5313

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Θ΄ Γυμνασίου Ἀθηνῶν.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων, Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰ Σχολεῖα Δοκίμων, Εὐελπίδων καὶ διὰ τὸ Πολυτεχνεῖον.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ

ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚΔΟΤΑΙ: Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ ΚΑΙ Σ^ΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„ — ΣΤΑΔΙΟΥ 50
1929

ΛΥΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑΣ
Ι. Ν. ΧΑΤΖΗΔΑΚΙ

Σελ. 28 — 1) Ἡ συμπληρωματικὴ αὐτῆς εἶναι

1 ὀρ. $- \frac{3}{5}$ ὀρ. $= \frac{2}{5}$ ὀρ. καὶ ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς εἶναι

2 ὀρ. $- \frac{3}{5}$ ὀρ. $= 1\frac{2}{5}$ ὀρ.

2) Ἡ συμπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι

1 ὀρ. $- \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)$ ὀρ. $= 1$ ὀρ. $- \frac{11}{15}$ ὀρ. $= \frac{4}{15}$ ὀρ. καὶ τῆς διαφορᾶς των εἶναι

1 ὀρ. $- \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)$ ὀρ. $= 1$ ὀρ. $- \frac{1}{15}$ ὀρ. $= \frac{14}{15}$ ὀρ.

3) Ἡ κατὰ κορυφὴν πρὸς τὴν δοθεῖσαν εἶναι $\frac{5}{6}$ ὀρ. (§ 41) καὶ ἡ ἐφεξῆς τῆς δοθείσης εἶναι 2 ὀρ. $- \frac{5}{6}$ ὀρ. $= \frac{7}{6}$ ὀρ. (§ 53)· $\frac{7}{6}$ ὀρ. εἶναι καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς εὑρεθείσης παραπληρωματικῆς τῆς δοθείσης.

4) Ὅλαι αἱ γωνίαι αἱ ἔχουσαι κοινὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης ὀρθῆς γωνίας ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθῶν· ἄρα αἱ 5 ἴσαι σχηματισθεῖσαι γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 3 ὀρ.· καὶ ἑκάστη τούτων ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{3}{5}$ ὀρ.

5) Λαμβάνομεν ΑΟΓ + ΓΟΒ = 2 ὀρ. (§ 53) καὶ ἐπειδὴ ΑΟΓ = ΒΟΔ, ἕπεται ὅτι ΓΟΒ + ΒΟΔ = 2 ὀρ.· ἄρα αἱ ΟΓ καὶ ΟΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (§ 56).

6) Εἶναι ΒΔΕ + ΑΔΕ = ΒΕΔ + ΓΕΔ (§ 53) καὶ ἀφοῦ δίδεται ΒΔΕ = ΒΕΔ, ἕπεται, ὅτι εἶναι καὶ ΑΔΕ = ΓΕΔ.

7) Διότι τὸ ἄθροισμα, τῶν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν, αἵτινες ἔχουσι κοινὴν πλευράν, τὴν κοινὴν πλευρὰν τῶν δοθεισῶν παραπληρωμα-

τικῶν γωνιῶν καὶ τὰς ἄλλας πλευράς, τὰς διχοτομούσας, τὰς δύο δοθείσας, εἶναι 1 ὀρθὴ γωνία.

8) Ἀφοῦ αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, καὶ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῆς μιᾶς, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης, διὰ νὰ ἔχωμεν ἄθροισμα 1 ὀρθῆς γωνίας, ἤτοι ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς μιᾶς γωνίας, πρέπει νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς ἄλλης.

9) Ἔστω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο· καὶ ΟΕ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΔ καὶ ΟΖ ἡ διχοτόμος τῆς ΓΟΒ, ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς ΑΟΔ· ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι ἡ $ΑΟΓ + ΑΟΔ = 2$ ὀρ.· ἀλλὰ $ΑΟΔ = ΑΟΕ + ΖΟΓ$· ὥστε $ΑΟΕ + ΑΟΓ + ΖΟΓ = 2$ ὀρ. ἢ $ΓΟΕ + ΖΟΓ = 2$ ὀρ. καὶ ἐπομένως αἱ ΟΕ καὶ ΟΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (§ 56).

10) Ἐὰν ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι αἱ δοθεῖσαι γωνίαι καὶ εἶναι $ΑΒΓ — ΑΒΔ = 1$ ὀρ. διχοτόμος δὲ τῆς ΑΒΓ εἶναι ἡ ΒΕ καὶ διχοτόμος τῆς ΑΒΔ εἶναι ἡ ΒΖ εἶναι προφανὲς ὅτι

$$ΖΒΕ = ΑΒΕ — ΑΒΖ = \frac{ΑΒΓ}{2} — \frac{ΑΒΔ}{2} = \frac{ΑΒΓ - ΑΒΔ}{2} = \frac{1}{2}\text{ ὀρ.}$$

Σελ. 35 — 11) Ἐκ τῶν ὀκτὼ τούτων γωνιῶν ἑκάστη τῶν 4 εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2}{7}$ ὀρ. ἑκάστη δὲ τῶν ἄλλων 4, εἶναι ἴση πρὸς τὴν παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης, ἤτοι $\frac{12}{7}$ ὀρ.

12) Φέρομεν διὰ τοῦ Ε παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν ΕΖ ἥτις εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΓΔ (§ 64) καὶ ἥτις κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΕΓ. Εἶναι δὲ $ΑΕΖ = ΒΑΕ$, (§ 65, 2) καὶ $ΖΕΓ = ΕΓΔ$ (§ 65, 2)· ἄρα εἶναι καὶ $ΑΕΖ + ΖΕΓ = ΒΑΕ + ΕΓΔ$ ἢ $ΑΕΓ = ΒΑΕ + ΕΓΔ$.

13) Ὁμοίως φέρομεν ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἀντίρροπον αὐταῖς, τὴν ΕΖ· εἶναι δὲ $ΑΕΖ = ΒΑΕ$ καὶ $ΓΕΖ = ΕΓΔ$· ἄρα εἶναι καὶ $ΑΕΖ — ΓΕΖ = ΒΑΕ — ΕΓΔ$ ἢ $ΑΕΓ = ΒΑΕ — ΕΓΔ$.

14) Διότι σχηματίζουν μετὰ τῆς κοινῆς τεμνούσης, γωνίας ἐντὸς ἐναλλάξ, ἴσας, ἐπειδὴ εἶναι ἡμίσεα ἴσων γωνιῶν.

15) Ἐὰν α καὶ β εἶναι, ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κ.τ.λ. γωνίαι καὶ γ εἶναι ἡ γωνία, ἥτις εἶναι ἐφεξῆς τῆς β, ἐκτὸς δὲ καὶ

ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς α, τότε αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν α καὶ γ εἶναι παράλληλοι, ἐπειδὴ σχηματίζουν μετὰ τῆς κοινῆς τεμνούσης γωνίας ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἴσας ($\alpha = \gamma$)· ἀλλ' αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν β καὶ γ εἶναι κάθετοι (ἄσκ. 7)· ἄρα καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας α, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας γ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας β. (§ 66).

16) Ἐὰν ΒΑΗ καὶ ΕΔΖ εἶναι αἱ τοιαῦται γωνίαι (σχ. σελ. 34) καὶ ΑΛ ἡ διχοτόμος τῆς πρώτης γωνίας καὶ ΔΜ ἡ διχοτόμος τῆς δευτέρας, τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΑΗ τῆς πρώτης εἰς τὸ σημεῖον Μ, εἶναι προφανῶς $\text{ΛΑΗ} = \text{ΜΔΖ}$· ἀλλὰ εἶναι καὶ $\text{ΑΜΔ} = \text{ΜΔΖ}$ (§ 65, 2)· ἄρα ἔχομεν $\text{ΛΑΗ} = \text{ΑΜΔ}$ ἤτοι αἱ ΑΛ καὶ ΔΜ εἶναι παράλληλοι (θεώρ. σελ. 30 περίπ. 2).

17) Τοιαῦται γωνίαι εἶναι αἱ ΒΑΗ καὶ ΕΔΙ (σχ. σελ. 34)· ἀλλ' ἡ διχοτόμος τῆς δευτέρας γωνίας, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΕΔΖ (ἄσκ. 7), ἄρα εἶναι κάθετος, καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΗ.

18) Τοιαῦται γωνίαι εἶναι αἱ ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ (σχ. σελ. 35)· καὶ ΑΚ ἡ διχοτόμος τῆς πρώτης καὶ ΔΛ τῆς δευτέρας γωνίας· ἤδη φέρομεν καὶ τὴν διχοτόμον τῆς ΘΑΗ τὴν ΑΝ· ἀλλὰ ἔχομεν $\text{ΘΑΗ} = \text{ΕΑΖ}$ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι· ἄρα εἶναι $\text{ΑΝ} \parallel \text{ΔΛ}$ (δηλ. ἡ ΑΝ εἶναι παράλληλος τῇ ΔΛ, ἄσκ. 16)· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι $\text{ΒΑΓ} + \text{ΓΑΘ} = 1$ ὀρ. ἢ $\text{ΒΑΚ} + \text{ΚΑΓ} + \text{ΓΑΘ} = 1$ ὀρ. καὶ ἐπειδὴ $\text{ΒΑΚ} = \text{ΘΑΝ}$ (ὡς ἡμίσεα ἴσων γωνιῶν), ἕπεται ὅτι

$$\text{ΚΑΓ} + \text{ΓΑΘ} + \text{ΘΑΝ} = 1 \text{ ὀρ.} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΚΑΝ} = 1 \text{ ὀρ.}$$

ἤτοι ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΝ, ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου της ΔΛ.

19) Τοιαῦται γωνίαι εἶναι αἱ ΒΑΓ καὶ ΜΑΖ (σχ. σελ. 35)· ἀλλ' ἡ διχοτόμος τῆς ΜΔΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς ΕΔΖ (ἄσκ. 7)· ἄρα ἡ πρώτη διχοτόμος εἶναι παράλληλος, ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ (§. 60).

Σελ. 39 — 20) Ἂν Α, Β, Γ εἶναι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου καὶ εἶναι $\text{Α} + \text{Β} = \text{Γ}$, ἔχομεν $\text{Α} + \text{Β} + \text{Γ} = 2$ ὀρ. (§. 72)· καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ $\text{Α} + \text{Β}$ διὰ τῆς Γ, $\text{Γ} + \text{Γ} = 2$ ὀρ. ἢ $2\text{Γ} = 2$ ὀρ. καὶ $\text{Γ} = 1$ ὀρ.

21) Ὁμοίως ἂν $\text{Α} + \text{Β} < \text{Γ}$, ἐπειδὴ $\text{Α} + \text{Β} + \text{Γ} = 2$ ὀρ. ἕπεται, ὅτι $\text{Γ} + \text{Γ} > 2$ ὀρ. ἢ $2\text{Γ} > 2$ ὀρ. καὶ $\text{Γ} > 1$ ὀρ.

22) Εἶναι $2 \cdot 12 - 4 = 20$ ὀρ.

23) Ἐὰν εἰς τὸν 8 προσθέσωμεν τὸν 4 εὑρίσκομεν τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν· ἐπειδὴ δὲ $8 + 4 = 12$, ἕπεται ὅτι τὸ πολύγωνον τοῦτο ἔχει 6 πλευράς.

24) Ἔστω $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, αἱ σχηματιζόμεναι ἐξωτερικαὶ γωνίαι· καὶ Ο σημεῖον τι, τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου, ἐξ οὗ φέρομεν εὐθείας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς προεκταθείσας πλευράς, ὁπότε σχηματίζονται αἱ γωνίαι Α, Β, Γ κ. τ. λ. ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = \Gamma \ldots$, ἕπεται ὅτι $\alpha + \beta + \gamma \ldots = A + B + \Gamma \ldots$ ἀλλὰ προφανῶς ἔχομεν $A + B + \Gamma \ldots = 4$ ὀρ. (§. 55) ἄρα εἶναι καὶ $\alpha + \beta + \gamma \ldots = 4$ ὀρ.

25) Δίδεται ἑπομένως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι 4 ὀρθαί· ἄρα κατὰ τὴν ἄσκησιν 23, ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι $\frac{4+4}{2} = 4$.

26) Διότι τὸ ἄθροισμα 2 ἐξ. γωνιῶν παντὸς τριγώνου καὶ τῶν 2 ἐσωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ, αἵτινες εἶναι ἐφεξῆς πρὸς τὰς ἐξωτερικὰς εἶναι 4 ὀρθαί· ἐπειδὴ δὲ αἱ 2 ἐσωτερικαὶ αὗται γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν 2 ὀρθῶν, ἕπεται ὅτι αἱ δύο ἐξωτερικαὶ ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν.

27) Ἕκαστον τρίγωνον εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἢ καὶ τὰς τρεῖς γωνίας του ὀξείας ἢ τὰς δύο μόνον· ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐφεξῆς της ἐσωτερικῆς, ἕπεται ὅτι ἢ καὶ αἱ τρεῖς ἐξωτερικαὶ δύνανται νὰ εἶναι ἀμβλεῖαι ἢ αἱ δύο μόνον.

28) Ἔστω, ὅτι οἱ διχοτόμοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ· αἱ γωνίαι τότε τοῦ τριγώνου ΔΒΓ, εἶναι αἱ Δ, $\frac{B}{2}$, Ε, καὶ ἡ τρίτη γωνία εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς Γ καὶ τοῦ $\frac{1}{2}$ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ ἤτοι $\frac{A+B}{2}$, ἐπειδὴ ἡ ἐξ. γωνία Γ, γνωρίζομεν ὅτι, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα $A + B$ (§. 73)· ἀλλὰ εἶναι:

$$A + B + \Gamma = \Delta + \frac{B}{2} + \Gamma + \frac{A+B}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$A + B + \Gamma = \Delta + \frac{B}{2} + \Gamma + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$A = \Delta + \frac{A}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A}{2} = \Delta.$$

29) Ἔστω ὅτι οἱ διχοτόμοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ· τότε ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΒΓ, λαμβάνομεν $Α + Β + Γ =$

$$Δ + \frac{Β}{2} + \frac{Γ}{2} \quad ἢ \quad Α + \frac{Β}{2} + \frac{Γ}{2} = Δ \quad ἢ$$

$$\frac{Α}{2} + \frac{Α+Β+Γ}{2} = Δ \text{ καὶ ἐπειδὴ } \frac{Α+Β+Γ}{2} = 1 \text{ ὀρ.}$$

$$\text{ἕπεται ὅτι } \frac{Α}{2} + 1 \text{ ὀρ.} = Δ.$$

30) Ἔστω, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε (τέμνονται δὲ διότι, ἀφοῦ ἑκάστη τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι μικροτέρα τῶν 2 ὀρθ., τὰ ἡμίση αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν 2 ὀρθῶν), αἱ δὲ διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν Β, Γ, τέμνονται εἰς τὸ Δ· ὅλαι δὲ αὗται αἱ διχοτόμοι σχηματίζουσι τὸ τετράπλευρον ΔΒΓΖ, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὁποίου εἶναι 4 ὀρθαί· ἀλλὰ αἱ γωνίαι Β, Γ τοῦ τετραπλεύρου ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν, διότι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν διχοτόμων δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν (ἄσκ. 7)· ἕπεται ἑπομένως ὅτι $Δ + Ε = 2$ ὀρ.· ἀλλὰ $Δ = 1$ ὀρ. $+ \frac{Α}{2}$ (ἄσκ. 29)· ὥστε εἶναι $1 + \frac{Α}{2} + Ε = 2$ ὀρ ἄρα καὶ $Ε = 1$ ὀρ. $- \frac{Α}{2}$.

Σελ. 46 — 31) Ἐὰν Α εἶναι ἡ δοθεῖσα γωνία, Β, Γ τὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς δι᾽ ἃ ἔχομεν $ΒΑ = ΓΑ$ καὶ Δ σημεῖόν τι τῆς διχοτόμου ΑΔ, θὰ ἔχωμεν καὶ $ΔΒ = ΔΓ$, διότι τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ, ὡς ἔχοντα $ΑΔ = ΑΔ$, $ΒΑ = ΓΑ$ καὶ γ. ΒΑΔ = γ. ΓΑΔ εἶναι ἴσα (§ 77).

32) (Διορθ. τέμνονται εἰς τὸ σημ. Ε καὶ τὸ τριγ. ΑΒΓ εἰς ΑΕΓ). Εἶναι ἴσα διότι ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην ὡς κατὰ κορυφήν.

33) Ἐὰν Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΕ, εὐκολώτατα δεικνύεται ὅτι εἶναι ἴσα (§ 77).

34 Τὰ τρίγωνα ΔΒΖ καὶ ΗΔΑ εἶναι ἴσα, διότι $ΒΔ = ΔΑ$, αἱ ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς κορυφῆς Δ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφὴν ὡς καὶ αἱ γωνίαι ΔΒΖ καὶ ΗΑΔ, διὰ τὰς παραλλήλους ΗΑ καὶ ΒΖ τεμνομένας ὑπὸ τῆς ΑΒ. (§ 78)· ἄρα εἶναι $ΗΑ = ΒΖ$ (1) ὁμοίως διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὰ τρίγωνα ΕΖΓ καὶ ΑΕΘ εἶναι ἴσα·

ἄρα εἶναι καὶ ΑΘ = ΖΓ (2)· προσθέτοντες ἤδη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ΗΑ + ΑΘ = ΒΖ + ΖΓ ἢ ΗΘ = ΒΓ.

35) Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν (§ 87).

36) Διότι τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΔΑ = ΔΒ) ἡ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς Δ, διάμεσος ΔΓ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ (§ 85).

37) Διότι τὰ τρίγωνα ΑΖΗ καὶ ΕΖΔ, ἔχουσιν ΑΖ = ΖΔ, τὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς κορυφῆς Ζ γωνίας ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ τὰς γωνίας ΕΔΖ καὶ ΗΑΖ ἴσας, διὰ τὰς παραλλήλους ΔΕ καὶ ΑΗ τεμνομένας ὑπὸ τῆς ΑΔ· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως εἶναι ΕΖ = ΖΗ.

38) Διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν.

39) Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ εἶναι ΑΒ = ΒΓ, καὶ μέσα τῆς μὲν πλευρᾶς ΑΒ, τὸ Δ, τῆς ΒΓ, τὸ Ε, καὶ τῆς ΓΑ τὸ Ζ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΖ καὶ ΕΖΓ, ἔχουσιν ΑΔ = ΕΓ ὡς ἡμίση ἴσων πλευρῶν· τὴν ΑΖ = ΖΓ καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Γ ἴσας, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως εἶναι ΔΖ = ΖΕ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΔΖΕ εἶναι ἰσοσκελές.

40) Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΓΕ, εὐκόλως δεικνύεται, ὅτι εἶναι ἴσα (§ 77)· ἄρα εἶναι ΑΒ = ΓΕ καὶ γων. ΒΑΕ = γων. ΓΕΑ, ἤτοι (§ 59 περ. 2) εἶναι ΑΒ ∥ ΓΕ.

41) Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΔΕΘ εἶναι ἴσα (§ 78) ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ = ΔΕ, γων. Β = γων. Ε καὶ γων. ΒΑΗ = γων. ΕΔΘ.

42) Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΒ = ΑΓ καὶ διάμεσοι αἱ ΒΔ καὶ ΓΕ. Τὰ τρίγωνα ΔΒΓ καὶ ΕΒΓ ἔχουν ΒΓ = ΒΓ, ΓΔ = ΒΕ καὶ γων. ΔΓΒ = γων. ΕΒΓ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου· εἶναι ἑπομένως ἴσα καὶ ἄρα εἶναι ΒΔ = ΓΕ.

43) Ἐὰν αἱ ΒΔ καὶ ΓΕ τῆς προηγ. ἀσκήσεως εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, τὰ τρίγωνα ΒΓΔ καὶ ΒΓΕ ἔχουσι ΒΓ = ΒΓ, γων. ΔΓΒ = γων. ΕΒΓ ὡς γωνίαι παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ γων. ΔΒΓ = γων. ΕΓΒ, ὡς ἡμίση τῶν αὐτῶν γωνιῶν· εἶναι ἄρα ἴσα· ὥστε εἶναι καὶ ΒΔ = ΓΕ.

44) Τὸ τρίγωνον ΒΔΑ εἶναι κατὰ τὰ δεδομένα ἰσοσκελές· ἄρα γων. Β = γων. ΒΑΔ (1) ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ἰσοσκε-

λές· ἄρα γων. Γ = γων. ΔΑΓ (2) καὶ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν Β + Γ = ΒΑΔ + ΔΑΓ ἢ Β + Γ = Α καὶ κατὰ τὴν ἄσκ. 20, ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή.

45). Αἱ ΔΑ καὶ ΔΓ εἶναι ἴσαι, διότι τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ἰσοσκελὲς ὡς ἔχον τὰς παρὰ τὴν βάσιν ΑΓ γωνίας ἴσας, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Γ. ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΔΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα εἶναι καὶ γων. ΑΒΔ = γων. ΔΒΓ· ἤτοι ἡ ΒΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β.

46) Ἀφοῦ εἶναι Β = 2Α, ἕπεται ὅτι γων. ΑΒΔ = Α, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ εἶναι ΑΔ = ΔΒ· ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι διὰ τὴν γων. ΒΔΓ ἐξωτερικὴν τοῦ τριγώνου ΑΔΒ ἔχομεν γων. ΒΔΓ = γων. Α + γων. ΑΒΔ ἢ γων. ΒΔΓ = 2 γων. Α· ἀλλὰ εἶναι καὶ γων. Γ = 2 γων. Α· ἄρα εἶναι καὶ ΒΔ = ΒΓ, ὥστε εἶναι ΑΔ = ΔΒ = ΒΓ.

47) Ἔστωσαν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ καὶ Ε τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ ΑΔ τέμνει τὴν κοινὴν βάσιν ΓΒ· τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα (ἄσκ. 38)· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΔΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΓΕ εἶναι ἴσα (§ 77) καὶ αἱ περὶ τὸ Ε γωνίαι εἶναι ἴσαι· ὥστε ἡ ΑΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ.

48) Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ αβγ, δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα (ΑΒ = ΑΓ καὶ αβ = αγ) ἔχοντα ΒΓ = βγ καὶ γων. Α = γων. α· ἐπειδὴ ὅμως 2Β = 2 ὀρ. — Α καὶ 2β = 2 ὀρ. — α, ἕπεται ὅτι 2Β = 2β καὶ Β = β, ἄρα καὶ Γ = γ· ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ἴσα (§ 78).

49) Διότι ἐὰν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΕΗ, ἔχομεν τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΕΖΗ (§ 77)· ἄρα εἶναι ΑΓ = ΕΗ καὶ γων. ΒΓΑ = γων. ΖΗΕ (1), ὁπότε εἶναι καὶ γων. ΑΓΔ = γων. ΕΗΘ, αἵτινες εὑρίσκονται ἂν ἀπὸ τὴν ἰσότητα, γων. Γ = γων. Η ἀφαιρέσωμεν τὴν (1)· ἀλλὰ τότε καὶ τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, καὶ ΕΗΘ εἶναι ἴσα (§ 77), ἤτοι τὰ δύο δοθέντα τετράπλευρα εἶναι ἴσα.

50) Διότι ἂν φέρωμεν τὰς διαγωνίους, αἵτινες δὲν διέρχονται διὰ τῶν ἴσων γωνιῶν διαιροῦνται τὰ τετράπλευρα εἰς τρίγωνα τῶν ὁποίων τὰ δύο τὰ περιέχοντα τὰς δοθείσας ἴσας γωνίας εἶναι ἴσα κατὰ τὴν § 77, τὰ δὲ ἄλλα ἀποδεικνύονται κατόπιν ἴσα κατὰ τὴν § 87.

51) Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι τὰ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΚΑ′Β′ εἶναι ἴσα (§ 77) ἄρα καὶ ΑΒ $=$ Α′Β′, ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ΒΓ $=$ Β′Γ′ καὶ ΑΓ $=$ Α′Γ′ ὁπότε κατὰ τὴν § 87, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα.

52) Ἀφοῦ τὸ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ἰσόπλευρον ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι ΑΔ $=$ ΑΒ· ἀλλὰ πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γων. Δ (ἄσκ. 38 καὶ 47) καὶ ἐπειδὴ $\Delta = \frac{A}{2}$, ἕπεται ὅτι γων. $A\Delta B = \frac{A}{4}$· ἀλλὰ ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ λαμβάνομεν διὰ τὰς γωνίας των, $A + B + \Gamma = \Delta + \Delta B\Gamma + \Delta\Gamma B$ ἢ $3A = \Delta + \Delta BA + B + \Delta\Gamma A + \Gamma$ ἢ ἐπειδὴ προφανῶς εἶναι $\Delta BA = \Delta\Gamma A$, καὶ ἐξ ἄλλου ἐδόθη $\Delta = \frac{A}{2}$, λαμβάνομεν

$3A = \frac{A}{2} + 2\Delta BA + 2A$ ἢ $\frac{A}{2} = 2\Delta BA$ καὶ $\frac{A}{4} = \Delta BA$, ἐπειδὴ δὲ ἀνωτέρω εὑρέθη, ὅτι καὶ $A\Delta B = \frac{A}{4}$, ἕπεται ὅτι $A\Delta B = \Delta BA$ ἤτοι ὅτι ΑΔ $=$ ΑΒ ἢ ΑΔ $=$ ΒΓ.

53) Τὸ τρίγωνον ΕΔΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι εἶναι γωνία ΔΕΒ $=$ γων. ΕΒΓ διὰ τὰς παραλλήλους ΔΕ καὶ ΒΓ τεμνομένας ὑπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ γων. ΕΒΓ $=$ γων. ΕΒΔ, ἐπειδὴ ἡ ΒΕ ἤχθη διχοτόμος τῆς γωνίας Β· ἄρα εἶναι γων. ΔΕΒ $=$ γων. ΕΒΔ, ἐπομένως καὶ ΕΔ $=$ ΔΒ· ἀλλ᾽ ἐν τῷ τριγώνῳ ΕΑΒ ἡ ΕΔ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ καὶ ἐπειδὴ ΕΔ$=$ΔΒ$=$ΑΔ, ἕπεται, κατὰ τὴν ἄσκ. 44, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθὴ ἤτοι ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΕ.

54) Διότι ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΒΔ, τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἐπειδὴ ΑΒ $=$ ΑΔ, ὥστε εἶναι καὶ γων. ΑΒΔ $=$ γων. ΑΔΒ· ἀλλὰ τότε εἶναι καὶ γων. ΓΒΔ $=$ γων. ΓΔΒ (ἐπειδὴ ἐδόθη γων. ΑΒΓ $=$ γων. ΑΔΓ)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως ἔχομεν ΒΓ $=$ ΓΔ.

Σελ. 50 — 55) Διότι αἱ παρὰ ταύτην γωνίαι, κεῖνται ἀπέναντι τῶν μικροτέρων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἄρα θὰ εἶναι αἱ μικρότεραι γωνίαι τοῦ τριγώνου ἤτοι ὀξεῖαι· γνωρίζομεν δὲ ὅτι τὸ τρίγωνον μίαν ὀρθὴν ἢ ἀμβλεῖαν γωνίαν δύναται νὰ ἔχῃ, ἥτις θὰ κεῖται ἔναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

56) Διότι ἡ γων. Γ, ἥτις εἶναι γωνία παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκε-

λοῦς τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ἄρα ἡ ἐφεξῆς παραπληρωματικὴ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἀμβλεῖα· ἐν δὲ τῷ τριγώνῳ ΑΓΔ ἀπέναντι ταύτης κεῖται ἡ ΑΔ, ἥτις εἶναι ἑπομένως ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ τριγώνου τούτου· εἶναι ἄρα ΑΔ $>$ ΑΓ.

57) Αἱ ΒΔ καὶ ΒΓ εἶναι ὑποτείνουσαι τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ, ἅτινα ἔχουσι κοινὴν κάθετον τὴν ΒΑ, εἶναι ἄρα ΒΔ $>$ ΒΑ καὶ ΒΓ $>$ ΒΑ. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΒΔΑ εἶναι ὀξεῖα, ἀφοῦ ἡ Α εἶναι ὀρθή· ἄρα προφανῶς ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἀμβλεῖα· ἀλλ᾽ ἐν τῷ τριγώνῳ ΒΔΓ ἀπέναντι ταύτης κεῖται ἡ ΒΓ, ἥτις εἶναι μεγαλυτέρα τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου· ὥστε εἶναι ΒΓ $>$ ΒΔ.

58) Ἀφοῦ ΑΒ $>$ ΑΓ, ἕπεται ὅτι εἶναι γων. Γ $>$ Β, ἄρα εἶναι καὶ γων. ΚΓΒ $>$ ΚΒΓ, ὡς ἡμίση τῶν Γ καὶ Β· ἀλλ᾽ ἀπένατι τῆς ΚΓΒ εἶναι ἡ πλευρὰ ΚΒ καὶ ἀπέναντι τῆς ΚΒΓ εἶναι ἡ ΚΓ· ὥστε εἶναι ΚΒ $>$ ΚΓ.

59) Ἐὰν τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ, αἱ γωνίαι ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὀρθαὶ καὶ τὸ προτεινόμενον εἶναι προφανές· ἔστω ἤδη ὅτι τὸ Δ δὲν εἶναι μέσον τῆς ΒΓ· τότε ἡ μία τῶν περὶ τὸ Δ γωνιῶν εἶναι ἀμβλεῖα, ἔστω δὲ τοιαύτη ἡ ΑΔΒ, ἥτις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀξείας Β· ἀλλὰ τότε ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΒ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι ΑΒ $>$ ΑΔ, ἢ ΑΓ $>$ ΑΔ, ὁπότε ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΓ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΔΓ ἥτις κεῖται ἀπέναντι τῆς ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Γ.

Σελ. 55—60) Διότι τὰ τρίγωνα ΔΓΑ καὶ ΔΓΒ ἔχουν ΔΓ $=$ ΔΓ, ΔΑ $=$ ΓΒ καὶ τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ΑΔΓ $>$ ΔΓΒ, ἄρα εἶναι καὶ ΑΓ $>$ ΒΔ (§ 106).

61) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΒ $>$ ΑΔ καὶ ἡ διάμεσος ΑΔ· εἰς τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχομεν ΑΔ $=$ ΑΔ, ΒΔ $=$ ΔΓ καὶ ΑΒ $>$ ΑΓ, ἄρα (§ 107) γων. ΑΔΒ $>$ ΑΔΓ· ἔστω ἤδη Ε σημεῖόν τι τῆς διαμέσου ΑΔ· εἰς τὰ τρίγωνα ΕΔΒ καὶ ΕΔΓ ἔχομεν ΕΔ $=$ ΕΔ καὶ ΔΒ $=$ ΔΓ καὶ γων. ΕΔΒ $>$ ΕΔΓ· εἶναι ἄρα ΕΒ $>$ ΕΓ (§ 106).

62) Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἀπεδείξαμεν ὅτι γωνία ΑΔΒ $>$ γων. ΑΔΓ καὶ ἐπειδὴ γων. ΑΔΒ $+$ γων. ΑΔΓ $=$ 2 ὀρ., ἕπεται προφανῶς ὅτι γων. ΑΔΒ $>$ 1 ὀρθ.

63) Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ Ο τὸ μέσον αὐτῆς δι᾽ οὗ διέρχε-

ται ἄλλη εὐθεῖα· ἔστωσαν δὲ κάθετοι ἐπὶ τῆς ἄλλης εὐθείας αἱ ΑΔ καὶ ΒΕ αἵτινες κάθετοι εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπὸ τῆς δευτέρας εὐθείας. Τὰ τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΒΟΕ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας ΑΟ καὶ ΟΒ ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΑΟΔ καὶ ΕΟΒ ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν (§ 92)· ἄρα εἶναι καὶ ΑΔ = ΒΕ.

64) Διότι (§ 109 σχ. σελ. 55) τὰ τρίγωνα ΑΕΗ καὶ ΑΕΖ εἶναι ἴσα ἄρα εἶναι καὶ ΑΗ = ΑΖ.

65) Διότι ἂν ΒΓ εἶναι ἡ βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα αὐτῆς τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι ΕΒ = ΖΓ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ, ἔχομεν, ΔΒ — ΕΒ = ΔΓ — ΖΓ ἢ ΕΔ = ΔΖ· ὥστε αἱ, ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου τούτου ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ εἶναι πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ ποδὸς Δ τῆς καθέτου· ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως μετὰ τῆς ΕΖ, σχηματίζουσιν ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

66) Ἔστω, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ· τὸ Δ ἤδη, ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΑΒ καὶ ΑΓ (§ 109), ἀλλὰ καὶ ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β, ἀπέχει ἴσον καὶ ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΑΒ καὶ ΒΓ· ἄρα ἀπέχει ἴσον καὶ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ· ἑπομένως (§ 110) κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ, ἥτις εἶναι ἡ ΔΓ· ἤτοι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον κ.τ.λ.

67) Ἔστω, ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ· τοῦτο (§ 104) ἀποδεικνύεται ὅτι ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β καὶ ἀπὸ τῶν Β καὶ Γ· ἄρα ἀπέχει ἴσον καὶ ἀπὸ τῶν Α καὶ Γ· ἤτοι (§ 105) κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· ἄρα αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα πλευρῶν τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κτλ.

Σελ. 59 — 68) Ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον καὶ ΑΕ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τέμνουσα τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ε καὶ ΓΖ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Γ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ, ἔχομεν γων. ΕΑΔ = γων. ΖΓΒ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Γ, γων. Δ = γων. Β καὶ ΑΔ = ΒΓ ὡς ἀπέναντι γωνίαι καὶ πλευραὶ παραλληλογράμμου ἄρα εἶναι τριγ. ΑΔΕ = τρίγ.

ΖΒΓ καὶ καὶ ΔΕ = ΖΒ· ἑπομένως εἶναι καὶ ΑΖ = ΕΓ· ἄρα τὸ ΑΖΓΕ εἶναι παραλ)μον (§ 115)· καὶ ἑπομένως ΑΕ || ΖΓ.

69) Διότι αἱ προσκείμεναι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί· καὶ εἶναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ παραλλήλων κτλ. ἄρα αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι κάθετοι (ἄσκ. 15).

70) Ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ δοθὲν παραλ)μον καὶ εἶναι ΑΒ = 2ΑΔ καὶ Ε τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ, φέρομεν ἐκ τοῦ Ε τὴν διάμεσον τοῦ τριγώνου ΕΔΓ, τὴν ΕΖ· αὕτη δὲ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση τῇ ΑΔ, ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΕΖΔ εἶναι παραλ)μον ἐπειδὴ εἶναι ΑΕ= || ΔΖ (§ 15)· ἄρα ΕΖ = ΔΖ = ΖΓ καὶ κατὰ τὴν ἄσκ. 44 ἡ γωνία ΔΕΓ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

71) Ἀπεδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 70.

72) Διότι αἱ ΔΓ καὶ ΕΖ ὡς παράλληλοι καὶ ἴσαι πρὸς τὴν ΑΒ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα (§ 115) τὸ ΓΔΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

73) Αἱ ΑΕ καὶ ΓΖ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΔΒ εἶναι παράλληλοι· εἶναι δὲ καὶ ἴσαι· διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΓΖ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας ΒΓ = ΑΔ καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΑΔΕ καὶ ΖΒΓ ἴσας, διὰ τὰς παραλλήλους ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένας ὑπὸ τῆς ΔΒ· ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι ΑΕ = || ΖΓ, ἔπεται ὅτι τὸ ΑΖΓΕ εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 115).

74) Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΕΘ, ΗΖΓ καὶ ΕΒΖ, ΘΗΔ, ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης τῶν πλευρῶν ΘΕ, ΗΖ καὶ ΕΖ, ΘΗ, ἄρα τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 114).

75) Διότι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΕΒ καὶ ΔΖ ἴσας καὶ παραλλήλους (§ 115).

76) Ἔστωσαν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ ἔχοντα ΑΒ = αβ, ΑΔ = αδ καὶ γων. Α = γων. α· ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ πρῶτον ἐπὶ τοῦ δευτέρου ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ α, ἡ πλευρὰ ΑΒ, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς αβ, ὡς καὶ ἡ ΑΔ ἐπὶ τῆς αδ· ἡ δὲ γωνία Β, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς β διότι αὗται εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ α· ἄρα ἡ ΒΓ, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς βγ καὶ τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τοῦ γ, διότι ἀφοῦ ΑΔ = αδ, θὰ εἶναι καὶ ΒΔ = βδ· ὁμοίως σκεπτόμενοι θὰ ἴδωμεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία Γ, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς γ, κ.ο.κ. ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἰσοῦται πρὸς τὸ αβγδ.

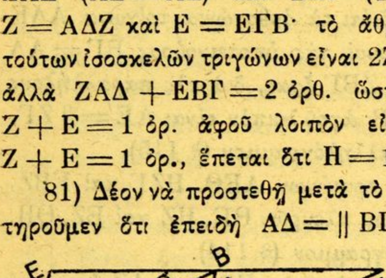
77) Τὰ τρίγωνα ΒΓΕ καὶ ΕΑΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΕΒ = ΕΑ· τὰς ἑκατέρωθεν τοῦ Ε γωνίας ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ γωνία Β = γων. ΕΑΖ ὡς παραπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας ΕΑΔ· εἶναι λοιπὸν ΒΓ = ΑΖ· ἀλλ' εἶναι ΒΓ = ΔΑ, ὥστε εἶναι καὶ ΔΑ = ΑΖ.

78) Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου, οὗ κορυφαὶ εἶναι τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν· καὶ ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται δίχα, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 116 σημ.).

79) Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τυχὸν παραλληλόγραμμον, Ε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων αὐτοῦ καὶ ΖΕΗ, ἡ διερχομένη εὐθεῖα διὰ τοῦ σημείου τούτου, τέμνουσα τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η· τὰ τρίγωνα ΖΕΒ καὶ ΔΕΗ εὐκόλως δεικνύεται ὅτι εἶναι ἴσα (§ 78)' ἄρα εἶναι καὶ ΕΖ = ΕΗ.

80) Ἔστω ὅτι αἱ ΕΓ καὶ ΖΔ προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η· πρέπει δὲ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τοῦ τριγώνου ΖΕΗ ἡ γωνία Η εἶναι ὀρθή. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΖΑΔ (ΑΖ = ΑΔ) καὶ ΒΕΓ (ΒΕ = ΒΓ) εἶναι ἰσοσκελῆ· ἄρα Ζ = ΑΔΖ καὶ Ε = ΕΓΒ· τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν γωνιῶν τῶν δύο τούτων ἰσοσκελῶν τριγώνων εἶναι 2Ζ + ΖΑΔ + 2Ε + ΕΒΓ = 4 ὀρ. ἀλλὰ ΖΑΔ + ΕΒΓ = 2 ὀρθ. ὥστε εἶναι 2Ζ + 2Ε = 2 ὀρ. καὶ Ζ + Ε = 1 ὀρ. ἀφοῦ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΖΕΗ ἔχομεν Ζ + Ε = 1 ὀρ., ἕπεται ὅτι Η = 1 ὀρ.

81) Δέον νὰ προστεθῇ μετὰ τὸ ΑΕ = ΔΑ καὶ ΔΓ = ΓΖ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐπειδὴ ΑΔ = || ΒΓ καὶ ΑΔ = ΑΕ, ἕπεται ὅτι ΑΕ = || ΒΓ· ἄρα τὸ σχ. ΑΕΒΓ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως εἶναι σ = ρ· ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ τὸ σχῆμα ΒΑΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα εἶναι καὶ μ = ν· ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ρ + τ + ν = 2 ὀρ. ἢ σ + τ + μ = 2 ὀρ. ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΒΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



Σχ. 'Ασκ. 81

82) Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι φανερόν, ὅτι Β = Δ καὶ Γ = Ε· ἄρα εἶναι καὶ ΑΔ = ΑΕ ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές· ἀλλὰ

πάλιν ἔχομεν ΑΒ — ΑΔ = ΑΓ — ΑΕ ἢ ΔΒ = ΕΓ, ἤτοι τὸ ΔΕΒΓ εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

83) Ἔστω ΑΒΓΔ ἓν τραπέζιον ἰσοσκελές, οὗ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ καὶ ἴσαι αἱ ΑΔ = ΒΓ· θέλομεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι Α = Β· φέρομεν πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ Γ, παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε· τὸ σχῆμα ΑΔΓΕ εἶναι παραλληλόγραμμον· εἶναι ἄρα ΑΔ = ΕΓ· ἀλλὰ ἐδόθη ὅτι ΑΔ = ΒΓ· εἶναι ἄρα ΕΓ = ΒΓ καὶ ἑπομένως γων. ΓΕΒ = γων. Β· ἀλλὰ γων. ΓΕΒ = γων. Α· ὥστε εἶναι γων. Α = γων. Β.

84) Δεδόμενα εἶναι τὰ προηγούμενα καὶ ἔστω ὅτι Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΔ· τὰ τρίγωνα ΕΔΑ καὶ ΕΓΒ εἶναι ἴσα (§ 77)· ἄρα εἶναι ΕΑ = ΕΒ· ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον ΕΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ ἐκ τῆς Ε ἀγομένη διάμεσος αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ· ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ΔΓ.

85) Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗ μὴ διαδοχικαὶ πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ· αὗται ἀφοῦ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι· μένει ἤδη νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι καὶ ΑΔ = ΒΓ· πρὸς τοῦτο ἔστω Ε τὸ μέσον τῆς ΔΓ καὶ Ζ τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΕΑ = ΕΒ (§ 104, 1)· ὥστε τὸ τρίγωνον ΕΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ εἶναι γων. ΕΑΖ = γων. ΕΒΖ· ἀλλὰ γων. ΕΑΖ = γωνία ΔΕΑ καὶ γων. ΕΒΖ = γων. ΓΕΒ (διὰ τὰς παραλλήλους ΔΓ καὶ ΑΒ κ.τ.λ.), ὥστε εἶναι γων. ΔΕΑ = γων. ΓΕΒ· ἀλλὰ εἶναι καὶ ΔΕ = ΕΓ καὶ ΑΕ = ΕΒ· ἄρα (§ 77) τὰ τρίγωνα ΔΕΑ καὶ ΕΓΒ εἶναι ἴσα· ἑπομένως εἶναι καὶ ΑΔ = ΒΓ.

86) Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ οὗ εἶναι ΑΓ = ΒΔ καὶ Α = Β· πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ΑΒ || ΓΔ· πρὸς τοῦτο προεκτείνομεν τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ μέχρις ὅτου συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ε· τὸ τρίγωνον ΕΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐπειδὴ εἶναι Α = Β, ἄρα εἶναι ΕΑ = ΕΒ· ἐπειδὴ ὅμως ἐδόθη, ὅτι ΑΓ = ΒΔ, ἕπεται ὅτι καὶ ΕΑ — ΑΓ = ΕΒ — ΒΔ ἢ ΕΓ = ΕΔ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα γων. ΕΓΔ = γων. ΕΔΓ· ἀλλὰ ἀφοῦ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ ἔχουσι κοινὴν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς, ἕπεται ὅτι ἔχουσιν ἴσας καὶ τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας· ὥστε εἶναι γων. ΕΓΔ = γων. Α· ἤτοι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι (§ 59, περ. 3).

87) Ἐὰν τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι, διότι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα (§ 77).

88) Διότι $Α + Β + Γ + Δ = 4$ ὀρ. ἢ $2Α + 2Δ = 4$ ὀρ. ἢ $Α + Δ = 2$ ὀρ. ἤτοι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι· ἤδη ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ τὴν ΔΕ· τὸ σχῆμα ΔΓΒΕ εἶναι παραλ)μον· ἄρα $ΓΒ = ΔΕ$· ἀλλὰ εἶναι γων. $Β =$ γων. ΔΕΑ· ἐδόθη δὲ ὅτι γων. $Β =$ γων. Α· ὥστε εἶναι γων. $Α =$ γων. ΔΕΑ· ὥστε εἶναι $ΑΔ = ΕΔ$ καὶ ἐπειδὴ εὑρέθη, ὅτι $ΕΔ = ΒΓ$ ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ $ΑΔ = ΒΓ$· ἤτοι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

89) Ἡ διαγώνιος τετραγώνου διχοτομεῖ τὰς γωνίας αὐτοῦ· ἄρα τὰ περὶ οὗ πρόκειται τρίγωνα, ἔχοντα μίαν πλευρὰν κοινήν, καὶ τὴν ἄλλην πλευράν, πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἴσην, καὶ τὴν ὑπ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.

90) Τὸ τετράπλευρον οὗ κορυφαὶ εἶναι τὰ ἄκρα τῶν δύο διαμέτρων, εἶναι παραλ)μον, ἐπειδὴ αἱ διάμετροι αὗται διαγώνιοι, οὖσαι τοῦ τετραπλεύρου τέμνονται δίχα (§ 116 σημ.)· ἀλλ' αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ εἶναι ἴσαι· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον (§ 118).

91) Αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου, γνωρίζομεν ὅτι εἶναι παράλληλοι (ἄσκ. 68)· ὥστε αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ παραλληλογράμμου σχηματίζουσι παραλληλόγραμμον· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον· διότι πάλιν γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο γωνιῶν παραλληλογράμμου προσκειμένων εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν εἶναι κάθετοι (ἄσκ. 69).

92) Ἐὰν ὁ ρόμβος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ, δύο σημεῖα Ε, Ζ, τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι $ΒΕ = ΔΖ$, τότε τὸ σχῆμα ΑΕΓΖ εἶναι ρόμβος, διότι προφανῶς αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται δίχα καὶ καθέτως (§ 118).

93) Ἐὰν ἡ ΑΕ προεκταθῇ μέχρι τοῦ Λ τῆς ΒΓ ἔχομεν γωνίαν $ΔΑΛ =$ γων. ΔΛΒ διὰ τὰς παραλλήλους ΑΔ καὶ ΓΒ κ.τ.λ. ἀλλὰ γων. $ΔΑΛ =$ γων. ΖΓΒ, ὡς γωνίαι ἰσοπλεύρων τριγώνων· ἄρα εἶναι γων. $ΖΓΒ = ΑΛΒ$ ἤτοι αἱ ΑΛ καὶ ΖΓ εἶναι παράλληλοι· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ΖΒ καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλοι· ὥστε τὸ σχῆμα ΕΗΖΘ εἶναι παραλληλλόγραμμον· κατόπιν ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἡ ΕΖ προεκτεινομένη τέμνει καθέτως τὰς

πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ, καθὼς καὶ ἡ ΘΗ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ· ὥστε αἱ διαγώνιοι ΘΗ καὶ ΖΕ τέμνονται καθέτως καὶ ἑπομένως τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗΖΘ εἶναι ῥόμβος (§ 118).

Σελ. 63 — 94) Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΔΒ (§ 120) καὶ ἡ ΖΔ παράλληλος τῇ ΒΕ· ὥστε τὸ ΔΖΕΒ εἶναι παραλληλόγραμμον· κ.τ.λ.

95) Διότι (προηγ. ἄσκ.) ἐκ τοῦ παραλ)μου ΔΖΕΒ ἔχομεν τρίγωνον ΔΒΕ = τρίγ. ΔΕΖ, ἐκ δὲ τοῦ ΔΖΓΕ ἔχομεν τρίγωνον ΔΕΖ = τρίγ. ΕΖΓ καὶ ἐκ τοῦ ΔΕΖΑ ἔχομεν τρίγ. ΔΕΖ = τρίγωνον ΑΔΖ.

96) Αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ Δ, μέσον τῆς ΒΓ, παράλληλοι διέρχονται διὰ τῶν μέσων Ε καὶ Ζ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (§ 115) ἄρα ἡ ΕΖ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΒΓ (§ 120).

97) Ἐὰν Θ καὶ Η εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἀλλ' ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΘΗ, τὸ Ε καὶ Ζ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΘ καὶ ΑΗ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΘΗ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῇ ΘΗ (§ 120)· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ (§ 64) καὶ ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ΒΓ.

98) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ ἡ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ΒΓ καὶ ΕΖ, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἐὰν δὲ Η εἶναι τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ ΑΔ τέμνει τὴν ΕΖ λέγω, ὅτι τὸ Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ. Διότι γνωρίζομεν (ἄσκ. 94) ὅτι τὰ μέσα Ε, Ζ, Δ, μετὰ τῆς κορυφῆς Α εἶναι κορυφα παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΕΖ διχοτομοῦνται. (§ 116).

99) Ἔστω ὅτι αἱ ΔΕ καὶ ΒΖ τέμνουν τὴν διαγώνιον ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Ἐπειδὴ ΕΒ = || ΔΖ ἕπεται (§ 115) ὅτι τὸ σχῆμα ΕΒΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἀλλ' ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΘ, ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΒ, ἄγεται ἡ ΕΗ παράλληλος τῇ ΒΘ ἄρα (§ 119) τὸ Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΘ ἤτοι εἶναι ΑΗ = ΗΘ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΔΖ, ἡ ΖΘ ἄγεται ἐκ τοῦ Ζ μέσου τῆς ΓΔ παράλληλος τῇ ΔΗ· ὥστε δι' ὅμοιον λόγον εἶναι ΗΘ = ΘΓ· ἄρα εἶναι ΑΗ = ΗΘ = ΘΓ.

100) Ἐὰν τὸ δοθὲν τετράπλευρον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἡ ΕΖ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ εἶναι δι' ὅμοιον λόγον (τρίγωνον ΑΔΓ) παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἄρα εἶναι ΕΖ $=\parallel$ ΘΗ ἤτοι (§ 115) τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

101) Διότι ὡς ἐκ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως συνάγεται αἱ ΕΗ καὶ ΖΘ εἶναι διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ.

102 Ἀναλόγως πρὸς τὴν ἄσκ. 100 ἐργαζόμενοι, ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ρόμβου εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, αἵτινες τέμνονται καθέτως.

103) Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους· εἶναι δὲ καὶ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι τὰ 4 τρίγωνα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αὗται μὲ τὰ ἥμισυ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

104) Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ ὀρθογωνίου, οὗ ἡ μία διαγώνιος εἶναι ἡ ὑποτείνουσα· ἡ δὲ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας διάμεσος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

105) Ἐὰν τὸ τραπέζιον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἡ διάμεσος αὐτοῦ ἡ ΕΖ ἡ ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΔ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Η τῆς διαγωνίου ΔΒ (§ 119) καὶ διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς ΒΓ (τρίγων. ΔΒΓ)· ὥστε ἡ παράλληλος αὕτη εἶναι αὐτὴ ἡ διάμεσος ἐπειδὴ δὲ ΕΗ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ (§ 120) καὶ ἡ ΗΖ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΓ ἕπεται, ὅτι $ΕΗ+ΗΖ=\frac{ΑΒ}{2}+\frac{ΓΔ}{2}$ ἢ

$$ΕΖ=\frac{ΑΒ+ΒΓ}{2}$$

Σελ. 66. — 106) Διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

107) Ἐὰν Κ εἶναι ὁ κύκλος, Α τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ΑΒ, ΑΓ αἱ ἐφαπτόμεναι, τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ εἶναι ἴσα (ΑΚ = ΑΚ, ΚΒ = ΚΓ) ἄρα ΑΒ = ΑΓ καὶ γων ΒΑΚ=γων ΓΑΚ.

108) Τὸ τρ. ΑΒΓ (σχ. προηγ. ἀσκ.) εἶναι ἰσόπλευρον ἄρα

γων ΒΑΓ $= \frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ἀλλ'ἐπιδὴ γων. ΑΒΚ $=$ γ. ΑΓΚ $= 1$ ὀρ. ἔπεται ὅτι γων. ΒΑΓ $+$ γων. ΒΚΓ $= 2$ ὀρ. ἤτοι γων ΒΚΓ $= \frac{4}{3}$ ὀρθῆς.

109) Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν παραλλήλων ἐφαπτομένων· ἡ ΑΚΒ εἶναι διάμετρος κάθετος ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων τούτων. Τοῦ τετραπλεύρου λοιπὸν ΑΒΔΓ εἶναι $\Delta + \Gamma =$ 2 ὀρθ. ἀλλὰ ἡ ΓΚ (ἄσκ. 107) διαιρεῖ τὴν Γ εἰς δύο ἴσας γωνίας, ὡς καὶ ἡ ΔΚ τὴν Δ· εἶναι λοιπὸν $\frac{\Gamma}{2} =$ ΚΓΔ καὶ $\frac{\Delta}{2} =$ ΚΔΓ· ἤτοι ΚΓΔ $+$ ΚΔΓ $= \frac{\Delta + \Gamma}{2} = 1$ ὀρ. ἀφοῦ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΚΓΔ, εἶναι ΚΓΔ $+$ ΚΔΓ $= 1$ ὀρ., ἔπεται ὅτι ΓΚΔ $= 1$ ὀρ.

Σελ. 70 — 110) Ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι εἶναι ἐξωτερικαὶ καὶ εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ προεκτεινόμεναι συναντῶνται εἰς τὸ Ε ἔχομεν ΕΑ $=$ ΕΓ (§ 107) καὶ ΕΒ $=$ ΕΔ· ἄρα εἶναι ΕΑ $-$ ΕΒ $=$ ΕΓ $-$ ΕΔ ἢ ΑΒ $=$ ΓΔ. Ἐὰν αἱ ΑΒ εἶναι ἐσωτερικαὶ καὶ τέμνονται εἰς τὸ Ε ἔχομεν ΕΑ $=$ ΕΓ (§ 107) καὶ ΕΒ $=$ ΕΔ ἄρα εἶναι καὶ ΕΑ $+$ ΕΒ $=$ ΕΓ $+$ ΕΔ ἢ ΑΒ $=$ ΓΔ.

111) Ἐὰν ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Κ (Κ$'<$Κ) εἶναι ἡ ΑΒ αἱ ΚΑ καὶ Κ$'$Β εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν Κ$'$Κ, τέμνουσαν τὴν ΚΑ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΒ (Α ὀρθὴ γωνία) ΑΒ $<$ ΓΒ, ἀλλ' ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΓΒΚ$'$Κ, ἔχομεν ΓΒ $=$ Κ$'$Κ ἤτοι εἶναι ΑΒ $<$ ΚΚ$'$.

112) Ἔστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν Κ καὶ Κ$'$ καὶ ΒΑΓ ἡ εὐθεῖα ἥτις τέμει τὴν Κ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν Κ$'$ εἰς τὸ σημεῖον Γ· φέρομεν ἤδη τὴν ΚΑΚ$'$· τὰ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ Κ$'$ΑΓ εἶναι ἰσοσκελῆ· ἔχομεν λοιπὸν ΚΒΑ $=$ ΚΑΒ καὶ Κ$'$ΓΑ $=$ Κ$'$ΑΓ· ἀλλὰ ΚΑΒ $=$ Κ$'$ΑΓ ὡς κατὰ κορυφήν· εἶναι ἄρα ΚΒΑ $=$ Κ$'$ΓΑ ἀλλ' αὗται εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν ΚΒ καὶ Κ$'$Γ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ· ὥστε εἶναι ΚΒ $\parallel$ Κ$'$Γ.

113) Ἐὰν Α εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ ἡ ΑΔΓ τέμνει τὴν Κ$'$ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν Κ εἰς τὸ Γ ἔχομεν ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων Κ$'$ΑΔ καὶ Κ$'$ΑΓ Α $=$ Δ, Α $=$ Γ ἄρα Δ $=$ Γ· ἀλλ' αὗται εἶναι

ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν εὐθειῶν Κ΄Δ καὶ ΚΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔΓ· ἄρα εἶναι Κ΄Δ || ΚΓ.

114) Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν καὶ Κ΄ εἶναι τὸ κέντρον τῆς τρίτης, ἡ ΚΚ΄ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς χορδῆς (§ 133, 1) καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης· ἄρα αἱ χορδαὶ αὗται εἶναι παράλληλοι.

Σελ. 73 — 115) Ἐὰν ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α, Δ καὶ τὴν ἐσωτερικὴν εἰς τὰ Β, Γ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Κ κάθετος ἐπὶ τὴν ταύτην, τὴν τέμνει εἰς τὸ Ε, τὸ Ε εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΑΔ καὶ τῆς χορδῆς ΒΓ· εἶναι ἄρα ΕΑ = ΕΔ καὶ ΕΒ = ΕΓ· ἔχομεν λοιπὸν ΕΑ — ΕΒ = ΕΔ — ΕΓ ἢ ΑΒ = ΓΔ.

116) Ἐὰν αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι εἶναι αἱ Κ, Κ΄ καὶ Α τὸ ἓν τῶν κοινῶν σημείων αὐτῶν, καὶ ΒΑΓ ἡ ἀχθεῖσα παράλληλος πρὸς τὴν ΚΚ΄, Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΒΑ καὶ ΑΓ, αἱ ΚΕ καὶ Κ΄Ζ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΑΓ (§ 135)· ἄρα τὸ ΕΚΚ΄Ζ εἶναι ὀρθογώνιον παραλ/μον καὶ ΚΚ΄ = ΕΑ + ΑΖ· ἀλλὰ

$$ΒΑΓ = ΒΑ + ΑΓ = 2ΕΑ + 2ΑΖ = 2(ΕΑ + ΑΖ) = 2ΚΚ΄$$

117) Ἐὰν Κ εἶναι ἡ περιφέρεια Α τὸ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς καὶ Β καὶ Γ δύο σημεῖα αὐτῆς τοιαῦτα, ὥστε ΑΒ = ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι χορδὴ τῆς περιφερείας Κ, ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς (ἥτις εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς Κ.

118) Τοῦτο συνάγεται εὐκόλως ἐκ τοῦ θεωρ. 136, διότι τὰ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΛΘΗ εἶναι ἴσα· ἄρα καὶ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κέντρων μέχρι τῶν χορδῶν (ἤτοι αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων ἀπὸ τῶν χορδῶν τούτων εἶναι ἴσαι).

119) Διότι τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας (ἀκτῖνας τῶν ἴσων κύκλων) ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην (τὰς ἀποστάσεις) ἔχουσι καὶ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ἴσην, ἥτις ἐν τῷ προκειμένῳ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν χορδῶν· ἄρα καὶ ὁλόκληροι αἱ χορδαὶ εἶναι ἴσαι.

120) Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ δύο τόξα αὐτῆς ΑΒ καὶ ΔΓ τοιαῦτα ὥστε ΑΒ > ΔΓ ἄρα καὶ χορ. ΑΒ > χορ. ΔΓ· λαμβάνομεν ἤδη μεταξὺ Α καὶ Β ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας Ε, τοιοῦτον

ὥστε τόξ. ΑΕ = τόξ. ΔΓ· ἄρα καὶ χορ. ΑΕ = χορ. ΓΔ· ἐὰν δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΕ, ἡ ΚΔ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ καὶ εἶναι προφανῶς ΚΔ > ΚΖ· ἐὰν δὲ Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἡ ΚΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΚΖ πλαγία· εἶναι ἄρα ΚΖ > ΚΗ· ὥστε καὶ ΚΔ > ΚΗ κατὰ μείζονα λόγον· ἀλλ' αἱ ἀποστάσεις τοῦ Κ ἀπὸ τῶν ἴσων χορδῶν ΑΕ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι· ἄρα ΚΗ μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τοῦ Κ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

121) Ἀντιστρόφως δὲ ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τῆς ΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΚΗ εἶναι ΓΔ < ΑΒ· διότι ἂν ἦτο ΓΔ=ΑΒ θὰ ἦσαν αἱ ἀποστάσεις ἴσαι, ἂν δὲ ἦτο ΓΔ > ΑΒ, ἡ ἀπόστασις ΚΗ θὰ ἦτο μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης· ἅτινα εἶναι ἐναντία πρὸς τὴν ὑπόθεσιν.

122) Διότι αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν χορδῶν, αἵτινες εἶναι αἱ ἀκτῖνες τοῦ μικροτέρου κύκλου εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ χορδαὶ εἶναι ἴσαι· αἱ ἀκτῖνες δὲ αὗται αἵτινες ἄγονται εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν χορδῶν εἰς τὰ μέσα αὐτῶν· ἄρα αἱ χορδαὶ διχοτομοῦνται εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς.

123) Ἔστωσαν, Κ καὶ Κ′ οἱ ἴσοι κύκλοι καὶ Γ τὸ μέσον τῆς ΚΚ′, ΚΑ καὶ Κ′Β αἱ κάθετοι αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν κέντρων ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ Γ διερχομένην εὐθεῖαν, ἥτις τέμνει τοὺς δοθέντας κύκλους· τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΚΑ καὶ ΓΚ′Β εἶναι ἴσα διότι ἔχουσι ΚΓ = Κ′Γ καὶ τὰς ὀξείας γωνίας τῆς κοινῆς κορυφῆς Γ ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν· εἶναι ἄρα ΚΑ = Κ′Β· ἀλλ' αὗται εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων ἀπὸ τῶν χορδῶν, αἵτινες εἶναι τμήματα τῆς ἀχθείσης εὐθείας· ἄρα τὰ μέρη ταῦτα εἶναι ἴσα.

124) Ἔστω, Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐφαπτομένης καὶ ΒΓ ἡ χορδὴ ἡ παράλληλος ταύτῃ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Κ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν αὐτὸ μετὰ τοῦ μέσου Δ τῆς χορδῆς ΒΓ, ἡ ΚΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν, προεκτεινομένη δὲ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α, διότι θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ὡς παραλλήλου πρὸς τὴν χορδήν· ὥστε ἡ κάθετος ΚΔΑ θὰ διαιρῇ καὶ τὸ τόξον ΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη (§ 135)· ὥστε τόξ. ΒΑ = τόξ. ΑΓ· ἐὰν δὲ φέρωμεν καὶ ἄλλην χορδὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΒΓ, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως ΕΑ = ΑΖ· ὥστε εἶναι ΒΑ — ΕΑ = ΑΓ — ΑΖ ἢ ΒΕ = ΓΖ.

Σελ. 79.— 125) Ἐὰν αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ

Ε· θὰ ἔχομεν τὰς ἑκατέρωθεν τοῦ Ε γωνίας ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν· καὶ γων. ΕΑΔ = γων. ΕΓΒ ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΔΒ καὶ γων. ΑΔΕ = γων. ΕΒΓ ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΓ.

126) Ἔχουσι τὴν Α κοινήν· ἔπειτα ἔχουσι γων. Γ = γων. Ε ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΒΔ· ἄρα θὰ ἔχουσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην (§ 75).

127) Ἔστω, ΑΒ καὶ ΑΔ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου αἵτινες εἶναι διάμετροι τῶν δύο κύκλων· καὶ Γ τὸ ἕτερον σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν· ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΕ, ἡ ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη βαίνουσα ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΕΒ (§ 141)· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ γων. ΑΕΔ εἶναι ὀρθή· ἄρα (§ 56) ἡ ΑΕΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή· ἤτοι ἡ ΑΒ διέρχεται διὰ τοῦ Ε.

128) Τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἔχει τὴν Γ ὀρθήν, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· εἶναι δὲ ἡ ὀξεῖα γωνία Β τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἴση πρὸς τὴν Ε, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΓ ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην(§ 56).

129) Ἐὰν αἱ τέμνουσαι αὗται εἶναι αἱ ΑΓΒ καὶ ΔΓΖ, καὶ φέρωμεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΗΓΘ ἔχομεν τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης καὶ τῆς χορδῆς ΓΖ ἴσην πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην Α (§ 142)· ὁμοίως ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς ἰδίας ἐφαπτομένης καὶ τῆς χορδῆς ΓΔ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην Β· ἀλλ' ἔχομεν ΖΓΘ = ΗΓΔ ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα εἶναι Α = Β· ἀλλ' αὗται εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν ΑΖ καὶ ΔΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΖ· ἄρα εἶναι ΑΖ || ΔΒ.

130) Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν, ΔΑΕ ἡ μία τέμνουσα καὶ ΓΒΖ ἡ ἄλλη· τὸ τετράπλευρον ΔΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον· ἄρα (§ 147) Γ + ΔΑΒ = 2 ὀρ. ἀλλὰ ΔΑΒ + ΒΑΕ = 2 ὀρ. (§ 53)· ἄρα Γ = ΒΑΕ· ἀλλὰ πάλιν ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΖΕ ἔχομεν ΒΑΕ + Ζ = 2 ὀρ. (§ 147)· ἄρα Γ + Ζ = 2 ὀρ., ἀλλ' αὗται εἶναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά, τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΖΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΖ· ἄρα ΓΔ || ΖΕ.

131) Ἔστωσαν Κ καὶ Κ′ αἱ περιφέρειαι, Α τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς (ἐξωτερ.) καὶ ΒΑΓ ἡ τέμνουσα· ἐφαπτόμεναι δὲ εἰς τὰ Β καὶ Γ αἱ ΖΒΕ καὶ ΔΓΗ· αἱ ΚΒ καὶ Κ′Γ εἶναι κάθετοι ἐπὶ ταύτας· τὰ τρίγωνα ΚΒΑ καὶ Κ′ΓΑ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἔχουσι τὰς

4 παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἕνεκα τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν εἰς τὸ Α. Ἔχομεν λοιπὸν

$$\text{ΚΒΕ} - \text{ΚΒΑ} = \text{Κ΄ΓΔ} - \text{Κ΄ΓΑ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΑΒΕ} = \text{ΔΓΑ}\cdot$$

ἀλλ' αὗται εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ κτλ. ὥστε ΔΓΗ ∥ ΖΒΕ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.

132) Ἔστω ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Α τέμνουσα τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ· τότε ΔΑ = ΔΒ καὶ ΔΑ = ΔΓ· ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀγομένη διάμεσος ΑΔ ἰσοῦται πρὸς τὴν ΒΔ (ἢ ΔΓ) ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ (ἄσκ. 44).

133) Τοῦ τετραπλεύρου ΒΓΕΔ αἱ γωνίαι Γ καὶ Δ εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 147) ἀλλ' ἡ Δ εἶναι παραπληρωματικὴ καὶ τῆς γων. ΑΔΒ· ἄρα Γ = ΑΔΒ· ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι καὶ τὴν Α κοινὴν ἔχουσιν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην (§ 75).

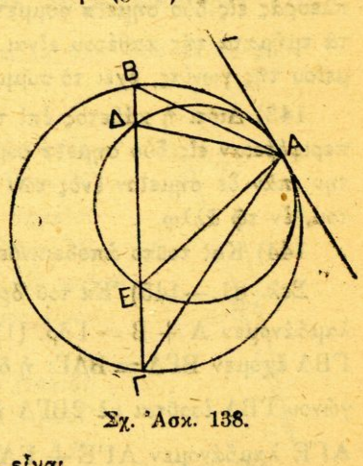
134) Ἐὰν λάβωμεν Ε σημεῖόν τι τῆς περιφερείας ἐπὶ τοῦ ἄλλου τόξου ΑΒ ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΒΓ, λαμβάνομεν Ε + Γ = 2 ὀρ. (§ 147)· ἀλλ' εἶναι Γ + ΑΓΔ = 2 ὀρ. ὥστε εἶναι Ε = ΑΓΔ· ἀλλὰ ἔχομεν πάλιν $\text{Ε} = \frac{\text{ΑΚΒ}}{2}$ (§ 139)· ἄρα εἶναι $\text{ΑΓΔ} = \frac{\text{ΑΚΒ}}{2}$

135) Ἀπεδείχθη (ἄσκ. 132) ὅτι ΒΑΓ = 1 ὀρ., ἄρα (§ 146) ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα διάμετρον τὴν ΒΓ, διέρχεται διὰ τοῦ Α.

136) Ἔχομεν (1) ΒΔΑ + ΑΔΓ = 2 ὀρ. (§ 53)· ἀλλὰ ΒΔΚ = ΚΔΑ καὶ ΑΔΛ = ΛΔΓ (ἄσκ. 107)· ἄρα ΒΔΑ = 2ΚΔΑ καὶ ΑΔΓ = 2ΑΔΛ· ὥστε ἡ (1) γράφ. 2(ΚΔΑ + ΑΔΛ) = 2 ὀρ. καὶ ΚΔΑ + ΑΔΛ = 1 ὀρ. ἢ ΚΔΛ 1 ὀρ.

137) Βλέπε ἄσκησιν 112.

138) Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α, τὴν ΖΑ. Ἔχομεν ΖΑΔ = ΑΕΔ καὶ ΖΑΒ = ΑΓΒ (§ 142)· ἄρα εἶναι ΖΑΔ — ΖΑΒ = ΑΕΔ — ΑΓΒ ἢ ΒΑΔ = ΑΕΔ — ΑΓΒ· ἀλλὰ ΑΕΔ = ΑΓΒ + ΓΑΕ (§ 73)· ὥστε εἶναι



Σχ. Ἀσκ. 138.

$$\text{ΒΑΔ} = \text{ΑΓΒ} + \text{ΓΑΕ} - \text{ΑΓΒ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΒΑΔ} = \text{ΓΑΕ}.$$

139) Ἀπεδείχθη, (ἄσκ. 132) ΒΑΓ = 1 ὀρ.· ἄρα ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΑΓ λαμβάνομεν ΑΒΓ + ΒΓΑ = 1 ὀρ., ἀλλ' αἱ τελευταῖαι αὗται γωνίαι σχηματίζονται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΒΓ καὶ τῶν χορδῶν ΒΑ καὶ ΓΑ· εἶναι ἄρα (§ 142) ΑΒΓ = Δ καὶ ΒΓΑ = Ε· ἄρα Δ + Ε = 1 ὀρ.· ἄρα ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἡ ΔΖΕ εἶναι ὀρθή.

Σελ. 81 — 140) Εἶναι τοῦ ὀρθογωνίου αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του· διότι ἂν φέρωμεν ἔκ τινος σημείου μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου κάθετον ἐπὶ ἕνα τῶν ἀξόνων καὶ προεκταθῇ μέχρι τῆς ἄλλης πλευρᾶς, τὰ τμήματα τῆς καθέτου ταύτης εἰς ἃ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ἄξονος εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως τὰ ἄκρα αὐτῆς εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον· πᾶν δὲ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέρους τοῦ ὀρθογωνίου εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐν τῷ ἄλλῳ· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ῥόμβος ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας τὰς διαγωνίους του, τὸ δὲ τετράγωνον τὰς διαγωνίους του καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του τὰς ἀγομένας ἐκ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

141) Τοῦτο προκύπτει εὐκόλως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (σελ. 80, 6).

142) Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν τέμνει τὰς πλευρὰς εἰς δύο σημεῖα συμμετρικὰ πρὸς τὴν διχοτομοῦσαν, διότι τὰ τμήματα τῆς καθέτου εἶναι ἴσα· πᾶν δὲ σημεῖον τοῦ ἑνὸς σημείου τῆς γωνίας, ἔχει τὸ συμμετρικόν του, ἐν τῷ ἄλλῳ.

143) Διότι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν διάμετρον τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον ταύτην· πᾶν δὲ σημεῖον ἑνὸς τῶν ἡμικυκλίων, ἔχει τὸ συμμετρικόν του, ἐν τῷ ἄλλῳ.

144) Καὶ τοῦτο ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

Σελ. 81.—145) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Γ = 1 ὀρ.) λαμβάνομεν Α + Β = 1 ὀρ. (1), ἀλλ' ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΒΔ ἔχομεν ΒΓΔ = ΒΔΓ· ἡ δὲ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΒΓ τοῦ τριγώνου ΓΒΔ ἰσοῦται μὲ 2ΒΓΔ ἤτοι $\text{ΒΓΔ} = \frac{\text{Β}}{2}$· ἀλλ' ἐκ τοῦ τρι- ΑΓΕ λαμβάνομεν ΑΓΕ + ΓΑΕ + ΑΕΓ = 2 ὀρ. ἢ

$$1\,\text{ὀρ.} + \text{ΒΓΔ} + \frac{\text{Α}}{2} + \text{ΑΕΓ} = 2\,\text{ὀρ.} \text{ ἢ } \frac{\text{Β}}{2} + \frac{\text{Α}}{2} + \text{ΑΕΓ} = 1$$

ὀρ.· καὶ ἐπειδὴ (1) $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$ ὀρ. ἕπεται ὅτι $AEΓ=\frac{1}{2}$ ὀρθ.

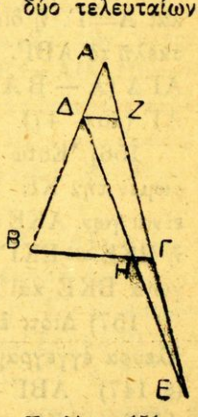
146) Εἶναι $AΔ=ΔB$ ἄρα εἶναι καὶ $ΔAB=B$, ἐπειδὴ δὲ ἐδόθη $A=3B$ ἕπεται ὅτι $ΓAΔ=2B$· ἀλλ' ἡ ἐξ. γων. ΓΔΑ τοῦ τριγώνου ΔΑΒ ἰσοῦται μὲ 2Β· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα $AΓ=ΓΔ$· ὥστε εἶναι $AΔ=ΔB$, $AΓ=ΓΔ$ κα $AΔ+AΓ=ΓΔ+ΔB=BΓ$.

147) Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τὸ δοθὲν τρίγωνον ($AB=AΓ$) καὶ αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τῆς βάσεως ΒΓ εἶναι αἱ ΒΕ καὶ ΓΖ, αὗται εἶναι ἴσαι (ἄσκ. 43)· ἄρα εἶναι καὶ $BZ=ΓE$· ἐπομένως τὸ τετράπλευρον ΕΖΒΓ εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελὲς (ἄσκ. 86)· ἄρα εἶναι $EZ \parallel ΓB$.

148) Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($B=1$ ὀρ.) καὶ διάμεσος μὲν ἡ ΒΔ κάθετος δὲ ἡ ΒΕ· ἀλλὰ γνωρίζομεν (ἄσκ. 104) ὅτι $BΔ=ΔΓ$· ἄρα $ΔBΓ=Γ$ καὶ $BΔE=2Γ$ (ἐξ. γων. τριγώνου ΒΔΓ)· ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΕΒΔ λαμβάνομεν $EBΔ+EΔB=A+Γ$ ἢ $EBΔ+2Γ=A+Γ$ ἢ $EBΔ=A-Γ$.

149) Ἐὰν τὸ τετράπλευρον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ, ἔχομεν $A+B+Γ+Δ=4$ ὀρθ. (1), ἐὰν δὲ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τέμνωνται εἰς τὸ Ε ἔχομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+AEB=2$ ὀρ. ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{Γ}{2}+\frac{Δ}{2}=2$ ὀρ., ἕπεται ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἰσοτήτων $AEB=\frac{Γ+Δ}{2}$.

150) Ἐπειδὴ τὸ Ο εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἔχομεν $OB=OΓ$ (§ 104)· ἐπειδὴ δὲ πάλιν τὸ Ο εἶναι σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γων. Α, ἔχομεν $OΔ=OE$ (§ 109)· ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΔΒ καὶ ΟΕΓ εἶναι ἴσα (σελ. 46, 2) καὶ ἐπομένως εἶναι $BΔ=ΓE$.



Σχ. Ἀσκ. 151

151) Πρέπει δηλαδὴ νὰ ἀποδείξωμεν (ἐπειδὴ $AE=AΓ+ΓE$) ὅτι $AΔ+AΓ+ΓE=AB+AΓ$ ἢ $AΔ+ΓE=AB$ (ἐπειδὴ $AB=AΔ+ΔB$) ἢ $AΔ+ΓE=AΔ+ΔB$ ἢ $ΓE=ΔB$. (1) Πρὸς τοῦτο δὲ φέρομεν ἐκ τοῦ Δ παράλληλον τῇ ΒΓ, τέμνουσαν

τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· ἐὰν δὲ Η εἶναι τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ ΔΕ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ΒΓ, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐν τῷ τριγώνῳ ΕΔΖ ἡ ΗΓ ἡ ἀρχομένη ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς ΔΕ καὶ παράλληλος τῇ ΔΖ, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΖΕ (§ 119)· εἶναι ἄρα ΓΕ=ΓΖ· ἀλλὰ ΓΖ = ΒΔ (διότι ΑΖ=ΑΔ καὶ ΑΓ — ΑΖ = ΑΒ — ΑΔ) ἄρα εἶναι ΓΕ = ΔΒ (1).

152) Τὸ τετράπλευρον οὗ διαγώνιοι εἶναι αἱ χορδαὶ αὗται εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 116, σημ.)· ἀλλὰ παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι πάντοτε ὀρθογώνιον, οὗ αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι καὶ τὰ τέσσαρα μέρη αὐτοῦ εἶναι ἴσα· ἄρα ἀκτῖνες τοῦ κύκλου· ἤτοι αἱ χορδαὶ εἶναι διάμετροι.

153) Διότι αἱ τέμνουσαι αὗται ὁρίζουσι χορδὰς παραλλήλους (ἄσκ. 130)· ἄρα τὸ τετράπλευρον ὅπερ ὁρίζουσιν αἱ χορδαὶ αὗται μετὰ τῶν παραλλήλων τεμνουσῶν εἶναι παραλληλόγραμμον.

154) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ εἶναι τὸ Ε μεταξὺ Α καὶ Γ καὶ Ζ μεταξὺ Β καὶ Δ, εἶναι δὲ ΑΟ=ΟΒ, ΟΓ=ΟΔ, ΓΕ=ΔΖ καὶ ΕΑ=ΖΒ, τὰ σχήματα ΑΟΓΕ καὶ ΒΟΔΖ τὰ ὁποῖα ἔχουσι καὶ τὰς ἑκατέρωθεν τοῦ Ο γωνίας, ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν, εἶναι ἴσα, ἄρα ἔχουσι καὶ Γ = Δ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΕΟΓ καὶ ΟΔΖ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως εἶναι γων. ΕΟΓ=ΔΟΖ· ἄρα (ἄσκ. 5) ΟΕ καὶ ΟΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

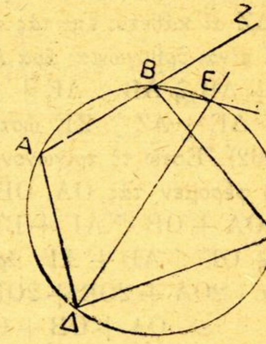
155) Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ καὶ εἶναι ΒΑ=ΒΓ καὶ Α=Γ, ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ τὸ ΑΒΓ, καὶ τὸ ΑΓΔ, διότι τοῦτο ἔχει γων. ΓΑΔ = γων. ΑΓΔ (Α — ΒΑΓ = Γ — ΒΓΑ)· ἄρα ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΓ (ἄσκ. 47).

156) Ἔστω σημεῖον τι Ε δι' ὃ εἶναι ΕΑ = ΕΔ· καὶ ἂς φέρωμεν τὴν ΚΕ· τὰ τρίγωνα ΚΕΑ καὶ ΚΕΔ εἶναι ἴσα (§ 87)· ἄρα εἶναι γων. ΑΚΕ = γ. ΕΚΔ· ἄρα εἶναι ΑΚΕ∓ΑΚΒ = ΕΚΔ∓ΓΚΔ ἢ ΒΚΕ = ΕΚΓ· ἀλλ' ἤδη εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΒΚΕ καὶ ΕΚΓ εἶναι ἴσα· (§ 77)· ἄρα εἶναι ΕΒ = ΕΓ.

157) Διότι ἐὰν φέρωμεν τὴν ΓΖ σχηματίζονται διὰ τετράπλευρα ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον, τὰ ΑΒΓΖ καὶ ΓΖΕΔ· εἶναι δὲ (§ 147) ΑΒΓ + ΑΖΓ + ΓΖΕ + ΓΔΕ = 4 ὀρθαὶ ἢ
ΑΒΓ + ΑΖΕ + ΓΔΕ = 4 ὀρθαί.

158) Ἔστω ΑΒΓΔ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον

καὶ ΖΒΓ μία τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ· ἐπειδὴ ΑΒΓ + ΖΒΓ = 2 ὀρ. καὶ ΑΒΓ + ΑΔΓ = 2 ὀρ. (§ 147), ἔπεται ὅτι ΑΔΓ = ΖΒΓ· ἂς φέρωμεν ἤδη τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΔΓ τὴν ΔΕ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε· λέγω ὅτι καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ΖΒΓ διέρχεται διὰ τοῦ Ε· ἔστω δὲ ὅτι δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Ε· τότε φέρωμεν τὴν ΕΒ· τότε ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΕΒΑΔ ἔχομεν ΕΒΑ + ΑΔΕ = 2 ὀρθαί· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ΑΒΓ + ΑΔΓ = 2 ὀρ. ἄρα ἔχομεν ΕΒΑ + ΑΔΕ = ΑΒΓ + ΑΔΓ ἢ



Σχ. Ἀσκ. 158.

ΕΒΓ + ΑΒΓ + ΑΔΕ = ΑΒΓ + ΑΔΕ + ΕΔΓ ἢ ΕΒΓ = ΕΔΓ καὶ ἀφοῦ ἡ ΕΔΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔΓ καὶ ἡ ΕΒΓ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΖΒΓ (διότι ΖΒΓ = ΑΔΓ)· ἄρα ἡ ΒΕ εἶναι διχοτόμος τῆς ΖΒΓ· ἄλλη δὲ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι· ἄρα αἱ διχοτόμοι αὗται τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφειρείας.

159) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παρ/μου εἶναι ἴσαι (§ 112)· ἀλλ' ἐπειδὴ εἶνε καὶ ἐγγεγραμμένον, εἶναι αὗται παραπληρωματικαί· ἄρα εἶναι ὀρθαί. Ἔστω ἤδη ΑΒΓΔ τὸ περιγεγραμμένον παραλληλόγραμμον καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· ἔχομεν (§ 143) λοιπὸν ΑΕ = ΑΘ, ΒΕ = ΒΖ, ΓΗ = ΓΖ, ΔΗ = ΔΘ καὶ ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, λαμβάνομεν ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ, καὶ ἐπειδὴ ΓΔ = ΑΒ καὶ ΑΔ = ΒΓ ἔπεται ὅτι 2ΑΒ = 2ΑΔ ἢ ΑΒ = ΑΔ ἢ ΑΒ = ΑΔ = ΔΓ = ΓΒ.

160) Τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΑΓΕ ἔχουσιν ΑΓ = ΑΓ, ΑΒ = ΑΕ ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Α, εἶναι δὲ ὀρθογώνια ἐπειδὴ ΑΕΓ = ΑΔΓ = 1 ὀρ. (ὡς ἐγγεγρ. εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΒΓ)· Εἶναι ἐπομένως τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα ἴσα· ἄρα εἶναι ΕΓ = ΒΓ καὶ ἐπειδὴ ΒΓ = ΑΔ, ἔπεται ὅτι ΕΓ = ΑΔ. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΕΑΓΔ ἡ ΑΓ εἶναι διάμετρος τοῦ πρώτου κύκλου ἡ δὲ ΕΔ εἶναι χορδὴ αὐτοῦ· ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τούτων (§ 135) εἶναι

κάθετος ἐπ' αὐτὰς καὶ ἐπομένως (ἄσκ. 85) τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως $ΔΕ \parallel ΑΓ$.

161) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, Δ σημεῖόν τι τῆς ΑΒ καὶ ΔΕ καὶ ΔΖ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΒΖ εἶναι ὀρθογώνια· ἄρα $ΑΔ > ΔΕ$ καὶ $ΔΒ > ΔΖ$ καὶ ἐπομένως $ΑΔ + ΔΒ$ ἢ $ΑΒ > ΔΕ + ΔΖ$· ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ λαμβάνομεν $ΔΕ + ΔΖ > ΖΕ$· ὥστε κατὰ μείζονα λόγον εἶναι $ΑΒ > ΕΖ$.

162) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο σημεῖόν τι ἐντὸς αὐτοῦ, ἐξ οὗ φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Ἔχομεν ἐπομένως (§ 97)

$ΟΑ + ΟΒ < ΑΓ + ΒΓ$, $ΟΑ + ΟΓ < ΑΒ + ΒΓ$ καὶ $ΟΒ + ΟΓ < ΑΒ + ΑΓ$· ἄρα διὰ τῆς προσθέσεως τούτων λαμβάνομεν $2ΟΑ + 2ΟΒ + 2ΟΓ < 2ΑΒ + 2ΒΓ + 2ΑΓ$ ἢ

$$ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ.$$

163) Ἔστω τὸ παραλ/μον ΑΒΓΔ καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α· αὕτη διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν Γ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ εἶναι $ΑΒ = ΒΓ$ ἐπειδὴ δὲ καὶ $ΒΓ = ΑΔ$ ἕπεται ὅτι $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ$.

164) Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ($ΑΒ = ΒΓ$) τοῦ ὁποίου τὰς παρὰ τὴν βάσιν ἴσας γωνίας παριστῶ διὰ τοῦ β καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς διὰ τοῦ α, καὶ τὸ ὁποῖον τρίγωνον διῃρέθη διὰ τῆς εὐθείας ΑΔ εἰς δύο ἄλλα τρίγωνα ἐπίσης ἰσοσκελῆ, τὰ ΑΒΔ ($ΑΔ = ΒΔ$) καὶ ΑΓΔ ($ΑΔ = ΑΓ$)· τότε εἶναι γων. $ΒΑΔ = α$, γωνία $ΔΑΓ = β - α$ καὶ γων. $ΒΔΑ = β - α + β = 2β - α$. Ἔχομεν ἄρα ἐκ τῶν δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ $α + α + 2β - α = β - α + β + β$ ἢ $2α = β$, ἤτοι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως.

165) Ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ὀξ. τριγώνου ΑΒΓ, αὗται τέμνονται ἐντὸς τοῦ τριγώνου εἰς σημεῖόν τι Ο, ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ (ἄσκ. 67)· ὥστε εἶναι $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ$· καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΑΓ εἶναι ἰσοσκελῆ· ἐξ αὐτῶν δὲ τὰ δύο τοὐλάχιστον εἶναι ἀμβλυγώνια· διότι ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ΒΟΓ εἶναι ὀξεῖα, ἤτοι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, αἱ δύο ἄλλαι περὶ τὸ Ο θὰ ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλύτερον τῶν 3 ὀρθῶν (αἱ τρεῖς περὶ τὸ Ο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθάς), ἄρα ἑκατέρα τούτων θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς.

166) Βλέπε ἄσκησιν 159.

167) Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ ΑΔ, ἡ τέμνουσα τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ, ΒΕ ἡ τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ ΓΖ ἡ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ· ἔχομεν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ, $ΑΔ < ΑΒ + ΒΔ$ καὶ $ΑΔ < ΑΓ + ΔΓ$ καὶ διὰ τῆς προσθέσεως λαμβάνομεν $2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ + ΒΔ + ΔΓ$ ἢ $2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ$· ὁμοίως ἐργαζόμενοι λαμβάνομεν $2ΒΕ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ$ καὶ $2ΓΖ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ$ καὶ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν τριῶν τελευταίων ἀνισοτήτων ἔχομεν

$$2(ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ) < 3(ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ) \text{ ἢ}$$

$ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ < \frac{3}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ)$. Ὁμοίως ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ λαμβάνομεν $ΑΔ > ΑΒ - ΒΔ$ καὶ $ΑΔ > ΑΓ - ΔΓ$ ἢ $2ΑΕ > ΑΒ + ΑΓ - ΒΓ$· καὶ ἐκ τῶν ἄλλων τριγώνων ἔχομεν ὁμοίως $2ΒΕ > ΑΒ + ΒΓ - ΑΓ$ καὶ $2ΓΖ > ΑΓ + ΒΓ - ΑΒ$ καὶ διὰ τῆς προσθέσεως ἔχομεν

$$2(ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ) > ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ \text{ ἢ}$$

$$ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ > \frac{1}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ).$$

168) Ἐὰν τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι τὸ ΑΒΓΔ καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ Ο ἔχομεν $ΑΒ + ΒΓ > ΑΓ$, $ΒΓ + ΓΔ > ΒΔ$, $ΓΔ + ΔΑ > ΑΓ$ καὶ $ΔΑ + ΑΒ > ΒΔ$ ἢ $2(ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ) > 2(ΑΓ + ΒΔ)$, ἄρα $ΑΓ + ΒΔ <$ τῆς περιμέτρου· ὁμοίως ἔχομεν $ΟΑ + ΟΒ > ΑΒ$, $ΟΒ + ΟΓ > ΒΓ$, $ΟΓ + ΟΔ > ΓΔ$ καὶ $ΟΔ + ΟΑ > ΔΑ$· καὶ ἑπομένως $2(ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ) > ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ$ καὶ $2(ΑΓ + ΒΔ) >$ τῆς περιμέτρου καὶ $ΑΓ + ΒΔ > \frac{1}{2}$ τῆς περιμέτρου.

169) Τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ ἐντὸς τοῦ πολυγώνου εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς, εἶναι μεγαλύτερον τῆς πλευρᾶς· σχηματίζομεν τοιαύτας ἀνισότητας κατὰ σειρὰν μὲ ὅλας τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου τούτου, προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν 2 φορὰς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου $>$ τῆς περιμέτρου ἄρα κτλ.

Σελ. 88—170). Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς μιᾶς δοθείσης διαγωνίου (πρβλ. 1ον § 142) καὶ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης, ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς τομῆς, δύο τμήματα ἴσα, πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης δοθείσης διαγωνίου· ὁπότε τὰ ἄκρα τῶν δύο τούτων καθέτων εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου ῥόμβου.

171) Εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς μὲ τὸ πρόβλημα 1ον καὶ λαμβάνοντες τὴν ΑΒ, ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

172) Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς δοθείσης βάσεως καὶ μὲ κέντρον ἔπειτα τὸ ἓν ἄκρον τῆς βάσεως καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς βάσεως, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις θὰ κόψῃ τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον εἰς ἓν σημεῖον, ὅπερ θὰ εἶναι ἡ κορυφή, τοῦ ζητουμένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

173) Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας (χορδὴ τῆς ζητουμένης περιφερείας) τῆς ἑνούσης τὰ δύο δοθέντα σημεῖα· τὸ σημεῖον δέ, εἰς ὃ τέμνει τὴν κάθετον ταύτην (ὅταν ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς εἶναι $> \frac{1}{2}$ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ δύο σημεῖα), ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα κέντρον ἓν τῶν σημείων τούτων καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν, εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

174) Διαιροῦμεν τὸ δοθὲν τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη (§ 143)· ἔπειτα ἕκαστον τούτων εἰς ἄλλα δύο ἴσα κ. ο. κ.

176) Κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον (ἄσκ. 171)· καὶ μίαν τῶν γωνιῶν τούτου διαιροῦμεν εἰς δύο ἴσα μέρη.

177) Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ· καὶ τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ διχοτόμος αὐτὴ τέμνει τὴν τρίτην πλευρὰν εἶναι τὸ ζητούμενον.

178) Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον, εἶναι ἐκεῖνο εἰς ὃ τέμνει ἡ κάθετος τὴν ΑΒ ἢ τὴν προέκτασίν της.

Σελ. 95—179) Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ διδόμενα μέσα, φέρωμεν ἐκ τοῦ Δ, παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ, ἐκ τοῦ Ε, πρὸς τὴν ΔΖ καὶ ἐκ τοῦ Ζ, πρὸς τὴν ΔΕ· αἱ παράλληλοι αὗται τέμνονται εἰς τὰ Α, Β, Γ καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ. Διότι ἂν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, ἐκ τῶν παραλληλογράμμων ΑΔΖΕ, ΒΔΕΖ λαμβάνομεν ΑΔ = ΕΖ = ΔΒ ἤτοι τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς ΑΒ· ὁμοίως δεικνύεται ὅτι τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ τὸ Ε μέσον τῆς ΓΑ.

180) Διαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ λαμβάνομεν ἔπειτα τὸν ἓν τῶν ἴσων μερων, πεντάκις ἐπ' εὐθείας.

181) Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἔχον πλευράς, τὰς δύο διαδοχικὰς πλευράς, καὶ τὴν διαγώνιον· καὶ κατόπιν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς, ἥτις ἰσοῦται πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαγώνιον, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

182) Κατασκευάζομεν πρῶτον τρίγωνον, ἔχον πλευράς, τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου παραλ/μου καὶ τὰ ἡμίση τῶν δοθεισῶν διαγωνίων· προεκτείνομεν δὲ ἔπειτα τὰς δύο τελευταίας ταύτας πλευρὰς πρὸς τὸ μέρος τῆς τομῆς των καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τμήματα ἴσα πρὸς τὰ ἡμίση τῶν διαγωνίων· τὰ ἄκρα δὲ τούτων μετὰ τῶν ἄκρων τῆς πρώτης πλευρᾶς, εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου παραλληλογράμμου (§ 116 σημ.).

183) Κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ τὴν κατὰ κορυφήν της· ἑκατέρωθεν δὲ τῆς κορυφῆς καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμήματα ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς μιᾶς διαγωνίου, καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης εὐθείας τμήματα ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης· τὰ 4 ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων, εἶναι κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου παραλληλογράμμου.

184) Κατασκευάζομεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΒΓ καὶ λαμβάνομεν τὴν ΒΑ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν κάθετον πλευράν· μὲ κέντρον δὲ τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν γράφομεν περιφέρειαν κύκλου τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς τὸ Γ· ὥστε τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

185) Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἔχον ὑποτείνουσαν, τὴν δοθεῖσαν ἴσην πλευράν, καὶ μίαν τῶν καθέτων ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ζητουμένου. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τρίγωνον, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἴπομεν, προεκτείνομεν τὴν τρίτην πλευρὰν πρὸς τὸ μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ἴσον πρὸς αὐτήν· τὸ ἄκρον δὲ αὐτῆς εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

186) Κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἔπειτα ἄγομεν τὴν διχοτόμον αὐτῆς· ἐπὶ ταύτης δὲ λαμβάνομεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν κάθετον καὶ ἐπὶ ταύτην φέρομεν κάθετον διὰ τοῦ πέρατος τῆς διχοτόμου, ἥτις θὰ

κόψῃ τὰς πλευρὰς τῆς δοθείσης γωνίας, εἰς δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι τὰ ἄκρα τῆς βάσεως τοῦ ζητουμένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Σελ. 107—187). ***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον οὗ ΑΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα, καὶ ΑΒ + ΒΓ = Περίμ — ΑΓ· ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τῆς Β καὶ λάβωμεν ΒΔ = ΑΒ, ἡ ΔΓ = περ — ΑΓ, τὸ δὲ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς ἡ δὲ Δ = $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ διότι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΔΓ = περ — ΑΓ, ἡ ΑΓ = πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία = $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς (§ 159). Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑξῆς λύσις.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν ΔΓ = περ — ΑΓ, καὶ μὲ κορυφὴν τὴν Δ κατασκευάζομεν γωνίαν = $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, ἄγοντες τὴν ΔΑ· μὲ κέντρον δὲ τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν γράφομεν περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν ΔΑ εἰς τὸ Α· κατόπιν φέρομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ· τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ, διότι εἶναι γων. ΔΑΒ = $\frac{1}{2}$ ὀρ.· ἄρα ΔΒ = ΑΒ καὶ ἐπομένως ΑΒ + ΒΓ = ΔΒ + ΒΓ = περίμ. — ΑΓ καὶ ΑΓ = δοθεῖσα ὑποτείνουσα.

188) Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ΒΔ ἡ δοθεῖσα κάθετος, ἔχομεν Α = $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς, ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν ΔΕ, ἔχομεν ΕΔΓ = $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς. Ἑπομένως ἔκτινος σημείου Δ εὐθείας τινὸς ΑΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης τμῆμα ΔΒ, ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Σχηματίζομεν δὲ μὲ πλευρὰν τὴν ΔΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ γωνίαν ΕΔΓ ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

Κατόπιν φέρομεν ἐκ τοῦ Β παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ τὴν ΒΑ τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἔπειτα λαμβάνομεν ΑΔ = ΔΓ· τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ. Διότι ΒΔ ἰσοῦται πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, καὶ ἐπειδὴ ΒΔ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ, ἕπεται ΑΒ = ΒΓ, ἀλλὰ γων. ΒΑΒ = γων. ΕΔΓ = $\frac{2}{3}$ ὀρ. ἄρα Γ = $\frac{2}{3}$ ὀρ. = γΑΒΓ.

189) Βλέπε ἄσκ. 186.

190) Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον (ΒΑ=ΒΓ) καὶ ΒΔ εἶναι ἡ δοθεῖσα κάθετος, εἶναι δὲ ΒΔ<ΑΒ+ΑΔ ἢ ΒΔ< $\frac{1}{2}$ περιμέτρου· προεκτείνομεν τὴν ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ καὶ λαμβάνομεν ΓΖ = ΓΒ· τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ἰσοσκελές, τὸ δὲ ὀρθογ. ΒΔΖ ἔχει ΔΖ = $\frac{1}{2}$ τῆς δοθείσης περιμέτρου καὶ ΒΔ= δοθεῖσαν κάθετον· κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΖ ἔχον ΒΔ = δοθεῖσαν κάθετον καὶ ΔΖ = $\frac{1}{2}$ δοθείσης περιμέτρου· ἔπειτα κατασκευάζομεν γων. ΖΒΓ = γων. Ζ, διὰ τῆς ΒΓ τέμνουσαν τὴν ΔΖ εἰς τὸ Γ (ἐπειδὴ γων. ΖΒΔ > γων. Ζ)· προεκτείνομεν ἔπειτα τὴν ΓΔ πρὸς τὸ Δ καὶ λαμβάνομεν ΔΑ = ΔΓ· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητοομενον· διότι ΔΖ=ΔΓ+ΓΖ= ΔΓ + ΒΓ = $\frac{1}{2}$ περιμέτρου· ἄρα ΑΒ + ΒΓ + ΑΒ = δοθεῖσα περίμετρος καὶ ΒΔ = δόθεῖσα κάθετος.

191) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ΓΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ· προεκτείνομεν τὴν ΔΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς Γ καὶ λαμβάνομεν ΓΕ = ΓΒ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΕΑΒ ἔχει ΑΒ = δοθ. βάσιν καὶ ΕΔ = δοθὲν ἄθροισμα· τὸ δὲ ΕΓΒ εἶναι ἰσοσκελὲς ἔχον γων. ΒΕΓ = γων ΕΒΓ. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΕΑΒ ἔχον ΑΒ = δοθεῖσαν βάσιν καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ΔΕ ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν ἄθροισμα καὶ κατόπιν κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΕΒΓ = γων. ΒΕΔ, Γ δὲ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΒΓ καὶ τῆς ΕΔ· φέρομεν δὲ καὶ τὴν ΓΑ, καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

192) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον· τούτου δίδονται ἡ γων. ΑΒΓ, ἡ διχοτόμος ΒΕ καὶ ἡ κάθετος ΒΔ· τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΕΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τοῦτο καὶ κατόπιν κατασκευάζομεν μὲ πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ μὲ κορυφὴν τὴν Β δύο γωνίας, ἑκάστην ἴσην πρὸς $\frac{ΑΒΓ}{2}$· προεκτείνομεν κατόπιν τὴν ΕΔ ἑκατέρωθεν καὶ τὰ σημεῖα εἰς ἃ αὐτη τέμνει τὰς πλευρὰς τῶν σχηματισθεισῶν γωνιῶν, μετὰ τῆς Β θὰ εἶναι αἱ 3 κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

193) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον οὗ δίδεται ἡ γωνία Β, ἡ περίμετρος καὶ ἡ κάθετος ΒΔ· προεκτείνομεν τὴν ΑΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων ΑΔ = ΑΒ καὶ ΓΕ = ΓΒ· τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΒΕ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΒΕ, ἔχομεν $2Δ + 2Ε + ΑΒΓ = 2$ ὀρ. ἢ $Δ + Ε = 1$ ὀρ. $- \frac{ΑΒΓ}{2}$ ἢ $ΔΒΕ = ΔΒΑ + ΑΒΓ + ΓΒΕ = 1$ ὀρ. $- \frac{ΑΒΓ}{2} + ΑΒΓ = 1$ ὀρ. $+ \frac{ΑΒΓ}{2}$· ὥστε τοῦ τριγώνου ΔΒΕ ἡ βάσις ΔΕ εἶναι γνωστὴ (ἡ δοθεῖσα περίμετρος), ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία εἶναι γνωστὴ $\left(1\text{ ὀρ.} + \frac{ΑΒΓ}{2}\right)$ καὶ ἡ κάθετος ΒΔ. Ὥστε δύναται νὰ κατασκευασθῇ τοῦτο καὶ κατόπιν, ἐργαζόμεθα ἀναλόγως, μὲ τὴν σύνθεσιν τοῦ προβλ. § 167.

194) Κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν, ἔπειτα σχηματίζομεν περιφέρειαν Κ, μὲ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν, ἐφαπτομένην τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας· κατόπιν φέρομεν ἐκ τοῦ Κ παράλληλον ἀκτῖνα πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΑ τῆς γωνίας τὴν ΚΔ καὶ διὰ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ (ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου) τὴν ΔΑ, ἥτις θὰ κόψῃ τὴν ἄλλην πλευρὰν εἰς τὸ Γ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

195) Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, Ε τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ ΕΖ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΔΒ, ἔστω δὲ ὅτι αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς τὸ Ο· ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΟ· ἄρα ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΟΑ λαμβάνομεν $ΕΖ = \frac{ΑΟ}{2} = \frac{ΑΓ}{4}$· ἀλλ' ἀφοῦ εἶναι γνωστὴ ἡ ΕΖ, ἕπεται ὅτι τώρα γνωρίζομεν καὶ τὰς διαγωνίους τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζομεν εὐκολώτατα, λαμβάνοντες αὐτάς, διχοτομοῦντες ταύτας καθέτως.

Σελ. 116.—196) Ἐὰν ΑΒΓΔΕ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κυρτοῦ σχήματος, Ζ σημεῖον ἐντὸς καὶ εὐθεῖαν ΗΖΘ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα Η καὶ Θ κείμενα ἐκτὸς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Ζ, ἡ ΖΘ θὰ κόψῃ τὴν περίμετρον εἰς ἓν σημεῖον καὶ ἡ ΖΗ εἰς ἄλλο (§ 128)· εἰς ἄλλο δὲ σημεῖον, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναντήσῃ ἡ εὐθεῖα ΗΖΘ τὴν περίμετρον, διότι πᾶσα πλευρὰ τοῦ κυρτοῦ σχήματος προεκβαλλομένη ἀφίνει τὸ σχῆμα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ἐνῷ ἐὰν ἔτεμνε καὶ τρίτην πλευράν, αὕτη προεκβαλλομένη θὰ ἔτεμνε τὸ σχῆμα.

Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι πάλιν δυνατὸν νὰ διέρχεται διὰ μιᾶς κορυφῆς, χωρὶς νὰ τέμνῃ τὰς πλευράς. Ἐὰν ἡ ΗΘ διέλθῃ διὰ δύο κορυφῶν, ἡ εὐθεῖα πάλιν τέμνει τὴν περίμετρον εἰς δύο σημεῖα καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτή, ἐπίσης καὶ ὅταν ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ μιᾶς κορυφῆς καὶ τέμνει μίαν πλευράν.

Ἐὰν ἤδη Κ καὶ Λ εἶναι δύο σημεῖα τοῦ κυρτοῦ σχήματος ἡ ΚΛ κεῖται ἐντὸς αὐτοῦ, διότι εἴπομεν ὅτι ἡ ΚΛ προεκτεινομένη τέμνει τὴν περίμετρον εἰς δύο σημεῖα· ἐὰν δὲ σημεῖόν τι κείμενον μεταξὺ Κ, Λ, ἔκειτο ἐκτὸς τοῦ σχήματος, τότε ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα αὐτὸ καὶ τὸ Κ θὰ ἔτεμνε τὴν περίμετρον εἰς τρίτον σημεῖον· ὅπερ ἄτοπον.

197) Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἡ ΓΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ) καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ (κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ΑΔ)· αἱ ἀποστάσεις δὲ ΑΖ καὶ ΓΕ εἶναι ἴσαι διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΕ καὶ ΒΖΑ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα $ΒΓ = ΒΑ$ καὶ γων. Β κοινὴν (σελ. 46,3).

Ἀντιστρόφως δὲ ἂν ΑΖ καὶ ΓΑ εἶναι ἴσαι, τὰ αὐτὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα (σελ. 46,4)· ἄρα καὶ $ΑΒ = ΒΓ$ ἤτοι $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ$.

198) Τὸ τρίγωνον ΑΔΔ′ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα καὶ γων. $ΕΔΔ' =$ γων. $Ε'Δ'Δ$ ὥστε· εἶναι τριγ. $ΔΔ'Ε =$ τρ. $Δ'ΔΕ'$ (§ 77)· ἄρα καὶ τρίγ. $ΖΔΕ =$ τρίγ. $ΖΔ'Ε'$ (Ζ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΔΕ′ καὶ Δ′Ε) διότι ἀπὸ τὰ πρῶτα ἴσα τρίγωνα ἀφῃρέθη τὸ κοινὸν μέρος ΔΔ′Ζ· ἄρα $ΔΖ = Δ'Ζ$ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΖΔ καὶ ΑΖΔ′· ἑπομένως εἶναι ἴσα (§ 87) καὶ ἄρα γων. $ΔΑΖ =$ γων. $Δ'ΑΖ$.

199) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, ΒΔ ἡ διχοτόμος τῆς Β καὶ $ΑΔ = ΔΓ$· εἶναι δὲ $Α + Γ < 2$ ὀρ. ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΔΓ εἶναι ἴσα· (§ 89)· ἄρα εἶναι $Α = Γ$.

200) Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τὸ τρίγωνον, Δ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας αὐτοῦ· καὶ ΕΔΖ ἡ παράλληλος τῇ ΑΓ, τὸ τρίγωνον ΑΖΔ ἔχει γων. $ΖΔΑ =$ γων. $ΖΑΔ$ διότι $ΖΔΑ = ΔΑΓ$ διὰ τὰς παραλλήλους ΖΔ καὶ ΑΓ τεμνομένας ὑπὸ τῆς ΑΔ· ἄρα $ΑΖ = ΖΔ$· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΕΔΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα εἶναι $ΕΓ = ΔΕ$· ὥστε εἶναι καὶ $ΑΖ + ΕΓ = ΖΔ + ΔΕ$ ἢ 2Ε.

201) Ἐὰν Κ, Λ, Μ εἶναι οἱ 3 κύκλοι καὶ Α, Β, Γ εἶναι τὰ

σημεῖα ἐπαφῆς καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ, λέγω ὅτι καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Γ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Ζ. Ἔστω ὅμως ὅτι δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Ζ, ἀλλ' ὅτι τέμνει τὴν ΒΖ εἰς τὸ Η καὶ τὴν ΑΖ εἰς τὸ Θ· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι

$$\mathrm{ZB} = \mathrm{BA} \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{ZB} = \mathrm{Z\Theta} + \mathrm{\Theta A}\cdot$$
$$\mathrm{H\Gamma} = \mathrm{HB} \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{H\Gamma} = \mathrm{HZ} + \mathrm{ZB}\cdot$$
$$\mathrm{\Theta A} = \mathrm{\Theta\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{\Theta A} = \mathrm{\Theta H} + \mathrm{H\Gamma}$$

καὶ διὰ προσθέσεως καὶ δι' ἀφαιρέσεως τῶν ἴσων λαμβάνομεν· $\mathrm{Z\Theta} + \mathrm{HZ} + \mathrm{\Theta H} = 0$, ἀλλ' ἵνα τοῦτο τὸ ἄθροισμα εἶναι 0 πρέπει νὰ εἶναι $\mathrm{Z\Theta} = 0$ ἤτοι τὸ Θ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ Ζ, καὶ $\mathrm{HZ} = 0$ ἤτοι τὸ Η καὶ Ζ νὰ συμπίπτουν, ὁπότε καὶ $\mathrm{\Theta H} = 0$ ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη ἐν τῷ Γ διέρχεται διὰ τοῦ Ζ· ἄρα κ. τ. λ.

202) Παράβαλε ἄσκησιν 179.

203) Τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου εἶναι κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὡς ἄνω· ἀλλὰ αἱ κάθεται αὗται διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου· (§ 161, σημ. β).

204) Ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον (ἄρτιος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν) καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν κατὰ σειρὰν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἔχομεν $\mathrm{\Theta A} = \mathrm{AE}$, $\mathrm{ZB} = \mathrm{BE}$, $\mathrm{Z\Gamma} = \mathrm{\Gamma H}$, $\mathrm{\Delta\Theta} = \mathrm{\Delta H}$ καὶ διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν $\mathrm{AB} + \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}$.

205) Ἐὰν ΑΒΓΔΕΖ εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ, πολύγωνον, ἔχομεν γων. $\mathrm{AB\Gamma} = \frac{1}{2}$ ἐπικ. γωνίας κυρτῆς ΑΚΓ (§ 139)

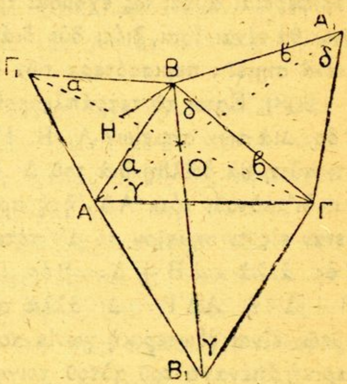
$$\text{ἢ γων. } \mathrm{B} = \frac{1}{2}\,(4\,\text{ὀρ.} - \text{ἐπ. γων. } \mathrm{AK\Gamma})$$
$$\text{καὶ γων. } \Delta = \frac{1}{2}\,(4\,\text{ὀρ.} - \text{ἐπ. γων. } \mathrm{\Gamma KE})$$
$$\text{γων. } \mathrm{Z} = \frac{1}{2}\,(4\,\text{ὀρ.} - \text{ἐπ. γων. } \mathrm{AKE})$$

καὶ $\mathrm{B} + \Delta + \mathrm{Z} = \frac{1}{2}\,(12\,\text{ὀρ.} - 4\,\text{ὀρ.}) = 4\,\text{ὀρθ.}$· ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν $\mathrm{A} + \Gamma + \mathrm{E} = 4\,\text{ὀρ.}$ ἄρα $\mathrm{A} + \Gamma + \mathrm{E} = \mathrm{B} + \Delta + \mathrm{Z}$.

206) Τὰ τρίγωνα $\Gamma_1\mathrm{B}\Gamma$, $\mathrm{A}_1\mathrm{BA}$ ἔχουσιν $\Gamma_1\mathrm{B} = \mathrm{AB}$, $\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{A}_1\mathrm{B}$ καὶ γων. $\Gamma_1\mathrm{B}\Gamma =$ γων. $\mathrm{A}_1\mathrm{BA}$, διότι εἶναι $\Gamma_1\mathrm{BA} + \mathrm{AB\Gamma} = \mathrm{A}_1\mathrm{B}\Gamma + \mathrm{AB\Gamma}$ καὶ $\Gamma_1\mathrm{BA} = \mathrm{A}_1\mathrm{B}\Gamma = \frac{2}{3}$ ὀρθ.· ὥστε εἶνε $\Gamma_1\Gamma =$

AA_1, καὶ $\alpha=\alpha$, $\beta=\beta$· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα $B\Gamma B_1$ καὶ $A\Gamma A_1$ εἶναι ἴσα, ἄρα εἶναι καὶ $A_1A=BB_1$ καὶ $\gamma=\gamma$ καὶ $\delta=\delta$· ἀπεδείχθη ἑπομένως ὅτι $AA_1=BB_1=\Gamma\Gamma_1$.

Ἔστω ἤδη ὅτι αἱ AA_1 καὶ BB_1 τέμνονται εἰς τὸ O· λέγω ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Gamma_1$ διέρχεται διὰ τοῦ O ἢ ὅτι αἱ $O\Gamma_1$ καὶ $O\Gamma$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Διότι ἐκ τοῦ τριγώνου $OA\Gamma_1$ λαμβάνομεν



Σχ. ἀσκ. 206.

$O\Gamma_1A+\Gamma_1AO+AO\Gamma_1=2$ ὀρθ.

ἀλλὰ $O\Gamma_1A=\frac{2}{3}$ ὀρ. $-\ \alpha$ καὶ

$OA\Gamma_1=\frac{2}{3}+\alpha$· ὥστε ἔχομεν

$\frac{2}{3}$ ὀρ. $-\alpha+\frac{2}{3}$ ὀρ. $+\alpha+AO\Gamma_1$ $=2$ ὀρ. ἢ $AO\Gamma_1=\frac{2}{3}$ ὀρ.· ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ τριγώνου $A_1O\Gamma$ λαμβάνομεν $A_1O\Gamma=\frac{2}{3}$ ὀρθῆς· ἀλλ' ἀφοῦ αἱ $O\Gamma$ καὶ $O\Gamma_1$ ἑκατέρωθεν τῆς AOA_1 σχηματίζουν μετὰ τῶν τμημάτων αὐτῆς γωνίας ἴσας, ἕπεται ὅτι αἱ $O\Gamma$ καὶ $O\Gamma_1$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· (ἄσκ. 5).

Ἐργαζόμενοι καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων $OB_1\Gamma$, OB_1A ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma OB_1=\frac{2}{3}$ ὀρ. $=AOB_1$ ἤτοι αἱ περὶ τὸ O ἓξ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἤδη λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $O\Gamma_1$, $OH=OB$, ἐπειδὴ δὲ ὡς ἀπεδείχθη γωνία $HOB=\frac{2}{3}$ ὀρ. ἕπεται ὅτι καὶ $OHB=\frac{2}{3}$ ὀρθ. ἄρα $\Gamma_1HB=\frac{4}{3}$ ὀρθ.· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα Γ_1HB, καὶ ABO ἔχουσι $\Gamma_1B=AB$, ὡς πλευραὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου, $\alpha=\alpha$ $\Gamma_1HB=AOB$ ἐπειδὴ $AOB=\frac{4}{3}$ ὀρθῆς· ἄρα καὶ $\Gamma BH=ABO$· ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἄρα εἶναι καὶ $\Gamma_1H=AO$, ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη $OH=OB$, ἕπεται ὅτι $\Gamma_1H+OH=AO+OB$ ἢ $O\Gamma_1=OA+OB$, ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ $OB+O\Gamma=OA_1$ καὶ $OA+O\Gamma=OB_1$.

207) Ἀφοῦ τὰ τρίγωνα εἶναι ἐγγεγραμμένα θὰ ἔχουσι τὰς κορυφάς των ἐπὶ τῶν περιφερειῶν· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἴσα θὰ ἐφαρμόσωσιν, ἄρα θὰ συμπέσωσι καὶ αἱ κορυφαί των. Ὥστε αἱ περιφέρειαι αὗται ὡς ἔχουσαι τρία κοινὰ σημεῖα θὰ ἐφαρμόσωσι, ἤτοι θὰ εἶναι ἴσαι, διότι δύο διάφοροι περιφέρειαι, οὐδέποτε ἔχουσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

208) Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ οὗ εἶναι $Α+Γ=Β+Δ=2$ ὀρ. Διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ γράφω μίαν περιφέρειαν· λέγω δὲ ὅτι αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Δ· διότι ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι δὲν διέρχεται δι' αὐτοῦ, τότε ΑΔ (ἢ ἡ προέκτασίς της) τέμνει τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον τὸ Δ'· τότε δὲ εἶναι (§ 147) $Β+ΑΔ'Γ=2$ ὀρ. ἀλλὰ καὶ $Β+Δ=2$ ὀρ. (ὡς ἐδόθη)· ἄρα εἶναι $Β+ΑΔ'Γ=Β+Δ$ ἢ $ΑΔ'Γ=Δ$· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον διότι ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΔΔ'Γ, ἡ δὲ ἄλλη ἐσωτερικὴ ἀπέναντι τοῦ αὐτοῦ τριγώνου· ὥστε ἡ περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ Δ.

209) Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ καὶ εἶναι $ΒΔ=ΕΓ$, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΑ, ΓΕΑ ἔχουσι τὴν ὀξεῖαν Α κοινὴν καὶ $ΒΔ=ΕΓ$· ἄρα εἶναι ἴσα (σελ. 46,4) ὥστε εἶναι καὶ $ΑΒ=ΑΓ$· ἀντιστρόφως δὲ ἂν εἶναι $ΑΒ=ΑΓ$, τὰ αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (σελ. 46,3) ἄρα εἶναι καὶ $ΒΔ=ΕΓ$.

210) Τὸ πρῶτον μέρος ἀπεδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 162· διὰ τὸ δεύτερον μέρος ἔχομεν (τὸ αὐτὸ σχῆμα) $ΟΑ+ΟΓ>ΑΓ$, $ΟΑ+ΟΒ>ΑΒ$, $ΟΒ+ΟΓ>ΒΓ$ ἄρα

$$2(ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ)>ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ \quad ἢ$$

$$ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ>\frac{1}{2}(ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ).$$

211) Ἐὰν λάβωμεν σημεῖόν τι ἐντὸς τοῦ ἁπλοῦ πολυγώνου καὶ φέρωμεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, σχηματίζονται τόσα τρίγωνα ὅσα καὶ αἱ πλευραὶ κ. ο. κ. ὡς ἐν τῷ ἐδ. 76. Ἐὰν ὅμως αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰς κορυφὰς ἐξέρχωνται τοῦ σχήματος, τότε φέρομεν εὐθείας μεταξὺ τῶν κορυφῶν δύο κυρτῶν γωνιῶν, οὕτως ὥστε νὰ λάβωμεν πολύγωνα, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐὰν λάβωμεν σημεῖόν τι ἐντός, αἱ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ μερικοῦ πολυγώνου, νὰ κεῖνται ὁλόκληροι ἐντὸς καὶ ἀποδεικνύομεν ἀκολούθως ὁμοίως.

212) Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἔχομεν $Α + Β =$ 2 ὀρ. ἢ $\frac{Α}{2} + \frac{Β}{2} = 1$ ὀρ.· ἐὰν δὲ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τέμνονται εἰς τὸ Ε ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ λαμβάνομεν $ΑΕΒ =$ 1 ὀρθ., ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς γωνίας τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, Β, Γ κτλ.

Ἐὰν τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν Α,Β τέμνονται εἰς τὸ Ε, τῶν Β,Γ εἰς τὸ Ζ, τῶν Γ,Δ εἰς τὸ Η, καὶ τῶν Δ,Α εἰς τὸ Η, τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ ἔχει τὰς γωνίας ὀρθὰς ὡς ἀπεδείχθη προηγουμένως· ἀλλ' ἔχει καὶ τὰς πλευράς του ἴσας, διότι τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΔΗΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα, ἄρα εἶναι $ΑΕ = ΔΗ$, ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ΑΘΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἔπεται ὅτι καὶ $ΑΘ = ΔΘ$ ἄρα εἶναι $ΑΕ - ΑΘ = ΔΗ - ΔΘ$ ἢ $ΘΕ = ΘΗ$ ἢ $ΘΕ = ΘΗ =$ $ΗΖ = ΖΕ$. Ἤδη προεκτείνομεν τὴν ΘΖ ἥτις τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Κ, Λ· ἐπειδὴ δὲ $ΗΘΖ = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς $=$ $ΘΔΓ$, ἔπεται ὅτι $ΚΛ \parallel = ΔΓ$· ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΘΔ καὶ ΒΖΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα, ἔπεται $ΑΚ = ΚΔ = ΓΛ = ΛΒ$ ἀλλὰ καὶ τὰ ὀρθογ. τρίγ. ΑΘΚ καὶ ΒΛΖ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα ($ΑΚ = ΒΛ$, γων. $ΚΑΘ = \frac{1}{2}$ ὀρ. $= ΑΘΚ = ΛΒΖ$ κτλ.)· ἄρα $ΑΚ = ΚΘ$ καὶ $ΒΛ = ΛΖ$ καὶ $ΑΚ + ΒΛ = ΚΘ + ΖΛ$ ἢ $ΑΔ = ΚΘ + ΖΛ$· ὥστε

$$ΑΒ - ΑΔ = ΚΛ - (ΚΘ + ΖΛ) \quad ἢ \quad ΑΒ - ΑΔ = ΘΖ.$$

213) Διότι ὅταν ἐγγραφῇ εἰς κύκλον, αἱ ἴσαι πλευραὶ θὰ εἶναι χορδαὶ καὶ θὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς ἴσα τόξα Αἱ γωνίαι δὲ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι θὰ εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων· εἶναι δὲ ταῦτα ὅλη ἡ περιφέρεια, ἠλαττωμένη κατὰ τὰ δύο μέρη αὐτῆς.

214) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ τὴν γωνίαν Γ παριστῶ διὰ τοῦ α· εἶναι δὲ $Β = 3α$· ἐὰν φέρω τὴν ΒΕ, σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΒΓ γωνίαν ἴσην τῇ α, τὸ τρίγωνον ΒΕΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἡ δὲ ΕΒΑ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΕ ἰσοῦται πρὸς $2α$· ἐπίσης δὲ διὰ τὴν ἐξωτερικὴν πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΕΓ, γωνίαν ΒΕΑ ἔχομεν $ΒΕΑ =$ $α + α = 2α$· ἤτοι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελές.

215) Βλέπε ἄσκησιν 104.

216) Ἐὰν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἡ ΑΒ εἶναι χορδὴ καὶ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἡ

κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ, ὥστε τὸ κέντρον τῆς περιφερείας εἶναι ἡ τομὴ τῶν καθέτων τούτων, ἥτις εἶναι τὸ Ο.

217) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ οὗ εἶναι $ΑΒ = \frac{1}{2} ΑΓ$· ἀλλ' ἡ διάμεσος ΒΓ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2} ΑΓ$ (ἄσκ. 104)· ἤτοι $ΑΒ=ΒΔ=ΑΔ$ ἄρα γων. $Α = \frac{2}{3}$ ὀρθῆς καὶ συνεπῶς $Γ = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς.

218) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς Α καὶ ΑΕ τὸ ὕψος· ἐπειδὴ $Α+Β+Γ = 2$ ὀρ. εἶναι $Α = 2$ ὀρ.$-(Β+Γ)$ καὶ $\frac{Α}{2} = 1$ ὀρ. $- \frac{Β+Γ}{2}$, ἀλλὰ $ΕΑΔ = ΔΑΓ - ΕΑΓ$ ἢ $ΕΑΔ = \frac{Α}{2} - ΕΑΓ$· ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ ἔχομεν $ΕΑΓ = 1$ ὀρ. $- Γ$· ὥστε $ΕΑΔ = \frac{Α}{2} - (1$ ὀρ.$- Γ)$ ἢ $ΕΑΔ = 1$ ὀρ.$- \frac{Β+Γ}{2} - 1 + Γ = Γ - \frac{Β+Γ}{2} = \frac{2Γ-Β-Γ}{2} = \frac{Γ-Β}{2}$

219) Ἐὰν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ Ε σημεῖόν τι μεταξὺ αὐτῶν τοιοῦτον ὥστε, ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη εὐθεῖα ΖΗ καὶ καταλήγουσα εἰς τὰς παραλλήλους νὰ διχοτομεῖται ἤτοι νὰ εἶναι $ΕΗ = ΕΖ$, λέγω ὅτι καὶ ἡ ΘΕΙ διχοτομεῖται εἰς τὸ Ε· διότι τὰ τρίγωνα ΕΘΖ καὶ ΕΗΙ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα $ΕΖ=ΕΗ$ καὶ τὰς παρ' αὐτὰς γωνίας ἴσας, ἄρα εἶναι $ΘΕ = ΕΙ$.

220) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐξωτερικὴ γωνία αὐτοῦ ἡ ΑΓΔ, καὶ ἡ διχοτόμος ταύτης ΓΕ, παράλληλος τῇ ΑΒ· ἀλλὰ εἶναι $ΔΓΕ=Β$ (ἐντὸς ἐκτὸς κ.τ.λ.)· καὶ $ΕΓΑ = Α$ (ἐντὸς ἐναλλάξ)· ἐπειδὴ δὲ ἐδόθη $ΔΓΕ = ΕΓΑ$, ἕπεται ὅτι $Α = Β$· ἀντιστρόφως δὲ ἐὰν $Α=Β$ καὶ ΓΕ διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΓΑ ἔχομεν $ΔΓΑ = Α + Β$ ἢ $2ΕΓΑ = 2Α$ ἢ $ΕΓΑ = Α$· ἄρα $ΕΓ \parallel ΑΒ$, ἐὰν δὲ δοθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῇ Α ἔχομεν $ΕΓΑ = Α$, $ΔΓΕ = Β$· καὶ ἐπειδὴ $Α=Β$ ἕπεται $ΔΓΕ = ΕΓΑ$ ἤτοι ἡ ΓΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΔΓΑ.

221) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ($ΑΓ = ΓΒ$) καὶ αἱ κάθετοι ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἐκ τῶν Α καὶ Β τεμνόμεναι εἰς τὸ Δ· τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι $ΓΑΒ + ΒΑΔ = 1$ ὀρ. ὡς καὶ $ΓΒΑ + ΑΒΔ = 1$ ὀρ. ἤτοι εἶναι $ΓΑΒ + ΒΑΔ = ΓΒΑ + ΑΒΔ$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΓΑΒ = ΓΒΑ$ ἕπεται ὅτι $ΒΑΔ = ΑΒΔ$· ἐὰν δὲ φέρωμεν ἐκ τοῦ Γ τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ γνωρίζομεν, ὅτι

αὔτη διχοτομεῖ τὴν Γ· ἀλλ' ἔχομεν $ΓΑΕ + ΒΑΔ = 1$ ὀρ. καὶ $ΓΑΕ + ΕΓΑ = 1$ ὀρ. ἤτοι $ΒΑΔ = ΕΓΑ$ ἢ $ΒΑΔ = \frac{Γ}{2}$.

222) Διότι τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ ἦσαν κορυφαὶ παραλληλογράμμου ὅπερ ἀδύνατον.

223) Ἔστω τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ οὗ εἶναι $ΑΒ = \parallel ΕΔ$, $ΒΓ = \parallel ΕΖ$, $ΓΔ = \parallel ΖΑ$ καὶ αἱ τρεῖς διαγώνιοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, θὰ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἔστω ὅτι αἱ ΑΔ καὶ ΒΕ τέμνονται εἰς τὸ Ο, τότε εἶναι γ. ΑΒΕ=γ.ΔΕΒ καὶ γ. ΒΑΔ=γ.ΕΔΑ (ἐντὸς ἐναλλὰξ κ.τ.λ.)· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $ΑΒ = ΔΕ$ ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΕΟΔ εἶναι ἴσα· ἄρα εἶναι $ΟΑ = ΟΔ$, $ΟΒ = ΟΕ$ ἤτοι τὸ Ο, εἶναι μέσον τῶν διαγωνίων ΑΔ, ΒΕ, ἐὰν δὲ αἱ ΑΔ καὶ ΓΖ τέμνωνται εἰς τὸ Ο′, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι τὸ Ο′ εἶναι μέσον τῆς ΑΔ καὶ ΓΖ ἤτοι τὸ Ο′ συμπίπτει μὲ τὸ Ο· ὥστε αἱ τρεῖς διαγώνιοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

224) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ· προεκτείνω ἤδη τὴν ΑΔ μέχρι τοῦ Α′, οὕτως ὥστε, νὰ εἶναι $ΑΔ = ΔΑ'$ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΑ′ λαμβάνομεν $ΑΑ' < ΑΒ + ΒΑ'$ καὶ ἐπειδὴ $ΒΑ' = ΑΓ$ (ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλ/μου ΑΒΑ′Γ) εἶναι $ΑΔ + ΔΑ' < ΑΒ + ΑΓ$ ἢ $2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ$ ἢ $ΑΔ < \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$.

225) Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ οὗ εἶναι $Α > Β$· φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ καὶ ἐξετάζομεν τὰ τρίγωνα ΒΓΑ, ΒΓΔ· ἔχουσι δὲ ταῦτα $ΒΓ = ΒΓ$, $ΑΒ = ΓΔ$ καὶ $Β < Γ$· ἄρα (§ 106) εἶναι καὶ $ΑΓ < ΒΔ$.

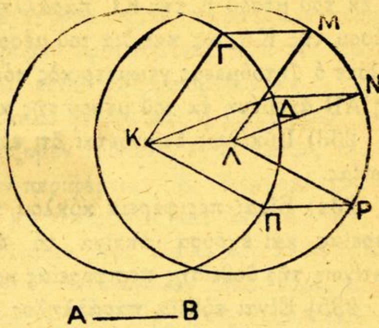
226) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον οὗ ἡ Α εἶναι ὀξεῖα καὶ ΑΕ ἡ διάμεσος· προεκτείνομεν αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν $ΕΖ = ΑΕ$· τότε τὸ ΑΒΖΓ εἶναι παραλληλόγραμμον οὗ $Α + Β = 2$ ὀρ καὶ ἐπειδὴ $Α < 1$ ὀρ. ἕπεται ὅτι $Β > 1$ ὀρ. ὥστε κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἔχομεν $ΑΖ > ΒΓ$ ἢ $2ΑΕ > 2ΒΕ$ ἢ $ΑΕ > ΒΕ$· ἐὰν ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα τότε ἡ Β θὰ εἶναι ὀξεῖα καὶ θὰ ἔχωμεν $ΑΖ < ΒΓ$ ἢ $2ΑΕ < 2ΒΕ$ ἢ $ΑΕ < ΒΕ$.

Σελ. 118 — 227) Αἱ ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου (ἄσκ. 118)· ἐὰν λοιπὸν ΑΒ, ΓΔ κ.τ.λ. εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου ἴσαι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι ἴσαι· αὗται δὲ εἶναι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὸ κέντρον μετὰ τῶν μέσων τῶν χορδῶν, αἵτινες ὁρίζονται· τὰ μέσα λοιπὸν τῶν χορδῶν τούτων κεῖνται ἐπὶ τῆς ὁμοκέντρου περιφερείας ἀκτῖνος ἴσην πρὸς τὴν εἰρηθεῖσαν ἀπόστασιν ἤτοι ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος· πᾶν δὲ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, διότι ἡ ἐφαπτομένη εἰς αὐτὸ ἰσοῦται πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς εἶναι τὸ μέσον τῆς ἐφαπτομένης (βλ. ἄσκησιν 122).

228) Ἔστω Κ ὁ δοθεὶς κύκλος καὶ τὸ σημεῖον Ν δι' οὗ διέρχονται αἱ χορδαὶ ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ χορδή τις ΑΝΒ, ἧς τὸ μέσον εἶναι τὸ Μ· ὥστε ἡ ΚΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ ἤτοι ἡ γωνία ΚΜΝ εἶναι ὀρθή· ἐὰν δὲ Μ' εἶναι τὸ μέσον ἄλλης χορδῆς διερχομένης διὰ τοῦ Ν, ὁμοίως δεικνύεται ὅτι ἡ ΚΜ'Ν εἶναι ὀρθή· ὥστε τὰ μέσα τῶν χορδῶν τούτων κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἧς διάμετρος εἶναι ἡ ΚΝ (§ 146) ἥτις περιφέρεια εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος· τυχὸν δὲ σημεῖον Λ ταύτης, εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου διότι ἡ ΚΛΝ εἶναι ὀρθὴ γωνία, ὡς ἐγγεγραμμένη κ.τ.λ. ἄρα ἡ χορδὴ ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ ΛΝ ἔχει τὸ μέσον της εἰς τὸ Ν. Ἐὰν τὸ Ν. κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι ὁ ζητ. γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ μέρος τῆς περιφερείας ἥτις ἔχει διάμετρον ΚΝ, τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ, ἐὰν δὲ τὸ Ν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ, πάλιν ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΚΝ

229) Ἔστω ΑΒ καὶ ΒΓ αἱ εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται πρὸς ὀρθὰς καὶ ΔΕ ἡ κινουμένη, οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα αὐτῆς νὰ μένωσι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, καὶ ἥτις λαμβάνει τὰς διαφόρους θέσεις ΖΗ, ΙΘ κτλ. μέσα δὲ τῶν ΔΕ, ΖΗ, ΙΘ ἔστωσαν τὰ Κ, Λ, Μ. τὰ τρίγωνα ΒΔΕ, ΒΖΗ, ΒΙΘ εἶναι ὀρθογώνια, αἱ δὲ διάμεσοι αὐτῆς ΒΚ, ΒΛ, ΒΜ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἀντιστοίχων ὑποτεινουσῶν· ἀλλ' αἱ ὑποτείνουσαι αὗται εἶναι ἴσαι· ὥστε $ΒΚ = ΒΛ = ΒΜ$· ὥστε ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς κινουμένης εὐθείας εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος· τυχὸν δὲ σημεῖον Τ αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· διότι ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ ΒΤΡ ἰσοσκελὲς ($ΒΤ = ΤΡ$ καὶ Ρ σημεῖον τῆς ΒΓ) προεκτείνομεν δὲ τὴν ΡΤ, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Σ, ἡ ΡΣ ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἴση τῇ ΔΕ καὶ Τ μέσον τῆς ΣΡ, ἤτοι τὸ Τ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

230) Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ΓΜ καὶ ΔΝ παράλληλοι καὶ ἴσαι τῇ ΑΒ· τὰ Μ καὶ Ν εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου· ἐὰν ἤδη φέρωμεν ἐκ τοῦ Κ, τὴν ΚΛ παράλληλον τῇ ΑΒ, τὸ ΚΛΜΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἄρα εἶναι ΚΓ = ΛΜ, ἐπίσης καὶ τὸ ΚΛΝΔ εἶναι παραλληλόγραμμον ἄρα ΛΝ=ΚΔ καὶ ἐπειδὴ ΚΔ=ΚΓ ἕπεται ὅτι καὶ ΛΜ= ΛΝ = τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου Κ· ὥστε ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι περιφέρεια κύκλου ἴσου τῷ Κ, μὲ κέντρον Λ, τυχὸν δὲ σημεῖον αὐτῆς Ρ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· διότι ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ Κ παράλληλον τῇ ΛΡ μέχρι τῆς περιφερείας Κ, τὴν ΚΠ, τὸ ΚΛΡΠ εἶναι παραλληλόγραμμον



Σχ. Ἀσκ. 230.

(ΚΠ = ∥ ΛΡ) ἄρα εἶναι καὶ ΠΡ = ∥ ΚΛ = ∥ ΑΒ.

231) Ἐὰν ΒΑ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Κ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ ΒΑ ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ ΓΔ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Γ καὶ ΓΔ ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθεία. τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΑΒΚ καὶ ΓΔΚ ἔχουσι ΚΒ = ΚΓ, ὡς ἀκτῖνες, καὶ ΒΑ = ΓΔ ὡς ἴσαι τῇ δοθείσῃ· ἄρα εἶναι καὶ ΚΑ = ΚΔ, ἐπειδὴ δὲ τὰ Α καὶ Δ εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι περιφέρεια κύκλου, κέντρον πάλιν Κ, καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου οὗ ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Πᾶν δὲ σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης εὐκόλως δεικνύεται ὅτι εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου.

Ἐὰν δὲ αἱ ἐκ τοῦ σημείου Α ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην πρὸς δοθεῖσαν, ὡς καὶ αἱ ἐκ τοῦ Δ ἀγόμεναι, τότε πάλιν τὰ αὐτὰ ὀρθογ. τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἄρα εἶναι ΚΑ=ΚΔ κτλ. Ο δὲ γεωμ. τόπος εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος ἔχουσα ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος μίαν τῶν καθέτων ἴσην τῇ ἀκτῖνι τοῦ δοθέντος κύκλου, καὶ ἀπέναντι ταύτης γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.

232) Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Κ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ΚΓ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ΚΔ δὲ ἡ τυχοῦσα πλαγία, ἡ ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΚΓ παράλληλος τῇ ΑΒ, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΚΔ, ὡς καὶ διὰ τοῦ μέσου πάσης πλαγίας ἐκ τοῦ Κ. Ὥστε ὁ ζητούμεεος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΑΒ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ, ΚΓ.

233) Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς δοθείσης γωνίας.

234) Εἶναι περιφέρεια κύκλου ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης περιφερείας, καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς ταύτην.

235) Εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ταύτην ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς καθέτου εἰς ἀμφοτέρας.

Σελ. 119.—236) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ εἶναι γνωσταί, ὡς καὶ ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Γ καὶ Β. Σχηματίζομεν ἤδη διὰ τῆς ΓΔ γωνίαν ΒΓΔ ἴσην τῇ Β· τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς ΓΔ = ΒΔ· τὸ δὲ τρίγωνον ΑΔΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι ἔχει ΑΓ ἴσην τῇ μιᾷ δοθείσῃ πλευρᾷ, ΓΔ + ΔΑ ἴση τῇ ἄλλῃ δοθείσῃ καὶ γων. ΔΓΑ ἴσῃ τῇ δοθείσῃ διαφορᾷ τῶν ἀπέναντι γωνιῶν. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, προεκτείνομεν ἔπειτα τὴν ΑΔ μέχρι τοῦ Β καὶ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΔΒ = ΔΓ· καὶ ἑνοῦμεν τὸ Β μετὰ τοῦ Γ· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

237) Γράφομεν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ· μὲ κέντρον δὲ ἓν σημεῖον Α τῆς γραφείσης περιφερείας καὶ ἀκτῖνας τὰς δύο δοθείσας πλευρὰς τοῦ τριγώνου, γράφομεν τόξα, τέμνοντα τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Β, Γ· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

238) Ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ εἶναι γνωστὴ ἡ ΒΓ, ἡ γωνία Α καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Κ. Ἡ ΚΒ καὶ ΚΓ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας Β καὶ Γ (ἄσκ. 107)· ἄρα ἡ γωνία ΒΚΓ εἶναι γνωστὴ καὶ ἰσοῦται πρὸς 1 ὀρ. $+ \frac{A}{2}$ (ἄσ. 29). Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΒΚΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν τὴν ΒΓ, τὴν ἀπέναντι γωνίαν ΒΚΓ καὶ τὸ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (§ 175).

Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΚΓ καὶ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν τοῦ δοθέντος ἐγγεγραμ. κύκλου γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Α· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

239) α΄) Ἔστω ὅτι δίδονται αἱ γωνίαι καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Σχηματίζομεν τρίγωνον ἔχον γωνίας τὰς δοθείσας, τὸ ΑΒΓ καὶ γράφομεν περιφέρειαν Κ διερχομένην διὰ τῶν Α,Β,Γ (§ 161). Κατόπιν μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ· τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον· διότι ἔχει τὰς γωνίας Δ,Ε,Ζ, ἴσας πρὸς τὰς Α,Β,Γ ὡς εὑρίσκεται εὐκόλως ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, ΚΕΔ, ΚΑΒ κτλ.

β΄) Ἐὰν δίδεται ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, τότε γράφομεν περιφέρειαν Κ, ἐφαπτομένην τῇ πλευρᾷ ΒΓ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ ἔχουσαν ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ· κατόπιν ἐκ τοῦ κέντρου Κ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, αἵτινες κάθετοι τέμνουσι τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα· εἰς τὰ σημεῖα δὲ ταῦτα φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς τὴν περιφέρειαν, αἵτινες θὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον Δ καὶ θὰ κόψωσιν τὴν ΒΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ· τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον.

240) α΄) Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος. Ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ οὗ ἡ βάσις ΒΓ ἡ γωνία Α, καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ, εἶναι γνωστά· ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΒΑ καὶ λάβωμεν $ΑΔ = ΑΓ$ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν τὴν ΒΓ, τὴν ΒΔ (ΑΒ + ΑΓ) καὶ τὴν ἀπέναντι τῆς ΒΓ, γωνίαν Δ (§ 159) διότι (§ 73) $Α = 2Δ$· καὶ ὅταν κατασκευασθῇ τὸ ΔΒΓ φέρομεν τὴν ΓΑ ὥστε νὰ σχηματισθῇ γων. ΑΓΔ = γων. ΑΔΓ καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

β΄) Ἐκ τῆς διαφορᾶς ΑΒ — ΒΓ. Τότε ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν $ΑΔ = ΑΓ$ καὶ ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν

$2ΑΔΓ + Α = 2$ ὀρ. ἢ $ΑΔΓ = 1$ ὀρ. $- \frac{Α}{2}$, ἀλλ' ἡ ἐξ. γωνία

$ΒΔΓ = Α + ΑΓΔ = Α + ΑΔΓ = Α + 1$ ὀρ. $- \frac{Α}{2} = 1$ ὀρ. $+ \frac{Α}{2}$·

ὥστε τὸ τρίγωνον ΒΔΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ διότι γνωρίζομεν τὴν ΒΓ, τὴν $ΒΔ = ΑΒ — ΑΓ$ καὶ τὴν γων. ΒΔΓ. Ὅταν κατασκευασθῇ τὸ τρίγ. ΒΓΔ, προεκτείνομεν τὴν ΒΔ καὶ ἐπὶ τινος σημείου τῆς προεκτάσεως Ζ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Α, πρὸς τὸ μέρος πρὸς ὃ κεῖται τὸ Γ, ἄγοντες τὴν ΖΘ· ἐκ δὲ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον τῇ ΖΘ, ἥτις θὰ τέμνει τὴν ΒΖ εἰς τὸ Α· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν ἡ Α εἶναι ὀρθὴ εἰς τὴν περίπτωσιν α) ἡ γωνία $\Delta = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς· λαμβάνομεν δὲ τότε $ΒΔ = ΑΒ + ΑΓ$, σχηματίζομεν εἰς τὸ Δ γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς, ἄγοντες τὴν ΔΓ· καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν ΔΓ ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα, ἐξ ὧν ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ λαμβάνονται δύο τρίγωνα. Εἰς τὴν περίπτωσιν β) ἡ $ΒΔΓ = \frac{3}{2}$ ὀρθῆς· λαμβάνομεν δὲ τότε τὴν ΒΔ ἴσην πρὸς $ΑΒ - ΑΓ$ καὶ ἄγομεν τὴν ΔΓ ὥστε νὰ σχηματισθῇ γωνία $ΒΔΓ = \frac{3}{2}$ ὀρθ. μὲ κέντρον δὲ τὸ Β κτλ. ὡς προηγουμένως γράφομεν τόξον, ὅπερ θὰ τέμνει τὴν ΔΓ εἰς τὸ Γ καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

241) Ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ γνωρίζομεν τὰς γωνίας καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΒ + ΑΓ$· ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΒΑ καὶ λάβωμεν $ΑΔ = ΑΓ$, τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἔχομεν δὲ γων. $ΒΑΓ = 2Δ$ ἢ $Δ = \frac{ΒΑΓ}{2}$· ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ διότι γνωρίζομεν τὴν $ΒΔ = ΑΒ + ΑΓ$ καὶ τὰς παρ' αὐτὴν γωνίας. Ὅταν δὲ κατασκευασθῇ τὸ ΒΓΔ, φέρωμεν τὴν ΓΑ ὥστε νὰ σχηματισθῇ γων. $ΑΓΔ = Δ$ καὶ τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

242) Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ τὸ ζητούμενον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΔ καὶ ΒΓ αἵτινες εἶναι ἴσαι τέμνονται δίχα καὶ καθέτως εἰς τὸ Ε· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΕΜ ἔχει περίμετρον $ΑΕ + ΕΒ + ΑΒ = ΑΔ + ΑΒ =$ τῷ γνωστῷ ἀθροίσματι τῆς διαγωνίου του καὶ τῆς πλευρᾶς του· ὥστε τὸ ΑΕΒ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (§ 167) κατόπιν δὲ κατασκευάζεται εὐκολώτατα τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

243) Βλέπε ἄσκησιν 170.

244) α΄) Τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (ἄσκ. 233) καὶ

ἐπὶ τῆς παραλλήλου πρὸς μίαν τούτων εἰς ἀπόστασιν ἴσην τῇ δοθείσῃ ἀκτῖνι· ἄρα θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῆς διχοτόμου καὶ τῆς παραλλήλου.

β΄) Ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος κύκλος θὰ ἐφάπτεται τῆς δοθείσης περιφερείας, τὸ κέντρον αὐτοῦ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ὁμοκέντρου περιφερείας, ἐχούσης ἀκτῖνα τὸ ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν, καὶ ἐπειδὴ θὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς παραλλήλου πρὸς αὐτὴν εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα τοῦ ζητουμένου· ἄρα τὸ ζητούμενον κέντρον, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῆς περιφερείας καὶ τῆς παραλλήλου.

γ΄) Ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος κύκλος θὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου τὸ κέντρον αὐτοῦ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἥτις ἔχει κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν· ἐπειδὴ δὲ θὰ ἐφάπτεται τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ κέντρον αὐτοῦ θὰ εὑρίσκηται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου κ.τ.λ. ὡς ἄνω.

245) Ἔστω Κ ὁ δοθεὶς κύκλος καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον. Εἰς τὸν κύκκλον Κ λαμβάνομεν μίαν χορδὴν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ, ἀπὸ τῆς ληφθείσης χορδῆς, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις τέμνει τὴν διὰ τοῦ Κ καὶ Α, διερχομένην εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ· ἔπειτα ἐκ τῶν σημείων τούτων Γ, Δ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΚΑ, περατουμένας εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ δοθέντος κύκλου· ἐὰν ἤδη μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μιᾶς ἀχθείσης καθέτου γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη λύει τὸ πρόβλημα· διότι ἡ κοινὴ χορδὴ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας τῆς γραφείσης μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόσπασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχικῶς ληφθείσης χορδῆς, καὶ ἥτις ἀπόστασις εἶναι ἡ αὐτή, μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς κοινῆς χορδῆς ἀπὸ τοῦ Κ· ἄρα ἡ κοινὴ χορδὴ καὶ ἡ ληφθεῖσα ἀρχικῶς χορδὴ εἶναι ἴσαι· ἤτοι ἡ κοινὴ χορδὴ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν· τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐν γένει ἔχει δύο λύσεις. Σημειωτέον ὅτι ἵνα ὑπάρχῃ λύσις δέον ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος κύκλου.

246) Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ δοθεῖσαι παράλληλοι καὶ Κ τὸ δοθὲν σημεῖον. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Ε μιᾶς τῶν παραλλήλων καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, γράφομεν περιφέρειαν

κύκλου τέμνουσαν τὴν ἄλλην εἰς τὰ Ζ καὶ Η· κατόπιν δὲ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ (ἢ τὴν ΕΗ) ἐκ τοῦ Κ, τέμνουσαν τὰς δοθείσας παραλλήλους εἰς τὸ ΘΛ· τὸ ΕΛΘΖ εἶναι προφανῶς παραλληλόγραμμον· ἄρα ΘΛ = ΕΖ = τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ. Ἔχομεν δὲ ἐνταῦθα ἢ δύο λύσεις ἢ μίαν. Δὲν θὰ ὑπάρχῃ δὲ λύσις ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τῶν παραλλήλων.

247) Ἄγομεν τὴν κάθετον ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας, τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

248) Φέρομεν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου ἐφαπτομένην εἰς τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου αὐτοῦ, ἀπὸ χορδῆς τοῦ δοθέντος κύκλου, ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εὐκόλως ὁριζομένην (βλέπε καὶ ἄσκησιν 245).

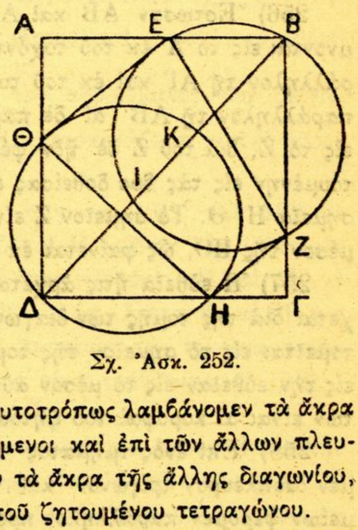
249) Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον Κ, λαμβάνομεν χορδὴν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Α· καὶ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ Κ ἀπὸ τῆς ληφθείσης χορδῆς γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· ὁμοίως εἰς τὸν δοθέντα κύκλον Λ, λαμβάνομεν χορδὴν ἴσην τῇ Β καὶ μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ληφθείσης χορδῆς γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν· αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς γραφείσας περιφερίας, εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι.

250) Ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τραπέζιον, οὗ βάσεις εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ Β φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ τέμνουσαν τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ε, τοῦ τριγώνου ΒΔΕ γνωρίζομεν τὴν ΒΔ, τὴν ΒΕ = ΑΓ καὶ τὴν ΕΔ = ΓΔ — ΑΒ· ἑπομένως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον τοῦτο ΒΔΕ καὶ κατόπιν εὐκόλως κατασκευάζομεν τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

251) Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ διέρχεται διὰ τῶν δοθέντων δύο σημείων Α, Β, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς· ἐπειδὴ δὲ θὰ τέμνῃ καὶ τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ κατὰ χορδὴν παράλληλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΓΔ, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΓΔ· Ἄρα θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς Λ τῶν καθέτων τούτων, ἀκτὶς δὲ τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ εἶναι ἡ ΛΑ ἢ ΛΒ. Ἐὰν τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΓΔ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύ-

γατον, ἐκτὸς ἂν τὰ Α καὶ Β εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΚΛ, ὁπότε εἶναι ἀόριστον.

252) Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΒΓΔ τὸ τετράγωνον, τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ δοθὲν τετράπλευρον ΕΖΗΘ· ἐπειδὴ ἡ Β εἶναι γωνία, ὀρθή, ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη ἐπὶ τῆς ΕΖ ὡς διαμέτρου διέρχεται διὰ τοῦ Β, καθὼς καὶ ἡ γραφομένη ἐπὶ τῆς ΘΗ ὡς διαμέτρου διέρχεται διὰ τοῦ Δ· ἐπειδὴ δὲ ἡ διαγώνιος ΒΔ διχοτομεῖ τὰς γωνίας τοῦ τετραγώνου, ἕπεται ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΖΒΙ $\left(\frac{1}{2}\right.$ ὀρθῆς$\left.\right)$ βαίνει ἐπὶ τοῦ $\frac{1}{4}$ τῆς περιφερείας ἤτοι τὸ Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς ἡμιπεριφερείας ΕΙΖ· ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ τὸ Κ εἶναι τὸ μέσον, τῆς ΘΚΗ.



Σχ. Ἀσκ. 252.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν ἑπομένην κατασκευήν· γράφομεν ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου, ὡς διαμέτρων περιφερείας· τὴν εὐθεῖαν ἥτις ἑνώνει τὰ μέσα τῶν ἡμιπεριφερειῶν τῶν ἐντὸς τοῦ τετραπλεύρου, προεκτείνομεν μέχρι τῶν ἄλλων ἡμιπεριφερειῶν καὶ τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν τὰ ἄκρα τῆς μιᾶς διαμέτρου· ὁμοίως ἐργαζόμενοι καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, λαμβάνομεν τὰ ἄκρα τῆς ἄλλης διαγωνίου, φθέντα δὲ ἄκρα εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

253) Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῆς δεδομένης εὐθείας καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἢ τῆς εὐθείας καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ δύο δοθέντα ληθέντα σημεῖα εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

254) Ἐὰν ἡ γωνία τῆς βάσεως εἶναι α, τῆς κορυφῆς εἶναι 4α ἤτοι $6\alpha = 2$ ὀρ. καὶ $\alpha = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ· καὶ φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Δ· τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

255) Ἔστω ΑΒ, ΓΔ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ ζητουμένου σημείου ἀπὸ μὲν τῆς ΑΒ, ἔστω ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν μ, ἀπὸ δὲ τῆς ΓΔ ἴση πρὸς τὴν ν· ἀλλ' ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἀπόστασιν ἴσην τῇ μ, εἶναι ἓν ζεῦγος παραλλήλων, πρὸς τὴν ΑΒ, ἑκατέρωθεν αὐτῆς εἰς ἀπόστασιν μ, ὁμοίως ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἀπὸ τῆς ΓΔ ἀπόστασιν ἴσην τῇ·ν, εἶναι ζεῦγος παραλλήλων κ.τ.λ.· ὥστε τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ζευγῶν τῶν παραλλήλων τούτων· ὑπάρχουσιν ἑπομένως 4 τοιαῦτα σημεῖα.

256) Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Α· ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Δ τῆς ΑΒ φέρομεν παράλληλον τῇ ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ε τῆς ΑΓ φέρομεν παράλληλον τῇ ΑΒ· αἱ δὲ παράλληλοι αὗται ἔστω ὅτι τέμνονται εἰς τὸ Ζ, διὰ τοῦ Ζ δὲ ἤδη φέρομεν παράλληλον τῇ ΔΕ, περατουμένην εἰς τὰς δύο δοθείσας εὐθείας, τὰς ὁποίας συναντᾷ εἰς τὰ σημεῖα Η, Θ. Τὸ σημεῖον Ζ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΗΘ, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν παραλ/μων ΔΕΗΖ καὶ ΔΕΖΓ.

257) Ἡ εὐθεῖα ἥτις ἄρχεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ δοθέντος παραλ/μου, διχοτομεῖται εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς (ἄσκ. 79)· ὅπως καὶ ἡ κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Τὰ ἄκρα δὲ τῶν καθέτων τούτων εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου ρόμβου. (§ 118).

258) Ἐπὶ ἑνὸς τμήματος τῆς δοθείσης εὐθείας κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δοθέντων σημείων φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ κατασκευασθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸ Α, ἐκ δὲ τοῦ ἄλλου, ἄλλην παράλληλον πρὸς τὴν δευτέραν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, ἥτις θὰ τέμνει τὴν δοθεῖσαν εἰς τὸ Β· αἱ δύο αὗται δὲ παράλληλοι τέμνονται εἰς τὸ Γ· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

259) Ἀφοῦ ἡ περίμετρος τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ, εἶναι γνωστή· ἕπεται ὅτι εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ρόμβου· γνωρίζομεν δὲ ἐξ ἄλλου ὅτι $Α+Β=2$ ὀρθ. καὶ ἐπειδὴ δίδεται ἡ διαφορὰ $Α-Β=δ$, ἕπεται ὅτι $Α=1$ ὀρ. $+\frac{δ}{2}$. Κατασκευάζομεν λοιπὸν

γωνίαν ἴσην πρὸς 1 ὀρ. $+\frac{\delta}{2}$ τὴν Α καὶ ἀπὸ τοῦ Α, ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα ἴσα πρὸς τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν τοῦ ρόμβου $\left(\frac{1}{4}\right.$ τῆς δοθείσης περιμέτρου)· ἐκ δὲ τῶν ἄκρων τῶν ληφθέντων τμημάτων φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰ ἀπέναντι τμήματα.

Ἐὰν δίδεται ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τότε θεωροῦμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, καὶ ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ρόμβος, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως εἰς τὸ Ο· τὸ ὀρθογώνιον δὲ τρίγωνον ΑΟΒ ἔχει γνωστὴν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ $\left(\frac{1}{4}\right.$ τῆς περιμέτρου) καὶ γνωστὸν τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΟ + ΟΒ $\left(\frac{1}{2}\right.$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων του). Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΟΒ κατασκευάζεται, καὶ ἐξ αὐτοῦ ὁ ζητούμενος ρόμβος.

Σελ. 132 — 261) Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΖ καὶ Β + Ε = 2 ὀρ. Θέτομεν τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο οὕτως ὥστε αἱ ἴσαι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ νὰ συμπέσωσιν· ἐπειδὴ δὲ εἶναι Β + Ε = 2 ὀρ., ἕπεται ὅτι αἱ ΓΒ καὶ ΕΖ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (§ 56), ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη· ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα. (§ 196).

262) Διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

263) Τὰ ἰσοδύναμα ταῦτα τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν θὰ ἔχουν καὶ ἴσα ὕψη· ὁ γεωμ. τόπος λοιπὸν τῶν κορυφῶν αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν, εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ ὕψος.

264) Εὐθεῖα παράλληλος κ.τ.λ. ὡς ἄνω.

265) Τὰ ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ὡς καὶ τὰ ΒΕΔ καὶ ΕΔΓ εἶναι ἰσοδύναμα· ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα καὶ τὰ ΑΕΒ καὶ ΑΕΓ ἐπειδὴ ΑΕΒ = ΑΒΔ — ΕΒΔ κ.τ.λ..

266) Διότι τὰ ΔΕΒ καὶ ΔΕΓ εἶναι ἰσοδύναμα, εἶναι δὲ καὶ ΑΒΕ = ΑΔΕ + ΔΕΒ καὶ ΑΓΔ = ΑΔΕ + ΔΕΓ.

267) Τὰ ΔΖΘ καὶ ΖΘΓ ἔχοντα ΔΖ = ΖΓ καὶ Θ κοινὴν κορυφὴν εἶναι ἰσοδύναμα· τὰ ΖΗΘ καὶ ΖΘΓ ἔχουν ΗΘ = ΘΓ (ἄσκ. 99) καὶ Ζ κοινὴν κορυφὴν ὥστε εἶναι ἰσοδύναμα· ἄρα κ.τ.λ.

Σελ. 134) — 268) Ἀπ. Ἐμ $= 14 \times 7,3 = 102,2$ τ. μ.

269) Ἀπ. Εμ $= 2,85^2 = 8,1225$ τ.μ.

270) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι $15 \times 4 = 60$ τ.μ. Ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι 38μ.· ἡ πλευρὰ ἄρα αὐτοῦ εἶναι $\frac{38}{4} = 9,5$μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $9,5^2 = 90,25$ τ.μ. Εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερον κατὰ 30,25 τ.μ.

271) Εἶναι $υ = 7,28 : 3,5 = 2,08$ μ.

272) Ἀπ. $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = 0,3162\ldots$ μ.

273) Ἀπ. 58,74 τ.μ.

274) Ἀπ. 12,44 μ.

275) Ἐὰν βάσις θεωρηθῇ ἡ πλευρὰ 9 μ. τὸ ὕψος εἶναι 2,5 καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $9 \times 2,5$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $4 \times υ = 9 \times 2,5$, ἕπεται ὅτι $υ = \frac{9 \times 2,5}{4} = 5,625$ μ.

276) Ἀπ. 35,673 τ.μ.

277) Τὰ 4 τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα· τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου εἶναι ἄρα $\frac{1,2 \times 0,5}{4} = 0,15$ τ.μ.

278) Ἐὰν ὡς βάσις τοῦ τριγώνου ληφθῇ ἡ πλευρὰ 12, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{12 \times 9}{2} = 54$ τ.μ., ἐὰν δὲ ὡς βάσις ληφθῇ ἡ πλευρὰ 15 μ. ἔχομεν $15 \times υ = 54$ ἢ $υ = \frac{54}{15} = 3,6$ μ.

279) Τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον βάσιν τὴν βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου, ὕψος τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ὑποτείνουσαν τὴν διαγώνιον· τὸ ζητούμενον ἄρα ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{9,42 \times 4,35}{2} = 20,4885$ τ.μ.

280) Ἀπ. 173,30 τ.μ.

281) Τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι τραπέζια, ἔχοντα ὕψος 6,4 μ., εἶναι ἄρα $(ΑΕΖΔ) = \frac{8,06 + 3}{2} \times 6,4$ καὶ

$$ΕΒΓΖ = \frac{7,24 + 2,18}{2} \times 6,4.$$

282) Τὸ πηλίκον τοῦ ἐμβαδοῦ διὰ τοῦ ὕψους, εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων, εἶναι δηλαδὴ τοῦτο 17 μέτρα· ὥστε τὸ ἄθροι-

σμα αὐτῶν εἶναι 34 μέτρα· εἶναι ἄρα 34 — 14 μέτρα τὸ διπλάσιον τῆς μικροτέρας· ἤτοι ἡ μικροτέρα εἶναι 10 μέτρα.

284) Κατὰ τὴν ἄσκησιν 283 εἶναι $\frac{8,15 \times 6,12}{2} = 24,939$ τ.μ.

285) Ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τετράπλευρον, οὗ αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς τὸ Ε, ἔχομεν ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ = \frac{ΑΓ . ΒΕ}{2}$ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ, $\frac{ΑΓ . ΕΔ}{2}$· εἶναι ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $\frac{ΑΓ . ΒΕ}{2} + \frac{ΑΓ . ΕΔ}{2} = \frac{ΑΓ(ΒΕ + ΔΕ)}{2} = \frac{ΑΓ . ΒΔ}{2} = \frac{12,07 \times 9}{2}$

Σελ. 140 — 290). Ἡ ὑποτείνουσα εἶναι

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ μ.}$$

291) Ἡ πλευρὰ εἶναι $\sqrt{12^2 - 9^2} = \sqrt{135} = 11,61895\ldots$ μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν $\frac{3 . \sqrt{135}}{2} = 17,42842\ldots$ τ.μ.

292) Αἱ πλευραὶ εἶναι $20\sqrt{2}$, $20\sqrt{2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν 400 τ.μ.

293) Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐκ τῆς Δ φέρωμεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, ἐπειδὴ $Α = \frac{1}{2}$ ὀρ. καὶ $Ε = 1$ ὀρ.. ἄρα $ΔΕ^2 + ΑΕ^2 = 9$ ἢ $2ΔΕ^2 = 9$ ἢ $ΔΕ^2 = \frac{9}{2}$ καὶ $ΔΕ = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι $\frac{8 . 3\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$.

294) Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 7 μ. καὶ ἡ ἄλλη κάθετος εἶναι $\frac{9}{2}$ μ.· εἶναι ἐπομένως $υ = \sqrt{49 - \frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{115}}{2}$· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{9 . \sqrt{115}}{4}$.

295) Ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ εἶναι $ΑΔ = 100$ μ. $ΒΓ = 40$ μ. $ΑΒ = 50$, ἡ κάθετος ΒΕ, χωρίζει τὸ τρίγωνον ΑΒΕ οὗ $ΑΕ = 30$ μ.· εἶναι ἄρα $ΒΕ = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{100 + 40}{2} \times 40 = 2800$ τ.μ.

296) Τὸ ἄγνωστον ὕψος εἶναι πλευρὰ κάθετος ὀρθογωνίου τρι-

γώνου οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι α καὶ ἡ ἄλλη κάθετος εἶναι $\frac{\alpha}{2}$· εἶναι ἑπομένως

$$\upsilon=\sqrt{\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}\cdot \text{ ὥστε τὸ ἐμβαδὸν εἶναι } \frac{\alpha^2}{4}\sqrt{3}\cdot$$

297) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ εἶναι $AB=15$μ. καὶ $B\Gamma=36$μ. καὶ ΒΔ τὸ ὕψος· εἶναι δὲ $A\Gamma=\sqrt{36^2+15^2}=39$ μ. καὶ $\frac{B\Delta\times A\Gamma}{2}=\frac{AB\times B\Gamma}{2}$ ἢ $B\Delta=\frac{36\times 15}{39}=\frac{180}{13}$· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λοιπὸν ΑΒΔ οὗ γνωρίζομεν τὴν ΑΒ καὶ ΒΔ εὑρίσκομεν τὴν ΑΔ καὶ κατόπιν τὴν ΔΓ·

298) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον οὗ εἶναι $A=\frac{1}{2}$ ὀρ. $AB=10$μ. καὶ $A\Gamma=24$ μ., φέρομεν τὴν κάθετον ΒΕ· ἡ $ABE=\frac{1}{2}$ ὀρ., ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές, οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 10 μ.· εὑρίσκομεν λοιπὸν τὴν ΒΕ ἢ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, μὲ βάσιν τὴν ΑΓ καὶ κατόπιν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

299) Εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον ἔχομεν $(B\Gamma)^2=(BE)^2+(E\Gamma)^2$ καὶ $(AB)^2=(BE)^2+(EA)^2$· εἶναι ἄρα

$$(B\Gamma)^2-(AB)^2=(E\Gamma)^2-(EA)^2.$$

300) Ἐὰν Ε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των, λαμβάνομεν κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ, $(A\Gamma)^2-(\Gamma B)^2=(AE)^2-(EB)^2$ καὶ ἐκ τοῦ ΑΔΒ, $(A\Delta)^2-(B\Delta)^2=(AE)^2-(EB)^2$, ἤτοι $(A\Gamma)^2-(B\Gamma)^2=(A\Delta)^2-(B\Delta)^2$ ἢ

$$(A\Gamma)^2+(B\Delta)^2=(A\Delta)^2+(B\Gamma)^2.$$

301) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν $(A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2-(AB)^2$ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν $(B\Delta)^2=(A\Delta)^2+(AB)^2$ καὶ διὰ τῆς προσθέσεως ἔχομεν

$$(A\Gamma)^2+(A\Delta)^2=(A\Delta)^2+(B\Gamma)^2.$$

302) Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ τὴν ΗΕΖ· εἶναι δὲ $AH=\Delta Z$ καὶ $HB=Z\Gamma$· ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΕΔΖ, ΕΖΓ, ΕΗΒ καὶ ΕΗΑ λαμβάνομεν

$$(E\Delta)^2=(EZ)^2+(\Delta Z)^2,\ (EB)^2=(EH)^2+(Z\Gamma)^2 \quad \text{καὶ}$$

$(EB)^2+(E\Delta)^2=(EH)^2+(Z\Gamma)^2+(EZ)^2+(\Delta Z)^2$· ἐπίσης ἔχομεν $(EA)^2=(\Delta Z)^2+(EH)^2$ καὶ $(E\Gamma)^2=(EZ)^2+(Z\Gamma)^2$ καὶ

$(ΕΑ)^2 + (ΕΓ)^2 = (ΕΗ)^2 + (ΖΓ)^2 + (ΕΖ)^2 + (ΔΖ)^2$· εἶναι ἄρα

$$(ΕΑ)^2 + (ΕΓ)^2 = (ΕΒ)^2 + (ΕΔ)^2.$$

Σελ. 148 — 303). Κατὰ τὴν § 206 εἶναι ὕψος $= \sqrt{8 \times 2} = 4$· ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἡ προσκειμένη εἰς τὸ τμῆμα 8 εἶναι $\sqrt{10.8} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ καὶ ἡ ἄλλη εἶναι $\sqrt{10.2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (§ 204)· καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{10 \cdot 4}{2} = 20$.

304) Ἡ ὑποτείνουσα εἶναι $\sqrt{15^2 + 8^2} = 17$· τὸ δὲ ἐμβαδὸν $\frac{8 \times 15}{2}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{17 \cdot υ}{2}$ ἤτοι εἶναι $17 \cdot υ = 8 \times 15$ ἢ $υ = \frac{120}{17}$.

305) Ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ (Β γων. ὀρ.) ἔχομεν $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 - ΒΓ^2 = (ΑΓ + ΒΓ)(ΑΓ - ΒΓ)$.

306) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ Δ σημεῖον τι τῆς βάσεως ΑΓ καὶ ΒΕ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΒΕ ἔχομεν $ΒΔ^2 = ΒΕ^2 + ΔΕ^2$ καὶ ἐκ τοῦ ΒΕΓ λαμβάνομεν $ΒΕ^2 = ΒΓ^2 - ΕΓ^2$· ὥστε εἶναι $ΒΔ^2 = ΒΓ^2 - ΕΓ^2 + ΔΕ^2$· ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $ΔΕ = ΑΕ - ΑΔ$ ἔχομεν $ΔΕ^2 = (ΑΕ - ΑΔ)^2 = ΑΕ^2 + ΑΔ^2 - 2ΑΕ \cdot ΑΔ$· ὥστε πάλιν εἶναι

$$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 - ΕΓ^2 + ΑΕ^2 + ΑΔ^2 - 2ΑΕ \cdot ΑΔ =$$
$ΒΓ^2 - 2 \cdot ΑΕ \cdot ΑΔ + ΑΔ^2$ ἢ $ΒΔ^2 = ΒΓ^2 - ΑΔ(2ΑΕ - ΑΔ) = ΒΓ^2 - ΑΔ(ΑΓ - ΑΔ) = ΒΓ^2 - ΑΔ \cdot ΔΓ$.

307) Κατασκευάζομεν πρῶτον τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι δύο ἐκ τῶν δοθέντων (§ 208)· καὶ κατόπιν τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι, τοῦ κατασκευασθέντος καὶ τοῦ τρίτου.

308) Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμενον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον (§ 193, 195) καὶ κατόπιν τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τούτῳ (§ 210).

309) Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ (§ 208) καὶ κατόπιν ἐργαζόμεθα ὡς ἄνω.

310) Κατασκευάζομεν πρῶτον τετράγωνα ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα ὀρθογώνια (§ 210) καὶ κατόπιν τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (§ 208).

Σελ. 153 — 311) Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς προβολάς, σχηματίζονται ἴσα τρίγωνα καὶ ἐκ τῆς ἰσότητας αὐτῶν ἀποδεικνύεται τὸ ζητούμενον.

312) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ ΒΔ ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ΒΕ ἡ προβολὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἔχομεν δὲ τότε (§ 218, 219) $(ΑΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2 \pm 2(ΑΒ)(ΒΕ)$ καὶ $(ΑΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2 \pm 2(ΒΓ)(ΒΔ)$· ἐξ αὐτῶν δὲ λαμβάνομεν $(ΑΒ)(ΒΕ) = (ΒΓ)(ΒΔ)$.

313) Κατὰ τὴν § 219 ἔχομεν $(ΓΒ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΓΑ)^2 + 2(ΓΑ).(ΑΔ)$· καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΒ = ΓΑ$· ἔχομεν $(ΓΒ)^2 = 2(ΓΑ)^2 + 2(ΓΑ)(ΑΔ) = 2(ΓΑ)[(ΓΑ)+(ΑΔ)] = 2(ΓΑ)(ΓΔ)$.

314) Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΔ ἡ ΑΓ εἶναι διάμεσος· ἔχομεν ἑπομένως (§ 221) $(ΑΒ)^2 + (ΑΔ)^2 = 2(ΑΓ)^2 + 2(ΒΓ)^2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΒ = ΑΓ$, λαμβάνομεν $(ΑΔ)^2 = (ΑΓ)^2 + 2(ΒΓ)^2$.

315) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, Ε τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ ΑΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἔχομεν δὲ $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - 2(ΒΓ)(ΓΔ)$ ἢ $(ΑΒ)^2 - (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)[(ΒΓ) - 2(ΓΔ)] = (ΒΓ)[2(ΕΓ) - 2(ΓΔ)] = 2(ΒΓ)[(ΕΓ) - (ΓΔ)]$· ἀλλὰ $ΓΔ = ΕΓ - ΕΔ$· ὥστε εἶναι $(ΑΒ)^2 - (ΑΓ)^2 = 2(ΒΓ)(ΕΔ)$. Ἐὰν ἔναντι τῆς ΑΒ ἦτο ἀμβλεῖα γωνία ἐν τῇ ἀγκύλῃ θὰ εἴχομεν $(ΕΓ) + (ΓΔ)$ καὶ θὰ ἦτοι $ΓΔ = ΕΔ - ΕΓ$· θὰ κατελήγομεν δὲ εἰς τὸ αὐτό.

316) Ἐπειδὴ $29^2 = 20^2 + 21^2$ ἕπεται ὅτι ἡ ἀπέναντι τῆς 29 πλευρὰ γωνία εἶναι ὀρθὴ (§ 220)· ὁμοίως ἔχομεν $37^2 = 12^2 + 35^2$· τὸ ἐμβαδὸν ἤδη εὑρίσκεται ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν 20, 21 καὶ 12 καὶ 35.

317) Ἐπειδὴ $0,8^2 > 0,6^2 + 0,12^2$ ἕπεται (§ 219), ὅτι ἡ ἔναντι τῆς 0,8 πλευρᾶς γωνία εἶναι ἀμβλεῖα.

318) Ἐπειδὴ $1,3^2 < 0,9^2 + 1,2^2$ ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ἡ ἔναντι τῆς πλευρᾶς 1,3 εἶναι ὀξεῖα (§ 218).

319) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν $(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2$ καὶ ἐκ τοῦ ΑΔΓ, ὁμοίως ἔχομεν $(ΑΓ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΔΓ)^2$ ἢ $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = 2(ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2 + (ΔΓ)^2$ καὶ ἐπειδὴ ἐδόθη $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ)(ΔΓ)$, ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = (ΒΔ)^2 + (ΔΓ)^2 + 2(ΒΔ)(ΔΓ) = [(ΒΑ) + (ΔΓ)]^2 = (ΒΓ)^2$· ἤτοι (§ 220) ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή.

320) Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἡ ΒΓ εἶναι διάμεσος· ἔχομεν λοιπὸν (§ 221) $(ΓΔ)^2 + (ΑΓ)^2 = 2(ΒΓ)^2 + 2(ΑΒ)^2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΒ = ΑΓ$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(ΓΔ)^2 = 2(ΒΓ)^2 + (ΑΒ)^2$.

321) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ οὗ εἶναι $AB=12\pi$. $B\Gamma=8$ καὶ $\Gamma A=16$ πχ. καὶ ἡ μία τῶν διαμέσων ΑΔ· ἔχομεν τότε (§ 221) $12^2+16^2=2(A\Delta)^2+2\cdot\left(\frac{8}{2}\right)^2$ ἢ $(A\Delta)^2=184$ καὶ $A\Delta=\sqrt{184}$. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἄλλαι δύο διάμεσοι εἶναι $\sqrt{124}$, $\sqrt{40}$.

322 καὶ 323) Βλέπε ἀσκήσεις 270 καὶ 295.

324) Ἐὰν α εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ β μία τῶν καθέτων ἔχομεν $2\beta+\alpha=50\mu$ ἢ $\alpha=50-2\beta$ καὶ $2\beta^2=\alpha^2$ ἢ $2\beta^2=(50-2\beta)^2$ εὑρίσκοντες ἐκ ταύτης τὸ β, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου καὶ τὴν α.

Σελ. 164 — 325) Ἔστω ὅτι $\frac{BE}{E\Delta}=\frac{2}{5}$ εἶναι τότε $\frac{BE}{BE+E\Delta}=\frac{2}{2+5}$ ἢ $\frac{BE}{B\Delta}=\frac{2}{7}$· ἔστω ἤδη ΕΖ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΕ καὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ τὸ ΗΖ· ἀλλ' εἶναι

$$(ABE)=\frac{(AB)(EZ)}{2} \text{ καὶ } (AB\Gamma)=\frac{(AB)(HZ)}{2} \text{ ἤτοι}$$

$\frac{(ABE)}{(AB\Gamma)}=\frac{(EZ)}{(HZ)}$. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν παράλληλον τῇ ΑΒ, ἔχομεν (§ 234) $\frac{BE}{B\Delta}=\frac{EZ}{HZ}=\frac{2}{7}$.

326) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ Δ τὸ μέσον τῆς ΑΓ καὶ ΔΕ ἡ εὐθεῖα ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $(AB\Gamma)=5(\Delta E\Gamma)$. Ἐὰν ἤδη ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν παράλληλον τῇ ΑΓ τὴν ΕΖ, αὕτη τέμνει τὸ ὕψος ΒΗ εἰς τὸ Θ· εἶναι ἡ ΘΗ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΕΔΓ. Ἔχομεν δὲ $(AB\Gamma)=\frac{(A\Gamma).(BH)}{2}$ καὶ $(E\Delta\Gamma)=\frac{(\Delta\Gamma).(\Theta H)}{2}$ καὶ $\frac{(AB\Gamma)}{(E\Delta\Gamma)}=\frac{(A\Gamma).(BH)}{(\Delta\Gamma).(\Theta H)}$· καὶ ἐπειδὴ εἶναι $(A\Gamma)=2(\Delta\Gamma)$ καὶ $\frac{(AB\Gamma)}{(E\Delta\Gamma)}=5$, ἔχομεν $5=\frac{2(BH)}{(\Theta H)}$ ἢ $\frac{(BH)}{(\Theta H)}=\frac{5}{2}$ ἀλλὰ εἶναι $\frac{(BH)}{(\Theta H)}=\frac{(B\Gamma)}{(E\Gamma)}$ (§ 235)· ὥστε εἶναι καὶ $\frac{(B\Gamma)}{(E\Gamma)}=\frac{5}{2}$· ὥστε τὸ ΔΕ πρέπει νὰ διαιρῇ τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς δύο τμήματα, ὧν τὸ προσκείμενον πρὸς τὴν ΑΓ τμῆμα ΕΓ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ΒΓ, ὃν λόγον ἔχει ὁ 2 πρὸς τὸν 5.

327 καὶ 328) § 234.

329) Ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΒΓ· εἶναι ἄρα (§ 235) $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$· εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΑΖΓ, ἡ ΒΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΖΓ· ἔχομεν, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἑπομένως $\frac{ΑΒ}{ΑΖ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$· εἶνε ἄρα καὶ $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΑΖ}$.

330) Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ καὶ $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{ΒΖ}{ΓΖ}$· εἶναι καὶ $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΒΖ}{ΓΖ}$.

331) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, Ε τὸ μέσον τῆς ΑΔ καὶ ἔστω ὅτι ἡ ΒΕ προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Ἤδη ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον τῇ ΒΖ τὴν ΔΗ τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Η· εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΗ, ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΔΗ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΔ· εἶναι ἄρα ΑΖ = ΖΗ· ἐπίσης εἰς τὸ τρίγωνον ΓΒΖ, ἡ ΔΗ ἄγεται ἐκ τοῦ Δ μέσου τῆς ΒΓ, παράλληλος τῇ ΒΖ· εἶναι ἄρα καὶ ΖΗ = ΗΓ· ὥστε εἶναι ΖΗ + ΗΓ = 2ΑΖ ἢ ΖΓ = 2ΑΖ καὶ ΑΖ : ΖΓ = 1 : 2.

332) Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΒΕ καὶ ΑΔ, καὶ Η τὸ μέσον τῆς ΕΓ· ἂς φέρωμεν δὲ τὴν ΔΗ· αὕτη ὡς συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΓΒ καὶ ΓΕ τοῦ τριγώνου ΓΒΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΕ (§ 120)· ἀλλ' ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΗ, τὸ Ε εἶναι μέσον τῆς ΑΗ (ἐπειδὴ ΑΕ = ΕΗ = ΗΓ) καὶ ἡ ΕΖ παράλληλος τῇ ΔΗ· ἄρα ἡ ΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς ΑΔ. (§ 119).

333) Ἡ χ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν Α, Β, Γ καὶ ἡ φ τῶν Γ, Β, Α, (§ 237).

334) Ἐὰν τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἡ δοθεῖσα βάσις εἶναι ἡ ΕΖ· ἄγνωστον εἶναι τὸ ὕψος υ· ἐπειδὴ δὲ δέον νὰ εἶναι $(ΕΖ) . υ = (ΑΒ)(ΑΔ)$ ἢ $\frac{(ΕΖ)}{(ΑΔ)} = \frac{(ΑΒ)}{υ}$, ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΕΖ, ΑΔ, ΑΒ.

Σελ. 166 — 335) Διότι ἔχουν καὶ τὴν ἄλλην ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην (§ 241).

336) Διότι ἔχουν μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην (τὴν εἰς τὴν κοινὴν κορυφήν).

337) Διότι αἱ γωνίαι τῆς βάσεως εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ ἑκάστη τοῦ-

των είναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς διαφορᾶς τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἀπὸ 2 ὀρθῶν.

338) Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν (ἐὰν είναι ὀξεῖα) ἢ τὴν παραπληρωματικήν της (ἐὰν είναι ἀμβλεῖα), είναι ὅμοια.

339) Διότι ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν.

340) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ καὶ ΒΑΕ είναι ὅμοια· είναι ἑπομένως

$$\frac{(\text{ΒΓ})}{(\text{ΒΑ})} = \frac{(\text{ΔΓ})}{(\text{ΑΕ})} \text{ καὶ } (\text{ΑΕ}) = \frac{(\text{ΒΑ}).(\text{ΔΓ})}{(\text{ΒΓ})} = \frac{300 . 100}{150} = 200.$$

341) Ἐὰν Ε είναι ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων, τὰ τρίγωνα ΔΕΓ καὶ ΕΑΒ είναι ὅμοια (ἄσκ. 339)· είναι ἄρα $\frac{(\text{ΔΓ})}{(\text{ΑΒ})} = \frac{(\text{ΔΕ})}{(\text{ΕΒ})}$ καὶ $(\text{ΕΒ}) = \frac{(\text{ΑΒ}).(\text{ΔΕ})}{(\text{ΔΓ})} = \frac{105 . 42}{63} = 70$ μ, ὥστε είναι

$$\text{ΒΔ} = \text{ΒΕ} + \text{ΕΔ} = 70 + 42 = 112 \text{ μ}.$$

342 Τὰ τρίγωνα ΕΑΒ καὶ ΕΔΓ είναι ὅμοια ὡς ἔχοντα γωνίαν ΒΑΕ = γων. ΕΔΓ ὡς ἐγγεγρ. βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ καὶ γων. ΑΕΒ = γων. ΔΕΓ (§ 241)· είναι ἑπομένως

$$(\text{ΑΒ}) : (\text{ΔΓ}) = (\text{ΕΑ}) : (\text{ΕΔ}).$$

343) Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὰς εἰς τὸ Α γωνίας ἴσας, ἕνεκα τῆς διχοτόμου ΑΔ καὶ γων. Ε = γων. Γ ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ τόξον ΑΒ· είναι ἄρα ὅμοια· ἔχομεν λοιπὸν

$$(\text{ΑΒ}) : (\text{ΑΕ}) = (\text{ΑΔ}) : (\text{ΑΓ}).$$

344) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ (Β γωνία ὀρθὴ) καὶ ΑΕΓ είναι ὅμοια, διότι ὀξ. γωνία Δ = ὀξ. γωνία Γ ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ τόξον ΑΒ· είναι ἄρα (ΑΒ) : (ΑΔ) = (ΑΕ) : (ΑΓ).

Σελ. 169 — 345) Τὰ τρίγωνα εἰς ἃ διαιροῦσιν αἱ δοθεῖσαι διαγώνιοι τὰ τετράπλευρα είναι κατὰ σειρὰν ὅμοια (§ 242)· ἔχουσιν ἑπομένως καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας· ἄρα καὶ τὰ τετράπλευρα ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας· ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι καὶ τὰς πλευράς των ἀναλόγους είναι ὅμοια.

346) Διότι ἔχουσι καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην (§ 243).

347) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ ΒΔ τὸ ὕψος δι' ὃ είναι

(ΑΔ) : (ΒΔ) = (ΒΔ) : (ΔΓ)· τὰ τρίγωνα τὰ ὀρθογώνια ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ εἶναι ὅμοια (ἄσκ. 346)· εἶναι ἑπομένως γων. ΑΒΔ = γων. ΒΓΔ· ἀλλὰ Α + ΑΒΔ = 1 ὀρ.· ἄρα Α + Γ = 1 ὀρ.· ὥστε ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀρθὴ (ἄσκ. 20).

348) Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΕΒΓ ἔχουσι τὴν Β κοινὴν καὶ $\frac{(ΒΓ)}{(ΒΕ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΒΓ)} = 2$· εἶναι ἑπομένως ὅμοια (§. 243)· ὥστε εἶναι ΒΓΕ = ΓΑΒ.

349) Διότι διαιροῦσι τὰ ὅμοια τρίγωνα, εἰς ἄλλα ὅμοια κατὰ σειρὰν (§. 243).

350) (Τὸ ΔΕΖ νὰ διορθωθῇ εἰς ΔΕΘ)· τὰ τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια (§ 243)· ἄρα (ΑΗ) : (ΔΖ) = ἴσον τῷ λόγῳ δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν δοθέντων τριγώνων· καὶ γων. ΒΑΗ = γωνία ΕΔΖ· ὥστε εἶναι γων. ΗΑΓ = γων. ΖΔΘ (ἀφοῦ Α = Δ)· ἑπομένως καὶ τὰ τρίγωνα ΗΑΓ καὶ ΖΔΘ εἶναι ὅμοια (§ 243).

Σελ. 176 — 351) Εἶναι $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ (§ 247).

352) Ἐὰν χ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν, ἔχομεν (§ 247) $\frac{60}{χ} = \frac{144}{81}$· καὶ $χ = \frac{60 . 81}{144} = 33,75$ τ. μ.

353) Ἐὰν χ, ψ, ω εἶναι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἔχομεν (§ 247)·

$$\frac{5^2}{χ^2} = \frac{6^2}{ψ^2} = \frac{7^2}{ω^2} = \frac{1}{2} \text{ ἢ } χ^2 = 2 . 5^2 \text{ καὶ}$$

$$χ = 5\sqrt{2},\quad ψ = 6\sqrt{2}\cdot\quad ω = 7\sqrt{2}.$$

354) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον οὗ εἶναι ΑΒ = 9 μ. ΒΓ = 12 μ. καὶ ΑΓ = 10 μ. Ε σημεῖον τῆς ΑΓ καὶ ΕΔ ἡ παράλληλος τῇ ΒΓ· ἐπειδὴ (ΑΕΔ) = (ΕΓΒΔ) ἕπεται ὅτι (ΑΒΓ) = 2(ΑΕΔ)· ὥστε

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΕΔ)} = \frac{(ΑΓ)^2}{(ΑΕ)^2} \text{ ἢ } 2 = \frac{100}{(ΑΕ)^2} \text{ ἢ } (ΑΕ)^2 = 50 \text{ καὶ}$$

$(ΑΕ) = \sqrt{50}$· εἶναι ἄρα $(ΓΕ) = 10 - \sqrt{50} = 2,92894\ldots$

355) Ἔστω ΑΒΓ ἓν τρίγωνον καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ· ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ΒΓ (§ 120). Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΖ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ εἶναι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΕΖ)} = \left(\frac{ΒΓ}{ΕΖ}\right)^2 = 4$· ὥστε εἶναι (ΑΒΓ) = 4 (ΑΕΖ)· καὶ

(ΒΓΕΖ) = (ΑΒΓ) — (ΑΕΖ) = 4 (ΑΕΖ) — (ΑΕΖ) = 3 (ΑΕΖ).

356) Ἔστω Π καὶ Π′ αἱ περίμετροι αὐτῶν καὶ α καὶ β αἱ ὁμόλογοι πλευραί· εἶναι ἑπομένως (§ 252) $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} = 2$, ἐπειδὴ $\Pi = 2\Pi'$· αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἔχουσι λόγον $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 4$· ἤτοι ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι 4πλασία.

357) Ἔστω χ ἡ ζητουμένη πλευρά· θὰ εἶναι $\frac{\chi^2}{3^2} = \frac{2}{5}$ ἢ

$$\chi^2 = \frac{3^2 . 2}{5} \text{ καὶ } \chi = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Σελ. 178 — 358). Ἡ γων. ΓΚΔ εἶναι γωνία ὀρθή. (ἄσκ. 109)· ἐὰν δὲ Ε εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐφαπτομένης ΓΔ, ἡ ΚΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΚΔ· εἶναι ἄρα ἡ ἀκτὶς ΚΕ, μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων ΓΕ καὶ ΕΔ (§ 255).

359) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, οὗ ἡ βάσις εἶναι ἡ ΑΓ· τὸ ὕψος ΒΔ εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΓ· ἄρα διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ προεκτεινόμενον τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε· εἶναι ἄρα ἡ ΒΕ διάμετρος τοῦ κύκλου καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ὀρθογώνιον ἔχον τὴν Α ὀρθήν· ἡ δὲ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ· ἡ δὲ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ΒΕ καὶ τῆς ΒΔ (§ 255).

360) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον τὴν Α ὀρθήν· καὶ ΑΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ· ἔστω δὲ ΑΓ = 7 μ. καὶ ΒΓ = 10 μ. ἀλλ' εἶναι $(\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΒΓ}) . (\text{ΓΔ})$ ἢ $49 = 10 . (\text{ΓΔ})$ καὶ (ΓΔ) = 4,9 μ. ἄρα ΔΒ = 5,1 μ.

Σελ. 180 — 361) Ἔστω ὅτι ἡ ΓΔ προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε· εἶναι δὲ (§ 256) (ΓΔ) (ΔΕ) = (ΑΔ) (ΔΒ) ἢ $3 (\text{ΔΕ}) = 1{,}5 \times 3{,}5$ ἢ (ΔΕ) = 1,75.

362) Κατὰ τὴν § 256 εἶναι $(\text{ΟΕ}) = \frac{(\text{ΟΑ}) . (\text{ΟΒ})}{(\text{ΟΓ})}$.

263) Ἐὰν ἡ ζητουμένη ἐπιφανεια εἶναι ἡ ΓΔ ἔχομεν (§ 258)· $(\text{ΓΔ})^2 = (\text{ΓΑ}) . (\text{ΓΒ}) = 0{,}9 \times 0{,}4 = 0{,}36$ καὶ (ΓΔ) = 0,6.

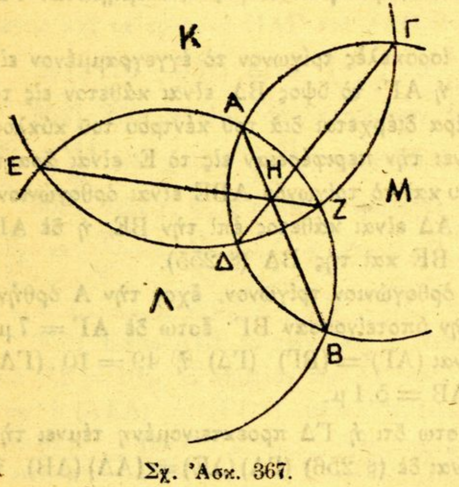
364) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου φέρομεν ἐφαπτομένην καὶ τέμνουσαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου· ἔχομεν δὲ τότε μῆκος ἐφαπτομένης $= \sqrt{(18 + 10)(18 - 10)} = 4\sqrt{14}$.

365) Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΔΓ καὶ ΒΕΓ εἶναι ὀρθαί, ἕπεται ὅτι

ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα διάμετρον τὴν ΒΓ διέρχεται διὰ τῶν Δ καὶ Ε (§ 146)· ἔχομεν ἄρα (ΒΗ)(ΗΕ) = (ΓΗ)(ΗΔ) καὶ (ΑΒ)(ΑΔ) = (ΑΓ)(ΑΕ)· ὁμοίως ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΗΕΑ καὶ ΗΔΑ εἶναι ὀρθαί, ἕπεται ὅτι τὰ Η, Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης διάμετρον τὴν ΗΑ· ἄρα ἔχομεν (ΒΗ)(ΒΕ) = (ΒΔ)(ΒΑ).

366) Ἔστω κοινὴ χορδὴ τῶν δύο κύκλων ἡ ΑΒ καὶ Η σημεῖόν τι αὐτῆς· ἐπειδὴ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι χορδαὶ τοῦ ἑνὸς κύκλου τέμνόμεναι ἐντὸς εἰς τὸ Η, ἔχομεν (ΑΗ)(ΗΒ) = (ΗΓ)(ΗΔ)· ὁμοίως ἔχομεν ἐκ τοῦ ἄλλου κύκλου (ΑΗ)(ΗΒ) = (ΗΕ)(ΗΖ)· ὥστε εἶναι (ΗΓ)(ΗΔ) = (ΗΕ)(ΗΖ)· καὶ κατὰ τὴν σημ. § 256, τὰ Γ, Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

367) Ἔστω ὅτι αἱ κοιναὶ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ Η· ἔχομεν ἄρα (ΑΗ)(ΗΒ) = (ΓΗ)(ΗΔ) (1)· ἤδη προεκτείνω τὴν ΖΗ καὶ ἔστω ὅτι τέμνει τὴν Κ εἰς τὸ Ε′ καὶ τὴν Λ εἰς τὸ Ε″· ἔχομεν δὲ τότε (ΖΗ)(ΗΕ′) = (ΓΗ)(ΗΔ) καὶ (ΖΗ)(ΗΕ″) = (ΑΗ)(ΗΒ)· ἄρα ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν (ΖΗ)(ΗΕ′)=(ΖΗ)(ΗΕ″) ἢ (ΗΕ′) =(ΗΕ″)· ὥστε τὸ Ε′, Ε″ πρέπει νὰ συμπίπτουν καὶ θὰ συμπίπτουν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Ε· ἤτοι ἡ ΖΕ διέρχεται διὰ τοῦ Η.



Σχ. Ἀσκ. 367.

368) Ἔστω κοινὴ χορδὴ ἡ ΑΒ, Γ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς, ΓΔ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸν κύκλον Κ καὶ ΓΕ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸν Λ. Ἔχομεν (§ 258) $(ΓΔ)^2 = (ΓΑ)(ΓΒ)$ καὶ $(ΓΕ)^2 = (ΓΑ)(ΓΒ)$· ἄρα εἶναι καὶ $(ΓΔ)^2 = (ΓΕ)^2$ καὶ (ΓΔ) = (ΓΕ).

369) Ἀποδεικνύεται κατὰ τρόπον ὅμοιον μὲ τὸν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

370) (Τὸ ΜΟ νὰ διορθωθῇ εἰς ΜΚ). Κατὰ τὴν § 258 ἔχομεν $(ΜΑ)^2 = (ΜΔ).(ΜΕ)$· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΜΚ εἶναι ὀρθογώνιον

εἰς τὸ Α, ἡ δὲ ΜΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἔχομεν λοιπὸν $(ΜΑ)^2 = (ΜΚ)(ΜΓ)$· ἄρα εἶναι $(ΜΔ)ΜΕ) = (ΜΚ)(ΜΓ)$.

Σελ. 185 — 371) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δι' ὃ εἶναι ΑΒ = 10 μ. ΒΓ = 15 μ. καὶ ΓΑ = 18 μ. καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Γ, ἡ ΓΔ· ἔχομεν (§ 259) $ΒΔ : ΔΑ = ΒΓ : ΑΓ$ ἢ $ΒΔ : ΔΑ = 15 : 18$ ἢ $5 : 6$ καὶ $\frac{ΒΔ + ΔΑ}{ΔΑ} = \frac{5+6}{6}$ ἢ $\frac{10}{ΔΑ} = \frac{11}{6}$ ἢ $ΔΑ = \frac{60}{11}$, ἄρα $ΒΔ = \frac{50}{11}$· ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ τμήματα εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ΒΓ εἶναι $\frac{75}{14}$ καὶ $\frac{135}{14}$ καὶ τῆς ΓΑ εἶναι $\frac{36}{5}$ καὶ $\frac{54}{5}$.

372) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον δι' ὃ εἶναι ΑΒ = 3 μ., ΒΓ = 3,5 μ. καὶ ΓΔ = 4 μ. καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τέμνουσα τὴν ΓΒ εἰς τὸ Δ· ἔχομεν τότε (§ 260) $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΒΑ}{ΑΓ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΔΓ} = \frac{3}{4}$ καὶ $\frac{ΑΒ}{ΔΓ - ΔΒ} = \frac{3}{4-3}$ ἢ $\frac{ΔΒ}{3,5} = 3$ καὶ $ΔΒ = 10,5$ ἄρα $ΔΓ = 14$.

373) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον δι' ὃ εἶναι ΑΒ = 5,8 μ., ΒΓ = 6,9 μ., ΓΑ = 11,4, ΓΔ δὲ ἡ διχοτόμος τῆς Γ καὶ ΓΕ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ. Ἔχομεν δὲ (§ 259) $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΓ}{ΓΒ}$ ἢ $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{11,4}{6,9}$ ἢ $\frac{38}{23}$ καὶ $\frac{ΑΔ + ΔΒ}{ΔΒ} = \frac{61}{23}$ ἢ $\frac{5,8}{ΔΒ} = \frac{61}{23}$ καὶ $ΔΒ = \frac{23 \times 5,8}{61}$· ὁμοίως λαμβάνομεν (§ 260) $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΑΓ}{ΓΒ}$ ἢ $\frac{11,4}{6,9}$ ἢ $\frac{38}{23}$ καὶ $\frac{ΕΑ - ΕΒ}{ΕΒ} = \frac{15}{23}$ ἢ $\frac{5,8}{ΕΒ} = \frac{15}{23}$ καὶ $ΕΒ = \frac{23 \times 5,8}{23}$· ὥστε εἶναι $ΔΒ + ΒΕ = ΔΕ = \frac{23 \times 5,8}{61} + \frac{23 \times 5,8}{23}$.

374) Ἡ ΑΓ ἥτις εἶναι διχοτόμος τῆς Α τέμνει τὴν ΖΕ εἰς τὸ Η· ἔχομεν λοιπὸν $\frac{ΖΗ}{ΗΕ} = \frac{ΑΖ}{ΑΕ}$· ἀλλ' ἐκ τῶν δοθέντων $\frac{ΕΒ}{ΕΑ} = \frac{3}{4}$ καὶ $\frac{ΖΑ}{ΖΔ} = \frac{2}{5}$ λαμβάνομεν $\frac{ΑΒ}{ΕΑ} = \frac{7}{4}$ καὶ $\frac{ΖΑ}{ΑΔ} = \frac{2}{7}$ ἤτοι εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΑΕ} \cdot \frac{ΖΑ}{ΑΔ} = \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{7}$ ἢ $\frac{ΖΑ}{ΑΕ} = \frac{1}{2}$ ἤτοι $\frac{ΖΗ}{ΗΕ} = \frac{1}{2}$.

375) Ἔστω ΔΕ ἡ διχοτόμος τῆς ΑΔΒ καὶ ΔΖ ἡ διχοτόμος τῆς ΑΔΓ· ἔχομεν δὲ $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΑΔ}{ΔΒ}$ (§ 259) καὶ $\frac{ΖΑ}{ΖΓ} = \frac{ΑΔ}{ΔΓ}$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΔ = ΔΓ$ ἔπεται ὅτι $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΖΑ}{ΖΓ}$ ἤτοι ἡ ΕΖ τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα, ἄρα εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

376) Εἶναι ἡ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν παράλληλον πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Σελ. 190 — 377) Αἱ ζητούμεναι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς δοθείσας· ἄρα θὰ διαιρέσωμεν τὴν περίμετρον εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 8, 10, 12 καὶ εὑρίσκομεν τὰς ὁμολόγους 15, $18\frac{3}{4}$, $22\frac{1}{2}$.

378) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον δι' ὃ εἶναι $ΑΒ = 12$ μ., $ΑΓ = 9$ μ. καὶ $ΒΓ = 6$ μ. καὶ αἱ τρεῖς παράλληλοι κατὰ σειρὰν ἀπὸ τῆς Α, αἱ ΔΕ, ΖΗ, ΘΙ, τὸ τρίγωνον ἑπομένως ΑΒΓ εἶναι 4πλάσιον τοῦ ΑΔΕ· ὥστε εἶναι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΔ)^2}$ (§ 247) ἢ $4 = \frac{144}{(ΑΔ)^2}$ ἢ $(ΑΔ)^2 = 36$ καὶ $ΑΔ = 6$· ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΖΗ· ἔχομεν δὲ $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΖΗ)} = \frac{144}{ΑΖ^2}$ ἢ $2 = \frac{144}{ΑΖ^2}$ καὶ $ΑΖ = 6\sqrt{2}$· ἐπίσης τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ ΑΘΙ ἔχομεν ἑπομένως $\frac{4}{3} = \frac{144}{ΑΘ^2}$ καὶ $ΑΘ = 6\sqrt{3}$· ἤτοι αἱ παράλληλοι πρέπει νὰ τέμνωσι τὴν πλευρὰν 12, εἰς σημεῖα ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 6 κορυφῆς εἶναι 6, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$.

379) Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι 8 μ. (200 : 25) ὁ δὲ λόγος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν παράλληλον θὰ εἶναι $\frac{7}{3}$, ἐὰν δὲ υ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ μικροῦ τριγώνου· ἔχομεν $\frac{7}{3} = \frac{64}{υ^2}$ ἢ

$$υ = \sqrt{\frac{64 . 3}{7}} = \frac{8}{7}\sqrt{21}.$$

380) Αἱ πλευραὶ τοῦ ὁμοίου πολυγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς

τὰς δοθείσας ἤτοι θὰ εἶναι 12α, 3α, 8α, 7α· ἀλλὰ θὰ εἶναι καὶ $12\alpha+3\alpha=18$ ἢ $15\alpha=18$ καὶ $\alpha=\frac{6}{5}$· ὥστε αἱ ζητούμεναι πλευραὶ εἶναι $\frac{72}{5}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{48}{5}$, $\frac{42}{5}$.

381) Ἔστω ἡ ΕΖ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ἥτις τέμνει τὴν ΟΑ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ἤτοι εἶναι ΟΑ : ΟΕ = ΟΕ : ΕΑ (1)· ἀλλὰ κατὰ τὴν § 235 ἔχομεν $\frac{ΟΑ}{ΟΕ}=\frac{ΟΒ}{ΟΖ}$ καὶ $\frac{ΟΕ}{ΕΑ}=\frac{ΟΖ}{ΖΒ}$ καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{ΟΒ}{ΟΖ}=\frac{ΟΖ}{ΖΒ}$ κ. ο. κ.

382) Ἔστω ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, διαιρεῖ αὐτὰ εἰς δύο τρίγωνα ἰσοδύναμα τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ· ταῦτα ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν βάσιν ΑΓ, θὰ ἔχουσιν ἴσα ὕψη, τὰ ΒΖ καὶ ΔΗ· ἑπομένως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΖ (Ε σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων) καὶ ΔΕΗ, ἔχουσι ΒΖ = ΔΗ καὶ γων. ΔΕΗ = γων. ΒΕΖ· ἄρα εἶναι ἴσα (σελ. 46, 4)· ἑπομένως εἶναι καὶ ΒΕ=ΕΔ.

383) Ἐὰν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος, $\alpha\sqrt{3}$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου.

384) Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον· ἐκ τοῦ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἴσην πρὸς αὐτὴν τὴν ΒΔ· μὲ κέντρον δὲ τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν παράλληλον τῇ ΒΓ, τὴν ΕΖ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς τὸ Ζ· τὸ ΑΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, διότι εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ ὡς ἰσογώνιον καὶ εἶναι $\frac{(ΑΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΑΕ)^2}{(ΑΒ)^2}=\frac{(ΑΔ)^2}{(ΑΒ)^2}$· ἀλλὰ $(ΑΔ)^2=(ΑΒ)^2+(ΒΔ)^2=2(ΑΒ)^2$· ὥστε εἶναι $\frac{(ΑΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=2$.

385) Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον· προεκτείνω τὴν ΑΒ μέχρι τοῦ Δ ὥστε ΑΒ=ΒΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ κατασκευάζω ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΔΖ καὶ φέρω ἔπειτα τὴν ΒΖ· μὲ κέντρον δὲ ἔπειτα τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΖ γράφω περιφέρειαν κύκλου, ἥτις τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ εἰς τὸ Ε καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρω παράλληλον τῇ ΑΓ τέμνουσαν, τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Η· τὸ τρίγωνον ΒΕΗ εἶναι τὸ ζητούμενον διότι εἶναι ὅμοιον πρὸ τὸ ΑΒΓ ὡς ἰσογώνιον· εἶναι δὲ $\frac{(ΒΕΗ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΕΒ)^2}{(ΑΒ)^2}=\frac{(ΒΖ)^2}{(ΑΒ)^2}$ ἀλλ' ἡ ΒΖ εἶναι κάθετος

ἐπὶ τὴν ΑΔ· ἔχομεν λοιπὸν $(\text{BZ})^2 = (\text{ZA})^2 - (\text{AB})^2$ καὶ ἐπειδὴ $(\text{ZA}) = 2(\text{AB})$· ἔχομεν $(\text{BZ})^2 = 4(\text{AB})^2 - (\text{AB})^2 = 3(\text{AB})^2$· ὥστε εἶναι $\frac{(\text{BEH})}{(\text{AB}\Gamma)} = 3$.

386) Κατασκευάζομεν τυχὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ 3ον § 266.

387) Ἔστω α ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου καὶ δ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ· ἀλλὰ $\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2$ ἢ $\delta = \alpha\sqrt{2}$· ἐὰν ἤδη αὐξήσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου κατὰ δ, θὰ ἔχωμεν $\alpha + \delta$ ἢ $\alpha + \alpha\sqrt{2}$· ἡ δὲ διαγώνιος τοῦ νέου τετραγώνου εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\sqrt{2}$· ἤτοι ἔχομεν $(\alpha + \alpha\sqrt{2})\sqrt{2} = \alpha\sqrt{2} + 2\alpha$.

388) Ἔστω ΑΒ ἡ χορδὴ καὶ ΓΔ τὸ βέλος κυκλικοῦ τόξου· ὥστε Δ εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΑΒ· ἀλλ' ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΔ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καθὼς διέρχεται δι' αὐτοῦ καὶ ἡ προέκτασις τοῦ βέλους ΔΓ· ὥστε τὸ κέντρον εἶναι ἡ τομὴ τῆς καθέτου ταύτης καὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ βέλους.

389) Ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα εἶναι $\alpha + 1$, αἱ ἄλλαι κάθετοι πλευραὶ εἶναι α καὶ $\alpha - 1$· ἔχομεν δὲ $(\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + (\alpha - 1)^2$· ἤτοι $\alpha + 1 = 5$, $\alpha = 4$ καὶ $\alpha - 1 = 3$.

390) Ἐπειδὴ δίδεται $\text{AB}\Gamma_1 = \text{AB} . \lambda$ ἕπεται ὅτι $\text{B}\Gamma_1 = (\lambda - 1)$· ΑΒ· ὥστε ἡ $\text{B}\Gamma_1$ διαιρεῖται εἰς $\lambda - 1$ μέρη ἴσα πρὸς τὴν ΑΒ· ἐπομένως τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα βάσιν τὰ μέρη αὐτὰ καὶ κορυφὴν ἔναντι τῆς βάσεως τὸ Γ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ ΑΒΓ· ἔχομεν λοιπὸν $\text{B}\Gamma\Gamma_1 = (\lambda - 1)\,\text{AB}\Gamma$· ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι $\Gamma\text{AA}_1 = (\mu - 1)\,\text{AB}\Gamma$ καὶ $\text{ABB}_1 = (\nu - 1)\,\text{AB}\Gamma$· ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα $\text{B}_1\Gamma_1\text{B}$ καὶ ABB_1 ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ B_1 καὶ τὰς βάσεις των AB_1 καὶ $\text{B}\Gamma_1$ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· ἄρα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἐπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των· ἤτοι εἶναι $\frac{(\text{B}_1\Gamma_1\text{B})}{(\text{ABB}_1)} = \frac{(\text{BB}_1)}{(\text{A}\Gamma)} = \lambda - 1$ ἤτοι εἶναι $(\text{B}_1\Gamma_1\text{B}) = (\text{ABB}_1)(\lambda - 1)$· καὶ ἐπειδὴ εὑρέθη ὅτι εἶναι $\text{ABB}_1 = (\nu - 1)\,\text{AB}\Gamma$· ἕπεται ὅτι $\text{B}_1\Gamma_1\text{B} = (\lambda - 1)(\nu - 1)\,\text{AB}\Gamma$· ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\Gamma_1\text{A}_1\Gamma = (\mu - 1)(\lambda - 1)\,\text{AB}\Gamma$ καὶ

$$\text{A}_1\text{B}_1\text{A} = (\nu - 1)(\mu - 1)\,\text{AB}\Gamma\cdot$$

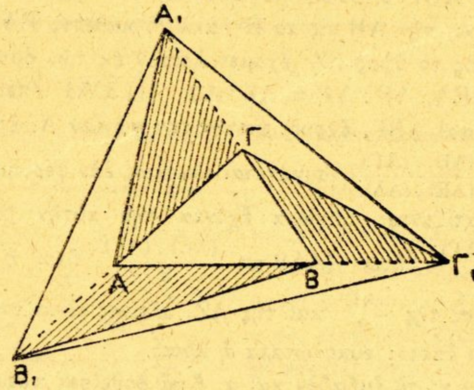
ἄρα ἔχομεν

$$A_1B_1\Gamma_1 = AB\Gamma + B\Gamma\Gamma_1 + \Gamma AA_1 + ABB_1 + B_1\Gamma_1B + \Gamma_1A_1\Gamma + A_1B_1A$$

$$\text{ἢ} \quad A_1B_1\Gamma_1 = AB\Gamma.$$

$$[1+\lambda-1+\mu-1+\nu-1+(\lambda-1)(\nu-1)+(\mu-1)(\lambda-1)+(\nu-1)(\mu-1)]$$

$$= AB\Gamma\,(1-\lambda-\mu-\nu+\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda).$$



Σχ. Ἀσκ. 390.

391) Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $AB\Gamma_1$ ὡς ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ Β καὶ τὰς βάσεις των ΑΓ καὶ $A\Gamma_1$ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις των· ἤτοι ἔχομεν $\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma_1)} = \frac{(A\Gamma)}{(A\Gamma_1)}$· ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma_1$, $AB_1\Gamma_1$ εἶναι ὁμοίως ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, AB_1· ἤτοι εἶναι $\frac{(AB\Gamma_1)}{(AB_1\Gamma_1)} = \frac{(AB)}{(AB_1)}$· ἀλλ' ἕνεκα τῆς παραλλήλου $B_1\Gamma_1$, εἶναι $\frac{(A\Gamma)}{(A\Gamma_1)} = \frac{(AB)}{(AB_1)}$· ὥστε εἶναι καὶ $\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma_1)} = \frac{(AB\Gamma_1)}{(AB_1\Gamma_1)}$. ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον $AB_1\Gamma$ εἶναι μέσον ἀνάλογον κ.τ.λ.

392) α΄) Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον, Δ σημεῖόν τι τῆς ΑΓ, καὶ ΔΕ ἡ εὐθεῖα ἥτις τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε, διαιρεῖ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα· ἤδη τὸ τετράπλευρον ΕΔΓΒ, μετασχηματίζομεν εἰς τρίγωνον ἰσοδύναμον τῷ ΕΔΖ ἄγοντες τὴν ΔΒ, ἔπειτα ἐκ τοῦ Γ παράλληλον τῇ ΔΒ, τὴν ΓΖ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ζ καὶ τέλος τὴν ΔΖ (§ 199)· ὥστε τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΔΖ καὶ τὸ ΑΔΕ ἰσοδύναμον τῷ ΕΔΖ· ἐπειδὴ δὲ τὰ τελευταῖα ταῦτα

ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος (τὸ ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς Δ), ἕπεται ὅτι ἔχουσι ἴσας βάσεις τὰς ΑΕ καὶ ΕΖ, ὥστε τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΖ. Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ταύτης ἕπεται εὐκόλως ἡ σύνθεσις τοῦ προβλήματος.

6) Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ ΕΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε· ἀλλ' ἡ κάθετος ΕΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ὕψος ΒΖ· ἔχομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΖ, ΑΕΔ, $AB : AE = AZ : A\Delta$· (1) ἀλλὰ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΑΒΓ, ἔχουσι κοινὴν τὴν γωνίαν Α, ἕπεται $\frac{(AB\Gamma)}{(AE\Delta)} = \frac{(AB).(A\Gamma)}{(AE).(A\Delta)}$ (συνάγεται εὐκόλως ἐὰν φέρωμεν τὴν ΕΓ, ὁπότε σχηματίζονται τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν), ἤτοι $2 = \frac{(AZ).(A\Gamma)}{(A\Delta)^2}$, ἤτοι $(A\Delta)^2 = \frac{(AZ).(A\Gamma)}{2}$ ἤτοι ἡ ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς $\frac{A\Gamma}{2}$ καὶ τῆς ΑΖ, αἵτινες εἶναι γνωσταί. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται εὐκολώτατα ἡ λύσις.

393) Ἐὰν κ^2 τὸ ἐμβαδὸν καὶ α, β αἱ δοθεῖσαι πλευραὶ ἔχομεν $\frac{\alpha . \upsilon}{2} = \kappa^2$ καὶ $\upsilon = \frac{2\kappa^2}{\alpha}$· ὥστε ἤδη κατασκευάζομεν εὐκόλως τὸ τρίγωνον.

Σελ. 194 — 394) Τοῦ 5γώνου εἶναι $\frac{6}{5}$ ὀρ. τοῦ 6γώνου $\frac{8}{6}$ ὀρ. καὶ τοῦ 8γώνου $\frac{12}{8}$ ὀρθ.

395) Τοῦ 8γώνου εἶναι 2 ὀρ. — $\frac{12}{8}$ ὀρθ. ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τῶν λοιπῶν.

396) Ἐὰν μ εἶναι αἱ γωνίαι, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $\frac{5\mu}{3}$ ὀρ., ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν μ εἶναι $\mu = \left(\frac{5\mu}{3} + 4\right) : 2$ ἢ $\mu = 12$.

397) Ἀφοῦ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρ. ἡ ἐσωτερικὴ εἶναι $\frac{4}{3}$ ὀρ.· ἐργαζόμενοι δὲ ὡς ἄνω εὑρίσκομεν 6 πλ. καὶ 15 πλ.

398) Τοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\frac{4}{6}$ καὶ τοῦ πενταγώνου $\frac{4}{5}$.

399) Τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὀκταγώνου καὶ τοῦ δεκαεξαγώνου.

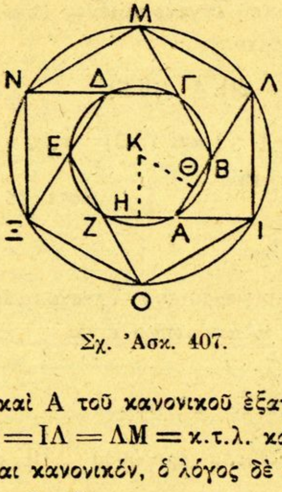
400) Ἡ γωνία Α εἶναι $\frac{6}{5}$ ὀρθ. καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΑΒΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΕ εἶναι $\frac{2}{5}$, ἄρα ἡ ΕΒΓ εἶναι $\frac{4}{5}$.

ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς ΑΒΕ σχηματίζει μετὰ τῆς ΒΕ γωνίαν $\frac{1}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἥτις γωνία μετὰ τῆς ΕΒΓ σχηματίζει $\frac{5}{5}$ ὀρ. $= 1$ ὀρ.

401) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, διότι ἡ ἐσωτερικὴ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος πλευρὰς περισσοτέρας τῶν 4 εἶναι ἀμβλεῖα· διότι ἑκάστη τούτων εἶναι $\frac{2\mu - 4}{\mu} = 2 - \frac{4}{\mu}$ καὶ $\frac{4}{\mu} < 1$ ἐπειδὴ $\mu > 4$.

Σελ. 197 — 406) Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων εἶναι $\frac{3}{4}$ (§ 272) καὶ ὁ τῶν ἐπιφανειῶν των $\frac{9}{16}$ (§ 254).

407) Ἐπειδὴ ΚΗ $=$ ΚΘ $=$ κ.τ.λ., ἕπεται ὅτι αἱ χορδαὶ τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν Ζ, Α διὰ τοῦ Α, Β κ.τλ. εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν ΗΙ, ΘΛ κ.τ.λ. εἶναι ἴσα· ὥστε εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ΑΙ, ΒΛ, ΓΜ κ.τ.λ. (ἐπειδὴ ΗΑ $=$ ΘΒ $=$ κτλ.) τώρα τὰ τρίγωνα ΖΟΙ, ΑΙΛ, ΒΛΜ κτλ. εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, ὅπως π.χ. τὰς ΙΖΟ, ΛΑΙ ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν Ζ καὶ Α τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἄρα ΟΙ $=$ ΙΛ $=$ ΛΜ $=$ κ.τ.λ. καὶ ἑπομένως τὸ πολύγωνον ΟΙΛΜΝΞ εἶναι κανονικόν, ὁ λόγος δὲ τῶν περιμέτρων εἶναι 2 καὶ τῶν ἐπιφανειῶν 4.



Σχ. Ἀσκ. 407.

Σελ. 202 — 408) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι α, ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι 2α.

409) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι α, ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι 2α καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἶναι $\alpha\sqrt{2}$· ὁ δὲ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι $\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2} = 2$.

410) Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν εἶναι Ε, καὶ α ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἔχομεν $E = 4\alpha^2$ καὶ $\alpha = \frac{\sqrt{E}}{2}$· ἐὰν δὲ εἶναι ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου, ἔχομεν $E = 2\rho^2$ καὶ $\rho = \frac{\sqrt{2E}}{2}$· ἐφαρμογὴ $\alpha = \frac{\sqrt{12,25}}{2} = \frac{3,5}{2}$ καὶ $\rho = \frac{3,5\sqrt{2}}{2}$.

411) Εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀποστήματος ἤτοι $\lambda\sqrt{3}$.

412) Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των εἶναι $\frac{\sqrt{3}}{2}$· ἄρα ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι $\frac{3}{4}$.

413) Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α καὶ κέντρου Κ, καὶ ΚΓ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ τέμνον τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον Γ· ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΚΓ, μέχρι τῆς περιφερείας καὶ συναντήσῃ αὐτὴν εἰς τὸ Δ, ἡ χορδὴ ΑΔ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου 12γώνου. Ἤδη ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΚΔ, λαμβάνομεν

$$(\mathrm{A\Delta})^2 = (\mathrm{KA})^2 + (\mathrm{K\Delta})^2 - 2(\mathrm{K\Delta}) \, . \, (\mathrm{K\Gamma})$$

ἢ $(\mathrm{A\Delta})^2 = 2\alpha^2 - 2 \, . \, \alpha \, . \, \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha^2(2 - \sqrt{3})$ καὶ $(\mathrm{A\Delta}) = \alpha\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Ἐπίσης ἔχομεν $(\mathrm{AK\Delta}) = \frac{(\mathrm{K\Delta}) \, . \, (\mathrm{A\Gamma})}{2} = . \, \frac{\alpha^2}{4}$· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ 12γώνου εἶναι $12 \, . \, \frac{\alpha^2}{4} = 3\alpha^2$.

414) Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι $\alpha\sqrt{3}$ (§ 275)· ἄρα τὸ ἀπόστημα εἶναι

$$\sqrt{\alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{4}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha}{2}.$$

415) Ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $3\sqrt{3}$· τὸ δὲ ἀπόστημα ΚΓ εἶναι $\frac{3}{2}$· τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ τριγώνου ΚΑΒ εἶναι $\frac{(\mathrm{AB}) \, . \, (\mathrm{K\Gamma})}{2} = \frac{3\sqrt{3} \, . \, 3}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$· ἄρα ὅλου τοῦ τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 3μ. τὸ δὲ ἀπόστημα αὐτοῦ εἶναι $\frac{3\sqrt{3}}{2}$· τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ἕξ ἴσων τριγώνων εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον, διὰ τῶν ἀκτίνων τῶν ἀγομένων εἰς τὰς κορυφάς του εἶναι $\frac{9\sqrt{3}}{2}$· ἄρα ὅλον τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{54\sqrt{3}}{2}$.

416) Ἐὰν μ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου οὗ κεντρικὴ γωνία εἶναι $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἔχομεν $\frac{4}{3} = \frac{4}{\mu}$ καὶ $\mu = 3$ ἑπομένως τὸ κανονικὸν τοῦτο πολύγωνον εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

417) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον α εἶναι (§ 276 σημ.) $\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$· τὸ ἀπόστημα ἄρα αὐτοῦ εἶναι $\sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{16}(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

418) Ἐκ τῆς πλευρᾶς (§ 276) καὶ ἐκ τοῦ ἀποστήματος (ἄσκ. προηγουμ.) εὑρίσκεται εὐκόλως τὸ ἐμβαδόν.

Σελ. 210—419) Εἶναι 50,26548. . μ.

420) Εἶναι 2,3873 μ.

421) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του εἶναι 0,75π.· ἄρα θὰ κάμῃ στροφὰς 1000 : 0,75π.

422) Ἐὰν τὸ περιγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ καὶ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς εἶναι τὰ Δ, Ε, Ζ. τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον ἄρα ἡ γωνία $\mathrm{B\Delta E} = \mathrm{BEZ} = \mathrm{Z} = \frac{2}{3}$ ὀρθῆς· ἤτοι $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{BE} = \Delta\mathrm{E} = 3\sqrt{\alpha}$· ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 4,5 μ. (τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς περιμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου)· ἤτοι ἡ πλευρὰ $\Delta\mathrm{E} = \frac{4,5}{3} = 1,5$ μ. ἤτοι $\alpha\sqrt{3} = 1,5$ καὶ $\alpha = \frac{1,5}{\sqrt{3}} = \frac{1,5\sqrt{3}}{3}$· ἤδη εὑρίσκεται εὐκόλως ἡ περιφέρεια.

423) Ἐὰν χ εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἔχομεν $\frac{24}{18} = \frac{4}{\chi}$ ἢ $\chi = \frac{4 \cdot 18}{24} = 3$.

Σελ. 215 — 424) Ἔχομεν $K = \pi\alpha^2$ καὶ $\alpha = \frac{\Delta}{2}$ ἢ $\alpha^2 = \frac{\Delta^2}{4}$· ὥστε $K = \pi . \frac{\Delta^2}{4}$ καὶ $K = \pi . \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$ $\left(\text{διότι} \cdot \alpha = \frac{\Gamma}{2\pi}\right)$ ἢ $\Gamma = \frac{1}{\pi} . \frac{\Gamma^2}{4}$.

425) Εἶναι 25π.

426) Ἡ ἀκτὶς α εἶναι $\sqrt{\frac{K}{\pi}} = 3{,}568$ μ. καὶ ἡ περιφέρεια γ εἶναι $2\sqrt{K\pi} = 22{,}42 \ldots$ μ.

427) Ἐὰν Α εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγαλυτέρου καὶ α ἡ τοῦ μικροτέρου ἔχομεν $\pi A^2 - \pi\alpha^2 = \pi(A^2 - \alpha^2)$.

428) Ἐὰν Α καὶ α εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν δοθέντων κύκλων καὶ χ ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου, δέον νὰ εἶναι $\pi\chi^2 = \pi(A^2 - \alpha^2)$ ἢ $\chi^2 = A^2 - \alpha^2$ ἤτοι ἡ ἀκτὶς χ εἶναι μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ὑποτείνουσα εἶναι ἡ Α καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ α. Διὰ τὸ ἄθροισμα θὰ ἔχομεν $\chi^2 = A^2 + \alpha^2$· ὥστε χ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα κ.τ.λ.

Σελ. 217 — 429) Εἶναι $\frac{\pi . 9 . 45}{180}$.

430) Εἶναι $\pi . 9 . \frac{21^0\, 40'\, 20''}{180^0}$.

431) Ἔχομεν $3{,}927 = \frac{\pi . \alpha . 22^0\, 30'}{180}$ καὶ $\alpha = \frac{3{,}927 . 180^0}{\pi . 22^0\, 30'}$.

432) Ἔχομεν $5{,}60 = \frac{\pi . 3{,}20 . \mu}{180}$ καὶ $\mu = \frac{5{,}60 . 180}{\pi . 3{,}20}$.

433) Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἥτις βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης· ὥστε ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος 57^0.

434) Αἱ μοῖραι μ οἱασδήποτε γωνίας καὶ ὁ ἀριθμὸς θ, ὅστις παριστᾷ αὐτὴν συνδέονται διὰ τῆς ἰσότητος

$$\theta = \frac{\pi\mu}{180} \quad \text{ἢ} \quad \mu = \frac{180}{\pi} . \theta \cdot$$

ἐξ ἧς ὑποθέτοντες $\theta = 1$, εὑρίσκομεν $\mu = 57^0\ 17'\ 48''$.

435) Εἶναι $\frac{\pi . 25 . 5}{360}$.

436) Εἶναι $15{,}708 = \frac{\pi . \alpha^2 . 50}{360}$ καὶ $\alpha = \sqrt{\frac{15{,}708 . 360}{\pi . 50}}$.

437) Ἡ χορδὴ τοῦ τμήματος εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου·

ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κυκλικοῦ τομέως καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

438) Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ ἑνός, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἄλλου εἶναι 3α ἔχομεν λοιπὸν $28,80 = 9\pi\alpha^2 - \pi\alpha^2$ ἢ $\alpha^2 = \frac{28,80}{8\pi}$.

Σελ. 222 — 439) Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ρ τὸ ἀπόστημα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν καὶ ρ' τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου· ἔχομεν (§ 301)

$\rho' = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha+\rho)}{2}}$ ἀλλὰ $\rho = \frac{\alpha}{2}$ (ἀσ. 414) ὥστε εἶναι

$\rho' = \sqrt{\frac{\alpha\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)}{2}} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$· ἐὰν δὲ ρ'' εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ

δωδεκαγώνου ἔχομεν $\rho' = \sqrt{\frac{\alpha\left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

440) Ἐὰν (σχ. σελ. 200) ἐκ τοῦ Α φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ τέμνουσαν ταύτην εἰς τὸ Δ, ἡ ΟΔ εἶναι τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ πενταγώνου· ἤδη ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΟ, λαμβάνομεν $(AB)^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha\,.\,(O\Delta)$ (§ 218)· ἀλλ' εἶναι

$(AB) = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$· ὥστε ἔχομεν $\frac{\alpha^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha(O\Delta)$

ἢ $(O\Delta) = \frac{\alpha}{4}(\sqrt{5}+1)$.

Ἤδη ἂν διὰ ρ' καὶ ρ'' παραστήσωμεν τὰ ἀποστήματα τοῦ δεκαγώνου καὶ τοῦ εἰκοσαγώνου ἔχομεν

$\rho' = \sqrt{\frac{\alpha\left[\alpha + \frac{\alpha}{4}(\sqrt{5}+1)\right]}{2}} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ καὶ

$\rho'' = \sqrt{\frac{\alpha\left[\alpha + \frac{\alpha}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]}{2}} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

441) Κατὰ τὴν § 302 ἔχομεν $2A\Gamma = 2\,.\,\frac{\alpha}{\rho}\,.\,A\Theta$. ἀλλὰ

$\rho = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καὶ $A\Theta = \frac{\alpha}{2}$· ὥστε εἶναι

$2A\Gamma = 2\,.\,\frac{\alpha}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}\,.\,\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,.\,\alpha$

442) Τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ πενταγώνου εὑρέθη (ἀσκ.

440) $\frac{\alpha}{4}(\sqrt{5}+1)$· ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγρ. κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι (§ 302) $(AB)=2\sqrt{\alpha^2-\frac{\alpha^2}{16}(\sqrt{5}+1)^2}$

$=\frac{\alpha}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ καὶ $2\,(A\Gamma)=\frac{2\alpha}{\frac{\alpha}{4}(\sqrt{5}+1)}\cdot\frac{\alpha}{4}\sqrt{5}-1)$

$=\alpha\,(3-\sqrt{5})$.

443) Ἐργαζόμεθα κατὰ τὴν § 303.

444) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ πρώτου κύκλου εἶναι α, ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι (ἄσκ. 441) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha$· καὶ ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ δευτέρου κύκλου εἶναι β, ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἶναι $\beta\sqrt{3}$· ἀλλὰ εἶναι $\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha=\beta\sqrt{3}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{2}$.

Σελ. 223 — 445) Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι 4 ὀρθαὶ ἢ 360° (ἄσκ. 24)· ὥστε ἂν μ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἔχομεν $10\mu=360$ καὶ $\mu=36$ ὁμοίως ἔχομεν $\mu\cdot 1^\circ=360^\circ$ καὶ $\mu=360$ καὶ $2\frac{1}{2}\,\mu=360$ ἤτοι $\mu=144$.

446) Ἂν μ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν, ὅλαι αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα $108\,\mu$. μοιρῶν ἢ $\frac{180\mu}{90}$ ὀρθ.· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο $\frac{108\mu}{90}=2\mu-4$· ὥστε $\mu=5$· ὁμοίως ἔχομεν $\frac{120\mu}{90}=2\mu-4$ καὶ $\mu=6$, $\frac{144\mu}{90}=2\mu-4$ καὶ $\mu=10$ καὶ $\frac{60\mu}{90}=2\mu-4$ ἢ $\mu=3$· ἀλλὰ $\frac{130\mu}{90}=2\mu-4$ δίδει διὰ $\mu=7\frac{1}{5}$· ἤτοι κανονικὸν πολύγωνον οὗ ἡ γωνία εἶναι 130° δὲν ὑπάρχει.

447) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗ εἶναι $A=120^\circ$· ἄρα $\Gamma BA=B\Gamma A=30^\circ$ ἐπειδὴ δὲ αὗται εἶναι ἐγγεγραμμέναι ἕπεται ὅτι τόξ. $BA=$ τόξ. $A\Gamma=60^\circ$· ἤτοι πλ. $AB=$ πλ. $A\Gamma=$ ἀκτὶς κύκλου.

448) Ἔστω ΑΒΓΔΕ κανονικὸν πεντάγωνον ὅπερ ἐγγράφομεν εἰς κύκλον καὶ αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΑΔ· αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, $BA\Gamma=\frac{BK\Gamma}{2}$, $\Gamma A\Delta=\frac{\Gamma K\Delta}{2}$ καὶ $\Delta AE=\frac{\Delta KE}{2}$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BK\Gamma=\Gamma K\Delta=\Delta KE$ ἕπεται ὅτι $BA\Gamma=\Gamma A\Delta=\Delta AE$.

449) Δηλ. ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ (σχ. προηγούμενον) διότι ἂν φέρομεν τὴν ΑΓ, ἔχομεν

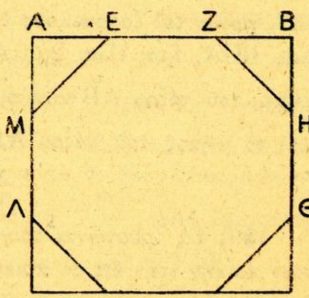
$$\text{γων. ΒΑΓ} = \text{γων. ΑΓΕ}.$$

450) Ἔστω ὅτι αἱ ΒΔ καὶ ΓΕ τέμνονται εἰς τὸ Ζ· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι (ἄσκ. 449) ΒΔ || ΑΕ καὶ ΓΕ || ΑΒ· ἤτοι τὸ σχῆμα ΑΒΖΕ εἶναι παραλ/μον καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ = ΑΕ · ἕπεται ὅτι ΑΒ = ΒΖ = ΖΕ = ΕΑ.

451) Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὕρομεν ὅτι ΒΖ = ΖΕ ἄρα εἶναι ΖΔ = ΖΓ (ἐπειδὴ εἶναι ΒΔ = ΓΕ)· ὁμοίως ἂν αἱ διαγώνιοι ΓΕ, ΔΑ τέμνονται εἰς τὸ Η, αἱ ΔΑ καὶ ΕΒ εἰς τὸ Θ, αἱ ΕΒ καὶ ΑΓ εἰς τὸ Ι καὶ αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ εἰς τὸ Μ. ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΘΙ, ΒΙΜ, ΓΜΖ κ.τ.λ, εἶναι ἴσα· ἄρα εἶναι ΗΘ = ΘΙ = ΙΜ = ΜΖ = ΖΗ καὶ αἱ Η = Θ = Ι = Μ = Ζ ἤτοι τὸ ΗΘΙΜΖ εἶναι κανονικὸν πεντάγωνον.

452) Ἔστω ὅτι αἱ διαγώνιοι ΒΔ καὶ ΓΕ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, τέμνονται εἰς τὸ Ζ· τὰ τρίγωνα ΕΓΔ καὶ ΖΓΔ ἔχουσι τὴν Γ κοινὴν καὶ τὰς ΓΕΔ καὶ ΖΔΓ ἴσας· εἶναι ἑπομένως ὅμοια· ὥστε ἔχομεν ΕΓ : ΔΓ = ΔΓ : ΖΓ· ἀλλὰ (ἄσκ. 450) ΕΖ = ΔΓ· ὥστε εἶναι ΕΓ : ΕΖ = ΕΖ : ΖΓ.

453) Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τετράγωνον καὶ Ε,Ζ,Η,Θ,Ι,Κ,Λ,Μ τὰ σημεῖα τῶν τομῶν· τὰ τρίγωνα ΑΜΕ, ΒΖΗ, ΓΘΙ, ΔΚΛ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ ἰσοσκελῆ· ἑπομένως αἱ γωνίαι τοῦ ὀκταγώνου ὡς παραπληρώματα ἴσων γωνιῶν εἶναι ἴσα. Ἤδη ἐὰν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἡ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι $\alpha\sqrt{2}$. ὥστε εἶναι $\text{ΑΕ} = \alpha - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$· καὶ



σχ. (ἄσκ. 453)

$$\text{ΜΕ}^2 = 2\text{ΑΕ}^2 = 2\left(\alpha - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$= \alpha^2(3 - 2\sqrt{2})$· ἤτοι $\text{ΜΕ} = \alpha\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$· ἀλλὰ

$\text{ΕΖ} = \text{ΑΒ} - 2\text{ΑΕ} = \alpha - 2\left(\alpha - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right) = \alpha(\sqrt{2} - 1)$· ἀλλὰ

$\sqrt{2} - 1 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ $((\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2})$· ὥστε εἶναι

ΜΕ=ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ=κτλ. ἐπομένως τὸ ὀκτάγωνον ΕΖΗΘΙΚΛΜ εἶναι κανονικόν.

454) Ὅσων ἡ γωνία εἶνα ἀκέραιον ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 360^o.

455) Ἡ γωνία τοῦ πρώτου πολυγώνου εἶναι $\frac{2\varkappa - 4}{\varkappa}$, ἢ $2 - \frac{4}{\varkappa}$, τοῦ δευτέρου $2 - \frac{4}{\lambda}$ καὶ τοῦ τρίτου $2 - \frac{4}{\varrho}$· εἶναι δὲ $2 - \frac{4}{\varkappa} + 2 - \frac{4}{\lambda} + 2 - \frac{4}{\varrho} = 4$ ὀρθ. ἢ $\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}$

456) Ἔστω α ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου τούτου. Ἕκαστον δὲ τῶν γραφομένων τόξων, εἶναι 60^o κύκλου ἀκτῖνος α· τὸ μῆκος λοιπὸν τοῦ ἑνὸς τῶν τόξων εἶναι $\frac{\pi\alpha \, . \, 60}{180}$ ἢ $\frac{\pi\alpha}{3}$· ὥστε τῶν τριῶν τόξων τὸ μῆκος εἶναι πα.

457) Ἔστω 2α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Ο· ἐὰν δὲ Δ καὶ Γ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΟΑ, ΟΒ, τὸ σχῆμα ΟΓΜΔ εἶναι προφανῶς τετράγωνον· ὥστε αἱ γωνίαι ΑΔΜ καὶ ΒΓΜ εἶναι ὀρθαὶ καὶ συνεπῶς τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΜΒ εἶναι $\frac{1}{4}$ ἴσων περιφεριῶν ἀκτῖνος α, ὥστε τὸ μῆκος ἑκάστου εἶναι $\frac{\pi\alpha}{2}$.

458) Ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ εἶναι μ μοιρῶν καὶ ἡ γωνία ΒΟΑ εἶναι μ^o· ἐὰν δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΟΑ, ἡ γωνία ΓΔΑ ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΟΔ εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΒΟΑ, ἤτοι εἶναι $2\mu^o$· ὥστε τὸ τόξον ΑΓ εἶναι $2\mu^o$· Ἀλλὰ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ κύκλου ἀκτῖνος 2α· εἶναι $\frac{\pi \, . \, 2\alpha \, . \, \mu}{180} = \frac{\pi\alpha\mu}{90}$ καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΓ κύκλου ἀκτῖνος α εἶναι

$$\frac{\pi \, . \, \alpha \, . \, 2\mu}{180} = \frac{\pi\alpha\mu}{90}.$$

459) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουσι μίαν ὀξεῖαν γωνίαν κοινὴν (τὴν εἰς τὸ κοινὸν κέντρον) καὶ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἕν, ἔχει ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ μίαν κάθετον τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφείας εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ ἄλλο ἔχει ὑποτείνουσαν, τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης καὶ μίαν κάθετον τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης, εἶναι ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ αὐτῶν συνάγεται ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀκτίνων τῶν ἄλλων· ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἄλλων (§ 287).

460) Ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι $2α$, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τετράγωνον κύκλου εἶναι $α$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $πα^2$· ἡ ἀκτὶς ὅμως τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου· ἤτοι $\frac{2α\sqrt{2}}{2} = α\sqrt{2}$· καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $2πα^2$.

461) Ἐὰν $2α$ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ $2β$, $2γ$ αἱ ἄλλαι κάθετοι πλευραί, τὰ ἐμβαδὰ τῶν γραφομένων κύκλων εἶναι $πα^2$, $πβ^2$, $πγ^2$· εἶναι δὲ $πβ^2 + πγ^2 = π(β^2 + γ^2) = πα^2$· ἐπειδὴ $4α^2 = 4β^2 + 4γ^2$ ἄρα καὶ $α^2 = β^2 + γ^2$.

462) Ἐὰν $α$ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι $α\sqrt{2}$· ἡ κοινὴ δὲ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν τεταρτοκύκλιον τοῦ κύκλου ἀκτῖνος $α\sqrt{2}$ καὶ ἀπὸ δύο τμήματα ἴσα, τοῦ κύκλου ἀκτῖνος $α$, εἶναι δὲ τὸ ἓν τούτων διαφορά, τεταρτοκυκλίου τοῦ κύκλου ἀκτῖνος $α$ καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Εἶναι λοιπὸν τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν

$$\frac{π.(α\sqrt{2})^2}{4} + 2.\left(\frac{πα^2}{4} - \frac{(α\sqrt{2})^2}{4}\right) = πα^2 - α^2 = α^2(π - 1).$$

463) Ἐὰν $α$ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἰς ὃν εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ ἑξάγωνον ἡ ἀκτὶς τοῦ ἄλλου κύκλου θὰ εἶναι $\frac{α\sqrt{2}}{2}$· τὸ δὲ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν δύο τμημάτων κύκλου· καὶ τὸ μὲν ἓν εἶναι διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ κυκλικοῦ τομέως 60^0 καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου, πλευρᾶς $α$· τὸ δὲ ἄλλο εἶναι διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ κυκλικοῦ τομεως 90^0 ἀκτῖνος $\frac{α\sqrt{2}}{2}$ καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὀρθογωνίου, οὗ ὑποτείνουσα εἶναι $α$ καὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ $\frac{α\sqrt{2}}{2}$.

Ἤτοι τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι

$$\frac{πα^2}{6} - \frac{α^2\sqrt{3}}{4} + \frac{πα^2}{8} - \frac{α^2}{4.} = α^2\left(\frac{7π}{24} - \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right).$$

464) Εἶναι διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τμήματος οὗ ἡ χορδὴ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τμήματος, οὗ χορδὴ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου· ἤτοι

ἐὰν α, εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, εἶναι

$$α^2 . \frac{4π - 3\sqrt{3}}{12} - α^2\frac{2π - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{πα^2}{6}.$$

465) Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου, ἡ ἀκτὶς τῶν γραφέντων εἶναι $α\sqrt{2}$· τὸ δὲ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν δύο ἴσων τμημάτων κύκλου, χορδῆς 2α· ἤτοι εἶναι

$$2\left(\frac{π(α\sqrt{2})^2}{4} - \frac{(α\sqrt{2})^2}{2}\right) = α^2(π - 2).$$

466) Εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ γραφέντος ἡμικυκλίου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τμήματος οὗ ἡ χορδὴ εἶναι 2λ· καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι $\frac{πλ^2}{2}$· ἐπειδὴ δὲ ἡ πλευρὰ ἡ κάθετος εἶναι $λ\sqrt{2}$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος εἶναι $\frac{πλ^2}{2} - λ^2$· ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{πλ^2}{2} - \frac{πλ^2}{2} + λ^2 = λ^2$.

467) Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου, ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι 2α καὶ ἡ διαγώνιος (ἡ ἀκτὶς τοῦ γραφέντος κύκλου) εἶναι $2α\sqrt{2}$· τὰ ἐμβαδὰ λοιπὸν τῶν δύο κύκλων εἶναι $πα^2$ καὶ $π(2α\sqrt{2})^2 = 8πα^2$· ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι 8.

468) Ἔστω ΑΒ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου καὶ Γ σημεῖον τι αὐτῆς καὶ ἔστω ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι διῃρημένον εἰς 2ν καὶ τὸ ΓΒ εἰς 2μ ἴσα μέρη. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς μέρους τοῦ κύκλου εἶναι διαφορὰ τοῦ $\frac{πν^2}{2}$ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν $\frac{πα^2}{2} + \frac{πμ^2}{2}$ (α ἡ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου) τὸ δὲ ἄλλο μέρος εἶναι διαφορὰ τοῦ $\frac{πμ^2}{2}$ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $\frac{πα^2}{2} + \frac{πν^2}{2}$· καὶ ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι

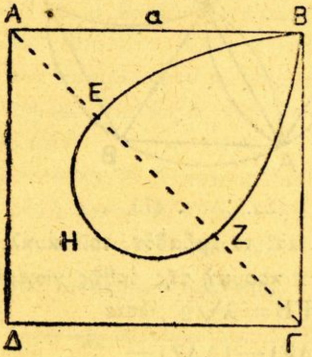
$$\frac{πα^2}{2} + \frac{πμ^2}{2} - \frac{πν^2}{2} : \frac{πα^2}{2} + \frac{πν^2}{2} - \frac{πμ^2}{2} \quad ἢ$$

$$\frac{α^2 + μ^2 - ν^2}{α^2 + ν^2 - μ^2}$$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $α = μ + ν$· ἔχομεν

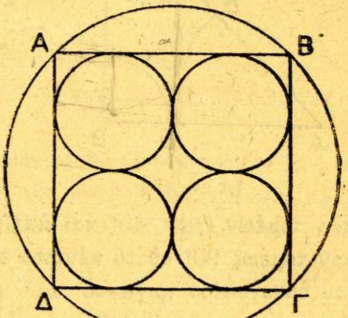
$$\frac{μ^2 + ν^2 + 2μν + μ^2 - ν^2}{μ^2 + ν^2 + 2μν + ν^2 - μ^2} = \frac{μ}{ν}$$ ἀλλὰ καὶ τὰ τμήματα τῆς διαμέτρου ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον ἤτοι $\frac{ΓΒ}{ΑΓ} = \frac{2μ}{2ν} = \frac{μ}{ν}$.

469) Δηλαδὴ ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν ΒΕΗΖΒ. Ἐὰν δὲ α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, εἶναι $ΑΓ = α\sqrt{2}$ καὶ $ΑΕ = ΖΓ$· ἀλλὰ

$ΑΕ = ΑΓ - ΓΕ = α\sqrt{2} - α$ καὶ $ΑΕ + ΖΓ = 2α\sqrt{2} - 2α$· ὥστε ἔχομεν $ΕΖ = ΑΓ - (ΑΕ + ΖΓ) = α\sqrt{2} - 2α\sqrt{2} + 2α = 2α - α\sqrt{2}$. Ἤδη εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου ΕΗΖ ὅπερ εἶναι $\frac{π(2α - α\sqrt{2})^2}{8}$· διὰ δὲ τὸ ἐμβαδὸν ΒΕΖΒ παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου) ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΓΕΒ $\left(\frac{1}{8}\right.$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ἀκτῖνος $\left.α\right)$ θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΕΒΑ ἢ τοῦ ἴσου του ΒΖΓΒ· εἶναι δὲ τοῦτο $\frac{α^2}{2} - \frac{πα^2}{8}$· καὶ τῶν δύο ὁμοῦ εἶναι $α^2 - \frac{πα^2}{4}$· ὥστε ἂν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν



(σχ. ἀσκ. 469)



(σχ. ἀσκ. 471)

ΑΕΒΑ, ΒΖΓΒ, θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ΒΕΖΒ· ὅπερ εἶναι

$$\frac{α^2}{2} - α^2 + \frac{πα^2}{4} = \frac{πα^2}{4} - \frac{α^2}{2}\text{· οὕτω ἔχομεν}$$

$$(ΒΕΗΖΒ) = \frac{π(2α - α\sqrt{2})^2}{8} + \frac{πα^2}{4} - \frac{α^2}{2}$$

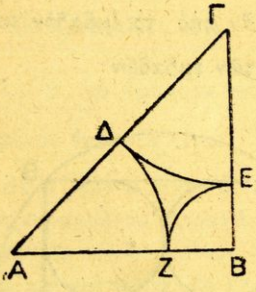
$$= \frac{4πα^2 - 2πα^2\sqrt{2} - 2α^2}{4} = \frac{α^2}{2}\left[π(2 - \sqrt{2}) - 1\right].$$

470) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ ἑνὸς τῶν ἴσων κύκλων εἶναι α, ἡ ἀκτὶς τοῦ τετάρτου κύκλου εἶναι $3α$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $9α^2π$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν ἄλλων κύκλων εἶναι $3α^2π$· ὥστε ἔχομεν $9α^2π - 3α^2π = 6α^2π$ καὶ $6α^2π : 3α^2π = 2$.

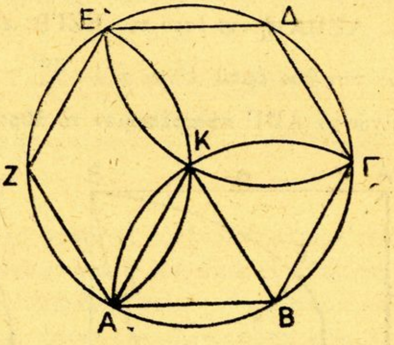
471) Ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι α, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἑνὸς

τῶν ἴσων κύκλων θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{4}$ καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου θὰ εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{2\pi\alpha^2}{4}$ ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων κύκλων εἶναι $4 \cdot \frac{\pi\alpha^2}{16} = \frac{\pi\alpha^2}{4}$ ὥστε εἶναι $\frac{\pi\alpha^2}{4} : \frac{2\pi\alpha^2}{4} = \frac{1}{2}$.

472) Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν θὰ εὑρεθῇ ἂν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τριγώνου ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν δύο ἴσων κυκλικῶν τομέων (γων. 45° καὶ ἀκτῖνος λ) καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως 90° οὗ τὸ κέντρον εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου· ἀλλ' εἶναι $\Gamma B = \lambda\sqrt{2}$· ὥστε



Σχ. Ἀσκ. 472.



Σχ. Ἀσκ. 473.

$$(AB\Gamma) = \frac{\lambda\sqrt{2}\cdot\lambda\sqrt{2}}{2} = \lambda^2, \ (\Gamma\Delta E) = (A\Delta Z) = \frac{\pi\lambda^2}{8},$$

$$(BZE) = \frac{\pi\lambda^2(\sqrt{2}-1)^2}{4} \text{ διότι } BE = \lambda\sqrt{2} - \lambda = \lambda(\sqrt{2}-1)\cdot$$

ὥστε εἶναι

$$(\Delta ZE) = (AB\Gamma) - [2(\Gamma\Delta E) + (BZE)] = \lambda^2 - \frac{\pi\lambda^2}{4} - \frac{\pi\lambda^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}$$

$$= \lambda^2\left[1 - \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\cdot$$

473) Τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν φύλλων εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ἓξ ἴσων τμημάτων κύκλου, τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν ὁποίων εἶναι διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κυκλικοῦ τομέως π. χ. ΑΚΒ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΚΒ ἤτοι· $\frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{4}$· ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $6\left(\frac{\pi\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{6}\right) = \alpha^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

474) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι $\pi\alpha^2$· τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῶν 4 φύλλων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν 8 ἴσων τμημάτων κύκλου, ἀκτῖνος $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (διότι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι $\alpha\sqrt{2}$)· ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τοιούτου τμήματος εἶναι διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τεταρτοκυκλίου ἐκτῖνος $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφῃρέθη, τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἑκάστη κάθετος πλευρὰ τοῦ ὁποίου εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$· ἤτοι $\frac{\pi\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2}{4}$· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῶν 4 φύλλων εἶναι

$$\left(\frac{\pi\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2}{4}\right)8 = \pi\alpha^2 - 2\alpha^2\cdot$$

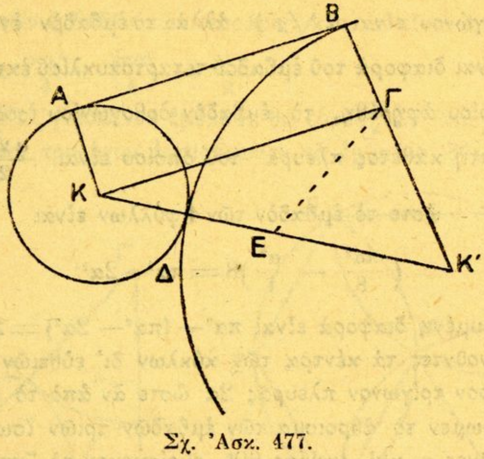
ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $\pi\alpha^2 - (\pi\alpha^2 - 2\alpha^2) = 2\alpha^2$.

475) Ἑνοῦντες τὰ κέντρα τῶν κύκλων δι' εὐθειῶν σχηματίζεται ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 2α· ὥστε ἂν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τριῶν ἴσων κυκλικῶν τομέων ἀκτῖνος α καὶ γωνίας 60°, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

476) Ἡ διάμετρος 2α τοῦ δοθέντος κύκλου διῃρέθη εἰς 4 ἴσα μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ ἑνὸς γραφέντος κύκλου, τὰ δὲ ἄλλα τρία ἀποτελοῦν τὴν διάμετρον τοῦ ἄλλου κύκλου· ἐπομένως αἱ ἀκτῖνες τῶν τριῶν κύκλων εἶναι α, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{3\alpha}{4}$· καὶ τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εἶναι $\pi\alpha^2$, $\frac{\pi\alpha^2}{16}$, $\frac{9\pi\alpha^2}{16}$· ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $\pi\alpha^2 - \left(\frac{\pi\alpha^2}{16} + \frac{9\pi\alpha^2}{16}\right) = \frac{3\pi\alpha^2}{8}$.

477) Ἔστωσαν οἱ κύκλοι Κ, Κ' δι' οὓς δίδεται $ΚΑ = \alpha$ καὶ $Κ'Β = 3\alpha$. Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου ΚΚ'ΑΒ (Α καὶ Β γωνίαι ὀρθαὶ) ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφῃρέθη τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κυκλικῶν τομέων ΚΔΑ καὶ Κ'ΔΒ· αἱ βάσεις ΚΑ καὶ Κ'Β τοῦ τραπεζίου εἶναι γνωσταί, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ΚΓ, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΚ'Γ, οὗ ἡ μὲν ΚΚ' ἰσοῦται πρὸς 4α, ἡ δὲ Κ'Γ ἰσοῦται πρὸς $3\alpha - \alpha = 2\alpha$· εἶναι ἐπομένως $ΚΓ = \sqrt{16\alpha^2 - 4\alpha^2} = 2\alpha\sqrt{3}$· τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ τραπεζίου εἶναι $\frac{\alpha + 3\alpha}{2} . 2\alpha\sqrt{3} = 4\alpha^2\sqrt{3}$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ΚΚ΄ εἶναι διπλασία τῆς Κ΄Γ· ἐπειδὴ δὲ ἡ διάμεσος ΓΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΚΚ΄, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΚ΄Ε εἶναι ἰσόπλευρον ἄρα ἡ γωνία

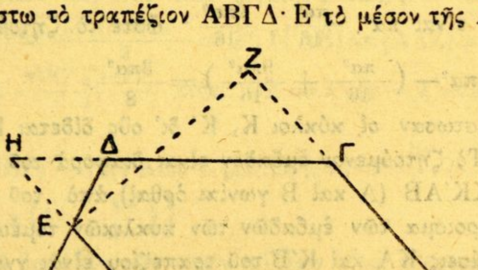


Σχ. Ἀσκ. 477.

Κ΄ εἶναι 60°, ἡ δὲ γωνία ΑΚΔ εἶναι ἑπομένως 120°· τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ κυκλικοῦ τομέως Κ΄ΔΒ εἶναι $\frac{9\pi\alpha^2}{6}$· τὸ δὲ τοῦ ΚΔΑ εἶναι $\frac{\pi\alpha^2}{3}$· ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι

$$4\alpha^2\sqrt{3} - \left(\frac{9\pi\alpha^2}{6} + \frac{\pi\alpha^2}{3}\right) = \frac{\alpha^2}{6}\left(24\sqrt{3} - 11\pi\right).$$

478) Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ· Ε τὸ μέσον τῆς ΑΔ, καὶ ΕΖ



Σχ. Ἀσκ. 478.

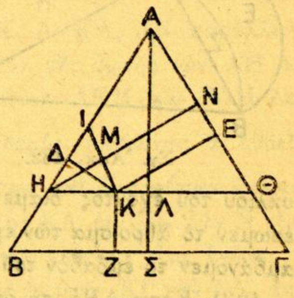
ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς μὴ παραλλήλου πλευρᾶς ΓΒ· ἂν ἤδη διὰ τῆς Ε φέρωμεν παράλληλον τῇ ΓΒ, τέμνουσαν τὴν βάσιν ΑΒ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὸ Η, τὸ σχηματισθὲν παραλληλόγραμμον ΗΘΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τραπέζιον· διότι τὰ τρίγωνα ΑΕΘ καὶ ΕΗΔ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὴν ΕΑ ἴσην τῇ ΕΔ καὶ τὰς παρὰ ταύταις γωνίας ἴσας· ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς (ΒΓ).(ΕΖ)· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τραπεζίου.

479) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ Α εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία καὶ Κ τὸ κέντρον τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΓ, ΑΒ· ἀλλ' ἐὰν φέρωμεν τὰς ΚΕ καὶ ΚΖ τὸ σχῆμα ΚΕΑΖ εἶναι προφανῶς τετράγωνον· ἄρα $ΑΕ = ΚΕ$, $ΑΖ = ΚΖ$· ἀλλ' εἶναι καὶ $ΓΕ = ΓΔ$, $ΒΖ = ΒΔ$ (ὡς ἐφαπτόμεναι τῆς αὐτῆς περιφερείας ἐκ τῶν αὐτῶν σημείων)· ἄρα εἶναι

$$ΑΕ + ΓΕ + ΑΖ + ΒΖ = ΚΕ + ΚΖ + ΓΔ + ΒΔ \quad ἢ$$

$ΑΓ + ΑΒ = ΚΕ + ΚΖ + ΓΒ$, ἀλλὰ $ΚΕ + ΚΖ =$ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

480) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον Κ σημεῖόν τι ἐντὸς αὐτοῦ καὶ ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ, ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ ἀντιστοίχως· ἤδη φέρομεν διὰ τοῦ Κ παράλληλον τῇ ΒΓ, τέμνουσαν τὰς ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Η, Θ, τὴν ΚΙ παράλληλον τῇ ΑΓ τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ι καὶ τὴν ΗΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· τὸ τρίγωνον ΗΚΙ εἶναι ἰσόπλευρον, ἄρα αἱ γωνίαι αὐτοῦ Η καὶ Κ εἶναι ἴσαι. ἀλλὰ τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΚΔ καὶ ΗΚΜ εἶναι ἴσα διότι ἔχουσι καὶ τὴν ΗΚ κοινήν· ἄρα εἶναι



Σχ. Ἀσκ. 480.

$ΚΔ = ΗΜ$· εἶναι δὲ καὶ $ΚΕ = ΜΝ$· ὥστε εἶναι $ΚΔ + ΚΕ = ΗΝ$· ἀλλ' $ΗΝ = ΑΛ$ (ἡ ΑΛΖ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ) ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΗΘ εἶναι ἰσόπλευρον· ἑπομένως ἔχομεν $ΚΔ + ΚΕ = ΑΛ$. ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη προσθέσωμεν τὰ ἴσα ΚΖ καὶ ΛΣ ἔχομεν $ΚΔ + ΚΕ + ΚΖ = ΑΖ =$ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἤτοι ποσότης σταθερά.

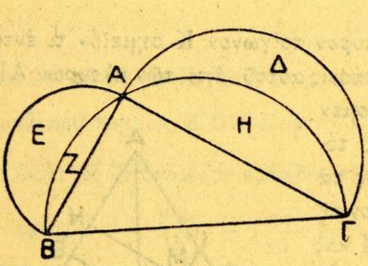
481) Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου καὶ α ἡ τοῦ

μικροτέρου τότε ἡ ἐπιφάνεια Ε ἡ μεταξὺ τῶν δύο τούτων ὁμοκέντρων κύκλων εἶναι $Ε = π(Α^2—α^2)$· ἔστω ἤδη ΓΔ ἡ ἐφαπτομένη τῆς μικροτέρας περιφερείας, ἡ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Γ τῆς ἄλλης ἠγμένη· ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΓ, ΚΔ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΓΔ, ἐξ οὗ λαμβάνομεν $ΓΔ^2 = ΚΓ^2—ΚΔ^2$ ἢ $ΓΔ^2 = Α^2 — α^2$· ὥστε εἶναι $Ε = π.(ΓΔ)^2$.

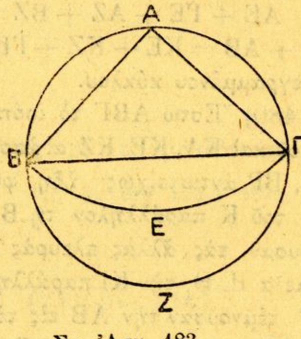
482) Ἐὰν δι' Ε, Ζ παραστήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν μηνίσκων, ἔχομεν

$$Ε = \frac{π.(ΑΒ)^2}{8} — (ΑΒΖ) \text{ καὶ } Ζ = \frac{π.(ΑΓ)^2}{8} — (ΑΓΗ)$$

ὥστε εἶναι $Ε + Ζ = \frac{π}{8}(ΑΒ^2 + ΑΓ^2) — (ΑΒΖ + ΑΓΗ) =$
$\frac{π.ΒΓ^2}{8} — (ΑΒΖ + ΑΓΗ)$· ἀλλὰ $\frac{π.ΒΓ^2}{8}$ εἶναι ἐμβαδὸν τοῦ ἡμι-



Σχ. Ἀσκ. 482.



Σχ. Ἀσκ. 483.

κυκλίου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΒΓ· ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τμημάτων ΑΒΖ καὶ ΑΓΗ λαμβάνομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἤτοι $Ε + Ζ = (ΑΒΓ)$.

483) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον (Α γωνία ὀρθή). Ἔχομεν δὲ $(ΒΖΓΕΒ) = (ΒΖΓ) — (ΒΕΓ) = \frac{π.ΒΓ^2}{8} — (ΒΕΓ)$· ἀλλὰ $(ΒΕΓ) = (ΑΒΕΓΑ) — (ΑΒΓ) = \frac{π.ΑΒ^2}{4} — (ΑΒΓ)$· ὥστε

$$\text{εἶναι } (ΒΖΓΕΒ) = \frac{π.ΒΓ^2}{8} — \frac{π.ΑΒ^2}{4} + (ΑΒΓ) =$$

$$\frac{π}{4}\left(\frac{ΒΓ^2}{2} — ΑΒ^2\right) + (ΑΒΓ) = \frac{π}{4}\left(\frac{ΒΓ^2 - 2ΑΒ^2}{2}\right) + (ΑΒΓ)·$$

ἀλλ' ἐκ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου λαμβάνομεν $ΒΓ^2 = 2ΑΒ^2$· ὥστε εἶναι $(ΒΖΓΕΒ) = (ΑΒΓ)$.

484) Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ παραλληλόγραμμον, Κ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του καὶ Μ σημεῖόν τι περιφερείας Κ· ἀλλ' ἐκ τῶν τριγώνων ΜΒΔ καὶ ΜΑΓ λαμβάνομεν (§ 221) $(\text{ΜΒ})^2 + (\text{ΜΔ})^2 = 2(\text{ΜΚ})^2 + 2(\text{ΔΚ})^2$ καὶ $(\text{ΜΑ})^2 + (\text{ΜΓ})^2 = 2(\text{ΜΚ})^2 + 2(\text{ΚΓ})^2$·

ἤτοι ἔχομεν $(\text{ΜΑ})^2 + (\text{ΜΒ})^2 + (\text{ΜΓ})^2 + (\text{ΜΔ})^2 =$ $4(\text{ΜΚ})^2 + 2(\text{ΚΔ})^2 + 2(\text{ΚΓ})^2 =$ ποσότης σταθερά, διότι τὰ ΜΚ, ΚΔ, ΚΓ εἶναι σταθερά.

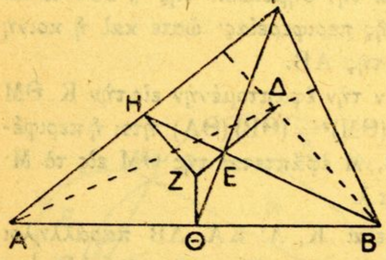
485) Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ Α, Β τὰ δοθέντα σημεῖα, μία δὲ περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Α, Β τέμνει τὴν Κ εἰς τὰ Γ, Ε, ἡ δὲ κοινὴ χορδὴ ΕΓ ἔστω ὅτι τέμνει τὴν ΒΑ εἰς τὸ Θ· ἀλλὰ τότε ἔχομεν (§ 257) $(\text{ΘΕ}).(\text{ΘΓ}) = (\text{ΘΒ})(\text{ΘΑ})$· ἂς φέρωμεν ἤδη ἐκ τοῦ Θ τὴν τυχοῦσαν τέμνουσαν τῆς Κ τὴν ΘΖΔ· ἀλλὰ πάλιν ἔχομεν $(\text{ΘΕ})(\text{ΘΓ}) = (\text{ΘΔ})(\text{ΘΖ})$· ὥστε εἶναι $(\text{ΘΔ})(\text{ΘΖ}) = (\text{ΘΒ})(\text{ΘΑ})$ καὶ κατὰ τὴν σημείωσιν τῆς § 257 τὰ Δ, Ζ, Α, Β κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας· ὥστε καὶ ἡ κοινὴ χορδὴ ΔΖ διέρχεται διὰ τοῦ Θ τῆς ΑΒ.

Ἐπίσης ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν Κ, ΘΜ (ΘΜ′) ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι $(\text{ΘΜ})^2 = (\text{ΘΒ})(\text{ΘΑ})$· ἤτοι ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν Α, Β, Μ ἐφάπτεται τῆς ΘΜ εἰς τὸ Μ· ἤτοι τῆς περιφερείας Κ· ἄρα κ.τ.λ.

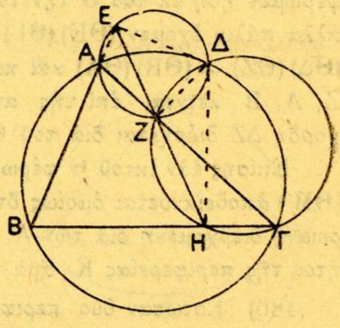
486) Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι Κ, Λ· ΚΑ, ΛΒ παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἀκτῖνες καὶ Β τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΒ καὶ ΚΛ· ἤδη ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΚΜ καὶ ΒΛΜ λαμβάνομεν $\frac{\text{ΚΜ}}{\text{ΛΜ}} = \frac{\text{ΚΑ}}{\text{ΛΒ}} =$ λόγος σταθερός· ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνώνουσαι τὰ ἄκρα δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων ἀκτίνων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ τῆς ΚΛ· ὁμοίως, ἐὰν Ν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΚΛ καὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ ἄκρα τῶν παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων ἀκτίνων ΚΓ καὶ ΛΔ, ἀποδεικνύεται ὅτι $\frac{\text{ΚΝ}}{\text{ΛΝ}} = \frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΛΔ}} =$ λόγος σταθερός· τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι τὰ κέντρα ὁμοιότητος τῶν κύκλων Κ, Λ, καὶ Μ εἶναι τὸ ἐκτός, Ν δὲ τὸ ἐντός· καὶ διὰ τοῦ Μ μὲν διέρχονται αἱ ἐξωτερικαὶ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων Κ, Λ καὶ διὰ τοῦ Ν αἱ ἐσωτερικαί· ἀποδεικνύεται δὲ ὁμοίως.

487) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, Δ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν

ὑψῶν καὶ Ε τὸ τῶν διαμέσων αὐτοῦ· προεκτείνομεν τὴν ΔΕ μέχρι τοῦ Ζ οὕτως ὥστε ΔΕ $=$ 2 . ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν τὰς ΖΘ, ΖΗ εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ. ΑΓ· τὰ τρίγωνα τότε ΕΗΖ καὶ ΔΕΒ ἔχουσι τὰς γωνίας ΗΕΖ καὶ ΔΕΒ ἴσας καὶ $\frac{ΕΒ}{ΕΚ} = \frac{ΕΔ}{ΕΖ} = 2$ (§ 121)· ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως γωνία ΖΗΕ $=$ γων. ΕΒΔ ἤτοι αἱ ΖΗ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπομένως ἡ ΖΗ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ΖΘ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον κτλ. ἄρα τὸ Ζ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου· ὥστε τὰ Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ΔΕ $=$ 2 . ΕΖ.



Σχ. Ἀσκ. 487.



Σχ. Ἀσκ. 488.

488) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον, Δ σημεῖόν τι τῆς περιφερείας καὶ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ αἱ κάθετοι εἰς τὰς πλευρὰς ΒΑ, ΑΓ, ΒΓ ἀντιστοίχως· ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΔΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον ἐπειδὴ Ζ $+$ Ε $=$ 2 ὀρ.· ὡς καὶ τὸ τετράπλευρον ΓΗΖΔ, διότι τὰ τρίγωνα ΔΖΓ καὶ ΔΗΓ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουσι κοινὴν ὑποτείνουσαν τὴν ΔΓ· εἶναι ἄρα γωνία ΑΖΕ $=$ γων. ΑΔΕ καὶ γων. ΗΖΓ $=$ γων. ΗΔΓ ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὰ αὐτὰ τόξα, ΑΕ καὶ ΗΓ· ἀλλ' εἶναι ΑΔΕ $=$ ΗΔΓ διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΔΗΓ ἔχουσι τὰς ὀξείας γωνίας ΕΑΔ καὶ ΔΓΗ ἴσας· εἶναι δὲ αὗται ἴσαι, διότι ἡ μὲν ΔΓΗ εἶναι ἐγγεγραμμένη βαίνουσα εἰς τὸ τόξον ΒΑΔ, ἡ δὲ ΕΑΔ ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ καὶ ΑΔΒ αἵτινες εἶναι ἐγγεγραμμέναι, βαίνουσαι ἐπὶ

τῶν τόξων ΒΑ καὶ ΑΔ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ τόξον ΒΑΔ· ἀφοῦ λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι αἱ γωνίαι ΑΔΕ καὶ ΗΔΓ εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΑΖΕ καὶ ΗΖΓ εἶναι ἴσαι· ἄρα αἱ ΖΕ καὶ ΖΗ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (ἄσκησις 5).

489) Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ καὶ ἔστω ὅτι ΑΒ$<$ΑΓ· ἐὰν ἤδη ἐκ τῆς κορυφῆς Γ φέρωμεν παράλληλον τῇ βάσει ΑΒ, τὴν ΓΔ καὶ λάβωμεν τὸ μέσον Ζ τοῦ τόξου ΓΔ, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΖ, (ΑΖ $=$ ΒΖ) ἔχει ὕψος προφανῶς μεγαλύτερον τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα εἶναι (ΑΒΖ) $>$ (ΑΒΓ)· ἤδη ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ΖΒ ὡς βάσιν τοῦ ΑΒΖ καὶ ἐκ τοῦ Α φέρωμεν παράλληλον τῇ ΒΖ, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι ἵνα λάβωμεν τρίγωνον μεγαλύτερον τοῦ ΑΒΖ πρέπει νὰ εἶναι ΑΖ $=$ ΑΒ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΖ $=$ ΒΖ ἕπεται ὅτι τὸ μέγιστον τῶν τριγώνων εἶναι ὅταν εἶναι ΑΖ $=$ ΒΖ $=$ ΑΒ.

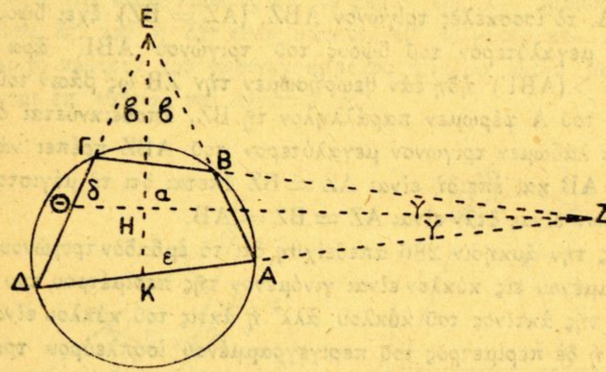
Εἰς τὴν ἄσκησιν 286 ἀπεδείχθη ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου· ἀλλ' ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι σταθερά, ἡ δὲ περίμετρος τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν περιμέτρων τῶν ἄλλων τριγώνων τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον· ἄρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

490) Τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι σημεῖα τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου, τὸ δὲ τετράπλευρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ κέντρα ταῦτα εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (βλέπε ἀπόδειξιν ἀσκήσεως 492).

491) Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τετράπλευρον καὶ Ε, Ζ αἱ γωνίαι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ· διχοτόμοι δὲ αὐτῶν αἱ ΕΚ καὶ ΖΘ τεμνόμεναι εἰς τὸ Η· ἀλλ' ἔχομεν ἐκ τῶν τριγώνων ΕΗΘ καὶ ΖΗΚ, $\alpha = \beta + \delta$ καὶ $\alpha = \gamma + \varepsilon$· ἄρα $2\alpha = \beta + \delta + \gamma + \varepsilon$· ἐκ τῶν τριγώνων ὅμως ΕΑΚ καὶ ΖΓΘ λαμβάνομεν $\beta + \varepsilon = 2$ὀρ.— Α καὶ $\gamma + \delta = 2$ ὀρ.— Γ· εἶναι ἄρα $\beta + \delta + \gamma + \varepsilon = 4$ ὀρ.—(Α$+$Γ)· ἀλλ' Α $+$ Γ $= 2$ ὀρ. ὥστε $\beta + \delta + \gamma + \varepsilon = 2$ ὀρ. ἤτοι $2\alpha = 2$ ὀρ. καὶ $\alpha = 1$ ὀρθ.

492) Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΕΗΖΘ τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν διχοτόμων, τὰς δὲ ἴσας γωνίας εἰς τὰς ὁποίας διαιροῦνται ὑπὸ τῶν διχοτόμων αἱ Α, Β, Γ, Δ τὰς παριστῶμεν

διὰ τῶν α, β, γ, δ· ὥστε εἶναι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2$ ὀρθ.· ἀλλ' ἐκ τῶν δύο τριγώνων ἅτινα ἔχουσι βάσεις τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς τὰς διχοτόμους τῶν παρ' αὐταῖς γωνιῶν ἤτοι ἐκ τῶν ΑΔΕ καὶ ΒΓΖ λαμβάνομεν $\alpha + \delta + \mathrm{E} + \beta + \gamma + \mathrm{Z} = 4$ ὀρ. ἤτοι $\mathrm{E} + \mathrm{Z} = 2$ ὀρ. ἄρα εἶναι καὶ $\mathrm{H} + \Theta = 2$ ὀρ.· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΗΖΘ ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικὰς εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



Σχ. Ἀσκ. 491.

493) Ἔστωσαν Κ, Λ δύο κύκλοι, καὶ ΑΒ, ΓΔ ἴσαι χορδαὶ αὐτῶν· εἶναι δὲ ΚΑ > ΛΓ· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα Ε, Ζ τῶν δοθεισῶν χορδῶν, διέρχονται διὰ τῶν κέντρων Κ, Λ καὶ ἐὰν ἤδη θέσωμεν τὸν κύκλον Λ ἐπὶ τοῦ Κ, οὕτως ὥστε, τὸ Γ, νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α καὶ τὸ Δ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ΖΛ ἐπὶ τῆς ΕΚ, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ Λ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΕΚ μεταξὺ τοῦ Ε καὶ Κ τὸ δὲ τόξον ΓΔ θὰ περικλείει τὸ ΑΒ· διότι ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΛΚ λαμβάνομεν ΛΑ + ΛΚ > ΚΑ ἢ ἐὰν ἡ ΚΕ τέμνει τὸ τόξον εἰς τὸ σημεῖον Η θὰ εἶναι ΛΑ + ΛΚ > ΛΚ + ΛΗ ἢ ΛΑ > ΛΗ· ὥστε ἡ ΛΗ τέμνει τὸ τόξον ΓΔ μόνον ὅταν προεκταθῇ· ἀφοῦ λοιπὸν τὸ ΓΔ περικλείει τὸ ΑΒ καὶ ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα, ἕπεται εὐκόλως ὅτι τόξ. ΓΔ > τόξ ΑΒ.

494) Ἔστω ΑΓ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου καὶ Β σημεῖόν τι αὐτῆς. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου εἶναι

$\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}\right)^2 = \frac{\pi \,.\, \mathrm{A\Gamma}^2}{8}$· τὰ δὲ ἐμβαδὰ τῶν γραφέντων ἡμικυκλίων εἶναι $\frac{\pi \,.\, \mathrm{AB}^2}{8}$ καὶ $\frac{\pi \,.\, \mathrm{B\Gamma}^2}{8}$· ἤτοι τὸ ἀπομένον ἐμβαδὸν εἶναι

$\frac{\pi}{8}$ $[ΑΓ^2 — (ΑΒ^2 + ΒΓ^2)]$· ἤδη ὑψοῦμεν ἐκ τοῦ Β κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Δ· ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΔΒΑ καὶ ΔΒΓ ἔχομεν $ΔΒ^2 = ΑΔ^2 — ΑΒ^2$ καὶ $ΔΒ^2 = ΔΓ^2 — ΒΓ^2$ ἢ $2ΔΒ^2 = (ΑΔ^2 + ΔΓ^2) — (ΑΒ^2 + ΒΓ^2)$· ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν $ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = ΑΓ^2$ ·ὥστε εἶναι $\frac{\pi}{8}[ΑΓ^2 — (ΑΒ^2 + ΒΓ^2)] = \frac{\pi}{8} \cdot 2ΔΒ^2 =$

$$\frac{\pi \cdot ΔΒ^2}{4} = \pi\left(\frac{ΔΒ}{2}\right)^2.$$

495) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ αἱ τρεῖς διάμεσοι αὐτοῦ αἱ ΑΗ, ΒΔ, ΓΖ· ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα 221 ἔχομεν

$$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 2ΒΔ^2 + 2ΑΔ^2, \quad ΒΓ^2 + ΓΑ^2 = 2ΓΖ^2 + 2ΒΖ^2,$$
$$ΓΑ^2 + ΑΒ^2 = 2ΑΗ^2 + 2ΒΗ^2$$

καὶ διὰ τῆς προσθέσεως τούτων λαμβάνομεν $2ΑΒ^2 + 2ΒΓ^2 + 2ΓΑ^2 = 2ΑΗ^2 + 2ΒΔ^2 + 2ΓΖ^2 + 2ΑΔ^2 + 2ΒΖ^2 + 2ΒΗ^2$· ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $ΑΔ = \frac{ΓΑ}{2}$, ἔπεται ὅτι εἶναι $2ΑΔ^2 = \frac{ΓΑ^2}{2}$ κ. ο. κ. ὥστε διὰ τῆς ἀναγωγῆς ἔχομεν $\frac{3}{4}(ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΑ^2) = ΑΗ^2 + ΒΔ^2 + ΓΖ^2$ ἢ

$$\frac{ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΑ^2}{ΑΗ^2 + ΒΔ^2 + ΓΖ^2} = \frac{4}{3}.$$

496) Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ ΒΔ ἡ διχοτόμος, ἥτις τέμνει τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Ε· ἔχομεν $(ΒΔ).(ΔΕ) = (ΑΔ).(ΔΓ)$ (1) καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΕ,ΒΔΓ, $(ΑΒ):(ΒΔ) = (ΒΕ):(ΒΓ)$ ἢ $(ΑΒ)(ΒΓ) = (ΒΔ).(ΒΕ)$· ἀλλὰ $ΒΕ = ΒΔ + ΔΕ$· ὥστε εἶναι $(ΑΒ)(ΒΓ) = (ΒΔ)(ΒΔ + ΔΕ) = (ΒΔ)^2 + (ΒΔ)(ΔΕ)$ ἢ $(ΒΔ)^2 = (ΑΒ)(ΒΓ) — (ΑΔ)(ΔΓ)$ (1).

497) Ἐὰν Κ εἶναι ὁ κύκλος, ΑΒΓ τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον, ΑΔ τὸ ὕψος καὶ ΑΚΖ ἡ διάμετρος, ἔχομεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΖ, $(ΑΖ):(ΑΒ) = (ΑΓ):(ΑΔ)$ ἢ $(ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΖ)(ΑΔ)$ ἢ $(ΑΔ) = \frac{(ΑΒ)(ΑΓ)}{(ΑΖ)}$· ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $Ε = \frac{(ΒΓ).(ΑΔ)}{2} = \frac{(ΑΒ)(ΑΓ)(ΒΓ)}{2(ΑΖ)}$.

498) Ἔστωσαν χχ', ψψ' αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ ο· ἐὰν ἤδη φέρωμεν παράλληλον τῇ οχ εἰς ἀπόστασιν μ καὶ παράλληλον τῇ οψ εἰς ἀπόστασιν ν, ἡ τομὴ Α τῶν πα-

ραλλήλων τούτων εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· ἀλλὰ καὶ τὸ ο εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, διότι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων εἶναι $\frac{o}{o}$ ἤτοι ἀπροσδιόριστος· ἄρα δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ $\frac{\mu}{\nu}$· ἐὰν δὲ φέρωμεν τὴν οΑ, αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος, διότι εὐκόλως ἀποδεικνύεται δι' ὁμοίων τριγώνων, ὅτι καὶ παντὸς ἄλλου σημείου αὐτῆς ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὰ ἐν τῇ γωνίᾳ χοψ′ σημεῖα τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ εὐθείας διὰ τοῦ ο διερχομένης.

499) Ἔστωσαν δύο ἄνισοι κύκλοι Κ καὶ Λ, Μ σημεῖόν τι τοῦ ζητουμένου τόπου καὶ ΜΑ, ΜΒ ἐφαπτόμεναι εἰς τοὺς κύκλους τούτους· ἀλλὰ τότε αἱ γωνίαι ΚΜΑ καὶ ΛΜΒ ὡς ἡμίση ἴσων γωνιῶν εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΜΑ καὶ ΛΜΒ εἶναι ὅμοια· ἑπομένως ἔχομεν $ΜΚ : ΜΛ = ΚΑ : ΚΒ$· ἀλλὰ τότε καὶ τὰ σημεῖα ἐξ ὧν ἄγονται αἱ ἐσωτερικαὶ καὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου (ἄσκησις 486)· ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο τούτων σημείων (§ 261).

500) Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Μ σημεῖον τοῦ τόπου· $Κ^2$ δὲ τὸ δοθέν· ὥστε θὰ εἶναι $(ΑΜ)^2 + (ΒΜ)^2 = Κ^2$· ἐὰν δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ θὰ ἔχωμεν

$(ΑΜ)^2 + (ΒΜ)^2 = 2(ΑΔ)^2 + 2(ΔΜ)^2$ ἤτοι $2(ΑΔ)^2 + 2(ΔΜ)^2 = Κ^2$

ὥστε εἶναι $(ΔΜ)^2 = \frac{Κ^2 - 2(ΑΔ)^2}{2} = \frac{Κ^2}{2} - (ΑΔ)^2$· ἐπειδὴ δὲ Κ καὶ ΑΔ εἶναι σταθεραὶ ποσότητες ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ΔΜ εἶναι σταθερά· ἄρα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸ Δ, μέσον τῆς ΑΒ καὶ ἀκτῖνα τὴν κάθετον πλευρὰν ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ὑποτείνουσα εἶναι ἡ $\frac{Κ}{\sqrt{2}} = \frac{Κ\sqrt{2}}{2}$ καὶ ἄλλη κάθετος εἶναι ἡ ΑΔ.

Διὰ τὴν διαφορὰν πρέπει νὰ ἔχωμεν $(ΑΜ)^2 - (ΒΜ)^2 = Κ^2$· ἐὰν ἐκ τοῦ Μ φέρωμεν τὴν ΜΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΜΔ καὶ ΒΜΔ λαμβάνομεν

$(ΑΜ)^2 = (ΔΜ)^2 + (ΑΔ)^2$ καὶ $(ΒΜ)^2 = (ΜΔ)^2 + (ΔΒ)^2$ ἤτοι εἶναι

$$(ΑΜ)^2 - (ΒΜ)^2 = (ΑΔ)^2 - (ΔΒ)^2\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ΓΔ εὑρίσκομεν πάντοτε τὴν αὐτὴν διαφορὰν $(ΑΔ)^2 - (ΔΒ)^2$ συνάγομεν ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος. Ἤδη ἔστω Ο τὸ μέσον τῆς ΑΒ· τότε ἔχομεν (§ 219, 218)

$$(ΑΜ)^2 = (ΟΜ)^2 + (ΑΟ)^2 + 2(ΑΟ).(ΟΔ) \text{ καὶ}$$
$$(ΒΜ)^2 = (ΟΜ)^2 + (ΟΒ)^2 - 2(ΟΒ)(ΟΔ) \text{ ὥστε εἶναι}$$
$$(ΑΜ)^2 - (ΒΜ)^2 = 4(ΑΟ).(ΟΔ) \ (1) \text{ καὶ ἐπειδὴ εἶναι}$$

$(ΑΜ)^2 - (ΒΜ)^2 = Κ^2$ καὶ $2(ΑΟ) = (ΑΒ)$ ἡ ἰσότης (1) γράφεται $Κ^2 = 2(ΑΒ).(ΟΔ)$ ἢ $2(ΑΒ) : Κ = Κ : (ΟΔ)$ ἤτοι ἡ ΟΔ εἶναι τελείως ὡρισμένη· ἤτοι τὸ Δ ἐξ οὗ ὑψοῦται ἡ κάθετος εἶναι τελείως ὡρισμένον.

501) Ἔστωσαν Α, Β τὰ δύο δοθέντα σημεῖα, ρ. σ, αἱ δύο δοθεῖσαι γωνίαι καὶ Κ, Λ δύο τῶν ζητουμένων κέντρων· ΑΓ, ΒΕ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸν Κ καὶ ΑΔ, ΒΖ αἱ εἰς τὸν κύκλον Λ· ἐπειδὴ δὲ γων.$ΓΑΚ = \frac{ρ}{2} =$ γων.ΛΑΔ καὶ γων.$ΕΒΚ = \frac{σ}{2} =$ γων.ΖΒΛ, ἕπεται ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΚ καὶ ΑΔΛ εἶναι ὅμοια, ὡς καὶ τὰ ΕΒΚ καὶ ΖΒΛ· ὥστε ἔχομεν $\frac{ΑΚ}{ΑΛ} = \frac{ΚΓ}{ΛΔ}$ καὶ $\frac{ΒΚ}{ΒΛ} = \frac{ΚΕ}{ΛΖ}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{ΚΓ}{ΛΔ} = \frac{ΚΕ}{ΛΖ}$ εἶναι καὶ $\frac{ΑΚ}{ΑΛ} = \frac{ΒΚ}{ΒΛ}$ ἢ $\frac{ΑΚ}{ΒΚ} = \frac{ΑΛ}{ΒΛ}$ ἤτοι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Κ, Λ ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων Α, Β ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἧς τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ (§ 261)· προσδιορίζεται ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ταύτης κατὰ τὴν σημείωσιν τοῦ θεωρήματος 261.

502) Ἔστωσαν Κ, Λ αἱ δύο δοθεῖσαι περιφέρειαι καὶ Μ σημεῖον τι τοῦ τόπου, ΜΓ δὲ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸν Κ καὶ ΜΔ ἡ εἰς τὸν Λ· πρέπει δὲ νὰ εἶναι $ΜΓ = ΜΔ$· ἤδη ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΚΓΜ, ΛΔΜ λαμβάνομεν $ΚΜ^2 = ΜΓ^2 + ΚΓ^2$ καὶ $ΜΛ^2 = ΔΜ^2 + ΛΔ^2$ ἢ $ΚΜ^2 - ΛΜ^2 = ΚΓ^2 - ΛΔ^2$· ἀλλ' ἡ $ΚΓ^2 - ΛΔ^2$ εἶναι ποσότης σταθερά· ἐὰν δὲ παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ $Κ^2$ ἔχομεν $ΚΜ^2 - ΛΜ^2 = Κ^2$· ἤτοι ἔχομεν ἐνταῦθα τὴν περίπτωσιν 6 τῆς ἀσκήσεως 500.

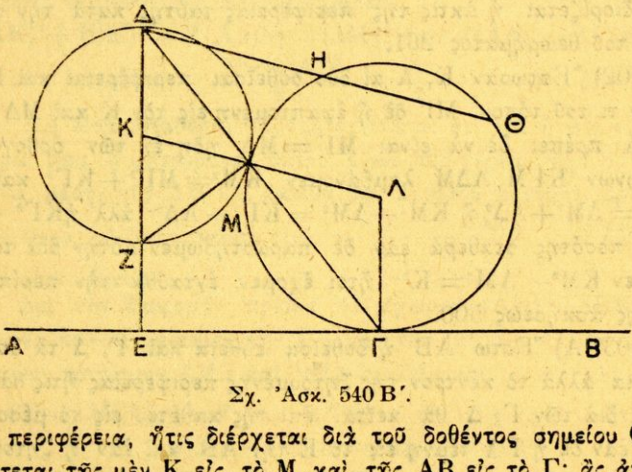
503) Α) Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Γ, Δ τὰ δοθέντα σημεῖα· ἀλλὰ τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας ἥτις θὰ διέρχεται διὰ τῶν Γ, Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ· ἐὰν δὲ ἡ ΓΔ τέμνῃ εἰς τὸ Ε τὴν ΑΒ, καὶ ἐὰν ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ζ θὰ ἔχωμεν (§ 258)

$(EZ)^2 = (E\Gamma)(E\Delta)$ ἤτοι ἡ ΕΖ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΕΓ, ΕΔ· ἄρα ὁρίζεται· ὥστε ἐὰν ἐκ τοῦ Ε ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ τομὴ ταύτης καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ, ὁρίζει τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Β) Ἔστωσαν Α, Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Κ ἡ περιφέρεια· ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἄσκησιν 485· φέρομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Α, Β καὶ τέμνουσαν τὴν Κ εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ· προεκτείνομεν δὲ τὴν ΔΓ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε· ἐξ αὐτοῦ δὲ φέρομεν ἐφαπτομένην τῇ Κ, ἔστω τὴν ΕΖ καὶ φέρομεν ἔπειτα τὴν ΚΖ, ἣν προεκτείνομεν μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς τομῆς εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

504) Α) Ἔστωσαν ΒΓ καὶ ΒΔ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον ἐντὸς τῆς γωνίας ΓΒΔ· τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΓΒΔ· ἐπειδὴ δὲ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α, ἐὰν ἐξ αὐτοῦ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τῆς διχοτομούσης καὶ προεκτείνωμεν αὐτὴν μέχρι τοῦ Α′ εἰς ἴσην ἀπόστασιν, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος κύκλος θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α′· ὥστε ἔχομεν νὰ γράψωμεν κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν σημείων Α, Α′ καὶ ἐφαπτόμενον δοθείσης εὐθείας (περίπ. Α ἀσκήσεως 503).

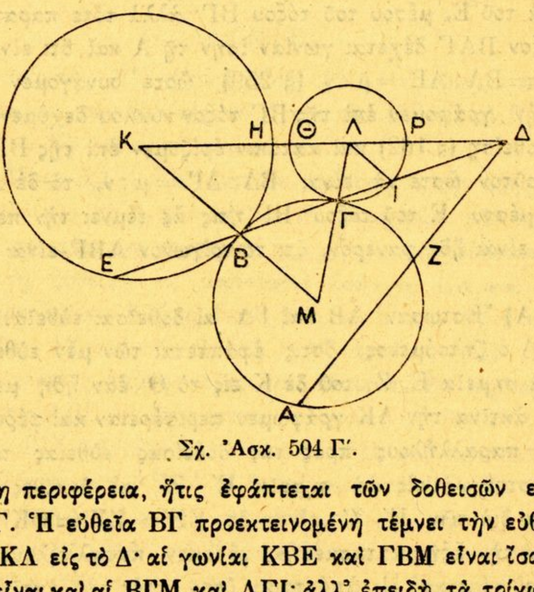
Β) Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Κ ὁ κύκλος, Λ δὲ ἡ ζητου-



Σχ. Ἀσκ. 540 Β′.

μένη περιφέρεια, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Θ καὶ ἐφάπτεται τῆς μὲν Κ εἰς τὸ Μ καὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ Γ· ἂς ἀχθῶσι δὲ ἤδη ἡ ΔΚΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΚΛ ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ Μ καὶ αἱ ΜΔ, ΜΓ, ΛΓ· ὁπότε παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ τὰς παραλλήλους ΔΚ καὶ ΛΓ, αἱ γωνίαι Κ,Λ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΚΔΜ καὶ ΔΓΜ εἶναι ἴσαι· ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ΔΜΚ, ΛΜΓ· ἄρα ἡ ΔΜΓ εἶναι εὐθεῖα· ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΔΜΖ εἶναι ὀρθή, ἕπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΖΜΓΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον $(\text{Μ} + \text{Ε} = 2\,\text{ὀρ.})$· τοῦ δὲ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν Ζ, Μ, Γ, Ε αἱ ΔΕ καὶ ΔΓ εἶναι τέμνουσαι· ὥστε ἔχομεν $(\Delta\text{Ζ})(\Delta\text{Ε}) = (\Delta\text{Μ})(\Delta\Gamma)$· ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ κύκλου Λ λαμβάνομεν, (ἐὰν φέρωμεν τὴν ΔΗΘ) $(\Delta\text{Η})(\Delta\Theta) = (\Delta\text{Μ})(\Delta\Gamma)$· ὥστε εἶναι $(\Delta\text{Ζ})(\Delta\text{Ε}) = (\Delta\text{Η})(\Delta\Theta)$· ἤτοι (σημ. § 257) τὰ Ζ, Ε, Θ, Η κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας· ὥστε ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν ἑξῆς κατασκευήν. Γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Ζ,Ε,Θ, φέρομεν ἔπειτα τὴν ΔΘ καὶ ἡ τομὴ ταύτης καὶ τῆς γραφείσης περιφερείας, ὁρίζει τὸ σημεῖον Η· κατόπιν γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Η, Θ καὶ ἐφαπτομένην τῆς ΑΒ (ἄσκησις 503).

Γ) Ἔστωσαν οἱ δύο κύκλοι Κ, Λ καὶ Α τὸ σημεῖον, Μ δὲ ἡ



Σχ. Ἀσκ. 504 Γ'.

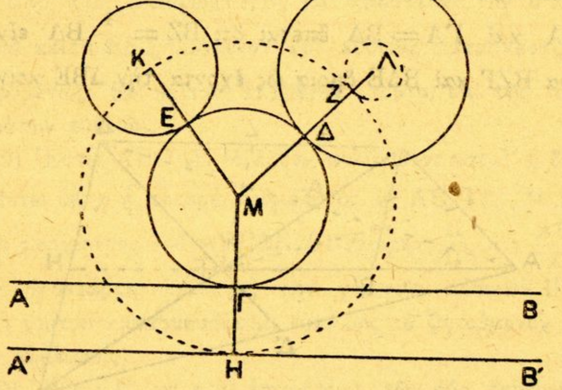
ζητουμένη περιφέρεια, ἥτις ἐφάπτεται τῶν δοθεισῶν εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ. Ἡ εὐθεῖα ΒΓ προεκτεινομένη τέμνει τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων, ΚΛ εἰς τὸ Δ· αἱ γωνίαι ΚΒΕ καὶ ΓΒΜ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐπίσης ἴσαι εἶναι καὶ αἱ ΒΓΜ καὶ ΛΓΙ· ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΒΜΓ καὶ ΛΓΙ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἕπεται εὐκόλως ὅτι αἱ γωνίαι ΚΒΕ καὶ ΛΙΓ εἶναι ἴσαι· ἄρα αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, ΛΙ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι· ὥστε τὸ Δ (ἄσκ. 486) εἶναι κέντρον ὁμοιότητος ἐκτός· συνάγομεν λοιπὸν ὅτι $ΔΡ : ΔΙ = ΔΗ : ΔΒ$· ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ΔΘ καὶ ΔΓ εἶναι τέμνουσαι τοῦ κύκλου Λ, ἔχομεν $(ΔΡ)(ΔΘ) = (ΔΙ)(ΔΓ)$ ἢ $ΔΡ : ΔΙ = ΔΓ : ΔΘ$· ἄρα εἶναι καὶ $ΔΗ : ΔΒ = ΔΓ : ΔΘ$ ἢ $(ΔΓ)(ΔΒ) = (ΔΘ)(ΔΗ)$· ἐπειδὴ δὲ πάλιν αἱ ΔΒ καὶ ΔΑ εἶναι τέμνουσαι τοῦ κύκλου Μ· ἔχομεν $(ΔΓ)(ΔΒ) = (ΔΑ)(ΔΖ)$· ὥστε εἶναι $(ΔΘ)(ΔΗ) = (ΔΑ)(ΔΖ)$· ὥστε τὸ Ζ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων Η, Θ, Α· γράφομεν λοιπὸν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν γνωστῶν σημείων Η, Θ, Α· ἑνοῦμεν ἔπειτα τὸ Α μετὰ τοῦ κέντρου ὁμοιότητος ἐκτὸς Ε καὶ ὁρίζομεν τὸ Ζ· ὥστε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται, εἰς τὸ νὰ γράψωμεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ δύο σημείων Α, Ζ καὶ ἐφαπτομένην δοθείσης περιφερείας (ἄσκησις 503).

505) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, οὗ γνωρίζομεν τὴν ΒΓ, τὴν γωνίαν Α καὶ ὅτι $ΑΒ : ΑΓ = μ : ν$· ἃς περιγράψωμεν περὶ τὸ ΑΒΓ περιφέρειαν καὶ ἃς φέρωμεν τὴν ΑΔ διχοτόμον τῆς Α, ἥτις θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Ε, μέσου τοῦ τόξου ΒΓ· ἀλλὰ τότε παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τόξον ΒΑΓ δέχεται γωνίαν ἴσην τῇ Α καὶ ὅτι εἶναι $ΑΒ : ΑΓ = ΒΔ : ΔΓ = μ : ν$ (§ 259)· ὥστε συνάγομεν τὴν ἑξῆς κατασκευήν· γράφομεν ἐπὶ τῆς ΒΓ τόξον κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ (§ 162) καὶ κατόπιν ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖόν τι Δ, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $ΒΔ : ΔΓ = μ : ν$, τὸ δὲ Δ ἑνοῦμεν μετὰ τοῦ μέσου Ε τοῦ τόξου ΒΓ ἥτις ἃς τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Α· εἶναι ἤδη φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

506) Α) Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, Κ ὁ κύκλος καὶ Λ ὁ ζητούμενος, ὅστις ἐφάπτεται τῶν μὲν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, τοῦ δὲ Κ εἰς τὸ Θ· ἐὰν ἤδη μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΛΚ γράφωμεν περιφέρειαν καὶ φέρωμεν ἐφαπτομένας παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας τὰς Α'Β', Γ'Δ' ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ε', Ζ', αἱ ἀκτῖνες ΛΕ, ΛΖ διέρχονται διὰ τῶν Ε', Ζ'· εἶναι δὲ $ΕΕ' = ΖΖ' = ΘΚ$· ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς κατασκευήν· φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ δο-

θέντος κύκλου καὶ κατόπιν γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τοῦ Κ καὶ ἐφαπτομένην εἰς τὰς γραφείσας παραλλήλους (ἄσκ.504). τὸ δὲ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι καὶ κέντρον τῆς ζητουμένης.

Β) Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Κ, Λ αἱ περιφέρειαι, Μ δὲ ἡ ζητουμένη καὶ Γ, Δ, Ε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς· ἐὰν μὲ κέντρον

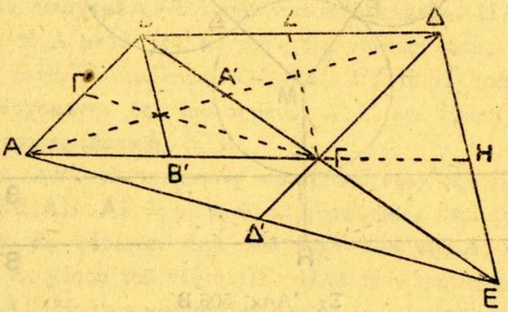


Σχ. Ἄσκ. 506 Β′.

τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΜΚ (ἐπειδὴ ΜΚ<ΜΛ) γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη τέμνει τὴν ΜΛ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν ΜΓ εἰς τὸ Η· εἶναι δὲ ΓΗ = ΕΚ = ΔΖ καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι
ΛΖ = ΛΔ — ΔΖ = ΛΔ — ΕΚ· ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς κατασκευήν· μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν γράφομεν περιφέρειαν καὶ εὐθεῖαν Α′Β′ παράλληλον τῇ δοθείσῃ εἰς ἀπόστασιν ἴσην τῇ ΕΚ καὶ ἔπειτα γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τοῦ Κ καὶ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας ΛΖ καὶ τῆς εὐθείας Α′Β′ (ἄσκησις 504)· τὸ κέντραν τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι καὶ κέντρον τῆς ζητουμένην.

507) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον οὗ διάμεσοι εἶναι αἱ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′· ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ κατασκευάσωμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΒΓ, ΑΔ τέμνονται δίχα· ἄρα ἡ ΑΔ καὶ ἡ ΑΑ′ συμπίπτουσι· ἤδη φέρομεν τὴν ΓΕ ἴσην τῇ ΒΓ καὶ τὰς ΕΑ καὶ ΕΔ· ἀλλὰ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ τὸ Γ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του· διότι ΓΑ′ = Α′Β

ἄρα $ΓΑ' = \frac{1}{3} ΕΑ'$, $Α'$ δὲ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΑ· παρατηροῦμεν δὲ ἤδη, ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΑΕ καὶ ΒΓΓ' ἔχουσι τὴν Β κοινὴν καὶ $ΒΓ = \frac{1}{2} ΒΕ$, $ΒΓ' = \frac{1}{2} ΑΒ$ ἤτοι τὰς περιεχούσας τὴν Β πλευρὰς ἀναλόγους· εἶναι ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα ὅμοια καὶ συνεπῶς εἶναι $ΑΕ = 2ΓΓ'$· ἐπίσης ἐὰν φέρωμεν τὴν ΓΖ παράλληλον τῇ Β'Β, θὰ εἶναι $ΒΖ = Β'Γ$ καὶ $ΓΖ = Β'Β$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $ΓΒ' = Β'Α$ καὶ $ΓΑ = ΒΔ$ ἕπεται ὅτι $ΒΖ = \frac{1}{2} ΒΔ$· εἶναι ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΖΓ καὶ ΒΔΕ ὅμοια ὡς ἔχοντα τὴν ΔΒΕ κοινὴν καὶ



Σχ. Ἀσκ. 507.

τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους· ὥστε εἶναι $ΔΕ = 2ΓΖ$ ἢ $ΔΕ = 2ΒΒ'$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $ΑΔ = 2ΑΑ'$, ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ ὡς διπλάσιαι τῶν δοθεισῶν διαμέσων εἶναι γνωσταί· κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ φέρομεν τὰς διαμέσους αὐτοῦ τὰς ΔΔ', ΕΑ', ΑΗ αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Γ, ἐπὶ δὲ τῶν ΓΔ, ΑΓ σχηματίζομεν παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ καὶ τέλος φέρομεν τὴν διαγώνιον αὐτοῦ ΒΓ· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

508) Α) Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον· ἐπειδὴ δὲ θὰ εἶναι $\frac{(ΜΒΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3}$, ἕπεται ὅτι καὶ $\frac{ΜΗ}{ΑΔ} = \frac{1}{3}$ (ΜΗ, ΑΔ ὕψη τούτων)· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ $\frac{ΜΖ}{ΒΕ} = \frac{1}{3}$· ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς κατασκευή· φέρομεν τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ καὶ ἀπὸ τῶν ποδῶν των, λαμβάνομεν ἐφ' ἑκάστου

τμῆμα ἴσον τῷ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ ἐκ τῶν λαμβανομένων σημείων φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΑΓ· τὸ σημεῖον εἰς ὃ τέμνονται αἱ παράλληλοι αὐται εἶναι τὸ ζητούμενον.

Β) Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον θ' ἀπέχῃ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἀποστάσεις ὧν ὁ λόγος εἶναι ὁ δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$, θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας κατασκευαζομένης κατὰ τὴν ἄσκησιν 498· ἐπειδὴ δὲ θ' ἀπέχῃ τοῦτο ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ ἀποστάσεις ὧν ὁ λόγος εἶναι $\frac{\mu'}{\nu'}$, θὰ κεῖται τὸ ζητούμενον ἐπὶ εὐθείας κατασκευαζομένης ὡς προηγουμένως· θὰ κεῖται ἑπομένως τοῦτο, ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων εὐθειῶν.

509) Ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ δοθὲν πολύγωνον καὶ Π' ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα· ἔστω δὲ χ ἡ πλευρὰ ἡ ὁμόλογος τῇ ΑΒ· ἐὰν δὲ Π εἶναι ἡ γνωστὴ περίμετρος τοῦ ΑΒΓΔΕ, θὰ ἔχωμεν $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{AB}{\chi}$· ὥστε ἡ χ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθειῶν Π, Π', ΑΒ· κατόπιν τούτου κατασκευάζεται εὐκόλως τὸ ζητούμενον πολύγωνον (§ 249 σημείωσις).

510) Ἔστω Ε καὶ ε αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο δοθέντων ὁμοίων πολυγώνων καὶ Ρ ἡ τοῦ ζητουμένου· πρέπει δὲ νὰ εἶναι
$E : P = P : \varepsilon$· ἀλλ' αἱ ἐπιφάνειαι ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν, Α, α, χ· ὥστε θὰ ἔχωμεν $A^2 : \chi^2 = \chi^2 : \alpha^2$ ἢ $A : \chi = \chi : \alpha$· ἤτοι ἡ ζητουμένη πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν Α καὶ α.

511) Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ· ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι διάμετρος τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ αἱ κάθετοι ΔΕ, ΒΖ ἐπ' αὐτὴν εἶναι προφανῶς ἴσαι· εἶναι δὲ $(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma)(\Delta E)$ καὶ $(BA\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma)(BZ) = \frac{1}{2}(A\Gamma)(\Delta E)$· εἶναι ἄρα καὶ $(AB\Gamma\Delta) = (A\Gamma)(\Delta E)$· ἐὰν δὲ K^2 εἶναι τὸ δοθὲν πρέπει νὰ εἶναι $(A\Gamma)(\Delta E) = K^2$ ἢ $(A\Gamma) : K = K : \Delta E$· ἀλλὰ ΑΓ καὶ Κ εἶναι γνωστά· ὥστε ὁρίζεται ἡ ΔΕ· ἀφοῦ ὁρισθῇ ἡ ΔΕ, ὑψοῦμεν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέτρου ΑΓ κύκλου κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ ἴσην τῇ ΔΕ, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου ἄκρου τῆς καθέτου ταύτης, φέρομεν παράλληλον τῇ διαμέτρῳ ΑΓ καὶ τὸ σημεῖον Δ εἰς ὃ ἡ παράλ-

ληλος αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν, ἑνοῦμεν μετὰ τοῦ Α· ἐκ δὲ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον τῇ ΔΑ, ἥτις θὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Β· τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον.

512) Ἔστω Μ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν, καὶ χ ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου, α ἡ τοῦ δοθέντος καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ ὁ λόγος·

τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{\pi\chi^2}{\pi(\alpha^2-\chi^2)}=\frac{\mu}{\nu}$ ἢ $\frac{\chi^2}{\alpha^2-\chi^2}=\frac{\mu}{\nu}$

$$\text{ἢ } \chi=\frac{\alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu+\nu}}=\frac{\alpha\sqrt{\mu(\mu+\nu)}}{\mu+\nu}$$

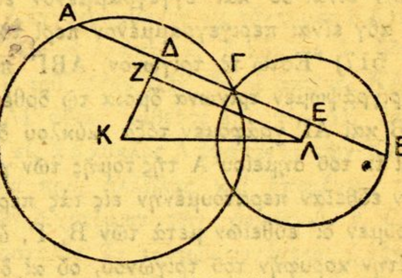
ἤτοι $\alpha:\chi=(\mu+\nu):\sqrt{\mu(\mu+\nu)}$· ἀλλ' αἱ α, $\mu+\nu$, $\sqrt{\mu(\mu+\nu)}$ εἶναι γνωσταί· ὥστε ὁρίζεται τὸ χ.

513) Ἐὰν τὸ ἓν τῶν μερῶν τῆς περιφερείας εἶναι χ^0 τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $360-\chi$· ὥστε ἔχομεν $\frac{\chi}{360-\chi}=\frac{13}{17}$ ἢ $\chi=156^0$· εὑρίσκομεν δὲ τόξον 156^0 ὡς ἑξῆς· λαμβάνομεν τὸ ΑΒ τεταρτημόριον περιφερείας· μὲ κέντρον δὲ τὸ Β καὶ ἀκτῖνα, τὴν τῆς περιφερείας γράφομεν τόξον, τέμνον τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ· τὸ ΒΔ εἶναι λοιπὸν 60^0· ἐὰν δὲ Γ εἶναι τὸ μέσον αὐτοῦ τὸ τόξον ΒΓ εἶναι 30^0· κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου γράφομεν τόξον τέμνον τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε· τὸ ΓΕ εἶναι 36^0· ὥστε $ΑΒ+ΒΓ+ΓΕ=156^0$.

514) Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τραπέζιον καὶ ΕΖ ἡ τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ, ΒΓ συνδέουσα εὐθεῖα· ἀλλ' ἡ ΕΖ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὰς (§ 197, σημ)· ἂν δὲ ἡ ΕΖ τέμνει τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὸ Η καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Θ· ἔχομεν

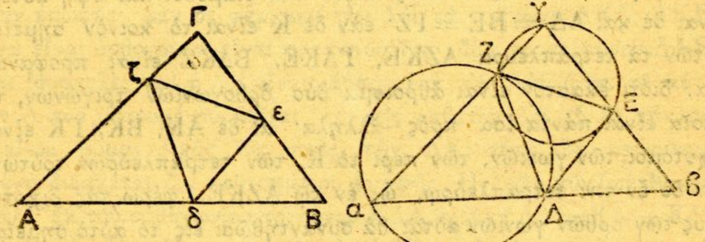
$ΕΗ=\frac{ΑΒ}{2}$ καὶ $ΘΖ=\frac{ΑΒ}{2}$ (§ 119, 120) ἤτοι εἶναι $ΕΗ=ΘΖ$· ἀλλὰ πάλιν $ΗΘ=ΕΖ-(ΕΗ+ΘΖ)=ΗΘ=ΕΖ-ΑΒ=$ $\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}-ΑΒ=\frac{ΓΔ-ΑΒ}{2}$· ἐπομένως ἡ ΗΘ εἶναι γνωστή· ἐκ τούτου συνάγεται ἡ ἑπομένη κατασκευή· κατασκευάζομεν τὸ τραπέζιον ΓΔΗΘ (ΔΗ, ΘΓ εἶναι τὰ ἡμίση τῶν γνωστῶν διαγωνίων ὡς ἐπίσης γνωσταὶ εἶναι καὶ αἱ ΓΔ, καὶ ΗΘ) (ἄσκ. 250) καὶ προεκτείνομεν ἔπειτα τὰς ΔΗ, ΓΘ μέχρι τῶν Β καὶ Α καὶ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΔΗ = ΗΒ καὶ ΓΘ = ΘΑ· τότε τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

515) Ἔστωσαν Κ, Λ αἱ περιφέρειαι καὶ ἡ διὰ τοῦ Γ ἀγομένη εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ· ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΚΔ, ΛΕ ἡ ΔΕ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· ἂν δὲ ἐκ τοῦ Λ φέρωμεν παράλληλον τῇ ΑΒ τὴν ΛΖ αὕτη ἰσοῦται μὲ τὴν ΔΕ· τοῦ ὀρθογωνίου λοιπὸν τριγώνου ΚΖΛ εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΚΛ, ὡς καὶ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ ἡ ΖΛ· δύναται ἑπομένως νὰ κατασκευασθῇ καὶ νὰ ὁρισθῇ οὕτω καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ΚΖ· κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΚΛΖ, ἔχον τὴν ΛΖ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἐκ τοῦ Γ κατόπιν φέρομεν παράλληλον τῇ ΖΛ τέμνουσαν τὰς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Α, Β· ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.



Σχ. Ἀσκ. 515.

516) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον εἰς ὃ θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν



Σχ. Ἀσκ. 516.

τρίγωνον ἴσον τῷ δοθέντι ΔΕΖ· ἐπὶ τῆς ΖΕ γράφομεν τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Γ καὶ ἐπὶ τῇ ΖΔ, γράφομεν ἄλλο τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Α· διὰ δὲ τοῦ Ζ σημείου τῆς τομῆς τῶν γραφεισῶν περιφερειῶν φέρομεν εὐθεῖαν αγ ἴσην τῇ ΑΓ (ἄσκ. προηγουμένη) καὶ προεκτείνομεν ἔπειτα τὰς αΔ, γΕ μέχρις ὅτου συναντηθῶσιν εἰς τὸ β· τὸ τρίγωνον αβγ ἰσοῦται τῷ

ΑΒΓ διότι ἔχουσιν ΑΓ = αγ, Α = α, Γ = γ· ἐὰν δὲ ἤδη λάβωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ τὴν Αζ ἴσην τῇ αΖ, τὴν Αδ ἴσην τῇ αΔ καὶ τὴν Γε ἴσην τῇ γΕ, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ζεδ ἰσοῦται τῷ ΖΕΔ· εἶναι δὲ καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ΑΒΓ· βλέπομεν δὲ ὅτι τὸ αδγ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸ ΖΕΔ.

517) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ περιγράψωμεν τρίγωνα ὅμοια τῷ δοθέντι αδγ· πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΑΓ γράφομεν τόξα κύκλου δεχόμενα γωνίας τὰς α καὶ δ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς τομῆς τῶν γραφεισῶν περιφερειῶν φέρωμεν εὐθεῖαν περατουμένην εἰς τὰς περιφερείας· τὰ ἄκρα δὲ ταύτης ἑνοῦμεν δι᾽ εὐθειῶν μετὰ τῶν Β, Γ, ὧν ἡ τομὴ θὰ μᾶς δώσῃ τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ τριγώνου, οὗ αἱ δύο ἄλλαι εἶναι τὰ ἄκρα τῆς διὰ τοῦ Α ἀχθείσης εὐθείας καὶ ὅπερ τρίγωνον εἶναι ὅμοιον τῷ αδγ· τοιαῦτα δὲ ὅμοια τρίγωνα σχηματίζονται ἄπειρα, διότι ἄπειροι εἶναι αἱ διὰ του Α ἀγόμεναι καὶ περατούμεναι εἰς τὰς περιφερείας· ἀλλ᾽ ἡ μεγίστη τούτων εἶναι, ἡ διὰ τοῦ Α ἀγομένη παράλληλος τῇ εὐθείᾳ τῶν κέντρων· ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου τοῦ ὁμοίου τῷ αδγ καὶ ἔχοντος μίαν τῶν πλευρῶν, τὴν παράλληλον ταύτην, εἶναι ἡ μεγίστη (§ 247).

518) Ἔστω αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, αἵτινες εἶναι καὶ διάμεσοι καὶ ὕψη αὐτοῦ· εἶναι δὲ καὶ ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ· ἐὰν δὲ Κ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν τὰ τετράπλευρα ΑΖΚΕ, ΓΔΚΕ, ΒΔΚΖ εἶναι προφανῶς ἴσα, διότι ἕκαστον εἶναι ἄθροισμα δύο ὀρθογωνίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι πάντα ἴσα πρὸς ἄλληλα· αἱ δὲ ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τῶν περὶ τὸ Κ, τῶν τετραπλεύρων τούτων· ἐὰν δὲ ἔν τινι τετραπλεύρῳ, ὡς ἐν τῷ ΑΖΚΕ, φέρω τὰς διχοτόμους τῶν ὀρθῶν γωνιῶν αὗται θὰ συναντηθῶσι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ΑΚ, τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο ἀπέχει ἰσάκις τῆς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΖΚΕ· ἐπομένως δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν ἐντὸς τούτου, κύκλον οὗ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τούτων· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κύκλους καὶ ἐντὸς τῶν δύο ἄλλων τετραπλεύρων· οἱ δὲ τρεῖς οὗτοι κύκλοι προφανῶς θὰ ἐφάπτονται ὄχι μόνον τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἀλλήλους· ἐπειδὴ δὲ τὰ τρία ἀνωτέρω ἀναφερθέντα τετράπλευρα εἶναι ἴσα, καὶ οἱ ἐγγεγραμμένοι

εἰς αὐτὰ κύκλοι εἶναι ἴσοι· διότι ὅταν ἐφαρμόσωσι ταῦτα θὰ συμπέσωσι καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ τὰ κέντρα αὐτῆς.

519) Ἔστω Λ ὁ κύκλος, ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν τομέα ΚΑΒ, μέσον δὲ τοῦ τόξου ΑΒ τὸ Γ, εἰς ὃ ἐφάπτεται ὁ κύκλος Λ· ἤδη φέρωμεν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Γ τοῦ τόξου ΑΒ, ἣν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ τέμνουσι εἰς τὰ Δ, Ε· ἡ ΛΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ· ἐὰν δὲ Ζ, καὶ Η εἶναι τὰ σημεῖα εἰς ἃ ὁ κύκλος Λ ἐφάπτεται τῶν ΚΑ, ΚΒ αἱ ΛΒ, ΛΖ, ΛΗ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑπομένως τὸ Λ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Δ, Ε τοῦ τριγώνου ΚΔΕ, ὅπερ εἶναι ἰσοσκελές· ἐκ τούτων συνάγεται ἡ ἑξῆς κατασκευή· φέρομεν ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τόξου τοῦ τομέως ἐφαπτομένην εἰς αὐτὸ καὶ προεκτείνομεν τὰς ἀκτῖνας αἵτινες καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ, μέχρι ὅτου συναντήσωσιν τὴν ἐφαπτομένην καὶ κατόπιν φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν προσκειμένων εἰς αὐτήν· τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τούτων, εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

520) Ἔστω ΑΚΒ ἡ διάμετρος τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου (Κ τὸ κέντρον) καὶ Δ, Ε τὰ κέντρα τῶν ἄλλων ἡμικυκλίων καὶ Λ τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου· ἀλλ' αἱ ΛΔ, ΛΕ διέρχονται διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς· ἐὰν δὲ φέρχμεν τὴν ΛΚ τὰ τρίγωνα ΛΚΔ, ΛΚΕ ἅτινα εἶναι ὀρθογώνια εἶναι προφανῶς ἴσα· ἄρα τὸ τρίγωνον ΔΛΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ ΛΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ὥστε τὸ κέντρον Λ τοῦ ζητουμένου κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΛΚ, ὁ δὲ κύκλος Λ εἶναι συμμετρικὸς ὡς πρὸς τὴν ΛΚ· αὕτη δὲ προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Η, τῶν κύκλων Κ καὶ Λ· ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΛΔ ἔχομεν $ΛΔ^2 = ΚΛ^2 + ΚΔ^2$ ἀλλ' ἡ ΛΔ εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων α, β τῶν κύκλων Λ καὶ Δ· ὥστε εἶναι $(α+β)^2 = (2β-α)^2 + β^2$ ἢ $3α = 2β$ καὶ $α = \frac{2β}{3}$ ἀλλὰ 2β εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ· ἣν παριστῶ διὰ τοῦ ρ· ὥστε εἶναι $α = \frac{ρ}{3}$· καὶ ἑπομένως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον κέντρον Λ, φέροντες τὴν ΔΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνοντες τὴν ΔΛ ἴσην πρὸν τὸ τρίτον τῆς ΚΔ.

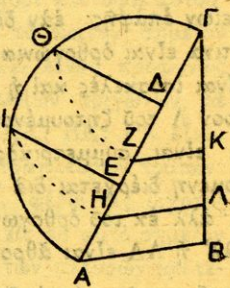
521) Τοῦ ζητουμένου τριγώνου αἱ γωνίαι εἶναι 1 ὀρθή, $\frac{1}{2}$ ὀρ.

$\frac{1}{2}$ ὀρθ. ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι γνωστή· κατασκευάζομεν λοιπὸν τοῦτο, ὡς εἰς τὸ πρόβλημα § 167.

522) Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου, οὗ αἱ κορυφαὶ Α, Β μένουσιν ἀκίνητοι καὶ ΔΕ ἡ εὐθεῖα ἐφ' ἧς κινεῖται ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου· ἤδη γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Α, Β καὶ ἐφαπτομένην τῇ ΔΕ (ἄσκ. 503) εἰς τὸ σημεῖον Μ. λέγωμεν δὲ ἤδη, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο Μ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι μεγίστη· διότι ἐὰν λάβωμεν σημεῖον τι Ζ τῆς ΔΕ καὶ φέρωμεν τὰς ΖΑ καὶ ΖΒ καὶ ἐὰν ἡ ΖΑ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ν καὶ φέρομεν τὴν ΝΒ, βλέπομεν ὅτι ἡ γωνία ΑΝΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Ζ, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΖΝΒ, ἡ δὲ ΑΝΒ ἰσοῦται τῆς ΑΜΒ.

523) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΑΒ· ἔστω δὲ τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἀλλὰ τὸ ΓΖΚ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, ὥστε ἔχομεν $\frac{(\text{ΑΖΚ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{1}{3}=\frac{(\text{ΓΖ})^2}{(\text{ΓΑ})^2}$ ἤτοι $(\text{ΓΖ})^2=\frac{(\text{ΓΑ})^2}{3}$.

ἐπίσης ἔχομεν $\frac{(\text{ΑΗΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{2}{3}=\frac{(\text{ΓΗ})^2}{(\text{ΓΑ})^2}$ ἤτοι $(\text{ΓΗ})^2=\frac{2(\text{ΓΑ})^2}{3}$.



Σχ. Ἀσκ. 523

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὴν ἑξῆς κατασκευήν· ἐπὶ τῆς ΓΑ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ διαιροῦμεν τὴν ΓΑ διὰ τῶν σημείων Δ, Ε εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἐκ τοῦ Δ, Ε ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΓΑ τὰς ΔΘ, ΕΙ· μὲ κέντρον δὲ τὸ Γ καὶ ἀκτῖνας τὰς ΓΘ, ΓΙ γράφομεν τόξα τέμνοντα τὴν ΓΑ εἰς τὴν Ζ καὶ Η· ἐκ δὲ τῶν Ζ καὶ Η φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ τὰς ΖΚ, ΗΛ αἵτινες χωρίζουσι τὸ ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη· διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΘΑ ἔχομεν $(\text{ΘΓ})^2=(\text{ΓΔ}).(\text{ΓΑ})$ ἢ

$$(\text{ΘΓ})^2=\frac{(\text{ΓΑ})}{3}(\text{ΓΑ})=\frac{(\text{ΓΑ})^2}{3} \text{ ἢ } (\text{ΓΖ})^2=\frac{(\text{ΓΑ})^2}{3}.$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΓΙΑ ἔχομεν $(\text{ΓΙ})^2=(\text{ΓΗ}).(\text{ΓΑ})$

$$=\frac{2(\text{ΓΑ})}{3}.(\text{ΓΑ})=\frac{2(\text{ΓΑ})^2}{3} \text{ ἢ } (\text{ΓΗ})^2=\frac{2(\text{ΓΑ})^2}{3}.$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον εἰς μ ἴσα μέρη, διαιροῦμεν τὴν ΓΑ εἰς μ ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων ὑψοῦμεν καθέτως ἐπὶ τὴν ΓΑ καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατόπιν ὡς ἀνωτέρω.

524) Ἔστω ΓΕ ἡ χορδὴ ἥτις διαιρεῖ τὸν δοθέντα κύκλον εἰς τὰ ζητούμενα μέρη· ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς, ἥτις συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Α, Β ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος καὶ διχοτομεῖ τὰς γωνίας ΓΑΕ, ΓΒΕ· ὥστε εἶναι ΓΑΒ $=$ 2ΓΒΑ καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ, ἕπεται ὅτι ΓΑΒ $= \frac{2}{3}$ ὀρθῆς καὶ ΓΒΑ $= \frac{1}{3}$ ὀρθῆς· ἄρα ἡ χορδὴ ΑΓ ὑποτείνει εἰς τόξον ΑΓ 60°. Ἐκ τούτων συνάγεται ἡ ἑπομένη κατασκευή· φέρομεν τὴν τυχοῦσαν διάμετρον ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτῆς Α λαμβάνομεν τόξον ΑΓ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας· ἐκ δὲ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε· ἡ ΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη χορδή.

525) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς 180° εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 2, 5, 8 εὑρίσκομεν ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι 24°, 60°, 96°· ἀλλ' αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἐγγεγραμμέναι· ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἡ ἔναντι τῆς γωνίας 60° εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου· ἡ δὲ ἔναντι τοῦ 24° εἶναι ἡ χορδὴ ἡ ἑνοῦσα τὸ τόξον ὅπερ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου εἰς ὃ ὑποτείνει ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου· φέρομεν λοιπὸν τὴν χορδὴν ἥτις ὑποτείνει εἰς τόξον 120° καὶ ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς λαμβάνομεν τόξον 48° καὶ φέρομεν τὴν χορδὴν αὐτοῦ· ἐὰν δὲ ἑνώσωμεν τὰ ἄλλα ἄκρα τῶν δύο τούτων χορδῶν σχηματίζομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

526) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ ἔστω ΒΜΓ τὸ τόξον τὸ γραφὲν μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τὴν ὁποίαν παριστῶ διὰ τοῦ α· τὸ ζητούμενον ἤδη ἐμβαδὸν εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ τριῶν τμημάτων κύκλου ἴσων πρὸς τὸ ΒΜΓ· τὸ ἐμβαδὸν δὲ τοῦ τμήματος αὐτοῦ εἶναι διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τομέως ΑΒΜΓ, γωνίας 60° καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ· ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως εἶναι $\frac{\pi\alpha^2}{6}$ καὶ τὸ τοῦ

δοθέντος τριγώνου εἶναι $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$· τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ τμήματος ΒΜΓ εἶναι $\frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$· ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $3 \cdot \frac{\alpha^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$.

527) Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

528) Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον θέλω νὰ διαιρέσω εἰς δύο ἴσα μέρη δι' εὐθείας ἀγομένης ἐκ τῆς κορυφῆς Α· πρὸς τοῦτο φέρω τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Β παράλληλον πρὸς αὐτὴν ἥτις τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὸ Ε· ἀλλ' ἤδη παρατηρῶ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΕΓ καὶ ἑπομένως τὸ δοθὲν τετράπλευρον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, ἡ δὲ διάμεσος ΑΗ διαιρεῖ τὸ τελευταῖον τοῦτο εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα· ἤτοι τὰ ΑΔΗ καὶ ΑΗΕ· ἀλλὰ τὸ ΑΗΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΑΗΓΒ· ὥστε ἡ ΑΗ διήρεσε τὸ δοθὲν εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

529) Ἓξ ἴσους κύκλους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν οὕτως ὥστε νὰ ἐφάπτωνται ἑνὸς ἴσου κύκλου πρὸς αὐτούς.

Σελ. 235 — 530) Ἔχομεν κατὰ τὸ πρόβλημα τῆς σελ. 230· $\alpha + \beta + \gamma = 32$ μ., $-\alpha + \beta + \gamma = 17$, $\alpha - \beta + \gamma = 13{,}1$ καὶ $\alpha + \beta - \gamma = 1{,}9$· ὥστε εἶναι $E = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{32 \cdot 17 \cdot 13{,}1 \cdot 1{,}9}$ καὶ $\lambda o\gamma(4E) = \frac{1}{2}[\lambda o\gamma\, 32 + \lambda o\gamma\, 17 + \lambda o\gamma\, 13{,}1 + \lambda o\gamma\, 1{,}9]$ κτλ.

531) Εἶναι (προσ. σελ. 232) $\alpha + \gamma = 78$, $\alpha - \gamma = 18$,

$$\alpha - \gamma + \beta + \delta = 42, \quad -\alpha + \gamma + \beta + \delta = 16,$$

$\alpha - \gamma - \beta + \delta = 20$, καὶ $\alpha - \gamma + \beta - \delta = 16$· ὥστε ἔχομεν $E = \frac{1}{4} \cdot \frac{78}{18} \cdot \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 16}$ ἢ $E = \frac{104}{3} \cdot \sqrt{210}$ κ. τ. λ.

532) Εἶναι $(\beta - \gamma)^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$ ἢ $\alpha^2 - 2\beta\gamma$· ὥστε ἔχομεν $\frac{1}{4}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2] = \frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha^2 + 2\beta\gamma) = \frac{\beta\gamma}{2}$.

533) Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖον Γ αὐτῆς ὥστε νὰ εἶναι $(\mathrm{A\Gamma})^2 = (\mathrm{AB})(\mathrm{\Gamma B})$· ἀλλὰ ἔχομεν $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma B}$ καὶ ἑπομένως εἶναι $(\mathrm{A\Gamma})^2 = (\mathrm{A\Gamma}) \cdot (\mathrm{\Gamma B}) + (\mathrm{\Gamma B})^2$· ἀλλὰ πάλιν εἶναι $(\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma B})^2 = (\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{\Gamma B})^2 + 2(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{\Gamma B})$ καὶ ἑπομένως εἶναι

$$(\text{ΑΓ})(\text{ΓΒ}) = \frac{(\text{ΑΒ})^2 - (\text{ΑΓ})^2 - (\text{ΓΒ})^2}{2}\cdot$$ ὥστε λαμβάνομεν

$$(\text{ΑΓ})^2 = \frac{(\text{ΑΒ})^2 - (\text{ΑΓ})^2 - (\text{ΓΒ})^2}{2} + (\text{ΓΒ})^2$$ καὶ

$$3(\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΓΒ})^2.$$

534) Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ ἡ ΒΓ ἔστω ὅτι διῃρέθη εἰς 4 ἴσα μέρη· Μ δὲ τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως τὸ προσκείμενον εἰς τὴν κορυφὴν Β· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $(\text{ΑΒ})^2 - (\text{ΑΜ})^2 = (\text{ΒΜ})(\text{ΜΓ})$· ὥστε εἶναι $(\text{ΑΜ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΒΜ})(\text{ΜΓ})$ ἢ $(\text{ΑΜ})^2 = \gamma^2 + \frac{\alpha}{4}\cdot\frac{3\alpha}{4} = \gamma^2 + \frac{3\alpha^2}{16}$· οὕτω δὲ εὑρίσκομεν καὶ τὰς ἄλλας εὐθείας.

Σελ. 238.—535) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ τὸ ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν βάσιν β παριστῶ διὰ τοῦ υ, ΔΕ ἡ παράλληλος τῇ β, ἣν παριστῶ διὰ τοῦ ψ, καὶ ἥτις τέμνει ἀπ' αὐτοῦ τὸ τραπέζιον ΔΕΑΓ, ἔχον δοθὲν ἐμβαδὸν K^2· ἐὰν δὲ διὰ χ παραστήσωμεν τὸ ὕψος ΒΖ τοῦ τριγώνου ΒΔΕ ἔχομεν $\frac{\beta\cdot\upsilon}{2} - \frac{\psi\chi}{2} = K^2$ ἢ $\beta\upsilon - \psi\chi = 2K^2$ (1)· ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΑΓ, ΒΔΕ, ἔχομεν $\frac{\beta}{\psi} = \frac{\upsilon}{\chi}$ ἢ $\psi = \frac{\beta\chi}{\upsilon}$· θέτοντες ἤδη τὴν τιμὴν τοῦ ζ ἐν τῇ (1) ἔχομεν $\beta\upsilon - \frac{\beta\chi^2}{\upsilon} = 2K^2$ ἢ $\chi = \sqrt{\frac{\upsilon(\beta\upsilon - 2K^2)}{\chi}}$ πρέπει δὲ νὰ εἶναι $\beta\upsilon > 2K^2$.

Ἐὰν θέλωμεν ἵνα τὸ τραπέζιον ΔΕΑΓ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον 2μ, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν $2\mu = \beta + \psi + \gamma - \text{ΒΔ} + \alpha - \text{ΕΒ}$ ἢ ἐὰν διὰ 2τ παραστήσωμεν τὴν περίμετρον $\alpha + \beta + \gamma$ τοῦ δοθέντος τριγώνου ἔχομεν $2\mu = 2\tau + 2\psi - (\text{ΒΔ} + \text{ΒΕ} + \psi)$, (2) ὅπου $\text{ΒΔ} + \text{ΒΕ} + \psi$ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΒΔΕ· ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι $\frac{2\tau}{(\text{ΒΔ} + \text{ΒΕ} + \psi)} = \frac{\beta}{\psi}$ καὶ ἑπομένως εἶναι $(\text{ΒΔ} + \text{ΒΕ} + \psi) = \frac{2\tau\psi}{\beta}$· ὥστε ἡ (2) γράφεται $\mu = \tau + \psi - \frac{\tau\psi}{\beta}$ ἄρα εἶναι $\psi = \frac{\beta(\tau - \mu)}{(\tau - \beta)}$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι πάντοτε $\tau > \beta$ πρέπει νὰ εἶναι $\tau > \mu$· ἐὰν ἤδη λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ (β) τὸ τμῆμα ΓΖ ἴσον τῷ χ καὶ ἐκ τοῦ Ζ τὴν ΖΔ παράλληλον τῇ ΓΒ, τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἐκεῖνο, ἐξ οὗ ἡ ἀγομένη τῇ ΑΓ παράλληλος τέμνει ἀπὸ τοῦ δοθέντος τριγώνου τραπέζιον ἔχον περίμετρον 2μ.

536) Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ ΑΓ τὸ ἕν μέρος αὐτῆς δι' ὃ εἶναι $(\text{ΑΓ})^2+(\text{ΓΒ})^2=\mu^2$, ὅπου μ^2 εἶναι τὸ δοθέν· ἐὰν ἐκ τοῦ Γ ὑψώσω κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν ΓΔ ἴσην τῇ ΓΒ, ἡ ὑποτείνουσα ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ἰσοσκελές· ὥστε ἡ Β ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου γράψωμεν περιφέρειαν καὶ διὰ τοῦ Β φέρωμεν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν γωνίαν μετὰ τῆς ΒΑ ἴσην πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς, λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Ε, ὅπερ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τῆς γραφείσης περιφερείας· ἐκ δὲ τοῦ Ε φέρομεν ἔπειτα τὴν ΕΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ· τὸ Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εἶναι $(\text{ΑΓ})^2-(\text{ΓΒ})^2=\mu^2$, ὑψοῦμεν ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Β, κάθετον τὴν ΒΔ ἴσην τῇ πλευρᾷ μ· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΒΔ ἔχομεν $(\text{ΒΔ})^2=(\text{ΓΔ})^2-(\text{ΓΒ})^2$ ἢ $(\text{ΓΔ})^2-(\text{ΓΒ})^2=\mu^2$, ἕπεται ὅτι $\text{ΑΓ}=\text{ΓΔ}$ καὶ ἑπομένως τὸ Γ εἶναι σημεῖον, εἰς ὃ ἡ κάθετος ὑπὸ τὴν ΑΔ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς τέμνει τὴν ΑΒ.

537) Ἔστω Α τὸ δοθὲν σημεῖον ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ καὶ ΒΑΓ ἡ χορδὴ δι' ἣν εἶναι $\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\mu}{\nu}$· ἔστω δὲ ὅτι ἡ ΑΚ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Ζ, Η· ἀλλὰ τότε ἔχομεν $(\text{ΒΑ}).(\text{ΑΓ})=(\text{ΖΑ}).(\text{ΑΗ})$ καὶ $(\text{ΒΑ})=\frac{(\text{ΑΓ}).\mu}{\nu}$, ὥστε εἶναι $(\text{ΑΓ})^2=\frac{\nu.(\text{ΖΑ})(\text{ΑΗ})}{\mu}$ ἤδη εὐκόλως ὁρίζεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ, τὸ σημεῖον Γ, δι' ὃ εἶναι $\text{ΑΓ}=\sqrt{\frac{\nu.(\text{ΖΑ})(\text{ΑΗ})}{\mu}}$.

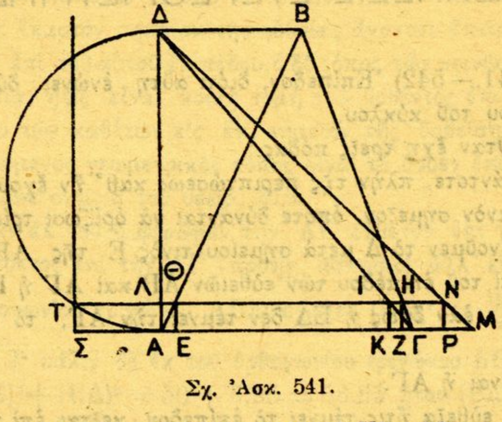
538) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ ἡ Α εἶναι ὀρθὴ γωνία καὶ οὗ γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν γ καὶ τὴν προβολὴν τῆς β ἐπὶ τὴν α, τὴν ΔΓ ἣν παριστῶ διὰ τοῦ δ· ἔστω δὲ χ ἡ ΔΒ· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι $\gamma^2=(\delta+\chi)\chi$· ἐκ ταύτης λοιπὸν εὑρίσκομεν τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου

τριγώνου ΑΔΒ οὗ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ· κατασκευάζομεν λοιπὸν τοῦτο, καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ ζητούμενον ΑΒΓ.

539) Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ ΔΕ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ἡ παράλληλος τῆς ΒΓ· ἀλλ' εἶναι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΔ)^2}$ καὶ $\frac{(ΑΒΓ)-(ΑΔΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΑΒ)^2-(ΑΔ)^2}{(ΑΔ)^2}$ ἢ $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha^2-\chi^2}{\chi^2}$, (ἐὰν θέσωμεν ΑΔ $=\chi$) ἢ $\chi = \frac{\alpha\sqrt{\mu(\mu+\nu)}}{\mu+\nu}$. βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ χ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, $\mu+\nu$, $\sqrt{\mu(\mu+\nu)}$.

540) Ἔστω α ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν χ ἡ βάσις καὶ ψ τὸ ὕψος· δίδεται δὲ $\chi+\psi=6$· εἶναι δὲ καὶ $\alpha^2 = \frac{\chi^2}{4}+\psi^2$· ἐκ τῆς λύσεως δὲ τοῦ συστήματος τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ.

541) Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὃ θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν



Σχ. Ἀσκ. 541.

ψωμεν ὀρθογώνιον ἔχον ἐμβαδὸν ἴσον μὲ $Κ^2$· πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ΑΔ· τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΒΓ· ἔστω δὲ ΑΛΙΚ $= Κ^2$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{ΛΙ}{ΑΓ} = \frac{ΔΛ}{ΑΔ}$ καὶ $\frac{ΘΗ}{ΑΓ} = \frac{ΔΛ}{ΑΔ}$, ἕπεται ὅτι $\frac{ΛΙ}{ΑΓ} = \frac{ΘΗ}{ΑΓ}$ ἢ ΛΙ $=$ ΘΗ· ὥστε εἶναι ΛΙΚΑ $=$ ΘΗΖΕ $= Κ^2$· ἐὰν δὲ ἤδη λάβωμεν ΑΜ $=$ ΑΔ τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{ΑΛΝΡ}{ΑΛΙΚ} = \frac{ΛΝ}{ΛΙ}$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\frac{\text{ΛΝ}}{\text{ΛΙ}} = \frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΑΓ}}$ ἕπεται ὅτι $\frac{(\text{ΑΛΝΡ})}{\text{Κ}^2} = \frac{\upsilon}{\beta}$ (ΑΜ = ὕψος τοῦ ΑΒΓ καὶ ΑΓ = β)· ἐκ τῆς τελευταίας δὲ ταύτης, συνάγομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον ρ^2 ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΛΝΡ καὶ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι πρὸς τὸ Κ^2, ὡς τὸ υ πρὸς τὸ β· ὅταν δὲ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν ρ λαμβάνομεν ἐκ τῆς προεκτάσεως τῆς ΜΑ τὸ ΑΣ ἴσον τῇ ρ, ὑψοῦμεν ἔπειτα ἐκ τοῦ Σ κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΣ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν τὴν ΑΤΔ καὶ τέλος ἐκ τοῦ Τ τὴν ΤΛΘΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ κτλ. ἐὰν δὲ ἡ κάθετος ΣΤ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς γραφείσης ἡμιπεριφερείας λαμβάνομεν τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

Σελ. 241.—542) Ἐπίπεδον, διότι αὕτη ἑνώνει δύο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου.

543) Ὅταν ἔχῃ τρεῖς πόδας.

544) Πάντοτε, πλὴν τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν ἔχουσι καὶ αἱ τρεῖς ἓν κοινὸν σημεῖον, ὁπότε δύνανται νὰ ὁρίζωσι τρία ἐπίπεδα.

545) Ἑνοῦμεν τὸ Δ μετὰ σημείου τινὸς Ε τῆς ΑΒ· ἐὰν τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἡ ΕΔ θὰ τέμνει τὴν ΑΓ· ἐὰν ὅμως ἡ ΕΔ δὲν τέμνει τὴν ΑΓ, τὸ Δ κεῖται ἐκτός.

546) Εἶναι ἡ ΑΓ.

547) Ἡ εὐθεῖα ἥτις τέμνει τὸ ἐπίπεδον, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας· ἑπομένως ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ τομὴ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἄλλου.

Σελ. 244—548) Ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην (§ 310).

549) Ἔστω Π τὸ ἐπίπεδον καὶ ΑΒ ἡ εὐθεῖα ἡ πλαγία πρὸς αὐτό· ἐὰν διὰ τοῦ Β, ποδὸς τῆς πλαγίας φέρωμεν ἐπίπεδον Σ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν

ΒΓ τότε ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἤδη ἡ ΑΒ ἐὰν ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ Π διερχομένην διὰ τοῦ Β, θὰ ἦτο ἡ ΑΒ κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ Π, ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον διότι ἡ ΑΒ ἐδόθη πλαγία πρὸς τὸ Π.

550) Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κάθετοι ἀνὰ δύο· ἐὰν ἡ ΟΑ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν ΟΒ, ΟΓ θὰ εἴχομεν δύο καθέτους τὰς ΘΑ, ΟΒ, ἐπὶ τῆς ΟΓ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας· τὸ ὅτι δὲ ἑκάστη τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων, συνάγεται ἐκ τοῦ θεωρήματος 309.

551) Αἱ ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων κάθετοι ἐπὶ τὴν ζητουμένην κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην· ὥστε ἡ ζητουμένη εἶναι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ἄλλων δοθέντων σημείων.

Σελ. 248—552) Διότι εἶναι παράλληλον πρὸς τρίτην (ἐδ. 315).

553) Εἶναι ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι δύο τοιαῦται κάθετοι.

554) Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς εὐθείας ἄγονται ἄπειροι κάθετοι κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὁ δὲ τόπος τῶν κοινῶν σημείων εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἥτις εἶναι κοινὴ τομὴ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν καθέτων εἰς ἓν σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας· ὥστε ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

555) Βλέπε σημ. 6 τοῦ θεωρ. 316.

556) Ἐὰν ἐκ τοῦ 6 φέρωμεν τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ (προηγ. ἄσκησις)· ἀλλ' ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ, ἔχομεν $(ΒΕ)^2 = \frac{10^2}{2} = 50$ ἢ $ΒΕ = 5\sqrt{2}$· πάλιν δὲ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΒΕ ἔχομεν $(ΔΕ)^2 = (ΒΕ)^2 + (ΒΔ)^2 = 50 + 6{,}25 = 56{,}25$ ἤτοι $(ΒΔ) = 7{,}5$.

557) Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ Δ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ· ἀλλὰ τότε ΓΔ = ΑΔ = ΔΒ· ἐὰν δὲ Ε εἶναι τὸ σημεῖον δι' ὃ εἶναι ΕΑ = ΕΒ = ΕΓ, ἡ ΕΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι ἐὰν δὲν ἦτο αὕτη ἀλλ' ἦτο ἡ ΕΖ, τότε θὰ εἴχομεν ΖΑ = ΖΒ = ΖΓ ἄρα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ θὰ ἔκειντο ἐπὶ περιφερείας ἥτις θὰ εἶχε κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΑ· ἀλλὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας

μὲ κέντρον Δ· ὥστε αἱ περιφέρειαι Δ καὶ Ζ θὰ εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ὁ ΕΔ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

558) Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Δ σημεῖόν τι δι' ὃ εἶναι ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ καὶ ΔΚ ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ· ὥστε εἶναι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ καὶ ἑπομένως διὰ τῶν Α,Β,Γ διέρχεται περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Κ· ἄλλο δέ τι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, εἰς τὸ σημεῖον Κ· καὶ πᾶν δὲ σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης, ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ ἤτοι ὅτι εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· ὥστε ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι ἡ κάθετος αὕτη.

559) Βλέπε προηγουμένην ἄσκησιν.

560) Βλέπε ἄσκησιν 557.

561) Στῖχος 1, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου νὰ διορθωθῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἐὰν Α, Β εἶναι τὰ δοθέντα σημεῖα αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι αἱ κάθετοι ΑΔ, ΒΕ, ὥστε τὸ σχῆμα ΑΒΕΔ εἶναι τραπέζιον· ἡ δὲ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ, κάθετος ἐπὶ τὸ Π, εἶναι ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου· ἰσοῦται λοιπὸν μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ (§ 197 σημ.).

Σελ. 253 - 562) Ἐὰν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου φέρωμεν παράλληλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ἀχθείσης παραλλήλου, καὶ μὴ περιέχον τὴν δοθεῖσαν, εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτὴν (§ 319).

563) Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου φέρω δύο εὐθείας, αἵτινες εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς δοθείσας· τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον.

564) Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Διὰ σημείου Ε τινος τῆς ΑΒ φέρω τὴν ΕΖ παράλληλον τῆς ΓΔ· τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒ, ΕΖ εἶναι παράλληλον τῇ ΓΔ· ὁμοίως διὰ σημείου τινὸς Η τῆς ΓΔ φέρω παράλληλον τῇ ΑΒ τὴν ΗΘ τὸ ἐπίπεδον τότε τῶν ΓΔ, ΗΘ εἶναι παράλληλον τῇ ΑΒ.

565) Ἔστω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ὅπου Γ εἶναι ὁ πούς τῆς καθέτου ΒΓ

ἐπὶ τὸ Π· τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ τέμνει τὸ Π κατὰ τὴν ΓΔ, παράλληλον τῇ ΑΒ· ἄρα ἡ ΑΒ καὶ τὸ Π εἶναι παράλληλα.

566) Ἔστωσαν Π, Ρ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα παράλληλα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΒ καὶ Γ σημεῖον τι τῆς κοινῆς τομῆς των· ἐὰν ἤδη ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν παράλληλον τῇ ΑΒ αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἐπὶ τοῦ Ρ (§ 321)· ἄρα θὰ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν.

567) Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ὅπερ ἑνοῦμεν διὰ εὐθείας μετὰ τοῦ Ο, ἂς φέρωμεν δὲ τὴν ΝΑ παράλληλον τῇ ΚΜ, τέμνουσαν τὴν ΟΚ εἰς τὸ Α· ἀλλ' εἶναι $\frac{ΟΑ}{ΑΚ} = \frac{ΟΝ}{ΝΜ} =$ πρὸς τὸν δοθέντα λόγον· ὥστε τὸ Β εἶναι σημεῖον σταθερόν· ὁμοίως ἔχομεν $\frac{ΑΝ}{ΚΜ} = \frac{ΟΝ}{ΟΜ} =$ πρὸς γνωστὸν λόγον· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $\frac{ΑΝ^1}{ΚΜ^1} = \frac{ΟΝ}{ΟΜ}$ ἤτοι εἶναι $ΑΝ = ΑΝ^1$ κ.ο.κ. καὶ ἑπομένως, τὰ $Ν, Ν^1$ κ.τ.λ. κεῖνται ἐπὶ περιφερείας μὲ κέντρον Α.

568) Ἔχομεν $\frac{ΟΑ'}{Α'Α} = \frac{ΟΒ'}{Β'Β}$· ἄρα ἡ Α'Β' εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ Β'Γ' εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ· ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ' εἶναι παράλληλον τῷ ΑΒΓΔ. ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως ὅτι καὶ τὸ Δ' κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α'Β'Γ'· ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῶν τετραπλεύρων ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, αἱ γωνίαι τούτων εἶναι ἴσαι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΟΒ}{ΟΒ'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'}$ κ. τ. λ. ἕπεται ὅτι ἔχουσι καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους ἤτοι εἶναι ὅμοια.

569) Ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ὁπότε ἡ προβολή της εἶναι ἓν σημεῖον ἢ Ο.

570) Διότι αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας εἶναι ἴσαι· αὗται δὲ μετὰ τῆς εὐθείας καὶ μετὰ τῆς προβολῆς της σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον.

571) Ἔστω ΑΒ, ΓΔ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ αδ, γδ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ αἱ Αα, Γγ παράλληλοι, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑα, ΓΓγ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα (§ 230)· αἱ δὲ τομαὶ τῶν παραλ-

λήλων τούτων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ τρίτου εἶναι αἱ αϐ, γδ, αἵτινες εἶναι παράλληλοι.

572) Διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου, προβάλλονται κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν κατὰ εὐθείας παραλλήλους.

573) Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ μ ἡ προβολή του, αἱ παράλληλοι Αα, Μμ, Βϐ, τέμνουσι τὰς ΑΒ καὶ αϐ εἰς μέρη ἀνάλογα (§ 233).

574) Διότι ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὕτη μετὰ τῶν ἴσων εὐθειῶν σχηματίζει ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα.

Σελ. 260 – 575) Διότι (σχ. σελ. 259) ἡ ἀπόστασις τῆς ΓΔ ἀπὸ τῆς τυχούσης ΑΒ, εἶναι ἡ ΘΗ, ἥτις ἰσοῦται πρὸς τὴν ΔΖ· ἀπόσταιν τῆς ΓΔ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἥτις εἶναι σταθερά.

576) Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ δύο τοιαῦται γραμμαὶ καὶ Π ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ· τότε ἡ προβολὴ τῆς ΑΒἐπὶ τὸ Π εἶναι ἓν σημεῖον, ἀλλ' ἡ κοινὴ κάθετος μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π, καὶ ἡ προβολὴ ταύτης, εἶναι ἡ κάθετος ἡ ζητουμένη.

Σελ. 263—577) Διότι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι αὐτῶν, εἶναι ἐφεξῆς καὶ τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἀπ' εὐθείας· ἄρα εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ἔχουσι ἄθροισμα δύο διέδρων γωνιῶν (σημ. § 340).

578) Ἐὰν τοιαῦται δίεδροι εἶναι αἱ ΔΑΒΓ καὶ ΔΑΒΕ, ἡ προέκτασις τῆς ἕδρας ΓΑΒ εἶναι ἡ ΕΑΒ· διότι ἂν ἦτο ἡ Ε'ΑΒ θὰ ἔχομεν, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν Ε'ΑΒΔ$+$ΔΑΒΓ $=$ 2 ὀρ. καὶ ἐπειδὴ ἐδόθη ΔΑΒΕ$+$ΔΑΒΓ$=$2 ορ., ἕπεται Ε'ΑΒΔ$=$ΕΑΒΔ· ἤτοι αἱ ἕδραι Ε'ΑΒ καὶ ΕΑΒ συμπίπτουσι.

579) Διότι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθῶν.

Σελ. 265 — 580) Διότι (σχ. σελ. 264) τὸ διὰ τῆς ΒΑ καθέτου ἐπὶ τὸ ΜΝ, ἐκ σημείου τυχόντος Β, τῆς ΓΔ, καὶ τῆς ΓΔ ἐπίπεδον, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΜΝ· εἶναι δὲ καὶ ἓν μόνον· διότι ἂν διὰ τῆς ΓΔ διήρχετο καὶ ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ΜΝ τότε ἡ κοινὴ τομὴ ΓΔ καθέτων ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ΜΝ θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΝ (§ 344), ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΓΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ ΜΝ.

581) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου φέρω κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ἄλλων παράλληλον πρὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὡς διερχόμενον διὰ τῆς καθέτου εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· εἶναι δὲ καὶ παράλληλλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν διότι αὔτη εἶναι παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου· εἶναι δὲ προφανῶς καὶ ἓν μόνον.

582) Εἶναι τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον γωνίαν ἐπίπεδον· διότι ἐὰν Κ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου ὁρίζουσιν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου· λαμβάνομεν δὲ οὕτω τὴν ἀντίστοιχον γωνίαν τῆς διέδρου· ἐὰν δὲ ἀκολούθως φέρομεν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου καὶ τοῦ Μ, εὐκόλως δεικνύεται ὅτι τοῦτο διχοτομεῖ τὴν δίεδρον, διότι αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι εἰς ἃς διαιρεῖται ἡ πρώτη, εἶναι ἴσαι· ἀντιστρόφως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ἐπιπέδου, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν.

583) Διότι ἐὰν φέρωμεν διὰ ταύτης ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμήν, θὰ λάβωμεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἴσα.

584) Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ καὶ ΠΡ τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Α, ΓΔ δὲ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων· ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρω τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῇ ΑΒ, τὴν ΕΖ αὔτη θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καὶ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ, διότι καὶ ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ· ἀλλ' ἡ ΑΕΖ εἶναι ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΑΒΓΖ, ἥτις ἐπομένως εἶναι ὀρθή, ἤτοι τὸ ΠΡ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΜΝ.

585) Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ΠΡ κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ΓΔ δὲ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων· ἔστω δὲ πάλιν ἡ ΕΖ τοῦ ΠΡ κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν ΓΔ· ἀλλ' ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΝ (§ 342)· ὥστε αἱ ΑΒ, καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι· ἄρα (§ 319) ἡ ΑΒ καὶ τὸ ΠΡ εἶναι παράλληλα.

Σελ. 269 — 585) Ἔστωσαν Ο καὶ Ο′ δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι παραπληρωματικαί, Α δὲ δίεδρός τις γωνία τῆς Ο, α ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος αὐτῆς καὶ β ἕδρά τις τῆς Ο′, δι' ἣν εἶναι $\alpha + \beta = 2$ ὀρθ. Ἔστωσαν δὲ πάλιν O_1 καὶ O_1' αἱ κατὰ κορυφὴν τῶν Ο καὶ Ο′, α′ ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου Α′ τῆς τριέδρου Ο′ καὶ τῆς ὁποίας Α′, αἱ ἕδραι εἶναι προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν τῆς Α καὶ β′ ἡ ἕδρα τῆς O_1' ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν β· ἐπομένως ἀφοῦ εἶναι $\alpha + \beta = 2$ ὀρθ., θὰ εἶναι καὶ $\alpha' + \beta' = 2$ ὀρθ. καὶ ὁμοίως ἀποδεικνύεται διὰ τὰς ἄλλας διέδρους καὶ ἕδρας τῶν κατὰ κορυφὴν τριέδρων O_1, O_1'· εἶναι ἐπομένως αὗται παραπληρωματικαί.

587) Ἔστω ΑΒΓ ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ ΒΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ· ἀλλὰ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ΑΒΓ (§ 341)· ἄρα αἱ δίεδροι ΒΑ καὶ ΒΓ εἶναι ὀρθαί· ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Β, τῆς ἀκμῆς ΒΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΒΓ εἶναι ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΒΔ· αἱ δὲ ἄλλαι ἐπίπεδοι ΔΒΑ, ΔΒΓ εἶναι προφανῶς ὀρθαί.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι ὀρθή, σχηματίζεται τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία.

Σελ. 277 — 588) Ἔστω ΟΑΒΓ ἡ τρίεδρος στερεὰ δι' ἣν εἶναι ἴσαι αἱ ἕδραι ΑΟΒ, ΒΟΓ καὶ ἔστω ΟΒΔ τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὴν ΑΟΓ· τότε αἱ τρίεδροι ΟΑΒΔ, ΟΒΔΓ ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, καὶ ἐπομένως ἔχουσι ἴσας καὶ τὰς διέδρους ΟΓ, ΟΑ ἴσας (§ 356).

589) Ἔστωσαν τῆς στερεᾶς τριέδρου γωνίας ΟΑΒΓ, αἱ ἴσαι δίεδροι ΟΑ,ΟΓ· ἤδη φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς ΟΒ, κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ, τὴν ΒΔ καὶ κατόπιν τὰς ΔΕ, ΔΖ καθέτους ἐπὶ τὰς ΟΑ,ΟΓ· ὁπότε καὶ αἱ ΒΕ, ΒΖ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ΟΑ, ΟΓ· ὥστε αἱ ΟΑ,ΟΓ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΒΕΔ,ΒΖΔ· ἄρα αἱ γωνίαι ΒΕΔ,ΒΖΔ εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν ΟΑ,ΟΓ καὶ ἐπομένως ἴσαι· ὥστε εἶναι ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα ΒΕΔ, ΒΖΗ, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὁποίων λαμβάνομεν ΒΕ = ΒΖ· ἀλλὰ πάλιν εἶναι ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα ΟΕΒ,ΟΖΒ· ἄρα καὶ αἱ ΕΟΒ καὶ ΖΟΒ.

590) Τὰ διχοτομοῦντα δύο διέδρους τῆς στερεᾶς τέμνονται κατ' εὐθεῖαν, τῆς ὁποίας πᾶν σημεῖον ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς τρίτης διέδρου· ἐπομένως αὕτη κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν τρίτην δίεδρον.

591) Ἔστω ΟΑΒΓ τρίεδρος στερεὰ γωνία καὶ ἂς φέρωμεν ἐπί-

πεδον ΑΒΓ τέμνον τὰς ἀκμὰς αὐτῆς οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ· ἀλλ' αἱ διχοτόμοι ΟΔ, ΟΕ τῶν γωνιῶν τῶν κορυφῶν τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ εἶναι καὶ διάμεσοι· ὥστε αἱ ΑΕ, ΓΔ εἶναι διάμεσοι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἐὰν δὲ Ζ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν, τὰ ἐπίπεδα ΑΟΕ, ΚΟΔ, ἔχουσι κοινὴν τομὴν τὴν ΟΖ· ἐὰν δὲ φέρωμεν ἤδη καὶ τὴν τρίτην διάμεσον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὴν ΒΗ, αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ Ζ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΟΗ διχοτόμος τῆς ΑΟΓ· ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΒΗ διέρχεται διὰ τῆς ΟΖ.

Σελ. 277 — 592) Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ ΟΕ, ἡ διχοτόμος τῆς ὀξείας γωνίας ΑΟΔ· ἐκ τοῦ τυχόντος δὲ σημείου Ε ταύτης, ἔστωσαν αἱ κάθετοι ΕΗ, ΕΘ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης καὶ ΕΜ ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΕΗ = ΕΘ εἶναι καὶ αἱ ΜΗ, ΜΘ ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπὶ τῶν ΟΑ, ΟΔ· ὥστε τὸ Μ ὡς καὶ πᾶν σημεῖον τῆς ΕΜ, εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· ἐπειδὴ δὲ τὸ Ε κινεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΕ, ἕπεται ὅτι ἡ ΕΜ γράφει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς διχοτόμου ταύτης καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας· ὁμοίως ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον τῆς ἀμβλείας γωνίας ΑΟΓ, ὁ τόπος ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς διχοτόμου ταύτης κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας ΑΟΓ· τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸν τόπον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα.

593) Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα Μ, Ν τὰ ὁποῖα τέμνονται κατὰ τὴν ΑΒ καὶ ἔστω Γ ἓν σημεῖον τοῦ τόπου κείμενον ἐντὸς τῆς μικροτέρας τῶν διέδρων γωνιῶν τὰς ὁποίας ταῦτα σχηματίζουσι καὶ κάθετοι ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα αἱ ΓΔ, ΓΕ αἵτινες εἶναι ἴσαι καὶ ΓΖ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΕΖ, ΔΖ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι γων. ΓΖΕ = γων. ΓΖΔ, ἕπεται ὅτι τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ΑΒ καὶ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον γωνίαν ΕΑΒΔ· πᾶν δὲ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα Μ καὶ Ν· ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον γωνίαν ΕΑΒΔ· ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰ σημεῖα τοῦ τόπου τὰ κείμενα ἐντὸς τῆς μεγαλυτέρας διέδρου γωνίας τῶν ἐπιπέδων Μ, Ν·

ὥστε ὁ Ζ τόπος εἶναι τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους γωνίας τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.

Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Μ, Ν εἶναι παράλληλα, ὁ Ζ τόπος εἶναι ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτὰ μεταξὺ αὐτῶν καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν.

594) Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· τὰ κάθετα ἐπίπεδα ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ΒΓ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν, τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ καὶ τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α, Β, Γ· ἐὰν ἤδη φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΔ (ἢ ἐπὶ τῆς ΒΔ, ΓΔ) εἰς τὸ μέσον αὐτῶν, τοῦτο τέμνει τὴν εὑρεθεῖσαν κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒΓ, εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν τεσσάρων δοθέντων σημείων.

595) Εἶναι ἡ εὐθεῖα εἰς ἣν τέμνονται τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς τρεῖς διέδρους τῆς δοθείσης τριέδρου (βλέπε ἀσκήσεις 593, 590).

596) Εἶναι ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τῶν καθέτων ἐπιπέδων ἐπὶ τὰς ἕδρας τῆς δοθείσης τριέδρου καὶ διερχομένων διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἕδρας ταύτας (βλέπε ἄσκησιν 592).

597) Ἔστω Π τὸ ἐπίπεδον, Ο σημεῖόν τι αὐτοῦ καὶ Β σημεῖον ἐκτὸς τούτου· ΑΒ δὲ ἡ κάθετος ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Π· ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ Π καὶ διερχομένην διὰ τοῦ Ο, τὴν ΟΕ καὶ ΑΕ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΕ καὶ φέρομεν ἔπειτα τὴν ΕΒ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΟΕΒ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑπομένως τὸ Ε κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, οὗ διάμετρος εἶναι ἡ ΟΒ.

598) Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα καὶ Γ σημεῖόν τι ἐκτὸς αὐτῆς καὶ Π ἐπίπεδόν τι διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ· ἐὰν ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὸ Π τὴν ΓΔ καὶ ἐκ τοῦ Δ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν ΔΕ ἡ γωνία ΕΔΓ εἶναι ὀρθή, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἡ δὲ ΓΕ εἶναι τελείως ὡρισμένη· ὥστε τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου, οὗ τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, διέρχεται διὰ τοῦ Γ καὶ οὗ διάμετρος εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ δοθὲν σημεῖον Γ καὶ τὸ σημεῖον εἰς ὃ τὸ κάθετον τοῦτο ἐπίπεδον τέμνει τὴν δοθεῖσαν ΑΒ.

599) Εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν δύο δοθέντων σημείων καὶ εἰς σημεῖον καθ' ὃ τὰ τετράγωνα τῶν δύο

μερῶν αὐτῆς ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ σταθερᾷ διαφορᾷ (βλ. ἄσκησιν 536).

600) Ἔστω Α τὸ σημεῖον καὶ ΒΓ, ΔΕ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι· τὸ Α καὶ ἑκάστη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ὁρίζουσιν ἀνὰ ἓν ἐπίπεδον· τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν, ἥτις προδήλως διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ ἥτις τέμνει τὰς δοθείσας.

601) Ἔστωσαν α, β αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι τὰς ὁποίας πρέπει νὰ τέμνῃ, ἡ παράλληλος τῇ δοθείσῃ γ· δι' ἑκάστης τῶν α, β, φέρω ἐπίπεδα, παράλληλα ἕκαστον πρὸς τὴν γ· ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι προφανῶς παράλληλος τῇ γ καὶ συναντᾷ τὰς α καὶ β.

602) Νὰ εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα, νὰ διέρχωνται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ αἱ τομαὶ αὐτῶν ἀνὰ δύο νὰ εἶναι παράλληλοι ἢ ὅταν τὰ δύο εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλος πρὸς τὰς τομὰς αὐτῶν ὑπὸ τοῦ τρίτου εἶναι παράλληλος πρὸς τὰ τρία ἐπίπεδα.

603) Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σημεῖα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π· ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΜ κάθετον ἐπὶ τοῦ Π καὶ τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν μέχρι τοῦ Α′ καὶ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $ΑΜ = ΜΑ'$ καὶ κατόπιν ἑνοῦμεν τὰ Α′ καὶ Β διὰ τῆς Α′Β, ἥτις τέμνει τὸ Π εἰς τὸ Ν, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον· διότι ἂν Σ εἶναι ἄλλο σημεῖον τοῦ Π, θὰ ἔχωμεν $ΝΑ = ΝΑ'$ καὶ $ΣΑ = ΣΑ'$ ὡς καὶ $ΣΑ' + ΣΒ > Α'Β$ (ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΑ′Β) ἢ

$$ΣΑ + ΣΒ > Α'Ν + ΝΒ \quad ἢ \quad ΣΑ + ΣΒ > ΝΑ + ΝΒ.$$

604) Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, Β ὁ ποῦς τῆς καθέτου ταύτης καὶ Γ τὸ σημεῖον εἰς ὃ τέμνει αὔτη ἄλλο ἐπίπεδον Ρ καὶ ΜΝ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ· ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΝ, καὶ ἡ ΒΔ τότε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ· ὥστε τὸ ἐπίπεδον ΒΓΔ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΝ καὶ συνεπῶς κάθετον ἐπὶ τὸ Ρ· ὥστε κατὰ τὴν τομὴν αὐτοῦ καὶ τοῦ Ρ προβάλλεται ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα.

605) Ἀφοῦ εἶναι γων. $ΑΒβ =$ γων. ΓΔδ, τὰ ἐπίπεδα ΑΒβα καὶ ΓΔδγ εἶναι παράλληλα, ἑπομένως καὶ αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ τρίτου, αἱ αβ καὶ γδ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι· ἂς φέρωμεν ἤδη ἐκ τοῦ Α παράλληλον τῇ αβ καὶ ἥτις τέμνει τὴν Ββ

εἰς τὸ η καὶ ἐκ τοῦ Γ, παράλληλον τῇ γδ ἥτις τέμνει τὴν Δδ εἰς τὸ ζ· αἱ Αη καὶ Γζ εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒη καὶ ΓΔζ εἶναι ὅμοια· ἔχομεν ἄρα ΑΒ : ΓΔ = Αη : Γζ καὶ ἐπειδὴ τὰ σχήματα Ααβη, Γγδζ εἶναι παραλληλόγραμμα, ἔχομεν ΑΒ : ΓΔ = αβ : γδ.

606) Τοῦτο ἀληθεύει, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῶν πλευρῶν τῆς ἀντιστοίχου γωνίας, ἥτις προκύπτει ὅταν φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου, διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἄλλης γωνίας.

607) Ἔστω ΑΒΓ ὀρθὴ γωνία, ἧς ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐὰν ἤδη ἐκ τοῦ Β, φέρωμεν τὴν Ββ κάθετον ἐπὶ τοῦ Π, τὸ ἐπίπεδον ΑΒβ, κάθετον ἐπὶ τὸ Π, τέμνει τὸ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν βα, ἥτις εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΒΑ· εἶναι δὲ καὶ παράλληλος πρὸς αὐτήν· ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον ΓΒβ, κάθετον ἐπὶ τὸ Π, τέμνει αὐτὸ κατὰ τὴν εὐθεῖαν βγ, ἥτις εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὸ Π. Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΒβ· ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒβ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΓΒβ, ἐφ' ὃ εἶναι κάθετος καὶ ἡ αβ· ὥστε ἡ αβ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν βγ· ἤτοι ἡ αβγ, προβολὴ τῆς ΑΒΓ, ἐπὶ τὸ Π εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Ἐὰν οὐδεμία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἢ ἀμφότεραι τέμνουσι τὸ ἐπίπεδον, ἡ γωνία αὕτη ἀποδεικνύεται ὅτι προβάλλεται κατ' ἀμβλεῖαν γωνίαν· κατ' ὀξεῖαν δὲ ἐὰν συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ἡ μία πλευρὰ αὐτῆς καὶ ἡ προέκτασις τῆς ἄλλης.

608) Ἔστω τὸ στρεβλὸν τετράπλευρον ΟΑΒΓ (σχ. σελ. 269)· ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΒ, αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΑΓΒ ἔχουσιν ἄθροισμα τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν· ἀλλ' εἶναι (§ 342) $ΟΑΓ < ΟΑΒ + ΒΑΓ$ καὶ $ΟΒΓ < ΟΒΑ + ΑΒΓ$· ὥστε προδήλως εἶναι $ΑΟΒ + ΟΒΓ + ΒΓΑ + ΓΑΔ < 4$ ὀρθῶν γωνιῶν.

609) Ἔχομεν $ΔΟΑ + ΔΟΓ > ΑΟΓ$, $ΔΟΓ + ΔΟΒ > ΒΟΓ$, $ΔΟΑ + ΔΟΒ > ΒΟΑ$ (§ 349) καὶ διὰ τῆς προσθέσεως αὐτῶν λαμβάνομεν $2\,(ΔΟΑ + ΔΟΒ + ΔΟΓ) > ΑΟΒ + ΒΟΑ + ΑΟΓ$.

610) Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ καὶ ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΟΔΑ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε· τότε ἔχομεν (§ 349)

$$ΑΟΒ + ΒΟΕ > ΕΟΑ \quad ἢ \quad ΑΟΒ + ΒΟΕ > ΕΟΔ + ΔΟΑ\cdot$$

ἤδη προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης τὴν ΕΟΓ, ὁπότε ἔχομεν $ΑΟΒ + ΒΟΕ + ΕΟΓ > ΕΟΓ + ΕΟΔ + ΔΟΑ$ (1)· ἀλλ' εἶναι $ΒΟΕ + ΕΟΓ = ΒΟΓ$ καὶ $ΕΟΓ + ΕΟΔ > ΓΟΔ$· ὥστε ἡ (1) γίνεται $ΑΟΒ + ΒΟΓ > ΑΟΔ + ΓΟΔ$.

611) Ἔστω ἡ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ ἧς αἱ ἀκμαὶ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου κατὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΟΕ ἡ κάθετος ἐκ τῆς κορυφῆς Ο, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· φέρωμεν ἤδη τὴν ΓΕ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ· ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΟΕΓ, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν ΟΕ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ καὶ τὴν ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τὸ ΑΟΒ· ἄρα θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΑΒ· ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΓΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· δηλαδὴ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ὁμοίως, ἂν φέρωμεν τὴν ΑΕ ἥτις θὰ συναντήσῃ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΑΕΗ εἶναι ὕψος τοῦ αὐτοῦ τριγώνου καθὼς καὶ ἡ ΒΕΘ, ἐὰν Θ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς ὃ τέμνει ἡ ΒΕ τὴν ΑΓ.

612) Ἔστω ἡ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ ἧς αἱ ἀκμαὶ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ· καὶ ἔστω $ΟΑ = α$, $ΟΒ = β$, $ΟΓ = γ$· φέρωμεν ἤδη διὰ τῆς ΟΓ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνον αὐτὴν εἰς τὸ Δ· ἡ ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ τὸ δὲ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ο· ἔχομεν ἑπομένως $(ΟΒ)^2 = (ΑΒ).(ΔΒ)$ ἢ $β^2 = \sqrt{α^2+β^2}.(ΔΒ)$ καὶ $(ΔΒ) = \dfrac{β^2}{\sqrt{α^2+β^2}}$· ἐπίσης ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΒ λαμβάνομεν $(ΟΔ)^2 = ΟΒ^2 - (ΔΒ)^2 = β^2 - \dfrac{β^4}{α^2+β^2}$· καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΟΓΔ λαμβάνομεν

$$(ΓΔ)^2 = (ΟΓ)^2 + (ΟΔ)^2 = γ^2 + β^2 - \frac{β^4}{α^2+β^2} = \frac{α^2γ^2 + γ^2β^2 + α^2β^2 + β^4 - β^4}{α^2+β^2}$$

καὶ $(ΓΔ) = \dfrac{\sqrt{α^2γ^2+γ^2β^2+α^2β^2}}{\sqrt{α^2+β^2}}$· Ἤδη εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅπερ εἶναι $\dfrac{1}{2}.(ΑΒ)(ΓΔ)$ ἢ

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{α^2+β^2}\cdot\frac{\sqrt{α^2γ^2+γ^2β^2+α^2β^2}}{\sqrt{α^2+β^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{α^2γ^2+γ^2β^2+α^2β^2}\cdot$$

613) Ἔστω ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ καὶ ἔστω ὅτι τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα διχοτομοῦσι τὰς ἕδρας ΑΟΒ, ΒΟΓ καὶ κάθετα

ἐπ' αὐτὰ τέμνονται κατὰ τὴν ΟΖ· ἀλλὰ τὰ σημεῖα τῆς ΟΖ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ ὡς καὶ ἀπὸ τὰς ΟΒ, ΟΓ· ἄρα ἀπέχουσιν ἴσον καὶ ἀπὸ τὰς ΟΑ καὶ ΟΓ· ὥστε κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ καὶ διχοτομοῦν αὐτήν.

614) Ἔστω ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ καὶ ὅτι τὰ ἐπίπεδα διὰ τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ τὰ κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας ΓΟΒ, ΑΟΓ τέμνουσιν αὐτὰς κατὰ τὰς εὐθείας ΟΔ, ΟΕ· ἐπὶ τὰς εὐθείας δὲ αὐτὰς φέρω ἐκ τοῦ σημείου Γ τῆς ἀκμῆς ΟΓ καθέτους τὰς ΓΔ καὶ ΓΕ, αἵτινες τέμνουσι τὰς ἄλλας ἀκμὰς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἡ ΓΑ ἥτις κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΟΓ καὶ ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ΟΕ, τῶν ἐπιπέδων ΑΟΓ, ΟΒΕ καθέτων πρὸς ἄλληλα, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΒΕ, ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΒΕ· ἤτοι ἡ ΒΕ, εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ὁμοίως καὶ ἡ ΓΒ οὖσα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΔ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΔ· ἤτοι ἡ ΑΔ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΟΒΕ καὶ ΟΑΔ, τέμνονται κατὰ τὴν ΟΖ, ὅπου Ζ εἶναι τὸ σημεῖον εἰς ὃ τέμνονται τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· καὶ ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΖΘ ἥτις εἶναι τὸ τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ περιέχον τὰς ΓΒ καὶ ΓΑ καθέτους ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΟΔ, ΒΟΕ εἶναι κάθετον ἐπὶ ταῦτα· ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΟΖ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ΟΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπέδον ΟΓΘ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ τὸ ΟΑΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΓΟΘ· καὶ οὕτω ἀπεδείχθη ὅτι τὰ περὶ οὗ πρόκειται ἐπίπεδα, διέρχονται διὰ τῆς ΟΖ.

Σελ. 283) 615) Ἔστωσαν δύο διαγώνιοι αἱ ΑΗ, ΒΘ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΕΓ (σχ. σελ. 283). Ἡ ΒΑ, οὖσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ ἐπὶ τὴν ΑΕ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΘΕ· ἤτοι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΘ· ὥστε τὸ ΑΒΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΗ καὶ ΒΘ εἶναι ἴσαι· ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς ΑΗ καὶ ΖΔ κ. ο. κ.

Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΖΘ λαμβάνομεν $(ΒΘ)^2 = (ΒΖ)^2 + (ΖΘ)^2$· ἀλλὰ πάλιν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΕΘ λαμβάνομεν $(ΖΘ)^2 = (ΖΕ)^2 + (ΕΘ)^2$ ἢ $(ΖΕ)^2 + (ΖΗ)^2$· ὥστε εἶναι

$$(ΒΘ)^2 = (ΒΖ)^2 + (ΖΕ)^2 + (ΖΗ)^2.$$

616) Διότι κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἔχομεν

$$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 = 3\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \delta = \alpha\sqrt{3}$$

617) Διότι αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου, εἶναι διαγώνιοι τῶν παραλληλογράμμων τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐκ τῶν τομῶν αὐτοῦ διὰ τῶν διαγωνίων ἐπιπέδων· ἑπομένως τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι διαγωνίους ἴσας, εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἑπομένως τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον, διότι αἱ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τὰς ὁποίας δὲν περιέχουσι.

Σελ. 288.—618) Ἡ τομὴ παραλληλεπιπέδου ὑπὸ ἐπιπέδου, δύναται νὰ εἶναι τρίγωνον, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τέμνει τρεῖς μόνον ἀκμὰς αὐτοῦ σχηματιζούσας τρίεδρον ἢ παραλληλόγραμμον ἐὰν τέμνῃ τέσσαρας ἀκμὰς αὐτοῦ παραλλήλους ἢ ἑξάγωνον ἐὰν τέμνῃ ἓξ ἀκμὰς αὐτοῦ ἢ πεντάγωνον, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς, τέμνῃ τέσσαρας ἀκμὰς ἐκτὸς τῆς κορυφῆς.

619) Ἐὰν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι αἱ ΑΒ, ΔΓ, ἡ τομὴ ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον διότι ἡ ΑΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν, εἰς ἣν ἀνήκει ἡ ΑΔ· καὶ ἥτις ἕδρα εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς α· ἔχομεν λοιπὸν $ΑΔ = \alpha\sqrt{2}$ καὶ ἑπομένως εἶναι

$$(ΑΒΓΔ) = \alpha \cdot \alpha\sqrt{2} = \alpha^2\sqrt{2}.$$

620) Ἔστω τὸ ὀρθὸν πρίσμα ΑΙ (σχ. σελ. 284)· τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσεις τὰς ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΑ καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ὥστε εἶναι

$$ΑΒ \cdot υ + ΒΓ \cdot υ + ΓΔ \cdot υ + ΔΕ \cdot υ + ΕΑ \cdot υ =$$
$$(ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ) \cdot υ.$$

621) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας ΕΑαε (σχ. σελ. 286) εἶναι (Αα) . (ΚΖ), τὸ δὲ τῆς ἕδρας ΑΒβα, εἶναι (Αα) . (ΖΗ) κ.ο.κ. ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι

$$(Αα)(ΚΖ + ΖΗ + ΗΘ + ΘΙ + ΙΚ).$$

Σελ. 292.— 622) Εἶναι $4{,}3 \times 8{,}91 \times 2{,}17 = 83{,}13921$ κ.π.

623) Ὁ κύβος πλευρᾶς 5 πήχεων ἔχει ὄγκον 5^3· ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου κατὰ τὸν ὄγκον εἶναι

$$\sqrt[3]{2\alpha^3} = \alpha\sqrt[3]{2}.$$

624) Ἡ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς δύο πήχεων. ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{4}(2)^2.\sqrt{3}=\sqrt{3}$· ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι $5\sqrt{3}=8{,}66025$.. κ. π. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος σύγκειται ἐκ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων, ὧν τὸ ἐμβαδὸν $2\sqrt{3}$ καὶ ἐκ τριῶν ἴσων ὀρθογωνίων, ἐχόντων βάσιν 2 καὶ ὕψος 5· ἄρα ὅλη εἶναι $30+2\sqrt{3}=33{,}4641$.. τ. π.

625) Ἐὰν νοηθῇ ἡ δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος, ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι $10{,}2\times10{,}2\times1{,}8=187{,}272$ κ. π. ἢ 187272 λίτραι· ὥστε τὸ βάρος αὐτοῦ εἶναι $\frac{187272\times312{,}5}{400}$ ὀκάδες ἢ 146306 ὀκ. 100 δράμ.

626) Χωρεῖ $6\times5{,}8\times3{,}2=111{,}360$ κυβ. μέτρα· ἂν ἀντὶ ἀέρος ἦτο ὕδωρ, θὰ εἶχε βάρος 111360 χιλιόγραμμα, διότι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι 111360 κυβ. παλάμαι ἤτοι λίτραι· ἄρα ὁ ἀὴρ θὰ ἔχῃ βάρος $\frac{111360}{770}$ χιλιόγραμμα ἤτοι 144 χιλιόγραμμα 623 γραμμάρια.

627) Ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου εἶναι $\sqrt[3]{80}=2\sqrt[3]{10}$· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς μιᾶς ἕδρας εἶναι $\left(2\sqrt[3]{10}\right)^2=4\sqrt[3]{10^2}$ καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $24\sqrt[3]{10^2}$.

Σελ. 295 — 628) Ἔστω ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ δύο ὅμοια πολύγωνα μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔστω ὅτι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΑΒ, Α΄Β΄ εἶναι παράλληλοι, ὡς καὶ αἱ ὁμόλογοι ΒΓ, Β΄Γ΄ κ. ο. κ. αἱ ΑΒ, Α΄Β΄ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἔστω δὲ ὅτι αἱ ΑΑ΄, ΒΒ΄ τέμνονται εἰς τὸ Ο, ὁμοίως αἱ ΒΓ, Β΄Γ΄ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἔστω δὲ ὅτι ἡ ΟΓ΄ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Κ· ἔχομεν τότε ΒΚ : Β΄Γ΄ = ΒΟ : Β΄Ο = ΒΑ : Β΄Α΄ = ΒΓ : Β΄Γ΄ ἤτοι εἶναι ΒΚ : Β΄Γ΄ = ΒΓ : Β΄Γ΄ καὶ ἑπομένως τὸ Κ συμπίπτει μὲ τὸ Γ· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΔ΄ διέρχεται διὰ τοῦ Ο·

629) Ἔστω ΟΑΒΓ ἡ πυραμὶς καὶ α σημεῖόν τι τῆς ΟΑ, ὥστε τὸ δι᾽ αὐτοῦ διερχόμενον παράλληλον ἐπίπεδον, δίδῃ τομὴν τὴν αβγ, ἥμισυ τῆς ΑΒΓ, ἤτοι εἶναι $\frac{(ΑΒΓ)}{(αβγ)}=2$· ἀλλὰ

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(αβγ)}=\frac{(ΑΒ)^2}{(αβ)^2}=\frac{(ΟΑ)^2}{(οα)^2} \text{ ἤτοι } \frac{(ΟΑ)^2}{(οα)^2}=2 \text{ ἢ } \frac{ΟΑ}{οα}=\sqrt{2}\cdot$$

ἐπομένως ἡ οα εἶναι πλευρὰ τετραγώνου οὗ διαγώνιος εἶναι ἡ ΟΑ.

Σελ. 298 — 630) Εἶναι ἐπίσης παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν.

631) Διαιροῦμεν τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ φέρομεν ἔπειτα διὰ τῆς δοθείσης πλευρᾶς καὶ δι᾽ ἑκάστου σημείου τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διαιροῦσι τὸ δοθὲν τετράεδρον εἰς τρία ἰσοδύναμα, διότι ἔχουσι βάσεις ἰσοδυνάμους (τὸ τρίτον τῆς ληφθείσης βάσεως τοῦ δοθέντος τετραέδρου) καὶ ὕψος τὸ αὐτό.

Σελ. 300 — 632) Εἶναι $\frac{1}{3} \times 5{,}2 \times 5{,}2 \times 12 = 108{,}16$ κ. π.

633) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἶναι $\frac{3}{2} \times 3{,}2 \times 32 \times \sqrt{3}$, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶναι πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 8 πχ. ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ εἶναι 3,2 πχ. (διότι τὸ ὕψος, ἐὰν ἀχθῇ, πίπτει εἰς τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου)· ὥστε τὸ ὕψος εἶναι $\sqrt{8^2 - (3{,}2)^2} = \sqrt{53{,}76}$· ἐπομένως ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{2} \times 3{,}2 \times 3{,}2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{53{,}76}$. Ἐκτελοῦντες δὲ τὰς πράξεις διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον ἴσον μὲ 65,02 . . . κ.π.

634) Ἐὰν διὰ τοῦ μ παρασταθῇ ἡ πλευρὰ τῶν τριγώνων, ἡ μὲν βάσις θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $\frac{1}{4} \mu^2 \sqrt{3}$, τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος, ἐὰν ἀχθῇ θὰ πέσῃ εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ἐπομένως θὰ εἶναι πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ὑποτείνουσα εἶναι μ, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ εἰς τὴν βάσιν περιγεγραμμένου κύκλου, ἥτις εἶναι $\frac{\mu}{\sqrt{3}}$· ὥστε τὸ ὕψος εἶναι

$\sqrt{\mu^2 - \frac{\mu^2}{3}} = \mu\sqrt{\frac{2}{3}}$ καὶ ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \mu^2 \sqrt{3} \cdot \mu \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \mu^3$$

635) Βλέπε προηγουμένην ἄσκησιν.

636) Εἰς ἓξ πυραμίδας αἵτινες ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων καὶ βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἐὰν δὲ τὸ ἐμβαδὸν βάσεώς τινος, τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι Ε καὶ υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὰς ὕψος, ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπι-

πέδου εἶναι Ε . υ, ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἥτις ἔχει βάσιν τὴν αὐτὴν (ὕψος δὲ ἔχει τὸ $\frac{υ}{2}$) εἶναι $\frac{1}{3}$. Ε . $\frac{υ}{2} = \frac{1}{6}$. Ε .υ· ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι $\frac{1}{6}$.

Σελ. 305 — 637) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως εἶναι $\frac{1}{2} \times 5,8 \times 3,2 = 9,28$, τῆς δὲ ἄλλης, ἐπειδὴ εἶναι ὁμοία τῇ πρώτῃ, τὸ ἐμβαδὸν ε θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν 9,28 τῆς πρώτης, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὑποτεινουσῶν, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{ε}{9,28} = \frac{4}{43:88}$· ὅθεν $ε = \frac{9,28}{10,97}$, ἑπομένως ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι $\frac{1}{3} . 4,25 . \left(9,28 + \frac{9,28}{10,97} + \frac{9,28}{\sqrt{10,97}}\right)$

$$\frac{4,25 \times 9,28}{3 \times 10,97}(11,97 + \sqrt{10,97}) = \frac{4,25 \times 9,28 \times 15,28 \cdot\cdot}{3 \times 10.97},$$

διότι ἡ $\sqrt{10,97}$ εὑρίσκεται, διὰ τῶν λογαρίθμων ἴση μὲ 3,31 . . . ὑπολογίζοντες δὲ τὴν τελευταίαν παράστασιν διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν τέλος τὸν ζητούμενον ὄγκον ἴσον μὲ 18,31 . . . κ. π.

638) Εἶναι $\frac{1}{3} . 20 . (8 + 2 + 7) = 113 \frac{1}{3}$ κ. π.

Σελ. 314 — 639) Αἱ ἀκμαὶ εἶναι ὡς $\sqrt{2}$ πρὸς $\sqrt{3}$ οἱ δὲ ὄγκοι ὡς $2\sqrt{2}$ πρὸς $3\sqrt{3}$.

640) Ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τετραπλασία καὶ ὁ ὄγκος ὀκταπλάσιος.

641) Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{O}{O'} = 2$ καὶ $\frac{O}{O'} = \frac{A^3}{A'^3}$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{A^3}{A'^3} = 2$ ἢ $A = A' . \sqrt[3]{2}$ · ἤτοι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἀκμάς του ἐπὶ $\sqrt[3]{2} = 1,26 \ldots$.

641) Ἔχομεν $K + E = 7 + 2$ ἢ $K + E = 9$ (§ 400)· ἀλλὰ τὸ ἁπλούστερον τῶν πολυέδρων εἶναι τὸ τετράεδρον ὅπερ ἔχει ἄθροισμα $K + E = 8$, τὸ δὲ πεντάεδρον ἔχει $K + E = 10$.

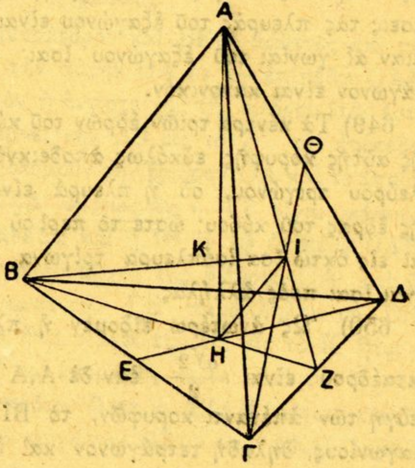
Σελ. 320 — 643) Ἔστωσαν ΑΒ, αβ εὐθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ (σχ. σελ. 315)· αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι Ββ, Γγ, Αα, τέμνονται ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΠΡ, αβ εἰς μέρη ἀνάλογα· ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Λ, ὅπερ εἶναι τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, διότι ἡ ΠΡ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου· αἱ δὲ γωνίαι ΒΛΡ, βΛΡ. εἶναι αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν ΑΒ, αβ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, αἵτινες εὐκολώτατα ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἴσαι.

644) Ἔστωσαν Ρ καὶ Σ δύο ἐπίπεδα συμμετρικὰ πρὸς τὸ Π καὶ ΑΒ ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου Ρ καὶ Π· ἀλλ' ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τοῦ Ρ ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐν τῷ Σ· πρέπει ἡ ΑΒ νὰ εἶναι κοινὴ εὐθεῖα τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Σ, ἐὰν δὲ ἔκ τινος σημείου Μ τῆς ΑΒ, φέρω καθέτους ἐπ' αὐτὴν κειμένας εἰς τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα, τὰς ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ, αἱ ΚΓ καὶ ΚΕ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ Π καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν σχηματίζουσι μετ' αὐτοῦ γωνίας ἴσας· αὗται δὲ εἶναι ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν σχηματιζομένων διέδρων· ἄρα τὸ Π διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν Ρ καὶ Σ.

645) Διότι εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ ἀγόμενον ἐπίπεδον.

Σελ. 320 — 646) Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράεδρον καὶ ΕΖ ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΒΔ καὶ ΑΓ ὡς καί ἡ ΗΘ ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΔΓ καὶ ΑΒ· ἀλλ' ἡ ΘΕ ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΒΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΔ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ὁμοίως καὶ ἡ ΖΗ, ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΗΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΕΖ καὶ ΗΘ τέμνονται δίχα εἰς τὸ Μ· ὁμοίως καὶ ἡ ΙΚ ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΒΓ καὶ ΑΔ, ἀποδεικνύεται ὅτι διχοτομεῖται εἰς τὸ Μ.

647) Ἔστω τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ, Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῆς ἕδρας ΒΓΔ καὶ Ι τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἕδρας ΑΓΔ· ἂς φέρωμεν δὲ τὰς ΑΗ καὶ ΒΙ, αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Κ, ἐπειδὴ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΒΖ· ἡ ΗΙ, διαιρεῖ εἰς μέρη ἀνάλογα τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΖ



Σχ. Ἀσκ. 647.

καὶ εἶναι ἑπομένως παράλληλος τῇ ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΗΙΚ καὶ ΑΒΚ ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ὅμοια καὶ ἔχομεν $\frac{ΗΚ}{ΚΑ}=\frac{ΙΚ}{ΚΒ}=\frac{ΗΙ}{ΑΒ}$· ἀλλὰ πάλιν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΖΗΙ, ΖΒΑ ἔχομεν

$$\frac{ΗΙ}{ΑΒ}=\frac{ΙΖ}{ΑΖ}=\frac{1}{3}\cdot \text{ ὥστε εἶναι καὶ}$$

$$\frac{ΗΚ}{ΚΑ}=\frac{ΙΚ}{ΚΒ}=\frac{1}{3} \text{ καὶ } \frac{ΗΚ}{ΗΚ+ΚΑ}=\frac{ΙΚ}{ΙΚ+ΚΒ}=\frac{1}{1+3} \quad \text{ἢ}$$

$\frac{ΗΚ}{ΑΗ}=\frac{ΙΚ}{ΒΙ}=\frac{1}{4}$· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ μὲ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν διέρχονται διὰ τοῦ Κ καὶ ὅτι κ.τ.λ.

648) Μία πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, οὗ ἡ τρίτη εἶναι διαγώνιος ἕδρας τινὸς τοῦ κύβου· εἶναι ἑπομένως ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου ταύτης· καὶ ἐπειδὴ ὅλαι αὗται αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι· ἐὰν δὲ ΓΔ καὶ Γ′Δ′ εἶναι δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ἑξαγώνου, αὗται εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοι ΓΓ′ καὶ ΔΔ′ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ο· ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι διαγώνιοι διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ο· εἶναι δὲ καὶ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἑπομένως τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἰσόπλευρα καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου ἴσαι· ὥστε τὸ περὶ οὗ πρόκειται ἑξάγωνον εἶναι κανονικόν.

649) Τὰ κέντρα τριῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου, αἵτινες διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τῆς ἕδρας τοῦ κύβου· ὥστε τὸ περὶ οὗ πρόκειται στερεὸν περατοῦται εἰς ὀκτὼ ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα, αἱ δὲ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

650) Ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ τούτου ὀκταέδρου εἶναι $\frac{α\sqrt{2}}{2}$· ἐὰν δὲ Α, Α′ : Β, Β′ : Γ, Γ′ εἶναι τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι κορυφῶν, τὸ ΒΓΒ′Γ′ εἶναι ρόμβος μὲ ἴσας διαγωνίους, δηλαδὴ τετράγωνον καὶ ἑπομένως ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν ἐπὶ $\sqrt{2}$ ἤτοι $\frac{α\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=α$.

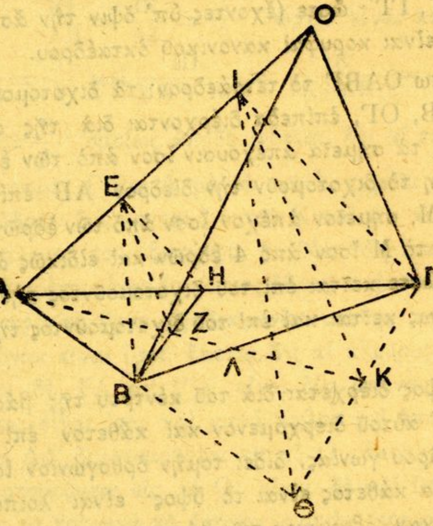
651) Ἐὰν Α, Α′ : Β, Β′ : Γ, Γ′ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν κανονικοῦ τετραέδρου, τὸ τετράπλευρον π. χ. ΒΓ′Β′Γ εἶναι ρόμβος, διότι ἑκάστη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκμῆς τοῦ τετραέδρου, πρὸς ἣν εἶναι παράλληλος· ὥστε αἱ ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ διχοτομοῦνται καθέτως καθὼς καὶ ἕκαστον ζεῦγος τῶν ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′· ὥστε (ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψιν τὴν ἄσκησιν 649) τὰ Α, Α′, κ.τ.λ. εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

652) Ἔστω ΟΑΒΓ τὸ τετράεδρον· τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας Ε, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου Ο. Ἤδη τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ΑΒ ἐπίπεδον, τέμνει τὴν Ε εἰς τὸ Μ, σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν ΟΑΒ, ΓΑΒ· ἀπέχει λοιπὸν τὸ Μ ἴσον ἀπὸ 4 ἑδρῶν καὶ εἰδικῶς ἀπὸ τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ, ΟΒΓ· ὥστε κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ΒΓ ἐπιπέδου· ὁμοίως κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ΑΓ ἐπιπέδου.

653) Τὸ ὕψος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ δὲ ἐπίπεδον τὸ δι᾿ αὐτοῦ διερχόμενον καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου γωνίας, δίδει τομὴν ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗ ἡ μία κάθετος εἶναι τὸ ὕψος· εἶναι λοιπὸν τοῦτο τὸ ἀπόστημα τοῦ καν. ἑξαγώνου τῆς βάσεως.

654) Ἔστω ΟΑΒΓ τὸ τετράεδρον καὶ ΒΕ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ ΕΗ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ΟΑ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΟΑΓ. ἡ ἐπίπεδος ΒΕΗ εἶναι λοιπὸν ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΟΑ· ἔστω δὲ ὅτι ἡ διχοτόμος αὐτῆς τέμνει τὴν ΒΗ εἰς τὸ Ζ· τὸ ἐπίπεδον τῆς ΟΑ καὶ ΕΖ εἶναι τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ΟΑ καὶ τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ΑΒΓ κατὰ τὴν ΑΖΛ· ὁμοίως ἂν ἡ ΓΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ, ἐφ᾿ ἣν εἶναι κάθετος καὶ ἡ ΙΘ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΟΑΒ, ἡ ἐπίπεδος γωνία ΓΙΘ εἶναι ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΟΑ καὶ ἧς τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὸ ΑΒΓ κατὰ τὴν ΓΘ παράλληλον τῇ ΒΗ· ὁμοίως ἡ διχοτόμος τῆς ΓΙΘ ἥτις τέμνει τὴν ΘΓ εἰς τὸ Κ ἤτοι ἡ ΙΚ εἶναι παράλληλος τῇ ΕΖ καὶ ἑπομένως κεῖται, ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ΟΑ ἐπιπέδου· ὥστε ἡ ΑΖΛΚ εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Ἤδη ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΖΛ καὶ ΛΚΓ λαμβάνομεν $\frac{ΒΛ}{ΛΓ} = \frac{ΒΖ}{ΚΓ}$ (1), ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΕΒΗ εἰς ὃ ἡ ΕΖ εἶναι

διχοτόμος τῆς γωνίας Ε, ἔχομεν $\frac{ΒΖ}{ΖΗ}=\frac{ΕΒ}{ΕΗ}$ (2) καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΖΗ, ΑΚΓ ὡς καὶ ἐκ τῶν ΑΗΕ καὶ ΑΓΙ ὁμοίως ἔχομεν $\frac{ΖΗ}{ΚΓ}=\frac{ΗΕ}{ΓΙ}$ (3). Ἤδη πολλαπλασιάζομεν κατὰ



Σχ. Ἀσκ. 654.

μέλη τὰς 2 καὶ 3 καὶ λαμβάνομεν $\frac{ΒΖ}{ΚΓ}=\frac{ΕΒ}{ΓΙ}$, συνδυάζοντες δὲ ταύτην μὲ τὴν 1 εὑρίσκομεν

$$\frac{ΕΛ}{ΛΓ}=\frac{ΕΒ}{ΓΙ} \quad ἢ \quad \frac{ΒΛ}{ΓΛ}=\frac{ΕΒ\,.\,ΛΟ}{ΓΙ\,.\,ΑΟ} \quad ἢ \quad \frac{ΒΛ}{ΛΓ}=\frac{2\,(ΑΟΒ)}{2\,(ΑΟΓ)} \quad ἢ$$

$$\frac{ΒΛ}{ΛΓ}=\frac{(ΑΟΒ)}{(ΛΟΓ)}.$$

655) Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα οὗ μία τῶν πλευρῶν εἶναι ἡ ΑΔ καὶ κάθετος τομὴ ἡ ΗΘΙ· ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι (ΗΘΙ).(ΑΔ) ἢ $\frac{(ΗΘ).(ΙΚ).(ΑΔ)}{2}$ (1), ὅπου ΗΘ καὶ ΙΚ εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τῆς τομῆς ΗΘΙ· ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΗΘΙ, ἕπεται ὅτι ἐπὶ τοῦτο εἶναι κάθετον καὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΘΗ, ἑπομένως ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου, εἶναι κάθετος ἡ ΙΚ, ἥτις εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς ἀκμῆς ΓΖ ἀπὸ τῆς ἕδρας

ΑΒΕΔ· ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ ΒΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΗΘΙ, ἡ ΗΘ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΔ, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον (ΗΘ).(ΑΔ) παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΔ· ὥστε ἡ παράστασις (1) γράφεται $\frac{(\text{ΙΚ}).(\text{ΑΒΕΔ})}{2}$.

656) Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α′ ἀπ' αὐτῆς· ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος Α′ΑΒΓΔ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀνωτέρω γινομένου· ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου Α′ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τῆς προηγουμένης πυραμίδος, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι 6.

657) Ἔστω Β ἡ βάσις τῆς δοθείσης πυραμίδος, υ τὸ ὕψος αὐτῆς καὶ Ο ὁ ὄγκος της· Β′ δὲ ἡ βάσις τῆς ἀποκοπείσης πυραμίδος, υ′ τὸ ὕψος καὶ Ο′ ὁ ὄγκος αὐτῆς. Ἔχομεν τότε

$$\frac{\text{Ο}}{\text{Ο}'} = \frac{\frac{1}{3}.\text{Β}.\upsilon}{\frac{1}{3}\text{Β}'.\upsilon'} = \frac{\text{Β}}{\text{Β}'}.\frac{\upsilon}{\upsilon'} \text{ ἀλλὰ } \frac{\text{Β}}{\text{Β}'} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon'^2}, \text{ ὥστε εἶναι}$$

$$\frac{\text{Ο}}{\text{Ο}'} = \frac{\upsilon^3}{\upsilon'^3} \text{ καὶ } \frac{\text{Ο}-\text{Ο}'}{\text{Ο}'} = \frac{\upsilon^3-\upsilon'^3}{\upsilon'^3} \quad (1) \text{ καὶ ἐπειδὴ εἶναι}$$

$$\upsilon' = \frac{3\upsilon}{4} \text{ ἢ } \upsilon'^3 = \frac{27.\upsilon^3}{64} \text{ ἡ (1) γράφεται}$$

$$\frac{\text{Ο}-\text{Ο}'}{\text{Ο}'} = \frac{\upsilon^3 - \frac{27\upsilon^3}{64}}{\frac{27}{64}\upsilon^3} = \frac{64-27}{27} = \frac{37}{27}.$$

658) Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν περὶ οὗ πρόκειται πυραμίδων καὶ τῶν πυραμίδων αἵτινες ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις, τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος, ἀποτελεῖ τὸν ὄγκον ὁλοκλήρου τοῦ πρίσματος· ἂν δὲ Β εἶναι ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, καὶ υ, υ′ τὰ ὕψη τῶν δύο τελευταίων τούτων πυραμίδων, ὁ ὄγκος αὐτῶν εἶναι

$$\frac{1}{3}\text{Β}.\upsilon + \frac{1}{3}\text{Β}.\upsilon' = \frac{1}{3}\text{Β}(\upsilon+\upsilon')$$

ἢ $\frac{1}{3}$ Β.Υ, ἂν Υ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· ἀλλὰ Β.Υ εἶναι ὁ ὄγκος ὁλοκλήρου τοῦ πρίσματος· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν ἄλλων πυραμίδων, εἶναι δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ Ο, τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὄγκου Β.Υ.

659) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι τὰ κέντρα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ Ε, Ζ τὰ κέντρα τῶν δύο βά-

σεων, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, διαιρεῖ τὸ ὀκτάεδρον εἰς δύο πυραμίδας ἴσας, ἐχούσας βάσιν κοινὴν τὸν ρόμβον ΑΒΓΔ καὶ κορυφὰς τὰς Ε καὶ Ζ· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι α . β, ὁ ὄγκος Ο τοῦ ὀκταέδρου εἶναι $\frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha\beta}{2} \cdot \gamma$ ἢ $\frac{\alpha\beta\gamma}{6}$.

Προκειμένου ἤδη νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀκταέδρου, παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν Ο εἶναι τὸ σημεῖον εἰς ὃ τέμνονται αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ καὶ ΟΗ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΟΒΓ, εἶναι $(ΟΒΓ) = \frac{1}{2}(ΟΗ)(ΒΓ) = \frac{1}{2}(ΟΒ).(ΟΓ)$ ἤτοι εἶναι $(ΟΗ) . \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}} = \frac{\alpha}{2} . \frac{\beta}{2}$· ἄρα εἶναι $(ΟΗ) = \frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $(ΔΗ)^2 = (ΔΟ)^2 + (ΟΗ)^2$ ἤτοι $(ΔΗ)^2 = \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\alpha^2\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)$· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΒΓ εἶναι $\frac{1}{2}(ΒΓ) . (ΔΗ)$ ἢ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} =$$

$\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι $8 . \frac{1}{8}\sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2} = \sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}$.

660) Ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι $2 . 0{,}2\sqrt{3} = 0{,}4\sqrt{3}$ καὶ τὸ ὕψος αὐτῆς εἶναι $\sqrt{(0{,}4 . \sqrt{3})^2 - (0{,}2\sqrt{3})^2} = 0{,}6$· καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑπομένως αὐτῆς εἶναι $0{,}4 . \sqrt{3} . 0{,}6 : 2 = 0{,}12\sqrt{3}$· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι $0{,}24\sqrt{3}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν τριγώνων ταύτης εἶναι $0{,}08\sqrt{3}$ καὶ ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι $0{,}4\sqrt{3}$ ἕπεται ὅτι τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι $2 . 0{,}08\sqrt{3} : 0{,}4\sqrt{3} = 0{,}4$. Ἤδη ὑπολείπεται νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ ἄλλη κάθετος εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ὑποτείνουσα εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν παραπλεύρων τριγώνων· εὑρεθέντος τοῦ ὕψους, εὐκόλως εὑρίσκεται κατόπιν ὁ ζητούμενος ὄγκος.

661) Ἐὰν ε εἶναι τὸ ἐμβαδόν, τῆς μικροτέρας βάσεως εἶναι

$\frac{\varepsilon}{24}=\frac{2.2^2}{3{,}85^2}$· εὑρεθέντος τοῦ ε, εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος ὄγκος κατὰ τὸ ἐδάφιον 387.

662) Ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν βάσιν κύκλου εἶναι α, ἐὰν δὲ υ εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος ἔχομεν $\upsilon^2=\lambda^2-\alpha^2$ ἢ $\upsilon=\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}$· ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}.\,3\,.\,\alpha^2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha^2}{2}\cdot\sqrt{3(\lambda^2-\alpha^2)}.$$

663) Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου καὶ Κ τὸ κέντρον τοῦ εἰς αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ΑΔ ἡ κάθετος ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΚΒ· ἔχομεν τότε $(\text{ΑΒ})^2=(\text{ΚΑ})^2+(\text{ΚΒ})^2-2\,.\,(\text{ΚΒ})\,.\,(\text{ΚΔ})$ (1)· ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΚΔ ἡ ΑΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου· εἶναι ἑπομένως $(\text{ΑΔ})=\frac{(\text{ΚΑ})\,.\,\sqrt{2}}{2}$. εὑρίσκομεν λοιπὸν $(\text{ΚΔ})^2=(\text{ΚΑ})^2-\frac{(\text{ΚΑ})^2}{2}=\frac{(\text{ΚΑ})^2}{2}$ καὶ $(\text{ΚΔ})=\frac{(\text{ΚΑ})}{\sqrt{3}}$· ἐὰν δὲ θέσωμεν $\text{ΚΑ}=\rho$ ἡ (1) γράφεται $\alpha^2=2\rho^2-2\rho^2.\frac{1}{\sqrt{2}}$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\rho^2=\frac{\alpha^2(2+\sqrt{2})}{2}$. Ἤδη ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ υ τὸ ζητούμενον ὕψος, ἔχομεν $\upsilon^2=\lambda^2-\rho^2=\lambda^2-\frac{\alpha^2}{2}(2+\sqrt{2})$ καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\,\alpha^2(2+\sqrt{2})\cdot\sqrt{\lambda^2-\frac{\alpha^2}{2}(2+\sqrt{2})}.$$

664) Ἔστω Α ἡ κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ Β, Γ, Δ τὰ σημεῖα τῶν ἀκμῶν· τότε ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι

$$\frac{1}{3}(\text{ΑΓ})\,.\,(\text{ΔΑΒ})=\frac{\alpha}{6}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{48}.$$

665) Τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων εἶναι $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ καὶ $6\sqrt{3}$· εἶναι ἑπομένως $12=\frac{1}{3}\upsilon\left(6\sqrt{3}+3\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}\right)$· ἢ $\upsilon=4\sqrt{3}:3{,}5$.
Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν παραπλεύρων τραπεζίων, εἶναι πλευρὰ τοῦ τραπεζίου, καὶ αἱ τρεῖς ἄλλαι εἶναι τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ τὰ ἀποστήματα τῶν κανονικῶν ἑξαγώνων τῶν βάσεων.

666) Ἐὰν παραστήσωμεν δι' ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ

α, α_1, α_2 εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς ὁλοκλήρου τῆς πυραμίδος ἀντιστοίχως ἀπὸ τὴν κάτω βάσιν, τὴν τομὴν καὶ τὴν ἄνω βάσιν, ἔχομεν $\frac{B}{\alpha^2}=\frac{\varepsilon}{\alpha_1{}^2}=\frac{\beta'}{\alpha^2{}_2}$ ἢ $\frac{\sqrt{B}}{\alpha}=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha_1}=\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha_2}$· ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν $\frac{\sqrt{B}-\sqrt{\varepsilon}}{\alpha-\alpha_1}=\frac{\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\beta}}{\alpha_1-\alpha_2}$, ἀλλὰ εἶναι $\alpha-\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2$· ὥστε εἶναι καὶ $\sqrt{B}-\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\beta}$ ἢ

$$2\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{B}+\sqrt{\beta} \quad \text{ἢ}$$

$(2\sqrt{\varepsilon})^2=(\sqrt{B}+\sqrt{\beta})^2$ ἤτοι $4.\varepsilon=B+\beta+2\sqrt{B\beta}$· ὥστε ἔχομεν $\varepsilon=\frac{B+\beta+2\sqrt{B\beta}}{4}$.

667) Ἴδε σημ. α, σελ. 304.

Σελ. 326.— 668) Εἶναι

$$\pi.5.0{,}18.=\pi.0{,}90.=2{,}82743.. \text{ τ. μ.}$$

669) Διότι εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια, ἄθροισμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ τῶν δύο βάσεων· ἤτοι εἶναι

$$2\pi A.\upsilon+2\pi A^2=2\pi A.(\upsilon+A).$$

670) Ἐὰν τὰς κυρτὰς ἐπιφανείας τὰς παραστήσωμεν δι' E καὶ E' ἔχομεν $E=2\pi A.\upsilon$ καὶ $E'=2\pi A.\upsilon'$· ἄρα εἶναι $E:E'=\upsilon:\upsilon'$.

Ἐπίσης ἔχομεν ἐὰν A καὶ A' εἶναι αἱ ἀκτῖνες $E=2\pi A.\upsilon$ καὶ $E'=2\pi A'.\upsilon$· ἄρα εἶναι $E:E'=A:A'$.

671) Εἶναι ὀρθογώνιον.

672) Ἐὰν β εἶναι ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως ἔχομεν $\beta^2=\pi A^2$ ἢ $\frac{A^2}{\beta^2}=\frac{1}{\pi}$ καὶ $\frac{A}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ἢ $A=\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}$· ἀλλ' ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι $2\pi A.\upsilon$ καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $4.\beta.\upsilon$, ὁ δὲ λόγος αὐτῶν εἶναι $2\pi A.\upsilon:4\beta\upsilon=\pi A:2\beta=\pi:\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}:2\beta=\sqrt{\pi}:2$.

Σελ. 327·— 673) Ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι

$$\pi.(4{,}8)^2.1{,}5=108{,}57344 \text{ κ. μ.}$$

674) Ἐὰν α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ ἀγγείου, υ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ ω ὁ ὄγκος τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου ὕδατος, θὰ εἶναι $\upsilon=4\alpha$ καὶ $\omega=\pi\alpha^2.\upsilon=4\pi\alpha^3$· ἀλλ' ὁ ὄγκος ω τοῦ ὕδατος δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ βάρους του (ὅπερ εἶναι μία ὀκᾶ)· τῷ ὄντι $312\frac{1}{2}$

δράμια ὕδατος ἔχουσιν ὄγκον μιᾶς λίτρας, τουτέστι μιᾶς κυβικῆς παλάμης ἤτοι $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου· ἄρα ἡ ὀκᾶ τοῦ ὕδατος θὰ ἔχῃ ὄγκον $\frac{2.400}{625.1000}=\frac{4}{3125}$· ὅθεν ἕπεται $4\pi\alpha^3=\frac{4}{3125}$ καὶ $\alpha=\frac{1}{\sqrt[3]{3125\pi}}$ καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν

$$\alpha=0{,}0467 \text{ μ. καὶ } \upsilon=0{,}1868\ldots \text{ μ.}$$

675) Ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι $\frac{0{,}6}{2\pi}$· ὅθεν ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $\frac{(0{,}6)^2}{4\pi}.(4{,}12)=\frac{0{,}36}{\pi}(1{,}03)=0{,}1178\ldots$ κ. μ. ἢ $117{,}8\ldots$ κ. π.

Ἴσος ὄγκος ὕδατος ἤτοι 117,8.. λίτραι, θὰ εἶχε βάρος $117{,}8\times 312\frac{1}{2}$ δράμια· ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶναι περίπου 7,2 τὸ ζητούμενον βάρος τοῦ κυλίνδρου εἶναι δράμια $117{,}8\times 7{,}2\times 312\frac{1}{2}=663$ ὀκ. 250 δράμια.

676) Ἔχομεν $O=\pi A^2.\upsilon$ καὶ $O'=\pi A^2.\upsilon'$· ὥστε εἶναι $O:O'=\upsilon:\upsilon'$· ἐπίσης ἔχομεν $O=\pi A^2.\upsilon$ καὶ $O'=\pi.A'^2.\upsilon$ ἤτοι εἶναι $O:O'=A^2:A'^2$.

677) Ἔχομεν $O=\pi.A^2.\upsilon=2\pi.A.\frac{A}{2}.\upsilon=2\pi A.\upsilon.\frac{A}{2}$.

678) Οἱ ὄγκοι εἶναι $\pi\alpha^2.\beta$ καὶ $\pi\beta^2.\alpha$ καὶ ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι $\pi\alpha^2.\beta:\pi\beta^2\alpha=\alpha:\beta$.

679) Ὁ ὄγκος O εἶναι $\pi A^2.\upsilon$ ἡ δὲ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εἶναι

$$2\pi A.\upsilon+2\pi A^2=2\sqrt{\pi^2.A^2.\upsilon^2}+\frac{2\pi A^2.\upsilon}{\upsilon}=$$
$$2\sqrt{\pi.\upsilon.O}+\frac{2.O}{\upsilon}.$$

Σελ. 330 — 680) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι

$$\pi A\lambda+\pi A^2=\pi A(\lambda+A).$$

681) Ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου εἶναι $\sqrt{2^2+0{,}5^2}=\sqrt{4{,}25}$· ἐπομένως τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $\pi.0{,}5.\sqrt{4{,}25}=3{,}228\ldots$ τ. μ.

682) Εἶναι $4\pi+24{,}8\pi=28{,}8\pi=90{,}477\ldots$ τ. μ.

683) Εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι $\alpha\sqrt{2}$· εἶναι ἄρα ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια $\pi.\alpha.\alpha\sqrt{2}=\pi\alpha^2\sqrt{2}$.

Σελ. 331.— 684) Τὸ ὕψος τοῦ κώνου εἶναι πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι πλευρὰ τοῦ κώνου, μία δὲ τῶν καθέτων ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· διὰ τοῦτο τὸ ὕψος εἶναι $\sqrt{2,64^2 - 0,9^2} = \sqrt{3,54 \,.\, 1,74}$· ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θὰ εἶναι

$$\frac{1}{3}\pi \,.\, 0,9^2 \,.\, \sqrt{3,54 \,.\, 1,74} = 2,105 \ldots \text{ κ. μ.}$$

685) Διαιροῦντες τὸ τριπλάσιον τοῦ ὄγκου διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος, ἔπειτα δὲ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ κάθετοι πλευραὶ εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν καὶ κατόπιν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

686) Οἱ ὄγκοι εἶναι $\frac{1}{3}\pi \,.\, 4^2 \,.\, 3$ καὶ $\frac{1}{3}\pi 3^2 \,.\, 4$ καὶ ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι $\frac{4}{3}$.

687) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ τετραέδρου εἶναι $\frac{1}{2}\alpha \,.\, \alpha \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2}$ ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κύκλου εἶναι $\frac{\alpha}{2\sqrt{3}}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι $\frac{\pi\alpha^2}{12}$· ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὕψη εἶναι τὰ αὐτά· ὥστε οἱ ὄγκοι αὐτῶν εἶναι $\frac{1}{3} \,.\, \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \,.\, \upsilon$ καὶ $\frac{1}{3} \,.\, \frac{\pi\alpha^2}{12} \,.\, \upsilon$ καὶ ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι

$$3\sqrt{3} : \pi.$$

Σελ. 333 — 688) Ἔχομεν $\lambda = \sqrt{0,74^2 + 0,2^2}$. Ἤδη τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου $\pi \,.\, \lambda\,(\mathrm{A} + \alpha)$.

689 Τὸ ὕψος τοῦ κώνου εἶναι $\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ἄνω βάσεως εἶναι $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ μ. ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $36\pi + 9\pi + \pi \,.\, 4\,(6 + 3) = 81\pi$.

Σελ. 334 — 690) Ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι

$$\frac{1}{3} \,.\, \pi(1,18)\,(0,14^2 + 0,14 \,.\, 0,06 + 0,06^2) = \frac{1}{3}\pi \,.\, 1,18{,}0,0316 =$$
$$0,3904 \ldots \text{ κ. π.}$$

691) Ὁ ὄγκος τοῦ μένοντος στερεοῦ εἶναι (§ 423) $\frac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, \upsilon\,(\mathrm{A} - \alpha)\,(\mathrm{A} + 2\alpha)$. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $\mathrm{A} = 5$ μ, $\alpha = 4$ μ. καὶ $\upsilon = 9$ μ. εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις $39 \,.\, \pi = 122,522$ κ. μ.

692) (711) Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως καὶ διὰ υ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, ἔτι δὲ διὰ α τὴν ἀκτῖνα τῆς τομῆς καὶ διὰ χ τὴν ἀπόστασιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς κορυ-

φῆς, θὰ ἔχωμεν $\frac{\chi}{\upsilon} = \frac{\alpha}{A}$, ὅθεν $\alpha = \frac{A}{\upsilon} . \chi$.

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀποτεμνομένου κώνου εἶναι $\frac{1}{3} \pi . \frac{A^2}{\upsilon^2} . \chi^3$ καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου, θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{3} \pi . \frac{A^2}{\upsilon^2} \chi^3 = \frac{1}{6} \pi . A^2 . \upsilon$ καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν $\chi^3 = \frac{1}{2} . \upsilon^3$· ὅθεν $\chi = \frac{\upsilon}{\sqrt[3]{2}}$· καὶ ἐπειδὴ ἐδόθη $\upsilon = 10$, προκύπτει $\chi = 7,774 \ldots$

Σελ. 338.— 693) Διότι ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μικροτέρα.

694) Διότι πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (ἐκτὸς τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος) ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος καὶ ἑπομένως κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· ὥστε τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ ἔχει μετὰ τῆς σφαίρας, κοινὸν σημεῖον μόνον τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, ἐφάπτεται αὐτῆς.

695) Φέρομεν διὰ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπίπεδον, ὁπότε ἡ τομὴ εἶναι μέγιστος κύκλος αὐτῆς· τότε ἂν ἡ θεωρουμένη ἀπόστασις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου καὶ ἑπομένως καὶ τῆς σφαίρας· ἂν ὅμως ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα, τότε ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἄρα καὶ τῆς σφαίρας, καὶ ἂν εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος, ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια, ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα, ἄρα ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ σφαῖρα ἔχουσι πολλὰ κοινὰ σημεῖα.

696) Διότι τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας ὡς ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· ὥστε ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχουσι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον (τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος) ἤτοι ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

697 Αἱ ἐφαπτόμεναι σφαῖραι νὰ διορθωθῇ εἰς «αἱ ἐφαπτόμεναι σφαίρας». Διότι εἶναι ὅλαι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς αὐτῆς εὐθείας (εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ἥτις λήγει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς) καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, ὅπερ ἐπίπεδον εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας (ἄσκ. 694).

698) Ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου οὗ ὑποτείνουσα εἶναι 0,4 μ. καὶ ἡ ἄλλη κάθετος 0,25 μ.

Σελ. 339. — 699) (Τὸ 0,80 διορθωτέον εἰς 0,08) Ἔχωμεν (σχ. σελ. 339) $A\Delta = \sqrt{0,06^2 - \frac{(0,1^2 + 0,06^2 - 0,08^2)^2}{4 . 0,1^2}} = 0,048$ (ἴδε πρόβλ. σελ. 230) καὶ τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $(0,048)^2 . \pi$.

Σελ. 348 — 700) Ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $4 . \pi . (2,6)^2 = 27,04\pi =$ 84, 8355 . . . τ. μ.

701) Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἐπιφάνεια εἶναι ζώνη σφαιρικὴ ἔχουσα ὕψος 0,2· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι

$$2\pi . 1,8 . 0,2 = \pi . 0,72 = 2,26194 . . \text{ τ. μ.}$$

702) Ἐμβαδὸν τομῆς $= 50,2655$ . . τ. μ.· ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ζώνης $= 62,8318$ . . τ. μ. καὶ τῆς ἄλλης $= 251,3274$ . . τ. μ.

703) Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς γῆς εἶναι 40000000 μ. ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς, εἶναι $40000000 \times \frac{1}{2\pi}$· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι $4\pi (40000000)^2 . \frac{1}{4\pi^2} = \frac{16}{\pi} . 10^{14}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{16}{\pi} = 5,092958 . . .$ (Τσιλιμίγκρα πίνακες λογαρίθμων) ἡ ἐπιφάνεια εἶναι

$$5092958 . 10^8 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

704) Τετραπλασιάζεται.

Σελ. 356 — 705) ὁ ὄγκος εἶναι $\frac{4}{3}\pi . (2,6)^3 = 73,62$ . . κ. μ.

706) Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = \frac{4}{3}\pi\alpha^3$ λαμβάνομεν

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\Sigma}{4\pi}} = 1,558 . . . \text{ μ. (διὰ τῶν λογαρίθμων).}$$

707) Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεὸν εἶναι ἄθροισμα δύο κώνων, ἐχόντων ὕψος μὲν τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς μ τοῦ τριγώνου, ἤτοι $\frac{1}{2}\mu$, ἀκτῖνα δὲ τῆς βάσεως τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ὅπερ εἶναι $\sqrt{\mu^2 - \left(\frac{1}{2}\mu\right)^2} = \frac{1}{2}\mu\sqrt{3}$ · ἑπομένως ὁ ὄγκος ἑκατέρου τῶν κώνων τούτων εἶναι $\frac{1}{3}\pi . \frac{3}{4}\mu^2 . \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\pi\mu^3$· ἄρα ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι $\frac{1}{4}\pi\mu^3$.

708) Ὀκταπλάσιος.

709) Εἶναι $8\sqrt[3]{2} = 10,08$ . . μ.

710) Εἶναι $\sqrt[3]{12^3 + 9^3} = 3\sqrt[3]{91} = 13,494$ . . μ.

711 καὶ 712) Ἴδε σελ. 356.

713) Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος ἑπομένως καὶ τοῦ σιδήρου εἶναι $\frac{1200}{72} . \frac{1}{1000}$ κ. μ. ἢ $\frac{12}{720}$ ἢ $\frac{1}{60}$ κ. μ. Εὑρεθέντος τοῦ ὄγκου εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀκτίς· εἶναι δὲ 0, 158 . . μ.

ΤΕΛΟΣ