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο μάθαμε, στὸν Τόμ. Α΄, Μάθ. 14, § 3, νὰ χαράζωμε τὴ μεσοκάθετο ἑνὸς τμήματος ΑΒ καὶ νὰ προσδιορίζωμε τὸ μέσο του Ο. Ὁ τρόπος αὐτὸς ἦταν ὁ ἀκόλουθος (σχ. 31-ε):

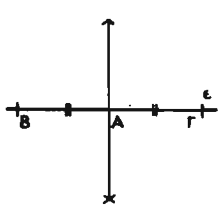


Σχ. 31-ε. Χάραξη τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ.

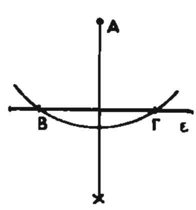
Μὲ κέντρα τὰ δυὸ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα χαράζομε δυὸ κυκλικὰ τόξα. Ἕνα σημεῖο τομῆς τῶν δυὸ αὐτῶν τόξων, π. χ. τὸ Μ, θὰ ἔχῃ ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ Α καὶ Β. Ἄρα θὰ βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ. Ἂν λοιπὸν προσδιορίσωμε μὲ τὸν παραπάνω τρόπο *δυὸ* σημεῖα Μ καὶ Ν ἰσαπόστατα ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τότε ἡ εὐθεία ΜΝ θὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ θὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ μέσο του Ο.



Σχ. 31-ϛ. Νὰ διαιρεθῆ τὸ ΑΒ σὲ 2, 4, 8, ... ἴσα μέρη.



Σχ. 31-ζ. Σ' ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε, νὰ ὑψώσωμε τὴν κάθετο πρὸς τὴν ε.

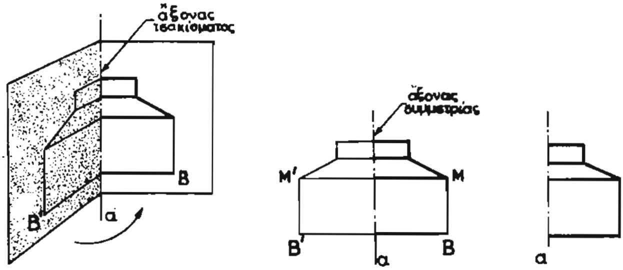


Σχ. 31-η. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α νὰ κατεβάσωμε τὴν κάθετο σὲ μιὰ εὐθεία ε.

Ἔτσι δικαιολογοῦνται καὶ οἱ ἀκόλουθες 3 σχεδιάσεις (σχ. 31-ς, 31-ζ, 31-η) ποὺ ξέρομε καὶ ἀπὸ τὸν Τόμ. Α':

6. Ἄξονας ἑνὸς σχεδίου. Ὅταν λέμε ὅτι ἕνα σχέδιο ἔχει (ἢ παρουσιάζει) ἕναν *ἄξονα συμμετρίας* α ἐννοοῦμε τὸ ἑξῆς:

Σὲ *κάθε* σημεῖο Μ τοῦ σχεδίου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἄλλο Μ' τοῦ σχεδίου τέτοιο ὥστε τὸ τμῆμα ΜΜ' νὰ ἔχῃ μεσοκάθετο τὴν ἴδια πάντα εὐθεία α (σχ. 31-θ). Ἑπομένως, ἂν διπλώσωμε (τσακίσωμε) τὸ σχέδιο κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονα α, τὸ ἕνα μισὸ τοῦ σχεδίου θὰ ἔρθη νὰ συμπέση μὲ τὸ ἄλλο μισό του. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ σχεδιάσωμε τὸ ἕνα μισὸ τοῦ σχεδίου γιὰ νὰ εἶναι προσδιορισμένο καὶ τὸ ἄλλο μισό του.



Σχ. 31-θ. Σχέδιο ποὺ παρουσιάζει ἕναν ἄξονα συμμετρίας.

Παραδείγματα. Τὸ σχέδιο ἑνὸς κύκλου ἔχει ἄξονα συμμετρίας μιὰν ὁποιαδήποτε διάμετρο τοῦ κύκλου. Τὸ σχέδιο ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴ διάμεσο ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάση τοῦ τριγώνου.

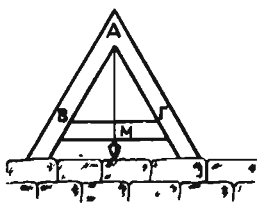
Ἀσκήσεις. 1. Δεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι ΒΔ καὶ ΓΕ τῶν 2 γωνιῶν στὴ βάση ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου σχηματίζουν μαζὶ μὲ τὴ βάση ἕνα ἐπίσης ἰσοσκελὲς τρίγωνο. (Θὰ χρησιμοποιήσετε τὴν πρόταση τῆς § 1 στὸ συλλογισμὸ ποὺ θὰ κάμετε).

2. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ χαράζομε τὶς διχοτόμους ΒΔ καὶ ΓΕ τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου. Ἔστω Τ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν

δυὸ αὐτῶν διχοτόμων. Δεῖξτε ὅτι, ἂν ἔχωμε ΒΤ = ΓΤ, τότε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές. (Θὰ δείξετε ὅτι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$).

3. Δεῖξτε μ' ἕνα παράδειγμα, ποὺ θὰ σχεδιάσετε, ὅτι δὲν ἀληθεύει πάντα τὸ ἀντίστροφο τῆς ἀληθινῆς πρότασης: «Ἂν δυὸ γωνίες εἶναι ἀντικόρυφες, θὰ εἶναι ἴσες». Τί ἀρκεῖ νὰ προσθέσετε στὴν ὑπόθεση τῆς ἀντίστροφης πρότασης: «Ἂν δυὸ γωνίες εἶναι ἴσες, θὰ εἶναι ἀντικόρυφες», γιὰ νὰ προκύψῃ μιὰ πρόταση ποὺ νὰ εἶναι πάντα ἀληθινή;

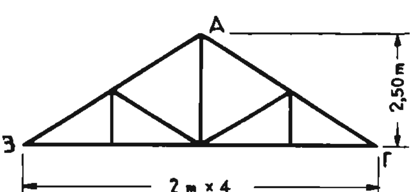
4. Γιατί μπορεῖτε μὲ τὸ ζύγι τοῦ χτίστη, τὸ ὁποῖο παριστάνεται στὸ σχῆμα 31-ι, νὰ ἐλέγξετε ἂν μιὰ στρώση τοίχου εἶναι ὁριζόντια; (Θὰ παρατηρήσατε ὅτι τὸ ζύγι αὐτὸ ἔχει δυὸ ἴσα σκέλη καὶ ὅτι τὸ σημάδι ἀπ' ὅπου πρέπει νὰ περάσῃ τὸ νῆμα ΑΜ τοῦ ζυγιοῦ βρίσκεται στὸ μέσο τῆς τραβέρσας ΒΓ.)



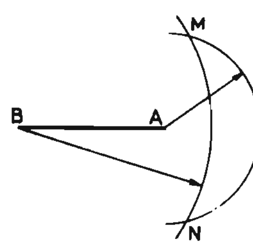
Σχ. 31-ι.
Ζύγι τοῦ χτίστη.

5. Πάνω στὶς πλευρὲς ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πάρτε ἀντιστοίχως 3 μήκη ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ μεταξύ τους ἴσα. Νὰ δείξετε ὅτι τὸ τρίγωνο ΜΝΡ εἶναι ἰσόπλευρο. (Θὰ δείξετε πρῶτα ὅτι τὰ τρία τρίγωνα ΑΜΡ, ΒΝΜ, ΓΡΝ εἶναι ἴσα).

6. Ἐξηγῆστε τὴ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ σχ. 31-ια, ποὺ παριστάνει ἕνα ζευκτὸ (ψαλίδι) στέγης. Σχεδιάστε ὕστερα τὸ ζευκτὸ σὲ κλίμακα 1/100, λαμβάνοντας ὑπόψη τὶς διαστάσεις ποὺ εἶναι σημειωμένες στὸ σχῆμα.



Σχ. 31-ια. Σχεδιάστε τὸ ζευκτὸ αὐτὸ σὲ κλίμακα 1/100.



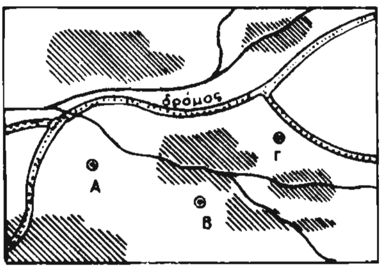
Σχ. 31-ιβ. Ζητεῖται νὰ χαραχθῇ ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ σημεῖο Μ στὸ τμῆμα ΑΒ.

7. Ἐξηγῆστε τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο τὸ σχ. 31-ιβ σᾶς ὑποδείχνει νὰ χαράξετε τὴν κάθετο ἀπὸ τὸ σημεῖο Μ στὸ τμῆμα ΑΒ. (Θὰ

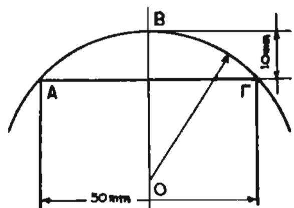
ἑνώσετε τὰ σημεῖα M καὶ N καὶ θὰ ἐξετάσετε ποιά εἶναι ἡ σχέση τῆς εὐθείας MN πρὸς τὴν εὐθεία BA.)

8. Σᾶς δίνουν ἀπάνω στὸ χαρτὶ τοῦ σχεδίου σας 4 σημεῖα A, B, Γ, Δ. Νὰ βρῆτε ἕνα καὶ τὸ ἴδιο σημεῖο ποὺ νὰ ἀπέχῃ ἐξίσου 1ο ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα A, B καὶ 2ο ἀπὸ τὰ ἄλλα δύο Γ, Δ.

9. Πάνω σ' ἕνα γεωγραφικὸ χάρτη (σχ. 31-ιγ) πρόκειται νὰ προσδιορίσετε τὸ σημεῖο ἑνὸς δρόμου τὸ ὁποῖο ἀπέχει ἴσα ἀπὸ δυὸ συνοικισμοὺς A καὶ B. Τί θὰ κάμετε; Ἄραγε σὲ ποιά περίπτωση τὸ σημεῖο ποὺ θὰ βρῆτε θὰ εἶναι ἰσαπόστατο ὄχι μόνο ἀπὸ τοὺς 2 συνοικισμοὺς A, B ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ἕναν τρίτο Γ;



Σχ. 31-ιγ. Βρῆτε πάνω στὸ δρόμο ἕνα σημεῖο ἰσαπόστατο ἀπὸ τὰ A, B.



Σχ. 31-ιδ. Προσδιορίστε τὸ κέντρο O τοῦ κυκλικοῦ τόξου.

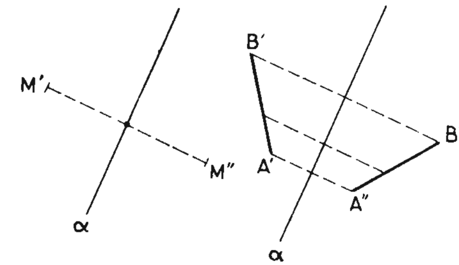
10. Στὸ χαρτί σας εἶναι χαραγμένο ἕνα τόξο κύκλου $\widehat{AB\Gamma}$ (σχ. 31-ιδ). Πῶς μπορεῖτε νὰ προσδιορίσετε γραφικὰ τὸ ἄγνωστο σὲ σᾶς κέντρο του O;

11. Ἕνα σημεῖο M'' λέγεται συμμετρικὸ ἑνὸς σημείου M' ὡς πρὸς μιὰν εὐθεία α (σχ. 31-ιε), ὅταν ἡ α εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος M'M''. Ἕνα σχῆμα σ'' (ὅπως π.χ. τὸ τμῆμα A''B'' τοῦ σχ. 31-ιε) λέγεται συμμετρικὸ ἑνὸς σχήματος σ' (τοῦ A'B') ὡς πρὸς μιὰν εὐθεία α, ὅταν τὰ διάφορα σημεῖα του εἶναι συμμετρικά, ἕνα πρὸς ἕνα, τῶν σημείων τοῦ σχήματος σ'.

Ἀπ' αὐτοὺς τοὺς ὁρισμοὺς βγαίνει τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα: Ἂν στρέψωμε τὸ σημεῖο M'' ἢ τὸ σχῆμα σ'' κατὰ 180° μοῖρες γύρω στὴν εὐθεία α, τότε θὰ ἔχωμε σύμπτωση τοῦ M'' μὲ τὸ M' ἢ τοῦ σ'' μὲ τὸ σ'. Ἀντιστρόφως, ἂν μιὰ στροφὴ γύρω στὴν εὐθεία α κατὰ 180° ἐπιφέρῃ σύμπτωση ἑνὸς σημείου M'' μὲ ἕνα σημεῖο M' ἢ ἑνὸς σχήματος σ'' μὲ ἕνα σχῆμα σ', τότε τὰ σημεῖα M'' καὶ M' ἢ τὰ σχήματα σ'' καὶ σ' εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρὸς τὴν εὐθεία α.

Κατασκευάστε (δηλ. σχεδιάστε) τώρα τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου 1ο ὡς πρὸς τὴν εὐθεία τῆς βάσης του, 2ο ὡς πρὸς τὴν εὐθεία τοῦ ὕψους ποὺ εἶναι κάθετο στὴ βάση.

12. Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο καὶ μιὰν εὐθεία ποὺ δὲν κόβει τὸ τρίγωνο. Ὕστερα κατασκευάστε τὸ συμμετρικὸ τοῦ τριγώνου ὡς πρὸς τὴν εὐθεία αὐτή.



Σχ. 31-ιε. Τὸ M″ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ M′ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία α. Ὅμοια τὸ τμῆμα A″ B″ τοῦ A′ B′.

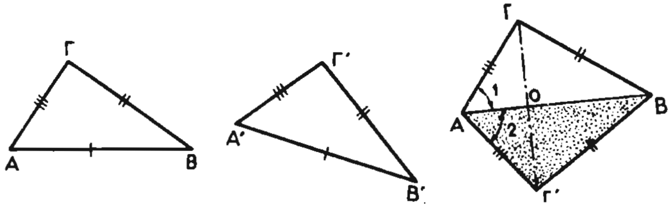
Μάθημα 32.

Ὑπόλοιπες περιπτώσεις ἰσότητας τριγώνων.

1. Τρίτη περίπτωση ἰσότητας τριγώνων. — Πρόταση. *Ἂν δυὸ τρίγωνα ἔχουν τὶς 3 πλευρές τους ἀντίστοιχα ἴσες* (αὐτὸ τὸ λέμε καὶ ἔτσι: *ἴσες μίαν πρὸς μίαν*), **τότε θὰ εἶναι ἴσα.**

Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ δείξωμε μὲ τὸν ἀκόλουθο συλλογισμό:

Παίρνομε τὸ ἀποτύπωμα τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' καί, ἀφοῦ τὸ ἀναστρέψωμε (τὸ ἀναποδογυρίσωμε), τὸ τοποθετοῦμε δίπλα στὸ τρίγωνο



Σχ. 32-α. Ὑποθέτομε ὅτι ΑΒ = Α'Β', ΒΓ = Β'Γ', ΓΑ = Γ'Α'.

ΑΒΓ ἔτσι ποὺ ἡ πλευρὰ Α'Β' νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴση της ΑΒ (σχ. 32-α). Οἱ κορυφὲς Γ καὶ Γ' θὰ βρίσκωνται τότε ἀπὸ διαφορετικὲς μεριὲς τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ χαράζοντας τὸ τμῆμα ΓΓ' θὰ συναντήσωμε τὴν εὐθεία ΑΒ σὲ κάποιο σημεῖο Ο. Παρατηροῦμε τώρα τὰ ἑξῆς στὸ τετράπλευρο ΑΓΒΓ' ποὺ σχηματίσθηκε:

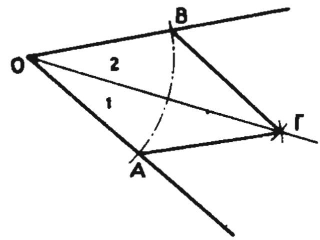
1ο ΒΓ = ΒΓ' (γιατὶ ὑποθέσαμε ὅτι ΒΓ = Β'Γ')· ἄρα τὸ σημεῖο Β ἔχει ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ'.

2ο ΑΓ = ΑΓ' (γιατὶ ὑποθέσαμε ὅτι ΑΓ = Α'Γ')· ἄρα τὸ σημεῖο Α ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ'.

Ἑπομένως ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΓΓ' (σύμφωνα μὲ τοὺς § 4 καὶ 5 τοῦ Μαθ. 31). Κατὰ συνέπεια, ἂν στρέψωμε τὸ σκιασμένο τρίγωνο ΑΓ'Β (ποὺ εἶναι τὸ Α'Γ'Β' ἀναποδογυρισμένο) κατὰ 180°, τὸ τμῆμα ΟΓ' θὰ ἔρθῃ πάνω στὸ τμῆμα ΟΓ καὶ τὸ τρίγωνο ΑΓ'Β θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ΑΓΒ. Μποροῦμε λοιπόν, μετακινώντας τὸ τρίγωνο Α'Β'Γ', νὰ τὸ κάμωμε νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ΑΒΓ. Ἄρα τὰ δυὸ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

2. Ἐφαρμογή. Χρησιμοποιώντας τὴν τρίτη αὐτὴ περίπτωση ἰσότητας τριγώνων μποροῦμε νὰ δικαιολογήσωμε διάφορες γεωμετρικὲς κατασκευὲς (δηλαδὴ σχεδιάσεις) τοῦ Τόμ. Α΄, π.χ. τὴν κατασκευὴ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας $\widehat{O}$ (Τόμ. Α΄, Μαθ. 11, § 4). Ἡ μέθοδος ποὺ ὑποδείξαμε τότε ἦταν ἡ ἀκόλουθη :

Μὲ κέντρο τὸ Ο (σχ. 32-β) χαράζομε ἕνα κυκλικὸ τόξο ποὺ κόβει τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας σὲ δυὸ σημεῖα, ἔστω τὰ Α καὶ Β. Ὕστερα, μὲ κέντρα τὰ δυὸ αὐτὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα, χαράζομε δυὸ κυκλικὰ τόξα ποὺ νὰ κόβωνται· ἔστω Γ ἕνα σημεῖο τομῆς των. Ἡ εὐθεία ΟΓ εἶναι τότε ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{O}$.



Σχ. 32-β. Χάραξη τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{O}$.

Γιὰ νὰ τὸ δείξωμε, παραβάλλομε τὰ τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΟΒΓ. Βλέπομε ὅτι ἔχουν τὶς 3 πλευρές τους ἀντίστοιχα ἴσες:

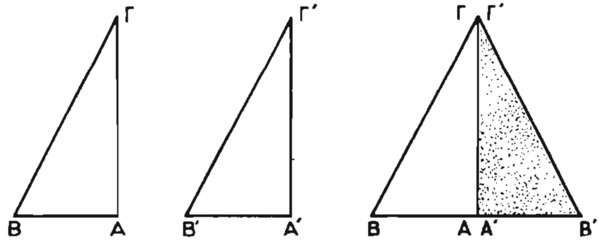
ΟΓ = ΟΓ, γιατὶ εἶναι πλευρὰ κοινὴ στὰ δυὸ τρίγωνα·
ΟΑ = ΟΒ, γιατὶ τὰ Α καὶ Β εἶναι σημεῖα μιᾶς περιφέρειας μὲ κέντρο τὸ Ο·
ΑΓ = ΒΓ, γιατὶ τὸ Γ εἶναι σημεῖο δυὸ κυκλικῶν τόξων ποὺ ἔχουν κέντρα τὰ δυὸ σημεῖα Α, Β καὶ τὴν ἴδια ἀκτίνα.

Ἄρα τὰ δυὸ τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΟΒΓ εἶναι ἴσα καὶ στὶς ἴσες πλευρές τους ΑΓ καὶ ΒΓ ἀντιστοιχοῦν ἴσες ἀπέναντι γωνίες $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$. Ὥστε ἡ εὐθεία ΟΓ διαιρεῖ τὴ γωνία $\widehat{O}$ σὲ δυὸ ἴσα μέρη· εἶναι ἑπομένως διχοτόμος τῆς $\widehat{O}$.

3. Περιπτώσεις ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων. Οἱ τρεῖς περιπτώσεις ἰσότητας τριγώνων, τὶς ὁποῖες μελετήσαμε, ἐφαρμόζονται φυσικὰ καὶ στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἔτσι π.χ. δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὶς πλευρὲς τῆς ὀρθῆς τους γωνίας ἀντίστοιχα ἴσες· γιατὶ τότε ἔχουν δυὸ πλευρὲς ἀντίστοιχα ἴσες καὶ τὴν ἀνάμεσα σ' αὐτὲς ὀρθὴ γωνία ἐπίσης ἴση (2η περίπτωση ἰσότητας τριγώνων).

Γιὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχομε ὅμως καὶ τὶς ἀκόλουθες δυὸ εἰδικὲς περιπτώσεις ἰσότητας.

1η εἰδικὴ περίπτωση ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων. *Ἂν δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα ἴση καὶ μιὰ ἀκόμη πλευρὰ ἴση,* **θὰ εἶναι ἴσα.**



Σχ. 32-γ. Ὑποθέτομε ὅτι $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ὀρθή, ΒΓ = Β′Γ′, ΑΓ = Α′Γ′.

Καὶ ἀλήθεια, ἂς πάρωμε τὸ ἀποτύπωμα τοῦ τριγώνου Α′ Β′ Γ′ (σχ. 32-γ) καί, ἀφοῦ τὸ ἀναστρέψωμε, ἂς τὸ τοποθετήσωμε δίπλα στὸ τρίγωνο ΒΑΓ ἔτσι ποὺ ἡ πλευρά του Α′Γ′ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴση της ΑΓ. Ἐπειδὴ οἱ γωνίες $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{A'}$ εἶναι ὀρθές, ἡ πλευρὰ Α′Β′ θὰ ἔρθη σὲ μιὰ θέση ΑΒ′ ποὺ εἶναι προέκταση τοῦ τμήματος ΒΑ. Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ σχῆμα ΒΑΒ′Γ′ εἶναι τρίγωνο, καὶ μάλιστα ἰσόσκελο, γιατὶ ΒΓ = σύμφωνα μὲ τὴν ὑπόθεσή μας ὅτι οἱ ὑποτείνουσες εἶναι ἴσες. Στὸ τρίγωνο αὐτό, τὸ ΓΑ εἶναι τὸ ὕψος ἀπὸ τὴν κορυφὴ πρὸς τὴ βάση· αὐτὸ εἶναι συγχρόνως καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας στὴν κορυφὴ (Μάθ. 30, § 3). Ἄρα:

$$\text{γων. } \widehat{B\Gamma A} = \text{γων. } \widehat{B'\Gamma A} = \text{γων. } \widehat{B'\Gamma'A'}.$$

Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΒΑΓ καὶ Β′Α′Γ′ ἔχουν δυὸ πλευρὲς ἴσες καὶ τὴ γωνία ἀνάμεσα σ᾽ αὐτὲς ἴση $(\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'})$. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσα.

2η εἰδικὴ περίπτωση ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων. ***Ἂν δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα ἴση καὶ μιὰν ὀξεία γωνία ἴση,*** **θὰ εἶναι ἴσα.**

Ἡ ἀλήθεια αὐτῆς τῆς πρότασης προκύπτει εὔκολα, ἂν χρησιμοποιήσωμε αὐτὸ ποὺ ξέρομε ἀπὸ τὸν Τόμ. Α′, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ 2 ὀρθές. Τωόντι, τὰ δυὸ τρίγωνά μας ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ (σχ. 32-δ) ἂς ἔχουν:

$$\text{ὑποτείν. } ΒΓ = \text{ὑποτείν. } Β'Γ', \ \widehat{Α} = \widehat{Α}' = \text{ὀρθή}, \ \widehat{Β} = \widehat{Β}'.$$

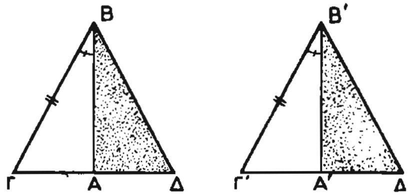
Θὰ ἔχουν τότε καὶ τὶς τρίτες γωνίες $\widehat{Γ}$ καὶ $\widehat{Γ}'$ ἴσες, γιατὶ

$$\widehat{Γ} = 2 \text{ ὀρθὲς} - \widehat{Α} - \widehat{Β} = 2 \text{ ὀρθὲς} - \widehat{Α}' - \widehat{Β}' = \widehat{Γ}'.$$

Ἄρα τὰ δυὸ τρίγωνα, ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄, ἔχουν μιὰ πλευρὰ ἴση, ΒΓ = Β΄Γ΄, καὶ τὶς παρακείμενες σ᾽ αὐτὴν γωνίες ἴσες. Ἑπομένως εἶναι ἴσα (1η περίπτωση ἰσότητας τριγώνων).

Παρατήρηση. Ἂν δὲν θέλωμε νὰ χρησιμοποιήσωμε τὴν ἰσότητα τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου, μποροῦμε νὰ συλλογισθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Παίρνομε τὸ ἀποτύπωμα τοῦ τριγώνου ΓΑΒ καὶ τὸ στρέφομε γύρω στὴν ΑΒ κατὰ 180°. Θὰ ἔρθη τότε σὲ μιὰ θέση ΔΑΒ, δίπλα στὸ ΓΑΒ. Ἐπειδὴ ἡ $\widehat{ΓΑΒ}$ εἶναι ὀρθή, τὸ σχῆμα ΓΑΔΒ εἶναι τρίγωνο, καὶ μάλιστα ἰσοσκελές: ΒΓ = ΒΔ.



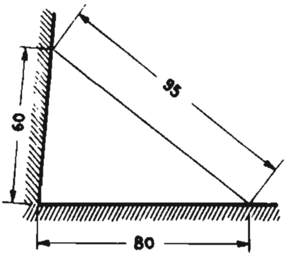
Σχ. 32-δ. Ὑποθέτομε ὅτι $\widehat{Α} = \widehat{Α}' =$ ὀρθή, ΒΓ = Β΄Γ΄, $\widehat{Β} = \widehat{Β}'$.

Τὴν ἴδια ἐργασία κάνομε καὶ μὲ τὸ τρίγωνο Γ΄Α΄Β΄. Ἀποκτοῦμε ἔτσι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο Γ΄Β΄Δ΄. Τὰ δυὸ τρίγωνα ΒΓΔ καὶ Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι ἴσα γιατὶ ἔχουν:

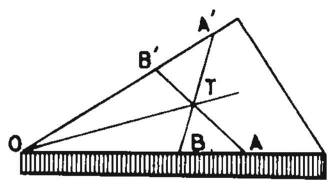
δυὸ πλευρὲς ἀντίστοιχα ἴσες:
ΒΓ = Β΄Γ΄, ΒΔ = Β΄Δ΄, ἐπειδὴ ΒΔ = ΒΓ = Β΄Γ΄ = Β΄Δ΄,
τὴν περιεχόμενη γωνία ἴση: $\widehat{ΓΒΔ} = 2\ \widehat{ΓΒΑ} = 2\ \widehat{Γ'Β'Α'} = \widehat{Γ'Β'Δ'}$.

Ἄρα καὶ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη τους ΒΑ καὶ Β΄Α΄ εἶναι ἴσα. Τὰ δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΒΑ καὶ Γ΄Β΄Α΄ ἔχουν λοιπὸν δυὸ πλευρὲς ἴσες: ΒΓ = Β΄Γ΄ καὶ ΒΑ = Β΄Α΄, καὶ τὴν περιεχόμενη γωνία ἴση: $\widehat{ΓΒΑ} = \widehat{Γ'Β'Α'}$. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσα.

Ἀσκήσεις. *1.* Γιὰ νὰ προσδιορίσετε σχεδιαστικὰ τὴ γωνία ποὺ σχηματίζουν δυὸ τοῖχοι (σχ. 32-ε), παίρνετε, μὲ ἀρχὴ τὴν κορυφὴ τῆς γωνίας στὸ ἔδαφος, ἕνα ὁριζόντιο μῆκος 60 cm πάνω στὸν ἕνα τοῖχο καὶ ἕνα παρόμοιο μῆκος 80 cm πάνω στὸν ἄλλο τοῖχο· ὕστερα μετρᾶτε τὴν ἀπόσταση ἀνάμεσα στὰ πέρατα τῶν δυὸ αὐτῶν μηκῶν, καὶ ἔστω ὅτι βρίσκετε 95 cm. Σχεδιάστε τώρα, σὲ κλίμακα 1/10, ἕνα τρίγωνο ποὺ ἔχει πλευρὲς 60, 80, 95 cm· ἡ γωνία τοῦ τριγώνου ἡ ὁποία ἀντικρύζει τὴν πλευρὰ τῶν 95 cm εἶναι ἡ ζητούμενη γωνία τῶν δυὸ τοίχων. Μπορεῖτε νὰ τὴν μετρήσετε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο πάνω στὸ σχέδιο.



Σχ. 32-ε. Νὰ προσδιορισθῆ ἡ γωνία τῶν δυὸ τοίχων.



Σχ. 32-ϛ. Χάραξη τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας μόνο μὲ τὴ χρήση ἑνὸς κανόνα.

2. Γιὰ νὰ χαράξουν τὴ διχοτόμο μιᾶς γωνίας, χρησιμοποιοῦν κάποτε τὴν ἀκόλουθη μέθοδο (σχ. 32-ϛ):

Πάνω στὶς πλευρὲς τῆς γωνίας $\widehat{O}$ παίρνουν πρῶτα δυὸ μήκη, ὁποιαδήποτε ἀλλὰ ἴσα μεταξύ τους: $OA = OA'$. Ἔπειτα παίρνουν δυὸ ἄλλα μήκη, πάλιν ἴσα μεταξύ τους: $OB = OB'$. Χαράζουν τὰ τμήματα AB' καὶ BA'. Αὐτὰ κόβονται σ' ἕνα σημεῖο T. Ἡ εὐθεία OT εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{O}$.

Δικαιολογῆστε τὴν ὀρθότητα τῆς κατασκευῆς αὐτῆς δείχνοντας διαδοχικὰ ὅτι:

1ο. Τὰ τρίγωνα OAB' καὶ $OA'B$ εἶναι ἴσα (1η περίπτωση ἰσότητας).
2ο. » » TAB » $TA'B'$ » » (2η » »).
3ο. » » OTB » OTB' » » (3η » »).

3. Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο γνωρίζοντας δυὸ πλευρές του $AB = 5$ cm, $A\Gamma = 9$ cm καὶ τὴ διάμεσο $AM = 6$ cm ποὺ τελειώνει στὴν τρίτη πλευρά του. (Ἂν προεκτείνετε τὴ διάμεσο AM κατὰ ἕνα μῆκος MA' ἴσο πρὸς τὸν ἑαυτό της, τὸ μῆκος $\Gamma A'$ θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ BA, γιατὶ τὰ τρίγωνα $M\Gamma A'$ καὶ MBA εἶναι ἴσα (βλ. καὶ Μάθ. 29 § 4). Ἑπομένως στὸ τρίγωνο $A\Gamma A'$ γνωρίζετε τὰ μήκη καὶ τῶν τριῶν πλευρῶν: $A\Gamma = 9$ cm, $\Gamma A' = 5$ cm, $AA' = 2 \times 6$ cm $= 12$ cm, καὶ μπο-

ρεῖτε νὰ τὸ σχεδιάσετε. Ἀπὸ τὸ ΑΓΑ' εἶναι εὔκολο ἔπειτα νὰ καταλήξετε στὸ ζητούμενο).

4. Δυὸ ἀνεμόσκαλες μὲ τὸ ἴδιο μῆκος ἀκουμποῦν σ' ἕναν κατακόρυφο τοῖχο, καὶ τὰ πόδια τους βρίσκονται στὴν ἴδια ἀπόσταση ἀπὸ τὸν τοῖχο. Ἐξηγῆστε γιατί οἱ ἀνεμόσκαλες αὐτές

1ο ἀγγίζουν τὸν τοῖχο σὲ σημεῖα ποὺ ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἔδαφος,

2ο σχηματίζουν μὲ τὸ ὁριζόντιο ἔδαφος ἴσες γωνίες κλίσης.

5. Δεῖξτε ὅτι, ὅταν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσόσκελο, τὰ ὕψη του ποὺ τελειώνουν στὶς δυὸ ἴσες πλευρές, εἶναι μεταξύ τους ἴσα.

Διατυπῶστε καὶ δεῖξτε τὴν ἀντίστροφη πρόταση. (Θὰ βασισθῆτε στὴν 1η εἰδικὴ περίπτωση ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων, γιὰ νὰ βγάλετε πρῶτα τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ τρίγωνο ἔχει δυὸ γωνίες ἴσες.)

6. Δεῖξτε ὅτι τὰ 3 ὕψη ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι ἴσα.

7. Κατασκευάστε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο γνωρίζοντας τὴν ὑποτείνουσά του, 55 mm, καὶ μιὰν ὀξεία γωνία του, 40°. Γιατί ὅλα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε μὲ αὐτὰ τὰ δεδομένα εἶναι μεταξύ τους ἴσα;

8. Κατασκευάστε (χρησιμοποιώντας κανόνα καὶ διαβήτη) ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο γνωρίζοντας τὴν ὑποτείνουσά του, 60 mm, καὶ μίαν πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας, 40 mm. Ἄραγε μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε μὲ αὐτὰ τὰ δεδομένα δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ νὰ μὴν εἶναι ἴσα τὸ ἕνα μὲ τὸ ἄλλο;

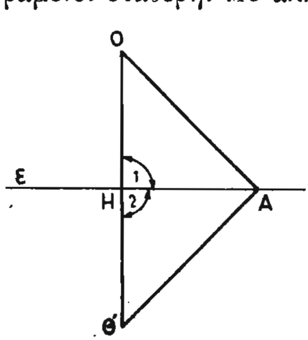
9. Κατασκευάστε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο γνωρίζοντας τὴ βάση του 50 mm, καὶ τὸ ὕψος, 40 mm, ποὺ τελειώνει σὲ μιὰν ἀπὸ τὶς δυὸ ἴσες πλευρές του. Μετρῆστε ἔπειτα αὐτὲς τὶς δυὸ ἴσες πλευρὲς καὶ ἐλέγξτε τὴν κατασκευή σας μ' αὐτὸν τὸν τρόπο.

Μάθημα 33.

Ἀπόσταση σημείου ἀπὸ εὐθεία.

Μιὰ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας.

1. Ἡ ἀπόσταση ἑνὸς (σταθεροῦ) σημείου Ο ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α, ποὺ κινεῖται πάνω σὲ μιὰ εὐθεία ε (σχ. 33-α), δὲν παραμένει σταθερή. Μὲ ἄλλα λόγια, οἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς εὐθείας ε δὲν εἶναι μεταξύ τους ἴσες. Προκύπτει γι' αὐτὸν τὸ λόγο τὸ ἐρώτημα: ἄραγε ἀνάμεσα σ' αὐτὲς τὶς ἀποστάσεις ὑπάρχει κάποια ποὺ νὰ εἶναι ἐλάχιστη, δηλ. μικρότερη ἀπὸ ὅλες τὶς ἄλλες; Τὴν ἀπάντηση σ' αὐτὸ τὸ ἐρώτημα τὴ δίνει ἡ ἀκόλουθη πρόταση.



Σχ. 33-α. Ὑποθέτομε ὅτι τὸ ΟΗ εἶναι κάθετο, τὸ ΟΑ πλάγιο πρὸς τὴν εὐθεία ε.

Πρόταση. *Ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο, ποὺ παίρνομε ἔξω ἀπὸ μιὰ εὐθεία ε, φέρωμε ὡς τὴν εὐθεία ἕνα κάθετο τμῆμα ΟΗ καὶ ἕνα πλάγιο ΟΑ,* **τότε τὸ κάθετο τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ πλάγιο.**

Γιὰ νὰ πεισθοῦμε, ἂς προεκτείνωμε τὸ ΟΗ κατὰ ἕνα μῆκος ΗΟ' ἴσο μὲ ΟΗ καὶ ἂς χαράξωμε τὸ Ο'Α. Τὰ τρίγωνα ΑΗΟ καὶ ΑΗΟ' εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν μιὰ γωνία ἴση $\left(\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = \text{ὀρθὴ γωνία}\right)$ καὶ τὶς δυὸ πλευρὲς ποὺ τὴν περιέχουν ἐπίσης ἴσες (ΑΗ = ΑΗ καὶ ΗΟ = ΗΟ'). Ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα (2η περίπτωση ἰσότητας τριγώνων). Ἑπομένως οἱ τρίτες ἀντίστοιχες πλευρές τους ΑΟ καὶ ΑΟ' εἶναι ἴσες.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ὁ εὐθὺς (ἴσιος) δρόμος ΟΗΟ' εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν τεθλασμένο ΟΑΟ'. Ἀλλὰ ΟΗΟ' = 2 ΟΗ καὶ ΟΑΟ' = 2 ΟΑ. Ἄρα:

$$2\ OH < 2\ OA \text{ καὶ ἑπομένως } OH < OA,$$

ὅπως λέει ἡ πρόταση.

Ἡ παραπάνω πρόταση δικαιολογεῖ τὸν ἀκόλουθο ὁρισμὸ ποὺ δόθηκε στὸν Τόμ. Α', σελ. 97.

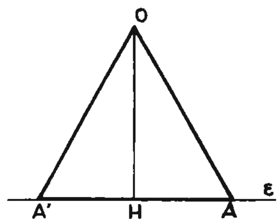
Ἀπόσταση ἑνὸς σημείου ἀπὸ μιὰ εὐθεία (καθὼς καὶ μιᾶς εὐθείας ἀπὸ ἕνα σημεῖο) λέγεται τὸ μῆκος τοῦ κάθετου τμήματος ἀπὸ τὸ σημεῖο ὡς τὴν εὐθεία.

2. Παρατηρήσεις. *1η. Ἂν τὰ πόδια Α καὶ Α' δυὸ πλάγιων τμημάτων ΟΑ καὶ ΟΑ'* (σχ. 33-β) *ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ τὸ πόδι Η τοῦ κάθετου τμήματος,* **τότε τὰ δυὸ πλάγια τμήματα θὰ εἶναι ἴσα.**

('Αληθεύει καὶ τὸ ἀντίστροφο).

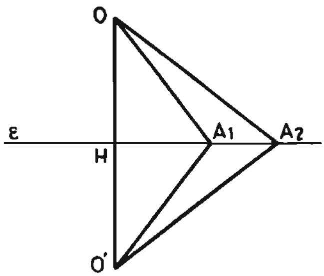
Καὶ ἀλήθεια, ἂν ΗΑ = ΗΑ' τότε ἡ εὐθεία ΗΟ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος Α'Α καί, σύμφωνα μὲ τὴν πρόταση τοῦ Μαθ. 31, § 4, θὰ ἔχωμε ΟΑ = ΟΑ'.

('Αντιστρόφως, ἂν ΟΑ = ΟΑ', τότε, σύμφωνα μὲ τὴν ἀντίστροφη πρόταση τοῦ ἴδιου § 4, τὸ σημεῖο Ο θὰ βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο ΗΟ τοῦ τμήματος Α'Α καὶ θὰ ἔχωμε ΗΑ = ΗΑ').



Σχ. 33-β. Ὑποθέτομε ὅτι ΗΑ = ΗΑ'.

2η. Ἂν τὸ πόδι A_2 τοῦ πλάγιου τμήματος OA_2 (σχ. 33-γ) *ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ πόδι Η τοῦ κάθετου τμήματος ΟΗ περισσότερο παρὰ τὸ πόδι A_1 τοῦ τμήματος OA_1,* **τότε τὸ ΟΑ$_2$ θὰ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ΟΑ$_1$.**



Σχ. 33-γ.

('Αληθεύει καὶ τὸ ἀντίστροφο).

Καὶ ἀλήθεια, ἂς προεκτείνωμε τὸ ΟΗ κατὰ ἕνα τμῆμα ΗΟ' = ΟΗ. Θὰ ἔχωμε τότε

$A_1O = A_1O'$ καὶ $A_2O = A_2O'$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τὸ τρίγωνο $OO'A_1$ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου $OO'A_2$· ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ δεύτερου εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν περίμετρο τοῦ πρώτου τριγώνου, δηλαδή:

$$OO'+O'A_2+A_2O=OO'+2\,OA_2 > OO'+O'A_1+A_1O = OO'+2\,OA_1.$$

Ἑπομένως:

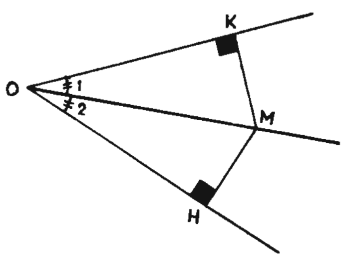
$$2\,OA_2 > 2\,OA_1 \quad \text{καὶ} \quad OA_2 > OA_1.$$

3. Ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου ἀπὸ τὶς πλευρὲς μιᾶς γωνίας.

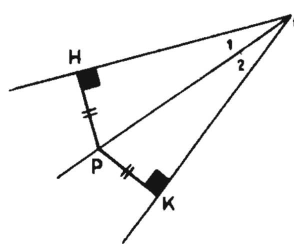
Πρόταση. *Ἂν ἕνα σημεῖο βρίσκεται πάνω στὴ διχοτόμο μιᾶς γωνίας*, **τότε οἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὶς δυὸ πλευρὲς τῆς γωνίας θὰ εἶναι ἴσες** (σχ. 33-δ).

Ἄς χαράξωμε ἀπὸ τὸ σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου ὡς τὶς 2 πλευρὲς τῆς γωνίας $\widehat{O}$ τὰ δυὸ κάθετα πρὸς αὐτὲς τμήματα ΜΗ καὶ ΜΚ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΗΜ καὶ ΟΚΜ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα ΟΜ κοινὴ καὶ μιὰν ὀξεία γωνία ἴση $\left(\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2\right)$. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσα (2η εἰδικὴ περίπτωση ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων). Στὶς ἴσες γωνίες $\widehat{O}_1$ καὶ $\widehat{O}_2$ ἀντιστοιχοῦν ἑπομένως ἴσες ἀπέναντι πλευρές, δηλ. ΜΗ = ΜΚ, ὅπως εἴχαμε νὰ δείξωμε.

Ἀντίστροφη πρόταση. *Ἂν ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται*



Σχ. 33-δ. Ὑποθέτομε ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{O}$.



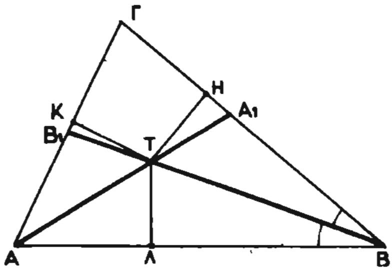
Σχ. 33-ε. Ὑποθέτομε ὅτι τὸ Ρ ἔχει ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς $\widehat{O}$.

στὸ ἐσωτερικὸ μιᾶς γωνίας, ἔχῃ ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὶς δυὸ πλευρὲς τῆς γωνίας, **τότε θὰ βρίσκεται πάνω στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας** (σχ. 33-ε).

Καὶ ἀλήθεια, ἔστω Ρ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς γωνίας $\widehat{O}$, ἰσαπόστατο ἀπὸ τὶς πλευρές της. Χαράζομε τὸ ΟΡ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΗΡ καὶ ΟΚΡ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα ΟΡ κοινὴ καὶ μιὰ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴση (ΡΗ = ΡΚ). Ἄρα εἶναι ἴσα (1η περίπτωση ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων). Στὶς ἴσες πλευρὲς ΡΗ καὶ ΡΚ ἀντιστοιχοῦν ἴσες ἀπέναντι γωνίες: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$. Ἑπομένως τὸ Ρ βρίσκεται πάνω στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας, ὅπως εἴχαμε νὰ δείξωμε.

4. **Ἐφαρμογή.** *Οἱ τρεῖς (ἐσωτερικὲς) διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου περνοῦν ἀπὸ ἕνα καὶ τὸ ἴδιο σημεῖο.* (Παράβαλε Τόμ. Α΄, Μάθ. 25).

Ἂς χαράξωμε, ἀλήθεια, πρῶτα τὶς διχοτόμους $ΑΑ_1$ καὶ $ΒΒ_1$ τῶν δυὸ γωνιῶν $\widehat{Α}$ καὶ $\widehat{Β}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 33-ϛ). Οἱ διχοτόμοι αὐτὲς κόβονται σὲ κάποιο σημεῖο Τ στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου (γιατὶ π.χ. τὰ σημεῖα Α καὶ $Α_1$ βρίσκονται ἀπὸ διαφορετικὲς μεριὲς τῆς διχοτόμου $ΒΒ_1$).



Σχ. 33-ϛ. Οἱ 3 διχοτόμοι ἑνὸς τριγώνου ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο.

Οἱ ἀποστάσεις ΤΛ καὶ ΤΚ τοῦ Τ ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ εἶναι ἴσες, ἐπειδὴ τὸ Τ βρίσκεται πάνω στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{Α}$: ΤΛ = ΤΚ.

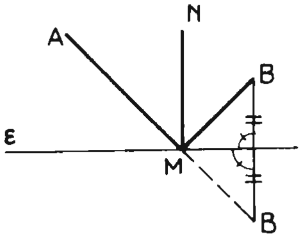
Οἱ ἀποστάσεις ΤΛ καὶ ΤΗ τοῦ Τ ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας $\widehat{Β}$ εἶναι ἴσες, ἐπειδὴ τὸ Τ βρίσκεται πάνω στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{Β}$: ΤΛ = ΤΗ.

Ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς ἰσότητες προκύπτει ἡ ἰσότητα: ΤΚ = ΤΗ. Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ Τ ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας $\widehat{Γ}$. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὴν ἀντίστροφη πρόταση τοῦ § 3, τὸ Τ θὰ βρίσκεται πάνω στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{Γ}$. Ἑπομένως, ἡ τρίτη διχοτόμος τοῦ τριγώνου περνᾶ ἀπὸ τὸ κοινὸ σημεῖο τῶν δυὸ ἄλλων, ὅπως ἔπρεπε νὰ δείξωμε.

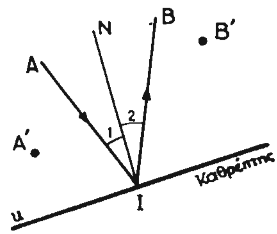
Παρατήρηση. Ἀφοῦ ΤΗ = ΤΚ = ΤΛ τὸ σημεῖο Τ ἔχει ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὶς 3 πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἑπομένως ὁ κύκλος, μὲ κέντρο τὸ T καὶ ἀκτίνα τὴν ἀπόσταση τοῦ T ἀπὸ μιὰ πλευρά, θὰ ἔχῃ ἐπαφὴ ὄχι μόνο μὲ αὐτὴ τὴν πλευρὰ ἀλλὰ καὶ μὲ τὶς δυὸ ἄλλες πλευρὲς τοῦ τριγώνου. Μὲ ἄλλα λόγια: *τὸ κοινὸ σημεῖο τῶν 3 (ἐσωτερικῶν) διχοτόμων ἑνὸς τριγώνου εἶναι τὸ κέντρο ἑνὸς κύκλου ἐσωγραμμένου στὸ τρίγωνο.*

Ἀσκήσεις 1. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο M τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας $\widehat{O}$ χαράζομε τὴν κάθετο πρὸς τὴ διχοτόμο. Ἡ εὐθεία αὐτὴ κόβει τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας σὲ δυὸ σημεῖα· ἂς τὰ παραστήσωμε μὲ A καὶ B. Δεῖξτε ὅτι τὸ M εἶναι τὸ μέσο τοῦ τμήματος AB καὶ ὅτι OA = OB. (Θὰ δείξετε ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OMA καὶ OMB εἶναι ἴσα.)

2. Δεῖξτε ὅτι ὁ δρόμος μὲ τὸ μικρότερο μῆκος τὸν ὁποῖο μπορεῖ ν' ἀκολουθήσῃ κανεὶς γιὰ νὰ πάῃ ἀπὸ τὸ σημεῖο A στὸ σημεῖο B (σχ. 33-ζ) ἀγγίζοντας τὴν εὐθεία ε, εἶναι ὁ (τεθλασμένος) AMB ποὺ εἶναι χαραγμένος στὸ σχῆμα 33-ζ καὶ ποὺ προσδιορίζεται ἀπὸ ὅσα σημειώνονται στὸ σχῆμα αὐτό. Δεῖξτε ἀκόμα ὅτι $\widehat{AMN} = \widehat{BMN}$, ὅπου MN εἶναι ἡ κάθετος στὴν εὐθεία ε στὸ σημεῖο M.



Σχ. 33-ζ.



Σχ. 33-η.

3. Ὁ δρόμος μιᾶς «φωτεινῆς ἀκτίνας», ποὺ παθαίνει «ἀνάκλαση» στὸν καθρέπτη κ (σχ. 33-η), ἀπαρτίζεται ἀπὸ δυὸ εὐθύγραμμα τμήματα AI καὶ IB τέτοια, ὥστε οἱ γωνίες $\widehat{I}_1$ καὶ $\widehat{I}_2$ τὶς ὁποῖες τὰ τμήματα αὐτὰ σχηματίζουν μὲ τὴν κάθετο IN στὸν καθρέπτη, νὰ εἶναι ἴσες.

Χρησιμοποιῆστε αὐτὴν τὴν ἰδιότητα καθὼς καὶ τὴν προηγούμενη ἄσκηση γιὰ νὰ προσδιορίσετε, πάνω στὸν καθρέπτη κ, τὸ σημεῖο I ὅπου γίνεται ἡ ἀνάκλαση τῆς φωτεινῆς ἀκτίνας, ὅταν εἶναι δοσμένες πάνω στὸ χαρτί σας οἱ θέσεις τοῦ καθρέπτη κ καὶ τῶν δυὸ σημείων A′ καὶ B′, ἀπὸ τὰ ὁποῖα περνᾶ ἡ ἀκτίνα πρὶν καὶ ἀφοῦ ἀνακλασθῇ.

4. Μιὰ εὐθεία δ, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ μέσο Μ ἑνὸς τμήματος ΑΒ, στρέφεται γύρω στὸ σημεῖο Μ. Δεῖξτε ὅτι οἱ δυὸ ἀποστάσεις τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπὸ τὴν εὐθεία δ εἶναι πάντα ἴσες, ὁποια καὶ ἂν εἶναι ἡ θέση τῆς εὐθείας αὐτῆς.

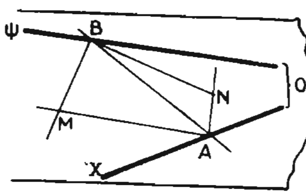
5. Χαράξτε τὶς διχοτόμους ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 33-ς) καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Τ τῆς τομῆς τους φέρτε τὶς καθέτους πρὸς τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου : τὴν ΤΗ κάθετη στὴ ΒΓ, τὴν ΤΚ κάθετη στὴ ΓΑ καὶ τὴν ΤΛ στὴν ΑΒ.

1ο. Δεῖξτε ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι κάθετη στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$, ἡ ΚΛ κάθετη στὴ διχοτόμο τῆς $\widehat{A}$ καὶ ἡ ΛΗ στὴ διχοτόμο τῆς $\widehat{B}$.

2ο. Ποιὲς εἶναι οἱ μεσοκάθετοι τοῦ τριγώνου ΗΚΛ ;

3ο. Ποιὸ σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ 3 σημεῖα Η, Κ, Λ, ;

6. Δικαιολογῆστε τὴν ἀκόλουθη χάραξη τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$, ποὺ ἡ κορυφή της Ο πέφτει ἔξω ἀπὸ τὸ χαρτὶ (ἢ τὴν πινακίδα) σας (σχ. 33-θ).



Σχ. 33-θ. Χάραξη τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας.

1ο. Τραβᾶτε πρῶτα μιὰν εὐθεία ποὺ νὰ κόβῃ τὶς δυὸ πλευρὲς τῆς γωνίας, ἔστω στὰ σημεῖα Α καὶ Β.

2ο. Χαράζετε ἔπειτα τὶς διχοτόμους τῶν δυὸ γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται στὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀπὸ τὴ μιὰ μεριὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Οἱ δυὸ αὐτὲς διχοτόμοι τέμνονται, ἔστω στὸ σημεῖο Μ. Χαράζετε καὶ τὶς διχοτόμους τῶν δυὸ γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται στὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριὰ τῆς εὐθείας ΑΒ· ἔστω Ν τὸ σημεῖο τῆς τομῆς τους.

3ο. Τέλος χαράζετε τὴν εὐθεία ΜΝ. Ἡ εὐθεία αὐτὴ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$. (Θὰ δείξετε ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἰσαπέχουν ἀπὸ τὶς εὐθεῖες ΟΧ καὶ ΟΨ).

7. Προεκτείνετε τὴν πλευρὰ ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ κατὰ κάποιο τμῆμα ΒΧ καὶ τὴν πλευρὰ ΑΓ κατὰ κάποιο τμῆμα ΓΨ. Ὕστερα χαράζετε τὶς διχοτόμους τῶν τριῶν γωνιῶν $B\widehat{A}\Gamma$, $X\widehat{B}\Gamma$ καὶ $\Psi\widehat{\Gamma}B$. (Ἀπὸ τὶς διχοτόμους αὐτὲς ἡ πρώτη εἶναι ἐσωτερική, οἱ δυὸ ἄλλες ἐξωτερικὲς διχοτόμοι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.) Νὰ δείξετε τώρα ὅτι οἱ 3 αὐτὲς διχοτόμοι περνοῦν ἀπὸ ἕνα καὶ τὸ ἴδιο σημεῖο. (Θὰ ἀκολουθήσετε τὴ μέθοδο τοῦ § 4).

8. Χρησιμοποιῆστε τὴν πρόταση τοῦ § 4 καθὼς καὶ τὴν προηγούμενη ἄσκηση γιὰ τὸ ἀκόλουθο ζήτημα: Σᾶς δίνουν μέσα στὸ ἐπίπεδο τρεῖς εὐθεῖες ποὺ κόβονται δυὸ-δυὸ σὲ 3 σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ χαρτιοῦ σας. Νὰ δείξετε μὲ γεωμετρικὴ κατασκευὴ ὅτι ὑπάρχουν 4 σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ποὺ τὸ καθένα τους ἰσαπέχει ἀπὸ τὶς 3 εὐθεῖες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ. ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Μάθημα 34.

Παράλληλες εὐθεῖες. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου.

1. Λέγοντας «εὐθεία» ἂς συμφωνήσωμε νὰ ἐννοοῦμε ἕνα κομμάτι εὐθείας μαζὶ μὲ τὶς *δυὸ ἀπέραντες προεκτάσεις του* πέρα ἀπὸ τὰ δυὸ ἄκρα του. Μποροῦμε τότε νὰ διατυπώσωμε τὸν ὁρισμὸ τῶν παράλληλων εὐθειῶν ὡς ἑξῆς:

Δυὸ εὐθεῖες λέγονται παράλληλες ὅταν βρίσκωνται μέσα σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο καὶ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο.

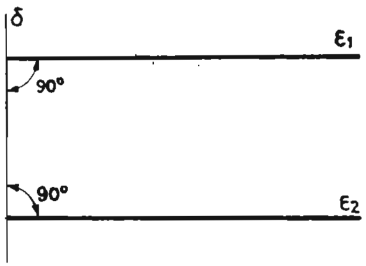
Μέσα σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο ἂς χαράξωμε δυὸ εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 κάθετες σὲ μιὰν καὶ τὴν ἴδια εὐθεία δ (σχ. 34-α). Οἱ εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 δὲν μποροῦν νὰ ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο. Καὶ ἀλήθεια, ἂν εἶχαν κάποιο κοινὸ σημεῖο Α, τότε θὰ ὑπῆρχαν δυὸ διαφορετικὲς κάθετοι, οἱ ε_1 καὶ ἡ ε_2, ἀπὸ τὸ σημεῖο Α πρὸς τὴν εὐθεία δ· αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατο (Μάθ. 30, Ἄσκ. 1). Ἄρα οἱ εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες, πράγμα ποὺ συμβολίζομε ἔτσι: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Ὥστε, ἂν δυὸ εὐθεῖες ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι κάθετες σὲ μιὰν καὶ τὴν ἴδια εὐθεία, τότε θὰ εἶναι παράλληλες.

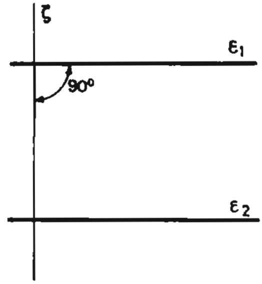
Στὴ Γεωμετρία ποὺ μελετοῦμε καὶ ποὺ χρησιμοποιοῦμε στὴν τέχνη παραδεχόμαστε ὅτι ἀληθεύει καὶ τὸ ἀντίστροφο:

Ἂν δυὸ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες καὶ μιὰ εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου τους εἶναι κάθετη στὴ μιά, τότε θὰ εἶναι κάθετη καὶ στὴν ἄλλη.

Π.χ. ἂν οἱ εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες (σχ. 34-β) καὶ ἡ εὐθεία ζ εἶναι κάθετη στὴν ε_1, τότε θὰ εἶναι κάθετη καὶ στὴν ε_2.



Σχ. 34-α. Οἱ εὐθεῖες $ε_1$ καὶ $ε_2$ εἶναι κάθετες πρὸς τὴν εὐθεία δ.

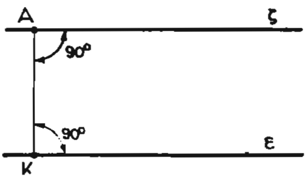


Σχ. 34-β. Οἱ $ε_1$ καὶ $ε_2$ εἶναι παράλληλες καὶ ἡ ζ εἶναι κάθετη στὴν $ε_1$.

2. Νὰ τώρα δυὸ σπουδαῖα συμπεράσματα ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω.

1ο. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α ἐξωτερικὸ σὲ μιὰν εὐθεία ε μποροῦμε νὰ χαράξωμε μόνο μία παράλληλο πρὸς τὴν ε.

Καὶ ἀλήθεια, μέσα στὸ ἐπίπεδο ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν εὐθεία ε καὶ τὸ σημεῖο Α (σχ. 34-γ), μόνο μία κάθετος ΑΚ ὑπάρχει ἀπὸ τὸ Α στὴν ε καὶ ἀπὸ τὸ Α πάλι μόνο μία κάθετος ζ ὑπάρχει στὴν εὐθεία ΑΚ. Αὐτὴ ἡ ἐντελῶς ὁρισμένη εὐθεία ζ εἶναι ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ε ἀπὸ τὸ Α.

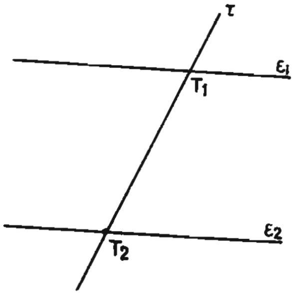


Σχ. 34-γ. Μία εἶναι ἡ παράλληλος ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὴν ε.

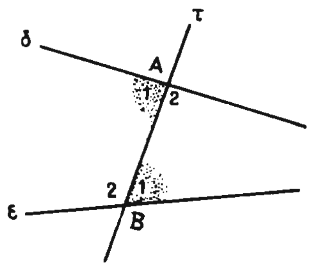
2ο. Ἂν δυὸ εὐθεῖες $ε_1$ καὶ $ε_2$ εἶναι παράλληλες, τότε κάθε εὐθεία τ τοῦ ἐπιπέδου τους ἡ ὁποία κόβει τὴ μιά τους θὰ κόβη καὶ τὴν ἄλλη.

Ἂς κόβη, ἀλήθεια, ἡ εὐθεία τ τὴν $ε_1$ στὸ σημεῖο $Τ_1$ (σχ. 34-δ). Ἂν ἡ τ δὲν εἶχε κανένα κοινὸ σημεῖο μὲ τὴν $ε_2$, θὰ τῆς ἦταν παράλληλη καὶ θὰ εἴχαμε δυὸ διαφορετικὲς παραλλήλους πρὸς τὴν $ε_2$ ἀπὸ τὸ σημεῖο $Τ_1$, τὴν $ε_1$ καὶ τὴν τ. Αὐτὸ ὅμως ἀποκλείεται σύμφωνα μὲ τὸ συμπέρασμα 1ο. Ἄρα ἡ τ πρέπει νὰ συναντᾶ τὴν $ε_2$ καὶ ἑπομένως νὰ τὴν κόβη σὲ κάποιο σημεῖο $Τ_2$.

3. Ὅταν δυὸ εὐθεῖες δ καὶ ε (σχ. 34-ε) κόβονται ἀπὸ μιὰν τρίτη τ στὰ σημεῖα Α καὶ Β, τότε σχηματίζονται γύρω στὰ 2 σημεῖα Α καὶ Β 8 γωνίες. Ἀπὸ αὐτές, οἱ δυὸ γωνίες $\widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{B}_1$, (καθὼς καὶ οἱ δυὸ $\widehat{A}_2$ καὶ $\widehat{B}_2$) λέγονται *ἐντὸς ἐναλλάξ*, γιατὶ τὰ σημεῖά τους, τὰ γειτονικὰ μὲ τὶς κορυφές τους, βρίσκονται με-



Σχ. 34-δ.

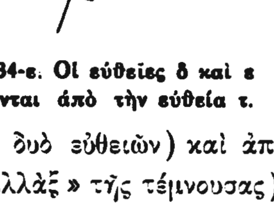


Σχ. 34-ε. Οἱ εὐθεῖες δ καὶ ε κόβονται ἀπὸ τὴν εὐθεία τ.

ταξὺ τῶν εὐθειῶν δ καὶ ε («ἐντὸς» τῶν δυὸ εὐθειῶν) καὶ ἀπὸ διαφορετικὲς μεριὲς τῆς τέμνουσας τ («ἐναλλὰξ» τῆς τέμνουσας).

Πρόταση Ι. *Ἂν δυὸ παράλληλες εὐθεῖες δ καὶ ε κόβονται ἀπὸ μιὰν τρίτη τ,* **τότε κάθε ζευγάρι ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν ἀπαρτίζεται ἀπὸ δυὸ ἴσες γωνίες** (σχ. 34-ς).

Γιὰ νὰ πεισθοῦμε ὅτι οἱ δυὸ ὀξεῖες ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες $\widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{B}_1$ εἶναι ἴσες φέρνομε ἀπὸ τὸ μέσο Μ τοῦ τμήματος ΑΒ τὴν κάθετο ΚΜΛ πρὸς τὶς παράλληλες εὐθεῖες δ καὶ ε. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΚΑ καὶ ΜΛΒ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα ἴση (ΜΑ = ΜΒ) καὶ μιὰν ὀξεία γωνία ἴση (ἡ $\widehat{AMK}$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντικόρυφή της $\widehat{BM\Lambda}$)· ἄρα εἶναι ἴσα. Ἑπομένως οἱ γωνίες τους $\widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{B}_1$ εἶναι ἴσες.



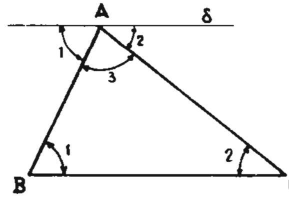
Σχ. 34-ς.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ ἕπεται ἡ ἰσότητα τῶν δυὸ ἄλλων ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν $\widehat{A}_2$ καὶ $\widehat{B}_2$, ποὺ εἶναι ἀμβλεῖες καὶ ἴσες μὲ τὰ παραπληρώματα τῶν $\widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{B}_1$:

$$\widehat{A}_2 = 180^\circ - \widehat{A}_1 = 180^\circ - \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2.$$

4. Πρόταση ΙΙ. *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ δυὸ ὀρθές, δηλ. μὲ 180°.*

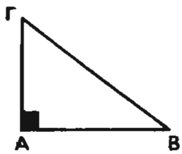
Γιὰ νὰ τὸ δείξωμε μ' ἕνα συλλογισμὸ (καὶ ὄχι μὲ τὴ μέθοδο τῶν μετρήσεων τὴν ὁποία χρησιμοποιήσαμε στὸν Τόμ. Α', Μάθ. 25), χαράζομε ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὴν παράλληλο δ πρὸς τὴν εὐθεία ΒΓ (σχ. 34-ζ). Οἱ γωνίες $\widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{B}_1$ εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν δυὸ παραλλήλων ΒΓ καὶ δ ποὺ τὶς κόβει ἡ εὐθεία ΑΒ, ἄρα εἶναι ἴσες: $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$. Ὅμοια, οἱ γωνίες $\widehat{A}_2$ καὶ $\widehat{\Gamma}_2$ εἶναι ἴσες, $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma}_2$, γιατὶ εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ δ, ποὺ τὶς κόβει ἡ εὐθεία ΑΓ. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα $\widehat{B}_1 + \widehat{\Gamma}_2 + \widehat{A}_3$ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3$· αὐτὸ ὅμως εἶναι ἴσο μὲ μιὰν ἀποπλατυσμένη (ἁπλωτὴ) γωνία, δηλαδὴ μὲ 180°.



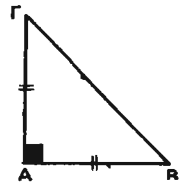
Σχ. 34-ζ.

5. Ἄμεσες συνέπειες τῆς παραπάνω πρότασης εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

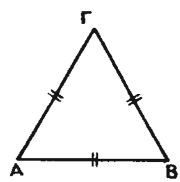
Ι. Οἱ δυὸ ὀξεῖες γωνίες ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ἔχουν



Σχ. 34-η.
Ὀρθογώνιο τρίγωνο.
$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} + 90° = 180°$,
ἄρα $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90°$



Σχ. 34-θ.
Ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιο τρίγωνο.
$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90°$, $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$,
ἄρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 45°$.



Σχ. 34-ι.
Ἰσόπλευρο τρίγωνο.
$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$,
$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$,
ἄρα $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60°$.

ἄθροισμα μίαν ὀρθὴ (90°), μὲ ἄλλα λόγια: οἱ δυὸ ὀξεῖες γωνίες ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικές (σχ. 34-η).

ΙΙ. Ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ γωνίες στὴ βάση ἑνὸς ἰσοσκελοῦς ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ 45^0 (σχ. 34-θ).

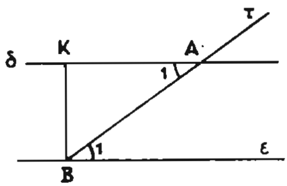
ΙΙΙ. Ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 3 γωνίες ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ 60^0.

6. Πρόταση ΙΙΙ. *Ἂν δυὸ εὐθεῖες δ καὶ ε σχηματίζουν μὲ μιὰ τέμνουσα τ δυὸ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες, τότε οἱ εὐθεῖες δ καὶ ε εἶναι παράλληλες.*

Καὶ ἀλήθεια, ἂς εἶναι ἴσες οἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ ὀξεῖες γωνίες $\widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{B}_1$ (σχ. 34-ια). Ἀπὸ τὸ σημεῖο Β φέρνομε τὴν κάθετο ΒΚ πρὸς τὴν εὐθεία δ. Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ ἔχομε $\widehat{A}_1 + \widehat{ABK} = 90^0$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{B}_1 + \widehat{ABK} = 90^0,$$

μὲ ἄλλα λόγια ἡ ε θὰ εἶναι κάθετη πρὸς τὴν εὐθεία ΒΚ. Στὴν εὐθεία ΒΚ εἶναι ὅμως κάθετη καὶ ἡ δ. Ἑπομένως οἱ εὐθεῖες δ καὶ ε θὰ εἶναι παράλληλες (σύμφωνα μὲ ἐκεῖνα ποὺ εἴπαμε στὸν § 1).

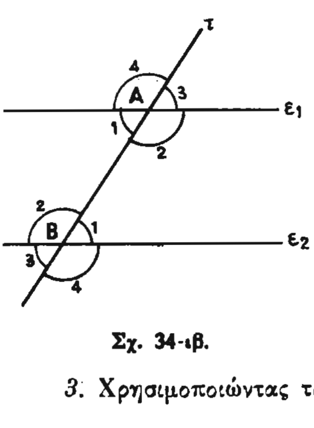


Σχ. 34-ια. Οἱ εὐθεῖες δ καὶ ε σχηματίζουν μὲ τὴν τ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες.

Ἀσκήσεις. 1. Ἂς εἶναι οἱ εὐθεῖες $ε_1$ καὶ $ε_2$ παράλληλες (σχ. 34-ιβ) καὶ ἡ εὐθεία τ ἂς τὶς κόβῃ στὰ σημεῖα Α καὶ Β. Δεῖξτε ὅτι

$$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{B}_4 = \widehat{A}_4$$

καθὼς καὶ ὅτι $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 180^0$.



Σχ. 34-ιβ.

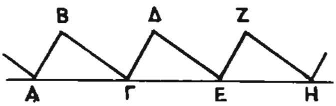
2. Τὸ σχῆμα 34-ιγ παριστάνει τὴν τομὴ ἑνὸς ζευκτοῦ στέγης. Ἡ τομὴ αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσα μέρη:

τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΓΔΕ = τρίγ. ΕΖΗ.

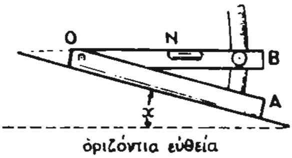
Νὰ δείξετε ὅτι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E} = \widehat{\Delta EZ} = \widehat{EZH}$, καὶ ἑπομένως ὅτι τὰ κομμάτια ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ εἶναι μεταξύ τους παράλληλα, ἐπίσης τὰ ΒΓ, ΔΕ, ΖΗ.

3. Χρησιμοποιώντας τὸ ἀλφάδι μὲ τὴ φυσαλίδα Ν (σχ. 34-ιδ)

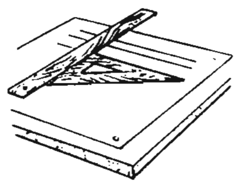
φέρνετε τὸ στέλεχος ΟΒ τοῦ χωροβάτη σὲ ὁριζόντια θέση. Σὲ ποιὸ μέρος τοῦ χωροβάτη θὰ διαβάσετε τὴ γωνία x καὶ γιατί;



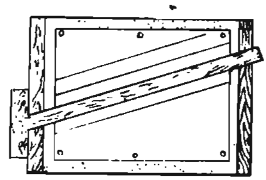
Σχ. 34-ιγ.
Τομὴ ἑνὸς ζευκτοῦ στέγης.



Σχ. 34-ιδ.
Χωροβάτης μὲ ἀλφάδι.



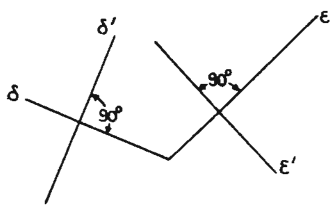
Σχ. 34-ιε Χρησιμοποιώντας κανόνα καὶ ὀρθόγωνο (τρίγωνο) χαράζετε παράλληλες εὐθεῖες



Σχ. 34-ις. Χρησιμοποιώντας ταῦ χαράζετε παράλληλες εὐθεῖες.

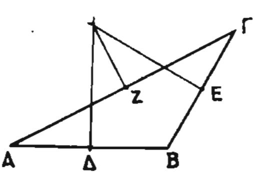
Σχ. 34-ιζ. Χρησιμοποιώντας γωνιὰ ξυλουργοῦ χαράζετε παράλληλες εὐθεῖες.

4. Δικαιολογῆστε τὸν τρόπο τῆς χάραξης παράλληλων εὐθειῶν τὸν ὁποῖο ὑποδείχνουν τὰ σχήματα 34-ιε, 34-ις, 34-ιζ.



Σχ. 34-ιη.

5. Δεῖξτε τὸ ἑξῆς: ἂν δυὸ εὐθεῖες δ καὶ ε (σχ. 34-ιη) δὲν εἶναι παράλληλες, τότε καὶ οἱ εὐθεῖες ε΄ καὶ δ΄, ποὺ εἶναι ἀντίστοιχα κάθετες σ' αὐτές, δὲν θὰ εἶναι παράλληλες. Ἀπ' αὐτὸ νὰ βγάλετε τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα: οἱ 3 μεσοκάθετοι ἑνὸς τριγώνου (σχ. 34-ιθ) εἶναι εὐθεῖες ποὺ κόβονται δυὸ - δυό.



Σχ. 34-ιθ.

6. Βασιζόμενοι στὴν προηγούμενη ἄσκηση καὶ στὸ Μάθημα 30, § 4, δεῖξτε ὅτι οἱ 3 μεσοκάθετοι ἑνὸς τριγώνου (σχ. 34-ιθ) ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο ποὺ ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὶς 3 κορυφὲς τοῦ τριγώνου. Τὸ σημεῖο αὐτὸ εἶναι λοιπὸν κέντρο μιᾶς περιφέρειας ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὶς 3 κορυφὲς τοῦ τριγώνου.

7. Κατασκευάστε (δηλ. σχεδιάστε μὲ κανόνα καὶ διαβήτη) γωνίες μὲ τὰ ἀκόλουθα μεγέθη:

$60°, 30°, \ 15°, \ 75° = 60° + 15°, \ 105° = 90° +$
$15°, \ 150° = 180° - 30°, \ 165° = 180° - 15°.$

8. Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζοντας ὅτι ΒΓ $= 50$ mm, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 15°$ καὶ $\widehat{A} = 75°$. (Θὰ χρησιμοποιήσετε τὴ σχέση $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180° - \widehat{A} = 180° - 75° = 105°$ γιὰ νὰ ὑπολογίσετε πρῶτα τὶς γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$).

9. Ὑπολογίστε τὶς ὀξεῖες γωνίες ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου γνωρίζοντας ὅτι ἡ διαφορά τους εἶναι ἴση μὲ $20°$.

10. Δεῖξτε ὅτι, ἂν σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ ὑποτείνουσα καὶ μιὰ κάθετη πλευρὰ σχηματίζουν γωνία $60°$ (μοιρῶν), τότε ἡ κάθετη αὐτὴ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς ὑποτείνουσας.

(Γιὰ νὰ τὸ πετύχετε, μπορεῖτε ν' ἀκολουθήσετε τὴν ἑξῆς πορεία: 1ο. Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ μὲ $\widehat{B} = 60°$ καὶ $\widehat{A} = 90°$. 2ο. Πάρτε πάνω στὴν ὑποτείνουσα ΒΓ ἕνα μῆκος ΒΜ ἴσο μὲ ΒΑ. 3ο. Δεῖξτε ὅτι τὸ τρίγωνο ΒΑΜ εἶναι ἰσόπλευρο. 4ο. Δεῖξτε ὅτι τὸ τρίγωνο ΑΓΜ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ βάση τὴν ΑΓ).

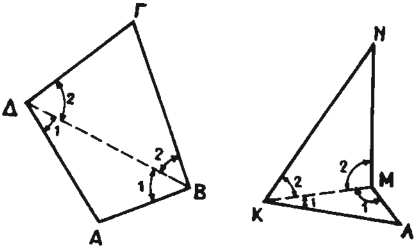
Μάθημα 35.

Τετράπλευρα.

Παραλληλόγραμμα. Ὀρθογώνια. Ρόμβοι. Τετράγωνα.

1. Τετράπλευρα. Ὑπενθυμίζομε ἀπὸ τὸν Τόμ. Α΄ ὅτι *τετράπλευρα* λέγονται τὰ πολύγωνα ποὺ ἔχουν 4 πλευρές. Εἶναι δυὸ εἰδῶν: *κυρτά*, ὅπως τὸ ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος 35-α, ὅταν ἔχουν ὅλες τὶς γωνίες τους μικρότερες ἀπὸ 180°, καὶ *ὄχι κυρτὰ (κοῖλα)*, ὅπως τὸ ΚΛΜΝ τοῦ σχήματος 35-α, ὅταν ἔχουν μιὰ γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ 180° (τὴ γωνία $\widehat{M}$ στὸ σχ. 35-α).

Στὰ δυὸ τετράπλευρα τοῦ σχήματος 35-α εἶναι χαραγμένες καὶ δυὸ *διαγώνιοι*, ΔΒ καὶ ΚΜ. Αὐτὲς τὰ χωρίζουν σὲ τρίγωνα: ΔΑΒ καὶ ΔΒΓ, ΚΛΜ καὶ ΚΜΝ. Γιὰ τὶς γωνίες αὐτῶν τῶν τριγώνων ξέρομε ὅτι:



Σχ. 35-α.

$$\widehat{A}+\widehat{B}_1+\widehat{\Delta}_1=180°,$$
$$\widehat{\Gamma}+\widehat{B}_2+\widehat{\Delta}_2=180°$$

καθὼς καί:

$$\widehat{\Lambda}+\widehat{M}_1+\widehat{K}_1=180°, \qquad \widehat{N}+\widehat{M}_2+\widehat{K}_2=180°.$$

Προσθέτοντας βρίσκομε:

$$\widehat{A}+\widehat{B}_1+\widehat{B}_2+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}_1+\widehat{\Delta}_2=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}=360°.$$

καθὼς καί:

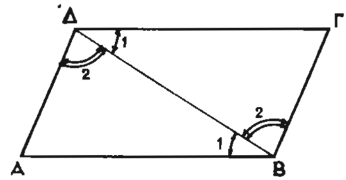
$$\widehat{\Lambda}+\widehat{M}_1+\widehat{M}_2+\widehat{N}+\widehat{K}_1+\widehat{K}_2=\widehat{\Lambda}+\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{K}=360°.$$

Ὥστε, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου (κυρτοῦ ἢ ὄχι) εἶναι ἴσο μὲ 4 ὀρθὲς (360°).

Παρακάτω θ' ἀσχοληθοῦμε μόνο μὲ κυρτὰ τετράπλευρα καὶ θὰ μελετήσωμε μερικὲς χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες τῶν τετραπλεύρων ποὺ γνωρίσαμε στὸν Τόμ. Α΄.

2. Παραλληλόγραμμο. Ὅπως ξέρομε, ἕνα τετράπλευρο λέγεται *παραλληλόγραμμο*, ὅταν κάθε δυὸ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες. Π. χ. τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 35-β) εἶναι παραλληλόγραμμο, ἂν ΑΒ ∥ ΔΓ καὶ ΒΓ ∥ ΑΔ.

Ἂς χαράξωμε τὴ διαγώνιο ΒΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 35-β). Οἱ γωνίες $\widehat{\Delta_1}$ καὶ $\widehat{B_1}$ εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ μὲ τέμνουσα τὴ ΔΒ, ἄρα $\widehat{\Delta_1} = \widehat{B_1}$. Οἱ γωνίες $\widehat{\Delta_2}$ καὶ $\widehat{B_2}$ εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ μὲ τέμνουσα τὴ ΔΒ, ἄρα $\widehat{\Delta_2} = \widehat{B_2}$. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΔΒ εἶναι ἴσα (1η περίπτωση ἰσότητας τριγώνων) καὶ κατὰ συνέπεια θὰ ἔχωμε:



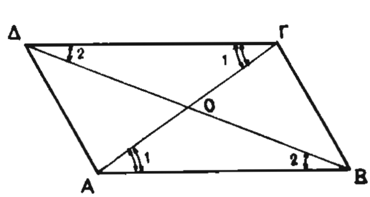
Σχ. 35-β.
ΑΒ ∥ ΔΓ, ΑΔ ∥ ΒΓ.

$$AB = \Gamma\Delta, \quad A\Delta = \Gamma B, \quad \widehat{A} = \widehat{\Gamma},$$

$$\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{B}.$$

Ὥστε, *ἂν ἕνα τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο*, **τότε κάθε δυὸ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες, ἐπίσης κάθε δυὸ ἀπέναντι γωνίες του.**

Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ εἶναι καὶ χαρακτηριστική, δηλαδὴ ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο κάθε δύο ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες (ἢ ἂν κάθε δύο ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες), τότε τὸ τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο.



Σχ. 35-γ. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.

3. Μιὰ ἄλλη χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

Οἱ δυὸ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου κόβουν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη σὲ δυὸ ἴσα μέρη.

Καὶ ἀλήθεια, τὰ σημεῖα Δ καὶ Β (σχ. 35-γ) βρίσκονται πρὸς διαφορετικὲς μεριὲς τῆς εὐθείας ΑΓ, ἄρα ἡ διαγώνιος ΔΒ κόβει τὴ διαγώνιο ΑΓ. Ἂς ὀνομάσωμε Ο τὸ σημεῖο τῆς τομῆς τους. Ὅπως εἴδαμε πιὸ πάνω, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰ ΓΔ καὶ ἡ γωνία $\widehat{Δ_2}$ ἴση μὲ τὴ $\widehat{Β_2}$. Εἶναι ὅμως καὶ $\widehat{Α_1} = \widehat{Γ_1}$, ἐπειδὴ οἱ δυὸ αὐτὲς γωνίες εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν δυὸ παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ μὲ τέμνουσα τὴν ΑΓ. Τὰ δυὸ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ ἔχουν λοιπὸν μιὰν πλευρὰ ἴση καὶ τὶς δυὸ παρακείμενες σ' αὐτὴν γωνίες ἴσες· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωμε :

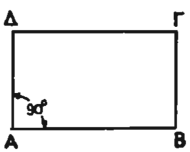
$$ΑΟ = ΓΟ, \qquad ΔΟ = ΒΟ.$$

Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ σημεῖο Ο εἶναι τὸ μέσο καὶ τῆς διαγωνίου ΔΒ καὶ τῆς ΑΓ.

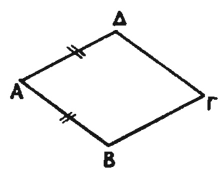
Ἀντίστροφα, *ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο οἱ δυὸ διαγώνιοι κόβουν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη σὲ δυὸ ἴσα μέρη,* **τότε τὸ τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο.**

4. Ὑπενθυμίζομε τώρα μερικοὺς ὁρισμοὺς ἀπὸ τὸν Τόμ. Α΄.

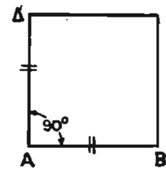
Ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει μιὰ γωνία ὀρθὴ λέγεται *ὀρθογώνιο* (σχ. 35-δ).



Σχ. 35-δ. Ὀρθογώνιο.



Σχ. 35-ε. Ρόμβος.



Σχ. 35-ς. Τετράγωνο.

Ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει δυὸ συνεχόμενες πλευρὲς ἴσες λέγεται *ρόμβος* (σχ. 35-ε).

Ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει μιὰ γωνία ὀρθὴ καὶ δυὸ συνεχόμενες πλευρὲς ἴσες (ποὺ εἶναι δηλαδὴ συγχρόνως ὀρθογώνιο καὶ ρόμβος) λέγεται *τετράγωνο* (σχ. 35-ς).

5. Τὸ ὀρθογώνιο, σὰν παραλληλόγραμμο, ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου, ἔχει ὅμως καὶ μερικὲς ἰδιαίτερες ποὺ τὸ ξεχωρίζουν ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα ποὺ δὲν εἶναι ὀρθογώνια.

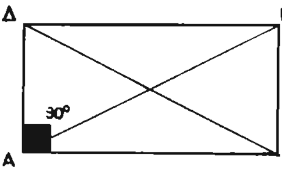
1η ἰδιότητα. *Οἱ 4 γωνίες ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ* (σχ. 35-ζ), *ὅπου $\widehat{A} = 90^\circ$, εἶναι ὀρθές.*

Καὶ ἀλήθεια, ὅπως σὲ κάθε παραλληλόγραμμο, οἱ ἀπέναντι γωνίες $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἴσες, ἄρα

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{A} = 90^\circ.$$

Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ἴσο μὲ

$$\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{\Gamma})$$
$$= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$



Σχ. 35-ζ. Τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει τὴν $\widehat{A} = 90^\circ$.

Οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ὅμως ἴσες, σὰν ἀπέναντι γωνίες παραλληλογράμμου· ἄρα ἡ καθεμιά τους εἶναι τὸ μισὸ τῶν 180°, δηλαδὴ ὀρθή.

Ἀντίστροφα, *ἂν ἕνα τετράπλευρο ἔχῃ τὶς 4 γωνίες του ὀρθές,* **θὰ εἶναι ὀρθογώνιο.**

2η ἰδιότητα. *Οἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.*

Καὶ ἀλήθεια, τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΑΒΓ (σχ. 35-ζ) εἶναι ὀρθογώνια ($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$) καὶ ἔχουν τὶς δυὸ κάθετες πλευρές τους ἀντίστοιχα ἴσες (ΒΑ = ΑΒ καὶ ΑΔ = ΒΓ)· ἄρα εἶναι ἴσα (1η περίπτωση ἰσότητας τριγώνων). Ἑπομένως καὶ οἱ ὑποτείνουσές τους εἶναι ἴσες: ΒΔ = ΑΓ.

Ἀντίστροφα, *ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο οἱ δυὸ διαγώνιοι εἶναι ἴσες καὶ κόβουν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη στὸ μέσο της,* **τότε τὸ τετράπλευρο θὰ εἶναι ὀρθογώνιο.**

6. Ὁ ρόμβος, σὰν παραλληλόγραμμο, ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου, ἔχει ὅμως καὶ ἄλλες ποὺ τὸν χαρακτηρίζουν.

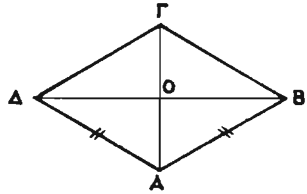
1η χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα. *Σ' ἕνα ρόμβο οἱ τέσσερις πλευρὲς εἶναι ἴσες.*

Ὅπως σὲ κάθε παραλληλόγραμμο, στὸ ρόμβο τοῦ σχ. 35-η οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες.

$$ΑΒ = ΔΓ \quad καὶ \quad ΑΔ = ΒΓ.$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ παραλληλόγραμμο αὐτὸ εἶναι ρόμβος, δυὸ συνεχόμενες πλευρές, π.χ. οἱ ΑΒ καὶ ΑΔ, θὰ εἶναι ἴσες. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ΑΒ = ΑΔ καὶ ἀπὸ τὶς παραπάνω δυὸ ἕπεται τώρα ὅτι:

$$ΔΓ = ΑΒ = ΑΔ = ΒΓ.$$



Σχ. 35-η. Τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει δυὸ συνεχόμενες πλευρές, ΑΒ καὶ ΑΔ, ἴσες.

2η χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα. *Οἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι κάθετες ἡ μιὰ πρὸς τὴν ἄλλη καὶ ἡ καθεμιά τους διχοτομεῖ τὶς δυὸ γωνίες τοῦ ρόμβου ποὺ ἔχουν τὶς κορυφές τους στὰ ἄκρα της.*

Καὶ ἀλήθεια, (σχ. 35-η), στὸ τρίγωνο ΑΒΔ ποὺ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΑΔ) ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσος (διότι ΔΟ = ΟΒ), ἄρα θὰ εἶναι συγχρόνως ὕψος καὶ διχοτόμος τοῦ τριγώνου (βλ. Μάθ. 30, § 3). Ἐπομένως ἡ εὐθεία ΑΟΓ εἶναι κάθετη πρὸς τὴν ΔΟΒ καὶ διχοτομεῖ τὴ γωνία $\widehat{Α}$. Γιὰ ὅμοιο λόγο ἡ ἴδια διαγώνιος ΓΟΑ διχοτομεῖ τὴ γωνία $\widehat{Γ}$ τοῦ ρόμβου. Καί, ἀντίστοιχα, ἡ διαγώνιος ΒΔ διχοτομεῖ τὶς γωνίες $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Δ}$ τοῦ ρόμβου.

7. Τὸ τετράγωνο ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ρόμβου, γιατὶ εἶναι συγχρόνως ὀρθογώνιο καὶ ρόμβος.

Ὥστε, *σ' ἕνα τετράγωνο οἱ διαγώνιοι κόβονται ἡ μιὰ μὲ τὴν ἄλλη στὸ μέσο τους, εἶναι ἴσες καὶ κάθετες ἡ μιὰ πρὸς τὴν ἄλλη.*

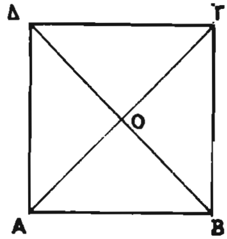
Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ εἶναι χαρακτηριστικὴ γιὰ ἕνα τετράγωνο. Μὲ ἄλλα λόγια: *ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 35-θ) ἔχωμε*

1ο ΑΟ = ΟΓ, ΒΟ = ΟΔ, 2ο ΑΓ = ΒΔ, 3ο ΑΓ κάθετη πρὸς ΒΔ, **τότε τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο.**

Καὶ ἀλήθεια, ἀφοῦ οἱ δυὸ διαγώνιοι κόβονται στὸ μέσο τους καὶ εἶναι ἴσες, τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο ὀρθογώνιο (βλ. § 5, 2η ἰδιότητα). Εἶναι ὅμως καὶ ρόμβος, γιατὶ ἡ ΑΓ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΔ καί, ἑπομένως,

$$AB = A\Delta,$$

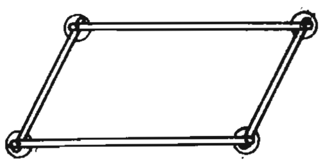
δηλαδὴ τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει δυὸ συνεχόμενες πλευρὲς ἴσες καὶ κατὰ συνέπεια εἶναι ρόμβος. Ἀλλὰ κάθε τετράπλευρο ποὺ εἶναι συγχρόνως ὀρθογώνιο καὶ ρόμβος εἶναι τετράγωνο· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο.



Σχ. 35-θ. Ὑποθέτομε ὅτι: $AO = O\Gamma$, $BO = O\Delta$, $A\Gamma = B\Delta$, ΑΓ κάθετη πρὸς ΒΔ.

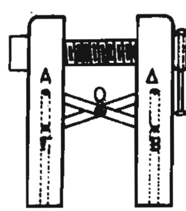
Ἀσκήσεις. *1.* Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἡ γωνία $\widehat{A} = 15°$, ἡ $\widehat{B} = 2\widehat{A}$, ἡ $\widehat{\Gamma} = 3\widehat{B}$. Ὑπολογίστε τὴ $\widehat{\Delta}$. Τί εἴδους τετράπλευρο εἶναι αὐτό; Σχεδιάστε ἕνα τετράπλευρο μὲ αὐτὲς τὶς γωνίες.

2. Σχεδιάστε ἕνα παραλληλόγραμμο στὸ ὁποῖο οἱ διαγώνιοι νὰ ἔχουν μῆκος 50 mm καὶ 65 mm καὶ νὰ σχηματίζουν ὀξεία γωνία 30° μοιρῶν. Γιατί ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα ποὺ μποροῦν νὰ σχεδιασθοῦν μὲ αὐτὰ τὰ δεδομένα εἶναι μεταξύ τους ἴσα;



Σχ. 35-ι.

3. Τέσσερα ἄκαμπτα στελέχη (ἀλύγιστα ραβδιὰ) συνδέονται δυὸ-δυὸ μὲ 4 ἀρθρώσεις στὰ ἄκρα τους καὶ ἀποτελοῦν ἕνα παραλληλόγραμμο (σχ. 35-ι). Τὸ ἀρθρωτὸ αὐτὸ τετράπλευρο μποροῦμε νὰ τὸ «παραμορφώσωμε», δηλαδὴ μποροῦμε νὰ τοῦ ἀλλάξωμε τὴ μορφή, μεταβάλλοντας τὶς γωνίες τῶν στελεχῶν στὶς ἀρθρώσεις. Τί σχήματα προκύπτουν ἔτσι καὶ γιατί;



Σχ. 35 ια.

4. Τὶς σιαγόνες μιᾶς μέγγενης τὶς κρατάει σὲ ὁρισμένη κάθε φορὰ ἀπόσταση (σχ. 35-ια) μιὰ ψαλίδα ἀπὸ δυὸ ἴσα στελέχη ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ: τὰ στελέχη αὐτὰ εἶναι ἀρθρωμένα στὸ μέσο τους Ο, τὰ δυὸ ἄκρα τους Α καὶ Δ εἶναι στερεωμένα ἀντιστοίχως στὶς δυὸ σιαγόνες, ἐνῶ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ δυὸ ἄλλα ἄκρα Β καὶ Γ γλιστρᾶ μέσα σ' ἕνα αὐλάκι (σὲ μιὰν ἐντομὴ) τῆς σιαγόνας. Ἐξηγῆστε γιατὶ οἱ σιαγόνες τῆς μέγγενης παραμένουν παράλληλες, ὅταν τὰ Β καὶ Γ μετακινοῦνται.

5. Σχεδιάστε μιὰ γωνία ΧΟΨ καὶ πάρτε ἕνα σημεῖο Α στὸ ἐσωτερικό της. Χαράξτε ἔπειτα τὸ τμῆμα ΟΑ καὶ τὴν προέκτασή του ΑΙ κατὰ ἕνα μῆκος ΑΙ = ΟΑ. Ἀπὸ τὸ σημεῖο Ι φέρτε τέλος τὶς παραλλήλους πρὸς τὶς δυὸ πλευρὲς τῆς γωνίας. Δεῖξτε τότε ὅτι τὸ τετράπλευρο ΟΒΙΓ, ποὺ θὰ σχηματισθῆ, εἶναι παραλληλόγραμμο καὶ ὅτι τὸ σημεῖο Α συμπίπτει μὲ τὸ μέσο τοῦ τμήματος ΒΓ.

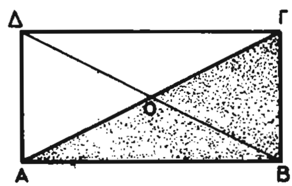
Ἐφαρμογή. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α, ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ μιᾶς γωνίας, νὰ χαράξετε ὡς τὶς 2 πλευρὲς τῆς γωνίας μιὰν εὐθεία ΒΑΓ τέτοια ὥστε τὸ Α νὰ εἶναι τὸ μέσο τοῦ τμήματος ΒΓ.

6. Σχεδιάστε : 1ο ἕνα ὀρθογώνιο μὲ μῆκος πλευρᾶς 5 cm καὶ μῆκος διαγωνίου 7 cm, 2ο ἕναν ρόμβο μὲ περίμετρο 30 cm καὶ μὲ μιὰ γωνία 120°, 3ο ἕνα τετράγωνο μὲ μῆκος διαγωνίου 5 cm.

7. Συνδέστε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ μέσα κάθε δυὸ συνεχόμενων πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ δεῖξτε ὅτι τὸ τετράπλευρο ΚΛΜΝ ποὺ προκύπτει εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμο. Νὰ δείξετε ἔπειτα τὰ ἑξῆς : Ἂν τὸ ἀρχικὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο, τότε τὸ ΚΛΜΝ εἶναι ρόμβος. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος, τότε τὸ ΚΛΜΝ θὰ εἶναι ὀρθογώνιο. Τέλος, ἂν τὸ ἀρχικὸ ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο, τότε καὶ τὸ ΚΛΜΝ θὰ εἶναι τετράγωνο.

8. Διατρέχοντας τὴν περίμετρο ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ κατὰ μιὰ ὁρισμένη φορὰ πάρτε, πάνω στὶς εὐθεῖες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ, κατὰ τὴ φορὰ τῆς διαδρομῆς σας, τέσσερα τμήματα ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ καὶ ΔΝ ἴσα μεταξύ τους : ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Νὰ δείξετε ὅτι τὸ τετράπλευρο ΚΛΜΝ εἶναι τετράγωνο.

9. Πάρτε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\text{Β}} = 90^\circ$) καὶ σχεδιάστε τὸ ὀρθογώνιο τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 35-ιβ). Χαράξτε τὶς διαγωνίους ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ. Γιατί $\text{ΒΟ} = \dfrac{\text{ΒΔ}}{2}$; Γιατί $\text{ΒΟ} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$; Ποιά σπουδαία ἰδιότητα τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου προκύπτει ἀπ' αὐτά ;



Σχ. 35-ιβ.

10. Χρησιμοποιώντας τὴν παραπάνω ἄσκηση δεῖξτε ὅτι σὲ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, μὲ μιὰν ὀξεία γωνία 30°, ἡ διάμεσος καὶ τὸ ὕψος ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὴν κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας χωρίζουν τὴ γωνία αὐτὴ σὲ τρία ἴσα μέρη.

11. Δεῖξτε ὅτι, ἂν ἕνα (κυρτὸ) τετράπλευρο ἔχη δυὸ ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες καὶ ἴσες, τότε τὸ τετράπλευρο αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμο.

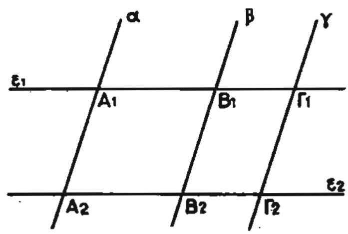
Μάθημα 36.

Ἐφαρμογὲς τῶν παράλληλων εὐθειῶν.

1. **Θὰ ἐκθέσωμε τώρα μερικὲς ἐφαρμογὲς** ἐκείνων ποὺ εἴπαμε στὰ δυὸ προηγούμενα μαθήματα.

Ἂς εἶναι οἱ δυὸ εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 παράλληλες (σχ. 36-α) καὶ ἂς τὶς κόψωμε μὲ εὐθεῖες α, β, γ, ... παράλληλες μεταξύ τους. Τότε τὰ τμήματα A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$, ... τῶν τεμνουσῶν αὐτῶν, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ ε_1 καὶ ε_2, θὰ εἶναι ἴσα:

$$A_1A_2 = B_1B_2 = \Gamma_1\Gamma_2 = \cdots.$$

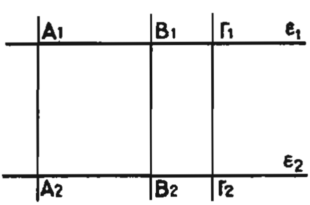


Σχ. 36-α. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ καὶ $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ ...

Καὶ ἀλήθεια, τὰ τετράπλευρα $A_1A_2B_2B_1$, $A_1A_2\Gamma_2\Gamma_1$, $B_1B_2\Gamma_2\Gamma_1$, ... εἶναι ὅλα παραλληλόγραμμα καὶ οἱ ἀπέναντι πλευρές τους

A_1A_2 καὶ B_1B_2, A_1A_2 καὶ $\Gamma_1\Gamma_2$, B_1B_2 καὶ $\Gamma_1\Gamma_2$, ... εἶναι μεταξύ τους ἴσες.

Εἰδικῶς, ἂν χαράξωμε μεταξὺ τῶν παραλλήλων ε_1 καὶ ε_2 τμήματα A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ ... κάθετα πρὸς τὴ μιὰ ἀπὸ τὶς εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 (σχ. 36-β), τότε τὰ τμήματα αὐτὰ θὰ εἶναι 1ο κάθετα καὶ πρὸς τὴν ἄλλη εὐθεία, 2ο παράλληλα τὸ ἕνα μὲ τὸ ἄλλο· ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσα:



Σχ. 36-β. Τὰ τμήματα A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$,... εἶναι κάθετα πρὸς τὶς ε_1 καὶ ε_2.

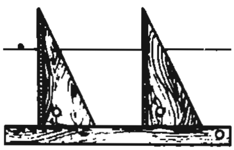
$$A_1A_2 = B_1B_2 = \Gamma_1\Gamma_2 = \cdots.$$

Μ' ἄλλα λόγια, μεταξὺ δυὸ παράλληλων εὐθειῶν ε_1 καὶ ε_2 μιὰ κάθετος πρὸς αὐτὲς διατηρεῖ τὸ ἴδιο πάντα μῆκος, ὅταν μετακινηθῇ παραμένοντας κάθετη πρὸς τὶς $ε_1$ καὶ $ε_2$. Τὸ μῆκος αὐτὸ λέγεται *ἀπόσταση* τῶν δυὸ παράλληλων εὐθειῶν $ε_1$ καὶ $ε_2$.

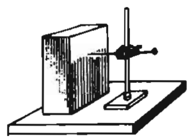
Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε τὸ ἑξῆς:

Ὅταν ἕνα σημεῖο κινῆται μέσα σ' ἕνα ἐπίπεδο διατηρώντας σταθερὴ ἀπόσταση ἀπὸ μιὰν εὐθεία ε τοῦ ἐπιπέδου, **τότε ἡ γραμμὴ τὴν ὁποία γράφει εἶναι εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν ε.**

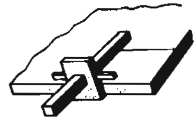
Σ' αὐτὸ στηρίζονται οἱ ἀκόλουθοι τρόποι ποὺ χρησιμοποιεῖ ἡ τέχνη, γιὰ νὰ χαράξῃ παράλληλο:



Σχ. 36-γ. Μετακινώντας τὸ ὀρθόγωνο κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς τοῦ χάρακα χαράζομε παράλληλο πρὸς αὐτήν.



Σχ. 36-δ. Χάραξη παραλλήλου μὲ τὸ σημαδευτήρι τοῦ ἐφαρμοστῆ.

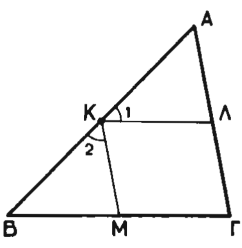


Σχ. 36-ε. Χάραξη παραλλήλου μὲ τὴ σημαδούρα τοῦ ξυλουργοῦ.

2. Ἀπὸ τὸ μέσο Κ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 36-ς) ἂς φέρωμε τὴν ΚΛ ∥ ΒΓ καὶ τὴν ΚΜ ∥ ΑΓ. Τὸ τετράπλευρο ΚΜΓΛ εἶναι τότε παραλληλόγραμμο καὶ ἑπομένως:

$$ΚΛ = ΜΓ, \quad ΚΜ = ΛΓ. \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου τὰ τρίγωνα ΑΚΛ καὶ ΚΒΜ εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν τὴν ΑΚ = ΚΒ, τὴν $\widehat{Κ}_1 = \widehat{Β}$ καὶ τὴν $\widehat{Α} = \widehat{Κ}_2$ (ἡ ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἕπεται ἀπὸ ὅ,τι εἰπώθηκε στὴν Ἄσκ. 1 τοῦ Μαθ. 34)· ἄρα



Σχ. 36-ς. Ὑποθέτομε ὅτι ΑΚ = ΚΒ, ΚΛ ∥ ΒΓ, ΚΜ ∥ ΑΓ.

$$ΚΛ = ΒΜ, \quad ΑΛ = ΚΜ. \qquad (2)$$

Παραβάλλοντας τὶς ἰσότητες (1) μὲ τὶς ἰσότητες (2) συμπεραίνομε ὅτι:

$$BM = M\Gamma \quad \text{καὶ} \quad A\Lambda = \Lambda\Gamma.$$

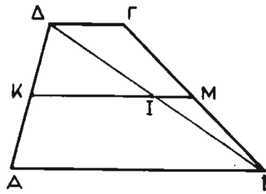
Μὲ ἄλλα λόγια, τὰ σημεῖα Μ καὶ Λ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, κατὰ συνέπεια: $K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$ καὶ $KM = \frac{A\Gamma}{2}$.

Ὥστε, *ἂν ἑνώσωμε μ' ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα τὰ μέσα δυὸ πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου*, **τὸ τμῆμα αὐτὸ θὰ εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν τρίτη πλευρὰ τοῦ τριγώνου καὶ ἴσο μὲ τὸ μισό της.**

3. Ἐφαρμογὴ στὸ τραπέζιο. Ὑπενθυμίζομε ὅτι *τραπέζιο* λέγεται ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 36-ζ), ποὺ ἔχει δυὸ πλευρὲς παράλληλες· (αὐτὲς ὀνομάζονται *βάσεις* τοῦ τραπεζίου).

Ἂς ἑνώσωμε μ' ἕνα τμῆμα τὰ μέσα Κ καὶ Μ τῶν δυὸ ὄχι παράλληλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ τραπεζίου. Τὸ τμῆμα ΚΜ θὰ εἶναι 1ο παράλληλο πρὸς τὶς βάσεις ΑΒ καὶ ΔΓ, 2ο ἴσο μὲ τὸ μισὸ ἄθροισμά τους:

$$KM = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}.$$



Σχ. 36-ζ. Ὑποθέτομε ὅτι Κ καὶ Μ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

Καὶ ἀλήθεια, ἂς χαράξωμε τὴ διαγώνιο ΒΔ καὶ ἀπὸ τὸ μέσο της Ι ἂς φέρωμε τὴν παράλληλο πρὸς τὶς βάσεις ΑΒ καὶ ΔΓ. Ἡ παράλληλος αὐτὴ θὰ περάση ἀπὸ τὸ μέσο Κ τῆς πλευρᾶς ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καθὼς καὶ ἀπὸ τὸ μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγ. ΔΒΓ. Ἐξ ἄλλου θὰ ἔχωμε:

$$KI = \frac{AB}{2}, \quad IM = \frac{\Delta\Gamma}{2}.$$

Ἄρα μὲ πρόσθεση $\quad KI + IM = KM = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}.$

4. Ἰσαπόστατες εὐθεῖες. Ἂς πάρωμε μέσα σ' ἕνα ἐπίπεδο τρεῖς ἢ περισσότερες, μεταξύ τους παράλληλες εὐθεῖες ε_1, ε_2, ε_3,... (σχ. 36-η) καὶ ἂς ὑποθέσωμε ὅτι δυὸ-δυὸ κατὰ σειρὰ κόβουν πάνω σὲ μιὰ τέμνουσα σ ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα:

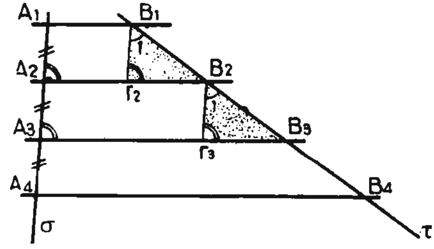
$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots .$$

Τότε θὰ κάθουν πάνω σὲ κάθε ἄλλη τέμνουσα τ ἴσα τμήματα

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \cdots .$$

Καὶ ἀλήθεια, ἂν ἀπὸ τὰ σημεῖα B_1 καὶ B_2 χαράξωμε τὶς παραλλήλους $B_1\Gamma_2 \parallel \sigma$ καὶ $B_2\Gamma_3 \parallel \sigma$, τότε τὰ τετράπλευρα $A_1A_2\Gamma_2B_1$ καὶ $A_2A_3\Gamma_3B_2$ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμα· ἑπομένως θὰ ἔχωμε τὶς ἰσότητες:

$B_1\Gamma_2 = A_1A_2$, $B_2\Gamma_3 = A_2A_3$, ἄρα καὶ τὴν $B_1\Gamma_2 = B_2\Gamma_3$.



Σχ. 36-η. Ὑποθέτομε ὅτι οἱ εὐθεῖες A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 κτλ. εἶναι παράλληλες καὶ ὅτι $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ κτλ.

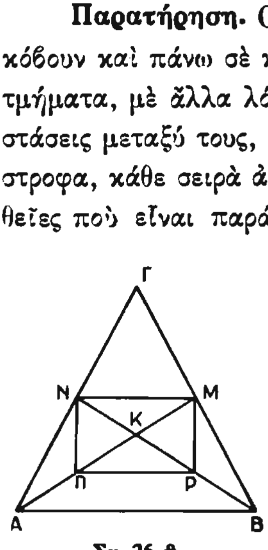
Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τὰ τρίγωνα $B_1\Gamma_2B_2$ καὶ $B_2\Gamma_3B_3$ ἔχουν ὄχι μόνο τὶς πλευρὲς $B_1\Gamma_2$ καὶ $B_2\Gamma_3$ ἴσες ἀλλὰ καὶ τὶς παρακείμενες σ' αὐτὲς γωνίες:

$$\Gamma_2\widehat{B_1}B_2 = \Gamma_3\widehat{B_2}B_3, \qquad B_1\widehat{\Gamma_2}B_2 = B_2\widehat{\Gamma_3}B_3\cdot$$

ἑπομένως τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, ἄρα $B_1B_2 = B_2B_3$.

Μὲ ὅμοιο τρόπο βλέπομε ὅτι $B_2B_3 = B_3B_4 = \cdots$.

Παρατήρηση. Οἱ παραπάνω παράλληλες εὐθεῖες ε_1, ε_2, ε_3,... κόβουν καὶ πάνω σὲ κάθε (ἀναγκαστικὰ κοινὴ) κάθετό τους ἴσα τμήματα, μὲ ἄλλα λόγια ἔχουν δυὸ-δυὸ κατὰ σειρά, ἴσες ἀποστάσεις μεταξύ τους, εἶναι λοιπὸν *ἰσαπόστατες εὐθεῖες*. Ἀντίστροφα, κάθε σειρὰ ἀπὸ ἰσαπόστατες εὐθεῖες ἀπαρτίζεται ἀπὸ εὐθεῖες ποὺ εἶναι παράλληλες ἢ καθεμιά τους πρὸς τὶς ἄλλες.



Σχ. 36-θ.

5. Πρόταση. *Οἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο ποὺ βρίσκεται στὰ δύο τρίτα τῆς καθεμιᾶς τους, μετρώντας ἀπὸ τὴν κορυφή.*

Καὶ ἀλήθεια, ἂς χαράξωμε τὶς δυὸ διαμέσους AM καὶ BN τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 36-θ) καὶ ἂς καλέσωμε K τὸ σημεῖο τῆς τομῆς τους. Ξέρομε ὅτι:

$$NM \parallel AB \text{ καὶ } NM = \frac{AB}{2}.$$

Ἐξ ἄλλου, ἂν Π καὶ Ρ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΚ καὶ ΒΚ τοῦ τριγώνου ΑΒΚ, τότε

$$\Pi P \parallel AB \text{ καὶ } \Pi P = \frac{AB}{2}.$$

Ὥστε :

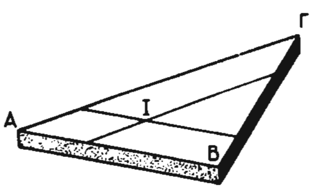
$$\Pi P \parallel NM \quad \text{καὶ} \quad \Pi P = NM.$$

Ἄρα τὸ τετράπλευρο ΝΜΡΠ εἶναι παραλληλόγραμμο (βλ. Μάθ. 35, Ἀσκ. 11). Ἑπομένως ΠΚ = ΚΜ καὶ ΡΚ = ΚΝ. Ἀλλὰ ΑΠ = ΠΚ.

Ἄρα ΑΠ = ΠΚ = ΚΜ. Ὥστε τὸ Κ βρίσκεται στὰ δυὸ τρίτα τῆς διαμέσου ΑΜ, μετρώντας ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α.

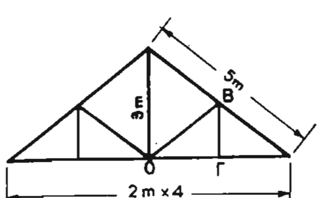
Παρατήρηση. Τὸ κοινὸ σημεῖο Κ τῶν τριῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου λέγεται *κέντρο βάρους* τοῦ τριγώνου.

Ἀσκήσεις. *1.* Μὲ τὴ σημαδούρα του, στὴν ἴδια ἀπόσταση ἀπὸ τὶς εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 36-ι), ἕνας ξυλουργὸς χαράζει δυὸ εὐθεῖες ἀντίστοιχα παράλληλες πρὸς τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἂς εἶναι Ι τὸ σημεῖο τομῆς τῶν δυὸ εὐθειῶν ποὺ χάραξε. Δεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία ΑΙ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$. (Θὰ βασισθῆτε στὸ Μάθ. 33, § 3).

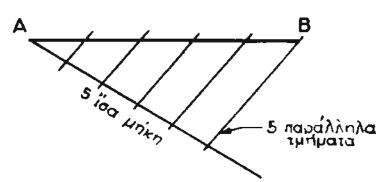


Σχ. 36-ι.

2. Στὸ ζευκτὸ ποὺ παριστάνεται ἀπὸ τὸ σχ. 36-ια ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῶν ράβδων ΟΒ καὶ ΒΓ.



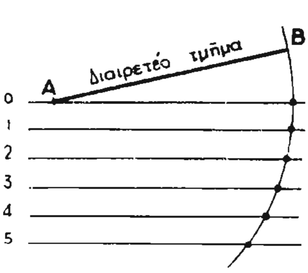
Σχ. 36-ια.



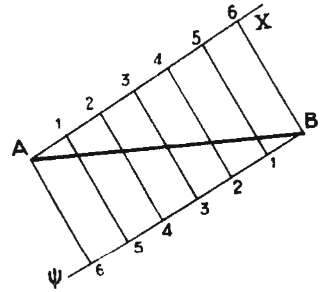
Σχ. 36-ιβ.

3. Δικαιολογῆστε τὴ μέθοδο ποὺ χρησιμοποιεῖται στὸ σχ. 36-ιβ γιὰ νὰ διαιρεθῇ τὸ τμῆμα ΑΒ σὲ 5 ἴσα μέρη.

4. Ἐξηγῆστε πῶς μπορεῖ κανείς, χρησιμοποιώντας τὰ χαράκια ἑνὸς φύλλου τετραδίου, νὰ διαιρέση ἕνα τμῆμα ΑΒ σὲ 2, 3, 4, 5...ἴσα μέρη (σχ. 36-ιγ).



Σχ. 36-ιγ.
Οἱ εὐθεῖες 0, 1, 2, 3, 4, 5,... εἶναι ἰσαπόστατες. Τὸ τμῆμα ΑΒ στρέφεται γύρω στὸ σημεῖο Α.



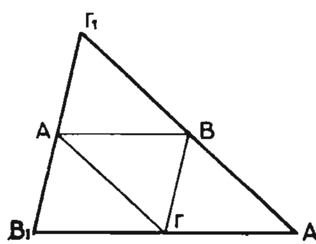
Σχ. 36-ιδ.
Οἱ εὐθεῖες ΑΧ καὶ ΒΨ εἶναι παράλληλες. Τὰ διαδοχικὰ τμήματα πάνω σ' αὐτὲς εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ τους.

5. Δικαιολογῆστε τὴ μέθοδο ποὺ ὑποδείχνει τὸ σχ. 36-ιδ καὶ ποὺ χρησιμοποιοῦν κάποτε στὰ ἐργαστήρια, γιὰ νὰ διαιρέσουν ἕνα τμῆμα σὲ ἴσα μέρη (στὴν περίπτωση τοῦ σχ. 36-ιδ, σὲ 6 ἴσα μέρη).

6. Τὸ κέντρο βάρους Κ ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται σὲ ἀπόσταση 5 cm ἀπὸ τὸ μέσο Μ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ. Ὑπολογίστε 1ο τὸ μῆκος τῆς διαμέσου ΑΜ ἡ ὁποία ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ 2ο τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας. (Γιὰ τὸ 2ο θὰ βασισθῆτε στὴν Ἄσκ. 9 τοῦ Μαθ. 35).

7. Πάρτε τρία σημεῖα Α, Β, Κ ποὺ νὰ μὴν βρίσκωνται πάνω σὲ εὐθεία. Ὕστερα κατασκευάστε τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει τὸ τμῆμα ΑΒ γιὰ πλευρὰ καὶ τὸ σημεῖο Κ γιὰ κέντρο βάρους.

8. Ἀπὸ κάθε κορυφὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ χαράξτε τὴν παράλληλο πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρὰ (σχ. 36-ιε). Οἱ τρεῖς εὐθεῖες ποὺ χαράξατε κόβονται δυὸ-δυὸ σὲ τρία σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. Νὰ δείξετε ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $B_1\Gamma_1$, Γ_1A_1, A_1B_1 τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. Ἀπ' αὐτὸ νὰ συμπεράνετε ὅτι οἱ μεσοκάθετοι τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ συμπίπτουν μὲ τὶς εὐθεῖες τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 36-ιε.

9. Ἑνῶστε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ μέσα Κ, Λ, Μ τῶν πλευρῶν ΑΒ,

ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ χαράξτε τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΚΛΜ. Νὰ δείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες τῶν τριῶν αὐτῶν ὑψῶν περνοῦν ἀπὸ ἕνα κοινὸ σημεῖο ποὺ ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ο ΚΥΚΛΟΣ. ΤΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

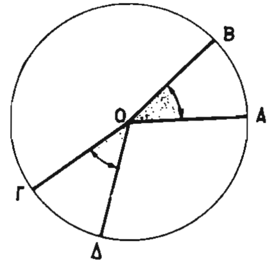
Μάθημα 37.

Ἐπίκεντρες γωνίες, τόξα καὶ χορδές.

1. Ὑπενθυμίζομε πρῶτα δυὸ ὁρισμοὺς ἀπὸ τὸν Τόμ. Α΄.

Μιὰ γωνία $\widehat{AOB}$ (σχ. 37-α) λέγεται *ἐπίκεντρη* σ᾿ ἕναν κύκλο, ὅταν ἔχῃ τὴν κορυφή της στὸ κέντρο τοῦ κύκλου. Μιὰ τέτοια γωνία ξεχωρίζει (ἀποκόπτει) πάνω στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ποὺ τὸ λέμε *ἀντίστοιχο* τῆς ἐπίκεντρης γωνίας. Ἔτσι κάθε ἐπίκεντρη γωνία σ᾿ ἕναν κύκλο ἔχει ἕνα ὁρισμένο ἀντίστοιχο τόξο καὶ κάθε τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου εἶναι ἀντίστοιχο μιᾶς ὁρισμένης ἐπίκεντρης γωνίας $\widehat{\Gamma O\Delta}$ σ᾿ αὐτὸν τὸν κύκλο.

Εὔκολα βλέπομε τώρα ὅτι σὲ ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{AOB}$ καὶ $\widehat{\Gamma O\Delta}$ (σχ. 37-α) ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ τῆς ἴδιας περιφέρειας καὶ ἀντιστρόφως σὲ ἴσα τόξα τῆς ἴδιας περιφέρειας ἀντιστοιχοῦν ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες.



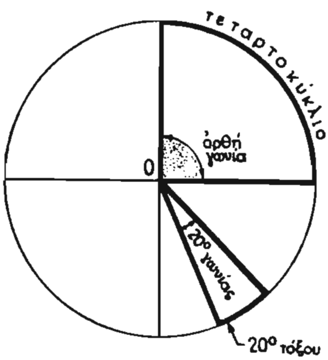
Σχ. 37-α.

Ὑπόθεση : $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma O\Delta}$.

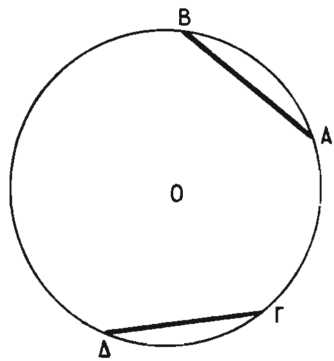
Συμπέρασμα : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

2. Ἀπὸ τὴν παραπάνω ἰδιότητα συμπεραίνομε πὼς μιὰ ἐπίκεντρη ὀρθὴ γωνία (σχ. 37-β) ἔχει ἀντίστοιχο τόξο ἕνα τέταρτο περιφέρειας. Ἑπομένως, τὸ $\frac{1}{90}$ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, δηλαδὴ μία μοίρα γωνίας (1°), ἔχει ἀντίστοιχο τόξο, ὅταν τὴν κάμωμε ἐπίκεντρη, τὸ $\frac{1}{90}$ ἀπὸ τὸ τέταρτο μιᾶς περιφέρειας, ἄρα τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφέρειας, δηλαδὴ μίαν μοίρα τόξου (1^0).

Ὅμοια, μιὰ ἐπίκεντρη γωνία, ποὺ εἶναι ἴση μὲ ἕνα πρῶτο λεπτὸ ($1' = \frac{1}{60}$ τῆς μοίρας), θὰ ἔχη ἀντίστοιχο τόξο τὸ $\frac{1}{60}$ μιᾶς μοίρας τόξου, δηλαδὴ ἕνα πρῶτο λεπτὸ τόξου ($1'$), καὶ μιὰ ἐπίκεντρη γωνία, ποὺ εἶναι ἴση μὲ ἕνα δεύτερο λεπτὸ ($1'' = \frac{1}{60}$ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ), θὰ ἔχη ἀντίστοιχο τόξο ἕνα δεύτερο λεπτὸ τόξου ($1'' = \frac{1}{60}$ ἀπὸ ἕνα πρῶτο λεπτὸ τόξου).



Σχ. 37-β.



Σχ. 37-γ.

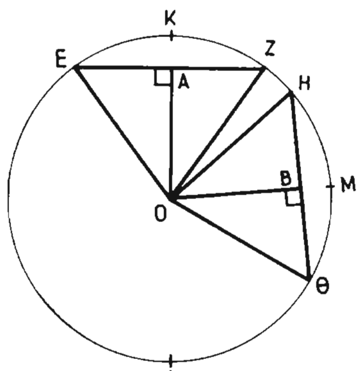
Ἀπὸ ὅλα αὐτὰ προκύπτει τώρα τὸ ἑξῆς:

Μιὰ ἐπίκεντρη γωνία καὶ τὸ ἀντίστοιχο τόξο της μετριοῦνται σὲ μοῖρες ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμό. Ἔτσι π.χ. μετρώντας σὲ μοῖρες καὶ τὴν ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ τοῦ σχ. 37-β καὶ τὸ ἀντίστοιχο τόξο της $\overset{\frown}{AB}$ βρίσκομε 20^0. Σὲ πρῶτα λεπτὰ ἡ γωνία αὐτὴ καὶ τὸ ἀντίστοιχο τόξο της θὰ μετριοῦνται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ $20 \times 60' = 1\,200'$, δηλαδὴ πάλιν ἀπὸ ἕνα καὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Ὥστε γενικά, *μιὰ ἐπίκεντρη γωνία καὶ τὸ ἀντίστοιχο τόξο της μετριοῦνται ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ὅταν ἡ μονάδα γωνιῶν, ποὺ χρησιμοποιοῦμε στὴ μιὰ μέτρηση, ἔχῃ, σὰν ἐπίκεντρη γωνία, ἀντίστοιχο τόξο τὴ μονάδα τόξων ποὺ χρησιμοποιοῦμε στὴν ἄλλη μέτρηση.*

3. Ἴσα τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}$ μιᾶς περιφέρειας ἔχουν ἴσες χορδὲς ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 37-γ). Καὶ ἀλήθεια, τὰ ἴσα τόξα μποροῦμε νὰ τὰ κάμωμε νὰ συμπέσουν, ἀλλὰ τότε θὰ συμπέσουν ἀναγκαστικὰ καὶ οἱ χορδές τους.

Ἂς πάρωμε τώρα δυὸ σημεῖα Ε καὶ Ζ πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια (σχ. 37-δ). Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΕΖ εἶναι χορδὴ δυὸ τόξων, τοῦ $\widehat{EKZ}$ καὶ τοῦ $\widehat{E\Lambda Z}$, ποὺ ἀποτελοῦν μαζὶ ὁλόκληρη τὴν περιφέρεια. Ἂν ἡ χορδὴ ΕΖ δὲν εἶναι σύγχρονα καὶ διάμετρος (μὲ ἄλλα λόγια: ἂν δὲν περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο Ο τοῦ κύκλου), τότε, ἀπὸ τὰ δυὸ τόξα $\widehat{EKZ}$ καὶ $\widehat{E\Lambda Z}$, τὸ ἕνα εἶναι μικρότερο, τὸ ἄλλο μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἡμιπεριφέρεια (180^0).



Σχ. 37-δ. Ὑποθέτομε ὅτι ΕΖ = ΗΘ.

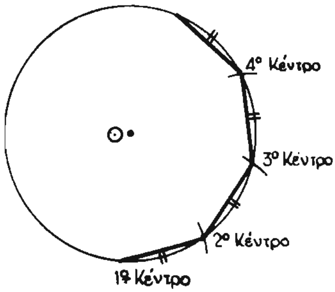
Ὥστε, μιὰ χορδὴ σ' ἕναν κύκλο ὁρίζει δυὸ τόξα: ἕνα $\widehat{\tau_1} \leqq 180^0$ καὶ ἕνα $\widehat{\tau_2} \geqq 180^0$, μὲ ἄθροισμα $\widehat{\tau_1} + \widehat{\tau_2} = 360^0$. Τὸ πρῶτο, δηλαδὴ ἐκεῖνο ποὺ δὲν ξεπερνᾶ μιὰν ἡμιπεριφέρεια, θὰ τὸ λέμε *πρωτεῦον* τόξο τῆς χορδῆς, τὸ ἄλλο, *δευτερεῦον* τόξο τῆς χορδῆς.

Ἂς ὑποθέσωμε τώρα πὼς σ' ἕναν καὶ τὸν ἴδιο κύκλο δυὸ χορδὲς εἶναι ἴσες: ΕΖ = ΗΘ στὸ σχ. 37-δ. Τότε τὰ πρωτεύοντα τόξα τους θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσα: $\widehat{EKZ} = \widehat{HM\Theta}$ στὸ σχ. 37-δ.

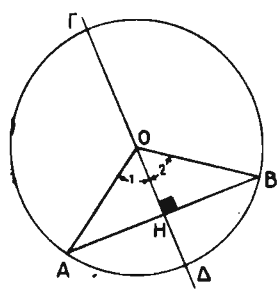
Αὐτὸ εἶναι φανερὸ στὴν περίπτωση ποὺ οἱ χορδὲς ΕΖ καὶ ΗΘ εἶναι διάμετροι καὶ στὴν περίπτωση ὅπου οἱ ἴσες χορδὲς ΕΖ καὶ ΗΘ δὲν εἶναι διάμετροι, προκύπτει εὔκολα ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΕΟΖ καὶ ΗΟΘ (τρίτη περίπτωση ἰσότητας τριγώνων). Ἡ ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχει γιὰ συνέπεια καὶ τοῦτο: τὰ ἀντίστοιχα ὕψη ΟΑ καὶ ΟΒ τῶν δυὸ τριγώνων εἶναι ἴσα.

Ὥστε, *ἂν σ' ἕνα κύκλο δυὸ χορδὲς εἶναι ἴσες*, **τότε 1ο τὰ πρωτεύοντα τόξα τους εἶναι ἴσα (ἄρα καὶ τὰ δευτερεύοντα τόξα τους θὰ εἶναι ἴσα) καὶ 2ο τὸ κέντρο τοῦ κύκλου ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὶς δυὸ χορδές.**

4. Ἐφαρμογή. Γιὰ νὰ πάρωμε πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια ἴσα τόξα, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε ἕνα διαβήτη μὲ τὸν τρόπο ποὺ ὑποδείχνει τὸ σχ. 37-ε. Διατηρώντας τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη σταθερό, προσδιορίζομε διαδοχικὰ πάνω στὴν περιφέρεια σημεῖα ποὺ τὰ ἑνώνουν κατὰ σειρὰ ἴσες χορδές, ἄρα καὶ ἴσα τόξα κύκλου.



Σχ. 37-ε. Χάραξη ἴσων τόξων.



Σχ. 37-ς. Ἡ διάμετρος ΓΔ εἶναι κάθετη πρὸς τὴ χορδὴ ΑΒ.

5. Ἀπὸ τὸ κέντρο Ο ἑνὸς κύκλου (σχ. 37-ς) ἂς χαράξωμε τὴν κάθετο ΟΗ πρὸς μιὰ χορδή του ΑΒ. Τὸ τρίγωνο ΟΑΒ εἶναι ἰσόσκελο, γιατὶ ΟΑ = ΟΒ· ἄρα τὸ ὕψος ΟΗ τοῦ τριγώνου εἶναι σύγχρονα διάμεσος καὶ διχοτόμος τοῦ τριγώνου. Μὲ ἄλλα λόγια, ἔχομε τὶς ἰσότητες:

$$ΑΗ = ΗΒ \quad \text{καὶ} \quad \widehat{Ο_1} = \widehat{Ο_2}.$$

Ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τόξα $\overset{\frown}{ΑΔ}$ καὶ $\overset{\frown}{ΔΒ}$, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{Ο_1}$ καὶ $\widehat{Ο_2}$, καθὼς καὶ τὰ $\overset{\frown}{ΑΓ}$ καὶ $\overset{\frown}{ΓΔ}$, γιατὶ

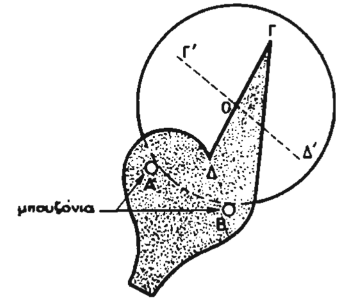
$$\overset{\frown}{ΑΓ} = 180^0 - \overset{\frown}{ΑΔ} = 180^0 - \overset{\frown}{ΔΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ}.$$

Ὥστε, *ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου, ποὺ εἶναι κάθετη πρὸς μιὰ χορδή του, διαιρεῖ σὲ δυὸ ἴσα μέρη καὶ τὴ χορδὴ καὶ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ δυὸ τόξα ποὺ ὁρίζει ἡ χορδὴ πάνω στὴν περιφέρεια.*

6. Ἡ τελευταία πρόταση ἔχει πολλὲς χρήσιμες συνέπειες. Νὰ μιὰ ἀπ᾽ αὐτές:

Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς χορδῆς περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου.

Σ᾽ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα στηρίζεται ἡ χρήση ἑνὸς ὀργάνου, τοῦ κεντραδόρου (σχ. 37-ζ), γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τοῦ κέντρου ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου. Ἀπὸ κατασκευή, ἡ ἴσια ἀκμὴ ΓΔ τοῦ ὀργάνου εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δυὸ (κυλινδρικῶν) μπουζονιῶν (τόρμων) Α καὶ Β. Ὅταν λοιπὸν τὰ δυὸ αὐτὰ μπουζόνια ἀκουμποῦν στὴν περιφέρεια τοῦ δίσκου, ἡ εὐθεία ΓΔ θὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ δίσκου· ἔτσι μποροῦμε νὰ χαράξωμε ἕνα τμῆμα ΓΔ μιᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Μετακινώντας



Σχ. 37-ζ. Κεντραδόρος.

τώρα τὸ ὄργανο χαράζομε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἕνα τμῆμα Γ′Δ′ ἀπὸ μιὰν ἄλλη διάμετρο τοῦ δίσκου. Τὸ σημεῖο τομῆς Ο τῶν δυὸ εὐθειῶν ΓΔ καὶ Γ′Δ′, ποὺ προσδιορίσαμε, εἶναι τὸ ζητούμενο κέντρο τοῦ δίσκου.

Γιὰ νὰ εἶναι στὴν πράξη ἀρκετὰ ἀκριβὴς ὁ προσδιορισμὸς αὐτὸς τοῦ κέντρου, φροντίζομε ὥστε οἱ εὐθεῖες ΓΔ καὶ Γ′Δ′ ποὺ χαράζομε νὰ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ποὺ νὰ διαφέρῃ λίγο ἀπὸ 90^0.

7. Ἂς πάρωμε τώρα δυὸ παράλληλες εὐθεῖες ε καὶ ζ ποὺ συναντοῦν ἕναν κύκλο (σχ. 37-η) στὰ σημεῖα Α καὶ Β ἡ πρώτη, στὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἡ δεύτερη. Λέγω ὅτι τὰ (πρωτεύοντα) τόξα $\widehat{ΑΓ}$ καὶ $\widehat{ΒΔ}$ εἶναι ἴσα.

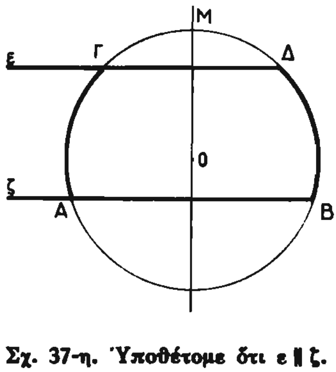
Καὶ ἀλήθεια, ἂς χαράξωμε τὴν κοινὴ κάθετο ΟΜ στὶς δυὸ παράλληλες χορδὲς ΑΒ καὶ ΓΔ. Σύμφωνα μὲ τοὺς παραγράφους 5 καὶ 6 θὰ ἔχωμε:

$$\widehat{ΑΜ} = \widehat{ΜΒ} \quad καὶ \quad \widehat{ΓΜ} = \widehat{ΜΔ},$$

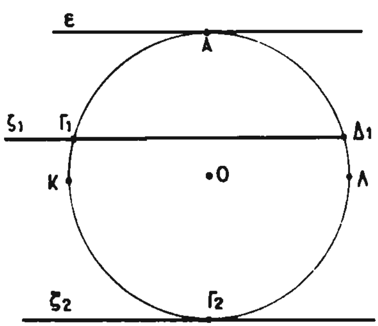
ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\widehat{ΑΜ} - \widehat{ΓΜ} = \widehat{ΜΒ} - \widehat{ΜΔ},$$

$$δηλαδὴ\ \widehat{ΑΓ} = \widehat{ΒΔ}.$$



Σχ. 37-η. Ὑποθέτομε ὅτι ε ∥ ζ.



Σχ. 37-θ. Ὑπόθεση: $ε \parallel ζ_1 \parallel ζ_2$. Συμπέρασμα: $\widehat{ΑΓ_1} = \widehat{ΑΔ_1}$, $\widehat{ΑΚΓ_2} = \widehat{ΑΛΓ_2}$.

Ὥστε, *δυὸ εὐθεῖες παράλληλες χωρίζουν (προσδιορίζουν) ἀπάνω σὲ μιὰ περιφέρεια ἴσα τόξα.*

Παρατήρηση. Εὔκολα βλέπομε ὅτι ἡ τελευταία πρόταση ἀληθεύει καὶ στὶς περιπτώσεις ὅπου ἡ μιὰ ἢ καὶ οἱ δυὸ παράλλῆλες εὐθεῖες ε καὶ ζ, ἀντὶ νὰ εἶναι τέμνουσες, εἶναι ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου (σχ. 37-θ).

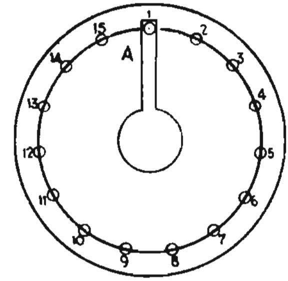
Ἀσκήσεις. 1. Ἕνα διαιρετικὸ μηχάνημα εἶναι ἐφοδιασμένο μὲ 3 δίσκους ποὺ ἔχουν ὁ καθένας τους 6 ἢ 7 κυκλικὲς καὶ ὁμόκεντρες μὲ τὸ δίσκο σειρὲς ἀπὸ ἰσαπόστατες τρύπες. (Τὸ σχ. 37-ι παριστάνει ἕναν τέτοιο δίσκο ἀλλὰ μία μόνο ἀπὸ τὶς 6 κυκλικὲς σειρὲς τρύπες ποὺ ἔχει. Πρβ. καὶ Μάθ. 17, Ἄσκ. 7):

1ος δίσκος μὲ 6 σειρὲς ἀπὸ 15, 16, 17, 18, 19, 20 τρύπες,

2ος δίσκος μὲ 7 σειρὲς ἀπὸ 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33 τρύπες,

3ος δίσκος μὲ 7 σειρὲς ἀπὸ 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49 τρύπες ἀντιστοίχως.

Πόσων μοιρῶν στροφὴ θὰ κάμη ὁ δείκτης Α (σχ. 37-ι), ἂν μετακινηθῆ κατὰ 6 τρύπες πάνω στὸν κύκλο μὲ τὶς 15 τρύπες; κατὰ 15 τρύπες πάνω στὸν κύκλο μὲ τὶς 41 τρύπες; κατὰ 50 τρύπες πάνω στὸν κύκλο μὲ τὶς 20 τρύπες; κτλ.



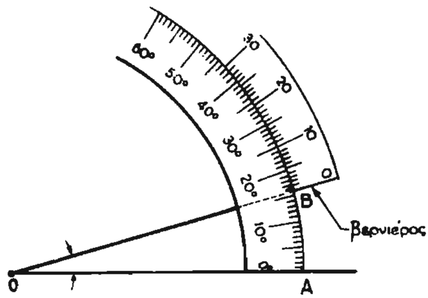
Σχ. 37-ι. Δίσκος ἑνὸς διαιρετικοῦ μηχανήματος.

2. Γιὰ νὰ μετρήσωμε μιὰ γωνία μὲ μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἀπὸ ἐκείνην ποὺ μποροῦμε νὰ πετύχωμε μ' ἕνα ἁπλὸ μοιρογνωμόνιο, χρησιμοποιοῦμε ἕνα γωνιόμετρο μὲ βερνιέρο· ἡ κατασκευή του βασίζεται στὴν ἴδια ἀρχὴ μὲ τὴν κατασκευὴ τοῦ βερνιέρου σ' ἕνα παχύμετρο. (Βλ. Τόμ. Α', Μάθ. 6 καὶ Τόμ. Β', Μάθ. 20, Ἄσκ. 3). Ὁ βερνιέρος ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 37-ια ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κυκλικὸ τόξο 29° διαιρεμένο σὲ 30 ἴσα μέρη, ἑπομένως κάθε διαίρεση τοῦ βερνιέρου ἀντιπροσωπεύει $\frac{29}{30}$ μιᾶς μοίρας, δηλαδὴ 58 πρῶτα λεπτά.

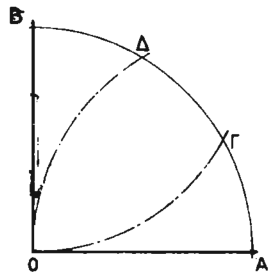
1η περίπτωση: τὸ 0 τοῦ βερνιέρου ἂς συμπίπτη μὲ τὴ διαίρεση 15 τοῦ κύκλου. Πόση εἶναι τότε ἡ γωνία $\widehat{AOB}$;

2η περίπτωση: τὸ 0 τοῦ βερνιέρου ἂς μὴ συμπίπτη μὲ καμμιὰ διαίρεση τοῦ κύκλου, ἀλλ' ἂς πέφτη ἀνάμεσα στὶς διαιρέσεις 15 καὶ 16 τοῦ κύκλου καὶ ἔστω ὅτι ἡ διαίρεση 8 τοῦ βερνιέρου συμπίπτει μὲ μιὰ διαίρεση τοῦ κύκλου. Ποιά εἶναι τότε ἡ διαφορὰ (σὲ πρῶτα λεπτὰ) μεταξὺ τῆς διαίρεσης 7 τοῦ βερνιέρου καὶ τῆς ἀμέσως προηγούμενης διαίρεσης τοῦ κύκλου; μεταξὺ τῆς διαίρεσης 6 τοῦ βερνιέρου καὶ τῆς ἀμέσως προηγούμενης διαίρεσης τοῦ κύκλου;... μεταξὺ τῆς διαίρεσης 0 τοῦ βερνιέρου καὶ τῆς ἀμέσως προηγούμενης διαίρεσης τοῦ κύκλου;

Ἑπομένως πόση εἶναι τώρα ἡ γωνία $\widehat{AOB}$;



Σχ. 37-ια. Χρησιμοποιώντας κύκλο διαιρεμένο σὲ μοῖρες καὶ βερνιέρο μετροῦμε τὴ γωνία $\widehat{AOB}$.



Σχ. 37-ιβ. Διαιροῦμε ἕνα τεταρτοκύκλιο σὲ 3 ἴσα μέρη.

3. Ὁ βερνιέρος «Brown & Sharpe» ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κυκλικὸ τόξο 23^0 διαιρεμένο σὲ 12 ἴσα μέρη, ἐπομένως κάθε διαίρεσή του ἀντιπροσωπεύει $\left(\frac{23}{12}\right)^\circ = \frac{23}{12}\cdot 60' = 115'$. Τὸ τόξο αὐτὸ μετακινεῖται κατὰ μῆκος ἑνὸς κύκλου διαιρεμένου σὲ μοῖρες, ὅπως καὶ παραπάνω. Δεῖξτε (μὲ τὴ μέθοδο τῆς προηγούμενης ἄσκησης) ὅτι χρησιμοποιώντας αὐτὸν τὸ βερνιέρο μετροῦμε μιὰ γωνία μὲ προσέγγιση 5′ (δηλαδὴ μ' ἕνα σφάλμα ποὺ εἶναι μικρότερο ἀπὸ 5 πρῶτα λεπτά).

4. Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα A καὶ B ἑνὸς τεταρτοκυκλίου (σχ. 37-ιβ) χαράζομε δυὸ περιφέρειες ποὺ νὰ περνοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ τεταρτοκυκλίου. Ἂς εἶναι Δ καὶ Γ τὰ σημεῖα ὅπου οἱ περιφέρειες αὐτὲς κόβουν τὸ τεταρτοκύκλιο. Δεῖξτε ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ χωρίζουν τὸ τεταρτοκύκλιο σὲ τρία ἴσα μέρη.

5. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο A μιᾶς περιφέρειας ποὺ ἔχει ἀκτίνα 50 mm χαράξτε μιὰ χορδὴ AB ποὺ ν' ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς περιφέρειας 35 mm.

6. Χαράξτε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB μήκους 5 cm καὶ πῆτε ποῦ πρέπει νὰ βρίσκεται τὸ κέντρο κάθε περιφέρειας ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B. Χαράξτε μιὰ τέτοια περιφέρεια γνωρίζοντας ὅτι ἔχει ἀκτίνα 7 cm.

7. Δεῖξτε ὅτι ἡ περιφέρεια ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὶς 3 κορυφὲς ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ἔχει τὸ κέντρο της στὸ μέσο τῆς ὑποτείνουσας.

8. Μιὰ εὐθεῖα τέμνει δυὸ ὁμόκεντρους κύκλους, τὸν ἕνα στὰ ση-

μεία Α καὶ Β, τὸν ἄλλο στὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Δεῖξτε ὅτι ΑΓ = ΔΒ καὶ ΑΔ = ΓΒ.

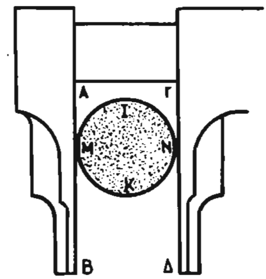
9. Δεῖξτε ὅτι, ἂν ἕνα τραπέζιο ἔχῃ τὶς 4 κορυφές του πάνω σὲ μιὰ καὶ τὴν ἴδια περιφέρεια, θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς (δηλαδὴ οἱ μὴ παράλληλες πλευρές του θὰ εἶναι ἴσες).

10. Ἐξηγῆστε γιατὶ μ' ἕνα παχύμετρο (σχ. 37-ιγ) μπορεῖ κανεὶς νὰ μετρήσῃ τὴ διάμετρο ἑνὸς κύκλου:

1ο. Θὰ ἐξετάσετε τί εἶναι οἱ εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΓΔ.

2ο. Θὰ συγκρίνετε τὰ τόξα $\overset{\frown}{\text{ΜΙΝ}}$ καὶ $\overset{\frown}{\text{ΜΚΝ}}$, χρησιμοποιώντας τὴν Παρατήρηση τοῦ § 7 αὐτοῦ τοῦ Μαθήματος.

3ο. Θὰ πῆτε γιατὶ τὸ τμῆμα ΜΝ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.



Σχ. 37-ιγ. Μέτρηση τῆς διαμέτρου μ' ἕνα παχύμετρο.

11. Δυὸ περιφέρειες κόβονται στὰ δυὸ σημεῖα Α καὶ Β. Ὡς πρὸς τὰ σημεῖα αὐτὰ ποιά εἶναι ἡ θέση τοῦ κέντρου Ο τῆς μιᾶς περιφέρειας; τοῦ κέντρου Ο΄ τῆς ἄλλης;

Ἐφαρμογή. Δεῖξτε ὅτι ὅταν δυὸ περιφέρειες τέμνωνται, τὰ δυὸ σημεῖα τομῆς εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δυὸ περιφερειῶν.

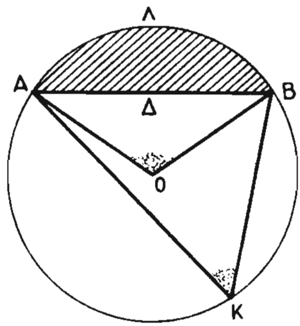
12. Νὰ σχεδιάσετε δυὸ περιφέρειες, μὲ ἀκτίνες 35 καὶ 60 mm ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε ἡ χορδὴ ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τους νὰ ἔχῃ μῆκος 15 mm.

Μάθημα 38.

Γωνία ἐσωγραμμένη σὲ κύκλο.

1. Ὁρισμοί. *Κυκλικὸ τμῆμα* εἶναι ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς κύκλου τὸ ὁποῖο περιορίζεται ἀπὸ ἕνα τόξο τοῦ κύκλου καὶ ἀπὸ τὴ χορδὴ αὐτοῦ τοῦ τόξου. Π.χ. τὸ τόξο $\overset{\frown}{A\Lambda B}$ καὶ ἡ χορδή του AB περιορίζουν τὸ κυκλικὸ τμῆμα ΑΛΒΔΑ ποὺ παριστάνεται διαγραμμισμένο στὸ σχ. 38-α.

Μιὰ γωνία λέγεται *ἐσωγραμμένη σὲ κύκλο*, ὅταν ἔχῃ τὴν κορυφή της στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου καὶ οἱ πλευρές της εἶναι χορδὲς τοῦ κύκλου. Π.χ. ἡ $\widehat{AKB}$ εἶναι ἐσωγραμμένη στὸν κύκλο τοῦ σχ. 38-α. Τὸ τόξο $\overset{\frown}{A\Lambda B}$ ποὺ ἡ ἐσωγραμμένη γωνία $\widehat{AKB}$ ξεχωρίζει (ἀποκόπτει) πάνω στὴν περιφέρεια λέγεται *ἀντίστοιχό της τόξο*. Τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο μὲ τὴν ἐσωγραμμένη γωνία $\widehat{AKB}$ ἔχει ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$· γι' αὐτὸ τὴν ἐπίκεντρη αὐτὴ γωνία θὰ τὴ λέμε *ἀντίστοιχη* τῆς ἐσωγραμμένης $\widehat{AKB}$.



Σχ. 38-α.

Εἰδικότερα ἡ γωνία $\widehat{AKB}$ λέγεται *ἐσωγραμμένη στὸ κυκλικὸ τμῆμα ΑΚΒΛΑ*, γιατὶ ἡ κορυφή της K εἶναι σημεῖο τοῦ τόξου τοῦ τμήματος καὶ οἱ πλευρές της περνοῦν ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τόξου. Τὸ τόξο $\overset{\frown}{A\Lambda B}$, τὸ ἀντίστοιχο τῆς γωνίας $\widehat{AKB}$, καὶ τὸ τόξο $\overset{\frown}{AKB}$ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, ὅπου εἶναι ἐσωγραμμένη ἡ $\widehat{AKB}$, ἀποτελοῦν μαζὶ ὁλόκληρη τὴν περιφέρεια.

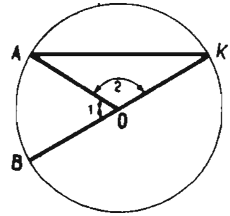
2. Ἡ ἐσωγραμμένη γωνία $\widehat{AKB}$ εἶναι ἴση μὲ τὴ μισὴ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$.

Αὐτὸ φαίνεται εὔκολα στὴν περίπτωση τοῦ σχ. 38-β, ὅπου μιὰ πλευρὰ τῆς ἐσωγραμμένης γωνίας (ἡ KB) περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο O τοῦ κύκλου. Καὶ ἀλήθεια:

$\widehat{AKO} = \widehat{OAK}$, ἄρα $2\,\widehat{AKO} + \widehat{O}_2 = 180^\circ$.

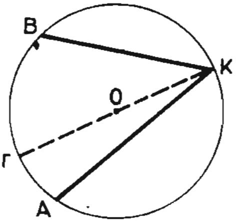
Ἐξ ἄλλου $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 180^\circ$. Ἑπομένως

$2\,\widehat{AKO} = 2\,\widehat{AKB} = \widehat{O}_1$ καὶ $\widehat{AKB} = \widehat{O}_1/2$.

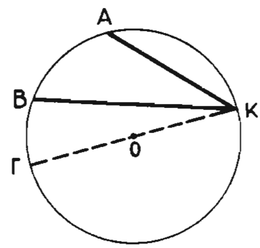


Σχ. 38-β.

Ἀπὸ τὴν περίπτωση αὐτὴ προχωροῦμε στὴν περίπτωση τοῦ σχ. 38-γ, ὅπου ἡ γωνία $\widehat{AKB}$ εἶναι ἄθροισμα τῶν δυὸ γωνιῶν $\widehat{AK\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma KB}$, καθὼς καὶ στὴν περίπτωση τοῦ σχ. 38-δ, ὅπου ἡ γωνία $\widehat{AKB}$ εἶναι διαφορὰ τῶν γωνιῶν $\widehat{AK\Gamma}$ καὶ $\widehat{BK\Gamma}$.



Σχ. 38-γ.



Σχ. 38-δ.

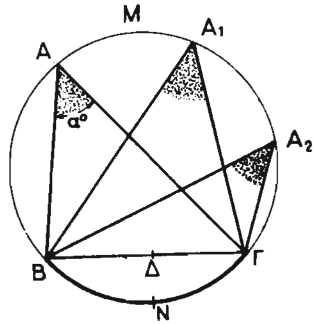
Συνδυάζοντας τώρα τὴν παραπάνω ἰδιότητα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸ Μάθημα 37, § 2 γιὰ τὶς ἐπίκεντρες γωνίες, φθάνομε στὴν ἀκόλουθη πρόταση:

Ὁ ἀριθμὸς ποὺ μετρᾶ, π.χ. σὲ μοῖρες, μιὰν ἐσωγραμμένη γωνία $\widehat{AKB}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸ μισὸ τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ μετρᾶ, ἐπίσης σὲ μοῖρες, τὸ ἀντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$ τῆς ἐσωγραμμένης γωνίας.

3. Ἐφαρμογές.

1η. Ὅλες οἱ γωνίες οἱ ἐσωγραμμένες στὸ ἴδιο κυκλικὸ τμῆμα εἶναι μεταξύ τους ἴσες.

Π.χ. οἱ διάφορες γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$,... ποὺ εἶναι ἐσωγραμμένες στὸ κυκλικὸ τμῆμα ΒΜΓΔΒ (σχ. 38-ε) εἶναι μεταξύ τους ἴσες· ὁ ἀριθμὸς α^0 ποὺ τὶς μετρᾶ σὲ μοῖρες εἶναι ἴσος μὲ τὸ μισὸ ἀριθμὸ τῶν μοιρῶν τοῦ ἀντίστοιχου τόξου τους $\widehat{ΒΝΓ}$ (τὸ $\widehat{ΒΝΓ}$ σὲ μοῖρες εἶναι ἴσο μὲ $2\alpha^0$).



Σχ. 38-ε. $\widehat{A} = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \ldots$

Ἀντίστροφα, μιὰ γωνία α^0 μὲ πλευρὲς ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ μὲ κορυφὴ Κ ποὺ βρίσκεται στὴν ἴδια μεριὰ τῆς εὐθείας ΒΓ μὲ τὸ τόξο $\widehat{ΒΜΓ}$, θὰ ἔχῃ ἀναγκαστικὰ τὴν κορυφή της Κ πάνω στὸ τόξο αὐτό, δηλαδὴ θὰ εἶναι ἐσωγραμμένη στὸ κυκλικὸ τμῆμα ΒΜΓΔΒ.

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι οἱ γωνίες ποὺ εἶναι ἐσωγραμμένες στὸ ἄλλο κυκλικὸ τμῆμα ΒΝΓΔΒ μὲ τὴν ἴδια χορδὴ ΒΓ, μετριοῦνται σὲ μοῖρες ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ $180^0 - \alpha^0$ ποὺ μετρᾶ τὸ μισὸ τοῦ τόξου $\widehat{ΒΜΓ}$ ($\widehat{ΒΜΓ} = 360^0 - 2\alpha^0$). Ἑπομένως οἱ γωνίες αὐτὲς εἶναι παραπληρωματικὲς τῶν γωνιῶν ποὺ εἶναι ἐσωγραμμένες στὸ πρῶτο κυκλικὸ τμῆμα ΒΜΓΔΒ.

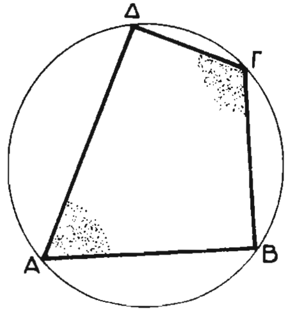
*2η. **Ἕνα τετράπλευρο λέγεται ἐσωγραμμένο σὲ κύκλο, ὅταν οἱ κορυφές του βρίσκωνται πάνω στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου (σχ. 38-ϛ).***

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ καὶ ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω προκύπτει ἡ ἀκόλουθη (χαρακτηριστική) ἰδιότητα τοῦ ἐσωγραμμένου τετραπλεύρου:

Οἱ ἀπέναντι γωνίες ἑνὸς ἐσωγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικές, δηλαδὴ ἔχουν ἄθροισμα 180°.

Ἔτσι στὸ τετράπλευρο τοῦ σχήματος 38-ς ἔχομε:

$$\widehat{A}+\widehat{\Gamma}=180^\circ \quad \text{καὶ} \quad \widehat{B}+\widehat{\Delta}=180^\circ.$$



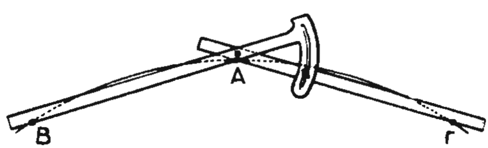
Σχ. 38-ς. Τετράπλευρο ἐσωγραμμένο σὲ κύκλο.

Ἡ ἰδιότητα εἶναι χαρακτηριστική, γιατὶ ἀληθεύει καὶ ἡ ἀντίστροφη πρόταση:

Ἂν δυὸ ἀπέναντι γωνίες ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικὲς (ἔχουν ἄθροισμα 180°), τότε τὸ τετράπλευρο μπορεῖ νὰ ἐσωγραφῆ σὲ κύκλο (τὸ τετράπλευρο εἶναι ἐγγράψιμο σὲ κύκλο).

3η. Μᾶς δίνουν τὰ ἄκρα Β, Γ ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου καὶ ἕνα ἀκόμη σημεῖο του Α. Μποροῦμε τότε νὰ προσδιορίσωμε ὅσα ἄλλα σημεῖα θέλομε αὐτοῦ τοῦ τόξου ὡς ἑξῆς:

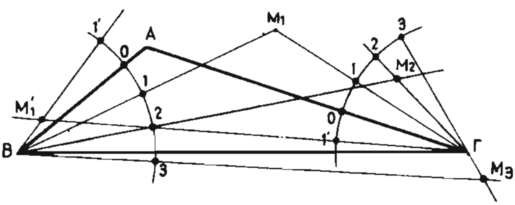
Κάνομε τὶς δυὸ ξύλινες πῆχες (σχ. 38-ζ), ποὺ συνδέονται



Σχ. 38-ζ. Χρησιμοποιώντας δυὸ ξύλινες πῆχες προσδιορίζομε σημεῖα τοῦ τόξου $\widehat{B A \Gamma}$.

μὲ μιὰν ἄρθρωση, νὰ σχηματίζουν γωνία ἴση μὲ τὴ $\widehat{B A \Gamma}$ καί, ἀφοῦ σταθεροποιήσωμε μ' ἕναν σφιγκτήρα αὐτὴ τὴ γωνία, μετακινοῦμε τὸ ὄργανο ἔτσι ὅμως ὥστε οἱ ἀκμὲς τῶν δυὸ πηχῶν νὰ περνοῦν πάντοτε ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Οἱ διάφορες θέσεις ποὺ παίρνει τότε τὸ σημεῖο τομῆς αὐτῶν τῶν δυὸ ἀκμῶν, μᾶς δίνουν τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ τόξου $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}}$ τὰ ὁποῖα θέλομε νὰ προσδιορίσωμε.

4η. Γιὰ νὰ χαράξουν καὶ ἄλλα σημεῖα ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου ποὺ περνᾶ ἀπὸ τρία δοσμένα σημεῖα Β, Α, Γ, οἱ λεβητοποιοὶ χρησιμοποιοῦν τὴ μέθοδο τὴν ὁποία ὑποδείχνει τὸ σχῆμα 38-η.



Σχ. 38-η. Χαράξτε μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα δυὸ τόξα ποὺ ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Πάρτε πάνω στὸ καθένα ἀπὸ τὰ δυὸ αὐτὰ τόξα τὶς ἴδιες ἴσες διαιρέσεις καὶ ἀριθμῆστε τις κατὰ σειρὰ μὲ ..., 1', 0, 1, 2, ... ἀλλὰ μὲ ἀντίστροφη φορὰ (τὰ 0 τῶν δυὸ διαβαθμίσεων νὰ συμπίπτουν μὲ τὰ σημεῖα ὅπου οἱ ἡμιευθεῖες ΒΑ καὶ ΓΑ τέμνουν τὰ 2 τόξα). Οἱ εὐθεῖες Β — 1 καὶ Γ — 1 κόβονται τότε σ' ἕνα σημεῖο M_1, ποὺ εἶναι σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}}$. Τὸ ἴδιο ἀληθεύει γιὰ τὶς εὐθεῖες Β — 1' καὶ Γ — 1', Β — 2 καὶ Γ — 2, κτλ.

Ἡ δικαιολογία τῆς κατασκευῆς προκύπτει ἀπὸ τὴν ἑξῆς παρατήρηση: Οἱ γωνίες στὴ βάση ΒΓ τοῦ τριγώνου $M_1\mathrm{B\Gamma}$ ἔχουν ἄθροισμα ἴσο πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν στὴ βάση ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπομένως ἡ $\widehat{\mathrm{B}M_1\Gamma}$ εἶναι ἴση μὲ τὴν $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}}$. Ὅμοια $\widehat{\mathrm{B}M_2\Gamma} = \widehat{\mathrm{BA\Gamma}}$, κτλ.

Ἀσκήσεις. *1.* Ἂς εἶναι ΟΑ καὶ ΟΒ οἱ ἀκρινὲς ἀκτίνες ἑνὸς τεταρτοκυκλίου. Κατασκευάστε μιὰ γωνία 45° ποὺ οἱ δυὸ πλευρές της περνοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Δεῖξτε ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει πολλὲς λύσεις (ἄπειρες μάλιστα λύσεις). Ἀπ' ὅλες αὐτὲς βρῆτε ἐκείνην ὅπου ἡ κορυφὴ τῆς ζητούμενης γωνίας βρίσκεται πάνω σὲ μιὰ προέκταση τοῦ τμήματος ΟΑ.

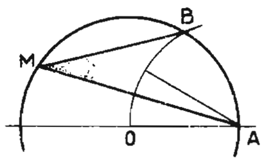
2. Χαράξτε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τὸν περιγραμμένο κύκλο, δηλ. ἐκεῖνον ποὺ ἡ περιφέρειά του περνᾶ ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου. Ἑνῶστε ὕστερα ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ

πρωτεύοντος τόξου $\widehat{AB}$ μὲ τὶς κορυφὲς τοῦ τριγώνου. Ὑπολογίστε τώρα τὶς γωνίες $\widehat{AM\Gamma}$, $\widehat{\Gamma MB}$ καὶ $\widehat{AMB}$.

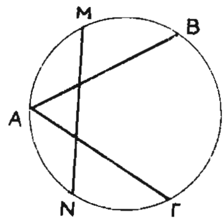
3. Πῶς διαπιστώνετε ὅτι ἕνα δοσμένο τετράπλευρο μπορεῖ νὰ ἐσωγραφῆ σὲ κύκλο;

Ἀπὸ τὰ τετράπλευρα: ὀρθογώνιο, ρόμβο, τετράγωνο ποιό δὲν μπορεῖ νὰ ἐσωγραφῆ σὲ κύκλο:

4. Τὸ σημεῖο Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς μεγάλης περιφέρειας τοῦ σχήματος 38-θ καὶ δὲν βρίσκεται πάνω στὸ τόξο της $\widehat{AB}$. Ὑπολογίστε τὴ γωνία $\widehat{AMB}$.



Σχ. 38-θ.



Σχ. 38-ι.

5. Δυὸ τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Gamma}$ ἑνὸς κύκλου εἶναι 120° τὸ καθένα (σχ. 38-ι). Δεῖξτε ὅτι ἡ χορδὴ ΜΝ ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν τόξων αὐτῶν χωρίζεται σὲ 3 ἴσα μέρη ἀπὸ τὶς χορδὲς ΑΒ καὶ ΑΓ.

6. Δεῖξτε ὅτι γιὰ νὰ σχεδιάσωμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζοντας μία πλευρά του $AB = 50$ mm, τὴν ἀπέναντι γωνία $\widehat{\Gamma} = 35^\circ$ καὶ τὸ ὕψος $\Gamma H = 30$ mm ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ Γ, μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε ὡς ἑξῆς:

1ο. Μὲ κορυφὲς τὰ ἄκρα ἑνὸς τμήματος ΑΒ μήκους 50 mm καὶ πρὸς τὴν ἴδια μεριὰ τῆς εὐθείας ΑΒ κατασκευάζομε δυὸ γωνίες $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$ ποὺ ἔχουν τὸ τμῆμα ΑΒ γιὰ κοινὴ πλευρὰ καὶ ἄθροισμα $\widehat{A} + \widehat{B} = 145^\circ = 180^\circ - 35^\circ$.

2ο. Προσδιορίζομε τὸ σημεῖο τομῆς Μ τῶν δυὸ ὄχι κοινῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$.

3ο. Χαράζομε τὴν περιφέρεια ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ 3 σημεῖα Α, Β, Μ.

4ο. Προσδιορίζομε τὰ σημεῖα τομῆς Γ_1 καὶ Γ_2 τῆς περιφέρειας αὐτῆς μὲ τὴν εὐθεία ποὺ εἶναι $\parallel AB$, βρίσκεται στὴν ἴδια μεριὰ τῆς εὐθείας ΑΒ μὲ τὸ σημεῖο Μ καὶ ἔχει ἀπόσταση 30 mm ἀπὸ τὴν ΑΒ. Τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ_1$ καὶ $ΑΒΓ_2$ εἶναι ἴσα μὲ τὸ τρίγωνο ποὺ θέλαμε νὰ σχεδιάσωμε.

Μάθημα 39.

Ἐφαρμογὲς τῶν ἐσωγραμμένων γωνιῶν.

1. Ἀπὸ τὸ προηγούμενο Μάθημα συμπεραίνομε ἀμέσως τὴν ἑξῆς πρόταση:

Ἂν μιὰ γωνία εἶναι ἐσωγραμμένη σὲ ἡμικύκλιο (μὲ ἄλλα λόγια: ἂν ἔχῃ ἀντίστοιχο τόξο μιὰν ἡμιπεριφέρεια), **τότε θὰ εἶναι ὀρθὴ (90°).**

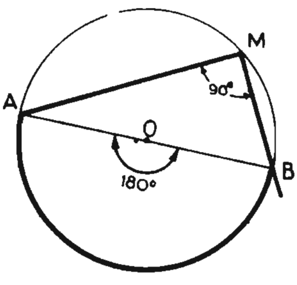
Ἀληθεύει καὶ ἡ ἀντίστροφη πρόταση:

Ἂν μιὰ γωνία εἶναι ἐσωγραμμένη σὲ κύκλο καὶ ὀρθὴ (90°), **τότε τὸ ἀντίστοιχο τόξο της εἶναι ἡμιπεριφέρεια (180°).**

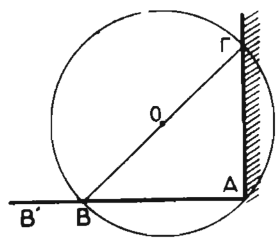
Θὰ γνωρίσωμε τώρα μερικὲς ἐφαρμογὲς αὐτῆς τῆς ἰδιότητας.

2. Πρόβλημα. *Στὸ ἄκρο Α μιᾶς ἡμιευθείας ΑΒ′ νὰ χαραχθῇ ἡ κάθετος σ' αὐτήν.*

Γράφομε, μὲ ὁποιαδήποτε ἀκτίνα, μιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ



Σχ. 39-α. $\widehat{AMB} = 90°$.



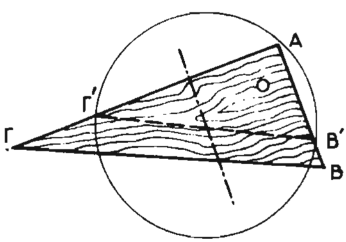
Σχ. 39-β. Χάραξη καθέτου στὸ ἄκρο μιᾶς ἡμιευθείας.

περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α καὶ ποὺ νὰ κόβῃ τὴν ἡμιευθεία ΑΒ′ σὲ ἕνα δεύτερο σημεῖο, ἔστω τὸ Β (σχ. 39-β). Ὕστερα ἑνώνομε τὸ Β μὲ τὸ κέντρο Ο τῆς περιφέρειας καὶ προσδιορίζομε τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς Γ τῆς εὐθείας ΒΟ μὲ τὴν περιφέρεια· ἡ εὐθεία ΑΓ εἶναι τότε κάθετη στὴν ἡμιευθεία ΑΒ΄ στὸ σημεῖο Α, γιατὶ ἡ γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ εἶναι ἐσωγραμμένη στὸ ἡμικύκλιο ΒΑΓΟΒ.

Αὐτὴ ἡ κατασκευὴ τῆς καθέτου στὸ σημεῖο Α εἶναι εἰδικὰ χρήσιμη στὴν περίπτωση ποὺ τὰ ὅρια τοῦ σχεδίου μας δὲν ἐπιτρέπουν προέκταση τοῦ Β΄Α πέραν ἀπὸ τὸ Α.

3. Πρόβλημα. *Μ' ἕνα ὀρθόγωνο (τρίγωνο) νὰ προσδιορισθῆ τὸ (ἄγνωστο) κέντρο ἑνὸς κύκλου.*

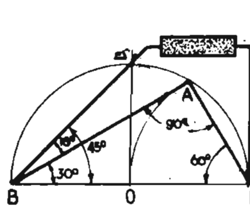
Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κέντρο τοῦ κύκλου (σχ. 39-γ), τοποθετοῦμε τὴν κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογώνου πάνω στὴν περιφέρεια, σημειώνομε τὰ σημεῖα Β΄ καὶ Γ΄ ὅπου οἱ δυὸ κάθετες πλευρὲς τοῦ ὀρθογώνου συναντοῦν τὴν περιφέρεια καὶ χαράζομε τὸ τμῆμα Β΄Γ΄. Τὸ τμῆμα αὐτὸ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου (περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο του). Ἀλλάζοντας τώρα τὴ θέση τοῦ ὀρθογώνου προσδιορίζομε μιὰ δεύτερη διάμετρο τοῦ κύκλου.



Σχ. 39-γ. Προσδιορίζομε τὸ κέντρο ἑνὸς κύκλου χρησιμοποιώντας ὀρθόγωνο (τρίγωνο).

Τὸ σημεῖο τομῆς τῶν δυὸ διαμέτρων εἶναι τὸ ζητούμενο κέντρο.

4. Ὁ γωνιογνώμονας εἶναι ἕνα ὄργανο ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ χαράξωμε γωνίες μὲ τὰ ἀκόλουθα ἀξιοσημείωτα μεγέθη: 15°, 30°, 45°, 60°, 90°, ἑπομένως καὶ τὶς παραπληρωματικές τους: 165°, 150°, 135°, 120°. Ἡ κατασκευή του βασίζεται στὸ ἀκόλουθο σχέδιο (σχ. 39-δ):



Σχ. 39-δ. Γωνιογνώμονας.

1°. Χαράζομε ἕνα ἡμικύκλιο καὶ τὴν κάθετο ΟΔ στὸ μέσο τῆς διαμέτρου του ΒΓ. Τὸ τρίγωνο ΟΒΔ εἶναι ὀρθογώνιο καὶ ἰσόσκελο, ἄρα

$$\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{OB\Delta} = \widehat{O\Delta B} = 45^\circ.$$

2ο· Χαράζομε τὴ χορδὴ $\Gamma A = \Gamma O$. Τὸ τρίγωνο $OA\Gamma$ εἶναι ἰσόπλευρο, ἄρα

$$\widehat{O\Gamma A} = \widehat{B\Gamma A} = 60^\circ.$$

3ο· Ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ἐσωγραμμένη σὲ ἡμικύκλιο, ἄρα

$$\widehat{BA\Gamma} = 90^\circ.$$

4ο· Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $BA\Gamma$ οἱ δυὸ ὀξεῖες γωνίες ἔχουν ἄθροισμα 90° (εἶναι συμπληρωματικές), ἄρα

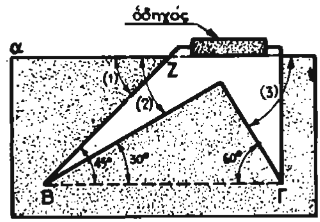
$$\widehat{\Gamma BA} = 90^\circ - \widehat{B\Gamma A} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

5ο· Ἀφαιρώντας βρίσκομε:

$$\widehat{AB\Delta} = \widehat{\Gamma B\Delta} - \widehat{\Gamma BA} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

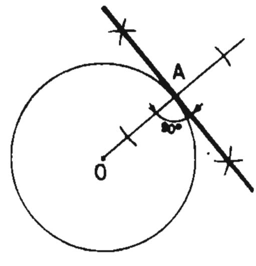
Στὸν γωνιογνώμονα εἶναι στερεωμένος ἕνας «ὁδηγὸς» ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μετακινοῦμε τὸ ὄργανο κατὰ μῆκος τῆς (ἴσιας) ἀκμῆς α ἑνὸς ἐπίπεδου κομματιοῦ ἔτσι ποὺ τὸ τμῆμα $B\Gamma$ νὰ παραμένη παράλληλο πρὸς τὴν ἀκμὴ αὐτή. Τὸ σχ. 39-ε δείχνει πῶς χρησιμοποιοῦμε τότε τὸ ὄργανο.

Ἂς παρατηρήσωμε σχετικὰ ὅτι ἡ γωνία (1) (βλ. σχ. 39-ε) εἶναι 45°, γιατὶ αὐτὴ καὶ ἡ γωνία 45° τοῦ γωνιογνώμονα εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων α καὶ $B\Gamma$ μὲ τέμνουσα τὴ BZ. Γιὰ ὅμοιο λόγο ἡ γωνία (2) εἶναι 30° καὶ ἡ γωνία (3) 60°.



Σχ. 39-ε. Χάραξη μερικῶν γωνιῶν μὲ τὸν γωνιογνώμονα.

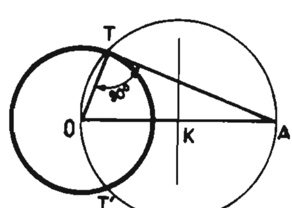
5. Χάραξη ἐφαπτομένων σ' ἕναν κύκλο. Ὅπως ξέρομε ἀπὸ τὸν Τόμ. Α΄, Μάθ. 31, *ἐφαπτομένη* σ' ἕναν κύκλο εἶναι μιὰ εὐθεία ποὺ ἔχει ἕνα μόνο κοινὸ σημεῖο μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Μιὰ τέτοια εὐθεία εἶναι κάθετη σὲ μιὰν ἀκτίνα OA τοῦ κύκλου στὸ ἄκρο της Α (σχ. 39-ς)· τὸ Α λέγεται *σημεῖο ἐπαφῆς* τῆς ἐφαπτομένης, γιατὶ εἶναι τὸ σημεῖο ὅπου ἡ ἐφαπτομένη ἀγγίζει τὸν κύκλο. Ὅταν λοιπὸν μᾶς δίνουν πάνω στὴν περιφέρεια τὸ σημεῖο ἐπαφῆς Α, ἡ χάραξη τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου στὸ σημεῖο Α περιορίζεται στὴ γνωστή μας χάραξη μιᾶς εὐθείας κάθετης στὴν ΟΑ στὸ σημεῖο της Α.



Σχ. 39-ς. Χάραξη μιᾶς ἐφαπτομένης σὲ δοσμένο σημεῖο περιφέρειας.

Θὰ ἰδοῦμε τώρα πῶς χαράζονται οἱ ἐφαπτομένες σ' ἕναν κύκλο ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α (σχ. 39-ζ) ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸν κύκλο.

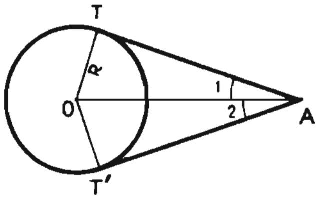
Ἂς φαντασθοῦμε πὼς ἡ ἐφαπτομένη ΑΤ ἔχει χαραχθῆ· τότε ἡ γωνία $\widehat{OTA}$ θὰ εἶναι ὀρθή. Ἑπομένως τὸ σημεῖο Τ θὰ βρίσκεται πάνω στὴν περιφέρεια ποὺ ἔχει διάμετρο τὸ τμῆμα ΟΑ. Γιὰ νὰ προσδιορίσωμε λοιπὸν τὸ σημεῖο Τ, ἀρκεῖ νὰ ἑνώσωμε τὸ Ο μὲ τὸ Α, νὰ βροῦμε τὸ μέσο Κ τοῦ τμήματος ΟΑ καὶ νὰ χαράξωμε τὴν περιφέρεια ποὺ ἔχει κέντρο τὸ Κ καὶ ἀκτίνα ἴση μὲ ΟΑ/2. Ἀπὸ τὸ σχῆμα γίνεται φανερὸ πὼς ἡ περιφέρεια αὐτὴ ἔχει δυὸ κοινὰ σημεῖα Τ καὶ Τ′ μὲ τὸν κύκλο ποὺ μᾶς δόθηκε. Ὥστε ἀπὸ τὸ (ἐξωτερικὸ) σημεῖο Α μποροῦμε νὰ χαράξωμε τώρα *δυὸ ἐφαπτομένες* ΑΤ καὶ ΑΤ′ στὸν κύκλο.



Σχ. 39-ζ. Χάραξη ἐφαπτομένων ἀπὸ ἕνα ἐξωτερικὸ σημεῖο.

6. Παραβάλλοντας τὰ δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΤΟ καὶ ΑΤ′Ο (σχ. 39-η) παρατηροῦμε πὼς ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα ΟΑ κοινὴ καὶ μιὰν πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας τους ἴση (ΟΤ = ΟΤ′ = R). Ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ εἶναι ἴσα (1η περίπτωση ἰσότητας τῶν ὀρθογώνιων τριγώνων, Μάθ. 32). Ἑπομένως θὰ ἔχωμε:

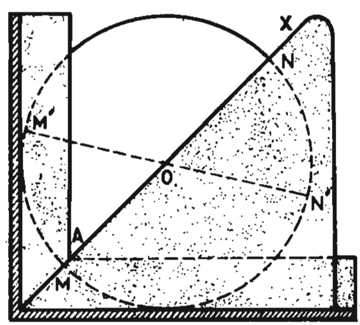
$1^{\text{ο}}$ $AT = AT'$ καὶ $2^{\text{ο}}$ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.



Σχ. 39-η.

Ὥστε, ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ ἕναν κύκλο, χαράξωμε ὡς τὸν κύκλο τὶς δυὸ ἐφαπτομένες, **τότε οἱ ἐφαπτομένες αὐτὲς θὰ εἶναι ἴσες καὶ ἡ εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὸ σημεῖο μὲ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας των.**

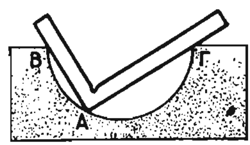
7. Ἐφαρμογή. Τὸ σχῆμα 39-θ παριστάνει ἕνα ὀρθόγωνο μὲ δυὸ σκέλη ποὺ ἡ γωνία τους ἔχει γιὰ διχοτόμο τὴν ἀκμὴ ΑΧ ἑνὸς τριγωνικοῦ ἐλάσματος (μιᾶς τριγωνικῆς λάμας) προσαρμοσμένου στὸ ὀρθόγωνο. Τὸ ὄργανο αὐτὸ χρησιμεύει γιὰ τὴ χάραξη διαμέτρων, καὶ ἑπομένως γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τοῦ κέντρου κυκλικῶν δίσκων, ὡς ἑξῆς: Φέρνομε, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 39-θ, τὰ δυὸ σκέλη τοῦ ὀρθογώνου σὲ ἐπαφὴ μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κυκλικοῦ δίσκου· τότε ἡ ἀκμὴ ΑΧ τοῦ ἐλάσματος θὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ δίσκου καί, ἀκολουθώντας την, μποροῦμε νὰ χαράξωμε μιὰ πρώτη διάμετρο τοῦ δίσκου. Μετακινώντας τὸ ὄργανο χαράζομε μιὰ δεύτερη διάμετρο τοῦ δίσκου. Τὸ σημεῖο τομῆς τῶν δυὸ διαμέτρων εἶναι τὸ ζητούμενο κέντρο τοῦ δίσκου.



Σχ. 39-θ. Ὀρθόγωνο μὲ διχοτόμο γιὰ χάραξη διαμέτρων.

Ἀσκήσεις. *1.* Πῶς καὶ γιατί μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε ἕνα ὀρθόγωνο (σχ. 39-ι), γιὰ νὰ ἐλέγξωμε ἂν μιὰ αὐλάκωση (μιὰ εκγλυφὴ) εἶναι ἡμικυκλική; Τί θὰ συμβῆ, ἂν ἡ αὐλάκωση δὲν εἶναι ἡμικυκλική, εἰδικὰ ἂν τὸ τόξο ΒΑΓ εἶναι μικρότερο ἢ μεγαλύτερο ἀπὸ μιὰν ἡμιπεριφέρεια; (Νὰ κάμετε τὰ ἀντίστοιχα σχήματα.)

2. Δυὸ ἀπέναντι γωνίες ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἀντίστοιχα 25° καὶ 155^0. Ἐξηγῆστε γιατί τὸ τετράπλευρο μπορεῖ νὰ ἐσωγραφῆ σὲ κύκλο καὶ πῆτε ποῦ βρίσκεται τὸ κέντρο αὐτοῦ τοῦ κύκλου. (Νὰ κάμετε ἕνα ἀντίστοιχο σχῆμα.)



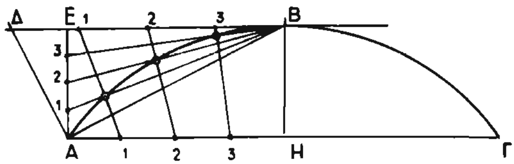
Σχ. 39-ι.
Ἔλεγχος μιᾶς ἡμικυκλικῆς αὐλάκωσης.

3. Ἀπὸ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α μιᾶς περιφέρειας χαράζετε μιὰν ὁποιαδήποτε χορδὴ ΑΜ καί, ὕστερα, τὴν κάθετο στὸ ἄκρο της Μ. Δεῖξτε ὅτι, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ χορδὴ ΑΜ, ἡ κάθετος σ' αὐτὴν στὸ Μ θὰ κόβη τὴν περιφέρεια στὸ ἴδιο πάντα σημεῖο.

4. Κατασκευάστε ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιο ξέροντας τὴ μεγάλη του βάση 70 mm, τὴ μικρή του βάση 40 mm καθὼς καὶ ὅτι οἱ εὐθεῖες ποὺ ἑνώνουν ἕνα ἄκρο τῆς μικρῆς βάσης μὲ τὰ δυὸ ἄκρα τῆς μεγάλης, σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90°.

5. Ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ (μεγάλη βάση ἡ ΑΒ, μικρὴ βάση ἡ ΓΔ) εἶναι τέτοιο ὥστε ἡ γωνία $\widehat{A\Delta B}$ νὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς μεγάλης βάσης. Ὑπολογίστε τὶς γωνίες αὐτοῦ τοῦ τραπεζίου ξέροντας ὅτι $\widehat{B} = \omega''$. Σχεδιάστε ὕστερα ἕνα τέτοιο τραπέζιο παίρνοντας τὴν $AB = 80$ mm καὶ τὴ $\Delta\Gamma = 60$ mm.

6. Ὅταν ξέρετε τὴ χορδὴ ΑΓ καὶ τὸ «βέλος» ΒΗ (δηλαδὴ τὸ τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὸ μέσο Η τῆς χορδῆς μὲ τὸ μέσο Β τοῦ τόξου) ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου $\widehat{AB\Gamma}$ μὲ μεγάλη ἀκτίνα (τόσο μεγάλη ὥστε τὸ κέντρο τοῦ τόξου νὰ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὰ ὅρια τοῦ χαρτιοῦ σας), τότε μπορεῖτε νὰ προσδιορίσετε ὁσαδήποτε ἄλλα σημεῖα θέλετε τοῦ τόξου μὲ τὴν ἀκόλουθη μέθοδο (σχ. 39-ια):



Σχ. 39-ια.

1ο. Χαράζετε τὸ τμῆμα ΑΒ καὶ φέρνετε τὴ ΒΔ παράλληλη πρὸς τὴν ΑΓ, τὴν ΑΔ κάθετη στὴν ΑΒ, τέλος τὴν ΑΕ κάθετη στὴ ΒΔ.

2ο. Χωρίζετε τὸ καθένα ἀπὸ τὰ τρία τμήματα ΑΗ, ΒΔ, ΑΕ στὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἴσων κομματιῶν, π. χ. σὲ 4 ἴσα κομμάτια, καὶ ἀριθμεῖτε τὶς διαιρέσεις ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα. Ὕστερα ἑνώνετε μὲ εὐθεῖες τὸ σημεῖο Β μὲ τὰ διαιρετικὰ σημεῖα τοῦ ΑΕ καὶ δυὸ - δυὸ τὰ διαιρετικὰ σημεῖα τῶν τμημάτων ΑΗ καὶ ΒΔ ποὺ πῆραν τὸν ἴδιο ἀριθμό.

3ο. Τότε οἱ εὐθεῖες Β — 1 καὶ 1 — 1 (μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ 1) κόβονται σ' ἕνα σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{ΑΒΓ}$. Ὅμοια οἱ εὐθεῖες Β — 2 καὶ 2 — 2 καθὼς καὶ οἱ Β — 3 καὶ 3 — 3.

Ἀφοῦ προσδιορίσετε ἔτσι ἀρκετὰ σημεῖα τοῦ τόξου $\widehat{ΑΒΓ}$, μπορεῖτε μὲ καλὴ προσέγγιση νὰ χαράξετε τὸ τόξο ποὺ περνᾶ ἀπ' αὐτὰ εἴτε μ' ἐλεύθερη σχεδίαση εἴτε χρησιμοποιώντας ἕνα καμπυλόγραμμο χάρακα.

7. Διαιρέστε μιὰ περιφέρεια σὲ 3 ἴσα μέρη καὶ φέρτε τὶς ἐφαπτομένες τῆς περιφέρειας στὸ καθένα ἀπὸ τὰ 3 διαιρετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ δείξετε ὅτι τὸ τρίγωνο ποὺ θὰ σχηματισθῆ ἀπὸ τὶς ἐφαπτομένες αὐτὲς εἶναι ἰσόπλευρο καὶ νὰ συγκρίνετε τὴν περίμετρό του μὲ τὴν περίμετρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

8. Σᾶς δίνουν ἕναν κύκλο, ποὺ ἔχει κέντρο τὸ σημεῖο Ο καὶ ἀκτίνα R, καθὼς καὶ ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπὸ αὐτόν. Χαράξτε μιὰ περιφέρεια μὲ κέντρο τὸ Ο καὶ ἀκτίνα 2R καθὼς καὶ μιὰν ἄλλη ποὺ ἔχει κέντρο τὸ Α καὶ ἀκτίνα ΑΟ· ἂς εἶναι Β καὶ Γ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν δυὸ αὐτῶν περιφερειῶν ποὺ χαράξατε. Δεῖξτε ὅτι οἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων ΟΒ καὶ ΟΓ εἶναι ἐφαπτομένες τοῦ δοσμένου κύκλου καὶ ὅτι περνοῦν ἀπὸ τὸ σημεῖο Α.

9. Μὲ ἀκτίνα R = 50 mm χαράξτε ἕναν κύκλο. Ὕστερα βρῆτε ἕνα σημεῖο ἀπὸ ὅπου μπορεῖτε νὰ φέρετε μιὰν ἐφαπτομένη στὸν κύκλο ἡ ὁποία νὰ ἔχη μῆκος 70 mm. Δεῖξτε ὅτι τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει ἄπειρες λύσεις. Πῶς μπορεῖτε νὰ τὶς καθορίσετε;

10. Μὲ ἀκτίνα R = 50 mm χαράξτε ἕναν κύκλο. Ὕστερα βρῆτε ἕνα σημεῖο ἀπὸ ὅπου μπορεῖτε νὰ φέρετε δυὸ ἐφαπτομένες στὸν κύκλο ποὺ νὰ σχηματίζουν μεταξύ τους ὀρθὴ γωνία. Δεῖξτε ὅτι τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει ἄπειρες λύσεις καὶ πῆτε πῶς μποροῦν νὰ καθορισθοῦν.

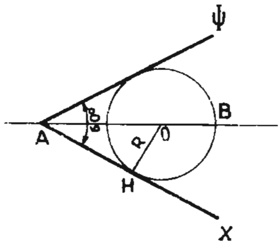
11. Σᾶς δίνουν ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 50 mm. Πόσα σημεῖα ὑπάρχουν ἀπὸ ὅπου μποροῦμε νὰ φέρωμε δυὸ ἐφαπτομένες στὸν κύκλο ποὺ νὰ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 120°;

Ποιά εἶναι ἡ θέση αὐτῶν τῶν σημείων ὡς πρὸς τὸ κέντρο τοῦ κύκλου;

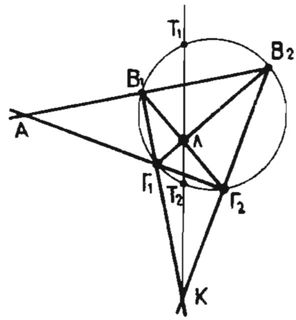
12. Οἱ ἐφαπτομένες ΑΧ καὶ ΑΨ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α στὸν κύκλο τοῦ σχ. 39-ιβ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60^{o}. Ἐκφράστε μὲ τὴν ἀκτίνα R (συναρτήσει τῆς ἀκτίνας R) τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΑΟ καὶ ΑΒ.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : R = 10 mm.

13. Χρησιμοποιώντας μόνο χάρακα μπορεῖτε νὰ χαράξετε ἀπὸ



Σχ. 39-ιβ.



Σχ. 39-ιγ.

ἕνα ἐξωτερικὸ σημεῖο Α τὶς δυὸ ἐφαπτομένες σ' ἕνα δοσμένο κύκλο (σχ. 39-ιγ) ὡς ἑξῆς :

Ἀπὸ τὸ Α φέρνετε δυὸ εὐθεῖες $ΑΒ_1Β_2$ καὶ $ΑΓ_1Γ_2$ ποὺ νὰ τέμνουν τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Ἔστω Κ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν δυὸ εὐθειῶν $Β_1Γ_1$, $Β_2Γ_2$ καὶ Λ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν $Β_1Γ_2$, $Β_2Γ_1$. Ἡ εὐθεία ΚΛ θὰ συναντᾶ τότε τὴν περιφέρεια σὲ δυὸ σημεῖα $Τ_1$ καὶ $Τ_2$ ποὺ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων ἀπὸ τὸ Α στὸν κύκλο (μὲ ἄλλα λόγια, $ΑΤ_1$ καὶ $ΑΤ_2$ εἶναι οἱ ζητούμενες ἐφαπτομένες).

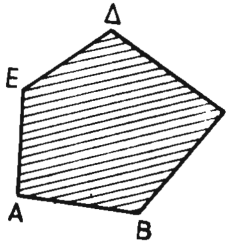
Ἐπαληθεῦστε τὴν παραπάνω κατασκευὴ προσδιορίζοντας τὰ σημεῖα ἐπαφῆς $Τ_1$ καὶ $Τ_2$ καὶ μὲ τὴ μέθοδο τοῦ § 5.

Μάθημα 40.

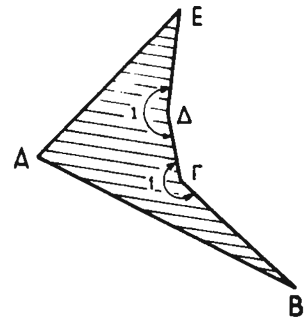
Πολύγωνα.

1. Ὁρισμοί. Ἂς ὑπενθυμίσωμε πρῶτα μερικοὺς ὁρισμούς.

Πολύγωνο λέγεται ἕνα κομμάτι τοῦ ἐπιπέδου (ὅπως τὸ διαγραμμισμένο στὰ σχ. 40-α καὶ 40-β) περικλειόμενο ἀπὸ μίαν



Σχ. 40-α.



Σχ. 40-β.

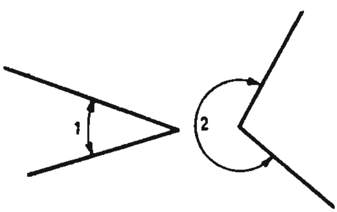
κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ (τὴν ΑΒΓΔΕΑ στὰ σχ. 40-α καὶ 40-β). Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται ***περίγραμμα*** τοῦ πολυγώνου καὶ τὸ μῆκος της ***περίμετρος*** τοῦ πολυγώνου.

Τὰ πιὸ ἁπλὰ πολύγωνα εἶναι τὰ τρίγωνα καὶ τὰ τετράπλευρα ποὺ μελετήσαμε ἤδη. Τὰ πολύγωνα τῶν σχημάτων 40-α καὶ 40-β λέγονται ***πεντάγωνα*** γιατὶ ἔχουν 5 κορυφὲς (τὶς Α, Β, Γ, Δ, Ε) καὶ 5 πλευρὲς (τὶς ΑΒ, ΒΓ, ..., ΔΑ), ἄρα καὶ 5 (ἐσωτερικὲς) γωνίες (τὶς $\widehat{ΕΑΒ}$, $\widehat{ΑΒΓ}$, ..., $\widehat{ΔΕΑ}$).

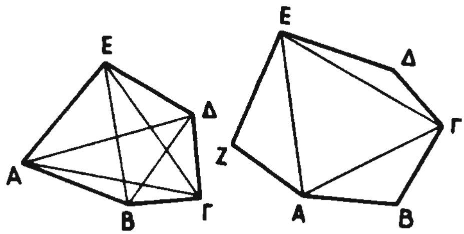
Φυσικὰ μποροῦμε νὰ σχεδιάσωμε πολύγωνα καὶ μὲ περισσότερες (6 ἢ 7 ἢ 8 κτλ.) κορυφὲς καὶ πλευρές· τὰ πολύγωνα αὐτὰ λέγονται ἀντιστοίχως ***ἑξάγωνα, ἑπτάγωνα, ὀκτάγωνα*** κτλ. Γενικὰ ἕνα πολύγωνο ποὺ ἔχει ν κορυφὲς καὶ ν πλευρὲς (ν εἶναι ἕνας ἀκέραιος $\geqq 3$) λέγεται ***ν-γωνο***, γιατὶ ἔχει ν (ἐσωτερικὲς) γωνίες.

Ἕνα πολύγωνο λέγεται *κυρτό*, ὅταν οἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν του βρίσκωνται ὅλες ἔξω ἀπὸ τὸ πολύγωνο, μὲ ἄλλα λόγια, ὅταν κάθε πλευρά του, προεκτεινόμενη, ἀφήνει ὁλάκερο τὸ πολύγωνο πρὸς τὴ μιὰ μεριά της. Π.χ. τὸ πολύγωνο τοῦ σχήματος 40-α εἶναι κυρτό, ἐνῶ τὸ πολύγωνο τοῦ σχήματος 40-β δὲν εἶναι. Σ' ἕνα κυρτὸ πολύγωνο ὅλες οἱ (ἐσωτερικὲς) γωνίες εἶναι μικρότερες ἀπὸ 180°. Τέτοιες γωνίες θὰ τὶς λέμε ***ἐξέχουσες γωνίες*** (σχ. 40-γ). Σ' ἕνα ὄχι κυρτὸ πολύγωνο μιὰ τοὐλάχιστο (ἐσωτερική) γωνία εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ 180°. Μιὰ τέτοια γωνία θὰ τὴ λέμε ***εἰσέχουσα γωνία*** (σχ. 40-γ). Π.χ. στὸ ὄχι κυρτὸ πολύγωνο τοῦ σχ. 40-β ὑπάρχουν δυὸ εἰσέχουσες γωνίες, οἱ $\widehat{\Gamma}_1$ καὶ $\widehat{\Delta}_1$.

Στὸ ὑπόλοιπο μέρος αὐτοῦ τοῦ Μαθήματος θ' ἀσχοληθοῦμε μόνο μὲ κυρτὰ πολύγωνα.



Σχ. 40-γ. Ἡ γωνία 1 εἶναι ἐξέχουσα, ἡ 2 εἶναι εἰσέχουσα.



Σχ. 40-δ.

2. Διαγώνιος ἑνὸς πολυγώνου λέγεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει δυὸ ὄχι διαδοχικὲς κορυφὲς τοῦ πολυγώνου. Π.χ. τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι διαγώνιοι τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ (σχ. 40-δ).

Τὸ τρίγωνο δὲν ἔχει διαγωνίους. Τὸ τετράπλευρο ἔχει, ὅπως ξέρομε, δυὸ διαγωνίους. Τὸ πεντάγωνο (σχ. 40-δ) ἔχει 5 διαγωνίους, τὸ ἑξάγωνο ἔχει 9 διαγωνίους κτλ.

Ἕνα πολύγωνο, μὲ 4 ἢ περισσότερες πλευρές, μποροῦμε νὰ τὸ χωρίσωμε σὲ τρίγωνα, χαράζοντας μερικὲς διαγωνίους του· τὶς διαγωνίους αὐτὲς μποροῦμε μάλιστα νὰ τὶς διαλέξωμε ἔτσι ποὺ νὰ μὴ διαπερνοῦν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη. Π. χ. τὸ πεντάγωνο τοῦ σχ. 40-δ χωρίζεται ἀπὸ τὶς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΑΔ στὰ 3 τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ. Τὸ ἑξάγωνο τοῦ σχ. 40-δ χωρίζεται ἀπὸ τὶς διαγωνίους του ΑΓ, ΓΕ καὶ ΕΑ στὰ 4 τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ, ΕΖΑ καὶ ΑΓΕ.

Γενικά, *ἕνα ν-γωνο* ($\nu \geq 4$) *μποροῦμε νὰ τὸ χωρίσωμε σὲ* $\nu - 2$ *τρίγωνα, χαράζοντας* $\nu - 2$ *κατάλληλες διαγωνίους του ποὺ δὲν διαπερνοῦν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη.*

3. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου. Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὸν προηγούμενο παράγραφο συμπεραίνομε ἀμέσως τὰ ἑξῆς γιὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου:

Τὸ πεντάγωνο ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2 ὀρθὲς $\times\ 3 = 6$ ὀρθές.

Τὸ ἑξάγωνο ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2 ὀρθὲς $\times\ 4 = 8$ ὀρθές.

Γενικά, τὸ ν-γωνο ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2 ὀρθὲς $\times\ (\nu - 2) = 2\nu - 4$ ὀρθές.

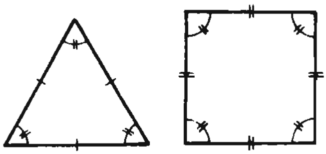
Παρατήρηση. Ἂν μέσα στὴν ἐγγράμματη παράσταση $2\nu - 4$, ποὺ μᾶς δίνει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς ν-γώνου μὲ μονάδα τὴν ὀρθή, πάρωμε τὸ $\nu = 3$, βρίσκομε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου $2 \cdot 3 - 4 = 2$ ὀρθές, πράγμα ποὺ ξέρομε ἤδη· ἂν πάρωμε τὸ $\nu = 4$, βρίσκομε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου $2 \cdot 4 - 4 = 4$ ὀρθές, πράγμα ποὺ ἐπίσης ξέρομε.

4. Κανονικὰ πολύγωνα. Ἕνα πολύγωνο λέγεται ***κανονικὸ*** ὅταν:

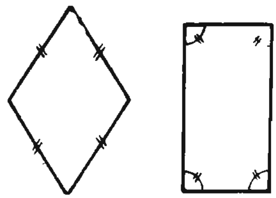
1ο ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες· καὶ

2ο ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες.

Ἔτσι τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ τὸ τετράγωνο (σχ. 40-ε) εἶναι κανονικὰ πολύγωνα. Ὁ ρόμβος ὅμως (σχ. 40-ς), ποὺ ἔχει



Σχ. 40-ε. Κανονικὰ πολύγωνα.



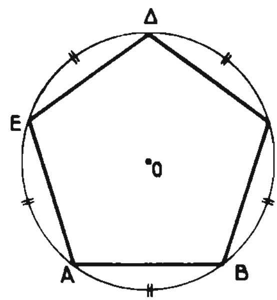
Σχ. 40-ς. Ὄχι κανονικὰ πολύγωνα.

μόνο τὴν πρώτη ἀπὸ τὶς δυὸ παραπάνω ἰδιότητες, καθὼς καὶ τὸ ὀρθογώνιο, ποὺ ἔχει μόνο τὴ δεύτερη ἰδιότητα, δὲν εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

5. Πρόταση. *Ἂν μιὰ περιφέρεια εἶναι διαιρεμένη σὲ ν ($\nu \geq 3$) ἴσα μέρη,* **τότε οἱ χορδές, ποὺ ἑνώνουν τὰ ν διαδοχικὰ διαιρετικὰ σημεῖα, σχηματίζουν ἕνα κανονικὸ ν-γωνο.**

Στὸ σχ. 40-ζ ἡ περιφέρεια εἶναι διαιρεμένη σὲ 5 ἴσα μέρη: $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$,... $\overset{\frown}{\mathrm{EA}}$. Οἱ χορδὲς τῶν ἴσων αὐτῶν τόξων θὰ εἶναι ἴσες:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \ldots = \mathrm{EA}.$$



Σχ. 40-ζ. Ὑπόθεση: τὰ τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta}}$,... εἶναι ἴσα.

Δεύτερο, οἱ γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{B}}$, ..., $\widehat{\mathrm{E}}$ εἶναι ἐσωγραμμένες στὸν ἴδιο κύκλο καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα τους $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma\Delta E}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta EA}}$, ... εἶναι μεταξύ τους ἴσα (γιατὶ τὸ καθένα τους ἰσοῦται μὲ τὰ 3/5 τῆς περιφέρειας), ἄρα οἱ γωνίες αὐτὲς εἶναι ἴσες:

$$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = \ldots = \widehat{\mathrm{E}}.$$

Ἑπομένως τὸ πολύγωνο ΑΒΓΔΕ εἶναι ἕνα κανονικὸ πεντάγωνο.

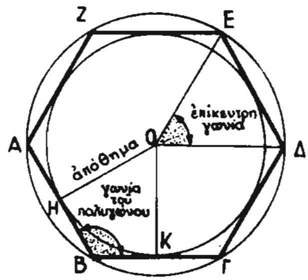
Ἀληθεύει καὶ ἡ ἀντίστροφη πρόταση:

"*Αν ἕνα ν-γωνο εἶναι κανονικό,* **τότε μποροῦμε νὰ χαράξωμε μιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ τὶς ν κορυφές του καὶ οἱ κορυφὲς αὐτὲς διαιροῦν τὴν περιφέρεια σὲ ν ἴσα μέρη.**

Ἡ περιφέρεια ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὶς κορυφὲς ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται *περιγραμμένη* στὸ πολύγωνο. Τὸ κέντρο της λέγεται *κέντρο* καὶ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Τὸ πολύγωνο λέγεται *ἐσωγραμμένο* σὲ κύκλο.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω θὰ βγάλωμε τώρα μερικὰ συμπεράσματα.

6. 1ο Συμπέρασμα. "Ας εἶναι ΑΒΓΔΕΖ ἕνα κανονικὸ πολύγωνο ἐσωγραμμένο σὲ κύκλο (σχ. 40-η). Τὸ κέντρο τοῦ κύκλου ἔχει ἴσες ἀποστάσεις ΟΗ, ΟΚ, ... ἀπὸ τὶς πλευρὲς ΑΒ, ΒΓ, ... τοῦ πολυγώνου (γιατὶ οἱ πλευρὲς αὐτὲς εἶναι χορδὲς τοῦ κύκλου ἴσες μεταξύ τους). Τὸ κοινὸ μῆκος τῶν ἴσων τμημάτων ΟΗ, ΟΚ, ... πού, καθὼς ξέρομε, ἑνώνουν τὸ κέντρο Ο μὲ τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ... λέγεται *ἀπόθημα* (ἢ ἀπόστημα) τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 40-η.

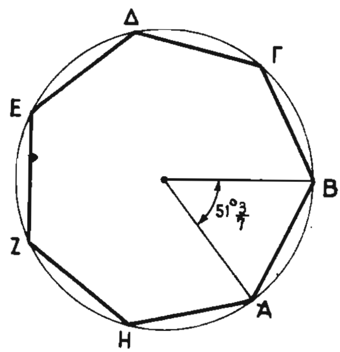
"Αν μὲ κέντρο τὸ κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ μὲ ἀκτίνα τὸ ἀπόθημά του γράψωμε περιφέρεια, τότε οἱ πλευρὲς ΑΒ, ΒΓ,... τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ἐφαπτόμενες τῆς περιφέρειας αὐτῆς, μὲ ἀντίστοιχα σημεῖα ἐπαφῆς τὰ μέσα τους. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ λέγεται *ἐσωγραμμένη* στὸ πολύγωνο, καὶ τὸ πολύγωνο *περιγραμμένο* στὴν περιφέρεια.

Ἔτσι, σὲ κάθε κανονικὸ πολύγωνο μποροῦμε νὰ ἐσωγράψωμε ἕνα κύκλο· ὁ κύκλος αὐτὸς ἔχει κέντρο τὸ κέντρο τοῦ πολυγώνου (ἄρα εἶναι ὁμόκεντρος μὲ τὸν κύκλο τὸν περιγραμμένο στὸ πολύγωνο) καὶ ἡ ἀκτίνα του ἰσοῦται μὲ τὸ ἀπόθημα τοῦ πολυγώνου.

7. 2ο συμπέρασμα. Οἱ γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, ... εἶναι μεταξύ τους ἴσες, γιατὶ εἶναι ἐπίκεντρες στὸν ἴδιο κύκλο καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα τους $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, ... εἶναι ἴσα. Τὸ κοινό τους μέγεθος εἶναι ἡ λεγόμενη ***ἐπίκεντρη γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.*** Ἂν τὸ πολύγωνο ἔχῃ ν πλευρές, τὸ μέγεθος αὐτὸ ἰσοῦται σὲ μοῖρες μὲ $\frac{360^\circ}{\nu}$. Ἔτσι π.χ. τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ 3, 4, 5, 6 πλευρὲς ἔχουν ἐπίκεντρη γωνία ἀντίστοιχα ἴση μὲ

$$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ, \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ, \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Ἀπ' αὐτὰ προκύπτει ἕνας εὔκολος τρόπος γιὰ νὰ χαράξωμε ἕνα κανονικὸ ν-γωνο. Π.χ. γιὰ νὰ σχεδιάσωμε ἕνα κανονικὸ ἑπτάγωνο ($\nu = 7$), προσδιορίζομε πρῶτα τὴν ἐπίκεντρη γωνία του : $\frac{360^\circ}{7} = 51^\circ$ καὶ $\frac{3}{7}$. Κατόπιν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο καὶ ξεκινώντας ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α μιᾶς περιφέρειας (σχ. 40-θ) παίρνομε πάνω σ' αὐτὴν ἕνα τόξο ἴσο μὲ $51^\circ\frac{3}{7}$ (φυσικὰ αὐτὸ θὰ γίνῃ κατὰ προσέγγιση μὲ ἐκτίμηση τοῦ ματιοῦ μας). Τὸ τόξο αὐτὸ τὸ ξαναπαίρνομε (μὲ τὸ διαβήτη) πάνω στὴν περιφέρεια συνεχιστὰ ἄλλες 6 φορές, ὁπότε θὰ ἔχωμε



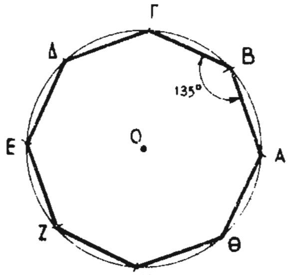
Σχ. 40-θ. Κανονικὸ ἑπτάγωνο.

γυρίσει πίσω στὸ σημεῖο ἀπὸ ὅπου ξεκινήσαμε. Χαράζοντας τώρα τὶς χορδὲς τῶν 7 ἴσων τόξων ποὺ προσδιορίσαμε, ἀποκτοῦμε τὸ ζητούμενο κανονικὸ ἑπτάγωνο.

8. 3ο συμπέρασμα. Οἱ γωνίες ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσες, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ ποὺ δώσαμε στὸν § 4. Τὸ κοινὸ μέγεθός τους λέγεται *γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου*. Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε μποροῦμε νὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἂν τὸ πολύγωνο ἔχῃ ν πλευρές, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι ἴσο, ὅπως εἴδαμε στὸν § 3, μὲ

$$2 \text{ ὀρθὲς} \times (\nu - 2) = 180^\circ \cdot (\nu - 2) = 180^\circ \cdot \nu - 360^\circ.$$



Σχ. 40-ι. Γωνία κανονικου ὀκταγώνου.

Ἑπομένως ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ν γωνίες ἑνὸς κανονικοῦ ν-γώνου θὰ εἶναι ἴση μὲ

$$\frac{180^\circ \cdot \nu - 360^\circ}{\nu} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}.$$

Ἔτσι ἡ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου ($\nu = 8$) εἶναι ἴση μὲ $180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (σχ. 40-ι).

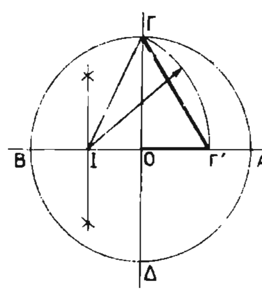
Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\frac{360^\circ}{\nu}$ καὶ ἡ γωνία $180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$ ἑνὸς κανονικοῦ ν-γώνου ἔχουν ἄθροισμα 180°. Οἱ δυὸ αὐτὲς γωνίες εἶναι λοιπὸν παραπληρωματικές.

9. Κατασκευὴ ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου καὶ δεκαγώνου. Στὸν § 7 δείξαμε πῶς μποροῦμε νὰ ἐσωγράψωμε σ' ἕναν κύκλο ἕνα κανονικὸ ν-γωνο χρησιμοποιώντας μοιρογνωμόνιο. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐφαρμόζεται, ὅποιος καὶ νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Γιὰ μερικὲς ὅμως εἰδικὲς ἀριθμητικὲς τιμὲς τοῦ ν μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε χωρὶς μοιρογνωμόνιο, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα καὶ διαβήτη. Ἔτσι στὸν Τόμ. Α΄, Μαθ. 32 καὶ 33, εἴδαμε πῶς μποροῦμε, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα καὶ διαβήτη, νὰ διαιρέσωμε μιὰ περιφέρεια σὲ $\nu = 3$, 4, 6, 8 καὶ 12 ἴσα μέρη καί, ἑπομένως, πῶς μποροῦμε μὲ τὰ δυὸ αὐτὰ ὄργανα νὰ κατασκευάσωμε κανονικὰ πολύγωνα μὲ 3, 4, 6, 8 καὶ 12 πλευρές. Συμπληρώνοντας αὐτὲς τὶς γεωμετρικὲς κατασκευὲς θὰ δείξωμε τώρα πῶς μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε, μὲ κανόνα καὶ διαβήτη, κανονικὰ πεντάγωνα καὶ δεκάγωνα.

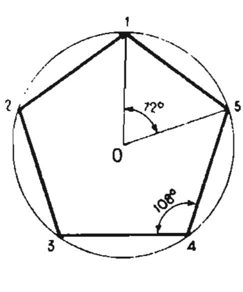
Χαράζομε πρῶτα δυὸ κάθετες διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ στὸν κύκλο ποὺ ἔχει κέντρο τὸ Ο (σχ. 40-ια). Ἔπειτα ἑνώνομε τὸ μέσο Ι τῆς ἀκτίνας ΟΒ μὲ τὸ Γ καὶ παίρνομε πάνω στὴ διάμετρο ΒΑ ἕνα μῆκος ΙΓ′ ἴσο μὲ τὸ ΙΓ. Τότε

1ο τὸ τμῆμα ΓΓ′ μᾶς δίνει τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ποὺ ἐσωγράφεται στὸν παραπάνω κύκλο,

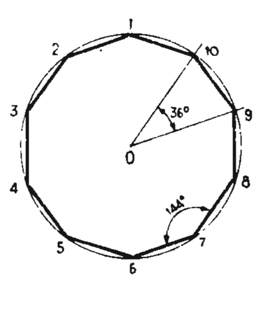
2ο τὸ τμῆμα ΟΓ′ μᾶς δίνει τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ποὺ ἐσωγράφεται στὸν ἴδιο κύκλο.



Σχ. 40-ια. Πλευρὲς τοῦ ἐσωγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου καὶ δεκαγώνου.



Σχ. 40-ιβ.

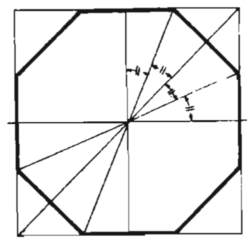


Σχ. 40-ιγ.

Ἀσκήσεις. *1.* Ὑπολογίστε πρῶτα τὴν ἐπίκεντρη γωνία καὶ ὕστερα τὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου καθὼς καὶ ἑνὸς κανονικοῦ δεκαεξαγώνου.

2. Ξεκινώντας ἀπὸ ἕνα τετράγωνο μπορεῖτε νὰ χαράξετε ἕνα κανονικὸ ὀκτάγωνο ἀκολουθώντας τὸν τρόπο τὸν ὁποῖο δείχνει τὸ σχ. 40-ιδ. Ἐξηγῆστε καὶ δικαιολογῆστε αὐτὴν τὴ χάραξη.

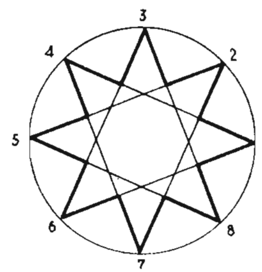
3. Ἐνθυμούμενοι ὅτι ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι 135°, δεῖξτε ὅτι δὲν μποροῦμε νὰ πραγματοποιήσωμε παρκετάρισμα δαπέδου μὲ κανονικὰ ὀκτάγωνα πλακάκια.



Σχ. 40-ιδ.

4. Χαράξτε τὸ σχέδιο μιᾶς φλάντζας ποὺ ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ δακτυλίου (κυκλικῆς στεφάνης) μὲ ἐξωτερικὴ διάμετρο 80 mm καὶ ἐσωτερικὴ διάμετρο 30 mm. Οἱ τρύπες τῆς φλάντζας εἶναι ὀκτώ, βρίσκονται πάνω στὴ μέση περιφέρεια τοῦ δακτυλίου (δηλ. ἐκείνην ποὺ ἔχει διάμετρο τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{80+30}{2}$ mm) καὶ ἔχουν ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις, ὅταν τὶς πάρωμε μὲ τὴ σειρά.

5. Τὰ μὲ παχιὰ γραμμὴ χαραγμένα εὐθύγραμμα τμήματα τοῦ σχ. 40-ιε περιορίζουν ἕνα κομμάτι τοῦ ἐπιπέδου ποὺ λέγεται *ἀστεροειδὲς κανονικὸ ὀκτάγωνο*. Πρόκειται γιὰ ἕνα ὄχι κυρτὸ πολύγωνο ποὺ τὸ ὄνομά του δικαιολογεῖται ἀπὸ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο προκύπτει καὶ τὸν ὁποῖο ζητεῖται νὰ ἐξηγήσετε ἐξετάζοντας προσεκτικὰ τὸ σχῆμα.



Σχ. 40-ιε.

6. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο O χαράξτε τρεῖς ἡμιευθεῖες ποὺ νὰ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες 120° καί, ὕστερα, ξεκινώντας ἀπ᾿ αὐτὴ τὴ χάραξη, σχεδιάστε μιὰ πλακόστρωση δαπέδου μὲ κανονικὰ ἑξάγωνα ποὺ ἔχουν μῆκος πλευρᾶς 15 mm.

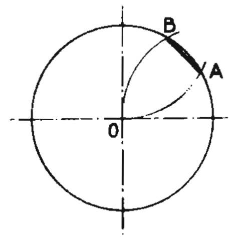
7. Ὅμοιο πρόβλημα μὲ τὸ προηγούμενο: πλακόστρωση ἑνὸς δαπέδου, τώρα ὅμως μὲ ἰσόπλευρα τρίγωνα ποὺ ἔχουν μῆκος πλευρᾶς 20 mm.

8. Δεῖξτε ὅτι μπορεῖτε νὰ πλακοστρώσετε ἕνα δάπεδο χρησιμοποιώντας κανονικὰ ἑξάγωνα καὶ κανονικὰ τρίγωνα μὲ τὸ ἴδιο μῆκος πλευρᾶς. Ὕστερα, κατασκευάστε τὸ σχέδιο μιᾶς τέτοιας πλακόστρωσης παίρνοντας τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἴσο μὲ 20 mm.

9. Χαράξτε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ξέροντας ὅτι τὸ ἀπόθημά του εἶναι 30 mm.

10. Σχεδιάστε τὴ βάση ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος (βλ. Τόμ. Α', Μάθ. 52, § 3) ξέροντας ὅτι ἡ ἀπόσταση δυὸ παράλληλων πλευρικῶν ἑδρῶν του εἶναι 30 mm.

11. Γιατί στὴν κατασκευὴ τοῦ σχ. 40 ις τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐσωγραμμένου στὸν κύκλο;



Σχ. 40-ις.

12. Χρησιμοποιώντας κανόνα καὶ διαβήτη κατασκευάστε μιὰ γωνία 18° (θὰ σκεφθῆτε πρῶτα ποιά εἶναι ἡ σχέση αὐτῆς τῆς γωνίας πρὸς τὴν ἐπίκεντρη γωνία ἑνὸς κανονικοῦ δεκαγώνου)· μὲ τὰ ἴδια ὄργανα κατασκευάστε ὕστερα μιὰ γωνία 54°.

13. Ἐπαληθεῦστε πρῶτα τὴν ἰσότητα $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$. Ὕστερα πῆτε τί σημαίνει ἡ ἰσότητα αὐτή, ὅταν τὰ τρία κλάσματά της παριστάνουν ἀντίστοιχα μέρη μιᾶς καὶ τῆς ἴδιας περιφέρειας.

Ἐφαρμογές.

1η. Κατασκευάστε μὲ κανόνα καὶ διαβήτη μιὰ γωνία 24°.

2η. Χρησιμοποιώντας κανόνα καὶ διαβήτη ἐσωγράψτε σὲ μιὰ περιφέρεια ἕνα κανονικὸ δεκαπεντάγωνο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΣΧΕΔΙΟ

Μάθημα 41.

Χάραξη εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν.

1. Χάραξη εὐθειῶν. Μέσα σ' ἕνα ἐπίπεδο μποροῦμε νὰ χαράξωμε ὄχι μόνο μίαν ἀλλ' ἄπειρες εὐθεῖες. Γιὰ νὰ ξεχωρίσωμε λοιπὸν κάποιαν ἀπ' αὐτές, πρέπει νὰ ζητήσωμε ἡ εὐθεία αὐτὴ νὰ ἔχῃ μερικὲς ἰδιαίτερες ἰδιότητες ὅσον ἀφορᾶ τὴ θέση της, π.χ. νὰ περνᾶ ἀπὸ δυὸ δοσμένα σημεῖα, ὁπότε ἡ χάραξή της εἶναι ἐντελῶς καθορισμένη. Αὐτὲς οἱ ἰδιαίτερες ἰδιότητες ποὺ ζητοῦμε νὰ ἔχῃ μιὰ εὐθεία λέγονται *συνθῆκες* (ἢ *ὅροι*) ποὺ πρέπει *νὰ ἱκανοποιῇ* (*νὰ ἐκπληρώνῃ*) ἡ εὐθεία.

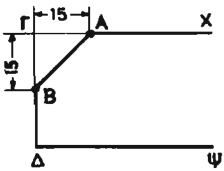
Γενικά, γιὰ τὸν καθορισμὸ μιᾶς εὐθείας μέσα στὸ ἐπίπεδο τῆς σχεδίασης χρειάζονται δυὸ συνθῆκες. Παρακάτω ἀναφέρομε τὶς κυριότερες περιπτώσεις ποὺ παρουσιάζονται.

1ο. Χαράξτε μιὰν εὐθεία ποὺ *νὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ δοσμένο σημεῖο A* (1η συνθήκη) καὶ *ἀπὸ τὸ δοσμένο σημεῖο B* (2η συνθήκη).

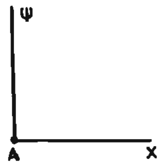
Μιὰν τέτοια χάραξη βλέπετε στὸ σχ. 41-α, ποὺ παριστάνει ἕνα ξύλινο πέδιλο (ὑποστήριγμα), κομμένο λοξὰ στὴ μιὰ γωνία του (ἀγκωνή του).

2ο. *Ἀπὸ ἕνα δοσμένο σημεῖο A* (1η συνθήκη) νὰ χαράξετε τὴν εὐθεία ΑΨ ποὺ εἶναι *κάθετη στὴ δοσμένη εὐθεία AX* (2η συνθήκη) (σχ. 41-β).

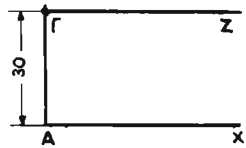
3ο. *Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Γ* (1η συνθήκη) νὰ χαράξετε μιὰν εὐθεία ΓΖ *παράλληλη πρὸς τὴν εὐθεία AX* (2η συνθήκη) (σχ. 41-γ).



Σχ. 41-α.



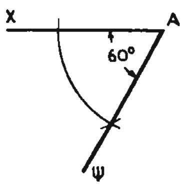
Σχ. 41-β.



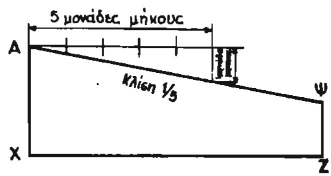
Σχ. 41-γ.

4ο. *Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α* (1η συνθήκη) νὰ χαράξετε μιὰν ἡμιευθεία ΑΨ ποὺ νὰ σχηματίζη μὲ τὴν ἤδη χαραγμένη ἡμιευθεία ΑΧ *γωνία* α^0 (2η συνθήκη), π.χ. γωνία 60^0 (σχ. 41-δ).

Τὴ γραφικὴ αὐτὴ κατασκευὴ τὴ συναντοῦμε στὴ σχεδίαση μιᾶς *χελιδονουρᾶς*.



Σχ. 41-δ.



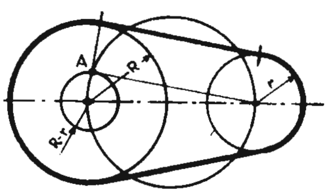
Σχ. 41-ε. Σφήνα.

Στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος 41-ε τὴν παραπάνω 2η συνθήκη (γωνία 60 μοιρῶν) τὴν ἔχει ἀντικαταστήσει ἡ ἀκόλουθη: ἡ ἡμιευθεία ΑΨ νὰ ἔχη *κλίση* 1/5 πρὸς τὴν εὐθεία ΧΖ ποὺ εἶναι κάθετη στὴν ΑΧ.

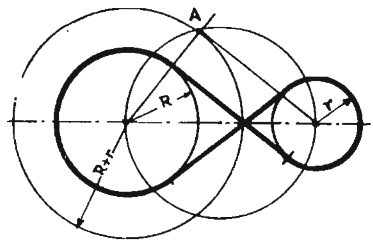
5ο. *Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α* (1η συνθήκη) νὰ χαράξετε τὴν *ἐφαπτομένη σ' ἕνα δοσμένο κύκλο* (2η συνθήκη).

Ὅπως εἴδαμε στὸ Μάθ. 39, ἡ χάραξη αὐτὴ ἔχει μίαν μόνο λύση, ὅταν τὸ Α βρίσκεται πάνω στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου καὶ δυὸ διαφορετικὲς λύσεις, ὅταν τὸ Α βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸν κύκλο. Φυσικά, ἂν τὸ σημεῖο Α βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου, ἡ 2η συνθήκη δὲν μπορεῖ νὰ ἐκπληρωθῆ (νὰ πραγματοποιηθῆ) καὶ τὸ παραπάνω πρόβλημα δὲν ἔχει λύση.

6ο. Συμπληρώνομε τὰ παραπάνω μὲ τὴν ἀκόλουθη πολὺ χρήσιμη γεωμετρικὴ κατασκευή: Νὰ χαραχθῇ μιὰ εὐθεία ποὺ νὰ εἶναι ἐφαπτομένη σὲ δυὸ δοσμένους κύκλους (2 συνθῆκες). Αὐτοῦ τοῦ προβλήματος πραγματευόμαστε (ἐξετάζομε) παρακάτω τὴν περίπτωση ὅπου οἱ δυὸ κύκλοι δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο, ἀλλὰ βρίσκονται ὁ ἕνας ἔξω ἀπὸ τὸν ἄλλο. Οἱ λύσεις εἶναι τότε τέσσερις: Ὑπάρχουν δυὸ κοινὲς ἐξωτερικὲς ἐφαπτομένες (σχ.



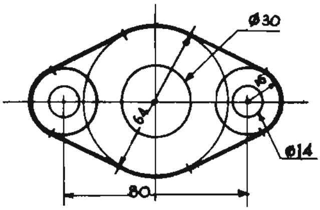
Σχ. 41-ς. Πῶς χαράζομε τὶς ἐξωτερικὲς κοινὲς ἐφαπτομένες δυὸ περιφερειῶν.



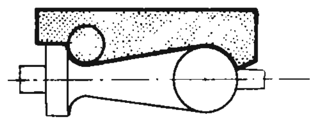
Σχ. 41-ζ. Πῶς χαράζομε τὶς ἐσωτερικὲς κοινὲς ἐφαπτομένες δυὸ περιφερειῶν.

41-ς) καὶ δυὸ κοινὲς ἐσωτερικὲς ἐφαπτομένες (σχ. 41-ζ). Οἱ κοινὲς ἐξωτερικὲς ἐφαπτομένες εἶναι παράλληλες πρὸς τὶς 2 ἐφαπτομένες ποὺ μποροῦμε νὰ χαράξωμε ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ μικρότερου δοσμένου κύκλου στὸν κύκλο ποὺ ἔχει κέντρο τὸ κέντρο τοῦ μεγαλύτερου καὶ ἀκτίνα τὴ διαφορὰ $R - r$ τῶν ἀκτίνων τῶν δυὸ δοσμένων κύκλων. Οἱ κοινὲς ἐσωτερικὲς ἐφαπτομένες εἶναι παράλληλες πρὸς τὶς 2 ἐφαπτομένες ποὺ χαράζονται ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ ἑνὸς δοσμένου κύκλου στὸν κύκλο ποὺ ἔχει κέντρο τὸ κέντρο τοῦ ἄλλου δοσμένου κύκλου καὶ ἀκτίνα τὸ ἄθροισμα $R + r$ τῶν δυὸ κύκλων.

Τὴ χάραξη κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τὴ συναντοῦμε στὸ σχῆμα 41-γ ποὺ παριστάνει τὸ καπάκι (τὸ κάλυμμα) ἑνὸς στυπειοθλίπτη. Μιὰν κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη παρουσιάζει τὸ ἐλεγκτικὸ πρότυπο (ἀγνάρι) ποὺ παριστάνεται σκιασμένο στὸ



Σχ. 41-η.



Σχ. 41-θ.

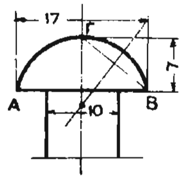
σχῆμα 41-θ.

Παρατήρηση. Τὸ λουρὶ μὲ τὸ ὁποῖο μεταδίνομε τὴν κίνηση μιᾶς τροχαλίας σὲ μιὰν ἄλλη, παρουσιάζει δυὸ (σχεδὸν) εὐθύγραμμα μέρη ποὺ εἶναι ἐφαπτομένες τῶν περιφερειῶν τῶν δυὸ τροχαλιῶν, ἐξωτερικὲς ὅταν τὸ λουρὶ δὲν διασταυρώνεται (οἱ δυὸ τροχαλίες στρέφονται τότε μὲ τὴν ἴδια φορά) καὶ ἐσωτερικὲς ὅταν τὸ λουρὶ διασταυρώνεται (οἱ δυὸ τροχαλίες στρέφονται τότε μὲ ἀντίθετη φορά).

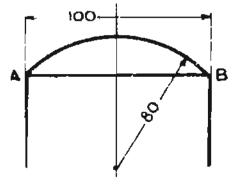
2. Χάραξη περιφερειῶν. Ὅπως εἶναι γνωστό, μέσα σ' ἕνα ἐπίπεδο μποροῦμε νὰ σχεδιάσωμε ἄπειρες περιφέρειες ποὺ νὰ περνοῦν ἀπὸ δυὸ δοσμένα σημεῖα, ἐνῶ δὲν μποροῦμε νὰ σχεδιάσωμε παρὰ μόνο μίαν περιφέρεια ποὺ νὰ περνᾷ ἀπὸ τρία δοσμένα σημεῖα (φθάνει φυσικὰ αὐτὰ τὰ 3 σημεῖα νὰ μὴ βρίσκωνται πάνω σὲ εὐθεία). Ἔτσι βλέπομε πὼς γιὰ νὰ καθορισθῆ ἡ χάραξη μιᾶς περιφέρειας μέσα στὸ ἐπίπεδο τῆς σχεδίασης χρειάζονται 3 συνθῆκες. Ἂς ἀναφέρωμε καὶ ἐδῶ τὶς κυριότερες περιπτώσεις:

1ο. Χαράξτε τὴν περιφέρεια ποὺ περνᾷ ἀπὸ 3 δοσμένα σημεῖα Α, Β, Γ, ὅταν αὐτὰ δὲν βρίσκωνται πάνω σὲ εὐθεία (3 συνθῆκες).

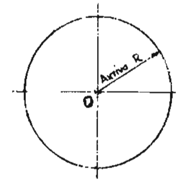
Μιὰν τέτοια χάραξη δείχνει τὸ σχ. 41-ι ποὺ παριστάνει τὸ κεφάλι μιᾶς συνδετικῆς βίδας (ἑνὸς κοχλιοφόρου συνδέσμου).



Σχ. 41-ι.
Κεφάλι συνδετικῆς βίδας.



Σχ. 41-ια.
Πυθμένας δοχείου.



Σχ. 41-ιβ.

2ο. Χαράξτε μιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ δυὸ δοσμένα σημεῖα A καὶ B (2 συνθῆκες) καὶ νὰ ἔχῃ δοσμένη ἀκτίνα R (3η συνθήκη).

Τὸ πρόβλημα ἔχει δυὸ λύσεις, ὅταν ἡ ἀκτίνα R εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ μῆκος AB/2, μία λύση, ὅταν $R = AB/2$ καὶ καμμία ὅταν $R < AB/2$.

Μιὰν τέτοια χάραξη δείχνει τὸ σχ. 41-ια ποὺ παριστάνει τὸν πυθμένα ἑνὸς δοχείου.

3ο. Χαράξτε μιὰ περιφέρεια μὲ δοσμένο κέντρο O (2 συνθῆκες) καὶ δοσμένη ἀκτίνα R (3η συνθήκη) (σχ. 41-ιβ).

Τὸ δόσιμο τοῦ κέντρου ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 συνθῆκες, γιατί, ὅταν εἶναι γνωστὸ τὸ κέντρο, ἀρκεῖ νὰ δοθῆ ἕνα μόνο σημεῖο τῆς περιφέρειας, γιὰ νὰ εἶναι ἡ χάραξή της ἐντελῶς καθορισμένη.

Ἀσκήσεις. *1.* Ἀπὸ ἕνα σημεῖο A ποὺ ἀπέχει 40 mm ἀπὸ τὴ δοσμένη εὐθεία δ χαράξτε μιὰν εὐθεία ποὺ νὰ σχηματίζῃ γωνία 30° μὲ τὴ δ. Πόσες λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

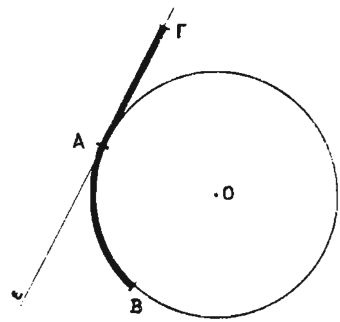
2. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο A ποὺ ἀπέχει 50 mm ἀπὸ τὴ δοσμένη εὐθεία δ χαράξτε μιὰν εὐθεία ποὺ νὰ ἔχῃ ὡς πρὸς τὴ δ κλίση 0,5 ἢ 3/10 ἢ 1/4. Πόσες λύσεις ἔχει ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς τρεῖς χαράξεις;

3. Χαράξτε μιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ δυὸ δοσμένα σημεῖα A, B καὶ νὰ ἔχῃ τὸ κέντρο της πάνω σὲ μιὰ δοσμένη εὐθεία ε ἢ πάνω σὲ μιὰ δοσμένη περιφέρεια γ. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει ἄραγε πάντοτε λύση;

Μάθημα 42.

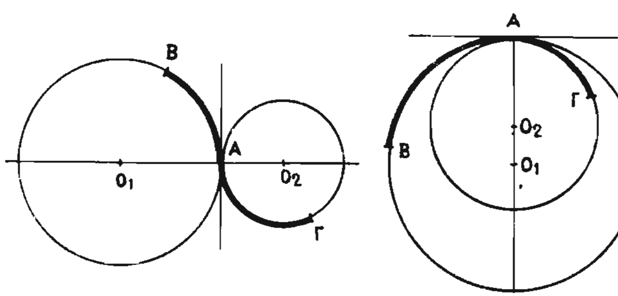
Συναρμογές.

1. **Ὁρισμοί.** 1ο. Ἡ σύνδεση (ἢ ἕνωση) ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου $\widehat{BA}$ (σχ. 42-α) μὲ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΓ λέγεται *συναρμογή*, ὅταν, στὸ κοινὸ ἄκρο Α τόξου καὶ τμήματος, ἡ εὐθεία ε τοῦ τμήματος εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας στὴν ὁποία ἀνήκει τὸ τόξο.



Σχ. 42-α.
Συναρμογὴ τόξου καὶ τμήματος.

2ο. Ἡ σύνδεση ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου $\widehat{BA}$ μ' ἕνα ἄλλο $\widehat{A\Gamma}$ ποὺ δὲν ἀνήκει στὴν ἴδια περιφέρεια (σχ. 42-β, (1) καὶ (2)) λέγεται *συναρμογὴ* ὅταν, στὸ κοινὸ ἄκρο Α τῶν δυὸ τόξων, οἱ δυὸ περιφέρειες ἔχουν τὴν ἴδια ἐφαπτομένη. Τὸ σημεῖο Α εἶναι τότε τὸ μόνο κοινὸ σημεῖο τῶν περιφερειῶν καὶ βρίσκεται πάνω στὴν εὐθεία O_1O_2 τῶν κέντρων τους,



(1) (2)

Σχ. 42-β. Συναρμογὴ δύο τόξων.

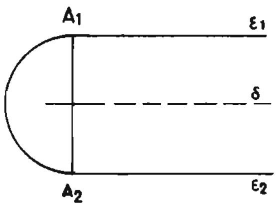
μεταξὺ τῶν κέντρων O_1 καὶ O_2 ὅταν οἱ περιφέρειες *ἐφάπτωνται ἐξωτερικὰ* (περίπτωση (1) τοῦ σχ. 42-β), ἔξω ἀπὸ τὸ τμῆμα O_1O_2 ὅταν οἱ περιφέρειες ἐφάπτωνται ἐσωτερικὰ (περίπτωση (2) τοῦ σχ. 42-β).

Τὸ τεχνικὸ σχέδιο χρησιμοποιεῖ συχνὰ συναρμογὲς σὰν τὶς παραπάνω. Συνήθως τὸ σχεδιαστικὸ πρόβλημα παρουσιάζεται μὲ τὴν ἀκόλουθη μορφή: *Δίνονται μέσα στὸ ἐπίπεδο τῆς σχεδίασης δυὸ χαραγμένες γραμμές: δυὸ εὐθεῖες ἢ μία εὐθεία καὶ μία περιφέρεια ἢ δυὸ περιφέρειες*, καὶ ζητεῖται νὰ χαράξωμε ἕνα τόξο περιφέρειας ποὺ νὰ ἔχη δοσμένη ἀκτίνα καὶ νὰ συναρμόζεται μὲ τὴν καθεμιὰ ἀπ' τὶς δυὸ δοσμένες γραμμές.

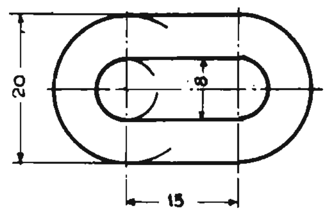
Παρακάτω δείχνομε πῶς γίνεται αὐτό.

2. Συναρμόστε δυὸ εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 μ' ἕνα τόξο περιφέρειας ποὺ νὰ ἔχη δοσμένη ἀκτίνα r.

1η περίπτωση: Οἱ δοσμένες εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες (σχ. 42-γ). Τότε, γιὰ νὰ ἔχη τὸ πρόβλημα λύση, πρέ-



Σχ. 42-γ.
Συναρμογὴ δυὸ παράλληλων εὐθειῶν μ' ἕνα τόξο.

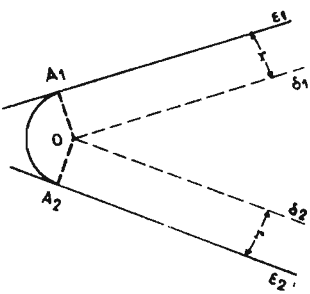


Σχ. 42-δ.
Κρίκος ἀλυσίδας.

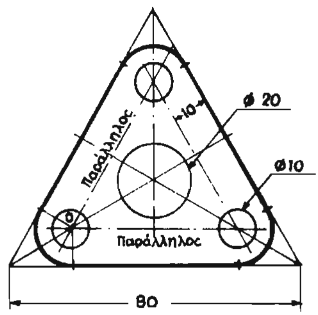
πει ἡ δοσμένη ἀκτίνα r νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴ μισὴ ἀπόσταση τῶν 2 παράλληλων εὐθειῶν ε_1 καὶ ε_2. Ὅπως δείχνει τὸ σχ. 42-γ, τὸ ζητούμενο τόξο συναρμογῆς $\widehat{A_1A_2}$ εἶναι μιὰ ἡμιπεριφέρεια μὲ κέντρο ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας δ, ἡ ὁποία ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2, καὶ μὲ ἀκτίνα τὴ μισὴ ἀπόσταση τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Ἡ παραπάνω γραφικὴ κατασκευὴ χρησιμοποιεῖται 4 φορὲς στὸ σχ. 42-δ ποὺ παριστάνει ἕναν κρίκο ἁλυσίδας.

2η περίπτωση: Οἱ δοσμένες εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 δὲν εἶναι παράλληλες (σχ. 42-ε). Σ' αὐτὴν τὴν περίπτωση ἡ ἀκτίνα r μπορεῖ νὰ εἶναι ὁποιαδήποτε. Χαράζομε τὶς εὐθεῖες δ_1 καὶ δ_2 ποὺ εἶναι



Σχ. 42-ε.
Συναρμογὴ δυὸ ὄχι παράλληλων εὐθειῶν μ' ἕνα τόξο.



Σχ. 42-ς.
Τριγωνικὴ φλάντζα.

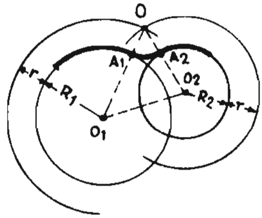
παράλληλες πρὸς τὶς ε_1 καὶ ε_2 ἀντίστοιχα καὶ ἔχουν ἀπόσταση ἀπ' αὐτὲς τὸ δοσμένο μῆκος r. Τὸ σημεῖο τομῆς Ο τῶν δ_1 καὶ δ_2 εἶναι τὸ κέντρο τοῦ ζητούμενου τόξου συναρμογῆς $\widehat{A_1A_2}$· τὰ ἄκρα του A_1 καὶ A_2 τὰ βρίσκομε χαράζοντας τὴν OA_1 κάθετη στὴν ε_1 καὶ τὴν OA_2 κάθετη στὴν ε_2.

Ἡ παραπάνω γραφικὴ κατασκευὴ χρησιμοποιεῖται 3 φορὲς στὸ σχ. 42-ς ποὺ παριστάνει μιὰν τριγωνικὴ φλάντζα.

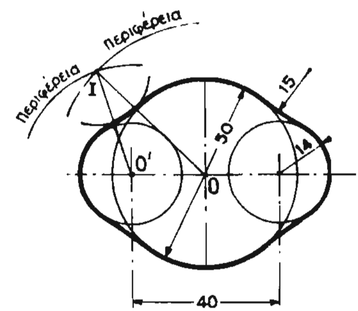
3. Συναρμόστε δυὸ δοσμένες περιφέρειες μ' ἕνα τόξο περιφέρειας ποὺ ἔχει δοσμένη ἀκτίνα r.

Ἄς εἶναι O_1, O_2 τὰ κέντρα τῶν δοσμένων περιφερειῶν καὶ R_1, R_2 οἱ ἀντίστοιχες ἀκτίνες τους (σχ. 42-ζ). Ἂν ζητῆται, τὸ τόξο συναρμογῆς νὰ ἐφάπτεται ἐξωτερικὰ μὲ τὶς δοσμένες περιφέρειες, τότε τὸ κέντρο του Ο θὰ ἀπέχῃ ἀποστάσεις $R_1 + r$ καὶ $R_2 + r$ ἀπὸ τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 τῶν περιφερειῶν. Ἐπομένως τὸ

O θὰ εἶναι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ (ἐν γένει) 2 κοινὰ σημεῖα τῶν 2 περιφερειῶν ποὺ χαράζονται μὲ κέντρα τὰ σημεῖα O_1, O_2 καὶ μὲ ἀντίστοιχες ἀκτίνες $R_1 + r$, $R_2 + r$. Τὰ ἄκρα A_1 καὶ A_2 τοῦ τό-



Σχ. 42-ζ. Συναρμογὴ δυὸ περιφερειῶν μ᾽ ἕνα τόξο δοσμένης ἀκτίνας.



Σχ. 42-η. Φλάντζα.

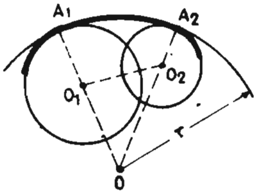
ξου συναρμογῆς βρίσκονται ἐκεῖ ὅπου οἱ εὐθεῖες O_1O καὶ O_2O κόβουν τὶς δοσμένες περιφέρειες.

Ἡ γραφικὴ αὐτὴ κατασκευὴ χρησιμοποιεῖται 4 φορὲς στὸ σχῆμα 42-η ποὺ παριστάνει μιὰν φλάντζα.

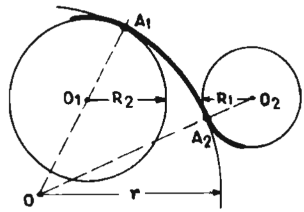
Παρατήρηση. Τὸ παραπάνω πρόβλημα δὲν ἔχει φυσικὰ λύση στὴν περίπτωση ὅπου οἱ δυὸ περιφέρειες, μὲ κέντρα τὰ O_1, O_2 καὶ ἀντίστοιχες ἀκτίνες $R_1 + r$, $R_2 + r$, δὲν ἔχουν κοινὸ σημεῖο. Ἐξ ἄλλου τὸ πρόβλημα παρουσιάζει τὶς ἀκόλουθες δυὸ παραλλαγές: (σχ. 42-θ) καὶ (σχ. 42-ι), καθόσον μπορεῖ νὰ ζητηθῆ τὸ τόξο συναρμογῆς νὰ ἐφάπτεται ἐσωτερικὰ μὲ τὶς δυὸ δοσμένες περιφέρειες ἢ νὰ ἐφάπτεται ἐσωτερικὰ μὲ τὴ μιὰ περιφέρεια καὶ ἐξωτερικὰ μὲ τὴν ἄλλη.

4. Συναρμόστε μιὰν εὐθεία καὶ μιὰν περιφέρεια μ᾽ ἕνα τόξο περιφέρειας ποὺ ἔχει δοσμένη ἀκτίνα r.

Ἂς εἶναι ε ἡ δοσμένη εὐθεία, O_1 τὸ κέντρο τῆς δοσμένης περιφέρειας καὶ R_1 ἡ ἀκτίνα της. Ἂν ζητῆται τὸ τόξο συναρ-

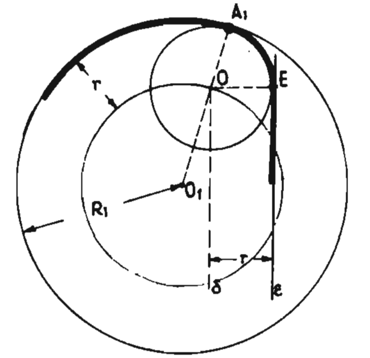


Σχ. 42-θ. Τὸ τόξο συναρμογῆς ἐφάπτεται ἐσωτερικὰ μὲ τὶς δοσμένες περιφέρειες.

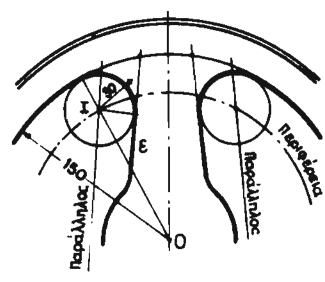


Σχ. 42-ι. Τὸ τόξο συναρμογῆς ἐφάπτεται ἐσωτερικὰ μὲ τὴ μιὰ καὶ ἐξωτερικὰ μὲ τὴν ἄλλη περιφέρεια.

μογῆς νὰ ἐφάπτεται ἐσωτερικὰ μὲ τὴ δοσμένη περιφέρεια (σχ. 42-ια), τότε τὸ κέντρο του O θὰ βρίσκεται σὲ ἀπόσταση $R_1 - r$



Σχ. 42-ια. Τὸ τόξο συναρμογῆς $\widehat{A_1E}$ ἐφάπτεται ἐσωτερικὰ μὲ τὴ δοσμένη περιφέρεια.

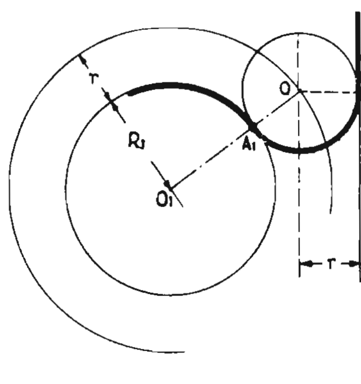


Σχ. 42-ιβ. Βραχίονας μιᾶς τροχαλίας.

ἀπὸ τὸ κέντρο O_1 τῆς περιφέρειας αὐτῆς· ἀπὸ μιὰν ἄλλη μεριὰ τὸ κέντρο αὐτὸ O πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴ δοσμένη εὐθεία ε ἀπόσταση r. Ἑπομένως τὸ O θὰ εἶναι κοινὸ σημεῖο 1ο τῆς περιφέρειας ποὺ ἔχει κέντρο τὸ O_1 καὶ ἀκτίνα $R_1 - r$, καὶ 2ο τῆς εὐθείας δ ποὺ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν ε καὶ ἀπέχει ἀπ' αὐτὴν ἀπόσταση r. Τὸ ἕνα ἄκρο E τοῦ τόξου τὸ βρίσκομε χαράζοντας τὴν κάθετο ΟΕ ἀπὸ τὸ Ο ὡς τὴν εὐθεία ε, τὸ ἄλλο ἄκρο A_1, ἑνώνοντας τὸ O_1 μὲ τὸ Ο καὶ προεκτείνοντας τὸ O_1O πέραν ἀπὸ τὸ Ο ὡς τὸ σημεῖο ὅπου κόβει τὴ δοσμένη περιφέρεια.

Ἡ παραπάνω γεωμετρικὴ κατασκευὴ χρησιμοποιεῖται δυὸ φορὲς στὸ σχ. 42-ιβ, ποὺ παριστάνει ἕνα βραχίονα τροχαλίας.

Σημειώνομε τέλος ὅτι ἡ χάραξη τοῦ σχ. 42-ια πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὴ χάραξη τοῦ σχ. 42-ιγ, ὅταν ζητηθῇ, τὸ τόξο συναρμογῆς νὰ ἐφάπτεται ἐξωτερικὰ μὲ τὴ δοσμένη περιφέρεια.



Σχ. 42-ιγ. Τὸ τόξο $\widehat{A_1E}$ ἐφάπτεται ἐξωτερικὰ μὲ τὴν περιφέρεια.

5. Παρατηρήσεις. 1η. Τὰ προβλήματα συναρμογῆς τῶν παραγράφων 3 καὶ 4 ἔχουν ἐν γένει δυὸ λύσεις (ὅταν δὲν εἶναι ἀδύνατα), γιατὶ τὸ κέντρο τοῦ τόξου συναρμογῆς προσδιορίζεται ὡς κοινὸ σημεῖο ἢ δύο περιφερειῶν ἢ μιᾶς περιφέρειας καὶ μιᾶς εὐθείας. Ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς λύσεις ὁ σχεδιαστὴς θὰ διαλέξῃ κάθε φορὰ ἐκείνην ποὺ ταιριάζει στὸ σχέδιο ποὺ ἔχει νὰ ἐκτελέσῃ.

2η. Γιὰ νὰ γίνῃ καλὴ ἡ χάραξη ἑνὸς τόξου συναρμογῆς εἶναι σκόπιμο (συμφέρει) νὰ τὸ χαράξετε μόνο ἀφοῦ προσδιορίσετε προηγουμένως τὰ σημεῖα ὅπου ἔχει ἐπαφὴ μὲ τὶς δοσμένες γραμμές.

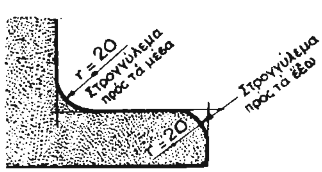
3η. Στὴν καθαρογραφὴ ἑνὸς σχεδίου (στὸ μελάνωμα, ὅπως λέμε, ἑνὸς σχεδίου) καλὸ εἶναι ν' ἀρχίζετε ἀπὸ τὴ χάραξη τῶν κυκλικῶν τόξων καὶ νὰ τελειώνετε μὲ τὴ χάραξη τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων.

Ἀσκήσεις. 1. Τὸ κέντρο O_1 μιᾶς περιφέρειας μὲ ἀκτίνα R_1 30 mm ἀπέχει 50 mm ἀπὸ μιὰν εὐθεία ε. Ποιό εἶναι τὸ μικρότερο (τὸ ἐλάχιστο) μῆκος ποὺ πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου τὸ ὁποῖο συναρμόζεται μὲ τὴν περιφέρεια καὶ τὴν εὐθεία; Σχεδιάστε ἕνα τόξο συναρμογῆς μὲ ἀκτίνα τὸ διπλάσιο αὐτοῦ τοῦ ἐλάχιστου μήκους.

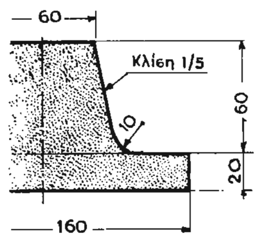
2. Τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 δυὸ περιφερειῶν ἔχουν ἀπόσταση $O_1O_2 = 61$ mm καὶ οἱ ἀκτίνες τους εἶναι $R_1 = 18$ mm, $R_2 = 23$ mm. Ποιό εἶναι τὸ μικρότερο (τὸ ἐλάχιστο) μῆκος ποὺ πρέπει νὰ ἔχη ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου τὸ ὁποῖο συναρμόζεται μὲ τὶς δυὸ περιφέρειες; Σχεδιάστε ἕνα τόξο συναρμογῆς μὲ ἀκτίνα τὸ διπλάσιο αὐτοῦ τοῦ ἐλάχιστου μήκους.

3. Ἡ ὀξεία γωνία δυὸ εὐθειῶν ε_1 καὶ ε_2 ποὺ τέμνονται εἶναι 60°. Χαράξτε ἕνα τόξο ποὺ νὰ συναρμόζεται μὲ αὐτές, νὰ ἔχη ἀκτίνα 2 cm καὶ νὰ εἶναι 60°.

4. Νὰ κάμετε τὸ στρογγύλεμα πρὸς τὰ μέσα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας,

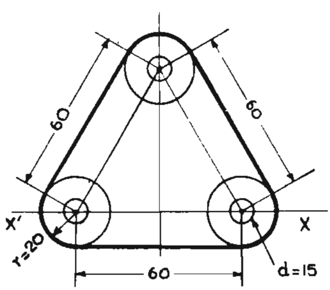


Σχ. 42-ιδ.
Στρογγυλέματα γωνιῶν.

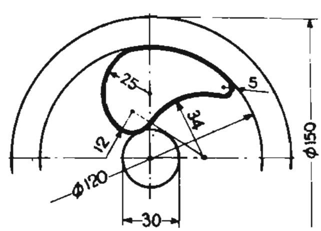


Σχ. 42-ιε.
Πρότυπο (μοντέλο) χυτηρίου.

ἐπίσης τὸ στρογγύλεμα πρὸς τὰ ἔξω μιᾶς ἄλλης ὀρθῆς γωνίας, συναρμόζοντας τὶς πλευρές της μὲ ἕνα κυκλικὸ τόξο ποὺ ἔχει ἀκτίνα r = 20 mm (σχ. 42-ιδ).



Σχ. 42-ις.
Τριγωνικὴ φλάντζα.



Σχ. 42-ιζ.
Χειροτροχός.

5. Σχεδιάστε σὲ κλίμακα 1 : 1 τὸ πρότυπο χυτηρίου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 42-ιε.

6. Σχεδιάστε σὲ κλίμακα 3 : 2 τὴν τριγωνικὴ φλάντζα ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 42-ιϛ.

7. Σχεδιάστε σὲ κλίμακα 1 : 1 μιὰν ἀπὸ τὶς κοιλότητες τοῦ χειροτροχοῦ ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 42-ιζ.

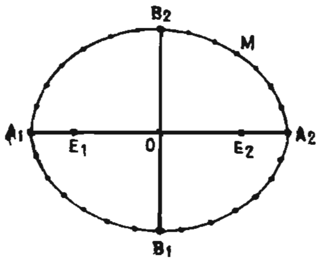
Μάθημα 43.

Χάραξη μερικῶν καμπύλων πού χρησιμοποιοῦνται συχνά.

1. **Ἔλλειψη** λέγεται μιὰ ἐπίπεδη κλειστὴ γραμμὴ μὲ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα: Οἱ ἀποστάσεις κάθε σημείου της M (σχ. 43-α) ἀπὸ δυὸ ὁρισμένα σημεῖα E_1 καὶ E_2 τοῦ «ἐσωτερικοῦ» της ἔχουν ἄθροισμα δοσμένο μῆκος, μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μῆκος E_1 καὶ E_2:

$$ME_1 + ME_2 = 2\alpha > 2\gamma = E_1E_2.$$

Τὰ σημεῖα E_1, E_2 λέγονται *ἑστίες* τῆς ἔλλειψης· πάνω στὴν εὐθεία E_1E_2 ἡ ἔλλειψη ἔχει δυὸ σημεῖα A_1 καὶ A_2 μὲ ἀπόσταση $A_1A_2 = 2\alpha$. Ἡ ἔλλειψη ἔχει δυὸ *ἄξονες συμμετρίας*: 1ο τὴν εὐθεία E_1E_2 καὶ 2ο τὴν κάθετο στὸ μέσο O τοῦ τμήματος E_1E_2. Πάνω σ' αὐτὴν τὴν κάθετο ἡ ἔλλειψη ἔχει δυὸ σημεῖα B_1 καὶ B_2, ποὺ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ «κέντρο» O τῆς ἔλλειψης ἀπόσταση



Σχ. 43-α. Ἔλλειψη.

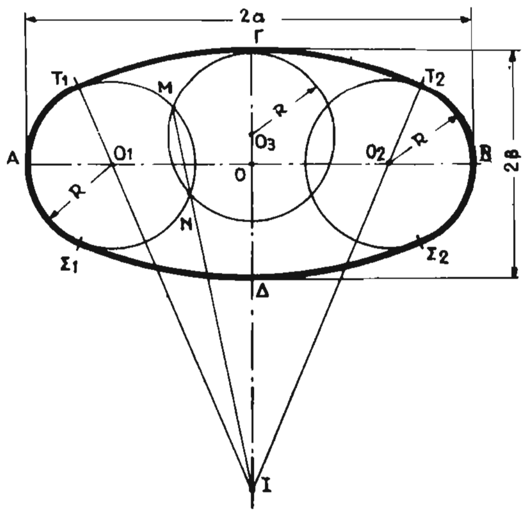
$$\beta = OB_1 = OB_2 = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} < \alpha.$$

Τὸ τμῆμα A_1A_2 (μὲ μῆκος 2α) λέγεται *μεγάλος ἄξονας* τῆς ἔλλειψης· τὸ τμῆμα B_1B_2, ποὺ ἔχει μῆκος $2\beta < 2\alpha$, λέγεται *μικρὸς ἄξονας* τῆς ἔλλειψης.

Ἐπειδὴ τώρα ἡ χάραξη μιᾶς ἔλλειψης δὲν μπορεῖ νὰ γίνη μὲ κανόνα καὶ διαβήτη, γι' αὐτὸ τὴν ἀντικαθιστοῦμε μὲ καμπύλες ποὺ τῆς μοιάζουν μέν, ἀλλ' ἀποτελοῦνται ἀπὸ κυκλικὰ τόξα συναρμοσμένα μεταξύ τους· (αὐτὰ χαράζονται μὲ διαβήτη). Οἱ καμπύλες αὐτὲς λέγονται *ὠοειδεῖς*, γιατὶ μοιάζουν μὲ μιὰ κατὰ μῆκος τομὴ ἑνὸς αὐγοῦ (ὠοῦ). Παρακάτω ἐξηγοῦμε πῶς χαράζονται.

2. Χάραξη μιᾶς ὠοειδοῦς μὲ δοσμένους ἄξονες. Ἂς εἶναι $AB = 2\alpha$ (σχ. 43-β καὶ σχ. 43-γ) ὁ μεγάλος ἄξονας τῆς ὠοειδοῦς, καὶ $\Gamma\Delta = 2\beta$ ὁ μικρός της ἄξονας, ποὺ εἶναι κάθετος στὸν AB στὸ μέσο του O.

1η *χάραξη* (43-β). Διαλέγομε ἕνα μῆκος R μεγαλύτερο

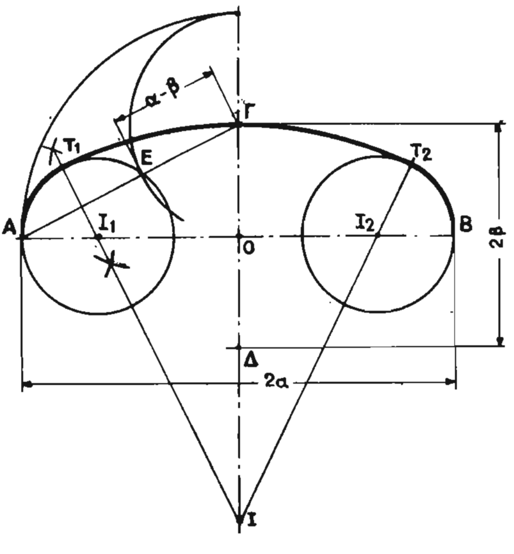


Σχ. 43-β. Μιὰ ὠοειδής.

ἀπὸ τὸ $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ καὶ παίρνομε πάνω στὶς εὐθεῖες AB καὶ ΓΔ 3 σημεῖα O_1, O_2, O_3 ἔτσι ποὺ νὰ εἶναι $AO_1 = BO_2 = \Gamma O_3 = R$. Χαράζομε τὶς 3 περιφέρειες ποὺ ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα O_1, O_3, O_2 καὶ ἀκτίνα R. Προσδιορίζομε τὰ σημεῖα M καὶ N ὅπου κόβονται οἱ 2 περιφέρειες μὲ κέντρα τὰ O_1 καὶ O_3 καὶ φέρνομε σὲ τομὴ τὴν εὐθεία MN μὲ τὴν εὐθεία ΓΔ. Ἔστω I τὸ σημεῖο τομῆς τῶν 2 εὐθειῶν. Θὰ ἔχωμε τότε $IO_1 = IO_2 = IO_3$. Ἐπομένως, ἡ περιφέρεια ποὺ ἔχει κέντρο τὸ I καὶ ἀκτίνα $I\Gamma = IO_3 + R$ θὰ ἐφάπτεται (ἐσωτερικὰ) 1ο μὲ τὴν περιφέρεια κέντρου O_1 καὶ ἀκτίνας

R στὸ σημεῖο T_1 ὅπου ἡ εὐθεία IO_1 κόβει τούτη τὴν περιφέρεια καὶ 2ο μὲ τὴν περιφέρεια κέντρου O_2 καὶ ἀκτίνας R στὸ σημεῖο T_2 ὅπου ἡ εὐθεία IO_2 κόβει τὴ δεύτερη αὐτὴ περιφέρεια. Ἄρα τὸ τόξο $\widehat{T_1\Gamma T_2}$ θὰ συναρμόζεται μὲ τὰ τόξα $\widehat{AT_1}$ καὶ $\widehat{T_2B}$ στὰ σημεῖα T_1 καὶ T_2 ἀντιστοίχως. Ἡ καμπύλη ποὺ ἀπαρτίζεται τώρα ἀπὸ τὰ 3 κυκλικὰ τόξα $\widehat{AT_1}$, $\widehat{T_1\Gamma T_2}$ καὶ $\widehat{T_2B}$ εἶναι τὸ ἕνα μισὸ τῆς ζητούμενης ὠοειδοῦς. Τὸ ἄλλο μισό της $A\Sigma_1\Delta\Sigma_2B$ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ $AT_1\Gamma T_2B$ καὶ χαράζεται μὲ τὴ βοήθεια τῆς περιφέρειας ποὺ ἔχει κέντρο τὸ σημεῖο I′, συμμετρικὸ τοῦ I ὡς πρὸς τὸν ἄξονα AB, καὶ ἀκτίνα I′Δ (= IΓ).

2η χάραξη (σχ. 43-γ). Χαράζομε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα

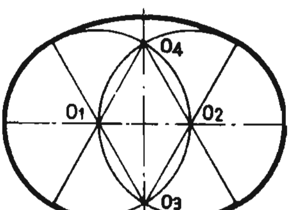


Σχ. 43-γ. Μιὰ ὠοειδής.

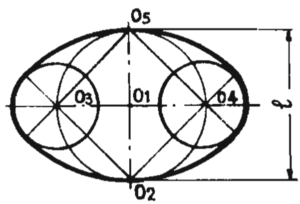
ΓΑ καὶ πάνω σ' αὐτὸ παίρνομε τὸ μῆκος ΓΕ = α — β. Ὕστερα χαράζομε τὴ μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΕ· αὐτὴ κόβει τὶς εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΓΔ σὲ δυὸ σημεῖα I_1 καὶ I ἀντιστοίχως. Οἱ δυὸ περιφέρειες ποὺ ἔχουν: ἡ πρώτη κέντρο τὸ I_1 καὶ ἀκτίνα I_1A, ἡ δεύτερη κέντρο τὸ I καὶ ἀκτίνα IΓ, ἐφάπτονται (ἐσωτερικὰ) σ' ἕνα σημεῖο T_1 ποὺ εἶναι τομὴ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων II_1 μὲ τὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 2 περιφέρειες. Ἑπομένως τὰ δυὸ τόξα: $\widehat{AT_1}$ τῆς πρώτης περιφέρειας καὶ $\widehat{T_1\Gamma}$ τῆς δεύτερης συναρμόζονται στὸ σημεῖο T_1 καὶ ἀπαρτίζουν τὸ ἕνα τέταρτο $AT_1\Gamma$ τῆς ζητούμενης ὠοειδοῦς. Τὸ δεύτερο τέταρτό της $\Gamma T_2 B$ σχεδιάζεται κατόπιν εὔκολα, γιατὶ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ $\Gamma T_1 A$ ὡς πρὸς ἄξονα τὸν ΓΔ. Τέλος, συμπληρώνομε τὴ χάραξη τῆς ὠοειδοῦς, σχεδιάζοντας (μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε στὸ τέλος τῆς 1ης χάραξης) τὸ συμμετρικὸ τοῦ ἤδη χαραγμένου μισοῦ $AT_1\Gamma T_2 B$ ὡς πρὸς ἄξονα τὸν AB.

Παρατήρηση. Τὸ μισὸ $AT_1\Gamma T_2 B$ τῆς ὠοειδοῦς λέγεται συχνὰ καὶ ***καμπύλη χειρολαβῆς καλαθιοῦ*** γιὰ εὐνόητο λόγο.

Ἀσκήσεις. *1*. Σχεδιάστε τὴν ὠοειδῆ τοῦ σχ. 43-δ. Θὰ χαράξετε πρῶτα τὶς δυὸ περιφέρειες ποὺ ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα O_1 καὶ O_2, ὕστερα τὶς δυὸ ἄλλες μὲ κέντρα τὰ σημεῖα O_3 καὶ O_4, φροντίζοντας γιὰ τὸν καλὸ προσδιορισμὸ τῶν 4 σημείων ὅπου γίνεται ἡ συναρμογὴ τῶν 4 κυκλικῶν τόξων ποὺ ἀπαρτίζουν τὴν ὠοειδῆ.



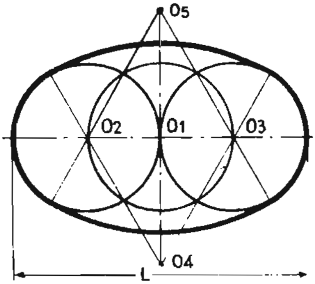
Σχ. 43-δ.



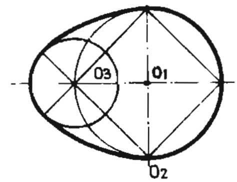
Σχ. 43-ε.

2. Σχεδιάστε μιὰν ὠοειδῆ ποὺ τὸν μικρό της ἄξονα *l* σᾶς τὸν δίνουν (σχ. 43-ε). (Θὰ χαράξετε μὲ τὴ σειρὰ τὶς περιφέρειες ποὺ ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα O_1, O_2, O_3 καὶ ὕστερα τὰ τόξα συναρμογῆς μὲ κέντρα τὰ σημεῖα O_4 καὶ O_5).

3. Σχεδιάστε μιὰν ὠοειδῆ ποὺ τὸν μεγάλο της ἄξονα L σᾶς τὸν δίνουν (σχ. 43-ϛ). (Θὰ χαράξετε μὲ τὴ σειρὰ τὶς περιφέρειες O_1, O_2, O_3 καὶ ὕστερα τὰ τόξα συναρμογῆς μὲ κέντρα τὰ σημεῖα O_4 καὶ O_5).



Σχ. 43-ς.

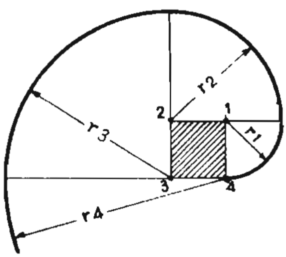


Σχ. 43-ζ.

4. Σχεδιάστε τὴν ὠοειδῆ τοῦ σχ. 43-ζ, ἡ ὁποία ἔχει ἕνα μόνο ἄξονα συμμετρίας, τὴν εὐθεία O_3O_1.

5. Σχεδιάστε μιὰν *ἕλικα τῶν τεσσάρων κέντρων* (σχ. 43-η).

6. Σχεδιάστε μιὰν *ἕλικα τῶν δύο κέντρων*. (Θὰ χαράξετε πρῶτα ἕνα τμῆμα AB καὶ ὕστερα μιὰν ἡμιπεριφέρεια μὲ διάμετρο τὸ AB. Στὴ μεριὰ τῆς εὐθείας AB ὅπου δὲν βρίσκεται ἡ ἡμιπεριφέρεια αὐτὴ θὰ χαράξετε τώρα μιὰν ἡμιπεριφέρεια $\widehat{AB_1}$ ποὺ ἔχει κέντρο τὸ B καὶ ἀκτίνα τὸ BA. Μὲ κέντρο τὸ A καὶ ἀκτίνα τὸ AB_1 θὰ χαράξετε μιὰν τρίτη ἡμιπεριφέρεια $\widehat{B_1A_1}$ ἀπὸ τὴν ἴδια μεριὰ τῆς εὐθείας AB μὲ τὴν πρώτη ἡμιπεριφέρεια $\widehat{AB}$. Μὲ κέντρο τὸ B καὶ μὲ ἀκτίνα τὴν BA_1 θὰ χαράξετε μιὰν τέταρτη ἡμιπεριφέρεια $\widehat{A_1B_2}$, ἀπὸ τὴν ἴδια μεριὰ τῆς εὐθείας AB μὲ τὴν δεύτερη ἡμιπεριφέρεια $\widehat{AB_1}$ κ. ο. κ.).



Σχ. 43-η.

Προβλήματα Γεωμετρίας γιὰ ἀνασκόπηση καὶ ἐπανάληψη.

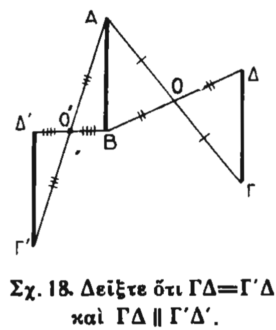
1. Ὑπολογίστε τὶς γωνίες ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ξέροντας ὅτι μιὰ ἀπ' αὐτὲς εἶναι διπλάσια τῆς μιᾶς ἀπὸ τὶς δυὸ ἄλλες (δυὸ λύσεις).

2. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἀντίστοιχα 50° καὶ 70°. Ὑπολογίστε τὴ διαφορὰ τῶν δυὸ γωνιῶν ποὺ σχηματίζει ἡ (ἐσωτερικὴ) διχοτόμος ΔΑ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ μὲ τὶς ἡμιευθεῖες ΔΒ καὶ ΔΓ (Δ εἶναι τὸ σημεῖο τομῆς τῆς διχοτόμου μὲ τὴν πλευρὰ ΒΓ).

3. Ὑπολογίστε τὶς γωνίες ἑνὸς τριγώνου ξέροντας ὅτι τὰ μεγέθη τους εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4 καὶ 5.

4. Σᾶς δίνουν δυὸ παράλληλες εὐθεῖες μὲ ἀπόσταση μεταξύ τους 40 mm καὶ ἕνα σημεῖο Α ποὺ δὲν βρίσκεται πάνω σ' αὐτές. Χαράξτε ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτὸ μιὰν εὐθεία τέτοια ὥστε τὸ τμῆμα της ἀνάμεσα στὶς δυὸ παράλληλες εὐθεῖες νὰ ἔχῃ μῆκος 60 mm. (Νὰ ἔχετε ὑπ' ὑπόψη σας ὅτι τὸ Α μπορεῖ νὰ βρίσκεται μεταξὺ τῶν 2 παραλλήλων ἢ καὶ ὄχι).

5. Σᾶς δίνουν τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καὶ δυὸ σημεῖα Ο καὶ Ο' (σχ. 18). Νὰ προεκτείνετε τὸ ΑΟ κατὰ ἕνα μῆκος ΟΓ = ΑΟ καὶ τὸ ΒΟ κατὰ ἕνα μῆκος ΟΔ = ΒΟ. Ὅμοια νὰ προεκτείνετε τὸ ΑΟ' κατὰ ἕνα μῆκος Ο'Γ' = ΑΟ' καὶ τὸ ΒΟ' κατὰ ἕνα μῆκος Ο'Δ' = ΒΟ'. Ὕστερα νὰ δείξετε, μὲ συλλογισμοὺς ποὺ βασίζονται σ' ὅσα ξέρετε γιὰ ἴσα τρίγωνα καὶ γιὰ παράλληλες εὐθεῖες, ὅτι τὰ τμήματα ΓΔ καὶ Γ'Δ' εἶναι παράλληλα καὶ ἴσα.



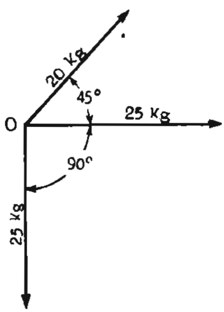
Σχ. 18. Δεῖξτε ὅτι ΓΔ=Γ'Δ' καὶ ΓΔ ∥ Γ'Δ'.

6. Δυὸ δυνάμεις, μὲ κοινὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς τὸ Ο, σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 72° καὶ ἔχουν μέγεθος 45 kg καὶ 30 kg ἀντιστοίχως. Νὰ κάμετε ἕνα ἀντίστοιχο σχέδιο παίρνοντας γιὰ παράσταση τοῦ 1 kg τμῆμα μὲ μῆκος 2 mm. Ὕστερα νὰ προσδιορίσετε γεωμετρικὰ (γραφικὰ) τὴ συνισταμένη τῶν δυὸ δυνάμεων καί, μετρώντας τὸ μῆκος ποὺ τὴν παριστάνει, νὰ βρῆτε τὸ μέγεθός της σὲ kg. Τέλος βρῆτε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τί γωνίες σχηματίζει ἡ συνισταμένη μὲ τὶς δυὸ δυνάμεις (τὶς δυὸ συνιστῶσες της).

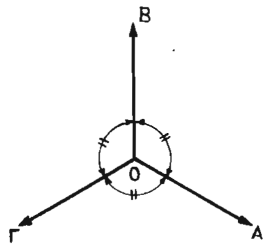
7. Νὰ βρῆτε γραφικὰ (δηλαδὴ μὲ τὸ σχέδιο) τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης τῶν 3 δυνάμεων ποὺ παριστάνονται στὸ σχῆμα 19 καὶ ἔχουν σημεῖο ἐφαρμογῆς τὸ Ο. (Νὰ διαλέξετε μιὰ καταλληλότερη κλίμακα σχεδίου, ὥστε ἡ ἀπάντησή σας νὰ εἶναι ἀρκετὰ ἀκριβής).

8. Τρεῖς ἴσες δυνάμεις ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ σχηματίζουν μεταξύ τους ἴσες γωνίες (σχ. 20). 1ο. Προσδιορίστε γραφικὰ τὴ συνισταμένη ΟΡ ποὺ ἔχουν δυὸ ἀπ' αὐτές, π.χ. οἱ ΟΑ καὶ ΟΒ. 2ο. Δεῖξτε ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτὴ εἶναι «ἀντίθετη» πρὸς τὴν τρίτη δύναμη ΟΓ, δηλαδὴ ὅτι ἔχει τὸ ἴδιο μέγεθος μὲ τὴν ΓΟ, ἀλλ' ἀντίθετη φορὰ (ΟΡ = ΟΓ καὶ ΟΡ προέκταση τοῦ τμήματος ΓΟ, πέραν ἀπὸ τὸ Ο). 3ο. Ποιά εἶναι ἑπομένως ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων ΟΑ, ΟΒ καὶ ΟΓ;

9. Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο καί, ὕστερα, πρὸς τὰ ἔξω του, τέσσερα ἰσόσκελα ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ βάσεις τὶς τέσσερις πλευρὲς τοῦ ὀρ-



Σχ. 19.



Σχ. 20.

Νὰ προσδιορισθῆ γραφικὰ ἡ συνισταμένη δυνάμεων μὲ κοινὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς.

θογωνίου. Νὰ δείξετε τώρα ὅτι οἱ ὀκτὼ πλευρὲς τῶν τριγώνων αὐτῶν ποὺ δὲν εἶναι σύγχρονα καὶ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου, σχηματίζουν ἕνα τετράπλευρο καὶ ὅτι τὸ τετράπλευρο αὐτὸ εἶναι ἕνα τετράγωνο.

10. Δεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου σχηματίζουν ἕνα ὀρθογώνιο.

11. Δεῖξτε ὅτι, ἂν ἑνώσωμε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ μέσα κάθε δυὸ συνεχόμενων πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, θὰ προκύψῃ ἕνα παραλληλόγραμμο. Ποιά πρέπει νὰ εἶναι ἡ σχετικὴ θέση τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, γιὰ νὰ εἶναι τὸ παραλληλόγραμμο αὐτὸ ρόμβος;

12. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$) ἡ μεγάλη βάση ΔΓ εἶναι διπλάσια τῆς μικρῆς ΑΒ καὶ ἡ γωνία $\widehat{B}$ τριπλάσια τῆς $\widehat{\Gamma}$. Ξέροντας αὐτά:

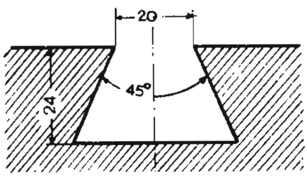
1ο ὑπολογίστε τὶς γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τραπεζίου, 2° ἀφοῦ χαράξετε τὴν κάθετο ΒΗ ἀπὸ τὸ Β στὴ ΔΓ, δεῖξτε ὅτι ΑΔ = ΑΒ = ΒΗ.

3° δεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία ΑΓ περνᾶ ἀπὸ τὸ μέσο τοῦ τμήματος ΒΗ καὶ ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΗ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετες.

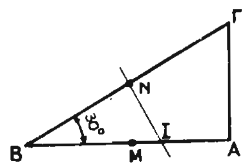
13. Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ πάνω στὶς δυὸ προεκτάσεις τῆς πλευρᾶς ΒΓ πάρτε τὸ τμῆμα ΒΑ′ = ΒΑ καὶ τὸ τμῆμα ΓΑ″ = ΓΑ. Νὰ δείξετε τώρα ὅτι οἱ γωνίες $\widehat{A'}$ καὶ $\widehat{A''}$ τοῦ τριγώνου ΑΑ′Α″ εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ τὰ μισὰ τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐφαρμογή. Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο γνωρίζοντας τὴν περίμετρό του 15 cm καὶ δυὸ ἀπὸ τὶς γωνίες του: 45° καὶ 60°.

14. Τὸ σχ. 21 παριστάνει τὴ διατομὴ μιᾶς ἐγκοπῆς ἢ μιᾶς αὐλάκωσης. Ἐξηγῆστε πῶς ἔγινε ἡ χάραξή του.



Σχ. 21.

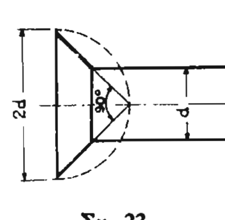


Σχ. 22.

15. Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ ὀρθὴ τὴ γωνία $\widehat{A}$ (σχ. 22) καὶ τὴν ὀξεία $\widehat{B} = 30°$. Προσδιορίστε τὸ μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΑ καὶ χαράξτε τὴ μεσοκάθετο τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ. Ἡ μεσοκάθετος αὐτὴ ἂς κόβῃ τὴ ΒΑ στὸ σημεῖο Ι. Δεῖξτε ὅτι τὸ τμῆμα ΜΙ εἶναι ἴσο μὲ τὸ 1/6 τοῦ ΒΑ. (Θὰ βασισθῆτε στὴν Ἄσκ. 10 τοῦ Μαθ. 34, γιὰ νὰ δείξετε πρῶτα ὅτι ΑΓ = ΝΓ καὶ ΙΝ = ΒΙ/2, ἔπειτα θὰ δείξετε ὅτι ΑΙ = ΙΝ).

16. Ἐξηγῆστε τὴ χάραξη τοῦ σχ. 23 ποὺ παριστάνει ἕνα μπουλόνι μὲ ἐπίπεδο κεφάλι τύπου F/90 (ἡ γωνία δηλαδὴ τῶν πλευρῶν τοῦ κεφαλιοῦ σὲ μιὰ ἀξονικὴ τομὴ εἶναι 90°). Ἐκτελέστε ἔπειτα τὴ χάραξη αὐτὴ σὲ κλίμακα 2 : 1 παίρνοντας τὸ d = 10 mm.

17. Δεῖξτε ὅτι τὸ κέντρο ἑνὸς ῥόμβου εἶναι ἐπίσης κέντρο μιᾶς περιφέρειας ποὺ ἐφάπτεται μὲ τὶς τέσσερις πλευρὲς τοῦ ῥόμβου.



Σχ. 23.

18. Χαράξτε δυὸ ὁμόκεντρους κύκλους καί, ὕστερα, μερικὲς ἐφαπτομένες τοῦ μικρότερου ἀπὸ τοὺς δυό. Οἱ εὐθεῖες αὐτὲς προσδιορίζουν ἀντίστοιχες χορδὲς τοῦ μεγάλου κύκλου. Δεῖξτε ὅτι οἱ χορδὲς αὐτὲς εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

19. Ἀπὸ διάφορα σημεῖα M_1, M_2, M_3,... μιᾶς περιφέρειας χαράζετε εὐθύγραμμα τμήματα M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3,... ποὺ εἶναι παράλληλα καὶ ἴσα μεταξύ τους καθὼς καὶ τῆς ἴδιας φορᾶς. Δεῖξτε ὅτι τὰ ἄκρα τους P_1, P_2, P_3,... βρίσκονται πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια καὶ πῆτε ποιό εἶναι τὸ κέντρο καὶ ποιά ἡ ἀκτίνα αὐτῆς τῆς περιφέρειας.

20. Χαράξτε 4 ἐφαπτομένες σ' ἕνα κύκλο ποὺ νὰ εἶναι δυὸ - δυὸ παράλληλες μεταξύ τους καὶ δεῖξτε ὅτι ὁρίζουν ἕνα ρόμβο.

21. Χαράξτε τὸν κύκλο ποὺ εἶναι ἐσωγραμμένος σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ = 80 mm, ΒΓ = 120 mm, ΓΑ = 100 mm. Ὁ κύκλος αὐτὸς ὁρίζει πάνω στὴν πλευρὰ ΑΒ δυὸ τμήματα ΑΤ καὶ ΤΒ (μὲ ἄλλα λόγια: ὁ κύκλος χωρίζει, μὲ τὸ σημεῖο ἐπαφῆς του, τὴν πλευρὰ ΑΒ σὲ δυὸ τμήματα ΑΤ καὶ ΤΒ). Παραστῆστε τὸ τμῆμα ΑΤ μὲ τὸ γράμμα μ καὶ τὸ ΤΒ μὲ τὸ ν. Μὲ ὅμοιο τρόπο ὁ κύκλος ὁρίζει πάνω στὴν πλευρὰ ΒΓ δυὸ τμήματα ΒΣ καὶ ΣΓ ποὺ παριστάνομε μὲ ν τὸ πρῶτο (τὸ ΒΣ) καὶ ρ τὸ δεύτερο.

1ο. Γιατί παραστήσαμε μὲ τὸ ἴδιο γράμμα ν τὰ δυὸ τμήματα ΒΤ καὶ ΒΣ;

2ο. Μὲ τί γράμματα θὰ παραστήσωμε τὰ δυὸ τμήματα ΓΡ καὶ ΡΑ ποὺ ὁ κύκλος ὁρίζει πάνω στὴν πλευρὰ ΓΑ;

3ο. Μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν 6 αὐτῶν τμημάτων; Μὲ τί τὸ ἡμιάθροισμά τους;

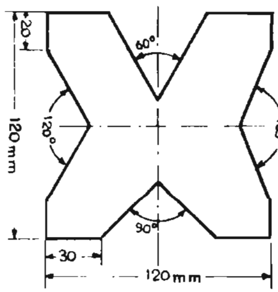
4ο. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ ἕξι αὐτὰ τμήματα.

22. Οἱ τρεῖς πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ἔχουν ἀντίστοιχα μήκη 12 cm, 16 cm, 20 cm. Ὑπολογίστε τὰ μήκη τῶν τμημάτων ποὺ ὁρίζει πάνω σ' αὐτὲς ὁ κύκλος ὁ ἐσωγραμμένος στὸ τρίγωνο.

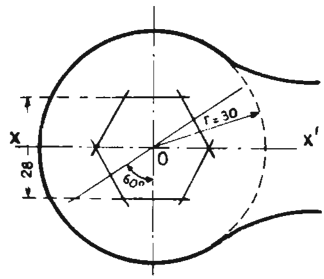
23. Σχεδιάστε σὲ κλίμακα 1 : 2 τὸ πρότυπο γιὰ χάραξη γωνιῶν τὸ ὁποῖο παριστάνεται στὸ σχ. 24. Πῶς θὰ κάμετε τὴν ἴδια χάραξη πάνω σὲ μιὰ τετράγωνη πλάκα 120 × 120 ἀπὸ μαλακὸ ἀτσάλι;

24. Δεῖξτε ὅτι ἡ γωνία τὴν ὁποία σχηματίζουν δυὸ ἡμιευθεῖες ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ εἶναι κάθετες πρὸς δυὸ συνεχόμενες πλευρὲς τοῦ ἑξαγώνου, ἔχει μέγεθος 60°.

Ἐφαρμογή. Θέλομε νὰ σχεδιάσωμε τὴν κεφαλὴ ἑνὸς κλειδιοῦ γιὰ ἑξαγωνικὰ παξιμάδια τῶν 28 mm (δηλαδὴ ἡ ἀπόσταση δυὸ παράλληλων πλευρῶν τοῦ παξιμαδιοῦ εἶναι 28 mm) (σχ. 25). Γιὰ νὰ τὸ κάμωμε, χαράζομε πρῶτα, πάνω καὶ κάτω ἀπὸ τὸν ἄξονα X′X, δυὸ παράλληλες εὐθεῖες σὲ ἀπόσταση 14 mm ἀπὸ τὸν ἄξονα. Ὕστερα χαράζομε μιὰν ἐπίκεντρη γωνία 60° ποὺ μιὰ πλευρά της εἶναι κάθετη



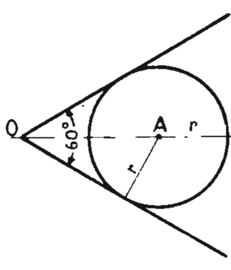
Σχ. 24.



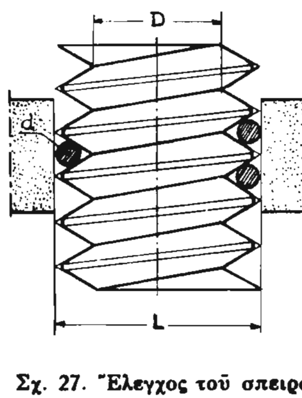
Σχ. 25.

πρὸς αὐτὲς τὶς 2 παράλληλες. Ἐξηγῆστε τώρα πῶς θὰ συμπληρωθῆ ἡ σχεδίαση καὶ δικαιολογῆστε την.

25. Δεῖξτε ὅτι, ὅταν μιὰ περιφέρεια ἀκτίνας r ἐφάπτεται μὲ τὶς δυὸ πλευρὲς μιᾶς γωνίας 60° (σχ. 26), τότε ἡ ἀπόσταση OA τοῦ κέντρου της ἀπὸ τὴν κορυφὴ τῆς γωνίας θὰ εἶναι ἴση μὲ 2r. Ἑπομένως πόση θὰ εἶναι ἡ ἀπόσταση OH; Ποιά εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ἀπόστασης OH, ὅταν r = 25 mm ;



Σχ. 26. Ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση OH γνωρίζοντας τὴν ἀκτίνα r.



Σχ. 27. Ἔλεγχος τοῦ σπειρώματος ἑνὸς κοχλία.

Ἐφαρμογή. Δεῖξτε ὅτι, ὅταν ἐλέγχετε τὸ σπείρωμα SI ἑνὸς κοχλία χρησιμοποιώντας κυλινδρικοὺς ἐλεγκτῆρες μὲ διάμετρο d, τότε σ' ἕνα σωστὸ σπείρωμα μὲ μικρὴ διάμετρο (διάμετρο πυρῆνα) D θὰ πρέπη νὰ βρῆτε τὸ μῆκος L ἴσο μὲ $D + 3d$.

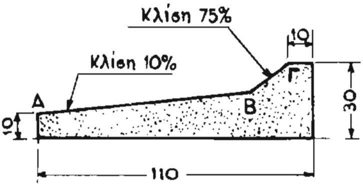
Νὰ κάμετε τὸν ἀριθμητικὸ ὑπολογισμὸ γιὰ $D = 7{,}89$ καὶ $d = 0{,}865$ (τὸ σπείρωμα ἔχει τότε ὀνομαστικὴ διάμετρο 10).

26. Στὸ σχέδιο τῆς σφήνας ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 28, πῶς προσδιορίζονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ;

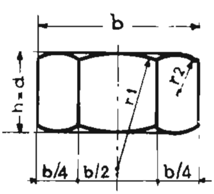
Ἐξηγῆστε καὶ πῶς θὰ τὰ χαράξετε.

27. Τὸ σχ. 29 παριστάνει ἕνα ἑξαγωνικὸ παξιμάδι. Νὰ κάμετε τὸ σχέδιό του σὲ κλίμακα 5 : 1, παίρνοντας τὴν ὀνομαστικὴ διάμετρο τοῦ σπειρώματός του $d = 10$ mm καὶ τὴν ἀπόσταση δυὸ παράλληλων πλευρῶν του $b = 19{,}7$ mm. Ἐξηγῆστε πῶς προσδιορίζονται τὰ κυκλικὰ τόξα ποὺ ἔχουν ἀκτίνες r_1 καὶ r_2.

Νὰ κάμετε ἀκόμη τὰ σχέδια δυὸ παξιμαδιῶν μὲ χαμηλότερο ὕψος, παίρνοντας $d = 10$ mm, $h = 7$ mm, $b = 19{,}7$ mm γιὰ τὸ πρῶτο καὶ $d = 10$ mm, $h = 5$ mm, $b = 19{,}7$ mm γιὰ τὸ δεύτερο.

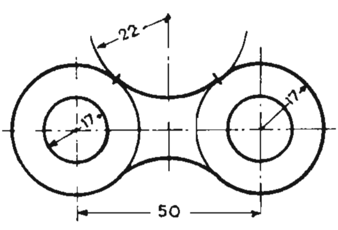


Σχ. 28. Σφήνα. Ἐξηγῆστε τὴ χάραξη τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ.



Σχ. 29. Ἑξαγωνικὸ παξιμάδι

$r_1 = \frac{3}{4} b, \quad r_2 = \frac{1}{4} b.$

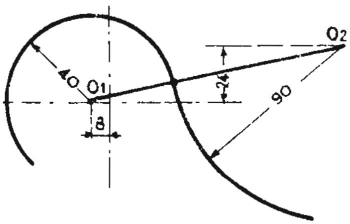


Σχ. 30. Κρίκος μιᾶς ἀλυσίδας.

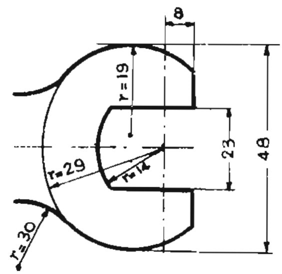
28. Ἐξηγῆστε πῶς προσδιορίζεται τὸ κέντρο τοῦ κυκλικοῦ τόξου ἀκτίνας 22 mm στὸ σχ. 30.

Νὰ κάμετε ὕστερα τὴ σχεδίαση αὐτοῦ τοῦ κρίκου ἀλυσίδας ποὺ βλέπετε.

29. Τὸ σχ. 31 παριστάνει ἕνα μέρος ἀπὸ τὸ σχέδιο ἑνὸς ἀγκίστρου (γάντζου). Ἐξηγῆστε πῶς προσδιορίζεται σ' αὐτὸ τὸ σχέδιο 1ο τὸ κέντρο O_1 τοῦ κύκλου μὲ ἀκτίνα 40 mm, 2ο τὸ κέντρο O_2 τοῦ κύκλου μὲ ἀκτίνα 90 mm καὶ 3ο τὸ σημεῖο ἐπαφῆς τῶν δυὸ περιφερειῶν μὲ κέντρα τὰ O_1 καὶ O_2 καὶ ἀκτίνες 40 mm καὶ 90 mm ἀντιστοίχως. Τέλος νὰ κάμετε τὴ χάραξη μὲ κλίμακα 1 : 2.



Σχ. 31. Ἄγκιστρο.

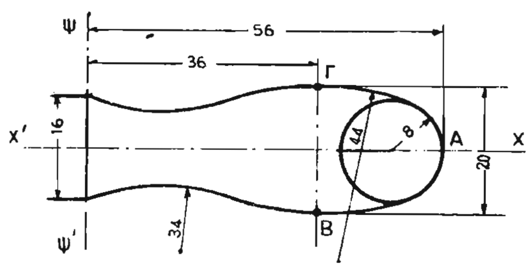


Σχ. 32. Κεφαλὴ κλειδιοῦ.

30. Μελετῆστε τὸ σχέδιο τῆς κεφαλῆς ἑνὸς κλειδιοῦ ἡ ὁποία παριστάνεται στὸ σχ. 32. Εἰδικῶς πῆτε μὲ ποιὸν τρόπο προσδιορίζεται ἡ περιφέρεια ποὺ ἔχει ἀκτίνα 19 mm.

Νὰ κάμετε τέλος τὴ σχεδίαση τῆς κεφαλῆς αὐτοῦ τοῦ κλειδιοῦ σὲ κλίμακα 2 : 1.

31. Γιὰ νὰ σχεδιάσετε ἕνα μέρος τῆς χειρολαβῆς μιᾶς μανιβέλας (σχ. 33), χαράζετε τὸν ἄξονα X′X καθὼς καὶ τὴν εὐθεία Ψ′Ψ τὴν



Σχ. 33. Χειρολαβὴ μο ιβέλας.

κάθετη στὸν X′X. Νὰ ἐξετάσετε καὶ νὰ κάμετε τώρα τὰ ἑξῆς:

1ο. Πῶς προσδιορίζεται τὸ σημεῖο A; Σημαδέψτε το.

2ο. Πῶς προσδιορίζεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ; Χαράξτε το.

3ο. Πῶς προσδιορίζεται ἡ περιφέρεια ποὺ ἔχει ἀκτίνα 8; Χαράξτε την.

4ο. Πῶς προσδιορίζεται ἡ περιφέρεια ποὺ ἔχει ἀκτίνα 44; Καθορίστε τὸ κέντρο της καὶ χαράξτε την.

5ο. Πῶς προσδιορίζεται ἡ περιφέρεια ποὺ ἔχει ἀκτίνα 34; Χαράξτε την.

Τέλος, συμπληρῶστε τὸ σχέδιο, ἔχοντας ὑπόψη ὅτι εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα X'X (ὅτι ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὸν X'X).

32. Διαιρέστε μιὰ περιφέρεια σὲ 12 ἴσα μέρη καὶ ἀριθμῆστε τὰ διαιρετικὰ σημεῖα κατὰ σειρὰ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3,..., 12. Ὕστερα ἑνῶστε κάθε διαιρετικὸ σημεῖο μὲ τὸ πέμπτο ποὺ ἀκολουθεῖ, ὅταν διατρέχετε τὴν περιφέρεια κατὰ τὴ φορὰ 1, 2, 3, μὲ ἄλλα λόγια φέρτε τὶς 12 χορδές:

1 - 6, 6 - 11, 11 - 4, 4 - 9, ..., 10 - 3, 3 - 8, 8 - 1.

Κάθε χορδὴ κόβεται ἀπὸ 8 ἄλλες σὲ 9 κομμάτια. Χαράξτε μὲ παχιὰ γραμμὴ τὰ δυὸ ἀκρινὰ κομμάτια κάθε χορδῆς. Θὰ προκύψη τότε τὸ περίγραμμα ἑνὸς ὄχι κυρτοῦ πολυγώνου μὲ 12 ἐξέχουσες καὶ 12 εἰσέχουσες γωνίες. Τὸ πολύγωνο αὐτὸ λέγεται ἀστεροειδὲς κανονικὸ δωδεκάγωνο γιὰ εὐνόητους λόγους. (Παράβαλε καὶ Μάθ. 40, Ἄσκ. 5). Ποιό εἶναι τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν του ποὺ ἐξέχουν καὶ ἐκείνων ποὺ εἰσέχουν;

Πίνακας τετραγώνων, τετραγωνικῶν ριζῶν, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν.

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΚΥΒΟΙ	ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
1	1	1,000	1	1,000
2	4	1,414	8	1,260
3	9	1,732	27	1,442
4	16	2,000	64	1,587
5	25	2,236	125	1,710
6	36	2,450	216	1,817
7	49	2,646	343	1,913
8	64	2,828	512	2,000
9	81	3,000	729	2,080
10	100	3,162	1 000	2,154
11	121	3,317	1 331	2,224
12	144	3,464	1 728	2,289
13	169	3,606	2 197	2,351
14	196	3,742	2 744	2,410
15	225	3,873	3 375	2,466
16	256	4,000	4 096	2,520
17	289	4,123	4 913	2,571
18	324	4,243	5 832	2,602
19	361	4,359	6 859	2,668
20	400	4,472	8 000	2,714
21	441	4,583	9 261	2,759
22	484	4,690	10 648	2,802
23	529	4,796	12 167	2,844
24	576	4,899	13 824	2,885
25	625	5,000	15 625	2,924
26	676	5,099	17 576	2,963
27	729	5,196	19 683	3,000
28	784	5,292	21 952	3,037
29	841	5,385	24 389	3,072
30	900	5,477	27 000	3,107
31	961	5,568	29 791	3,141
32	1 024	5,657	32 768	3,175
33	1 089	5,745	35 937	3,208
34	1 156	5,831	39 304	3,240
35	1 225	5,916	42 875	3,271
36	1 296	6,000	46 656	3,302
37	1 369	6,083	50 653	3,332
38	1 444	6,164	54 872	3,362
39	1 521	6,245	59 319	3,391
40	1 600	6,325	64 000	3,120
41	1 681	6,403	68 921	3,448
42	1 764	6,481	74 088	3,476
43	1 849	6,557	79 507	3,503
44	1 936	6,633	85 184	3,530
45	2 025	6,708	91 125	3,557
46	2 116	6,782	97 336	3,583
47	2 209	6,856	103 823	3,609
48	2 304	6,928	110 592	3,634
49	2 401	7,000	117 649	3,659
50	2 500	7,071	125 000	3,684

Πίνακες τετραγώνων, τετραγωνικῶν ριζῶν, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν (συνέχεια).

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΚΥΒΟΙ	ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
51	2 601	7,141	132 651	3,708
52	2 704	7,211	140 608	3,733
53	2 809	7,280	148 877	3,756
54	2 916	7,349	157 464	3,780
55	3 025	7,416	166 375	3,803
56	3 136	7,483	175 616	3,826
57	3 249	7,550	185 193	3,849
58	3 364	7,616	195 112	3,871
59	3 481	7,681	205 379	3,893
60	3 600	7,746	216 000	3,915
61	3 721	7,810	226 981	3,937
62	3 844	7,874	238 328	3,958
63	3 969	7,937	250 047	3,979
64	4 096	8,000	262 144	4,000
65	4 225	8,062	274 625	4,021
66	4 356	8,124	287 496	4,041
67	4 489	8,185	300 763	4,062
68	4 624	8,246	314 432	4,082
69	4 761	8,307	328 509	4,102
70	4 900	8,367	343 000	4,121
71	5 041	8,426	357 911	4,141
72	5 184	8,485	373 248	4,160
73	5 329	8,544	389 017	4,179
74	5 476	8,602	405 224	4,198
75	5 625	8,660	421 875	4,217
76	5 776	8,718	438 976	4,236
77	5 929	8,775	456 533	4,254
78	6 084	8,832	474 552	4,273
79	6 241	8,888	493 039	4,291
80	6 400	8,944	512 000	4,309
81	6 561	9,000	531 441	4,327
82	6 724	9,055	551 368	4,345
83	6 889	9,110	571 787	4,362
84	7 056	9,165	592 704	4,380
85	7 225	9,220	614 125	4,397
86	7 396	9,274	636 056	4,414
87	7 569	9,327	658 503	4,431
88	7 744	9,381	681 472	4,448
89	7 921	9,434	704 969	4,465
90	8 100	9,487	729 000	4,481
91	8 281	9,539	753 571	4,498
92	8 464	9,592	778 688	4,514
93	8 649	9,644	804 357	4,531
94	8 836	9,695	830 584	4,547
95	9 025	9,747	857 375	4,563
96	9 216	9,798	884 736	4,579
97	9 409	9,849	912 673	4,595
98	9 604	9,900	941 192	4,610
99	9 801	9,950	970 299	4,626
100	10 000	10,000	1 000 000	4,642

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

(Οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρονται σὲ σελίδες)