ΙΩ. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ
ΚΑΘΗΓ. ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΧΡ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤ. ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠ. ΑΘΗΝΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΣΥΜΦΩΝΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΝΕΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ
Ἀντίτυπα 2.000

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1932—1937

Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως $\frac{46645/15887}{23/8/32}$

Τιμᾶται μετὰ βιβλιοσήμου καὶ φόρου δραχ. 52.80
Βιβλιόσημον καὶ Φόρος ἀναγκαστ. Δαν. δραχ. 18.10
Ἀριθ. ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως $\frac{46377}{23\text{-}8\text{-}32}$
Ἀριθμὸς ἀδείας κυκλοφορίας $\frac{54184}{10\text{-}10\text{-}33}$

ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚΔΟΤΑΙ: ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & ΣΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
46α ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 46α
1933

† ΙΩ. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ
ΚΑΘΗΓ. ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΧΡ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤ. ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠ. ΑΘΗΝΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΣΥΜΦΩΝΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΝΕΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ
Ἀντίτυπα 2.000

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1932—1937

Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως $\frac{46645/15887}{23/8/32}$

ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚΔΟΤΑΙ: ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & ΣΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ,,
46α ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 46α
1933

ΤΥΠΟΙΣ, ΑΘΑΝ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
ΟΔΟΣ ΛΕΚΑ—ΣΤΟΑ ΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας. Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

1. *Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας.* ***Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.*** Τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον κατὰ πρῶτον ἐμάθομεν, εἶναι τὸ τῶν ἀκεραίων. Μετ' αὐτὸ δὲ ἐμάθομεν τὸ ***κλασματικόν,*** τὸ ὁποῖον εἶναι γενικώτερον τοῦ πρώτου. Αἱ θεωρίαι δὲ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀναπτύσσονται εἰς τὴν ἀριθμητικήν.

Ἡ ἀριθμητική, ἀσχολουμένη μὲ τοὺς ἀριθμούς, ἀποβλέπει κυρίως εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τρόπων κατὰ τοὺς ὁποίους ἐκτελοῦνται αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις· συνδυάζουσα δὲ καταλλήλως τὰς πράξεις αὐτὰς ἐπὶ τῶν δεδομένων ζητημάτων λύει αὐτά.

Πρὸς λύσιν ὅμως αὐτῶν ἡ ἀριθμητικὴ δὲν χρησιμοποιεῖ γενικὰς μεθόδους ἐν γένει· οὔτε δὲ λύει αὐτὰ καὶ γενικώτερον.

Ἡ γενίκευσις τῶν μεθόδων λύσεως τῶν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ζητημάτων καὶ ἡ γενικωτέρα λύσις αὐτῶν ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ***Ἀλγέβρας.***

Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ***γενικὴ ἀριθμητικὴ*** καὶ ἀσχολεῖται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν ζητήματα· διὰ νὰ ἐπιτύχῃ δὲ αὕτη τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων αὐτῶν κατὰ γενικήν τινα μέθο**δον,** ἐξετάζει προηγουμένως τὰς γενικὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουσι μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οὗτοι.

Διὰ νὰ λύῃ δὲ ἐξ ἄλλου τὰ ζητήματα ταῦτα καὶ γενικώτερον, ***κατὰ πρῶτον μὲν λόγον*** εἰσάγει νέους ἀριθμοὺς (περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω) ὥστε αἱ πράξεις, τὰς ὁποίας εὑρίσκει αὕτη καὶ αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελῶνται ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον, νὰ δύνανται νὰ ἐκτελῶνται οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ καὶ ***κατὰ δεύτερον λόγον*** χρησιμοποιεῖ συνήθως τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν (διὰ νὰ καταστήσῃ τοὺς συλλογισμοὺς ἁπλουστέρους καὶ γενικωτέρους).

2. Ἕκαστον γράμμα εἰς ἕκαστον ζήτημα παριστᾷ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ διαφέρωσι μεταξύ των, παρίστανται διὰ διαφόρων γραμμάτων ἤ, ἐὰν ἔχωσί τι κοινόν, διὰ τοῦ αὐτοῦ μὲν γράμματος, φέροντος ὅμως τόνους πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπ᾽ ἀλλήλων, ὡς α, α', α'' κτλ.

Εἰς τὴν Ἄλγεβραν αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις ἰσότητος καὶ ἀνισότητος σημειοῦνται διὰ τῶν αὐτῶν συμβόλων ἢ σημείων, διὰ τῶν ὁποίων καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ.

Σημ. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν α καὶ β τὸ παριστῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς $\alpha\beta$· τὴν παράστασιν αὐτὴν δὲν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν, ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶναι ἀριθμοί, διότι τὸ γινόμενον π.χ. τοῦ 7 ἐπὶ 5, ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ 75, συγχέεται μὲ τὸν ἀριθμὸν 75.

3. ***Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.*** Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ Ἄλγεβρα, διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ λύῃ τὰ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ζητήματα καὶ γενικώτερον, εἰσάγει νέους ἀριθμούς· οἱ νέοι δὲ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους εἰσάγει κατὰ πρῶτον, ἔχουσι σκοπὸν ὅπως καταστήσωσι τὴν ἀφαίρεσιν πάντοτε δυνατήν. Αἱ προϋποθέσεις τῆς εἰσαγωγῆς τῶν νέων ἀριθμῶν εἶναι αἱ ἑξῆς: οὗτοι μετὰ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ν᾽ ἀποτελέσωσι γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ ἡ ἀφαίρεσις νὰ ἐκτελῆται πάντοτε καὶ ***νὰ διατηρηθῶσιν ἀναλλοίωτοι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος.***

Εἰς τὸ κλασματικὸν σύστημα τῶν ἀριθμῶν εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ μεγαλύτερον καὶ ἡ ἀφαίρεσις δύο ἴσων ἀριθμῶν, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει νέος τις ἀριθμὸς 0.

Εἰς τὸ νέον ὅμως σύστημα τῶν ἀριθμῶν πρέπει νὰ εἶναι, ὡς εἴπομεν, δυνατὴ πᾶσα ἀφαίρεσις· πρέπει ἑπομένως νὰ ὑπάρχωσιν αἱ διαφοραί

$$0-1,\ 0-2,\ 0-3,\ \ldots\ 0-\frac{1}{2},0-\frac{1}{3},0-\frac{1}{4}\ldots0-\frac{2}{3},0-\frac{2}{4},0-\frac{3}{4}\ldots$$

καὶ γενικῶς, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ διαφορὰ 0—α, ὅπου α εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός. Ἀλλὰ διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ διαφορὰ 0 — 1, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις, ὅστις, προστιθέμενος εἰς τὴν μονάδα, ν' ἀποτελῇ μετ' αὐτῆς 0· ὁμοίως διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ διαφορὰ 0—2, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις, ὅστις, προστιθέμενος εἰς τὸν 2, νὰ ἀποτελῇ μετ' αὐτοῦ 0 καὶ γενικῶς, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ διαφορὰ 0—α, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις, ὅστις, προστιθέμενος εἰς τὸν α, ν' ἀποτελῇ μετ' αὐτοῦ 0.

Ὥστε βλέπομεν, ὅτι πρέπει δι' ἕκαστον ἀριθμὸν νὰ παραδεχθῶμεν ἕνα ***ἀντίθετον***, ἤτοι τοιοῦτον, ὥστε οἱ δύο ὁμοῦ ν' ἀποτελῶσι 0. ***Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ ἐξουδετεροῦσιν ἢ καταστρέφουσιν ἀλλήλους, ὥστε, προστιθέμενοι ἀμφότεροι εἰς ἀριθμόν, δὲν μεταβάλλουσιν αὐτόν.***

Ἡ παραδοχὴ τοιούτων ἀριθμῶν δικαιολογεῖται καὶ ἐκ τῶν πραγμάτων· διότι ὑπάρχουσι πολλὰ ποσὰ ἀντίθετα, ὅπως π. χ. κέρδος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος κ.ἄ.· εἶναι ἑπομένως εὔλογον τὰ ἀντίθετα ποσὰ νὰ παριστῶνται δι' ἀντιθέτων ἀριθμῶν.

Π. χ. ἐὰν ἔμπορος κερδίσῃ 1000 δραχμὰς καὶ ἔπειτα χάσῃ 1000 δραχμάς, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ χρηματική του κατάστασις δὲν μετεβλήθη, ἤτοι 1000 δραχμαὶ κέρδος καὶ 1000 δραχμαὶ ζημία ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλας καὶ διὰ τοῦτο δύνανται νὰ παριστῶνται δι' ἀντιθέτων ἀριθμῶν.

Διὰ τοῦτο παραδεχόμεθα δι' ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος ἕνα ἀντίθετον, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου ἔχοντος πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον — (πλήν). Οὕτω τῶν ἀριθμῶν $3,\quad 5,\quad \frac{2}{3},\quad 0{,}25$ ἀντίθετοι εἶναι οἱ

$$-3,\ -5,\ -\frac{2}{3},\ -0{,}25$$

Κατὰ ταῦτα δεχόμεθα, ὅτι

$$0-1=-1,\ 0-2=-2\ldots\ 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},\ 0-\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}\ldots$$

Ὁμοίως, ὅτι $5-8=5-(5+3)=(5-5)-3=0-3=-3$

καὶ $\frac{2}{7}-\frac{6}{7}=\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\right)-\frac{4}{7}=0-\frac{4}{7}=-\frac{4}{7}$

Τοὺς νέους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον —, καλοῦμεν ***ἀρνητικούς***· τοὺς δὲ προϋπάρχοντας ***θετικούς***. Οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται πρὸς διάκρισιν καὶ μὲ τὸ σημεῖον + (σὺν) πρὸ αὐτῶν. Οὕτω δὲ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς 5 γράφεται καὶ +5.

Οἱ θετικοὶ καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν· εἰς αὐτό, ὅπως οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἐκ τῶν θετικῶν μονάδων

$$+1, \quad +\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{3}, \quad +\frac{1}{4} \ldots,$$

οὕτω καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἐκ τῶν ἀντιθέτων μονάδων

$$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4} \ldots$$

αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ἀρνητικαί.

Ἑπομένως ***πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἴδους.***

4. Ἐὰν ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρέσωμεν τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον, προκύπτει ἀριθμός, ὅστις λέγεται ***ἀπόλυτος τιμὴ*** αὐτοῦ· οὕτω τοῦ —7 ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ 7 καὶ τοῦ +7 ἢ τοῦ 7 ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ 7· σημειοῦται δὲ οὕτω $|-7|=7$ καὶ $|7|=7$. Δηλαδὴ οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τὰς ἀπολύτους τιμάς των.

5. ***Ἴσοι*** λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀπολύτους τιμὰς ἴσας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

Πράξεις ἐπὶ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

6. **Πρόσθεσις.** Ἡ πρόσθεσις ὁρίζεται, ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος.

α) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν +5 καὶ +6· ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι 5 θετικαὶ μονάδες καὶ 6 θετικαὶ δίδουσιν ἄθροισμα 11 μονάδας θετικάς, ἤτοι εἶναι $(+5)+(+6)=+11$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $(-5)+(-6)=-11$

καὶ $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{10}{21}$

β) Ἔστω ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν $+3$ καὶ -5· ἀλλὰ

$(+3)+(-5)=(+3)+(-3)+(-2)$ καὶ ἐπειδὴ

$(+3)+(-3)=0$, ἕπεται, ὅτι $(+3)+(-5)=-2$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $(-3)+(+5)=(-3)+(+3)+(+2)=+2$

καὶ $\left(+\frac{3}{7}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)=\left(+\frac{15}{35}\right)+\left(-\frac{28}{35}\right)=\left(+\frac{15}{35}\right)+\left(-\frac{15}{35}\right)+\left(-\frac{13}{35}\right)=-\frac{13}{35}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

1ον) ***Τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτοὺς καὶ ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.***

2ον) ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν μεγαλύτερον ἐξ αὐτῶν κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν καὶ ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.***

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ***προσθέσεως*** ἔχει μεταβληθῆ· ἓν δὲ ἄθροισμα δὲν εἶναι μεγαλύτερον ἑκάστου τῶν ***προσθετέων.***

7. Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι περισσότεροι τῶν δύο, προσθέτομεν διαδοχικῶς κατὰ τὴν δεδομένην τάξιν τῶν προσθετέων. Π.χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$(+12)+(-8)+(-15)+(+18)$$

ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς·

$$(+12)+(-8)=+4,\quad (+4)+(-15)=-11,$$
$$(-11)+(+18)=+7.$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $+7$. Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι τὸ δοθὲν ἄθροισμα, ἀποτελεῖται, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως, ἐκ 30 θετικῶν μονάδων καὶ ἐξ 23 ἀρνητικῶν· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν λάβωμεν τοὺς προσθετέους, αἱ 23 ἀρνητικαὶ μονάδες θὰ ἐξουδετερώσωσιν 23 θετικὰς καὶ θὰ μείνωσιν ὡς ἄθροισμα 7 θετικαὶ μονάδες.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι ***ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων*** (δηλ. ἡ τῆς ἀδιαφορίας ὅσον ἀφορᾷ τὴν τάξιν κατὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνονται οἱ προσθετέοι) ***διατηρεῖται καὶ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο·*** ἑπομένως δὲ ***ἀληθεύουσι καὶ διὰ τοὺς νέους ἀριθμοὺς καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως·*** οὕτω δὲ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

$$(+5)+(-8)+(+2)+(-9)+(+3)=(+5)+(+2)+(+3)$$
$$+(-8)+(-9)=(+10)+(-17)=-7.$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)+(+1)+\left(-\frac{1}{8}\right)=\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{21}{40}\right)=\left(+\frac{39}{40}\right)$$

8. ***Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ.*** Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονάδων, ὁμοειδῶν ἢ μή, πάντοτε εἶναι ἕνα πλῆθος ὁμοειδῶν μονάδων ἢ καὶ 0, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν ὡς ***ἄθροισμα μονάδων***, ἀδιαφοροῦντες ἂν αἱ μονάδες εἶναι ὁμοειδεῖς ἢ ὄχι.

9. Ἡ ἐφαρμογὴ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον τῆς προσθέσεως τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνήθης· διότι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι τιμαὶ ποσῶν τινων, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ ποσὰ ταῦτα θὰ ἔχωσι δύο ἀντιθέτους φοράς· δι᾽ ὅλα δὲ τὰ τοιαῦτα ποσὰ δεχόμεθα ***κατὰ συνθήκην,*** ὅπως ὅλαι αἱ καταστάσεις ἑνὸς τοιούτου ποσοῦ, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φοράν, παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς εἴδους, αἱ δὲ ἔχουσαι τὴν ἀντίθετον φοράν, διὰ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν. Οὕτω π. χ. ἐὰν διὰ τοῦ $+100$ παρασταθῶσιν ἑκατὸν δραχμαὶ κέρδους, ἡ ζημία τῶν ἑκατὸν δραχμῶν θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ -100.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἔμπορός τις ἐκέρδισε κατὰ πρῶτον 5000 δρ. καὶ ἔπειτα ἐζημιώθη κατὰ 1000 δρ., τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον εἶναι τὸ ἄθροισμα (+5000 δρ.)+(—1000 δρ.)=(+4000δρ.), δηλ. κέρδος 4000 δρ. Ὁμοίως, ἐάν τις βαδίζῃ ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς ΑΒ ἄλλοτε μὲν δεξιά, ἄλλοτε δὲ ἀριστερὰ καὶ τὰ διανυόμενα διαστήματα πρὸς τὰ δεξιὰ παρασταθῶσι διὰ θετικῶν ἀριθμῶν, τὰ διανυόμενα διαστήματα πρὸς τὰ ἀριστερὰ θὰ παρασταθῶσι δι᾽ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν· οὕτω δέ, ἂν ἀνεχώρησεν οὗτος ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκινήθη δύο χιλιόμετρα πρὸς τὰ δεξιά καὶ κατόπιν τρία χιλιόμετρα πρὸς τὰ ἀριστερά, ἡ τελικὴ ἀπόστασις αὐτοῦ καὶ ἡ θέσις ἀπὸ τῆς ἀρχῆς θὰ δεικνύεται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος $(+2$ χλμ$)+(-3$ χλμ$)=-1$ χλμ, ἤτοι οὗτος εὑρίσκεται ἤδη ἀριστερὰ τῆς ἀρχῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 χλμ ἀπὸ ταύτης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα

$(+7)+(+5)$

$(-11)+(-7)$

$(+28)+(-19)$

$(-35)+(+16)$

$(+107)+(-208)$

$(-1000)+(+11)$

$(+44)+0$

$0+(-57)$

$\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{2}{8}\right)$

$\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)$

$\left(-\frac{15}{16}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

$\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-1\frac{2}{3}\right)$

$\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(+1\frac{1}{2}\right)$

$(-9)+\left(+7\frac{5}{12}\right)$

$\left(+2\frac{5}{18}\right)+\left(-1\frac{4}{7}\right)$

$\left(-27\frac{3}{10}\right)+\left(19\frac{3}{5}\right)$

$(+3,15)+(-2,50)$

$(+2,125)+(-4,625)$

$(-0,36)+(-1,2)$

$(-9)+(+2,75)$

$(+6,8)+(-3,975)$

$\left(+6\frac{1}{2}\right)+(-4,75)$

$(-9,4)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

$\left(-\frac{2}{3}\right)+(+1,25)$

2) Ἐπίσης νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα

$(-3)+(-7)+(-25)+(-6)+(-4)$

$(-2)+(+10)+(-8)+(+9)+(-5)+(+4)$

$(+8)+(-71)+(-62)+(+35)+(-27)+(-46)+(+93)$

$(+4,15)+(-3,5)+(-7,125)+(+2,85)$

$(-2,3)+(-3,7)+(+6,125)+(+0,375)+(-2,7)$

$\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-1\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{15}\right)+\left(+14\frac{7}{60}\right)+(-9)$

$\left(-2\frac{1}{7}\right)+\left(-3\frac{7}{8}\right)+\left(+4\frac{9}{28}\right)+\left(+1\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{3}{14}\right)+\left(+\frac{17}{28}\right)$

3) Ἐὰν ταμίας ἀναγράφῃ εἰς τὸ βιβλίον του τὰς εἰσπράξεις του δι᾽ ἀριθμῶν θετικῶν, τί ἀναγράφει εἰς αὐτὸ δι᾽ ἀρνητικῶν;

4) Δώσατε παραδείγματα ποσῶν ἐπιδεχομένων ἀντίθεσιν.

5) Ἡ θερμοκρασία ἡμέρας τινὸς κατά τινα στιγμὴν ἦτο —2° Κ. Μετὰ 6 ὥρας ἡ θερμοκρασία τῆς ἡμέρας αὐτῆς ηὐξήθη κατὰ 8° Κ. Πόσους βαθμοὺς ἐδείκνυε τὸ θερμόμετρον;

6) Ἔμπορός τις ἔχει τὸ ποσὸν τῶν 10000 δρ., ὑπολογίζει δέ, ὅτι ὀφείλει εἰς διαφόρους 3250 δρ., 4600 δρ., 1050,50 δρ., 5425,75 δρ. Τοῦ ὀφείλουν ὅμως ἄλλοι 675 δρ., 2140,50 δρ., 6750 δρ. καὶ 3500 δρ. Ἐὰν κανονίσῃ ὅλους τοὺς λογαριασμούς του, πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ;

7) Ἔμπορός τις ὑπολογίζει, ὅτι ὀφείλει εἰς διαφόρους 1723,50 δρ., 2945,30 δρ., 5402,75 δρ. καὶ 7015 δρ., τοῦ ὀφείλουν ὅμως 1300 δρ., 2500 δρ. καὶ 418,40 δρ., ἔχει δὲ εἰς τὸ ταμεῖόν του 8000 δρ. Ἀφοῦ κανονίσῃ ὅλους τοὺς λογαριασμούς του, ποία θὰ εἶναι ἡ χρηματική του κατάστασις;

8) Κινητόν τι κινεῖται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς χ΄χ ἀναχωροῦν ἀπό τινος σημείου αὐτῆς Α· φθάνει ἔπειτα εἰς τὸ σημεῖον Β, ἔπειτα εἰς τὸ Γ καὶ τέλος εἰς τὸ Δ. Ἐὰν οἱ δρόμοι εἶναι ΑΒ=+7μ., ΒΓ=—5 μ. καὶ ΓΔ=+14μ., ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα; Ποία θὰ εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν σημείων Α, Β, Γ, καὶ Δ πρὸς ἄλληλα;

9) Κινητόν τι, ἀναχωρῆσαν ἐκ τοῦ σημείου Β εὐθείας τινος, ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον Α, ἔπειτα εἰς τὸ Γ καὶ τέλος εἰς τὸ Δ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ἐὰν οἱ δρόμοι εἶναι ΒΑ=+8μ., ΑΓ=—18 μ. καὶ ΓΔ=+35 μ., πόσων μέτρων εἶναι ὁ δρόμος ΒΔ; Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν σημείων Β, Α, Γ καὶ Δ πρὸς ἄλληλα;

10. **Ἀφαίρεσις.** Ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζεται ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Ἀνάγεται ὅμως ἤδη εἰς τὴν πρόσθεσιν· διότι ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν α (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν) τὸν +β· τότε ἡ διαφορὰ α—(+β) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα α+(—β)· διότι, ἐὰν εἰς αὐτὸ προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος +β, προκύπτει

$$α+(-β)+(+β)=α$$

ἤτοι ὁ μειωτέος α.

Ὁμοίως ἔχομεν $α-(-β)=α+(+β)$,

διότι $α+(+β)+(-β)=α$.

Ὥστε, ***διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν, προσθέτομεν τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ.*** Οὕτω εἶναι

$$(+6)-(+8)=(+6)+(-8)=-2$$
$$(-7)-(-9)=(-7)+(+9)=+2$$
$$(-5)-(+6)=(-5)+(-6)=-11$$
$$(+3)-(-4)=(+3)+(+4)=+7$$

11. Ἔστω ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων

$$(-8)-(-7)-(+9)+(+11)-(-14).$$

Τοῦτο κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρίσκεται ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$(-8)+(+7)+(-9)+(+11)+(+14).$$

Ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα παριστῶμεν ἁπλούστερον, γράφοντες ***κατὰ συνθήκην*** τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του, ἤτοι παριστῶμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς $-8+7-9+11+14$. Τὸ δὲ ἄθροισμα $(+5)+(-7)+(-9)+(+8)$ γράφεται $+5-7-9+8$· καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι θετικός, γράφεται τοῦτο καὶ $5-7-9+8$.

12. Κατὰ ταῦτα τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ ἔχουσι διπλῆν σημασίαν· φανερώνουσι δηλ. καὶ τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως καὶ τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν· ἀλλ' ἡ διπλῆ αὕτη σημασία τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ δὲν δύναται νὰ ἐπιφέρῃ σύγχυσιν· διότι ἐπὶ μεμονωμένων μὲν ἀριθμῶν ὡς $+5$, -7, -9 προφανῶς φανερώνουσι τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν· ἐὰν δὲ ἀριθμοί τινες συνδέωνται πρὸς ἀλλήλους διὰ τῶν σημείων τούτων, ὡς $27-9-10$, εἴτε ταῦτα τὰ θεωρήσωμεν ὡς σημεῖα τῶν πράξεων, εἴτε ὡς φανερώνοντα τὸ εἶδος τῶν προσθετέων ἀριθμῶν, εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ φθάσωμεν, διότι εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις τῶν 9 καὶ 10, δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς προσθέσεως τῶν -9 καὶ -10· δηλ. εἶναι

$$27-9-10=(+27)+(-9)+(-10).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις

$(+18)-(+8)$ $\qquad$ $(+3,2)-(+0,25)$

$(+17)-(-9)$ $\qquad$ $(+0,04)-(-1,6)$

$(-31)-(+12)$ $\qquad$ $(-3,63)-(+5,875)$

$(-43)-(-15)$ $\qquad$ $(-7)-(-6,125)$

$\left(-\frac{20}{9}\right)-\left(+\frac{3}{9}\right)$ $\qquad$ $(-0,375)-\left(-\frac{3}{8}\right)$

$\left(-\frac{15}{7}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)$ $\qquad$ $\left(+2\frac{1}{16}\right)-(+3,5)$

$\left(+6\frac{5}{8}\right)-\left(+9\frac{3}{4}\right)$ $\qquad$ $(-1,75)-\left(+2\frac{5}{12}\right)$

$\left(-7\frac{1}{5}\right)-\left(-8\frac{7}{8}\right)$ $\qquad$ $\left(+9\frac{1}{6}\right)-(-1,225)$

11) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

$$(+5)+(-12)-(-4)+(+15)-(+9)$$

$$(+18)-(+7)-(+13)+(-9)-(+15)+(-23)$$

$$(-3)-(-2)+(-5)+(+2)-(-3)+(-5)$$

$$(-9)-(-7)-(+18)-(-16)-(+23)+(-25)$$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{7}{4}\right)+\left(-1\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$(-4)-(-1,5)+(+3,25)-(-3)+(-1,75)$$

$$(+2,7)+(+0,08)-(-9,15)+(+0,62)-(+0,69)-(-1,65)$$
$$-(-0,02)+(-4,28)-(-1,1)+(-1,83)-(-2,005)$$

$$\left(+2\frac{1}{4}\right)-\left(+3\frac{1}{4}\right)-(-0,5)+\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)-(-0,75)$$
$$-\left(-3\frac{1}{3}\right)+(-0,6)-(+2,75)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-1\frac{2}{5}\right)$$

12) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα.

$$7-18$$

$$-32-47+23$$

$$-9+36-15-29+36$$

$$5-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-2\frac{5}{8}+\frac{3}{4}$$

$$3-\frac{1}{3}-8\frac{2}{5}-7\frac{7}{15}+6\frac{2}{3}$$

$$-0,5+2,25+4,625-7,25$$

$$-1+0,125-0,375+0,5-1,875$$

13) Ὁ ἰσολογισμὸς ἐμπόρου τινος κατὰ τὴν ἀρχὴν ἔτους τι-

νὸς ἀφῆκε παθητικὸν 4850 δρ., εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἀφῆκεν ἐνεργητικὸν 35150 δρ. Ποῖον εἶναι τὸ κέρδος τοῦ ἐμπόρου κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο;

14) Ἡ ἐλαχίστη θερμοκρασία ἡμέρας τινος ἦτο $-2,5^{0}$, ἡ δὲ μεγίστη $+17,6^{0}$. Πόσων βαθμῶν ἦτο ἡ αὔξησις τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὴν ἡμέραν ταύτην;

13. **Πολλαπλασιασμός.** Εἰς τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὁ πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ κλασματικὸν σύστημα· ἤτοι ἔχομεν

$$(+5).(+3)=(+5)+(+5)+(+5)$$
$$(-5).(+3)=(-5)+(-5)+(-5)$$
$$(-5).\frac{2}{3}=\frac{-5}{3}+\frac{-5}{3}$$

14. Ἤδη μένει νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός· πρὸς τοῦτο ὅμως θὰ ὁρίσωμεν προηγουμένως τὴν σημασίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα -1, ὥστε νὰ διατηρῶνται αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (δηλαδὴ ἡ τῆς ἀδιαφορίας ὅσον ἀφορᾷ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων καὶ ἡ ἐπιμεριστική).

Διὰ νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ ὁρίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοῦ ἐπὶ -1, ἂς λάβωμεν τὸν τυχόντα ἀριθμὸν α· τότε ὁ ἀντίθετος αὐτοῦ εἶναι ὁ $-α$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $(+1)+(-1)=0$, θὰ εἶναι καὶ $α\,[(+1)+(-1)]=0$· ἢ κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα θὰ εἶναι $α.(+1)+α.(-1)=0$· ὥστε οἱ δύο ἀριθμοὶ $α.(+1)$ καὶ $α.(-1)$ εἶναι ἀντίθετοι· ἀλλ' ὁ πρῶτος $α.\,(+1)$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν α· ἀντίθετος δὲ αὐτοῦ εἶναι ***μόνον*** ὁ $-α$· ὥστε ἀνάγκη νὰ εἶναι $α.(-1)=-α$. Ἑπομένως:

Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα -1 πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς τροπὴ αὐτοῦ εἰς τὸν ἀντίθετον.

Ἐκ τούτου ἕπονται τὰ ἑξῆς:

1) ***Τὸ γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος -1 ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της ἰσοῦται μὲ τὴν θετικὴν μονάδα, ἤτοι $(-1).(-1)=1$.***

2) ***Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος -1 ἐπὶ τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ θετικὸν ἀριθμόν.***

π.χ. $-8=(+8).(-1)$, $-\frac{3}{8}=(+\frac{3}{8}).(-1)$

15. ***Πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.*** Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν

$(+5).(+8) \qquad\qquad\qquad\qquad =+40$ ἢ ἁπλούστερον $5.8=40$
$(-5).(+8)=(+5)(+8)(-1) \qquad =-40$ » » $(-5).8=-40$
$(+5).(-8)=(+5)(+8)(-1) \qquad =-40$ » » $5.(-8)=-40$
$(-5).(-8)=(+5)(+8)(-1)(-1)=+40$ » » $(-5).(-8)=40$

Ὥστε: ***Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν καὶ μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμοειδεῖς, μὲ τὸ — δέ, ἂν εἶναι ἑτεροειδεῖς.***

Σημ. Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι 0, ἰσοῦται μὲ τὸ 0, ἤτοι εἶναι $(+5).0=0.(+5)=0$.

16. ***Ἰδιότητες.*** Κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν τοῦ συστήματος τούτου ἐλήφθησαν μὲν ὑπ' ὄψει αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀλλὰ τώρα εἶναι ἀνάγκη ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὡς ὡρίσθη ὁ πολλαπλασιασμός, ὅλαι αἱ ἰδιότητες αὗται διατηροῦνται ἀληθεῖς καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος.

Καὶ ἡ μὲν ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων εἶναι προφανής, διότι, πλὴν τοῦ εἴδους τοῦ γινομένου, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος, ἡ δὲ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης πάλιν εἶναι προφανής, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ὅταν δὲ οὗτος εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἡ ἰσότης π.χ. $(\alpha+\beta).(-5)=\alpha.(-5)+\beta.(-5)$ ἀποδεικνύεται ἀληθής, διότι οἱ ἀντίθετοι αὐτῶν ἀριθμοὶ $(\alpha+\beta).5$ καὶ $\alpha.5+\beta.5$ εἶναι ἴσοι.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι ***ὅλαι αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἀληθεύουσι καὶ προκειμένου περὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος.***

17. ***Σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων.*** Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων εἶναι θετικὸν μέν, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος (διότι ἀνὰ δύο πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι θετικὸν γινόμενον), ἀρνητικὸν δέ, ἂν περιττός.

18. ***Ἰδιότης τῆς ἰσότητος. Τῶν ἴσων ἀριθμῶν τὰ γινόμενα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἶναι ἴσα.*** Διότι εἶναι ἴσα κατ' ἀπόλυτον τιμήν· εἶναι δὲ καὶ ὁμοειδῆ.

19. Ὡς συγκεκριμένην αἰτιολογίαν τῶν κανόνων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν δίδομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι κινητόν τι κινεῖται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς ὁμαλῶς, δηλ. ὅτι εἰς ἴσους χρόνους διανύει ἴσα διαστήματα. Ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, ἤτοι τὸ διανυόμενον διάστημα εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, εἶναι τ· ἐὰν δὲ εἰς χ τοιαύτας χρονικὰς μο-

νάδας διέτρεξε τὸν δρόμον AB, ὁ ἀριθμός, ὅστις μετρεῖ τὸν δρόμον αὐτὸν καὶ τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ δ, εἶναι δ=τ. χ.

Ἤδη ἔστω, ὅτι εἰς τὸ A εὑρίσκεται τὸ κινητὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου χ (χρόνος 0) καὶ εἰς τὸ B εὑρίσκεται μετὰ χρόνον χ, ὅστις εἶναι θετικὸς διὰ πᾶσαν χρονικὴν στιγμὴν μετὰ τὴν ἀρχὴν (μέλλων χρόνος) καὶ ἀρνητικὸς διὰ πᾶσαν στιγμὴν πρὸ τῆς ἀρχῆς (παρελθὼν χρόνος).

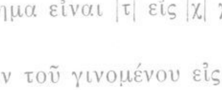
Ἐπίσης ἔστω, ὅτι ἡ ταχύτης τ εἶναι θετική, ὅταν τὸ κινητὸν κινεῖται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἀρνητική, ὅταν κινεῖται ἀντιθέτως.

Τέλος δέ, ὅτι τὸ διάστημα δ εἶναι θετικόν, ὅταν τὸ B εὑρίσκεται δεξιὰ τοῦ A καὶ ἀρνητικόν, ὅταν εὑρίσκεται ἀριστερὰ αὐτοῦ.

Κατόπιν τούτων βλέπομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ δ εἶναι γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν τ καὶ χ. Διότι, ἀφοῦ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα τὸ διάστημα εἶναι |τ| εἰς |χ| χρονικὰς μονάδας θὰ ἔχωμεν |δ| = |τ| . |χ| .

Ἤδη μένει νὰ ἐξετάσωμεν τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

α) χρόνος θετικός, ταχύτης θετική.



Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐπειδὴ χ θετικόν, τὸ κινητὸν κινεῖται ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B καὶ μὲ φορὰν θετικήν, ἀφοῦ τ θετικόν· ἄρα τὸ B εὑρίσκεται δεξιὰ τοῦ A καὶ κατὰ συνέπειαν ὁ δ εἶναι θετικός.

β) χρόνος θετικός, ταχύτης ἀρνητική.

Εἰς αὐτὴν εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ Β εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ Α· ἄρα ὁ δ εἶναι ἀρνητικός.

γ) χρόνος ἀρνητικός, ταχύτης θετική. 

Ἤδη, ἐπειδὴ ὁ χρόνος εἶναι ἀρνητικός, τὸ κινητὸν κινεῖται ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α· ἐπειδὴ δὲ κινεῖται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἕπεται ὅτι τὸ Β κεῖται ἀριστερὰ τοῦ Α· ἄρα ὁ δ ἀρνητικός·

καὶ δ) χρόνος ἀρνητικός, ταχύτης ἀρνητική, 

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐπειδὴ τὸ κινητὸν κινεῖται ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α μὲ φορὰν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἕπεται, ὅτι τὸ Β κεῖται δεξιὰ τοῦ Α καὶ ἑπομένως ὁ δ εἶναι θετικός.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον δ τῶν ἀριθμῶν τ καὶ χ εἶναι θετικὸν μέν, ὅταν οὗτοι εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ὅταν εἶναι ἑτεροειδεῖς

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$17 \cdot 12$

$(-25) \cdot 32$

$(-35) \cdot (-27)$

$1001 \cdot (-11)$

$(-365) \cdot (-125)$

$(-7) \cdot 2\frac{5}{7}$

$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}$

$\left(-6\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5}$

$\left(-1\frac{1}{5}\right)\left(-3\frac{1}{6}\right)$

$\left(-4\frac{3}{7}\right) \cdot 2\frac{5}{6}$

$\left(-2\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)$

$(2,5) \cdot (-0,4)$

$(-1,6)\,(-0,6)$

$(-3,9) \cdot (4,06)$

$\left(-5\frac{7}{8}\right) 2,4$

$(-0,004) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right)$

$5\frac{11}{18} \cdot (-4,5)$

16) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$4 \cdot (-5) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-6)$

$5 \cdot (-10) \cdot (-2) \cdot 8 \cdot (-3) \cdot (-15)$

$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)$

$1\frac{1}{2}.\left(-2\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{7}{8}\right).5\frac{5}{11}$

$(-15).(-3{,}4).(-1).(-2).(-3)$

$(-2{,}5).(-3{,}4).(-1{,}2).5{,}75$

$(-25).6{,}7.(-8{,}35).0.(-6).125$

$(-2{,}5).\left(-\frac{3}{5}\right).1\frac{1}{4}.(-8).(-1{,}2)$

17) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους.

$(-2+7-3).(-5)$

$(-1{,}2+7{,}3-0{,}1).1{,}1$

$(-2+6).(5-7)$

$(-3{,}1+8{,}5).(-2{,}2-5{,}4)$

$(3-4-5).6+(-2-6+7).(-9)$

$(-5-9+3).(-10)+(5-4).(-3)$

20. **Διαίρεσις.** Ἡ διαίρεσις καὶ ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ ὁρίζεται ὡς πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἔστω ἡ διαίρεσις $(-8):(+4)$. Τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι -2, διότι $(-2).(+4)=-8$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$(+8):(-4)=-2$ ἢ ἁπλούστερον $8:(-4)=-2$

$(-8):(-4)=+2$ ἢ ἁπλούστερον $(-8):(-4)=2$. Ἤτοι :

Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν καὶ μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμοειδεῖς, μὲ τὸ — δέ, ἂν οὗτοι εἶναι ἑτεροειδεῖς.

21. Τὸ πηλίκον τοῦ 0 διαιρεθέντος δι' οἱουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ εἶναι 0, ἤτοι $\frac{0}{\alpha}=0$, διότι εἶναι $0.\alpha=0$.

Διὰ τοῦ 0 οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ, τουτέστιν ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος· καὶ ὄντως οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, διότι πάντες, ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενοι, δίδουσι γινόμενον 0. Οὐδὲ εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ τὸ πηλίκον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως ὡς ἀριθμὸς καὶ νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ ἤδη ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω τῷ ὄντι λ νέος τις ἀριθμός, ὅστις, ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενος, νὰ μὴ μηδενίζεται, ἀλλὰ νὰ δίδῃ γινόμενον 1 (τότε ὁ λ εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{1}{0}$)· παραδεχόμενοι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, θὰ ἔχωμεν π.χ. $0.3.\lambda = 0.\lambda = 1$, ἀλλὰ πάλιν $0.3.\lambda = 0.\lambda.3 = 1.3 = 3$, ἤτοι $1 = 3$, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις

$200 : 25$ $\qquad$ $8{,}4 : (-0{,}15)$

$(-315) : (-15)$ $\qquad$ $(-5{,}4) : 4{,}5$

$1001 : (-91)$ $\qquad$ $(-0{,}2) : (-0{,}08)$

$(-2261) : 119$ $\qquad$ $(-1{,}32) : 0{,}165$

$\left(-2\frac{1}{4}\right) : \left(-1\frac{1}{9}\right)$ $\qquad$ $(-3{,}5) : \frac{1}{3}$

$\left(2\frac{3}{4}\right) : \left(-1\frac{5}{8}\right)$ $\qquad$ $(-7{,}4) : 8\frac{1}{2}$

$\left(-4\frac{7}{9}\right) : \left(-\frac{1}{18}\right)$ $\qquad$ $\left(-\frac{7}{8}\right) : (-0{,}35)$

19) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα

$84.(-3) : (-12)$ $\qquad$ $(-910) : 2.(-3).(-7)$

$7.(-2) : (-0{,}35)$ $\qquad$ $(-2).(-9) : (-6).21{,}15$

$(-24) : (-3).(-0{,}3)$ $\qquad$ $3 : (-0{,}1).0{,}03$

20) Ν' ἀντικατασταθῇ ὁ χ δι' ἀριθμοῦ, ὥστε ν' ἀληθεύωσιν αἱ κάτωθι ἰσότητες

$(-135).\chi = 3375$ $\qquad$ $1{,}6 . \chi = -0{,}00016$

$(-308).\chi = -28$ $\qquad$ $\left(-2\frac{3}{5}\right).\chi = -0{,}65$

$5{,}4 . \chi = -0{,}18$ $\qquad$ $0{,}75.\chi = -\frac{3}{8}$

21) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

$(36-27-63+9) : 9$ $\qquad$ $(2{,}4-3{,}5) : (-4+13)$

$(56-96-120-160) : (-8)$ $\qquad$ $(0{,}7-3) : -1\frac{3}{20}$

$(7-15) : (-17+9)$ $\qquad$ $\left(-2\frac{4}{25}\right) : (0{,}05-0{,}5)$

22) Κινητόν τι, κινούμενον ἐπ' εὐθείας, ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτῆς Α καὶ φθάνει εἰς τὸ Β· εἶναι δὲ (ΑΒ) = 18 μέτρα. Κατόπιν κινεῖται ἀντιθέτως μὲ ταχύτητα 1 μέτρου εἰς 5′. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α θὰ εὑρίσκεται τὸ κινητὸν μετὰ παρέλευσιν ἡμισείας ὥρας, ἀφ' ἧς ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ Β;

23) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ἐκ τοῦ Β τὸ κινητόν, κινούμενον κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, θὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α ἴσην μὲ —12 μέτρα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Δυνάμεις καὶ ἀρχικαὶ ἰδιότητες αὐτῶν.

22. ***Δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων πρὸς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.***

Αἱ δυνάμεις παρίστανται ὡς καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ· ὁ δὲ ἐκθέτης αὐτῶν, κατὰ τὸν ὁρισμόν, εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ 2· οὕτω εἶναι

$$5^3 = 5.5.5$$
$$(-5)^3 = (-5).(-5).(-5).$$

Αἱ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε θετικαί, ἐνῷ αἱ δυνάμεις τῶν ἀρνητικῶν εἶναι θετικαὶ μέν, ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος, ἀρνητικαὶ δέ, ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι περιττός.

Οὕτω $(2)^4 = 16$ $\qquad (2)^3 = 8$
$(-2)^4 = 16$ $\qquad (-2)^3 = -8.$

23. ***Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.*** Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας εἴδομεν καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν· ἀποδεικνύονται δὲ ἀμέσως ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Εἶναι δὲ αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων αἱ ἑξῆς:

1) $\alpha^3 . \alpha^4 = \alpha^7$ καὶ γενικῶς $\alpha^\mu . \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$· ὁμοίως ἔχομεν

$$\alpha^\mu . \alpha^\nu \, . \, . \, . \, . \, . \, \alpha^\varrho = \alpha^{\mu+\nu+ \, . \, . \, . \, +\varrho}$$

καὶ $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu . \nu}$

2) $(\alpha.\beta.\gamma)^3 = \alpha^3.\beta^3.\gamma^3$ καὶ γενικῶς $(\alpha.\beta.\gamma)^\mu = \alpha^\mu . \beta^\mu . \gamma^\mu$

3) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$

24. ***Ὁρισμοὶ τῶν δυνάμεων α^1 καὶ α^0.*** Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι ὁ ἐκθέτης πάσης δυνάμεως εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ 2. Ἐὰν θέλωμεν ὅμως νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ ἐπὶ ἄλλων ἐκθετῶν, πρέπει νὰ διατηρήσωμεν ἐπὶ ὅλων τῶν δυνάμεων τὰς αὐτὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας. Οὕτω πρέπει νὰ διατηρηθῇ καὶ διὰ τὰς δυνάμεις α^1 καὶ α^0 ἡ πρώτη ἰδιότης $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ἀληθῆ καὶ διὰ $\mu=1$, εὑρίσκομεν $\alpha^1.\alpha^{\nu} = \alpha^{\nu+1}$· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ α^1 εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha^{\nu+1}$, ἤτοι τοῦ $\alpha^{\nu}.\alpha$ διὰ α^{ν} καὶ ἑπομένως, ἐὰν $\alpha \neq 0$, ἰσοῦται πρὸς τὸ α· ὥστε ὑπὸ τὸν ἀνωτέρω ὅρον πρέπει νὰ ὁρισθῇ $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$.

Ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν ἰσότητα θέσωμεν $\mu=0$, προκύπτει $\alpha^0.\alpha^{\nu} = \alpha^{\nu}$· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι α^0 εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\alpha^{\nu} : \alpha^{\nu} = 1$· ὥστε ἐὰν $\alpha \neq 0$, πρέπει νὰ ὁρισθῇ $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$.

25. ***Διαίρεσις δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.***

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐκθετῶν· τῆς διαφορᾶς δὲ ταύτης μειωτέος μὲν εἶναι ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου, ἀφαιρετέος δὲ ὁ τοῦ διαιρέτου.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ α^{μ} διὰ α^{ν}, εἶναι δὲ $\mu > \nu$· λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι $\alpha^{\mu-\nu}$, διότι τοῦτο, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει $\alpha^{\mu-\nu}.\alpha^{\nu}$, ἤτοι, κατὰ τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα τῶν δυνάμεων, α^{μ}, ἤτοι τὸν διαιρετέον· ὥστε εἶναι

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$$

Ὑπετέθη $\mu > \nu$· ἀληθεύει δὲ ἡ ἰσότης αὕτη καὶ ὅταν εἶναι $\mu = \nu$, διότι τότε γίνεται

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^0 = 1$$

26. ***Δυνάμεις ἔχουσαι ἐκθέτην ἀκέραιον ἀρνητικόν.***

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης τοῦ πηλίκου δὲν ἰσχύει, ὅταν εἶναι $\mu < \nu$, διότι ἡ διαφορὰ $\mu - \nu$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς καὶ δυνάμεις **μὲ** ἐκθέτην ἀρνητικὸν εἶναι ἄνευ ἐννοίας· ἂν ὅμως θελήσωμεν **νὰ** καταστήσωμεν τὴν ἰδιότητα ταύτην τοῦ πηλίκου γενικήν, ἤτοι ἂν θελήσωμεν, ἵνα ἡ ἰσότης $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu-\nu}$ ἀληθεύῃ καὶ ὅταν εἶναι $\mu<\nu$, δέον νὰ ὁρίσωμεν τὴν σημασίαν τῶν δυνάμεων, αἵτινες ἔχουσιν ἐκθέτην ἀρνητικόν. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν $\mu<\nu$ καὶ $\nu=\mu+\lambda$, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}$ εἶναι $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu+\lambda}}=\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}.\alpha^{\lambda}}=\frac{1}{\alpha^{\lambda}}$ (ἐὰν α εἶναι διάφορον τοῦ 0)· ἀλλά, κατὰ τὴν ἰδιότητα (25), ἡ ὁποία θέλομεν νὰ ἰσχύῃ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἔχομεν $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu-\nu}=\alpha^{\mu-\mu-\lambda}=\alpha^{-\lambda}$.

Ἀνάγκη ἄρα νὰ δεχθῶμεν, ὅτι $\alpha^{-\lambda}=\frac{1}{\alpha^{\lambda}}$. Ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεθα εἰς τὸν ἑπόμενον ὁρισμόν :

Πᾶσα ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν ὡς ἐκθέτην ἔχουσα δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ (πλὴν τοῦ 0), ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα 1, παρονομαστὴν δὲ τὴν ἀντίθετον ἐκθέτην ἔχουσαν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\quad 2^{-3}=\frac{1}{2^{3}}=\frac{1}{8}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}=9$$

27. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους θετικοὺς ἰσχύουσι καὶ διὰ τὰς δυνάμεις ταύτας, ὅπως εὐκόλως φαίνεται ἐκ τῶν κάτωθι :

1) $\quad \alpha^{-\mu}.\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\mu}}.\frac{1}{\alpha^{\nu}}=\frac{1}{\alpha^{\mu+\nu}}=\alpha^{-\mu-\nu}$

2) $\quad (\alpha.\beta.\gamma)^{-\mu}=\frac{1}{(\alpha.\beta.\gamma)^{\mu}}=\frac{1}{\alpha^{\mu}.\beta^{\mu}.\gamma^{\mu}}=\frac{1}{\alpha^{\mu}}.\frac{1}{\beta^{\mu}}.\frac{1}{\gamma^{\mu}}=$

$\alpha^{-\mu}.\beta^{-\mu}.\gamma^{-\mu}$

3) $\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\mu}=\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}}=\frac{1}{\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}}=\frac{\beta^{\mu}}{\alpha^{\mu}}=\frac{1}{\alpha^{\mu}}:\frac{1}{\beta^{\mu}}=$

$=\alpha^{-\mu}:\beta^{-\mu}=\frac{\alpha^{-\mu}}{\beta^{-\mu}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων

5^4 $\qquad -5^4$ $\qquad \left(\frac{7}{2}\right)^3$

$(-3)^4$ $\qquad -5^3$ $\qquad \left(-\frac{3}{4}\right)^3$

$(-4)^3$ $\qquad (-9,2)^3$ $\qquad \left(-\frac{2}{5}\right)^5$

$(-1)^8$ $\qquad (-0,003)^3$ $\qquad \left(-1\frac{1}{8}\right)^3$

$(-1)^{15}$ $\qquad (-0,001)^2$ $\qquad \left(3\frac{4}{5}\right)^2$

$(-3)^5$ $\qquad (-0,01)^3$ $\qquad \left(-2\frac{7}{9}\right)^3$

25) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα

$2^4+(-2)^4$ $\qquad 3^4-(-3)^4$ $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^5$

$-2^4+(-2)^4$ $\qquad -3^4-(-3)^4$

$2^3+(-2)^3$ $\qquad (-3)^2.(-3)^3$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^4.\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$-2^3+(-2)^3$ $\qquad (-3^2).(-3)^3$ $\qquad [(-2)^3]^3$

$5^3+(-5)^3$ $\qquad 5^3.(-7)^2.5^2.(-7)$

$-5^3-(-5)^3$ $\qquad (-0,1)^2.(-0,1)^4$ $\qquad \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^4$

26) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα

$(-27)^1$ $\qquad 15^0.\frac{3^0}{11}$ $\qquad (-7)^5:(-7)^3$

$(-27)^0$

$\left(-\frac{3}{5}\right)^1$ $\qquad (-7)^1.(-9)$ $\qquad (-35)^6:(-35)^5$

$(\alpha+\beta)^0$ $\qquad (-1)^5.(-1)^0.8^0$ $\qquad -5^4:(-5)^3$

$(\alpha-\beta)^0$ $\qquad (-9)^1.(5-7)^0$ $\qquad (-8)^6:-8^6$

$(-0,375)^0.\left(\frac{5}{24}\right)^1$ $\qquad (-2)^7:2^5$

27) Αἱ δυνάμεις 9^3 καὶ 4^4 νὰ τραπῶσιν εἰς δυνάμεις τοῦ 3 καὶ 2.

28) Ὁμοίως αἱ δυνάμεις 125^2 καὶ 8^4 νὰ τραπῶσιν εἰς δυνάμεις τοῦ 5 καὶ 2.

29) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα

5^{-2}	$9 \,.\, 3^{-1}$	$\dfrac{1}{2^{-3}}$
$(-5)^{-2}$	$16 \,.\, 2^{-4}$	$\dfrac{1}{7^{-2}}$
7^{-1}	$25^{-1} \,.\, 5^{2}$	$\dfrac{1}{5^{-4}}$
$(-8)^{-1}$	$64^{-1} \,.\, 2^{4}$	
$(0,4)^{-4}$	$\dfrac{2}{3} \,.\, \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$	$\dfrac{1}{2^{-3}} \,.\, \dfrac{1}{2}$
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} \,.\, \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$	$\dfrac{1}{3^{-2}} \,.\, \dfrac{1}{2^{-3}}$

30) Νὰ ἐφαρμοσθῶσιν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

$2^{5} \,.\, 2^{-2}$	$[(-2)^{5}]^{-2}$	$11^{4} : 11^{7}$
$3^{-3} \,.\, 3^{-2}$	$(2.3.7)^{-3}$	$7^{-3} : 7^{2}$
$7^{-8} \,.\, 7^{7}$	$[(-5).(-2).(-7)]^{-4}$	$9^{4} : 9^{-2}$
$9^{-10} \,.\, 9^{10}$	$(2^{4}.3^{5}.11)^{-3}$	$4^{-5} : 4^{-6}$
$(5^{-4})^{-3}$	$\left(\dfrac{8^{-2} \,.\, 7}{4 \,.\, 5^{2}}\right)^{-3}$	$5^{-7} \,.\, 5^{2} : 5^{-5}$
		$3^{4} : 3^{2} \,.\, 3^{-3}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Περὶ ἀνισοτήτων.

28. ***Ἀνισότης θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.***

Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀνισότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα, κατὰ τὴν ὁποίαν, ***ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἀνίσους ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ ἀνισότης μένει.***

Ἤδη, προκειμένου νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς τὰς ἀνισότητας καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, πρέπει νὰ διατηρήσωμεν τὴν ἀρχικὴν αὐτὴν ἰδιότητα· κατ᾽ αὐτὴν δέ, ἐπειδὴ εἶναι $5<8$, πρέπει νὰ εἶναι καὶ $5-8<8-8$, ἤτοι $-3<0$· ὁμοίως πρέπει νὰ εἶναι καὶ $5-10<8-10$, ἤτοι $-5<-2$. Ἤτοι, διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀρχικὴν ἰδιότητα, πρέπει ***νὰ θεωρῶμεν πάντα ἀρνητικὸν ἀριθμὸν ὡς μικρότερον τοῦ μηδενὸς καὶ ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν νὰ θεωρῶμεν μεγαλύτερον τὸν κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερον.***

Γενικῶς ἡ ἀνισότης ὁρίζεται ὡς ἑξῆς.

Ἀριθμὸς α λέγεται μεγαλύτερος ἄλλου β, ἐὰν ἡ διαφορὰ α—β εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Καὶ πράγματι, ἂν ἡ διαφορὰ α—β, τὴν ὁποίαν παριστῶ διὰ τοῦ θ, εἶναι θετικὸς ἀριθμός, δηλ. ἂν $\theta>0$, θὰ εἶναι καὶ $\theta+\beta>\beta$, ἤτοι $\alpha>\beta$.

Ἐὰν ὅμως ἡ διαφορὰ α—β εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ ἀντίθετος β—α εἶναι θετικὸς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\beta>\alpha$.

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι $\alpha>\beta$ σημαίνει, ὅτι ἡ διαφορὰ α—β εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

29. Ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς:

α) Ἔστω $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, δηλαδὴ $\alpha-\beta>0$ καὶ $\gamma-\delta>0$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)>0$ ἢ $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)>0$

ἤτοι $\alpha+\gamma>\beta+\delta$· ὥστε:

Ἐὰν προστεθῶσιν ἄνισοι εἰς ἀνίσους, ἀλλ' ὁ μεγαλύτερος εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης μένει.

β) Ἔστω $\alpha>\beta$, δηλ. ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta=\theta$ θετικὸς ἀριθμός· ἀλλὰ τότε $\alpha\mu-\beta\mu=\theta\mu$ (ὅπου $\mu\neq0$)· καὶ ἂν ὁ μ εἶναι θετικός, μθ εἶναι θετικόν· ὥστε ἔχομεν $\alpha\mu>\beta\mu$· ἂν ὅμως ὁ μ εἶναι ἀρνητικός, καὶ ὁ μθ εἶναι ἀρνητικός· ὥστε ἔχομεν $\alpha\mu<\beta\mu$. Ἤτοι:

Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0, μένει μὲν ἡ ἀνισότης, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικός, ἀντιστρέφεται δέ, ἂν εἶναι ἀρνητικός.

30. ***Πόρισμα 1ον.*** Ἐπειδὴ πᾶσα διαίρεσις (πλὴν τῆς διὰ τοῦ 0) ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμόν, ἕπεται ὅτι, ***ὅταν διαιρεθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀνισότης μένει, ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι θετικός, ἀντιστρέφεται δέ, ἂν εἶναι ἀρνητικός.***

31. ***Πόρισμα 2ον. Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν μιᾶς ἀνισότητος, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται·***

π. χ. Ἐκ τῆς ἀνισότητος

$-6>-12$ προκύπτει διὰ τοῦ πολ/σμοῦ ἐπὶ 3, $-18>-36$

καὶ ἐπὶ —3, $18<36$·

διὰ τῆς διαιρέσεως διὰ 3, $-2>-4$ καὶ διὰ —3, $2<4$

καὶ διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν σημείων $6<12$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31) Αἱ κάτωθι σειραὶ τῶν ἀριθμῶν νὰ καταταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου.

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}$$

$$-1, \quad 5, \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{8}, \quad 7, \quad \frac{1}{4}$$

$$0, \quad -1, \quad 0{,}64, \quad \frac{2}{3}, -\frac{7}{11}, -0{,}9$$

32) Ἐὰν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma < \delta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\alpha - \gamma > \beta - \delta$.

33) Ἐὰν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\gamma > \beta\delta$, ἐὰν β καὶ γ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις καὶ διάφορα εἴδη αὐτῶν.

32. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α καὶ β παρίσταται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$· ἡ παράστασις αὕτη λέγεται ***ἀλγεβρικὴ παράστασις*** ἢ ***ἀλγεβρικὸς τύπος***· ὁμοίως αἱ παραστάσεις

$\alpha^2-\beta^2$, $5\alpha\beta$, $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, $2\varrho(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ εἶναι ἀλγεβρικαί.

Γενικῶς δέ, ***ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀλγεβρικὸς τύπος λέγεται ἡ διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων σημείωσις πράξεων ἐπὶ γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν ἢ καὶ μόνον ἐπὶ γραμμάτων.***

Ἐπειδὴ μέχρι τοῦδε μόνον τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις πράξεις ἐγνωρίσαμεν, διὰ τοῦτο ὑποθέτομεν πρὸς τὸ παρὸν ταύτας μόνον τὰς πράξεις σημειωμένας εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις.

33. Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, ὅταν προκύπτωσιν ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων, λέγονται ***ἴσαι***· τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ παραστάσεις $(\alpha+\beta+\gamma).\delta$ καὶ $\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta$.

34. Παράστασις, ἐν ᾗ οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις εὑρίσκεται σημειωμένη, λέγεται ***μονώνυμον***· π.χ. αἱ παραστάσεις

$$\frac{3\alpha}{\beta}, \quad 5\alpha\beta^2, \quad -8\alpha\beta, \quad -\frac{1}{2}\alpha$$

εἶναι μονώνυμα.

Τὸ μονώνυμον εἶναι **ἀκέραιον,** ἐὰν μόνον πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν γραμμάτων περιέχῃ· ἐὰν δὲ καὶ διαίρεσιν ἐπὶ τῶν γραμμάτων περιέχῃ, λέγεται κλασματικόν. Π.χ. τὸ μονώνυμον $\frac{3\alpha}{\beta}$ εἶναι κλασματικόν, ἐνῷ τὸ $5\alpha\beta$ εἶναι ἀκέραιον.

Ἐὰν ἐν μονωνύμῳ ὑπάρχῃ τις ἀριθμητικὸς παράγων, γράφεται οὗτος πρῶτος καὶ λέγεται **συντελεστὴς** τοῦ μονωνύμου· οὕτω τῶν μονωνύμων 5α, $-\frac{3\alpha^2}{7}$, $\frac{8\alpha}{\beta}$ συντελεσταὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 5, $-\frac{3}{7}$, 8, τοῦ δὲ $\alpha\beta$ συντελεστὴς εἶναι ἡ 1, διότι $\alpha\beta=1.\alpha\beta$·

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων μονωνύμου εἶναι συντελεστὴς αὐτοῦ ὡς πρὸς ὅλα τὰ γράμματα τὰ ὁποῖα περιέχει· συντελεστὴς δὲ μονωνύμου ὡς πρὸς ἕνα ἢ περισσότερα γράμματα αὐτοῦ καλεῖται τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων γραμμάτων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμητικὸν παράγοντα τοῦ μονωνύμου. Οὕτω τοῦ μονωνύμου $3\alpha\beta\chi$ συντελεστὴς ὡς πρὸς χ εἶναι ὁ $3\alpha\beta$, ὡς πρὸς $\beta\chi$ εἶναι ὁ 3α, ὡς πρὸς β εἶναι ὁ $3\alpha\chi$.

35. ***Βαθμὸς*** ἀκεραίου μονωνύμου πρὸς ἕνα γράμμα λέγεται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου ἐν τῷ μονωνύμῳ, πρὸς πολλὰ δὲ γράμματα λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐν τῷ μονωνύμῳ· π.χ. τὸ μονώνυμον $8\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶναι πρὸς τὸ α δευτέρου βαθμοῦ, πρὸς τὸ γ πρώτου βαθμοῦ, πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β πέμπτου βαθμοῦ κ.ο.κ.

Πᾶν μονώνυμον εἶναι βαθμοῦ 0, πρὸς πᾶν γράμμα τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται εἰς αὐτό.

36. ***Πολυώνυμον*** λέγεται τὸ ἄθροισμα μονωνύμων καὶ ἑνὸς γνωστοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν. Γράφεται δὲ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονωνύμων, ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν· ἤτοι γράφονται τὰ μονώνυμα τὸ ἓν μετ' ἄλλο καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του· π.χ. ἡ παράστασις $8\alpha^2-2\alpha\beta+4\gamma^2-6$ εἶναι πολυώνυμον.

Τὰ μονώνυμα καὶ ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς μετὰ τῶν πρὸ αὐτῶν σημείων των λέγονται ***ὅροι*** τοῦ πολυωνύμου· οὕτω τοῦ ἀνωτέρω πολυωνύμου ὅροι εἶναι οἱ $8\alpha^2$, $-2\alpha\beta$, $4\gamma^2$, -6.

Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι δύο, τότε λέγεται ***διώνυμον***, ἐὰν τρεῖς ***τριώνυμον.***

Τὸ πολυώνυμον εἶναι ***ἀκέραιον,*** ἐὰν πάντα τὰ μονώνυμα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται, εἶναι ἀκέραια.

37. ***Βαθμὸς*** ἀκεραίου πολυωνύμου πρός τι γράμμα λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα· οὕτω τὸ πολυώνυμον

$$\chi^5+4\alpha\chi^4-3\alpha^2\chi^2+5\alpha^4$$

εἶναι πρὸς χ τοῦ πέμπτου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὸ α τοῦ τετάρτου.

38. ***Ὁμογενὲς*** λέγεται τὸ πολυώνυμον πρός τινα γράμματα, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα· π. χ. τὸ πολυώνυμον $3\alpha^2+2\beta^2-7\alpha\beta$ εἶναι ὁμογενὲς πρὸς τὰ α καὶ β· ὁμοίως καὶ τὸ πολυώνυμον $\alpha^2+\nu\beta^2$ εἶναι ὁμογενὲς πρὸς τὰ α καὶ β.

39. ***Μερικαὶ τιμαὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.*** Ἐὰν ἐν ἀλγεβρικῇ παραστάσει ἕκαστον τῶν γραμμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμοῦ καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σημειωμέναι πράξεις, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται ***τιμὴ*** τῆς παραστάσεως καὶ ὁ ἀριθμός, ὃ γράμμα τι ἀντικαθιστῶν, λέγεται τιμὴ τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων, ἅτινα περιέχει, καὶ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων δοθῶσιν·

π. χ, ἡ παράστασις $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$, ἂν μὲν ὑποτεθῇ $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=1$, δίδει $3^2+2^2-1^2$ ἢ $9+4-1$, ἤτοι 12· ἂν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha=4$ καὶ $\beta=\gamma$, ἡ παράστασις γίνεται $4^2+\beta^2-\beta^2$, ἤτοι 16· ἂν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$, ἡ παράστασις γίνεται 0·

Σημείωσις. Κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἐκτελοῦμεν γενικῶς πρῶτον τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς διαιρέσεις καὶ ἔπειτα τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις. Ἐὰν περιέχῃ ὅρους κλασματικούς, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις χωριστὰ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωριστὰ εἰς τὸν παρονομαστήν. Ἐπίσης, ἐὰν ἔχῃ παρενθέσεις ἢ ἀγκύλας, ἐκτελοῦμεν χωριστὰ τὰς πράξεις τῶν παραστάσεων, αἵτινες εὑρίσκονται ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἢ ἀγκυλῶν·

40. ***Συναρτήσεις.*** Ἔστω ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις $3\chi-5$· ἡ τιμὴ αὐτῆς διὰ $\chi=1$ εἶναι -2, διὰ $\chi=2$ εἶναι 1, διὰ $\chi=3$ εἶναι 4 κ.ο.κ. Βλέπομεν ἑπομένως, ὅτι ἡ τιμὴ αὐτῆς δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ μεταβλητὴ καὶ ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ χ,

ἡ ὁποία εἶναι καὶ αὐτὴ μεταβλητή· λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $3\chi+5$ εἶναι ***συνάρτησις*** τοῦ χ.

Γενικῶς δέ, ***ὅταν μεταβλητὸς ἀριθμὸς συνδέεται πρὸς ἄλλον μεταβλητὸν χ οὕτως, ὥστε δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ (ἢ ὡρισμέναι τιμαὶ) τοῦ πρώτου, τότε οὗτος λέγεται συνάρτησις τοῦ χ.***

Αἱ συναρτήσεις τοῦ χ παρίστανται συμβολικῶς διὰ τοῦ συμβόλου $\sigma(\chi)$, $\varphi(\chi)$ κλπ.· π. χ. $\sigma(\chi)=3\chi-5$, διὰ δὲ $\chi=1$, 2 κλπ. γράφομεν $\sigma(1)=3.1-5=-2$ ἢ $\sigma(2)=3.2-5=1$ κτλ.

Ἐὰν ἀλγεβρικὴ παράστασις περιέχῃ μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς κλπ. μεταβλητάς, τότε εἶναι συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν τὰς ὁποίας περιέχει· οὕτω ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις $\chi^2-2\chi\psi+\psi^2$, ἡ περιέχουσα τὰς μεταβλητὰς χ, ψ, εἶναι συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν τούτων καὶ γράφεται $\sigma(\chi,\psi)=\chi^2-2\chi\psi+\psi^2$. Συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν χ, ψ εἶναι καὶ ἡ παράστασις $\chi^2-\alpha\chi\psi+\psi^2$, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ γράμμα α παριστᾷ ἀριθμὸν ὡρισμένον (σταθερόν).

Συνάρτησις μεταβλητῆς τινος χ λέγεται ***αὔξουσα,*** ὅταν, αὐξανομένης (ἐλαττουμένης) τῆς τιμῆς τοῦ χ, αὐξάνεται (ἐλαττοῦται) καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως· ***φθίνουσα*** δέ, ἐάν, αὐξανομένης (ἐλαττουμένης) τῆς τιμῆς τοῦ χ, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐλαττοῦται (αὐξάνεται).

Οὕτω ἡ συνάρτησις $3\chi-5$ τοῦ χ εἶναι αὔξουσα, ἐνῷ ἡ $-3\chi-5$ εἶναι φθίνουσα.

Οἱ μεταβλητοὶ ἢ οἱ σταθεροὶ ἀριθμοί, ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι, εἶναι τιμαὶ ποσῶν μεταβλητῶν ἢ σταθερῶν· π.χ. ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ποσὸν μεταβλητόν, καθὼς καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μετρεῖ αὐτήν, δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, εἶναι συνάρτησις τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς του· ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι σταθερόν. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν δὲ αὐτῶν δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς μεταβλητοὺς ἢ σταθερούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

34) Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τῆς παραστάσεως $2\chi^2-5\chi+2$, τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς ἑπομένας τιμὰς τοῦ χ· $\chi=0,1,2,3,4,5$.

35) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, ὅταν $\nu=0,3,6,9,12,15$.

36) Ἐὰν $\chi=1$, $\psi=2$, εὑρεῖν τὰς τιμὰς τῶν παραστάσεων $2\chi^2+\psi$, $\chi^2-\psi^2$, $\chi-2\psi$, $4\chi^2-\psi^2$.

37) Ἐὰν $\chi=3$ καὶ $\psi=-2$, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων $\chi^2+\chi\psi$, $4\chi^2-7\psi^2$, $5\chi^2-4\chi\psi$, $\chi^2-\chi\psi+\psi^2$.

38) Ἐὰν $\alpha=5$, $\beta=-4$, $\gamma=2$, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^3-\beta^3$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\gamma^4-2\alpha\beta\gamma$.

39) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῆς παραστάσεως $3\alpha^2+2\alpha\chi-\chi^2$, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὰς ἑπομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων:

$$\alpha=0, \qquad \alpha=1, \qquad \alpha=\frac{1}{2},$$

$$\chi=0, \qquad \chi=\frac{1}{2}, \qquad \chi=1.$$

40) Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$(\alpha-\beta)^2+(3\alpha-2\beta)^2-(5-\beta+\alpha)^2$, ὅταν $\alpha=3$ καὶ $\beta=-2$

41) Νά εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$(\chi+2\psi)^2-(2\psi+3\omega)^2+(3\omega+\chi)^2,$$

ὅταν $\chi=1$, $\psi=-\frac{1}{2}$ καὶ $\omega=\frac{1}{3}$

καὶ ὅταν $\chi=-1$, $\psi=-\frac{1}{2}$ καὶ $\omega=\frac{1}{3}$

42) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$(4\alpha-3\beta-6\gamma)(\alpha+8\beta+7\gamma)$, ὅταν $\alpha=-\beta$, $\beta=2$, $\gamma=-5$

43) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\alpha+\gamma-\beta)^2$, ὅταν $\alpha=-\beta=\gamma=2$

44) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ τὰς ἑπομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων $\chi=1$, $\psi=2$, $\omega=4$

$$\frac{\chi}{\psi}+\frac{\psi}{\omega}+\frac{\omega}{\chi}+5. \qquad \frac{\chi^2}{\omega}+\frac{\omega^2}{\psi}-\frac{\psi^2}{\chi}+\frac{4\omega+1}{4}$$

$$\frac{\psi\omega}{\chi}-\frac{\chi\omega}{\psi}+\frac{\chi\psi}{\omega}-\frac{2\psi^2+4\omega+1}{2}$$

45) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων

$\dfrac{5\alpha^3-2\alpha^2\beta-7\alpha\beta\gamma}{2\alpha^2-3\beta\gamma+\gamma^2}$ διὰ $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=4$

$\dfrac{\alpha(\beta+\gamma)-\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha[\gamma(\alpha-\beta)+\alpha]}$ διὰ $\alpha=3$, $\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=-2$

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\gamma}\right)\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}-\dfrac{\gamma}{\beta}\right)$ διὰ $\alpha=0{,}2$, $\beta=0{,}5$, $\gamma=\frac{7}{2}$

46) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$\dfrac{[(\alpha-\beta)\gamma+\alpha]\delta^2}{\gamma^2\left[\beta-[\alpha+(\beta+\gamma)]\dfrac{\delta}{\varepsilon}\right]}$ διὰ $\alpha=4$, $\beta=1$, $\gamma=3$, $\delta=-6$, $\varepsilon=-2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Πρόσθεσις.

41. Ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἕπεται, ὅτι, ***ἵνα προσθέσωμεν ἓν πολυώνυμον εἰς ἄλλο πολυώνυμον, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων ἀμφοτέρων τῶν πολυωνύμων, διατηροῦντες τὸ σημεῖον ἑκάστου ὅρου.***

Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ περὶ ὁσωνδήποτε πολυωνύμων ἢ καὶ μονωνύμων.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $(3\alpha^2-\beta^2+5\alpha\beta)+(8\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)=$
$=3\alpha^2-\beta^2+5\alpha\beta+8\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2.$

42. ***Ὅμοιοι ὅροι καὶ ἀναγωγὴ αὐτῶν.*** Ἕνα πωλυώνυμον εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ ὅρους, οἱ ὁποῖοι νὰ διαφέρωσι μόνον κατὰ τὸν συντελεστήν, δηλαδὴ νὰ ἔχῃ ***ὁμοίους ὅρους***· ὅπως π.χ. εἶναι τὸ πολυώνυμον $2\alpha\beta+5\beta\gamma-4\alpha\beta+8\alpha\beta$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὁμοίους ὅρους τοὺς $2\alpha\beta$, $-4\alpha\beta$, $8\alpha\beta$. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει προσθέτομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους καὶ τοὺς συγχωνεύομεν εἰς ἕνα· ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται ***ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.*** Οὕτω εἰς τὸ πολυώνυμον $8\alpha\beta\gamma^2+15\alpha\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2-7\alpha\beta^2\gamma+12\alpha^2\beta\gamma-13\alpha\beta\gamma^2$ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων ὅρων

$$8\alpha\beta\gamma^2+15\alpha\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2-13\alpha\beta\gamma^2$$

ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $\alpha\beta\gamma^2(+8+15-2-13)$,

ἤτοι μὲ τὸ $\alpha\beta\gamma^2(+8)$ ἢ $8\alpha\beta\gamma^2$·

ἤτοι τὸ ἀνωτέρω πολυώμυμον ἰσοῦται μὲ τὸ

$$8\alpha\beta\gamma^2-7\alpha\beta^2\gamma+12\alpha^2\beta\gamma.$$

Ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι

Πάντες οἱ ὅμοιοι ὅροι πολυωνύμου ἀποτελοῦσιν ἕνα ὅρον ὅμοιον πρὸς αὐτοὺς καὶ ἔχοντα συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν αὐτῶν ὅρων.

Σημ. Οἱ ὅμοιοι ὅροι τοὺς ὁποίους εἴδομεν εἰς τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα, εἶναι ὅμοιοι ὡς πρὸς ὅλα τὰ γράμματα αὐτῶν. Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι ὅμοιοι ὅροι πολυωνύμων ὡς πρός τι ἢ πρός τινα γράμματα αὐτῶν εἶναι οἱ διαφέροντες μόνον κατὰ τὸν συντελεστὴν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἢ τὰ αὐτὰ γράμματα. Οὕτω ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\alpha\chi + \chi^2 - \beta\chi + \gamma\chi$ ὅμοιοι ὅροι ὡς πρὸς χ εἶναι οἱ $\alpha\chi, -\beta\chi, \gamma\chi$, ἡ δὲ ἀναγωγὴ αὐτῶν δίδει τὸν ὅρον $(\alpha-\beta+\gamma).\chi$.

43. ***Διατεταγμένα πολυώνυμα.*** Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων πολυωνύμου γίνεται εὐκολωτέρα, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτοῦ γραφῶσι καθ' ὡρισμένην τάξιν· εἶναι δὲ αὕτη, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου γράφονται κατὰ τοιαύτην σειράν, ὥστε οἱ ἐκθέται ἑνὸς γράμματος αὐτοῦ ἐλαττοῦνται ἢ αὐξάνονται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον· καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ πολυώνυμον λέγεται ***διατεταγμένον*** κατὰ τὰς ***κατιούσας*** δυνάμεις τοῦ θεωρουμένου γράμματος, εἰς δὲ τὴν δευτέραν λέγεται διατεταγμένον κατὰ τὰς ***ἀνιούσας*** δυνάμεις τοῦ γράμματος αὐτοῦ.

Οὕτω τὸ πολυώνυμον $\chi^3 - 3\chi^2 - 5\chi + 6$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ· τὸ αὐτὸ πολυώνυμον, ἐὰν γραφῇ $6 - 5\chi - 3\chi^2 + \chi^3$, εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος· ὡσαύτως τὸ ὁμογενὲς πολυώνυμον $\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος ψ.

Τῶν διατεταγμένων πολυωνύμων ἡ πρόσθεσις γίνεται εὐκολωτέρα· διότι τότε γράφομεν τὰ μὲν ὑπὸ τὰ δὲ εἰς τρόπον, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ προσθέτομεν ἔπειτα, προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους ἑκάστης στήλης.

π. χ.

$$\begin{array}{rrrr}
\chi^3 & -5\chi^2 & +2\chi & +4 \\
 & 4\chi^2 & -3\chi & -7 \\
2\chi^3 & & +2\chi & +1 \\
-\chi^3 & -2\chi^2 & +3\chi & \\
\hline
2\chi^3 & -3\chi^2 & +4\chi & -2
\end{array}$$

Ἀφαίρεσις.

44. ***α) Μονωνύμου ἀπὸ οἱασδήποτε παραστάσεως.***

Ἔστω, ὅτι πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ παραστάσεως οἱασδήποτε Μ μονώνυμον, ἔστω τὸ $-3\alpha^2\chi^2$· ἀλλ' ἵνα ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ Μ ὁ ὑπὸ τοῦ μονωνύμου παριστώμενος ἀριθμός, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν Μ τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ.

οὕτω ἔχομεν $M - (-3\alpha^2\chi^2) = M + 3\alpha^2\chi^2$

Ὥστε, ***ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ οἱασδήποτε παραστάσεως δοθὲν μονώνυμον, προσθέτομεν εἰς αὐτὴν τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.***

β) Πολυώνυμον ἀπὸ οἱασδήποτε παραστάσεως.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται ἀπὸ παραστάσεως οἱασδήποτε M νὰ ἀφαιρεθῇ πολυώνυμον, ἔστω τὸ $\alpha - \beta + \gamma + \delta - \varepsilon - \zeta$· ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ M τὸν ὑπὸ τοῦ πολυωνύμου παριστώμενον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ· οὗτος δὲ προδήλως εὑρίσκεται, ἐὰν ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου· ἑπομένως ἡ διαφορὰ $M - (\alpha - \beta + \gamma + \delta - \varepsilon - \zeta)$ ἰσοῦται τῇ παραστάσει

$M - \alpha + \beta - \gamma - \delta + \varepsilon + \zeta$· ἤτοι,

ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ παραστάσεως οἱασδήποτε δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς πάντας τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου, ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα αὐτῶν, ἤτοι τρέποντες τὰ + εἰς — καὶ ἀντιστρόφως.

Παρατήρησις. Ὅτι ἡ παράστασις $M - \alpha + \beta - \gamma - \delta + \varepsilon + \zeta$ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν δύο ἑπομένων

M καὶ $\alpha - \beta + \gamma + \delta - \varepsilon - \zeta$

γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τούτου, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τοῦ ἀφαιρετέου ἰσοῦται τῷ μειωτέῳ M, διότι τὸ εἰρημένον ἄθροισμα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $M + \alpha - \alpha + \beta - \beta + \gamma - \gamma + \delta - \delta + \varepsilon - \varepsilon + \zeta - \zeta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πολυωνύμων

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ καὶ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

48) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν πολυωνύμων.

49) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων πολυωνύμων

$$\alpha + \beta - \gamma$$
$$\alpha - \beta + \gamma$$
$$-\alpha + \beta + \gamma$$

50) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πολυωνύμων

$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

51) Ἐὰν $K = 3\chi^3 - 3\chi^2 + 7\chi - 3$, $\Lambda = 4\chi^2 + 9\chi + 6$, $M = 3\chi^3 + 2\chi + 9$, νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα $K + \Lambda + M$, $K + \Lambda - M$, $K + M - \Lambda$ καὶ $\Lambda + M - K$.

52) Ἐὰν $\Pi = 3\alpha + 3\beta - 14$, $P = 6\alpha + 4\beta - 7$, $T = 9\alpha + 7\beta - 5$, νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα $\Pi + P + T$, $\Pi + P - T$, $\Pi - P + T$ καὶ $P - \Pi + T$.

53) Ἐὰν $X = 0{,}8\alpha - 3{,}25\beta - 2{,}5\gamma$, $\Psi = 1{,}2\alpha - 1{,}75\beta + 0{,}5\gamma$ νὰ εὑρεθῶσι τὰ $X + \Psi$ καὶ $X - \Psi$.

54) Ἐπίσης ἐὰν $X = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{4}\beta + \frac{2}{3}\gamma$

$$\Psi = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{3}\gamma$$

νὰ εὑρεθῶσι τὰ $X + \Psi$ καὶ $X - \Psi$.

55) Ἐὰν
$$\Phi = 1\tfrac{1}{2}\alpha - 2\tfrac{1}{5}\beta - 3\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\Omega = -3\tfrac{1}{2}\alpha + 1\tfrac{2}{3}\beta + 4\tfrac{1}{4}\gamma$$

νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\Phi + \Omega$, $\Phi - \Omega$ καὶ $\Omega - \Phi$.

56) Νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων ὡς πρὸς τὰ ὑπάρχοντα γράμματα εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις :

$$12 - (5\chi - 6) + (3\chi + 1) - (\chi + 10)$$
$$(62 - 3\beta + 9\gamma) - (\alpha - \beta + \gamma) - (2\alpha + \beta - 6\gamma)$$
$$(6\chi + 5\psi - 3\varphi) - (5\chi - 3\psi + 2\psi) - (\chi + 7\psi - 4\varphi)$$
$$56\chi + (934\psi - 307) - (1000\psi - 44\chi - 207) + 100$$
$$6\alpha\alpha - (3\alpha\beta + 2\alpha\gamma) - (2\alpha\gamma - 3\alpha\beta) + (5\alpha\gamma + 7\alpha\alpha)$$
$$9\chi\chi\chi - (17 + 3\chi\chi) + (17 - \chi) - (8\chi\chi\chi - 2\chi\chi - \chi)$$

57) Ὁμοίως εἰς τὰς :

$$2\psi - \left(\frac{1}{2}\varphi\chi + \frac{1}{3}\psi\right) + \left(\frac{1}{3}\varphi\chi - \frac{1}{2}\psi\right) - \left(\frac{1}{6}\psi - \frac{1}{6}\varphi\chi\right)$$
$$\left(4\frac{1}{2}\alpha\chi - 7\beta\right) - \left(2\frac{1}{4}\alpha\chi - 8\frac{1}{2}\beta\right) - \left(1\frac{1}{4}\alpha\chi + 5\frac{1}{2}\beta\right)$$
$$8{,}3\alpha - (3{,}7\alpha - 2{,}37\beta) + (0{,}7\alpha - 1{,}7\beta) - (3{,}2\alpha + 4{,}7\beta)$$
$$(2{,}7\mu + 0{,}07\lambda) - (9{,}15\mu - 0{,}62\lambda) - (0{,}69\lambda - 1{,}45\mu - 0{,}62\kappa)$$

58) Ὁμοίως εἰς τὰς :

$$\gamma + [(\alpha - \beta) + (\beta + \gamma)], \quad \beta - [(\chi - \psi) - (\alpha - \beta)]$$
$$(7\alpha - 2\beta) - [(3\alpha - \gamma) - (2\beta - 3\gamma)]$$
$$(3\chi + 5\psi) - [(7\chi - 3\psi) - (5\chi - 7\psi)] + (\chi - \psi)$$

$[(3\alpha-4\beta)-3\chi]-[(3\chi+3\beta)-(4\chi-2\alpha+\beta)]$
$5\alpha+[3\beta+[4\alpha-(2\beta+\alpha)]]$

$$\left[2\frac{1}{4}\chi-\left(3\frac{1}{4}\psi+\varphi\right)\right]-\left[\left(\frac{3}{4}\chi-\frac{1}{2}\gamma\right)+\left(\frac{1}{2}\chi+\frac{1}{4}\psi-\varphi\right)\right]$$

$$[7{,}01\chi-(2{,}5\psi+1{,}74)]+\left[\left(4\frac{1}{2}\psi-0{,}79\chi\right)-3{,}26\right]+1\frac{1}{5}\chi$$

59) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta)$ δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἰς τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν προσθέσωμεν, ἀπὸ δὲ τοῦ ἄλλου ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν ;

60) Ἐὰν τὴν διαφορὰν $(\alpha-\beta)$ δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀφαιρετέον αὐτῆς, τὶ ἐξαγόμενον θὰ ἔχωμεν ;

61) Ἐὰν τὴν διαφορὰν $(\alpha-\beta)$ δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον αὐτῆς, τὶ ἐξαγόμενον θὰ λάβωμεν ;

62) Τὶ ἀριθμὸς προκύπτει, ὅταν εἰς τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν τὴν διαφοράν των ;

63) Τὶ ἀριθμὸς προκύπτει, ὅταν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ δύο ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν ;

Πολλαπλασιασμός.

45. α) ***Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων. Πολλαπλασιασμὸς δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἡ εὕρεσις μονωνύμου ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.***

Ἐπειδὴ πᾶν ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι (34) γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἕπεται ἀμέσως ἡ πρότασις :

Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ἔχον παράγοντας πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν μονωνύμων.

Οὕτω τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $+3\alpha\beta^2\gamma$ καὶ $-5\alpha^2\beta\gamma^3\delta$ εἶναι $+3\alpha\beta^2\gamma.(-5)\alpha^2\beta\gamma^3\delta$ ἢ $(+3).(-5).\alpha.\alpha^2.\beta^2.\beta.\gamma.\gamma^3.\delta$ ἤτοι $-15\alpha^3\beta^3\gamma^4\delta$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $-12\alpha^5\beta\gamma\delta$ καὶ $-\alpha\gamma^2\delta$ εἶναι $(-12).(-1)\alpha^5\alpha.\beta.\gamma.\gamma^2.\delta.\delta$, ἤτοι $12\alpha^6\beta\gamma^3\delta^2$.

Ὥστε, ***ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀκέραια μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν, ἔπειτα γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν πάντα τὰ ἐν τοῖς μονωνύμοις ὑπάρχοντα γράμματα καὶ ἕκα-***

στον μετ' ἐκθέτου ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει ἐν τοῖς μονωνύμοις.

Ἐὰν ἓν τῶν μονωνύμων δὲν ἔχῃ γράμμα τι, ὑποτίθεται ἔχον αὐτὸ εἰς τὴν δύναμιν 0 (35).

Ὁ αὐτὸς δὲ κανὼν δίδει προδήλως καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μονωνύμων· διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο πρῶτα, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα εὑρισκόμενον γινόμενον δύο μονωνύμων ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, ἐὰν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμοιόσημοι, τὸ δὲ —, ἐὰν ἑτερόσημοι· τουτέστιν :

Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν μονωνύμων τὰ ὅμοια σημεῖα δίδουσι +, τὰ δὲ ἀνόμοια —.

Ἡ πρότασις αὕτη ἐκφράζει τὸν λεγόμενον ***κανόνα τῶν σημείων.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

64) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι γινόμενα :

$5\alpha.2\beta,\ -3\alpha\beta.(-5)\beta,\ 3\alpha^2\beta.4\alpha^3\beta\gamma.(-2)\beta\gamma^2,\ \ -6\alpha\chi^3.(-2)\beta\chi.(-5)\gamma\chi^2$

$15\alpha^2\beta\chi^3\psi^2.\frac{1}{10}\alpha\beta^2.\frac{2}{3}\beta^3\psi^2 \qquad 0{,}5\alpha\chi.1{,}7\beta\chi^2.0{,}1\alpha\chi\psi$

65) Ἐπίσης τὰ :

$\frac{3}{7}\chi^{\mu}.\left(-4\frac{1}{3}\right)\chi^{\nu} \qquad 9\alpha^{\mu}\beta^{2\nu}.\left(-\frac{2}{3}\right)\alpha^{\mu 1}.\beta$

$7\alpha\chi^{\mu-2}.\left(-2\frac{1}{14}\right)\alpha^2\chi^2 \qquad 9\chi^{\mu+\nu}.\frac{5}{18}\chi^{\mu-3\nu}$

$0{,}8\alpha^{\mu-5}.\left(-\frac{3}{5}\right)\alpha^6\beta \qquad -0{,}6\alpha^{\chi}\beta^{\psi}.0{,}5\alpha^{\psi}\beta^{\chi}$

66) Ἐπίσης νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα :

$(5\alpha)^2 \qquad (3\alpha^2\beta)^3$

$(3\alpha\beta)^2 \qquad \left(\frac{1}{2}\chi\psi^4\varphi^2\right)^3$

$\left(\frac{1}{2}\alpha^2\chi\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3.(-5\alpha\chi)^2.(-3\beta\chi)^3$

$\left(\frac{3}{5}\alpha^3\beta\chi\right)^2 \qquad (-\alpha\beta).(-2\alpha\chi)^2.(-\beta\chi)^3$

46. ***Πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων. Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον (ἢ ἐπὶ μονώ-***

νυμον) εἶναι ἡ εὕρεσις πολυωνύμου ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι :

α΄) ***Πολυώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονώνυμον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.***

π.χ. $(2\chi^3-7\chi^2+5\chi-4).(-3\chi^2)=-6\chi^5+21\chi^4-15\chi^3+12\chi^2$

β΄) ***Πολυώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ πολυώνυμον, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου πολλαπλασιασθῇ ἐφ᾽ ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.***

π.χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$\chi^3-3\chi^2-5\chi+6 \quad \text{καὶ} \quad 8\chi-5$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r}
\chi^3-3\chi^2-5\chi+6 \\
8\chi-5 \\
\hline
8\chi^4-24\chi^3-40\chi^2+48\chi \quad\quad \\
-5\chi^3+15\chi^2+25\chi-30 \\
\hline
8\chi^4-29\chi^3-25\chi^2+73\chi-30
\end{array}$$

Διατάσσομεν δηλαδὴ ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα ὁμοίως καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον πολυώνυμον ἐφ᾽ ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἔπειτα προσθέτομεν.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$3-2\alpha+4\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad 8+5\alpha-\alpha^2$$

$$\begin{array}{l}
3-2\alpha+4\alpha^2 \\
8+5\alpha-\ \alpha^2 \\
\hline
24-16\alpha+32\alpha^2 \\
\quad\quad 15\alpha-10\alpha^2+20\alpha^3 \\
\quad\quad\quad\quad -\ 3\alpha^2+\ 2\alpha^3-4\alpha^4 \\
\hline
24-\alpha+19\alpha^2+22\alpha^3-4\alpha^4
\end{array}$$

3) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$\chi^4+\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2+\alpha^3\chi+\alpha^4 \quad \text{καὶ} \quad \chi-\alpha$$

$$\begin{array}{l}
\chi^4+\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2+\alpha^3\chi+\alpha^4 \\
\chi-\alpha \\
\hline
\chi^5+\alpha\chi^4+\alpha^2\chi^3+\alpha^3\chi^2+\alpha^4\chi \\
\quad -\alpha\chi^4-\alpha^2\chi^3-\alpha^3\chi^2-\alpha^4\chi-\alpha^5 \\
\hline
\chi^5-\alpha^5
\end{array}$$

47. Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πολυωνύμων βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον πρὸ τῆς ἀναγωγῆς ἔχει τόσους ὅρους, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, δι' ὧν μετρεῖται τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῶν πολυωνύμων· ἀλλὰ διὰ τῆς ἀναγωγῆς δύναται τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ γινομένου νὰ καταστῇ μικρότερον.

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ὑπάρχουσι πάντοτε ἐν τῷ γινομένῳ δύο ὅροι πρὸς οὐδένα ἄλλον ὅμοιοι καὶ ἑπομένως ἀμετάβλητοι διαμένοντες ἐν αὐτῷ. Εἶναι δὲ τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων καὶ τὸ γινόμενον τῶν τελευταίων, ὅταν τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα ὁμοίως κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

Ἐὰν τῷ ὄντι τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς μεγίστας δυνάμεις τοῦ γράμματος, οἱ πρῶτοι ὅροι ἔχουσι τὰς μεγίστας δυνάμεις τοῦ γράμματος καὶ διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ ἔχῃ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος μεγαλυτέραν ἢ πάντα τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα· ὁμοίως οἱ τελευταῖοι ὅροι ἔχουσι τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει διὰ τοῦτο τὴν μικροτέραν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως ἢ πάντα τὰ ἄλλα γινόμενα· ἑπομένως οἱ δύο οὗτοι ὅροι τοῦ γινομένου οὐδένα ἔχουσιν ὅμοιον αὐτοῖς. Τοῦτο δυναταί τις νὰ ἴδῃ εἰς πάντα τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἔχει δύο τοὐλάχιστον ὅρους. Ὅτι δὲ δύναται καὶ δύο μόνον νὰ ἔχῃ, ἐξαφανιζομένων πάντων τῶν λοιπῶν ἐν τῇ ἀναγωγῇ, δεικνύει τό 3ον παράδειγμα.

Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου πρὸς γράμμα τι ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

48. ***Ταυτότητες.*** Ἐὰν ἔχωμεν συνδυασμὸν ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, εἰς ἃς εἶναι σημειωμέναι πρόσθεσις καὶ

πολλαπλασιασμός, δυνάμεθα, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω πράξεων, νὰ θέσωμεν αὐτὸν ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίου πολυωνύμου π. χ. $(\chi+5).(\chi-2)+(\chi+6).\chi=2\chi^2+9\chi-10$· ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν λάβῃ τὸ χ· τὰς τοιαύτας ἰσότητας καλοῦμεν ***ταυτότητας.***

Γενικῶς δὲ ***ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων τὰ ὁποῖα περιέχει.***

49. Ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες, αἱ ὁποῖαι συχνότατα ἀπαντῶσιν ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ, εἶναι αἱ κάτωθι :

1) $(\chi+\alpha)^2=(\chi+\alpha).(\chi+\alpha)=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2$

Ἡ ταυτότης αὕτη ἐκφράζει τὴν πρότασιν :

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

π.χ. $(3\chi+5)^2=(3\chi)^2+2.(3\chi).5+5^2=9\chi^2+30\chi+25$

2) $(\chi-\alpha)^2=(\chi-\alpha).(\chi-\alpha)=\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2$, ἤτοι

Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

π.χ. $(2\chi-3\psi)^2=(2\chi)^2-2(2\chi).(3\psi)+(3\psi)^2=4\chi^2-12\chi\psi+9\psi^2$

3) $(\chi+\alpha).(\chi-\alpha)=\chi^2-\alpha^2$, τοὐτέστι

Τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν πολλαπλασιασθέν, δίδει τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

π.χ. $(6\chi+5\psi).(6\chi-5\psi)=(6\chi)^2-(5\psi)^2=36\chi^2-25\psi^2$

Ἄλλαι ταυτότητες, ἀπαντώμεναι ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ, ἀλλ᾽ ὄχι τόσον συχνά, ὅσον αἱ ἀνωτέρω, εἶναι αἱ ἑξῆς :

1) $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

2) $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2.(\alpha-\beta)=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

67) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι γινόμενα :

$(2\alpha-3\beta+\gamma).5$

$2(\chi-\psi+\omega)$

$(\alpha\chi^2-\beta\chi+\gamma).2\psi$

$(5\alpha^3-2\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-7\beta^3).2\alpha^2\beta^2$

$(8\alpha^4-5\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2+6\alpha\beta^3+\beta^4).(-4\alpha\beta)$

68) Ἐπίσης τὰ:

$(8\chi^3-6\chi^2+4\chi-12).(-0.5\chi)$

$\left(\frac{2}{3}\alpha^3-0,4\alpha\beta^2+0,6\gamma^4-5\right).\ \frac{2}{5}\alpha^2\gamma$

$(0,6\chi^3-0,8\chi^2\psi+2\chi\psi^2-2\psi^3).(0,5\chi^2\psi^3)$

$(3\chi^5-4\psi^4-9\chi^3\psi^2+27-\chi^4).\frac{2}{3}\chi^2\psi$

$(3\psi^4+18\chi^4-42+6\psi^2\chi^2-15\chi^3\psi).\ 1\frac{2}{3}\chi\psi^2$

69) Ἐπίσης τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

$\chi(7\chi-5\psi)-\psi(3\psi-4\chi)$

$4(4\alpha-7\beta)-7(2\alpha-5\beta)-2(\alpha+\beta)$

$3\alpha\beta(\alpha-\gamma)-\beta\gamma(2\beta-3\alpha)-\beta^2(3\alpha-2\gamma)+6\alpha\beta^2$

$3(\alpha+\beta+2\psi)\chi-2(\alpha-3\beta-3\chi)\psi-3\beta(\chi+2\psi)+2\alpha\psi$

70) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί:

$(\alpha+\beta).(\gamma-\delta)$

$(7\chi-3).(5\chi-4)$

$(2,6\chi+0,3\psi).(5\chi+0,7\psi)$

$(7,25+4\chi).(2,8-3,6\chi)$

$(7\alpha-5\beta).(6\alpha+5\beta)$

$(3,2\alpha-5\beta).(5\alpha-2,8\beta)$

$(\alpha^2-2\beta^2).(2\alpha^2-3\beta^2)$

$(2\mu^2-\nu^2).(\mu^2+2\nu^2)$

71) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί:

$(\alpha+\beta+\gamma).(\alpha+\beta-\gamma)$

$(\alpha+\beta-\gamma).(\alpha-\beta+\gamma)$

$(\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3).(\alpha+\beta)$

$(8\alpha^3+4\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3).(2\alpha-\beta)$

$(\chi^2+\chi+1).(\chi^2+2\chi+3)$

$(\chi^2+2\chi\psi+3\psi^2).(\chi^2-2\chi\psi+3\psi^2)$

$(3\alpha^2-5\alpha\beta+4\beta^2).(2\alpha^2-\alpha\beta-2\beta^2)$

$(6\alpha\gamma-3\alpha\delta+2\beta\gamma-\beta\delta).(6\alpha\gamma+3\alpha\delta-2\beta\gamma-\beta\delta)$

72) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι γινόμενα:

$(\chi-\alpha).(\chi-\beta).(\chi-\gamma)$

$(\chi-\psi).(\psi-\varphi).(\varphi-\chi)$

$(2\chi-3).(3\chi+7).(6\chi-5)$

$(3\chi+5).(7\chi+5).(2\chi-1)$

$6\chi(\chi+1).(7\chi-2)-3(\chi+1).7\chi(2\chi-1)$

$[(\alpha+3)\chi-(2-\beta)\chi^2+(1-\alpha)\chi^3][(1-\alpha)-\chi]$

73) Ἐπίσης νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα :

$(4\chi+\psi)^2$ $\qquad$ $\left(\psi+\frac{\chi}{2}\right)^2$

$(7\chi+5)^2$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}+3\psi\right)^2$

$(8+5\psi)^2$ $\qquad$ $\left(1\frac{1}{5}\alpha+1\frac{2}{3}\right)^2$

$(3\alpha+2\beta)^2$ $\qquad$ $(0,5\chi+0,02\psi)^2$

$(2\chi^2+\psi^2)^2$ $\qquad$ $(0,2\chi^2+0,3\psi)^2$

74) Ἐπίσης τά :

$(\psi-1)^2$ $\qquad$ $(6\chi-5\psi)^2$

$(8-\varphi)^2$ $\qquad$ $(10\chi-0,6\psi)^2$

$\left(\chi-\frac{3}{4}\right)^2$ $\qquad$ $\left(2\frac{1}{3}\chi-1\frac{2}{7}\psi\right)^2$

$(9\chi^2-7\psi^2)^2$ $\qquad$ $(0,6\chi-0,5\psi^2)^2$

75) Ἐπίσης τά :

$(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)$ $\qquad$ $(4\varphi+5\omega).(5\omega-4\varphi)$

$(3\alpha-5).(3\alpha+5)$ $\qquad$ $(16\chi-3\psi).(3\psi+16\chi)$

$(7\chi+3\psi).(7\chi-3\psi)$ $\qquad$ $\left(0,3\alpha+\frac{\beta}{2}\right).\left(\frac{\beta}{2}-0,3\alpha\right)$

$\left(3\chi+\frac{1}{2}\right).\left(3\chi-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $[(\alpha+\beta)+(\chi+\psi)].[(\alpha+\beta)-(\chi+\psi)]$

$(5\chi\psi-8\varphi).(8\varphi+5\chi\psi)$ $\qquad$ $[(\alpha+\beta)\chi+(\alpha-\beta)\psi].[(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi]$

76) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα δύο παραγόντων αἱ παραστάσεις :

$9\chi^2-4\psi^2$ $\qquad$ $(\chi-\psi)^2-(\chi+\psi)^2$

$\alpha^2\chi^4-\beta^2\psi^4$ $\qquad$ $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

$(\chi+1)^2-16$ $\qquad$ $\frac{144}{25}\chi^2-\frac{4}{9}\psi^2$

$25-(\chi-1)^2$ $\qquad$ $(\chi+1)^2-16(\psi-1)^2$

$(\chi+\psi)^2-(\chi-\psi)^2$ $\qquad$ $9(\chi-2)^2-36(\chi+2)^2$

77) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$(\alpha+\beta+\gamma)^2$ $\qquad$ $(3\chi-5\psi-2)^2$

$(3\alpha+\beta-\gamma)^2$ $\qquad$ $(\chi\psi+\psi\varphi+\varphi\chi)^2$

$(2\alpha-3\beta+\gamma)^2$ $\qquad$ $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$

78) Ἐπίσης τῶν :

$(\chi+1)^3$, $\quad \left(\chi+\frac{2}{3}\right)^3$, $\quad (1-\psi)^3$, $\quad \left(\chi-\frac{1}{2}\right)^3$

$(\psi+3)^3$, $\quad (\psi+0,1)^3$, $\quad (2\alpha-\beta)^3$, $\quad (0,4-\varphi)^3$

79) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι :

$(\alpha+\beta).(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\beta^3$

$(\alpha-\beta).(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\beta^3$

$(\alpha-\beta).(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3) = \alpha^4-\beta^4$ καὶ

$(\alpha^2+\beta^2).(\chi^2+\psi^2) = (\alpha\chi+\beta\psi)^2+(\alpha\psi-\beta\chi)^2$

(ταυτότης τοῦ Lagrange)

80) Νὰ συμπληρωθῶσι τὰ τέλεια τετράγωνα, τῶν ὁποίων δίδονται οἱ δύο ὅροι :

$\chi^2-6\chi+$ $\qquad$ $\alpha^4+\beta^4\pm$

$\psi^2+4\omega^2\pm$ $\qquad$ $\alpha^4+4\beta^3\pm$

$1-10\chi+$ $\qquad$ $\alpha^4+6\alpha^2\beta+$

$\chi^2-2\chi+$ $\qquad$ $25\beta^4-20\alpha\beta^2+$

$9\chi^2+4\psi^2\pm$ $\qquad$ $\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta\gamma+$

$49\psi^2-70\chi\psi+$ $\qquad$ $-20\alpha\beta\gamma+4\beta^2\gamma^2+$

Διαίρεσις.

50. α) ***Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.*** Μονώνυμον ἀκέραιον λέγεται **διαιρετὸν** δι᾽ ἄλλου, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου πηλίκου λέγεται ***διαίρεσις*** τῶν μονωνύμων.

51. Ἀλλ᾽ ὁ διαιρέτης, ἐπὶ τὸ ἀκέραιον καὶ μονώνυμον πηλίκον πολλαπλασιασθείς, πρέπει νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον.

Ὅθεν ἕπεται εὐκόλως, ὅτι, ***ἵνα μονώνυμον εἶναι διαιρετὸν δι᾽ ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ πάντα τὰ γράμματα, τὰ***

ἐν τῷ διαιρέτῃ ὑπάρχοντα, καὶ ἕκαστον μετ᾽ ἐκθέτου μὴ μικροτέρου.

52. Ἔστω ἤδη, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $42\alpha^4\beta^5$ διὰ τοῦ $6\alpha\beta^3$. Ἐπειδὴ τὰ ἀκέραια ταῦτα μονώνυμα εἶναι (34) γινόμενα πολλῶν παραγόντων, ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ $42\alpha^4\beta^5$ πρῶτον διὰ τοῦ 6, εἶτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ α καὶ τέλος τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ β^3. Ἀλλὰ

$$42\alpha^4\beta^5 : 6 = 7\alpha^4\beta^5$$
$$7\alpha^4\beta^5 : \alpha = 7\alpha^3\beta^5 \quad \text{καὶ}$$
$$7\alpha^3\beta^5 : \beta^3 = 7\alpha^3\beta^2 \quad \text{ἤτοι}$$
$$42\alpha^4\beta^5 : 6\alpha\beta^3 = 7\alpha^3\beta^2$$

Ὅθεν, ***ἵνα διαιρέσωμεν μονώνυμον δι᾽ ἄλλου*** (ὅταν διαιρεῖται) ***διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου ἑκάστου γράμματος αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.***

Ἐὰν γράμμα τι δὲν ὑπάρχῃ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ὑποτίθεται ὑπάρχον μὲ ἐκθέτην μηδέν·

π.χ. $40\alpha^5\beta^2\gamma\delta^3 : 5\alpha\beta^2\delta = 8\alpha^4\beta^0\gamma\delta^2 = 8\alpha^4\gamma\delta^2$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$-15\alpha^3\beta\gamma\delta^5 : 7\alpha\beta\delta^3 = -\frac{15}{7}\alpha^2\gamma\delta^2 \quad \text{καὶ}$$
$$-20\alpha\beta\gamma^3 : -5\alpha\beta\gamma = 4\gamma^2$$

53. β) ***Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου, ἀμφοτέρων ὄντων ἀκεραίων.*** Πολυώνυμον ἀκέραιον λέγεται διαιρετὸν διὰ μονωνύμου ἀκεραίου, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν· καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου τούτου καὶ ἀκεραίου πηλίκου λέγεται διαίρεσις τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου.

Ἀλλὰ διὰ νὰ ὑπάρχῃ πηλίκον πρέπει ***πάντες οἱ ὅροι τοῦ διαιρετέου πολυωνύμου*** (τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ἄνευ ὁμοίων ὅρων) ***νὰ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ τότε μόνον.***

Διότι οἱ ὅροι οὗτοι εἶναι γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ὅρους τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου πηλίκου.

Ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ μονωνύμου διαιροῦ-

μεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πωλυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Διότι τὸ πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ· ἄθροισμα δὲ διαιρεῖται δι᾿ ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ χωριστὰ καὶ προστεθῶσι τὰ πηλίκα.

π.χ. τὸ πολυώνυμον

$4\alpha^2\beta^3-8\alpha^3\beta^2+12\alpha\beta^4$, διὰ τοῦ $2\alpha\beta^2$ διαιρεθέν, δίδει πηλίκον τὸ $2\alpha\beta-4\alpha^2+6\beta^2$

Παρατήρησις. Ὅταν πάντες οἱ ὅροι πολυωνύμου εἶναι διαιρετοὶ διὰ μονωνύμου τινός, τὸ πολυώνυμον παρίσταται ὡς γινόμενον τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μονωνύμου.

Οὕτω τὸ πολυώνυμον $12\alpha^2\beta^4-6\alpha^3\beta^3+4\alpha^4\beta^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $2\alpha^2\beta^2$, γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $(6\beta^2-3\alpha\beta+2\alpha^2).\,2\alpha^2\beta^2$.

Ὅταν εἰς πολυώνυμον γίνεται τοῦτο, λέγομεν, ὅτι ***ἐξάγονται οἱ κοινοὶ τῶν ὅρων παράγοντες ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

81) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

$7\alpha^2$	$: 7$	$\frac{5}{7}\chi\psi^2$	$: -\frac{5}{6}\chi\psi$
$9\alpha^2$	$: -9$	$-1\frac{2}{3}\alpha\chi^4\psi^5$	$: -\frac{5}{8}\alpha\psi^5$
$13\alpha^3\beta^6$	$: -5\alpha\beta$	$0{,}04\alpha^3\beta^2\chi^7$	$: -0{,}09\alpha^2\beta\chi^6$
$-23\alpha^4\beta^6$	$: -5\alpha^2\beta^3$	$-0{,}015\chi^3\psi^3\omega^3$	$: 0{,}03\chi\psi^2\omega^3$
$-6\alpha^2\beta^5\gamma^7$	$: 7\alpha\beta^3\gamma^2$	$-\frac{5}{6}\alpha\chi^5\psi^4$	$: 0{,}25\alpha\chi^4$

82) Ἐπίσης τά :

$(8\alpha-8\beta) : 8$ $\qquad$ $(9\chi-9) : 9$

$(18\beta^3\psi^3-12\beta^2\psi^4+24\beta\psi^5) : -6\beta\psi^3$

$(160\alpha^3\chi^3\psi^3-120\alpha^2\chi^4\psi^3-40\alpha\chi^5\psi^3) : 20\alpha\chi^3\psi$

54. γ) ***Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου, ἀμφοτέρων ὄντων ἀκεραίων.*** Πολυώνυμον λέγεται ***διαιρετὸν*** δι᾿ ἄλλου, ἐὰν ὑπάρχῃ πολυώνυμον (ἢ μονώνυμον) ἀκέραιον ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον αὐτῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου τούτου λέγεται ***διαίρεσις*** τῶν δύο πολυωνύμων. Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(6\chi^5-5\chi^4-9\chi^3+5\chi^2-7\chi+6):(2\chi^3-3\chi^2+\chi-2)$$

τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν δυνατήν· ἑπομένως τὸ πολυώνυμον πηλίκον, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχει, πρέπει, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $2\chi^3-3\chi^2+\chi-2$ νὰ δώσῃ τὸ διαιρετέον πολυώνυμον. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν διατεταγμένον καὶ αὐτὸ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην οἱ πρῶτοι ὅροι αὐτῶν θὰ δώσωσι γινόμενον τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου (47)· ἤτοι, ἐὰν διὰ τοῦ π_1 παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, θὰ ἔχωμεν $(2\chi^3).\pi_1=6\chi^5$ καὶ ἑπομένως ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων, ἤτοι $\pi_1=6\chi^5:2\chi^3=3\chi^2$.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ διαιρετέος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἂν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕνα ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἀλλ ἡμεῖς γνωρίζομεν ἤδη ἕνα ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸν $3\chi^2$, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην εἶναι $6\chi^5-9\chi^4+3\chi^3-6\chi^2$· ἐὰν δὲ αὐτὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $4\chi^4-12\chi^3+11\chi^2-7\chi+6$, τὸ ὁποῖον, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς (ἀγνώστους) ὅρους τοῦ πηλίκου· ἄρα διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $(4\chi^4-12\chi^3+11\chi^2-7\chi+6):(2\chi^3-3\chi^2+\chi-2)$, τῆς ὁποίας, κατὰ τὰ προηγούμενα, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου (ἤτοι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ζητουμένου) εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως $4\chi^4:2\chi^3=2\chi$· ἐξακολουθοῦντες ὡς ἄνω εὑρίσκομεν τὸν ἑπόμενον ὅρον διὰ νέας διαιρέσεως· θὰ εἶναι δὲ οὗτος ὁ -3.

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$
\begin{array}{r|l}
6\chi^5-5\chi^4-9\chi^3+5\chi^2-7\chi+6 & 2\chi^3-3\chi^2+\chi-2 \\
\hline
-6\chi^5+9\chi^4-3\chi^3+6\chi^2 & 3\chi^2+2\chi-3 \\
\hline
4\chi^4-12\chi^3+11\chi^2-7\chi+6 & \\
-4\chi^4+6\chi^3-2\chi^2+4\chi & \\
\hline
-6\chi^3+9\chi^2-3\chi+6 & \\
+6\chi^3-9\chi^2+3\chi-6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

55. Ἐὰν τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, συλλογιζόμενοι ὁμοίως, εὑρίσκομεν τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀρχίζοντες δηλ. τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τῶν ὅρων, οἳ ὁποῖοι περιέχουν τὸ γράμμα τῆς διατάξεως ὑπὸ τὸν μικρότερον ἐκθέτην. π.χ.

$$
\begin{array}{r|l}
3-17\chi+22\chi^2-8\chi^3 & 1-4\chi \\
\hline
-3+12\chi & 3-5\chi+2\chi^2 \\
\hline
-5\chi+22\chi^2-8\chi^3 & \\
+5\chi-20\chi^2 & \\
\hline
2\chi^2-8\chi^3 & \\
-2\chi^2+8\chi^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

56. Ἐὰν εἰς μίαν διαίρεσιν ὑπάρχῃ πολυώνυμον πηλίκον, εἶναι φανερόν, ὅτι μία ἐκ τῶν μερικῶν διαιρέσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἀνάγεται ἡ ἀρχική, θὰ δώσῃ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ θὰ ἀφίσῃ ὑπόλοιπον 0.

Ἐὰν ὅμως εἰς μίαν διαίρεσιν δὲν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον αὐτῶν, τότε ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ τελειώσῃ :

1ον) ***Ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρέτου δὲν διαιρῇ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου ἢ τὸν πρῶτον ὅρον ἑνὸς ἐκ τῶν ὑπολοίπων*** καὶ

2ον) ***Ἐὰν διαιρῇ πάντας μὲν τούτους, ἀλλ' οὐδέποτε εὑρίσκεται ὑπόλοιπον Ο.***

π.χ. 1ον) νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον

$16\alpha^3+32\alpha^2-4\alpha^5+\alpha^7-16\alpha^4$ διὰ τοῦ α^3-8

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha^7-4\alpha^5-16\alpha^4+16\alpha^3+32\alpha^2 & \alpha^3-8 \\ \cline{2-2}
-\alpha^7 \qquad +8\alpha^4 & \alpha^4-4\alpha^2-8\alpha+16 \\ \cline{1-1}
\quad -4\alpha^5-8\alpha^4+16\alpha^3+32\alpha^2 & \\
\quad +4\alpha^5 \qquad\qquad -32\alpha^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad -8\alpha^4+16\alpha^3 & \\
\qquad +8\alpha^4 \qquad\qquad -64\alpha & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad +16\alpha^3 \qquad -64\alpha & \\
\qquad\quad -16\alpha^3 \qquad\qquad +128 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -64\alpha+128 &
\end{array}
$$

2ον) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον

$2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3$ διὰ τοῦ $\chi-\alpha$

$$
\begin{array}{l|l}
2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3 & \chi-\alpha \\ \cline{2-2}
-2\alpha\chi^2+2\alpha^2\chi & 2\alpha\chi+3\alpha^2 \\ \cline{1-1}
\qquad 3\alpha^2\chi+\alpha^3 & \\
\qquad -3\alpha^2\chi+3\alpha^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 4\alpha^3 &
\end{array}
$$

3ον) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πωλυώνυμον

$2-9\chi-5\chi^2+16\chi^3-7\chi^4$ διὰ τοῦ $1-\chi+2\chi^2-7\chi^3$

$$
\begin{array}{l|l}
2-9\chi-5\chi^2+16\chi^3-7\chi^4 & 1-\chi+2\chi^2-7\chi^3 \\ \cline{2-2}
-2+2\chi-4\chi^2+14\chi^3 & 2-7\chi+\dots \\ \cline{1-1}
\quad -7\chi-9\chi^2+30\chi^3-7\chi^4 & \\
\quad +7\chi-7\chi^2+14\chi^3-49\chi^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad -16\chi^2+44\chi^3-56\chi^4 & \\
\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot &
\end{array}
$$

Παρατήρησις. Ἡ τελευταία διαίρεσις ἐξακολουθεῖ ἐπ᾽ ἄπειρον, διότι τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ· ἐνῷ, ἐὰν ἦσαν διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ, θὰ ἐφθάναμεν εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ διαιρέτης (διότι εἰς ἑκάστην διαίρεσιν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρέτου δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ ὑπολοίπῳ), ὁπότε ἡ διαίρεσις θὰ διεκόπτετο. Διὰ τοῦτο προτιμώτερον εἶναι ἐν τῇ διαιρέσει νὰ διατάσσωμεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

57. ***Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ $\chi-\alpha$.*** Εἰς τὸ δεύτερον ἐκ τῶν ἄνω παραδειγμάτων παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον $4\alpha^3$ δὲν περιέχει τὸν χ (οὔτε εἰς ἄλλην τινα διαίρεσιν διὰ $\chi-\alpha$ τὸ τυχὸν ὑπόλοιπον δύναται νὰ περιέχῃ τὸν χ, ἀφοῦ τοῦτο εἶναι βαθμοῦ πρὸς τὸ χ μικροτέρου ἢ ὁ διαιρέτης) καὶ κατόπιν, ὅτι τοῦτο εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ διαιρετέου διὰ $\chi=\alpha$. Καὶ πράγματι εἶναι $2\alpha.\alpha^2+\alpha^2.\alpha+\alpha^3=4\alpha^3$· τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο συμβαίνει, διότι εἶναι

$$2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha=(\chi-\alpha).(2\alpha\chi+3\alpha^2)+4\alpha^3$$

ἡ δὲ ἰσότης αὕτη εἶναι ταυτότης· ἀληθεύει ἑπομένως καὶ διὰ $\chi=\alpha$· ἀλλὰ τότε ἔχομεν

$$2\alpha.\alpha^2+\alpha^2\alpha+\alpha^3=4\alpha^3 \text{ (διότι } \alpha-\alpha=0)$$

Γενικῶς δὲ ἂν $\varphi(\chi)$ εἶναι τὸ διαιρετέον ***ἀκέραιον*** πολυώνυμον, $(\chi-\alpha)$ ὁ διαιρέτης, $\pi(\chi)$ τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν $\varphi(\chi)=(\chi-\alpha).\pi(\chi)+\upsilon$ καὶ διὰ $\chi=\alpha$ εὑρίσκομεν $\varphi(\alpha)=(\alpha-\alpha).\pi(\alpha)+\upsilon$, ἤτοι $\varphi(\alpha)=\upsilon$ (τὸ υ μένει ἀμετάβλητον ὡς μὴ περιέχον τὸν χ).

Ὥστε ***τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς τὸ χ διὰ $\chi-\alpha$ εἶναι ἡ τιμὴ αὐτοῦ διὰ $\chi=\alpha$.***

π.δ. 1ον) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\chi^3-2\chi-4$

α) διὰ τοῦ $\chi-4$ εἶναι $4^3-2.4-4=52$

β) διὰ τοῦ $\chi+4$ δηλ. διὰ τοῦ $\chi-(-4)$ εἶναι

$$(-4)^3-2(-4)-4=-60 \text{ καὶ}$$

γ) διὰ τοῦ $\chi-2$ εἶναι $2^3-2.2-4=0$·

συμπεραίνομεν δὲ ἐξ αὐτοῦ, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον διαιρεῖται διὰ $\chi-2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

$(5\alpha^6+15\alpha^5+5\alpha+15)\ :\ (\alpha+3)$
$(35\chi^3+47\chi^2+13\chi+1)\ :\ (5\chi+1)$
$(6\chi^3+\chi^2-29\chi+21)\ :\ (2\chi-3)$
$(3\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2)\ :\ (3\alpha-2\beta)$
$(45\chi^4+18\chi^3+35\chi^2+4\chi-4)\ :\ (9\chi^3+7\chi-2)$
$(21\alpha^4-16\alpha^3\beta+16\alpha^2\beta^2-5\alpha\beta^3+2\beta^4)\ :\ (3\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

84) Ἐπίσης αἱ :

$(21\chi^5+\chi^4-13\chi^3-10\chi^2-7\chi+10):(7\chi^3-2\chi^2+\chi-5)$

$(7\psi^4-16\psi^3+5\psi^2+9\psi-2):(7\psi^3-2\psi^2+\psi-5)$

$(\chi^9-3\chi^8-2\chi^7+7\chi^6+9\chi^5-24\chi^4-\chi^3+7\chi^2+13\chi-2):$
$:(7\chi-1+\chi^5-2\chi^3)$

$(6\alpha\gamma-9\alpha\delta+4\beta+6\beta\delta):(3\alpha-2\beta)$

$(6\alpha\gamma-2\alpha\delta+4\alpha\mu-9\beta\gamma+3\beta\delta-6\beta\mu):(2\alpha-3\beta)$

$(2\alpha\chi-6\beta\chi+6\gamma\chi-\alpha\psi+3\beta\psi-4\gamma\psi):(2\chi-\psi)$

85) Ἐπίσης αἱ :

$\left(\frac{4}{5}\chi^2+\frac{7}{3}\chi-2\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{5}\chi-\frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{3}{2}\chi^2+4\frac{3}{5}\chi\psi-\frac{4}{5}\psi^2\right) : \left(2\frac{1}{2}\chi-\frac{2}{3}\psi\right)$

$\left(3\frac{3}{4}\psi^2-4\frac{3}{7}\psi-3\frac{3}{7}\right) : \left(1\frac{1}{5}+2\frac{1}{4}\psi\right)$

$\left(\frac{3\chi^2}{5}+\frac{11\chi}{6}-\frac{25}{9}\right) : \left(\frac{3\chi}{2}-\frac{5}{3}\right)$

$(0{,}4\chi^2+1{,}47\chi-8{,}5) : (0{,}8\chi-2{,}5)$

$(2{,}21\varphi+4{,}18\varphi\omega-1{,}61\omega^2 : (0{,}7\omega+1{,}3\varphi).$

86) Ἐπίσης αἱ :

$(\alpha^4+\beta^4):(\alpha+\beta)$

$(\alpha^5+\beta^5):(\alpha+\beta)$

$(\chi^6+\psi^6):(\chi^2+\psi^2)$

$(\varphi^6+\varphi^3\omega^3+\omega^6):(\omega\varphi+\varphi^2+\omega^2)$

$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma):(\alpha+\beta+\gamma)$

$[(\alpha+1)\chi^2+2(\alpha+1)\chi+(\alpha+1)]:(\chi+1)$

$[\alpha\chi^4+\beta(1-\alpha)\chi^3+(\gamma-\beta^2)\chi^2+(\delta-\beta\gamma)\chi-\beta\delta]:(\chi-\beta)$

87) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αὗται :

$(\chi^3+2\chi^2+3\chi+4) : (\chi-1)$

$(\chi^3-3\chi^2-5\chi+2) : (\chi-2)$

$(2\chi^3-4\chi^2+\chi-6) : (\chi+2)$

$(\chi^4+5\chi^3-\chi^2-3\chi+7) : (\chi+3)$

$(3\chi^3-2\alpha\chi^2-5\alpha^2\chi+4\alpha^3) : (\chi-\alpha)$

$[(\chi+\alpha+2\beta)^3-\chi^3-\alpha^3-\beta^3] : (\chi+\alpha)$

88) Ἐπίσης τῶν:

$$(5\chi^3+15\chi^2-5\chi+15) \quad : \left(\chi-\frac{1}{5}\right)$$

$$(4\chi^2-8\chi-18) \quad : \left(\chi+\frac{1}{2}\right)$$

$$(8\chi^4-5\chi^3+2\chi-1) \quad : (2\chi-3)$$

$$(9\chi^3-12\chi^2-\chi+27) \quad : (3\chi+4)$$

$$(\beta-\gamma)\chi^2+(\gamma-\alpha)\chi+(\alpha-\beta) \quad : (\chi-1)$$

$$(\beta-\gamma)\chi^2+\alpha(\gamma-\alpha)\chi+\alpha^2(\alpha-\beta) \quad : (\chi-\alpha)$$

$$[(\chi+\alpha+1)^3-\chi^3-\alpha^3-1)] \quad : (\chi-1).$$

89) Τὸ διώνυμον $\chi^\mu-\alpha^\mu$ (μ ἀκέραιος θετικὸς) εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\alpha$, διότι $\alpha^\mu-\alpha^\mu=0$, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι $\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\cdots\cdots+\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu-1}$, ὁ δὲ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ πηλίκου αὐτοῦ εἶναι προφανής.

90) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ πότε τὰ διώνυμα $\chi^\mu\pm\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὰ διὰ $\chi\pm\alpha$ καὶ ποῖα εἶναι τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων αὐτῶν.

91) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων καὶ τὰ πηλίκα αὐτῶν ἄνευ ἐκτελέσεως τῶν πράξεων:

$$(\chi^5+\psi^5) : (\chi+\psi) \qquad (\chi^6+\psi^6) : (\chi+\psi)$$

$$(\chi^5+\psi^5) : (\chi-\psi) \qquad (\chi^6+\psi^6) : (\chi-\psi)$$

$$(\chi^5-\psi^5) : (\chi+\psi) \qquad (\chi^6-\psi^6) : (\chi+\psi)$$

$$(\chi^5-\psi^5) : (\chi-\psi) \qquad (\chi^6-\psi^6) : (\chi-\psi)$$

Ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων.

58. Ἡ ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή, ἀλλὰ καὶ ὅταν εἶναι δυνατή, δὲν ἔχομεν γενικὰς μεθόδους δι' αὐτήν.

Μέθοδοι τροπῆς πολυωνύμων εἰς γινόμενα παραγόντων ὑπάρχουν δι' ὡρισμένας περιπτώσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὰς κάτωθι:

α') Ὅταν πάντες οἱ ὅροι πολυωνύμου ἔχουσι μονώνυμόν τι κοινὸν παράγοντα, ἐξάγομεν τοῦτο ἐκτὸς παρενθέσεως (53 παρατ.)

Οὕτω $\quad \alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi=\chi(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)$.

β') Ἐὰν οἱ ὅροι πολυωνύμου δύνανται ν' ἀποτελέσωσιν ὁμάδας, τῶν ὁποίων ἑκάστη περιέχει παράγοντας κοινούς, θέτομεν αὐτοὺς ἐκτὸς παρενθέσεως. Ἐὰν δὲ αἱ παρενθέσεις αὗται περιέχωσι τὴν αὐτὴν παράστασιν, θέτομεν καὶ ταύτην ἐκτὸς παρενθένσεως.

π.δ. $\alpha\chi-\beta\chi+\gamma\chi+\alpha\psi-\beta\psi+\gamma\psi=\chi(\alpha-\beta+\gamma)+\psi(\alpha-\beta+\gamma)=(\alpha-\beta+\gamma).(\chi+\psi).$

γ΄) Ἐὰν διώνυμον εἶναι διαφορὰ τετραγώνων, ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων.

π.χ. $16\alpha^2-25\beta^2=(4\alpha)^2-(5\beta)^2=(4\alpha+5\beta).(4\alpha-5\beta).$

δ΄) Ἐὰν διώνυμον εἶναι τῆς μορφῆς $\chi^\mu-\psi^\mu$, ὅπου μ ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi-\psi$ (ἄσκ. 89), ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ $\chi-\psi$ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ $\chi-\psi$, ὅπερ γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν ἀπ᾽ εὐθείας.

Οὕτω $\chi^4-\psi^4=(\chi-\psi).(\chi^3+\chi^2\psi+\chi\psi^2+\psi^3)$

$\chi^5-\psi^5=(\chi-\psi).(\chi^4+\chi^3\psi+\chi^2\psi^2+\chi\psi^3+\psi^4).$

ε΄) Ἐὰν διώνυμον εἶναι τῆς μορφῆς $\chi^\mu-\psi^\mu$, ὅπου μ ἀκέραιος, θετικὸς καὶ ἄρτιος ἀριθμός, ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ $\chi+\psi$ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ $\chi+\psi$.

π.χ. $\chi^4-\psi^4=(\chi+\psi).(\chi^3-\chi^2\psi+\chi\psi^2-\psi^3.$

ϛ΄) Ἐὰν διώνυμον εἶναι τῆς μορφῆς $\chi^\nu+\psi^\nu$, ὅπου ν ἀκέραιος, θετικὸς καὶ περιττὸς ἀριθμός, ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ $\chi+\psi$ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ $\chi+\psi$.

π.χ. $\chi^5+\psi^5=(\chi+\psi).(\chi^4-\chi^3\psi+\chi^2\psi^2-\chi\psi^3+\psi^4)$

ζ΄) Τριώνυμον, τοῦ ὁποίου οἱ μὲν δύο ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ὁ δὲ τρίτος εἶναι τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν παραστάσεων τούτων, τρέπεται εἰς τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν παραστάσεων τούτων.

Οὕτω ἔχομεν $25\chi^2+30\chi\psi+9\psi^2=(5\chi+3\psi)^2$

$25\chi^2-30\chi\psi+9\psi^2=(5\chi-3\psi)^2.$

η΄) Ἐὰν τριωνύμου ὁ εἷς ὅρος δύναται ν᾽ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο μονωνύμων, ὧν τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων ὅρων, τότε ἀναλύομεν τὸ τριώνυμον τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων κατὰ τὸν τρόπον (β΄).

π.χ. $6\chi^2+17\chi+5=6\chi^2+15\chi+2\chi+5=$

$2\chi(3\chi+1)+5(3\chi+1)=(3\chi+1).(2\chi+5)$·

ἀντεκατεστάθη δὲ ὁ 17χ διὰ τοῦ $15\chi+2\chi$, διότι

$$15\chi.2\chi = 30\chi^2, \qquad 6\chi^2.5 = 30\chi^2.$$

Ἐπίσης $9\chi^2+14\chi-8 = 9\chi^2+18\chi-4\chi-8 =$
$9\chi(\chi+2)-4(\chi+2) = (\chi+2).(9\chi-4).$

θ΄) Ἐὰν ὁ εἷς ὅρος τριωνύμου δύναται ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο ἄλλων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς μετὰ τῶν δύο ἄλλων ὅρων τοῦ τριωνύμου ν' ἀποτελῇ τέλειον τετράγωνον, ὁ δὲ ἄλλος νὰ εἶναι καὶ οὗτος τέλειον τετράγωνον μὲ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ πρώτου (τελείου τετραγώνου), τότε θὰ ἔχωμεν διαφορὰν δύο τετραγώνων, ἣν ἀναλύομεν κατὰ τὰ γνωστά.

π.χ. $49\chi^2+42\chi-16 = 49\chi^2+42\chi+9-25 = (7\chi+3)^2-5^2 =$
$(7\chi+3+5).(7\chi+3-5) = (7\chi+8).(7\chi-2).$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

92) Νὰ τραπῶσιν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις :

$4\alpha\beta-2\beta\gamma$	$2\chi(3\mu-\nu)-(3\mu-\nu)$
$\alpha^2+\alpha$	$(4\alpha-5\beta)(3\mu-2\varrho)+(\alpha+4\beta)(3\mu-2\varrho)$
$\chi^2-\chi$	$(7\alpha-3\chi)(5\gamma-2\delta)-(9\alpha-2\chi)(5\gamma-2\delta)$
$\alpha\chi-2\alpha\psi+3\alpha\varphi$	$(\chi-\psi)(3\alpha+4\beta)-(4\alpha-5\beta)(\chi-\psi)$
$\alpha(\chi+\psi)-\beta(\chi+\psi)$	$8\alpha^2\beta^5-16\alpha^4\beta^3-12\alpha^5\beta^2+8\alpha^3\beta^4$

93) Ἐπίσης αἱ :

$\alpha\chi+\beta\chi+\alpha\psi+\beta\psi$	$(\alpha+\beta)(\chi+\psi)-\gamma\chi-\beta\psi$
$2\alpha\chi-3\beta\psi-2\beta\chi+3\alpha\psi$	$(2\chi+\psi)(\alpha-\beta)+2\chi+\psi$
$40\chi^2-2\psi+5\chi-16\chi\psi$	$(\alpha+2\beta)^2-5\alpha-10\beta$
$15\alpha\mu-10\alpha\varrho-3\beta\mu+2\beta\varrho$	$\chi(\psi+\omega-\alpha)-\omega(\chi-\psi+\alpha)$

94) Ἐπίσης αἱ :

$36\chi^2-25\psi^2$	$(2\alpha-3\beta)^2-4\beta^2$
$1-\alpha^2$	$9(5\chi-4\psi)^2-64\chi^2$
α^4-9	$81\alpha^2-16(2\alpha-3\chi)^2$
$3\alpha^2-27$	$(4\alpha+7\beta)^2-(3\alpha-5\beta)^2$
$25-(4-\chi)^2$	$(\alpha+3\beta)^2-9(\beta-\gamma)^2$
$(\alpha-\beta)^2-\chi^2$	$(4\alpha+3\beta)^2-16(\alpha-\chi)^2$

95) Ἐπίσης αἱ:

$\alpha^2-6\alpha+9$ | $144\beta-120\beta^2+25\beta^3$
$\alpha^2-2\alpha+1$ | $48\chi\psi-64\chi^2-9\psi^2$
$15\chi^2+30\chi+9$ | $(\chi+5)^2+12(\chi+5)+36$
$36\chi^2+49-84\chi$ | $(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$
$\chi^3+4\chi^2+4\chi$ | $(\alpha-\beta)^2\chi^2-2(\alpha-\beta)\gamma\chi^2+\gamma^2\chi^2$

96) Ν' ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ:

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2$ | $9\chi^2-4\psi^2+\varphi\psi+\varphi^2$
$9\chi^2-6\chi\psi+\psi^2-\varphi^2$ | $25\alpha^2-9\psi^2-12\chi\psi-4\chi^2$
$25\alpha^2-\gamma^2+10\alpha+1$ | $\chi^2+\psi^2-\omega^2-\varphi^2+2(\chi\psi+\omega\varphi)$
$\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2$ | $\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2-2(\alpha\gamma-\beta\delta)$

97) Τὰ κάτωθι διώνυμα νὰ τραπῶσιν εἰς γινόμενα:

$\chi^3-\psi^3$ | α^4-1
χ^3-1 | α^5+32
χ^3+27 | β^5-1
$27\chi^3-8\psi^3$ | β^7+128
χ^4-625 | β^6-1

98) Τὰ κάτωθι τριώνυμα νὰ τραπῶσιν εἰς γινόμενα:

$\chi^2+5\chi+6$ | $\chi^2-\chi-12$
$\chi^2-5\chi+6$ | $\chi^2+\chi-12$
$3\chi^2+5\chi+2$ | $\alpha^2-7\alpha\beta+12\beta^2$
$\chi^2+6\chi+8$ | $\alpha^2-3\alpha\beta-10\beta^2$
$3\chi^2-\chi-4$ | $\alpha^2-3\alpha^3\beta-18\alpha^2\beta^2$

99) Ν' ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ κάτωθι τριώνυμα:

$\alpha^2+2\alpha\beta-15\beta^2$ | $15-10\chi-25\chi^2$
$15\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta$ | $\chi^4+\chi^2\psi^2+\psi^4$
$9\chi^2+6\chi\psi-3\psi^2$ | $\chi^8+10\chi^4+21$
$4\chi^2-12\chi\psi-27\psi^2$ | $\chi^{10}+12\chi^5+27$

Κλασματικαὶ παραστάσεις ἢ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

59. Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

παρίσταται ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι αἱ οὕτω προκύπτουσαι κλασματικαὶ παραστάσεις, αἵτινες καὶ **ἀλγεβρικὰ κλάσματα** λέγονται, ἔχουσι πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων· διότι καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτῶν, οἱασδήποτε παραστάσεως καὶ ἂν εἶναι, παριστῶσιν ἀριθμούς τινας· ἐπὶ πάντων δὲ τῶν ἀριθμῶν ἀπεδείχθησαν ἰσχύουσαι αἱ ἰδιότητες ἐκεῖναι ὡς ἀκολουθήματα ἀναγκαῖα τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων· ἑπομένως πᾶσαι αἱ ἁπλοποιήσεις καὶ αἱ πράξεις, αἱ ἐπὶ τῶν συνήθων κλασμάτων γινόμεναι, γίνονται καὶ ἐπὶ τούτων καὶ δι' αὐτῶν αἱ παραστάσεις τρέπονται ἢ μετασχηματίζονται εἰς ἄλλας ἴσας.

Ἕπονται παραδείγματά τινα μετασχηματισμῶν.

1ον) Τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $3\alpha^2\beta\gamma$ διὰ τοῦ $8\alpha\beta\gamma^2\delta$ παρίσταται διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{3\alpha^2\beta\gamma}{8\alpha\beta\gamma^2\delta}$· ἐπειδὴ δὲ οἱ ὅροι αὐτοῦ ἔχουσι μ.κ.δ. τὴν παράστασιν $\alpha\beta\gamma$, ἁπλοποιεῖται τοῦτο εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3\alpha}{8\gamma\delta}$.

2ον) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$. Εἰς αὐτὸ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι $(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)$, ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι $(\alpha-\beta)^2$ ἢ $(\alpha-\beta).(\alpha-\beta)$. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}=\frac{(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta).(\alpha-\beta)} \text{ καὶ ἁπλούστερον } \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

3ον) Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\frac{2\beta}{\alpha-\beta}$, $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ προσθέσωμεν. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εὑρεθῇ, ἂν τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα. Κλάσματα δέ, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, τρέπονται εἰς ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, ὅπερ εἶναι παράστασις διαιρετὴ διὰ πάντων τούτων· ἀλλ' ἐνίοτε ὑπάρχει παράστασις ἁπλουστέρα τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν. Εἰς τὸ ἀνωτέρω π.δ. παρονομαστὴς γίνεται ὁ $\alpha^2-\beta^2$. Οὕτω ἔχομεν

$$\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{2\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2\alpha(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)}+\frac{2\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=$$

$\frac{2\alpha(\alpha-\beta)+2\beta(\alpha+\beta)+\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ ἤ, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων $3.\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

4ον) Τὸ γινόμενον τῶν δύο κλασμάτων $\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ καὶ $\frac{\alpha\beta}{\sigma^2-\beta^2}$ εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένων χωριστὰ τῶν ἀριθμητῶν καὶ χωριστὰ τῶν παρονομαστῶν. Ἔχομεν λοιπὸν $\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\beta^2}.\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=$ $\frac{(\alpha-\beta).\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha^2-\beta^2)}$ ἤ, ἁπλοποιούμενον, $\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha+\beta)}$.

5ον) Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{15\alpha^2}{2\chi+1}$ διὰ τοῦ $\frac{3\alpha}{2\chi-1}$ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀνεστραμμένον. Οὕτω ἔχομεν

$$\frac{15\alpha^2}{2\chi+1}:\frac{3\alpha}{2\chi-1}=\frac{15\alpha^2}{2\chi+1}.\frac{2\chi-1}{3\alpha}=\frac{15\alpha^2.(2\chi-1)}{(2\chi+1).3\alpha}=\frac{5\alpha(2\chi-1)}{2\chi+1}$$

6ον) Τὸ πηλίκον τῶν παραστάσεων $\frac{\gamma}{\chi-\alpha}-\frac{\gamma}{\chi+\alpha}$ διὰ $1+\frac{\gamma^2}{\chi^2-2^2}$ παρίσταται διὰ τοῦ συνθέτου κλάσματος $\frac{\frac{\gamma}{\chi-\alpha}-\frac{\gamma}{\chi+\alpha}}{1+\frac{\gamma^2}{\chi^2-\alpha^2}}$ τὸ ὁποῖον μετασχηματίζεται εἰς ἁπλοῦν, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν παράστασιν $\chi^2-\alpha^2$· τότε ἔχομεν

$$\frac{\frac{\gamma}{\chi-\alpha}.(\chi^2-\alpha^2)-\frac{\gamma}{\chi+\alpha}.(\chi^2-\alpha^2)}{(\chi^2-\alpha^2)+\frac{\gamma^2}{\chi^2-\alpha^2}.(\chi^2-\alpha^2)}=\frac{\gamma(\chi+\alpha)-\gamma(\chi-\alpha)}{\chi^2-\alpha^2+\gamma^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

100) Ν' ἁπλοποιηθῶσι τὰ ἑπόμενα ἀλγεβρικὰ κλάσματα:

$\frac{5\alpha^3\beta^4\gamma}{35\alpha^2\beta^4\gamma^2}$, $\frac{-36\chi^3\psi^4}{18\chi\psi^2\varphi^2}$, $\frac{\chi^2+\chi\psi}{\chi^2-\psi^2}$, $\frac{\varphi-1}{\varphi^2-1}$,

$\frac{3\chi-6\psi}{4\chi-8\psi}$, $\frac{3\chi-6\psi}{8\psi-4\chi}$, $\frac{\chi^2-4\chi+4}{\chi^2-4}$, $\frac{2\alpha^2-2\beta^2}{\chi^2+49\chi^2+14\chi\psi}$,

$\frac{\chi^2+121-22\chi}{\chi^2-121}$, $\frac{6+3\chi+2\psi+\chi\psi}{2\psi+6}$, $\frac{\alpha\chi-\alpha\psi+\beta\chi-\chi\psi+\alpha+\beta}{\alpha\chi-\alpha\psi-\beta\chi+\beta\psi+\alpha-}$

$$\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2},\quad \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2},\quad \frac{8\alpha^4-16\alpha^3\beta+8\alpha^2\beta^2}{3\alpha^2-3\beta^2},\quad \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}.$$

101) Νὰ καταστῇ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις $\frac{6\alpha\beta}{3\gamma-\delta}\cdot\left(\frac{\gamma+\delta}{4}-\frac{\delta}{3}\right)$

102) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ κάτωθι πράξεις :

α) $\frac{\alpha}{\chi}+\frac{2\alpha}{\chi}+\frac{3\alpha}{\chi}$, β) $\frac{\alpha+\beta}{2\chi}-\frac{\alpha-\beta}{2\chi}$, γ) $\frac{\chi}{\psi}+\varphi$,

δ) $\frac{\chi}{\chi-\psi}+1$, ε) $1-\frac{\alpha}{\alpha+\chi}$, ϛ) $\frac{4\alpha}{5}-\frac{3\alpha}{10}-\frac{4\beta}{7}+\frac{\beta}{14}$,

ζ) $\frac{3\chi-7}{8}+\frac{3-\chi}{4}$, η) $\frac{7\chi-3}{3\chi}-\frac{9\chi-4}{4\chi}$, ϑ) $\frac{9}{3\chi-2}-\frac{2\chi+3}{9\chi^2-4}$,

103) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαφοραί :

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^3-\beta^3}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2},\qquad \frac{3\alpha}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}-\frac{3}{\alpha+\beta}.$$

104) Ἐπίσης νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις :

α) $\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha\beta}$, β) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$, γ) $\frac{1}{\alpha+\beta}-\frac{1}{\alpha-\beta}$,

δ) $\frac{1}{\alpha-\beta}-\frac{1}{\alpha+\beta}$, ε) $\frac{2\chi}{\alpha-1}-\frac{\chi}{\alpha^2-1}$, ϛ) $\frac{5}{4\chi-4}-\frac{7}{6\chi+6}$,

ζ) $\frac{2\chi-3}{3\chi-3}-\frac{3\chi-1}{4\chi+4}-\frac{\chi+2}{\chi^2-1}$, η) $\frac{2}{(\chi-1)^3}+\frac{1}{(\chi-1)^2}+\frac{2}{\chi-1}-\frac{1}{\chi}$,

ϑ) $\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}+\frac{\alpha-\chi}{2+\chi}+\frac{\alpha^2+\chi^2}{\alpha^2-\chi^2}+\frac{4\alpha\chi}{\alpha^2+\chi^2}$, ι) $\frac{1}{\chi^2-\alpha^2}+\frac{1}{(\chi+\alpha)^2}+\frac{1}{(\chi-\alpha)^2}$,

ια) $\frac{1}{(\chi-2)(\chi-3)}+\frac{2}{(\chi-1)(3-\chi)}+\frac{1}{(\chi-1)(\chi-2)}$.

105) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις :

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}+\frac{5\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2},\qquad \frac{\alpha^2\chi^2}{\alpha^2-\chi^2}+\frac{\alpha^3+\alpha^3\chi}{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2}-\frac{\alpha^2-2\alpha\chi}{\alpha-\chi}.$$

106) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα τῶν κάτωθι πολλαπλασιασμῶν καὶ ν' ἁπλοποιηθῶσι ταῦτα :

α) $\frac{\alpha}{\chi}\cdot\chi$, β) $-2\alpha\beta\chi\cdot\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$, γ) $\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}$, δ) $\frac{\mu^2\nu}{\alpha^2\beta}\cdot\frac{2\alpha\beta^2}{9\chi\psi}\cdot\frac{\alpha\chi\psi}{\mu\nu^2}$,

ε) $\frac{\chi\cdot(\chi-7)}{3\chi+21}\cdot\frac{\chi+7}{7\chi}$, ϛ) $\frac{\alpha^3-\alpha\beta^2}{\beta^2\gamma-\beta\gamma^2}\cdot\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^4-\beta^4}$, ζ) $\frac{\chi^2-\psi^2}{\chi}\cdot\frac{5}{\chi+\psi}\cdot\frac{3\chi}{25(\chi-\psi)}$,

η) $(\alpha+\beta)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$, ϑ) $\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)+1$, ι) $\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+1\right).\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1\right).\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)$

107) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

α) $\frac{\alpha}{\beta}:\alpha$

β) $\alpha:\frac{\alpha}{\beta}$

γ) $5\chi:\frac{3\chi}{7\psi}$

δ) $\frac{9\alpha^2\beta^2}{5\chi^3\psi}:\frac{3\alpha\beta}{20\chi^2\psi^3}$

ε) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}:\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

ϛ) $\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi^2-2\chi\psi+\psi^2}:\frac{3\chi+\psi}{\chi-\psi}$

ζ) $\frac{\chi+7}{\chi-6}\cdot\frac{2\chi+10}{3\chi+21}:\frac{5\chi+25}{\chi^2-6\chi}$

η) $\frac{\alpha^2+4\alpha-21}{\alpha+4}\cdot\frac{\alpha^2-16}{\alpha^2+4\alpha+4}:\frac{\alpha-4}{\alpha+2}$

ϑ) $\frac{(\alpha+\gamma)^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2}:\frac{\alpha\beta-\beta^2+\beta\gamma}{\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\gamma}$

ι) $\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right):\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)$

108) Ν' ἁπλοποιηθῶσι τὰ κάτωθι κλάσματα :

α) $\dfrac{\alpha}{\alpha+\dfrac{\gamma}{\delta}}$

β) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\gamma}}{\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\gamma}}$

γ) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta+\gamma}}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta+\gamma}}$

δ) $\dfrac{\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\varphi}}{\dfrac{\chi}{\psi\varphi}+\dfrac{\psi}{\chi\varphi}+\dfrac{\varphi}{\chi\psi}}$

ε) $\dfrac{\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\chi\psi}}{\chi+\psi-1}$

ϛ) $\dfrac{\dfrac{\chi}{\psi}+\dfrac{\psi}{\varphi}+\dfrac{\varphi}{\chi}}{\dfrac{\chi^2}{\psi\varphi}+\dfrac{\psi^2}{\chi\varphi}+\dfrac{\varphi^2}{\chi\psi}}$

ζ) $\dfrac{1+\dfrac{1}{\chi-1}}{1-\dfrac{1}{\chi+1}}$

η) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{4\beta^2}}{\dfrac{1}{2\beta}+\dfrac{1}{\alpha}}$

ϑ) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{2\beta}+\dfrac{\beta}{3\gamma}+\dfrac{\gamma}{4\alpha}}{\dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta}}$

ι) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^2}+\dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2}}$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

109) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$(\chi-\psi)^2+(3\chi-2\psi)^2-(5-\psi+\chi)^2$ διὰ $\chi=8$ καὶ $\psi=-2$

110) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$(5\chi+3\psi)^4-(5\psi+3\omega)^3+(9\omega-\chi)^2$ διὰ $\chi=\frac{1}{4}$, $\psi=-\frac{1}{12}$, $\omega=\frac{17}{36}$

111) Ὁμοίως τῆς παραστάσεως:

$\frac{3}{4}.(8\chi-24\psi)-\frac{5}{6}(12\chi+18\psi)-7(3\chi-8\psi)$ διὰ $\chi=-\frac{1}{5}$, $\psi=\frac{1}{23}$

112) Ὁμοίως τῆς παραστάσεως:

$(\chi-\alpha)^2+(2\beta-\gamma)(\chi-\alpha)+\beta^2-\beta\gamma$ διὰ $\chi=\alpha-\beta$

113) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα $A-B+\Gamma-\Delta$ καὶ $-A+B-\Gamma-\Delta$, ὅταν εἶναι:

$A=-2\chi^4+5\alpha^2\chi^2+3\alpha\chi^3-2\alpha^3\chi+3\alpha^4$

$B=\chi^4-4\alpha^2\chi^2+3\alpha^3\chi+2\alpha^4$

$\Gamma=-2\chi^4+4\alpha\chi^3-5\alpha^4$

$\Delta=3\chi^4-5\alpha\chi^3-4\alpha^3\chi-\alpha^2\chi^2$

114) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα:

$(1+\chi+\chi^2).(1-\chi+\chi^2)$, $(1+\chi^2+\chi^3).(1+\chi^2-\chi^3)$,

$(\chi^4-4).(\chi^2+2\chi+2).(\chi^2-2\chi+2)$

115) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δυνάμεις:

$(1-\chi+\chi^2)^2$, $(1+\chi-\chi^2)^2$, $(-1+\chi-\chi^2)^2$

$(\chi^2+\psi^2)^3$, $(\chi-2\psi)^3$, $(3\chi-2\psi)^3$

116) Νὰ ἁπλοποιηθῶσιν αἱ παραστάσεις:

$(4-12\psi+9\psi^2)(2-3\psi)+(2+3\psi)(9\psi^2+12\psi+4)$

$(1-6\chi+9\chi^2)(3\chi-1)-(3\chi+1)^2.(1-3\chi)+12\chi(3\chi-1)$

117) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν ἑπομένων ἰσοτήτων:

$(\alpha-\beta).(\gamma-\delta)=(1+\alpha\gamma).(1+\beta\delta)-(1+\alpha\delta).(1+\beta\gamma)$

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2=$

$(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)^2$

$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)+(2\alpha\beta)^2$

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2+(2\alpha\beta)^2+(2\alpha\gamma)^2$

118) Ν' ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις:

$18\chi^2-32\psi^2$	$\chi^2\psi^3+10\chi\psi^2+25\psi$
$\chi^5\psi-\chi\psi^5$	$4\chi^3+108\psi^3$
$\chi^{3\nu}-\chi^{\nu}$	$5\chi^3-625\psi^3$

$16\chi^{5\nu}-9\chi^{3\nu}.\psi^{2\mu}$ $\quad$ $(\chi^2+\chi\psi)^2-(\chi\psi+\psi^2)^2$

$75\chi^{5\nu}.\psi-48\chi\psi^{5\mu}$ $\quad$ $\chi^2+(2\alpha+\beta)\chi-\alpha\beta-3\alpha^2$

$\chi^4-5\chi^2+4$ $\quad$ $(\chi^2-\psi^2-\omega^2)^2-4\psi^2\omega^2$

119) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις:

$(1-2\alpha+\alpha^2)^3:(1-\alpha)^2$, $(16\alpha^2-16\alpha+4):8(1-2\alpha)^3$,

$(\chi^2-2\chi+1)^3.(1-3\psi+3\psi^2-\psi^3)^2:(\chi-1)^2.(1-\psi)^3$

$[(\chi-1)^4-\psi^4]:[\chi^2-\psi^2-2\chi+1]$

$(\chi^3-3\alpha\chi^2+3\alpha^2\chi+\psi^3-\alpha^3):(\chi+\psi-\alpha)$

120) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα:

$$\frac{(3\chi-\psi)^2-\omega^2}{(3\chi+\omega)^2-\psi^2} \qquad \frac{\chi(\alpha^2-9)+(9-\alpha^2)}{(3+\alpha\chi)^2-(\alpha+3\chi)^2}$$

$$\frac{(5\chi-3)^2-(3\chi-5)^2}{2(\chi+1)^2} \qquad \frac{3\chi^2+5\chi+2}{3\chi^2+\chi-2}$$

$$\frac{\dfrac{1}{\alpha+\beta}+\dfrac{1}{\alpha-\beta}}{\dfrac{1}{\alpha+\beta}-\dfrac{1}{\alpha-\beta}} \qquad \frac{1}{\chi-\dfrac{3}{\chi+2}}-\frac{1}{\chi+\dfrac{2}{\chi+3}}$$

121) Διαιρέσαι $\chi^{3\omega}-\psi^{3\omega}$ διὰ τοῦ $\chi^{\omega}-\psi^{\omega}$.

Ἐὰν θέσωμεν $\chi^{\omega}=\alpha$ καὶ $\psi^{\omega}=\beta$, καταντῶμεν εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha^3-\beta^3$ διὰ τοῦ $\alpha-\beta$.

122) Πότε ἡ διαφορὰ $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\chi^{\nu}-\alpha^{\nu}$;

123) Νὰ διαιρεθῇ τὸ διώνυμον $\chi^5\psi^3-\chi^3\psi^5$ διὰ τοῦ $\chi-\psi$.

124) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $(\chi+\psi+\omega)^{\nu}-\chi^{\nu}-\psi^{\nu}-\omega^{\nu}$ διαιρεῖται δι᾿ ἑκάστου τῶν ἀθροισμάτων $\chi+\psi$, $\psi+\omega$, $\omega+\chi$, ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττός.

125) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $7^{\nu}+1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ν εἶναι περιττός, ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

126) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^{35}-1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 127 $(=2^7-1)$. (Ἀπ. νὰ τεθῇ $2^7=\chi$)

127) Νὰ εὑρεθῇ τὸ λάθος εἰς τὴν ἑξῆς σειρὰν τῶν πράξεων, αἵτινες ἄγουσιν εἰς ἄτοπον ἐξαγόμενον:

Ἔστω $\alpha=\beta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha\beta=\beta^2$. Προσέτι $\alpha\beta-\alpha^2=\beta^2-\alpha^2$, ἤτοι $\alpha(\beta-\alpha)=(\beta+\alpha).(\beta-\alpha)$.

Ὅθεν ἕπεται (ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ $(\beta-\alpha)$) $\alpha=\beta+\alpha$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha=\beta$, συνάγεται $\alpha=2\alpha$ ἢ καὶ $1=2$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

60. Εἴδομεν προηγουμένως (48), ὅτι οἱ διάφοροι μετασχηματισμοὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, οἱ ὁποῖοι γίνονται δυνάμει τῶν πράξεων, ἄγουσιν εἰς ταυτότητας· ἂν ὅμως λάβωμεν δύο τυχούσας ἀλγεβρικὰς παραστάσεις καὶ συνδέσωμεν αὐτὰς διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος, δὲν θὰ προκύψῃ ἐν γένει ταυτότης, ἀλλὰ μία ἰσότης, ἥτις ἀληθεύει, ὅταν τὰ γράμματα λάβωσι τιμὰς ὡρισμένας.

Π.χ. ἡ ἰσότης $5\chi+4=7\chi-2$ δὲν εἶναι ταυτότης, διότι ἀληθεύει μόνον διὰ $\chi=3$· καὶ πράγματι $5.3+4=7.3-2$.

Αἱ τοιαῦται ἰσότητες καλοῦνται ***ἐξισώσεις***. Γενικῶς δὲ ***ἐξίσωσιν καλοῦμεν τὴν ἰσότητα, τῆς ὁποίας τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα καὶ ἡ ὁποία ἀληθεύει, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα λάβωσιν ἁρμοδίας τιμάς.***

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἰσότης $\chi^2-3\chi=10$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $\chi=5$ καὶ διὰ $\chi=-2$· διότι $5^2-3.5=10$ καὶ $(-2)^2-3.(-2)=10$

Τὰ γράμματα τῆς ἐξισώσεως, ἅτινα πρέπει ν' ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ ὡρισμένων ἀριθμῶν, ἵνα ἀληθεύσῃ ἡ ἰσότης, λέγονται ***ἄγνωστοι*** τῆς ἐξισώσεως. Οἱ δὲ ὡρισμένοι ἀριθμοί, οἵτινες, ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους, ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν, λέγονται ***λύσεις*** ἢ ***ρίζαι*** τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δὲν ὑπάρχωσιν, ἡ ἐξίσωσις λέγεται ***ἀδύνατος***.

Οἱ ἄγνωστοι παρίστανται συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου φ,χ,ψ,ω.

Ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων λέγεται καὶ αὐτὴ ***λύσις*** τῆς ἐξισώσεως· εἶναι δὲ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τὸ κυριώτατον ἔργον τῆς ἀλγέβρας, διότι εἰς τοῦτο ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν προβλημάτων.

Ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἐξισώσεις, ὅταν ἔχωσι τὰς αὐτὰς ῥίζας, δηλαδή, ὅταν αἱ ῥίζαι τῆς πρώτης εἶναι ῥίζαι τῆς δευτέρας καὶ τἀνάπαλιν.

Ἐν τῇ λύσει ἐξισώσεως οἱασδήποτε ἐπιτρέπεται πᾶσα μεταβολὴ αὐτῆς, ***ἐὰν ἄγῃ εἰς ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον.***

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

61. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5χ=15$· ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ τυχὼν ἀριθμὸς μ, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $5χ+μ=15+μ$· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ καὶ ἡ ληφθεῖσα ἀρχικῶς εἶναι ἰσοδύναμοι· διότι, ἂν δι' ἁρμοδίαν τιμὴν τοῦ χ τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης γίνωσιν ἴσοι ἀριθμοί, θὰ μείνωσιν ἴσοι καὶ μετὰ τὴν πρόσθεσιν τοῦ μ· ἑπομένως πᾶσα λύσις τῆς πρώτης θὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς δευτέρας. Καὶ τἀνάπαλιν, ἂν ἡ δευτέρα ἀληθεύσῃ, τὰ μέλη αὐτῆς θὰ μείνωσιν ἴσα καὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ μ· ἄρα πᾶσα λύσις τῆς δευτέρας ἐξισώσεως θὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς πρώτης, ἤτοι αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ ἐξισώσεις $5χ=15$ καὶ $5χ-μ=15-μ$ εἶναι ἰσοδύναμοι· ὥστε:

Ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῶν ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

π. χ. ἡ ἐξίσωσις $χ^2+5=6χ$ καὶ $χ^2+5+7=6χ+7$ εἶναι ἰσοδύναμοι· ὅπως εἶναι καὶ αἱ:

$$χ^2+χ+7=\frac{χ}{2}+χ^2+12 \quad \text{καὶ} \quad χ+7=\frac{χ}{2}+12.$$

62. Ἐὰν ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς μ εἶναι ἀντίθετος πρὸς ὅρον τινα τῆς ἐξισώσεως, ὁ ὅρος οὗτος ἀφανίζεται ἐκ τοῦ μέλους, ἐν ᾧ εὑρίσκετο, καὶ μεταβαίνει εἰς τὸ ἄλλο ἔχον ἀντίθετον σημεῖον.

Ὅθεν ***δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους ἐξισώσεως ὅρον τινα εἰς τὸ ἕτερον, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ.***

Οὕτω ἔχομεν $3χ-7=\frac{χ}{2}+5+2χ$ καὶ τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $3\chi-7+7=\frac{\chi}{2}+5+2\chi+7$, δηλ. τὴν $3\chi=\frac{\chi}{2}+5+2\chi+7$.

Ὁμοίως λαμβάνομεν καὶ τὴν ἰσοδύναμον $3\chi-2\chi=\frac{\chi}{2}+5+7$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $3\chi^2+7+5\chi=2\chi^2-2\chi-5$ λαμβάνομεν $3\chi^2+7+5\chi-2\chi^2+2\chi+5=0$ ἤ, μετὰ τὴν ἀναγωγήν, $\chi^2+7\chi+12=0$.

Ἑπομένως ***πᾶσα ἐξίσωσις ἀκεραία (δηλαδὴ ὅταν δὲν περιέχῃ τὸν ἄγνωστον εἰς τὸν παρονομαστὴν) δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς πολυωνύμου ἴσου πρὸ τὸ O.***

63. Δι' ὁμοίων συλλογισμῶν μὲ τοὺς τῆς προηγουμένης ἰδιότητος συνάγομεν, ὅτι :

Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (πλὴν τοῦ O) ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Οὕτω αἱ ἐξισώσεις $12\chi+8=5\chi+10+\frac{\chi}{3}$ καὶ $(12\chi+8).3=\left(5\chi+10+\frac{\chi}{3}\right).3$, δηλ. $36\chi+24=15\chi+30+\chi$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ὁμοίως ἰσοδύναμοι εἶναι καὶ αἱ ἐξισώσεις $5\chi=30$ καὶ $\frac{5\chi}{5}=\frac{30}{5}$, ἤτοι $\chi=6$.

64. Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ -1, τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων αὐτῆς ἀλλάζουν· ὥστε, ***δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως.***

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $8\chi-3=-5\chi-\frac{\chi}{2}+12$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $-8\chi+3=5\chi+\frac{\chi}{2}-12$.

65. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{3}+\frac{5}{2}=\frac{11\chi}{5}-3\chi$· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ ἕνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, π.χ. ἐπὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον $2.3.5.\frac{\chi}{3}+2.3.5.\frac{5}{2}=2.3.5.\frac{11\chi}{5}-2.3.5.3\chi$, ἤτοι τὴν $10\chi+75=66\chi-90\chi$, ἡ ὁποία παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν ἔχει παρονομαστάς.

῞Οθεν ἕπεται, ὅτι ***δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν πάντας τοὺς παρονομαστὰς τῶν ὅρων ἐξισώσεως.***

Σημ. α΄. Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη οἱασδήποτε ἐξισώσεως ἐπὶ 0, εὑρίσκομεν πάντοτε $0=0$, ἤτοι ἰσότητα, ἐξ ἧς οὐδεὶς ἄγνωστος δύναται νὰ ὁρισθῇ.

Σημ. β΄. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης μ εἶναι παράστασις περιέχουσα γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων, αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι μόνον διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, αἵτινες δὲν μηδενίζουσι τὴν παράστασιν μ.

Οὕτω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $(\alpha+\beta)\chi=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, ἐν ᾗ ὁ χ θεωρεῖται ἄγνωστος, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)\chi=(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).(\alpha-\beta)$, ἤτοι $(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha^3-\beta^3$, ἐν ὅσῳ ὑποτίθεται α διάφορον τοῦ β, οὐχὶ δὲ καὶ ὅταν εἶναι $\alpha=\beta$.

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $(\alpha-\beta)\chi=\alpha^2-\beta^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$, ἣν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς πρώτης διὰ τοῦ $\alpha-\beta$, μόνον ἐν ὅσῳ τὸ α εἶναι διάφορον τοῦ β.

Σημ. γ΄. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης μ εἶναι παράστασις περιέχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρώτην.

῎Εστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $5\chi-3=4\chi-1$, ἐξ ἧς, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ἐπὶ τὴν παράστασιν $\chi-1$, εὑρίσκομεν $(\chi-1).(5\chi-3)=(\chi-1).(4\chi-1)$, ἀληθεύει δὲ αὕτη, ὅταν τεθῇ $\chi=1$, οὐχὶ δὲ καὶ ἡ πρώτη.

66. ***Βαθμὸς τῶν ἐξισώσεων.*** Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις ἀκεραία δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν πολυωνύμου ἴσου πρὸς τὸ μηδέν. Ἐὰν δὲ τὸ ἀκέραιον τοῦτο πολυώνυμον δὲν ἔχῃ ὁμοίους ὅρους, ὁ βαθμὸς αὐτοῦ λέγεται βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Οὕτω αἱ ἐξισώσεις $5\chi-10=0$, $3\chi+2\psi-13=0$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, αἱ δὲ $\chi^2-7\chi+12=0$ καὶ $\chi\psi+\chi-\psi-19=0$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.

Λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

67. Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, θὰ προσπαθήσωμεν πρῶτον νὰ φέρωμεν αὐτὴν εἰς

τὴν ἁπλουστέραν της μορφήν, ἐφαρμόζοντες τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν ἐξισώσεων.

π. χ. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2(\chi+1)}{5}-3=\frac{\chi-1}{8} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει παρονομαστάς, ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν ἀπὸ τούτων, πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη της ἐπὶ τὸ γινόμενον 5.8, ὅτε εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον

$$5.8.\frac{2(\chi+1)}{5}-3.5.8=5.8.\frac{\chi-1}{8}$$ ἤ, ἁπλούστερον,

$8.2(\chi+1)-3.5.8=5(\chi-1)$· ἐὰν ἤδη ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν

$$16\chi+16-120=5\chi-5 \qquad (2)$$

Κατόπιν μεταφέρομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν χ εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς ὅρους εἰς τὸ ἄλλο μέλος· δηλαδὴ χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον πρὸς τὰς ἀνωτέρω (1) καὶ (2) $16\chi-5\chi=120-16-5$ ἤ, μετὰ τὴν ἀναγωγήν, $11\chi=99$. Εἶναι δὲ αὐτη ἡ ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ· ἐὰν δὲ ἤδη διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 11, εὑρίσκομεν $\chi=\frac{99}{11}=9$· δηλαδὴ ὁ 9 εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Καὶ πράγματι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ διὰ τοῦ 9 ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν

$$\frac{2.(9+1)}{5}-3=\frac{9-1}{8}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἰσότητα 1=1.

68. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι μία ἐξίσωσις μετά: 1) τὴν ἀπάλειψιν τῶν παρονομαστῶν, 2) τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, 3) τὸν χωρισμὸν τῶν γνωστῶν ὅρων ἀπὸ τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον καὶ 4) τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν εἶναι πρώτου βαθμοῦ, θὰ καταλήξῃ εἰς ἐξίσωσιν (ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἀρχικήν), τῆς ὁποίας τὸ ἓν μέλος θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ χ ἐπὶ ὡρισμένον ἀριθμὸν ἢ παράστασιν γνωστήν, τὸ δὲ ἄλλο θὰ εἶναι ὡρισμένος ἀριθμὸς ἢ καὶ παράστασις γνωστή. Διαιροῦντες δὲ τότε ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου

(ἐὰν εἶναι διάφορος τοῦ 0), εὑρίσκομεν τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι μία καὶ μόνη.

Παραδείγματα

1ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{7-\chi}{5}+\frac{1}{3}+\frac{\chi}{6}=\frac{2(\chi-1)}{3}+\frac{\chi}{2}$

Πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, ὅπερ εἶναι 2.5.3, εὑρίσκομεν :

$$2.3.(7-\chi)+2.5+5.\chi=2.5.2(\chi-1)+3.5\chi$$
$$42-6\chi+10+5\chi=20\chi-20+15\chi$$
$$42+10+20=6\chi-5\chi+20\chi+15\chi$$
$$72=36\chi \text{ καὶ } \chi=\frac{72}{36}=2$$

2ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3\chi-5=\frac{\chi-4}{2}-3$

Ἔχομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω $6\chi-10=\chi-4-6$ ἢ

$$6\chi-\chi=10-4-6 \text{ ἢ } 5\chi=0$$

ἄρα $$\chi=\frac{0}{5}=0$$

3ον) Ἔστω $\frac{2\chi}{3}+\frac{5\chi}{6}+4=\frac{3\chi}{2}+5$

Πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ 2.3 εὑρίσκομεν :

$$2.2\chi+5\chi+2.3.4=3.3\chi+2.3.5, \quad 4\chi+5\chi+24=9\chi+30$$
$$4\chi+5\chi-9\chi=30-24 \text{ καὶ } 0=6.$$

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, ἤτοι ὑπὸ οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἐπαληθεύεται.

4ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi-1}{4}+\frac{\chi}{12}=\frac{\chi-2}{3}+\frac{5}{12}$· ἐὰν ἐπὶ 3.4 πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους εὑρίσκομεν :

$$3(\chi-1)+\chi=4(\chi-2)+5$$
$$3\chi-3+\chi=4\chi-8+5$$
$$3\chi+\chi-4\chi=3-8+5$$
$$0=0·$$

ὥστε ἡ πρὸς λύσιν δοθεῖσα ὡς ἐξίσωσις ἦτο ταυτότης καὶ ἀληθεύει διὰ τοῦτο οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ.

5ον) Ἔστω πρὸς τούτοις ἡ ἐγγράμματος ἐξίσωσις

$\frac{2\chi-4\beta}{\alpha+\beta}+1=\frac{4\alpha-\chi}{\alpha-\beta}$. ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, εὑρίσκομεν:

$$(\alpha-\beta).(2\chi-4\beta)+(\alpha-\beta).(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta).(4\alpha-\chi)$$
$$2\alpha\chi-4\alpha\beta-2\beta\chi+4\beta^2+\alpha^2-\beta^2 = 4\alpha^2-\alpha\chi+4\alpha\beta-\beta\chi$$
$$2\alpha\chi-2\beta\chi+\alpha\chi+\beta\chi = 4\alpha\beta-4\beta^2-\alpha^2+\beta^2+4\alpha^2+4\alpha\beta$$
$$3\alpha\chi-\beta\chi = 3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2$$
$$(3\alpha-\beta)\chi = 3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2$$

Ἐὰν εἶναι $3\alpha-\beta\neq 0$, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ $3\alpha-\beta$ καὶ εὑρίσκομεν :

$$\chi=\frac{3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2}{3\alpha-\beta}=\alpha+3\beta.$$

Ἐὰν ὅμως εἶναι $3\alpha-\beta=0$, ἤτοι $3\alpha=\beta$, ἡ διὰ τοῦ $3\alpha-\beta$ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος καὶ ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται $0=0$· ὥστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καταντᾷ ταυτότης.

69. ***Γενικὴ μορφὴ ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον καὶ διερεύνησις αὐτῆς.***

Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψει τὰ προηγουμένως λεχθέντα περὶ τῶν ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, συνάγομεν, ὅτι μία τοιαύτη ἐξίσωσις δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\alpha\chi=\beta$, ὅπου α καὶ β εἶναι ἢ ὡρισμένοι ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί· εἶναι δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν, ἀφοῦ εὑρέθη ἐξ αὐτῆς διὰ πράξεων, αἱ ὁποῖαι τρέπουσιν ἐξίσωσιν οἱανδήποτε εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον· καὶ ἑπομένως, ὅτι εἰς τὴν λύσιν τοιαύτης ἐξισώσεως ἀνάγεται ἡ λύσις πάσης ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ. Ἐὰν δὲ εἰς ταύτην εἶναι :

1) ***$\alpha\neq 0$, ὑπάρχει λύσις μία καὶ μόνη, ἡ $\frac{\beta}{\alpha}$***

2) ***$\alpha=0$ καὶ $\beta\neq 0$, ἡ ἐξίσωσίς εἶναι ἀδύνατος*** καὶ

3) ***$\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

128) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἐξισώσεις καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶν.

1) $3\chi=12$, 2) $3\chi=-21$, 3) $-4\psi=20$, 4) $-9\psi=336$, 5) $\chi-9=-3$, 6) $8-3\chi=8$, 7) $31=111-\chi-7\chi$, 8) $97+22-2\chi=100-11\chi-42$

9) $13+12\chi+11-10\chi=10\chi-11-12\chi-13$

10) $0=14+\chi-8\chi-3\chi-6+\chi$

11) $-8=7-6\chi-11-4\chi-5-2\chi+1$

12) $100+2\chi-9\chi+15=10-7\chi+5-11\chi$

129) Νὰ λυθῶσι καὶ νὰ ἐπαληθευθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $2(\chi-5)=7$ 2) $3(2\omega+3)=27$

3) $5(3-\omega)=15$ 4) $3(\chi-2)-7=8$

5) $11\chi+7=10(\chi+1)$ 6) $7(4\chi-3)+3(7-8\chi)=1$

7) $7(3\chi-6)+5(\chi-3)+4(17-\chi)=11$

8) $6\chi-7(11-\chi)+11=4\chi-3(20-\chi)$

9) $9(\psi-1)-2(\psi-2)=6(3\psi-2)-6(\psi+1)-1$

10) $7(4\varphi-5)-5(3-2\varphi)-3(9\varphi-8)=9(3\varphi-4)+10$

11) $4(5\varphi-3)-6(2\varphi+7)=3(4-7\varphi)-5(8-6\varphi)+3\varphi$

130) Ἐπίσης νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ ἐπαληθευθῶσιν ἔπειτα:

1) $\frac{\chi}{2}+6=8$ 2) $\frac{\chi}{2}+\frac{3}{4}=3$

3) $\frac{3\psi}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$ 4) $\frac{\psi}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3\psi}{4}-\frac{5}{6}$

5) $\frac{\chi}{2}-\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}-\frac{\chi}{6}+\frac{\chi}{8}+\frac{\chi}{12}=11$

6) $\chi-\frac{3}{2}\chi+9=\frac{2}{3}\chi+4+\frac{5}{6}\chi-\frac{6}{5}\chi+\frac{1}{5}$

7) $\chi=2\frac{1}{3}\chi-3\frac{1}{2}\chi+5\frac{1}{3}\chi-3\frac{1}{5}\chi+1$

8) $8\frac{1}{4}\chi-\frac{\chi}{5}-3\frac{2}{3}\chi-4\frac{1}{5}\chi+1=0$

9) $\frac{1}{4}\chi+\frac{5}{6}\chi=\chi+1+\frac{1}{18}\chi-2\frac{1}{6}\chi+1\frac{2}{5}\chi+18$

10) $5\chi-2=\frac{2}{3}\chi+\frac{3}{4}\chi+\frac{4}{5}\chi+\frac{9}{10}\chi+\frac{11}{12}\chi+\frac{14}{15}\chi$

131) Νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις:

1) $\frac{\chi-3}{2}=\frac{\chi+4}{4}$ 2) $\frac{1}{4}(4\psi-3)=\frac{1}{7}(6\psi-5)$

3) $\frac{5(4-2\chi)}{3}=\frac{3(1-7\chi)}{5}$ 4) $\frac{7\chi}{6}-\frac{5(3\chi-4)}{4}=\frac{46}{3}$

5) $\frac{7\chi-2}{3}-\frac{4}{5}(\chi+3)+6=\frac{3(\chi+2)}{2}$

6) $11-\left(\frac{3\chi-1}{4}+\frac{2\chi+1}{3}\right)=10-\left(\frac{2\chi-5}{3}+\frac{7\chi-1}{8}\right)$

7) $0=2\chi-3\left(5+\frac{3}{4}\chi\right)+\frac{2}{3}(4-\chi)-\frac{1}{4}(3\chi-16)$

8) $1-3\left(7\frac{1}{2}+\chi\right)+7\left(\frac{2}{3}\chi-\frac{5}{2}\right)+\frac{8}{3}\chi=0.$

132) Ἐπίσης αἱ κάτωθι ἐξισώσεις νὰ λυθῶσι καὶ ἐπαληθευθῶσιν:

1) $6,4\chi-4,6-7,3\chi-7,8=3,6\chi+1,10$

2) $5,6\chi-1,3=6,7\chi-8,9+2,4\chi-2,9$

3) $0,5\chi+2-\frac{3}{4}\chi=0,4\chi-11$

4) $8(0,12\psi+0,02)=6,4\psi+0,01$

5) $9(3,5\chi-3)=5(1-0,1\chi)$

6) $4,709-\frac{4}{5}\left(5,7\chi-3\frac{1}{8}\right)-0,3\left(2\frac{1}{4}-5,3\chi\right)=0$

7) $5\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}\left(4,6-3\frac{1}{3}\chi\right)=4,7\chi-0,8\left(3\frac{1}{2}\chi-\frac{1}{3}\right)$

8) $5,7\chi-2\frac{1}{3}(7,8-9,3\chi)=5,38-4\frac{3}{4}(0,28+3,6\chi)$

133) Ἐπίσης αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $(\chi-4)(\chi-5)=(\chi-7)(\chi-8)$

2) $(\chi-3)(\chi-4)=(\chi-6)(\chi-2)$

3) $2(\chi+5)(\chi+2)=(2\chi+7)(\chi+3)$

4) $(2\psi+1)^2-8=(2\psi-1)^2$

5) $21(\psi+3)(\psi-5)-5(3\psi-7)(\psi-5)=2(3\psi-7)(\psi+3)$

6) $\frac{1}{\chi}+\frac{2}{\chi}+\frac{3}{\chi}=12$, 7) $\frac{7}{\chi}+\frac{1}{3}=\frac{23-\chi}{3\chi}+\frac{7}{12}+\frac{1}{4\chi}$,

8) $\frac{1}{2}-\frac{7}{2(\chi+3)}=\frac{5}{\chi+3}+\frac{3}{2(\chi+3)}$, 9) $\frac{10-7\chi}{6-7\chi}=\frac{5\chi-4}{5\chi}$,

10) $\frac{29-10\psi}{9-5\psi}=\frac{5+36\psi}{18\psi}$, 11) $\frac{3\chi+2}{\chi-1}+\frac{2\chi-4}{\chi+2}=5$,

12) $\frac{3\chi-1}{2\chi-1}-\frac{2(2\chi-1)}{3\chi-2}=\frac{1}{6}$.

134) Νὰ λυθῶσι καὶ ἐπαληθευθῶσιν αἱ κάτωθι ἐγγράμματοι ἐξισώσεις:

1) $\chi+\alpha=\beta$ 2) $\alpha-\chi=\beta-\gamma$

3) $\alpha-\beta\chi=-\gamma$ 4) $\alpha-\mu\chi+\beta=-\gamma$

5) $3\alpha+2\chi-4\beta=5\chi-6$ 6) $\alpha\chi-\beta\chi-\mu(\chi-1)=\mu$

7) $(\alpha-\beta)\chi=2\alpha-(\alpha+\beta)\chi$

8) $\alpha(\beta-\chi)+\beta(\gamma-\chi)=\beta(\alpha-\chi)+\gamma\chi$

9) $12\alpha\chi-3\beta(\chi-\alpha)-5\alpha(2\chi+\beta)=0$

10) $(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\chi-\beta\chi=\alpha+\gamma$

11) $(\alpha-\chi)(\beta-\chi)=\chi^2$

12) $(\alpha-\chi)(1-\chi)=\chi^2-1$

13) $(\alpha-\chi)(\beta+\chi)=\alpha^2-\chi^2$

14) $(\alpha-\chi)\beta+(\alpha-\gamma-\chi)(\chi-\beta)=\chi(\alpha-\chi)$

15) $(\alpha-\chi)(\beta+\chi)-\beta(\alpha-\beta)=(\alpha+\gamma)^2-(\gamma+\chi)\chi$

16) $\alpha\beta\gamma\chi+\alpha\beta^2+\gamma\delta^2\chi+\alpha\gamma\delta=\alpha\beta\delta\chi+\alpha^2\beta+\gamma^2\delta\chi+\beta\gamma\delta$.

135) Ἐπίσης νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ ἐπαληθευθῶσιν:

1) $\frac{\alpha-\beta\chi}{\beta}=\frac{\alpha\chi-\beta}{\alpha}$ 2) $\frac{\chi+\alpha}{6}-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\chi-\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

3) $\frac{2\chi-\alpha}{6}-\frac{\beta-2\chi}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ 4) $\frac{\alpha-\chi}{\alpha}+\frac{\beta-\chi}{\beta}+\frac{\gamma-\chi}{\gamma}=3$

5) $\frac{1+\chi}{1-\chi}=\frac{\alpha}{\beta}$ 6) $\frac{\alpha}{\alpha-\chi}=\frac{\beta}{\beta-\chi}$

7) $\frac{\chi^2-\alpha}{\beta\chi}-\frac{\alpha-\chi}{\beta}=\frac{2\chi}{\beta}-\frac{\alpha}{\chi}$

8) $\mu-\mu\chi\left(1-\frac{1}{\chi}\right)=\mu(\mu+\chi)\left(1+\frac{1}{\chi}\right)+\mu^2\left(1-\frac{1}{\chi}\right)-\mu$

9) $\frac{\chi}{\alpha-\beta}-\frac{\chi}{\alpha+\beta}=\frac{2}{\alpha^2-\beta^2}$ 10) $\frac{\chi-2\alpha}{\beta-2\alpha}=\frac{\chi-2\beta}{\alpha-2\beta}$

Προβλήματα

τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα ἄγνωστον.

70. Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι σκοπὸς τῆς ἀλγέβρας εἶναι ἡ λύσις τῶν προβλημάτων κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ γενικόν (1). Καὶ ἁπλουστεύει μὲν τὴν λύσιν αὐτῶν, χρησιμοποιοῦσα γράμματα, τὴν γενικεύει δὲ αον) διότι εἰσάγει νέους ἀριθμοὺς (εἴδομεν ὅτι εἰσήγαγε τοὺς ἀρνητικοὺς) καὶ βον) ***διότι ἀνάγει τὴν λύσιν αὐτῶν εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων.***

71. ***Πρόβλημα*** λέγεται πρότασις, ἐν τῇ ὁποίᾳ ζητεῖται νὰ εὑρεθῶσιν ἓν ἢ περισσότερα ἄγνωστα ἐκπληροῦντα ὡρισμένας ἀπαιτήσεις. Εἰς ἕκαστον δὲ πρόβλημα διακρίνομεν δεδομένα καὶ ζητούμενα, γνωστὰ ἢ ἄγνωστα, εἶναι δὲ ταῦτα πάντοτε ἀριθμοί· ἂν δὲ εἴς τι πρόβλημα περιέχωνται ποσά τινα, ταῦτα ὑποτίθεται, ὅτι ἔχουσι μετρηθῆ ἕκαστον διὰ τῆς μονάδος αὐτοῦ καὶ ὅτι ἔχουσιν ἐκφρασθῆ δι᾿ ἀριθμῶν. ***Λύσις*** δὲ τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν ζητουμένων ἢ τῶν ἀγνώστων.

᾿Εκεῖνο τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει τὴν ἄλγεβραν ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων εἶναι ἡ παράστασις τῶν ἀγνώστων διὰ γραμμάτων, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐργάζεται ὡς ἐὰν ἦσαν γνωστοὶ ἀριθμοί, δύναται δὲ οὕτω νὰ ἐκφράσῃ πᾶν πρόβλημα, ἔχουσα ὑπ᾿ ὄψει τὰς ἀπαιτήσεις αὐτοῦ, δι᾿ ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰ γνωστὰ καὶ τὰ ἄγνωστα.

π. δ. 1ον) ***Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τριπλάσιον ὑπερβαίνει αὐτὸν κατὰ 9.***

᾿Ενταῦθα, ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ, πρέπει, κατὰ τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος, νὰ εἶναι $3χ=χ+9$. Τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ λύσις εἶναι $χ=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$· παρατηροῦμεν δέ, ὅτι ἡ λύσις αὕτη ἐπαληθεύει τὸ πρόβλημα.

2ον) ***Πόσα τέκνα ἔχει πατήρ τις, ὅστις, δίδων εἰς ἕκαστον 3 δρ., δίδει 9 δρ. περισσοτέρας τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τέκνων;***

Καὶ ἐνταῦθα, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν τέκνων, πρέπει νὰ εἶναι $3χ=χ+9$, ἐκ τῆς ὁποίας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν πάλιν $χ=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$· ἀλλὰ παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι ἡ λύσις αὕτη δὲν δύναται νὰ γίνῃ παραδεκτή· διὰ νὰ ἦτο παραδεκτή, ἔπρεπε ἡ λύσις αὐτῆς νὰ ἦτο ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός· διότι τότε τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ ἐλύετο πραγματικῶς· ὥστε ἡ λύσις αὐτοῦ ὑπόκειται ***εἰς περιορισμόν.***

72. Ἐξ ὅσων εἴδομεν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ἡ λύσις παντὸς ἀλγεβρικοῦ προβλήματος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἑξῆς τρία μέρη:

1) ***Ἐκφράζομεν διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων τοὺς ὅρους*** (τὰς ἀπαιτήσεις) ***τοῦ προβλήματος***, ἤτοι σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ εὑρίσκομεν τοὺς περιορισμοὺς αὐτοῦ, τοὺς ὁποίους ἀναγράφομεν πλησίον τῶν ἐξισώσεων. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι θὰ ὑπάρχουν περιορισμοί, ὅταν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστᾷ ποσόν τι.

2) ***Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις***· οὕτω εὑρίσκομεν ἐκ πάντων τῶν ἀριθμῶν τίς ἢ τίνες μόνον δύνανται νὰ λύσωσι τὸ πρόβλημα.

3) ***Ἐρευνῶμεν, ἂν ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως πληροῖ καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος,*** ὅτε εἶναι πραγματικὴ ἡ λύσις.

Καὶ διὰ μὲν τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων ὑπάρχουσιν ὡρισμένοι κανόνες· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ εὕρεσις τῶν περιορισμῶν καὶ ἡ διερεύνησις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων οὐδεμίαν συνήθως παρέχουσι δυσκολίαν· ἀλλὰ διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων οὐδεὶς δύναται νὰ δοθῇ ὡρισμένος κανὼν ἕνεκα τῆς ἀπείρου ποικιλίας τῶν προβλημάτων. Ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο ἄσκησις καὶ δεξιότης τοῦ πνεύματος.

Προβλήματα

73. ***Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 52.***

Ἔστω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{2}$, τὸ τρίτον $\frac{\chi}{3}$ καὶ τὸ τέταρτον $\frac{\chi}{4}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τούτων, ἤτοι $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}$, θὰ εἶναι, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, ἴσον τῷ 52· ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}=52,$$

ἐξ ἧς, λύοντες, εὑρίσκομεν $\chi=48$.

74. ***Ἐὰν ἀριθμός τις αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 57· τὶς ὁ ἀριθμὸς οὗτος ;***

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι χ^2· ἀλλ' ἂν ὁ ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, γίνεται $\chi+1$ καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $(\chi+1)^2$· ὥστε ἔχομεν $(\chi+1)^2-\chi^2=57$ ἢ $2\chi+1=57$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης εὑρίσκομεν $\chi=28$.

75. ***Ἐργάτης χρειάζεται 15 ὥρας ἵνα τελειώσῃ ἔργον τι, δεύτερος ἐργάτης χρειάζεται διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον 12 ὥρας καὶ τρίτος 20 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον ;***

Ἔστω εἰς χ ὥρας. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χρειάζεται 15 ὥρας ἵνα τελειώσῃ τὸ ἔργον, εἰς μίαν ὥραν ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{15}$ τοῦ ἔργου καὶ ἑπομένως εἰς χ ὥρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{\chi}{15}$ τοῦ ἔργου. Ὁμοίως ὁ δεύτερος ἐκτελεῖ τὰ $\frac{\chi}{12}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{\chi}{20}$ τοῦ ἔργου. Τὰ τρία ταῦτα μέρη τοῦ ἔργου πρέπει νὰ ἀποτελῶσιν ὅλον τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τῆς μονάδος 1· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{15}+\frac{\chi}{12}+\frac{\chi}{20}=1\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi=5$.

76. ***Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουσι 280 χιλιόμετρα ἀπ' ἀλλήλων καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς μεταξὺ τῶν δύο πόλεων ὁδοῦ. Ἡ πρώτη διατρέχει καθ' ὥραν 45 χλμ., ἡ δὲ δευτέρα 30. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πρώτης πόλεως θὰ συναντηθῶσιν ;***

Εὑρεθέντος τοῦ πρώτου, εὑρίσκεται καὶ τὸ δεύτερον. Ἔστω λοιπὸν ἡ συνάντησις μετὰ χ ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τῶν ἁμαξοστοιχιῶν. Ἡ μὲν πρώτη, ἐπειδὴ καθ' ὥραν διατρέχει 45 χλμ., θὰ διατρέξῃ κατὰ τὰς χ ὥρας 45χχλμ., ἡ δὲ δευτέρα θὰ διατρέξῃ 30χ χλμ. Ὥστε εἶναι $45\chi+30\chi=280\cdot$ πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν, λύοντες, $\chi=3$ ὥρ. 44'.

77. ***Θέλει τις μὲ 550 δραχμὰς νὰ ἀγοράσῃ 12 πήχεις ἐκ δύο ὑφασμάτων καὶ τοῦ μὲν ἑνὸς τιμᾶται ὁ πῆχυς 50 δρ., τοῦ δὲ ἄλλου 30. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ ἐκ τοῦ πρώτου ὑφάσματος καὶ πόσους ἐκ τοῦ δευτέρου ;***

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τοὺς πήχεις τοῦ πρώτου, οἱ τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι $12-\chi$. Ἐπειδὴ εἷς πῆχυς τοῦ πρώτου ἀξίζει 50 δρχ., οἱ χ πήχεις ἀξίζουν 50χ δρχ. Ὁμοίως οἱ $12-\chi$ πήχεις ἀξίζουν $30(12-\chi)$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ ἀξία τῶν πήχεων εἶναι 550 δρχ., συνάγεται ἡ ἐξίσωσις $50\chi+30(12-\chi)=550$· πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ τῶν πήχεων νὰ εἶναι ἀμφότεροι θετικοί. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi=9\frac{1}{2}$ καὶ $12-\chi=2\frac{1}{2}$.

78. ***Δώδεκα ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐδαπάνησαν ὁμοῦ διὰ τὸ δεῖπνον 550 δρ.· καὶ τῶν μὲν ἀνδρῶν ἕκαστος ἐπλήρωσε 50 δρ., τῶν δὲ γυναικῶν ἑκάστη 30. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ;***

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν. Τότε ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶναι $12-\chi$. Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 50 δρ., οἱ χ ἄνδρες ἐπλήρωσαν δραχμὰς 50χ. Ὁμοίως αἱ γυναῖκες ἐπλήρωσαν $30(12-\chi)$. Ὥστε ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $50\chi+30(12-\chi)=550$· πρέπει δὲ καὶ ὁ τῶν ἀνδρῶν καὶ ὁ τῶν γυναικῶν ἀριθμὸς νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν :

$$\chi=9\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad 12-\chi=2\frac{1}{2}\cdot$$

ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη δὲν εἶναι δεκτή.

79. ***Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, εἴτε διὰ 7 εἴτε διὰ 9 διαιρεθῇ, νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ δύο πηλίκα νὰ διαφέρωσι κατὰ 4.***

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἐπειδή, διαιρούμενος διὰ τοῦ 7 ἢ τοῦ 9, ἀφίνει ὑπόλοιπον 3, ἕπεται, ὅτι, κατὰ 3 ἐλαττούμενος, διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ 7 καὶ ὑπὸ τοῦ 9 καὶ τὰ πηλίκα εἶναι $\frac{\chi-3}{7}$ καὶ $\frac{\chi-3}{9}$. Ὥστε ἕπεται ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{\chi-3}{7}-\frac{\chi-3}{9}=4\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi=129$.

80. ***Αἱ ἡλικίαι δύο ἀνθρώπων εἶναι τοῦ μὲν 50, τοῦ δὲ 60 ἔτη. Ζητεῖται πότε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἢ ἦτο πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου ὡς ὁ 40 πρὸς τὸν 41 ;***

Αἱ παραστάσεις $50+\chi$ καὶ $60+\chi$ ἐκφράζουσι τὰς ἡλικίας τῶν ἀνθρώπων μετὰ παρέλευσιν χ ἐτῶν· ἀλλ' αἱ αὐταὶ παραστάσεις ἐκφράζουσι καὶ τὰς ἡλικίας αὐτῶν πρὸ χ ἐτῶν, ἂν τὰ παρελθόντα ἔτη σημαίνωνται ὑπὸ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι :

$$\frac{50+\chi}{60+\chi}=\frac{40}{41}.$$

πρέπει δὲ ὁ ἀριθμὸς 50+χ, ὡς ἀριθμὸς ἡλικίας, νὰ εἶναι θετικὸς καὶ ὁ 60+χ (ἡ μεγαλυτέρα ἡλικία) νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου. (Ἐκ τοῦ προβλήματος τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ περιορισμοὶ ἐνίοτε δὲν δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσιν ἀκριβῶς).

Ἡ ἐξίσωσις, λυομένη, δίδει $\chi=350$· ἀλλὰ μετὰ παρέλευσιν 350 ἐτῶν οὐδέτερος τῶν ἀνθρώπων θὰ ζῇ· ὥστε ἡ λύσις αὕτη εἶναι ἀπορριπτέα.

81. ***Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 56 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου διαιρεθὲν νὰ παρέχῃ πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.***

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸ μικρότερον τῶν μερῶν, τὸ μεγαλύτερον θὰ εἶναι 56—χ· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο, διαιρούμενον διὰ τοῦ χ, ἀφίνει ὑπόλοιπον 2, ἕπεται, ὅτι, κατὰ 2 ἐλαττωθέν, διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ χ καὶ παρέχει πηλίκον 5· τουτέστι

$$\frac{54-\chi}{\chi}=5\cdot$$

πρέπει δὲ ἀμφότερα τὰ μέρη νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἡ ἐξίσωσις, λυομένη, δίδει $\chi=9$· ὅθεν τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ 56 εἶναι 9 καὶ 47.

82. ***Δύο ἄνθρωποι ἔχουσιν ὁ μὲν 1000, ὁ δὲ 500 δρχ. δαπανῶσι δὲ καθ' ἑκάστην ὁ μὲν πρῶτος 30 δρ., ὁ δὲ δεύτερος 20. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχωσιν ἴσας δραχμάς ;***

Ἔστω μετὰ χ ἡμέρας· τότε ὁ μὲν πρῶτος θὰ ἔχῃ 1000—30χ, ὁ δὲ δεύτερος 500—20χ καὶ θὰ εἶναι $1000-30\chi=500-20\chi$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ καθιστᾷ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως θετικά, διότι μετὰ τὴν παρέλευσιν τῶν χ ἡμερῶν πρέπει νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι ποσόν τι δραχμῶν. Ἡ ἐξίσωσις, λυομένη, δίδει $\chi=50$· ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται, διότι οὐδέτερος τῶν ἀνθρώπων ἔχει τι μετὰ 34 ἡμέρας.

Παρατήρησις. Ἂν παραδεχθῶμεν ἐξ ἀρχῆς, ὅτι τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ἃς θὰ ἔχωσιν οἱ ἄνθρωποι, δύναται καὶ ἀρνητικὸν νὰ εἶναι, ἤτοι ἀντὶ περιουσίας νὰ ἔχωσιν ἴσον χρέος, ὁ περιορισμὸς ἐπὶ τοῦ ἀγνώστου αἴρεται καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα γενικεύεται.

83. ***Πατήρ τις εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἢ πότε ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;***

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι $\alpha+\chi=2(\beta+\chi)$

Περιορισμοί. Οἱ ἀριθμοὶ α, β καὶ $\beta+\chi$, ὡς ἀριθμοὶ ἡλικίας, πρέπει νὰ εἶναι θετικοί· νὰ εἶναι δὲ καὶ $\alpha>\beta$· μηδὲ πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τις ἐξ αὐτῶν τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου

$$\chi=\alpha-2\beta.$$

Διερεύνησις. Ἂν εἶναι $\alpha<2\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀρνητική· τουτέστι τὸ προτεινόμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν· εἶναι δὲ παραδεκτὴ ἡ λύσις αὕτη, διότι αἱ ἡλικίαι ἦσαν τότε

$$\alpha+(\alpha-2\beta) \text{ καὶ } \beta+(\alpha-2\beta),$$

ἤτοι $2(\alpha-\beta)$ καὶ $\alpha-\beta$ καὶ εἶναι ἀμφότεραι θετικαί.

Ἂν δὲ εἶναι $\alpha>2\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετική· τουτέστι τὸ προτεινόμενον θὰ γίνῃ εἰς τὸ μέλλον, ὅτε ὁ μὲν πατὴρ θὰ εἶναι $2(\alpha-\beta)$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $\alpha-\beta$· εἶναι δὲ παραδεκτὴ ἡ λύσις αὕτη, ἐὰν ἡ μεγαλυτέρα ἡλικία $2(\alpha-\beta)$ δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

84. ***Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{\gamma}{\delta}$.***

Περιορισμοί. Οἱ παρονομασταὶ β καὶ δ τῶν δοθέντων κλασμάτων πρέπει νὰ διαφέρωσι τοῦ 0. Ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\gamma}{\delta},$$

ἐξ ἧς ἕπεται, ἂν ὑποθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\beta-\chi$ διάφορον τοῦ 0,

$$\chi(\gamma-\delta)=\beta\gamma-\alpha\delta \qquad (1)$$

Ὅθεν, ὑποθέτοντες τὴν διαφορὰν $\gamma-\delta$ διάφορον τοῦ μηδενός, τοῦτέστι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ διάφορον τῆς μονάδος 1, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma-\delta} \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Πλὴν τῶν δύο περιπτώσεων, τὰς ὁποίας ἐξῃρέσαμεν, ἵνα φθάσωμεν εἰς τὴν λύσιν ταύτην, εἰς πάσας τὰς ἄλλας ἡ λύσις εἶναι παραδεκτή.

Ἐὰν εἶναι $\gamma=\delta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=\gamma(\beta-\alpha)$ καὶ τὸ προτεινόμενον εἶναι ἑπομένως ἀδύνατον, ἂν δὲν εἶναι καὶ $\alpha=\beta$· ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο συμβαίνῃ, ἡ ἐξίσωσις (1) καταντᾷ $0=0$ καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον.

Ἐάν ποτε ὁ τύπος (2) δώσῃ $\chi=\beta$, ἡ λύσις αὕτη πρέπει νὰ ἀπορριφθῇ, διότι $\beta-\chi$ ὑπετέθη (ἵνα ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταὶ) διάφορον τοῦ 0· τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\alpha=\beta$· τοῦτέστιν, ὅταν τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσον τῇ μονάδι 1· καὶ ὄντως τότε ὁ τύπος γίνεται $\chi=\frac{\beta(\gamma-\delta)}{\gamma-\delta}=\beta$. Ὅτι δὲ τότε τὸ προτεινόμενον εἶναι ἀδύνατον, βλέπει τις εὐκόλως.

85. ***Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, ἀφαιρούμενος ἀπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ ἀντιστρόφῳ αὐτοῦ.***

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\beta}{\alpha}$.

Περιορισμός. Ὁ β πρέπει νὰ διαφέρῃ τοῦ 0. Ὁμοίως καὶ ὁ α. Ὅθεν, ὑποθέτοντες τὸν παρονομαστὴν $\beta-\chi$ διάφορον τοῦ 0, ἤτοι τὸν χ διάφορον τοῦ β, εὑρίσκομεν:

$$(\alpha-\beta)\chi=\alpha^2-\beta^2 \qquad (1)$$

Καὶ ἂν $\alpha-\beta$ διαφέρῃ τοῦ 0, τοῦτέστιν ἂν τὸ δοθὲν κλάσμα διαφέρῃ τῆς μονάδος 1, ἔχομεν:

$$\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}, \quad \text{ἤτοι} \quad \chi=\alpha+\beta \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, πλὴν τῶν δύο ἐξαιρεθεισῶν. Καὶ ἂν μὲν εἶναι $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$. Ὅθεν πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ἐπιταχθὲν καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον, ἡ δὲ ἐξαιρεθεῖσα λύσις $\chi=\beta$ τότε μόνον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2), ὅταν $\alpha=0$, ὅτε προδήλως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

86. ***Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ τετραγώνῳ αὐτοῦ.***

Περιορισμός. Ὁ παρονομαστὴς β διαφέρει τοῦ 0.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$

Ὅθεν, ὑποθέτοντες $\beta-\chi$ διάφορον τοῦ 0, εὑρίσκομεν:

$$(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha\beta(\alpha-\beta) \qquad (1)$$

Καὶ ἂν $\alpha^2-\beta^2$ διαφέρῃ τοῦ 0, ἕπεται ἡ τιμὴ τοῦ χ

$$\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, πλὴν τῶν δύο ἐξαιρεθεισῶν.

Ἂν εἶναι $\alpha^2=\beta^2$, θὰ εἶναι ἢ $\alpha=\beta$ ἢ $\alpha=-\beta$· διότι καὶ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα εἶναι ἴσα· καὶ ἂν μὲν εἶναι $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$ καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον, ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ἐπιταχθέν· ἂν δὲ εἶναι $\alpha=-\beta$, ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις γίνεται $0=2\beta^3$ καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ ἐξαιρεθεῖσα λύσις $\chi=\beta$ οὐδέποτε δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2)· διότι, ἂν ἦτο $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\beta$, θὰ ἦτο καὶ $\alpha\beta=\alpha\beta+\beta^2$. Ὅθεν καὶ $\beta^2=0$, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

87. ***Παρατηρήσεις.*** Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων βλέπομεν, ὅτι δύναται πρόβλημά τι κατά τινα ὑπόθεσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων αὐτοῦ νὰ καταντᾷ ἀόριστον (τοὐτέστι νὰ λύεται ὑπὸ παντὸς ἀριθμοῦ), κατὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέρουσαν ὑπόθεσιν, νὰ ἔχῃ λύσιν ἐντελῶς ὡρισμένην.

Δυνατὸν δὲ εἶναι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει νὰ ζητηθῇ πρὸς ποίαν τιμὴν πλησιάζει ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ δεδομένα πλησιάζωσι πρὸς τὴν κατάστασιν ἐκείνην, ἥτις καθιστᾷ τὸ πρόβλημα ἀόριστον.

Τὴν τοιαύτην τιμὴν τοῦ ἀγνώστου παρέχει ὁ γενικὸς τύπος τῆς τιμῆς αὐτοῦ, ἀφοῦ ἐξαλειφθῇ ὁ τὴν ἐξίσωσιν μηδενίζων καὶ τὴν λύσιν ἀόριστον καθιστῶν κοινὸς παράγων, ἐὰν τοιοῦτος παράγων ὑπάρχῃ.

Οὕτως ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι ὁ τύπος (2) ἀληθεύει, ὁσονδήποτε ὀλίγον καὶ ἂν διαφέρωσι τὰ α καὶ β (ἀρκεῖ νὰ διαφέρωσι), καὶ ἐξ αὐτοῦ φαίνεται, ὅτι ὅσῳ πλησιάζουσι ταῦτα νὰ γίνωσιν ἴσα, τόσῳ ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου προσεγγίζει πρὸς τὸ $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\alpha}$, ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{2}$. Ὁμοίως ἐν τῷ προβλήματι τοῦ ἐδαφ. 85 φαίνεται ἐκ τοῦ τύπου (2), ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου προσεγγίζει πρὸς τὸ 2α. ὅταν τὸ α καὶ β, τείνουσι νὰ καταστῶσιν ἴσα.

88. Ὡσαύτως εἶναι δυνατόν, κατά τινα ὑπόθεσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων αὐτοῦ, νὰ καθιστᾶται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος ἀδύνατος, κατὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέρουσαν αὐτῆς, ἐντελῶς ὡρισμένη. Οὕτως ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι, ἂν ὑποτεθῇ $\alpha=-\beta$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἀδύνατος· διὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην ὑπόθεσιν, μικρὸν αὐτῆς διαφέρουσαν, ἡ ἐξίσωσις λύεται.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ὅσον τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος πλησιάζουσι πρὸς τὴν κατάστασιν ἐκείνην, ἥτις καθιστᾷ τὴν ἐξίσωσιν ἀδύνατον, τόσον ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου αὐξάνει καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν.

Διότι, τῆς ἐξισώσεως ἀχθείσης εἰς τὴν μορφὴν $\alpha\chi=\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου εἶναι $\chi=\frac{\beta}{\alpha}$· καὶ ὁ μὲν α πλησιάζει τότε πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ β πρὸς ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0. Ἀλλὰ κλάσμα, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς πλησιάζει πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ ἀριθμητὴς πρὸς ἄλλον οἱονδήποτε ἀριθμόν, αὐξάνει κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν· διότι, ὅταν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ $\frac{1}{10}$, τὸ κλάσμα γίνεται 10β· ὅταν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ $\frac{1}{100}$, τὸ κλάσμα γίνεται 100 β· ὅταν $\frac{1}{1000}$, τὸ κλάσμα γίνεται 1000β καὶ οὕτω καθεξῆς.

Διὰ τοῦτο τὸ $\frac{\beta}{0}$ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου ∞, καλουμένου ***ἄπειρον***, δηλαδὴ ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν παντὸς ἀριθμοῦ· σημειωτέον ὅμως, ὅτι, μὴ ὑπάρχοντος τοιούτου ἀριθμοῦ, τὸ σύμβολον ∞ δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἀριθμητικὴν ἔννοιαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

136) Ποῖος ἀριθμὸς ἐὰν ἀφαιρεθῇ μὲν ἀπὸ τὸν 95, προστεθῇ δὲ εἰς τὸν 59 δίδει ἐξαγόμενα ἴσα ;

137) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τριπλάσιον σύν 6 εἶναι ἴσον μὲ τὸ πενταπλάσιον αὐτοῦ πλὴν 10 ;

138) Ἐδαπάνησέ τις τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν χρημάτων του καὶ 12 δραχμὰς ἀκόμη. Πόσας εἶχεν, ἐὰν ἡ ὅλη δαπάνη ἦτο 48 δρ.;

139) Ἐδαπάνησέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν χρημάτων του καὶ τοῦ ἔμειναν 28 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ;

140) Ἐκ δύο τεμαχίων ὑφάσματος τὸ ἓν εἶναι τριπλασίου μήκους τοῦ ἄλλου. Ἐὰν ἐκ τοῦ πρώτου κόψωμεν 11 μέτρα, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 3 μέτρα, τὰ τεμάχια ταῦτα θὰ γίνουν ἴσα κατὰ τὸ μῆκος. Πόσων μέτρων εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου ;

141) Ἐὰν ἀπὸ τὰ $\frac{2}{3}$ ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρέσωμεν τὸν 2, θὰ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

142) Ἐὰν ἀπὸ τὸ διπλάσιον ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸν 8 θὰ λάβωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

143) Ἀπὸ 62 δραχμὰς, τὰς ὁποίας εἶχέ τις, ἐδαπάνησεν ἓν μέρος. Πόσων δραχμῶν ἦτο ἡ δαπάνη, ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον ἦτο τὸ τριπλάσιον αὐτῆς ;

144) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{10}$ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ 99 ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ;

145) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{8}$ εἶναι κατὰ 3 μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{10}$ τοῦ ἰδίου ;

146) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{6}$ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ ἀποτελοῦν ἀριθμὸν κατὰ 3 μικρότερον τοῦ ζητουμένου ;

147) Ἡ διαφορὰ τῆς μονάδος 1 ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 1 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. Ποῖος εἶναι οὗτος ;

148) Τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαφορᾶς τοῦ 4 ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἰσοῦνται

μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς διαφορᾶς τοῦ 2 ἀπ' αὐτοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

149) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{10}$, καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$.

150) Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗτινος τὸ τρίτον καὶ τὸ ἕκτον ἀποτελοῦσι τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

151) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$, καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῇ μονάδι.

152) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 114 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου διαιρεθὲν, νὰ παρέχῃ πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 2.

153) Νὰ μερισθῇ ὁ 51 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ τὸ πέμπτον τοῦ δευτέρου ν' ἀποτελῶσι τὸν 21.

154) Ἂν εἰς ἀριθμὸν προσθέσωμεν τὸν 2, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον ἀφαιρέσωμεν 6 ἤ, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸν 3, τετραπλασιάσωμεν ἔπειτα τὴν διαφορὰν καὶ ἐλαττώσωμεν τὸ γινόμενον κατὰ 3, θὰ ἔχωμεν ἐξαγόμενα ἴσα. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

155) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μικροτέρου καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεγαλυτέρου νὰ ἀποτελῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεταξὺ αὐτῶν ἀριθμοῦ.

156) Δύο πόλεις, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 216 χιλιόμετρα, συνδέονται διὰ σιδηροδρομικῆς γραμμῆς. Δύο δὲ ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἐκ τῆς μιᾶς πόλεως καὶ φθάνουσιν εἰς τὴν ἄλλην. Ἡ ταχύτης τῆς μιᾶς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ταχύτητος τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ταχύτητες αὗται, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ταχεῖα φθάνει εἰς τὸ τέρμα 2 ὥρας ἐνωρίτερον τῆς βραδείας.

157) Δύο αὐτοκίνητα ἀναχωροῦσιν ἐκ τῆς αὐτῆς θέσεως διευθυνόμενα κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις καὶ μετὰ 6 ὥρας ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων 468 χιλιόμετρα. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ταχύτητες ἑκά-

στου, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἑνὸς εἶναι τὰ $\frac{6}{7}$ τῆς ταχύτητος τοῦ ἄλλου.

158) Ἐὰν βιβλίον τι εἶχεν 152 σελίδας περισσοτέρας τῶν ὅσων ἔχει, θὰ εἶχε τόσας σελίδας ὑπὲρ τὰς 300, ὅσας ἔχει κάτω τῶν 300. Πόσας σελίδας ἔχει τὸ βιβλίον;

159) Ἡ ἀξία τῶν 7 πήχεων ὑφάσματός τινος διαφέρει τόσον ἀπὸ τὰς 500 δραχμάς, ὅσον αὗται διαφέρουν ἀπὸ τὴν ἀξίαν τῶν 13 πήχεων τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

160) Εἰς κατάστημά τι προσελήφθη ὑφάντρια, ὑφαίνουσα 15 πήχεις καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 ἡμέρας προσελήφθη καὶ δευτέρα ὑφαίνουσα 18 πήχεις καθ' ἡμέραν. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχῃ ὑφάνει ἑκάστη ἐν συνόλῳ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πήχεων;

161) Καπνοπαραγωγός τις συνεκόμισεν ἀπὸ μίαν φυτείαν 50 ὀκάδας καπνοῦ περισσότερον ἀπὸ ὅσας συνεκόμισεν ἐξ ἄλλης. Ἐπώλησε δὲ τὸν συγκομισθέντα καπνὸν πρὸς 62 δρ. τὴν ὀκᾶν τῆς πρώτης καὶ πρὸς 73 δρ. τὴν ὀκᾶν τῆς δευτέρας φυτείας καὶ εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ 19300 δρ. Πόσας ὀκάδας συνεκόμισεν ἐξ ἑκάστης φυτείας;

162) Ἠγόρασέ τις 10 πήχεις ὑφάσματός τινος. Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἦτο κατὰ 30 δρ. μικροτέρα, μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν δραχμῶν θὰ ἠγόραζε 2 πήχεις περισσότερον. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως;

163) Ἐὰν ἀπὸ ἀριθμόν τινα ἀφαιρέσωμεν τὸν 5, πολλαπλασιάσωμεν ἔπειτα τὴν διαφορὰν ἐπὶ 7, προσθέσωμεν ἔπειτα τὸν 2, διαιρέσωμεν ἀκολούθως διὰ 6 καὶ προσθέσωμεν τελευταίως τὸν 4, θὰ ἔχωμεν τὸν ἀρχικὸν ἀριθμόν. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

164) Κρήνη γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 7 ὥρας, δευτέρα τις κρήνη δύναται νὰ γεμίσῃ αὐτὴν εἰς 9 ὥρας καὶ τρίτη εἰς 12· ὅταν δὲ ῥέωσι πᾶσαι συγχρόνως ἐπὶ 4 ὥρας, ἡ δεξαμενὴ χρειάζεται εἰσέτι 50 λίτρας ἵνα γεμίσῃ ἐντελῶς. Πόσας λίτρας χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

165) Δύο ἔμποροι εἶχον ὁμοῦ 200000 δραχμάς· ὁ εἷς κατέθεσεν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του, ὁ δὲ ἄλλος τὰ $\frac{3}{4}$. ἀλλὰ τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου ἦτο κατὰ 12000 δραχμὰς μεγαλύτερον τοῦ τοῦ δευτέρου. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ὁ καθείς;

166) Χωρικός, ἐρωτηθεὶς τί ζῷα καὶ πόσα ἔχει, ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς: «ἔχω ὄρνιθας καὶ αἶγας, ἐν ὅλῳ 23 κεφαλαὶ καὶ 56 πόδες». Πόσας ὄρνιθας καὶ πόσας αἶγας εἶχεν ὁ χωρικός ;

167) Τοκίζει τις μὲ ἁπλοῦν τόκον κεφάλαιον 12000 δραχμῶν πρὸς 9%, καὶ ἄλλο κεφάλαιον 15000 δραχμῶν πρὸς 8%. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων τόκον 6400 δραχμάς ;

168) Τοκίζει τις μὲ ἁπλοῦν τόκον κεφάλαιον 10370 δρ. πρὸς 4,5% καὶ 15320 δρ. πρὸς 5,5%. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο ταῦτα κεφάλαια θὰ φέρουν ἐν συνόλῳ τόκον 1571,10 δρ. ;

169) Ἐτόκισέ τις μὲ ἁπλοῦν τόκον κεφάλαιον 13200 δρ. πρὸς 5%, μετὰ ἓν ἔτος ἐτόκισε 15000 δρ. πρὸς 4% καὶ μετὰ ἄλλο ἓν ἔτος 8000 δρ. πρὸς 3%. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο τελευταῖα κεφάλαια θ' ἀποφέρουν ὁμοῦ τόκον ἴσον μέ τὸν τόκον τοῦ α΄ κεφαλαίου ;

170) Τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του ἐδάνεισέ τις πρὸς 5%, τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 6%, καὶ εἰσπράττει ἐτησίως τόκον ὁμοῦ 21600 δρ. Πόσας ἐδάνεισε πρὸς 5 τοῖς ἑκατὸν καὶ πόσας πρὸς 6 ;

171) Ἐκ τοῦ κεφαλαίου του διέθεσέ τις τὸ 1/3 δι' ἀγορὰν οἰκίας, ἥτις τοῦ ἀπέδιδε 8% ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου, τὸ 1/4 δι' ἀγορὰν κτήματος ἀποδίδοντος 6,5% καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐτοποθέτησεν εἰς βιομηχανικὰς ἐπιχειρήσεις, ἐξ ὧν ἔχανε 1,5%. Ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν τὸ καθαρὸν ἐτήσιον εἰσόδημα αὐτοῦ ἦτο 44000 δραχμαί ;

172) Ἔχων τις 100000 δραχμάς, μεταχειρίζεται μέρος αὐτῶν εἰς ἀγορὰν οἰκίας, τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου τοκίζει πρὸς 4%, τὰ δὲ λοιπὰ 2/3 πρὸς 3%· ἀπολαμβάνει δὲ ἐκ τῶν τοκισθέντων χρημάτων ἐτήσιον εἰσόδημα 2000 δραχμῶν. Ποία ἡ τιμὴ τῆς οἰκίας καὶ ποῖα τὰ τοκισθέντα πρὸς 4% καὶ 3% χρήματα ;

173) Ἔχει τις εἰς τὸν τόκον κεφάλαιόν τι πρὸς 5% κατ' ἔτος. Μετὰ δύο ἔτη ἀφαιρεῖ τὸ τέταρτον τοῦ κεφαλαίου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀφίνει εἰς τὸν τόκον 8 μῆνας, μετὰ τοὺς ὁποίους ἀφαιρεῖ πάλιν τὸ τέταρτον (τοῦ νέου κεφαλαίου), τὸ δὲ ὑπόλοιπον λαμβάνει μετὰ 16 μῆνας. Ἔλαβε δὲ ἐν τῷ διαστήματι τῶν 48 μηνῶν τόκον 20000 δραχ. Ζητεῖται τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον.

174) Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατὰ 4000 δρ. Τὸ μικρότερον

ἐτοκίσθη πρὸς 4°/₀ καὶ τὸ ἄλλο πρὸς 5°/₀. Ποῖα εἶναι τὰ κεφάλαια ταῦτα, ἐὰν οἱ ἐτήσιοι τόκοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς ὁ 8 πρὸς τὸν 11 ;

175) Ἐκ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματός του οἰκονόμησέ τις 1500 δραχμάς. Τὸ ἑπόμενον ἔτος τὰς μὲν δαπάνας του ἠλάττωσε κατὰ 15°/₀, τὸ δὲ εἰσόδημά του ηὐξήθη κατὰ 10°/₀. Ἐξοικονόμησε δὲ οὕτω τὸ δεύτερον ἔτος 6000 δραχμάς. Ποῖον ἦτο τὸ εἰσόδημα τοῦ προηγουμένου ἔτους ;

176) Ἠγόρασέ τις 1500 αὐγά, ἓν μέρος αὐτῶν πρὸς 12 δρχ. τὰ 10, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 17 δρ. τὰ 10. Ἐὰν ὅμως ἠγόραζεν ὅλα τὰ αὐγά πρὸς 1,35 δραχ. τὸ ἕν, θὰ ἐκέρδιζε 200 δραχ. Πόσα αὐγὰ ἠγόρασε πρὸς 12 δραχμ. τὰ 10 καὶ πόσα πρὸς 17 ;

177) Διένειμέ τις τὴν περιουσίαν του ἐξ 60000 δραχμῶν εἰς τοὺς τρεῖς υἱοὺς ὡς ἑξῆς. Ὁ μεγαλύτερος νὰ λάβῃ τὸ 1/4 τοῦ τριπλασίου τοῦ μεριδίου τοῦ νεωτέρου, εἰς ὃ προσετέθησαν 24100 δρ., ὁ δὲ δευτερότοκος τὸ 1/2 τοῦ μεριδίου τῶν δύο ἄλλων ἀδελφῶν καὶ 300 δρ. ἀκόμη. Ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀδελφοῦ ;

178) Διενεμήθησαν 400 δρ. μεταξὺ τριῶν προσώπων οὕτως, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου νὰ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου σὺν 70 δρ. καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου πλὴν 40. Ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ;

179) Ἕνας ἰδιοκτήτης τριῶν οἰκιῶν εἰσέπραττεν ἐκ τῶν ἐνοικίων αὐτῶν 16000 δρ. τὸν μῆνα ἐν ὅλῳ. Τὸ μηνιαῖον ἐνοίκιον τῆς πρώτης ἐξ αὐτῶν ἦτο διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ ἐνοικίου τῆς δευτέρας, τὸ δὲ μηνιαῖον ἐνοίκιον τῆς τρίτης ἦτο ἴσον πρὸς ἥμισυ ἐνοίκιον τῶν δύο ἄλλων πλὴν 200 δρ. Ποῖον ἦτο τὸ μηνιαῖον ἐνοίκιον ἑκάστης οἰκίας ;

180) Ἐργάτης ἐλάμβανε διὰ τὰς ὥρας τῆς τακτικῆς ἐργασίας του 6,50 δρ. καθ᾽ ὥραν καὶ διὰ τὰς ἐκτάκτους 8,25 δρ. καθ᾽ ὥραν. Δι᾽ ἐργασίαν δὲ 63 ὡρῶν τακτικὴν καὶ ἔκτακτον ἔλαβε 435,75 δρ. Πόσαι εἶναι αἱ ὧραι τῆς τακτικῆς καὶ πόσαι αἱ τῆς ἐκτάκτου ἐργασίας του ;

181) Ὀκτὼ ἐργάται ἐξετέλεσαν τὸ 1/5 ἔργου τινὸς ἐργαζόμενοι 4 ὥρας καθ᾽ ἡμέραν ἐπὶ 9 ἡμέρας. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται καθ᾽ ἡμέραν 15 ἐργάται, ἵνα ἀποπερατώσωσι τὸ ἔργον εἰς 3 ἡμέρας ;

182) Πεζός, διανύων 5 χιλιόμετρα καθ' ὥραν, διώκεται ὑπὸ ἱππέως διανύοντος 9 χιλιόμετρα καθ' ὥραν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ ὁ ἱππεὺς τὸν πεζόν;

183) Ἔκ τινος πόλεως ἀναχωρεῖ τις μετὰ ταχύτητος 4 χλμ. καθ' ὥραν. Ἐξ ἄλλης πόλεως ἐντεῦθεν τῆς πρώτης κειμένης καὶ ἀπεχούσης αὐτῆς 6 χλμ. ἀναχωρεῖ ταυτοχρόνως πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ἄλλος μὲ ταχύτητα $5\,{}^{1}/_{2}$ χλμ. καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ ὁ δεύτερος τὸν πρῶτον;

184) Δύο ταχυδρόμοι ἀπέχοντες ἀλλήλων $44\frac{3}{4}$ χλμ., ἐκκινοῦν συγχρόνως πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου. Κατὰ τὴν συνάντησίν των ὁ Α εἶχε διανύσει $2\frac{1}{4}$ χλμ. περισσότερα τοῦ Β. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης των, δεδομένου, ὅτι ὁ Α διήνυε καθ' ὥραν 900 μέτρα περισσότερα τοῦ Β;

185) Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο πόλεων, ὧν ἡ μεταξὺ ἀπόστασις εἶναι $52\,{}^{1}/_{2}$ χλμ. πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου. Ἡ ταχύτης καθ' ὥραν τοῦ ἑνὸς εἶναι κατὰ 1,8 χλμ. μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος τοῦ ἄλλου, συναντῶνται δὲ μετὰ $1\,{}^{1}/_{2}$ ὥραν ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξεν ὁ καθείς;

186) Ἀτμάμαξά τις ἀνεχώρησε δύο ὥρας ὕστερον ἄλλης ἐκ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ διατρέχει τὴν αὐτὴν ὁδόν, ἡ δὲ ταχύτης αὐτῆς εἶναι τὰ 5/3 τῆς ταχύτητος τῆς ἄλλης. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ αὐτήν;

187) Ἀλώπηξ εἶχε κάμει 60 πηδήματα, ὅταν λαγωνικὸν ἤρχισε νὰ διώκῃ αὐτήν· κάμνει δὲ ἡ ἀλώπηξ 9 πηδήματα, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ λαγωνικὸν κάμνει 6· ἀλλὰ 3 πηδήματα τοῦ λαγωνικοῦ ἰσοδυναμοῦν πρὸς 7 τῆς ἀλώπεκος. Πόσα πηδήματα θὰ κάμῃ τὸ λαγωνικὸν μέχρις οὗ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα;

188) Δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος κενοῦται διὰ δύο ἀνίσων κρουνῶν· ἀνοίγεται ὁ πρῶτος καὶ ἐκρέει τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου ὕδατος· τότε ἀνοίγεται καὶ ὁ ἕτερος κρουνὸς καὶ ἐκρέει ἐξ ἀμφοτέρων τὸ ὕδωρ. Οὕτω κενοῦνται καὶ τὰ λοιπὰ τρία τέταρτα τῆς δεξαμενῆς εἰς μίαν ὥραν καὶ ἓν τέταρτον περισσότερον ἢ ὅσον ἐχρειάσθη ὁ πρῶτος κρουνὸς διὰ νὰ κενώσῃ τὸ τέταρτον τῆς δεξαμενῆς. Ἐὰν δὲ ἀμφότεροι οἱ κρουνοὶ ἠνοίγοντο ἐξ ἀρχῆς, ἡ δεξαμενὴ θὰ ἐκενοῦτο ἓν τέταρτον τῆς ὥρας ταχύτερον.

Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος τῶν κρουνῶν θὰ ἐκένου μόνος τὴν δεξαμενήν;

189) Δύο πίθοι περιέχουσιν ὁ μὲν 400 ὀκάδας οἴνου, ὁ δὲ 280. Ἐὰν ἀνοιχθῶσιν αἱ στρόφιγγες αὐτῶν, ἐκρέουσιν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 9 ὀκάδες τὴν ὥραν, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 7. Ζητεῖται, ἂν ἀνοιχθῶσιν αἱ στρόφιγγες, μετὰ πόσας ὥρας θὰ ὑπολειφθῶσιν ἐν τοῖς πίθοις ἴσα ποσὰ οἴνου;

190) Ὡρολογίου δεικνύοντος ἀκριβῶς μεσημβρίαν συμπίπτουσιν οἱ δεῖκται ἐπὶ τοῦ 12· μετὰ πόσην ὥραν θὰ γίνῃ ἡ πρώτη σύμπτωσις τῶν δύο δεικτῶν καὶ πόσαι συμπτώσεις θὰ γίνωσιν εἰς τὸ διάστημα τῶν 12 ὡρῶν;

191) Ἐὰν τὸ αὐτὸ ὡρολόγιον ἔχῃ τρεῖς δείκτας (τῶν ὡρῶν, τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῶν δευτέρων λεπτῶν) καὶ συμπίπτουσιν οἱ δεῖκται ἐπὶ τοῦ 12, μετὰ πόσα δεύτερα λεπτὰ ὁ τῶν δευτέρων λεπτῶν δείκτης θὰ διαιρῇ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων ἀποτελουμένην γωνίαν;

192) Ἐρωτηθείς τις πόσα τέκνα ἔχει, ἀπεκρίθη: «ἀγοράσας μῆλα, ἠθέλησα νὰ δώσω 7 εἰς ἕκαστον τέκνον μου, ἀλλὰ μοῦ ἔλειψαν 4· τότε ἔδωκα 4 μῆλα εἰς ἕκαστον καὶ μοῦ περίσσευσαν 3. Πόσα τέκνα εἶχεν ὁ ἄνθρωπος οὗτος;

193) Πατήρ τις εἶναι 37 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 9. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρός του ἦτο ἢ θὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

194) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 30 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του. Πρὸ 8 ἐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν των ἦτο 46. Ποία ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ ποία ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ;

195) Πατήρ τις ἦτο 42 ἐτῶν, ὁ μεγαλύτερος υἱός του 10 ἐτῶν καὶ ὁ μικρότερος 4 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ἡλικίαν τῶν δύο υἱῶν του ὁμοῦ, ὃν λόγον ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 2;

196) Διόφαντος, ὁ συγγραφεὺς τοῦ ἀρχαιοτάτου σωζομένου βιβλίου ἀλγέβρας, ἔζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς ὡς παῖς καὶ τὸ δωδέκατον ὡς νεανίας· ἔπειτα, νυμφευθείς, ἔζησε τὸ ἕβδομον καὶ 5 ἔτη πρὶν ἀποκτήσῃ υἱόν, ὅστις ἀπέθανε 4 ἔτη πρὸ τοῦ πατρός του, ζήσας τὸ ἥμισυ τῆς ζωῆς αὐτοῦ. Πόσον ἔζησεν ὁ Διόφαντος;

197) Ἐπώλησέ τις ὕφασμα πρὸς 69 δρ. τὸν πῆχυν καὶ ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 90 δρ. Ἐὰν ὅμως ἐπώλει τὸ ὕφασμα κατὰ 4,60

δρ. τὸν πῆχυν εὐθηνότερον, θὰ ἔχανε 23,50 δρ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα ;

198) Εἰς τὰ 9 τέκνα του ἔδωκεν ἄνθρωπός τις 53 δρ. καὶ ἕκαστον μὲν κοράσιον ἔλαβε 5 δρ., ἕκαστος δὲ υἱὸς 3. Πόσοι ἦσαν οἱ υἱοὶ καὶ πόσα τὰ κοράσια ;

199) Κύριος συνεφώνησεν ὑπηρέτην πρὸς 2300 δρ. κατ' ἔτος καὶ μίαν ἐνδυμασίαν, ἀποπέμψας δὲ αὐτὸν μετὰ 10 μῆνας, ἔδωκεν εἰς αὐτὸν 1800 δρ. καὶ τὴν ἐνδυμασίαν. Πόσον τιμᾶται ἡ ἐνδυμασία ;

200) Πατήρ τις ἀφίνει εἰς τοὺς τέσσαρας υἱούς του κληρονομίαν 3530 δρ. Διατάσσει δὲ ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος διπλάσια τοῦ δευτέρου πλὴν 2000 δρ., ὁ δεύτερος τριπλάσια τοῦ τρίτου πλὴν 3000 δρ. καὶ ὁ τρίτος τετραπλάσια τοῦ τετάρτου πλὴν 4000 δρ. Πόσας ἔλαβεν ἕκαστος ;

201) Ποσόν τι δραχμῶν διενεμήθη μεταξὺ τεσσάρων ἀνθρώπων καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ πλὴν 6, ὁ δεύτερος τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου πλὴν 2, ὁ τρίτος τὸ τέταρτον τοῦ ὑπολοίπου πλὴν 1 καὶ ὁ τέταρτος ἔλαβε τὰς ὑπολοίπους 13 δρ. Πόσαι ἦσαν αἱ δραχμαὶ καὶ πόσας ἔλαβεν ἕκαστος τῶν τριῶν πρώτων ;

202) Εἶπέ τις: Ἐὰν μοὶ τριπλασιάσῃ τις ὅσα ἔχω, δίδω εἰς αὐτὸν 27 δρ. Ἐξεπληρώθη ἡ αἴτησίς του τρὶς καὶ ἔχασε πάντα ὅσα εἶχεν. Πόσα εἶχεν ;

203) Ἐδαπάνησέ τις τὸ 1/4 τῶν χρημάτων του, ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τὸ 1/2, τοῦ νέου ὑπολοίπου τὰ 2/3 καὶ τέλος τοῦ νέου ὑπολοίπου τὰ 3/4, τοῦ ἔμειναν δὲ 5 δρ. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἀρχικῶς;

204) Διενεμήθησαν 160 δραχμαὶ μεταξὺ τριῶν προσώπων, Α, Β καὶ Γ. Ὁ Α ἔλαβεν 20 δρ. περισσοτέρας τοῦ Β καὶ ὁ Β 10 δρ. περισσοτέρας τοῦ Γ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὁ καθείς ;

205) Διενεμήθησαν 250 δρ. μεταξὺ τῶν Α, Β καὶ Γ. Ὁ Γ ἔλαβε 30 δρ. ὀλιγωτέρας τοῦ Β, ὁ δὲ Α ὅσας ἔλαβον ὁμοῦ ὁ Β καὶ ὁ Γ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ;

206) Εἴς τινα ἐκδρομὴν μετέσχον 28 πρόσωπα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία. Ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν ἦτο τὰ 3/4 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν παιδίων τὸ 1/3 τοῦ

ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν ὁμοῦ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδία ;

207) Εἰς 32 λίτρας θαλασσίου ὕδατος περιέχεται μία λίτρα ἅλατος. Πόσον γλυκὺ ὕδωρ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς αὐτό, ἵνα 40 λίτραι τοῦ κράματος περιέχωσιν 1/5 τῆς λίτρας ἅλατος ;

208) Εἶχέ τις 32 ὀκάδας οἰνοπνεύματος τῶν 85°. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ ρίψῃ εἰς αὐτό, ἵνα ὁ βαθμὸς τοῦ οἰνοπνεύματος κατέλθῃ εἰς τοὺς 80° ;

209) Ἔχει τις 6000 ὀκάδας οἴνου 14°. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ ρίψῃ εἰς αὐτόν, ὥστε τὸ μῖγμα νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 2° ;

210) Εἶχέ τις 120 γραμμάρια χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,740 καὶ ἄλλον βαθμοῦ 0,880. Πόσα γραμμάρια τοῦ δευτέρου κράματος πρέπει ν' ἀναμείξῃ μὲ τὰ 120, ἵνα ὁ βαθμὸς τοῦ κράματος γίνῃ 0,820 ;

211) Δύο ἀριθμοὶ διαφέρουσι κατὰ 8, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου κατὰ 36. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

212) Δύο ἀριθμοὶ διαφέρουσι κατὰ 4, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ μεγαλυτέρου κατὰ 28. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

213) Εὑρεῖν δύο ἀκεραίους διαδοχικοὺς ἀριθμούς, ὧν τὰ τετράγωνα διαφέρουσι κατὰ 103.

214) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ εἷς εἶναι κατὰ 6 μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου καὶ ὧν τὰ τετράγωνα διαφέρουσι κατὰ 120.

215) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕκαστον παράγοντα τῶν γινομένων 25.51 καὶ 31.40, ἵνα ταῦτα γίνωσιν ἴσα ;

216) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου 147.30, νὰ προσθέσωμεν δὲ εἰς ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου 14.62, ἵνα ταῦτα γίνωσιν ἴσα ;

217) Εὑρεῖν ἀριθμόν, εἰς ὃν προστιθέμενοι οἱ 3, 5, 7, 10 συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

218) Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κατὰ 30° μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως. Εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

219) Ἐκ τῶν γωνιῶν τριγώνου Α, Β, Γ ἡ Α εἶναι κατὰ 5°

μεγαλυτέρα τῆς Β, ἡ δὲ Γ τριπλασία τῆς Β. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν αὐτοῦ;

220) Ἐκ τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου ἑκάστη εἶναι κατὰ 8° μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης της. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν αὐτοῦ;

221) Νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους, ἡ δὲ περίμετρος ἔχει μῆκος 62 μέτρων.

222) Ἐκ τριῶν γωνιῶν τριγώνου Α,Β,Γ ἡ Α εἶναι κατὰ 2° μικροτέρα τῆς Β καὶ κατὰ 7° μικροτέρα τῆς Γ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

223) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου εἶναι 40 μέτρων. Ἐὰν ἡ βάσις αὐτοῦ ἦτο 2,5 φορὰς μεγαλυτέρα τοῦ ὕψους του, ἡ περίμετρος θὰ ἦτο κατὰ 16 μέτρα μεγαλυτέρα. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

224) Εὑρεῖν δύο ἀκεραίους διαδοχικοὺς ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των.

225) Πατήρ τις ἦτο 45 ἐτῶν, ὁ μεγαλύτερος υἱός του 10 ἐτῶν καὶ ὁ μικρότερος 5. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν τέκνων του ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3;

226) Ἐκ δύο δεξαμενῶν ἡ μὲν μία περιέχει 800 ὀκάδας ὕδατος, ἡ δὲ 1000. Ἐκ τῆς μιᾶς τρέχει ὕδωρ 120 τόνων καθ' ὥραν καὶ ἐκ τῆς ἄλλης 140. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ποσότητα ὕδατος;

227) Νὰ μοιρασθῶσιν α δραχμαὶ μεταξὺ δύο προσώπων οὕτως, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου νὰ εἶναι τὸ $\nu^{\sigma\tau\grave{o}\nu}$ μέρος τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου. Πόσων δραχμῶν ἦτο τὸ μερίδιον ἑκάστου;

228) Νὰ μοιρασθῶσιν α δραχμαὶ μεταξὺ τριῶν προσώπων οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ διπλασίας δραχμὰς ἀπὸ ὅσας θὰ λάβῃ ὁ δεύτερος καὶ οὗτος πάλιν νὰ λάβῃ β δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ ὅσας ἔλαβεν ὁ τρίτος. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστον πρόσωπον;

229) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, καθιστᾷ αὐτὸ διπλάσιον.

230) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, προστιθέμενος εἰς τὸ $\mu^{\sigma\tau\grave{o}\nu}$ μέρος αὐτοῦ, δίδει ἄθροισμα τὸ $\nu^{\sigma\tau o\nu}$ μέρος αὐτοῦ σὺν λ.

231) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι γ. Τὸ ἄθροισμα τοῦ γινομένου τοῦ μὲν ἑνὸς ἐπὶ μ, τοῦ δὲ ἄλλου ἐπὶ ν εἶναι α. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

232) Ἐργάτης χρειάζεται α ὥρας ἵνα τελειώσῃ ἔργον τι, δεύτερος ἐργάτης χρειάζεται β ὥρας διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ τρίτος γ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον;

233) Ἐκ δύο ἀτόμων ἡ ἡλικία τοῦ μὲν ἑνὸς εἶναι α ἐτῶν, τοῦ δὲ ἄλλου β ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι ὡς ὁ μ πρὸς τὸν ν;

234) Δύο κεφάλαια, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι α δραχμαί, ἐτοκίσθησαν, τὸ μὲν ἓν πρὸς τ %₀ κατ᾽ ἔτος, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς τ′ %₀, δίδουσι δὲ ἐτήσιον τόκον β δραχμάς. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ δύο ταῦτα κεφάλαια.

235) Ἁμάξης τῶν μὲν ἐμπροσθίων τροχῶν ἡ περιφέρεια εἶναι α ποδῶν, τῶν δὲ ὀπισθίων β. Διανυσάσης δὲ τῆς ἁμάξης διάστημά τι, παρετηρήθη, ὅτι οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἔκαμαν ν περιστροφὰς περισσοτέρας ἢ οἱ ὀπίσθιοι. Εὑρεῖν τὸ διανυθὲν ὑπὸ τῆς ἁμάξης διάστημα.

236) Δύο κινητὰ κινοῦνται πρὸ ἀορίστου χρόνου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς κίνησιν ὁμαλήν· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ἡ ταχύτης εἶναι τ, τοῦ δὲ δευτέρου τ′ καὶ εὑρίσκονται τὴν στιγμὴν ταύτην εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὧν ἡ ἀπόστασις εἶναι α. Ζητεῖται ὁ μεταξὺ τῆς παρούσης στιγμῆς καὶ τῆς συναντήσεως αὐτῶν χρόνος.

237) Εὑρεῖν ἐν τῷ ἀνωτέρω προβλήματι τῶν δύο κινητῶν πότε ἡ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν κινητῶν εἶναι β.

238) Κινητόν τι ἀπέχει ἀπ᾽ ἄλλου κινητοῦ, πρὸς ὃ διευθύνεται, ἀπόστασιν α, ἡ δὲ ταχύτης του εἶναι διπλασία τῆς ταχύτητος ἐκείνου (καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως). Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ διὰ νὰ τὸ φθάσῃ;

239) Δύο κινητὰ Α καὶ Β κινοῦνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ὁμαλῶς καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Ἡ ταχύτης τοῦ Α εἶναι τ, τοῦ δὲ Β τ′ καὶ τὴν στιγμὴν ταύτην συμπίπτουσιν εἴς τι σημεῖον Ο τῆς περιφερείας. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς θὰ συναντηθῶσι πάλιν καὶ εἰς ποίαν θέσιν τῆς περιφερείας· καί,

ἐπειδὴ θὰ γίνουν ἄπειροι συμπτώσεις, εἰς ποῖα σημεῖα τῆς περιφερείας θὰ γίνωνται;

240) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του τὴν διανομὴν τῆς περιουσίας αὐτοῦ εἰς τοὺς υἱούς του ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ὑπολοίπου. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς μερίδος τοῦ πρώτου νὰ λάβῃ ὁ δεύτερος 2α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μερίδων τούτων νὰ λάβῃ ὁ τρίτος 3α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ μένοντος τότε ὑπολοίπου κ.ο.κ. Συνέβη δὲ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον νὰ διανεμηθῇ ἡ ὅλη περιουσία ἐξ ἴσου εἰς τοὺς υἱούς, μηδενὸς ὑπολειφθέντος ὑπολοίπου. Ζητεῖται, πόσοι ἦσαν οἱ υἱοί, πόση ἡ περιουσία καὶ πόση ἡ μερὶς ἑκάστου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II.

Συστήματα ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετὰ πολλῶν ἀγνώστων.

89. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας ἄθροισμα α καὶ διαφορὰν β.

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις $\chi+\psi=\alpha$ καὶ $\chi-\psi=\beta$, αἱ ὁποῖαι εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ ἐπαληθεύωνται ὑπὸ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων. Οὕτω βλέπομεν, ὅτι τὰ προβλήματα πολλάκις ἀνάγονται εἰς τὴν λύσιν συστημάτων ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι περιέχουν πολλοὺς ἀγνώστους. Ὅταν δὲ λέγωμεν σύστημα ἐξισώσεων, ἐννοοῦμεν ***τὸ σύνολον πολλῶν ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουσιν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων.***

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα ἐξισώσεων, προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἕνα ἄλλο σύστημα ***ἰσοδύναμον,*** ἀλλὰ τὸ ὁποῖον νὰ λύεται εὐκολώτερον. Λέγομεν δὲ δύο συστήματα ***ἰσοδύναμα, ἐὰν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύωσιν ἀμφότερα.***

Διὰ νὰ λάβωμεν ἐκ δοθέντος συστήματος ἄλλο ἰσοδύναμον, ἀντικαθιστῶμεν μίαν ἐξίσωσιν δι᾽ ἄλλης ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτήν.

Οὕτω τὰ συστήματα:

$$2\chi - \frac{\psi}{3} = 6 \qquad\qquad 6\chi - \psi = 18$$

καὶ

$$\frac{\chi}{2} + \psi = 8 \qquad\qquad \chi + 2\psi = 16$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος τῆς εὑρέσεως ἐκ δοθέντος συστήματος ἄλλου ἰσοδυνάμου, δὲν καθιστᾷ γενικῶς εὐκολωτέραν τὴν ἐπίλυσιν τῶν συστημάτων. Ὁ κατάλληλος τρόπος διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν συστημάτων θὰ ἦτο ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων πρὸς ἀλλήλας θὰ ἔδιδεν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία νὰ μὴ ἔχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων· διότι οὕτω θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀνάγωμεν τὴν λύσιν τῶν συστημάτων εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον.

Ἀλλὰ τρόπος τοιοῦτος ὑπάρχει καὶ στηρίζεται εἰς τὰ κάτωθι θεωρήματα :

90. ***Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν ὁσασδήποτε ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν προστεθεισῶν διὰ τῆς προκυψάσης, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πρῶτον.***

Ἔστω, διὰ τὸ ἁπλούστερον, τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} \chi + \psi &= 18 \\ \chi - \psi &= \ \ 6 \end{aligned} \qquad (1)$$

Λέγω, ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τό :

$$\begin{aligned} (\chi+\psi) + (\chi-\psi) &= 18+6 \\ \chi + \psi \qquad &= 18 \end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \begin{aligned} 2\chi &= 24 \\ \chi + \psi &= 18 \end{aligned} \qquad (2)$$

διότι αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1), θὰ ἐπαληθεύουσι καὶ τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (2), ἀφοῦ εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσετέθησαν ἴσα. Ἀντιστρόφως δέ, αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουσι τὸ σύστημα (2), ἐπαληθεύουσι καὶ τὸ σύστημα (1)· διότι, ἂν ἀπὸ τῶν ἴσων $(\chi+\psi) + (\chi-\psi) = 18 + 6$ ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα $\chi + \psi = 18$, θὰ εὑρεθῇ $\chi-\psi = 6$.

Ὥστε ἡ λύσις τοῦ συστήματος (1) δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν τοῦ (2), ἡ ὁποία εἶναι εὐκολωτέρα, διότι ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν $\chi = 12$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $12+\psi=18$, ἤτοι $\psi=6$· ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι $\chi=12$, $\psi=6$.

Ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται καὶ γενικῶς, ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$

εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $A+B=A'+B'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$ ἢ καὶ

πρὸς τὸ $A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$

Παρατήρησις. Δυνάμεθα πρὸ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς ἐπὶ οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς διαφόρους τοῦ 0. Π. χ. ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi+3\psi&=9 \\ 2\chi-\psi&=4 \end{aligned}$$

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐπὶ 1 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 3 καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη· εὑρίσκομεν δὲ οὕτω τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} 7\chi&=21 \\ \chi+3\psi&=9, \end{aligned}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν εὐκόλως $\chi=3$ καὶ $\psi=2$.

91. ***Ἐὰν εἰς σύστημα μία τῶν ἐξισώσεων ἔχῃ λυθῇ πρὸς ἕνα ἄγνωστον χ*** (τῶν ἄλλων ὑποτιθεμένων γνωστῶν) ***καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ διὰ τῆς τιμῆς του εἰς ὅλας τὰς ἄλλας ἢ εἰς μερικὰς μόνον, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον.***

Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi&=2\psi-1 \\ 4\chi+\psi&=41 \end{aligned} \qquad (1)$$

Λέγω, ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\begin{aligned} \chi&=2\psi-1 \\ 4(2\psi-1)+\psi&=41 \end{aligned} \qquad (2)$$

Διότι ἢ τὸ σύστημα (1) ἀληθεύσει ἢ τὸ (2), τὸ χ καὶ τὸ $2\psi-1$ γίνονται ἴσοι ἀριθμοί· ἑπομένως καὶ τὸ ἄλλο θὰ ἀληθεύσῃ· διότι ἡ μόνη διαφορὰ μεταξὺ αὐτῶν εἶναι, ὅτι τὸν τόπον τοῦ χ εἰς τὸ πρῶτον κατέχει τὸ $2\psi-1$ εἰς τὸ δεύτερον. Ὥστε καὶ πάλιν ἡ λύσις τοῦ συστήματος (1) ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ (2), ἡ ὁποία ὅμως εἶναι εὐκολωτέρα, διότι ἐκ μὲν τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\psi=5$, ἐκ δὲ τῆς πρώτης $\chi=2.5-1=9$.

Παρατήρησις. Ὅταν, δυνάμει ἑνὸς τῶν θεωρημάτων τούτων, συνδυάζωμεν πολλὰς ἐξισώσεις οὕτως, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσα νὰ μὴ ἔχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων, λέγομεν, ὅτι ***ἀπαλείφομεν*** τὸν ἄγνωστον τοῦτον· ὁ δὲ τοιοῦτος συνδυασμὸς τῶν ἐξισώσεων λέγεται **ἀπαλοιφὴ** τοῦ ἀγνώστου τούτου. Ἡ λύσις παντὸς συστήματος ἐξισώσεων γίνεται, ὡς κατόπιν θὰ μάθωμεν, διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς.

Λύσις δύο ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων.

92. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ὅπου α, β, γ, εἶναι γνωσταὶ παραστάσεις ἢ ὡρισμένοι ἀριθμοί, χ δὲ καὶ ψ οἱ ἄγνωστοι.

Ἔστω ἤδη πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\chi-3\psi=1$.

Ἀλλ' ἐδῶ παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν εἶναι $\psi=1$ θὰ εἶναι $\chi=4$· δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ $\chi=4$ καὶ $\psi=1$· ἀλλὰ ἡ ἰδία ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται καὶ μὲ ἄλλας τιμάς, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων δι' οἱουδήποτε θέλομεν ἀριθμοῦ καὶ λύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὸν ἀπομένοντα ἄγνωστον. Οὕτω διὰ $\psi=1, 2, 3, 4$ εὑρίσκομεν $\chi=4, 7, 10, 13$, ἤτοι ἑκάστη τιμὴ τοῦ ψ μετὰ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ χ ἀποτελεῖ μίαν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ὥστε ἡ τοιαύτη ἐξίσωσις ἔχει λύσεις **ἀπείρους τὸ πλῆθος**.

93. Ἤδη ἔστω τὸ σύστημα τῶν δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} 3\chi+4\psi&=10 \\ 2\chi+5\psi&=\ 9 \end{aligned}$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν ἄλλου ἰσοδυνάμου, τοῦ ὁποίου μία ἐξίσωσις νὰ μὴ περιέχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. τὸν ψ. Δυνάμεθα δὲ νὰ λάβωμεν ἓν τοιοῦτον σύστημα, στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα 90, ἀφοῦ πρῶτον πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς δοθείσας ἐπὶ καταλλήλους ἀριθμούς, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου νὰ γίνωσιν ἀντίθετοι ἀριθμοί· τοιοῦτοι δὲ πολλαπλασιασταὶ εἰς τὸ ληφθὲν παράδειγμα εἶναι τῆς μὲν πρώτης ἐξισώσεως ὁ 5 (ἢ ὁ -5), τῆς δὲ δευτέρας ὁ -4 (ἢ ὁ 4), διότι τότε λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} 15\chi+20\psi&=\ \ 50 \\ -8\chi-20\psi&=-36 \end{aligned}$$

ἄρα καὶ $\quad 7\chi \quad = \quad 14$· ὥστε τὸ δοθὲν σύ-

στημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ
$$3\chi+4\psi=10$$
$$7\chi=14$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $\chi=2$· μετὰ δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης

$$3.2+4\psi=10 \quad \text{ἢ} \quad \psi=1\cdot$$

ὥστε αἱ ***μόναι τιμαὶ*** τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουσι τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι $\chi=2$, $\psi=1$.

Ἡ μέθοδος αὕτη, διὰ τῆς ὁποίας ἀπαλείφεται ὁ εἷς τῶν ἀγνώστων ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ λύεται τὸ σύστημα, λέγεται μέθοδος τῆς ***προσθέσεως*** ἢ τῆς ***ἀναγωγῆς.***

94. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα
$$7\chi-8\psi=19$$
$$13\chi-6\psi=53$$

Καὶ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ψ πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ἑκάστης ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ψ εἰς τὴν ἄλλην, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι καθιστῶμεν τοὺς πολλαπλασιαστὰς ἑτεροειδεῖς (ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ τοῦ ψ εἶναι ὁμοειδεῖς· ἂν ἦσαν ἑτεροειδεῖς, οἱ πολλαπλασιασταὶ θὰ ἦσαν ὁμοειδεῖς καὶ συνήθως θετικοί).

Ἀλλ' εἶναι ἁπλούστερον νὰ καταστήσωμεν κοινὸν συντελεστὴν τοῦ ψ τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ, δηλαδὴ ἐδῶ τὸν 24, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ψ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει, ἀλλάσσοντες τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς πηλίκου· δηλαδὴ ἡ πρώτη θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ -3 καὶ ἡ δευτέρα ἐπὶ 4.

Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν
$$\begin{array}{rl} -21\chi+24\psi= & -57 \\ 52\chi-24\psi= & \ \ 212 \\ \hline 31\chi \quad\quad = & \ \ 155, \\ \chi \quad\quad = & \ \ 5\cdot \end{array}$$
καί, προσθέτοντες, ... ἐξ ἧς

ἀντικαθιστῶντες νῦν τὴν τιμὴν τοῦ χ εἰς μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν, π.χ. εἰς τὴν πρώτην, εὑρίσκομεν $35-8\psi=19$, ἤτοι $\psi=2$.

95. Ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς ἑνὸς ἀγνώστου τῶν δύο ἐξισώσεων διὰ τῆς προσθέσεως δὲν εἶναι ἡ μόνη, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λύσιν τῶν συστημάτων. Εἶναι καὶ ἄλλη, ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὸ θεώρημα 91.

Ἔστω πάλιν τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον ἐλύσαμεν (93),

$$3\chi+4\psi=10$$
$$2\chi+5\psi=\ 9\cdot$$

ἐὰν ἡ πρώτη ἐξίσωσις λυθῇ πρὸς χ, τίθεται τὸ σύστημα ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi=\dfrac{10-4\psi}{3}$

$$2\chi+5\psi=9.$$

Ἐὰν δὲ ἀντικατασταθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα (91)

$$\chi=\frac{10-4\psi}{3}$$
$$2.\left(\frac{10-4\psi}{3}\right)+5\psi=9,$$

τοῦ ὁποίου ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει μόνον ἄγνωστον τὸν ψ· εὑρίσκομεν δὲ ἐξ αὐτῆς $\psi=1$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης $\chi=2$.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται μέθοδος τῆς ***ἀντικαταστάσεως***· δύνανται δὲ καὶ ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις νὰ λυθῶσι πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον καὶ μετὰ ταῦτα νὰ γίνῃ ἡ ἀντικατάστασις· δῆλα δὴ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\chi=\dfrac{10-4\psi}{3}$, $\chi=\dfrac{9-5\psi}{2}$ ἢ $\chi=\dfrac{10-4\psi}{3}$, $\dfrac{10-4\psi}{3}=\dfrac{9-5\psi}{2}$

π.δ. 1ον) $\begin{array}{l}\chi-2\psi=-9\\ \chi+5\psi=26\end{array}$ (1) $\Bigg|$ $\begin{array}{r}\chi=2\psi-9\\ 2\psi-9+5\psi=26\end{array}$ (2)

Εὑρίσκομεν δὲ ἐκ τῆς δευτέρας $\psi=5$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης $\chi=1$.

2ον) $\begin{array}{l}\chi=2-6\psi\\ \chi=\dfrac{12-25\psi}{4}\end{array}$ $\Bigg|$ $\begin{array}{r}\chi=2-6\psi\\ 2-6\psi=\dfrac{12-25\psi}{4}\end{array}$

Εὑρίσκομεν δὲ ἐκ τῆς δευτέρας $\psi=4$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης $\chi=-22$.

3ον)
$$5\chi-3\psi=\ 8$$
$$15\chi-9\psi=12$$

Ἀπαλείφοντες τὸν ψ, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$0=12$$
$$5\chi-3\psi=\ 8.$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἄρα καὶ τὸ δοθὲν εἶναι ἀδύνατον.

4ον) $$\begin{aligned} \chi - 3\psi &= 8 \\ 4\chi - 12\psi &= 32 \end{aligned}$$

ἀπαλείφοντες τὸν χ, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ \chi - 3\psi &= 8, \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον προφανῶς ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις· ἄρα καὶ τὸ δοθὲν εἶναι τοιοῦτον. Καὶ πράγματι, ἐὰν προσέξωμεν τὸ δοθὲν σύστημα, θὰ ἴδωμεν, ὅτι κυρίως μία μόνον ἐξίσωσις ἐδόθη μεταξὺ τῶν δύο ἀγνώστων.

96. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἄλλα μὲν τῶν συστημάτων δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων ἐπιδέχονται ἕνα καὶ μόνον σύστημα λύσεων, ἄλλα εἶναι ἀδύνατα καὶ ἄλλα ἐπιδέχονται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

Αἱ διάφοροι αὗται περιπτώσεις ἐξετάζονται καλύτερον εἰς τὸ γενικὸν σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha\chi + \beta\psi &= \gamma \\ \alpha'\chi + \beta'\psi &= \gamma'. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἵνα ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων τὸν ἄγνωστον ψ, πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν πρώτην ἐπὶ β′, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ —β (τὰ ὁποῖα ὑποτίθενται διάφορα τοῦ 0) καὶ προσθέτομεν ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη, ὅτε εὑρίσκομεν

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\chi = \gamma\beta' - \gamma'\beta, \qquad (1')$$

ἐξ ἧς, ὑποθέτοντες τὴν παράστασιν $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ διάφορον τοῦ μηδενός, λαμβάνομεν τὴν ἑπομένην τιμὴν τοῦ $\boldsymbol{\chi} = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$

Ὁμοίως, ἀπαλείφοντες τὸν χ, εὑρίσκομεν $\boldsymbol{\psi} = \frac{\gamma'\alpha - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$

Ὥστε, ***ἂν ἡ παράστασις αβ′—α′β διαφέρῃ τοῦ 0, τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) ἐπιδέχεται μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνην.*** Ἤτοι ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ χ καὶ μία τοῦ ψ ἐπαληθεύουσαι τὸ σύστημα.

97. Μένει ἀκόμη πρὸς ἐξέτασιν ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$· ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις (1′) γίνεται $\gamma\beta' - \gamma'\beta = 0$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$$
$$\gamma\beta' - \gamma'\beta = 0$$

Ἐὰν ἤδη ἡ $\gamma\beta' - \gamma'\beta$ εἶναι διάφορος τοῦ 0, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ τελευταίου τούτου συστήματος εἶναι ἀδύνατος καὶ αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις εἶναι ***ἀσυμβίβαστοι*** καὶ οὐδεμία λύσις ὑπάρχει· ἐὰν δὲ $\gamma\beta' - \gamma'\beta$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ 0, τὸ δοθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ καὶ ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

241) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου:

1ον) $\chi + \psi = 7$, $\chi - \psi = 3$

2ον) $\chi + 2\psi = 11$, $\chi - 3\psi = 1$

3ον) $9\chi - 2\psi = 20$, $7\chi - 2\psi = 12$

4ον) $7\chi + 4\psi = 2$, $5\chi + 6\psi = -8$

5ον) $\varphi - 3\omega = 0$, $4\varphi - 5\omega = 14$

6ον) $3\chi + 4\psi = 253$, $\psi = 5\chi$

7ον) $5\psi - 4\varphi = 6$, $8\psi = 7\varphi$

8ον) $4\varphi = 3\omega$, $6\varphi - 5\omega = -4$

9ον) $\chi = 3\psi + 5$, $4\psi = \chi - 7$

10ον) $12\chi = 12\psi + 5$, $12\chi - 3 = 20\psi$

11ον) $10\psi = 7\psi - \chi = 20$

12ον) $5\chi - 4\psi = \chi - \psi$, $\chi - \psi = -2$

342) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα :

1ον) $2\chi = 9\psi + 17$, $8\psi = 5\chi + 1$

2ον) $5\chi + 3\psi + 2 = 0$, $3\chi + 2\psi + 1 = 0$

3ον) $20\chi + 8\psi = 0$, $9\chi + 8\psi - 1 = 0$

4ον) $(2\chi - \psi) + (\chi - 2\psi) = 18$, $(\chi - 3\psi) - (3\chi - \psi) = -2$

5ον) $5\chi = 3\psi + 8$, $15\chi = 9\psi + 12$

6ον) $\chi = 3\psi + 8$, $12\psi = 4\chi - 32$

7ον) $4\omega = -7\varphi - 7$, $27 - 2\varphi = -3\omega$

8ον) $4\chi = 3\psi + 1$, $6(\chi - \psi) = 9\psi - 4\chi$

9ον) $7\omega = 3\varphi - 5$, $6\omega + 5\varphi - 26 = 0$

10ον) $7\psi + 9\omega + 33 = 0$, $9\psi - 7\omega + 15 = 0$

11ον) $4\chi - 3\psi - 14 = 0$, $3\chi - 4\psi = 0$

12ον) $3(\psi - \chi) + 36 = 0$, $\chi - (\chi - \psi) + 60 = 0$

243) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα :

1ον) $23\chi+15\psi=4\frac{1}{4}$
$48\chi+45\psi=18$

2ον) $\frac{3}{4}\chi=2\psi+1$
$\frac{\chi}{3}-\psi=0$

3ον) $\frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{3}+1$
$\frac{\chi}{4}=\frac{4}{3}\psi-10$

4ον) $2\frac{1}{4}\chi=3\frac{1}{3}\psi+4$
$2\frac{1}{5}\psi=3\frac{1}{3}\chi-47$

5ον) $5\chi-4,9\psi=1$
$3\chi-2,9\psi=0,1$

6ον) $7\chi-10\psi=0,1$
$11\chi-16\psi=0,1$

7ον) $5\chi-4\psi=-1$
$1,7\chi-2,2\psi+7,9=0$

8ον) $27,4\chi-31,5\psi=11$
$21,4\chi-26,5\psi=1$

9ον) $3,5\chi+2\frac{1}{3}\psi=13+4\frac{1}{}\chi-3,5\psi$
$2\frac{1}{7}\chi+0,8\psi=22\frac{1}{2}+0,7\chi-3\frac{1}{3}\psi$

244) Ὁμοίως τὰ :

1ον) $\frac{5}{\chi+2\psi}=\frac{7}{2\chi+\psi}$
$\frac{7}{3\chi-2}=\frac{5}{6-\psi}$

2ον) $\frac{\chi+3\psi}{\chi-\psi}=8$
$\frac{7\chi-13}{3\psi-5}=4$

3ον) $\frac{\chi+1}{3}-\frac{\psi+2}{4}=\frac{2(\chi-\psi)}{4}$
$\frac{\chi-3}{4}-\frac{\psi-3}{3}=2\psi-\chi$

4ον) $5(\chi+2)-3(\psi+1)=23$
$3(\chi-2)+5(\psi-1)=19$

5ον) $\frac{3\chi}{4}-\frac{1}{2}(\psi+1)=1$
$\frac{1}{3}(\chi+1)+\frac{3}{4}(\psi-1)=9$

6ον) $\frac{\chi+1}{3}=\frac{\psi}{4}-1$
$\frac{\psi}{3}-\frac{3\chi+1}{4}=0$

245) Ὁμοίως τὰ :

1ον) $\frac{3\chi+2}{10}=\frac{\psi+2}{4}$
$4(\chi+1)=\frac{14}{3}\psi$

2ον) $\frac{4\chi-3\psi-7}{5}=\frac{3\chi}{10}-\frac{2\psi}{15}-\frac{5}{6}$

$$\frac{\psi-1}{3}+\frac{\chi}{2}-\frac{3\psi}{20}-1=\frac{\psi-\chi}{15}+\frac{\chi}{6}+\frac{1}{10}$$

3ον) $$\frac{\chi+3\psi}{6}-\frac{5\chi+3}{4}=2-\frac{3\chi+19}{4}$$

$$\frac{4\chi-5\psi}{16}+\frac{2\chi-\psi}{2}=\frac{9\chi+7}{8}-\frac{3\chi+9}{4}$$

4ον) $$\frac{\chi-\psi}{4}-\frac{5(\chi-1)}{9}+\frac{3(2-\psi)}{2}+\frac{1-\chi}{3}=0$$

$$\frac{7(\chi+\psi)}{6}=\frac{2(\chi-3)}{7}-\frac{3(\psi-\chi)}{2}$$

246) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$2.\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\psi}=1$$

$$7.\frac{1}{\chi}-2.\frac{1}{\psi}=20$$

Ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὡς ἄγνωστοι δέον νὰ θεωρηθῶσι τὰ $\frac{1}{\chi}$ καὶ $\frac{1}{\psi}$ καὶ πρὸς ταῦτα νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις.

247) Νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα:

1ον) $$\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\psi}=\frac{1}{6}$$

2ον) $$5.\frac{1}{\chi}+2.\frac{1}{\psi}=13$$

$$4.\frac{1}{\chi}+7.\frac{1}{\psi}=5$$

3ον) $$\frac{8}{\chi}-\frac{7}{\psi}=11$$

$$\frac{6}{\chi}-\frac{5}{\psi}=9$$

4ον) $$\frac{16}{\chi}-\frac{27}{\psi}=-1$$

$$\frac{8}{\chi}+\frac{36}{\psi}=5$$

5ον) $$\frac{27}{\chi}+\frac{5}{\psi}=-1$$

$$\frac{7}{2\chi}+\frac{7}{3\psi}=-\frac{77}{90}$$

6ον) $$17\chi-\frac{3}{\psi}=30$$

$$16\chi-\frac{0,4}{\psi}=1,7$$

7ον) $$\frac{\chi}{3}+\frac{5}{\psi}=4\frac{1}{3}$$

$$\frac{\chi}{6}+\frac{10}{\psi}=2\frac{2}{3}$$

8ον) $$\frac{\chi}{2}+\frac{5}{3\psi}=-1\frac{5}{9}$$

$$4\chi-\frac{1}{\psi}=7\frac{2}{3}$$

248) Νὰ λυθῶσι καὶ ἐπαληθευθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $$\chi+\psi=5\alpha$$

$$\chi-\psi=3\alpha$$

2) $$5\chi-\psi=6\alpha$$

$$4\chi-5\psi=9\alpha$$

3) $2\alpha\chi+\psi=7\beta$
$\alpha\chi-\psi=2\beta$

4) $\alpha\chi+2\psi=-1$
$2\chi+3\psi=\gamma$

5) $\chi-\beta\psi=2$
$2\beta\chi+\alpha\psi=-2$

6) $\alpha\chi+\beta\psi=\alpha^2+\beta^2$
$\beta\chi-\alpha\psi=0$

7) $\frac{2\chi}{\alpha}-\alpha\psi=\alpha$
$3\chi-2\alpha^2\psi=\alpha^2$

8) $(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi=4\alpha\beta$
$(\alpha+\beta)\chi+(\alpha-\beta)\psi=2(\alpha^2+\beta^2)$

Λύσις οἱουδήποτε συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἐχουσῶν ἴσους τὸ πλῆθος ἀγνώστους.

98. Ἔστω πρότερον τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned} 2\chi-5\psi+5\omega &= 40\\ 5\chi+2\psi-\omega &= 45\\ 7\chi-\psi+9\omega &= 98 \end{aligned}$$

Ἐὰν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἀπαλείψωμεν ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων, ἔστω τὸν ψ (διὰ μιᾶς τῶν προηγουμένων μεθόδων), εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν δύο μόνον ἀγνώστους περιέχουσαν καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν δευτέραν· ὁμοίως, ἂν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν τρίτην· οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{aligned} 2\chi-5\psi+5\omega &= 40\\ 29\chi+5\omega &= 305\\ 33\chi+40\omega &= 450 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις αὐτοῦ περιέχουσι δύο μόνον ἀγνώστους (ἤτοι ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν), δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὰς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους (διότι ἐμάθομεν τοῦτο), ἐὰν δέ, εὑρόντες τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων τούτων ($\chi=10$, $\omega=3$), ἀντικαταστήσωμεν αὐτὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον περιέχουσαν καὶ ἑπομένως προσδιορίζομεν καὶ τοῦτον ($\psi=-1$). Οὕτως ἀνάγεται ἡ λύσις τοῦ συστήματος τριῶν ἐξισώσεων τρεῖς ἀγνώστους ἐχουσῶν εἰς τὴν λύσιν συστήματος δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν.

Ἔστωσαν νῦν ν ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἰσαρίθμους ἀγνώστους περιέχουσαι. Ἐὰν ἄγνωστόν τινα τῆς πρώτης ἀπαλείψωμεν μεταξὺ αὐτῆς καὶ ἑκάστης τῶν λοιπῶν, εὑρίσκομεν ν—1 ἐξισώσεις (μίαν ἐξ ἑκάστης τῶν λοιπῶν), αἵτινες μετὰ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι (διότι ἑκάστη νέα ἐξίσωσις δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ ἐκείνην, ἥτις, συνδεθεῖσα μετὰ τῆς πρώτης, ἔδωκεν αὐτήν, καὶ τὸ σύστημα μένει ἰσοδύναμον). Αἱ νέαι αὗται ἐξισώσεις περιέχουσι μόνον τοὺς ν—1 ἀγνώστους καὶ ἑπομένως ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα ν—1 ἐξισώσεων μετὰ ν—1 ἀγνώστων· ἐὰν δὲ τοῦτο τὸ σύστημα λυθῇ καὶ ἀντικατασταθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν ν—1 ἀγνώστων εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ μείνῃ ἐν αὐτῇ εἷς μόνον ἄγνωστος καὶ ἑπομένως θὰ προσδιορισθῇ καὶ οὗτος· ὥστε κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ***ἀνάγεται ἡ λύσις παντὸς συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν ἄλλου συστήματος μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἕνα ἄγνωστον ἔχοντος ὀλιγώτερον.***

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου δυνάμεθα νὰ λύσωμεν οἱονδήποτε σύστημα, διότι δι᾽ αὐτοῦ ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν ν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν τῶν ν—1 καὶ τούτων πάλιν εἰς τὴν λύσιν τῶν ν—2 καὶ οὕτω καθεξῆς καὶ τέλος εἰς τὴν λύσιν δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν, τὴν ὁποίαν λύσιν ἐμάθομεν.

Παρατηρήσεις. Πολλάκις ἡ φύσις τῶν ἐξισώσεων παρέχει τρόπον λύσεως συντομώτερον τοῦ γενικοῦ. Οὕτω π.χ. δὲν εἶναι ἀδιάφορος πρὸς τὴν συντομίαν τῆς λύσεως ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου ἐν ἑκάστῃ μεταβάσει ἀπὸ συστήματος εἰς σύστημα, οὐδὲ ἡ ἐκλογὴ τῆς ἐξισώσεως, ἥτις μόνη αὐτὴ συνδυάζεται πρὸς πάσας τὰς ἄλλας· ἀλλ᾽ οὐδὲ εἶναι ἀνάγκη νὰ συνδυάζεται πάντοτε μία καὶ ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις πρὸς τὰς ἄλλας, ἀλλὰ ποικίλοι συνδυασμοὶ δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων (ἢ καὶ πασῶν) δύνανται νὰ γίνωσι, δι᾽ ὧν ταχύτερον νὰ εὑρίσκηται ἡ λύσις.

Καὶ ταῦτα μὲν γενικῶς, ἰδίᾳ δὲ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

1) Ἐὰν ἐξίσωσίς τις ἑνὸς συστήματος δὲν ἔχῃ τινα τῶν ἀγνώστων, ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ εἶναι ἐξίσωσις καὶ τοῦ ἑπομένου συστήματος (τοῦ μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἕνα ἄγνωστον ἔχοντος ὀλιγώτερον), ἐὰν ὡς ἀπαλειπτέος ἄγνωστος ληφθῇ ὁ ἐν τῇ ἐξισώσει μὴ ὑπάρχων.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} 3\chi-5\psi+4\varphi+\omega &= 0 \\ 2\chi+4\psi-\varphi-2\omega &= 1 \\ 5\chi-\psi &= 2 \\ 3\chi+8\psi+8\omega &= 10. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ ὁ φ δὲν ὑπάρχει εἰς τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις, λαμβάνοντες τοῦτον ὡς ἀπαλειπτέον ἄγνωστον, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} 11\chi+11\psi-7\omega &= 4 \\ 5\chi-\psi &= 2 \\ 3\chi+8\psi+8\omega &= 10, \end{aligned}$$

τοῦ ὁποίου ἡ πρώτη ἐξίσωσις προέκυψεν ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τοῦ δοθέντος συστήματος, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο εἶναι αὐταὶ αἱ δοθεῖσαι. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις δὲν ἔχει τὸν ἄγνωστον ω, λαμβάνοντες τοῦτον ὡς ἀπαλειπτέον, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} 109\chi+144\psi &= 102 \\ 5\chi-\psi &= 2 \end{aligned}$$

2) Εἰς τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\varphi &= 5 \\ \psi+\varphi+\omega &= 4 \\ \varphi+\omega+\chi &= 2 \\ \omega+\chi+\psi &= 13 \end{aligned}$$

ἐὰν προσθέσωμεν πάσας τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιρέσωμεν τὴν προκύπτουσαν διὰ 3, εὑρίσκομεν $\chi+\psi+\varphi+\omega=10$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ ταύτης ἀφαιρεθῇ ἑκάστη τῶν δοθεισῶν, προκύπτει $\omega=5$, $\chi=6$, $\psi=2$, $\varphi=-3$.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὑπάρχουσι πολλαπλασιασταί τινες, ἐφ᾽ οὓς πολλαπλασιαζόμεναι αἱ ἐξισώσεις τοῦ τυχόντος συστήματος καὶ προστιθέμεναι κατὰ μέλη, δίδουσιν ἐξίσωσιν ἕνα μόνον (ἢ οὐδένα) ἄγνωστον περιέχουσαν καί ἑπομένως προσδιορίζουσαν αὐτόν· ἀλλ᾽ ἡ εὕρεσις τῶν πολλαπλασιαστῶν τούτων ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τοῦ παρόντος ἔργου.

Σημ. Ἐὰν ἐκ τῆς προσθέσεως ἐξισώσεών τινων τοῦ συστήματος (πολλαπλασιαζομένων ἑκάστης ἐπὶ ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0) προκύπτει ἐξίσωσις μηδένα περιέχουσαν ἄγνωστον, τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

99. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν α') ὅτι, ὅταν εἰς ἕνα σύστημα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀρι-

θμοῦ τῶν ἐξισώσεων, ὑπάρχουσιν ἄπειρα τὸ πλῆθος συστήματα λύσεων· β΄) ὅταν εἰς ἕνα σύστημα οἱ ἄγνωστοι εἶναι ἰσάριθμοι πρὸς τὰς ἐξισώσεις, τότε ἐν γένει ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνον σύστημα λύσεων καὶ γ΄) ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων, τὸ σύστημα εἶναι συνήθως ἀδύνατον· διότι, ἐὰν π. χ. ἔχωμεν τέσσαρας ἐξισώσεις αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τρεῖς ἀγνώστους, δυνάμεθα ἐκ τριῶν ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν ἕνα σύστημα λύσεων, ἀλλὰ δὲν ἕπεται, ὅτι αἱ λύσεις αὗται ἐπαληθεύουσι καὶ τὴν τετάρτην ἐξίσωσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

249) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $2\chi-3\psi+\omega=1$, $3\chi+2\psi-\omega=3$, $4\chi+5\psi-\omega=7$

2) $4\chi-5\psi+3\omega=2$, $2\chi+3\psi-6\omega=-14$, $8\chi+2\psi+5\omega=2$

3) $10\chi+15\psi-24\omega=41$, $15\chi-12\psi+16\omega=10$, $18\chi-14\psi-7\omega=-13$

4) $3\chi-18\psi-2\omega=-20$, $\chi-6\psi+12\omega=6$, $2\chi+8\psi+3\omega=1$

5) $\chi+2\psi-\omega=2$, $3\chi-\psi+4\omega=27$, $4\chi+\psi-5\omega=11$

6) $12\chi-7\psi-25\omega=0$, $10\chi-42\psi+5\omega=0$, $\chi-7\psi+4\omega=3$

250) Ὁμοίως τὰ :

1) $\chi+\psi-\varphi=3$, $\chi-\psi+\varphi=5$, $-\chi+\psi+\varphi=9$

2) $\chi+\psi=27$, $\chi+\omega=25$, $\psi+\omega=22$

3) $\chi+2\psi=12$, $\psi+2\omega=21$, $\omega+2\chi=12$

4) $7\chi-6\psi=-1$, $5\psi-4\omega=2$, $3\omega-2\chi=11$

5) $2\chi-3\psi=13$, $3\psi+3\omega=-1$, $4\omega+\chi=13$

251) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $\frac{\chi}{2}+\frac{\psi}{6}+\frac{\omega}{4}=5$

$\psi+\frac{\omega}{2}=10$

$\omega+\frac{\chi}{4}=9$

2) $\frac{\chi}{5}-\frac{\psi}{2}=0$

$\frac{\chi}{3}-\frac{\omega}{2}=1$

$\frac{\omega}{2}-\frac{\psi}{3}=2$

3) $1\frac{1}{3}\chi+1\frac{1}{2}\psi=10$

$2\frac{2}{3}\chi+2\frac{2}{5}\omega=20$

$3\frac{1}{4}\psi+3\frac{2}{5}\omega=30$

4) $\chi+\psi+\omega=26$

$\chi:\omega=11:7$

$\psi:\omega=14:9$

5) $\chi+\psi+\omega=99$

$\chi:\psi:\omega=5:3:1$

6) $1{,}3\chi+1{,}9\psi=1$

$1{,}7\psi-1{,}1\omega=2$

$2{,}9\omega-2{,}1\chi=3$

7) $0{,}8\chi+0{,}04\psi=6$

$0{,}1\psi+0{,}5\omega=7$

$\omega+0{,}2\chi=10$

8) $\chi+2\psi-0{,}7\omega=21$

$3\chi+0{,}2\psi-\omega=24$

$0{,}9\chi+7\psi-2\omega=27$

252) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $\frac{1}{\chi+\psi}=1$

$\frac{2}{\chi+\omega}=1$

$\frac{3}{\psi+\omega}=1$

2) $\frac{3\psi-2\chi}{3\omega-7}=\frac{1}{2}$

$\frac{5\omega-\chi}{2\psi-3\omega}=1$

$\frac{\psi-2\omega}{3\psi-2\chi}=1$

3) $\frac{\chi+1}{\psi+1}=2$

$\frac{\psi+2}{\omega+1}=4$

$\frac{\psi+3}{\chi+1}=\frac{1}{2}$

4) $\frac{3\chi+\psi}{\omega+1}=2$

$\frac{3\psi+\omega}{\chi+1}=2$

$\frac{3\omega+\chi}{\psi+1}=2$

5) $\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}=1$

$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\chi}=2$

$\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=\frac{3}{2}$

6) $\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\psi}=\frac{3}{\omega}$

$\frac{3}{\omega}-\frac{2}{\psi}=2$

$\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\omega}=\frac{4}{3}$

253) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $\chi-8\psi+3\omega-\varphi=-1$

$\psi-2\omega-\varphi=0$

$5\omega+2\varphi=0$

$4\varphi=1$

2) $5\chi-7\psi+4\omega+\varphi=31$

$3\chi+\psi-\omega-2\varphi=10$

$2\omega-\varphi=0$

$7\omega+2\varphi=11$

3) $2\chi-\psi+5\omega-\varphi=11$

$2\chi+\psi-3\omega+4\varphi=11$

$\chi+5\psi-3\omega+\varphi=6$

$6\chi-\psi+4\omega+2\varphi=24$

4) $\chi+\psi+\varphi=18$

$\psi+\varphi+\omega=12$

$\varphi+\omega+\chi=15$

$\omega+\chi+\psi=9$

254) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $\chi+2\psi=5$
$\psi+2\varphi=8$
$\varphi+2\omega=11$
$\psi+2\chi=6$

2) $\frac{\chi}{2}+\frac{\psi}{4}-\frac{\varphi}{3}=1$

$\frac{\chi}{3}-\frac{\psi}{4}+\frac{\omega}{9}=1$

$\frac{3\psi}{4}-\frac{\varphi}{5}-\frac{\omega}{3}=0$

3) $\chi-\psi+4\varphi=18$
$\psi-\varphi+4\varphi=22$
$\varphi-\omega+4\chi=3$
$\omega-\chi+4\psi=17$

4) $\chi-2\psi=0$
$\psi-2\varphi=-2$
$\varphi-2\omega=2$
$\omega-2\upsilon=-5$
$\upsilon-2\chi=11$

255) Ὁμοίως τά :

1) $3\chi-4\psi+3\omega+3\upsilon-6\varphi=11$
$3\chi+5\psi+2\omega-4\varphi=11$
$10\psi-3\omega+3\varphi-2\upsilon=2$
$5\omega+4\varphi+2\upsilon-2\chi=3$
$6\varphi-3\upsilon+4\chi-2\psi=6$

2) $7\chi-2\omega+3\varphi=17$
$4\psi-2\omega+\upsilon=11$
$5\psi-3\chi-2\varphi=8$
$4\psi-3\varphi+2\upsilon=9$
$3\omega+8\varphi=33$

256) Ὁμοίως νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $\chi+\psi=\gamma$
$\psi+\omega=\alpha$
$\omega+\chi=\beta$

2) $\chi-\psi=\alpha$
$\psi-\omega=\beta$
$\omega-\chi=\gamma$

4) $\psi+\omega-\chi=\alpha$
$\omega+\chi-\psi=\beta$
$\chi+\psi-\omega=\gamma$

4) $\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\chi}=\frac{2}{\alpha}$

$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\psi}=\frac{2}{\beta}$

$\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\omega}=\frac{2}{\gamma}$

5) $\psi+\omega+\varphi=\alpha$
$\omega+\varphi+\chi=\beta$
$\varphi+\chi+\psi=\gamma$
$\chi+\psi+\omega=\delta$

6) $\chi\psi=\alpha(\chi+\psi)$
$\psi\omega=\beta(\psi+\omega)$
$\omega\chi=\gamma(\omega+\chi)$

257) Ἡ ἐξίσωσις $\chi+\psi=2$ προφανῶς ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις καὶ ὅμως διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν· διότι ἐξ αὐτῆς ἕπεται $(\chi+\psi)^2=4$, ἐκ τούτων δὲ συνάγεται $(\chi+\psi)^2-4=\chi+\psi-2$ καί, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ $\chi+\psi-2$. εὑρίσκομεν τὴν ἐξί-

σωσιν $\chi+\psi+2=1$ ἢ καὶ $\chi+\psi=-1$, αὕτη δέ, μετὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως συνδυαζομένη, δίδει $2=-1$, ὅπερ ἄτοπον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σφάλμα.

100. ***Προβλήματα.*** 1ον) ***Ἐργοστασιάρχης τις ἐπλήρωσε δι᾿ ἡμερομίσθια εἰς 3 ἐργάτας καὶ 2 ἐργάτιδας ἐν ὅλῳ 349 δραχμάς, ἐνῷ εἰς 2 ἐργάτας καὶ 3 ἐργάτιδας ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 336 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑνὸς ἐργάτου καὶ μιᾶς ἐργάτιδος.***

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἑνὸς ἐργάτου καὶ διὰ ψ τὸ τῆς ἐργάτιδος θὰ ἔχωμεν :

$$3\chi+2\psi = 349$$
$$2\chi+3\psi = 336\cdot$$

πρέπει δὲ οἱ χ καὶ ψ νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί. Λύοντες τό σύστημα, εὑρίσκομεν $\chi=75$, $\psi=62$.

2ον) ***Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, οὗ τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα 15 καὶ ὅστις, ἀντιστρεφόμενος, ἐλαττοῦται κατὰ 9.***

Ἔστωσαν χ αἱ δεκάδες καὶ ψ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐν πρώτοις εἶναι $\chi+\psi=15$. Ὁ ἀριθμὸς ἔχει τὸ ὅλον $10\chi+\psi$ μονάδας, ἀντιστρεφόμενος δὲ θὰ ἔχῃ $\chi+10\psi$, αὗται δὲ θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν πρώτων κατὰ 9· ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $10\chi+\psi=\chi+10\psi+9$ ἢ $9\chi=9\psi+9$, ἤτοι $\chi=\psi+1$· ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα :

$$\chi+\psi=15$$
$$\chi=\psi+1\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10. Λύοντες τὸ σύστημα, εὑρίσκομεν $\chi=8$, $\psi=7$· ὅθεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 87.

3ον) ***Εὑρεῖν κλάσμα, τὸ ὁποῖον, ἂν μὲν αὐξηθῶσι κατὰ μονάδα οἱ ὅροι αὐτοῦ, γίνεται ἴσον τῷ*** $\frac{4}{5}$, ***ἂν δὲ ἐλαττωθῶσι κατὰ μονάδα, γίνεται ἴσον τῷ*** $\frac{3}{4}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ζητουμένου κλάσματος θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\chi+1}{\psi+1}=\frac{4}{5} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\chi-1}{\psi-1}=\frac{3}{4}$$

ἤτοι $$5\chi-4\psi=-1$$
$$4\chi-3\psi=1$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Λύοντες τὸ σύστημα, εὑρίσκομεν $\chi=7, \psi=9$· ἑπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{7}{9}$.

4ον) ***Ἐρωτηθείς τις περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του, ἀπεκρίθη: πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία μου ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ μου, μετὰ 8 δὲ ἔτη θὰ εἶναι διπλασία. Ζητοῦνται αἱ ἡλικίαι αὐτῶν.***

Ἐὰν παρασταθῇ τοῦ πατρὸς ἡ ἡλικία διὰ τοῦ χ, τοῦ δὲ υἱοῦ διὰ τοῦ ψ, αἱ ἡλικίαι αὗται πρὸ 8 ἐτῶν ἦσαν $\chi-8$ καὶ $\psi-8$, μετὰ 8 δὲ ἔτη αἱ ἡλικίαι θὰ εἶναι $\chi+8$ καὶ $\psi+8$.

Ἑπομένως, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}\chi-8&=3(\psi-8)\\ \chi+8&=2(\psi+8)\end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \begin{aligned}\chi-3\psi&=-16\\ \chi-2\psi&=8\cdot\end{aligned}$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ θετικοὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνωσι τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου.

Λύοντες τὰς δύο ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν $\chi=56$, $\psi=24$.

5ον) ***Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, διαιρούμενος διὰ 7, νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 1, διὰ 11, ὑπόλοιπον 10 καὶ διὰ 13, ὑπόλοιπον 3· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν πηλίκων νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τρία δέκατα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.***

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν καὶ διὰ ω, φ, ψ τὰ τρία πηλίκα, θὰ ἔχωμεν:

$$\chi=7\omega+1$$
$$\chi=11\varphi+10$$
$$\chi=13\psi+3$$
$$\omega+\varphi+\psi=\frac{3}{10}\chi.$$

Πρέπει δὲ πάντες οἱ ἄγνωστοι νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν ω, φ, ψ, ληφθεῖσαι ἐκ τῶν τριῶν πρώτων ἐξισώσεων, ἀντικατασταθῶσιν εἰς τὴν τετάρτην, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{\chi-1}{7}+\frac{\chi-10}{11}+\frac{\chi-3}{13}=\frac{3}{10}\chi,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=120$· ὅθεν $\varphi=10$, $\omega=17$, $\psi=9$.

6ον) ***Δύο βυτία ἐντελῶς ἴσα καὶ ὅμοια τὴν κατασκευὴν εἶναι πλήρη, τὸ μὲν ἓν ἐλαίου, τὸ δὲ ἄλλο ὕδατος· καὶ τὸ μὲν πρῶτον ζυγίζει α ὀκάδας, τὸ δὲ δεύτερον β. Πόσον εἶναι τὸ ἔλαιον καὶ πόσον τὸ ὕδωρ; καὶ πόσον ζυγίζει τὸ καθὲν βυτίον κενόν;***

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὸ βάρος τοῦ ἑτέρου ἐκ τῶν δύο βυτίων κενοῦ καὶ διὰ ψ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος καὶ διὰ ω τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, θὰ εἶναι, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος,

$$\chi+\psi=\beta$$
$$\chi+\omega=\alpha.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἔλαιον καὶ τὸ ὕδωρ τῶν βυτίων ἔχουσιν ἴσους ὄγκους, τὸ βάρος ω τοῦ ἐλαίου θὰ εἶναι τὰ 0,912 τοῦ βάρους ψ τοῦ ὕδατος, ἤτοι $\omega=0{,}912\psi$. Ἀπαλείφοντες νῦν τὸ ω, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα:

$$\chi+\psi=\beta$$
$$1000\chi+912\psi=1000\alpha,$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν, λύοντες,

$$\chi=\frac{1000\alpha-912\beta}{88},\quad \psi=\frac{1000(\beta-\alpha)}{88}\quad \text{καὶ}\quad \omega=\frac{912(\beta-\alpha)}{88}$$

Ὅτι β εἶναι μεγαλύτερον τοῦ α εἶναι προφανές, ἀλλὰ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ χ πρέπει νὰ εἶναι θετική. Ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$0{,}912\beta<\alpha<\beta$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

258) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 4 καὶ διαφορὰν 34.

259) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 3, τὸ δὲ τριπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί.

260) Ἡ ἀξία τριῶν ὀκάδων ζακχάρεως εἶναι κατὰ 29 δραχμὰς μικροτέρα τῆς ἀξίας 1 ὀκᾶς καφέ, ἐνῷ ἡ ἀξία 5 ὀκάδων ζακχάρεως εἶναι μεγαλυτέρα ταύτης κατὰ 15 δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῆς μιᾶς ὀκᾶς ζακχάρεως καὶ μιᾶς ὀκᾶς καφέ.

261) Πέντε ὀκάδες τυροῦ ἀξίζουν, ὅσον ἀξίζουν 3 ὀκάδες βουτύρου· ἀλλ' ἡ ἀξία 5 ὀκάδων βουτύρου εἶναι κατὰ 288 δρ. μεγαλυτέρα τῆς ἀξίας 3 ὀκάδων τυροῦ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ ἑκάστου εἴδους ;

262) Ἐργοστασιάρχης τις ἐπλήρωσε δι' ἡμερομίσθια 8 ἐργατῶν καὶ 3 ἐργατίδων ἐν ὅλῳ δρ. 715, δι' ἡμερομίσθια δὲ 13 ἐργατῶν καὶ 5 ἐργατίδων δρ. 1102,50. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἑνὸς ἐργάτου καὶ τῆς μιᾶς ἐργάτιδος.

263) 7 πήχεις μαλλίνου ὑφάσματος καὶ 5 πήχεις βαμβακεροῦ στοιχίζουν 1315 δρ., ἐνῷ 3 πήχεις τοῦ αὐτοῦ μαλλίνου ὑφάσματος καὶ 9 πήχεις τοῦ αὐτοῦ βαμβακεροῦ στοιχίζουν 855 δρ. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ἑκάστου ὑφάσματος;

264) Εἷς γεωργὸς ἠγόρασε μίαν ἀγελάδα καὶ ἕνα ἵππον ἀντὶ 5200 δρ. ἐν ὅλῳ· ἀλλ' ἡ ἀξία τοῦ ἵππου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς ἀξίας τῆς ἀγελάδος κατὰ 460 δρ. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἠγόρασεν ἕκαστον;

265) 4 πρόβατα καὶ 5 αἶγες στοιχίζουν 990 δρ. Ἐπίσης 9 πρόβατα καὶ 7 αἶγες στοιχίζουν 1811 δρ. Πόσον στοιχίζουν 14 πρόβατα καὶ 11 αἶγες ;

266) Ἐκ δύο κεφαλαίων, τὰ ὁποῖα ἐτόκιζέ τις πρὸς 5 °/₀ καὶ 7 °/₀, ἐλάμβανεν ἐτήσιον τόκον 2580 δρ. Ἐὰν ἐνήλλασσε τὰ ἐπιτόκια, ὁ τόκος οὗτος θὰ ηὐξάνετο κατὰ 120 δρ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κεφάλαια.

267) Εἶχέ τις δύο κεφάλαια καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἐτόκιζε πρὸς 9 °/₀, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς 12 °/₀ καὶ ἐλάμβανεν ἐτήσιον τόκον 16500 δρ. Ἐὰν ὅμως ἐτόκιζε τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου κεφαλαίου πρὸς 11 °/₀ καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ αὐτοῦ μετὰ τοῦ δευτέρου ἐτόκιζε πρὸς 10 °/₀, θὰ ἐλάμβανε τόκον ἐτήσιον ἐν ὅλῳ 16450 δρ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κεφάλαια.

268) Εἷς ἐργάτης κατὰ τὸν πρῶτον μῆνα (ἐκ 30 ἡμερῶν) εἰργάσθη ἐπὶ 25 ἡμέρας, ἐκ τῶν χρημάτων δὲ τῆς ἐργασίας του τοῦ ἐπερίσσευσαν εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς 375 δρ., ἀλλὰ κατὰ τὸν ἑπόμενον μῆνα (ἐκ 31 ἡμερῶν) εἰργάσθη 23 ἡμέρας, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ μηνὸς αὐτοῦ τοῦ ἐπερίσσευσαν 275 δρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον αὐτοῦ καὶ ἡ ἡμερησία δαπάνη.

269) Παρήγγειλέ τις εἰς παντοπώλην 5 ὀκ. ζάχαρην καὶ 2 ὀκ. καφέ, διὰ τὰ ὁποῖα ὑπελόγισεν, ὅτι ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ 260 δρ.

Ἀλλ᾽ ὁ παντοπώλης τὸν ἐχρέωσε μὲ 360 δρ. Καὶ τοῦτο, διότι τοῦ ἀπέστειλεν ἐκ λάθους 6 ὀκ. ζακχάρεως καὶ 3 ὀκ. καφέ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους.

270) Πρὸ 4 ἐτῶν ἡ ἡλικία ἑνὸς ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ ἀδελφοῦ του καὶ μετὰ 8 ἔτη θὰ εἶναι διπλασία. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παροῦσα ἡλικία ἑκάστου.

271) Ὁ Α μοὶ ὀφείλει διπλάσια ἢ ὁ Β, ἀλλὰ μὲ ἐπιτόκιον κατὰ τρεῖς μονάδας μικρότερον· λαμβάνω δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ ποσὸν ὡς τόκον· νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐπιτόκια.

272) Δύο ταχυδρόμοι ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ δύο τόπων Α καὶ Β, διευθυνόμενοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ συναντῶνται μετὰ 5 ὥρας. Ἂν ἑκάτερος διέτρεχε καθ᾽ ὥραν 100 μέτρα περισσότερον, θὰ συνηντῶντο μετὰ 4 1/5 ὥρας μόνον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ αὐτῶν ἀπόστασις.

273) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{5}$, ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν ὅρων του ὁ 5, καὶ ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$, ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν ὅρων του ὁ 3.

274) Δύο ἀριθμοὶ εἶναι ὡς 2 : 3· ἐὰν δὲ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν αὐξηθῇ κατὰ 4, προκύπτουσιν ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι ὡς 4 : 5 Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

275) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, οἵτινες εἶναι ὡς 3 : 4 καὶ ὧν τὸ γινόμενον εἶναι τὸ 12πλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των.

276) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορά, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5.

277) Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν, προστιθέμενον εἰς τὸν 13, δίδει ἄθροισμα 17· τὸ ἥμισυ δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν μεῖον 1 δίδει ἐξαγόμενον 2. Ποῖοι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

278) Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος προσθέσωμεν 1, ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ 1, λαμβάνομεν ὅρους ἴσους. Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τὴν 1, προσθέσωμεν δὲ αὐτὴν εἰς τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα.

279) Ἀνέμειξέ τις 7 χιλιόγραμμα οἰνοπνεύματος μετὰ 6 χιλιογράμμων οἰνοπνεύματος διαφόρου βαθμοῦ καὶ ἔλαβε μεῖγμα 18°· ἐὰν ὅμως ἀνεμίγνυε 9 χιλιόγραμμα τοῦ πρώτου οἰνοπνεύ-

ματος μετὰ 4 χιλιογράμμων τοῦ δευτέρου, θὰ ἐλάμβανε μεῖγμα 16°. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου καὶ ποῖος ὁ τοῦ δευτέρου οἰνοπνεύματος;

280) Ἀνέμειξέ τις 16 γραμμάρια χρυσοῦ μετ' ἄλλων 7 γραμμαρίων χρυσοῦ διαφόρου β. κ. καὶ ἔλαβε κρᾶμα β. κ. 0,84· ἐὰν ἀνεμίγνυε 5 γραμμ. ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 18 γραμμ. ἐκ τοῦ δευτέρου, ὁ β. κ. τοῦ νέου κράματος θὰ ἦτο 0,86. Ποῖος εἶναι ὁ β. κ. ἑκάστου τῶν ἀρχικῶν κραμάτων.

281) Ἐκ δύο ποιοτήτων οἴνου ἀνέμειξέ τις ποσότητας κατὰ λόγον 3 πρὸς 5 καὶ ἔλαβε μεῖγμα ἀξίας κατ' ὀκᾶν 10,50 δρ. Ἐὰν ὅμως τὰς ἀναμείξῃ κατὰ λόγον 9 : 7, ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος θὰ τιμᾶται 11,10 δρ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ ἑκάστης ποιότητος;

282) Λέβης, συγκείμενος ἐκ χαλκοῦ καὶ σιδήρου, ἔχει βάρος 108 χιλιογράμμων, χάνει δὲ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ζυγιζόμενος 13 χιλιόγραμμα, γνωστὸν δὲ εἶναι, ὅτι ὁ χαλκὸς χάνει ἐν τῷ ὕδατι ζυγιζόμενος τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ βάρους του, ὁ δὲ σίδηρος τὸ $\frac{1}{8}$. Ζητεῖται, ἐκ πόσου χαλκοῦ καὶ ἐκ πόσου σιδήρου σύγκειται ὁ λέβης οὗτος;

283) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετραπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων νὰ ὑπερβαίνῃ κατὰ μονάδα τὸ τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, ἂν δὲ γραφῶσι τὰ ψηφία κατ' ἀντίστροφον τάξιν νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 9.

284) Εὑρεῖν ἀριθμὸν διψήφιον ἔχοντα τὰς ἑξῆς ἰδιότητας· τὸ τετραπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων νὰ ὑπερβαίνῃ κατὰ μονάδα τὸ τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων· ἐὰν δὲ γραφῶσι τὰ ψηφία κατ' ἀντίστροφον τάξιν, νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 36.

285) Δύο διάφοροι διψήφιοι ἀριθμοί, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ ψηφία εἶναι τὰ αὐτά, ἔχουσιν ἄθροισμα 66 καὶ λόγον 5. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

286) Εὑρεῖν τριψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 11, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ τῶν ἑκατοντάδων, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία γραφῶσι κατὰ τάξιν ἀντίστροφον, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 99.

287) Εὑρεῖν τετραψήφιον ἀριθμὸν ἔχοντα τὰς ἑξῆς ἰδιότητας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι 14· ἐὰν γραφῶσι τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς κατὰ

369· τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν μέσων· ἐὰν δὲ τὰ μεσαῖα ψηφία ἀντιμετατεθῶσιν, ἐλαττοῦται ὁ ἀριθμὸς κατὰ 630.

288) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε, ἂν προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, νὰ λάβωμεν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 29, 27, 24.

289) Πατήρ τις ἀφῆκεν εἰς τὸν υἱόν του καὶ τὴν θυγατέρα του μίαν οἰκίαν καὶ ἕνα ἀγροτικὸν κτῆμα· κατὰ τὴν ἐκτίμησιν, ἡ ὁποία ἔγινεν ὡς πρὸς τὴν ἀγοραίαν ἀξίαν ἑκάστου τῶν κτημάτων αὐτῶν, διὰ νὰ μοιρασθῶσιν αἱ ἀδελφοὶ ἐξ ἴσου τὴν περιουσίαν, ἔπρεπε ὁ κρατῶν τὸ κτῆμα νὰ δώσῃ εἰς τὸν ἄλλον 15000 δρ. Ἀλλ' ὁ ἀδελφός, κρατήσας τὴν οἰκίαν, ἔδωκεν εἰς τὴν ἀδελφήν του τὸ κτῆμα καὶ 35000 δρ. ἀκόμη· οὕτω δὲ τὸ μερίδιον τῆς ἀδελφῆς κατέστη τριπλάσιον τοῦ τοῦ ἀδελφοῦ. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐξετιμήθη ἕκαστον τῶν κτημάτων;

290) Διένειμέ τις τὴν περιουσίαν του ἐξ 118000 δραχμῶν εἰς τὰ τρία τέκνα του ἡλικίας 5, 9, καὶ 11 ἐτῶν εἰς τρόπον, ὥστε ὁ τόκος πρὸς $5^{0}/_{0}$ ἑκάστου μεριδίου μέχρι τῆς ἐνηλικιώσεως τῶν τέκνων του (21 ἔτους) νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλα τὰ μερίδια. Νὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

291) Δεξαμενὴ γεμίζει διὰ τριῶν κρουνῶν. Οἱ δύο πρῶτοι τὴν γεμίζουν ὁμοῦ εἰς 4 ὥρας, οἱ δύο τελευταῖοι εἰς 5 ὥρας, ὁ δὲ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θά γεμίσῃ ἕκαστος κρουνὸς τὴν δεξαμενήν;

292 Ὁ δρόμος, ὅστις ὁδηγεῖ ἀπὸ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν Β, εἶναι ἐπὶ 6 χιλμ. ἀνηφορικός, κατηφορικὸς δὲ εἰς τὰ ὑπόλοιπα 3,5 χιλμ. Ποδηλάτης δέ, ὅστις ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς Α, ἔφθασεν εἰς τὴν Β μετὰ 3/4 τῆς ὥρας, ἐχρειάσθη δὲ 10′ ὀλιγώτερον διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν Α διὰ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ. Δεδομένου ὅτι ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν ἀνέπτυσσε κατὰ τὸν ἀνήφορον, ἦτο ἡ αὐτή, μὲ τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν εἶχε κατὰ τὸν κατήφορον, ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες αὗται.

293) Ἱέρων, ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν, ἔδωκεν εἰς χρυσοχόον 10 λίτρας χρυσοῦ, ἵνα κατασκευάσῃ ἐξ αὐτοῦ στέφανον τοῦ Διός. Ὑποπτεύσας δὲ μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ στεφάνου, ὅτι ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε δι' ἀργύρου μέρος τοῦ χρυσοῦ, ἠρώτησε τὸν Ἀρχιμήδην, ἂν εἶναι δυνατὸν ν' ἀνακαλυφθῇ τοῦτο. Ὁ

Ἀρχιμήδης, γνωρίζων, ὅτι ὁ χρυσὸς ἀποβάλλει ἐν τῷ ὕδατι τὰ 52 χιλιοστὰ τοῦ βάρους του, ὁ δὲ ἄργυρος τὰ 99, ἐζύγισε τὸν στέφανον ἐν τῷ ὕδατι καὶ εὗρεν αὐτὸν 9 λιτρῶν καὶ 6 οὐγγιῶν, οὕτω δὲ ἀνεκάλυψε τὸν δόλον. Ζητεῖται, πόσος χρυσὸς ὑπῆρχεν ἐν τῷ στεφάνῳ;

294) Ἔχων τις τρία καλάθια μὲ μῆλα, ἔλαβεν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἔθεσεν εἰς τὰ ἄλλα εἰς ἕκαστον τόσα, ὅσα αὐτὸ εἶχεν· ἔπειτα ἔλαβεν ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἔθεσεν εἰς τὰ δύο ἄλλα εἰς ἕκαστον τόσα, ὅσα τότε εἶχεν· ἔπειτα καὶ ἐκ τοῦ τρίτου ὁμοίως· τότε δὲ καὶ τὰ τρία καλάθια εἶχον ἴσον ἀριθμὸν μήλων, ἤτοι 80. Ζητεῖται, πόσα μῆλα εἶχεν ἕκαστον ἐν ἀρχῇ;

295) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, εἴτε διὰ τοῦ 4, εἴτε δι' 8 διαιρεθῇ νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 1, τὸ δὲ ἓν πηλίκον νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

296) Ἡ ἀπόστασις δύο κινητῶν ὁμαλῶς κινουμένων ἦτο τὴν 8ην π. μ. 3000 μέτρα, τὴν δὲ 10ην ἠλαττώθη εἰς 2400. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις κατὰ τὴν μεσημβρίαν; Καὶ πότε θὰ γίνῃ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν 500 μέτρα;

297) Ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ 2 μέτρα ἡ βάσις ὀρθογωνίου, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ἐλαττωθῇ κατὰ 3 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐλαττοῦται κατὰ 41 τετραγ. μέτρα, ἐὰν δὲ αὐξηθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ κατὰ 3 μέτρα καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος κατὰ 2, ἡ ἐπιφάνεια αὐξάνει κατὰ 24 τετραγ. μέτρα. Ζητοῦνται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου. (ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει τόσα τετραγ. μέτρα, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι πόσα μέτρα ἔχει ἡ βάσις καὶ πόσα τὸ ὕψος).

298) Ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κατὰ 8 μέτρα μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ καὶ κατὰ 1 μέτρον μικροτέρα τῆς μιᾶς τούτων. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

299) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ βάσις ὀρθογωνίου τινός, ἐλαττωθῇ δὲ τὸ ὕψος κατὰ δύο μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ δὲν βλάπτεται. Εὑρεῖν τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

300) Δύο ἀγγεῖα περιέχουσιν α ὀκάδας ὕδατος. Λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον· ἔπειτα τὸ τρίτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον· ἔπειτα τὸ τέταρτον τοῦ

περιεχομένου τότε εἰς τὸ πρῶτον καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον· τέλος λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον. Τότε δὲ τὸ πρῶτον ἀγγεῖον εὑρίσκεται περιέχον β ὀκάδας περισσότερον τοῦ δευτέρου. Πόσας ὀκάδας περιεῖχεν ἕκαστον τῶν ἀγγείων κατ᾽ ἀρχάς ;

301) Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα τ· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀναχωρεῖ μετά τινα χρόνον ἄλλη ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα τ΄· ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων χρόνος, ὥστε νὰ φθάσωσιν ἀμφότεραι συγχρόνως εἴς τινα τόπον. Ἀλλ᾽ ἡ πρώτη ἀτμάμαξα, ἀφοῦ διέτρεξε τὰ δύο τρίτα τῆς ὁδοῦ, ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητα αὐτῆς εἰς τὸ ἥμισυ τῆς προτέρας καὶ οὕτω συμβαίνει συνάντησις τῶν ἀτμαμαξῶν α χιλιόμετρα πρὸ τοῦ τόπου, εἰς ὃν ἔπρεπε νὰ συναντηθῶσιν. Ζητεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἀναχωρήσεως ἀπόστασις τοῦ τόπου.

Ἀπ. Ἂν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων μεσολαβήσαντα χρόνον, εὑρίσκομεν $\chi = 3\left(2 - \frac{\tau}{\tau'}\right).\alpha \quad \psi = 3\frac{\tau'-\tau}{\tau\tau'}\left(2 - \frac{\tau}{\tau'}\right).\alpha$

302) Ἵνα ἐκτελέσωσιν ἔργον τι, χρειάζονται, οἱ μὲν Α καὶ Β ὁμοῦ γ ὥρας, οἱ δὲ Β καὶ Γ ὁμοῦ α ὥρας· πόσας ὥρας χρειάζεται ἕκαστος τούτων διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ πόσας ὅλοι ὁμοῦ ;

Ἀπ. Παριστῶντες διὰ τοῦ χ τὰς ὥρας τοῦ πρώτου, διὰ τοῦ ψ τοῦ δευτέρου καὶ διὰ τοῦ ω τοῦ τρίτου, διὰ δὲ τοῦ φ τὰς ὥρας, καθ᾽ ἃς ὅλοι ὁμοῦ θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον, εὑρίσκομεν :

$$\frac{1}{\chi} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \quad \frac{1}{\psi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$$

303) Γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος α καὶ τοῦ πηλίκου π δύο ἀριθμῶν, εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

304) Τρία βυτία ἴσα καὶ τὴν κατασκευὴν ἐντελῶς ὅμοια, εἶναι πλήρη τὸ μὲν ἓν ὕδατος, τὸ δὲ ἄλλο ἐλαίου καὶ ὕδατος ὁμοῦ· τὸ βάρος τοῦ πρώτου εἶναι α ὀκάδες, τοῦ δευτέρου β καὶ τοῦ τρίτου γ. Νὰ εὑρεθῇ 1) τὸ βάρος ἑκάστου βυτίου κενοῦ, 2) πόσον ὕδωρ καὶ πόσον ἔλαιον περιέχει τὸ τρίτον ;

Ἀπ. Ἐὰν χ παριστᾷ τὸ βάρος ἑκάστου βυτίου κενοῦ, φ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος καὶ ω τὸ τοῦ ἐλαίου καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου, θὰ εἶναι $\chi=\frac{\beta-\alpha\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $\varphi=\frac{\gamma-\beta}{1-\varepsilon}$, $\omega=\frac{(\alpha-\gamma)\varepsilon}{1-\varepsilon}$

Λύσις ἀνισοτήτων.

101. Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες (61) καὶ (63) τῶν ἐξισώσεων ἀληθεύουσι καὶ εἰς τὰς ἀνισότητας, ὧν τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα ἄγνωστα, καὶ ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\frac{\chi}{3}+\frac{2\chi}{5}+\frac{\chi-1}{2}>\chi+\frac{2}{3}$.

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 2. 3. 5, λαμβάνομεν $10\chi+12\chi+15\chi-15>30\chi+20$ καὶ χωρίζοντες τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἀγνώστων $10\chi+12\chi+15\chi-30\chi>20+15$ ἢ $7\chi>35$ καί, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ 7 (ἢ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{1}{7}$), εὑρίσκομεν $\chi>5$, ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει μόνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς χ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5.

Ὅταν ἀνισότης ἀχθῇ εἰς τοιαύτην μορφήν, ὥστε τὸ ἓν μέλος αὐτῆς νὰ ἀποτελῆται ὑπὸ μόνου τοῦ ἀγνώστου γράμματος, τὸ δὲ ἄλλο ὑπὸ τῶν γνωστῶν, τότε λέγομεν ὅτι ***ἐλύθη*** ἡ ἀνισότης.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ***ἡ λύσις τῶν ἀνισοτήτων γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ᾽ ὃν γίνεται καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ καὶ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

305) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες:

$\frac{3}{4}\chi<5\chi-\frac{5}{7}$, $\frac{1}{6}(\chi+2)-\frac{1}{4}(\chi-7)>\frac{1}{8}(\chi+25)$,

$\frac{2\chi}{5}-3>\frac{\chi-4}{15}-\frac{5}{6}$,

$(\chi+1)^2.(\chi-3)>\chi^2\left(\chi-\frac{1}{2}\right)-\frac{\chi^2}{2}+5$

306) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἵτινες ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας:

$$8\chi-7\frac{1}{2} > \frac{4\chi+65}{6}, \qquad 2\chi-7 < \chi+2\frac{1}{2}.$$

307) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἵτινες ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας :

$$7\chi-15 > 27-7\chi, \qquad \frac{4\chi-11}{5} < \frac{\chi+6}{3}.$$

308) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας :

$$\frac{13\chi-1}{9} < \frac{2+\chi}{11}-3, \qquad \frac{5\chi+1}{9} > \frac{4-3\chi}{5}-3.$$

309) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας :

$$-3\chi+2 > 7\chi+7, \qquad 4\chi-12 > \frac{2}{3}(\chi+7).$$

310) Ἐρωτηθείς τις πόσων ἐτῶν εἶναι, ἀπεκρίθη ὡς ἑξῆς : Ἐὰν ἀπὸ τὰ 2/5 αὐτῶν ἀφαιρέσῃς τὸν 7, εὑρίσκεις ὑπόλοιπον μεγαλύτερον τοῦ 4· ἐὰν δὲ εἰς τὸ 1/3 αὐτῶν προσθέσῃς τὸν 1, εὑρίσκεις ἄθροισμα μεγαλύτερον τῆς διαφορᾶς τοῦ 4 ἀπὸ τὰ ἡμίση αὐτῶν. Μεταξὺ πόσων ἐτῶν κυμαίνεται ἡ ἡλικία του ;

311) Δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦσι συγχρόνως, ὁ μὲν ἐκ τῆς πόλεως Α πρὸς τὴν πόλιν Β, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου ποικίλλει μεταξὺ 5 καὶ 8 σταδίων καθ' ὥραν, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου μεταξὺ 6 καὶ 7· ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶναι 44 στάδια. Μεταξὺ ποίων ὡρῶν θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις αὐτῶν καὶ εἰς ποῖον μέρος τῆς ὁδοῦ ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

Γραφικαὶ παραστάσεις τῶν συναρτήσεων.

102. Γνωρίζομεν, ὅτι, ὅταν ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς ψ συνδέεται πρὸς ἄλλον τοιοῦτον χ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε πρὸς ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ ν' ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ (ἢ ὡρισμέναι τιμαὶ) τοῦ ψ, ὁ μεταβλητὸς ψ εἶναι συνάρτησις τοῦ χ· τότε δὲ ὁ χ λέγεται ***ἀνεξάρτητος*** μεταβλητή.

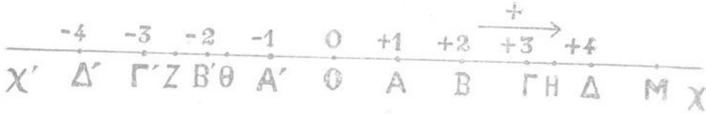
Ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς δυνατὰς τιμάς· ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νὰ ἐξετασθῇ πῶς μεταβάλλεται ἡ συνάρτησις. Καὶ πρὸς τοῦτο καταρτίζομεν πίνακα τιμῶν, ὅστις περιέχει τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως. Οὕτω λαμβάνομεν τὸν κάτωθι πίνακα διὰ τὴν συνάρτησιν π.χ. $\psi=2\chi-3$

διὰ	$\chi = 0$	εἶναι	$\psi = -3$
»	$\chi = 1$	»	$\psi = -1$
»	$\chi = 2$	»	$\psi = 1$
»	$\chi = 3$	»	$\psi = 3$ κ. ο. κ.

Ἀλλ' ἕνας τοιοῦτος πίναξ, οὔτε πλήρης δύναται νὰ εἶναι, οὔτε μᾶς διευκολύνει εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως. Διὰ τοῦτο εὑρέθη ἄλλος τρόπος παραστατικώτερος τῶν ἐν λόγῳ μεταβολῶν καὶ ὅστις ἐκτίθεται κατωτέρω.

103. ***Παράστασις τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν διὰ σημείων μιᾶς εὐθείας.***

Λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας χ΄χ, ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένης, ἓν σημεῖον Ο ὡς ἀρχὴν καὶ κατόπιν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ λαμβάνομεν διαδοχικὰ τμήματα ΟΑ, ΑΒ, ΒΓ,... ΟΑ΄, Α΄Β΄, Β΄Γ΄... ἴσα ἕκαστον πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους· τὰ σημεῖα Α,Β,Γ... τὰ



ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Ο, ἀριθμοῦμεν διὰ τῶν ἀριθμῶν +1, +2, +3, +4..., τὰ δὲ Α΄, Β΄, Γ΄..., τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ο, διὰ τῶν ἀριθμῶν —1, —2, —3... Λέγομεν δὲ τότε, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3,...—1, —2, —3 κλπ. παριστῶσιν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α, Β, Γ,... Α΄, Β΄, Γ΄...

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς $-2\frac{1}{2}$ παριστᾷ τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἀριστερὰ τοῦ Ο καὶ εἰς ἀπόστασιν $2\frac{1}{2}$ μονάδων μήκους.

Ὥστε εἰς δοθέντα ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον εὐθείας, ἀπέχον ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸν ἀριθμὸν (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ σημεῖον). Ὁ ἀριθμὸς 0 παριστᾷ τὴν ἀρχήν.

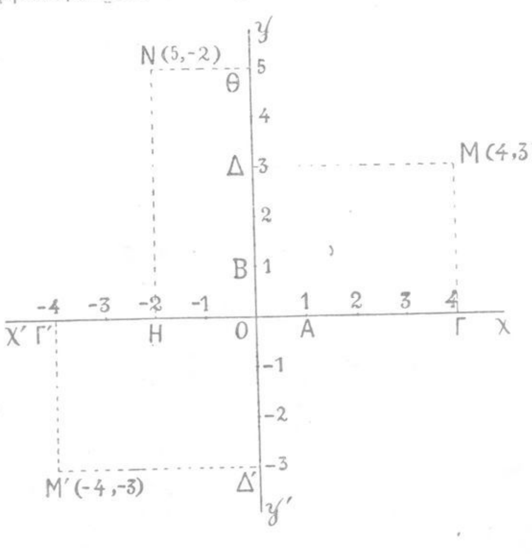
᾿Αντιστρόφως δὲ εἰς ἕκαστον σημεῖον εὐθείας ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀριθμὸς ὡρισμένος, ὅστις παριστᾷ κατὰ μέγεθος καὶ κατὰ φορὰν τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς. Οὕτω εἰς τὸ σημεῖον Η ἀντιστοιχεῖ ὁ $3\frac{2}{5}$ καὶ εἰς τὸ Θ ὁ $-1\frac{3}{4}$.

104. Εἴδομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Β παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2. ᾿Αλλ᾿ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ὁρίζεται ἐντελῶς καὶ τὸ τμῆμα ΟΒ, ὅπως καὶ ἐκ τοῦ τμήματος ΟΒ ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον Β· διὰ τοῦτο καὶ τὸ τμῆμα ΟΒ παριστῶμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2, ὅπως καὶ τὸ τμῆμα ΟΓ′ παριστῶμεν διὰ τοῦ —3. κ.ο.κ

῾Ο ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστᾷ ἓν σημεῖον Μ ἢ καὶ τὸ τμῆμα ΟΜ, λέγεται ***τετμημένη*** τοῦ σημείου Μ, τὸ δὲ σημεῖον Ο λέγεται ***ἀρχὴ*** τῶν τετμημένων.

Τὸ μέρος τῆς εὐθείας, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα παρίστανται διὰ θετικῶν ἀριθμῶν, ὅπως τὸ Οχ, λέγεται ***θετικὸν*** μέρος τῆς εὐθείας αὐτῆς, ἡ δὲ φορὰ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ χ λέγεται θετικὴ φορὰ τῆς εὐθείας χ′χ· τὸ δὲ Οχ′ λέγεται ***ἀρνητικὸν*** καὶ ἡ φορὰ ἡ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ χ′ λέγεται ἀρνητικὴ φορὰ τῆς εὐθείας αὐτῆς.

105. ***Παράστασις δύο δοθέντων ἀριθμῶν διὰ σημείου ἐπιπέδου.*** Λαμβάνομεν δύο εὐθείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἡ θετικὴ φορά. ῎Εστωσαν δὲ αἱ χ′Οχ, θετικὴ φορὰ τῆς ὁποίας ὁρίζεται ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ χ καὶ ψ′Οψ, τῆς ὁποίας θετικὴ φορὰ εἶναι ἡ ἐκ



τοῦ Ο πρὸς τὸ ψ· ἐπὶ ἑκάστης δὲ τούτων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ ἴσα πρὸς +1, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδας μήκους.

Κατόπιν τούτων ἔστω ὁ ἀριθμὸς χ=4, ὅστις παριστᾷ τὸ σημεῖον Γ τῆς χ΄Οχ καὶ ὁ ψ=3, ὅστις παριστᾷ τὸ σημεῖον Δ τῆς ψ΄Οψ· ἐὰν ἤδη φέρωμεν διὰ τοῦ Γ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ψ΄Οψ καὶ διὰ τοῦ Δ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν χ΄Οχ, αἱ παράλληλοι αὗται θὰ τμηθῶσιν εἰς ἓν σημεῖον Μ· τὸ σημεῖον τοῦτο Μ τοῦ ἐπιπέδου λέγομεν, ὅτι παριστῶσιν οἱ δοθέντες ἀριθμοί· καὶ ὁ μὲν χ=4 λέγεται τετμημένη αὐτοῦ, ἡ δὲ εὐθεῖα χ΄Οχ ἄξων τῶν τετμημένων, ὁ δὲ ψ=3 λέγεται τεταγμένη, ἡ δὲ ψ΄Οψ ἄξων τῶν τεταγμένων. Οἱ δὲ δύο ὁμοῦ λέγονται συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ χ=(ΟΓ΄)=—4 καὶ ψ=(ΟΔ΄)=—3, εἶναι τὸ Μ΄.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δοθῇ τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Ν καὶ φέρομεν ἐξ αὐτοῦ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν χ΄Οχ, τέμνουσαν τὴν ψ΄Οψ εἰς τὸ Θ, καὶ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ψ΄Οψ, τέμνουσαν τὴν ἄλλην εἰς τὸ Η, οἱ ἀριθμοὶ χ=(ΟΗ)=—2 καὶ ψ=(ΟΘ)=5 λέγομεν, ὅτι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ Ν· εἶναι δὲ τετμημένη τοῦ Ν ὁ χ καὶ τεταγμένη αὐτοῦ ὁ ψ.

Ὥστε εἰς ἕκαστον σημεῖον ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦσι δύο ἀριθμοὶ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων ὡς πρὸς δύο ἄξονας· ἀντιστρόφως δὲ εἰς δοθέντας δύο ἀριθμοὺς ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου συντεταγμέναι εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν τὰς συντεταγμένας χ,ψ σημείου τινὸς Μ, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὴν τετμημένην χ καὶ ἔπειτα τὴν τεταγμένην ψ, γράφομεν δὲ συμβολικῶς Μ(χ,ψ).

Ὅσα σημεῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν τετμημένην ΟΠ, κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ψ΄Οψ· ὅσα δὲ ἔχουσι τὴν αὐτὴν τεταγμένην ΟΚ, κεῖνται ἐπὶ παραλλήλου τῆς χ΄Οχ. Τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς χ΄Οχ ἔχουσι τεταγμένην Ο, τὰ δὲ κείμενα ἐπὶ τῆς ψ΄Οψ ἔχουσι τετμημένην Ο· τὸ δὲ σημεῖον Ο (ἡ ἀρχὴ) ἔχει συντεταγμένας (0, 0).

Οἱ δύο ἄξονες χ΄χ καὶ ψ΄ψ σχηματίζουσι περὶ τὸ Ο τέσσαρας γωνίας, τὰ σημεῖα δὲ τῶν συντεταγμένων χ καὶ ψ σημείου τινὸς Μ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς γωνίας, ἐν τῇ ὁποίᾳ κεῖται τὸ σημεῖον Μ, εἶναι δέ,

ἐὰν τὸ	Μ	κεῖται	ἐν	τῇ	γωνίᾳ	χΟψ	χ θετ. ψ θετ.
» »	Μ	»	»	»	»	χ′Οψ	χ ἀρν. ψ »
» »	Μ	»	»	»	»	χ′Οψ′	χ » ψ ἀρν.
» »	Μ	»	»	»	»	ψ′Οχ	χ θετ. ψ »

Ὥστε, γνωρίζοντες τὴν γωνίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Μ, γνωρίζομεν καὶ τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ· ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων σημείου τινὸς Μ, γνωρίζομεν καὶ τὴν γωνίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται. Οὕτω σημεῖόν τι, οὗ ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι εἶναι ἀρνητικαί, κεῖται ἐν τῇ γωνίᾳ χ′Οψ′ κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

312. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ σημεῖα ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων συντεταγμέναι εἶναι:

$(2\ ,\ 1)$ $\quad(-2\ ,-3)$ $\quad\left(-3\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2}\right)$

$(-7,\ 5)$ $\quad(-5,\ 7)$ $\quad\left(-9\frac{3}{5},-6\frac{3}{4}\right)$

$(8\ ,-6)$ $\quad(-8,\ 6)$ $\quad(0\ ,-7)$

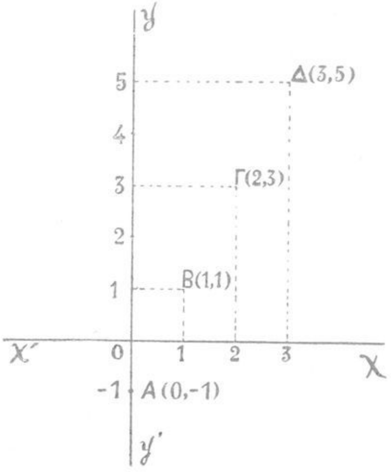
$\left(-2,\ 4\frac{1}{2}\right)$ $\quad\left(5\frac{1}{2},\ -6\right)$ $\quad(-6\ ,\ 0)$

106. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων.*** Ἡ παράστασις δύο δοθέντων ἀριθμῶν διὰ σημείου ἐπιπέδου ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως.

Ἔστω ψ=σ(χ) μία συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ· δηλαδὴ ἔστω ψ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν χ τῆς μεταβλητῆς. Ἡ ἐξίσωσις ψ=σ(χ) δεικνύει, ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς χ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τιμὴ τῆς συναρτήσεως (ἢ ὡρισμέναι τιμαί). Ἀλλ᾽ ἐὰν λάβωμεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας συντεταγμένων καὶ ὁρίσωμεν τὴν μονάδα μήκους, εἰς τὸ ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν χ καὶ ψ ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων τούτων.

Π. χ. ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι ψ=2χ—1.

εἶναι διὰ χ=0, ψ=—1 καὶ τὸ σημεῖον εἶναι. Α(0,—1)
» χ=1, ψ= 1 » » » » Β(1, 1)
» χ=2, ψ= 3 » » » » Γ(2, 3)
» χ=3, ψ= 5 » » » » Δ(3, 5) κ.ο.κ.



Ἐπειδὴ δέ, ἂν αἱ τιμαὶ τῆς χ βαίνωσιν αὐξανόμεναι ὀλίγον κατ' ὀλίγον καὶ αἱ τιμαὶ τῆς ψ μεταβάλλονται ὀλίγον κατ' ὀλίγον, ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁ τόπος τῶν εὑρισκομένων σημείων (καὶ τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν ψ=2χ—1) εἶναι ἐν γένει γραμμή τις. ***Τὴν γραμμὴν δὲ ταύτην λέγομεν, ὅτι παριστᾷ ἡ συνάρτησις.***

Ὥστε εἰς πᾶσαν συνάρτησιν, ἐὰν νοήσωμεν τὰς μεταβλητὰς αὐτῆς ὡς συντεταγμένας σημείου, ἀντιστοιχεῖ γραμμή τις, ἥτις δεικνύει ἀκριβῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς προόδου τῶν τεταγμένων αὐτῆς.

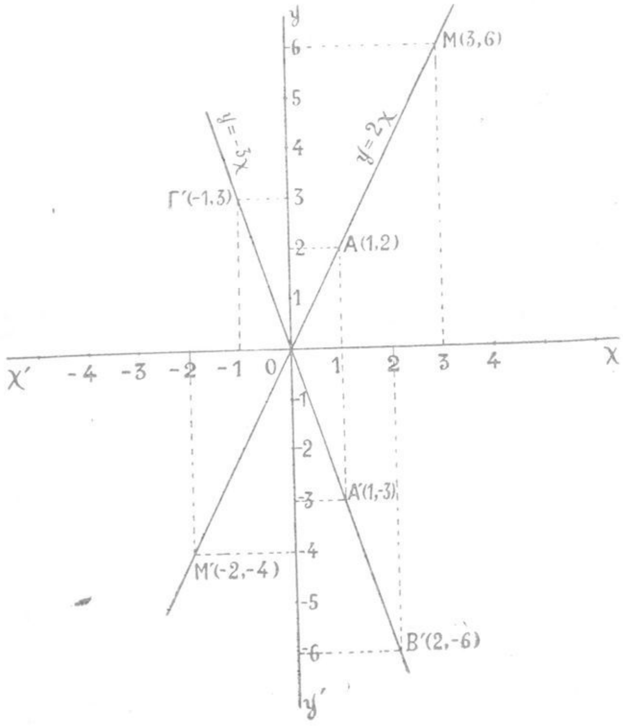
Ἐὰν συνάρτησίς τις εἶναι γνωστή, εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς αὐτῆς πρός τινα σειρὰν τιμῶν τῆς χ καὶ ἔχομεν οὕτω σειράν τινα σημείων τῆς γραμμῆς, ἣν παριστᾷ ἡ συνάρτησις· ἑνοῦντες δὲ τὰ διαδοχικὰ σημεῖα δι' εὐθειῶν γραμμῶν, εὑρίσκομεν τὴν γραμμήν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν γνωστὴν συνάρτησιν καὶ ἥτις δεικνύει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ψ μὲ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλυτέραν, ὅσῳ περισσότερα εἶναι τὰ σημεῖα καὶ ὅσῳ πυκνότερα κεῖνται.

107. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων ψ=αχ καὶ ψ=αχ+β.***

α΄) Τῆς συναρτήσεως ψ=αχ.

Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ=2χ, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὴν γραμμὴν τὴν ὁποίαν παριστᾷ αὕτη.

Διὰ $\chi=0$ εὑρίσκομεν $\psi=0$ καὶ τὸ σημεῖον εἶναι $(0, 0)$ δηλαδὴ ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων· διὰ $\chi=1$ εὑρίσκομεν $\psi=2$ καὶ



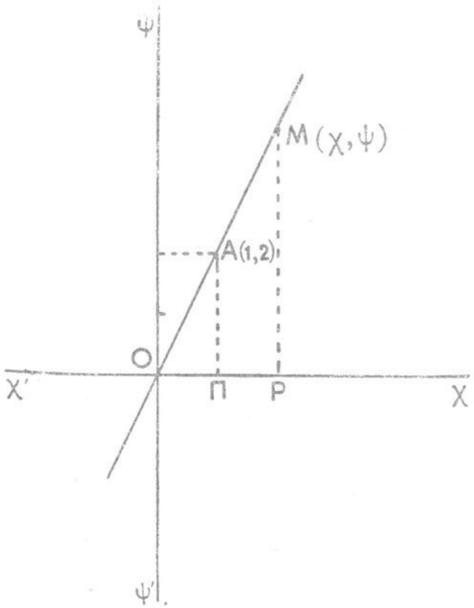
τὸ σημεῖον εἶναι Α $(1, 2)$ κ.ο.κ., ἐὰν δὲ εὕρωμεν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν σημείων, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς Μ′ΟΜ, διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς Ο.

Ἔστω καὶ ἡ συνάρτησις $\psi=-3\chi$, δι᾽ ἣν εὑρίσκομεν :

διὰ $\chi=0$	$\psi=0$	καὶ σημεῖον	Ο $(0,0)$
» $\chi=1$	$\psi=-3$	» »	Α′ $(1, -3)$
» $\chi=2$	$\psi=-6$	» »	Β′ $(2, -6)$ κ.ο.κ.

Παρατηροῦμεν δὲ καὶ πάλιν, ὅτι πάντα ταῦτα τὰ εὑρεθέντα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς Ο. Ὥστε ***ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi$, ὅπου α εἶναι ἀριθμός τις*** *ὡρισμένος παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς.*

108. Τὴν ἀνωτέρω πρότασιν δυνάμεθα νὰ τὴν ἀποδείξωμεν. Ἂς λάβωμεν πάλιν τὴν συνάρτησιν $\psi=2\chi$, δι' ἧν εὕρομεν τὰ σημεῖα Ο(0, 0) καὶ Α (1, 2), τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις. Λέγομεν δέ, ὅτι ἡ ζητουμένη γραμμὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Ο καὶ Α.



Καὶ πράγματι, πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν θεωρουμένων ἀξόνων, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι χ καὶ ψ πληροῦσι τὴν σχέσιν $\psi=2\chi$, κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ. Τὸ σημεῖον Μ θὰ κεῖται ἢ ἐντὸς τῆς γωνίας $\chi O \psi$, ἐὰν $\chi>0$ (ὁπότε καὶ $\psi>0$), ἢ ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς $\chi' O \psi'$, ἐὰν $\chi<0$ (ὁπότε καὶ $\psi<0$)· ἂς ὑποθέσωμεν $\chi>0$· ἐὰν φέρωμεν τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου Μ, ΡΜ, ἔχομεν $A\Pi = 2.O\Pi$ καὶ $MP = 2.OP$, ἤτοι $\frac{A\Pi}{O\Pi}=\frac{MP}{OP}$. Τὰ ὀρθογώνια ἑπομένως τρίγωνα ΟΜΡ καὶ ΟΑΠ, ἔχοντα τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΠ καὶ ΜΟΡ εἶναι ἴσαι, ἤτοι, ὅτι τὰ σημεῖα Ο, Α, Μ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς.

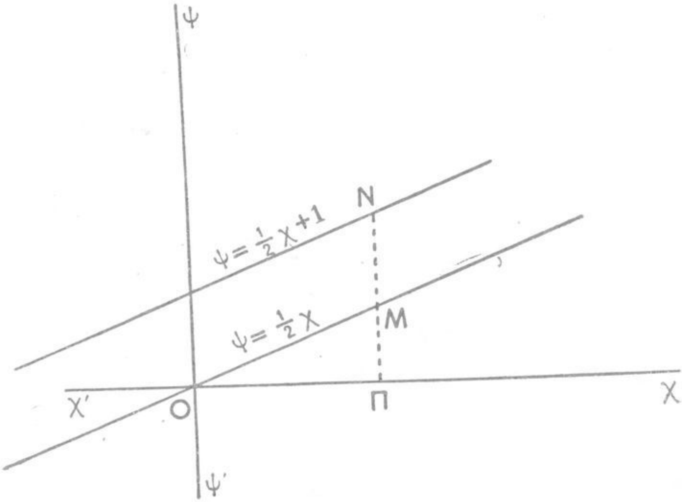
᾽Αντιστρόφως δὲ πᾶν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΟΑ ἔχει συντεταγμένας χ καὶ ψ, αἵτινες πληροῦσι τὴν σχέσιν $\psi=2\chi$. Διότι τὰ τρίγωνα ΟΑΠ καὶ ΟΜΡ, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ὅμοια καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων λαμβάνομεν

$$\frac{\text{ΡΜ}}{\text{ΠΑ}}=\frac{\text{ΟΡ}}{\text{ΟΠ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\psi}{2}=\frac{\chi}{1} \quad \text{ἤτοι} \quad \psi=2\chi.$$

῾Ομοίως δεικνύεται καὶ γενικῶς, ὅτι ***πᾶσα συνάρτησις τῆς μορφῆς $\psi=\alpha\chi$, ἔνθα α εἶναι ἀριθμός τις ὡρισμένος, παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ διὰ τοῦ σημείου (1, α). ᾽Αντιστρόφως δέ, πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τοῦ σημείου (1, α) παρίσταται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως τῆς μορφῆς $\psi=\alpha\chi$.***

β΄) Παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha\chi+\beta$.

῎Εστω ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi+\beta$. Κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi$, καὶ ἔπειτα τὰς τεταγμένας τῆς εὐθείας $\psi=\alpha\chi$ αὐξάνομεν πάσας (ἂν β εἶναι θετικὸν) ἢ ἐλαττώνομεν πάσας (ἂν β εἶναι ἀρνητικὸν) κατὰ μή-



κος β. ***Παριστᾷ ἄρα ἡ $\psi=\alpha\chi+\beta$ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ εὐθείᾳ $\psi=\alpha\chi$.***

Π. χ. ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{1}{2}\chi+1$ παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν ΤΝ, τὴν παράλληλον τῇ ΟΜ, δι' ἣν εἶναι ΟΠ=2, ΠΜ=1, ΜΝ=1. ***Ἀντιστρόφως δὲ πᾶσα εὐθεῖα παρίσταται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως τῆς μορφῆς $\psi=\alpha\chi+\beta$.***

Παρατηρήσεις. Ἐξ ὅσων εἴπομεν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, συνδέουσα τὰς συντεταγμένας χ, ψ, ἤτοι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ (1) (ἔνθα Α, Β, Γ εἶναι σταθερά), παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν· διότι, ἂν μὲν εἶναι Β διάφορον τοῦ 0, λύεται πρὸς ψ καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=-\frac{A}{B}\chi-\frac{\Gamma}{B}$ ἤ, θέτοντες $\alpha=-\frac{A}{B}$ καὶ $\beta=-\frac{\Gamma}{B}$, $\psi=\alpha\chi+\beta$· ἂν δὲ εἶναι $B=0$, λύεται πρὸς τὴν χ καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi=-\frac{\Gamma}{A}$ ἤ, θέτοντες $\gamma=-\frac{\Gamma}{A}$, $\chi=\gamma$, παριστᾷ δὲ τότε εὐθεῖαν παράλληλον τῇ Οψ.

Ἀντιστρόφως δὲ πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἔχει ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον, τουτέστιν αἱ δύο συντεταγμέναι χ,ψ παντὸς σημείου αὐτῆς, συνδέονται διὰ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1).

Παράδειγμα. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $-3\chi+5\psi-4=0$.

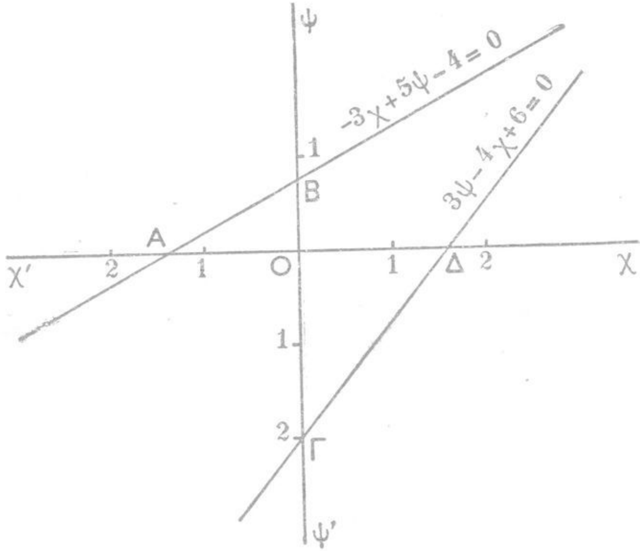
Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν δύο σημεῖα αὐτῆς, π. χ. τὰ σημεῖα εἰς ἃ αὕτη συναντᾷ τοὺς ἄξονας συντεταγμένων· ἀλλὰ τὸ σημεῖον, εἰς ὃ αὕτη συναντᾷ τὸν ἄξονα χ΄χ, ἔχει τεταγμένην 0, ἤτοι εἶναι $\psi=0$· ἡ τετμημένη αὐτοῦ ἄρα εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $-3\chi-4=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{4}{3}$.

Ἐπίσης τὸ σημεῖον, εἰς ὃ αὕτη συναντᾷ τὸν ἄξονα ψ΄ψ, ἔχει τετμημένην 0, ἤτοι εἶναι $\chi=0$· ἡ τεταγμένη του ἄρα εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $5\psi-4=0$, ἥτις δίδει $\psi=\frac{5}{4}$.

Ὥστε ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Α τοῦ ἄξονος χ΄χ, οὗ ἡ τετμημένη εἶναι $-\frac{4}{3}$ καὶ τοῦ σημείου Β τοῦ ἄξονος ψ΄ψ, οὗ ἡ τεταγμένη εἶναι $\frac{4}{5}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν

$$3\psi - 4\chi + 6 = 0.$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

313) Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουσιν αἱ ἐξισώσεις :

1) $\psi = -2\chi$	4) $\psi = 2\chi + 1$
2) $\psi = \frac{2}{3}\chi$	5) $\psi = 5\chi - 3$
3) $\psi = -\frac{1}{2}\chi$	6) $4\chi + 3\psi + 2 = 0$

314) Ὁμοίως νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ εὐθεῖαι :

$\chi = 3$	$3\chi + 4\psi = 0$
$2\psi + 5 = 0$	$2\chi - 3\psi + 6 = 0$
$\chi - \psi = 0$	$7\chi - 2\psi - 3 = 0$

109. ***Γραφικὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἢ δύο ἀγνώστους.***

α΄) Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi + \beta = 0$.

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν, ὅτι πᾶσα λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ τετμημένη κοινοῦ τινος σημείου τῆς εὐθείας $\psi=\alpha\chi+\beta$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι ἡ τετμημένη παντὸς κοινοῦ σημείου τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta=0$. Ἡ λύσις λοιπὸν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν κοινῶν σημείων τῆς εὐθείας $\psi=\alpha\chi+\beta$ καὶ τοῦ ἄξονος $O\chi$. Ἐὰν δὲ εἶναι $\alpha\neq0$, ἡ εὐθεῖα $\psi=\alpha\chi+\beta$ τέμνει τὸν ἄξονα $O\chi$ καὶ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta=0$ ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν, ἥτις εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τῆς τομῆς. Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq0$, ἡ εὐθεῖα $\psi=\alpha\chi+\beta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα 0χ καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν. Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἡ εὐθεῖα $\psi=\alpha\chi+\beta$ συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῶν χ καὶ αἱ τετμημέναι ὅλων τῶν σημείων τοῦ ἄξονος $\chi'\chi$ εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

β΄) Λύσις τοῦ συστήματος

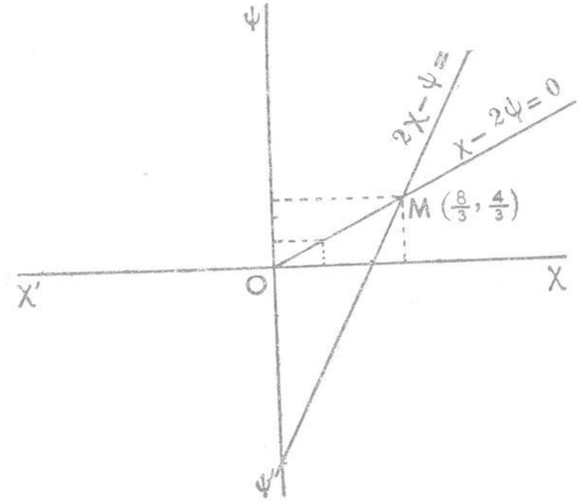
$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$$
$$\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'.$$

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ἡ συνδέουσα τὰς συντεταγμένας χ, ψ, γνωρίζομεν, ὅτι παριστᾷ εὐθεῖάν τινα, ἡ δὲ $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$ παριστᾷ ἄλλην τινα εὐθεῖαν· ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας, εἶναι ἐν γένει ὡρισμένον· διότι πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣν παριστᾷ ἡ πρώτη ἐξίσωσις, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣν παριστᾷ ἡ δευτέρα. Ὥστε εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο τούτων εὐθειῶν καὶ μόνον τοῦτο. Αἱ συντεταγμέναι ἄρα τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν τούτων ἀποτελοῦσι τὴν λύσιν τοῦ συστήματος τούτου. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀποτελῶσι τὴν λύσιν τοῦ δοθέντος συστήματος, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο εὐθειῶν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ καὶ $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$.

Ἡ λύσις ἄρα τοῦ προκειμένου συστήματος ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ καὶ $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$· πρὸς τοῦτο δὲ κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν μίαν εὐθείαν, ἔπειτα τὴν ἄλλην καὶ εὑρίσκομεν ἀκολούθως τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Π.χ. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$2\chi-\psi=4$$
$$\chi-2\psi=0$$

Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν $2\chi - \psi = 4$ καὶ ἔπειτα τὴν $\chi - 2\psi = 0$· αἱ συντεταγμέναι δὲ τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν Μ ἀποτελοῦσι τὴν λύσιν τοῦ δοθέντος συστήματος.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

315) Νὰ λυθῶσι γραφικῶς τὰ ἑπόμενα συστήματα:

1) $\chi + 2\psi = 12$	3) $2\chi - 3\psi = 4$	5) $\psi = 3$
$\chi - 3\psi = 2$	$3\chi + 4\psi = -11$	$\frac{\chi}{8} + \frac{\psi}{6} = 1$
2) $4\chi - \psi = 10$	4) $\chi = 5$	6) $\chi = -3$
$2\chi - \psi = 4$	$\psi - \chi = 3$	$\frac{\chi}{2} - \frac{\psi}{3} = 2$

Παρατήρησις. Ὁ τρόπος οὗτος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἐν εὐρυτάτῃ χρήσει εἰς τὸν πρακτικὸν βίον· διότι εἰς αὐτὸν παρουσιάζονται δύο ποσά, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι συνάρτησις τοῦ ἄλλου· ὡς παραδείγματα ἀναφέρομεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν μεταβολῶν τοῦ πυρετοῦ ἀσθενοῦς τινος, τῶν διαφόρων τιμῶν τοῦ συναλλάγματος, τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῆς κινήσεως ἑνὸς σιδηροδρόμου, τῶν μεταβολῶν τῆς βαρομετρικῆς πιέσεως, τῆς θερμοκρασίας κτλ.

Γίνεται δὲ τοῦτο, διότι, ἐὰν π.χ. θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου, παριστῶμεν τὰς μὲν τιμὰς τοῦ χρόνου ὡς τετμημένας ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οχ, τὰς δὲ ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς θερμοκρασίας ὡς τεταγμένας ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οψ· τότε ἑκάστη τιμὴ τοῦ χρόνου καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς θερμοκρασίας παρίστανται ὡς συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου· ἐὰν δὲ ἑνώσωμεν ἕκαστον σημεῖον δι᾽ εὐθείας μετὰ τοῦ ἑπομένου του, λαμβάνομεν τεθλασμένην γραμμήν, ἐκ τοῦ σχήματος τῆς ὁποίας βλέπομεν ἂν ἡ θερμοκρασία αὐξάνῃ σὺν τῷ χρόνῳ ἢ ἐλλαττοῦται, πότε αὐξάνει ταχύτερον καὶ πότε βραδύτερον, πότε γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη κτλ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

316) Νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τοῦ πυρετοῦ ἑνὸς ἀσθενοῦς, ὁ ὁποῖος, θερμομετρούμενος ἀνὰ δύο ὥρας, εἶχε κατὰ τὸ διάστημα μιᾶς ἡμέρας τὰς ἑξῆς θερμοκρασίας:

$37^0,5 \quad 38^0,5 \quad 37^0 \quad 36^0,5 \quad 37^0 \quad 38^0 \quad 38^0,5$

$39^0 \quad 38^0 \quad 38^0 \quad 37^0,5 \quad 37^0 \quad 37^0 \quad 37^0$

317) Ὁμοίως νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῆς θερμοκρασίας μιᾶς ἡμέρας κατὰ τὰς κάτωθι παρατηρήσεις:

8 π.μ.	9 π.μ.	10 π.μ.	11 π.μ.	12 π.μ.
15^0	16^0	$16^0,5$	18^0	19^0

1 μ.μ	2 μ.μ.	3 μ.μ.	4 μ.μ.	5 μ.μ.	6 μ.μ.
21^0	$23^0,5$	23^0	22^0	20^0	$17^0,5$.

κατόπιν δὲ νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς ἡ κατὰ προσέγγισιν θερμοκρασία τὴν $10\frac{3}{4}$ π.μ.

318) Κινητόν τι κινεῖται ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα 5 χλμ. καθ᾽ ὥραν. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ κίνησις αὐτοῦ καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς κινήσεως θὰ εἶναι εἰς ἀπόστασιν $17\frac{1}{2}$ χλμ. ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ δρόμου.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

110. Τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν (τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν) εἶναι μὲν τέλειον κατὰ τὰς τέσσαρας στοιχειώδεις πράξεις, ὥστε λύονται ἐν αὐτῷ πάντα τὰ εἰς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν ἄγοντα ζητήματα, φαίνεται ὅμως ἐλλιπὲς καὶ τοῦτο, ὅταν, μένοντες ἐν αὐτῷ, ἐπιχειρήσωμεν τὴν λύσιν ἀνωτέρων ζητημάτων, ὅπως εἶναι τὰ ἑπόμενα.

Εὑρεῖν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον τῷ 2· ἢ εὑρεῖν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος νὰ εἶναι ἴσος τῷ 4 καὶ τὰ λοιπά, ἅτινα ὑπὸ οὐδενὸς τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν λύονται.

Ὅτι π.χ. οὐδεὶς ἀκέραιος ἔχει τετράγωνον τὸν 2 εἶναι προφανές· ἀλλ᾽ οὐδὲ κλασματικός· διότι, ἂς ὑποτεθῇ τοιοῦτος ὁ $\frac{\mu}{\nu}$, ἔστω δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ ἀνάγωγον· τότε θὰ εἶναι:

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2=2 \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\mu^2}{\nu^2}=2$$

Ὅθεν ἕπεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μ καὶ ν ἡ ἰσότης $\mu^2=2\nu^2$· ἀλλ᾽ ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐπαληθεύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, δὲν ὑπάρχουσιν· καὶ ὄντως ὁ ἀριθμὸς μ πρέπει νὰ εἶναι ἄρτιος (διότι τὰ τετράγωνα τῶν ἀρτίων εἶναι ἄρτια καὶ τῶν περιττῶν περιττά)· δύναται λοιπὸν νὰ τεθῇ $\mu=2\mu'$, τοῦ μ' ὄντος ἄλλου ἀκεραίου, τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται $4\mu'^2=2\nu^2$, ἤτοι $\nu^2=2\mu'^2$, ὥστε καὶ ὁ ν εἶναι ἄρτιος· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι οὐδεὶς ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οὓς ἔχομεν, ἔχει τετράγωνον τὸν 2.

῾Ομοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ 10 οὐδενὸς ἀριθμοῦ (ἐξ ὅσων ἔχομεν) εἶναι τετράγωνον, οὐδὲ κύβος, οὐδὲ δύναμις οἱασδήποτε τάξεως.

᾿Αλλὰ καὶ ἡ μέτρησις τῶν γραμμῶν, καὶ ἑπομένως ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀριθμητικῆς εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ ἐν γένει ἡ καταμέτρησις τῶν συνεχῶν λεγομένων ποσῶν εἶναι ἀδύνατος (ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀποδεικνύεται), ἐὰν μένωμεν περιωρισμένοι εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Διὰ τοῦτο παρέστη ἀνάγκη νὰ αὐξηθῇ τὸ ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς προσαρτήσεως νέων καὶ τοιούτων, ὥστε νὰ λύωνται καὶ τὰ ῥηθέντα ζητήματα, νὰ διατηρῶνται δέ, ὡς πάντοτε, οἱ νόμοι τῶν πράξεων ἀβλαβεῖς.

111. Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν νέων τούτων ἀριθμῶν ὁδηγεῖ ἡμᾶς ἡ παρατήρησις, ὅτι, ἐὰν ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν δεκαδικῶν μονάδων $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κ.τ.λ. θέλωμεν νὰ ἀποτελέσωμεν πάντας τοὺς ἀριθμούς, τὰ πλεῖστα τῶν κλασμάτων ἀπαιτοῦσιν, ἵνα ἀποτελεσθῶσιν, ἄπειρον πλῆθος τοιούτων μονάδων· οὕτω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{33}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τῶν ἑπομένων ἀπείρων τὸ πλῆθος δεκαδικῶν μονάδων 0,151515..., ἐὰν αἱ ἄπειροι αὗται μονάδες νοηθῶσιν ὡς ἓν ὅλον ἀποτελοῦσαι.

Τὰ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ οὕτω προκύπτοντα, ἐπαναλαμβάνονται (ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς) ἀπαύστως τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. ᾿Αλλ᾽ ἂν ἄπειροι τὸ πλῆθος δεκαδικαὶ μονάδες θεωρηθῶσιν, ὅτι συναποτελοῦσιν ἀριθμόν, ὅταν τὰ ψηφία, δι᾽ ὧν γράφονται, ἔχωσι τὴν εἰρημένην τάξιν, διατὶ νὰ μὴ συμβαίνῃ τὸ αὐτὸ καὶ ὅταν τὰ ψηφία, δι᾽ ὧν γράφονται αἱ μονάδες, εἶναι οἱαδήποτε ;

Εὐνόητον ἀποβαίνει ἐκ τούτων, ὅτι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀριθμὸν τὸ πλῆθος οἱωνδήποτε δεκαδικῶν μονάδων, δι᾽ οἱωνδήποτε ψηφίων καὶ ἂν γράφωνται αὗται.

Οἷον τὰ ἑξῆς πλήθη τῶν δεκαδικῶν μονάδων :

0, 10, 100, 1000, 10000...

0, 2, 4, 16, 32, 64, 128...

0, 51, 511, 5111, 51111...

δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀριθμοὶ ὡρισμένοι, διότι τὰ ψηφία αὐτῶν εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένα (ὁ νόμος, καθ᾽ ὃν προχωροῦσι τὰ ψηφία ἑκάστου εἶναι προφανής).

᾽Αλλ᾽ ἂν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν μονάδων δεχώμεθα ὡς ἀριθμόν, οὐδὲν κωλύει νὰ δεχθῶμεν ὡς ἀριθμὸν καὶ πλῆθος ἄπειρον οἱωνδήποτε μονάδων ὁμοειδῶν (θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν)· τοιουτοτρόπως φθάνομεν εἰς τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ.

112. ***Ἀριθμὸς*** λέγεται τὸ σύνολον ὁμοειδῶν μονάδων, εἴτε πεπερασμένον εἶναι τὸ πλῆθος αὐτῶν, εἴτε καὶ ἄπειρον, ἐάν, ὁσαιδήποτε ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἂν προστεθῶσι, πάντοτε δίδουσιν ἄθροισμα μικρότερον ἀκεραίου τινὸς ὁμοειδοῦς.

Ὁ περιορισμὸς οὗτος εἶναι ἀναγκαῖος διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων εἶναι ἄπειρον, διότι παντὸς ἀριθμοῦ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἄλλος μεγαλύτερος.

Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὡρισμένος, ὅταν εἶναι ὡρισμέναι αἱ συναποτελοῦσαι αὐτὸν μονάδες· π.χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

$$1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^{10}}+\frac{1}{10^{100}}+\frac{1}{10^{1000}}+\frac{1}{10^{10000}}$$

εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι πάντα τὰ ψηφία αὐτοῦ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένα.

Σημ. Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ νοηθῇ ὡς συγκείμενος ἐκ δεκαδικῶν μονάδων, διότι ἑκάστη τῶν ἄλλων ἀποτελεῖται ὑπὸ πλήθους τινός δεκαδικῶν μονάδων.

Ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

113. ***Μεγαλύτερος*** λέγεται ἀριθμὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ἂν ἔχῃ πάσας τὰς μονάδας αὐτοῦ καὶ ἄλλας προσέτι.

Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν πᾶς ἀριθμός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός, μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,999999....εἶναι ἴσοι, διότι εὐκόλως φαίνεται, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ πρώτου εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ δευτέρου καὶ τἀνάπαλιν.

Ὅτι δὲ ὁ νέος οὗτος ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, εἶναι φανερόν.

114. ***Ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.*** Διὰ νὰ εἶναι ἴσοι δύο ἀριθμοί, ἐξ ἀκεραίων καὶ ἐκ δεκαδικῶν μονάδων συγκείμενοι, πρέπει ἢ α΄) νὰ συμφωνῶσι κατὰ πάντα τὰ ὁμοταγῆ ψηφία αὐτῶν ἢ β΄) τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία, καθ᾽ ἃ διαφέρουσι, νὰ ἔχωσι διαφορὰν 1, καὶ τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ψηφίον πάντα τὰ ἀκόλουθα ψηφία νὰ εἶναι 9, τοῦ δὲ ἔχοντος τὸ μεγαλύτερον πάντα τὰ ἄλλα νὰ εἶναι 0· ἄλλως οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι. Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ 2,125 καὶ 2,124999.... εἶναι ἴσοι, ἐνῷ οἱ 1,126.... καὶ 2,124... εἶναι ἄνισοι καὶ ὁ πρῶτος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου.

115. ***Διάκρισις τῶν ἀριθμῶν εἰς συμμέτρους καὶ εἰς ἀσυμμέτρους.*** Ὁ νέος ὁρισμὸς τῶν ἀριθμῶν περιλαμβάνει μὲν πάντας τοὺς ἀκεραίους καὶ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς, εἰσάγει δὲ καὶ ἄλλους ἀριθμοὺς διαφόρους τούτων· τῷ ὄντι οἱ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ ἔχοντες ἀριθμοί, οἱ διὰ τοῦ νέου ὁρισμοῦ προσαρτηθέντες, δὲν δύνανται πρὸς οὐδένα τῶν ἀκεραίων, οὐδὲ τῶν κλασματικῶν νὰ εἶναι ἴσοι· διότι οὗτοι, τρεπόμενοι εἰς δεκαδικούς, ἢ ἔχουσιν ὡρισμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἢ ἔχουσιν ἄπειρα, ἀλλὰ περιοδικά.

Πρὸς διάκρισιν καλοῦνται οἱ μὲν ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, οἱ ἐκ πεπερασμένου πλήθους μονάδων συγκείμενοι, ***σύμμετροι,*** οἱ δὲ εἰσαχθέντες διάφοροι τούτων, οἱ μὴ δυνάμενοι ἄλλως νὰ ἀποτελεσθῶσιν ἢ ὑπὸ ἀπείρου πλήθους μονάδων, λέγονται ***ἀσύμμετροι·*** οὗτοι, τρεπόμενοι εἰς δεκαδικούς, ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Παρατήρησις. Καὶ μετὰ τὴν προσάρτησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν οἱ ὁρισμοὶ τῶν τεσσάρων πράξεων μένουσιν οἱ αὐτοί. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ἄθροισμα καὶ διαφορὰ καὶ γινόμενον καὶ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν καὶ ὅτι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων διατηροῦνται. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι καὶ κύβος ἄλλου τινὸς καὶ τετάρτη δύναμις ἄλλου καὶ γενικῶς μυοστὴ δύναμις ἄλλου τινὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου). Πρὸς τούτοις ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ μετρεῖται καὶ παρίσταται ὑπὸ ἀριθμοῦ (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου).

Σημ. Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ συνδέονται συνήθως πρὸς τοὺς συμμέτρους διά τινων σχέσεων, ἐξ ὧν προκύπτουσιν, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἴδωμεν, ἰδιαίτεραι συντομώτεροι μέθοδοι, καθ' ἃς ἐκτελοῦνται αἱ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων πράξεις. Δυνάμεθα ὅμως (ὅπερ καὶ γίνεται ἐν τῇ πράξει) νὰ παραλείπωμεν τὰ ἄπειρα ψηφία τῶν ἀσυμμέτρων ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς (π.χ. ἀπὸ τῶν ἑκατομμυριοστῶν καὶ ἐφεξῆς), ὅτε εὑρίσκομεν ἀριθμοὺς συμμέτρους, τὰ ἐξαγόμενα δέ, ἅτινα λαμβάνομεν, προσεγγίζουσι πρὸς τἀληθῆ τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ περισσότερα ψηφία διατηροῦμεν.

Περὶ ῥιζῶν.

116. Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι τετράγωνον ἄλλου, οὗτος λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου· καὶ γενικῶς λέγομεν, ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι μυοστὴ δύναμις ἄλλου, οὗτος λέγεται μυοστὴ ῥίζα τοῦ πρώτου.

Ἐὰν δηλ. εἶναι $\alpha=\beta^\mu$, ὁ β λέγεται μυοστὴ ῥίζα τοῦ α καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt[\mu]{\alpha}$· ὥστε, ἂν εἶναι $\alpha=\beta^\mu$, θὰ εἶναι $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$· τουτέστιν ἀμφότεραι αἱ ἰσότητες αὗται μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐκφράζουσι σχέσιν τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

Ἀξιοπαρατήρητοι εἶναι αἱ ταυτότητες $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu=\alpha$ καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}=\alpha$, αἵτινες ἕπονται ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μυοστῆς ῥίζης.

Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ καλεῖται ῥιζικόν, ἡ δὲ ὑπ' αὐτὸ ὑπάρχουσα παράστασις λέγεται ***ὑπόρριζον***· ἡ ῥίζα τῆς δευτέρας τάξεως, ἤτοι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, γράφεται συνήθως ἄνευ τοῦ δείκτου 2 ὡς ἑξῆς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha+\beta}$ κ.τ.λ. Ἡ ῥίζα τῆς τρίτης τάξεως λέγεται καὶ κυβικὴ ῥίζα.

117. ***Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας ἑκάστης ἀρτίας τάξεως καὶ μίαν ἑκάστης περιττῆς.***

Π. χ. ὁ 16 ἔχει δύο τετραγωνικὰς ῥίζας, τὸν 4 καὶ τὸν —4· διότι εἶναι 4.4=16, ἀλλὰ καὶ (—4).(—4)=16.

Ὁμοίως ἔχει δύο τετάρτας ῥίζας, τὸν 2 καὶ τὸν —2· διότι εἶναι 2.2.2.2=16, ἀλλὰ καὶ (—2).(—2).(—2).(—2)=16.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 8 ἔχει μίαν μόνον κυβικὴν ῥίζαν, τὸν 2· διότι εἶναι 2.2.2=8· ἀλλὰ (—2).(—2).(—2)=—8.

Ὥστε τὸ —2 δὲν εἶναι κυβικὴ ῥίζα τοῦ 8, ἀλλὰ τοῦ —8.

118. ***Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ῥίζαν ἑκάστης περιττῆς τάξεως, ἀλλ' οὐδεμίαν ἀρτίας τάξεως.***

Π. χ. ὁ -8 ἔχει μίαν κυβικὴν ῥίζαν, τὸν -2· διότι εἶναι $(-2).(-2).(-2)=-8$, ἀλλὰ $2.2.2=8$.

Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ -16 δὲν ὑπάρχει· δηλαδὴ ὁ -16 δὲν εἶναι τετράγωνον οὐδενὸς ἀριθμοῦ, διότι πᾶν τετράγωνον εἶναι θετικόν· ὁμοίως καὶ πᾶσα δύναμις ἀρτίας τάξεως εἶναι θετική.

Ὅταν ἀριθμὸς ἔχῃ δύο ῥίζας μιᾶς τάξεως, αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, ὅταν δὲ ἔχῃ μίαν μόνην, ἡ ῥίζα αὕτη εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸν ἀριθμόν.

Ρίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

119. ***Αἱ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἢ ἀκέραιοι πάλιν ἀριθμοὶ ἢ ἀσύμμετροι, οὐδέποτε δὲ κλάσματα.***

Καὶ ὄντως, ἔστω τοῦ ἀκεραίου Α μυοστὴ ῥίζα τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπερ ἃς ὑποτεθῇ ἀνάγωγον· τότε εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu=\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}=A$.

Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἐξ ὑποθέσεως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἄρα καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^μ καὶ β^μ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἑπομένως ἀδύνατον νὰ διαιρῇ ὁ β^μ τὸν α^μ καὶ νὰ δίδῃ πηλίκον ἀκέραιον Α· ὥστε αἱ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων οὐδέποτε εἶναι κλάσματα.

120. ***Ἡ μυοστὴ ῥίζα ἀκεραίου εἶναι ἀκέραιος, ἂν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν γίνεται, εἶναι πολλαπλάσια τοῦ μ καὶ τότε μόνον.***

Διότι, ἂν εἶναι $\beta^\mu=\alpha$, ἤτοι $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι, ἃς ἀναλυθῇ ὁ β εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ ἔστω $\beta=\vartheta^\kappa.\vartheta'^{\kappa'}\ldots$ τότε θὰ εἶναι $\beta^\mu=(\vartheta^\kappa.\vartheta'^{\kappa'}\ldots)^\mu=\vartheta^{\kappa\mu}.\vartheta'^{\kappa'\mu}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 23,2)· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\beta^\mu=\alpha$, ἕπεται $\alpha=\vartheta^{\kappa\mu}.\vartheta'^{\kappa'\mu}\ldots$ ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων ἀριθμῶν θ, θ'..., ἐξ ὧν γίνεται ὁ α, διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ μ.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εἶναι $\alpha=\vartheta^{\kappa\mu}.\vartheta'^{\kappa'\mu}\ldots$, ἡ μ ῥίζα τοῦ α θὰ εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς $\vartheta^\kappa.\vartheta'^{\kappa'}\ldots$, διότι οὗτος, ὑψούμενος εἰς τὴν μ δύναμιν, παράγει τὸν α.

Φανταστικοὶ καὶ μιγάδες ἀριθμοί.

121. Εἴδομεν, ὅτι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ —16, ὡς καὶ παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, δὲν ὑπάρχει, διότι πᾶν τετράγωνον εἶναι θετικόν. Ἑπομένως, ἂν θέλωμεν ἵνα καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἔχωσι τετραγωνικὴν ρίζαν, εἶναι ἀνάγκη νὰ πλάσωμεν καὶ νὰ παραδεχθῶμεν νέον τινα ἀριθμὸν καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ νὰ εἶναι —1. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ i καὶ δι' ὃν θὰ ἔχωμεν $i^2=-1$, θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα καὶ εἰσάγομεν αὐτὴν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν, μετ' αὐτῆς δὲ καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς **—i** καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια ἀμφοτέρων. Οὕτω προκύπτει σύστημα εὐρύτερον, τοῦ ὁποίου οἱ ἀριθμοὶ γίνονται πάντες ἐκ τῶν τεσσάρων μονάδων 1, —1, i καὶ —i καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ δεχόμεθα, ὅτι διατηροῦνται ἀμετάβλητοι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων.

Αἱ νέαι μονάδες i καὶ —i λέγονται ***φανταστικαὶ*** καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν (καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν) ἀποτελούμενοι ἀριθμοὶ λέγονται ***φανταστικοί***· αἱ δὲ παλαιαὶ 1 καὶ —1 πρὸς διάκρισιν λέγονται ***πραγματικαὶ*** καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ***πραγματικοί***.

Οὕτω φανταστικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $i+i+i+i=4i$

$$(-i)+(-i)+(-i)=-3i, \qquad \frac{i}{4}+\frac{i}{4}+\frac{i}{4}=\frac{3i}{4}.$$

Οἱ ἐκ πραγματικῶν καὶ φανταστικῶν μονάδων συγκείμενοι ἀριθμοὶ λέγονται ***μιγάδες***. Οὕτω μιγάδες ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $4+2i$, $-3+4i$, $7-5i$ καὶ γενικῶς μιγὰς ἀριθμὸς εἶναι ὁ $\alpha+\beta i$, ὅπου ὁ α καὶ ὁ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε.

Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ λέγονται ***ἴσοι***, ἐὰν τὰ πραγματικὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἴσα καὶ τὰ φανταστικὰ ἴσα.

Οὕτω ἵνα ἔχωμεν $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$ πρέπει νὰ εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.

Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ λέγονται ***συζυγεῖς***, ἐὰν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Ὅθεν οἱ $5+8i$, $5-8i$ εἶναι συζυγεῖς μιγάδες.

Μέτρον τοῦ μιγάδος $\alpha+\beta i$ λέγεται ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Οὕτω τοῦ $3+4i$ μέτρον εἶναι ὁ $\sqrt{9+16}=5$

καὶ τοῦ $3-2i$ μέτρον εἶνε ὁ $\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἐκτελοῦνται ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν πραγματικῶν· οὕτω ἔχομεν:

$$5i+3i=8i,\ -4i-7i=-11i,\ -9i+7i=-2i$$
$$-10i-(-3i)=-10i+3i=-7i,\ 8i-8i=0.$$

Ἐπίσης ἔχομεν:

$$(-i).(-i)=(-i)^2=i^2=-1$$
$$i^3=i^2.i=-1.i=-i$$
$$i^4=(-1)^2=+1$$
$$i^5=i^4.i=i$$

καὶ γενικῶς $i^{4\nu}=+1$, $i^{4\nu+1}=i$, $i^{4\nu+2}=-1$, $i^{4\nu+3}=-i$ (ν ἀκέραιος ἀριθμός).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον φανταστικῶν ἀριθμῶν εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον.

Ἐπίσης εἶναι $4i.4i=(4i)^2=16.(-1)=-16$ καὶ $(-4i).(-4i)=(-4i)^2=16.(-1)=-16$, ἐξ ὧν ἕπεται, ὅτι $\sqrt{-16}=\sqrt{16.(-1)}=\pm 4i$, ἤτοι, ὅτι ***τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουσι καὶ εἶναι φανταστικοὶ ἀριθμοί.***

Ἐπίσης ἔχομεν:

$$\alpha i : \beta i=\frac{\alpha i}{\beta i}=\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \alpha i^2 : \beta i=\frac{\alpha i^2}{\beta i}=\frac{\alpha i}{\beta},$$
$$\alpha i : \beta i^2=\frac{\alpha i}{\beta i^2}=\frac{\alpha i}{-\beta}=-\frac{\alpha i}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}$$

Διὰ τοὺς μιγάδας ἀριθμοὺς ἔχομεν:

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$
$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$
$$(\alpha+\beta i).(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\delta i^2+\alpha\delta i+\beta\gamma i=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$
$$(\alpha+\beta i) : (\gamma+\delta i)=\frac{(\alpha+\beta i).(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i).(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)-(\alpha\delta-\beta\gamma)i}{\gamma^2+\delta^2}$$

Παρατηροῦμεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, ὅτι τὰ ἐξαγόμενα τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι γενικῶς μιγάδες ἀριθμοί. Ἐξαιρετικῶς τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοί. Ἔχομεν πράγματι:

$$(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha$$
$$(\alpha+\beta i).(\alpha-\beta i)=\alpha^2-\beta^2 i^2+\alpha\beta i-\alpha\beta i=\alpha^2+\beta^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

319) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ κάτωθι ρίζαι :

$\sqrt{49}$ $\sqrt{\alpha^2}$ $\sqrt{(-8)^2}$ $\sqrt[3]{27}$

$\sqrt{-49}$ $\sqrt{-\alpha^2}$ $\sqrt{(-\alpha)^2}$ $\sqrt[3]{-27}$

$\sqrt{-100}$ $\sqrt{-\alpha^4}$ $\sqrt{(-\alpha)^4}$ $\sqrt[4]{81}$

320) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

i^9 $3i.5i$ $6i.3i^2$

i^{10} $8i.9i$ $5.\sqrt{-4}$

i^{11} $-8i.4i$ $i.\sqrt{-25}$

i^{12} $(-2i)(-3i)$ $3i\sqrt{-64}$

321) Ἐπίσης τά :

$(7+8i)+(9-5i)+(-3i+4)$

$(2+3i)+(5-4i)-(11-7i)$

$2(4+10i)+3(6-5i)+5(1-2i)$

$9(5+3i)+(8-13i)+(15+4i)$

322) Ἐπίσης τά :

$(2+7i).(5+3i)$, $(8-9i).(9-8i)$, $(11+13i).(11-13i)$,
$(2-5i).(5-9i)$, $(10i+7i).(10i-7)$, $(-4+3i).(4-3i)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Νόμοι τῶν δυνάμεων.

122. Ἐν τῇ διαπλάσει τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν ὁδηγὸν εἴχομεν τὴν ἀρχήν, ὅτι, ***ὅταν πρόκειται νὰ καταστήσωμέν τι γενικώτερον, πρέπει νὰ διατηρῶμεν τὰς ἀρχικὰς αὐτοῦ ἰδιότητας.*** Καὶ νῦν, θέλοντες νὰ εὐρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων ἐπὶ οἱωνδήποτε ἐκθετῶν, θέτομεν ὡς ὅρον τὴν διατήρησιν τῶν ἀρχικῶν αὐτῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας ἀποκαθιστῶμεν ***νόμους*** τῶν δυνάμεων.

Ἐὰν ἡ ὑπὸ τῆς ἰσότητος $\alpha^\mu.\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$ (1) ἐκφραζομένη ἀρχικὴ ἰδιότης τῶν δυνάμεων θέλωμεν νὰ ἰσχύῃ καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶναι οἱοιδήποτε σύμμετροι ἀριθμοί, ἀνάγκη νὰ ὁρίσωμεν καταλλήλως τὴν σημασίαν τῶν δυνάμεων, αἵτινες ἔχουσιν ἐκθέτην κλασματικόν.

Δυνάμεις κλασματικὸν ἔχουσαι ἐκθέτην.

123. Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα (1), τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διατηρήσωμεν ἀληθῆ ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων, ὑποτεθῇ $\mu=\nu=\frac{1}{2}$ προκύπτει $\alpha^{\frac{1}{2}} . \alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha$ ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$ δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α· διότι, ἐφ᾽ ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέν, δίδει τὸ α.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν σημασίαν τοῦ $\alpha^{\frac{1}{\varrho}}$ (τοῦ ϱ ὄντος οἱουδήποτε θετικοῦ ἀκεραίου), σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν ϱ παραγόντων:

$$\alpha^{\frac{1}{\varrho}} . \alpha^{\frac{1}{\varrho}} . \alpha^{\frac{1}{\varrho}} \ldots\ldots \alpha^{\frac{1}{\varrho}}$$

ὅτε, κατὰ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα, ἣν διατηροῦμεν, εὑρίσκομεν αὐτὸ ἴσον τῷ $\alpha^{\varrho.\frac{1}{\varrho}}$, ἤτοι ἴσον τῷ α, ὥστε $\alpha^{\frac{1}{\varrho}}$ ***δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ ϱ ῥίζα τοῦ α.***

Κατὰ ταῦτα αἱ δύο παραστάσεις $\boldsymbol{\alpha}^{\frac{1}{\varrho}}$ καὶ $\sqrt[\varrho]{\boldsymbol{\alpha}}$ σημαίνουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Παράδειγμα. $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}, \quad 8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2.$

Καὶ γενικῶς $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ (π καὶ ϱ ὄντων οἱωνδήποτε θετικῶν ἀκεραίων) δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ ϱ ῥίζα τοῦ α^{π}, διότι, πολλαπλασιαζόμενον ϱ φορὰς ἐφ᾽ ἑαυτό, δίδει α^{π}, ὡς ἑξῆς φαίνεται :

$$\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} . \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} . \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} \ldots\ldots \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}=\alpha^{\varrho.\frac{\pi}{\varrho}}=\alpha^{\pi}.$$

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ σημαίνει καὶ τὴν π δύναμιν τῆς ϱ ῥίζης τοῦ α· διότι προκύπτει, ἂν ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{1}{\varrho}}$ πολλαπλασιασθῇ π φορὰς ἐφ᾽ ἑαυτήν, ὡς ἑξῆς φαίνεται $\alpha^{\frac{1}{\varrho}} . \alpha^{\frac{1}{\varrho}} \ldots . \alpha^{\frac{1}{\varrho}}=\alpha^{\pi.\frac{1}{\varrho}}=\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ π δύναμις τῆς ϱ ῥίζης τοῦ α πρέπει νὰ εἶναι ἴση τῇ ῥίζῃ ϱ τῆς π δυνάμεως τοῦ α· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi} = \sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}} = \alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ (1)

ἢ $\left(\alpha^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\pi} = \left(\alpha^{\pi}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$

Ὅτι δὲ ἀληθῶς ἡ παράστασις $\left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi}$ ἰσοῦται τῇ ρ ρίζῃ τοῦ α^{π}, ἤτοι τῇ $\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}$, δεικνύεται ἀμέσως ἐκ τούτου, ὅτι ἡ ρ δύναμις αὐτῆς εἶναι ἴση τῷ α^{π}.

Καὶ ὄντως ἡ παράστασις $\left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi}$ εἶναι γινόμενον π παραγόντων, ὧν ἕκαστος εἶναι ἴσος τῇ $\sqrt[\rho]{\alpha}$, ἑπομένως, κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τῶν δυνάμεων (23), ἡ ρ δύναμις αὐτῆς εὑρίσκεται, ἂν ὑψωθῇ ἕκαστος παράγων αὐτῆς εἰς τὴν ρ δύναμιν, ὅτε γίνεται α· ὅθεν ἡ ρ δύναμις τοῦ γινομένου εἶναι ἐπίσης α^{π}.

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι, ὅταν ὁ ρ εἶναι ἄρτιος (ὅτε ἐξ ἀνάγκης θὰ εἶναι ὁ α θετικὸς ἀριθμός), τὸ μὲν δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) ἔχει πάντοτε δύο τιμὰς ἀντιθέτους, τὸ δὲ πρῶτον ἔχει ἀμφοτέρας μὲν τὰς τιμὰς ταύτας, ἂν ὁ π εἶναι περιττὸς (διότι τὸ γινόμενον $\left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi}$ εἶναι τότε ὁμοειδὲς τῇ $\sqrt[\rho]{\alpha}$), τὴν θετικὴν ὅμως μόνην, ἂν ὁ π εἶναι ἄρτιος· ὥστε κατὰ τοῦτο ἡ ἰσότης (1) δὲν εἶναι τελεία· π.χ. ἡ $\sqrt[4]{\alpha^{2}}$ ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμάς, ἐνῷ ἡ $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^{2}$ ἔχει μόνον τὴν θετικὴν ἐξ αὐτῶν.

124. Ὁ κλασματικὸς ἐκθέτης δύναται πάντοτε νὰ ὑποτεθῇ ἀνάγωγος· καὶ ὄντως εἶναι ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{\pi\nu}{\rho\nu}}$ ἴση τῇ $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ (2), διότι ἀμφότεραι, ὑψούμεναι εἰς τὴν ρ.ν δύναμιν, γίνονται ἴσαι τῷ $\alpha^{\pi\nu}$· ὑψοῦται δὲ ἡ δευτέρα εἰς τὴν ρν δύναμιν, ἂν ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν ρ καὶ ἔπειτα ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ὑψωθῇ εἰς τὴν ν δύναμιν (23).

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι, ἐὰν ὁ κοινὸς παράγων εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ ρ περιττός, ἡ μὲν πρώτη δύναμις ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους, ἡ δὲ δευτέρα μίαν μόνον· ὥστε ἡ ἰσότης αὐτῶν δὲν εἶναι τελεία.

Διὰ νὰ εἶναι αἱ δύο ἰσότητες (1) καὶ (2) ἀληθεῖς ἄνευ ἐξαιρέσεως, θὰ ὑποθέτωμεν ἐν τοῖς ἑξῆς τὸν ἀριθμὸν α πάντοτε θετικὸν καὶ ἐκ τῶν δύο ἀντιθέτων τιμῶν πάσης ῥίζης ἀρτιοταγοῦς θὰ λαμβάνωμεν ὑπ᾿ ὄψει μόνον τὴν θετικήν· τότε αἱ παραστάσεις $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$, $\sqrt[\varrho]{\alpha^\pi}$, $\left(\sqrt[\varrho]{\alpha}\right)^\pi$, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀκεραίων π καὶ ϱ, παριστῶσιν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν πᾶσαι θετικὸν ἀριθμόν.

Τὰς δὲ ῥίζας τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, περιττῆς τάξεως, ἀνάγομεν εἰς τὰς ὁμοταγεῖς ῥίζας τῶν θετικῶν· διότι π.χ. εἶναι

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2, \qquad \sqrt[5]{-16} = -\sqrt[5]{16}$$

$$(-4)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-4)^2} = 4^{\frac{2}{3}}$$

Ἐὰν τὴν ἰσότητα $\alpha^{\frac{\pi\nu}{\varrho\nu}} = \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ γράψωμεν διὰ τῶν ῥιζῶν, βλέπομεν, ὅτι εἶναι $\sqrt[\varrho]{\alpha^\pi} = \sqrt[\varrho\nu]{\alpha^{\pi\nu}}$, τουτέστι ***δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ϱ τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην π τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν·*** τοῦτο δὲ οὐδόλως βλάπτει τὴν ῥίζαν.

Παραδείγματα : $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}, \quad 25^{\frac{2}{4}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5,$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4, \qquad 1^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1^2} = \sqrt[3]{1} = 1,$

ἤτοι τῆς μονάδος 1 πᾶσα δύναμις εἶναι πάλιν 1.

125. Ὁ ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς (24) ἐπεκτείνεται καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλάσματα ἀρνητικὰ $\alpha^{-\frac{\pi}{\varrho}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}}$ (π καὶ ϱ ὄντων ἀριθμῶν ἀκεραίων).

διότι, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ὑψώσωμεν εἰς τὴν ϱ δύναμιν, λαμβάνομεν $\alpha^{-\pi} = \dfrac{1}{\alpha^\pi}$

διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ $\alpha^{-\frac{\pi}{\varrho}} = \sqrt[\varrho]{\alpha^{-\pi}}$

οὕτω εἶναι $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \dfrac{1}{4}$

Διατήρησις τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων.

126. Ὑπολείπεται ἔτι ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ εὑρεθέντες ὁρισμοὶ τῶν συμμέτρους ἐκθέτας ἐχουσῶν δυνάμεων εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε διατηροῦνται καὶ ἐπ' αὐτῶν πᾶσαι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων· τοὐτέστιν, ὅτι ἀληθεύουσιν αἱ τὰς ἰδιότητας ταύτας ἐκφράζουσαι ἰσότητες:

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} \qquad (1)$$

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu} \qquad (2)$$

$$(\alpha\beta)^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \beta^{\mu} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}} \qquad (4)$$

καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶναι κλασματικοὶ ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί), ἤτοι τῆς μορφῆς $\frac{\pi}{\varrho}$ $(=\mu)$ καὶ $\frac{\varkappa}{\tau}$$(=\nu)$.

1) Τὴν ἰσότητα τῶν δύο παραστάσεων $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} \cdot \alpha^{\frac{\varkappa}{\tau}}$ καὶ $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}+\frac{\varkappa}{\tau}}$ ἀποδεικνύομεν, ὑψοῦντες ἑκατέραν εἰς τὴν δύναμιν ϱ.τ.

Ἵνα τῷ ὄντι ὑψωθῇ ἡ πρώτη παράστασις εἰς τὴν δύναμιν ϱ.τ, ἀρκεῖ (23) νὰ ὑψωθῇ ἑκάτερος τῶν παραγόντων αὐτῆς εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ϱ.τ. Ἵνα δὲ ὑψωθῇ ὁ πρῶτος παράγων $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ εἰς τὴν δύναμιν ϱ.τ, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν ϱ (ὅτε γίνεται α^{π}) καὶ ἔπειτα εἰς τὴν τ, ὅτε γίνεται $\alpha^{\pi\tau}$· ἵνα δὲ ὁ δεύτερος παράγων $\alpha^{\frac{\varkappa}{\tau}}$ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ϱ.τ, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν τ (ὅτε γίνεται $\alpha^{\varkappa}$) καὶ ἔπειτα εἰς τὴν ϱ, ὅτε γίνεται $\alpha^{\varrho\varkappa}$· ἑπομένως ἡ πρώτη παράστασις, ὑψωθεῖσα εἰς τὴν δύναμιν ϱτ, γίνεται $\alpha^{\pi\tau} . \alpha^{\varkappa\varrho}$ ἢ $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\varrho}$.

Ἀλλὰ καὶ ἡ δευτέρα παράστασις $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}+\frac{\varkappa}{\tau}}$ ἢ $\alpha^{\frac{\pi\tau+\varkappa\varrho}{\varrho\tau}}$, ὑψωθεῖσα εἰς τὴν ϱτ δύναμιν, γίνεται $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\varrho}$.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι ἀμφότεραι αἱ συγκρινόμεναι παραστάσεις εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ϱτ ῥίζαν τοῦ $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\varrho}$, ἄρα εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

2) Ἵνα δείξωμεν, ὅτι αἱ δύο παραστάσεις $\left(\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}\right)^{\frac{\varkappa}{\tau}}$ καὶ $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}\cdot\frac{\varkappa}{\tau}}$ εἶναι ἴσαι, ὑψοῦμεν πάλιν ἀμφοτέρας εἰς τὴν δύναμιν ϱτ.

Καὶ ἡ μὲν δευτέρα, ὑψουμένη ἀμέσως εἰς τὴν ϱτ δύναμιν, γίνεται $\alpha^{\pi\varkappa}$, ἡ δὲ πρώτη, ἵνα ὑψωθῇ εἰς τὴν ϱτ δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν δύναμιν τ, ὅτε γίνεται $\left(\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}\right)^{\varkappa}$ ἢ $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} . \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$

$\dots \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ $\varkappa$ φοράς, ἤτοι $\alpha^{\frac{\pi\varkappa}{\varrho}}$, ἔπειτα δὲ εἰς τὴν δύναμιν ϱ, ὅτε γίνεται $\alpha^{\pi\varkappa}$· ὥστε ἀμφότεραι αἱ παραβαλλόμεναι παραστάσεις εἶναι ἴσαι μὲ τὴν $\varrho\tau$ ρίζαν τοῦ $\alpha^{\pi\varkappa}$, ἄρα εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

Ἐν τῇ ἀποδείξει ταύτῃ ὑπετέθη ὁ $\varkappa$ θετικὸς ἀριθμός· ἂν εἶναι ἀρνητικός, ἡ ἰσότης τῶν δύο παραστάσεων ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων αὐτῶν.

3) Ἵνα δείξωμεν, ὅτι αἱ παραστάσεις $(\alpha\beta)^{\frac{\pi}{\varrho}}$ καὶ $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}.\beta^{\frac{\pi}{\varrho}}$ εἶναι ἴσαι ὑψοῦμεν ἀμφοτέρας εἰς τὴν δύναμιν ϱ· καὶ ἡ μὲν πρώτη γίνεται $(\alpha\beta)^{\pi}$, ἡ δὲ δευτέρα, ἐπειδὴ εἶναι γινόμενον, γίνεται $\alpha^{\pi}.\beta^{\pi}$, ἤτοι $(\alpha\beta)^{\pi}$· ὥστε ἀμφότεραι αἱ παραστάσεις αὗται εἶναι ἴσαι τῇ ϱ ρίζῃ τοῦ $(\alpha\beta)^{\pi}$.

4) Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος τῶν δύο παραστάσεων :

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\pi}{\varrho}}$ καὶ $\dfrac{\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}}{\beta^{\frac{\pi}{\varrho}}}$ ὑψοῦμεν ἀμφοτέρας εἰς τὴν ϱ δύναμιν· τότε ἡ μὲν πρώτη γίνεται $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\pi}$ ἢ $\frac{\alpha^{\pi}}{\beta^{\pi}}$, ἡ δευτέρα γίνεται $\frac{\alpha^{\pi}}{\beta^{\pi}}$, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι αἱ συγκρινόμεναι παραστάσεις εἶναι ἴσαι.

Σημ. Ἂν ὁ ἀριθμὸς $\varrho\tau$ εἶναι ἄρτιος, ἑκάτερον τῶν μελῶν τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἔχει ἀνὰ δύο ἀντιθέτους τιμάς, ἂν δὲ ὁ $\varrho\tau$ εἶναι περιττός, ἑκάτερον τῶν μελῶν ἔχει μίαν μόνην τιμήν. Ὡσαύτως τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) ἔχει ἑκάτερον τῶν μελῶν δύο τιμὰς ἀντιθέτους, ἂν ὁ ϱ εἶναι ἄρτιος, μίαν δὲ μόνην, ἂν περιττός.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

127. ***Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν ριζῶν.*** Ἐπειδὴ γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν, ὑψοῦντες τὸ γινόμενον $\alpha.\beta.\gamma$ εἰς τὴν δύναμιν $\frac{1}{\nu}$ εὑρίσκομεν $(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\nu}}.\gamma^{\frac{1}{\nu}}$ ἢ $\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma}$. ἡ δὲ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸ θεώρημα:

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἰσοβαθμίους ρίζας, ἀρκεῖ νὰ

πολλαπλασιάσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ γινομένου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν.

π. χ. εἶναι $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

Ἂν δὲ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $\alpha^\nu\,.\,\beta$ εἰς τὴν δύναμιν $\frac{1}{\nu}$ εὑρίσκομεν $(\alpha^\nu\,.\,\beta)^{\frac{1}{\nu}} = \alpha\beta^{\frac{1}{\nu}}$ ἢ $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$.

Τοὐτέστιν, ***ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ρίζαν ἐπὶ ἀριθμὸν θετικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ὑπόρριζον ἐπὶ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.***

Παραδείγματος χάριν εἶναι $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{12}$.

Ἡ αὐτὴ ἰσότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν παράγοντά τινα τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ, ἕπεται:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$$

Τοὐτέστιν, ***ἵνα διαιρέσωμεν ρίζαν δι' ἄλλης ἰσοβαθμίου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ πηλίκου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν.***

Παραδείγματος χάριν, εἶναι $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$

Ἐξάγοντες τὴν $\nu^{\eta\nu}$ ρίζαν τοῦ πηλίκου $\frac{\alpha}{\beta^\nu}$ (ἤτοι ὑψοῦντες αὐτὸ εἰς τὴν δύναμιν $\frac{1}{\nu}$) εὑρίσκομεν $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta^\nu}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta}$

Τοὐτέστιν, ***ἵνα διαιρέσωμεν ρίζαν δι' ἀριθμοῦ θετικοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόρριζον διὰ τῆς ἰσοβαθμίου δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.***

Ἡ αὐτὴ δὲ ἰσότης δύναται καὶ ὡς ἑξῆς νὰ ἐκφρασθῇ:

Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν διαιρέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν αὐτοῦ.

Π. χ. εἶναι $\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{200}}{5}=\sqrt{\frac{200}{25}}=\sqrt{8}$

128. ***Ρίζαι διαφόρων βαθμῶν τρέπονται εἰς ἰσοβαθμίους, ὅπως καὶ κλάσματα μὴ ὁμώνυμα εἰς ὁμώνυμα,*** διότι ἐπιτρέπεται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ἑκάστης ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Καὶ κατὰ ταῦτα αἱ ρίζαι $\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[5]{\beta}$, $\sqrt[4]{\gamma}$, γίνονται ἰσοβάθμιοι $\sqrt[60]{\alpha^{10}}$, $\sqrt[60]{\beta^{12}}$, $\sqrt[60]{\gamma^{15}}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ριζῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς μίαν ρίζαν.

Παρατηρήσεις. 1) Πᾶν γινόμενον, ὁσαδήποτε καὶ οἱαδήποτε ριζικὰ καὶ ἂν ἔχῃ, ἀνάγεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα εἰς μίαν ρίζαν. Ἡ τοιαύτη ἀναγωγὴ εἶναι ὠφέλιμος, ὅταν πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον κατά τινα προσέγγισιν. Οὕτως, ἀντὶ $10\sqrt{5}$ καλὸν εἶναι νὰ γράφωμεν τότε $\sqrt{500}$· διότι, ἐξάγοντες τὴν ρίζαν τοῦ 500 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν 22, ἐνῷ ἐκ τοῦ γινομένου $10\sqrt{5}$, ἂν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα τοῦ 5 ὁμοίως, προκύπτει μόνον 20· συμβαίνει δὲ τοῦτο, διότι τὸ λάθος, τὸ ἐπὶ τῆς ρίζης $\sqrt{5}$ συμβαῖνον, εἶναι μὲν μικρότερον τῆς μονάδος, ἀλλά, δεκαπλασιαζόμενον, ὑπερβαίνει αὐτήν. Ὁμοίως, ἀντὶ $\sqrt{8}.\sqrt{3}$, γραπτέον $\sqrt{24}$ κ.λ.π. Δυνατὸν δὲ καὶ νὰ συμβῇ, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν νὰ εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἀφοῦ τραπῇ εἰς μίαν ρίζαν· οὕτω π.χ. εἶναι $\sqrt{3}.\sqrt{27}=\sqrt{81}=9$· ὁμοίως $\sqrt{2}.\sqrt{32}=\sqrt{64}=8$· τοῦτο δὲ δὲν θὰ ἐφαίνετο, ἂν ἑκάστη τῶν ριζῶν εὑρίσκετο κατὰ προσέγγισιν καὶ ἔπειτα ἐπολλαπλασιάζοντο.

2) Τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ν ρίζης κλάσματος ἀνάγομεν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης ἀκεραίου (ὅπερ ἁπλούστερον), ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ παρονομαστὴς τελεία ν δύναμις. Οὕτω π.χ. εἶναι

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sqrt[3]{\frac{2}{5}}=\sqrt[3]{\frac{2.5.5}{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{50}}{5}$$

3) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς παραστάσεως ἔχει ριζικόν, δυνάμεθα νὰ μεταβιβάσωμεν αὐτὸ εἰς τὸν ἀριθμητήν, πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ ἁρμοδίαν τινὰ παράστασιν.

Ἔστω ἡ παράστασις $\frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}}$. Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτῆς πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\sqrt{\delta}$, γίνεται αὕτη $\frac{2\alpha\beta^2\gamma\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta}}$ ἤτοι $\frac{2\alpha\beta^2\gamma\sqrt{\delta}}{\delta}$.

Καὶ ὅταν ἡ παράστασις ἔχῃ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $\alpha+\sqrt{\beta}$ (ἔνθα α καὶ β εἶναι ρηταὶ παραστάσεις), ἀπαλλάσσεται ὁ παρονομαστὴς ἀπὸ τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς κλασματικῆς παραστάσεως ἐπὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$, διότι τότε γίνεται ὁ παρονομαστὴς

$$(\alpha+\sqrt{\beta}).(\alpha-\sqrt{\beta})=\alpha^2-(\sqrt{\beta})^2=\alpha^2-\beta, \quad \text{ἤτοι ρητός.}$$

Ἡ μεταβίβασις αὕτη τῶν ριζῶν ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς τὸν ἀριθμητὴν πρέπει νὰ γίνηται πάντοτε, ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν κλάσμα τι κατὰ προσέγγισιν· διότι συμφέρει πολὺ περισσότερον νὰ ἔχωμεν τὸν παρονομαστὴν ἀκριβῶς, τὸν δὲ ἀριθμητὴν μὲ προσέγγισιν ἢ νὰ ἔχωμεν τὸ ἐναντίον.

Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{\sqrt{12}}$ καὶ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν $\frac{5}{3}$· ἀλλ' ἂν γράψωμεν αὐτὸ $\frac{5\sqrt{12}}{12}$ ἢ $\frac{\sqrt{300}}{12}$ καὶ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν $\frac{17}{12}$, ὅπερ εἶναι πολὺ πλησιέστερον εἰς τὸ ἀληθές.

4) Ἐν τοῖς προηγουμένοις περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τῶν ριζῶν ὑπετίθετο διαρκῶς, ὅτι πρόκειται περὶ ριζῶν πραγματικῶν. Διὰ τοῦτο κατὰ τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ριζῶν, δέον νὰ προσέχωμεν, ὥστε νὰ μὴ ὑποπίπτωμεν εἰς σφάλματα. Π.χ. ὁ πολλαπλασιασμὸς $\sqrt{-4}$ ἐπὶ $\sqrt{-4}$ δίδει κατὰ τὰ ἀνωτέρω

$$\sqrt{(-4).(-4)}=\sqrt{16}=\pm 4\cdot$$

ἐνῷ τὸ ἀληθὲς γινόμενον εἶναι -4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

323) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα:

$\sqrt{2}.\sqrt{8}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}$ $\qquad$ $\sqrt{2\alpha}.\sqrt{18\alpha}$

$\sqrt{5}.\sqrt{125}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{36}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.\sqrt{\alpha}$

$\sqrt{12}.\sqrt{27}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{72}.\sqrt[3]{3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5\alpha^2}.\sqrt[3]{25\alpha}$

$\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{10}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{20}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{2\alpha}{3}}.\sqrt[3]{\frac{3\alpha^2}{2}}$

324) Ἐπίσης τὰ:

$\sqrt[3]{3}.\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{25}.\sqrt[6]{25}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{\alpha}.\sqrt[3]{\alpha}$

$\sqrt{2\alpha}.\sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[5]{2\alpha^2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4}.\sqrt{\frac{1}{8}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\sqrt{6}$

$\sqrt{\alpha}.\sqrt[\mu]{\beta}$ $\qquad$ $\sqrt[\mu]{\alpha}.\sqrt[2\mu]{\beta}$

325) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν δυνάμεων:

$\alpha^{\frac{1}{2}}$, $\quad$ $\alpha^{\frac{2}{3}}$, $\quad$ $\sqrt[6]{\alpha^5}$

326) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι:

$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$ $\qquad$ $\sqrt{700} = 10\sqrt{7}$

$5\sqrt{8} = \sqrt{200}$ $\qquad$ $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

$3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{162}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{875} = 5\sqrt[3]{7}$

327) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα:

$\sqrt{28} : \sqrt{7}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\alpha^2} : \sqrt[4]{\alpha^3}$ $\qquad$ $\alpha^{\frac{1}{2}} : \sqrt{\alpha}$

$\sqrt[3]{320} : \sqrt[3]{5}$ $\qquad$ $\sqrt{\alpha} : \sqrt[5]{\alpha^2}$ $\qquad$ $\alpha^{\frac{2}{5}} : \sqrt[10]{\alpha}$

$\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{12}$ $\qquad$ $\sqrt{\alpha\beta} : \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\alpha^2} : \alpha^{\frac{1}{6}}$

328) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα :

$$\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2 \qquad (\sqrt{\alpha})^3 \qquad \left(\sqrt[5]{\alpha^7}\right)^3$$

$$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2 \qquad (\alpha-\sqrt{\alpha})^2 \qquad (-\alpha+\sqrt{\beta})^2$$

329) Νὰ ἀπαλλαγῶσι τῶν ριζικῶν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων :

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \qquad \frac{4}{3-2\sqrt{2}} \qquad \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \qquad \frac{5\sqrt{2}+4}{5\sqrt{2}-4} \qquad \frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha-\beta}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1} \qquad \frac{1}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \qquad \frac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}$$

330) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha} \qquad \text{καὶ} \qquad \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$$

331) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ τίθεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ριζῶν εἶναι $\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγωνικῶν ριζῶν τρέπεται εἰς μίαν μόνην ρίζαν ἐὰν τὸ γινόμενον $\alpha.\beta$ τῶν ὑπορρίζων εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οὕτως εὑρίσκεται $\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$, $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$, $\sqrt{5}+\sqrt{45}=\sqrt{80}$

Ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος βλέπομεν, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παραστάσεως τῆς μορφῆς $\gamma+\sqrt{\delta}$ δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄθροισμα δύο ριζῶν τετραγωνικῶν ἢ καὶ εἰς ὁμοίαν παράστασιν. Οὕτως εἶναι $\sqrt{3+\sqrt{8}}=1+\sqrt{2}$, $\sqrt{29+\sqrt{720}}=3+2\sqrt{5}$,

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

332) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶναι $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, ὅταν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί· ὥστε ἡ τεττραγωνικὴ ρίζα ἀθροί-

σματος δὲν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν μερῶν του.

333) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$

334) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἰσότης $\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3}=\gamma$, ἐὰν α, β, γ εἶναι ἀκέραιοι, εἶναι ἀδύνατος.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν μονωνύμων.

129. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου μονωνύμου, τοῦτέστιν ἡ δύναμις $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, ἐξάγεται κατὰ τοὺς νόμους τῶν δυνάμεων (126), ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἑκάστου παράγοντος.

Ἐπειδὴ ἕκαστος παράγων εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἐξάγεται (126), διαιρουμένου τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς διὰ τοῦ 2. Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\sqrt{49\alpha^2\beta^2\gamma^8}=(49)^{\frac{1}{2}}.(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}.(\beta^2)^{\frac{1}{2}}.(\gamma^8)^{\frac{1}{2}}=\pm\, 7\alpha\beta\gamma^4$$

Κλασματικοῦ μονωνύμου ἡ ῥίζα ἐξάγεται, κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους (126), ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ. Κατὰ ταῦτα εἶναι:

$$\sqrt{\frac{25\alpha^2\beta^6\gamma^4}{36\delta^4}}=\left(\frac{25\alpha^2\beta^6\gamma^4}{36\delta^4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(25)^{\frac{1}{2}}.(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}.(\beta^6)^{\frac{1}{2}}.(\gamma^4)^{\frac{1}{2}}}{(36)^{\frac{1}{2}}.(\delta^4)^{\frac{1}{2}}}=$$
$$=\pm\,\frac{5\alpha\beta^3\gamma^2}{6\delta^2}$$

Τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ ἐγράφη πρὸ τῶν ἐξαγομένων, διότι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα καὶ πᾶσα ἀρτίου βαθμοῦ ῥίζα ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμὰς καὶ δύναται ἑπομένως τὸ ἐξαγόμενον νὰ ληφθῇ καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς.

Ἐάν τινος τῶν παραγόντων δὲν ἐξάγηται ἡ ῥίζα, ἀφίνομεν ἐπ᾽ αὐτοῦ σημειωμένην τὴν πρᾶξιν· ἤ, ἂν εἶναι δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς δύο, οὕτως, ὥστε νὰ ἐξάγηται ἡ ῥίζα τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων. Κατὰ ταῦτα εἶναι $\sqrt{5\alpha^2\beta^6\gamma^8}=\sqrt{5}\,.\,\alpha\beta^3\gamma^4$.

$$\sqrt{8\alpha^3\beta^4\gamma^6}=\sqrt{8}.\sqrt{\alpha^3}.\beta^2\gamma^3=\sqrt{2.4}.\ \sqrt{\alpha^2.\alpha}.\beta^2\gamma^3=$$
$$=2\sqrt{2}.\ \alpha\sqrt{\alpha}.\ \beta^2\gamma^3=2\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt{2\alpha}$$

Ὁμοίως $\sqrt{\dfrac{4\alpha^2\beta^4\gamma^2}{\delta}}=\dfrac{2\alpha\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

335) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν μονωνύμων :

1) $36\alpha^4\beta^2$	4) $-625\chi^6\psi^8$	7) $16\alpha\beta\gamma$
2) $144\alpha^2\chi^4\psi^6$	5) $-\dfrac{1}{9}\alpha^2\beta^2\gamma^4$	8) $-5\alpha^3\beta^5\gamma^2$
3) $\dfrac{4\alpha^4}{49\beta^2}$	6) $-\dfrac{18}{98}\alpha\chi^2\psi^{10}$	9) $-\dfrac{4}{9}\alpha\beta^3\gamma^7$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

130. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις· εἶναι δὲ αὗται ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς προερχομένη, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς ἀλλαχθῇ.***

Λέγω δὲ μίαν ἐξίσωσιν ***ἰσοδύναμον πρὸς δύο ἄλλας,*** ὅταν πᾶσα λύσις αὐτῆς εἶναι λύσις καὶ τῆς ἑτέρας τῶν δύο ἄλλων, καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα λύσις τῆς ἑτέρας τῶν δύο τούτων εἶναι λύσις καὶ τῆς πρώτης.

Ἔστω τυχοῦσα ἐξίσωσις $\alpha=\beta$, τῆς ὁποίας τὰ μέλη παριστῶμεν πρὸς συντομίαν ἕκαστον δι᾽ ἑνὸς γράμματος· λέγω, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2=\beta^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς $\alpha=\beta$ καὶ $\alpha=-\beta$.

Τοὐτέστι πᾶσα λύσις τῆς πρώτης θὰ εἶναι λύσις τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο δευτέρων καὶ πᾶσα λύσις τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο δευτέρων θὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς πρώτης.

Διότι, ἂν ἀληθεύσῃ ποτὲ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2=\beta^2$, ἤτοι, ἂν τὰ μέλη αὐτῆς $α^2$ καὶ $β^2$ γίνωσιν ἴσοι ἀριθμοί, ἐπειδὴ τῶν ἴσων ἀριθμῶν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι εἶναι ἢ ἴσαι ἢ ἀντίθετοι, θὰ εἶναι ἢ $α=β$ ἢ $α=-β$, ἤτοι θὰ ἀληθεύη καὶ μία ἐκ τῶν εἰρημένων δύο ἐξισώσεων· ἐὰν δὲ πάλιν ἀληθεύσῃ ἡ μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων $α=β$ ἢ $α=-β$, ἤτοι, ἂν α καὶ β γίνωσιν ἴσοι ἢ ἀντίθετοι ἀριθμοί, τὰ τετράγωνα αὐτῶν $α^2$ καὶ $β^2$ θὰ γίνωσιν ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ ἐξίσωσις $α^2=β^2$.

Τὸ αὐτὸ θεώρημα δύναται καὶ ὡς ἑξῆς νὰ ἐκφρασθῇ.

Ἐὰν ἀπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ληφθῇ δὲ ἡ ρίζα τοῦ ἑτέρου τῶν μελῶν καὶ μετὰ τοῦ + καὶ μετὰ τοῦ —, αἱ οὕτω προκύπτουσαι δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν δεδομένην.

Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις $α=β$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς δύο $\sqrt{α}=\sqrt{β}$ καὶ $\sqrt{α}=-\sqrt{β}$, διότι προκύπτει ἐξ ἑκατέρας αὐτῶν, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τετραγωνισθῶσιν.

Γενικὴ μορφὴ πάσης ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἥτις ἔχει ἕνα ἄγνωστον.

131. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἕνα ἔχουσα ἄγνωστον, δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφὴν $αχ^2+βχ+γ=0$ (1), γίνεται δὲ τοῦτο, ἀφοῦ ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταί, ἐκτελεσθῶσιν αἱ σημειωμέναι πράξεις, μετατεθῶσιν ἅπαντες οἱ ὅροι εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα ὅρον πάντες οἱ περιέχοντες τὸ $χ^2$, ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ περιέχοντες τὸ χ, ὡς καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι.

Ὁ συντελεστὴς α δὲν δύναται νὰ εἶναι 0· διότι τότε ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ πρώτου βαθμοῦ.

Ἀλλ᾽ ἐὰν ὁ συντελεστὴς β εἶναι 0, ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ

$$αχ^2+γ=0 \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ ὁ γνωστὸς ὅρος γ εἶναι 0, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$αχ^2+βχ=0 \qquad (3)$$

Τὰς δύο ταύτας μερικὰς περιπτώσεις θὰ ἐξετάσωμεν πρὸ τῆς γενικῆς.

132. ***Λύσις τῆς ἐξισώσεως $αχ^2+γ=0$.*** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $χ^2=25$, αἱ λύσεις τῆς ὁποίας εἶναι $χ=+\sqrt{25}$ ἢ $χ=-\sqrt{25}$ δηλαδὴ $χ=\pm 5$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+36=0$ εὑρίσκομεν $\chi^2=-36$ καὶ ἢ $\chi=+\sqrt{-36}$ ἢ $\chi=-\sqrt{-36}$, ἤτοι $\chi=\pm 6i$. Ἐκ δὲ τῆς $\alpha\chi^2+\gamma=0$ εὑρίσκομεν $\chi=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$. εἶναι δὲ αἱ λύσεις αὗται πραγματικαί, ὅταν $-\frac{\gamma}{\alpha}>0$, καὶ φανταστικαί, ὅταν $-\frac{\gamma}{\alpha}<0$.

Σημ. Αἱ ἐξισώσεις αὗται δύνανται νὰ λυθῶσι καὶ ὡς ἑξῆς 1) Ἐκ τῆς $\chi^2-25=0$ ἢ $\chi^2-5^2=0$, λαμβάνομεν $(\chi-5)(\chi+5)=0$. Ἐπειδὴ δὲ γινόμενον δύο παραγόντων τότε μόνον εἶναι 0, ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι 0, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ἢ $\chi-5=0$, δηλαδὴ $\chi=5$, ἢ $\chi+5=0$, δηλαδὴ $\chi=-5$.

2) Ἐκ δὲ τῆς $\chi^2+36=0$, ἐπειδὴ $+36=-(6i)^2$ λαμβάνομεν $\chi^2-(6i)^2=0$, ἤτοι $\chi-(6i)=0$ ἢ $\chi+6i=0$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν ἢ $\chi=6i$ ἢ $\chi=-6i$.

3) Ἡ δὲ $\alpha\chi^2+\gamma=0$ γράφεται $\chi^2-\left(\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2=0$, ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν $\left(\chi-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\cdot\left(\chi+\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)=0$, ὁπότε εὑρίσκομεν ἢ $\chi=\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ ἢ $\chi=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.

π.χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2+18=8\chi^2-62$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $5\chi^2-80=0$· ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{\frac{80}{5}}=\pm 4$.

133. ***Λύσις τῆς ἐξισώσεως*** $\boldsymbol{\alpha\chi^2+\beta\chi=0}$. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-6\chi=0$· ἀλλ᾽ αὕτη γράφεται $\chi(\chi-6)=0$· ὅθεν εὑρίσκομεν ἢ $\chi=0$ ἢ $\chi-6=0$, ἤτοι $\chi=6$.

Ἔστω ἤδη ἡ $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν ὁμοίως $\chi(\alpha\chi+\beta)=0$· ὅθεν ἢ $\chi=0$ ἢ $\alpha\chi+\beta=0$, ἐξ ἧς $\chi=-\frac{\beta}{\alpha}$.

Σημ. Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις δύνανται νὰ λυθῶσι καὶ ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-6\chi=0$ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέλος ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ χ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτοῦ ἐπὶ τὸν 3· ἂν ἑπομένως προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸ 3^2, τὸ πρῶτον μέλος θὰ γίνῃ τέ-

λειον τετράγωνον, δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν $\chi^2-6\chi+9=9$· ἤτοι $(\chi-3)^2=9$, ἐκ τῆς τελευταίας δὲ ταύτης εὑρίσκομεν:
$\chi-3=\pm\sqrt{9}$, ἤτοι ἢ $\chi=3+3=6$ ἢ $\chi=3-3=0$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$, λαμβάνομεν $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=0$· ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεως τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ, θὰ ἔχωμεν: $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ ἢ $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\frac{\beta}{2\alpha}$ ἤτοι ἢ $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha}=0$ ἢ $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

336) Νὰ λυθῶσι καὶ ἐπαληθευθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$2\chi^2-162=0$ $\qquad$ $\gamma\chi^2+\beta=\alpha$

$4\chi^2-3=897$ $\qquad$ $\alpha\chi^2-\beta=\chi^2+\gamma$

$7\chi^2+25=4\chi^2+13$ $\qquad$ $\alpha^2\chi^2+\beta=\beta^2\chi^2+\alpha$

$\left(\chi-\frac{1}{7}\right)\left(\chi+\frac{1}{7}\right)=\frac{15}{49}$ $\qquad$ $\frac{\alpha\chi}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta\chi}$

$\frac{5\chi}{9}=\frac{125}{\chi}$ $\qquad$ $\frac{\alpha\chi}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha\chi}$

$\frac{\chi^2}{6}+\frac{3}{8}+\chi^2=\frac{\chi^2}{5}+\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\chi^2=\alpha^2+2\alpha+1$

337) Ὁμοίως αἱ:

$\chi^2+11\chi=0$ $\qquad$ $\frac{4(\chi-12)}{3}=\frac{\chi+32}{\chi-2}$

$7\chi^2+21\chi=0$ $\qquad$ $\frac{\chi^2}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}=0$

$(\chi-7)(\chi+5)=9\chi-35$ $\qquad$ $\alpha\chi^2+\beta\chi=\beta\chi^2+\alpha\chi$

$(5\chi+2)(7\chi-10)=34\chi-20$ $\qquad$ $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)=\beta\chi-\alpha^2$

134. ***Λύσις τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.*** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2\chi^2-7\chi+3=0$· ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν $2\chi^2-7\chi=-3$ καὶ κατόπιν $\chi^2-\frac{7}{2}\chi=-\frac{3}{2}$. Ἐὰν ἤδη προσθέσωμεν εἰς

ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεως τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ, ἤτοι τὸ $\left(\frac{7}{4}\right)^2$, λαμβάνομεν

$$\chi^2-\frac{7}{2}\chi+\frac{49}{16}=\frac{49}{16}-\frac{3}{2} \quad \text{ἢ} \quad \left(\chi-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}, \text{ ἐξ ἧς ἔχομεν}$$

$$\chi-\frac{7}{4}=\pm\sqrt{\frac{25}{16}} \quad \text{ἤτοι ἢ } \chi=\frac{7}{4}+\frac{5}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$\text{ἢ } \chi=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Ἔστω ἤδη ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$· ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν $\alpha\chi^2+\beta\chi=-\gamma$ καὶ κατόπιν $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha}$· διὰ τῆς προσθέσεως δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ $\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἔχομεν

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}, \quad \text{ἤτοι} \quad \left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}.$$

ἐξάγοντες δὲ ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, εὑρίσκομεν $\quad \chi+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$

Ὅθεν ἢ $\chi=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ ἢ $\chi=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$,

δηλαδὴ
$$\boldsymbol{\chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad (1)$$

135. Ἡ ἔκφρασις αὕτη τοῦ χ εἶναι ***γενικὸς τύπος,*** δι᾽ οὗ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες λύουσιν οἱανδήποτε ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς προηγηθέντας συλλογισμούς.

Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος τύπου (1) βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχει ***δύο*** μὲν πραγματικὰς λύσεις ἢ ***ῥίζας,*** ἐὰν εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma>0}$, ***μίαν*** δὲ μόνην (πραγματικήν), ἐὰν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$ καὶ ***δύο μιγάδας,*** ἐὰν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma<0}$.

Σημ. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ χ εἶναι ἄρτιος, ὁ τύπος (1) λαμβάνει ἁπλουστέραν μορφήν, διότι, ἐὰν εἶναι $\beta=2\beta'$, ἔχομεν

$$\chi=\frac{-2\beta'\pm\sqrt{4\beta'^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta'+2\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}=$$

$$=\frac{-\beta'\pm\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha} \qquad (2)$$

Παράδειγμα 1ον). Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $10\chi^2+\chi-3=0$

Ἔχομεν κατὰ τὸν τύπον (1)

$$\chi=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.10.(-3)}}{2.10}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{20}=\frac{-1\pm11}{20}$$

ἤτοι $\chi=\frac{-1+11}{20}=\frac{1}{2}$ καὶ $\chi=\frac{-1-11}{20}=-\frac{3}{5}$.

2ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-10\chi+25=0$.

Κατὰ τὰ γνωστὰ ἔχομεν $\chi=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4.25}}{2}=\frac{10}{2}=5$.

3ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-4\chi+13=0$. Ἔχομεν κατὰ τὸν τύπον (2) $\chi=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$, ἤτοι $\chi=2+3i$ καὶ $\chi=2-3i$.

4ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-7\alpha\chi=-12\alpha^2$.

Μεταφέρομεν τὸ $-12\alpha^2$ εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα τὸν γενικὸν τύπον· οὕτω ἔχομεν $\chi^2-7\alpha\chi+12\alpha^2=0$ καὶ

$$\chi=\frac{7\alpha\pm\sqrt{49\alpha^2-4.12\alpha^2}}{2}=\frac{7\alpha\pm\sqrt{\alpha^2}}{2}=\frac{7\alpha\pm\alpha}{2},\ \text{ἤτοι}$$

$$\chi=\frac{7\alpha+\alpha}{2}=4\alpha \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{7\alpha-\alpha}{2}=3\alpha.$$

Σημ. Αἱ μερικαὶ περιπτώσεις (2) καὶ (3) (131) λύονται καὶ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

338) Νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ ἐπαληθευθῶσιν ἔπειτα· (εἰς ὅσας ἐξισώσεις αἱ ῥίζαι δὲν εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί, νὰ εὑρεθῶσιν αὗται κατὰ προσέγγισιν 0,01).

$\chi^2+2\chi=3$	$25=30\chi-9\chi^2$	$(\chi-3)^2+25=0$
$\chi^2-12\chi=-11$	$2+\chi-6\chi^2=0$	$-15\chi^2-2\chi+8=0$
$\chi^2-18\chi+45=0$	$6\chi^2=20-7\chi$	$15(\chi-1)=4\chi^2-3$
$\chi^2=34\chi+240$	$3\chi(\chi-1)=2(\chi+4)$	$3(2\chi^2-1)=10\chi$

339) Ὁμοίως αἱ:

$6\chi(4\chi+15)=-7(4\chi+5)$	$2\chi(\chi-1)+3\chi=5(\chi+2)-6$
$12(5\chi-2)\chi=-9(5\chi-2)$	$3\chi(4\chi-6)-6(3\chi+5)=2\chi(3\chi-14)$
$6\chi^2+26\frac{1}{4}=25\frac{1}{2}\chi$	$\frac{25\chi^2-24\chi}{40}=\frac{3\chi^2-4\chi}{24}+\frac{1}{5}$

$$\chi^2 - \frac{3}{2}\chi = -49\,\frac{9}{16} \qquad \frac{\chi(5\chi-7)}{30} = \frac{3(\chi-8)}{9} + 4$$

340) Ὁμοίως αἱ:

$$\chi^2 - 5{,}2\chi + 1 = 0 \qquad \chi^2 - 4\chi + 4{,}09 = 0$$
$$\chi^2 - 0{,}8\chi + 10{,}5 = 0 \qquad 5\chi^2 - 11\chi + 6{,}25 = 0$$
$$\chi^2 - 0{,}8\chi + 0{,}15 = 0 \qquad \chi^2 - 0{,}55\chi + 0{,}025 = 0$$
$$\chi^2 - 5\chi + 5{,}44 = 0 \qquad \chi^2 + \frac{2\chi}{5} - 0{,}05 = 0$$

341) Ὁμοίως αἱ ἐξισώσεις:

$$(3\chi+5)^2 + (\chi+1)^2 = 130 \qquad \left(\chi+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\chi+\frac{1}{3}\right)^2 = 3\frac{1}{12}$$
$$(2\chi-5)^2 - (\chi-2)^2 = 33 \qquad \left(2\chi+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(3\chi-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{19}{16}$$
$$(4\chi+1)^2 - (\chi-11)^2 = -75, \quad (\chi-2)^2 + \left(\chi-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{18\chi}{25}$$
$$(5\chi-2)^2 - (10\chi+11)^2 = -45, \left(2\chi-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\chi+\frac{3}{4}\right)^2 = \left(3\,\frac{5}{7}\right)\chi$$

342) Ὁμοίως νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$(\chi-3)(\chi-1) + (\chi+7)(\chi+2) = 50$$
$$(\chi-2)(\chi-4) + (\chi-3)(\chi-5) = 23$$
$$(\chi+1)(\chi+2) - (2\chi-3)(\chi+4) = 11$$
$$(5\chi-7)(2\chi-3) + 126 = 9(\chi-1)(2\chi-3)$$
$$3(\chi-6)(16-\chi) - 24(\chi-11) = (\chi-6)(\chi-4)$$
$$2(\chi-1)(\chi-2) + 3(\chi-3)(\chi-4) = (\chi-4)(\chi-7)$$
$$\chi(\chi+3)(\chi-4) + \chi(\chi-5)(\chi-3) = 2(\chi^3-1)$$
$$\chi(\chi-1)(\chi-2) + \chi(\chi-4)(\chi-5) = 2\chi(\chi-1)(\chi+2)$$

343) Ὁμοίως αἱ:

$$3\chi + \frac{1}{\chi} = 4 \qquad \frac{7}{2\chi-3} + \frac{5}{\chi-1} = 12$$
$$8\chi - \frac{3}{\chi} = -10 \qquad \frac{5\chi-1}{9} + \frac{3\chi-1}{5} = \frac{2}{\chi} + \chi - 1$$
$$\frac{342}{\chi-3} - \frac{342}{\chi} = 19 \qquad \frac{1}{\chi-1} - \frac{1}{\chi+3} = \frac{1}{35}$$
$$\frac{\chi+1}{\chi-3} = \frac{2(\chi+1)}{\chi+3} \qquad \frac{18+\chi}{6(3-\chi)} = \frac{20\chi+9}{19-8\chi} - \frac{13}{3-\chi}$$
$$\frac{\chi-2}{\chi-5} = \frac{2(\chi-5)}{\chi+2} + \frac{23}{30} \qquad \frac{5\chi}{\chi-7} - \frac{4(3\chi+1)}{\chi^2-49} = \frac{8-3\chi}{\chi+7}$$

344) Νὰ λυθῶσι καὶ νὰ ἐπαληθευθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$\chi^2 - 5\alpha\chi + 6\alpha^2 = 0 \qquad \alpha(\chi^2 - 3\beta) = (3\alpha^2 - \beta)\chi$$

$\chi^2-2\alpha\chi=\beta^2-\alpha^2$ $\qquad (\alpha^2-\beta^2)\chi^2-2\alpha^2\beta\chi+\alpha^2\beta^2=0$

$(\chi+\alpha)(\chi-\alpha)=2\alpha+1$ $\qquad (\alpha+\beta)^2(\chi^2-\chi)+\alpha\beta=0$

$(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)=\beta\chi-\alpha^2$ $\qquad (\alpha^2-\beta^2)\chi^2-2\chi(\alpha^2+\beta^2)=\beta^2-\alpha^2$

345) Ὁμοίως αἱ:

$$\frac{\alpha}{\chi+\beta}+\frac{\beta}{\chi-\alpha}=2 \qquad \frac{\chi+\alpha}{\chi-\beta}+\frac{\chi+\beta}{\chi-\alpha}=2$$

$$\frac{\chi^2+1}{\chi}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha} \qquad \frac{\chi}{2\alpha}+\frac{\alpha}{2\chi}=\frac{2\beta}{\chi}-\frac{2\chi}{\beta}$$

346) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+2\beta\chi-\gamma^2$ εἶναι πραγματικαὶ (οἱ ἐγγράμματοι συντελεσταὶ ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί).

347) Ὁμοίως διὰ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)=\gamma^2$.

348) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ εἶναι πάντοτε πραγματικαί, ὅταν τὸ κ εἶναι ἀρνητικόν.

349) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$2\chi^2+(4+\gamma)\chi+2\gamma=0$ εἶναι σύμμετροι.

350) Ὁμοίως διὰ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha(\chi^2-3\beta)=(3\alpha^2-\beta)\chi.$$

351) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, δι' ἣν ἡ ἐξίσωσις $9\chi^2-3\chi+\mu=0$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν.

352) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, δι' ἣν ἡ ἐξίσωσις $(\mu-1)\chi+12\chi+\mu+4=0$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν.

353) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, δι' ἣν ἡ ἐξίσωσις $(2\mu-1)\chi^2-2(\mu+1)\chi+(\mu-1)=0$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν.

Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

136. Ἂν παραστήσωμεν διὰ ρ′ καὶ ρ″ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχομεν:

$$\rho'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad \rho''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$\rho'+\rho''=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ αὐτάς, εὑρίσκομεν:

$$\varrho'\varrho'' = \frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{2\alpha}\cdot\frac{(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{2\alpha} =$$

$$= \frac{(-\beta)^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Παρατηρητέον, ὅτι αἱ ἰδιότητες αὗται μένουσι καὶ ὅταν μία μόνη ῥίζα ὑπάρχῃ, ***ἐὰν θεωρηθῇ αὕτη ὡς διπλῆ***· διότι τότε τὰ ρ′ καὶ ρ′′ γίνονται ἴσα.

137. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τούτων τῶν ῥιζῶν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ ἑπόμενα ζητήματα.

1) ***Εὑρεῖν τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, πρὶν ἢ λυθῇ αὕτη.***

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι ἀρνητικός, αἱ ῥίζαι εἶναι μιγάδες ἀριθμοί. Θεωρήσωμεν λοιπὸν τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι θετικός, ὅτε αἱ ῥίζαι εἶναι πραγματικαί. Τότε δυνατὸν νὰ εἶναι:

α′) $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, ὁπότε αἱ δύο ῥίζαι εἶναι ***ὁμόσημοι*** καὶ θὰ εἶναι θετικαὶ μέν, ἂν εἶναι καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, ἀρνητικαὶ δέ, ἂν $-\frac{\beta}{\alpha}<0$.

β′) $\frac{\gamma}{\alpha}<0$· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ ῥίζαι εἶναι ***ἑτερόσημοι*** καὶ μεγαλυτέρα ἀπολύτως ἡ θετική, ἂν εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}>0$· ἂν ὅμως $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀρνητικὴ κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν.

γ′) $\frac{\gamma}{\alpha}=0$· ἀλλὰ τότε ἡ μὲν μία ῥίζα εἶναι 0, ἡ δὲ ἄλλη $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi-3=0$ ἔχει μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικὴν ῥίζαν, μεγαλυτέραν δὲ τὴν θετικήν. Ἡ δὲ ἐξίσωσις $\chi^2+8\chi=-7$ ἔχει δύο ἀρνητικάς.

2) ***Πῶς μεταβάλλονται αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅταν οἱ μὲν ἀριθμοὶ β καὶ γ μένωσιν ἀμετάβλητοι, ὁ δὲ α ἐλαττῶται ἀπαύστως καὶ πλησιάζει πρὸς τὸ 0;***

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ πλησιάζει ἀπαύστως πρὸς τὴν $\beta\chi+\gamma=0$, ἕπεται, ὅτι μία ἐκ τῶν ῥιζῶν αὐτῆς πλησιάζει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $-\frac{\gamma}{\beta}$, ὅστις πληροῖ τὴν $\beta\chi+\gamma=0$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}$, ἕπεται, ὅτι ἡ ἄλλη ῥίζα διαφέρει τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}$ τόσῳ ὀλιγώτερον, ὅσῳ μικρότερον εἶναι τὸ α.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη ρίζα καταντᾷ μεγαλυτέρα παντὸς ἀριθμοῦ (κατ' ἀπόλυτον τιμήν), ὅταν τὸ α γίνῃ ἱκανῶς μικρόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

354) Τῆς ἐξισώσεως $10\chi^2-99\chi-10=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι 10. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

355) Τῆς ἐξισώσεως $15\chi^2+19\chi+6=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι $-\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁμοίως ἡ ἄλλη.

356) Τῆς ἐξισώσεως $2{,}5\chi^2-8{,}79\chi+7{,}58=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι 2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη.

357) Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $\alpha(\chi^2+\beta)=\chi(\alpha^2+\beta)$ ἡ μία ρίζα εἶναι α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη.

358) Ἐὰν δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ἔχωσι τὰς αὐτὰς ρίζας, οἱ συντελεσταὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι καὶ ἀντιστρόφως.

359) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθῶσιν αὗται

$$\chi^2-14\chi+40=0 \qquad \chi^2+4\chi-21=0 \qquad \frac{\chi^2-3}{\chi-2}=-\frac{1}{4}$$

$$\chi^2+10\chi+24=0 \qquad 6\chi^2-\chi-1=0$$

$$\chi^2-2\chi-15=0 \qquad 20\chi^2-7\chi-3=0 \qquad \frac{\chi^2+\chi-1}{\chi}=4$$

360) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γ, διὰ τὴν ὁποίαν ἐν τῇ ἐξισώσει $9\chi^2-18\chi+\gamma=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

361) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γ, διὰ τὴν ὁποίαν ἐν τῇ ἐξισώσει $4\chi^2-8\chi+\gamma=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης.

362) Τῆς ἐξισώσεως $9\chi^2+\beta\chi+2=0$ νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ β, δι' ἣν ἡ μία ρίζα εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

363) Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $4\chi^2+\beta\chi+1=0$ νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ β, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία ρίζα εἶναι τετραπλασία τῆς ἄλλης.

364) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ρ′ καὶ ρ″, ὧν γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα $-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ τὸ γινόμενον $\frac{\gamma}{\alpha}$. (οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0$ ἢ τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$).

365) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, οἵτινες ἔχουσιν ἄθροισμα 16, 4, —10, —4, 5, $\frac{34}{15}$ καὶ γινόμενα ἀντιστοίχως 48, —21, 21, 2, 1, 1.

366) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.
(Παρατηροῦμεν, ὅτι $\rho'^2+\rho''^2=(\rho'+\rho'')^2-2\rho'\rho''$. Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\rho'+\rho''$ καὶ $\rho'\rho''$ διὰ τῶν γνωστῶν $-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$).

367) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-9\chi+3=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

368) Ὁμοίως καὶ τῆς ἐξισώσεως $4\chi^2+13\chi+3=0$.

369) Ὁμοίως καὶ τῆς ἐξισώσεως $12\chi^2-7\chi+1=0$.

370) Ἐὰν ρ′ καί ρ″ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3\chi^2+2\chi-5=0$, νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\rho'^2\rho''+\rho'\rho''^2$, $\frac{\rho'}{\rho''}+\frac{\rho''}{\rho'}$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

371) Ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2-(\mu-11)\chi+\mu=0$ νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, δι᾿ ἣν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν αὐτῆς εἶναι 41.

372) Ὁμοίως ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2-(\mu-10)\chi+\mu-1=0$ νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν αὐτῆς εἶναι 45.

373) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. (ἀπ. $\frac{\beta(3\alpha\gamma-\beta^2)}{\alpha^3}$).

374) Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι ρ′ καὶ ρ″, νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος ἔχουσα ρίζας $\rho'+\varepsilon$ καὶ $\rho''+\varepsilon$.

375) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως
$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0.$$

376) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθῶσιν

$\chi^2-16\chi+63=0$ $\quad$ $16\chi^2-16\chi+3=0$

$\chi^2+9\chi+36=0$ $\quad$ $16\chi^2+3\chi-1=0$.

Ἀνάλυσις παντὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς παράγοντας τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

138. Ἔστω τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ καὶ ἂς παρασταθῶσι διὰ ϱ' καὶ ϱ'' αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως, ἥτις προκύπτει, ὅταν τὸ τριώνυμον τοῦτο τεθῇ ἴσον τῷ 0, ἤτοι τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἤ, θέτοντες κοινὸν παράγοντα τὸν α, τῆς $\alpha\left(\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0$· τότε, ὡς ἐμάθομεν, εἶναι $\varrho'+\varrho''=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\varrho'\varrho''=\frac{\gamma}{\alpha}$· ἐπομένως τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\alpha[\chi-(\varrho'+\varrho'')\chi+\varrho'.\varrho'']$ τοῦτο δὲ εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων $\alpha(\chi-\varrho').(\chi-\varrho'')$· ὅθεν ἕπεται

$$\boldsymbol{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\varrho').(\chi-\varrho'')}. \qquad (1)$$

Ἐὰν αἱ δύο ρίζαι ϱ' καὶ ϱ'' εἶναι ἴσαι (ἤτοι, ἂν εἷς καὶ μόνος ἀριθμός μηδενίζῃ τὸ τριώνυμον) βλέπομεν ἐκ τῆς ἰσότητος (1), ὅτι τὸ τριώνυμον εἶναι γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τέλειον τετράγωνον.

Κατὰ ταῦτα τὸ τριώνυμον $\chi^2-5\chi+6$ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi-2).(\chi-3)$, διότι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-5\chi+6=0$ εἶναι 2 καὶ 3.

Καὶ τὸ τριώνυμον $\chi^2+7\chi-8$ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi-1).(\chi+8)$, διότι οἱ μηδενίζοντες αὐτὸ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ -8 καὶ $+1$.

Καὶ τὸ τριώνυμον $5\chi^2+9\chi-2$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $5(\chi+2).\left(\chi-\frac{1}{5}\right)$ ἢ τῷ $(\chi+2).(5\chi-1)$, διότι οἱ μηδενίζοντες αὐτὸ ἀριθμοὶ εἶναι -2 καὶ $\frac{1}{5}$.

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἐξηγεῖ, διατὶ ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχει δύο ρίζας. Καὶ ὄντως, ἐπειδὴ $\alpha\neq 0$, τὸ γινόμενον $\alpha(\chi-\varrho')(\chi-\varrho'')$ μηδενίζεται κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, δηλαδὴ μηδενιζομένου ἢ τοῦ $\chi-\varrho'$ ἢ τοῦ $\chi-\varrho''$. Ἐὰν δὲ ἐξισώσωμεν μὲ τὸ 0 πρῶτον τὸν ἕνα παράγοντα καὶ ἔπειτα τὸν ἄλλον, θὰ λάβωμεν τὰς δύο ρίζας τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, ἔχουσαν ρίζας δύο, ὡς ἔτυχε, δεδομένους ἀριθμούς, ὡς τοὺς λ καὶ ϱ· πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $(\chi-\lambda)(\chi-\varrho)$ καὶ ἐξισοῦμεν αὐτὸ μὲ τὸ 0, ἤτοι θέτομεν $(\chi-\lambda)(\chi-\varrho)=0$.

Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ διαφόρους τῶν ριζῶν του.

139. Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\gamma+\gamma$ καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἐξετάσωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ὅταν τὸ χ λαμβάνῃ πραγματικὰς τιμάς, αἵτινες δὲν μηδενίζουσιν αὐτό, δηλαδὴ διαφόρους τῶν ριζῶν του. Πρὸς τοῦτο διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α΄) Ἂν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma>0}$, ἤτοι, ἂν αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου ρ' καὶ ρ'' εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἔχομεν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\rho')(\chi-\rho'').$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι $\rho'<\rho''$· τότε εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι

1) $\chi<\rho'$ ἄρα καὶ $\chi<\rho''$.

Ἀλλὰ τότε οἱ παράγοντες $(\chi-\rho')$ καὶ $(\chi-\rho'')$ εἶναι ἀμφότεροι ἀρνητικοὶ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θετικόν· ὥστε τὸ γινόμενον $\alpha(\chi-\rho').(\chi-\rho'')$ ἢ τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

2) $\chi>\rho''$ ἄρα καὶ $\chi>\rho'$

τότε οἱ παράγοντες $(\chi-\rho')$ καὶ $(\chi-\rho'')$ εἶναι ἀμφότεροι θετικοὶ καὶ τὸ τριώνυμον ἔχει πάλιν τὸ σημεῖον τοῦ α.

καὶ 3) $\rho'<\chi<\rho''$.

ἐν τῇ ὑποθέσει ταύτῃ ὁ παράγων $(\chi-\rho')$ εἶναι θετικός, ἐνῷ ὁ $(\chi-\rho'')$ εἶναι ἀρνητικός. Ἑπομένως τὸ γινόμενον $(\chi-\rho').(\chi-\rho'')$ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ τὸ τριώνυμον ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α.

Π.χ. Τὸ τριώνυμον $\chi^2+3\chi-4$, οὗ αἱ ρίζαι εἶναι -4 καὶ 1, εἶναι θετικὸν μέν, ὅταν τὸ χ λάβῃ τιμὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν, δηλαδή, ὅταν τὸ χ εἶναι μικρότερον τοῦ -4 καὶ μεγαλύτερον τοῦ 1, ἀρνητικὸν δέ, ὅταν τὸ χ λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τοῦ -4 καὶ 1.

β΄) Ἂν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$, ἤτοι ἂν αἱ ρίζαι ρ' καὶ ρ'' εἶναι ἴσαι, ἔχομεν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\rho')^2$.

Ἀλλ᾿ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ (πλὴν τῆς $\chi=\rho'$).

Π.χ. Τὸ τριώνυμον $\chi^2+6\chi+9$ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ (ἐκτὸς τῆς $\chi=-3$).

γ΄) Ἐν αὐτῇ ὑποθέτομεν, ὅτι $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma<0}$, ἤτοι ὅτι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι φανταστικαὶ συζυγεῖς.

Τότε ἔχομεν, ἂν $\rho'=\mu+\lambda i$ καὶ $\rho''=\mu-\lambda i$,

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\,[(\chi-\mu)-\lambda i][(\chi-\mu)+\lambda i]$$
$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\,[(\chi-\mu)^2+\lambda^2].$$

Ἐπειδὴ δέ, ὡς βλέπομεν, τὸ τριώνυμον εἶναι γινόμενον τοῦ α ἐπὶ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ὅπερ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἕπεται, ὅτι τοῦτο ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Π.χ. τὸ τριώνυμον $-\chi^2+8\chi-20$, οὗ αἱ ῥίζαι εἶναι φανταστικαὶ συζυγεῖς, εἶναι ἀρνητικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμήν τοῦ χ (διαφόρου τῶν ῥιζῶν), ***πλὴν ὅταν, τοῦ τριωνύμου ἔχοντος ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, τὸ χ λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

377) Νὰ τραπῶσιν εἰς γινόμενα τὰ κάτωθι τριώνυμα.

$\chi^2-9\chi+14 \qquad \chi^2-4\chi-45 \qquad \chi^2+9\chi-22$

$\chi^2-4\chi+43 \qquad 2\chi^2+3\chi+2 \qquad 25\chi^2+10\chi+1$

$12\chi^2+5\chi-3 \qquad 35\chi^2-\chi-6 \qquad 35\chi^2-3\chi-2$

378) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα :

$$\frac{\chi^2-8\chi+15}{\chi^2-10\chi+21} \qquad \frac{\chi^2+5\chi-6}{\chi^2+4\chi-12} \qquad \frac{15\chi^2-11\chi+2}{30\chi^2-17\chi+2}$$

$$\frac{3\chi^2-5\chi-2}{3\chi^2+10\chi+3} \qquad \frac{4\chi^2+17\chi+4}{4\chi^2+5\chi+1} \qquad \frac{7\chi^2+31\chi+12}{7\chi^2-32\chi-15}$$

379) Ὁμοίως τὰ :

$$\frac{2\chi^2-\chi-3}{4\chi^2-12\chi+9} \qquad \frac{2\chi^2+9\chi-35}{4\chi^2-12\chi+5}$$

$$\frac{15\chi^2-8\chi+1}{3\chi-1} \qquad \frac{7\chi+2}{14\chi^2+53\chi+14}$$

380) Νὰ εὑρεθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς καὶ ἀκεραίους ἔχουσα ῥίζας :

$8, -5 \qquad 5+\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3} \qquad 2\alpha,\ 5\alpha \qquad \alpha+i\sqrt{\beta},\ \alpha-i\sqrt{\beta}$

$7, \frac{1}{3} \qquad 2+\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha+\beta,\ \alpha-\beta \qquad \alpha+\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\ \alpha-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

$-\frac{2}{5}, \frac{2}{4} \qquad -3+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ -3-\frac{i\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha+\sqrt{\beta},\ \alpha-\sqrt{\beta} \qquad \alpha,\ \alpha^2$

381) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ τὰ κάτωθι τριώνυμα ἔχουν τιμὰς θετικάς, ἀρνητικὰς ἢ μηδέν ;

$\chi^2-10\chi+21$	$2\chi^2-3\chi+1$	$-2\chi^2+14\chi-20$
$5\chi^2-38\chi+21$	$-16\chi^2-48\chi+61$	$-\chi^2+3\chi+54$
$9\chi^2-12\chi+4$	$-\chi^2+6\chi-34$	$16\chi^2-10\chi+1$
$-72\chi^2+17\chi-1$		

382) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ λ καὶ μ, τιθέμενοι ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, δίδωσιν ἐξαγόμενα ἑτεροειδῆ, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

383) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν $-3, -2, -1, 2, 3$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθῶσιν αὗται.

$4\chi^2+8\chi-5=0$	$9\chi^2-15\chi+6=0$
$4\chi^2+8\chi+3=0$	$\chi^2-4\chi+3,99=0$

Λύσις ἀνισοτήτων δευτέρου βαθμοῦ.

140. Πᾶσα ἀνισότης δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ ἀναχθῇ ἐν γένει εἰς τὴν μορφὴν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$ ἢ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma<0$· ἀλλὰ καὶ ἡ δευτέρα μορφὴ ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν σημείων πάντων τῶν ὅρων αὐτῆς, ἥτις ἀντιστρέφει τὴν ἀνισότητα.

Λύσις τῆς ἀνισότητος $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$ λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ χ δι᾽ ἃς τὸ τριώνυμον γίνεται θετικόν. Ὥστε διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα ταύτην, θὰ ἐξετάσωμεν τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἰς τὰς περιπτώσεις, καθ᾽ ἃς εἶναι:

1) $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, ὁπότε αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου ρ' καὶ ρ'' εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἐὰν α εἶναι θετικόν, πρέπει τὸ χ νὰ λάβῃ τιμὰς μεγαλυτέρας τῆς μεγαλυτέρας ρίζης ἢ μικροτέρας τῆς μικροτέρας· δηλ., ἂν $\rho'<\rho''$, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\chi<\rho'$ ἢ $\chi>\rho''$. Ἐὰν δὲ τὸ α εἶναι ἀρνητικόν, τότε τὸ χ πρέπει νὰ λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\rho'<\chi<\rho''$.

2) $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ὁπότε, ἐὰν τὸ α εἶναι θετικόν, ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ διαφόρου τῆς τιμῆς τῆς ρί-

ζης, ἐὰν δὲ τὸ α εἶναι ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται δι᾿ οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ χ.

3) $\beta^2 - 4\alpha\gamma < O$· ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἐὰν α εἶναι θετικόν, δι᾿ οὐδεμίαν δέ, ἐὰν τὸ α εἶναι ἀρνητικόν.

Π. χ. νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $2\chi^2 - 7\chi + 6 > 0$. Ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι 2 καὶ $\frac{3}{2}$ καὶ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ^2 θετικός, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\chi > 2$ ἢ $\chi < \frac{3}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες :

1) $\chi^2 + 2\chi - 15 < 0$ 4) $\chi^2 + 2\chi + 6 < 0$

2) $\chi^2 - 8 > 9$ 5) $\chi^2 + \chi + 10 > 0$

3) $\chi^2 + 4\chi - 1 > 0$ 6) $2\chi^2 - 5\chi - 3 < (\chi - 1)^2$

385) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες :

$\chi + \frac{10}{\chi} > 7$ $\frac{(\chi-1)(\chi-2)}{(\chi-3)(\chi-4)} > 1$

$\frac{1}{\chi+1} - \frac{1}{\chi} < -\frac{1}{30}$ $\frac{\chi+1}{\chi-1} < \frac{\chi+3}{\chi+1}$

386) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες :

$\alpha^2\chi^2 - (1+\alpha^2)\chi + 1 > 0$, $(1+\alpha)\chi^2 - 3\alpha\chi + 1 > 0$

387) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α ἡ ἀνισότης $\chi^2 - 2\chi + \alpha > 0$ ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμήν τοῦ χ ;

388) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ ἐπαληθεύονται ἀμφότεραι αἱ ἀνισότητες $\chi^2 - 9\chi + 14 > 0$, $\chi^2 - 4\chi - 5 < 0$;

389) Ὁμοίως διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ ἐπαληθεύονται ἀμφότεραι αἱ ἀνισότητες $\chi^2 + 12\chi + 35 > 0$ $\chi^2 + 15\chi + 54 < 0$;

390) Ὁμοίως διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ ἐπαληθεύονται ἀμφότεραι αἱ ἀνισότητες $\chi^2 - 7\chi + 6 > 0$ $\chi^2 - 6\chi + 8 < 0$.

Συστήματα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

141. *Ἓν σύστημα ἐξισώσεων λέγεται δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν μία τοὐλάχιστον ἐξίσωσις τοῦ συστήματος εἶναι δευ-*

τέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ὅλους τοὺς ἀγνώστους τοῦ συστήματος, τῶν ἄλλων ἐξισώσεων δυναμένων νὰ εἶναι καὶ πρώτου βαθμοῦ (χωρὶς ὅμως νὰ δύνανται νὰ εἶναι καὶ βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ δευτέρου).

Οὕτω τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι δευτέρου βαθμοῦ:

$\chi^2+\psi^2=34$	$\chi+\psi=2$	$\chi^2+\psi^2+\varphi^2=5$
$\chi^2-\psi^2=16$	$\chi\psi=-35$	$\chi+\psi+\varphi=3$
		$\chi-\psi-\varphi=1$

Αἱ μέθοδοι τῆς λύσεως τῶν συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ εἶναι διάφοροι. Διὰ τὰ ἁπλούστατα ἐξ αὐτῶν ὁ τρόπος τῆς λύσεως φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

1ον) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\chi-\psi=4$
$\chi\psi=12$

Ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $\chi=4+\psi$· θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὸν ψ, ἤτοι $(4+\psi).\psi=12$ ἢ $\psi^2+4\psi=12$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\psi_1=2$ καὶ $\psi_2=-6$. Αἱ τιμαὶ ἤδη τοῦ χ εὑρίσκονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi=4+\psi$ καὶ εἶναι $\chi_1=6$ καὶ $\chi_2=-2$,

ἤτοι $\chi_1=6,\quad \psi_1=2,\quad$ ἢ $\quad \chi_2=-2,\quad \psi_2=-6$

2ον) $3\chi+2\psi=7$
$\chi\psi=2$

Ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $\psi=\dfrac{7-3\chi}{2}$ (1) καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δευτέραν $\chi.\dfrac{(7-3\chi)}{2}=2$ ἢ $3\chi^2-7\chi+4=0$, ἐξ ἧς καὶ ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $\chi_1=1$, $\psi_1=2$ ἢ $\chi_2=\dfrac{4}{3}$ $\psi_2=\dfrac{3}{2}$

3ον) $\chi^2+\psi^2=25$
$\chi+\psi=7$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως, εὑρίσκομεν $\chi_1=4$, $\psi_1=3$ ἢ $\chi_2=3$, $\psi_2=4$.

4ον) $\chi^2+\psi^2=25$
$\chi^2-\psi^2=7$

Διὰ προσθέσεως εὑρίσκομεν $2\chi^2=32$, ἤτοι $\chi_1=4$, $\chi_2=-4$ καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν πρώτην εὑρίσκομεν $\psi_1=3$ καὶ $\psi_2=-3$.

5ον) $\chi^2+\psi^2=29$
$\chi\psi=10$

Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας, ἔχομεν $\chi^2+\psi^2=29$
$2\chi\psi=20$

καὶ διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως αὐτῶν εὑρίσκομεν:

$$(\chi+\psi)^2=49 \quad \text{ἤτοι} \quad \chi+\psi=\pm 7$$
$$(\chi-\psi)^2=9 \quad » \quad \chi-\psi=\pm 3.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἤδη τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ, πρέπει νὰ λύσωμεν τὰ κάτωθι συστήματα πρώτου βαθμοῦ

$\chi+\psi=7$	$\chi+\psi=7$	$\chi+\psi=-7$	$\chi+\psi=-7$
$\chi-\psi=3$	$\chi-\psi=-3$	$\chi-\psi=+3$	$\chi-\psi=-3$
$\chi_1=5$	$\chi_2=2$	$\chi_3=-2$	$\chi_4=-5$
$\psi_1=2$	$\psi_2=5$	$\psi_3=-5$	$\psi_4=-2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

391) Νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα:

1) $\psi^2-\chi=20$, $\chi-\psi=0$

2) $\chi-2\psi=3$, $\chi\psi=2$

3) $\chi^2+\psi^2=25$, $\chi+3\psi=5$

4) $\chi^2-\psi^2=13$, $2\chi-3\psi=-4$

5) $\chi+\psi=2$, $2\chi^2-3\psi^2=23$

6) $4\chi^2-\psi^2=0$, $5\chi-2\psi=1$

7) $7\psi^2-5\chi^2=23$, $10\chi-6\psi=8$

8) $5\chi-7\psi+6=0$, $\chi^2+\psi^2=18$

9) $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=-\dfrac{1}{6}$, $\chi+\psi=1$

10) $\dfrac{3}{\chi}-\dfrac{3}{\psi}=3$, $\chi-\psi=-\dfrac{1}{20}$

392) Ὁμοίως νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα:

1) $5\chi^2+2\psi^2=22$, $3\chi^2-3\psi^2=7$

2) $4\chi^2+5\psi^2=105$, $3\chi^2-5\psi^2=70$

3) $2\chi^2-3\psi^2=6$, $3\chi^2-2\psi^2=19$

4) $2\chi^2+3\psi=71$, $3\chi^2-3\psi=54$

5) $9\psi^2 - 4\chi\psi = 7$

$2\psi^2 + 4\chi\psi = 4$

6) $3\chi\psi + \chi^2 = 42$

$5\chi^2 + 6\chi\psi = 192$

7) $\chi^2 + 3\chi\psi + 2\psi^2 = 70$

$\chi^2 + 3\chi\psi - 2\psi^2 = 34$

8) $\chi^2 + \psi^2 + \chi + \psi = 18$

$\chi^2 - \psi^2 + \chi - \psi = 6$

9) $\frac{1}{\chi^2} + \frac{1}{\psi^2} = 20$

$\frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\psi^2} = -12$

10) $\frac{6}{\chi^2} - \frac{3}{\psi^2} = 45$

$\frac{3}{\chi^2} + \frac{6}{\psi^2} = 45$

393) Ὁμοίως νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα:

1) $\chi^2 + \psi^2 = 101$

$\chi\psi = 10$

2) $\chi^2 + \psi^2 = 89$

$4\chi\psi = 160$

3) $\chi^2 + 4\psi^2 = 5$

$\chi\psi = 1$

4) $9\chi^2 + 4\psi^2 = 2$

$6\chi\psi = 1$

5) $25\chi^2 + 16\psi^2 = 13$

$10\chi\psi = 3$

6) $\chi^2 + \psi^2 = 25$

$\chi + \psi = -1$

7) $\chi^2 + \psi^2 = 5$

$\chi - \psi = 1$

8) $\chi^2 + 9\psi^2 = 85$

$\chi + 3\psi = 13$

9) $9\chi^2 + 4\psi^2 = 405$

$3\chi - 2\psi = -9$

10) $\frac{2}{\chi} + \frac{3}{\psi} = 31$

$\frac{4}{\chi^2} + \frac{9}{\psi^2} = 541$

394) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi + \psi + \chi\psi = -1$

$\chi^2\psi + \chi\psi^2 = -6$

(ἐξάγομεν ἐκ τῆς δευτέρας κοινὸν παράγοντα τὸν $\chi\psi$ καὶ κατόπιν θέτομεν $\chi + \psi = \varphi$ καὶ $\chi\psi = \omega$)

395) Νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα:

1) $\chi\psi + \chi + \psi = -1$

$2\chi^2\psi + 2\psi^2\chi = -84$

2) $\chi - \psi + \chi\psi = 21$

$\chi^2\psi - \chi\psi^2 = 54$

3) $\chi + \psi - \chi\psi = 12$

$\chi^2\psi + \chi\psi^2 = -35$

4) $\chi - \psi - \chi\psi = -1$

$\chi^2\psi - \chi\psi^2 = 6$

396) Ὁμοίως νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα:

1) $\chi^2+\psi^2=25$
$\chi\psi+\chi+\psi=5$ (θέτομεν $\chi^2+\psi^2=(\chi+\psi)^2-2\chi\psi$)

2) $\chi^2+\psi^2=13$
$\chi\psi+\chi+\psi=-7$

3) $\chi^2+\psi^2+\chi\psi=21$
$\chi\psi+\chi+\psi=-1$

4) $\chi^2+\psi^2+\chi+\psi=22$
$\chi\psi+\chi+\psi=-9$

5) $\chi^2+\psi^2-\chi+\psi=18$
$\chi\psi+\chi-\psi=-5$

6) $\chi+\chi\psi+\psi=5$
$\chi^2+\chi^2\psi^2+\psi^2=7$

7) $\chi^2+\psi^2+\chi-\psi=12$
$2\chi\psi=3(\chi-\psi)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Γραφικὴ παράστασις ἁπλῶν τινων συναρτήσεων.

142. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\chi^2$, τῆς ὁποίας τὰς μεταβολὰς θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν χ σειράν τινα τιμῶν, ἑκάστη τιμὴ αὐτοῦ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ψ παριστᾷ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου· ὁ τόπος δὲ τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις αὕτη. Ἐπειδὴ δὲ

διὰ $\chi=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm5$
εἶναι $\psi=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25$

εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $\psi=\chi^2$ εἶναι ἡ τοῦ ἔναντι σχήματος.

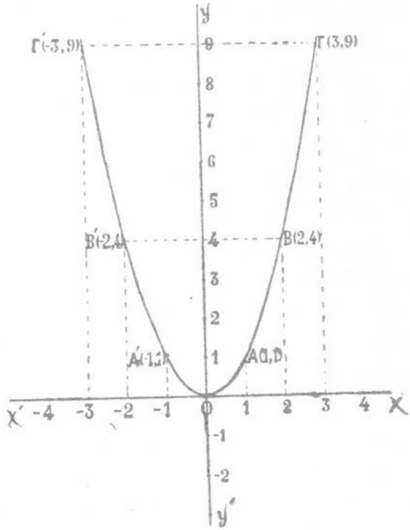
Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι αὕτη εἶναι καμπύλη γραμμή, διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, καί, ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους ἐκτεινομένους εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν· διότι π.χ.

διὰ $\chi=\pm100,\ \pm1000,\ \pm10000\ldots$
εἶναι $\psi=10000,\ 1000000,\ 100000000\ldots$
καὶ διὰ $\chi=\pm\infty$ εἶναι προφανῶς $\psi=+\infty$.

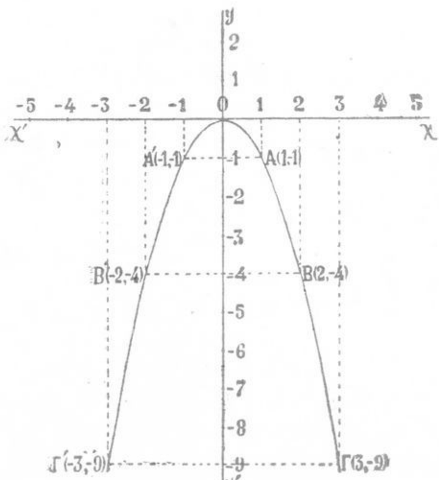
Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἑνὸς κλάδου ἔχει τὸ συμμετρικόν του εἰς τὸν ἄλλον ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Οψ· ἑπομένως ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ***συμμετρικὴ*** ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον.

Ἡ καμπύλη $\psi=\chi^2$ λέγεται ***παραβολὴ*** καὶ τὸ σημεῖον Ο ***κορυφὴ*** αὐτῆς.

143. Ἡ συνάρτησις $\psi=\chi^2$, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0, ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0 καὶ αὐξάνει ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$. Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ἡ $\psi=\chi^2$ ἔχει μίαν τιμὴν ***ἐλαχίστην*** διὰ $\chi=0$.



144. Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $\psi=-\chi^2$· ἐὰν ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον, εὑρίσκομεν τὴν καμπύλην τοῦ κάτωθι σχήματος· βλέπομεν δέ, ὅτι καὶ αὕτη εἶναι παραβολὴ μὲ κορυφὴν τὸ Ο, συμμετρικὴν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Οψ', ἀλλὰ τῆς ὁποίας οἱ κλάδοι ἐκτείνονται ἐντὸς τῶν γωνιῶν χ'Οψ' καὶ χΟψ'.



Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0, ἡ συνάρτησις αὕτη αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0 καὶ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$, ὅταν τὸ χ ἐξακολουθῇ νὰ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ

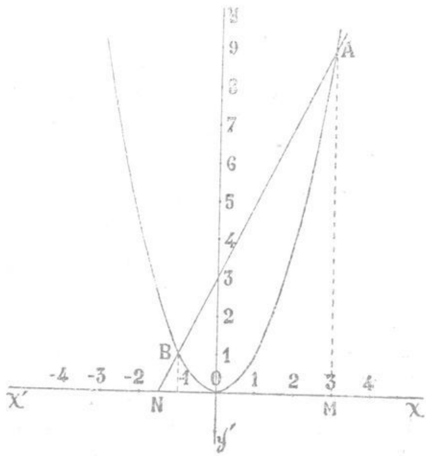
$+\infty$· ἑπομένως ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει μίαν ***μεγίστην*** τιμὴν διὰ $\chi=0$.

145. Ἔστω τέλος ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi^2$· αὕτη εὐκόλως εὑρίσκεται, ***ὅτι παριστᾷ παραβολὴν μὲ ἄξονα συμμετρίας τὸν ψ΄Οψ καὶ μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων· ἔχει δὲ αὕτη μίαν τιμὴν ἐλαχίστην ὅταν $\alpha>O$ καὶ μίαν τιμὴν μεγίστην ὅταν $\alpha<O$· αἱ τιμαὶ δὲ αὗται λαμβάνονται διὰ $\chi=O$.***

146. Ἡ καμπύλη $\psi=\chi^2$, ἐὰν γίνῃ μετ᾽ ἀκριβείας, (πρὸς τοῦτο δὲ γίνεται χρῆσις χάρτου διῃρημένου εἰς τετράγωνα πλευρᾶς 0,001) καθιστᾷ δυνατὴν τὴν εὕρεσιν ***γραφικῶς***, κατὰ μίαν προσέγγισιν, τοῦ ***τετραγώνου*** ἢ τῆς ***τετραγωνικῆς ῥίζης*** δοθέντος ἀριθμοῦ· διότι, ἐὰν π.χ. ζητηθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 3,5 θὰ εἶναι τοῦτο ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου τῆς παραβολῆς, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι 3,5 (μία λύσις)· ἐὰν δὲ ζητηθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ 6,25, αὕτη θὰ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τῆς καμπύλης αὐτῆς, τοῦ ὁποίου τεταγμένη εἶναι 6,25 (δύο λύσεις ἀντίθετοι).

147. Ἡ καμπύλη $\psi=\chi^2$ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ εἰς τὴν ***γραφικὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.*** Διότι ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2-3\chi-4=0.$$



Ἐὰν θέσωμεν $\psi=\chi^2$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει τὸ χ^2 διὰ τοῦ ψ, ἔχομεν τὸ σύστημα

$$\psi-3\chi-4=0$$
$$\psi=\chi^2,$$

ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ ὁποίου παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ δὲ δευτέρα παραβολήν· ἀλλ᾽ ἐὰν κατασκευάσωμεν τὰς γραμμὰς αὐτάς, τῶν ὁποίων κοινὰ σημεῖα εἶναι τὰ Α καὶ Β, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Α, $\psi=(MA)$, $\chi=(OM)$ ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς χ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-3\chi-4=0$· ἤτοι ὁ $\chi=(OM)$ εἶναι ρίζα αὐτῆς· ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ B, $\psi=(NB)$, $\chi=(ON)$ ἐπαληθεύουσι τὰς αὐτὰς ἐξισώσεις καὶ ἑπομένως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\chi=(ON)$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $\psi=\chi^2$ καὶ τῆς εὐθείας $\alpha\psi+\beta\chi+\gamma=0$· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ κοινὰ ταῦτα σημεῖα θὰ εἶναι ***δύο,*** ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ***ἓν*** δέ, ἐὰν εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι· ἀλλ᾿ ἐὰν εἶναι μιγάδες συζυγεῖς, ἡ εὐθεῖα $\alpha\psi+\beta\chi+\gamma=0$ καὶ ἡ παραβολὴ $\psi=\chi^2$ ***δὲν ἔχουσι κανὲν κοινὸν σημεῖον.***

148. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\chi^2-6\chi+5$, τῆς ὁποίας τὰς μεταβολὰς θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς· πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα· πρὸς μεγαλυτέραν ὅμως εὐκολίαν θέτομεν τὸ δοθὲν τριώνυμον ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=(\chi-3)^2-4$ καὶ κατόπιν δίδομεν εἰς τὸ χ διαφόρους τιμὰς καὶ ὑπολογίζομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ψ· ἔχομεν δὲ οὕτω διὰ

$\chi=0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5\ldots$	$6\ldots$
$\psi=5,$	$0,$	$-3,$	$-4,$	$-3,$	$0\ldots$	$5\ldots$

ἐὰν δὲ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν χ καὶ ψ διὰ γραμμῆς, λαμβάνομεν τὴν καμπύλην, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις καὶ ἡ ὁποία φαίνεται εἰς τὸ ἑπόμενον σχῆμα.

Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους, οἱ ὁποῖοι ἑνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον A(3, —4) καὶ οἱ ὁποῖοι ἐκτείνονται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, διότι π. χ.

διὰ	$\chi=10,$	100	καὶ διὰ	$\chi=+\infty$
εἶναι	$\psi=45,$	9405	εἶναι προφανῶς	$\psi=+\infty$

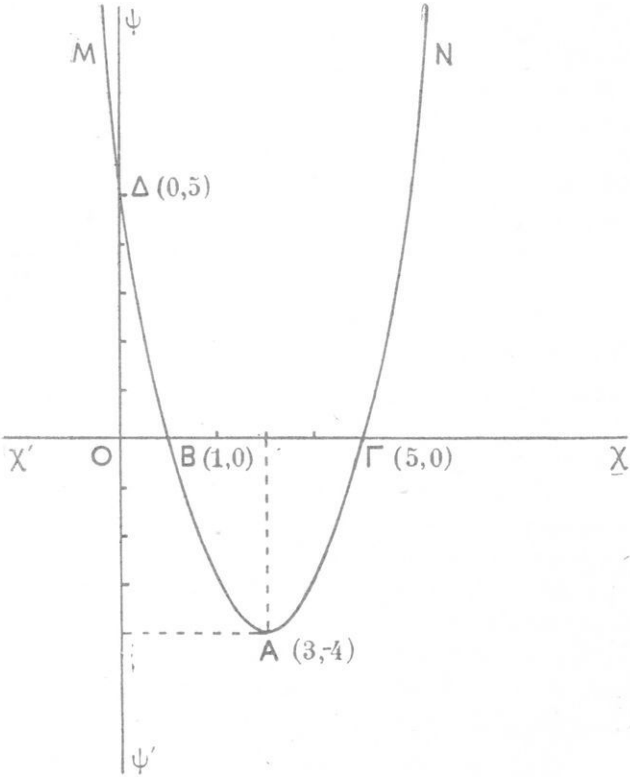
Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

διὰ	$\chi=-10,$	-100	καὶ διὰ	$\chi=-\infty$
εἶναι	$\psi=165,$	10605	εἶναι προφανῶς	$\psi=+\infty$

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\chi=3$, ὅτι τέμνει τὸν ἄξονα Οψ εἰς τὸ σημεῖον Δ(0,5) καὶ τὸν ἄξονα Οχ εἰς τὰ σημεῖα B(1,0) καὶ Γ(5,0) (1 καὶ 5 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\chi^2-6\chi+5$).

Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι παραβολή.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται, ὅτι, ὅταν ὁ χ αὐξάνηται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ 3, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ -4, αὐξάνεται δὲ ἀπὸ τοῦ -4 μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν ὁ χ ἐξακολουθῇ νὰ αὐξάνηται ἀπὸ τοῦ 3 μέχρι τοῦ $+\infty$· ἐπομένως ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ἔχει μίαν τιμὴν ἐλαχίστην (-4) διὰ $\chi=3$.



149. Ἐὰν ἡ δεδομένη συνάρτησις εἶναι ἡ $\psi=-\chi^2+6\chi-5$, δηλαδὴ $\psi=-(\chi-3)^2+4$, ἔχομεν διὰ $\chi=0$ $\psi=-5$

» $\chi=3$ $\psi=4$

» $\chi=\pm\infty$ $\psi=-\infty$

» $\psi=0$ $\chi=1$ καὶ $\chi=5$, ἡ δὲ σχετικὴ καμπύλη (παραβολή), ἔχει σχῆμα ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ μὲ τοὺς κλάδους ἐκτεινομένους ἐντὸς τῶν γωνιῶν χ'Οψ', ψ'Οχ.

Παρατηροῦμεν δὲ ἐξ ἄλλου, ὅτι, ὅταν ὁ χ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ 3, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις αὐξάνει ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ 4· ἐλαττοῦται δὲ ἀπὸ τοῦ 4 μέχρι τοῦ $-\infty$, ὅταν ὁ χ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 3 μέχρι τοῦ $+\infty$· καὶ ἑπομένως αὕτη ἔχει μίαν τιμὴν μεγίστην (4) διὰ $\chi=3$.

150. Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$· αὕτη γράφεται $\psi=\alpha\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, αἱ δὲ μεταβολαὶ αὐτῆς διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ χ εὐκόλως συνάγεται, ὅτι εἶναι αἱ ἑξῆς:

χ	$-\infty$ αὐξάνει $-\frac{\beta}{2\alpha}$ αὐξάνει $+\infty$
ψ ὅταν $\alpha>0$	$+\infty$ ἐλαττοῦται $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ αὐξάνει $+\infty$
ψ ὅταν $\alpha<0$	$-\infty$ αὐξάνει $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἐλαττοῦται $-\infty$

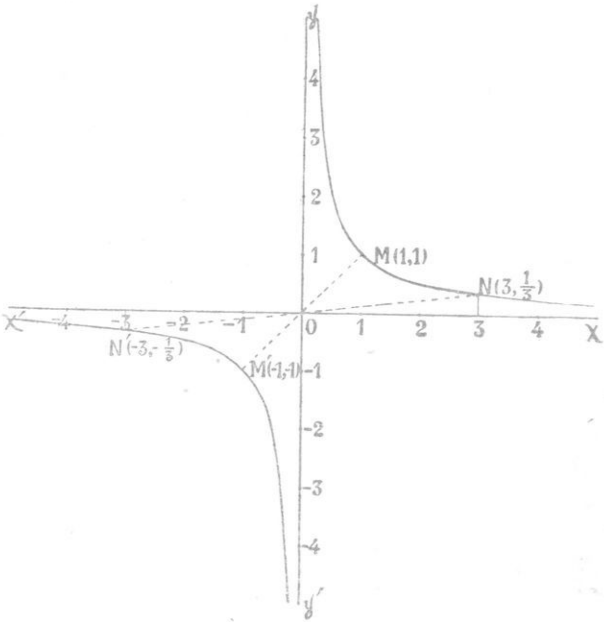
Αἱ καμπύλαι τὰς ὁποίας παριστᾷ ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι παραβολαί.

151. *Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi=\frac{1}{\chi}$.*

Εἰς αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι

διὰ $\chi=$ 1, 10, 100, 1000, 10000
εἶναι $\psi=$ 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 καὶ
διὰ $\chi=$ 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 ,
εἶναι $\psi=$ 10, 100, 1000, 10000 καὶ
διὰ $\chi=-0{,}1$ $-0{,}01$ $-0{,}001$, κ.λ.π.
εἶναι $\psi=-10$, -100, -1000, κ.λ.π.. ἤτοι, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ ὅτι, ὅταν ὁ χ αὐξάνηται κατ' ἀπόλυτον τιμήν, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ ἐλαττοῦνται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ πλησιάζουσι πρὸς τὸ 0· ὅταν δὲ αἱ τιμαὶ τοῦ χ ἐλαττοῦνται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ πλησιάζουσι πρὸς τὸ 0, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ αὐξάνονται ἀπολύτως καὶ τείνουσι πρὸς τὸ ἄπειρον· διὰ τὴν τιμὴν δὲ $\chi=0$ ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{1}{0}$ δὲν ἔχει, ὅπως γνωρίζομεν, οὐδεμίαν ἀριθμητικὴν ἔννοιαν.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγομεν τὴν καμπύλην, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{1}{\chi}$ καὶ ἡ ὁποία δεικνύεται εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα· παρατηροῦμεν δέ, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων σύγκειται ἐκ δύο κλάδων ἐκτεινομένων εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ οἱ ὁποῖοι, απομακρυνόμενοι, πλησιάζουσι διαρκῶς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, χωρὶς οὐδέποτε νὰ τοὺς φθάσωσι· ἕνεκα δὲ τούτου οἱ ἄξονες οὗτοι λέγονται ***ἀσύμπτωτοι*** τῆς καμπύλης ταύτης, ἡ ὁποία λέγεται ***ὑπερβολὴ*** (ἰσοσκελής).



Ἐπειδὴ διὰ $\chi=1$ εἶναι $\psi=1$ καὶ διὰ $\chi=-1$ εἶναι $\psi=-1$, ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα $M(1,1)$, $M'(-1,-1)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O· ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι καὶ τὰ σημεῖα $N\left(3,\frac{1}{3}\right)$ καὶ $N'\left(-3,-\frac{1}{3}\right)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O· ὅθεν συνάγομεν, ὅτι ἡ ὑπερβολὴ αὕτη περιέχει ὡς κέντρον συμμετρίας τὴν ἀρχὴν O.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

397) Νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων:

$$\psi=2\chi^2, \qquad \psi=-\frac{4}{5}\chi^2, \qquad \psi=\frac{3}{4}\chi^2$$

$$2\psi=3\chi^2, \qquad \psi=-3\chi^2, \qquad -3\psi=\chi^2$$

398) Νὰ λυθῶσι γραφικῶς αἱ ἐξισώσεις:

$$\chi^2+\chi-2=0 \qquad \chi^2-7\chi+12=0 \qquad \chi^2-6\chi+9=0$$

$$\chi^2-2\chi-8=0 \qquad \chi^2+7\chi+12=0 \qquad \chi^2+8\chi+16=0.$$

399) Νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων:

$$\psi=2\chi^2-\chi-10 \qquad \psi=4\chi^2-4\chi-35$$

$$\psi=\chi^2-4\chi+7 \qquad \psi=-2\chi^2+\chi+10$$

$$\psi=4\chi^2-4\chi-15 \qquad \psi=-\chi^2+2\chi+15$$

400) Ὁμοίως νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων:

$$\psi=-\frac{1}{\chi}, \qquad \psi=\frac{1}{3\chi}, \qquad \psi=\frac{2}{\chi}$$

$$\psi=\frac{3}{4\chi} \qquad \psi=-\frac{3}{\chi} \qquad \psi=-\frac{2}{5\chi}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον) ***Ἔμπορος, πωλήσας πρᾶγμά τι ἀντὶ 16 δραχ., ἐζημιώθη τόσον τοῖς ἑκατόν, ὅσον εἶχεν ἀγοράσει αὐτό. Ζητεῖται ἀντὶ πόσων δραχμῶν εἶχεν ἀγοράσει τὸ πρᾶγμα.***

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἡ ζημία θὰ εἶναι $\chi-16$. Ἀλλά, κατὰ τὸ πρόβλημα, ἐζημιώθη τὸν τόκον τῶν χ δραχμῶν πρὸς χ τοῖς ἑκατὸν δι' ἓν ἔτος, ἤτοι $\frac{\chi^2}{100}$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος $\frac{\chi^2}{100}=\chi-16$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι χ θετικόν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν λύοντες ἢ $\chi=80$ ἢ $\chi=20$.

2ον) ***Ἠγόρασέ τις ὕφασμα ἀντὶ 600 δραχμῶν. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων ἐλάμβανε 5 πήχεις περισσότερον, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως θὰ ἦτο κατὰ 10 δραχ. μικροτέρα. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;***

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων· ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι $\frac{600}{\chi}$, ἂν δὲ οἱ πήχεις ἦσαν $\chi+5$, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς θὰ ἦτο $\frac{600}{\chi+5}$· ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος $\frac{600}{\chi}-\frac{600}{\chi+5}=10$ πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ χ θετικόν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὰς λύσεις ἢ $\chi=15$ ἢ $\chi=-20$, ὧν μόνον ἡ πρώτη εἶναι παραδεκτὴ ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

3ον) ***Ἐὰν ἀριθμός τις αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, ὁ κύβος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 721· τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος;***

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ εἶναι $(\chi+1)^3-\chi^3=721$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $(\chi+1)^3=\chi^3+3\chi^2+3\chi+1$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος γίνεται $3\chi^2+3\chi+1=721$ ἢ $3\chi^2+3\chi=720$, ὅθεν καὶ $\chi^2+\chi=240$· λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν τὰς δύο λύσεις ἢ $\chi=15$ ἢ $\chi=-16$.

4ον) ***Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 20 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὰ τετράγωνα αὐτῶν νὰ διαφέρωσι κατὰ 120.***

Παριστῶντες τὰ ἄγνωστα μέρη διὰ χ καὶ ψ θὰ ἔχωμεν

$$\chi+\psi=20$$
$$\chi^2-\psi^2=120$$

λύοντες δὲ τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=13$, $\psi=7$.

5ον) ***Δύο ταχυδρόμοι, ὁμαλῶς κινούμενοι, ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β, ὁ μὲν πορευόμενος ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Συνέβη δὲ ὁ μὲν πρῶτος νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β ἐννέα ὥρας μετὰ τὴν συνάντησίν των, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὴν Α δεκαὲξ ὥρας μετ' αὐτήν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, μεθ' ὧν ἐβάδιζον.***

Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α ἐκκινήσαντος καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Β· ἔστω πρὸς τούτοις Γ τὸ σημεῖον τῆς ὁδοῦ ΑΒ, εἰς ὃ ἐγένετο ἡ συνάντησις τῶν ταχυδρόμων. Ὁ πρῶτος ταχυδρόμος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΒ εἰς 9 ὥρας· ἄρα εἶναι $ΓΒ=9\chi$. Ὁ δεύτερος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΒ εἰς 16 ὥρας· ἄρα εἶναι τὸ διάστημα $ΓΑ=16\psi$.

Ἐπειδὴ δὲ συγχρόνως ἐξεκίνησαν καὶ συγχρόνως ἔφθασαν εἰς τὸ Γ, ἕπεται, ὅτι ὁ χρόνος ἐν ᾧ διήνυσεν ὁ πρῶτος τὸ διάστημα ΑΓ (ὅστις εἶναι $\frac{\text{ΑΓ}}{\chi}$, ἤτοι $\frac{16\psi}{\chi}$), εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρόνον, ἐν ᾧ διήνυσεν ὁ δεύτερος τὸ διάστημα ΒΓ· ὥστε ἔχομεν $\frac{16\psi}{\chi}=\frac{9\chi}{\psi}$, ἤτοι $16\psi^2=9\chi^2$, ἐξ ἧς καὶ $\frac{\chi^2}{\psi^2}=\frac{16}{9}$ καί, ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν:

$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{4}{3}$$

6ον) ***Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν γ.***

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi=\alpha\\ \chi\psi=\gamma\end{array}\right\} \quad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ψ ληφθῇ ἐκ τῆς πρώτης καὶ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν, ἀπαλείφεται ὁ ψ καὶ εὑρίσκομεν $\chi(\alpha-\chi)=\gamma$

$$\chi^2-\alpha\chi+\gamma=0 \quad (2)$$

Ὅθεν $\chi=\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$. Ἂν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶναι ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι α· ἂν δὲ πάλιν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶναι ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$· ἑπομένως οἱ ζητούμενοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$ καὶ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$ (3)

τοῦτέστιν εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2).

Σημ. Ὅτι αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) ἔχουσιν ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ (ἑπομένως λύουσι τὸ πρόβλημα) εἶναι γνωστὸν (136)· ὅτι ὅμως μόνον οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λύουσι τὸ πρόβλημα, τοῦτο ἐδείχθη νῦν διὰ τῆς ἀμέσου λύσεως τοῦ προβλήματος.

Διερεύνησις. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πραγματικοί, ἐὰν τὸ $\alpha^2-4\gamma$ δὲν εἶναι ἀρνητικόν. Καὶ ἂν μὲν τὸ γ εἶναι ἀρνητικὸν (ὅτε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἑτεροειδεῖς), τὸ $\alpha^2-4\gamma$ εἶναι πάντοτε θετικόν· ἂν δὲ τὸ γ εἶναι θετικὸν (ὅτε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμοειδεῖς), δὲν πρέπει νὰ εἶναι ὁ 4γ μεγαλύτερος τοῦ α^2. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ***τὸ γινόμενον δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐὰν δοθέντα ἀριθμὸν (α) μερίσωμεν ὁπωσδήποτε εἰς δύο ὁμοειδῆ μέρη, τὸ μέγιστον γινόμενον τῶν μερῶν τούτων εἶναι ἴσον τῷ τετάρτῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ. Εὑρίσκεται δὲ τὸ μέγιστον τοῦτο γινόμενον, ὅταν μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς εἰς ἴσα μέρη***· διότι, ἐὰν ὑποτεθῇ $\gamma = \frac{\alpha^2}{4}$, οἱ τύποι (3) δίδουσι τὰ δύο μέρη $\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\frac{\alpha}{2}$.

Καὶ γενικῶς, ***ἐὰν δοθέντα ἀριθμὸν θετικὸν μερίσωμεν εἰς ὁσαδήποτε ὁμοειδῆ μέρη, τὸ γινόμενον τῶν μερῶν τούτων γίνεται μέγιστον, ὅταν τὰ μέρη γίνωσιν ἴσα.***

Διότι, ἂν δύο μέρη δὲν εἶναι ἴσα, ἔστωσαν παραδείγματος χάριν 5 καὶ 7, καθιστῶντες αὐτὰ ἴσα, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ ἄθροισμά των, ἤτοι, λαμβάνοντες ἀντ' αὐτῶν τὰ 6, 6, εὑρίσκομεν γινόμενον μεγαλύτερον τοῦ 5.7· ἄρα καὶ τὸ γινόμενον πάντων τῶν μερῶν θὰ γίνῃ μεγαλύτερον.

7ον) ***Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν β.***

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\chi^2+\psi^2=\beta$$

λύοντες δὲ τὸ σύστημα τοῦτο κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2\beta-\alpha^2}}{2}$ καὶ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2\beta-\alpha^2}}{2}$.

Διερεύνησις. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶναι πραγματικοί, ἂν εἶναι 2β θετικὸν καὶ μεγαλύτερον ἢ τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ α^2· εἰ δὲ μή, εἶναι μιγάδες.

Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι, ***ἐὰν ἀριθμὸς μερισθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν τούτων θὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο δὲ τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο μερῶν εὑρίσκεται, ἐὰν τὰ δύο μέρη εἶναι ἴσα.***

Καὶ γενικῶς, ***ἐὰν δοθέντα ἀριθμὸν μερίσωμεν ὁπωσδή-***

ποτε εἰς μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν τὰ μέρη γίνωσιν ἴσα.

8ον) ***Διαιρέσαι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τουτέστιν εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἕτερον νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους.***

Α Μ Β

Ἔστω α ὁ τὸ μῆκος τῆς δοθείσης γραμμῆς ΑΒ παριστῶν ἀριθμὸς καὶ χ ὁ παριστῶν τὸ ἄγνωστον μέρος αὐτῆς ΑΜ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον· τότε τὸ λοιπὸν μέρος ΜΒ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha-\chi$. Θὰ εἶναι δὲ $\alpha:\chi=\chi:(\alpha-\chi)$, ἤτοι $(\alpha-\chi)\alpha=\chi^2$· πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ χ θετικὸν καὶ μικρότερον τοῦ α. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$

Ἐκ δὲ τούτων τῶν τιμῶν μόνη ἡ πρώτη, ἡ $\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$ πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ζητουμένου μέρους ΑΜ.

9ον) ***Ἡ μία τῶν πλευρῶν τριγώνου κειμένη ἀπέναντι ὀξείας γωνίας εἶναι 37 μέτρα, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι 27 μέτρα καὶ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς μικροτέρας ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἄλλην εἶναι 5 μέτρα. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραί τοῦ τριγώνου.***

Ἔστω χ ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν ζητουμένων πλευρῶν καὶ ψ ἡ ἄλλη. Ἔχομεν δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα $\chi-\psi=27$

καὶ $\chi^2+\psi^2-2.5.\chi=37^2$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν, ὅτι $\chi=40$ καὶ $\psi=13$.

10ον) ***Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 84 τ. μ. καὶ ὅταν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἔχωσι διαφορὰν 17 μ.***

Ἐὰν διὰ χ,ψ,φ παρασταθῶσιν ἡ ὑποτείνουσα καὶ αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου, θὰ ἔχωμεν

$$\chi^2=\psi^2+\varphi^2$$
$$\psi.\varphi=168$$
$$\psi-\varphi=17$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\psi=24$ καὶ $\varphi=7$· κατόπιν δὲ ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν $\chi=25$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

401) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὰ $\frac{3}{2}$ αὐτοῦ, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 384.

402) Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος ἀριθμοῦ τινος καὶ τῆς μονάδος 1 ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῆς 1 ἀπὸ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

403) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, πολλαπλασιάζων τὸν 3 καὶ διαιρῶν τὸν 96, δίδει ἐξαγόμενα ἔχοντα ἄθροισμα 44.

404) Τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του εἶναι $2\frac{1}{6}$. Εὑρεῖν τὸν ἀριθμόν.

405) Εὑρεῖν τρεῖς ἀκεραίους διαδοχικοὺς ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου σὺν 3.

406) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{3}$, πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ τὸ ἥμισυ τούτου σὺν 1, δίδουν γινόμενον ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ζητουμένου πλὴν 20.

407) Ἔμπορος, πωλήσας πρᾶγμά τι ἀντὶ 24 δρ., ἐκέρδισε τόσον τοῖς ἑκατόν, ὅσον εἶχεν ἀγοράσει αὐτό. Ζητεῖται, ἀντὶ πόσων δραχμῶν εἶχεν ἀγοράσει τὸ πρᾶγμα;

408) Ἐκ δύο ἐργατῶν ὁ εἷς εἰργάσθη 3 ἡμέρας περισσοτέρας τοῦ ἄλλου, ἔλαβον δὲ ὁμοῦ διὰ τὰ ἡμερομίσθιά των 325 δρ. Ἀλλ' ἂν ὁ πρῶτος εἰργάζετο ὅσας ὁ δεύτερος ἡμέρας, θὰ ἐλάμβανεν 90 δρ., ἂν δὲ ὁ δεύτερος εἰργάζετο ὅσας ὁ πρῶτος, θὰ ἐλάμβανε 250 δρ. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ἑκάτερος τῶν ἐργατῶν;

409) Ἐξοφλεῖ τις χρέος 3600 δρ. διὰ μηνιαίων δόσεων. Ἐὰν ἐπλήρωνε κατὰ μῆνα 60 δρ περισσότερον, τὸ χρέος θὰ ἐξωφλεῖτο εἰς 5 μῆνας ἐνωρίτερον. Ποία εἶναι ἡ μηνιαία δόσις καὶ εἰς πόσους μῆνας θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του;

410) Ἔμπορος, πωλήσας 8 πήχεις ὑφάσματος, ἔλαβε τόσας δραχμάς, ὅσους πήχεις ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ, ἵνα λάβῃ 1458 δρ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν;

411) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα ἀντὶ 780 δραχ., ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων ἠγόραζεν ἕνα πῆχυν ὀλιγώτερον, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως θὰ ἦτο κατὰ 5 δραχμὰς μεγαλυτέρα. Πόσους πήχεις ἠγόρασε καὶ ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸν πῆχυν;

412) Ράπτης τις ἠθέλησε νὰ ἀγοράσῃ ὕφασμα καὶ τοῦ ἐζήτησαν ἐν ὅλῳ 1800 δραχ. Ἀλλὰ κατόπιν συζητήσεως ἐπέτυχεν ἐλάττωσιν 20 δραχ. κατὰ πῆχυν καὶ ἠγόρασεν οὕτω διὰ τῶν αὐτῶν δραχμῶν 3 πήχεις περισσότερον. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;

413) Ἀγρότης τις πωλεῖ σῖτον ἀντὶ 980 δραχ. ἀλλ᾽ ἐὰν ἐπώλει 10 κοιλὰ περισσότερον καὶ κατὰ μίαν δραχμὴν ἀκριβώτερον τὸ κοιλόν, θὰ ἐλάμβανε 1200 δραχμάς. Πόσα κοιλὰ ἐπώλησε καὶ ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ κοιλόν;

414) 1320 δραχμαὶ διενεμήθησαν εἴς τινας ἀνθρώπους· ἂν οἱ ἄνθρωποι ἦσαν κατὰ ἕνα ὀλιγώτεροι, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος 10 δραχμὰς περισσοτέρας. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι;

415) Ἐπληρώθησαν 96 δραχμαὶ εἰς 14 ἐργάτας, ἄνδρας καὶ γυναῖκας· ἔλαβε δὲ ἕκαστος ἀνὴρ τόσας δραχμάς, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, καὶ ἑκάστη γυνὴ τόσας δραχμάς, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

416) Ἔργον τι ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων τόμων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ σελίδων ἕκαστος· ἐὰν ἑκάστη σελὶς ἔχῃ κατὰ μέσον ὅρον τόσα γράμματα, ὅσας σελίδας ἔχει ὁ εἷς τόμος, ἐκ πόσων σελίδων ἀποτελεῖται ἕκαστος τόμος, δεδομένου, ὅτι τὸ ὅλον ἔργον περιέχει 2310400 γράμματα;

417) Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 60000 δρ. καὶ ἔλαβε μετὰ ὡρισμένον χρόνον τόκον 3500 δρ. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἐτόκιζεν ἐπὶ ἕνα μῆνα περισσότερον καὶ μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1 μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου, θὰ ἐλάμβανε τόκον 4500 δρ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἐτόκιζε τὸ κεφάλαιον;

418) Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 50000 δρ. Μετὰ ἓν ἔτος τὸν τόκον αὐτοῦ προσέθεσεν εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ὅλον ποσὸν ἔμεινε τοκισμένον ἐπὶ ἓν ἔτος ἀκόμη μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι εἰς τὸ τέλος τῶν δύο ἐτῶν ἔλαβε τόκον ἐν ὅλῳ 8320 δραχμῶν;

419) Ἡ ταχύτης κινητοῦ τινος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος ἄλλου κατὰ 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Τὸ πρῶτον διήνυσεν ἀπόστασιν 150 χιλιομέτρων εἰς χρόνον κατὰ μίαν ὥραν μικρότερον τοῦ χρόνου, ὃν ἐχρειάσθη τὸ ἄλλο διὰ νὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ διάστημα. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ταχύτητες.

420) Ὁ Α βαδίζει καθ᾽ ὥραν $\frac{1}{4}$ τοῦ χιλιομέτρου περισσότε-

ρον τοῦ Β καὶ ἑπομένως ὁ Α διανύει διάστημα 15 χιλιομέτρων εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας ὀλιγώτερον ἀπὸ ὅτι τὸ διανύει ὁ Β. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης ἑκάστου;

421) Δύο πόλεις συνδέονται διὰ δύο σιδηροδρομικῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μία εἶναι μήκους 150 χλμ., ἡ δὲ ἄλλη 180 χλμ. Τὸ τραῖνον τῆς μακροτέρας γραμμῆς φθάνει ἀπὸ τῆς μιᾶς πόλεως εἰς τὴν ἄλλην κατὰ $\frac{1}{2}$ ὥραν ἐνωρίτερον τοῦ ἄλλου, οὗ ἡ ταχύτης εἶναι κατὰ 10 χλμ. τὴν ὥραν μικροτέρα τῆς ταχύτητος τοῦ πρώτου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου τραίνου.

422) Ἀνέμιξέ τις καθαρὸν οἰνόπνευμα μὲ ὕδωρ· ἡ διαφορὰ τῶν βαρῶν τῶν εἰδῶν τούτων εἶναι 60 ὀκάδες· ἂν ἔρριπτε εἰς τὸ μῖγμα ἀνὰ 25 ὀκάδας ἐξ ἑκάστου εἴδους, ὁ βαθμὸς τοῦ νέου μίγματος θὰ ἦτο κατὰ 10 μικρότερος τοῦ πρώτου. Πόσας ὀκάδας ὕδατος ἀνέμιξεν;

423) Ἁμαξοστοιχία τις ἀπεμακρύνετο ἀπό τινος φρουρίου κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν μὲ ταχύτητα 45 σταδίων καθ' ὥραν, ὅτε οἱ ἐν αὐτῇ εὑρισκόμενοι εἶδον τὴν λάμψιν ἐκπυρσοκροτήσεως καὶ μετὰ 15'' ἤκουσαν τὸν κρότον αὐτῆς. Πόσον ἀπεῖχον ἀπὸ τοῦ φρουρίου τὴν στιγμὴν καθ' ἣν εἶδον τὴν λάμψιν;

424) Οἱ ἐν τῇ αὐτῇ ἁμαξοστοιχίᾳ εὑρισκόμενοι ἤκουσαν δύο κανονιοβολισμοὺς ἐκ τοῦ φρουρίου, τὸν ἕνα πέντε πρῶτα λεπτὰ μετὰ τὸν ἄλλον. Ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοσταιχίας ἦτο 10 στάδια καθ' ὥραν. Ζητεῖται ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἐκπυρσοκροτήσεων μεσολαβήσας χρόνος.

425) Τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ δύο δοθέντων α καὶ β, ἵνα τὰ τετράγωνα αὐτῶν γίνωσιν ἴσα;

426) Κλάσματος ὑψοῦνται ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προκύπτει νέον κλάσμα· ζητεῖται, τὶς ἀριθμὸς πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς ἑκάτερον τῶν ὅρων τοῦ νέου κλάσματος, ἵνα γίνῃ ἴσον τῷ ἀρχικῷ;

427) Τὶς ἀριθμός, ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν παραγόντων γινομένου, δὲν βλάπτει αὐτό; καὶ τὶς ἐν γινομένῳ τριῶν παραγόντων ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα;

428) Τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων ὀρθογωνίου καὶ τετραγώνου εἶναι 84 μέτρα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν 217

τετρ. μέτρα. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, ὅταν ἡ μία εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης, ὡς καὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

429) Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχοντος ἐμβαδὸν 18,75 μ. καὶ οὗ ἡ βάσις εἶναι τριπλασία τοῦ ὕψους;

430) Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχοντος περίμετρον 22 μ. καὶ ἐμβαδὸν 24 τ. μ.;

431) Ἡ βάσις τριγώνου τινὸς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ὕψους κατὰ 13 μ. Εὑρεῖν τὴν βάσιν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι 45 τ. μ.

432) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 30 μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 42 μ.

433) Ἐκ δύο χορδῶν κύκλου τεμνομένων τὰ δύο τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι 9 καὶ 8 μ., ἡ δὲ ἄλλη εἶναι 18 μέτρων. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τμήματα τῆς ἄλλης.

434) Ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 51 μέτρα, ἡ δὲ ὑποτείνουσα κατὰ 3 μ. μεγαλυτέρα τῆς μεγαλυτέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραί.

435) Δοθέντων δύο ὀρθογωνίων, ζητεῖται νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτῶν κατά τινα (τὴν αὐτὴν πᾶσαι) γραμμήν, ὥστε νὰ γίνωσιν ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν. (Ἐὰν τὰ ὀρθογώνια εἶναι ἰσοπερίμετρα ἀλλ' ἄνισα, τὸ προτεινόμενον εἶναι ἀδύνατον· ἐὰν δὲ εἶναι καὶ ἴσα, εἶναι ἀόριστον).

436) Δοθέντων δύο τριγώνων, ζητεῖται νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ πρώτου κατά τινα γραμμὴν καὶ αἱ τοῦ δευτέρου κατ' ἄλλην, ὥστε νὰ γίνωσιν ὅμοια. (Τὸ πρόβλημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον).

437) Δοθέντος ὀρθογωνίου, νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ κατά τινα γραμμήν, ὥστε τὸ ἐμβαδόν του νὰ γίνῃ τὸ ἥμισυ ἢ πρότερον.

438) Δοθέντος τριγώνου, νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ πᾶσαι κατὰ μίαν γραμμήν, ὥστε νὰ γίνῃ ὀρθογώνιον.

439) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας ἄθροισμα 12, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς νὰ διαφέρῃ τοῦ διπλασίου τετραγώνου τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν μονάδα.

440) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι 24, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν μικρότερον κατὰ 11.

441) Τὸ πενταπλάσιον τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου ἐξ αὐτῶν δίδει ἐξαγόμενον 9. Τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου ἐπὶ τὸν μεγαλύτερον δίδει 1. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί;

442) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι $\frac{19}{20}$, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι $3\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

443) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ γινομένου των, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου ἐξ αὐτῶν εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

444) Τρεῖς ἀριθμοὶ συνιστῶσι συνεχῆ ἀναλογίαν· ὁ μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ 20, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων εἶναι 90. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

445) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ καὶ τοῦ χαλκοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πρώτου εἶναι κατὰ 10,4 μεγαλύτερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ δευτέρου καὶ ὅτι κρᾶμα 28 γραμμαρίων χρυσοῦ μετὰ 11 γραμμαρίων χαλκοῦ ἔχει εἰδικὸν βάρος 14,4.

446) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν εἶναι 370. Ἐὰν ὁ πρῶτος ἐξ αὐτῶν αὐξηθῇ κατὰ 1 καὶ ὁ ἄλλος κατὰ 3, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν νέων ἀριθμῶν εἶναι 500. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί;

447) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἄθροισμα 30. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸν ἕνα κατὰ 3 καὶ τὸν ἄλλον κατὰ 2, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν νέων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{6}$. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί;

448) Εὑρεῖν διψήφιον ἀριθμόν, οὗ τὸ γινόμενον τῶν ψηφίων ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 27.

449) Εὑρεῖν διψήφιον ἀριθμόν, οὗ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ὑπερβαίνει τὸ τῶν δεκάδων κατὰ 3, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἀρι-

θμοῦ εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου, τοῦ προκύπτοντος διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων του, κατὰ 2079.

450) Διψήφιος καὶ ὁ προκύπτων διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων του ἔχουν λόγον 7:4 καὶ γινόμενον 2268. Εὑρεῖν τοῦτον.

451) Ἐὰν διαιρέσωμεν διψήφιον ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων του, λαμβάνομεν πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2. Ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ γινομένου τὸν προκύπτοντα διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων τοῦ διψηφίου τούτου, λαμβάνομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 5. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

452) Ἠγόρασέ τις ἀπὸ 80 ὀκάδας ἐκ δύο εἰδῶν ἐλαιῶν ἀντὶ 2800 δραχμῶν καὶ μετεπώλησεν αὐτὰς μὲ κέρδος τόσον τοῖς ἑκατὸν ἐξ ἑκάστου εἴδους, ὅσον εἶχεν ἀγοράσει αὐτὸ τὴν ὀκᾶν. Εἶχε δὲ συνολικὸν κέρδος 500 δρχ. Πρὸς πόσας δραχμὰς ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ἑκάστου εἴδους;

453) Ἀριθμός τις προσώπων κατηνάλωσεν εἰς ξενοδοχεῖον διὰ φαγητὸν 216 δρχ. Ἐὰν τὰ πρόσωπα ἦσαν κατὰ 3 περισσότερα καὶ κατηνάλισκεν ἕκαστον 3 δρχ. ὀλιγώτερον, ὁ λογαριασμὸς θ' ἀνήρχετο εἰς 225 δρχ. Πόσα ἦσαν τὰ πρόσωπα καὶ ποία ἡ δαπάνη ἑκάστου;

454) Ὁ Α καὶ ὁ Β κατέθεσαν ὁμοῦ διά τινα μικρὰν ἐπιχείρησιν 8000 δρ. Ὁ Α μετὰ 8 μῆνας λαμβάνει ἐν ὅλῳ 4590, ὁ δὲ Β μετὰ 10 μῆνας 4125 δρ. Τί ποσὸν κατέθεσεν ἕκαστος;

455) Κεφάλαιόν τι μετὰ τῶν τόκων ἑνὸς ἔτους ἀνέρχεται εἰς 5250 δρ. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἦτο κατὰ 600 δρ. μεγαλύτερον ὡς καὶ τὸ ἐπιτόκιον κατὰ $\frac{1}{2}$ %, θ' ἀνήρχετο εἰς 5908 δρ. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον καὶ ποῖον τὸ ἐπιτόκιον;

456) Ἁμάξης, ἥτις διήνυσε διάστημα 7500 μέτρων, ὁ πρόσθιος τροχὸς ἔκαμεν 375 στροφὰς περισσοτέρας τοῦ ὀπισθίου. Ἐὰν ἡ περιφέρεια ἑκάστου τροχοῦ ἦτο κατὰ 1 μέτρον μεγαλυτέρα, ὁ πρόσθιος τροχὸς θὰ ἔκαμνε διὰ τὸ αὐτὸ διάστημα 250 μόνον στροφὰς ἐπὶ πλέον τοῦ ὀπισθίου. Νὰ εὑρεθῇ, πόσων μέτρων ἦτο τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑκάστου τροχοῦ;

457) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον προσθέσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς μικροτέρας του πλευρᾶς, τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν θὰ εἶναι 24 τ.μ. ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς, τὸ ἐμ-

βαδὸν τοῦτο θὰ εἶναι 40 τ. μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

458) Ἡ διαγώνιος ὀρθογωνίου εἶναι 85 μ. Ἐὰν αὐξηθῇ ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ κατὰ 2 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνεται κατὰ 230 τ.μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

459) Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 155, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι 45 καὶ τῶν ὁποίων ὁ δεύτερος εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

460) Εὑρεῖν τοὺς τέσσαρας ὅρους ἀναλογίας, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι 2, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων 260.

461) Δύο ἐργάται, ὁμοῦ ἐργαζόμενοι, ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς α ὥρας· ἂν ὅμως ἑκάτερος ἐξετέλει διαδοχικῶς τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου, θὰ ἐχρειάζοντο β ὧραι πρὸς ἀποπεράτωσιν αὐτοῦ. Ζητεῖται, εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος ἤθελεν ἐκτελέσει μόνος τὸ ἔργον ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς δευτεροβαθμίους.

152. ***Ἐξισώσεις ἔχουσαι ριζικὰ δευτέρας τάξεως.*** Ἐὰν ἐξίσωσις ἔχῃ τετραγωνικήν τινα ρίζαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος, κατορθοῦμεν, ὥστε αὕτη μόνη ν' ἀποτελῇ τὸ ἕτερον τῶν μελῶν καὶ ὑψοῦμεν ἔπειτα ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, ὅτε ἡ ρίζα ἐξαφανίζεται. Πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα ὅμως, ὅτι ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις, τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαν, ὅταν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ληφθῇ μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου. Λέγονται δὲ αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις ***συζυγεῖς*** ἀλλήλων.

π. δ. 1ον $\quad \chi+\sqrt{\chi}=20$

γράφομεν $\quad \sqrt{\chi}=20-\chi\cdot$

ὅθεν, ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη, ἔχομεν $\chi=400+\chi^2-40\chi$ ἢ $\chi^2-41\chi+400=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=16$, $\chi=25\cdot$ τῶν λύσεων τούτων μόνον ἡ πρώτη ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\chi-\sqrt{\chi}=20$.

2ον) $\quad \chi-\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=1$

γράφομεν $\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=\chi-1\cdot$ ὅθεν $2\chi^2-8\chi+9=\chi^2-2\chi+1$ ἢ $\chi^2-6\chi+8=0$. Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι ἢ $\chi=2$ ἢ $\chi=4$, ἁρμόζουσι δὲ ἀμφότεραι εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· ἑπομένως ἡ συζυγὴς αὐτῆς $\chi+\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=1$ οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.

3ον) $\quad \chi+\sqrt{\chi^2-10\chi+1}=5$

γράφομεν $\sqrt{\chi^2-10\chi+1}=5-\chi\cdot$ ὅθεν $\chi^2-10\chi+1=25+\chi^2-10\chi$ ἢ $0=24\cdot$ ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καὶ ἡ συζυγὴς αὐτῆς οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν.

Καὶ περισσότερα ριζικὰ (δευτέρου βαθμοῦ) ἐξαφανίζονται διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

4ον) $\quad \sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-9}=9$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\chi+\chi-9+2\sqrt{\chi^2-9\chi}=81$, ἤτοι $2\chi-90=-2\sqrt{\chi^2-9\chi}$

$$\text{ἢ} \quad \chi-45=-\sqrt{\chi^2-9\chi} \quad (1)$$

Ὑψοῦντες δὲ καὶ πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν $\chi^2-90\chi+2025=\chi^2-9\chi$· ὅθεν $81\chi=2025$, ἐξ ἧς $\chi=25$. Ἡ ἐξίσωσις $81\chi=2025$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (1) καὶ τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\chi-45=\sqrt{\chi^2-9\chi}$· τούτων δὲ πάλιν ἡ μὲν (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις

$$\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-9}=9, \qquad -\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-9}=9$$

ἡ δὲ συζυγὴς τῇ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς

$$\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-9}=9, \qquad -\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-9}=9\cdot$$

ὥστε ἡ εὑρεθεῖσα ἄνευ ριζικῶν ἐξίσωσις $81\chi=2025$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς τέσσαρας ταύτας ἐξισώσεις (αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς δοθείσης, λαμβανομένης ἑκάστης ρίζης μετὰ τοῦ θετικοῦ ἢ μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου καθ' ἅπαντας τοὺς δυνατοὺς συνδυασμούς). Ἐπειδὴ δὲ ἡ λύσις $\chi=25$ ἁρμόζει (ὡς εὐκόλως βλέπει τις) εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, συνάγεται, ὅτι αἱ λοιπαὶ τρεῖς οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν.

Σημ. Αἱ ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι ριζικά, λύονται ἐνίοτε εὐκολώτερον διὰ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ ἀγνώστου. Οὕτως ἡ πρώτη, ἂν τεθῇ $\sqrt{\chi}=\omega$, ἀνάγεται εἰς τὴν $\omega^2+\omega=20$, ἐξ ἧς λύοντες εὑρίσκομεν ἢ $\omega=4$ ἢ $\omega=-5$· ἄρα $\chi=16$ ἢ $\chi=25$. Ἡ δὲ 4η λύεται, ἂν τεθῇ $\sqrt{\chi}=\omega$ καὶ $\sqrt{\chi-9}=\varphi$· διότι ἀνάγεται τότε εἰς τὸ σύστημα $\omega+\varphi=9$ καὶ $\omega^2-\varphi^2=(\omega+\varphi).(\omega-\varphi)=9$· ὅθεν $\omega+\varphi=9$ καὶ $\omega-\varphi=1$, ἄρα $\omega=5$, $\varphi=4$ καὶ ἑπομένως $\chi=25$. Ἡ ἀλλαγὴ αὕτη ὠφελεῖ μάλιστα, ὅταν ὑπὸ τὸ ριζικὸν δὲν ὑπάρχῃ ἢ ἡ πρώτη δύναμις τοῦ ἀγνώστου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

462) Νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $\sqrt{\chi+5}=\chi-1$ 4) $6\chi+3\sqrt{\chi}=7\chi+2$

2) $\sqrt{\chi+4}=\chi-2$ 5) $\chi+\sqrt{\chi+3}=4\chi-1$

3) $\sqrt{4\chi^2-2\chi+4}=-2\chi+8$ 6) $5\chi-4\sqrt{\chi-11}=3(\chi-2)$

463) Ὁμοίως νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $\sqrt{\chi+7}=\sqrt{\chi+2}+1$ 4) $\sqrt{5\chi-1}-\sqrt{8-2\chi}=\sqrt{\chi-1}$

2) $\sqrt{2\chi+2\sqrt{\chi+1}}=2$ 5) $2\sqrt{\chi+1}+\sqrt{\chi-2}=2\sqrt{\chi+2}$

3) $3\sqrt{\chi+2}-2\sqrt{2\chi+1}=2$ 6) $\sqrt{\chi+7-\sqrt{5(\chi-2)}}$

7) $\sqrt{3\chi+7+3\sqrt{2\chi-4}}=7$

8) $\sqrt{(\chi-4)(2\chi-9)}+\sqrt{(\chi-3)(2\chi-5)}=\sqrt{3}$

464) Ὁμοίως αἱ:

1) $\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}-\sqrt{\frac{\chi+\alpha}{\chi}}=2$ 3) $\alpha-\sqrt{\alpha^2-\chi^2}=\chi$

2) $\sqrt{\alpha^2-\chi}+\sqrt{\beta^2+\chi}=\alpha+\beta$ 4) $2\chi+2\sqrt{\alpha^2+\chi^2}=\frac{5\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\chi^2}}$

153. ***Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.*** Αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0 \qquad (1)$$

αἱ ὁποῖαι εἶναι, ὅπως βλέπομεν, τοῦ τετάρτου βαθμοῦ καὶ περιέχουσι μόνον τὰς ἀρτίας δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου, λέγονται ***διτετράγωνοι.***

Ἐὰν τεθῇ $\chi^2=\psi$, ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=0$.

$$\chi^2=\psi$$

Καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν :

$$\psi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

καὶ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δευτέραν εὑρίσκομεν :

$$\chi=\pm\sqrt{\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad (2)$$

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ὁ τύπος (2) περιέχει τὰς ἑξῆς τέσσαρας ρίζας, ἤτοι:

$$\chi_1=+\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad \chi_3=+\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$$\chi_2=-\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad \chi_4=-\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Οὕτω αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-14\chi^2+16=0$ εἶναι:

$$+\sqrt{\frac{13+5}{2}},\ -\sqrt{\frac{13+5}{2}},\ +\sqrt{\frac{13-5}{2}},\ -\sqrt{\frac{13-5}{2}}$$

δηλαδὴ $+3,\ -3,\ +2,\ -2$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται, ὅτι, ὅταν δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς διτετραγώνου, ἔχῃ ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ εἶναι ἀμφότεραι θετικαί, αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι πραγματικαί· ἐὰν ἡ δευτεροβάθμιος ἔχῃ μίαν ρίζαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικήν, αἱ δύο ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι πραγματικαί, ἐνῷ αἱ δύο ἄλλαι εἶναι φανταστικαί· θὰ εἶναι δὲ καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι φανταστικαί, ἐὰν ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου εἶναι ἀρνητικαί.

Ἐὰν ἡ δευτεροβάθμιος ἔχῃ μίαν ρίζαν διπλῆν καὶ αὕτη εἶναι θετική, ἡ διτετράγωνος ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς, τὰς ὁποίας θεωροῦμεν ὡς **διπλᾶς**· ἐὰν ὅμως ἡ διπλῆ ρίζα εἶναι ἀρνητική, τότε αἱ δύο ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι φανταστικαί. Ἐὰν τέλος ἡ δευτεροβάθμιος ἔχῃ ρίζας φανταστικάς, καὶ ἡ διτετράγωνος ἔχει ρίζας φανταστικάς.

154. ***Ἀνάλυσις διτετραγώνου τριωνύμου εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.*** Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$, ἐὰν τεθῇ $\chi^2=\psi$, τρέπεται εἰς τὸ τριώνυμον $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma$, ὅπερ ἀναλύεται, ὡς γνωρίζομεν, εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων· ἤτοι, ἂν ψ_1 καὶ ψ_2 εἶναι αἱ ρίζαι αὐτοῦ, ἔχομεν

$$\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=\alpha(\psi-\psi_1)(\psi-\psi_2),$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ ψ διὰ τοῦ χ^2 λαμβάνομεν,

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=\alpha(\chi^2-\psi_1)(\chi^2-\psi_2)$$

ἤ, ἐὰν τεθῇ $\psi_1=(\sqrt{\psi_1})^2$ καὶ $\psi_2=(\sqrt{\psi_2})^2$,

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=\alpha(\chi-\sqrt{\psi_1})(\chi+\sqrt{\psi_1})(\chi-\sqrt{\psi_2})(\chi+\sqrt{\psi_2})$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

465) Νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ ἐπαληθευθῶσιν ἔπειτα:

1) $\chi^4-26\chi^2+25=0$
2) $\chi^4-17\chi^2+16=0$
3) $\chi^4+5\chi^2-36=0$
4) $25\chi^4-26\chi^2+1=0$
5) $4\chi^4-197\chi^2+49=0$
6) $36\chi^4-13\chi^2+1=0$
7) $36\chi^4+7\chi^2-4=0$
8) $10\chi^4-21=\chi^2$
9) $49\chi^4+24\chi^2=25$
10) $25\chi^4+224\chi^2=9$

466) Νὰ λυθῶσι καὶ νὰ ἐπαληθευθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $(\chi^2+3)(\chi^2+2)=42$
2) $(\chi^2-5)(\chi^2-7)=8$
3) $(\chi^2+4)(\chi^2-3)=8$
4) $(\chi^2+8)^2+(\chi^2-5)^2=97$
5) $(\chi^2-7)^2+(\chi^2-3)^2=49$
6) $\dfrac{\chi^2-11}{7}+\dfrac{2}{\chi^2-9}=1$
7) $\dfrac{\chi^2+2}{11}+\dfrac{32}{\chi^2-32}=7$
8) $\dfrac{3}{\chi^2-12}-\dfrac{\chi^2-4}{8}=-3\dfrac{7}{8}$

467) Ὁμοίως αἱ ἐξισώσεις:

1) $\chi^4-\beta\chi^2+\gamma=0$
2) $\alpha\chi^4-(\alpha^2\beta^2+1)\chi^2+\alpha\beta^2=0$
3) $\chi^4-4(\alpha+\beta)\chi^2+16(\alpha-\beta)^2=0$
4) $\chi^4+(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+\alpha^2\beta^2=0$
5) $\chi^2+\beta=\alpha-\dfrac{\beta^2}{\chi^2}$
6) $\chi-\dfrac{2\alpha}{\chi}=\dfrac{16\beta^2-\alpha^2}{\chi^3}$

468) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων πρὶν ἢ λυθῶσιν.

1) $\chi^4-18\chi^2+65=0$ 4) $15\chi^4+13\chi^2+2=0$

2) $\chi^4+9\chi^2-136=0$ 5) $\chi^4-14\chi^2+149=0$

3) $2\chi^4-4\chi^2+3=0$ 5) $10\chi^4-9{,}6\chi^2+0{,}1=0$

469) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ τριώνυμα:

1) $\chi^4-41\chi^2+400$ 4) $\chi^4+48\chi^2-49$

2) $400\chi^4-9\chi^2-1$ 5) $36\chi^4+143\chi^2-4$

3) $\chi^4-24\chi^2+143$ 6) $\chi^4-3\chi^2+2$

490) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἐξισώσεις, αἵτινες ἔχουσι ρίζας τὰς:

1) $\pm 5, \pm 2$ 2) $\pm 1, \pm\frac{1}{4}$ 3) $\pm 3, \pm\frac{2}{3}$

4) $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}$ 5) $\pm 5, \pm\sqrt{2}$ 6) $\pm\sqrt{7}, \pm 5i$

7) $\pm\alpha, \pm\beta$ 8) $\pm\alpha, \pm\sqrt{\alpha}$ 9) $\pm\beta i, \pm\beta$

10) $\pm\alpha i, \pm i$

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Α΄. Πρόοδοι Ἀριθμητικαί.

155. Σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, λέγεται, ὅτι ἀποτελεῖ ***πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ κατὰ διαφοράν***· τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ldots \qquad (1)$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ τοῦ ἀριθμοῦ 2.

Τοιοῦτοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ

$$19,\ 16,\ 13,\ 10,\ 7,\ldots \qquad (2)$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ τοῦ ἀριθμοῦ -3.

Οἱ πρόοδον ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ λέγονται ***ὅροι*** τῆς προόδου, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις, προστιθέμενος εἰς ἕκαστον, παράγει τὸν ἑπόμενον, λέγεται ***λόγος*** τῆς προόδου.

Οἱ ὅροι τῆς προόδου (1) προβαίνουσιν αὐξανόμενοι, διότι ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ διὰ τοῦτο λέγεται ***αὔξουσα,*** ἐνῷ ἡ πρόοδος (2), τῆς ὁποίας οἱ ὅροι προβαίνουσιν ἐλαττούμενοι (διότι ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι ἀρνητικός), λέγεται ***φθίνουσα.***

156. ***Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν τῇ προόδῳ.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν 25ον ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 7 καὶ λόγος ὁ $+3$.

Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι πρῶτος ὅρος ὁ 7, δεύτερος ὁ $7+3$, τρίτος ὁ $7+3+3=7+3.2$, τέταρτος ὁ $7+3+3+3=7+3.3$ καὶ προφανῶς 25ος εἶναι ὁ $7+3.24=79$. Γενικῶς δέ, ἂν ὁ πρῶτος ὅρος παρασταθῇ διὰ τοῦ α, ὁ λόγος διὰ τοῦ λ καὶ ζητεῖται ὁ νος ὅρος, τὸν ὁποῖον ἂς παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι $\tau=\alpha+(\nu-1).\lambda$ (1), ἤτοι :

Ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς τινος προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Οὕτω ὁ 50ὸς ὅρος τῆς προόδου 3, 9, 15,... εἶναι ὁ

$$3+49.6=297.$$

Καὶ ὁ 23ος ὅρος τῆς προόδου 500, 485, 470,.... εἶναι ὁ

$$500+22.(-15)=170.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

471) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 25ος, ὁ 40ὸς ὅρος τῶν ἀριθμητικῶν προόδων :

1) 8, 15, 22, 29... 4) 1, $\frac{1}{2}$, 0,...

2) 9, 6, 3,... 5) $\frac{1}{4}$, 3, $5\frac{3}{4}$,...

3) 3, -1, -5,...

472) Εὑρεῖν τὸν 10ον ὅρον τῶν προόδων :

1) $\alpha+\beta$, 2α, $3\alpha-\beta$,... 3) $\alpha+4\beta$, $2\alpha+2\beta$, 3α,...

2) $2\alpha-\beta$, 2α, $2\alpha+\beta$,... 4) $\alpha+3\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha-5\beta$,...

473) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι $\tau=51$, $\nu=15$ καὶ $\lambda=4$.

474) Τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $49\frac{2}{5}$, $48\frac{4}{5}$, $48\frac{1}{5}$,... ποίαν τάξιν κατέχει ὁ ὅρος $34\frac{2}{5}$;

475) Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ 3ος ὅρος εἶναι ὁ -14 καὶ ὁ 15ος ὁ 46. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

476) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος, ἧς ὁ 5ος ὅρος εἶναι ὁ 20 καὶ ὁ 21ος εἶναι ὁ 16.

477) Ὁ ἐτήσιος μισθὸς ὑπαλλήλου, ὅστις ἦτο ἀρχικῶς 9000 δρ., ηὐξάνετο μεθ' ἕκαστον ἔτος κατὰ 600 δρ. Ἐκ παραλλήλου αἱ ἐτήσιαι δαπάναι αὐτοῦ, αἵτινες ἦσαν ἀρχικῶς 7500 δρ., ηὐξάνοντο μεθ' ἕκαστον ἔτος κατὰ 750 δρ. Κατὰ ποῖον ἔτος αἱ δαπάναι του ἦσαν ἴσαι μὲ τὸν μισθόν του;

478) Ἐὰν προστεθῶσιν οἱ ἀντίστοιχοι ὅροι δύο ἀριθμητικῶν προόδων, προκύπτει ἄλλη ἀριθμητικὴ πρόοδος.

157. ***Παρεμβολὴ ἀριθμητικῶν μέσων.*** Νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, ἀριθμόν τινα ν ἀριθμητικῶν μέσων, σημαίνει νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν α καὶ β ν ὅρους, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελῶσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος νὰ εἶναι ὁ α καὶ τελευταῖος ὁ β.

Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ζητουμένης προόδου, ἧς ὁ ἄγνωστος λόγος ἔστω λ, εἶναι $\nu+2$.

Ὥστε εἶναι $\beta=\alpha+(\nu+1)\lambda$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\boldsymbol{\lambda=\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}}$. ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι $\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\ \alpha+2\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},..$ Οὕτω, ὅταν ζητῆται νὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ 1 καὶ 2 99 ἀριθμητικὰ μέσα, θὰ ἔχωμεν $\lambda=\frac{1}{100}$ καὶ ἡ πρόοδος ἡ ζητουμένη θὰ εἶναι 1, 1,01, 1,02,... 1,99, 2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

479) Νὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ 2 καὶ 3 ἑπτὰ ἀριθμητικὰ μέσα.

480) Ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου παρεμβληθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀριθμητικῶν μέσων, σχηματίζεται νέα πρόοδος συνεχής.

481) Μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου

2, 2,03, 2,06, 2,09, 2,12, 2,15

νὰ παρεμβληθῶσι 4 ἀριθμητικὰ μέσα.

158. ***Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα Κ τῶν 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, οἵτινες, ὅπως βλέπομεν, ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Ἀλλ' ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι $3+17=20$, $5+15=20$ κ.ο.κ. Ἑπομένως ἂν γράψωμεν :

$$K=3+5+7+9+11+13+15+17$$
$$K=17+15+13+11+9+7+5+3$$

ἔχομεν $2K=20+20+20+20+20+20+20+20=20.8$

καὶ $K=\frac{20.8}{2}=80.$

Ἔστω ἤδη, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ,.... ρ, σ, τ, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι ν, ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον λ καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα Κ, τῶν ὅρων αὐτῶν. Ἀλλ' ἡ ἀνωτέρω πρόοδος γράφεται:

$$\alpha,\ \alpha+\lambda,\ \alpha+2\lambda, \ldots\ \tau-2\lambda,\ \tau-\lambda,\ \tau, \text{ ὥστε ἔχομεν}$$

$$\begin{aligned} K &= \alpha+(\alpha+\lambda)+(\alpha+2\lambda)+\ldots+(\tau-2\lambda)+(\tau-\lambda)+\tau \\ K &= \tau+(\tau-\lambda)+(\tau-2\lambda)+\ldots+(\alpha+2\lambda)+(\alpha+\lambda)+\alpha \\ \hline 2K &= (\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+\ldots+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau) \end{aligned}$$

ἤτοι $2K=(\alpha+\tau).\nu$ καὶ $K=\frac{(\alpha+\tau).\nu}{2}$ (2)· ἤτοι:

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης ἀριθμητικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τὸ πλῆθος αὐτῶν ἐκφράζων ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲ συνάγεται καὶ ἡ ἰδιότης, κατὰ τὴν ὁποίαν ***ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων, ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων.***

π. χ. Ἐὰν ζητῆται τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000, θὰ εἶναι $\nu=1000$, $\alpha=1$ καὶ $\tau=1000$· ἄρα $K=1001.500=500500$.

159. Δυνατὸν νὰ δοθῶσιν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου, ὁ λόγος αὐτῆς καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, νὰ ζητῆται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων· τότε εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τελευταῖον ὅρον ἐκ τοῦ τύπου (1) καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (2).

Σημ. Οἱ πέντε ἀριθμοὶ α, τ, ν, λ καὶ Κ, οἵτινες θεωροῦνται ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ, συνδέονται πρὸς ἀλλήλους διὰ τῶν ἐξισώσεων $\tau=\alpha+(\nu-1)\lambda$, $K=\frac{\nu(\alpha+\tau)}{2}$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, δοθέντων τῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν, οἱ λοιποὶ δύο πρέπει νὰ προσδιορίζωνται ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων, ἐν αἷς περιέχονται ὡς ἄγνωστοι.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ πέντε πραγμάτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ δύο κατὰ δέκα διαφόρους τρόπους, ἕπεται, ὅτι δύνανται νὰ προταθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων δέκα διάφορα προβλήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ καὶ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

482) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀρι-

θμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 300 καὶ γενικῶς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν.

483) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 100 περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς κατὰ σειρὰν καὶ γενικῶς νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν.

484) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 40 καὶ 200.

485) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 20 καὶ 300.

486) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 20 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $7,\ 9\frac{2}{5},\ 11\frac{4}{5}\ldots$

487) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 25 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $15\frac{1}{3},\ 14\frac{2}{3},\ 14,\ldots$

488) Ὡρολόγιον κτυπᾷ μόνον τὰς ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ πόσα κτυπήματα κάμνει ἐντὸς ἑνὸς ἡμερονυκτίου.

489) Χρέος τι ἐπληρώθη διὰ μηνιαίων δόσεων ἐντὸς ἑνὸς ἔτους. Ἡ πρώτη μηνιαία δόσις ἦτο 500 δρ., ἡ δὲ δευτέρα 550 δρ., ἡ τρίτη 600 δρ. κ.ο.κ. Εἰς πόσας δραχμὰς ἀνήρχετο τὸ χρέος;

490) Θέλων τις νὰ ἀνορύξῃ φρέαρ, συνεφώνησε μετὰ τῶν ἐργατῶν ὡς ἑξῆς. Διὰ τὸ πρῶτον μέτρον τοῦ βάθους νὰ πληρώσῃ 50 δρ., διὰ τὸ δεύτερον 100 καὶ διὰ τὸ τρίτον 150 καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς, δι᾽ ἕκαστον ἑπόμενον μέτρον 50 δρ. περισσότερον. Τὸ ὕδωρ εὑρέθη εἰς βάθος 18 μέτρων. Πόσον θὰ πληρώσῃ;

491) Γνωρίζομεν ἐκ τῆς φυσικῆς, ὅτι σῶμά τι βαρύ, ἀφιέμενον ἐλεύθερον ἐξ ὕψους, διανύει εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον 4,9 μέτρα καὶ εἰς ἕκαστον ἑπόμενον 9,8 μέτρα περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι διήνυσεν εἰς τὸ προηγούμενον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἐξ οὗ κατέπεσε σῶμά τι εἰς τὴν γῆν, ὅταν ὁ χρόνος τῆς πτώσεως εἶναι 12″. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ᾽ ὄψιν).

492) Σῶμά τι ἀφίεται ἐλεύθερον ἐξ ὕψους 490 μέτρων· μετὰ πόσα δευτερόλεπτα θὰ φθάσῃ εἰς τὴν γῆν;

493) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 12 πρώτων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ 3ος ὅρος εἶναι 18 καὶ ὁ 9ος 48.

494) Ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $α=7$, $ν=12$ καὶ $Κ=414$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τ ὡς καὶ ὁ λ.

495) Ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $\alpha = 5$, $\tau = 49$, καὶ $K = 621$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν καὶ ὁ λ.

496) Ἐπίσης ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $\tau = 208$, $\nu = 32$ καὶ $\lambda = 7$. Εὑρεῖν τὰ α καὶ K.

497) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμητικῆς προόδου οἱ α καὶ ν, ὅταν εἶναι $\tau = 30$, $\lambda = 3$ καὶ $K = 162$.

498) Ἐπίσης νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τ καὶ ν, ὅταν $\alpha = 1$, $\lambda = 3$ καὶ $K = 145$.

499) Ὁ 3ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ὁ 18 καὶ ὁ 7ος ὁ 54. Νὰ εὑρεθῇ ὁ α καὶ ὁ λ.

500) Τὸ ἄθροισμα 3 ἀριθμῶν ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ εἶναι 9 καὶ τὸ τῶν τετραγώνων των εἶναι 45. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

501) Τὸ ἄθροισμα 5 ἀριθμῶν ἀποτελούντων ἀριθμητικὴν πρόοδον εἶναι 35, τὸ τετράγωνον τοῦ 3ου ὅρου ὑπερβαίνει τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τελευταῖον κατὰ 16. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

502) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha+\beta$, $3\alpha+\beta$, $5\alpha+\beta$...

503) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 5 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $(\alpha-\beta)^2$, $\alpha^2+\beta^2$, $(\alpha+\beta)^2$...

504) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ν.

Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$ τεθῇ κατὰ σειρὰν $\alpha = 1, 2, 3 \ldots. \nu$ καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες, εὑρίσκεται ἡ ἰσότης

$$(\nu+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)+3(1+2+3+\ldots.+\nu)+\nu$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$, ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται $(\nu+1)^3=1+3(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)+\frac{3}{2}\nu(\nu+1)+\nu$,

ἐξ ἧς $3(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)=(\nu+1)^3-\frac{3}{2}\nu(\nu+1)-\nu-1$

καὶ $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1).(2\nu+1)}{1.2.3}$

505) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶναι

$$1^3+2^3+3^3+4^3\ldots+\nu^3=(1+2+3+4+\ldots+\nu)^2$$

Β'. Πρόοδοι γεωμετρικαί.

160. Σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λέγεται, ὅτι ἀποτελεῖ ***πρόοδον γεωμετρικὴν ἢ κατὰ πηλίκον.***

Οἱ πρόοδον ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ λέγονται ***ὅροι*** τῆς προόδου, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις, πολλαπλασιάζων ἕκαστον ὅρον, παράγει τὸν ἑπόμενον, λέγεται ***λόγος*** τῆς προόδου.

Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 2, 4, 8, 16... ἀποτελοῦσι γεωμετρικὴν πρόοδον, ἧς ὁ λόγος εἶναι 2. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\dots$ ἀποτελοῦσι γεωμ. πρόοδον, ἧς ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{2}$· τῆς δὲ γ.π. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\dots$ λόγος εἶναι ὁ $-\frac{1}{2}$.

Ἡ πρόοδος εἶναι ***αὔξουσα,*** ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς, λαμβανόμενοι ἀπολύτως, προβαίνουσιν αὐξανόμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα 1· ***φθίνουσα*** δέ, ἐὰν οἱ ὅροι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν προβαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος 1, κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

161. ***Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.*** Ἔστω α ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, τ ὁ ν^{os}, καὶ λ ὁ λόγος, τότε θὰ εἶναι πρῶτος ὅρος α, δεύτερος αλ, τρίτος $\alpha\lambda^2$, τέταρτος $\alpha\lambda^3$ κ.ο.κ. Ὥστε ὁ ὅρος τ, ὁ τὴν $\nu^{\eta\nu}$ τάξιν κατέχων καὶ τοῦ ὁποίου προηγοῦνται ν—1 ἄλλοι ὅροι θὰ εἶναι

$$\tau = \alpha\lambda^{\nu-1} \qquad (1)$$

Ἤτοι, ***ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων ὅρων.***

Οὕτω ὁ 10ος ὅρος τῆς προόδου 3, 6, 12, 24...
εἶναι $3(2)^9 = 3.512 = 1536$, ὁ 20ὸς ὅρος αὐτῆς
» $3(2)^{19} = 3.524288 = 1572864$ καὶ ὁ 25ος ὅρος
» $3(2)^{24} = 3.16777216 = 50331648$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ 8ος ὅρος τῆς προόδου 16,8,4,2...
εἶναι $16.\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 16.\frac{1}{128} = 0{,}125$, ὁ 15ος ὅρος αὐτῆς
» $16.\left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 16.\frac{1}{16384} = 0{,}0009765625$, καὶ ὁ 20ὸς ὅρος

εἶναι $16\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 16 \cdot \frac{1}{524288} = 0{,}000030502\ldots$

Παρατηρήσεις. Εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων τῆς αὐξούσης γεωμετρικῆς προόδου παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος τάξεως ν αὐξάνει ἀπεριορίστως καὶ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν καὶ ὁ ν αὐξάνῃ ὁμοίως καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως, ὅτι τοῦτο ἀληθεύει καὶ εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ὅταν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι :

Δύναμις ἀκεραία θετική, ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος 1 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, αὐξάνει μετὰ τοῦ ἐκθέτου της καὶ τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον, ὅταν καὶ ὁ ἐκθέτης τείνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ἄπειρον.

Εἰς τὸ δεύτερον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος τάξεως ν τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον· Ἀποδεικνύεται δὲ ἐπίσης εὐκόλως, ὅτι τοῦτο ἀληθεύει καὶ εἰς πᾶσαν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ὅταν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι

Δύναμις ἀκεραία θετικὴ ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος 1 εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος· ἐλαττοῦται, ὅταν ὁ ἐκθέτης αὐξάνῃ, καὶ ἔχει ὅριον τὸ 0, ὅταν ὁ ἐκθέτης ἔχῃ ὅριον τὸ θετικὸν ἄπειρον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

506) Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὰς κάτωθι γεωμετρικὰς προόδους ὁ ἔναντι ἑκάστης σημειούμενος ὅρος.

1,	3,	9,...	ὁ 10ος
1,	4,	16,...	ὁ 7ος
6521,	729,	81,...	ὁ 9ος
$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{15}$,	$\frac{1}{45}$,...	ὁ 9ος
$\frac{1}{64}$,	$\frac{1}{32}$,	$\frac{1}{16}$,...	ὁ 12ος
$\frac{1}{\chi}$,	$\frac{1}{\chi^3}$,	$\frac{1}{\chi^5}$,...	ὁ $\nu^{\text{στὸς}}$

507) Ἐκ βαρελίου, τὸ ὁποῖον περιέχει 256 ὀκάδας οἰνοπνεύματος, ἀφαιροῦμεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου, ἔπειτα τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου κ.ο.κ. ἐπὶ 8 φοράς. Τί ποσὸν οἰνοπνεύματος θὰ μείνῃ εἰς τὸ βαρέλιον ;

508) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ ὡρισμένον πλῆθος ὅρων τὸ γινόμενον δύο ὅρων ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

162. ***Παρεμβολὴ γεωμετρικῶν μέσων.*** Νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, ν γεωμετρικὰ μέσα, σημαίνει νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ν ὅρους, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελῶσι γεωμετρικὴν πρόοδον, ἧς πρῶτος ὅρος νὰ εἶναι ὁ α καὶ τελευταῖος ὁ β.

Ἐὰν λ εἶναι ὁ ἄγνωστος λόγος, ἔχομεν, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $\nu+2$, $\beta=\alpha\lambda^{\nu+1}$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\lambda^{\nu+1}=\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ

$\lambda=\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$· ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\alpha,\quad \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\quad \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}},\ldots\quad \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}},\quad \beta.$$

Οὕτω, ἂν θέλωμεν νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ 1 καὶ 16 τρία γεωμετρικὰ μέσα, θὰ ἔχωμεν $\lambda=\sqrt[4]{16}=2$ καὶ ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶναι 1, 2, 4, 8, 16.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

509) Νὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ 1 καὶ 10 ἐννέα γεωμετρικὰ μέσα.

510) Ὁμοίως νὰ παρεμβληθῶσι 5 γεωμετρικὰ μέσα μεταξὺ 54 καὶ $\frac{27}{32}$ ὡς καὶ μεταξὺ 21 καὶ $\frac{448}{243}$.

511) Ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου παρεμβληθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς γεωμετρικῶν μέσων, σχηματίζεται νέα πρόοδος συνεχής.

512) Μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου 1, 4, 16, 64, 256, νὰ παρεμβληθῇ ἀνὰ ἓν γεωμετρικὸν μέσον.

163. ***Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.*** Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ ἄθροισμα $K=\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\alpha\lambda^3+\ldots+\alpha\lambda^{\nu-1}$ (1) Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα ἐπὶ τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς προόδου λ, εὑρίσκομεν $K\lambda=\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\alpha\lambda^3+\ldots+\alpha\lambda^\nu$ (2), ἀφαιροῦντες δὲ κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (1), εὑρίσκομεν $K\lambda-K=$

$=\alpha\lambda^{\nu}-\alpha$ ἢ $K.(\lambda-1)=\alpha\lambda^{\nu}-\alpha$ καί, ἂν ὁ λ διαφέρῃ τῆς μονάδος 1, $K=\frac{\alpha\lambda^{\nu}-\alpha}{\lambda-1}=\frac{\alpha(\lambda^{\nu}-1)}{\lambda-1}$ ἤ, ἂν γράψωμεν

$$K=\frac{\alpha\lambda^{\nu-1}.\lambda-\alpha}{\lambda-1},\quad K=\frac{\tau\lambda-\alpha}{\lambda-1} \qquad (3)$$

ἤτοι ***τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης γεωμετρικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἂν ὁ τελευταῖος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λόγον καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεθῇ διὰ τοῦ λόγου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

513) Νὰ εὑρεθῇ τῶν κάτωθι γεωμετρικῶν προόδων τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων ὅρων τῶν σημειουμένων ἔναντι ἑκάστης

1, 2, 4, ...	12 ὅρων	9, 6, 4, ...	7 ὅρων
2, 10, 50, ...	6 »	$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$	7 »
1, 10, 100, ...	10 »		
5, 15, 45, ...	7 »	$1, \frac{1}{\chi}, \frac{1}{\chi^2}, \ldots$	ν »

514) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 36 καὶ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ τρίτου εἶναι 28.

515) Τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦσι γεωμετρικὴν πρόοδον, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 36, τῶν δύο δὲ τελευταίων εἶναι 450. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

516) Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 73 καὶ τὸ γινόμενον 512.

517) Ἐὰν $11-\chi$, $1+\chi$ καὶ $35-\chi$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

518) Ἐὰν $\chi+2$, $\chi-2$ καὶ $8-\chi$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

519) Γεωμετρικῆς προόδου ἐκ 10 ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων περιττῆς τάξεως εἶναι 1023, τὸ δὲ τῶν ἀρτίας 2046. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου ταύτης.

520) Γεωμετρικῆς προόδου ἐξ 6 ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων εἶναι 40, τὸ δὲ τῶν 5 ἑπομένων εἶναι 3240· νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ ὁ πρῶτος ὅρος.

164. ***Ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης ἀπείρους ὅρους.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης ἀπείρους ὅρους. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα Κ τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι

$$K = \alpha.\frac{\lambda^{\nu}-1}{\lambda-1} = \alpha.\frac{1-\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \quad \text{ἢ} \quad K = \frac{\alpha}{1-\lambda} - \frac{\alpha\lambda^{\nu}}{1-\lambda}.$$

ἀλλ' ὅταν $\lambda<1$, εἶναι ὅρ.$\lambda^{\nu}=0$, ὅταν ὅρ.$\nu=\infty$ (161)· ἐπομένως καὶ ὅρ.$\frac{\alpha\lambda^{\nu}}{1-\lambda}=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{1-\lambda}$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, ἕπεται, ὅτι ὅρ.$K=\frac{\alpha}{1-\alpha}$ — ὅρ.$\frac{\alpha\lambda^{\nu}}{1-\lambda}$ ἤτοι ὅρ.$K=\frac{\alpha}{1-\lambda}$. Ἕνεκα δὲ τούτου λέγομεν, ὅτι ***τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης ἀπείρους ὅρους ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν*** $\frac{\alpha}{1-\lambda}$.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ ἰσοῦται τῷ $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ ἤτοι τῷ 2 καὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}+\ldots$, ὅπου $\alpha>1$, εἶναι $\frac{1}{\alpha-1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

521) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων ἑκάστης τῶν γεωμετρικῶν προόδων:

1) $8,\ 4,\ 2,\ldots$

2) $10,\ 5,\ 2\frac{1}{2},\ldots$

3) $22,\ 11,\ \frac{11}{2},\ldots$

4) $\frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{15}{16},\ldots$

5) $\frac{52}{100},\ \frac{52}{100^2},\ \frac{52}{100^3}\ldots(0,5252\ldots)$

6) $0,5888\ldots$

7) $1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ldots$

8) $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ldots$

9) $\frac{\alpha}{\beta},\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2,\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3\ldots$ ὅταν $\beta>\alpha$

10) $\sqrt{\alpha},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}},\ldots$ ὅταν $\sqrt{\alpha}>1$.

522) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν προόδων

1) $\frac{1}{3}, \ -\frac{1}{9}, \ \frac{1}{27}, \ -\frac{1}{81}, \ldots$

2) $22, \ -12\frac{4}{7}, \ 7\frac{9}{49}, \ldots$

3) $1, \ -\frac{1}{\chi}, \ \frac{1}{\chi^2}, \ldots$ ὅπου εἶναι $\chi > 1$

4) $\sqrt{3}, \ -\sqrt{2}, \ +\frac{2}{\sqrt{3}}, \ldots$

523) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{\nu}{2\nu}+\ldots$$

524) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς $\frac{1}{2}$.

525) Γεωμετρικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων εἶναι 20. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

526) Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 65, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς εἶναι 81. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

527) Εἰς δοθὲν τετράγωνον ἐγγράφομεν ἄλλο τετράγωνον συνάπτοντες τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἰς τοῦτο πάλιν ἄλλο κ.ο.κ. εἰς ἄπειρον. Ζητεῖται α) τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων πάντων τούτων τῶν τετραγώνων καὶ β) τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν.

528) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ ζήτημα, ὅταν δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον.

529) Εἰς δοθέντα κύκλον ἐγγράφομεν τετράγωνον, εἰς τοῦτο ἐγγράφομεν κύκλον, εἰς τοῦτον ἄλλο τετράγωνον κ.ο.κ. εἰς ἄπειρον. Νὰ εὑρεθῇ α) τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων καὶ β) τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων,

530) Τριγώνου τινὸς δίδεται ἡ περίμετρος 2τ καὶ ἡ μικροτέρα πλευρὰ γ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραί, γνωστοῦ ὄν-

τος, ὅτι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου ἀποτελοῦσι γεωμετρικὴν πρόοδον.

531) Ἄνθρωπός τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μερισθῇ ἡ περιουσία του εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς· ὁ μὲν πρωτότοκος νὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{2}$, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ τελευταῖος τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας· δὲν ἐσυλλογίσθη ὅμως, ὅτι τὰ τρία ταῦτα μέρη (τὸ ἥμισυ τὸ τέταρτον καὶ τὸ πέμπτον) δὲν συναποτελοῦσι τὴν ὅλην περιουσίαν, ἀλλὰ μόνον τὰ $\frac{19}{20}$ αὐτῆς· πῶς πρέπει νὰ γίνῃ ἡ διανομή, ἵνα ὅσον τὸ δυνατὸν πραγματοποιηθῇ ἡ θέλησις τοῦ διαθέτου ;

Λύσις. Ἀφοῦ δοθῇ τὸ ἥμισυ τῆς περιουσίας εἰς τὸν πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς εἰς τὸν δεύτερον καὶ τὸ πέμπτον αὐτῆς εἰς τὸν τρίτον, θὰ μείνῃ τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς περιουσίας· τοῦτο δέ, ὡς πατρικὴ περιουσία θὰ διανεμηθῇ πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τὸ νέον περίσσευμα $\left(\frac{1}{20}\right)^2$ θὰ διανεμηθῇ πάλιν ὁμοίως, καὶ οὕτω καθεξῆς ἐπ᾽ ἄπειρον.

Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ τρία μερίδια εἶναι $\frac{10}{19}$, $\frac{5}{19}$, $\frac{4}{19}$.

532) Δύο κινητὰ Α καὶ Β κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἀπέχουσι τὴν στιγμὴν ταύτην ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασιν ἴσην τῇ α· ἡ κίνησις ἀμφοτέρων γίνεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ΑΒ, εἶναι δὲ ἡ ταχύτης τ τοῦ Α μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος τ′ τοῦ Β. Ζητεῖται, μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς τὸ Α θὰ φθάσῃ τὸ Β,

Λύσις. Ἵνα τὸ Α φθάσῃ τὸ Β, πρέπει πρῶτον νὰ διανύσῃ τὸ χωρίζον νῦν αὐτὰ διάστημα α καὶ πρὸς τοῦτο χρειάζεται χρόνον $\frac{\alpha}{\tau}$ (διότι τ εἶναι ἡ ταχύτης του)· ἀλλ᾽ ἐν τῷ χρόνῳ τούτῳ τὸ κινητὸν Β θὰ προχωρήσῃ κατὰ τὸ διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}.\tau'$ (διότι τ′ εἶναι ἡ ταχύτης του)· ὥστε μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρόνου $\frac{\alpha}{\tau}$ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κινητῶν θὰ εἶναι $\alpha + \frac{\tau'}{\tau}$. Ἀνάγκη λοιπὸν τὸ Α νὰ διανύσῃ καὶ τὸ διάστημα τοῦτο (ἵνα φθάσῃ τὸ Β) καὶ πρὸς τοῦτο χρειάζεται δεύτερον χρονικὸν διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}.\frac{\tau'}{\tau}$.

Ἐν τῷ δευτέρῳ τούτῳ χρονικῷ διαστήματι τὸ κινητὸν Β θὰ προχωρήσῃ κατὰ τὴν ἀπόστασιν $\frac{\alpha}{\tau}.\frac{\tau'}{\tau}.\tau'$ ἤτοι $\alpha\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2$. τόση λοιπὸν θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν κινητῶν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρονικοῦ διαστήματος· ἀνάγκη ἄρα τὸ Α νὰ διανύσῃ καὶ τὴν ἀπόστασιν ταύτην καὶ πρὸς τοῦτο χρειάζεται τρίτον χρονικὸν διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2$.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τὸ Α φθάσῃ τὸ Β, χρειάζεται ἄπειρα τὸ πλῆθος χρονικὰ διαστήματα, τὰ ἑξῆς :
$$\frac{\alpha}{\tau},\quad \frac{\alpha}{\tau}.\frac{\tau'}{\tau},\quad \frac{\alpha}{\tau}.\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2,\quad .\frac{\alpha}{\tau}.\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^3,\ldots$$
δὲν πρέπει ὅμως ἐκ τούτου νὰ συμπεράνωμεν (*) ὅτι τὸ Α οὐδέποτε θὰ φθάσῃ τὸ Β· διότι τὰ ἀπειροπληθῆ ταῦτα χρονικὰ διαστήματα συναποτελοῦσι χρονικόν τι διάστημα πεπερασμένον. Καὶ ὄντως τὰ χρονικὰ ταῦτα διαστήματα εἶναι ὅροι μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου· ἄρα τὸ σύνολον αὐτῶν ἀποτελεῖ τὸν χρόνον $\dfrac{\frac{\alpha}{\tau}}{1-\frac{\tau'}{\tau}}$, ἤτοι $\frac{\alpha}{\tau-\tau'}$, εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις τῶν κινητῶν θὰ εἶναι 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Ἐκθετικὴ συνάρτησις.

165. Ἡ παράστασις α^{χ}, ὅπου ὁ α εἶναι σταθερός τις θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ χ πραγματικός τις ἀριθμὸς οἱοσδήποτε, λέγεται ***ἐκθετικὴ συνάρτησις.***

Περὶ τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, ὅταν τὸ χ λαμβάνῃ τιμὰς ἀκεραίας θετικάς, ἐκάμομεν λόγον προηγουμένως (161). Ἤδη θὰ κάμωμεν λόγον περὶ τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, ὅταν τὸ χ λαμβάνῃ τιμὰς πραγματικὰς οἱασδήποτε.

(*) Οὕτω συνεπαίραινον οἱ ἀρχαῖοι σοφοὶ καὶ ἀπεδείκνυον, ὅτι ὁ ὠκύπους Ἀχιλλεὺς δὲν ἠδύνατο νὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, οὐδὲ ἓν μόνον βῆμα ἂν ὑπελείπετο αὐτῆς.

A) Ἔστω $\alpha > 1$ καὶ

1ον) $\chi = \frac{1}{\mu}$, ὅπου μ ἀκέραιος θετικός· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι:

α′) $\alpha^{\frac{1}{\mu}}$ ἢ $\sqrt[\mu]{\alpha} > 1$· διότι ἂν ἦτο $\sqrt[\mu]{\alpha} < 1$, θὰ ἦτο $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu} < 1$ ἤτοι $\alpha < 1$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὑπετέθη $\alpha > 1$.

β′) ὅρ.$\sqrt[\mu]{\alpha} = 1$, ὅταν ὅρ.$\mu = \infty$· διότι ἵνα ὅρ.$\sqrt[\mu]{\alpha} = 1$, πρέπει νὰ εἶναι $\sqrt[\mu]{\alpha} - 1 < \varepsilon$, ὅπου ε εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρὸς (ἴδε περὶ ὁρίων ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ)· ἀλλ᾽ ἡ ἀνισότης αὕτη θὰ ἀληθεύῃ ἂν $\sqrt[\mu]{\alpha} < 1 + \varepsilon$ ἢ $\alpha < (1+\varepsilon)^{\mu}$ ἢ $\alpha < 1 + \mu\varepsilon$, διότι $(1+\varepsilon)^{\mu} > 1 + \mu\varepsilon$. (Συνάγεται δὲ ἡ τελευταία ἀνισότης ἐκ τῆς ἰσότητος $(1+\varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπονται αἱ ἀνισότητες

$$(1+\varepsilon)^2 > 1 + 2\varepsilon$$
$$(1+\varepsilon)^3 > (1+2\varepsilon)(1+\varepsilon) > 1 + 3\varepsilon$$
$$(1+\varepsilon)^4 > 1 + 4\varepsilon \quad \text{καὶ γενικῶς}$$
$$(1+\varepsilon)^{\mu} > 1 + \mu\varepsilon).$$

Ἂν λοιπὸν εἶναι $\alpha < 1 + \mu\varepsilon$, θὰ εἶναι καὶ $\mu > \frac{\alpha - 1}{\varepsilon}$· ἂν δὲ λ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $\frac{\alpha-1}{\varepsilon}$, διὰ $\mu > \lambda$ θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt[\mu]{\alpha} - 1 < \varepsilon, \text{ ἤτοι ὅρ.}\left(\sqrt[\mu]{\alpha} - 1\right) = 0, \text{ ἤτοι ὅρ.}\sqrt[\mu]{\alpha} = 1.$$

2ον) Ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι $\chi = \frac{\nu}{\mu}$, ὅπου ν καὶ μ ἀκέραιοι θετικοί. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι:

α′) $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} > 1$, ἤτοι $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}} > 1$. Διότι εἶναι $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}} = \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\nu}$· ἀφοῦ δὲ εἶναι $\sqrt[\mu]{\alpha} > 1$, ὡς εἴδομεν προηγουμένως, θὰ εἶναι καὶ

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\nu} > 1.$$

β′) ὅρ.$\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}} = \infty$, ὅταν ὅρ. $\frac{\mu}{\nu} = \infty$ καὶ ὅρ.$\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}} = 1$, ὅταν ὅρ.$\frac{\mu}{\nu} = 0$. Ἀποδεικνύονται δὲ ταῦτα εὐκόλως.

3ον) Ἔστω ἤδη, ὅτι χ ἀσύμμετρος θετικὸς ἀριθμός· ἤτοι ἔστω $\chi = 3{,}1415926\ldots$ Ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ θέσωμεν τὸν σύμμετρον ἀριθμὸν $\chi_\nu = 3,1415...$ (ἔχοντα τὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ χ), ἡ δύναμις α^{χ_ν} αὐξάνει, αὐξανομένου τοῦ ν· ἀλλ᾽ ἐπειδή, τοῦ ν αὐξανομένου ἐπ᾽ ἄπειρον, ὁ χ_ν αὐξάνει, ἀλλ᾽ οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸν 4, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ α^{χ_ν} οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸν α^4· ἔχει ἄρα ὅριον ἡ α^{χ_ν} ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ α^4· ***τὸ ὅριον δὲ τοῦτο τῆς α^{χ_ν}, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ ἐπ᾽ ἄπειρον, θεωροῦμεν ὡς τὴν τιμὴν τῆς α^χ***. Κατόπιν τούτων (καὶ ὅταν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν, ὅτι οἱ νόμοι τῶν δυνάμεων τοὺς ὁποίους εἴδομεν (126) διατηροῦνται καὶ εἰς τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἀσύμμετρον ἐκθέτην) ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι $\alpha^\chi > 1$ καὶ ὅτι ὅρ.$\alpha^\chi = \infty$, ὅταν ὅρ.$\chi = \infty$.

4ον) Ἐὰν τέλος ὑποτεθῇ, ὅτι ὁ χ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς καὶ τεθῇ $\chi = -\psi$ (ὅπου ψ θετικὸς ἀριθμός), θὰ ἔχωμεν $\alpha^\chi = \alpha^{-\psi} = \frac{1}{\alpha^\psi}$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha^\psi > 1$, ἕπεται, ὅτι $\frac{1}{\alpha^\psi} < 1$, ἤτοι $\alpha^\chi < 1$· δεικνύεται δὲ εὐκόλως, ὅτι ὅρ.$\alpha^\chi = 0$, ὅταν ὅρ.$\chi = -\infty$.

5ον) Ἔστω ἤδη, ὅτι τὸ χ λαμβάνει τὰς τιμὰς χ_0 καὶ $\chi_0 + \varepsilon$ (ε θετικὸς ἀριθμός), ἤτοι, ὅτι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ αὐξάνεται κατὰ ε· τότε ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς συναρτήσεως εἶναι $\alpha^{\chi_0+\varepsilon} - \alpha^{\chi_0} = \alpha^{\chi_0}(\alpha^\varepsilon - 1)$· ἀλλ᾽ ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ 0, τὸ α^ε τείνει πρὸς τὴν 1 καὶ ἑπομένως ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $\alpha^{\chi_0}(\alpha^\varepsilon - 1)$ τείνει πρὸς τὸ 0. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει, ὅτι δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὴν μεταβλητὴν χ κατὰ ἕνα ἀριθμὸν ε ἐλάχιστον, ὥστε ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τῆς συναρτήσεως α^χ νὰ εἶναι μικροτέρα ἀριθμοῦ τινος η, ὁσονδήποτε μικροῦ. Ὥστε διὰ νὰ μεταβῇ ἡ συνάρτησις α^χ ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην θὰ λάβῃ πάσας τὰς τιμὰς μεταξὺ αὐτῶν. Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς συναρτήσεως α^χ ἐκφράζομεν λέγοντες, ὅτι εἶναι ***συνεχής***.

Ὥστε, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἂν $\alpha > 1$ θὰ εἶναι 1ον) $\alpha^\chi > 1$, ὅταν $\chi > 0$ 2ον) $\alpha^\chi < 1$, ὅταν $\chi < 0$ καὶ 3ον) ἡ συνάρτησις α^χ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$, ὅταν ὁ χ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

Β) Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν εἶναι $\alpha < 1$ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὡς ἄνω, ὅτι εἶναι 1ον) $\alpha^\chi < 1$, ὅταν $\chi > 0$ 2ον) $\alpha^\chi > 1$, ὅταν $\chi < 0$ 3ον) ὅτι ἡ συνάρτησις α^χ εἶναι συνεχής· ὅταν δὲ ὁ χ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ ἡ α^χ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0.

165. Ἔστω νῦν ἡ ἐξίσωσις $\alpha^{\chi}=\beta$, ὅπου α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε. Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι διὰ δύο διαφόρους τιμὰς τοῦ χ ἔχομεν δύο διαφόρους τιμὰς τοῦ β (α σταθερὸν καὶ διάφορον τῆς 1). Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι εἰς ὡρισμένην τιμὴν τοῦ β ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνη πραγματικὴ τιμὴ τοῦ χ· ἐν ἄλλοις δὲ λόγοις ἡ ἐξίσωσις $\alpha^{\chi}=\beta$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν πραγματικήν, ἡ ὁποία δύναται νὰ εἶναι σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος ἀριθμός. Καὶ θὰ εἶναι μὲν σύμμετρος ἀριθμός, ἐὰν ὁ β εἶναι δύναμίς τις τοῦ α· ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ α, εἰς ἣν μετετράπη ὁ β· ἄλλως ἡ ρίζα εἶναι ἀσύμμετρος καὶ εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Λογάριθμοι.

166. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $10^{\chi}=\psi$, ὅπου χ πραγματικὸς ἀριθμὸς οἱοσδήποτε. Τότε ὁ ψ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν ρίζαν πραγματικὴν καὶ μίαν μόνην. Ἡ ρίζα αὕτη χ λέγεται ***λογάριθμος*** τοῦ ψ ὡς πρὸς τὴν βάσιν 10. Ἐν ἄλλοις δὲ λόγοις ***λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος ψ ὡς πρὸς τὴν βάσιν 10 λέγεται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως, εἰς ἣν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις 10, ἵνα δώσῃ τὸν ψ·*** καὶ γράφεται $\lambda o\gamma_{10}\psi=\chi$ ἢ ἁπλούστερον $\lambda o\gamma\psi=\chi$. Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ

$10^2=100$, εἶναι $\lambda o\gamma\ 100=2$ $\quad 10^{-2}=0{,}01$ εἶναι $\lambda o\gamma\ 0{,}01=-2$

$10^1=10$ » $\lambda o\gamma\ 10=1$ $\quad 10^{-3}=0{,}001$ » $\lambda o\gamma 0{,}001=-3$

$10^0=1$ » $\lambda o\gamma\ 1=0$ καὶ $\lambda o\gamma \sqrt[3]{10000}=\frac{4}{3}$ ἐπειδὴ

$$10^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{10000}.$$

Οἱ λογάριθμοι αὐτοί, ἐπειδὴ ἔχουσι βάσιν τὸ 10 λέγονται ***δεκαδικοὶ*** ἢ ***κοινοὶ λογάριθμοι.***

167. Ἐξ ὅσων εἴπομεν περὶ τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως, εὐκόλως συνάγομεν, ὅτι

1ον) ***Ἕκαστος πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι λογάριθμος ἑνὸς καὶ μόνον θετικοῦ ἀριθμοῦ.***

2ον) Ἕκαστος θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἕνα καὶ μόνον πραγματικὸν ἀριθμόν.

3ον) Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λογαρίθμους.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $10>1$, ἕπεται ἐπίσης, ὅτι:

4ον) Οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος 1 ἀριθμοί, ἔχουσι λογαρίθμους θετικοὺς καὶ οἱ μικρότεροι αὐτῆς ἔχουσι λογαρίθμους ἀρνητικούς.

5ον) Αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ, αὐξάνεται καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ καὶ τἀνάπαλιν.

168. ***Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων. Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου πολλῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.***

Ἔστωσαν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, ὧν οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀντιστοίχως οἱ χ, ψ, φ· ἤτοι $\lambda o\gamma A=\chi$, $\lambda o\gamma B=\psi$, $\lambda o\gamma\Gamma=\varphi$. Ἀλλά, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, ἔχομεν $10^\chi=A$, $10^\psi=B$, $10^\varphi=\Gamma$ ἄρα καὶ $A.B.\Gamma.=10^\chi.10^\psi.10^\varphi=10^{\chi+\psi+\varphi}$. Ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν $\lambda o\gamma(A.B.\Gamma)=\chi+\psi+\varphi$ ἢ $\lambda o\gamma\,(A.B.\Gamma)=\lambda o\gamma\,A+\lambda o\gamma B+\lambda o\gamma\Gamma$.

169. ***Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου.***

Διότι ἐὰν Α καὶ Β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ εἶναι $\lambda o\gamma A=\chi$, $\lambda o\gamma\,B=\psi$, θὰ ἔχωμεν $10^\chi=A$ καὶ $10^\psi=B$· ὅθεν εὑρίσκομεν $\frac{A}{B}=\frac{10^\chi}{10^\psi}=10^{\chi-\psi}$ καὶ ἐξ αὐτῆς

$$\lambda o\gamma\left(\frac{A}{B}\right)=\chi-\psi=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma B.$$

170. ***Ὁ λογάριθμος πάσης δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν ἐκθέτην.***

Ἔστω $A>0$ καὶ $\lambda o\gamma\,A=\chi$· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $10^\chi=A$ καὶ $(10^\chi)^\mu=A^\mu$. Ἀλλ' οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ μ, ἔχομεν $(10^\chi)^\mu=10^{\mu\chi}$· ὥστε εἶναι $10^{\mu\chi}=A^\mu$ καὶ ἑπομένως $\lambda o\gamma\,(A^\mu)=\mu.\chi$· δηλαδὴ $\lambda o\gamma\,(A^\mu)=\mu\,\lambda o\gamma\,A$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπόν, ἐπειδὴ $\sqrt[\nu]{A}=A^{\frac{1}{\nu}}$, ἔχομεν

$\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{A}=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma\,A$· ἤτοι

171. ***Ὁ λογάριθμος πάσης ῥίζης ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

533) Νὰ μετασχηματισθῶσιν αἱ παραστάσεις

1) $\lambda o\gamma(\alpha\beta^2\gamma^3)$ 5) $\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\beta-\lambda o\gamma\gamma$

2) $\lambda o\gamma\dfrac{\alpha^2\beta}{\gamma^4}$ 6) $2\lambda o\gamma\chi+3\lambda o\gamma\psi-\lambda o\gamma\varphi-\lambda o\gamma\omega$

3) $\lambda o\gamma\dfrac{5\sqrt{\alpha^3}}{\beta\gamma}$ 7) $4\lambda o\gamma\chi-\dfrac{1}{2}\lambda o\gamma\psi$

4) $\lambda o\gamma\dfrac{\alpha^2\sqrt{\beta}}{\sqrt[3]{\gamma^2}}$ 8) $\dfrac{1}{3}\lambda o\gamma\,\chi+\lambda o\gamma\,5-\dfrac{2}{3}\lambda o\gamma\psi$

534) Νὰ δειχθῆ, ὅτι :

1) $\lambda o\gamma\,210=\lambda o\gamma\,2+\lambda o\gamma\,3+\lambda o\gamma\,5+\lambda o\gamma\,7$

2) $\lambda o\gamma\,30+\lambda o\gamma\,36=\lambda o\gamma\,24+\lambda o\gamma\,45$

3) $\lambda o\gamma\dfrac{2}{3}+\lambda o\gamma\,\dfrac{3}{5}+\lambda o\gamma\,\dfrac{5}{2}=0$

4) $\lambda o\gamma\dfrac{25}{8}+\lambda o\gamma\,\dfrac{2}{35}-\lambda o\gamma\,\dfrac{5}{14}=-\lambda o\gamma\,2$

5) $\dfrac{1}{2}\lambda o\gamma\,16+\dfrac{1}{3}\lambda o\gamma\,8+\dfrac{1}{5}\lambda o\gamma\,32=4\lambda o\gamma\,2$

6) $\lambda o\gamma(\chi^4)+\lambda o\gamma(\chi^3)+\lambda o\gamma\left(\dfrac{1}{5}\right)=2\,\lambda o\gamma\,\chi$

172. ***Δεκαδικὴ μορφὴ τῶν λογαρίθμων.*** Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων ποὺ εἴδομεν ἕπεται, ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ 10 ἔχουσι λογαρίθμους συμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ εἶναι οὗτοι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων τούτων. Δι' ὅλους τοὺς ἄλλους ἀκεραίους ἀριθμοὺς οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί· ἀλλ' ἀντ' αὐτῶν λαμβάνομεν συμμέτρους ἀριθμοὺς κατὰ προσέγγισιν· διὰ τοῦτο δὲ θὰ γράφωμεν ***πάντοτε*** τοὺς λογαρίθμους ὑπὸ ***δεκαδικὴν μορφήν***· ἀλλ' ὅταν θὰ πρόκειται περὶ λογαρίθμων τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀρνητικοί, ***θὰ τρέπωμεν αὐτοὺς εἰς ἄλλους, ὧν μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος θὰ εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος θετικόν.*** Ἡ τροπὴ δὲ αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὁ ὅλως ἀρνητικὸς λογάριθμος $-2{,}54327$,

ἤτοι ὁ $-2-0{,}54327$· ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν $+1$ καὶ -1, ὅπερ δὲν τὸν μεταβάλλει, λαμβάνομεν $-3+1-0{,}54327$ ἤ, ἀφαιροῦντες τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τῆς θετικῆς μονάδος (ἀφαιροῦντες πρὸς εὐκολίαν τὸ τελευταῖον σημαντικὸν ψηφίον αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ 10 καὶ τὰ λοιπὰ πάντα ἀπὸ τοῦ 9), εὑρίσκομεν $-3+0{,}45673$, ὅπερ γράφεται ὡς ἑξῆς $\overline{3}{,}45673$.

173. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών: ***Ἵνα τρέψωμεν λογάριθμον ὅλως ἀρνητικὸν εἰς ἄλλον, οὗτινος μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος νὰ εἶναι ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ κατὰ μονάδα καὶ γράφομεν τὸ σημεῖον — ὑπεράνω αὐτοῦ, μετὰ δὲ ταῦτα ἀφαιροῦμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τῆς μονάδος.***

Οὕτω οἱ ἀρνητικοὶ λογάριθμοι $-1{,}5009849$, $-0{,}8895070$ τρέπονται εἰς τοὺς ἑξῆς $\overline{2}{,}4990151$, $\overline{1}{,}1104930$.

174. ***Χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου.*** Χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου λέγεται ***τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ.*** Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος εὑρίσκεται εὐκολώτατα, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

α) Ἔστω ἀριθμός τις μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1, π. χ. ὁ 458,24· δι' αὐτὸν παρατηροῦμεν, ὅτι $10^2<458{,}24<10^3$ ἐπομένως εἶναι καὶ $\text{λογ}(10^2)<\text{λογ}458{,}24<\text{λογ}(10^3)$ ἢ $2<\text{λογ}458{,}24<3$, ἤτοι ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3 καὶ ἐπομένως τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ εἶναι 2· ἤτοι τοῦτο ***ἔχει τόσας μονάδας ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους του ἠλαττωμένα κατὰ 1.***

Γενικῶς δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι, ***ἂν ἀριθμοῦ τινος Α τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους εἶναι μ, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ Α εἶναι μ — 1,*** διότι διὰ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α ἔχομεν $10^{\mu-1}<A<10^{\mu}$, ἄρα καὶ $(\mu-1)\text{λογ}10<\text{λογ}A<\mu\text{λογ}10$ καὶ ἐπειδὴ $\text{λογ}10=1$, ἔχομεν $\mu-1<\text{λογ}A<\mu$· ἀφοῦ λοιπὸν ὁ λογΑ περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων $\mu-1$ καὶ μ, ἕπεται, ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογΑ εἶναι $\mu-1$.

β) Ἔστω ἤδη ἀριθμός τις μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος π.χ. ὁ 0,005498. Ἀλλ' οὗτος, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1000 καὶ διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δὲν μεταβάλλεται· ὥστε γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\frac{5,498}{1000}$ καὶ διὰ τοῦτο ὁ λογάριθμος αὐτοῦ εἶναι ἴσος τῷ λογ(5,498)—3· καὶ ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμητοῦ ἔχει ἀκέραιον μέρος 0, ἕπεται, ὅτι τοῦ δοθέντος κλάσματος ὁ λογάριθμος θὰ ἔχῃ χαρακτηριστικὸν —3.

Ὅθεν ***τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου παντὸς δεκαδικοῦ κλάσματος ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὴν τάξιν τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.***

175. Ἔστω ἤδη λογα=β· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι

$$λογ(10α)=λογ10+λογα=1+β$$

καὶ $$λογ(100α)=λογ100+λογα=2+β$$

καὶ $λογ\frac{α}{10}=λογα-λογ10=β-1$. Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι :

Ἐὰν ἀριθμός τις πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ δυνάμεως τοῦ 10, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν ἀλλάσσει.

Κατὰ ταῦτα ἐπειδὴ λογ2=0,30103

εἶναι $$λογ20=1,30103$$

καὶ $$λογ0,2=\bar{1},30103$$

Ἐκ τῶν ἀμέσως ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ***τὸ μὲν δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ὁρίζει μόνον τὴν σειρὰν τῶν σημαντικῶν ψηφίων, δι' ὧν γράφεται ὁ ἀριθμός, τὴν δὲ ἀξίαν ἑκάστου ὁρίζει τὸ χαρακτηριστικόν.***

176. ***Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.*** Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι, πλὴν τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100 κλπ., πάντων τῶν ἄλλων ἀκεραίων οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἔχουσι διὰ τοῦτο ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Καὶ ἕνεκα τούτου εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ προσέγγισιν (συνήθως 0,00001).

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς, συνήθως μέχρι τοῦ 10000, εὑρέθησαν καὶ ἐγράφησαν εἰς πίνακας καλουμένους ***λογαριθμικούς.*** Οἱ πίνακες τῶν λογαρίθμων, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται συνηθέστερον, περιέχουσι λογαρίθμους μετὰ 5 δεκαδικῶν ψηφίων· ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ πίνακες μὲ 4, μὲ 7 ἢ καὶ μὲ 12 δεκαδικὰ ψηφία.

Τὰ ἀκέραια μέρη τῶν λογαρίθμων δὲν ἐγράφησαν εἰς τοὺς πίνακας ὡς εὐκολώτατα εὑρισκόμενα. Ἡ δὲ εὕρεσις τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν γίνεται διὰ μεθόδων σχετικῶς εὐκόλων, τὰς ὁποίας παρέχουσιν αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων· Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὸ ἔργον τοῦτο ἐγένετο, ἤδη ὀλίγον ἐνδιαφέρει ἡμᾶς ὁ τρόπος καθ᾽ ὃν ἐγένετο. Παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι, ἕνεκα τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τῶν λογαρίθμων, οἱ λογάριθμοι τῶν μὴ πρώτων ἀριθμῶν ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν λογαρίθμων τῶν πρώτων παραγόντων αὐτῶν. Ὥστε ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῶσιν οἱ λογάριθμοι μόνον τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Διάταξις τῶν πινάκων (Dupuis)

Αὕτη φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου πίνακος

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
430	63347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
1	448	458	468	478	488	498	508	518	528	538
2	548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
3	649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
4	749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
5	849	859	869	879	889	899	909	619	929	939
6	949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
7	64048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
8	147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
9	246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440	345	355	365	375	385	395	404	414	424	434

Αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν εἶναι γραμμέναι ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres), αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν σειρὰν μετὰ τοῦ N. Ὁ δὲ λογάριθμος ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται ἐν τῷ τόπῳ, ἔνθα διασταυροῦνται αἱ δύο σειραί, αἱ τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας αὐτοῦ ἔχουσαι.

Ἐπειδὴ δὲ πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουσι κοινὰ τὰ πρῶτα ψηφία, γράφονται ταῦτα ἅπαξ (ἐπὶ τῶν πενταψηφίων λογαρίθμων τὰ δύο πρῶτα) καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις οὗ ἀλλαχθῶσιν.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν ὅτι, εἶναι

λογ 4308 = 3,63428
λογ 4320 = 3,63548
λογ 4325 = 3,63599
λογ 4368 = 3,64028

Σημ. Ὁ ἀστερίσκος, ὅστις ἐν τοῖς πενταψηφίοις πίναξιν ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ, σημαίνει, ὅτι τὰ παραλειπόμενα πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις, ὅτι ἐν τῇ πρώτῃ σελίδι περιέχουσιν οἱ πίνακες τοὺς λογαρίθμους τῶν μικρῶν ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν τεταγμένους (οἱ πενταψήφιοι πίνακες ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100) καὶ τοῦτο, ἵνα ταχύτερον εὑρίσκωνται οἱ λογάριθμοι αὐτῶν.

Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

Ἡ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑπομένων δύο προβλημάτων.

Πρόβλημα 1ον. Δοθέντος ἀριθμοῦ, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ περιλαμβάνει δύο μέρη.

α′) ***Εὑρεῖν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου.***

β′) ***Εὑρεῖν τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ.***

Καὶ τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν εὑρίσκεται, ὡς εἴδομεν, εὐκολώτατα, διότι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὑποτίθεται γραμμένος ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν πάντοτε μορφήν.

Π. χ. ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι 58759, ὁ λογάριθμός του θὰ ἔχῃ χαρακτηριστικὸν 4.

ἂν εἶναι 5,8759, ὁ λογ)μός του θὰ ἔχῃ χαρακτ. 0
» » 0,058, » » » » » » $\overline{2}$

Εἰς δὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου πρῶτον παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν ἔχῃ), ὥστε καθιστῶμεν αὐτὸν ἀκέραιον, τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸ ζητούμενον δεκαδικὸν μέρος (175), ἔπειτα διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η) Ἂν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων (χρησιμοποιοῦμεν πενταψηφίους πίνακας), ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καί, εὑρίσκοντες αὐτόν, εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

Π.δ. Ὁ λογάριθμος τοῦ 352 ἔχει χαρακτηριστικὸν μὲν 2, δεκαδικὸν δὲ μέρος, εὑρισκόμενον ἐκ τῶν πινάκων, ἔχει 54654 (τὸ αὐτό, ὅπερ καὶ ὁ ἀριθμὸς 3520). Ὅθεν εἶναι:

$$\lambda o\gamma 352 = 2,54654.$$

Ὁ λογάριθμος τοῦ 5,401 ἔχει χαρακτηριστικὸν μὲν 0, δεκαδικὸν δὲ μέρος τὸ αὐτὸ μὲ τὸν ἀριθμὸν 5401, ἤτοι, ὡς ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν, τὸ 73247. Ὅθεν εἶναι λογ5,401=0,73247

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\lambda o\gamma 0,8035 = \bar{1},90499$

$$\lambda o\gamma 0,08035 = \bar{2},90499$$

2α) Ἂν ὁ ἀριθμός ἔχῃ ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, χωρίζομεν τὰ τέσσαρα πρῶτα δι᾽ ὑποδιαστολῆς.

Ἐὰν π. χ. πρόκειται περὶ τοῦ ἀριθμοῦ 85946 γράφομεν 8594,6, ὅπερ οὐδόλως μεταβάλλει τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου· ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς 8594,6 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων 8594 καὶ 8595, ἔπεται, ὅτι καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων τούτων.

εἶναι δὲ $\lambda o\gamma 8594 = 3,93420$

$$\lambda o\gamma 8595 = 3,93425.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 5 (μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως), ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 8595 καὶ 8596 εἶναι πάλιν 5 (καὶ ἡ αὐτὴ διαφορὰ ἐπὶ πολὺ διατηρεῖται). Ὥστε ***δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν,*** ὅτε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Δι᾽ αὔξησιν μιᾶς μονάδος, ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8594, εἰς τὸν 8595, ηὐξήθη ὁ λογάριθμος κατὰ 5 ἑκατοντάκις χιλιοστά)· δι᾽ αὔξησιν 0,6, ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8594 εἰς τὸν 8594,6, θέλει αὐξηθῆ κατὰ $5 \times 0,6$, ἤτοι 3. Ὥστε πρέπει νὰ προσθέσωμεν 3 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ 8594, ἵνα λάβωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 8594,6 ὅστις ἑπομένως εἶναι 3,93423· ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 85946 εἶναι διὰ τοῦτο 4,93423.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦτο 85,946, ὁ λογάριθμος θὰ ἦτο 1,93423.

Ἔστω προσέτι ὁ ἀριθμὸς 5,87984· ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ἔχει χαρακτηριστικὸν 0. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου γράφομεν 5879,84· ἔχομεν δὲ λογ5879=3,76930 καὶ διαφορὰν τῶν λογαρίθμων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων 8. Ὥστε ἀνάγκη νὰ προσθέσωμεν 8×0,84, ἤτοι 7 δεκαδικὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως·

ὅθεν λογ5879,84=3,76937

καὶ λογ5,87984=0,76937

Σημ. Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων ἀριθμῶν μένει πάντοτε ἡ αὐτή, ἀλλ᾽ ἐλαττοῦται, καθ᾽ ὅσον αὐξάνουσιν οἱ ἀριθμοί, ὥστε δὲν ἀληθεύει, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδὴ ὅμως ἑκάστη διαφορὰ μένει ἀμετάβλητος ἐπὶ πολλοὺς ἀριθμούς, δυνάμεθα νὰ συνιστῶμεν κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀναλογίαν, ἐφ᾽ ἧς στηρίζεται ἡ προηγουμένη μέθοδος.

Πρόβλημα 2ον. Δοθέντος λογαρίθμου, εὑρεῖν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ὑποδιαιρεῖται εἰς τὰ ἑξῆς δύο.

α) ***Εὑρεῖν τὰ ψηφία, δι᾽ ὧν κατὰ σειρὰν γράφεται ὁ ἀριθμός.***

β΄) ***Προσδιορίσαι τὴν ἀξίαν ἑκάστου ψηφίου.***

Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὑρίσκεται ἐν τῷ πίνακι, θὰ εὕρωμεν ἀπέναντι τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ (ζητοῦμεν δ᾽ αὐτὸ πάντοτε μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν), τὴν δὲ ἀξίαν ἑκάστου προσδιορίζει τὸ χαρακτηριστικόν.

Ἔστω π.χ. ὁ λογάριθμος 3,59095.

Τὸ δεκαδικὸν μέρος εὑρίσκεται ἐν τῷ πίνακι καὶ εἶναι τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 3899· ἐπειδὴ δὲ χαρακτηριστικὸν ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει 3, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἔχῃ τέσσαρα ἀκέραια ψηφία, ὥστε εἶναι ἀκριβῶς ὁ 3899· ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι

εἰς τὸν λογάριθμον $\overline{1}$,59095 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,3899,
» » » 1,59095 » » » 38,99
» » » 4,59095 » » » 38990 κ.ο.κ.

2α) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου δὲν ὑπάρχῃ ἐν τῷ πίνακι, θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. ὁ λογάριθμος 1,95094· τὸ δεκαδικὸν μέρος 95094 εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 8931 καὶ 8932· διαφέρουσι δὲ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ 5 (μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως)· ὥστε, παραδεχόμενοι, ὡς καὶ πρίν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν ἀριθμῶν, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς.

Ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ 8931, ὅστις εἶναι 3,95090, αὐξηθῇ κατὰ 5 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ μίαν μονάδα, ἂν δὲ αὐξηθῇ ὁ λογάριθμος μόνον κατὰ 4 μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως, ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{4}{5}$ μιᾶς μονάδος· ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει δεκαδικὸν μέρος τὸ 95094, θὰ εἶναι 8931,8 ἢ μᾶλλον 89318, διότι μόνον περὶ τῆς διαδοχῆς τῶν ψηφίων φροντίζομεν, ἡ δὲ ἀξία αὐτῶν θὰ ὁρισθῇ ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐνταῦθα 1· ὥστε ὁ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶναι 89,318.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς προσδιορίζεται κατὰ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλυτέραν, ὅσῳ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶναι μικρότερον. Καὶ ὄντως, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι $\overline{1}$, εἶναι ἀκριβῆ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέχρι τοῦ τῶν ἑκατοντάκις χιλιοστῶν, ἂν δὲ εἶναι 0, τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀκριβῆ μέχρι τῶν μυριοστῶν, ἂν δὲ 2, μόνον μέχρι τῶν ἑκατοστῶν· ἂν δὲ 5, ὁρίζεται ὁ ἀριθμὸς μόνον μέχρι τῶν δεκάδων, αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ εἶναι ἄγνωστοι.

Σημ. Ἐὰν δοθῇ λογάριθμος ὅλως ἀρνητικός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον, τοῦ ὁποίου μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν νὰ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 75,32.0,6508.

Ἔστω χ τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ἐφαρμόζοντες ὅμως τὴν $\alpha^{\eta\nu}$ ἰδιότητα τῶν λογαρίθμων ἔχομεν:

λογ χ=λογ75,32+λογ0,6508

$$\begin{array}{r} \text{λογ}75{,}32=1{,}87691 \\ \text{λογ}0{,}6508=\overline{1}{,}81345 \\ \hline \text{λογχ}=1{,}69036 \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ πρὸς τὸν λογάριθμον 1,69036 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶναι 49,019, ἕπεται, ὅτι χ=49,019 κατὰ προσέγγισιν 0,001.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ψ=853,54 : 195,817.

ἔχομεν λογψ=λογ853,54—λογ195,817

$$\begin{array}{r} \text{λογ}853{,}54=2{,}93122 \\ \text{λογ}195{,}817=2{,}29185 \\ \hline \text{λογψ}=0{,}63937 \end{array}$$

καὶ ψ=4,3588 (προσ. 0,0001)

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις $\chi=(1{,}05)^{30}$

ἔχομεν λογχ=30λογ1,05

$$\begin{array}{r} \text{λογ}1{,}05=0{,}02119 \\ \text{ἐπὶ}\quad 30 \\ \hline \text{λογχ}\quad =0{,}63570 \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ 1,05 δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἐν τῷ πίνακι ὑπάρχοντος κατὰ ἡμίσειαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, ἕπεται, ὅτι ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ $(1{,}05)^{30}$ δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς κατὰ 15 μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, ἑπομένως ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ $(1{,}05)^{30}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0,63555 καὶ τοῦ 0,63585· ἄρα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν πινάκων, ἡ ζητουμένη δύναμις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 4,320 καὶ 4,324· ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις εἶναι χ=4,322 (πρ. 0,002).

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\psi=\sqrt[3]{120^2}$.

Ἔχομεν $\text{λογψ}=\frac{2}{3}\text{λογ}\,120$

$$\begin{array}{r} \text{λογ}120=2{,}07918 \\ \text{ἐπὶ}\quad \frac{2}{3} \\ \hline \text{λογψ}=1{,}38612 \end{array}$$

καὶ ψ=24,329

5) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\psi = \sqrt[5]{0,854}$.

λαμβάνομεν $\lambda o\gamma\, \psi = \frac{1}{5}\, \lambda o\gamma\, 0,854$ $\qquad \lambda o\gamma\, 0,854 = \overline{1},93146$

$$\text{ἐπὶ } \frac{1}{5}$$

$$\lambda o\gamma\, \psi = \overline{1},98629$$

καὶ $\psi = \sqrt[5]{0,854} = 0,968925$.

Παρατήρησις. Ἵνα διαιρέσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{1},93146$ διὰ τοῦ 5, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς $\overline{5}+4,93146$ καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν χωριστά.

6) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράστασις $\chi = \dfrac{(\sqrt{28})^3 \cdot \sqrt[5]{53}}{8993}$

ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν $\lambda o\gamma\, \chi = \frac{3}{2} . \lambda o\gamma\, 28 + \frac{1}{5} . \lambda o\gamma\, 53 - \lambda o\gamma\, 8993$.

Διάταξις τῶν πράξεων.

$\lambda o\gamma\, 28 = 1,44726$		$\frac{3}{2} \lambda o\gamma\, 28 = 2,17074$
$\lambda o\gamma\, 53 = 1,72428$		$\frac{1}{5} \lambda o\gamma\, 53 = 0,34485$
	ἄθροισμα	2,51559
$\lambda o\gamma\, 8993 = 3,95390$	ἀφαιρεῖται	3,95390
	ὑπόλοιπον	$\overline{2},56129$

καὶ $\chi = 0,03645$

7) Ὑπολογίσαι τὴν παράστασιν $\chi = \dfrac{3.(0,045)^{\frac{2}{3}} .(58)^{\frac{1}{4}}}{(0,318)^5}$

ἐξ αὐτῆς ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma\, 3 + \frac{2}{3} \lambda o\gamma\, (0,045) + \frac{1}{4}\, \lambda o\gamma\, 58 - 5\, \lambda o\gamma\, (0,318)$$

Διάταξις τῶν πράξεων

$\lambda o\gamma\, 3 =$		$= 0,47712$
$\lambda o\gamma (0,045) = \overline{2},65321$	$\frac{2}{3} \lambda o\gamma (0,045)$	$= \overline{1},10214$
$\lambda o\gamma\, 58 = 1,76343$	$\frac{1}{5} \lambda o\gamma\, 58$	$= 0,44085$
	ἄθροισμα	0,02011

$\log(0,318)=\overline{1},50243$

$$5\log(0,318)=\overline{3},51215$$

$$\log\psi=2,50796$$

$$\text{καὶ } \psi=322,1$$

Σημ. Πρὸς ἀφαίρεσιν τοῦ λογαρίθμου $\overline{3},51215$ νοοῦμεν προστεθείσας τρεῖς μονάδας εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ὅπερ δὲν βλάπτει τὴν διαφοράν, ἢ ἀφαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν χωριστὰ καὶ ἐφαρμόζομεν τὰ περὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἰρημένα.

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἀρκοῦσιν, ἵνα γίνῃ καταφανὴς ἡ ἀπὸ τῶν λογαρίθμων ὠφέλεια, διότι διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων κατορθοῦμεν νὰ ἀναγάγωμεν τὰς ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν πράξεις εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας, ἤτοι τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ριζῶν εἰς διαίρεσιν, χρησιμοποιοῦντες πρὸς τοῦτο τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων· οὕτω δι᾽ αὐτῶν ἐκτελοῦνται πράξεις, αἱ ὁποῖαι ἄλλως τε θὰ ἦσαν μακρόταται καὶ ἐπιπονώταται ἢ καὶ ἀδύνατοι. Πρέπει ὅμως ἐν ἑκάστῳ ὑπολογισμῷ νὰ ἐξακριβώνηται ἡ ἐπιτευχθεῖσα προσέγγισις, διότι, ὡς εἰς τὸ 3ον παράδειγμα ἐδείχθη, ὅταν ὁ αὐτὸς λογάριθμος πολλάκις ἐπαναλαμβάνηται ἢ ὅταν πολλοὶ λογάριθμοι λαμβάνωνται, ἐπειδὴ ἕκαστος αὐτῶν διαφέρει τοῦ ἀληθοῦς, ἐπαναλαμβάνεται καὶ τὸ ἐν ἑκάστῳ ὑπάρχον σφάλμα καὶ ἑπομένως ὁ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν προκύπτων λογάριθμος τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς κατὰ πολλὰς μονάδας τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καλλίτερον εἶναι νὰ γίνηται χρῆσις τῶν ἑπταψηφίων λογαρίθμων, ὡς μείζονα προσέγγισιν παρεχόντων.

Ἐπὶ παραστάσεων μὴ μονωνύμων ἐφαρμόζονται μετὰ δυσκολίας οἱ λογάριθμοι· διότι ἐν γένει εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπολογίζηται διὰ τῶν λογαρίθμων ἕκαστος τῶν προσθετέων τῆς παραστάσεως (ἐκτὸς ἂν εἶναι δεδομένος), ὥστε ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ὅλης παραστάσεως ἀναλύεται εἰς περισσοτέρους ὑπολογισμοὺς μονωνύμων· τοῦτο δὲ καὶ τὰς ἐργασίας πολλαπλασιάζει καὶ τὴν προσέγγισιν βλάπτει. Διὰ τοῦτο ζητοῦμεν πάντοτε νὰ μετασχηματίζωμεν τὴν διὰ τῶν λογαρίθμων ὑπολογιστέαν παράστασιν, ἂν εἶναι δυνατόν, εἰς μονώνυμον. Ἐὰν π.χ. πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ρίζα

$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, γράφομεν $\sqrt{(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)}$ καὶ ἐπειδὴ α καὶ β ὑποτίθενται δεδομένα, εὑρίσκομεν τοὺς παράγοντας α+β καὶ α—β καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τοὺς λογαρίθμους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

535) Νὰ ὑπολογισθῶσι διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις:

α) $7,25.0,5817.21,69$ ε) $0,72^6$

β) $\dfrac{69,28.(24,2)^2}{0,951}$ ϛ) $\sqrt[7]{8926}$

γ) $1,06^{25}$ ζ) $\sqrt[5]{378^3}$

δ) $2345.(1,08)^{15}$ η) $\sqrt[5]{0,0471}$

536) Ὁμοίως αἱ

α) $\dfrac{3,71.(1,04)^{20}}{0,79.(1,05)^{10}}$ γ) $\dfrac{20\sqrt[4]{15}}{\sqrt{0,09}}$

β) $\sqrt{\dfrac{(1,04).\sqrt[7]{6728}}{(1,07)^4}}$ δ) $\dfrac{5\sqrt[7]{1,85}.\sqrt[3]{29^4}}{\sqrt[8]{735}}$

537) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 21ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου

3, 15, 75, 375...;

538) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ὁ 25ος ὅρος τῆς προόδου

$1, \quad \dfrac{2}{3}, \quad \dfrac{4}{9}, \quad \dfrac{8}{27} \dots$

539) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι α=18,20 β=22,50 γ=36,24. ($E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου).

Περὶ ἀνατοκισμοῦ.

177. ***Τόκος*** λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ἀποφέρουσι δανεισθέντα χρήματα.

Ἐπιτόκιον λέγεται τὸ κέρδος, ὅπερ ἀποφέρουσιν 100 δρ. εἰς ἓν ἔτος.

Τὸ δανεισθὲν ποσὸν λέγεται ***κεφάλαιον.***

Ὁ τόκος εἶναι ἢ ***ἁπλοῦς*** ἢ ***σύνθετος***· καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· σύνθετος δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελεῖ τὸ κατὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα τοκιζόμενον κεφάλαιον.

Ἡ εἰς τὸ κεφάλαιον προσθήκη τοῦ τόκου, ἤτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου, λέγεται ***ἀνατοκισμός,*** τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται, ὅτι ***ἀνατοκίζεται.***

178. Πρόβλημα. ***Κεφάλαιον α δραχμῶν, ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος, πόσον θὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη, ὅταν μία δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον τ;***

Ἐπειδὴ μία δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον τ, αἱ α δραχμαὶ φέρουσιν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ατ· ὥστε τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha+\alpha\tau$ ἢ $\alpha(1+\tau)$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ μετὰ ἓν ἔτος ἀξία τοῦ κεφαλαίου οἱουδήποτε εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τοῦτο ἐπὶ $(1+\tau)$.

Κατὰ ταῦτα τὸ κεφάλαιον, ὅπερ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ἔγινεν $\alpha(1+\tau)$, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau).(1+\tau)$, ἤτοι $\alpha(1+\tau)^2$ (διότι, διαρκοῦντος τοῦ δευτέρου ἔτους, θεωρεῖται τὸ $\alpha(1+\tau)$ ὡς κεφάλαιον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου $\alpha(1+\tau)^3$ καὶ γενικῶς εἰς τὸ τέλος τοῦ $\nu^{\text{οστοῦ}}$ θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$· ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν τὴν ἀξίαν τοῦ δανείου εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν διὰ τοῦ Κ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $K=\alpha(1+\tau)^\nu$ (1) Φανερὸν δέ, ὅτι ἡ αὐτὴ προκύπτει ἐξίσωσις καὶ ὅταν ὁ ἀνατοκισμὸς συμβαίνει οὐχὶ κατ' ἔτος, ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα οἱαδήποτε, ἀρκεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ τ ὁ τόκος τῆς δραχμῆς εἰς ἓν τῶν διαστημάτων τούτων καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν διαστημάτων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἓν τῶν τεσσάρων ποσῶν Κ, α, τ, ν, ὅταν τὰ λοιπὰ τρία εἶναι δεδομένα· γίνεται δὲ τοῦτο εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων, διότι, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\text{λογ}\,K = \text{λογ}\,\alpha + \nu\,\text{λογ}\,(1+\tau) \qquad (1')$$

Ἐπειδὴ δὲ δύναται νὰ εἶναι ἄγνωστον ἓν οἱονδήποτε τῶν τεσσάρων Κ, α, ν, τ, ἕπεται, ὅτι δύνανται νὰ προταθῶσι τέσσαρα διάφορα προβλήματα.

Ἕπονται παραδείγματα τοιούτων προβλημάτων.

1) ***Ἐδάνεισέ τις πρὸ 12 ἐτῶν 10000 δρ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 8 %· πόσας ἔχει νὰ λάβῃ σήμερον;***

Ἔχομεν $\nu=12$, $\alpha=10000$, $\tau=0{,}08$· ὅθεν ὁ τύπος (1′) γίνεται $\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma 10000+12\lambda o\gamma(1{,}08)$

$$\lambda o\gamma 10000=4$$

$$\lambda o\gamma(1{,}08)=0{,}03342 \qquad 12\lambda o\gamma(1{,}08)=0{,}40104$$

$$\lambda o\gamma\, K \quad =4{,}40104$$

$$\text{καὶ } K \quad =25178$$

κατὰ προσέγγισιν 3 μονάδων.

2) ***Ἂν τις ἐδάνειζεν ἀπὸ τῆς πρώτης ἡμέρας τῆς γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ ἓν λεπτὸν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 %, πόσον θὰ ἐγίνετο τὸ δάνειον εἰς τὸ τέλος τοῦ 1900;***

Ἔχομεν $\nu=1900$, $\tau=0{,}04$, $\alpha=0{,}01$

Ὅθεν ὁ τύπος (1′) γίνεται

$$\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma(0{,}01)+1900\lambda o\gamma(1{,}04)$$

$$\lambda o\gamma(0{,}01)=\overline{2}$$

$$\lambda o\gamma(1{,}04)=0{,}01703, \quad 1900\lambda o\gamma(1{,}04)=32{,}35700$$

$$\lambda o\gamma\, K \quad =30{,}35700$$

Ὁ ἀριθμὸς Κ τῶν δραχμῶν, αἵτινες παριστῶσι τὴν ἀξίαν τοῦ δανείου μετὰ 1900 ἔτη, γράφεται μὲ 31 ψηφία ἀκέραια· 31 ὄγκοι χρυσοῦ, ὧν ἕκαστος ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τῆς γῆς, μόλις θὰ ἐξήρκουν πρὸς πληρωμὴν τοῦ ποσοῦ τούτου· τῷ ὄντι ὁ ὄγκος τῆς γῆς (ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς εἶναι 40000000 μέτρα) εἶναι κυβικὰ μέτρα $\dfrac{\frac{4}{3}(40000000)^3}{8\pi^2}$, τόσος δὲ ὄγκος χρυσοῦ θὰ εἶχε βάρος $\dfrac{(40000000)^3}{6\pi^3}.19500$ χιλιόγραμμα (διότι μία λίτρα χρυσοῦ ἔχει βάρος 19,5 χιλιόγραμμα)· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀξία ἑνὸς χιλιογράμμου τοῦ χρυσοῦ εἶναι περίπου $\dfrac{31000}{9}$ δραχμαὶ χρυσαῖ, ἡ ἀξία ἑνὸς τοιούτου ὄγκου θὰ ἦτο

$\frac{(40000000)^3}{54\pi^2}.19500.31000$ καί, ἂν μ τοιοῦτοι ὄγκοι ἔχωσιν· ἀξίαν ἴσην τῷ K, θὰ εἶναι $K=\frac{(40000000)^3}{54\pi^2}.19500.31000\mu$.

Ὅθεν εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma(\mu)=\lambda o\gamma K+\lambda o\gamma 54+2\lambda o\gamma\pi-3\lambda o\gamma(40000000)-\lambda o\gamma(19500)-\lambda o\gamma(31000),$$

$$\begin{array}{rr} \lambda o\gamma K=30,35700 & 3\lambda o\gamma(40000000)=22,80618 \\ \lambda o\gamma 54=\ 1,73239 & \lambda o\gamma(19500)=\ 4,29003 \\ 2\lambda o\gamma\pi=\ 0,99428 & \lambda o\gamma 31000=\ 4,49136 \\ \hline 33,08367 & 31,58757 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33,08367 \\ 31,58757 \\ \hline \lambda o\gamma\mu=1,49619 \end{array} \quad \text{καὶ } \mu=31,34$$

3) ***Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δανείσῃ τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %, ἵνα λάβῃ μετὰ 15 ἔτη 50000 ;***

Ἔχομεν $K=50000$, $\tau=0,06$, $\nu=15$· ὅθεν ἕπεται ἐκ τοῦ τύπου (1′) $\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 50000-15\lambda o\gamma(1,06)$

$$\lambda o\gamma(1,06)=0,02531 \qquad \begin{array}{r} \lambda o\gamma 50000=4,69897 \\ 15\lambda o\gamma(1,06)=0,37965 \\ \hline \lambda o\gamma\alpha=4,31932 \\ \text{καὶ } \alpha=\ 20806 \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν 4 μονάδων.

4) ***Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 5897 δραχμαί, ἀνατοκιζόμεναι ἐπὶ 6 ἔτη, ἔγιναν 9805 ;***

Ἔχομεν $\nu=6$, $K=9805$, $\alpha=5897$.

Ὅθεν $\lambda o\gamma(1+\tau)=\frac{1}{6}(\lambda o\gamma 9805-\lambda o\gamma 5897)$

$$\begin{array}{r} \lambda o\gamma 9805=3,99145 \\ \lambda o\gamma 5897=3,77063 \\ \hline \text{διαφορὰ}=0,22082 \\ \lambda o\gamma(1+\tau)=0,03680 \\ \text{καὶ } (1+\tau)=1,0884 \\ \text{ὅθεν } \tau=0,0884 \end{array}$$

καὶ τὸ ἐπιτόκιον 100τ εἶναι 8,84 % κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

5) ***Μετὰ πόσα ἔτη 12589 δραχμαί, ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 5 %, γίνονται 45818 ;***

Ὁ τύπος (1΄) δίδει $ν=\dfrac{λογ45818-λογ12589}{λογ(1,05)}$

Ἔχομεν

$$
\begin{array}{r}
λογ45818=4,66104 \\
λογ12589=4,09999 \\
\hline
διαφορὰ=0,56105
\end{array}
$$

$λογ(1,05)=0,02119$

καὶ $ν=\dfrac{0,56105}{0,02119}=\dfrac{56105}{2119}=26$ ἔτη καί τι πλέον.

Σημ. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης βλέπομεν, ὅτι 26 ἔτη δὲν εἶναι ἱκανά, ἀλλ᾽ 27 εἶναι περισσότερα τοῦ δέοντος. Ἵνα εὕρωμεν καὶ τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 27ου ἔτους, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 26ου ἔτους αἱ δραχμαὶ γίνονται $12589.(1.05)^{26}$· ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον τοῦτο τοκισθῇ ἐπὶ η ἡμέρας, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\left(1+\dfrac{ητ}{365}\right)$ καὶ θὰ ἔχωμεν ἑπομένως τὴν ἐξίσωσιν $12589.(1,05)^{26}.\left(1+\dfrac{ητ}{365}\right)=45818$, ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τὸν ἀριθμὸν $\left(1+\dfrac{ητ}{365}\right)$, ἐξ αὐτοῦ δὲ εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὸν η. Οὕτω εὑρίσκεται η=172.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς ἐν τῇ παρενθέσει ποσότητος εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ἐξ ἧς εὑρίσκεται ὁ ν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

450) Εἰς τί ποσὸν θ᾽ ἀνέλθουν τὰ κάτωθι κεφάλαια ἀνατοκιζόμενα κατ᾽ ἔτος ;

1)	4700 Δρ.	πρὸς	4 %	ἐπὶ	20 ἔτη
2)	5163 »	»	$4\frac{1}{2}$ %	»	8 »
3)	7300 »	»	$6\frac{1}{2}$ %	»	15 »
4)	10800 »	»	$8\frac{1}{8}$ %	»	12 »

541) Ποῖα κεφάλαια πρέπει νὰ καταθέσῃ τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἵνα λάβῃ

1)	6500	Δρ. μετὰ	10	ἔτη,	τοῦ	ἐπιτοκίου	ὄντος	6 %
2)	28360	» »	12	»	»	»	»	4,50%
3)	47000	» »	20	»	»	»	»	5,50%
4)	200000	» »	45	»	»	»	»	7,50%

542) Μετὰ πόσα ἔτη 7000 δραχμαί, ἀνατοκιζόμεναι κατ᾽ ἔτος πρὸς 5%, γίνονται 9850 δραχμαί;

543) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν᾽ ἀνατοκισθῇ κατ᾽ ἔτος κεφάλαιον 24850 δραχμῶν, ἵνα μετὰ 12 ἔτη γίνῃ 50000 δρ.;

544) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν᾽ ἀνατοκισθῇ κατ᾽ ἔτος κεφάλαιον 30000 δραχμῶν, ἵνα μετὰ 15 ἔτη γίνῃ 88770 δραχμ.;

545) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιόν τι, ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος, διπλασιάζεται μετὰ 15 ἔτη;

546) Μετὰ πόσον χρόνον 35000 δραχμ., ἀνατοκιζόμεναι κατ᾽ ἔτος πρὸς $6\frac{1}{2}$%, γίνονται 60000 δραχμαί;

547) Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι, ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος πρὸς 4% (ἢ 4,50 ἢ 5%), διπλασιάζεται καὶ μετὰ πόσον χρόνον, ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος πρὸς 6%, τριπλασιάζεται;

548) Εἰς τί ποσὸν θ᾽ ἀνέλθῃ κεφάλαιον 42000 δραχμ., ἀνατοκιζόμενον καθ᾽ ἑξάμηνον ἐπὶ 18 ἔτη πρὸς 8%, καὶ εἰς τί, ἐὰν οἱ τόκοι του κεφαλαιοποιοῦνται ἀνὰ τρίμηνον;

549) Κεφάλαιον 15000 δραχμῶν ἀνατοκίζεται κατ᾽ ἔτος πρὸς 5%. Εἰς τί ποσὸν θ᾽ ἀνέλθῃ, ἐὰν ὁ χρόνος εἶναι 6 ἔτη καὶ 9 μῆνες;

550) Δύναταί τις νὰ δανείσῃ κεφάλαιον 60000 δραχμῶν διὰ 10 ἔτη εἴτε ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κατ᾽ ἔτος πρὸς 5%, εἴτε μὲ ἁπλοῦν τόκον πρὸς 7%. Ποῖος τρόπος δανείου ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ πλεονεκτικώτερος;

551) Δανείζει τις δι᾽ 6 ἔτη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κατ᾽ ἔτος τὸ κεφάλαιον τῶν 28400 δραχμῶν. Διὰ ποῖον χρόνον ἔπρεπε νὰ δανείσῃ τὸ αὐτὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ, ἵνα πραγματοποιήσῃ τὴν αὐτὴν αὔξησιν τοῦ κεφαλαίου του;

552) Δανείζει τις κεφάλαιον 18500 δρ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κατ᾽ ἔτος πρὸς 6% ἐπὶ 8 ἔτη. Ποῖον κεφάλαιον θὰ ἔπρεπε νὰ δανείσῃ ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κατ᾽ ἔτος πρὸς 5%, ἵνα μετὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἔχῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν δραχμῶν;

553) Κεφάλαιόν τι, ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος, γίνεται μετὰ 3

ἔτη 5625 δρ., μετὰ ἄλλα δὲ δύο ἀκόμη γίνεται 6084 δρ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον;

554) Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς τόπου τινὸς αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ 5 χιλιοστὰ αὐτοῦ καὶ εἶναι σήμερον 2000000, πόσος θὰ γίνῃ μετὰ 100 ἔτη;

179. ***Πρόβλημα ἴσων καταθέσεων. Ἐὰν καταθέτῃ τις κατ' ἔτος εἰς τράπεζαν τὸ ποσὸν α δραχμῶν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ, πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη, τοῦ τόκου τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος ὄντος τ;***

Αἱ α δραχμαί, αἱ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου ἔτους κατατεθεῖσαι, ἔμειναν εἰς ἀνατοκισμὸν ν ἔτη καὶ διὰ τοῦτο ἔγιναν $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, αἱ δὲ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους κατατεθεῖσαι ἔγιναν $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, αἱ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ καὶ καθεξῆς· τέλος αἱ α δραχμαί, αἱ κατατεθεῖσαι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τελευταίου ἔτους, γίνονται $\alpha(1+\tau)$. Ὥστε, ἂν διὰ τοῦ Σ παραστήσωμεν τὸ ποσόν, ὅπερ θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν, θὰ εἶναι $\Sigma=\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\alpha(1+\tau)^3+\ldots\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἤτοι

$$\Sigma=\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu+1}-\alpha(1+\tau)}{\tau}=\frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}$$

Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν ταύτην διὰ τῶν λογαρίθμων, ἀνάγκη πρῶτον νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν $(1+\tau)^{\nu}$ καὶ νὰ ἐλαττώσωμεν αὐτὴν κατὰ μονάδα· τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ θέσωμεν ἐν τῇ παραστάσει ἀντὶ τοῦ παράγοντος $(1+\tau)^{\nu}-1$ καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτῆς τοὺς λογαρίθμους.

Σημ. Τὰς δυνάμεις $(1+\tau)^{\nu}$ διὰ $\tau=0,03,\ldots.\tau=0,06$ καὶ διὰ $\nu=1, 2,\ldots., 50$ ἔχουσιν οἱ ὑπὸ τοῦ Dupuis ἐκδοθέντες πίνακες τοῦ Lalande ἐν σελίδι 134· ὥστε δυνάμεθα ἀμέσως ἄνευ ὑπολογισμοῦ νὰ λαμβάνωμεν αὐτὰς ἐκεῖθεν.

Παράδειγμα. Καταθέτει τις ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς γεννήσεως τοῦ τέκνου του κατ' ἔτος 1000 δρ. ὑπὲρ αὐτοῦ εἰς τὴν Τράπεζαν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6°/₀. Πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ τὸ τέκνον, ὅταν θὰ συμπληρώσῃ τὸ 20ὸν ἔτος τῆς ἡλικίας του;

Ἔχομεν $\alpha=1000$, $\tau=0,06$ καὶ $\nu=20$.

Ὥστε $$\Sigma=\frac{1000(1,06)[(1,06)^{20}-1]}{0,06}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (Dupuis, σελ. 134) $(1,06)^{20}=3,20713$, ἕπεται
$λογΣ = λογ1000 + λογ(1,06) + λογ(2,20713) - λογ(0,06)$

$$\begin{array}{r} λογ1000=3 \\ λογ(1,06)=0,02531 \\ λογ(2,20713)=0,34383 \\ \hline ἄθροισμα=3,36914 \\ λογ(0,06)=\overline{2},77815 \\ \hline ὑπόλοιπον=λογΣ=4,59099 \\ καὶ\ Σ=38993,6 \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Περὶ χρεωλυσίας.

180. ***Χρεωλυσία*** λέγεται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι᾽ ἴσων δόσεων, αἵτινες πληρώνονται κατ᾽ ἴσα χρονικὰ διαστήματα, οἷον κατ᾽ ἔτος, καθ᾽ ἑξαμηνίαν κλπ.

Τὸ ποσόν, ὅπερ πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος, λέγεται ***χρεωλύσιον***.

Ἀποσβέννυται δὲ τὸ χρέος, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην τῇ ἀξίᾳ τοῦ ἀνατοκιζομένου κεφαλαίου.

Ἐὰν κεφάλαιόν τι α δανεισθῇ ἐπὶ ἀνατοκισμῷ, μετὰ παρέλευσιν ν χρονικῶν διαστημάτων γίνεται $α(1+τ)^ν$, τ ὄντος τοῦ τόκου τῆς μιᾶς δραχμῆς ἐν ἑνὶ τῶν διαστημάτων. Ἂν δὲ πρὸς ἐξόφλησιν πληρώνηται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος ἡ ποσότης χ, ἡ μὲν πρώτη δόσις, ἥτις δίδεται εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου διαστήματος, θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ν διαστημάτων $χ(1+τ)^{ν-1}$, ἡ δὲ δευτέρα, ὡς διδομένη εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου διαστήματος, θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ν διαστημάτων $χ(1+τ)^{ν-2}$.

Ὁμοίως ἡ τρίτη δόσις θὰ γίνῃ $χ(1+τ)^{ν-3}$ κλπ., ἡ δὲ προτελευταία (ἐπειδὴ καθ᾽ ἓν μόνον χρονικὸν διάστημα τοκίζεται) θὰ γίνῃ $χ(1+τ)$ καὶ ἡ τελευταία χ. Ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀξία τῶν ν δόσεων θὰ εἶναι εἰς τὸ τέλος τῶν ν διαστημάτων.

$$\chi+\chi(1+\tau)+\chi(1+\tau)^2+\chi(1+\tau)^3+\ldots+\chi(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἤτοι
$$\chi\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}$$

Καὶ ἑπομένως, ἵνα συμβῇ ἀπόσβεσις, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\chi\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^\nu \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν τῶν τεσσάρων ποσοτήτων χ, τ, ν ἢ α, ὅταν αἱ λοιπαὶ εἶναι γνωσταί.

Σημ. Τὸ πρόβλημα τῆς χρεωλυσίας δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐάν τις δανεισθῇ σήμερον α δραχμάς, μετὰ ἓν ἔτος θὰ ὀφείλῃ νὰ πληρώσῃ $\alpha(1+\tau)$, ἤτοι τὸν τόκον $\alpha\tau$ καὶ τὸ κεφάλαιον α. Ἐὰν λοιπὸν πληρώσῃ χ δραχμάς, ἐλαττώνει τὸ χρέος του κατὰ χ δραχμάς, ὅθεν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους χρεωστεῖ μόνον $\alpha(1+\tau)-\chi$ δρ. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν δι' α_1 τὸ χρέος τοῦτο καὶ σκεφθῶμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους, ὅτι θὰ χρεωστῇ μόνον $\alpha_1(1+\tau)-\chi$ δρ., ἤτοι $\alpha(1+\tau)^2-\chi(1+\tau)-\chi$, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ α_2. Ὁμοίως εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους θὰ χρεωστῇ μόνον $\alpha_2(1+\tau)-\chi$, ἤτοι $\alpha(1+\tau)^3-\chi(1+\tau)^2-\chi(1+\tau)-\chi$, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ α_3 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς· εἰς τὸ τέλος τοῦ $\nu^{\text{στοῦ}}$ ἔτους θὰ χρεωστῇ
$\alpha(+\tau)^\nu-\chi(1+\tau)^{\nu-1}-\chi(1+\tau)^{\nu-2}-\ldots\ldots-\chi(1+\tau)-\chi$ ἢ α_ν.
καὶ ἐπειδὴ θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του εἰς τὸ τέλος τοῦ $\nu^{\text{στοῦ}}$ ἔτους, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha_\nu=0$· ἤτοι

$$\alpha(1+\tau)^\nu=\chi[1+(1+\tau)+(1+\tau)^2+\ldots\ldots+(1+\tau)^{\nu-1}]$$

ἤτοι
$$\chi\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^\nu$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) ***Ἐδανείσθη τις 56000 δρ. πρὸς 7°/₀, θέλει δὲ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο δι' ἐτησίων δόσεων εἰς 12 ἔτη. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον;***

Ἔχομεν $\alpha=56000$, $\tau=0,07$, $\nu=12$.

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν δύναμιν $(1,07)^{12}$
$\lambda o\gamma(1,07)=0,02938$· $12\lambda o\gamma(1,07)=0,35256$· ὅθεν $(1,07)^{12}=2,2519$ (προσέγγισις 3 μυριοστῶν).

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν νῦν

$$\chi = \frac{56000(2,2519)(0,07)}{1,2519}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 56000 &= 4,74819 \\ \lambda o\gamma\ 2,2519 &= 0,35256 \\ \lambda o\gamma\ (0,07) &= \bar{2},84510 \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 3,94585 \\ \lambda o\gamma\ (1,2519) &= 0,09657 \\ \hline \text{ὑπόλοιπον} = \lambda o\gamma\ \chi &= 3,84828 \\ \text{καὶ}\ \chi &= 7051 \end{aligned}$$

κατὰ προσέγγισιν τριῶν μονάδων.

2) ***Πόσον εἶναι τὸ χρέος, ὅπερ ἐξοφλεῖται εἰς 25 ἔτη διὰ χρεωλυσίου 8975 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6°/₀;***

Ἐνταῦθα ἔχομεν $\chi=8975$, $\tau=0,06$, $\nu=25$·

καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\alpha = 8975.\dfrac{(1,06)^{25}-1}{0,06.(1,06)^{25}}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (Dupuis 134) $(1,06)^{25} = 4,29187$, ἕπεται
$\lambda o\gamma\ \alpha = \lambda o\gamma\ 8975 + \lambda o\gamma\ (3,29187) - \lambda o\gamma\ (0,06) - \lambda o\gamma\ (4,29187)$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 0,06 &= \bar{2},77815 \qquad & \lambda o\gamma\ 8975 &= 3,95303 \\ \lambda o\gamma\ (4,29187) &= 0,63264 & \lambda o\gamma\ 3,29187 &= 0,51744 \\ \hline & \bar{1},41079 & & 4,47047 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4,47047 \\ & \bar{1},41079 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha &= 5,05967 \\ \text{καὶ}\ \alpha &= 114731 \end{aligned}$$

κατὰ προσέγγισιν 5 μονάδων.

3) *Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 120000 δρ. διὰ χρεωλυσίου 15000δρ., τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8%.*

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν $\chi(1+\tau)^\nu - \chi = \alpha\tau(1+\tau)^\nu$

Ὅθεν $$(1+\tau)^\nu = \frac{\chi}{\chi-\alpha\tau} \quad (2).$$

ἐξ οὗ $\nu\lambda o\gamma\,(1+\tau) = \lambda o\gamma\,\chi - \lambda o\gamma(\chi-\alpha\tau)$ καὶ $\nu = \dfrac{\lambda o\gamma\chi - \lambda o\gamma(\chi-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}$

Ἐνταῦθα $\chi-\alpha\tau=5400$ $\lambda o\gamma\chi=4,17609$

$\lambda o\gamma(1+\tau)=0,03342$ $\lambda o\gamma(\chi-\alpha\tau)=3,73239$

$0,44370$

$$\nu = \frac{0,44370}{0,03342} = 13 \text{ ἔτη καί τι πλέον.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι 13 δόσεις δὲν εἶναι ἱκαναὶ ν᾽ ἀποσβέσωσιν ἐντελῶς τὸ χρέος, ἀλλὰ πάλιν 14 εἶναι πλέον τοῦ δέοντος, ἤτοι ἡ 14η δόσις θὰ σύγκειται ἐκ δραχμῶν ὀλιγωτέρων τοῦ χρεωλυσίου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν 14ην δόσιν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον εἰς τὸ τέλος τῶν 14 ἐτῶν, ἔπειτα τί γίνονται αἱ 13 δόσεις εἰς τὸ τέλος τῶν αὐτῶν ἐτῶν καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον ποσὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου.

Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ 14η δόσις θὰ εἶναι 4252 δραχμαί.

Παρατηρητέον δὲ, ὅτι, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (2), ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν $\chi>\alpha\tau$· τοῦτέστι τὸ χρεωλύσιον νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου· ὅπερ καὶ ἀφ᾽ ἑαυτοῦ προφανές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

555) Πατήρ τις ἀπέκτησε τέκνον καὶ ἀπὸ τῆς γεννήσεως αὐτοῦ καὶ χάριν αὐτοῦ καταθέτει κατ᾽ ἔτος ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 % τὸ ποσὸν τῶν 2000 δρ. Πόσα θὰ ἔχῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 18ου ἔτους ;

556) Πατήρ τις ἀποκτήσας τέκνον, θέλει νὰ καταθέσῃ ἓν ποσὸν δι᾽ αὐτό, ἵνα, ἀνατοκιζόμενα τὰ κατατιθέμενα ποσά κατ᾽ ἔτος πρὸς 4 %, γίνουν μετὰ 20 ἔτη 150000 δρ. Πόσων δραχμῶν πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐτησία κατάθεσις ;

557) Καταθέτει τις κατ' ἔτος ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 % τὸ ποσὸν τῶν 1000 δρ. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 50000 δραχμάς;

558) Καταθέτει τις κατ' ἔτος μὲ σύνθετον τόκον καὶ ἐπὶ 10 ἔτη τὸ ποσὸν τῶν 3500 δρ. πρὸς 3,5 %. Μετὰ δὲ τὴν πάροδον τῆς δεκαετίας ἔπαυσε νὰ καταθέτῃ, ἀλλ' ἀφῆκε τὸ σχηματισθὲν κεφάλαιον ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 4 %. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 24 ἐτῶν ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως;

559) Δῆμός τις ἐδανείσθη 3000000 δρ. πρὸς 5 % μὲ τὴν συμφωνίαν, ὅπως τὸ ποσὸν τοῦτο ἐξοφλήσῃ χρεωλυτικῶς δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐντὸς 30 ἐτῶν. Πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον;

560) Πόσον χρέος ἐξώφλησέ τις, ὅστις ἐπλήρωσεν ἐτήσιον χρεωλύσιον 5000 δρ. πρὸς 4 % ἐπὶ 20 ἔτη;

561) Ἐδανείσθη τις 250000 δρ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 6 % μὲ τὴν συμφωνίαν ὅπως ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του χρεωλυτικῶς δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐκ 40000 δρ. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του;

562) Δῆμός τις ἐδανείσθη τὸ ποσὸν τῶν 3000000 δρ., ὅπερ θὰ ἐξοφλήσῃ χρεωλυτικῶς διὰ 12 ἴσων ἐτησίων δόσεων ἀρχομένων 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Ποῖον εἶναι τὸ χρεωλύσιον, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5 %;

563) Ἐκ πίθου περιέχοντος 100 λίτρας οἴνου ἀφαιρεῖται καθ' ἑκάστην μίαν λίτρα καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος. Ζητεῖται α) πόσος οἶνος θὰ μείνῃ μετὰ 50 ἡμέρας καὶ β) μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ μείνῃ τὸ ἥμισυ τοῦ οἴνου;

(Ἀπ. α΄ 60,5 λίτρ., β΄ μετὰ 68 ἡμέρας μένει περισσότερον τοῦ ἡμίσεως, μετὰ δὲ 69 ὀλιγώτερον).

564) Ἐὰν ἔχῃ τις νὰ λαμβάνῃ ἐπὶ 30 ἔτη 5000 δρ. κατ' ἔτος, ἀντὶ πόσου δύναται σήμερον νὰ πωλήσῃ τὸ δικαίωμά του, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5 %;

565) Δανείζεταί τις α δραχμὰς μὲ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν. Τὸ χρέος πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ εἰς ν ἔτη καὶ κατ' ἔτος θὰ πληρώνηται ὁ τόκος τοῦ μένοντος χρέους καὶ β δραχμαὶ ἐκ τοῦ χρέους. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἐτήσιαι δόσεις.

566) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ὅταν ἑκάστη δόσις ἰσοῦται τῇ προηγουμένῃ σὺν τῷ ἐτησίῳ τόκῳ αὐτῆς.

Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

181. Οὕτω καλοῦνται αἱ ἐξισώσεις, αἵτινες ἔχουσι ***τὸν ἄγνωστον εἰς τὸν ἐκθέτην***· τοιαύτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις $2^{\chi} = 125$.

Αἱ τοιαῦται ἐξισώσεις λύονται εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων. Καὶ ὄντως, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν $\chi.\lambda o\gamma 2 = \lambda o\gamma 125$· ὅθεν $\chi = \frac{\lambda o\gamma\, 125}{\lambda o\gamma\, 2}$.

Ἔστω ἐπίσης ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[\chi]{9977} = 2{,}5113$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν ὁμοίως $\frac{\lambda o\gamma\, 9977}{\chi} = \lambda o\gamma 2{,}5113$.

Ὅθεν $\chi = \frac{\lambda o\gamma\, 9977}{\lambda o\gamma\, 2{,}5113}$.

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $5^{(\chi^2-6\chi+8)} = 250$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὁμοίως $(\chi^2-6\chi+8).\lambda o\gamma 5 = \lambda o\gamma 250$ ἢ $\chi^2-6\chi+8 = \frac{\lambda o\gamma\, 250}{\lambda o\gamma\, 5}$, ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸ χ καὶ ἑπομένως λύεται κατὰ τὰ ἤδη γνωστά.

182. Ἐκθετικαί τινες ἐξισώσεις λύονται καὶ ἄνευ τῶν λογαρίθμων, ὅταν τὸ δεύτερον μέλος τῆς τοιαύτης ἐξισώσεως εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου δύναμις εἶναι καὶ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς.

α) Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $3^{\chi} = 729$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ $729 = 3^6$, ἔχομεν $3^{\chi} = 3^6$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi = 6$.

β) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\left(\frac{3}{5}\right)^{\chi} = \frac{125}{27}$.

Ἀλλὰ $\frac{125}{27} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$ ἢ $\frac{125}{27} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$.

Ὥστε εἶναι $\left(\frac{3}{5}\right)^{\chi} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ καὶ $\chi = -3$.

γ) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3^{(\chi^2-9\chi+20)} = 1$.

Ἀλλὰ $1 = 3^0$, ἤτοι $3^{(\chi^2-9\chi+20)} = 3^0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\chi^2-9\chi+20 = 0$· ἐκ τῆς λύσεως δὲ τῆς τελευταίας ταύτης λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τοῦ χ.

δ) Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $2^{\chi+1} - 3^{\chi-1} = 2^{\chi-3} + 3^{\chi-3}$.

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $2^{\chi+1} - 2^{\chi-3} = 3^{\chi-1} + 3^{\chi-3}$

ἢ $2^{\chi}(2-2^{-3}) = 3^{\chi}(3^{-1}+3^{-3})$, ἤτοι

$2^\chi . \frac{15}{8} = 3^\chi . \frac{10}{27}$· ἑπομένως ἔχομεν $\frac{2^\chi}{3^\chi} = \frac{8.10}{15.27}$ ἢ $\left(\frac{2}{3}\right)^\chi = \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Ὅθεν $\chi = 4$.

ε) Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις $3^{2\chi} - 5.3^\chi - 36 = 0$.

Αὐτὴ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι $\beta^{ου}$ βαθμοῦ ὡς πρὸς 3^χ· λαμβάνομεν δὲ $3^\chi = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2}$, ἤτοι ἢ $3^\chi = 9$ ἢ $3^\chi = -4$· ἐκ τῶν λύσεων δὲ τούτων ἁρμόζει μόνον ἡ $3^\chi = 9$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi = 2$.

Σημείωσις. Ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $\alpha^\chi = \beta$ (α καὶ β θετικὰ καὶ $\neq 1$) δύναται νὰ λυθῇ καὶ ἄνευ τῶν λογαρίθμων ὡς ἑξῆς (ἐὰν τὸ β εἶναι δύναμις τοῦ α, ἡ ἐξίσωσις αὕτη λύεται ἄνευ τῶν λογαρίθμων, ὡς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα τοῦ ἀνωτέρω ἐδαφίου).

Ἂν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἄγνωστον χ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, πρέπει νὰ εὕρωμεν κλάσμα τι $\frac{\varrho}{\nu}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha^{\frac{\varrho}{\nu}} < \beta < \alpha^{\frac{\varrho+1}{\nu}}$, διότι τότε ὁ ἄγνωστος χ θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ $\frac{\varrho}{\nu}$ καὶ $\frac{\varrho+1}{\nu}$.

Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων τούτων προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς $\alpha^\varrho < \beta^\nu < \alpha^{\varrho+1}$, ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν β εἰς τὴν δύναμιν ν καὶ ἔπειτα νὰ εὕρωμεν δύο ἐφεξῆς δυνάμεις τοῦ α, ἔστω τὰς α^ϱ καὶ $\alpha^{\varrho+1}$, περιλαμβανούσας τὴν δύναμιν β^ν· τότε θὰ εἶναι $\chi = \frac{\varrho}{\nu}$ μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

567) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις :

$10^\chi = 2$	$2^\chi = 10$
$10^\chi = 5$	$5^\chi = 10$
$100^\chi = 9$	$9^\chi = 100$
$100^\chi = 12$	$12^\chi = 100$

568) Ὁμοίως νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$3{,}45^{\chi} = 2{,}48 \qquad 6{,}15^{\chi} = 9{,}037$

$4{,}5^{\chi} = 6{,}842 \qquad 3{,}6^{\chi} = 4\frac{1}{5}$

569) Ὁμοίως νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$\sqrt[\chi]{4096} = 8 \qquad \sqrt[3]{5^{\chi}} = 16625$

$\sqrt[\chi-1]{7{,}530} = 1{,}4 \qquad 7^{\sqrt{\chi}} = 2401$

570) Ὁμοίως νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$2^{3\chi-5} = 0{,}25 \qquad 2^{2\chi^2-5\chi+3} = 0{,}125$

$5^{7\chi+2} = 100 \qquad 1{,}3^{\chi^2-3\chi+10} = 8{,}157$

571) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις (ἄνευ λογαρίθμων):

$10^{\chi} = 100 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\chi} = \frac{1}{32}$

$5^{\chi} = 125 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{\chi} = \frac{16}{81}$

$2^{\chi} = 1024 \qquad \left(\frac{1}{5}\right)^{2\chi} = \frac{1}{3125}$

$5^{\chi} = 3125 \qquad 3^{2\chi-4} = 729$

$7^{\chi} = 16807 \qquad 2^{4\chi-1} = 512$

572) Ὁμοίως νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$0{,}5^{\chi} = 0{,}125 \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{3\chi-8} = (0{,}75)^{2\chi-4}$

$5^{\frac{3\chi-4}{2}} = 1 \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^{3\chi-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7\chi-3}$

573) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$2^{\chi} + 2.3^{\chi+1} = 3^{\chi+3} - 5.2^{\chi+2}$$

$$2{,}5^{\chi-2} + 2^{\chi} = 12.5^{\chi-3} + 3.2^{\chi-3}$$

574) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$2^{\chi} = 512^{\frac{1}{\chi}} \qquad 10^{(5-\chi)(6-\chi)} = 100$

$3^{\chi} = 27^{\frac{1}{\chi}} \qquad 100.10\chi = \sqrt[\chi]{1000^5}$

$4^{\chi} = \sqrt[\chi]{256} \qquad 3.2^{\chi} - 2^{\chi} - 44 = 0$

575) Ὁμοίως νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις :

1) $2^{2\chi} - 7.2^{\chi} - 8 = 0$ 3) $3.2^{2\chi} + 16^{\chi}$ 28

2) $9^{\chi} - 3^{\chi} - 72 = 0$ 4) $8^{2\chi+1} - 2^{3\chi+2} = 480$

576) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις :

$$2\lambda o\gamma\chi + \lambda o\gamma 3 = \lambda o\gamma 135 + \lambda o\gamma 5$$

$$2\lambda o\gamma(4\chi - 15) = \lambda o\gamma(2\chi)$$

$$\lambda o\gamma\sqrt{7\chi - 9} + \lambda o\gamma\sqrt{3\chi - 4} = 1$$

$$\lambda o\gamma\sqrt{2\chi - 1} + \lambda o\gamma\sqrt{\chi - 9} = 1$$

577) Νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα :

1) $\alpha^{\chi}.\alpha^{\psi} = \alpha^{10}$, $\chi - \psi = 4$

3) $2^{\chi}.\,2^{\psi} = 32$, $25^{\frac{1}{\chi}}.5^{\psi} = 625$

2) $\alpha^{2\chi-3}.\alpha^{3\psi-2} = \alpha^{8}$, $\chi - 2\psi = 17$

4) $(3^{\chi})^{\psi} = 27$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{\chi}.\left(\frac{9}{25}\right)^{\psi} = \frac{243}{3125}$

578) Νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα :

1) $\lambda o\gamma\chi + \lambda o\gamma\psi = 3$, $\chi + \psi = 133$

3) $2\lambda o\gamma\chi + 2\lambda o\gamma\psi = 2$, $\chi^{4} + \psi^{4} = 641$

2) $\lambda o\gamma\chi + \lambda o\gamma\psi = 3$, $\chi^{2} + \psi^{2} = 2225$

4) $\lambda o\gamma\chi - \lambda o\gamma\psi = 1$, $\lambda o\gamma\chi + \lambda o\gamma\psi = 1 + \lambda o\gamma 4$

ΤΕΛΟΣ

'Αριθ. Πρωτ. 46377/15.883

'Εν 'Αθήναις τῇ 23 Αὐγούστου 1932

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ ΤΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸ ἄρθρον 3 τοῦ Νόμου 5045, καὶ τὴν ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῆς Μέσης 'Εκπαιδεύσεως τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ ὑπ' ἀρ. 542 πρακτικὸν τοῦ 'Εκπαιδευτικοῦ Γνωμοδοτικοῦ Συμβουλίου, ἀποφασίζομεν, ὅπως ἐγκριθῇ ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον ***«Στοιχειώδης Ἄλγεβρα»*** βιβλίον τῶν ***Ι. Χατζιδάκι*** καὶ ***Χρ. Μπαρμπαστάθη*** διὰ μίαν πενταετίαν, ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1932—1933 ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅπως ὁ συγγραφεὺς συμμορφωθῇ κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου πρὸς τὰς ὑποδείξεις τῆς κριτικῆς ἐπιτροπῆς.

Ὁ Ὑπουργὸς
Π. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

Ἄρθρον 6ον τοῦ ἀπὸ 21 Σεπτεμβρίου 1932 Προεδρικοῦ Διατάγματος περὶ διατιμήσεως τῶν ἐγκεκριμένων διδακτικῶν βιβλίων.

Τὰ διδακτικὰ βιβλία πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου τῆς ἐκδόσεώς των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρα κατὰ 15 % τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος Διατάγματος κανονισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης συσκευῆς καὶ τῶν ταχυδρομικῶν τελῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐπὶ τῆς τελευταίας σελίδος τοῦ ἐξωφύλλου ἐκτυποῦται τὸ παρὸν ἄρθρον.