ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΤΗ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ Α΄

TIMATAI ΔΡΧ. 30

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΗ

# ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΤΗ

Είδικότητες Μηχανοτεχνίτη καὶ Ἠλεκτροτεχνίτη

1.— *Μαθηματικὰ* τόμοι Α΄, Β΄, Γ΄.

2.— *Μηχανουργικὴ Τεχνολογία* τόμοι Α΄, Β΄, Γ΄.

3.— *Κινητήριες Μηχανὲς* τόμοι Α΄, Β΄.

4.— *Τεχνικὸ Σχέδιο* τόμοι Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄.

*Τετράδια Ἀσκήσεων Σχεδίου* Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄.

5.— *Χημεία.*

6.— *Ἠλεκτροτεχνία* τόμοι Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄.

7.— *Φυσική.*

8.— *Στοιχεῖα Μηχανῶν.*

9.— *Μηχανική.*

10.— *Ὑλικά.*

11.— *Μηχανολογικὸ Μνημόνιο.*

12.— *Ἠλεκτρολογικὸ Μνημόνιο.*

13.— *Πρόληψη Ἀτυχημάτων.*

14.— *Ἠλεκτροτεχνία Μηχανοτεχνίτη.*

15.— *Ἠλεκτρικὸ Σύστημα τοῦ Αὐτοκινήτου.*

16.— *Αὐτοκίνητο.*

*Ἦταν βαθειὰ ἡ πεποίθηση στὸν Εὐγένιο Εὐγενίδη ὅτι σημαντικὸς παράγων στὴν πρόοδο τοῦ Ἔθνους εἶναι ἡ ἄρτια κατάρτιση τῶν νέων τεχνιτῶν μας, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν ἠθικὴ ἀγωγή τους.*

*Τὴν πεποίθησή του αὐτὴ τὴν μετέτρεπε σὲ γενναιόφρονα πράξη εὐεργεσίας, ὅταν κληροδοτοῦσε σεβαστὸ ποσὸν γιὰ τὴν σύσταση Ἱδρύματος ποὺ θὰ εἶχε σκοπὸ νὰ συμβάλῃ στὴν τεχνικὴ ἐκπαίδευση τῶν νέων.*

*Μὲ τὸ Β. Διάταγμα τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου καί, κατὰ τὴν ἐπιθυμία τοῦ διαθέτου, ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκηση τῆς ἀδελφῆς του κυρίας Μαρ. Σίμου. Ἀπὸ τὴν στιγμὴ ἐκείνη ἄρχισαν νὰ πραγματοποιοῦνται οἱ σκοποὶ ποὺ ὡραματίσθηκε ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ μαζὶ ἡ πλήρωση μιᾶς ἀπὸ τὶς βασικὲς ἀνάγκες τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.*

*Κατὰ τὴν κλιμάκωση τῶν σκοπῶν του, τὸ Ἵδρυμα ἐπρόταξε τὴν ἔκδοση τεχνικῶν βιβλίων, τόσο γιὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσο καὶ πρακτικούς. Διότι ἐκρίθη πρωταρχικὴ ἡ ἀνάγκη νὰ ἐφοδιασθοῦν οἱ μαθηταὶ τῶν τεχνικῶν ἐπαγγελματικῶν σχολῶν μὲ μιὰ πλήρη σειρὰ βιβλίων, ποὺ νὰ θεμελιώνῃ σωστὰ τὴν πρώτη τους ἐπαφὴ μὲ τὸν κύκλο τῶν σπουδῶν καὶ τῆς τέχνης τους.*

*Στὴν ἐκτέλεση τοῦ προγράμματος αὐτοῦ τὸ Ὑπουργεῖο Βιομηχανίας ἔδωσε πλήρη καὶ πολύτιμη τὴν συνδρομή του.*

*Μὲ ἀπόφαση τοῦ Ὑπουργοῦ Βιομηχανίας τὸ ὅλον ἔργον μελέτης, ὀργανώσεως καὶ πραγματοποιήσεως τῶν ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος ἀνετέθη σὲ Ἐπιτροπὴ ἀπὸ δύο ἐκπροσώπους τοῦ Ἱδρύματος καὶ δύο τοῦ Συμβουλίου Ἐπαγγελματικῆς Ἐκπαιδεύσεως.*

*Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ κατέβαλαν κάθε προσπάθεια γιὰ νὰ κάνουν τὸ περιεχόμενο τῶν βιβλίων ὅσο γίνεται πιὸ ἁπλὸ καὶ προσαρμοσμένο στὶς ἀνάγκες καὶ τὶς δυνατότητες τῶν μαθητῶν. Γι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ εἶναι γραμμένα στὴν ἁπλὴ νεοελληνικὴ ποὺ διδάσκεται στὰ δημοτικὰ σχολεῖα. Ἡ τιμή τους ὡρίσθη τόσο χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ στοὺς πιὸ ἀπόρους μαθητάς.*

*Ἔτσι προσφέρονται στὸ εὐρὺ κοινὸ τῶν καθηγητῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῆς τεχνικῆς μας ἐκπαιδεύσεως οἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος, τῶν ὁποίων ἡ συμβολὴ στὴν πραγματοποίηση τοῦ σκοποῦ τοῦ Εὐγενίου Εὐγενίδου ἐλπίζεται νὰ εἶναι μεγάλη.*

Ι Δ Ρ Υ Μ Α   Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ
Β Ι Β Λ Ι Ο Θ Η Κ Η   Τ Ο Υ   Τ Ε Χ Ν Ι Τ Η

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΚΡΙΤΙΚΟΥ
ΟΜΟΤΙΜΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΠΟ ΤΟ ΓΑΛΛΙΚΟ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ
ΤΟΥ κ. R. CLUZEL, ΜΕ ΑΔΕΙΑ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ
1971

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ 1957

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ 1963

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου ἐγκαινιάζει τὴ σειρὰ τῶν ἐκδόσεών του γιὰ τὴν 1η βαθμίδα τῆς ἐπαγγελματικῆς τεχνικῆς ἐκπαιδεύσεως μας μὲ τὸν παρόντα 1ο τόμο ἀπὸ τὸ τρίτομο διδακτικὸ σύγγραμμα: Μαθηματικὰ γιὰ τὸν Τεχνίτη.

Ὁ τόμος αὐτὸς ἀπαρτίζεται ἀπὸ δυὸ μέρη. Στὸ πρῶτο ὑπενθυμίζω ὀλίγα βασικὰ πράγματα ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴ τῶν ἀκέραιων καὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Τὸ δεύτερο, ποὺ ἀποτελεῖ καὶ τὸ κύριο μέρος τοῦ τόμου, εἶναι προσαρμογὴ στὰ Ἑλληνικὰ τοῦ ἐξαίρετου διδακτικοῦ βιβλίου «Les Mathématiques en 1re Année d'apprentissage», Les Éditions Foucher, Paris, 1950, ποὺ ἔγραψε ὁ καθηγητὴς τεχνικῶν Σχολῶν καὶ Διδασκαλείων κ. René Cluzel γιὰ τὴν Α′ τάξη τῶν Σχολῶν Μαθητείας τῆς Γαλλίας. Οἱ μαθητὲς τῶν Σχολῶν αὐτῶν εἶναι ἀπόφοιτοι ἑνὸς ἑξάχρονου δημοτικοῦ σχολείου καὶ διδάσκονται Μαθηματικὰ ἐπὶ 3 ἔτη, μὲ ἀναλυτικὸ πρόγραμμα ποὺ δὲν διαφέρει στὸ περιεχόμενό του ἀπὸ τὸ δικό μας στὶς νυκτερινὲς Σχολὲς Μηχανοτεχνιτῶν καὶ Ἠλεκτροτεχνιτῶν τοῦ Ὑπουργείου Βιομηχανίας. Μονάχα ἡ κατανομὴ τῆς διδακτέας ὕλης στὰ 3 διδακτικὰ ἔτη καθὼς καὶ ἡ διάρθρωση, ἡ μέθοδος καὶ τὸ πνεῦμα τῆς διδασκαλίας των διαφέρουν ἀπὸ ὅσα ἐπικράτησαν σ' ἐμᾶς. Δὲν διστάζω νὰ ἰσχυριστῶ ὅτι τὸ γαλλικὸ σύστημα εἶναι καλύτερο ἀπὸ τὸ δικό μας καὶ ὅτι, ἂν τὸ μεταφέρωμε βαθμιαῖα στὶς Σχολές μας, θὰ ἰδοῦμε πολὺ γρήγορα νὰ βελτιώνεται αἰσθητὰ ἡ ἀπόδοση τῆς διδασκαλίας μας στὰ Μαθηματικά. Καὶ εἶναι ἕνα εὐτύχημα ὅτι αὐτὴ ἡ ἀλλαγὴ συστήματος ποὺ προτείνω μπορεῖ νὰ συμπέση μὲ τὴν εἰσαγωγὴ στὸ ἀναλυτικὸ πρόγραμμα καὶ στὸ ὡράριο τῶν Σχολῶν μας ὁρισμένων τροποποιήσεων ποὺ μελέτησε τὸ Ὑπουργεῖο Βιομηχανίας.

Τὰ κύρια πλεονεκτήματα τοῦ γαλλικοῦ συστήματος εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

1) Τὰ Μαθηματικὰ διδάσκονται σὰν ἕνα ἑνιαῖο μάθημα καὶ δὲν χωρίζονται, ὅπως σ' ἐμᾶς ὡς τώρα, σὲ παράλληλα διδασκόμενους κλάδους: Ἀριθμητικὴ καὶ Γεωμετρία (Α′ τάξη), Ἄλγεβρα καὶ Γεωμετρία (Β′ τάξη), Ἄλγεβρα καὶ Τριγωνομετρία (Γ′ τάξη). Ἔτσι ὁ μαθητὴς βλέπει τοὺς κλάδους αὐτοὺς νὰ ἀλληλοφωτίζωνται καί, π.χ. στὴν Α′ τάξη, πρῶτα μελετᾶ γεωμετρικὰ καὶ ἁπλᾶ τεχνικὰ θέματα, ποὺ τοῦ εἶναι κατὰ κανόνα πιὸ ἑλκυστικὰ ἀπὸ τὰ ἀριθμητικὰ καὶ ποὺ τοῦ δίνουν τὴν εὐκαιρία νὰ ξαναθυμηθῆ τοὺς κανόνες τῶν πράξεων μὲ ἀκέραιους καὶ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ νὰ ἀσκηθῆ σ' αὐτές, διδάσκεται ἔπειτα τὰ κλάσματα καὶ τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς ἐφαρμόζοντας σὲ ἁπλᾶ γεωμετρικὰ καὶ τεχνικὰ θέματα ὅσα μαθαίνει, ξαναγυρίζει ὕστερα στὴ Γεωμετρία βρίσκοντας εὐκαιρία γιὰ πολλαπλὲς ἀριθμητικὲς ἐφαρμογὲς καὶ μὲ κλασματικοὺς τώρα ἢ συμμιγεῖς ἀριθμούς, τέλος ἐπανέρχεται στὴν Ἀριθμητικὴ γιὰ ν' ἀποκτήση κάποια γνωριμία μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν καὶ τὰ ποσοστά. Ὅμοια, στὴν Γ′ τάξη, ἡ Τριγωνομετρία δὲν χωρίζεται ἀπὸ τὴ Γεω-

μετρία, ἀλλὰ ἐντάσσεται στὸ κεφάλαιο ποὺ πραγματεύεται τὰ ὅμοια σχήματα, περιοριζόμενη στὴν πραγματικὰ ἀπαραίτητη γιὰ τὶς ὑπόψη Σχολὲς ἔκταση.

2) Ἡ μαθηματικὴ ἐκπαίδευση τῶν μαθητῶν προωθεῖται ἐνωρίτερα ἀπὸ ὅ,τι συμβαίνει σ' ἐμᾶς. Ὅπως ὑποδηλώνεται ἀπὸ τὰ παραπάνω, ὁ μαθητὴς ἀποκτᾶ ἤδη στὸ 1ο ἔτος τῶν σπουδῶν του μιὰν πρώτη γνωριμία μὲ ὅλες σχεδὸν τὶς ἀριθμητικὲς ἢ γεωμετρικὲς ἔννοιες καὶ μεθόδους ποὺ θὰ τοῦ χρειαστοῦν στὰ ἄλλα του μαθήματα, εἶναι δὲ φανερὸ πόσο ὠφέλιμο εἶναι τοῦτο. Ἡ γνωριμία αὐτὴ ἐμπεδώνεται μὲ ἐπαναλήψεις καὶ συμπληρώσεις στὸ 2ο καὶ 3ο ἔτος, συγχρόνως βαθαίνει καὶ ἀναπτύσσεται μὲ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν ἀλγεβρικῶν ἐννοιῶν καὶ μεθόδων καθὼς καὶ μὲ μιὰν κάπως πιὸ θεωρητικὴ πραγμάτευση τῆς Γεωμετρίας.

3) Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν καὶ τῶν ἰδιοτήτων τους γίνεται κατὰ μικρὲς δόσεις κάθε φορά, μὲ ἀφετηρία πραγματευμένα προβλήματα ἀπὸ τὴν πρακτικὴ ζωὴ ἢ τὴν τέχνη καὶ μὲ τρόπο συγκεκριμένο, ἐποπτικὸ καὶ ἑλκυστικό. Ὁ μαθητὴς ἐκπαιδεύεται στὰ Μαθηματικὰ ὄχι σὰν ἕνας παθητικὸς δέκτης προσφερόμενων γνώσεων, ἀλλὰ αὐτενεργώντας καὶ ἐκτελώντας τὶς περισσότερες φορὲς κάτι μὲ τὰ χέρια καὶ μὲ τὴ χρήση κατάλληλων μέσων. Τὸ κείμενο τοῦ διδακτικοῦ του βιβλίου τὸν προκαλεῖ ἀδιάκοπα νὰ παρατηρῇ, νὰ κρίνῃ, νὰ σκέπτεται καὶ νὰ συνδέῃ τὰ Μαθηματικά του μὲ τὴν πραγματικότητα.

4) Ὁ καθηγητὴς τῶν Μαθηματικῶν διευκολύνεται στὴ διδασκαλία του μὲ μιὰ διαίρεση τοῦ ὅλου ἑνιαίου μαθήματος σὲ μιὰ σειρὰ ἀπὸ σύντομα « Μαθήματα », τὸ καθένα τους ἀκολουθημένο ἀπὸ κατάλληλες ἀσκήσεις ποὺ πολλές τους σχετίζονται στενὰ καὶ ἐπακριβῶς μὲ τὴν πρακτικὴ ζωὴ ἢ τὴν τέχνη.

5) Ἡ γραπτὴ ἔκθεση τῆς διδακτέας ὕλης γίνεται σ' ἕνα ὕφος ζωντανὸ ποὺ διεγείρει καὶ εὐχαριστεῖ τὸν μαθητή, σὰν ἕνας ζωηρὸς προφορικὸς λόγος ταιριαστὸς μὲ τὴν ἡλικία του. Ἐξάλλου τὸ πλούσιο λεξιλόγιο, ἡ προσεγμένη, ξεκάθαρη καὶ κυριολεκτικὴ γλωσσικὴ διατύπωση διδάσκουν σιγὰ - σιγὰ τὸν μαθητὴ νὰ ἐκφράζῃ τὴ σκέψη του μὲ τὴ γλώσσα τῆς ἐπιστήμης καὶ προάγουν τὴ διανοητική του μόρφωση.

Πιστεύω ὅτι τὰ παραπάνω πλεονεκτήματα τοῦ γαλλικοῦ συστήματος θὰ γίνουν φανερὰ καὶ στὴν παροῦσα ἑλληνικὴ προσαρμογὴ τοῦ βιβλίου τοῦ κ. Cluzel. Τὸ κάπως πλούσιο περιεχόμενό της δὲν πρέπει ν' ἀνησυχήσῃ ἐκείνους ποὺ θὰ τὸ διδάξουν: δὲν ἀμφιβάλλω ὅτι θὰ μπορέσουν νὰ τὸ διεξέλθουν ὁλόκληρο στὴν Α΄ τάξη, ἀρκεῖ νὰ μὴ ζητοῦν ἀπὸ τὸν μαθητὴ τίποτε ἄλλο παρὰ νὰ τὸ κατανοῇ καὶ ν' ἀποκτᾶ τὴν ἱκανότητα νὰ τὸ ἐφαρμόζῃ σωστά, ὅταν, ἔχοντας τὸ κείμενο στὰ χέρια του, ἀσκῆται ἢ ἐξετάζεται στὸ μαυροπίνακα καὶ στὰ λεγόμενα διαγωνίσματα. Τὸ νὰ ζητοῦμε ἀπὸ τὸν μαθητὴ νὰ μαθαίνῃ ἀπέξω μέρη τοῦ βιβλίου ἢ νὰ λύνῃ, χωρὶς τὴ βοήθεια τοῦ κειμένου τὰ ζητήματα ποὺ τοῦ θέτομε γιὰ ἄσκηση ἢ ἐξέταση, ὄχι μόνο δὲν ἀνταποκρίνεται στοὺς πρακτικοὺς σκοποὺς τῆς ἐκπαιδεύσεως του ἀλλὰ καὶ παρουσιάζει τὰ ἑξῆς κύρια μειονεκτήματα: 1ο σπρώχνει τὸν μαθητὴ στὸν παπαγαλισμό, 2ο τὸν κάνει νὰ προσπαθῇ νὰ πετύχῃ καλὸ βαθμὸ χρησιμοποιώντας κρυφὰ τὸ ἀπαγορευμένο κείμενο, 3ο κινδυνεύει νὰ γεννήσῃ στὴν ψυχή του αἰσθήματα κατωτερότητας, γιατί εἶναι φυσικό, παιδιά πού πέρασαν μονάχα ἀπό μιάν ἀνεπαρκή τίς περισσότερες φορές δημοτική ἐκπαίδευση νά μή μποροῦν οὔτε νά συγκρατοῦν οὔτε νά διατυπώνουν ὀρθά τίς πολλές καί ποικίλες μαθηματικές γνώσεις πού τούς χρειάζονται στίς ἐπαγγελματικές σπουδές τους.

Θά εἶχα τώρα νά προσθέσω ὅτι τήν ὀρθή κατανόηση τοῦ κειμένου μου ἀπό τά παιδιά θά τή διευκολύνη ἐξάπαντος ἡ ἁπλῆ νεοελληνική γλώσσα στήν ὁποία τό ἔγραψα. Ὡς πρός τό γραμματικό της τύπο ἀκολούθησα (μέ ἐλάχιστες παρεκκλίσεις πρός τή λόγια παράδοση) τή «Νεοελληνική Γραμματική (τῆς Δημοτικῆς)» τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι, 1941. Ὁ πρόλογος αὐτός δέν εἶναι βέβαια τό κατάλληλο βῆμα γιά νά ἐξηγήσω ἤ δικαιολογήσω μερικές γραφές. Πάντως ὁ προσεκτικός καί ὥριμος ἀναγνώστης δέν θά δυσκολευτῆ νά βρῆ αὐτήν τήν ἐξήγηση ἤ δικαιολογία. Ὅσο γιά τό νεαρό μαθητή πού θά χρησιμοποιήση τό βιβλίο μου, ἄς τόν ἀφήσωμε νά ἐκφράζεται γλωσσικά ὅπως τοῦ ταιριάζει, ἔχοντας ὑπόψη ὅτι γιά ἕναν τεχνίτη, πού κατά κανόνα δέν πρόκειται νά γίνη οὔτε δάσκαλος οὔτε γραμματέας σ᾿ ἕνα τεχνικό γραφεῖο, ἡ γλωσσική του μόρφωση εἶναι κάτι δευτερεῦον μπροστά στήν ὑπόλοιπη πρακτική καί θεωρητική του κατάρτιση.

Στήν ἐπιστημονική ὁρολογία ἐκαινοτόμησα ἐλάχιστα, χωρίς ὅμως νά παραλείψω νά ἀναφέρω καί τούς ὅρους πού μᾶς παραδόθηκαν. Ἡ χρήση θά δείξη ἄν τά προτεινόμενα μποροῦν νά γίνουν δεκτά. Ὅποιος πάλι ἐνδιαφέρεται γιά τήν αἰτιολογησή τους, θά τή βρῆ ἐκτεθειμένη λεπτομερῶς σέ μιά διάλεξη πού ἔκαμα στήν Ἑλληνική Μαθηματική Ἑταιρεία καί πού δημοσιεύτηκε στό περιοδικό: Παιδεία καί Ζωή (τεῦχος 54, σελ. 262 — 271, Δ/βριος 1956) μέ τόν τίτλο: Νεοελληνική μαθηματική ὁρολογία.

Γιά τήν προσαρμογή τοῦ γαλλικοῦ βιβλίου στά Ἑλληνικά εἶχα συνεργάτη τόν κ. Μαρῖνο Καλλικούρδη, διπλ. Πολ. Μηχ. καί Μηχ. - Ἠλεκτρ. Ἐκτελῶ ἕνα καλόδεχτο χρέος εὐχαριστώντας τον, καί ἀπό αὐτό τό δημόσιο βῆμα, γιά τήν πρόθυμη συνεργασία του. Ἐπιθυμῶ ἀκόμη νά εὐχαριστήσω καί ὅλους ὅσοι διάβασαν μεγαλύτερο ἤ μικρότερο μέρος τοῦ χειρογράφου μου ἤ μέ βοήθησαν στίς διορθώσεις τῶν τυπογραφικῶν δοκιμίων γιά τίς χρήσιμες ὑποδείξεις τους. Ἰδιαίτερα χρεωστῶ εὐχαριστίες στόν κ. Ι. Πεχλιβανίδη, διπλ. Χημικό Μηχανικό, πού μέ ἔφερε σέ ἐπαφή μέ τόν Γάλλο συγγραφέα κ. R. Cluzel, γιά τό πνευματικό κέρδος πού μοῦ ἀπέφερε ἡ γνωριμία αὐτή. Εὐχαριστίες ἔχω νά ἀπευθύνω καί πρός τόν ἐκδοτικό οἶκο Ἀσπιώτη - Ἔλκα πού φρόντισε γιά τήν ἐκτύπωση τοῦ βιβλίου.

Τελειώνοντας ἐκφράζω τήν ἐλπίδα ὅτι διδάσκοντες καί διδασκόμενοι θ᾿ ἀγαπήσουν, παρά τίς ἀτέλειές του, τό βιβλίο πού τούς παρουσιάζω καί πού γι᾿ αὐτό ἐργάστηκα ὁ ἴδιος μέ ἀγάπη καί ἀνιδιοτέλεια, ἐνθυμούμενος τό παράδειγμα τοῦ μεγάλου μου δασκάλου καί ἐμψυχωτῆ τῆς ἐπαγγελματικῆς μας ἐκπαιδεύσεως: τοῦ Κυπαρίσσου Στεφάνου.

Ἀθήνα, 6 Ὀκτωβρίου 1957.

Ν. ΚΡΙΤΙΚΟΣ

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

## Εἰσαγωγή : Ὑπομνήσεις ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική

## ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

# Μαθήματα Ἀριθμητικῆς καὶ Γεωμετρίας

Μάθημα **Κεφάλαιο 1. Τὰ μήκη** Σελίδα



**Κεφάλαιο 2. Οἱ γωνίες**



**Κεφάλαιο 3. Τὰ κλάσματα**



**Κεφάλαιο 4. Συμμιγεῖς ἀριθμοὶ**



**Κεφάλαιο 5. Τὰ πολύγωνα καὶ ἡ περιφέρεια**

## ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### ΥΠΟΜΝΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

## Ἀκέραιοι ἀριθμοί.

**1. Μέτρημα.**

Πόσα σπίρτα περιέχει αὐτὸ τὸ κουτί;

Πόσες εἶναι οἱ βίδες σ' αὐτὸ τὸ πακέτο;

Γενικῶς: πόσα εἶναι τὰ πράγματα ποὺ ἀποτελοῦν αὐτὴν τὴν ὁμάδα;

Γιὰ νὰ ἀπαντήσωμε σ' αὐτὰ τὰ ἐρωτήματα, ἐκτελοῦμε μιὰ πράξη ποὺ λέγεται *μέτρημα* καὶ ποὺ τὸ ἀποτέλεσμά της εἶναι ἕνας *ἀκέραιος ἀριθμός*.

Ἂς πάρωμε γιὰ παράδειγμα τὸ κουτὶ τῶν σπίρτων. Ἂν εἶναι ἄδειανό, τότε λέμε πὼς περιέχει *μηδὲν* σπίρτα. Ἂν δὲν εἶναι ἄδειανό, τότε τοῦ παίρνομε τὰ σπίρτα ἕνα - ἕνα μὲ τὴ σειρὰ ὥσπου ν' ἀδειάση καὶ λέμε διαδοχικά:

ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννιά, δέκα, ἕνδεκα, δώδεκα, κτλ.

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι τὸ κουτὶ ἀδειάζει, ὅταν ποῦμε δεκαπέντε· τότε τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ μετρήματος ποὺ κάμαμε εἶναι ὁ ἀριθμὸς *δεκαπέντε*, καὶ ἡ ἀπάντησή μας στὸ παραπάνω ἐρώτημα εἶναι: τὸ κουτὶ περιέχει δεκαπέντε σπίρτα.

**2. Ψηφία.** Οἱ δέκα λέξεις:

μηδέν, ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα,
πέντε, ἕξι, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννιά,

ποὺ ἐκφράζουν τοὺς πρώτους δέκα ἀκέραιους ἀριθμούς, παριστάνονται συντομώτερα μὲ τὰ *σύμβολα* (σημάδια):

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Τὰ σύμβολα αὐτὰ λέγονται *ψηφία*. Μὲ αὐτὰ μποροῦμε νὰ γράψωμε κάθε ἀκέραιο ἀριθμό, ὅπως ἐξηγοῦμε παρακάτω.

**3. Μονάδες καὶ μηδέν.** Τὰ σπίρτα, οἱ βίδες καί, γενικῶς, τὰ πράγματα ποὺ μετροῦμε λέγονται *μονάδες*, ὅταν τὰ θεωροῦμε ἕνα-ἕνα καὶ δὲν προσέχωμε στὸ τί εἶναι τὸ καθένα τους. Ὅπως οἱ ὁμάδες ποὺ ἀναφέραμε ἀποτελοῦνται ἀπὸ πράγματα, ἔτσι καὶ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, ποὺ τὶς μετροῦν, ἀποτελοῦνται ἀπὸ μονάδες· ἐξαιρεῖται φυσικὰ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς μηδὲν (0) πού, ἀντίθετα, φανερώνει *πὼς λείπει κάθε μονάδα*.

Ἂν, τώρα, τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑνὸς ἀριθμοῦ δὲν ξεπερνᾶ τὸ ἐννιὰ (9), τότε ὁ ἀριθμὸς γράφεται μὲ ἕνα μόνο ψηφίο. Ἂν ὅμως αὐτὸ τὸ πλῆθος ξεπερνᾶ τὸ 9, τότε μαζεύομε τὶς μονάδες του δέκα-δέκα καὶ σχηματίζομε ὅσες μποροῦμε *δεκάδες*. Π.χ. στὴν περίπτωση ἑνὸς κουτιοῦ μὲ σπίρτα, μποροῦμε ἴσως νὰ σχηματίσωμε ἀπὸ τὰ σπίρτα του πέντε δεκάδες καὶ νὰ ἔχωμε ἕνα ὑπόλοιπο ἀπὸ τρία σπίρτα. Ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς γράφεται τότε μὲ δύο ψηφία, ἔτσι: 53. Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ πρῶτο ψηφίο ἀπὸ δεξιά, τὸ 3, σημαίνει *ἁπλὲς μονάδες (ἢ μονάδες 1ης τάξεως)*, τὸ διπλανό του πρὸς τ' ἀριστερά, τὸ 5, σημαίνει *δεκάδες* (*ἢ μονάδες 2ας τάξεως)*.

Ἂν τὸ πλῆθος τῶν δεκάδων ἑνὸς ἀριθμοῦ δὲν ξεπερνᾶ τὸ 9, τότε ὁ ἀριθμὸς γράφεται, ὅπως καὶ παραπάνω, μὲ δυὸ ψηφία. Ἂν ὅμως τὸ ξεπερνᾶ, τότε μαζεύομε πάλι τὶς δεκάδες του δέκα-δέκα καὶ σχηματίζομε *ἑκατοντάδες*. Π.χ. ἕνα ἄθικτο (ἄπιαστο) πακέτο βίδες περιέχει συχνὰ δώδεκα δωδεκάδες βίδες (μία γκρόσσα βίδες, ὅπως λένε στὸ ἐμπόριο). Ἀπὸ αὐτὲς σχηματίζομε 14 δεκάδες καὶ μᾶς μένει ἕνα ὑπόλοιπο ἀπὸ 4 βίδες. Ἀπὸ τὶς 14 δεκάδες, παίρνοντας τὶς δέκα, συγκροτοῦμε μίαν ἑκατοντάδα καὶ ἔχομε ἕνα ὑπόλοιπο ἀπὸ 4 δεκάδες. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν ποὺ μετρᾶ τὶς βίδες τοῦ πακέτου ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ἑκατοντάδα, τέσσερις δεκάδες καὶ τέσσερις μονάδες. Θὰ γραφῇ μὲ τρία ψηφία, ἔτσι: 144.

**4. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν μὲ ψηφία.** Μποροῦμε τώρα νὰ κάμωμε τὶς ἀκόλουθες παρατηρήσεις γιὰ τὴ γραφὴ ἑνὸς ἀκέραιου ἀριθμοῦ μὲ ψηφία.

Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς γράφεται μὲ ἕνα ἢ περισσότερα ψηφία τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, π.χ. 1 273. Τὸ πρῶτο ψηφίο *ἀπὸ δεξιὰ* (τὸ 3) σημαίνει *ἁπλὲς μονάδες* ἢ *μονάδες 1ης τάξεως*, τὸ δεύτερο, πάντα ἀπὸ δεξιὰ (τὸ 7) σημαίνει *δεκάδες* ἢ *μονάδες 2ας τάξεως*, τὸ τρίτο (τὸ 2) σημαίνει *ἑκατοντάδες* ἢ *μονάδες 3ης τάξεως*, τὸ τέταρτο (τὸ 1) *χιλιάδες* ἢ *μονάδες 4ης τάξεως*, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Μὲ ἄλλα λόγια: *ἕνα ψηφίο γραμμένο στ' ἀριστερὰ ἑνὸς ἄλλου παριστάνει μονάδες δέκα φορὲς μεγαλύτερες.*

Ἑπομένως:

*1ο. Ἂν στ' ἀριστερὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ γραμμένου μὲ ψηφία γράψωμε ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά, ἡ ἀξία (τὸ μέγεθος) τοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἀλλάζει.*

Π.χ. τὸ 03 καὶ τὸ 003 παριστάνουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ μὲ τὸ 3, δηλαδὴ τρεῖς ἁπλὲς μονάδες. Ὅμοια τὸ 025 παριστάνει τὸν ἴδιο ἀριθμὸ μὲ τὸ 25.

*2ο. Ἂν στὰ δεξιὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ γραμμένου μὲ ψηφία γράψωμε ἕνα μηδενικό, τότε ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ ἀλλάζει: γίνεται δέκα φορὲς μεγαλύτερη (δεκαπλασιάζεται).*

Π.χ. τὸ 450 παριστάνει ἕναν ἀριθμὸ δέκα φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 45, γιατὶ

τὸ 450 ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 ἑκατοντάδες καὶ 5 δεκάδες,

ἐνῶ τὸ 45 ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 δεκάδες καὶ 5 μονάδες.

Ἐφαρμόζοντας δυὸ φορὲς τὴν τελευταία σκέψη βλέπομε ὅτι:

*Ἂν γράψωμε στὰ δεξιὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ δυὸ μηδενικά, ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ ἀλλάζει: γίνεται ἑκατὸ φορὲς μεγαλύτερη (ἑκατονταπλασιάζεται).* Καὶ οὕτω καθεξῆς.

Π.χ. τὸ 3 200 παριστάνει ἕναν ἀριθμὸ 100 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 32, γιατὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἑκατοντάδες καὶ 3 χιλιάδες, ἐνῶ τὸ 32 ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 μονάδες καὶ 3 δεκάδες.

Τί κάνομε τώρα γιὰ νὰ γράψωμε μὲ ψηφία ἕναν ἀριθμό, ὅταν μᾶς δίνουν τὶς ἁπλὲς μονάδες του; Πρῶτα μαζεύομε τὶς μονάδες αὐτὲς δέκα - δέκα, ὕστερα τὶς δεκάδες ποὺ σχηματίστηκαν, πάλι δέκα - δέκα, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὥσπου αὐτὴ ἡ ἐργασία νὰ μὴν μπορῇ πιὰ νὰ συνεχιστῇ. Θὰ ἔχωμε χωρίσει τότε τὸν ἀριθμὸ σὲ μονάδες διαφορετικῶν τάξεων, ἔτσι ποὺ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων κάθε τάξεως νὰ μὴν ξεπερνᾶ τὸ 9· κάθε τάξη θὰ ἀντιπροσωπεύεται λοιπὸν ἀπὸ ἕνα ψηφίο (ἀπὸ τὸ ψηφίο 0, ἂν εἶναι ἀδειανή). Π.χ. 6 χιλιάδες, 8 ἑκατοντάδες, 0 δεκάδες, 7 μονάδες. Ὕστερα τὰ ψηφία αὐτὰ τὰ γράφομε τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, ἀρχίζοντας μὲ τὸ ψηφίο τῆς πιὸ μεγάλης τάξεως καὶ προχωρώντας στὰ ψηφία τῶν πιὸ μικρῶν τάξεων μὲ τὴ σειρά. Στὸ παράδειγμά μας θὰ γράψωμε 6 807.

**5. Κλάσεις μονάδων.** Οἱ μονάδες τῶν διαφορετικῶν τάξεων κατατάσσονται τρεῖς - τρεῖς σὲ *κλάσεις*, ὅπως δείχνομε στὸν ἀκόλουθο πίνακα. Ἡ κατάταξη αὐτὴ χρειάζεται γιὰ τὸ διάβασμα ἑνὸς ἀριθμοῦ γραμμένου μὲ ψηφία.

| Τάξεις μονάδων | Ὀνομασίες τῶν τάξεων | Ἀντίστοιχες γραφὲς μὲ ψηφία | Κλάσεις καὶ ὀνομασίες τους |
|---|---|---|---|
| 1η | ἁπλῆ μονάδα | 1 | 1η κλάση |
| 2α | δεκάδα | 10 | ἢ κλάση τῶν |
| 3η | ἑκατοντάδα | 100 | ἁπλῶν μονάδων |
| 4η | χιλιάδα | 1 000 | 2α κλάση |
| 5η | δεκάδα χιλιάδων | 10 000 | ἢ κλάση τῶν |
| 6η | ἑκατοντάδα χιλιάδων | 100 000 | χιλιάδων |
| 7η | ἑκατομμύριο | 1 000 000 | 3η κλάση |
| 8η | δεκάδα ἑκατομμυρίων | 10 000 000 | ἢ κλάση τῶν |
| 9η | ἑκατοντάδα ἑκατομμυρίων | 100 000 000 | ἑκατομμυρίων κτλ. |

**6. Πῶς διαβάζεται (πῶς ἀπαγγέλλεται) ἕνας ἀριθμὸς γραμμένος μὲ ψηφία.** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 35 604. Τὸν χωρίζομε σὲ τριψήφια κομμάτια ἀρχίζοντας ἀπὸ δεξιά· τὸ τελευταῖο κομμάτι πρὸς τ' ἀριστερὰ μπορεῖ φυσικὰ ν' ἀποτελῆται καὶ ἀπὸ ἕνα ἢ ἀπὸ δυὸ μόνο ψηφία. Στὸ παράδειγμά μας βρίσκομε: 35 604, δηλαδὴ τὸ τελευταῖο κομμάτι πρὸς τ' ἀριστερὰ ἔχει δυὸ ψηφία. Τὰ διάφορα κομμάτια ἀντιπροσωπεύουν διάφορες κλάσεις, ἀπὸ τὴν πρώτη κλάση ὡς μιὰν ἀνώτατη, ὅταν τὰ διατρέξωμε ἀπὸ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερά. Ἔτσι, στὸ παράδειγμά μας τὸ πρῶτο ἀπὸ δεξιὰ κομμάτι, τὸ 604, ἀντιπροσωπεύει τὴν κλάση τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ τὸ δεύτερο, τὸ 35, ἀντιπροσωπεύει τὴν κλάση τῶν χιλιάδων.

Ὕστερα ἀπὸ αὐτὸν τὸ χωρισμὸ τοῦ ἀριθμοῦ σὲ κομμάτια, ἡ ἀνάγνωσή του γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἀρχίζοντας ἀπὸ ἀριστερά, διαβάζομε μὲ τὴ σειρὰ κάθε κομμάτι χωριστά, λέγοντας καὶ τ' ὄνομα τῆς κλάσεως ποὺ ἀντιπροσωπεύει. Ἂς σημειωθῆ ὅμως ὅτι ὑπάρχει ἡ συμφωνία νὰ μὴ διαβάζωμε τὰ κομμάτια ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τρία μηδενικὰ καὶ ὅτι τὸ ὄνομα τῆς κλάσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων συνήθως παραλείπεται. Ἔτσι ὁ παραπάνω ἀριθμὸς 35 604 διαβάζεται: τριάντα πέντε χιλιάδες ἑξακόσια τέσσερα.

Νά δυὸ ἄλλα παραδείγματα: Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 6008. Ὁ χωρισμός του σὲ τριψήφια κομμάτια, ἀρχίζοντας ἀπὸ δεξιά, δίνει τὸ ἀποτέλεσμα: 6 008. Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς θὰ ἐκφωνηθῆ ἔτσι: ἔξι χιλιάδες ὀκτώ. Ὅμοια ὁ ἀριθμὸς 2 000 058 θὰ ἐκφωνηθῆ ἔτσι: δυὸ ἑκατομμύρια πενήντα ὀκτώ.

Ἀντίστροφα, ὁ ἀριθμὸς ποὺ διαβάζεται:

δυὸ χιλιάδες πενήντα ἑπτά, θὰ γραφῆ ἔτσι: 2 057

καὶ ὁ ἀριθμὸς ποὺ διαβάζεται:

τριακόσιες πέντε χιλιάδες ἕνα, θὰ γραφῆ ἔτσι: 305 001.

*Ἀσκήσεις*. *1*. Διαβάστε τοὺς ἀριθμούς:

75, 203, 190, 408, 6940, 3005, 8102, 97300, 20401, 70004, 90023, 85020, 30107, 105010, 203504, 900302, 700523, 702004, 8710531, 6003512, 4015007, 7003005, 9000007, 1210006, 2500035, 75003, 80009, 17003, 60088.

*2.* Γράψτε μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ διαβάζονται ἔτσι:

Πεντακόσια δεκατρία | ἑξακόσια ἑβδομήντα | χίλια ἑκατὸ δύο | χίλια δεκαπέντε | τρεῖς χιλιάδες εἴκοσι | ἑπτὰ χιλιάδες δώδεκα | χίλια ἕξι | δύο χιλιάδες ὀκτὼ | τέσσερις χιλιάδες ἐννιὰ | δεκάξι χιλιάδες τρία | εἴκοσι δύο χιλιάδες ἑπτὰ | σαράντα χιλιάδες δύο | πενήντα χιλιάδες τριάντα ἕξι | ὀγδόντα χιλιάδες ἑξήντα τέσσερα | ἑκατὸ χιλιάδες εἴκοσι πέντε | διακόσιες χιλιάδες σαράντα | τριακόσιες χιλιάδες ἑπτὰ | πεντακόσιες δυὸ χιλιάδες ἐννιὰ | ἑξακόσιες τρεῖς χιλιάδες ἑβδομήντα ἐννιὰ | ἕνα ἑκατομμύριο τρία | ἕνα ἑκατομμύριο ἑβδομήντα ἕξι | ἕνα ἑκατομμύριο τριακόσια δύο.

*3.* Γράψτε μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἀποτελοῦνται ἀντιστοίχως ἀπό:

2 ἑκατοντάδες 6 μονάδες | 4 ἑκατοντάδες 3 δεκάδες | 6 χιλιάδες 7 ἑκατοντάδες 3 μονάδες | 8 χιλιάδες 5 δεκάδες 1 μονάδα | 2 δεκάδες χιλιάδων 9 ἑκατοντάδες | 7 δεκάδες χιλιάδων 8 δεκάδες 3 μονάδες | 4 ἑκατομμύρια 6 χιλιάδες 8 μονάδες | 1 ἑκατοντάδα χιλιάδων 6 χιλιάδες 2 δεκάδες | 9 δεκάδες 4 χιλιάδες 5 ἑκατοντάδες χιλιάδων 1 ἑκατομμύριο | 4 ἑκατοντάδες 5 μονάδες 7 δεκάδες 8 ἑκατομμύρια 7 χιλιάδες.

*4.* Γράψτε μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἀποτελοῦνται ἀντιστοίχως ἀπό:

25 ἑκατοντάδες 31 δεκάδες 63 μονάδες,
15 χιλιάδες 47 ἑκατοντάδες 28 μονάδες,
8 ἑκατομμύρια 70 δεκάδες χιλιάδων 1 150 μονάδες.

**7. Ἀρχαία ἑλληνικὴ γραφὴ τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.** Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες χρησιμοποιοῦσαν γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, ..., 9 τὰ ἑξῆς σύμβολα:

| | | |
|---|---|---|
| α΄ γιὰ τὸ 1, | δ΄ γιὰ τὸ 4, | ζ΄ γιὰ τὸ 7, |
| β΄ » » 2, | ε΄ » » 5, | η΄ » » 8, |
| γ΄ » » 3, | ς΄ » » 6, | θ΄ » » 9. |

(Τὸ ς΄ διαβάζεται «στίγμα» καὶ γι' αὐτὸ γράφεται συχνὰ ἔτσι: στ.΄)

Ἐπειδὴ δὲν εἶχαν σύμβολο γιὰ τὸ μηδέν, χρησιμοποιοῦσαν γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς 10, 20, 30, 40, 50 κτλ. ξεχωριστὰ σύμβολα, τὰ ἀκόλουθα:

ι΄ γιὰ 10, κ΄ γιὰ 20, λ΄ γιὰ 30, μ΄ γιὰ 40, ν΄ γιὰ 50 κτλ.

Χρησιμοποιώντας τὰ παραπάνω ἔγραφαν π.χ.

| | | |
|---|---|---|
| τὸ 16 ἔτσι: ις΄, | τὸ 26 ἔτσι: κς΄, | τὸ 32 ἔτσι: λβ΄ |
| » 19 » ιθ΄, | » 28 » κη΄, | » 47 » μζ΄. |

**8. Ἀρχαία ρωμαϊκὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.** Καὶ οἱ ἀρχαῖοι Ρωμαῖοι δὲν εἶχαν σύμβολο γιὰ τὸν ἀριθμὸ μηδέν. Γιὰ τὴ γραφὴ τῶν ἄλλων ἀκέραιων ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦσαν τὰ ἑξῆς σύμβολα:

I γιὰ τὸ 1, V γιὰ τὸ 5, X γιὰ 10, L γιὰ τὸ 50 κτλ.

Μὲ αὐτὰ τὰ σύμβολα ἀκολουθώντας ὅμως κανόνες πιὸ πολύπλοκους ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνες, ἔγραφαν π.χ. τοὺς ἀριθμοὺς ἕνα ὡς εἴκοσι ἔτσι:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | I | 6 | VI | 11 | XI | 16 | XVI |
| 2 | II | 7 | VII | 12 | XII | 17 | XVII |
| 3 | III | 8 | VIII | 13 | XIII | 18 | XVIII |
| 4 | IV | 9 | IX | 14 | XIV | 19 | XIX |
| 5 | V | 10 | X | 15 | XV | 20 | XX |

**9. Ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν.** Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 0, 1,..., 10, 11,..., 97, 98, 99, 100,..., 999, 1 000, 1 001,... ἀποτελοῦν μιὰ σειρὰ ποὺ ἀρχίζει μὲ τὸ μηδὲν ἀλλὰ ποὺ δὲν ἔχει τελειωμό. Γιατί, αὐξάνοντας τὸ πλῆθος τῶν ἁπλῶν μονάδων ἑνὸς ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς μὲ μία μονάδα ἀκόμη, βρίσκομε ἕνα νέο ἀριθμὸ τῆς σειρᾶς, τὸν ἑπόμενο ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ αὐξήσαμε.

Ἔτσι, ἀπὸ δυὸ ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς *ἐκεῖνος ποὺ ἀκολουθεῖ περιέχει μεγαλύτερο πλῆθος ἁπλῶν μονάδων ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ προηγεῖται.* Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 99, ποὺ ἔρχεται στὴ σειρὰ ὕστερα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 97, περιέχει δυὸ ἁπλὲς μονάδες παραπάνω ἀπὸ τὸν 97. Λέμε ὅτι ὁ 99 εἶναι *μεγαλύτερος* τοῦ 97, ὅτι ὁ 97 εἶναι *μικρότερος* τοῦ 99, καὶ γράφομε ἀντίστοιχα:

$$99 > 97 \quad 97 < 99.$$

**10. Ἄνισοι ἀριθμοί.** Δυὸ ἀριθμοί, σὰν τοὺς 97 καὶ 99, ποὺ δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ ἴδιο πλῆθος ἁπλῶν μονάδων λέγονται *ἄνισοι*, καὶ οἱ δυὸ σχέσεις ποὺ γράψαμε τελευταῖα λέγονται *ἀνισότητες*. Ὅμοια ἔχομε

$$120 > 112 \text{ καὶ } 112 < 120.$$

Οἱ τελευταῖες αὐτὲς σχέσεις διαβάζονται σύντομα ἔτσι:

ἑκατὸν εἴκοσι μεγαλύτερο τοῦ ἑκατὸν δώδεκα καὶ

ἑκατὸν δώδεκα μικρότερο τοῦ ἑκατὸν εἴκοσι.

Ὅταν θέλωμε νὰ γράψωμε ὅτι δυὸ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι χωρὶς νὰ σημειώσωμε καὶ ποιός εἶναι ὁ μεγαλύτερος (ἢ ὁ μικρότερος), τότε χρησιμοποιοῦμε τὸ σύμβολο $\neq$, ποὺ διαβάζεται «ἄνισον» ἢ «διάφορο». Ἔτσι π.χ. ἔχομε

$$97 \neq 99 \qquad 120 \neq 112.$$

**11. Ἴσοι ἀριθμοί.** Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ ἴδιο πλῆθος ἁπλῶν μονάδων (καὶ πού, ἑπομένως, δὲν εἶναι ἄνισοι) λέγονται *ἴσοι*.

Π.χ. οἱ δυὸ ἀριθμοὶ 25 χιλιάδες καὶ 250 ἑκατοντάδες εἶναι ἴσοι, γιατὶ ἀποτελοῦνται καὶ οἱ δυὸ ἀπὸ εἴκοσι πέντε χιλιάδες ἁπλὲς μονάδες, δηλαδὴ ἀπὸ τὸ ἴδιο πλῆθος ἁπλῶν μονάδων, καὶ γράφονται μὲ ψηφία κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, ἔτσι: 25 000.

Ὥστε, δυὸ ἴσοι ἀριθμοὶ γράφονται μὲ ψηφία κατὰ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο καὶ κατέχουν καὶ οἱ δυό τους τὴν ἴδια θέση μέσα στὴν παραπάνω φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀκεραίων.

Τὴ σχέση τῆς ἰσότητας δυὸ ἀριθμῶν τὴν παριστάνομε μὲ τὸ σύμβολο $=$ ποὺ διαβάζεται «ἴσον». Ἔτσι γράφομε
25 χιλιάδες $=$ 250 ἑκατοντάδες $=$ 2 500 δεκάδες $=$ 25 000 μονάδες, καὶ διαβάζομε: εἴκοσι πέντε χιλιάδες ἴσον διακόσιες πενήντα ἑκατοντάδες ἴσον δυὸ χιλιάδες πεντακόσιες δεκάδες κτλ.

## Οἱ τέσσερις πράξεις μὲ ἀκέραιους ἀριθμούς.

**12. Πρόσθεση.** *Ἔχομε δυὸ κουτιὰ σπίρτα καὶ ξέρομε ὅτι τὸ ἕνα περιέχει 38, τὸ ἄλλο 54 σπίρτα. Πόσα σπίρτα περιέχουν τὰ δυὸ κουτιὰ μαζί;*

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε μ' ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀκόλουθους τέσσερις τρόπους.

1ος. Τὶς δυὸ ὁμάδες σπίρτα τὶς ἑνώνομε σὲ μίαν καὶ κάνομε τὸ μέτρημά της, ὅπως εἴπαμε στὴν παράγραφο 1.

2ος. Χρησιμοποιοῦμε τὸν ἀριθμὸ 38 τῶν σπίρτων τοῦ πρώτου κουτιοῦ (ἀφοῦ τὸν ξέρομε) καὶ κάνομε τὸ μέτρημα μόνο μὲ τὰ σπίρτα τοῦ δεύτερου κουτιοῦ, ὄχι ὅμως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ ἕνα κι ἀπάνω, ἀλλὰ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τριάντα ἐννιὰ (τὸν ἑπόμενο τοῦ 38) κι ἀπάνω.

3ος. Κάνομε τὸ μέτρημα μόνο μὲ τὰ σπίρτα τοῦ πρώτου κουτιοῦ, ὄχι ὅμως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ ἕνα κι ἀπάνω, ἀλλὰ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ πενήντα πέντε (τὸν ἑπόμενο τοῦ 54) κι ἀπάνω.

4ος. Γράφομε τοὺς ἀριθμοὺς 38 καὶ 54 τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο (π.χ. τὸν 54 κάτω ἀπὸ τὸν 38) ἔτσι, ὥστε τὰ ψηφία ποὺ σημαίνουν μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως (τὰ *ὁμοτάξια* ψηφία, ὅπως θὰ λέμε συντόμως) νὰ βρίσκωνται σὲ μιὰν καὶ τὴν ἴδια στήλη, δηλαδὴ τὸ ἕνα κάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο $\left(\text{π.χ. } \begin{matrix}38\\54\end{matrix}\right)$· ὕστερα, ἀφοῦ τραβήξωμε μιὰν ἴσια γραμμούλα ἀπὸ κάτω, λογαριάζομε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: ὀκτὼ καὶ τέσσερα κάνουν δώδεκα (12)· γράφομε 2 στὴ στήλη τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμε 1 (μίαν δεκάδα). Ἕνα τὸ κρατούμενο καὶ τρία κάνουν τέσσερα, καὶ πέντε, ἐννιά· γράφομε 9 στὴ στήλη τῶν δεκάδων.

$$\begin{array}{r}38\\ \underline{54}\\ 92\end{array}$$

Ἡ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα ποὺ κάμαμε εἶναι: Τὰ δυὸ κουτιὰ μαζὶ περιέχουν 92 σπίρτα.

Ὅπως βλέπομε, ὁ τέταρτος τρόπος ἐργασίας εἶναι πολὺ σύντομος, πολὺ πιὸ σύντομος ἀπὸ τοὺς ἄλλους τρεῖς. Γι᾽ αὐτό, αὐτὸν θὰ ἐφαρμόζωμε.

Ὁ ἀριθμὸς 92 ποὺ βρήκαμε λέγεται *ἄθροισμα* τῶν ἀριθμῶν 38 καὶ 54, οἱ ὁποῖοι λέγονται *προσθετέοι* του. Ἡ πράξη ποὺ κάνομε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα λέγεται *πρόσθεση*· γιὰ σύμβολό της (σημάδι της) χρησιμοποιοῦμε τὸ $+$, ποὺ διαβάζεται: *σὺν* (*ἢ καὶ*) καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν προσθετέων.

Ἔτσι ἔχομε

$$38+54=92=54+38,$$

καὶ διαβάζομε: τριάντα ὀκτὼ σὺν πενήντα τέσσερα ἴσον ἐνενήντα δύο ἴσον πενήντα τέσσερα σὺν τριάντα ὀκτώ.

**13. Ἄθροισμα μὲ περισσότερους ἀπὸ δύο προσθετέους.** Ἂς πάρωμε τρία κουτιὰ μὲ 38, 54 καὶ 9 σπίρτα ἀντιστοίχως. Ὁ ἀριθμὸς τῶν σπίρτων καὶ τῶν τριῶν κουτιῶν μαζὶ μπορεῖ νὰ βρεθῆ μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀκόλουθους τρεῖς τρόπους.

1ος. Προσθέτομε τὸ ἄθροισμα $92=38+54$ μὲ τὸ 9, σύμφωνα μὲ τὸν προηγούμενο τρόπο, ὁπότε βρίσκομε

$$\begin{array}{r} 92 \\ 9 \\ \hline 101 \end{array}$$

2ος. Προσθέτομε τὸ 38 μὲ τὸ ἄθροισμα $63=54+9$, ὁπότε βρίσκομε πάλι

$$\begin{array}{r} 28 \\ 63 \\ \hline 101 \end{array}$$

3ος. Γράφομε τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 38,54 καὶ 9 τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο μὲ ὁποιαδήποτε σειρὰ (π.χ. τὴ σειρὰ 38, 9, 54), ἔτσι ὅμως, ὥστε τὰ ὁμοτάξια ψηφία (δηλαδὴ ἐκεῖνα ποὺ σημαίνουν μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως) νὰ βρίσκωνται σὲ μιὰν καὶ τὴν ἴδια στήλη, τραβοῦμε μιὰν ἴσια γραμμούλα ἀπὸ κάτω καὶ λογαριάζομε ὅπως παραπάνω: 8 καὶ 9 κάνουν 17, καὶ 4,21· γράφομε 1 καὶ κρατοῦμε 2 (δεκάδες). 2 τὸ κρατούμενο καὶ 3 κάνουν 5 καὶ 5, 10· γράφομε 0 στὴ στήλη τῶν δεκάδων καὶ 1 στὴ στήλη τῶν ἑκατοντάδων. Τὰ τρία κουτιὰ μαζὶ περιέχουν λοιπὸν 101 σπίρτα. Ὁ ἀριθμὸς 101 εἶναι ἄθροισμα τῶν τριῶν προσθετέων 38, 54 καὶ 9: $38+9+54=101=38+54+9$ κτλ.

$$\begin{array}{r} 38 \\ 9 \\ +54 \\ \hline 101 \end{array}$$

Οἱ τρόποι 1ος καὶ 2ος σημειώνονται μὲ τὴν ἑξῆς γραφή: Γιὰ νὰ δηλώσωμε ὅτι θεωροῦμε ἐκτελεσμένη τὴν πρόσθεση $38+54$ ἢ τὴν $54+9$ κλείνομε τοὺς προσθετέους μέσα σὲ μιὰ *παρένθεση*:

$$(38+54) \text{ καὶ } (54+9).$$

Ὕστερα ἀπ' αὐτὴ τὴ συμφωνία μποροῦμε νὰ γράψωμε

$$(38+54)+9=101=38+(54+9).$$

**14. Ἰδιότητες τοῦ ἀθροίσματος.** Προχωροῦμε τώρα στὶς ἀκόλουθες παρατηρήσεις.

*1η. Σὲ μιὰ πρόσθεση ἐπιτρέπεται νὰ ἀλλάξωμε τὴ σειρὰ τῶν προσθετέων· τὸ ἐξαγόμενο τῆς προσθέσεως, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα, δὲν μεταβάλλεται.*

Π.χ. $7+14+5=26=5+14+7=14+7+5$ κτλ.

*2α. Σὲ μιὰ πρόσθεση μὲ τρεῖς ἢ περισσότερους προσθετέους μποροῦμε, χωρὶς νὰ μεταβάλωμε τὸ ἐξαγόμενό της, νὰ ἀντικαταστήσωμε δύο ἢ περισσότερους προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά τους.*

Αὐτὴ ἡ ἀντικατάσταση σημειώνεται μὲ τὸ κλείσιμο τῶν προσθετέων μέσα σὲ μιὰ παρένθεση. Π.χ.

$$8+7+14+5=8+(7+14+5)=8+26=34,$$

$$\text{ἐπίσης } 8+7+14+5=(8+5)+(7+14)=13+21=34.$$

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα εὐκολύνει τὴ σωστὴ ἐκτέλεση προσθέσεων μὲ *πολλοὺς* προσθετέους. Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἕξι προσθετέων, ποὺ γράφομε δίπλα, μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε ἀσφαλέστερα καὶ πιὸ ξεκούραστα μὲ τὸν τρόπο ποὺ ὑποδείχνομε.

$$\begin{array}{rrr} & 254 & \\ & 63 & \\ + & 1\,709 & 2\,026 \\ & 4\,124 & \\ & 288 & \\ + & 1\,526 & 5\,938 \\ \hline \text{ἄθροισμα}: & & 7\,964 \end{array}$$

**15. Ἔλεγχος (δοκιμὴ) τῆς προσθέσεως.** Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνουν οἱ ἀκόλουθοι δυὸ τρόποι γιὰ νὰ ἐλέγξωμε ἂν μιὰ πρόσθεση ἔγινε σωστά.

**1ος τρόπος.** *Ἀλλάζομε τὴ σειρὰ τῶν προσθετέων καὶ ξανακάνομε τὴν πρόσθεση.* Ἂν οἱ δυὸ προσθέσεις ποὺ κάμαμε ἔγιναν καὶ οἱ δυὸ σωστά, τότε τὸ ἐξαγόμενο ποὺ θὰ βροῦμε τὴ δεύτερη φορὰ πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ ἐκεῖνο ποὺ βρήκαμε τὴν πρώτη φορά. Ὥστε, ὅταν τὰ δυὸ ἐξαγόμενα διαφέρουν, αὐτὸ θὰ φανερώνῃ ὅτι ἔγινε κάποιο λάθος εἴτε στὴν πρώτη εἴτε στὴ δεύτερη πρόσθεση. Νὰ τώρα πῶς ἐφαρμόζεται αὐτὴ ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως. Ἀφοῦ γράψωμε τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο, μὲ τὰ ὁμοτάξια ψηφία τους σὲ μιὰν καὶ τὴν ἴδια στήλη, κάμομε τὴν πρώτη πρόσθεση προχωρώντας ἀπὸ πάνω πρὸς τὰ κάτω, καὶ τὴ δεύτερη πρόσθεση προχωρώντας ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ πάνω:

$$\begin{array}{r} 275 \\ 31 \\ +\,8\,047 \\ \hline 8\,353 \end{array}\downarrow$$

5 καὶ 1 κάνουν 6, καὶ 7, 13· γράφομε 3 καὶ κρατοῦμε 1. 1 τὸ κρατούμενο καὶ 7, 8, καὶ 3, 11, καὶ 4, 15· γράφομε 5 καὶ κρατοῦμε 1, καὶ οὕτω καθεξῆς.

$$\begin{array}{r} 275 \\ 31 \\ +\,8\,047 \\ \hline 8\,353 \end{array}\uparrow$$

7 καὶ 1 κάνουν 8, καὶ 5, 13· γράφομε 3 καὶ κρατοῦμε 1. 1 τὸ κρατούμενο καὶ 4, 5, καὶ 3, 8, καὶ 7, 15· γράφομε 5 καὶ κρατοῦμε 1, καὶ οὕτω καθεξῆς.

**2ος τρόπος.** *Ἀντικαθιστοῦμε μίαν ἢ περισσότερες ὁμάδες προσθετέων μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς καθεμιᾶς τους καὶ ξανακάμομε τὴν πρόσθεση*: πρέπει νὰ ξαναβροῦμε τὸ πρῶτο μας ἀποτέλεσμα, ἂν οἱ δυὸ προσθέσεις ποὺ κάμαμε ἔγιναν καὶ οἱ δυὸ σωστά. Π.χ.

$$\begin{array}{r} 4\,523 \\ 692 \\ 6\,034 \\ +\;\;27 \\ \hline 11\,276 \end{array}\downarrow \qquad \begin{array}{rl} & \\ 5\,215 & (=4\,523+692) \\ & \\ +\,6\,061 & (=6\,034+27) \\ \hline 11\,276 & \end{array}$$

**16. Συγκεκριμένοι καὶ ἀφηρημένοι ἀριθμοί.** Παραπάνω βρήκαμε ὅτι

$$38 \text{ σπίρτα} + 54 \text{ σπίρτα} = 92 \text{ σπίρτα},$$

$$38 \text{ σπίρτα} + 54 \text{ σπίρτα} + 9 \text{ σπίρτα} = 101 \text{ σπίρτα}.$$

Μὲ ἄλλα λόγια, οἱ ἀριθμοὶ ποὺ προσθέτομε καθὼς καὶ ὁ ἀριθμὸς ποὺ βρίσκομε γιὰ ἄθροισμά τους σημαίνουν ὁ καθένας τους ἕνα ὁρισμένο πλῆθος ἀπὸ σπίρτα.

Ἂν ἀντικαταστήσωμε σὲ ὅλους τοὺς προσθετέους ἀριθμοὺς τὸ ὄνομα σπίρτα μὲ ἕνα ἄλλο ὄνομα, π.χ. βίδες, τὸ ἄθροισμα σὲ κάθε πρόσθεση θὰ εἶναι ὁ ἴδιος ἀριθμός, ἀκολουθημένος ὅμως τώρα ἀπὸ τὸ ὄνομα βίδες:

$$38 \text{ βίδες} + 54 \text{ βίδες} = 92 \text{ βίδες},$$
$$38 \text{ βίδες} + 54 \text{ βίδες} + 9 \text{ βίδες} = 101 \text{ βίδες}.$$

Συμφέρει λοιπὸν γιὰ συντομία, ὅταν ἔχωμε νὰ ἐκτελέσωμε μιὰν πρόσθεση (ἢ ἄλλες ἀριθμητικὲς πράξεις), νὰ μὴν ὀνοματίζωμε τοὺς ἀριθμούς, ἀλλὰ νὰ τοὺς παίρνωμε χωρὶς ὄνομα, καὶ μόνο ἀφοῦ βροῦμε τὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα νὰ λέμε τὸ ὄνομά του (δηλαδὴ τὸ εἶδος τῶν πραγμάτων ποὺ παριστάνει).

Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ νὰ διακρίνωμε τοὺς *συγκεκριμένους* ἀριθμούς, π.χ. 38 σπίρτα, 5 κιλὰ λάδι, 3 μέτρα ὕφασμα, 15 πρόβατα κλπ., καὶ τοὺς *ἀφηρημένους* ἀριθμούς, π.χ. 38 (τριάντα ὀκτώ), 5 (πέντε), 3 (τρία), 15 (δεκαπέντε) κτλ.

Φυσικά, ὅταν θὰ ἔχωμε νὰ προσθέσωμε συγκεκριμένους ἀριθμούς, αὐτοὶ θὰ πρέπῃ νὰ ἔχουν τὸν ἴδιο ὀνοματισμό, νὰ σημαίνουν δηλαδὴ τὸ ἴδιο εἶδος πράγματα. Γιατὶ βέβαια δὲν συμβαίνει ποτὲ νὰ ἔχωμε νὰ προσθέσωμε π.χ. 5 κιλὰ λάδι καὶ 16 πρόβατα.

*Ἀσκήσεις. 1.* Ἐκτελέστε τὶς παρακάτω τέσσερις προσθέσεις:

$$1\,035 + 142 + 76, \qquad 149 + 27 + 6\,123,$$
$$72\,567 + 365 + 7\,209 + 8, \qquad 32 + 89\,702 + 4\,390 + 523.$$

Νὰ κάμετε καὶ τὸν ἔλεγχό τους μὲ τὸν 1ο τρόπο στὶς δυὸ πρῶτες, μὲ τὸ 2ο στὶς δυὸ τελευταῖες.

*2.* Ἐπαληθεῦστε τὴν ἰσότητα

$$(27 + 3) + 6 + (4 + 17) = (3 + 6 + 4) + (27 + 17),$$

δηλαδὴ ἐκτελέστε τὶς πράξεις ποὺ εἶναι σημειωμένες ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ τοῦ συμβόλου = καὶ πιστοποιῆστε ὅτι τὰ δυὸ ἐξαγόμενα ποὺ βρίσκετε εἶναι ἴσα. Ἄραγε βλέπετε τὸ γιατί;

**17. Ἀφαίρεση.** *Ἀπὸ ἕνα κουτὶ μὲ 17 σπίρτα πήραμε τὰ 8. Πόσα σπίρτα ἔμειναν;*

Αὐτὰ ποὺ ἔμειναν καὶ τὰ 8 ποὺ πήραμε κάνουν μαζὶ 17 σπίρτα. Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς ποὺ ζητοῦμε καὶ τὸ 8 ἔχουν ἄθροισμα 17. Γιὰ νὰ τὸν βροῦμε, θὰ μπορούσαμε ἀπὸ τὴ σειρὰ

$$1,\ 2, \ldots,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11, \ldots,\ 16,\ 17.$$

(ἕνα ὡς δεκαεπτὰ) νὰ σβήναμε τοὺς πρώτους ὀκτὼ ἀριθμοὺς καὶ νὰ μετρήσωμε ἐκείνους ποὺ μένουν, δηλαδὴ τοὺς

$$9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17.$$

Θὰ βρίσκαμε ἔτσι γιὰ ἐξαγόμενο τὸ 9. Ἐπίσης θὰ μπορούσαμε νὰ σβήναμε τοὺς ὀκτὼ τελευταίους ἀριθμοὺς

$$17,\ 16,\ 15,\ 14,\ 13,\ 12,\ 11,\ 10$$

καὶ νὰ βροῦμε ἀμέσως ὅτι ἀπομένουν ἐννιὰ σπίρτα στὸ κουτί.

Εἶναι ὅμως φανερὸ πῶς ἡ παραπάνω μέθοδος δὲν εἶναι πρακτική, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ποὺ μᾶς δίδονται εἶναι κάπως μεγάλοι, ὅπως π.χ. στὸ πρόβλημα:

*Ἀπὸ ἕνα πακέτο μὲ 144 βίδες χρησιμοποιήσαμε τὶς 23. Πόσες βίδες ἔμειναν;*

Γι' αὐτὸ ἐργαζόμαστε μὲ τὸν ἀκόλουθο γνωστὸ τρόπο:

Γράφομε τὸν μικρότερο ἀριθμὸ (τὸ 23) κάτω ἀπὸ τὸν μεγαλύτερο (τὸ 144), σὲ τρόπο ποὺ τὰ ὁμοτάξια ψηφία τους νὰ βρίσκωνται στὴν ἴδια στήλη (δηλαδὴ τὸ ἕνα κάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο). Ἔπειτα τραβοῦμε μιὰ γραμμούλα ἀπὸ κάτω καὶ λογαριάζομε ἔτσι: 3 ἀπὸ 4 κάνει 1· γράφομε 1 στὴ στήλη τῶν μονάδων. 2 ἀπὸ 4 κάνει 2· γράφομε 2 στὴ στήλη τῶν δεκάδων.
0 ἀπὸ 1 κάνει 1· γράφομε 1 στὴ στήλη τῶν ἑκατοντάδων.

$$\begin{array}{r} 144 \\ 23 \\ \hline 121 \end{array}$$

Ὥστε μᾶς ἔμειναν 121 βίδες.

Ἂς βροῦμε τὴν ἀπάντηση καὶ στὴν ἀκόλουθη ἐρώτηση:

*Ἀπὸ τὶς 144 βίδες τοῦ πακέτου χρησιμοποιήσαμε τὶς 58. Πόσες βίδες ἔμειναν;*

Τώρα, ὅπως ξέρομε, θὰ πρέπη νὰ λογαριάσωμε ἔτσι:

Ἐπειδὴ τὸ 8 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 4, λέμε: 8 ἀπὸ 14 κάνει 6· γράφομε 6 στὴ στήλη τῶν μονάδων. 5 καὶ 1 κάνει 6· 6 ἀπὸ 14 κάνει 8· γράφομε 8 στὴ στήλη τῶν δεκάδων. Ἄρα μᾶς ἔμειναν 86 βίδες.

$$\begin{array}{r} 144 \\ \underline{58} \\ 86 \end{array}$$

Ἡ παραπάνω πράξη λέγεται *ἀφαίρεση* (τοῦ 23 ἀπὸ τὸ 144 καὶ τοῦ 58 ἀπὸ τὸ 144). Τὸ ἐξαγόμενό της (τὸ 121 στὴν πρώτη, τὸ 86 στὴ δεύτερη) λέγεται *ὑπόλοιπο* ἢ *διαφορά*. Ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς (ὁ 144) λέγεται *μειωτέος*, γιατὶ πρέπει νὰ «μειωθῆ» (δηλ. νὰ ἐλαττωθῆ)· ὁ ἀριθμὸς ποὺ «πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμε» λέγεται *ἀφαιρετέος* (ὁ 23 στὴν πρώτη ἀφαίρεση καὶ ὁ 58 στὴ δεύτερη). Γιὰ σύμβολο τῆς ἀφαιρέσεως χρησιμοποιοῦμε τὸ —, ποὺ διαβάζεται *μεῖον* ἢ *πλὴν* καὶ γράφεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου ἀριστερὰ καὶ τοῦ ἀφαιρετέου δεξιά. Ἔτσι γράφομε π.χ.

$$144 - 23 = 121$$

καὶ διαβάζομε: ἑκατὸ σαράντα τέσσερα μεῖον εἴκοσι τρία ἴσον ἑκατὸν εἴκοσι ἕνα.

**18. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.** Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες.

*1η. Γιὰ νὰ γίνεται μιὰ ἀφαίρεση, πρέπει ὁ μειωτέος νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέο ἢ τουλάχιστο ἴσος μὲ αὐτόν.*

Στὴν τελευταία αὐτὴ περίπτωση (καὶ μόνο σ' αὐτὴν) τὸ ὑπόλοιπο εἶναι φυσικὰ τὸ μηδέν. Π.χ.

$$144 - 144 = 0 = 35 - 35 = 1\,230 - 1\,230 \text{ κτλ.}$$

*2α. Ἂν στὸν ἀφαιρετέο προσθέσωμε τὸ ὑπόλοιπο, ξαναβρίσκομε τὸν μειωτέο.*

Π.χ. ἐπειδὴ $144 - 23 = 121$, θὰ ἔχωμε $23 + 121 = 144$.

*3η. Ἂν προσθέσωμε τὸν ἴδιο ἀριθμὸ στὸν μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο, τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀφαιρέσεως δὲν ἀλλάζει.*

Π.χ. $(144+10)-(23+10)=154-33=121=144-23$.

Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ δικαιολογήσωμε τὸν κανόνα ποὺ δώσαμε (στὴν προηγούμενη παράγραφο) γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὑπολοίπου, στὴν περίπτωση ὅπου κάποιο ψηφίο τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι *μεγαλύτερο* ἀπὸ τὸ ὁμοτάξιο ψηφίο τοῦ μειωτέου.

$$\begin{array}{r} 5\,076 \\ -\,3\,928 \\ \hline 1\,148 \end{array}$$

Π.χ. στὴν ἀφαίρεση $5\,076-3\,928$ τὸ 8 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 6 καὶ δὲν μπορεῖ ν' ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτό. Προσθέτομε λοιπὸν μιὰ δεκάδα, δηλαδὴ 10 μονάδες, στὶς 6 μονάδες τοῦ μειωτέου (ποὺ αὐξάνονται ἔτσι σὲ 16) καὶ μιὰ δεκάδα στὶς 2 δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου (ποὺ αὐξάνονται ἔτσι σὲ 3) καὶ λέμε:

8 ἀπὸ 16, 8· γράφομε 8 στὴ στήλη τῶν μονάδων τοῦ ὑπολοίπου.
2 καὶ 1, 3, ἀπὸ 7, 4· γράφομε 4 στὴ στήλη τῶν δεκάδων.
9 ἀπὸ 0, δὲν ἀφαιρεῖται γι' αὐτὸ λέμε πάλι:
9 ἀπὸ $(10+0)$ κάνει 1· γράφομε 1 στὴ στήλη τῶν ἑκατοντάδων.
3 καὶ 1, 4, ἀπὸ 5, 1· γράφομε 1 στὴ στήλη τῶν χιλιάδων τοῦ ὑπολοίπου.

**19. Ἔλεγχος (δοκιμὴ) τῆς ἀφαιρέσεως.** Γιὰ νὰ ἐλέγξωμε ἂν μιὰ ἀφαίρεση ἔγινε σωστά, *προσθέτομε τὸ ὑπόλοιπό της στὸν ἀφαιρετέο*· πρέπει τότε νὰ ξαναβροῦμε τὸν μειωτέο (βλέπε τὴν παραπάνω 2α ἰδιότητα) στὴν περίπτωση ποὺ καὶ ἡ ἀφαίρεση καὶ ἡ πρόσθεση ἔγιναν σωστά. Π.χ. γιὰ τὴ σωστὴ ἀφαίρεση

$$\begin{array}{r} 5\,803 \\ -\,1\,476 \\ \hline 4\,327 \end{array} \qquad \text{βρίσκομε} \qquad \begin{array}{r} 1\,476 \\ +\,4\,327 \\ \hline 5\,803 \end{array}$$

Παρατηροῦμε τέλος ὅτι, ὅπως καὶ στὴν πρόσθεση, συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ ἀφαιροῦνται, μόνον ἐφόσον παριστάνουν τὸ ἴδιο εἶδος πράγματα· τὸ ὑπόλοιπο εἶναι τότε καὶ αὐτὸ ἕνας συγκεκριμένος ἀριθμὸς ὁμοειδὴς μὲ τὸν μειωτέο καὶ ἀφαιρετέο.

*Ἀσκήσεις. 1.* Ἐκτελέστε τὶς ἀκόλουθες ἑπτὰ ἀφαιρέσεις, καθὼς καὶ τὸν ἔλεγχό τους:

$12\,375-4\,089$, $7\,035-989$, $50\,235-9\,983$, $9\,046-188$, $1\,793-854$, $70\,456-11\,257$, $19\,280-960$.

*2.* Ἐπαληθεῦστε τὴν ἰσότητα:

$$(15\,230-451)-(2\,389-451)=15\,230-2\,389,$$

δηλαδὴ ἐκτελέστε τὶς πράξεις ποὺ εἶναι σημειωμένες ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ τοῦ ἴσον καὶ πιστοποιῆστε πὼς τὰ δύο ἐξαγόμενα ποὺ βρίσκετε εἶναι ἴσα. (Τὸ κλείσιμο τῶν ἀριθμῶν σὲ παρένθεση σημαίνει ὅτι ἡ πράξη ἡ σημειωμένη μέσα στὴν παρένθεση πρέπει νὰ ἐκτελεστῆ πρὶν ἀπὸ τὴ σημειωμένη ἔξω ἀπὸ τὴν παρένθεση).

*3.* Γιὰ τὴν κατασκευὴ 5 ξύλινων κιβωτίων ἕνας ξυλουργὸς ξόδεψε 1 365 δραχμές. Ποιό εἶναι τὸ κέρδος του, ἂν τὰ πούλησε 1 520 δρχ;

*4.* Ἕνας ταμίας εἶχε τὸ πρωῒ στὸ ταμεῖο του 7 250 δραχμὲς καὶ ἔκαμε τὴν ἴδια ἐκείνη ἡμέρα
εἰσπράξεις: 2 750, 359 καὶ 626 δραχμές,
πληρωμές: 5 420, 765, 86 καὶ 47 δραχμές.
Μὲ πόσες δραχμὲς ἔκλεισε τὸ βράδυ τὸ ταμεῖο του;

*5.* Ξέροντας ὅτι $7\,057 + 63\,245 = 70\,302$, βρῆτε ἀμέσως (χωρὶς νέα πράξη) τὰ ὑπόλοιπα τῶν δύο ἀφαιρέσεων:

$$70\,302 - 63\,245 \quad \text{καὶ} \quad 70\,302 - 7\,057.$$

**20. Πολλαπλασιασμός. Πρόβλημα.** *Πόσες βίδες περιέχονται σὲ 32 πακέτα μὲ 144 βίδες τὸ καθένα;*

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, θὰ μπορούσαμε νὰ πάρωμε τὸ 144 γιὰ προσθετέο 32 φορὲς καὶ νὰ κάμωμε πρόσθεση, μὲ ἄλλα λόγια νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἄθροισμα

$$144 + 144 + \ldots + 144 + 144$$

ποὺ ἔχει 32 προσθετέους ἴσους μὲ 144· (ἀπ' αὐτοὺς γράψαμε μόνο τοὺς 2 πρώτους καὶ τοὺς 2 τελευταίους, τοὺς ὑπόλοιπους 28 τοὺς παραστήσαμε γιὰ συντομία μὲ τὶς 3 ἐνδιάμεσες τελεῖες). Εἶναι ὅμως φανερὸ πὼς ἕνας τέτοιος ὑπολογισμὸς θὰ ἀπαιτοῦσε καὶ ἀρκετὸ κόπο καὶ ἀρκετὸ καιρό. Γι' αὐτό, ὁ ἄνθρωπος σκέφτηκε καὶ βρῆκε ἕναν ἄλλο σύντομο τρόπο ὑπολογισμοῦ, ποὺ λέγεται *πολλαπλασιασμὸς* καὶ ποὺ εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

Γράφομε τὸ 32, ποὺ λέγεται *πολλαπλασιαστής*, κάτω ἀπὸ τὸ 144, ποὺ λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, τραβοῦμε μιὰ γραμμούλα κάτω ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστὴ καὶ λογαριάζομε μὲ τὸ γνωστὸ τρόπο, τὸν ὁποῖο καὶ περιγράφομε λεπτομερῶς παρακάτω.

Πρῶτα παίρνομε τὸ πρῶτο ἀπὸ δεξιὰ ψηφίο τοῦ πολλαπλασιαστῆ, τὸ 2, ποὺ παριστάνει ἁπλὲς μονάδες, καὶ λέμε: 2 φορὲς 4 μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστέου κάνει 8 μονάδες· γράφομε 8 στὴ στήλη τῶν μονάδων (κάτω ἀπὸ τὴ γραμμούλα, στὴ στήλη τοῦ 2). 2 φορὲς 4 δεκάδες τοῦ πολλαπλασιαστέου κάνει 8 δεκάδες· γράφομε 8 στὴ στήλη τῶν δεκάδων (ἀριστερὰ τοῦ 8 ποὺ γράψαμε ἤδη). 2 φορὲς 1 ἑκατοντάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου κάνει 2 ἑκατοντάδες· γράφομε 2 στὴ στήλη τῶν ἑκατοντάδων (ἀριστερὰ τοῦ 88 ποὺ γράψαμε ἤδη).

$$\begin{array}{r} 144 \\ \underline{32} \\ 288 \\ \underline{432\phantom{0}} \\ 4\,608 \end{array}$$

Συνεχίζοντας, παίρνομε τὸ δεύτερο ἀπὸ δεξιὰ ψηφίο τοῦ πολλαπλασιαστῆ, τὸ 3, ποὺ παριστάνει δεκάδες, καὶ λέμε: 3 δεκάδες ἐπὶ 4 μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστέου κάνει 12 δεκάδες, ἄρα 1 ἑκατοντάδα καὶ 2 δεκάδες· γράφομε λοιπὸν 2 κάτω ἀπὸ τὸ 288 *στὴ στήλη τῶν δεκάδων* (ποὺ εἶναι καὶ *ἡ στήλη τοῦ ψηφίου 3 τοῦ πολλαπλασιαστῆ*) καὶ κρατοῦμε 1 ἑκατοντάδα. 3 δεκάδες ἐπὶ 4 δεκάδες τοῦ πολλαπλασιαστέου κάνει 12 ἑκατοντάδες, καὶ 1 ἑκατοντάδα κρατούμενη κάνει 13 ἑκατοντάδες, ἄρα 1 χιλιάδα καὶ 3 ἑκατοντάδες· γράφομε 3 *στὴ στήλη τῶν ἑκατοντάδων* καὶ κρατοῦμε 1 χιλιάδα. 3 δεκάδες ἐπὶ 1 ἑκατοντάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου κάνει 3 χιλιάδες, καὶ 1 χιλιάδα κρατούμενη κάνει 4 χιλιάδες· γράφομε 4 στὴ στήλη τῶν χιλιάδων.

Ἀφοῦ πιὰ πήραμε ὅλα τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστῆ, τραβοῦμε μιὰ γραμμούλα κάτω ἀπὸ τοὺς δυὸ ἀριθμοὺς ποὺ βρήκαμε καὶ τοὺς προσθέτομε ἔτσι, ὅπως εἶναι γραμμένοι.

Τὸ ἄθροισμά τους 4 608 μᾶς δίνει τὸ ζητούμενο.

Τὰ 32 πακέτα, μὲ 144 βίδες τὸ καθένα, περιέχουν λοιπὸν ὅλα μαζὶ 4 608 βίδες.

Τὸ ἐξαγόμενο 4 608, ποὺ βρήκαμε πολλαπλασιάζοντας τὸ 144 μὲ τὸ 32, λέγεται *γινόμενο* τῶν ἀριθμῶν 144 καὶ 32, γιατὶ «γίνεται» ἀπ᾽ αὐτοὺς κατὰ τὸν τρόπο ποὺ περιγράψαμε, καὶ οἱ δυὸ ἀριθμοὶ 144 καὶ 32, ποὺ τὸ «παράγουν», λέγονται *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Γιὰ σύμβολο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιοῦμε εἴτε τὸ $\times$ εἴτε τὸ $\cdot$ (μίαν τελεία δηλ.), ποὺ διαβάζονται: ***ἐπὶ*** ἢ *φορὲς* καὶ γράφονται μεταξὺ τῶν δυὸ παραγόντων σὲ μεσαῖο ὕψος. Ἔτσι ἔχομε:

$$32 \times 144 = 4\,608 = 32 \cdot 144.$$

**21. Πυθαγόρειος πίνακας.** Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παραπάνω, γιὰ νὰ κάμωμε γρήγορα καὶ σωστὰ ἕναν πολλαπλασιασμό, πρέπει νὰ ξέρωμε ἀπέξω τὰ γινόμενα ἑνὸς ὁποιουδήποτε ψηφίου μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε ψηφίο, δηλαδὴ τὰ γινόμενα ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀπὸ τοὺς 10 ἀριθμοὺς

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

μὲ ἕναν ὁποιοδήποτε ἀπὸ τοὺς ἴδιους. Τὰ 100 αὐτὰ γινόμενα καταγράφονται στὸν ἀκόλουθο πίνακα, ποὺ λέγεται *Πυθαγόρειος*, ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Ἕλληνα φιλοσόφου καὶ μαθηματικοῦ Πυθαγόρα:

| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| **5** | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| **6** | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| **7** | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| **8** | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| **9** | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Ὁ πίνακας ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 τετραγωνάκια ποὺ σχηματίζουν 10 γραμμὲς καὶ 10 στῆλες. Οἱ γραμμὲς εἶναι σημειωμένες στ' ἀριστερά τους μὲ τὰ ψηφία 0, 1, 2, ..., 8, 9 κατὰ σειρά· ὅμοια, οἱ στῆλες εἶναι σημειωμένες ἀπὸ πάνω μὲ τὰ ἴδια αὐτὰ ψηφία κατὰ σειρά. Ἡ γραμμὴ ἡ σημειωμένη μὲ τὸ 0 περιέχει μέσα στὰ 10 τετραγωνάκια της τὰ γινόμενα:

$0 \times 0 =$ μηδὲν φορὲς 0, $0 \times 1 =$ μηδὲν φορὲς 1,
..., $0 \times 9 =$ μηδὲν φορὲς 9.

Ἡ γραμμὴ ἡ σημειωμένη μὲ τὸ 1 περιέχει τὰ γινόμενα:
$1 \times 0 =$ μία φορὰ 0, $1 \times 1 =$ μία φορὰ 1, ..., $1 \times 9 =$ μία φορὰ 9.

Ἡ γραμμὴ ἡ σημειωμένη μὲ τὸ 2 περιέχει τὰ γινόμενα: $2 \times 0 =$ δυὸ φορὲς 0, $2 \times 1 =$ δυὸ φορὲς 1, ..., $2 \times 9 =$ δυὸ φορὲς 9.

Καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὅμοια, ἡ στήλη ἡ σημειωμένη (ἀπὸ πάνω) π.χ. μὲ 6 περιέχει τὰ γινόμενα:

$0 \times 6 =$ μηδὲν φορὲς 6, $1 \times 6 =$ μία φορὰ 6, ..., $9 \times 6 =$ ἐννιὰ φορὲς 6.

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ γινόμενο δυὸ μονοψηφίων ἀριθμῶν, π.χ. τὸ $5 \times 9 =$ πέντε φορὲς 9, παίρνομε τὴ γραμμὴ τὴ σημειωμένη μὲ τὸ 5 καθὼς καὶ τὴ στήλη τὴ σημειωμένη μὲ τὸ 9 καὶ τὶς ἀκολουθοῦμε ὡς τὸ τετραγωνάκι ὅπου διασταυρώνονται οἱ δυό τους· μέσα σ' αὐτὸ βρίσκομε τὸ ζητούμενο γινόμενο:

$$45 = 5 \times 9.$$

**22. Γινόμενο τριῶν ἢ περισσότερων παραγόντων.** Ὅταν γράφωμε $5 \times 4 \times 7$ ἐννοοῦμε ὅτι θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ 5 μὲ τὸ 4 καὶ τὸ γινόμενό τους μὲ τὸ 7. Ἔτσι βρίσκομε

$$5 \times 4 \times 7 = (5 \times 4) \times 7 = 20 \times 7 = 140.$$

Ὅμοια ἔχομε

$$\begin{aligned} 17 \times 6 \times 8 \times 11 &= (17 \times 6) \times 8 \times 11 = 102 \times 8 \times 11 \\ &= (102 \times 8) \times 11 = 816 \times 11 = 8\,976. \end{aligned}$$

Ὑπενθυμίζομε ὅτι τὸ κλείσιμο μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξης μέσα σὲ παρένθεση σημαίνει πὼς θεωροῦμε ἐκτελεσμένη αὐτὴ τὴν πράξη.

**23. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.**

*1η.* Σ' ἕναν πολλαπλασιασμὸ σὰν τὸν $32 \times 144$ βίδες ποὺ κάμαμε στὸν § 20, ὁ πολλαπλασιαστέος, 144 βίδες, εἶναι ἕνας συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ πολλαπλασιαστὴς ὅμως 32 πρέπει νὰ θεωρηθῆ σὰν ἕνας ἀφηρημένος ἀριθμός, γιατὶ ὁ ρόλος του εἶναι νὰ μᾶς πῆ πόσες φορὲς θὰ εἴχαμε νὰ πάρωμε τὸ 144 βίδες γιὰ προσθετέο, ἂν θέλαμε νὰ βροῦμε μὲ πρόσθεση τὸ ἐξαγόμενο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ τὸ γινόμενο.

Ὥστε: *Τὸ γινόμενο ἑνὸς συγκεκριμένου ἀριθμοῦ μὲ ἕναν ἀφηρημένο εἶναι ἀριθμὸς συγκεκριμένος, ὁμοειδὴς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέο.*

Ἔτσι ἔχομε $32 \times 144$ βίδες $= 4\,608$ βίδες.

*2α. Ὅταν σ' ἕνα γινόμενο ἕνας παράγοντας εἶναι μηδέν, τότε καὶ τὸ γινόμενο εἶναι μηδέν.*

Π.χ. $5 \times 0 = 0 = 0 \times 5, \quad 173 \times 0 \times 4 = 0 \times 4 = 0.$

*3η. Σ' ἕναν πολλαπλασιασμὸ ἀφηρημένων ἀριθμῶν ἐπιτρέπεται ν' ἀλλάξωμε τὴ σειρὰ τῶν παραγόντων· τὸ γινόμενο δὲν μεταβάλλεται.*

Π.χ. $7 \times 8 = 56 = 8 \times 7, \quad 530 \times 2 = 2 \times 530 = 1\,060,$
$27 \times 68 = 1\,836 = 68 \times 27, \quad 39 \times 6 \times 7 = 6 \times 7 \times 39 = 1\,638.$

*4η. Σ' ἕναν πολλαπλασιασμὸ μὲ τρεῖς ἢ περισσότερους ἀφηρημένους παράγοντες μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσωμε δύο ἢ περισσότερους παράγοντες μὲ τὸ γινόμενό τους· τὸ τελικὸ ἐξαγόμενο δὲν ἀλλάζει.*

Π.χ. $45 \times 8 \times 9 = (45 \times 8) \times 9 = 360 \times 9$
$= 3\,240 = 45 \times (8 \times 9) = 45 \times 72.$

Ὑπενθυμίζομε πάλι ὅτι τὸ κλείσιμο μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως μέσα σὲ παρένθεση σημαίνει πὼς ἡ ἀριθμητικὴ αὐτὴ πράξη πρέπει νὰ ἔχῃ ἐκτελεστῇ πρὶν προχωρήσωμε στὴν ἐκτέλεση τῶν ἄλλων πράξεων.

*Παρατήρηση.* Προσέχετε νὰ μὴν μπερδεύετε τὸν ὑπολογισμὸ

$$4 \times 3 \times 5$$

ἢ τὸν $\quad 4 \times (3 \times 5)$

μὲ τὸν $\quad 4 \times (3 + 5).$

Ὁ πρῶτος $4 \times 3 \times 5$ σημαίνει πὼς ἔχετε νὰ πολλαπλασιάσετε τὸ 4 μὲ τὸ 3 καὶ τὸ γινόμενό τους 12 μὲ τὸ 5· τὸ τελικὸ ἐξαγόμενο εἶναι: 60.

Ὁ δεύτερος $4 \times (3 \times 5)$ σημαίνει ὅτι ἔχετε νὰ πολλαπλασιάσετε τὸ 4 μὲ τὸ γινόμενο τοῦ 3 ἐπὶ 5, δηλαδὴ μὲ τὸ 15· τὸ τελικὸ ἐξαγόμενο εἶναι φυσικὰ (βλέπε τῆς ἰδιότητες 3η καὶ 4η) πάλι: 60.

Ὁ τρίτος ὑπολογισμὸς $4 \times (3 + 5)$ εἶναι κάτι ἐντελῶς διαφορετικό: σ' αὐτὸν ἔχετε νὰ πολλαπλασιάσετε τὸ 4 μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ 3 καὶ τοῦ 5, δηλαδὴ μὲ τὸ 8· τὸ τελικὸ ἐξαγόμενο αὐτοῦ τοῦ ὑπολογισμοῦ εἶναι λοιπὸν $32 = 4 \times 8$.

Ὅμοια ἔχομε

$$2 \times 6 \times 7 \times 4 = 12 \times 7 \times 4 = 84 \times 4 = 336,$$

ἐνῶ

$$2 \times (6 + 7 + 4) = 2 \times 17 = 34.$$

Τέλος, ὁ ὑπολογισμὸς $4 + (3 \times 5)$ σημαίνει πὼς πρέπει νὰ προσθέσετε στὸ 4 τὸ γινόμενο τοῦ 3 μὲ τὸ 5, δηλαδὴ τὸ 15· ἄρα

$$4 + (3 \times 5) = 4 + 15 = 19.$$

**24. Συμπεράσματα.** 1ο. Ἔχομε, σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα,

$$\begin{array}{r} 351 \\ \times \quad 10 \\ \hline 000 \\ 3\,51\phantom{0} \\ \hline 3\,510 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 351 \\ \times \quad 100 \\ \hline 000 \\ 0\,00\phantom{0} \\ 35\,1\phantom{00} \\ \hline 35\,100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 351 \\ \times\, 1\,000 \\ \hline 000 \\ 0\,00\phantom{0} \\ 00\,0\phantom{00} \\ 351\phantom{000} \\ \hline 351\,000 \end{array} \qquad \text{κτλ.}$$

Ὥστε: *Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕναν ἀριθμὸ μὲ 10, 100, 1 000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ γράψωμε στὰ δεξιά του ἀντιστοίχως ἕνα, δύο, τρία κτλ. μηδενικὰ* (βλέπε καὶ παράγραφο 4, 2ο).

2ο. Ἔχομε

$$\begin{aligned} 500 \times 710 &= 5 \times 100 \times 71 \times 10 = (5 \times 71) \times 1\,000 \\ &= 355 \times 1\,000 = 355\,000. \end{aligned}$$

Ὥστε: *Ὅταν ὁ ἕνας ἢ καὶ οἱ δυὸ παράγοντες ἑνὸς γινομένου τελειώνουν σὲ μηδενικά, τότε κάμομε τὸν πολλαπλασιασμὸ χωρὶς τὰ μηδενικὰ αὐτὰ καί, στὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου ποὺ βρίσκομε, γράφομε τόσα μηδὲν ὅσα τελικὰ μηδενικὰ ἔχουν καὶ οἱ δυὸ παράγοντες μαζί.*

Π.χ. γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ γινόμενο $1\,200 \times 12\,000$ πολλαπλασιάζομε τὸ 12 μὲ τὸ 12, ὁπότε βρίσκομε 144, καὶ γράφομε στὰ δεξιὰ τοῦ 144 πέντε μηδενικὰ (ὅσα δηλαδὴ ἔχουν οἱ δυὸ παράγοντες 1 200 καὶ 12 000 μαζί):

$$1\,200 \times 12\,000 = 14\,400\,000.$$

3ο. Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς 204 × 1 583. Ἔχομε:

$$\begin{array}{r} 1\,583 \\ \times \quad 204 \\ \hline 6\,332 \\ 00\,00\phantom{0} \\ 316\,6\phantom{00} \\ \hline 322\,932 \end{array}$$

Ὁ πολλαπλασιαστὴς 204 ἔχει ἐνδιάμεσο μηδενικὸ ψηφίο· τὸ γινόμενο αὐτοῦ τοῦ ψηφίου μὲ τὸν πολλαπλασιαστέο εἶναι τὸ 0000, δηλαδὴ τὸ 0· ἑπομένως μπορεῖ νὰ παραλείπεται στὴν πρόσθεση. Ἄρα μποροῦμε νὰ κάμωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ συντομώτερα, ἔτσι:

$$\begin{array}{r} 1\,583 \\ \times \quad 204 \\ \hline 6\,332 \\ 316\,6\phantom{00} \\ \hline 322\,932 \end{array}$$

Ὅμοια βρίσκομε:

$$\begin{array}{r} 425 \\ \times \quad 3\,002 \\ \hline 850 \\ 1\,275\phantom{000} \\ \hline 1\,275\,850 \end{array}$$

Ὥστε: *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς (δηλαδὴ ὁ κάτω παράγοντας) ἔχῃ ἕνα ἢ περισσότερα ἐνδιάμεσα διαδοχικὰ μηδενικὰ ψηφία, τότε, γιὰ συντομία, παραλείπομε τὰ γινόμενα αὐτῶν τῶν μηδενικῶν ψηφίων μὲ τὸν πολλαπλασιαστέο, προσέχομε ὅμως τὰ γινόμενα τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστῆ μὲ τὸν πολλαπλασιαστέο ν' ἀρχίζουν ἀπὸ δεξιὰ στὴ σωστὴ θέση, δηλαδὴ στὴ στήλη ἐκείνου τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστῆ μὲ τὸ ὁποῖο πολλαπλασιάζομε κάθε φορά.*

Ὁ κανόνας αὐτὸς μπορεῖ νὰ διατυπωθῇ πιὸ πρακτικὰ ἔτσι:

*Ὅταν συναντοῦμε στὸν πολλαπλασιαστὴ ἕνα ἢ περισσότερα διαδοχικὰ μηδενικά, τότε μεταθέτομε τὸ γινόμενο τοῦ ἑπόμενου (ὄχι μηδενικοῦ) ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστῆ τόσες θέσεις πιὸ ἀριστερὰ ἀπὸ τὴ μία τὴν κανονικὴ ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ ποὺ παραλείψαμε.*

**25. Δοκιμὴ (ἔλεγχος) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. 1ος τρόπος.**

Ἀλλάζομε τὴ σειρὰ τῶν παραγόντων καὶ ξανακάμομε τὸν πολλαπλασιασμό· πρέπει νὰ βροῦμε τὸ ἴδιο ἐξαγόμενο.

Π.χ.

$$\begin{array}{r} 603 \\ \times \quad 37 \\ \hline 4\,221 \\ 18\,09\phantom{0} \\ \hline 22\,311 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 37 \\ \times \quad 603 \\ \hline 111 \\ 22\,2\phantom{00} \\ \hline 22\,311 \end{array}$$

**2ος τρόπος. Δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 ἢ δοκιμὴ μὲ τὸ σταυρό.**

Ἂς ἐλέγξωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ

$$54\,948 \times 525 = 28\,847\,700.$$

Προσθέτομε τὰ ψηφία τοῦ πρώτου παράγοντα 54 948, παίρνοντάς τα ἕνα - ἕνα μὲ τὴ σειρὰ καὶ ἀκολουθώντας τοὺς ἑξῆς κανόνες:

1ο ὅταν συναντοῦμε ἕνα ψηφίο 9, τὸ παραλείπομε, μὲ ἄλλα λόγια τὸ ἀντικαθιστοῦμε μὲ τὸ 0·

2ο ὅταν βρίσκωμε ἕνα ἄθροισμα ἴσο μὲ τὸ 9, τὸ ἀντικαθιστοῦμε κι αὐτὸ μὲ τὸ 0·

3ο ὅταν βρίσκωμε ἕνα διψήφιο ἄθροισμα, π.χ. τὸ 13, τὸ ἀντικαθιστοῦμε μὲ τὸ ἄθροισμα, $1+3=4$, τῶν δυὸ ψηφίων του, πρὶν προχωρήσωμε στὸν ὑπολογισμό μας.

Ἔτσι γιὰ τὸν πρῶτο παράγοντα 54 948 θὰ ἔχωμε:

$5+4=9$, τὸ παραλείπομε λοιπόν. Ἐπίσης παραλείπομε τὸ ἑπόμενο ψηφίο 9 τοῦ παράγοντα. Τέλος $4+8=12$, $1+2=3$.

Αὐτὴν τὴν ἐργασία θὰ τὴ λέμε, γιὰ συντομία, *μίκρεμα τοῦ 54 948 διὰ τοῦ 9*. Τὸ ἀποτέλεσμα 3 ἀπὸ τὸ μίκρεμα τὸ γράφομε σὲ μιὰν ἀπὸ τὶς δυὸ ἐπάνω γωνίες ἑνὸς σταυροῦ.

$$\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ \hline & \end{array}$$

Μικραίνομε τώρα τὸν δεύτερο παράγοντα 525 διὰ τοῦ 9:

$$5+2=7, \quad 7+5=12, \quad 1+2=3.$$

Τὸ ἀποτέλεσμα 3 τὸ γράφομε στὴν ἄλλη ἐπάνω γωνία τοῦ σταυροῦ.

Πολλαπλασιάζομε τὰ δυὸ ἐξαγόμενα ποὺ βρήκαμε: $3 \times 3 = 9$. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενό τους εἶναι 9, τὸ ἀντικαθιστοῦμε μὲ τὸ 0, καὶ αὐτὸ τὸ 0 τὸ γράφομε σὲ μιὰν ἀπὸ τὶς δυὸ κάτω γωνίες τοῦ σταυροῦ.

$$\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

Τέλος μικραίνομε διὰ τοῦ 9 τὸ γινόμενο 28 847 700 ποὺ ἔχομε νὰ ἐλέγξωμε: $2+8=10$, $1+0=1$, $1+8=9$· τὸ παραλείπομε· $4+7=11$, $1+1=2$, $2+7=9$· τὸ παραλείπομε. $0+0=0$. Αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα τὸ γράφομε στὴ δεύτερη κάτω γωνία τοῦ σταυροῦ.

Ἂν ὁ πολλαπλασιασμός, ποὺ θέλομε νὰ ἐλέγξωμε, εἶναι σωστός, τότε πρέπει τὰ δυὸ τελευταῖα ἐξαγόμενα (αὐτὰ ποὺ γράψαμε στὶς κάτω γωνίες τοῦ σταυροῦ) νὰ εἶναι *ἴσα*.

Νά ἕνα δεύτερο παράδειγμα.

Ἂς ἐλέγξωμε τὸν πολλαπλασιασμό: $4\,502 \times 67 = 301\,634$.

Ἔχομε:

$$\begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 8 & 8 \end{array}$$

$4+5=9$, $0+2=2$.
$6+7=13$, $1+3=4$.
$2 \times 4 = 8$.

$3+0=3$, $3+1=4$, $4+6=10$, $1+0=1$, $1+3=4$, $4+4=8$.

*Ἀσκήσεις.* *1.* Ἐκτελέστε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὴ δοκιμή τους:

$537 \times 68$, $6\,009 \times 457$, $92\,007 \times 653$, $78\,306 \times 417$,
$1\,579 \times 201$, $6\,938 \times 5\,004$, $70\,352 \times 2\,009$, $935\,613 \times 708$.

*2.* Ἐκτελέστε τοὺς ὑπολογισμούς:
$42 \times 3 \times 5$, $16 \times 7 \times 20$, $5 \times (9+8)$, $5 \times 9 \times 8$, $8 \times (12+3)$, $8 \times 12 \times 3$, $18 \times (4+9)$, $25 \times (6+8)$, $(19+2) \times 4$, $(57+3) \times 80$, $73+(8 \times 3)$, $(73+8) \times 3$, $73 \times 8 \times 3$, $92 \times (7+2)$, $(92+76) \times 2$.

*3.* Ἐπαληθεῦστε τὶς παρακάτω ἰσότητες ἐκτελώντας τὶς σημειωμένες πράξεις ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ τοῦ $=$:

$3\,724 \times 101 = (3\,724 \times 100) + 3\,724$,
$3\,724 \times 99 = (3\,724 \times 100) - 3\,724$,
$869 \times 1\,001 = (869 \times 1\,000) + 869$,
$869 \times 999 = (869 \times 1\,000) - 869$.

*4*. 12 ἐργάτες, γιὰ νὰ τελειώσουν μιὰν ἐργασία, ἐργάστηκαν 26 ἡμέρες ἀπὸ 8 ὧρες κάθε μέρα καὶ ἔπαιρναν ὁ καθένας τους 10 δραχμὲς τὴν ὥρα. Βρῆτε πόσα χρήματα ἔπαιρναν ὅλοι μαζὶ γιὰ μιὰν ἡμέρα ἐργασίας, πόσα πῆρε ὁ καθένας τους καὶ πόσα πῆραν ὅλοι μαζὶ γιὰ τὶς 26 ἡμέρες ἐργασίας.

**26. Διαίρεση. Πρόβλημα 1.** *Ἔχομε ἕνα κουτὶ μὲ 68 σπίρτα. Πόσες δωδεκάδες σπίρτα μποροῦμε νὰ σχηματίσωμε μὲ αὐτά;*

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε θὰ μπορούσαμε νὰ πάρωμε ἀπὸ τὸ κουτὶ 12 σπίρτα καὶ νὰ σχηματίσωμε μιὰν πρώτη δωδεκάδα, ὕστερα νὰ πάρωμε ἄλλα 12 γιὰ νὰ σχηματίσωμε μιὰ δεύτερη δωδεκάδα, ἔπειτα ἄλλα 12 γιὰ μιὰν τρίτη δωδεκάδα, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὥσπου αὐτὴ ἡ ἐργασία νὰ μὴν μπορεῖ πιὰ νὰ συνεχιστῇ. Θὰ βρίσκαμε τότε ὅτι μποροῦμε νὰ σχηματίσωμε 5 δωδεκάδες καὶ ὅτι μᾶς μένει ἕνα ὑπόλοιπο ἀπὸ 8 σπίρτα. Ἔχομε μιὰν ἐπαλήθευση αὐτοῦ τοῦ ἀποτελέσματος, ὅταν σκεφθοῦμε πὼς 5 φορὲς 12 κάνει 60 καὶ πὼς $60+8$ κάνει 68.

**Πρόβλημα 2.** *Ἔχομε 68 τετράδια καὶ θέλομε νὰ τὰ μοιράσωμε ἐξίσου σὲ 12 παιδιά. Πόσα τετράδια μπορεῖ νὰ πάρῃ τὸ κάθε παιδί;*

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε θὰ μπορούσαμε νὰ δώσωμε ἕνα πρῶτο τετράδιο σὲ κάθε παιδὶ (θὰ μᾶς ἔμεναν τότε $68-12=56$ τετράδια), ὕστερα ἕνα δεύτερο τετράδιο, πάλι σὲ κάθε παιδί, ὕστερα ἕνα τρίτο, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὥσπου αὐτὴ ἡ ἐργασία νὰ μὴν μπορῇ πιὰ νὰ συνεχιστῇ. Θὰ βρίσκαμε ἔτσι ὅτι, ἀφοῦ δώσωμε καὶ ἕνα πέμπτο τετράδιο σὲ κάθε παιδί, θὰ μᾶς μείνουν 8 τετράδια ποὺ δὲν μποροῦν πιὰ νὰ μοιραστοῦν ἐξίσου στὰ 12 παιδιά. Ὥστε κάθε παιδὶ μπορεῖ νὰ πάρῃ 5 τετράδια καὶ θὰ μᾶς μείνῃ ἕνα ὑπόλοιπο ἀπὸ 8 τετράδια. Γιὰ νὰ τὸ ἐπαληθεύσωμε σκεπτόμαστε πάλιν ὅτι 12 φορὲς 5 κάνει 60 καὶ ὅτι $60+8=68$.

Ὅπως βλέπομε, καὶ στὰ δυὸ προβλήματα ἐκεῖνο ποὺ ζητοῦμε εἶναι: *νὰ βροῦμε πόσες φορὲς τὸ πολὺ ὁ ἀριθμὸς 12 χωρεῖ στὸν ἀριθμὸ 68,* καὶ γι' αὐτὸ ἀφαιροῦμε συνεχῶς τὸ 12 ἀπὸ τὸ 68, ὥσπου αὐτὴ ἡ ἀφαίρεση νὰ μὴν γίνεται πιά. Εἶναι ὅμως φανερὸ πὼς αὐτὸς ὁ τρόπος νὰ βρίσκωμε τὸ ζητούμενο θὰ ἦταν καὶ μακρόχρονος καὶ κουραστικός, ἂν ἀντὶ γιὰ 68 εἴχαμε ἕναν πολὺ μεγαλύτερο ἀριθμό, π.χ. τὸν 685. Γι' αὐτὸ θὰ περιγράψωμε παρακάτω ἕναν ἄλλο σύντομο τρόπο ὑπολογισμοῦ, τὴ *διαίρεση.*

**27. Σὲ μιὰ διαίρεση μᾶς δίνονται δυὸ ἀριθμοί**: ὁ πρῶτος λέγεται *διαιρετέος* (στὸ παραπάνω παράδειγμά μας, ὁ 68) καὶ ὁ δεύτερος, ποὺ *δὲν εἶναι μηδέν,* λέγεται *διαιρέτης* (στὸ παράδειγμά μας, ὁ 12)· καὶ βρίσκομε ἕναν τρίτο, ποὺ λέγεται *πηλίκον* (τὸν 5), μὲ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα: ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ διαιρέτη μὲ τὸ πηλίκον καὶ τὸ γινόμενο τὸ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸν διαιρετέο, θὰ λάβωμε ὑπόλοιπο ἕναν ἀριθμὸ μικρότερο ἀπὸ τὸν διαιρέτη:

$$68 - (12 \times 5) = 8 \text{ καὶ } 8 < 12.$$

Τὸ ὑπόλοιπο αὐτὸ λέγεται καὶ *ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως.*

Σύμβολο γιὰ τὴ διαίρεση ἔχομε τό: ποὺ διαβάζεται διὰ καὶ γράφεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου ἀριστερὰ καὶ τοῦ διαιρέτη δεξιά. Ἔτσι λέμε π.χ. ὅτι ἡ διαίρεση 68 : 12 (ἑξήντα ὀκτὼ διὰ δώδεκα) δίνει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπο 8.

**28. Πῶς ἐκτελεῖται μιὰ διαίρεση.** Ἔστω ἡ διαίρεση 3 961 : 32. Γράφομε τὸν διαιρετέο καὶ τὸν διαιρέτη μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείχνομε δίπλα· τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου τὰ βρίσκομε ἕνα-ἕνα, μὲ τὸν τρόπο ποὺ θὰ ποῦμε, καὶ τὰ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸν διαιρέτη.

$$\begin{array}{r|l} 3\,961 & 32 \\ \cline{2-2} & \text{πηλίκον} \end{array}$$

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ πρῶτο ἀπ' ἀριστερὰ ψηφίο τοῦ πηλίκου χωρίζομε (μ' ἕναν τόνο) στ' ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὸ πρῶτο κομμάτι του ποὺ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν διαιρέτη ἢ τουλάχιστον ἴσο μὲ αὐτόν· στὸ παράδειγμά μας τὸ κομμάτι αὐτὸ εἶναι τὸ 39. Ὕστερα ἐξετάζομε πόσες φορὲς ὁ διαιρέτης χωρεῖ σ' αὐτὸ τὸ κομμάτι· στὸ παράδειγμά μας τὸ 32 χωρεῖ στὸ 39 μία (1) φορά. Γράφομε 1 ὡς πρῶτο ψηφίο τοῦ πηλίκου,

$$\begin{array}{r|l} 39'61 & 32 \\ \cline{2-2} -32 & 1 \\ \cline{1-1} 76 & \end{array}$$

πολλαπλασιάζομε τὸν διαιρέτη μὲ αὐτὸ τὸ ψηφίο, καὶ τὸ γινόμενο $32 = 1 \times 32$ τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ 39· τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι 7. Δεξιὰ ἀπ' αὐτὸ κατεβάζομε τὸ ψηφίο 6 τοῦ διαιρετέου, τὸ ὁποῖο ἀκολουθεῖ στὸ κομμάτι ποὺ χωρίσαμε, καὶ ἐξετάζομε πόσες φορὲς τὸ 32 χωρεῖ στὸ 76. Εἶναι φανερὸ πὼς χωρεῖ δυὸ φορές, γιατὶ 3 φορὲς τὸ 32 ξεπερνᾶ τὸ $3 \times 30 = 90$, ποὺ εἶναι $> 76$. Γράφομε 2 στὸ πηλίκον, δεξιὰ ἀπὸ τὸ πρῶτο ψηφίο

$$\begin{array}{r|l} 396'1 & 32 \\ \cline{2-2} -32 & 12 \\ \cline{1-1} 76 & \\ -64 & \\ \cline{1-1} 12 & \end{array}$$

ποὺ βρήκαμε ἤδη, πολλαπλασιάζομε τὸν διαιρέτη μὲ 2 καὶ τὸ γινόμενο 64 τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ 76· ὑπόλοιπο ἔχομε τὸ 12.

Κατεβάζομε τώρα τὸ τελευταῖο ψηφίο 1 τοῦ διαιρετέου στὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 12 καὶ ἐξετάζομε πόσες φορὲς τὸ 32 χωρεῖ στὸ 121. Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, παίρνομε μόνο τὸ πρῶτο ψηφίο 3 τοῦ διαιρέτη, παραλείποντας ἕνα ψηφίο, καὶ ἐξετάζομε πόσες φορὲς αὐτὸ τὸ 3 χωρεῖ στὸ 12, δηλαδὴ σ' ἐκεῖνο τὸ κομμάτι τοῦ ὑπολοίπου 121 ποὺ μένει, ὅταν παραλείψωμε καὶ ἀπὸ τὸ 121 ἕνα ψηφίο στὰ δεξιά. Τὸ 3 χωρεῖ στὸ 12 τέσσερις φορές. Ἂν ὅμως πολλαπλασιάσωμε τὸ διαιρέτη 32 μὲ 4, βλέπομε ὅτι τὸ γινόμενο 128 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 121· γι' αὐτὸ δοκιμάζομε τὸ κατὰ μία μονάδα μικρότερο ψηφίο 3 ὡς τρίτο ψηφίο τοῦ πηλίκου. Τὸ γινόμενο τοῦ διαιρέτη μὲ τὸ 3 εἶναι 96, ποὺ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ 121 καὶ μπορεῖ ν' ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτό. Ὑπόλοιπο ἔχομε 25.

$$\begin{array}{r|l} 3961 & 32 \\ \cline{2-2} -32 & 123 \\ \cline{1-1} 76 & \\ -64 & \\ \cline{1-1} 121 & \\ -96 & \\ \cline{1-1} 25 & \end{array}$$

Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3 961 : 32 εἶναι 123 καὶ τὸ ὑπόλοιπό της 25. Τὸ ἐπαληθεύομε παρατηρώντας ὅτι:

$$3\,961 - (32 \times 123) = 3\,961 - 3\,936 = 25.$$

*Παρατήρηση.* Συνηθίζεται, τὸ γινόμενο τοῦ διαιρέτη μὲ τὸ κάθε ψηφίο τοῦ πηλίκου νὰ μὴν τὸ γράφωμε, ἀλλὰ νὰ τὸ ἀφαιροῦμε, νοερὰ καὶ τμηματικά, ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχο ἀριθμὸ στὴ μεριὰ τοῦ διαιρετέου. Αὐτὴ ἡ σύγχρονη νοερὴ ἐκτέλεση τῶν δυὸ πράξεων, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς ἀφαιρέσεως, κουράζει τὴν προσοχὴ τοῦ ὑπολογιστοῦ καὶ γίνεται ἀφορμὴ γιὰ περισσότερα λάθη. Ἐξάλλου τὸ γράψιμο, ποὺ συνιστοῦμε, αὐτῶν τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτη ἐπὶ τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πηλίκου ἐπιτρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε μὲ ἄνεση τὴ διαίρεση καὶ νὰ ἐλέγξωμε τὰ διάφορα μέρη τῆς ὅλης ἐργασίας μας.

**29. Ἀτελὴς καὶ τέλεια διαίρεση.** Οἱ διαιρέσεις 68 : 12 καὶ 3 961: 32, ποὺ κάμαμε παραπάνω, εἶχαν ὑπόλοιπο ὄχι μηδενικὸ (ὑπόλοιπο $> 0$). Τέτοιες διαιρέσεις λέγονται *ἀτελεῖς*.

Φυσικὰ ὑπάρχουν καὶ διαιρέσεις μὲ μηδενικὸ ὑπόλοιπο· π.χ. ἡ διαίρεση 48 : 12 ἔχει πηλίκο 4 καὶ ὑπόλοιπο 0. Διαιρέσεις μὲ ὑπόλοιπο μηδὲν λέγονται *τέλειες*. Στὴν περίπτωση μιᾶς τέλειας διαιρέσεως λέμε ὅτι ὁ διαιρέτης διαιρεῖ *ἀκριβῶς* τὸν διαιρετέο, καὶ τὸ πηλίκον της τὸ καλοῦμε *ἀκριβές*. Π.χ. τὸ πηλίκον 4 τῆς διαιρέσεως 48 : 12 εἶναι ἀκριβές, καὶ σ' αὐτὴν τὴν περίπτωση γράφομε

$$48 : 12 = 4.$$

Στὴν περίπτωση μιᾶς διαιρέσεως ποὺ δὲν εἶναι τέλεια, λέμε ὅτι ὁ διαιρέτης δὲν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν διαιρετέο, καὶ τὸ πηλίκον της τὸ καλοῦμε *ἀτελὲς* ἢ *προσεγγιστικό*. Γιὰ μιὰν ἀτελῆ διαίρεση σὰν τὴν 68 : 12 πού, ὅπως εἴδαμε, ἔχει πηλίκον 5 γράφομε

$$68 : 12 \simeq 5$$

καὶ διαβάζομε « ἑξήντα ὀκτὼ διὰ δώδεκα *περίπου* ἴσον πέντε ».

Ἂς ἰδοῦμε τώρα πότε μιὰ διαίρεση εἶναι τέλεια. Ἂς πάρωμε π.χ. διαιρέτη τὸ 12 καὶ ἂς ἐξετάσωμε ποιοὺς ἀριθμοὺς διαιρεῖ ἀκριβῶς. Ἂν μιὰ διαίρεση διὰ 12 εἶναι τέλεια, θὰ ἔχωμε γι' αὐτὴν

$$\text{διαιρετέος} - (12 \times \text{πηλίκον}) = 0,$$

ἄρα

$$\text{διαιρετέος} = 12 \times \text{πηλίκον}.$$

Τὸ πηλίκον μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, κτλ.

Ἄρα, οἱ ἀριθμοὶ ποὺ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 12 εἶναι οἱ ἀκόλουθοι:

$$0 = 12 \times 0,\ 12 = 12 \times 1,\ 24 = 12 \times 2,\ 36 = 12 \times 3,\ \text{κτλ.}$$

Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται *πολλαπλάσια* τοῦ 12, γιατὶ τοὺς βρίσκομε πολλαπλασιάζοντας τὸ 12 μὲ τοὺς διαδοχικοὺς ἀκέραιους ἀριθμούς. Ἐπίσης μποροῦμε νὰ τοὺς βροῦμε προσθέτοντας στὸ 0 τὸ 12 συνεχῶς:

$$0,\ 12 = 0 + 12,\quad 24 = (0 + 12) + 12,\quad 36 = 24 + 12,\ \text{κτλ.}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομε τὸ συμπέρασμα: *Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑνὸς ὄχι μηδενικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν εἶναι πολλαπλάσιο αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.*

**30. Ἀξιοσημείωτες διαιρέσεις.** 1ο. Σὲ μιὰ διαίρεση ὁ διαιρέτης *δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ποτὲ μηδέν,* ὅπως εἴπαμε (βλέπε παράγραφο 27). *Ὁ διαιρετέος ὅμως μπορεῖ νὰ εἶναι 0· τότε καὶ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως θὰ εἶναι μηδενικά.*

Π.χ. ἡ διαίρεση $0 : 5$ (μηδὲν διὰ πέντε) ἔχει πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπο 0. Καὶ ἀλήθεια, τὸ 5 χωρεῖ στὸ 0 μηδὲν φορές· τὸ πηλίκον εἶναι λοιπὸν 0. Ἂν τώρα ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸν διαιρετέο 0 τὸ γινόμενο $5 \times 0$ τοῦ διαιρέτη μὲ τὸ πηλίκον (τὸ γινόμενο αὐτὸ εἶναι 0, ὅπως ξέρομε), θὰ βροῦμε $0 - 0 = 0$· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $0 : 5$ εἶναι μηδέν.

Ἔχομε λοιπὸν γενικὰ τὶς τέλειες διαιρέσεις:

$$0 : 1 = 0,\ 0 : 2 = 0,\ 0 : 3 = 0,\ 0 : 4 = 0,\ \text{κτλ.}$$

2ο. *Ὅταν σὲ μιὰ διαίρεση ὁ διαιρέτης εἶναι τὸ 1, τότε τὸ πηλίκον εἶναι ἴσο μὲ τὸν διαιρετέο καὶ τὸ ὑπόλοιπο εἶναι 0.*

Π.χ. 7 : 1 = 7, γιατὶ τὸ 1 χωρεῖ στὸ 7 ἑπτὰ φορές, καὶ ἂν ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸν διαιρετέο 7 ἑπτὰ φορὲς τὸ 1 (δηλαδὴ τὸ γινόμενο 7 × 1 = 7), τὸ ὑπόλοιπο ποὺ θὰ λάβωμε εἶναι 0.

Ἔχομε λοιπὸν τὶς τέλειες διαιρέσεις:

0 : 1 = 0, 1 : 1 = 1, 2 : 1 = 2, 3 : 1 = 3, 4 : 1 = 4, κτλ.

3ο. *Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτη, τὸ πηλίκον εἶναι 0 καὶ τὸ ὑπόλοιπο εἶναι ἴσο μὲ τὸν διαιρετέο.*

Π.χ. ἡ διαίρεση 249 : 461 ἔχει πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπο 249. Αὐτὸ εἶναι φανερό.

4ο. *Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρέτη, τότε τὸ πηλίκον εἶναι 1 καὶ τὸ ὑπόλοιπο 0.*

Π.χ. 249 : 249 = 1. Καὶ αὐτὸ εἶναι φανερό.

**31. Διαιρέσεις διὰ 10, 100, 1 000 κτλ.** Ἔστω ἡ διαίρεση 6 542 : 10. Ὁ διαιρετέος 6 542 ἀποτελεῖται ἀπὸ 654 δεκάδες καὶ 2 μονάδες. Τὸ 10 χωρεῖ σὲ μιὰ δεκάδα μία φορά· ἄρα στὶς 654 δεκάδες τὸ 10 χωρεῖ 654 φορές. Τὸ 10 δὲν χωρεῖ φυσικὰ στὶς 2 μονάδες. Ἑπομένως ἡ διαίρεση 6 542 : 10 ἔχει ἀτελὲς πηλίκον 654 καὶ ὑπόλοιπο 2.

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε λοιπὸν ἕναν ἀριθμὸ (γραμμένο μὲ ψηφία) διὰ 10, χωρίζομε ἕνα ψηφίο στὰ δεξιά του. Π.χ. στὴ διαίρεση 6 542 : 10 γράφομε, χρησιμοποιώντας γιὰ τὸ χωρισμὸ ἕνα κόμμα,

654,2.

Ὅ,τι μένει ἀριστερὰ ἀπὸ αὐτὸ τὸ χώρισμα εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 10· τὸ ὑπόλοιπό της εἶναι τὸ ψηφίο ποὺ χωρίσαμε στὰ δεξιά.

Ὅμοια, γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕναν ἀριθμό, π.χ. τὸν 502 416, διὰ 100, χωρίζομε στὰ δεξιά του μὲ ἕνα κόμμα δυὸ ψηφία (δηλαδὴ τόσα ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτη 100). Στὸ παράδειγμά μας θὰ γράψωμε

5 024,16.

Ὅ,τι βρίσκεται ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ κόμμα εἶναι τὸ πηλίκον, ὅ,τι δεξιὰ ἀπὸ τὸ κόμμα εἶναι τὸ ὑπόλοιπο. Στὸ παράδειγμά μας 502 416 : 100, πηλίκον εἶναι τὸ 5 024 καὶ ὑπόλοιπο τὸ 16· ἡ διαίρεση εἶναι φυσικὰ ἀτελής.

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκομε τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως διὰ 1 000· χωρίζομε δηλ. στὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου μὲ ἕνα κόμμα τρία ψηφία (ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ 1 000)· ὁ ἀριθμὸς ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ κόμμα εἶναι τὸ πηλίκον, ὁ ἀριθμὸς δεξιὰ ἀπὸ τὸ κόμμα εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως.

Π.χ. στὴ διαίρεση 502 416 : 1 000 θὰ ἔχωμε τὸν χωρισμὸ 502,416· ἡ διαίρεση ἔχει ἀτελὲς πηλίκον τὸ 502 καὶ ὑπόλοιπο τὸ 416.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕναν ἀριθμὸ διὰ 10, 100, 1 000 κτλ. χωρίζομε στὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτη· ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ χώρισμα ἔχομε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, δεξιὰ ἀπ' αὐτό, τὸ ὑπόλοιπό της.*

**32. Βασικὴ ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως**: *Σὲ κάθε διαίρεση ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνο ποὺ βρίσκομε πολλαπλασιάζοντας τὸν διαιρέτη μὲ τὸ πηλίκον καὶ προσθέτοντας στὸ γινόμενο τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως:*

διαιρετέος = (διαιρέτης × πηλίκον) + ὑπόλοιπο.

Π.χ. στὴ διαίρεση 502 416 : 1 000, ποὺ ἔχει πηλίκον 502 καὶ ὑπόλοιπο 416, βρίσκομε:

$$502\,416 = (1\,000 \times 502) + 416 = 502\,000 + 416.$$

**33. Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως. 1ος τρόπος.** *Πολλαπλασιάζομε τὸν διαιρέτη μὲ τὸ πηλίκον καὶ στὸ γινόμενο προσθέτομε τὸ ὑπόλοιπο· τὸ ἀποτέλεσμα πρέπει νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸν διαιρετέο.*

Ὅπως εἶναι φανερό, ὁ τρόπος αὐτὸς νὰ ἐλέγξωμε μιὰ διαίρεση δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μιὰ ἁπλῆ ἐφαρμογὴ τῆς προηγούμενης ἰδιότητας (βλ. τὸ τελευταῖο παράδειγμα).

**2ος τρόπος. Δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 (ἢ μὲ τὸ σταυρό).** Ἂς ἐλέγξωμε τὴ διαίρεση

$$82\,975 : 28$$

γιὰ τὴν ὁποία βρίσκομε πηλίκον 2 963 καὶ ὑπόλοιπο 11.

Μικραίνομε διὰ τοῦ 9 τὸν διαιρετέο·
$8+2=10$, $1+0=1$, παραλείπομε τὸ ἑπόμενο ψηφίο 9 καὶ συνεχίζομε $1+7=8$, $8+5=13$, $1+3=4$.

Τὸ ἐξαγόμενο 4 ἀπὸ τὸ μίκρεμα τοῦ διαιρετέου τὸ γράφομε στὴν ἀριστερὴ ἐπάνω γωνία ἑνὸς σταυροῦ.

Μικραίνομε διὰ τοῦ 9 τὸν διαιρέτη 28·

$2+8=10$, $1+0=1$.

Τὸ ἐξαγόμενο 1 τὸ γράφομε στὴ δεξιὰ ἐπάνω γωνία τοῦ σταυροῦ.

$$\begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

Μικραίνομε διὰ τοῦ 9 τὸ πηλίκον 2 963·

$2+6=8$, $8+3=11$, $1+1=2$.

Τὸ ἐξαγόμενο 2 τὸ γράφομε στὴν κάτω δεξιὰ γωνία τοῦ σταυροῦ.

Πολλαπλασιάζομε τὰ δυὸ ἐξαγόμενα, ποὺ γράψαμε στὶς δεξιὲς γωνίες τοῦ σταυροῦ, καὶ τὸ γινόμενό τους τὸ μικραίνομε διὰ τοῦ 9· ἔχομε $1 \times 2 = 2$ καὶ τὸ μίκρεμα τοῦ 2 διὰ τοῦ 9 μᾶς δίνει φυσικὰ 2. Μικραίνομε διὰ τοῦ 9 καὶ τὸ ὑπόλοιπο 11· $1+1=2$. Τὰ ἐξαγόμενα ἀπὸ τὰ δυὸ τελευταῖα μικρέματα τὰ προσθέτομε, $2+2=4$, καὶ τὸ ἄθροισμα τὸ γράφομε στὴν ἀριστερὴ κάτω γωνία τοῦ σταυροῦ. Ἂν ἡ διαίρεσή μας καθὼς καὶ ὅλες οἱ παραπάνω πράξεις ἔγιναν σωστά, τότε πρέπει οἱ δυὸ ἀριθμοί, ποὺ γράψαμε στὶς ἀριστερὲς γωνίες τοῦ σταυροῦ, νὰ εἶναι ἴσοι: $4=4$.

*Ἀσκήσεις.* *1.* Ἐκτελέστε τὶς 6 διαιρέσεις 5 724:17, 24 396:75, 570 900 : 4 321, 6 793 000 : 1 934, 1 729 200 : 3 143, 43 983 : 154.

Ἐλέγξτε τὶς τρεῖς πρῶτες μὲ τὸν 1ο τρόπο καὶ τὶς τρεῖς τελευταῖες μὲ τὸ 2ο τρόπο δοκιμῆς.

*2.* Ξέροντας ὅτι $579 \times 32 = 18\,528$, βρῆτε, χωρὶς νὰ ἐκτελέσετε πράξεις, τὰ πηλίκα τῶν δυὸ διαιρέσεων $18\,528 : 32$ καὶ $18\,528 : 579$.

Ὅμοια ξέροντας ὅτι $(236 \times 48) + 25 = 11\,353$, βρῆτε, χωρὶς νὰ ἐκτελέσετε πράξεις, τὰ πηλίκα τῶν δυὸ διαιρέσεων

$$11\,353 : 48 \text{ καὶ } 11\,353 : 236.$$

*3.* Ἕνα φύλλο τετραδίου σας ἔχει διαστάσεις: μῆκος 24 πόντους, (ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου) καὶ πλάτος 16 πόντους. Τὸ διπλώνετε σὲ δυὸ κατὰ τὴν πλευρὰ τοῦ μήκους του, δυὸ φορὲς συνεχῶς· ἔπειτα τὸ διπλώνετε πάλι σὲ δυό, κατὰ τὴν πλευρὰ τοῦ ἀρχικοῦ του πλάτους, μία φορά. Τί διαστάσεις ἔχει ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ὀκτὼ δίπλες, ποὺ σχηματίσατε, καὶ μὲ ποιὲς πράξεις προκύπτουν οἱ διαστάσεις αὐτὲς ἀπὸ τὶς ἀρχικὲς διαστάσεις τοῦ φύλλου;

*4.* Ἕνας τεχνίτης ἐργάστηκε μὲ τὸ ἴδιο ἡμερομίσθιο 3 βδομάδες, δηλαδὴ $3 \times 6 = 18$ μέρες, καὶ εἰσέπραξε 2 250 δραχμές. Ποιὸ ἦταν τὸ ἡμερομίσθιό του; Βρῆτε καὶ πόσες δραχμὲς ἔπαιρνε κάθε βδομάδα (δηλαδὴ κάθε 6 ἡμέρες), ἀλλὰ χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσετε πόσο ἦταν τὸ ἡμερομίσθιό του.

*5.* Κάνοντας τὶς πράξεις δεῖξτε τὸ ἑξῆς: ἂν πολλαπλασιάσωμε καὶ τὸν διαιρετέο καὶ τὸν διαιρέτη τῆς διαιρέσεως $5\,964 : 37$ μὲ 14, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάζει, τὸ ὑπόλοιπο ὅμως πολλαπλασιάζεται καὶ αὐτὸ μὲ 14.

*6.* Ἐπαληθεῦστε (δηλαδὴ δεῖξτε κάνοντας τὶς πράξεις) τὸ ἑξῆς: ἡ διαίρεση τοῦ γινομένου $45 \times 34 \times 73$ διὰ 73 εἶναι τέλεια καὶ ἔχει πηλίκον τὸ γινόμενο $45 \times 34$.

*7.* Πάρτε τὸ ἄθροισμα $5\,070 + 845 + 169 = 6\,084$ καὶ ἐπαληθεῦστε ὅτι καὶ οἱ τρεῖς προσθετέοι του εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 13. Ὕστερα ἐπαληθεῦστε ὅτι ἡ διαίρεση $6\,084 : 13$ εἶναι τέλεια καὶ ὅτι τὸ πηλίκον της ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων τῶν τριῶν τέλειων διαιρέσεων

$$5\,070 : 13, \quad 845 : 13, \quad 169 : 13.$$

*8.* Θεωρῆστε τὴ διαφορὰ $75\,045 - 4\,680 = 70\,365$ καὶ ἐπαληθεῦστε ὅτι καὶ οἱ δυὸ ὅροι της (δηλαδὴ καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος της) εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 15. Ὕστερα ἐπαληθεῦστε ὅτι ἡ διαίρεση $70\,365 : 15$ εἶναι τέλεια καὶ ὅτι τὸ πηλίκον της ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορὰ τῶν πηλίκων τῶν δυὸ τέλειων διαιρέσεων:

$$75\,045 : 15 \text{ καὶ } 4\,680 : 15.$$

## Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

**34. Εἰσαγωγὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.** Ἔχομε ἕνα χρηματικὸ ποσὸ ἀπὸ 7 ἑκατοστάρικα (ἑκατοντάδραχμα), 4 δεκάρικα (δεκάδραχμα) καὶ 6 δραχμές. Ἂς τὸ μετρήσωμε μὲ μονάδα τὴ δραχμή· τὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι, ὅπως ξέρομε, ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς ποὺ γράφεται μὲ ψηφία ἔτσι: 746 δραχμές.

Ἂς ὑποθέσωμε τώρα πὼς τὸ ποσό μας ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ παραπάνω χρήματα καὶ ἀπὸ 5 δεκάρες ἀκόμα καὶ ὅτι, γιὰ νὰ τὸ μετρήσωμε, παίρνομε πάλι μονάδα τὴ δραχμή· τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεώς μας δὲν μπορεῖ πιὰ νὰ εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, γιατὶ ἡ δεκάρα εἶναι μέρος τῆς δραχμῆς (εἶναι ἕνα δέκατο τῆς δραχμῆς) καὶ ἑπομένως ἡ δραχμὴ δὲν περιέχεται στὴ δεκάρα. Ἡ μέτρησή μας θὰ ἔχῃ λοιπὸν ὡς ἀποτέλεσμα ἕναν *ὄχι ἀκέραιο ἀριθμό,* γιὰ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ βροῦμε μιὰν κατάλληλη γραφή.

Αὐτὸ δὲν εἶναι δύσκολο, ἂν θυμηθοῦμε ἐκεῖνο ποὺ εἴπαμε στὴν παράγραφο 4: ἕνα ψηφίο γραμμένο *στ᾿ ἀριστερὰ* ἑνὸς ἄλλου παριστάνει μονάδες *10 φορὲς μεγαλύτερες.* Ἑπομένως ἕνα ψηφίο γραμμένο *στὰ δεξιὰ* ἑνὸς ἄλλου σημαίνει μονάδες *10 φορὲς μικρότερες.* Θὰ γράψωμε λοιπὸν τὸν παραπάνω ὄχι ἀκέραιο ἀριθμό, ποὺ μετρᾶ τὸ δεύτερο χρηματικὸ ποσό μας, ἔτσι:

746,5 δραχμές,

δηλώνοντας μὲ τὸ *κόμμα* ὅτι ἡ πρώτη θέση ἀριστερὰ ἀπ᾿ αὐτὸ σημαίνει δραχμὲς καί, ἑπομένως, ἡ πρώτη θέση δεξιὰ ἀπ᾿ αὐτό, δέκατα μιᾶς δραχμῆς, δηλαδὴ δεκάρες.

Τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσό, ἂν μετρηθῇ μὲ μονάδα τὸ δεκάρικο, θὰ παρασταθῇ μὲ τὸν ἀριθμὸ

74,65 δεκάρικα,

γιατὶ μονάδα εἶναι τώρα τὸ δεκάρικο καὶ ἡ δραχμὴ εἶναι ἕνα δέκατο αὐτῆς τῆς μονάδας· ἑπομένως, τὸ ψηφίο 4, ποὺ σημαίνει δεκάρικα (δηλαδὴ μονάδες), πρέπει νὰ γραφῇ σὲ πρώτη θέση ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ κόμμα, καὶ τὸ 6, ποὺ σημαίνει δραχμὲς (δηλαδὴ δέκατα τῆς μονάδας), σὲ πρώτη θέση δεξιὰ ἀπὸ τὸ κόμμα. Τὸ ψηφίο 5, ποὺ σημαίνει δεκάρες, θὰ γραφῇ φυσικὰ δεξιὰ ἀπὸ τὸ 6, καὶ τὸ 7, ποὺ σημαίνει ἑκατοστάρικα (δηλαδὴ δεκάδες ἀπὸ δεκάρικα), ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ 4.

Ἂς πάρωμε τέλος μονάδα τὸ ἑκατοστάρικο, γιὰ νὰ μετρήσωμε τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσό· ὁ ἀριθμός, ποὺ θὰ προκύψη, θὰ γραφῇ ἔτσι:

7,465 ἑκατοστάρικα,

γιατὶ τὰ 7 ἑκατοστάρικα ἀντιπροσωπεύουν τώρα μονάδες καὶ τὰ 4 δεκάρικα, δέκατα τῆς μονάδας (10 δεκάρικα κάνουν ἕνα ἑκατοστάρικο, δηλαδὴ μία τωρινὴ μονάδα).

**35. Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.** Ἀριθμοὶ σὰν τοὺς τρεῖς παραπάνω λέγονται *δεκαδικοὶ ἀριθμοί.* Μὲ αὐτοὺς μποροῦμε νὰ παραστήσωμε τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς ὁποιασδήποτε μετρήσεως. Π.χ. ἂν ἔχωμε νὰ μετρήσωμε τὸ μῆκος (μάκρος) ἑνὸς σχοινιοῦ παίρνοντας τὸ *μέτρο* γιὰ μονάδα, θὰ ἐξετάσωμε πρῶτα πόσες φορὲς τὸ μέτρο περιέχεται σὲ αὐτὸ τὸ μῆκος. Ἔστω ὅτι περιέχεται 7 φορὲς καὶ ὅτι περισσεύει ἕνα κομμάτι σχοινὶ κοντύτερο ἀπὸ 1 μέτρο. Θὰ ἐξετάσωμε τότε πόσοι ***πόντοι (ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου)*** περιέχονται σ' αὐτὸ τὸ κομμάτι. Ἂς ποῦμε ὅτι βρήκαμε 46 πόντους καὶ μισό. Γιὰ νὰ γράψωμε τώρα μὲ ψηφία τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς μετρήσεως σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

100 πόντοι κάνουν ἕνα μέτρο, ἄρα 10 πόντοι εἶναι 1 *δεκατόμετρο*, δηλαδὴ ἕνα δέκατο τοῦ μέτρου, καὶ 1 πόντος εἶναι ἕνα δέκατο τοῦ δεκατομέτρου. Ἑπομένως 46 πόντοι κάνουν 4 δεκατόμετρα καὶ 6 δέκατα τοῦ δεκατομέτρου. Ὁ μισὸς πόντος πάλιν εἶναι 5 δέκατα τοῦ πόντου, γιατὶ 10 δέκατα τοῦ πόντου κάνουν ἕνα ὁλόκληρο πόντο. Ὥστε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς παραπάνω μετρήσεώς μας θὰ γραφῇ ἔτσι: 7,465 μέτρα.

Ὅμοια, ἂς γράψωμε μὲ ψηφία τὸν ἀριθμὸ ποὺ θὰ βροῦμε μετρώντας, μὲ μονάδα τὸ *κιλὸ* (*χιλιόγραμμο*), τὸ ἀκόλουθο βάρος: 7 κιλὰ καὶ 465 γραμμάρια.

Θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς: 465 γραμμάρια ἀποτελοῦνται ἀπὸ 4 ἑκατοντάδες γραμμάρια 6 δεκάδες γραμμάρια 5 γραμμάρια.

Ἐπειδὴ τὸ κιλὸ ἔχει $1\,000 = 10 \times 100$ γραμμάρια, μία ἑκατοντάδα γραμμάρια εἶναι ἕνα δέκατο τοῦ κιλοῦ. Μία δεκάδα γραμμάρια εἶναι ἕνα δέκατο τῆς μιᾶς ἑκατοντάδας γραμμάρια, ἄρα ἕνα ἑκατοστὸ τοῦ κιλοῦ. Τέλος ἕνα γραμμάριο, ποὺ εἶναι ἕνα χιλιοστὸ τοῦ κιλοῦ, εἶναι φυσικὰ ἕνα δέκατο τῆς μιᾶς δεκάδας γραμμάρια. Ὥστε τὸ παραπάνω βάρος, 7 κιλὰ καὶ 465 γραμμάρια, θὰ παρασταθῆ μὲ τὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 7,465 κιλά.

**36. Συγκεκριμένοι καὶ ἀφηρημένοι ἀριθμοί.** Ὅπως παρατηροῦμε, οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί, ποὺ γράψαμε ὡς τώρα, ἀκολουθοῦνται ἀπὸ ἕνα ὄνομα: δραχμές, δεκάρικα, ἑκατοστάρικα, μέτρα, κιλά. Γι' αὐτὸ λέγονται *συγκεκριμένοι* δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ (παράβαλε καὶ § 16). Ὅποια ὅμως καὶ νὰ εἶναι ἡ ὀνομασία τους, οἱ ἀριθμητικές τους ἰδιότητες, ποὺ θὰ ἀναφέρωμε παρακάτω, εἶναι πάντα οἱ ἴδιες. Μποροῦμε λοιπὸν γιὰ συντομία νὰ παραλείψωμε τὴν ὀνομασία αὐτὴν καὶ ν' ἀσχοληθοῦμε μὲ τοὺς ἀντίστοιχους *ἀφηρημένους* δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

**37. Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.** Ἕνας δεκαδικὸς ἀριθμὸς (π.χ. ὁ 746,5) ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ κομμάτια, ποὺ τὰ χωρίζει ἕνα *κόμμα* (τὸ κόμμα αὐτὸ λέγεται καὶ *ὑποδιαστολή*). Τὸ κομμάτι ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ κόμμα λέγεται *ἀκέραιο μέρος* τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, γιατὶ τὰ ψηφία του, μὲ τὴ σειρὰ ἀπὸ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερά, παριστάνουν ἀντιστοίχως μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες κτλ.· ἑπομένως ὁλόκληρο τὸ κομμάτι παριστάνει ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό: τὸν μεγαλύτερο ἀκέραιο ποὺ χωρεῖ στὸ δεκαδικὸ ἀριθμό. Π.χ. ὁ πιὸ μεγάλος ἀκέραιος ποὺ χωρεῖ στὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 746,5 δραχμὲς εἶναι, ὅπως εἴδαμε, ὁ ἀριθμὸς 746 δραχμές· ὁ ἑπόμενος ἀκέραιος, 747 δραχμές, εἶναι ἤδη μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ δεκαδικὸ 746,5 δρχ. Ὅμοια ὁ ἀριθμὸς 1 δραχμὴ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 0,45 δρχ. ποὺ παριστάνει 4 δεκάρες καὶ 5 δέκατα τῆς δεκάρας (δηλ. 4 δεκάρες καὶ 1 πεντάρα).

Τὸ κομμάτι δεξιὰ ἀπὸ τὸ κόμμα λέγεται *δεκαδικὸ μέρος* τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Τὰ ψηφία του λέγονται *δεκαδικὰ ψηφία* καὶ παριστάνουν, μὲ τὴ σειρὰ ἀπὸ τ' ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, τὶς ἀκόλουθες *δεκαδικὲς κλασματικὲς μονάδες*.

Τὸ πρῶτο, δέκατα μιᾶς μονάδας.

Τὸ δεύτερο, δέκατα ἑνὸς δεκάτου, ἄρα ἑκατοστὰ μιᾶς μονάδας.

Τὸ τρίτο, δέκατα ἑνὸς ἑκατοστοῦ, ἄρα χιλιοστὰ μιᾶς μονάδας· κ.ο.κ.

Ἔτσι ἔχομε τὸν ἀκόλουθο πίνακα γιὰ τὴ σχετικὴ ἀξία τῶν ψηφίων ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἀντίστοιχα μὲ τὴ θέση ποὺ κατέχουν ὡς πρὸς τὸ κόμμα:

| ἀκέραιο μέρος | | | | | | κόμμα | δεκαδικὸ μέρος (δεκαδικὰ ψηφία) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 1ο ψηφίο | 2ο | 3ο | 4ο | 5ο | 6ο | |
| κτλ. | δεκάδες χιλιάδων | χιλιάδες | ἑκατοντάδες | δεκάδες | ← μονάδες | | → δέκατα | ἑκατοστὰ | χιλιοστὰ | δεκακισχιλιοστὰ | ἑκατοντακισχιλιοστὰ | ἑκατομμυριοστὰ | κτλ. |

**38. Συμπεράσματα.** 1ο. *Ἂν στὰ δεξιὰ ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γράψωμε ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά, ἡ ἀξία (τὸ μέγεθος) τοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἀλλάζει.*

Π.χ. 53,12 = 53,120. Καὶ ἀλήθεια, ὁ ἀριθμὸς 53,12 σημαίνει

5 δεκάδες, 3 μονάδες, 1 δέκατο, 2 ἑκατοστά,

ἄρα εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸ 53,120 ποὺ σημαίνει

5 δεκάδες, 3 μονάδες, 1 δέκατο, 2 ἑκατοστά, 0 χιλιοστά.

2ο. Σύμφωνα μὲ τὸ παραπάνω συμπέρασμα βλέπομε ὅτι *μποροῦμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ νὰ τὸν γράψωμε καὶ μὲ μορφὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Ἀρκεῖ γι' αὐτὸ νὰ γράψωμε στὰ δεξιά του ἕνα κόμμα καὶ δεξιὰ ἀπὸ τὸ κόμμα ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά.*

Π.χ. 65 = 65,0 = 65,00 = 65,000 κτλ.

3ο. *Ἂν σ' ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ μεταθέσωμε τὸ κόμμα μία, δύο, τρεῖς κτλ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἀντιστοίχως 10, 100, 1 000 κτλ. φορὲς μεγαλύτερος· ἂν τὸ μεταθέσωμε μία, δύο, τρεῖς κτλ. θέσεις πρὸς τ' ἀριστερά, ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἀντιστοίχως 10, 100, 1 000 κτλ. φορὲς μικρότερος.*

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 4,85 εἶναι 10 φορὲς μικρότερος ἀπὸ τὸν 48,5· γιατί, μεταθέτοντας τὸ κόμμα μία θέση πρὸς τὰ δεξιά, κάμαμε τὶς 4 μονάδες τοῦ πρώτου, 4 δεκάδες στὸν δεύτερο, τὰ 8 δέκατα τοῦ πρώτου, 8 μονάδες στὸν δεύτερο καὶ τὰ 5 ἑκατοστὰ τοῦ πρώτου, 5 δέκατα στὸν δεύτερο.

4ο. *Ὅταν τὸ ἀκέραιο μέρος ἑνὸς δεκαδικοῦ εἶναι μηδενικό, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὴ μονάδα· καὶ ἀντίστροφα: ὅταν ἕνας δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἶναι $< 1$, τὸ ἀκέραιο μέρος του εἶναι μηδενικό.*

Π.χ. 0,45 δραχμὲς $<$ 1 δραχμή.

**39. Ἐκφώνηση ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γραμμένου μὲ ψηφία.** Διαβάζομε χωριστὰ πρῶτα τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ λέμε τὴ λέξη «ἀκέραιος» (ἢ τὴ λέξη «κόμμα»), ἔπειτα διαβάζομε τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ σὰν νὰ ἦταν καὶ αὐτὸ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ λέμε τὸ ὄνομα τῆς δεκαδικῆς κλασματικῆς μονάδας τὴν ὁποία ἀντιπροσωπεύει τὸ τελευταῖο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίο τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 38,093 διαβάζεται τριάντα ὀκτὼ ἀκέραιος (ἢ κόμμα) ἐνενήντα τρία χιλιοστά.

Ὁ 1 500,719 2 διαβάζεται χίλια πεντακόσια ἀκέραιος (ἢ κόμμα) ἑπτὰ χιλιάδες ἑκατὸν ἐνενήντα δύο δεκακισχιλιοστά· καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,005 630 διαβάζεται μηδὲν ἀκέραιος (ἢ κόμμα) πέντε χιλιάδες ἑξακόσια τριάντα ἑκατομμυριοστά.

Κάποτε, γιὰ νὰ συντομεύσωμε καὶ ἁπλουστεύσωμε τὴν ἐκφώνηση, διαβάζομε τοὺς τρεῖς παραπάνω ἀριθμοὺς ἔτσι:
τὸν 38,093 τριάντα ὀκτὼ κόμμα μηδὲν ἐννιὰ τρία·
τὸν 1 500,719 2 χίλια πεντακόσια κόμμα ἑπτὰ ἕνα ἐννιὰ δύο·
καὶ τὸν 0,005 630 μηδὲν κόμμα μηδὲν μηδὲν πέντε ἔξι τρία μηδέν.

*Ἀσκήσεις. 1.* Γράψτε μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἀποτελοῦνται ἀντιστοίχως ἀπό:

2 δεκάδες 5 μονάδες 6 δέκατα 8 χιλιοστά·
0 μονάδες 6 ἑκατοστὰ 3 δεκακισχιλιοστά·
4 ἑκατοντάδες 2 μονάδες 7 δέκατα 9 χιλιοστά·
6 χιλιάδες 9 δεκάδες 1 ἑκατοστὸ 5 χιλιοστά.

*2.* Γράψτε μὲ ψηφία τοὺς παρακάτω 6 δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς (ποὺ μᾶς δίνουν τὶς 6 πρῶτες δεκαδικὲς κλασματικὲς μονάδες):

| | | |
|---|---|---|
| 1 δέκατο | 1 χιλιοστὸ | 1 ἑκατοντακισχιλιοστὸ |
| 1 ἑκατοστὸ | 1 δεκακισχιλιοστὸ | 1 ἑκατομμυριοστό. |

*3.* Ἐκφωνῆστε τοὺς παρακάτω ἕνδεκα δεκαδικοὺς ἀριθμούς:

72,6 | 51,42 | 6,035 | 70,043 | 0,079 | 40,003
9,370 | 10,231 6 | 500,610 4 | 4,000 07 | 8,100 128.

*4.* Γράψτε μὲ ψηφία τοὺς ἑξῆς δεκαδικοὺς ἀριθμούς:
ἔξι ἀκέραιος δεκαπέντε χιλιοστὰ | μηδὲν ἀκέραιος πέντε ἑκατοστὰ | εἴκοσι ἀκέραιος τριάντα δύο δεκακισχιλιοστὰ | τρία ἀκέραιος ἑξήντα ἑπτὰ χιλιοστὰ | σαράντα τέσσερα ἀκέραιος ἑπτὰ χιλιοστὰ | ἑκατὸ ἀκέραιος πενήντα χιλιοστὰ | ἑπτὰ κόμμα ἑκατὸ τριάντα δύο δεκακισχιλιοστὰ | μηδὲν ἀκέραιος ἑβδομήντα χιλιοστὰ | μηδὲν κόμμα ἑξήντα τέσσερα ἑκατομμυριοστὰ | ἔξι κόμμα ἑπτακόσια δύο ἑκατομμυριοστὰ | ὀγδόντα δύο κόμμα ἑκατὸν πέντε ἑκατομμυριοστὰ | δύο κόμμα χίλια τρία ἑκατομμυριοστὰ | μηδὲν κόμμα διακόσια τρία ἑκατοντακισχιλιοστὰ | δέκα κόμμα τρεῖς χιλιάδες ἔξι ἑκατοντακισχιλιοστά.

## Πράξεις μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

**40. Πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση.** 1ο. Ἔχομε νὰ κάμωμε τὴν πρόσθεση

$$52{,}735 + 620{,}8 + 9{,}37.$$

Πρὶν ἀπ' ὅλα γράφομε τοὺς παραπάνω προσθετέους ἔτσι:

$$52{,}735 + 620{,}800 + 9{,}370\cdot$$

μὲ ἄλλα λόγια, στὰ δεξιὰ τῶν δεκαδικῶν μερῶν μὲ τὰ λιγότερα ψηφία γράψαμε ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται γιὰ νὰ *ἰσοψηφίσωμε* τὰ μέρη αὐτὰ μὲ τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ προσθετέου ποὺ ἔχει τὰ περισσότερα ψηφία. Ὅπως ξέρομε, αὐτὸ δὲν ἀλλάζει τὴν ἀξία τῶν προσθετέων (βλ. § 38, 1ο). Ὕστερα ἀπὸ τὸν *ἰσοψηφισμὸ* αὐτὸν γράφομε τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο ἔτσι, ὥστε τὰ ψηφία ποὺ παριστάνουν μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως νὰ βρίσκωνται σὲ μιὰν καὶ τὴν ἴδια στήλη (ἑπομένως καὶ τὰ κόμματα θὰ βρίσκωνται τὸ ἕνα κάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο). Κάνομε τὴν πρόσθεση ὅπως καὶ στοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς καί, τέλος, βάζομε στὸ ἀποτέλεσμα ἕνα κόμμα δεξιὰ ἀπὸ τὴ στήλη τῶν ἁπλῶν μονάδων (μὲ ἄλλα λόγια, κάτω ἀπὸ τὰ κόμματα τῶν προσθετέων).

$$\begin{array}{r} 52{,}735 \\ 620{,}800 \\ +\quad 9{,}370 \\ \hline 682{,}905 \end{array}$$

Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως γίνεται, ὅπως καὶ στοὺς ἀκέραιους, *ἀλλάζοντας τὴ σειρὰ τῶν προσθετέων*.

2ο. Ἂς ἐκτελέσωμε τὴν ἀφαίρεση:

$$435{,}27 - 62{,}504\,5.$$

Ἰσοψηφίζομε πρῶτα τὸν μειωτέο μὲ τὸν ἀφαιρετέο, γράφοντας στὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου δυὸ μηδενικά. Ὕστερα γράφομε τὸν ἀφαιρετέο κάτω ἀπὸ τὸν μειωτέο ἔτσι ποὺ τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς ἰδίας τάξεως, ἄρα καὶ τὰ δυὸ κόμματα, νὰ βρίσκωνται σὲ μιὰν καὶ τὴν ἴδια στήλη.

$$\begin{array}{r} 435{,}270\,0 \\ -\ 62{,}504\,5 \\ \hline 372{,}765\,5 \end{array}$$

Ἐκτελοῦμε τὴν ἀφαίρεση ὅπως καὶ στοὺς ἀκέραιους ἀριθμούς, καὶ χωρίζομε μ' ἕνα κόμμα, στὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου ποὺ βρήκαμε, τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ἰσοψηφισμένα δεκαδικὰ μέρη τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου (μὲ ἄλλα λόγια, βάζομε στὸ ὑπόλοιπο ἕνα κόμμα κάτω ἀπὸ τὰ κόμματα τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου).

Ἡ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται ὅπως καὶ στοὺς ἀκέραιους, *προσθέτοντας στὸν ἀφαιρετέο τὸ ὑπόλοιπο*· πρέπει νὰ ξαναβροῦμε τὸν μειωτέο.

*Παρατήρηση.* Ὅταν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ προσθέτομε ἢ ἀφαιροῦμε κάποιος εἶναι *συγκεκριμένος*, τότε θὰ πρέπει καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι νὰ εἶναι *συγκεκριμένοι καὶ μὲ τὴν ἴδια ὀνομασία*, γιὰ νὰ ἔχῃ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ὑπολογισμοῦ μας πρακτικὴ σημασία.

Ἔτσι π.χ. δραχμὲς θὰ προστεθοῦν μὲ δραχμὲς καὶ ὄχι μὲ μέτρα, κιλὰ θὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ κιλὰ καὶ ὄχι ἀπὸ δραχμές.

*Ἀσκήσεις.* *1.* Ἐκτελέστε τὶς δυὸ προσθέσεις:

$$672 + 5{,}27 + 0{,}347 + 23{,}1$$
$$35{,}234 + 0{,}2 + 512{,}63 + 90{,}413\,5.$$

Νὰ κάμετε καὶ ἕναν ἔλεγχο τοῦ ἐξαγομένου σας.

*2.* Ἐκτελέστε τὶς τρεῖς ἀφαιρέσεις καὶ τὴ δοκιμή τους:

$$75{,}36 - 5{,}496 \mid 162{,}003 - 5{,}25 \mid 720{,}08 - 125{,}196.$$

*3.* Ἕνας περιπτεριοῦχος εἰσέπραξε σὲ μίαν ὥρα τὰ ἀκόλουθα ἔξι ποσά: 11 δραχμές, 6 δεκάρες, 3 δραχμὲς καὶ 70 λεπτά, 8 δραχμὲς καὶ 65 λεπτά, 7 πεντάρες, 5 δραχμὲς καὶ 30 λεπτά.

Ἐκφράστε μ' ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ τὴ συνολική του εἴσπραξη παίρνοντας γιὰ μονάδα τὴ δραχμή.

*4.* Ἕνας παντοπώλης πούλησε ζάχαρη καὶ εἰσέπραξε 159,55 δραχμὲς πραγματοποιώντας ἕνα κέρδος 16,70 δραχμές. Πόσο τοῦ κόστιζε ἡ ζάχαρη ποὺ πούλησε;

*5.* Μιὰ σιδερένια ράβδος ἔχει μῆκος 3,45 μέτρα καὶ θέλω νὰ κοντύνῃ στὰ 2,87 μέτρα. Τί μῆκος πρέπει νὰ τῆς ἀφαιρέσω;

**41. Πολλαπλασιασμός. 1ο. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10, 100, 1 000 κτλ.** Ἂς ἐκτελέσωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ

$$437{,}603 \times 100.$$

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὴν παράγραφο 38, 2ο, τὸ γινόμενο εἶναι 43 760,3. Ὅμοια ἔχομε:

$$437,603 \times 1\,000 = 437,603\,0 \times 1\,000 = 437603,0 = 437\,603.$$

Ὥστε: *Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ ἐπὶ 10, 100, 1 000 κτλ. μεταθέτομε τὸ κόμμα πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ μία, δύο, τρεῖς κτλ. θέσεις, δηλαδὴ κατὰ τόσες θέσεις ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦν τὸ 1 στὸν παράγοντα ἐπὶ τὸν ὁποῖο πολλαπλασιάζομε.*

Ἂν τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 10, 100, 1 000 κτλ. δὲν ἔχῃ περισσότερα ψηφία ἀπὸ τὰ μηδενικὰ τοῦ παράγοντος τούτου, τότε γράφομε προηγουμένως στὰ δεξιὰ τοῦ μέρους αὐτοῦ ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται, γιὰ νὰ κάμωμε τὴ μετάθεση τοῦ κόμματος. Π.χ.

$$0,31 \times 1\,000 = 0,310\,0 \times 1\,000 = 310,0 = 310.$$

2ο. **Πολλαπλασιασμὸς δύο ὁποιωνδήποτε δεκαδικῶν ἀριθμῶν.** Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς

$$45,371 \times 60,28$$

$$\begin{array}{r} 45,371 \\ \times\ 60,28 \\ \hline 362968 \\ 90742\phantom{0} \\ 272226\phantom{000} \\ \hline 2734,96388 \end{array}$$

*Ἐκτελοῦμε πρῶτα τὸν πολλαπλασιασμὸ χωρὶς νὰ λάβωμε ὑπόψη τὰ κόμματα τῶν παραγόντων· μὲ ἄλλα λόγια πολλαπλασιάζομε πρῶτα τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς ποὺ προκύπτουν ὅταν σβήσωμε τὰ κόμματα. Ὕστερα χωρίζομε μ' ἕνα κόμμα στὰ δεξιὰ τοῦ ἀποτελέσματος ποὺ βρήκαμε τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τῶν δυὸ παραγόντων μαζί.*

Ἂν τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ βρήκαμε ἔχῃ λιγότερα ψηφία ἀπὸ ὅσα δεκαδικὰ ψηφία πρέπει νὰ χωρίσωμε στὰ δεξιά του, τότε γράφομε προηγουμένως στ' ἀριστερά του τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία ποὺ λείπουν καὶ ἕνα, ἐπὶ πλέον.

$$\begin{array}{r} 0,0035 \\ \times\ \ 0,27 \\ \hline 245 \\ 70\phantom{0} \\ \hline 0,000945 \end{array}$$

Ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται πρῶτα ἐπάνω στοὺς παράγοντες χωρὶς τὰ κόμματά τους, ὅπως στοὺς ἀκέραιους (βλ. § 25)· ὕστερα ἐλέγχομε ἂν βάλαμε τὸ κόμμα στὴ σωστὴ θέση, σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω κανόνα.

*Ἀσκήσεις. 1.* Ἐκτελέστε τοὺς τρεῖς παρακάτω πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὸν ἔλεγχό τους μὲ τοὺς δυὸ τρόπους ποὺ ξέρετε:

$143{,}236 \times 8{,}06 \mid 67{,}035 \times 0{,}057\,1 \mid 1{,}38 \times 0{,}000\,87.$

*2.* Ἕνας ἀγόρασε 3,25 μέτρα μάλλινο ὕφασμα πρὸς 94,50 δραχμὲς τὸ μέτρο. Τί πλήρωσε;

**42. Διαίρεση.** 1ο. **Διαίρεση διὰ 10, 100, 1000 κτλ.** Ὅπως εἴδαμε στὴν προηγούμενη παράγραφο (§ 41, 1ο), γιὰ νὰ κάμωμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ δέκα φορὲς μεγαλύτερο (μὲ ἄλλα λόγια, γιὰ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 10), ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμε τὸ κόμμα του πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ μία θέση. Ἄρα γιὰ νὰ τὸν κάμωμε 10 φορὲς μικρότερο, μὲ ἄλλα λόγια, γιὰ νὰ τὸν διαιρέσωμε διὰ 10, ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμε τὸ κόμμα του *πρὸς τ' ἀριστερὰ κατὰ μία θέση*. Ἔτσι στὴ διαίρεση 54,23 : 10 βρίσκομε πηλίκον τὸ 5,423, ποὺ εἶναι καὶ ἀκριβές, γιατὶ

$$\text{διαιρέτης} \times \text{πηλίκον} = 10 \times 5{,}423 = 54{,}23 = \text{διαιρετέος}.$$

Ἔχομε *λοιπόν*:

$$54{,}23 : 10 = 5{,}423 = \text{ἀκριβὲς πηλίκον}.$$

Γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσωμε αὐτὸν τὸν κανόνα σὲ μιὰ διαίρεση σὰν τὴν

$$0{,}65 : 10,$$

γράφομε προηγουμένως στ' ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου 0,65 ἕνα μηδέν, πρᾶγμα ποὺ δὲν ἀλλάζει τὴν ἀξία του: 0,65 = 00,65. Μεταθέτοντας τώρα τὸ κόμμα πρὸς τ' ἀριστερὰ κατὰ μία θέση, βρίσκομε τὸν ἀριθμὸ 0,065· εἶναι κι αὐτὸς πηλίκον μιᾶς τελείας διαιρέσεως, ἐπειδὴ

$$\text{διαιρέτης} \times \text{πηλίκον} = 10 \times 0{,}065 = 0{,}65 = \text{διαιρετέος}.$$

Ἔχομε λοιπόν:

$$0{,}65 : 10 = 0{,}065 = \text{ἀκριβὲς πηλίκον}.$$

Ἂς πάρωμε τέλος τὴ διαίρεση 6 542 : 10 τῆς § 31. Εἴχαμε βρῆ τότε ἕνα προσεγγιστικὸ πηλίκον

$$6\,542 : 10 \simeq 654$$

γιατὶ χρησιμοποιούσαμε *μόνο ἀκέραιους ἀριθμούς*. Τώρα *μὲ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς* μποροῦμε νὰ ἐκτελέσωμε τὴ διαίρεση αὐτὴ *ἀκριβῶς*. Καὶ ἀλήθεια, μποροῦμε πρῶτα νὰ γράψωμε στὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου ἕνα κόμμα καὶ ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά· αὐτὸ δὲν ἀλλάζει τὴν ἀξία του (§ 38, 1ο):

$$6\,542 = 6\,542{,}0.$$

Ἐφαρμόζοντας ὕστερα τὸν παραπάνω κανόνα μεταθέτομε τὸ κόμμα πρὸς τ' ἀριστερὰ κατὰ μία θέση· ὁ ἀριθμὸς 654,20 = 654,2 ποὺ βρίσκομε εἶναι τὸ *ἀκριβὲς πηλίκον* τῆς διαιρέσεως 6 542:10, γιατὶ

$$\text{διαιρέτης} \times \text{πηλίκον} = 10 \times 654{,}20 = 6\,542{,}0 = 6\,542 = \text{διαιρετέος}.$$

Μὲ ὅμοιες σκέψεις βρίσκομε τὰ ἀκόλουθα ἀκριβῆ πηλίκα:

$$54{,}23 : 100 = 054{,}23 : 100 = 0{,}542\,3$$
$$0{,}65 : 100 = 000{,}65 : 100 = 0{,}006\,5$$
$$128 : 1\,000 = 0\,128 : 1\,000 = 0{,}128$$
$$72{,}3 : 1\,000 = 0\,072{,}3 : 1\,000 = 0{,}072\,3.$$

Ὥστε : *Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀκριβῶς ἕναν ἀριθμό, ἀκέραιο ἢ δεκαδικό, διὰ 10, 100, 1 000 κτλ. τὸν γράφομε πρῶτα μὲ μορφὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἂν εἶναι ἀκέραιος, ὕστερα μεταθέτομε τὸ κόμμα του πρὸς τ' ἀριστερὰ ἀντιστοίχως κατὰ μία, δύο, τρεῖς κτλ. θέσεις γράφοντας στ' ἀριστερὰ τοῦ ἀκέραιου μέρους τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται γιὰ νὰ κάμωμε αὐτὴ τὴ μετάθεση τοῦ κόμματος.*

2ο **Διαίρεση ἑνὸς δεκαδικοῦ ἢ ἀκέραιου ἀριθμοῦ διὰ ἀκεραίου.** Ἔστω ἡ διαίρεση 5,863 : 274. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτη, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴ μονάδα (τὸ 1). Γράφομε λοιπὸν πρῶτα στὸ πηλίκον μηδὲν (0) μ' ἕνα κόμμα στὰ δεξιά του. Ὕστερα γράφομε κάτω ἀπὸ τὸν διαιρετέο τὸ ἀκέραιό του μέρος μαζὶ μὲ τὸ *πρῶτο* δεκαδικὸ ψηφίο *δίχως χωριστικὸ κόμμα πλέον*, καὶ συνεχίζομε τὶς πράξεις μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε στὴ διαίρεση τῶν ἀκεραίων (βλ. § 28) καὶ ποὺ δείχνομε δίπλα. Τὸ πηλίκον 0,021 ποὺ βρίσκομε δὲν εἶναι ἀκριβὲς (εἶναι προσεγγιστικό), γιατὶ τὸ ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο (τὸ 109) δὲν εἶναι μηδέν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τελευταῖο ψηφίο (τὸ 1) τοῦ 0,021 παριστάνει χιλιοστά, γι' αὐτὸ καλοῦμε τὸ 0,021 *πηλίκον μὲ προσέγγιση χιλιοστοῦ*. Τὸ ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο 109 παριστάνει καὶ αὐτὸ χιλιοστὰ (ὅπως καὶ τὸ ψηφίο 3 τοῦ διαιρετέου, τὸ ὁποῖο κατεβάσαμε τελευταῖα). Ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ποὺ κάμαμε εἶναι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,109· αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ ἐπαληθεύσωμε καὶ μὲ τὴν ἀφαίρεση:

$$
\begin{array}{r|l}
5{,}86'3' & 274 \\ \cline{2-2}
58\phantom{'3'} & 0{,}021 \\
-0\phantom{'3'} & \\ \cline{1-1}
586\phantom{'} & \\
-548\phantom{'} & \\ \cline{1-1}
383 & \\
-274 & \\ \cline{1-1}
109 &
\end{array}
$$

διαιρετέος — (διαιρέτης × πηλίκον) = 5,863 — (274 × 0,021)
= 5,863 — 5,754 = 0,109.

*Παρατήρηση.* Ἀντὶ νὰ σταματήσωμε στὸ ψηφίο τῶν χιλιοστῶν (τὸ 3) τοῦ διαιρετέου θὰ μπορούσαμε νὰ γράψωμε στὰ δεξιά του (χωρὶς ν' ἀλλάξωμε τὴν ἀξία τοῦ διαιρετέου) ἕνα, δύο, τρία κτλ. μηδενικὰ καὶ νὰ συνεχίσωμε τὴ διαίρεση. Θὰ βρίσκαμε τότε ἀντιστοίχως πηλίκα μὲ προσέγγιση δεκακισχιλιοστοῦ, ἑκατοντακισχιλιοστοῦ, ἑκατομμυριοστοῦ κτλ. Π.χ. στὸ διπλανὸ παράδειγμα προχωρήσαμε ὡς τὰ ἑκατοντακισχιλιοστὰ καὶ βρήκαμε πηλίκον μὲ προσέγγιση ἑκατοντακισχιλιοστοῦ

$$
\begin{array}{r|l}
5{,}86'3'0'0' & 274 \\ \cline{2-2}
58\phantom{'3'0'0'} & 0{,}02139 \\
-0\phantom{'3'0'0'} & \\ \cline{1-1}
586\phantom{'0'0'} & \\
-548\phantom{'0'0'} & \\ \cline{1-1}
383\phantom{'0'} & \\
-274\phantom{'0'} & \\ \cline{1-1}
1090\phantom{'} & \\
-822\phantom{'} & \\ \cline{1-1}
2680 & \\
-2466 & \\ \cline{1-1}
214 &
\end{array}
$$

τὸ 0,02139 καὶ ὑπόλοιπο τὸ 0,00214.

Γιὰ ἔλεγχο ἔχομε πάλι τὴν ἰσότητα:

$$\text{διαιρετέος} = 5{,}863 = (274 \times 0{,}021\ 39) + 0{,}002\ 14$$
$$= (\text{διαιρέτης} \times \text{πηλίκον}) + \text{ὑπόλοιπο}.$$

Ἔστω ἡ διαίρεση 751,23 : 34. Τώρα ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν διαιρέτη, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 1. Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, διαιροῦμε πρῶτα τὸ ἀκέραιο μέρος 751 τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ 34 ὅπως ἐργαζόμαστε στὴ διαίρεση μὲ ἀκέραιους· βρίσκομε πηλίκον 22 καὶ ὑπόλοιπο 3. Δεξιὰ ἀπὸ τὸ 22 γράφομε στὸ πηλίκον ἕνα κόμμα· ὕστερα κατεβάζομε δεξιὰ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο 3 τὸ πρῶτο δεκαδικὸ ψηφίο 2 τοῦ διαιρετέου καὶ συνεχίζομε τὶς πράξεις ὅπως καὶ στὴ διαίρεση μὲ ἀκέραιους. Ἂν σταματήσωμε στὰ ἑκατοστά, βρίσκομε πηλίκον μὲ προσέγγιση ἑκατοστοῦ τὸ 22,09 καὶ ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο 0,17.

$$\begin{array}{r|l} 75'1',2'3' & 34 \\ \cline{2-2} -68 & 22{,}09 \\ \cline{1-1} 71 & \\ -68 & \\ \cline{1-1} 32 & \\ -0 & \\ \cline{1-1} 323 & \\ -306 & \\ \cline{1-1} 17 & \end{array}$$

Νά καὶ ἡ δοκιμή:

$$34 \times 22{,}09 + 0{,}17 = 751{,}06 + 0{,}17 = 751{,}23.$$

Ἔστω τέλος μιὰ διαίρεση ἀκεραίου δι' ἀκεραίου, π.χ. ἡ 1 : 125, καὶ ἂς ὑπολογίσωμε τὸ πηλίκον της ὡς τὰ χιλιοστά του. Θὰ γράψωμε τότε τὸ διαιρετέο ὡς δεκαδικὸ ἀριθμὸ μὲ τρία μηδενικὰ δεκαδικὰ ψηφία καὶ θὰ ἐφαρμόσωμε ὅσα εἴπαμε παραπάνω. Θὰ βροῦμε πηλίκον 0,008 καὶ ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο μηδέν. Τὸ πηλίκον αὐτὸ εἶναι λοιπὸν *ἀκριβές*.

$$\begin{array}{r|l} 1{,}00'0' & 125 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 0{,}008 \\ -0 & \\ \cline{1-1} 100 & \\ -0 & \\ \cline{1-1} 1000 & \\ -1000 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Νά καὶ ἡ δοκιμή του:

$$125 \times 0{,}008 = 1{,}000 = 1.$$

3ο. **Διαίρεση ἀκέραιου ἢ δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.** Ἔστω ἡ διαίρεση

$$23{,}7 : 54{,}920.$$

Πρὶν ἀπ᾽ ὅλα σβήνομε τὸ μηδὲν στὰ δεξιὰ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ διαιρέτη, πρᾶγμα ποὺ δὲν ἀλλάζει τὴν ἀξία του. Ὁ διαιρέτης 54,92 ἔχει τώρα δύο δεκαδικὰ ψηφία καί, ἂν πολλαπλασιαστῇ μὲ 100 θὰ γίνῃ ἀκέραιος. Πολλαπλασιάζομε λοιπὸν *καὶ διαιρετέο καὶ διαιρέτη μὲ 100· αὐτὸ δὲν ἀλλάζει πηλίκο,* μόνο *τὸ ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται μὲ 100* (βλέπε καὶ Ἄσκηση 5, ὕστερα ἀπὸ τὴν § 33).

Ἔτσι ἔχομε τώρα νὰ κάμωμε τὴ διαίρεση 2 370 : 5 492, ποὺ ἔχει ἀκέραιο διαιρέτη, καὶ μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσωμε τὰ προηγούμενα. Ἂν προχωρήσωμε ὡς τὰ χιλιοστά, θὰ βροῦμε γιὰ τὴ διαίρεση 2 370 : 5 492 πηλίκον μὲ προσέγγιση χιλιοστοῦ τὸ 0,431 καὶ ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο τὸ 2,948.

$$
\begin{array}{r|l}
2370{,}00'0' & 5\,492 \\ \cline{2-2}
23700 & 0{,}431 \\
-\,21968 & \\ \cline{1-1}
17220 & \\
-\,16476 & \\ \cline{1-1}
8440 & \\
-\,5492 & \\ \cline{1-1}
2948 &
\end{array}
$$

Ἑπομένως, γιὰ τὴν ἀρχικὴ διαίρεση 23,7 : 54,920 θὰ ἔχωμε πηλίκον τὸ ἴδιο 0,431, ὑπόλοιπο ὅμως 100 φορὲς μικρότερο, τὸ 0,029 48. Νά καὶ ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως αὐτῆς:

$$
\begin{aligned}
54{,}920 \times 0{,}431 + 0{,}029\,48 &= 23{,}670\,520 + 0{,}029\,48 \\
&= 23{,}700\,000 = 23{,}7.
\end{aligned}
$$

**43. Ἐφαρμογή.** Ἂς ἐφαρμόσωμε τὰ παραπάνω σὲ μιὰ διαίρεση μὲ διαιρέτη τὸ 0,1· π.χ. στὴ διαίρεση 8,72 : 0,1. Θὰ ἔχωμε πρῶτα νὰ πολλαπλασιάσωμε διαιρετέο καὶ διαιρέτη μὲ 10, γιὰ νὰ κάμωμε τὸ διαιρέτη ἀκέραιο. Ὕστερα θὰ ἔχωμε νὰ ἐκτελέσωμε τὴ διαίρεση 87,2 : 1. Αὐτὴ ὅμως ἔχει φανερὰ ἀκριβὲς πηλίκον τὸ 87,2.

Ὥστε

$$8{,}72 : 0{,}1 = 87{,}2 = 8{,}72 \times 10.$$

Ὅμοια βρίσκομε

$$8{,}72 : 0{,}01 = 8{,}72 \times 100 = 872$$

$$8{,}72 : 0{,}001 = 8{,}72 \times 1\,000 = 8\,720 \text{ κτλ.}$$

Ὥστε : *Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕναν ἀριθμὸ διὰ 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001 κτλ. ἀρκεῖ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμε ἀντιστοίχως ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1 000 κτλ.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Ἐκτελέστε τὶς ἕξι διαιρέσεις

1 025 : 4 | 352 : 23 | 76 : 89 | 42,6 : 19 | 6,47 : 306 | 91,8 : 415.

Ποιὰ εἶναι τὰ πηλίκα τους μὲ προσέγγιση ἑκατοστοῦ καὶ ποιὰ τὰ ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα; Νὰ κάμετε καὶ τὴ δοκιμή.

*2.* Ἐκτελέστε τὶς ἕξι διαιρέσεις

20 : 5,8 | 3 : 1,4 | 9 : 2,4 | 0,73 : 6,1 | 8,25 : 2,2 | 24,7 : 5,28.

Ποιὰ εἶναι τὰ πηλίκα τους μὲ προσέγγιση χιλιοστοῦ καὶ ποιὰ τὰ ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα; Νὰ κάμετε καὶ τὴ δοκιμή.

*3.* Ἐκτελέστε τὶς διαιρέσεις

1 : 2 | 3 : 2 | 1 : 4 | 3 : 4 | 1 : 5 | 2 : 5 | 1 : 8

ὑπολογίζοντας τὰ πηλίκα μὲ τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσα χρειάζονται κάθε φορὰ γιὰ νὰ εἶναι τὸ ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο 0.

*4.* Βρῆτε τὰ πηλίκα μὲ προσέγγιση χιλιοστοῦ τῶν ἀκόλουθων διαιρέσεων:

1 : 3 | 2 : 3 | 1 : 6.

*5.* Πόσες φορὲς μία δεκάρα χωρεῖ στὸ ποσὸ 169,40 δραχμές; Πόσες φορὲς ἕνα λεπτὸ χωρεῖ στὸ ποσὸ 25,35 δραχμές; Πόσες φορὲς ἕνα γραμμάριο χωρεῖ στὰ 23,450 κιλὰ (κιλὸ = χιλιόγραμμο = 1 000 γραμμάρια); Βρῆτε τὶς ἀπαντήσεις μὲ δυὸ τρόπους: τὴν πρώτη φορὰ χρησιμοποιώντας διαίρεση κατὰ τὴν παράγραφο 43 καὶ τὴ δεύτερη φορὰ χωρὶς αὐτὰ ποὺ εἰπώθηκαν σ' αὐτὴν τὴν παράγραφο ἀλλὰ μὲ ἁπλὲς σκέψεις πάνω στὶς δραχμές, στὶς δεκάρες καὶ στὰ λεπτά, καθὼς καὶ πάνω στὰ κιλὰ καὶ στὰ γραμμάρια.

*6.* 7,5 ὀκάδες ζάχαρη κόστισαν 117 δραχμές. Πόσο κόστισε ἡ μία ὀκά;

# ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

# ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

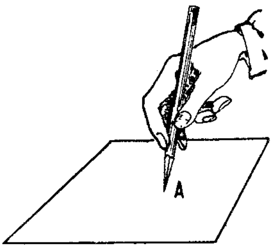
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΤΑ ΜΗΚΗ

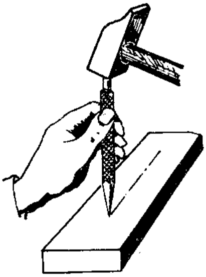
### Μάθημα 1.

**Ἡ εὐθεία γραμμὴ καὶ ἡ χάραξή της.**

**1. Ἕνα σημεῖο σημειώνεται** πάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ (σχ. 1-α) μὲ τὴ μύτη ἑνὸς καλὰ ξυμένου μολυβιοῦ ἢ πάνω σὲ μιὰ μετάλλινη ἐπιφάνεια μὲ μιὰ πόντα (σχ. 1-β).




**Σχ. 1-α. Ἀκουμπώντας τὴ μύτη τοῦ μολυβιοῦ σημειώνομε τὸ σημεῖο Α.**



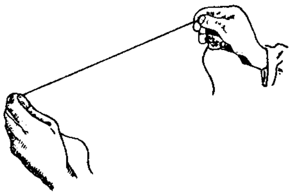
**Σχ. 1-β. Μ' ἕνα κτύπημα τῆς πόντας σημειώνομε ἕνα σημεῖο.**

**2. Ἂς μετακινήσωμε ἕνα σημεῖο** πάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτί. Θὰ γράφῃ μιὰ γραμμή.

Διακρίνομε τέσσερα εἴδη γραμμές:

1ο. Τὴν *εὐθεία γραμμὴ* ἤ, συντομώτερα, *εὐθεία*, ποὺ μοιάζει μὲ μιὰ καλὰ τεντωμένη κλωστὴ (σχ. 1-γ).

2ο. Τὴν *τεθλασμένη γραμμὴ* ποὺ δὲν εἶναι εὐθεία ἀλλὰ ἀπαρτίζεται ἀπὸ κομμάτια εὐθειῶν (σχ. 1-δ, ἡ γραμμὴ στὰ γράμματα Μ καὶ Ν).



**Σχ. 1-γ. Ἡ τεντωμένη κλωστὴ παριστάνει ἕνα κομμάτι εὐθείας.**

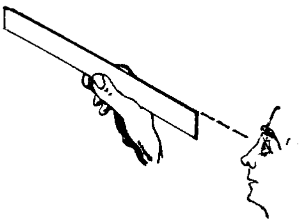
ΜΝΟΩΡ

**Σχ. 1-δ. Αὐτὰ τὰ γράμματα σχηματίζουν τεθλασμένες, καμπύλες ἢ μικτὲς γραμμές.**

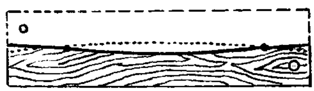
3ο. Τὴν *καμπύλη γραμμὴ* ποὺ οὔτε εὐθεία εἶναι οὔτε παρουσιάζει εὐθύγραμμα κομμάτια (σχ. 1-δ, ἡ γραμμὴ στὸ γράμμα Ο).

4ο. Τὴ *μικτὴ γραμμὴ* ποὺ παρουσιάζει καὶ εὐθύγραμμα καὶ καμπύλα κομμάτια (σχ. 1-δ, ἡ γραμμὴ στὰ γράμματα Ω καὶ Ρ).

**3. Γιὰ νὰ χαράξωμε μιὰν εὐθεία χρησιμοποιοῦμε ἕνα χάρακα (κανόνα).** Προτοῦ ὅμως τὸν χρησιμοποιήσωμε *πρέπει νὰ ἐλέγξωμε τὴν εὐθυγραμμία του.* Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνῃ πρόχειρα μὲ τὸ μάτι, ὅπως κάνει ὁ ξυλουργὸς (σχ. 1-ε), ὅταν πρόκειται γιὰ ἕνα μακρὺ χάρακα (μιὰ μεγάλη πήχη).



**Σχ. 1-ε. Ὁ ξυλουργὸς ἐλέγχει τὴν εὐθυγραμμία τοῦ χάρακα.**

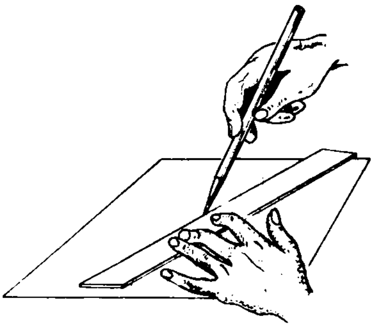


**Σχ. 1-ϛ. Ὁ σχεδιαστὴς ἐλέγχει τὴν εὐθυγραμμία τοῦ χάρακα.**

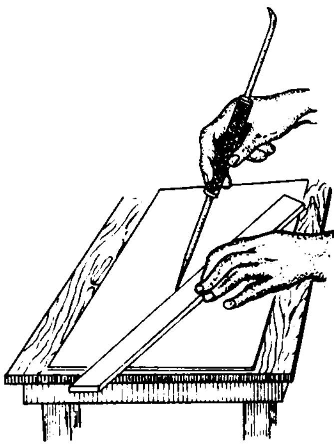
Ὅταν ὅμως πρόκειται γιὰ τὸ χάρακα τοῦ σχεδιαστῆ, τότε ὁ ἔλεγχος γίνεται μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο:

Ἀκολουθώντας μὲ τὴ μύτη τοῦ μολυβιοῦ μιὰν ἀκμὴ (κόψη) τοῦ χάρακα χαράζομε πάνω σὲ μιὰν ἴσια ἐπιφάνεια μιὰ γραμμή· πάνω στὴ γραμμή, κοντὰ στὰ ἄκρα της, σημειώνομε δυὸ σημεῖα. Ὕστερα, ἀφοῦ στρέψωμε τὸ χάρακα κατὰ μισὴ στροφή, τὸν τοποθετοῦμε ἔτσι, ποὺ ἡ ἴδια ἀκμή του νὰ περνᾶ ἀπὸ τὰ δυὸ σημεῖα ποὺ σημειώσαμε, καὶ χαράζομε, ἀκολουθώντας την, μιὰ δεύτερη γραμμή. Ἂν οἱ δυὸ γραμμὲς ποὺ χαράξαμε δὲν συμπίπτουν (σχ. 1-ς), τότε ἡ ἀκμὴ τοῦ χάρακα δὲν εἶναι εὐθύγραμμη καὶ ὁ χάρακας δὲν εἶναι σωστός.

Στὰ σχήματα 1-ζ καὶ 1-η βλέπομε πῶς ἕνας σχεδιαστὴς (σχ. 1-ζ) καὶ ἕνας ὑδραυλικὸς (σχ. 1-η) χαράζουν εὐθεῖες γραμμές.



**Σχ. 1-ζ. Μὲ τὴ μύτη τοῦ μολυβιοῦ ὁ σχεδιαστὴς ἀκολουθεῖ ἀκριβῶς τὴν κάτω ἀκμὴ τοῦ χάρακα.**

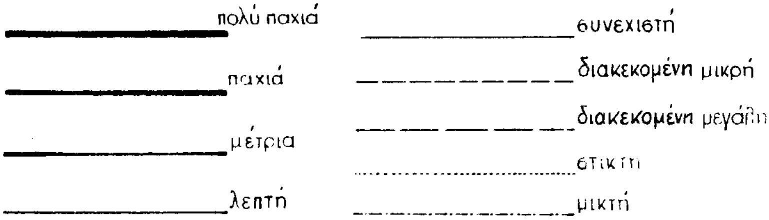


**Σχ. 1-η. Μὲ ἕνα χαράκτη (σημαδευτῆρι) ὁ ὑδραυλικὸς χαράζει εὐθεία πάνω σ' ἕνα φύλλο λαμαρίνας.**

*Ἀσκήσεις.* *1.* Πῶς μπορεῖτε νὰ χαράξετε μιὰν εὐθεία μὲ ἕνα σπάγγο ποὺ ἀλείψατε μὲ κιμωλία ἢ ἄλλο χρῶμα;

Ρωτῆστε γι' αὐτὸ ἕναν ξυλουργὸ ἢ ἕναν ἐφαρμοστὴ ἢ ἕναν ἄλλο τεχνίτη.

2. Στὴ σχεδίαση θὰ χρειασθῇ νὰ χαράξετε εὐθεῖες μὲ διάφορους τρόπους, σὰν αὐτοὺς ποὺ βλέπετε στὸ σχῆμα 1-θ.



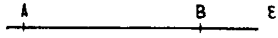

**Σχ. 1-θ. Συμβατικοὶ τρόποι χαράξεως γραμμῶν στὸ σχέδιο.**

Χαράξτε τέτοιες εὐθεῖες, ἀφοῦ πρῶτα ρωτήσετε τὸν καθηγητή σας τοῦ σχεδίου γιὰ τὸ πάχος ποὺ πρέπει νὰ τοὺς δώσετε καὶ τὸ εἶδος τῆς χαράξεως ποὺ θὰ πρέπῃ νὰ διαλέξετε.

# Μάθημα 2.

## Εὐθύγραμμα τμήματα καὶ ἡ μέτρησή τους.

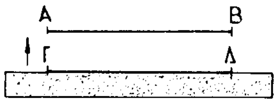
**1. Ἂς σημειώσωμε δυὸ σημεῖα Α καὶ Β ἐπάνω σὲ μιὰν εὐθεία ε:** Αὐτὰ τὰ δυὸ σημεῖα περιορίζουν ἕνα κομμάτι εὐθείας, ποὺ τὸ λέμε *εὐθύγραμμο τμῆμα* ἤ, συντομώτερα, *τμῆμα* (σχ. 2-α). Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος.



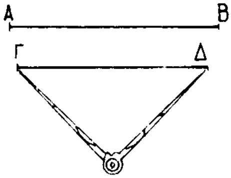

**Σχ. 2-α. Εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ.**

*Τμῆμα λοιπὸν εἶναι ἕνα κομμάτι εὐθείας, τὸ ὁποῖο περιορίζεται ἀπὸ δυὸ σημεῖα της.*

**2. Ἂς παραβάλωμε δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ.** Μὲ μιὰ *λουρίδα χαρτὶ* ἢ μὲ ἕνα *διαβήτη* παίρνομε τὸ τμῆμα ΓΔ καὶ τὸ μεταφέρομε ἐπάνω στὸ τμῆμα ΑΒ, σὲ τρόπο ποὺ τὸ σημεῖο Γ νὰ συμπέση μὲ τὸ Α, καὶ ἐξετάζομε ἂν τὸ σημεῖο Δ συμπίπτη μὲ τὸ Β.




**Σχ. 2-β. Τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα.**

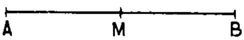



**Σχ. 2-γ. Τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν εἶναι ἴσα, εἶναι ἄνισα.**

Ἂν ναί, τότε τὰ δυὸ τμήματα εἶναι *ἴσα* (σχ. 2-β), ἂν ὄχι, τὰ τμήματα εἶναι *ἄνισα* (σχ. 2-γ).

*Δύο τμήματα εἶναι λοιπὸν ἴσα, ἂν μποροῦν νὰ τεθοῦν τὸ ἕνα ἐπάνω στὸ ἄλλο ὥστε νὰ συμπέσουν.*

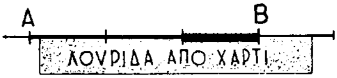
Τὸ σημεῖο Μ, ποὺ χωρίζει τὸ τμῆμα ΑΒ σὲ δυὸ ἴσα μέρη (σχ. 2-δ), λέγεται *μέσον* του καὶ τὰ δυὸ τμήματα ΑΜ καὶ ΜΒ εἶναι τὰ *δυὸ μισὰ* τοῦ ΑΒ.

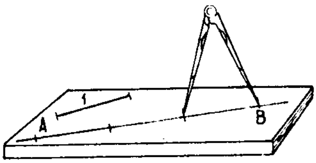



**Σχ. 2-δ. Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.**

**3. Ἂς μετρήσωμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ,** δηλαδὴ ἂς βροῦμε *πόσες φορὲς τὸ τμῆμα ΑΒ περιέχει ἕνα τμῆμα ποὺ εἶναι ἴσο π.χ. μὲ ἕνα ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου.* Σ' αὐτὸ τὸ παράδειγμά μας, λοιπόν, τὸ ἑκατοστόμετρο εἶναι τὸ τμῆμα ποὺ παίρνομε γιὰ *μονάδα.*

Ξεκινώντας ἀπὸ τὸ σημεῖο Α μεταφέρομε διαδοχικὰ ἐπάνω στὸ ΑΒ τὴ μονάδα, εἴτε μὲ μιὰ χάρτινη λουρίδα εἴτε μ' ἕνα διαβήτη (σχ. 2-ε καὶ σχ. 2-ϛ).




**Σχ. 2-ε. Σχ. 2-ϛ.**
**Πῶς μετροῦμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα**

Ἂν, ὅπως δείχνουν τὰ σχήματα 2-ε καὶ 2-ϛ, μὲ τὴν τρίτη μεταφορὰ τῆς μονάδας πάνω στὸ ΑΒ, τὸ ἄκρο της συμπέσῃ μὲ τὸ Β, τότε λέμε πὼς τὸ τμῆμα ΑΒ ἔχει *μῆκος 3 ἑκατοστὰ (3 cm).*

Ὥστε: *Μετροῦμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα σημαίνει πὼς βρίσκομε πόσες φορὲς χωρεῖ σ' αὐτὸ ἕνα ἄλλο τμῆμα ποὺ διαλέξαμε γιὰ μονάδα. Ὁ ἀριθμός, ποὺ προκύπτει, λέγεται ἀριθμητικὸ μῆκος τοῦ τμήματος καί, συντομώτερα, μῆκος τοῦ τμήματος.*

Ἀντὶ νὰ λέμε ὅτι ἕνα τμῆμα ΑΒ ἔχει μῆκος 3 cm θὰ λέμε κάποτε καί: *ὁ ἀριθμὸς 3 cm μετρᾶ τὸ τμῆμα ΑΒ.*

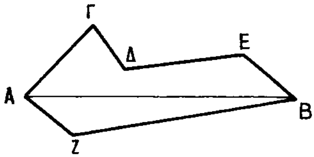
Στὰ ἑπόμενα μαθήματα θὰ δοῦμε ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως δὲν εἶναι πάντα ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, ὅπως στὸ παραπάνω παράδειγμα· μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ ἕνας ἀριθμὸς ὄχι ἀκέραιος, π.χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,5 cm.

Μετρώντας διάφορα τμήματα μὲ τὴν ἴδια μονάδα καὶ σημειώνοντας τὰ ἀριθμητικὰ μήκη τους, ἔχομε ἕνα μέσο καὶ γιὰ νὰ τὰ συγκρίνωμε τὸ ἕνα μὲ τὸ ἄλλο. Ἔτσι π.χ. ἀπὸ τὰ τρία τμήματα, ποὺ τὰ μετροῦν ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοὶ 2 cm, 6 cm καὶ 4 cm, πιὸ μικρὸ εἶναι τὸ πρῶτο καὶ πιὸ μεγάλο τὸ δεύτερο.

*Ἀπόσταση δυὸ σημείων εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ποὺ τὰ ἑνώνει.* Π.χ. ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπὸ τὸ Β (σχ. 2-ϛ) εἶναι 3 ἑκατοστὰ (3 cm).

Ἀριθμητικὸ μῆκος μιᾶς *τεθλασμένης γραμμῆς* εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ βρίσκομε *προσθέτοντας* τὰ μήκη τῶν τμημάτων ποὺ τὴν ἀποτελοῦν. Τὰ μήκη αὐτὰ πρέπει βέβαια νὰ ἔχουν μετρηθῆ μὲ τὴν ἴδια μονάδα. Ἀντὶ ἀριθμητικὸ μῆκος θὰ λέμε πάλι, γιὰ συντομία, *μῆκος τῆς τεθλασμένης γραμμῆς*.

**4. Μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β** ἂς χαράξωμε μιὰν εὐθεία καὶ μερικὲς τεθλασμένες γραμμὲς (σχ. 2-ζ)· ὕστερα ἂς μετρήσωμε τὸ μῆκος τῆς καθεμιᾶς των. Θὰ βροῦμε πὼς ἡ εὐθεία ἔχει τὸ μικρότερο μῆκος ἀπ' ὅλες. Μὲ ἄλλα λόγια, *ἡ εὐθεία γραμμὴ εἶναι ἡ πιὸ κοντὴ γραμμὴ (ὁ πιὸ σύντομος δρόμος) ἀπὸ ἕνα σημεῖο σ' ἕνα ἄλλο.*




**Σχ. 2-ζ. Τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι ὁ πιὸ σύντομος δρόμος ἀπὸ τὸ Α στὸ Β.**

*Ἀσκήσεις. 1.* Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία γραμμὴ πάρτε τὰ τμήματα ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ. Νὰ βρεθῇ:

1ο. Πόσες φορὲς τὸ ΑΒ περιέχεται στὸ ΑΓ; πόσες στὸ ΑΔ; καὶ πόσες στὸ ΓΕ;

2ο. Ἂν ΑΒ = 1 ἑκατοστόμετρο, ποιοὶ ἀριθμοὶ μετροῦν τὰ τμήματα ΑΓ, ΒΕ καὶ ΑΕ;

3ο. Ποῦ εἶναι τὸ μέσο τοῦ ΒΔ; καὶ ποῦ, τοῦ ΑΕ;

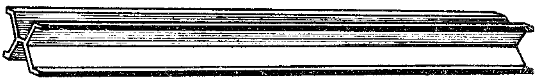
*2.* Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία πάρτε ἕνα ὁποιοδήποτε τμῆμα ΑΒ, ὕστερα τὸ ΒΓ = 2ΑΒ, τέλος τὸ ΓΔ = ΑΒ. Ἐξηγῆστε τώρα γιατί τὰ μέσα τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΑΔ συμπίπτουν.

*3.* Γιατί ἡ πλευρὰ ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΓΒ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ ἄλλων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΓΒ;

# Μάθημα 3.

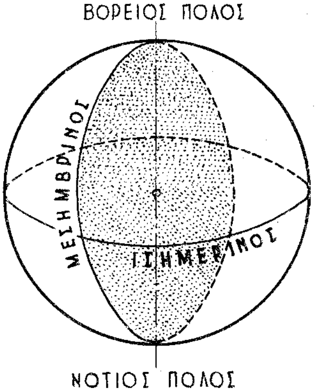
## Μέτρηση μηκῶν.

**1. Γιὰ νὰ μετρήσωμε ἕνα μῆκος** βρίσκομε πόσες φορὲς τὸ μῆκος αὐτὸ περιέχει ἕνα ἄλλο μῆκος ποὺ διαλέξαμε γιὰ μονάδα. Ἔτσι, στὸ προηγούμενο μάθημα μετρήσαμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα χρησιμοποιώντας τὸ *ἑκατοστόμετρο* ὡς μονάδα. Γιὰ νὰ μετρήσωμε



Σχ. 3-α. Τὸ ἀρχέτυπο τοῦ μέτρου.

ὅμως τὸ πάχος μιᾶς λαμαρίνας θὰ παίρναμε μιὰ μικρότερη μονάδα, τὸ *χιλιοστὸ τοῦ μέτρου*, ἐνῶ γιὰ νὰ μετρήσωμε τὸ βάθος ἑνὸς πηγαδιοῦ θὰ πάρωμε μιὰ μεγαλύτερη μονάδα, τὸ *μέτρο*.




Σχ. 3-β. Τὸ μῆκος ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς εἶναι 40 000 000 μέτρα περίπου.

*Μέτρο εἶναι τὸ μῆκος, σὲ θερμοκρασία $0^0$, ἑνὸς διεθνικοῦ ἀρχετύπου (σχ. 3-α) καμωμένου ἀπὸ ἕνα κράμα πλατίνας.*

Τὸ ἀρχέτυπο αὐτὸ βρίσκεται στὸ Διεθνὲς Γραφεῖο Βαρῶν καὶ Μέτρων στὴν πόλη Sèvres κοντὰ στὸ Παρίσι.

Τὸ μέτρο χωρεῖ περίπου σαράντα ἑκατομμύρια φορὲς στὸ μῆκος ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς. Γιὰ σύμβολό του ὅλα τὰ ἔθνη χρησιμοποιοῦν τὸ γράμμα m.

**2. Μονάδες μήκους.** Παραπάνω εἴπαμε τί εἶναι τὸ μέτρο (m). Στὸ σύστημα ποὺ τὸ ἔχει γιὰ βάση, καὶ ποὺ γι᾽ αὐτὸ λέγεται *μετρικὸ σύστημα*, οἱ ἄλλες μονάδες μήκους εἶναι 10, 100, 1 000 κτλ. φορὲς μεγαλύτερες ἢ μικρότερες ἀπὸ τὸ μέτρο. Μὲ ἄλλα λόγια, οἱ μονάδες αὐτὲς ἀκολουθοῦν τὸ *δεκαδικὸ νόμο*. Ἀπὸ αὐτὲς ὅμως θὰ ἀναφέρωμε παρακάτω ἐκεῖνες μόνο ποὺ χρησιμοποιοῦνται πιὸ πολὺ στὴ χώρα μας.

Τὸ χιλιόμετρο = 1 000 m μὲ σύμβολο τὸ km.

Τὸ δεκατόμετρο (ἢ παλάμη) = 0,1 m μὲ σύμβολο τὸ dm.

Τὸ ἑκατοστόμετρο ἢ ἑκατοστὸ = 0,01 m μὲ σύμβολο τὸ cm.

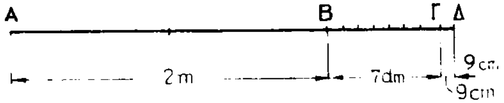
Τὸ χιλιοστόμετρο ἢ χιλιοστὸ = 0,001 m μὲ σύμβολο τὸ mm.

Τὸ μικρὸν = 0,001 mm = 0,000 001 m μὲ σύμβολο τὸ μ.

Τὸ χιλιόμετρο εἶναι ἕνα δεκαδικὸ πολλαπλάσιο τοῦ μέτρου· οἱ ἄλλες τέσσερις παραπάνω μονάδες εἶναι δεκαδικὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ μέτρου.

### 3. Μέτρηση ἑνὸς τμήματος καὶ γραφὴ τοῦ μήκους του.

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος ἑνὸς τμήματος ΑΔ




Σχ. 3-γ.

(σχ. 3-γ) μετρήσαμε τὸ κομμάτι του ΑΒ καὶ βρήκαμε 2 m, ὕστερα τὸ κομμάτι του ΒΓ (7 dm) καὶ τέλος τὸ κομμάτι του ΓΔ (9 cm).

Τὸ μῆκος τοῦ ΑΔ εἶναι τότε:

2 m 7 dm 9 cm.

Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ γράφωμε ἁπλούστερα μὲ τὴ μορφὴ ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἀφοῦ οἱ παραπάνω μονάδες μήκους ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο. Ἔτσι τὸ μῆκος τοῦ ΑΔ μποροῦμε νὰ τὸ ἐκφράσωμε μ' ἕναν ἀπὸ τοὺς ἑξῆς τρεῖς ἀριθμούς:

2,79 m 27,9 dm 279 cm.

**4. Γιὰ νὰ γράψωμε σωστὰ τὸν ἀριθμό, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως,** ἐφαρμόζομε τοὺς παρακάτω κανόνες:

1ο. *Μὲ μικρὰ διαστήματα χωρίζομε τὸν ἀριθμὸ σὲ τριψήφια κομμάτια (τμήματα)*, ἀρχίζοντας ἀπὸ δεξιά, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος, ἢ ἀπὸ τὸ κόμμα, ἂν εἶναι δεκαδικός. Ἔτσι γράφομε:

4 312 καὶ ὄχι 4312, 15 435,25 καὶ ὄχι 15435,25.

2ο. *Δὲν βάζομε τελεία ὕστερα ἀπὸ ἕνα σύμβολο μονάδας*, ἐκτὸς ἂν τοῦτο βρίσκεται στὸ τέλος τῆς φράσεως. Π.χ.

« 345 m ἀπόσταση » καὶ ὄχι « 345 m. ἀπόσταση ».

3ο. *Τὸ σύμβολο γράφεται ὕστερα ἀπὸ ὁλόκληρο τὸν ἀριθμό.* Π.χ.

4,50 m καὶ ὄχι 4 m,50.

4ο. *Τὰ σύμβολα γράφονται πάντα μὲ τὸν ἴδιο τρόπο,* καὶ ὅταν ἀκόμα ὁ ἀριθμός, ποὺ προηγεῖται, περιέχῃ περισσότερες μονάδες ἀπὸ μία. Π.χ.

25 m καὶ ὄχι 25 ms.

*Ἀσκήσεις. 1. Νοερὸς ὑπολογισμὸς (ἢ ὑπολογισμὸς μὲ τὴ μνήμη). Πολλαπλασιασμὸς μὲ 10 καὶ 100 ἢ διαίρεση διὰ 10, 100, 1 000.*

1ο. Μετατρέψτε νοερὰ σὲ ἑκατοστόμετρα:

3 m, 12 m, 3,5 m, 5 dm, 4,55 m, 36,5 dm.

2ο. Μετατρέψτε νοερὰ σὲ μέτρα:

400 cm, 20 dm, 350 dm, 1 135 cm, 635 mm, 1 800 mm.

* * *

*2.* Πόσα εὐθύγραμμα τμήματα μήκους 1 cm πρέπει νὰ τοποθετήσωμε ἄκρη μὲ ἄκρη (συνεχιστὰ) ἐπάνω σὲ μιὰν εὐθεία γιὰ νὰ σχηματισθῇ τμῆμα μὲ μῆκος 3,5 dm;

*3.* Οἱ δυὸ ἀριθμοὶ στὸ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω τρία ζευγάρια παριστάνουν τὸ μῆκος τοῦ ἴδιου τμήματος εὐθείας:

20 καὶ 2 000 | 350 καὶ 35 | 25 000 καὶ 2,5.

Ἂν ὁ δεύτερος ἀριθμὸς σὲ κάθε ζευγάρι σημαίνῃ ἑκατοστὰ (cm), τί σημαίνει ὁ πρῶτος του;

4. Οἱ δυὸ ἀριθμοὶ στὸ καθένα ἀπὸ τὰ τέσσερα ζευγάρια

15 καὶ 150 | 23 καὶ 23 000 | 4 καὶ 4 000 | 1 καὶ 1 000 000

παριστάνουν τὸ ἴδιο μῆκος. Ἂν σὲ κάθε ζευγάρι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς σημαίνῃ μέτρα (m), τί σημαίνει ὁ δεύτερος;

5. Ἀκοῦτε νὰ λένε: τὸ δωμάτιο ἔχει διαστάσεις 8 ἐπὶ 6 καὶ ἡ φωτογραφικὴ πλάκα 6 ἐπὶ 9, τὸ ὕφασμα ἔχει φάρδος 1 καὶ 40, τὸ αὐτοκίνητο τρέχει μὲ ταχύτητα 60 τὴν ὥρα. Συμπληρῶστε τὶς φράσεις αὐτὲς μὲ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τὰ ὁποῖα λείπουν.

6. Γιατί οἱ παρακάτω τέσσερις ἀριθμοὶ δὲν εἶναι καλὰ γραμμένοι;

2312 | 433.702 | $0,^{6}$ | 3,7025.

Γράψτε τους καλὰ (δηλαδὴ σύμφωνα μὲ τοὺς κανόνες ποὺ εἴπαμε).

7. Ἡ ἴδια ἐρώτηση γιὰ τοὺς ἀκόλουθους ἀριθμούς:

4 km, 5 | 3 kms, 4 | 45 cm. | 1.310 mm.

8. Ἂν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΓΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΓΒ εἶναι ἀντιστοίχως 15 cm καὶ 24 cm, προσδιορίστε τὸ ἐλάχιστο καὶ τὸ μέγιστο μῆκος ἀνάμεσα στὰ ὁποῖα θὰ βρίσκεται τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΒ. (Γιὰ νὰ φθάσετε εὔκολα σ᾽ αὐτὸν τὸν προσδιορισμό, πάρτε δυὸ στενὲς λουρίδες χαρτὶ καὶ χαράξτε πάνω στὴ μιὰ ἕνα τμῆμα ΑΓ, μήκους 15 cm, πάνω στὴν ἄλλη ἕνα τμῆμα ΓΒ, μήκους 24 cm. Ὕστερα καρφιτσῶστε πάνω σ᾽ ἕνα ξύλινο τραπέζι μὲ τὴν ἴδια καρφίτσα τὰ σημεῖα Γ τῶν δυὸ λουρίδων. Οἱ δυὸ λουρίδες μποροῦν τότε νὰ περιστραφοῦν γύρω στὸ σταθερὸ σημεῖο Γ καὶ θὰ σᾶς δώσουν, μὲ κατάλληλες τοποθετήσεις, τὴν ἀπάντηση στὸ πρόβλημα.)

# Μάθημα 4.

## Μέτρηση μηκῶν στὸ σχέδιο.
## Ὑπολογισμὸς μήκους μὲ πρόσθεση.

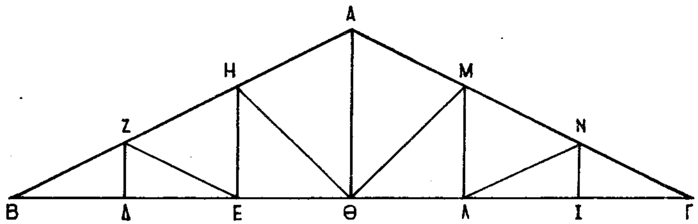
**1. Γιὰ νὰ μετρήσωμε διαστάσεις πάνω σ' ἕνα σχέδιο** χρησιμοποιοῦμε ἕνα *ὑποδεκάμετρο*, μήκους 20 ἢ 30 cm, ἢ ἕναν *κανόνα*, μήκους 50 cm (σχ. 4-α). Γενικῶς αὐτὰ τὰ ὄργανα


**Σχ. 4-α. Κανόνας βαθμολογημένος σὲ ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου.**

ἔχουν χαραγές, μεγαλύτερες καὶ μικρότερες, ποὺ τὰ διαιροῦν σὲ *ἑκατοστὰ* καὶ *χιλιοστὰ* τοῦ μέτρου.

Κάποτε μάλιστα ἔχουν καὶ ὑποδιαιρέσεις σὲ *μισὰ χιλιοστά*, ἀλλὰ ἡ ἀνάγνωσή τους δὲν εἶναι ἀρκετὰ εὔκολη.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, τοποθετοῦμε τὸ «μηδὲν» τοῦ κανόνα πάνω στὸ ἕνα ἄκρο τοῦ τμήματος καὶ ὕστερα βλέπομε ποιὰν θέση παίρνει τὸ ἄλλο ἄκρο τοῦ τμήματος πάνω




**Σχ. 4-β. Σχέδιο ζευκτοῦ γιὰ ἕνα ὑπόστεγο.**

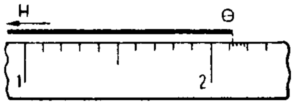
στὴ σειρὰ ἀπὸ χαραγὲς ποὺ ἔχει ὁ κανόνας. Ὅπως θὰ δοῦμε στὰ παρακάτω παραδείγματα, τὸ δεύτερο αὐτὸ ἄκρο δὲν πέφτει τὶς περισσότερες φορὲς πάνω σὲ χαραγὴ τοῦ κανόνα, ἀλλὰ κατέχει μιὰ θέση ἀνάμεσα σὲ δυὸ τέτοιες διαδοχικὲς χαραγές. Γι᾿ αὐτὸ θὰ πρέπη νὰ συνηθίσωμε νὰ ἐκτιμοῦμε μὲ τὸ μάτι αὐτὴ τὴ θέση μὲ σχετικὴ ἀκρίβεια.

**2. Ἂς μετρήσωμε τώρα μερικὲς διαστάσεις ἐπάνω στὸ σχέδιο** (σχ. 4-β).

1ο. *Μετροῦμε τὸ ΒΓ:* βρίσκομε *ἀκριβῶς* 90 mm.

2ο. *Μετροῦμε τὸ ΑΘ:* βλέπομε ὅτι τὸ ἄκρο Θ δὲν συμπίπτει ἀκριβῶς μὲ καμμιὰ χαραγὴ τοῦ κανόνα, ἐκτιμοῦμε ὅμως πὼς βρίσκεται περίπου στὸ *μέσο* μεταξὺ τῶν χαραγῶν 22 καὶ 23. *Τὸ τμῆμα ΑΘ ἔχει λοιπὸν μῆκος 22,5* (σχ. 4-γ). Μποροῦμε ἀκόμα νὰ ποῦμε πὼς τὸ μῆκος ΑΘ εἶναι 22 mm μὲ προσέγγιση 1 mm *ἀπὸ κάτω* ἢ 23 mm μὲ προσέγγιση 1 mm *ἀπὸ πάνω*. Μὲ ἄλλα λόγια: 22 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιοστομέτρων ὁ *ἀμέσως μικρότερος* ἀπὸ τὸ μῆκος ΑΘ καὶ 23 ὁ ἀριθμὸς τῶν mm ὁ *ἀμέσως μεγαλύτερος*.


**Σχ. 4-γ. Ὑποδιαιρέσεις ἑνὸς κανόνα σὲ (ἢ ὑπὸ) μεγέθυνση.**



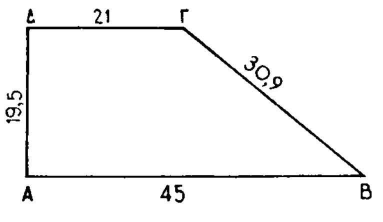

**Σχ. 4-δ. Ὑποδιαιρέσεις ἑνὸς κανόνα σὲ (ἢ ὑπὸ) μεγάλη μεγέθυνση.**

3ο. *Μετροῦμε τὸ ΗΘ:* τὸ ἄκρο Θ δὲν συμπίπτει μὲ καμμιὰ χαραγὴ τοῦ κανόνα, οὔτε βρίσκεται στὸ μέσο τοῦ διαστήματος 21 - 22. Ἂν ὅμως φαντασθοῦμε τὸ διάστημα αὐτὸ *ὑποδιαιρεμένο* σὲ 5 ἴσα μέρη, ἐκτιμοῦμε πὼς τὸ σημεῖο Θ θὰ ἔπεφτε ἐπάνω στὴν πρώτη χαραγὴ τῆς ὑποδιαιρέσεως μετὰ τὴν 21. Οἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτὲς θὰ διαβάζονταν ἔτσι:

21,2 — 21,4 — 21,6 — 21,8.

*Ἄρα τὸ ΑΘ ἔχει μῆκος 21,2 mm* (σχ. 4-δ).

**3. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ μῆκος μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς** προσθέτομε τὰ μήκη τῶν τμημάτων ποὺ τὴν ἀποτελοῦν.




**Σχ. 4-ε. Ὑπολογίστε τὴν περίμετρο αὐτοῦ τοῦ τετραπλεύρου.**

Π.χ. γιὰ τὴν τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΑ τοῦ σχήματος 4-ε θὰ ἔχωμε:

ΑΒ = 45,0 mm
ΒΓ = 30,9 mm
ΓΔ = 21,0 mm
ΔΑ = 19,5 mm

Περίμετρος = 116,4 mm

*Παρατήρηση.* Στοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 45,0 mm καὶ 21,0 mm γράψαμε ἐπίτηδες τὸ 0 δεξιὰ ἀπὸ τὸ κόμμα, γιὰ νὰ φανερώσωμε ὅτι μετρήσαμε τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ μὲ προσέγγιση ἑνὸς δεκάτου τοῦ χιλιοστοῦ, τὴν ἴδια δηλαδὴ προσέγγιση ὅπως καὶ στὴ μέτρηση τῶν τμημάτων ΒΓ καὶ ΔΑ.

**4. Ὑπενθυμίζομε ὅτι γιὰ νὰ μὴν κάνετε λάθη στὶς προσθέσεις πρέπει:**

1ο. Νὰ γράφετε τὶς ὁμοτάξιες μονάδες (δηλ. τὶς μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως) στὴν ἴδια στήλη.

2ο. Νὰ μὴν ξεχνᾶτε τὰ κρατούμενα.

*Τέλος, μὴν παραλείπετε νὰ κάνετε καὶ τὴ δοκιμὴ τῶν προσθέσεων μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε στὴν Εἰσαγωγή.*

*Ἀσκήσεις. 1. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πρόσθεση ἀκέραιων ἀριθμῶν.*

Παράδειγμα: 256 σὺν 23 πόσο κάνει;
Λέμε: 256 καὶ 20 ἴσον 276 καὶ 3 ἴσον 279.
Ὑπολογίστε νοερὰ μὲ παρόμοιο τρόπο:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | 30 + 40, | 41 + 20, | 32 + 56, | 28 + 62. |
| 2ο | 250 + 30, | 288 + 40, | 342 + 35, | 1 054 + 23. |
| 3ο | 280 + 120, | 555 + 105, | 339 + 224, | 1 125 + 342. |

* * *

2. Μετρῆστε τὰ τμήματα ΕΖ, ΘΕ, ΔΕ, ΒΔ, καθὼς καὶ τὰ ΘΜ, ΜΛ, ΛΝ, ΝΜ τοῦ σχήματος 4-β.

Ποιὸ εἶναι τὸ μεγαλύτερο; ποιὸ τὸ μικρότερο; Εἶναι ἄραγε μερικὰ ἴσα μεταξύ τους; καὶ ποιὰ εἶναι αὐτά;

*3.* Ὑποθέστε ὅτι μετρώντας ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ τὸν κανόνα βρήκατε πὼς ἡ θέση τοῦ δεύτερου ἄκρου τοῦ τμήματος εἶναι πιὸ κοντὰ στὴ χαραγὴ 25 παρὰ στὴ χαραγὴ 26 τοῦ κανόνα. Ἂν πῆτε τότε πὼς τὸ μῆκος του εἶναι 25 mm, πόσο, τὸ πολύ, εἶναι τὸ σφάλμα ποὺ κάματε στὴ μέτρηση αὐτή; (Μὲ ἄλλα λόγια: ποιὸ εἶναι τὸ μέγιστο σφάλμα ποὺ μπορεῖ νὰ κάματε στὴ μέτρησή σας αὐτή;)

*4.* Τὸ σχῆμα 4-β παριστάνει ἕνα ζευκτὸ ποὺ στηρίζει μιὰ στέγη. Ὑπολογίστε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων τοῦ σχήματος. (Τὰ τμήματα αὐτὰ παριστάνουν τὶς ράβδους ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ζευκτό.)

*5.* Οἱ τέσσερις πλευρὲς ἑνὸς τετραπλεύρου (σὰν ἐκεῖνο τοῦ σχήματος 4-ε) μετρήθηκαν μὲ προσέγγιση μισοῦ χιλιοστομέτρου ἀπὸ κάτω καὶ βρέθηκαν ἴσες μέ:

$$\Delta A = 38{,}5 \text{ mm}, \quad AB = 92{,}5 \text{ mm}, \quad \Delta\Gamma = 61{,}5 \text{ mm}, \quad \Gamma B = 44{,}0 \text{ mm}.$$

Τὸ ἄθροισμα 236,5 mm τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν μᾶς δίνει μὲ προσέγγιση τὴν περίμετρο τοῦ τετραπλεύρου. Ὑπολογίστε:

1ο. Πόση, τὸ πολύ, εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς πραγματικῆς (τῆς σωστῆς) περιμέτρου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 236,5 mm. Μὲ ἄλλα λόγια, ποιὸ εἶναι τὸ μέγιστο σφάλμα ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχωμε στὸ προσεγγιστικὸ ἐξαγόμενο 236,5 mm;

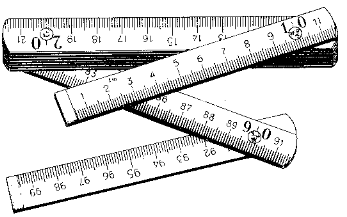
2ο. Ἐξηγῆστε γιατὶ στὸ ἐξαγόμενο 236,5 mm τὸ ψηφίο 6 τῶν (ἁπλῶν) μονάδων καὶ τὸ ψηφίο 5 τῶν δεκάτων μπορεῖ νὰ μὴν εἶναι καὶ σωστά.

# Μάθημα 5.

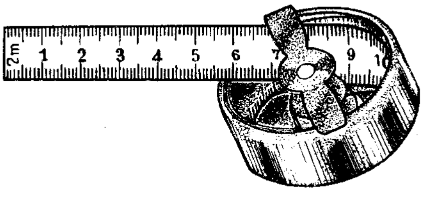
## Μέτρηση μηκῶν.

## Ὑπολογισμὸς μήκους μὲ προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις.

**1. Γιὰ νὰ μετρήσωμε διαστάσεις κατασκευῶν,** π.χ. τὸ ὕψος καὶ τὸ πλάτος μιᾶς πόρτας, τὸ ὕψος ἑνὸς δωματίου, τὸ μῆκος ἑνὸς ἄξονα, χρησιμοποιοῦμε ἕνα μέτρο ἢ ἕνα δίμετρο.



Σχ. 5-α. Μέτρο μὲ 10 στελέχη.

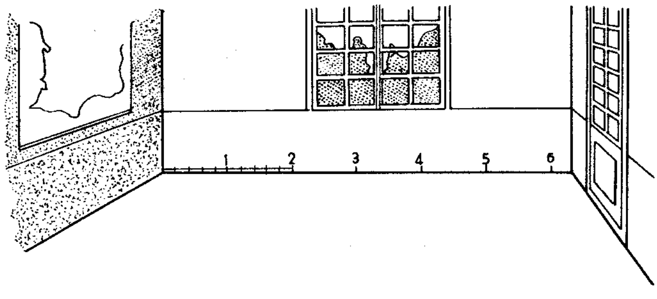


Σχ. 5-β. Μέτρο ἀπὸ ἀτσαλένια περιτυλίξιμη ταινία.

Αὐτὰ τὰ ὄργανα γίνονται συνήθως ἀπὸ ξύλο ἢ ἀπὸ ἀτσάλι καὶ μποροῦν νὰ *διπλωθοῦν* ἢ νὰ *περιτυλιχτοῦν*.

Συνήθως χρησιμοποιοῦμε:

1ο. *Τὸ ξύλινο μέτρο* ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ 10 στελέχη μήκους 11,5 - 13 cm τὸ καθένα (σχ. 5-α) ἢ ἀπὸ 6 στελέχη μήκους 18,5 - 20,5 cm τὸ καθένα.




Σχ. 5-γ. Ἡ αἴθουσα τῆς τάξης ἔχει μῆκος 6,28 m.

2ο. *Τὸ ξύλινο δίμετρο* μὲ 10 στελέχη μήκους 21,5 - 23,5 cm τὸ καθένα.

3ο. *Τὸ μέτρο καὶ τὸ δίμετρο ἀπὸ ἀτσαλένια ταινία* ποὺ μπορεῖ νὰ τυλίγεται (σχ. 5-β).

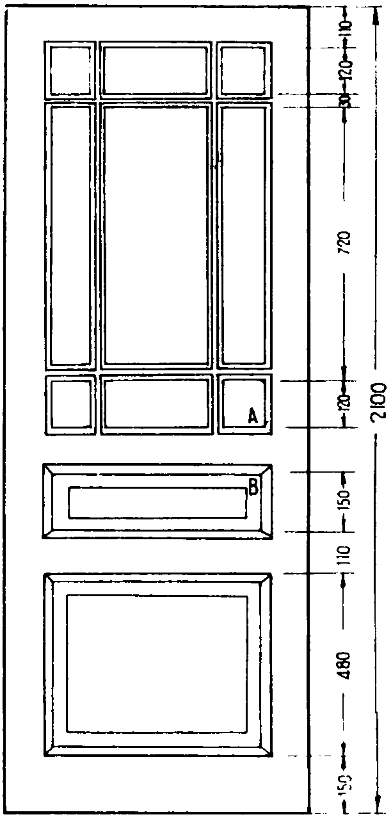
Ὅλα αὐτὰ τὰ ὄργανα ἔχουν διαιρέσεις σὲ ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου.

**2. Ἂς μετρήσωμε τὸ μῆκος μιᾶς αἴθουσας σχολείου** χρησιμοποιώντας ἕνα δίμετρο.

Μεταφέρομε τρεῖς φορὲς τὸ δίμετρο (σχ. 5-γ), μετρώντας 2... 4... 6 μέτρα.

Ἂν τὸ ὑπόλοιπο μῆκος, αὐτὸ ποὺ μένει νὰ μετρήσωμε, εἶναι ἀκριβῶς 28 ἑκατοστά, τότε λέμε πὼς τὸ μῆκος τῆς αἴθουσας εἶναι 6 m καὶ 28 cm ἢ 6,28 m.

Ἂν ὅμως εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ 27 cm καὶ μικρότερο ἀπὸ 28 cm, θὰ ποῦμε πὼς τὸ μῆκος τῆς αἴθουσας εἶναι 6,27 m μὲ προσέγγιση 1 cm *ἀπὸ κάτω* ἢ 6,28 m μὲ προσέγγιση 1 cm *ἀπὸ ἐπάνω*.



Σχ. 5-δ. Τζαμόπορτα.

**3. Ὑπολογισμὸς ἑνὸς μήκους μὲ προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις.**

Τὸ μῆκος ΑΒ δὲν εἶναι σημειωμένο ἐπάνω στὸ σχέδιο τῆς τζαμόπορτας (σχ. 5-δ), ἀλλὰ μπορεῖ νὰ βρεθῇ, ἂν ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ ὕψος τῆς πόρτας τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἄλλων σημειωμένων διαστάσεων.

Ἀθροίζοντας ἔχομε:

110+120+30+720+120+150+110+480+150=1 990 mm.

Ἀφαιροῦμε τώρα τὰ 1 990 mm ἀπὸ τὸ συνολικὸ ὕψος 2 100 mm καὶ βρίσκομε τὸ ζητούμενο:

*AB=2 100—1 990=110 mm.*

**4. Ὑπενθυμίζομε ὅτι γιὰ νὰ μὴ γίνωνται λάθη στὴν ἀφαίρεση πρέπει:**

1ο. Νὰ γράφωμε τὰ ὁμοτάξια ψηφία στὴν ἴδια στήλη.

2ο. Νὰ μὴν ξεχνᾶμε τὰ κρατούμενα.

Τέλος, μὴν παραλείπετε νὰ κάμετε καὶ τὴ δοκιμὴ (τὸν ἔλεγχο) τῆς ἀφαιρέσεως μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε στὴν Εἰσαγωγή.

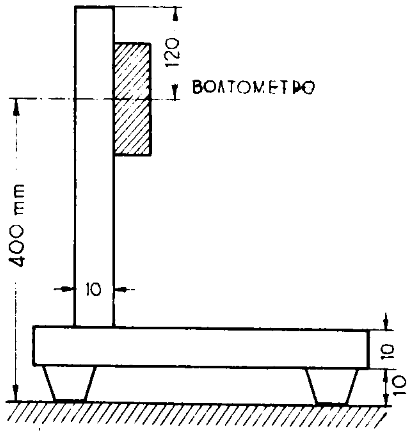
*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Ἀφαίρεση ἀκέραιων ἀριθμῶν:*

Παράδειγμα: Ἀπὸ τὸ 354 ν' ἀφαιρεθῇ τὸ 31.
Λέμε: 354 μεῖον 30 ἴσον 324, μεῖον 1 ἴσον 323.

*1.* Νὰ κάμετε νοερὰ τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο. | 90 — 30, | 81 — 50, | 85 — 34, | 67 — 22. |
| 2ο. | 70 — 21, | 61 — 47, | 73 — 67, | 98 — 39. |
| 3ο. | 106 — 31, | 200 — 43, | 345 — 121, | 1 025 — 317. |

* * *



**Σχ. 5-ε. Ξύλινο ὑποστήριγμα ἑνὸς βολτόμετρου.**

*2.* Σὲ ποιό στέλεχος ἑνὸς ξύλινου μέτρου μὲ 10 στελέχη βρίσκεται ἡ διαίρεση 98 cm; ἡ 45 cm; ἡ 27 cm; ἡ 76 cm;

*3.* Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ΑΒ (σχ. 5-δ) ἀφαιρώντας διαδοχικὰ 110 mm, 120 mm, . . . πρῶτα ἀπὸ τὴ συνολικὴ διάσταση 2 100 mm, ἔπειτα ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο ποὺ βρίσκετε, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Νὰ συγκρίνετε τὸν τρόπο αὐτὸ τοῦ ὑπολογισμοῦ μὲ ἐκεῖνον ποὺ χρησιμοποιήθηκε παραπάνω, στὸ μάθημα, καὶ νὰ πῆτε ποιόν ἀπὸ τοὺς δυὸ προτιμᾶτε.

*4.* Πάνω σ' ἕνα χαρτὶ σχεδίου μὲ διαστάσεις

$$210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$$

θέλετε νὰ κάμετε δυὸ σχέδια ποὺ ἔχουν μῆκος: 139 mm τὸ πρῶτο, 77 mm τὸ δεύτερο. Ξέροντας πὼς τὸ διάστημα ἀνάμεσα στὰ δυὸ σχέδια εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλάτος τοῦ περιθώριου, ποὺ ἀφήνομε δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ στὸ χαρτὶ τῆς σχεδιάσεώς μας, προπαρασκευάστε τὴν τοποθέτηση τῶν σχεδίων στὸ χαρτί.

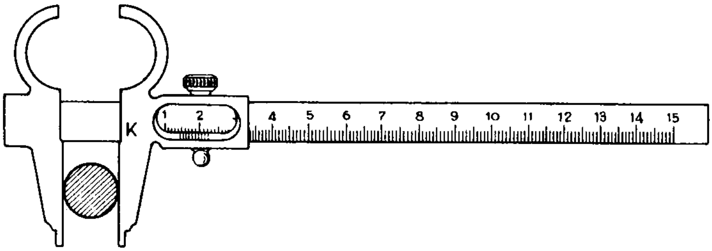
*5.* Τὸ σχῆμα 5-ε παριστάνει τὸ ξύλινο ὑποστήριγμα ἑνὸς βολτόμετρου. (Τὸ βολτόμετρο εἶναι ἕνα ὄργανο ποὺ μετρᾶ κάτι ποὺ σχετίζεται μὲ τὸ ἠλεκτρικὸ ρεῦμα καὶ ποὺ θὰ μάθετε σ' ἄλλα μαθήματα). Ὑπολογίστε τὸ ὕψος τοῦ κατακόρυφου πίνακά του.

# Μάθημα 6.

## Μετρήσεις ἀκριβείας στὸ ἐφαρμοστήριο καὶ σχετικοὶ ὑπολογισμοί.

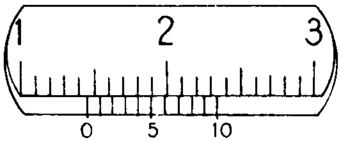
Οἱ μετρήσεις ἀκριβείας γίνονται μὲ εἰδικὰ ὄργανα. Ἐδῶ δὲν πρόκειται νὰ ἐξηγήσωμε τὸ μηχανισμό τους. Θὰ δείξωμε μόνο πῶς χρησιμοποιοῦνται.

**1. Μήκη σὲ χιλιοστόμετρα καὶ δέκατα τοῦ χιλιοστομέτρου.** Γιὰ νὰ μετρήσουν οἱ ἐφαρμοστὲς μιὰ διάσταση μὲ ἀκρίβεια *ἑνὸς δεκάτου τοῦ mm*, χρησιμοποιοῦν ἕνα *παχύμετρο* (σχ. 6-α).




**Σχ. 6-α. Παχύμετρο.**

Τὸ στέλεχος τοῦ ὀργάνου αὐτοῦ εἶναι βαθμολογημένο σὲ ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου· μιὰ εἰδικὴ ὅμως σειρὰ ἀπὸ χαραγές, ποὺ λέγεται *βερνιέρος*, πάνω στὸ κινητὸ μέρος K τοῦ ὀργάνου ἐπιτρέπει νὰ διαβάση κανεὶς καὶ τὰ δέκατα τοῦ χιλιοστομέτρου. Ἔτσι διαβάζομε στὸ παράδειγμα (σχ. 6-β):




**Σχ. 6-β. Βερνιέρος.**

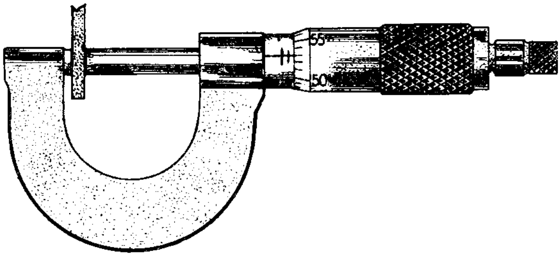
1ο *ἐπάνω στὸ στέλεχος*, ἀπέναντι στὸ 0 τοῦ βερνιέρου, τὰ *χιλιοστόμετρα* (14 mm μὲ προσέγγιση ἀπὸ κάτω).

2ο *ἐπάνω στὸν βερνιέρο*, ἀπέναντι στὴν πρώτη χαραγὴ τοῦ στελέχους ἡ ὁποία κολλάει (συμπίπτει) μὲ μιὰ χαραγὴ τοῦ βερνιέρου, *τὰ δέκατα τοῦ χιλιοστομέτρου* (4 δέκατα).

Τὸ μῆκος ποὺ μετροῦμε εἶναι λοιπὸν 14 mm καὶ 4 δέκατα τοῦ mm, δηλαδὴ 14,4 mm.

**2. Μήκη σὲ χιλιοστόμετρα καὶ ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστομέτρου.** Γιὰ νὰ μετρήσουν μικρὰ πάχη οἱ φυσικοὶ καὶ οἱ τεχνικοὶ χρησιμοποιοῦν ἕνα *μικρόμετρο* (σχ. 6-γ). Μὲ αὐτὸ διαβάζομε στὸ παράδειγμα τοῦ σχήματος:

1ο. Πάνω στὸ στέλεχος, ἀπέναντι στὴ βάση τοῦ περιστρεφόμενου τυμπάνου, τὰ *χιλιοστόμετρα* (1 mm, μὲ προσέγγιση ἀπὸ κάτω).

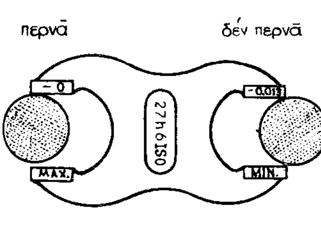


Σχ. 6-γ. Μικρόμετρο (Πάλμερ).

2ο. Πάνω στὸ περιστρεφόμενο τύμπανο, ἀπέναντι στὴν κατὰ μῆκος χαραγὴ τοῦ στελέχους, τὰ *ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστομέτρου* (53 ἑκατοστά).

Τὸ πάχος λοιπὸν ποὺ μετροῦμε εἶναι 1,53 mm.

**3. Σὲ κομμάτια (τεμάχια) ποὺ πρέπει νὰ ἔχουν κατασκευασθῆ μὲ μεγάλη ἀκρίβεια** οἱ διαστάσεις ἐλέγχονται μὲ *ἐλεγκτῆρες (καλίμπρες)*. Ἔτσι ὁ ἐλεγκτήρας (ἡ καλίμπρα) *μὲ δύο ράμφη* 27h6 - ISO, ποὺ ἀπεικονίζεται στὸ σχ. 6-δ, ἐπιτρέπει νὰ ἐλέγξωμε ἂν ἡ διάμετρος ἑνὸς κυλίνδρου περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στὰ ἀνοίγματά τους. Τὰ ἀνοίγματα ὅμως αὐτὰ ἔχουν



Σχ. 6-δ. Ἐλεγκτήρας μὲ δύο ράμφη.

λογαριαστῆ, γιὰ τὴ θερμοκρασία τῶν 20°, μὲ ἀκρίβεια ἑνὸς *χιλιοστοῦ τοῦ χιλιοστομέτρου* (*ἑνὸς μικροῦ*).

Στὸ παράδειγμα λοιπὸν τοῦ σχ. 6-δ λέμε:

*Δεξιὸ ράμφος: Δὲν περνᾶ (ὁ κύλινδρος δὲν χωρεῖ στὸ ράμφος).*
*Ἀριστερὸ ράμφος: Περνᾶ (ὁ κύλινδρος χωρεῖ στὸ ράμφος).*

Ἑπομένως ἡ διάμετρος τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ

$$27 - 0{,}013 = 26{,}987 \text{ mm}$$

καὶ μικρότερη ἀπὸ

$$27 - 0{,}000 = 27 \text{ mm}.$$

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πρόσθεση ἀκέραιων ἀριθμῶν.*

Παράδειγμα: $47 + 29 = ;$ $(29 = 30 - 1)$.
Λέμε: 47 καὶ 30 ἴσον 77, μεῖον 1 ἴσον 76.

*1.* Κάμετε νοερὰ μὲ παρόμοιο τρόπο τὶς ἀκόλουθες προσθέσεις:

$35 + 19,$ $47 + 49,$ $135 + 59,$
$87 + 999,$ $56 + 198,$ $256 + 395.$

* * *

*2.* Μετρώντας μ' ἕνα παχύμετρο τὶς ἐξωτερικὲς καὶ τὶς ἐσωτερικὲς διαμέτρους πέντε μολυβοσωλήνων βρήκατε σὲ χιλιοστόμετρα: 10 καὶ 15, 13 καὶ 20, 30 καὶ 42, 50 καὶ 59, 90 καὶ 105. Ὑπολογίστε τὰ πάχη τῶν σωλήνων.

*3.* Στὴ μέτρηση ἑνὸς μήκους μὲ βερνιέρο τοῦ ἑνὸς δεκάτου τοῦ mm βρήκαμε:

1ο ὅτι τὸ 0 τοῦ βερνιέρου ἀντιστοιχεῖ στὴ διαίρεση 19 τοῦ στελέχους καὶ

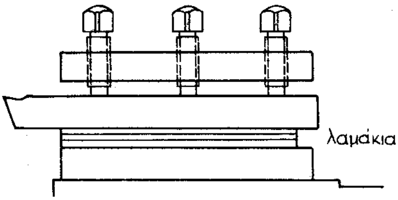
2ο ὅτι οἱ διαιρέσεις 4 καὶ 5 τοῦ βερνιέρου δὲν ἀντικρίζουν ἀκριβῶς χαραγὲς τοῦ στελέχους, ἀλλὰ βρίσκονται ἀνάμεσα στὶς ἴδιες δύο διαδοχικὲς χαραγὲς (22 καὶ 23) τοῦ στελέχους.

Λέμε τότε ὅτι τὸ μετρούμενο μῆκος περιλαμβάνεται μεταξὺ 19,4 καὶ 19,5 mm, ἢ ὅτι τὸ μῆκος αὐτὸ εἶναι 19,4 mm μὲ προσέγγιση δεκάτου ἀπὸ κάτω. Τότε μὲ ποιὰ προσέγγιση εἶναι γνωστὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ αὐτῶν μηκῶν καὶ μὲ ποιὰ ἡ διαφορά τους;

*4.* Βρῆτε ποιὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερη διαφορὰ ποὺ μποροῦν νὰ παρουσιάσουν οἱ διάμετροι δύο κυλίνδρων ποὺ ἐλέγξαμε μὲ τὸν ἐλεγκτήρα τοῦ σχήματος 6-δ.

*5.* Στὴν κατασκευὴ ἑνὸς κυλίνδρου μὲ διάμετρο 45 mm «ἀνεχόμαστε» (δηλαδὴ δεχόμαστε) ἕνα σφάλμα 50 μικρῶν, τὸ πολύ, πρὸς τὰ πάνω καὶ 20 μικρῶν, τὸ πολύ, πρὸς τὰ κάτω. Ἀνάμεσα σὲ ποιοὺς ἀριθμοὺς θὰ πρέπῃ νὰ βρίσκεται τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου τοῦ κυλίνδρου;

*6.* Γιὰ νὰ κανονίσωμε τὸ ὕψος ἑνὸς ἐργαλείου κοπῆς σ' ἕναν τόρνο (σχ. 6-ε) χρησιμοποιοῦμε λαμάκια μὲ διάφορο πάχος. Μιὰ πλήρης σειρὰ ἀπὸ τέτοια λαμάκια περιέχει: 1 τοῦ 1 mm πάχος, 2 τῶν 2 mm, 1 τῶν 5 mm, 1 τῶν 10 mm, 2 τῶν 20 mm καὶ 1 τῶν 50 mm. Ποιὰ λαμάκια θὰ τοποθετήσετε κάτω ἀπὸ τὸ ἐργαλεῖο γιὰ νὰ τὸ ὑψώσετε κατὰ 7 mm; κατὰ 18 mm; κατὰ 22 mm; καὶ κατὰ 36 mm; (Χρησιμοποιῆστε ὅσο μπορεῖτε λιγότερα λαμάκια κάθε φορά.)

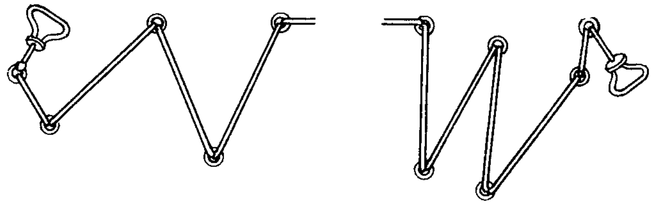



**Σχ. 6-ε. Ρύθμιση τοῦ ὕψους τοῦ ἐργαλείου κοπῆς ἑνὸς τόρνου.**

# Μάθημα 7.

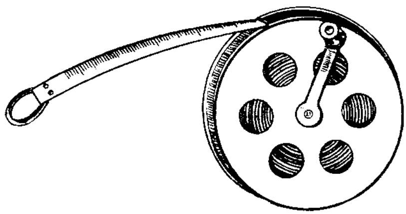
## Μέτρηση μηκῶν πάνω στὸ ἔδαφος.
## Πολλαπλασιασμός.

**1. Γιὰ νὰ μετρήσωμε ἕνα μῆκος πάνω στὸ ἔδαφος,** χρησιμοποιοῦμε μιὰ μετρητικὴ ἁλυσίδα (σχ. 7-α) ἢ μιὰ μετροταινία (κορδέλα) τῶν 10 m (σχ. 7-β).



**Σχ. 7-α. Μετρητικὴ ἁλυσίδα.**

Οἱ μετρητικὲς ἁλυσίδες ἔχουν μῆκος 10 ἢ 20 m καὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ μικρὲς μετάλλινες ράβδους καὶ συνδετικοὺς κρίκους.



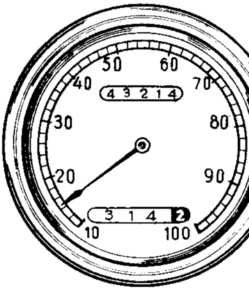
**Σχ. 7-β. Μετροταινία τῶν 10 m.**

Στοὺς ἐθνικοὺς δρόμους, στὶς σιδηροδρομικὲς γραμμές, στὰ κανάλια, οἱ ἀποστάσεις σημειώνονται συχνὰ πάνω σὲ πέτρινες στῆλες, ποὺ λέγονται *σταδιοδεῖχτες*, ἢ πάνω σὲ *ἐνδεικτικὲς πλάκες*.

Οἱ ἀριθμοί, ποὺ εἶναι χαραγμένοι πάνω στὶς στῆλες αὐτὲς ἢ τὶς πλάκες, δείχνουν πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση σὲ χιλιόμετρα ἀπὸ τὴν ἀφετηρία ὡς τὸ σημεῖο ὅπου βρίσκεται στημένη ἡ στήλη ἢ ἡ πλάκα.

Κάποτε ἀνάμεσα σὲ δυὸ διαδοχικοὺς χιλιομετρικοὺς δεῖχτες μεσολαβοῦν ἄλλοι μικρότεροι ποὺ φανερώνουν ἀποστάσεις ἑκατὸ μέτρων, ἑπομένως ἀποστάσεις ἑνὸς δεκάτου τοῦ χιλιομέτρου, ἀπὸ τὸν καθένα τους ὡς τὸν ἑπόμενο. Π.χ. ἂς ὑποθέσωμε ὅτι περάσαμε τὸ χιλιομετρικὸ δείχτη 125 καὶ ὅτι βρισκόμαστε μπροστὰ στὸν τρίτο « ἑκατομμετρικὸ » δείχτη· τότε ἡ ἀπόστασή μας ἀπὸ τὴν ἀφετηρία τοῦ δρόμου ἢ τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς εἶναι 125,3 km.

**2. Οἱ ἀποστάσεις ποὺ διατρέχει ἕνα αὐτοκίνητο** γράφονται ἀπὸ ἕνα μηχάνημα ποὺ μετρᾶ πόσες στροφὲς κάνουν οἱ τροχοὶ καὶ ποὺ λέγεται *χιλιομετρικὸς μετρητής*. Στὸ μετρητὴ τοῦ σχήματος 7-γ ὁ κάτω ἀριθμός, 314 km 2 hm, δείχνει τὰ *χιλιόμετρα καὶ τὰ ἑκατόμμετρα* ποὺ ἔκαμε τὸ αὐτοκίνητο *ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς τελευταίας διαδρομῆς του*. Ὁ πάνω ἀριθμός, 43 214 km, δείχνει τὸν *ὁλικὸ ἀριθμὸ τῶν χιλιομέτρων* ποὺ ἔχει διατρέξει τὸ αὐτοκίνητο *ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ μπῆκε σὲ κίνηση*. Τέλος στοὺς περιφερειακοὺς ἀριθμοὺς μποροῦμε νὰ διαβάσωμε κάθε στιγμὴ τὴν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου σὲ χιλιόμετρα ἀνὰ ὥρα.




**Σχ. 7-γ. Χιλιομετρικὸς μετρητὴς αὐτοκινήτου.**

**3. Πρόβλημα.** *Ἕνα φορτηγὸ αὐτοκίνητο κάνει μιὰ διαδρομὴ 335 km.*

*1ο. Ἂν ὁ πελάτης πληρώνη 2 δραχμὲς γιὰ κάθε χιλιόμετρο διαδρομῆς, πόσα θὰ πληρώση γιὰ ὅλη τὴ διαδρομή;*

*2ο. Ἂν τὸ αὐτοκίνητο καίη 0,065 γαλόνια βενζίνα γιὰ ἕνα χιλιόμετρο, πόση βενζίνα θὰ κάψη σ' ὅλο τὸ ταξίδι;*

1ο. Τιμὴ τῆς διαδρομῆς: $2 \times 335 = 670$ δρχ.

2ο. Κατανάλωση βενζίνας: $0{,}065 \times 335 \simeq 21{,}8$ γαλόνια.

**4. Ἂς ὑπενθυμίσωμε πῶς γιὰ νὰ κάμετε σωστοὺς πολλαπλασιασμοὺς πρέπει** :

1ο νὰ ξέρετε καλὰ τὸν Πυθαγόρειο πίνακα·

2ο νὰ μὴν ξεχνᾶτε τὰ κρατούμενα·

3ο νὰ μὴν ξεχνᾶτε νὰ χωρίζετε μ' ἕνα κόμμα τόσα δεκαδικὰ ψηφία στὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου δυὸ παραγόντων ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουν οἱ δυὸ παράγοντες μαζί.

Τέλος θὰ πρέπη νὰ ἐλέγχετε πάντοτε τὸν πολλαπλασιασμό σας μ' ἕναν ἀπὸ τοὺς τρόπους ποὺ εἴπαμε στὴν Εἰσαγωγή.

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πολλαπλασιασμὸς μ' ἕναν μονοψήφιο ἀριθμό.*

Παράδειγμα: $32 \times 4$.

Λέμε: 4 φορὲς 30 ἴσον 120, 4 φορὲς 2 ἴσον 8, τὰ δυὸ μαζὶ ἴσον 128.

*1.* Ὑπολογίστε νοερά:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ο $42 \times 3$, | $72 \times 2$, | $56 \times 3$, | $87 \times 6$ |
| 2ο $202 \times 3$, | $307 \times 4$, | $209 \times 8$, | $506 \times 7$ |
| 3ο $345 \times 2$, | $827 \times 5$, | $615 \times 8$, | $1\,007 \times 9$. |

* * *

*2.* Ταξιδεύετε μὲ αὐτοκίνητο ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴ Θεσσαλονίκη. Ὅταν ξεκινήσατε, ὁ μετρητὴς ἔγραφε πάνω 24 523 καὶ κάτω 0· ὅταν φθάσατε, ἔγραφε ἀντιστοίχως 25 050 καὶ 527. Βρῆτε:

1ο. Πόσα γαλόνια βενζίνα πρέπει νὰ ἔχετε κάψει, ἂν ἡ μηχανὴ τοῦ αὐτοκινήτου καίῃ 0,045 γαλόνια στὸ χιλιόμετρο.

2ο. Πόσο κόστισε τὸ ταξίδι Ἀθήνα - Θεσσαλονίκη, μόνο σὲ βενζίνα, ἂν ἡ ἀξία της εἶναι 12 δρχ τὸ γαλόνι.

*3.* Σὲ κάθε στροφὴ τοῦ πενταλιοῦ ἑνὸς ποδηλάτου ὁ τροχός του κάνει 3,5 στροφές. Ὅταν τὰ λάστιχα τοῦ ποδηλάτου εἶναι καλὰ φουσκωμένα, ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ ἔχει μῆκος 1,85 m, ἐνῶ ὅταν εἶναι λίγο ξεφούσκωτα, ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος 1,83 m. Ὑπολογίστε γιὰ κάθε περίπτωση χωριστὰ τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ 125 στροφὲς τοῦ πενταλιοῦ.

*4.* Μὲ μιὰ μετρητικὴ ἁλυσίδα τῶν 20 m μετρᾶτε πάνω στὸ ἔδαφος ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB καὶ βρίσκετε μῆκος 63,35 m. Κάθε φορὰ ποὺ τοποθετεῖτε τὴν ἁλυσίδα πάνω στὸ ἔδαφος μπορεῖ νὰ κάμετε ἕνα σφάλμα πρὸς τὰ πάνω ἢ πρὸς τὰ κάτω ὄχι μεγαλύτερο τῶν 2 cm. Ἀνάμεσα σὲ ποιοὺς ἀριθμοὺς θὰ βρίσκεται ἡ πραγματικὴ (ἡ σωστὴ) ἀπόσταση AB;

*5.* Τὸ ἄθροισμα $2{,}15 + 2{,}15 + 2{,}15$ παριστάνει σὲ m τὴν περίμετρο ἑνὸς τριγώνου.

1ο. Ἀντικαταστῆστε αὐτὸ τὸ ἄθροισμα μ' ἕνα γινόμενο.

2ο. Ἂν ἡ μέτρηση κάθε πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἔγινε μὲ προσέγγιση μισοῦ ἑκατοστομέτρου ἀπὸ πάνω ἢ ἀπὸ κάτω, ἀνάμεσα σὲ ποιοὺς ἀριθμοὺς θὰ βρίσκεται τὸ σωστὸ μῆκος τῆς περιμέτρου;

*6*. Νὰ γίνη ἡ δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 τῶν πολλαπλασιασμῶν:

$$335 \times 17 = 5\,695 \text{ καὶ } 425 \times 56 = 23\,809.$$

Ὁ δεύτερος παρουσιάζει ἕνα φανερὸ λάθος, ἐπειδὴ τὸ γινόμενο ἔπρεπε νὰ τελειώνη σὲ 0· μολοντοῦτο ἡ δοκιμὴ τὸν δείχνει σωστό. Μπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε γιατί;

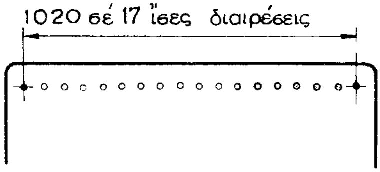
*7*. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει μῆκος 25,50 m, μὲ προσέγγιση 10 cm ἀπὸ κάτω, καὶ πλάτος 12,60 m, ἐπίσης μὲ προσέγγιση 10 cm ἀπὸ κάτω. Νὰ βρεθοῦν: 1ο. Πόσο εἶναι, τὸ πολύ, τὸ πραγματικὸ μῆκος τοῦ οἰκοπέδου καὶ τὸ πραγματικὸ πλάτος του. 2ο. Πόση εἶναι, τὸ πολύ, ἡ πραγματικὴ περίμετρός του.

# Μάθημα 8.

## Ὑπολογισμὸς μήκους μὲ διαίρεση.

1. **Γιὰ νὰ προσδιορίσωμε τὸ μῆκος ἑνὸς μικροῦ εὐθύγραμμου τμήματος,** εἶναι συχνὰ προτιμότερο νὰ πάρωμε περισσότερα τμήματα, ἴσα μὲ αὐτό, συνεχιστὰ πάνω σὲ μιὰν εὐθεία, νὰ μετρήσωμε τὸ ὁλικὸ μῆκος τοῦ τμήματος ποὺ ἀποτελοῦν τὰ μικρὰ αὐτὰ τμήματα καὶ ὕστερα νὰ διαιρέσωμε τὸ μῆκος ποὺ βρήκαμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μικρῶν τμημάτων.

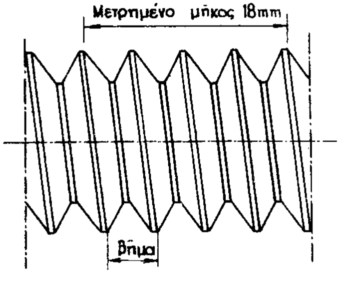
2. **Ἐφαρμογή.** Τὸ σχῆμα 8-α παριστάνει μιὰν ἴσια (εὐθεία) σειρὰ ἀπὸ ἰσαπόστατα καρφιὰ (μιὰ *γραμμὴ ἠλώσεως*, ὅπως λένε οἱ τεχνικοί). Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν ἀπόσταση τῶν ἀξόνων δυὸ διαδοχικῶν καρφιῶν, μετροῦμε πρῶτα τὴν ἀπόσταση τῶν ἀξόνων τῶν δυὸ ἀκρινῶν καρφιῶν· ἔστω ὅτι βρίσκομε 1 020 mm. Ἔπειτα παρατηροῦμε ὅτι, σύμφωνα μὲ τὸ σχῆμα, ἡ ἀπόσταση ποὺ μετρήσαμε περιέχει 17 φορὲς τὴν ἀπόσταση ποὺ ζητοῦμε· ἄρα :




**Σχ. 8-α. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀπόστασης δυὸ διαδοχικῶν καρφιῶν.**

ἀπόσταση δυὸ διαδοχικῶν καρφιῶν = 1 020 mm : 17 = 60 mm.

3. **Ἐφαρμογή.** Γιὰ νὰ προσδιορίσωμε τὸ *βῆμα* ἑνὸς κοχλία (μιᾶς βίδας), δηλαδὴ τὸ *διάστημα ἀνάμεσα σὲ δυὸ διαδοχικὰ σπειρώματα (σὲ δυὸ διαδοχικὲς βόλτες)*, μετροῦμε τὴν ἀπόσταση ποὺ ἔχουν δυὸ σπειρώματα τὰ ὁποῖα χωρίζονται ἀπὸ περισσότερα τέτοια βήματα, π.χ. 4 (σχ. 8-β). Ὕστερα διαι-



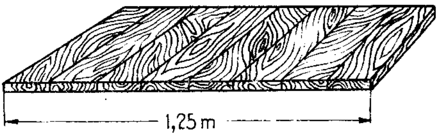

**Σχ. 8-β. Ὑπολογισμὸς τοῦ βήματος ἑνὸς κοχλία.**

ροῦμε τὴν ἀπόσταση ποὺ μετρήσαμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν τῶν βημάτων.

Στὴν περίπτωση τοῦ σχ. 8-β τὸ μῆκος ποὺ βρίσκομε μὲ τὴ μέτρηση 4 βημάτων εἶναι 18 mm· ἄρα:

βῆμα τοῦ κοχλία = 18 mm : 4 = 4,5 mm.

**4. Πρόβλημα.** *Ἕνας ξύλινος πίνακας μήκους 1,25 m πρόκειται νὰ κοπῇ μὲ πριόνι σὲ 8 ἴσες λουρίδες (σχ. 8-γ). Ὑπολογίστε τὸ πλάτος καθεμιᾶς λουρίδας, ξέροντας πὼς μ' ἕνα κόψιμο (μὲ μία τομὴ) χάνομε 2 mm ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς πλάκας.*




**Σχ. 8-γ. Ὑπολογισμὸς τοῦ πλάτους μιᾶς λουρίδας.**

Ἀριθμὸς τομῶν: 8 — 1 = 7.

Μῆκος ποὺ χάνεται μὲ τὶς τομές: 2 mm × 7 = 14 mm.

8 φορὲς τὸ πλάτος μιᾶς λουρίδας εἶναι ἴσο μὲ

1 250 — 14 = 1 236 mm.

Ἄρα πλάτος μιᾶς λουρίδας:

1 236 mm : 8 = 154 mm μὲ προσέγγιση 1 mm ἀπὸ κάτω.

**5. Ἂς ὑπενθυμίσωμε ὅτι γιὰ νὰ κάνωμε σωστὰ μιὰ διαίρεση πρέπει:**

1ο νὰ ξέρωμε καλὰ τὸν Πυθαγόρειο πίνακα·

2ο νὰ μὴν ξεχνᾶμε νὰ βάζωμε τὸ κόμμα στὸ πηλίκο, ὅταν τελειώση ἡ διαίρεση τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτη, τὸν ὁποῖο θὰ ἔχωμε προηγουμένως κάμει ἀκέραιο ὅπως εἴπαμε στὴν Εἰσαγωγή.

Μὴν παραλείπετε νὰ κάνετε καὶ τὴ δοκιμὴ τῆς διαίρεσης μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς τρόπους ποὺ εἴπαμε στὴν Εἰσαγωγή.

*Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Νοερὸς ὑπολογισμός. Διαίρεση δι' ἀριθμοῦ μονοψήφιου.*

Παράδειγμα : 348 διὰ 3 ἴσον πόσο ;

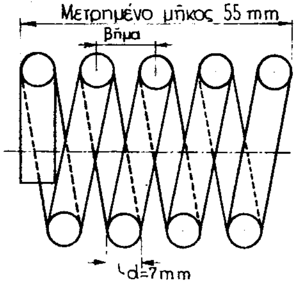
Λέμε : 3 διὰ 3 ἴσον 1, 4 διὰ 3 ἴσον 1( ὑπόλοιπο 1 ), 18 διὰ 3 ἴσον 6. Ἄρα 348 : 3 = 116.

*1.* Ὑπολογίστε νοερὰ

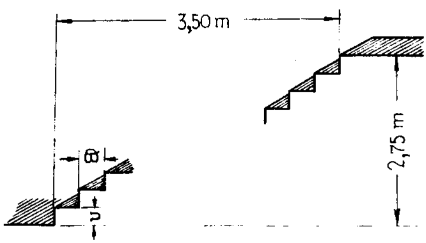
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | 42 : 2, | 218 : 2, | 366 : 2, | 1 048 : 2. |
| 2ο | 96 : 3, | 342 : 3, | 825 : 3, | 2 145 : 3. |
| 3ο | 126 : 6, | 786 : 6, | 5 061 : 7, | 873 : 9. |

* * *

*2.* Ὑπολογίστε τὸ βῆμα τοῦ ἐλατηρίου ποὺ παριστάνεται στὸ σχ. 8-δ.




**Σχ. 8-δ. Ἐλατήριο.**




**Σχ. 8-ε. Σκάλα.**

*3.* Τὸ σχ. 8-ε παριστάνει μιὰ σκάλα μὲ κατακόρυφο ὕψος 2,75 m καὶ ὁριζόντιο μῆκος 3,5 m. Ὅλα τὰ σκαλοπάτια ἔχουν τὸ ἴδιο ὕψος υ καὶ τὸ ἴδιο πλάτος π. Ὑπολογίστε τὶς δυὸ αὐτὲς διαστάσεις υ καὶ π, ξέροντας πὼς ἡ σκάλα ἔχει 14 σκαλοπάτια. Δεῖξτε ὕστερα ὅτι προσθέτοντας στὸ πλάτος ἑνὸς σκαλοπατιοῦ δυὸ φορὲς τὸ ὕψος του βρίσκομε περίπου 64 cm, ὅσο δηλαδὴ εἶναι τὸ μῆκος ἑνὸς κανονικοῦ βήματος ἀνθρώπου.

*4.* Ἕνας ὑδραυλικὸς σημειώνει πάνω σὲ μιὰν εὐθεία τὶς θέσεις 8 ἰσαπόστατων καρφιῶν.

1ο. Ξέροντας ὅτι ἡ ἀπόσταση τῶν δυὸ ἀκρινῶν καρφιῶν εἶναι 335 mm, ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση δυὸ διαδοχικῶν καρφιῶν μὲ προσέγγιση μισοῦ χιλιοστοῦ ἀπὸ κάτω.

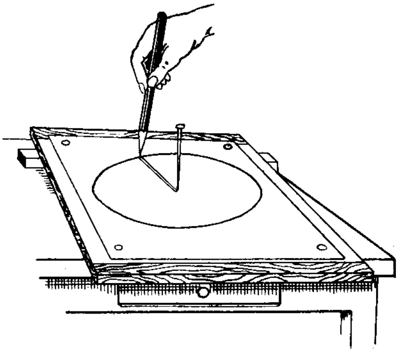
2ο. Ὑποθέστε ὅτι αὐτὴν τὴν τελευταία ἀπόσταση μπορεῖτε νὰ τὴ μεταφέρετε ἀκριβῶς 6 φορὲς συνεχιστὰ γιὰ νὰ τοποθετήσετε τὰ 7 πρῶτα καρφιά. Ποιὰ θὰ εἶναι τότε ἡ ἀπόσταση ποὺ θὰ χωρίζη τὸ ἕβδομο καρφὶ ἀπὸ τὸ τελευταῖο ;

# Μάθημα 9.

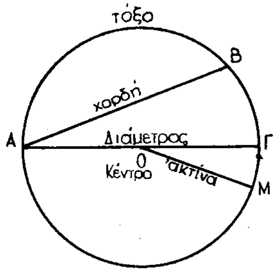
## Περιφέρεια.

Ἄς παρατηρήσωμε τὴν ἐπιφάνεια μιᾶς ἁπλωμένης καὶ ἀκίνητης ποσότητας νεροῦ, τὸ ἀπάνω μέρος μιᾶς μαρμάρινης πλάκας ἐργαστηρίου, τὴν ἐπιφάνεια μιᾶς σανίδας καλὰ πλανισμένης: ὅλες αὐτὲς οἱ ἐπιφάνειες εἶναι *ἐπίπεδες* ἤ, συντομώτερα, *ἐπίπεδα*.

**1. Πάνω σὲ μιὰ πινακίδα σχεδίου** ἄς στερεώσωμε μιὰ καρφίτσα καὶ ἄς τὴ συνδέσωμε, χρησιμοποιώντας μιὰ κλωστὴ ποὺ τὸ μῆκος της δὲν μεταβάλλεται, μὲ τὴ μύτη ἑνὸς καλὰ ξυμένου μολυβιοῦ (σχ. 9-α). Ἄν μετακινήσωμε τὸ μολύβι διατηρώντας



Σχ. 9-α. Ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ γράφει μιὰ περιφέρεια.




Σχ. 9-β. Περιφέρεια.

τὴν κλωστὴ διαρκῶς τεντωμένη, ἡ μύτη του θὰ γράφη πάνω στὸ χαρτὶ σχεδίου μιὰ καμπύλη γραμμὴ ποὺ λέγεται *περιφέρεια*. Ἡ μύτη τῆς καρφίτσας σημειώνει τὸ *κέντρο* τῆς περιφέρειας.

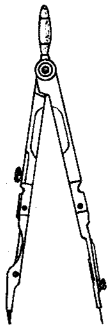
Ὥστε: *Περιφέρεια εἶναι μιὰ ἐπίπεδη κλειστὴ καμπύλη γραμμὴ ποὺ ὅλα της τὰ σημεῖα βρίσκονται σὲ ἴση ἀπόσταση ἀπὸ ἕνα σημεῖο τὸ ὁποῖο λέγεται κέντρο της.*

*Κύκλος* εἶναι ἐκεῖνο τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ μιᾶς περιφέρειας. Στὸ σχ. 9-β βλέπομε: τὸ *κέντρο*

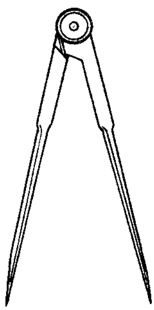
Ο τῆς περιφέρειας· μιὰν *ἀκτίνα* της ΟΜ, ποὺ τὸ μῆκος της εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἀπόσταση ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου τῆς περιφέρειας ἀπὸ τὸ κέντρο· μιὰ *χορδὴ* ΑΒ, ποὺ εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ ἄκρα δυὸ σημεῖα τῆς περιφέρειας· μιὰ *διάμετρο* ΑΓ, ποὺ εἶναι μιὰ χορδὴ ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο· ἕνα *τόξο* ΑΒ, ποὺ εἶναι ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὴν περιφέρεια μὲ ἄκρα δυὸ σημεῖα της.

**2. Γιὰ νὰ χαράξωμε μιὰ περιφέρεια χρησιμοποιοῦμε ἕνα διαβήτη.**

Ὁ *διαβήτης τοῦ σχεδιαστῆ* (σχ. 9-γ) ἔχει ἕνα σκέτο μυτερὸ



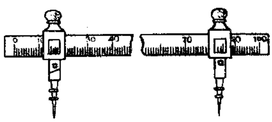
**Σχ. 9-γ. Διαβήτης σχεδιαστῆ.**



**Σχ. 9-δ. Διαβήτης ἐφαρμοστῆ.**

σκέλος, ποὺ ἡ μύτη του τοποθετεῖται στὸ κέντρο, καὶ ἕνα σκέλος μὲ γραφίδα (ψύχα μολυβιοῦ ἢ γραμμοσύρτη), ποὺ γράφει τὴν περιφέρεια.

Ὁ *διαβήτης τοῦ ἐφαρμοστῆ* ἔχει δυὸ σκέτα μυτερὰ σκέλη: ἡ μύτη τοῦ ἑνὸς τοποθετεῖται στὸ κέντρο, ποὺ σημειώνεται μ᾽ ἕνα ἐλαφρὸ χτύπημα τῆς πόντας, ἡ μύτη τοῦ ἄλλου χαράζει τὴν περιφέρεια. Ἕναν τέτοιο διαβήτη χρησιμοποιεῖ καὶ ὁ σχεδιαστὴς γιὰ νὰ ξεσηκώση δοσμένα μήκη γιὰ τὸ σχέδιό του.



**Σχ. 9-ε. Διαβήτης σὲ κανόνα.**

Τὸ σχ. 9-ε δείχνει τὸ διαβήτη ποὺ χρησιμοποιοῦν οἱ λεβητοποιοὶ καὶ οἱ ὑδραυλικοὶ γιὰ νὰ χαράξουν περιφέρειες μὲ μεγάλες ἀκτίνες.

Ἂν δὲν ἔχωμε διαβήτη, μποροῦμε πάντως, μὲ ἕνα ὑποδεκάμετρο ἢ καὶ μὲ μιὰ λουρίδα χαρτί, νὰ προσδιορίσωμε περισσότερα σημεῖα μὲ τὴν ἴδια ἀπόσταση ἀπὸ τὸ κέντρο· ὕστερα χαράζομε μὲ ἐλεύθερη σχεδίαση μιὰ καμπύλη γραμμὴ ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ αὐτά.

Τέλος γιὰ νὰ χαράξωμε μιὰ περιφέρεια μὲ μεγάλη ἀκτίνα, ἐπάνω στὸ ἔδαφος π.χ., μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε ἕνα λεπτὸ σχοινὶ (ἢ ἕνα σπάγγο), ποὺ στὰ δυὸ ἄκρα του ἔχομε δέσει δυὸ μικροὺς πασσάλους· τὸν ἕνα ἀπὸ αὐτοὺς τὸν μπήγομε σταθερὰ στὸ ἔδαφος, τὸν ἄλλο τὸν μετακινοῦμε πάνω σ᾽ αὐτό, διατηρώντας τὸ σχοινὶ πάντα τεντωμένο, καὶ χαράζομε μὲ τὴ μύτη του τὴν περιφέρεια.

*Ἀσκήσεις.* *1.* Χαράξτε μιὰ περιφέρεια μὲ ἀκτίνα 5 cm καὶ ὕστερα, ἀπὸ ἕνα σημεῖο της, φέρτε μιὰ χορδὴ ποὺ νὰ ἔχῃ μῆκος 7 cm καὶ μιὰν ἄλλη μὲ μῆκος 8 cm. Ποιό εἶναι τὸ μῆκος τῆς μεγαλύτερης χορδῆς ποὺ μπορεῖτε νὰ φέρετε ἀπὸ αὐτὸ τὸ σημεῖο;

*2.* Σημειῶστε ἐπάνω στὸ χαρτί σας δυὸ σημεῖα Α καὶ Β μὲ ἀπόσταση 7 cm. Ὕστερα βρῆτε μὲ τὸ διαβήτη ἕνα σημεῖο ποὺ νὰ ἀπέχῃ 5 cm ἀπὸ τὸ Α καὶ 3 cm ἀπὸ τὸ Β. Πόσα τέτοια σημεῖα μπορεῖτε νὰ βρῆτε ἐπάνω στὸ ἐπίπεδο τοῦ χαρτιοῦ σας;

*3.* Χαράξτε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μήκους 12 cm καί, μὲ δοκιμαστικὰ ἀνοίγματα τοῦ διαβήτη σας, διαιρέστε το σὲ 9 ἴσα μέρη.

*4.* Χαράξτε ἕνα ὁποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ὕστερα:

1ο. Μετρῆστε τὶς πλευρές του καὶ βρῆτε τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τους.

2ο. Μ᾽ ἕνα διαβήτη φέρτε τὴν πλευρὰ ΒΑ ἐπάνω στὸ τμῆμα ΒΑ′ κατὰ τὴν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΓΒ καὶ τὴ ΓΑ ἐπάνω στὸ τμῆμα ΓΑ″ κατὰ τὴν προέκταση τῆς ΒΓ. Νὰ μετρήσετε τὸ τμῆμα Α′Α″ καὶ νὰ παραβάλετε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεώς σας μὲ τὸ ἄθροισμα ποὺ βρήκατε παραπάνω.

# Μάθημα 10.

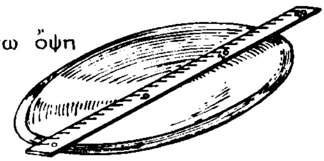
## Μῆκος τῆς περιφέρειας.

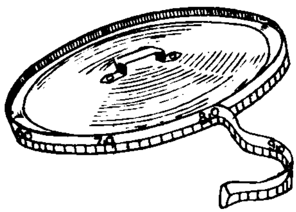
**1. Παίρνομε ἕνα κυκλικὸ δίσκο**, π.χ. τὸ καπάκι μιᾶς κατσαρόλας, καὶ μετροῦμε:

1ο τὴ *διάμετρό του δ*,

2ο τὸ *μῆκος τῆς περιφέρειάς του Π*.

Βρίσκομε ὅτι ἡ διάμετρος δ ἔχει μῆκος 26 cm (σχ. 10-α) καὶ ἡ περιφέρεια Π, 81 cm (σχ. 10-β).




**Σχ. 10-α. Μέτρηση τῆς διαμέτρου.** **Σχ. 10-β. Μέτρηση τῆς περιφέρειας.**

**2. Πόσες φορὲς χωρεῖ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου στὸ μῆκος τῆς περιφέρειας;** Διαιροῦμε τὸ 81 διὰ τοῦ 26 καὶ βρίσκομε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμό:

$$81 : 26 = 3{,}1\ldots$$

Ἂς ξανακάμωμε τὴν ἴδια ἐργασία σὲ ἕναν ἄλλο κυκλικὸ δίσκο, π.χ. σὲ μιὰ ξύλινη ροδέλα μὲ διάμετρο δ = 75 mm. Βρίσκομε γιὰ τὴν περιφέρεια, Π = 240 mm. Τὸ πηλίκον αὐτοῦ τοῦ μήκους Π διὰ τοῦ μήκους δ εἶναι

$$240 : 75 = 3{,}2.$$

Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὰ τὰ δυὸ ἐξαγόμενα, 3,1... καὶ 3,2, εἶναι περίπου ἴσα καὶ ὑποψιαζόμαστε ὅτι θὰ ἦσαν ἀκριβῶς ἴσα, ἂν μπορούσαμε νὰ κάμωμε ἀκριβέστερες μετρήσεις. Καὶ ἀλήθεια, ἂν κάμωμε προσεκτικὰ τὴν ἴδια ἐργασία καὶ μὲ ἄλλες περιφέρειες, θὰ βροῦμε πάντα τὸν ἀριθμὸ 3,14 περίπου. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι:

*Τὸ πηλίκον τοῦ μήκους μιᾶς περιφέρειας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου της εἶναι πάντα τὸ ἴδιο, ὅποια καὶ νὰ εἶναι ἡ περιφέρεια.*

Τὸ πηλίκον αὐτὸ συμβολίζεται (παριστάνεται) μὲ τὸ ἑλληνικὸ μικρὸ γράμμα π.

Μὲ ὑπολογισμοὺς ἀκριβείας ἔχει βρεθῆ ὅτι

$$\Pi : \delta = \frac{\Pi}{\delta} = \pi = 3{,}141\,59... \simeq 3{,}141\,6 \simeq \mathit{3{,}14}.$$

Τὸ σύμβολο $\frac{\Pi}{\delta}$ εἶναι ἕνας ἄλλος τρόπος νὰ γράφωμε τὸ πηλίκον $\Pi : \delta$.

**3. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ μῆκος Π μιᾶς περιφέρειας ποὺ ἔχει διάμετρο 20 cm.** Θὰ ποῦμε ὅτι:

$$\Pi : 20 = \frac{\Pi}{20} = 3{,}14\cdot$$

αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ὅταν διαιρέσωμε τὸ ζητούμενο μῆκος Π διὰ τοῦ μήκους $\delta = 20\,\text{cm}$ τῆς διαμέτρου, θὰ βροῦμε πηλίκον 3,14. Ἄρα, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ πηλίκον 3,14 μὲ τὸν διαιρέτη 20, θὰ ἔχωμε τὸν διαιρετέο Π:

$$\Pi = 20\,\text{cm} \times 3{,}14 = \mathit{62{,}8\ cm}.$$

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος μιᾶς περιφέρειας πολλαπλασιάζομε τὴ διάμετρο μὲ τὸν ἀριθμὸ 3,14.*

**4. Ἀντίστροφο πρόβλημα: Νὰ βρεθῆ ἡ διάμετρος μιᾶς περιφέρειας μήκους 50 cm.**

Ἀφοῦ ἡ διάμετρος δ πολλαπλασιασμένη μὲ 3,14 δίνει 50 cm, διαιρώντας τὸ 50 cm διὰ τοῦ 3,14 θὰ βροῦμε τὴ διάμετρο:

$$\delta = \frac{\Pi}{3{,}4} = 50\ \text{cm} : 3{,}14 = 15{,}9...\text{cm} \simeq \mathit{15{,}9\ cm}.$$

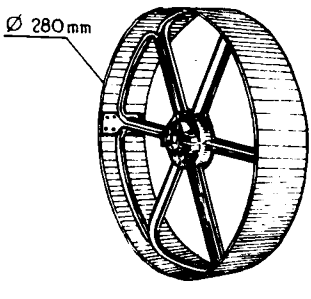
Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου μιᾶς περιφέρειας, διαιροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3,14.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Πάρτε τρεῖς κυκλικοὺς δίσκους τῆς ἐκλογῆς σας.

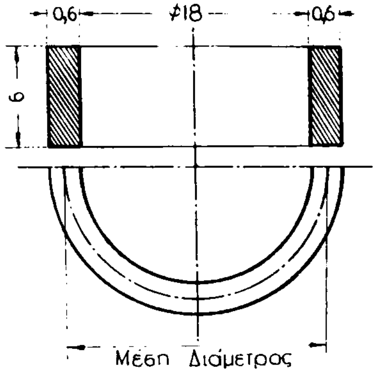
Μετρῆστε τὴ διάμετρο καὶ τὴν περιφέρεια τοῦ καθενὸς καὶ ὕστερα ὑπολογίστε τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου.

*2.* Ἀπὸ ἕνα φύλλο χαρτόνι κόψτε ἕναν κύκλο, ποὺ νὰ ἔχῃ διάμετρο 10 cm. Κυλῆστε τον ἐπάνω σὲ μιὰν εὐθεία κατὰ ἕναν ὁλόκληρο γύρο (κατὰ μία στροφή) καὶ μετρῆστε τὸ ἀντίστοιχο τμῆμα τῆς εὐθείας (τὸ τμῆμα αὐτὸ λέγεται *ἀνάπτυγμα* τῆς περιφέρειας μὲ διάμετρο 10 cm). Ὕστερα ὑπολογίστε μιὰ προσεγγιστικὴ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ π.

*3* Ὑπολογίστε τὴν περιφέρεια τῆς τροχαλίας τοῦ σχήματος 10-γ.




**Σχ. 10-γ. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας μιᾶς τροχαλίας.**




**Σχ. 10-δ. Ὑπολογισμὸς τῆς μέσης διαμέτρου ἑνὸς κυλίνδρου.**

*4.* Ἔχομε ἕναν κύλινδρο μὲ ἐσωτερικὴ διάμετρο 18 cm καὶ μὲ πάχος τοιχώματος 0,6 cm. Τὸ σχῆμα 10-δ τὸν παριστάνει μὲ μιὰν ἀξονικὴ τομὴ (ἐπάνω μέρος τοῦ σχήματος) καὶ μὲ μιὰ μισὴ κάθετη διατομὴ (κάτω μέρος τοῦ σχήματος). Ὑπολογίστε τὴν ἐξωτερικὴ διάμετρο, τὴ μέση διάμετρο καὶ τὸ μῆκος τῆς μέσης περιφέρειας τοῦ κυλίνδρου.

*5.* Ἕνα αὐτοκίνητο στρέφεται πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ διατρέχει ἕνα τέταρτο περιφέρειας· οἱ τροχοί του ἔχουν διάμετρο 80 cm.

1ο. Ἂν τὸ τόξο, ποὺ διαγράφει ὁ δεξιὸς πίσω τροχός, ἔχῃ ἀκτίνα 12,5 m, πόσες στροφὲς θὰ κάμῃ ὁ τροχὸς αὐτός;

2ο. Ἂν ἡ ἀπόσταση τῶν δυὸ πίσω τροχῶν, ἀπὸ τὸ μέσο ἐπίπεδο τοῦ ἑνὸς ὡς τὸ μέσο ἐπίπεδο τοῦ ἄλλου, εἶναι 1,29 m, πόσες στροφὲς θὰ κάμῃ ὁ ἀριστερὸς πίσω τροχός;

3ο. Ποιὸ συμπέρασμα βγάζετε ἀπὸ τὶς δυὸ παραπάνω ἀπαντήσεις;

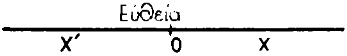
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ

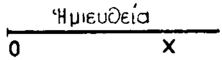
## Μάθημα 11.

### Γωνίες.

**1. Μιὰ εὐθεία X΄X (σχ. 11-α) εἶναι κάτι ἀπέραντο,** γιατὶ μποροῦμε πάντα νὰ τὴν προεκτείνωμε καὶ κατὰ τὴ μιὰ φορὰ (π.χ. πρὸς τὰ δεξιὰ) καὶ κατὰ τὴν ἀντίθετη φορὰ (πρὸς τ᾿ ἀριστερά). Ἂς σημειώσωμε τώρα ἕνα σημεῖο O πάνω σὲ μιὰν (ἀπέ-




Σχ. 11-α. Εὐθεία καὶ ἡμιευθεῖες της.

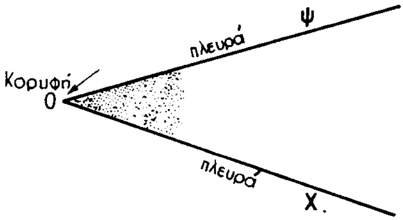



Σχ. 11-β. Ἡμιευθεία.

ραντη) εὐθεία X΄X (σχ. 11-α)· Τὸ σημεῖο αὐτὸ O χωρίζει τὴν εὐθεία X΄X σὲ δυὸ μέρη, ἕνα OX ἀπὸ τὴ μιὰ μεριὰ τοῦ O (δεξιὰ τοῦ O) καὶ ἕνα OX΄ ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριὰ τοῦ O (ἀριστερὰ τοῦ O). Τὸ καθένα ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας X΄X λέγεται *ἡμιευθεία*.

*Μιὰ ἡμιευθεία εἶναι λοιπὸν ἕνα μέρος εὐθείας, τὸ ὁποῖο ἀρχίζει σ᾿ ἕνα σημεῖο της O καὶ μπορεῖ νὰ προεκταθῇ ὅσο θέλομε ἀπὸ τὴ μιὰ μεριὰ τοῦ O.*

**2. Ἂς χαράξωμε δυὸ ἡμιευθεῖες OX καὶ OΨ,** ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο O· θὰ ἔχωμε σχεδιάσει ἔτσι μιὰ *γωνία* τὴ *γωνία* $\widehat{XO\Psi}$ (ἡ γωνία αὐτὴ σημειώνεται καὶ συντομώτερα μὲ

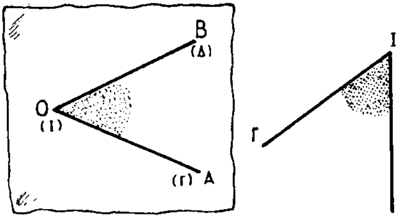



Σχ. 11-γ. Γωνία $\widehat{XO\Psi}$.

τὸ σύμβολο $\widehat{O}$). Οἱ ἡμιευθεῖες OX καὶ OΨ λέγονται *πλευρές της*, τὸ σημεῖο O *κορυφή της* (σχ. 11-γ).

*Ὥστε, γωνία εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ κάνουν δυὸ ἡμιευθεῖες, οἱ ὁποῖες ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.*

**3. Ἂς συγκρίνωμε δυὸ γωνίες $\widehat{AOB}$ καὶ $\widehat{ΓΙΔ}$** (σχ. 11-δ).

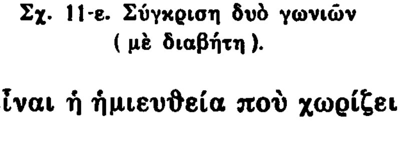



**Σχ. 11-δ. Σύγκριση δυὸ γωνιῶν (μὲ διαφανὲς χαρτί).**

1ο. Μὲ ἕνα διαφανὲς χαρτὶ (ἢ μὲ ἕνα καρμπὸν) ξεσηκώνομε τὴ γωνία $\widehat{ΓΙΔ}$ καὶ δοκιμάζομε ἂν μπορεῖ νὰ ἐφαρμοστῇ στὴ γωνία $\widehat{AOB}$. Γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτόν, τοποθετοῦμε τὴν κορυφὴ Ι στὸ σημεῖο Ο, τὴν πλευρὰ ΙΓ ἐπάνω στὴν πλευρὰ ΟΑ καὶ ἐξετάζομε μήπως καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ ΙΔ συμπίπτει μὲ τὴν ΟΒ. Ἂν αὐτὸ συμβαίνῃ, τότε λέμε πῶς οἱ δυὸ γωνίες εἶναι *ἴσες*· ἂν ὄχι, τότε τὶς λέμε *ἄνισες*.

*Ὥστε, δυὸ γωνίες εἶναι ἴσες, ὅταν μποροῦμε νὰ τὶς κάμωμε νὰ συμπέσουν θέτοντας τὴ μιὰ ἐπάνω στὴν ἄλλη.*

2ο. Μ' ἕνα διαβήτη χαράζομε δυὸ κυκλικὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια ἀκτίνα καὶ κέντρα τὰ σημεῖα Ο καὶ Ι ἀντιστοίχως (σχ. 11-ε). Ὕστερα παίρνομε στὸ διαβήτη μας τὸ μῆκος ΓΔ καὶ χαράζομε μ' αὐτὸ ἕνα τόξο κύκλου ποὺ ἔχει κέντρο τὸ Α. Ἂν τὸ τόξο αὐτὸ περνᾷ ἀπὸ τὸ Β, τότε οἱ δυὸ γωνίες εἶναι *ἴσες*· ἂν ὄχι τότε εἶναι *ἄνισες*.

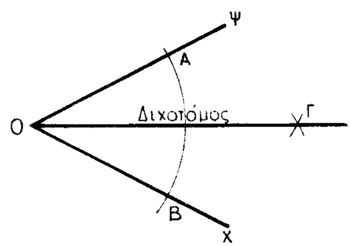



**Σχ. 11-ε. Σύγκριση δυὸ γωνιῶν (μὲ διαβήτη).**

**4. Διχοτόμος μιᾶς γωνίας εἶναι ἡ ἡμιευθεία ποὺ χωρίζει τὴ γωνία σὲ δυὸ γωνίες ἴσες.**

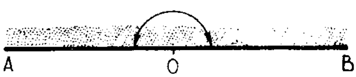
Γιὰ νὰ χαράξωμε τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{XOΨ}$ (σχ. 11-ϛ) γράφομε μὲ κέντρο τὸ Ο ἕνα κυκλικὸ τόξο, ποὺ κόβει τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας, στὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Ὕστερα, μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μὲ ἀκτίνα μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ μισὴ ἀπόσταση ΑΒ, γράφομε δύο τόξα ποὺ θὰ κόβωνται σ' ἕνα σημεῖο Γ: *ἡ ΟΓ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας* $\widehat{X O \Psi}$.




**Σχ. 11-ς. Χάραξη τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας.**

**5. Μιὰ ἀπλωτὴ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἡμιευθεῖες τοποθετημένες ἔτσι ποὺ ἡ μιά τους εἶναι προέκταση τῆς ἄλλης κατ' ἀντίθετη φορά.** Π.χ. ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ (σχ. 11-ζ).

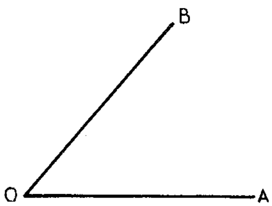



**Σχ. 11-ζ. Ἁπλωτὴ γωνία.**

Εἶναι φανερὸ ὅτι ὅλες οἱ ἁπλωτὲς γωνίες εἶναι μεταξύ τους *ἴσες*.

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε μιὰ γωνία καὶ ὕστερα, χρησιμοποιώντας καρμπὸν ἢ χαρτὶ διαφανές, χαράξτε μιὰν ἄλλη 5 φορὲς μεγαλύτερη.

*2.* Μὲ τὸ διαβήτη χαράξτε στὸ τετράδιό σας μιὰ γωνία ἴση μὲ τὴν $\widehat{AOB}$ (σχ. 11-η). Γιὰ νὰ τὸ πετύχετε, χρησιμοποιῆστε τὴ μέθοδο τοῦ παραγράφου 3 γιὰ τὴ σύγκριση δύο γωνιῶν.




**Σχ. 11-η.**

*3.* Χαράξτε μιὰ γωνία καὶ ὕστερα, μὲ τὸ διαβήτη, χαράξτε μιὰν ἄλλη 4 φορὲς μεγαλύτερη.

*4.* Χαράξτε δύο γωνίες ἄνισες. Ὕστερα, μ' ἕνα διαβήτη ἢ μὲ διαφανὲς χαρτί, κατασκευάστε τὸ ἄθροισμά τους καθὼς καὶ τὴ διαφορά τους.

*5.* Χαράξτε τὴ διχοτόμο τῆς $\widehat{AOB}$ ποὺ σχεδιάσατε στὴν ἄσκηση 2. Μὲ παρόμοια κατασκευὴ χαράξτε τὴ διχοτόμο μιᾶς ἀπλωτῆς γωνίας.

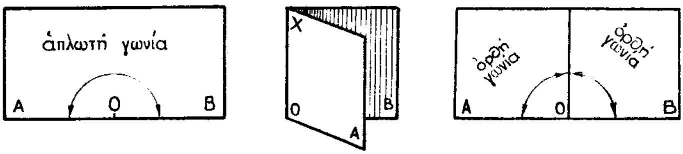
*6.* Χωρίστε μιὰν ὁποιαδήποτε γωνία σὲ 2, 4, 8, ... ἴσα μέρη (ἴσες γωνίες). Κάμετε τὸ ἴδιο σὲ μιὰν ἀπλωτὴ γωνία.

*7.* Χαράξτε, πρὸς τὴν ἴδια μεριὰ τῆς ΟΑ, δύο γωνίες $\widehat{AOB}$ καὶ $\widehat{AO\Gamma}$ καὶ ὕστερα τὴ διχοτόμο ΟΔ τῆς $\widehat{BO\Gamma}$. Βρῆτε γιατί ἡ γωνία $\widehat{AO\Delta}$ εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ ἄθροισμα τῶν $\widehat{AOB}$ καὶ $\widehat{AO\Gamma}$.

# Μάθημα 12.

## Ὀρθὴ γωνία. Μέτρηση γωνιῶν.

**1. Ἂς διαιρέσωμε μιὰν ἁπλωτὴ γωνία σὲ δυὸ ἴσα μέρη** (σὲ δυὸ ἴσες γωνίες). Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ πετύχωμε καὶ μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείχνει τὸ σχ. 12-α διπλώνοντας σὲ δυὸ ἕνα φύλλο




**Σχ. 12-α. Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι τὸ μισὸ μιᾶς ἁπλωτῆς.**

χαρτί. Ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ γωνίες ποὺ προκύπτουν μὲ τὸ τσάκισμα λέγεται *ὀρθὴ γωνία.*

Ὥστε, *ὀρθὴ γωνία εἶναι τὸ μισὸ μιᾶς ἁπλωτῆς γωνίας.*

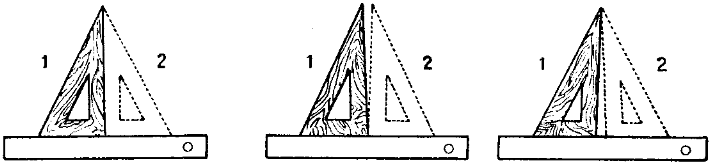
Ἀφοῦ ὅλες οἱ ἁπλωτὲς γωνίες εἶναι ἴσες, καὶ τὰ μισά τους θὰ εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

Ὥστε, *ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους.*

Γι' αὐτὸν ἀκριβῶς τὸ λόγο ἡ ὀρθὴ γωνία χρησιμεύει συχνὰ ὡς μονάδα στὴ μέτρηση τῶν γωνιῶν.

Γιὰ νὰ χαράξωμε μιὰν ὀρθὴ γωνία χρησιμοποιοῦμε ἕνα ὄργανο, ἀπὸ ξύλο ἢ πλαστικὴ ὕλη, τὸ ὁποῖο λέγεται *τρίγωνο* (ἢ *ὀρθόγωνο*).

Πρὶν τὸ χρησιμοποιήσωμε πρέπει νὰ τὸ ἐλέγξωμε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:




**Τρίγωνο σωστό.** **Τρίγωνα ἐλαττωματικά.**

**Σχ. 12-β.**

Παίρνομε ἕνα χάρακα, ποὺ ἐλέγξαμε, καὶ τοῦ ἐφαρμόζομε τὸ τρίγωνο, πρῶτα στὴ θέση 1 (σχ. 12-β), ὕστερα στὴ θέση 2. Σὲ καθεμία ἀπὸ αὐτὲς τὶς δυὸ θέσεις χαράζομε μιὰν εὐθεία ἀκολουθώντας τὴν πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ποὺ δὲν συμπίπτει μὲ τὴν ἀκμὴ τοῦ χάρακα "Αν οἱ δύο εὐθεῖες ποὺ χαράξαμε δὲν συμπίπτουν, τότε τὸ τρίγωνο δὲν εἶναι σωστό, γιατὶ οἱ γωνίες, ποὺ θὰ σχεδιάζαμε μὲ αὐτό, δὲν εἶναι ἴσες μὲ τὸ μισὸ μιᾶς ἀποπλατυσμένης γωνίας καὶ *ἑπομένως δὲν εἶναι ὀρθές.*

*"Αν ὅμως οἱ δυὸ εὐθεῖες ποὺ χαράξαμε συμπίπτουν, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι σωστό.*

**2. Μονάδες γιὰ τὴ μέτρηση γωνιῶν.** Ὅπως εἴπαμε, μιὰ ἀπὸ τὶς χρησιμοποιούμενες μονάδες εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία. Πιὸ συχνὰ ὅμως χρησιμοποιοῦνται ὡς μονάδες οἱ ἀκόλουθες ὑποδιαιρέσεις τῆς ὀρθῆς γωνίας:

Ἡ *μοίρα* ($1^0$) = ἕνα ἀπὸ τὰ ἐνενήντα ἴσα μέρη μιᾶς ὀρθῆς γωνίας. Ἕνα τέτοιο μέρος λέγεται ἕνα *ἐνενηκοστὸ* τῆς ὀρθῆς καὶ σημειώνεται μὲ τὸ σύμβολο $\frac{1}{90}$, ποὺ λέγεται *κλάσμα* καὶ ποὺ θὰ μελετήσωμε πιὸ λεπτομερῶς στὸ Μάθημα 17.

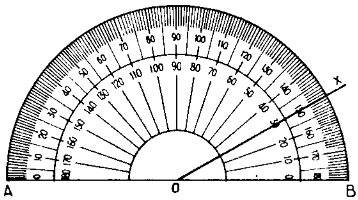
Τὸ *πρῶτο λεπτὸ* ($1'$) = ἕνα ἑξηκοστὸ $\left(\frac{1}{60}\right)$ τῆς μοίρας.

Τὸ *δεύτερο λεπτὸ* ($1''$) = ἕνα ἑξηκοστὸ $\left(\frac{1}{60}\right)$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Ὥστε, μία ὀρθὴ γωνία ἔχει $90^0$, μία μοίρα ἔχει $60'$ καὶ ἕνα πρῶτο λεπτὸ ἔχει $60''$.

Μιὰ ἀποπλατυσμένη γωνία ἔχει $180^0$.

**3. Γιὰ νὰ μετρήσωμε μιὰ γωνία** χρησιμοποιοῦμε ἕνα *μοιρογνωμόνιο*. Τὸ ὄργανο αὐτὸ εἶναι μιὰ ἀποπλατυσμένη γωνία χαραγμένη ἐπάνω στὴν διάμετρο AB ἑνὸς ἡμικυκλικοῦ φύλλου, ἀπὸ διαφανῆ πλαστικὴ ὕλη συνήθως (σχ. 12-γ). Ἡ ἡμιπεριφέρεια, ποὺ ἀποτελεῖ τὸ ἕνα ἄκρο τοῦ φύλλου, εἶναι διαιρεμένη σὲ 180 ἴσα μέρη μὲ δυὸ βαθμολογήσεις ἀπὸ 0 ὡς 180: μιὰν ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὸ A καὶ μιὰν ἄλλη ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ τὸ B. Χρησιμοποιώντας αὐτὲς τὶς βαθμολογήσεις μποροῦμε νὰ μετρήσωμε μιὰ γωνία μὲ μονάδα τὴ μοίρα, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 12-γ:



**Σχ. 12-γ. Μέτρηση γωνίας μ' ἕνα μοιρογνωμόνιο.**

$$\widehat{AOX} = 150^0 \quad , \quad \widehat{BOX} = 30^0.$$

Μιὰ γωνία δὲν μετριέται ὅμως πάντα ἀκριβῶς ἀπὸ ἀκέραιο ἀριθμὸ μοιρῶν. Χρησιμοποιοῦμε τότε γιὰ τὴ μέτρησή της καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις τῆς μοίρας.

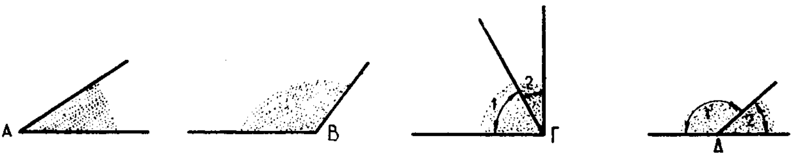
Παραδείγματα: $20^0\ 30'$, $120^0\ 50'\ 42''$.

Τέτοιοι ἀριθμοὶ λέγονται *συμμιγεῖς* (*ἢ σύμμικτοι ἑξηκονταδικοί*). Θ' ἀσχοληθοῦμε μ' αὐτοὺς στὸ Κεφάλαιο 4 τοῦ βιβλίου.

4. **Ὁρισμοί.** Μιὰ γωνία λέγεται *ὀξεία*, ὅταν εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθή, λέγεται *ἀμβλεία*, ὅταν εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθή.

Δυὸ γωνίες λέγονται *συμπληρωματικές*, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθή, δηλαδὴ $90^0$. Ἡ καθεμιά τους λέγεται *συμπλήρωμα* τῆς ἄλλης.

Δυὸ γωνίες λέγονται *παραπληρωματικές*, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ἀποπλατυσμένη, δηλαδὴ 2 ὀρθὲς γωνίες ἤ, σὲ μοῖρες, $180^0$. Ἡ καθεμιά τους λέγεται *παραπλήρωμα* τῆς ἄλλης.



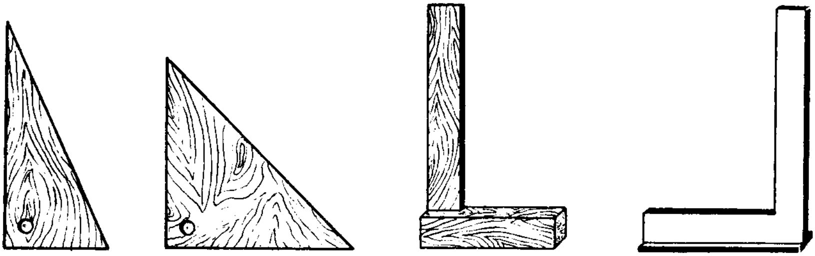
**Ὀξεία γωνία.** **Ἀμβλεία γωνία.** **Συμπληρωματικὲς γωνίες.** **Παραπληρωματικὲς γωνίες.**

**Σχ. 12-δ.**

Στὸ σχῆμα 12-δ δίνονται τέσσερα ἀντίστοιχα παραδείγματα.

Δυὸ γωνίες λέγονται *ἐφεξῆς*, ὅταν ἔχουν μιὰ κοινὴ πλευρὰ καὶ βρίσκωνται ἡ μιὰ ἔξω ἀπὸ τὴν ἄλλη. Παράδειγμα: οἱ γωνίες $\widehat{\Gamma_1}$ καὶ $\widehat{\Gamma_2}$ ἢ $\widehat{\Delta_1}$ καὶ $\widehat{\Delta_2}$ τοῦ σχήματος 12-δ.

*Ἀσκήσεις. 1.* Ἐξετάστε καὶ περιγράψτε τὰ τρίγωνα (τὰ ὀρθόγωνα), ποὺ χρησιμοποιοῦνται ἀπὸ διάφορους τεχνίτες (σχ. 12-ε).



**Τρίγωνα σχεδιαστῆ.** **Γωνία ξυλουργοῦ.** **Γωνία ἐφαρμοστῆ.**

**Σχ. 12-ε.**

*2.* Ἕνας τροχὸς στρέφεται κατὰ ἕνα ὄγδοο $\left(\frac{1}{8}\right)$ στροφῆς. Πόση εἶναι, σὲ μοῖρες, ἡ γωνία ποὺ θὰ διαγράψῃ μιὰ ἀπὸ τὶς ἀκτίνες τοῦ τροχοῦ;

*3.* Πάρτε μιὰν ἡμιευθεία ΟΑ· ὕστερα χαράξτε δυὸ ἡμιευθεῖες: μιὰν ΟΒ ἔτσι ποὺ ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ νὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ μιὰν ΟΓ ἔτσι ποὺ ἡ $\widehat{AO\Gamma}$ νὰ εἶναι ἀποπλατυσμένη γωνία. Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο σχεδιάστε τώρα, στὴ μεριὰ τῆς εὐθείας ΑΟΓ, ὅπου βρίσκεται ἡ ΟΒ, μιὰν ἡμιευθεία ΟΔ ἔτσι ποὺ ἡ $\widehat{AO\Delta} = 15^0$. Ὑπολογίστε τὶς γωνίες $\widehat{\Delta OB}$ κα $\widehat{\Delta O\Gamma}$.

*4.* Ὑπολογίστε τὸ συμπλήρωμα καὶ τὸ παραπλήρωμα τῶν γωνιῶν: $47^0$, $85^0$, $36^0$, $17^0$·

Ὅταν τὸ συμπλήρωμα μιᾶς γωνίας εἶναι γνωστό, ποιὸς εἶναι ὁ ταχύτερος τρόπος νὰ ὑπολογίσωμε τὸ παραπλήρωμά της;

# Μάθημα 13.

## Γωνίες μὲ τὴν ἴδια κορυφή.

## Εὐθεῖες κάθετες.

**1. Ἂς παρατηρήσωμε τὶς δυὸ γωνίες ποὺ σχηματίζονται,** ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο τῆς εὐθείας ΒΓ (σχ. 13-α) χαράξωμε μιὰν ἡμιευθεία ΟΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἀποπλατυσμένη γωνία $\widehat{\mathrm{BO\Gamma}}$, δηλαδὴ μὲ $180^0$.


**Σχ. 13-α. Οἱ γωνίες $\widehat{\mathrm{AOB}}$ καὶ $\widehat{\mathrm{AO\Gamma}}$ εἶναι παραπληρωματικές.**

Ὥστε, *αὐτὲς οἱ δυὸ γωνίες εἶναι παραπληρωματικές.*

Ἡ καθεμιά τους εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ἄλλης.

Ἂν τὶς μετρήσωμε θὰ βροῦμε: $\widehat{\mathrm{\Gamma OA}} = 32^0$, $\widehat{\mathrm{AOB}} = 148^0$ καὶ τὸ ἄθροισμά τους εἶναι αὐτὸ ποὺ προβλέψαμε: $32^0 + 148^0 = 180^0$.

**2. Ἂς παρατηρήσωμε τώρα τὶς διαδοχικὲς γωνίες** ποὺ σχηματίζονται γύρω σ' ἕνα σημεῖο Ο ἀπὸ περισσότερες ἡμιευθεῖες ποὺ ξεκινοῦν ἀπ' αὐτὸ καὶ ἂς τὶς μετρήσωμε.

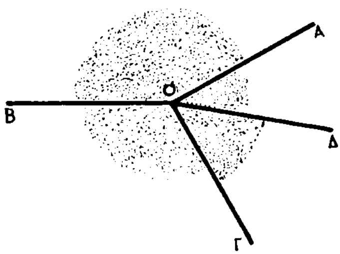
Στὸ σχῆμα 13-β θὰ βροῦμε:

$$\widehat{\mathrm{AOB}} = 152^0$$

$$\widehat{\mathrm{BO\Gamma}} = 120^0$$

$$\widehat{\mathrm{\Gamma O\Delta}} = 51^0$$

$$\widehat{\mathrm{\Delta OA}} = 37^0.$$



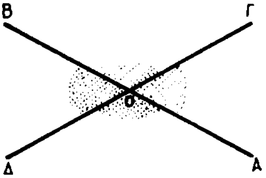

**Σχ. 13-β. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι ἴσο μὲ δυὸ ἀποπλατυσμένες.**

Προσθέτομε τὶς τέσσερις αὐτὲς γωνίες. Βλέπομε τότε ὅτι τὸ ἄθροισμά τους εἶναι ἴσο μὲ $152^0 + 120^0 + 51^0 + 37^0 = 360^0$, *δηλαδὴ μὲ δύο ἀποπλατυσμένες γωνίες.*

Ἀντὶ νὰ ἐπαληθεύσωμε αὐτὴ τὴν ἰδιότητα κάνοντας μετρήσεις μὲ μοιρογνωμόνιο, μποροῦμε νὰ τὴν δείξωμε μὲ τὴν ἀκόλουθη σκέψη: Προεκτείνομε μιὰν ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς ἡμιευθεῖες, τὴν ΟΑ π.χ., στὴν ΟΑ′, κατ' ἀντίθετη φορά· ἔτσι σὲ κάθε μεριὰ τῆς εὐθείας ΑΟΑ′ σχηματίζεται μιὰ ἀποπλατυσμένη γωνία. Βλέπομε τότε φανερὰ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν, ποὺ δίνονται στὸ σχῆμα 13-β, εἶναι ἴσο μὲ δύο ἀποπλατυσμένες γωνίες.

**3. Ἂς ἐξετάσωμε τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζουν δύο εὐθεῖες** ποὺ *τέμνονται*, δηλαδὴ κόβουν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη (σχ. 13-γ).

Ἂν μετρήσωμε τὶς $\widehat{AO\Gamma}$ καὶ $\widehat{BO\Delta}$, ποὺ λέγονται *κατὰ κορυφὴν (ἢ ἀντικόρυφες)*, θὰ βροῦμε ὅτι εἶναι ἴσες. Ἐπίσης εἶναι ἴσες καὶ οἱ ἀντικόρυφες γωνίες $\widehat{\Gamma OB}$ καὶ $\widehat{\Delta OA}$:




Σχ. 13-γ. Δύο ἀντικόρυφες γωνίες εἶναι ἴσες.

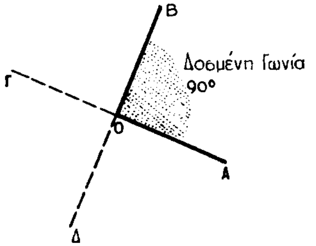
$$\widehat{AO\Gamma} = 55^\circ \qquad \widehat{\Gamma OB} = 125^\circ$$

$$\widehat{BO\Delta} = 55^\circ \qquad \widehat{\Delta OA} = 125^\circ.$$

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε: *Ἂν δύο γωνίες εἶναι ἀντικόρυφες θὰ εἶναι ἴσες.*

Γιὰ νὰ δείξωμε αὐτὴ τὴν ἰδιότητα, μποροῦμε νὰ ἀποφύγωμε τὴ μέτρηση κάνοντας τὴν ἀκόλουθη σκέψη: ἡ γωνία $\widehat{AO\Gamma}$ εἶναι ἕνα μέρος τῆς ἀποπλατυσμένης γωνίας $\widehat{AOB}$, ἑπομένως ἔχει γιὰ παραπλήρωμα τὸ ἄλλο μέρος τῆς ἀποπλατυσμένης αὐτῆς γωνίας, δηλαδὴ τὴ γωνία $\widehat{\Gamma OB}$. Ὅμοια, ἡ γωνία $\widehat{BO\Delta}$ εἶναι ἕνα μέρος τῆς ἀποπλατυσμένης γωνίας $\widehat{\Gamma O\Delta}$ καὶ ἔχει γιὰ παραπλήρωμα τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς τῆς γωνίας, δηλαδὴ τὴ γωνία $\widehat{\Gamma OB}$. Ἀφοῦ ὅμως οἱ γωνίες $\widehat{AO\Gamma}$ καὶ $\widehat{BO\Delta}$ ἔχουν τὸ ἴδιο παραπλήρωμα, πρέπει νὰ εἶναι ἴσες. Ὅμοια δείχνομε ὅτι καὶ $\widehat{\Gamma OB} = \widehat{\Delta OA}$.

**4. Ἂς προεκτείνωμε τὶς πλευρὲς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας** $\widehat{AOB}$ (σχ. 13-δ) καὶ ἂς ἐξετάσωμε τὶς γωνίες ποὺ θὰ σχηματιστοῦν. *Χωρὶς νὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ κάμωμε νέες μετρήσεις* μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι:




**Σχ. 13-δ. Οἱ εὐθεῖες ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετες.**

1ο ἡ $\widehat{\Gamma O\Delta}$ σὰν ἀντικόρυφη γωνία τῆς $\widehat{AOB}$ εἶναι ἴση μὲ αὐτήν, δηλαδὴ μὲ 90° (§ 3)

2ο ἡ $\widehat{BO\Gamma}$ σὰν παραπλήρωμα τῆς $\widehat{AOB}$ εἶναι $= 90^\circ$ (§ 1)·

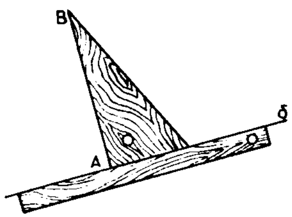
3ο ἡ $\widehat{AO\Delta}$ σὰν παραπλήρωμα τῆς $\widehat{AOB}$ εἶναι καὶ αὐτὴ $= 90^\circ$ (§ 1).

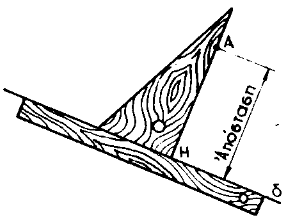
Βλέπομε λοιπὸν ὅτι ἡ καθεμία ἀπὸ τὶς τέσσερις γωνίες ποὺ σχηματίστηκαν μὲ τὴν προέκταση τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{AOB}$ εἶναι ὀρθή. Λέμε τότε: οἱ εὐθεῖες ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετες.

Ὥστε, *δυὸ εὐθεῖες εἶναι κάθετες μεταξύ τους, ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὶς τέσσερις γωνίες, ποὺ σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή.*

**5. Χρησιμοποιώντας τὸ χάρακα καὶ τὸ τρίγωνο:**

1ο. Ἂς «ὑψώσωμε» τὴν κάθετη εὐθεία ΑΒ (*καί, συντομώτερα*, τὴν *κάθετο* ΑΒ) σ' ἕνα σημεῖο Α τῆς εὐθείας δ (σχ. 13-ε). (Στὸ ἑξῆς θὰ σημειώνωμε μιὰν εὐθεία καὶ μ' ἕνα μόνο μικρὸ ἑλ-




**Σχ. 13-ε.** **Σχ. 13-ς.**

**Χάραξη καθέτων.**

ληνικὸ γράμμα, ἀντὶ μὲ δυὸ κεφαλαῖα, ποὺ γράφομε γιὰ νὰ σημειώσωμε δυὸ σημεῖα της).

2ο. Ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α ἂς «κατεβάσωμε» τὴν κάθετο ΑΗ στὴν εὐθεία δ (σχ. 13-ϛ).

Τὸ μῆκος τοῦ κάθετου τμήματος ΑΗ λέγεται *ἀπόσταση* τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὴν εὐθεία δ.

Στὸ Μάθημα 15 θὰ ἰδοῦμε ἕναν ἄλλο τρόπο νὰ χαράζωμε κάθετο σὲ μιὰν εὐθεία χρησιμοποιώντας χάρακα καὶ τρίγωνο.

*Ἀσκήσεις 1.* Χρησιμοποιώντας ἕνα τρίγωνο, ἀφοῦ πρῶτα τὸ ἐλέγξετε, κόψτε ἀπὸ ἕνα χαρτόνι δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ μὲ ὀρθὲς τὶς γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{E}$. Πλαγιάστε τα ἐπάνω σὲ μιὰ ξύλινη πινακίδα, τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, ἔτσι ποὺ τὰ σημεῖα Β καὶ Ε καθὼς καὶ οἱ ἡμιευθεῖες ΒΓ καὶ ΕΖ νὰ συμπίπτουν. Τί μπορεῖτε νὰ πῆτε γιὰ τὶς πλευρὲς ΒΑ καὶ ΕΔ;

*2.* Χρησιμοποιώντας ἕνα μοιρογνωμόνιο κατασκευάστε ἕνα (ἐλαττωματικὸ) τρίγωνο μὲ γωνία $88^0$ ἀντὶ γιὰ μιὰν ὀρθὴ ($90^0$). Πῶς μπορεῖ ἕνας συμμαθητής σας νὰ ἐξακριβώση χωρὶς μοιρογνωμόνιο ὅτι αὐτὸ τὸ τρίγωνο δὲν εἶναι σωστό; Ἡ ἴδια ἐρώτηση γιὰ ἕνα τρίγωνο ποὺ ἔχει γωνία $93^0$ ἀντὶ γιὰ μιὰν ὀρθή.

*3.* Χαράξτε μιὰν ὀρθὴ γωνία $\widehat{XO\Psi}$ καί, στὸ ἐσωτερικό της, μιὰν ὁποιαδήποτε ἡμιευθεία ΟΖ. Ὕστερα χαράξτε τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{XOZ}$ καὶ $\widehat{ZO\Psi}$ καὶ δεῖξτε ὅτι σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $45^0$.

*4.* Χαράξτε μιὰν εὐθεία ΧΨ καί, ἀπὸ ἕνα σημεῖο της Ο, μιὰν ἡμιευθεία ΟΖ. Χαράξτε ἔπειτα τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{XOZ}$ καὶ $\widehat{ZO\Psi}$ καὶ δεῖξτε ὅτι εἶναι κάθετες.

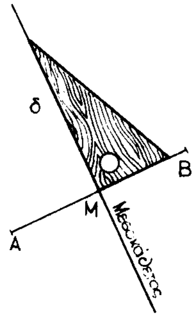
*5.* Ἡ διαφορὰ τῶν δύο γωνιῶν, ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ μιὰν ἡμιευθεία ΟΖ καὶ μιὰν εὐθεία ΧΟΨ, ἂς εἶναι $36^0$. Ὑπολογίστε αὐτὲς τὶς δυὸ γωνίες.

*6.* Ἀπὸ τὴν κορυφὴ Ο μιᾶς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ χαράζομε μιὰν ἐξωτερικὴ ἡμιευθεία, ποὺ σχηματίζει μὲ τὶς δύο πλευρὲς ΟΧ καὶ ΟΨ δύο γωνίες ποὺ διαφέρουν μεταξύ τους κατὰ $12^0$. Ὑπολογίστε αὐτὲς τὶς δύο γωνίες.

# Μάθημα 14.

## Μεσοκάθετος εὐθύγραμμου τμήματος.

**1. Ἂς πάρωμε τὸ μέσο Μ ἑνὸς τμήματος ΑΒ καὶ ἂς ὑψώσωμε ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτὸ τὴν κάθετο στὴν εὐθεία ΑΒ** (σχ. 14-α). Ἡ εὐθεία δ ποὺ σχεδιάσαμε λέγεται *μεσοκάθετος* τοῦ ΑΒ.




**Σχ. 14-α. Μεσοκάθετος τμήματος εὐθείας.**

*Ἡ μεσοκάθετος ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἡ κάθετος στὸ μέσο του.*

**2. Ἐπάνω στὴ μεσοκάθετο ἑνὸς τμήματος ΑΒ** παίρνομε ἕνα *ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ* καὶ μετροῦμε τὶς ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τμήματος.

Ἔτσι, στὸ σχῆμα 14-β, βρίσκομε:

ΜΑ = 22 mm καὶ ΜΒ = 22 mm.

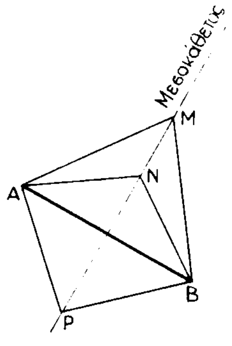
Ἂς πάρωμε ἕνα δεύτερο σημεῖο Ν ἐπάνω στὴν ἴδια μεσοκάθετο καὶ ἂς μετρήσωμε τὶς ἀποστάσεις ΝΑ καὶ ΝΒ:

ΝΑ = 16 mm καὶ ΝΒ = 16 mm.

Ἂς πάρωμε καὶ ἕνα τρίτο σημεῖο Ρ καὶ ἂς μετρήσωμε τὶς ΡΑ καὶ ΡΒ:

ΡΑ = 18 mm καὶ ΡΒ = 18 mm.

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι κάθε σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ἔχει *ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα του.*



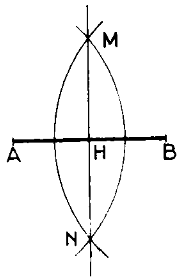

**Σχ. 14-β. Κάθε σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὰ Α καὶ Β.**

*Ἐπαληθεύομε ἔτσι ὅτι κάθε σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς τμήματος ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος.*

**3. Χρησιμοποιώντας διαβήτη θέλομε νὰ προσδιορίσωμε δυὸ σημεῖα Μ καὶ Ν ποὺ τὸ καθένα τους νὰ ἔχῃ ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ δυὸ δοσμένα σημεῖα Α καὶ Β.**

Γιὰ νὰ τὸ πετύχωμε, γράφομε, μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀλλὰ μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα, δυὸ κυκλικὰ τόξα ποὺ *τέμνονται·* ἔστω Μ τὸ σημεῖο τῆς τομῆς των. Θὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ, ἑπομένως τὸ Μ θὰ ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὰ Α καὶ Β. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο προσδιορίζομε ἕνα δεύτερο σημεῖο Ν ποὺ νὰ ἔχῃ ἴσες ἀποστάσεις, ΝΑ = ΝΒ, ἀπὸ τὰ Α καὶ Β.

Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι *σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου* τοῦ ΑΒ. Ἂν λοιπὸν τὰ συνδέσωμε μὲ μιὰν εὐθεία θὰ ἔχωμε κατασκευάσει τὴ μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ.




**Σχ. 14-γ. Κατασκευὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ.**

Ὅταν ἡ θέση τοῦ ΑΒ καὶ ἡ ἔκταση τοῦ χαρτιοῦ μας τὸ ἐπιτρέπουν, μποροῦμε ν' ἁπλοποιήσωμε τὴ σχεδίαση ὡς ἑξῆς: δίνομε στὰ κυκλικὰ τόξα; ποὺ προσδιορίζουν τὸ Ν, τὴν ἀκτίνα ποὺ δώσαμε στὰ τόξα ποὺ προσδιόρισαν τὸ Μ· ἔτσι, ὅπως φαίνεται καὶ στὸ σχῆμα 14-γ, ἀρκοῦν γιὰ τὴν κατασκευὴ δυὸ κινήσεις τοῦ διαβήτη.

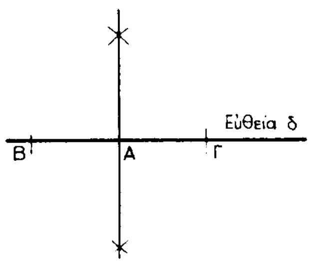
Μὲ τὴν παραπάνω κατασκευὴ πετύχαμε:

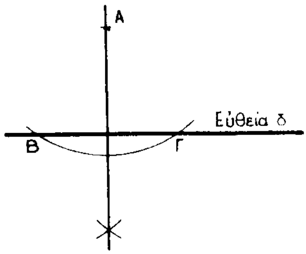
1ο *νὰ χαράξωμε τὴ μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ·*

2ο *νὰ προσδιορίσωμε τὸ μέσο Η τοῦ ΑΒ.*

### 4. Χρησιμοποιώντας διαβήτη καὶ χάρακα:

1ο ὑψώνομε τὴν κάθετο μιᾶς εὐθείας σὲ ἕνα σημεῖο της Α (σχ. 14-δ)·




**Σχ. 14-δ.** **Σχ. 14-ε.**

**Χάραξη τῆς καθέτου στὴν εὐθεία δ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α.**

2ο κατεβάζομε ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α τὴν κάθετο σὲ μιὰν εὐθεία (σχ. 14-ε).

Καὶ στὶς δυὸ περιπτώσεις ἐπιστρέψαμε στὴν προηγούμενη κατασκευή, προσδιορίζοντας πρῶτα μὲ τὸ διαβήτη δυὸ σημεῖα Β καὶ Γ τῆς εὐθείας ποὺ ἀπέχουν ἴσα ἀπὸ τὸ Α· δὲν μᾶς ἔμενε ἔπειτα παρὰ νὰ χαράξωμε τὴ μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΒΓ.

*Ἀσκήσεις.* *1.* Χαράξτε ἕνα τμῆμα ΜΝ = 80 mm, ὕστερα, χρησιμοποιώντας ἕνα τρίγωνο, φέρτε τὴ μεσοκάθετο τοῦ ΜΝ. Ἐπαληθεῦστε γιὰ τρία σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου τὴν ἰδιότητα ποὺ ἀναφέραμε στὴν παράγραφο 2 τοῦ Μαθήματος.

*2.* Σημειῶστε δύο σημεῖα Α καὶ Β, ποὺ νὰ ἀπέχουν τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο 55 mm. Ὕστερα, μὲ τὸ διαβήτη, προσδιορίστε ἐπάνω στὸ χαρτί σας ἕνα σημεῖο Μ ἔτσι ποὺ ΜΑ = ΜΒ = 75 mm. Πόσα τέτοια σημεῖα Μ μπορεῖτε νὰ προσδιορίσετε;

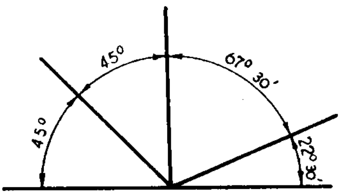
*3.* Χρησιμοποιώντας διαβήτη καὶ χάρακα χωρίστε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, ποὺ ἔχει μῆκος 72 mm, πρῶτα σὲ 2, ὕστερα σὲ 4 καὶ τέλος σὲ 8 ἴσα μέρη. Ἐλέγξτε τὴν κατασκευή σας μὲ ἕνα ὑποδεκάμετρο.

*4.* Χωρίστε σὲ 7 ἴσα κομμάτια ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 53 mm μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο:

1ο. Ὑπολογίστε μὲ διαίρεση τὸ μῆκος ἑνὸς κομματιοῦ:

$$53 \text{ mm} : 7 = 7{,}57\ldots \simeq 7{,}6 \text{ mm}.$$

2ο. Προσθέστε 7,6 mm στὸ ἀρχικὸ τμῆμα καὶ ὕστερα χωρίστε, μὲ γραφικὴ κατασκευή, σὲ 8 ἴσα κομμάτια τὸ τμῆμα ποὺ προκύπτει.



**Σχ. 14-ς. Κατασκευὴ γωνιῶν.**

*5.* Σχεδιάστε ξανὰ τὸ σχῆμα 14-ς καὶ ἐξηγῆστε μὲ λίγα λόγια τὴν κατασκευὴ τῶν γωνιῶν.

*6.* Χαράξτε μιὰν εὐθεία ε καὶ ἕνα σημεῖο Α σὲ ἀπόσταση 50 mm ἀπὸ τὴν εὐθεία.

1ο. Φέρτε ἀπὸ τὸ σημεῖο Α ὡς τὴν εὐθεία ε δυὸ πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ μήκους 60 mm τὸ καθένα. Ἐπαληθεῦστε ὕστερα ὅτι τὰ πόδια τους Β καὶ Γ ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ τὸ πόδι Δ τῆς καθέτου ΑΔ στὴν εὐθεία ε.

2ο. Νὰ κάμετε τὴν ἴδια ἐργασία μὲ πλάγια τμήματα τῶν 80 mm καθὼς καὶ τῶν 90 mm.

# Μάθημα 15.

## Παράλληλες εὐθεῖες.

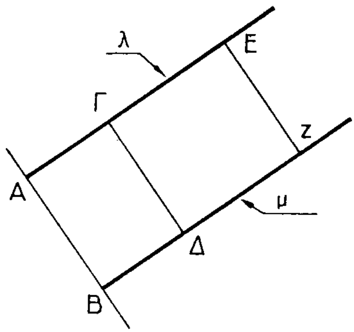
**1. Φέρνομε καθέτους λ καὶ μ σὲ μιὰν εὐθεία ΑΒ στὰ σημεῖα της Α καὶ Β** καὶ παρατηροῦμε αὐτὲς τὶς δυὸ εὐθεῖες ποὺ χαράξαμε στὸ χαρτί μας (σχ. 15-α).

Ἂς μετρήσωμε πρῶτα τὸ τμῆμα ΑΒ (σχ. 15-α)· βρίσκομε 17 mm.

Στὸ σχῆμα 15-α οἱ εὐθεῖες λ καὶ μ ἔχουν σχεδιασθῆ μὲ κάποιο *πάχος*. Γιὰ νὰ ἔχωμε λοιπὸν ἀκριβέστερα ἀποτελέσματα στὴ μέτρησή μας, μετροῦμε τὴν *ἐσωτερικὴ* ἀπόσταση τῶν δυὸ σχεδιασμένων εὐθειῶν.

Ἂς πάρωμε ἔπειτα ἕνα *ὁποιοδήποτε* σημεῖο Γ ἐπάνω στὴν εὐθεία λ καὶ ἂς μετρήσωμε τὴν ἀπόστασή του ΓΔ ἀπὸ τὴν ἄλλη εὐθεία μ. Βρίσκομε ΓΔ=17 mm.

Ἂς ἐπαναλάβωμε τὴν ἴδια ἐργασία μὲ ἕνα ἄλλο σημεῖο Ε τῆς εὐθείας λ. Βρίσκομε πάλι ΕΖ = 17 mm.




**Σχ. 15-α. Οἱ εὐθεῖες λ καὶ μ εἶναι παράλληλες.**

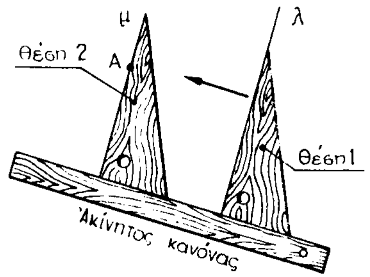
Ἔτσι βλέπομε πὼς *οἱ δυὸ εὐθεῖες λ καὶ μ βρίσκονται πάντα στὴν ἴδια ἀπόσταση, 17 mm, ἡ μιὰ ἀπὸ τὴν ἄλλη*. Ἑπομένως, ὁσοδήποτε κι ἂν προεκταθοῦν, οἱ δυὸ εὐθεῖες λ καὶ μ δὲν θὰ συναντηθοῦν ποτέ· καὶ ἀλήθεια, γιὰ νὰ συναντηθοῦν, θὰ πρέπη ἡ ἀπόσταση μεταξύ τους νὰ γίνη μηδέν. Δυὸ τέτοιες εὐθεῖες λέγονται *παράλληλες*.

*Δυὸ εὐθεῖες ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι παράλληλες ἂν δὲν συναντιοῦνται, ὅσο καὶ νὰ προεκταθοῦν.*

Ὑπενθυμίζομε ὅτι στὴν ἀρχὴ τοῦ Μαθήματος 9 ἐξηγήσαμε τί εἶναι ἐπίπεδο.

**2. Χρησιμοποιώντας ἕναν κανόνα καὶ ἕνα ὀρθόγωνο (τρίγωνο) ἂς χαράξωμε τὴν εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α καὶ εἶναι παράλληλη πρὸς μιὰν εὐθεία λ** (σχ. 15-β).

Βάζομε μιὰ πλευρὰ τοῦ ὀρθογώνου ἐπάνω στὴν εὐθεία λ καὶ ὕστερα τοποθετοῦμε τὸν κανόνα ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 15-β.

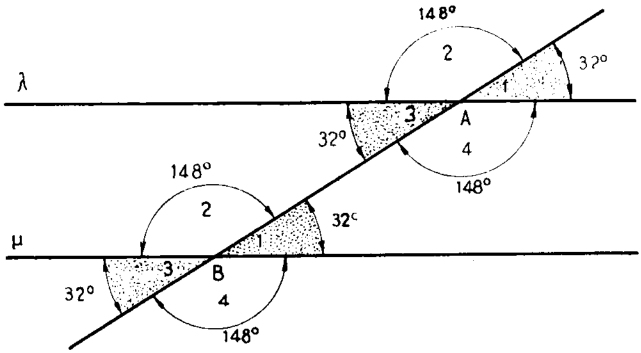


**Σχ. 15-β. Χάραξη παραλλήλου πρὸς μιὰν εὐθεία.**

*Κρατώντας τὸν κανόνα ἀκίνητο* μετακινοῦμε τὸ ὀρθόγωνο ἔτσι ποὺ ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά του νὰ περάση ἀπὸ τὸ σημεῖο Α καί, ἀκολουθώντας την, χαράζομε τὴν εὐθεία μ.

*Οἱ εὐθεῖες λ καὶ μ, ἐπειδὴ εἶναι καὶ οἱ δυὸ κάθετες στὸν κανόνα, εἶναι παράλληλες μεταξύ τους.*

**3. Ἂς προσέξωμε τὶς ὀκτὼ γωνίες ποὺ σχηματίζει μὲ δυὸ παράλληλες εὐθεῖες μιὰ εὐθεία ποὺ τὶς κόβει** (ποὺ τὶς τέμνει καὶ ποὺ γι' αὐτὸ λέγεται *τέμνουσα*).



**Σχ. 15-γ. Παράλληλες εὐθεῖες ποὺ κόβονται ἀπὸ μιὰ τέμνουσα.**

Στὸ σχῆμα 15-γ βρίσκομε μὲ μετρήσεις:

$$\widehat{A}_1 = 32^0,\ \widehat{B}_1 = 32^0,\ \text{ἄρα}\ \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$$
$$\widehat{A}_2 = 148^0,\ \widehat{B}_2 = 148^0,\ \text{ἄρα}\ \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$$
$$\widehat{A}_3 = 32^0,\ \widehat{B}_3 = 32^0,\ \text{ἄρα}\ \widehat{A}_3 = \widehat{B}_3$$
$$\widehat{A}_4 = 148^0,\ \widehat{B}_4 = 148^0,\ \text{ἄρα}\ \widehat{A}_4 = \widehat{B}_4$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι:

*Ὅταν μιὰ εὐθεία κόβη δυὸ ἄλλες παράλληλες, οἱ τέσσερις γωνίες ποὺ σχηματίζονται γύρω ἀπὸ τὸ ἕνα σημεῖο τομῆς εἶναι ἴσες, μία πρὸς μίαν, μὲ τὶς τέσσερις γωνίες ποὺ ἀντιστοιχοῦν σ' αὐτὲς γύρω ἀπὸ τὸ ἄλλο σημεῖο τομῆς.*

Ἀντίστροφα, ὅταν δυὸ εὐθεῖες τοῦ σχεδίου σας κόβωνται ἀπὸ μιὰ τέμνουσα ἔτσι ποὺ νὰ εἶναι ἴσες δυὸ ἀντίστοιχες γωνίες γύρω στὰ δυὸ σημεῖα τομῆς, τότε οἱ δυὸ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

**4. Κατασκευές.** *Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α θέλομε νὰ φέρωμε:*

*1ο τὴν παράλληλο πρὸς μιὰν εὐθεία δ·*

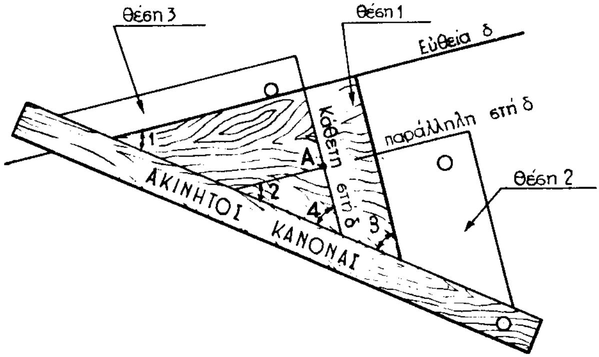
*2ο τὴν κάθετο πρὸς τὴν εὐθεία δ.*

Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτόν, τοποθετοῦμε τὴ μιὰ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ τριγώνου ἐπάνω στὴν εὐθεία δ ἔτσι, ποὺ τὸ τρίγωνο νὰ σκεπάζη τὸ σημεῖο Α (σχ. 15-δ, θέση 1). Ὕστερα παίρνομε τὸ χάρακα καὶ ἐφαρμόζομε τὴν ἀκμή του στὴ μεγάλη πλευρὰ τοῦ τριγώνου, στὴν *ὑποτείνουσά* του ὅπως τὴν ὀνομάζομε. Κρατώντας τώρα ἀκίνητο τὸ χάρακα μετακινοῦμε κατὰ μῆκος τῆς ἀκμῆς του τὸ τρίγωνο, ὥσπου ἡ μιὰ ἢ ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά του νὰ περάση ἀπὸ τὸ σημεῖο Α.

1ο. Στὴ θέση 2 (σχ. 15-δ) χαράζομε *ἀπὸ τὸ σημεῖο Α τὴν παράλληλο πρὸς τὴν εὐθεία δ·* (καὶ ἀλήθεια, οἱ γωνίες 1 καὶ 2 εἶναι ἴσες).

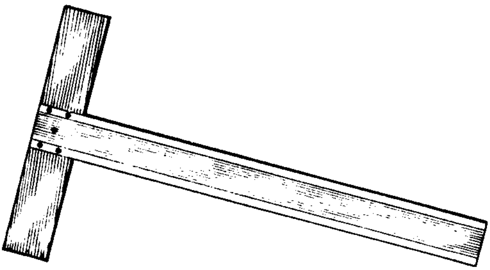
2ο. Στὴ θέση 3 χαράζομε *ἀπὸ τὸ σημεῖο Α τὴν κάθετο πρὸς τὴν εὐθεία δ·* (καὶ ἀλήθεια, οἱ γωνίες 3 καὶ 4 εἶναι ἴσες).

Ἡ τελευταία αὐτὴ κατασκευή, ὅταν τὴ συγκρίνωμε μὲ ἐκείνη ποὺ δώσαμε στὸ Μάθημα 13, ἔχει τὸ πλεονέκτημα νὰ καθορίζῃ πιὸ εὐκολοδιάκριτα τὸ πόδι τῆς καθέτου.




Σχ. 15-δ. Χάραξη καθέτου καὶ παραλλήλου ἀπὸ ἕνα σημεῖο πρὸς μιὰν εὐθεία.

*Ἀσκήσεις.* *1.* Χαράξτε μιὰν εὐθεία καὶ πάρτε ἕνα σημεῖο σὲ ἀπόσταση 4 cm ἀπὸ αὐτήν. Ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτὸ χαράξτε τὴν παράλληλο πρὸς τὴν εὐθεία.



Σχ. 15-ε. Ταῦ.

*2.* Παρατηρῆστε ἕνα ταῦ (Τ) σχεδίου καὶ ἐξηγῆστε πῶς καὶ γιατί μποροῦμε νὰ χαράξωμε μὲ αὐτὸ παράλληλες εὐθεῖες.

*3.* Χαρακῶστε ἕνα λευκὸ φύλλο χαρτὶ μὲ παράλληλες εὐθεῖες ποὺ ἔχουν ἀπόσταση μεταξύ τους 7 mm.

*4.* Τετραγωνίστε ἕνα λευκὸ χαρτὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Χαράξτε δυὸ κάθετες εὐθεῖες ΟΧ καὶ ΟΨ καί, ξεκινώντας ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο, διαιρέστε τις σὲ τμήματα τῶν 2 cm. Τέλος, ἀπὸ τὰ σημεῖα ποὺ διαιροῦν τὴν καθεμιά τους σ' αὐτὰ τὰ τμήματα, φέρτε παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλη.

*5.* Σχεδιάστε τὴν πλακόστρωση ἑνὸς δαπέδου μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο:

Χαράξτε δυὸ εὐθεῖες ΟΧ καὶ ΟΨ ποὺ νὰ σχηματίζουν γωνίαν $45^0$ Ὕστερα, ξεκινώντας ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο, διαιρέστε τις σὲ τμήματα τῶν 2 cm. Τέλος, ἀπὸ τὰ σημεῖα ποὺ διαιροῦν τὴν καθεμιά τους σ' αὐτὰ τὰ τμήματα, φέρτε παράλληλες πρὸς τὴν ἄλλη.

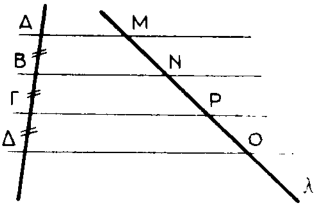
*6.* Χαράξτε 3 παράλληλες εὐθεῖες ποὺ νὰ ἔχουν μεταξύ τους ἀπόσταση 30 mm, καθὼς καὶ μιὰν εὐθεία ποὺ νὰ τὶς κόβη καὶ τὶς τρεῖς. Νὰ συγκρίνετε τὰ δυὸ τμήματα ποὺ ὁρίζουν ἐπάνω σ' αὐτὴν τὴν τέμνουσα οἱ τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες.

*7.* Χαράξτε δυὸ παράλληλες εὐθεῖες καὶ μιὰ τέμνουσα ποὺ νὰ σχηματίζη μὲ τὴ μιὰ παράλληλη μιὰ γωνία $47^0$. Ὑπολογίστε τὶς ἑπτὰ ἄλλες γωνίες, ποὺ σχηματίζονται γύρω ἀπὸ τὰ δυὸ σημεῖα τομῆς.

# Μάθημα 16.

## Διαίρεση εὐθυγράμμου τμήματος σὲ ἴσα μέρη.

**1. Μιὰ ἰδιότητα. Ἀπὸ 4 σημεῖα Α,Β,Γ,Δ μιᾶς εὐθείας ποὺ ἀπέχουν ἴσα μεταξύ τους τραβοῦμε εὐθεῖες παράλληλες μεταξύ τους** καὶ ὕστερα τὶς κόβομε μὲ μιὰν ὁποιαδήποτε τέμνουσα λ (σχ. 16-α). Ἔτσι ὁρίζονται πάνω στὴν εὐθεία αὐτὴ λ 3 τμήματα· τὰ μετροῦμε καὶ βρίσκομε:



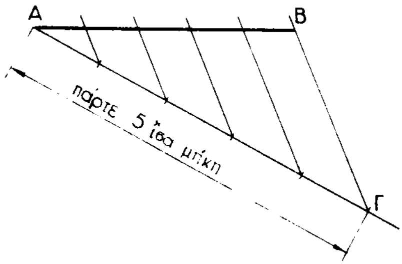
**Σχ. 16-α. Παράλληλες εὐθεῖες ποὺ ἀπέχουν ἴσα μεταξύ τους καὶ τέμνουσες.**

MN = 7,5 mm,
NP = 7,5 mm,
PO = 7,5 mm.

*Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι τὰ τμήματα αὐτὰ εἶναι ἴσα.*

**2. Ἐφαρμογή. Νὰ διαιρέσωμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σὲ ὁσαδήποτε ἴσα κομμάτια,** π.χ. σὲ 5 (σχ. 16-β).

Χαράζομε μιὰν ὁποιαδήποτε βοηθητικὴ εὐθεία ἀπὸ τὸ Α (ἡ ὁποία ὅμως εἶναι σκόπιμο νὰ σχηματίζῃ γωνία $30^0$ ὡς $60^0$ μὲ τὴν ΑΒ). Ἐπάνω στὴ βοηθητικὴ αὐτὴ εὐθεία παίρνομε, ξεκινώντας ἀπὸ τὸ Α καὶ διαδοχικά, 5 φορὲς τὸ ἴδιο μῆκος· (αὐτὸ μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε μῆκος, οὔτε ὅμως πολὺ μικρὸ οὔτε πολὺ μεγάλο). Ἑνώνομε τὸ σημεῖο Β τοῦ ΑΒ μὲ τὸ ἄκρο Γ τοῦ πέμπτου μήκους καὶ τραβοῦμε, ἀπὸ τὰ σημεῖα ποὺ χωρίζουν, τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο, τὰ 5 ἴσα μήκη, εὐθεῖες

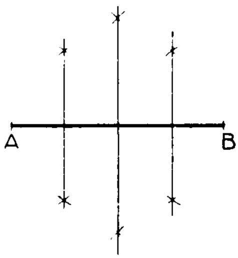


**Σχ. 16-β. Διαίρεση τοῦ ΑΒ σὲ 5 ἴσα κομμάτια.**

παράλληλες πρὸς τὴ ΒΓ. Αὐτὲς θὰ κόψουν τὸ ΑΒ σὲ 5 ἴσα κομμάτια, ἐπειδὴ καὶ τὰ 5 μήκη, ποὺ πήραμε πάνω στὴ βοηθητικὴ εὐθεία, εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

*Ἔτσι τὸ τμῆμα ΑΒ διαιρέθηκε σὲ πέντε ἴσα κομμάτια ( μέρη ).*

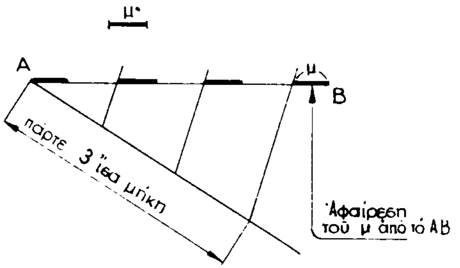
**3. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σὲ 2, 4, 8,... ἴσα κομμάτια** μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε ὅπως καὶ παραπάνω. Μποροῦμε ὅμως ἐπίσης, χρησιμοποιώντας *διαβήτη καὶ χάρακα*, νὰ χωρίσωμε (σχ. 16-γ) τὸ ΑΒ, πρῶτα σὲ 2 ἴσα κομμάτια (Μάθημα 14), ὕστερα τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ σὲ ἄλλα δύο ἴσα κομμάτια κ.ο.κ.




**Σχ. 16-γ. Διαίρεση τοῦ ΑΒ σὲ 4 ἴσα μέρη.**

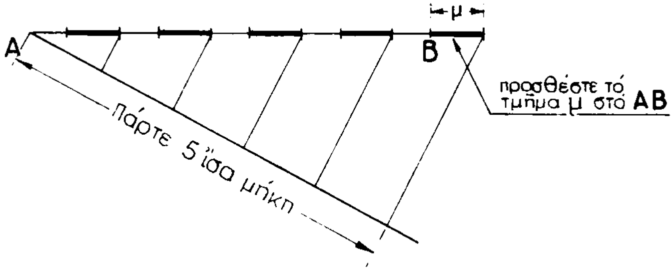
**4. Ἐφαρμογή.** *Πάνω σ' ἕνα τμῆμα ΑΒ τοποθετῆστε τέσσερις φορὲς ἕνα τμῆμα μ* (μικρότερο ἀπὸ τὸ τέταρτο τοῦ ΑΒ) *ἔτσι ποὺ τὰ τοποθετημένα τμήματα μ νὰ ἀπέχουν ἴσα μεταξύ τους καὶ στὰ ἄκρα Α καὶ Β νὰ ὑπάρχουν ἢ δυὸ τμήματα μ ἢ δυὸ κενὰ διαστήματα:*

1ο. *Στὰ ἄκρα* Α καὶ Β εἶναι τοποθετημένα δυὸ τμήματα μ. Τότε, ἂν ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ ΑΒ τὸ τελευταῖο τμῆμα μ, θὰ μείνῃ (σχ. 16-δ) ἕνα τμῆμα ΑΓ, ποὺ θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τρία τμήματα μ καὶ τρία ἴσα κενὰ διαστήματα, ἀπὸ ἕνα μετὰ κάθε τμῆμα μ. Ἑπομένως, θὰ ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε τὸ τμῆμα ΑΓ = ΑΒ — μ σὲ 3 ἴσα μέρη καὶ νὰ τοποθετήσωμε τὸ μ στὸ ἀριστερὸ ἄκρο τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ μέρη καθὼς καὶ στὴ θέση ΓΒ.




**Σχ. 16-δ. Τοποθετῆστε 4 ἴσα μήκη μ σὲ ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις ἐπάνω στὸ ΑΒ.**

2ο. *Στὰ ἄκρα* Α καὶ Β ὑπάρχουν δύο κενὰ διαστήματα. Τότε, ἂν προεκτείνωμε τὸ ΑΒ πέρα ἀπὸ τὸ Β κατὰ τὸ μῆκος μ, θὰ λάβωμε ἕνα τμῆμα ΑΔ ποὺ θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ πέντε ἴσα κενὰ διαστήματα καὶ πέντε τμήματα μ, ἀπὸ ἕνα μετὰ κάθε κενὸ διάστημα (σχ. 16-ε). Ἑπομένως, θὰ ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε τὸ τμῆμα




**Σχ. 16-ε. Τοποθετῆστε 4 ἴσα μήκη μ σὲ ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις, ἐπάνω στὸ ΑΒ.**

$ΑΔ = ΑΒ + μ$ σὲ πέντε ἴσα μέρη καὶ στὸ δεξιὸ ἄκρο τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ τέσσερα πρῶτα μέρη νὰ τοποθετήσωμε τὸ τμῆμα μ (σχ. 16-ε).

*Ἀσκήσεις. 1.* Σχεδιάστε τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες μὲ ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις, χρησιμοποιώντας π.χ. τὴ χαράκωση τοῦ τετραδίου σας. Πῶς μπορεῖτε μ' αὐτὸ τὸ σχέδιο νὰ διαιρέσετε ἕνα δοσμένο εὐθύγραμμο τμῆμα σὲ 2 ἴσα μέρη;

*2.* Μὲ ὅμοια μέθοδο ὅπως καὶ στὴν προηγούμενη ἄσκηση χωρίστε ἕνα τμῆμα μήκους 54 mm σὲ 5 ἴσα μέρη.

3. Χωρίστε τρία εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο μῆκος 144 mm, σὲ 8 ἴσα κομμάτια τὸ καθένα, μὲ τοὺς παρακάτω τρεῖς τρόπους:

1ο παίρνοντας ἐπάνω στὸ ΑΒ διαδοχικὰ 8 φορὲς ἕνα μῆκος α ἴσο μὲ τὸ πηλίκον τοῦ 144 mm διὰ τοῦ 8·

2ο παίρνοντας ἐπάνω στὸ ΑΒ, κάθε φορὰ μὲ ἀρχὴ τὸ ἄκρο Α τοῦ ΑΒ, ἑπτὰ μήκη ἴσα ἀντιστοίχως μὲ α, 2α, 3α,..., 7α, (α εἶναι τὸ μῆκος ποὺ προσδιορίσατε παραπάνω)·

3ο ἐφαρμόζοντας τὴ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς παραγράφου 3 τοῦ Μαθήματος.

᾿Αφοῦ τελειώσετε, νὰ συγκρίνετε τὶς τρεῖς διαιρέσεις ποὺ χαράξατε.

4. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει μῆκος 100 mm. Ἐπάνω σ᾿ αὐτὸ τοποθετῆστε 5 μήκη τῶν 8 mm σὲ ἴσες ἀποστάσεις μεταξύ τους ἔτσι ποὺ νὰ ὑπάρχουν ἢ 4 κενὰ διαστήματα ἢ 6 κενὰ διαστήματα. Λύστε τὴν ἄσκηση αὐτὴ καὶ μὲ γραφικὴ κατασκευὴ (σχεδίαση) καί μὲ ὑπολογισμό.

5. Σᾶς δίνουν τὸ σχέδιο μιᾶς ἀνεμόσκαλας (σχ. 16-ς).

1ο. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ΑΒ.

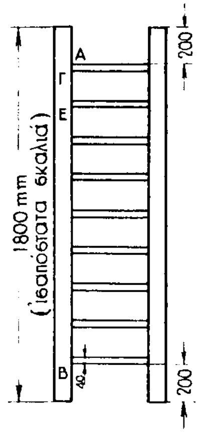
2ο. Μετρῆστε πόσα εἶναι τὰ σκαλιὰ καὶ πόσα τὰ κενὰ διαστήματα μεταξὺ Α καὶ Β.

3ο. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ΓΒ.

4ο. Μετρῆστε πόσα εἶναι τὰ σκαλιὰ καὶ πόσα τὰ κενὰ διαστήματα μεταξὺ Γ καὶ Β.

5ο. Ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση ΓΕ.

6ο. Μὲ ποιόν ὑπολογισμὸ καὶ μὲ ποιά γραφικὴ κατασκευὴ μπορεῖτε νὰ προσδιορίσετε τὴ θέση τῶν σκαλιῶν;




**Σχ. 16-ς. Τοποθέτηση τῶν σκαλιῶν σὲ μιὰν ἀνεμόσκαλα.**

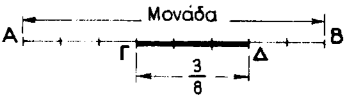
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

## Μάθημα 17.

### Μερισμὸς ἑνὸς μεγέθους. Κλάσματα.

**1. Ἄς διαιρέσωμε ἕνα τμῆμα ΑΒ σὲ 8 ἴσα μέρη.** Ἕνα ὁποιοδήποτε κομμάτι του, σὰν τὸ ΓΔ ποὺ περιορίζεται ἀπὸ τὰ δυὸ διαχωριστικὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, εἶναι *ἕνα κλάσμα* τοῦ ΑΒ (σχ. 17-α).




**Σχ. 17-α. Τὸ ΓΔ εἶναι τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ΑΒ.**

Ἄς συγκρίνωμε αὐτὸ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ὅλο τμῆμα ΑΒ· θὰ ἴδοῦμε ὅτι τὸ ΓΔ περιέχει *τρεῖς φορὲς τὸ ἕνα ὄγδοο τοῦ ΑΒ*.

**2. Ποιός ἀριθμὸς μετρᾶ τὸ τμῆμα ΓΔ;** Ἄν πάρωμε γιὰ μονάδα τὸ τμῆμα ΑΒ, θὰ μᾶς χρειαστοῦν *δυὸ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ* γιὰ νὰ γράψωμε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως τοῦ ΓΔ: ὁ ἕνας, ὁ 8, θὰ μᾶς λέῃ *σὲ πόσα* ἴσα κομμάτια διαιρέθηκε ἡ μονάδα ΑΒ καὶ ὁ ἄλλος, ὁ 3, *πόσα* ἀπὸ αὐτὰ περιέχονται στὸ ΓΔ. Οἱ δυὸ αὐτοὶ ἀριθμοὶ μαζί, γραμμένοι ἔτσι ὅμως: $\frac{3}{8}$, ἀποτελοῦν αὐτὸ ποὺ λέμε *κλάσμα τρία ὄγδοα.*

Οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 8 εἶναι οἱ *ὅροι* τοῦ κλάσματος $\frac{3}{8}$, ὁ 3 λέγεται *ἀριθμητὴς* ὁ 8 *παρονομαστής* του.

***Κλάσμα λοιπὸν εἶναι ἕνα σύμβολο ποὺ μ' αὐτὸ μποροῦμε νὰ παριστάνωμε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως ἑνὸς μεγέθους.***

Τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν γιὰ παρονομαστὴ τοὺς ἀριθμοὺς 10, 100, 1 000, 10 000,... λέγονται *δεκαδικά*.

*Παραδείγματα:* Τὰ κλάσματα $\frac{3}{10}$, $\frac{51}{100}$, $\frac{435}{1\,000}$, $\frac{27}{10\,000}$

εἶναι δεκαδικὰ καὶ διαβάζονται ἔτσι: τρία δέκατα, πενήντα ἕνα ἑκατοστά, κτλ.

Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα μποροῦν νὰ γραφοῦν καὶ μὲ τὴ μορφὴ *δεκαδικῶν ἀριθμῶν*. Π.χ. γιὰ τὰ τέσσερα παραπάνω ἔχομε:

$$\frac{3}{10}=0{,}3,\quad \frac{51}{100}=0{,}51,\quad \frac{453}{1\,000}=0{,}453,\quad \frac{27}{10\,000}=0{,}0027.$$

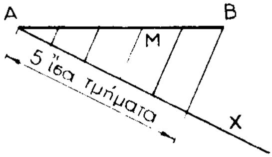
Τὰ κλάσματα ποὺ δὲν εἶναι δεκαδικὰ λέγονται *κοινὰ κλάσματα*.

*Παραδείγματα:* $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{20}$.

### 3. Πῶς παίρνομε ἀπὸ ἕνα μέγεθος ἕνα κλάσμα του.

*Παράδειγμα. Νὰ παρθοῦν τὰ 3/5* (1) *ἑνὸς τμήματος εὐθείας τὸ ὁποῖο ἔχει μῆκος 55 mm.*

Γιὰ νὰ πάρωμε τὸ 1/5 αὐτοῦ τοῦ τμήματος τὸ διαιροῦμε σὲ 5 ἴσα μέρη (Μάθημα 16). Ἂν τώρα ἀπὸ αὐτὰ τὰ 5 μέρη πάρωμε τὰ 3, τότε θὰ ἔχωμε τὰ 3/5 τοῦ ΑΒ· βρίσκομε ἔτσι τὸ τμῆμα ΑΜ (σχ. 17-β).



Σχ. 17-β. Παίρνομε τὰ 3/5 τοῦ ΑΒ.

Ἂς *ὑπολογίσωμε* τὸ μῆκος τοῦ ΑΜ.

Τὸ πέμπτο τοῦ ΑΒ εἶναι:

55 mm : 5 = 11 mm.

Ἄρα τὰ τρία πέμπτα του (3/5) εἶναι: 11 mm × 3 = *33mm*.

### 4. Ἀντίστροφο πρόβλημα. *Παίρνοντας τὰ 3/4 μιᾶς σιδερένιας ράβδου βρίσκομε 36 cm. Πόσο ἦταν τὸ μῆκος ὅλης τῆς ράβδου;*

Τὰ τρία τέταρτα τῆς ράβδου εἶναι 36 cm·

τὸ ἕνα τέταρτό της εἶναι 36 cm : 3 = 12 cm·

τὰ τέσσερα τέταρτα (ὅλη ἡ ράβδος) εἶναι 12 cm × 4 = *48 cm*.

---

(1) Γιὰ νὰ κάμωμε πιὸ οἰκονομικὴ καὶ πιὸ ὡραία τὴν ἐκτύπωση τοῦ βιβλίου μας θὰ γράφωμε κάποτε τὰ κλάσματα μὲ μιὰ γραμμούλα ὄχι παράλληλη πρὸς τοὺς στίχους (δηλ. τὶς ἀράδες) τοῦ κειμένου ἀλλὰ γερτὴ ὡς πρὸς αὐτούς.

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Ἀφαίρεση ἀκέραιων ἀριθμῶν.*

Παράδειγμα : 56 μεῖον 19 ἴσον πόσο ; ( 19 = 20 — 1 ).

Λέμε : 56 μεῖον 20 ἴσον 36, σὺν 1 ἴσον 37.

*1.* Ὑπολογίστε νοερά :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | 35 — 19, | 83 — 39, | 127 — 19, | 864 — 49. |
| 2ο | 75 — 18, | 94 — 28, | 355 — 38, | 495 — 48. |
| 3ο | 155 — 99, | 238 — 199, | 654 — 198, | 2 036 — 999. |

* * *

*2.* Πόσα τρίτα ἔχει μιὰ μονάδα ; Πόσα ἕβδομα ; Πόσα τέταρτα ἔχουν 5 μονάδες ;

*3.* Ἕνας ἀνελκυστήρας ( ἀσανσὲρ ) ἐξυπηρετεῖ μιὰ πολυκατοικία μὲ 7 πατώματα. Ποιό κλάσμα τῆς διαδρομῆς του πρὸς τὰ ἐπάνω ἔχει κάμει, ὅταν βρίσκεται στὸ 4ο πάτωμα, καὶ ποιό τοῦ ὑπολείπεται νὰ κάμη ;

*4.* Ἐκφράστε σὲ κλάσματα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, καὶ ὕστερα μιᾶς ἀποπλατυσμένης τὶς γωνίες $10^0$, $30^0$, $45^0$ καὶ $60^0$.

*5.* Ἀφαιρώντας ἀπὸ ἕνα τμῆμα τὰ 3/5 του τὸ ἐλαττώνομε κατὰ 16 cm. Ποιό ἦταν τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ;

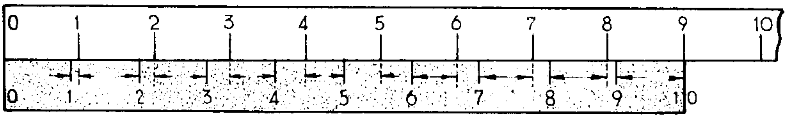
*6.* Ἐπάνω σὲ μιὰν εὐθεία ΑΧ πάρτε ἕνα ὁποιοδήποτε τμῆμα ΑΒ, ὕστερα πάρτε τὸ ΒΓ ἴσο μὲ τὰ 3/4 τοῦ ΑΒ, τέλος τὸ ΓΔ ἴσο μὲ τὰ 5/4 τοῦ ΑΒ. Ἂν μονάδα σας εἶναι τὸ τμῆμα ΑΔ, βρῆτε ποιά κλάσματα μετροῦν τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΓ καὶ ΒΔ.

*7.* Μιὰ γωνία $36^0$ αὐξήθηκε κατὰ τὰ 2/3 της. Πόση ἔγινε ;

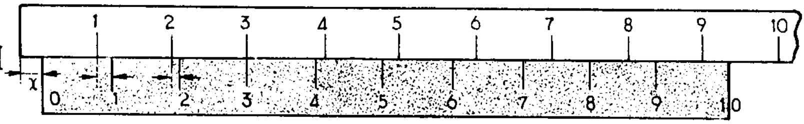
Μιὰν ἄλλη γωνία τὴν αὐξάνετε κατὰ τὰ 2/3 της. Βρῆτε πόση ἔγινε ξέροντας ὅτι αὐξήθηκε κατὰ $18^0$.

*8.* Σὲ μιὰ τάξη ἦσαν παρόντα μιὰ μέρα τὰ 4/5 τῶν μαθητῶν της. Τὸ 1/4 τῶν παρόντων πῆγε στὸ γιατρὸ γιὰ ἐξέταση καὶ ἔμειναν τότε

I




II




**Σχ. 17-γ. Ἀρχὴ στὴν ὁποία βασίζεται ὁ βερνιέρος.**

μέσα στὴν τάξη 24 μαθητές. Πόσοι εἶναι ὅλοι οἱ μαθητὲς τῆς τάξης;

*9*. Οἱ δυὸ ξύλινοι λευκοὶ κανόνες τοῦ σχήματος 17-γ εἶναι διαιρεμένοι σὲ ἑκατοστόμετρα.

1ο. Βρῆτε τὸ μῆκος ποὺ ἔχει μιὰ διαίρεση στοὺς γκρίζους κανόνες τοῦ σχήματος.

2ο. Δεῖξτε ὅτι στὸ σχῆμα 17-γ, I τὰ μήκη ἀνάμεσα σὲ δυὸ γειτονικὲς μύτες βελῶν εἶναι, κατὰ σειρὰ ἀπὸ τ' ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά: 1/10 cm, 2/10 cm, 3/10 cm,..., 9/10 cm.

3ο. Δεῖξτε ὅτι στὸ σχῆμα 17-γ, II τὰ μήκη ἀνάμεσα σὲ δυὸ γειτονικὲς μύτες βελῶν εἶναι, κατὰ σειρὰ ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερά: 1/10 cm, 2/10 cm,...

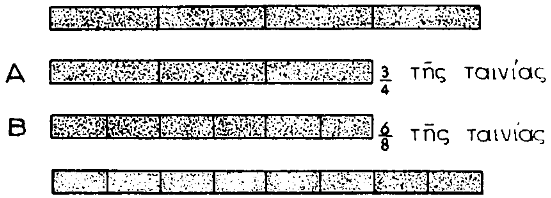
4ο. Πόσο εἶναι ἑπομένως τὸ μῆκος χ;

5ο. Ἐξηγῆστε τώρα πῶς λειτουργεῖ ὁ βερνιέρος σ' ἕνα παχύμετρο (Μάθημα 6).

# Μάθημα 18.

## Ἁπλοποίηση κλασμάτων.

**1. Ἂς διαιρέσωμε δυὸ ἴσες μικρὲς ταινίες χαρτὶ τὴ μιὰ σὲ 4 καὶ τὴν ἄλλη σὲ 8 ἴσα μέρη.** (Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ κάμωμε διπλώνοντάς τες σὲ δυό, τὴν πρώτη 2 φορὲς κατεπανάληψη καὶ τὴ δεύτερη 3 φορὲς κατεπανάληψη). Ὕστερα ἂς πάρωμε τὰ 3/4 τῆς πρώτης ταινίας καὶ τὰ 6/8 τῆς δεύτερης· θὰ βροῦμε ἔτσι τὶς δυὸ λουρίδες Α καὶ Β (σχ. 18-α).




**Σχ. 18-α. Τὰ κλάσματα 3/4 καὶ 6/8 εἶναι ἴσα.**

Τὸ μῆκος τῆς λουρίδας Α παριστάνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα:

$$\frac{3}{4} \text{ τῆς ταινίας,}$$

καὶ τὸ μῆκος τῆς λουρίδας Β ἀπὸ τὸ κλάσμα:

$$\frac{6}{8} \text{ τῆς ταινίας.}$$

*Τὰ μήκη ὅμως αὐτὰ εἶναι ἴσα,* ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 18-α. *Ἄρα καὶ τὰ κλάσματα 3/4 καὶ 6/8 εἶναι ἴσα.*

Πῶς προκύπτει τώρα τὸ ἕνα κλάσμα ἀπὸ τὸ ἄλλο; Τὸ δεύτερο, τὸ 6/8, τὸ βρίσκομε πολλαπλασιάζοντας μὲ 2 καὶ ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ τοῦ 3/4· τὸ 3/4 προκύπτει ἀπὸ τὸ 6/8, ἂν διαιρέσωμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ 6/8 διὰ τοῦ 2.

*Ὥστε, πολλαπλασιάζοντας μὲ 2 ἢ διαιρώντας διὰ 2 τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος βρίσκομε ἕνα ἴσο κλάσμα.*

**2. Γενικὰ ἔχομε τὴν ἀκόλουθη βασικὴ ἰδιότητα:**

*Ἂν πολλαπλασιάσωμε μὲ τὸν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμὸ τοὺς δυὸ ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἤ, ἀντίστροφα, ἂν τοὺς διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ (ὅταν οἱ δυὸ αὐτὲς διαιρέσεις γίνωνται ἀκριβῶς), θὰ προκύψῃ ἕνα κλάσμα ἴσο μὲ τὸ ἀρχικό.*

**3. Ἂς ἀναζητήσωμε τώρα κλάσματα ἴσα μ' ἕνα δοσμένο κλάσμα,** π.χ. τὸ 10/15.

1ο. Γιὰ νὰ βροῦμε τέτοια κλάσματα πολλαπλασιάζομε τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος 10/15 μὲ τὸν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό· ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε.

*Παράδειγμα:* $\frac{10 \times 2}{15 \times 2} = \frac{20}{30}, \ \frac{10 \times 7}{15 \times 7} = \frac{70}{105}, \dots$

Ὅλα τὰ κλάσματα ποὺ θὰ βροῦμε ἔτσι εἶναι ἴσα μὲ τὸ 10/15, ἀλλὰ οἱ ὅροι τους θὰ εἶναι *μεγαλύτεροι* ἀπὸ τοὺς ἀντίστοιχους ὅρους τοῦ 10/15.

2ο. Ἐπίσης μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ 10/15 διὰ τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ, *ἂν οἱ διαιρέσεις αὐτὲς γίνωνται ἀκριβῶς.*

*Παράδειγμα:* $\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}.$

Τὸ ἴσο κλάσμα ποὺ βρήκαμε ἔτσι ἔχει ὅρους μικρότερους ἀπὸ τοὺς ἀντίστοιχους ὅρους τοῦ 10/15, μ' ἄλλα λόγια, εἶναι *ἁπλούστερο*· γι' αὐτὸ καὶ λέμε πὼς *ἁπλοποιήσαμε τὸ κλάσμα 10/15.*

**4. Πῶς ἁπλοποιοῦμε ἕνα κλάσμα.** *Γιὰ νὰ ἁπλοποιήσωμε ἕνα κλάσμα διαιροῦμε τοὺς δυὸ ὅρους του διὰ τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ, ἂν ὑπάρχῃ ἕνας τέτοιος, πιὸ μεγάλος ὅμως ἀπὸ τὸ 1, ἀκριβὴς διαιρέτης καὶ τῶν δυὸ ὅρων.*

*Παράδειγμα:* $\frac{120}{180} = \frac{120:10}{180:10} = \frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}.$

Τὸ κλάσμα ὅμως 2/3 δὲν μπορεῖ πιὰ ν' ἁπλοποιηθῇ· γι' αὐτὸ καὶ λέγεται *ἀνάγωγο κλάσμα.* Ἔτσι τὸ κλάσμα 120/180 πῆρε τὴν *πιὸ ἁπλῆ μορφή του: 2/3.*

*Προτοῦ κάμωμε ὁποιονδήποτε ὑπολογισμὸ μὲ κλάσματα, πρέπει νὰ τὰ ἁπλοποιοῦμε ὅσο μποροῦμε.*

**5. Παρατήρηση.** Ὑπάρχουν ἀπειράριθμα κλάσματα ἴσα μ' ἕνα δοσμένο κλάσμα, π.χ. τὸ 10/15. Γιὰ νὰ τὰ βροῦμε, φέρνομε τὸ δοσμένο κλάσμα στὴν πιὸ ἁπλῆ του μορφή, τὴ 2/3, καὶ ὕστερα πολλαπλασιάζομε τοὺς δυὸ ὅρους του διαδοχικὰ μὲ τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς 2, 3, 4, 5,... Βρίσκομε ἔτσι τὰ κλάσματα:

$$\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6},\ \frac{2\times3}{3\times3}=\frac{6}{9},\ \frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12},\ \frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15},\dots$$

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πολλαπλασιασμὸς μὲ 0,5, μὲ 5 καὶ μὲ 50.*

Παράδειγμα: $36\times0{,}5=;$ $(0{,}5=5/10=1/2)$.

Λέμε: 36 διὰ τοῦ 2 ἴσον 18.

Παρόμοια μέθοδος γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ μὲ $5=10/2$ καὶ μὲ $50=100/2$.

*1.* Ὑπολογίστε νοερά:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | $46\times0{,}5$ | $38\times0{,}5$ | $59\times0{,}5$ | $121\times0{,}5$ |
| 2ο | $54\times5$ | $480\times5$ | $39\times5$ | $413\times5$ |
| 3ο | $14\times50$ | $112\times50$ | $3{,}8\times50$ | $0{,}37\times50$ |

* * *

*2.* Ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα ἕνα εἶναι ἀνάγωγο, δηλαδὴ ὄχι ἁπλοποιήσιμο. Ποιό;

$$\frac{72}{81},\ \frac{57}{36},\frac{52}{39},\ \frac{55}{36}.$$

*3.* Γράψτε πέντε ἄλλα κλάσματα ἴσα μὲ τὸ $\frac{10}{15}$ μὲ παρονομαστὴ ὄχι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 20.

*4.* Βρῆτε ἕνα κλάσμα ποὺ νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\frac{7}{4}$ καὶ νὰ ἔχη παρονομαστὴ μικρότερο ἀπὸ τὸ 24 καὶ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 16.

*5.* Βρῆτε ὅλα τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ $\frac{72}{84}$ καὶ ἔχουν ὅρους μικρότερους.

*6.* Μιὰ σκάλα ἔχει 20 σκαλοπάτια. Ποιό κλάσμα τῆς σκάλας ἔχετε ἀνεβῆ, ὅταν βρίσκεστε στὸ τέταρτο σκαλοπάτι; Ποιό, ὅταν βρίσκεστε στὸ πέμπτο; στὸ δέκατο; στὸ δέκατο πέμπτο; Καὶ ποιό κλάσμα τῆς σκάλας μένει γιὰ νὰ ἀνεβῆτε σὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς περιπτώσεις αὐτές;

7. Ἕνας τροχὸς κάνει μία στροφὴ σὲ 60 sec. Τί κλάσμα τῆς στροφῆς κάνει σὲ 10 sec ; τί σὲ 30 sec ; σὲ 40 sec ; ( sec εἶναι τὸ σύμβολο ποὺ χρησιμοποιοῦν ὅλα τὰ ἔθνη γιὰ νὰ παραστήσουν τὴν χρονικὴ μονάδα δευτερόλεπτο ).

## Μάθημα 19.

### Τροπή ἑτερώνυμων κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα. Πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση κλασμάτων.

**1. Ὅταν ἔχωμε δυὸ ἢ περισσότερα κλάσματα ποὺ παριστάνουν μεγέθη τοῦ ἴδιου εἴδους,** μπορεῖ νὰ χρειάζεται εἴτε νὰ τὰ συγκρίνωμε εἴτε νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμά τους ἢ τὴ διαφορά τους. Αὐτὲς οἱ πράξεις δὲν μποροῦν νὰ γίνουν πρὶν μετατρέψωμε τὰ κλάσματα σὲ ἄλλα, ἴσα ἐννοεῖται μὲ τὰ δοσμένα, ἀλλὰ ποὺ νὰ ἔχουν ὅλα τὸν ἴδιο παρονομαστή.

Ἂν δυὸ ἢ περισσότερα κλάσματα ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, τότε λέγονται *ὁμώνυμα*, π.χ. $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$. Ἂν ὅμως δὲν ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, τότε λέγονται *ἑτερώνυμα*, π.χ. $\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}$.

**2. Τροπὴ τῶν ἑτερώνυμων κλασμάτων 3/5 καὶ 4/7 σὲ ὁμώνυμα.**

*Πρόβλημα. Ἕνας τροχὸς κάνει 3/5 μιᾶς στροφῆς κατὰ τὴ μιὰ φορὰ (π.χ. πρὸς τὰ δεξιὰ) καὶ ἔπειτα 4/7 μιᾶς στροφῆς κατὰ τὴν ἀντίθετη φορὰ (πρὸς τ' ἀριστερά), παίρνοντας ἔτσι μιὰ τελικὴ θέση. Τί κλάσμα στροφῆς θὰ ἔπρεπε νὰ κάμη ὁ τροχός, καὶ κατὰ ποιά φορά, γιὰ νὰ πάη, μὲ τὴ μικρότερη κίνηση, ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ στὴν τελική του θέση;*

Ἂς συγκρίνωμε γι' αὐτὸ τὰ κλάσματα 3/5 καὶ 4/7, ἀφοῦ τὰ μετατρέψωμε σὲ ὁμώνυμα.

Ὅπως εἴπαμε στὸ προηγούμενο Μάθημα, τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ ἀνάγωγο κλάσμα 3/5 τὰ βρίσκομε πολλαπλασιάζοντας τοὺς δυὸ ὅρους του μὲ τὸν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό.

Τὰ ἴδια πράγματα ἔχομε νὰ ποῦμε καὶ γιὰ τὸ κλάσμα 4/7.

Ἂς πολλαπλασιάσωμε λοιπὸν μὲ 7 τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος 3/5 καὶ μὲ 5 τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος 4/7· *θὰ λάβωμε* *τότε δυὸ κλάσματα ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ* $5 \times 7 = 7 \times 5$:

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}, \qquad \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{20}{35}.$$

Τώρα πιὰ εἶναι εὔκολο νὰ συγκρίνωμε τὰ κλάσματα αὐτά, ἐπειδὴ καὶ τὰ δυὸ παριστάνουν « τριακοστὰ πέμπτα μιᾶς στροφῆς » καὶ εἶναι φανερὸ πὼς *τὸ πρῶτο εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ δεύτερο*. Μὲ ἄλλα λόγια, ὁ τροχὸς στράφηκε περισσότερο πρὸς τὰ δεξιὰ παρὰ πρὸς τ' ἀριστερά.

Γιὰ νὰ πάῃ τώρα ὁ τροχός, μὲ τὴ μικρότερη κίνηση, ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ στὴν τελική του θέση, θὰ ἔπρεπε νὰ κάμῃ 21 τριακοστὰ πέμπτα μεῖον 20 τριακοστὰ πέμπτα στροφῆς, δηλαδὴ

$$\frac{21}{35} - \frac{20}{35} = \frac{1}{35} \text{ στροφῆς,}$$

καί, αὐτό, *πρὸς τὰ δεξιά*.

**3. Τροπὴ τῶν ἑτερώνυμων κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$ σὲ ὁμώνυμα.** Μὲ τὴ σκέψη ποὺ κάμαμε στὴν προηγούμενη παράγραφο βρίσκομε:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 7 \times 8}{3 \times 7 \times 8} = \frac{112}{168},$$

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 3 \times 8}{7 \times 3 \times 8} = \frac{96}{168},$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3 \times 7}{8 \times 3 \times 7} = \frac{105}{168}.$$

Φθάνομε ἔτσι στὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Γιὰ νὰ τρέψωμε ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ καθενὸς ἀπὸ αὐτὰ μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων.*

**4. Πρόσθεση (ἢ ἀφαίρεση) κλασμάτων.** Τὸ παράδειγμα τῆς παραγράφου 2 μᾶς δείχνει ὅτι: *Γιὰ νὰ προσθέσωμε (ἢ ἀφαιρέσωμε) δύο ὁμώνυμα κλάσματα, προσθέτομε (ἢ ἀφαιροῦμε) τοὺς ἀριθμητές τους διατηρώντας τὸν κοινὸ παρονομαστή τους.*

Ἂν ὅμως τὰ κλάσματα δὲν ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ (ἂν εἶναι δηλ. ἑτερώνυμα), τότε πρέπει πρῶτα νὰ τὰ κάμωμε ὁμώνυμα.

*Παραδείγματα:*

$$\frac{7}{3}+\frac{3}{5}=\frac{7\times5}{3\times5}+\frac{3\times3}{3\times5}=\frac{35}{15}+\frac{9}{15}=\frac{44}{15},$$

$$\frac{11}{7}-\frac{3}{4}=\frac{11\times4}{7\times4}-\frac{3\times7}{4\times7}=\frac{44}{28}-\frac{21}{28}=\frac{23}{28}.$$

**5. Μερικὲς ἁπλούστερες περιπτώσεις.**

*1ο. Νὰ συγκρίνωμε τὰ κλάσματα* $\frac{1}{2}$ *καὶ* $\frac{3}{4}$.

Ἀφοῦ τὸ 4 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2, μετατρέπομε τὸ $\frac{1}{2}$ σὲ τέταρτα: $\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4}$. Ἀλλὰ τὸ $\frac{2}{4}$ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$, ἑπομένως καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$.

*2ο. Νὰ συγκρίνωμε τὰ κλάσματα* $\frac{2}{5}$ *καί* $\frac{2}{3}$.

Εἶναι φανερὸ πὼς ἕνα πέμπτο τῆς μονάδας εἶναι μικρότερο ἀπὸ ἕνα τρίτο της, ἄρα καὶ τὸ κλάσμα 2/5 εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ 2/3.

*3ο. Νὰ προσθέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ* $\frac{1}{3}$.

Μετατρέπομε τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 2 σὲ τρίτα καὶ ἔπειτα προσθέτομε:

$$2+\frac{1}{3}=\frac{2\times3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

*4ο. Νὰ ἀφαιρέσωμε τὶ ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὸ κλάσμα* $\frac{7}{3}$.

Τὸ κλάσμα $\frac{7}{3}$ περιέχει τόσες ἀκέραιες μονάδες ὅσες φορὲς ὁ ἀριθμὸς 3 τρίτα χωρεῖ στὸν ἀριθμὸ 7 τρίτα. Ἑπομένως θὰ διαιρέσωμε τὸ 7 διὰ τοῦ 3· τὸ πηλίκον 2 θὰ μᾶς δώση τὶς ἀκέραιες μονάδες τοῦ κλάσματος $\frac{7}{3}$ καὶ τὸ ὑπόλοιπο 1 θὰ μᾶς πῆ πόσα τρίτα ἀπομένουν ὕστερα ἀπὸ τὴν ἀφαίρεση τῶν 2 ἀκέραιων μονάδων:

$$\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}.$$

Ἡ πράξη αὐτή, ποὺ εἶναι ἀντίστροφη πρὸς τὴν προηγούμενη, λέγεται « ἐξαγωγὴ τῶν ἀκέραιων μονάδων τοῦ κλάσματος 7/3 » καὶ γίνεται σύμφωνα μὲ τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστῆ τοῦ κλάσματος· τὸ πηλίκον μᾶς δίνει τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀκέραιων μονάδων τοῦ κλάσματος καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως μᾶς λέει πόσες « κλασματικὲς » μονάδες, τοῦ ἴδιου εἴδους μὲ τὸ κλάσμα, ἀπομένουν.*

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 0,25 ἢ 2,5 ἢ 25.*

Παράδειγμα: $48 \times 0{,}25 =$ ; $\left(0{,}25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}\right)$.

Λέμε: 48 διὰ τοῦ 4 ἴσον 12.

Παρόμοια μέθοδος γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ μὲ $2{,}5=\frac{10}{4}$ ἢ μὲ $25=\frac{100}{4}$.

*1.* Ὑπολογίστε νοερά:

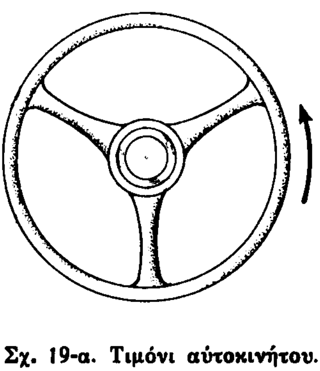
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | $8 \times 0{,}25$ | $24 \times 0{,}25$ | $120 \times 0{,}2$ | $5\,484 \times 0{,}25$ |
| 2ο | $36 \times 2{,}5$ | $22 \times 2{,}5$ | $340 \times 2{,}5$ | $103 \times 2{,}5$ |
| 3ο | $28 \times 25$ | $4{,}4 \times 25$ | $38 \times 25$ | $214 \times 25$. |

* * *

*2.* Τὸ τιμόνι ἑνὸς αὐτοκινήτου κάνει 2/3 τῆς στροφῆς κατὰ τὴ φορὰ τὴν ὁποία δείχνει τὸ βέλος (σχ. 19-α) καὶ ὕστερα 2/5 τῆς στροφῆς κατὰ τὴν ἀντίθετη φορά.

Προσδιορίστε (μ' ἕνα κλάσμα στροφῆς) τὴ θέση ποὺ παίρνει τελικὰ μιὰ ἀπὸ τὶς ἀκτίνες του ὡς πρὸς τὴν ἀρχική της θέση.

*3.* Ἀντικαταστῆστε τὴ φράση « τὸ ντεπόζιτο εἶναι γεμάτο κατὰ τὰ 5/8 του » μὲ μιὰ φράση ποὺ σημαίνει τὸ ἴδιο, ἀλλὰ ποὺ ἀρχίζει ἔτσι: « τὸ ντεπόζιτο εἶναι ἄδειο κατὰ... ».



**Σχ. 19-α. Τιμόνι αὐτοκινήτου.**

*4.* Ἀπὸ τὶς δυὸ διαστάσεις τοῦ πατώματος ἑνὸς δωματίου τὰ $2/3$ τῆς μιᾶς εἶναι ἴσα μὲ τὸ $1/2$ τῆς ἄλλης. Ποιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ διαστάσεις εἶναι ἡ μεγαλύτερη;

*5.* Ἐπαληθεῦστε μὲ γραφικὴ μέθοδο (μὲ σχεδίαση) τὸ ἑξῆς: Ἂν ἐλαττώσωμε τὸ ἕνα ἕκτο ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ κατὰ τὸ ἕνα δέκατο τοῦ ΑΒ, θὰ λάβωμε ἕνα δέκατο πέμπτο τοῦ ΑΒ. Τὸ ἴδιο πρᾶγμα νὰ τὸ δείξετε ὕστερα καὶ μὲ ὑπολογισμό.

*6.* Δυὸ ἐργάτες μοιράστηκαν ἕνα φιλοδώρημα. Ὁ ἕνας πῆρε τὸ ἕνα τρίτο καὶ τὸ μισὸ τοῦ τρίτου ἀπὸ τὸ φιλοδώρημα. Τί ἔμεινε γιὰ τὸν ἄλλο;

*7.* Ἕνας τροχὸς ἔκαμε πρῶτα ἕνα τρίτο στροφῆς καὶ ἔπειτα, κατὰ τὴν ἴδια φορά, τὸ μισὸ τοῦ κλάσματος στροφῆς ποὺ ἔκαμε πρῶτα. Πόσο κλάσμα στροφῆς τοῦ μένει ἀκόμα νὰ κάμῃ γιὰ νὰ συμπληρώσῃ μιὰν ὁλόκληρη στροφή;

*8.* Ἀφοῦ ἐπαληθεῦστε ὅτι

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{20}$$

ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμα $1/6+1/12+1/20$. $\Big($Παρατηρῆστε ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\Big)$.

# Μάθημα 20.

## Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος μὲ ἀκέραιο καὶ διαίρεσή του δι' ἑνὸς ἀκεραίου.

**1. Πρόβλημα.** *Στὸ ἀγγλικὸ σύστημα μετρήσεων τὰ μήκη ἐκφράζονται σὲ ἴντσες καὶ κλάσματα τῆς ἴντσας ( 1 ἴντσα ἔχει 25,4 mm, βλέπε Μάθημα 21, σχ. 21-β ). Ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμα τριῶν μηκῶν ποὺ τὸ καθένα τους εἶναι 5/8 τῆς ἴντσας.*

Τὸ ὁλικὸ μῆκος εἶναι

$$\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{5+5+5}{8}=\frac{15}{8} \text{ τῆς ἴντσας.}$$

Ὑπολογίσαμε ἔτσι ἕνα μῆκος 3 φορὲς πιὸ μεγάλο ἀπὸ τὰ 5/8 τῆς ἴντσας. Μὲ ἄλλα λόγια πολλαπλασιάσαμε τὸ 5/8 ἐπὶ 3.

Ἀλλὰ $5+5+5=3\times 5$, ἄρα μποροῦμε νὰ γράψωμε

$$\frac{5}{8}\times 3=\frac{3\times 5}{8}=\frac{15}{8}.$$

Ἔτσι ἐφαρμόσαμε τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Γιὰ νὰ κάμωμε ἕνα κλάσμα 2, 3, 4,... φορὲς μεγαλύτερο, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητή του ἐπὶ 2, 3, 4,.., καὶ ν' ἀφήσωμε τὸν ἴδιο παρονομαστή.*

Ἤ, μὲ ἄλλα λόγια:

*Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα κλάσμα μὲ ἀκέραιο ἀριθμό, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητή του μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸ καὶ ν' ἀφήσωμε τὸν ἴδιο παρονομαστή.*

**2. Παρατήρηση.** Τὸν παραπάνω κανόνα μποροῦμε νὰ τὸν ἐφαρμόζωμε πάντα· σὲ *μερικὲς ὅμως περιπτώσεις* μποροῦμε καὶ συμφέρει νὰ τὸν ἀντικαταστήσωμε μὲ τὸν παρακάτω ποὺ δίνει ἁπλούστερα ἀποτελέσματα.

*Παράδειγμα:* Σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω κανόνα ἔχομε:

$$\frac{3}{8}\times 4=\frac{3\times 4}{8}.$$

Ἂν ὅμως ἁπλοποιήσωμε τὸ τελευταῖο κλάσμα διὰ τοῦ 4, θὰ λάβωμε

$$\frac{3\times4}{8}=\frac{3}{8:4}=\frac{3}{2}.$$

Ὥστε: *Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα κλάσμα μὲ ἀκέραιο ἀριθμό, μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε τὸν παρονομαστή του διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ἂν αὐτὸ γίνεται ἀκριβῶς, καὶ ν' ἀφήσωμε τὸν ἴδιο ἀριθμητή.*

**3. Ἀντίστροφο πρόβλημα.** Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε ἕνα κλάσμα δι' ἑνὸς ἀκεραίου π.χ. τὸ 3/8 διὰ τοῦ 4· πρέπει τότε νὰ βροῦμε ἕνα ἄλλο κλάσμα *4 φορὲς μικρότερο* ἀπὸ τὸ 3/8.

Ὅπως εἴδαμε, διαιρώντας τὸν παρονομαστὴ ἑνὸς κλάσματος διὰ τοῦ 4 βρίσκομε ἕνα ἄλλο κλάσμα 4 φορὲς μεγαλύτερο· ἑπομένως, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστή του μὲ 4, τὸ κλάσμα θὰ γίνῃ 4 φορὲς μικρότερο:

$$\frac{3}{8}:4=\frac{3}{8\times4}=\frac{3}{32}.$$

Ἔτσι ἐφαρμόσαμε ἕναν κανόνα ποὺ μπορεῖ νὰ διατυπωθῇ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

*Γιὰ νὰ κάμωμε ἕνα κλάσμα 2, 3, 4,... φορὲς μικρότερο, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστή του ἐπὶ 2, 3, 4, ... καὶ ν' ἀφήσωμε τὸν ἴδιο ἀριθμητή.*

Ἢ καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο:

*Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕνα κλάσμα δι' ἑνὸς ἀκεραίου, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστή του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτὸν καὶ ν' ἀφήσωμε τὸν ἴδιο ἀριθμητή*

**4. Παρατήρηση.** Σὲ μερικὲς περιπτώσεις αὐτὸς ὁ κανόνας μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸν παρακάτω ποὺ ἔχει τὸ πλεονέκτημα νὰ δίνῃ ἁπλούστερα ἀποτελέσματα.

*Παράδειγμα:* $$\frac{16}{5}:2=\frac{16}{5\times2}$$

ἤ, ἂν ἁπλοποιήσωμε διὰ τοῦ 2 τὸ τελευταῖο κλάσμα,

$$\frac{16}{5 \times 2} = \frac{16:2}{5} = \frac{8}{5}.$$

῞Ωστε : *Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕνα κλάσμα δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ἂν αὐτὸ μπορῆ νὰ γίνη ἀκριβῶς, καὶ ἀφήνομε τὸν ἴδιο παρονομαστή.*

*᾿Ασκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πολλαπλασιασμὸς μὲ 1,1 ἢ 11.*

Παράδειγμα : $36 \times 1{,}1 =$ ; $\left(1{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1 + \frac{1}{10}\right)$.

Λέμε : ῞Ενα δέκατο τοῦ 36 ἴσον 3,6. 3,6 καὶ 36 ἴσον 39,6.

Παρόμοια μέθοδος γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ μὲ $11 = 10 + 1$.

Εἰδικά, ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε μὲ 11 ἕνα διψήφιο ἀριθμό, ποὺ ἔχει ἄθροισμα ψηφίων μικρότερον ἢ ἴσον 9, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσωμε καὶ τὸν ἀκόλουθο κανόνα :

Προσθέτομε τὰ 2 ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ μονοψήφιο ἄθροισμά τους τὸ γράφομε ἀνάμεσα σ' αὐτὰ τὰ δυὸ ψηφία.

Παράδειγμα : $12 \times 11$.

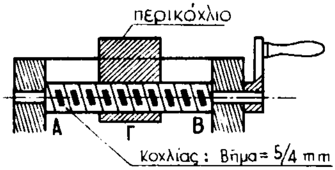
Λέμε : 1 σὺν 2 ἴσον 3· ὥστε $12 \times 11 = 132$.

1. Ὑπολογίστε νοερά :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | $130 \times 1{,}1$ | $420 \times 1{,}1$ | $560 \times 1{,}1$ | $190 \times 1{,}1$ |
| 2ο | $26 \times 11$ | $3{,}4 \times 11$ | $65 \times 11$ | $20{,}4 \times 11$. |

* * *

*2.* Ἡ περιστροφὴ ἑνὸς κοχλία ΑΒ ( σχ. 20-α ) προξενεῖ τὴ μετακίνηση ἑνὸς περικοχλίου Γ κατὰ μῆκος τοῦ κοχλία. ῍Αν τὸ βῆμα τοῦ κοχλία εἶναι 5/4 cm, πόση θὰ εἶναι ἡ μετακίνηση τοῦ περικοχλίου, ὅταν ὁ κοχλίας κάμη 2 στροφές ; 3 στροφές ; 4 στροφές ;




**Σχ. 20-α. Ὑπολογίστε τὴ μετακίνηση τοῦ περικοχλίου.**

*3.* Ξέροντας ὅτι $\frac{1}{\pi} \simeq 0{,}318$, ὑπολογίστε τὸ $\frac{8}{\pi}$, ὕστερα βρῆτε τὴ διάμετρο σὲ μιὰ περιφέρεια μήκους 8 m καὶ ἀπὸ τὴ διάμετρο τὴν ἀκτίνα τῆς περιφέρειας.

*4.* Μιὰ ἀπὸ τὶς ἀγγλοαμερικάνικες μονάδες μήκους εἶναι ἡ γυάρδα ( περίπου ἴση μὲ 0,914 38 m ). Ἡ γυάρδα ὑποδιαιρεῖται σὲ τρία πόδια ( 3′ ), καὶ ἕνα πόδι σὲ 12 ἴντσες ( 12″ ).

1ο. Βρῆτε τώρα τί κλάσμα τῆς γυάρδας εἶναι τὸ πόδι.

2ο. Τί κλάσμα τῆς γυάρδας εἶναι ἡ ἴντσα;

3ο. Οἱ μικρὲς διαστάσεις ἐκφράζονται συνήθως σὲ ἴντσες καὶ δέκατα ἕκτα τῆς ἴντσας. Βρῆτε ποιὸ κλάσμα τοῦ ποδιοῦ καὶ ὕστερα τῆς γυάρδας εἶναι τὸ δέκατο ἕκτο τῆς ἴντσας.

---

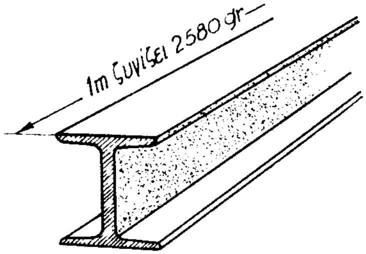
# Μάθημα 21.

## Πολλαπλασιασμὸς μὲ κλάσμα καὶ διαίρεση διὰ κλάσματος.

**1. Πρόβλημα.** *Μιὰ μικρὴ δοκὸς (σχ. 21-α) ζυγίζει 2 580 gr* (1) *ἀνὰ τρέχον μέτρο. Ὑπολογίστε τὸ βάρος:*

*1ο 2 m ἀπὸ τὴ δοκὸ αὐτή·*

*2ο τῶν 2/3 τοῦ μέτρου ἀπὸ τὴν ἴδια δοκό.*



**Σχ. 21-α. Ὑπολογισμὸς τοῦ βάρους μιᾶς δοκοῦ.**

1ο. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος 2 m ἀπὸ τὴ δοκό, « *παίρνομε* » 2 φορὲς τὸ βάρος 2 580 gr ἑνὸς μέτρου της· αὐτὸ τὸ βρίσκομε πολλαπλασιάζοντας τὸ 2 580 gr ἐπὶ 2 καὶ τὸ σημειώνομε ἔτσι: 2 580 gr × 2.

2ο. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος τῶν 2/3 τοῦ μέτρου ἀπὸ τὴ δοκό, θὰ « *πάρωμε* » τὰ 2/3 τοῦ βάρους 2 580 gr ἑνὸς μέτρου τῆς δοκοῦ. Αὐτὴν τὴν πράξη θὰ τὴν ποῦμε λοιπὸν *πολλαπλασιασμὸ τῶν 2 580 gr ἐπὶ 2/3* καὶ θὰ τὴ σημειώσωμε ἔτσι:.

$$2\,580\,\mathrm{gr} \times \frac{2}{3}.$$

Τώρα, γιὰ νὰ πάρωμε τὰ 2/3 τῶν 2 580 gr, κάνομε τὸ ἑξῆς: Πρῶτα παίρνομε τὸ 1/3 τῶν 2 580 gr καὶ βρίσκομε

$$\frac{2\,580\,\mathrm{gr}}{3}$$

ἔπειτα παίρνομε 2 φορὲς αὐτὸ τὸ $\frac{2\,580\,\mathrm{gr}}{3}$ καὶ βρίσκομε (σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο Μάθημα)

---

(1) gr εἶναι τὸ σύμβολο ποὺ χρησιμοποιοῦν ὅλα τὰ ἔθνη γιὰ νὰ παραστήσουν τὸ γραμμάριο (1/1 000 τοῦ κιλοῦ).

$$\frac{2\,580\,\text{gr}}{3} \times 2 = \frac{2\,580\,\text{gr} \times 2}{3} = 1\,720\,\text{gr}.$$

Ὥστε

$$2\,580\ \text{gr} \times \frac{2}{3} = 1\,720\,\text{gr}.$$

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε τὸ ἑξῆς:

*Πολλαπλασιάζω ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ ἐπὶ 2/3 σημαίνει: παίρνω τὰ 2/3 τοῦ ἀριθμοῦ.*

Καὶ αὐτὸ τὸ κάνομε, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παραπάνω, ἐφαρμόζοντας τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ μὲ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ μὲ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ γράφομε παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος.*

Μὲ ὅμοιο τρόπο λέμε:

*Πολλαπλασιάζω ἕνα κλάσμα, π.χ. τὸ 5/7, ἐπὶ 2/3 σημαίνει: παίρνω τὰ 2/3 τοῦ 5/7.*

Γιὰ νὰ τὸ πετύχωμε αὐτό, κάνομε τὸ ἑξῆς:

Πρῶτα παίρνομε τὸ 1/3 τοῦ 5/7 καὶ βρίσκομε

$$\frac{5}{7 \times 3},$$

ἔπειτα παίρνομε 2 φορὲς αὐτὸ τὸ $\frac{5}{7 \times 3}$ καὶ βρίκομε.

$$\frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \frac{10}{21}.$$

Ἔτσι φτάνομε στὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ἀριθμητὲς ἀναμεταξύ τους καὶ τοὺς παρονομαστὲς ἐπίσης ἀναμεταξύ τους.*

Ὁ κανόνας αὐτὸς ἐφαρμόζεται καὶ στὸν πολλαπλασιασμὸ περισσότερων ἀπὸ δυὸ κλασμάτων.

Π.χ. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{8}{9} = \frac{2 \times 5 \times 8}{3 \times 7 \times 9} = \frac{80}{189}.$

**2. Ἀντίστροφο πρόβλημα. Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε τὸ κλάσμα 3/7 διὰ τοῦ κλάσματος 2/5.** Αὐτὸ σημαίνει πὼς ζητοῦμε ἕνα κλάσμα πού, ὅταν πολλαπλασιαστῇ μὲ τὸ 2/5 (τὸ διαιρέτη), μᾶς δίνει τὸ 3/7 (τὸν διαιρετέο).

Τὰ 2/5 λοιπὸν τοῦ κλάσματος ποὺ ζητοῦμε εἶναι τὸ 3/7.

Ἄρα τὸ 1/5 τοῦ ζητουμένου θὰ εἶναι 2 φορὲς λιγότερο, δηλαδὴ θὰ εἶναι τὸ

$$\frac{3}{7\times 2}.$$

Κατὰ 5/5 τοῦ ζητουμένου, δηλαδὴ τὸ ζητούμενο, θὰ εἶναι 5 φορὲς τὸ $\frac{3}{7\times 2}$, ἑπομένως

$$\frac{3\times 5}{7\times 2}=\frac{15}{14}.$$

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι γιὰ νὰ κάμωμε τὴ διαίρεση $\frac{3}{7}:\frac{2}{5}$ πολλαπλασιάσαμε τὸ $\frac{3}{7}$ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{2}$ ποὺ βρίσκομε «ἀντιστρέφοντας» τὸ διαιρέτη $\frac{2}{5}$ (δηλαδὴ κάνοντας τὸν ἀριθμητή του παρονομαστὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ ἀριθμητή).

Γι' αὐτό, τὸ κλάσμα $\frac{5}{2}$ λέγεται ἀντίστροφο τοῦ $\frac{2}{5}$.

Ἔχομε λοιπὸν

$$\frac{3}{7}:\frac{2}{5}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{2}=\frac{3\times 5}{7\times 2}=\frac{15}{14}$$

καὶ μποροῦμε νὰ διατυπώσωμε τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομε τὸ διαιρετέο κλάσμα μὲ τὸ κλάσμα ποὺ εἶναι τὸ ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη.*

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκομε

$$8:\frac{2}{5}=8\times\frac{5}{2}=\frac{8\times 5}{2}=\frac{40}{2}=20.$$

Ἔτσι ἔχομε καὶ τὸν κανόνα:

*Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸ ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη.*

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 0,9 ἢ 9.*

Παράδειγμα: $54 \times 0{,}9 = ;$ $\left(0{,}9 = 1 - 0{,}1 = 1 - \frac{1}{10}\right)$.

Λέμε: ἕνα δέκατο τοῦ 54 ἴσον 5,4. 54 μεῖον 5,4 ἴσον 48,6.
Παρόμοια μέθοδος γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ μὲ $9 = 10 - 1$.

*1.* Ὑπολογίστε νοερά:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | $120 \times 0{,}9$ | $250 \times 0{,}9$ | $470 \times 0{,}9$ | $320 \times 0{,}9$ |
| 2ο | $37 \times 9$ | $49 \times 9$ | $52 \times 9$ | $820 \times 9$. |

* * *

*2.* Ἕνας τροχὸς κάνει 1/2 τῆς στροφῆς ἀνὰ 1 min (δηλαδὴ στὸ λεπτό· min εἶναι τὸ σύμβολο ποὺ χρησιμοποιοῦν ὅλα τὰ ἔθνη γιὰ νὰ παραστήσουν τὴ χρονικὴ μονάδα *λεπτό*). Ὑπολογίστε πόσες στροφὲς καὶ κλάσμα στροφῆς κάνει ὁ τροχὸς σὲ 3 min, σὲ 1/2 min, σὲ 4/5 min.

*3.* Χαράξτε μιὰ γωνία καὶ ὕστερα, μὲ γραφικὴ μέθοδο, πάρτε τὸ 1/2 τῶν 3/4 τῆς γωνίας αὐτῆς. Ἡ γωνία ποὺ θὰ βρῆτε, τί κλάσμα τῆς ἀρχικῆς γωνίας εἶναι; Ἐπαληθεῦστε το καὶ μὲ ὑπολογισμό.

*4.* Ὁ μεγάλος ἀρχαῖος Ἕλληνας μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης εἶχε βρεῖ πὼς ὁ ἀριθμὸς π ποὺ χρησιμοποιοῦμε στοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ περιφέρειες (βλ. Μάθημα 10) εἶναι περίπου ἴσος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{22}{7}$. Χρησιμοποιώντας αὐτὴ τὴν τιμὴ τοῦ π ὑπολογίστε τί μῆκος ἔχει ἡ διάμετρος, ὅταν ἡ περιφέρεια ἔχῃ μῆκος 110 cm.

*5.* Ἐλαττώνοντας ἕνα τμῆμα εὐθείας κατὰ τὰ 2/5 του τὸ μικραίνετε κατὰ 23 cm. Ποιό ἦταν τὸ μῆκος τοῦ τμήματος πρὶν τὸ μικρύνετε καὶ ποιό εἶναι τὸ μῆκος του ὕστερα ἀπὸ τὸ μίκρεμα.

*6.* Ἂν πάρετε τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν $\frac{5}{9}$ μιᾶς γωνίας, τί κλάσμα τῆς ἀρχικῆς γωνίας εἶναι ἡ γωνία ποὺ θὰ βρῆτε; Ὅμοια ἐρώτηση, ἂν πάρετε τὰ $\frac{3}{7}$ τῶν $\frac{7}{8}$ μιᾶς γωνίας. Τί παρατηρεῖτε στὰ δυὸ αὐτὰ παραδείγματα;

*7.* Ἐπαληθεῦστε τὴν ἰσότητα

$$\left(8 \times \frac{7}{2}\right) + \left(5 \times \frac{7}{2}\right) = (8 + 5) \times \frac{7}{2}$$

καθὼς καὶ τὴν

$$\left(8 \times \frac{7}{2}\right) - \left(5 \times \frac{7}{2}\right) = (8-5) \times \frac{7}{2}.$$

[ Ὑπενθυμίζομε ὅτι τὸ κλείσιμο μιᾶς πράξεως μέσα σὲ παρένθεση σημαίνει πὼς αὐτὴ ἡ πράξη πρέπει νὰ ἐκτελεστῇ πρὶν ἀπὸ ἐκείνην ποὺ σημειώνεται ἔξω ἀπὸ τὴν παρένθεση. ]

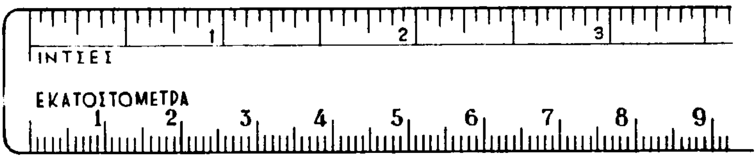
*8.* Ἂν πολλαπλασιάσετε ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ 2/3 καὶ τὸ ἐξαγόμενο ἐπὶ 3/5, θὰ βρῆτε 24. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ;

*9.* Ἂν πολλαπλασιάσετε ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ 3/4 καὶ τὸ ἐξαγόμενο ἐπὶ 1/3, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἐλαττώνεται κατὰ 75. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ;

*10.* Ὁ ἄσβηστος ἀσβέστης ἔχει βάρος τὰ 5/11 τοῦ βάρους τοῦ ἀσβεστόλιθου ἀπὸ τὸν ὁποῖον παράγεται· καὶ ὁ σβησμένος ἀσβέστης τὰ 9/7 τοῦ βάρους τοῦ ἄσβηστου. Πόσον ἀσβεστόλιθο πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε γιὰ νὰ ἀποκτήσωμε 5 τόννους σβησμένο ἀσβέστη ;
[ Ὑπενθυμίζομε ὅτι ἕνας τόννος ἔχει 1 000 κιλά. ]

*11.* Μιὰ ἐλαστικὴ μπάλα ( τόπι ) ἀναπηδᾶ σὲ ὕψος ἴσο μὲ τὰ 3/4 τοῦ ὕψους ἀπὸ ὅπου ἔπεσε. Ξέροντας ὅτι στὴ δεύτερη ἀναπήδηση ἡ μπάλα ἔφθασε τὸ ὕψος τῶν 1,15 m, βρῆτε ἀπὸ ποιό ἀρχικὸ ὕψος ἔπεσε.

*12.* Ὁ κανόνας ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 21-β ἔχει διαιρέσεις σὲ ἴντσες ( ἐπάνω ) καὶ σὲ ἑκατοστόμετρα ( κάτω ). [ Ὑπενθυμίζομε ὅτι μιὰ ἴντσα ἔχει περίπου 25,4 mm. ]



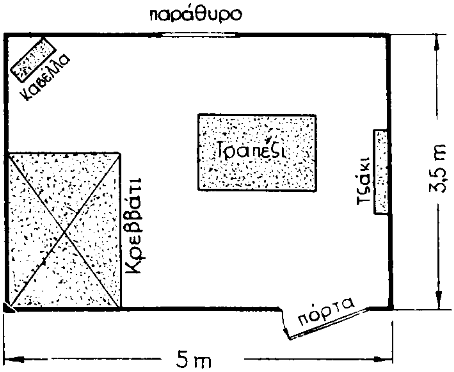

**Σχ. 21-β. Ἴντσες καὶ ἑκατοστόμετρα.**

Ὑπολογίστε σὲ χιλιοστόμετρα ( mm ) τὰ κλάσματα 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 3/4, 7/8 καὶ 5/16 τῆς ἴντσας καὶ ἐλέγξτε μὲ τὸν κανόνα τὰ ἀποτελέσματα ποὺ θὰ βρῆτε· ( θὰ σημειώσετε αὐτὰ τὰ ὑπολογισμένα κλάσματα τῆς ἴντσας ἐπάνω στὸ μέρος τοῦ κανόνα τὸ ὁποῖο εἶναι διαιρεμένο σὲ cm ).

# Μάθημα 22.

## Κλίμακες ποὺ χρησιμοποιοῦνται στὰ σχέδια καὶ στοὺς χάρτες.

**1. Γιὰ νὰ παραστήσωμε ἐπάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ** ἕνα ὀρθογώνιο δωμάτιο μὲ διαστάσεις 5 m ἐπὶ 3,5 m, εἶναι ἀπαραίτητο νὰ μικρύνωμε τὶς διαστάσεις.




Σχ. 22-α. Τὸ σχέδιο ἑνὸς ὑπνοδωματίου.

Ἂν σχεδιάσωμε ἕνα ὀρθογώνιο (δηλαδὴ ἕνα τετράπλευρο μὲ ὀρθὲς γωνίες) ποὺ οἱ διαστάσεις του νὰ εἶναι ἴσες μὲ τὸ *ἑκατοστὸ* τῶν πραγματικῶν διαστάσεων τοῦ δωματίου, θὰ ἔχωμε αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομε *σχέδιο τοῦ δωματίου σὲ* (ἢ *ὑπὸ*) *κλίμακα*.

Ἔτσι, τὸ σχέδιο τοῦ σχήματος 22-α ἔχει διαστάσεις

$$5 \text{ m} : 100 = 500 \text{ cm} : 100 = 5 \text{ cm}$$

$$\text{καὶ } 3{,}5 \text{ m} : 100 = 350 \text{ cm} : 100 = 3{,}5 \text{ cm}.$$

Λέμε ὅτι *ἡ κλίμακα τοῦ σχεδίου εἶναι 1/100.*

Σχεδιάζω σὲ κλίμακα 1/1 σημαίνει ὅτι παριστάνω κάτι ἐπάνω στὸ χαρτὶ μὲ τὶς πραγματικές του διαστάσεις.

**2. Οἱ περισσότερο χρησιμοποιούμενες κλίμακες εἶναι:**

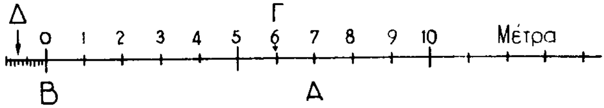
1ο. Γιὰ τὰ *τεχνικὰ σχέδια:* (μηχανουργῶν, λεβητοποιῶν, ξυλουργῶν κτλ.): 1/5, 1/10, 1/20 (γενικὰ σχέδια), 1/1 καὶ 1/2 (σχέδια λεπτομερειῶν).

2ο. Γιὰ τὰ *οἰκοδομικὰ σχέδια* 1/50, 1/100 καὶ 1/200.

3ο. Γιὰ τὰ *κτηματολογικὰ σχέδια* (π.χ. παράσταση τοῦ ἐδάφους μιᾶς κοινότητας): 1/500, 1/1 000, 1/2 500 καὶ 1/5 000.

4ο. Γιὰ τοὺς *χάρτες*: 1/80 000 (χάρτες τοῦ ἐπιτελείου), 1/100 000 καὶ 1/200 000 (ὁδικοὶ χάρτες), 1/1 000 000 καὶ 1/10 000 000 (γεωγραφικοὶ ἄτλαντες).

Κάποτε οἱ κλίμακες δίνονται γραφικῶς ἐπάνω στὰ σχέδια καὶ στοὺς χάρτες μὲ εὐθεῖες γραμμὲς βαθμολογημένες ἀνάλογα μὲ τὴν κλίμακα ποὺ παριστάνουν. Ἔτσι στὸ σχῆμα 22-β δίνεται ἡ κλίμακα 1/200.




**Σχ. 22-β. Γραφικὴ κλίμακα 1/200.**

Τὸ μῆκος ΑΒ παριστάνει 7 m καὶ τὸ μῆκος ΓΔ 6,70 m.

**3. Προβλήματα.** *1ο. Ἡ ἀπόσταση μεταξὺ δυὸ χωριῶν εἶναι 4 km. Μὲ ποιό μῆκος παριστάνεται πάνω σ' ἕνα ὁδικὸ χάρτη ὑπὸ κλίμακα 1/200 000;*

Ἀφοῦ ἕνα μῆκος στὸ σχέδιο εἶναι 200 000 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχο πραγματικό, θὰ ἔχωμε:

$$\frac{4\,\text{km}}{200\,000} = \frac{4\,000\,000\ \text{mm}}{200\,000} = 20\ \text{mm}.$$

Τοῦτο γράφεται καὶ ἔτσι:

$$4\,000\,000\ \text{mm} \times \frac{1}{200\,000} = 20\ \text{mm}.$$

Ἔχομε λοιπὸν τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

| |
|---|
| *Διάσταση στὸ σχέδιο = Διάσταση πραγματικὴ × κλίμακα.* |

*2ο. Ἐπάνω σ' ἕνα σχέδιο ὑπὸ κλίμακα 1/20 ἕνα μηχανικὸ ἐργαλεῖο παριστάνεται μὲ μῆκος 120 mm. Ποιό εἶναι τὸ πραγματικὸ μῆκος τοῦ ἐργαλείου;*

Ἀφοῦ ἡ κλίμακα εἶναι 1/20, τὸ πραγματικὸ μῆκος τοῦ ἐργαλείου θὰ εἶναι 20 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ σχεδιαστικό του, δηλαδή:

$$120 \text{ mm} \times 20 = 2\,400 \text{ mm}.$$

Αὐτὸ πάλι γράφεται καὶ ἔτσι:

$$120 \text{ mm} : \frac{1}{20} = 2\,400 \text{ mm}.$$

Ἔτσι ἔχομε τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

| |
|---|
| *Πραγματικὴ διάσταση = Διάσταση στὸ σχέδιο : κλίμακα.* |

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 1,5 ἢ 15.*

Παράδειγμα:

$$36 \times 1{,}5 = ; \quad \left(1{,}5 = 1 + 0{,}5 = 1 + \frac{5}{10} = 1 + \frac{1}{2}\right).$$

Λέμε: τὸ μισὸ τοῦ 36 ἴσον 18, σὺν 36 ἴσον 54.

Παρόμοια μέθοδος γιὰ $15 = 10 + 5 = 10 + \frac{10}{2}$.

*1.* Ὑπολογίστε νοερά:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | $8 \times 1{,}5$ | $16 \times 1{,}5$ | $400 \times 1{,}5$ | $3\,600 \times 1{,}5$ |
| 2ο | $32 \times 15$ | $28 \times 15$ | $31 \times 15$ | $59 \times 15$. |

* * *

*2.* Σχεδιάστε σὲ κλίμακα 1/80 000 καὶ ὕστερα σὲ κλίμακα 1/100 000 ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 15 km.

*3.* Ἐπάνω σ' ἕνα χάρτη τῶν Ἀθηνῶν ὑπὸ κλίμακα 1/20 000 μὲ τί μῆκος παριστάνεται ἕνα εὐθύγραμμο κομμάτι δρόμου ποὺ ἔχει μῆκος 800 m;

*4.* Ἔχομε δυὸ σχέδια γιὰ τὸ ἴδιο ἀντικείμενο, ἀλλὰ τοῦ ἑνὸς ἡ κλίμακα εἶναι 1/10 καὶ τοῦ ἄλλου 1/20· ποιό ἀπὸ τὰ δυὸ σχέδια εἶναι μεγαλύτερο;

Ἂν ἕνα τμῆμα ΑΒ στὸ πρῶτο σχέδιο ἔχῃ μῆκος 5 cm, τί μῆκος θὰ ἔχῃ στὸ δεύτερο σχέδιο τὸ ἀντίστοιχο τμῆμα;

*5.* Ἕνα μῆκος 0,25 m παριστάνεται ἐπάνω σ' ἕνα σχέδιο μὲ 5 mm. Ποιά εἶναι ἡ κλίμακα τοῦ σχεδίου;

*6.* Σχεδιάστε γραφικῶς μιὰ κλίμακα 1/100 διαιρώντας ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μήκους $\frac{1}{10}$ m σὲ 10 ἴσα κομμάτια. Στὸ ἀριστερό του ἄκρο Α πάρτε ἕνα τμῆμα ΓΑ ἴσο μὲ ἕνα τέτοιο κομμάτι καὶ διαιρέστε το ἐπίσης σὲ 10 ἴσα μέρη· (τὸ ΓΑ μὲ τὶς διαιρέσεις του λέγεται *πόδι* τῆς γραφικῆς κλίμακας). Τώρα ἐπάνω σ' αὐτὴν τὴν κλίμακα προσδιορίστε ἕνα τμῆμα, ποὺ νὰ παριστάνη 4 m πραγματικὸ μῆκος, καὶ ὕστερα ἕνα ἄλλο, ποὺ νὰ παριστάνη 3,80 m.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

## Μάθημα 23.

### Μέτρηση τοῦ χρόνου. Συμμιγεῖς ἀριθμοί.

**1. Λέγοντας χρόνο** θὰ ἐννοοῦμε μιὰν ὁποιαδήποτε χρονικὴ διάρκεια καὶ ὄχι τὴν ὁρισμένη χρονικὴ διάρκεια ποὺ ὑποδιαιρεῖται σὲ 12 μῆνες· αὐτὴν θὰ τὴ λέμε «ἔτος» ἢ «χρονιά», γιὰ νὰ ἀποφεύγωμε παρανοήσεις.

Ὅπως ξέρομε, ἡ γῆ γυρίζει σὰν σβούρα γύρω ἀπὸ ἕναν ἄξονα ποὺ περνᾶ ἀπὸ τοὺς δυὸ πόλους, τὸ βόρειο καὶ τὸ νότιο (βλ. σχ. 3-β). *Μέση ἡλιακὴ ἡμέρα* (ἕνα ἡμερόνυχτο) εἶναι ἡ μέση χρονικὴ διάρκεια ποὺ χρειάζεται ἡ γῆ γιὰ νὰ κάμη μιὰν ὁλόκληρη στροφὴ γύρω στὸν ἄξονά της. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἡμέρα θὰ ἦταν μεγάλη μονάδα χρόνου, διάλεξαν γιὰ βασικὴ μονάδα στὴ μέτρηση τοῦ χρόνου ἕνα κλάσμα τῆς ἡμέρας: τὸ δευτερόλεπτο (γαλλικά: seconde).

**2. Βασικὴ μονάδα γιὰ τὴ μέτρηση τοῦ χρόνου εἶναι τὸ δευτερόλεπτο (sec),** ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\frac{1}{86\,400}$ τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας.

Ἔτσι ἡ ἡμέρα ἔχει 86 400 δευτερόλεπτα (sec).

*Δευτερεύουσες μονάδες χρόνου εἶναι:*

Τὸ *λεπτὸ (min)*, ποὺ ἔχει 60 sec.

Ἡ *ὥρα (h)*, ποὺ ἔχει 60 min, ἄρα 60 sec × 60 = 3 600 sec.

Μία ἡμέρα ἔχει 24 h = (86 400 : 3 600) ὧρες.

Μεγάλες χρονικὲς διάρκειες ἐκφράζονται σὲ *ἑβδομάδες, μῆνες, ἔτη καὶ αἰῶνες*.

Ὅπως ξέρομε, ἡ γῆ περιφέρεται γύρω στὸν ἥλιο, καὶ γιὰ νὰ κάμη μίαν ὁλόκληρη περιφορὰ γύρω σ' αὐτὸν χρειάζεται περίπου 365 ἡμέρες καὶ $\frac{1}{4}$ τῆς ἡμέρας. Ἡ χρονικὴ αὐτὴ διάρκεια ὀνομάζεται *ἀστρονομικὸ ἔτος* καὶ εἶναι αὐτὴ ποὺ κανονίζει τὸ ξαναγύρισμα τῶν 4 *ἐποχῶν*, δηλαδὴ *τῆς ἀνοίξεως* (ἢ τοῦ ἔαρος), *τοῦ καλοκαιριοῦ* (ἢ τοῦ θέρους), *τοῦ φθινοπώρου καὶ τοῦ χειμώνα.*

Διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ ἀστρονομικὸ ἔτος εἶναι ἐκεῖνο ποὺ καλοῦμε *πολιτικὸ ἔτος*· αὐτὸ ἔχει 365 μόνο ἡμέρες, εἶναι λοιπὸν μικρότερο ἀπὸ τὸ ἀστρονομικὸ ἔτος κατὰ $\frac{1}{4}$ τῆς ἡμέρας περίπου. Ἂν τώρα ὅλα τὰ ἔτη τοῦ ἡμερολογίου μας εἶχαν 365 ἡμέρες μόνο, τότε, ὕστερα ἀπὸ 4 περίπου ἔτη, ἡ πρώτη « ἐαρινὴ » ἡμέρα τοῦ ἡμερολογίου θὰ ἔπεφτε μιὰ μέρα πιὸ μπροστὰ ἀπὸ τὴν πρώτη ἡμέρα τῆς πραγματικῆς (τῆς ἀστρονομικῆς) ἀνοίξεως. Γιὰ νὰ τὸ ἀποφύγωμε αὐτό, συμφωνήσαμε μερικὰ ἔτη τοῦ ἡμερολογίου νὰ ἔχουν 366 ἡμέρες· τὰ ἔτη αὐτὰ λέγονται *δίσεκτα.*

Δίσεκτο ἔτος εἶναι κάθε ἔτος ποὺ ὁ ἀριθμός του *διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4 καὶ δὲν τελειώνει σὲ δυὸ μηδενικὰ* καθὼς καὶ κάθε ἔτος ποὺ ἔχει ἀριθμὸ *διαιρετὸ ἀκριβῶς διὰ 400*. Ἔτσι εἶναι π.χ. δίσεκτα τὰ ἔτη 1896, 1904, 1908,..., 1956, 1960,..., 2000, 2004,..., ἐνῶ δὲν εἶναι δίσεκτα τὰ 1900, 2100, 2200, 2300 καθὼς καὶ ὅσα δὲν διαιροῦνται διὰ 4, ὅπως τὰ 1897, 1957 κτλ.

Τὸ πολιτικὸ ἔτος ὑποδιαιρεῖται *σὲ 12 μῆνες*. Ἀπὸ αὐτοὺς *ὁ Φεβρουάριος ἔχει 28 ἡμέρες*, στὰ ἔτη ποὺ δὲν εἶναι δίσεκτα, καὶ *29 ἡμέρες* στὰ δίσεκτα· οἱ ὑπόλοιποι μῆνες ἔχουν *ἄλλοι 30 καὶ ἄλλοι 31 ἡμέρες*, ὅπως ξέρομε.

Τέλος, μία ἑβδομάδα *ἔχει 7 ἡμέρες* καὶ ἕνας αἰώνας *100 ἔτη.*

**3. Μιὰ χρονικὴ διάρκεια μετριέται συχνά, ἀντὶ μὲ ἕναν ἀριθμό, μὲ περισσότερους συγχρόνως ἀριθμούς**, ποὺ ὁ καθένας τους συνοδεύεται καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα μιᾶς ἀπὸ τὶς χρονικὲς μονάδες ποὺ εἴπαμε παραπάνω.

*Παραδείγματα:* Μιὰ ἐργασία κράτησε 2 ὧρες καὶ 5 λεπτὰ (2 h 5 min). Ἕνας ποδηλατιστὴς ἔκαμε μιὰ διαδρομὴ σὲ 1 ὥρα 12 λεπτὰ καὶ 15 δευτερόλεπτα (1 h 12 min 15 sec).

Τέτοιοι ἀριθμοὶ λέγονται *συμμιγεῖς (ἢ σύμμικτοι)*, γιατὶ χρησιμοποιοῦνται σ' αὐτοὺς συγχρόνως διάφορες μονάδες ποὺ δὲν ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο, δηλαδὴ ἡ μεγαλύτερη ἀπὸ δύο χρησιμοποιούμενες μονάδες δὲν περιέχει 10 ἢ 100 ἢ 1 000 κτλ. φορὲς τὴ μικρότερη. Ὅμοια χρησιμοποιουμε συμμιγεῖς ἀριθμούς, ὅταν λέμε ὅτι τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας (βλ. Μάθημα 12) εἶναι 23 μοῖρες 15 πρῶτα λεπτὰ καὶ 27 δεύτερα λεπτὰ ($23^0\ 15'\ 27''$) ἢ ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι 45 κιλὰ καὶ 350 γραμμάρια (1 κιλὸ = 1 000 γραμμάρια) ἢ ὅτι τὸ ὕφασμα αὐτὸ ἔχει μάκρος 6 πῆχες καὶ 3 ρούπια (1 πήχη = 8 ρούπια = 0,64 m).

**4. Παρατήρηση.** Ἐννοεῖται ὅτι μποροῦμε ἐπίσης νὰ ἐκφράσωμε μιὰ χρονικὴ διάρκεια χρησιμοποιώντας μόνο μία χρονικὴ μονάδα μὲ τὰ δεκαδικά της ὑποπολλαπλάσια (δηλ. τὶς δεκαδικὲς ὑποδιαιρέσεις της). Ἔτσι λέμε π.χ. ὅτι ἕνας δρομέας διέτρεξε τὰ 100 m σὲ 11 δευτερόλεπτα καὶ 3 δέκατα τοῦ δευτερολέπτου (11,3 sec), ὅτι ἕνας τορναδόρος, γιὰ νὰ κατεργαστῇ ἕνα τεμάχιο στὸν τόρνο, χρειάστηκε 45 ἑκατοστὰ τῆς ὥρας (45/100 h).

**5. Πρόβλημα.** *Ἐκφράστε σὲ δευτερόλεπτα μιὰ χρονικὴ διάρκεια 3 ὡρῶν 12 λεπτῶν καὶ 25 δευτερολέπτων.*

*1ος τρόπος.*

| | | |
|---|---|---|
| 3 ὧρες κάνουν | 3 600 sec × 3 = | 10 800 sec |
| 12 λεπτὰ κάνουν | 60 sec × 12 = | 720 sec |
| 25 δευτερόλεπτα κάνουν | | 25 sec |
| *3 h 12 min 25 sec κάνουν* | | *11 545 sec.* |

*2ος τρόπος.*

3 h εἶναι 60 min × 3 = 180 min

3 h 12 min εἶναι 180 min + 12 min = 192 min

3 h 12 min εἶναι 60 sec × 192 = 11 520 sec

*3 h 12 min 25 sec εἶναι = 11 545 sec.*

**6. Ἀντίστροφο πρόβλημα.** *Ἐκφράστε σὲ μοῖρες, πρῶτα λεπτὰ καὶ δεύτερα λεπτὰ μιὰ γωνία ποὺ ἔχει ἄνοιγμα 7 893 δεύτερα λεπτά.*

$$\begin{array}{r|l|l} 7\,893 & 60 & \\ \cline{2-2} 1\,89 & 131 & 60 \\ \cline{3-3} 93 & 11 & 2 \\ 33 & & \end{array}$$

Μετατρέπομε τὰ 7 893″ σὲ πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτά:

7 893 : 60 = 131′ μὲ ὑπόλοιπο 33″.

Ὕστερα μετατρέπομε τὰ 131′ σὲ μοῖρες καὶ πρῶτα λεπτά:

131 : 60 = 2° μὲ ὑπόλοιπο 11′.

Ὥστε *7 893″ = 2° 11′ 33″.*

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 1,25 ἢ 12,5 ἢ 125.*

Παράδειγμα: $52 \times 1{,}25 = \;;\; \left(1{,}25 = 1 + 0{,}25 = 1 + \frac{1}{4}\right)$.

Λέμε: 1/4 τοῦ 52 ἴσον 13, καὶ 52 ἴσον 65.

*1.* Ὑπολογίστε νοερά:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | 16 × 1,25 | 120 × 1,25 | 36 × 1,25 | 220 × 1,25 |
| 2ο | 42 × 12,5 | 26 × 12,5 | 160 × 12,5 | 36 × 12,5 |
| 3ο | 12 × 125 | 4,4 × 125 | 0,38 × 125 | 4,8 × 125. |

* * *

*2.* Ἕνα ἔτος, ποὺ δὲν εἶναι δίσεκτο, ἀρχίζει μὲ μιὰ Τρίτη. Ποιά ἡμέρα τῆς ἑβδομάδας θὰ εἶναι ἡ 25η Μαρτίου, ἡ 1η Μαΐου, ἡ 28η Ὀκτωβρίου τοῦ ἴδιου ἔτους καθὼς καὶ ἡ 1η Ἰανουαρίου τοῦ ἑπόμενου ἔτους; Ἡ ἴδια ἐρώτηση, ἀλλὰ γιὰ ἔτος ποὺ εἶναι δίσεκτο.

*3.* Ἀπὸ μιὰ πανσέληνο ὡς τὴν ἑπόμενη περνοῦν 42 524 min (χρονικὴ περίοδος ἑνὸς φεγγαριοῦ). Ἐκφράστε αὐτὴ τὴ χρονικὴ διάρκεια σὲ ἡμέρες, ὧρες καὶ λεπτά.

*4.* Μετατρέψτε σὲ λεπτὰ καὶ δευτερόλεπτα τὶς ἀκόλουθες δυὸ χρονικὲς διάρκειες: 35/100 τῆς ὥρας, 1 ὥρα καὶ 45/100 τῆς ὥρας.

*5.* Ἐκφράστε πρῶτα σὲ κλάσμα ὀρθῆς γωνίας καὶ ὕστερα σὲ $33^\circ\,30'$, $25^\circ\,12'$, $65^\circ\,40'$.

*6.* Βασικὴ μονάδα μήκους στὴν Ἀγγλία εἶναι ἡ γυάρδα (0,91438m) καὶ δευτερεύουσες μονάδες οἱ ἀκόλουθες: τὸ πόδι (1/3 τῆς γυάρδας) καὶ ἡ ἴντσα (1/12 τοῦ ποδιοῦ).

Μετατρέψτε σὲ ἴντσες τὰ δυὸ μήκη: 3 γυάρδες 2 πόδια 5 ἴντσες, 1 γυάρδα 8 ἴντσες.

Ἐκφράστε σὲ γυάρδες, πόδια καὶ ἴντσες τὰ 3 μήκη: 73 ἴντσες, 35 ἴντσες, 100 ἴντσες.

*7.* Ἐκφράστε σὲ ὀκάδες καὶ δράμια 7 530 δράμια. Μετατρέψτε σὲ ρούπια 6 πῆχες καὶ 3 ρούπια.

## Μάθημα 24.

### Πράξεις μὲ συμμιγεῖς ἀριθμούς.

Στὸ Μάθημα αὐτὸ δίνομε μερικὰ παραδείγματα πράξεων μὲ συμμιγεῖς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν *χρονικὲς διάρκειες ἢ γωνίες*. Οἱ πράξεις αὐτὲς δὲν παρουσιάζουν καμμιὰ δυσκολία ὅταν ξέρωμε πόσες μονάδες τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως περιέχει ἡ κάθε μονάδα ποὺ χρησιμοποιοῦμε. Ξαναθυμίζομε λοιπὸν ἐδῶ αὐτὴ τὴ σχέση μεταξὺ τῶν κυριότερων μονάδων τῶν δύο παραπάνω μεγεθῶν:

$$1\text{ h} = 60\text{ min} \quad \text{καὶ} \quad 1\text{ mim} = 60\text{ sec.}$$
$$1^\circ = 60' \quad \text{καὶ} \quad 1 = 60''$$

Ἐπίσης, γιὰ νὰ ἀποφεύγωνται λάθη, συστήνομε 1ο τὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν νὰ γράφωνται τακτικὰ καὶ μὲ τὸ σωστό τους σχῆμα, 2ο οἱ πράξεις νὰ εἶναι τακτοποιημένες μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείχνομε καὶ ἐξηγοῦμε παρακάτω.

**1. Πρόσθεση.** *Παράδειγμα:*

*4 h 12 min 53 sec + 2 h 26 min 19 sec.*

$$\begin{array}{rrrr} & 4\text{ h} & 12\text{ min} & 53\text{ sec} \\ & 2\text{ h} & 26\text{ min} & 19\text{ sec} \\ \hline & 6\text{ h} & 38\text{ min} & 72\text{ sec} \\ \text{ἢ} & \mathit{6\ h} & \mathit{39\ min} & \mathit{12\ sec} \end{array}$$

Προσθέτομε πρῶτα τὶς μονάδες κάθε μιᾶς τάξεως χωριστά. Ὕστερα, ἂν ἕνα ἄθροισμα, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν κατώτατη τάξη (ἄρα ἀπὸ τὰ δεξιά), ξεπερνᾶ μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τότε τοῦ βγάζομε αὐτὲς τὶς ἀνώτερες μονάδες ποὺ περιέχει καὶ τὶς προσθέτομε στὸ ἄθροισμα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

**2. Ἀφαίρεση.** *Παράδειγμα: 28° 14′ 17″ — 15° 27′ 9″.*

$$\begin{array}{rrr} & \leftarrow 60' & \\ 28^\circ & 14' & 17'' \\ 15^\circ & 27' & 9'' \\ \rightarrow 1^\circ & & \\ \hline \mathit{12^\circ} & \mathit{47'} & \mathit{8''} \end{array}$$

Ἀφαιροῦμε τὶς μονάδες κάθε μιᾶς τάξεως χωριστά, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν κατώτατη τάξη (ἄρα ἀπὸ τὰ δεξιά). Ἐπειδὴ ὅμως στὸ παράδειγμά μας ἡ ἀφαίρεση τῶν πρώτων λεπτῶν δὲν γίνεται (τὸ 27′ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 14′), γι' αὐτὸ προσθέτομε 60′ (= 1°) στὰ πρῶτα λεπτὰ τοῦ μειωτέου καί, *γιὰ νὰ μὴν ἀλλάξῃ τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀφαιρέσεως*, προσθέτομε 1° στὶς μοῖρες τοῦ ἀφαιρετέου.

**3. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς μὲ ἀκέραιο**: *Παράδειγμα: 7° 45′ × 3.*

$$\begin{array}{rr} 7^{0} & 45' \\ & 3 \\ \hline 21^{0} & 135' \\ \text{ἢ } 23^{0} & 15' \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὶς μονάδες κάθε τάξεως μὲ τὸν ἀκέραιο πολλαπλασιαστή. Ὕστερα, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν κατώτατη τάξη (ἄρα ἀπὸ τὰ δεξιά), ἐξετάζομε μήπως κανένα ἀπὸ τὰ γινόμενα αὐτὰ ξεπερνᾷ μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· ἂν ναί, τότε τοῦ βγάζομε αὐτὲς τὶς ἀνώτερες μονάδες ποὺ περιέχει καὶ τὶς προσθέτομε στὸ γινόμενο τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

**4. Διαίρεση συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.** *Παράδειγμα:*

*14 h 15 min : 5*

$$\begin{array}{lr|l} 14\,\text{h} & 15\,\text{min} & 5 \\ \cline{3-3} 4\,\text{h} \times 60 = & 240\,\text{min} & 2\,h\ 51\,min \\ \cline{2-2} & 255\,\text{min} & \\ & 05 & \\ & 0 & \end{array}$$

Διαιροῦμε χωριστὰ τὶς μονάδες κάθε τάξεως διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν ἀνώτατη τάξη (ἄρα ἀπὸ ἀριστερά).

Ἂν σὲ μιὰ τέτοια διαίρεση μένῃ κάποιο ὑπόλοιπο, τὸ μετατρέπομε σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ προσθέτομε στὶς μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως τοῦ διαιρετέου, πρὶν προχωρήσωμε στὴ διαίρεσή τους.

**5. Παρατήρηση.** Ὅταν ἔχωμε νὰ κάμωμε πράξεις πιὸ πολύπλοκες, π.χ. νὰ πολλαπλασιάσωμε συμμιγῆ μὲ κλάσμα ἢ δεκαδικὸ ἀριθμό, νὰ διαιρέσωμε συμμιγῆ διὰ δεκαδικοῦ ἢ καὶ διὰ σύμμιγοῦς κτλ., τότε ἐκφράζομε τοὺς συμμιγεῖς σὲ μονάδες τῆς κατωτάτης τάξεως ποὺ περιέχουν καὶ ὕστερα ἐργαζόμαστε ἐπάνω στοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς ποὺ προκύπτουν ἔτσι.

*Παράδειγμα Ι. Πάρτε τὰ 3/4 τῆς γωνίας 25° 12′*

$$25^0\ 12' = (60' \times 25) + 12' = 1\,512',$$

$$\frac{1\,512' \times 3}{4} = 1\,134' = 18^0\ 54'.$$

*Παράδειγμα ΙΙ. Διαιρέστε 4 h 21 min : 0,9.*

$$\begin{aligned} 4\text{ h } 21\text{ min} : 0{,}9 &= 261\text{ min} : 0{,}9 \\ &= 290\text{ min} \\ &= 4\ h\ 50\ min. \end{aligned}$$

*Ἀσκήσεις. Νοερὸς ὑπολογισμός. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 0,75 ἢ 7,5 ἢ 75.*

Παράδειγμα: $24 \times 0{,}75 =$ ; $(0{,}75 = 1 - 0{,}25 = 1 - 1/4)$.
Λέμε: Τὸ τέταρτο τοῦ 24 εἶναι 6. 24 μεῖον 6 ἴσον 18.

*1.* Ὑπολογίστε νοερά:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1ο | $28 \times 0{,}75$ | $104 \times 0{,}75$ | $428 \times 0{,}75$ | $140 \times 0{,}75$ |
| 2ο | $32 \times 7{,}5$ | $22 \times 7{,}5$ | $180 \times 7{,}5$ | $42 \times 7{,}5$ |
| 3ο | $48 \times 75$ | $96 \times 75$ | $0{,}52 \times 75$ | $13 \times 75.$ |

* * *

*2.* Ἕνα ρολόϊ πηγαίνει μπρὸς 9 min κάθε 24 h. Πόσο θὰ πηγαίνη μπρὸς σὲ μιὰ ὥρα; Ἂν τὸ βάλωμε ἀκριβῶς στὴν ὥρα του στὶς 3 τὸ ἀπόγευμα (στὶς 15 h), ποιά θὰ εἶναι ἡ σωστὴ ὥρα, ὅταν τὸ ρολόϊ αὐτὸ θὰ δείχνη 7 h τὸ πρωὶ τῆς ἄλλης ἡμέρας;

*3.* Γιὰ νὰ κάμη 10 στροφὲς ἕνας τροχὸς χρειάστηκε 2 min 2 sec. Ὑπολογίστε:

1ο. Τοὺς χρόνους ποὺ θὰ χρειαστῇ ὁ τροχὸς γιὰ 1 στροφή, γιὰ 15 στροφές.

2ο. Τοὺς ἀριθμοὺς τῶν στροφῶν ποὺ κάνει ὁ τροχὸς αὐτὸς σὲ 1 min, σὲ 1 h.

*4.* Ὑπολογίστε τὰ συμπληρώματα (βλ. Μάθημα 12) τῶν γωνιῶν:
$17^0\ 12'$, $53^0\ 25'$, $89^0\ 8'\ 3''$.

*5.* Ὑπολογίστε τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν:
$36^0\ 44'$, $108^0\ 7'$, $105^0\ 4'\ 12''$.

*6.* Δύο εὐθεῖες ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ κόβονται· ἀπὸ τὶς 4 γωνίες, ποὺ σχηματίζονται, οἱ δύο ὀξεῖες γωνίες ἔχουν $65^0\ 12'$ ἡ καθεμιά τους. Ὑπολογίστε τὶς δυὸ ἄλλες ἀμβλεῖες γωνίες.

*7.* Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο χαράξτε, ἀκολουθώντας μιὰν ὁρισμένη φορὰ περιστροφῆς, τὶς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ ἔτσι ποὺ νὰ σχηματίζωνται οἱ γωνίες:

$\widehat{AOB} = 24^0\ 44'$, $\widehat{BO\Gamma} = 132^0\ 18'$, $\widehat{\Gamma O\Delta} = 43^0\ 17'$.

Ὑπολογίστε μὲ τὴν ἴδια φορὰ περιστροφῆς τὶς γωνίες $\widehat{AO\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta OA}$.

*8.* Ἕνα σακὶ περιέχει 29 κιλὰ 250 γραμμάρια ζάχαρη. Πόσες χάρτινες σακοῦλες μποροῦμε νὰ γεμίσωμε μὲ τὴ ζάχαρη αὐτή, ἂν στὴν κάθε σακούλα βάλωμε 1 κιλὸ 750 γραμμάρια ζάχαρη;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

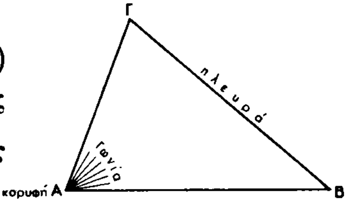
# ΤΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ Η ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ

## Μάθημα 25.

### Τὸ τρίγωνο.

**1. Ἂς σημειώσωμε τρία σημεῖα Α,Β,Γ, ὄχι ἐπάνω σὲ μιὰν καὶ τὴν ἴδια εὐθεία, καὶ ἂς τὰ ἑνώσωμε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα·** θὰ προκύψη ἕνα σχῆμα ποὺ ἔχει τρεῖς γωνίες καὶ ποὺ γι' αὐτὸ λέγεται *τρίγωνο.*

Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 25-α) ἔχει τρεῖς *κορυφὲς* Α, Β, Γ, τρεῖς *γωνίες* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ καὶ τρεῖς *πλευρὲς* ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.



Σχ. 25-α. Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ.

Μὲ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νὰ σχεδιάσωμε σχήματα ποὺ ἔχουν καὶ περισσότερες ἀπὸ τρεῖς γωνίες. Ὅλα αὐτὰ τὰ σχήματα, μὲ τρεῖς ἢ περισσότερες γωνίες, λέγονται *πολύγωνα.*

*Τὸ τρίγωνο εἶναι ἕνα πολύγωνο μὲ τρεῖς πλευρές.*

**2. Ἂς μετρήσωμε τὶς γωνίες ἑνὸς τριγώνου.** Στὰ σχήματα 25-β καὶ 25-γ θὰ βροῦμε

$$\widehat{A} = 62^\circ \qquad \widehat{\Delta} = 39^\circ$$
$$\widehat{B} = 65^\circ \qquad \widehat{E} = 110^\circ$$
$$\widehat{\Gamma} = 53^\circ \qquad \widehat{Z} = 31^\circ.$$

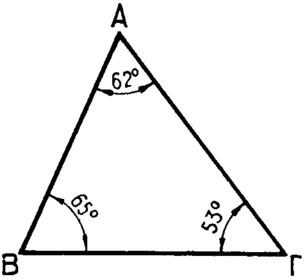
*Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου χωριστά.*

Στὸ τρίγωνο ΑΒΓ θὰ ἔχωμε

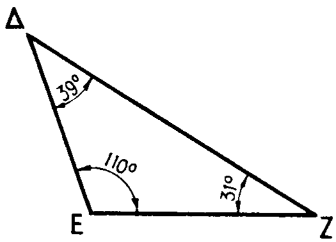
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 62^\circ + 65^\circ + 53^\circ = 180^\circ$$

Ἀλλὰ καὶ στὸ τρίγωνο ΔΕΖ εἶναι

$$\widehat{\Delta}+\widehat{E}+\widehat{Z}=39^\circ+110^\circ+31^\circ=180^\circ.$$




Σχ. 25-β.



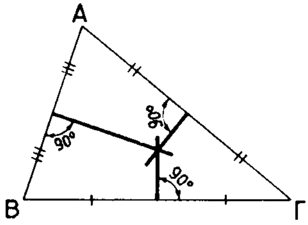

Σχ. 25-γ.

**Ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ κάθε τριγώνου.**

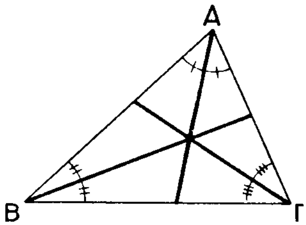
Ἀπὸ τὶς παρατηρήσεις αὐτὲς καὶ τοὺς ὑπολογισμοὺς — ποὺ θὰ μπορούσαμε νὰ ἐπαναλάβωμε σ' ἕνα *ὁποιοδήποτε τρίγωνο* — προκύπτει ὅτι:

*Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ 180°, δηλαδὴ μὲ δυὸ ὀρθὲς γωνίες.*

**3. Ἂς χαράξωμε τὶς ἀκόλουθες ἀξιοσημείωτες εὐθεῖες ἑνὸς τριγώνου:**




**Σχ. 25-δ. Οἱ 3 μεσοκάθετες εὐθεῖες ἑνὸς τριγώνου ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο.**



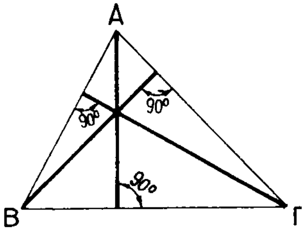

**Σχ. 25-ε. Οἱ 3 διχοτόμοι ἑνὸς τριγώνου ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο.**

1ο. Τὶς 3 *μεσοκαθέτους* τῶν πλευρῶν (σχ. 25-δ).

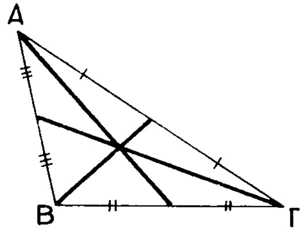
2ο. Τὶς 3 *διχοτόμους* τῶν γωνιῶν (σχ. 25-ε)· τὰ κομμάτια τους, ἀπὸ κάθε κορυφὴ ὡς τὴν ἀπέναντι πλευρά, λέγονται *διχοτόμοι τοῦ τριγώνου*.

3ο. Τὶς 3 *καθέτους* ἀπὸ τὶς κορυφὲς πρὸς τὶς ἀπέναντι πλευρές· τὰ κομμάτια τους, ἀπὸ τὸ πόδι τῆς καθεμιᾶς καθέτου ὡς τὴν κορυφή, λέγονται *ὕψη* τοῦ τριγώνου.

4ο. Τὶς 3 εὐθεῖες ποὺ ἑνώνουν τὶς κορυφὲς μὲ τὰ *μέσα* τῶν ἀπέναντι πλευρῶν· τὰ κομμάτια τους, ἀπὸ κάθε κορυφὴ ὡς τὸ μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, λέγονται *διάμεσοι* τοῦ τριγώνου.



**Σχ. 25-ς. Οἱ εὐθεῖες τῶν 3 ὑψῶν τοῦ τριγώνου ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο.**



**Σχ. 25-ζ. Οἱ 3 διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο.**

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ τρεῖς ἀξιοσημείωτες εὐθεῖες τοῦ τριγώνου, τὶς ὁποῖες χαράξαμε στὸ καθένα ἀπὸ τὰ τέσσερα αὐτὰ σχήματα, περνοῦν ἀπὸ ἕνα καὶ τὸ ἴδιο σημεῖο. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι εἶναι *συντρέχουσες*.

*Ἀσκήσεις. 1.* Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο, μετρῆστε τὶς πλευρές του καὶ ὕστερα ὑπολογίστε τὴν περίμετρό του. Δῶστε τὸ ἀποτέλεσμα μὲ προσέγγιση πρῶτα ἑνὸς mm, ἔπειτα ἑνὸς δεκάτου τοῦ mm.

*2.* Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο καὶ μετρῆστε τὶς πλευρές του· νὰ συγκρίνετε τώρα μιὰ πλευρὰ 1ο μὲ τὸ ἄθροισμα καὶ 2ο μὲ τὴ διαφορὰ τῶν δυὸ ἄλλων.

*3.* Ἐπαληθεῦστε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθογώνου σας (δηλ. τοῦ τριγώνου ποὺ χρησιμοποιεῖτε στὴ σχεδίαση) εἶναι ἴσο μὲ 180°. Ἂν τὸ ὀρθόγωνό σας δὲν ἦταν σωστό, εἶχε ὅμως γιὰ πλευρὲς σωστὲς εὐθεῖες, θὰ ἦταν ἄραγε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἴσο μὲ 180°;

*4.* Μετρώντας βρήκατε πὼς οἱ δυὸ γωνίες ἑνὸς τριγώνου εἶναι 53° 25′ καὶ 101° 32′. Πόση εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

*5.* Ἡ μικρότερη γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι 20° καὶ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ ἄλλες εἶναι διπλάσιά της. Πόσες φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν πρώτη (τὴ μικρότερη) θὰ εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

*6.* Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο ποὺ νὰ ἔχῃ μιὰ γωνία 110°. Ποιά θέση ἔχει ὡς πρὸς τὸ τρίγωνο τὸ σημεῖο ὅπου συντρέχουν οἱ τρεῖς μεσοκάθετοί του;

*7.* Ἡ ἴδια ἐρώτηση γιὰ τὸ σημεῖο ὅπου συντρέχουν οἱ εὐθεῖες τῶν τριῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

*8.* Ἡ περίμετρος ἑνὸς τριγώνου εἶναι 33 cm. Κατασκευάστε αὐτὸ τὸ τρίγωνο ξέροντας πὼς ἡ μεσαία σὲ μέγεθος πλευρά του εἶναι κατὰ 4 cm μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ μικρότερη πλευρὰ καὶ κατὰ 4 cm μικρότερη ἀπὸ τὴ μεγαλύτερη.

*9.* Στὸ σχῆμα 25-ϛ τοῦ Μαθήματος καλέστε (ὀνομάστε) Ο τὸ κοινὸ σημεῖο τῶν τριῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου. Ἂν ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι 82°, βρῆτε μὲ ὑπολογισμὸ πόση εἶναι ἡ γωνία $\widehat{BO\Gamma}$.

## Μάθημα 26.

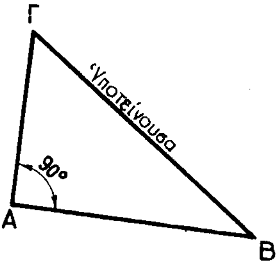
### Ὀρθογώνια τρίγωνα.
### Ἰσοσκελῆ τρίγωνα
### Ἰσόπλευρα τρίγωνα.

**1. Ἐπάνω στὶς πλευρὲς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{\text{Α}}$** παίρνομε εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἑνώνομε τὰ ἄκρα τους Β καὶ Γ. Θὰ σχηματίσωμε ἔτσι ἕνα *ὀρθογώνιο τρίγωνο* (σχ. 26-α). Ἡ πλευρὰ ΒΓ, ποὺ εἶναι ἀπέναντι στὴν ὀρθὴ γωνία, λέγεται *ὑποτείνουσα*.

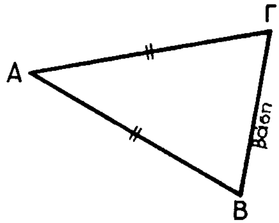
*Ἕνα τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο, ὅταν ἔχῃ μιὰ γωνία ὀρθή.*

Ὅπως ξέρομε, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 180°. Ἑπομένως, σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, μὲ ὀρθὴ γωνία τὴν $\widehat{\text{Α}}$, οἱ δύο ἄλλες γωνίες $\widehat{\text{Β}}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ θὰ εἶναι ὀξεῖες καὶ τὸ ἄθροισμά τους θὰ εἶναι $180° - 90° = 90°$.

Οἱ ὀξεῖες γωνίες ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι λοιπὸν *συμπληρωματικές*.




Σχ. 26-α. Ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.




Σχ. 26-β. Ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ.

**2. Ἐπάνω στὶς πλευρὲς μιᾶς ὁποιασδήποτε γωνίας $\widehat{\text{Α}}$** παίρνομε δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ΑΒ καὶ ΑΓ.

Ἂν ἑνώσωμε τὰ ἄκρα τους Β καὶ Γ, θὰ σχηματιστῇ ἕνα *ἰσοσκελὲς τρίγωνο* (σχ. 26-β). Ἡ πλευρά, ποὺ εἶναι ἀπέναντι στὴ γωνία $\widehat{\text{Α}}$, λέγεται *βάση* τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

*Ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελὲς ὅταν ἔχῃ δύο πλευρὲς ἴσες.*

Ἂς μετρήσωμε τώρα τὶς γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ ἰσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 26-β). Βρίσκομε

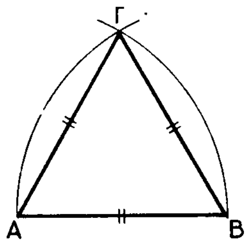
$$\widehat{B} = 70^\circ, \quad \widehat{\Gamma} = 70^\circ.$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν πὼς εἶναι ἴσες.

Σ᾽ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο οἱ γωνίες, οἱ ἀπέναντι στὶς ἴσες πλευρές, εἶναι κι᾽ αὐτὲς *ἴσες*.

**3. Μὲ κέντρα τὰ δύο ἄκρα ἑνὸς τμήματος ΑΒ καὶ μὲ ἀκτίνα αὐτὸ τὸ τμῆμα** χαράζομε, ἀπὸ τὴν ἴδια μεριὰ τῆς εὐθείας ΑΒ, δύο τόξα κύκλου ὡς τὸ σημεῖο Γ τῆς τομῆς τους. Ἂν ἑνώσωμε τὸ Γ μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, θὰ λάβωμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ποὺ ἔχει τὶς τρεῖς πλευρές του ἴσες καὶ ποὺ γι᾽ αὐτὸ λέγεται *ἰσόπλευρο* (σχ. 26-γ).

*Ἰσόπλευρο εἶναι ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἔχῃ τὶς τρεῖς πλευρές του ἴσες.*



**Σχ. 26-γ. Ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.**

Ἂς μετρήσωμε τώρα τὶς τρεῖς γωνίες του· θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἶναι:

$$\widehat{A} = 60^\circ, \quad \widehat{B} = 60^\circ, \quad \widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Παρατηροῦμε δηλαδὴ πὼς εἶναι *ἴσες*.

Σ᾽ ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο οἱ τρεῖς γωνίες εἶναι ἴσες καὶ ἡ καθεμιά τους 60°.

Ἂς σημειωθῇ πὼς ἡ παραπάνω κατασκευὴ μᾶς δίνει καὶ τὸν τρόπο *νὰ σχεδιάσωμε μιὰ γωνία 60°*· διχοτομώντας αὐτὴ τὴ γωνία (βλ. Μάθημα 11), μποροῦμε *νὰ σχεδιάσωμε ἔπειτα μιὰ γωνία 30°.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ πλευρὲς ὀρθῆς γωνίας ποὺ ἔχουν μῆκος 45 mm καὶ 80 mm. Ὕστερα μετρῆστε τὶς ὀξεῖες γωνίες του καὶ ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμά τους.

*2.* Δύο ἀπὸ τὶς γωνίες ἑνὸς τριγώνου εἶναι 32° ἡ μιὰ καὶ 58° ἡ ἄλλη. Τί τρίγωνο εἶναι αὐτό;

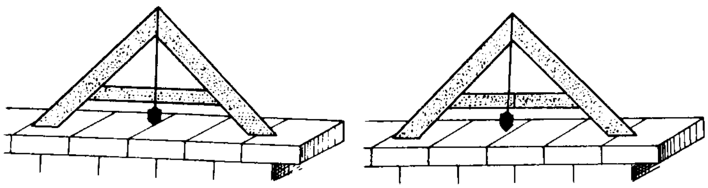
*3.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ποὺ οἱ πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας του ἔχουν μῆκος 32 mm ἡ μιὰ καὶ 58 mm ἡ ἄλλη. Ὕστερα μετρῆστε τὴν ὑποτείνουσα καὶ τὴν ἀπόσταση τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τὸ μέσο τῆς ὑποτείνουσας. Τί παρατηρεῖτε;

*4.* Χαράξτε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ποὺ οἱ ἴσες πλευρές του ἔχουν μῆκος 50 mm καὶ σχηματίζουν γωνία $\widehat{A} = 40^\circ$. Ὕστερα, φέρτε ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α τὴν κάθετο ΑΗ στὴ βάση τοῦ τριγώνου. Μὲ δυὸ μετρήσεις, ποὺ θὰ κάμετε, προσδιορίστε τὴ θέση τοῦ σημείου Α ἐπάνω στὴ βάση τοῦ τριγώνου.

*5.* Ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς ὀξεῖες γωνίες ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι $45^\circ$. Πόση εἶναι ἡ ἄλλη ὀξεία γωνία; Τί μπορεῖτε νὰ πῆτε γιὰ τὸ τρίγωνο αὐτό;

*6.* Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ ἴσες γωνίες του εἶναι $28^\circ\ 30'$. Πόση εἶναι ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἄλλες δύο γωνίες;

*7.* Ἐξηγῆστε γιατὶ μποροῦμε μὲ τὸ ζύγι (τὴ στάθμη) τοῦ κτίστη (σχ. 25-δ) νὰ ἐλέγξωμε ἂν η ἐπάνω ἐπιφάνεια τοῦ τοίχου εἶναι ὁριζόντια.



**Σχ. 26-δ. Ἂν τὸ νῆμα τοῦ ζυγιοῦ (τῆς στάθμης) σκεπάζῃ τὸ σημάδι, τότε ἡ ἐπάνω ἐπιφάνεια τοῦ τοίχου εἶναι ὁριζόντια.**

*8.* Χαράξτε τὰ τρία ὕψη ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου καὶ βρῆτε σὲ ποιό σημεῖο συντρέχουν. Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὶς μεσοκαθέτους ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου.

*9.* Χαράξτε ἕνα ἰσόπλερο τρίγωνο μὲ πλευρὲς 80 mm. Ὕστερα, σχεδιάστε τὶς μεσοκαθέτους, τὶς διχοτόμους, τὰ ὕψη καὶ τὶς διαμέσους του. Τί παρατηρεῖτε;

*10.* Χαράξτε μιὰν εὐθεία ΧΨ καὶ πάρτε ἕνα σημεῖο Α σὲ ἀπόσταση 40 mm ἀπὸ αὐτήν. Ὕστερα:

1ο. Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ποὺ νὰ ἔχῃ μιὰ πλευρά του ἐπάνω στὴ ΧΨ καὶ τὴ γωνία $\widehat{A} = 72^\circ$.

2ο. Σχεδιάστε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ τὴ μιά του πλευρὰ ἐπάνω στὴ ΧΨ.

3ο. Σχεδιάστε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ μὲ τὴ βάση του ἐπάνω στὴ ΧΨ καὶ γωνία $\widehat{B} = 36°$.

*11.* Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ποὺ νὰ ἔχῃ μιὰν ὀξεία γωνία ἴση πρὸς 30° καὶ φέρτε τὸ ὕψος ΑΗ καὶ τὴ διάμεσο ΑΜ ἀπὸ τὴν κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας. Ὕστερα:

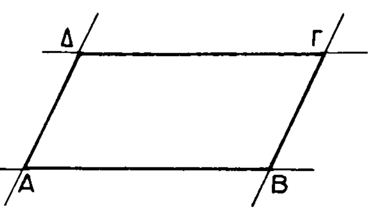
1ο. Προσδιορίστε ὅλες τὶς γωνίες τοῦ σχήματος ποὺ προκύπτει.

2ο. Ἐπαληθεῦστε ὅτι τὸ τμῆμα ΗΜ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τέταρτο τῆς ὑποτείνουσας ΓΒ.

## Μάθημα 27.

### Τὸ παραλληλόγραμμο.

**1. Ἂς χαράξωμε δύο εὐθεῖες παράλληλες καὶ ὕστερα δύο ἄλλες παράλληλες ποὺ νὰ κόβουν τὶς δύο πρῶτες.** Θὰ σχηματισθῇ ἕνα πολύγωνο ΑΒΓΔ ποὺ ἔχει τέσσερις πλευρές, δηλαδὴ εἶναι ἕνα *τετράπλευρο* (σχ. 27-α).



Σχ. 27-α. Παραλληλόγραμμο.

Τὸ τετράπλευρο, ποὺ κατασκευάστηκε ἔτσι, λέγεται *παραλληλόγραμμο* (σχ. 27-α).

*Παραλληλόγραμο λοιπὸν εἶναι τετράπλευρο ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες δυὸ-δυό.*

**2. Ἂς μετρήσωμε τώρα τὶς πλευρὲς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ** στὸ σχῆμα 27-α. Θὰ βροῦμε

$$ΑΒ = 33\,\text{mm},\ ΒΓ = 17\,\text{mm},\ ΓΔ = 33\,\text{mm},\ ΔΑ = 17\,\text{mm}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσες, ἐπίσης οἱ ΒΓ καὶ ΑΔ.

*Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες δυὸ - δυό.*

**3. Ἂς μετρήσωμε τώρα τὶς γωνίες τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ** (σχ. 27-β). Θὰ βροῦμε

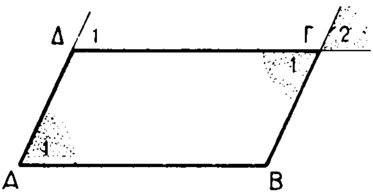
$$\widehat{Α} = 65°,\ \widehat{Β} = 115°,\ \widehat{Γ} = 65°,\ \widehat{Δ} = 115°.$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

Οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες: δηλαδὴ $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$ καὶ $\widehat{Β} = \widehat{Δ}$.

Χωρὶς νὰ μετρήσωμε τὶς γωνίες, θὰ μπορούσαμε νὰ προβλέψωμε αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα.

Καὶ ἀλήθεια, ἐπειδὴ οἱ εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλες, οἱ γωνίες $\widehat{Α}_1$ καὶ $\widehat{Δ}_1$ εἶναι ἴσες (βλ. Μάθημα 15). Ἀλλὰ καὶ οἱ εὐθεῖες




**Σχ. 27-β. Οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες δυὸ - δυό.**

ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλες, ἄρα καὶ οἱ γωνίες $\widehat{\Delta_1}$ καὶ $\widehat{\Gamma_2}$ εἶναι ἴσες. Ἐπίσης οἱ γωνίες $\widehat{\Gamma_2}$ καὶ $\widehat{\Gamma_1}$ εἶναι ἴσες, ἐπειδὴ εἶναι ἀντικόρυφες. Ἔχομε λοιπόν:

$\widehat{A_1} = \widehat{\Delta_1} = \widehat{\Gamma_2} = \widehat{\Gamma_1}$, ἄρα $\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$.

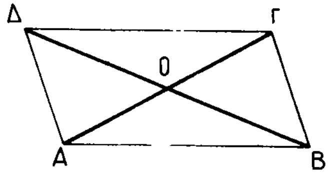
*Ὥστε, σ' ἕνα παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες δυὸ - δυό.*

**4. Ἂς ἑνώσωμε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὶς ἀπέναντι κορυφὲς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ** (σχ. 27-γ). Ἔτσι θὰ ἔχωμε χαράξει τὶς *διαγωνίους* ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ παραλληλογράμμου. Ὅπως βλέπομε, αὐτὲς κόβονται σ' ἕνα σημεῖο Ο. Ἂν μετρήσωμε τὶς ἀποστάσεις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὶς τέσσερις κορυφὲς τοῦ παραλληλογράμμου, θὰ βροῦμε

$$ΟΑ = 16\,\text{mm},$$
$$ΟΓ = 16\,\text{mm},$$
$$ΟΒ = 20\,\text{mm},$$
$$ΟΔ = 20\,\text{mm}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$ΟΑ = ΟΓ \text{ καὶ } ΟΒ = ΟΔ.$$




**Σχ. 27-γ. Τὸ σημεῖο Ο εἶναι τὸ μέσο καθεμιᾶς διαγωνίου.**

Ὥστε τὸ σημεῖο Ο βρίσκεται στὸ μέσο καὶ τοῦ τμήματος ΑΓ καὶ τοῦ τμήματος ΒΔ.

*Οἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου κόβονται σ' ἕνα σημεῖο ποὺ εἶναι τὸ μέσο τῆς καθεμιᾶς τους.*

Τὸ σημεῖο Ο λέγεται *κέντρο* τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

*Ἀσκήσεις. 1.* Χρησιμοποιώντας κανόνα καὶ ὀρθόγωνο (τρίγωνο), χαράξτε ἕνα παραλληλόγραμμο. Μετρῆστε τὶς γωνίες του καὶ ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμά τους.

*2.* Μιὰ ἀπὸ τὶς 4 γωνίες ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι 73°. Ὑπολογίστε τὶς τρεῖς ἄλλες.

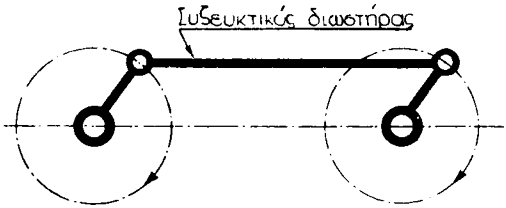
*3.* Χαράξτε τρία διάφορα παραλληλόγραμμα ποὺ τὸ καθένα τους νὰ ἔχῃ πλευρὲς μὲ μῆκος 40 mm καὶ 55 mm.

*4.* Χαράξτε ἕνα παραλληλόγραμμο γνωρίζοντας τὰ μήκη 60 mm καὶ 45 mm δυὸ συνεχόμενων πλευρῶν του καθὼς καὶ τὴ γωνία $40^\circ$ ποὺ σχηματίζουν. Ὕστερα μετρῆστε τὶς διαγωνίους του.

*5.* Χαράξτε δυὸ εὐθεῖες ποὺ νὰ κόβωνται σ' ἕνα σημεῖο O ἔτσι, ὥστε μιὰ ἀπὸ τὶς 4 γωνίες ποὺ σχηματίζονται νὰ ἔχη μέγεθος $36^\circ$. Ἐπάνω στὴ μιὰ εὐθεῖα πάρτε μὲ ἀρχὴ τὸ O, δεξιὰ καὶ ἀριστερά του, δύο τμήματα μήκους 32 mm τὸ καθένα· ἐπάνω στὴν ἄλλη εὐθεία πάρτε μὲ ὅμοιο τρόπο δυὸ τμήματα μὲ μῆκος 25 mm τὸ καθένα. Ἑνῶστε τὰ 4 σημεῖα, ὅπου τελειώνουν τὰ τμήματα αὐτὰ μὲ εὐθεῖες, ἔτσι ποὺ νὰ σχηματιστῆ ἕνα τετράπλευρο καὶ μετρῆστε τὶς γωνίες καθὼς καὶ τὶς πλευρές του. Τί εἴδους τετράπλευρο εἶναι αὐτό;

*6.* Χαράξτε ἕνα παραλληλόγραμμο γνωρίζοντας μιὰ πλευρά του AB = 50 mm καθὼς καὶ τὰ μήκη 40 mm καὶ 80 mm τῶν δυὸ διαγωνίων του. Μετρῆστε τὶς ἄλλες πλευρὲς τοῦ παραλληλογράμμου καθὼς καὶ τὶς γωνίες του.

*7.* Δύο ἰσομέγεθοι τροχοὶ συνδέονται μὲ ἕνα «διωστήρα» ποὺ ἔχει



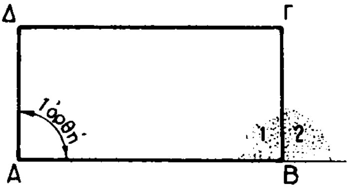

**Σχ. 27-δ. Γιατί ὁ διωστήρας εἶναι πάντα παράλληλος μὲ τὴν εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν τροχῶν;**

μῆκος ἴσο πρὸς τὴν ἀπόσταση τῶν ἀξόνων τῶν δυὸ τροχῶν. Βλέπετε γιατὶ ὁ διωστήρας εἶναι πάντα παράλληλος μὲ τὴν εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν τροχῶν (σχ. 27-δ);

# Μάθημα 28.

## Τὸ ὀρθογώνιο.

**1. Ἂς κατασκευάσωμε ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει μιὰ γωνία, τὴν $\widehat{A}$, ὀρθή.** Τὸ τετράπλευρο, ποὺ θὰ λάβωμε, λέγεται *ὀρθογώνιο* (σχ. 28-α).




Σχ. 28-α. Τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ.

*Ὀρθογώνιο λοιπὸν εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει σὲ μιὰ γωνία ὀρθή.*

Ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιο ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου (Μάθημα 27):

*οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες δυὸ - δυό·*
*οἱ ἀπέναντι γωνίες του: εἶναι ἴσες δυὸ - δυό·*
*οἱ διαγώνιοί του κόβονται στὸ μέσο τους.*

Νά τώρα μερικὲς ἄλλες ἰδιότητες τοῦ ὀρθογωνίου.

**2. Ἂς μετρήσωμε τὶς γωνίες τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.**

Στὸ σχῆμα 28-α θὰ ἔχωμε

$$\widehat{B} = 90°, \ \widehat{\Gamma} = 90°, \ \widehat{\Delta} = 90°.$$

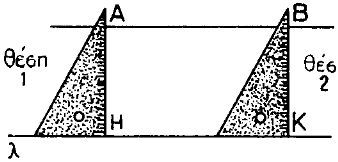
Ἀπὸ κατασκευὴ ὅμως ἔχομε καὶ τὴν $\widehat{A} = 90°$. Παρατηροῦμε λοιπὸν πὼς οἱ 4 γωνίες ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ὀρθές.

Χωρὶς νὰ μετρήσωμε τὶς γωνίες, θὰ μπορούσαμε νὰ προβλέψωμε αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα. Καὶ ἀλήθεια, οἱ ἀπέναντι γωνίες $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἴσες, ἄρα ἡ γωνία $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ὀρθή. Οἱ γωνίες $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B_2}$ εἶναι ἴσες, ἐπειδὴ οἱ εὐθεῖες ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλες (Μάθημα 15), ἄρα καὶ ἡ $\widehat{B_2}$ εἶναι ὀρθή, ἑπομένως καὶ ἡ $\widehat{B_1}$. Οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ἴσες, ἑπομένως καὶ ἡ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ὀρθή.

Ὥστε: *Σ' ἕνα ὀρθογώνιο καὶ οἱ 4 γωνίες εἶναι ὀρθές.*

**3. Ἐφαρμογή. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α χαράξτε παράλληλο πρὸς τὴν εὐθεία λ** (σχ. 28-β).

Μὲ τὸ τρίγωνο τραβοῦμε ἀπὸ τὸ σημεῖο Α μιὰ κάθετο στὴ λ καὶ μετροῦμε τὴν ἀπόσταση ΑΗ (θέση 1). Μετακινοῦμε ὕστερα τὸ τρίγωνο καὶ σημειώνομε ἕνα ἄλλο σημεῖο Β μὲ τὴν ἴδια ἀπόσταση ἀπὸ τὴ λ: ΒΚ = ΑΗ (θέση 2). Τὸ τετράπλευρο ΑΒΚΗ εἶναι ὀρθογώνιο, *ἄρα ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴ λ.*

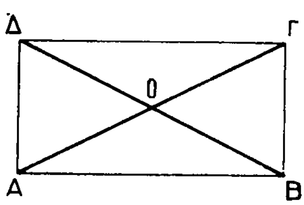



**Σχ. 28-β. Χαράξτε ἀπὸ δοσμένο σημεῖο τὴν παράλληλο πρὸς δοσμένη εὐθεία.**

**4. Ἂς χαράξωμε τὶς διαγωνίους τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καὶ ἄς τὶς μετρήσωμε.** Θὰ ἔχωμε στὸ σχῆμα 28-γ

$$ΑΓ = 39{,}2 \text{ mm}, \qquad ΒΔ = 39{,}2 \text{ mm}.$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι οἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσες.




**Σχ. 28-γ. Οἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.**

Ἔχομε ἔτσι τὴν ἰδιότητα:

*Σὲ κάθε ὀρθογώνιο οἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσες.*

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν βγαίνει ὅτι καὶ τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ εἶναι ἴσα, γιατὶ εἶναι τὰ μισὰ τῶν διαγωνίων. Μὲ ἄλλα λόγια: τὸ σημεῖο τομῆς Ο τῶν διαγωνίων ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ *ἀπέχει ἴσα* ἀπὸ τὶς τέσσερις κορυφὲς Α, Β, Γ, Δ. Ὅπως ξέρομε καὶ ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμο, τὸ σημεῖο Ο εἶναι τὸ *κέντρο* τοῦ ὀρθογωνίου.

*Ἀσκήσεις. 1.* Χρησιμοποιώντας χάρακα, διαβήτη καὶ ὑποδεκάμετρο χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο πού νὰ ἔχῃ μῆκος (δηλ. μεγαλύτερη πλευρὰ) 55 mm καὶ πλάτος (δηλ. μικρότερη πλευρὰ) 40 mm.

*2.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο γνωρίζοντας τὰ μήκη 80 mm καὶ 60 mm τῶν πλευρῶν του. Ὕστερα, σχεδιάστε τὶς διαγωνίους του καὶ μετρῆστε τὴν ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ ὀρθογωνίου ἀπὸ καθεμιὰ κορυφή.

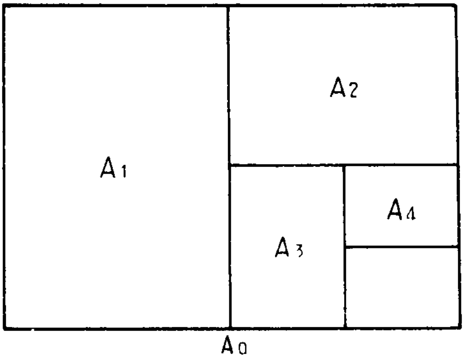
*3.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο μὲ μῆκος 70 mm καὶ πλάτος 50 mm. Μετρῆστε τὶς διαγωνίους του καθὼς καὶ τὴν ὀξεία γωνία ποὺ σχηματίζουν.

*4.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο γνωρίζοντας τὸ μῆκος 80 mm τῶν διαγωνίων του καὶ τὸ μέγεθος 120° μιᾶς γωνίας τους. Ὕστερα, μετρῆστε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν του.

*5.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο γνωρίζοντας ὅτι οἱ διαγώνιοί του ἔχουν μῆκος 70 mm καὶ σχηματίζουν μιὰ γωνία 90°. Ὕστερα, μετρῆστε τὶς πλευρές του. Τί παρατηρεῖτε;

*6.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ νὰ ἔχῃ περίμετρο 240 mm καὶ μῆκος διπλάσιο ἀπὸ τὸ πλάτος του.

*7.* Τὸ σχῆμα 28-δ παριστάνει σὲ κλίμακα 1/20 ἕνα ὀρθογώνιο $A_0$ ποὺ ἔχει (πραγματικὲς) διαστάσεις 1 188 mm × 840 mm. Τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ τὸ διαιροῦμε κατεπανάληψη σὲ δυὸ ἴσα μέρη, διπλώνοντάς το κάθε φορὰ σὲ δυὸ κατὰ τὴ μεγαλύτερη διάστασή του, καὶ ἔτσι ἀπο-




**Σχ. 28-δ. Τὸ «σχῆμα» $A_0$ σὲ κλίμακα 1/20 καὶ μερικὲς ὑποδιαιρέσεις του.**

κτοῦμε τὰ μικρότερα ὀρθογώνια $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, κτλ. Μιὰ συμφωνία μεταξὺ τῶν ἐθνῶν μᾶς λέει νὰ δίνωμε στὰ φύλλα τῶν σχεδίων μας τὸ «σχῆμα», δηλαδὴ τὶς διαστάσεις, αὐτῶν τῶν ὀρθογωνίων $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, κτλ.

1ο. Βρῆτε μὲ ὑπολογισμὸ τὶς πραγματικὲς διαστάσεις τῶν φύλλων μὲ τὸ ἀκόλουθο «σχῆμα»: $A_1$, $A_2$, $A_3$ καὶ $A_4$.

2ο. Ὑπολογίστε γιὰ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ 5 σχήματα $A_0$, $A_1$, ... $A_4$, τὸ πηλίκον τῆς μεγαλύτερης διὰ τῆς μικρότερης διαστάσεως του. Τί παρατηρεῖτε;

## Μάθημα 29.

### Ὁ ρόμβος.

1. **Ἂς κατασκευάσωμε ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ νὰ ἔχη δύο συνεχόμενες πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΔ ἴσες:** Τὸ τετράπλευρο, ποὺ κατασκευάσαμε, λέγεται *ρόμβος* (σχ. 29-α).

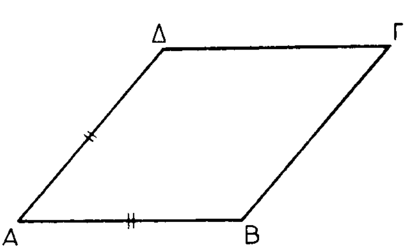
*Ρόμβος εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει δύο συνεχόμενες πλευρὲς ἴσες.*

Ὁ ρόμβος ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου (Μάθημα 27):

*οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες δυὸ - δυό·*

*οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἴσες δυὸ - δυό·*

*οἱ διαγώνιοί του κόβονται στὸ μέσο τους.*




**Σχ. 29-α. Ρόμβος ΑΒΓΔ.**

Ὁ ρόμβος ὅμως ἔχει καὶ ἄλλες ἰδιότητες ποὺ θὰ ἐκθέσωμε παρακάτω.

2. **Ἂν μετρήσωμε τὶς πλευρὲς τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ** (σχ. 29-α), θὰ βροῦμε

ΑΓ = 30 mm, ΒΓ = 30 mm, ΓΔ = 30 mm, ΔΑ = 30 mm.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ 4 πλευρὲς εἶναι ἴσες.

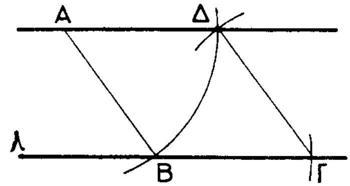
Χωρὶς νὰ κάμωμε μετρήσεις, θὰ μπορούσαμε νὰ προβλέψωμε αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα. Καὶ ἀλήθεια, οἱ πλευρὲς ΒΓ καὶ ΔΑ, σὰν ἀπέναντι πλευρὲς παραλληλογράμμου, εἶναι ἴσες· γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι ἴσες καὶ οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἀπὸ κατασκευὴ ὅμως ΑΒ = ΑΔ, ἄρα οἱ 4 πλευρὲς τοῦ ρόμβου εἶναι ἴσες.

Ὥστε: *Σ' ἕνα ρόμβο οἱ τέσσερις πλευρὲς εἶναι ἴσες.*

Ἀντιστρόφως, ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο οἱ 4 πλευρὲς εἶναι ἴσες, τὸ τετράπλευρο θὰ εἶναι ρόμβος.

**3. Ἐφαρμογή. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α χαράξτε τὴν παράλληλο στὴν εὐθεία λ** (σχ. 29-β).

Μὲ κέντρο τὸ Α γράφομε ἕνα τόξο κύκλου ποὺ νὰ κόβῃ τὴν λ σ' ἕνα σημεῖο, τὸ Β. Ὕστερα, *μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα* καὶ μὲ κέντρο τὸ Β, γράφομε ἕνα τόξο ποὺ κόβει τὴ λ σ' ἕνα σημεῖο Γ ἔτσι, ποὺ ἡ $\widehat{ΑΒΓ}$ νὰ εἶναι ἀμβλεία ($> 90°$). Τέλος, μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα καὶ μὲ κέντρο τὸ Γ, χαράζομε ἕνα τρίτο τόξο ποὺ θὰ κόβῃ τὸ πρῶτο τὸ τόξο ὄχι μόνο στὸ Β ἀλλὰ καὶ σ' ἕνα ἀκόμη σημεῖο, ἔστω τὸ Δ. Τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει τὶς τέσσερις πλευρές τους ἴσες, ἄρα *εἶναι ρόμβος* καὶ οἱ ἀπέναντι πλευρές του ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλες:



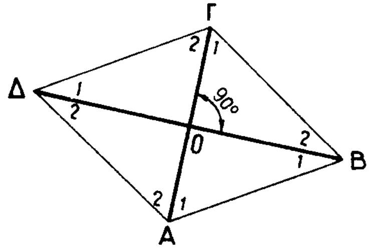

**Σχ. 29-β. Ἀπὸ δοσμένο σημεῖο χαράξτε τὴν παράλληλο πρὸς δοσμένη εὐθεία.**

Ὥστε, *ἡ εὐθεία ΑΔ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν εὐθεία λ.*

**4. Ἂς χαράξωμε τὶς διαγωνίους ἑνὸς ρόμβου καί: 1ο Ἂς μετρήσωμε τὴ γωνία τους.** Θὰ βροῦμε στὸ σχῆμα 29-γ

$\widehat{ΒΟΓ} = 90°$, ἄρα καὶ

$\widehat{ΓΟΔ} = \widehat{ΔΟΑ} = \widehat{ΑΟΒ} = 90°$.




**Σχ. 29-γ. Διαγώνιοι τοῦ ρόμβου.**

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι οἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετες.
Ὥστε, *σ' ἕνα ρόμβο οἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετες.*

**2ο Ἂς μετρήσωμε τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζει κάθε διαγώνιος μὲ τὶς πλευρές.**

Θὰ ἔχωμε (σχ. 29-γ)

$$\begin{cases} \widehat{Α_1} = 57° \\ \widehat{Α_2} = 57° \end{cases} \quad \begin{cases} \widehat{Β_1} = 33° \\ \widehat{Β_2} = 33° \end{cases} \quad \begin{cases} \widehat{Γ_1} = 57° \\ \widehat{Γ_2} = 57° \end{cases} \quad \begin{cases} \widehat{Δ_1} = 33° \\ \widehat{Δ_2} = 33°. \end{cases}$$

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου χωρίζουν τὶς γωνίες του σὲ δύο ἴσα μέρη.

*Ὥστε, σ' ἕνα ρόμβο οἱ διαγώνιοι εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε ἕνα ρόμβο, μετρῆστε τὶς γωνίες του καὶ ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμά τους.

*2.* Χαράξτε ἕνα ρόμβο γνωρίζοντας μιὰ πλευρά του, 50 mm, καὶ μιὰ γωνία του, $40^o$. Ὕστερα, μετρῆστε τὶς διαγωνίους του.

*3.* Χαράξτε δύο κάθετες εὐθεῖες καὶ ἔστω O τὸ σημεῖο ὅπου κόβονται. Ἐπάνω στὴ μιὰ εὐθεία πάρτε τὰ τμήματα $OA = OB = 40$ mm καὶ ἐπάνω στὴν ἄλλη τὰ $O\Gamma = O\Delta = 35$ mm. Τί τετράπλευρο εἶναι τὸ $A\Gamma B\Delta$; Μετρῆστε τὶς πλευρὲς καὶ τὶς γωνίες του.

*4.* Χαράξτε ἕνα ρόμβο γνωρίζοντας τὶς διαγωνίους του· 86 mm καὶ 100 mm. Ὕστερα, μετρῆστε τὶς πλευρὲς καὶ τὶς γωνίες του.

*5.* Χαράξτε ἕνα ρόμβο ποὺ νὰ ἔχῃ μιὰ διαγώνιο ἴση μὲ μιὰ πλευρά. Βρῆτε ὕστερα μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τί μέγεθος ἔχουν οἱ γωνίες του. Θὰ μπορούσατε χωρὶς μετρήσεις νὰ προβλέψετε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό;

*6.* Συνδέστε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ μέσα κάθε δύο συνεχόμενων πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου. Τί σχῆμα προκύπτει; Δικαιολογῆστε τὴν ἀπάντησή σας εἴτε μὲ μετρήσεις, εἴτε μὲ συλλογισμό.

*7.* Χαράξτε ἐπάνω στὸ χαρτί σας ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB καὶ σχεδιάστε τέσσερις ἢ περισσότερους ρόμβους $AB\Gamma_1\Delta_1$, $AB\Gamma_2\Delta_2$, $AB\Gamma_3\Delta_3$, $AB\Gamma_4\Delta_4$,... ποὺ ἔχουν πλευρὰ τὸ AB. Ἄραγε βλέπετε καμμιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ τὶς κορυφὲς $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ $\Gamma_3$, $\Gamma_4$,...; ὅμοια ἐρώτηση γιὰ τὶς κορυφὲς $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$,... καθὼς καὶ γιὰ τὰ κέντρα $O_1, O_2, O_3, O_4$,... τῶν ρόμβων.

*8.* Χαράξτε μιὰν εὐθεία καὶ σημειῶστε ἕνα σημεῖο σ' ἀπόσταση 4 cm ἀπ' αὐτήν.

1ο. Μὲ τὸ διαβήτη καὶ τὸ χάρακα φέρτε ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτὸ παράλληλο πρὸς τὴν εὐθεία.

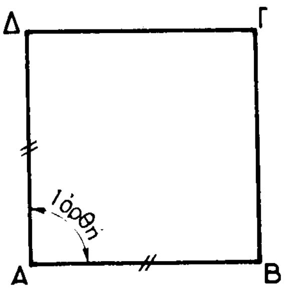
2ο. Ξέρετε ἄλλους τρόπους νὰ κατασκευάσετε αὐτὴ τὴν παράλληλο; Πόσους; Καὶ σὲ ποιά Μαθήματα τοῦ βιβλίου τοὺς διδαχθήκατε;

# Μάθημα 30.

## Τὸ τετράγωνο.

1. **Ἂς κατασκευάσωμε ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ ἔχει τὸ πλάτος ἴσο μὲ τὸ μῆκος του**: Τὸ τετράπλευρο ποὺ ἔτσι θὰ σχηματιστῇ λέγεται *τετράγωνο* (σχ. 30-α).

*Τὸ τετράγωνο λοιπὸν εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ ἔχει δυὸ συνεχόμενες πλευρὲς ἴσες.*




Σχ. 30-α. Τὸ τετράγωνο ΑΒΓΔ.

**2. Ἰδιότητες τοῦ τετραγώνου.** Γιὰ νὰ τὶς κάμωμε φανερές, δὲν χρειάζεται καμμιὰ μέτρηση, γιατὶ ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ βγαίνουν ἀμέσως οἱ παρακάτω ἰδιότητες:

1ο τὸ τετράγωνο εἶναι ὀρθογώνιο, *ἄρα ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ ὀρθογωνίου καί*, κατὰ συνέπεια, *ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου.*

2ο τὸ τετράγωνο ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο *ποὺ ἔχει δύο συνεχόμενες πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΔ ἴσες*, εἶναι ἑπομένως *καὶ ρόμβος*.

*Ὥστε, τὸ τετράγωνο ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ ρόμβου.*

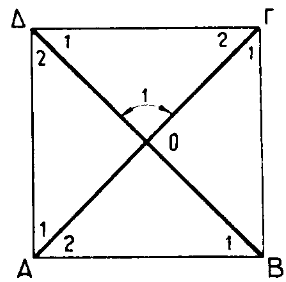
Τὸ τετράγωνο λοιπὸν ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ρόμβου.

Μὲ λίγα λόγια, σ' ἕνα τετράγωνο:

1ο *οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι παράλληλες δυὸ - δυό,*

2ο *οἱ τέσσερις πλευρὲς εἶναι ἴσες,*

3ο *οἱ τέσσερις γωνίες εἶναι ὀρθές,*




Σχ. 30-β. Ἐπαλήθευση τῶν ἰδιοτήτων τοῦ τετραγώνου.

*4ο οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες, εἶναι κάθετες ἡ μιὰ πρὸς τὴν ἄλλη, κόβονται στὸ μέσο τους καὶ διχοτομοῦν τὶς γωνίες του.*

Ὅλες αὐτὲς οἱ ἰδιότητες ἐπαληθεύονται στὸ σχῆμα 30-β:

1ο ΑΒ//ΓΔ καὶ ΑΔ//ΒΓ.

(Τὸ // εἶναι τὸ σύμβολο γιὰ τὴν παραλληλία).

2ο $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 30$ mm.

3ο $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 90^0$.

4ο $A\Gamma = B\Delta = 43$ mm.

$OA = OB = O\Gamma = O\Delta = 21{,}5$ mm.

$\widehat{O_1} = 90^\circ$ (ὅπως καὶ οἱ ἄλλες τρεῖς γωνίες μὲ κορυφὴ τὸ O).

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 45^\circ$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = 45^\circ$,

$\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2} = 45^\circ$, $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2} = 45^\circ$.

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 5 cm καὶ ἐπαληθεῦστε ὅλες τὶς ἰδιότητες ποὺ ἐξηγοῦνται στὸ Μάθημα.

*2.* Σημειῶστε ἐπάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ ἕνα σημεῖο O καὶ χαράξτε ἕνα τετράγωνο ποὺ νὰ ἔχη κέντρο τὸ O καὶ ποὺ τὸ μισὸ μιᾶς διαγωνίου του ἔχει μῆκος 41 mm.

*3.* Χαράξτε ἕνα τετράγωνο ποὺ νὰ ἔχη διαγώνιο 70 mm καὶ ὕστερα μετρῆστε τὴν πλευρά του.

*4.* Μὲ τί ἰσοῦται ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἑνὸς τετραγώνου ἀπὸ μιὰ πλευρά του;

Ἐφαρμογή: Ἐπάνω σὲ ἕνα χαρτὶ σημειῶστε ἕνα σημεῖο O καὶ ὕστερα χαράξτε ἕνα τετράγωνο ποὺ νὰ ἔχη κέντρο τὸ O καὶ μῆκος πλευρᾶς 58 mm.

*5.* Χαράξτε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 60 mm καί, μὲ ἕνα ὑποδεκάμετρο, βρῆτε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Συνδέστε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ μέσα κάθε δυὸ συνεχόμενων πλευρῶν. Ἔτσι θὰ σχηματισθῇ ἕνα τετράπλευρο· μετρῆστε τὶς πλευρές του καὶ πῆτε τί τετράπλευρο εἶναι. Διατυπῶστε τὴν ἀπάντηση μὲ μιὰ φράση ποὺ ἀρχίζει ἔτσι: «Ἂν συνδέσωμε τὰ μέσα κάθε δύο συνεχόμενων πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου, τότε...».

*6.* Νὰ χαράξετε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 25 mm καὶ νὰ προεκτείνετε κατὰ 13 mm κάθε πλευρά του κατὰ τὴ φορὰ μὲ τὴν ὁποία τὴ διατρέχετε, ὅταν κάνετε τὸ γύρο ἐπάνω στὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου. Συνδέστε τὰ ἄκρα κάθε δύο διαδοχικῶν προεκτάσεων· θὰ προκύψη ἕνα τετράπλευρο. Τί τετράπλευρο θὰ εἶναι αὐτὸ καὶ γιατί;

7. Σχεδιάστε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ καὶ συνδέστε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ χαρτιοῦ σας μὲ τὶς κορυφὲς τοῦ τετραγώνου. Νὰ προεκτείνεται ὕστερα τὶς εὐθείες ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ καὶ ΜΔ κατὰ τὰ τμήματα $ΑΑ' = ΜΑ$, $ΒΒ' = ΜΒ$, $ΓΓ' = ΜΓ$, καὶ $ΔΔ = ΜΔ$ ἀντιστοίχως. Τί τετράπλευρο εἶναι τὸ Α'Β'Γ'Δ';

Ἐξετάστε εἰδικὰ τὶς τρεῖς περιπτώσεις ὅπου σημεῖο Μ εἶναι τὸ κέντρο τοῦ τετραγώνου ἢ μιὰ κορυφή του ἢ τὸ μέσο μιᾶς πλευρᾶς.

8. Χαράξτε τρία τετράγωνα ποὺ νὰ ἔχουν ἀντιστοίχως γιὰ πλευρὰ 50 mm, 35 mm καὶ 60 mm. Μετρῆστε τὶς διαγωνίους των· ὕστερα διαιρέστε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου κάθε τετραγώνου διὰ τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς του. Τί παρατηρεῖτε στὰ πηλίκα ποὺ βρίσκετε;

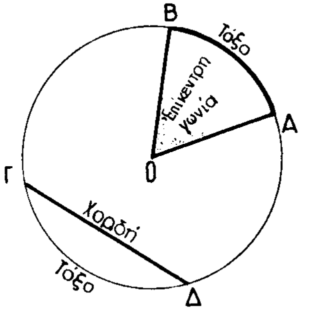
Ἐφαρμογή: Ὑπολογίστε τὴ διαγώνιο ἑνὸς τετραγώνου ποὺ ἔχει πλευρὰ 5,5 m, ἐπίσης τὴν πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ποὺ ἔχει διαγώνιο 14,5 m.

## Μάθημα 31.

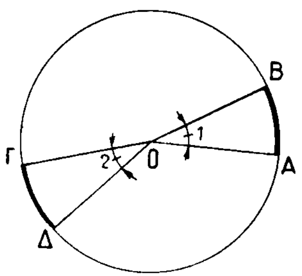
### Τόξα, χορδὲς καὶ ἐφαπτομένες περιφέρειας.

**1. Σημειώνομε δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπάνω σὲ μιὰ περιφέρεια** (σχ. 31-α) καὶ τὰ συνδέομε μὲ τὸ κέντρο της Ο. Ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ λέγεται *ἐπίκεντρη γωνία, ἀντίστοιχη στὸ τόξο* $\overset{\frown}{AB}$ ποὺ περιέχεται ἀνάμεσα στὶς πλευρές της.

Μιὰ ὁποιαδήποτε γωνία μπορεῖ νὰ γίνῃ ἐπίκεντρη, φθάνει νὰ χαράξωμε μιὰν περιφέρεια ποὺ ἔχει κέντρο τὴν κορυφὴ τῆς




**Σχ. 31-α. Κάθε ἐπίκεντρη γωνία ἀντιστοιχεῖ σ' ἕνα τόξο καὶ κάθε τόξο ἔχει μία ἀντίστοιχη χορδή.**




**Σχ. 31-β. Δύο ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες ἀντιστοιχοῦν σὲ ἴσα τόξα.**

γωνίας καὶ νὰ προσδιορίσωμε τὰ δυὸ σημεῖα ὅπου οἱ πλευρὲς τῆς γωνίας τέμνουν τὴν περιφέρεια.

Σημειώνομε πάλι δυὸ σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπάνω στὴν περιφέρεια καὶ τὰ συνδέομε· τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ λέγεται *χορδὴ τοῦ τόξου* $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

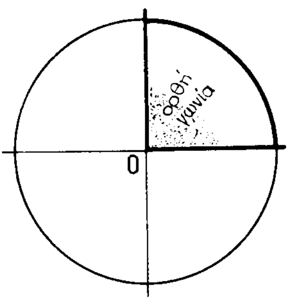
**2. Σὲ μιὰ περιφέρεια ἂς χαράξωμε δύο ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες καὶ ἂς ἐξετάσωμε τὰ δυὸ τόξα ποὺ ἀντιστοιχοῦν σ' αὐτές.**

Στὸ σχῆμα 31-β ἔχομε $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = 31°$.

Χρησιμοποιώντας ένα κομμάτι διαφανὲς χαρτὶ παρατηροῦμε ὅτι καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}$ μποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν ἕνα ἐπάνω στὸ ἄλλο· εἶναι λοιπὸν ἴσα.

*Σὲ μιὰ περιφέρεια ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες ἔχουν ἴσα ἀντίστοιχα τόξα.*

Ἂν μιὰ ἐπίκεντρη γωνία εἶναι ὀρθή, τότε θ' ἀντιστοιχῆ σ' ἕνα τέταρτο τῆς περιφέρειας ἤ, ὅπως λέμε, σ' ἕνα τεταρτοκύκλιο.



**Σχ. 31-γ. Ἡ ὀρθὴ γωνία ἀντιστοιχεῖ σὲ τεταρτοκύκλιο.**

Γιὰ τὴ μέτρηση τῶν τόξων μιᾶς καὶ τῆς ἴδιας περιφέρειας χρησιμοποιοῦνται συνήθως οἱ ἀκόλουθες μονάδες:

I. Τὸ *τεταρτοκύκλιο*, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ μονάδα γωνιῶν, τὴν ὀρθὴ γωνία.

II. Τὸ τόξο *μία μοίρα* ($1^\circ$), ἴσο μὲ 1/90 τοῦ τεταρτοκυκλίου. Τὸ τόξο αὐτὸ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἐπίκεντρη γωνία μιᾶς μοίρας ποὺ εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς.

III. Τὸ τόξο *ἕνα πρῶτο λεπτὸ* ($1'$), ἴσο μὲ 1/60 τοῦ τόξου $1^\circ$ καὶ ἀντίστοιχο σὲ μιὰν ἐπίκεντρη γωνία $1' = 1/60$ τῆς γωνίας $1^\circ$.

IV. Τὸ τόξο *ἕνα δεύτερο λεπτὸ* ($1''$), ἴσο μὲ 1/60 τοῦ τόξου $1'$ καὶ ἀντίστοιχο σὲ μιὰν ἐπίκεντρη γωνία $1'' = 1/60$ τῆς γωνίας $1'$. Βλέπομε τώρα ἀμέσως τὸ ἑξῆς:

*Μιὰ ἐπίκεντρη γωνία καὶ τὸ ἀντίστοιχο σ' αὐτὴν τόξο μετριοῦνται ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ὅταν χρησιμοποιήσωμε, καὶ γιὰ τὶς δυὸ μετρήσεις, μονάδα μὲ τὸ ἴδιο ὄνομα (δηλ. ἢ μοίρα ἢ πρῶτο ἢ δεύτερο λεπτό).*

Π.χ. στὸ σχῆμα 31-β ἡ γωνία $\widehat{O_1}$ καθὼς καὶ τὸ ἀντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$ μετριοῦνται ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ $31^\circ$.

*Παρατήρηση.* Ἡ λέξη μοίρα παριστάνει εἴτε μονάδα γωνιῶν, εἴτε μονάδα τόξων μιᾶς περιφέρειας. Γι' αὐτὸ θὰ ἔπρεπε νὰ λέγαμε: ἡ γωνία $\widehat{O_1}$ τοῦ σχήματος 31-β ἔχει 31 μοῖρες γωνίας καὶ τὸ τόξο $\widehat{AB}$ ἔχει 31 μοῖρες τόξου. Αὐτὴ ὅμως ἡ προσπάθεια νὰ ποῦμε τὰ πράγματα ἀκριβέστερα (πιὸ σωστὰ) εἶναι περιττή, ὅσες φορὲς δὲν ὑπάρχει κίνδυνος γιὰ παρανόηση. Ὡστόσο δὲν θὰ λέμε πὼς ἡ γωνία $\widehat{O_1}$ καὶ τὸ τόξο $\widehat{AB}$ εἶναι ἴσα, γιατὶ τὰ δυὸ αὐτὰ σχήματα δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμα, ἀλλὰ θὰ λέμε πὼς μετριοῦνται ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

**3. Ἂς πάρωμε ἐπάνω σὲ μιὰ περιφέρεια δυὸ ἴσα τόξα καὶ ἂς ἐξετάσωμε τὶς ἀντίστοιχες χορδές τους.**

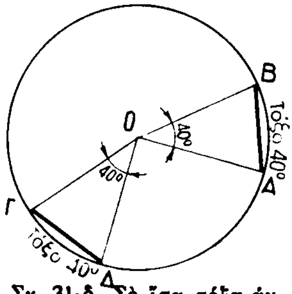
Στὸ σχῆμα 31-δ τὰ δυὸ τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}$, ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ δυὸ ἐπίκεντρες γωνίες 40°, εἶναι ἴσα.

Ἂς μετρήσωμε τώρα τὶς ἀντίστοιχες χορδές· θὰ βροῦμε

$$AB = 12\,\text{mm}, \quad \Gamma\Delta = 12\,\text{mm}.$$

Ὅπως βλέπομε, οἱ χορδὲς αὐτὲς εἶναι ἴσες.

Ὥστε, *σὲ μιὰ περιφέρεια δυὸ ἴσα τόξα ἔχουν ἴσες ἀντίστοιχες χορδές.*



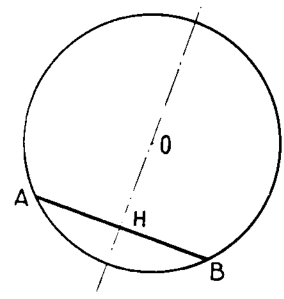

**Σχ. 31-δ. Σὲ ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσες χορδές.**

**4. Ἂς χαράξωμε ἀπὸ τὸ κέντρο μιᾶς περιφέρειας τὴν κάθετο σὲ μιὰ χορδὴ** καὶ ἂς μετρήσωμε τὶς ἀποστάσεις τοῦ ποδιοῦ Η αὐτῆς τῆς καθέτου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς. Θὰ βροῦμε (σχ. 31-ε)

$$HA = 11{,}5\,\text{mm} \text{ καὶ } HB = 11{,}5\,\text{mm}.$$

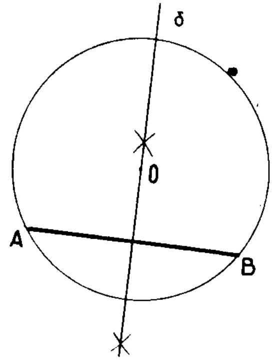
Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀποστάσεις αὐτὲς εἶναι ἴσες.

Ὥστε, *ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρο μιᾶς περιφέρειας στὴ χορδὴ ἑνὸς τόξου χωρίζει τὴ χορδὴ σὲ δυὸ ἴσα μέρη.*




**Σχ. 31-ε. Ἡ ΗΟ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.**

**5. Ἐφαρμογές. 1η. Χαράξτε μιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ δυὸ σημεῖα Α καὶ Β** (σχ. 31-ϛ).




**Σχ. 31-ς. Χαράξτε περιφέρεια πού νά περνᾶ ἀπό 2 δοσμένα σημεῖα.**

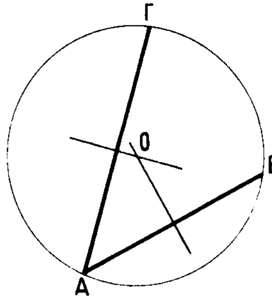
Χαράζομε τὴ μεσοκάθετο δ τῆς χορδῆς (δηλ. τοῦ τμήματος) ΑΒ (Μάθημα 14). Ὕστερα παίρνομε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ο τῆς μεσοκαθέτου αὐτῆς γιὰ κέντρο τῆς περιφέρειας ποὺ ζητεῖται νὰ χαράξωμε· ἀκτίνα της εἶναι τότε ἡ ΟΑ (ποὺ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΟΒ).

*Μποροῦμε ἔτσι νὰ χαράξωμε ὅσες περιφέρειες θέλομε ποὺ νὰ περνοῦν ἀπὸ δυὸ δοσμένα σημεῖα.*

**2η. Χαράξτε τὴν περιφέρεια ποὺ περνᾶ ἀπὸ 3 δοσμένα σημεῖα Α, Β, Γ, ὅταν αὐτὰ δὲν βρίσκωνται ἐπάνω σ' εὐθεία γραμμὴ** (σχ. 31-ζ).

Χαράζομε τὶς μεσοκαθέτους στὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὸ σημεῖο Ο, ὅπου τέμνονται, εἶναι τὸ κέντρο τῆς περιφέρειας ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

*Ἀπὸ τρία σημεῖα ποὺ δὲν βρίσκονται ἐπάνω σ' εὐθεία περνᾶ λοιπὸν μόνο μία περιφέρεια.*



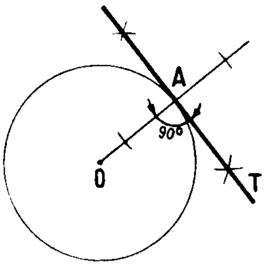

**Σχ. 31-ζ. Χαράξτε τὴν περιφέρεια ποὺ περνᾶ ἀπὸ 3 δοσμένα σημεῖα.**

**6. Ἂς χαράξωμε τώρα τὴν κάθετο ΑΤ στὸ ἄκρο Α μιᾶς ἀκτίνας ΟΑ τῆς περιφέρειας** (σχ. 31-η). Παρατηροῦμε ὅτι ἡ κάθετος αὐτὴ δὲν συναντᾶ τὴν περιφέρεια παρὰ μόνο σ' ἕνα σημεῖο, τὸ Α· γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ κάθετος αὐτὴ εἶναι *ἐφαπτομένη* τῆς περιφέρειας στὸ σημεῖο Α (δηλαδὴ ἀγγίζει τὴν περιφέρεια στὸ Α).

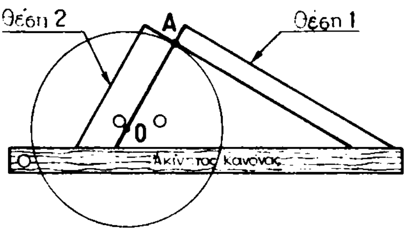
Ὥστε, *μιὰ εὐθεία λέγεται ἐφαπτομένη μιᾶς περιφέρειας, ὅταν τὴ συναντᾶ μόνο σ' ἕνα σημεῖο.*

Γιὰ νὰ φέρωμε τὴν ἐφαπτομένη σ' ἕνα σημεῖο Α μιᾶς περιφέρειας χαράζομε τὴν ἀκτίνα ΟΑ καὶ ὕστερα τὴν κάθετο σ' αὐτήν, στὸ ἄκρο της Α. Ἡ ἀντίστοιχη κατασκευή, μὲ χάρακα καὶ τρίγωνο, φαίνεται στὸ σχῆμα 31-θ καὶ εἶναι πολὺ εὔκολη στὴν πράξη:

Τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο (θέση 1) ἔτσι, ποὺ μιὰ ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρές του νὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο Ο τῆς περιφέρειας καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α. Φέρνομε ἔπειτα τὴν ἀκμὴ τοῦ χάρακα σὲ




**Σχ. 31-η. Ἡ εὐθεία ΑΤ εἶναι μία ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας.**




**Σχ. 31-θ. Κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφέρειας στὸ σημεῖο Α.**

ἐφαρμογὴ μὲ τὴν ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου. Κρατώντας τότε τὸ χάρακα σταθερὸ μετακινοῦμε τὸ τρίγωνο κατὰ μῆκος τοῦ χάρακα ὥσπου ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά του νὰ περάση ἀπὸ τὸ σημεῖο Α (θέση 2) καί, ἀκολουθώντας την, χαράζομε μιὰν εὐθεία: αὐτὴ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη.

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε μιὰ περιφέρεια ποὺ ἡ μεγαλύτερή της χορδὴ νὰ ἔχη μῆκος 45 mm.

*2.* Σὲ μιὰ περιφέρεια ποὺ ἔχει διάμετρο 60 mm χαράξτε μιὰ χορδὴ μὲ μῆκος 40 mm καὶ μετρῆστε τὴν ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴ χορδή.

*3.* Χαράξτε τρεῖς περιφέρειες μὲ ἀντίστοιχες ἀκτίνες 15, 35 καὶ 50 mm. Σὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς περιφέρειες αὐτὲς πάρτε ἕνα τόξο 70° (χρησιμοποιώντας μοιρογνωμόνιο). Τὰ τρία τόξα ποὺ κατασκευάσατε εἶναι ἄραγε ἴσα (δηλ. ἐφαρμόσιμα); Ἑπομένως: ἂν δύο ἢ περισσότερα τόξα μετριοῦνται ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμό, σὲ ποιά περίπτωση καὶ μόνο μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι εἶναι ἴσα;

*4.* Χρησιμοποιώντας ἕνα μοιρογνωμόνιο, τί θὰ κάμετε γιὰ νὰ πάρετε: τὸ 1/2, τὰ 2/3, τὰ 4/5 ἑνὸς τόξου κύκλου;

Ἐφαρμογή: Σὲ κύκλο μὲ ἀκτίνα 50 mm πάρτε πρῶτα ἕνα τόξο 120° καὶ ὕστερα τὸ 1/2, τὰ 2/3 καὶ τὰ 4/5 του.

*5.* Σημειῶστε δύο σημεῖα μὲ ἀπόσταση 55 mm καὶ χαράξτε μιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ περνᾶ ἀπ' αὐτὰ καὶ νὰ ἔχη ἀκτίνα 50 mm.

*6.* Χαράξτε μιὰ περιφέρεια μὲ ἀκτίνα 30 mm ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ δύο σημεῖα τῶν ὁποίων ἡ ἀπόσταση εἶναι 60 mm.

*7.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ποὺ οἱ κάθετες πλευρές του ἔχουν μῆκος 25 mm καὶ 70 mm. Ὕστερα, χαράξτε μιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ τὶς τρεῖς κορυφές του.

*8.* Χαράξτε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 50 mm καὶ ἔπειτα δύο ἢ περισσότερες χορδὲς μήκους 70 mm. Ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου φέρτε τὶς καθέτους στὶς χορδὲς αὐτὲς καὶ ἐπαληθεῦστε μὲ μετρήσεις ὅτι τὸ κέντρο ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὶς χορδές. Διατυπῶστε τὴν ἰδιότητα αὐτὴ μὲ μιὰ φράση: «Ἂν δύο ἢ περισσότερες χορδὲς ἑνὸς κύκλου ἔχουν τὸ ἴδιο μῆκος, τότε...».

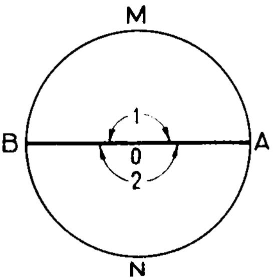
*9.* Μερικοὶ μαθητές, γιὰ νὰ χαράξουν τὴν ἐφαπτομένη σ' ἕνα σημεῖο Α μιᾶς περιφέρειας μὲ κέντρο τὸ Ο, τοποθετοῦν τὸ χάρακα κατὰ τὴν διεύθυνση τῆς ἀκτίνας ΟΑ καὶ ὕστερα, μὲ τὸ τρίγωνο, χαράζουν τὴν κάθετο στὴν ΟΑ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α. Ἐξηγῆστε γιατί αὐτὴ ἡ κατασκευή, μολονότι εἶναι θεωρητικὰ σωστή, δίνει στὴν πράξη μιὰ χάραξη μὲ μικρότερη ἀκρίβεια ἀπὸ κείνην ποὺ περιγράφομε στὸ Μάθημα.

*10.* Στὰ ἄκρα δύο ἀκτίνων μιᾶς περιφέρειας, ποὺ σχηματίζουν γωνία 60°, χαράξτε τὶς ἐφαπτομένες τῆς περιφέρειας ὡς τὸ σημεῖο ὅπου συναντιοῦνται καὶ μετρῆστε τὴ γωνία τους. Τί παρατηρεῖτε;

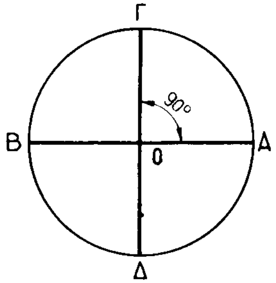
# Μάθημα 32.

## Διαίρεση περιφέρειας σὲ 2, 4, 8 ἴσα μέρη.

**1. Χαράζομε τὴ διάμετρο ΑΒ μιᾶς περιφέρειας** (σχ. 32-α). Οἱ γωνίες $\widehat{O_1}$ καὶ $\widehat{O_2}$ ποὺ καθεμιά τους εἶναι 180° εἶναι δυὸ ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες· ἑπομένως τὰ δυὸ τόξα $\overset{\frown}{AMB}$ καὶ $\overset{\frown}{BNA}$, ποὺ ἀντιστοιχοῦν σ' αὐτὲς τὶς γωνίες, εἶναι ἴσα (Μάθημα 31).



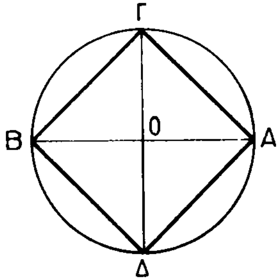
Σχ. 32-α. Διαίρεση περιφέρειας σὲ 2 ἴσα μέρη.



Σχ. 32-β. Διαίρεση περιφέρειας σὲ 4 ἴσα μέρη.

Ὥστε, *κάθε διάμετρος μιᾶς περιφέρειας τὴ διαιρεῖ σὲ δυὸ ἴσα μέρη.*

**2. Ἂς χαράξωμε δυὸ κάθετες διαμέτρους μιᾶς περιφέρειας** (σχ. 32-β). Οἱ τέσσερις ἐπίκεντρες γωνίες ποὺ προκύπτουν εἶναι ἴσες (Μάθημα 13). Ἑπομένως καὶ τὰ ἀντίστοιχα τέσσερα τόξα εἶναι ἴσα. Ὥστε, δυὸ κάθετες διάμετροι μιᾶς περιφέρειας τὴ διαιροῦν σὲ τέσσερα ἴσα μέρη.



Σχ. 32-γ. Ἐγγραφὴ ἑνὸς τετραγώνου σὲ κύκλο.

Ἂς συνδέσωμε μὲ τὴ σειρὰ τὰ τέσσερα διαιρετικὰ σημεῖα Α, Γ, Β, Δ καὶ ἂς προσέξωμε τὸ τετράπλευρο ΑΓΒΔ ποὺ προκύπτει (σχ. 32-γ). Μὲ μετρήσεις βρίσκομε ὅτι

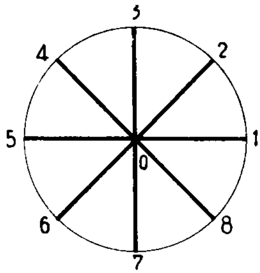
$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 90^\circ,$$
$$A\Gamma = \Gamma B = B\Delta = \Delta A = 20 \text{ mm}.$$

Ὥστε, *τὸ τετράπλευρο αὐτὸ εἶναι τετράγωνο* καὶ εἶναι *ἐγγεγραμμένο (ἐσωγραμμένο)* στὴν περιφέρεια, ἔχοντας τὶς κορυφές του ἐπάνω σ' αὐτήν.

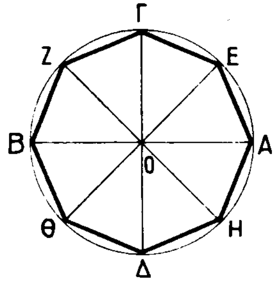
Τὸ ὅτι εἶναι τετράγωνο μπορούσαμε νὰ τὸ προβλέψωμε ἔτσι: Τὸ τετράπλευρο ΑΓΒΔ ἔχει τὶς διαγωνίους του 1ο ἴσες καὶ τεμνόμενες στὸ μέσο τους (ἄρα εἶναι ὀρθογώνιο), 2ο κάθετες τὴ μιὰ πρὸς τὴν ἄλλη (ἄρα εἶναι ρόμβος). Τὸ τετράπλευρο λοιπὸν αὐτὸ ἔχει τὶς ἰδιότητες καὶ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ρόμβου· ὥστε εἶναι τετράγωνο.

**3. Ἂς χαράξωμε τὶς διχοτόμους τῶν ἐπίκεντρων γωνιῶν ποὺ σχηματίζουν δυὸ κάθετες διάμετροι μιᾶς περιφέρειας.**

Οἱ ὀκτὼ ἐπίκεντρες γωνίες, ποὺ προκύπτουν, εἶναι ἴσες (σχ. 32-δ)· ἑπομένως καὶ τὰ ὀκτὼ τόξα ποὺ ἀντιστοιχοῦν σ' αὐτὲς εἶναι *ἴσα*.




**Σχ. 32-δ. Διαίρεση περιφέρειας σὲ 8 ἴσα μέρη.**




**Σχ. 32-ε. Ἐγγραφὴ ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου σὲ κύκλο.**

Ὥστε, *ἡ περιφέρεια διαιρέθηκε σὲ ὀκτὼ ἴσα μέρη.*

Ἂν συνδέσωμε μὲ τὴ σειρὰ τὰ ὀκτὼ διαιρετικὰ σημεῖα, θὰ λάβωμε ἕνα πολύγωνο ποὺ ἔχει 8 πλευρὲς καὶ λέγεται *ὀκτάγωνο*. Εἶναι κι αὐτὸ *ἐγγεγραμμένο στὴν περιφέρεια.*

Στὸ σχῆμα 32-ε βρίσκομε μὲ μετρήσεις

$$AE = E\Gamma = \Gamma Z = \ldots = HA = 11 \text{ mm},$$

$$\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{\Gamma} = \ldots = \widehat{H} = 135^{\circ}.$$

Τὸ ὀκτάγωνο αὐτὸ ἔχει λοιπὸν τὶς πλευρές του ἴσες καὶ τὶς γωνίες του ἴσες· τὸ λέμε *κανονικό*.

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε ἕνα τετράγωνο ποὺ οἱ διαγώνιοί του ἔχουν μῆκος 38 mm, καὶ ὕστερα μετρῆστε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.

*2.* Χαράξτε ἕνα τετράγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ μιὰ περιφέρεια μὲ διάμετρο 60 mm καὶ μετρῆστε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.

*3.* Χαράξτε ἕνα τετράγωνο ποὺ ἔχει πλευρὰ 35 mm. Προσδιορίστε τὸ κέντρο τῆς περιφέρειας ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὶς 4 κορυφές του καὶ ὕστερα μετρῆστε τὴν ἀκτίνα τῆς περιφέρειας αὐτῆς.

*4.* Χαράξτε ἕνα κανονικὸ ὀκτάγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ μιὰ περιφέρεια μὲ ἀκτίνα 40 mm. Πόση εἶναι ἡ γωνία ποὺ σχηματίζουν δυὸ συνεχόμενες πλευρές του; Μετρῆστε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

*5.* Παρατηρῆστε πρῶτα τὸ σχῆμα 32-ε καὶ ὕστερα ἀπαντῆστε στὰ ἀκόλουθα:

1ο. Γιατί τὸ τρίγωνο ΟΑΕ εἶναι ἰσοσκελές.

2ο. Ὑπολογίστε τὴ γωνία στὴν κορυφή του Ο.

3ο. Ὑπολογίστε τὴ γωνία στὴ βάση του ΑΕ.

4ο. Ὑπολογίστε τὴ γωνία ποὺ σχηματίζουν δυὸ συνεχόμενες πλευρὲς τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, χρησιμοποιώντας τὸ ἐξαγόμενο ποὺ βρήκατε στὸ 3ο.

*6.* Σχεδιάστε μιὰ περιφέρεια διαιρεμένη σὲ 8 ἴσα τόξα, μὲ διαδοχικὰ διαιρετικὰ σημεῖα τὰ 1, 2, 3, . . . , 8 (σχ. 32-δ). Τραβῆξτε ἔπειτα τὶς χορδὲς 1 — 4, 4 — 7, 7 — 2, κ.ο.κ.

1ο. Πόσες χορδὲς πρέπει νὰ χαράξετε γιὰ νὰ ξαναγυρίσετε στὸ σημεῖο ἀπὸ ὅπου ξεκινήσατε;

2ο. Μελετῆστε τὸ σχῆμα ποὺ θὰ προκύψη ἔτσι.

*7.* Πάρτε ἕνα τετράγωνο καὶ ἀπὸ τὶς 4 γωνίες του ἀποκόψτε 4, μεταξύ τους ἴσα, ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Τὸ ὀκτάγωνο, ποὺ ἔτσι θὰ προκύψη, εἶναι ἄραγε πάντοτε κανονικό;

Ἐπαληθεῦστε ὅτι, γιὰ νὰ ἀποκτήσετε μὲ τὸν παραπάνω τρόπο ἕνα κανονικὸ ὀκτάγωνο, ἀρκεῖ νὰ χρησιμοποιήσετε μιὰν ἀπὸ τίς ἀκόλουθες γραφικὲς κατασκευές:

1ο. Χαράζετε τὶς διαγωνίους τοῦ τετραγώνου καθὼς καὶ τὴν περιφέρεια ποὺ ἔχει κέντρο τὸ κέντρο τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτίνα τὸ μισὸ τῆς πλευρᾶς του. Ὕστερα, φέρνετε σὲ κάθε σημεῖο, ὅπου αἱ διαγώνιοι κόβουν τὴν περιφέρεια, τὴν ἐφαπτομένη σ' αὐτήν.

2ο. Μὲ κέντρο τὴν κάθε κορυφὴ τοῦ τετραγώνου καὶ μὲ ἀκτίνα τὴ μισὴ διαγώνιο γράφετε μιὰ περιφέρεια καὶ σημειώνετε τὰ δύο σημεῖα ὅπου κόβει τὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου. Τὰ ὀκτὼ σημεῖα ποὺ προκύπτουν ἔτσι, ἀποτελοῦν τὶς κορυφὲς κανονικοῦ ὀκταγώνου.

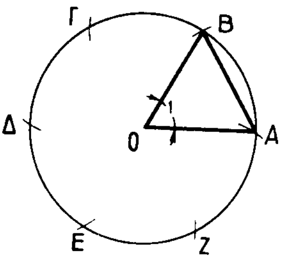
---

# Μάθημα 33.

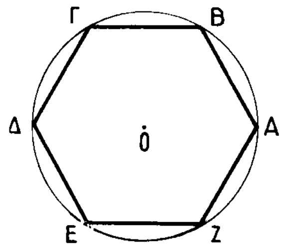
## Διαίρεση περιφέρειας σὲ 6, 3, 12 ἴσα μέρη

**1. Ἐπάνω σ' ἕναν κύκλο παίρνομε χορδὲς ἴσες μὲ τὴν ἀκτίνα της.**

Ἐπάνω στὸν κύκλο τοῦ σχήματος 33-α πήραμε διαδοχικὰ πέντε χορδὲς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ καὶ ΕΖ ἴσες μὲ τὴν *ἀκτίνα*. Παρατηροῦμε τότε ὅτι *καὶ ἡ χορδὴ ΖΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα.* Ἀφοῦ ὅμως οἱ ἕξι αὐτὲς χορδὲς εἶναι ἴσες, θὰ εἶναι *μεταξύ τους*




Σχ. 33-α. Διαίρεση περιφέρειας σὲ 6 ἴσα μέρη.




Σχ. 33-β. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου σὲ κύκλο.

*ἴσα καὶ τὰ ἕξι ἀντίστοιχα διαδοχικὰ τόξα* $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ κτλ. Ἔτσι *ἡ περιφέρεια διαιρέθηκε σὲ 6 ἴσα μέρη.*

Ἂς συνδέσωμε τώρα τὰ 6 διαιρετικὰ σημεῖα μιᾶς τέτοιας διαιρέσεως τῆς περιφέρειας, μὲ τὴ σειρὰ ποὺ ἔχουν ἐπάνω στὴν περιφέρεια· θὰ σχηματιστῆ ἕνα πολύγωνο μὲ 6 πλευρὲς (σχ. 33-β), δηλαδὴ ἕνα *ἑξάγωνο*. Μὲ μετρήσεις στὸ σχῆμα βρίσκομε

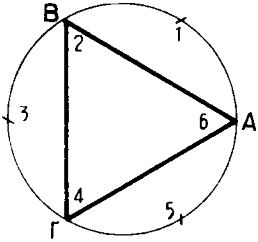
$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZA = 15\,\text{mm},$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = \widehat{E} = \widehat{Z} = 120^\circ.$$

Ὥστε ὄχι μόνον οἱ πλευρὲς εἶναι μεταξύ τους ἴσες, ἀλλὰ καὶ οἱ γωνίες. Γι' αὐτό, τὸ παραπάνω ἑξάγωνο λέγεται *κανονικό*.

Θὰ μπορούσαμε νὰ προβλέψωμε ὅτι παίρνοντας συνεχιστὰ 6 χορδὲς ἴσες μὲ τὴν ἀκτίνα θὰ ξαναγυρίζαμε στὸ σημεῖο Α ἀπὸ ὅπου ξεκινήσαμε. Καὶ ἀλήθεια, τὸ τρίγωνο ΑΟΒ (σχ. 33-α) ἔχει 3 πλευρὲς ἴσες, ἀφοῦ $AB = OA = OB$, ἄρα γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι $60^\circ$. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμε, γύρω στὸ κέντρο Ο, 6 ἐφεξῆς γωνίες ἴσες μὲ τὴν $\widehat{AOB}$, γιατὶ $6 \times 60^\circ = 360^\circ$. Ἑπομένως μποροῦμε νὰ πάρωμε διαδοχικὰ ἐπάνω στὸν κύκλο 6 χορδὲς ἴσες μὲ τὴ χορδὴ ΑΒ.

**2. Παίρνομε πάλι μιὰ περιφέρεια διαιρεμένη σὲ 6 ἴσα μέρη καὶ συνδέομε τὸ δεύτερο μὲ τὸ τέταρτο διαιρετικὸ σημεῖο, τὸ τέταρτο μὲ τὸ ἕκτο καὶ τὸ ἕκτο μὲ τὸ δεύτερο** (σχ. 33-γ).




**Σχ. 33-γ. Ἐγγραφὴ ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου σὲ κύκλο.**

Θὰ προκύψη ἕνα τρίγωνο, τὸ ΑΒΓ.

Τὰ τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma A}$ εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὰ 6 ἴσα τόξα ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὸ ἑξάγωνο (σχ. 33-β)· ἄρα εἶναι *ἴσα*. Ἑπομένως καὶ οἱ χορδὲς ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ εἶναι *ἴσες*· ὥστε τὸ τρίγωνο εἶναι *ἰσόπλευρο*. Τοῦτο μποροῦμε νὰ τὸ ἐπαληθεύσωμε καὶ μὲ μετρήσεις στὸ σχῆμα 33-γ:

$$AB = B\Gamma = \Gamma A = 26\ \text{mm}\ \text{καὶ}\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

**3. Ἂς χαράξωμε τὶς διχοτόμους τῶν 6 ἐφεξῆς ἐπίκεντρων γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς 3 διαμέτρους,** οἱ ὁποῖες διαιροῦν τὴν περιφέρεια (καὶ τὸν κύκλο) σὲ 6 ἴσα μέρη.

Οἱ 12 ἐφεξῆς ἐπίκεντρες γωνίες ποὺ προκύπτουν ἔτσι (σχ. 33-δ) εἶναι ἴσες, ἑπομένως καὶ τὰ ἀντίστοιχα 12 τόξα εἶναι ἴσα.

*Ἡ περιφέρεια διαιρέθηκε λοιπὸν σὲ 12 ἴσα μέρη.*

Ἂς συνδέσωμε μὲ τμήματα εὐθείας διαδοχικῶς τὰ 12 διαιρετικὰ σημεῖα τῆς περιφέρειας. Θὰ σχηματιστῆ ἕνα πολύγωνο μὲ 12 πλευρές, δηλαδὴ ἕνα *δωδεκάγωνο* (σχ. 33-ε).

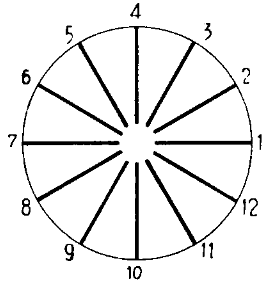
Τὸ δωδεκάγωνο αὐτὸ εἶναι *ἐγγεγραμμένο* στὴν περιφέρεια.

Μὲ μετρήσεις στὸ σχῆμα 33-ε βρίσκομε

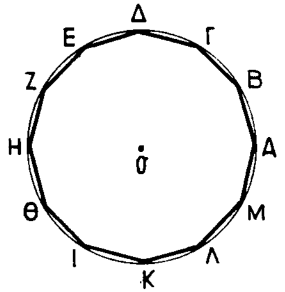
$$\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \Gamma\Delta = \ldots = \mathrm{MA} = 8 \text{ mm},$$

$$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma} = \ldots = \widehat{\mathrm{M}} = 150^\circ.$$

Ὥστε, *τὸ δωδεκάγωνο εἶναι κανονικό.*




**Σχ. 33-δ. Διαίρεση περιφέρειας σὲ 12 ἴσα μέρη.**




**Σχ. 33-ε. Ἐγγραφὴ ἑνὸς κανονικοῦ δωδεκαγώνου.**

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο ποὺ ἔχει ἀκτίνα 33 mm.

*2.* Θέλετε νὰ κατασκευάσετε ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο μὲ πλευρὰ 30 mm. Ποιά θὰ εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου στὸν ὁποῖο μπορεῖτε νὰ τὸ ἐγγράψετε.

*3.* Χαράξτε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο μὲ διάμετρο 75 mm καὶ ὕστερα μετρῆστε τὶς πλευρές του.

*4.* Χαράξτε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μὲ πλευρὰ 40 mm καὶ ὕστερα φέρτε τὶς μεσοκαθέτους του. Ἐπαληθεῦστε ὅτι τὸ σημεῖο τῆς τομῆς τους εἶναι τὸ κέντρο τῆς περιφέρειας ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὶς τρεῖς κορυφές του καὶ μετρῆστε τὴν ἀκτίνα της.

*5.* Χαράξτε ἕνα κανονικὸ δωδεκάγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ περιφέρεια μὲ ἀκτίνα 40 mm καὶ μετρῆστε τὶς πλευρές του.

*6.* Παρατηρῆστε τὸ τρίγωνο ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ μιὰ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου καὶ τὶς δυὸ ἀκτίνες ποὺ καταλήγουν στὰ δυὸ ἄκρα της. Τί τρίγωνο εἶναι αὐτό; Παίρνοντας γιὰ βάση τοῦ τριγώνου τὴν παραπάνω πλευρὰ τοῦ δωδεκαγώνου, βρῆτε πόση εἶναι ἡ γωνία στὴν (ἀπέναντι) κορυφή του καὶ πόση εἶναι ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες στὴ βάση. Χρησιμοποιώντας τὸ τελευταῖο ἀποτέλεσμα βρῆτε τέλος τί γωνία σχηματίζουν δυὸ συνεχόμενες πλευρὲς τοῦ δωδεκαγώνου.

7. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο ὡς ἀρχὴ χαράξτε τρία τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ποὺ νὰ σχηματίζουν τρεῖς ἐφεξῆς γωνίες

$$\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma OB} = 120^\circ$$

καὶ ποὺ νὰ ἔχουν μῆκος 20 mm τὸ καθένα. (Ἐξηγῆστε πῶς γίνεται αὐτό). Σχεδιάστε τώρα τρία κανονικὰ ἑξάγωνα ποὺ νὰ ἔχουν ἀντιστοίχως γιὰ δυὸ πλευρὲς τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ, ΟΒ καὶ ΟΓ, ΟΓ καὶ ΟΑ. Θὰ ἔχετε ἔτσι, γύρω στὸ Ο, 3 κανονικὰ ἑξάγωνα, ἐνῶ γύρω στὸ καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ θὰ ἔχετε δυὸ μόνο ἑξάγωνα· σχεδιάστε τὸ τρίτο ποὺ λείπει, ἔτσι ποὺ νὰ ἔχετε γύρω στὰ σημεῖα Α, Β, Γ τὸ ἴδιο σχέδιο ὅπως γύρω στὸ Ο. Συνεχίστε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο τὴν κατασκευὴ στὶς 6 κορυφὲς ποὺ γύρω τους λείπει πάλι τὸ τρίτο κανονικὸ ἑξάγωνο. Θὰ ἔχετε ἔτσι σχεδιάσει (ὑπὸ κλίμακα) μιὰ πλακόστρωση.

8. Ἕνα παξιμάδι ἔχει διατομὴ ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο μὲ διάμετρο 12 mm. Ἕνας ἐφαρμοστὴς μετρᾶ μὲ τὸ παχύμετρο τὴν ἀπόσταση ἀνάμεσα σὲ δυὸ ἀντικρυστὲς πλευρικὲς ἕδρες του (πλευρές του). Πόσο πρέπει νὰ βρῇ; (Νὰ κάμετε μιὰ ὅσο μπορεῖτε πιὸ ἀκριβῆ γραφικὴ κατασκευὴ τῆς ἑξαγωνικῆς διατομῆς καὶ ὕστερα μιὰ μέτρηση ἐπάνω στὴν κατασκευὴ αὐτή).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

## Μάθημα 34.

### Μέτρηση ἐπιφανειῶν.

**1. Γιὰ νὰ μετρήσωμε μιὰ σχεδιασμένη ἐπιφάνεια** ἀναζητοῦμε, ὅταν αὐτὸ εἶναι κατορθωτό, πόσες φορὲς ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ περιέχει μιὰ ἄλλη ποὺ παίρνομε γιὰ *μονάδα.*

*Μιὰ βασικὴ μονάδα γιὰ τὴ μέτρηση ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ τετράγωνο ποὺ ἔχει πλευρὰ ἕνα μέτρο ( 1 m ) καὶ ποὺ γι' αὐτὸ λέγεται τετραγωνικὸ μέτρο ( $m^2$ ).*

Ἡ τέτοια ὅμως σχεδιαστικὴ σύγκριση μιᾶς ἐπιφάνειας μὲ τὴν τετράγωνη μονάδα ἐπιφανειῶν δὲν εἶναι πάντα κατορθωτή. Π.χ. δὲν μποροῦμε νὰ μετρήσωμε τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς τριγώνου γεμίζοντάς την μὲ τετράγωνα τοποθετημένα τὸ ἕνα κολλητὰ στὸ ἄλλο καὶ κάνοντας ἔπειτα τὸ μέτρημά τους. Γι' αὐτὸ ἡ μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας γίνεται μὲ ὑπολογισμούς, ποὺ βασίζονται σὲ ὁρισμένους κανόνες, ὅπως θὰ ἐξηγήσωμε παρακάτω.

Ὁ ἀριθμός, ποὺ μετρᾶ μιὰν ἐπιφάνεια, λέγεται *ἐμβαδόν της.*

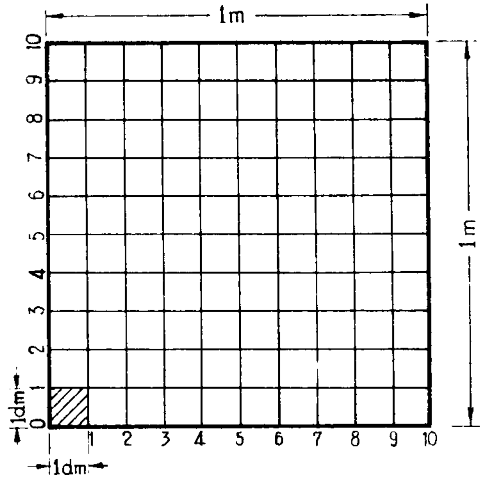
**2. Δευτερεύουσες μονάδες ἐπιφανειῶν.** Παίρνοντας γιὰ βασικὴ μονάδα τὸ $m^2$, θὰ ἔχωμε ὡς δευτερεύουσες μονάδες ἐπιφανειῶν τὰ τετράγωνα ποὺ ἔχουν πλευρὲς τὰ δεκαδικὰ πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια τοῦ μέτρου (Μάθημα 3). Παρακάτω ἀναφέρομε μόνο ἐκεῖνες ποὺ χρησιμοποιοῦνται στὸν τόπο μας πιὸ συχνά:

Τὸ *τετραγωνικὸ χιλιόμετρο* ($km^2$), ποὺ εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ ἕνα χιλιόμετρο (1 km) καὶ ποὺ περιέχει

$$1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000 \text{ m}^2.$$

Τὸ *τετραγωνικὸ δεκατόμετρο* ἢ *τετραγωνικὴ παλάμη* ($dm^2$), ποὺ εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ ἕνα δεκατόμετρο (1 dm). Ἕνα $m^2$ περιέχει ἑπομένως $10 \times 10 = 100$ $dm^2$ (σχ. 34-α).

Τὸ *τετραγωνικὸ ἑκατοστόμετρο* ἢ *τετραγωνικὸ ἑκατοστὸ*




Σχ. 34-α. 1 $m^2$ περιέχει 100 $dm^2$.

($cm^2$), ποὺ εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 1 cm καὶ ποὺ ἰσοῦται μὲ 0,01 $dm^2$ = 0,000 1 $m^2$.

Τὸ *τετραγωνικὸ χιλιοστόμετρο* ἢ *τετραγωνικὸ χιλιοστὸ* ($mm^2$), ποὺ εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 1 mm καὶ ποὺ ἰσοῦται μὲ

$$0{,}01 \text{ cm}^2 = 0{,}000\,1 \text{ dm}^2 = 0{,}000\,001 \text{ m}^2.$$

Οἱ μονάδες αὐτές, μαζὶ μὲ κεῖνες ποὺ παραλείψαμε, ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο: *ἡ καθεμιά τους εἶναι 100 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ μονάδα τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.*

Μὲ τὶς μονάδες αὐτὲς τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἀκέραιοι ἢ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Π.χ. $0{,}035\ m^2 = 3{,}5\ dm^2 = 350\ cm^2 = 35\,000\ mm^2$,
$0{,}45\ dm^2 = 45\ cm^2 = 4\,500\ mm^2$.

**3. Μετρήσεις ἀγρῶν καὶ γηπέδων.** Οἱ μονάδες, ποὺ χρησιμοποιοῦμε στὴ χώρα μας γιὰ τὴ μέτρηση ἀγρῶν, γηπέδων καὶ οἰκοπέδων, εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

Τὸ *στρέμμα*, ποὺ ἰσοῦται μὲ $1\,000\ m^2$.

Τὸ *ἑκτάριο*, ποὺ ἰσοῦται μὲ 10 στρέμματα $= 10\,000\ m^2$.

Ὁ *τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πήχης*, ποὺ ἰσοῦται μὲ $9/16\ m^2$, ἄρα μὲ $0{,}562\,5\ m^2$, εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ $3/4\ m$.

**4. Ἀλλαγὴ μονάδας.** *Παράδειγμα 1. Ἐκφράστε σὲ τετραγωνικὰ δεκατόμετρα τὸ ἐμβαδὸν $4{,}035\ m^2$.*

Ξέρομε ὅτι $1\ dm^2$ εἶναι 100 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ $1\ m^2$, ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν $dm^2$ ποὺ ζητοῦμε εἶναι 100 φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν $m^2$ ποὺ μᾶς δόθηκε.

Ὥστε πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ 4,035 ἐπὶ 100, δηλαδὴ νὰ μεταθέσωμε τὸ κόμμα δύο θέσεις δεξιότερα:

$$4{,}035\ m^2 = 403{,}5\ dm^2.$$

*Παράδειγμα 2. Ἐκφράστε σὲ στρέμματα τὸ ἐμβαδὸν $15\,545{,}35\ m^2$.*

Ξέρομε ὅτι τὸ στρέμμα εἶναι 1 000 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $m^2$, ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς ποὺ μετρᾶ μιὰν ἐπιφάνεια σὲ στρέμματα θὰ εἶναι 1 000 φορὲς μικρότερος ἀπὸ κεῖνον ποὺ τὴ μετρᾶ σὲ $m^2$. Πρέπει λοιπὸν νὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ μᾶς δόθηκε διὰ τοῦ 1 000, ἄρα νὰ μεταθέσωμε, στὸν ἀριθμὸ 15 545,35, τὸ κόμμα τρεῖς θέσεις ἀριστερώτερα:

$$15\,545{,}35\ m^2 = 15{,}545\,35\ \text{στρέμματα}.$$

*Ἀσκήσεις. 1.* Μετρατρέψτε (δηλ. ἐκφράστε) σὲ $cm^2$ τὰ ἐμβαδά:
$2\ dm^2$, $50\ dm^2$, $54\ dm^2$, $3{,}5\ dm^2$.

*2*. Μετατρέψτε σὲ $cm^2$:

$4\,m^2$, $30\,m^2$, $4{,}5\,m^2$, $36{,}7\,m^2$.

*3*. Μετατρέψτε σὲ $dm^2$:

$500\,cm^2$, $3\,400\,cm^2$, $45\,000\,mm^2$, $36\,cm^2$.

*4*. Μετατρέψτε σὲ $m^2$:

$30\,000\,cm^2$, $25\,700\,mm^2$, $8\,750\,cm^2$, $75\,cm^2$.

*5*. Ἀλλάζοντας μόνο τὸ ὄνομα τῆς μονάδας, ποὺ συνοδεύει τὸν ἀριθμό, πῆτε ποιά ἐπιφάνεια εἶναι 100 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν $45\,dm^2$, τὴν $8\,050\,mm^2$, τὴν $1{,}05\,cm^2$.

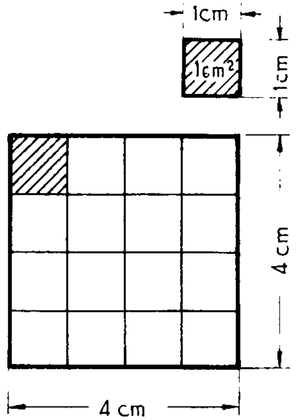
Ἄραγε μπορεῖτε ἀλλάζοντας στὸν ἀριθμὸ $3\,m^2$ μόνο τὸ ὄνομα τῆς μονάδας νὰ βρῆτε 10 φορὲς μεγαλύτερο ἢ 1 000 φορὲς μεγαλύτερο ἐμβαδόν;

*6*. Ἕνας συνεταιρισμὸς ἀγόρασε, πρὸς 1 500 δραχμὲς τὸ στρέμμα, μιὰν ἔκταση ἀπὸ 45,2 στρέμματα. Ὕστερα, τὴ χώρισε σὲ οἰκόπεδα μὲ δρόμους ποὺ πιάνουν ἐπιφάνεια 8,5 στρέμματα καὶ ποὺ ἡ κατασκευή τους κόστισε 47 500 δραχμές. Τί κοστίζει στὸ συνεταιρισμὸ (ὕστερα ἀπ' ὅσα ξόδεψε γιὰ ν' ἀγοράση τὴν ἔκταση καὶ νὰ κατασκευάση τοὺς δρόμους) τὸ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο οἰκοδομήσιμου οἰκοπέδου;

## Μάθημα 35.

### Ἐμβαδὸν τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου.

**1. Ἂς συγκρίνωμε δυὸ τετράγωνα μὲ πλευρὲς 1 cm τὸ ἕνα, 4 cm τὸ ἄλλο** (σχ. 35-α). Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρώτου εἶναι ἕνα τετραγωνικὸ ἑκατοστὸ (1 $cm^2$). Ἂς ἀναζητήσωμε τώρα πόσες φορὲς αὐτὸ τὸ τετράγωνο περιέχεται στὸ δεύτερο· μὲ ἄλλα λόγια, ἂς μετρήσωμε τὸ δεύτερο μὲ *μονάδα* τὸ πρῶτο. Παίρνοντας ἐπάνω σὲ κάθε πλευρὰ τοῦ μεγάλου τετραγώνου, 4 φορὲς συνεχιστά, 1 cm, τὴ διαιροῦμε σὲ 4 ἴσια τμήματα. Συνδέομε τὰ διαιρετικὰ σημεῖα μὲ εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου. Τὸ τετράγωνο διαιρεῖται τότε σὲ τετραγωνάκια, ποὺ τὸ καθένα τους ἔχει ἐπιφάνεια 1 $cm^2$. *Ἂς μετρήσωμε πόσα εἶναι:* 4 σειρές, ἀπὸ 4 τετραγωνάκια ἡ καθεμιά, κάνουν




**Σχ. 35-α. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγάλου τετραγώνου εἶναι 16 $cm^2$.**

$4 \times 4 = 16$ τετραγωνάκια.

Ὥστε, *ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγάλου τετραγώνου εἶναι* $4 \times 4 = 16\ cm^2$.

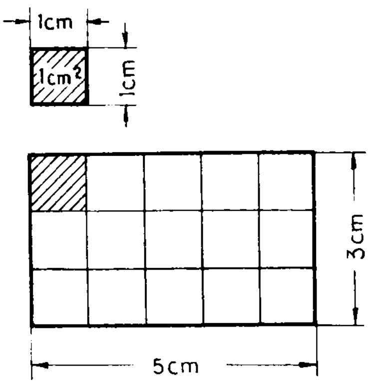
Τὸ γινόμενο $4 \times 4$ τὸ γράφομε συντομώτερα ἔτσι: $4^2$, καὶ λέμε: *4 στὸ τετράγωνο.*

Γενικὰ ἔχομε τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, μετροῦμε τὴν πλευρά του μὲ μιὰ μονάδα μήκους καὶ πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ βρίσκομε μὲ τὸν ἑαυτό του.*

Τὸ γινόμενο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, *μὲ μονάδα ἐπιφάνειας τὸ τετράγωνο ποὺ ἔχει πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους ποὺ χρησιμοποιήσαμε*, π.χ. μὲ μονάδα ἐπιφάνειας τὸ 1 $m^2$, ἂν χρησιμοποιήσαμε γιὰ μονάδα μήκους τὸ 1 m. Ἔτσι, ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 2,5 m ἔχει ἐμβαδὸν $2,5 \times 2,5 = 6,25$ m².

**2. Ἂς συγκρίνωμε τώρα ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 1 cm καὶ ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ ἔχει διαστάσεις 5 cm μῆκος καὶ 3 cm πλάτος** ( σχ. 35-β ).




**Σχ. 35-β. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 15 cm².**

Ἐπάνω στὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου παίρνομε τὸ 1 cm 5 φορὲς συνεχιστὰ στὸ μῆκος καὶ 3 φορὲς στὸ πλάτος. Τὰ σημεῖα ποὺ διαιροῦν τότε τὶς πλευρὲς σὲ τμήματα 1 cm, τὰ συνδέομε μὲ εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου· ἡ ἐπιφάνεια του ὀρθογωνίου διαιρεῖται ἔτσι σὲ τετραγωνάκια τοῦ 1 cm².

*Ἂς μετρήσωμε πόσα εἶναι:* 3 σειρές, ἀπὸ 5 τετραγωνάκια ἡ καθεμιά, κάνουν

$$3 \times 5 = 15 \text{ τετραγωνάκια.}$$

*Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι λοιπὸν $3 \times 5 = 15$ cm².*

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, πολλαπλασιάσαμε τὸ 5 μὲ τὸ 3.

Γενικὰ ἔχομε τὸν ἑξῆς κανόνα:

*Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, μετροῦμε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος του μὲ τὴν ἴδια μονάδα μήκους καὶ πολλαπλασιάζομε τοὺς δυὸ ἀριθμοὺς ποὺ βρίσκομε.*

Τὸ γινόμενο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, *μὲ μονάδα ἐπιφάνειας τὸ τετράγωνο ποὺ ἔχει πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους ποὺ χρησιμοποιήσαμε,* π.χ., μὲ μονάδα ἐπιφάνειας τὸ 1 m², ἂν χρησιμοποιήσαμε γιὰ μονάδα μήκους τὸ 1 m. Ἔτσι, ἕνα ὀρθογώνιο μὲ μῆκος 2,5 m καὶ πλάτος 2 m ἔχει ἐμβαδὸν $2,5 \times 2 = 5$ m².

**3. Ἀντίστροφος ὑπολογισμός.** *Ὑπολογίστε τὸ πλάτος, ποὺ πρέπει νὰ δώσωμε σ' ἕνα ὀρθογώνιο μήκους 12 cm, γιὰ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 102 cm²*.

Τὸ γινόμενο τοῦ πλάτους ποὺ ζητοῦμε ἐπὶ τὸ δοσμένο μῆκος 12 cm εἶναι 102 cm².

Ἑπομένως τὸ πλάτος θὰ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 102 διὰ τοῦ 12, δηλαδὴ

$$102 : 12 = 8{,}5 \text{ cm}.$$

*Ἀσκήσεις. 1.* Ἕνα τετράγωνο ἔχει περίμετρο 48 cm. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

*2.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει μῆκος 8 m καὶ πλάτος 5,5 m καθὼς καὶ ἑνὸς ἄλλου ποὺ ἔχει μῆκος 3,5 dm καὶ πλάτος 0,25 dm.

*3.* Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια τῶν χαρτιῶν ποὺ χρησιμοποιοῦνται στὰ σχέδια καὶ ἔχουν τὶς ἀκόλουθες διαστάσεις σὲ mm:

$840 \times 1\,188$, $594 \times 840$, $420 \times 594$, $297 \times 420$, $210 \times 297$.

*4.* Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει περίμετρο 60 cm. Τὸ μῆκος του εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ πλάτος του. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

*5.* Στὸ ἐσωτερικὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 18 cm σχεδιάζομε ἕνα τετράγωνο ποὺ οἱ πλευρές του εἶναι παράλληλες πρὸς τὶς πλευρὲς τοῦ πρώτου καὶ ἀπέχουν ἀπ' αὐτὲς 2 cm. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ δυὸ τετράγωνα καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας ποὺ βρίσκεται ἀνάμεσα σ' αὐτά.

*6.* Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 36,5 cm² καὶ πλάτος 4,5 cm.

*7.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει περίμετρο 120 m, στὶς ἀκόλουθες δυὸ περιπτώσεις:

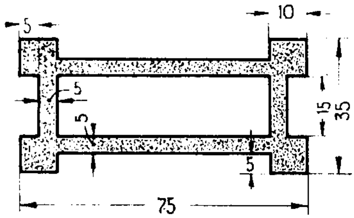
1ο. Τὸ πλάτος εἶναι τὸ μισὸ τοῦ μήκους.

2ο. Τὸ μῆκος εἶναι τὰ 3/2 τοῦ πλάτους.

*8.* Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις $70 \text{ mm} \times 45 \text{ mm}$. Ὕστερα, μὲ παράλληλο πρὸς μιὰν ἀπὸ τὶς πλευρές του, χωρίστε το σὲ δυὸ κομμάτια ἔτσι ποὺ τὸ ἕνα κομμάτι E νὰ εἶναι τὰ 2/5 τοῦ ὀρθογωνίου.

Τὸ πρόβλημα ἔχει σχεδιαστικὰ δυὸ διαφορετικὲς λύσεις. Καλέστε $E_1$ τὸ ὀρθογώνιο κομμάτι τῆς μιᾶς λύσεως, $E_2$ τὸ ὀρθογώνιο κομμάτι τῆς ἄλλης λύσεως. Φυσικά, τὰ ὀρθογώνια $E_1$ καὶ $E_2$ ἔχουν ἴσα ἐμβαδά. Ἄραγε εἶναι καὶ ἴσα, δηλαδὴ ἐφαρμόσιμα;

*9.* Χαράζοντας μιὰ παράλληλο πρὸς τὴ μικρὴ πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου χωρίστε το σὲ δυὸ μέρη τέτοια ποὺ τὸ ἕνα ἀπ' αὐτὰ νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὰ 5/3 τοῦ ἄλλου.




**Σχ. 35-γ. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια αὐτοῦ τοῦ χαρτονιοῦ.**

*10.* Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ χαρτονιοῦ ποὺ εἶναι κομμένο σύμφωνα μὲ τὸ σχῆμα 35-γ. Οἱ διαστάσεις τοῦ σχεδίου δίδονται σὲ cm.

*11.* Ὅπως ξέρετε, ἀγγλικὴ μονάδα γιὰ τὴ μέτρηση μηκῶν εἶναι ἡ γυάρδα ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,914 38 m. Ἐπίσης ξέρετε ὅτι ἡ γυάρδα ἔχει 3 πόδια καὶ τὸ πόδι 12 ἴντσες.

Ὑπολογίστε σὲ $cm^2$ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγωνικοῦ ποδιοῦ καθὼς καὶ μιᾶς τετραγωνικῆς ἴντσας.

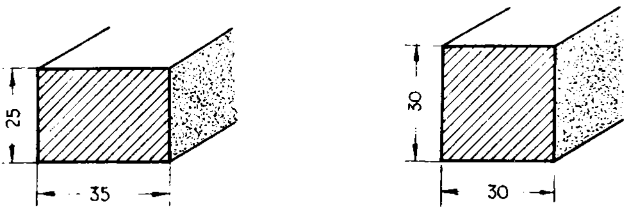
# Μάθημα 36.

## Ἐφαρμογὲς στὰ προφὶλ ἐμπορίου καὶ στὰ ξύλινα πατώματα.

**1. Πρόβλημα.** *Νὰ συγκρίνετε δυὸ προφὶλ ( δυὸ διατομὲς σιδήρων ) ἐμπορίου: ἕνα ὀρθογώνιο προφὶλ μὲ διαστάσεις 35 mm × 25 mm καὶ ἕνα τετράγωνο προφὶλ μὲ πλευρὰ 30 mm* ( σχ. 36-α ).

Ἐμβαδὸν τῆς ὀρθογώνιας διατομῆς: $35 \times 25 = 875$ mm².

Ἐμβαδὸν τῆς τετράγωνης διατομῆς: $30 \times 30 = 900$ mm².




**Σχ. 36-α.**

**Σιδερένια ράβδος μὲ ὀρθογώνια διατομὴ ( λάμα ).** **Σιδερένια ράβδος μὲ τετράγωνη διατομὴ ( τετράγωνο σίδερο ).**

*Ἀπάντηση: Τὸ τετράγωνο σίδερο ἔχει μεγαλύτερη διατομὴ ἀπὸ τὴ λάμα.*

**2. Πρόβλημα.** *Ἕνα κομμάτι ( τεμάχιο ) ἀπὸ ἀκατέργαστο χυτὸ μέταλλο ἔχει ὀρθογώνια διατομὴ 42 mm × 35 mm. Πόσο θὰ ἐλαττωθῇ ἡ διατομὴ αὐτή, ἂν λιμάρωμε 1 mm κάθε πλευρικὴ ὄψη ( κάθε πλευρὰ ) τοῦ κομματιοῦ;*

Ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ ἀκατέργαστου κομματιοῦ:

$$42 \times 35 = 1\,470 \text{ mm}^2.$$

Διαστάσεις τῆς διατομῆς ὕστερα ἀπὸ λιμάρισμα:

$$42 - (1 \times 2) = 40 \text{ mm} \text{ καὶ } 35 - (1 \times 2) = 33 \text{ mm}.$$

Ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ κατεργασμένου κομματιοῦ:

$$40 \times 33 = 1\,320 \text{ mm}^2.$$

*Ἀπάντηση: Ἡ ἐλάττωση εἶναι* $1\,470 - 1\,320 = 150$ *mm²*.

**3. Πρόβλημα.** *Ένα μαγειρείο έχει μήκος 3 m, πλάτος 2,50 m καὶ ὕψος 2,80 m. Παρουσιάζει δυὸ ἀνοίγματα: μιὰ πόρτα 0,95 m × 2,25 m καὶ ἕνα παράθυρο 1,10 m × 1,80 m. Πρόκειται νὰ χρωματισθοῦν (ἐσωτερικῶς) οἱ τέσσερις τοῖχοι καὶ τὸ ταβάνι (ἡ ὀροφή). Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια ποὺ θὰ χρωματιστῇ.*

Περίμετρος τοῦ μαγειρείου: $(3 + 2{,}50) \times 2 = 11$ m.

| | |
|---|---|
| Ἐπιφάνεια τῶν 4 τοίχων (μαζὶ μὲ τὰ ἀνοίγματα): | $11 \times 2{,}80 = 30{,}80$ m² |
| Ἐπιφάνεια τοῦ ταβανιοῦ: | $3 \times 2{,}5 = 7{,}50$ m² |
| Ὁλικὴ ἐπιφάνεια: | 38,30 m² |

*Ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια αὐτὴ πρέπει ν' ἀφαιρεθοῦν:*

| | |
|---|---|
| Ἐπιφάνεια τῆς πόρτας: | $0{,}95 \times 2{,}25 = 2{,}137\,5$ m² |
| Ἐπιφάνεια τοῦ παραθύρου: | $1{,}10 \times 1{,}80 = 1{,}98$ m² |
| Ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῶν ἀνοιγμάτων: | 4,117 5 m² |

| | |
|---|---|
| Ἀφαιρετέο σύνολο: | 4,117 5 m² |
| Ὑπόλοιπο πρὸς χρωματισμό: | 34,182 5 m² |

*Ἀπάντηση: Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ θὰ χρωματιστῇ εἶναι:*

$$38{,}30 - 4{,}117\,5 = 34{,}182\,5 \text{ m}^2.$$

**4. Πρόβλημα.** *Μὲ δρύινες σανίδες φάρδους 0,09 m θέλομε νὰ παρκετοστρώσωμε μιὰν ὀρθογώνια αἴθουσα ποὺ ἔχει μῆκος 6,50 m καὶ πλάτος 3,60 m. Οἱ σανίδες θὰ τοποθετηθοῦν ἔτσι ποὺ νὰ εἶναι παράλληλες πρὸς τὴ μεγάλη διάσταση τῆς αἴθουσας. Τί ὁλικὸ μῆκος σανίδων θὰ πρέπῃ νὰ προμηθευτοῦμε, ἂν λογαριάσωμε γιὰ τὰ ἀποκόμματα 1/20 παραπάνω ἀπ' ὅ,τι χρειάζεται γιὰ νὰ σκεπαστῇ τὸ πάτωμα;*

Ἀριθμὸς σανίδων κατὰ τὸ πλάτος τῆς αἴθουσας:

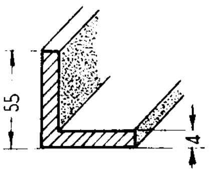
$$3{,}60 : 0{,}09 = 40.$$

| | |
|---|---|
| Ὁλικὸ μῆκος σανίδων πρὸς τοποθέτηση: | $6{,}50 \times 40 = 260$ m. |
| Ἀπώλειες ἀπὸ τὰ ἄχρηστα ἀποκόμματα: | $260 : 20 = 13$ m. |
| Ὁλικὸ μῆκος σανίδων πρὸς ἀγορά: | $260 + 13 = 273$ m. |

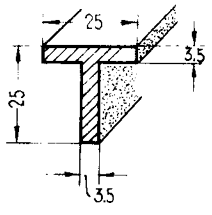
*Ἀπάντηση: 273 m.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τῆς σιδηρογωνιᾶς μὲ ἴσα σκέλη (σχ. 36-β· οἱ διαστάσεις στὰ σχήματα 36-β ὡς 36-ε παριστάνουν mm).

*2.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προφὶλ σὲ σχῆμα ἁπλοῦ ταῦ (σχ. 36-γ).



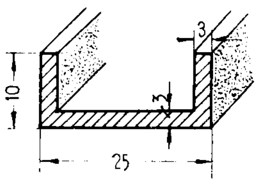

**Σχ. 36-β. Σιδηρογωνιὰ μὲ ἴσα σκέλη.**



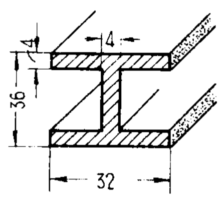

**Σχ. 36-γ. Προφὶλ σὲ σχῆμα ἁπλοῦ ταῦ.**

*3.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προφὶλ σὲ σχῆμα πὶ (σχ. 36-δ).

*4.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προφὶλ σὲ σχῆμα διπλοῦ ταῦ (σχ. 36-ε).




**Σχ. 36-δ. Προφὶλ σὲ σχῆμα πί.**




**Σχ. 36-ε. Προφὶλ σὲ σχῆμα διπλοῦ ταῦ.**

*5.* Θέλομε νὰ φτιάξωμε ἕνα σκέπασμα 4,80 m × 2,40 m, ἀπὸ ἀδιάβροχο πανί, γιὰ ἕνα φορτηγὸ αὐτοκίνητο. Μᾶς προτείνουν δυὸ πανιά: Τὸ ἕνα ἔχει φάρδος 0,80 m καὶ κοστίζει 30 δραχμὲς τὸ μέτρο, τὸ ἄλλο ἔχει φάρδος 0,60 m καὶ κοστίζει 23,50 δρχ. τὸ μέτρο. Μὲ ποιὸ ἀπὸ τὰ δυὸ πανιὰ θὰ φτιάξωμε φθηνότερο σκέπασμα; (Δὲν θὰ λογαριάσετε τὶς ἀπώλειες ἀπὸ τὶς ραφές). Καὶ τί οἰκονομία θὰ πετύχωμε, ἂν διαλέξωμε τοῦτο καὶ ὄχι τὸ ἄλλο;

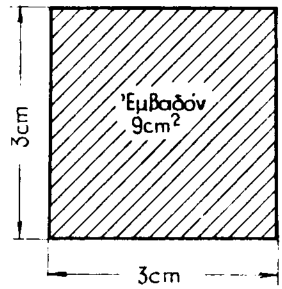
*6.* Ἕνα διαμέρισμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα χὼλ (προθάλαμο) μὲ διαστάσεις 1,50 m × 4,00 m, δυὸ ὑπνοδωμάτια: 4,50 m × 4,00 m τὸ ἕνα καὶ 3,75 m × 4,00 m τὸ ἄλλο, ἕνα βοηθητικὸ χῶρο 2,25 m × 2,00 m, μία τραπεζαρία 5,00 m × 4,75 m καὶ ἕνα μαγειρεῖο 3,25 m × 3,50 m. Ξέροντας ὅτι τὸ σοβάντισμα τοῦ ταβανιοῦ κοστίζει 25 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο, ὑπολογίστε πόσο θὰ κοστίσῃ τὸ σοβάντισμα τῶν ταβανιῶν τοῦ διαμερίσματος.

7. Μιὰ τραπεζαρία ἔχει κάτοψη ἕνα ὀρθογώνιο μὲ περίμετρο 21 m. Τὸ πλάτος της εἶναι τὰ 8/13 τοῦ μήκους της καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 0,60 m λιγότερο ἀπὸ τὸ πλάτος. Ἔχει δυὸ παράθυρα 2 m × 1 m τὸ καθένα καὶ δυὸ πόρτες 2,40 m × 1,10 m τὴν καθεμιά. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια τῶν τοίχων καὶ τοῦ ταβανιοῦ ποὺ πρόκειται νὰ χρωματιστοῦν (ἐσωτερικά).

## Μάθημα 37.

### Τετράγωνα καὶ τετραγωνικὲς ρίζες ἀριθμῶν.

**1. Τί εἶναι τὸ τετράγωνο ἑνὸς ἀριθμοῦ;** Ξέρομε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ μετρᾶ τὴν πλευρά του ἐπὶ τὸν ἑαυτό του. Ἔτσι, ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τετραγώνου, ποὺ ἔχει πλευρὰ 3 cm, εἶναι 9 cm² (σχ. 37-α). Γι' αὐτό, ὁ ἀριθμὸς 9 λέγεται *τετράγωνον* τοῦ 3.




Σχ. 37-α.

*Ὥστε, τετράγωνο ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι τὸ γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτό του.*

Γράφομε: $3^2 = 9$, καὶ διαβάζομε: *τρία στὸ τετράγωνο (ἢ στὴ δεύτερη δύναμη) ἴσον 9.*

**2. Τί εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ;**

Στὸ παραπάνω παράδειγμα τὸ 3 εἶναι ἡ *τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 9.*

*Ὥστε, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς δοσμένου ἀριθμοῦ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ποὺ τὸ τετράγωνό του εἶναι ἴσο μὲ τὸ δοσμένο ἀριθμό.*

Ὅπως βλέπομε στὸ παραπάνω σχῆμα, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα χρειάζεται, ὅταν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

Σύμβολο τῆς τετραγωνικῆς ρίζας εἶναι τό: $\sqrt{\ }$, ποὺ λέγεται *ριζικό*. Ἔτσι γράφομε: $\sqrt{9} = 3$, καὶ διαβάζομε: *τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἐννιὰ ἴσον τρία.*

**3. Πίνακας μὲ τὰ τετράγωνα καὶ τὶς τετραγωνικὲς ρίζες.** Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ τετράγωνο ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ τὸν ἑαυτό του. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε ὅμως τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ ἐκτελέσωμε μιὰ πολύπλοκη πράξη ποὺ θὰ μελετήσωμε στὸ 2ο Τόμο αὐτῶν τῶν Μαθηματικῶν γιὰ τὸν τεχνίτη. Πρὸς τὸ παρόν, γιὰ τὴν εὕρεση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας, θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸν πίνακα τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 ὡς 100 ποὺ βρίσκεται στὸ τέλος αὐτοῦ τοῦ Τόμου. Στὰ παρακάτω παραδείγματα δείχνομε πῶς χρησιμοποιεῖται.

**Παράδειγμα 1. Ὑπολογίστε τὴν $\sqrt{96}$.**

Ὁ ἀριθμὸς 96 βρίσκεται μεταξὺ 1 καὶ 100. Τὸν ἀναζητοῦμε λοιπὸν σὲ μιὰν ἀπὸ τὶς δυὸ στῆλες τοῦ πίνακα ποὺ ἔχουν τὴν ἐπιγραφή: ΑΡΙΘΜΟΙ. Στὴν ἴδια γραμμὴ καὶ στὴν τελευταία στήλη, μὲ τὴν ἐπιγραφή: ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ, βρίσκομε ἀμέσως τὸ ζητούμενο:

$$\sqrt{96} = 9{,}798.$$

Ἂς σημειωθῆ ὅτι, μολονότι ἐδῶ γράφομε τὸ σημεῖο τῆς ἀκριβοῦς ἰσότητας, ἡ παραπάνω ρίζα δίνεται μὲ προσέγγιση ἑνὸς χιλιοστοῦ (ἀπὸ ἐπάνω), δηλαδὴ ἔχομε: $9{,}797^2 < 96 < 9{,}798^2$.

**Παράδειγμα 2. Ὑπολογίστε τὴν $\sqrt{5\,476}$.**

Ὁ ἀριθμὸς 5 476 βρίσκεται μεταξὺ 100 καὶ 10 000. Τὸν ἀναζητοῦμε λοιπὸν σὲ μιὰν ἀπὸ τὶς δυὸ στῆλες ποὺ ἔχουν τὴν ἐπιγραφή: ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ. Τὸν βρίσκομε στὴ δεξιότερη ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς στῆλες. Στὴν ἴδια γραμμὴ καὶ στὴ διπλανὴ στήλη, μὲ τὴν ἐπιγραφή: ΑΡΙΘΜΟΙ, διαβάζομε τὴν ἀκριβῆ τετραγωνική του ρίζα:

$$\sqrt{5\,476} = 74.$$

**Παράδειγμα 3. Ὑπολογίστε τὴν $\sqrt{6\,350}$.**

Ὁ ἀριθμὸς 6 350 βρίσκεται μεταξὺ 100 καὶ 10 000. Τὸν ἀναζητοῦμε πάλι σὲ μιὰ στήλη: ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ. Δὲν τὸν βρίσκομε τὸν ἴδιο, βλέπομε ὅμως ὅτι περιέχεται μεταξὺ δυὸ διαδοχικῶν ἀριθμῶν αὐτῆς τῆς στήλης: τοῦ 6 241, ποὺ εἶναι τὸ τετράγωνο τοῦ 79, καὶ τοῦ 6 400 ποὺ εἶναι τὸ τετράγωνο τοῦ 80. Ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 6 350 εἶναι τὸ 79 μὲ προσέγγιση μιᾶς μονάδας ἀπὸ κάτω (ἢ τὸ 80 μὲ προσέγγιση μιᾶς μονάδας ἀπὸ ἐπάνω):

$$\sqrt{6\,350} \simeq 79 \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{6\,350} \simeq 80.$$

**Παράδειγμα 4. Πρόβλημα. Τί μῆκος ἔχει ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ποὺ τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 470 000 mm²;**

Ὅπως ξέρομε, τὸ ζητούμενο μῆκος εἶναι $\sqrt{470\,000}$ mm.

Γιὰ νὰ τὸ ὑπολογίσωμε σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: Ἕνα τετραγωνικὸ δεκατόμετρο (1 dm²) περιέχει $100 \times 100 = 10\,000$ mm²· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοσμένου τετραγώνου εἶναι, σὲ τετραγωνικὰ δεκατόμετρα, $470\,000 : 10\,000 = 47$ dm². Ἑπομένως ἡ πλευρὰ τοῦ δοσμένου τετραγώνου ἔχει μῆκος $\sqrt{470\,000}$ mm $= \sqrt{47}$ dm $=$ 6,856 dm $=$ 6,856 $\times$ 100 mm $=$ 685,6 mm. Ἄρα $\sqrt{470\,000} =$ 685,6.

*Ὥστε, γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ σὰν τὸν 470 000, ποὺ περιέχεται μεταξὺ $10\,000 = 100^2$ καὶ $1\,000\,000 = 1\,000^2$, τὸν διαιροῦμε διὰ 10 000, βρίσκομε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πηλίκου 47* (κατὰ τὸ Παράδειγμα 1) *καὶ τὴ ρίζα αὐτὴ τὴν πολλαπλασιάζομε μὲ 100.*

**Παράδειγμα 5. Πρόβλημα. Τί μῆκος ἔχει ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ποὺ τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 0,35 m²;**

Ξέρομε ὅτι τὸ ζητούμενο μῆκος εἶναι $\sqrt{0{,}35}$ m καὶ γιὰ νὰ τὸ ὑπολογίσωμε σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: Ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο (1 m²) περιέχει $10 \times 10 = 100$ dm²· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοσμένου τετραγώνου εἶναι, σὲ τετραγωνικὰ δεκατόμετρα, 0,35 $\times$ 100 $=$ 35 dm². Ἑπομένως ἡ πλευρὰ τοῦ δοσμένου τετραγώνου ἔχει μῆκος $\sqrt{35}$ dm $=$ 5,916 dm $=$ 0,591 6 m.

Ἄρα $\sqrt{0{,}35} =$ 0,591 6.

*Ὥστε, γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ σὰν τὸν 0,35, ποὺ περιέχεται μεταξὺ $0{,}01 = \frac{1}{10^2}$ καὶ 1, τὸν πολλαπλασιάζομε μὲ 100, βρίσκομε τὴ ρίζα τοῦ γινομένου 35 καὶ τὴ ρίζα αὐτὴ τὴ διαιροῦμε διὰ τοῦ 10.*

*Ἀσκήσεις:* *1.* Ὑπολογίστε τὰ τετράγωνα τῶν πέντε ἀριθμῶν:

5 0,6 11 1,1 40.

*2.* Βρῆτε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν πέντε ἀριθμῶν:

49 144 0,49 10 000 6 400.

*3.* Ὑπολογίστε τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν:

$$\frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{7}{4}$$

καὶ βρῆτε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν:

$$\frac{1}{4} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{16}{100} \quad \frac{25}{16}.$$

*4.* Χρησιμοποιώντας τὸν πίνακα τῶν τετραγώνων καὶ τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 ὡς 100 ὑπολογίστε τὶς παρακάτω τετραγωνικὲς ρίζες:

$$\sqrt{69} \quad \sqrt{9\,409} \quad \sqrt{70{,}56} \quad \sqrt{72\,900}.$$

*5.* Διαιρέστε τὸ 2 304 διὰ τοῦ 48. Τί παρατηρεῖτε: Συμπληρῶστε τότε τὶς δύο ἰσότητες:

$$48^2 = \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{2\,304} =$$

*6.* Διαιρέστε τὸ 1 802 διὰ τοῦ 42. Τί πηλίκον βρίσκετε; Μπορεῖτε ἄραγε νὰ πῆτε, ἀνάμεσα σὲ ποιούς διαδοχικοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς περιέχεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 1 802;

Ὅμοια ἄσκηση ἀλλὰ μὲ διαίρεση τοῦ 1 802 διὰ τοῦ 42,5. Μπορεῖτε ἄραγε νὰ πῆτε, ἀνάμεσα σὲ ποιούς διαδοχικοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, μὲ ἕνα δεκαδικὸ ψηφίο, περιέχεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 1 802;

*7.* Ποιό μῆκος πρέπει νὰ δώσωμε στὴν πλευρὰ μιᾶς τετράγωνης λαμαρίνας, γιὰ νὰ εἶναι τὸ ἐμβαδόν της 5 625 $mm^2$;

*8.* Ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ τὸ πλάτος του εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ μήκους του ἔχει ἐμβαδὸν 3 200 $m^2$. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις του (μῆκος καὶ πλάτος).

*9.* Ἡ ὀρθογώνια διατομὴ μιᾶς σιδερένιας ράβδου ἔχει ἐμβαδὸν 875 $mm^2$· τὸ πάχος τῆς ράβδου εἶναι ἴσο μὲ τὰ 5/7 τοῦ πλάτους τῆς διατομῆς. Ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις τῆς διατομῆς. δηλ. τὸ πλάτος καὶ τὸ πάχος τῆς ράβδου.

*10.* Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις 40 mm × 90 mm. Ὕστερα, ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ποὺ ἔχει ἴσο ἐμβαδὸν μὲ τὸ ὀρθογώνιο καὶ σχεδιάστε αὐτὸ τὸ τετράγωνο (ποὺ λέγεται ἰσοδύναμο πρὸς τὸ ὀρθογώνιο).

Ἡ ἴδια ἄσκηση ἀλλὰ μὲ τὰ ἑξῆς ὀρθογώνια:

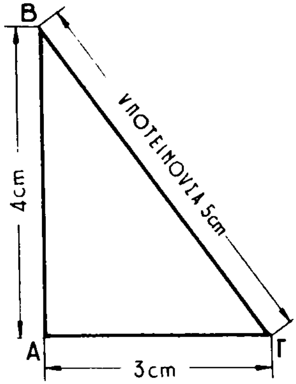
55 mm × 35 mm, 43,5 mm × 62 mm.

*11.* Σχεδιάστε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 60 mm. Ὕστερα, ὑπολογίστε τὶς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὸ τετράγωνο καὶ ποὺ τὸ πλάτος του εἶναι τὸ 1/3 τοῦ μήκους του. Τέλος σχεδιάστε τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ (ποὺ λέγεται ἰσοδύναμο πρὸς τὸ δοσμένο τετράγωνο). Ὅμοια ἄσκηση μὲ τὸ ἴδιο τετράγωνο ἀλλὰ μὲ ζητούμενο ὀρθογώνιο ποὺ τὸ μῆκος του νὰ εἶναι τὰ 5/2 τοῦ πλάτους του.

## Μάθημα 38.

### Τετραγωνική ρίζα
### καὶ ὑπολογισμὸς πλευρᾶς ὀρθογώνιου τριγώνου.

**1. Ἂς μετρήσωμε τὶς τρεῖς πλευρὲς τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ** (σχ. 38-α). Θὰ βροῦμε




**Σχ. 38-α. Μετροῦμε τὶς τρεῖς πλευρὲς τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου.**

$$\text{ΑΒ} = 4\,\text{cm},\ \text{ΑΓ} = 3\,\text{cm}$$

καὶ ὑποτείνουσα $\text{ΒΓ} = 5$ cm.

Ἂς ὑπολογίσωμε τώρα τὰ τετράγωνα τῶν τριῶν ἀριθμῶν ποὺ βρήκαμε. Θὰ ἔχωμε τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς

16, 9 καὶ 25.

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ τρίτος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων:

$$25 = 16 + 9.$$

Ἂν κάμαμε τὴν ἴδια ἐργασία καὶ μ' ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο ὀρθογώνιο τρίγωνο, θὰ καταλήγαμε στὴν ἴδια παρατήρηση:

*Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δυὸ ἄλλων πλευρῶν.*

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα, ποὺ εἶναι γνωστὴ μὲ τὸ ὄνομα *Πυθαγόρειο Θεώρημα*, εἶναι πολὺ σημαντική. Θὰ τὴ μελετήσωμε πιὸ θεωρητικὰ στὸν 3ο Τόμο. Ἐφαρμόζοντάς την σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μποροῦμε νὰ ὑπολογίσωμε τὴ μιὰ πλευρά του, ὅταν ξέρωμε τὶς δύο ἄλλες (βλέπε τὰ παρακάτω παραδείγματα). Μποροῦμε ἀκόμη, μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἴδιας ἰδιότητας, νὰ ὑπολογίζωμε διάφορα μεγέθη σὲ γεωμετρικὰ σχήματα ποὺ μποροῦν νὰ αναλυθοῦν (νὰ χωριστοῦν) σὲ ὀρθογώνια τρίγωνα.

**2. Ξέροντας τὶς δυὸ πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ὑπολογίστε τὴν ὑποτείνουσα.**

*Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τί μῆκος ἔχει τὸ καλώδιο ποὺ χρησιμεύει στὴ στερέωση τοῦ στύλου, ὁ ὁποῖος παριστάνεται στὸ σχῆμα 38-β.*

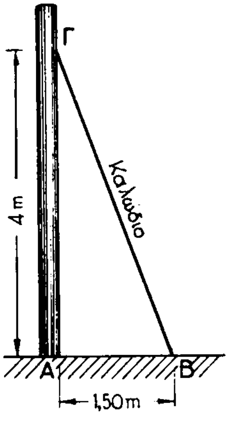
Τὸ τετράγωνο τοῦ μήκους ΒΓ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δυὸ ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδὴ μὲ

$$4^2 + 1{,}5^2 = 16 + 2{,}25 = 18{,}25.$$

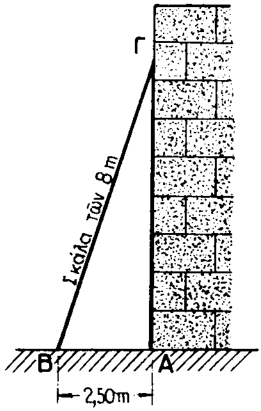
Ἀπὸ τὸν πίνακα ὅμως τῶν τετραγώνων βρίσκομε ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 1 825 εἶναι 42 μὲ προσέγγιση μιᾶς μονάδας ἀπὸ κάτω.

Ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 18,25 εἶναι 4,2.

*Ἀπάντηση: Τὸ μῆκος τοῦ καλωδίου εἶναι 4,2 m.*




Σχ. 38-β. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ καλωδίου ΒΓ.




Σχ. 38-γ. Ὑπολογισμὸς τοῦ ὕψους ΑΓ.

**3. Ξέροντας τὴν ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀθογώνιου τριγώνου καὶ τὴ μία ἀπὸ τὶς δυὸ ἄλλες πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας του ὑπολογίστε τὴν ἄλλη.**

*Παράδειγμα. Μιὰ ἀνεμόσκαλα μήκους 8 m στηρίζεται πάνω σ' ἕναν τοῖχο ἔτσι ποὺ ἡ βάση της ν' ἀπέχη ἀπὸ τὴ βάση τοῦ τοίχου*

*2,5 m. Σὲ ποιό ὕψος βρίσκεται ἡ κορυφὴ Γ τῆς ἀνεμόσκαλας (σχ. 38-γ);*

Ἂν προσθέταμε τὸ τετράγωνο τοῦ ὕψους ΑΓ στὸ τετράγωνο τοῦ 2,5, (δηλαδὴ στὸ 6,25), θὰ βρίσκαμε τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας, δηλαδὴ τὸ 64.

Ὥστε, τὸ τετράγωνο τοῦ ΑΓ εἶναι $64 - 6{,}25 = 57{,}75$.

Τὸ ζητούμενο μῆκος ΑΓ εἶναι λοιπόν, σὲ μέτρα, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 57,75. Ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν βρίσκομε ὅτι αὐτὴ ἡ ρίζα εἶναι περίπου 7,6 μὲ πολὺ καλὴ προσέγγιση.

*Ἀπάντ. Τὸ ὕψος τῆς κορυφῆς τῆς σκάλας εἶναι περίπου 7,6 m.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Ὑπολογίστε τὴν ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ποὺ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας του εἶναι:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ο | 6 cm | καὶ | 15 cm· |
| 2ο | 35 mm | καὶ | 43 mm· |
| 3ο | 18,5 m | καὶ | 26 m. |

*2.* Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου ποὺ ἡ ὑποτείνουσά του καὶ μιὰ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας του ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ο | 16 cm | καὶ | 3 cm· |
| 2ο | 25 mm | καὶ | 9 mm· |
| 3ο | 10,5 m | καὶ | 4,25 m. |

*3.* Ὑπολογίστε τὴ διαγώνιο ἑνὸς ὀρθογώνιου ποὺ οἱ πλευρές του ἔχουν μῆκος 15 cm ἡ μιὰ καὶ 45 cm ἡ ἄλλη. Σχεδιάστε τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ μικρότερο, σὲ κλίμακα τῆς ἐκλογῆς σας. Ὕστερα, νὰ μετρήσετε στὸ σχεδιό σας τὶς διαγωνίους· ἀπὸ τὸ σχεδιαστικὸ μῆκος τους νὰ βρῆτε τὸ πραγματικὸ μῆκος καὶ αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα νὰ τὸ συγκρίνετε μὲ τὸ ἐξαγόμενο τοῦ ὑπολογισμοῦ σας.

*4.* Ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ ἑνὸς ρόμβου ποὺ οἱ διαγώνιοί του ἔχουν μῆκος 36 cm καὶ 28 cm.

*5.* Μιὰ χορδὴ σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 10 cm ἔχει μῆκος 5 cm. Ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴ χορδή.

*6.* Σχεδιάστε ἕνα τετράγωνο ποὺ ἔχει διαγώνιο 16 cm, ὕστερα βρῆτε τὴν πλευρά του, καὶ μὲ μέτρηση καὶ μὲ ὑπολογισμό.

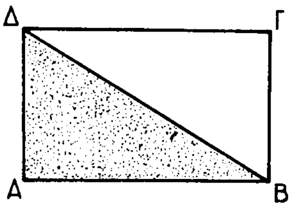
7. Σχεδιάστε ἕνα τετράγωνο καὶ ὕστερα δεῖξτε γραφικὰ (δηλαδὴ μὲ σχεδίαση) ὅτι, ἂν διπλασιάσετε τὴν πλευρά του, ἡ ἐπιφάνειά του θὰ γίνη 4 φορὲς μεγαλύτερη.

*Ἐφαρμογή:* Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, ποὺ ἡ μιὰ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας του νὰ εἶναι 2 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἄλλη. Πόσες φορὲς τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας περιέχει τὸ τετράγωνο τῆς μικρότερης πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας; Ὑπολογίστε τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ξέροντας ὅτι ἡ ὑποτείνουσά του ἔχει μῆκος 45 mm.

# Μάθημα 39.

## Ἐμβαδὸν ὀρθογώνιου τριγώνου.
## Ἐμβαδὸν ὁποιουδήποτε τριγώνου.

1. **Ἂς χαράξωμε τὴ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ διαγωνίους ἑνὸς ὀρθογώνιου ΑΒΓΔ καὶ ἂς ἐξετάσωμε τὰ δυὸ τρίγωνα ποὺ προκύπτουν** (σχ. 39-α).



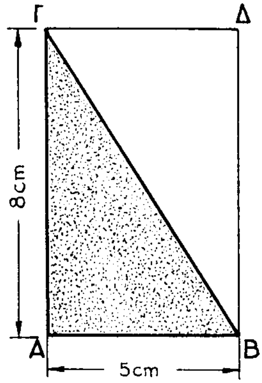

Σχ. 39-α. Τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα.

Τὸ καθένα ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχει μιὰν ὀρθὴ γωνία· ὥστε εἶναι *ὀρθογώνιο τρίγωνο.*

Μ' ἕνα *διαφανὲς χαρτὶ* ἂς ξεσηκώσωμε τὸ τρίγωνο ΒΓΔ καὶ ἂς δοκιμάσωμε νὰ τὸ κάμωμε νὰ συμπέση μὲ τὸ τρίγωνο ΔΑΒ. Παρατηροῦμε πὼς αὐτὸ γίνεται. Καὶ ἀλήθεια, ὅταν ἡ ὀρθὴ γωνία $\widehat{\Gamma}$ συμπέση μὲ τὴν ὀρθὴ $\widehat{A}$ ἔτσι ποὺ ἡ κορυφὴ Β τοῦ τριγώνου ΒΓΔ νὰ ἔρθη ἐπάνω στὴ Δ τοῦ τριγώνου ΔΑΒ, τότε καὶ ἡ κορυφὴ Δ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ θὰ ἔρθη ἐπάνω στὴ Β τοῦ τριγώνου ΔΑΒ. *Τὰ δυὸ αὐτὰ τρίγωνα εἶναι λοιπὸν ἴσα.*

Ὥστε, *ἕνα ὀρθογώνιο χωρίζεται ἀπὸ κάθε διαγώνιό του σὲ δυὸ ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα.*

2. **Ἂς ὑπολογίσωμε τώρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ** (σχ. 39-β), ξέροντας πὼς οἱ πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας του ἔχουν μῆκος 5 cm ἡ μιὰ καὶ 8 cm ἡ ἄλλη.




Σχ. 39-α. Ἐμβαδὸν ΑΒΓ $= \frac{5 \times 8}{2} = 20\ \text{cm}^2$.

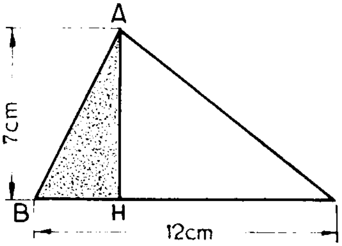
Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι *τὸ μισὸ* ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, ἄρα

$$\text{ἐμϐ. ΑΒΓ} = \frac{5 \times 8}{2} = 20\,cm^2.$$

Ὥστε, *γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου, πολλαπλασιάζομε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ μετροῦν τὶς δυὸ πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 2.*

Ἐννοεῖται ὅτι οἱ δυὸ αὐτὲς πλευρὲς πρέπει νὰ μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα μήκους. Μονάδα ἐμϐαδοῦ εἶναι τότε τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὲς αὐτὴ τὴ μονάδα μήκους.

**3. Ἂς ὑπολογίσωμε τώρα τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὁποιουδήποτε τριγώνου ΑΒΓ,** γνωρίζοντας ὅτι μιὰ πλευρά του, ἡ ΒΓ, ποὺ παίρνομε γιὰ βάση, ἔχει μῆκος 12 cm καὶ ὅτι τὸ ἀντίστοιχο σ' αὐτὴν ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου εἶναι 7 cm (σχ. 39-γ).




**Σχ. 39-γ. Ἐμβαδὸν $\text{ΑΒΓ} = \frac{12 \times 7}{2} = 42\ \text{cm}^2$.**

Στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος (γωνίες $\widehat{\text{Β}}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ὀξεῖες), τὸ τρίγωνο ΑΒΓ χωρίζεται ἀπὸ τὸ ὕψος ΑΗ σὲ δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΑΗΓ. Τὸ ἐμϐαδὸν λοιπὸν τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμϐαδῶν τῶν δύο αὐτῶν ὀρθογώνιων τριγώνων:

$$\begin{aligned}\text{ἐμϐ. τριγ. ΑΒΓ} &= \text{ἐμϐ. τριγ. ΑΒΗ} + \text{ἐμϐ. τριγ. ΑΗΓ}\\ &= \left(\text{ΒΗ} \times 7 \times \frac{1}{2}\right) + \left(\text{ΗΓ} \times 7 \times \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(\text{ΒΗ} \times \frac{7}{2}\right) + \left(\text{ΗΓ} \times \frac{7}{2}\right).\end{aligned}$$

Δὲν ξέρομε οὔτε τὴ ΒΗ οὔτε τὴν ΗΓ, ξέρομε ὅμως ὅτι τὸ ἄθροισμά τους ΒΓ εἶναι ἴσο μὲ 12 cm. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμε τὰ μήκη ΒΗ καὶ ΗΓ χωριστὰ μὲ τὸ 7/2 καὶ νὰ προσθέσωμε τὰ δυὸ γινόμενα, προσθέτομε πρῶτα τὰ ΒΗ καὶ ΗΓ καὶ ὕστερα πολλαπλασιάζομε τὸ ἄθροισμά τους ΒΓ $=12\,\mathrm{cm}$ μὲ τὸ 7/2· τὸ ἐξαγόμενο εἶναι τὸ ἴδιο (βλέπε καὶ Μάθημα 21, ἄσκηση 7). Ἔτσι ἔχομε:

$$\text{ἐμβ. τριγ. } \mathrm{AB\Gamma} = (\mathrm{BH}+\mathrm{H\Gamma}) \times \frac{7}{2} = \mathrm{B\Gamma}\times\frac{7}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}\times 7}{2} = \frac{12\times 7}{2}$$

$$= 42\,cm^2.$$

Γιὰ νὰ βροῦμε αὐτὸ τὸ ἐμβαδόν, πολλαπλασιάσαμε τὴ βάση 12 cm μὲ τὸ ὕψος 7 cm καὶ διαιρέσαμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 2.

Ὥστε, *γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, πολλαπλασιάζομε τὴ βάση μὲ τὸ ἀντίστοιχο ὕψος καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 2.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Ἕνα ὀρθογώνιο φύλλο λαμαρίνας ζυγίζει 175 γραμμάρια. Τὸ κόβετε σὲ δυὸ κομμάτια κατὰ τὴ μιὰ διαγώνιό του. Πόσο θὰ ζυγίζῃ τὸ κάθε κομμάτι;

*2.* Μετρῆστε τὶς πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ τριγώνου ποὺ χρησιμοποιεῖτε στὶς σχεδιάσεις σας καὶ βρῆτε τὸ ἐμβαδόν του.

*3.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου, ξέροντας πὼς οἱ πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας του ἔχουν μῆκος 45 mm ἡ μιὰ καὶ 38 mm ἡ ἄλλη.

*4.* Ἡ γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 120° καὶ οἱ πλευρές του ΒΑ καὶ ΒΓ ἀντίστοιχα ἴσες μὲ 3 cm καὶ 8 cm. Χαράξτε τὸ ὕψος του ΑΗ. Θὰ παρατηρήσετε ὅτι τὸ τρίγωνο ΑΒΓ δὲν χωρίστηκε ἀπὸ τὸ ΑΗ σὲ δυὸ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἀλλ' ὅτι εἶναι διαφορὰ δυὸ ὀρθογώνιων τριγώνων. Ὑπολογίζοντας τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν τῶν δυὸ ὀρθογώνιων τριγώνων καὶ ἀφαιρώντας τὸ μικρότερο ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο ξαναβρίσκετε, μὲ ὅμοιες σκέψεις ὅπως καὶ στὴν § 3 τοῦ Μαθήματος, τὸν κανόνα ποὺ δώσαμε γιὰ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου. Βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ μετρώντας τὸ ὕψος ΑΗ καὶ ἐφαρμόζοντας αὐτὸν τὸν κανόνα. Γιὰ ἐπαλήθευση μετρῆστε τὴν πλευρὰ ΑΓ, τὸ ἀντίστοιχο ὕψος ΒΘ καὶ ἐφαρμόστε ξανὰ τὸν κανόνα· πρέπει νὰ βρῆτε τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν (ἢ περίπου τὸ ἴδιο, γιατὶ καὶ οἱ μετρήσεις δίνουν τὰ μήκη μὲ προσέγγιση καὶ ὄχι ἀκριβῶς).

*5.* Ἕνα τρίγωνο ἔχει ἐμβαδὸν 100 cm² καὶ ἡ βάση του ἔχει μῆκος 20 cm. Ὑπολογίστε τὸ ὕψος του τὸ ἀντίστοιχο σ' αὐτὴ τὴ βάση.

*6.* Χαράξτε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μὲ μῆκος πλευρῶν 55 mm. Ὕστερα, μετρῆστε τὸ ὕψος του καὶ ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

7. Ἔχομε νὰ χαράξωμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ ἐπιφάνεια 15 $cm^2$. Ἡ βάση τοῦ ΑΒ εἶναι σχεδιασμένη ἐπάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ καὶ ἔχει μῆκος 3 cm.

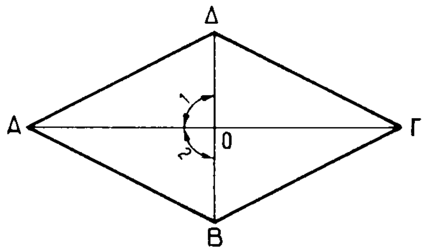
1ο Πόσα τέτοια τρίγωνα μπορεῖτε νὰ χαράξετε;

2ο Ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτὰ χαράξτε ἐκεῖνο ποὺ ἡ γωνία του $\widehat{A}$ εἶναι ἴση μὲ $45^o$.

# Μάθημα 40.

## Ἐμβαδὸν ρόμβου.

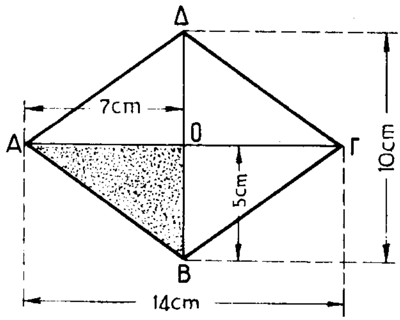
**1. Χαράζομε τὶς διαγωνίους ἑνὸς ρόμβου ΑΒΓΔ καὶ παρατηροῦμε τὰ τέσσερα τρίγωνα ποὺ προκύπτουν** (σχ. 40-α).




**Σχ. 40-α. Τὰ 4 τρίγωνα εἶναι ἴσα**

Τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ τρίγωνα ἔχει ὀρθὴ γωνία στὴν κορυφὴ Ο, ἄρα εἶναι *ὀρθογώνιο*. Μὲ διαφανὲς χαρτὶ ἂς ξεσηκώσωμε τώρα ἕνα ἀπ' αὐτά, π.χ. τὸ ΑΟΒ, καὶ ἂς ἐξετάσωμε ἂν μπορεῖ *νὰ ἐφαρμόση μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπὸ τὰ ἄλλα*, π.χ. μὲ τὸ ΑΟΔ. Βλέπομε ὅτι αὐτὸ γίνεται· καὶ ἀλήθεια, ἂν θέσωμε τὴν πλευρὰ ΟΑ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ ἐπάνω στὴν πλευρὰ ΟΑ τοῦ ΑΟΔ καὶ τὴν ὀρθὴ γωνία $\widehat{O_2}$ ἐπάνω στὴν ὀρθὴ $\widehat{O_1}$, τότε καὶ ἡ πλευρὰ ΟΒ θὰ συμπέση μὲ τὴν ἴση της ΟΔ. *Τὰ τέσσερα παραπάνω τρίγωνα εἶναι λοιπὸν ἴσα.*

*Ὥστε, ἕνας ρόμβος διαιρεῖται ἀπὸ τὶς διαγωνίους του σὲ τέσσερα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα.*




**Σχ. 40-β. Ἐμβαδὸ ΑΒΓΔ** $= \frac{14 \times 10}{2} = 70$ **cm²**.

**2. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ** (σχ. 40-β), ξέροντας πὼς οἱ διαγώνιοί του ἔχουν μῆκος 14 cm καὶ 10 cm.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι 4 φορὲς τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀπὸ τὰ 4 παραπάνω ὀρθογώνια τρίγωνα, π.χ. τοῦ ΑΟΒ· ἄρα

$$\text{ἐμβ. ρόμβου ΑΒΓΔ} = \frac{7 \times 5}{2} \times 4 = \frac{(7 \times 5) \times 4}{2} \text{ cm}^2.$$

Γιὰ νὰ κάμωμε ὅμως τὸ γινόμενο $(7 \times 5)$ τέσσερις φορὲς μεγαλύτερο, ἀρκεῖ νὰ κάμωμε κάθε παράγοντά του δύο φορὲς μεγαλύτερο. Ἔτσι βρίσκομε

$$\text{ἐμβ. ρόμβου ΑΒΓΔ} = \frac{(7 \times 2) \times (5 \times 2)}{2} = \frac{14 \times 10}{2} = \mathit{70\,cm^2}.$$

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε αὐτό, πολλαπλασιάσαμε τὰ μήκη 14 cm καὶ 10 cm τῶν δυὸ διαγωνίων καὶ διαιρέσαμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 2.

Ὥστε, *γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ῥόμβου, πολλαπλασιάζομε τὰ μήκη τῶν διαγωνίων του καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 2.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε ἕνα ρόμβο, μὲ διαγωνίους 60 mm καὶ 80 mm. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

*2.* Πάρτε ἕνα ρόμβο ΑΒΓΔ καὶ χαράξτε τὶς διαγωνίους του. Δεῖξτε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν.

*3.* Χαράξτε ἕνα ρόμβο μὲ πλευρὰ 55 mm καὶ μὲ ὀξεία γωνία $42^o$ (μοιρογνωμόνιο). Ὕστερα, χαράξτε τὴ μεγάλη του διαγώνιο καὶ μετρῆστε την. Σὲ τί τρίγωνα ἡ διαγώνιος αὐτὴ χωρίζει τὸ ρόμβο; Μετρῆστε τὸ ὕψος τους καὶ ὑπολογίστε πρῶτα τὸ ἐμβαδόν τους, ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου.

*4.* Ἀπὸ τὶς κορυφὲς ἑνὸς ρόμβου, ποὺ ἔχει διαγωνίους 50 mm καὶ 75 mm, φέρτε εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὶς διαγωνίους. Τί σχῆμα προκύπτει; Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδόν του καὶ νὰ τὸ συγκρίνετε μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου.

*5.* Ἡ μιὰ διαγώνιος ἑνὸς ρόμβου ἐμβαδοῦ 150 $cm^2$ ἔχει μῆκος 20 cm. Ὑπολογίστε τὴν ἄλλη διαγώνιο.

*6.* Νὰ προεκτείνετε τὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἡμιδιαγωνίους ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ ἑνὸς ρόμβου ΑΒΓΔ κατὰ τὸ μῆκος της:

$$ΑΑ' = ΟΑ, \quad ΒΒ' = ΟΒ, \quad ΓΓ' = ΟΓ, \quad ΔΔ' = ΟΔ.$$

Ὕστερα, ἑνῶστε διαδοχικῶς μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ', Α'.

1ο. Τί τετράπλευρο εἶναι τὸ Α'Β'Γ'Δ' ποὺ σχεδιάσατε;

2ο. Νὰ συγκρίνετε τὸ ἐμβαδόν του μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ.

*7.* Χαράξτε ἕνα ρόμβο ποὺ οἱ ἡμιδιαγώνιοί του ἔχουν μῆκος 4 cm καὶ 5 cm. Ὕστερα,

1ο μετρῆστε (ἢ ὑπολογίστε) τὴν πλευρά του.

2ο ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του·

3ο ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀπὸ τὰ δυὸ τρίγωνα στὰ ὁποῖα ἡ μικρὴ διαγώνιος χωρίζει τὸ ρόμβο·

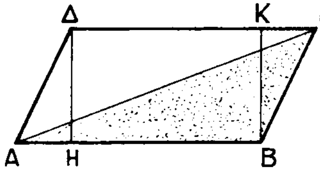
4ο βρῆτε τὰ τρία ὕψη αὐτοῦ τοῦ τριγώνου καὶ πῆτε ποιά εἶναι ἡ ἀπόσταση δυὸ ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ ρόμβου.

## Μάθημα 41.

### Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.

**1. Ἂς χαράξωμε μιὰν ἀπὸ τὶς διαγωνίους ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ** καὶ ἂς ἐξετάσωμε τὰ δυὸ τρίγωνα ποὺ προκύπτουν (σχ. 41-α).

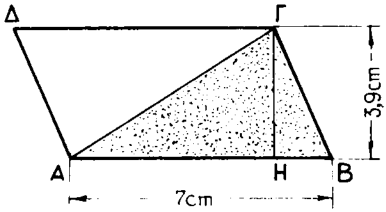
Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ ἔχουν ἴσες βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ, γιατὶ σ' ἕνα παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες· ἀλλὰ καὶ τὰ *ἀντίστοιχα ὕψη τους* εἶναι ἴσα, γιατὶ οἱ δυὸ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλες καὶ ἑπομένως στὴν ἴδια πάντα ἀπόσταση ἡ μιὰ ἀπὸ τὴν ἄλλη: ΔΗ = ΒΚ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ ἔχουν ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ἀντίστοιχα ὕψη, *ἄρα τὰ ἐμβαδά τους εἶναι ἴσα.*




**Σχ. 41-α. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν.**

Ὥστε, *ἕνα παραλληλόγραμμο χωρίζεται ἀπὸ κάθε διαγώνιό του σὲ δυὸ τρίγωνα ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν.*

Θὰ μπορούσαμε μάλιστα νὰ παρατηρήσωμε ὅτι τὰ δυὸ τρίγωνα εἶναι καὶ ἐφαρμόσιμα, δηλαδὴ ἴσα.




**Σχ. 41-β. Ἐμβαδὸν ΑΒΓΔ $= 7 \times 3,9 = 27,3$ cm²**

**2. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ** (σχ. 41-β), ξέροντας ὅτι μιὰ πλευρά του, ἡ ΑΒ, ποὺ θὰ τὴ λέμε *βάση*, εἶναι 7 cm καὶ τὸ *ἀντίστοιχο ὕψος* 3,9 cm.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἄρα ἴσο μὲ

$$\frac{7 \times 3,9}{2} \times 2 = 7 \times 3,9 = 27,3 \ cm^2.$$

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, πολλαπλασιάσαμε τὴ βάση, 7 cm, ἐπὶ τὸ ὕψος, 3,9 cm.

Ὥστε, *γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

**3. Ἀντίστροφος ὑπολογισμός**: *Ὑπολογίστε τί ὕψος πρέπει νὰ δώσωμε σ' ἕνα παραλληλόγραμμο μὲ βάση 40 mm γιὰ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 1 200 mm².*

Τὸ γινόμενο τῆς βάσεως 40 ἐπὶ τὸ ὕψος εἶναι ἴσο μὲ 1 200· ἄρα τὸ ὕψος θὰ ἰσοῦται μὲ $1\,200 : 40 = 30$ *mm*.

*Ἀσκήσεις. 1.* Χαράξτε ἕνα ὄχι ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καὶ τὶς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ, ὕστερα ἐξετάστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ. Θὰ μπορούσατε ἄραγε νὰ τὰ κάμετε νὰ συμπέσουν; Μὲ ἄλλα λόγια, τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄραγε ἴσα; Μήπως ἔχουν ἴσα ἐμβαδά;

*2.* Σχεδιάστε ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ μιὰ γωνία του εἶναι 30° καὶ ποὺ οἱ δυὸ πλευρές, οἱ ὁποῖες τὴν περιέχουν, ἔχουν μῆκος 7 cm ἡ μιὰ καὶ 3 cm ἡ ἄλλη. Μετρῆστε τὸ ὕψος παίρνοντας γιὰ βάση τὴν πλευρὰ τῶν 7 cm καὶ ὕστερα ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

*3.* Στὴν προηγούμενη ἄσκηση μετρῆστε τὸ ὕψος, ὅταν πάρετε γιὰ βάση τὴν πλευρὰ τῶν 3 cm, καὶ ὕστερα ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. Γιατί πρέπει νὰ βρῆτε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα ὅπως καὶ στὴν προηγούμενη ἄσκηση, ἂν ὑποτεθῆ ὅτι οἱ μετρήσεις σας εἶναι ἀκριβεῖς;

*4.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου ποὺ ἔχει βάση 55 cm καὶ ὕψος τὸ μισὸ τῆς βάσεως.

*5.* Συνδέστε κατὰ σειρὰ τὰ μέσα Ε, Ζ, Η, Θ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μὲ εὐθύγραμμα τμήματα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ καὶ ΘΕ. Ὕστερα, δεῖξτε ὅτι τὰ τέσσερα τρίγωνα ΑΕΘ, ΒΖΕ, ΓΗΖ καὶ ΔΘΗ ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν.

*6.* Χαράξτε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μὲ πλευρὲς ΑΒ = 55 mm καὶ ΒΓ = 42 mm. Συνδέστε τὴν κορυφὴ Γ μὲ τὸ μέσο Ε τῆς ΑΒ καὶ τὴν κορυφὴ Α μὲ τὸ μέσο Ζ τῆς ΓΔ. Τί τετράπλευρο εἶναι τὸ ΑΕΓΖ; Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

*7.* Χαράξτε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ ΑΒ = 6 cm, ΑΓ = 5 cm καὶ γωνία $\widehat{A} = 62°$. Ὕστερα:

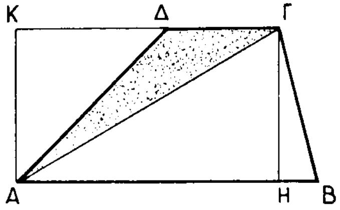
1ο. Μετρῆστε τὴν ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευρὰ καὶ ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ.

2ο. Φέρτε ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ παραλλήλους πρὸς τὶς ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ τριγώνου καὶ ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ποὺ προκύπτει. Τί παρατηρεῖτε;

## Μάθημα 42.

### Ἐμβαδὸν τραπεζίου.

**1. Ἂς χαράξωμε ἕνα τετράπλευρο ποὺ νὰ ἔχη δυὸ ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες**, π.χ. τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος 42-α. Ἕνα τέτοιο τετράπλευρο λέγεται *τραπέζιο*. Οἱ παράλληλες πλευρὲς ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται *βάσεις* τοῦ τραπεζίου καὶ ἡ ἀπόστασή τους λέγεται *ὕψος* του.

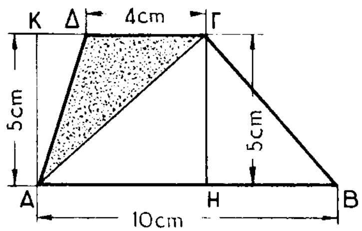



Σχ. 42-α. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ ἔχουν ἴσα τὰ ὕψη τὰ κάθετα στὶς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ

Ἂς χαράξωμε μιὰ διαγώνιό του, π.χ. τὴν ΑΓ. Θὰ σχηματιστοῦν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ ποὺ ἔχουν *ἴσα ὕψη* ΓΗ = ΑΚ, γιατὶ τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ ὕψη εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἀπόσταση τῶν δυὸ βάσεων.

Ὥστε, *ἕνα τραπέζιο διαιρεῖται ἀπὸ κάθε διαγώνιό του σὲ δυὸ τρίγωνα ποὺ ἔχουν ἴσα τὰ ὕψη τους τὰ κάθετα πρὸς τὶς βάσεις.*

**2. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ** (σχ. 42-β), ξέροντας τὰ μήκη τῶν βάσεών του: ΑΒ = 10 cm, ΓΔ = 4 cm, καθὼς καὶ τὸ ὕψος του: 5 cm.




Σχ. 42-β. Ἐμβαδὸν ΑΒΓΔ $= \frac{(10+4)\times 5}{2} = 35$ cm².

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ, ἄρα μὲ

$$\frac{10\times 5}{2}+\frac{4\times 5}{2}=\left(10\times\frac{5}{2}\right)+\left(4\times\frac{5}{2}\right).$$

Ἀντὶ ὅμως νὰ πολλαπλασιάσωμε χωριστὰ τὸ 10 καὶ τὸ 4 μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ 5/2 καὶ νὰ προσθέσωμε ἔπειτα τὰ δυὸ γινόμενα, μποροῦμε πρῶτα νὰ προσθέσωμε τὸ 10 μὲ τὸ 4 καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἄθροισμά τους μὲ 5/2 (βλέπε καὶ Μάθημα 21, ἄσκηση 7). Ἔτσι ἔχομε:

$$\text{ἐμβ. τραπ. ΑΒΓΔ} = \frac{(10+4)\times 5}{2} = \frac{14\times 5}{2} = 35\,cm^2.$$

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, πολλαπλασιάσαμε τὸ ἄθροισμα 14 cm τῶν δυὸ βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος 5 cm καὶ διαιρέσαμε διὰ τοῦ 2.

Ὥστε, *γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ βάσεων μὲ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 2.*

*Ἀσκήσεις.* *1.* Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου ποὺ οἱ δυὸ βάσεις του ἔχουν μῆκος 15 cm ἡ μιὰ καὶ 22 cm ἡ ἄλλη καὶ ποὺ τὸ ὕψος του εἶναι 10 cm.

*2.* Οἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 40 cm καὶ 24 cm καὶ τὸ ἐμβαδόν του 160 cm². Πόσο εἶναι τὸ ὕψος του;

*3.* Σχεδιάστε ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ποὺ νὰ ἔχῃ μεγάλη βάση ΑΒ = 80 mm, γωνία $\widehat{A} = 60^\circ$, πλευρὰ ΑΔ = 25 mm καὶ μικρὴ βάση ΔΓ = 30 mm. Μετρῆστε τὸ ὕψος του καὶ ὕστερα ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

*4.* Τί ὕψος πρέπει νὰ δώσωμε σ' ἕνα τραπέζιο, ποὺ ἔχει βάσεις 12 cm καὶ 7 cm, γιὰ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 190 cm².

*5.* Σχεδιάστε ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ποὺ ἡ μεγάλη του βάση ΑΒ ἔχει μῆκος 75 mm, ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι ὀρθὴ (90°), ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ 38 mm καὶ ἡ μικρὴ βάση ΔΓ μὲ 42 mm. (Ἕνα τέτοιο τραπέζιο λέγεται ὀρθογώνιο τραπέζιο, γιατὶ ἔχει 2 γωνίες ὀρθές).

1ο. Μετρῆστε τὴ γωνία του $\widehat{\Gamma}$ καὶ ὑπολογίστε τὴ γωνία $\widehat{B}$.
2ο. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

*6.* Σχεδιάστε ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ μὲ μεγάλη βάση ΑΒ = 8 cm, γωνίες $\widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ$ καὶ ὕψος 5 cm.

1ο. Ἐπαληθεῦστε μὲ μέτρηση ὅτι οἱ μὴ παράλληλες ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες. (Ἕνα τέτοιο τραπέζιο λέγεται ἰσοσκελές). Ἂν μπορῆτε, δεῖξτε αὐτὴν τὴν ἰδιότητα καὶ μὲ κάποιο συλλογισμό.
2ο. Μετρῆστε τὴ μικρὴ βάση καὶ ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν.

7. Ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ, ὀρθογώνιο στὶς κορυφὲς Α καὶ Δ, ἔχει βάσεις $AB = 15\,cm$, $\Delta\Gamma = 30\,cm$ καὶ ὕψος $A\Delta = 15\,cm$.

1ο. Ὑπολογίστε τὶς γωνίες τοῦ τραπεζίου.

2ο. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

8. Σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 5 cm χαράξτε δυὸ παράλληλες χορδὲς ποὺ νὰ ἔχουν μῆκος 8 cm ἡ μιὰ καὶ 3 cm ἡ ἄλλη· (θὰ ἔχετε δυὸ διαφορετικὲς περιπτώσεις σχήματος).

1ο. Μετρῆστε τὴν ἀπόστασή τους (στὴν κάθε περίπτωση).

2ο. Συνδέστε τὰ ἄκρα τους (στὴν κάθε περίπτωση) ἔτσι ποὺ νὰ προκύψη ἕνα τραπέζιο καὶ ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

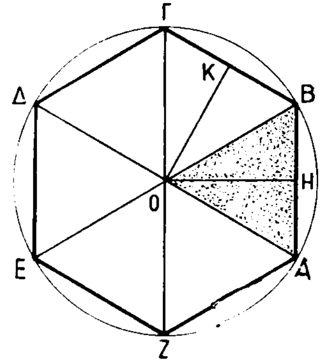
---

## Μάθημα 43.

### Ἐμβαδὸν κανονικῶν πολυγώνων.

1. **Ἂς ἐξετάσωμε ἕνα κανονικὸ πολύγωνο,** δηλαδὴ ἕνα πολύγωνο ποὺ προκύπτει, ἂν ἑνώσωμε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ διαδοχικὰ σημεῖα ποὺ χωρίζουν μιὰν περιφέρεια σὲ ἴσα μέρη (Μάθημα 32 καὶ 33).

Τὸ σχῆμα 43-α παριστάνει ἕνα *κανονικὸ ἑξάγωνο*. Ἂς χαράξωμε τὶς ἀκτίνες ΟΑ, ΟΒ,..., ΟΖ. Τὸ πολύγωνο χωρίζεται ἔτσι σὲ 6 ἰσοσκελῆ τρίγωνα.



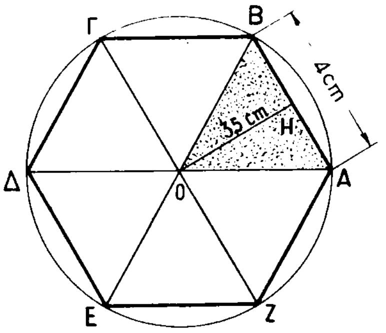

**Σχ. 43-α. Τὸ κανονικὸ ἑξάγωνο μπορεῖ ν' ἀναλυθῇ σὲ 6 τρίγωνα ποὺ ἔχουν ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.**

Ἂς συγκρίνωμε δυὸ ὁποιαδήποτε ἀπ' αὐτὰ τὰ τρίγωνα, π.χ. τὰ ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ. Οἱ βάσεις τους ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσες (Μάθημα 33). Τὰ ὕψη τους ΟΗ καὶ ΟΚ εἶναι ἐπίσης ἴσα (Μάθημα 31, ἄσκηση 8). Ἂς σημειωθῇ ὅτι τὸ μῆκος ΟΗ (δηλ. ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ μιὰ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου) λέγεται *ἀπόθημα* (ἢ *ἀπόστημα*) τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Τὰ 6 τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ,..., ΖΟΑ, μιὰ καὶ ἔχουν ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, θὰ ἔχουν *καὶ ἴσες ἐπιφάνειες*· (θὰ μπορούσαμε μάλιστα νὰ παρατηρήσωμε πὼς εἶναι καὶ ἐφαρμόσιμα δυὸ-δυό, δηλαδὴ ἴσα).

Ὥστε, *οἱ ἀκτίνες ποὺ συνδέουν τὸ κέντρο μιᾶς περιφέρειας μὲ τὶς κορυφὲς ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου σ' αὐτήν, χωρίζουν τὸ πολύγωνο σὲ τρίγωνα μὲ τὸ ἴδιο ἐμβαδόν.*

2. **Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖΑ,** ὑποθέτοντας ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο μὲ ἀκτίνα 4 cm (σχ. 43-β).




**Σχ. 43-β. Ἐμβαδὸν ἑξαγώνου** $= \dfrac{24 \times 3{,}5}{2} = 42\ cm^2$.

Γνωρίζομε ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα, δηλαδή, στὸ παράδειγμά μας, μὲ 4 cm. Ἂς μετρήσωμε τὸ ἀπόθημα ΟΗ. Βρίσκομε

$$ΟΗ = 3{,}5\ cm.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι 6 φορὲς τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀπὸ τὰ 6 τρίγωνα ποὺ εἴπαμε, π.χ. τοῦ ΑΟΒ, ἄρα εἶναι ἴσο μὲ

$$\frac{4 \times 3{,}5}{2} \times 6 = \frac{(4 \times 3{,}5) \times 6}{2}\ cm^2.$$

Τώρα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ γινόμενο $(4 \times 3{,}5)$ μὲ 6, μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε πρῶτα τὸ 4 μὲ τὸ 6 καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενο $(4 \times 6) = 24$ μὲ τὸ 3,5 (βλ. Εἰσαγωγή, § 23). Ἔτσι ἔχομε:

$$\text{ἐμβ. ἑξαγώνου} = \frac{(4 \times 6) \times 3{,}5}{2} = \frac{24 \times 3{,}5}{2} = 42\,cm^2.$$

Παρατηροῦμε πώς, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, πολλαπλασιάσαμε τὴν περίμετρο 24 cm τοῦ ἑξαγώνου μὲ τὸ ἀπόθημα 3,5 cm καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ 2.

Ὥστε, *γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζομε τὴν περίμετρό του μὲ τὸ ἀπόθημα καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 2.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Συνδέστε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὶς διαδοχικὲς κορυφὲς ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου μία παρὰ μία. Ὕστερα δεῖξτε, χωρὶς ὑπολογισμό, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου, ποὺ προκύπτει ἔτσι, εἶναι τὸ μισὸ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ἑξαγώνου.

*2.* Νὰ προεκτείνετε, μία παρὰ μία, τὶς πλευρὲς ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ὡς ἐκεῖ ὅπου κόβονται δυὸ-δυό. Θὰ προκύψῃ ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο. Δεῖξτε, χωρὶς ὑπολογισμό, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου εἶναι μιάμισι φορὰ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑξαγώνου.

3. Σχεδιάστε ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο μὲ πλευρὰ 5 cm, μετρῆστε τὸ ἀπόθημά του καὶ ὕστερα ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

4. Χαράξτε ἕνα κανονικὸ τρίγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο μὲ ἀκτίνα 45 mm, μετρῆστε τὴν πλευρά του καὶ τὸ ἀπόθημά του, ὕστερα ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

5. Ἀφοῦ μετρήσετε τὸ ὕψος τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του μὲ τὸν ἄλλο γνωστό σας τρόπο. Ἐπαληθεῦστε ὅτι οἱ δυὸ τρόποι ὑπολογισμοῦ δίνουν τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν (ἢ περίπου τὸ ἴδιο, γιατὶ καὶ οἱ μετρήσεις δίνουν τὰ μήκη κατὰ προσέγγιση καὶ ὄχι ἀκριβῶς).

6. Χαράξτε τρία ἰσόπλευρα τρίγωνα μὲ πλευρὰ 5, 10 καὶ 12 cm ἀντιστοίχως. Ὕστερα:

1ο μετρῆστε τὸ ὕψος τοῦ καθενός τους καὶ ἐπαληθεῦστε, μὲ μετρήσεις, ὅτι εἶναι περίπου ἴσο μὲ τὴν πλευρὰ πολλαπλασιασμένη ἐπὶ 0,87·

2ο ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καθενός τους καὶ βρῆτε μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ τετράγωνο τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ μετρᾶ τὴν πλευρὰ γιὰ νὰ ἔχωμε ἐξαγόμενο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

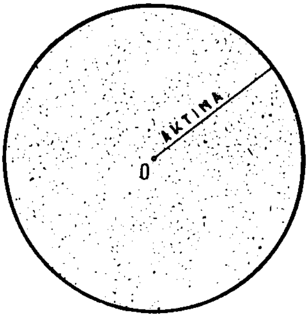
Τέλος, χρησιμοποιώντας τὸν πολλαπλασιαστὴ ποὺ βρήκατε στὸ 2ο, ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ ἑνὸς ἰσόπλευρου τριγώνου, ξέροντας τὸ ἐμβαδόν του 50 cm$^2$· ὕστερα σχεδιάστε τὸ τρίγωνο αὐτό.

7. Ὑπολογίστε πόσα περίπου πλακάκια, σχήματος κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ πλευρᾶς 12 cm, χρειάζονται γιὰ νὰ πλακοστρώσωμε ἕνα πάτωμα διαστάσεων 3,25 m $\times$ 2,50 m.

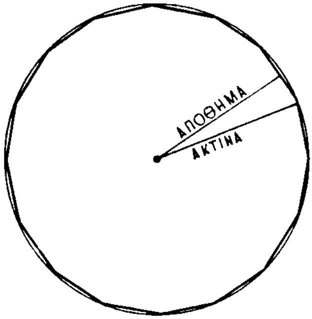
# Μάθημα 44.

## Ἐμβαδὸν κύκλου.

**1. Ἂς ἐξετάσωμε τὴν ἐπιφάνεια ποὺ περιορίζεται ἀπὸ μιὰ περιφέρεια.** Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται, ὅπως ξέρομε *κύκλος* (σχ. 44-α).




**Σχ. 44-α. Κύκλος εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ μιᾶς περιφέρειας.**




**Σχ. 44-β. Πολύγωνο μὲ 16 πλευρὲς ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο.**

*Ἂς ἐγγράψωμε σὲ μιὰ περιφέρεια* ἕνα κανονικὸ πολύγωνο μὲ μεγάλο ἀριθμὸ πλευρῶν. Θὰ παρατηρήσωμε:

1ο ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου *δὲν ξεχωρίζει σχεδὸν ἀπὸ* τὴν περιφέρεια, μὲ ἄλλα λόγια: *μοιάζει νὰ συμπίπτη μὲ αὐτήν*·

2ο ὅτι τὸ ἀπόθημα τοῦ πολυγώνου *καὶ ἡ ἀκτίνα* τῆς περιφέρειας *διαφέρουν πολὺ λίγο στὸ μῆκος.*

Αὐτὲς τὶς δυὸ παρατηρήσεις μποροῦμε νὰ τὶς κάμωμε στὸ σχῆμα 44-β ποὺ παριστάνει ἕνα κανονικὸ πολύγωνο 16 πλευρῶν, ἐγγεγραμμένο σὲ περιφέρεια. Οἱ ἴδιες παρατηρήσεις ἀληθεύουν ἀκόμα πιὸ φανερὰ γιὰ ἕνα κανονικὸ πολύγωνο μὲ 32 ἢ 64 ἢ περισσότερες πλευρὲς ἐγγεγραμμένο στὸν ἴδιο κύκλο.

*Μποροῦμε λοιπὸν ἕνα κύκλο νὰ τὸν θεωρήσωμε κατὰ προσέγγιση σὰν ἕνα κανονικὸ πολύγωνο μὲ πολὺ μεγάλο ἀριθμὸ πλευρῶν.*

*Ὥστε, τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου θὰ πρέπη νὰ ὑπολογίζεται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου.*

**2. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου μὲ ἀκτίνα 5 cm** (σχ. 44-α). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ποὺ θὰ εἶχε περίμετρο τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας, δηλαδὴ στὸ παράδειγμά μας $(10 \times 3,14)$ cm, καὶ ἀπόθημα τὴν ἀκτίνα, 5 cm.

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἴσο μὲ

$$\frac{(10 \times 3,14) \times 5}{2} = \frac{31,4 \times 5}{2} = 78,5\ cm^2.$$

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, πολλαπλασιάσαμε τὸ μῆκος 31,4 cm τῆς περιφέρειας ἐπὶ τὴν ἀκτίνα 5 cm καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ 2.

Ὥστε, *τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας ἐπὶ τὴν ἀκτίνα.*

**3. Παρατήρηση.** Τὸ μῆκος μιᾶς περιφέρειας μὲ ἀκτίνα 5 cm εἶναι ἴσο μὲ $(5 \times 2 \times 3,14)$ cm.

Σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω κανόνα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἴσο μὲ

$$\frac{(5 \times 2 \times 3,14) \times 5}{2}$$

ἤ, ἀφοῦ ἁπλοποιήσωμε διὰ τοῦ 2, ἴσο μὲ

$$5 \times 3,14 \times 5 = 5 \times 5 \times 3,14,$$

ἄρα μὲ

$$5^2 \times 3,14 = 25 \times 3,14 = 78,5\ cm^2.$$

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε αὐτό, πολλαπλασιάσαμε τὸ τετράγωνο $5^2$ τῆς ἀκτίνας ἐπὶ 3,14.

Ὥστε, *γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου πολλαπλασιάζομε τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτίνας του ἐπὶ 3,14.*

**4. Ἀντίστροφος ὑπολογισμός.** *Ὑπολογίστε τὴ διάμετρο μιᾶς μεταλλικῆς ῥάβδου ποὺ ἔχει κυκλικὴ διατομὴ ἐμβαδοῦ 100 $mm^2$.*

Σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω κανόνα, πολλαπλασιάζοντας τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτίνας ἐπὶ 3,14 βρίσκομε 100 $mm^2$. Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτίνας, πρέπει νὰ διαιρέσωμε τὸ 100 διὰ τοῦ 3,14:

$$100 : 3{,}14 \simeq 31{,}8.$$

Ἡ ἀκτίνα θὰ εἶναι ἑπομένως ἴση μὲ τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 31,8. Ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν βρίσκομε

$$\sqrt{31} = 5{,}568 \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{32} = 5{,}657.$$

Παίρνομε λοιπόν:

$$\sqrt{31{,}8} = 5{,}6$$

καὶ τότε ἡ διάμετρος θὰ εἶναι

$$5{,}6 \text{ mm} \times 2 = 11{,}2 \text{ mm}.$$

*Ἀπάντηση: Ἡ διάμετρος τῆς ράβδου εἶναι 11,2 mm.*

*Ἀσκήσεις.* *1.* Κυκλικὸς δίσκος ἔχει διάμετρο 24 cm. Ὑπολογίστε: 1ο τὸ μῆκος τῆς περιφέρειάς του, 2ο τὸ ἐμβαδόν του.

*2.* Χαράξτε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 54 mm καὶ ἐγγράψτε σ' αὐτὸν ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο· ὕστερα, ὑπολογίστε: 1ο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, 2ο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου καὶ 3ο τὴ διαφορὰ τῶν δύο ἐμβαδῶν.

*3.* Μιὰ περιφέρεια ἔχει μῆκος 10 cm. Ὑπολογίστε: 1ο τὴν ἀκτίνα τῆς περιφέρειας, 2ο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ποὺ περιορίζεται ἀπὸ τὴν περιφέρεια αὐτή.

*4.* Μιὰ φρέζα μὲ διάμετρο 30 mm ἀνοίγει ἡμικυκλικὸ αὐλάκι. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ αὐλακιοῦ αὐτοῦ.

*5.* Ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 10 cm κόψτε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 3 cm καὶ ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια ποὺ θὰ μείνῃ.

*6.* Ἀπὸ ἕνα χαρτόνι κόψτε ἕναν κύκλο μὲ διάμετρο 10 cm· ὕστερα, μέσα ἀπὸ τὸ κυκλικὸ αὐτὸ χαρτόνι κόψτε τὸ πιὸ μεγάλο κανονικὸ ἑξάγωνο ποὺ μπορεῖτε. Ὑπολογίστε τὸ ὁλικὸ ἐμβαδὸν τῶν κομματιῶν ποὺ πέφτουν μὲ τὸ κόψιμο τοῦ ἑξαγώνου.

*7.* Δυὸ ὁμόκεντρες περιφέρειες ἔχουν ἀκτῖνες 75 mm καὶ 28 mm ἀντιστοίχως. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας ποὺ περιέχεται ἀνάμεσα στὶς δυὸ αὐτὲς περιφέρειες (καὶ ποὺ λέγεται κυκλικὸς δακτύλιος).

*8.* Ἕνας κύκλος ἔχει ἀκτίνα 50 cm. Τὸ κομμάτι τοῦ κύκλου τὸ ὁποῖο περιέχεται μεταξὺ δύο ἀκτίνων λέγεται κυκλικὸς τομέας.

1ο. Μὲ τί κλάσμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύκλου εἶναι ἴσος ἕνας κυκλικὸς τομέας ποὺ ἔχει ἐπίκεντρη γωνία 90°; Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια αὐτοῦ τοῦ τομέα.

2ο. Ἡ ἴδια ἐρώτηση γιὰ τομεῖς μὲ ἐπίκεντρες γωνίες 45°, 60°, καὶ 120°.

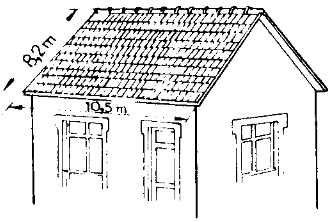
*9.* Κυκλικὸ τμῆμα λέγεται ἕνα κομμάτι τοῦ κύκλου περιοριζόμενο ἀπὸ ἕνα τόξο τῆς περιφέρειας καὶ ἀπὸ τὴ χορδὴ αὐτοῦ τοῦ τόξου. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος, ξέροντας ὅτι ὁ κύκλος ἔχει ἀκτίνα 25 cm καὶ ὅτι οἱ δυὸ ἀκτίνες ποὺ τελειώνουν στὰ ἄκρα τοῦ τόξου τοῦ τμήματος σχηματίζουν γωνία 90°.

*10.* Χαράξτε τὴν περιφέρεια ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὰ 4 σημεῖα ποὺ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου μὲ μῆκος πλευρᾶς 12 cm. Ἐπίσης χαράξτε τὸ τετράγωνο ποὺ ἔχει κορυφὲς τὰ 4 αὐτὰ σημεῖα. Ὕστερα, ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῆς περιφέρειας καὶ τοῦ (μικροῦ) τετραγώνου ποὺ χαράξατε.

# Μάθημα 45.

## Προβλήματα ἐπάνω σὲ ἐπιφάνειες.

**Πρόβλημα 1.** *Μιὰ στέγη ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ κεκλιμένα ὀρθογώνια μέρη διαστάσεων 10,5 m × 8,2 m* (σχ. 45-α). *Γιὰ νὰ σκεπάσωμε 1 m² ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴ στέγη αὐτή, χρειάζονται 22 κεραμίδια. Πρέπει ὅμως νὰ προβλέψωμε καὶ τὴ φθορὰ ἀπὸ σπασίματα· γι' αὐτό, παραγγέλνομε περισσότερα κεραμίδια κατὰ τὸ 1/10 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κεραμιδιῶν ποὺ θεωρητικῶς χρειάζονται γιὰ τὸ σκέπασμα. Ὑπολογίστε πόσα κεραμίδια πρέπει νὰ παραγγελθοῦν.*




**Σχ. 45-α. Ὑπολογίστε τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀπαιτούμενων κεραμιδιῶν.**

Ἐπιφάνεια τῆς στέγης:

$$10{,}5 \times 8{,}2 \times 2 = 172{,}2\ \mathrm{m}^2.$$

Ἀριθμὸς κεραμιδιῶν ποὺ θεωρητικῶς χρειάζονται:

$$22 \times 172{,}2 = 3\,788{,}4 \text{ ἢ } 3\,789 \text{ σὲ στρογγυλὸ ἀριθμό.}$$

Ἀριθμὸς τῶν ἐπὶ πλέον κεραμιδιῶν ποὺ πρέπει νὰ προβλέψωμε:

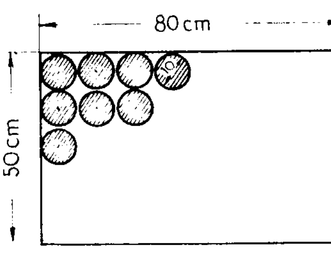
$$3\,789 : 10 = 378{,}9 \text{ ἢ } 379 \text{ σὲ στρογγυλὸ ἀριθμό.}$$

Ἀριθμὸς τῶν κεραμιδιῶν ποὺ πρέπει νὰ παραγγελθοῦν:

$$3\,789 + 379 = 4\,168 \text{ κεραμίδια.}$$

*Ἀπάντηση: 4 168 κεραμίδια.*

**Πρόβλημα 2.** *Ἀπὸ μιὰ ὀρθογώνια λαμαρίνα μὲ διαστάσεις 80 cm × 50 cm κόβομε κυκλικοὺς δίσκους διαμέτρου 10 cm (σχ. 45-β). Ξέροντας ὅτι 1 m² ἀπὸ τὴ λαμαρίνα αὐτὴ ζυγίζει 15,6 kg (κιλά), ὑπολογίστε τὸ βάρος ποὺ ἔχουν τὰ ἄχρηστα ἀποκόμματα.*




**Σχ. 45-β. Ὑπολογίστε τὸ βάρος ποὺ ἔχουν τὰ ἀποκόμματα.**

Ἐπιφάνεια τῆς λαμαρίνας:

$$80 \times 50 = 4\,000 \text{ cm}^2.$$

Ἐπιφάνεια ἑνὸς δίσκου:

$$5^2 \times 3{,}14 = 25 \times 3{,}14 = 78{,}50 \text{ cm}^2\cdot$$

Ἀριθμὸς δίσκων στὸ μῆκος:

$$80 : 10 = 8.$$

Ἀριθμὸς δίσκων στὸ πλάτος:

$$50 : 10 = 5.$$

Συνολικὸς ἀριθμὸς τῶν κομμένων δίσκων:

$$8 \times 5 = 40.$$

Συνολικὴ ἐπιφάνεια τῶν δίσκων:

$$78{,}50 \times 40 = 3\,140 \text{ cm}^2.$$

Ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῶν ἀποκομμάτων:

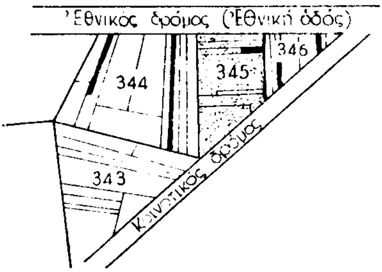
$$4\,000 - 3\,140 = 860 \text{ cm}^2 = 0{,}086 \text{ m}^2.$$

Βάρος τῶν ἀποκομμάτων:

$$15{,}6 \times 0{,}086 = 1{,}341\ 6 \text{ kg} \simeq 1{,}342 \text{ kg}.$$

*Ἀπάντηση: 1,34 kg.*

**Πρόβλημα 3.** *Ἐπάνω σ' ἕνα χάρτη κτηματολογίου, μὲ κλίμακα 1/2 500* (τὸ σχ. 45-γ τὸν ἀναπαριστάνει μικρότερο), *μετροῦμε τὶς διαστάσεις τοῦ γηπέδου ποὺ σημειώνεται μὲ τὸν ἀριθμὸ 345. Δυὸ πλευρὲς τοῦ γηπέδου εἶναι κάθετες πρὸς τὸν ἐθνικὸ δρόμο καὶ ἔχουν, στὸ χάρτη, ἀντίστοιχα μήκη 50 mm καὶ 30 mm· μιὰ ἄλλη πλευρά του εἶναι ἐπάνω στὸ δρόμο αὐτὸν καὶ ἔχει μῆκος στὸ χάρτη, 28 mm. Ὑπολογίστε τὴν πραγματικὴ ἐπιφάνεια τοῦ γηπέδου.*




**Σχ. 45-γ. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ γηπέδου 345.**

Τὸ γήπεδο ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου τραπεζίου. Γιὰ νὰ βροῦμε τὶς πραγματικές του διαστάσεις, πολλαπλασιάζομε μὲ 2 500 τὶς διαστάσεις πάνω στὸ χάρτη (Μάθημα 22).

Μεγάλη βάση τοῦ τραπεζίου:

$$50 \text{ mm} \times 2\,500 = 125\,000 \text{ mm} = 125 \text{ m}.$$

Μικρὴ βάση τοῦ τραπεζίου:

$$30 \text{ mm} \times 2\,500 = 75\,000 \text{ mm} = 75 \text{ m}.$$

Ὕψος τοῦ τραπεζίου:

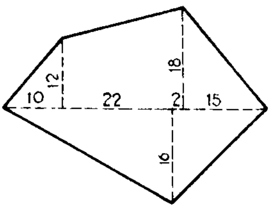
$$28 \text{ mm} \times 2\,500 = 70\,000 \text{ mm} = 70 \text{ m}.$$

Ἐπιφάνεια τοῦ γηπέδου:

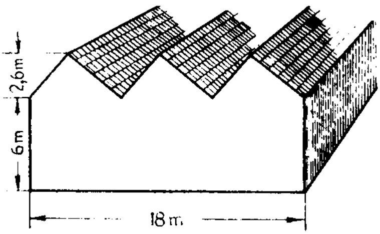
$$\frac{(125 + 75) \times 70}{2} = 7\,000 \text{ m}^2.$$

*Ἀπάντηση*: *7000* $m^2$.

*Ἀσκήσεις.* *1.* Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ γηπέδου ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 45-δ. (Οἱ σημειωμένοι ἀριθμοὶ ἐκφράζουν μήκη σὲ m).




**Σχ. 45-δ. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ γηπέδου.**




**Σχ. 45-ε. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια αὐτῆς τῆς ὀδοντωτῆς προσόψεως.**

*2.* Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια τῆς ὀδοντωτῆς προσόψεως ἐργοστασίου ἡ ὁποία παριστάνεται στὸ σχῆμα 45-ε. (Οἱ σημειωμένοι ἀριθμοὶ ἐκφράζουν μήκη σὲ m).

*3.* Ἕνας μολυβοσωλήνας ἔχει ἐσωτερικὴ διάμετρο 10 mm καὶ πάχος 2 mm. Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια τῆς μεταλλικῆς διατομῆς του (ποὺ ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ δακτυλίου).

*4.* Ἀπὸ μιὰ ὀρθογώνια λαμαρίνα μὲ διαστάσεις 100 cm × 40 cm κόβομε κυκλικοὺς δίσκους διαμέτρου 20 cm.

1ο. Ὑπολογίστε τὸν ἀριθμὸ τῶν δίσκων ποὺ θὰ κοποῦν καθὼς καὶ τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῶν ἀποκομμάτων.

2ο. Ἂν ἡ λαμαρίνα εἶχε διαστάσεις ὄχι 100 cm × 40 cm ἀλλὰ 100 cm × 39 cm, τί θὰ κάματε γιὰ νὰ κόψετε ἀπ' αὐτὴν ὅσο τὸ δυνατὸ περισσότερους δίσκους; Ὑπολογίστε αὐτὸν τὸν ἀριθμὸ τῶν δίσκων καθὼς καὶ τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῶν ἀποκομμάτων.

5. Πάρτε ἕνα φύλλο τετραγωνισμένο χαρτὶ μὲ πλευρὰ τετραγώνων 10 mm ἢ 5 mm (τέτοιες τετραγωνικὲς διαιρέσεις ἔχουν τὰ φύλλα μερικῶν σχολικῶν τετραδίων) ἢ 1 mm (τέτοιες διαιρέσεις ἔχει τὸ χιλιοστομετρικὸ χαρτί, χαρτὶ μιλλιμετρέ, τοῦ ἐμπορίου). Ἐπάνω σ' αὐτὸ τὸ φύλλο σχεδιάστε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 50 mm καὶ ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνειά του, σὲ mm², μὲ τοὺς ἀκόλουθους δυὸ τρόπους:

1ο μὲ ὑπολογισμό·

2ο μὲ ἕνα μέτρημα: δηλαδὴ μετρῆστε πόσα ὁλάκερα τετραγωνάκια βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου καὶ προσθέστε στὸν ἀριθμὸ ποὺ θὰ βρῆτε τὸν μισὸ ἀριθμὸ ἀπὸ τὰ τετραγωνάκια ποὺ συναντᾶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου (καὶ ποὺ ἑπομένως ἕνα κομμάτι τους μόνο πέφτει στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου). Τὸ ἄθροισμα ποὺ θὰ προκύψη θὰ τὸ πολλαπλασιάσετε μὲ τὸ ἐμβαδὸν ποὺ ἔχει, σὲ mm², κάθε τετραγωνάκι· τὸ γινόμενο εἶναι ἡ ζητούμενη ἐπιφάνεια.

Νὰ συγκρίνετε τὰ δυὸ ἀποτελέσματα ποὺ θὰ βρῆτε. (Φυσικά, ὅσο πιὸ μικρὰ εἶναι τὰ τετραγωνάκια σας, τόσο λιγότερο θὰ διαφέρουν τὰ δυὸ ἀποτελέσματα).

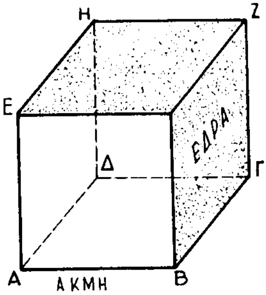
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

# ΟΓΚΟΙ, ΒΑΡΗ ΚΑΙ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΕΣ

## Μάθημα 46.

### Μέτρηση ὄγκων.

**1. Κύβος.** Τὸ σχῆμα 46-α παριστάνει ἕναν *κύβο*: ὁ κύβος εἶναι ἕνα στερεὸ ποὺ περιορίζεται ἀπὸ ἕξι τετράγωνες *ἕδρες* (ὄψεις). Οἱ πλευρὲς τῶν τετράγωνων αὐτῶν ἑδρῶν λέγονται *ἀκμὲς* (κόψεις) τοῦ κύβου.



**Σχ. 46-α. Κύβος.**

Ὁ κύβος ἔχει 6 *ἴσες* ἕδρες καὶ 12 *ἴσες* ἀκμές.

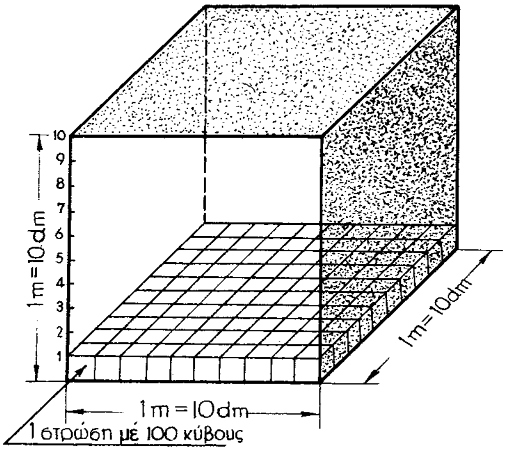
**2. Γιὰ νὰ μετρήσωμε ἕναν ὄγκο,** ζητοῦμε, ὅταν αὐτὸ μπορῆ νὰ γίνῃ, πόσες φορὲς περιέχεται σ' αὐτὸν ἕνας ἄλλος ὄγκος ποὺ παίρνομε γιὰ μονάδα.

*Μιὰ βασικὴ μονάδα ὄγκου εἶναι ὁ κύβος ποὺ ἔχει ἀκμὲς ἴσες μὲ τὴ βασικὴ μονάδα μήκους, δηλαδὴ μὲ τὸ μέτρο, καὶ ποὺ γι' αὐτὸ λέγεται κυβικὸ μέτρο ($m^3$).*

Ἡ σύγκριση ὅμως ἑνὸς ὄγκου πρὸς μιὰν τέτοια μονάδα ὄγκου δὲν μπορεῖ πάντα νὰ γίνῃ μὲ τὸν τρόπο ποὺ λέμε παραπάνω. Ἔτσι π.χ. δὲν εἶναι δυνατό, χωρὶς ν' ἀφήσωμε κενά, νὰ γεμίσωμε ἕνα στρογγυλὸ κουτὶ μὲ κύβους, ὥστε, κάμοντας ἔπειτα τὸ μέτρημά τους, νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κουτιοῦ. Γι' αὐτό, ὑπολογίζομε τὸν ὄγκο τῶν στερεῶν ἐφαρμόζοντας ὁρισμένους κανόνες ποὺ θὰ ἐξηγήσωμε στὰ παρακάτω Μαθήματα.

**3. Δευτερεύουσες μονάδες ὄγκου.** Δευτερεύουσες μονάδες ὄγκου εἶναι οἱ κύβοι ποὺ ἔχουν ἀκμὲς ἴσες μὲ μιὰ δευτερεύουσα μονάδα μήκους. Ἀπὸ αὐτὲς τὶς μονάδες θ' ἀναφέρωμε παρακάτω μόνο δυὸ ποὺ χρησιμοποιοῦνται πιὸ συχνὰ στὴ χώρα μας:

1ο. *Τὸ κυβικὸ δεκατόμετρο* (*ἢ κυβικὴ παλάμη*), μὲ σύμβολο τὸ $dm^3$· εἶναι ἕνας κύβος μὲ ἀκμὲς ἑνὸς δέκατου τοῦ μέτρου (1 dm). Εἶναι 1 000 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ κυβικὸ μέτρο· καὶ ἀλήθεια, ὅπως



Σχ. 46-β. $1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3$.

δείχνει τὸ σχ. 46-β, μέσα σ' ἕναν κύβο μὲ ἀκμὲς 1 m μποροῦμε νὰ τοποθετήσωμε 10 στρώσεις ἀπὸ $10 \times 10 = 100$ κύβους οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀκμὲς 1 dm ὁ καθένας. Ἄρα ἕνα κυβικὸ μέτρο περιέχει $100 \times 10 = 1\ 000\ dm^3$.

2ο. *Τὸ κυβικὸ ἑκατοστόμετρο* ἤ, συντομώτερα, *τὸ κυβικὸ ἑκατοστὸ* ($cm^3$)· εἶναι ἕνας κύβος μὲ ἀκμὲς μήκους 1 cm. Περιέχεται 1 000 φορὲς στὸ κυβικὸ δεκατόμετρο, ὅπως βλέπομε ξανακάνοντας τὴ σκέψη ποὺ μόλις κάμαμε.

Μποροῦμε τώρα νὰ παρατηρήσωμε πὼς *κάθε μονάδα ὄγκου περιέχει 1 000 φορὲς τὴν ἀμέσως μικρότερη μονάδα ὄγκου.*

Χρησιμοποιώντας αὐτὲς τὶς μονάδες μποροῦμε νὰ ἐκφράσωμε τοὺς ὄγκους μὲ ἀκέραιους ἢ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

*Παραδείγματα:* $453\ m^3$, $2{,}450\ dm^3$, $25\ cm^3$.

**4. Ἀλλαγὴ μονάδας.** *Παράδειγμα 1. Ἐκφράστε σὲ κυβικὰ δεκατόμετρα ἕναν ὄγκο $4{,}05\ m^3$.*

Ἀφοῦ τὸ $1\ dm^3$ εἶναι 1 000 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ $1\ m^3$, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν $dm^3$ θὰ εἶναι 1 000 φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ δοσμένο ἀριθμὸ τῶν $m^3$. Πρέπει λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμε τοῦτον τὸν ἀριθμὸ μὲ 1 000 γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ ζητοῦμε, ἄρα *νὰ μεταθέσωμε, στὸ δοσμένο ἀριθμό, τὸ κόμμα τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά* :

$$4{,}05\ m^3 = (4{,}05 \times 1\,000)\ dm^3 = 4\,050\ dm^3.$$

*Παράδειγμα 2. Ἐκφράστε σὲ κυβικὰ δεκατόμετρα, καὶ ὕστερα σὲ κυβικὰ μέτρα, ἕναν ὄγκο 2 150 $cm^3$.*

Σὲ κάθε ἀλλαγὴ μονάδας, ἀπὸ τὴ μικρότερη στὴν ἀμέσως μεγαλύτερη, πρέπει νὰ κάμωμε τὸ δοσμένο ἀριθμὸ 1 000 φορὲς μικρότερο, ἄρα νὰ μεταθέσωμε κάθε φορὰ τὸ κόμμα τρεῖς θέσεις πρὸς τ' ἀριστερά :

$$2\,150\ cm^3 = 2{,}15\ dm^3,$$
$$2{,}15\ dm^3 = 0{,}002\,15\ m^3.$$

*Ἀσκήσεις 1.* Ἐκφράστε (μετατρέψτε) σὲ $cm^3$ τὰ

4 $dm^3$, 50 $dm^3$, 0,48 $dm^3$, 4,65 $dm^3$.

*2.* Μετατρέψτε σὲ $dm^3$, καὶ ὕστερα σὲ $cm^3$, τὰ

7 $m^3$, 0,35 $m^3$, 4,75 $m^3$, 38,2 $m^3$.

*3.* Μετατρέψτε σὲ $dm^3$, καὶ ὕστερα σὲ $m^3$, τὰ

3 000 $cm^3$, 20 000 $cm^3$, 8 250 $cm^3$, 76 550 $cm^3$.

*4.* Μετατρέψτε σὲ $m^3$ τὰ

4 000 $dm^3$, 55 700 $cm^3$, 25 043 $cm^3$, 437 $dm^3$.

*5.* Μεταβάλλοντας μόνο τὸ ὄνομα τῆς μονάδας, πῆτε ποιός ὄγκος εἶναι 1 000 φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὄγκο 15 $cm^3$, ἀπὸ τὸν 40,5 $cm^3$, ἀπὸ τὸν 0,3 $dm^3$. Ἄραγε μπορεῖτε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ κάμετε αὐτοὺς τοὺς συγκεκριμένους ἀριθμοὺς 100 ἢ 10 φορὲς μεγαλυτέρους ;

*6.* Ἀπὸ μιὰ κάνουλα ξεφεύγει κάθε δύο δευτερόλεπτα μία σταγόνα νερὸ ποὺ ἔχει ὄγκο 0,04 $cm^3$. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος σὲ $dm^3$ τοῦ νεροῦ ποὺ θὰ χαθῇ σὲ 24 ὧρες ;

*7.* Ξέρομε ὅτι ὁ πάγος λειώνοντας χάνει τὸ 1/14 περίπου τοῦ ὄγκου του. Ὑπολογίστε :

1ο. Κατὰ ποιό κλάσμα τοῦ ὄγκου του αὐξάνεται τὸ νερό, ὅταν γίνεται πάγος ;

2ο. Πόσον ὄγκο νερὸ θὰ δώσῃ λειώνοντας πάγος 2,5 $m^3$ ;

*8.* Λογαριάστε πόσα τοῦβλα, μὲ ὄγκο 1 $dm^3$ τὸ καθένα, θὰ χρειαστῆτε γιὰ νὰ χτίσετε ἕναν τοῖχο 12,5 $m^3$, ὅταν ὁ ὄγκος τοῦ ἀσβεστοκονιάματος (τῆς λάσπης) ποὺ θὰ χρησιμοποιηθῆ στὸ χτίσιμο αὐτὸ εἶναι τὸ 1/4 τοῦ ὄγκου τοῦ τοίχου.

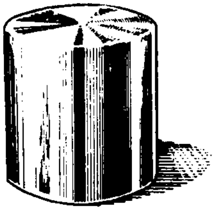
*9.* Ἀνακατώνοντας δυὸ μέρη ὄγκου ἀσβέστη καὶ ἕνα μέρος ὄγκου ἄμμο κάμετε δυόμισι μέρη ὄγκου ἀσβεστοκονίαμα. Ἀνακατώνοντας ὕστερα 1 $m^3$ ἀπὸ τὸ κονίαμα αὐτὸ καὶ 1,5 $m^3$ χαλίκι φτιάχνετε 2 $m^3$ σκυροκονίαμα (μὲ ἀσβέστη).

Ὅπως βλέπετε, ὕστερα ἀπὸ κάθε ἀνακάτωμα χάνετε ὄγκο. Ὑπολογίστε πόσο ὑλικὸ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος θὰ χρειαστῆτε γιὰ νὰ φτιάξετε 15 $m^3$ σκυροκονίαμα σὰν τὸ παραπάνω.

# Μάθημα 47.

## Μέτρηση βαρῶν.

**1. Βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι ἡ δύναμη** μὲ τὴν ὁποία ἡ Γῆ τὸ ἕλκει πρὸς τὸ κέντρο της. Γιὰ νὰ τὸ μετρήσωμε, τὸ συγκρίνομε μὲ τὸ βάρος ποὺ ἔχει ἕνα ἄλλο σῶμα καὶ ποὺ ἔτσι παίρνομε γιὰ μονάδα βάρους. Αὐτὴ ἡ σύγκριση γίνεται συνήθως μὲ μιὰ *ζυγαριά*.



Σχ. 47-α. Τὸ ἀρχέτυπο τῆς μονάδας βάρους.

Βασικὴ μονάδα βάρους εἶναι τὸ *χιλιόγραμμο (kg)*.

*Χιλιόγραμμο ἢ κιλὸ εἶναι τὸ βάρος τοῦ διεθνικοῦ ἀρχετύπου, ποὺ εἶναι καμωμένο (ὅπως καὶ τὸ ἀρχέτυπο μέτρο) ἀπὸ ἕνα κράμα πλατίνας καὶ ποὺ βρίσκεται κι αὐτὸ στὸ Διεθνὲς Γραφεῖο Βαρῶν καὶ Μέτρων στὴν πόλη Sèvres τῆς Γαλλίας* (σχ. 47-α).

Πρακτικῶς τὸ κιλὸ εἶναι ἴσο μὲ τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ δεκαμέτρου ($1\ dm^3$) καθαροῦ νεροῦ σὲ θερμοκρασία 4° Κελσίου. (Ἡ θερμοκρασία τοῦ πάγου ποὺ λειώνει εἶναι 0° Κελσίου καὶ τοῦ νεροῦ ποὺ βράζει εἶναι 100° Κελσίου).

**2. Δευτερεύουσες μονάδες.** Οἱ δευτερεύουσες μονάδες βάρους στὸ μετρικὸ σύστημα εἶναι δεκαδικὰ ὑποπολλαπλάσια ἢ πολλαπλάσια τοῦ κιλοῦ καὶ ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο· μὲ ἄλλα λόγια, *ἡ καθεμιά τους περιέχει 10 φορὲς τὴν ἀμέσως μικρότερή της*. Ἀπὸ αὐτὲς χρησιμοποιοῦνται στὴ χώρα μας, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ κιλό, κυρίως οἱ ἀκόλουθες δύο:

*Τὸ γραμμάριο (gr)* ποὺ εἶναι ἕνα χιλιοστὸ τοῦ κιλοῦ· ἄρα

$$1\ kg = 1\,000\ gr.$$

*Ὁ τόννος* ποὺ εἶναι ἴσος μὲ 1 000 κιλά:

$$1\ \text{τόννος} = 1\,000\ kg.$$

Ἐπειδὴ $1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$ καὶ ἐπειδὴ $1\ dm^3$ καθαρὸ νερὸ θερμοκρασίας 4° ζυγίζει ἕνα κιλό, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι πρακτικῶς ἕνας τόννος εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου καθαροῦ νεροῦ σὲ θερμοκρασία 4°.

Χρησιμοποιώντας τὶς παραπάνω μονάδες βάρους ἐκφράζομε τὰ βάρη τῶν σωμάτων μὲ ἀκέραιους ἢ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

*Παραδείγματα:* 2 560 gr = 2,560 kg = 0,002 56 τόννοι·
0,035 45 τόννοι = 35,45 kg = 35 450 gr.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὶς παραπάνω μονάδες βάρους ἐχρησιμοποιοῦντο ἄλλοτε στὴ χώρα μας καὶ οἱ παρακάτω μονάδες, ποὺ δὲν ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο:

1ο. Ἡ *ὀκά,* ποὺ ὑποδιαιρεῖται σὲ 400 *δράμια.*

Μιὰ ὀκὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1 280 gr = 1,280 kg, ἑπομένως ἕνα δράμι ἰσοδυναμεῖ μὲ 1 280 : 400 = 3,2 gr.

2ο. Τὸ *καντάρι* (ὁ στατήρας), ποὺ κάνει 44 ὀκάδες καὶ πού, ἑπομένως, ἰσοδυναμεῖ μὲ 56,32 kg.

Χρησιμοποιώντας τὶς μονάδες αὐτὲς ἐκφράζομε τὰ βάρη μὲ συμμιγεῖς ἀριθμοὺς (βλ. Μάθημα 23).

**3. Ἀλλαγὴ μονάδας βάρους.** Γιὰ νὰ ἐκφράσωμε ἕνα βάρος, δοσμένο σὲ μιὰ μονάδα, μὲ μιὰν ἄλλη μονάδα, ἐφαρμόζομε, ὅταν οἱ μονάδες αὐτὲς ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο, τοὺς ἴδιους κανόνες ὅπως π.χ. καὶ στὴν ἀλλαγὴ τῆς μονάδας μήκους.

*Παραδείγματα:* 45 kg = 45 000 gr καὶ 2 350 kg = 2,35 τόννοι.

Ὅταν ὅμως οἱ μονάδες, ποὺ χρησιμοποιοῦμε κατὰ τὴν ἀλλαγή, δὲν ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο, τότε ἐφαρμόζομε ἁπλὲς σκέψεις, ὅμοιες μὲ κεῖνες ποὺ κάμαμε στὸ Μάθημα 23 καὶ 24.

*Παράδειγμα:* Μετατρέψτε σὲ ὀκάδες καὶ δράμια 6 καὶ $\frac{1}{3}$ καντάρια.

6 καντάρια κάμουν $6 \times 44$ ὀκάδες = 264 ὀκάδες,

$\frac{1}{3}$ κανταριοῦ κάμει $\frac{44}{3}$ ὀκάδες = 14 ὀκάδες + $\frac{2}{3}$ ὀκᾶς,

$\frac{2}{3}$ ὀκᾶς κάμουν $\frac{2 \times 400}{3}$ δράμια $= \frac{800}{3}$ δράμια $\simeq 267$ δράμια.

Ἄρα 6 καὶ $\frac{1}{3}$ καντάρια κάμουν

$(264 + 14)$ ὀκάδες καὶ 267 δράμια $= 278$ ὀκάδες 267 δράμια.

*Ἀσκήσεις.* *1.* Μετατρέψτε σὲ γραμμάρια: 235 kg, 6,5 τόννους, 2,15 kg.

*2.* Μετατρέψτε σὲ κιλά: 25,6 τόννους, 4,8 τόννους, 325 gr, 5 gr.

*3.* Μιὰ σιδηρογωνιὰ τῶν 80 mm × 80 mm × 12 mm ζυγίζει 13,8 kg ἀνὰ τρέχον μέτρο. Σὲ μιὰ κατασκευὴ χρησιμοποιήθηκαν 20 τέτοιες σιδηρογωνιὲς μὲ μῆκος 5,50 m ἡ καθεμιά, 15 μὲ μῆκος 3,75 m ἡ καθεμιὰ καὶ 9 μὲ μῆκος 7,25 m ἡ καθεμιά. Ὑπολογίστε τὸ ὁλικό τους βάρος.

*4.* Ἕνα βαγόνι τῶν 10 τόννων (ποὺ μποροῦμε δηλαδὴ νὰ φορτώσωμε μὲ 10 τόννους ὑλικὸ) φορτώθηκε μὲ σιδηρογωνιὲς οἱ ὁποῖες ζυγίζουν 12,8 kg ἀνὰ τρέχον μέτρο. Πόσα μέτρα τέτοιες σιδηρογωνιὲς μποροῦμε νὰ φορτώσωμε στὸ βαγόνι; Ποιό θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἔτσι φορτωμένου βαγονιοῦ, ἂν τὸ ἀπόβαρό του (δηλ. τὸ βάρος του ὅταν εἶναι ἄδειο, ἡ τάρα του ὅπως ἐπίσης λέμε) εἶναι 5 050 kg;

*5.* Μὲ τὰ δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ὑπολογίστε σὲ ὀκάδες τὸ βάρος τοῦ βαγονιοῦ πρῶτα ἄδειου καὶ ὕστερα γεμάτου.

*6.* Μιὰ μπομπίνα ζυγίζει 2,450 kg. Περιτυλίγομε σ' αὐτὴν σύρμα ποὺ ζυγίζει 275 gr ἀνὰ τρέχον μέτρο. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ τυλίξαμε, ξέροντας ὅτι ἡ μπομπίνα μὲ τὸ σύρμα μαζὶ ζυγίζει 17,850 kg.

*7.* Γιὰ νὰ καῇ 1 kg καθαρὸ κάρβουνο (ἄνθρακας) χρειάζονται 4,5 $m^3$ ἀέρας. Θέλομε νὰ κάψωμε, σὲ 24 ὧρες, 500 kg κὸκ ποὺ τὰ 4/5 τοῦ βάρους ἀποτελοῦνται ἀπὸ κάρβουνο. Πόσος ἀέρας ἀνὰ λεπτὸ πρέπει νὰ κάμωμε νὰ περάσῃ ἐπάνω ἀπὸ αὐτὸ τὸ ἀναμμένο κόκ;

*8.* Ὑπολογίστε τὸ φορτίο ποὺ μπορεῖ νὰ βαστάξῃ ἕνα ἀτσαλένιο συρματόσκοινο, ξέροντας ὅτι τὸ συρματόσκοινο αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 στριμμένες δέσμες, ὅτι κάθε δέσμη ἀπαρτίζεται ἀπὸ 6 ἀτσαλένια σύρματα μὲ κυκλικὴ διατομὴ διαμέτρου 2,5 mm καὶ ὅτι κάθε τετραγωνικὸ χιλιοστὸ διατομῆς μπορεῖ νὰ βαστάξῃ ἕνα φορτίο 12 kg.

*9.* Μὲ τὰ δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ὑπολογίστε σὲ ὀκάδες τὸ φορτίο ποὺ μπορεῖ νὰ βαστάξῃ τὸ συρματόσκοινο.

*10.* Γιὰ μιὰν οἰκοδομὴ χρησιμοποιήθηκαν 2 816 kg ἄσβηστος ἀσβέστης. Ἀπ' αὐτὸν τὰ 3/5 πῆγαν στὴν τοιχοδομὴ καὶ τὰ 2/5 στοὺς σοβάδες. Ὑπολογίστε, πρῶτα σὲ ὀκάδες καὶ ὕστερα σὲ καντάρια, πόσος ἀσβέστης χρησιμοποιήθηκε στὴν τοιχοδομὴ καὶ πόσος στοὺς σοβάδες.

---

# Μάθημα 48.

## Μέτρηση χωρητικοτήτων.

1. **Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὴ χωρητικότητα ἑνὸς δοχείου,** ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ ποῦμε τί ποσότητα ὑγροῦ ἢ ἀερίου χωρεῖ, συγκρίνομε τὴ χωρητικότητα αὐτὴν μὲ τὴ χωρητικότητα ἑνὸς ἄλλου δοχείου τὴν ὁποία διαλέγομε ὡς μονάδα.

Βασικὴ μονάδα χωρητικότητας στὸ μετρικὸ σύστημα εἶναι τὸ *λίτρο.*

*Λίτρο εἶναι ὁ ὄγκος ποὺ πιάνει ἕνα κιλὸ καθαρὸ νερὸ σὲ θερμοκρασία 4° καὶ ὑπὸ κανονικὴ ἀτμοσφαιρικὴ πίεση.*

Πρακτικῶς *τὸ λίτρο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ὄγκο ἑνὸς κυβικοῦ δεκατόμετρου (1 $dm^3$).* Ἕνα λίτρο καθαρὸ νερὸ ζυγίζει λοιπὸν περίπου 1 kg.

Ἀντὶ «τὸ λίτρο» μερικοὶ λέγουν «ἡ λίτρα», εἶναι ὅμως καλὸ νὰ μὴν τοὺς μιμούμεθα, γιατὶ ἡ λέξη «λίτρα» ἔχει ἀπὸ τὴν ἀρχαία ἐποχὴ καὶ ἄλλες σημασίες· ἰδιαίτερα ἐσήμαινε καὶ ἀκόμα σημαίνει μιὰ μονάδα βάρους, ποὺ τὸ μέγεθός της διαφέρει ἀπὸ τόπο σὲ τόπο καὶ ἀπὸ ἐποχὴ σὲ ἐποχή.

2. **Οἱ δευτερεύουσες μονάδες χωρητικότητας** εἶναι δεκαδικὰ πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια τοῦ λίτρου καὶ ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο: ἡ καθεμιά τους περιέχει 10 φορὲς τὴν ἀμέσως μικρότερή της. Δὲν θὰ τὶς ἀναφέρωμε ὅμως, γιατὶ πρακτικῶς ἰσοδυναμοῦν μὲ ἀντίστοιχες μονάδες ὄγκου, ἀνάλογα μὲ τὸ λίτρο, πού, καθὼς εἴπαμε, δὲν διαφέρει πρακτικῶς ἀπὸ τὴ μονάδα ὄγκου 1 $dm^3$.

3. **Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὴν ποσότητα ἀπὸ ἕνα ὑγρὸ καύσιμο,** ὅπως π.χ. ἡ βενζίνα, χρησιμοποιοῦμε συνήθως στὴν Ἑλλάδα ὄχι τὸ λίτρο ἀλλὰ μιὰν ἀπὸ τὶς παρακάτω δυὸ μονάδες χωρητικότητας:

Τὸ ἀγγλικὸ *γαλόνι*, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 4,546 λίτρα.

Τὸ ἀμερικάνικο *γαλόνι*, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 3,785 λίτρα.

Ἡ μετατροπὴ γαλονιῶν σὲ λίτρα καὶ ἀντιστρόφως βασίζεται στὴν παραπάνω ἰσοδυναμία καὶ γίνεται μὲ ἁπλοῦς ὑπολογισμούς, ὅμοιους μὲ κείνους ποὺ κάμαμε, ὅταν θέλαμε νὰ μετατρέψωμε ὀκάδες σὲ κιλὰ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐξάλλου ἐκτελώντας τὶς διαιρέσεις 4,546 : 3,785 καὶ 3,785 : 4,546 βρίσκομε ὅτι ἕνα ἀγγλικὸ γαλόνι ἰσοδυναμεῖ μὲ 1,20 ἀμερικάνικο γαλόνι καὶ ἕνα ἀμερικάνικο γαλόνι, μὲ 0,83 ἀγγλικὸ γαλόνι.

*Παραδείγματα. 1ο. Μετατρέψτε σὲ λίτρα 5 ἀγγλικὰ γαλόνια.*

Ἀφοῦ 1 γαλόνι ἰσοδυναμεῖ μὲ 4,546 λίτρα, τὰ 5 γαλόνια ἰσοδυναμοῦν μὲ $5 \times 4{,}546 = 22{,}73$ λίτρα.

*2ο. Μετατρέψτε σὲ ἀμερικάνικα γαλόνια 8 λίτρα.*

Ἀφοῦ 3,785 λίτρα κάμουν 1 ἀμερικάνικο γαλόνι, γιὰ νὰ βροῦμε πόσα γαλόνια κάμουν τὰ 8 λίτρα, πρέπει ν' ἀναζητήσωμε πόσες φορὲς τὸ 3,785 χωρεῖ στὸ 8, ἄρα νὰ κάμωμε τὴ διαίρεση 8 : 3,785. Βρίσκομε ἔτσι: 8 λίτρα $\simeq$ 2,11 ἀμερικάνικα γαλόνια.

*Ἀσκήσεις. 1.* Βρῆτε πόσα λίτρα καθαρὸ νερὸ σὲ θερμοκρασία 4° (καὶ ὑπὸ κανονικὴ πίεση) εἶναι οἱ ἀκόλουθοι ὄγκοι ἀπ' αὐτό:

53 $dm^3$, 0,45 $m^3$, 350 $cm^3$.

*2.* Βρῆτε τοὺς ἀντίστοιχους ὄγκους ποὺ πιάνουν οἱ ἀκόλουθες ποσότητες καθαρὸ νερὸ σὲ θερμοκρασία 4°:

75 λίτρα, 150 λίτρα, 352,6 λίτρα, 25 000 λίτρα.

*3.* Στὴ Γαλλία σὲ μιὰ δεξαμενὴ βενζίνας ποὺ περιέχει 550 λίτρα βενζίνα ἀκόμα, ἔχυσαν στὴν ἀρχὴ τῆς ἑβδομάδας 4 650 λίτρα βενζίνα. Κατὰ τὴν ἑβδομάδα ἔγιναν οἱ ἀκόλουθες διανομὲς βενζίνας ἀπὸ τὴ δεξαμενή: 52 διανομὲς ἀπὸ 5 λίτρα ἡ καθεμιά, 185 διανομὲς ἀπὸ 10 λίτρα ἡ καθεμιὰ καὶ 142 διανομὲς ἀπὸ 20 λίτρα ἡ καθεμιά. Πόση βενζίνα ἔμεινε στὴ δεξαμενὴ στὸ τέλος τῆς ἑβδομάδας;

*4.* Μιὰ βρύση, ποὺ ἔχει παροχὴ (δηλαδὴ ποὺ δίνει) 2,25 λίτρα νερὸ ἀνὰ δευτερόλεπτο, ἀποτελειώνει τὸ γέμισμα μιᾶς δεξαμενῆς χωρητικότητας 6,5 $m^3$. Πόσος χρόνος θὰ χρειαστῆ γιὰ νὰ γίνη αὐτό, ἂν ἡ δεξαμενὴ ἦταν, στὴν ἀρχή, γεμάτη κατὰ τὰ 2/3 της;

*5.* Ἕνας αὐτοκινητιστὴς ἔκαμε μὲ τὸ αὐτοκίνητό του 65 km καὶ ἐξακρίβωσε πὼς ἀπὸ τὰ 8 ἀγγλικὰ γαλόνια, ποὺ εἶχε στὸ ρεζερβουὰρ του ὅταν ξεκίνησε, τοῦ ἔμειναν μόνο 6. Πόση κατανάλωση βενζίνας εἶχε στὸ χιλιόμετρο καὶ πόση ἐπομένως θὰ εἶχε, ἂν διέτρεχε 100 km;

*6.* Ἕνα ρεζερβουὰρ αὐτοκινήτου ἔχει χωρητικότητα 12 ἀμερικάνικα γαλόνια. Ξέροντας ὅτι τὸ αὐτοκίνητο αὐτὸ καίει 3 ἀμερικάνικα γαλόνια βενζίνα στὰ 100 km, ὑπολογίστε πόση ἀπόσταση θὰ διατρέξη χρησιμοποιώντας τὰ 9/10 ἀπὸ τὸ περιεχόμενο τοῦ γεμάτου ρεζερβουὰρ του.

7. Τὸ σῶμα τοῦ ἀνθρώπου περιέχει περίπου 5 λίτρα αἷμα. Ξέροντας ὅτι 1 $cm^3$ αἷμα ἑνὸς γεροῦ ἀνθρώπου περιέχει περίπου 5 δισεκατομμύρια ἐρυθρὰ αἱμοσφαίρια, ὑπολογίστε πόσα τέτοια αἱμοσφαίρια περιέχονται στὸ αἷμα αὐτοῦ τοῦ ἀνθρώπου. Ἐπίσης ὑπολογίστε πόσα λευκὰ αἱμοσφαίρια περιέχονται στὸ αἷμα ἑνὸς γεροῦ ἀνθρώπου ξέροντας ὅτι τὰ ἐρυθρὰ εἶναι 750 φορὲς περισσότερα ἀπὸ τὰ λευκά.

## Μάθημα 49.

### Εἰδικὸ βάρος. Σχετικὴ πυκνότητα.

**1. Εἰδικὸ βάρος.** Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος ἑνὸς σώματος, ποὺ ὁ ὄγκος του μᾶς εἶναι γνωστός, ἀρκεῖ νὰ ξέρωμε ἀκόμα *τί βάρος ἔχει ἡ μονάδα ὄγκου ἀπὸ τὸ σῶμα αὐτό.*

Τὸ βάρος αὐτὸ τῆς μονάδας ὄγκου λέγεται *εἰδικὸ βάρος τοῦ σώματος* καὶ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ποὺ μᾶς λέει εἴτε πόσα κιλὰ ζυγίζει ἕνα κυβικὸ δεκατόμετρο ἀπὸ τὸ σῶμα (κιλὰ ἀνὰ κυβικὸ δεκατόμετρο, $kg/dm^3$), εἴτε πόσα γραμμάρια ζυγίζει ἕνα κυβικὸ ἑκατοστὸ (γραμμάρια ἀνὰ κυβικὸ ἑκατοστό, $gr/cm^3$), εἴτε πόσους τόννους ζυγίζει ἕνα κυβικὸ μέτρο (τόννοι/$m^3$) ἀπὸ τὸ σῶμα.

Ὥστε, *εἰδικὸ βάρος ἑνὸς σώματος ἢ ἑνὸς ὑλικοῦ εἶναι τὸ βάρος ποὺ ἔχει ἡ μονάδα ὄγκου ἀπὸ τὸ σῶμα ἢ ἀπὸ τὸ ὑλικὸ αὐτό. Ἔτσι, εἰδικὸ βάρος τοῦ νεροῦ εἶναι 1* $kg/dm^3$.

*Παραδείγματα:* Τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8 $kg/dm^3$ (ἄρα ὁ σίδηρος εἶναι 7,8 φορὲς πιὸ βαρὺς ἀπὸ ἴσο ὄγκο καθαροῦ νεροῦ θερμοκρασίας 4°). Τὸ εἰδικὸ βάρος τῆς δρύινης ξυλείας εἶναι 0,9 $kg/dm^3$ (ἄρα ἡ δρύινη ξυλεία εἶναι ἐλαφρύτερη ἀπὸ τὸ νερό).

**2. Ἐφαρμογές.** 1ο. *Ὑπολογίστε τὸ βάρος ἑνὸς συμπαγοῦς τσιμεντόλιθου ποὺ ἔχει ὄγκο 4,5* $m^3$, *ξέροντας πὼς τὸ εἰδικὸ βάρος του εἶναι 2,2 τόννοι/*$m^3$.

Ἕνα κυβικὸ μέτρο τσιμεντόλιθος ζυγίζει 2,2 τόννους, ἄρα 4,5 $m^3$ τσιμεντόλιθος ζυγίζουν 4,5 φορὲς περισσότερο, δηλαδὴ

$$2{,}2 \text{ τόννοι} \times 4{,}5 = 9{,}9 \text{ τόννοι} = 9\,900 \text{ kg.}$$

2ο. *Ξέροντας ὅτι τὸ εἰδικὸ βάρος ἑνὸς εἴδους ξύλου εἶναι 0,7* $gr/cm^3$ *ὑπολογίστε σὲ* $cm^3$ *τὸν ὄγκο ἑνὸς μοντέλου (ὑποδείγματος) ποὺ εἶναι κατασκευασμένο ἀπ' αὐτὸ τὸ ξύλο καὶ ζυγίζει 3,150 kg.*

Ἀφοῦ τὸ εἰδικὸ βάρος εἶναι 0,7 $gr/cm^3$, 0,7 γραμμάρια ἀπὸ τὸ ξύλο ἔχουν ὄγκο 1 $cm^3$. Τὸ βάρος τοῦ μοντέλου μας εἶναι

3 150 gr, ἄρα γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο του πρέπει νὰ βροῦμε πόσες φορὲς ὁ ἀριθμὸς 0,7 gr χωρεῖ στὸν ἀριθμὸ 3 150 gr:

$3\,150 : 0{,}7 = 4\,500$ cm³. *Ἀπάντηση: 4 500 cm³.*

3ο. *Ὑπολογίστε τὸ εἰδικὸ βάρος, π.χ. σὲ kg/dm³, ἑνὸς λαδιοῦ ξέροντας ὅτι **110** λίτρα ἀπὸ τὸ λάδι αὐτὸ ζυγίζουν **101** kg.*

110 λίτρα λαδιοῦ ἔχουν ὄγκο 110 dm³ καὶ ζυγίζουν 101 kg, ἄρα 1 dm³ θὰ ζυγίζη 110 φορὲς λιγότερο:

$101 : 110 = 0{,}918\ldots \text{ kg} \simeq 0{,}92 \text{ kg}.$

*Ἀπάντηση: Τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ εἶναι 0,92 kg/dm³.*

*Περιληπτικὸς κανόνας: Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος ἑνὸς ὑλικοῦ, πολλαπλασιάζομε τὸν ὄγκο τοῦ ὑλικοῦ ἐπὶ τὸ βάρος τῆς μονάδας ὄγκου ἀπὸ τὸ ὑλικό, δηλαδὴ ἐπὶ τὸ εἰδικὸ βάρος του.*

**3. Σχετικὴ πυκνότητα.** Ξέρομε ὅτι 1 dm³ νερὸ ζυγίζει 1 kg καὶ ὅτι 1 dm³ σίδηρος ζυγίζει 7,8 kg. Ἑπομένως, *ἂν πάρωμε δυὸ ἴσους ὄγκους νερὸ καὶ σίδηρο, ὁ σίδηρος θὰ εἶναι 7,8 φορὲς βαρύτερος ἀπὸ τὸ νερό.* Ὁ ἀριθμὸς 7,8 λέγεται *σχετικὴ πυκνότητα* τοῦ σιδήρου.

Ὥστε, *σχετικὴ πυκνότητα ἑνὸς σώματος ἢ ἑνὸς ὑλικοῦ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ βάρους ἑνὸς ὄγκου ἀπὸ τὸ σῶμα ἢ τὸ ὑλικὸ αὐτὸ διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου νεροῦ.*

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε λοιπὸν τὸ βάρος, π.χ. ἑνὸς κομματιοῦ ἀπὸ σίδηρο, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος τοῦ νεροῦ ποὺ ἔχει τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ αὐτὸ τὸ κομμάτι καὶ τὸ ἐξαγόμενο νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 7,8.

*Παράδειγμα. Ποιό εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς σιδερένιου κομματιοῦ ποὺ ἔχει ὄγκο 5 dm³;*

| | |
|---|---|
| Βάρος 5 dm³ νερὸ | 5 kg |
| Βάρος 5 dm³ σίδηρος | $5 \text{ kg} \times 7{,}8 = 39$ *kg*. |

Ἂς παρατηρήσωμε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ βάρος σὲ kg πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμὸ 5, ποὺ ἐκφράζει τὸν ὄγκο σὲ dm³, μὲ τὴ σχετικὴ πυκνότητα 7,8 τοῦ ὑλικοῦ.

Γενικῶς, ἔχομε τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος ἑνὸς ὑλικοῦ, πολλαπλασιάζομε τὸν ὄγκο του ἐπὶ τὴ σχετικὴ πυκνότητά του λαμβάνοντας ὑπόψη τὰ ἑξῆς:*

*Ἂν ὁ ὄγκος εἶναι ἐκφρασμένος (ἔχει μετρηθῆ) σὲ $dm^3$, θὰ βροῦμε τὸ βάρος σὲ kg.*

*Ἂν ὁ ὄγκος εἶναι ἐκφρασμένος σὲ $cm^3$, θὰ βροῦμε τὸ βάρος σὲ gr.*

*Ἂν ὁ ὄγκος εἶναι ἐκφρασμένος σὲ $m^3$, θὰ βροῦμε τὸ βάρος σὲ τόννους.*

Νά τώρα ἕνας πίνακας μὲ τὶς σχετικὲς πυκνότητες τῶν ὑλικῶν ποὺ χρησιμοποιοῦνται συχνά:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ἀλουμίνιο | 2,7 | Ξύλο δρύινο | 0,9 |
| Ἄμμος ψιλὴ | 1,4 | Ξύλο ἐλάτινο | 0,5 |
| Ἄργυρος | 10,5 | Ὀρείχαλκος (κράμα χαλκοῦ καὶ τσίγκου) | 8,4 |
| Γαιάνθρακες (διάφορα εἴδη ὀρυκτοῦ κάρβουνου) | 1,2—1,7 | Πέτρα σκληρὴ | 2,1—2,5 |
| Γυαλὶ | 2,5 | Πλατίνα (λευκόχρυσος) | 21,4 |
| Κασσίτερος (καλάϊ) | 7,3 | Σίδηρος, Ἀτσάλι | 7,8 |
| Μαντέμι (χυτοσίδηρος) | 7,1—7,2 | Τοῦβλο (συμπαγὲς) | 1,6 |
| Μόλυβδος (μολύβι) | 11,3 | Τσίγκος (ψευδάργυρος) | 7,2 |
| Μπροῦντζος (κράμα χαλκοῦ καὶ κασσίτερου) | 8,7 | Φελλὸς | 0,2—0,3 |
| Νίκελ (νικέλιο) | 8,8 | Χαλκὸς | 8,9 |
| | | Χρυσὸς | 19,3 |

*Ἀσκήσεις. 1.* Πόσο ζυγίζει ἕνας σωρὸς κάρβουνο ὁ ὁποῖος ἔχει ὄγκο 3,5 $m^3$ καὶ ἀποτελεῖται τὴ μιὰ φορὰ ἀπὸ μικρὰ κομμάτια καὶ τὴν ἄλλη φορὰ ἀπὸ μεγάλα κομμάτια κάρβουνο;

Νὰ ἔχετε ὑπόψη σας ὅτι ὁ σωρὸς ἔχει σχετικὴ πυκνότητα 0,85 στὴν πρώτη περίπτωση καὶ 0,90 στὴ δεύτερη.

*2.* Βάζομε ἕνα κομμάτι ἀπὸ σίδηρο μὲ ὄγκο 275 $cm^3$ στὸν ἕνα δίσκο τῆς ζυγαριᾶς. Πόσον ὄγκο ἀλουμίνιο πρέπει νὰ τοποθετήσωμε στὸν ἄλλο δίσκο γιὰ νὰ ἰσορροπήση ἡ ζυγαριά; (Συμβουλευτῆτε τὸν παραπάνω πίνακα).

*3.* Τὸ ξύλο ἀπὸ ὀξιὰ ἔχει σχετικὴ πυκνότητα 0,8, ὅταν εἶναι φρεσκοκομμένο. Ἕνα ἔτος μετὰ τὸ κόψιμο ἡ σχετικὴ πυκνότητά του γίνεται 0,66. Ὑπολογίστε πόσο θὰ ἐλαττωθῆ σ' ἕνα ἔτος τὸ βάρος ἑνὸς μαδεριοῦ ἀπὸ φρεσκοκομμένη ὀξιὰ τὸ ὁποῖο ἔχει ὄγκο 255 $dm^3$. (Παραδεχόμαστε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ μαδεριοῦ δὲν ἄλλαξε σ' ὅλο τὸ ἔτος).

*4*. Ἡ βενζίνα αὐτοκινήτου ἔχει εἰδικὸ βάρος 0,720 $kg/dm^3$. Ὑπολογίστε τὴ χωρητικότητα ἑνὸς δοχείου ποὺ μπορεῖ νὰ χωρέση 8 kg βενζίνα.

*5*. Ὅταν τὸ νερὸ γίνη πάγος, ὁ ὄγκος του μεγαλώνει κατὰ τὸ 1/13 του περίπου. Ὑπολογίστε τὴ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ πάγου.

*6*. Ἕνα μοντέλο ἀπὸ ἐλάτινο ξύλο ζυγίζει 2,160 kg. Ξέροντας τὶς σχετικὲς πυκνότητες 0,5 τοῦ ἐλάτινου ξύλου καὶ 7,2 ἑνὸς λειωμένου μετάλλου, ὑπολογίστε:

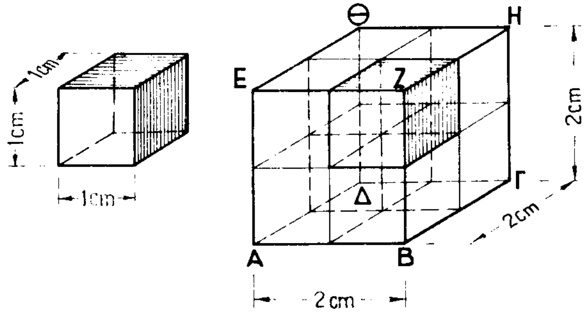
1ο. Τὸ πηλίκον τοῦ βάρους ἑνὸς ὄγκου ἀπὸ τὸ λειωμένο αὐτὸ μέταλλο διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ἐλάτινου ξύλου.

2ο. Τὸ βάρος τοῦ μοντέλου, ὅταν τὸ κατασκευάσωμε χυτὸ ἀπὸ τὸ παραπάνω μέταλλο καὶ παραβλέψωμε τὴ συστολὴ (δηλαδὴ τὴν ἐλάττωση τοῦ ὄγκου ποὺ θὰ παρουσιάση κρυώνοντας).

## Μάθημα 50.

### Ὁ κύβος.

**1. Ἂς θεωρήσωμε δυὸ κύβους μὲ ἀκμὲς 1 cm τὸν ἕναν καὶ 2 cm τὸν ἄλλο καὶ ἂς τοὺς συγκρίνωμε** (σχ. 50-α).




Σχ. 50-α. Ὁ ὄγκος τοῦ μεγάλου κύβου εἶναι $2 \times 2 \times 2 = 8\ cm^3$.

Ὁ ὄγκος τοῦ πρώτου κύβου εἶναι ἕνα κυβικὸ ἑκατοστὸ ($1 cm^3$). Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο τοῦ δεύτερου, ἀναζητοῦμε πόσες φορὲς ὁ ὄγκος αὐτὸς περιέχει τὸν πρῶτο κύβο, ποὺ ἔτσι χρησιμοποιεῖται σὰν *μονάδα ὄγκου*.

Ἐπάνω στὴν ἕδρα ΑΒΓΔ τοῦ μεγάλου κύβου, ἡ ὁποία εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 2 cm, μποροῦμε νὰ τοποθετήσωμε 4 μικροὺς κύβους, ποὺ θ᾽ ἀποτελέσουν μιὰ πρώτη στρώση. Ἐπάνω σ᾽ αὐτὴ τὴ στρώση μποροῦμε νὰ τοποθετήσωμε μιὰν ὅμοια δεύτερη στρώση, γιατὶ ἡ ἀκμὴ ΑΕ τοῦ κύβου ἔχει μῆκος 2 cm.

*Ἂς κάμωμε τώρα τὸ μέτρημα τῶν μικρῶν κύβων* μὲ τοὺς ὁποίους γεμίσαμε τὸν μεγάλο: 2 στρώσεις, ἀπὸ 4 κύβους ἡ καθεμιά, κάμουν $4 \times 2 = 8$ κύβους.

*Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ μεγάλου κύβου εἶναι $8 cm^3$.*

Γιὰ νὰ τὸν βροῦμε, πολλαπλασιάσαμε τὸ 2 μὲ τὸ 2 καὶ τὸ γινόμενο πάλι μὲ τὸ 2. Γι᾽ αὐτὸ γράφομε συντόμως $2^3$ καὶ διαβάζομε: *δύο στὸν κύβο.* Ἔτσι ἔχομε:

*Όγκος τοῦ μεγάλου κύβου* $= 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8\, cm^3$.

*Γενικά, καλοῦμε κύβο (ἢ τρίτη δύναμη) ἑνὸς ἀριθμοῦ τὸ γινόμενο τριῶν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτόν.* Ἡ πράξη τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ κύβου ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *ὕψωση τοῦ ἀριθμοῦ στὸν κύβο (ἢ στὴν τρίτη δύναμη).*

*Παραδείγματα:* $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$.

Μποροῦμε τώρα νὰ διατυπώσωμε τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

*Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου, μετροῦμε μὲ μιὰ μονάδα μήκους μιὰν ἀκμή του καὶ τὸν ἀριθμό, ποὺ βρίσκομε, τὸν ὑψώνομε στὸν κύβο.*

Μονάδα ὄγκου εἶναι τότε ὁ κύβος ποὺ ἔχει ἀκμὲς ἴσες μὲ τὴ μονάδα μήκους ποὺ χρησιμοποιήσαμε.

**2. Ἀντίστροφος ὑπολογισμός.** *Παράδειγμα 1. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς ἑνὸς κύβου ὁ ὁποῖος ἔχει ὄγκο* $125\, cm^3$.

Ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου ἔχει μῆκος ἕναν ἀριθμὸ ἑκατοστόμετρα ποὺ, ἂν ὑψωθῆ στὸν κύβο, θὰ μᾶς δώση τὸν ἀριθμὸ 125. Ὑψώνοντας στὸν κύβο τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς 2, 3, 4, 5,..., παρατηροῦμε ὅτι

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125.$$

Ἄρα ὁ κύβος μὲ ὄγκο $125\, \mathrm{cm}^3$ ἔχει ἀκμὴ μήκους 5 cm.

Ὁ ἀριθμὸς 5, ποὺ, ὅταν ὑψωθῆ στὸν κύβο, μᾶς δίνει τὸν ἀριθμὸ 125, λέγεται *κυβικὴ ρίζα* τοῦ 125 καὶ σημειώνεται ἔτσι: $\sqrt[3]{125}$.

*Γενικά, καλοῦμε κυβικὴ ρίζα ἑνὸς δοσμένου ἀριθμοῦ ἕναν ἀριθμὸ ποὺ, ὅταν ὑψωθῆ στὸν κύβο, γίνεται ἴσος μὲ τὸ δοσμένο ἀριθμό.*

Π.χ. $\sqrt[3]{216} = 6$, ἐπειδὴ $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$.

$\sqrt[3]{1\,000} = 10$, ἐπειδὴ $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$.

*Παράδειγμα 2. Ὑπολογίστε τὴν ἀκμὴ ἑνὸς κύβου ὁ ὁποῖος ἔχει ὄγκο* $600\, cm^3$.

Ὑψώνοντας στὸν κύβο τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς 6, 7, 8, 9,...

βλέπομε ὅτι τὸ 600 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $8^3 = 512$ καὶ μικρότερο ἀπὸ τὸ $9^3 = 729$.

Ἑπομένως ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 600 βρίσκεται μεταξὺ 8 καὶ 9.

Ὁ κύβος τῶν 600 $cm^3$ ἔχει λοιπὸν ἀκμὴ περίπου 8 cm (μὲ προσέγγιση ἑνὸς cm ἀπὸ κάτω) ἢ περίπου 9 cm (μὲ προσέγγιση ἑνὸς cm ἀπὸ ἐπάνω).

**3. Ἐπιφάνεια τοῦ κύβου.** Οἱ ἕξι ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ἴσα τετράγωνα, ἄρα ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι 6 φορὲς ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τετραγώνου ποὺ ἔχει πλευρὰ τὴν ἀκμὴ τοῦ κύβου.

Π.χ. ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κύβου μὲ μῆκος ἀκμῶν 3 cm εἶναι ἴση μὲ

$$6 \times 3^2 = 6 \times 9 = 54 \text{ cm}^2.$$

*Ἀσκήσεις* *1.* Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου ποὺ ἔχει ἀκμὴ 0,25 m.

*2.* Ἐπαληθεῦστε μὲ 4 ὡς 5 παραδείγματα, ὅτι ὁ κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ 1, ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι $< 1$, καὶ μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ 1, ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι $> 1$.

*3.* Νὰ συγκρίνετε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ 0,33 m πρὸς τὸν ὄγκο ἑνὸς ἄλλου ποὺ ἔχει ἀκμὴ τὸ 1/3 τῶν 0,33 m. Τί πηλίκον βρίσκετε διαιρώντας τὸν πρῶτο ὄγκο διὰ τοῦ δεύτερου;

*4.* Ἡ χωρητικότητα ἑνὸς κουτιοῦ μὲ σχῆμα κύβου θέλομε νὰ εἶναι 8 λίτρα. Τί μῆκος πρέπει νὰ ἔχουν ἐσωτερικὰ οἱ ἀκμὲς τοῦ κουτιοῦ;

*5.* Ἕνας κύβος ἀπὸ λαμαρίνα πάχους 2 mm ἔχει ἐξωτερικὰ ἀκμὲς μήκους 8 cm. Ὑπολογίστε τὸν ἐσωτερικό του ὄγκο.

*6.* 1ο. Ξέροντας ὅτι 1 γυάρδα $\simeq$ 0,91 m, ὑπολογίστε σὲ $m^3$ τὸν ὄγκο μιᾶς κυβικῆς γυάρδας (δηλ. ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὲς 1 γυάρδα).

2ο. Ξέροντας πὼς ἕνα πόδι εἶναι τὸ 1/3 τῆς γυάρδας, βρῆτε πόσα κυβικὰ πόδια περιέχει μία κυβικὴ γυάρδα. Ὑπολογίστε σὲ $dm^3$ τὸν ὄγκο ἑνὸς κυβικοῦ ποδιοῦ.

3ο. Ξέροντας πὼς μία ἴντσα εἶναι 1/12 τοῦ ποδιοῦ, βρῆτε πόσες κυβικὲς ἴντσες περιέχονται σ' ἕνα κυβικὸ πόδι καθὼς καὶ σὲ μιὰ κυβικὴ γυάρδα. Ὑπολογίστε σὲ $cm^3$ τὸν ὄγκο μιᾶς κυβικῆς ἴντσας.

*7.* Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ 15 cm.

*8.* Πρόκειται νὰ κατασκευάσετε ἕνα κυβικὸ κουτὶ χωρὶς καπάκι μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: Μὲ τὸ χαράκτη διαιρεῖτε ἕνα τετράγωνο φύλλο λεπτοῦ τσίγκου σὲ 9 ἴσα τετράγωνα· ὕστερα, ἀφοῦ ἀποκόψετε τὰ 4 τετράγωνα στὶς 4 γωνιὲς τοῦ φύλλου, ἀνασηκώνετε τὰ 4 ἀκρινὰ τετράγωνα. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετράγωνου φύλλου, γιὰ νὰ ἔχῃ τὸ κουτὶ χωρητικότητα 8 λίτρα (δηλ. πρακτικῶς 8 $dm^3$);

Τὸ γεωμετρικὸ σχῆμα, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ φύλλο, ἀφοῦ κόψετε τὰ τέσσερα ἀκρινὰ τετράγωνα, λέγεται ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυβικοῦ κουτιοῦ χωρὶς καπάκι.

*9.* Σχεδιάστε σὲ κλίμακα 1/4 τὸ ἀνάπτυγμα (βλέπε τὴν προηγούμενη ἄσκηση) ἑνὸς κυβικοῦ κουτιοῦ χωρὶς καπάκι μὲ ἀκμὲς 20 cm, ποὺ εἶναι φτιαγμένο ἀπὸ λαμαρίνα. Ὕστερα ὑπολογίστε:

1ο τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ἀναπτύγματος,

2ο τὴν ἐπιφάνεια τῆς λαμαρίνας ἀπὸ τὴν ὁποία κόπηκε τὸ κουτὶ μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε στὴν προηγούμενη ἄσκηση,

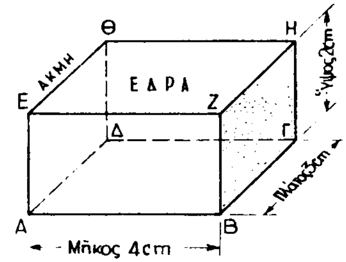
3ο τὸ βάρος τοῦ κουτιοῦ, ὅταν ἡ λαμαρίνα ζυγίζῃ 7,5 $kg/m^2$.

## Μάθημα 51.

### Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

1. **Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο** εἶναι ἕνα στερεὸ ποὺ περιορίζεται ἀπὸ *6 ὀρθογώνιες ἕδρες* (σχ. 51-α).

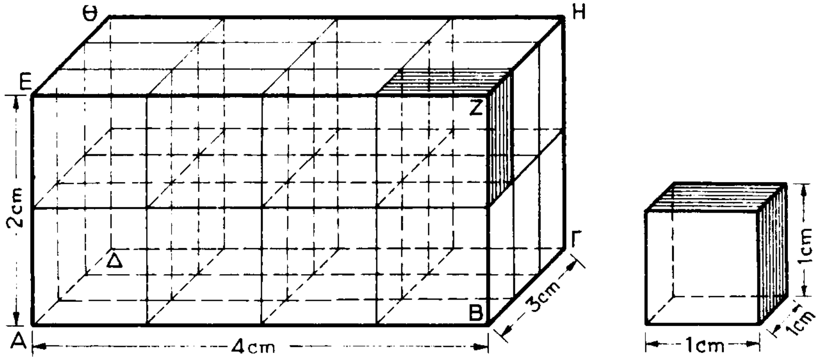
Οἱ πλευρὲς τῶν ἑδρῶν λέγονται *ἀκμὲς* τοῦ παραλληλεπιπέδου. Οἱ ἀριθμοὶ 4, 3, 2 ποὺ σημειώνονται στὸ σχῆμα 51-α παριστάνουν σὲ ἑκατοστὰ (cm) *τὶς διαστάσεις* τοῦ παραλληλεπιπέδου.




**Σχ. 51-α. Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.**

Ὅταν τὸ στερεὸ αὐτὸ εἶναι τοποθετημένο ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 51-α, τότε οἱ διαστάσεις τῆς βάσης του ΑΒΓΔ λέγονται *μῆκος* καὶ *πλάτος* τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ ἡ τρίτη διάσταση ΑΕ λέγεται *ὕψος* του.

2. **Ἂς παρατηρήσωμε ἕναν κύβο μὲ μῆκος πλευρᾶς 1 cm καὶ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ διαστάσεις 4 cm, 3 cm, 2 cm καὶ ἂς συγκρίνωμε τὰ δυὸ στερεά.**




**Σχ. 51-β. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι $4 \times 3 \times 2 = 24$ cm³.**

Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εἶναι $1\,\text{cm}^3$. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἂς ἐξετάσωμε πόσες φορὲς αὐτὸ περιέχει τὸν κύβο $1\,\text{cm}^3$.

Ἐπάνω στὴν ἕδρα ΑΒΓΔ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἡ ὁποία εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο $4\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$, μποροῦμε νὰ τοποθετήσωμε

$4 \times 3 = 12$ κύβους.

Οἱ κύβοι αὐτοὶ θ᾽ἀποτελέσουν μιὰ πρώτη στρώση· ἐπάνω σ᾽αὐτὴν θὰ μπορέσωμε νὰ βάλωμε μιὰν ὅμοια δεύτερη στρώση, ἐπειδὴ ἡ ἀκμὴ ΑΕ εἶναι ἴση μὲ $2\,\text{cm}$.

*Ἂς κάμωμε τώρα τὸ μέτρημα τῶν κύβων μὲ τοὺς ὁποίους γεμίσαμε τὸ παραλληλεπίπεδο:*

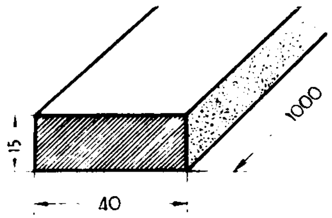
2 στρώσεις, μὲ 12 κύβους ἡ καθεμιά, κάνουν $12 \times 2 = 24$ κύβους
*Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι 24 cm³.*

Γιὰ νὰ τὸν βροῦμε, πολλαπλασιάσαμε τὸ 4 μὲ τὸ 3 καὶ τὸ γινόμενο μὲ τὸ 2. Ἔτσι ἔχομε:

*Ὄγκος τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου* $4 \times 3 \times 2 = 24\,\text{cm}^3$.

Νά καὶ ὁ γενικὸς κανόνας: *Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, μετροῦμε μὲ τὴν ἴδια μονάδα μήκους τὶς 3 διαστάσεις του καὶ πολλαπλασιάζομε ἀναμεταξύ τους τοὺς 3 ἀριθμοὺς ποὺ βρίσκομε.*

**3. Ἐφαρμογές.** 1ο. *Ὑπολογίστε τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο μιᾶς σιδερένιας λάμας (σχ. 51-γ) ποὺ ἔχει πάχος 15 mm καὶ πλάτος 40 mm (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σιδήρου 7,8).*




**Σχ. 51-γ. Σιδερένια λάμα (ράβδος μὲ ὀρθογώνια διατομή).**

Τὸ ζητούμενο βάρος εἶναι αὐτὸ ποὺ ἔχει ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καμωμένο ἀπὸ σίδηρο καὶ μὲ διαστάσεις:

$0{,}15\,\text{dm} \times 0{,}4\,\text{dm} \times 10\,\text{dm}.$

Ὁ ὄγκος αὐτοῦ τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι

$0{,}15 \times 0{,}4 \times 10 = 0{,}6\,\text{dm}^3,$

καὶ τὸ βάρος τῆς λάμας

$$0{,}6 \times 7{,}8 = 4{,}68 \text{ kg}.$$

*Ἀπάντηση: 1 m ἀπὸ τὴ λάμα ζυγίζει 4,68 kg.*

2ο. *Ἀντίστροφος ὑπολογισμός. Ξέροντας ὅτι 2 m ἑνὸς τετράγωνου σίδερου ἀπὸ ἀτσάλι* (σχ. 51-δ) *ζυγίζουν 6,24 kg, ὑπολογίστε τὴν πλευρὰ τῆς τετράγωνης διατομῆς του.*

Τὸ σίδερο αὐτὸ ἔχει σχῆμα ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ποὺ τὸ μῆκος του εἶναι 20 dm. Ὁ ὄγκος του εἶναι

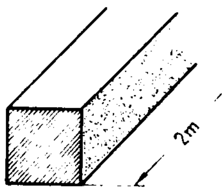
$$6{,}24 : 7{,}8 = 0{,}8 \text{ dm}^3.$$

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς τετράγωνης διατομῆς του εἶναι

$$0{,}8 : 20 = 0{,}04 \text{ dm}^2$$

καὶ ἡ πλευρά της

$$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2 \text{ dm} = 20 \text{ mm}.$$




**Σχ. 51-δ. Τετράγωνο σίδερο.**

*Ἀπάντηση: Ἡ πλευρὰ τῆς τετράγωνης διατομῆς εἶναι 20 mm.*

**4. Ἐπιφάνεια ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.** Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὀρθογώνια ποὺ εἶναι ἴσα δυὸ-δυὸ καὶ ποὺ ἔχουν διαστάσεις τὶς τρεῖς διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου παρμένες δυὸ-δυό.

Π.χ. ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 4 cm × 3 cm × 2 cm εἶναι ἴση μὲ

$$2 \times (4 \times 3) + 2 \times (4 \times 2) + 2 \times (3 \times 2)$$
$$= 24 + 16 + 12 = 52 \text{ cm}^2.$$

*Ἀσκήσεις. 1.* Στὶς 4 γωνιὲς μιᾶς τετράγωνης λαμαρίνας μὲ πλευρὰ 400 mm κόβομε ἀπὸ ἕνα τετράγωνο πλευρᾶς 40 mm· ὕστερα, ἀνασηκώνομε τὰ 4 ἀκρινὰ ὀρθογώνια ποὺ προκύπτουν ἔτσι, ποὺ νὰ σχηματίσωμε ἕνα κουτὶ χωρὶς καπάκι. Ὑπολογίστε:

1ο τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κουτιοῦ (δηλαδὴ τὴν ἐπιφάνεια τῆς βάσεως καὶ τῶν πλευρικῶν ἑδρῶν του)·

2ο τὸ βάρος του, ξέροντας πὼς ἡ λαμαρίνα, ποὺ χρησιμοποιήθηκε, ζυγίζει 11,7 $\text{kg/m}^2$·

3ο τὴ χωρητικότητά του.

*2.* Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ἀνὰ 1 kg (δηλαδὴ τὸ μῆκος ποὺ ἔχει ἕνα κιλό):

1ο ἀπὸ ἕνα τετράγωνο σίδερο μὲ πλευρὰ τετραγώνου 15 mm·

2ο ἀπὸ μιὰ λάμα πάχους 5 mm καὶ πλάτους 55 mm.

*3.* Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια ἀνὰ kg (δηλαδὴ τὴν ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει ἕνα κιλό):

1ο ἀπὸ ἕνα φύλλο τσίγκου μὲ πάχος 2 mm·

2ο ἀπὸ ἕνα φύλλο χαλκοῦ μὲ πάχος 3 mm.

*4.* Ἕνα μαγειρεῖο ἔχει διαστάσεις 3,25 m × 2,80 m × 3 m. Θέλομε νὰ ἐλαιοχρωματίσωμε (3 χέρια) τοὺς τέσσερις τοίχους καὶ τὸ ταβάνι του. Ξέροντας ὅτι ὁ ἐλαιοχρωματισμὸς (1 χέρι) κοστίζει 15 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο καὶ ὅτι θὰ ἔχετε ν᾽ ἀφαιρέσετε μιὰ πόρτα 2,25 m × 0,95 m καὶ δυὸ παράθυρα 1,90 m × 1 m τὸ καθένα, ὑπολογίστε τί θὰ κοστίση ὅλη ἡ ἐργασία.

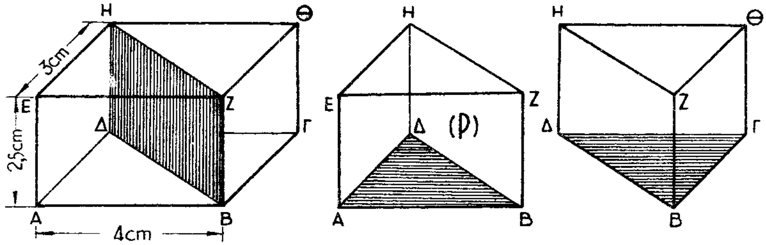
*5.* Οἱ κορυφὲς τῶν 6 ἑδρῶν ἑνὸς παραλληλεπιπέδου (βλ. σχ. 51-α) λέγονται κορυφὲς τοῦ παραλληλεπιπέδου. Δυὸ κορυφές, ὅπως ἡ Α καὶ ἡ Θ, ποὺ δὲν βρίσκονται ἐπάνω σὲ μιὰ καὶ τὴν ἴδια ἕδρα, λέγονται ἀντικρυστὲς ἢ ἀπέναντι. Ἕνα τμῆμα ποὺ ἑνώνει δυὸ ἀντικρυστὲς κορυφὲς λέγεται διαγώνιος τοῦ παραλληλεπιπέδου·

Βρῆτε τώρα τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΑΘ τοῦ παραλληλεπιπέδου ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 51-α, μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο: Σχεδιάστε πρῶτα τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ (μὲ τὶς διαστάσεις ποὺ σημειώνονται στὸ σχῆμα) καθὼς καὶ τὴ διαγώνιό του ΑΓ· ὕστερα, σχεδιάστε τὸ ὀρθογώνιο ΑΓΘΕ ποὺ ἔχει διαστάσεις τὰ μήκη τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἀκμῆς ΓΘ· τέλος, μετρῆστε ἐπάνω σ᾽ αὐτὸ τὸ σχέδιο τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΘ.

## Μάθημα 52.

### Ὀρθὸ πρίσμα.

**1. Ἂς κόψωμε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο τοῦ σχ. 52-α μὲ τὸ ἐπίπεδο ΔΒΖΗ καὶ ἂς ἐξετάσωμε τὰ δυὸ στερεὰ ποὺ προκύπτουν.**




**Σχ. 52-α. Τὸ ἐπίπεδο ΔΒΖΗ χωρίζει τὸ παραλληλεπίπεδο σὲ δυὸ στερεὰ ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο.**

Τὰ στερεὰ αὐτὰ ἔχουν *βάσεις τὰ τρίγωνα* ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ. Οἱ ἀκμές τους, οἱ κάθετες στὶς βάσεις, εἶναι μεταξύ τους *παράλληλες καὶ ἴσες*. Τὰ στερεὰ αὐτὰ εἶναι *ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα*.

*Ἂς συγκρίνωμε τὰ δυὸ αὐτὰ πρίσματα*. Οἱ βάσεις τους εἶναι τὰ μισὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, *ἄρα εἶναι ἴσες*. Τὰ ὕψη τους εἶναι *ἴσα* μὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ὥστε θὰ μπορούσαμε νὰ κάμωμε τὰ δυὸ πρίσματα νὰ συμπέσουν: *εἶναι λοιπὸν ἴσα*.

*Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο χωρίζεται σὲ δυὸ ἴσα πρίσματα μὲ τὸ ἐπίπεδο ποὺ περνᾶ ἀπὸ δυὸ ἀντικρυστὲς ἀκμές του.*

**2. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος (Ρ)** (σχ. 52-α). Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν μισὸ ὄγκο τοῦ παραλληλεπιπέδου, δηλαδὴ μὲ

$$\frac{4 \times 3 \times 2{,}5}{2} = 15 \text{ cm}^3\cdot$$

αὐτὸ ὅμως γράφεται καὶ ἔτσι :

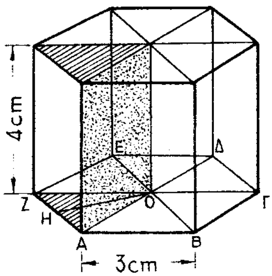
$$\frac{4 \times 3}{2} \times 2{,}5 = 15\ cm^3.$$

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸ τῆς βάσης, δηλαδὴ τὸ $\frac{4 \times 3}{2}$ cm², ἐπὶ τὸ ὕψος 2,5 cm.

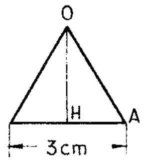
*Ὥστε, γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸ τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

**3. Ἂς ὑπολογίσωμε τώρα τὸν ὄγκο ἑνὸς πρίσματος ποὺ ἔχει βάση πολυγωνική,** π.χ. ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο (σχ. 52-β).

Ἡ βάση τοῦ πρίσματος χωρίζεται σὲ 6 *ἴσα* τρίγωνα ἀπὸ τὶς ἀκτίνες ποὺ ἑνώνουν τὸ κέντρο Ο μὲ τὶς κορυφὲς τοῦ ἑξαγώνου.




**Σχ. 52-β. Ὄγκος τοῦ πρίσματος $= \frac{3 \times 2{,}6}{2} \times 6 \times 4 = 93{,}6\ cm^3$.**




**Σχ. 52-γ. Ἕνα ἀπὸ τὰ 6 ἴσα καὶ ἰσόπλευρα τρίγωνα σχεδιασμένο σὲ κλίμακα 1/2.**

Ἡ βάση αὐτῶν τῶν τριγώνων ἔχει μῆκος 3 cm· τὸ ὕψος τους μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε μετρώντας, πάνω στὸ σχέδιο ἑνὸς ἀπ᾿ αὐτὰ (σχ. 52-γ), τὸ τμῆμα ΟΗ καὶ πολλαπλασιάζοντας μὲ 2 τὸν ἀριθμὸ 1,3 cm ποὺ βρίσκετε, ἀφοῦ τὸ τρίγωνο εἶναι σχεδιασμένο σὲ *κλίμακα* 1/2· ἄρα ὕψος τριγώνων = 1,3 cm × 2 = 2,6 cm.

Ὁ ὄγκος τοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι λοιπὸν 6 φορὲς ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ποὺ ἔχει βάση τὸ τρίγωνο ΟΑΖ καὶ ὕψος 4 cm, δηλαδὴ

$$\frac{3 \times 2{,}6}{2} \times 4 \times 6 = 93{,}6\ cm^3.$$

Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ θὰ μπορούσαμε νὰ τὸ βροῦμε καὶ ἔτσι, ἀλλάζοντας τὴ σειρὰ τῶν πολλαπλασιασμῶν:

$$\text{ὄγκος πρίσματος} = \left(\frac{3 \times 2{,}6}{2} \times 6\right) \times 4 = 23{,}4 \times 4$$
$$= 93{,}6\, cm^3.$$

Πολλαπλασιάσαμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, 23,4 cm², ἐπὶ τὸ ὕψος, 4 cm.

Ὥστε, *γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

**4. Ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος.** Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς ἐπιφάνειες τῶν 2 βάσεων (δυὸ ἴσων πολυγώνων) καὶ ἀπὸ τὴν *πλευρικὴ* ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος (ἡ ὁποία εἶναι καμωμένη ἀπὸ ὀρθογώνια).

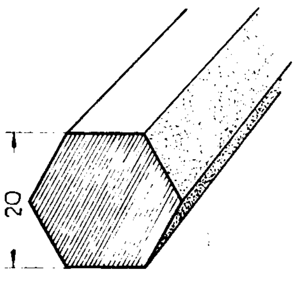
Ἂν τὸ πρῖσμα εἶναι κανονικό, οἱ βάσεις του εἶναι κανονικὰ πολύγωνα καὶ οἱ πλευρικὲς ἕδρες ὀρθογώνια ἴσα μεταξύ τους.

*Παράδειγμα.* Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 52-β εἶναι

$$(23{,}4 \times 2) + (3 \times 4) \times 6 = 46{,}8 + 72 = 118{,}8\,\text{cm}^2.$$

*Ἀσκήσεις. 1.* Ἡ διατομὴ μιᾶς σιδερένιας ράβδου εἶναι κανονικὸ ἑξάγωνο ποὺ ἔχει ἀπόσταση παράλληλων πλευρῶν 20 mm (σχ. 52-δ). Τὸ βάρος τῆς ράβδου εἶναι 2,700 kg ἀνὰ τρέχον μέτρο. Ὑπολογίστε τί μῆκος ράβδου ἀντιστοιχεῖ σὲ 1 kg βάρος.

*2.* Ἡ βάση ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ποὺ οἱ ἴσες πλευρές του σχηματίζουν γωνία 90° καὶ ἔχουν μῆκος 5 cm. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 10 cm. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο του.

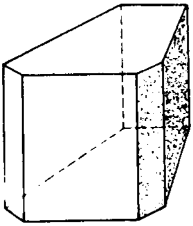


**Σχ. 52-δ. Ἑξάγωνο σίδερο.**

*3.* Τί ὕψος πρέπει νὰ ἔχη ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο πρῖσμα γιὰ νὰ εἶναι ὁ ὄγκος του ἴσος μὲ 1 000 cm³, ὅταν ἡ βάση ἔχη πλευρὲς μὲ μῆκος 6 cm τὴν καθεμιά.

*4.* Διπλασιάζετε τὶς διαστάσεις τῆς τριγωνικῆς βάσεως ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος. Μὲ ποιὸν κλασματικὸ ἀριθμὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσετε τότε τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος γιὰ νὰ μὴν ἀλλάξῃ ὁ ὄγκος του;

*5.* Ὑπολογίστε τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος ποὺ ἔχει βάση ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο πλευρᾶς 5 cm καὶ ὕψος ἴσο μὲ τὴν πλευρὰ τῆς βάσεως.



**Σχ. 52-ε. Ὑπολογίστε τὸ βάρος αὐτῆς τῆς πέτρας.**

*6.* Ὑπολογίστε τὸ βάρος τῆς πέτρας ποὺ παριστάνεται στὸ σχῆμα 52-ε, ξέροντας ὅτι ἡ βάση της ἔχει ἐμβαδὸν 4 225 cm² καὶ ὅτι τὸ ὕψος της εἶναι 70 cm (σχετικὴ πυκνότητα τῆς πέτρας 2,2).

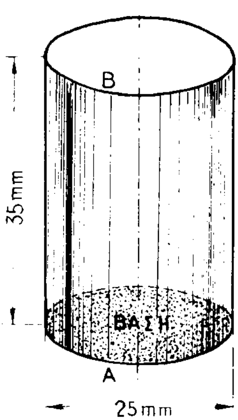
*7.* Ὑπολογίστε τὴ χωρητικότητα μιᾶς σκάφης σταύλου ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος μὲ μῆκος 2,50 m, ξέροντας ὅτι ἡ διατομή της εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο τραπέζιο μὲ βάσεις 36 cm ἡ κάτω, 45 cm ἡ ἐπάνω καὶ μὲ ὕψος 22 cm.

# Μάθημα 53.

## Κύλινδρος. Κῶνος. Κόλουρος κῶνος. Σφαίρα.

**1. Ἂς ἐξετάσωμε ἕνα στερεὸ ποὺ διαφέρει ἀπὸ ἕνα ὀρθὸ κανονικὸ πρῖσμα κατὰ τοῦτο, ὅτι οἱ βάσεις του δὲν εἶναι κανονικὰ πολύγωνα ἀλλὰ κύκλοι** (σχ. 53-α).

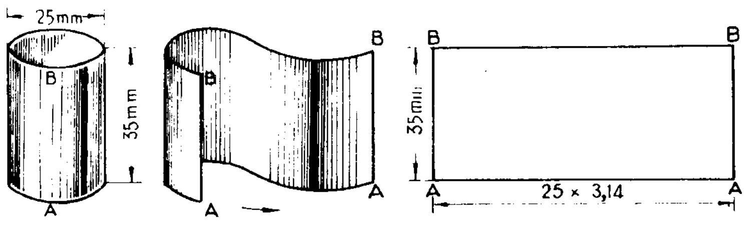
Οἱ δυὸ βάσεις τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ εἶναι *ἴσοι κύκλοι*. Ἡ πλευρική του ἐπιφάνεια οὔτε ἐπίπεδη εἶναι, οὔτε ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα κομμάτια· γι' αὐτὸ τὴ λέμε *καμπύλη*. Τὸ στερεὸ αὐτὸ λέγεται *κύλινδρος*.



Σχ. 53-α. Κύλινδρος

**2. Ἂς σχίσωμε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου** (σχ. 53-β) **ἀκολουθώντας τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ**, τὸ κάθετο πρὸς τὶς βάσεις, καὶ ἂς τὴν *ἀναπτύξωμε*, δηλαδὴ ἂς τὴν ἁπλώσωμε ἐπάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο.

Θὰ προκύψῃ ἕνα *ὀρθογώνιο*. Ἡ μιὰ διάσταση τοῦ ὀρθογω-



Σχ. 53-β. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο.

νίου αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὸ μῆκος ποὺ ἔχει ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως, δηλαδή, μὲ (25 × 3,14) mm, στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος 53-β. Ἡ ἄλλη διάσταση εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, δηλαδὴ μὲ 35 mm.

*Ὥστε, ἀναπτύσσοντας τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου βρίσκομε ἕνα ὀρθογώνιο.*

**3. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου** ποὺ ἔχει διάμετρο 25 mm καὶ ὕψος 35 mm (σχ. 53-β).

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει μῆκος $25 \times 3{,}14 = 78{,}5$ mm καὶ πλάτος 35 mm.

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ εἶναι $78{,}5 \times 35 \simeq 2\,748\ mm^2$.

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, πολλαπλασιάσαμε τὸ μῆκος 78,5 mm τῆς περιφέρειας τῆς βάσεως μὲ τὸ ὕψος 35 mm.

*Ὥστε, γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

**4. Ἂς ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου τοῦ σχήματος 53-α,** μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὅπως καὶ τὸν ὄγκο ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος· θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, δηλαδὴ τὸ

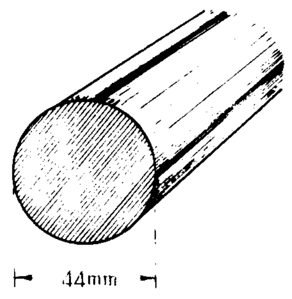
$$12{,}5^2 \times 3{,}14 = 156{,}25 \times 3{,}14 \simeq 490{,}63 \text{ mm}^2,$$

ἐπὶ τὸ ὕψος 35 mm. Ἔτσι βρίσκομε:

$$\textit{ὄγκος κυλίνδρου} = 490{,}63 \times 35 \simeq 17\,172\ mm^3 = 17{,}172\ cm^3.$$

Γενικά, *γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

**5. Ἐφαρμογή.** *Ὑπολογίστε τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο ἑνὸς στρογγυλοῦ σίδερου ποὺ ἔχει διάμετρο 44 mm* (σχ. 53-γ).




**Σχ. 53-γ. Σιδερένια ράβδος μὲ κυκλικὴ διατομή.**

Τὸ σίδερο αὐτὸ ἔχει σχῆμα ἑνὸς κυλίνδρου μὲ διάμετρο 0,44 dm (ἄρα μὲ ἀκτίνα 0,22 dm). Ἑπομένως, ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι

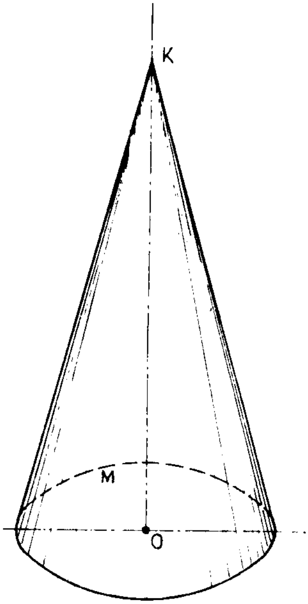
$$0{,}22^2 \times 3{,}14 \times 10 = 0{,}048\,4 \times 3{,}14 \times 10 \simeq 1{,}520 \text{ dm}^3,$$

καὶ τὸ βάρος τοῦ σίδερου

$$1{,}520 \times 7{,}8 \simeq 11{,}86 \text{ kg}.$$

*Ἀπάντηση: Τὸ σίδερο ζυγίζει 11,86 kg ἀνὰ τρέχον μέτρο.*

**6. Κῶνος.** Θεωροῦμε ἕναν κύκλο καὶ ἀπὸ τὸ **κέντρο** του Ο (σχ. 53-δ) ὑψώνομε κάθετο στὸ ἐπίπεδό του. Ἐπάνω σ' αὐτὴν παίρνομε ἕνα σημεῖο Κ καὶ τὸ συνδέομε μὲ ἕνα σημεῖο Μ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου. Φανταζόμαστε τώρα ὅτι τὸ ἄκρο Κ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΚΜ μένει ἀκίνητο, ἐνῶ τὸ ἄκρο Μ κινεῖται καὶ διαγράφει τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Θὰ παραχθῆ μιὰ *καμπύλη* ἐπιφάνεια ποὺ μαζὶ μὲ τὸν κύκλο περιορίζουν ἕνα στερεό. Τὸ στερεὸ αὐτὸ λέγεται *κῶνος*. *Βάση* του εἶναι ὁ κύκλος, *κορυφή* του τὸ σημεῖο Κ καὶ *ὕψος* του τὸ τμῆμα ΚΟ (δηλαδὴ ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο τῆς βάσεως). Τὰ διάφορα τμήματα (σὰν τὸ ΚΜ), ποὺ ἑνώνουν τὴν κορυφὴ μὲ σημεῖα τῆς περιφέρειας τῆς βάσεως, λέγονται *γενέτειρες* τοῦ κώνου, γιατὶ παράγουν (γεννοῦν) τὴν πλευρική του ἐπιφάνεια.

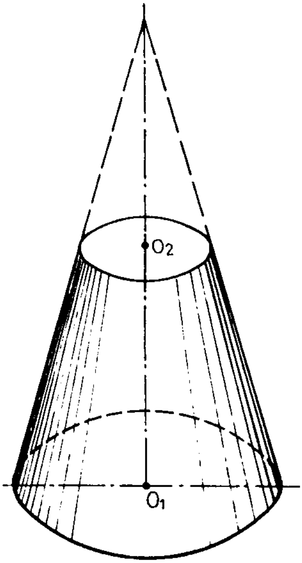


Σχ. 53-δ. Κῶνος.

Σχῆμα κώνου ἔχουν μερικὰ καπέλα ἀπὸ χαρτόνι ποὺ φοριοῦνται στὶς ἀποκριές.

**7. Κόλουρος κῶνος.** Ἂς κόψωμε ἕναν κῶνο μ' ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὸ ἐπίπεδο τῆς βάσεώς του· τὸ μέρος τοῦ κώνου, τὸ ὁποῖο περιέχεται μεταξὺ τῶν δυὸ παράλληλων ἐπιπέδων, λέγεται *κόλουρος κῶνος* (σχ. 52-ε).

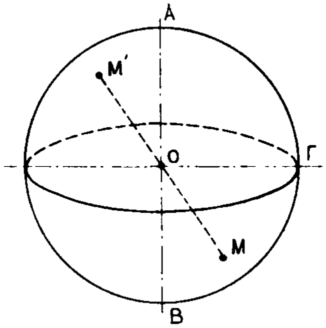
Ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει *βάσεις* δυὸ κύκλους, ἕναν μεγαλύτερο καὶ ἕναν μικρότερο. *Ὕψος* του εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν δυὸ παράλληλων βάσεων· αὐτὸ εἶναι ἴσο καὶ μὲ τὴν ἀπόσταση τῶν κέντρων τῶν δυὸ βάσεών του.




Σχ. 53-ε. Κόλουρος κῶνος

Σχῆμα κόλουρου κώνου ἔχουν οἱ καμινάδες μερικῶν ἐργοστασίων.

**8. Σφαίρα.** Παίρνομε μιὰν ἡμιπεριφέρεια ΑΓΒ (σχ. 53-ς) καὶ τὴν περιστρέφομε γύρω στὴ διάμετρό της ΑΟΒ. Θὰ παραχθῆ μία *καμπύλη* ἐπιφάνεια ποὺ περικλείει ἕνα μέρος τοῦ χώρου, ἕνα *στερεό*. Τὸ στερεὸ αὐτὸ λέγεται *σφαίρα*. Τὸ κέντρο Ο τῆς περιστρεφόμενης περιφέρειας εἶναι τὸ *κέντρο* τῆς σφαίρας. Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΟΜ, ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρο Ο μ' ἕνα σημεῖο Μ τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας, λέγεται *ἀκτίνα* τῆς σφαίρας. Ὅλες οἱ ἀκτίνες μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσες. *Διάμετρος* τῆς σφαίρας εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΜΟΜ′ ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο Ο καὶ τελειώνει στὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Μιὰ διάμετρος εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν ἀκτίνα. Σχῆμα σφαίρας ἔχουν οἱ βῶλοι ποὺ μ' αὐτοὺς παίζουν τὰ παιδιά.




Σχ. 53-ς.

*Ἀσκήσεις. 1.* Κυλινδρικὸς σωλήνας, ἀπὸ λαμαρίνα πάχους 2 mm, ἔχει ἐξωτερικὴ διάμετρο 50 mm καὶ ὕψος 100 mm.

1ο. Ὑπολογίστε τὴν ἐξωτερική του ἐπιφάνεια.

2ο. Ὑπολογίστε τὴν ἐσωτερική του ἐπιφάνεια.

3ο. Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε τὸ σωλήνα, χρησιμοποιήσαμε ἕνα ορθογώνιο φύλλο λαμαρίνας μὲ διαστάσεις ἴσες πρὸς τὸ ὕψος τοῦ σωλήνα καὶ πρὸς τὸ μῆκος τῆς μέσης περιφέρειας τῆς διατομῆς τοῦ σωλήνα (βλ. μάθημα 10, ἄσκηση 4). Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια καὶ τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας ξέροντας τὴ σχετικὴ πυκνότητά της 7,8.

*2.* Ποιό ὕψος πρέπει νὰ δώσετε σὲ ἕνα κυλινδρικὸ δοχεῖο μὲ ἐσωτερικὴ διάμετρο 60 mm γιὰ νὰ ἔχῃ χωρητικότητα 500 λίτρα;

*3.* Μ' ἕνα φύλλο λαμαρίνα τῶν 2 m $\times$ 1 m $\times$ 0,5 mm θέλομε νὰ φτιάξωμε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνῃ μὲ δυὸ διάφορους τρόπους. Ποιός ἀπὸ τοὺς δυὸ θὰ μᾶς δώσῃ δοχεῖο μὲ τὴν πιὸ μεγάλη χωρητικότητα καὶ ποιά θὰ εἶναι τότε ἡ διάμετρος τοῦ πυθμένα του;

*4.* Θέλετε νὰ κατασκευάσετε ἀπὸ λαμαρίνα ἕναν κύλινδρο ποὺ νὰ ἔχῃ τὴν ἴδια χωρητικότητα μ' ἕνα κυλινδρικὸ δοχεῖο ἐσωτερικῆς διαμέτρου 100 cm καὶ ὕψους 30 cm.

1ο. Ἂν ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ κυλίνδρου εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴ διάμετρο τοῦ δοχείου, πόσο πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου;

2ο. Ἂν τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ δοχείου, πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρός του;

*5.* Ἕνας ἔβαλε καὶ ἔσκαψαν ἕνα κυλινδρικὸ πηγάδι μὲ διάμετρο 2,5 m καὶ βάθος 10 m. Ὕστερα ἔχτισαν τὸ πλευρικὸ τοίχωμά του. Ὑπολογίστε:

1ο τὸν ὄγκο τῆς γῆς ποὺ σκάφτηκε (τῆς ἐκσκαφῆς).

2ο τὸν ὄγκο τοῦ τοιχώματος, ξέροντας ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ πηγαδιοῦ, ἀφοῦ τέλειωσε ἡ ἐργασία, εἶναι 1,70 m.

*6.* Νὰ ἀναφέρετε ἕνα - δυὸ παραδείγματα πραγμάτων ἢ κατασκευῶν ποὺ ἔχουν σχῆμα κώνου καὶ δυὸ - τρία ἄλλα ποὺ ἔχουν σχῆμα κόλουρου κώνου.

*7.* Ἂν κόψετε ἕναν κύλινδρο μ' ἕνα ἐπίπεδο, ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν δυὸ βάσεών του, τί σχῆμα θὰ ἔχῃ ἡ τομή;

Ὅμοια ἐρώτηση γιὰ τὴν τομὴ ἑνὸς κώνου μὲ ἐπίπεδο ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ καὶ τὸ κέντρο τῆς βάσεώς του.

Ὅμοια ἐρώτηση γιὰ τὴν τομὴ ἑνὸς κόλουρου κώνου μὲ ἐπίπεδο ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν δυὸ βάσεών του.

Σχεδιάστε τὶς παραπάνω τομὲς σὲ κλίμακα 1/2, ὅταν τὰ στερεὰ ἔχουν τὶς ἀκόλουθες διαστάσεις:

ὁ κύλινδρος: διάμετρο βάσεως 8 cm, ὕψος 12 cm,

ὁ κῶνος: διάμετρο βάσεως 10 cm, ὕψος 14 cm,

ὁ κόλουρος κῶνος: διαμέτρους τῶν δυὸ βάσεων 10 cm καὶ 6 cm, ὕψος 8 cm.

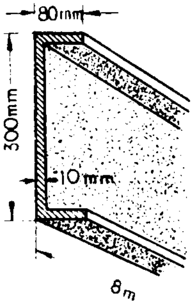
---

# Μάθημα 54.

## Ὑπολογισμὸς ὄγκων καὶ βαρῶν μὲ πράξεις ἐπάνω σὲ ἀκέραιους καὶ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Μερικὲς φορὲς εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος ἑνὸς κομματιοῦ ἤ, γενικότερα, ἑνὸς ὑλικοῦ. Θὰ ἐξετάσωμε τότε πρῶτα προσεκτικὰ τί μορφὴ ἔχει τὸ ὑλικὸ καὶ θὰ καθορίσωμε τὸ γεωμετρικό του σχῆμα. Ὕστερα θὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο του, ἐφαρμόζοντας τοὺς κανόνες ποὺ δόθηκαν στὰ προηγούμενα Μαθήματα. Τέλος, γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος του, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμε ὑπόψη μας ὅσα εἰπώθηκαν γιὰ τὰ εἰδικὰ βάρη καὶ τὶς σχετικὲς πυκνότητες στὸ Μάθημα 49.

**Πρόβλημα 1.** *Ὑπολογίστε τὸ βάρος μιᾶς σιδηροδοκοῦ μήκους 8 m ξέροντας ὅτι ἡ διατομή της ἔχει τὶς διαστάσεις ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα 54-α (εἰδικὸ βάρος τοῦ σιδήρου 7,8 kg/dm³).*




**Σχ. 54-α. Ὑπολογίστε τὸ βάρος τῆς δοκοῦ.**

Ἡ δοκὸς αὐτὴ ἔχει τὸ σχῆμα ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος. Τὸ ὕψος του εἶναι 8 m = 8 000 mm· ἡ βάση του μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ σὰν διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν δυὸ ὀρθογωνίων.

Διαστάσεις τοῦ μεγάλου ὀρθογωνίου:

300 mm καὶ 80 mm.

Διαστάσεις τοῦ μικροῦ ὀρθογωνίου:

$300 - (10 \times 2) = 280$ mm καὶ $80 - 10 = 70$ mm.

Ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς δοκοῦ:

$(300 \times 80) - (280 \times 70) = 24\,000 - 19\,600 = 4\,400$ mm².

Ὄγκος τῆς δοκοῦ:

$4\,400 \times 8\,000 = 35\,200\,000$ mm³ $= 35{,}2$ dm³.

Βάρος τῆς δοκοῦ:

$$35{,}2 \times 7{,}8 = 274{,}56 \simeq 275\ \text{kg}.$$

*Ἀπάντηση: Ἡ δοκὸς ζυγίζει 275 kg.*

**Πρόβλημα 2.** *Γιὰ νὰ γαλβανίσουν (δηλ. νὰ σκεπάσουν μὲ μιὰ στρώση τσίγκου) καὶ τὶς δυὸ ὄψεις μιᾶς λαμαρίνας, χρησιμοποίησαν 396 gr τσίγκο. Ἡ λαμαρίνα ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο 30 cm × 25 cm. Βρῆτε τί πάχος ἔχει ἡ στρώση τοῦ τσίγκου (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ τσίγκου 7,2).*

Ὄγκος τοῦ τσίγκου ποὺ χρησιμοποιήθηκε:

$$396 : 7{,}2 = 55\ \text{cm}^3.$$

Ἐπάνω στὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ ὄψεις τῆς λαμαρίνας ἡ στρώση τοῦ τσίγκου ἔχει σχῆμα ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ποὺ ὁ ὄγκος του εἶναι ἴσος μὲ

$$55 : 2 = 22{,}5\ \text{cm}^3.$$

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως αὐτοῦ τοῦ παραλληλεπιπέδου ἔχει ἐμβαδόν:

$$30 \times 25 = 750\ \text{cm}^2.$$

Τὸ ὕψος λοιπὸν τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι

$$22{,}5 : 750 = 0{,}03\ \text{cm} = 0{,}3\ \text{mm}.$$

*Ἀπάντηση: Ἡ στρώση τοῦ τσίγκου ἔχει πάχος 0,3 mm.*

**Πρόβλημα 3.** *Ὑπολογίστε τὸ βάρος ἑνὸς μολυβοσωλήνα ποὺ ἔχει μῆκος 3 m, ξέροντας ὅτι ἡ ἐσωτερική του διάμετρος εἶναι 10 mm καὶ τὸ πάχος του 3 mm (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ μολύβδου 11,4).*

Παρατηροῦμε ὅτι θὰ μπορούσαμε νὰ ὑπολογίσωμε τὸν ὄγκο τοῦ μολύβδου σὰν διαφορὰ τῶν ὄγκων δυὸ κυλίνδρων· οἱ ὑπολογισμοὶ γίνονται ὅμως πιὸ ἁπλοί, ἂν θεωρήσωμε τὸ σχῆμα τοῦ σωλήνα σὰν ἕνα πρῖσμα ποὺ ἔχει βάση τὴ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν δυὸ κύκλων καὶ ὕψος τὸ μῆκος τοῦ σωλήνα.

| | |
|---|---|
| Ἐσωτερικὴ ἀκτίνα: | $10\ \text{mm} : 2 = 5\ \text{mm}.$ |
| Ἐξωτερικὴ ἀκτίνα: | $5 + 3 = 8\ \text{mm}.$ |
| Ἐπιφάνεια τοῦ μεγάλου κύκλου: | $8^2 \times 3{,}14 \simeq 201\ \text{mm}^2.$ |
| Ἐπιφάνεια τοῦ μικροῦ κύκλου: | $5^2 \times 3{,}14 = 78{,}5\ \text{mm}^2.$ |
| Ἐπιφάνεια τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος: | $201 - 78{,}5 = 122{,}5\ \text{mm}^2.$ |

[ Ή, πιὸ σύντομα:
Ἐπιφάνεια τῆς βάσεως:
$=(8^2 \times 3{,}14)-(5^2 \times 3{,}14)=(8^2-5^2)\times 3{,}14$
$=(64-25)\times 3{,}14=39\times 3{,}14 \simeq 122{,}5\,\text{mm}^2$. ]
Ὄγκος τοῦ σωλήνα: $122{,}5 \times 3\,000 = 367\,500\,\text{mm}^3 \simeq 0{,}368\ \text{dm}^3$.
Βάρος τοῦ σωλήνα: $0{,}368 \times 11{,}4 = 4{,}195\,2\,\text{kg} \simeq 4{,}20\,\text{kg}$.

*Ἀπάντηση: Ὁ σωλήνας ζυγίζει περίπου 4,20 kg.*

*Ἀσκήσεις 1.* Ὑπολογίστε τὸ βάρος μιᾶς ράβδου ἀπὸ χαλκὸ ἡ ὁποία ἔχει πλάτος 15 mm, πάχος 3 mm καὶ μῆκος 2,50 m (εἰδικὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ 8,9 kg/dm$^3$).

*2.* Τί μῆκος ἀπὸ ἕνα στρογγυλὸ σίδερο μὲ διάμετρο 50 mm πρέπει νὰ πάρωμε γιὰ νὰ εἶναι τὸ βάρος του 19 kg; (Σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σιδήρου 7,8).

*3.* Ὑπολογίστε τὸ μῆκος ἀνὰ kg (δηλαδὴ τὸ μῆκος ποὺ ἔχει 1 κιλὸ) ἀπὸ ἕνα στρογγυλὸ σίδερο μὲ διάμετρο 10 mm.

*4.* Ὑπολογίστε τὸ βάρος ποὺ ἔχουν 1 000 m ἀτσαλόσυρμα μὲ διάμετρο 0,2 mm. Ξέροντας αὐτὸ τὸ βάρος καθὼς καὶ τὶς σχετικὲς πυκνότητες τοῦ ἀτσαλιοῦ (7,8) καὶ τοῦ χαλκοῦ (8,9), μπορεῖτε ἄραγε νὰ ὑπολογίσετε γρήγορα τὸ βάρος ποὺ ἔχει ἕνα χάλκινο σύρμα μὲ τὸ ἴδιο μῆκος (1 000 m) καὶ τὴν ἴδια διάμετρο (0,2 mm);

*5.* Τί βάρος ἔχουν ἀνὰ τρέχον μέτρο σιδερένιες λάμες τῶν $4 \times 10$ (δηλαδὴ μὲ διαστάσεις ὀρθογώνιας διατομῆς $4\,\text{mm} \times 10\,\text{mm}$), τῶν $4 \times 15$, τῶν $4 \times 20$, τῶν $4 \times 25$;

Ἀφοῦ βρῆτε τὴν πρώτη ἀπάντηση, πῶς θὰ μπορούσατε ἄραγε νὰ βρῆτε σύντομα τὶς τρεῖς ἄλλες;

*6.* Ἀπὸ ἕνα τετράγωνο σίδερο μὲ πλευρὰ 25 mm καὶ μῆκος 150 mm θέλετε νὰ φτιάξετε στὸν τόρνο ἕνα στρογγυλὸ σίδερο (ἕναν κύλινδρο). Ὑπολογίστε τὸ βάρος τοῦ μεγαλύτερου σὲ ὄγκο κυλίνδρου ποὺ μπορεῖτε νὰ φτιάξετε.

*7.* Ὑπολογίστε τὴν ἐπιφάνεια ἀνὰ kg ἑνὸς φύλλου ἀπὸ χαλκὸ τὸ ὁποῖο ἔχει πάχος 1 mm. Τὸ ἴδιο πρόβλημα γιὰ χάλκινα φύλλα μὲ πάχος 2 mm ἢ 4 mm. Τί παρατηρεῖτε;

*8.* Γιὰ τὴν κατασκευὴ μιᾶς κολόνας (ἑνὸς στύλου) ἀπὸ μπετὸν ἀρμὲ (ἀπὸ ὁπλισμένο σκυρόδεμα), ποὺ τὸ σχῆμα της εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ βάση $20\,\text{cm} \times 35\,\text{cm}$ καὶ ὕψος 2,55 m, χρησιμοποίησαν σίδερο ὄγκου ἴσου μὲ τὸ 1/50 τοῦ ὄγκου τῆς κολόνας. Ὑπολογίστε τὸ βάρος ποὺ θὰ ἔχη τὸ μπετὸν χωρὶς τὸ σίδερο, γνωρίζοντας ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότητα αὐτοῦ τοῦ μπετὸν εἶναι 2,5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

# ΝΟΜΙΣΜΑΤΑ. ΤΙΜΕΣ. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΛΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

## Μάθημα 55.

### Νομίσματα καὶ τιμές.

**1. Ἡ Δραχμή.** Γιὰ νὰ διευκολύνωμε τὶς ἀνταλλαγὲς ἐμπορευμάτων (ἀγαθῶν, ὅπως ἐπίσης λέμε), χρησιμοποιοῦμε ἕνα ἐνδιάμεσο ἐμπόρευμα, τὸ *χρῆμα* (τὸ *νόμισμα*).

Ἡ ποσότητα τοῦ χρήματος, ποὺ πρέπει νὰ δώσωμε γιὰ νὰ ἀποκτήσωμε ἕνα ἄλλο ἐμπόρευμα, λέγεται *ἀξία* ἢ *τιμὴ* τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ.

Στὴν Ἑλλάδα βασικὴ μονάδα χρήματος, σύμφωνα μὲ τὸ νόμο, εἶναι ἡ *δραχμὴ (δρχ)*. Ἡ δραχμὴ ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 *λεπτά*· ἄρα τὸ λεπτὸ εἶναι ἕνα ἑκατοστὸ τῆς δραχμῆς (0,01 δρχ).

**2. Νομίσματα.** Χρησιμοποιοῦνται δυὸ εἴδη νομίσματα: τὰ *μεταλλικὰ (κέρματα)* καὶ τὰ *χάρτινα (χαρτονομίσματα)*.

Τὸ Κράτος θέτει σὲ κυκλοφορία μεταλλικὰ νομίσματα (κέρματα) καμωμένα ἀπὸ ἕνα κράμα ἀλουμινίου μὲ νικέλιο. Ἡ Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος ἐκδίδει γιὰ λογαριασμὸ τοῦ Κράτους τὰ χαρτονομίσματα· ἡ ἀξία τους ἔχει γιὰ «κάλυμμα» (εἶναι δηλαδὴ ἐγγυημένη) ἀπὸ μιὰ ποσότητα χρυσοῦ, ποὺ φυλάγεται στὰ θησαυροφυλάκια τῆς Τράπεζας.

**3. Τιμὴ ἑνὸς ἐμπορεύματος.** Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς τιμῆς ἑνὸς ἐμπορεύματος ποὺ προμηθευόμαστε, ἔχομε νὰ λάβωμε ὑπόψη τὰ ἀκόλουθα δυὸ πράγματα (δυὸ στοιχεῖα, ὅπως ἐπίσης λέμε):

1ο. *Ποιά εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ ἐμπορεύματος (ἡ* *μοναδιαία τιμὴ* τοῦ ἐμπορεύματος.) Ἔτσι π.χ. πρέπει νὰ ξέρωμε ποιάν τιμὴ ἔχει ἕνα κιλὸ (ἢ μία ὀκὰ) ἀπὸ τὸ σίδερο ποὺ ἀγοράστηκε, ποιάν τιμὴ ἔχει τὸ τετραγωνικὸ μέτρο (ἢ ὁ τετραγωνικὸς πήχης) ἀπὸ τὸ οἰκόπεδο ποὺ τὴν ἀξία του θέλομε νὰ βροῦμε.

2ο. *Ποιά εἶναι ἡ ποσότητα τοῦ ἐμπορεύματος ποὺ ἀγοράστηκε.* Ἡ ποσότητα αὐτὴ μετρεῖται μὲ τὶς μονάδες τοῦ μετρικοῦ συστήματος ἢ ἄλλες μονάδες.

Νά τώρα μερικὰ παραδείγματα ὑπολογισμοῦ τιμῶν.

**4. Πρόβλημα.** *Ὁ μετρητὴς τοῦ γκαζιοῦ ( φωταερίου ) ἔδειχνε, στὶς 30 Νοεμβρίου 1956, 625 $m^3$ καί, στὶς 31 Ἰανουαρίου 1957, 757 $m^3$.*

*1ο. Πόσα θὰ πληρώση ὁ καταναλωτής, ἂν τὸ γκάζι ἔχη 2,50 δρχ τὸ $m^3$ καὶ οἱ διάφορες δευτερεύουσες δαπάνες ( ἐνοίκιο μετρητῆ, φόροι κτλ. ) εἶναι 56 δρχ ;*

*2ο. Ποιά εἶναι ἡ μέση ἡμερήσια δαπάνη ;*

1ο. Κατανάλωση: $757 - 625 = 132\,\mathrm{m}^3$.
Ἀξία τοῦ γκαζιοῦ: $2{,}50 \times 132 = 330$ δρχ.
Δευτερεύουσες δαπάνες: 56 δρχ.
Πληρωτέο ποσό: 386 δρχ.
2ο. Μέση ἡμερήσια δαπάνη: $386 : 62 \simeq 6{,}23$ δρχ
καὶ σὲ στρογγυλὸ ἀριθμό: *6,25 δρχ.*

**5. Πρόβλημα.** *Ὑπολογίστε τὴν τιμὴ ποὺ ἔχουν ἐλάτινα μαδέρια συνολικοῦ μήκους 26 m, ξέροντας ὅτι ἡ διατομή τους εἶναι 8 cm × 23 cm καὶ ὅτι πουλιοῦνται 2 360 δρχ τὸ κυβικὸ μέτρο.*

Ἐπειδὴ ἡ μοναδιαία τιμὴ τῶν μαδεριῶν μᾶς δίνεται μὲ τὸ κυβικὸ μέτρο ($1\ \mathrm{m}^3$), θὰ ἐκφράσωμε καὶ τὶς διαστάσεις τῶν μαδεριῶν σὲ m, ὥστε νὰ ἔχωμε ἔπειτα ἀμέσως τὸν ὄγκο τους σὲ $\mathrm{m}^3$.

Ὄγκος τῆς ξυλείας: $0{,}08 \times 0{,}23 \times 26 = 0{,}478\,4\ \mathrm{m}^3$.
Τιμὴ τῆς ξυλείας: $2\,360 \times 0{,}478 = 1\,128{,}08$ δρχ
καὶ σὲ στρογγυλὸ ἀριθμό: *1 128 δρχ.*

**6. Πρόβλημα.** *Ὑπολογίστε τὴν τιμὴ ἑνὸς φύλλου ἀπὸ τσίγκο* *ποὺ ἔχει πάχος 2 mm καὶ σχῆμα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις 35 cm × 28 cm. Σχετικὴ πυκνότητα τοῦ τσίγκου 7,2. Τιμὴ τοῦ τσίγκου 16 δρχ τὸ κιλό.*

Ἂς ἐκφράσωμε τὶς διαστάσεις σὲ δεκατόμετρα (dm), γιὰ νὰ ἔχωμε ἔπειτα ἀμέσως τὸν ὄγκο σὲ κυβικὰ δεκατόμετρα καὶ τὸ βάρος σὲ κιλά.

Ὄγκος τοῦ τσίγκου: $3{,}5 \times 2{,}8 \times 0{,}02 = 0{,}196$ $dm^3$.

Βάρος τοῦ τσίγκου: $0{,}196 \times 7{,}2 = 1{,}411\ 2$ kg.

Τιμὴ τοῦ φύλλου ἀπὸ τσίγκο: $16 \times 1{,}411\ 2 \simeq 22{,}58$ δρχ

καὶ σὲ στρογγυλὸ ἀριθμό: *22,60 δρχ.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Γιὰ νὰ φτιάξωμε 1 $m^3$ ἀμμοκονία, χρειαζόμαστε 0,30 $m^3$ σβησμένο ἀσβέστη καὶ 1 $m^3$ ἄμμο. Ξέροντας ὅτι σὲ 1 $m^3$ τοιχοδομὴ μὲ τοῦβλα τὸ κονίαμα πιάνει τὸ 1/3 τοῦ ὄγκου, ὑπολογίστε πόσο θὰ κοστίση ὁ ἀσβέστης καὶ πόσο ἡ ἄμμος ποὺ θὰ χρειαστοῦν γιὰ 75 $m^3$ τοιχοδομὴ (ὁ σβησμένος ἀσβέστης πουλιέται 280 δρχ τὸ κυβικὸ μέτρο καὶ ἡ ἄμμος 60 δρχ τὸ κυβικὸ μέτρο).

*2.* Ἕνας τοῖχος ἀπὸ τοῦβλα ποὺ ἔχει μῆκος 5 m, πάχος 22 cm, βάθος μέσα στὸ ἔδαφος 50 cm καὶ ὕψος ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἔδαφος 1,75 m, ἔχει ἁρμολογηθῆ στὴ μία του ὄψη. Ξέροντας ὅτι ἡ τοιχοδομὴ κοστίζει 210 δρχ τὸ $m^3$ καὶ ἡ ἁρμολόγηση 32 δρχ τὸ $m^2$, ὑπολογίστε τὸ κόστος τοῦ τοίχου.

*3.* Μιὰ τραπεζαρία 3,75 m × 4,50 m ἔχει μιὰ πόρτα ποὺ τὸ πλάτος της, μαζὶ μὲ τὴν κάσα, εἶναι 0,95 m. Ὑπολογίστε ποιά θὰ εἶναι ἡ συνολικὴ δαπάνη γιὰ τὸ παρκέτο τῆς τραπεζαρίας πρὸς 260 δρχ τὸ $m^2$ καὶ γιὰ τὸ ξύλινο σοβαντιμπὶ ὁλόγυρα πρὸς 18 δρχ τὸ τρέχον μέτρο.

*4.* Ἕνα δωμάτιο ἔχει διαστάσεις 4 m μῆκος καὶ 3 m πλάτος.

1ο. Τὰ δοκάρια τοῦ πατώματος εἶναι βαλμένα παράλληλα πρὸς τὴ διάσταση τοῦ πλάτους, μὲ ἀναλογία τριῶν δοκαριῶν σ' ἕνα μέτρο ἀπὸ τὸ μῆκος, καὶ μπαίνουν, ἀπὸ τὴν κάθε μεριά, 10 cm μέσα στὸν τοῖχο. Ὑπολογίστε τὸ ὁλικὸ μῆκος τῶν δοκαριῶν.

2ο. Τὰ δοκάρια ἔχουν ὀρθογώνια διατομὴ 6,5 cm × 18 cm καὶ ἡ τιμὴ τῆς ξυλείας τους εἶναι 1 850 δρχ τὸ κυβικὸ μέτρο. Ὑπολογίστε τὴν ὁλικὴ ἀξία τῶν δοκαριῶν.

*5.* Ἕνας σιδεράς, γιὰ νὰ ἐπισκευάση ἕνα σιδερένιο σκελετό, χρησιμοποίησε 4,50 m λάμα ποὺ ζύγιζε 2,730 kg ἀνὰ τρέχον μέτρο (kg/m), 0,75 m ἰσοσκελὲς γωνιακὸ μὲ βάρος 3,650 kg/m καὶ 1,25 m σίδερο σὲ σχῆμα πὶ μὲ βάρος 0,880 kg/m. Ποιά εἶναι ἡ ἀξία τῶν ὑλικῶν αὐτῶν, ὅταν τὰ 100 kg σίδερο κοστίζουν 850 δρχ;

## Μάθημα 56.

### Μέθοδος τῶν τριῶν.

**1. Εὐθεία μέθοδος τῶν τριῶν.— Πρόβλημα.** *Μιὰ μικρὴ σιδερένια ράβδος μήκους 12 cm ζυγίζει 140 gr. Πόσο ζυγίζουν 9 cm ἀπὸ τὴ ράβδο αὐτή;*

1ο. 12 cm ράβδος ζυγίζουν 140 gr

1 cm ράβδος ζυγίζει 12 φορὲς λιγότερο, δηλαδὴ

$$140 : 12 \simeq 11{,}67 \text{ gr}$$

9 cm ράβδος ζυγίζουν 9 φορὲς περισσότερο, δηλαδὴ

$$11{,}67 \text{ gr} \times 9 = \mathit{105{,}03\ gr.}$$

2ο. *Ἂς σημειώσωμε πὼς θὰ μπορούσαμε νὰ μὴν ἐκτελέσωμε τὴ διαίρεση τοῦ 140 διὰ τοῦ 12 καί, χρησιμοποιώντας κλάσματα, νὰ γράψωμε:*

$$1 \text{ cm ράβδος ζυγίζει } \frac{140}{12} \text{ gr}$$

$$9 \text{ cm ράβδος ζυγίζουν } \frac{140 \times 9}{12} \text{ gr.}$$

Ἔτσι, βλέπομε πὼς θὰ μπορούσαμε νὰ κάμωμε πρῶτα τὸν πολλαπλασιασμὸ

$$140 \times 9 = 1\,260$$

καὶ ἔπειτα τὴ διαίρεση

$$\frac{1\,260}{12} = \mathit{105\ gr.}$$

*Παρατήρηση.* Τὰ δυὸ ἀποτελέσματα (105,03 gr καὶ 105 gr), ποὺ βρήκαμε παραπάνω, παρουσιάζουν μιὰ μικρὴ διαφορά, ἐπειδὴ στὸ πρῶτο χρησιμοποιήσαμε ἕνα προσεγγιστικὸ πηλίκον ($140 : 12 \simeq 11{,}67$)· γι᾽ αὐτό, τὸ πρῶτο ἀποτέλεσμα εἶναι *προσεγγιστικό*, ἐνῶ τὸ δεύτερο (105 gr) εἶναι *ἀκριβές*. *Συμφέρει λοιπὸν ν᾽ ἀκολουθοῦμε τὸν δεύτερο τρόπο ἐργασίας.*

**2. Ἡ μέθοδος ποὺ μᾶς ὁδήγησε** νὰ γράψωμε τὸ ἐξαγόμενο μὲ τὴ μορφὴ $\left(\frac{140 \times 9}{12} \text{gr}\right)$, δηλαδὴ μιᾶς ἐκφράσεως ποὺ περιέχει τρεῖς ἀριθμούς, λέγεται *μέθοδος τῶν τριῶν*. Τὴ λένε μάλιστα καὶ *εὐθεία* μέθοδο τῶν τριῶν, ἐπειδή, ὅταν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δυὸ μεγέθη ποὺ θεωροῦμε — τὸ *μῆκος τῆς ράβδου* — γίνη 2, 3,... φορὲς μεγαλύτερο, τότε καὶ τὸ ἄλλο — τὸ *βάρος τῆς ράβδου* — γίνεται 2, 3,... φορὲς μεγαλύτερο.

**3. Ἁπλοποίηση τοῦ ὑπολογισμοῦ.** Γιὰ τὴ λύση τοῦ παραπάνω προβλήματος γράψαμε ὅτι τὸ ζητούμενο βάρος εἶναι ἴσο μὲ

$$\frac{140 \times 9}{12} \text{gr}.$$

Πρὶν κάμωμε ὅμως τὶς σημειωμένες πράξεις πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως, θὰ μπορούσαμε ν' ἁπλοποιήσωμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστή, πρῶτα διὰ τοῦ 3, ἔπειτα διὰ τοῦ 4:

$$\frac{140 \times 9}{12} = \frac{140 \times 3}{4} = 35 \times 3 = 105\,gr.$$

Συμφέρει λοιπόν, πρὶν ἐκτελέσωμε τὶς σημειωμένες πράξεις, νὰ ἐξετάσωμε μήπως τυχὸν μποροῦμε ν' ἁπλοποιήσωμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστή.

**4. Ἀντίστροφη μέθοδος τῶν τριῶν. — Πρόβλημα.** *Γιὰ νὰ ξεφορτώσουν ἕνα αὐτοκίνητο 6 ἐργάτες χρειάστηκαν 40 λεπτὰ τῆς ὥρας. Πόσο χρόνο θὰ χρειάζονταν 4 ἐργάτες γιὰ νὰ κάμουν τὴν ἴδια ἐργασία;*

6 ἐργάτες κάμουν τὴν ἐργασία σὲ 40 min,

1 ἐργάτης θὰ ἔκαμε τὴν ἐργασία σὲ χρόνο 6 φορὲς περισσότερο, δηλαδὴ σὲ

$$40 \text{ min} \times 6 = 240 \text{ min},$$

4 ἐργάτες θὰ ἔκαμαν τὴν ἐργασία σὲ χρόνο 4 φορὲς λιγότερο, δηλαδὴ σὲ

$$\frac{40\,\mathrm{min} \times 6}{4} = 60\,min.$$

Καὶ αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα τὸ βρήκαμε μὲ μιὰ *μέθοδο τῶν τριῶν*. Τὴ λένε μάλιστα καὶ *ἀντίστροφη* μέθοδο τῶν τριῶν, γιατί, ὅταν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δυὸ μεγέθη ποὺ θεωροῦμε — *ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν* — γίνη 2, 3,... φορὲς μαγαλύτερο, τότε τὸ ἄλλο — *ἡ χρονικὴ διάρκεια τῆς ἐργασίας* — γίνεται 2, 3,... φορὲς μικρότερο.

Ὅπως καὶ στὴν εὐθεία μέθοδο τῶν τριῶν, γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς ἀντίστροφης μεθόδου τῶν τριῶν, ἐξετάζομε πρῶτα μήπως μποροῦμε ν' ἁπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα, μὲ τὸ ὁποῖο ἐκφράζεται τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, δεύτερο ἐκτελοῦμε τὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ τελευταῖα, τὴ διαίρεση.

*Ἀσκήσεις*. *1.* Μιὰ τροχαλία κάμει 180 στροφὲς σὲ 70 sec. Πόσες στροφὲς θὰ κάμη σὲ 1 min 30 sec;

*2.* Τὰ 3/4 ἀπὸ ἕνα μῆκος εἶναι 45 m. Ποιό εἶναι τὸ μῆκος αὐτό;

*3.* Μιὰ βίδα (ἕνας κοχλίας) προχωρεῖ κατὰ 10,5 mm, ὅταν κάμη 7 στροφές. Πόσο θὰ προχωρήση, ὅταν θὰ κάμη 15 στροφές;

*4.* Σφυροκοπώντας ἕνα κομμάτι σίδερο ποὺ ζυγίζει 4,2 kg, ἕνας σιδερὰς μπορεῖ νὰ φτιάξη μιὰ ράβδο μήκους 35 cm. Τί βάρος θὰ ἔχη τὸ κομμάτι σίδερο ποὺ θὰ χρησιμοποιήση γιὰ νὰ φτιάξη ράβδο μὲ τὴν ἴδια διατομὴ ἀλλὰ μὲ μῆκος 60 cm;

*5.* Θεωροῦμε δυὸ μεταλλικὰ σύρματα, ἕνα ἀπὸ ἀλουμίνιο καὶ ἕνα ἀπὸ χαλκό.

1ο. Ἂν τὰ δυὸ σύρματα ἔχουν τὴν ἴδια διατομὴ καὶ τὸ ἴδιο μῆκος, πόσες φορὲς τὸ δεύτερο (τὸ χάλκινο) εἶναι βαρύτερο ἀπὸ τὸ πρῶτο; (Θὰ συμβουλευτῆτε τὸν πίνακα σχετικῶν πυκνοτήτων τοῦ Μαθήματος 49).

2ο. Ἡ ἴδια ἐρώτηση, στὴν περίπτωση ποὺ τὰ δυὸ σύρματα ἔχουν τὴν ἴδια διατομή, ἀλλὰ τὸ δεύτερο εἶναι δυὸ φορὲς μακρύτερο ἀπὸ τὸ πρῶτο.

3ο. Ἡ ἴδια ἐρώτηση, στὴν περίπτωση ποὺ τὰ δυὸ σύρματα ἔχουν τὸ ἴδιο μῆκος, ἀλλὰ τὸ δεύτερο ἔχει διάμετρο διπλάσια ἀπὸ τὴ διάμετρο τοῦ πρώτου.

*6.* Ἕνας ποδηλατιστὴς γιὰ νὰ κάμη μιὰ διαδρομὴ ἔχοντας ταχύτητα 18 km/h (δηλ. 18 χιλιόμετρα τὴν ὥρα) χρειάστηκε 35 min.

Πόσο χρόνο θὰ χρειαζόταν γιὰ νὰ κάμη τὴν ἴδια διαδρομὴ ἀλλὰ μὲ ταχύτητα 25 km/h ;

7. Δυὸ ὀρθογώνια ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν. Τὸ μῆκος τοῦ δεύτερου εἶναι τριπλάσιο ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ πρώτου. Πόσες φορὲς τὸ πλάτος τοῦ πρώτου θὰ εἶναι τότε μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ πλάτος τοῦ δεύτερου ;

8. Δυὸ κυλινδρικὰ κομμάτια ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο. Τὸ μῆκος τοῦ δεύτερου εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ πρώτου.

1ο. Ἡ διατομὴ τοῦ πρώτου πόσες φορὲς θὰ εἶναι τότε μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διατομὴ τοῦ δεύτερου ;

2ο. Ἡ διάμετρος τοῦ πρώτου πόσες φορὲς θὰ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διάμετρο τοῦ δεύτερου ;

## Μάθημα 57.

### Ποσοστά.

**Πρόβλημα 1.** *Πρόκειται ν' ἀγοράσωμε μιὰ ἠλεκτρικὴ κουζίνα, ποὺ ἔχει τιμὴ 3 550 δρχ, μὲ ἔκπτωση 5 δραχμὲς στὶς ἑκατὸ ( 5 %). Πόσα θὰ πληρώσωμε;*

Λέγοντας πὼς μᾶς κάμουν ἔκπτωση 5 %, ἐννοοῦμε ὅτι, γιὰ κάθε 100 δρχ ποὺ θὰ ἔπρεπε νὰ πληρώσωμε, στὴν πραγματικότητα θὰ πληρώσωμε 5 δρχ λιγότερο, δηλαδὴ 95 δρχ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ζητούμενο, θὰ ξανακάμωμε ἐδῶ τὴ σκέψη, ποὺ μᾶς ὁδήγησε στὴν εὐθεία μέθοδο τῶν τριῶν:

Στὶς 100 δρχ ἡ ἔκπτωση εἶναι 5 δρχ

στὴ 1 δρχ ἡ ἔκπτωση θὰ εἶναι $\frac{5}{100}$ δρχ

στὶς 3 550 δρχ ἡ ἔκπτωση θὰ εἶναι $\frac{5 \times 3\,550}{100} = 177{,}50$ δρχ.

Ἄρα τὸ ποσό, ποὺ πραγματικὰ θὰ πληρώσωμε, εἶναι

$$3\,550 - 177{,}50 = 3\,372{,}50 \text{ δρχ.}$$

*Ἀπ.: Γιὰ τὴν ἠλεκτρικὴ κουζίνα θὰ πληρώσωμε 3 372,50 δρχ.*

Σ' αὐτὸ τὸ παράδειγμα *ὑπολογίσαμε μιὰ ποσότητα—τὴν τιμὴ τῆς κουζίνας ὕστερα ἀπὸ τὴν ἔκπτωση— γνωρίζοντας τὴν ἀρχικὴ τιμὴ τῆς κουζίνας καὶ τὸ ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ τῆς ἐκπτώσεως.*

**Πρόβλημα 2.** *Γιὰ νὰ συγκολλήσωμε κομμάτια ἀπὸ ἀλουμίνιο, χρησιμοποιοῦμε ἕνα κρᾶμα ποὺ στὰ 37,5 kg του περιέχει 31,5 kg ἀλουμίνιο καὶ 6 kg πυρίτιο. Ὑπολογίστε τὰ ποσοστὰ στὰ ἑκατὸ γιὰ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ δυὸ μέταλλα ποὺ περιέχονται στὸ κρᾶμα αὐτό.*

Ἔχομε νὰ ὑπολογίσωμε χωριστὰ τὸ βάρος τοῦ ἀλουμινίου καὶ τοῦ πυριτίου ποὺ ὑπάρχουν σὲ 100 kg ἀπὸ τὸ κρᾶμα.

Ἐφαρμόζοντας τὴν εὐθεία μέθοδο τῶν τριῶν βρίσκομε:

βάρος ἀλουμινίου σὲ 100 kg κρᾶμα $= \frac{31{,}5 \text{ kg} \times 100}{37{,}5} = 84$ *kg*·

$$\text{βάρος πυριτίου σὲ 100 kg κρᾶμα} = \frac{6\,\text{kg} \times 100}{37{,}5} = \mathit{16\ kg}.$$

*Ἀπάντ.:* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Περιεκτικότητα τοῦ κράματος σὲ ἀλουμίνιο: 84}\,\%. \\ \textit{Περιεκτικότητα τοῦ κράματος σὲ πυρίτιο: 16}\,\%. \end{array} \right.$

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ ὑπολογίσαμε *ποσοστὰ στὰ ἑκατό*. Ἡ *περιεκτικότητα* ἑνὸς κράματος ἀπὸ δύο ἢ περισσότερα μέταλλα σὲ ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπὸ αὐτά, ἡ *ἀπόδοση* ἑνὸς εἴδους σταριοῦ σὲ ἀλεύρι καθὼς καὶ ἄλλες πληροφορίες τεχνικῆς φύσεως ἐκφράζονται σὲ *ποσοστὰ στὰ ἑκατὸ* (ἢ *τοῖς ἑκατόν*).

**Πρόβλημα 3.** *Ἕνα κομμάτι σίδερο χάνει, ὅταν τὸ κατεργαστῆ ὁ σιδεράς, 8 % ἀπὸ τὸ βάρος του. Πόσο βάρος ἀπὸ τὸ σίδερο αὐτὸ πρέπει νὰ πάρωμε, γιὰ νὰ ἔχωμε ὕστερα ἀπὸ τὴν κατεργασία του ἕνα κομμάτι μὲ βάρος 2,5 kg;*

Ἕνα ἀκατέργαστο κομμάτι, ποὺ ἔχει βάρος 100 kg, χάνει στὴν κατεργασία 8 kg· ἄρα ὕστερα ἀπὸ τὴν κατεργασία του ἔχει βάρος

$$100\ \text{kg} - 8\ \text{kg} = 92\ \text{kg}.$$

Ἐφαρμόζομε τώρα τὴν εὐθεία μέθοδο τῶν τριῶν καὶ βρίσκομε τὸ ζητούμενο βάρος τοῦ ἀκατέργαστου κομματιοῦ

$$\frac{100\ \text{kg} \times 2{,}5}{92} \simeq 2{,}72\ \text{kg}.$$

*Ἀπάντηση: Βάρος τοῦ ἀκατέργαστου κομματιοῦ 2,72 kg.*

Σ' αὐτὸ τὸ παράδειγμα *ὑπολογίσαμε μιὰ ποσότητα — τὸ βάρος τοῦ ἀκατέργαστου κομματιοῦ — γνωρίζοντας τί μένει ἀπὸ αὐτήν, ὅταν τῆς ἀφαιρέσωμε ἕνα δοσμένο ποσοστὸ στὰ ἑκατό.*

*Ἀσκήσεις. 1.* Ξέροντας ὅτι 350 kg στάρι δίνουν, ἀφοῦ ἀλεστοῦν, 273 kg καθαρὸ ἀλεύρι (δηλαδὴ ἀλεύρι χωρὶς πίτουρα), βρῆτε πόσο βάρος ἀλεύρι θὰ πάρωμε ἀπὸ 100 kg στάρι.

*2.* Σ' ἕνα μηχανουργεῖο ἐργάζονται 15 τορναδόροι, 4 τρυπανιστὲς καὶ 1 φρεζαδόρος. Τί ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ ἀπὸ τὸν συνολικὸ ἀριθμὸ ἐργαζομένων ἀντιστοιχεῖ στὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς τρεῖς παραπάνω εἰδικότητες;

*3.* Ἕνας ἔμπορος πουλώντας ἐμπόρευμα ποὺ τοῦ κόστισε 630 δρχ κέρδισε 215 δρχ. Πόσο κέρδισε στὰ ἑκατό;

*4.* Ένας άγοραστής πέτυχε στις άγορές του έκπτωση 15 % καί πλήρωσε 867 δρχ. Ύπολογίστε ολόκληρη τήν έκπτωση πού τοϋ έκαμαν (μέ άλλα λόγια: πόσα λιγότερο άπό τό κανονικό πλήρωσε).

*5.* Πάρτε ένα χαρτόνι, πού τό σχήμα του είναι ένα τετράγωνο, καί συνδέστε μέ εύθεϊες τά μέσα κάθε δυό συνεχόμενων πλευρών του. Ύστερα, κόψτε τό χαρτόνι άκολουθώντας τά τέσσερα εύθύγραμμα τμήματα πού χαράξατε.

1ο. Τί ποσοστό στά έκατό τοϋ άρχικοϋ χαρτονιοϋ άντιπροσωπεύουν όλα μαζί τά τέσσερα τριγωνικά άποκόμματα;

2ο. Τί κλάσμα τής άρχικής έπιφάνειας τοϋ χαρτονιοϋ είναι ή έπιφάνεια πού έμεινε ύστερα άπό τό κόψιμο πού κάματε;

*6.* Ένα όρθογώνιο φύλλο λαμαρίνας έχει διαστάσεις

$$500 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}.$$

Κόβετε ολόγυρα μιά λουρίδα πλάτους 10 mm. Ύπολογίστε τί ποσοστό στά έκατό τής λαμαρίνας άντιπροσωπεύει ή λουρίδα, πού κόψατε.

*7.* Σε μιά τετράγωνη πλάκα άπό χαλκό μέ πλευρά 10 cm άνοίγετε μιά κυκλική τρύπα διαμέτρου 10 mm. Πόσα στά έκατό έλαττώθηκε τό βάρος τής πλάκας;

Ή ίδια έρώτηση γιά τήν περίπτωση πού άνοίγετε δύο κυκλικές τρύπες ή τρεϊς κυκλικές τρύπες μέ διάμετρο 10 cm.

*8.* Χαράξτε δυό περιφέρειες μέ τό ίδιο κέντρο (δυό όμόκεντρες περιφέρειες, όπως λέμε) έτσι, πού ή άκτίνα τής μιάς νά είναι διπλάσια άπό τήν άκτίνα τής άλλης. Ύπολογίστε τί ποσοστό στά έκατό άντιπροσωπεύει ή έπιφάνεια πού περιέχεται μεταξύ τών δυό περιφερειών, όταν τή συγκρίνετε 1ο μέ τήν έπιφάνεια τοϋ μεγάλου κύκλου, 2ο μέ τήν έπιφάνεια τοϋ μικροϋ κύκλου.

*9.* Θέλετε νά φτιάξετε 48 κυλινδρικά δοχεϊα, μέ διάμετρο βάσεων 30 cm καί ύψος 50 cm, άπό λαμαρίνα πού τά όρθογώνια φύλλα της έχουν διαστάσεις 1,00 m × 2,00 m. Γιά κάθε δοχεϊο θά λογαριάσετε, γιά τά θηλυκώματα, 2 cm παραπάνω μήκος άκτίνας βάσεων. 1ο. Έκλέγοντας τώρα τόν πιό οίκονομικό τρόπο γιά τό κόψιμο τών φύλλων τής λαμαρίνας βρήτε πόσα φύλλα θά χρειαστήτε γιά τά 48 δοχεϊα. 2ο. Άν ή άξία ένός φύλλου λαμαρίνας είναι 130 δρχ, τί κόστος σέ λαμαρίνα άναλογεϊ στό καθένα άπό τά 48 δοχεϊα; 3ο. Τί ποσοστό, στά έκατό, συνολική άπώλεια λαμαρίνας θά έχετε άπό τά άποκόμματα;

# Προβλήματα γιὰ ἀνασκόπηση καὶ ἐπανάληψη.

## 1. Ἀριθμητικὴ καὶ Γεωμετρία.

*1.* Ἡ κλίμακα ἑνὸς χάρτη εἶναι 1/80 000. 1ο. Ὑπολογίστε τὴν ἀπόσταση ἐπάνω στὸ ἔδαφος δυὸ σημείων ποὺ ἔχουν ἀπόσταση 6,5 mm ἐπάνω στὸ χάρτη. 2ο. Ἕνα χωράφι μὲ σχῆμα ὀρθογώνιο καὶ διαστάσεις ἐπάνω στὸ χάρτη 2 mm × 2,5 mm πληρώθηκε 2 550 δρχ. ὑπολογίστε τί κόστισε τὸ στρέμμα ( 1 στρέμμα = 1 000 m²).

*2.* Οἱ τροχοὶ ἑνὸς ποδηλάτου ἔχουν διάμετρο 0,72 m καὶ ἔκαμαν 150 στροφὲς στὸ λεπτὸ ( 150 στρ/min ). Ποιό εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς ποὺ διέτρεξε ὁ ποδηλατιστὴς σὲ 1 h 20 min ;

*3.* Μιὰ δεξαμενὴ εἶναι ἄδεια κατὰ τὰ 4/5 της. Μιὰ δυνατὴ βροχὴ τὴ γέμισε ὡς τὰ 5/6 της. Ξέροντας ὅτι γιὰ νὰ γεμίση ὁλότελα χρειάζονται ἀκόμα 180 λίτρα, ὑπολογίστε σὲ λίτρα πόσο νερὸ πῆρε ἀπὸ τὴ βροχή.

*4.* Ἕνα δωμάτιο 4 m × 3 m ἔχει ὕψος 3,2 m· στὴν ὀροφή του ὑπάρχει ἕνας γυάλινος φεγγίτης 2 m × 2 m. Ξέροντας 1ο ὅτι μὲ 1 kg χρῶμα βάφομε ἐπιφάνεια 8 m² καὶ 2ο ὅτι πρέπει ν' ἀφαιρέσωμε 25 % ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῶν τοίχων γιὰ πόρτες καὶ παράθυρα, ὑπολογίστε πόσα κιλὰ χρῶμα θὰ χρειαστοῦν, γιὰ νὰ βαφοῦν ( ἐσωτερικὰ ) οἱ τοῖχοι καὶ ἡ ὀροφή.

*5.* Οἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μετρήθηκαν καὶ βρέθηκαν 0,45 m × 0,35 m × 0,29 m. Παρατηρήθηκε ὅμως ἔπειτα πὼς τὸ ξύλινο μέτρο, μὲ τὸ ὁποῖο ἔγινε ἡ μέτρηση, ἦταν 5 mm κοντύτερο ἀπὸ τὸ σωστό. Βρῆτε τὸν πραγματικὸ ( τὸν σωστὸ ) ὄγκο τοῦ παραλληλεπιπέδου.

*6.* Ἕνα τετράγωνο σίδερο τῶν 40 ( δηλ. μὲ 40 mm πλευρὰ τῆς τετράγωνης διατομῆς του ) λεπτύνεται μὲ τράβηγμα περνώντας τελικὰ ἀπὸ ἕνα τετράγωνο ἄνοιγμα ( μιὰν τετράγωνη ὀπὴ ) πλευρᾶς 35 mm. Ἂν τὸ ἀρχικὸ μῆκος τοῦ σίδερου ἦταν 2 m, πόσο θὰ εἶναι τὸ μῆκος του ὕστερα ἀπὸ τὸ τράβηγμα ; ( Παραδεχόμαστε πὼς ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σίδερου δὲν ἄλλαξε μὲ τὸ τράβηγμα ).

*7.* Πόσο μῆκος χάλκινο σύρμα διαμέτρου 1,6 mm μποροῦμε νὰ φτιάξωμε μὲ 50 kg χαλκό ; ( Ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,9 ). Καὶ πόσο μῆκος σύρμα ἀπὸ τὴν ἴδια ποσότητα χαλκὸ μποροῦμε νὰ φτιάξωμε, ὅταν ἡ διάμετρός του εἶναι ἡ μισὴ ἀπὸ τὴν παραπάνω ( δηλαδὴ 0,8 mm ) ;

*8.* Ἕνα σύρμα ἀπὸ σιδηρονικέλιο μὲ διάμετρο 55 μ ( δηλαδὴ 55 μικρὰ = 0,055 mm) ζυγίζει 18 gr ἀνὰ χιλιόμετρο μῆκος. Ποιά εἶναι ἡ σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σιδηρονικελίου;

*9.* 1ο. Ἡ τιμὴ ἑνὸς ἐμπορεύματος αὐξήθηκε κατὰ 25 % μέσα σὲ ἕνα ἔτος. Μέσα σ' ἕνα δεύτερο ἔτος αὐξήθηκε πάλι κατὰ τὰ 25 % τῆς αὐξημένης τιμῆς του. Ποιά εἶναι ἡ τελικὴ αὔξηση στὰ ἑκατὸ τῆς τιμῆς τοῦ ἐμπορεύματος μέσα στὰ δυὸ ἔτη;

2ο. Ἕνα μηχάνημα χάνει κάθε ἔτος ἀπὸ τὴν ἀξία του τὰ 10 % τῆς ἀξίας ποὺ εἶχε στὴν ἀρχὴ τοῦ ἔτους. Ποιά εἶναι ἡ τελικὴ ἐλάττωση στὰ ἑκατὸ τῆς ἀξίας του ὕστερα ἀπὸ δυὸ ἔτη;

*10.* Στὴ μηχανικὴ ἐπεξεργασία ἑνὸς κομματιοῦ ἔχει προβλεφθῆ χρόνος 15 min γιὰ νὰ τὸ κατεργαστῆ ὁ τεχνίτης καὶ 2,5 min γιὰ τὸ μοντάρισμα καὶ τὸ ξεμοντάρισμα. Ἂν ἕνας τεχνίτης κέρδισε 10 % ἀπὸ τὴ χρονικὴ διάρκεια τῆς κατεργασίας καὶ 20 % ἀπὸ τὴν ἄλλη, τότε πόσο στὰ ἑκατὸ θὰ εἶναι τὸ κέρδος του ἀπὸ τὸ συνολικὸ χρόνο ποὺ προβλέφτηκε;

*11.* Ἕνας σιδερὰς ἀγόρασε ἀπὸ τὸν προμηθευτή του τὰ ἀκόλουθα ὑλικά: 1ο 25 στρογγυλὰ σίδερα τῶν 20 (δηλαδὴ μὲ διάμετρο 20 mm) καὶ μὲ μῆκος 6 m τὸ καθένα, 2ο 17 λάμες τῶν $40 \times 20$ (δηλαδὴ μὲ ὀρθογώνια διατομὴ $40\,mm \times 20\,mm$) καὶ μὲ μῆκος 5,50 τὴν καθεμιά. Ὑπολογίστε τὴν ὁλικὴ ἀξία τῶν ὑλικῶν αὐτῶν, ξέροντας ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ σιδήρου εἶναι 7,20 δρχ τὸ κιλὸ καὶ ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότητά του εἶναι 7,8.

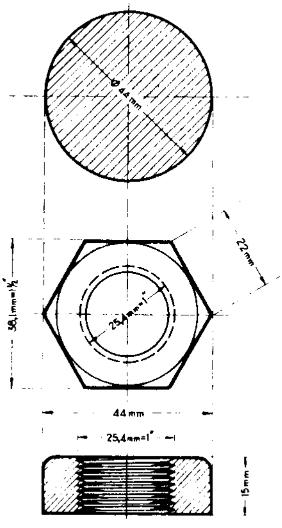
*12.* Ἕνας χάρακας ἀπὸ ἀλουμίνιο ἔχει τετράγωνη διατομὴ μὲ πλευρὰ 8 mm. Τὸ μῆκος του εἶναι 18 cm καὶ τὸ βάρος του 17 gr. Βρῆτε ἂν ὁ χάρακας αὐτὸς εἶναι κούφιος (κοῖλος) ἢ ὄχι.

*13.* Ἕνας τοῖχος ἀπὸ τοῦβλα ἔχει 10,80 m μῆκος, 2,40 m ὕψος καὶ 0,34 m πάχος. Ὑπολογίστε: 1ο τὸν ἀριθμὸ τῶν τούβλων ποὺ χρειάστηκαν γιὰ νὰ χτιστῆ, λογαριάζοντας 650 τοῦβλα στὸ κυβικὸ μέτρο (ἀνὰ 1 $m^3$) καὶ 5 % παραπάνω γιὰ τὴ φθορά, 2ο τὴν ἀξία αὐτῶν τῶν τούβλων, ἂν κοστίζουν 270 δρχ ἡ χιλιάδα.

*14.* Ὑπολογίστε πόσο ἀκαθάριστο μαγειρικὸ ἁλάτι θὰ πάρετε μὲ ἐξάτμιση ἑνὸς τόννου θαλασσινοῦ νεροῦ, ξέροντας πὼς τὸ νερὸ αὐτὸ περιέχει 2,8 % ἀπὸ τὸ βάρος του καθαρὸ ἁλάτι καὶ ὅτι τὸ ἀκαθάριστο ἁλάτι περιέχει 95 % ἀπὸ τὸ βάρος του καθαρὸ ἁλάτι (1 τόννος = 1 000 kg).

*15.* Ἔχετε 40 kg κόλληση μὲ περιεκτικότητα σὲ καλάϊ (κασσίτερο) 33 %. Τὴ λειώνετε μὲ 10 kg μολύβι. Ποιὸ εἶναι τὸ ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ (ποιά εἶναι ἡ ἑκατοστιαία ἀναλογία) τοῦ καλαϊοῦ στὴ νέα κόλληση;

*16.* Ἕνα μηχανουργεῖο ἔχει νὰ κατασκευάση 5 000 ἑξαγωνικὰ παξιμάδια ἀπὸ στρογγυλὸ σίδερο τῶν 44 (δηλ. μὲ διάμετρο 44 mm). Κάθε παξιμάδι ἔχει ἐξωτερικὴ διάμετρο περιχοχλίου 25,4 mm = 1″ καὶ τὶς ἄλλες διαστάσεις του ὅπως τὶς δείχνει τὸ διπλανὸ σχῆμα. 1ο. Ὑποθέτοντας ὅτι στὸ κόψιμο κάθε παξιμαδιοῦ χάνονται 2 mm μῆκος ἀπὸ τὸ στρογγυλὸ σίδερο, ὑπολογίστε πόσα τρέχοντα μέτρα στρογγυλὸ σίδερο θὰ χρειαστοῦν γιὰ τὰ 5 000 παξιμάδια. 2ο. Πόσο θὰ κοστίση, μόνο σὲ σίδερο, ἡ κατασκευή, ἂν 1 kg σίδερο κοστίζη 8 δρχ (σχετικὴ πυκνότητα τοῦ σιδήρου 7,8). 3ο. Πόσο σίδηρο στὰ ἑκατὸ χάνομε κόβοντας, ἑξαγωνίζοντας καὶ τρυπώντας τὸ στρογγυλὸ σίδερο. (Διάμετρος τῆς τρύπας 25,4 mm· δὲν θὰ λογαριαστῆ ἡ ἀπώλεια σὲ σίδηρο ἀπὸ τὸ στρογγύλεμα τῶν γωνιῶν στὴν ἐπάνω ὄψη τῶν παξιμαδιῶν.)




Σχ. Διαστάσεις τῶν παξιμαδιῶν.

## 2. Γεωμετρία.

*1.* Σχεδιάστε, σὲ κλίμακα 1 : 1 000, ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο, ξέροντας ὅτι ἔχει περίμετρο 120 m καὶ βάση 30 m. Ὕστερα, ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ποὺ σχεδιάσατε.

*2.* Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ = 6 cm, ΒΓ = 8 cm καὶ ΓΑ = 7 cm. Ὕστερα, μ᾽ ἕνα μοιρογνωμόνιο μετρῆστε τὶς γωνίες του καὶ ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμά τους. Τέλος, χαράξτε τὴν περιφέρεια ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὶς 3 κορυφές του.

*3.* Σχεδιάστε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ ποὺ νὰ ἔχῃ βάση ΒΓ = 8 cm καὶ ὕψος ΑΗ = 5,5 cm. Ὕστερα, ἀφοῦ μετρήσετε τὴ γωνία του $\widehat{A}$, ὑπολογίστε τὶς γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ στὴ βάση. Τέλος ὑποθέστε ὅτι τὸ τρίγωνο αὐτὸ παριστάνει, σὲ κλίμακα 1 : 500, ἕνα γήπεδο καὶ ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γηπέδου σὲ στρέμματα (1 στρέμμα = 1 000 m²).

*4.* Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο ποὺ μιὰ πλευρά του ἔχει μῆκος 10 cm καὶ οἱ δυὸ παρακείμενες (δηλ. διπλανὲς) σ᾽ αὐτὴν γωνίες εἶναι ἴσες μὲ 120° καὶ 30° ἀντιστοίχως. Ὕστερα χαράξτε τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου καὶ μετρῆστε τὰ μήκη τους. Τέλος, ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

*5.* Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ νὰ ἔχῃ μῆκος διαγωνίου 6 cm καὶ τὴν ὀξεία γωνία τῶν δυὸ διαγωνίων του ἴση μὲ 60°. Ὕστερα μετρῆστε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του καὶ ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

*6.* Σχεδιάστε ἕνα ῥόμβο μὲ διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm ἀντιστοίχως. Ὕστερα μετρῆστε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του. Ὑπολογίστε καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

*7.* Χαράξτε μιὰ γωνία $\widehat{X A \Psi} = 60^\circ$. Ἐπάνω στὴν ἡμιευθεία ΑΧ πάρτε τὸ τμῆμα ΑΒ = 6 cm καὶ κατεβάστε ἀπὸ τὸ σημεῖο Β τὴν κάθετο στὴν ΑΨ· ἔστω Ο τὸ πόδι τῆς καθέτου. Σχεδιάστε τώρα τὸ ῥόμβο ΑΒΓΔ ποὺ ἔχει τὸ Ο γιὰ σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων του καὶ ποὺ μιὰ πλευρά του εἶναι ἡ ΑΒ. Ὕστερα: 1ο μετρῆστε τὶς γωνίες τοῦ ῥόμβου καὶ τὰ μήκη τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ, 2ο ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδόν του.

*8.* Μὲ κέντρο ἕνα σημεῖο Ο καὶ ἀκτίνα 6 cm χαράξτε μιὰ περιφέρεια. Ὕστερα, σχεδιάστε μιὰν ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = 60^\circ$ καὶ μετρῆστε τὴν ἀντίστοιχη χορδὴ ΑΒ. Τέλος κατεβάστε ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς περιφέρειας τὴν κάθετο στὴ χορδὴ καὶ πῆτε μιὰν ἰδιότητα αὐτῆς τῆς καθέτου.

*9.* Ἕνας στίβος γιὰ δρομεῖς περιορίζεται ἀπὸ δυὸ παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ τὰ συνδέουν δυὸ ἡμιπεριφέρειες. Τὸ καθένα ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἔχει μῆκος 0,75 km καὶ ἡ ἀκτίνα τῶν ἡμιπεριφερειῶν εἶναι 75 m. 1ο. Σχεδιάστε αὐτὸν τὸ στίβο σὲ κλίμακα 1/15 000. 2ο. Ὑπολογίστε τὸ πραγματικὸ μῆκος τοῦ περιγράμματος τοῦ στίβου (μὲ ἄλλα λόγια, τὴν περίμετρό του). 3ο. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ στίβου, πρῶτα σὲ m², ὕστερα σὲ στρέμματα.

*10.* Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις ΑΒ = 8 cm καὶ ΑΒ = 5 cm. Ὕστερα, χαράξτε τὶς διχοτόμους τῶν 4 γωνιῶν του. Ἔστω Μ τὸ σημεῖο ὅπου κόβονται οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{\Delta}$ καὶ $\widehat{A}$, Ν τὸ σημεῖο ὅπου κόβονται οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$, Ρ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ καὶ Π τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$. 1ο. Τί μέγεθος ἔχουν οἱ γωνίες $\widehat{AM\Delta}$, $\widehat{B\Pi A}$, $\widehat{BN\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma P A}$; 2ο. Σὲ ποιά σημεῖα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καταλήγουν ἐκεῖνα τὰ ὕψη τῶν τριγώνων ΔΜΑ, ΑΠΒ, ΒΝΓ καὶ ΓΡΔ ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὶς κορυφὲς Μ, Π, Ν καὶ Ρ ἀντιστοίχως; Καὶ γιατί; Χαράξτε τὰ ὕψη αὐτά. 3ο. Τί μήκη ἔχουν, σὲ cm, τὰ ὕψη αὐτά; Ἄραγε μπορεῖτε ἀπ' αὐτὰ τὰ μήκη νὰ βρῆτε μὲ ὑπολογισμὸ τὶς ἀποστάσεις ΜΝ καὶ ΠΡ;

*11.* Χαράξτε ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰ 52 mm. Ὕστερα, χρησιμοποιώντας κανόνα καὶ διαβήτη, νὰ προεκτείνετε τὶς πλευρὲς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κατὰ τὰ μήκη ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′, ΑΑ′ ἀντιστοίχως, πού εἶναι ἴσα μὲ τὰ μισὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. 1ο. Ἂν ἑνώσετε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα κατὰ σειρὰ τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′, Α′, τί τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ θὰ προκύψη; 2ο. Χαράξτε τὶς διαγωνίους του Α′Γ′ καὶ Β′Δ′ καὶ ἔστω Ο′ τὸ σημεῖο ὅπου κόβονται. Νὰ συγκρίνετε τὰ τμήματα Ο′Α′, Ο′Β′, Ο′Γ′, Ο′Δ′.

*12.* Νὰ σχεδιάσετε ἕνα τετράγωνο καὶ νὰ προεκτείνετε κάθε πλευρά του, καὶ πρὸς τὶς δυὸ μεριές, πέρα ἀπὸ τὶς κορυφές, κατὰ ἕνα μῆκος ἴσο μὲ τὸ μισὸ τῆς διαγωνίου. Ὕστερα, ἑνῶστε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα κατὰ σειρὰ τὰ 8 ἄκρα τῶν προεκτάσεων πού χαράξατε. Τί σχῆμα θὰ προκύψη; Ἔχει τὸ σχῆμα αὐτὸ ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες καὶ ὅλες τὶς γωνίες του ἴσες; Νὰ χρησιμοποιήσετε αὐτὴν τὴν κατασκευὴ γιὰ νὰ σχεδιάσετε ἕνα κανονικὸ ὀκτάγωνο μὲ πλευρὲς 4 cm.

*13.* Σχεδιάστε ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ξέροντας τὶς δυὸ βάσεις του ΑΒ = 80 mm καὶ ΓΔ = 30 mm, τὴ γωνία $\widehat{A} = 90^\circ$ καὶ τὴν πλευρὰ ΑΔ = 40 mm. Ὕστερα: 1ο. Μετρῆστε τὴν πλευρὰ ΒΓ. 2ο. Ἑνῶστε τὰ μέσα κάθε δυὸ συνεχόμενων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου καὶ μελετῆστε τὸ τετράπλευρο πού θὰ σχηματιστῆ, δηλαδὴ ἐξετάστε ποιά εἶναι ἡ σχετικὴ θέση κάθε πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρά του, τί μῆκος ἔχουν αὐτὲς οἱ πλευρές του καὶ ποιά εἶναι τὰ μεγέθη τῶν γωνιῶν του. 3ο. Χαράξτε τὴ διαγώνιο τοῦ τετραπλεύρου, ἡ ὁποία ξεκινᾶ ἀπὸ τὸ μέσο τῆς πλευρᾶς ΑΔ τοῦ τραπεζίου. Ποιά εἶναι ἡ σχετικὴ θέση αὐτῆς τῆς διαγωνίου πρὸς τὶς δυὸ βάσεις τοῦ τραπεζίου; Νὰ συγκρίνετε τὸ μῆκος της μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου. 4ο. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

*14.* Μὲ κέντρο ἕνα σημεῖο Ο καὶ μὲ ἀκτίνα 42 mm χαράξτε μιὰν περιφέρεια. Σὲ ἀπόσταση 25 mm ἀπὸ τὸ κέντρο πάρτε ἕνα σημεῖο Μ καὶ συνδέστε το εὐθύγραμμα μὲ 5 ὁποιαδήποτε σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε τῆς περιφέρειας. Ὕστερα, σημειῶστε τὰ πέντε σημεῖα πού εἶναι τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, ΜΔ, ΜΕ. Τώρα, 1ο πάρτε 3 ἀπὸ τὰ 5 αὐτὰ σημεῖα, χαράξτε τὴν περιφέρεια πού περνᾶ ἀπὸ αὐτὰ καὶ ἐπαληθεῦστε ὅτι περνᾶ καὶ ἀπὸ τὰ 2 ἄλλα (ὅτι, ἑπομένως, τὰ 5 μέσα βρίσκονται ἐπάνω σὲ μιὰ καὶ τὴν ἴδια περιφέρεια)· 2ο ποῦ βρίσκεται τὸ κέντρο τῆς περιφέρειας αὐτῆς καὶ ποιά εἶναι ἡ ἀκτίνα της;

## Πίνακας τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 ὡς 100.

| ΑΡΙΘΜΟΙ | ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ | ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ | ΑΡΙΘΜΟΙ | ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ | ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1,000 | **51** | 2 601 | 7,141 |
| **2** | 4 | 1,414 | **52** | 2 704 | 7,211 |
| **3** | 9 | 1,732 | **53** | 2 809 | 7,280 |
| **4** | 16 | 2,000 | **54** | 2 916 | 7,348 |
| **5** | 25 | 2,236 | **55** | 3 025 | 7,416 |
| **6** | 36 | 2,449 | **56** | 3 136 | 7,483 |
| **7** | 49 | 2,646 | **57** | 3 249 | 7,550 |
| **8** | 64 | 2,828 | **58** | 3 364 | 7,616 |
| **9** | 81 | 3,000 | **59** | 3 481 | 7,681 |
| **10** | 100 | 3,162 | **60** | 3 600 | 7,746 |
| **11** | 121 | 3,317 | **61** | 3 721 | 7,810 |
| **12** | 144 | 3,464 | **62** | 3 844 | 7,874 |
| **13** | 169 | 3,606 | **63** | 3 969 | 7,937 |
| **14** | 196 | 3,742 | **64** | 4 096 | 8,000 |
| **15** | 225 | 3,873 | **65** | 4 225 | 8,062 |
| **16** | 256 | 4,000 | **66** | 4 356 | 8,124 |
| **17** | 289 | 4.123 | **67** | 4 489 | 8,185 |
| **18** | 324 | 4,243 | **68** | 4 624 | 8,246 |
| **19** | 361 | 4,359 | **69** | 4 761 | 8,307 |
| **20** | 400 | 4,472 | **70** | 4 900 | 8,367 |
| **21** | 441 | 4,583 | **71** | 5 041 | 8,426 |
| **22** | 484 | 4,690 | **72** | 5 184 | 8.485 |
| **23** | 529 | 4,796 | **73** | 5 329 | 8,544 |
| **24** | 576 | 4,899 | **74** | 5 476 | 8,602 |
| **25** | 625 | 5,000 | **75** | 5 625 | 8,660 |
| **26** | 676 | 5,099 | **76** | 5 776 | 8,718 |
| **27** | 729 | 5,196 | **77** | 5 929 | 8,775 |
| **28** | 784 | 5,292 | **78** | 6 084 | 8,832 |
| **29** | 841 | 5,385 | **79** | 6 241 | 8,888 |
| **30** | 900 | 5,477 | **80** | 6 400 | 8,944 |
| **31** | 961 | 5,568 | **81** | 6 561 | 9,000 |
| **32** | 1 024 | 5,657 | **82** | 6 724 | 9,055 |
| **33** | 1 089 | 5,745 | **83** | 6 889 | 9,110 |
| **34** | 1 156 | 5,831 | **84** | 7 056 | 9,165 |
| **35** | 1 225 | 5,916 | **85** | 7 225 | 9,220 |
| **36** | 1 296 | 6,000 | **86** | 7 396 | 9,274 |
| **37** | 1 369 | 6,083 | **87** | 7 569 | 9,327 |
| **38** | 1 444 | 6,164 | **88** | 7 744 | 9,381 |
| **39** | 1 521 | 6,245 | **89** | 7 921 | 9,434 |
| **40** | 1 600 | 6,325 | **90** | 8 100 | 9,487 |
| **41** | 1 681 | 6,403 | **91** | 8 281 | 9,539 |
| **42** | 1 764 | 6,481 | **92** | 8 464 | 9,592 |
| **43** | 1 849 | 6,557 | **93** | 8 649 | 9,644 |
| **44** | 1 936 | 6,633 | **94** | 8 836 | 9,695 |
| **45** | 2 025 | 6,708 | **95** | 9 025 | 9,747 |
| **46** | 2 116 | 6,782 | **96** | 9 216 | 9,798 |
| **47** | 2 209 | 6,856 | **97** | 9 409 | 9,849 |
| **48** | 2 304 | 6,928 | **98** | 9 604 | 9,899 |
| **49** | 2 401 | 7,000 | **99** | 9 801 | 9,950 |
| **50** | 2 500 | 7,071 | **100** | 10 000 | 10,000 |

# ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

(Οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρονται σὲ σελίδες)

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΤΕΧΝΑΙ "ΑΣΠΙΩΤΗ - ΕΛΚΑ" Α. Ε.