Αριθμητική

Ειρήνης Δ. Κονδύ[illegible]

[illegible] 9 21

Κ. Ξ. ΠΑΠΑΝΙΚΗΤΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ ἐν Ἀθήναις Διδασκαλείῳ τῶν θηλέων.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ
ΤΩΝ ΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ

*Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσήμου Δρ. 8.50
κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. 521 κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας 11/5/22.
(Ἀξία βιβλιοσήμου Δρ. 1,70).*

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ **Ν. ΤΖΑΚΑΣ & ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΣ**
81Α — Ὁδὸς Πανεπιστημίου — 81Α
1922

Κ. Ξ. ΠΑΠΑΝΙΚΗΤΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ ἐν Ἀθήναις Διδασκαλείῳ τῶν θηλέων.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ
ΤΩΝ ΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ Ν. ΤΖΑΚΑΣ & ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΣ
81Α — Ὁδὸς Πανεπιστημίου — 81Α
1922

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΤΥΠΟΙΣ: Α. ΦΡΑΝΤΖΕΣΚΑΚΗ καὶ Α. ΚΑΪΤΑΤΖΗ
4. ΣΑΝΤΩΒΡΙΑΔΟΥ 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μονὰς καὶ ἀριθμός.

1. Ὅταν παρατηρῶμεν πράγματα ὅμοια, παραδείγματος χάριν, μαθητάς, πρόβατα, δένδρα, κ.τ.λ., (χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἰδιαίτερα χαρακτηριστικὰ αὐτῶν), ἕκαστον ἐξ αὐτῶν λαμβάνεται ὡς **μονάς**· ὥστε ὁ μαθητής, τὸ πρόβατον, τὸ δένδρον, κ.τ.λ. εἶνε μονάς. Δυνάμεθα ὅμως μὲ πολλοὺς μαθητὰς νὰ σχηματίσωμεν τάξεις, ἢ μὲ πολλὰ πρόβατα νὰ σχηματίσωμεν ποίμνια, τότε μονὰς εἶνε ἡ τάξις, τὸ ποίμνιον, Ὥστε

Μονὰς λέγεται ἕκαστον ἐκ τῶν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων (ἢ καὶ πολλὰ ὁμοῦ ὅμοια πράγματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἓν ὅλον).

Ἀριθμὸς λέγεται πλῆθός τι μονάδων (ἢ καὶ μία μόνη μονάς).

Ἀρίθμησις.

2. Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ὁρίζει πλῆθός τι, λέγεται **ἀρίθμησις** τοῦ πλήθους τούτου. Ἀρίθμησις λέγεται προσέτι καὶ ἡ ἐξήγησις τοῦ τρόπου, διὰ τοῦ ὁποίου σχηματίζομεν, ὀνομάζομεν, γράφομεν καὶ ἀπαγγέλλομεν τοὺς ἀριθμούς.

Τὴν ἀρίθμησιν καὶ τὰ περὶ ἀριθμῶν ἐν γένει διδάσκει ἡ **Ἀριθμητική**.

Σχηματισμὸς καὶ ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν.

3. Ἡ μονὰς ὡς ἀριθμὸς θεωρουμένη λέγεται *ἕν*. Ἐὰν μὲ τὴν μονάδα ἑνώσωμεν καὶ ἄλλην μίαν μονάδα (παραδ. χάριν, ἂν ἔχωμεν ἓν μῆλον καὶ λάβωμεν ἓν μῆλον ἀκόμη), σχηματίζομεν νέον ἀρι-

θμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***δύο***. Ἐὰν μὲ τὸν δύο ἑνώσωμεν καὶ ἄλλην μίαν μονάδα, σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***τρία***. Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦντες, σχηματίζομεν διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος, τοὺς ἑξῆς κατὰ σειρὰν ἀριθμούς: ***τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα.***

Οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ οἱ σχηματιζόμενοι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος, παριστῶσι ***μονάδας ἁπλᾶς***· διότι, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ὑπάρχουσι καὶ μονάδες σύνθετοι ἐξ ἄλλων μονάδων.

4. Ἐὰν πάλιν μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐννέα ἑνώσωμεν μίαν μονάδα ἢ ἓν ἀκόμη, σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***δέκα***. Ἐξακολουθοῦντες τὸν αὐτὸν τρόπον, δυνάμεθα νὰ σχηματίζωμεν ὁσουσδήποτε ἀριθμοὺς θέλομεν, χωρίς ποτε νὰ τελειώσωμεν. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἴμεθα ἠναγκασμένοι εἰς ἕκαστον σχηματιζόμενον ἀριθμὸν νὰ δίδωμεν καὶ νέον ὄνομα, ἵνα διακρίνωμεν αὐτὸν ἀπὸ τῶν ἄλλων, ὅτε θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἐνθυμώμεθα ὅλα τὰ ὀνόματα αὐτῶν, διὰ τοῦτο πρὸς σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν μεταχειριζόμεθα ἄλλον τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου δι' ὀλίγων λέξεων δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν. Ὁ τρόπος οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς συνθήκης:

Ἀριθμοί τινες δύνανται νὰ θεωρῶνται ὡς νέαι μονάδες καὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῶν νὰ σχηματίζωνται ἄλλοι ἀριθμοί.

5. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν δέκα, ἂν καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα μονάδας, θεωρεῖται ὅμως ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***δεκάς***. Ὅπως διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος ἐσχηματίσθησαν οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοί, οὕτω καὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς δεκάδος σχηματίζονται οἱ ἑξῆς ἀριθμοί:

Μία δεκὰς ἢ ἁπλούστερον ***δέκα***, δύο δεκάδες ἢ ***εἴκοσι***, τρεῖς δεκάδες ἢ ***τριάκοντα***, τέσσαρες δεκάδες ἢ ***τεσσαράκοντα***, πέντε δεκάδες ἢ ***πεντήκοντα***, ἓξ δεκάδες ἢ ***ἑξήκοντα***, ἑπτὰ δεκάδες ἢ ***ἑβδομήκοντα***, ὀκτὼ δεκάδες ἢ ***ὀγδοήκοντα***, ἐννέα δεκάδες ἢ ***ἐνενήκοντα***.

Οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ οἱ σχηματιζόμενοι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς δεκάδος παριστῶσι ***δεκάδας***.

6 Οἱ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεκάδων ἀριθμοὶ λαμβάνουσι τὰ ὀνόματα τῶν δεκάδων, ἤτοι ***δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα,... ἐνενήκοντα*** καὶ τὰ ὀνόματα τῶν ἁπλῶν μονάδων ***ἕν, δύο τρία,... ἐννέα.***

προτάσσονται ὅμως τὰ ὀνόματα τῶν δεκάδων καὶ βαίνουσι κατὰ τὴν ἑξῆς σειράν.

Δέκα, ἕνδεκα, (ἐξαιρετικῶς ἀντὶ δέκα ἕν), ***δώδεκα*** (ἀντὶ δέκα δύο), ***δέκα τρία, δέκα τέσσαρα, δέκα πέντε, δέκα ἕξ, δέκα ἑπτά, δέκα ὀκτώ, δέκα ἐννέα.***

Εἴκοσι, εἴκοσι ἕν, εἴκοσι δύο,... εἴκοσι ***ἐννέα.***

Τριάκοντα, τριάκοντα ἕν,... ***τριάκοντα ἐννέα.***

. . . .

Ἐνενήκοντα, ἐνενήκοντα ἕν,... ***ἐνενήκοντα ἐννέα.***

7. Ἐὰν μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐνενήκοντα ἑνώσωμεν μίαν δεκάδα ἀκόμη ἢ εἰς τὸν ἀριθμὸν ἐνενήκοντα ἐννέα ἑνώσωμεν μίαν μονάδα ἢ ἕν ἀκόμη, σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***ἑκατόν.*** Ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ἂν καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα δεκάδας (ἢ ἑκατὸν μονάδας), θεωρεῖται ὅμως ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***ἑκατοντάς.*** Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τώρα τῆς ἑκατοντάδος σχηματίζονται οἱ ἑξῆς ἀριθμοί.

Μία ἑκατοντὰς ἢ ***ἑκατόν,*** δύο ἑκατοντάδες ἢ ***διακόσια***, τρεῖς ἑκατοντάδες ἢ ***τριακόσια***, τέσσαρες ἑκατοντάδες ἢ ***τετρακόσια***, πέντε ἑκατοντάδες ἢ ***πεντακόσια***, ἓξ ἑκατοντάδες ἢ ***ἑξακόσια***, ἑπτὰ ἑκατοντάδες ἢ ***ἑπτακόσια***, ὀκτὼ ἑκατοντάδες ἢ ***ὀκτακόσια***, ἐννέα ἑκατοντάδες ἢ ***ἐννεακόσια.***

Οἱ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἑκατοντάδων ἀριθμοὶ λαμβάνουσι τὰ ὀνόματα τῶν ἑκατοντάδων, ἤτοι ***ἑκατόν, διακόσια, τριακόσια,***... ***ἐννεακόσια*** καὶ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ ***ἑνὸς*** μέχρι τοῦ ***ἐνενήκοντα ἐννέα***· προτάσσονται ὅμως τὰ ὀνόματα τῶν ἑκατοντάδων καὶ βαίνουσι κατὰ τὴν ἑξῆς σειράν.

Ἑκατόν, ἑκατὸν ἕν, ἑκατὸν δύο, ἑκατὸν τρία,... ***ἑκατὸν ἐνενήκοντα ἐννέα.***

Διακόσια, διακόσια ἕν,... ***διακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα.***

. . . .

Ἐννεακόσια, ἐννεακόσια ἕν,... ***ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα.***

8. Ἐὰν μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐννεακόσια ἑνώσωμεν μίαν ἑκατοντάδα ἢ μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα ἑνώσωμεν μίαν μονάδα ἢ ἕν, σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***χίλια.*** Ὁ ἀριθμὸς χίλια, ἂν καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα ἑκατοντάδας (ἢ ἑκατὸν δεκάδας ἢ χιλίας μονάδας), θεωρεῖται ὅμως ὡς νέα μονὰς

καὶ λέγεται ***χιλιάς***. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τώρα τῆς χιλιάδος σχηματίζονται ἀριθμοὶ χιλιάδων, οἵτινες λαμβάνουσι τὰ ὀνόματα τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα, εἰς τὰ ὁποῖα προσαρτᾶται ἡ λέξις ***χιλιάδες***, ἤτοι λέγομεν ***τρεῖς χιλιάδες***, ***ἑξήκοντα πέντε χιλιάδες***, κτλ. Δυνατὸν ὅμως ἀριθμός τις τῶν χιλιάδων νὰ περιέχῃ καὶ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ χίλια, ἤτοι ἀριθμὸν περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα.

9. Ὁ ἀριθμὸς δέκα χιλιάδες (τὸν ὁποῖον οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ὠνόμαζον ***μύρια***) θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***δεκὰς τῶν χιλιάδων***. Ὁ ἀριθμὸς δέκα δεκάδες χιλιάδων ἢ ἑκατὸν χιλιάδες θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***ἑκατοντὰς τῶν χιλιάδων***. Ὁ ἀριθμὸς δέκα ἑκατοντάδες χιλιάδων ἢ χίλιαι χιλιάδες θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***ἑκατομμύριον*** (διότι εἶναι ἑκατὸν μύρια).

10. Ὅπως διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς χιλιάδος ἐσχηματίσθησαν ἀριθμοὶ χιλιάδων, οὕτω καὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ ἑκατομμυρίου σχηματίζονται ἀριθμοὶ ἑκατομμυρίων. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς δέκα ἑκατομμύρια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***δεκὰς ἑκατομμυρίου***, ὁ δὲ ἀριθμὸς δέκα δεκάδες ἑκατομμυρίων ἢ ἑκατὸν ἑκατομμύρια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου***, ὁ δὲ ἀριθμὸς δέκα ἑκατοντάδες ἑκατομμυρίων ἢ χίλια ἑκατομμύρια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***δισεκατομμύριον***.

11. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως πάλιν τοῦ δισεκατομμυρίου σχηματίζονται ἀριθμοὶ δισεκατομμυρίου, ἑπομένως ἔχουσι καὶ οὗτοι μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας δισεκατομμυρίου. Χίλια δισεκατομμύρια σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ***τρισεκατομμύριον*** καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι μὲ ὀλίγας λέξεις δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν.

12. Ἡ μονὰς (ἁπλῆ) λέγεται καὶ μονὰς *πρώτης τάξεως*, ἡ δεκὰς *δευτέρας τάξεως*, ἡ ἑκατοντὰς *τρίτης τάξεως* καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἤτοι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων, ἃς ἐσχηματίσαμεν ἀνωτέρω, εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς.

Μονὰς (ἁπλῆ)...................	ἡ μονὰς	πρώτης	τάξεως
Δεκὰς	»	δευτέρας	»
Ἑκατοντὰς	»	τρίτης	»
Μονὰς τῶν χιλιάδων ἢ χιλιὰς....	»	τετάρτης	»

Δεκὰς χιλιάδων .... ἡ μονὰς πέμπτης τάξεως
Ἑκατοντὰς » .... » ἕκτης »
Μονὰς ἑκατομ. ἢ ἑκατομμύριον.... » ἑβδόμης »
Δεκὰς » .... » ὀγδόης »
Ἑκατον. » .... » ἐνάτης »
Μονὰς δισεκατομμυρίου........ » δεκάτης »
Δεκὰς » .... » ἑνδεκάτης »
Ἑκατοντὰς » .... » δωδεκάτης »

κ.τ.λ.

13. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονάδων αἱ ἑξῆς· **μονάς, χιλιάς, ἑκατομμύριον, δισεκατομμύριον, τρισεκατομμύριον**, κτλ. ὧν ἑκάστη ἀποτελεῖται ἀπὸ χιλίας μονάδας τῆς ἀμέσως προηγουμένης, λέγονται **ἀρχικαὶ μονάδες** καὶ ἑκάστη τούτων ἀποτελεῖ ἴδιον τμῆμα, περιλαμβάνον τρεῖς τάξεις, μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας. Ἤτοι ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα τῶν διαφόρων τμημάτων μετὰ τῶν ἐν αὐτοῖς τάξεων.

Τμῆμα ἑκατομμυρίων ἢ ἑκατομμύρια			*Τμῆμα Χιλιάδων ἢ Χιλιάδες*			*Τμῆμα Μονάδων ἢ Μονάδες*		
Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
τῶν Ἑκατομμυρίων			**τῶν Χιλιάδων**			**τῶν Μονάδων**		

Εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων εἶνε γεγραμμέναι οὕτως, ὥστε ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εὑρισκομένη πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλης παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Διὰ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων δύναται πᾶς ἀριθμὸς νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενος ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων, καὶ ἐξ ἑκάστης τούτων νὰ μὴ περιέχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα, διότι ἂν περιέχῃ δέκα, τότε δέκα μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ὥστε γνωρίζοντες τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως, ἃς περιέχει ἀριθμός τις, ὁρίζομεν ἐντελῶς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς ὅστις περιέχει τρεῖς χιλιάδας, πέντε ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ἓξ μονάδας εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν ἀριθμῶν.

14. Τὰ σημεῖα ἢ χαρακτῆρες, δι' ὧν παριστῶμεν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς

ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, εἶναι τὰ ἑξῆς: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Τὰ σημεῖα ταῦτα μετὰ τοῦ σημείου 0, δι' ὧν γράφονται ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, λέγονται *ψηφία* ἢ *Ἀραβικοὶ χαρακτῆρες*· διότι ἡ γνῶσις αὐτῶν μετεδόθη εἰς ἡμᾶς ἐκ τῶν Ἀράβων. Τὸ ψηφίον 0 λέγεται *μηδὲν* ἢ *μηδενικὸν* καὶ οὐδένα ἀριθμὸν παριστᾷ, ἀλλὰ χρησιμεύει, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἰς τὸ νὰ κατέχῃ κατὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν τὰς θέσεις ἐλλειπόντων ψηφίων, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία λέγονται πρὸς διάκρισιν *σημαντικά*.

Διὰ τῆς παραδοχῆς τῶν ἀνωτέρω ψηφίων δυνάμεθα τώρα νὰ συντομεύσωμεν τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ἀντὶ τῶν λέξεων, δι' ὧν ἐκφράζονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως, τὰ ἀντίστοιχα ψηφία αὐτῶν. Παραδ. χάριν ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἔχει δύο δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας, ἤτοι ὁ εἴκοσι ἑπτά, γράφεται 2 δεκάδες καὶ 7 μονάδες. Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ συντομεύσωμεν τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἂν παραλείψωμεν καὶ τὰς λέξεις, δι' ὧν ἐκφράζεται τὸ εἶδος τῶν μονάδων ἑκάστου ψηφίου, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ γράφωμεν τὰ ψηφία τῶν διαφόρων μονάδων μὲ τὴν αὐτὴν τάξιν, ὡς εἶνε γεγραμμέναι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἐν τῷ προηγουμένῳ πίνακι, ἤτοι εἰς τὴν πρώτην θέσιν (πρὸς τὰ δεξιὰ) τὰ γράφωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων, εἰς τὴν δευτέραν τὸ τῶν δεκάδων, εἰς τὴν τρίτην τὸ τῶν ἑκατοντάδων καὶ οὕτω καθεξῆς· ἕκαστον τότε ψηφίον, ὡς ἐκ τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν ἔχει ἐν τῷ ἀριθμῷ, ὁρίζει καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ. Διὰ τοῦτο λοιπὸν ἐτέθη ἡ ἑξῆς συνθήκη πρὸς σύντομον γραφὴν τῶν ἀριθμῶν.

15. ***Πᾶν ψηφίον τὸ ὁποῖον γράφεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου, παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Καὶ τἀνάπαλιν.***

Κατὰ τὴν συνθήκην λοιπὸν ταύτην, ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς 2 δεκάδες καὶ 7 μονάδες γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς 27, (διότι ὁ 2 ὡς κατέχων τὴν δευτέραν θέσιν παριστᾷ δεκάδας). Ἐὰν δὲ μονάδες κατωτέρας τινὸς τάξεως δὲν ὑπάρχωσι, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν 0, ἵνα τηρηθῇ τὸ εἶδος τῶν μονάδων ἑκάστου ψηφίου. Παρ. χάριν, ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἔχει 2 ἑκατοντάδας καὶ 5 μονάδας, ἤτοι ὁ διακόσια πέντε, δὲν δύναται νὰ γραφῇ οὕτω: 25, διότι τότε κατὰ τὴν ἀνωτέρω συνθήκην ὁ 2, ὡς εὑρισκόμενος πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν μονάδων, παριστᾷ δεκάδας καὶ οὐχὶ ἑκατοντάδας· ἵνα λοιπὸν τηρηθῇ τὸ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ 2, ἤτοι νὰ παριστᾷ ἑκατοντάδας, πρέπει νὰ γράψωμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἐλλειπουσῶν δεκάδων, ἤτοι 205. Ὥστε ἦτο ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν καὶ ἓν ἰδιαίτερον ψηφίον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀναπληροῖ τὴν θέσιν τῶν ἐλλειπουσῶν μονάδων τάξεώς τινος.

Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ δέκα (1 δεκάς), εἴκοσι (2 δεκάδες), τριάκοντα.... ἐνενήκοντα, γράφονται κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Ὡσαύτως οἱ ἀριθμοὶ ἑκατὸν (1 ἑκατοντάς), διακόσια (2 ἑκατοντάδες), τριακόσια,...ἐννεακόσια γράφονται κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900· ἐγράψαμεν δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν ἑκατοντάδων, διότι δὲν ἐδόθησαν δεκάδες καὶ μονάδες.

Σημ. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες ἓν ψηφίον λέγονται ***μονοψήφιοι***, οἱ ἔχοντες δύο λέγονται ***διψήφιοι***, οἱ ἔχοντες τρία ***τριψήφιοι*** καὶ γενικῶς οἱ ἔχοντες πολλὰ λέγονται ***πολυψήφιοι***.

16. Ὅταν συνηθίσωμεν νὰ γράφωμεν καὶ ἀπαγγέλλωμεν εὐκόλως τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ χίλια, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν καὶ νὰ ἀπαγγέλλωμεν καὶ οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ χίλια, ἀρκεῖ μόνον νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν τμημάτων τοῦ προηγουμένου πίνακος ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ τἀνάπαλιν, ἐξ ἀριστερῶν ἀπὸ οἱουδήποτε τμήματος πρὸς τὰ δεξιά. Προσέτι νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι ἕκαστον τμῆμα περιέχει τρεῖς τάξεις, ἤτοι μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας. Ἔχοντες λοιπὸν ταῦτα ὑπ' ὄψει, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν εὐκόλως πάντα ἀριθμόν, ἀκολουθοῦντες τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διὰ νὰ γράψωμεν ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τοῦ τμήματος τῆς ἀνωτέρας δοθείσης ἀρχικῆς μονάδος· ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράφομεν κατὰ σειρὰν τὸν ἀριθμὸν τοῦ τμήματος ἑκάστης κατωτέρας ἀρχικῆς μονάδος· προσέχοντες ὅμως, ἂν ὁ ἀριθμὸς τοῦ τμήματος κατωτέ-

ρας τινος ἀρχικῆς μονάδος δὲν δοθῇ, νὰ γράφωμεν εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ τρία μηδενικὰ πρὸς ἀναπλήρωσιν τῶν ἐλλειπουσῶν θέσεων μονάδων, δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων τοῦ τμήματος τούτου ἂν ὅμως δοθῇ τοιοῦτος καὶ εἶνε διψήφιος, νὰ γράφωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικὸν πρὸς ἀναπλήρωσιν τῆς ἐλλειπούσης θέσεως τῶν ἑκατοντάδων· ἂν δὲ εἶνε μονοψήφιος, νὰ γράφωμεν δύο μηδενικὰ πρὸς ἀναπλήρωσιν τῶν ἐλλειπουσῶν θέσεων τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων.

Παρ. χάριν, ὁ ἀριθμὸς δέκα πέντε δισεκατομμύρια τριάκοντα ὀκτὼ χιλιάδες καὶ ἓξ μονάδες γράφεται ὡς ἑξῆς: 15 000 038 006 (ἤτοι ἐγράψαμεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 15 τοῦ τμήματος τῶν δισεκατομμυρίων· ἔπειτα τρία μηδενικὰ πρὸς ἀναπλήρωσιν τοῦ τμήματος τῶν ἑκατομμυρίων, ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν 38 τοῦ τμήματος τῶν χιλιάδων, ἀλλὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ ἐγράψαμεν καὶ ἓν μηδενικόν, διότι ὁ ἀριθμὸς τοῦ τμήματος τούτου εἶνε διψήφιος· καὶ τέλος τὸν ἀριθμὸν 6 τοῦ τμήματος τῶν μονάδων, ἀλλὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ ἐγράψαμεν καὶ δύο μηδενικά, διότι ὁ ἀριθμὸς τοῦ τμήματος τούτου εἶνε μονοψήφιος).

Ὡσαύτως, οἱ ἀριθμοὶ μία χιλιὰς ἢ χίλια, ἓν ἑκατομμύριον, ἓν δισεκατομμύριον, ἓν τρισεκατομμύριον γράφονται κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς.

1 000, 1 000 000, 1 000 000 000, 1 000 000 000 000.

17. Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν τώρα ἀριθμὸν γεγραμμένον διὰ ψηφίων καὶ ἔχοντα περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, πράττομεν ὡς ἑξῆς· χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα δι' ὑποδιαστολῶν, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν (τὸ τελευταῖον τμῆμα πρὸς τὰ ἀριστερὰ δυνατὸν νὰ εἶναι διψήφιον ἢ μονοψήφιον), ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν, ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα μετὰ τοῦ ὀνόματός του.

Παραδ. χάριν, διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν τὸν ἀριθμὸν 23567309, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἤτοι 23,567,309 καὶ ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς· εἴκοσι τρία ἑκατομμύρια, πεντακόσιαι ἑξήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ τριακόσιαι ἐννέα μονάδες.

18. Ἐπειδή, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, δέκα μονάδες τάξεώς τινος χρειάζονται ὅπως ἀποτελεσθῇ μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, πρὸς δὲ δέκα ψηφία μεταχειριζόμεθα πρὸς γραφὴν ὅλων τῶν ἀριθμῶν, διὰ τοῦτο ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς ἀριθμήσεως λέγεται *δεκαδικὸν σύστημα*, ὁ δὲ ἀριθμὸς 10 λέγεται *βάσις* τοῦ συστήματος.

Συγκεκριμένοι καὶ ἀφῃρημένοι ἀριθμοί.
Ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί.

19. **Συγκεκριμένοι** ἀριθμοὶ λέγονται ἐκεῖνοι, οἵτινες ὁρίζουσι τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον παριστῶσι· παραδ. χάριν, 5 βιβλία, 8 μαθηταί, 3 μῆλα. **Ἀφῃρημένοι** δὲ ὅσοι δὲν ὁρίζουσι τὸ πρᾶγμα π. χ. 2, 9, 18.

Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ διακρίνονται εἰς **ὁμοειδεῖς** καὶ **ἑτεροειδεῖς**.

Ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ λέγονται ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες παριστῶσι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα. Παραδ. χάριν, 5 μῆλα καὶ 7 μῆλα. **Ἑτεροειδεῖς** δὲ ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες παριστῶσι διάφορα πράγματα· π. χ. 8 πρόβατα καὶ 20 δραχμαί.

Ἴσοι ἀριθμοί.

20. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς εἶνε τόσαι, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες καὶ τοῦ ἄλλου. Ἐὰν π. χ. δώσωμεν εἰς ἓν παιδίον 3 μῆλα καὶ εἰς ἄλλο παιδίον ἄλλα 3 μῆλα, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε ἴσοι. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ δείξωμεν, ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, τὸ ὁποῖον εἶνε = καὶ ἀπαγγέλλεται **ἴσον**. Παραδ. χάριν, γράφομεν $3 = 3$ καὶ ἀπαγγέλλομεν τρία ἴσον τρία.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφῇ διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμὸς δέκα χιλιάδες καὶ ἑξήκοντα μονάδες. Ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς πέντε δισεκατομμύρια καὶ πέντε χιλιάδες.

2) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 2037089, 203407314, 3000082656.

3) Μὲ πόσα μηδενικὰ γράφεται μία χιλιάς, ἓν ἑκατομμύριον, ἓν δισεκατομμύριον;

4) Πόσας ἐν ὅλῳ μονάδας (ἁπλᾶς), δεκάδας, ἑκατοντάδας κτλ. ἔχει ὁ ἀριθμὸς 356708;

Διὰ νὰ μάθωμεν πόσας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας κτλ. ἔχει ἐν ὅλῳ ἀριθμός τις, ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ. Ὁ ἀνωτέρω λοιπὸν ἀριθμὸς ἔχει 356708 μονάδας, 35670 δεκάδας, 3567 ἑκατοντάδας κτλ.

5) Πόσας ἑκατοντάδας ἔχουν 25 χιλιάδες;

6) Πόσα ἑκατομμύρια ἔχουν τὰ 5 δισεκατομμύρια;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

21. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔδωκέ τις εἴς τινα 5 μῆλα καὶ εἰς ἄλλον 3 μῆλα καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα μῆλα ἔδωκε καὶ εἰς τοὺς δύο. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἑνώσωμεν εἰς τὰ μῆλα τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ὅλα τὰ μῆλα τοῦ ἄλλου ἀνὰ ἕν, καὶ ἔστω εἰς τὰ 5 μῆλα τοῦ πρώτου νὰ ἑνώσωμεν τὰ 3 μῆλα τοῦ δευτέρου· ὅθεν λέγομεν 5 καὶ 1 κάμνουν 6, 6 καὶ 1 κάμνουν 7, 7 καὶ 1 κάμνουν 8. Ὥστε ἔδωκε καὶ εἰς τοὺς δύο 8 μῆλα. Ἡ πρᾶξις αὕτη, διὰ τῆς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἕνα μόνον ἀριθμὸν τὸν 8, ὁ ὁποῖος ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 3, λέγεται **πρόσθεσις.**

Ὑποθέσωμεν ἐπίσης, ὅτι ἔδωκέ τις εἴς τινα πτωχὸν 2 δραχμάς, εἰς ἄλλον 4 καὶ εἰς ἄλλον 6 καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ. Ἀρκεῖ πάλιν νὰ σχηματίσωμεν ἕνα μόνον ἀριθμόν, ὅστις νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ 2, 4. 6. Ὥστε ὁρίζομεν τὴν πρόσθεσιν ὡς ἑξῆς.

Πρόσθεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐξ ὅλων τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοί, οἵτινες πρέπει νὰ προστεθῶσι, λέγονται **προσθετέοι**· ὁ δὲ διὰ τῆς προσθέσεως αὐτῶν σχηματιζόμενος ἀριθμὸς λέγεται **ἄθροισμα.**

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πρόκειται νὰ προστεθῶσι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον + τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **σύν**· ἤτοι $5+3$ καὶ ἀπαγγέλλομεν πέντε σύν τρία (συνήθως ὅμως λέγομεν πέντε καὶ τρία.)

Οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶνε συγκεκριμένοι ἢ ἀφηρημένοι· ἐὰν ὅμως εἶνε συγκεκριμένοι. πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς· διότι ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὺς δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν. Παραδ. χάριν, 6 μῆλα καὶ 3 πρόβατα δὲν προστίθενται (διότι οὔτε 9 μῆλα κάμνουν, οὔτε 9 πρόβατα). Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ προσθετέοι θὰ εἶνε ὁμοειδεῖς, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τοὺς προσθετέους.

῾Ο ἀνωτέρω τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου προσθέτομεν εἰς ἀριθμόν τινα τὰς μονάδας ἄλλου ἀνὰ μίαν, ἀπαιτεῖ καὶ κόπον καὶ χρόνον, διὰ τοῦτο εἶνε ἀνάγκη νὰ συνηθίσωμεν διὰ μικρᾶς ἀσκήσεως νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως ἀπὸ μνήμης τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα διψηφίου ἢ πολυψηφίου καὶ μονοψηφίου. Τουτέστι πρέπει νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι 5 καὶ 3 κάμνουν 8, 7 καὶ 9 κάμνουν 16, 83 καὶ 8 κάμνουν 91 κτλ.

Εἰς τὴν πρόσθεσιν οἱ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι ἢ μονοψήφιοι ἢ οἱοιδήποτε.

Πρόσθεσις μονοψηφίων ἀριθμῶν

22. Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς πράττομεν ὡς ἑξῆς: Προσθέτομεν πρῶτον τοὺς δύο πρώτους, εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὸν τρίτον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα προσθέτομεν τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους.

Παραδ. χάριν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $8+5+6+9$· λέγομεν 8 καὶ 5, 13· καὶ 6, 19· καὶ 9, 28. Τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν, ἂν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς καθ' οἱανδήποτε ἄλλην τάξιν· διότι αἱ μονάδες τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε ὡρισμέναι καὶ ἑπομένως εἶνε ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ προστεθῶσι. Παραδ. χάριν, λέγομεν 8 καὶ 6, 14· καὶ 5, 19· καὶ 9, 28. Ἢ 9 καὶ 6, 15· καὶ 8, 23· καὶ 5, 28. Ὥστε εἶνε $8+5+6+9=8+6+5+9=9+6+8+5=28$.

23. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῆς προσθέσεως. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς.***

Σημ. Τὸ ψηφίον 0, ἐπειδὴ οὐδένα ἀριθμὸν παριστᾷ, διὰ τοῦτο προστιθέμενον εἰς ἀριθμὸν οὐδόλως μεταβάλλει αὐτόν. Ἤτοι εἶνε $2+0=2$, $0+5=5$.

Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

24. Ἔστω, ὡς παράδειγμα, νὰ προστεθῶσι οἱ ἀριθμοὶ 7936, 4503, 54. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, χωριστὰ τὰς ἑκατοντάδας κτλ. καὶ

ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα. Ὥστε ἡ πρόσθεσις τῶν πολυψηφίων ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων. Ἀλλ' ἵνα μὴ συμβῇ λάθος ἐν τῇ πράξει καὶ προσθέσωμεν ψηφία διαφόρων τάξεων (ἤτοι μονάδας μὲ δεκάδας, ἢ δεκάδας μὲ ἑκατοντάδας κτλ.), δὲν γράφομεν τοὺς προσθετέους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς 7936+4503+54, ἀλλὰ τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην. Ἔπειτα σύρομεν ὑποκάτω αὐτῶν ὁριζοντίαν γραμμὴν (διὰ νὰ χωρίζωνται οἱ προσθετέοι ἀπὸ τὸ ἄθροισμα) καὶ ὑποκάτω αὐτῆς γράφομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὡς δεικνύει ἡ κατωτέρω διάταξις.

$$\begin{array}{r} 7936 \\ 4503 \\ 54 \\ \hline 12493 \end{array}$$

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων, ἤτοι λέγομεν 4 καὶ 3, 7 καὶ 6, 13. Ἀλλ' ἐπειδὴ 13 μονάδες ἀποτελοῦσι 1 δεκάδα καὶ 3 μονάδας, διὰ τοῦτο γράφομεν 3 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν αὐτὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 δεκάδα διὰ νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὰς δεκάδας.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ προσθέτομεν αὐτάς, λέγοντες 1(τὸ κρατούμενον) καὶ 5, 6 καὶ 3, 9· γράφομεν λοιπὸν 9 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, λέγοντες 5 καὶ 9, 14. Ἀλλ' ἐπειδὴ 14 ἑκατοντάδες ἀποτελοῦσι 1 χιλιάδα καὶ 4 ἑκατοντάδας, διὰ τοῦτο γράφομεν 4 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 χιλιάδα διὰ νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὰς χιλιάδας.

Μεταβαίνομεν τέλος εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, λέγοντες 1 (τὸ κρατούμενον) καὶ 4, 5 καὶ 7, 12 χιλιάδες. Ἀλλ' ἐπειδὴ 12 χιλιάδες ἀποτελοῦσι 1 δεκάδα χιλιάδων καὶ 2 χιλιάδας, διὰ τοῦτο γράφομεν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτῶν (ἤτοι εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χιλιάδων) γράφομεν 1.

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε 12493.

24. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς προσθέσεως. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε αἱ***

μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα σύρομεν ὑποκάτω αὐτῶν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ἀρχόμεθα νὰ προσθέτωμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης τάξεως. Καὶ ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεώς τινος δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ἐκ τῆς ὁποίας προέκυψεν· ἂν δὲ ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν μόνον τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος, τὰς δὲ δεκάδας του προσθέτομεν εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑπομένην τάξιν.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ προσθέτωμεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά· ἀλλ' εἴμεθα τότε ἠναγκασμένοι νὰ ἐξαλείφωμεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης, διὰ νὰ προσθέτωμεν τὰ εὑρεθέντα κρατούμενα ἐκ τῆς ἀμέσως ἑπομένης στήλης. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν λοιπὸν τὸ τοιοῦτον, ἀρχόμεθα τὴν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ὅταν ὅμως δὲν ἔχωμεν κρατούμενα, τὸ ὁποῖον σπανίως συμβαίνει, τότε εἶνε ἀδιάφορον πόθεν θὰ ἀρχίσωμεν.

Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως

25. **Δοκιμὴ** μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως λέγεται ἄλλη τις πρᾶξις, τὴν ὁποίαν κάμνομεν, διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν ἡ πρώτη ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς: Ἐὰν ἐπροσθέσαμεν τοὺς προσθετέους ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, προσθέτομεν αὐτοὺς ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἢ καὶ τἀνάπαλιν, καὶ ἂν εὕρωμεν τὸ ἴδιον ἄθροισμα, τότε εἶνε πιθανὸν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος (ἐδάφ. 23). Δυνατὸν ὅμως καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς δοκιμῆς νὰ ὑποπέσωμεν πάλιν εἰς λάθος, διὰ τοῦτο ἡ καλυτέρα δοκιμὴ μιᾶς πράξεως εἶνε ἡ μετὰ προσοχῆς ἐκτέλεσις αὐτῆς.

Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης

1) Νὰ προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς 7 εἰς τὸν 47, εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα νὰ προστεθῇ πάλιν ὁ 7 καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 110.

2) Νὰ προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς 9 εἰς τὸν 9, εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα

νὰ προστεθῇ πάλιν ὁ 9 καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 100.

Σημ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀπὸ μνήμης δύο διψηφίους ἀριθμοὺς λήγοντας εἰς μηδενικά, προσθέτομεν τὰ ψηφία τῶν δεκάδων των, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν θέτομεν ἓν μηδενικόν. Παρ. χάριν, διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 50 καὶ 70, λέγομεν 5 καὶ 7, 12· ἔπειτα θέτομεν 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 12 καὶ εὑρίσκομεν 120.

Ἐὰν οἱ διψήφιοι ἀριθμοὶ ἔχουν καὶ μονάδας, ἀναλύομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν εἰς τὰ μέρη του καὶ προσθέτομεν ἕκαστον μέρος αὐτοῦ χωριστὰ εἰς τὸν ἄλλον, ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως. Παρ. χάριν, διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 47 καὶ 35, λέγομεν 47 καὶ 30, 77 καὶ 5, 82.

Ὡσαύτως διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 180 καὶ 64, λέγομεν 180 καὶ 60, 240 καὶ 4, 244

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις:

$800+600$, $7000+9000$, $54+48$, $690+80$, $745+70$,
$640+130$, $2700+800$, $147+85$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις μίαν ἄμπελον ἀντὶ 3270 δραχμῶν· πόσον πρέπει νὰ τὴν πωλήσῃ, διὰ νὰ κερδήσῃ 295 δραχμάς; (3565)

2) Ἠγόρασέ τις μίαν οἰκίαν ἀντὶ 18500 δραχμῶν καὶ ἐξώδευσε διὰ νὰ τὴν ἐπισκευάσῃ 2575 δραχμάς· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὴν καὶ ἐκέρδισε 1105 δρ. πόσον τὴν ἐπώλησεν; (22180)

3) Ἐγεννήθη τις τὸ ἔτος 1874 (μετὰ Χριστὸν) καὶ ἔζησε 42 ἔτη. Ποῖον ἔτος ἀπέθανεν; (1916)

4) Οἱ Ὀλυμπιακοὶ ἀγῶνες ἤρχισαν κατὰ πρῶτον τὸ ἔτος 777 πρὸ Χριστοῦ. Πόσα ἔτη παρῆλθον μέχρι σήμερον;

5) Ἐπώλησέ τις ἓν χωράφιον ἀντὶ 4650 δραχμῶν καὶ ἐζημιώθη 230 δραχμάς· πόσον ἔπρεπε νὰ τὸ πωλήσῃ, διὰ νὰ κερδίσῃ 300 δραχμάς; (5180)

6) Παῖς ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας τῶν γονέων του, ἀπεκρίθη· ὅτε ἐγεννήθην μοὶ λέγουν οἱ γονεῖς μου, ὅτι ἡ μὲν μήτηρ μου, ἦτο 28 ἐτῶν, ὁ δὲ πατήρ μου ἦτο 9 ἔτη μεγαλύτερος τῆς μητρός μου, τώρα δὲ εἶμαι 14 ἐτῶν. Ποία εἶνε ἡ ἡλικία τῶν γονέων του. (42,51).

7) Ἠγόρασέ τις μίαν οἰκίαν ἀντὶ 18790 δραχμῶν καὶ ἐξώδευσε πρὸς ἐπισκευὴν αὐτῆς 3780 δραχμάς, κατόπιν τὴν ἐπώλησε καὶ ἐκέρδησε 4560 δρ. Ζητεῖται πόσον ἐπώλησεν τὴν οἰκίαν. (27130).

8) Χωρικός τις ἐπώλησεν εἴς τινα 275 ὀκάδας σίτου καὶ εἰς ἄλλον 187 ὀκ. περισσότερον τοῦ πρώτου· ἔπειτα παρετήρησεν, ὅτι τοῦ ἔμειναν τόσαι ὀκάδες, ὅσας ἐπώλησε καὶ εἰς τοὺς δύο καὶ 186 ὀκ. ἀκόμη. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας εἶχεν ἀπ' ἀρχῆς. (1660).

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

26. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν 9 μῆλα καὶ ἐξ αὐτῶν πρόκειται νὰ δώσωμεν εἰς ἓν παιδίον 3 μῆλα· θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα μῆλα θὰ μᾶς μείνουν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δίδωμεν ἀπὸ ἕνα ἕνα μῆλον· καὶ πρῶτον ἐκ τῶν 9 μήλων δίδομεν 1 μῆλον, ὅτε μᾶς μένουν 8 μῆλα· ἔπειτα ἐκ τῶν 8 μήλων δίδομεν ἄλλο 1 μῆλον, ὅτε μένουν 7 μῆλα· ἔπειτα ἐκ τῶν 7 μήλων δίδομεν ἄλλο 1 μῆλον, ὅτε μένουν 6. Ὥστε μᾶς ἔμειναν 6 μῆλα καὶ ἐδώκαμεν τόσας φορὰς τὸ ἓν μῆλον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 3, τουτέστιν ἠλαττώσαμεν τὸν 9 κατὰ 3 μονάδας. Ἡ πρᾶξις λοιπὸν αὕτη λέγεται **ἀφαίρεσις**. Ὥστε ὁρίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἑξῆς.

Ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν ἕνα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται **μειωτέος**, ὁ δὲ ἄλλος, ὅστις δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος, λέγεται **ἀφαιρετέος**· ὁ δὲ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται **διαφορὰ ἢ ὑπόλοιπον**. Ὥστε εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα μειωτέος εἶνε ὁ 9, ἀφαιρετέος ὁ 3 καὶ διαφορὰ ὁ 6.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἀριθμός τις πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἄλλον, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον —, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **πλὴν ἢ μεῖον**· καὶ πρῶτον μὲν ἀριθμὸν γράφομεν τὸν μειωτέον, δεύτερον δὲ τὸν ἀφαιρετέον, ἤτοι 9—3, καὶ ἀπαγγέλλομεν ἐννέα πλὴν τρία ἢ ἐννέα μεῖον τρία.

27. Ἐὰν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα λάβωμεν τὰ 3 μῆλα, τὰ ὁποῖα ἐδώκαμεν, καὶ τὰ ἑνώσωμεν μὲ τὰ 6 μῆλα, ὅπου μᾶς ἔμειναν, θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰ 9 μῆλα. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι

ὁ μειωτέος εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς· ἑπομένως ὁρίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, ὅταν μᾶς δοθῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ εἷς τῶν προσθετέων, εὑρίσκομεν τὸν ἄλλον.

Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν πρέπει οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἂν εἶνε συγκεκριμένοι, νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς· διότι ἄλλως δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις, διὰ τοῦτο δὲ καὶ ἡ διαφορὰ θὰ εἶνε ὁμοειδὴς μὲ τοὺς δεδομένους.

Τὸ ψηφίον 0 ἀφαιρούμενον ἀπ' ἀριθμὸν οὐδόλως μεταβάλλει αὐτόν, ἤτοι εἶνε $4-0=4$. Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸν μειωτέον, οὐδεμία μονὰς τοῦ μειωτέου μένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἡ διαφορὰ εἶνε μηδέν· π. χ. εἶνε $7-7=0$.

Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε ἀδύνατος, ὅταν ὁ μειωτέος εἶνε μικρότερος τοῦ ἀφαιρετέου.

Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον ὅλας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου μίαν πρὸς μίαν, ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἐπίπονον, μάλιστα δὲ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μεγάλοι. Διὰ τοῦτο εἶνε ἀνάγκη νὰ συνηθίσωμεν διὰ μικρᾶς ἀσκήσεως νὰ ἀφαιρῶμεν εὐκόλως ἀπὸ μνήμης μονοψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ μονοψήφιον ἢ διψήφιον, διότι εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην ἀνάγεται καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν πολυψηφίων, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἰδιότης τῆς ἀφαιρέσεως.

28. ***Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.***

Ὑποθέσωμεν, παραδ. χάριν, ὅτι ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ μὲν εἷς εἶνε 9 ἐτῶν, ὁ δὲ ἄλλος 7 ἐτῶν· ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν εἶνε $9-7=2$ ἔτη. Ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι καὶ μετὰ 1 ἔτος καὶ μετὰ 2 ἔτη καὶ μετὰ 3 ἔτη κτλ. ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν των θὰ εἶνε πάλιν 2 ἔτη. Ὥστε βλέπομεν ὅτι, ἂν αὐξηθῇ ὁ μειωτέος 9 καὶ ὁ ἀφαιρετέος 7 κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ αὐτῶν δὲν ἀλλάσσει.

Ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον.

29. Ἔστω πρῶτον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 347 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 879. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ

μειωτέου, ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους μονάδας τοῦ μειωτέου, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 879 \\ 347 \\ \hline 532 \end{array}$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου λέγοντες 7 ἀπὸ 9 μένουν 2, γράφομεν λοιπὸν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς δεκάδας τοῦ μειωτέου λέγοντες 4 ἀπὸ 7 μένουν 3, γράφομεν λοιπὸν 3 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς ἑκατοντάδας λέγοντες 3 ἀπὸ 8 μένουν 5, γράφομεν λοιπὸν 5 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων. Ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε 532.

Σημ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἠδυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν καὶ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά· διότι ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου εἶνε μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου.

Ἔστω δεύτερον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 6473 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 92865. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 92865 \\ 6473 \\ \hline 86392 \end{array}$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου λέγοντες 3 ἀπὸ 5 μένουν 2, γράφομεν λοιπὸν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς δεκάδας, ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ 7 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν 6, προσθέτομεν νοερῶς εἰς τὸ ψηφίον τοῦτο τοῦ μειωτέου 10 δεκάδας καὶ γίνονται 16 δεκάδες, τώρα λέγομεν 7 ἀπὸ 16 μένουν 9 (δεκάδες), γράφομεν λοιπὸν 9 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς ἑκατοντάδας, ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας (ἐδάφ. 28), ὅσας δηλ. ἐπροσθέσαμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον, ἀλλὰ τὸ ἴδιον εἶνε ἂν προσθέσωμεν 1 ἑκατοντάδα εἰς τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀφαιρετέου λέγοντες 1 καὶ 4

5 ἀπὸ 8 μένουν 3 (ἑκατοντάδες), γράφομεν λοιπὸν 3 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς χιλιάδας, ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν δὲν ἀφαιρεῖται ὁ 6 ἀπὸ τὸν 2, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν 10 χιλιάδας καὶ γίνονται 12 χιλιάδες· τώρα λέγομεν 6 ἀπὸ 12 μένουν 6 (χιλιάδες), γράφομεν λοιπὸν 6 εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά, πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 χιλιάδας ἢ 1 δεκάδα τῶν χιλιάδων, καὶ ἐπειδὴ τοιαύτας δὲν ἔχει ὁ ἀφαιρετέος, ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἀπὸ τὰς δεκάδας χιλιάδας τοῦ μειωτέου, ἤτοι λέγομεν 1 ἀπὸ 9 μένουν 8 (δεκάδες τῶν χιλιάδων), γράφομεν λοιπὸν 8 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδων. Ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε 86392.

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} 5667 \\ 879 \\ \hline 4788 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85204 \\ 27685 \\ \hline 57519 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 670000 \\ 30480 \\ \hline 639520 \end{array}$$

30. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Ἔπειτα σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ μειωτέου (ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν). Ἐὰν δὲ συμβῇ ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου νὰ μὴ ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ μειωτέου, προσθέτομεν εἰς τὸ ψηφίον τοῦτο τοῦ μειωτέου 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν προσέχοντες νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα καὶ εἰς τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου 1, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά.

31. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ ἕνα ἄλλον, ἢ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον, ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον τὸν πρῶτον, ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν τὸν δεύτερον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου ἀφαιρέσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμούς. Ὁ πρῶτος ὅμως τρόπος εἶνε συντομώτερος τοῦ δευτέρου.

Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.

32. Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς (ἐδάφ. 27), διὰ τοῦτο κάμνομεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὴν διαφοράν, καὶ ἐὰν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ δεικνύει πόσας μονάδας ἔχει ὁ μειωτέος περισσοτέρας τοῦ ἀφαιρετέου, διὰ τοῦτο ἀφαιροῦμεν τὴν διαφορὰν ἀπὸ τὸν μειωτέον, καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν ἀφαιρετέον, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης.

1) Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 74 νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 8, ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν νὰ ἀφαιρεθῇ πάλιν ὁ 8 καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 30.

2) Πόσαι ὧραι εἶνε ἀπὸ τῆς 7ης πρὸ μεσημβρίας μέχρι τῆς 9ης μετὰ μεσημβρίαν τῆς αὐτῆς ἡμέρας;

Σημ. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν νοερῶς 9 ἀπὸ ἄλλον, ἀφαιροῦμεν 10 καὶ ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὴν διαφορὰν 1. Παραδ. χάριν, διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 9 ἀπὸ τὸν 83, λέγομεν 10 ἀπὸ 83, 73 καὶ 1 74. Ὅταν πάλιν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν 9 εἰς ἀριθμόν, προσθέτομεν 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν 1.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν νοερῶς διψήφιον ἀπὸ ἄλλον, ἀφαιροῦμεν τὰ μέρη του χωριστὰ ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως. Παραδ. χάριν, διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 35 ἀπὸ τὸν 272, λέγομεν 30 ἀπὸ 27 μένουν 242· ἔπειτα 5 ἀπὸ 242 μένουν 237.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις ἓν χωράφιον ἀντὶ 3560 δραχμῶν, ἀλλ' ἔδωκε μόνον 2785 δραχμάς. Πόσας χρεωστεῖ ἀκόμη; (775).

2) Ἡ ἅλωσις τῆς Κ]λεως ὑπὸ τῶν Τούρκων ἐγένετο τὸ ἔτος 1453. Πόσα ἔτη παρῆλθον μέχρι σήμερον;

3) Ἀποθανών τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του, ὅπως ἡ περιουσία του, ἀποτελουμένη ἐκ 30000 δραχμῶν, διανεμηθῇ ὡς ἑξῆς· ἡ σύζυγός του νὰ λάβῃ 10000 δραχμ. καὶ ἡ θυγάτηρ του 18600, τὸ δὲ

ὑπόλοιπον νὰ δοθῇ εἰς φιλανθρωπικόν τι κατάστημα. Πόσαι δραχμαὶ θὰ δοθῶσι ; (1400).

4) Ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος ἐγεννήθη τὸ ἔτος 356 πρὸ Χριστοῦ καὶ ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 33 ἐτῶν. Πότε ἀπέθανε ; Καὶ πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τοῦ θανάτου του μέχρι σήμερον ;

(Ἀπέθανε τὸ ἔτος 323 πρὸ Χριστοῦ).

5) Μήτηρ τις εἶνε 37 ἐτῶν καὶ ἔχει κόρην 9 ἐτῶν· πόσων ἐτῶν θὰ εἶνε ἡ μήτηρ, ὅταν ἡ κόρη γίνῃ 23 ἐτῶν. (51).

6) Χωρική τις εἶχεν εἰς δύο καλάθια αὐγά· κατόπιν ἔλαβεν ἐκ τοῦ ἑνὸς καλαθίου 38 αὐγὰ καὶ τὰ ἔθεσεν εἰς τὸ ἄλλο, παρετήρησε δὲ τότε, ὅτι τὸ καθὲν καλάθιον εἶχε 275 αὐγά. Πόσα εἶχε τὸ καθὲν ἀπ' ἀρχῆς ; (237 καὶ 313).

7) Ἄνθρωπός τις ἀπέθανε τὸ ἔτος 1920 εἰς ἡλικίαν 84 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν ἦτο τὸ ἔτος 1870 ; (34).

8) Ἠγόρασέ τις μίαν ἄμπελον καὶ ἐξώδευσε διὰ νὰ τὴν καλλιεργήσῃ 370 δραχμάς· κατόπιν τὴν ἐπώλησεν ἀντὶ 3240 δραχμῶν καὶ ἐκέρδησε 485 δρ. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν ἄμπελον ; (2385).

9) Εἶχέ τις 284 δραχμὰς καὶ ἐξ αὐτῶν ἔδωκε μέρος διὰ νὰ ἀγοράσῃ μίαν ἐνδυμασίαν του καὶ 28 δρ. διὰ ὑποδήματά του· ἔπειτα παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἔμειναν 129 δραχμαί. Πόσον ἔδωκε διὰ τὴν ἐνδυμασίαν ; (127 δρ.).

10) Ἐρωτηθείς τις εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ πατήρ του, ἀπεκρίθη· ἐνθυμοῦμαι, ὅτι ἡ μήτηρ μου ἀπέθανε μετὰ 5 ἔτη ἀπὸ τοῦ θανάτου τοῦ πατρός μου εἰς ἡλικίαν 68 ἐτῶν, καὶ ἦτο μικροτέρα τοῦ πατρός μου κατὰ 10 ἔτη. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ πατήρ; (73 ἐτῶν).

11) Θέλει τις νὰ ἀγοράσῃ μίαν οἰκίαν ἀξίας 14750 δραχμῶν, ἀλλὰ τὰ χρήματά του δὲν φθάνουν· ἐὰν ὅμως εἶχεν ἀκόμη 3500 δρ., θὰ ἠγόραζεν αὐτὴν καὶ θὰ ἐπερίσσευον 10 δρ. Πόσας δραχμὰς εἶχε ;

Λύσις. Ἐχρειάζετο ἀκόμη 3500—10 ἢ 3490 δρ., διὰ νὰ ἀγοράσῃ τὴν οἰκίαν, ἑπομένως εἶχε 14750—3490 ἢ 11260 δραχμάς.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

33. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται 5 δραχμὰς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν, πόσας δραχμὰς θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3 ὀκάδας.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 1 ὀκᾶν, θὰ δώσωμεν 5 δραχμάς· διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 2 ὀκάδας, θὰ δώσωμεν δύο φορὰς τὰς 5 δραχμάς, ἤτοι 5+5· καὶ διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3 ὀκάδας, θὰ δώσωμεν τρεῖς φορὰς τὰς 5 δραχμάς, ἤτοι 5+5+5 ἢ 15 δραχμάς. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἐπαναλαμβάνονται αἱ 5 δραχμαὶ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 3· ἡ πρᾶξις λοιπὸν αὕτη λέγεται **πολλαπλασιασμός.** Ὥστε ὁρίζομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ ἐπαναληφθῇ, λέγεται **πολλαπλασιαστέος**, ὁ δεικνύων ποσάκις θὰ ἐπαναληφθῇ οὗτος λέγεται **πολλαπλασιαστής**, ὁ δὲ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σχηματιζόμενος ἀριθμὸς λέγεται **γινόμενον.** Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ 5, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 15.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται μὲ ἓν ὄνομα **παράγοντες** τοῦ γινομένου. Ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε ἀφῃρημένοι καὶ τὸ γινόμενον εἶνε ἀφῃρημένον, ὅταν ὅμως οἱ παράγοντες εἶνε συγκεκριμένοι, καθὼς οἱ ἀνωτέρω, τὸ γινόμενον εἶνε πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἤτοι παριστᾷ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται ἔν τε τῇ πράξει καὶ τῇ σκέψει ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ δεικνύει ἁπλῶς ποσάκις θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι δύο ἀριθμοὶ πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῶσι, καθὼς οἱ ἀνωτέρω 5 καὶ 3, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον ×, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **ἐπί**, ἀλλὰ πρῶτον γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστέον, ἤτοι 5×3, καὶ ἀπαγγέλλομεν πέντε ἐπὶ τρία. Ὥστε 7×5, παραδ. χάριν, σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 7 πέντε φοράς, ἤτοι νὰ σχηματίσωμεν ἄθροισμα ἐκ πέντε προσθετέων ἴσων μὲ τὸν 7· ἤτοι εἶνε 7×5=7+7+7+7+7 ἢ 35.

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἐπαναλήψεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλάκις εἶνε ἐπίπονος, μάλιστα δὲ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μεγάλοι. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀνάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, διὰ τοῦτο εἶνε ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ γινόμενα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Τὰ γινόμενα ταῦτα περιέχονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα, ὅστις λέγεται **Πυθαγόρειος πίναξ**· διότι ὁ φιλόσοφος Πυθαγόρας (ἀκμάσας περὶ τὸ 570 πρὸ Χρ.) λέγεται ὅτι ἐπενόησεν αὐτόν.

Πίναξ Πυθαγόρειος.

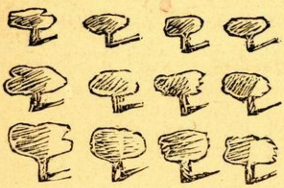
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος καὶ ἡ πρώτη κατακόρυφος σειρὰ περιέχουσι τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 μέχρις 9, ἡ δευτέρα σειρὰ τούτων περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἡ τρίτη σειρὰ τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3 καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 9.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα εἰς τὸν πίνακα τοῦτον τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν, καὶ ἔστω τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 8, ζητοῦμεν τὸν μὲν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειρὰν (ἢ εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον σειράν), τὸν δὲ ἄλλον εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον σειρὰν (ἢ εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειράν)· ἐκεῖ δέ, ὅπου διασταυροῦνται αἱ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 6 καὶ 8 ἀρχόμεναι δύο σειραί, εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου αὐτῶν· εἰς τὸ παράδειγμά μας διασταυροῦνται εἰς τὸν ἀριθμὸν 48, οὗτος λοιπὸν εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 8.

Ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

34. Ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς ἕνα κῆπον ὑπάρχουν δένδρα εἰς τρεῖς ὁριζοντίας σειράς, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει 4 δένδρα, καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα δένδρα ὑπάρχουν τὸ ὅλον. Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν αὐτὰ ἕνα πρὸς ἕνα, πράττομεν ὡς ἑξῆς.



Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην ὁριζοντίαν σειρὰν ὑπάρχουν 4 δένδρα καὶ ἐπειδὴ τοιαῦται σειραὶ εἶνε 3, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν δένδρων εἶνε $4+4+4=4\times 3$, ἤτοι 12. Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην κατακόρυφον σειρὰν ὑπάρχουν 3 δένδρα καὶ ἐπειδὴ τοιαῦται σειραὶ εἶνε 4, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν δένδρων εἶνε $3+3+3+3=3\times 4$, ἤτοι 12. Οἱονδήποτε ὅμως τρόπον καὶ ἂν μεταχειρισθῶμεν, ὁ ἀριθμὸς τῶν δένδρων εὑρίσκεται ὁ αὐτός, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εἶνε $4\times 3=3\times 4$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

35. ***Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν (θεωρουμένων ἀφηρημένων) δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν αὐτῶν, ἤτοι ὁ πολλαπλασιαστέος νὰ γίνῃ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς πολλαπλασιαστέος.***

Σημ. Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ τὴν μονάδα 1 εἶνε ὁ ἴδιος ἀριθμός· διότι εἶνε π.χ. $4\times 1=1\times 4=1+1+1+1=4$. Ὡσαύτως εἶνε $1\times 1=1$.

Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 0 εἶνε 0· διότι εἶνε $3\times 0=0\times 3=0+0+0=0$.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

36. Ὑποθέσωμεν, ὅτι πατήρ τις ἀποθανὼν ἄφησεν εἰς τοὺς τέσσαρας υἱούς του ἀνὰ 4635 δραχ. εἰς ἕκαστον καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς ἄφησεν ἐν ὅλῳ.

Πρὸς τοῦτο θὰ ἐπαναλάβωμεν τὰς 4635 δραχ. τέσσαρας φοράς, ἤτοι $4635\times 4=4635+4635+4635+4635$ ἢ κάλλιον

$$\begin{array}{r} 4635 \\ 4635 \\ 4635 \\ 4635 \\ \hline 18540 \end{array}$$

Ὥστε ἄφησεν ἐν ὅλῳ 18540 δραχ.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ 4635 ἐπαναλαμβάνεται 4 φοράς, ἤτοι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 4· ὅθεν συντομεύομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν ὑποκάτω τοῦ πολλαπλασιαστέου 4635 τὸν πολλαπλασιαστὴν 4 καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ὑποκάτω τῆς γραμμῆς. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

πολλαπλασιαστέος	4635
πολλαπλασιαστὴς	4
γινόμενον	18540

πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς 5 μονάδας λέγοντες 5 ἐπὶ 4 (ἢ 4 ἐπὶ 5) κάμνουν 20 μονάδας, ἤτοι 2 δεκάδας καὶ 0 μονάδας, γράφομεν λοιπὸν 0 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ κρατοῦμεν τὰς 2 δεκάδας διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰς 3 δεκάδας λέγοντες 3 ἐπὶ 4 κάμνουν 12 δεκάδας καὶ 2 τὰ κρατούμενα 14 δεκάδας, ἤτοι 1 ἑκατοντάδα καὶ 4 δεκάδας, γράφομεν 4 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 ἑκατοντάδα διὰ νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων.

Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰς 6 ἑκατοντάδας λέγοντες 6 ἐπὶ 4 κάμνουν 24 ἑκατοντάδας καὶ 1 τὸ κρατούμενον 25 (ἑκατοντάδας), ἤτοι 2 χιλιάδας καὶ 5 ἑκατοντάδας, γράφομεν λοιπὸν 5 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 2 χιλιάδας, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν χιλιάδων.

Τέλος πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰς 4 χιλιάδας λέγοντες 4 ἐπὶ 4 κάμνουν 16 χιλιάδας καὶ 2 τὰ κρατούμενα 18 (χιλιάδας), γράφομεν λοιπὸν 18 πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ γινομένου. Τὸ γινόμενον λοιπὸν τοῦ ἀριθμοῦ 4635 ἐπὶ 4 εἶνε 18540 ἢ $4635 \times 4 = 18540$. Ὥστε

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ψηφίον αὐτοῦ χωριστὰ (ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν δι' ὃν λόγον εἴπομεν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν)· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ψηφίου τινὸς τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶνε διψήφιον, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας του, τὰς δὲ δεκάδας κρατοῦμεν καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἑπομένου ψηφίου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε σύντομος πρόσθεσις ἴσων ἀριθμῶν.

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} 27456 \\ 8 \\ \hline 219648 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 79068 \\ 9 \\ \hline 711612 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67009 \\ 7 \\ \hline 469063 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμῶν, ὧν ὁ εἷς ἔχει τὸ πρῶτον ψηφίον σημαντικόν, τὰ δὲ λοιπὰ μηδενικά.

37. Ἔστω νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 245 καὶ 3000. Ἐὰν λάβωμεν ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν 3000 (τοῦτο δὲν βλάπτει τὸ γινόμενον· ἐδάφ. 35), θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 3 χιλιάδας ἐπὶ 245, ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 245 ἐπὶ 3, ὅτε εὑρίσκομεν 735, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο πρέπει νὰ παριστᾷ χιλιάδας (ὡς ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον), διὰ τοῦτο γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τρία μηδενικὰ (ὅσα δηλ. ἔχει ὁ 3000), ἤτοι 735000. Ὥστε

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἔχει τὸ πρῶτον ψηφίον σημαντικόν, τὰ δὲ λοιπὰ μηδενικά, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν· ἔπειτα δὲ γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Τὸ γινόμενον ἐπίσης τοῦ 348 ἐπὶ 10 εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 1, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον τὸν ἴδιον ἀριθμὸν 348, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράψωμεν ἓν μηδενικόν, ἤτοι εἶνε $348 \times 10 = 3480$. Ἐπίσης εἶνε $5763 \times 100 = 576300$. Ὥστε

38. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συντόμως ἀριθμόν τινα ἐπὶ 10, ἐπὶ 100, ἐπὶ 1000 καὶ γενικῶς ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἕν, δύο, τρία κτλ. μηδενικὰ (δηλ. τόσα, ὅσα ἀκολουθοῦσι τὴν μονάδα).***

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} 245 \\ 3000 \\ \hline 735000 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 356 \times 100 = 35600 \\ 17 \times 1000 = 17000 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄθροισμα καὶ τἀνάπαλιν.

39. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐργάτης τις εἰργάσθη εἰς ἓν ἐργοστάσιον τὴν πρώτην φορὰν 4 ἡμέρας, τὴν δευτέραν φορὰν 3 ἡμέρας καὶ τὴν τρίτην φορὰν 2 ἡμέρας καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς ἔλαβε τὸ ὅλον, ἐὰν τὴν ἡμέραν ἐλάμβανε 5 δραχμάς.

Διὰ νὰ μάθωμεν τοῦτο, εὑρίσκομεν πρῶτον πόσας ἡμέρας εἰργάσθη τὸ ὅλον, ἤτοι $4+3+2$ ἢ 9 ἡμ. Ὥστε ἔλαβε τὰς 5 δραχμὰς 9 φοράς, ἤτοι 5×9 ἢ 45 δραχμάς.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο 5×9 γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς. $5 \times (4+3+2)$, ἤτοι θέτομεν τὸ ἄθροισμα ἐντὸς παρενθέσεως, ἵνα δείξωμεν ὅτι πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα $4+3+2$ ἢ 9 καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 5 ἐπὶ 9.

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα καὶ ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν πόσας δραχμὰς ἔλαβε χωριστὰ ἑκάστην φοράν, ἤτοι τὴν πρώτην φορὰν ἔλαβε 5×4 ἢ 20 δραχμάς, τὴν δευτέραν φορὰν ἔλαβε 5×3 ἢ 15 δρ. καὶ τὴν τρίτην φορὰν ἔλαβε 5×2 ἢ 10 δρ. Ὥστε ἔλαβεν ἐν ὅλῳ $5 \times 4 + 5 \times 3 + 5 \times 2$ ἢ $20+15+10$ ἢ 45 δρ. Ἀλλ' εἴτε τὸν πρῶτον τρόπον μεταχειρισθῶμεν εἴτε τὸν δεύτερον, τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν. Ὥστε πρέπει νὰ εἶνε

$$5 \times 9 \text{ ἢ } 5 \times (4+3+2) = 5 \times 4 + 5 \times 3 + 5 \times 2 =$$
$$20+15+10 = 45.$$

Ἐκ τῶν δύο τρόπων τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

40. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, ἢ εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν προσθετέων χωριστὰ καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.***

Καὶ ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν ὡς πολλαπλασιαστέον καὶ τὸ ἄθροισμα ὡς πολλαπλασιαστὴν (ἐδ. 35) καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον.

41. Ἔστω, ὡς παράδειγμα, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5273 ἐπὶ 462, ἤτοι νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸν 462 φοράς. Ἐπειδὴ

εἶνε $462 = 400 + 60 + 2$, δυνάμεθα (κατὰ τὸ ἐδάφ. 40) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5273 χωριστὰ ἐπὶ ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ 462, ἤτοι ἐπὶ 2, ἐπὶ 60 καὶ ἐπὶ 400 καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα (ἔχοντες ὑπ' ὄψει καὶ τὸ ἐδάφιον 37), ἤτοι

$$\begin{array}{r} 5273 \\ 2 \\ \hline 10546 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5273 \\ 60 \\ \hline 316380 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5273 \\ 400 \\ \hline 2109200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10546 \\ 316380 \\ 2109200 \\ \hline 2436126 \end{array}$$

ἄθροισμα

Ἐπειδὴ τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ μηδενικὰ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου μερικοῦ γινομένου οὐδὲν προσθέτουσιν εἰς τὸ ἄθροισμα, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν αὐτά, ἤτοι

$$\begin{array}{r} 10546 \\ 31638 \\ 21092\! \\ \hline 2436126 \end{array}$$

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς·

5273	πολλαπλασιαστέος			
462	πολλαπλασιαστὴς			
10546	μερικὸν γινόμενον ἐπὶ			2 (μονάδας)
31638	»	»	»	6 (δεκάδας)
21092	»	»	»	4 (ἑκατον.)
2436126	ὁλικὸν γινόμενον.			

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν ὑποκάτω τοῦ πολλαπλασιαστέου τὸν πολλαπλασιαστὴν οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ὑποκάτω αὐτῶν σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμήν. Ἔπειτα, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον ἑκάστου μερικοῦ γινομένου νὰ εὑρίσκηται ὑποκάτω ἐκείνου τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, μὲ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν. Τέλος σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω αὐτῆς γράφομεν τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων.

Παρατήρησις. Ὅταν μεταξὺ τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὑπάρχωσι μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον μόνον μὲ τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (διότι τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 0 εἶνε 0), προσέχοντες ὅμως νὰ γράφωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα συμφώνως μὲ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Παραδείγματα.

679	7896	6089
86	703	1008
4074	23688	48712
5432	55272	6089
58394	5550888	6137712

Συντομίαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1ον) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἢ καὶ οἱ δύο λήγουσιν εἰς μηδενικά, παραλείπομεν τὰ εἰς τὸ τέλος μηδενικὰ καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτούς· ἔπειτα γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Παραδ. χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 24 καὶ 32000, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ 32000 καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 24 καὶ 32, εἰς δὲ τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 768 γράφομεν τὰ παραλειφθέντα τρία μηδενικά, ἤτοι 768000 (ὁ λόγος εἶνε ὁ τοῦ ἐδαφίου 37).

Ὡσαύτως διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 43000 καὶ 120, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ αὐτῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 43 καὶ 12, ἔπειτα γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 516 τὰ τέσσαρα παραλειφθέντα μηδενικά, ἤτοι 5160000.

Διότι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 43000 ἐπὶ 120, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 43000 ἐπὶ 12 καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικόν. Ἀλλὰ διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάλιν τὸν 43000 ἐπὶ 12, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 43 ἐπὶ 12 καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν τρία μηδενικά. Ὥστε εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου 43 ἐπὶ 12, ἤτοι τοῦ 516, πρέπει νὰ γράψωμεν ἐν ὅλῳ τέσσαρα μηδενικά, ἤτοι 5160000.

2ον) Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει καὶ τὴν ἑξῆς συντομίαν. Ὡς πολλαπλασιαστὴν νὰ λαμβάνωμεν πάντοτε τὸν ἔχοντα ὀλιγώτερα σημαντικὰ ψηφία. Διότι τότε θὰ ἔχωμεν ὀλιγώτερα μερικὰ γινόμενα.

3ον) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συντόμως ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ψηφία εἶνε 9, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα 9 ἔχει ὁ ἄλλος· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ ἡ διαφορὰ εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Παραδ. χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2456 ἐπὶ 999, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τρία μηδενικὰ καὶ ἀπὸ τὸν σχηματισθέντα ἀριθμὸν 2456000 ἀφαιροῦμεν τὸν 2456, ἡ δὲ διαφορὰ 2453544 εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ὁ λόγος εἶνε ὁ ἑξῆς· ἀντὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸν 999 φοράς, τὸν ἐπαναλαμβάνομεν 1000 φορὰς καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν αὐτὸν μίαν φοράν.

4ον) Διὰ πολλαπλασιάσωμεν νοερῶς διψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη του χωριστὰ ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Π. χ. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 87 ἐπὶ 4, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν 80 ἐπὶ 4 καὶ εὑρίσκομεν 320, ἔπειτα τὸν 7 ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον 28 προσθέτομεν εἰς τὸν 320 καὶ εὑρίσκομεν 348.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον πολλαπλασιάζομεν νοερῶς καὶ τριψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

42. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς δύο πρώτους, τὸ γινόμενον αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμούς.***

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $8 \times 14 \times 5 \times 6$. Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων 8 καὶ 14 εἶνε 112, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ 5 εἶνε 560 καὶ τέλος τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ 6 εἶνε 3360.

Καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς· τούτου ἕνεκα προτιμῶμεν χάριν συντομίας νὰ πολλαπλασιάζωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς ἐκείνους, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εὑρίσκομεν εὐκόλως νοερῶς. Ἤτοι λέγομεν (ἀνωτέρω παράδειγμα) 5 ἐπὶ 6, 30· 30 ἐπὶ 8, 240 καὶ τέλος πολλαπλασιάζομεν τὸν 240 ἐπὶ 14 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 3360.

43. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων (μὴ εὑρεθὲν) ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 8$ ἐπὶ 4· πολλαπλασιάζομεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ, καὶ ἔστω τὸν 3, ὅτε ἔχομεν $2 \times 12 \times 8$ ἢ 192.

Περὶ τῶν δυνάμεων.

44. Ἐὰν συμβῇ οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς νὰ εἶνε ἴσοι μεταξύ των, ὅπως π. χ. εἰς τὰ γινόμενα 6×6, $2 \times 2 \times 2$, $5 \times 5 \times 5 \times 5$ κτλ., τότε τὰ γινόμενα ταῦτα λέγονται **δυνάμεις** ἑνὸς τῶν παραγόντων τούτων ἤτοι τὸ γινόμενον 6×6 λέγεται δύναμις τοῦ 6, τὸ γινόμενον $2 \times 2 \times 2$ λέγεται δύναμις τοῦ 2 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε *Δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Καὶ ἂν μὲν οἱ παράγοντες εἶνε δύο, λέγεται ἰδιαιτέρως *δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον*· ἂν δὲ εἶνε τρεῖς, λέγεται *τρίτη δύναμις ἢ κύβος*· ἂν δὲ εἶνε τέσσαρες, λέγεται *τετάρτη δύναμις* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων καὶ εἰς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνω αὐτοῦ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων, καὶ λέγεται οὗτος **ἐκθέτης**, ὁ δὲ παράγων λέγεται **βάσις** τῆς δυνάμεως.

Παρ. χάριν, ἡ δύναμις 6×6 γράφεται συντόμως 6^2· καὶ ὁ μὲν 2 εἶνε ὁ ἐκθέτης, ὁ δὲ 6 εἶνε ἡ βάσις, καὶ ἀπαγγέλλεται ἓξ εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν ἢ ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ 6 ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ 6· ὡσαύτως ἡ δύναμις $5 \times 5 \times 5$ γράφεται 5^3 καὶ ἀπαγγέλλεται πέντε εἰς τὴν τρίτην δύναμιν ἢ ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 5 ἢ ὁ κύβος τοῦ 5. Ὥστε εἶνε $6^2 = 6 \times 6$ καὶ $5^3 = 5 \times 5 \times 5$.

Σημ. Πᾶσα δύναμις τῆς μονάδος 1 εἶνε πάλιν ἡ μονὰς 1· διότι εἶνε π. χ. $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$. Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 εἶνε ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσος εἶνε ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως· διότι εἶνε π. χ. $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

45. Ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἀλλάσσομεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων, ἤτοι θέτομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ὡς πολλαπλασιαστέον καὶ πολλαπλασιάζομεν· καὶ ἂν εὕρωμεν τὸ ἴδιον γινόμενον, ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.(ἐδάφ. 35).

Ἐφαρμογὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου.

1) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 5 δραχμάς· πόσον τιμῶνται 3 πήχεις ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Κατάταξις τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

1 πῆχυς	5 δραχμὰς
3	χ

ἤτοι γράφομεν εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν τὰς δύο ἀντιστοίχους τιμὰς (ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶνε αἱ 5 δραχμαί, καὶ τἀνάπαλιν ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν 5 δραχμῶν εἶνε ὁ 1 πῆχυς), ὑποκάτω δὲ γράφομεν τὴν νέαν δοθεῖσαν τιμὴν 3 ὑπὸ τὴν ὁμοειδῆ της, τὴν δὲ ἄγνωστον καὶ ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὴν τιμὴν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ (1).

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὸ πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 1 πῆχυν, θὰ δώσωμεν 5 δραχμάς· διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 2 πήχεις, θὰ δώσωμεν δύο φορὰς τὰς 5 δραχμάς, ἤτοι $5+5$ ἢ 5×2 δραχμὰς (διότι δραχμὰς ἐπαναλαμβάνομεν)· καὶ διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3 πήχεις, θὰ δώσωμεν τρεῖς φορὰς τὰς 5 δραχμάς, ἤτοι $5+5+5$ ἢ 5×3, ἤτοι 15 δραχμάς.

2) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 3 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 4 δραχμάς;

Κατάταξις.	1 δραχ.	3 ὀκ.
	4	χ

---

(1) Οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἐννοήσωσι τὸ ἑξῆς· Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἀριθμός τις εἶνε τιμὴ ἄλλου, δὲν ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι πρέπει νὰ παριστᾷ οὗτος καὶ πάντοτε χρήματα, ἀλλὰ δύναται νὰ παριστᾷ οἱονδήποτε πρᾶγμα. Παραδ. χάριν, ἐὰν δώσωμεν 2 μῆλα εἴς τινα καὶ λάβωμεν παρ' αὐτοῦ ὡς ἀντάλλαγμα 5 καρύδια, τὰ 2 μῆλα εἶνε ἡ τιμὴ τῶν 5 καρυδίων καὶ τἀνάπαλιν τὰ 5 καρύδια εἶνε ἡ τιμὴ τῶν 2 μήλων.

Λύσις. Ἀφοῦ μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζομεν 3 ὀκάδας, μὲ 4 δραχμάς, αἵτινες εἶνε τέσσαρας φορὰς περισσότεραι τῆς μιᾶς δραχμῆς, θὰ ἀγοράσωμεν καὶ τέσσαρας φορὰς τὰς 3 ὀκάδας, ἤτοι $3+3+3+3$ ἢ 3×4, ἤτοι 12 ὀκάδας (διότι ὀκάδας ἐπαναλαμβάνομεν).

Καὶ εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται πολλαπλασιασμός, εἶνε γνωστὴ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (ἤτοι εἰς μὲν τὸ πρῶτον πρόβλημα εἶνε γνωστὴ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως, εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς δραχμῆς, ἥτις εἶνε 3 ὀκάδες) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (ἤτοι τῶν πολλῶν πήχεων, τῶν πολλῶν δραχμῶν).

46. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων (ὁμοειδῶν), κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.

Πολλαπλασιαστέος εἶνε πάντοτε ἡ *τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος* (διότι αὐτὴ ἐπαναλαμβάνεται πολλάκις) καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ***ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων***, ὅστις, ὡς εἴπομεν καὶ προηγουμένως, θεωρεῖται ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ ἐν τῇ πράξει καὶ ἐν τῇ σκέψει. Εἰς τὸ πρῶτον λοιπὸν πρόβλημα πολλαπλασιαστέος εἶνε αἱ 5 δραχμαὶ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 3, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πρόβλημα πολλαπλασιαστέος εἶνε αἱ 3 ὀκάδες καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 4.

Ἀφοῦ δὲ μάθωμεν ποῖος εἶνε ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ποῖος ὁ πολλαπλασιαστής, δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς ἀφῃρημένον ἀριθμὸν καὶ νὰ ἐκτελῶμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλομεν (διότι τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται ἐδάφ. 35), ἀρκεῖ μόνον νὰ ἐνθυμώμεθα ὅτι τὸ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν, δὲν ἀρκεῖ μόνον νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ νὰ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων, ἀλλὰ πρέπει νὰ εἶνε καὶ τὸ πρόβλημα τοιοῦτον, ὥστε διπλασιαζομένης, τριπλασιαζομένης κτλ. τῆς μονάδος, νὰ διπλασιάζηται, τριπλασιάζηται κτλ. καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ αὐτῆς. Διότι, ἂν π.χ. εἷς ἐργάτης τελειώνει ἔργον τι εἰς 8 ὥρας, οἱ 2, οἱ 3 κτλ. ἐργάται δὲν θὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς 8×2, 8×3 κτλ. ὥρας, ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι θὰ τὸ τελειώσωσιν εἰς ὀλιγωτέρας τῶν 8 ὡρῶν. Θὰ μάθωμεν δὲ κατωτέρω, τίνα πρᾶξιν θὰ ἐκτελέσωμεν πρὸς εὕρεσιν τούτου.

Νοεραὶ ἀσκήσεις.

1) Μία δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά· πόσα λεπτὰ ἔχουν 10 δραχμαί; Πόσα αἱ 30 καὶ πόσα αἱ 100 δραχμαί;

2) Ὁ στατὴρ (καντάρι) ἔχει 44 ὀκάδας· πόσας ὀκάδας ἔχουν 10 στατῆρες καὶ πόσας οἱ 100 στατῆρες;

3) Τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας· πόσους μῆνας ἔχουν 6 ἔτη; (ἐνθυμούμενοι νὰ πολλαπλασιάζωμεν νοερῶς πρῶτον τὰς δεκάδας καὶ ἔπειτα τὰς μονάδας).

4) Ὁ πῆχυς ἔχει 8 ῥούπια· πόσα ῥούπια ἔχουν 15 πήχεις;

5) Μία ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας· πόσας ἡμέρας ἔχουν 18 ἑβδομάδες;

6) Ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια· πόσα δράμια ἔχουν αἱ 9 ὀκάδες καὶ πόσα αἱ 70 ὀκάδες;

7) Μία οἰκογένεια πληρώνει ἐνοίκιον κατὰ μῆνα 70 δραχμάς· πόσον πληρώνει τὸ ἔτος;

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις 60 ὀκάδας σίτου πρὸς 80 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ 40 ὀκ. ἀραβοσίτου πρὸς 60 λ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα λεπτὰ ἔδωκεν; (7200).

2) Ἠγόρασέ τις 5000 πορτοκάλια πρὸς 40 δραχμὰς τὴν χιλιάδα (ἤτοι τὰ 1000) καὶ 7000 λεμόνια πρὸς 28 δρ. τὴν χιλιάδα. Πόσον ἔδωκεν; (396 δρ.).

3) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 45 ὀκάδας βουτύρου πρὸς 12 δρ. τὴν ὀκᾶν· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 15 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐκέρδησεν; (135 δρ.).

4) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 60 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 7 δρ. τὸν πῆχυν· κατόπιν ἐπώλησεν ἐξ αὐτοῦ 18 πήχεις πρὸς 8 δρ. τὸν πῆχυν, 34 πήχ. πρὸς 9 δρ. τὸν πῆχυν καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 6 δρ. τὸν πῆχυν. Πόσον ἐκέρδησεν; (78 δρ.)

5) Ἠγόρασέ τις 6 στατῆρας ἀνθράκων πρὸς 35 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκεν ἓν ἑκατοντάδραχμον. Πόσα λεπτὰ ἔλαβεν ὑπόλοιπον;

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τοὺς στατῆρας εἰς ὀκάδας, διὰ νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιαστὴς ὁμοειδὴς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν, καὶ εὑρίσκομεν 264 ὀκάδας· ὥστε οἱ ἄνθρακες ἀξίζουν 35×264 ἢ 9240 λεπτά, ἑπομένως ἔλαβεν ὑπόλοιπον 10000 —9240 ἢ 760λ.

6) Διὰ νὰ σκάψωσι μίαν ἄμπελον 7 ἐργάται, εἰργάσθησαν 6 ἡμέρας πρὸς 8 δραχ. ἕκαστος τὴν ἡμέραν. Πόσον ἔλαβον; (336 δρ.).

7) Ἔχει τις 3 ἀγελάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων δίδει τὴν ἡμέραν 4 ὀκ. γάλα· ἐὰν πωλῇ τὸ γάλα πρὸς 1 δρ. καὶ 60 λ. (ἢ 160 λ.) τὴν ὀκᾶν, πόσον θὰ λάβῃ εἰς ἕνα μῆνα; (57600 λεπτά).

Σημ. Ὁ μὴν λαμβάνεται μὲ 30 ἡμ.

8) Λαμβάνει τις ἐνοίκιον ἐκ τῆς οἰκίας του κατὰ μῆνα ἐκ τοῦ ἄνω πατώματος 150 δραχμάς, ἐκ τοῦ μεσαίου 110 καὶ ἐκ τοῦ ὑπογείου 30· ἔχει ὅμως ἔξοδα τὸ ἔτος δι' ἐπισκευήν, φόρον οἰκοδομῶν κτλ. 390 δραχ. Ζητεῖται πόσον ἔχει καθαρὸν εἰσόδημα τὸ ἔτος ἐκ τῆς οἰκίας του. (3090 δρ.).

9) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 19 δωδεκάδας μανδήλια πρὸς 7 δραχ τὴν δωδεκάδα· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 80 λεπτὰ ἕκαστον μανδήλιον. Πόσον ἐκέρδησεν; (4940 λεπτά).

10) Εἰς ἓν ἐργοστάσιον ἐργάζονται 36 ἐργάται· ἐκ τούτων οἱ μὲν 8 λαμβάνουσιν 9 δραχ. ἕκαστος τὴν ἡμέραν, οἱ δὲ 15 λαμβάνουσιν 6 δρ. ἕκαστος, οἱ δὲ λοιποὶ 4 δρ. ἕκαστος. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς θὰ λάβωσιν ὅλοι εἰς 5 ἑβδομάδας, ἀλλὰ τὰς Κυριακὰς δὲν ἐργάζονται. (6420).

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

47. Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 12 μῆλα εἰς 4 παιδία ἐξ ἴσου, καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα μῆλα θὰ λάβῃ ἕκαστον.

Τοῦτο δυνάμεθα νὰ πράξωμεν κατὰ τὸν ἑξῆς ἁπλοῦν τρόπον. Κατὰ πρῶτον δίδομεν ἀπὸ ἕνα μῆλον εἰς ἕκαστον, ὅτε μένουν 12—4, ἤτοι 8 μῆλα· ἔπειτα δίδομεν πάλιν ἀπὸ ἕνα μῆλον, ὅτε μένουν 8—4, ἤτοι 4 μῆλα· ἔπειτα δίδομεν πάλιν ἀπὸ ἕνα μῆλον, ὅτε δὲν μένει τίποτε, διότι εἶνε 4—4=0. Ἕκαστον λοιπὸν παιδίον θὰ λάβῃ 3 μῆλα, ἤτοι τόσα, ὅσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸν 12. Ἡ πρᾶξις λοιπὸν αὕτη, διὰ τῆς ὁποίας ἐμοιράσαμεν τὰ 12 μῆλα εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (διότι εἶνε 12=3+3+3+3), λέγεται **διαίρεσις**. Ὥστε ὁρίζομεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἑξῆς.

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ μοιρασθῇ ἢ διαιρεθῇ, λέγεται **διαιρετέος**· ὁ δὲ ἄλλος, ὅστις δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη θὰ μοιρασθῇ ὁ διαιρετέος, λέγεται **διαιρέτης**· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως, τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἓν τῶν ἴσων μερῶν ἢ μεριδίων, λέγεται **πηλίκον**. Ὥστε εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διαιρετέος εἶνε ὁ 12, διαιρέτης ὁ 4 καὶ πηλίκον ὁ 3.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἀριθμός τις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ δι' ἄλλου, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον :, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **διά**, ἀλλὰ τὸν διαιρέτην γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου. Ἡ ἀνωτέρω, παραδ. χάριν, διαίρεσις γράφεται 12 : 4 καὶ ἀπαγγέλλομεν *δώδεκα διὰ τέσσαρα*. Ἐπίσης 24 : 6 σημαίνει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 24 διὰ τοῦ 6.

48. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι τὸ πηλίκον (ἤτοι ὁ 3) ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας φορὰς εἶνε δυνατὸν νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης ἀπὸ τὸν διαιρετέον. Ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι ὅσας φορὰς δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης ἀπὸ τὸν διαιρετέον, τόσας φορὰς χωρεῖ οὗτος εἰς ἐκεῖνον. Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν τὴν διαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς.

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας φορὰς ἀριθμός τις χωρεῖ εἰς ἄλλον.

Σημ. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶνε ἴσος μὲ τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶνε ἡ μονὰς 1· ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης εἶνε ἡ μονάς, τὸ πηλίκον εἶνε ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον. Παραδ. χάριν, ἂν πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 7 δραχμὰς εἰς 7 ἀνθρώπους, θὰ δώσωμεν εἰς ἕκαστον ἀπὸ 1 δραχμήν, ἤτοι τὸ πηλίκον τοῦ 7 διὰ 7 εἶνε 1. Ἐὰν ὅμως πρόκειται νὰ μοιράσωμεν τὰς 7 δραχμὰς εἰς ἕνα μόνον ἄνθρωπον, θὰ δώσωμεν εἰς αὐτὸν καὶ τὰς 7 δραχμάς, ἤτοι τὸ πηλίκον τοῦ 7 διὰ 1 εἶνε 7.

Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις.

49. Ὅταν ἀριθμός τις δύναται νὰ διαιρεθῇ ἢ μοιρασθῇ ἀκριβῶς εἰς ἴσα μέρη, χωρὶς νὰ μείνῃ τίποτε, ἡ διαίρεσις τότε λέγεται **τελεία**, τοὐναντίον δὲ λέγεται **ἀτελής**.

Εἴδομεν παραδ. χάριν ἀνωτέρω, ὅτι ἐκ τῶν 12 μήλων, τὰ ὁποῖα ἐμοιράσαμεν εἰς τὰ 4 παιδία, ἔλαβεν ἕκαστον 3 μῆλα καὶ δὲν ἔμεινε τίποτε· ἡ διαίρεσις λοιπὸν αὕτη εἶνε τελεία. Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν, παραδ. χάριν, 22 μῆλα καὶ μοιράσωμεν αὐτὰ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον εἰς τὰ 4 παιδία, θὰ λάβῃ ἕκαστον 5 μῆλα καὶ θὰ μείνουν 2 μῆλα. Ἡ διαίρεσις λοιπὸν αὕτη εἶνε ἀτελής· ὁ δὲ ἀριθμὸς 2 (μῆλα), ὅστις μένει, λέγεται **ὑπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως, τὸ ὁποῖον εἶνε πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου (διότι, ἂν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἦτο ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου, ἠδυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἀκόμη εἰς ἕκαστον παιδίον ἀπὸ ἓν ἢ περισσότερα μῆλα.

50. Ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι εἰς τὴν ἀνωτέρω γενομένην τελείαν διαίρεσιν λαμβάνομεν ἀπὸ ἕκαστον παιδίον ὅσα μῆλα τῷ ἐδώκαμεν, τότε θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰ 12 μῆλα· ἀλλ' ἕκαστον παιδίον ἔλαβε 3 μῆλα, ἑπομένως τὰ 4 παιδία ἔλαβον 3×4 μῆλα. Ὥστε εἶνε $12 = 3 \times 4$.

Ἐὰν πράξωμεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὴν ἀνωτέρω γενομένην ἀτελῆ διαίρεσιν, ἤτοι λάβωμεν ἀπὸ ἕκαστον παιδίον ὅσα μῆλα τῷ ἐδώκαμεν καὶ τὰ ἑνώσωμεν μὲ τὰ 2 μῆλα, ὅπου ἔμειναν, θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰ 22 μῆλα· ἀλλ' ἕκαστον παιδίον ἔλαβε 5 μῆλα, ἑπομένως τὰ 4 παιδία ἔλαβον 5×4 μῆλα. Ὥστε εἶνε $22 = 5 \times 4 + 2$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι

51. ***Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου, εἰς δὲ τὴν ἀτελῆ μὲ τὸ γινόμενον τοῦτο ηὐξημένον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον.***

Σημ. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 0 δι' ἀριθμοῦ τινος εἶνε 0 (καθὼς καὶ τὸ ὑπόλοιπον), ἤτοι εἶνε $0 : 5 = 0$. Διότι, πολλαπλασιαζομένου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, προκύπτει γινόμενον ὁ διαιρετέος 0.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὰ πηλίκον δύο ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἀφαιρέσεως τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ἀπαιτεῖ καὶ κόπον καὶ χρόνον, μάλιστα δὲ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μεγάλοι. Διὰ τοῦτο θὰ μεταχειρισθῶμεν κατωτέρω ἄλλον τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου συντόμως εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν.

Διαίρεσις ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον.

52. Κατὰ πρῶτον πρέπει νὰ μάθωμεν πότε τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶνε μονοψήφιον καὶ πότε πολυψήφιον. Πρὸς τοῦτο πολ-

λαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ 10 γράφοντες ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιά του, καὶ ἂν προκύψῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε μονοψήφιον· διότι τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ διαιρέτης δὲν χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον 10 φοράς, ἀλλ' ὀλιγώτερον, ἑπομένως τὸ πηλίκον θὰ εἶνε εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3,...9, ἤτοι μονοψήφιος. Ἐὰν ὅμως προκύψῃ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε διψήφιον ἢ πολυψήφιον· διότι τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ διαιρέτης χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον 10 φορὰς ἢ περισσότερον.

Ἐν τῇ διαιρέσει ταύτῃ, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον, δυνατὸν ὁ διαιρέτης νὰ εἶνε ἢ μονοψήφιος ἢ πολυψήφιος· ὥστε διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1ον. **Διαιρέτης μονοψήφιος**. Ἔστω, ὡς παράδειγμα, νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 32 διὰ 5 (τὸ πηλίκον ἐνταῦθα εἶνε μονοψήφιον, διότι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ 5, ἤτοι ὁ 50, εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 32). Ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 5 ἀπὸ τὸν 32 ὅσας φορὰς εἶνε δυνατὸν καὶ νὰ εὕρωμεν οὕτω τὸ πηλίκον, ὡς ἐπράξαμεν ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν τοῦτο συντόμως ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν νοερῶς τὸν διαιρέτην 5 ἐπὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε νὰ εὕρωμεν τὸ μεγαλύτερον γινόμενον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν 32. Τοιοῦτον γινόμενον εἶνε ἐνταῦθα ὁ ἀριθμὸς 5×6, ἤτοι ὁ 30 (διότι 5×7, ἤτοι ὁ 35, εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 32)· ὁ πολλαπλασιαστὴς λοιπὸν 6 δεικνύει, ὅτι ὁ 5 χωρεῖ εἰς τὸν 32 ἓξ φοράς, τουτέστι τὸ πηλίκον τοῦ 32 διὰ 5 εἶνε ὁ 6· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν 30 ἀπὸ τὸν 32, ἤτοι εἶνε 2. Ὥστε ἡ διαίρεσις εἶνε σύντομος ἐπαναληπτικὴ ἀφαίρεσις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστω ἐπίσης νὰ διαιρεθῇ ὁ 76 διὰ 9. Εὑρίσκομεν νοερῶς, ὅτι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν 9 δίδει τὸ μεγαλύτερον γινόμενον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν 76, εἶνε ὁ 8· διότι $9 \times 8 = 72$ (ἐνῷ $9 \times 9 = 81$). Ἄρα τὸ πηλίκον εἶνε 8, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸν 72 ἀπὸ τὸν 76, ἤτοι εἶνε 4.

Σημ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιοι ἀριθμοί, ἀνάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν, πᾶσα διαίρεσις, ὥστε εἶνε ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν εὐχερῶς τὴν ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσιν τοιούτων διαιρέσεων.

2ον. **Διαιρέτης πολυψήφιος**. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 6475 διὰ 743, ἤτοι ἔστω νὰ μοιράσωμεν 6475 δραχμὰς εἰς

743 ἀνθρώπους. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον (τὸ ὁποῖον εἶνε μονοψήφιον, διότι ὁ 7430 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 6475), σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ ἄνθρωποι εἶνε μόνον 700 ἢ 7 ἑκατοντάδες· διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ μίαν δραχμήν, πρέπει νὰ μοιράσωμεν 7 ἑκατοντάδας δραχμῶν, ἀλλ' ἡμεῖς ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 64 ἑκατοντάδας (τόσας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 6475)· ὥστε θὰ λάβῃ ἕκαστος τόσας δραχμάς, ὅσας φορὰς αἱ 7 ἑκατοντάδες χωροῦν εἰς τὰς 64 ἑκατοντάδας ἢ ὁ 7 εἰς τὸν 64. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν 64 διὰ 7 (ἤτοι διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου) εὑρίσκομεν πηλίκον 9· μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 6475 διὰ 743 εἶνε πάλιν 9· διότι οἱ ἄνθρωποι εἶνε περισσότεροι τῶν 7 ἑκατοντάδων, ἤτοι 743, καὶ ἑπομένως δὲν γνωρίζομεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος χωρεῖ εἰς ἐκεῖνον 9 φοράς.

Διὰ νὰ μάθωμεν δέ, ἂν τὸ πηλίκον τοῦ 6475 διὰ 743 εἶνε 9 ἢ μικρότερον αὐτοῦ, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ 9 καὶ ἂν τὸ γινόμενον εἶνε ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου, τότε πράγματι τὸ πηλίκον εἶνε 9· ἂν δὲ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ διαιρέτης δὲν χωρεῖ 9 φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον, ἀλλ' ὀλιγώτερον. Τὸ γινόμενον λοιπὸν τοῦ 743 ἐπὶ 9 εἶνε 6687, ἤτοι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου 6475, διὰ τοῦτο θὰ δοκιμάσωμεν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ 9 ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 8, καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 743×8 ἢ 5944, ἤτοι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶνε 8, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶνε ἡ διαφορὰ 6475 – 5944, ἤτοι 531. Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ 8 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 531 δραχμαί.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r|l} 6475 & 743 \\ \cline{2-2} \underline{5944} & 8 \\ 531 & \end{array} \quad \text{ἢ συντόμως} \quad \begin{array}{r|l} 6475 & 743 \\ \cline{2-2} 531 & 8 \end{array}$$

ἤτοι γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ χωρίζομεν συνήθως αὐτοὺς διὰ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς, ὑποκάτω δὲ τοῦ διαιρέτου σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω αὐτῆς γράφομεν τὸ πηλίκον· τὸ δὲ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου γράφομεν ὑποκάτω τοῦ διαιρετέου καὶ ἀφαιροῦμεν τοῦτο ἀπ' αὐτόν.

Χάριν ὅμως συντομίας δὲν γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ἀλλ' ἐνῷ πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἀφαιροῦμεν συγχρόνως τὸ γινόμενον τοῦτο ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ διαιρετέου. Ἤτοι λέγομεν 3 ἐπὶ 8 24 ἀπὸ 25 μένει 1 (ἐπροσθέσαμεν 20 μονάδας εἰς τὰς 5 μονάδας τοῦ διαιρετέου, διὰ νὰ εἶνε δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, ἐνθυμούμενοι κατόπιν νὰ προσθέσωμεν 2 δεκάδας εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ διαιρέτου· ἐδάφ. 28), γράφομεν λοιπὸν 1 ὑποκάτω τοῦ ψηφίου τοῦ διαιρετέου καὶ κρατοῦμεν 2 (δεκάδας)· ἔπειτα λέγομεν 4 ἐπὶ 8, 32 καὶ 2 (τὰ κρατούμενα) 34 ἀπὸ 37 μένουν 3, γράφομεν λοιπὸν 3 ὑποκάτω τοῦ ψηφίου 7 τοῦ διαιρετέου καὶ κρατοῦμεν 3 ἔπειτα λέγομεν 7 ἐπὶ 8, 56 καὶ 3 (τὰ κρατούμενα) 59 ἀπὸ 64 μένουν 5, γράφομεν λοιπὸν 5 ὑποκάτω τοῦ ψηφίου 4 τοῦ διαιρετέου.

53. Ὅταν μάθωμεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν εἶνε μονοψήφιον, εὑρίσκομεν τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχουν ἰσάριθμα ψηφία, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον (πρὸς τὰ ἀριστερὰ) τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου· ἐὰν δὲ ὁ διαιρετέος ἔχῃ ἓν ψηφίον περισσότερον τοῦ διαιρέτου, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ. Καὶ ἔπειτα δοκιμάζομεν (ὡς ἀνωτέρω), ἂν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε τὸ ἀληθὲς ἢ μικρότερον αὐτοῦ.

Παραδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

$$\begin{array}{r|l} 935 & 387 \\ \hline 161 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 427 & 87 \\ \hline 79 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3347 & 346 \\ \hline 233 & 9 \end{array}$$

Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν ἀσφαλέστερον τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τοῦτο. Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 5, νὰ αὐξάνωμεν νοερῶς τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου κατὰ μονάδα καὶ δι' αὐτοῦ νὰ διαιρῶμεν Παραδ. χάριν, εἰς τὸ πρῶτον ἀνωτέρω παράδειγμα ὁ 3 χωρεῖ εἰς τὸν 9 τρεῖς φοράς, ἂν λοιπὸν γράψωμεν 3 ὡς πηλίκον καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην 387, θὰ εὕρωμεν γινόμενον 1161, ἤτοι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου, ἑπομένως θὰ ἐλαττώσωμεν τὸν 3 κατὰ μονάδα καὶ θὰ γράψωμεν 2. Ἀλλὰ τὸν 2 εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἂν αὐξήσωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον 3 τοῦ διαιρέτου κατὰ μονάδα (διότι τὸ δεύτερον ψηφίον αὐτοῦ, ἤτοι ὁ 8, εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 5) καὶ διαιρέσωμεν τὸν 9 διὰ 4. Εἰς τὸ δεύτερον πάλιν παράδειγμα ὁ 8 χωρεῖ εἰς τὸν 42 πέντε φοράς, ἂν ὅμως αὐξήσωμεν νοερῶς τὸν 8 κατὰ μονάδα (διότι τὸ δεύτερον ψηφίον 7 εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 5) καὶ διαιρέσωμεν τὸν 42 διὰ 9, εὑρίσκομεν τὸ ἀληθὲς πηλίκον 4.

Ἐὰν δὲ συμβῇ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου νὰ χωρῇ εἰς τὸν ἀριθμόν, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ διαιρετέου, 10 φορὰς ἢ καὶ περισσότερον, δοκιμάζομεν ἀμέσως τὸν 9. Παραδ. χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίτον παράδειγμα ὁ 3 χωρεῖ εἰς τὸν 33 ἕνδεκα φορὰς ($11\times3=33$), ἀρχίζομεν λοιπὸν τὴν δοκιμὴν ἀπὸ τὸν 9, διότι γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων, ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶνε μονοψήφιον.

Διαίρεσις ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον.

54. Ἐν τῇ διαιρέσει ταύτῃ, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον, δυνατὸν πάλιν ὁ διαιρέτης νὰ εἶνε μονοψήφιος ἢ πολυψήφιος· ὥστε καὶ ἐνταῦθα διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1ον. **Διαιρέτης μονοψήφιος.** Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 4783 διὰ 7, ἤτοι ἔστω νὰ μοιράσωμεν 4783 δραχμὰς εἰς 7 ἀνθρώπους. Τὸ πηλίκον ἐνταῦθα εἶνε πολυψήφιον (ἐδάφ. 52).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὸ πηλίκον, ἤτοι τὸ μερίδιον ἑκάστου, ἀρκεῖ νὰ μοιράσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ 4783, ἤτοι χωριστὰ τὰς χιλιάδας, χωριστὰ τὰς ἑκατοντάδας, χωριστὰ τὰς δεκάδας καὶ χωριστὰ τὰς μονάδας. Ἀλλ' αἱ 4 χιλιάδες αὐτοῦ δὲν φθάνουν διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ μίαν χιλιάδα (διότι οἱ ἄνθρωποι εἶνε 7), διὰ τοῦτο τρέπομεν αὐτὰς εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς 40 ἑκατοντάδας (διότι ἑκάστη χιλιὰς ἔχει 10 ἑκατοντάδας) καὶ 7 ἑκατοντάδας ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κάμνουν 47 ἑκατοντάδας. Ἀλλ' ὁ 47 εὑρίσκεται ἀμέσως, ἐὰν χωρίσωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ. Διαιροῦντες τώρα τὰς 47 ἑκατοντάδας διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 6 ἑκατοντάδας (διότι εἶνε $7\times6=42$) καὶ μένουν 5 ἑκατοντάδες.

Τὰς 5 ἑκατοντάδας τοῦ ὑπολοίπου τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς 50 δεκάδας (διότι ἑκάστη ἑκατοντὰς ἔχει 10 δεκάδας) καὶ 8 δεκάδας ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κάμνουν 58 δεκάδας. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 58 εὑρίσκεται ἀμέσως, ἐὰν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 5 τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον 8 τοῦ διαιρετέου, ἤτοι 58. Διαιροῦντες τώρα τὰς 58 δεκάδας διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 8 δεκάδας (διότι εἶνε $7 \times 8 = 56$) καὶ μένουν 2 δεκάδες.

Τὰς 2 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς 20 μονάδας (διότι ἑκάστη δεκὰς ἔχει 10 μονάδας) καὶ 3 μονάδας ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κάμνουν 23 μονάδας. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 23 εὑρίσκεται ἀμέσως, ἐὰν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 2 τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον 3 τοῦ διαιρετέου, ἤτοι 23. Διαιροῦντες τώρα τὰς 23 μονάδας διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 3 μονάδας (διότι εἶνε $7 \times 3 = 21$) καὶ μένουν 2 μονάδες. Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ δραχμὰς 6 ἑκατοντάδας, 8 δεκάδας καὶ 3 μονάδας, ἤτοι θὰ λάβῃ 683 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 2 δραχμαί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου 683 τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 4783 διὰ 7 ἀνελύσαμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην εἰς ἄλλας μερικὰς διαιρέσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πηλίκον μονοψήφιον. Καὶ κατὰ πρῶτον διῃρέσαμεν τὰς 47 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 7· ὥστε διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ πρῶτον μονοψήφιον πηλίκον, πρέπει νὰ χωρίζωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ σχηματισθῇ ἀριθμὸς ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, ἤτοι πρέπει νὰ χωρίζωμεν ἢ ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ψηφία ἢ ἓν ἀκόμη.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{l|l} 4'7'8'3 & 7 \\ \cline{2-2} 58 & 683 \\ \ \ 23 & \\ \ \ \ 2 & \end{array}$$

Ὁ χωρισμὸς τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου συνηθίζεται νὰ γίνηται διὰ μιᾶς ὀξείας (΄), τιθεμένης ἄνωθεν τοῦ τελευταίου ψηφίου ἐκ τῶν χωριζομένων. Καλὸν ὅμως εἶνε καὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ ἑκάστου εὑρισκομένου ὑπολοίπου ἤ, ὡς λέγομεν συνήθως, ***καταβιβάζομεν***, νὰ τὸ σημειῶμεν διὰ μιᾶς ὀξείας (ὡς δεικνύεται ἀνωτέρω), διὰ νὰ μὴ συμβῇ λάθος καὶ καταβιβάσωμεν ἐξ ἀπροσεξίας ἄλλο ψηφίον ἀντὶ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου.

Παρατήρησις. Ἐνῷ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν ἀρχίζομεν τὴν πρᾶξιν ἐκ δεξιῶν, εἰς τὴν διαίρεσιν ὅμως ἀρχίζομεν ἐξ ἀριστερῶν, καὶ τοῦτο διὰ νὰ τρέπωμεν τὰ ἑκάστοτε εὑρισκόμενα ὑπόλοιπα εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.

2ον. **Διαιρέτης πολυψήφιος.** Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8459 διὰ 343, ἤτοι ἔστω νὰ μοιράσωμεν 8459 δραχμὰς εἰς 343 ἀνθρώπους. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, θὰ ἀναλύσωμεν καὶ ἐνταῦθα τὴν διαίρεσιν εἰς ἄλλας μερικὰς διαιρέσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πηλίκον μονοψήφιον. Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης (ἤτοι τρία) ἢ ἓν περισσότερον, ἂν ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου. Ἐνταῦθα θὰ χωρίσωμεν τρία ψηφία, διότι ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς 845 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου 343. Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 845 διὰ 343 (ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 53) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 δεκάδας (διότι τὰς 845 δεκάδας τοῦ διαιρετέου διῃρέσαμεν) καὶ ὑπόλοιπον 159 δεκάδας.

Ἐὰν τώρα καταβιβάσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 159 καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον 9 τοῦ διαιρετέου, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 1599, ὅστις παριστᾷ μονάδας (διότι αἱ 159 δεκάδες κάμνουν 1590 μονάδας καὶ 9 τοιαύτας ὅπου ἔχει ὁ διαιρετέος κάμνουν 1599 μονάδας). Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 1599 διὰ 343 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 μονάδας καὶ ὑπόλοιπον 227 μονάδας.

Ὥστε τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 8459 διὰ 343 εἶνε 24 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 227, ἤτοι ἕκαστος θὰ λάβῃ 24 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 227 δραχμαί.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r|l} 8459 & 343 \\ \cline{2-2} 1599 & 24 \\ 227 & \end{array}$$

55. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου, γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς, ὑποκάτω δὲ τοῦ διαιρέτου σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω αὐτῆς γράφομεν τὸ πηλίκον.

Ἔπειτα χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ ἓν ἀκόμη, ἂν ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου. Τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον

πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν χωρισθέντα ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Τὸν σχηματισθέντα ἀριθμὸν (ἐκ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ ἑπομένου ψηφίου) διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Σημ. Συμβαίνει πολλάκις, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν πλησίον ὑπολοίπου τινὸς καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, νὰ μὴ διαιρῆται ὁ οὕτω σχηματισθεὶς ἀριθμὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν τότε 0 εἰς τὸ πηλίκον (διὰ νὰ τηρηθῇ ἡ ἀξία τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου) καὶ καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

598	:	89	προκύπτει πηλίκον	6	καὶ ὑπόλοιπον	64
3456	:	398	» »	8	»	362
68061	:	7	» »	9723	»	0
69458	:	87	» »	798	»	32
39506	:	78	» »	506	»	38
77416	:	97	» »	798	»	10
895673	:	892	» »	1004	»	105
62401	:	79	» »	789	»	70
705341	:	786	» »	897	»	299

Πλῆθος ψηφίων πηλίκου.

56. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μάθωμεν πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν αὐτήν, χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἔπειτα μετροῦμεν τὰ μὴ χωρισθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου καὶ ὅσα εἶνε ταῦτα καὶ ἓν ἀκόμη, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον. Τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος τῆς διαιρέσεως.

Ἰδιότης τῆς διαιρέσεως.

57. Ἐὰν μοιράσωμεν 25 μῆλα εἰς 7 παιδία, ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ 3 μῆλα καὶ θὰ μείνουν 4 μῆλα. Ἐὰν πάλιν μοιράσωμεν 25 μῆλα εἰς ἄλλα 7 παιδία, ἕκαστον θὰ λάβῃ πάλιν 3 μῆλα καὶ θὰ μείνουν 4 μῆλα. Ὥστε, ἐὰν μοιράσωμεν 25+25 ἢ 25×2, ἤτοι 50 μῆλα, εἰς 7+7 ἢ 7×2, ἤτοι εἰς 14 παιδία, ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ 3 μῆλα καὶ θὰ μείνουν 4+4 ἢ 4×2, ἤτοι 8 μῆλα. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον 25 ἐπὶ 2 καὶ τὸν διαιρέτην 7 ἐπὶ 2, τὸ πηλίκον 3 μένει τὸ αὐτό, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2. Ἐπειδὴ τοῦτο ἀληθεύει, ἂν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην καὶ ἐπὶ οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν, διὰ τοῦτο συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

Καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει, ἤτοι

Ἐὰν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Συντομίαι τῆς διαιρέσεως.

58. Ἔστω νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 18359 διὰ 400, ἤτοι ἔστω νὰ μοιράσωμεν 18359 δραχμὰς εἰς 400 ἀνθρώπους, καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος.

Διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ μίαν δραχμήν, πρέπει νὰ μοιράσωμεν τόσας δραχμάς, ὅσοι εἶνε καὶ οἱ ἄνθρωποι, ἤτοι 400 ἢ 4 ἑκατοντάδας δραχμῶν. Ὥστε ὅσας φορὰς αἱ 4 ἑκατοντάδες χωροῦν εἰς τὰς 183 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 18359 (παραλείποντες τὸν 59), τόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν 183 διὰ 4, εὑρίσκομεν πηλίκον 45 καὶ ὑπόλοιπον 3 ἑκατοντάδας, αἵτινες μετὰ τῶν 59 μονάδων, ἃς παρελείψαμεν, κάμνουν 359 μονάδας. Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ 45 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 359 δραχμαί.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r|l} 183(59 & 4(00 \\ \hline 23 & 45 \\ 359 & \end{array}$$

Ἤτοι

59. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμὸν δι' ἄλλου λήγοντος εἰς μηδενικά, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου, καθὼς καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς προκύπτοντας ἀριθμούς. Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον, ἐὰν δὲ γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου, θὰ ἔχωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.***

Τὸ πηλίκον ἐπίσης τοῦ ἀριθμοῦ 865 διὰ 10 εἶνε 86 (διότι εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω 86 : 1=86) καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5. Τὸ πηλίκον τοῦ 3596 διὰ 100 εἶνε 35 (διότι εἶνε 35 : 1=35) καὶ τὸ ὑπόλοιπον 96. Τὸ πηλίκον τοῦ 370000 διὰ 1000 εἶνε 370 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 0. Ἐκ τούτου ἕπεται

60. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμόν τινα διὰ 10, διὰ 100, διὰ 1000 καὶ γενικῶς διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, χωρίζομεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἕν, δύο, τρία κτλ. ψηφία (δηλ. τόσα, ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦσι τὴν μονάδα), καὶ τὰ μὲν χωρισθέντα ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ ὑπόλοιπον, τὰ δὲ ἄλλα τὸ πηλίκον.***

61. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμόν τινα διὰ 5, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 2 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 10.***

Ἂν π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 70 διὰ 5, διαιροῦμεν τὸν 70×2, ἤτοι τὸν 140, διὰ 5×2, ἤτοι διὰ 10, καὶ εὑρίσκομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω πηλίκον 14 καὶ ὑπόλοιπον 0. Διότι τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἐδ. 57).

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμόν τινα διὰ 25, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100.

Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως.

62. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου ηὐξημένον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ὑπάρχῃ (ἐδάφ. 51), διὰ τοῦτο κάμνομεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτην καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Σημ. Ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως ὡς ἑξῆς. Διαιροῦμεν τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων καὶ ἂν εὕρωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἄλλον παράγοντα καὶ ὑπόλοιπον μηδέν, ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος. Διότι, ἄν, παραδείγματος χάριν, ὁ 35 προκύπτῃ ἐκ τοῦ 5 ἐπαναλαμβανομένου ἑπτὰ φορὰς ἢ ἐκ τοῦ 7 ἐπαναλαμβανομένου πέντε φοράς, ἕπεται ὅτι ὁ 5 χωρεῖ εἰς τὸν 35 ἑπτὰ φοράς, ἢ ὁ 7 χωρεῖ εἰς τὸν 35 πέντε φοράς.

Ἐφαρμογὴ τῆς διαιρέσεως εἰς προβλήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου.

1) Ἠγόρασέ τις 4 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ ἔδωκε 12 δραχμάς· πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ;

Κατάταξις. 4 ὀκ. 12 δραχ.
1 χ

Λύσις. Ἐὰν μοιράσωμεν τὰς 12 δραχμὰς εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε αἱ ὀκάδες, ἤτοι εἰς 4, τὸ ἓν ἐκ τῶν μερῶν τούτων θὰ παριστᾷ προφανῶς τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 12 διὰ 4 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3, ἄρα 3 δραχμὰς τιμᾶται ἡ ὀκᾶ (διότι δραχμὰς μοιράζομεν).

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην μοιράζεται ὁ διαιρετέος εἰς ἴσα μέρη, διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις αὕτη λέγεται ἰδιαιτέρως **μερισμός**, τὸ δὲ πηλίκον λέγεται **μερίδιον** καὶ εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον (διότι εἶνε μέρος αὐτοῦ).

2) Μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν 24 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος· πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν;

Κατάταξις. 6 δραχ. 24 πήχ.
1 χ

Λύσις. Ἐὰν μοιράσωμεν τοὺς 24 πήχεις εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε καὶ αἱ δραχμαί, ἤτοι εἰς 6, τὸ ἓν τῶν μερῶν τούτων θὰ παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν πήχεων, τοὺς ὁποίους ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν. Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 24 διὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4, ἄρα 4 πήχεις ἀγοράζομεν (διότι πήχεις μοιράζομεν). Ὥστε καὶ ἡ διαίρεσις αὕτη εἶνε μερισμός.

Καὶ εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται διαίρεσις (μερισμός), εἶνε γνωστὴ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (εἰς μὲν τὸ πρῶτον πολλαὶ μονάδες εἶνε αἱ 4 ὀκάδες καὶ τιμὴ αὐτῶν αἱ 12 δραχμαί, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πολλαὶ μονάδες εἶνε αἱ 6 δραχμαὶ καὶ τιμὴ αὐτῶν οἱ 24 πήχ.) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (ἤτοι τῆς μιᾶς ὀκᾶς, τῆς μιᾶς δραχμῆς).

63. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ὁμοειδοῦς), κάμνομεν διαίρεσιν (μερισμόν).

Διαιρετέος εἶνε πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ διαιρέτης ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων, ὅστις θεωρεῖται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ ἐν τῇ πράξει καὶ ἐν τῇ σκέψει. Εἰς τὸ πρῶτον λοιπὸν πρόβλημα διαιρετέος εἶνε αἱ 12 δραχμαὶ καὶ διαιρέτης ὁ 4, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πρόβλημα διαιρετέος εἶνε αἱ 24 πήχεις καὶ διαιρέτης ὁ 6.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, καθὼς καὶ εἰς τὰ κατωτέρω, ὑποθέτομεν τὰς διαιρέσεις τελείας.

3) Ἀντήλλαξέ τις 39 ὀκάδας βουτύρου μὲ 117 ὀκάδας ἐλαίου· μὲ πόσας ὀκάδας ἐλαίου ἀντηλλάγη μιὰ ὀκᾶ βουτύρου;

Κατάταξις.	39 ὀκ. βουτ.	117 ὀκ. ἐλαίου
	1	χ

Λύσις. Μονὰς ἐδῶ εἶνε ἡ 1 ὀκᾶ βουτύρου, πολλαὶ μονάδες εἶνε αἱ 39 ὀκ. βουτύρου (ὡς ὁμοειδεῖς μὲ τὴν μονάδα τοῦ προβλήματος) καὶ τιμὴ αὐτῶν αἱ 117 ὀκ. ἐλαίου. Ὥστε γνωρίζομεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μερισμόν), ἤτοι 117 : 39 ἢ 3 ὀκ. ἐλαίου.

4) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 4 δραχμάς· πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 12 δραχμάς;

Κατάταξις.	1 πῆχ.	4 δραχ.
	χ	12

Λύσις. Ἐὰν δώσωμεν 4 δραχμάς, θὰ ἀγοράσωμεν 1 πῆχυν καὶ θὰ μείνουν 8 δραχμαί· ἐὰν δώσωμεν ἄλλας 4 δραχμάς, θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλον 1 πῆχυν καὶ θὰ μείνουν 4 δραχμαί· ἐὰν δώσωμεν καὶ τὰς ὑπολοίπους 4 δραχμάς, θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλον 1 πῆχυν. Ὥστε θὰ ἀγοράσωμεν ἐν ὅλῳ 3 πήχεις, ἤτοι τόσους, ὅσας φορὰς ἔχομεν τὰς 4 δραχμάς. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν συντόμως πόσας φορὰς ἔχομεν τὰς 4 δραχμάς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς ὁ 4 χωρεῖ εἰς τὸν 12, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (ἐδαφ. 48). Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 12 διὰ 4 καὶ εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον 3· ὥστε 3 φορὰς ἔχομεν τὰς 4 δραχμάς, ἐπομένως 3 πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην δὲν μοιράζεται ὁ διαιρετέος, ἀλλ' ἁπλῶς παρατηροῦμεν πόσας φορὰς ὁ διαιρέτης χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον, ἤτοι μετροῦμεν τὸν ἕνα ἀριθμὸν διὰ τοῦ ἄλλου, διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις αὕτη λέγεται ἰδιαιτέρως **μέτρησις**, τὸ δὲ πηλίκον λέγεται **λόγος** τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν διαιρέτην.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐδόθησαν δύο ὁμοειδεῖς τιμαὶ (ἤτοι 4 δραχμαὶ καὶ 12 δραχμαί), ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (ἤτοι τοῦ ἑνὸς πήχεως), ἡ δὲ ἄλλη εἶνε ἡ τιμὴ τῶν ζητουμένων πολλῶν μονάδων (ἤτοι τῶν τριῶν πήχεων). Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

64. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὰς πολλὰς μονάδας, τῶν ὁποίων τὴν ὁμοειδῆ τιμὴν ἔχομεν, κάμνομεν διαίρεσιν (μέτρησιν).***

Διαιρετέος εἶνε καὶ ἐδῶ ἡ τιμὴ τῶν ζητουμένων πολλῶν μονάδων, διαιρέτης δὲ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος. Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης θεωροῦνται ὡς ἀφηρημένοι ἀριθμοί, ἐπομένως καὶ τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἀφηρημένον· κατόπιν ὅμως κάμνομεν αὐτὸ συγκεκριμένον, ὡς ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημα, ἤτοι τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὴν μονάδα τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν.

5) Πόσας ὀκάδας κάμνουν 14800 δράμια;

Κατάταξις.	1 ὀκ.	400 δράμ.
	χ	14800

Λύσις. Γνωρίζομεν ἐδῶ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος (μονὰς εἶνε ἡ 1 ὀκᾶ καὶ τιμὴ αὐτῆς τὰ 400 δράμια) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς πολλὰς μονάδας (ἤτοι τὰς πολλὰς ὀκάδας) τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν τιμὴν τῶν 14800 δραμίων, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν, μέτρησιν, καὶ ὅσας φορὰς τὰ 400 δράμια χωροῦν εἰς τὰ 14800 δράμια, τόσας ὀκάδας κάμνουν. Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν 14800 διὰ 400 (ὡς ἀφηρημένους) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 37, ὥστε 37 ὀκάδας κάμνουν (διότι ὀκάδας παριστᾷ καὶ ἡ μονὰς τοῦ προβλήματος).

Σημ. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως πρέπει ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς καθ' ὅλα, διότι ἄλλως μέτρησις δὲν γίνεται.

6) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 60 λεπτά· πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 3 δραχμάς;

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον καὶ τὰς 3 δραχμὰς εἰς λεπτά, διὰ νὰ γίνουν ὁμοειδεῖς, καὶ ὅσας φορὰς τὰ 60 λεπτὰ (ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος) χωροῦν εἰς τὰ 300 λεπτά, τόσους πήχεις ἀγοράζομεν, ἤτοι 300 : 60 ἢ 5 πήχεις (διότι πήχεις παριστᾷ καὶ ἡ μονὰς τοῦ προβλήματος).

Παρατήρησις. Τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ διακρίνονται τῶν προβλημάτων τῆς μετρήσεως κατὰ τοῦτο· εἰς μὲν τὰ πρῶτα ἔχει δοθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων, εἰς δὲ τὰ δεύτερα ζητεῖται οὗτος. Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ ἐκτελέσωμεν διαίρεσιν πρὸς λύσιν προβλήματός τινος, πρέπει πρὸς κατανόησιν αὐτοῦ νὰ κάμνωμεν διάκρισιν τῆς διαιρέσεως ταύτης, ἂν δηλ. εἶνε μερισμὸς ἢ μέτρησις. Παραδ. χάριν, τὰ ἀνωτέρω προβλήματα 1ον καὶ 4ον λύονται καὶ τὰ δύο διὰ τῆς αὐτῆς διαιρέσεως 12 : 4, ἀλλ' εἶνε διάφορα τὴν φύσιν.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπόν τι εἰς τὴν διαίρεσιν (εἴτε μερισμὸς εἶνε αὕτη εἴτε μέτρησις), τοῦτο εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον.

Νοεραὶ ἀσκήσεις.

1) Οἰκογένειά τις ἐξώδευσεν εἰς 10 ἡμέρας 120 δραχμάς· πόσον ἐξώδευε τὴν ἡμέραν; (ἴδε ἐδάφιον 60).

2) Πόσας δραχμὰς κάμνουν 7000 λεπτά;

3) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται 4 δραχμάς· πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 24 δραχμάς;

4) Ἠγόρασέ τις 9 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 54 δραχμάς· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

5) Ἠγόρασέ τις 7 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἔδωκεν 28 δραχμάς· πόσον θὰ ἔδιδεν, ἂν ἠγόραζεν 9 πήχεις; (εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τοῦ ἑνὸς πήχεως).

6) Ἐπώλησέ τις 5 πρόβατα ἀντὶ 240 δραχμῶν· πρὸς πόσον ἐπώλησεν ἕκαστον; (ἴδε ἐδάφ. 61).

Διαίρεσις ἀθροίσματος καὶ γινομένου δι' ἀριθμοῦ.

Πρόβλημα. Πατήρ τις ἐμοίρασεν ἐξ ἴσου εἰς τὰ 4 τέκνα του τὴν πρώτην φορὰν 20 καρύδια, τὴν δὲ δευτέραν φορὰν 28 καρύδια. Πόσα ἔλαβε ἕκαστον τέκνον;

Λύσις. Ἐμοίρασεν ἐν ὅλῳ 20+28 ἢ 48 καρύδια, ἑπομένως ἕκαστον τέκνον ἔλαβε (20+28): 4 ἢ 48 : 4, ἤτοι 12 καρύδια.

Τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Τὴν πρώτην φορὰν ἔλαβεν ἕκαστον τέκνον 20 : 4, ἤτοι 5 καρύδια, τὴν δὲ δευτέραν φορὰν ἔλαβεν 28 : 4, ἤτοι 7 καρύδια· ὥστε ἕκαστον τέκνον ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 5+7, ἤτοι 12 καρύδια. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

65. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἢ εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτό, ἢ διαιροῦμεν ἕκαστον προσθετέον χωριστὰ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς) καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ πηλίκα.***

Πρόβλημα. Ἐὰν εἰς τὰ ἀνωτέρω 4 τέκνα μοιρασθῶσι τρεῖς φορὰς ἀπὸ 8 καρύδια, πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον;

Λύσις. Ἕκαστον τέκνον θὰ λάβῃ 8×3 : 4 ἢ 24 : 4, ἤτοι 6 καρύδια. Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν 8 διὰ 4 καὶ τὸ πηλίκον 2 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3, ἤτοι 8×3 : 4=2×3. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

66. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον παραγόντων δι' ἀριθμοῦ, ἢ εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ γινόμενον καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτό, ἢ διαιροῦμεν ἕνα τῶν παραγόντων (ὅστις νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν μὲ τοὺς ἄλλους παράγοντας.***

Ἐὰν ὅμως συμβῇ ὁ διαιρέτης νὰ εἶνε ἴσος μὲ ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, ἐξαλείφομεν τὸν παράγοντα τοῦτον, οἱ δὲ ἄλλοι παριστῶσι τὸ πηλίκον. Διότι εἶνε π. χ. 5×7×3 : 7 =5×1 ×3 = 5×3.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις 78 ὀκάδας ἀλεύρου καὶ ἔδωκε 5850 λεπτά. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ; (75 λεπτά).

2) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον 7 δραχμάς. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 273 δραχμάς; (39 ἡμ.).

3) Πρόκειται νὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 4 δραχμαὶ εἰς 5 ἀνθρώπους. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ 4 δραχμαὶ δὲν φθάνουν διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ μίαν δραχμήν, διὰ τοῦτο τρέπομεν αὐτὰς εἰς λεπτά, ἤτοι

400 λεπτά· κατόπιν διαιροῦμεν διὰ 5 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ 80 λεπτά.

Σημ. Τοῦτο ἐπράττομεν καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως (ἐδάφ. 54), τουτέστιν ἐτρέπομεν τοὺς ἑκάστοτε μικροτέρους τοῦ διαιρέτου ἀριθμοὺς εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.

4) Πρόκειται νὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 3 ὀκάδες μῆλα εἰς 16 παιδία. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστον; (75 δράμια).

5) Ἔδωκέ τις 12 δραχμὰς καὶ ἠγόρασεν αὐγὰ πρὸς 15 λεπτὰ τὸ καθέν. Πόσα αὐγὰ ἠγόρασεν; (80).

6) Ἀτμόπλοιόν τι, διατρέχον 12 μίλια τὴν ὥραν, ἀνεχώρησεν ἀπὸ μιᾶς πόλεως καὶ μεταβαίνει εἰς ἄλλην ἀπέχουσαν 192 μίλια. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ; Καὶ ἂν ἀνεχώρησε τὴν 7ην ὥραν πρὸ μεσημβρίας, ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ;

(μετὰ 16 ὥρας, τὴν 11ην μ. μ.).

7) Ἠγόρασέ τις 5 στατῆρας ἀνθράκων καὶ ἔδωκεν 77 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τοὺς στατῆρας εἰς ὀκάδας, διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ὁμοειδὴς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν, κατόπιν διαιροῦμεν καὶ εὑρίσκομεν 35 λεπτά.

8) Ἠγόρασέ τις 2 δωδεκάδας μανδήλια καὶ ἔδωκε 18 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει ἕκαστον μανδήλιον; (75 λ.).

9) Ἀντήλλαξέ τις 18 ὀκ. ἐλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 3 δραχμάς, μὲ ἄλευρον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 90 λεπτά. Πόσας ὀκάδας ἀλεύρου ἔλαβεν ὡς ἀντάλλαγμα;

Λύσις. Τὸ ἔλαιον ἀξίζει 54 δραχμάς, τόσον ἀξίζει καὶ τὸ ἄλευρον· ὅσας λοιπὸν φορὰς τὰ 90 λ. χωροῦν εἰς τὰς 54 δρ. ἢ 5400 λεπτά, τόσας ὀκάδας ἀλεύρου ἔλαβεν, ἤτοι 5400 : 90 ἢ 60 ὀκ.

10) Γυνή τις ἠγόρασεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 17 πήχεις καὶ ἔδωκεν 68 δραχμάς. Πόσον θὰ ἔδιδεν, ἂν ἠγόραζεν 20 πήχεις; (80 δρ.).
(Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τοῦ ἑνὸς πήχεως).

11) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον 875 πήχεων πρὸς 6 δρ. τὸν πῆχυν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν αὐτοῦ διὰ νὰ κερδήσῃ ἐξ ὅλου τοῦ οἰκοπέδου 1750 δραχμάς; (8 δρ.).

12) Ἠγόρασέ τις σῖτον πρὸς 80 λ. τὴν ὀκᾶν, κατόπιν τὸν ἐπώλησε πρὸς 88 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ ἐκέρδησεν 144 δραχμάς. Πόσον σῖτον ἐπώλησε;

Λύσις. Ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν ἐκέρδησεν 8 λεπτά, ὅσας λοιπὸν φορὰς τὰ 8 λ. χωροῦν εἰς τὰς 144 δρ. ἢ 14400 λεπτά, τόσας ὀκάδας ἐπώλησεν, ἤτοι 1800.

13) Ἐμπόρου τινὸς κοστίζει ὕφασμά τι 90 λεπτὰ ὁ πῆχυς, ἀλλ' ἕνεκα μικρᾶς βλάβης ἠναγκάσθη νὰ πωλήσῃ αὐτὸ πρὸς 75 λ. τὸν πῆχυν καὶ ἐζημιώθη ἐξ ὅλου τοῦ ὑφάσματος 3 δραχ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα; (20 πήχ.).

14) Τρεῖς ἄνθρωποι πρόκειται νὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 10 σάκκους σίτου, περιέχοντος ἑκάστου 54 ὀκάδας, τὸν ὁποῖον ἠγόρασαν πρὸς 70 λ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον σῖτον θὰ λάβῃ ἕκαστος καὶ πόσον θὰ πληρώσῃ; (180 ὀκ. 126 δραχ.)

15) Διὰ νὰ κάμῃ τις ἓν ταξείδιον, ἔλαβε μαζί του 500 δρ. καὶ ἐξώδευε κάθε ἡμέραν 18 δρ. πρὸς συντήρησίν του· ὅταν δὲ ἐπέστρεψεν εἶχε μόνον 28 δραχμάς, ἀλλ' εἶχεν ἐξοδεύσει καὶ 40 δρ. διὰ σιδηροδρομικά. Ζητεῖται πόσας ἡμέρας διήρκεσε τὸ ταξείδιον. (24).

16) Πατήρ τις μετὰ τῶν τριῶν υἱῶν του εἰργάσθησαν 20 ἡμ. καὶ ἔλαβον ὁμοῦ 760 δρ. Ὁ πατὴρ ἐλάμβανε τὴν ἡμέραν 15 δραχμάς, ὁ πρῶτος τῶν υἱῶν του 10 δρ. καὶ ὁ δεύτερος 8. Πόσας ἐλάμβανεν ὁ τρίτος υἱός;

Λύσις. Καὶ οἱ τέσσαρες ἐλάμβανον τὴν ἡμέραν 760 : 20, ἤτοι 38 δραχμάς, ὁ δὲ πατὴρ μετὰ τῶν δύο υἱῶν του ἐλάμβανον τὴν ἡμέραν 15+10+8, ἤτοι 33 δραχμάς· ἐπομένως ὁ τρίτος υἱὸς ἐλάμβανε 38—33, ἤτοι 5 δρ.

17) Διὰ τὴν καλλιέργειαν μιᾶς ἀμπέλου ἐμίσθωσέ τις τὴν αὐτὴν ἡμέραν 8 ἐργάτας πρὸς 9 δρ. τὴν ἡμέραν ἕκαστον καὶ 6 ἐργάτας πρὸς 7 δραχμὰς ἕκαστον· μετὰ τὴν καλλιέργειαν ἔδωκεν ἐν ὅλῳ 570 δρ. Πόσας ἡμέρας διήρκεσεν ἡ καλλιέργεια τῆς ἀμπέλου; (5).

18) Μήτηρ τις ἠγόρασε δύο ὑφάσματα διὰ φορέματα, ἓν διὰ τὸν ἑαυτόν της καὶ ἓν διὰ τὴν θυγατέρα της, καὶ ἔδωκεν ἐν ὅλῳ 63 δραχμάς· ἀλλὰ διὰ τὸ ἰδικόν της ὕφασμα ἔδωκε 15 δρ. περισσότερον. Πόσον ἀξίζει ἕκαστον ὕφασμα;

Λύσις. Ἐὰν ἡ μήτηρ ἠγόραζε καὶ τὸ ἰδικόν της ὕφασμα, ὅσον ἠγόρασε καὶ τὸ ὕφασμα τῆς θυγατρός της, θὰ ἔδιδεν 63 —15, ἤτοι 48 δραχμάς· ἀλλὰ τότε θὰ ἦτο τὸ αὐτό, ὡς νὰ ἠγόραζε δύο ὑφάσματα τῆς θυγατρός της μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἕκαστον. Ὥστε τὸ ὕφασμα τῆς θυγατρός της ἀξίζει 48 : 2, ἤτοι 24 δραχμάς, ἐπομένως τὸ ὕφασμα τῆς μητρὸς ἀξίζει 24+15, ἤτοι 39 δραχμάς.

19) Δύο ἀδελφοὶ πρόκειται νὰ μοιρασθῶσι κληρονομίαν 27600

δραχμῶν, ἀλλ' ὁ μεγαλύτερος νὰ λάβῃ 4900 δρ. περισσότερον τοῦ μικροτέρου. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος. (11350 καὶ 16250).

20) Χωρικός τις ἐπώλησεν 120 αὐγὰ πρὸς 45 λεπτὰ τὸ ζεῦγος (ἤτοι τὰ δύο), κατόπιν μὲ τὰ χρήματα, ἅτινα ἔλαβεν, ἠγόρασεν ἔλαιον πρὸς 3 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἔλαιον ἠγόρασεν; (9 ὀκάδας).

Σημ. ὁ 120 περιέχει 120 : 2 ἢ 60 ζεύγη.

21) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον 14 δρ., ἀλλὰ δὲν ἐργάζεται τὰς Κυριακάς, ἐξοδεύει ὅμως τὴν ἑβδομάδα 65 δρ. πρὸς συντήρησίν του. Μετὰ πόσας ἑβδομάδας θὰ οἰκονομήσῃ 152 δραχ., τὰς ὁποίας χρεωστεῖ εἴς τινα; (Μετὰ 8).

22) Ἔμπορός τις ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως ὑφάσματός τινος 119 δρ., ἀποτελουμένας ἀπὸ πεντάδραχμα καὶ δίδραχμα, ἀλλ' ὅσα ἦσαν τὰ πεντάδραχμα, τόσα ἦσαν καὶ τὰ δίδραχμα. Πόσα ἔλαβεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Λύσις. Ἐὰν λάβῃ ἓν πεντάδραχμον καὶ ἓν δίδραχμον, θὰ λάβῃ 7 δραχμάς· ὅσας λοιπὸν φορὰς ὁ 7 χωρεῖ εἰς τὸν 119, τόσα ἔλαβεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, ἤτοι 17.

23) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα δι' ὑποκάμισα πρὸς 90 λεπτὰ τὸν πῆχυν καὶ ἔδωκε 37 δρ. καὶ 80 λ. (ἤτοι 3780 λεπτά) Πόσα ὑποκάμισα θὰ κατασκευάσῃ, ἐὰν διὰ μίαν δωδεκάδα ὑποκαμίσων χρειάζεται 60 πήχεις; (8 ὑποκάμ. καὶ θὰ περισσεύσουν 2 πήχεις)

24) Ὑπάλληλός τις λογαριάζει, ὅτι, ἐὰν ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν 17 δρ. πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του, δὲν τὸν φθάνει ὁ μισθός του διὰ νὰ περάσῃ ἕνα μῆνα (30 ἡμ.), ἀλλὰ θὰ χρειασθοῦν ἀκόμη 20 δρ. Πόσον πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ τοῦ μείνουν εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς 70 δραχμαί; (14 δρ.).

25) Ὑελοπώλης τις ἠγόρασε 3000 ποτήρια πρὸς 30 δραχ. τὰ ἑκατόν· ἀλλὰ κατὰ τὴν μεταφορὰν ἔσπασαν 60 ποτήρια, τὰ δὲ ἄλλα ἐπώλησε πρὸς 5 δρ. τὴν δωδεκάδα. Πόσον ἐκέρδησεν; (325 δρ.).

Σημ. Αἱ 3000 ἔχουν 30 ἑκατοντάδας.

26) Ἠγόρασέ τις 2400 ὀκ. σίτου πρὸς 70 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ἔπειτα ἐπώλησε μέρος αὐτοῦ πρὸς 75 λ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τοῦ ἔμεινε κέρδος. Πόσος σῖτος τοῦ ἔμεινε κέρδος;

Λύσις. Διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ σίτου ἔδωκε 2400×70, ἤτοι 168000 λεπτά. Ἀλλὰ τὰ λεπτὰ ταῦτα ἔλαβεν ἐκ τοῦ πωληθέντος σίτου πρὸς 75 λ. τὴν ὀκᾶν, ὥστε ἐπώλησε 168000 : 75, ἤτοι 2240 ὀκάδας, ἑπομένως τοῦ ἔμεινε κέρδος 160 ὀκ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

Περὶ διαιρετότητος καὶ περὶ πρώτων ἀριθμῶν.

67. Ὅταν ἀριθμός τις διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἄλλου (χωρὶς δηλ. νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον), λέγεται **διαιρετὸς** δι' αὐτοῦ· ὁ δὲ ἄλλος, ὅστις διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς, λέγεται **διαιρέτης**. Παραδείγματος χάριν, ὁ 12 εἶνε διαιρετὸς διὰ 6, ὁ δὲ 6 εἶνε διαιρέτης τοῦ 12.

68. Ὅταν ἀριθμός τις γίνηται ἐξ ἄλλου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγεται **πολλαπλάσιον** αὐτοῦ. Παραδ. χάριν, ὁ 15 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 3, διότι γίνεται ἐκ τοῦ 3 πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 5. Ἀλλὰ πᾶς ἀριθμός, ὅστις εἶνε πολλαπλάσιον ἄλλου, εἶνε καὶ διαιρετὸς δι' αὐτοῦ· καὶ τἀνάπαλιν, πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλου εἶνε καὶ πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Γνωρίσματα ἀριθμῶν διαιρετῶν διὰ 10, διὰ 100, διὰ 1000 κ.τ.λ., διὰ 2 ἢ διὰ 5, διὰ 4 ἢ διὰ 25 καὶ διὰ 3 ἢ διὰ 9.

69. Ὑπάρχουσι γνωρίσματά τινα, διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ μάθωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν. Ἡ γνῶσις αὕτη ἥτις πολλάκις θέλει μᾶς χρησιμεύσει, στηρίζεται ἐπὶ τῶν κατωτέρω.

Διὰ 10, διὰ 100 κ.τ.λ. Εἴδομεν (ἐδάφιον 60), ὅτι διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμόν τινα διὰ 10, διὰ 100, διὰ 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν ἀπὸ τὰ δεξιά του ἕν, δύο, τρία κτλ. ψηφία, ἅτινα παριστῶσι τὸ ὑπόλοιπον, τὰ δὲ ἄλλα τὸ πηλίκον. Ἂν λοιπὸν τὰ χωρισθέντα ψηφία εἶνε μηδενικά, τότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε διαιρετὸς διὰ 10, διὰ 100, διὰ 1000 κτλ. Ὥστε

70. *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 10, ἐὰν λήγῃ εἰς ἓν τοὐλάχιστον μηδενικόν· διὰ 100, ἐὰν λήγῃ εἰς δύο τοὐλάχιστον μηδενικά· διὰ 1000, ἐὰν λήγῃ εἰς τρία τοὐλάχιστον μηδενικὰ καὶ οὕτω καθεξῆς.*

Διὰ 2 ἢ διὰ 5. Ἔστω π.χ. ὁ ἀριθμὸς 568· θέλομεν νὰ μάθωμεν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν οὗτος εἶνε διαιρετὸς διὰ 2 ἢ διὰ 5.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν δεκάδα (ἤτοι τὸν 10) διὰ 2 ἢ διὰ 5, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν· ἂν λοιπὸν διαιρέσωμεν ὅλας τὰς δεκάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (ἤτοι τὰς 56) ἑκάστην χωριστὰ διὰ 2 ἢ διὰ 5, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ἀλλ' ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχει καὶ 8 μονάδας ἀκόμη· ἂν λοιπὸν καὶ ὁ 8 εἶνε διαιρετὸς διὰ 2 ἢ διὰ 5, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 568 εἶνε διαιρετὸς διὰ 2 ἢ διὰ 5. Ὥστε βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ εἶνε διαιρετὸς ὁ 568 διὰ 2 ἢ διὰ 5, ἐξαρτᾶται τοῦτο ἀπὸ τὸ τελευταῖον ψηφίον του πρὸς τὰ δεξιά, καὶ ἑπομένως ὅ,τι ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ τὸ ψηφίον τοῦτο διαιρούμενον διὰ 2 ἢ διὰ 5, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός. Ὥστε

71. ***Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 2 ἢ διὰ 5, ὅταν τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ εἶνε διαιρετὸν διὰ 2 ἢ διὰ 5.***

Ὁ ἀνωτέρω λοιπὸν ἀριθμὸς 568 εἶνε διαιρετὸς διὰ 2, διότι τὸ τελευταῖον ψηφίον πρὸς τὰ δεξιά, ἤτοι ὁ 8, εἶνε διαιρετὸν διὰ 2· διὰ 5 ὅμως δὲν εἶνε διαιρετὸς ὁ 568, διότι τὸ ψηφίον 8 δὲν εἶνε διαιρετὸν διὰ 5. Ἐὰν διαιρέσωμεν ὅμως τὸν 8 διὰ 5, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 3· ὥστε καὶ τὸν 568 ἂν διαιρέσωμεν διὰ 5, θὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ἂν συμβῇ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον τῶν μονάδων νὰ εἶνε μικρότερον τοῦ διαιρέτου 2 ἢ 5, τότε αὐτὸ εἶνε καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Ὥστε διὰ τοῦ 2 διαιροῦνται ἀκριβῶς οἱ ἀριθμοὶ ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε 0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8· διὰ τοῦ 5 δὲ ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε 0 ἢ 5. Οἱ διὰ τοῦ 2 διαιρετοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἄρτιοι ἢ ζυγοί,*** οἱ δὲ μὴ διαιρετοὶ λέγονται ***περιττοὶ ἢ μονοὶ*** καὶ οὗτοι εἶνε οἱ λήγοντες εἰς 1, 3, 5, 7, 9.

Διὰ 4 ἢ διὰ 25. Ἔστω π.χ. ὁ ἀριθμὸς 7836· θέλομεν νὰ μάθωμεν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν οὗτος εἶνε διαιρετὸς διὰ 4 ἢ διὰ 25.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν ἑκατοντάδα (ἤτοι τὸν 100) διὰ 4 ἢ διὰ 25, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν· ἂν λοιπὸν διαιρέσωμεν ὅλας τὰς ἑκατοντάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (ἤτοι τὰς 78) ἑκάστην χωριστὰ διὰ 4 ἢ διὰ 25, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ἀλλ' ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχει 36 μονάδας ἀκόμη· ἂν λοιπὸν καὶ ὁ 36 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4 ἢ διὰ 25, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 7836 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4 ἢ διὰ 25. Ὥστε βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ εἶνε διαιρετὸς ὁ ἀριθμὸς 7836 διὰ 4 ἢ διὰ 25, ἐξαρτᾶται τοῦτο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν

36, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως ὅ,τι ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ οὗτος διαιρούμενος διὰ 4 ἢ διὰ 25, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός. Ὥστε

72. ***Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 4 ἢ διὰ 25, ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ διὰ 25.***

Ὁ ἀνωτέρω λοιπὸν ἀριθμὸς 7836 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, διότι ὁ 36 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4· διὰ 25 ὅμως δὲν εἶνε διαιρετός. Ἐὰν διαιρέσωμεν ὅμως τὸν 36 διὰ 25, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 11, τὸ αὐτὸ θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν 7836 διὰ 25. Ἐὰν δὲ συμβῇ ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς ἐκ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων νὰ εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε αὐτὸς εἶνε καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Διὰ νὰ εἶνε δὲ ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ 25, πρέπει τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ νὰ εἶνε ἢ 00 ἢ 25 ἢ 50 ἢ 75.

Διὰ 3 ἢ διὰ 9. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 867· θέλομεν νὰ μάθωμεν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν οὗτος εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 ἢ διὰ 9.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν δεκάδα (ἤτοι τὸν 10) ἢ μίαν ἑκατοντάδα (ἤτοι τὸν 100) ἢ μίαν χιλιάδα (ἤτοι τὸν 1000) κτλ. διὰ 3 ἢ διὰ 9, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μίαν μονάδα (ἁπλῆν). Ὥστε ἀπὸ τὰς 8 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 867 θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 8 μονάδας (μίαν μονάδα ἀπὸ ἑκάστην ἑκατοντάδα χωριστά), ἀπὸ τὰς 6 δεκάδας του θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 6 μονάδας (μίαν μονάδα ἀπὸ ἑκάστην δεκάδα χωριστά), αἵτινες μετὰ τῶν 7 μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελοῦσι τὸ ὅλον 8+6+7 μονάδας. Ἂν λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο 8+6+7 ἢ 21 εἶνε διαιρετὸν διὰ 3 ἢ διὰ 9, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 867 εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 ἢ διὰ 9. Ὥστε βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ εἶνε ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ 3 ἢ διὰ 9, ἐξαρτᾶται τοῦτο ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του, καὶ ἑπομένως ὅ,τι ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ τὸ ἄθροισμα τοῦτο διαιρούμενον διὰ 3 ἢ διὰ 9, τὸ αὐτὸ θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός. Ὥστε

73. ***Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 ἢ διὰ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ (ὡς ἁπλῶν μονάδων θεωρουμένων) εἶνε διαιρετὸν διὰ 3 ἢ διὰ 9.***

Ὁ ἀνωτέρω λοιπὸν ἀριθμὸς 867 εἶνε διαιρετὸς διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του, ἤτοι ὁ 21, εἶνε διαιρετὸν διὰ 3· διὰ 9 ὅμως δὲν εἶνε διαιρετός. Ἐὰν διαιρέσωμεν ὅμως τὸν 21 διὰ 9, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 3, ὥστε καὶ τὸν 867 ἂν διαιρέσωμεν διὰ 9, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν.

Σημ. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἀριθμοῦ τινος δὲν εἶνε μονοψήφιος ἀριθμός, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο τὰ ἀνωτέρω, ἤτοι νὰ προσθέσωμεν τὰ ψηφία αὐτοῦ, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἄθροισμα μονοψήφιον ἀριθμόν.

Ὅταν ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 9, πάντοτε εἶνε διαιρετὸς καὶ διὰ 3. Τὸ ἀντίθετον ὅμως δὲν συμβαίνει πάντοτε.

Ἀσκήσεις.

Εἰς τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις νὰ γίνῃ ἡ ἀπάντησις, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

1) Τίνες ἐκ τῶν ἀριθμῶν 273, 5075, 7194, 6952, 81568, 316240 εἶνε διαιρετοὶ διὰ 2, διὰ 3, διὰ 4, διὰ 5, διὰ 6, διὰ 9 διὰ 25;

2) Τί ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 64574, 57902, 46819, 714520 διὰ 2 ἢ διὰ 3 ἢ διὰ 4 ἢ διὰ 5 ἢ διὰ 9 ἢ διὰ 25;

3) Νὰ γραφῇ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2· ἄλλος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 3· ἄλλος διὰ 4· ἄλλος διὰ 5 καὶ ἄλλος διὰ 9.

4) Νὰ γραφῇ πενταψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9 καὶ διὰ 10.

5) Νὰ γραφῇ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καὶ διὰ 3, διὰ 3 καὶ διὰ 5 διὰ 5 καὶ διὰ 9.

6) Δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν 3270 δραχμὰς μὲ μόνον δίδραχμα ἢ πεντάδραχμα ἢ δεκάδραχμα; Καὶ πόσον θὰ χρειασθῶμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

7) Δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν ἀκριβῶς 124 δραχμὰς εἰς πτωχοὺς δίδοντες εἰς ἕκαστον ἀπὸ 3 δραχμὰς ἢ ἀπὸ 4 ἢ ἀπὸ 5 ἢ ἀπὸ 9; Καὶ ἂν δὲν δυνάμεθα, πόσας πρέπει νὰ ἔχωμεν τὸ ὀλιγώτερον ἀκόμη, διὰ νὰ κατορθώσωμεν τοῦτο;

8) Εἰς ἓν σχολεῖον ὑπάρχουν 260 μαθηταί, δύνανται οὗτοι νὰ τεθῶσιν εἰς γραμμὴν κατὰ τετράδας, χωρὶς νὰ μείνῃ τις; Καὶ ἂν δύνανται, πόσαι τετράδες θὰ σχηματισθῶσιν;

9) Χωρική τις ἔχει 317 αὐγά· ἂν τοποθετήσῃ αὐτὰ ἐν τῷ κα-

λαθίῳ της ἀνὰ τρία ἢ ἀνὰ τέσσαρα, πόσα θὰ περισσεύσουν εἰς τὸ τέλος ;

Ἀριθμοὶ πρῶτοι.

74. Ἀριθμός, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην, παρὰ μόνον τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα, λέγεται **πρῶτος**. Παραδ. χάριν, οἱ ἀριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, 13 κλπ. εἶνε πρῶτοι.

Ἀριθμός, ὅστις ἔχει διαιρέτας καὶ ἄλλους ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος, λέγεται **σύνθετος**. Παραδ. χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 8, 9 κτλ. εἶνε σύνθετοι.

75. Ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, λέγεται **κοινὸς διαιρέτης** αὐτῶν. Παραδ. χάριν, ὁ 2, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 20, εἶνε κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους**, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ μόνον τὴν μονάδα (ἥτις εἶνε διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν).

Παραδ. χάριν οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 5 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι ἐκτὸς τῆς μονάδος οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς διαιρεῖ καὶ τὸν ἕνα καὶ τὸν ἄλλον ἀκριβῶς. Ὡσαύτως οἱ ἀριθμοὶ 4, 10, 9 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλ' οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶνε πρῶτος.

Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας.

76. Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς δύναται, ὡς θὰ ἴδωμεν, νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄλλους ἀριθμοὺς πρώτους, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸν σύνθετον τοῦτον ἀριθμόν. Τοῦτο δὲ λέγεται ***ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας***.

Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν σύνθετον ἀριθμὸν εἰς πρώτους παράγοντας, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμόν, καθὼς καὶ τὰ ἑκάστοτε εὑρισκόμενα πηλίκα, διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2, μέχρις ὅτου εὕρομεν πηλίκον τὴν μονάδα 1. Τοὺς μὲν διαιρέτας γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν διαιρουμένων ἀριθμῶν, χωριζομένων δια μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς, τὰ δὲ πηλίκα ὑποκάτω αὐτῶν. Κατόπιν σχηματίζομεν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαιρετῶν καὶ τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Σημ. Καλὸν εἶνε νὰ δοκιμάζωμεν τοὺς ὡς διαιρέτας πρώτους ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 7 κλπ. τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἤτοι πρῶτον τὸν 2, ὡς εἴπομεν, καὶ ὅταν παύσῃ οὗτος νὰ εἶνε διαιρέτης, τότε δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως ἑπόμενον πρῶτον ἀριθμὸν 3.

Ἔστω, παραδ. χάριν, νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 360 εἰς πρώτους παράγοντας.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Διαιροῦμεν τὸν 360 διὰ 2, τὸν ὁποῖον γράφομεν πρὸς τὰ δεξιά του, τὸ δὲ πηλίκον 180 γράφομεν ὑποκάτω τοῦ 360. Τὸ πηλίκον 180 διαιροῦμεν πάλιν διὰ 2 καὶ γράφομεν αὐτὸν πρὸς τὰ δεξιά του, τὸ δὲ πηλίκον 90 γράφομεν ὑποκάτω τοῦ 180. Τὸν 90 διαιροῦμεν πάλιν διὰ 2 γράφοντες αὐτὸν δεξιά του καὶ τὸ πηλίκον 45 ὑποκάτω. Ὁ 2 τώρα δὲν διαιρεῖ τὸν 45, διὰ τοῦτο δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως ἑπόμενον αὐτοῦ πρῶτον ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 3, τὸν ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ τοῦ 45 καὶ τὸ πηλίκον 15 ὑποκάτω αὐτοῦ. Τὸν 15 διαιροῦμεν πάλιν διὰ 3 καὶ γράφομεν αὐτὸν δεξιά του, τὸ δὲ πηλίκον 5 ὑποκάτω αὐτοῦ. Τέλος διαιροῦμεν τὸν 5 διὰ 5 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1. Ὥστε εἶνε $360=2\times2\times2\times3\times3\times5$ ἢ (κατὰ τὸ ἐδάφιον 44) $360=2^3\times3^2\times5$.

Σημ. Ὁ 5, ὅστις δὲν ἔχει ἐκθέτην, ὑποτίθεται, ὅτι ἔχει τὴν μονάδα 1.

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι εἶνε $132=2^2\times3\times11$, $756=2^2\times3^3\times7$. Ἐνίοτε ἀριθμός τις ἀναλύεται ἀμέσως εἰς πρώτους παράγοντας. Π. χ. εἶνε $100=10\times10=2\times5\times2\times5=2^2\times5^2$. Ἐπίσης εἶνε $90=9\times10=3^2\times2\times5$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

Περὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

77. Εἴπομεν ἀνωτέρω (ἐδάφ. 75), ὅτι κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ αὐτοὺς ἀκριβῶς.

Παραδ. χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 12, 18 καὶ 24 ἔχουσι κοινοὺς διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 6. Ὁ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν τούτων

διαιρετῶν, ἤτοι ὁ 6, λέγεται **μέγιστος κοινὸς διαιρέτης**. Ὥστε
Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν.

78. Ἀριθμός, ὅστις εἶνε πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν (ἑκάστου χωριστά), λέγεται **κοινὸν πολλαπλάσιον** αὐτῶν. Παραδ. χάριν, ὁ 12 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 6 (διότι γίνεται ἐξ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διότι εἶνε διαιρετὸς δι' αὐτῶν ἐδάφ. 68). Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 24, 36, 48 κτλ. εἶνε κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 6· διότι εἶνε διαιρετοὶ δι' αὐτῶν. Ἀλλ' ἐκ τῶν κοινῶν τούτων πολλαπλασίων 12, 24, 36, 48. τὰ ὁποῖα ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ 3, 4 καὶ 6, τὸ μικρότερον αὐτῶν, ἤτοι ὁ 12, λέγεται **ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον**· διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 12, ὅστις νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς δι' αὐτῶν. Ὥστε
Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μικρότερος τῶν ἀριθμῶν, τὸν ὁποῖον διαιροῦσιν οὗτοι.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

79. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου καὶ ἂν εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν, ὁ μικρότερος εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν· εἰ δὲ μή, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ νέου εὑρεθέντος ὑπολοίπου καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ὁ τελευταῖος διαιρέτης, διὰ τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν καὶ εὕρομεν ὑπόλοιπον μηδέν, εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 9. Ἐπειδὴ ὁ 9 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 36, οὗτος εἶνε ὁ μέγ. κ. διαιρέτης αὐτῶν. Διότι ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 9 δὲν διαιρεῖ τὸν 9 καὶ ἑπομένως δὲν εἶνε κοινὸς διαιρέτης.

Ἔστω ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 360 καὶ 62. Διαιροῦμεν τὸν 360 διὰ 62 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 50· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 62 διὰ τοῦ ὑπολοίπου 50 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 12· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 50 διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου 12 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 2· τέλος διαιροῦμεν τὸν 12 διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου 2 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 0. Ἑπομένως ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 360 καὶ 62 εἶνε ὁ 2.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	5	1	4	6
360	62	50	12	2
50	12	2	0	

ἤτοι χωρίζομεν τὸν διαιρέτην ἀπὸ τὸν διαιρετέον διὰ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς καὶ ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου γράφομεν τὸ πηλίκον καὶ χωρίζομεν αὐτὸ ἀπὸ τὸν διαιρέτην διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς, τὸ δὲ ὑπόλοιπον γράφομεν ὑποκάτω τοῦ διαιρετέου.

Σημ. Μετά τινας διαιρέσεις θὰ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0· διότι τὰ ἑκάστοτε εὑρισκόμενα ὑπόλοιπα βαίνουσιν, ὡς βλέπομεν, ἐλαττούμενα, καὶ ἑπομένως ἀριθμός τις, ὅστις βαίνει ἐλαττούμενος, ἔστω καὶ κατὰ μονάδα, θέλει μηδενισθῇ. Ἐὰν δὲ εὑρεθῇ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἡ μονὰς 1, συμπεραίνομεν ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

80. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε περισσότεροι τῶν δύο, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν πράττομεν ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν καὶ διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ μικροτέρου αὐτῶν, καὶ ἂν εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν, ὁ μικρότερος οὗτος ἀριθμὸς εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν· εἰ δὲ μή, γράφομεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων εἰς ἄλλην σειρὰν καὶ ὑποκάτω τῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν προέκυψαν, καθὼς καὶ τὸν μικρότερον αὐτῶν, καὶ πράττομεν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους τῆς δευτέρας σειρᾶς, καθὼς καὶ εἰς ἑκάστην τῶν ἑπομένων, ὅ,τι καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης σειρᾶς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν μίαν σειρὰν ἀριθμῶν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ὁ μικρότερος αὐτῶν νὰ διαιρῇ τοὺς ἄλλους ἀκριβῶς· οὗτος δὲ θὰ εἶνε καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 12, 20, 46, 60· καθὼς καὶ τῶν ἀριθμῶν 8, 14, 28, 35.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

12	20	46	60	8	14	28	35
12	8	10	0	8	6	4	3
4	8	2	0	2	0	1	3
0	0	2	0		0	1	0

Τῶν μὲν ἀριθμῶν 12, 20, 46, 60 μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 2, τῶν δὲ ἀριθμῶν 8, 14, 28, 35 μ. κ. δ. εἶνε ἡ 1, ἑπομένως οὗτοι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

81. Τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ ἐκ τῶν κοινῶν παραγόντων λαμβάνομεν ἕκαστον μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἔστω π.χ. νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 140 καὶ 600· ἀναλύοντες αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$
$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

κοινοὺς παράγοντας ἔχουσι μόνον τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 5, καὶ ὁ μὲν 2 εἰς τὸν ἀριθμὸν 140 ἔχει ἐκθέτην 2, ἤτοι περιέχεται δίς, εἰς δὲ τὸν 600 ἔχει ἐκθέτην 3, ἤτοι περιέχεται τρίς· ὁ δὲ 5 περιέχεται ἅπαξ εἰς τὸν πρῶτον καὶ δὶς εἰς τὸν δεύτερον. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν ἐκ τῶν κοινῶν τούτων παραγόντων θὰ λάβωμεν ἕκαστον μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην του, ἤτοι τοὺς 2^2 καὶ 5, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον $2^2 \times 5$ ἢ 20 εἶνε ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 140 καὶ 600.

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

$$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$
$$5940 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$$
$$8820 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ $2 \times 3^2 \times 5$, ἤτοι ὁ 90.

Σημ. Δυνατὸν ἀριθμοί τινες νὰ ἔχωσιν ἕνα μόνον κοινὸν παράγοντα, ὅτε οὗτος (μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην) εἶνε ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν. Δυνατὸν πάλιν νὰ μὴ ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα, ὅτε οἱ ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι ὡς κοινὸς παράγων λαμβάνεται ἡ μονάς.

Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

82. Ἐὰν ὁ μεγαλύτερος δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων, οὗτος εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παραδ. χάριν, ἐκ τῶν ἀριθμῶν 6, 8 καὶ 24 ὁ μεγαλύτερος 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων 6 καὶ 8 οὗτος λοιπὸν εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 6, 8 καὶ 24. Διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 24, ὅστις νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 24.

Ἐνίοτε ὅμως, ἐνῷ ὁ μεγαλύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων, δυνάμεθα διὰ μικρᾶς ἀσκήσεως νὰ διακρίνωμεν, ἂν τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ αὐτοῦ διαιρῆται ἀκριβῶς δι' αὐτῶν, τότε αὐτὸ εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παραδ. χάριν, ἐκ τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 15 καὶ 20 ὁ μεγαλύτερος 20 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων (διότι μόνον διὰ τοῦ 4 διαιρεῖται), οὔτε τὸ διπλάσιον αὐτοῦ 40, ἐνῷ τὸ τριπλάσιον τοῦ 20, ἤτοι ὁ 60, διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων. Ὁ 60 λοιπὸν εἶνε τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 15, 20.

Ἐὰν ὅμως καὶ τοῦτο δὲν δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, τότε ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς τρόπον.

83. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν καὶ ἂν ὑπάρχωσι δύο τοὐλάχιστον ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διά τινος πρώτου ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν αὐτούς, καὶ τὸν μὲν διαιρέτην γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτῶν καὶ τὸν χωρίζομεν διὰ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς, τὰ δὲ πηλίκα γράφομεν ὑποκάτω αὐτῶν, καθὼς καὶ τοὺς μὴ διαιρετοὺς ἀριθμούς. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας σειρᾶς, καθὼς καὶ εἰς ἑκάστην τῶν ἑπομένων, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμοὺς μὴ ἔχοντας κοινὸν διαιρέτην. Ἔπειτα σχηματίζομεν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαιρετῶν καὶ τῶν ὑπαρχόντων ἀριθμῶν εἰς τὴν τελευταίαν σειράν, καὶ τοῦτο εἶνε τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.***

Σημ. Καλὸν εἶνε νὰ δοκιμάζωμεν τοὺς ὡς διαιρέτας πρώτους ἀριθμοὺς τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2.

Ἔστω π.χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 15, 20. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

6	8	15	20	2	διαιρέτης
3	4	15	10	2	»
3	2	15	5	3	»
1	2	5	5	5	»
1	2	1	1		

ὥστε τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. εἶνε ὁ $2\times2\times3\times5\times2$, ἤτοι ὁ 120.

84. Τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν καὶ μάλιστα μεγάλων εὑρίσκομεν καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν, ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ ἐξ ὅλων τῶν παραγόντων τούτων (κοινῶν καὶ μὴ) λαμβάνομεν ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην του, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Ἔστωσαν π.χ. οἱ ἑξῆς ἀναλελυμένοι ἀριθμοὶ εἰς πρώτους παράγοντας.

$$150 = 2\times3\times5^2$$
$$140 = 2^2\times5\times7$$
$$54 = 2\times3^3$$

Ἐκ τῶν διαφόρων τούτων παραγόντων (2,3,5,7) θὰ λάβωμεν ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην του, ὥστε θὰ λάβωμεν τοὺς 2^2, 3^3, 5^2, 7, καὶ θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν γινόμενον. Ὥστε τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 150, 140 καὶ 54 εἶνε ὁ $2^2\times3^3\times5^2\times7$ ἢ $4\times27\times25\times7$ ἢ 18900.

Ὁ δὲ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν εἶνε ὁ 2.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 560 καὶ 72. (8).

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 56 καὶ 60. (μ. κ. δ. ὁ 4, ἐλάχ. κ. πολλ. ὁ 840).

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐλάχ. κ. πολλαπλ. τῶν ἀριθμῶν 6, 20, 15, 40. (μ. κ. δ. ἡ 1, ἐλάχ. κ. πολλαπλ. ὁ 120).

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐλάχ. κ. πολλαπλ. τῶν ἀριθμῶν 28, 8, 30, 20. (μ. κ. δ. ὁ 2, ἐλάχ. κ. πολλαπλ. ὁ 840).

5) Εἰς πόσας τὸ πολὺ πτωχὰς οἰκογενείας δύνανται νὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 380 ὀκάδες ἀλεύρου καὶ 60 ὀκάδες ἐλαίου; Καὶ πόσον ἄλευρον καὶ ἔλαιον θὰ λάβῃ ἑκάστη οἰκογένεια;

(Εἰς 20 οἰκογ. 19 ὀκ. ἀλ. καὶ 3 ὀκ. ἐλαίου).

6) Τρία ταχυδρομικὰ ἀτμόπλοια ἐπανέρχονται εἴς τινα πόλιν τὸ μὲν μετὰ 5 ἡμέρας, τὸ δὲ μετὰ 9, τὸ δὲ μετὰ 15. Μίαν τῶν ἡμερῶν ἐπανῆλθον καὶ τὰ τρία ἀτμόπλοια εἰς τὴν πόλιν ταύτην. Μετὰ πόσας τὸ ὀλιγώτερον ἡμέρας θὰ συμβῇ πάλιν τοῦτο;

Λύσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων ἡμερῶν θὰ εἶνε διαιρετὸς διὰ 5, διὰ 9 καὶ διὰ 15· ὥστε ζητεῖται τὸ ἐλάχ. κ. πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν τούτων, τὸ ὁποῖον εἶνε 45. Μετὰ 45 λοιπὸν ἡμέρας θὰ συμβῇ τοῦτο.

7) Ἐρωτηθεὶς τις περὶ τῆς ἡλικίας του ἀπεκρίθη· «εἶμαι ὀλιγώτερον τῶν 60 ἐτῶν, ἂν δὲ ἡ ἡλικία μου διαιρεθῇ εἴτε διὰ 6 εἴτε διὰ 8 εἴτε διὰ 16 προκύπτει ὑπόλοιπον 2». Ποία εἶνε ἡ ἡλικία του;

Λύσις. Ἡ ἡλικία του ἐλαττουμένη κατὰ 2 εἶνε διαιρετὴ διὰ 6, διὰ 8 καὶ διὰ 16, ἑπομένως αὕτη εἶνε τὸ ἐλάχ. κ. πολλαπλ. τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 16 ηὐξημένον κατὰ 2, ἤτοι εἶνε 50 ἐτῶν.

8) Χωρική τις ἐρωτηθεῖσα, πόσα αὐγὰ ἔχει ἐν τῷ καλαθίῳ της, ἀπεκρίθη· δὲν ἐνθυμοῦμαι ἀκριβῶς. Ἔχω ὅμως ὀλιγώτερα τῶν 200, ὅταν δὲ ἐτοποθέτουν αὐτὰ ἐν τῷ καλαθίῳ μου εἴτε ἀνὰ 3 εἴτε ἀνὰ 4 εἴτε ἀνὰ 5 εἴτε ἀνὰ 6 εἴτε ἀνὰ 8, ἐπερίσσευον πάντοτε 2. Πόσα αὐγὰ εἶχεν; (122).

9) Ἀνθοπώλης τις ἔχει 645 γαρύφαλα, 480 τριαντάφυλλα καὶ 135 κρίνους· πόσας τὸ πολὺ ἀνθοδέσμας δύναται νὰ κάμῃ, ὥστε ἑκάστη νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πλῆθος ἀνθέων ἐξ ἑκάστου εἴδους;

(15 ἀνθοδέσμας, ἑκάστη θὰ ἔχῃ 43 γαρύφ. 32 τριαντ. καὶ 15 κρ.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

85. Ἕκαστον πρᾶγμα ἀκέραιον (ὁλόκληρον) παρίσταται, ὡς γνωστόν, διὰ τῆς μονάδος 1, ἥτις ἕνεκα τούτου λέγεται **ἀκεραία μονάς.** Παραδ. χάριν, γράφομεν 1 μῆλον, 1 πρόβατον κ.τ.λ.

Ἐὰν λάβωμεν τώρα ἓν πρᾶγμα, ἔστω 1 μῆλον, καὶ τὸ κόψωμεν εἰς 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 κτλ. ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων μερῶν λέγεται πρὸς διάκρισιν **κλασματικὴ μονάς.** Ὥστε

Κλασματικὴ μονὰς λέγεται ἕκαστον τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.

Καὶ ἂν μὲν τὸ πρᾶγμα τοῦτο, ἔστω ἓν μῆλον, τὸ κόψωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται ἰδιαιτέρως ***δεύτερον ἢ ἥμισυ*** (τοῦ μήλου)· ἂν δὲ τὸ κόψωμεν εἰς τρία ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται ***τρίτον***· ἂν δὲ τὸ κόψωμεν εἰς τέσσαρα ἢ πέντε ἢ ἓξ κτλ. ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται *τέταρτον, πέμπτον, ἕκτον* κτλ.

86. Ὅπως πλῆθός τι ἀκεραίων μονάδων ἀποτελῇ **ἀριθμὸν ἀκέραιον,** οὕτω καὶ πλῆθός τι κλασματικῶν μονάδων ἀποτελεῖ **ἀριθμὸν κλασματικὸν** ἢ ἁπλῶς **κλάσμα.** Ἂν π. χ. κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς πολλὰ ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν 2 ἢ 3 ἢ 4 κτλ. μέρη (ἢ καὶ 1 μέρος), τὸ πλῆθος τῶν μερῶν, ἅτινα θὰ λάβωμεν, ἀποτελεῖ κλάσμα. Ὥστε

Κλάσμα λέγεται πλῆθος κλασματικῶν μονάδων (ἢ καὶ μία μόνη κλασματικὴ μονάς).

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν κλασμάτων.

87. Τὰ κλάσματα γράφομεν διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς (δηλ. ἓν πρᾶγμα ἀκέραιον) καὶ λέγεται **παρονομαστής**· ὁ δὲ ἄλλος φανερώνει πόσα μέρη τοιαῦτα λαμβάνονται καὶ λέγεται **ἀριθμητής**· καὶ οἱ δύο ὁμοῦ λέγονται μὲ ἓν ὄνομα **ὅροι** τοῦ κλάσματος. Ὁ παρονομαστὴς γράφεται ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζονται διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς.

Ἐὰν π. χ. κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς 2 ἴσα μέρη, ἄλλο μῆλον εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ἄλλο εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἓν μέρος ἐξ ἑκάστης τῶν διαιρέσεων τούτων, τὰ μέρη ταῦτα θὰ παρασταθῶσιν ὡς ἑξῆς· $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ καὶ ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν ὡς ἀπόλυτον ἀριθμητικὸν ὄνομα καὶ ἔπειτα τὸν παρονομαστὴν ὡς τακτικόν, ἤτοι *ἓν δεύτερον (ἢ ἥμισυ), ἓν τρίτον, ἓν τέταρτον.*

Ἐὰν πάλιν κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς 5 ἴσα μέρη, ἄλλο δὲ μῆλον εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης τῶν διαιρέσεων τούτων 3 μέρη, ταῦτα θὰ παρασταθῶσιν ὡς ἑξῆς· $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{8}$ καὶ ἀπαγγέλλομεν *τρία πέμπτα, τρία ὄγδοα.* Ὥστε βλέπομεν, ὅτι διὰ τῶν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, διὰ τῶν ὁποίων γράφονται τὰ κλάσματα, ὁρίζονται καὶ τὰ λαμβανόμενα μέρη καὶ τὸ μέγεθος αὐτῶν (τὰ μῆλα ὑποτίθενται τοῦ αὐτοῦ μεγέθους).

Σημ. Ἡ ἀπαγγελία τῶν κλασμάτων γίνεται ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ, διότι αὐτὸς εἶνε κυρίως ὁ ἀριθμὸς τοῦ κλάσματος· ὁ δὲ παρονομαστὴς δηλοῖ ἁπλῶς τὸ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμητοῦ, ἂν δηλ. αὗται εἶνε π. χ. τρίτα, τέταρτα, πέμπτα κτλ., ὡς νὰ λέγωμεν π. χ. μῆλα, καρύδια, πρόβατα.

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

88. Ἂς λάβωμεν πρᾶγμά τι παριστώμενον διὰ τῆς ἀκεραίας μονάδος 1, ἔστω 1 μῆλον, καὶ ἂς κόψωμεν αὐτὸ εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 5. Ἐὰν ἐκ τῶν μερῶν τούτων λάβωμεν 1 ἢ 2 ἢ 3 ἢ 4 μέρη, εἶνε φανερόν, ὅτι δὲν θὰ λάβωμεν ὁλόκληρον τὸ μῆλον· τὰ δὲ μέρη ταῦτα θὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματός τινος εἶνε μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶνε μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1.

Ἐὰν ὅμως λάβωμεν καὶ τὰ 5 μέρη τοῦ μήλου, τότε θὰ λάβωμεν ὁλόκληρον τὸ μῆλον· τὰ δὲ μέρη ταῦτα θὰ παρασταθῶσι διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{5}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματός τινος εἶνε ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶνε ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1.

Ὥστε ἡ ἀκεραία μονὰς 1 δύναται νὰ παρασταθῇ δι' οἱουδήποτε κλάσματος, ἔχοντος ἴσους ὅρους· π. χ. εἶνε $\frac{5}{5}=1$, $\frac{8}{8}=1$, $\frac{15}{15}=1$ κτλ.

Ἐὰν κόψωμεν τώρα καὶ ἓν ἄλλο μῆλον εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ 5 μέρη τοῦ πρώτου μήλου (ἤτοι ὁλόκληρον τὸ μῆλον) καὶ μέρη τινὰ ἐκ τοῦ δευτέρου τούτου μήλου, ἔστω 2 μέρη, εἶνε τότε φανερόν, ὅτι θὰ λάβωμεν περισσότερον τοῦ ἑνὸς μήλου· τὰ δὲ 7 μέρη, τὰ ὁποῖα θὰ λάβωμεν, θὰ παρασταθῶσι διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{7}{5}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματός τινος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶνε μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐὰν κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ 3 μέρη, τί μέρος τοῦ μήλου θὰ λάβωμεν;

2) Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶνε τὰ 45 λεπτά;

3) Τί μέρος τῆς ὀκᾶς εἶνε τὰ 70 δράμια;

4) Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ (τοῦ αὐτοῦ πράγματος) ποία εἶνε μεγαλυτέρα καὶ ποία μικροτέρα; Καὶ διατί;

5) Ἐκ τῶν κατωτέρω κλασμάτων ποῖα εἶνε μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ποῖα ἴσα καὶ ποῖα μεγαλύτερα αὐτῆς; Καὶ διατί;

$$\frac{7}{9} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{10}{10} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{4}$$

6) Γράψατε δύο κλάσματα ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, δύο μεγαλύτερα αὐτῆς καὶ δύο μικρότερα αὐτῆς.

Τροπὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς κλάσμα.

89. Ἔστω π. χ. νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 5 εἰς ἕβδομα, ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 7. Ὅπως σκεπτώμεθα διὰ νὰ τρέψωμεν π. χ. 5 δραχμὰς εἰς λεπτά, ἤτοι λέγομεν ἡ 1 δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά, ἐπομένως αἱ 5 δραχμαὶ ἔχουν 5 φο-

ρὰς τὰ 100 λεπτά, ἤτοι 100×5 ἢ 500 λεπτά, οὕτω σκεπτόμεθα καὶ διὰ νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον 5 εἰς ἕβδομα, ἤτοι λέγομεν ἡ 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει 7 ἕβδομα (διότι εἶνε $\frac{7}{7}=1$), ἐπομένως αἱ 5 ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν 5 φορὰς τὰ 7 ἕβδομα, ἤτοι 7×5 ἢ 35 ἕβδομα· ἀλλὰ τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\frac{35}{7}$. Ὥστε εἶνε 5 $=\frac{5\times7}{7}=\frac{35}{7}$. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

90. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον.***

Μικτὸς ἀριθμός.

91. Ἐὰν ἔχῃ τις, παραδ. χάριν, 5 δραχμὰς καὶ 3 δραχμάς, θὰ γράψωμεν ὅτι ἔχει $5+3$ δραχμάς· ἐὰν δὲ ἔχῃ 5 δραχμὰς καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς, θὰ γράψωμεν πάλιν ὅτι ἔχει $5+\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς. Ὁ ἀριθμὸς $5+\frac{3}{4}$ ἢ ἁπλούστερον $5\frac{3}{4}$, ἄνευ τοῦ σημείου $+$, λέγεται *μικτὸς* ἀριθμὸς καὶ εἶνε οὗτος ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος. Ὥστε

Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλάσμα.

Τροπὴ μικτοῦ ἀριθμοῦ εἰς κλάσμα.

92. Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $8\frac{3}{5}$, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ τρέψωμεν εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 5 (διότι αὐτὸν ἔχει τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ). Πρὸς τοῦτο τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον 8 εἰς κλάσμα σκεπτόμενοι, ὅπως καὶ ἀνωτέρω, ἤτοι λέγομεν ἡ 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει 5 πέμπτα, ἐπομένως αἱ 8 ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν 8 φορὰς τὰ 5 πέμπτα, ἤτοι 40 πέμπτα. Εἰς ταῦτα θὰ προσθέσωμεν καὶ τὰ 3 πέμπτα του μικτοῦ· ἀλλὰ καθὼς π.χ. 40 καρύ-

δια καὶ 3 καρύδια κάμνουν 43 καρύδια, οὕτω καὶ 40 πέμπτα καὶ 3 πέμπτα κάμνουν 43 πέμπτα ἢ $\frac{43}{5}$. Ὥστε εἶνε $8\frac{3}{5}=\frac{43}{5}$. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητήν, τὸ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τὸν ἴδιον.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος 7 εἰς ἔνατα.

2) Πόσα τέταρτα κάμνουν 5 ἀκέραιαι μονάδες;

3) Μὲ πόσα ὄγδοα (ῥούπια) ἰσοδυναμοῦν 6 πήχεις;

4) Μὲ πόσα τετρακοσιοστὰ (δράμια) ἰσοδυναμοῦν 3 ὀκάδες;

5) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$, διὰ νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ ἴσον μὲ μίαν, δύο, τρεῖς κτλ. ἀκεραίας μονάδας;

6) Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοὶ ἀριθμοὶ $7\frac{5}{9}$, $9\frac{3}{8}$, $8\frac{5}{7}$, $4\frac{7}{15}$, $80\frac{1}{4}$.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένων ἀκεραίων μονάδων.

93. Ὅταν τὸ κλάσμα εἶνε μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἐν αὐτῷ περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας. Ἡ πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον πρᾶξις λέγεται **ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων.**

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{13}{4}$. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει τὸ κλάσμα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν 1 ἀκεραίαν μονάδα, πρέπει ἀπὸ τὰ 13 τέταρτα νὰ λάβωμεν 4 τέταρτα (διότι εἶνε $\frac{4}{4}=1$), ὅτε μένουν 9 τέταρτα (διότι καθὼς π. χ., ὅταν λαμβάνωμεν 4 μῆλα ἀπὸ 13 μῆλα μένουν 9 μῆλα, οὕτω καὶ ὅταν λαμβάνωμεν 4 τέταρτα ἀπὸ 13 τέταρτα, μένουν 9 τέταρτα). Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα, πρέπει ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον 9 τέταρτα νὰ λάβωμεν ἄλλα 4 τέταρτα, ὅτε μένουν 5 τέταρτα. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἄλλην 1 ἀκεραίαν μονάδα, πρέπει ἀπὸ τὸ νέον ὑπόλοιπον 5 τέταρτα νὰ λάβωμεν ἄλλα 4 τέταρτα, ὅτε μένει 1 τέταρτον. Ὥστε τὰ 13 τέταρτα περιέχουν 3 ἀκεραίας μονάδας, ἤτοι τόσας, ὅσας φορὰς τὰ 4 τέταρτα χωροῦν εἰς τὰ 13 τέταρτα ἢ ἁπλῶς ὅσας φορὰς ὁ παρονομαστὴς 4 χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμητὴν 13, καὶ μένει ὑπόλοιπον, ὡς εἴδομεν, 1 τέταρτον. Ὥστε εἶνε $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

94. ***Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν πηλίκον παριστᾷ τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) γράφομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τὸν ἴδιον.***

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τότε τὸ κλάσμα εἶνε ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν. Π. χ. εἶνε $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{18}{3} = 6$ κτλ.

Ἀσκήσεις.

$$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6},\ \frac{37}{8} = 4\frac{5}{8},\ \frac{36}{9} = 4,\ \frac{68}{15} = 4\frac{8}{15}.$$

Πόσας ἀκεραίας μονάδας περιέχουν τὰ ἑξῆς κλάσματα;

$$\frac{14}{2},\ \frac{28}{7},\ \frac{35}{9},\ \frac{24}{10},\ \frac{70}{18},\ \frac{63}{9}$$

Μὲ πόσους πήχεις ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{48}{8}$ τοῦ πήχεως;

Μὲ πόσας ὀκάδας ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{25}{6}$ τῆς ὀκᾶς;

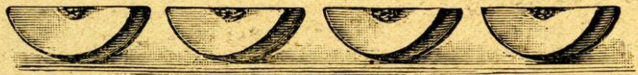
Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

95. Ἐὰν κόψωμεν π. χ. ἓν μῆλον εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 8, καὶ ἐκ τῶν μερῶν τούτων δώσωμεν εἰς ἓν παιδίον 2 μέρη, εἰς ἄλλο δὲ

παιδίον δώσωμεν τριπλάσια μέρη, ἤτοι 6, τότε τὸ πρῶτον παιδίον θὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{8}$ τοῦ μήλου, τὸ δὲ δεύτερον τὰ $\frac{6}{8}$ αὐτοῦ, καὶ θὰ εἶνε τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ τρεῖς φορὰς μεγαλύτερον τοῦ κλάσματος $\frac{2}{8}$· καὶ τἀνάπαλιν, τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ θὰ εἶνε τρεῖς φορὰς μικρότερον τοῦ κλάσματος $\frac{6}{8}$. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{8}$, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3· καὶ τἀνάπαλιν, τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{6}{8}$, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ διαιρεθῇ διὰ 3. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

96. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν· ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν αὐτόν, διαιρεῖται.***

Ἐὰν κόψωμεν πάλιν ἓν μῆλον εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 4,



καὶ ἐκ τῶν μερῶν τούτων λάβωμεν π. χ. 3 μέρη, θὰ λάβωμεν τότε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου. Ἐὰν ἕκαστον τῶν τεσσάρων τούτων μερῶν κόψωμεν πάλιν εἰς ἴσα μέρη, καὶ ἔστω εἰς 2, ὅτε τὸ μῆλον θὰ κοπῇ εἰς 8 μέρη,

καὶ ἐκ τῶν νέων τούτων μερῶν λάβωμεν πάλιν 3 μέρη, θὰ λάβωμεν τότε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ μήλου. Ἀλλ' ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων, ἤτοι ἕκαστον ὄγδοον, εἶνε τὸ ἥμισυ ἑκάστου τῶν προηγουμένων μερῶν, ἤτοι ἑκάστου τετάρτου, ἑπομένως τὰ $\frac{3}{8}$ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{3}{4}$· καὶ τἀνάπαλιν, τὰ $\frac{3}{4}$ εἶνε τὸ διπλάσιον τῶν $\frac{3}{8}$· Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2· καὶ τἀνάπαλιν, τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{3}{8}$, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ διαιρεθῇ διὰ 2. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

97. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ· ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν αὐτόν, πολλαπλασιάζεται.***

Αἱ ἀνωτέρω δύο ἰδιότητες δύνανται νὰ συγχωνευθῶσιν εἰς τὴν ἑξῆς μίαν μόνην ἰδιότητα.

98. ***Ἡ ἀξία κλάσματος πολλαπλασιάζεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν· διαιρεῖται δέ, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν.***

Σημ. Γενικῶς τὸ κλάσμα αὐξάνει, ὅταν αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμητήν του· π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{3}{8}$, διότι λαμβάνονται περισσότερα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος· ἐλαττοῦται δέ, ὅταν αὐξήσωμεν τὸν παρονομαστήν του· π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$ τοῦ πήχεως εἶνε μικρότερον τοῦ $\frac{5}{8}$, διότι καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως εἶνε μικρότερον τοῦ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ κατὰ μέγεθος.

99. Ἀνωτέρω ἐκόψαμεν ἓν μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη ἢ 4 τέταρτα· ἔπειτα ἕκαστον τέταρτον ἐκόψαμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑπομένως τὸ μῆλον ἐκόπη εἰς 8 ἴσα μέρη ἢ 8 ὄγδοα. Ὥστε 1 τέταρτον κάμνει 2 ὄγδοα, 2 τέταρτα κάμνουν 4 ὄγδοα, 3 τέταρτα κάμνουν ἓξ ὄγδοα κτλ. Τὸ ἴδιον λοιπὸν εἶνε εἴτε λάβωμεν π. χ. τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου εἴτε λάβωμεν τὰ $\frac{6}{8}$ αὐτοῦ, τουτέστι τὰ κλάσματα ταῦτα

ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀξίαν. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2· καὶ τἀνάπαλιν, τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{6}{8}$, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ διαιρεθῶσι διὰ 2. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

100. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ἢ διαιρέσωμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ (ἐὰν εἶνε διαιρετοί), ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.***

101. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 3 μῆλα εἰς 4 παιδία ἐξ ἴσου καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον θὰ λάβῃ τὸ καθέν. Κατὰ πρῶτον κόπτομεν τὸ ἓν μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ δίδομεν εἰς ἕκαστον παιδίον ἓν μέρος, ἤτοι 1 τέταρτον τοῦ μήλου. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τὰ δύο ἄλλα μῆλα δίδοντες εἰς ἕκαστον παιδίον ἀπὸ 1 τέταρτον ἀκόμη. Ὥστε ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ τὸ ὅλον 3 τέταρτα τοῦ μήλου (διότι 1 τέταρτον καὶ 1 τέταρτον καὶ 1 τέταρτον κάμνουν 3 τέταρτα). Ἀλλὰ τὰ 3 μῆλα παριστῶσι τὸν διαιρετέον, τὰ 4 παιδία τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ μερίδιον ἑκάστου, ἤτοι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου, παριστᾷ τὸ πηλίκον. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

102. ***Πᾶν κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.***

103. Διὰ τῶν κλασμάτων γίνεται τώρα ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν πάντοτε τελεία, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸν διαιρετέον ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸν διαιρέτην ὡς παρονομαστήν.

Παράδ. χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 7 δραχμὰς εἰς 2 ἀνθρώπους, ἕκαστος θὰ λάβῃ 3 δραχ. καὶ θὰ μείνῃ 1 δραχμή, ἤτοι ἡ διαίρεσις εἶνε ἀτελής. Διὰ τῶν κλασμάτων ὅμως γίνεται ἡ διαίρεσις τελεία· διότι τὸ πηλίκον τοῦ 7 διὰ 2 εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\frac{7}{2}$ ἢ $3\frac{1}{2}$. Τὸ ἀκριβὲς λοιπὸν πηλίκον σύγκειται, ὡς βλέπομεν, ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 3, ὅστις δεικνύει ποσάκις ὁ διαιρέτης 2 χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον 7, καὶ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον 1 τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 2. Ὥστε δυνάμεθα εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν νὰ γράφωμεν τὸ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸν διαιρέτην ὡς παρονομαστὴν καὶ νὰ ἑνώνωμεν τὸ κλάσμα τοῦτο μὲ τὸ ἀκέραιον πηλίκον. Ἀρκεῖ μόνον νὰ τὸ ἐπιτρέπῃ ἡ φύσις τοῦ προβλήματος. Διότι, ἂν ἔχωμεν π.χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πατήρ τις εἶχεν 20 μῆλα καὶ ἔδωκεν εἰς ἕκαστον τέκνον του 3 μῆλα· πόσα τέκνα εἶχεν;

Εἶνε φανερόν, ὅτι εἶχε τόσα τέκνα, ὅσας φορὰς ὁ 3 χωρεῖ εἰς τὸν 20· διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 20 διὰ 3 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 2. Ὥστε εἶχε 6 τέκνα καὶ τοῦ ἔμειναν 2 μῆλα· δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν, ὅτι εἶχεν 6 τέκνα καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ τέκνου.

Σημ. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου ἀριθμοῦ διὰ τῆς μονάδος 1 εἶνε αὐτὸς οὗτος ὁ ἀριθμός, ἤτοι εἶνε $5:1=5$. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς κλάσμα· ὥστε εἶνε $\frac{5}{1}=5$. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ***πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν αὐτὸν ὡς ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.***

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γίνωσι τὰ κλάσματα $\frac{4}{9}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}$ τρεῖς φορὰς μεγαλύτερα καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

2) Νὰ γίνωσι τὰ κλάσματα $\frac{6}{7}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}$ δύο φορὰς μικρότερα καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

3) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὰς 9, 15, 24.

4) Τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ μὲ πόσα τέταρτα ἰσοδυναμεῖ; Μὲ πόσα ὄγδοα; Μὲ πόσα δέκατα ἕκτα; Καὶ μὲ πόσα τριακοστὰ δεύτερα;

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

104. **Ἁπλοποίησις** ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλου κλάσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν ἀξίαν καὶ ὅρους μικροτέρους.

Διὰ νὰ ἁπλοποιηθῇ ἓν κλάσμα, ἤτοι νὰ γίνῃ ἁπλούστερον ἄλλου, χωρὶς ἡ ἀξία του νὰ μεταβληθῇ, πρέπει οἱ ὅροι του νὰ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν (ἂν ἔχωσιν, ἐκτὸς τῆς μονάδος)· διότι τότε θὰ προκύψῃ κλάσμα ἔχον ὅρους μικροτέρους τοῦ δοθέντος, ἀλλὰ τὴν αὐτὴν ἀξίαν (ἐδάφ. 100).

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$. Ἐπειδὴ οἱ ὅροι του ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸν 5, διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ 5 καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον κλάσμα $\frac{3}{4}$.

Ἔστω προσέτι τὸ κλάσμα $\frac{36}{48}$. Οἱ ὅροι του ἔχουσι κοινοὺς διαιρέτας τοὺς 2, 4, 6, 12· διαιροῦντες λοιπὸν αὐτοὺς δι' ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ἔστω διὰ τοῦ 2, εὑρίσκομεν τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον κλάσμα $\frac{18}{24}$. Ἀλλὰ καὶ τοῦτο δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ, διότι οἱ ὅροι του ἔχουσι κοινοὺς διαιρέτας τοὺς 2, 3, 6· διαιροῦντες λοιπὸν αὐτοὺς δι' ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ἔστω διὰ 2, εὑρίσκομεν τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον $\frac{9}{12}$. Τούτου πάλιν οἱ ὅροι ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸν 3· διαιροῦντες λοιπὸν αὐτοὺς διὰ 3 εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀξίαν πρὸς τὸ δοθὲν $\frac{36}{48}$.

Τὸ κλάσμα τώρα $\frac{3}{4}$ δὲν ἁπλοποιεῖται (διότι οἱ ὅροι του εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους), ἤτοι δὲν ἀνάγεται εἰς ἄλλο κλάσμα ἁπλούστερον αὐτοῦ, διὰ τοῦτο λέγεται *ἀνάγωγον*. Ὥστε ἀνάγωγον κλάσμα λέγεται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἑπομένως δὲν ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην (ἐκτὸς τῆς μονάδος), καθὼς εἶνε τὰ $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{15}$ κτλ.

Σημ. Ἠδυνάμεθα συντόμως, ἤτοι μὲ ὀλιγωτέρας διαιρέσεις, νὰ εὕρωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἐὰν ἐλαμβάνομεν ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{36}{48}$, τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ 2. Ὥστε καλὸν εἶνε νὰ προτιμῶμεν ἐν τῇ ἁπλοποιήσει τοὺς μεγαλυτέρους γνωστοὺς κοινοὺς διαιρέτας. Δυνάμεθα καὶ διὰ μιᾶς μόνης διαιρέσεως νὰ εὕρωμεν τὸ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν κλάσμα καὶ ἔχον ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως τῶν κλασμάτων προξενεῖται διπλῆ ὠφέλεια. 1ον) Λαμβάνομεν σαφεστέραν ἰδέαν τῶν κλασμάτων, ἤτοι ἐννοοῦμεν καλύτερον τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς παρὰ τὰ $\frac{36}{48}$ αὐτῆς. 2ον) Σμικρυνομένων τῶν ὅρων τῶν κλασμάτων, εὐκολυνόμεθα πολὺ εἰς τὰς πράξεις αὐτῶν, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα.

105. ***Ὁμώνυμα*** κλάσματα λέγονται, ὅσα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἑπομένως γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, Παρχδ. χάριν, τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{6}{7}$ εἶνε ὁμώνυμα καὶ γίνονται ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{7}$ ἐπαναλαμβανομένης πολλάκις. Ὡσαύτως τὰ κλάσματα $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$ καὶ $\frac{7}{9}$ εἶνε ὁμώνυμα καὶ γίνονται ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{9}$ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως.

Ἑτερώνυμα κλάσματα λέγονται, ὅσα δὲν ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἑπομένως δὲν γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος. Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{6}{7}$ καὶ $\frac{3}{10}$ εἶνε ἑτερώνυμα· ὡσαύτως τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{3}{8}$.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

106. Ἂς λάβωμεν κατὰ πρῶτον δύο ἑτερώνυμα κλάσματα

$$\frac{2}{3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{4}{5}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ ἄλλου κλάσματος, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{10}{15}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{3}$ (κατὰ τὸ ἐδάφιον 100). Ἐὰν ἔπειτα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 3 τοῦ ἄλλου, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{12}{15}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{4}{5}$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἀντὶ λοιπὸν τῶν δοθέντων κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ πρὸς αὐτὰ ἴσα $\frac{10}{15}$ καὶ $\frac{12}{15}$, τὰ ὁποῖα εἶνε τώρα ὁμώνυμα. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

107. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκατέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.***

Ἂς λάβωμεν τώρα περισσότερα κλάσματα

$$\frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{6}{7}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 5×7 ἢ 35, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{3 \times 35}{4 \times 35}$ ἢ $\frac{105}{140}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{3}{4}$ (ἐδάφιον 100).

Ἐὰν ἔπειτα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{2}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 4×7 ἢ 28, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{2 \times 28}{5 \times 28}$ ἢ $\frac{56}{140}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{5}$.

Ἐὰν τέλος πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος $\frac{6}{7}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 4×5 ἢ 20, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{6 \times 20}{7 \times 20}$ ἢ $\frac{120}{140}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{6}{7}$.

Ἀντὶ λοιπὸν τῶν δοθέντων κλασμάτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ πρὸς αὐτὰ ἴσα $\frac{105}{140}$, $\frac{56}{140}$, $\frac{120}{140}$, τὰ ὁποῖα εἶνε ὁμώνυμα καὶ πρέπει νὰ εἶνε τοιαῦτα, διότι συμβαίνει νὰ εἶνε πάντοτε κοινὸς παρονομαστὴς αὐτῶν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{35} & \underbrace{28} & \underbrace{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{5} & \frac{6}{7} \\ \frac{105}{140} & \frac{56}{140} & \frac{120}{140} \end{array}$$

ἤτοι γράφομεν ὑπεράνω ἑκάστου κλάσματος τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν μὲ αὐτὸ τοὺς ὅρους τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κλάσματος. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

108. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν.***

Παρατήρησις. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς 140 εἶνε τὸ γινόμενον $4 \times 5 \times 7$ τῶν παρονομαστῶν καὶ ἑπομένως εἶνε διαιρετὸς δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ 35, 28 καὶ 20, μὲ τοὺς ὁποίους ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων καὶ ἐτρέψαμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, εἶνε τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ 140 δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν (διότι εἶνε $140:4=35$, $140:5=28$, $140:7=20$). Τοῦτο λέγομεν καὶ διὰ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν 15 τῶν δύο κλασμάτων τοῦ ἐδαφίου 106. Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν δύναται νὰ γίνῃ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν δοθέντων κλασμάτων. Πολλάκις ὅμως εὑρίσκεται ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν καὶ διαιρετὸς δι' αὐτῶν· τότε αὐτὸν πρὸς εὐκολίαν μας κάμνομεν κοινὸν παρονομαστὴν ἀκολουθοῦντες τὸν ἑξῆς τρόπον.

109. ***Εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν (κατὰ τὰ ἐδάφια 82 καὶ 83) καὶ διαιροῦμεν τοῦτο δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος μὲ τὸ εὑρεθὲν ἀντίστοιχον πηλίκον.***

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{24} \quad \frac{1}{3}\cdot$$

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι ὁ 24, διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν, ἕπεται ὅτι οὗτος εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν (ἐδάφ. 82)· διαιροῦντες λοιπὸν αὐτὸν διὰ τῶν παρονομαστῶν 4, 8, 24 καὶ 3 εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς κατὰ σειρὰν πηλίκα, 6, 3, 1, 8. Ἕκαστον τούτων γράφομεν ὑπεράνω τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματός του καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος μὲ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

Ἡ δὲ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{}^{6} & \overbrace{}^{3} & \overbrace{}^{1} & \overbrace{}^{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{7}{24} & \frac{1}{3} \\ \frac{18}{24} & \frac{15}{24} & \frac{7}{24} & \frac{8}{24}\cdot \end{array}$$

Οὕτω δὲ ἐτράπησαν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα συντομώτερον παρὰ διὰ τοῦ κανόνος τοῦ ἐδαφίου 108. Συμβαίνει δὲ νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, διότι ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου κλάσματος λαμβάνεται ὡς διαιρέτης καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον πρέπει νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον 24.

Ἔστω προσέτι νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα.

$$\frac{4}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{4}{15}\cdot$$

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκεται ὅτι εἶνε ὁ 90· τὰ δὲ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τῶν παρονομαστῶν 5, 6, 9 καὶ 15 εἶνε κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς· 18, 15, 10 καὶ 6. Ὥστε ἔχομεν

$$\overset{18}{\frown}\quad \overset{15}{\frown}\quad \overset{10}{\frown}\quad \overset{6}{\frown}$$

$$\frac{4}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{4}{15}$$

$$\frac{72}{90} \quad \frac{15}{90} \quad \frac{50}{90} \quad \frac{24}{90}\cdot$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι οὐ μόνον τρέπονται τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα συντόμως εἰς ὁμώνυμα, ἀλλὰ καὶ λαμβάνομεν ταῦτα μὲ μικροτέρους ὅρους παρὰ διὰ τοῦ κανόνος τοῦ ἐδαφ. 108· τὸ τοιοῦτον μᾶς εὐκολύνει πολὺ εἰς τὰς πράξεις, ὡς θὰ ἴδωμεν.

Σημ. Καλὸν εἶνε πρὸς εὐκολίαν μας νὰ ἁπλοποιῶμεν πρῶτον, ὅσα τῶν κλασμάτων ἁπλοποιοῦνται, καὶ ἔπειτα νὰ τρέπωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

110. Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1ον) εἰς τὸ νὰ μάθωμεν ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων ποῖον εἶνε τὸ μεγαλύτερον ἢ τὸ μικρότερον· πρὸς τοῦτο τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἀριθμητὴν εἶνε προφανῶς καὶ τὸ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τῶν κλασμάτων. Ἐὰν ὅμως συμβῇ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, τότε δὲν εἶνε ἀνάγκη νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα· διότι μεγαλύτερον εἶνε τὸ ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν. Π. χ. ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{10}$ τοῦ μήλου μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{3}{4}$ κατὰ μέγεθος· διότι τὸ μὲν κλάσμα $\frac{3}{4}$ σημαίνει ὅτι ἐκόψαμεν τὸ μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἐλάβομεν τὰ 3 μέρη· τὸ δὲ κλάσμα $\frac{3}{10}$ σημαίνει ὅτι ἐκόψαμεν τὸ αὐτὸ μῆλον εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ

ἐλάβομεν πάλιν 3 μέρη, ἀλλὰ τὰ πρῶτα μέρη εἶνε μεγαλύτερα τῶν δευτέρων μερῶν. 2ον) Χρησιμεύει εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν κλασμάτων, ὡς θὰ ἴδωμεν.

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραποῦν τὰ κατωτέρω ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους, ἤτοι διὰ τῶν κανόνων (τῶν ἐδαφίων 107 καὶ 108) καὶ διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν παρονομαστῶν.

$$\frac{2}{3}\ \frac{7}{9},\quad \frac{3}{4}\ \frac{5}{6},\quad \frac{2}{3}\ \frac{5}{12}\ \frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{4},$$

$$\frac{7}{10}\ \frac{4}{5}\ \frac{3}{4},\quad \frac{1}{4}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{6},\quad \frac{2}{}\ \frac{1}{8}\ \frac{4}{15}\ \frac{3}{4}$$

Τρεῖς κληρονόμοι ἐμοίρασαν μίαν ἄμπελον· ὁ εἷς τούτων ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς, ὁ ἄλλος τὰ $\frac{7}{20}$ καὶ ὁ ἄλλος τὸ $\frac{1}{4}$. Ποῖος ἔλαβε περισσότερον καὶ ποῖος ὀλιγώτερον;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

1ον) **Πρόσθεσις κλασμάτων.**

111. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἠγόρασέ τις τὴν πρώτην φορὰν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου, τὴν δευτέραν φορὰν $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς καὶ τὴν τρίτην φορὰν $\frac{7}{8}$, καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἠγόρασε τὸ ὅλον;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, θὰ κάμωμεν πρόσθεσιν, ἤτοι $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$. Ἀλλὰ 3 ὄγδοα + 5 ὄγδοα + 7 ὄγδοα κάμνουν 15 ὄγδοα (καθὼς π.χ. καὶ 3 μῆλα + 5 μῆλα + 7 μῆλα κάμνουν 15 μῆλα) ἢ $\frac{15}{8}$.

Ὥστε εἶνε $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{15}{8}$ ἢ $1\frac{7}{8}$ (ἐδ. 94)· τὸ ἀγορασθὲν λοιπὸν βούτυρον ἦτο $1\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

112. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον.***

Ἐὰν ὅμως τὰ κλάσματα εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν, ὡς ἀνωτέρω. Διότι, καθὼς δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμ εν ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὺς π.χ. 3 μῆλα καὶ 5 πρόβατα, οὕτω δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα.

Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}.$$

Τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν εἶνε ὁ 12) καὶ εὑρίσκομεν τὰ πρὸς αὐτὰ ἴσα $\frac{8}{12}+\frac{10}{12}+\frac{7}{12}$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶνε $\frac{25}{12}$ ἢ $2\frac{1}{12}$. Ὥστε εἶνε

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}=\frac{8}{12}+\frac{10}{12}+\frac{7}{12}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$$

2ον) Πρόσθεσις μικτῶν ἀριθμῶν.

113. Ὑποθέσωμεν, ὅτι παιδίον τι ἔχει $3\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς, ἄλλο δὲ παιδίον ἔχει $4\frac{1}{4}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς ἔχουν καὶ τὰ δύο παιδία.

Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν τὰς δραχμὰς καὶ εὑρίσκομεν $3+4$ ἢ 7 δραχμάς· κατόπιν προσθέτομεν τὰ μέρη τῆς δραχμῆς καὶ εὑρίσκομεν $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=\frac{13}{20}$. Τὰ δύο λοιπὸν παιδία ἔχουν 7 δρ. καὶ $\frac{13}{20}$ τῆς δραχμῆς ἢ $7\frac{13}{20}$. Ὥστε εἶνε

$$3\frac{2}{5}+4\frac{1}{4}=7\frac{13}{20}.$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

114. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.***

Σημ. Δυνάμεθα καὶ νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν, ἀλλ' εἶνε εὐκολώτερον νὰ προσθέτωμεν ὡς ἀνωτέρω.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $2\frac{4}{9}+8$, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖον εἶνε 10, καὶ ἑνώνομεν αὐτὸ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{4}{9}$ τοῦ μικτοῦ, ἤτοι εἶνε $2\frac{4}{9}+8=10\frac{4}{9}$. Ὡσαύτως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $4\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων, τὸ ὁποῖον εἶνε $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20}$ καὶ ἑνώνομεν αὐτὸ μὲ τὸν ἀκέραιον 4 τοῦ μικτοῦ, ἤτοι εἶνε $4\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=4+1\frac{3}{20}=5\frac{3}{20}$.

Ἔστω προσέτι νὰ εὑρεθῇ τὸ ἑξῆς ἄθροισμα

$$2\frac{3}{5}+3\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}+6.$$

τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶνε $2+3+4+6=15$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶνε

$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{18}{30}+\frac{15}{30}+\frac{20}{30}=\frac{53}{30}=1\frac{23}{30}$. Ὥστε εἶνε

$$2\frac{3}{5}+3\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}+6=15+1\frac{23}{30}=16\frac{23}{30}$$

Ἀσκήσεις.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{15}\left(=1\frac{31}{60}\right),\ \frac{5}{6}+\frac{1}{12}+\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\left(=2\frac{13}{84}\right)$$

$$2\frac{3}{4}+5\frac{1}{7}\left(=7\frac{25}{28}\right),\ 5\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\left(=5\frac{13}{21}\right)$$

$3\frac{2}{5}+5\frac{1}{3}+\frac{7}{10}\left(=9\frac{13}{30}\right)$, $\frac{2}{3}+5\frac{3}{4}+2\frac{7}{12}+6\left(=15\right)$

Σημ. Ἡ ἰδιότης τῆς προσθέσεως (ἐδαφ. 23) ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰ κλάσματα. Ἐπίσης ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδάφ. 21) εἶνε καὶ εἰς τὰ κλάσματα ὁ αὐτός, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅμως ὅτι ἐδῶ δύνανται νὰ εἶνε αἱ μονάδες ἢ κλασματικαὶ μόνον ἢ ἀκέραιαι καὶ κλασματικαί.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Παντοπώλης τις ἐπώλησεν εἴς τινα $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου, εἰς ἄλλον $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς καὶ εἰς ἄλλον $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσον ἐπώλησε καὶ εἰς τοὺς τρεῖς; $\left(1\frac{21}{40}\right.$ τῆς ὀκᾶς$\left.\right)$.

2) Παιδίον τι ἔδωκε $3\frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἓν βιβλίον καὶ 2 δρ. διὰ νὰ ἀγοράσῃ τετράδια· πόσον ἔδωκε τὸ ὅλον; $\left(5\frac{7}{10}\right.$ τῆς δρ.$\left.\right)$.

3) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζει εἰς ἔμπορον $2\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς· πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν αὐτοῦ διὰ νὰ κερδήσῃ ἀπὸ κάθε πῆχυν $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς; $\left(3\frac{3}{20}\right.$ τῆς δρ.$\left.\right)$.

4) Γυνή τις ἔδωκε $19\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἓν ὕφασμα· ἔπειτα παρετήρησεν, ὅτι τῆς ἔμειναν $8\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἀπ' ἀρχῆς; $\left(28\frac{1}{4}\right.$ τῆς δρ.$\left.\right)$.

5) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος τὴν πρώτην φορὰν $10\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως, τὴν δευτέραν φορὰν $8\frac{3}{4}$ καὶ τὴν τρίτην φορὰν 9 πήχεις· ἔμειναν δὲ καὶ εἰς αὐτὸν $10\frac{1}{3}$ τοῦ πήχεως. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα; $\left(38\frac{7}{12}\right.$ τοῦ πήχεως$\left.\right)$.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

1ον) Ἀφαίρεσις κλασμάτων.

115. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχει τις $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα θὰ τοῦ μείνουν, ἐὰν δώσῃ εἴς τινα τὰ $\frac{6}{10}$ τῆς δραχμῆς.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, θὰ κάμωμεν ἀφαίρεσιν, ἤτοι $\frac{9}{10}-\frac{6}{10}$. Ἀλλὰ 6 δέκατα ἀπὸ 9 δέκατα μένουν 3 δέκατα (καθὼς π. χ. καὶ 6 μῆλα ἀπὸ 9 μῆλα μένουν 3 μῆλα). Ὥστε εἶνε

$$\frac{9}{10}-\frac{6}{10}=\frac{3}{10}\cdot$$

Θὰ τοῦ μείνουν λοιπὸν τὰ $\frac{3}{10}$ τῆς δραχμῆς.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

116. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο κλάσματα ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ τὴν διαφορὰν γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον.***

Ἐὰν ὅμως τὰ κλάσματα εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω.

Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$. Τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκομεν $\frac{15}{20}-\frac{8}{20}$, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶνε $\frac{7}{20}$. Ὥστε εἶνε

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$$

2ον) Ἀφαίρεσις μικτῶν ἀριθμῶν.

117. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχει τις $7\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν, ἐὰν δώσῃ δι' ἀγορὰν πράγματός τινος $3\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς.

Κατὰ πρῶτον ἀφαιροῦμεν τὰς 3 δραχμὰς ἀπὸ τὰς 7 δραχμάς, ὅτε μένουν 4 δραχμαί· κατόπιν ἀφαιροῦμεν τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς καὶ εὑρίσκομεν ὅτι μένουν $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$ τῆς δραχμῆς. Ὥστε τοῦ ἔμειναν ἐν ὅλῳ 4 δραχμαὶ καὶ $\frac{7}{20}$ τῆς δραχμῆς ἢ $4\frac{7}{20}$ τῆς δραχμῆς.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$7\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5} = 4\frac{15}{20} - \frac{8}{20} = 4\frac{7}{20}\cdot$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

118. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτόν, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰς δύο διαφοράς.***

Σημ. Δυνάμεθα καὶ νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν, ἀλλ' εἶνε εὐκολώτερον νὰ ἀφαιρῶμεν ὡς ἀνωτέρω.

119. Ἐὰν συμβῇ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου νὰ μὴ ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, λαμβάνομεν ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει μίαν μονάδα ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν τῶν ἀκεραίων καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον, τὸ ὁποῖον προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω.

Ἔστω π.χ. νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ

$$7\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4}.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν ἀκεραίων εἶνε 7—3, ἤτοι 4, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κλασμάτων εἶνε $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{8}{20} - \frac{15}{20}$. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{8}{20}$, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τὴν διαφορὰν 4 τῶν ἀκεραίων, ὅτε μένουν 3, καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον, ἤτοι εἰς $\frac{20}{20}$· τοῦτο προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{8}{20}$ τοῦ μειωτέου καὶ εὑρίσκομεν $\frac{28}{20}$. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{28}{20}$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{13}{20}$. Ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν μικτῶν εἶνε $3\frac{13}{20}$, ἡ δὲ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$7\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4} = 4\frac{8}{20} - \frac{15}{20} = 3\frac{28}{20} - \frac{15}{20} = 3\frac{13}{20}$$

Παραδείγματα μερικῶν περιπτώσεων.

$$7\frac{2}{3} - 4 = 3\frac{2}{3}$$

$$2\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = 2\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = 2\frac{2}{15}$$

$$5\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = 5\frac{5}{10} - \frac{6}{10} = 4\frac{15}{10} - \frac{6}{10} = 4\frac{9}{10}$$

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἢ κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω.

Παραδ. χάριν.

$$9 - 5\frac{4}{7} = 8\frac{7}{7} - 5\frac{4}{7} = 3\frac{3}{7}$$

$$5 - \frac{2}{3} = 4\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$$

Εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα δυνάμεθα καὶ νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν. Ἤτοι

$$5 - \frac{2}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

ἀλλ' ὁ ἀνωτέρω τρόπος εἶνε συντομώτερος.

Ἀσκήσεις.

$$\frac{7}{8} - \frac{2}{5},\quad 5\frac{3}{4} - 2,$$

$$8\frac{2}{5} - \frac{5}{7},\quad 6 - \frac{2}{9},$$

$$10 - 2\frac{5}{8},\quad 5\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5}.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Παντοπώλης τις ἐπώλησεν εἴς τινα $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου, εἰς ἄλλον δὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς· εἰς ποῖον ἐπώλησε περισσότερον καὶ κατὰ πόσον; (Εἰς τὸν β΄ κατὰ $\frac{1}{40}$ τῆς ὀκᾶς).

2) Γυνή τις εἶχε μαζί της 5 δραχμὰς καὶ ἐξ αὐτῶν ἔδωκεν εἰς μίαν πτωχὴν $\frac{3}{20}$ τῆς δραχμῆς. Πόσαι δραχμαὶ τῆς ἔμειναν; ($4\frac{17}{20}$ δρ.).

3) Ἀπό τινα παντοπώλην ἠγόρασέ τις διάφορα πράγματα ἀξίας $16\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἔδωκεν ἓν εἰκοσιπεντάδραχμον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὑπόλοιπον; ($8\frac{3}{5}$ δρ.).

4) Ἐὰν δώσωμεν εἰς ἓν παιδίον τὸ $\frac{1}{4}$ ἑνὸς μήλου, εἰς ἄλλο δὲ παιδίον δώσωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ· πόσον μέρος τοῦ μήλου θὰ μᾶς μείνῃ; (τὰ $\frac{7}{20}$).

5) Ἔμπορός τις πωλεῖ τὸν πῆχυν ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς $8\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς καὶ κερδίζει ἀπὸ κάθε πῆχυν $1\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον τοῦ κοστίζει ὁ πῆχυς; ($6\frac{7}{10}$ τῆς δρ.).

6) Καλάθιον περιέχον μῆλα ζυγίζει $5\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς, κενὸν δὲ ζυγίζει $\frac{11}{20}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσας ὀκάδας μήλων περιέχει; ($4\frac{7}{10}$).

7) Παντοπώλης τις εἶχεν $20\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς καφέ· ἐξ αὐτοῦ ἐπώλησεν εἴς τινα $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς, εἰς ἄλλον $\frac{1}{4}$ ὀκάδας καὶ εἰς ἄλλον

$\frac{3}{10}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσαι ὀκάδες τοῦ ἔμειναν; $\left(19\frac{23}{40}\right)$.

8) Ἠγόρασέ τις ἀπό τινα παντοπώλην τὰ ἑξῆς πράγματα· βούτυρον ἀξίας 17 δραχμῶν, ζάχαριν ἀξίας $8\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς, ἔλαιον ἀξίας $9\frac{1}{2}$ δρ. καὶ σάπωνα ἀξίας $15\frac{1}{10}$ τῆς δρ. καὶ ἔδωκε δύο εἰκοσιπεντάδραχμα. Πόσον ἔλαβεν ὑπόλοιπον; (τίποτε).

9) Ἁμαξοστοιχία τις ἀνεχώρησεν ἀπὸ μιᾶς πόλεως ὥραν $7\frac{1}{2}$ πρὸ μεσημβρίας καὶ ἔφθασεν εἰς ἄλλην πόλιν μετὰ $8\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας. Ποίαν ὥραν ἔφθασεν; $\left(4\frac{1}{6}\right.$ μ. μ.$\left.\right)$.

10) Παιδίον τι ἐγεννήθη ὥραν $4\frac{3}{4}$ πρὸ μεσημβρίας καὶ ἀπέθανεν ὥραν $9\frac{1}{2}$ μετὰ μεσημβρίαν τῆς ἑπομένης ἡμέρας. Πόσας ὥρας ἔζησεν; $\left(40\frac{3}{4}\right)$.

11) Ἠγόρασέ τις αὐγὰ τὴν μὲν πρώτην φορὰν πρὸς 50 λεπτὰ τὰ τρία, τὴν δὲ δευτέραν φορὰν πρὸς 35 λεπτὰ τὰ δύο. Πότε ἠγόρασεν ἀκριβότερον καὶ κατὰ πόσον;

(τὴν β′ φορὰν κατὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ λεπτοῦ περισσότερον τὸ καθέν).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

1ον) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἢ μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.

1ον) Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $\frac{2}{9}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἀξίζουν αἱ 3 ὀκάδες.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{2}{9}$ τῆς δραχμῆς, αἱ 3 ὀκάδες ἀξίζουν 3 φορὰς τὰ $\frac{2}{9}$ τῆς δραχμῆς, ἤτοι $\frac{2}{9}\times 3=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς (ἁπλοποιούμενον).

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{9}$, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ 9 διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 3· ἤτοι εἶνε $\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{9:3} = \frac{2}{3}$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

120. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον, ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου (ἂν εἶνε διαιρετός).***

Σημ. Τοῦτο ἐδείξαμεν καὶ ἐν τοῖς ἐδαφίοις 96 καὶ 97.

Ὡσαύτως εἶνε $\frac{7}{8} \times 8 = \frac{7 \times 8}{8} = 7$ (μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν).

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.

2ον) Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $4\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν, πόσον ἀξίζουν αἱ 2 ὀκάδες.

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει $4\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς, αἱ 2 ὀκάδες ἀξίζουν 2 φορὰς τὰς $4\frac{2}{5}$ δρ., ἤτοι $4\frac{2}{5} \times 2$. Ἐπειδὴ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος (ἐδαφ. 91), διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὰ μέρη του (ἤτοι χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα) καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα (ἐδ. 40). Ἤτοι

$$4\frac{2}{5} \times 2 = 4 \times 2 + \frac{2}{5} \times 2 = 8 + \frac{4}{5} \text{ ἢ } 8\frac{4}{5}.$$

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάσωμεν, ὡς ἀνωτέρω (ἐδ. 120). Ἤτοι

$$4\frac{2}{5} \times 2 = \frac{22}{5} \times 2 = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5}.$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

121. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ χωριστὰ***

ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα, ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.

2ον). **Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἢ κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.**

122. Ὑποθέσωμεν πρῶτον, ὅτι ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 7 δραχμὰς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἀξίζουν οἱ 3 πήχεις.

Εἶνε φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 7 δραχμὰς ἐπὶ 3, ἤτοι 7×3 ἢ 21 δραχ. Ἐὰν τώρα ἐν τῷ γινομένῳ 7×3 ἀλλάξωμεν τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν του ἄλλον ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ μικρότερον αὐτοῦ, πάλιν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 7 δραχ. ἐπὶ τὸν νέον τοῦτον ἀριθμόν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἡ πρᾶξις δηλ. δὲν πρέπει νὰ μεταβληθῇ. Ὥστε ἐὰν ἔχωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

1ον) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 7 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως;

Πρέπει πάλιν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 7 δραχ. ἐπὶ $\frac{3}{8}$, ἤτοι $7 \times \frac{3}{8}$· διότι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ἤλλαξε. Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀκεραίου 7 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῶν $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως. Ἀλλὰ τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς·

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν πόσον ἀξίζει τὸ 1 ὄγδοον τοῦ πήχεως καὶ ἔπειτα πόσον ἀξίζουν τὰ 3 ὄγδοα αὐτοῦ. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ἀξίζει τὸ 1 ὄγδοον, ἤτοι τὸ 1 ῥούπιον (διότι ὁ πῆχυς ἔχει 8 ῥούπια), πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς 7 δραχμὰς διὰ 8, ἤτοι 7 : 8, ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ παραστήσωμεν καὶ ὡς κλάσμα, ἤτοι $\frac{7}{8}$ (ἐδάφ. 102). Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ 1 ὄγδοον τοῦ πήχεως ἀξίζει $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς, τὰ 3 ὄγδοα, ἤτοι τὰ 3 ῥούπια, θὰ ἀξίζουν 3 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\frac{7\times3}{8}$ (ἐδ. 96) ἢ $\frac{21}{8}$ τῆς δραχμῆς. Ἡ ἀξία λοιπὸν τῶν $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως εὑρέθη. Ὥστε πρέπει νὰ εἶνε

$$7\times\frac{3}{8}=\frac{7\times3}{8}=\frac{21}{8}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

123. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον.***

Σημ. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε οἱαδήποτε κλασματικὴ μονάς, τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾷ εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Π. χ. εἶνε $6\times\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2$.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα πολλαπλασιαστέος εἶνε αἱ 7 δραχμαί, ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (δηλ. τοῦ ἑνὸς πήχεως), καὶ πολλαπλασιαστὴς τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, ἤτοι μέρος τῆς μονάδος. Εἴδομεν δέ, ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἐκάμομεν δύο πράξεις, πρῶτον διαίρεσιν καὶ ἔπειτα πολλαπλασιασμόν. Τὰς δύο λοιπὸν ταύτας πράξεις θὰ τὰς ὀνομάζωμεν μὲ ἓν ὄνομα **πολλαπλασιασμόν**, διὰ νὰ διατηρηθῇ ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδάφ. 46) καὶ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε κλάσμα. Διὰ τοῦτο δὲ γενικεύομεν τὸν κανόνα ἐκεῖνον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς.

124. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων (ὁμοειδῶν) ἢ μέρους τῆς μονάδος, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.***

Σημ. Πολλαπλασιαστέος εἶνε πάντοτε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων ἢ τοῦ μέρους αὐτῆς.

2ον) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $\frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;

Γνωρίζομεν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ἤτοι μιᾶς ὀκᾶς) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος (ἤτοι τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς), διὰ τοῦτο κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρέπει νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν, ἤτοι $\frac{7}{10} \times \frac{3}{4}$. Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Ἀλλὰ τὴν ἀξίαν ταύτην εὑρίσκομεν, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἤτοι εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἀξίζει τὸ 1 τέταρτον τῆς ὀκᾶς καὶ ἔπειτα πόσον ἀξίζουν τὰ 3 τέταρτα αὐτῆς.

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς, τὸ 1 τέταρτον, τὸ ὁποῖον εἶνε 4 φορὰς ὀλιγώτερον τῆς μιᾶς ὀκᾶς, θὰ ἀξίζῃ καὶ 4 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν $\frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς, ἤτοι $\frac{7}{10 \times 4}$ (ἐδάφ. 97), καὶ τὰ 3 τέταρτα, τὰ ὁποῖα εἶνε 3 φορὰς περισσότερα τοῦ 1 τετάρτου, θὰ ἀξίζουν καὶ 3 φορὰς περισσότερον τῶν $\frac{7}{10 \times 4}$, ἤτοι $\frac{7 \times 3}{10 \times 4}$ ἢ $\frac{21}{40}$ τῆς δραχμῆς. Ἡ ἀξία λοιπὸν τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εὑρέθη. Ὥστε πρέπει νὰ εἶνε

$$\frac{7}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{10 \times 4} = \frac{21}{40}.$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

125. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν.***

Ὥστε εἶνε $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

ὁμοίως εἶνε $\frac{4}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$.

126. Εἰς τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε κλάσμα, δὲν ἐπαναλαμβάνεται, ὡς βλέπομεν, ὁλόκληρος ὁ πολλαπλασιαστέος, ἀλλὰ μόνον μέρος αὐτοῦ καὶ τόσον μέρος, ὅσον δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τόσας δὲ φορὰς τὸ μέρος τοῦτο, ὅσον δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ. Π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω τελευταῖον πρόβλημα ἐπαναλαμβάνεται τὸ τέταρτον

τοῦ πολλαπλασιαστέου $\frac{7}{10}$, ἤτοι τὸ $\frac{7}{10 \times 4}$, 3 φοράς· διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε ὁ $\frac{3}{4}$. Ἐκ τούτου λοιπὸν ὁδηγούμενοι δίδομεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν.

127. ***Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος αὐτοῦ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας (ἀκεραίας ἢ κλασματικὰς) ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.***

Τὸ γινόμενον εἶνε πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ ἢ ἐκ μέρους αὐτοῦ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω λοιπὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ γινόμενον $8 \times \frac{5}{6}$, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ ἕκτον τοῦ πολλαπλασιαστέου 8, τὸ ὁποῖον εἶνε $\frac{8}{6}$, 5 φοράς, ἤτοι $\frac{8}{6} \times 5$ ἢ $\frac{40}{6}$.

Ἐπίσης, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον εἶνε $\frac{3}{4 \times 5}$, 2 φοράς, ἤτοι $\frac{3 \times 2}{4 \times 5}$ ἢ $\frac{6}{20}$.

Παρατήρησις. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ εἶνε ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου. Καὶ ἴσον μὲν θὰ εἶνε, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε ἡ ἀκεραία μονὰς 1· μεγαλύτερον δέ, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μεγαλύτερος τῆς ἀκεραίας μονάδος· μικρότερον δέ, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μικρότερος αὐτῆς.

3ον) Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν ἀριθμῶν.

128. ***Ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶνε μικτὸς ἀριθμός, ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε μικτοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν κατὰ τοὺς ἀνωτέρω κανόνας.***

Ἔστωσαν π.χ. τὰ ἑξῆς γινόμενα.

$$1)\ 5\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{68}{21} = 3\frac{5}{21}$$

$$2)\ 2 \times 3\frac{4}{5} = 2 \times \frac{19}{5} = \frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$$

$$3)\ \frac{2}{9} \times 2\frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{27}$$

$$4)\ 2\frac{1}{3} \times 4\frac{3}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{19}{4} = \frac{133}{12} = 11\frac{1}{12}$$

Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς μικτὸς ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος, διὰ τοῦτο δυνάμεθα καὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν καὶ ἔπειτα νὰ προσθέτωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα (ἐδάφ. 40). Τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν γινόμενα εὑρίσκονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$1)\ 5\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = 5 \times \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{7} + \frac{8}{21} = \frac{60}{21} + \frac{8}{21} = \frac{68}{21} = 3\frac{5}{21}$$

$$2)\ 2 \times 3\frac{4}{5} = 2 \times 3 + 2 \times \frac{4}{5} = 6 + \frac{8}{5} = 6 + 1\frac{3}{5} = 7\frac{3}{5}$$

$$3)\ \frac{2}{9} \times 2\frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times 2 + \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{27} = \frac{12}{27} + \frac{2}{27} = \frac{14}{27}$$

4) $2\frac{1}{3} \times 4\frac{3}{4}$ · διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο, ὑποθέτομεν τὸν ἕνα τῶν παραγόντων, ἔστω τὸν $2\frac{1}{3}$, ὡς ἕνα ἀριθμόν, τὸν δὲ ἄλλον $4\frac{3}{4}$ ὡς ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν· τότε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $2\frac{1}{3} \times 4 + 2\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$. Πολλαπλασιάζοντες τώρα χωριστὰ ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ $2\frac{1}{3}$ ἐπὶ 4 καὶ ἔπειτα ἐπὶ $\frac{3}{4}$ καὶ προσθέτοντες τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα εὑρίσκομεν πάλιν $11\frac{1}{12}$.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

129. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἀποτελούμενον ἐξ ἀκεραίων καὶ κλασμάτων ἢ κλασμάτων μόνον, εὑρίσκεται ὅπως καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο πρώτους παράγοντας, τὸ γινόμενον αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας.

Ἔστω π.χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἑξῆς γινόμενον·

$$\frac{4}{5} \times 3 \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{8} \times 2.$$

Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εἶνε $\frac{4\times3}{5}$, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶνε $\frac{4\times3\times6}{5\times7}$, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶνε $\frac{4\times3\times6\times5}{5\times7\times8}$, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν πέμπτον εἶνε $\frac{4\times3\times6\times5\times2}{5\times7\times8}$. Ὥστε εἶνε $\frac{4}{5} \times 3 \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{8} \times 2 = \frac{4\times3\times6\times5\times2}{5\times7\times8}$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

130. ***Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶνε ἴσον μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἀριθμητῶν καὶ ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.***

Καὶ ἐδῶ τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

Σημ. Ἐὰν ἐν τῷ γινομένῳ ὑπάρχωσι καὶ μικτοὶ ἀριθμοί, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω κλάσμα τοῦ γινομένου δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ. Διαιροῦντες λοιπὸν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ 5, ἔπειτα διὰ 4 καὶ ἔπειτα διὰ 2 εὑρίσκομεν $\frac{18}{5}$. Ὥστε καλὸν εἶνε πρὸς εὐκολίαν τῶν πράξεών μας, πρὸ τοῦ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων, νὰ διαιρῶμεν ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμητὴν ἢ ἀκέραιον καὶ ἕνα οἱονδήποτε παρονομαστὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, ἂν ἔχωσι, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάζωμεν.

Ἀσκήσεις.

$$4\frac{2}{3}\times 6,\ \frac{2}{5}\times\frac{3}{4},\ 2\frac{4}{5}\times\frac{4}{7},$$

$$\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{3},\ 10\times 5\frac{2}{5},\ 2\frac{3}{4}\times 3\frac{4}{5},$$

$$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3},\ 2\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{9}\times 3\times\frac{5}{6},$$

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ.—Λύσις αὐτῶν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

1) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 4 δραχμάς· πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ὀκᾶς;

Κατατάσσομεν τὰς δοθείσας τιμάς, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, ἤτοι

1 ὀκᾶ	4 δραχ.
$\frac{5}{6}$	χ

Τοιοῦτον πρόβλημα ἐλύσαμεν καὶ προηγουμένως, τὴν αὐτὴν δὲ σκέψιν θὰ κάμωμεν καὶ τώρα.

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται 4 δραχμάς, τὸ 1 ἕκτον τῆς ὀκᾶς, τὸ ὁποῖον εἶνε 6 φορὰς ὀλιγώτερον τῆς μιᾶς ὀκᾶς, θὰ τιμᾶται καὶ 6 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 4 δραχμῶν, ἤτοι $\frac{4}{6}$ τῆς δραχμῆς (ἐδ. 102), καὶ τὰ 5 ἕκτα τῆς ὀκᾶς, τὰ ὁποῖα εἶνε 5 φορὰς περισσότερον τοῦ 1 ἕκτου, θὰ τιμῶνται καὶ 5 φορὰς περισσότερον τῶν $\frac{4}{6}$ τῆς δραχμῆς, ἤτοι $\frac{4\times 5}{6}$ (ἐδάφ 96) ἢ $3\frac{1}{3}$ τῆς δραχμῆς.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ ἡ 1	ὀκᾶ	τιμᾶται	4 δραχ.
τὸ $\frac{1}{6}$	τῆς ὀκᾶς	τιμᾶται	$\frac{4}{6}$ τῆς δραχμῆς
καὶ τὰ $\frac{5}{6}$	»	τιμῶνται	$\frac{4\times 5}{6}$

ἢ $3\frac{1}{3}$ τῆς δραχμῆς.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, εὕρομεν πρῶτον πόσον τιμᾶται τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἔπειτα πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτῆς. Ὁ τρόπος οὗτος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος (κλασματικῆς ἢ ἀκεραίας) καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων, λέγεται **ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.**

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, καθὼς καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτό, λύομεν καὶ ἄνευ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἀλλὰ μόνον δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, συμφώνως μὲ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 124. Ἤτοι ἔχομεν $4 \times \frac{5}{6} = \frac{20}{6}$ (ἐδάφ. 123) ἢ $3\frac{1}{3}$.

2) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς· πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως;

Κατάταξις.	1 πῆχ.	$\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς
	$\frac{7}{8}$	χ

Λύσις. Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα·

Ἀφοῦ ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται	$\frac{3}{4}$	τῆς δραχμῆς
τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ. τιμᾶται	$\frac{3}{4\times 8}$	»
καὶ τὰ $\frac{7}{8}$ » τιμῶνται	$\frac{3\times 7}{4\times 8}$ ἢ $\frac{21}{32}$	»

Λύσις. Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. $\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{32}$ (ἐδ. 125).

Σημ. Ἐὰν δοθῶσι μικτοὶ ἀριθμοί, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα χάριν εὐκολίας.

3) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $2\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν 1 δραχμήν· πόσον θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $3\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς;

Κατάταξις.	$\frac{9}{4}$ ὀκ.	1 δραχμὴ
	χ	$\frac{7}{2}$

Μετὰ τὴν κατάταξιν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ὅταν πρόκειται νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, πρέπει νὰ ἀρχίζωμεν πάντοτε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον τῆς πρώτης ὁριζοντίας σειρᾶς, ὑποκάτω τοῦ ὁποίου δὲν ὑπάρχει ἡ ἄγνωστος τιμὴ τοῦ χ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω λοιπὸν πρόβλημα θὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὴν 1 δραχμὴν καὶ θὰ μεταβῶμεν εἰς τὰ $\frac{9}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Ἤτοι,

ἀφοῦ μὲ 1 δραχμὴν	ἀγοράζομεν	$\frac{9}{4}$	τῆς ὀκᾶς
μὲ $\frac{1}{2}$ τῆς δρ.	»	$\frac{9}{4\times2}$	»
καὶ μὲ $\frac{7}{2}$ »	»	$\frac{9\times7}{4\times2}$ ἢ $7\frac{7}{8}$	»

Λύσις. Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. $2\frac{1}{4}\times3\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{63}{8}=7\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς.

4) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 135.

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, εἶνε 135.

τὸ $\frac{1}{5}$	αὐτοῦ εἶνε	$\frac{135}{5}$
καὶ τὰ $\frac{2}{5}$	» »	$\frac{135\times2}{5}$ ἢ 54.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

131. ***Ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν μέρος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.***

Πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸ μέρος.

5) Πόσον εἶνε τὰ $\frac{6}{7}$ τοῦ ἀριθμοῦ 28;

Λύσις. $28\times\frac{6}{7}$, ἤτοι 24 Τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ νοερῶς ὡς ἑξῆς· διαιροῦμεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 28 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 7 καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον 4 ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 6.

Νοεραὶ ἀσκήσεις. — 1) Πόσον εἶνε τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ 45; Καὶ πόσον τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ;

2) Πόσα λεπτὰ εἶνε τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς; Καὶ πόσον τὰ $\frac{9}{20}$

[illegible] δράμια εἶνε τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς; Καὶ πόσον τὰ $\frac{7}{8}$ αὐτῆς;

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐργάτης τις λαμβάνει τὴν ἡμέραν $7\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον λαμβάνει εἰς 12 ἡμέρας; (93 δρ.).

2) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ ἀξίζει 5 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν τὰ 180 δράμια; $\left(5 \times \frac{180}{400}\right.$ ἢ $\left.2\frac{1}{4} \text{ δρ.}\right)$.

3) Μία λάμπα καίει εἰς μίαν ὥραν 45 δράμια πετρελαίου. Πόσον καίει εἰς $3\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας; (150 δράμια).

4) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ $5\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς;

$\left(2\frac{1}{16} \text{ τῆς ὀκᾶς}\right)$.

5) Ὁ πῆχυς ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται $2\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον τιμῶνται $9\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως; $\left(22\frac{4}{5} \text{ τῆς δρ.}\right)$.

6) Ἠγόρασέ τις 3 ὀκ. ἐλαίου πρὸς $3\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκεν ἓν ἑκατοντάδραχμον. Πόσον ἔλαβεν ὑπόλοιπον;

$\left(88\frac{3}{4} \text{ τῆς δρ.}\right)$.

7) Γυνή τις ἠγόρασε παρ' ἐμπόρου $5\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς

ὑφάσματος πρὸς $4\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς τὸν πῆχυν καὶ ἔδωκεν ἓν εἰκοσιπεντάδραχμον. Πόσον ὀφείλει ἀκόμη; $\left(\frac{3}{10}\right.$ τῆς δρ.$\left.\right)$.

8) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 1600 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς τὴν ὀκᾶν· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὸ καὶ ἔ[illegible] ἑκάστην ὀκᾶν $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἔλαβεν ἐκ τῆς [illegible] αὐτοῦ; (6640 δρ.).

9) Ἠγόρασέ τις $19\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐκράτησε διὰ τὴν οἰκογένειάν του $6\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπώλησε πρὸς 12 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἔλαβεν ἐκ τοῦ πωληθέντος βουτύρου; $\left(154\frac{1}{2}\right.$ δραχ.$\left.\right)$.

10) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 60 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς $7\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς τὸν πῆχυν, κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς $8\frac{1}{2}$ τῆς δρ. τὸν πῆχυν. Πόσον ἐκέρδησεν; (66 δρ.).

11) Πατήρ τις εἶχε μαζί του $60\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἐξ αὐτῶν ἔδωκε τὰ $\frac{4}{5}$ καὶ 3 δρ. ἀκόμη διὰ νὰ ἀγοράσῃ βιβλία τοῦ υἱοῦ του· Πόσας δραχμὰς ἔδωκε καὶ πόσαι τοῦ ἔμειναν;

Λύσις. Ἔδωκεν $60\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}$ (ἐδ. 131) ἢ $48\frac{2}{5}$ καὶ 3 δρ. ἀκόμη, ἤτοι $51\frac{2}{5}$, ἑπομένως τοῦ ἔμειναν $9\frac{1}{10}$.

12) Μήτηρ τις εἶχε 42 καρύδια καὶ ἐξ αὐτῶν ἔδωκεν εἰς μὲν τὴν θυγατέρα της τὰ $\frac{3}{14}$ καὶ 1 ἀκόμη, εἰς δὲ τὸν υἱόν της τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσα καρύδια ἔδωκεν εἰς ἕκαστον τέκνον καὶ πόσα τῆς ἔμειναν; (10, 12, 20).

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

132. Ἐπειδὴ διὰ τῶν κλασμάτων γίνεται ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν πάντοτε τελεία (ἐδάφ. 103), διὰ τοῦτο ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου (ἐδάφ. 51). Ὥστε δίδομεν εἰς τὴν διαίρεσιν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν.

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης· καὶ πρῶτον μὲν ἀριθμὸν λέγομεν τὸν διαιρετέον, δεύτερον δὲ τὸν διαιρέτην, τρίτον δὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

1ον) Διαίρεσις κλάσματος ἢ μικτοῦ δι' ἀκεραίου.

133. Ὑποθέσωμεν, ὅτι μὲ $\frac{6}{7}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν 3 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν, πόσον ἀξίζει ἡ 1 ὀκᾶ.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ διὰ τὰς 3 ὀκάδας δίδομεν $\frac{6}{7}$ τῆς δραχμῆς, διὰ τὴν 1 ὀκᾶν θὰ δώσωμεν 3 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν $\frac{6}{7}$. Ἀλλὰ διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$ τρεῖς φορὰς μικρότερον, πρέπει νὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ 3· ὥστε (κατὰ τὸ ἐδάφιον 98) ἢ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ 3 ἢ θὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ 3. Ἤτοι εἶνε

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{21} \text{ ἢ ἁπλοποιούμενον } \frac{2}{7} \text{ τῆς δραχμῆς}$$

$$\text{ἢ } \frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7} \text{ τῆς δραχμῆς. Ὥστε}$$

134. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου (ἂν εἶνε διαιρετός).***

Τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἶνε πράγματι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{6}{7} : 3$· διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην 3, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $\frac{6}{7}$.

135. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν ὡς ἀνωτέρω·***

Π. χ. $6\frac{3}{4} : 5 = \frac{27}{4} : 5 = \frac{27}{20}$ ἢ $1\frac{7}{20}$.

ἢ διαιροῦμεν ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ χωριστὰ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ πηλίκα (ἐδ. 65).

Ἤτοι $6\frac{3}{4} : 5 = \frac{6}{5} + \frac{3}{20} = \frac{24}{20} + \frac{3}{20} = \frac{27}{20}$ ἢ $1\frac{7}{20}$.

2ον) **Διαίρεσις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος.**

136. Ὑποθέσωμεν πρῶτον, ὅτι μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν 3 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν, πόσον ἀξίζει μία ὀκᾶ.

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς 6 δραχμὰς (ἤτοι τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων) διὰ 3, ἤτοι 6 : 3 ἢ 2 δρ. Ἐὰν τώρα ἀλλάξωμεν τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν του ἄλλον ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ μικρότερον αὐτοῦ, πάλιν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς 6 δραχμὰς διὰ τοῦ νέου τούτου ἀριθμοῦ, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἡ πρᾶξις δηλ. δὲν πρέπει νὰ μεταβληθῇ διὰ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ διαιρέτου 3. Ὥστε, ἐὰν ἔχωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

1ον) Μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀξίζει μία ὀκᾶ;

Πρέπει πάλιν νὰ διαιρέσωμεν τὰς 6 δραχμὰς διὰ $\frac{3}{8}$, ἤτοι $6 : \frac{3}{8}$, διότι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων ἤλλαξε. Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου 6 διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{8}$, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον, ἤτοι ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Ἀλλὰ τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς ὀκᾶς εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 6 δραχμάς,

τὸ $\frac{1}{8}$ » ἀξίζει $\frac{6}{3}$ »

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$, ἤτοι ἡ 1 ὀκᾶ » $\frac{6 \times 8}{3}$ ἢ $6 \times \frac{8}{3}$ δραχ.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶνε· $6 : \frac{3}{8} = 6 \times \frac{8}{3}$ ἢ 16 δραχμ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος βλέπομεν, ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος 6 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον.

Σημ. Ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς, ἤτοι ὁ $6 \times \frac{8}{3}$, εἶνε πράγματι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $6 : \frac{3}{8}$· διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{8}$, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον 6· ἤτοι εἶνε $6 \times \frac{8}{3} \times \frac{3}{8}$ ἢ 6 μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ὁ διαιρέτης $\frac{3}{8}$ εἶνε μέρος τῆς μονάδος (ἤτοι τῆς μιᾶς ὀκᾶς), διὰ τοῦτο δὲ γενικεύομεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐδαφίου 63 ὡς ἑξῆς·

137. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων ἢ μέρους τῆς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ὁμοειδοῦς), κάμνομεν διαίρεσιν (μερισμόν).***

Διαιρετέος εἶνε πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ τοῦ μέρους τῆς μονάδος.

2ον) Μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{5}{6}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

Ἐπειδὴ εἶνε γνωστὴ ἡ τιμὴ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος, διὰ τοῦτο κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μερισμόν), ἤτοι $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$. Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις αὕτη, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον, ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Ἀλλὰ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς ὀκᾶς εὑρίσκομεν πάλιν ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς,

τὸ $\frac{1}{6}$ » ἀξίζει $\frac{3}{4 \times 5}$ »

καὶ τὰ $\frac{6}{6}$, ἤτοι ἡ 1 ὀκᾶ » $\frac{3 \times 6}{4 \times 5}$ ἢ $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}$ τῆς δρ.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶνε· $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5}$ ἢ $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς.

Ἐκ τούτου πάλιν βλέπομεν, ὅτι ὁ διαιρετέος $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον.

Σημ. Ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς, ἤτοι ὁ $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}$, εἶνε πράγματι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$· διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{5}{6}$, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $\frac{3}{4}$· ἤτοι εἶνε $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{6}$ ἢ $\frac{3}{4}$ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν.

Καὶ τὸ πηλίκον μικτοῦ ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος εὑρίσκεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἤτοι εἶνε $2\frac{4}{5} : \frac{3}{4} = 2\frac{4}{5} \times \frac{4}{3}$. Διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{4}$, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $2\frac{4}{5}$. Πράγματι εἶνε $2\frac{4}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}$ ἢ $2\frac{4}{5}$ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

138. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.***

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ τρόπου τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν ἕπεται, ὅτι τὸ πηλίκον δύναται νὰ εἶνε ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Καὶ ἴσον μὲν θὰ εἶνε, ἂν ὁ διαιρέτης εἶνε ἡ ἀκεραία μονὰς 1· μεγαλύτερον δέ, ἂν ὁ διαιρέτης εἶνε μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος· μικρότερον δέ, ἂν ὁ διαιρέτης εἶνε μεγαλύτερος τῆς ἀκεραίας μονάδος.

139. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ μικτοῦ, τρέπομεν πάντοτε τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν· διότι ἄλλος τρόπος δὲν ὑπάρχει.***

Ἀσκήσεις.

$$2 : \frac{3}{8} \left(=5\frac{1}{3}\right), \quad \frac{3}{7} : \frac{4}{5} \left(=\frac{15}{28}\right)$$

$$5\frac{1}{3} : \frac{2}{3} \left(=8\right), \quad 5 : 2\frac{3}{4} \left(=1\frac{9}{11}\right)$$

$$\frac{6}{7} : 3\frac{1}{2} \left(=\frac{12}{49}\right), \quad 2\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5} \left(=\frac{35}{51}\right)$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{5} : \frac{2}{7} \quad \left(=1\right).$$

Σύνθετα κλάσματα.

140. Εἴδομεν (ἐδάφ. 102), ὅτι πᾶν κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Ὥστε τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων $\frac{3}{5} : 6$, $2\frac{5}{8} : 3$, $3 : \frac{4}{5}$, $\frac{4}{7} : \frac{2}{3}$ κτλ, δύνανται νὰ γραφῶσι καὶ ὡς κλάσματα, ἤτοι

$$\frac{\frac{3}{5}}{6}, \quad \frac{2\frac{5}{8}}{3}, \quad \frac{3}{\frac{4}{5}}, \quad \frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}} \text{ κτλ.}$$

Τὰ τοιαῦτα κλάσματα, τῶν ὁποίων ὁ εἷς τῶν ὅρων ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι δὲν εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὀνομάζομεν **σύνθετα κλάσματα**, τὰ δὲ ἔχοντα ὅρους ἀκεραίους ὀνομάζομεν πρὸς διάκρισιν **ἁπλᾶ**.

Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουσι πάσας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἐκτελοῦνται κατὰ τοὺς αὐτοὺς γνωστοὺς κανόνας.

Διὰ νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἤτοι εἶνε·

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4\times5} = \frac{3}{20}, \quad \frac{2}{\frac{3}{7}} = 2 : \frac{3}{7} = 2\times\frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

$$9\times\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = 9\times\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = 9\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{3} = \frac{24}{5} \text{ κτλ.}$$

141. Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν καὶ

ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ὁ εἷς μόνον τῶν ὅρων του εἶνε κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τούτου· ἐὰν δὲ καὶ οἱ δύο ὅροι του εἶνε κλάσματα, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν των. Ἤτοι εἶνε.

$$\frac{\frac{3}{4}}{5}=\frac{\frac{3}{4}\times 4}{5\times 4}=\frac{3}{5\times 4}\quad \text{(μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν)}$$

$$\frac{2}{\frac{3}{7}}=\frac{2\times 7}{\frac{3}{7}\times 7}=\frac{2\times 7}{3}\quad » \quad »$$

$$9\times\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=9\times\frac{\frac{2}{5}\times 5\times 4}{\frac{3}{4}\times 5\times 4}=9\times\frac{2\times 4}{3\times 5}\quad »$$

Σημ. Ἐὰν συμβῇ νὰ ἔχωσι καὶ οἱ δύο ὅροι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, παραλείπομεν αὐτόν. Ἐὰν πάλιν συμβῇ νὰ ἔχωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα.

Λύσεις προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

1) Μὲ $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{7}{9}$ τῆς ὀκᾶς ἔξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν;

Σημ. Τοιοῦτον πρόβλημα ἐλύσαμεν καὶ προηγουμένως.

Κατάταξις. $\frac{3}{5}$ δραχ. $\frac{7}{9}$ ὀκ.

$1 \qquad x$

Λύσις. Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἀφοῦ μὲ $\frac{3}{5}$ τῆς δρ. ἀγοράζομεν $\frac{7}{9}$ τῆς ὀκᾶς,

μὲ $\frac{1}{5}$ » » $\frac{7}{9\times 3}$ »

καὶ μὲ $\frac{5}{5}$ » » $\frac{7\times 5}{9\times 3}$ ἢ

$1\frac{8}{27}$ τῆς ὀκᾶς.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, καθὼς καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτό, λύομεν καὶ ἄνευ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἀλλὰ μόνον διὰ μιᾶς διαιρέσεως συμφώνως μὲ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 137. Ἤτοι ἔχομεν

$$\frac{7}{9} : \frac{3}{5} = \frac{7}{9} \times \frac{5}{3} \text{ (ἐδ 138)} = \frac{35}{27} = 1\frac{8}{27}.$$

2) Μὲ $6\frac{3}{10}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $10\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος· πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς;

Κατάταξις. $\frac{63}{10}$ δρ. $\frac{21}{2}$ πήχ.

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \chi \quad\quad 1$

Λύσις. Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ἐνθυμούμενοι νὰ ἀρχίζωμεν πάντοτε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον, ὑποκάτω τοῦ ὁποίου δὲν ὑπάρχει ἡ ἄγνωστος τιμὴ χ.

Ἀφοῦ τὰ $\frac{21}{2}$ τοῦ πήχεως ἀξίζουν $\frac{63}{10}$ τῆς δραχμῆς

τὸ $\frac{1}{2}$ » ἀξίζει $\frac{63}{10 \times 21}$ »

καὶ τὰ $\frac{2}{2}$, ἤτοι ὁ 1 πήχυς ἀξίζει $\frac{63 \times 2}{10 \times 21}$ ἢ $\frac{3}{5}$ τῆς δραχ.

Λύσις. Διὰ τῆς διαιρέσεως.

$$6\frac{3}{10} : 10\frac{1}{2} = \frac{63}{10} : \frac{21}{2} = \frac{63}{10} \times \frac{2}{21} = \frac{3}{5} \text{ τῆς δρ.}$$

3) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει $2\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς;

Κατάταξις, 1 ὀκᾶ $\frac{11}{5}$ δραχ.

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \chi \quad\quad \frac{3}{4}$

Λύσις. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον, πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν, καὶ ἔπειτα πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς, σκεπτόμενον ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ μὲ $\frac{11}{5}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν 1 ὀκᾶν

μὲ $\frac{1}{5}$ » » $\frac{1}{11}$ τῆς ὀκᾶς καὶ μὲ $\frac{5}{5}$ ἤτοι μὲ 1 δραχ. ἀγοράζ. $\frac{5}{11}$ τῆς ὀκᾶς

Ἀφοῦ μὲ 1 δραχμὴν » $\frac{5}{11}$ »

μὲ $\frac{1}{4}$ τῆς δραχμῆς » $\frac{5}{11\times4}$ »

καὶ μὲ $\frac{3}{4}$ » » $\frac{5\times3}{11\times4}$ ἢ $\frac{15}{44}$ »

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐδόθησαν δύο ὁμοειδεῖς τιμαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία (ἤτοι 2 $\frac{1}{5}$ τῆς δραχ.) εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη (ἤτοι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχ.) εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς μονάδος, ἤτοι τῶν $\frac{5\times3}{11\times4}$ ἢ $\frac{15}{44}$ τῆς ὀκᾶς. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς $\frac{5\times3}{11\times4}$ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{3}{4}:\frac{11}{5}$. Ὥστε γενικεύομεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐδαφίου 64 ὡς ἑξῆς·

142. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὰς πολλὰς μονάδας ἢ μέρος τῆς μονάδος, τοῦ ὁποίου τὴν ὁμοειδῆ τιμὴν ἔχομεν, κάμνομεν διαίρεσιν (μέτρησιν).***

Διαιρετέος εἶνε πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν ζητουμένων πολλῶν μονάδων ἢ τοῦ μέρους τῆς μονάδος, διαιρέτης δὲ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος. Ἀμφότεροι θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί, τὸ δὲ πηλίκον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν.

4) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος δίδομεν μίαν δραχμήν· πόσον θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 4 $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Κατάταξις. $\frac{5}{8}$ πήχ. 1 δρ.

4 $\frac{1}{2}$ x

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ κάμωμεν διαίρεσιν, μέτρησιν, καὶ

καὶ ὅσας φορὰς ὁ $\frac{5}{8}$ χωρεῖ εἰς τὸν $4\frac{1}{2}$, τόσας δραχμὰς θὰ δώσωμεν,

ἤτοι $4\frac{1}{2} : \frac{5}{8} = \frac{9}{2} : \frac{5}{8} = \frac{9}{2} \times \frac{8}{5} = 7\frac{1}{5}$ τῆς δραχ.

5) Τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε 141· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶνε 141

τὸ $\frac{1}{8}$ » » » $\frac{141}{3}$

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, » $\frac{141\times8}{3}$ ἢ 376.

Ἀλλ' ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς $\frac{141\times8}{3}$ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $141 : \frac{3}{8}$. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

143. ***Ὅταν γνωρίζωμεν μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ὅλον τὸν ἀριθμόν, κάμνομεν διαίρεσιν.***

Διαιρετέος εἶνε πάντοτε τὸ γνωστὸν μέρος τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ καὶ διαιρέτης τὸ κλάσμα, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται τὸ μέρος τοῦτο.

6) Τὰ $\frac{9}{16}$ τῆς ἡλικίας ἑνὸς ἀνθρώπου εἶνε 27 ἔτη· πόση εἶνε ἡ ἡλικία αὐτοῦ; $\left(27 : \frac{9}{16}\right.$ ἢ 48 ἐτῶν$\left.\right)$.

7) Μὲ $\frac{7}{20}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἑξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{7}{9}$ τῆς δραχμῆς;

Κατάταξις. $\frac{7}{20}$ δραχ. $\frac{3}{5}$ ὀκ.

$\frac{7}{9}$ χ

Λύσις. Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἀφοῦ μὲ $\frac{7}{20}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς,

μὲ $\frac{1}{20}$ » » $\frac{3}{5\times7}$ »

καὶ μὲ $\frac{20}{20}$, ἤτοι μὲ 1 δρ., ἀγοράζομεν $\frac{3\times 20}{5\times 7}$ τῆς ὀκᾶς·

Ἀφοῦ μὲ 1 δραχμὴν » $\frac{3\times 20}{5\times 7}$ »

μὲ $\frac{1}{9}$ τῆς δραχμῆς » $\frac{3\times 20}{5\times 7\times 9}$ »

καὶ μὲ $\frac{7}{9}$ » » $\frac{3\times 20\times 7}{5\times 7\times 9}$ »

ἢ $1\frac{1}{3}$ τῆς ὀκᾶς μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν· πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 137 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{3}{5}:\frac{7}{20}=\frac{3}{5}\times\frac{20}{7}$ ἢ $\frac{12}{7}$ τῆς ὀκᾶς. Ἔπειτα εὑρίσκομεν πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{7}{9}$ τῆς δραχμῆς, πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 124 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{12}{7}\times\frac{7}{9}$ ἢ $1\frac{1}{3}$ τῆς ὀκᾶς.

8) Γυνή τις ἠγόρασεν 7 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἔδωκεν $9\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς· πόσον θὰ ἔδιδεν, ἂν ἠγόραζεν $8\frac{1}{3}$ τοῦ πήχεως;

Κατάταξις. 7 πήχ. $\frac{49}{5}$ δρχ.

$\frac{25}{3}$ χ

Λύσις. Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἀφοῦ οἱ 7 πήχεις ἀξίζουν $\frac{49}{5}$ τῆς δραχμῆς

ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει $\frac{49}{5\times 7}$ »

τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πήχ. » $\frac{49}{5\times 7\times 3}$ »

καὶ τὰ $\frac{25}{3}$ » ἀξίζουν $\frac{49\times 25}{5\times 7\times 3}$ » ἢ $11\frac{2}{3}$ τῆς δραχ.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς. Ὁ πῆχυς ἀξίζει $9\frac{4}{5}:7$ ἢ $\frac{7}{5}$ τῆς δραχμῆς (ἴδε ἐδάφ. 135), ἐπομένως οἱ $8\frac{1}{3}$ τοῦ πήχ. ἀξίζουν $\frac{7}{5}\times 8\frac{1}{3}$ ἢ $11\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις 3 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἔδωκε $17\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; $\left(5\frac{4}{5}\right.$ τῆς δρ.$\left.\right)$.

2) Ἠγόρασέ τις $\frac{15}{16}$ τῆς ὀκᾶς καφὲ καὶ ἔδωκεν 6 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ; $\left(6\frac{2}{5}\right.$ τῆς δρ.$\left.\right)$.

3) Μὲ $2\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{9}{10}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν;

$\left(\frac{3}{8}\right.$ τῆς ὀκᾶς$\left.\right)$.

4) Ἠγόρασέ τις 120 δράμια βουτύρου καὶ ἔδωκε $4\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ; (14 δρ.).

5) Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος ἀξίζῃ $4\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς, πόσον ἀγοράζομεν μὲ 12 δραχμάς; $\left(2\frac{1}{2}\right.$ ὀκ.$\left.\right)$.

6) Γυνή τις ἀντήλλαξεν 9 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς ἀξίζει $5\frac{1}{4}$ τῆς δραχμῆς, μὲ ἄλλο ὕφασμα, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς ἀξίζει 6 δρ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ἄλλο ὕφασμα;

$\left(7\frac{7}{8}\right)$.

7) Ἠγόρασέ τις πορτοκάλλια πρὸς 13 λεπτὰ τὰ δύο· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 10 λ. ἕκαστον καὶ ἐκέρδησε 14 δρ. Πόσα πορτοκάλλια ἠγόρασε;

Λύσις. Ἕκαστον πορτοκάλλιον ἠγόρασε πρὸς $\frac{13}{2}$ ἢ $6\frac{1}{2}$ λεπτά, ἑπομένως ἀπὸ ἕκαστον ἐκέρδησε $3\frac{1}{2}$ λ. Ὅσας λοιπὸν φορὰς τὰ $3\frac{1}{2}$ λ. χωροῦν εἰς τὰς 14 δρ. ἢ 1400 λ., τόσα πορτοκάλλια ἠγόρασεν, ἤτοι 400.

8) Μὲ 5 δραχ. ἀγοράζομεν 3 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς;

($\frac{9}{20}$ τῆς ὀκᾶς, ἤτοι 180 δράμια).

9) Διὰ νὰ ἀγοράσῃ τις 4 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, δίδει 15 δραχμάς. Πόσον θὰ δώσῃ διὰ 9 πήχεις; ($33\frac{3}{4}$ δρ.).

10) Ἀτμόπλοιον διατρέχει 15 μίλια εἰς $1\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην, ἀπέχουσαν 140 μίλια; ($11\frac{2}{3}$ ὥρ.).

11) Διὰ νὰ ἀγοράσῃ τις $2\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἐλαίου, δίδει $7\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον θὰ δώσῃ διὰ 300 δράμια; ($2\frac{2}{5}$ τῆς δρ.).

12) Στρατιῶταί τινες, διὰ νὰ περάσουν 20 ἡμέρας, χρειάζονται 5700 ὀκ. ἄρτου, ἕκαστος τῶν ὁποίων λαμβάνει τὴν ἡμέραν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσοι εἶνε οἱ στρατιῶται; (380).

13) Ἠγόρασέ τις $3\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς σάπωνος πρὸς $2\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς τὴν ὀκᾶν καὶ $2\frac{1}{2}$ ὀκ. ἐλαίου καὶ ἔδωκεν ἐν ὅλῳ $16\frac{1}{5}$ τῆς δρ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου; (3 δρ.).

14) Παιδίον τι ἔδωκεν εἰς τινα πτωχὸν τὰ $\frac{2}{9}$ τῶν χρημάτων του καὶ τοῦ ἔμειναν 105 λεπτά. Πόσα λεπτὰ εἶχεν;

Λύσις. Ὅλα τὰ χρήματά του θὰ παρασταθῶσι διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{9}{9}$. Ἀφοῦ λοιπὸν ἔδωκε τὰ $\frac{2}{9}$, τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{7}{9}$ τῶν χρημάτων του, τὰ ὁποῖα εἶνε 105 λεπτά, ἐπομένως τὸ $\frac{1}{9}$ εἶνε $\frac{105}{7}$ καὶ τὰ $\frac{9}{9}$ εἶνε $\frac{105\times9}{7}$ ἢ 135 λεπτά.

15) Γυνή τις ἔδωκε τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν ὅσων εἶχε μαζί της χρημάτων καὶ 2 δρ. ἀκόμη, διὰ νὰ ἀγοράσῃ ὕφασμά τι, καὶ τῆς ἔμειναν 16 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἶχε μαζί της καὶ πόσον ἔδωκε διὰ τὸ ὕφασμα;

Λύσις. Ἐὰν δὲν ἔδιδε τὰς 2 δραχμάς, θὰ τῆς ἔμενον 18 δρ. Ὥστε τὰ $\frac{3}{8}$ τῶν χρημάτων της εἶνε 18 δρ. καὶ ἑπομένως ὅλα τὰ χρήματά της ἦσαν 48 δραχμαί, διὰ δὲ τὸ ὕφασμα ἔδωκε 48 — 16 ἢ 32 δρ.

16) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ πρὸς 3 $\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς τὸν πῆχυν καὶ τοῦ ἔμειναν 20 πήχεις. Πόσον ἔλαβεν ἐκ τοῦ πωληθέντος ὑφάσματος; (42 δρ.).

17) Ἐργάτης τις ἐξώδευε τὴν ἡμέραν τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ ἡμερομισθίου του καὶ μετὰ 16 ἡμερῶν ἐργασίαν εἶχεν οἰκονομήσει 64 δρ. Πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιόν του;

Λύσις. Τὴν ἡμέραν ᾠκονόμει 64 : 16, ἤτοι 4 δραχ. Ὥστε τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ ἡμερομισθίου του εἶνε 4 δρ. καὶ ἑπομένως ὅλον τὸ ἡμερομίσθιόν του εἶνε 14 δρ.

18) Ποιμήν τις ἐπώλησεν εἴς τινα τὰ $\frac{3}{7}$ τῶν προβάτων του, εἰς ἄλλον δὲ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου· ἔπειτα εὗρεν ὅτι τοῦ ἔμειναν 144 πρόβατα. Πόσα πρόβατα εἶχεν ἀπ' ἀρχῆς καὶ πόσα ἐπώλησεν εἰς ἕκαστον;

Λύσις. Ἀφοῦ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$, τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{4}{7}$· ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τούτου ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$, ἑπομένως τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$ (ἐδ. 131) ἢ $\frac{12}{35}$. Ὥστε τὰ $\frac{12}{35}$ τῶν προβάτων του εἶνε 144 καὶ ἑπομένως ὅλα τὰ πρόβατά του ἦσαν 420. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ἐπώλησεν εἰς τὸν πρῶτον 180 καὶ εἰς τὸν δεύτερον 96.

19) Δύο γυναῖκες ὑφαίνουσι χωριστὰ τὸ αὐτὸ ὕφασμα· ἡ μία

τούτων ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως, ἡ δὲ ἄλλη τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πήχεως. Ἐὰν ἀρχίσουν συγχρόνως τὴν ἐργασίαν των, μετὰ πόσας ὥρας θὰ ὑφάνουν μαζὶ 4 πήχεις;

Λύσις. Εἰς μίαν ὥραν ὑφαίνουν μαζὶ τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ πήχεως, ἐπομένως διὰ τοὺς 4 πήχ. θὰ χρειασθοῦν τόσας ὥρας, ὅσας φορὰς ὁ $\frac{5}{6}$ χωρεῖ εἰς τὸν 4 ἤτοι $4 : \frac{5}{6}$ ἢ $4 \frac{4}{5}$ τῆς ὥρας.

20) Χωρική τις ἔφερεν εἰς μίαν πόλιν 240 αὐγά· ἐκ τούτων ἐπώλησεν εἴς τινα τὰ $\frac{3}{5}$ πρὸς 15 λεπτὰ ἕκαστον, τὰ δὲ ὑπόλοιπα ἐπώλησεν εἰς ἄλλον πρὸς 35 λ. τὸ ζεῦγος· κατόπιν μὲ τὰ χρήματα ἅτινα ἔλαβεν, ἠγόρασεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 24 πήχεις. Ζητεῖται πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν. (160 λεπτά.)

21) Ἠγόρασέ τις 3000 λεμόνια πρὸς 35 δραχμὰς τὴν χιλιάδα· κατόπιν ἐπώλησεν εἴς τινα τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν πρὸς 20 λεπτὰ τὰ τρία, εἰς ἄλλον δὲ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 70 λεπτὰ τὴν δωδεκάδα. Πόσον ἐκέρδησεν; (80 δρ.)

22) Ἔμπορός τις ἐπώλησε δύο εἴδη ὑφασμάτων· ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος ἐπώλησε $12 \frac{1}{2}$ πήχεις πρὸς 4 δραχ. τὸν πῆχυν, ἀπὸ δὲ τὸ δεύτερον ἐπώλησε 16 πήχεις καὶ ἔλαβεν $8 \frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου. Πόσον ἐπώλησε τὸν πῆχυν τοῦ δευτέρου ὑφάσματος; ($2 \frac{3}{5}$ τῆς δρ.)

23) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐμοίρασαν ἓν οἰκόπεδον ὡς ἑξῆς· ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο 350 πήχεις. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ οἰκόπεδον καὶ πόσους πήχεις ἔλαβεν ἕκαστος τῶν ἄλλων;

Λύσις. Οἱ δύο πρῶτοι ἔλαβον ὁμοῦ τὰ $\frac{13}{20}$ τοῦ οἰκοπέδου, ἑπομένως ὁ τρίτος ἔλαβε τὸ ὑπόλοιπον $\frac{7}{20}$, τὸ ὁποῖον εἶνε 350 πήχεις· ὥστε ὅλον τὸ οἰκόπεδον εἶνε 1000 πήχεις. Ὁ πρῶτος ἔλαβεν $1000 \times \frac{2}{5}$ ἤτοι 400 πήχεις καὶ ὁ δεύτερος $1000 \times \frac{1}{4}$, ἤτοι 250 πήχεις.

24) Οἰκογενειάρχης τις ἐξώδευσεν εἰς ἕνα μῆνα τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς μισθοδοσίας του δι' ἐνοίκιον, τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῆς διὰ τροφὴν καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ δι' ἄλλα ἔξοδα, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ μηνὸς τοῦ ἔμειναν 80 δραχμαί. Ζητεῖται πόση εἶνε ἡ μηνιαία μισθοδοσία του καὶ πόσας δραχμὰς ἐξώδευσε δι' ἐνοίκιον, διὰ τροφὴν καὶ δι' ἄλλα ἔξοδα.

(600, 100, 360, 60).

25) Μία λάμπα καίει καθ' ὥραν 20 δράμια πετρελαίου καὶ ἐπὶ ἕνα μῆνα (30 ἡμ.) ἔμενεν ἀνημμένη καθ' ἑσπέραν ἐπὶ $3\frac{1}{2}$ ὥρας, ὁ δὲ φωτισμὸς αὐτῆς ἐκόστισε τὸν μῆνα $10\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἐκόστιζεν ἡ ὀκᾶ τοῦ πετρελαίου; (2 δρ.)

Νοεραὶ ἀσκήσεις.

Εὕρεσις τῆς ἀξίας δραμίων ἐκ τῆς ἀξίας τῆς ὀκᾶς.

144. Ὅταν ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζῃ 1,2,3,4,5 κτλ. δραχμάς, εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὅτι τὸ ἓν δράμιον ἀξίζει $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}$ κτλ. τοῦ λεπτοῦ. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

Ὅταν ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς ἀποτελῆται μόνον ἀπὸ ἀκέραιον ἀριθμὸν δραχμῶν καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν νοερῶς τὴν ἀξίαν τοῦ ἑνὸς δραμίου, διαιροῦμεν τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς διὰ 4 καὶ τὸ πηλίκον παριστᾷ λεπτά.

Εὑρεθείσης δὲ τῆς ἀξίας τοῦ ἑνὸς δραμίου, εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ νοερῶς τὴν ἀξίαν πολλῶν δραμίων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Παραδ. χάριν.

1) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 28 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ 9 δράμια;

Λύσις. Τὸ ἓν δράμιον ἀξίζει 28 : 4, ἤτοι 7 λεπτά, ἑπομένως τὰ 9 δράμια ἀξίζουν 7×9, ἤτοι 63 λεπτά.

2) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 14 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ 12 δράμια;

Λύσις. Τὸ ἓν δράμιον ἀξίζει $3\frac{1}{2}$ λεπτὰ (διότι εἶνε $14:4 = 3\frac{2}{4} = 3\frac{1}{2}$), ἑπομένως τὰ 12 δράμια ἀξίζουν $12 \times 3\frac{1}{2}$, ἤτοι 42 λεπτὰ (πολλαπλασιάζομεν τὸν 12 πρῶτον ἐπὶ 3 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 36 προσθέτομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 12, τὸ ὁποῖον εἶνε 6).

Παρατήρησις. Εἴτε τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς διαιρέσωμεν διὰ 4 καὶ μὲ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δραμίων εἴτε τὸν ἀριθμὸν τῶν δραμίων διαιρέσωμεν διὰ 4 καὶ μὲ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς, τὸ αὐτὸ γινόμενον εὑρίσκομεν. Διὰ τοῦτο, χάριν εὐκολίας, προτιμῶμεν νὰ διαιρῶμεν διὰ 4 τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον, μὲ τοῦ ὁποίου τὸ πηλίκον δυνάμεθα εὐκόλως νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἄλλον ἀριθμόν. Παραδ. χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν 14 διὰ 4 καὶ μὲ τὸ πηλίκον $3\frac{1}{2}$ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 12, προτιμῶμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 12 διὰ 4 καὶ μὲ τὸ πηλίκον 3 νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 14, ὅτε πάλιν εὑρίσκομεν 42 λ.

3) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 7 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ 240 δράμια;

Λύσις. Διαιροῦμεν τὸν 240 διὰ 4 (ὡς διαιρετόν) καὶ μὲ τὸ πηλίκον 60 πολλαπλασιάζομεν τὸν 7 καὶ εὑρίσκομεν 420 λ. ἢ 4 δρ. καὶ 20 λ.

Ὅταν ὅμως ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς ἀποτελῆται μόνον ἀπὸ λεπτὰ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν δεκάδων τινῶν δραμίων, παραλείπομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἀπὸ τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς, καθὼς καὶ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραμίων, καὶ πράττομεν, ὅπως καὶ ἀνωτέρω. Π. χ.

4) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 90 λεπτά. Πόσον ἀξίζουν τὰ 320 δράμια;

Λύσις. Παραλείπομεν τὸ ψηφίον 0 τῶν μονάδων των καὶ ἔχομεν τότε τοὺς ἀριθμοὺς 9 καὶ 32. Τὸν ἕνα τούτων διαιροῦμεν διὰ 4, προτιμῶμεν τὸν 32 ὡς διαιρετόν, καὶ μὲ τὸ πηλίκον 8 πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄλλον, ἤτοι τὸν 9, καὶ εὑρίσκομεν 72 λ. Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν 9 διὰ 4 καὶ μὲ τὸ πηλίκον $2\frac{1}{4}$ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 32.

Ἐὰν ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς ἀποτελῆται ἀπὸ δραχμὰς καὶ λεπτά, τρέπομεν τότε καὶ τὰς δραχμὰς εἰς λεπτὰ καὶ πράττομεν, ὡς ἀνωτέρω.

Σημ. Ἐὰν συμβῇ τὸ παραλειφθὲν ψηφίον τῶν μονάδων ἐκ τῆς ἀξίας τῆς ὀκᾶς νὰ εἶνε 5, κάμνομεν τότε λάθος 1 λεπτὸν εἰς κάθε 80 δράμια. Ἀλλὰ τοιαύτην ἀκρίβειαν δὲν παρατηροῦμεν συνήθως εἰς τὰ καθ' ἑκάστην ἀγοραζόμενα πράγματα. Ἐὰν πάλιν συμβῇ τὸ παραλειφθὲν ψηφίον τῶν μονάδων ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δραμίων νὰ εἶνε 5, κάμνομεν τότε λάθος $1\frac{1}{4}$ τοῦ λεπτοῦ εἰς κάθε μίαν δραχμὴν τῆς ἀξίας τῆς ὀκᾶς καὶ ἑπομένως μίαν πεντάραν εἰς κάθε 4 δρ.

Τύποι πρὸς λύσιν στοιχειωδῶν προβλημάτων.

145. Πότε στοιχειῶδες πρόβλημά τι λύεται δι' ἑνὸς μόνου πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς μόνης διαιρέσεως (μερισμοῦ ἢ μετρήσεως), ἔχομεν τοὺς γνωστοὺς κανόνας τῶν ἐδαφίων 124, 137 καὶ 142, οἱ ὁποῖοι ἐξήχθησαν κατόπιν συλλογισμοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ γίνονται δι' οἱουσδήποτε ἀριθμούς, διὰ τοῦτο πρὸς συντομίαν παριστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ἀλλ' ἕκαστον ἀριθμὸν πρέπει πρὸς διάκρισιν νὰ τὸν παριστῶμεν καὶ δι' ἰδίου γράμματος. Παραδ. χάριν, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν, ὅτι μὲ 20 δραχ. ἀγοράζομεν 4 ὀκ. ἐξ ἑνὸς πράγματος, λέγομεν μὲ α δραχμὰς ἀγοράζομεν β ὀκάδας ἢ ἀντὶ α καὶ β δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱαδήποτε ἄλλα γράμματα, ἀλλὰ διάφορα. Ἐκ τῆς λύσεως λοιπὸν τῶν στοιχειωδῶν τούτων προβλημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται διὰ γραμμάτων, θὰ μάθωμεν ἄλλον τρόπον σύντομον, διὰ τοῦ ὁποίου θὰ λύωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα.

Πρόβλημα. Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται α δραχμάς. Πόσον τιμῶνται β ὀκάδες;

Λύσις. Ἐὰν ἠγοράζομεν π. χ. 5 ὀκάδας, θὰ ἐσκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται α δραχμάς, αἱ 5 ὀκ. θὰ τιμῶνται 5 φορὰς περισσότερον, ἤτοι α × 5 δρ. Οὕτω σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὰς β ὀκάδας λέγοντες· ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται α δραχμάς, αἱ β ὀκ. θὰ τιμῶνται β φορὰς περισσότερον, ἤτοι α × β δραχμάς.

Ἡ σημείωσις ἀριθμητικῆς πράξεως ἐπὶ γραμμάτων, ὡς εἶνε ἡ α × β, λέγεται **τύπος.** Ἐὰν τώρα μᾶς δοθῶσιν οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ ὁμοίου προβλήματος πρὸς τὸ ἀνωτέρω καὶ θέσωμεν αὐτοὺς ἐν τῷ τύπῳ α × β ἀντὶ τῶν γραμμάτων α καὶ β, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ ζητούμενον, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς ἀνωτέρω συλλογισμούς. Παρ. χάριν, ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 4 δρ., πόσον τιμῶνται $9\frac{1}{2}$ ὀκάδες; Θέτομεν ἐν τῷ τύπῳ α × β ἀντὶ τοῦ α τὸν 4 καὶ ἀντὶ τοῦ β τὸν $9\frac{1}{2}$ καὶ ἔχομεν $4 \times 9\frac{1}{2}$, ἤτοι 38 δραχμάς.

Πρόβλημα. Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν β ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν α δραχμάς. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν μίαν ὀκᾶν;

Λύσις. Ἐὰν μὲ τὰς α δραχ. ἠγοράζομεν π. χ. 5 ὀκάδας, θὰ ἐσκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ διὰ 5 ὀκ. δίδομεν α δραχμάς, διὰ τὴν 1 ὀκᾶν θὰ δώσωμεν 5 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{α}{5}$ ἢ α : 5. Οὕτω σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὰς β ὀκάδας λέγοντες· ἀφοῦ διὰ β ὀκάδας δίδομεν α δραχμάς, διὰ 1 ὀκᾶν θὰ δώσωμεν β φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{α}{β}$ ἢ α : β. Ἐὰν τώρα μᾶς δοθῶσιν οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ ὁμοίου προβλήματος πρὸς τὸ ἀνωτέρω καὶ θέσωμεν αὐτοὺς ἐν τῷ τύπῳ $\frac{α}{β}$ ἢ α : β ἀντὶ τῶν γραμμάτων α καὶ β, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα. Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει β δραχμάς. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ α δραχμάς.

Λύσις. Ἐὰν ὁ πῆχυς ἤξιζε π. χ. 2 δραχμάς, θὰ ἐσκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ὅσας φορὰς αἱ 2 δραχμαὶ χωροῦν εἰς τὰς α δραχμάς, τόσους πήχεις ἀγοράζομεν, ἤτοι $\frac{α}{2}$ ἢ α : 2. Οὕτω σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὰς β δραχμὰς λέγοντες· ὅσας φορὰς αἱ β δραχμαὶ χωροῦν εἰς τὰς α δραχμάς, τόσους πήχεις ἀγοράζομεν, ἤτοι $\frac{α}{β}$ ἢ α : β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

146. Εἴπομεν (ἐδάφ. 85), ὅτι ***κλασματικὴ μονὰς λέγεται ἓν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς, δηλ. ἓν πρᾶγμα ἀκέραιον.*** Ὅσαι ὅμως τῶν κλασματικῶν μονάδων ἔχουν

παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, ὡς εἶνε αἱ ἑξῆς κατὰ σειρὰν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κτλ., λέγονται **δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες** ἢ ἁπλῶς **δεκαδικαὶ μονάδες**· διότι ἑκάστη εἶνε δεκαπλασία τῆς ἀμέσως ἑπομένης της. Τὸ δέκατον εἶνε δεκαδικὴ μονὰς ***πρώτης τάξεως***, τὸ ἑκατοστὸν ***δευτέρας τάξεως*** καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται πλῆθος δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων (ἢ καὶ μία δεκαδικὴ κλασματικὴ μονάς). Παραδ. χάριν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{375}{1000}$ κτλ. εἶνε δεκαδικὰ κλάσματα. Τὰ δὲ ἄλλα κλάσματα, τὰ μὴ ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, λέγονται πρὸς διάκρισιν ***κοινὰ κλάσματα.***

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὡς ἀκεραίων.

147. Εἴδομεν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅτι μία μονὰς τάξεώς τινος, ἐπαναλαμβανομένη δέκα φοράς, γίνεται μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρω δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας, διὰ τοῦτο τὰ δεκαδικὰ κλάσματα δυνάμεθα νὰ γράφωμεν, καθὼς καὶ τοὺς ἀκεραίους, στηριζόμενοι εἰς τὴν αὐτὴν συνθήκην τοῦ ἐδαφίου 15, ἤτοι· ***πᾶν ψηφίον, τὸ ὁποῖον γράφεται πρὸς τὰ δεξιὰ ἄλλου, παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, καὶ τἀνάπαλιν.***

Κατὰ τὴν συνθήκην λοιπὸν ταύτην μετὰ τὴν γραφὴν τῶν ἁπλῶν μονάδων πρέπει νὰ γράφωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν τὰ δέκατα τῆς μονάδος ὡς δεκάκις μικρότερα αὐτῆς (διότι τὸ $\frac{1}{10}$ εἶνε δέκα φορὰς μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1), μετὰ τὰ δέκατα νὰ γράφωμεν τὰ ἑκατοστὰ αὐτῆς ὡς δεκάκις μικρότερα τῶν δεκάτων, μετὰ τὰ ἑκατοστὰ νὰ γράφωμεν τὰ χιλιοστὰ καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἑκάστη δὲ τάξις δὲν θὰ ἔχῃ μονάδας περισσοτέρας τῶν 9· διότι δέκα μονάδες τάξεώς τινος κάμνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἐὰν δὲ μονάδες τάξεώς τινος ἐλλείπωσιν, νὰ ἀναπληρῶμεν τὰς θέσεις των διὰ μηδενικῶν, ὅπως πράττωμεν καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἀλλὰ διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ τὰς δεκαδικάς, γράφομεν μετὰ τὸν ἀκέραιον ὑποδιαστολὴν (,)· ἐὰν ὅμως δὲν ὑπάρχῃ ἀκέραιος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν του.

Παραδ. χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 5 ἀκεραίας μονάδας, 3 δέκατα καὶ 6 ἑκατοστὰ τῆς ἀκεραίας μονάδος, γράφεται ὡς ἑξῆς 5,36· ἀντὶ νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς $5+\frac{3}{10}+\frac{6}{100}$ ἢ $5+\frac{30}{100}+\frac{6}{100}$ ἢ $5\frac{36}{100}$ ἢ $\frac{536}{100}$. Ὥστε εἶνε $5{,}36=\frac{536}{100}$.

Ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς 2 δέκατα καὶ 4 χιλιοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς· 0,204 (ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου καὶ 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοστῶν, διότι δὲν ἐδόθησαν τοιαῦτα), ἀντὶ νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς· $\frac{2}{10}+\frac{4}{1000}$ ἢ $\frac{200}{1000}+\frac{4}{1000}$ ἢ $\frac{204}{1000}$. Ὥστε εἶνε $0{,}204=\frac{204}{1000}$.

Ὅταν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα γράφωνται ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὡς εἶνε οἱ 5,36 καὶ 0,204, τότε οὗτοι λέγονται ἰδιαιτέρως **δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ** (ἀντὶ δεκαδικὰ κλάσματα). Πᾶς λοιπὸν δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, ἀπὸ τὸ ἀκέραιον (ἂν ἔχῃ) καὶ ἀπὸ τὸ δεκαδικόν. Τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους λέγονται πρὸς διάκρισιν **δεκαδικὰ ψηφία**.

Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι εἶνε $5{,}36=\frac{536}{100}$ καὶ $0{,}204=\frac{204}{1000}$. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι

148. ***Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ παραλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ νὰ γράψωμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ νὰ γράψωμεν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός.*** Καὶ τἀνάπαλιν.

149. ***Πᾶν κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμητὴν χωριστὰ καὶ νὰ χωρίσωμεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ αὐτοῦ δι' ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.***

Ἐὰν ὅμως συμβῇ νὰ μὴ φθάνωσι τὰ ψηφία διὰ νὰ χωρίσωμεν, ὅσα χρειάζονται, γράφομεν τότε πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ μηδενικὰ τόσα, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη ψηφία καὶ ἓν ἀκόμη μηδενικὸν διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.

Παραδ. χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{35}{1000}$ γράφεται ὡς ἑξῆς 0,035· διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμητοῦ μηδενικά, τοῦτο δὲν βλάπτει τὸν ἀριθμόν, ἤτοι 0035· τώρα χωρίζομεν τρία ψηφία, ἤτοι 0,035.

Ἰδιότης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

150. Ἔστω, παραδ. χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,26· ἐὰν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ μηδενικά, ἤτοι 5,260 ἢ 5,2600 κτλ., οἱ νέοι οὗτοι ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι μὲ τὸν 5,26. Διότι ἡ ἀξία ἑκάστου δεκαδικοῦ ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν ἔχει ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, ἤτοι τὸ πρῶτον ψηφίον 2 μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν παριστᾷ δέκατα, τὸ δεύτερον ψηφίον 6 παριστᾷ ἑκατοστὰ καὶ οὕτω καθεξῆς· ἀλλὰ καὶ μετὰ τὴν γραφὴν τῶν μηδενικῶν ἡ θέσις τῶν δεκαδικῶν τούτων ψηφίων δὲν ἤλλαξεν, ἑπομένως παριστῶσι τὴν αὐτὴν ἀξίαν. Τοῦτο γίνεται φανερὸν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς τούτους ἀριθμοὺς ὡς κλάσματα· διότι εἶνε $\frac{526}{100}=\frac{5260}{1000}=\frac{52600}{10000}$ κτλ. (ἐδάφ. 100). Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, ἢ παραλείψωμεν τοιαῦτα ἀπὸ τὰ δεξιὰ αὐτοῦ (ἂν ὑπάρχωσιν).

Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης δυνάμεθα νὰ γράφωμεν οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ὡς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ μηδενικά. Παραδ. χάριν, ὁ ἀκέραιος 5 γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς 5,0 ἢ 5,00 κτλ.

Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

151. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 8,375· ἐπειδὴ εἶνε $8{,}375= 8+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}$ ἢ $8\frac{375}{1000}$ (μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων) ἢ $\frac{8375}{1000}$ (μετὰ τὴν τροπὴν τοῦ μικτοῦ εἰς κλάσμα), διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν αὐτὸν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους.

1ον) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ χωριστὰ ἕκαστον δεκαδικὸν ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του, ἤτοι 8 ἀκέραιαι μονάδες ἢ ἁπλῶς ἀκέραια, 3 δέκατα, 7 ἑκατοστὰ καὶ 5 χιλιοστά. 2ον) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου, ἤτοι 8 ἀκέραια καὶ 375 χιλιοστά· καὶ 3ον) Ἀπαγγέλλομεν ὅλον τὸν ἀριθμὸν ὡς ἀκέραιον, χωρὶς δηλ. νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ εἰς τὸ τέλος λέγομεν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου· ἤτοι 8375 χιλιοστά.

Συνήθως μεταχειριζόμεθα τοὺς δύο τελευταίους τρόπους πρὸς ἀπαγγελίαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ δεκαδικὸν μέρος δὲν ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία. Ὅταν ὅμως ἔχῃ, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τριψήφια (συνήθως) τμήματα, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς· ἔπειτα δὲ ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος (ἂν ἔχῃ) καὶ χωριστὰ ἕκαστον τμῆμα μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου. Τὸ τελευταῖον τμῆμα δυνατὸν νὰ εἶνε μονοψήφιον ἢ διψήφιον.

Ἔστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 15,3465895. Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα διὰ στιγμῶν (.), ἤτοι 15,346 589 5 καὶ ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς· 15 ἀκέραια 346 χιλιοστά, 589 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 5 δεκάκις ἑκατομμυριοστά.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ὅταν γράψωμεν μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ (ἴδ. 150) διὰ τοῦτο τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς· 50 ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστὰ ἢ 500 δισεκατομμυριοστά.

Γραφὴ ἀπαγγελλομένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

152. Διὰ νὰ γράφωμεν εὐκόλως δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον κατὰ τὸν ἀνωτέρω συνήθη δεύτερον ἢ τρίτον τρόπον, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα τοῦτο. Ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστὴς τοῦ ὡς κλάσματος ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ, τόσα δεκαδικὰ ψηφία πρέπει νὰ ἔχωμεν. Ἐὰν ὅμως τὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δὲν φθάνουν, γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη, καὶ ἓν μηδενικὸν ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.

Ἔστω π. χ. νὰ γραφῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 6 ἀκέραια καὶ 5 χιλιοστά. Γράφομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον 6 καὶ χωρίζομεν τοῦτον δι' ὑποδιαστολῆς· ἔπειτα ἐνθυμούμεθα, ὅτι ὁ χίλια γράφεται μὲ τρία μηδενικά, ἑπομένως τρία δεκαδικὰ ψηφία πρέπει νὰ ἔχωμεν, ἐπειδὴ ὅμως μᾶς ἐδόθη ἓν μόνον ψηφίον, ἤτοι ὁ 5, διὰ τοῦτο γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ δύο μηδενικά, ἤτοι 6,005.

Ὡσαύτως διὰ νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 15 ἑκατοντάκις χιλιοστά, πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ἑκατὸν χιλιάδες γράφεται μὲ πέντε μηδενικὰ (ὁ ἑκατὸν μὲ δύο μηδενικὰ καὶ ὁ χίλια μὲ τρία, ἐν ὅλῳ πέντε μηδενικά), ἐπειδὴ ὅμως μᾶς ἐδόθησαν δύο μόνον ψηφία, ἤτοι ὁ 15, διὰ τοῦτο θὰ γράψωμεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 15 τρία μηδενικὰ καὶ ἓν ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος, ἤτοι 0,00015.

Ὡσαύτως ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 8 ἑκατομμυριοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς 0,000008· διότι τὸ ἑκατομμύριον γράφεται μὲ ἓξ μηδενικά.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

153. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν αὐτούς, ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, προσέχοντες ὅμως νὰ γράφωμεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν, ἤτοι χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τὸ ἀκέραιον.***

Ἔστω π.χ. νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 2,723 54,6 καὶ 0,1256.
Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 2,723 \\ 54,6 \\ 0,1256 \\ \hline 57,4486 \end{array}$$

Σημ. Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως, καθὼς καὶ τῶν λοιπῶν πράξεων, γίνεται ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

1 4. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, ἀφαιροῦμεν ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, προσέχοντες ὅμως νὰ γράφωμεν τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· εἰς δὲ τὴν διαφορὰν θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν, ἤτοι χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τὸ ἀκέραιον.***

Ἔστω π. χ. νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,567 ἀπὸ τὸν 23,7. Ὡσαύτως ὁ 0,6234 ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 23,700 \\ 3,567 \\ \hline 20,133 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,0000 \\ 0,6234 \\ \hline 0,3766 \end{array}$$

Ἐγράψαμεν μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μειωτέου, διὰ νὰ ἔχωσιν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία μὲ τὸν ἀφαιρετέον· τοῦτο δὲν βλάπτει (ἐδ. 150). Δυνάμεθα ὅμως καὶ νὰ παραλείψωμεν ταῦτα, ἀρκεῖ μόνον νὰ φανταζώμεθα ταῦτα ὡς γεγραμμένα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Μαθητής τις ἠγόρασε τρία βιβλία· διὰ τὸ ἓν ἔδωκε δρ. 2,85, διὰ τὸ ἄλλο ἔδωκε δρ. 1,60 περισσότερον τοῦ πρώτου καὶ διὰ τὸ ἄλλο 3 δραχμάς. Πόσον ἔδωκε τὸ ὅλον; (δρ. 10,30).

2) Ἡ θερμοκρασία ἀσθενοῦς τινος ἦτο 37 βαθμῶν, ἔπειτα ἦτο 39,1 Πόσον ηὐξήθη; (2,1).

3) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ὕφασμά τι πρὸς 7 δραχμὰς τὸν πῆχυν καὶ ἐκέρδησεν 0,85 τῆς δραχμῆς ἀπὸ κάθε πῆχυν. Πόσον τοῦ ἐκόστιζεν ὁ πῆχυς; (δρ. 6,15)

4) Τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ἀνθρώπου εἶνε 1,68 τοῦ μέτρου, τῆς δὲ συζύγου του εἶνε κατὰ 0,295 τοῦ μέτρου μικρότερον αὐτοῦ. Πόσον εἶνε τὸ ἀνάστημα τῆς συζύγου του; (1,385 τοῦ μ.).

5) Ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἦτο 30 μέτρα, ἐπώλησέ τις εἴς τινα 5,45 μ., εἰς ἄλλον 6,30 καὶ εἰς ἄλλον 12,6. Πόσον ὕφασμα ἔμεινεν; (5,65 μ.).

6) Ἐὰν δώσωμεν εἴς τινα τὰ 7 δέκατα ἑνὸς πράγματος καὶ εἰς ἄλλον τὰ 85 χιλιοστὰ αὐτοῦ, τί μέρος τοῦ πράγματος μένει; (τὰ 0,215).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

155. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτούς, ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους (χωρὶς δηλ. νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὑποδιαστολήν), εἰς δὲ τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες.***

Ἔστω π.χ. νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 32,205 ἐπὶ 4,2. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 32{,}205 \\ \cdot\ 4{,}2 \\ \hline 64410 \\ 128820 \\ \hline 135{,}2610 \end{array}$$

Ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον χωρίζομεν εἰς τὸ γινόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν οἱ παράγοντες, εἶνε ὁ ἑξῆς. Διότι, ἂν γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὡς κλάσματα, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶνε $\frac{32205}{1000} \times \frac{42}{10} = \frac{1352610}{10000}$ ἢ 135,2610 (ἐδ. 149). Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὕρομεν, ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς ἀριθμητάς, ἤτοι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ἄνευ ὑποδιαστολῆς καὶ ἐχωρίσαμεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής, ἤτοι ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες.

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ὁ εἷς μόνον τῶν παραγόντων ἔχῃ δεκαδικὰ ψηφία.

Σημ. Ἐὰν συμβῇ τὰ ψηφία τοῦ γινομένου νὰ μὴ φθάνωσι, διὰ νὰ χωρίσωμεν ὅσα χρειάζονται, γράφομεν τότε εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη, καὶ ἓν μηδενικὸν ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.

Ἀσκήσεις.

1,24×6 (=7,44), 35×4,5 (=157,5), 0,72×0,9 (=0,648), 1,89×2,87 (=5,4243), 6,79×0,006 (=0,04074), 0,003×0,05 (=0,00015)

Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ.

156. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 7,24· μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 72,4. Ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους γράψωμεν ὡς κλάσματα, ἤτοι $\frac{724}{100}$ καὶ $\frac{724}{10}$, βλέπομεν ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου κλάσματος εἶνε δέκα φορὰς μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος, ἑπομένως τὸ δεύτερον τοῦτο κλάσμα εἶνε δεκαπλάσιον τοῦ πρώτου (ἐδάφ. 97), ὥστε καὶ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 72,4 εἶνε δεκαπλάσιος τοῦ 7,24. Ὅταν λοιπὸν εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν μεταθέτωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10.

Ἔστω ἐπίσης ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,256· μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 325,6. Ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους γράψωμεν πάλιν ὡς κλάσματα, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 325,6 εἶνε 100 φορὰς μεγαλύτερος τοῦ 3,256. Ὥστε, ὅταν εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν μεταθέτωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 100.

Ἔστω ἀκόμη ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,6· ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γράψωμεν μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ (ἐδ. 150), ἤτοι 5,600. Ἐὰν μεταθέσωμεν τώρα τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, προκύπτει ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 5600, ὅστις εἶνε 1000 φορὰς μεγαλύτερος τοῦ 5,600 ἢ $\frac{5600}{1000}$. Ὥστε, ὅταν εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν μεταθέτωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 1000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν ἑξῆς συντομίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

157. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, ἐπὶ 100, ἐπὶ 1000 καὶ γενικῶς ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦν τὴν μονάδα.***

Ἐὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ δὲν φθάνουν, διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη.

158. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἀκέραιον λήγοντα εἰς μηδενικά, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ δεκαδικοῦ τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα μηδενικὰ παρελείψαμεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν.***

Παραδ. χάριν, εἶνε $0,482 \times 400 = 48,2 \times 4 = 192,8$. Διότι ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διὰ μιᾶς ἐπὶ 400, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ 100 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 4.

Ἀσκήσεις.

$4,567 \times 10$ (=45,67), $0,750 \times 100$ (=75), $0,004 \times 1000$ (= 4), $3,4 \times 10000$ (= 34000), $7,856 \times 70 = 78,56 \times 7 = 549,92$, $0,456 \times 3000 = 456 \times 3 = 1368$.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

159. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις· 1ον) Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε δεκαδικὸς καὶ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος, καὶ 2ον) Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ὁ διαιρέτης δεκαδικός.

1ον) Διαιρέτης ἀκέραιος.

Ὑποθέσωμεν, παραδ. χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 29,82 διὰ 6. Διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ 29 διὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 (ἀκεραίας μονάδας) καὶ ὑπόλοιπον 5· αἱ 5 αὗται ἀκέραιαι μονάδες κάμνουν 50 δέκατα (διότι 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει 10 δέκατα) καὶ 8 δέκατα, ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός, κάμνουν 58 δέκατα. Διαιροῦντες ταῦτα διὰ 6 εὑρίσκομεν πηλίκον 9 (δέκατα) καὶ ὑπόλοιπον 4 δέκατα· ταῦτα πάλιν κάμνουν 40 ἑκατοστὰ (διότι 1 δέκατον ἔχει 10 ἑκατοστὰ) καὶ 2 ἑκατοστά, ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός, κάμνουν 42 ἑκατοστά. Διαιροῦντες τέλος καὶ ταῦτα διὰ 6 εὑρίσκομεν πηλίκον 7 (ἑκατοστὰ) καὶ ὑπόλοιπον 0. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

29,82	6
58	4,97
42	
0	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

160. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι᾽ ἀκεραίου, διαιροῦμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ καὶ ἔπειτα τὸ δεκαδικόν, προσέχοντες ὅμως νὰ θέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ πέρας τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους.***

Σημ. Ἐὰν συμβῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ διαιρετέου νὰ μὴ διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου ἢ ὁ διαιρετέος νὰ μὴ ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν τότε 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ χωρίζομεν τοῦτο δι᾽ ὑποδιαστολῆς· ἔπειτα δὲ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους. Παραδ. χάριν.

0,893	7
19	0,127
53	
4	

Παρατήρησις. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρῶτον παράδειγμα ἡ διαίρεσις εἶνε τελεία καὶ ἑπομένως τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶνε 4,97 Εἰς δὲ τὸ δεύτερον παράδειγμα ἡ διαίρεσις εἶνε ἀτελὴς καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον 0,127 δὲν εἶνε τὸ ἀκριβές, διότι μένει καὶ ὑπόλοιπον 4 χιλιοστά· τὸ ἀκριβὲς δὲ πηλίκον εἶνε 0,127 καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ. Ἐὰν λοιπὸν παραλείψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ καὶ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 0,127, τὸ πηλίκον τότε θὰ εἶνε μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς κατὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ καὶ ἑπομένως μικρότερον τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε ***κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.*** Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ πηλίκον μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοστῶν, ἤτοι 0,12, ἢ μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν δεκάτων, ἤτοι 0,1, λέγομεν τότε, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ ἢ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου· τουτέστι τὸ λάθος, τὸ ὁποῖον κάμνομεν εἰς τὸ πηλίκον, εἶνε μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑκατοστοῦ ἢ ἑνὸς δεκάτου.

Εἶνε ὅμως φανερόν, ὅτι, ὅσα περισσότερα ψηφία λαμβάνομεν εἰς τὸ πηλίκον, τόσῳ περισσότερον πλησιάζομεν εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον, διὰ τοῦτο, ὁσάκις δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον μηδέν, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθῶμεν τὴν διαίρεσιν καὶ νὰ προσεγγίζωμεν εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον, ὅσον θέλομεν· ἀρκεῖ νὰ τρέπωμεν ἕκαστον ὑπόλοιπον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως (γράφοντες πρὸς τοῦτο ἓν μηδενικὸν εἰς τὰ δεξιά του) καὶ νὰ διαιρῶμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου.

Το αὐτὸ δυνάμεθα νὰ πράττωμεν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὁσάκις δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω διαίρεσιν λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 0,12 ἀντὶ τοῦ 0,127, θὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον κατὰ 7 χιλιοστὰ ὀλιγώτερον τοῦ ἀληθοῦς· ἐὰν ὅμως λάβωμεν τὸν 0,13 ἀντὶ τοῦ 0,127, θὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον κατὰ 3 χιλιοστὰ περισσότερον. Ὥστε προτιμότερον εἶνε νὰ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 0,13 παρὰ τὸν 0,12. Ὅταν λοιπὸν θέλωμεν νὰ κρατήσωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία, καλὸν εἶνε νὰ αὐξάνωμεν τὸ τελευταῖον κρατηθὲν ψηφίον κατὰ 1, ὅταν τὸ παραλειφθὲν ἑπόμενον ψηφίον εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 5· διότι πλησιάζομεν τότε περισσότερον εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον.

Παραδείγματα. Ἔστω νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 25,5 διὰ 11 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ (ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν δεκάκις χιλιοστῶν). Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος παριστᾷ δέκατα, γράφομεν τρία μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, διὰ νὰ παριστᾷ δεκάκις χιλιοστὰ (τοῦτο δὲν βλάπτει τὸν ἀριθμὸν) καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν. Ἤτοι

```
25,5000 | 11
 35     | 2,3181
  20
   90
    20
     9
```

ὥστε εὕρομεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ.

Ἔστω προσέτι νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 32 διὰ 15 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Διὰ νὰ παριστᾷ ὁ διαιρετέος ἑκατοστά, γράφομεν δύο μηδενικὰ ὡς δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν. Ἤτοι

$$\begin{array}{r|l} 32{,}00 & 15 \\ \cline{2-2} 20 & 2{,}13\,. \\ 50 & \\ 5 & \end{array}$$

161. Καὶ κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε τάξεως, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (διότι πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ). Παραδ. χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς τὸν δεκαδικὸν 0,75.

Τὸ δὲ κλάσμα $\frac{5}{7}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, ὅσον καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, διὰ τοῦτο τρέπομεν αὐτὸ κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς τινος τάξεως, καὶ ἔστω κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ, ὅτε εὑρίσκομεν 0,714285.

Ἀσκήσεις.

5,67 : 3 (= 1,89), 0,475 : 5 (= 0,095), 332,50 : 38 (= 8,75), 596,622 : 78 (=7,649), 3,47 : 9 (=0,38 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ), 73,4 : 87 (=0,843 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ), $\frac{1}{2}$ (=0,5), $\frac{1}{4}$ (=0,25), $\frac{1}{5}$ (=0,20), $\frac{1}{8}$ (= 0,125), $\frac{7}{8}$ (=0,875), $\frac{16}{11}$ (=1,45 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ).

2ον) Διαιρέτης δεκαδικός.

162. Γνωρίζομεν, ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται (ἐδ. 57). Εἰς τὴν ἰδιότητα ταύτην στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ἀριθμοῦ τινος διὰ δεκαδικοῦ. Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον αὐτοὺς (διαιρετέον καὶ διαιρέτην) ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ., ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν.

Ὑποθέσωμεν, παραδ. χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 9,38 διὰ 0,4. Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 10 (διότι, ἐπὶ 10 ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρέτης 0,4 γίνεται ἀκέραιος) καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν 93,8 διὰ τοῦ ἀκεραίου 4 (ἐδ. 160).

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 6 διὰ 8,56. Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 100 (διότι, ἐπὶ 100 ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρέτης 8,56 γίνεται ἀκεραιος) καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 600 διὰ 856. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου εἶνε 0,7.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν 8,42 διὰ 6,125, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ 1000 καὶ ἔχομεν τότε νὰ διαιρέσωμεν τὸν 8420 διὰ 6125. Τὸ πηλίκον αὐτῶν εὑρίσκομεν μὲ ὅσην προσέγγισιν θέλομεν.

Ἔστω προσέτι νὰ διαιρεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ διὰ 0,5. Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 10 καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τότε τὸ κλάσμα $\frac{70}{8}$ διὰ 5 Δυνάμεθα καὶ νὰ τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἢ τὸν δεκαδικὸν 0,5 εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν ἢ καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{7}{8}$ ἐπὶ 0,5.

Συντομίαι διαιρέσεως.

163. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 25,6· μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 2,56. Ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους γράψωμεν ὡς κλάσματα, ἤτοι $\frac{256}{10}$ καὶ $\frac{256}{100}$, βλέπομεν, ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου κλάσματος εἶνε δέκα φορὰς μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος, ἑπομένως τὸ δεύτερον τοῦτο κλάσμα εἶνε δέκα φορὰς μικρότερον τοῦ πρώτου (ἐδ. 97), ὥστε καὶ ὁ δεκαδικὸς 2,56 εἶνε δέκα φορὰς μικρότερος τοῦ 25,6 Ὅταν λοιπὸν εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 10.

Ἔστω ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 4,5· οὗτος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γράψωμεν μηδενικὰ εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἤτοι 004,5· μεταθέτομεν τώρα τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 0,045 Ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους γράψωμεν πάλιν ὡς κλάσματα, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 0,045 εἶνε

100 φορὰς μικρότερος τοῦ 4,5. Ὥστε, ὅταν εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν μεταθέτωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 100. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς συντομίαν τῆς διαιρέσεως.

164. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, διὰ 100, διὰ 1000 καὶ γενικῶς διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ἀπὸ μηδενικά, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦν τὴν μονάδα.***

Ἐὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ δὲν φθάνουν διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη, καὶ ἓν μηδενικὸν ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι᾽ ἀκεραίου λήγοντος εἰς μηδενικά, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ δεκαδικοῦ τόσας θέσεις εἰς τὰ ἀριστερά, ὅσα μηδενικὰ παρελείψαμεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον, καὶ κατόπιν διαιροῦμεν.

Παραδ. χάριν εἶνε 257,6 : 700 = 2,576 : 7 = 0,368. Διότι, ἂν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται (ἐδάφ. 57).

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 0,5 ἢ διὰ 0,50 ἢ διὰ 0,500 κτλ., πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ 2.

Παραδείγματος χάριν, 64 : 0,5 = 64 × 2 = 128 (διότι διὰ νὰ διαιρέσωμεν διὰ $\frac{5}{10}$ ἢ $\frac{50}{100}$ ἢ $\frac{500}{1000}$ κτλ., ἤτοι διὰ $\frac{1}{2}$, θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἤτοι ἐπὶ $\frac{2}{1}$ ἢ 2).

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 0,25 ἢ διὰ 0,250 κτλ., πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ 4.

Παραδ. χάριν, 45,6 : 0,25 = 45,6 × 4 = 182,4 (διότι εἶνε $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$).

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 0,1, διὰ 0,01, διὰ 0,001 κτλ., πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ 10, ἐπὶ 100, ἐπὶ 1000 κτλ.

Ἀσκήσεις.

273 : 0,3 (=910), 3,15 : 0,7 (=4,5), 522,6 : 6,7 (=78), 59,595 : 6,85 (=8,7), 7,8473 : 0,97 (=8,09), 63,45 : 10 (=6,345),

5,03 : 10 = (0,503), 437,2 : 100 (=4,372), 0,4 : 100 (=0,004), 290,3 : 1000 (=0,2903), 12,6 : 30 (=0,42), 43,2 : 600 (=0,072), 130,475 : 8,5 (=15,35), 435,75 : 12,37 (=35,22 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ).

Πράξεις δεκαδικῶν καὶ κοινῶν κλασμάτων.

165. Ἡ πρόσθεσις ἢ ἡ ἀφαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κοινοῦ κλάσματος γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἢ τρέπομεν τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν (ἂν τρέπηται ἀκριβῶς· εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς τινος μονάδος) καὶ ἔπειτα προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν τοὺς δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Ἢ τρέπομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν τὰ δύο κλάσματα.

Ἔστω π.χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $2{,}35 + \frac{3}{4}$. Κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον ἔχομεν $2{,}35 + \frac{3}{4} = 2{,}35 + 0{,}75 = 3{,}10$· κατὰ τὸν δεύτερον δὲ τρόπον ἔχομεν $2{,}35 + \frac{3}{4} = \frac{235}{100} + \frac{3}{4} = \frac{310}{100} = 3{,}10$.

Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κοινοῦ κλάσματος ἢ ἡ διαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ διὰ κοινοῦ κλάσματος γίνεται, ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀκεραίου καὶ κλάσματος. Δυνάμεθα ὅμως καὶ νὰ τρέψωμεν τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα ἢ τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν.

Ἀσκήσεις.

$\frac{7}{8} - 0{,}4372 = 0{,}875 - 0{,}4372 = 0{,}4378$,

$\frac{2}{3} \times 3{,}45$ (=2,30), $0{,}175 : \frac{5}{8}$ (=0,280),

$2{,}4 \times \frac{2}{3}$ (=1,6), $0{,}65 - \frac{3}{7} = 0{,}65 - 0{,}42\ldots = 0{,}23$ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, $0{,}002 + 3\frac{3}{4} + 0{,}7 + \frac{5}{8} + 6$ (= 10, 577).

Νοεραὶ ἀσκήσεις.

1) Ἂν ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου ἀξίζῃ 2δρ.,90, πόσον ἀξίζουν 10 ὀκάδες καὶ πόσον 100 ὀκάδες;

2) Ἠγόρασέ τις μὲ 6 δραχμὰς 100 πορτοκάλλια. Πόσον κοστίζει τὸ ἓν καὶ πόσον τὰ 1000;

3) Ἠγόρασέ τις λεμόνια πρὸς 45 δρ. τὴν χιλιάδα. Πόσον κοστίζει τὸ ἕν, πόσον τὰ 10 καὶ πόσον τὰ 100;

4) Ἠγόρασέ τις 100 ὀκ. ἀνθράκων καὶ ἔδωκεν 29δρ.,50 Πόσον κοστίζουν 10 ὀκάδες;

5) Ἠγόρασέ τις 240 δράμια καφὲ πρὸς 4δρ.,50 τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκεν ἓν πεντάδραχμον. Πόσον ἔλαβεν ὑπόλοιπον;

(Ἴδε νοερὰς ἀσκήσεις ἐδαφίου 144).

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 7δρ.,80. Πόσον ἀξίζουν 19 πήχεις; (148δρ., 20).

2) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 3δρ.,75 Πόσον ἀξίζουν 6μ.,80; (25δρ., 50).

3) Ἠγόρασέ τις 65 ὀκάδας ἀλεύρου καὶ ἔδωκε 45δρ.,50. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ; (0,70 τῆς δρ.).

4) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 4δρ.,60. Πόσον ἀξίζουν $8\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως; (40δρ., 25).

5) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 3δρ.,50. Πόσον ἀξίζουν τὰ 280 δράμια; $\left(3{,}50 \times \frac{280}{400} \text{ ἢ } 2{,}45\right)$.

6) Ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 14 μέτρα, πρόκειται νὰ κοπῶσι πετσέται, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος νὰ εἶνε 0,40 τοῦ μέτρου. Πόσαι πετσέται θὰ κοπῶσι; (35).

7) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον πρὸς 3δρ.,20 τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκε 28δρ.,80. Πόσον ἔλαιον ἠγόρασεν; (9 ὀκ.).

8) Ἀπὸ τοῦ προαυλίου μιᾶς οἰκίας ἀναβαίνει τις εἰς τὸ πρῶτον πάτωμα αὐτῆς διὰ κλίμακος, τῆς ὁποίας ἑκάστη βαθμὶς (σκαλοπάτι) εἶνε ὑψηλοτέρα τῆς προηγουμένης της κατὰ 0,18 τοῦ μέτρου· τὸ δὲ ὕψος τοῦ πατώματος ἀπὸ τοῦ προαυλίου εἶνε 6μ.,30. Πόσας βαθμίδας ἔχει ἡ κλῖμαξ; (35).

9) Γυνή τις ἠγόρασε 5 ῥούπια ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς ἀξίζει 14δρ.,80. Πόσον ἔδωκεν; (9δρ.,25).

10) Ἠγόρασέ τις 360 δράμια ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ ἔδωκε 3δρ.,15 Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ; (3δρ., 50).

11) Έδωκέ τις 9δρ.,15 καὶ ἠγόρασεν $7\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; (1δρ.,20).

12) Ἠγόρασέ τις 8 ζεύγη κάλτσαις πρὸς 33δρ.,60 τὴν δωδεκάδα. Πόσον ἔδωκεν; (22,40).

13) Ἠγόρασέ τις 3 δωδεκάδες μανδήλια πρὸς 1δρ.,30 ἕκαστον μανδήλιον καὶ ἔδωκε δύο εἰκοσιπεντάδραχμα. Πόσον ἔλαβεν ὑπόλοιπον; (3δρ.,20).

14) Ἀπό τινα παντοπώλην ἠγόρασέ τις $4\frac{1}{2}$ ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 3δρ.,60 τὴν ὀκᾶν καὶ 360 δράμια βουτύρου πρὸς 14 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκεν ἓν εἰκοσιπεντάδραχμον Πόσον τοῦ χρεωστεῖ ἀκόμη; (3δρ.,80).

15) Έμπορός τις ἐπώλησεν $8\frac{1}{2}$ πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἀντὶ 72δρ.,15 καὶ ἐκέρδησεν 9δρ.,25. Πόσον τοῦ ἐκόστιζεν ὁ πῆχυς; (7δρ.,40).

16) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 240 δράμια ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν 1δρ.,50. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $2\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς; (6 δρ.).

17) Μία ἀτμομηχανὴ σιδηροδρόμου ἔχει ταχύτητα 32 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ καίει εἰς μίαν ὥραν ἄνθρακας ἀξίας 25δρ.,80 Πόση εἶνε ἡ ἀξία τῶν ἀνθράκων, τοὺς ὁποίους θὰ καύσῃ, διὰ νὰ διατρέξῃ 160 χιλιόμετρα; (129 δρ.).

18) Έμπορός τις ἠγόρασε ποτήρια πρὸς 5δρ.,40 τὴν δωδεκάδα· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 65 λ. ἕκαστον καὶ ἐκέρδησεν 96 δρ. Πόσα ποτήρια ἠγόρασε; (480).

19) Έμπορός τις ἠγόρασε 35 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 4δρ.,80 τὸν πῆχυν· ἐξ αὐτοῦ ἐκράτησεν $8\frac{1}{3}$ τοῦ πήχεως διὰ φόρεμα τῆς συζύγου του, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπώλησε καὶ παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἔμεινε κέρδος τὸ ὕφασμα τῆς συζύγου του. Ζητεῖται πρὸς πόσον ἐπώλησε τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου ὑφάσματος.

Λύσις. Διὰ νὰ τοῦ μείνῃ κέρδος τὸ ὕφασμα τῆς συζύγου του, ἕπεται ὅτι ἔλαβεν ἐκ τοῦ πωληθέντος ὑφάσματος τόσας δραχμάς, ὅσας εἶχε δώσει διὰ τοὺς 35 πήχεις, ἤτοι 168 δρ. Ταύτας διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑπολοίπων πήχεων καὶ εὑρίσκομεν 6,30.

20) Εἶχέ τις μαζί του 40 δρ. καὶ ἠγόρασεν 8 πήχεις ἐξ ἑνὸς

ὑφάσματος καὶ 9 μανδήλια πρὸς 13δρ.,80 τὴν δωδεκάδα· κατόπιν παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἔμειναν 85 λεπτά. Πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν τοῦ ὑφάσματος; (3,60 δρ.).

21) Ἠγόρασέ τις 6 δεσμίδας χάρτου πρὸς 9δρ.,20 τὴν δεσμίδα, ἑκάστη δεσμὶς περιεῖχε 400 φύλλα· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὸν πρὸς 10 λεπτὰ τὰ 3 φύλλα. Πόσον ἐκέρδησεν; (24,80 δρ.).

22) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 200 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 2,δρ.60 τὸν πῆχυν· ἐκ τούτου ἐπώλησεν εἴς τινα τὰ $\frac{2}{5}$ πρὸς 2,80 τὸν πῆχυν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου, διὰ νὰ κερδήσῃ ἐξ ὅλου τοῦ ὑφάσματος 58 δραχμάς; (2,95).

23) Τί εἶνε προτιμότερον, νὰ ἀγοράσῃ τις μίαν δωδεκάδα ὑποκαμίσων πρὸς 12δρ.,80 ἕκαστον ὑποκάμισον ἢ νὰ ἀγοράσῃ ὕφασμα πρὸς 1,40 τὸν πῆχυν καὶ νὰ πληρώσῃ διὰ ῥαπτικὰ καὶ λοιπὰ ὑλικὰ 2,80 δι' ἕκαστον ὑποκάμισον; Εἶνε δὲ γνωστόν, ὅτι δι' ἕκαστον ὑποκάμισον χρειάζονται 5 πήχεις·

(τὸ δεύτερον, διότι θὰ ἔχῃ κέρδος 36 δρ.).

24) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 340 ὀκ. σάπωνος πρὸς 2δρ.,60 τὴν ὀκᾶν, ἐξώδευσεν ἀκόμη 56 δρ. διὰ τὴν μεταφοράν του· κατόπιν ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν πρὸς 3,20, ἀλλὰ παρετήρησεν ὅτι ὁ σάπων εἶχε χάσει τὸ εἰκοστὸν τοῦ βάρους του. Πόσον ἐκέρδησεν; (93δρ.,60).

25) Γυνή τις ἔπλεξε 17 ζεύγη κάλτσας, τὰς ὁποίας ἐπώλησε πρὸς 3,20 δρχ. τὸ ζεῦγος· πόσον ἐκέρδησεν, ἐὰν δι' ἕκαστον ζεῦγος ἐχρειάσθη 35 δράμ. νήματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 24 δραχ.; (18δρ.,70).

26) Μήτηρ τις μετὰ τῆς θυγατρός της ἐργάζονται εἰς ἓν ὑφαντήριον καὶ ὑφαίνουν τὴν ἡμέραν ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος ἡ μὲν μήτηρ 3 πήχεις, ἡ δὲ θυγάτηρ $2\frac{1}{2}$. Μετὰ 15 ἡμερῶν ἐργασίαν ἔλαβεν ἡ μήτηρ 16,50 δρχ. περισσότερον τῆς θυγατρός της. Πόσον ἐπληρώνοντο τὸν πῆχυν;

Λύσις. Εἰς τὰς 15 ἡμ. ἡ μήτηρ ὕφανε περισσότερον τῆς θυγατρός της $7\frac{1}{2}$ πήχεις, ὥστε ὁ πῆχυς ἐπληρώνετο $16,50 : 7\frac{1}{2}$ ἢ 2,20 δρχ.

27) Γυνή τις ἠγόρασεν ἀπό τινα ἔμπορον 9 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 3δρ.,60 τὸν πῆχυν καὶ $6\frac{1}{2}$ πήχ. ἐξ ἄλλου ὑφάσματος πρὸς 2 δρχ. τὸν πῆχυν· κατόπιν παρετήρησεν, ὅτι ἐκ τῶν ὅσων

δραχμῶν εἶχε μαζί της, τῆς ἔμειναν 60 λεπτά, ἀλλ' ἔμεινε καὶ χρέος εἰς τὸν ἔμπορον 6 δρχ. Πόσας δραχμὰς εἶχε μαζί της; (40).

28) Εἴς τινα ἐξοχὴν μετέβησαν 9 ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, καὶ ἐξώδευσαν διὰ τὴν τροφήν των 50δρ.,40, τὰς ὁποίας ἔπρεπε νὰ πληρώσουν ὅλοι ἐξ ἴσου· ἀλλ' αἱ γυναῖκες δὲν εἶχον μαζί των χρήματα, διὰ τοῦτο ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσεν ἀκόμη 1δρ.,60. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Λύσις. Ἕκαστον ἄτομον ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ 50,40 : 9, ἤτοι 5,60, καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 5,60 + 1,60 ἢ 7,20, ἕπεται ὅτι ἦσαν τόσοι οἱ ἄνδρες, ὅσας φορὰς ὁ 7,20 χωρεῖ εἰς τὸν 50,40, ἤτοι 7, ἑπομένως αἱ γυναῖκες ἦσαν 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΩΝ, ΣΤΑΘΜΩΝ, ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΥ.

Μέτρησις ποσῶν.

166. Πᾶν ὅ,τι δύναται νὰ εἶνε μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἄλλου ὁμοίου, ἤτοι τὸ δυνάμενον νὰ αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ, λέγεται **ποσόν.**

Παραδ. χάριν, τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου, τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ἀνθρώπου, τὸ βάρος αὐτοῦ, τὸ μῆκος ἑνὸς ὑφάσματος κτλ. εἶνε ποσά. Διότι ὑπάρχουν δένδρα, ἄνθρωποι, ὑφάσματα κτλ. μεγαλύτερα ἢ μικρότερα αὐτῶν.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν ποσόν τι, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὡς μονάδα ἓν ἄλλο ποσὸν ὡρισμένον καὶ ὁμοειδές, πρὸς τὸ ὁποῖον νὰ τὸ συγκρίνωμεν καὶ νὰ εὕρωμεν οὕτως ἀπὸ πόσας τοιαύτας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται.

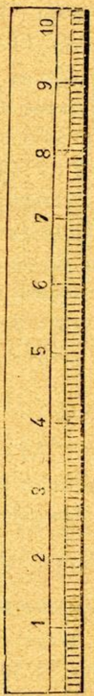
Παραδ. χάριν, διὰ νὰ μάθωμεν τὸ βάρος ἑνὸς πράγματος, πρέπει νὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἄλλο βάρος ὡρισμένον, τοιοῦτον δὲ βάρος ἔχομεν ὡς μονάδα τὴν ὀκᾶν.

Ἡ σύγκρισις ἑνὸς ποσοῦ πρὸς τὴν ὁμοειδῆ του μονάδα λέγεται ***μέτρησις*** αὐτοῦ. Τὰ δὲ γνωστὰ καὶ ὡρισμένα ὄργανα, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ὡς μονάδας καὶ μετροῦμεν τὰ διάφορα ποσά, λέγονται ***μέτρα*** (καθὼς εἶνε ἡ ὀκᾶ, ὁ πῆχυς κτλ.).

Εἶνε φανερόν, ὅτι διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαφόρων ποσῶν πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ διαφόρους μονάδας ὁμοειδεῖς πρὸς αὐτά. Ὥστε πρέπει νὰ ἔχωμεν ἰδίαν μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βάρους, ἰδίαν μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους κτλ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὅλα τὰ Κράτη δὲν ἔχουσι τὰς αὐτὰς μονάδας, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν λόγον περὶ τῶν μονάδων ἐκείνων, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα χρῆσις γίνεται παρ' ἡμῖν.

Μονάδες μήκους ἢ γραμμικαί.

167. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ ***Γαλλικὸν μέτρον***, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ $\frac{1}{40\,000\,000}$ τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς· ὥστε 40 000 000 τοιαῦτα μέτρα ἀποτελοῦσι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς.



Ὑποδεκάμετρον διῃρημένον εἰς ἑκατοστόμετρα καὶ χιλιοστόμετρα.

Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***ὑποδεκάμετρα*** ἢ ***δεκατόμετρα***· ἕκαστον ὑποδεκάμετρον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***ὑφεκατόμμετρα*** ἢ ***ἑκατοστόμετρα***· ἕκαστον ὑφεκατόμετρον διαιρεῖται πάλιν εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***ὑποχιλιόμετρα*** ἢ ***χιλιοστόμετρα***.

Τὸ Γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη ἐν Ἑλλάδι ***Βασιλικὸς πῆχυς***, ἀλλὰ τοῦ ὀνόματος τούτου σπανίως γίνεται χρῆσις, τὸ δέκατον τοῦ μέτρου ὠνομάσθη ***παλάμη***, τὸ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου ***δάκτυλος*** καὶ τὸ χιλιοστὸν αὐτοῦ ***γραμμή*** [1]. Ὥστε εἶνε

1 Β. πῆχυς = 10 παλάμας = 100 δακτύλ. = 1000 γραμμ.
1 παλάμη = 10 δακτύλ. = 100 γραμμ.
1 δάκτυλ. = 10 γραμμ.

Ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶνε, ὡς βλέπομεν, δεκαπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας της. Ὥστε δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτάς, ὅπως καὶ τοὺς δεκαδικούς, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς ἀκέραιον μέρος τὰ μέτρα ἢ Β. πήχεις, ὡς δέκατα τὰς παλάμας, ὡς ἑκατοστὰ τοὺς δακτύλους καὶ ὡς χιλιοστὰ τὰς γραμμάς. Παραδ. χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 8 μέτρα 7 παλ. 5 δακ. 6 γρ., γράφεται ὡς ἑξῆς 8 μ.,756. Εὐκόλως δὲ τρέπομεν καὶ

(1) Οἱ τεχνῖται τὸ μέτρον ὀνομάζουσι *πικοσέτο*, τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου ὀνομάζουσι *πόντους*.

ἀριθμὸν μέτρων εἰς μονάδας οἱασδήποτε τάξεως διὰ τῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς.

Ὅπως λαμβάνομεν μέρη τινὰ τοῦ μέτρου ὡς νέας μονάδας (ἤτοι τὴν παλάμην, τὸν δάκτυλον καὶ τὴν γραμμήν), οὕτω λαμβάνομεν καὶ πολλαπλάσιά τινα αὐτοῦ ὡς νέας μονάδας), ἤτοι τὸ ***δεκάμετρον*** (10 μέτρα), τὸ ***ἑκατόμμετρον*** (100 μ.), τὸ ***χιλιόμετρον*** ἢ ***στάδιον*** (1000 μ.) καὶ τὸ ***μυριάμετρον*** (10000 μ.).

Ἡ μονάς, ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται ἄλλαι μονάδες μικρότεραι ἢ μεγαλύτεραι αὐτῆς, λέγεται ***ἀρχικὴ μονάς***. Ὥστε τὸ μέτρον εἶνε ἀρχικὴ μονάς.

Σημ. Τὸ χιλιόμετρον καὶ τὸ μυριάμετρον εἶνε ὁδοιπορικαὶ μονάδες. Τὴν ἀπόστασιν 5 χιλιομέτρων ἢ σταδίων δύναταί τις νὰ διατρέξῃ μὲ σύνηθες βάδισμα εἰς μίαν ὥραν.

Ἐκτὸς τοῦ Γαλλικοῦ μέτρου ἔχομεν καὶ τὰς ἑξῆς μονάδας μήκους, ἀλλ' ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Τὸν ἐμπορικὸν πῆχυν, τὸν ὁποῖον μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων, διαιρεῖται δὲ οὗτος εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***ῥούπια***, καὶ εἶνε ἴσος μὲ 0,648 τοῦ μέτρου. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸ ἐμπόριον λαμβάνεται ἴσος μὲ 0,64 τοῦ μέτρου, διὰ τοῦτο τὴν σχέσιν ταύτην θὰ λαμβάνωμεν κατωτέρω.

Τὸν τεκτονικὸν πῆχυν, τὸν ὁποῖον μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους τῶν οἰκοπέδων καὶ οἰκοδομῶν καὶ εἶνε ἴσος μὲ 0,75 ἢ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου.

Οἱ Ἄγγλοι ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους μεταχειρίζονται τὴν ***ὑάρδαν***, ἥτις διαιρεῖται εἰς 3 ***πόδας (φοὺτ)*** καὶ ἕκαστος ποὺς εἰς 12 ***δακτύλους (ἴντσας)***. Ἡ ὑάρδα εἶνε ἴση μὲ 0,914 τοῦ μέτρου περίπου. Ὁ δὲ ἐμπορικὸς πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὑάρδας κατὰ μεγίστην προσέγγισιν.

Σημ. Οἱ Γάλλοι πρὸ τῆς παραδοχῆς τοῦ μέτρου μετεχειρίζοντο ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους τὴν ***ὀργυιάν***, ἥτις διαιρεῖται εἰς 6 ***πόδας***, ἕκαστος ποὺς εἰς 12 ***δακτύλους*** καὶ ἕκαστος δάκτυλος εἰς 12 ***γραμμάς***. Ἡ ὀργυιὰ εἶνε ἴση μὲ 1,95 τοῦ μέτρου περίπου ἢ μὲ 3 πήχεις ἐμπορίου.

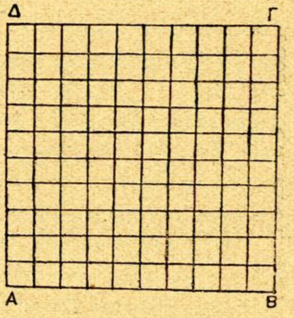
Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἀποστάσεων λαμβάνονται προσέτι ὡς μονάδες μήκους καὶ τὰ *μίλια*, τὰ ὁποῖα διακρίνονται εἰς τὰ ἑξῆς εἴδη.

Γεωγραφικὸν ἢ Γερμανικὸν μίλιον ἴσον μὲ 7420μ.,44. **Ναυτικὸν μίλιον** δι᾽ὅλα τὰ ἔθνη ἴσον μὲ 1852 μέτρα (1) καὶ **Ἀγγλικὸν μίλιον** ἴσον μὲ 1760 ὑάρδας ἢ 1608,64 τοῦ μέτρου.

Μονάδες ἐπιφανείας.

168. Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον**, ἤτοι τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἓν μέτρον.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ παριστᾷ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ εἰς 10 ἴσα μέρη ἑκάστην καὶ ἑνώσωμεν δι᾽ εὐθειῶν τὰ ἀπέναντι σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, ΑΒ καὶ ΔΓ, θὰ διαιρεθῇ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ εἰς 100 **τετραγωνικὰς παλάμας** διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου τετραγωνιδίου θὰ εἶνε τὸ δέκατον τοῦ μέτρου, ἤτοι μία παλάμη. Ὥστε ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγ. μέτρου.



Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν καὶ εἰς μίαν τετραγωνικὴν παλάμην, τότε αὕτη θὰ διαιρεθῇ εἰς 100 ***τετραγ. δακτύλους***· διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου τετραγωνιδίου θὰ εἶνε τὸ δέκατον τῆς παλάμης, ἤτοι εἷς δάκτυλος. Ὥστε ὁ τετραγ. δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετρ. παλάμης, καὶ ἐπειδὴ τὸ τετρ. μέτρον περιέχει 100 τετρ. παλάμας, ἄρα περιέχει 100×100 ἢ 10000 τετρ. δακτύλους, ἑπομένως ὁ τετρ. δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν καὶ εἰς ἕνα τετραγ. δάκτυλον, θὰ διαιρεθῇ οὗτος εἰς 100 ***τετρ. γραμμὰς*** καὶ θὰ εἶνε ἡ τετρ. γραμμὴ ἡ

---

(1) Τὸ ναυτικὸν μίλιον εἶνε τὸ μῆκος ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ τῆς μοίρας τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς.

τὸ τετρ. χιλιοστόμετρον τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετρ. δακτύλου ἢ τὸ $\frac{1}{10000}$ τῆς τετραγ. παλάμης ἢ τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶνε ἑκατονταπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας της, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς καὶ ὡς δεκαδικούς, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς ἀκέραιον μέρος τὰ τετραγωνικὰ μέτρα, ὡς ἑκατοστὰ τὰς τετρ. παλάμας, ὡς δεκάκις χιλιοστὰ τοὺς τετρ. δακτύλους καὶ ὡς ἑκατομμυριοστὰ τὰς τετρ. γραμμάς. Π. χ., ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 5 τετρ. μέτρα 7 τετρ. παλάμας καὶ 15 τετρ. δακτύλους, γράφεται ὡς ἑξῆς 5τ. μ.,0715.

Ἐν Ἑλλάδι διὰ τὰς κτηματικὰς γαίας λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ **Βασιλικὸν στρέμμα**, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ 1000 τετρ. μέτρα, καὶ ἂν νοηθῇ τοῦτο ὡς τετράγωνον, θὰ ἔχῃ πλευρὰν ἴσην μὲ 31μ.,62 περίπου. Τὸ δὲ παλαιὸν στρέμμα εἶνε ἴσον μὲ 1,27 τοῦ Β. στρέμματος, ἤτοι 1270 τετρ. μέτρα. Δι' ἀκόμη μεγαλυτέρας ἐκτάσεις, ἤτοι διὰ τὰς γεωγραφικάς, λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ **τετρ. χιλιόμετρον** (ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 1000 μέτρων), τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ 1000 Β. στρέμματα.

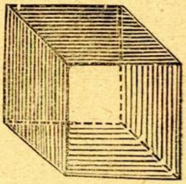
Ἐν Γαλλίᾳ καὶ εἰς ἄλλα τινὰ Κράτη λαμβάνουσιν ὡς μονάδα διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν κτηματικῶν γαιῶν τὸ τετρ. δεκάμετρον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***ἄριον*** (are), ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 10 μέτρων, καὶ ἑπομένως εἶνε ἴσον μὲ 10 × 10 ἢ 100 τετρ. μέτρα, καὶ τὸ τετραγ. ἑκατόμμετρον ***(ἑκτάριον)***, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ 100 ἄρια ἢ 10000 τετρ. μέτρα.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῶν οἰκοπέδων λαμβάνεται συνήθως ὡς μονὰς ὁ **τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς**, ὅστις εἶνε ἴσος μὲ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου (διότι ὁ τεκτον. πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, ἑπομένως τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶνε $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ ἢ $\frac{9}{16}$).

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

169. Διὰ τὴν καταμέτρησιν τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ **κυβικὸν μέτρον** (ἤτοι κύβος τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἓν μέτρον).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ κατωτέρω σχῆμα εἶνε κυβικὸν μέτρον καὶ διαιρέσωμεν αὐτὸ κατὰ μῆκος εἰς 10 ἴσα μέρη, ἔπειτα κατὰ πλάτος εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα κατὰ ὕψος εἰς 10 ἴσα μέρη, θὰ προκύψωσι 1000 ***κυβικαὶ παλάμαι***, διότι ἑκάστη θὰ ἔχῃ πλευρὰν ἴσην μὲ μίαν παλάμην· ὥστε ἡ κυβικὴ παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβ. μέτρου.



Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν καὶ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην, θὰ προκύψωσι 1000 ***κυβικοὶ δάκτυλοι***, διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου θὰ εἶνε ἴση μὲ ἕνα δάκτυλον· ὥστε ὁ κυβ. δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβ. παλάμης καὶ ἑπομένως τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ κυβ. μέτρ.

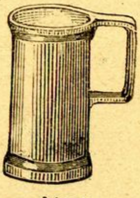
Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶνε χιλιοπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς καὶ ὡς δεκαδικούς, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς ἀκέραιον μέρος τὰ κυβικὰ μέτρα, ὡς χιλιοστὰ τὰς κυβικὰς παλάμας καὶ ὡς ἑκατομμυριοστὰ τοὺς κυβικοὺς δακτύλους.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν μεγάλων ὄγκων λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ **κυβικὸν χιλιόμετρον**, ἤτοι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ 1000 μέτρα.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν τοίχων τῶν οἰκοδομῶν λαμβάνεται συνήθως ὁ **κυβικὸς τεκτονικὸς πῆχυς** ἴσος πρὸς τὰ $\frac{27}{64}$ τοῦ κυβ. μέτρου $\left(\text{διότι εἶνε } \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \text{ ἢ } \frac{27}{64}\right)$.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ὑγρῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ **λίτρα**, ἤτοι ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης.

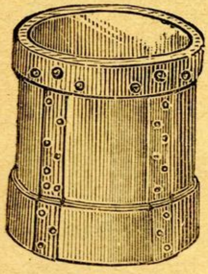
Ἐπειδὴ ὅμως τὸ κυβικὸν σχῆμα δὲν εἶνε κατάλληλον διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ ἐμπορίου, διὰ τοῦτο κατασκευάζουσι τὴν λίτραν κυλινδρικήν· καθὼς καὶ ἄλλα τοιαῦτα μέτρα χωρητικότητος. Τὰ μέτρα ταῦτα τῶν ὑγρῶν ἔχουν ὕψος διπλάσιον τῆς ἐσωτερικῆς διαμέτρου αὐτῶν· ἡ λίτρα π. χ. ἔχει ἐσωτερικὴν διάμετρον 0,086 τοῦ μέτρου καὶ ὕψος διπλάσιον, ἤτοι 0,172 τοῦ μέτρου.



λίτρα.

Τὸ δὲ παρ᾿ ἡμῖν ἐν χρήσει κυλινδρικὸν δοχεῖον, τὸ λεγόμενον *ὀκᾶ*, χωρεῖ μίαν ὀκᾶν βάρους ὕδατος (καθαροῦ εἰς ὡρισμένην θερμοκρασίαν)· ὥστε, ἂν πληρωθῇ τοῦτο ἐλαίου, τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐλαίου θὰ εἶνε ὀλιγώτερον μιᾶς ὀκᾶς, ὡς ἀραιοτέρου τοῦ ὕδατος.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ **κοιλόν**, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ δέκατον τῆς χωρητικότητος τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἤτοι ἡ χωρητικότης 100 κυβ. παλαμῶν. Τὸ κοιλὸν ἔχει ἐσωτερικὴν διάμετρον καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἤτοι 0,5033 τοῦ μέτρου. Ὑπάρχουν καὶ ἄλλα τοιαῦτα μέτρα μικρότερα τοῦ κοιλοῦ.



Κοιλόν.

Μονάδες βάρους.

170. Ὡς ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους λαμβάνεται τὸ **γραμμάριον**, ἤτοι τὸ βάρος ὕδατος (καθαροῦ καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4 βαθμῶν τοῦ Κελσίου), τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον.

Διὰ τὰ μεγάλα βάρη λαμβάνεται συνήθως ὡς μονὰς τὸ **χιλιόγραμμον** (ἢ **κιλόγραμμον** ἢ συντόμως **κιλό**), τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ 1000 γραμμάρια (ἤτοι τὸ βάρος καθαροῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην). Δι' ἀκόμη μεγαλύτερα βάρη λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ **τόννος** (ἤτοι τὸ βάρος καθαροῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἓν κυβ. μέτρον). Χρῆσις αὐτοῦ γίνεται συνήθως εἰς τὰ φορτία τῶν πλοίων καὶ βαγονίων.

Ἐν Ἑλλάδι καὶ Τουρκίᾳ λαμβάνεται συνήθως ὡς ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους ἡ *ὀκᾶ*, ἥτις διαιρεῖται εἰς 400 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *δράμια*, ὥστε τὸ δράμιον εἶνε τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς. Διὰ μεγαλύτερα δὲ βάρη λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ *στατὴρ* (κοινῶς *καντάρι*), ὅστις εἶνε ἴσος μὲ 44 ὀκάδας.

Μία ὀκᾶ εἶνε ἴση μὲ 1,280 τοῦ χιλιογράμμου ἢ 1280 γραμμάρια καὶ ἑπομένως ἓν δράμιον εἶνε ἴσον μὲ 1280 : 400 ἢ 3,2 τοῦ γραμμαρίου. Ἓν χιλιόγραμμον (ἢ κιλόγραμμον ἢ κιλὸν) εἶνε ἴσον μὲ 312,5 τοῦ δραμίου καὶ εἷς τόννος (ἤτοι 1000 χιλιόγραμμα) εἶνε ἴσος μὲ 312,5×1000 δράμια ἢ 781 ὀκ. καὶ 100 δράμια.

Σημ. Εἰς τὸ ἐμπόριον τὸ χιλιόγραμμον λαμβάνεται ἴσον μὲ 312 δράμια ἢ 0,78 τῆς ὀκᾶς καὶ ἑπομένως ὁ τόννος ἴσος μὲ 780 ὀκ.

Διὰ τὴν ζύγισιν τῶν φαρμάκων εἶνε ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν αἱ ἑξῆς μονάδες.

Κόκκος (γκράνουμ) ἀρχικὴ μονάς. *Γράμμον* (σκρούπουλον)=

20 κόκκους. ***Δραχμὴ***=3 γράμμα=60 κόκκους. ***Οὐγγία***=8 δραχμάς. ***Λίτρα***=12 οὐγγίας ἢ 112 δράμια περίπου.

Πρὸ πολλοῦ ὅμως γίνεται χρῆσις καὶ τῶν Γαλλικῶν μονάδων, ἤτοι λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ γραμμάριον, τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ***δεκάγραμμον, ἑκατόγραμμον*** κτλ., καθὼς καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ, ἤτοι τὸ δέκατον, τὸ ἑκατοστὸν καὶ τὸ χιλιοστὸν τοῦ γραμμαρίου.

Εἰς τὰ σταφιδοφόρα μέρη τῆς Ἑλλάδος πρὸς στάθμισιν τῆς σταφίδος γίνεται χρῆσις τῆς ***Ἐνετικῆς λίτρας***, ἴσης μὲ 150 δράμια ἢ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Εἰς δὲ τὰ Ἑπτάνησα ὡς μονὰς βάρους εἶνε ἐν χρήσει ἡ Ἀγγλικὴ λίτρα, ἴση μὲ 142 δράμια περίπου.

Διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους ὡς μονὰς βάρους λαμβάνεται τὸ ***καράτιον***, ἴσον μὲ 0,2 τοῦ γραμμαρίου περίπου, ὥστε 16 καράτια ἀποτελοῦσι 3,2 τοῦ γραμ., ἤτοι 1 δράμιον.

Μονάδες νομισμάτων.

171. Εὐρωπαϊκά τινα κράτη παρεδέχθησαν διὰ συμβάσεως νὰ κόπτωσι νομίσματα ὅμοια καὶ ἴσης ἀξίας πρὸς εὐκολίαν τοῦ ἐμπορίου. Τὰ κράτη ταῦτα εἶνε τὰ ἑξῆς· Γαλλία, Ἰταλία, Ἑλλάς, Ἑλβετία καὶ Βέλγιον, εἰς ταῦτα δὲ προσετέθησαν κατόπιν καὶ ἄλλα κράτη. Κατὰ τὴν σύμβασιν ταύτην, ἥτις ὠνομάσθη ***Λατινικὴ νομισματικὴ σύμβασις***, παρεδέχθησαν ὡς μονάδα τῶν νομισμάτων τὸ ***φράγκον***, τὸ ὁποῖον ἐν Ἑλλάδι λέγεται ***δραχμή***· εἶνε δὲ ἀργυροῦν νόμισμα, ἔχον βάρος 5 γραμμαρίων (ἢ $1\frac{9}{16}$ τοῦ δραμίου). Ἀργυρᾶ νομίσματα παρεδέχθησαν καὶ τὰ ἑξῆς.

Τὸ ***δίφραγκον*** (ἔχον βάρος 10 γραμμαρίων), τὸ ***πεντάφραγκον*** (ἔχον βάρος 25 γραμμ.), τὸ ***ἥμισυ*** τοῦ φράγκου (ἔχον βάρος 2,5 τοῦ γρ.) καὶ τὸ ***πέμπτον*** τοῦ φράγκου (ἔχον βάρος 1 γραμ.).

Χρυσᾶ δὲ τὰ ἑξῆς. Τὸ ***πεντάφραγκον***, τὸ ***δεκάφραγκον***, τὸ ***εἰκοσάφραγκον***, τὸ ***πεντηκοντάφραγκον*** καὶ τὸ ***ἑκατοντάφραγκον***.

Τὸ φράγκον ἢ δραχμὴ διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα παρ' ἡμῖν λέγονται ***λεπτά***.

Χαλκᾶ δὲ νομίσματα εἶνε τὰ ἑξῆς. Τὸ ***μονόλεπτον*** (ἔχον βάρος 1 γραμ.), τὸ ***δίλεπτον*** (ἔχον βάρος 2 γραμ.), τὸ ***πεντάλεπτον*** ἢ ***ὀβολός***, κοινῶς ***πεντάρα*** (ἔχον βάρος 5 γραμ.), καὶ τὸ ***δεκάλεπτον*** ἢ ***διώβολον***, κοινῶς ***δεκάρα*** (ἔχον βάρος 10 γρ.). Ὥστε, ὅσον εἶνε τὸ βάρος εἰς γραμμάρια χαλκίνων νομισμάτων, τόση εἶνε ἡ ἀξία αὐτῶν εἰς λεπτά. Καὶ τἀνάπαλιν.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω νομισμάτων ἔχομεν ἐν χρήσει καὶ τὰ νικέλινα νομίσματα τῶν 5, τῶν 10 καὶ τῶν 20 λεπτῶν, πρὸς δὲ καὶ τὰ τραπεζικὰ γραμμάτια ἢ χαρτονομίσματα τῶν 50 λεπτῶν, τῆς 1 δραχμῆς, τῶν 2, 5, 10, 25, 100, 500 καὶ 1000 δραχμῶν.

172. Ἐπειδὴ ὁ καθαρὸς χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος εἶνε φύσει μαλακὰ μέταλλα, διὰ τοῦτο πρὸς κατασκευὴν νομισμάτων (καὶ ἐν γένει κοσμημάτων) ἐκ τοιούτων μετάλλων συγχωνεύουσι μετ' αὐτῶν διὰ τῆς τήξεως καὶ χαλκὸν (συνήθως), ἵνα ἀποκτήσωσι ταῦτα μεγαλυτέραν σκληρότητα καὶ ἑπομένως νὰ μὴ καταστρέφωνται ταχέως διὰ τῆς τριβῆς. Ὥστε τὰ ἀνωτέρω νομίσματα χρυσᾶ καὶ ἀργυρᾶ εἶνε κρᾶμα χρυσοῦ ἢ ἀργύρου μετὰ χαλκοῦ.

Τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου (ὡς εἶνε ὁ χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος), τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος, λέγεται ***βαθμὸς καθαρότητος ἢ τίτλος*** καὶ ὁρίζεται συνήθως εἰς χιλιοστά. Ὅταν π. χ. λέγωμεν, ὅτι ὁ βαθμὸς καθαρότητος χρυσοῦ νομίσματος ἢ κοσμήματος εἶνε 0,900 ἐννοοῦμεν, ὅτι εἰς 1 γραμμάριον ἢ δράμιον μόνον τὰ $\frac{900}{1000}$ αὐτοῦ εἶνε καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ $\frac{100}{1000}$ εἶνε ἄλλο μέταλλον μὴ πολύτιμον, ὡς εἶνε ὁ χαλκός.

Διὰ τῆς ἀνωτέρω συμβάσεως ὡρίσθη ὁ βαθμὸς καθαρότητος τῶν μὲν χρυσῶν νομισμάτων 0,900, τῶν δὲ ἀργυρῶν 0,835 πλὴν τοῦ ἀργυροῦ πενταφράγκου, ὁρισθέντος εἰς 0,900. Τὰ χαλκᾶ νομίσματα εἶνε κρᾶμα χαλκοῦ, κασσιτέρου καὶ ψευδαργύρου.

Σημ. Ὁ βαθμὸς καθαρότητος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ εἰς εἰκοστὰ τέταρτα, ἅτινα λέγονται *καράτια* (1). Ὅταν π. χ. ὁ χρυσὸς εἶνε καθαρός, λέγομεν ὅτι εἶνε 24 καρατίων, ὅταν ὅμως λέγωμεν ὅτι εἶνε 18 καρατίων, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς μίαν μονάδα βάρους μόνον τὰ $\frac{18}{24}$ αὐτῆς εἶνε καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ $\frac{6}{24}$ εἶνε ἄλλο μέταλλον.

Ἐν Τουρκίᾳ ὡς ἀρχικὴ μονὰς τῶν νομισμάτων λαμβάνεται τὸ

---

(1) Τὸ καράτιον τοῦτο δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸ καράτιον βάρους, δι' οὗ ζυγίζονται οἱ πολύτιμοι λίθοι.

γρόσιον, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀργυροῦν καὶ διαιρεῖται εἰς 4 ***μεταλλίκια*** (χαλκᾶ) καὶ ἕκαστον μεταλλίκιον εἰς 10 ***παράδες***. Ἡ ***Τουρκικὴ λίρα*** εἶνε χρυσοῦν νόμισμα ἔχον βάρος 7,216 τοῦ γραμμαρίου καὶ βαθμὸν καθαρότητος 0,916, διαιρεῖται δὲ εἰς 5 ***μετζίτια*** (ἀργυρᾶ), ἕκαστον τῶν ὁποίων διαιρεῖται εἰς 4 ***πεντάγροσα*** (ἀργυρᾶ), ἐπομένως ἡ λίρα ἔχει 100 γρόσια. Ἐκτὸς τούτων ὑπάρχουν καὶ ἄλλα χρυσᾶ καὶ ἀργυρᾶ νομίσματα.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ὡς ἀρχικὴ μονὰς λαμβάνεται ἡ ***Ἀγγλικὴ λίρα Στερλίνα***, ἥτις διαιρεῖται εἰς 20 ***σελίνια***, ἕκαστον σελίνιον εἰς 12 ***πέννας*** καὶ ἑκάστη πέννα εἰς 4 ***φαρδίνια***. Καὶ ἡ μὲν Ἀγγλικὴ λίρα εἶνε χρυσοῦν νόμισμα (ἔχον βάρος 7,988 τοῦ γραμμ. καὶ βαθμὸν καθαρότητος 0,916), τὸ δὲ σελίνιον ἀργυροῦν, ἡ δὲ πέννα καὶ τὸ φαρδίνιον χαλκᾶ. Ἐκτὸς τούτων ἔχουν καὶ ἄλλα νομίσματα χρυσᾶ, ἀργυρᾶ καὶ χαλκᾶ.

Ἐν τῇ Γερμανίᾳ ὡς ἀρχικὴ μονὰς λαμβάνεται τὸ ***μάρκον*** (ἀργυροῦν). Ἐν τῇ Αὐστρίᾳ τὸ ***φιορίνιον*** (ἀργυροῦν) καὶ ἐν τῇ Ἀμερικῇ τὸ ***δολλάριον*** (ἀργυροῦν).

Εὕρεσις τῆς ἀξίας νομισμάτων ἐκ τοῦ βάρους αὐτῶν καὶ τἀνάπαλιν.

173. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι 1 δραχμὴ ἢ φράγκον ἔχει βάρος 5 γραμμάρια, 2 δραχμαὶ ἔχουν βάρος 5×2 γραμ. καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ὅταν γνωρίζωμεν τὸ βάρος ἀργυρῶν νομισμάτων εἰς γραμμάρια καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν εἰς δραχμάς, διαιροῦμεν τὸ βάρος αὐτῶν διὰ 5. Καὶ τἀνάπαλιν, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν ἀργυρῶν νομισμάτων εἰς δραχμὰς καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος αὐτῶν εἰς γραμμάρια, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀξίαν ἐπὶ 5.

Παραδ. χάριν, ἐὰν ἔχωμεν ἀργυρᾶ νομίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάρος 178 γραμμάρια, ἡ ἀξία αὐτῶν εἶνε 178 : 5, ἤτοι 35δρ.,60. Καὶ τἀνάπαλιν, ἐὰν ἔχωμεν π. χ. 80 δραχμὰς ἀργυρᾶς, τὸ βάρος αὐτῶν εἶνε 80×5 ἢ 400 γραμμ.

Εἰς ἴσην ἀξίαν δραχμῶν τὰ χρυσᾶ νομίσματα ἔχουν βάρος $15 \frac{1}{2}$ φορὰς ὀλιγώτερον τῶν ἀργυρῶν, τὰ δὲ ἀργυρᾶ 20 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν χαλκῶν.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΜΕΤΡΩΝ, ΣΤΑ-

α΄ Μετρα καὶ σταθμὰ δεκα-

Κράτη ἔχοντα ἐν χρήσει τὸ δεκ. μετρ. σύστημα	*Μονάδες μήκους*	*Μονάδες ἐπιφανείας*
Γαλλία, Βέλγιον, Ἑλβετία, Γερμανία, Αὐστρία, Ἰταλία, Ἱσπανία, Πορτογαλλία, Ρουμανία, Σερβία, Βουλγαρία, Τουρκία, Ἑλλάς.	Μυριάμετρον=10000 μ. Χιλιόμετρον=1000 μ. Ἑκατόμμετρον=100 μ. Δεκάμετρον=10 μ. Μέτρον (ἀρχικὴ μονάς) Ὑποδεκάμετρον=0,1 μ. Ὑφεκατόμετρον=0,01 μ. Ὑποχιλιόμετρον=0,001 μ.	Τετραγ. μυριάμετρον=100 000,0000 τετρ. μ. Τετραγ. χιλιόμετρον=1,000,000 τετρ. μ. Ἄριον (διὰ τὰς γαίας)=100 τ. μ. Ἑκτάριον=100 ἄρια Τετρ μέτρον (ἀρχικὴ μονάς) Τετρ. Ὑποδεκάμετρον=0,01 τ. μ. Τ. ὑφεκατ.=0,0001 τ. μ. Τ. ὑποχιλ.=0,000001 τ.μ.
Ἄλλαι μονάδες ἐν χρήσει Ἐν Ἑλλάδι, Τουρκίᾳ καὶ Βουλγαρίᾳ.	Πῆχυς ἐμπορίου=0,64 μ. Ρούπια = $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ. Τεκτ. πῆχυς=0,75 μ.	Τετ. τεκτ. π. $\frac{9}{16}$ τ. μ. Βασιλ. στρέμμα=1000 τ. μ Παλαιὸν » » =1270 τ.μ.
Ἐν Ἀγγλίᾳ	Ὑάρδα=0,914 μ. Πούς = $\frac{1}{3}$ ὑάρδας Δάκτυλος= $\frac{1}{12}$ ποδός Μίλιον=1760 ὑάρ.	Τετρ. ὑάρδα=0,836 τ. μ. Ἄκρε (διὰ τὰς γαίας)=40,50 τ. μ.
Ἐν Ρωσσίᾳ	Ἀρσὶν=0,71 μ. Βέρτσιον=1500 ἀρσὶν	Τετρ. ἀρσὶν=0,505 τ. μ.
Ἐν Ἡνωμέναις Πολιτείαις	Μέτρα καὶ σταθμὰ ἔχουν τὰ Ἀγγλικά.	

β΄ Μονάδες

Κράτη ἔχοντα νομίσματα τῆς Λατιν. νομισμ. συμβάσεως. Ὀνομασία τῆς μονάδος τῶν νομισμάτων καὶ διαίρεσις αὐτῆς.		*Ἀγγλία*	*Γερμανία*
Γαλλία, Βέλγιον, Ἑλβετία	Φράγκον=100 ἑκατοστὰ	Λίρα στερλίνα =20 σελίνια. 1 σελ.=12 πένας, 1 πένα =4 φαρδίν. Ἀξία λίρας = 25,22 φράγκα	Μάρκον = 100 πεφνίγκ Ἀξία μάρκου 1,25 φράγ.
Ἑλλάς	Δραχμὴ =100 λεπτά.		
Ἰταλία	Λίρα =100 τσεντέσιμα		
Ρουμανία	Λέου =100 μπάνι		
Βουλγαρία	Λέβι =100 στοτίνκ		
Σερβία	Δηνάριον=100 παρά		
Ἱσπανία	Πασέτα =100 ἑκατοστὰ		

ΘΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΡΑΤΩΝ

δικοῦ μετρικοῦ συστήματος.

Μονάδες ὄγκου	**Μονάδες χωρητικότητος**	**Μονάδες βάρους**
Κυβικὸν χιλιόμετρον 1,000,000,000 κυβ. μ. Κυβ. μέτρον (ἀρχικὴ μονάς) Κυβ. ὑποδεκάμετρον= 0,001 κ. μ. Κυβ. ὑφεκατόμμετρ.= 0,000001 κ. μ. Κυβ. ὑποχιλιόμετρον 0,000000001 κ. μ.	Ἑκατόλιτρον ἢ κοιλὸν (διὰ τὰ σιτηρά)=100 λιτ. Λίτρα (χωρητικότητος μιᾶς κυβ. παλάμης)	Γόννος=1000 χιλιόγραμμα Χιλιόγραμμον=1000 γραμμάρια. Γραμμάριον (ἀρχικὴ μονάς)=0,001 τοῦ χιλιογράμ.
Κυβ. τεκτ. πῆχυς = $\frac{27}{64}$ κυβ. μ.	Ὀκᾶ (διὰ τὰ ὑγρὰ) χωρητικότης μιᾶς ὀκᾶς βάρους ὕδατος	Στατὴρ=44 ὀκ. Ὀκᾶ (ἀρχικὴ μονάς) Δράμιον=$\frac{1}{400}$ ὀκᾶς Ἀγγλικὴ λίτρα (ἐν Ἑπτανήσῳ)=142 δράμ.
Κυβ. ὑάρδα	Γαλλόνιον = 4,543 τῆς Γαλλικῆς λίτρας	Λίτρα=453,5 γραμ. Οὐγγία= $\frac{1}{16}$ λίτρας Στατὴρ = 112 λίτρ.= 50 χιλιογρ.

ν ο μ ι σ μ ά τ ω ν.

Αὐστρία	**Ῥωσσία**	**Τουρκία**	**Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι**	**Ὁλλανδία**
Φιορίνιον= 100 Κρόϊτσερ Ἀξία φιορινίου =2,50 φράγ.	Ρούβλιον = 100 καπίκια Ἀξία ῥουβλίου =2,65 φρ.	Γρόσιον=40 παράδες Λίρα=100 γρόσ Ἀξία λίρας = 22,80 φράγ.	Δολλάριον=100 σέντσ Ἀξία δολ =5,18 φράγ.	Φλωρίνιον = 100 ἑκατρ. Ἀξία = 2,10 φράγ.

Μονάδες χρόνου.

174. Ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ χρόνου λαμβάνουσιν ὅλα τὰ πεπολιτισμένα Ἔθνη τὴν ***ἡμέραν*** (ἤτοι τὸ ἡμερονύκτιον), ἥτις εἶνε ὡρισμένη ὑπὸ τῆς φύσεως καὶ παριστᾷ τὸν χρόνον, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἡ Γῆ, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ μίαν περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονά της. Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἑκάστη ὥρα εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτά. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται διὰ τοῦ γράμματος λ, ἤτοι 5λ., τὰ δὲ δεύτερα λεπτὰ διὰ τοῦ γράμματος δ, ἤτοι 36δ.

Ἡ ἡμέρα λογίζεται ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ μεσονυκτίου καὶ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιλαμβάνει 12 ὥρας, ἤτοι ἀπὸ τοῦ μεσονυκτίου μέχρι τῆς μεσημβρίας εἶνε 12 ὧραι καὶ λέγονται ***πρὸ μεσημβρίας***, καὶ ἀπὸ τῆς μεσημβρίας μέχρι τοῦ ἑπομένου μεσονυκτίου εἶνε ἄλλαι 12 ὧραι καὶ λέγονται ***μετὰ μεσημβρίαν***.

Τὸ ἔτος διαιρεῖται εἰς 12 μῆνας, τῶν ὁποίων τὰ ὀνόματα εἶνε γνωστά. Ἐκ τούτων ὁ μὲν Ἀπρίλιος, Ἰούνιος, Σεπτέμβριος καὶ Νοέμβριος ἔχουν 30 ἡμέρας, οἱ δὲ λοιποὶ 31 ἐκτὸς τοῦ Φεβρουαρίου, ὅστις ἔχει ἄλλοτε 28 καὶ ἄλλοτε 29 ἡμ. Ὥστε τὸ ἔτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 365 ἡμ. καὶ κάθε τετραετίαν ἀπὸ 366, ὅτε ὁ Φεβρουάριος ἔχει 29 ἡμέρας, λέγεται δὲ τότε τὸ ἔτος ***δίσεκτον***. Δίσεκτα ἔτη εἶνε ὅσα διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4, ὡς εἶνε τὰ ἔτη 1916, 1920, 1924 κτλ.

Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν δὲ εὐκόλως τίνες μῆνες ἔχουσι 30 ἡμέρας καὶ τίνες 31, ὅταν δὲν ἐνθυμώμεθα, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Σχηματίζομεν διὰ τῆς χειρός μας πυγμὴν καὶ ἐπὶ τῶν τελευταίων κονδύλων ἢ κόμβων ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειρὰν τὰ ὀνόματα τῶν μηνῶν ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸν κόμβον τοῦ δείκτου (πρῶτος μὴν θεωρεῖται ὁ Ἰανουάριος), καὶ ἀφοῦ φθάσωμεν εἰς τὸν κόμβον τοῦ μικροῦ δακτύλου, ἐπανερχόμεθα εἰς τὸν κόμβον τοῦ δείκτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἀρίθμησιν. Ὅσων μηνῶν τὰ ὀνόματα πέσωσιν ἐπὶ τῶν κόμβων ἔχουν 31 ἡμέρας, ὅσων δὲ ἐπὶ τῶν κοιλασμάτων μεταξὺ δύο κόμβων ἔχουν 30 ἡμ. (πλὴν τοῦ Φεβρουαρίου).

Σημ. Εἰς τὸ ἐμπόριον οἱ μῆνες λογίζονται μὲ 30 ἡμέρας καὶ ἑπομένως τὸ ἔτος μὲ 360 ἡμ. Ἡ ***ἑβδομὰς*** ἔχει 7 ἡμέρας. Τὸ χρονικὸν διάστημα 100 ἐτῶν λέγεται ***ἑκατονταετηρὶς ἢ αἰών***, τῶν δὲ 1000 ἐτῶν ***χιλιετηρίς***.

Εὕρεσις τῆς ἡμέρας ἐκ τῆς χρονολογίας.

175. Πολλάκις εἶνε χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν ποία εἶνε ἡ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος, ὅταν δοθῇ τὸ ἔτος, ὁ μὴν καὶ ἡ ἡμερομηνία. Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἐλαττώνομεν τὸ δοθὲν ἔτος κατὰ μίαν μονάδα καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ 4 (λαμβάνοντες μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου), ἔπειτα ἀφαιροῦμεν 28 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν ἑκάστου τῶν προηγουμένων μηνῶν τοῦ δοθέντος (ἀρχῆς γινομένης ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου)· τέλος ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὴν ἡμερομηνίαν τοῦ δοθέντος μηνὸς μίαν μονάδα. Ἔπειτα προσθέτομεν τὸ κατὰ μονάδα ἐλαττωθὲν ἔτος, τὸ τέταρτον αὐτοῦ καὶ τὰς εὑρεθείσας διαφοράς· τὸ δὲ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ 7, καὶ ἂν εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 1, ἡ ἡμέρα εἶνε Κυριακή· ἂν 2, Δευτέρα· ἂν 3, Τρίτη· ἂν 4, Τετάρτη· ἂν 5, Πέμπτη· ἂν 6, Παρασκευὴ καὶ ἂν 0, Σάββατον.

Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 18η Ἀπριλίου τοῦ ἔτους 1900.

Ἀριθμὸς ἔτους ἠλαττωμένος κατὰ μονάδα	1899
Ἀριθμὸς ἀκεραίου πηλίκου τοῦ 1899 διὰ 4	474
Ἰανουάριος ἔχει 31 ἡμ. διαφορὰ 31—28 = ...	3
Φεβρουάριος εἶχεν 29, διαφορὰ 29—28 = ...	1
Μάρτιος ἔχει 31, διαφορὰ 31—28 = ...	3
Ἡμερομηνία Ἀπριλίου ἠλαττωμένη κατὰ 1	17
ἄθροισμα	2397

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος 2397 διὰ 7 εἶνε 3, ἑπομένως ἡ 18η Ἀριπλίου τοῦ 1900 ἦτο ***Τρίτη.***

Ἀσκήσεις.

1) Ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 25 Μαρτίου τοῦ ἔτους 1821;

2) Ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 5 Μαρτίου τοῦ ἔτους 1913, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐδολοφονήθη ἐν Θεσσαλονίκῃ ὁ βασιλεὺς τῶν Ἑλλήνων Γεώργιος Α΄;

3) Ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος θὰ εἶνε ἡ 23η Ἀπριλίου τοῦ ἔτους 1930;

Διαίρεσις τῆς περιφερείας κύκλου.

176. Πᾶσα περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***μοῖραι***· ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***πρῶτα λεπτὰ*** τῆς μοίρας· καὶ ἕκαστον πρῶτον

λεπτὸν τῆς μοίρας διαιρεῖται εἰς 60 ***δεύτερα λεπτὰ*** τῆς μοίρας. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν σημειοῦται δι' ἑνὸς μηδενικοῦ, γραφομένου εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ἄνω· ὁ ἀριθμὸς τῶν πρώτων λεπτῶν σημειοῦται δι' ἑνὸς τόνου καὶ ὁ τῶν δευτέρων διὰ δύο τόνων. Π. χ. τὸ τόξον 50 μοιρῶν 40 πρ. λεπτῶν καὶ 30 δευτέρων γράφεται ὡς ἑξῆς· $50^{0}\ 40'\ 30''$.

Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.

177. Ὅσαι τῶν ἀνωτέρω μονάδων διαιροῦνται εἰς δέκατα, ἑκατοστὰ κτλ., ἤτοι ἔχουν δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, καὶ τοιαῦται εἶνε ἐκεῖναι, αἵτινες ἔχουν ὡς βάσιν τὸ Γαλλικὸν μέτρον, ἀποτελοῦν τὸ καλούμενον ***δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα***. Διὰ τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως τῶν μονάδων τούτων καὶ τῶν δεκαδικῶν πολλαπλασίων αὐτῶν ἐκτελοῦνται αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις εὐκόλως καὶ συντόμως.

Προβλήματα τροπῆς μονάδων συστήματός τινος εἰς μονάδας ἄλλου συστήματος.

178. Πολλάκις εἶνε χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν, παραδ. χάριν, πῶς τρέπονται οἱ πήχεις εἰς μέτρα καὶ τἀνάπαλιν, ἢ πῶς αἱ ὀκάδες τρέπονται εἰς χιλιόγραμμα κτλ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμώμεθα τὴν πρὸς ἀλλήλας σχέσιν τῶν μονάδων τούτων· ἡ δὲ τροπὴ γίνεται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς διαιρέσεως (μετρήσεως), ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω προβλημάτων.

1) Νὰ τραποῦν 35 ἐμπορικοὶ πήχεις εἰς μέτρα.

Κατάταξις. 1 πῆχ. ἰσοῦται μὲ 0,64 τοῦ μ.

35 χ

Λύσις. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 46 θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν, ἤτοι $0{,}64 \times 35$ ἢ 22, 40 τοῦ μέτρου.

2) Νὰ τραποῦν 60 μέτρα εἰς τεκτον. πήχεις.

Κατάταξις ([1]). 1 τεκτ. π. ἰσοῦται μὲ 0,75 τοῦ μ.

χ 60

Λύσις. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 64 θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μέτρησιν), ἤτοι 60 : 0,75 ἢ 80 τεκτ. πήχεις.

Νοερῶς. Ἐπειδὴ εἶνε 1 μ. $= 1\frac{1}{3}$ τοῦ τεκτ. πήχεως, διὰ

(1) Καλὸν εἶνε νὰ γίνεται ἡ τοιαύτη κατάταξις τῶν ἀριθμῶν, ἵνα εὐκόλως διακρίνωσιν οἱ μαθηταὶ ποίαν πρᾶξιν θὰ ἐκτελέσωσιν.

τοῦτο δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν ἀπὸ μνήμης ἀκέραιον ἀριθμὸν μέτρων εἰς τεκτ. πήχεις ὡς ἑξῆς.

Προσθέτομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τὸ τρίτον αὐτοῦ.

Παραδ. χάριν, εἰς τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν 60 προσθέτομεν τὸ τρίτον αὐτοῦ 20 καὶ εὑρίσκομεν 80.

3) Νὰ τραποῦν 40 μέτρα εἰς πήχεις ἐμπορίου. Εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε 40 : 0,64 ἢ $62\frac{1}{2}$ πήχεις.

Νοερῶς. Διὰ νὰ τρέπωμεν ἀπὸ μνήμης ἀκέραιον ἀριθμὸν μέτρων εἰς πήχεις ἐμπορίου, πράττομεν ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων προσθέτομεν τὸ ἥμισυ αὐτοῦ καὶ τόσα ὄγδοα ἢ ῥούπια ἀκόμη, ὅσον εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦτο.

Παραδ. χάριν, εἰς τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν 40 προσθέτομεν τὸ ἥμισυ αὐτοῦ 20, ὅτε ἔχομεν 60, καὶ ἀκόμη 20 ῥούπια ἢ $2\frac{1}{2}$ πήχεις καὶ εὑρίσκομεν $62\frac{1}{2}$ π.

Σημ. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν μέτρων εἶνε περιττός, τότε πρὸς εὐκολίαν μας ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτὸν 1 μέτρον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς πήχεις, ὅπως ἀνωτέρω, εἰς δὲ τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον προσθέτομεν $1\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ συμβαίνει λάθος ἥμισυ ῥούπιον ὀλιγώτερον.

4) Νὰ τραποῦν 45 ἐμπορικοὶ πήχεις εἰς ὑάρδας.

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 ἐμπ. πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὑάρδας, ἕπεται ὅτι οἱ 45 π. εἶνε $45 \times \frac{7}{10}$ ἢ $4,5 \times 7$, ἤτοι 31, 5 τῆς ὑάρδας.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἐμπορικοὺς πήχεις εἰς ὑάρδας, πολλαπλασιάζομεν τὸ δέκατον αὐτῶν ἐπὶ 7.

5) Νὰ τραποῦν 300 ὑάρδαι εἰς ἐμπορικοὺς πήχεις.

Λύσις. Ὅσας φορὰς ὁ $\frac{7}{10}$ ἢ 0,7 χωρεῖ εἰς τὸν 300, τόσοι πήχεις εἶνε, ἤτοι 300 : 0,7 ἢ 3000 : 7, ἤτοι $428\frac{4}{7}$ τοῦ πήχεως.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

Διὰ νὰ τρέψωμεν ὑάρδας εἰς ἐμπορικοὺς πήχεις, διαιροῦμεν τὸ δεκαπλάσιον αὐτῶν διὰ 7.

’Ασκήσεις.

1) Νὰ τραποῦν 600 τεκτον. πήχεις εἰς μέτρα. (μ. 450).

2) Νὰ τραποῦν 36,56 τοῦ μέτρου εἰς ὑάρδας. (40)

3) Νὰ τραποῦν 393,75 τοῦ τετρ. μέτρου εἰς τετρ. τεκτ. πήχεις. (700).

4) Νὰ τραποῦν 160 δράμια εἰς γραμμάρια. ($3,2 \times 160$ ἢ 512).

5) Νὰ τραποῦν 768 γραμμάρια εἰς δράμια. (240)

6) Νὰ τραποῦν 31 χιλιόγρ. καὶ 680 γραμ. (ἢ 31680 γρ.) εἰς ὀκάδας. $\left(24 \frac{3}{4}\right.$ τῆς ὀκᾶς$\left.\right)$.

7) Τὸ μέτρον ὑφάσματός τινος ἀξίζει δρ. 6,50. Πόσον ἀξίζει ὁ ἐμπορικὸς πῆχυς; ($6,50 \times 0,64$ ἢ 4,δρ·16).

8) Ἡ ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 8 δρ. Νὰ εὑρεθῇ νοερῶς πόσον ἀξίζει ὁ ἐμπορικὸς πῆχυς.

9) ’Αργυρᾶ νομίσματα (τῆς Λατινικῆς συμβάσεως) ἔχουν βάρος 2500 γραμ. Ποία εἶνε ἡ ἀξία αὐτῶν; (500 δρ.).

Ἴδε ἐδάφιον 173.

10) Χρυσᾶ νομίσματα (τῆς αὐτῆς συμβάσεως) ἔχουν βάρος 145,161 τοῦ γραμμαρίου. Ποία εἶνε ἡ ἀξία αὐτῶν; (450 δρ.).

11) ’Ηγόρασέ τις οἰκόπεδον 478 τετρ. μέτρων ἀντὶ 3441δρ.,60. Πόσον ἀξίζει ὁ τετραγ. τεκτον. πῆχυς; (4δρ.,05)

12) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 1440 κιλὰ καφὲ πρὸς 2δρ.,80 τὸ κιλόν, πρὸς δὲ ἐδαπάνησε μέχρις ἐναποθηκεύσεως αὐτοῦ δρ. 168. Πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὀκᾶ; (3δρ.,73).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

179. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐζυγίσαμεν πρᾶγμά τι καὶ εὕρομεν αὐτὸ $142 \frac{50}{400}$ τῆς ὀκᾶς ἢ 3 στατῆρας 10 ὀκάδ. 50 δράμια (διότι, ἂν διαιρέσωμεν τὰς 142 ὀκ. διὰ 44, εὑρίσκομεν πηλίκον 3 στ. καὶ ὑπόλοιπον 10 ὀκάδας, τὰ δὲ τετρακοσιοστὰ τῆς ὀκᾶς λέγονται ***δράμια***). Ὁ ἀριθμὸς 3 στατ. 10 ὀκ. 50 δράμια ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἀριθμούς· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ἡ μονάς, ἤτοι ὁ 1 στατήρ, εἶνε πολ-

λαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἤτοι τῆς μιᾶς ὀκᾶς (διότι εἶνε 1 στατὴρ = 44 ὀκ.), τοῦ δὲ τρίτου ἡ μονάς, ἤτοι τὸ 1 δράμιον, εἶνε ὡρισμένον μέρος τῆς ἀρχικῆς μονάδος (διότι εἶνε 1 δράμιον = $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς). Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται **συμμιγής**· ὅθεν ὁρίζομεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς·

180. ***Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες ἔχουσιν ἴδιον ὄνομα καὶ ἑκάστη εἶνε ἢ πολλαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἢ ὡρισμένον μέρος αὐτῆς.***

Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶνε πάντοτε συγκεκριμένοι ἀριθμοί, διότι ἕκαστος ἀριθμὸς τῶν συμμιγῶν ἔχει καὶ ἴδιον ὄνομα, ἐνῷ οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ (ἀκέραιοι, κλασματικοὶ καὶ δεκαδικοὶ) δύνανται νὰ εἶνε καὶ ἀφῃρημένοι. Πρὸς διάκρισιν τῶν συμμιγῶν οἱ ἄλλοι οὗτοι ἀριθμοὶ λέγονται *ἁπλοῖ.*

Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν ἀριθμόν, ἤτοι εἰς μονάδας μιᾶς οἱασδήποτε τάξεώς του.

181. Ἔστω, παραδ. χάριν, νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 στατ. 8 ὀκ. 50 δράμ. εἰς μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεώς του, ἤτοι εἰς δράμια.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ὁ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας, οἱ 5 στατῆρες θὰ ἔχωσι 44×5 ἢ 220 ὀκάδας καὶ 8 ὀκάδας ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς συμμιγὴς κάμνουν 228 ὀκάδας.

Τρέπομεν τώρα τὰς 228 ὀκάδας εἰς δράμια σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, αἱ 228 ὀκ. ἔχουν 228×400 ἢ 91200 δράμια καὶ 50 δράμια ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς συμμιγὴς κάμνουν 91250 δράμ. Ὥστε εἶνε 5 στ. 8 ὀκ. 50 δράμ = 91250 δράμια.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

5	στ.	8 ὀκ.	50 δράμ.
44			
220			
8			
228	ὀκάδες		
400			
91200			
50			
91250	δράμια		

Ἔστω προσέτι καὶ τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2 ἔτη 3 μῆν. 5 ἡμ. 4 ὧραι εἰς μονάδας τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεως του, ἤτοι εἰς ὥρας.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ τὸ 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνας, τὰ δύο ἔτη ἔχουν 12×2 ἢ 24 μῆνας, καὶ 3 μῆνας ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 27 μῆνας. Ἔπειτα τρέπομεν τοὺς μῆνας εἰς ἡμέρας σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ ὁ 1 μὴν ἔχει 30 ἡμέρας, οἱ 27 μῆνες ἔχουν 27×30 ἢ 810 ἡμέρας καὶ 5 ἡμ. ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 815 ἡμ. Τέλος τρέπομεν τὰς ἡμέρας εἰς ὥρας σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ ἡ 1 ἡμέρα ἔχει 24 ὥρας αἱ 815 ἡμέραι ἔχουν 815×24 ἢ 19560 ὥρας, καὶ 4 ὥρας ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 19564 ὥρας.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

2 ἔτη 3 μῆν. 5 ἡμ. 4 ὧρ.

12
24
3
27 μῆνες
30
810
5
815 ἡμέραι
24
3260
1630
19560
4
19564 ὧραι

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀνωτέρω συμμιγῆ εἰς πρῶτα λεπτά, ἤτοι εἰς μονάδας κατωτέρας τῆς ἐν τῷ συμμιγεῖ δοθείσης τάξεως, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς ὥρας, καὶ τὸ ἐξαγόμενον 19564 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 60 (διότι 1 ὥρα ἔχει 60 λ.) καὶ εὑρίσκομεν 1173840 λεπτά.

Ἐὰν πάλιν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς δεύτερα λεπτά, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πρώτων λεπτῶν ἐπὶ 60 (διότι 1 λ. ἔχει 60 δ.) καὶ εὑρίσκομεν 70430400 δεύτερα λεπτά.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι, ὅταν ὁ συμμιγὴς τρέπηται εἰς μονάδας τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεώς του ἢ καὶ ἄλλης τάξεως κατωτέρας τῆς δοθείσης, τὸ ἐξαγόμενον εἶνε ***ἀκέραιος*** ἀριθμός.

Ἴδωμεν τώρα πῶς τρέπεται ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς ἀριθμὸς εἰς μονάδας οἱασδήποτε ἄλλης τάξεως ἀνωτέρας, ἤτοι εἰς ἡμέρας, μῆνας καὶ ἔτη.

1ον) Ἔστω νὰ τραπῇ ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς εἰς ἡμέρας. Πρὸς τοῦτο τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεώς του, ἤτοι εἰς ὥρας, καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἶνε 1 ἡμέρα $=24$ ὥρας, ἄρα ἡ 1 ὥρα εἶνε τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας καὶ ἑπομένως αἱ 19564 ὧραι εἶνε τὰ $\frac{19564}{24}$ τῆς ἡμέρας. Ὥστε εἶνε 2 ἔτη 3 μῆν. 5 ἡμ. 4 ὥρ. $=\frac{19564}{24}$ τῆς ἡμέρας.

2ον) Ἔστω νὰ τραπῇ ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς εἰς μῆνας. Πρὸς τοῦτο τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεώς του, ἤτοι εἰς ὥρας, καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἶνε 1 μὴν $=30$ ἡμέρας $=30\times 24$ ἢ 720 ὥρας, ἄρα ἡ 1 ὥρα εἶνε τὸ $\frac{1}{720}$ τοῦ μηνὸς καὶ ἑπομένως αἱ 19564 ὧραι εἶνε τὰ $\frac{19564}{720}$ τοῦ μηνός. Ὥστε εἶνε 2 ἔτη 3 μ. 5 ἡμ. 4 ὥρ. $=\frac{19564}{720}$ τοῦ μηνός.

3ον) Ἔστω τέλος νὰ τραπῇ ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς εἰς ἔτη. Πρὸς τοῦτο τρέπομεν πάλιν αὐτὸν εἰς ὥρας καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἐπειδὴ εἶνε 1 ἔτος $=12$ μῆνες $=12\times 30$ ἡμέρας $=12\times 30\times 24$ ἢ 8640 ὥρας, ἄρα ἡ 1 ὥρα εἶνε τὸ $\frac{1}{8640}$ τοῦ ἔτους καὶ ἑπομένως αἱ 19564 ὧραι εἶνε τὰ $\frac{19564}{8640}$ τοῦ ἔτους. Ὥστε εἶνε 2 ἔτη 3 μῆν. 5 ἡμ. 4 ὥρ. $=\frac{19564}{8640}$ τοῦ ἔτους.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι, ὅταν ὁ συμμιγὴς τρέπηται εἰς μονάδας οἱασδήποτε ἄλλης τάξεως ἀνωτέρας, τὸ ἐξαγόμενον εἶνε ***κλάσμα.***

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

182. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς μονάδας οἱασδήποτε τάξεως ἀνωτέρας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας***

τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεώς του καὶ τὸ ἐξαγόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστιφανερώνει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεώς του κάμνουν μίαν μονάδα τῆς τάξεως ἐκείνης, εἰς τὴν ὁποίαν πρόςκειται νὰ τραπῇ ὁ συμμιγής.

Τροπὴ ἁπλοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

183. Ἔστω, παραδ. χάριν, νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 47350 δράμια εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς ὀκάδας, καὶ ὅσας φορὰς ὁ 400 (διότι 1 ὀκᾶ ἔχει 400 δράμ.) χωρεῖ εἰς τὸν 47350, τόσαι ὀκάδες περιέχονται· ὥστε διαιροῦντες εὑρίσκομεν πηλίκον 118 ὀκ. καὶ ὑπόλοιπον 150 δράμ. Τὰς 118 ὀκ. τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς στατῆρας, καὶ ὅσας φορὰς ὁ 44 (διότι ὁ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκ.) χωρεῖ εἰς τὸν 118, τόσοι στατῆρες περιέχονται· ὥστε διαιροῦντες εὑρίσκομεν πηλίκον 2 στ. καὶ ὑπόλοιπον 30 ὀκ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

473(50	4(00	
07	118 ὀκ.	44
33	30 ὀκ.	2στ.
150 δράμ.		

Ὥστε εἶνε 47350 δράμ. = 2 στ. 30 ὀκ. 150 δράμ.

Καὶ κλάσμα τρέπεται εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του (διότι πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ).

Ἔστω π. χ. νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{35}{8}$ τῆς ὥρας εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. Διαιροῦμεν τὸν 35 διὰ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 ὥρας καὶ ὑπόλοιπον 3 ὥρας. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς πρῶτα λεπτά, καὶ εὑρίσκομεν 60×3 ἢ 180 λ.· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 180 διὰ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 22 λ. καὶ ὑπόλοιπον 4 λ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ εὑρίσκομεν 60×4 ἢ 240 δ.· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 240 διὰ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 30 δ. καὶ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε εἶνε $\frac{35}{8}$ τῆς ὥρας = 4 ὥρ. 22 λ. 30 δ.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

35 ὧραι	8
3	4 ὥρ. 22 λ. 30 δ.
60	
180 λ.	
20	
4	
60	
240 δ.	
0	

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

184. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα μιᾶς τάξεως (οὐχὶ τῆς κατωτάτης) ἑνὸς συμμιγοῦς εἰς συμμμιγῆ ἀριθμόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸ κλάσμα, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν μέχρι τῆς τελευταίας τάξεως.***

Σημ. Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς συμμιγῆ, τρέπομεν τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ εἰς συμμιγῆ καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὸν συμμιγῆ μὲ τὸν ἀκέραιον. Παραδ. χάριν, εἶνε $6\frac{3}{5}$ τῆς ὑάρδας $=$ 6 ὑάρ. 1 π. $9\frac{3}{5}$ δακ. Διὰ νὰ τρέψωμεν δεκαδικὸν εἰς συμμιγῆ, γράφομεν πρῶτον αὐτὸν ὡς κλάσμα καὶ ἔπειτα πράττομεν, ὡς ἀνωτέρω. Π. χ. εἶνε 0,28 τῆς ὥρας $= \frac{28}{100} =$ 16λ 48δ. Ἐπίσης εἶνε 5,37 τῆς ὀκᾶς $= 5\frac{37}{100} =$ 5 ὀκ. 148 δράμια.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 3 στ. 10 ὀκ. 200 δράμια εἰς δράμια, ὀκάδας καὶ στατῆρας.

(57000 δράμια, $\frac{57000}{400}$ τῆς ὀκᾶς $\frac{57000}{17600}$ τοῦ στατ.).

2) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 3 ἔτη 4 μῆν. 20 ἡμ. εἰς ἡμέρας, μῆνας καὶ ἔτη. (1220 ἡμ. $\frac{1220}{30}$ τοῦ μηνός, $\frac{1220}{360}$ τοῦ ἔτους).

3) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 5 μέτρα 8 παλ. 9 δάκ. 6 γρ. εἰς μέτρα, παλάμας, δακτύλους καὶ γραμμάς.

(5μ., 896 58,96 παλ. 589,6 δ. 5896 γρ.).

4) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2 λίραι 5 σελ. 10 πέν. εἰς λίρας καὶ σελίνια. $\left(\frac{550}{240}\right.$ τῆς λίρας. $\frac{550}{12}$ τοῦ σελ.$\left.\right)$.

5) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 10 ὑάρ. 2 πόδ. 10 δ. εἰς ὑάρδας.

$\left(\frac{394}{36}\right.$ τῆς ὑάρδας$\left.\right)$.

6) Νὰ τραποῦν 10 ὀκ. 100 δράμ. εἰς κλάσμα τοῦ στατῆρος.

$\left(\frac{4100}{17600}\right.$ τοῦ στατ.$\left.\right)$.

7) Νὰ τραποῦν 15 ἡμέραι εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους.

$\left(\frac{15}{360}\right.$ τοῦ ἔτους$\left.\right)$.

8) Νὰ τραποῦν 872430δ τῆς ὥρας εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν

(10 ἡμ. 2 ὥρ. 20λ 30δ).

9) Νὰ τραποῦν 56970 δράμια εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

(3 στ. 10 ὀκ. 170 δρ.).

10) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ τῆς ἡμέρας εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

(9 ὥρ. 36λ).

11) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{21}{8}$ τοῦ στατῆρος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

(2 στ. 27 ὀκ. 200 δρ.).

12) Νὰ τραπῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,56 τοῦ στατῆρος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

(3 στ. 24 ὀκ. 256 δρ.).

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

185. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμοὺς (ὁμοειδεῖς), προσθέτομεν αὐτούς, καθὼς καὶ τοὺς ἀκεραίους, ἤτοι γράφομεν τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἔπειτα προσθέτομεν αὐτοὺς ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν. Ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα τάξεώς τινος ἀποτελῇ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης κάμνουν*

μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) γράφομεν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην τῶν προσθετέων, τὸ δὲ πηλίκον προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Παραδείγματα.

3 στ.	35 ὀκ.	250 δρ.	3 ὠρ.	20λ	15δ
8	28	360	8	12	20
35	6			45	30
47 στ.	26 ὀκ.	210 δρ.	12 ὠρ.	18λ	5δ

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα τὸ ἄθροισμα τῶν δραμίων εἶνε 610, ἤτοι 1 ὀκᾶ καὶ 210 δράμια, γράφομεν λοιπὸν 210 εἰς τὴν στήλην τῶν δραμίων καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὰς ὀκάδας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶνε 69 καὶ 1 τὸ κρατούμενον 70 ὀκάδες· ἀλλ' 70 ὀκάδες κάμνουν 1 στατῆρα καὶ 26 ὀκάδας, γράφομεν λοιπὸν 26 εἰς τὴν στήλην τῶν ὀκάδων καὶ μεταβαίνομεν εἰς τοὺς στατῆρας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶνε 46 καὶ 1 τὸ κρατούμενον 47, γράφομεν λοιπὸν 47 εἰς τὴν στήλην τῶν στατήρων.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τοῦ δευτέρου παραδείγματος.

Πρόβλημα. Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη τὸ ἔτος 1858 Ἰουλίου 24 καὶ ἔζησε 49 ἔτη 9 μῆνας 15 ἡμέρας. Πότε ἀπέθανε;

Λύσις. Ὁ Ἰούλιος εἶνε ὁ ἕβδομος μὴν τοῦ ἔτους, διὰ τοῦτο γράφομεν ἀντ' αὐτοῦ τὸν εἰς αὐτὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν 7 καὶ κατόπιν προσθέτομεν. Ἤτοι

1858 ἔτ.	7 μ.	24 ἡμ.
49	9	15
1908 ἔτ.	5	9 ἡμ.

ὥστε ἀπέθανε τὸ ἔτος 1908 Μαΐου 9

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

186. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν συμμιγῆ ἀπὸ συμμιγῆ, γράφομεν πρῶτον αὐτούς, ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ συμβῇ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου νὰ εἶνε μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τόσας***

μονάδας, ὅσαι χρειάζονται, διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, προσέχοντες ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως μίαν μονάδα, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ (ἐδ. 28).

Ἔστω π. χ. νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 5 στ. 30 ὀκ. 300 δράμ. ἀπὸ τὸν συμμιγῆ 8 στ. 40 ὀκ. 100 δράμ.

8 στ.	40 ὀκ.	100 δρ.
5	30	300
3 στ.	9 ὀκ.	200 δρ.

Ἐπειδὴ ὁ 300 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν 100, προσθέτομεν 400 δράμια εἰς τὸν 100 (διότι εἶνε 1 ὀκᾶ = 400 δράμ.) καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν τὸν 300 ἀπὸ τὸν 500 καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν 200 δράμ. Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν ἑπομένην τάξιν λέγοντες 30 καὶ 1, 31 ἀπὸ 40 μένουν 9 ὀκ. Τέλος ἀφαιροῦμεν καὶ τὸν 5 ἀπὸ τὸν 8 καὶ εὑρίσκομεν 3 στ.

Ἔστωσαν προσέτι καὶ τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

10 ὑάρ.	2 πόδ.	7 δάκ.
6	1	10
4 ὑάρ.	0 π.	9 δ.

9 στ.		
4	20 ὀκ.	100 δρ.
4 στ.	23 ὀκ.	300 δρ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος εἴς τινα 9 πήχεις 7 ῥούπια, εἰς ἄλλον 15 πήχεις 6 ῥούπια καὶ τοῦ ἔμειναν 24 πήχεις 5 ῥούπια. Πόσον ἦτο ἀπ' ἀρχῆς τὸ ὕφασμα; (50 π. 2 ῥ.).

2) Ἠγόρασέ τις σῖτον κατὰ τρεῖς διαφόρους ἐποχάς· τὴν πρώτην φορὰν ἠγόρασε 3 στ. 20 ὀκ., τὴν δευτέραν φορὰν 7 στ. 300 δράμια καὶ τὴν τρίτην φορὰν 15 στ. 40 ὀκ. 250 δρ. Πόσον ἠγόρασε τὸ ὅλον; (26 στ. 17 ὀκ. 150 δρ.).

3) Ὅταν ἐν Ἀθήναις εἶνε μεσημβρία, ἐν Λονδίνῳ εἶνε 10 ὥρ. 24 λ 37 δ πρὸ μεσημβρίας. Ποία εἶνε ἡ διαφορὰ τῆς ὥρας τῶν δύο τούτων πόλεων; (1 ὥρα 35 λ 23 δ).

4) Γεωργός τις εἶχε χωράφια 28 στρεμμάτων καὶ ἐξ αὐτῶν ἔδωκεν εἰς τὸ ἓν τέκνον του 7 στρ. 800 τετρ. μέτρα, εἰς δὲ τὸ ἄλλο 9 στρέμ. 900 τετρ. μ. Πόσον τοῦ ἔμεινε; (10 στρ. 300 τ. μ.).

5) Ἠγόρασέ τις 8 στ. 10 ὀκ. 300 δράμ. ἀνθράκων καὶ ἐξ αὐτῶν

ἐπώλησεν εἴς τινα $2\frac{4}{5}$ τοῦ στατῆρος. Πόσοι ἄνθρακες τοῦ ἔμειναν; (5 στ. 19 ὀκ. 220 δρ.).

Σημ. Τρέπομεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ τοῦ στατῆρος εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν.

6) Τηλεγράφημά τι παρεδόθη εἰς τὸ τηλεγραφεῖον μιᾶς πόλεως τὴν 8 ὥρ. 55λ. π. μ. καὶ διεβιβάσθη εἰς ἄλλην πόλιν μετὰ 1 ὥρ. 30λ., εἰς δὲ τὸν παραλήπτην παρεδόθη τοῦτο τὴν 3 ὥρ. 10λ μ. μ. (τῆς αὐτῆς ἡμέρας). Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀφίξεώς του παρεδόθη; (Μετὰ 4 ὥρ. 45λ).

7) Μιᾶς οἰκογενείας ὁ μὲν πατὴρ ἀπέθανε τὸ ἔτος 1900 Ἰανουαρίου 8 καὶ ὥραν 1ην 15λ π. μ., ἡ δὲ μήτηρ ἀπέθανε μετὰ 5 ἔτη 7 μ. 13 ἡμ. 10 ὥρ. 20λ ἀπὸ τοῦ θανάτου τοῦ πατρός, ὁ δὲ υἱός των ἀπέθανε τὸ ἔτος 1921 Μαΐου 22 καὶ ὥραν 5 μ. μ. Ζητεῖται πότε ἀπέθανεν ἡ μήτηρ καὶ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τοῦ θανάτου τῆς μητρὸς ἀπέθανεν ὁ υἱός των.

(Τὸ ἔτος 1905 Αὐγ. 21 ὥραν 11 35λ π. μ. Μετὰ 15 ἔτη 9μ. 1 ἡμ. 5 ὥρ. 25λ).

Σημ. Εἰς τὰς μεταμεσημβρινὰς ὥρας προσθέτομεν πάντοτε τὰς παρελθούσας 12 ὥρας μέχρι τῆς μεσημβρίας καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1ον) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιος ἢ κλάσμα.

1) ***Πρόβλημα.*** Ἠγόρασέ τις 8 σάκκους ἀλεύρου, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει βάρος 1 στ. 8 ὀκ. 120 δράμια. Πόσον βάρος ἔχουν καὶ οἱ ὀκτὼ σάκκοι;

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ 1 σάκκος ἔχει βάρος 1 στ. 8 ὀκ. 120 δράμια, οἱ ὀκτὼ σάκκοι θὰ ἔχωσι βάρος ὀκτὼ φορὰς περισσότερον· ὥστε θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ 8. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς χωριστὰ ἐπὶ 8 ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν του τάξιν. Ἡ δὲ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	1	στ.	8	όκ.	120	δράμ.
					8	
	8	στ.	64	όκ.	960	δράμ.
ἢ	9	στ.	22	όκ.	160	δράμ.

Τὸ γινόμενον τῶν 120 δραμίων ἐπὶ 8 εἶνε 960 δράμια, ἤτοι 2 όκ. καὶ 160 δράμια, γράφομεν λοιπὸν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην 160 δρ. καὶ κρατοῦμεν τὰς 2 όκ., διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ὀκάδων. Τὸ γινόμενον τῶν 8 όκ. ἐπὶ 8 εἶνε 64 όκ. καὶ 2 (τὰ κρατούμενα) 66 ὀκάδες, ἤτοι 1 στατὴρ καὶ 22 ὀκάδες, γράφομεν λοιπὸν 22 όκ. καὶ κρατοῦμεν τὸν 1 στατ. διὰ νὰ τὸν προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν στατήρων. Τέλος τὸ γινόμενον τοῦ 1 στατ. ἐπὶ 8 εἶνε 8 στ. καὶ 1 (τὸ κρατούμενον) 9 στατῆρες, γράφομεν λοιπὸν 9 στατῆρες.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

187. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν. Ἐὰν δὲ μερικόν γινόμενόν τι ἀποτελῇ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς (καθὼς πράττομεν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν) καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον μερικὸν γινόμενον.***

2) ***Πρόβλημα.*** Πρόκειται νὰ μοιρασθῶσιν 60 στατ. 23 όκ. 100 δράμ. σίτου εἰς 25 πτωχὰς οἰκογενείας. Πόσον θὰ λάβῃ ἑκάστη;

Λύσις. Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τοὺς 60 στατῆρας, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 60 διὰ 25 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 στ. καὶ ὑπόλοιπον 10 στ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς ὀκάδας, ἤτοι 10×44 ἢ 440 όκ. καὶ 23 όκ. ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 463 ὀκάδας, μοιράζομεν τώρα τὰς 463 όκ., ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 463 διὰ 25 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 18 όκ. καὶ ὑπόλοιπον 13 όκ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς δράμια, ἤτοι 13×400 ἢ 5200 δράμια καὶ 100 δρ. ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 5300 δράμια, μοιράζομεν τέλος καὶ ταῦτα, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 5300 διὰ 25 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 212 δράμια καὶ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε ἑκάστη οἰκογένεια θὰ λάβῃ 2 στ. 18 όκ. 212 δρ. σίτου. Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

60 στ. 23 όκ. 100 δρ.	25
10	2 στ. 18 όκ. 212 δράμ.
44	
440	
23	
463 όκάδες	
213	
13	
400	
5200	
100	
5300 δράμια	
30	
50	
0	

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

188. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾿ ἀκεραίου, διαιροῦμεν χωριστὰ ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς διὰ τοῦ ἀκεραίου ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν ἀνωτέραν τάξιν. Ἐὰν δὲ ἐκ μερικῆς τινος διαιρέσεως μείνῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς ὁμοειδεῖς μονάδας τοῦ συμμιγοῦς (ἂν ἔχῃ), τὸ δὲ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις ὅτου διαιρέσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς.***

3) ***Πρόβλημα.*** Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2 πεντ. 4 δρ. 30 λεπτά. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ στατῆρος;

Κατάταξις.	1 στ.	2 πεντ.	4 δρ. 30 λ.
	$\frac{3}{5}$		χ

Λύσις. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν (ἐδάφ. 124). Πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι ὁ συμμιγὴς 2 πεντ, 4 δρ. 30 λεπτά, καὶ ἑπομένως πολλαπλασιαστὴς εἶνε τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$· ὥστε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα.

189. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.***

Σημ. Ὁ κανὼν οὗτος ἐξάγεται ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

2 πεντ. 4 δρ. 30 λ. $\times \frac{3}{5}$
3
8 πεντ. 2 δρ. 90 λ. | 5
3 | 1 π. 3 δρ. 58 λ.
5
15
2
17 δραχ.
2
100
200
90
290 λεπτ.
40
0

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ συντόμως ὡς ἑξῆς. Τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστέον 2 πεντ. 4 δρ. 30 λ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν τῆς δραχμῆς, ἤτοι 14δρ.,30 (διότι 2 π. 4 δρ. κάμνουν 14 δρ.) καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ καὶ εὑρίσκομεν 8δρ.,58.

190. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτὸν ἢ δεκαδικόν, τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ δεκαδικὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν, ὡς ἀνωτέρω.***

191. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον (ἐδ. 138).***

Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης εἶνε μικτὸς ἀριθμὸς ἢ δεκαδικός, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν.

* Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

192. Ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶνε πολυψήφιος ἀριθμός, πολλαπλασιάζομεν χάριν εὐκολίας καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἔστω π.χ. νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 3 ὥρ. 30λ 45δ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 540.

Θὰ πολλαπλασιάσωμεν πάλιν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ 540 ἀρχόμενοι ὅμως ἀπὸ τὴν ἀνωτέραν τάξιν τοῦ συμμιγοῦς. Καὶ ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀνωτέρας τάξεως, πρέπει νὰ παρατηρῶμεν, ὅταν θὰ μεταβαίνωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἑκάστου τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν τοῦ συμμιγοῦς, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τρίτον ἢ τὸ τέταρτον κτλ. μιᾶς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, εἰ δὲ μή, νὰ ἀναλύωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς τοιαῦτα ἁπλᾶ μέρη. Διὰ τοῦτο δὲ ὁ τρόπος οὗτος λέγεται ***μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.***

Τὸ γινόμενον λοιπὸν τῶν 3 ὡρῶν ἐπὶ 540 εἶνε 1620 ὧραι.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν 30λ, ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ 30λ εἶνε τὸ ἥμισυ μιᾶς ὥρας (διότι εἶνε 1 ὥρα=60λ)· ὅθεν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1 ὥραν ἐπὶ 540, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 540 ὥρας, ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 30λ, ἤτοι τὸ ἥμισυ μιᾶς ὥρας, διὰ τοῦτο θὰ εὕρωμεν γινόμενον τὸ ἥμισυ τοῦ 540, ἤτοι 270 ὥρας.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν 45δ, ἀλλὰ πρῶτον ἀναλύομεν τὰ 45δ εἰς 30δ καὶ 15δ (διότι τὰ 30δ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, καὶ τὰ 15δ εἶνε τὸ τέταρτον αὐτοῦ ἢ τὸ ἥμισυ τῶν 30δ), ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν 30λ ἐπὶ 540 εἶνε 270 ὧραι, ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ 1λ ἐπὶ 540 θὰ εἶνε τὸ τριακοστὸν τῶν 270 ὡρῶν, ἤτοι 9 ὧραι· ἐὰν λοιπὸν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1λ ἐπὶ 540, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 9 ὥρας, ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 30δ ἤτοι τὸ ἥμισυ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, διὰ τοῦτο θὰ εὕρωμεν γινόμενον τὸ ἥμισυ τῶν 9 ὡρῶν, ἤτοι 4 ὥρ. 30λ.

Ἔχομεν ἀκόμη νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ 15δ ἐπὶ 540· πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν 30δ ἐπὶ 540 εἶνε 4 ὥρ. 30λ., ἄρα τὸ γινόμενον τῶν 15δ., ἤτοι τὸ ἥμισυ τῶν 30δ., θὰ εἶνε καὶ τὸ ἥμισυ τῶν 4 ὥρ. 30λ., ἤτοι 2 ὥρ. 15λ..

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν γινομένων εἶνε τὸ ζητούμενον. Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

3 ὥρ. 30λ 45δ
540

γινόμενον 3 ὡρῶν ἐπὶ 540 .... 1620 ὥρ.

» 30λ $\left(=\frac{1}{2}\right.$ μιᾶς ὥρ.$\left.\right)$ ἐπὶ 540 270

45 { » 30δ $\left(=\frac{1}{2}\right.$ τοῦ 1λ $\left.\right)$ ἐπὶ 540 4 30λ (1λ δίδει γινό-[μενον 9 ὥρ.).

» 15δ $\left(=\frac{1}{2}\right.$ τῶν 30δ $\left.\right)$ ἐπὶ 540 2 15λ

ἄθροισμα μερικῶν γινομένων .... 1896 ὥρ. 45λ

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 15 στ. 34 ὀκ. 250 δράμ. ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 26.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

15 στ. 34 ὀκ. 250 δρ
26
90
30

34 ὀκ. { γινόμ. 22 ὀκ. $\left(=\frac{1}{2}\right.$ στ. $\left.\right)$ ἐπὶ 26 ... 13

» 11 ὀκ. $\left(=\frac{1}{2}\right.$ τῶν 22 ὀκ. $\left.\right)$ » 6 22 ὀκ.

» 1 ὀκ. $\left(=\frac{1}{11}\right.$ τῶν 11 ὀκ. $\left.\right)$ » 0 26

250 δρ. { » 200 δρ. $\left(=\frac{1}{2}\right.$ ὀκᾶς$\left.\right)$ » 0 13

» 50 δρ. $\left(=\frac{1}{4}\right.$ τῶν 200 $\left.\right)$ » 0 3 100 δρ.

ἄθροισμα μερικῶν γινομ. 410 στ. 20 ὀκ. 100 δρ.

2ον) **Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε συμμιγής.**

1) *Πρόβλημα.* Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 4 δρ. 80 λεπτά. Πόσον ἀξίζουν 9 πήχ. 5 ῥούπια ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Κατάταξις. 1 πῆχ. 4 δρ. 80 λ.
9 π. 5 ῥ. χ

Λύσις. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ἤτοι τοῦ ἑνὸς πήχεως) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων (ἤτοι πολλῶν πήχεων), διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν (ἐδ. 124). Πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι ὁ συμμιγὴς 4 δρ. 80 λ., καὶ ἑπομένως πολλαπλασιαστὴς εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων, ἤτοι ὁ συμμιγὴς 9 πήχ. 5 ῥ. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς δὲν γίνεται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν (διότι οὗτος ἔχει καὶ ῥούπια), καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς (διότι ἡ ἀξία τοῦ πήχεως ἔχει δοθῇ), διὰ τοῦτο τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς πήχεις, διὰ νὰ γίνῃ ὁμοειδὴς πρὸς αὐτήν, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε 9 πήχ. 5 ῥ. $= \frac{77}{8}$ τοῦ πήχεως. Πολλαπλασιάζομεν τώρα τὰς 4 δρ. 80 λ. ἢ 4,80 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{77}{8}$ (θεωροῦντες τοῦτο ὡς ἀφῃρημένον) καὶ εὑρίσκομεν 46,20 δρ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος βλέπομεν, ὅτι

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε συμμιγής, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.

2) ***Πρόβλημα.*** Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 60 λεπτά. Πόσον ἀξίζουν 2 στ. 5 ὀκ. 300 δράμ. ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος;

Κατάταξις.	1 ὀκ.	60 λ.
	2 στ. 5 ὀκ. 300 δρ.	χ.

Λύσις. Θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν διὰ τὸν αὐτὸν ἀνωτέρω λόγον. Πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι τὰ 60 λεπτά, καὶ ἑπομένως πολλαπλασιαστὴς εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων (τῶν πολλῶν ὀκάδων), ἤτοι ὁ συμμιγὴς 2 στ. 5 ὀκ. 300 δρ. Τρέπομεν πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ὀκάδας (διότι ὀκάδας παριστᾷ καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε 2 στ. 5 ὀκ. 300 δρ. $= \frac{37500}{400}$ ἢ $\frac{375}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Πολλαπλασιάζομεν τώρα τὰ 60 λεπτὰ ἐπὶ $\frac{375}{4}$ καὶ εὑρίσκομεν 5625 λ. ἢ 56δρ.,25.

Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν. Παραδ. χάριν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρῶτον πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει 4 δρ. 80 λεπτά, οἱ 9 πήχεις ἀξίζουν 9 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 36 δρ. 720 λ. Ἔπειτα ἀναλύομεν τὰ 5 ῥούπια εἰς 4 ῥ. καὶ 1 ῥ. (διότι τὰ 4 ῥ. εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἑνὸς πήχεως καὶ τὸ 1 ῥ. εἶνε τὸ τέταρτον τῶν 4 ῥ.) καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει 4 δρ. 80 λεπτά, τὰ 4 ῥούπια, τὰ ὁποῖα εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἑνὸς πήχεως, ἀξίζουν καὶ τὸ ἥμισυ τῶν 4 δρ. 80 λ., ἤτοι 2 δρ. 40 λεπτά, καὶ τὸ 1 ῥούπιον, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ τέταρτον τῶν 4 ῥουπίων, ἀξίζει καὶ τὸ τέταρτον τῶν 2 δρ. 40 λ., ἤτοι 60 λ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνωτέρω γινομένων εἶνε τὸ ζητούμενον.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

		4δρ.	80λ.
		9π.	5ρ.
	ἀξία 9 πήχεων..............	36δρ.	720λ.
5 ρ.	» 4 ρ. $\left(=\frac{1}{2}\text{ τοῦ πήχ.}\right)$	2	40
	» 1 ρ. $\left(=\frac{1}{4}\text{ τῶν 4 ρ.}\right)$		60
	ἄθροισμα	46δρ.	20λ.

3) ***Πρόβλημα.*** Ἠγόρασέ τις 2 στ. 20 ὀκ. ἔξ ἑνὸς πράγματος καὶ ἔδωκε 4 πεντ. 1 δρ. 60 λ. Πόσον ἀξίζει ὁ στατήρ;

Κατάταξις. 2 στ. 20 ὀκ. 4 π. 1 δρ. 60 λ.
1 στ. χ

Λύσις. Γνωρίζομεν ἐδῶ τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων (ἤτοι πολλῶν στατήρων) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ἤτοι ἑνὸς στατῆρος), διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν, μερισμὸν (ἐδάφ. 137). Διαιρετέος εἶνε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, ἤτοι ὁ συμμιγὴς 4 π. 1 δρ. 60 λ. καὶ ἑπομένως διαιρέτης εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων, ἤτοι ὁ συμμιγὴς 2 στ. 20 ὀκ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης δὲν γίνεται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν (διότι οὗτος ἔχει καὶ ὀκάδας), διὰ τοῦτο τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς στατῆρας, διὰ νὰ γίνῃ ὁμοειδὴς πρὸς αὐτήν, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε 2 στ. 20 ὀκ. $=\frac{108}{44}$ ἢ $\frac{27}{11}$ τοῦ στατῆρος. Διαιροῦμεν τώρα τὸν συμμιγῆ 4 π. 1 δρ. 60 λ. διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{27}{11}$ (ἐδ. 191) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ στατὴρ ἀξίζει 1 π. 3 δρ. 80 λ.

Σημ. Δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν, ἂν τρέψωμεν τὸν διαιρετέον εἰς δραχμάς, ἤτοι 21,60, καὶ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ $\frac{27}{11}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος βλέπομεν πάλιν, ὅτι *Ὅταν ὁ διαιρέτης (εἰς τὸν μερισμὸν) εἶνε συμμιγής, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν.*

4) ***Πρόβλημα.*** Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 2 στ. 20 ὀκ. ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν 4 πεντ. 1 δρ. 60 λ. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ ἓν πεντάδραχμον;

Κατάταξις.	2 στ. 20 ὀκ.	4 π. 1 δρ. 60 λ.
	χ	1 π.

Σημ. Ὡς παρατηροῦμεν, εἶνε οἱ ἴδιοι συμμιγεῖς τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος.

Λύσις. Μονὰς ἐδῶ εἶνε τὸ 1 πεντάδραχμον, πολλαὶ μονάδες, ἤτοι πολλὰ πεντάδραχμα, εἶνε ὁ συμμιγὴς 4 π. 1 δρ. 60 λ. καὶ τιμὴ αὐτῶν ὁ συμμιγὴς 2 στ. 20 ὀκ. Ὥστε γνωρίζομεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν, μερισμόν. Διαιρετέος εἶνε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, ἤτοι ὁ συμμιγὴς 2 στ. 20 ὀκ., καὶ διαιρέτης ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων, ἤτοι ὁ συμμιγὴς 4 π. 1 δρ 60 λ. Τρέπομεν πρῶτον τὸν διαιρέτην εἰς πεντάδραχμα (διότι πεντάδραχμα παριστᾷ καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε 4 π. 1 δρ. 60 λ. $= \frac{2160}{500}$ ἢ $\frac{108}{25}$ τοῦ πεντ. Διαιροῦμεν τώρα τὸν συμμιγῆ 2 στ. 20 ὀκ. διὰ τοῦ κλάσματος τούτου καὶ εὑρίσκομεν ὅτι μὲ 1 πεντ. ἀγοράζομεν 25 ὀκ.

5) ***Πρόβλημα.*** Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2 δρ. 80 λεπτά. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 3 πεντ. 4 δρ 60 λ. ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος;

Κατάταξις.	1 ὀκ.	2 δρ. 80 λ.
	χ	3 π. 4 δρ. 60 λ.

Λύσις. Γνωρίζομεν ἐδῶ τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ἤτοι μιᾶς ὀκᾶς) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς πολλὰς μονάδας (ἤτοι τὰς πολλὰς ὀκάδας), τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν τιμὴν 3 π. 4 δρ. 60 λεπτά, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν, μέτρησιν (ἐδάφ. 142). Διαιρετέος εἶνε ἡ τιμὴ τῶν ζητουμένων μονάδων καὶ διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ μέτρησις τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἄλλου, πρέπει ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης νὰ εἶνε ἀριθμοὶ ἁπλοῖ καὶ ὁμοειδεῖς, διότι ἄλλως μέτρησις δὲν γίνεται· διὰ τοῦτο τρέπομεν πρῶτον καὶ τοὺς δύο εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς λεπτά, καὶ εὑρίσκομεν 2 δρ. 80λ. = 280 λεπτὰ καὶ 3 π. 4 δρ. 60 λ. = 1960 λ. Διαιροῦμεν τώρα τὸν 1960 διὰ τοῦ 280 (ὡς ἀφῃρημένους) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 7 ὀκάδας (διότι ὀκάδας παριστᾷ καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν).

Σημ. Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς συμμιγεῖς καὶ εἰς μονάδας οἱασδήποτε ἄλλης τάξεως (ἀλλὰ τῆς αὐτῆς πάντοτε), προτιμῶμεν ὅμως τὴν κατωτέραν τάξιν, διὰ νὰ ἔχωμεν ἐξαγόμενα ἀκεραίους ἀριθμοὺς πρὸς εὐκολίαν τῶν πράξεών μας. Ἐὰν δὲ συμβῇ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ νὰ μὴ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κατωτέραν τάξιν, παρατηροῦμεν ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τίς ἐκ τῶν δύο ἔχει τὴν μᾶλλον κατωτέραν τάξιν, ἐκεῖ δὲ τρέπομεν καὶ τοὺς δύο.

193. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος βλέπομεν, ὅτι ***Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶνε μέτρησις, τρέπομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτέρας τάξεως καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν (ὡς ἀφῃρημένους), τὸ δὲ πηλίκον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν.***

Σημ. Εὐκόλως διακρίνομεν, ἂν ἡ διαίρεσις εἶνε μερισμὸς ἢ μέτρησις· διότι εἰς τὸν μερισμὸν δίδονται αἱ πολλαὶ μονάδες (ἢ μέρος τῆς μονάδος), ἐνῷ εἰς τὴν μέτρησιν ζητοῦνται αὗται. Τοῦτο εἴπομεν καὶ ἐν τῇ σελίδι 51.

6) ***Πρόβλημα.*** Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 6 ὀκ. 100 δραμ. ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν ἓν πεντάδραχμον. Πόσον θὰ δώσωμεν, διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 2 στατῆρας ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος;

Κατάταξις.	6 ὀκ. 100 δραμ.	1 πεντ.
	2 στ.	χ

Λύσις. Γνωρίζομεν καὶ ἐδῶ τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (μονὰς εἶνε τὸ 1 πεντάδρ. καὶ τιμὴ αὐτῆς αἱ 6 ὀκ. 100 δραμ.) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς πολλὰς μονάδας (ἤτοι τὰ πολλὰ πεντάδραχμα) τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν τιμὴν 2 στατῆρας, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν, μέτρησιν. Τρέπομεν πρῶτον καὶ τοὺς δύο εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς δράμια, καὶ εὑρίσκομεν 6 ὀκ. 100 δραμ. = 2500 δραμ. καὶ 2 στ. = 2×44 ἢ 88 ὀκ. = 88×400 = 35200 δραμ. Διαιροῦμεν τώρα τὸν 35200 διὰ 2500 (ὡς ἀφῃρημένους) καὶ εὑρίσκομεν 14 πεντ. 40 λ. (διότι πεντάδραχμα παριστᾷ καὶ ἡ μονάς τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν).

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἔμπορός τις ἠγόρασε τέσσαρα ὑφάσματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἦτο 35 πήχ. 7 ῥούπια. Πόσων πήχεων ἦσαν καὶ τὰ τέσσαρα ὑφάσματα; (143 πηχ. 4 ῥ.).

2) Μὲ ἓν πεντάδραχμον ἀγοράζομεν ἐξ ἑνὸς πράγματος 2 στ. 28 ὀκ. 300 δρ. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 7 πεντάδραχμα; (18 στ. 25 ὀκ. 100 δρ.).

3) Τρεῖς ἄνθρωποι πρόκειται νὰ μοιράσωσιν ἐξ ἴσου 8 στ. 27 ὀκ. 350 δρ. σίτου. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος; (2 στ. 38 ὀκ. 250 δρ.).

4) Ἐμοίρασέ τις ἐξ ἴσου εἰς πέντε πτωχὰς οἰκογενείας 17 πεντ. 3 δρ. 50 λ. Πόσον ἔλαβεν ἑκάστη; (3 πεντ. 2 δρ. 70 λ.).

5) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν ἐξ ἑνὸς πράγματος 4 ὀκ. 350 δράμ. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ $2\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς; (13 ὀκ. 260 δρ.).

6) Δύο οἰκογένειαι ἠγόρασαν 7 στ. 20 ὀκ. 300 δράμ. ἀνθράκων καὶ ἡ μία τούτων ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν. Πόσον ἔλαβεν ἑκάστη; (2 στ. 43 ὀκ. 200 δρ. καὶ 4 στ. 21 ὀκ. 100 δρ.).

7) Ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἐπώλησέ τις τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἔμειναν 37 πήχ. 4 ῥ. Πόσον ἦτο ὅλον τὸ ὕφασμα; (65 πήχ. 5 ῥ.).

8) Γυνή τις ἠγόρασεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 7 πήχ. 5 ῥ. πρὸς 12δρ.,80 τὸν πῆχυν καὶ ἔδωκεν ἓν ἑκατοντάδραχμον. Πόσον ἔλαβεν ὑπόλοιπον; (2δρ.,40).

9) Ἡ ὑάρδα ὑφάσματός τινος ἀξίζει 3 σελ. 6 πέν. Πόσον ἀξίζουν 8 ὑάρ. 2 πόδ. 3 δακ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος; (30 σελ. 7 πέν. 2 φαρδ.).

10) Ἀτμόπλοιον, ἔχον ταχύτητα 15 μιλίων καθ' ὥραν, διέτρεξε τὴν ἀπὸ Γιβραλτὰρ εἰς Πειραιᾶ ἀπόστασιν εἰς 4 ἡμ. 3 ὥρ. 20λ. Πόση εἶνε ἡ ἀπόστασις αὕτη; (1490 μίλια).

11) Τὸ ἡμερομίσθιον μιᾶς ἐργατρίας εἶνε 4δρ.,80 ἔλαβε δὲ διὰ ἡμερομίσθιά της 8 πεντ. 3 δρ. 20 λ. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη; (9).

12) Πὲ 9δρ.,90 ἀγοράζομεν 8 πήχ. 2 ῥ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; (1δρ.,20).

13) Ἠγόρασέ τις 3 στ. 20 ὀκ. 200 δρ. ἀνθράκων καὶ ἔδωκε 45δρ.,75. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ; (30λ.).

14) Μὲ ἓν πεντάδραχμον ἀγοράζομεν 6 πήχ. 2 ῥούπια ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον θὰ δώσωμεν, διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 4 π. 3 ῥούπ. ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος; (3δρ.,50).

15) Γυνή τις εἰς 17 ὥρ. 40λ. ὑφαίνει ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 6 πήχ. 5 ῥ. Πόσον ὑφαίνει τὴν ὥραν; (3 ῥούπια).

16) Μία ἀτμάμαξα διέτρεξε μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος 110 χιλιόμ. 250 μέτρα εἰς 3 ὥρ. 9λ. Πόσον διέτρεχε τὴν ὥραν; (35 χιλιόμ.).

17) Γυνή τις ἠγόρασεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 7 πήχ. 5 ῥ. καὶ ἔδωκε 4 πεντ. 1δρ. 35 λ. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; (2δρ. 80λ.).

18) Μὲ 17δρ.,50 ἠγόρασέ τις 1 στ. 12 ὀκ. 350 δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζει μὲ μίαν δραχμήν; (3 ὀκ. 100 δρ.).

19) 4 ὀκ. 200 δραμ. ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 43δρ.,20. Πόσον ἀξίζει τὸ χιλιόγραμμον ἢ κιλόν; (7δρ.,50).

20) Ὕφασμά τι, ἔχον μῆκος 30 ὑάρ. 2 πόδ. 4 δ., κοστίζει εἰς ἔμπορον 277 δραχ. Πόσον τοῦ κοστίζει ὁ πῆχυς τοῦ ἐμπορίου; (ἐνθυμούμενοι ὅτι εἶνε 1 πῆχυς = 0,7 τῆς ὑάρδας) (6δρ.,30).

21) Ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 32 πήχ. 3 ῥούπια, ἐπωλήθησαν τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτοῦ ἀντὶ 27δρ.,75. Πρὸς πόσον ἐπωλήθη ὁ πῆχυς καὶ πόσον ὕφασμα ἔμεινεν; (1δρ.,50· ἔμεινε 13π. 7ῥ.).

22) Ἠγόρασέ τις 8 στ. 10 ὀκ. 100 δρ. σίτου καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐκράτησε διὰ τὴν οἰκογένειάν του 4 $\frac{5}{8}$ τοῦ στατῆρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπώλησε πρὸς 80 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ; (127 δρ.).

23) Ἁμαξοστοιχία τις ἀνεχώρησεν ἀπὸ μιᾶς πόλεως τὴν 7 ὥρ. 30λ. π. μ. μὲ ταχύτητα 30 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Πόσα χιλιόμετρα θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῆς πόλεως ταύτης τὴν 3 ὥρ. 20λ. μ. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας; (235 χιλ.).

24) Ἀτμόπλοιον ἀνεχώρησεν ἀπὸ μιᾶς πόλεως ἡμέραν Πέμπτην καὶ ὥραν 9ην 20λ. μ. μ. μὲ ταχύτητα 14 μιλίων καθ' ὥραν καὶ ἔφθασεν εἰς ἄλλην πόλιν τὴν Τρίτην τῆς ἐπομένης ἑβδομάδος καὶ ὥραν 5ην 50λ. π. μ. Πόση εἶνε ἡ μεταξὺ τῶν δύο πόλεων ἀπόστασις; (1463 μίλια).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Λόγος καὶ ἀναλογία.

194. **Λόγος** δύο ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου,

Παραδ. χάριν, ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4 εἶνε τὸ πηλίκον $12:4$ ἢ $\frac{12}{4}$ (ἐδ. 102), ἤτοι 3. Ὁ λόγος ἐπίσης τοῦ $\frac{2}{3}$ πρὸς τὸν $\frac{4}{5}$ εἶνε τὸ πηλίκον $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ ἢ $\frac{10}{12}$.

Ἐὰν ἔχωμεν δύο ὁμοειδῆ ποσά, παραδ. χάριν δύο ὑφάσματα καὶ τὸ μὲν ἓν εἶνε 20 πήχεων, τὸ δὲ ἄλλο 5 πήχεων, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον εἶνε $20 : 5$ ἢ $\frac{20}{5}$. Ὥστε ***ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν (ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος) ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν.***

195. Δύο λόγοι ἢ δύο ἀριθμοὶ λέγονται **ἀντίστροφοι** μεταξύ των, ὅταν τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα 1. Παραδ. χάριν, οἱ λόγοι $\frac{12}{4}$ ἢ 3 καὶ $\frac{4}{12}$ ἢ $\frac{1}{3}$ εἶνε ἀντίστροφοι, διότι εἶνε $\frac{12}{4} \times \frac{4}{12} = 1$ ἢ $3 \times \frac{1}{3} = 1$. Ἐπίσης οἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{5}$ καὶ 4 ἢ $\frac{4}{1}$. (ἐδ. 103 Σημ.) εἶνε οἱ $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{3}$ καὶ $\frac{1}{4}$· διότι εἶνε $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1$, $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$ καὶ $4 \times \frac{1}{4} = 1$.

196. ***Ἀναλογία*** λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων. Παραδ. χάριν, ὁ λόγος $\frac{8}{4}$ ἢ $8:4$ εἶνε ἴσος μὲ 2, ὁ λόγος ἐπίσης $\frac{6}{3}$ ἢ $6:3$ εἶνε ἴσος μὲ 2· ὥστε οἱ λόγοι οὗτοι εἶνε ἴσοι καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ ἢ $8:4 = 6:3$ εἶνε ἀναλογία.

Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀναλογίαν ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι** τῆς ἀναλογίας. Ὅταν ἡ ἀναλογία γράφηται ὡς ἑξῆς $8 : 4 = 6 : 3$, ἀπαγγέλλεται 8 πρὸς 4 ὡς 6 πρὸς 3, καὶ οἱ μὲν εὑρισκόμενοι εἰς τὰ ἄκρα ἀριθμοὶ 8 καὶ 3 λέγονται **ἄκροι** ὅροι τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ εὑρισκόμενοι εἰς τὸ μέσον 4 καὶ 6 λέγονται **μέσοι.**

197. **Ἰδιότης τῆς ἀναλογίας.** Ἔστω ἡ ἀναλογία $8:4=6:3$ ἢ $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$. Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτουν πάλιν ἴσοι ἀριθμοί. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $\frac{8}{4}$ καὶ $\frac{6}{3}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν 4×3 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{8\times4\times3}{4}=\frac{6\times4\times3}{3}$ ἢ (μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν) $8\times3=6\times4$. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 3 εἶνε οἱ ἄκροι ὅροι τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας, οἱ δὲ ἀριθμοὶ 6 καὶ 4 εἶνε οἱ μέσοι ὅροι αὐτῆς. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.

Εἰς τὴν ἰδιότητα ταύτην στηριζόμενοι εὑρίσκομεν ἕνα τῶν ὅρων ἀναλογίας, ὅταν μᾶς δοθῶσιν οἱ ἄλλοι τρεῖς ὅροι.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $6:3=10:\chi$, τῆς ὁποίας τὸν ἄγνωστον ὅρον παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἔχομεν $6\times\chi=3\times10$. Ἀλλ' ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶνε πάλιν ἴσοι. Διαιροῦμεν λοιπὸν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $6\times\chi$ καὶ 3×10 διὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{6\times\chi}{6}=\frac{3\times10}{6}$ ἢ $\chi=\frac{3\times10}{6}$, ἤτοι 5.

Ἐπίσης ἐκ τῆς ἀναλογίας $20:\chi=15:3$ ἔχομεν $15\times\chi=20\times3$ ἢ $\frac{15\times\chi}{15}=\frac{20\times3}{15}$ ἢ $\chi=\frac{20\times3}{15}$, ἤτοι 4. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

198. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ὅρον, ἂν μὲν εἶνε ἄκρος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς μέσους ὅρους καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου· ἂν δὲ εἶνε μέσος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἄκρους ὅρους καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.***

Ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα.

199. Ὑποθέσωμεν, παραδ. χάριν, ὅτι μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν 8 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος· ἐὰν ὅμως δώσωμεν διπλασίας, τριπλα-

σίας κλπ. δραχμάς, ἤτοι 6×2, 6×3 κτλ., θὰ ἀγοράσωμεν καὶ διπλασίας, τριπλασίας κτλ. ὀκάδας, ἤτοι 8×2, 8×3 κτλ. Ἐὰν πάλιν δώσωμεν τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τῶν 6 δραχμῶν, θὰ ἀγοράσωμεν καὶ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τῶν 8 ὀκάδων. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὰ ποσὰ ***δραχμαὶ καὶ ὀκάδες*** ἔχουν τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε, ὅταν ἡ τιμὴ 6 τῶν δραχμῶν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κτλ., καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 8 τῶν ὀκάδων διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. Καὶ τἀνάπαλιν, ὅταν ἡ τιμὴ 6 τῶν δραχμῶν γίνῃ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ., καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 8 τῶν ὀκάδων γίνεται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται **ἀνάλογα.** Ὥστε

200 Δύο ποσὰ λέγονται **ἀνάλογα,** ὅταν, πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζηται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Καὶ τἀνάπαλιν, διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, διαιρῆται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Παρατήρησις. Ὅταν δύο ποσὰ δὲν ἔχουν μεταξύ των τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἀλλ' ὅμως συναυξάνονται, ταῦτα δὲν λέγονται ἀνάλογα. Παραδ. χάριν, αὐξανομένης τῆς ἡλικίας ἑνὸς παιδίου, αὐξάνεται καὶ τὸ ἀνάστημά του, ἐν τούτοις τὰ ποσὰ ***ἡλικία*** καὶ ***ἀνάστημα*** δὲν εἶνε ἀνάλογα· διότι διπλασιαζομένης, τριπλασιαζομένης κτλ. τῆς ἡλικίας τοῦ παιδίου, δὲν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. τὸ ἀνάστημά του.

201. Εἰς τὰ ἀνάλογα ποσὰ δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Παραδ. χάριν, ἂν μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζωμεν 8 ὀκάδας, μὲ τριπλασίας δραχμάς, ἤτοι 6×3, θὰ ἀγοράσωμεν καὶ τριπλασίας ὀκάδας, ἤτοι 8×3· ὁ λόγος τῶν 6 καὶ 6×3 δραχμῶν εἶνε $\frac{6}{6\times3}$ ἢ $\frac{1}{3}$, ὁ λόγος πάλιν τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν 8 καὶ 8×3 εἶνε $\frac{8}{8\times3}$ ἢ $\frac{1}{3}$, ἤτοι εἶνε ὁ αὐτός.

202. Ὑποθέσωμεν πάλιν ὅτι 18 ἐργάται τελειώνουσιν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας· ἐὰν ὅμως ἦσαν διπλάσιοι, τριπλάσιοι κτλ. ἐργάται, ἤτοι 18×2 ἢ 18×3 κτλ., θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τῶν ἡμερῶν, ἤτοι εἰς $12:2$ ἢ 6 ἡμέρας, εἰς $12:3$ ἢ 4 ἡμέρας κτλ. Καὶ τἀνάπαλιν, τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τοῦ ἀρι-

θμοῦ τῶν ἐργατῶν θὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἀριθμὸν ἡμερῶν. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ ποσὰ ***ἐργάται*** **καὶ** ***ἡμέραι*** **ἔχουν** τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε, ὅταν ἡ τιμὴ 18 τῶν ἐργατῶν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κτλ., ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 12 τῶν ἡμερῶν γίνεται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. Καὶ τἀνάπαλιν, ὅταν ἡ τιμὴ 18 τῶν ἐργατῶν γίνῃ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 12 τῶν ἡμερῶν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται **ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.** Ὥστε

203. Δύο ποσὰ λέγονται **ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα,** ὅταν, πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, διαιρῆται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Καὶ τἀνάπαλιν, διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, πολλαπλασιάζηται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

Παρατήρησις. Ὅταν δύο ποσὰ δὲν ἔχουν μεταξύ των τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἀλλ' ὅμως αὐξανομένου τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο, ταῦτα δὲν λέγονται ἀντίστροφα. Ὑποθέσωμεν, παραδ. χάριν, ὅτι χρειαζόμεθα μίαν ὥραν διὰ νὰ διανύσωμεν ἐν τῇ θαλάσσῃ ἀπόστασίν τινα διὰ λέμβου, ἐχούσης δύο κώπας, ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν κωπῶν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κτλ., θὰ χρειασθῶμεν μὲν ὀλιγώτερον χρόνον, διὰ νὰ διανύσωμεν τὴν ἀπόστασιν ταύτην, οὐχὶ δὲ καὶ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τῆς μιᾶς ὥρας. Ὥστε τὰ ποσὰ *κῶπαι* καὶ *χρόνος* δὲν εἶνε ἀντίστροφα.

204. Εἰς τὰ ἀντίστροφα ποσὰ δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἔχουν λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχουν αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Παραδ. χάριν, ἂν 18 ἐργάται τελειώνωσιν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας, διπλάσιοι ἐργάται, ἤτοι 18×2, θὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν, ἤτοι εἰς $12:2$ ἢ 6 ἡμ. Ὁ λόγος τῶν 18 καὶ 18×2 ἐργατῶν εἶνε $\frac{18}{18 \times 2}$ ἢ $\frac{1}{2}$, ἐνῷ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν 12 καὶ 6 ἡμ. εἶνε $\frac{12}{6}$ ἢ $\frac{2}{1}$ ἤτοι 2· οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶνε ἀντίστροφοι, διότι εἶνε $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ (ἐδάφ. 195).

Μέθοδος τῶν τριῶν.

1ον) ***Πρόβλημα.*** Μὲ 27 δραχμὰς ἀγοράζομεν 6 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 180 δραχμάς;

Κατάταξις. $\dfrac{27}{180}$ δρ. 6 πήχ. / χ

Θὰ λύσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ μὲ 27 δραχ. ἀγοράζομεν 6 πήχεις

μὲ 1 δραχ. » $\dfrac{6}{27}$ τοῦ πήχ.

καὶ μὲ 180 δραχ. » $\dfrac{6\times180}{27}$ ἢ $6\times\dfrac{180}{27}$ τοῦ πήχεως.

Ἐὰν τώρα χωρίσωμεν τὰς δύο δοθείσας τιμὰς 27 καὶ 180 τοῦ ἑνὸς ποσοῦ διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς, ὡς δεικνύεται εἰς τὴν ἀνωτέρω κατάταξιν τῶν ἀριθμῶν, καὶ παραβάλωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν $6\times\dfrac{180}{27}$ μὲ τὴν κατάταξιν ταύτην, βλέπομεν ὅτι ἡ λύσις αὕτη εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν 6 μὲ τὸ κλάσμα (ἢ λόγον), τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δύο τιμαὶ 27 καὶ 180 τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένον. Εἶνε δὲ τὰ ποσὰ δραχμαὶ καὶ πήχεις ἀνάλογα (διότι μὲ διπλασίας, τριπλασίας κτλ. δραχμὰς ἀγοράζομεν καὶ διπλασίους, τριπλασίους κτλ. πήχεις).

2ον) ***Πρόβλημα.*** 10 ἐργάται τελειώνουν ἔργον τι εἰς 30 ἡμέρας· 15 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον;

Κατάταξις. $\dfrac{10}{15}$ ἐργ. 30 ἡμ. / χ

Λύσις. Ἀφοῦ 10 ἐργ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 30 ἡμ.

1 ἐργάτης τελειώνει αὐτὸ εἰς 30×10 ἡμ.

καὶ οἱ 15 ἐργ. τελειώνουσιν αὐτὸ εἰς $\dfrac{30\times10}{15}$

ἢ $30\times\dfrac{10}{15}$ ἡμ.

Ἐὰν πάλιν παραβάλωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν $30\times\dfrac{10}{15}$ μὲ τὴν ἀνωτέρω κατάταξιν τῶν ἀριθμῶν, βλέπομεν ὅτι αὕτη εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν 30 μὲ τὸ κλάσμα (ἢ λόγον), τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δύο τιμαὶ 10 καὶ 15 τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ὅπως ἔχει. Εἶνε δὲ τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ ἡμέραι ἀντίστροφα (διότι διπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν γίνεται τὸ ἥμισυ).

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω δύο προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα συνάγομεν τὸν ἑξῆς σύντομον κανόνα.

205. ***Ὁ ἄγνωστος χ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν μὲ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ (ὅταν χωρισθῶσι διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς)· ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα· ὅπως δ' ἔχει, ἂν τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα.***

Τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια τούτων δυνάμεθα νὰ λύωμεν συντόμως διὰ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, ἀρκεῖ μόνον νὰ διακρίνωμεν, ἂν τὰ δοθέντα ποσὰ εἶνε ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα· ἀλλὰ τοῦτο οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει.

206. Ὁ γενικὸς τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν τοῦ αὐτοῦ εἴδους προβλήματα, λέγεται *μέθοδος*. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια τούτων δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται ὁ τέταρτος, διὰ τοῦτο ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν αὐτά, λέγεται **μέθοδος τῶν τριῶν**. Ὥστε

Μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποία τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

207. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ ἐξαχθῇ καὶ ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων δι' ἀναλογιῶν.

Παραδ. χάριν, εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα, ἐπειδὴ τὰ ποσὰ (δραχμαὶ καὶ πήχεις) εἶνε ἀνάλογα, διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῶν δύο δοθεισῶν τιμῶν 27 καὶ 180 (δραχμαὶ) τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν 6 καὶ χ (πήχεις) τοῦ δευτέρου ποσοῦ (ἐδ. 201), ἤτοι εἶνε $\frac{27}{180}=\frac{6}{\chi}$ ἢ $27:180=6:\chi$, ἑπομένως καὶ $\chi=\frac{6\times180}{27}$ (ἐδ. 193).

Εἰς δὲ τὸ δεύτερον πρόβλημα, ἐπειδὴ τὰ ποσὰ (ἐργάται καὶ ἡμέραι) εἶνε ἀντίστροφα, διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῶν δύο δοθεισῶν τιμῶν 10 καὶ 15 (ἐργάται) τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶνε ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν 30 καὶ χ (ἡμέραι) τοῦ δευτέρου ποσοῦ (ἐδ. 204), ἤτοι εἶνε $\frac{10}{15} = \frac{\chi}{30}$ ἢ $10 : 15 = \chi : 30$, ἐπομένως καὶ $\chi = \frac{30 \times 10}{15}$.

3ον) ***Πρόβλημα.*** Μὲ 30δρ.,50 ἀγοράζομεν ἐξ ἑνὸς πράγματος 3 στ. 20 ὀκ. 200 δράμια. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 10 στ. 8 ὀκ. ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος;

Κατάταξις. 30δρ.50 — 2 στ. 20 ὀκ. 200 δρ.

χ — 10 στ. 8 ὀκ.

Λύσις. Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3 στ. 20 ὀκ. 200 δράμια, θὰ δώσωμεν 30δρ.50· διὰ νὰ ἀγοράσωμεν διπλάσιον βάρος, θὰ δώσωμεν καὶ διπλασίας δραχμάς. Τὰ ποσὰ λοιπὸν (βάρος καὶ δραχμαὶ) εἶνε ἀνάλογα, ἐπομένως ἔχομεν $\chi = 30{,}50 \times \frac{10 \text{ στ. } 8 \text{ ὀκ.}}{3 \text{ στ. } 20 \text{ ὀκ. } 200 \text{ δρ.}} = 30{,}50 \times \frac{179200}{61000} = 89$δρ.,60.

Σημ. Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ ἀνωτέρω κλάσματος εἶνε συμμιγεῖς, διὰ τοῦτο ἐτρέψαμεν αὐτοὺς εἰς τὴν αὐτὴν κατωτέραν τάξιν, ἤτοι εἰς δράμια, διὰ νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα. Τοῦτο πρέπει νὰ πράττωμεν πάντοτε εἰς τὰ κλάσματα ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι δὲν γίνονται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα.

4ον) ***Πρόβλημα.*** Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος δίδομεν 4 δραχμάς. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ 3 ὀκάδας;

Κατάταξις $\frac{5}{8}$ ὀκ. — 4 δρ.

3 — χ

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ὀκάδες καὶ δραχμαὶ εἶνε ἀνάλογα, διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$\chi = 4 \times \frac{3}{\frac{5}{8}} = 4 \times 3 : \frac{5}{8} \text{ (ἐδ. 140)} = 4 \times 3 \times \frac{8}{5} = \frac{96}{5} = 19{,}20 \text{ δρ.}$$

$$\text{ἢ } \chi = 4 \times \frac{3}{\frac{5}{8}} = 4 \times \frac{3 \times 8}{\frac{5}{8} \times 8} \text{ (ἐδ. 141)} = 4 \times \frac{24}{5} = \frac{96}{5} = 19{,}20 \text{ δρ.}$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 12 μέτρα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, δίδομεν 36 δραχμάς. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 8,40 τοῦ μέτρου ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος; (25δρ.,20).

2) Μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν 7 ὀκ. 200 δράμ. ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 9 δρ. ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος; (11 ὀκ. 100 δράμ.).

3) Γυνή τις, διὰ νὰ ὑφάνῃ 5 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, χρειάζεται $9\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας. Πόσον χρόνον χρειάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 2 πήχεις ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος; $\left(3\frac{4}{5}\text{ ὥρ.}\right)$.

4) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $2\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν 9 δραχμάς. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ 5 ὀκάδας ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος; (20 δρ.).

5) Τὰ $\frac{5}{8}$ ἔργου τινὸς ἐπερατώθησαν ὑπὸ 6 ἐργατῶν εἰς 15 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ περατωθῇ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἔργου ὑπὸ τῶν ἰδίων ἐργατῶν; (εἰς 9 ἡμ.).

6) 100 στρατιῶται ἔχουν τροφὰς διὰ νὰ περάσουν 28 ἡμέρας. Ἐὰν ἀναχωρήσουν 30 στρατιῶται ἄνευ τροφῶν, πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν οἱ λοιποὶ μὲ τὰς ἰδίας τροφάς; (40).

7) Γυνή τις χρειάζεται διὰ φόρεμά της 7 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 1 πήχ. 4 ρούπια. Πόσον χρειάζεται ἐξ ἄλλου ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 1 πήχ. 2 ρούπια. $\left(8\frac{2}{5}\text{ πήχ.}\right)$.

8) Δωμάτιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 5,40 τοῦ μέτρου καὶ τὸ πλάτος 4 μέτρα, πρόκειται νὰ στρωθῇ δι' ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 0,90 τοῦ μέτρου. Πόσον μῆκος χρειάζεται; (24 μ.).

Σημ. Ἐὰν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 4 μέτρα, χρειάζεται ἐξ αὐτοῦ μῆκος 5,40.

9) Ῥάβδος ὀρθὴ ἐστημένη ἔχει μῆκος 0,90 τοῦ μέτρου καὶ ρίπτει σκιὰν ἔχουσαν μῆκος 0,50 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος κυπαρίσσου, ἥτις κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμὴν ρίπτει σκιάν, ἔχουσαν μῆκος 5,20; (9,36 μ.).

10) Οἱ ἐντὸς φρουρίου ὑπάρχοντες στρατιῶται ἔχουν τροφὰς διὰ 25 ἡμέρας· ἂν εἶνε ἀνάγκη μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς νὰ περάσουν 40 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης; Καὶ ἂν ἕκαστος ἐλάμβανε πρότερον 240 δράμια ἄρτου, 80 δράμ. κρέατος καὶ 50 δρ. τυροῦ, πόσον θὰ λαμβάνῃ τώρα;

Σιτηρέσιον λέγεται τὸ μερίδιον τῆς τροφῆς, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἕκαστος κάθε ἡμέραν. Τοῦτο παριστῶμεν διὰ τῆς μονάδος 1.

(Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου, ἤτοι $240 \times \frac{5}{8}$ ἢ 150 δρ. ἄρτου, $80 \times \frac{5}{8}$ ἢ 50 δρ. κρέατος καὶ $50 \times \frac{5}{8}$ ἢ $37\frac{1}{2}$ δρ. τυροῦ).

11) Μήτηρ τις ἠγόρασε δύο ὑφάσματα τῆς αὐτῆς ποιότητος διὰ φορέματα τῶν δύο θυγατέρων της· διὰ τὸ ὕφασμα τῆς μικροτέρας ἔδωκε 12,60 τῆς δραχμῆς, διὰ δὲ τὸ ὕφασμα τῆς μεγαλυτέρας, τὸ ὁποῖον ἦτο 1 πῆχ. 3 ῥούπια περισσότερον τῆς ἄλλης, ἔδωκε 15,90 δρ. Πόσων πήχεων ἦτο ἕκαστον ὕφασμα; (6 πῆχ. 5 ῥ. καὶ 5 π. 2 ῥ.).

12) Δύο πόλεις εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ καὶ ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων 27 μοίρας 20′. Πόσα χιλιόμετρα εἶνε ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασίς των, ὅταν ὅλος ὁ μεσημβρινὸς εἶνε 40,000 χιλιόμετρα; (3037,037 τοῦ χιλιομ.).

Σημ. Ὅλος ὁ μεσημβρινὸς εἶνε 360 μοῖραι.

13) Μὲ 100 ὀκάδας ἀλεύρου κατασκευάζονται 125 ὀκάδες ἄρτου. Πόσον ἄλευρον χρειάζεται διὰ νὰ κατασκευασθῇ ἄρτος πρὸς τροφὴν 400 στρατιωτῶν διὰ 3 ἡμέρας, λαμβάνοντος ἑκάστου τὴν ἡμέραν 300 δράμια ἄρτου; (720 ὀκ.).

14) Ἀτμόπλοιον, ἔχον ταχύτητα 12 μιλίων τὴν ὥραν, χρειάζεται 7 ὥρ. 30λ., διὰ νὰ φθάσῃ εἴς τινα πόλιν. Πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ἡ ταχύτης αὐτοῦ, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν ταύτην 50λ τῆς ὥρας ἀργότερον; $\left(1\frac{1}{5}\right.$ τοῦ μιλίου$\left.\right)$.

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

1ον) ***Πρόβλημα.*** 120 στρατιῶται, διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμέρας, χρειάζονται 270 ἄρτους. Πόσους ἄρτους χρειάζονται 160 στρατιῶται, διὰ νὰ περάσουν 5 ἡμέρας;

Κατάταξις.	120 στρ.	3 ἡμ.	270 ἄρτ.
	160	5	χ

Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσους ἄρτους χρειάζονται οἱ 160 στρατιῶται, διὰ νὰ περάσουν ὅσας ἡμέρας καὶ οἱ 120, ἤτοι 3 ἡμέρας. Ὥστε ἔχομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

120 στρατιῶται χρειάζονται (διὰ 3 ἡμέρας) 270 ἄρτους· 160 στρατιῶται (διὰ τὰς αὐτὰς ἡμέρας) πόσους ἄρτους χρειάζονται;

Κατάταξις. $\dfrac{120 \text{ στρ.}}{160} \qquad \dfrac{270 \text{ ἄρτ.}}{\chi}$

Λύσις. Ἀφοῦ οἱ 120 στρατιῶται χρειάζονται 270 ἄρτους, διπλάσιοι στρατιῶται διὰ νὰ περάσουν τὰς αὐτὰς ἡμέρας, θὰ χρειασθῶσι καὶ διπλασίους ἄρτους. Τὰ ποσὰ λοιπὸν (στρατιῶται καὶ ἄρτοι) εἶνε ἀνάλογα, ἐπομένως ἔχομεν $\chi = 270 \times \dfrac{160}{120}$ ἄρτους.

Τόσους λοιπὸν ἄρτους χρειάζονται οἱ 160 στρατιῶται, διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμέρας. Ἀλλ' ἡμεῖς θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσους ἄρτους χρειάζονται οὐχὶ εἰς 3 ἡμέρας, ἀλλ' εἰς 5· ὥστε ἔχομεν τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμέρας χρειάζονται $270 \times \dfrac{160}{120}$ ἄρτους (οἱ 160 στρατιῶται)· διὰ νὰ περάσουν 5 ἡμέρας, πόσους ἄρτους χρειάζονται;

Κατάταξις. $\dfrac{3 \text{ ἡμ.}}{5} \qquad \dfrac{270 \times \dfrac{160}{120} \text{ ἄρτ.}}{\chi}$

Λύσις. Ἀφοῦ διὰ 3 ἡμέρας χρειάζονται $270 \times \dfrac{160}{120}$ ἄρτους, διὰ διπλασίας ἡμέρας θὰ χρειασθῶσι καὶ διπλασίους ἄρτους. Τὰ ποσὰ λοιπὸν (ἡμέραι καὶ ἄρτοι) εἶνε ἀνάλογα, ἐπομένως ἔχομεν $\chi = 270 \times \dfrac{160}{120} \times \dfrac{5}{3}$ ἄρτους.

Ὥστε οἱ 160 στρατιῶται, διὰ νὰ περάσουν 5 ἡμέρας, χρειάζονται $270 \times \dfrac{160}{120} \times \dfrac{5}{3}$, ἤτοι 600 ἄρτους (μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν).

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ὡς βλέπομεν, ἀνελύθη εἰς δύο προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν (ἤτοι εἰς τόσα, ὅσα εἶνε τὰ δοθέντα ποσὰ πλὴν ἑνός), διὰ τοῦτο δὲ ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται **σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν**, ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται πρὸς διάκρισιν **ἁπλῆ**. Ὥστε

208. ***Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ὁ τρόπος, διὰ***

τοῦ ὁποίου λύομεν προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τριῶν ἢ περισσοτέρων ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποία τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς νέαν τιμὴν ἑκάστου τῶν ἄλλων ποσῶν.

Δὲν εἶνε ὅμως καὶ ἀνάγκη νὰ ἀναλύωμεν τὸ πρόβλημα τῆς συνθέτου εἰς ἄλλα προβλήματα τῆς ἁπλῆς καὶ νὰ κάμωμεν οὕτως ἰδίαν κατάταξιν δι' ἕκαστον· ἀλλ' ὅπως ἔχει διαταχθῇ ἀπ' ἀρχῆς τὸ πρόβλημα, συγκρίνομεν ἕκαστον ποσὸν πρὸς τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα τιμή, καὶ παρατηροῦμεν, ἂν τοῦτο εἶνε ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον πρὸς αὐτὸ (ὑποθέτοντες τὰ ἄλλα ποσὰ ὡς μὴ ὑπάρχοντα).

Διὰ νὰ λύσωμεν, παραδ. χάριν, τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Οἱ 120 στρατιῶται χρειάζονται 270 ἄρτους, διπλάσιοι στρατιῶται θὰ χρειασθῶσι καὶ διπλασίους ἄρτους. Τὰ ποσὰ λοιπὸν (στρατιῶται καὶ ἄρτοι) εἶνε ἀνάλογα, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν μὲ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἤτοι $270 \times \frac{160}{120}$ ἄρτους (τόσους λοιπὸν ἄρτους χρειάζονται, διὰ νὰ περάσουν οἱ 160 στρατιῶται, ὅσας ἡμέρας καὶ οἱ 120, ἤτοι 3).

Ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμέρας χρειάζονται $270 \times \frac{160}{120}$ ἄρτους, διὰ νὰ περάσουν διπλασίας ἡμέρας, θὰ χρειασθῶσι καὶ διπλασίους ἄρτους· τὰ ποσὰ λοιπὸν (ἡμέραι καὶ ἄρτοι) εἶνε ἀνάλογα, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν $270 \times \frac{160}{120}$ μὲ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἤτοι $270 \times \frac{160}{120} \times \frac{5}{3}$, ἤτοι 600 ἄρτους.

2ον) ***Πρόβλημα.*** 10 ἐργάται 9 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι ἔσκαψαν εἰς 4 ἡμέρας 6 στρέμματα ἀμπέλου. Εἰς πόσας ἡμέρας 12 ἐργάται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι θὰ σκάψωσιν 8 στρέμματα;

Κατάταξις.

10 ἐργ.	9 ὥρ.	4 ἡμ.	6 στρ.
12	8	χ	8

Οἱ 10 ἐργάται χρειάζονται 4 ἡμέρας, διπλάσιοι ἐργάται θὰ χρειασθῶσι τὰς ἡμισείας ἡμέρας· ἄρα τὰ ποσὰ (ἐργάται καὶ ἡμέ-

ραι) εἶνε ἀντίστροφα, ἑπομένως ἔχομεν $4 \times \frac{10}{12}$ ἡμέρας (τόσας ἡμέρας χρειάζονται οἱ 12 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ σκάψωσιν 6 στρέμ.).

Ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὸ ποσὸν τῶν ὡρῶν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς. Ἂν ἐργάζωνται 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, χρειάζονται $4 \times \frac{10}{12}$ ἡμέρας· ἂν ἐργάζωνται διπλασίας ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ χρειασθῶσι τὰς ἡμισείας ἡμέρας· ἄρα τὰ ποσὰ (ὧραι καὶ ἡμέραι) εἶνε ἀντίστροφα, ἑπομένως ἔχομεν $4 \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{8}$ ἡμ. (τόσας ἡμέρας χρειάζονται οἱ 12 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ σκάψωσιν 6 στρέμ.).

Ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὸ ποσὸν τῶν στρεμμάτων σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ σκάψωσιν 6 στρέμματα, χρειάζονται $4 \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{8}$ ἡμέρας· διὰ νὰ σκάψωσι διπλάσια στρέμματα, θὰ χρειασθῶσι καὶ διπλασίας ἡμέρας· ἄρα τὰ ποσὰ (στρέμματα καὶ ἡμέραι) εἶνε ἀνάλογα, ἑπομένως ἔχομεν $4 \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{8} \times \frac{8}{6}$ καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν εὑρίσκομεν 5 ἡμέρας.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

209. *Ὁ ἄγνωστος χ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν μὲ ἕκαστον κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ (ὅταν χωρισθῶσι διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς), ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὸ ποσὸν τοῦτο εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τιμή· ὅπως δ' ἔχει, ἂν εἶνε ἀντίστροφον.*

Τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου καλὸν εἶνε νὰ λύωνται καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Διὰ νὰ λύσωμεν π. χ. τὸ ἀνωτέρω πρῶτον πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

οἱ 120 στρ. χρειάζονται 270 ἄρτους (διὰ 3 ἡμ.).

ὁ 1 στρ. χρειάζεται $\frac{270}{120}$ » »

οἱ 160 στρ. χρειάζονται $\frac{270 \times 160}{120}$ » »

Ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμ. χρειάζονται $\frac{270 \times 160}{120}$ ἄρτους

» 1 ἡμ. » $\frac{270 \times 160}{120 \times 3}$ ἄρτους

καὶ διὰ νὰ » 5 ἡμ. » $\frac{270 \times 160 \times 5}{120 \times 3}$ ἢ 600 ἄρτ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ὁδοιπόρος, βαδίζων 7 ὥρας τὴν ἡμέραν χρειάζεται 3 ἡμέρας, διὰ νὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν 105 χιλιομέτρων. Ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν 200 χιλιομέτρων; (5).

2) Ἠγόρασέ τις 3 δοχεῖα ἐλαίου, περιέχοντος ἑκάστου 18 ὀκ. 200 δράμ., καὶ ἔδωκεν 144,30 δρ., κατόπιν ἠγόρασεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἐλαίου 5 δοχεῖα, περιέχοντος ἑκάστου 20 ὀκάδας. Πόσον ἔδωκε; (260 δραχ.).

3) Διὰ νὰ πατωθῇ δωμάτιόν τι διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶνε 2,80 τοῦ μέτρου καὶ τὸ πλάτος 0,25· χρειάζονται 40 σανίδες ἐὰν δὲ τὸ μῆκος αὐτῶν εἶνε 2 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 0,20 πόσαι σανίδες χρειάζονται; (70).

4) Μία ὑφάντρια, διὰ νὰ ὑφάνῃ ἓν ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 30 πήχ. καὶ τὸ πλάτος 7 ῥούπια, χρειάζεται 6 ὀκ. 50 δράμ. νήματος. Πόσον νῆμα χρειάζεται, διὰ νὰ ὑφάνῃ ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος μῆκος 40 πήχ. καὶ πλάτος $1\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως; (14 ὀκ.).

5) 5 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἔσκαψαν εἰς 20 ἡμέρας τάφρον ἔχουσαν μῆκος 100 μέτρα, πλάτος 0,80 τοῦ μέτρου καὶ βάθος 1,20. Εἰς πόσας ἡμέρας 6 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ σκάψωσιν ἄλλην τάφρον ἔχουσαν μῆκος 90 μέτρα, πλάτος 0, 60 καὶ βάθος 1 μέτρου;
(8 ἡμ. 3 ὥρ. Διότι ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα ἀποτελεῖται ἐδῶ ἀπὸ 9 ὥρας).

6) Προαύλιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 6,80 τοῦ μέτρου καὶ τὸ πλάτος 5,50 πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ πλακῶν, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶνε 0,32 καὶ τὸ πλάτος 0,25 τοῦ μέτρου. Πόσαι πλάκες χρειάζονται; $\left(467 \frac{1}{2}\right)$.

Σημ. Ἐὰν ἑκάστη πλὰξ ἔχῃ μῆκος 6,80 καὶ πλάτος 5,50, χρειάζεται μία πλάξ.

7) Ἔργον τι συνεφωνήθη νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 25 ἡμέρας· πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 6 ἐργάται, οἵτινες ἐντὸς 10 ἡμερῶν ἐξετέλεσαν τὸ τρίτον τοῦ ἔργου. Ζητεῖται πόσοι ἐργάται πρέπει νὰ προσληφθῶσιν ἀκόμη, διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς ὡρισμένης προθεσμίας. (2).

8) Εἴς τι φρούριον ἦσαν πολιορκημένοι 600 στρατιῶται, οἵτινες εἶχον τροφὰς διὰ 15 ἡμέρας, πρὸς αὐτοὺς δὲ ἦλθον 200 στρατιῶται ἐπικουρία ἄνευ τροφῶν· διὰ νὰ περάσωσι τότε περισσοτέρας ἡμέρας μὲ τὰς τροφάς των, ἠναγκάσθησαν νὰ ἐλαττώσωσι τὸ ἀρχικὸν σιτηρέσιον κατὰ τὰ $\frac{7}{16}$ αὐτοῦ. Πόσας ἡμέρας θὰ περάσωσιν ἀκόμη; (5).

Προβλήματα τοῦ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις.

210. Εἰς τὸ ἐμπόριον καὶ εἰς ἄλλας χρηματικὰς ἐπιχειρήσεις ἐπεκράτησε συνήθεια νὰ ὑπολογίζηται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ποσοῦ τινος ἐπὶ τῇ βάσει 100 μονάδων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ. Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔμπορός τις ἐκ τῆς πωλήσεως ὑφάσματός τινος, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἀγοράσει 400 δραχμάς, ἐκέρδησε 36 δραχ. καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἐκέρδησεν ἐπὶ ὑφάσματος ἔχοντος ἀξίαν ἀγορᾶς 100 δρ. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς 36 δραχ. διὰ 4 (διότι 4 ἑκατοντάδας περιέχουν αἱ 400 δρ.), εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς 100 δρ. ἐκέρδησεν 9 δραχμάς· λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἐκέρδησεν 9 **τοῖς ἑκατὸν** ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς καὶ γράφομεν τοῦτο συμβολικῶς ὡς ἑξῆς· 9 %.

Ἐνίοτε δὲ ὑπολογίζονται τὰ κέρδη ἢ αἱ ζημίαι καὶ ἐπὶ τῇ βάσει 1000 μονάδων· ὥστε, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκέρδησέ τις 2 δρ. εἰς χιλίας δραχμάς, λέγομεν 2 ἐπὶ **τοῖς χιλίοις** καὶ γράφομεν 2‰. Τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις λέγεται καὶ **ποσοστόν.**

Τὰ προβλήματα ταῦτα τοῦ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις ἤτοι τῶν ποσοστῶν, λύονται, ὡς θὰ ἴδωμεν, διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Προβλήματα.

1) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἔλαιον ἀντὶ 4150 δραχμῶν, κατόπιν μετεπώλησε τοῦτο καὶ ἐκέρδησεν 8 % ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς του. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδησε τὸ ὅλον;

Κατάταξις. Εἰς 100 δρ. ἐκέρδησεν 8
» 4150 » χ

Λύοντες τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἢ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα εὑρίσκομεν ὅτι ἐκέρδησε 332 δρ.

2) Ἔμπορός τις πωλεῖ τὰ ὑφάσματά του μὲ κέρδος 20 %, ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς των. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ὕφασμά τι, τὸ ὁποῖον τοῦ κοστίζει 65 δραχμάς;

Λύσις. Ἂν ἀξίζῃ 100 δραχμάς, θὰ κερδήσῃ 20 δρ. καὶ ἑπομένως θὰ τὸ πωλήσῃ 100+20 ἢ 120 δραχμάς· ἂν ἀξίζῃ 65, πόσον θὰ τὸ πωλήσῃ;

Κατάταξις. Ἂν ἀξίζῃ 100 δρ., θὰ τὸ πωλήσῃ 120
» » 65 » χ

Λύοντες τοῦτο εὑρίσκομεν 78 δρ. Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ κέρδος τῶν 65 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον εἶνε 13 δραχμαί, καὶ κατόπιν προσθέτομεν αὐτὸ εἰς τὰς 65 δρ.

3) Ἐπώλησέ τις μίαν οἰκίαν ἀντὶ 21600 δραχμῶν καὶ ἐκέρδησε 3600. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς της;

Λύσις. Ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς της ἦτο 21600 — 3600, ἤτοι 18000 δρ. Ὥστε

εἰς τὰς 18000 δρ. ἐκέρδησε 3600
» 100 » » χ

Εὑρίσκομεν ὅτι ἐκέρδησεν 20%.

211. Πᾶν ὅ,τι χρησιμεύει πρὸς συσκευὴν ἐμπορεύματός τινος (ἤτοι κιβώτιον, βαρέλιον, σάκκος κτλ.) διὰ τὴν εὔκολον καὶ ἀσφαλῆ μετακόμισίν του λέγεται ***ἀπόβαρον*** (κοινῶς ***ντάρα***). Τὸ ὁλικὸν βάρος ἐμπορεύματος μετὰ τοῦ ἀποβάρου του λέγεται ***μικτὸν*** βάρος. Τὸ δὲ βάρος, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τὸ μικτὸν βάρος ἀφαιρέσωμεν τὸ ἀπόβαρον, λέγεται ***καθαρὸν*** βάρος.

4) Βαρέλια περιέχοντα ἔλαιον ζυγίζουσιν 2950 ὀκάδας. Ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶνε 12%, πόσον εἶνε τὸ καθαρὸν ἔλαιον;

Ἐὰν τὸ μικτὸν βάρος εἶνε 100 ὀκ., τὸ καθαρ. εἶνε 88 ὀκ.
» » 2950 » χ

Λύοντες τοῦτο εὑρίσκομεν 2596 ὀκ.

Ἡ ἀμοιβή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ διαπραγματευόμενος τὴν ἀγορὰν ἢ πώλησιν ἐμπορεύματός τινος μεταξὺ ἀγοραστοῦ καὶ πωλητοῦ λέγεται ***μεσιτεία***, οὗτος δὲ λέγεται ***μεσίτης***. Ἡ δὲ ἀμοιβή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ ἀγοράζων ἢ πωλῶν ἐμπορεύματα κατ' ἐντολὴν καὶ διὰ λογαριασμὸν ἄλλου, λέγεται ***προμήθεια***, οὗτος δὲ λέγεται ***παραγγελιοδόχος***.

5) Ἠγόρασέ τις διὰ μεσίτου μίαν οἰκίαν ἀξίας 28560 δραχμῶν. Πόσον θὰ πληρώσῃ διὰ μεσιτείαν πρὸς $\frac{3}{4}\%$;

Δι' ἀξίαν 100δρ. θὰ πληρώσῃ $\frac{3}{4}$ ἢ 0,75 τῆς δραχμῆς

» 28560 » χ

εὑρίσκομεν $\chi = 214{,}20$ δρ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐπώλησέ τις μίαν ἄμπελον ἀντὶ 2674 δραχμῶν καὶ ἐζημιώθη ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς της 4,50%. Πόσον τὴν εἶχεν ἀγοράσει; (2800).

2) Ἔμπορός τις πωλήσας ὕφασμά τι ἀντὶ 143 δρ. παρετήρησεν ὅτι ἐκέρδησεν ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς του 10%. Πόσον τὸ εἶχεν ἀγοράσει; (130 δρ.).

3) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του πρὸς $1\frac{1}{2}$ ‰ καὶ ἐπλήρωσεν ἀσφάλιστρα 42 δρ. Πόσον ὑπελογίσθη ἡ ἀξία τῆς οἰκίας του; (28000).

4) Ἐπώλησέ τις μίαν οἰκίαν μὲ κέρδος 15% ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς της καὶ ἐκέρδησε 2466 δρ. Πόσον τὴν ἐπώλησε; (18906).

5) Σύνταγμα στρατιωτῶν, ἀσκούμενον εἰς τὴν σκοποβολήν, ἔρριψε 24000 βολάς, ἡ δὲ ἐπιτυχία ἦτο 60%. Πόσαι βολαὶ ἐπέτυχον τοῦ σκοποῦ; (14400).

6) Παντοπώλης τις ἐπώλησε 16 ὀκ. βουτύρου πρὸς 12,75 τὴν ὀκᾶν καὶ ἐκέρδησε 34 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν; (20%).

7) Ἐπὶ τῆς μισθοδοσίας τῶν πολιτικῶν ὑπαλλήλων κρατεῖται λόγῳ συντάξεως 9%. Πόση κράτησις θὰ γίνῃ ἐπὶ μισθοδοσίας 750 δραχμῶν; (67,50).

8) Ἡ τιμὴ τοῦ ἐλαίου ἦτο πρό τινος χρόνου 2δρ.,50 ἡ ὀκᾶ, τώρα δὲ εἶνε 6 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ὑψώθη ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς; (140%).

9) Ἠγόρασέ τις σάκκους ἀνθράκων, τῶν ὁποίων τὸ βάρος ἦτο 450 ὀκάδας, πρὸς 15δρ.,40 τὸν στατῆρα. Πόσον θὰ πληρώσῃ ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶνε 2%; (154,35).

10) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ὕφασμά τι ἀντὶ 120 δραχ. καὶ ἐζη-

μιώθη 4 % ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς του. Πόσον ἔπρεπε νὰ τὸ πωλήσῃ διὰ νὰ κερδήσῃ 5 %; (131,25).

Περὶ τόκου.

212) Ὅταν ἐνοικιάζῃ τις τὴν οἰκίαν του εἰς ἄλλον, εἶνε δίκαιον νὰ λαμβάνῃ παρ' αὐτοῦ κέρδος τι, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ***ἐνοίκιον***· οὕτω, καὶ ὅταν δανείζῃ τις χρήματα εἰς ἄλλον, εἶνε δίκαιον νὰ λαμβάνῃ παρ' αὐτοῦ κέρδος τι, ὡς ἐνοίκιον τρόπον τινὰ τῶν δανεισθέντων χρημάτων του, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **τόκος**. Ὥστε

Τόκος λέγεται τὸ κέρδος τὸ προερχόμενον ἀπὸ τὰ δανειζόμενα χρήματα.

Ὁ τόκος τῶν δανειζομένων χρημάτων ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος (συνήθως). Ἄν, παραδ. χάριν, δανεισθῇ τις χρήματα παρ' ἄλλου, πρέπει νὰ συμφωνήσῃ μετ' αὐτοῦ, πόσον θὰ τῷ δίδῃ τόκον (ἤτοι κέρδος) εἰς κάθε 100 δραχμὰς καὶ εἰς 1 ἔτος· καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι συνεφώνησαν νὰ δίδῃ 8 δραχμάς, ὁ τόκος οὗτος τῶν 100 δραχμῶν λέγεται ἰδίως **ἐπιτόκιον**. Ὥστε

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος. Τὸ ἐπιτόκιον σημειοῦται καὶ ἐδῶ διὰ τοῦ συμβόλου %, ἤτοι 8 %, καὶ ἀπαγγέλλεται **ὀκτὼ τοῖς ἑκατόν**.

Κεφάλαιον λέγεται τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων.

Μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ τοῦ δανειζομένου συμφωνεῖται προσέτι καὶ τὸ χρονικὸν διάστημα, μετὰ τὸ ὁποῖον ὀφείλει ὁ δανειζόμενος νὰ ἐπιστρέψῃ τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον μετὰ τοῦ τόκου του εἰς τὸν δανειστήν. Τὸ χρονικὸν διάστημα, καθ' ὃ διαρκεῖ τὸ δάνειον, λεγεται **χρόνος**.

Ὁ τόκος εἶνε **ἁπλοῦς ἢ σύνθετος**. Ἁπλοῦς μὲν λέγεται, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου. Σύνθετος δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους (συνήθως) προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ, καὶ ἀποτελεῖται οὕτω νέον κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος.

Παραδ. χάριν, ἂν τοκίσῃ τις 100 δραχμὰς πρὸς 10 % εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ γίνωσιν 110, ἤτοι κεφάλαιον 100 καὶ τόκος 10· εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ γίνωσιν 120, ἤτοι κεφάλαιον 100 καὶ τόκος 20 καὶ οὕτω καθεξῆς· τοῦτο λοιπὸν εἶνε **ἁπλοῦς τόκος**. Ἐὰν ὅμως εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους προστεθῇ εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος, θὰ ἀποτελεσθῇ τότε νέον κεφάλαιον 110 δραχμῶν διὰ τὸ δεύτερον ἔτος, ἐπομένως εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου του 121 δρ., ἤτοι 110 κεφάλαιον καὶ 11 τόκος, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε βλέπομεν, ὅτι τοκίζεται καὶ ὁ τόκος· τοῦτο λοιπὸν λέγεται **σύνθετος τόκος ἢ ἀνατοκισμός.** Ἐνταῦθα ὅμως θέλομεν πραγματευθῇ μόνον περὶ τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου παρουσιάζονται τέσσαρα ποσά, ἤτοι τόκος, κεφάλαιον, ἐπιτόκιον καὶ χρόνος, ἐξ ὧν δίδονται τὰ τρία ποσὰ καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον, διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τοῦ τόκου διακρίνονται εἰς τέσσαρα εἴδη καὶ λύονται διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν (ἢ διὰ τῆς ἁπλῆς, ὅταν ἓν ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων ποσῶν μένῃ ἀμετάβλητον).

1ον) **Εὕρεσις τοῦ τόκου.**

1) ***Πρόβλημα.*** Πόσον τόκον φέρουσι 525 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη πρὸς 8 %;

Κατάταξις.

100 κεφ.	1 ἔτ.	8 τοκ.
525	3	x

Λύσις. Κεφάλαιον 100 δραχμῶν φέρει τόκον 8 δρ. (εἰς 1 ἔτος), διπλάσιον κεφάλαιον θὰ φέρῃ καὶ διπλάσιον τόκον (εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον). Ὥστε τὰ ποσὰ (κεφάλαιον καὶ τόκος) εἶνε ἀνάλογα, ἐπομένως ἔχομεν $8 \times \frac{525}{100}$.

Εἰς 1 ἔτος φέρει τόκον $8 \times \frac{525}{100}$ (κεφάλαιον 525 δρ.), εἰς διπλάσια ἔτη θὰ φέρῃ καὶ διπλάσιον τόκον. Ὥστε τὰ ποσὰ (χρόνος καὶ τόκος) εἶνε ἀνάλογα, ἐπομένως ἔχομεν $8 \times \frac{525}{100} \times \frac{3}{1}$, ἤτοι 126 δρ.

Ἐκ τῆς εὑρεθείσης λύσεως $\frac{8 \times 525 \times 3}{100}$ βλέπομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται τὸ κεφάλαιον 525 ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον 8 καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον 3 καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ 100. Ἐκ τούτου λοιπὸν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

213. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100.***

Σημ. Εἰς τὸν ἀνωτέρω κανόνα ὑποτίθεται ὅτι ὁ χρόνος ἔχει δοθῇ εἰς ἔτη· ἐὰν ὅμως δοθῇ εἰς μῆνας ἢ ἡμέρας, ἢ καὶ εἰς ἔτη, μῆνας καὶ ἡμέρας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα (ἐνθυμούμενοι ὅτι τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας, καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος μὴν λογίζεται μὲ 30 ἡμέρας πρὸς εὐκολίαν τῶν πράξεων, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἔτος λογίζεται μὲ 360 ἡμ.). Ἐν γένει δὲ ὁ χρόνος τρέπεται εἰς μονάδας τῆς τάξεως ἐκείνης, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται καὶ ἡ χρονικὴ μονὰς τοῦ ἐπιτοκίου.

Ἐφαρμογαί. 2) Πόσον τόκον φέρουσι 360 δραχμαὶ εἰς 4 μῆνας πρὸς 10 %;

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τοὺς 4 μῆνας εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους, ἤτοι $\frac{4}{12}$ τοῦ ἔτους, ἔπειτα ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν.

$$\frac{360 \times 10 \times \frac{4}{12}}{100} = \frac{360 \times 10 \times \frac{4}{12} \times 12}{100 \times 12} \text{ (ἐδάφ. 141)} = \frac{360 \times 10 \times 4}{100 \times 12} = 12 \text{ δρ.}$$

3) Πόσον τόκον φέρουσι 3000 δραχμαὶ εἰς 2 ἔτη 3 μῆν. πρὸς 7,50 %;

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶνε 2 ἔτη 3 μ. $= \frac{27}{12}$ τοῦ ἔτους, ἕπεται

$$\frac{3000 \times 7{,}50 \times \frac{27}{12}}{100} = \frac{3000 \times 7{,}50 \times 27}{100 \times 12} = 506{,}25.$$

4) Πόσον τόκον φέρουσιν 800 δρ. εἰς 3 μῆν. 15 ἡμ. πρὸς 9 %;

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶνε 3 μ. 15 ἡμ. $= \frac{105}{360}$ τοῦ ἔτους, ἕπεται

$$\frac{800 \times 9 \times \frac{105}{360}}{100} = \frac{800 \times 9 \times 105}{100 \times 360} = 21 \text{ δρ.}$$

Εὕρεσις τοῦ τόκου διὰ τῶν τοκαρίθμων.

214. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω εὑρεθείσης λύσεως $\frac{800 \times 9 \times 105}{100 \times 360}$ ἢ $\frac{800 \times 9 \times 105}{36000}$ ἢ καὶ $\frac{800 \times 105}{4000}$ (διηρέσαμεν τοὺς ὅρους διὰ τοῦ ἐπιτοκίου 9) βλέπομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται τὸ κεφάλαιον 800 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν 105 καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ 4000, ἤτοι διὰ τοῦ

πηλίκου 36000 : 9. Τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν λέγεται **τοκάριθμος**, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 36000 διὰ τοῦ δοθέντος ἐπιτοκίου λέγεται **σταθερὸς διαιρέτης.** Ἐκ τούτου συνάγομεν καὶ τὸν ἑξῆς σύντομον κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, ὅταν ὁ χρόνος εἶνε δεδομένος εἰς ἡμέρας.

214. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.***

Ἐφαρμογή. Πόσον τόκον φέρουσι 1800 δραχ. εἰς 1 μ. 20 ἡμ. πρὸς 6 %.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶνε 1 μ. 20 ἡμ. $=50$ ἡμέραι, ὁ δὲ σταθερὸς διαιρέτης εἶνε 36000 : 6, ἤτοι 6000, ἕπεται $\frac{1800\times50}{6000}$, ἤτοι 15 δρ.

Σημ. Ἐὰν συμβῇ ὁ ἀριθμὸς 36000 νὰ μὴ εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ δοθέντος ἐπιτοκίου, ἐφαρμόζομεν τότε τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 213.

Πρόβλημα. Ἐτόκισέ τις πρὸς 9 % τὰ ἑξῆς κεφάλαια· 5000 διὰ 3 μῆνας καὶ 3000 διὰ 2 μ. 10 ἡμ. Πόσον τόκον θὰ λάβῃ τὸ ὅλον;

Λύσις. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα. Ἀλλὰ τὸ ἴδιον εἶνε, ἂν προσθέσωμεν πρῶτον τοὺς τοκαρίθμους καὶ ἔπειτα διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου, ὅστις ἐδῶ εἶνε ὁ 4000 (διότι εἶνε 36000 : 9 $=4000$). Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{rcrcl} \text{Κεφάλαια} & & \text{ἡμ.} & & \text{τοκάριθμοι} \\ 5000 & \times & 90 & = & 450000 \\ 3000 & \times & 70 & = & \underline{210000} \\ & & & \text{ἄθρ.} & 660000 : 4000 = 165 \text{ τόκος.} \end{array}$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

215. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλῶν κεφαλαίων πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, προσθέτομεν τοὺς τοκαρίθμους αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.***

Νοεραὶ ἀσκήσεις.

1) Πόσον τόκον φέρουσιν 600 δραχμαὶ εἰς 1 μῆνα πρὸς 12 %;

Λύσις. $\frac{600\times12\times\frac{1}{12}}{100}=\frac{600}{100}=6.$

ἤτοι ὁ τόκος εἶνε ἴσος μὲ τὸ ἑκατοστὸν τοῦ κεφαλαίου. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν νοερῶς πόσον τόκον φέρει κεφάλαιόν τι εἰς 1 μῆνα πρὸς 12%, διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ 100 (τοῦτο γίνεται, ἂν χωρίσωμεν νοερῶς ἀπὸ τὰ δεξιά του δύο ψηφία).

Εὑρεθέντος τοῦ τόκου εἰς 1 μῆνα, εὑρίσκομεν νοερῶς καὶ τὸν τόκον εἰς περισσοτέρους μῆνας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀρκεῖ μόνον νὰ μὴ ἔχῃ τὸ κεφάλαιον πολλὰ σημαντικὰ ψηφία. Παραδ. χάριν.

2) Πόσον τόκον φέρουσιν 900 δρ. εἰς 8 μῆνας πρὸς 12 %;

Λύσις. 9×8, ἤτοι 72 δρ. (διότι εἰς 1 μῆνα φέρει τόκον 900 : 100, ἤτοι 9 δρ.).

3) Πόσον τόκον φέρουσιν 640 δρ. εἰς 7 μῆνας πρὸς 12%;

Λύσις. 6,40×7, ἤτοι 44δρ.,80 (νοερῶς πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς 6 δρ. ἐπὶ 7 καὶ κατόπιν τὰ 40 λεπτά).

Ἔχοντες ὡς βάσιν τὸ ἐπιτόκιον 12 δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον καὶ μὲ ἄλλα τινὰ ἐπιτόκια. Παράδ. χάριν·

4) Πόσον τόκον φέρουσιν 600 δρ. εἰς 5 μῆνας πρὸς 4%;

Λύσις. Πρὸς 12% φέρουν τόκον 30 δραχμάς, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 4 εἶνε τὸ τρίτον τοῦ 12, διὰ τοῦτο θὰ λάβωμεν καὶ τὸ τρίτον τοῦ 30, ἤτοι 10 δρ.

5) Πόσον τόκον φέρουσι 2000 δρ. εἰς 3 μ. πρὸς 9%.

Λύσις. Πρὸς 12% φέρουν τόκον 60 δραχμάς, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 9 ἀναλύεται εἰς 6 (ἥμισυ τοῦ 12) καὶ εἰς 3 (ἥμισυ τοῦ 6), διὰ τοῦτο θὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ 60, ἤτοι 30, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ 30, ἤτοι 15, καὶ θὰ προσθέσωμεν ταῦτα. Ὥστε ὁ τόκος τῶν 2000 δρ. εἰς 3 μ. πρὸς 9% εἶνε 45 δρ.

6) Πόσον τόκον φέρουσιν 700 δρ. εἰς 8 μ. πρὸς 6%;

7) Πόσον τόκον φέρουσιν 8000 δρ. εἰς 5 μ. πρὸς 3%;

Ὅταν ὅμως ζητῆται ὁ ἐτήσιος τόκος κεφαλαίου τινός, μὴ ἔχοντος πολλὰ σημαντικὰ ψηφία, εὑρίσκομεν τοῦτον νοερῶς ὡς ἑξῆς. ***Πολλαπλασιάζομεν τὸ ἑκατοστὸν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*** Παραδ. χάριν.

Ὁ τόκος τῶν 3000 δρ. δι' ἓν ἔτος πρὸς 8% εἶνε 30×8, ἤτοι 240 δρ.

Ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν 4000 δρ. πρὸς $4\frac{1}{2}$ % εἶνε $40 \times 4\frac{1}{2}$, ἤτοι 180 δραχμαί.

2ον) Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου.

Πρόβλημα. Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 10 °/₀ καὶ ἔφερε τόκον 84 δραχμάς;

Κατάταξις. 100 κεφ. $\frac{1 \text{ ἔτ.}}{3}$ $\frac{10 \text{ τόκ.}}{84}$

χ

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος εἶνε ποσὰ ἀνάλογα, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, διὰ τοῦτο ἔχομεν $100 \times \frac{84}{10}$.

Εἰς 1 ἔτος πρέπει νὰ τοκίσωμεν κεφάλαιον $100 \times \frac{84}{10}$ (διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 84 δρ.), εἰς διπλάσια ἔτη πρέπει νὰ τοκίσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου (διὰ νὰ λάβωμεν τὸν ἴδιον τόκον). Ὥστε τὰ ποσὰ (χρόνος καὶ κεφάλαιον) εἶνε ἀντίστροφα, ἑπομένως ἔχομεν $100 \times \frac{84}{10} \times \frac{1}{3}$, ἤτοι 280 δρ.

Ἐκ τῆς εὑρεθείσης λύσεως $\frac{100 \times 84}{10 \times 3}$ βλέπομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος 84 ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου 10 καὶ τοῦ χρόνου 3. Ἐκ τούτου λοιπὸν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

216. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἤτοι τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου.***

Ἐφαρμογή. Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπὶ 1 ἔτος 2 μῆνας πρὸς 8 °/₀ καὶ ἔφερε τόκον 42 δραχμάς;

Λύσις. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν

$$\frac{42 \times 100}{8 \times \frac{14}{12}} = \frac{42 \times 100 \times 12}{8 \times \frac{14}{12} \times 12} = \frac{42 \times 100 \times 12}{8 \times 14} = 450 \text{ δραχ.}$$

Νοεραὶ ἀσκήσεις. Ὅταν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν νοερῶς τὸν ἐτήσιον τόκον κεφαλαίου τινὸς διὰ τοῦ ἐπιτοκίου, εὑρίσκομεν τὸ κεφάλαιον ὡς ἑξῆς·

Διαιροῦμεν τὸν ἐτήσιον τόκον διὰ τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100.

Παραδ. χάριν. 1) Ὁ ἐτήσιος τόκος κεφαλαίου τινὸς εἶνε 1800 δραχμαί. Ποῖον εἶνε τὸ κεφάλαιον πρὸς 6 °/₀ ;

Λύσις. Τὸ πηλίκον τοῦ 1800 διὰ 6 εἶνε 300, ἑπομένως τὸ κεφάλαιον εἶνε 300×100, ἤτοι 30000 δρ.

2) Ἔχει τις καταθέσει εἴς τινα τράπεζαν κεφάλαιόν τι πρὸς 4 %
καὶ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 600 δρ. Ποῖον εἶνε τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

3) Λαμβάνει τις ἐνοίκιον κατὰ μῆνα ἐκ τῆς οἰκίας του 100 δρ. Πόσον πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀξία τῆς οἰκίας του πρὸς 6 %;

3ον) Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.

Πρόβλημα. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 5370 δραχμῶν καὶ ἔφερεν εἰς 2 ἔτη τόκον 429δρ.,60;

Κατάταξις.

5370 κεφ.	2 ἔτη	429,60 τόκ.
100	1	χ

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιον καὶ τόκος, χρόνος καὶ τόκος εἶνε ἀνάλογα, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$\chi = 429{,}60 \times \frac{100}{5370} \times \frac{1}{2}, \text{ ἤτοι } 4\ \%.$$

Ἐκ τῆς εὑρεθείσης λύσεως τοῦ προβλήματος βλέπομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος 429,60 ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου 5370 καὶ τοῦ χρόνου 2. Ἐκ τούτου λοιπὸν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

217. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἤτοι τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου.***

Ἐφαρμογή. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 2600 δρ., τὸ ὁποῖον ἔφερεν εἰς 7 μῆνας τόκον 68δρ.,25;

Λύσις. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν

$$\frac{68{,}25 \times 100}{2600 \times \frac{7}{12}} = \frac{68{,}25 \times 100 \times 12}{2600 \times 7} = 4{,}50\ \%.$$

4ον) Εὕρεσις τοῦ χρόνου.

Πρόβλημα. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 900 δραχμῶν, τοκιζόμενον πρὸς 4,50 %, θὰ φέρῃ τόκον 128δρ.,25;

Κατάταξις.

100 κεφ.	1 ἔτ.	4,50 τόκ.
900	χ	128,25

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ μὲν ποσὰ κεφάλαιον καὶ χρόνος εἶνε ἀντίστροφα, τὰ δὲ ποσὰ τόκος καὶ χρόνος εἶνε ἀνάλογα, διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$\chi = 1 \times \frac{100}{900} \times \frac{128{,}25}{4{,}50}, \text{ ἤτοι } 3 \text{ ἔτη } 2 \text{ μῆνας.}$$

Ἐκ τῆς εὑρεθείσης πάλιν λύσεως τοῦ προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

218. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἤτοι τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.***

Ἐφαρμογή. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 1200 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 9%, φέρει τόκον 48 δραχμάς ;

Λύσις. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν $\frac{48 \times 100}{1200 \times 9} = 5$μ. 10ἡμ.

Παρατήρησις. Οἱ ἀνωτέρω εὑρεθέντες τέσσαρες κανόνες δύνανται νὰ συγχωνευθῶσιν εἰς τὸν ἑξῆς ἕνα μόνον.

219. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ οἱονδήποτε ἄλλο ποσὸν (ἤτοι τὸ κεφάλαιον ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ τὸν χρόνον) πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων ποσῶν.***

Σημ. Ἐνθυμούμενοι νὰ τρέπωμεν τὸν χρόνον εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους, ἐὰν δὲν ἔχῃ δοθῆ εἰς ἔτη.

Ἐὰν τὰ ἀνωτέρω ποσά, ἤτοι Τόκον, Κεφάλαιον, Ἐπιτόκιον καὶ Χρόνον, παραστήσωμεν συντόμως διὰ τῶν ἀρχικῶν αὐτῶν γραμμάτων T, K, F, X, ἔχομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τοὺς ἑξῆς τύπους πρὸς εὕρεσιν αὐτῶν.

$$T = \frac{K \times X \times E}{100},\ K = \frac{T \times 100}{X \times E},\ E = \frac{T \times 100}{K \times X},\ X = \frac{T \times 100}{K \times E}$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον τόκον φέρουσι 2400 δρ. εἰς 1 ἔτ. 3 μην. 6 ἡμ. πρὸς $6\frac{1}{4}$% ; (190 δρ.).

2) Ἐπὶ πόσον χρόνον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 1500 δρ. πρὸς 9% καὶ ἔφερε τόκον 26δρ.,25; (2μ. 10ἡμ.).

3) Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπὶ 1 ἔτ. 3 μῆν. πρὸς 7,50% καὶ ἔφερε τόκον 56δρ.,25 ; (600 δρ.).

4) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 3000 δρ. καὶ ἔφερεν εἰς 1 ἔτ. 1 μ. 10 ἡμ. τόκον 200 δραχμάς; (6%).

5) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 400 δρ. τοκιζόμενον πρὸς 8% διπλασιάζεται ;

Λύσις. Διὰ νὰ διπλασιασθῇ τὸ κεφάλαιον, πρέπει νὰ φέρῃ τόκον ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον, ἤτοι 400 δρ. Κατόπιν εὑρίσκομεν διὰ τοῦ κανόνος ὅτι ὁ χρόνος εἶνε 12 ἔτη 6 μ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ τριπλασιασθῇ τὸ κεφάλαιον, πρέπει νὰ φέρῃ τόκον διπλάσιον τοῦ κεφαλαίου, ἤτοι 800 δραχμάς, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημ. Ὅταν κεφάλαιον δὲν ἔχῃ δοθῇ, λαμβάνομεν οἱονδήποτε.

6) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῇ κεφάλαιόν τι, διὰ νὰ διπλασιασθῇ μετὰ 10 ἔτη; (10%).

7) Ἐδανείσθη τις 2700 δρ. τὴν 25 Μαΐου τοῦ ἔτους 1920 πρὸς 10% καὶ ἐπλήρωσε τὸ χρέος του τὴν 5 Ἰουλίου τοῦ ἔτους 1921. Πόσον ἐπλήρωσε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ; (3000 δρ.)

8) Ἐδανείσθη τις 1200 δρ. πρὸς 9 % καὶ ἐπλήρωσε τὴν 2αν Φεβρουαρίου τοῦ ἔτους 1922 διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 1386 δρ. Πότε ἐδανείσθη τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

Λύσις. Ὁ τόκος εἶνε 1386—1200, ἤτοι 186 δρ. Κατόπιν εὑρίσκομεν τὸν χρόνον τῆς διαρκείας τοῦ δανείου, τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν χρονολογίαν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπλήρωσε τὸ χρέος του, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἐδανείσθη τὸ κεφάλαιον κατὰ τὸ ἔτος 1920 Μαΐου 12.

9) Ἠγόρασέ τις μίαν οἰκίαν ἀντὶ 20000 δραχμῶν καὶ ἐξώδευσε διὰ τὴν ἐπισκευήν της 4000 δρ. Πόσον πρέπει νὰ ἐνοικιάσῃ αὐτὴν κατὰ μῆνα, διὰ νὰ κερδίζῃ ἐπὶ τῆς ἀξίας της $6\frac{1}{4}$ %;

Λύσις. Ζητεῖται ὁ τόκος τῶν 24000 δρ. εἰς 1 μ., ὅστις εἶνε 125 δρ.

10) Πατήρ τις κατέθεσεν εἰς μίαν Τράπεζαν 6000 δρ. πρὸς 6 %, ὅτε ἐγεννήθη ἡ θυγάτηρ του, ὅπως χρησιμεύσῃ τὸ κεφάλαιον τοῦτο μετὰ τῶν ἁπλῶν τόκων του ὡς μέλλουσα προὶξ αὐτῆς. Ἡ θυγάτηρ κατὰ τὸν γάμον της ἔλαβεν ἐκ τῆς Τραπέζης διὰ κεφάλαιον καὶ τόκους 13360 δρ. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἐνυμφεύθη;

Λύσις. Ζητεῖται ὁ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ 6000 δρ. ἔφερον τόκον 13360—6000 ἢ 7360 δρ. Εὑρίσκεται ὅτι ἐνυμφεύθη εἰς ἡλικίαν 20 ἐτῶν 5 μ. 10 ἡμ.

11) Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσῃ τις ἐπὶ 5 μῆνας 10 ἡμ. πρὸς 9 %, διὰ νὰ λάβῃ τόσον τόκον, ὅσον φέρουν 4000 δρ. εἰς 6 μῆνας πρὸς 10 %; (5000).

12) Ἐδανείσθη τις 2000 δρ. διὰ 9 μῆνας πρὸς 10 %, ἀλλὰ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ προπληρώσῃ τὸν τόκον. Ζητεῖται πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐδανείσθη πραγματικῶς.

Λύσις. Ὁ τόκος εἶνε 150, ἑπομένως ἔλαβε 2000 — 150 ἢ 1850 δρ. Διὰ τὰς 1850 δρ. ἐπλήρωσε τόκον 150 διὰ 9 μῆνας, ἑπομένως τὸ ἐπιτόκιον εὑρίσκεται ὅτι εἶνε 10,81 %.

13) Ἐδανείσθη τις 1500 δρ. δι' ἓν ἔτος πρὸς 10 %, ἀλλὰ μετὰ 8 μῆνας ἔδωκεν ἀπέναντι τοῦ χρέους του 900 δρ. Πόσον χρεωστεῖ ἀκόμη νὰ δώσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους; (720).

14) Ἠγόρασέ τις χωράφιον ἀντὶ 6000 δραχμῶν καὶ μετὰ 2 ἔτη 3 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸ μὲ κέρδος 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του. Πόσον τὸ ἐπώλησε;

Λύσις. Ἐκ τῆς πωλήσεως ἔλαβε τὰς 6000 δρ. καὶ τὸν τόκον αὐτῶν εἰς 2 ἔτη 3 μ. πρὸς 10 %, ὅστις εἶνε 1350 δραχμαί, ὥστε τὸ ἐπώλησεν 6000 + 1350, ἤτοι 7350 δρ.

15) Ἔδωκέ τις 3900 δρ. διὰ τὴν ἀγορὰν ἑνὸς ἐμπορεύματος, πρὸς δὲ καὶ 2 % διὰ μεσιτείαν· μετὰ 2 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸ μὲ κέρδος 20 %. Πόσον τὸ ἐπώλησε; (4110,60).

16) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 3000 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 2,50 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 2 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 2,60 τὴν ὀκᾶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησε;

Λύσις. Ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν ἐκέρδησεν 0,10 τῆς δραχμῆς· ταῦτα εἶνε ὁ τόκος τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἤτοι τῶν 2,50 εἰς 2 μῆν., ἑπομένως τὸ ἐπιτόκιον εὑρίσκεται ὅτι εἶνε 24 %. Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· εὑρίσκομεν ὅτι διὰ τὰς 3000 ὀκ. ἔδωκε 7500 δρ., ἐκ δὲ τῆς πωλήσεως αὐτῶν ἔλαβεν 7800 δρ., ὥστε ἐκέρδησε 300 δρ. Αὗται εἶνε ὁ τόκος τῶν 7500 δρ. εἰς 2 μῆνας, ἑπομένως τὸ ἐπιτόκιον εὑρίσκεται πάλιν ὅτι εἶνε 24 %.

17) Ἔχει τις τοκίσει εἴς τινα 2400 δρ. πρὸς 8 % καὶ εἰς ἄλλον 1600 πρὸς 9 %. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσῃ τὰ κεφάλαια ταῦτα εἰς τρίτον πρόσωπον, διὰ νὰ λαμβάνῃ καθ' ἑξαμηνίαν τὸν αὐτὸν τόκον; (8,40 %).

18) Δύο ἄνθρωποι ἐτόκισαν τὸ αὐτὸ κεφάλαιον, ἤτοι 15000 δρ. ἕκαστος· ἀλλ' ὁ μὲν πρῶτος ἐτόκισεν αὐτὸ πρὸς 8 %, ὁ δὲ δεύτερος ἐτόκισε τὰ μὲν $\frac{3}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 7 %, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 9 %. Ποῖος κερδίζει ἐτησίως περισσότερον τοῦ ἄλλου καὶ πόσον; (ὁ α' 30 δρ.).

19) Εἶχέ τις 45000 δραχμάς· τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν ἐτόκισεν εἴς τινα διὰ

8 μῆνας πρὸς 9 %, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐτόκισεν εἰς ἄλλον καὶ μετὰ 4 μῆν. 20 ἡμ., ἔλαβε παρ' αὐτοῦ διὰ κεφάλαιον καὶ τόκους 28050 δρ. Ζητεῖται πόσον τόκον ἔλαβεν ἐκ τοῦ πρώτου κεφαλαίου καὶ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτόκισε τὸ δεύτερον κεφάλαιον. (1080 καὶ 10 %).

20) Χωρικός τις ἐπώλησε σῖτον πρὸς 75 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· κατόπιν ἐτόκισε τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ὅσων ἔλαβε χρημάτων πρὸς 10% καὶ μετὰ 1 ἔτος 5 μ. ἔλαβε τόκον 255 δρ. Πόσον σῖτον ἐπώλησε; (3600 ὀκ.).

21) Ἠγόρασέ τις μίαν οἰκίαν ἀντὶ 30000 δρ. καὶ ἐξώδευσε δι' ἐπισκευήν της 2000 δραχμάς· κατόπιν ἐνοικίασεν αὐτὴν κατὰ μῆνα ἀντὶ 200 δραχμῶν, ἔχει ὅμως ἔξοδα τὸ ἔτος δι' ἀσφάλειαν, φόρον οἰκοδομῶν κτλ. 400 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔχει καθαρὸν εἰσόδημα;

Λύσις. Τὸ ἔτος λαμβάνει ἐνοίκιον 2400 δρ., ἑπομένως ἔχει καθαρὸν εἰσόδημα 2400—400, ἤτοι 2000 δρ. Αὗται εἶνε ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν 32000 δρ., ἑπομένως τὸ ἐπιτόκιον εὑρίσκεται ὅτι εἶνε 6,25 %.

22) Λαμβάνει τις ἐνοίκιον ἐκ τῆς οἰκίας του κατὰ μῆνα ἐκ μὲν τοῦ ἄνω πατώματος 120 δραχμάς, ἐκ δὲ τοῦ κάτω 70 ἔχει ὅμως ἔξοδα τὸ ἔτος δι' αὐτὴν 390 δρ. Πόσον πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀξία τῆς οἰκίας του πρὸς $6\frac{3}{4}$ %;

Λύσις. Τὸ καθαρὸν ἐτήσιον εἰσόδημα εἶνε 1890 δραχμαί, ἑπομένως τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἶνε 28000 δρ.

23) Ποῖον εἶνε προτιμότερον, νὰ ἀγοράσῃ τις μίαν οἰκίαν ἀξίας 16000 δραχμῶν, ἐκ τῆς ὁποίας θὰ λαμβάνῃ κατὰ μῆνα ἐνοίκιον 120 δραχμάς, ἀλλὰ θὰ ἔχῃ ἔξοδα τὸ ἔτος 200 δραχμάς, ἢ νὰ καταθέσῃ τὰ χρήματα ταῦτα εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς $4\frac{1}{2}$ %

(Τὸ πρῶτον· διότι θὰ ἔχῃ κέρδος τὸ ἔτος 520 δρ. περισσότερον).

24) Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιόν τι πρὸς 9 % καὶ μετὰ 10 μῆνας ἔλαβε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 1032 δρ. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον ἦτο 100 δραχμαί· ὁ τόκος αὐτῶν εἰς 10 μ. πρὸς 9 % εἶνε 7,50 (1) Ὥστε μετὰ 10 μ. θὰ λάβῃ κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 107,50.

(1) Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς κεφάλαιον καὶ οἱονδήποτε ἄλλο ποσόν. Προτιμῶμεν ὅμως τὸν 100, διότι συντομώτερον εὑρίσκομεν τὸν τόκον αὐτοῦ ἢ ἄλλου ποσοῦ.

Ἂν λοιπὸν λάβῃ 107,50, τὸ κεφάλαιον ἦτο 100
» 1032 » x

Λύοντες τοῦτο διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἢ διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κεφάλαιον ἦτο 960 δρ. καὶ ἑπομένως ὁ τόκος ἦτο 1032—960, ἤτοι 72 δρ.

25) Ἐπώλησέ τις χωράφιον μετὰ 1 ἔτος 3 μ. ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς του μὲ κέρδος 15 °/₀ καὶ ἔλαβε 4275 δρ. Πόσον τὸ εἶχεν ἀγοράσει;

Λύσις. Ὁμοία μὲ τὴν ἀνωτέρω. Ἤτοι ὑποθέτομεν ὅτι τὸ ἠγόρασεν 100 δρ. καὶ ἑπομένως τὸ ἐπώλησεν 118,75 (18,75 εἶνε ὁ τόκος τῶν 100 δρ.)· ἂν τὸ πωλήσῃ 4275, πόσον τὸ ἠγόρασεν; Εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἠγόρασε 3600 δρ.

26) Ἔμπορός τις ἠναγκάσθη νὰ πωλήσῃ ὕφασμά τι μετὰ 3 μ. ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς του μὲ ζημίαν 8,80 °/₀ ἕνεκα μικρᾶς βλάβης καὶ ἔλαβεν 24,45 δρ. Πόσον τοῦ ἐκόστιζεν; (25 δρ.).

Περὶ ὑφαιρέσεως.

220. Εἴπομεν εἰς τὰ περὶ τόκου ὅτι, ὅταν δανείζῃ τις χρήματα εἰς ἄλλον, δανείζει συνήθως αὐτὰ δι' ὡρισμένον χρόνον καὶ μὲ ὡρισμένον ἐπιτόκιον, συμπεφωνημένα μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ τοῦ δανειζομένου. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ εἰς τὸ ἐμπόριον, ὅταν ὁ ἀγοραστὴς δὲν πληρώσῃ ἀμέσως τὴν ἀξίαν τῶν ἀγορασθέντων ἐμπορευμάτων.

Ὁ δανείζων χρήματα εἰς ἄλλον ἢ δίδων ἐμπορεύματα βασίζεται κυρίως εἰς τὴν ἐντιμότητα τοῦ δανειζομένου. Χάριν ὅμως περισσοτέρας ἀσφαλείας ὑπόσχεται ὁ δανειζόμενος ἐγγράφως ἐπὶ χαρτοσήμου νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν δανειστήν του τὸ δανειζόμενον ποσὸν μετὰ τοῦ τόκου του (συνήθως) ἐντὸς ὡρισμένης προθεσμίας. Τὸ ἔγγραφον δὲ τοῦτο λέγεται **γραμμάτιον** (1). Ὑποθέσωμεν, παραδ. χάριν, ὅτι ὁ κ. Ἀθανασίου ἐδάνεισεν εἰς τὸν κ. Βασιλείου τὴν 20ὴν Μαρτίου 1921 δρ. 800 πρὸς 10 °/₀ πληρωτέας μετὰ 3 μῆνας. Κατὰ πρῶτον εὑρίσκεται ὁ τόκος, ὅστις εἶνε 20 δραχμαί, καὶ προστίθεται οὗτος εἰς τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον 800 δραχμῶν· κατόπιν ἐπὶ

(1) Ἐκτὸς τοῦ γραμματίου μεταχειρίζονται συνήθως οἱ ἔμποροι καὶ τὴν συναλλαγματικήν, ἥτις εἶνε ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ δανείζων χρήματα ἢ δίδων ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει διατάσσει τὸν ὀφειλέτην του, διαμένοντα ἐν τῇ αὐτῇ πόλει ἢ ἐν ἄλλῃ, νὰ πληρώσῃ εἰς τρίτον πρόσωπον καὶ εἰς ὡρισμένον χρόνον τὸ ἐν αὐτῷ ἀναφερόμενον χρηματικὸν ποσόν.

ἀναλόγου χαρτοσήμου, ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ νόμου, συντάσσεται τὸ ἑξῆς περίπου γραμμάτιον.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Μαρτίου 1921. Διὰ δρ. 820.

Μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Ἀθανασίου ἢ εἰς τὴν διαταγὴν αὐτοῦ δραχμὰς ὀκτακοσίας εἴκοσιν, ἃς ἔλαβον παρ' αὐτοῦ ὡς δάνειον.

(Ὑπογραφή) ***Βασιλείου.***

Ὁ μὲν δανειζόμενος ἢ ὀφειλέτης θὰ λάβῃ τὰς 800 δραχμάς, ὁ δὲ δανειστὴς τὸ γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον ἕνεκα τῶν λέξεων ***εἰς τὴν διαταγὴν*** λέγεται καὶ ***γραμμάτιον εἰς διαταγήν.***

Οἱ κάτοχοι ὅμως τοιούτων γραμματίων ἕνεκα ἀνάγκης χρημάτων πωλοῦσι πολλάκις ταῦτα εἰς ἄλλον πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας των. Δίκαιον λοιπὸν εἶνε ὁ προεξοφλῶν, ἤτοι ὁ ἀγοράζων τὸ γραμμάτιον, ἀφοῦ δὲν θὰ λάβῃ τὰ χρήματα ἀμέσως παρὰ τοῦ ὀφειλέτου, νὰ κρατήσῃ ἓν τόσον τοῖς ἑκατὸν [1] ἐκ τοῦ ἀναφερομένου ποσοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ καὶ νὰ δώσῃ εἰς τὸν κάτοχον τοῦ γραμματίου τὸ ὑπόλοιπον.

Τὸ χρηματικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον κρατεῖται ἀπὸ τὸ ἐν τῷ γραμματίῳ ἀναφερόμενον ποσόν, ὅταν τοῦτο πληρώνηται πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του, λέγεται **ὑφαίρεσις ἢ ἔκπτωσις (σκόντο).**

Σημ. Τῆς ὑφαιρέσεως κάμνουσι πολλὴν χρῆσιν οἱ ἔμποροι πρὸς εὐκολίαν των δίδοντες καὶ λαμβάνοντες τοιαῦτα γραμμάτια. Ὥστε ἓν γραμμάτιον τίθεται πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ εἰς κυκλοφορίαν ὡς εἶδος χρημάτων μεταβιβαζόμενον ἀπὸ ἑνὸς εἰς ἄλλον. Γραμμάτιον, μὴ περιέχον τὰς λέξεις ***εἰς διαταγήν***, δὲν δύναται νὰ μεταβιβασθῇ εἰς ἄλλον.

Ὑφαιρέσεις διακρίνομεν δύο εἰδῶν, τὴν ***ἐξωτερικὴν*** καὶ τὴν ***ἐσωτερικήν.***

1ον) Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.

221. **Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις** λέγεται ὁ τόκος τοῦ ἀναφερομένου ποσοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ διὰ χρόνον λογιζόμενον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του (πρὸς ἐπιτόκιον συμπεφωνημένον).

Ἔστω, παραδ. χάριν, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

(1) Τὸ ἐπιτόκιον τοῦτο συμφωνεῖται μεταξὺ τοῦ προεξοφλητοῦ καὶ τοῦ κατόχου τοῦ γραμματίου καὶ εἶνε ἀνεξάρτητον τοῦ ἐπιτοκίου, μὲ τὸ ὁποῖον ἐγένετο τὸ δάνειον. Αἱ δὲ τράπεζαι ἔχουν ὡρισμένα ἐπιτόκια διὰ τὰς προεξοφλήσεις.

Πόση εἶνε ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 1640 δραχμῶν, προεξοφλουμένου 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του πρὸς 10%;

Λύσις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶνε ὁ τόκος τῶν 1640 δρ. εἰς 3 μ. πρὸς 10%, ἤτοι $\frac{1640 \times \frac{3}{12} \times 10}{100}$ ἢ 41 δρ.

Ἡ ἐξωτερικὴ λοιπὸν ὑφαίρεσις εἶνε 41 δραχμαί· ταύτας θὰ κρατήσῃ ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον καὶ θὰ πληρώσῃ εἰς τὸν κάτοχον τοῦ γραμματίου τὰς ὑπολοίπους 1640—41 ἢ 1599 δρ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι πᾶν γραμμάτιον ἔχει δύο ἀξίας, τὴν **ὀνομαστικήν**, ἤτοι τὴν ἀναφερομένην ἐν τῷ γραμματίῳ, καὶ τὴν **πραγματικὴν ἢ παροῦσαν**, ἤτοι τὴν ἐλαττουμένην κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν. Ὥστε εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶνε 1640 δραχμαί, ἡ ὑφαίρεσις 41 δρ. καὶ ἡ πραγματικὴ ἀξία αὐτοῦ 1599 δρ.

Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία εἶνε ἄθροισμα τῆς ὑφαιρέσεως καὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας· ὥστε, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν (ὑφαίρεσιν ἢ πραγματικήν), εὑρίσκομεν τὴν ἄλλην διὰ τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῆς ἀπὸ τὴν ὀνομαστικήν.

Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ἄδικος· διότι ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον, ἀντὶ νὰ κρατήσῃ τὸν τόκον τῶν χρημάτων του, τὰ ὁποῖα πληρώνει διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ γραμματίου, ἤτοι τῶν 1599 δρ., κρατεῖ τὸν τόκον τῶν ἀναφερομένων ἐν τῷ γραμματίῳ, ἤτοι τῶν 1640 δραχμῶν, τὰς ὁποίας δὲν ἔδωκεν. Ἐν τούτοις ὅμως αὐτῆς τῆς ὑφαιρέσεως κάμνουν χρῆσιν οἱ ἔμποροι ὡς εὑρισκομένης εὐκόλως.

2ον) Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

222. **Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις** λέγεται ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἤτοι τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα πληρώνει ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον διὰ χρόνον λογιζόμενον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν λοιπὸν ταύτην ὁ προεξοφλῶν, ἤτοι ὁ ἀγοράζων γραμμάτιον, πρέπει νὰ πληρώνῃ τόσα χρήματα, ὥστε μετὰ τοῦ

τόκου των νὰ ἀποτελῶσι τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου.
Ἔστω π.χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πόση εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 1640 δραχμῶν, προεξοφλουμένου 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10 %;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπλήρωσέ τις 100 δρ., διὰ νὰ ἀγοράσῃ γραμμάτιον λῆγον μετὰ 3 μῆνας πρὸς 10%· ὁ τόκος αὐτῶν εἶνε 2,50 ἑπομένως ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶνε 102,50. Ἐκ τῶν δραχμῶν τούτων ὁ προεξοφλῶν ἐκράτησε 2,50 ἤτοι τὸν τόκον τῶν χρημάτων τὰ ὁποῖα πληρώνει, ἀλλ' ὁ τόκος οὗτος κατὰ τὰ ἀνωτέρω λέγεται ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις. Ὥστε

ἂν τὸ γραμ. εἶνε 102,50, ἡ ἐσωτ. ὑφ. εἶνε 2,50
» 1640 » χ

εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα (ἢ διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν) ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε 40 δρ. Ταύτας θὰ κρατήσῃ ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον καὶ θὰ δώσῃ τὰς ὑπολοίπους 1600. Αἱ δραχμαὶ αὗται παριστῶσι τὴν πραγματικὴν ἢ παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, αἱ δὲ 1640 τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν αὐτοῦ.

Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 40 δρ. εἶνε πράγματι ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἤτοι τῶν 1600 δρ., τὰς ὁποίας πληρώνει ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον πρὸς 10% διὰ 3 μῆνας· ἐνῷ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις, ὡς εἴδομεν, εἶνε 41 δρ. ἤτοι μεγαλυτέρα τῆς ἐσωτερικῆς κατὰ 1 δρ. Ἡ διαφορὰ αὕτη εἶνε ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἤτοι τῶν 40 δραχμῶν· ὥστε ὁ προεξοφλῶν ἐξωτερικῶς κρατεῖ οὐ μόνον τὸν τόκον τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἤτοι τὰς 40 δραχμάς, ἀλλὰ καὶ τὸν τόκον τοῦ τόκου, ἤτοι τῶν 40 δραχμῶν.

Ἡ ἐσωτερικὴ ὅμως ὑφαίρεσις, ἂν καὶ εἶνε δικαία, διότι κρατεῖται ὁ τόκος τῶν χρημάτων μόνον, τὰ ὁποῖα πληρώνονται, ἐν τούτοις δὲν εἶνε ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν εἰς τὸ ἐμπόριον.

Προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εὑρίσκεται, ὅπως καὶ ὁ τόκος. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἄλλο τι ποσόν, ἤτοι χρόνον, ἐπιτόκιον κτλ., ἐφαρμόζομεν τοὺς γνωστοὺς κανόνας τοῦ τόκου, ἑπομένως ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τῆς ὑφαιρέσεως οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει. Πρέπει ὅμως νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἑξῆς· ὅταν λέγωμεν ὑφαίρεσιν, θὰ ἐννοῶμεν τόκον· καὶ ὁσάκις λαμβάνομεν τὴν ἀνάγκην τοῦ κεφαλαίου, θὰ λαμβάνωμεν ὡς τοιοῦτον τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου (τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως).

1) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 480 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον προεξοφλήθη πρὸς 9 % καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις (ἐξωτερικὴ) 18 δραχμαί;

Λύσις. Αἱ 480 δρ. εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἤτοι τὸ κεφάλαιον, ἡ δὲ ὑφαίρεσις 18 δρ. εἶνε ὁ τόκος. Ὥστε κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 218 ἔχομεν $\frac{18 \times 100}{480 \times 9}$, ἤτοι 5 μῆν.

2) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 1800 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον προεξοφλήθη (ἐξωτερικῶς) πρὸς 6,50 % ἀντὶ 1767,50 δρ.;

Λύσις. Αἱ 1800 δρ. εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, ἤτοι τὸ κεφάλαιον, αἱ δὲ 1767,50, ἀντὶ τῶν ὁποίων προεξοφλήθη τὸ γραμμάτιον, εἶνε ἡ πραγματικὴ ἀξία αὐτοῦ· ὥστε ἡ ὑφαίρεσις εἶνε 1800 — 1767,50, ἤτοι 32,50. Ἐφαρμόζοντες τώρα τὸν κανόνα ἔχομεν $\frac{32{,}50 \times 100}{1800 \times 6{,}50}$ ἢ 3 μῆν. 10 ἡμ.

3) Γραμμάτιον προεξοφλήθη 2 μῆν. 20 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 842,80 δρ. καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις (ἐξωτερικὴ) 17,20 δρ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον προεξοφλήθη;

Λύσις. Αἱ 842,80 δρ. εἶνε ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἡ ὑφαίρεσις 17,20 εἶνε ὁ τόκος, κεφάλαιον δὲ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἥτις εἶνε ἄθροισμα τῆς πραγματικῆς ἀξίας καὶ τῆς ὑφαιρέσεως, ἤτοι 842,80 + 17,20 ἢ 860 δρ. Ὥστε κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα ἐδ. 217 ἔχομεν $\frac{17{,}20 \times 100}{860 \times \frac{80}{360}}$, ἤτοι 9 %.

Σημ. Ἐὰν τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον, ἦσαν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, θὰ ἐλύοντο κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι ὡς κεφάλαιον θὰ ἐλαμβάνομεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἀντὶ τῆς ὀνομαστικῆς (τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως).

4) Γραμμάτιον προεξωφλήθη 6 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 %, καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις (ἐξωτερική) 36 δρ. Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

Λύσις. Ζητεῖται τὸ κεφάλαιον· ὥστε ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦ σ. 216 εὑρίσκομεν 900 δρ.

Σημ. Ἐὰν ἡ ἀνωτέρω ὑφαίρεσις 36 ἦτο ἐσωτερική, τὸ εὑρεθὲν κεφάλαιον 900 θὰ ἦτο ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ ἑπομένως ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ θὰ ἦτο 900 + 36 ἢ 936 δρ.

5) Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου προεξοφληθέντος ἐξωτερικῶς 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 % ἀντὶ 834δρ.,20;

Λύσις. Ἐνταῦθα δὲν ἔχομεν τὴν ὑφαίρεσιν, ἤτοι τὸν τόκον, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον διὰ τοῦ γνωστοῦ κανόνος. Διὰ τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἦτο 100 δρ. Ὁ τόκος αὐτῶν εἰς 4 μ. πρὸς 9 % εἶνε 3 δρ., καὶ ἑπομένως θὰ προεξωφλεῖτο ἀντὶ 97 δρ. Ὥστε

ἂν προεξοφληθῇ ἀντὶ 97 δρ., ἡ ὀνομ. ἀξία εἶνε 100
» 834,20 » » χ

εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε 860 δρ.

Σημ. Ἐὰν τὸ ἀνωτέρω γραμμάτιον προεξωφλεῖτο ἐσωτερικῶς, εὑρίσκομεν τότε τὸν τόκον τῶν 834,20 εἰς 4 μ. πρὸς 9 % καὶ προσθέτομεν αὐτὸν εἰς τὴν πραγματικὴν ἀξίαν 834,20, τὸ δὲ ἄθροισμα εἶνε ἡ ζητουμένη ὀνομαστικὴ ἀξία.

6) Ἡ πραγματικὴ ἀξία γραμματίου προεξοφληθέντος (ἐξωτερικῶς) 24 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 % εἶνε 3386δρ.,40. Πόση εἶνε ἡ ὑφαίρεσίς του. (13,60).

7) Ἐδανείσθη τις κεφάλαιόν τι πρὸς 10 % καὶ ὑπέγραψε γραμμάτιον διὰ 1365 δρ. πληρωτέον μετὰ 6 μῆνας. Πόσον κεφάλαιον ἐδανείσθη; (1300 δρ.).

8) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 9000 δρ. καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ αὐτὰς μετὰ 2 μῆνας, ἀλλ' οὗτος ἠθέλησε νὰ πληρώσῃ τὸ ποσὸν τοῦτο ἀμέσως, διὰ τοῦτο τοῦ ἔγινεν ἔκπτωσις 9 %. Πόσον ἐπλήρωσεν; (8865).

9) Γραμμάτιον 2700 δρ., λῆγον τὸ ἔτος 1921 Ἀπριλίου 5, προεξωφλήθη (ἐξωτερικῶς) πρὸς 8 % ἀντὶ 2568 δρ. Πότε προεξωφλήθη; (τὸ ἔτος 1920 Αὐγ. 25).

10) Τραπεζίτης τις προεξώφλησε γραμμάτιον 3000 δρ. πρὸς 6 % τὴν 15 Σ]βρίου 1920 καὶ ἔδωκεν εἰς τὸν κάτοχον τοῦ γραμματίου 2930 δρ. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιον; (τὸ ἔτος 1921 Φεβρ. 5).

Σημ. Αἱ τράπεζαι ἐκτὸς τῆς ὑφαιρέσεως κρατοῦσι συνήθως καὶ ἕνα τόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου (μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ χρόνου) ὡς ἔξοδα εἰσπράξεως αὐτοῦ· τοῦτο λέγεται ***προμήθεια.***

11) Γραμμάτιον 1800 δρ., λῆγον τὸ ἔτος 1922 Φεβρ. 15, προεξωφλήθη τὸ ἔτος 1920 Νοεμβρ. 25 πρὸς 6,50 °/₀ καὶ μὲ προμήθειαν $\frac{3}{8}$ °/₀. Πόση εἶνε ἡ ὁλικὴ κράτησις; (149,75).

12) Τραπεζίτης τις προεξώφλησε δύο γραμμάτια τὴν 8 Ἀπριλίου πρὸς 8 °/₀, ὧν τὸ μὲν ἐκ δραχμῶν 2700 λήγει τὴν 18 Μαΐου (τοῦ αὐτοῦ ἔτους), τὸ δὲ ἐκ δρ. 4000 λήγει τὴν 2 Σεπτεμβρ., καὶ μὲ προμήθειαν $\frac{2}{5}$ °/₀ Πόσον ἔδωκεν; (6521,20).

Σημ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὑφαιρέσεων (ἤτοι τῶν τόκων) εὑρίσκομεν συντόμως διὰ τῶν τοκαρίθμων (ἐδ. 214).

Κοινὴ λῆξις γραμματίων.

223. Συμβαίνει πολλάκις νὰ ὀφείλῃ τις εἰς τὸ αὐτὸ πρόσωπον δύο ἢ περισσότερα γραμμάτια, λήγοντα εἰς διαφόρους χρόνους, καὶ θέλει χάριν εὐκολίας νὰ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα δι' ἑνὸς μόνον γραμματίου καὶ τοιούτου, ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ νὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν παροῦσαν ἀξίαν τῶν ἀντικαθισταμένων γραμματίων. Ἡ τοιαύτη ἀντικατάστασις λέγεται **κοινὴ λῆξις** τῶν γραμματίων. Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ἢ δίδεται ὁ χρόνος τῆς λήξεως τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητεῖται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ ἢ δίδεται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητεῖται ἡ λῆξις αὐτοῦ.

Ἔστωσαν π.χ. τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα.

1) Ὀφείλει τις δύο γραμμάτια εἰς τὸ αὐτὸ πρόσωπον, ὧν τὸ μὲν ἐκ δρ. 2400 λήγει μετὰ 50 ἡμέρας, τὸ δὲ ἐκ δρ. 4000 λήγει μετὰ 3 μῆνας, θέλει δὲ νὰ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα δι' ἑνὸς μόνου γραμματίου, λήγοντος μετὰ 40 ἡμέρας. Πόση θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου τούτου, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 9 °/₀;

Λύσις. Ἡ ὑφαίρεσις τοῦ πρώτου εἶνε 30 δρ., τοῦ δὲ δευτέρου 90, ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία αὐτῶν εἶνε 2400—30 ἢ 2370 καὶ 4000—90 ἢ 3910, τῶν δύο δὲ ὁμοῦ εἶνε 2370+3910 ἢ 6280· τόση πρέπει νὰ εἶνε καὶ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ζητουμένου γραμματίου. Ἔχομεν τώρα τὴν παροῦσαν ἀξίαν 6280, τὸν χρόνον 40 ἡμ. καὶ τὸ ἐπιτόκιον $9^0/_0$, εὑρίσκομεν δὲ (κατὰ τὸ 5ον πρόβλημα) ὅτι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου θὰ εἶνε 6343,43 δρ.

Σημ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὑφαιρέσεων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν συντόμως διὰ τῶν τοκαρίθμων (ἐδ. 214). Ἤτοι

$$
\begin{array}{rrcrcl}
 & \text{ὀν. ἀξία} & & \text{ἡμ.} & & \text{τοκάριθμοι} \\
 & 2400 & \times & 50 & = & 120000 \\
 & \underline{4000} & \times & 90 & = & \underline{360000} \\
\text{ἄθρ.} & 6400 & & & & 480000 : 4000 \ (\text{σταθερὸς} \\
\text{ὑφαίρ.} & \underline{120} & & & & \text{διαιρέτης}) = 120 \text{ ὑφ.} \\
\text{παρ. ἀξία} & 6280 & & & &
\end{array}
$$

2) Ὀφείλει τις δύο γραμμάτια, ὧν τὸ μὲν ἓν ἐκ 3000 δρ. λήγει μετὰ 2 μῆνας, τὸ δὲ ἄλλο ἐκ 4000 δρ. λήγει μετὰ 5 μῆνας, καὶ θέλει νὰ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα δι' ἑνὸς γραμματίου ἐκ δρ. 6974,70 πρὸς $6^0/_0$. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο;

Λύσις. Ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ πρώτου εὑρίσκεται ὅτι εἶνε 2970 δρ., τοῦ δὲ δευτέρου 3900, ἑπομένως καὶ τῶν δύο ὁμοῦ εἶνε 6870. Ἢ διὰ τῶν τοκαρίθμων.

$$
\begin{array}{rrcrcl}
 & 3000 & \times & 60 & = & 180000 \\
 & 4000 & \times & 150 & = & \underline{600000} \\
\text{ὀν. ἀξία} & 7000 & & & & 780000 : 6000 = 130 \\
\text{ὑφαίρ.} & \underline{130} & & & & \\
\text{παρ. ἀξία} & 6870 & & & &
\end{array}
$$

Τὸ πρόβλημα τώρα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς.

Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 6974,70, τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται σήμερον πρὸς $6^0/_0$ ἀντὶ 6870 δραχμῶν;

Λύοντες τοῦτο (ὅπως καὶ τὸ 2ον πρόβλημα) εὑρίσκομεν ὅτι λήγει μετὰ 3 μῆνας.

Περὶ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

224. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ἀνάλογοι** πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ἐὰν ἕκαστος ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Παραδ. χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 20 εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5· διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουσιν ἐκ τῶν δευτέρων, ὅταν οὗτοι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 4. Καὶ τἀνάπαλιν· οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5 εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 8, 12, 20· διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουσιν ἐκ τῶν δευτέρων, ὅταν οὗτοι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\frac{1}{4}$ (ἤ, ὅπερ ταὐτό, διαιρεθῶσι διὰ 4).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι οἱ ἀνάλογοι ἀριθμοὶ πρὸς ἄλλους ἔχουν πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους των τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι εἶνε $\frac{8}{2}=\frac{12}{3}=\frac{20}{5}=4$. Καὶ τἀνάπαλιν εἶνε $\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

225. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογοι** πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ὅταν εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν ἀριθμοὺς (ἐδάφ. 195).

Παραδ. χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 10, οἵτινες εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5, λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$.

226. ***Μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου μερίζομεν αὐτὸν εἰς τόσα μέρη, ὅσοι εἶνε οἱ δοθέντες ἀριθμοί, καὶ τὰ μέρη ταῦτα νὰ εἶνε ἀνάλογα πρὸς αὐτούς.***

1) ***Πρόβλημα.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 48 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 10.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι $6+8+10$ ἢ 24, τὰ μέρη θὰ εἶνε αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 10 (διότι οὗτοι εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δοθέντας 6, 8, 10, καθόσον προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὴν μονάδα 1)· ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶνε 1, τὰ μέρη θὰ εἶνε $\frac{6}{24}, \frac{8}{24}, \frac{10}{24}$, (οἵτινες εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δοθέντας, διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{1}{24}$)· ἂν δὲ ὁ μεριστέος εἶνε 48, τὰ μέρη θὰ εἶνε $\frac{6\times48}{24}, \frac{8\times48}{24}, \frac{10\times48}{24}$, ἤτοι 12, 16, 20 (οἵτινες εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δοθέντας 6, 8, 10· διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{48}{24}$, ἤτοι ἐπὶ 2).

Σημ. Εἶνε φανερὸν ὅτι τὰ εὑρισκόμενα μέρη πρέπει νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα τὸν μεριστέον ἀριθμόν.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

227. ***Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν δοθέντων καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.***

Παρατήρησις. Ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τῶν ἀνωτέρω εὑρεθέντων κλασμάτων $\frac{6\times48}{24}$, $\frac{8\times48}{24}$, $\frac{10\times48}{24}$ δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ εὑρεθέντα μέρη 12, 16, 20 δὲν μεταβάλλονται (ἐδ. 100). Διαιροῦμεν λοιπὸν αὐτοὺς διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν τὰ πρὸς αὐτὰ ἴσα κλάσματα $\frac{3\times48}{12}$, $\frac{4\times48}{12}$, $\frac{5\times48}{12}$. Διῃρέσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς 6,8,10, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζεται ὁ ἀριθμὸς 48, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 24, διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 2. Ὥστε δυνάμεθα νὰ διαιρῶμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν (ἂν ἔχωσι)· καὶ τἀνάπαλιν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν αὐτοὺς ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ὅταν λοιπὸν οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μερισθῇ ἀριθμός τις, εἶνε ἀκέραιοι καὶ ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, καλὸν εἶνε πρὸς εὐκολίαν μας νὰ διαιρῶμεν πρῶτον αὐτοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν καὶ ἔπειτα νὰ ἐφαρμόζωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Ὅταν δὲ πάλιν εἶνε κλάσματα, νὰ πολλαπλασιάζωμεν πρῶτον ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ἢ κάλλιον ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν, ἵνα γίνωσιν ἀκέραιοι πρὸς εὐκολίαν μας.

2) ***Πρόβλημα.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 320 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 40,50,70.

Κατάταξις.	40	ἢ	4
μεριστέος 320	50	»	5
	70	»	7
	ἄθροισμα		16

Διῃρέσαμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 10. Ἐφαρμόζομεν τώρα τὸν ἀνωτέρω κανόνα καὶ εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς κατὰ σειρὰν μέρη.

$$\frac{320\times4}{16} \text{ ἢ } 80,\quad \frac{320\times5}{16} \text{ ἢ } 100,\quad \frac{320\times7}{16} \text{ ἢ } 140.$$

3) ***Πρόβλημα.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 105 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{8}$

Κατάταξις.	2	ἢ	2×8	ἢ	16
	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}\times 8$		2
μεριστέος 105	$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}\times 8$		3
				ἄθροισμα	21

Ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἐπὶ 8, ἤτοι ἐπὶ τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, ὅτε τὰ ζητούμενα μέρη δὲν μεταβάλλονται. Ἐφαρμόζομεν τώρα τὸν κανόνα καὶ εὑρίσκομεν $\frac{105\times 16}{21}$ ἢ 80, $\frac{105\times 2}{21}$ ἢ 10, $\frac{105\times 3}{21}$ ἢ 15.

4) ***Πρόβλημα.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 94 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, $\frac{3}{4}$, 8.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω (ἐδ. 225) ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸν 94 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{8}$. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν πρῶτον αὐτοὺς ἐπὶ τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. τῶν παρονομαστῶν 24, ἵνα γίνωσιν ἀκέραιοι, ἤτοι

$\frac{1}{2}\times 24$	ἢ	12
$\frac{4}{3}\times 24$	»	32
$\frac{1}{8}\times 24$	»	3
	ἄθροισμα	47

ἔπειτα ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα εὑρίσκομεν τὰ μέρη 24, 64, 6.

Σημ. Ἐὰν μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε μικτοὶ ἀριθμοὶ ἢ δεκαδικοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα.

Προβλήματα ἑταιρείας.

228. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπάγονται καὶ τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ ἐκ μιᾶς ἐμπορικῆς ἐπιχειρήσεως κέρδος ἢ ζημία εἰς δύο ἢ περισσοτέρους συνεταίρους.

Πρόβλημα. Δύο ἄνθρωποι κατέθεσαν συγχρόνως διὰ μίαν ἐμπορικήν των ἐπιχείρησιν τὰ ἑξῆς ποσά· ὁ πρῶτος 20000 δραχ. καὶ ὁ δεύτερος 25000. Μετὰ τὴν διάλυσιν τῆς ἐμπορικῆς ἐπιχειρήσεώς των εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν 18000 δρ. Ζητεῖται πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος.

Λύσις. Τὰ κατατεθέντα κεφάλαια ὑπὸ τῶν δύο εἶνε 45000 δραχμαί· ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Αἱ 45000 δραχ. ἐκέρδησαν 18000

ἢ 1 δραχ. ἐκέρδησε $\frac{18000}{45000}$

καὶ αἱ 20000 τοῦ α' ἐκέρδησαν $\frac{18000 \times 20000}{45000}$ ἢ 8000

καὶ αἱ 25000 τοῦ β' ἐκέρδησαν $\frac{18000 \times 25000}{45000}$ ἢ 10000

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος βλέπομεν ὅτι, ὅταν τὰ κεφάλαια εἶνε διάφορα καὶ μένωσι τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, μερίζεται τὸ κέρδος 18000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων 20000 καὶ 25000.

Ἐὰν ὅμως τὰ καταβαλλόμενα κεφάλαια εἶνε τὰ αὐτὰ καὶ μένουν διαφόρους χρόνους εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, τότε πρέπει νὰ μερίζεται τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν χρόνων.

Πρόβλημα. Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐμπορικήν τινα ἐπιχείρησιν μὲ κεφάλαιον 3000 δραχμῶν· μετὰ 2 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον μὲ κεφάλαιον 5000 δραχμῶν· μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ τούτου προσέλαβον καὶ τρίτον μὲ κεφάλαιον 2000 δραχμῶν· μετὰ 7 μῆνας ἀπὸ τῆς προσλήψεως τοῦ τρίτου διέλυσαν τὴν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησίν των καὶ εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν 2650 δρ. Ζητεῖται πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἐλογαριάσθησαν μετὰ 7 μῆνας ἀπὸ τῆς προλήψεως τοῦ τρίτου, διὰ τοῦτο τοῦ τρίτου τὸ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τὸ ἐμπόριον 7 μῆνας, ἑπομένως τὸ τοῦ δευτέρου ἔμεινε 3 μῆνας περισσότερον αὐτοῦ, ἤτοι 10 μῆνας, καὶ τὸ τοῦ τρίτου 2 μῆνας περισσότερον τοῦ δευτέρου, ἤτοι 12 μῆνας.

Ἀλλὰ τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος, καταθέτων 3000 δρ. ἐπὶ 12 μῆνας, ἂν ἤθελε νὰ τὸ λάβῃ εἰς 1 μῆνα, ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ 12 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 3000×12 δρ. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ὁ δεύτερος ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ ἐπὶ 1 μῆνα 5000×10 δρ. καὶ ὁ τρίτος 2000×7 δρ.

Ὥστε εἶνε τὸ αὐτὸ ὡς νὰ κατέθεσεν ὁ πρῶτος 3000×12 ἢ 36000 δραχμάς, ὁ δεύτερος 5000×10 ἢ 50000 καὶ ὁ τρίτος 2000×7 ἢ 14000 διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον, ἤτοι δι' 1 μῆνα. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν λύεται, καθὼς καὶ τὸ ἀνωτέρω, ἤτοι μερίζομεν τὸ κέρδος 2650 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 36000, 50000, 14000 ἢ τῶν 18, 25, 7 (ἴδε ἐδ. 227 παρατήρησιν) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ κέρδος 954 δρ., ὁ δεύτερος 1325 καὶ ὁ τρίτος 371.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

	α′	$3000 \times 12 = 36000$	ἢ	18
2650 δρ. 2 μ.	β′	$5000 \times 10 = 50000$		25
3 μ.	γ′	$2000 \times 7 = 14000$		7
			ἄθροισμα	50

ὁ α′ θὰ λάβῃ $\frac{2650 \times 18}{50}$, ἤτοι 954·

ὁ β′ » $\frac{2650 \times 25}{50}$, ἤτοι 1325·

ὁ γ′ » $\frac{2650 \times 7}{50}$, ἤτοι 371·

ἄθροισμα 2650

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος βλέπομεν ὅτι, ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι διαφέρωσι, μερίζεται τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν γινομένων, ἅτινα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἐπὶ τὸν χρόνον του.

Σημ. Οἱ χρόνοι πρέπει νὰ γίνωνται ἐκ τῆς ἰδίας μονάδος.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τρεῖς ἐργάται διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς ἔλαβον 160 δραχμάς· ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 8 ἡμέρας, ὁ δὲ δεύτερος 7, ὁ δὲ τρίτος 5 (μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον ὅλοι). Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος; (α′ 64, β′ 56, γ′ 40).

2) Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς γλυκύσματος πρέπει νὰ λάβωμεν 5 μέρη ἀλεύρου, 3 μέρη βουτύρου καὶ 2 μέρη ζαχάρεως. Διὰ τὴν κατασκευὴν 4 ὀκάδων ἐκ τοῦ ἰδίου γλυκύσματος, πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους; (2 ὀκ. ἀλ., $1\frac{1}{5}$ βουτ. καὶ $\frac{4}{5}$ ὀκ. ζαχ.).

3) Δύο γυναῖκες ὕφαναν ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος 60 πήχεις πρὸς 1δρ.,50 τὸν πῆχυν· ἡ μὲν πρώτη ὕφανεν ἐπὶ 8 ἡμέρας, ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ 7 (καὶ μὲ τὰς αὐτὰς ὥρας τὴν ἡμέραν). Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἑκάστη; (α′ 48, β′ 42).

4) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν ὁμοῦ 24000 δρ διὰ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησίν των. Μετὰ τὴν διάλυσιν ταύτης εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν 8000 δραχμάς, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ τέταρτον, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$

αὐτῶν καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον. Πόσας δραχμὰς κατέθεσεν ἕκαστος; (α' 6000, β' 9600, γ' 8400).

5) Τρεῖς ἄνθρωποι πρόκειται νὰ μεταφέρωσιν εἰς μίαν ἀπόστασιν 90 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ συνεφώνησαν νὰ μοιράσωσι τὸ βάρος τοῦτο εἰς τρία μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν των· εἶνε δὲ ὁ μὲν 60 ἐτῶν, ὁ δὲ 40, ὁ δὲ 30. Πόσας ὀκάδας θὰ μεταφέρῃ ἕκαστος; (α' 20, β' 30, γ' 40).

6) Δύο ἁμαξηλάται μετέφερον ἐμπορεύματα, ὁ μὲν 12 τόννους εἰς ἀπόστασιν 20 χιλιομέτρων, ὁ δὲ 15 τόννους εἰς ἀπόστασιν 9 χιλιομέτρων καὶ ἔλαβον ὁμοῦ 300 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος; (α' 192, β' 108).

7) Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν ἓν λειβάδιον ἀντὶ 430 δραχμῶν· Ὁ εἷς τούτων ἐβόσκησεν ἐν αὐτῷ τὰ πρόβατά του ἐπὶ 2 μῆνας, ὁ δὲ ἄλλος ἐπὶ 5 ἑβδομάδας, ἀλλὰ τὰ πρόβατα τοῦ πρώτου ἦσαν τριπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος; (360 καὶ 70).

Σημ. Λαμβάνομεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν προβάτων τοῦ δευτέρου, ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν προβάτων τοῦ πρώτου θὰ εἶνε τριπλάσιος τούτου.

8) Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον 177,δρ.50 διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου τινός· καὶ ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 5 ἡμέρας ἐπὶ 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δὲ δεύτερος 7 ἡμ. ἐπὶ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δὲ τρίτος 4 ἡμ. ἐπὶ 9 ὥρας. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος; (α' 62,50· β' 70· γ' 45).

9) Δύο γυναῖκες ὑφαίνουν τὸ αὐτὸ ὕφασμα· ἐκ τούτων ἡ μὲν πρώτη ὑφαίνει 3 πήχ. εἰς 12 ὥρας, ἡ δὲ δευτέρα 2 πήχεις εἰς 10 ὥρας· μετά τινας ἡμέρας ὕφαναν ὁμοῦ 45 πήχεις. Ἐὰν ἡ ἐργασία ἤρχιζε καὶ ἐτελείωνε συγχρόνως καθ' ἑκάστην ἡμέραν, πόσους πήχεις ὕφανεν ἑκάστη; (25 καὶ 20).

Σημ. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ὑφαίνει ἑκάστη εἰς μίαν ὥραν καὶ ἔπειτα μερίζομεν.

10) Δύο λάμπαι ἀνάπτονται καὶ σβύνονται συγχρόνως καθ' ἑσπέραν· ἡ μία τούτων καίει 105 δράμια οἰνοπνεύματος εἰς 3 ὥρας, ἡ δὲ ἄλλη 108 δράμια εἰς $2\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας. Ἐὰν ὁ φωτισμὸς αὐτῶν κοστίζῃ τὸν μῆνα 57,δρ.60, πόσον κοστίζει τὸν μῆνα ὁ φωτισμὸς ἑκάστης λάμπας; (25,20 καὶ 32,40).

11) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐμπορικὴν τινα ἐπιχείρησιν μὲ κεφάλαιον 4000 δραχμῶν· μετὰ 20 ἡμέρας προσέλαβε συνέταιρον μὲ

κεφάλαιον 5000 δραχμῶν, μετὰ 2 δὲ μῆνας ἀπὸ τούτου προσέλαβον καὶ τρίτον μὲ κεφάλαιον 6000 δραχμῶν· μετὰ 7 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐμπορικῆς ἐπιχειρήσεως λογαριασθέντες εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν 5140 δρ. Ζητεῖται πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος. (1680, 1900, 1560).

12) Διὰ τὴν οἰκοδομὴν μιᾶς οἰκίας ἐμίσθωσέ τις 10 ἐργάτας, μετὰ 10 ἡμέρας ἐμίσθωσεν ἄλλους 5 ἐργάτας, τὴν ἐπιοῦσαν ἡμέραν ἐμίσθωσεν ἄλλους 2 (μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον ὅλους)· οὕτω δὲ ἐχρειάσθησαν 20 ἡμέραι ἀπ' ἀρχῆς διὰ νὰ οἰκοδομηθῇ ἡ οἰκία. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν ἐργατῶν, ἐὰν ὅλοι ὁμοῦ λάβωσι 2144 δραχμάς;

(Ἕκαστος τῶν πρώτων 160 δρ., ἕκαστος τῶν δευτέρων 80 καὶ ἕκαστος τῶν τρίτων 72).

13) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν συγχρόνως διὰ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησίν των τὰ ἑξῆς ποσά. Ὁ πρῶτος 4000 δραχμάς, ὁ δεύτερος 3000 καὶ ὁ τρίτος 5000· μετὰ τὴν διάλυσιν τοῦ ἐμπορίου των ἔλαβεν ὁ πρῶτος ἐκ τοῦ κέρδους 800 δρ. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος τῶν ἄλλων; (β′ 600, γ′ 1000).

14) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν διὰ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησίν των τὰ ἑξῆς ποσά. Ὁ πρῶτος 4000 δραχμάς, ὁ δεύτερος 6000 καὶ ὁ τρίτος 5000· μετὰ τὴν διάλυσιν τοῦ ἐμπορίου των εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ὅσων κατέθεσαν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησαν καὶ πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

(40 %· α′ 1600, β′ 2400, γ′ 2000).

15) Εἴς τινα Τράπεζαν ἔχει κατατεθῇ κεφάλαιόν τι πρὸς $5\frac{1}{2}$ %, τὸ ὁποῖον καθ' ἑξαμηνίαν φέρει τόκον 1155 δρ. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο πρόκειται νὰ μοιρασθῇ εἰς τρεῖς κληρονόμους ἀδελφὰς ἀναλόγως τῆς ἡλικίας των· ἡ πρώτη εἶνε 28 ἐτῶν, ἡ δευτέρα 22 καὶ ἡ τρίτη 20. Πόσον θὰ λάβῃ ἑκάστη; (α′ 16800, β′ 13200, γ′ 12000).

16) Εἰς μίαν συναναστροφὴν ἦσαν 40 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία. Οἱ ἄνδρες ἦσαν διπλάσιοι τῶν γυναικῶν καὶ αἱ γυναῖκες τριπλάσιαι τῶν παιδίων. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία;

Λύσις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἦτο 1 παιδίον, τότε αἱ γυναῖκες θὰ ἦσαν 3 καὶ οἱ ἄνδρες 6. Μερίζομεν τώρα τὸν ἀριθμὸν 40 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1, 3 καὶ 6 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ παιδία ἦσαν 4, αἱ γυναῖκες 12 καὶ οἱ ἄνδρες 24.

17) Τρεῖς ἔμποροι ἐκέρδησαν ἐκ τοῦ ἐμπορίου των 17900 δρ. Ἐκ τούτων ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 15 °/₀ περισσότερον τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος 20 °/₀ περισσότερον τοῦ τρίτου. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἐὰν ὁ γ' λάβῃ 100 δραχμάς, ὁ β' θὰ λάβῃ 120 καὶ ὁ α' 138. Μερίζομεν τώρα τὸν ἀριθμὸν 17900 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ γ' θὰ λάβῃ 5000, ὁ β' 6000 καὶ ὁ α' 6900.

18) Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδησαν ἐκ τοῦ ἐμπορίου των 6000 δρ. Ὁ πρῶτος εἶχε καταθέσει τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου των, ὁ δεύτερος τὸ τρίτον αὐτοῦ καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο 7000 δρ. Ζητεῖται πόσον κατέθεσεν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος καὶ πόσον κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος.

(κεφ. 9000, 8000· κέρδος 2250, 2000, 1750).

19) Πατὴρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του, ὅπως ἡ περιουσία του, συγκειμένη ἐκ 45800 δρ., διανεμηθῇ ὡς ἑξῆς· ὁ υἱός του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τῆς θυγατρός του, ἡ δὲ σύζυγός του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ υἱοῦ, ἀλλὰ πρὸ τοῦ μερισμοῦ πρέπει νὰ λάβῃ τὸ δημόσιον 10 °/₀ φόρον. Ποῖα εἶνε τὰ μερίδιά των;

Λύσις. Τὸ δημόσιον θὰ λάβῃ 4580, ἑπομένως οἱ κληρονόμοι θὰ λάβουν 45800—4580 ἢ 41220 δρ. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ μερίδιον τῆς θυγατρὸς διὰ τῆς μονάδος 1, τότε τὸ μερίδιον τοῦ υἱοῦ θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ καὶ τὸ μερίδιον τῆς συζύγου διὰ $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ ἢ $\frac{2}{4}$. Μερίζομεν τώρα τὸν ἀριθμὸν 41220 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$ ἢ τῶν 4, 3, 2 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ θυγάτηρ θὰ λάβῃ 18320, ὁ υἱὸς 13740 καὶ ἡ σύζυγος 9160.

20) Μήτηρ τις ἐμοίρασεν 20 μῆλα εἰς τὰ τρία τέκνα της· εἰς τὸ δεύτερον ἔδωκε τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν ὅσων ἔδωκεν εἰς τὸ πρῶτον, εἰς δὲ τὸ τρίτον ἔδωκε τὸ τέταρτον τῶν ὅσων ἔδωκεν εἰς τὰ δύο ἄλλα. Πόσα μῆλα ἔδωκεν εἰς ἕκαστον τέκνον; (10, 6, 4).

21) Μίαν ἄμπελον ἔσκαψαν εἰς 6 ἡμέρας 7 ἄνδρες καὶ 5 γυναῖκες καὶ ἔλαβον ὁμοῦ 570 δρ. Ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐλάμβανε διπλάσιον ἡμερομίσθιον ἑκάστης γυναικός. Πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἀνδρὸς καὶ πόσον ἑκάστης γυναικός; (10 καὶ 5).

Περὶ ἀναμίξεως.

229. Ὅταν οἱ ἔμποροι ἔχωσι διαφόρους ποιότητας ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ πράγματος, παραδ. χάριν καφέ, καὶ δὲν δύνανται νὰ πωλήσωσιν εὐκόλως ἑκάστην ποιότητα χωριστὰ (διότι οὔτε ἡ καλὴ ποιότης πωλεῖται εὐκόλως ὡς ἀκριβὴ οὔτε καὶ ἡ κακὴ ποιότης), ἀναγκάζονται ἐνίοτε νὰ ἀναμιγνύωσι τὰς ποιότητας ταύτας καὶ νὰ σχηματίζωσι μῖγμα μετρίας ποιότητος καὶ μετρίας ἀξίας· οὕτω δὲ εὐκολύνουσι τὴν πώλησιν τοῦ πράγματος τούτου.

Τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως διακρίνονται κυρίως εἰς τὰ ἑξῆς δύο εἴδη

Πρῶτον εἶδος.

230. Εἰς τὸ πρῶτον εἶδος δίδονται πρὸς ἀνάμιξιν αἱ ποσότητες δύο ἢ περισσοτέρων πραγμάτων, δυναμένων νὰ ἀναμιχθῶσι, καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου αὐτῶν, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.

Ἔστω, παραδ. χάριν, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἀνέμιξέ τις σῖτον τριῶν εἰδῶν· ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους ἔλαβεν 100 ὀκάδας, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 80 λεπτά, ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους ἔλαβε 200 ὀκ., τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 75 λεπτά, καὶ ἐκ τοῦ τρίτου εἴδους ἔλαβε 500 ὀκ., τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 72 λεπτά. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ ἐλάμβανεν, ἂν ἐπώλει ἕκαστον εἶδος χωριστά.

Λύσις. Ἂν ἐπώλει ἕκαστον εἶδος χωριστά, θὰ ἐλάμβανεν ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος 100×80 ἢ 8000 λεπτά, ἀπὸ τὸ δεύτερον 200×75 ἢ 15000 λεπτά, καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον 500×72 ἢ 36000 λ. Ὥστε θὰ ἐλάμβανεν ἐν ὅλῳ $8000 + 15000 + 36000$ ἢ 59000 λεπτά· τόσα λοιπὸν λεπτὰ πρέπει νὰ λάβῃ καὶ ἀπὸ τὸ μῖγμα, τὸ ὁποῖον εἶνε $100 + 200 + 500$ ἢ 800 ὀκάδες, ἑπομένως πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν $59000 : 800$, ἤτοι $73 \frac{3}{4}$ τοῦ λεπτοῦ.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 100 \times 80 = 8000 \\ 200 \times 75 = 15000 \\ 500 \times 72 = 36000 \\ \hline 800 \qquad 59000 \end{array}$$

59000 : 800, ἤτοι $73 \frac{3}{4}$ τοῦ λεπτοῦ.

Δεύτερον εἶδος.

231. Εἰς τὸ δεύτερον εἶδος δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων καὶ ζητεῖται πόσον θὰ λάβωμεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα ὡρισμένης ποσότητος, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ τῆς μονάδος νὰ εἶνε ἐπίσης ὡρισμένη, κειμένη δὲ μεταξὺ τῶν τιμῶν τῆς μονάδος τῶν δοθέντων πραγμάτων.

Ἔστω, παραδ. χάριν, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἔχει τις δύο εἴδη ἀλεύρου· τοῦ πρώτου εἴδους τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 90 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου πρὸς 80. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 1200 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν νὰ πωλῇ πρὸς 83 λ. καὶ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα;

Λύσις. Ἡ ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους πωλεῖται χωριστὰ 90 λεπτά, εἰς τὸ μῖγμα ὅμως εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 83 λεπτά, ἑπομένως θὰ χάνῃ 7 λεπτά. Ἡ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἴδους πωλεῖται χωριστὰ 80 λ., εἰς τὸ μῖγμα ὅμως θὰ πωλῆται 83 λεπτά, ἑπομένως θὰ κερδίζῃ 3 λ.

Ἐὰν λοιπὸν λάβῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος 3 ὀκάδας (ἤτοι ὅσα λεπτὰ κερδίζει ἀπὸ μίαν ὀκᾶν τοῦ δευτέρου), θὰ χάσῃ εἰς τὸ μῖγμα 7×3, ἤτοι 21 λ. Ἐὰν δὲ λάβῃ ἀπὸ τὸ δεύτερον εἶδος 7 ὀκάδας (ἤτοι ὅσα λεπτὰ χάνει ἀπὸ μίαν ὀκᾶν τοῦ πρώτου), θὰ κερδήσῃ εἰς τὸ μῖγμα 3×7, ἤτοι πάλιν 21 λεπτά.

Ὥστε οὔτε θὰ χάνῃ οὔτε θὰ κερδίζῃ εἰς τὸ μῖγμα, ὅταν λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος 3 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον εἶδος 7 ὀκ. Αὕτη λοιπὸν ἡ ἀναλογία πρέπει νὰ τηρῆται πρὸς σχηματισμὸν τοῦ μίγματος· ὅσας δηλ. φορὰς λαμβάνει ἀπὸ τὸ πρῶτον τὰς 3 ὀκάδας, τόσας φορὰς πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ δεύτερον τὰς 7 ὀκ. Διὰ τοῦτο μερίζομεν τὸν ἀριθμὸν 1200 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 7 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον 360 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 840 ὀκ.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\text{μεριστέος } 1200 \text{ ὀκ.} \quad \begin{array}{lll} α' & 90 & 3 \\ & & 83 \\ β' & 80 & \frac{7}{10} \end{array}$$

$$α' \ \frac{1200 \times 3}{10} \text{ ἢ } 360, \ β' \ \frac{1200 \times 7}{10} \text{ ἢ } 840$$

Ἤτοι γράφομεν μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν τιμῶν τὴν τιμὴν τοῦ μίγματος καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς τιμῆς τοῦ α' εἴδους γράφομεν τὴν διαφορὰν τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος καὶ τῆς τιμῆς τοῦ β' εἴδους, πρὸς δὲ τὰ δεξιὰ τῆς τιμῆς τοῦ β' εἴδους γράφομεν τὴν διαφορὰν τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος καὶ τῆς τιμῆς τοῦ α' εἴδους. Κατόπιν μερίζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἀναλόγως τῶν διαφορῶν τούτων.

Ἔστω προσέτι καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Οἰνοπώλης τις ἔχει δύο εἴδη οἴνου· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ κοστίζει 55 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 43. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ γεμίσῃ βαρέλιον 300 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ κοστίζῃ 50 λεπτά;

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\text{μεριστέος } 300 \text{ ὀκ.} \quad \begin{array}{lll} α' & 55 & 7 \\ & 50 & \\ β' & 43 & \frac{5}{12} \end{array}$$

$$α' \ \frac{300 \times 7}{12} \text{ ἢ } 175 \text{ ὀκ.} \quad β' \ \frac{300 \times 5}{12} \text{ ἢ } 125 \text{ ὀκ.}$$

232. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως ὑπάγονται καὶ τὰ προβλήματα τῶν μεταλλικῶν κραμάτων, τῶν παραγομένων ἐκ τῆς συγχωνεύσεως δύο ἢ περισσοτέρων μετάλλων, καὶ λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Εἴδομεν (ἐδ. 172) ὅτι **βαθμὸς καθαρότητος ἢ τίτλος** κράματος πολυτίμου μετάλλου (χρυσοῦ ἢ ἀργύρου) μετὰ μὴ πολυτίμου μετάλλου λέγεται τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος.

Πρόβλημα. Χρυσοχόος τις συνεχώνευσε 30 δράμια ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος ἢ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε 0,920, μετὰ 10 δραμίων ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶνε 0,800. Ποῖος εἶνε ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

Λύσις. Ἀφοῦ 1 δράμιον τοῦ πρώτου περιέχει καθαρὸν ἄργυρον τὰ 0,920 τοῦ δραμίου, τὰ 30 δράμια θὰ περιέχουν 0,920 × 30 ἢ 27,600 τοῦ δραμίου· ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὰ 10 δράμια περιέχουν καθαρὸν ἄργυρον $0{,}800 \times 10$ ἢ 8 δράμια. Ὥστε τὰ 40 δράμια τοῦ κράματος περιέχουν καθαρὸν ἄργυρον $27{,}600 + 8$ ἢ 35,600 τοῦ δραμίου καὶ ἑπομένως τὸ 1 δράμιον περιέχει $35{,}600 : 40$ ἢ 0,890. Τόσος λοιπὸν εἶνε ὁ τίτλος τοῦ κράματος.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$
\begin{array}{rl}
30 \times 0{,}920 = & 27{,}600 \\
10 \times 0{,}800 = & 8{,}000 \\
\hline
40 \qquad\qquad & 35{,}600
\end{array}
$$

$35{,}600 : 40$ ἢ 0,890

Πρόβλημα. Ἔχει τις δύο τεμάχια χρυσοῦ· τοῦ πρώτου ὁ τίτλος εἶνε 0,900, τοῦ δὲ δευτέρου 0,820. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα 32 δραμίων, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος νὰ εἶνε 0,850;

Λύσις. Ἀπὸ 1 δράμιον τοῦ πρώτου θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα περίσσευμα $0{,}900 - 0{,}850$ ἢ 0,050 τοῦ δραμίου καθαροῦ χρυσοῦ. Ἀπὸ 1 δράμιον τοῦ δευτέρου θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα ἔλλειμμα $0{,}850 - 0{,}820$ ἢ 0,030 τοῦ δραμίου καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἐὰν λοιπὸν λάβῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος 0,030 τοῦ δραμίου, θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα περίσσευμα $0{,}050 \times 0{,}030$ τοῦ δραμίου καθαροῦ χρυσοῦ. Ἐὰν δὲ λάβῃ ἀπὸ τὸ δεύτερον 0,050 τοῦ δραμίου, θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα ἔλλειμμα $0{,}030 \times 0{,}050$ τοῦ δραμίου καθαροῦ χρυσοῦ, ἤτοι πάλιν τὸ αὐτὸ ποσόν. Ὥστε οὔτε περίσσευμα οὔτε ἔλλειμμα θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα, ὅταν λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον 0,030 τοῦ δραμίου καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 0,050.

Μερίζομεν τώρα τὸν ἀριθμὸν 32 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 0,030 καὶ 0,050 ἢ τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5 (ἐδ. 227. Παρατήρησις) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α′ 12 δράμ. καὶ ἀπὸ τὸ β′ 20.

Διάταξις τῆς πράξεως.

	α′	0,900		0,030	ἢ 3
μεριστέος 32			0,850		
	β′	0,820		0,050	$\frac{5}{8}$

α′ $\dfrac{32 \times 3}{8}$ ἢ 12, β′ $\dfrac{32 \times 5}{8}$ ἢ 20.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις 1400 ὀκ. οἴνου πρὸς 60 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ 800 ὀκ. ἄλλου εἴδους πρὸς 70 λ. τὴν ὀκᾶν. Ἐὰν ἀναμίξῃ τὰ εἴδη,

ταῦτα μὲ 300 ὀκ. ὕδατος, πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος;
(56 λ.).

2) Παντοπώλης τις ἀνέμιξε λίπος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 6 δραχμάς, μὲ τετραπλασίας ὀκάδας βουτύρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 15 δραχμάς. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ κερδίζῃ ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν 2δρ.,40; (15,60).

Σημ. Λίπος δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὁσονδήποτε, ἔστω 1 ὀκᾶν, ἑπομένως βούτυρον θὰ λάβωμεν 4 ὀκ.

3) Καφεπώλης τις ἀνέμιξεν 8 ὀκ. καφέ, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5δρ.,50, μὲ 2 ὀκ. σίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ κερδήσῃ 25% ἐπὶ τῆς ἀξίας του; (5δρ.,70).

4) Ἔχει τις δύο εἴδη ἀλεύρου, τῶν ὁποίων ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 95 καὶ 80 λεπτά. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμίξῃ τὰ εἴδη ταῦτα, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ ἀξίζῃ 84 λεπτά;
(νὰ λαμβάνῃ 4 ὀκ. ἀπὸ τὸ α' καὶ 11 ἀπὸ τὸ β').

5) Ἔχει τις σῖτον καὶ κριθήν· τοῦ σίτου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 70 λεπτά, τῆς δὲ κριθῆς 50. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 1000 ὀκ. καὶ ἀξίας 620 δραχμῶν;

Λύσις. Ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ἀξίζει 620 : 1000 ἢ 62 λ. Λύομεν τώρα τὸ πρόβλημα, ὅπως καὶ τὰ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 231, καὶ εὑρίσκομεν 600 ὀκ. καὶ 400 ὀκ.

6) Χρυσοχόος τις συνεχώνευσε 13 δράμια χρυσοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶνε 0,900, μετὰ 2 δραμίων χαλκοῦ. Πόσος εἶνε ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

Λύσις. Τὰ 15 δράμια τοῦ κράματος περιέχουν καθαρὸν χρυσὸν $0{,}900 \times 13$ ἢ 11,700 τοῦ δραμίου, ἑπομένως ὁ τίτλος εἶνε 11,700 : 15 ἢ 0,780.

7) Κόσμημά τι ἐκ χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ ἔχει βάρος 60 γραμμαρίων καὶ τίτλον 16 καρατίων. Πόσος χρυσὸς καὶ πόσος χαλκὸς ὑπάρχει;

Λύσις. Χρυσὸς $60 \times \frac{16}{24}$ ἢ 40 γραμ. (ἴδε ἐδάφ. 172 Σημ.) καὶ χαλκὸς 20 γρ.

8) Ἀνέμιξέ τις 120 ὀκ. βουτύρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 10 δραχμὰς μὲ 180 ὀκ. ἄλλου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 9 δραχ. Κατόπιν ἐπώλησε τὸ μῖγμα πρὸς 11δρ.,75 τὴν ὀκᾶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν; (25%).

9) Ἠγόρασέ τις δύο εἴδη ἐλαίου, ἤτοι 800 ὀκ. πρὸς 2δρ.,4 τὴν ὀκᾶν καὶ 200 ὀκ. πρὸς 2,10 τὴν ὀκᾶν· ἐξώδευσε προσέτι διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτοῦ 5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ κερδήσῃ ἐξ ὅλου τοῦ μίγματος 443 δραχμάς; (2,90).

10) Παντοπώλης τις ἔχει δύο εἴδη καφέ· ἐὰν λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους 40 ὀκ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5,20 δρ., πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 4,70, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 4,90;

Λύσις. Ἀπὸ μίαν ὀκᾶν τοῦ α′ θὰ χάνῃ εἰς τὸ μῖγμα 30 λ. καὶ ἀπὸ τὰς 40 ὀκ. θὰ χάσῃ 1200 λεπτά· ταῦτα πρέπει νὰ κερδήσῃ ἀπὸ τὸ β′ εἶδος. Ἀλλ' ἀπὸ μίαν ὀκᾶν τοῦ β′ εἴδους θὰ κερδίζῃ εἰς τὸ μῖγμα 20 λεπτά, ὥστε διὰ νὰ κερδήσῃ τὰ 1200 λεπτά, πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ β′ τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς ὁ 20 χωρεῖ εἰς τὸν 1200, ἤτοι 1200 : 20 ἢ 60 ὀκάδας.

11) Ἔχει τις μῖγμα 500 ὀκ. σίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 70 λεπτά, καὶ 400 ὀκ. ἄλλου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 62 λ. Πόσην κριθήν, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 52 λεπτά, πρέπει νὰ ἀναμίξῃ εἰς τὸ μῖγμα τοῦτο, διὰ νὰ ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ νέου μίγματος 65 λεπτά;

Λύσις. Τὰ δύο εἴδη τοῦ σίτου ἀποτελοῦσι μῖγμα 900 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $66\frac{4}{9}$ τοῦ λεπτοῦ. Λύομεν τώρα τὸ πρόβλημα, ὅπως καὶ τὸ ἀνωτέρω, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ ἀναμίξῃ 100 ὀκ. κριθῆς.

12) Οἰνοπώλης τις ἔχει οἶνον, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 90 λεπτά· πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ῥίψῃ εἰς 600 ὀκ. οἴνου, ὥστε νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 80 λεπτὰ καὶ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα;

Λύσις. Ἀπὸ τὰς 600 ὀκ. οἴνου θὰ χάσῃ 600×10 ἢ 6000 λ. Ταῦτα πρέπει νὰ κερδήσῃ ἀπὸ τὸ ὕδωρ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ ὕδατος, εὑρισκομένην ἐντὸς τοῦ οἴνου, θὰ κερδίζῃ 80 λεπτά, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ῥίψῃ 6000 : 80 ἢ 75 ὀκ. ὕδατος.

13) Πόσος χαλκὸς πρέπει νὰ συγχωνευθῇ μὲ 40 γραμ. χρυσοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶνε 0,900, διὰ νὰ σχηματισθῇ κρᾶμα τίτλου 0,750; (8 γρ.)

14) Παντοπώλης τις ἀνέμιξε 10 ὀκ. καφέ, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5δρ.,60, μὲ 30 ὀκ. ἄλλου εἴδους καὶ ἐσχημάτισε μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5 δρ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἴδους;

Λύσις. Τὸ μῖγμα ἀξίζει 5 × 40 ἢ 200 δραχμάς, τὸ δὲ α' εἶδος ἀξίζει 5,60 × 10 ἢ 56 δρ. Ὥστε τὸ β' εἶδος ἀξίζει 200 — 56 ἢ 144 δρ. καὶ ἑπομένως ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 144 : 30, ἤτοι 4,80.

Περὶ μέσου ὅρου.

233. **Μέσος ὅρος** ὁμοειδῶν ἀριθμῶν (ἢ ἀφῃρημένων) λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέσου ὅρου ἔστωσαν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἔμπορός τις εἰσέπραξεν ἐπὶ τρεῖς ἡμέρας τὰ ἑξῆς ποσά· τὴν πρώτην ἡμέραν 600 δραχμάς, τὴν δευτέραν 475 καὶ τὴν τρίτην 554. Πόση εἶνε ἡ κατὰ μέσον ὅρον εἴσπραξις ἑκάστης ἡμέρας;

Λύσις. Διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα 600 + 475 + 554 ἢ 1629 διὰ 3 (διότι τρεῖς εἶνε οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 543 δρ.

Δυνατὸν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ ἐπαναλαμβάνηται δύο ἢ περισσοτέρας φοράς, ὡς φαίνεται κατωτέρω.

2) Γυνή τις ἠγόραζεν ἐπὶ πέντε ἡμέρας ἀπὸ μίαν ὀκᾶν κάρβουνα τὴν ἡμέραν μὲ τὰς ἑξῆς τιμάς· τὰς τρεῖς πρώτας ἡμέρας πρὸς 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ὑπολοίπους πρὸς 35 λ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἠγόρασε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ὀκᾶν;

Λύσις. Διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα 30 + 30 + 30 + 35 + 35 ἢ 160 διὰ 5 εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κατὰ μέσον ὅρον τιμὴ τῆς ὀκᾶς εἶνε 32 λεπτά.

Τὸ αὐτὸ θέλομεν εὕρει, ἐὰν εἴπωμεν ὅτι ἠγόρασε 3 ὀκ. πρὸς 30 λ. τὴν ὀκᾶν καὶ 2 ὀκ. πρὸς 35 λ. Διότι εἶνε

$$\begin{array}{rcl} 30 \times 3 & = & 90 \\ 35 \times \underline{2} & = & \underline{70} \\ 5 & & 160 : 5 = 32 \text{ λ.} \end{array}$$

Τὸ πρόβλημα βλέπομεν ὅτι λύεται, ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς ἀναμίξεως.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Μαθητής τις ἔλαβεν εἰς τὰ διάφορα μαθήματά του τοὺς ἑξῆς ὁλικοὺς βαθμοὺς 6, 8, 5, 9, 5, 7, 4, 10. Ποῖος εἶνε ὁ μέσος γενικὸς βαθμὸς αὐτοῦ; (6,75).

2) Ἐπλήρωσέ τις δι' ἐνοίκιον τῆς οἰκίας του τὸ α' ἔτος 75 δρ. τὸν μῆνα, τὸ δὲ β' ἔτος 90 δρ. Πόσον ἐπλήρωσε κατὰ μέσον ὅρον τὸν μῆνα. (82,50).

3) Διὰ τὴν οἰκοδομὴν μιᾶς οἰκίας προσελήφθησαν 5 ἐργάται πρὸς 10 δρ. τὴν ἡμέραν ἕκαστος, 10 ἐργάται πρὸς 8 δρ. καὶ 5 ἐργ. πρὸς 6 δρ. Πόσον εἶνε κατὰ μέσον ὅρον τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου; (8 δρ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

234 **Τετράγωνον** ἀριθμοῦ τινος λέγεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Παραδ. χάριν, τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶνε 5×5, ἤτοι ὁ 25, τὸ τετράγωνον τοῦ 60 εἶνε 60×60, ἤτοι 3600 κτλ.

Τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 εἶνε τὰ ἑξῆς· 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος λέγεται ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Παραδ. χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 36 εἶνε ὁ 6· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 6 εἶνε ὁ 36. Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παριστῶμεν συμβολικῶς διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον λέγεται **ῥιζικόν**, ὑποκάτω αὐτοῦ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἤτοι $\sqrt{36} = 6$.

Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ 50, βλέπομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸν 50· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶνε ὁ 49, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ 8 εἶνε ὁ 64. Ὥστε ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 50 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 8, ἤτοι εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ 7 καὶ μικροτέρα τοῦ 8. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 50 λαμβάνομεν τὸν μικρότερον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ἤτοι τὸν 7, καὶ λέγομεν ὅτι ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 50 εἶνε 7 ***κατὰ προσέγγισιν μονάδος***, δηλ. τὸ λάθος, τὸ ὁποῖον κάμνομεν λαμβάνοντες τὸν 7, εἶνε μικρότερον μιᾶς ἀκεραίας μονάδος. Ὥστε

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Παραδ. χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 70 εἶνε ὁ 8· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 8, ἤτοι ὁ 64, χωρεῖ εἰς τὸν 70, ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ 9, ἤτοι ὁ 81, δὲν χωρεῖ.

Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

235. Ἂν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ 100 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ θὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ 10 (διότι ἡ τετρ ῥίζα τοῦ 100 εἶνε ὁ 10), ἤτοι θὰ εἶνε μονοψήφιος ἀριθμός, καὶ ἑπομένως εὑρίσκεται αὕτη εὐκόλως ἀπὸ μνήμης. Ἂν δε εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 100, τότε πρὸς εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτοῦ πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Ἔστω, παραδ. χάριν, νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 390638. Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα διὰ στιγμῶν ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰ δεξιά, ἤτοι 39.06.38· τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ ἓν μόνον ψηφίον. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ἤτοι τοῦ 39, ἥτις εἶνε 6 (κατὰ προσέγγισιν μονάδος), καὶ αὕτη εἶνε τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ χωριζομένου διὰ γραμμῆς (ὅπως εἰς τὴν διαίρεσιν). Τὸ τετράγωνον τοῦ 6, ἤτοι τὸν 36, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ἤτοι ἀπὸ τὸν 39, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 3 καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα, ἤτοι τὸ 06, ὅτε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 306 (ἴδε κατωτέρω διάταξιν τῆς πράξεως).

Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν διὰ στιγμῆς τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον του, ἤτοι τὸ 6, τὸν δὲ ἄλλον πρὸς τὰ ἀριστερά του ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 30, διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης, ἤτοι διὰ τοῦ 6×2 ἢ 12, τὸν ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω τῆς ῥίζης, τὸ δὲ πηλίκον 2 γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 12· τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν 122 πολλαπλασιάζομεν μὲ αὐτὸ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 2, καὶ ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 306, γράφομεν τότε τὸ ψηφίον 2 ὡς δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον τοῦ 2 (ἕως ὅτου δηλ. ἡ ἀφαίρεσις νὰ εἶνε δυνατή). Ἐνταῦθα τὸ γινόμενον 122×2 ἢ 244 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 306 καὶ εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 62, γράφομεν λοιπὸν τὸν 2 ὡς δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰς δὲ τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 62 καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα 38, ὅτε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 6238.

Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου πάλιν χωρίζομεν τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον του 8, τὸν δὲ ἄλλον ἀριθμὸν 623 διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ῥίζης, ἤτοι διὰ τοῦ 62×2 ἢ 124, καὶ τὸ πηλίκον 5 γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 124· τὸν δὲ οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν 1245 πολλαπλασιάζομεν μὲ αὐτὸ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 5 καί, ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ 6238, γράφομεν τότε τὸ ψηφίον 5 ὡς τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον τοῦ 5. Ἐνταῦθα ὅμως τὸ γινόμενον 1245×5 ἢ 6225 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 6238 καὶ εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 13. Ὥστε ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 390638 εἶνε 625 κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Ἐὰν εὑρεθῇ ὑπόλοιπον μηδέν, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε τέλειον τετράγωνον.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

39.06.38	625	
36	122	1245
30.6	2	5
24 4	244	6225
6 23.8		
6 22 5		
13		

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον ἀκολουθοῦμεν διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης καὶ οἱουδήποτε ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ καταβιβάσωμεν ὅλα τὰ διψήφια τμήματα αὐτοῦ.

Σημ. Ἐὰν συμβῇ εἴς τινα τῶν διαιρέσεων νὰ μὴ χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον τὸ διπλάσιον μέρος τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, γράφομεν τότε μηδὲν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου ψηφίου τῆς ῥίζης· ἔπειτα καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξίν μας.

236. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.

Παραδ. χάριν, ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ μικτοῦ ἀριθμοῦ $50\frac{3}{4}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 50, ἤτοι ὁ 7. Ἐπίσης ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 18,376 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ ἀκεραίου 18, ἤτοι ὁ 4.

237. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κτλ. τῆς ἀκεραίας μονάδος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, κατόπιν διαιροῦμεν ταύτην διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.

Παραδ. χάριν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ 39 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν 39 ἐπὶ 100 καὶ τοῦ γινομένου 3900 εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἥτις εἶνε 62· ταύτην διαιροῦμεν διὰ 10 καὶ εὑρίσκομεν 6,2. Αὕτη εἶνε ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ 39 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν· 2436, 69270, 644824. (49, 263, 803).

Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ δεκαδ. ἀριθμοῦ 45,72 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ καὶ τοῦ δεκαδ. ἀριθμοῦ 783,5 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$. (6,7 καὶ 27,99).

Διάφορα προβλήματα.

1) Εἰς μίαν συναναστροφὴν ἦσαν 50 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία· οἱ ἄνδρες καὶ αἱ γυναῖκες ἦσαν ὁμοῦ 43, αἱ δὲ γυναῖκες καὶ τὰ παιδία ἦσαν ὁμοῦ 22. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία; (28, 15, 7).

2) Δύο ἐργάται διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς ἔλαβον ὁμοῦ 356 δραχμάς· ὁ πρῶτος εἰργάσθη 20 ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθιον κατὰ μίαν δραχμὴν περισσότερον τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος εἰργάσθη 22 ἡμ. Πόσον εἶνε τὸ ἡμερομίσθιόν των; (9 καὶ 8 δρ.)

3) Ἔμπορός τις ἠγόρασε παρ' ἄλλου ἐμπόρου 60 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 4δρ.,50 τὸν πῆχυν· ἀλλ' ἐπειδὴ ἐπλήρωσε τὸ ὕφασμα ἀμέσως, τοῦ ἐγένετο ἔκπτωσις, οὕτω δὲ ἐπλήρωσε 245δρ.,70. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐγένετο ἔκπτωσις; (9 %).

4) Ἠγόρασέ τις τρεῖς σάκκους ἀνθράκων πρὸς 17δρ.,60 τὸν στατῆρα καὶ ἔδωκε 58δρ.,30. Ὁ πρῶτος σάκκος περιεῖχε 48 ὀκ. 350 δράμια, ὁ δὲ δεύτερος 50 ὀκ. 150 δράμ. Πόσας ὀκάδας περιεῖχεν ὁ τρίτος σάκκος; (46 ὀκ. 200 δράμ.).

5) Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρούμενος διὰ 95 δίδει τὸ αὐτὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον δίδει καὶ ὁ 54128 διαιρούμενος διὰ 796 ; (6460).

6) Παῖς ἐρωτηθεὶς τὸ ἔτος 1921 περὶ τοῦ ἔτους τῆς γεννήσεώς του ἀπεκρίθη· ὅτε ἐγεννήθην, ὁ πατήρ μου ἦτο 57 ἐτῶν, τὸ δὲ γινόμενον τῆς ἡλικίας μου καὶ τῆς τότε ἡλικίας τοῦ πατρός μου εἶνε 912. Ποῖον ἔτος ἐγεννήθη ; (τὸ 1905).

7) Πατὴρ καὶ υἱὸς ἀνέλαβον μίαν ἐργασίαν, ἀλλ' ὁ πατὴρ μὲ ἡμερομίσθιον 3 δραχμὰς περισσότερον τοῦ υἱοῦ· μετὰ τὸ τέλος τῆς ἐργασίας ὁ μὲν πατὴρ ἔλαβεν 180 δραχμάς, ὁ δὲ υἱὸς 126. Πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιόν των ; (10 καὶ 7).

8) Χωρικὴ τις ἔφερεν εἴς τινα πόλιν αὐγά· ἐκ τούτων ἐπώλησεν εἴς τινα τὰ $\frac{2}{5}$ πρὸς 20 λεπτὰ ἕκαστον, τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου ἐπώλησεν εἰς ἄλλον πρὸς 45 λεπτὰ τὸ ζεῦγος, τὰ δὲ ὑπόλοιπα 8 ἔσπασαν. Ζητεῖται πόσον ἔλαβεν ἀπὸ τὰ πωληθέντα αὐγά ; (24 δρ.).

9) Φρουρὰ ἐκ 500 ἀνδρῶν ἔχει τροφὰς δι' ὡρισμένον χρόνον· ἐὰν προσέλθουν 100 ἄνδρες ἄνευ τροφῶν, πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ ἀρχικὸν σιτηρέσιον, διὰ νὰ ἐπαρκέσουν αἱ τροφαὶ τὸν αὐτὸν χρόνον ; (κατὰ τὸ $\frac{1}{6}$).

10) Οἰκόπεδόν τι, ἔχον μῆκος 30,70 πήχ. καὶ πλάτος 25 πήχεις, ἠγοράσθη ἀντὶ 4912 δραχμῶν· μετὰ 1 ἔτος 3 μ. ἐπωλήθη μὲ κέρδος 24 %. Ζητεῖται πρὸς πόσον ἐπωλήθη ὁ τετραγ. πῆχυς. (8δρ.,32).

11) Ἠγόρασέ τις 880 πορτοκάλια πρὸς 15 λεπτὰ τὰ δύο καὶ 720 πρὸς 20 λ. τὰ τρία· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 9 δραχ. τὰ ἑκατόν. Πόσον ἐκέρδησε ; (30 δραχ.).

12) Ἁμαξηλάτης τις ἔλαβεν 165 δραχ. διὰ νὰ μεταφέρῃ ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην 60 σάκκους ἀλεύρου, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶχε βάρος 55 ὀκάδας· συνεφώνησε δὲ πρὸς 10 λεπτὰ τὰς 100 ὀκάδας δι' ἕκαστον χιλιόμετρον. Πόση εἶνε ἡ μεταξὺ τῶν δύο πόλεων ἀπόστασις ; (50 χιλιόμ.).

13) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 25 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 20 δρ. τὸν πῆχυν· κατόπιν ἐπώλησεν ἐξ αὐτοῦ 16 $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως πρὸς 24 δρ. τὸν πῆχυν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπώλησε πρὸς 25 δρ. τὸν πῆχυν. Ζητεῖται πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν. (21,65 %).

14) Εἰς ἓν ἐργοστάσιον ἐργάζονται 24 ἄνδρες καὶ 36 γυναῖκες καὶ λαμβάνουσιν εἰς τὸ τέλος ἑκάστης ἑβδομάδος 1728 δραχμάς,

δὲν ἐργάζονται ὅμως τὰς Κυριακάς. Ἀλλ' ὅσον λαμβάνουν ὅλοι οἱ ἄνδρες τὴν ἡμέραν, τόσον λαμβάνουν καὶ αἱ γυναῖκες. Ζητεῖται πόσον λαμβάνει ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν τὴν ἡμέραν καὶ πόσον ἑκάστη τῶν γυναικῶν. (6 καὶ 4 δρ.).

15) Ἠγόρασέ τις δύο εἴδη σίτου· τὸ πρῶτον εἶδος πρὸς 75 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ δεύτερον εἶδος πρὸς 68 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 1400 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον νὰ πωλήσῃ πρὸς 77 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ νὰ κερδήσῃ 10 %.

Λύσις. Εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος κοστίζει 70 λ. Κατόπιν λύομεν τὸ πρόβλημα, ὅπως καὶ τὰ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 231, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου 400 ὀκ. καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου 1000.

16) Ἔμπορός τις εἶχε δύο εἴδη καφέ· τὸ πρῶτον εἶδος πωλεῖ πρὸς 6δρ.,60 τὴν ὀκᾶν καὶ κερδίζει 20 %, τὸ δὲ δεύτερον εἶδος πωλεῖ πρὸς 5,75 τὴν ὀκᾶν καὶ κερδίζει 15 %. Ἐὰν ἀναμίξῃ ἴσας ποσότητας ἐξ αὐτῶν, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν διὰ νὰ κερδήσῃ 12 %; (5,88).

17) Ἔμπορός τις πτωχεύσας συνεβιβάσθη νὰ πληρώσῃ εἰς τοὺς τρεῖς δανειστάς του 40 %, οὕτω δὲ ἐπλήρωσεν εἰς μὲν τὸν πρῶτον 12000 δραχμάς, εἰς δὲ τὸν δεύτερον 11200 δρ. καὶ εἰς τὸν τρίτον τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν ὅσων ἐπλήρωσεν εἰς τὸν πρῶτον. Πόσον ὤφειλεν εἰς ἕκαστον. (30000, 28000, 24000).

18) Ἀτμόπλοιον, διανύον 12 μίλια τὴν ὥραν, ἀνεχώρησεν ἀπὸ μιᾶς πόλεως ἡμέραν Τετάρτην καὶ ὥραν 9ην μ. μ διευθυνόμενον εἰς ἄλλην πόλιν, ἀπέχουσαν 684 μίλια. Ζητεῖται ποίαν ἡμέραν καὶ ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ. (Σάββατον ὥραν 6 π. μ.).

19) Σιτέμπορός τις ἠγόρασεν 60000 ὀκ. κριθῆς πρὸς 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· κατόπιν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῆς μὲ κέρδος 12,50 %, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπώλησεν ἀντὶ 15600 δρ. Πόσον ἐκέρδησε; (3900 δρ.).

20) Ἠγόρασέ τις πορτοκάλια καὶ λεμόνια ἐν ὅλῳ 8000· ἀλλὰ τὰ λεμόνια ἦσαν 2800 περισσότερα τῶν πορτοκαλίων καὶ ἠγοράσθησαν πρὸς 3 δραχ. τὰ ἑκατόν, ἀλλὰ 5 λεμόνια ἀξίζουν ὅσον 2 πορτοκάλια. Ζητεῖται πόσον ἔδωκεν ἐν ὅλῳ; (357 δραχ.).

21) Πατήρ τις ἀποθανὼν διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του, ὅπως ἡ περιουσία του μοιρασθῇ ἐξ ἴσου εἰς τὴν σύζυγόν του καὶ τὰ 6 τέκνα

του· ἀλλ' ἡ σύζυγος καὶ ἓν τῶν τέκνων του ἀπέθανον πρὸ τοῦ μερισμοῦ τῆς περιουσίας, τούτου δ' ἕνεκα ἕκαστον τῶν ἄλλων τέκνων ἔλαβεν ἀκόμη 2936 δραχμάς. Πόση ἦτο ἡ περιουσία του; (51380).

22) Γραμμάτιον, λῆγον τὸ ἔτος 1922 Ἀπριλίου 8, προεξωφλήθη πρὸς $6^0/_0$ ἀντὶ 4624 δραχμῶν καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις (ἐξωτ.) 176 δρ. Πότε προεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον; (Τὸ ἔτος 1921 Αὐγ. 28).

23) Γυνή τις ἠγόρασεν 7 πήχ. 5 ρ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 6 δρ. τὸν πῆχυν καὶ 8 μανδήλια πρὸς 16δρ.,20 τὴν δωδεκάδα καὶ ἔδωκεν ἓν ἑκατοντάδραχμον. Πόσον ἔλαβεν ὑπόλοιπον; (43,45).

24) Δύο ἄνθρωποι ἠγόρασαν ὁμοῦ 430 ὀκ. ἐλαίου ἀντὶ 1118 δραχμῶν· ὁ εἷς τούτων ἔλαβε 50 ὀκ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος; (624 καὶ 494).

25) Διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἔμπορός τις 7 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, δίδει 25δρ.,20. Πόσον θὰ δώσῃ διὰ τρία τεμάχια τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος, ἔχοντος ἑκάστου μῆκος 30 πήχ. 5 ρ.; (330,75).

26) Χρυσοχόος τις θέλει νὰ συγχωνεύσῃ 80 γραμμάρια χρυσοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶνε 0,750, μετὰ καθαροῦ χρυσοῦ, ὥστε νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος νὰ εἶνε 0,840. Πόσον καθαρὸν χρυσὸν πρέπει νὰ συγχωνεύσῃ; (45 γρ.).

27) Πόσον καθαρὸν χρυσὸν πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν μὲ 84 γραμμάρια χρυσοῦ τῶν 16 καρατίων, διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα 18 καρατίων; (28 γρ.).

28) Ἐπώλησέ τις ἓν οἰκόπεδον ἀντὶ 8800 δρ. καὶ ἐκέρδησε τὰ $\frac{2}{9}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του. Πόσον τὸ εἶχεν ἀγοράσει; (7200).

29) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος $9\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἀντὶ 65δρ.,45 καὶ ἐκέρδησεν ἀπὸ ἕκαστον πῆχυν 80 λεπτά. Πόσον τοῦ κοστίζει ὁ πῆχυς; (6 δρ.).

30) Ἐξώδευσέ τις τὸ πέμπτον τῶν χρημάτων του διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἓν οἰκόπεδον, καὶ τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτῶν διὰ νὰ κτίσῃ ἐπ' αὐτοῦ οἰκίαν, παρετήρησε δὲ ὅτι διὰ τὴν οἰκίαν ἐξώδευσεν 9600 δραχ. περισσότερον τοῦ οἰκοπέδου. Ζητεῖται πόσον τοῦ ἐκόστισεν ἡ οἰκία. (26400).

31) Κατέθεσέ τις εἰς μίαν Τράπεζαν τὴν 20ὴν Μαρτίου κεφά-

λαιόν τι πρὸς $4\frac{1}{2}$ %, τὴν δὲ 10ην Αὐγούστου τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκους ὁμοῦ 3256 δραχ. Πόσον κεφάλαιον εἶχε καταθέσει; (3200).

32) Πόσον ἄργυρον τίτλου 0,750 πρέπει νὰ ἀνταλλάξωμεν μὲ 150 δράμια ἀργύρου τίτλου 0,920; (184 δράμια).

33) Ἐργάτης τις εἰς 4 ὥρας δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἔργον τι, ἄλλος δὲ ἐργάτης εἰς $2\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ. Ἐὰν ἐργασθῶσι μαζί, εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον; $\left(2\frac{2}{11}\text{ ὥρ.}\right)$.

34) Φρουρὰ ἐκ 1140 ἀνδρῶν ἔχει τροφὰς διὰ 40 ἡμέρας· ἀλλὰ μετὰ 16 ἡμέρας, γενομένης μάχης, ἐφονεύθησαν 152 ἄνδρες, αἱ δὲ ὑπάρχουσαι τροφαί των ηὐξήθησαν κατὰ $\frac{1}{12}$ ἐκ τῶν τροφῶν τοῦ ὑποχωρήσαντος ἐχθροῦ. Ζητεῖται πόσας ἡμέρας θὰ διαρκέσωσιν αἱ τροφαί των. (30).

35) Γραμμάτιον, λῆγον τὸ ἔτος 1922 Φεβρουαρίου 15, προεξωφλήθη τὸ ἔτος 1921 Νοεμβρίου 25 πρὸς 6,50 % καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις (ἐξωτ.) 52 δρ. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστική του ἀξία; (3600 δρ.).

36) Διὰ νὰ κατασκευάσῃ ἔμπορός τις 10 ἐνδυμασίας (ἴσας) ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 1 πῆχ. 4 ρούπια, χρειάζεται 48 πήχ. 6 ρ. Διὰ νὰ κατασκευάσῃ 14 ἐνδυμασίας ἐξ ἄλλου ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 1 π 6 ρούπια, πόσους πήχεις θὰ χρειασθῇ; ($58\frac{1}{2}$ πήχεις).

37) Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου προεξοφληθέντος 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του εἶνε 10δρ.,25, ἡ δὲ ἐσωτερικὴ 10 Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον προεξωφλήθη.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ 10,25—10 ἢ 0,25 εἶνε ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως 10· ὥστε τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 6 %.

38) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμά τι πρὸς 8δρ.,40 τὴν ὑάρδαν, ἐδαπάνησε δὲ προσέτι διὰ μεταφορὰν αὐτοῦ 20 %. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν, διὰ νὰ κερδήσῃ 25 %; Μὴ λησμονῶμεν ὅτι ὁ πῆχυς εἶνε τὰ 0,7 τῆς ὑάρδας. (8,82).

39) Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 142 γραμ. χρυσοῦ μὲ 8 γρ. χαλκοῦ,

θὰ ἔχωμεν κρᾶμα τίτλου 0,852. Ποῖος εἶνε ὁ τίτλος τοῦ χρυσοῦ; (0,900).

40) Εἶχέ τις 8 στατῆρας ἀνθράκων· ἐξ αὐτῶν ἐπώλησεν εἴς τινα 2 στ. 20 ὀκ. 300 δράμια, εἰς ἄλλον δὲ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσον τοῦ ἔμειναν; (2 στ. 9 ὀκ. 120 δρ.).

41) Ἠγόρασέ τις δύο οἰκόπεδα· τὸ μὲν ἓν ἀντὶ 8600 δραχμῶν, τὸ δὲ ἄλλο ἀντὶ 12000· μετὰ 1 ἔτος 4 μῆν. ἐπώλησε τὸ α΄ μὲ κέρδος 9 %, τὸ δὲ β΄ μὲ ζημίαν 3 %. Ἐὰν κατέθετε τὰ χρήματά του εἴς τινα Τράπεζαν πρὸς $4\frac{1}{2}$ %, θὰ ἦτο ἐπικερδέστερον;

(Ἐκ τῆς Τραπέζης θὰ εἶχε περιπλέον κέρδος 684 δρ.).

42) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 90 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 80 μ., πρὸς 5 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον· κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸ 3δρ.,50 τὸν τετραγ. τεκτονικὸν πῆχυν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν; (24,44 %).

43) Διὰ νὰ ἀγοράσῃ τις 10 στ. 20 ὀκ. 200 δράμ. ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδει 184δρ.,20. Πόσον θὰ δώσῃ διὰ $3\frac{2}{5}$ τοῦ στατῆρος; (59δρ.,84).

44) Ἐρωτηθεὶς τις περὶ τῆς ἡλικίας του ἀπεκρίθη· μετὰ 4 ἔτη ἀπὸ τοῦ γάμου μου ἀπέκτησα θυγατέρα, ἥτις εἶνε τώρα 19 ἐτῶν· ἡ δὲ σύζυγός μου, ἥτις ἦτο μικροτέρα ἐμοῦ κατὰ 16 ἔτη, ἀπέθανε πρὸ δύο ἐτῶν ζήσασα μετ' ἐμοῦ τόσα ἔτη, ὅση ἦτο ἡ ἡλικία αὐτῆς, καθ' ἣν μὲ ἐνυμφεύθη. Ποία εἶνε ἡ ἡλικία του; (60 ἐτῶν).

45) Ὑπάλληλός τις ἔχει μηνιαῖον εἰσόδημα 576 δραχμάς· ἐκ τούτων τὰ $\frac{7}{9}$ εἶνε ἡ μισθοδοσία του, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶνε ὁ τόκος κεφαλαίου, τοκισθέντος πρὸς 10 %. Πόση εἶνε ἡ μισθοδοσία του καὶ πόσον τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον; (448 καὶ 15360).

46) Ἔχει τις δύο εἴδη καφέ· ἐὰν λάβῃ ἐκ τοῦ α΄ 60 ὀκάδας, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 6δρ.,40, πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ β΄ εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5δρ.,20, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα, τὸ ὁποῖον νὰ πωλήσῃ πρὸς 6,90 τὴν ὀκᾶν καὶ νὰ κερδήσῃ 64 δραχμάς; (20 ὀκ.).

47) Ἐργοστασιάρχης τις ἐπώλησεν ἐμπόρευμά τι μὲ κέρδος 12 %, ὁ δὲ ἔμπορος, ἀφοῦ ἐξώδευσε 5 % διὰ τὴν μεταφοράν του, μετεπώλησεν αὐτὸ πρὸς 12δρ.,50 τὸ μέτρον κερδήσας 25 %. Πόσον ἐκόστιζε τὸ μέτρον εἰς τὸν ἐργοστασιάρχην; (8,50).

48) Ἔμπορός τις ἐσχημάτισε μῖγμα 460 ὀκάδων ἐκ δύο εἰδῶν ἀλεύρου, τῶν ὁποίων ἡ ὀκᾶ ἐκόστιζεν 80 καὶ 60 λεπτά, ἀλλ' ἀπὸ τὸ δεύτερον εἶδος ἔλαβε τετραπλασίας ὀκάδας, κατόπιν ἐπώλησε τὸ μῖγμα καὶ ἐκέρδησεν 29δρ.,44. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν; (10%).

49) Ἔργον τι προϋπελογίσθη νὰ ἐκτελεσθῇ ἀντὶ 25000 δραχμῶν· ἐὰν δύναταί τις νὰ ἀναλάβῃ τὴν ἐκτέλεσιν τούτου ἀντὶ 22800 δραχμῶν, πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔκπτωσιν πρέπει νὰ προσφέρῃ ἐπὶ τῆς προϋπολογισθείσης τιμῆς, διὰ νὰ κερδήσῃ 1400 δραχμάς; (3,2 %).

50) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον 9δρ.,80, ἀλλὰ δὲν ἐργάζεται τὰς Κυριακὰς καὶ 18 ἡμέρας ἀκόμη τὸ ἔτος. Πόσον πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ τοῦ μείνουν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους 555 δραχμαί; (6,40).

ΣΗΜ. Τὸ ἔτος λαμβάνεται μὲ 365 ἡμ.

51) Ἔμπορός τις κατέθεσε διὰ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν 4000 δραχμάς, μετά τινα δὲ χρόνον προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις κατέθεσε 5000 δραχμάς. Μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τοῦ ἐμπορίου λογαριασθέντες εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν 1760 δραχμάς· ἐκ τοῦ κέρδους τούτου ὁ πρῶτος ἔλαβεν 960 δρ. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τοῦ ἐμπορίου προσελήφθη ὁ δεύτερος. (μετὰ 4 μῆνας).

52) Ἔχει τις τοκίσει εἰς τρία πρόσωπα 3300 δρ. ἐν ὅλῳ καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἀπὸ τὸν α′ λαμβάνει τόκον 40 δραχ. εἰς 6 μῆνας, ἀπὸ τὸν β′ 100 δρ. εἰς 10 μῆνας καὶ ἀπὸ τὸν τρίτον 64 δρ. εἰς 1 ἔτος. Ποῖα εἶνε τὰ τοκισθέντα κεφάλαια καὶ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τοὺς τόκους αὐτῶν εἰς 1 μῆνα καὶ κατόπιν μερίζομεν τὸν ἀριθμὸν 3300 ἀναλόγως τῶν τόκων τούτων, οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ κεφάλαια εἶνε 1000, 1500 καὶ 800 δραχμαί, τὸ δὲ ἐπιτόκιον εἶνε 8 %.

53) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν ὁμοῦ διὰ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησίν των 19000 δραχμάς· τοῦ α′ τὸ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 10 μῆνας, τοῦ β′ 8 καὶ τοῦ γ′ 12. Μετὰ τὴν διάλυσιν τοῦ ἐμπορίου των ἔλαβον κέρδος ὁ α′ 2400, ὁ β′ 1440 καὶ ὁ γ′ 1800. Πόσον κεφάλαιον εἶχε καταθέσει ἕκαστος;

Λύοντες τοῦτο, ὅπως τὸ ἀνωτέρω εὑρίσκομεν 8000, 6000, 5000.

54) Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρισθέντες ἔκαμον μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν, ἐκ τῆς ὁποίας ἐκέρδησαν 3000 δραχμάς· μετὰ τὴν διάλυσιν ταύτης ἔλαβον κεφάλαιον καὶ κέρδος ὁ μὲν α′ 6000 δραχμάς, ὁ δὲ β′ 7200, ὁ δὲ γ′ 4800. Ζητεῖται πόσον κεφάλαιον εἶχε καταθέσει ἕκαστος. (5000, 6000, 4000).

55) Ὑπάλληλός τις ἐξώδευεν ἐκ τῆς μηνιαίας μισθοδοσίας του τὰ $\frac{13}{15}$ αὐτῆς καὶ μετὰ 2 ἔτη 3 μῆνας εἶχεν οἰκονομήσει 2592 δρ. Πόση ἦτο ἡ μηνιαία μισθοδοσία του; (720).

56) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 280 ὀκάδας ἐλαίου καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐκράτησε διὰ τὴν οἰκογένειάν του 15 ὀκ. 150 δράμια, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπώλησεν εἰς ἄλλον ἀντὶ 841δρ.,80. Πρὸς πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν; (3,20).

57) Ἄνθρωπός τις ἀπέθανε τὸ ἔτος 1915 Ἰουνίου 5 καὶ ὥραν

7 π. μ. 10λ καὶ ἔζησε 45 ἔτη 2 μῆν. 9 ἡμ. 8 ὥρ. 20λ. Πότε ἐγεννήθη; (τῷ 1870 Μαρτίου 25 καὶ ὥραν 10 μ. μ. 50λ).

58) Εἰς ἕκαστον στρατιώτην ἑνὸς συντάγματος ἐδίδετο ἄρτος 1 ὀκ. 380 δράμ. διὰ 3 ἡμέρας καὶ ἐντὸς 10 ἡμερῶν ἐμοιράσθησαν 11492 ὀκάδες, ἀλλὰ 80 στρατιῶται ἀπουσίαζον ἐπὶ 4 ἡμέρας. Ἐκ πόσων στρατιωτῶν ἀπετελεῖτο τὸ σύνταγμα; (ἐκ 1800).

59) Ἐδανείσθη τις κεφάλαιόν τι πρὸς 12 $^0/_0$ διὰ 7 μῆνας, ἀλλὰ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ προπληρώσῃ τὸν τόκον· ἀφοῦ λοιπὸν ἐκρατήθη ὁ τόκος ἐκ τοῦ κεφαλαίου, ἔλαβε τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο 1302 δρ. Ζητεῖται πόσον κεφάλαιον ἐδανείσθη καὶ πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐδανείσθη πραγματικῶς. (1400, 12,90$^0/_0$).

60) Ἀποθανών τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του, ὅπως ἡ περιουσία του διανεμηθῇ ὡς ἑξῆς· ἡ θυγάτηρ του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῆς, ὁ υἱός του τὸ τέταρτον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ κατατεθῇ εἰς μίαν τράπεζαν πρὸς 4,50 $^0/_0$ καὶ ὁ ἐτήσιος τόκος αὐτοῦ, ὅστις εἶνε 225 δραχμαί, νὰ διανέμηται εἰς πτωχὰς οἰκογενείας τῆς πατρίδος του. Πόση ἦτο ἡ περιουσία του καὶ πόσον θὰ λάβῃ ἡ θυγάτηρ καὶ ὁ υἱός; (40000, 25000, 10000).

61) Νὰ μερισθῶσι 30000 δρ. εἰς τρεῖς κληρονόμους οὕτως, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ α′ νὰ εἶνε πρὸς τὸ τοῦ β′ ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ β′ νὰ εἶνε πρὸς τὸ τοῦ γ′ ὡς ὁ 3 πρὸς τὸν 5.

Λύσις. Μερίζομεν τὸν ἀριθμὸν 30000 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 καὶ εὑρίσκομεν 6000, 9000, 15000.

62) Παντοπώλης τις ἠγόρασεν 60 ὀκ. καφέ· ἐξ αὐτοῦ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ πρὸς 4δρ.,80 τὴν ὀκᾶν, κατόπιν ἐλογάριασεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ κοστίζει 3δρ.,30 ἡ ὀκᾶ. Ζητεῖται πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν τοῦ καφέ. (4,20).

63) Δύο ἔμποροι ἐκέρδησαν ἐκ τοῦ ἐμπορίου των 4990 δραχμάς· ἐκ τούτων ὁ πρῶτος ἔλαβε τριπλασίας τοῦ δευτέρου καὶ 30 δρ. ἀκόμη. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος; (α′ 3750, β′ 1240).

64) Μία οἰκογένεια ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων ἀτόμων (τοῦ πατρός, τῆς μητρός, τοῦ υἱοῦ καὶ τῆς θυγατρός)· αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν τεσσάρων ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ 123 ἔτη. Ὁ πατὴρ ἔχει διπλασίαν ἡλικίαν τῶν δύο τέκνων του, ἡ μήτηρ εἶνε τὰ $\frac{7}{9}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός, ἡ δὲ θυγάτηρ εἶνε τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ. Ποία εἶνε ἡ ἡλικία ἑκάστου ἀτόμου; (54, 42, 15, 12).

65) Μὲ 3δρ.,40 ἠγόρασέ τις πορτοκάλια καὶ λεμόνια ἐν ὅλῳ 25· ἀλλὰ τὰ πορτοκάλια ἠγόρασε πρὸς 15 λεπτὰ ἕκαστον, τὰ δὲ λεμόνια πρὸς 10. Πόσα πορτοκάλια καὶ πόσα λεμόνια ἠγόρασε;

Λύσις. Ἐὰν ἦσαν ὅλα πορτοκάλια, θὰ ἔδιδεν 25×15 ἢ 375 λεπτά, ἀλλ' ἔδωκε 340 λ., ἤτοι 35 λ. ὀλιγώτερον· ἡ διαφορὰ αὕτη προέρχεται ἀπὸ τὰ λεμόνια, ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον λεμόνιον ἠγοράσθη 5 λ. ὀλιγώτερον ἑκάστου πορτοκαλίου, ἕπεται ὅτι ἦσαν τόσα λεμόνια, ὅσας φορὰς ὁ 5 χωρεῖ εἰς τὸν 35, ἤτοι 7, ἑπομένως τὰ πορτοκάλια ἦσαν 18.

66) Χωρική τις ἐπώλησεν 83 αὐγὰ καὶ ἔλαβε 13δρ.,50· ἐκ τούτων ἄλλα μὲν ἐπώλησε πρὸς 18 λεπτὰ ἕκαστον, ἄλλα δὲ πρὸς 15 λ. Πόσα ἐπώλησε πρὸς 18 καὶ πόσα πρὸς 15; (35 καὶ 48).

67) Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιόν τι καὶ μετὰ 9 μῆνας ἔλαβε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 946 δρ. Ἐὰν ὅμως ἐδάνειζε τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἐπὶ 1 ἔτος 3 μῆν., θὰ ἐλάμβανε κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 990 δρ. Ζητεῖται πόσον εἶνε τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον καὶ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐδανείσθη;

Λύσις. Ἡ διαφορὰ 990—946 ἢ 44 δρ. εἶνε ὁ τόκος τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου ἐπὶ 15—9 ἢ 6 μ. Ὥστε εἰς 1 μ. φέρει τόκον $\frac{44}{6}$ καὶ εἰς 9 μῆνας $\frac{44\times 9}{6}$ ἢ 66 δρ. Τὸ κεφάλαιον λοιπὸν εἶνε 946—66 ἢ 880, τὸ δὲ ἐπιτόκιον εὑρίσκεται ὅτι εἶνε 10 %.

68) Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρισθέντες κατέθεσαν ὁ μὲν πρῶτος 4680 δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 7800 διὰ 9 μῆνας, ὁ δὲ τρίτος ποσόν τι διὰ 8 μῆνας· μετὰ τὴν διάλυσιν τοῦ ἐμπορίου των ἔλαβεν ἕκαστος τὸ αὐτὸ κέρδος. Ζητεῖται πόσον χρόνον ἔμεινε τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου εἰς τὸ ἐμπόριον καὶ πόσον κατέθεσεν ὁ τρίτος.

Λύσις. Διὰ νὰ λάβωσι τὸ αὐτὸ κέρδος, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ γινόμενα τῶν κεφαλαίων των ἐπὶ τοὺς χρόνους εἶνε ἴσα. Ἀλλὰ τὸ δεύτερον γινόμενον εἶνε 7800×9 ἢ 70200 (τόσον εἶνε καὶ τὰ ἄλλα)· ὥστε τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου ἔμεινεν εἰς τὸ ἐμπόριον 70200 : 4680 ἢ 15 μῆνας, ὁ δὲ τρίτος κατέθεσεν 70200 : 8 ἢ 8775 δρ.

69) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 12000 δραχμῶν· ἐπλήρωσε προσέτι διὰ προμήθειαν $\frac{1}{2}$ %, διὰ ναῦλον κτλ. μέχρις ἀποθηκεύσεως αὐτῶν 600 δρ. Ζητεῖται πόσον τοῖς ἑκατὸν ηὐξήθη ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς τῶν ἐμπορευμάτων. (Κατὰ 5,50 %).

70) Ἐτόκισέ τις εἴς τινα τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 8 %, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἰς ἄλλον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ λαμβάνει ἐκ τοῦ δευτέρου ἐτήσιον τόκον 224 δρ. περισσότερον τοῦ πρώτου. Ποῖα εἶνε τὰ τοκισθέντα χρήματα; (5600 καὶ 8400).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Σκοπὸς καὶ χρησιμότης τῆς λογιστικῆς.

Ἡ λογιστικὴ εἶνε ἐπιστήμη, ἥτις διδάσκει νὰ καταχωρῶμεν μεθοδικῶς τὰς διαφόρους πράξεις μιᾶς ἐπιχειρήσεως οὕτως, ὥστε νὰ γνωρίζωμεν εἰς οἱανδήποτε στιγμὴν τὴν πραγματικὴν κατάστασιν αὐτῆς.

Ἡ λογιστικὴ παρουσιάζει δι' ἀριθμῶν τὴν οἰκονομικὴν κατάστασιν τοῦ ἐπιχειρηματίου. Δεικνύει εἰς αὐτὸν εἰς οἱανδήποτε στιγμὴν τὴν θέσιν τῆς ἐπιχειρήσεώς του, τὴν κατάστασιν, εἰς ἣν εὑρίσκεται μετὰ τῶν προσώπων, μεθ' ὧν συναλλάσσεται, δηλαδὴ τί ὀφείλει καὶ τί ἔχει λαμβάνειν, τὰ ἐν τῷ ταμείῳ του μετρητά, τὴν ποσότητα καὶ τὴν ἀξίαν τῶν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του εὑρισκομένων ἐμπορευμάτων, τὰς εἰσπράξεις καὶ τὰς πληρωμάς, ἃς ἔχει νὰ ἐνεργήσῃ, τὰς λήξεις τῶν γραμματίων κλπ.

Ἐν περιλήψει ἡ λογιστικὴ ὀφείλει νὰ ἐκπληροῖ τρεῖς σκοπούς

1ον) Νὰ διατηρῇ ἴχνη τῶν γενομένων παρὰ μιᾶς ἐπιχειρήσεως πράξεων εἰς τρόπον, ὥστε ν' ἀνευρίσκωμεν ταύτας εὐκόλως.

2ον) Νὰ παρουσιάζῃ εἰς οἱανδήποτε στιγμὴν τὴν θέσιν τοῦ ἐμπόρου ὡς πρὸς τὴν ἐπιχείρησιν (μετρητά, ἐμπορεύματα, γραμ. εἰσπρακτέα, τίτλοι κλπ.) καὶ ὡς πρὸς τοὺς τρίτους (πελάται, προμηθευταί, τραπεζῖται κλπ.).

3ον) Νὰ ἐξακριβώνῃ εἰς οἱανδήποτε στιγμὴν τ' ἀποτελέσματα τῆς ἐπιχειρήσεως, δηλαδὴ τί ἐκέρδησεν ἢ τί ἐζημίωσεν εἰς μίαν ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον, συνήθως ἑνὸς ἔτους ἢ ἓξ μηνῶν.

Ἡ λογιστικὴ εἶνε χρήσιμος καὶ ἀπαραίτητος εἰς τὸν ἔμπορον, διότι μετὰ τὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα θὰ ἐξαγάγῃ, θὰ ὑποδείξῃ εἰς αὐτὸν τὰ ἀνάλογα μέτρα, τὰ ὁποῖα ὀφείλει νὰ λάβῃ διὰ νὰ περιορίσῃ ἢ ἀντιθέτως νὰ ἐξαπλώσῃ τὸν κύκλον τῶν ἐργασιῶν του.

ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ

Λογαριασμὸς (Μερίς) λέγεται ὁ πίναξ τῶν ἐνεργουμένων πράξεων ὑπὸ ἑνὸς ἢ πλειόνων προσώπων. Διακρίνομεν τοὺς λ/σμοὺς διὰ τῶν ἐπικεφαλίδων ἢ τίτλων. Ὁ τίτλος ἑνὸς λ/σμοῦ εἶνε τὸ ὄνομα τοῦ προσώπου, μεθ' οὗ ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις μέσῳ τοῦ διευθυντοῦ τῆς ἐπιχειρήσεως· οὕτως ὁ λ/σμὸς «ΤΖΑΚΑΣ καὶ ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΣ» ἢ «ΑΔΕΛΦΟΙ ΤΡΑΝΑΚΙΔΗ» παρουσιάζουν ἀμοιβαίως τὰς γινομένας πράξεις μεθ' ἑκάστου προσώπου ἢ ἑταιρείας. Οἱ ἐπ' ὀνόματι διαφόρων πελατῶν, προμηθευτῶν τραπεζιτῶν κλπ. ἀνοιγόμενοι λ/σμοὶ ὀνομάζονται **προσωπικοὶ λ/σμοί.**

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἕτεραι πράξεις, ἐνεργούμεναι ἐπ' ὀνόματι τοῦ ἐμπόρου διὰ τῶν ὑπαλλήλων του. Οὕτως ὁ ἔμπορος ἐμπιστεύεται τὰ μετρητά του, τὰ ἐμπορεύματά του, τὰ γραμμάτιά του κλπ. εἰς εἰδικοὺς ὑπαλλήλους, οἵτινες διαθέτουσι ταῦτα συμφώνως ταῖς οδηγίαις του, καὶ κατὰ συνέπειαν ὁ ἔμπορος ἀνοίγει δι' ἕκαστον ὑπάλληλόν του ἕνα λ/σμόν, ἵνα ἐλέγχῃ τὴν κίνησιν τῶν ἐμπιστευθεισῶν ἀξιῶν.

Ὁ λ/σμὸς τοῦ Ταμείου π.χ., ἔνθα καταχωρίζονται αἱ εἰσαγωγαὶ καὶ ἐξαγωγαὶ τῶν νομισμάτων, ὀφείλει κανονικῶς νὰ φέρῃ τὸ ὄνομα τοῦ Ταμίου. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ὑπάλληλος δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ἀπὸ μιᾶς στιγμῆς εἰς ἄλλην, διὰ τοῦτο ἐπεκράτησεν ἡ συνήθεια να τιτλοφορῶσι τοῦτον διὰ τῆς λέξεως «ΤΑΜΕΙΟΝ» ἀντὶ τοῦ Ταμίου. Τὴν αὐτὴν ἐξήγησιν δίδομεν καὶ διὰ τὸν λ/σμὸν «**ἐμπορεύματα**» ἢ «**ἀποθήκη**» ἀντὶ τοῦ ἀποθηκαρίου κλπ.

Οἱ λ/σμοὶ οὗτοι λέγονται **λ/σμοὶ ἀπρόσωποι,** καίτοι κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἄποψίν μας ἀντιπροσωπεύουσι τὰ πρόσωπα, εἰς ἃ ὁ ἔμπορος ἐμπιστεύεται τὰς διαφόρους ἀξίας του.

Διάταξις τοῦ λ/σμοῦ. Ὑποθέσωμεν ὅτι κρατοῦμεν τὰ βιβλία τοῦ οἴκου ΑΔΕΛΦΩΝ ΤΡΑΝΑΚΙΔΗ, ἐμπόρων ὑφασμάτων, καὶ ἔχομεν ν' ἀνοίξωμεν τὸν λ/σμὸν τῶν κ.κ. Τζάκα καὶ Δελαγραμμάτικα, πελατῶν τοῦ ἐν λόγῳ οἴκου, οἵτινες ἐνεργοῦσι τὰς ἀκολούθους πράξεις.

Τῇ 27 Ἰανουαρίου. Οἱ κ.κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας ἀγοράζουσι παρὰ τῶν κ.κ. Ἀδελφῶν Τρανακίδη διάφορα ὑφάσματα ἀξίας Δραχ. 3.000.

Τῇ 1ῃ Φεβρουαρίου. Οἱ κ.κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας, ἐπιστρέφουσιν ὑφάσματα ἀξίας Δρχ. 50, μὴ ὄντα σύμφωνα μὲ τὴν παραγγελίαν των.

Τῇ 20 Φεβρουαρίου. Οἱ κ.κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας ἐμέτρησαν εἰς τοὺς κ.κ. Ἀδελφοὺς Τρανακίδη ἔναντι τοῦ λ/σμοῦ των Δρχ. 1.950.

Τῇ 25 Φεβρουαρίου. Οἱ κ.κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας ἠγόρασαν παρὰ τῶν κ.κ. Ἀδελφῶν Τρανακίδη ἐμπορεύματα ἀξίας 5.000.

Τῇ 28 Φεβρουαρίου. Οἱ κ.κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας ἐμέτρησαν εἰς τοὺς κ.κ. Ἀδελφοὺς Τρανακίδη ἔναντι λ/σμοῦ Δρ. 4.000.

Ἵνα γνωρίσωμεν ποίου ποσοῦ θὰ εἶνε ὀφειλέται οἱ κ.κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας εἰς τοὺς κ.κ. Ἀδελφοὺς Τρανακίδη τῇ 28 Φεβρουαρίου, θὰ πράξωμεν ὡς ἑξῆς:

Χωρίζομεν τὸν λ/σμὸν εἰς δύο μέρη· καὶ εἰς μὲν τὸ ἀριστερὸν μέρος, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **Δοῦναι** ἢ **Χρέωσις,** καταχωρίζομεν τὰ διάφορα ποσά, τὰ ὁποῖα λαμβάνει ὁ τιτλοῦχος τοῦ λ/σμοῦ καὶ ἑπομένως ὀφείλει τὸ ἀντίτιμον αὐτῶν. Ἕκαστον ποσὸν πρέπει νὰ συνοδεύηται ὑπὸ τῆς ἡμερομηνίας καὶ ὑπὸ συντόμου καὶ σαφοῦς αἰτιολογικῆς ἐκθέσεως ἑκάστης πράξεως. Εἰς τὸ δεξιὸν μέρος, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **Λαβεῖν ἢ πίστωσις**, καταχωρίζομεν τὰ διάφορα ποσά, τὰ ὁποῖα καταθέτει ὁ τιτλοῦχος τοῦ λ/σμοῦ καὶ ἑπομένως ὀφείλεται εἰς αὐτὸν τὸ ἀντίτιμον· ἕκαστον πάλιν ποσὸν πρέπει νὰ συνοδεύηται ὑπὸ τῆς ἡμερομηνίας καὶ συντόμου αἰτιολογικῆς ἐκθέσεως.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ

Ἡμερομ.		Λεπτομέρειαι	Ποσά	Ἡμερομ.		Λεπτομέρειαι	Ποσά
Ἰανουάρ.	27	Ἀξία ὑφασμάτ.	3.000	Φεβρ.	1	Ἐπιστρ. ὑφασμ.	50
Φεβρουάρ.	26	» »	5.000	»	20	μετρητά	1.950
				»	28	» »	4.000
			8.000				6.000

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων λέγεται **ὑπόλοιπον** τοῦ λ/σμοῦ. Ὥστε οἱ κ. κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας

ὀφείλουσι Δοῦναι . . . . Δρχ. 8.000. —
δικαιοῦνται Λαβεῖν . . . . » 6 000. —
ὑπόλοιπον Δρχ. 2.000. —

ἑπομένως τῇ 28 Φεβρουαρίου ὀφείλουσι Δοῦναι ὑπόλοιπον Δρ. 2.000.

Ἐὰν το ἄθροισμα τῆς χρεώσεως εἶνε μεγαλύτερον, ὀνομάζεται **ὑπόλοιπον χρεωστικόν**, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει **πιστωτικόν**.

Παρατήρησις. Τὰς λέξεις **Δοῦναι** καὶ **Λαβεῖν** εὑρίσκομεν πάντοτε εἰς τὰς ἐπικεφαλίδας τῶν λ/σμῶν. Πολλάκις ἀντικαθιστῶμεν ταύτας διὰ τῶν ὅρων **Εἰσπράξεις καὶ Πληρωμαὶ** ἢ **εἰσαγωγὴ καὶ ἐξαγωγή**, ὅταν πρόκειται περὶ λ/σμῶν ἀντικειμένων, π. χ. μετρητῶν, ἐμπορευμάτων κλπ.

Ἕτερον παράδειγμα. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ λ/σμοῦ ἑνὸς πελάτου ἀνοίξωμεν ἕνα λ/σμὸν διὰ τὸν ὑπάλληλόν μας, π. χ. δι' ἐκεῖνον, εἰς ὃν ἐνεπιστεύθημεν τὴν φύλαξιν τῶν ἐμπορευμάτων, ὁ τρόπος τῆς ἐνεργείας εἶνε ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ὡς ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν.

Ὑποθέσωμεν τὰς ἀκολούθους πράξεις, εἰς ἃς θέλομεν ἀναγνωρίσει καὶ τὴν κίνησιν μεταξὺ τῆς ἀποθήκης τοῦ οἴκου Ἀδελφῶν Τρανακίδη καὶ τῶν κ. κ. Τζάκα καὶ Δελαγραμμάτικα.

Τῇ 15 Ἰανουαρίου Ἡ ἀποθήκη παρέλαβε παρὰ διαφόρων προμηθευτῶν ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 50.000.

Τῇ 20 Ἰανουαρίου. Παρεδώσαμεν εἰς τὸν κ. Γεωργιάδην ἐπὶ πιστώσει ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 10.000.

Τῇ 28 Ἰανουαρίου. Ἐπωλήσαμεν εἰς τοὺς κ. κ. Τζάκαν καὶ Δελαγραμμάτικαν ἐπὶ πιστώσει ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 3.000.

Τῇ 1 Φεβρουαρίου. Ἐπεστράφησαν παρὰ τῶν κ. κ. Τζάκα καὶ Δελαγραμμάτικα ἐμπορεύματα Δρχ. 50.

Τῇ 10 Φεβρουαρίου. Ἠγοράσθησαν παρὰ τοῦ κ. Α. Ἀλιπράντη καὶ Υἱῶν ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 15.000.

Τῇ 20 Φεβρουαρίου. Ἐπωλήθησαν εἰς τοὺς κ. κ. Τζάκαν καὶ Δελαγραμμάτικαν ἐπὶ πιστώσει ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 5.000. Ἡ κατάστασις τοῦ λ/σμοῦ τῆς ἀποθήκης θὰ παρουσιασθῇ μὲ ἓν χρεωστικὸν ὑπόλοιπον ἐκ Δρχ. 47.000, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι ὁ ἀποθηκάριος εἶνε ὀφειλέτης εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ποσοῦ Δρχ. 47.000 εἰς ἐμπορεύματα. Ἐκ τῶν ὑστέρων παρατηροῦμεν ὅτι οὐσιαστικῶς τὸ ποσὸν τοῦτο δὲν παρουσιάζει τὴν ἀκριβῆ θέσιν τῆς ἐπιχειρήσεως· εἰς ἕτερον ὅμως κεφάλαιον θὰ ἐξετάσωμεν τὸν τρόπον, δι' οὗ θὰ φθάσωμεν εἰς τὰ ὁριστικὰ ἀποτελέσματα.

Παρατήρησις Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ αὐτὴ πρᾶξις, π. χ. ἡ τῆς 28 Ἰανουαρίου (ἀγορὰ παρὰ Τζάκα καὶ Δελαγραμμάτικα ἐμπορευμάτων ἀξίας Δρχ. 3.000), ὑφίσταται διπλῆν ἐγγραφήν, μίαν εἰς χρέος τοῦ λ/σμοῦ Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας καὶ ἑτέραν εἰς πίστιν τοῦ λ/σμοῦ τῆς ἀποθήκης. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὴν πρᾶξιν τῆς 20 Φεβρουαρίου, τὸ ἀντίστροφον ὅμως διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς 1ης Φεβρουαρίου, ἔνθα πιστοῦνται οἱ κ. κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας καὶ χρεοῦται ἡ ἀποθήκη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι, διὰ νὰ διακρίνωμεν τὴν χρέωσιν τῆς πιστώσεως, ὀφείλομεν νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει μας τὰ ἀκόλουθα.

Ὅστις λαμβάνει ΧΡΕΟΥΤΑΙ. Ὅστις δίδει ΠΙΣΤΟΥΤΑΙ.

ΚΑΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

Ὁ Νόμος ὑποχρεώνει ἕκαστον ἔμπορον νὰ τηρῇ τρία βιβλία. Τὸ **ἡμερολόγιον**, τὸ βιβλίον **ἀπογραφῶν** καὶ τὸ βιβλίον ἀντιγραφῆς **ἐπιστολῶν**. Τὸ βιβλίον ἀντιγραφῆς ἐπιστολῶν δὲν εἶνε βιβλίον λογιστικόν. Ἐπίσης τὸ βιβλίον ἀπογραφῶν δὲν εἶνε εἰ μὴ βιβλίον, ἔνθα ἀντιγράφονται τὰ τελικὰ ἀποτελέσματα τῶν λογιστικῶν πράξεων. Ὥστε τὸ κύριον βιβλίον, ἐφ' οὗ καταχωρίζομεν τὰς διαφόρους πράξεις μιᾶς ἐπιχειρήσεως, εἶνε τὸ **ἡμερολόγιον**. Ἐπειδὴ ὁ Νόμος ὁρίζει νὰ κρατῶμεν τὸ βιβλίον τοῦ ἡμερολογίου, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ καθορίζῃ σαφῶς τὸν τύπον, ὃν ὀφείλομεν ν' ἀκολουθῶμεν, ὡς ἐκ τούτου ἀρκετὸν εἶνε νὰ καταχωρίζομεν ὑπὸ οἱονδήποτε τύπον τὰς πράξεις μιᾶς ἐπιχειρήσεως, ἀρκεῖ μόνον ἡ καταχώρισις νὰ γίνηται μεθοδικῶς καὶ κατὰ χρονολογικὴν σειράν, ἄνευ κενῶν, συμπληρωμάτων καὶ ἀποξέσεων.

1ον) **Ἁπλογραφικὴ λογιστική.**

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἑκάστη πρᾶξις καταχωρίζεται ἁπλῶς εἰς τὸν λ)σμὸν τοῦ προσώπου, μεθ' οὗ ὁ ἔμπορος συναλλάσσεται (ἀγοραστής, πωλητής, τραπεζίτης), π. χ., ἐὰν οὗτος παρέδωσεν εἰς τοὺς κ. κ. Τζάκαν καὶ Δελαγραμμάτικαν τῇ 28 Ἰανουαρίου ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 3.000, θὰ καταχωρίσωμεν ἁπλῶς εἰς τὸ ἡμερολόγιόν μας ὅτι οἱ κ. κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας μᾶς ὀφείλουσι Δρχ. 3.000.

Ἡ διατύπωσις τῆς πράξεως θὰ γίνῃ ὡς ἀκολούθως.

28 Ἰανουαρίου ΤΖΑΚΑΣ καὶ ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΣ Δοῦναι Δρχ. 3.000.

Τὸ ποσὸν δὲ τοῦτο μεταφέρομεν εἰς χρέος τοῦ λ/σμοῦ τῶν κ.κ. Τζάκα καὶ Δελαγραμμάτικα, ὃν θ'ἀνοίξωμεν εἰς εἰδικὸν βιβλίον ὀνομαζόμενον **Καθολικόν**. Ὅταν οἱ κ.κ. Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας μᾶς μετρήσουν ἔναντι τοῦ λ/σμοῦ των τῇ 28 Φεβρουαρίου Δρχ. 1.950, θὰ διατυπώσωμεν τὴν πρᾶξιν ἐν τῷ ἡμερολογίῳ ὡς ἀκολούθως.

28 Φεβρουαρίου ΤΖΑΚΑΣ καὶ ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΣ Λαβεῖν Δρχ. 1.950.

Τὸ ποσὸν δὲ τοῦτο φέρομεν εἰς πίστιν τοῦ λ/σμοῦ τῶν κ.κ. Τζάκα καὶ Δελαγραμμάτικα. Ἐν περιλήψει, ἵνα καθορίσωμεν τὴν φύσιν τῆς ἐγγραφῆς ἐν τῷ ἡμερολογίῳ, πρέπει νὰ θέτωμεν τὰ ἀκόλουθα ἐρωτήματα.

Ἐὰν ὁ μεθ' οὗ συναλλασσόμεθα λαμβάνῃ, ὀφείλει ΔΟΥΝΑΙ

Ἐὰν ὁ μεθ' οὗ συναλλασσόμεθα δίδῃ, ὀφείλει ΛΑΒΕΙΝ

Ἡ λογιστικὴ αὕτη εἶνε ἀντίθετος μὲ τὴν ὑπὸ τοῦ Νόμου καθοριζομένην, ὅστις ἀπαιτεῖ, ἵνα ἅπασαι αἱ πράξεις (ἐσωτερικαὶ καὶ ἐξωτερικαὶ) καταχωρίζωνται εἰς τὰ βιβλία, ἐνῷ, ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, δὲν ἀναφέρονται εἰ μὴ αἱ ἐξωτερικαὶ πράξεις. Ὅταν ὁ ἔμπορος δίδῃ εἰς τοὺς κ.κ. Τζάκαν καὶ Δελαγραμμάτικαν ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 3 000, κυρίως δύο πρόσωπα ἐνδιαφέρονται·

1ον) Οἱ Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας, οἵτινες λαμβάνουσιν ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 3.000. (Ἡ ἐγγραφὴ αὕτη δὲν καταχωρίζεται εἰς τὴν ἁπλογραφικὴν λογιστικήν).

2ον) Ὁ ἔμπορος, οὗτινος τὰ ἐμπορεύματα ἠλαττιώθησαν κατὰ Δρχ. 3.000. (Ἡ ἐγγραφὴ αὕτη δὲν καταχωρίζεται εἰς τὴν ἁπλογραφικὴν λογιστικήν).

Οὕτω κατὰ τὴν ἁπλογραφικὴν μέθοδον αἱ κινητοποιήσεις τῶν μετρητῶν, τῶν ἐμπορευμάτων, τῶν γραμματίων εἰσπρακτέων κλπ. δὲν καταχωρίζονται. Ὡς ἐκ τούτου ὁ ἔλεγχος καθίσταται δυσχερὴς καὶ δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ὑποπέσωμεν εἰς λάθη.

1ον) **Διπλογραφικὸν σύστημα.**

Τὸ διπλογραφικὸν σύστημα καταργεῖ τὰς δυσχερείας ταύτας. Ἑκάστη ἐνεργουμένη πρᾶξις ἐξετάζεται ὑπὸ δύο ἀπόψεις· 1ον) μετὰ τοῦ προσώπου, μεθ' οὗ συναλλάσσεται ὁ ἔμπορος, καὶ 2ον) μετ' αὐτοῦ τοῦ ἰδίου ἐμπόρου. Ἐὰν ὁ ἔμπορος παραδίδῃ εἰς τοὺς κ.κ. Τζάκαν καὶ Δελαγραμμάτικαν ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 3 000, θὰ χρεώσῃ αὐτοὺς μὲ τὸ ποσὸν τοῦτο, ὅπερ τῷ ὀφείλουσι, θὰ πιστωθῇ δ' ἀφ' ἑτέρου ὁ ἴδιος μὲ Δρχ. 3.000, αἵτινες ἀντιπροσωπεύουσι τὴν ἀξίαν τοῦ χορηγηθέντος ἐπὶ πιστώσει ἐμπορεύματος. Ὥστε δὲν θὰ εἴπωμεν πλέον ὅτι

οἱ Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας ὀφείλουσι 3.000

ἀλλὰ θὰ προσθέσωμεν ὅτι τὰς ὀφείλουσιν εἰς τὸν παρ' οὗ ἔλαβον τὰ ἐμπορεύματα ἀποθηκάριον, δηλαδὴ εἰς τὰ **«ἐμπορεύματα»**, καὶ θὰ εἴπωμεν·

Ὀφείλουσιν οἱ Τζάκας καὶ Δελαγραμμάτικας εἰς ἐμπορεύματα Δρχ. 3.000.

Ὅπως εἰς ὅλας τὰς πράξεις ὑπάρχει τις, ὅστις λαμβάνει, καὶ ἕτερος, ὅστις δίδει, οὕτω καὶ ἐνταῦθα· θὰ χρεώσωμεν λοιπὸν τοὺς Τζάκαν καὶ Δελαγραμμάτικαν καὶ θὰ πιστώσωμεν τὰ ἐμπορεύματα.

Παράδειγμα. Τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα δεικνύει τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν δύο συστημάτων καὶ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ διπλογραφικοῦ ἀπὸ ἀπόψεως ἐλέγχου καὶ πληροφοριῶν. Ὑποθέσωμεν ὅτι εἷς ἔμπορος ἐνήργησε τὰς ἀκολούθους πράξεις.

1) Εἰσέπραξε παρὰ τῆς Τραπέζης Ἀθηνῶν	Δρχ.	12.000
2) Ἠγόρασεν ἐπὶ πιστώσει ἐμπορ. παρὰ τοῦ Α ἀξίας	»	5.000
3) Ἐπώλησεν εἰς τὸν Β ἐπὶ πιστώσει ἐμπορ. ἀξίας	»	2.000
4) Ἐμέτρησεν εἰς τὸν Γ	»	7.000
5) Ἐπλήρωσεν εἰς τὸν Α ἔναντι τοῦ λ/σμοῦ του	»	2.000

Ἁπλογραφικὸν σύστημα. Συμφώνως πρὸς τὸν ὡς ἄνω προεκτεθέντα κανόνα, διὰ νὰ καταχωρίσωμεν μίαν πρᾶξιν ἐν τῷ ἁπλογραφικῷ ἡμερολογίῳ, θὰ θέσωμεν τὸ ἐρώτημα. Ὁ μεθ' οὗ συναλλασσόμεθα ἔλαβεν ἢ ἔδωκεν; Οὕτως εἰς τὴν πρώτην πρᾶξιν ἡ Τράπεζα Ἀθηνῶν ἔδωκεν. Ὥστε θὰ θέσωμεν τὸ ὄνομά της εἰς τὸ Λαβεῖν. Ἐνεργοῦντες καὶ τὰς ἑπομένας πράξεις θὰ ἔχωμεν ἐν τῷ ἡμερολογίῳ τὰς ἑπομένας ἐγγραφάς:

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟΝ

ΛΑΒΕΙΝ	Τράπεζα Ἀθηνῶν	Δραχ.	12.000
2			
ΛΑΒΕΙΝ	Α....	»	5.000
3			
ΔΟΥΝΑΙ	Β....	»	2.000
4			
ΔΟΥΝΑΙ	Γ....	»	7.000
5			
ΔΟΥΝΑΙ	Α....	»	2.000
		Δραχ.	28.000

μετὰ τὰς ἐγγραφὰς τοῦ ἡμερολογίου θὰ χρεώσωμεν καὶ θὰ πιστώσωμεν τοὺς σχετικοὺς λ/σμοὺς ἐν τῷ καθολικῷ.

ΚΑΘΟΛΙΚΟΝ

Δ	Τράπεζα Ἀθηνῶν Λ	Δ	Α Λ
	12.000	2.000	5.000

Δ	Β Λ	Δ	Γ Λ
2 000		7 000	

Τὰς ἐγγραφὰς ταύτας τοῦ καθολικοῦ συγκεντροῦμεν εἰς ἕνα πίνακα, ὀνομαζόμενον **ἰσοζύγιον.**

ΙΣΟΖΥΓΙΟΝ

ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ	ΠΟΣΑ		ΥΠΟΛΟΙΠΑ	
	ΔΟΥΝΑΙ	ΛΑΒΕΙΝ	Χρεωστικ.	Πιστωτικ.
ΤΡΑΠΕΖΑ ΑΘΗΝΩΝ		12.000		12.000
Α . . .	2.000	5.000		3.000
Β . . .	2.000		2.000	
Γ . . .	7.000		7.000	
ΟΛΙΚΑ	11 000	17.000	9.000	15 000
ΣΥΝΟΛΟΝ	28.000			

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τέσσαρα ἀθροίσματα τοῦ ἰσοζυγίου οὐδεμίαν δίδουσι θετικότητα, ἐὰν αἱ σχετικαὶ ἐγγραφαὶ κατεχωρίσθησαν ἐν τάξει. Πάντως ὅμως τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμερολογίου πρέπει νὰ εἶνε σύμφωνον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ συνόλου τῶν δύο πρώτων στηλῶν τοῦ ἰσοζυγίου. Ἐὰν ὅμως ἐκ παραδρομῆς κατεχωρίσαμεν μίαν ἐγγραφὴν εἰς πίστιν ἑνὸς λ]σμοῦ, ἀντὶ νὰ χρεώσωμεν αὐτόν, βεβαίως τὸ ἰσοζύγιον δὲν θὰ μᾶς παρουσιάσῃ τὸ λάθος. Ὑπὸ ἄλλην ἄποψιν τὸ καθολικὸν μᾶς δεικνύει ὅτι ὁ ἔμπορος ὀφείλει εἰς Τράπεζαν Ἀθηνῶν Δρχ. 12000, εἰς τὸν Α... Δρχ. 3.000 καὶ ὅτι ἀφ' ἑτέρου τῷ ὀφείλονται παρὰ τοῦ Β... Δρχ. 2.000 καὶ τοῦ Γ... Δρχ. 7.000· ἀλλ' ὁ ἔμπορος ἔδωσε καὶ ἔλαβε χρήματα, παρέδωσε καὶ παρέλαβεν ἐμπορεύματα. Ὁ Ταμίας καὶ ὁ Ἀποθηκάριος εἶνε ὑπεύθυνοι διὰ τὰ χρήματα καὶ τὰ ἐμπορεύματα, ἅτινα ὁ ἔμπορος τοῖς ἐνεπιστεύθη. Τίποτε δὲν δεικνύει εἰς τὰ βιβλία ποία εἶνε ἡ θέσις τῆς ἐπιχειρήσεως. Δύνανται ὡς ἐκ τούτου νὰ δημιουργηθῶσι πολλαὶ ἀνωμαλίαι καὶ λάθη σημαντικὰ εἰς τὰ ποσά, χωρὶς νὰ εἶνε εὔκολος ἡ διόρθωσις. Ἅπαντα τὰ κενὰ ταῦτα πληροῖ τὸ διπλογραφικὸν σύστημα.

Διπλογραφικὸν σύστημα. Διὰ νὰ συντάξωμεν τὸ ἡμερολόγιον, θὰ θέσωμεν διπλᾶ ἐρωτήματα δι' ἑκάστην πρᾶξιν.

1ον) Ἔλαβον παρὰ τῆς Τραπέζης Ἀθηνῶν Δρχ. 12.000.

ΠΟΙΟΣ ΕΛΑΒΕΝ; Ὁ ἔμπορος, ἀντιπροσωπευόμενος ὑπὸ τοῦ Ταμείου, οὗτινος ὁ σχετικὸς λ)σμὸς τιτλοφορεῖται ΤΑΜΕΙΟΝ.

ΠΟΙΟΣ ΕΔΩΚΕΝ; Ἀπηντήσαμεν ἤδη εἰς τὴν ἐρώτησιν ταύτην εἰς τὸ ἁπλογραφικὸν σύστημα ἐγγράψαντες ΛΑΒΕΙΝ Τράπεζα Ἀθηνῶν.

Κατὰ λογιστικὴν συνήθειαν οὐδέποτε ἐν τῷ ἡμερολογίῳ ἀναφέρομεν τὰς λέξεις Δοῦναι καὶ Λαβεῖν, ἀλλ' ἀντ' αὐτῶν κατὰ τὴν σύνταξιν τοῦ σχετικοῦ ἄρθρου προηγεῖται τοῦ χρεωστικοῦ λ)σμοῦ ἡ λέξις ΑΠΟ, τοῦ δὲ πιστωτικοῦ ἡ λέξις ΕΙΣ. Τὰ χρεωστικὰ ποσὰ πάντοτε καταχωρίζονται ἐν τῷ ἡμερολογίῳ εἰς τὴν ἀριστερὰν στήλην, τὰ δὲ πιστωτικὰ εἰς τὴν δεξιάν.

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟΝ

1			
ἀπὸ ΤΑΜΕΙΟΝ	Δρχ.	12.000.—	
εἰς ΤΡΑΠΕΖΑΝ ΑΘΗΝΩΝ	»		12.000.—
2			
ἀπὸ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	»	5.000.—	
εἰς Α. . . .	»		5.000.—
3			
ἀπὸ Β . . .	»	2.000.—	
εἰς ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	»		2.000.—
4			
ἀπὸ Γ. . . .	»	7.000.—	
εἰς ΤΑΜΕΙΟΝ	»		7.000.—
5			
ἀπὸ Α. . . .	»	2.000.—	
εἰς ΤΑΜΕΙΟΝ	»		2.000.—
Σύνολον	Δρχ.	28.000.—	28.000.—

Ἐν τῷ ἡμερολογίῳ ἔχομεν ἤδη ἓξ λ/σμούς, ἐξ ὧν οἱ τέσσαρες περιλαμβάνονται εἰς τὸ ἁπλογραφικὸν σύστημα. Οἱ ἕτεροι δύο εἶνε νέοι (ΤΑΜΕΙΟΝ, ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ). Θὰ χρεώσωμεν ἤδη καὶ θὰ πιστώσωμεν ἐν τῷ καθολικῷ τοὺς ἓξ λ/σμοὺς συμφώνως ταῖς ὁδηγίαις τοῦ ἡμερολογίου.

ΚΑΘΟΛΙΚΟΝ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΑΘΗΝΩΝ

12.000.—	

Α

2.000.—	5.000.—

Β

2.000.—	

Γ

7.000.—	

ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ

5.000.—	2.000.—

ΤΑΜΕΙΟΝ

12.000.—	7.000.—
	2.000.—
	9.000.—

Παρατηροῦμεν ὅτι τίποτε δὲν ἤλλαξεν εἰς ὅ τι ἐγένετο κατὰ τὸ ἁπλογραφικὸν σύστημα σχετικῶς μὲ τοὺς διαφόρους πελάτας. Ἐν τούτοις ὅμως ἔχομεν δύο νέους λ/σμοὺς διὰ τὰς πράξεις τοῦ Ταμείου καὶ τῶν ἐμπορευμάτων. Κατὰ τὸ ἁπλογραφικὸν σύστημα δὲν καταχωρίζονται εἰ μὴ μόνον οἱ ἐξωτερικοὶ λ/σμοί, ἐνῷ κατὰ τὸ διπλογραφικὸν προστίθεται καὶ ἡ κίνησις τῶν ἐσωτερικῶν λ/σμῶν.

Τὰς ἀνωτέρω πράξεις συγκεντροῦμεν εἰς τὸ ἰσοζύγιον ὡς ἀκολούθως.

ΙΣΟΖΥΓΙΟΝ

ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ	ΠΟΣΑ		ΥΠΟΛΟΙΠΑ	
	Χρεωστικ.	Πιστωτικ.	Χρεωστικ	Πιστωτικ.
ΤΡΑΠΕΖΑ ΑΘΗΝΩΝ		12.000.—		12.000.—
Α	2.000.—	5.000.—		3.000.—
Β	2.000.—		2.000.—	
Γ	7.000.—		7.000.—	
ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	5.000.—	2.000.—	3.000.—	
ΤΑΜΕΙΟΝ	12.000 —	9.000.—	3.000.—	
Ἄθροισμα	28.000.—	28.000.—	15.000.—	15.000.—

Τὸ ἰσοζύγιον μᾶς δεικνύει τέσσαρα ἀθροίσματα ὅμοια. Αἱ δύο πρῶται στῆλαι δίδουσι Δρχ. 28.000, διότι ἑκάστη πρᾶξις, καταχωρισθεῖσα ταυτοχρόνως εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ ἑνὸς λ/σμοῦ καὶ εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ ἑτέρου, θὰ μᾶς δώσῃ τὸ αὐτὸ πιστωτικὸν καὶ χρεωστικὸν σύνολον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ μετεφέρθησαν ἐκ τοῦ ἡμερολογίου εἰς τὸ καθολικόν, τὸ ἄθροισμα τῶν στηλῶν τοῦ ἡμερολογίου θὰ εἶνε σύμφωνον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων στηλῶν τοῦ ἰσοζυγίου. Ἰδοὺ ὁ πρωτος ἔλεγχος, ὅστις μᾶς βεβαιοῖ ὅτι οὐδὲν ποσὸν κατὰ τὴν μεταφορὰν ἐκ τοῦ ἡμερολογίου εἰς τὸ καθολικὸν παρελείφθη οὔτε μετεφέρθη εἰς τὴν χρέωσιν ἀντὶ τῆς πιστώσεως.

Εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ Ταμείου εἶνε χρεωστικὸν μὲ Δραχμὰς 3.000, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ὁ Ταμίας ὀφείλει Δρχ. 3.000 εἰς τὸν ἔμπορον, ἐφ' ὅσον εἰσήγαγε Δρχ. 12.000 καὶ ἐξήγαγε Δρχ. 9.000. Ἐπίσης βλέπομεν ὅτι ἡ ἀποθήκη ἔχει ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 3.000.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ

Γενικῶς ἑκάστη κατηγορία πράξεων χρησιμοποιεῖ εἰδικὸν βιβλίον, τὸ ὁποῖον συνήθως τηρεῖται ὑπὸ τοῦ εἰδικοῦ πρὸς τοῦτο ὑπαλλήλου· π. χ. αἱ εἰσπράξεις καὶ αἱ πληρωμαὶ ἀπαιτοῦσιν εἰδικὸν βιβλίον **Ταμείου**, ἡ κίνησις τῶν ἐμπορεύματων ἰδιαίτερον βιβλίον εἰσαγωγῆς καὶ ἐξαγωγῆς αὐτῶν, αἱ εἰς ἐμπορικὰ γραμμάτια ὑποχρεώσεις τῶν πελατῶν καταχωρίζονται εἰς ἄλλο βιβλίον, τὸ τῆς εἰσαγωγῆς καὶ ἐξαγωγῆς γραμματίων εἰσπρακτέων, κλπ.

Ἐπίσης καὶ ἄλλα βιβλία δύνανται νὰ χρησιμοποιηθῶσι καὶ διὰ λ)σμοὺς ἑτέρων κατηγοριῶν. Διὰ τὰς πράξεις, αἵτινες ἔχουσι μικρὰν κίνησιν, χρησιμοποιοῦμεν εἰδικὸν βιβλίον τῶν διαφόρων πράξεων. Τοῦτο βεβαίως δὲν μᾶς ἐμποδίζει ν' ἀνοίξωμεν εἰδικὸν βιβλίον δι' ἕνα λ)σμόν, ὅταν θὰ ἴδωμεν ὅτι οὗτος ἔχει ἐνδιαφέρουσαν κίνησιν.

Εἰς τὸ τέλος ἑκάστης ἡμέρας μεταφέρονται εἰς τὸ ἡμερολόγιον αἱ ἐγγραφαί, αἵτινες κατεχωρίσθησαν εἰς τὰ βοηθητικὰ βιβλία. Ὡς εἴδομεν, ἐκ τοῦ *ἡμερολογίου* μεταφέρομεν τὰ ποσὰ εἰς τὸ **καθολικόν**, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁποίου συντάσσομεν τὸ **ἰσοζύγιον**. Ἕκαστον ἔτος μετὰ τὴν ἐνέργειαν τῶν ἐγγραφῶν τῶν πράξεων τῆς ἀπογραφῆς ἐξακριβοῦμεν τὴν κατάστασιν τῆς ἐπιχειρήσεως, ἧς αἱ σχετικαὶ λεπτομέρειαι ἐκτίθενται ἐπὶ ἰδιαιτέρου πίνακος, ὀνομαζομένου **ἰσολογισμοῦ**. Αὕτη εἶνε ἐν γενικαῖς γραμμαῖς ἡ λειτουργία μιᾶς λογιστικῆς ἐπιχειρήσεως.

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟΝ

Τὸ ἡμερολόγιον εἶνε βιβλίον, ἐν τῷ ὁποίῳ ὁ ἔμπορος ὀφείλει κατὰ τὸν Νόμον νὰ καταχωρίζῃ ἡμέρᾳ τῇ ἡμέρᾳ καὶ μίαν πρὸς μίαν ἁπάσας τὰς πράξεις τῆς ἐπιχειρήσεώς του.

Ἄρθρον. Ἑκάστη πρᾶξις ἢ σύνολον πράξεων ἀντιπροσωπεύεται ἐν τῷ ἡμερολογίῳ δι' εἰδικῆς ἐγγραφῆς, ἥτις ὀνομάζεται **ἄρθρον** καὶ ἥτις κατὰ τὸ διπλογραφικὸν σύστημα περιλαμβάνει τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα.

1ον) Τὴν ἡμερομηνίαν τῆς πράξεως, ἣν παραθέτομεν μεταξὺ δύο γραμμῶν ὁριζοντίων καὶ ἥτις χωρίζει δύο ἄρθρα.

2ον) Εἰς τὴν ἑπομένην γραμμὴν ἀριστερᾷ τὸ ὄνομα τοῦ λ/σμοῦ, ὅστις θὰ χρεωθῇ.

3ον) Εἰς τὴν τρίτην γραμμὴν δεξιᾷ τὸ ὄνομα τοῦ λ/σμοῦ, ὅστις θὰ πιστωθῇ.

4ον) Εἰς τὴν τετάρτην καὶ ἐν ἀνάγκῃ εἰς τὴν ἑπομένην τὴν ἐπεξήγησιν.

Τὰ ὀνόματα τῶν λ)σμῶν γράφομεν διὰ χονδρῶν χαρακτήρων (συνήθως στρογγύλων). Εἰς τὰς δύο στήλας τῶν ποσῶν εἰς μὲν τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ γράφομεν τὰ χρεωστικὰ ποσά, εἰς δὲ τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ πιστωτικά. Τὰ ποσὰ πρέπει νὰ γράφωνται εἰς τὴν αὐτὴν γραμμὴν μὲ τὸν χρεωστικὸν ἢ πιστωτικὸν λ/σμόν. Εἰς ἑκάστην σελίδα τοῦ ἡμερολογίου ἀριστερᾷ ὑπάρχουσι δύο μικραὶ στῆλαι. Αὗται προορίζονται διὰ νὰ ἀναφέρωμεν τὴν ἀντίστοιχον σελίδα τοῦ καθολικοῦ κατὰ τὴν μεταφορὰν τῆς πράξεως. Ἕκαστον ἄρθρον δύναται νὰ περιλάβῃ καὶ περισσοτέρους τῶν δύο λ/σμῶν. Τὸ τοιοῦτον ἄρθρον λέγεται σύνθετον ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ περιλαμβάνον δύο λ/σμούς, τὸ ὁποῖον λέγεται **ἁπλοῦν**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Τῇ 7 Ἀπριλίου ἐμετρήσαμεν εἰς τὴν Τράπεζαν Ἀθηνῶν Δρχ. 5.000 καὶ Δρχ. 3.000.

Τῇ 8 Ἀπριλίου ἐπωλήσαμεν ἐπὶ πιστώσει εἰς τὸν Α... ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 500 καὶ εἰς τὸν Β... ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 1700.

Τῇ 9 Ἀπριλίου ἐνεργοῦμεν τὰς ἀκολούθους εἰσπράξεις· α') παρὰ τοῦ Ε... Δρχ. 1000, β') τοῦ Ζ... Δρχ. 1.500 καὶ γ') τοῦ Η... Δρχ. 300.

Τῇ 11 Ἀπριλίου ἀγοράζομεν ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 2.000 καὶ πρὸς διακανονισμὸν δίδομεν·

Α') γραμμάτιον Νο 5 λήξ. 25 Μαΐου καὶ

Β') ἐπιταγήν μας ἐπὶ τῆς Τραπέζης Ἀθηνῶν.

Παρατήρησις. 1) Ποῖος ἔδωσε; Τὸ Ταμεῖον. Ποῖος ἔλαβεν; Ἡ Τράπεζα Ἀθηνῶν.

2) Ποῖος ἔδωσεν; Ἡ ἀποθήκη. Ποῖος ἔλαβεν; Ὁ Α καὶ ὁ Β.

3) Ποῖος ἔδωσεν; Ὁ Ε, ὁ Ζ καὶ ὁ Η. Ποῖος ἔλαβε; Τὸ Ταμεῖον.

4) Ποῖος ἔδωσε; Τὰ γραμμάτια εἰσπρακτέα καὶ ἡ Τράπεζα Ἀθηνῶν. Ποῖος ἔλαβε; Τὰ ἐμπορεύματα.

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟΝ

		7		
		ἀπὸ ΤΡΑΠΕΖΑΝ ΑΘΗΝΩΝ	8.000.—	
	8	εἰς ΤΑΜΕΙΟΝ		8.000.—
		μετρητά μας Δραχ. 5 000.—		
		» » » 3.000. —		
		8		
5		ἀπὸ Α....	500.—	
6		» Β....	1.700.—	
	2	εἰς ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ		2.200.—
		ἰσοτ. τιμολ/ων μας		
		9		
8		ἀπὸ ΤΑΜΕΙΟΝ	2.800 —	
	3	εἰς Ε....		1.000.—
	4	» Ζ....		1.500 —
	7	» Η....		300.—
		Ἐμβάσματά των		
		11		
2		ἀπὸ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	2.000.—	
		Ἀξία τιμ/ου Χ		
	1	εἰς ΓΡΑΜ. ΕΙΣΠΡΑΚΤΕΑ		1.500.—
		Ν° 5 λήξ. 25 Μαΐου		
	9	» ΤΡΑΠΕΖΑΝ ΑΘΗΝΩΝ		500.—
		Ἐπιταγή μας Ν° 18		
		Εἰς μεταφορὰν	15.000.—	15.000.—

Ἄθροισις τοῦ ἡμερολογίου. Εἰς τὸ κάτω μέρος ἑκάστης σελίδος τοῦ ἡμερολογίου ἀθροίζομεν τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεως καὶ τῆς πιστώσεως. Εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν τοῦ ἀθροίσματος προηγεῖται ἡ λέξις **εἰς μεταφοράν.** Τὰ ἀθροίσματα τῆς χρεώσεως καὶ τῆς πιστώσεως ὀφείλουσι νὰ εἶνε ὅμοια. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει πρέπει νἀνατρέξωμεν καὶ εὕρωμεν τοὺς λόγους, δι' οὓς ὑφίσταται ἡ διαφορά, καὶ προβῶμεν εἰς τὴν δέουσαν διόρθωσιν, ἄλλως, ἐὰν γίνῃ ἡ μεταφορὰ εἰς τὸ καθολικόν, θὰ ὑποπέσωμεν βραδύτερον εἰς ἐρεύνας ἐπιπόνους. Ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἐν τάξει, τὰ μεταφέρομεν εἰς τὴν ἑτέραν σελίδα θέτοντες εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν τὴν λέξιν **'Εκ μεταφορᾶς.**

ΚΑΘΟΛΙΚΟΝ

Τὸ καθολικὸν εἶνε βιβλίον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου αἱ πράξεις ταξινομοῦνται κατὰ λ/σμούς. Λέγεται δὲ καθολικόν, διότι δέχεται τὰς καθόλου πράξεις μιᾶς ἐπιχειρήσεως. Τὸ καθολικὸν δὲν εἶνε ὑποχρεωτικὸν ὑπὸ τοῦ Νόμου, εἶνε ὅμως ἀπαραίτητον διὰ πάντα ἔμπορον. 'Εντὸς αὐτοῦ θὰ ἀναζητήσωμεν ἁπάσας τὰς πληροφορίας, ὧν ἔχει ἀνάγκην ὁ ἔμπορος, διότι θὰ εὕρῃ ταύτας ταχέως καὶ ἀκριβῶς. Μεγάλη προσοχὴ καὶ ἐπιμέλεια πρέπει νὰ δίδεται διὰ τὴν κανονικὴν τήρησιν τοῦ καθολικοῦ, αἱ δὲ πράξεις πρέπει νὰ καταχωρίζωνται τοὐλάχιστον τὴν ἐπομένην. Ἕκαστος λ/σμὸς καταλαμβάνει δύο σελίδας. Ἡ πρὸς τὰ ἀριστερὰ σελὶς δέχεται τὰ χρεωστικὰ ποσά, καὶ ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ πιστωτικά. Εἰς τὴν ἐπικεφαλίδα θέτομεν τὸν τίτλον τοῦ λ/σμοῦ. Ἑκάστη σελὶς διαιρεῖται εἰς 7 στήλας ὡς ἑξῆς.

ΣΕΛΙΣ ΧΡΕΩΣΕΩΣ
1) Μήν.
2) Ἡμερομηνία.
3) Ἡ λέξις ΕΙΣ ἀκολουθουμένη ὑπὸ τοῦ ὀνόματος τοῦ πιστωτικοῦ λ/σμοῦ.
4) Ἐπεξήγησις.
5) Ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἄρθρου (δύναται νὰ παραλειφθῇ).
6) Τὰ μερικὰ ποσὰ καὶ
7) Τὰ ὁλικὰ ποσά.

ΣΕΛΙΣ ΠΙΣΤΩΣΕΩΣ
Ἡ αὐτὴ διάταξις μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι εἰς τὴν 3 στήλην ἀντὶ τοῦ ΕΙΣ θ'ἀναφέρωμεν τὴν λέξιν ΑΠΟ μὲ τὸν ἀντίστοιχον λ/σμὸν τῆς χρεώσεως.

Παράδειγμα.

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟΝ

		62 — 12 'Απριλίου —		
8		ἀπὸ ΑΛΙΠΡΑΝΤΗΝ	1.000.—	
	5	εἰς ΤΑΜΕΙΟΝ		1.000.—
		ἔμβασμά του		
		63 — 13 'Απριλίου —		
9		ἀπὸ ΓΡΑΜ. ΕΙΣΠΡΑΚΤΕΑ	1.500.—	
	38	εἰς ΑΛΙΠΡΑΝΤΗΝ		1.500.—
		ἀποδ. ληξ 15/6/21 Δρχ. 800.—		
		» » 15/7/21 » 700.—		

Εἰς τὸ καθολικὸν ὁ λ/σμὸς τοῦ 'Αλιπράντη θὰ παρουσιάζηται ὡς ἀκολούθως.

ΔΟΥΝΑΙ — ΑΛΙΠΡΑΝΤΗΣ

'Απριλίου	12	Εἰς	Ταμεῖον	Ἔμβασμά του	62	1.000.—

ΑΛΙΠΡΑΝΤΗΣ — ΛΑΒΕΙΝ

'Απριλίου	13	'Από Γραμ. Εἰσπρ.	ἀποδ του λ.	15/6	63	800	
			» » »	15/7		700	1.500

ΙΣΟΖΥΓΙΟΝ

Τὸ ἰσοζύγιον εἶνε ὁ πίναξ, ὅστις συγκεντροῖ τὰ ἀθροίσματα τῶν λ/σμῶν ἑνὸς καθολικοῦ, ἵνα ἐξακριβώνῃ τὴν συμφωνίαν μεταξὺ τοῦ καθολικοῦ τούτου καὶ τοῦ ἡμερολογίου.

Τὸ σύνολον τοῦ ἀθροίσματος τῆς στήλης τῆς χρεώσεως ὀφείλει νὰ εἶνε σύμφωνον μὲ τὸ σύνολον τοῦ ἀθροίσματος τῆς στήλης τῆς πιστώσεως. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν λ/σμῶν δίδουσι τὴν κατάστασιν αὐτῶν, τὸ δὲ σύνολον τῶν ὑπολοίπων δίδει τὴν γενικὴν κατάστασιν τῆς ἐπιχειρήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΑΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΙΣ ΤΩΝ Λ/ΣΜΩΝ

Οἱ λ/σμοὶ δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τέσσαρας κατηγορίας.

1ον) Εἰς τοὺς λ/σμούς, οἵτινες ἀντιπροσωπεύουσι τὸν ἴδιον ἐπιχειρηματίαν. Οὗτοι εἶνε οἱ λ/σμοὶ τοῦ **κεφαλαίου.**

2ον) Εἰς τοὺς λ/σμούς, τοὺς ἀντιπροσωπεύοντας τοὺς ὑπαλλήλους, οἵτινες εἶνε ὑπεύθυνοι διὰ τὴν φύλαξιν τῶν ἀξιῶν. Οὗτοι εἶνε οἱ λ/σμοὶ **ἀξιῶν.**

3ον) Εἰς τοὺς λ/σμοὺς τῶν προσώπων, μεθ' ὧν συναλλάσσεται ὁ ἔμπορος. Οὗτοι εἶνε οἱ λ/σμοὶ **τρίτων** · καὶ

4ον) Εἰς τοὺς λ/σμούς, εἰς οὓς καταχωρίζομεν τὰς ζημίας καὶ τὰ κέρδη τῆς ἐπιχειρήσεως. Οὗτοι εἶνε οἱ λ/σμοὶ **ἀποτελεσμάτων.**

1ον) **Λογαριασμοὶ κεφαλαίου.**

Ἡ κατηγορία αὕτη δὲν ἀντιπροσωπεύει εἰ μὴ μόνον τὸν λ/σμὸν τοῦ **κεφαλαίου,** ὅστις ἐκπροσωπεῖ τὸν ἐπιχειρηματίαν. Κατὰ τὴν ἵδρυσιν μιᾶς ἐπιχειρήσεως ὁ ἐπιχειρηματίας ἐμπιστεύεται εἰς τοὺς ὑπαλλήλους του τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα καθιέρωσε διὰ τὴν ἐπιχείρησίν του, δηλαδὴ τὴν συνεισφοράν του. Ὑποθέσωμεν ὅτι εἷς κεφαλαιοῦχος κατὰ τὴν ἵδρυσιν τῆς ἐπιχειρήσεώς του παρέδωσεν εἰς τὸν Ταμίαν του εἰς μετρητὰ τὸ ποσὸν Δρχ. 100 000. Διὰ τὴν πρᾶξιν ταύτην θὰ θέσωμεν τὰ ἀκόλουθα ἐρωτήματα.

Ποῖος ἔλαβεν ; Ο ΤΑΜΙΑΣ ἢ ΤΑΜΕΙΟΝ
Ποῖος ἔδωκεν ; Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥΧΟΣ ἢ ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ·
ὥστε τὸ ἄρθρον τοῦ ἀνοίγματος θὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως:

ΤΑΜΕΙΟΝ	Δρχ. 100.000 —	
Εἰς ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ		Δρχ. 100.000.—
ἀρχικὴ κατάθεσις		

Ἀντὶ μετρητῶν ὁ κεφαλαιοῦχος δύναται νὰ καταθέσῃ τὰ κεφάλαιά του εἰς ἑτέρας ἀξίας, π.χ. εἰς ἐμπορεύματα, γραμμάτια, τίτλους, ἀκίνητα κλπ.

Γενικῶς παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λ/σμὸς τοῦ Κεφαλαίου πάντοτε πιστοῦται. Δύναται ὅμως πολλάκις καὶ νὰ χρεωθῇ, ἐὰν ὁ ἔμπορος εἰσφέρῃ εἰς τὴν ἐπιχείρησίν του ἀξίαν παθητικήν, δηλαδὴ ἓν χρέος.

Ὑποθέσωμεν ὅτι εἷς ἔμπορος ἱδρύει μίαν ἐπιχείρησιν μὲ Δρχ. 40.000 εἰς μετρητά, Δρχ. 30.000 εἰς ἐμπορεύματα, ἐξ ὧν αἱ 5.000 ὀφείλονται εἰς διαφόρους προμηθευτάς. Εἶνε προφανὲς ὅτι ἐν τῷ ἡμερολογίῳ τὸ σχετικὸν ἄρθρον τοῦ ἀνοίγματος ὀφείλει ν' ἀναφέρῃ ἓν κεφάλαιον Δρχ. 30.000 + 40.000 — 5.000 = 65.000.

Εἰς τὸ ἡμερολόγιον θὰ διατυπώσωμεν τὰ ἀκόλουθα ἄρθρα.

ΤΑΜΕΙΟΝ	Δρχ.	40.000	
ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	»	30.000	
Εἰς ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ	»		70.000
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ	Δρχ.	5.000	
Εἰς ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΑΣ	»		5.000

Δυνάμεθα ὅμως τὰ δύο ἀνωτέρω ἄρθρα νὰ τὰ συμπτύξωμεν εἰς ἕν, ὡς ἑξῆς.

ΤΑΜΕΙΟΝ	Δρχ.	40.000	
ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	»	30.000	
Εἰς ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ	»		65.000
» ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΑΣ	»		5.000

Γενικῶς εἰς τὸν λ/σμὸν τοῦ **κεφαλαίου** δὲν ἐνεργοῦμεν καμμίαν ἐγγραφήν, εἰ μὴ μόνον εἰς τὸ τέλος τῆς χρήσεως, ἔνθα μεταφέρομεν τὰ ἀποτελέσματα αὐτῆς, ἤτοι τὰ κέρδη ἢ τὰς ζημίας. Τὰ κέρδη μεταφέρονται εἰς πίστιν τοῦ κεφαλαίου, αἱ δὲ ζημίαι εἰς χρέος αὐτοῦ. Τὸ κεφάλαιον ὅθεν αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρήσεως ἀναλόγως τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῆς.

2ον) **Λογαριασμοὶ ἀξιῶν.**

Ὡς ἀρχικῶς εἴδομεν, εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης ἐπιχειρήσεως χρεοῦνται οἱ λ/σμοὶ οἱ ἀποτελοῦντες τὸ κεφάλαιον. Οὗτοι εἶνε οἱ λ/σμοὶ ἀξιῶν (ἀκίνητα, μετρητά, ἐμπορεύματα κλπ.).

Οἱ λ/σμοὶ οὗτοι διαιροῦνται εἰς τρεῖς κατηγορίας·

1ον) Εἰς ἀξίας ἀκινητοποιηθείσας.

2ον) Εἰς ἀξίας διαθεσίμους καὶ

3ον) Εἰς ἀξίας προσωρινῶς μὴ διαθεσίμους.

1ον) **Ἀξίαι ἀκινητοποιηθεῖσαι.** Ταύτας ὁ ἔμπορος δὲν δύναται νὰ ἐκποιήσῃ χωρὶς νὰ προσκόψῃ εἰς τὴν πρόοδον τῆς ἐπιχειρήσεώς του, διότι καίτοι εἶνε κάτοχος αὐτῶν, ἐν τούτοις δὲν δύναται νὰ τὰς διαθέσῃ· π. χ. ὁ ἔμπορος ἐνοικιάζει μίαν ἀποθήκην καὶ καταθέτει ὡς ἐγγύησιν εἰς τὸν ἰδιοκτήτην Δρχ. 2.000, αἵτινες ἀντιπροσωπεύουσιν 6 μηνῶν ἐνοίκια· τὸ ποσὸν τοῦτο τῶν Δρχ. 2.000 ἀνήκει μὲν εἰς τὸν ἔμπορον, θὰ τῷ ἐπιστραφῇ ὅμως, ὅταν θὰ παύσῃ νὰ εἶνε ἐνοικιαστής. Ἐὰν θέλῃ νὰ διαθέσῃ τὰ χρήματα ταῦτα, πρότερον ὀφείλει νὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν ἀποθήκην καὶ συνεπῶς νὰ σταματήσῃ τὴν ἐπιχείρησίν του. Ἡ ἀξία αὕτη λέγεται ἀκινητοποιηθεῖσα (ἐνοίκιον προπληρωθέν). Οἱ αὐτοὶ λόγοι ἰσχύουσι διὰ μίαν ἐπίπλωσιν, διὰ μίαν ἐγκατάστασιν κλπ.

2ον) **Ἀξίαι διαθέσιμοι.** Ταύτας δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν εἰς οἱανδήποτε στιγμὴν εἰς μετρητά. Αἱ ἀξίαι αὗται εἶνε τὰ μετρητά, τὰ ἐμπορεύματα, τὰ γραμμάτια εἰσπρακτέα, οἱ τίτλοι, τὰ ἀκίνητα κλπ., ἤτοι ἀξίαι πραγματοποιήσιμοι, δηλαδὴ διαθέσιμοι εἴτε μετὰ κέρδους εἴτε μετὰ ζημίας εἴτε πολλάκις ἄνευ οὐδεμιᾶς διαφορᾶς.

3ον) **Ἀξίαι προσωρινῶς μὴ διαθέσιμοι.** Αὗται εἶνε ἀξίαι ἀκινητοποιηθεῖσαι, ἀλλὰ διὰ μίαν βραχεῖαν χρονικὴν περίοδον. Ἡ χρησιμοποίησις τῶν λ/σμῶν τούτων εἰς τὸ ἐμπόριον εἶνε σπανία. Οἱ ἔμποροι ἀνοίγουσι τοὺς λ/σμοὺς τούτους, ὅταν ἐνεργῶσι πράξεις κερδοσκοπικὰς ἢ συμετοχικάς, δι' ἃς διαθέτουσι διὰ μίαν χρονικὴν περίοδον ὡρισμένα κεφάλαια (ἐμπορεύματα, τίτλους κλπ). Εἶνε προφανὲς ὅτι κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον, καθ' ἣν ὁ ἔμπορος ἔχει διαθέσιμα πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον κεφάλαια, δὲν δύναται νὰ διαθέσῃ ταῦτα ἀλλαχοῦ.

Θἱ λ/σμοὶ ἀξιῶν οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε, χρεοῦνται μὲ ὅσα εἰσέρχονται καὶ πιστοῦνται μὲ ὅσα ἐξέρχονται. Τὰ ὑπόλοιπα πάντοτε εἶνε χρεωστικά, ἐφ' ὅσον δὲν ἐξέρχονται περισσότερα ἀφ' ὅσα εἰσῆλθον· τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα ἀντιπροσωπεύουσι τὰς μενούσας ἀξίας.

3ον) **Λογαριασμοὶ τρίτων.**

Οὗτοι εἶνε οἱ λ)σμοὶ τῶν προσώπων, μεθ' ὧν ὁ ἔμπορος εὑρίσκεται εἰς σχέσεις ἐμπορικὰς (πελάται, προμηθευταί, ἀνταποκριταὶ κλπ.). Ἐπίσης εἰς τὴν κατηγορίαν ταύτην δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν καὶ τὸν λ)σμὸν **γραμμάτια πληρωτέα,** ὃν κακῶς πολλοὶ κατατάσσουσιν εἰς τὰς διαθεσίμους ἀξίας, καθόσον ἐν τῇ πραγματικότητι ὁ λ)σμὸς οὗτος παρουσιαζει ἅπαντα τὰ ἀνώνυμα χρέη τοῦ ἐμπόρου.

Ὑποθέσωμεν ὅτι εἷς ἔμπορος ὀφείλει εἰς τὸν Α... προμηθευτήν του Δρχ. 1.000 διὰ τὴν ἀξίαν διαφόρων ἐμπορευμάτων ἀγορασθέντων παρ' αὐτοῦ.

Ποῖος ἔλαβεν; Η ΑΠΟΘΗΚΗ

Ποῖος ἔδωκεν; Ο Α...

Τὸ ἄρθρον ὅθεν θὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως.

ΑΠΟΘΗΚΗ	Δρχ. 1.000.		
Εἰς Α...			Δρχ. 1.000.

εἰς δὲ τὸ καθολικὸν ὁ λ)σμὸς τοῦ Α... θὰ παρουσιάζηται ὡς ἑξῆς.

Δ.	Α...	Λ.
		1.000.

ἤτοι ὁ Α... θὰ εἶνε πιστωμένος μὲ Δρχ. 1.000.

Ἐὰν ὁ Α... πρὸς κάλυψιν τοῦ λαβεῖν του ἐκδώσῃ ἐπὶ τοῦ ἐμπόρου συν)κὴν 3 μηνῶν, ὁ λ)σμὸς τοῦ Α... θὰ χρεωθῇ πρὸς ἐξόφλησιν, θὰ πιστωθῇ δὲ ὁ λ)σμὸς γραμμάτια πληρωτέα· ὥστε θὰ διατυπώσωμεν τὸ ἀκόλουθον ἄρθρον.

Α...	Δρχ. 1.000.—		
Εἰς ΓΡΑΜ. ΠΛΗΡΩΤΕΑ			Δρχ. 1.000.—

εἰς δὲ τὸ καθολικὸν ὁ λ)σμὸς τοῦ Α... θὰ παρουσιάζηται ὡς ἀκολούθως.

Δ.	Α... Λ.
Δρχ. 1.000	Δρχ. 1.000

Εἰς τοὺς λ)σμοὺς τρίτων ἀνάγεται καὶ ὁ λ)σμὸς τῶν **ἐπισφαλῶν χρεωστῶν,** ὅστις περιληπτικῶς ἀντιπροσωπεύει τοὺς ἀναξιοχρέους πελάτας.

4ον) **Λογαριασμοὶ ἀποτελεσμάτων.**

Ἑκάστην φοράν, καθ' ἣν διακρίνομεν κέρδη ἢ ζημίας εἰς μίαν ἐπιχείρησιν, καταχωρίζομεν τὸ σχετικὸν ποσὸν εἰς ἕνα εἰδικὸν λ)σμόν, ὅστις ὀνομάζεται **«λογαριασμὸς ἀποτελεσμάτων»** ἢ συνήθως **«ζημίαι καὶ κέρδη».** Πολλάκις συνηθίζουσι νὰ τιτλοφορῶσιν ἀντιστρόφως τὸν λ)σμὸν τοῦτον, ἤτοι **«κέρδη καὶ ζημίαι»**· τοῦτο ὅμως δὲν εἶνε ὀρθόν, διότι αὐτὴ αὕτη ἡ διάταξις τοῦ λ/σμοῦ ὁδηγεῖ, ὅπως τὰς ζημίας καταχωρίζομεν εἰς τὸ Δοῦναι καὶ τὰ κέρδη εἰς τὸ Λαβεῖν.

Ἰδοὺ ὑπόδειγμα λ)σμοῦ ἀποτελεσμάτων.

Δ. Ζημίαι	Κέρδη Λ.
Καταχώρισις Ζημιῶν	Καταχώρισις Κερδῶν

Ὁ λ)σμὸς ζημίαι καὶ κέρδη συνήθως ὑποδιαιρεῖται εἰς διαφόρους ἄλλους λ)σμούς, ὧν ὁ σπουδαιότερος εἶνε ὁ λ)σμὸς **«Γενικὰ ἔξοδα».** Εἰς τὸν λ)σμὸν τοῦτον καταχωρίζομεν τὰ ἀναγκαιοῦντα ἔξοδα διὰ τὴν συντήρησιν καὶ ἀνάπτυξιν πάσης ἐπιχειρήσεως. Ἄνευ τῶν ἐξόδων τούτων δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ εὐδοκιμήσῃ οὐδεμία ἐπιχείρησις. Τὰ ἔξοδα ταῦτα εἶνε τὰ **ἐνοίκια, οἱ μισθοί, τὰ ἡμερομίσθια, αἱ διαφημίσεις, ὁ φωτισμός, τὰ γραφικὰ ἔξοδα, τὰ ταχυδρομικὰ κλπ.** Πάντοτε σχεδὸν ἐνεργοῦμεν τὴν ἀκόλουθον ἐγγραφήν.

ΓΕΝΙΚΑ ΕΞΟΔΑ Δρχ.

Εἰς ΤΑΜΕΙΟΝ Δρχ.

Εἰς τὴν αὐτὴν κατηγορίαν ὑπάγονται καὶ οἱ λ)σμοί:

ΕΚΠΤΩΣΕΙΣ. Χρεούμενος διὰ τῶν εἰς διαφόρους πελάτας παραχωρουμένων ἐκπτώσεων καὶ πιστούμενος διὰ τῶν παρὰ τῶν προμηθευτῶν παραχωρουμένων ἡμῖν.

ΑΤΟΜΙΚΑ ΕΞΟΔΑ. Χρεούμενος μὲ τὰς ἑκάστοτε ἀναλήψεις τοῦ ἐμπόρου.

ΤΟΚΟΙ, ΠΡΟΜΗΘΕΙΑΙ κλπ. Χρεούμενοι μὲ τοὺς παραχωρουμένους εἰς διαφόρους τόκους καὶ προμηθείας καὶ πιστούμενοι μὲ τοὺς παραχωρουμένους ἡμῖν.

Τὰ ὑπόλοιπα τῶν λ)σμῶν τούτων εἰς τὸ τέλος τῆς χρήσεως μεταφέρομεν εἰς τὸν λ)σμὸν **ζημίαι καὶ κέρδη.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΑΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΙΣΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ὁρισμός. Ἡ ἀπογραφὴ εἶνε τὸ σύνολον τῶν πράξεων, αἵτινες ἔχουσιν ὡς σκοπὸν νὰ παρουσιάζωσιν εἰς ὡρισμένας χρονικὰς περιόδους (ἑνὸς ἔτους ἢ ἓξ μηνῶν) τὴν ἀκριβῆ κατάστασιν μιᾶς ἐπιχειρήσεως καὶ προσδιορίζωσι τὰ ἀποτελέσματα τῆς χρήσεως, ἤτοι τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν. Τὴν ἐτησίαν κατάστασιν ἑκάστης ἐπιχειρήσεως ζητεῖ καὶ ὁ Νόμος. Αὕτη ἐκτίθεται ἐπὶ ἑνὸς πίνακος διῃρημένου εἰς δύο μέρη· εἰς **ἐνεργητικὸν** καὶ εἰς **παθητικόν**. Ὁ πίναξ οὗτος ὀνομάζεται **ἰσολογισμός.**

Γενικῶς ὑπάρχουσι δύο εἴδη ἀπογραφῶν. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀπογραφὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ἀπογραφή.

1ον) Ἐσωτερικὴ ἀπογραφή.

Ἐσωτερικὴ ἀπογραφὴ λέγεται ἡ λεπτομερὴς καταγραφὴ πασῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει ἀξιῶν, ἤτοι

ΤΑΜΕΙΟΝ. Ἡ καταμέτρησις τῶν ἐν τῷ Ταμείῳ μετρητῶν καὶ ἡ ἐξακρίβωσις, ἐὰν ὑφίσταται καμμία ταμιακὴ διαφορά.

ΑΠΟΘΗΚΗ. Ἡ λεπτομερὴς καταγραφὴ τῶν ἐν τῇ ἀποθήκῃ εὑρισκομένων ἐμπορευμάτων εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῶν ἀξίαν καὶ οὐχὶ εἰς τὴν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς ἀπογραφῆς ἀξίαν αὐτῶν.

ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ ΕΙΣΠΡΑΚΤΕΑ. Καταμέτρησις τῶν ἐν τῷ χαρτοφυλακίῳ εὑρισκομένων γραμματίων εἰσπρακτέων.

ΕΠΙΠΛΑ ΚΑΙ ΣΚΕΥΗ ΚΛΠ. Λεπτομερὴς καταγραφὴ τῶν διαφόρων ἐπίπλων καὶ σκευῶν κλπ.

ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ ΠΛΗΡΩΤΕΑ. Σύνταξις πίνακος τῶν ἐν κυκλοφορίᾳ γραμματίων πληρωτέων.

2ον) Ἐξωτερικὴ ἀπογραφή.

Μετὰ τὴν καταγραφὴν πασῶν τῶν ἀξιῶν θέλομεν ἐνεργήσει ἐν τῷ ἡμερολογίῳ τὰς σχετικὰς ἐγγραφὰς πρὸς ἐξαγωγὴν τῶν ὁριστικῶν ἀποτελεσμάτων τῆς χρήσεως. Πρότοῦ ὅμως ἐνεργήσωμεν οἱανδήποτε ἐγγραφήν, ὀφείλομεν νὰ συντάξωμεν τὸ προσωρινὸν ἰσοζύγιον. Μετὰ τὴν σύνταξιν τοῦ προσωρινοῦ ἰσοζυγίου θέλομεν ἐνεργήσει τὰς ἀναλόγους **ἀποσβέσεις** τῶν ἀκινητοποιηθεισῶν ἀξιῶν (ἐπίπλων, σκευῶν, ἐγκαταστάσεων, μηχανημάτων κλπ.). **Ἀπόσβεσις** δὲ λέγεται ἡ λογιστικὴ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπιβαρύνομεν πολλὰς χρήσεις μὲ μίαν δαπάνην, ἡ ὁποία δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ καταλογισθῇ εἰς μίαν καὶ μόνην χρῆσιν.

Ἀποσβέσεις ἀκινητοποιηθεισῶν ἀξιῶν. Εἶνε προφανὲς ὅτι τὸ χρεωστικὸν ὑπόλοιπον ἑκάστης ἀκινητοποιηθείσης ἀξίας δὲν εἶνε σύμφωνον μὲ τὴν πραγματικότητα, ἐφ' ὅσον ἡ ἀξία ἑνὸς ἀντικειμένου ἐλαττοῦται καθ' ἕκαστον ἔτος προοδευτικῶς. Πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς ἀνωμαλίας ταύτης ἀνοίγομεν εἰδικὸν λ/σμὸν «ἀποθε-

ματικῶν ἀποσβέσεων», εἰς ὃν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς ἀπογραφῆς μεταφέρομεν ἐκ τοῦ λ/σμοῦ «ζημίαι καὶ κέρδη» ἀνάλογα ποσά.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἠγοράσαμεν ἓν ἔπιπλον ἀξίας Δρχ. 1.000· θὰ ἐνεργήσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐγγραφήν.

ΕΠΙΠΛΑ	Δρχ. 1.000	
Εἰς ΤΑΜΕΙΟΝ		Δρχ. 1.000

καὶ ἐν τῷ καθολικῷ :

ΕΠΙΠΛΑ

1.000	α

Ἐὰν ἐκτιμήσωμεν τὴν διάρκειαν τοῦ ἐπίπλου τούτου διὰ μίαν δεκαετίαν, θὰ κατανείμωμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ εἰς 10 μερίδια, ἕκαστον δὲ ἔτος θέλομεν ἀποσβύνει ἓν μερίδιον, ἤτοι Δρχ. 100.

Εἰς τὸ τέλος ὅθεν τοῦ ἔτους θὰ ἐνεργήσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐγγραφήν.

ΖΗΜΙΑΙ ΚΑΙ ΚΕΡΔΗ	Δρχ. 100	
Εἰς ΑΠΟΘ. ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΝ		Δρχ. 100

καὶ ἐν τῷ καθολικῷ :

ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΟΝ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΝ

	1ον ἔτος Δρχ. 100
	2ον » » 100
	3ον » » 100 κλπ.

κατὰ τὸ δέκατον δὲ ἔτος παύομεν τὴν ἀπόσβεσιν καὶ ἐνεργοῦμεν τὴν ἀκόλουθον ἐγγραφὴν πρὸς ἐξίσωσιν τοῦ λ/σμοῦ **ἔπιπλα**, ὅστις θὰ εἶνε χρεωστικὸς μὲ Δρχ. 1.000, καὶ τοῦ λ/σμοῦ ***«ἀποθεματικὸν ἀποσβέσεων»***, ὅστις θὰ εἶνε πιστωτικὸς μὲ Δρχ. 1.000.

ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΟΝ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΝ	Δρχ. 1.000	
Εἰς ΕΠΙΠΛΑ		Δρχ. 1.000

Πολλοί, ἀντὶ ν' ἀνοίγωσιν εἰδικὸν λ/σμὸν διὰ τὰς ἀποσβέσεις, ἐκπίπτουσι καθ' ἕκαστον ἔτος ἐκ τῶν ἀποσβέσεων ἀξιῶν τὸ ἀνάλογον ποσόν. Τὸ τοιοῦτον δὲν εἶνε ὀρθόν, καθόσον δύνανται νὰ προκύψωσι πολλαὶ ἀνωμαλίαι καὶ παραπλανήσεις. Πολλάκις εἰς τὰς μεγάλας ἐπιχειρήσεις δι' ἕνα ἕκαστον ἀποσβεστέον λ/σμὸν σχηματίζουσι καὶ ἀντίστοιχον λ/σμὸν ἀποθεματικῶν ἀποσβέσεων, ὡς λ.χ. Ἀποθ. ἀποσβ. ἐπίπλων, ἐξόδων ἐγκαταστάσεων, μηχανημάτων κλπ. Οἱ λ/σμοὶ οὗτοι λειτουργοῦσιν, ὡς ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Κέρδη. Γενικῶς τὰ διάφορα κέρδη τῆς ἐπιχειρήσεως συγκεντροῦνται εἰς τὸν λ/σμὸν ἀποτελεσμάτων ἢ ζημιῶν καὶ κερδῶν δι' ἑνὸς ἄρθρου κλείοντος τοὺς οἰκείους λ/σμούς. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐξαχθὲν ἐκ τῶν πωλήσεων τῆς ἀποθήκης κέρδος ἀνέρχεται εἰς Δρχ. 10.000, ὁ λ/σμὸς **προμήθειαι** παρουσιάζει πιστωτικὸν ὑπόλοιπον Δρχ. 100 καὶ ὁ λ/σμὸς μεσιτειῶν Δρχ. 50. Θὰ ἐνεργήσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐγγραφήν.

ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	Δρχ. 10.000.—	
Μικτὸν κέρδος ἐμπορ.		
ΠΡΟΜΗΘΕΙΑΙ	» 100.—	
Μεταφορὰ πρὸς ἐξίσωσιν		
ΜΕΣΙΤΕΙΑΙ	» 50.—	
Μεταφορὰ κλπ.		
Εἰς ΖΗΜΙΑΣ ΚΑΙ ΚΕΡΔΗ		Δρχ. 10.150.—

Ζημίαι. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ἁπάσας τὰς ζημίας συγκεντροῦμεν εἰς ἓν ἄρθρον. Ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἀκόλουθοι λ/σμοὶ παρουσιάζουσι τὰ κάτωθι χρεωστικὰ ὑπόλοιπα. Γενικὰ ἔξοδα Δρχ. 4.000. Προσωπικὰ ἔξοδα Δρχ. 2.500. Τόκοι Δρχ. 200.

Θὰ ἐνεργήσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐγγραφήν.

ΖΗΜΙΑΙ ΚΑΙ ΚΕΡΔΗ	Δρχ. 6.700.—	
Εἰς ΓΕΝΙΚΑ ΕΞΟΔΑ		Δρχ. 4.000.—
» ΠΡΟΣΩΠΙΚΑ ΕΞΟΔΑ		» 2.000.—
» ΤΟΚΟΥΣ		» 200.—

ΜΙΚΤΟΝ ΚΕΡΔΟΣ

Ὁ λ/σμὸς ἐμπορεύματα κατὰ τὸ τέλος τῆς χρήσεως θὰ παρουσιασθῇ χρεωστικὸς ἢ πιστωτικός, χωρὶς νὰ δεικνύῃ τὸ προκῦψαν κέρδος. Πρὸς ἐξαγωγὴν τοῦ κέρδους ὀφείλομεν νὰ ἐνεργήσωμεν διαφόρους ἀριθμητικὰς πράξεις. Ὑποθέσωμεν ὅτι κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς χρήσεως ἡ ἀποθήκη εἶχεν ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 5.000, αἱ δὲ ἀγοραὶ καθ' ὅλον τὸ ἔτος ἀνῆλθον εἰς Δρχ. 12.000. Αἱ πωλήσεις ἀνῆλθον εἰς Δραχ. 19.000. Ὁ λ/σμὸς ἐμπορεύματα θὰ παρουσιάζηται ὡς ἀκολούθως.

ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ

Μένοντα	5.000.—	Πωλήσεις	19.000.—
Ἀγοραὶ	12.000.—		

Ἀφ' ἑτέρου ἡ ἀπογραφὴ τῆς ἀποθήκης παρουσίασε κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους μένοντα ἐμπορεύματα ἀξίας Δρχ. 8.000. Δὲν εἶνε δύσκολον ὅθεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ προκῦψαν κέρδος.

19.000 + 8.000 — 17.000 =10.000.
Πωλήσεις Μένοντα Εἰσαχθέντα μικτὸν κέρδος·

εἰς τὸ ἡμερολόγιον θὰ ἐνεργήσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐγγραφήν.

ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	Δρχ. 10.000.	
Εἰς ΖΗΜΙΑΣ ΚΑΙ ΚΕΡΔΗ		Δρχ. 10.000.

Ὁ δὲ λ/σμὸς ἐμπορεύματα θὰ παρουσιάζηται ὡς ἀκολούθως:

ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ

Μένοντα	5.000.—	Πωλήσεις	10.000.—
Ἀγοραὶ	12.000.—	Μένοντα	8.000.—
Μικτὸν κέρδος	10.000.—		
	27.000.—		27.000.—
Εἰς νέον	8.000.—		

ΟΡΙΣΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τὰ ὁριστικὰ ἀποτελέσματα ἐξάγονται ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ λ/σμοῦ ζημίαι καὶ κέρδη, ἀφοῦ πρότερον συγκεντρώσωμεν ἅπαντα τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαφόρων λ/σμῶν ἀποτελεσμάτων.

ΖΗΜΙΑΙ ΚΑΙ ΚΕΡΔΗ

Γενικὰ ἔξοδα	4.000	Μικτὸν κέρδος	10.000.—
Προσωπ. »	2.500	Προμήθειαι	100.—
Τόκοι »	200	Μεσιτεῖαι	50.—
	6.700		
Διαφορὰ κέρδ.	3.450		
	10.150		10.150.—

Τὸ ὁλικὸν τῶν ζημιῶν ἀνῆλθεν εἰς Δρχ. 6.700 καὶ τῶν κερδῶν εἰς Δρχ. 10.150 ἤτοι προέκυψε διαφορὰ ἐπὶ πλέον Δρχ. 3.450.

Γενικῶς ὁ ἔμπορος τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεώς του τὸ ἀφίνει πρὸς αὔξησιν τῶν κεφαλαίων του. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ ἐνεργήσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐγγραφήν.

ΖΗΜΙΑΙ ΚΑΙ ΚΕΡΔΗ Δρχ. 3.450.—

Εἰς ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δρχ. 3.450.—

Ἐὰν τυχὸν προκύψῃ κατὰ τὴν χρῆσιν ζημία, θὰ γίνῃ ἡ ἀντίστροφος ἐγγραφή:

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δρχ. ——

Εἰς ΖΗΜΙΑΣ ΚΑΙ ΚΕΡΔΗ Δρχ. ——

Μετὰ τὰς ἐγγραφὰς τῆς ἀπογραφῆς, ἃς θὰ ἐνεργήσωμεν εἰς τὸ ἡμερολόγιον καὶ τὸ καθολικόν, θὰ συγκεντρώσωμεν ἅπαντα τὰ ὑπόλοιπα εἰς ἓν ὁριστικὸν ἰσοζύγιον, ἐξ οὗ θέλομεν ἐξαγάγει τὸν ***ἰσολογισμόν.***

ΙΣΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ἰσολογισμὸς εἶνε εἷς πίναξ διῃρημένος εἰς δύο μέρη, εἰς **ἐνεργητικὸν** καὶ εἰς **παθητικόν.** Οὗτος δεικνύει τὴν οἰκονομικὴν κατάστασιν τῆς ἐπιχειρήσεως. Ἰδοὺ ἓν ὑπόδειγμα ἰσολογισμοῦ.

ΙΣΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ 31 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 1922

ΑΞΙΑΙ ΑΚΙΝΗΤΟΠΟΙΗΘΕΙΣΑΙ		ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ	61.400.—
Ἔξοδα ἐγκαταστ.	10.000.—		
Ἐνοίκ. προπλ.	2.000.—	Λ/ΣΜΟΙ ΤΑΞΕΩΣ	
Ἔπιπλα	5.000.—	Ἀποθεματικόν	5.000.—
		Ἀποσβέσεις	2.000.—
ΑΞΙΑΙ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟΙ		Ἔξοδα πληρωτέα	800.—
Ταμεῖον	7.000.—		
Τράπεζα	3.000.—	Λ/ΣΜΟΙ ΤΡΙΤΩΝ	
Ἐμπορεύματα	40.000.—	Γραμ. πληρωτ.	9.000.—
Γραμ. εἰσπρακτέα	6.000.—	Πιστωταί	15.000.—
ΑΞΙΑΙ ΜΗ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟΙ			
Συμμετοχικὰ ἐμπορ.	8.000.—		
Λ/ΣΜΟΙ ΤΡΙΤΩΝ			
Χρεῶσται	10.000.—		
Ἐπισφ. χρεῶσται	2.000.—		
Λ/ΣΜΟΙ ΤΑΞΕΩΣ			
Γεν. ἔξοδα προπληρωθ.	200.—		
	93.200.—		93.200.—

ΒΙΒΛΙΟΝ ΑΠΟΓΡΑΦΩΝ

Τὸ βιβλίον ἀπογραφῶν εἶνε ὑποχρεωτικὸν ὑπὸ τοῦ Νόμου. Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο καταχωρίζομεν τὸν ἰσολογισμὸν μὲ ἁπάσας ἀναλυτικῶς τὰς λεπτομερείας τῆς ἀπογραφῆς, ἤτοι θέλομεν ἀναφέρει ἀναλυτικῶς τὰ ἐμπορεύματα, τὰ γραμμάτια εἰσπρακτέα, τὰ μετρητά, τὰ ἐν κυκλοφορίᾳ γραμμάτια κλπ.

ΚΛΕΙΣΙΜΟΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἵνα κλείσωμεν τοὺς λ/σμοὺς τοῦ καθολικοῦ ἐξισοῦμεν τούτους, δηλαδὴ ἐγγράφομεν εἰς τὸ ἀσθενέστερον μέρος αὐτῶν τὰ ὑπόλοιπα, ὁπότε τὰ ποσὰ τοῦ δοῦναι καὶ τοῦ λαβεῖν γίνονται ἴσα. Κάτωθεν τῶν ἀθροισμάτων θέτομεν διπλῆν γραμμήν, μεταφέρομεν δὲ εἰς νέον τὴν ἐξίσωσιν, ἵνα ἀνανεωθῇ καὶ πάλιν ὁ λ/σμός.

ΤΕΛΟΣ

Κ. Ξ. ΠΑΠΑΝΙΚΗΤΟΠΟΥΛΟΥ

Πρακτικὴ Γεωμετρία (ἐποπτικῶς συντεταγμένη) διὰ τ
Ἑλληνικὰ Σχολεῖα, τὰ Ἀστικὰ καὶ τὰ Ἀνώτερα Παρθεναγωγεῖ
Ἐγκριθεῖσα τὸ ἔτος 1921. Ἔκδοσις δευτέρα.

Ἀριθ. (*Πρωτ. 12.306*
(*Διεκπ.*

Ἐν Ἀθήναις τῇ 16 Ἀπριλίου 1922

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ
ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Κ. Ξ. Παπανικητόπουλον συγγραφέα διδ
κτικῶν βιβλίων.

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι δι' ἡμετέρας πράξεως τῇ 19 τοῦ λήξα
τος μηνὸς ἐκδοθείσης καὶ τῇ 8 ἱσταμένου δημοσιευθείσης ἐν τῷ ὑ
ἀριθ. 21 φύλλῳ τῆς Ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως ἐνεκρίθη
πρὸς κρίσιν ὑποβληθὲν ἡμέτερον βιβλίον **Πρακτικὴ Ἀριθμη
τικὴ** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων, τ
Ἀστικῶν καὶ τῶν ἀνωτέρων Παρθεναγωγείων.

Ὁ Ὑπουργὸς
Κ. Πολυγένης

Π. Ζαγανιάρης