Κ. Ξ. ΠΑΠΑΝΙΚΗΤΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ Ἀρσακείῳ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ
ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΡΤΙ ΤΕΛΕΣΘΕΝΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΝ ΚΑΙ ΕΠΙ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ ΙΣΧΥΟΥΣΑ
ἀπὸ τοῦ ἔτους 1903—1908

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΑΣΙΛΙΚΗ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑ ΡΑΦΤΑΝΗ ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
1903

έωτρ ασα αιθον ά

δροναιι δροσερό ύδα

Λ. Χριστόπουλος

ΤΩι

ΣΕΒΑΣΤΩι ΜΟΙ

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΩι ΣΥΜΒΟΥΛΙΩι

ΤΗΣ

ΦΙΛΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Ο ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Προκαταρκτικαὶ γνώσεις καὶ ὁρισμοί

1. Ἕκαστον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον κατέχει τόπον τινά, λέγεται *σῶμα*.

Παραδείγματος χάριν· ἡ οἰκία, ὁ μελανοπίναξ, τὸ βιβλίον κτλ. εἶνε σώματα.

2. Ἕκαστον σῶμα ἔχει προφανῶς *ἔκτασιν* ἢ *μέγεθος*, καὶ ἐπομένως *σχῆμά* τι ἢ *μορφήν*.

3. Τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος (πάχος ἢ βάθος) παντὸς σώματος λέγονται *διαστάσεις* αὐτοῦ.

4. Ἡ ἐπιστήμη, ἥτις πραγματεύεται τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν τῶν σωμάτων, λέγεται *Γεωμετρία*.

5. Πᾶν σῶμα τοῦ ὁποίου ἐξετάζομεν μόνον τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην ἐξ ἧς ἀποτελεῖται καὶ λοιπὰς ἰδιότητας αὐτοῦ, καλοῦμεν αὐτὸ *στερεὸν* ἢ *γεωμετρικὸν σῶμα*.

6. Τὸ σύνολον τῶν περάτων παντὸς σώματος λέγεται *ἐπιφάνεια* αὐτοῦ.

Τὰ πέρατα, παραδείγματος χάριν, τοῦ μελανοπίνακος εἶνε τὸ ἔμπροσθεν μέρος αὐτοῦ, τὸ ὄπισθεν, τὸ ἄνω, τὸ κάτω, τὸ δεξιὸν καὶ τὸ ἀριστερόν. Ὅλα ὁμοῦ ταῦτα ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μελανοπίνακος.

7. Ἡ ἐπιφάνεια ἔχει σχῆμά τι, ἀλλὰ δύο μόνον διαστάσεις· ἤτοι μῆκος καὶ πλάτος, στερουμένη πάχους.

8. Τὰ πέρατα τῆς ἐπιφανείας (ἢ μέρους αὐτῆς) λέγονται *γραμμαί.*

9. Ἡ γραμμὴ ἔχει καὶ αὐτὴ σχῆμά τι, ἀλλὰ μίαν μόνον διάστασιν· ἤτοι μῆκος, στερουμένη πλάτους καὶ πάχους.

10. Τὰ πέρατα τῆς γραμμῆς (ἢ μέρους αὐτῆς) λέγονται *σημεῖα.*

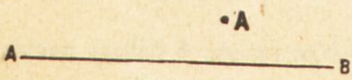
11. Τὸ σημεῖον οὐδεμίαν διάστασιν ἔχει, οὔτε δηλ. μῆκος, οὔτε πλάτος, οὔτε ὕψος (ἢ πάχος).

Παριστῶμεν ὅμως τὸ σημεῖον ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος διὰ μιᾶς στιγμῆς, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐδάφους δι' ἑνὸς πασσαλίσκου ἢ δι' ἄλλου τινὸς ἀντικειμένου.

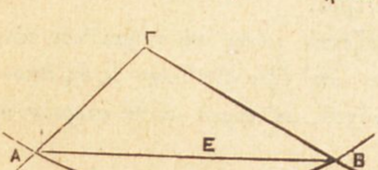
Τὰς ἐπιφανείας δυνάμεθα νὰ τὰς φανταζώμεθα καὶ ἄνευ τῶν σωμάτων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται· ὡσαύτως καὶ τὰς γραμμὰς ἄνευ τῶν ἐπιφανειῶν, καὶ τὰ σημεῖα ἄνευ τῶν γραμμῶν.

12. Αἱ εἰκόνες δι' ὧν παριστῶμεν τὰ σώματα, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος κτλ. λέγονται *σχήματα.*

Τὸ σημεῖον ὀνομάζομεν δι' ἑνὸς γράμματος τοῦ ἀλφαβήτου, γραφομένου πλησίον αὐτοῦ· ἤτοι λέγομεν τὸ σημεῖον Α (ἄλφα). Τὴν δὲ γραμμὴν ὀνομάζομεν συνήθως διὰ δύο γραμμάτων γραφομένων εἰς δύο οἱαδήποτε σημεῖα αὐτῆς, συνήθως δὲ εἰς τὰ ἄκρα (σχῆμα 1)· ἤτοι λέγομεν ἡ γραμμὴ ΑΒ (ἄλφα βῆτα). Ὅταν ὅμως πολλαὶ γραμμαὶ διέρχωνται διὰ δύο σημείων, τότε πρὸς διάκρισιν αὐτῶν, γράφομεν εἰς ἑκάστην γραμμὴν καὶ ἓν γράμμα ἀκόμη εἰς οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον αὐτῆς (σχῆμα 2)· ἤτοι λέγομεν ἡ γραμμὴ ΑΓΒ (ἄλφα γάμμα βῆτα), ἡ γραμμὴ ΑΕΒ, ἡ γραμμὴ ΑΔΒ.



Σχ. 1.



Σχ. 2.

Ἀξίωμα, θεώρημα, ἀπόδειξις καὶ πόρισμα

13. *Ἀξίωμα* λέγεται πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια εἶνε φανερὰ ἀφ' ἑαυτῆς.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν σώματος ἢ σχήματος, τὸ σῶμα ἢ τὸ σχῆμα τοῦτο δὲν μεταβάλλεται.

14. *Θεώρημα* λέγεται πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ συλλογισμοῦ.

15. *Ἀπόδειξις* λέγεται ὁ συλλογισμὸς ἢ πολλοὶ συλλογισμοὶ τοὺς ὁποίους κάμνομεν, διὰ νὰ πεισθῶμεν, ἂν μία πρότασις εἶνε ἀληθής.

16. *Πόρισμα* λέγεται πρότασις, ἥτις ἐξάγεται ἐκ μιᾶς ἢ περισσοτέρων προηγουμένων ἀληθῶν προτάσεων.

Περὶ ἴσων, ἰσοδυνάμων καὶ ἀνίσων σχημάτων

Ὁρισμοί

17. Δύο σχήματα λέγονται *ἴσα*, ὅταν ἐπιτιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουσιν ἀκριβῶς, ἤτοι πᾶν σημεῖον τοῦ ἑνὸς νὰ εἶνε σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου.

18. Δύο σχήματα λέγονται *ἰσοδύναμα*, ὅταν ἀκέραια μὲν δὲν ἐφαρμόζουσι, διῃρημένα δὲ εἰς ἰσάριθμα μέρη ἐφαρμόζουσι. Τὰ τοιαῦτα σχήματα εἶνε πάλιν ἴσα κατ' ἔκτασιν, ἀλλὰ πρὸς διάκρισιν τῶν ἐφαρμοζόντων ἀκεραίων καλοῦμεν αὐτὰ ἰσοδύναμα.

Σχ. 3.

Παραδείγματος χάριν, τὰ σχήματα ΑΓΔΖ καὶ ΗΙΚΜ (σχ. 3) δὲν ἐφαρμόζουσι προφανῶς ἀκέραια. Ἀλλ' ἐὰν κόψωμεν τὸ σχῆμα ΑΓΔΖ εἰς τὰ μέρη ΑΖΕ, ΑΒΕ καὶ ΒΓΔΕ, καὶ ἐφαρμόζει τὸ μέρος ΑΖΕ ἐπὶ τοῦ μέρους ΙΛΚ, τὸ μέρος ΑΒΕ ἐπὶ τοῦ μέρους ΗΘΜ, καὶ τὸ μέρος ΒΓΔΕ ἐπὶ τοῦ μέρους ΘΙΛΜ, τότε τὰ σχήματα ΑΓΔΖ καὶ ΗΙΚΜ, ἂν καὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἔκτασιν, λέγονται ὅμως πρὸς διάκρισιν ἰσοδύναμα. ([1])

19. Δύο σχήματα λέγονται *ἄνισα*, ὅταν τὸ ἓν σχῆμα εἶνε ἴσον μὲ μέρος τι τοῦ ἄλλου σχήματος. Παραδείγματος χάριν, τὰ σχήματα ΑΖΕ καὶ ΗΙΚΜ εἶνε ἄνισα· διότι τὸ σχῆμα ΑΖΕ εἶνε ἴσον μὲ τὸ μέρος ΙΛΚ αὐτοῦ. Τὸ σχῆμα ΑΖΕ, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ μέρος τι τοῦ ἄλλου, λέγεται μικρότερον τοῦ ΗΙΚΜ, τὸ δὲ ΗΙΚΜ λέγεται μεγαλείτερον τοῦ ΑΖΕ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν θέλωμεν νὰ δείξωμεν, ὅτι δύο σχήματα εἶνε ἄνισα, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος, τὸ ὁποῖον εἶνε <ἢ>, ἀλλὰ τὸ μεγαλείτερον γράφομεν πάντοτε εἰς τὸ ἄνοιγμα αὐτοῦ. Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ παραστήσωμεν ὅτι τὸ σχῆμα ΑΖΕ (σχῆμα προηγούμενον) εἶνε μικρότερον τοῦ ΗΙΚΜ, γράφομεν ΑΖΕ <ΗΙΚΜ ἢ ΗΙΚΜ> ΑΖΕ καὶ ἀπαγγέλλομεν ΑΖΕ μικρότερον τοῦ ΗΙΚΜ ἢ ΗΙΚΜ μεγαλείτερον τοῦ ΑΖΕ.

Τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἰσότητος καθὼς καὶ τὰ ἄλλα δηλωτικὰ σημεῖα τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων εἶνε καὶ ἐνταῦθα τὰ αὐτὰ τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἀξίωμα τῆς ἰσότητος

20. *Τὰ ἴσα πρὸς ἄλλο εἶνε καὶ μεταξύ των ἴσα.*

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος

21. *Ἐὰν εἰς ἴσα ποσὰ ἢ μεγέθη προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν ἴσα, τὰ ἀθροίσματα ἢ τὰ ὑπόλοιπα αὐτῶν εἶνε πάλιν ἴσα.*

([1]) Ὁ διδάσκων πρέπει νὰ κατασκευάζῃ τοιαῦτα σχήματα διὰ χάρτου, καὶ ἀφοῦ κόψῃ τὸ ἓν τῶν σχημάτων καταλλήλως, νὰ δεικνύῃ εἰς τοὺς μαθητὰς πῶς ἐφαρμόζονται ταῦτα καὶ πῶς ἑπομένως ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἔκτασιν.

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

Εὐθεῖα, τεθλασμένη καὶ καμπύλη γραμμὴ

Ὁρισμοὶ

22. Ἡ *εὐθεῖα γραμμὴ* δύναται νὰ νοηθῇ διὰ λεπτοτάτου νήματος ἢ ἄλλου ὁμοίου πράγματος τεταμένου καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν.

Τὸ σχῆμα 1 παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν.

23. Ἡ μεταξὺ δύο σημείων ἀγομένη εὐθεῖα λέγεται *ἀπόστημα* ἢ *ἀπόστασις* τῶν σημείων τούτων.

24. *Τεθλασμένη γραμμὴ* λέγεται ἡ γραμμή, ἥτις δὲν εἶνε ὅλη εὐθεῖα, ἀποτελεῖται ὅμως ἀπὸ εὐθείας.

Τὸ σχῆμα 4 παριστᾷ τεθλασμένην γραμμήν.

Σχ. 4.

Σχ. 5.

25. *Καμπύλη γραμμὴ* λέγεται ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ, εἶνε εὐθεῖα.

Τὸ σχῆμα 5 παριστᾷ καμπύλην γραμμήν.

Πᾶσα γραμμή, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλην καὶ ἀπὸ εὐθεῖαν ἢ τεθλασμένην λέγεται *μικτή*.

Ἀξιώματα τῆς εὐθείας

Ὡς ἀξιώματα τῆς εὐθείας δεχόμεθα τὰ ἑξῆς:

26. *Ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται.*

27. *Πᾶσαν εὐθεῖαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ τὴν προεκτείνωμεν ἑκατέρωθεν, ὅσον θέλομεν.*

28. *Πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ εἶνε μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς ἐχούσης τὰ αὐτὰ ἄκρα.*

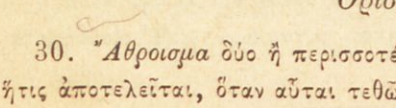
29. *Πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ πάσης ἄλλης εὐθείας, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ μία μόνη εὐθεῖα.*

Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ εὐθειῶν

Ὁρισμοὶ

30. *Ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἀποτελεῖται, ὅταν αὗται τεθῶσι κατὰ σειρὰν οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ μία καὶ μόνη εὐθεῖα.

Τὸ ἄθροισμα, παραδείγματος χάριν, τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε ἡ εὐθεῖα ΕΗ (σχ. 6), ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ ταύτας, ὅταν τεθῶσι κατὰ σειρὰν (εἶνε δὲ ΕΖ=ΑΒ καὶ ΖΗ=ΓΔ).



Σχ 6.

Διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις μένει, ὅταν ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς μεγαλειτέρας ἀποκόψωμεν μέρος ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν. Παραδείγματος χάριν, ἡ διαφορὰ τῶν εὐθειῶν ΕΗ καὶ ΑΒ εἶνε ἡ εὐθεῖα ΖΗ (ΑΒ=ΕΖ).

Ὁρισμὸς ἐπιπέδου

31. *Ἐπίπεδον* ἢ *ἐπίπεδος ἐπιφάνεια* λέγεται ἡ ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἀκριβῶς. Ἐὰν

δηλ. λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας καὶ τὰ ἑνώσωμεν δι' εὐθείας, πρέπει ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς νὰ κῆνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

ΣΗΜ. Οἱ τεχνῖται διὰ νὰ ἴδωσιν, ἂν ἐπιφάνειά τις εἶνε ἐπίπεδος, ἐφαρμόζουσιν ἐπ' αὐτῆς στενήν τινα σανίδα, καθὼς π. χ. τὸν ξύλινον κανόνα ἢ χάρακα, καὶ ἂν ἴδωσιν ὅτι οὗτος ἐφαρμόζῃ ἀκριβῶς ἐπ' αὐτῆς, χωρὶς δηλ. νὰ παρουσιάζῃ κυρτώματα ἢ κοιλώματα, συμπεραίνουσιν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶνε ἐπίπεδος· ἄλλως διὰ τῶν ἐργαλείων τῆς τέχνης καθιστῶσιν αὐτὴν ἐπίπεδον.

Ὡς ἐπίπεδα δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὴν ἀτάραχον ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος μικρᾶς ἐκτάσεως, τὸν καθρέπτην, τὸν μελανοπίνακα, τὰ πατώματα τῶν οἰκιῶν, τοὺς τοίχους τῶν δωματίων κτλ.

Ἀξίωμα. *Πᾶν ἐπίπεδον δυνάμεθα νὰ τὸ προεκτείνωμεν καθ' ὅλα αὐτοῦ τὰ μέρη, ὅσον θέλομεν.*

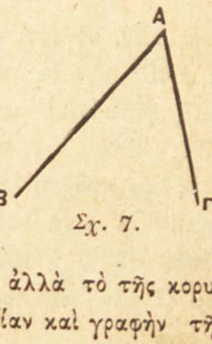
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Ὁρισμοὶ

32. *Γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, χωρὶς νὰ ἀποτελῶσι μίαν εὐθεῖαν.

Τὸ σχῆμα 7 παριστᾷ γωνίαν.

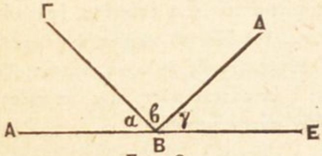
Τὸ σημεῖον Α, ἐξ οὗ ἄγονται αἱ εὐθεῖαι, λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας· αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ, αἵτινες σχηματίζουσι τὴν γωνίαν, λέγονται *πλευραὶ* τῆς γωνίας.



Σχ. 7.

Τὴν γωνίαν ὀνομάζομεν ἢ δι' ἑνὸς γράμματος, γραφομένου πλησίον τῆς κορυφῆς της, ἤτοι λέγομεν ἡ γωνία Α· ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων, γραφομένου τοῦ ἑνὸς εἰς τὴν κορυφήν της καὶ ἑκάστου τῶν ἄλλων ἐν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ (συνήθως εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν), ἀλλὰ τὸ τῆς κορυφῆς γράμμα θέτομεν πάντοτε κατὰ τὴν ὀνομασίαν καὶ γραφὴν τῆς γωνίας μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων γραμμάτων· ἤτοι λέγομεν ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ἡ γωνία ΓΑΒ.

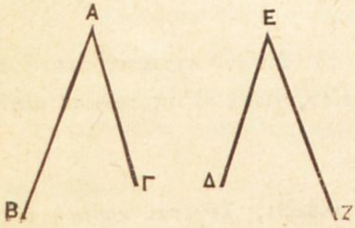
Ὅταν ὅμως δύο ἢ περισσότεραι γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν (σχ. 8), τότε, ἵνα διακρίνωμεν αὐτὰς μεταξύ των, ὀνομάζομεν ἑκάστην γωνίαν πάντοτε μὲ τὰ τρία γράμματα αὐτῆς, ἢ χάριν συντομίας γράφομεν εἰς τὸ ἄνοιγμα ἑκάστης γωνίας ἓν μικρὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ ὀνομάζομεν αὐτὴν διὰ τοῦ γράμματος τούτου. Ἤτοι λέγομεν ἡ γωνία ΑΒΓ, ἡ γωνία ΓΒΔ, ἡ γωνία ΔΒΕ· ἢ συντόμως ἡ γωνία α, ἡ γωνία β, ἡ γωνία γ.



Σχ. 8.

33. Δύο γωνίαι λέγονται *ἴσαι*, ὅταν ἐπιτιθεμένης τῆς μιᾶς γωνίας ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν, ἀποτελεῖται μία καὶ μόνη γωνία.

Παραδείγματος χάριν, αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 9) θὰ εἶνε ἴσαι, ἐὰν ἐπιτιθεμένης τῆς μιᾶς τούτων, καὶ ἔστω τῆς ΔΕΖ, ἐπὶ τῆς ἄλλης ΒΑΓ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α, ἡ δὲ πλευρὰ ΕΔ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, πέσῃ καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ (¹).



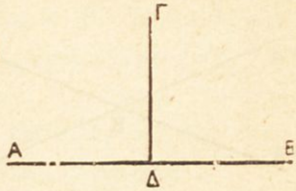
Σχ. 9.

Ἐὰν ὅμως ἡ πλευρὰ ΕΖ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΓ, τότε ἡ γωνία ΔΕΖ λέγεται *μικροτέρα* τῆς ΒΑΓ, ἡ δὲ ΒΑΓ *μεγαλειτέρα* τῆς ΔΕΓ· ἐὰν δὲ πέσῃ ἐκτός, τότε λέγεται μεγαλειτέρα τῆς ΒΑΓ, ἡ δὲ ΒΑΓ μικροτέρα αὐτῆς.

34. Ὅταν ἐκ σημείου τινὸς εὐθείας ἄγεται ἄλλη εὐθεῖα, καθὼς ἐκ τοῦ σημείου Δ τῆς ΑΒ (σχ. 10) ἄγεται ἡ ΓΔ, καὶ σχηματίζει μετὰ ταύτης δύο γωνίας ἴσας, καὶ ἔστω ἡ ΑΔΓ ἴση μὲ τὴν ΒΔΓ, ἡ εὐθεῖα ΓΔ λέγεται *κάθετος* ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἑκατέρα δὲ τῶν ἴσων τούτων γωνιῶν λέγεται *ὀρθή*.

(¹) Κατασκευάζει ὁ διδάσκων διὰ ξυλαρίων δύο γωνίας ἴσας καὶ ἐπ' αὐτῶν δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὸν τρόπον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῶν.

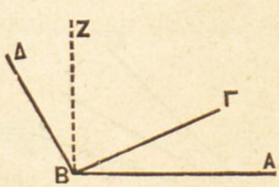
Πῶς δὲ ἄγεται ἐκ σημείου εὐθείας κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν, θὰ ἴδωμεν κατωτέρω (εἰς τὸ Βιβλίον Β). Ἐνταῦθα μόνον λέγομεν, ὅτι *ἐξ ἑκάστου σημείου εὐθείας μία μόνη κάθετος δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπ᾽ αὐτήν*. Παραδείγματος χάριν, ἐκ τοῦ σημείου Δ τῆς ΑΒ ἄλλη κάθετος, ἐκτὸς τῆς ὑποτεθείσης ΓΔ, δὲν δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπ᾽ αὐτήν. Διότι ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἄγεται καὶ ἄλλη, αὕτη θὰ κεῖται ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ΓΔ· ἀλλ᾽ ὁπουδήποτε καὶ ἂν κεῖται, θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ γωνίας ἀνίσους, καὶ ἑπομένως κατὰ τὰ ἀνωτέρω δὲν θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 10.

35. *Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

36. *Ὀξεῖα γωνία* λέγεται ἡ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς. *Ἀμβλεῖα* δὲ ἡ μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς. Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ΓΒΑ (σχ. 11), ἥτις εἶνε μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ΖΒΑ, εἶνε ὀξεῖα· ἡ δὲ γωνία ΔΒΑ, ἥτις εἶνε μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς, εἶνε ἀμβλεῖα.

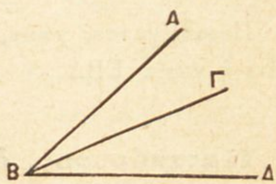


Σχ. 11.

37. Δύο γωνίαι λέγονται *ἐφεξῆς*, ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς ἔχουσιν ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

Παραδείγματος χάριν, αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 12) εἶνε ἐφεξῆς.

38. Δύο γωνίαι λέγονται *κατὰ κορυφήν*, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφήν, καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶνε προεκβολαὶ τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

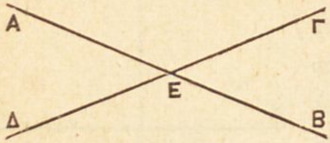


Σχ. 12.

Τοιαῦται εἶνε αἱ γωνίαι ΑΕΓ καὶ ΔΕΒ, αἱ ΑΕΔ καὶ ΓΕΒ (σχ. 13).

39. *Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ὅταν μία εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ ἄλλης εὐθείας, καὶ ἡ ἄλλη εἶνε κάθετος ἐπὶ ταύτην. Διότι προσεκβαλλομένης τῆς πρώτης σχηματίζονται τέσσαρες γωνίαι, καὶ ἐπειδὴ αἱ πρῶται δύο γωνίαι εἶνε ὀρθαί, καὶ αἱ δεύτεραι θὰ εἶνε ὀρθαί, ὡς κατὰ κορυφὴν τῶν πρώτων.



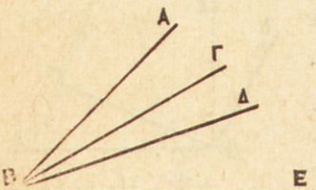
Σχ. 13.

Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ γωνιῶν

Ὁρισμοί

40. *Ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέραν γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία, ἥτις ἀποτελεῖται, ὅταν αὗται τεθῶσι κατὰ σειρὰν οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε ἐφεξῆς ἡ πρώτη μετὰ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα μετὰ τῆς τρίτης, ἡ τρίτη μετὰ τῆς τετάρτης καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΓΒΔ καὶ ΔΒΕ (σχ. 14) εἶνε ἡ γωνία ΑΒΕ.



Σχ. 14.

Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία, ἥτις μένει, ὅταν ἀπὸ τῆς μεγαλειτέρας γωνίας ἀποκόψωμεν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν μικροτέραν, ἀρχόμενοι ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς μεγαλειτέρας.

Παραδείγματος χάριν, ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΕΒΓ καὶ ΔΒΓ εἶνε ἡ γωνία ΕΒΔ.

Στάθμη.

Κατακόρυφος, ὁριζόντιος καὶ πλαγία εὐθεῖα

41. Τὸ σχῆμα 15 παριστᾷ γεωμετρικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται *στάθμη*. [1]

---

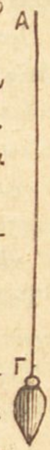
[1] Οἱ τεχνῖται ὀνομάζουσι τοῦτο *ράμα*.

Ἡ στάθμη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ νῆμα ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ βάρος Β, τὸ ὁποῖον φέρει εἰς τὸ ἕτερον αὐτοῦ ἄκρον Γ. Ἡ διεύθυνσις, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ νῆμα τῆς στάθμης, κρατούμενον ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον Α, λέγεται *κατακόρυφος*.

42. Πᾶσα εὐθεῖα (ἢ ῥάβδος ἢ στήλη κτλ.) ἔχουσα τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης λέγεται *κατακόρυφος*.

43. Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τῆς κατακορύφου λέγεται *ὁριζόντιος*.

44. Πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις οὔτε κατακόρυφος εἶνε οὔτε ὁριζόντιος, λέγεται *πλαγία*.



Σχ. 15

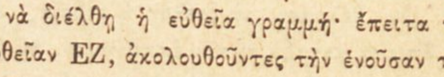
ΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

45. Ὅσον καὶ ἂν προσπαθήσῃ τις νὰ γράψῃ ἀκριβῶς εὐθεῖαν γραμμὴν διὰ μόνης τῆς χειρὸς καὶ τῆς ὄψεως, δὲν θὰ κατορθώσῃ τοῦτο. Τούτου ἕνεκα ἐπενόησαν οἱ ἄνθρωποι γεωμετρικὸν ὄργανον ἢ ἐργαλεῖον πρὸς ἀκριβῆ γραφὴν τῶν εὐθειῶν γραμμῶν. Τὸ ὄργανον τοῦτο λέγεται *κανών*.

Ὁ κανὼν (σχ. 16) εἶνε σανὶς λεπτὴ συνήθως καὶ ἐπιμήκης, ἔχουσα τὰς κόψεις ΑΒ καὶ ΓΔ εὐθυγράμμους.

Σχ. 16.

Διὰ νὰ γράψωμεν λοιπὸν διὰ τοῦ κανόνος εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ τοῦ χάρτου (ἢ ἐπὶ ἄλλης ἐπιπέδου ἐπιφανείας μικρᾶς ἐκτάσεως), τοποθετοῦμεν τὸν κανόνα ἐπὶ τοῦ χάρτου οὕτως, ὥστε ἡ μία κόψις αὐτοῦ ΑΒ νὰ διέρχηται διὰ τῶν δύο σημείων Ε καὶ Ζ (σχ. 17), δι' ὧν θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα γραμμή· ἔπειτα γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ἀκολουθοῦντες τὴν ἑνοῦσαν τὰ δύο ταῦτα σημεῖα κόψιν ΑΒ τοῦ κανόνος.



Σχ. 17.

Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ μεγαλειτέρας ἐπιπέδου ἐπιφανείας (καθὼς ἐπὶ πατώματος, ἐπὶ σανίδος, ἐπὶ δοκοῦ κτλ., ὅτε τὸ μῆκος τοῦ κανόνος δὲν εἶνε ἐπαρκές), πράττομεν ὡς ἑξῆς :

Προσαρμόζομεν εἰς τὰ δύο σημεῖα, δι' ὧν θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, τὰ ἄκρα νήματος καλῶς τεταμένου, τὸ ὁποῖον προηγουμένως χρίομεν διὰ χρώματος, ἐρυθροῦ συνήθως. Ἔπειτα διὰ τῶν δύο δακτύλων (τοῦ μεγάλου καὶ τοῦ δείκτου) ὑψοῦμεν ἐκ τοῦ μέσου τὸ νῆμα καὶ ἀφίνομεν αὐτὸ νὰ πέσῃ· τὸ νῆμα τότε, ἕνεκα τῆς ἐλαστικότητός του, θὰ κτυπήσῃ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ θὰ σχηματίσῃ ἐπ' αὐτῆς ἐρυθρὰν εὐθεῖαν γραμμήν.

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον μεταχειρίζονται οἱ ὑλοτόμοι καὶ λοιποὶ τεχνῖται. (1)

Ὅταν ὅμως πρόκηται νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μικρᾶς ἐκτάσεως, καθὼς ἐπὶ προαυλίου, ἐπὶ κήπου κτλ. ἐμπήγομεν εἰς τὰ σημεῖα, δι' ὧν θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, δύο πασσαλίσκους καὶ προσδένομεν εἰς αὐτοὺς σχοινίον τι καλῶς τεταμένον. Ἔπειτα χαράττομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους δι' ἑνὸς αἰχμηροῦ πασσαλίσκου τὴν γραμμήν, ἀκολουθοῦντες πάντοτε τὴν διεύθυνσιν τοῦ σχοινίου.


Σχ. 18.

Διὰ μεγάλας δὲ ἀποστάσεις μεταχειριζόμεθα τὰ *ἀκόντια* (σχ. 18), ἤτοι ῥάβδους ξυλίνας φερούσας εἰς μὲν τὸ ἓν ἄκρον σιδηρᾶν αἰχμὴν διὰ νὰ ἐμπήγωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος, εἰς δὲ τὸ ἕτερον ἄκρον φέρουσι συνήθως μικρὰν σημαίαν ἐρυθράν, ἵνα διακρίνωνται μακρόθεν. Ἡ χάραξις τῆς εὐθείας γίνεται ὡς ἑξῆς :

Ἐμπήγομεν εἰς ἑκάτερον τῶν δύο σημείων Α καὶ Β (σχ. 19), δι' ὧν θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, ἀνὰ ἓν ἀκόντιον κατακόρυφον· ἔπειτα μεταξὺ αὐτῶν ἐμπήγομεν, τῇ βοηθείᾳ συνεργάτου, ἄλλα ἀκόντια Γ καὶ Δ ἀπέχοντα ἀρκετὰ ἀπ' ἀλλήλων οὕτως, ὥστε, ἐὰν σταθῶμεν ὀλίγον ὄπισθεν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο

---

(1) Οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἀσκηθῶσιν ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος εἰς τὴν γραφὴν τῶν εὐθειῶν γραφῶν ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος καὶ ἐπὶ τοῦ πατώματος διὰ νήματος χριομένου διὰ κιμωλίας.

πρώτων ἀκοντίων καὶ σκοπεύσωμεν εἰς τὸ ἄλλο, νὰ κρύπτωνται ὑπ' αὐτῶν ὅλα τὰ μεταξὺ αὐτῶν ἀκόντια. Τοῦτο εὐκόλως κατορθοῦται, κάμνοντες πρὸς τὸν συνεργάτην νεῦμα διὰ τῆς χειρός

Σχ. 19.

μας διὰ νὰ ἐμπήξῃ ἕκαστον ἀκόντιον πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, μέχρις οὗ καλυφθῇ ὑπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς εὑρισκομένων ἀκοντίων Α καὶ Β.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα καὶ νὰ προεκβάλλωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ πέραν τοῦ σημείου Β ἢ Α, τοποθετοῦντες πρὸς τοῦτο ἀκόντια.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

46. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰς εὐθείας γραμμάς, συγκρίνομεν αὐτὰς πρὸς ἄλλην ὡρισμένην, ἥτις λαμβάνεται ὡς *μονάς*, καὶ εὑρίσκομεν ἐκ πόσων μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μιᾶς γραμμῆς λέγεται *μῆκος* αὐτῆς.

Μονάδες μήκους

47. Ὡς μονὰς τοῦ μήκους λαμβάνεται συνήθως τὸ *Γαλλικὸν μέτρον*. (1)

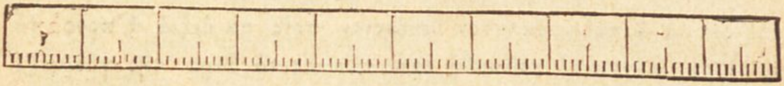
Τὸ Γαλλικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται *ὑποδεκάμετρον* ἢ *δεκατόμετρον*· ἕκαστον ὑποδεκάμετρον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται *ὑφεκατόμετρον* ἢ *ἑκατοστόμετρον*· ἕκαστον ὑφεκατόμετρον διαιρεῖται πάλιν εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται *ὑποχιλιόμετρον* ἢ *χιλιοστόμετρον*.

(1) Τὸ Γαλλικὸν μέτρον ὡρίσθη οὕτως, ὥστε 40 ἑκατομμύρια τοιαῦτα μέτρα νὰ ἀποτελῶσι τὴν περιφέρειαν τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς.

Τὸ Γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη ἐν Ἑλλάδι *Βασιλικὸς πῆχυς*, τὸ ὑποδεκάμετρον *παλάμη*, τὸ ὑφεκατόμετρον *δάκτυλος*, καὶ τὸ ὑποχιλιόμετρον *γραμμή*. (1)

Ὥστε ὁ Β. πῆχυς εἶνε ἴσος μὲ 10 παλάμας, ἢ 100 δακτύλους, ἢ 1000 γραμμάς.

Τὸ σχῆμα 20 παριστᾷ ἓν *ὑποδεκάμετρον* ἢ μίαν *παλάμην* διῃρημένην εἰς δακτύλους καὶ γραμμάς. Δέκα τοιαῦται παλάμαι ἀποτελοῦσιν ἕνα Β. πῆχυν ἢ μέτρον.

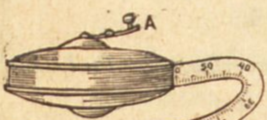


Σχ. 20.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοδομῶν καὶ οἰκοπέδων λαμβάνεται συνήθως ὡς μονὰς ὁ *τεκτονικὸς πῆχυς*, ὅστις εἶνε ἴσος μὲ 75 δακτύλους ἢ 0,75 τοῦ μέτρου ἤτοι εἶνε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου.

Εἰς δὲ τὸ ἐμπόριον πρὸς μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων γίνεται χρῆσις τοῦ *μικροῦ* καὶ τοῦ *μεγάλου* πήχεως τῆς Κων/λεως. Καὶ ὁ μὲν μικρὸς πῆχυς εἶνε ἴσος μὲ 0,648 τοῦ μέτρου, ὁ δὲ μέγας εἶνε ἴσος μὲ 0,669 τοῦ μέτρου. Ἑκάτερος δὲ τούτων διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται *ῥούπια*.

Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἀποστάσεων μεταχειριζόμεθα συνήθως τὰ ἑξῆς ὄργανα. Τὴν *ταινίαν* (σχ. 21), ἥτις ἔχει μῆκος 10 ἢ 20 μέτρων συνήθως καὶ διαιρεῖται εἰς μέτρα, ὑποδεκάμετρα καὶ ὑφεκατόμετρα, περιελίσσεται δὲ περὶ ἄξονα ἐντὸς κυλινδρικῆς πυξίδος διὰ τοῦ στροφάλου Α. Καὶ τὴν *ἅλυσσιν* (σχ. 22), ἥτις συνίσταται ἐκ 50 εὐθυγράμμων ἀγγυλίων ἐκ σύρματος καὶ συνδεομένων διὰ κρίκου· ἕκαστον δὲ ἀγγύλιον ἔχει μῆκος 0,20 τοῦ



Σχ. 21.

(1) Τὸ μέτρον ἢ Β. πῆχυν ὀνομάζουσιν οἱ τεχνῖται *πασσέτο*, τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου ἢ δακτύλους ὀνομάζουσι *πόντους*.

μέτρου, ἑπομένως τὸ μῆκος τῆς ἁλύσσεως εἶνε 0,20×50 ἤτοι 10 μέτρα. Τὰ δὲ πέρατα τῆς ἁλύσσεως φέρουσι λαβίδας δι' ὧν τανύεται κατὰ τὴν μέτρησιν.

Ἡ ἅλυσσις συνοδεύεται καὶ ὑπὸ 11 σιδηρῶν βελονῶν (σχ. 23) ἐχουσῶν μῆκος 0,30 τοῦ μέτρου περίπου καὶ τῶν ὁποίων τὴν χρῆσιν θὰ ἴδωμεν κατωτέρω. Τὸ ἓν ἄκρον τῶν βελονῶν ἀπολήγει εἰς αἰχμήν, ἵνα εὐκόλως ἐμπήγωνται εἰς τὸ ἔδαφος, τὸ δὲ ἕτερον ἄκρον εἶνε ἀγκιστροειδές, ἵνα εὐκόλως μετακομίζωνται.

Σχ. 22.

Σχ. 23.

Τρόπος τῆς μετρήσεως τῶν εὐθειῶν

48. 1) Διὰ νὰ μετρήσωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν αβ ἐπὶ τοῦ χάρτου μεταχειριζόμεθα συνήθως ὡς ὄργανον τὸ *διπλοῦν ὑποδεκάμετρον* (σχ. 24) ἔχον σχῆμα κανόνος τοῦ ὁποίου ἀμφότεραι αἱ κόψεις ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε διῃρημέναι εἰς ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου. Ἡ δὲ μέτρησις τῆς εὐθείας αβ γίνεται ὡς ἑξῆς· ἐφαρμόζομεν ἐπ' αὐτὴν τὴν μίαν κόψιν τοῦ διπλοῦ ὑποδεκαμέτρου οὕτως, ὥστε τὸ μηδὲν τῆς ὑποδιαιρέσεως νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς τὸ πέρας α τῆς αβ, τότε τὸ ἕτερον πέρας β αὐτῆς θὰ πέσῃ εἴς τινα ὑποδιαίρεσιν αὐτοῦ· οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ἐκ πόσων ἑκατοστῶν καὶ χιλιοστῶν τοῦ μέτρου ἀποτελεῖται ἡ εὐθεῖα αβ.

Σχ. 24.

2) Διὰ νὰ μετρήσωμεν διὰ τῆς ταινίας ὁριζόντιον γραμμὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ὡς παραδ. χάριν τὴν ΑΒ (σχ. 19), στηρίζομεν διὰ τῆς χειρός μας τὸ ἓν ἄκρον τῆς ταινίας εἰς τὴν ἀρχὴν Α τῆς εὐθείας, διὰ δὲ τοῦ ἑτέρου ἄκρου αὐτῆς τανύει ὁ συνεργάτης τὴν ταινίαν ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ σημειοῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὸ ἄκρον εἰς ὃ ἔφθασε ἡ τεταμένη ταινία· ἔπειτα ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ σημείου

Α μεταβαίνομεν εἰς τὸ σημειωθὲν μέρος καὶ ἐκεῖ στηρίζομεν ἐκ νέου τὸ ἄκρον τῆς ταινίας, ταὐτοχρόνως δὲ ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου τούτου καὶ ὁ συνεργάτης, ἀκολουθῶν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (τῇ βοηθείᾳ πάντοτε ἡμῶν, ἵνα μὴ παρεκκλίνῃ αὐτῆς) καὶ σημειοῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὸ ἄκρον εἰς ὅ ἔφθασε ἡ τεταμένη ταινία· οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦντες μέχρι τοῦ πέρατος Β τῆς εὐθείας, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος αὐτῆς.

3) Διὰ τῆς ἁλύσσεως ἡ μέτρησις τῆς εὐθείας ΑΒ γίνεται ὡς ἑξῆς· Ἐμπήγομεν εἰς τὴν ἀρχὴν Α αὐτῆς μίαν βελόνην καὶ διαπερῶμεν ἐν αὐτῇ τὴν μίαν λαβίδα τῆς ἁλύσσεως, ὁ δὲ συνεργάτης ὅστις κρατεῖ τὴν ἑτέραν λαβίδα τῆς ἁλύσσεως καθὼς καὶ τὰς 10 ὑπολοίπους βελόνας, προχωρεῖ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ εἰς τὸ σημεῖον ἔνθα ἔφθασε τὸ πέρας τῆς τεταμένης ἁλύσσεως ἐμπήγει βελόνην· ἔπειτα λαμβάνοντες διὰ τῆς ἀριστερᾶς χειρὸς τὴν λαβίδα τῆς ἁλύσσεως καὶ διὰ τῆς δεξιᾶς τὴν κατὰ τὸ σημεῖον Α βελόνην, μεταβαίνομεν εἰς τὴν δευτέραν βελόνην, ἣν ἐνέπηξεν ὁ συνεργάτης καὶ διαπερῶμεν ἐν αὐτῇ τὴν λαβίδα τῆς ἁλύσσεως, ταὐτοχρόνως δὲ ἀναχωρεῖ καὶ ὁ συνεργάτης καὶ προχωρεῖ ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν· οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦντες εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς ΑΒ. Εἶνε δὲ φανερόν, ὅτι ὅσας βελόνας λαμβάνομεν ἡμεῖς ἐκ τοῦ ἐδάφους, τόσα δεκάμετρα ἔχομεν διανύσει ἐπὶ τῆς ΑΒ.

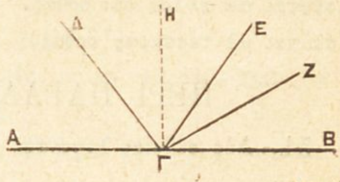
ΣΗΜ. Ἐὰν ὅμως τὸ ἔδαφος εἶνε ἀνώμαλον, τότε μετροῦμεν τὴν ὁριζόντιον ἀπόστασιν. Πρὸς τοῦτο ὁ συνεργάτης πρέπει νὰ κρατῇ τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς ἁλύσσεως ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους ὅσον οἷόν τε ὁριζοντίως. Ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἵνα εὕρῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὸ σημεῖον εἰς ὅ ἀντικρίζει τὸ ἄκρον τῆς τεταμένης ἁλύσσεως, ἐξαρτᾷ ἐκ τῆς λαβίδος τὴν στάθμην, ἧς τὸ βάρος θὰ δείξῃ τὸ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀντικρίζον σημεῖον, ἐν ἐλλείψει δὲ τῆς στάθμης ἀφίνει πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μικρὸς λίθος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

49. *Ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀχθῶσι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμε-*

ναι, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 25) καὶ εὐθεῖαι ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ αἱ ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ. Λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΒ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.



Σχ. 25.

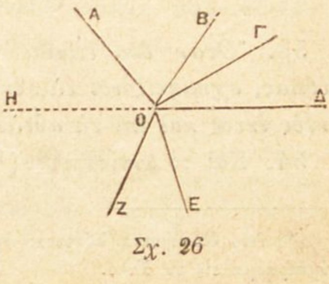
Διότι ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὅτε σχηματίζονται αἱ δύο ὀρθαὶ γωνίαι ΑΓΗ καὶ ΗΓΒ, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ καὶ ΔΓΗ ἀποτελεῖ τὴν μίαν ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΗ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΗΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΒ ἀποτελεῖ τὴν ἄλλην ὀρθὴν γωνίαν ΗΓΒ. Ὥστε τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τούτων ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

Καὶ μία εὐθεῖα ἐὰν ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Γ, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Διότι ἂν μὲν ἡ εὐθεῖα αὕτη σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· εἰ δὲ μή, ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

50. *Ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου ἀχθῶσι πέριξ αὐτοῦ ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ σημεῖον Ο καὶ εὐθεῖαι ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ (σχ. 26). Λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ, ΕΟΖ, ΖΟΑ ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς.



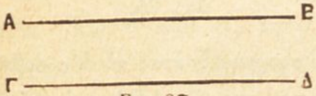
Σχ. 26

Διότι ἐὰν προεκβάλλωμεν μίαν

τῶν εὐθειῶν τούτων, καὶ ἔστω τὴν ΔΟ κατὰ τὴν ΟΗ, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΗΟΑ, ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς (ἐδάφ. 49)· ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΗΟΖ, ΖΟΕ, ΕΟΔ ἰσοῦται μὲ ἄλλας δύο ὀρθάς. Ὥστε τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς.

ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

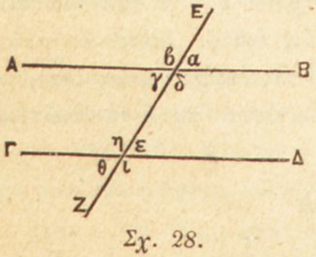
51. Δύο εὐθεῖαι λέγονται *παράλληλοι*, ὅταν κῆνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν τὰς προεκβάλλωμεν ἑκατέρωθεν.



Σχ. 27.

Τὸ σχῆμα 27 παριστᾷ δύο εὐθείας παραλλήλους.

52. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 28) τέμνωνται ὑπὸ τρίτης εὐθείας ΕΖ, σχηματίζουσι πέριξ τῶν τομῶν αὐτῶν ὀκτὼ γωνίας, τὰς α, ϐ, γ, δ, ε, η, θ, ι. Ἐκ τούτων αἱ γωνίαι η καὶ δ, γ καὶ ε, αἵτινες κεῖνται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης ΕΖ, χωρὶς νὰ εἶνε ἐφεξῆς, λέγονται *ἐντὸς ἐναλλάξ*· αἱ δὲ γωνίαι ε καὶ α, η καὶ ϐ, γ καὶ θ, δ καὶ ι, ὧν ἡ μία κεῖται ἐντὸς τῶν εὐθειῶν ἡ δὲ ἄλλη ἐκτὸς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης, χωρὶς νὰ εἶνε ἐφεξῆς, λέγονται *ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*.



Σχ. 28.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

53. *Ὅταν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης εὐθείας, σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, καὶ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας.*

54. Καὶ τὸ ἀντίστροφον [1] ἀληθεύει, ἤτοι *ὅταν δύο εὐθεῖαι*

---

[1] Δύο θεωρήματα λέγονται *ἀντίστροφα*, ὅταν ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑνὸς εἶνε συμπέρασμα εἰς τὸ ἄλλο.

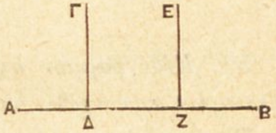
τέμνωνται ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζωσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε παράλληλοι.

55. *Ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας δύναται νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ μία καὶ μόνη.* (1)

ΣΗΜ. Πῶς δὲ ἄγεται ἡ μία καὶ μόνη αὕτη παράλληλος, θὰ ἴδωμεν κατωτέρω (εἰς τὸ βιβλίον Β').

56. *Δύο κάθετοι ΓΔ καὶ ΕΖ (σχ. 29) ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἶνε παράλληλοι.*

Διότι αἱ κάθετοι αὗται τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΒ, σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ΓΔΖ καὶ ΕΖΒ ἢ ΕΖΔ καὶ ΓΔΑ ἴσας, ὡς ὀρθάς.

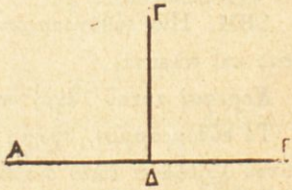


Σχ. 29.

57. *Ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ ταύτην μία καὶ μόνη.*

Παραδείγματος χάριν, ἐκ τοῦ σημείου Γ (σχ. 30) δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ μία καὶ μόνη, καὶ ἔστω αὕτη ἡ ΓΔ.

Πῶς δὲ ἄγεται ἡ κάθετος αὕτη, θὰ ἴδωμεν κατωτέρω. Ἐνταῦθα μόνον λέγομεν, ὅτι ἄλλη κάθετος, ἐκτὸς τῆς τῆς ΓΔ, δὲν δύναται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Διότι δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶνε παράλληλοι (ἐδάφ. 56).



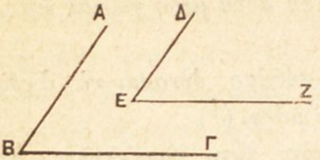
Σχ. 30.

58. *Δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν διευθυνομένας, εἶνε ἴσαι.*

---

(1) Τὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τούτων ὡς καὶ ἄλλων τινῶν κατωτέρω παραλείπομεν, ἵνα μὴ δι' αὐτῶν ἐπισκοτίσωμεν τὸν νοῦν τῶν μικρῶν μαθητῶν. Ὁ διδάσκων δύναται μάλιστα νὰ παραλείπῃ καὶ πᾶσαν ἄλλην ἀπόδειξιν σημειουμένην δι' ἀστερίσκου· διότι ὁ σκοπὸς τῆς *Πρακτικῆς Γεωμετρίας* δὲν εἶνε ἡ ἀπόκτησις θεωρητικῶν γνώσεων, ἀλλὰ πρακτικῶν ὠφελίμων ἐν τῷ κοινωνικῷ βίῳ.

Παραδείγματος χάριν, αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 31), ὧν αἱ πλευραὶ ΒΑ καὶ ΕΔ, ΒΓ καὶ ΕΖ ὑποτίθενται παράλληλοι καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φοράν, εἶνε ἴσαι.



Σχ. 31.

Διότι ἐὰν ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἀποτελεῖται μία καὶ μόνη γωνία, ἐπομένως εἶνε ἴσαι (ἐδάφ. 33).

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Ὁρισμοί

59. *Εὐθύγραμμον σχῆμα* λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περικλεισμένη πανταχόθεν ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν.

Τὰ κατωτέρω σχήματα 32, 33 κτλ. εἶνε εὐθύγραμμα.

Πλευραὶ τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος λέγονται αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες σχηματίζουσιν αὐτό.

Γωνίαι τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος λέγονται αἱ γωνίαι, αἵτινες σχηματίζονται ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχει προφανῶς τόσας γωνίας, ὅσας καὶ πλευράς.

Κορυφαὶ αὐτοῦ λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του.

Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν ἢ πλευρῶν αὐτοῦ λαμβάνει ἴδιον ὄνομα. Παραδείγματος χάριν

Τρίγωνον ἢ *τρίπλευρον* λέγεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα τὸ ἔχον τρεῖς γωνίας ἢ τρεῖς πλευράς.

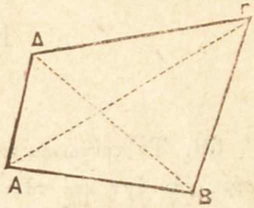
Σχ. 32.

Τὸ σχῆμα 32 παριστᾷ τρίγωνον. Πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ ΓΑ· γωνίαι δὲ αὐτοῦ αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ· κορυφαὶ δὲ αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

Τετράπλευρον λέγεται τὸ ἔχον τέσσαρας πλευράς.

ΣΗΜ. Τὸ τετράπλευρον δὲν λέγεται πάντοτε καὶ *τετράγωνον*. Θὰ ἴδωμεν δὲ κατωτέρω τίνα τῶν τετραπλεύρων λέγονται καὶ τετράγωνα.

Τὸ σχῆμα 33 παριστᾷ τετράπλευρον. Πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· γωνίαι δὲ αὐτοῦ αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ· κορυφαὶ δὲ αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.



Σχ. 33.

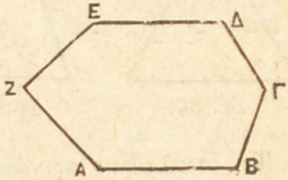
Πεντάγωνον ἢ *πεντάπλευρον* λέγεται τὸ ἔχον πέντε γωνίας ἢ πέντε πλευράς.

Ἑξάγωνον ἢ *ἑξάπλευρον* λέγεται τὸ ἔχον ἓξ γωνίας ἢ ἓξ πλευράς· τοιοῦτον εἶνε τὸ σχῆμα 34. Ἐν γένει δὲ

Πολύγωνον ἢ *πολύπλευρον* λέγεται τὸ ἔχον πολλὰς γωνίας ἢ πολλὰς πλευράς.

ΣΗΜ. Συνήθως λέγομεν πολύγωνον πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχον περισσοτέρας τῶν τεσσάρων γωνιῶν ἢ πλευρῶν.

Τὸ ἁπλούστατον τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων εἶνε τὸ τρίγωνον. Διότι τρεῖς μόνον εὐθεῖαι ἀρκοῦσιν, ὅπως περικλεισθῇ πανταχόθεν ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.



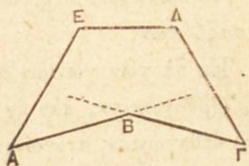
Σχ. 34.

Διαγώνιος τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει δύο κορυφὰς αὐτοῦ, χωρὶς νὰ εἶνε πλευρά.

Εἰς τὸ σχῆμα 33 διαγώνιοι αὐτοῦ εἶνε αἱ διὰ στιγμῶν σημειούμεναι (πρὸς διάκρισιν) εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ.

Περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἡ περίμετρος, παραδείγματος χάριν, τοῦ ἀνωτέρω τετραπλεύρου εἶνε ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ.

Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *κυρτόν*, ἐὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ προεκβαλλόμεναι ἑκατέρωθεν δὲν εἰσέρχωνται ἐντὸς τοῦ σχήματος. Τὰ ἀνωτέρω, παραδ. χάριν, εὐθύγραμμα σχήματα εἶνε κυρτά.



Σχ. 35.

Τὸ μὴ κυρτὸν σχῆμα λέγεται *κοῖλον*. Τοιοῦτον εἶνε τὸ σχῆμα 35· διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΒ προεκβαλλόμεναι εἰσέρχονται ἐντὸς αὐτοῦ.

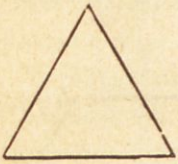
ΣΗΜ. Λέγοντες κατωτέρω εὐθύγραμμον σχῆμα, θὰ ἐννοοῦμεν τὸ κυρτόν.

Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *κανονικόν*, ἐὰν ἔχῃ ὅλας τὰς πλευρὰς καὶ ὅλας τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας.

ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ὁρισμοὶ

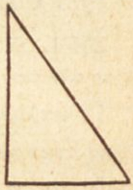
60. Τὸ τρίγωνον ἐκ μὲν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λέγεται *ἰσόπλευρον*, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας. Τὸ σχῆμα 36 παριστᾷ ἰσόπλευρον τρίγωνον.



Σχ. 36.

Σχ. 37.

Σχ 38.



Σχ. 39.

Τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι αὐτοῦ εἶνε ἴσαι μεταξύ των.

Ἰσοσκελές, ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον πλευρὰς ἴσας. Τὸ σχῆμα 37 παριστᾷ ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

Τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶνε ἴσαι.

Σκαληνόν, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ ἀνίσους. Τὸ σχῆμα 38 παριστᾷ σκαληνὸν τρίγωνον.

Τοῦ σκαληνοῦ τριγώνου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι αὐτοῦ εἶνε ἄνισοι μεταξύ των.

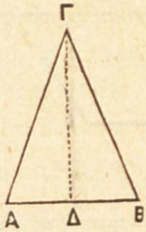
Ἐκ δὲ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον.

Ὀρθογώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Τὸ σχῆμα 39 παριστᾷ ὀρθογώνιον τρίγωνον. Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ λέγεται *ὑποτείνουσα* τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

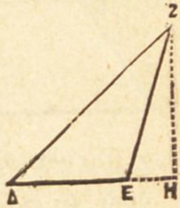
Ἀμβλυγώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν. Τοιοῦτον εἶνε τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 41).

Βάσις τριγώνου λέγεται μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τριγώνου λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ πρὸς τὰς ἄλλας ἄνισος πλευρά.

Ὕψος τριγώνου λέγεται ἡ ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.



Σχ. 40.



Σχ. 41.

Ἡ κάθετος αὕτη δύναται νὰ πέσῃ ἢ ἐπὶ τὴν βάσιν ἢ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς αὐτῆς. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 40) ἂν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ κάθετος ΓΔ. Εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 41) ἂν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΔΕ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ κάθετος ΖΗ, ἥτις πίπτει ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς βάσεως.

Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου βάσιν καὶ ὕψος λαμβάνομεν συνήθως τὰς δύο καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ.

61. *Ἑκάστη πλευρὰ παντὸς τριγώνου εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.* Διότι ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ εἶνε εὐθεῖα, ἐνῷ αἱ δύο ἄλλαι ἀποτελοῦσι τεθλασμένην γραμμήν, καὶ ἐπομένως ἡ εὐθεῖα εἶνε μικροτέρα αὐτῆς (ἐδάφ. 28).

ΕΙΔΗ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

Ὁρισμοί

62. *Τραπέζιον* λέγεται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

Σχ. 42.

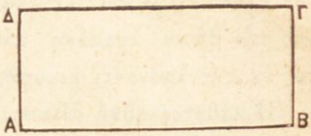
Τὸ σχῆμα 42 παριστᾷ τραπέζιον. Παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ.

Παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι.

Τὰ σχήματα 43, 44, 45 καὶ 46 παριστῶσι παραλληλόγραμμα. Παράλληλοι πλευραὶ αὐτῶν εἶνε αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ, αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ.

Τὸ παραλληλόγραμμον διακρίνεται εἰς *πλάγιον* ἢ *κεκλιμμένον*, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἀνίσους. Τοιοῦτον εἶνε τὸ σχῆμα 43.

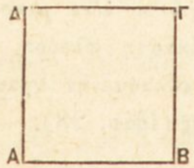
Σχ. 43.



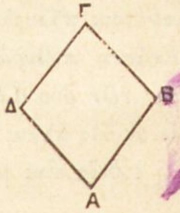
Σχ. 44.

ΣΗΜ. Θὰ ἴδωμεν δὲ κατωτέρω, ὅτι πᾶν παραλληλόγραμμον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας.

Εἰς *ὀρθογώνιον*, ἐὰν ἔχῃ τὰς γωνίας αὐτοῦ ὀρθάς, τὰς δὲ πλευρὰς ἀνίσους. Τοιοῦτον εἶνε τὸ σχῆμα 44. Εἰς *τετράγωνον*, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ἴσας. Τοιοῦτον εἶνε τὸ σχῆμα 45.



Σχ. 45.



Σχ. 46.

ΣΗΜ. Τὸ τετράγωνον εἶνε κανονικὸν σχῆμα, διότι ἔχει καὶ τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας.

Εἰς *ῥόμβον*, ἐὰν ἔχῃ τὰς γωνίας του ἀνίσους, τὰς δὲ πλευράς του ἴσας. Τοιοῦτον εἶνε τὸ σχῆμα 46.

Ἀσκήσεις

Γράψατε ἓν πλάγιον καὶ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Κατὰ τί ὁμοιάζουν ταῦτα καὶ κατὰ τί διαφέρουν ;

Γράψατε ἓν πλάγιον παραλληλόγραμμον καὶ ἕνα ῥόμβον. Κατὰ τί ὁμοιάζουν ταῦτα καὶ κατὰ τί διαφέρουν ;

Γράψατε ἓν πλάγιον παραλληλόγραμμον καὶ ἓν τετράγωνον. Κατὰ τί ὁμοιάζουν ταῦτα καὶ κατὰ τί διαφέρουν ;

Γράψατε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ ἕνα ῥόμβον. Κατὰ τί ὁμοιάζουν ταῦτα καὶ κατὰ τί διαφέρουν ;

Γράψατε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ ἓν τετράγωνον. Κατὰ τί ὁμοιάζουν ταῦτα καὶ κατὰ τί διαφέρουν ;

Γράψατε ἕνα ῥόμβον καὶ ἓν τετράγωνον. Κατὰ τί ὁμοιάζουν ταῦτα καὶ κατὰ τί διαφέρουν ;

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

63. *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος εἶνε τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσος εἶνε ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένος κατὰ 4.*

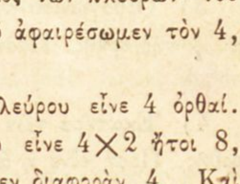
Τὸ ἄθροισμα, παραδείγματος χάριν, τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶνε 2 ὀρθαί. Διότι ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του εἶνε 3×2 ἤτοι 6, καὶ ἂν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 6 ἀφαιρέσωμεν τὸν 4, εὑρίσκομεν διαφορὰν 2.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου εἶνε 4 ὀρθαί. Διότι ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του εἶνε 4×2 ἤτοι 8, καὶ ἂν ἀπὸ τὸν 8 ἀφαιρέσωμεν 4, εὑρίσκομεν διαφορὰν 4. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

64. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶνε 2 ὀρθαί, ἕπεται ὅτι

Ἐὰν ἡ μία τῶν γωνιῶν τριγώνου τινὸς εἶνε ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, ἑκατέρα τῶν ἄλλων θὰ εἶνε ὀξεῖα, καὶ

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν αὐτῶν ἴσην. Διότι ἐὰν ἀπὸ τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας ἑκατέρου τριγώνου ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν, θὰ μείνωσιν ἴσαι γωνίαι (ἐδάφ. 21).



Σχ. 47.

65. Ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία ΓΒΔ (σχ. 47), ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς προεκβολῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Γ, ἤτοι εἶνε $ΓΒΔ=Α+Γ$.

Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Γ ἀποτελεῖ μετὰ τῆς γωνίας Β δύο ὀρθὰς (ἐδάφ. 63). Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΓΒΔ ἀποτελεῖ μετὰ τῆς γωνίας Β δύο ὀρθὰς (ἐδάφ. 49). Ὥστε εἶνε ΓΒΔ $=$Α$+$Γ.

Ἀσκήσεις

1) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία αὐτοῦ εἶνε τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἡ δὲ ἄλλη τὰ $\frac{4}{9}$ αὐτῆς. Πόση εἶνε ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ ;

(*Λύσις* τὰ $\frac{58}{45}$ τῆς ὀρθῆς)

2) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως αὐτοῦ γωνία εἶνε τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀρθῆς. Πόση εἶνε ἑκατέρα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ ;

(*Λύσις* $\frac{13}{16}$ τῆς ὀρθῆς)

3) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶνε τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Πόση εἶνε ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ ;

(*Λύσις* $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς)

4) Ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶνε τὰ $\frac{5}{9}$ ὀρθῆς. Πόση εἶνε ἡ ἄνισος πρὸς αὐτὰς γωνία ;

(*Λύσις* $\frac{8}{9}$ τῆς ὀρθῆς)

5) Πόσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου καὶ πόσαι τὸ τοῦ ὀκταγώνου ;

(*Λύσις* 6 καὶ 12)

6) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε ἑκάστη γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ;

7) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε ἑκάστη γωνία τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου καὶ πόση ἡ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ;

(*Λύσις* $\frac{6}{5}$ καὶ $\frac{4}{3}$)

8) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου εἶνε 10 ὀρθαὶ γωνίαι. Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ;

(*Λύσις* 7)

9) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου εἶνε 26 ὀρθαὶ γωνίαι. Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ;

(*Λύσις* 15)

10) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἄνισος πρὸς τὰς ἄλλας γωνία εἶνε τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Πόση εἶνε ἡ ἐκτὸς γωνία αὐτοῦ ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς προεκβολῆς τῆς βάσεώς του ;

(*Λύσις* $\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς)

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

66. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, εἶνε ἴσα.*

67. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, εἶνε ἴσα.*

68. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶνε ἴσα.*

69. *Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην, εἶνε ἴσα.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τἀνάπαλιν αἱ ἴσαι γωνίαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

70. *Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ, αὕτη εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο γωνίας ἴσας.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 48) καὶ εὐθεῖα ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Α ἀγομένη εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἡ ΑΔ. Λέγω, ὅτι αὕτη εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ εἰς δύο γωνίας ἴσας.

Σχ. 48.

* Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν (ἤτοι τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΑΓ ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὴν ΒΔ ἴσην μὲ τὴν ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὴν ΑΔ κοινήν), εἶνε ἴσα (ἐδάφ. 68)· ἐπομένως ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ μέρη αὐτῶν ἴσα, ἤτοι τὴν γωνίαν

ΒΑΔ ἴσην μὲ τὴν ΔΑΓ (ὥστε ἡ ΑΔ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο γωνίας ἴσας) καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΒ ἴσην μὲ τὴν ΑΔΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΔ σχηματίζει μετὰ τῆς ΒΓ δύο γωνίας ἴσας, ἕπεται ὅτι εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτὴν (ἐδάφ. 34).

71. Ἀληθεύει δὲ καὶ τὸ ἑξῆς. *Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, αὕτη διαιρεῖ τὴν βάσιν καθὼς καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.*

ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΗΣ ΚΑΘΕΤΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΛΑΓΙΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

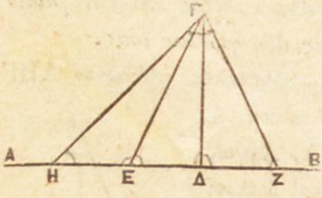
72. *Ὁρισμός*. Τὸ σημεῖον εἰς ὃ συναντᾷ εὐθεῖά τις ἄλλην εὐθεῖαν λέγεται *ποὺς* τῆς εὐθείας ταύτης.

73. Ὅταν ἐκ σημείου Γ κειμένου ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ (σχ. 49) ἀχθῇ πρὸς αὐτὴν ἡ κάθετος ΓΔ καὶ πλάγιαι, καθὼς αἱ ΓΕ, ΓΗ καὶ ΓΖ.

α') *Ἡ κάθετος ΓΔ εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας.*

β') *Δύο πλάγιαι ΓΕ καὶ ΓΖ, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου (ἤτοι εἶνε ΔΕ=ΔΖ) εἶνε ἴσαι, καὶ*

γ') *Ἐκ δύο πλαγίων ΓΗ καὶ ΓΕ μεγαλειτέρα εἶνε ἡ ΓΗ, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει περισσότερον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἢ ὁ ποὺς τῆς ἄλλης (ἤτοι εἶνε ΔΕ<ΔΗ).*



Σχ. 49.

Ἡ ἀλήθεια τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὰ ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ καὶ ΓΗ.

74. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τούτων ἀληθεύουσιν, ἤτοι

α') *Ἡ μικροτέρα ὅλων εἶνε ἡ κάθετος.*

β') *Δύο ἴσαι πλάγιαι ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, καὶ*

γ') *Ἐκ δύο ἀνίσων πλαγίων ὁ ποὺς τῆς μεγαλειτέρας ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου περισσότερον ἢ ὁ ποὺς τῆς μικροτέρας.*

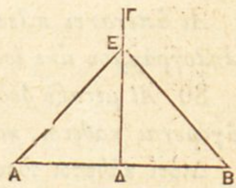
Ὁρισμὸς

75. *Ἀπόστημα* σημείου ἀπὸ εὐθείας λέγεται ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. Διότι ἐκ τῶν πολλῶν ἀγομένων εὐθειῶν ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, μόνη ἡ κάθετος εἶνε μικροτέρα ὅλων καὶ ἕνεκα τούτου ἔχει ὡρισμένον μέγεθος, ἐνῷ αἱ ἄλλαι ἔχουσι διάφορον μέγεθος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

76. *Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον εὐθείας ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ταύτης.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 50) καὶ κάθετος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης, καὶ ἔστω τὸ Ε, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς ΑΒ, ἤτοι εἶνε ΕΑ=ΕΒ.



Σχ. 50

Διότι αἱ εὐθεῖαι ΕΑ καὶ ΕΒ εἶνε πλάγιαι, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ἑπομένως εἶνε ἴσαι (ἐδαφ, 73).

77. Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ἤτοι

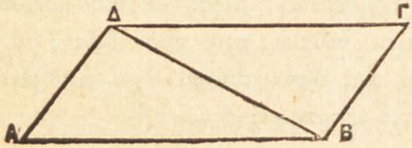
Πᾶν σημεῖον ἀπέχον ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα εὐθείας, εἶνε σημεῖον τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ταύτης.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΤΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

78. *Ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 51) καὶ διαγώνιος αὐτοῦ ἡ ΔΒ. Τὸ παραλληλόγραμμον διῃρέθη διὰ τῆς διαγωνίου εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ, τὰ ὁποῖα λέγω, ὅτι εἶνε ἴσα.

* Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ ἔχουσι μίαν πλευρὰν ἴσην, ἤτοι τὴν ΔΒ κοινήν, καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, ἤτοι τὴν γωνίαν ΓΔΒ ἴσην μὲ τὴν ΔΒΑ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΔΓ καὶ ΑΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΒ, καὶ τὴν ΑΔΒ ἴσην μὲ τὴν ΔΒΓ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΔΑ καὶ ΓΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΒ. Ἄρα εἶνε ἴσα (ἐδάφ. 67).



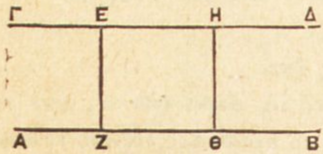
Σχ. 51.

79. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἀνωτέρω τριγώνων ἕπεται, ὅτι εἶνε καὶ ΔΓ=ΑΒ, ΑΔ=ΒΓ, γωνία Α ἴση τῇ Γ, καὶ γωνία Δ ἴση τῇ Β (διότι ἑκάστη ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσας γωνίας), τουτέστιν ἀποδεικνύεται, ὅτι

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι παντὸς παραλληλογράμμου εἶνε ἴσαι.

80. *Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 52) ἀγόμεναι κάθετοι, καθὼς αἱ ΕΖ καὶ ΗΘ, εἶνε ἴσαι.*

Διότι κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἶνε παράλληλοι (ἐδ. 56). Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε παράλληλοι, ἕπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΘΗ εἶνε παραλληλόγραμμον, ἑπομένως ἡ ΕΖ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΘΗ (ἐδαφ. 79).



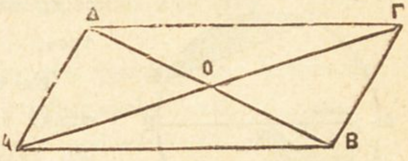
Σχ. 52.

81. *Αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 53) καὶ διαγώνιοι αὐτοῦ αἱ ΔΒ καὶ ΑΓ, αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Λέγω, ὅτι εἶνε ΑΟ=ΟΓ καὶ ΔΟ=ΟΒ.

* Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΔΟΓ καὶ ΑΟΒ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΔΓ ἴσην μὲ τὴν ΑΒ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου, τὴν γωνίαν ΒΔΓ ἴσην μὲ τὴν ΑΒΔ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΔΓ καὶ ΑΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΒ, καὶ τὴν

γωνίαν ΑΓΔ ἴσην μὲ τὴν ΒΑΓ ὡς ἐντὸς ἐνάλλὰξ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΑ. Ἄρα τὰ τρίγωνα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, εἶνε ἴσα (ἐδαφ. 67). Ἐπομένως ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ μέρη αὐτῶν ἴσα, ἤτοι τὴν ΔΟ ἴσην μὲ τὴν ΟΒ καὶ τὴν ΓΟ ἴσην μὲ τὴν ΟΑ, ὡς κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.



Σχ. 53.

82. *Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου (παραλληλογράμμου) εἶνε ἴσαι. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου καὶ τοῦ τετραγώνου τέμνουσιν ἀλλήλας πρὸς ὀρθάς, τοῦ δὲ τετραγώνου εἶνε καὶ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Διὰ νὰ μάθωμεν λοιπόν, ἂν τετράπλευρόν τι εἶνε παραλληλόγραμμον, μετροῦμεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, καὶ ἂν αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς δύο ἴσα μέρη, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶνε παραλληλόγραμμον. Ἂν δὲ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶνε καὶ ἴσαι, τότε τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶνε ὀρθογώνιον.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Ὁρισμοὶ

83. *Κύκλος* λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περικλειομένη ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον κείμενον ἐντὸς αὐτῆς.

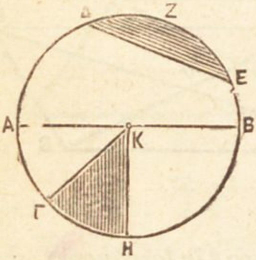
Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τοῦ κύκλου· ἡ δὲ καμπύλη, ἥτις περικλείει τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην λέγεται *περιφέρεια* τοῦ κύκλου.

Τὸ σχῆμα 54 παριστᾷ κύκλον, ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΓΗΒΔΑ εἶνε ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, τὸ δὲ σημεῖον Κ τὸ κέντρον αὐτοῦ.

Ἀκτὶς τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγει εἰς τὴν περιφέρειαν. Καθὼς ἡ ΚΑ, ἡ ΚΒ, ἡ ΚΓ κτλ.

84. *Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ κέντρου.



Σχ. 54.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ σημείου κειμένου ἐκτὸς τῆς περιφερείας εἶνε μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος, τὸ δὲ ἀπόστημα αὐτοῦ ἀπὸ σημείου κειμένου ἐντὸς τῆς περιφερείας εἶνε μικρότερον τῆς ἀκτῖνος.

Διάμετρος τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν. Καθὼς ἡ ΑΒ.

Ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Διότι ἑκάστη εἶνε διπλασία τῆς ἀκτῖνος.

Τόξον λέγεται μέρος τῆς περιφερείας. Καθὼς τὸ μέρος ΑΓ, ΓΒ κτλ.

Χορδὴ τόξου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνόνει τὰ ἄκρα τοῦ τόξου. Καθὼς ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶνε χορδὴ τοῦ τόξου ΔΖΕ, εἶνε προσέτι χορδὴ καὶ τοῦ τόξου ΔΓΕ.

Τμῆμα κύκλου λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ. Καθὼς τὸ μέρος ΔΖΕΔ.

Τομεὺς κύκλου λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν ἀποληγουσῶν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου. Καθὼς τὸ μέρος ΓΗΚΓ.

Δύο κύκλοι ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας εἶνε ἴσοι.

Δύο ἢ περισσότεροι κύκλοι λέγονται *ὁμόκεντροι*, ἐὰν ἔχωσι τὸ αὐτὸ κέντρον.

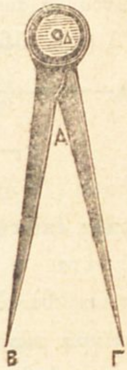
85. Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ τμῆμα ΑΔΕΒΑ (σχ. 54) περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου τμήματος ΑΓΗΒΑ, θὰ ἴδωμεν ὅτι θὰ ἐφαρμόσωσιν,

ἄρα καὶ τὰ τμήματα καὶ τὰ τόξα ΑΖΒ καὶ ΑΓΒ εἶνε ἴσα.

ΣΗΜ. Τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου λέγεται *ἡμικύκλιον*, τὸ δὲ ἥμισυ τῆς περιφερείας λέγεται *ἡμιπεριφέρεια*.

Διαβήτης. Γραφὴ τοῦ κύκλου

86. Ὁ *διαβήτης*(¹) (σχ. 55) εἶνε γεωμετρικὸν ὄργανον ἀποτελούμενον ἐκ δύο μεταλλίνων συνήθως σκελῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀποληγόντων εἰς αἰχμὴν καὶ τὰ ὁποῖα ἑνοῦνται δι' ἄξονος Δ οὕτως, ὥστε οὔτε πολὺ εὐκόλως, οὔτε καὶ πολὺ δυσκόλως νὰ περιστρέφωνται.



Σχ. 55.

Ὁ διαβήτης χρησιμεύει διὰ νὰ γράφωμεν κύκλους, καθὼς καὶ δι' ἄλλας ἐργασίας.

Διὰ νὰ γράψωμεν διὰ τοῦ διαβήτου κύκλον, ἀνοίγομεν τὰ σκέλη αὐτοῦ τόσον, ὅσον θέλομεν νὰ εἶνε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἔπειτα στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ περιστρέφομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἄλλου σκέλους ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, μέχρις οὗ αὕτη ἐπανέλθῃ εἰς τὸ πρῶτον σημεῖον· προσέχοντες ὅμως νὰ μὴ μεταβληθῇ κατὰ τὴν περιστροφὴν τὸ ἄνοιγμα τῶν σκελῶν. Ἡ αἰχμὴ τότε θὰ χαράξῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

ΣΗΜ. Ὑπάρχουσι καὶ διαβῆται τῶν ὁποίων μέρος τι τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτῶν δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ δι' ἄλλου φέροντος γραφίδα. Τοὺς διαβήτας τούτους μεταχειριζόμεθα, ὅταν θέλωμεν νὰ γράψωμεν κύκλους ἐπὶ χάρτου.

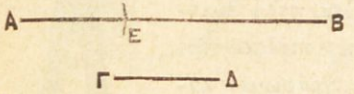
Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ γράψωμεν κύκλον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Ἐμπήγομεν πασσαλίσκον τινὰ εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἔπειτα λαμβάνομεν σχοινίον τόσον, ὅσον θέλομεν νὰ εἶνε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ κατασκευάζομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀγκύλην, εἰς μὲν τὴν μίαν ἀγκύλην διαπερῶμεν τὸν ἐν τῷ κέντρῳ πασσαλίσκον, εἰς δὲ τὴν

(¹) Τὸν διαβήτην ὀνομάζουσιν οἱ τεχνῖται *κουμπάσο*.

ἑτέραν διαπερῶμεν αἰχμηρὸν πασσαλίσκον, τὸν ὁποῖον καὶ περιστρέφομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ἔχοντες κατὰ τὴν περιστροφὴν καλῶς τεταμένον τὸ σχοινίον. Ἡ αἰχμὴ τότε τοῦ πασσαλίσκου θὰ χαράξῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Διὰ τοῦ διαβήτου λαμβάνομεν προσέτι ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΑΒ μέρος τι ἴσον μὲ ἄλλην δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΓΔ ὡς ἑξῆς·

Ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου τοσοῦτον, ὥστε αἱ αἰχμαὶ αὐτοῦ νὰ συμπέσωσιν ἀκριβῶς εἰς τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ τῆς εὐθείας ΓΔ (σχ. 56). Ἔπειτα μεταφέρομεν τὸν διαβήτην, ὅπως ἔχῃ, ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον Α, τὴν δὲ ἄλλην περιστρέφομεν ὀλίγον, ὥστε νὰ γράψῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ μικρόν τι τόξον· τὸ δὲ σημεῖον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνεται ἡ ΑΒ ὑπὸ τοῦ τόξου τούτου, ὁρίζει τὸ μέρος ΑΕ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε ἴσον μὲ τὴν ΓΔ, ἂν ἐννοεῖται ἐτηρήθη τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα τῶν σκελῶν κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ διαβήτου. Δυνάμεθα δὲ καὶ νὰ δοκιμάσωμεν τοῦτο, μεταφέροντες τὸν διαβήτην ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ ἂν αἱ αἰχμαὶ τῶν σκελῶν αὐτοῦ συμπέσωσι πάλιν ἐπὶ τῶν σημείων Γ καὶ Δ αὐτῆς, πειθόμεθα ὅτι τὸ ἄνοιγμα τῶν σκελῶν δὲν μετεβλήθη.



Σχ. 56.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου λαμβάνομεν καὶ τόξον ἴσον μὲ ἄλλο δοθὲν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων.

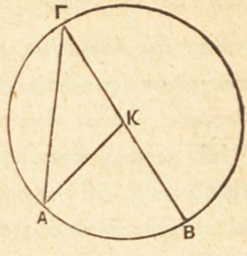
ΠΕΡΙ ΕΠΙΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Ὁρισμοί

87. *Ἐπίκεντρος γωνία* λέγεται ἡ γωνία, ἥτις ἔχει τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Καθὼς ἡ γωνία ΑΚΒ (σχ. 57).

Τὸ τόξον ΑΒ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας

ΑΚΒ λέγεται *ἀντίστοιχον* αὐτῆς· καὶ ἀντιστρόφως ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΚΒ λέγεται *ἀντιστοιχοῦσα* εἰς τὸν τόξον τοῦτο.



Σχ. 57.

Ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον λέγεται ἡ γωνία, ἥτις ἔχει τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶνε χορδαὶ τοῦ κύκλου. Καθὼς ἡ γωνία ΑΓΒ.

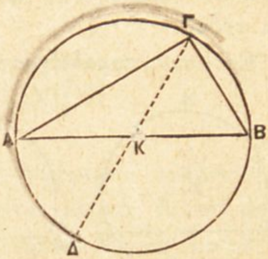
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

88. *Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία, καθὼς ἡ ΑΓΒ (σχ. 57) εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΒ τῆς βαινούσης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ ἐφ' οὗ βαίνει καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη.*

Διότι ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία ΑΚΒ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Γ (ἐδαφ. 65)· ἀλλ' αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἴσαι (ἐδ. 60) ὡς κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΚΑ καὶ ΚΓ (εἶνε δὲ αἱ πλευραὶ αὗται ἴσαι ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου). Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΓΒ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΑΚΒ.

89. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἵτινες βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, εἶνε ἴσαι μεταξύ των.*

Διότι ἑκάστη εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου τῆς βαινούσης εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.



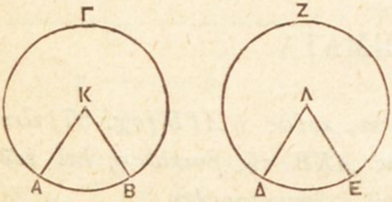
Σχ. 58

90. *Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία, καθὼς ἡ ΑΓΒ (σχ. 58), ἥτις βαίνει ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΔΒ ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.*

Διότι ἐὰν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΓΔ, θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ γωνία ΑΓΔ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΚΔ, καὶ ἡ ΔΓΒ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΚΒ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΚΔ καὶ ΔΚΒ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθῆς γωνίας (ἐδ. 49)· ἄρα ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΓΒ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν δύο ὀρθῶν, ἤτοι μία ὀρθή.

91. *Εἰς ἴσα τόξα ἴσων κύκλων (ἢ τοῦ αὐτοῦ κύκλου) ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι· καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦσιν ἴσα τόξα.*

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, οἱ ἴσοι κύκλοι ΑΒΓΑ καὶ ΔΕΖΔ (σχ. 59), καὶ ἴσα τόξα αὐτῶν τὰ ΑΒ καὶ ΔΕ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ εἶνε ἴσαι.



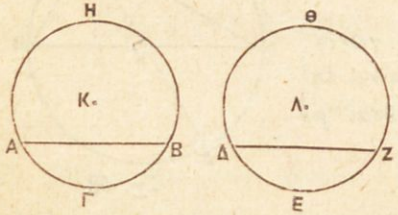
Σχ. 59

Διότι ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸν ἕνα κύκλον ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὰ ἴσα τόξα αὐτῶν νὰ ἐφαρμόσωσι (ὅτε τὰ κέντρα θὰ συμπέσωσι), θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ ἀκτῖνες (διότι τὰ ἄκρα των θὰ συμπέσωσι καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται ἐδάφ. 26), ἑπομένως αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ θὰ ἀποτελέσωσι μίαν γωνίαν, ἄρα εἶνε ἴσαι.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ἤτοι *εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦσιν ἴσα τόξα.*

92. *Εἰς ἴσους κύκλους (ἢ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον) τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἴσας χορδὰς ἀνήκουσιν ἴσα τόξα.*

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, οἱ ἴσοι κύκλοι ΑΓΗΑ καὶ ΔΕΘΔ (σχ. 60), καὶ ἴσα τόξα αὐτῶν τὰ ΑΓΒ καὶ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΒ καὶ ΔΖ εἶνε ἴσαι.

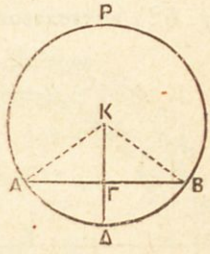


Σχ. 60.

Διότι ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸν ἕνα κύκλον ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὰ ἴσα τόξα αὐτῶν ΑΓΒ καὶ ΔΕΖ νὰ ἐφαρμόσωσι, θὰ ἐφαρμόσωσι τότε καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν (διότι τὰ ἄκρα των θὰ συμπέσωσι)· ἄρα θὰ εἶνε ἴσαι.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ἤτοι *αἱ ἴσαι χορδαὶ ἀνήκουσιν εἰς ἴσα τόξα* (εἴτε μικρότερα, εἴτε μεγαλείτερα τῆς ἡμιπεριφερείας εἶνε ἀμφότερα).

93. *Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Κ (σχ. 61) τοῦ κύκλου ΑΒΡΑ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΓ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ, αὕτη εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν, καὶ προεκβαλλομένη διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΔΒ εἰς δύο ἴσα μέρη.*



Σχ. 61.

*Διότι ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΚΒ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΚΒ (διότι εἶνε ΚΑ=ΚΒ ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου), ἑπομένως ἡ ΚΓ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο γωνίας ἴσας, τὰς ΑΚΔ καὶ ΔΚΒ (ἐδάφ. 70). Ἀλλ' αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι εἶνε ἐπίκεντροι, ἑπομένως ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἴσα τόξα (ἐδ. 91). Ἄρα τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΔΒ εἶνε ἴσα.

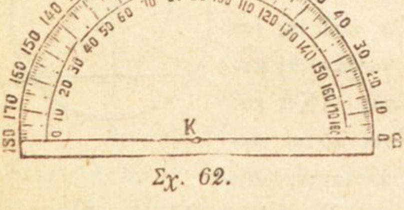
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἡ εὐθεῖα ΚΔ ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα 1) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου, 2) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Γ τῆς χορδῆς, 3) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν καὶ 4) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Δ τοῦ τόξου ΑΔΒ. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα ἐκτελοῦσα δύο τῶν ἀνωτέρω, ἐκτελεῖ καὶ τὰ ἄλλα δύο.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

94. Ἐν πρώτοις λέγομεν, ὅτι πᾶσα περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*· ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πρῶτα λεπτὰ* τῆς μοίρας· καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται πάλιν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *δεύτερα λεπτὰ* τῆς μοίρας. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν σημειοῦται συντόμως δι' ἑνὸς μηδενικοῦ γραφομένου εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ἄνω, ὁ ἀριθμὸς τῶν πρώτων λεπτῶν

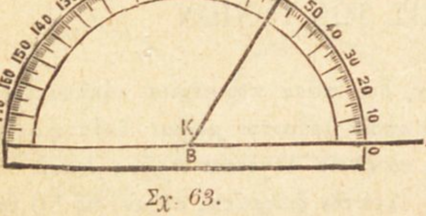
σημειοῦται διὰ μιᾶς ὀξείας (′), καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δευτέρων διὰ δύο ὀξειῶν (″). Παραδείγματος χάριν, τὸ τόξον 45 μοιρῶν 15 πρώτων λεπτῶν καὶ 40 δευτέρων γράφεται $25^0\ 15'\ 40''$.

Τὰς γωνίας μετροῦμεν διὰ τῶν ἀντιστοίχων τόξων αὐτῶν, ὥστε πᾶσα γωνία δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της εἰς μοίρας, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ τῆς μοίρας. Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἔχωμεν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν κύκλου πρὸς τὴν ὁποίαν νὰ ἀναγάγωμεν τὰς πρὸς μέτρησιν γωνίας, ἢ ταὐτὸ μίαν ἡμιπεριφέρειαν. Τοιοῦτον δὲ ὄργανον εἶνε ὁ *ἀναγωγεὺς* ἢ *γωνιόμετρον* (σχ. 62) κατεσκευασμένος ἐκ μετάλλου συνήθως ἢ κέρατος, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας καὶ διῃρημένον εἰς 180 μοίρας ἑκατέρωθεν.



Σχ. 62.

Ἔστω, ὅτι πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ (σχ. 63)· θέτομεν πρὸς τοῦτο τὸ κέντρον Κ τοῦ ἀναγωγέως (ὅπερ σημειοῦται ἐπὶ τῆς διαμέτρου του διὰ μικρᾶς ἐντομῆς) ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β τῆς γωνίας οὕτως, ὥστε ἡ διάμετρος αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΑ τῆς γωνίας, τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς θὰ συναντήσῃ τὸ τόξον τοῦ ἀναγωγέως εἴς τι σημεῖον αὐτοῦ· εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπάρχει ἀριθμός τις, ὅστις δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῆς γωνίας.



Σχ. 63.

Εἰς τὸ ἔναντι σχῆμα ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε 60 μοιρῶν.

Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶνε 90 μοιρῶν. Διότι ἂν ἀχθῶσι δύο διάμετροι τοῦ κύκλου κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, διαιρεῖται ἡ περιφέρεια εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (διότι αἱ περὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἴσαι, ὡς ὀρθαί, ἑπομένως καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν εἶνε ἴσα), καὶ ἑπομένως εἰς ἑκάστην ὀρθὴν γωνίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 360:4 ἤτοι 90 μοιρῶν.

Ἀφοῦ λοιπὸν αἱ 90° εἶνε 1 ὀρθὴ γωνία, ἡ 1° θὰ εἶνε τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς, αἱ 2°, 3°, 4° κτλ. θὰ εἶνε τὰ $\frac{2}{90}$, $\frac{3}{90}$, $\frac{4}{90}$ κτλ. τῆς ὀρθῆς.

ΣΗΜ. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γωνιῶν μεταχειριζόμεθα ἰδιαίτερα γωνιομετρικὰ ὄργανα, μεγαλείτερα τοῦ ἀναγωγέως, ἅτινα στηρίζονται ἐπὶ τρίποδος καὶ φέρουσι διόπτρας, δι' ὧν δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν κατὰ διαφόρους διευθύνσεις. Τὴν λεπτομερῆ περιγραφὴν τῶν ὀργάνων τούτων ὡς καὶ τὸν χειρισμὸν αὐτῶν παραλείπομεν χάριν συντομίας.

Ἀσκήσεις

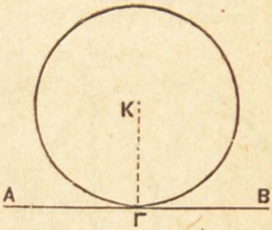
Τί μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε ἡ γωνία 20°; (τὰ $\frac{2}{9}$)
Τί μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε ἡ γωνία 36°; (τὰ $\frac{2}{7}$)
Τί μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε ἡ γωνία $67^\circ 30'$; (τὰ $\frac{3}{4}$)
Τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς πόσας μοίρας ἔχουσι; (72°)
Τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀρθῆς πόσας μοίρας ἔχουσι; ($56^\circ\ 15'$)

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Ὁρισμὸς

95. Εὐθεῖα λέγεται *ἐφαπτομένη* κύκλου, ἐὰν ἔχῃ μὲ τὴν περιφέρειαν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὅσον καὶ ἂν προσεκβληθῇ ἑκατέρωθεν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 64) ἔχῃ μετὰ τοῦ κύκλου κοινὸν σημεῖον μόνον τὸ Γ τῆς περιφερείας του, αὕτη λέγεται ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.



Σχ. 64.

ΘΕΩΡΗΜΑ

96. *Πᾶσα ἐφαπτομένη κύκλου εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τὴν ἀπολήγουσαν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Γ (σχ. 64) καὶ ἀκτὶς ἀπολήγουσα εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς ἀφῆς ἡ ΚΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΓ.

* Διότι ἀφοῦ ἡ ΑΒ καὶ ὁ κύκλος ἔχωσιν ἐξ ὑποθέσεως κοινὸν σημεῖον μόνον τὸ Γ, ἕπεται ὅτι ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς ΑΒ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἑπομένως τὸ ἀπόστημα αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ εἶνε μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος ΚΓ (ἐδάφ. 84), τουτέστιν ἡ ΚΓ εἶνε μικροτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἄρα ἡ ΚΓ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (ἐ άφ. 74), καὶ τἀνάπαλιν ἡ ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΓ.

97. Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ἤτοι *πᾶσα εὐθεῖα κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος εἶνε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.*

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΛΥΣΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

Ὁρισμὸς

98. *Γεωμετρικὸν πρόβλημα* λέγεται πρότασις εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ γίνῃ τι (γεωμετρικόν). Ἡ δὲ ἐκτέλεσις τοῦ ζητουμένου, ἥτις στηρίζεται ἐπὶ ἀληθῶν προτάσεων, λέγεται *λύσις* τοῦ προβλήματος.

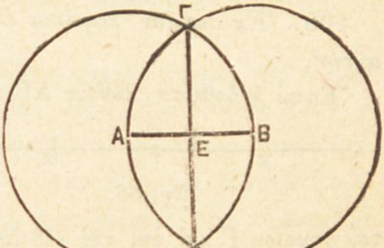
Ἡ λύσις παντὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ οὐ μόνον τὴν ὄψιν καὶ τὴν ἐπιδεξιότητα τῆς χειρός, ἀλλὰ καὶ τὴν χρῆσιν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἢ ἐργαλείων, ἄνευ τῶν ὁποίων οὐδεμίαν λύσιν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἀκριβῆ, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνάγκη τῶν τεχνῶν.(1)

Πρόβλημα

99. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον εὐθείας καὶ ἡ εἰς αὐτὸ κάθετος ἐπ᾿ αὐτήν.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 65), τῆς ὁποίας ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον καὶ τὴν εἰς αὐτὸ κάθετον ἐπ᾿ αὐτήν.

Ἀνοίγομεν πρὸς τοῦτο τὸν διαβήτην τόσον, ὅση εἶνε ἡ ΑΒ· ἔπειτα στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ γράφομεν κύκλον μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ· ἔπειτα στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν εἰς τὸ σημεῖον



Σχ. 65.

(1) Ὁ διδάσκων πρέπει νὰ εἶνε ἐφωδιασμένος κατὰ τὴν διδασκαλίαν μὲ τὰ ἀναγκαιοῦντα γεωμετρικὰ ὄργανα.

Β καὶ γράφομεν ἕτερον κύκλον μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν· οἱ κύκλοι οὗτοι θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ, μεταχειριζόμενοι πρὸς τοῦτο τὸν κανόνα, αὕτη θέλει τάμει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε· τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΓΔ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

* Διότι ἐὰν ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ μὲ τὰ ἄκρα τῆς ΑΒ, αἱ εὐθεῖαι αὗται (ΑΓ, ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ) θὰ εἶνε ἴσαι ὡς ἀκτῖνες ἴσων κύκλων, ἐπομένως τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶνε σημεῖα τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (ἐδάφ. 77). Ἀλλὰ μεταξὺ τῶν σημείων τούτων μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται, ἡ ΓΔ· ἄρα αὕτη εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ.

ΣΗΜ. Τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου δύναται νὰ εἶνε καὶ μικρότερον τῆς ΑΒ, ἀρκεῖ μόνον νὰ εἶνε μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς· διότι ἄλλως οἱ κύκλοι δὲν τέμνονται.

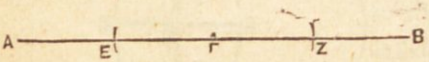
Διὰ τοῦ ἀνωτέρω τρόπου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε δεδομένη, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ. Διότι ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β μὲ τὸ σημεῖον Γ ἢ Δ δι' εὐθειῶν, σχηματίζεται ἰσόπλευρον τρίγωνον.

ΣΗΜ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου πρέπει νὰ εἶνε τόσον, ὅση εἶνε καὶ ἡ δοθεῖσα πλευρά.

Πρόβλημα

100. *Ἐκ σημείου κειμένου ἐπ' εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 66) καὶ Γ τὸ σημεῖον αὐτῆς, ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.



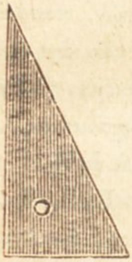
Σχ. 66.

Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Γ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ διαβήτου, τὰ ΓΕ καὶ ΓΖ. Ἔπειτα διὰ τοῦ προηγουμένου προβλήματος εὑρίσκομεν τὴν εἰς τὸ μέσον Γ τῆς ΕΖ κάθετον, ἥτις θέλει εἶνε ἡ ζητουμένη.

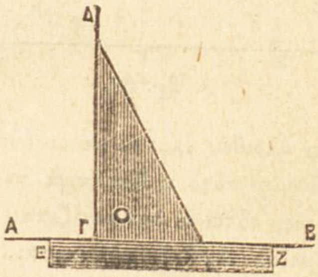
Ἕτερος τρόπος διὰ τοῦ Γνώμονος

101. Ὅπως οἱ ἄνθρωποι ἐπενόησαν τὸν κανόνα διὰ τὴν γραφὴν τῶν εὐθειῶν καὶ τὸν διαβήτην διὰ τὴν γραφὴν τῶν κύκλων καὶ λοιπῶν ἐργασιῶν, οὕτω ἐπενόησαν καὶ γεωμετρικὸν ὄργανον διὰ τὴν γραφὴν τῶν καθέτων καὶ λοιπῶν ἐργασιῶν.

Τὸ γεωμετρικὸν τοῦτο ὄργανον λέγεται *γνώμων* καὶ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου (σχ. 66) ἢ γωνίας ὀρθῆς (σχ. 67) (1) καὶ εἶνε κατεσκευασμένος ἐκ λεπτῆς σανίδος ἢ ἐκ μετάλλου.


Σχ. 66.


Σχ. 67.



Σχ. 68.

Ἔστω τώρα ἡ δοθεῖσα ΑΒ (σχ. 68) καὶ Γ τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον, ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ κάθετος. Λαμβάνομεν τὸν γνώμονα (ἢ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον) καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Γ· ἔπειτα μεταχειριζόμενοι τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς κανόνα, γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν κάθετον ΓΔ.

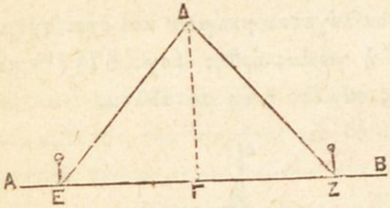
Καλὸν ὅμως εἶνε νὰ ἐφαρμόζωμεν προηγουμένως, χάριν εὐκολίας, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τὴν μίαν κόψιν τοῦ κανόνος ΕΖ (σχ. 68) καὶ ἔπειτα νὰ σύρωμεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ κανόνος μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος, διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον.

---

(1) Τὸν ὑπὸ τὸ σχῆμα 67 γνώμονα μεταχειρίζονται ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ οἱ λιθοξόοι, διὰ νὰ κόπτωσι κατ' ὀρθὰς γωνίας τὰ μάρμαρα.

102. Ὅταν ὅμως ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς ὁποίας ζητεῖται νὰ ἀχθῇ κάθετος εἶνε κεχαραγμένη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, μεταχειριζόμεθα τότε τὸν ἑξῆς πρακτικὸν τρόπον.

Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Γ (σχ. 69), ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος, δύο ἴσα μέρη τὰ ΓΕ καὶ ΓΖ, καὶ ἐμπήγομεν εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ πασσαλίσκους. Ἔπειτα λαμβάνομεν σχοινίον τι μεγαλείτερον τῆς ἀποστάσεως ΕΖ, καὶ ἀφοῦ κατασκευάσωμεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀγγύλας, διαπερῶμεν εἰς ἑκάτερον τῶν πασσαλίσκων ἑκατέραν τῶν ἀγγύλων.

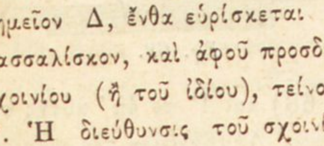


Σχ. 69.

Ἔπειτα λαμβάνομεν τὸ σχοινίον ἀκριβῶς ἐκ τοῦ μέσου (ὅπερ ἔχομεν εὕρει προηγουμένως) καὶ τείνομεν αὐτὸ καλῶς πρὸς τὸ μέρος ἔνθα θέλομεν νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος, οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΔΖ. Εἰς τὸ σημεῖον Δ, ἔνθα εὑρίσκεται τὸ μέσον τοῦ σχοινίου, ἐμπήγομεν πασσαλίσκον, καὶ ἀφοῦ προσδέσωμεν εἰς αὐτὸν τὸ ἄκρον ἄλλου σχοινίου (ἢ τοῦ ἰδίου), τείνομεν αὐτὸ καλῶς πρὸς τὸ σημεῖον Γ. Ἡ διεύθυνσις τοῦ σχοινίου ΓΔ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος (ἐδάφ. 70).[1]

ΣΗΜ. Τὴν κάθετον ΓΔ προεκβάλλομεν ἐν ἀνάγκῃ, ὅσον θέλομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, μεταχειριζόμενοι πρὸς τοῦτο τὸν αὐτὸν τρόπον, δι' οὗ χαράττομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖαν γραμμὴν διὰ τῶν ἀκοντίων (ἐδάφ. 45).

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Γ (σχ. 70), ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος, εἶνε τὸ ἄκρον τῆς αὐθείας ΑΓ, καὶ ὁ τόπος δὲν ἐπιτρέπει τὴν προσεκβολὴν τῆς ΑΓ, ὅπως ἀκολουθήσωμεν τὸν ἀνωτέρω τρόπον, πράττομεν τότε ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Κ ἐκτὸς τῆς ΑΓ, καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ γράφομεν



Σχ. 70.

[1] Οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἀσκηθῶσι τῇ ἐπιβλέψει τοῦ διδάσκοντος εἰς τὴν γραφὴν τῶν καθέτων ἐπὶ εὐθειῶν γεγραμμένων ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος, τοῦ πατώματος καὶ τοῦ ἐδάφους.

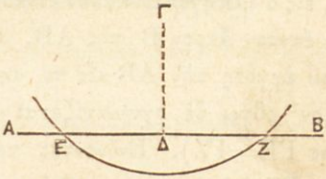
κύκλον, ὅστις νὰ τέμνῃ τὴν ΑΓ καὶ εἰς ἄλλο σημεῖον Β· ἔπειτα ἐκ τοῦ σημείου Β ἄγομεν τὴν διάμετρον ΒΔ καὶ τέλος ἑνώνομεν τὸ σημεῖον Δ μὲ τὸ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ, ἥτις θέλει εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΓΔ, ὡς βαίνουσα ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθὴν (ἐδάφ. 90).

Πρόβλημα

103. *Ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 71) καὶ σημεῖόν τι ἐκτὸς αὐτῆς τὸ Γ, ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν.

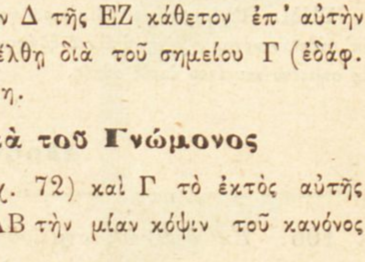


Σχ. 71.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα μεγαλειτέραν τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου τόξον κύκλου τέμνον τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ. Ἔπειτα, διὰ τοῦ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 99 προβλήματος, εὑρίσκομεν τὴν εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΕΖ κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν ΓΔ. Ἡ κάθετος αὕτη, ἥτις θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ (ἐδάφ. 93 παρατήρησις), εἶνε ἡ ζητούμενη.

Ἕτερος τρόπος διὰ τοῦ Γνώμονος

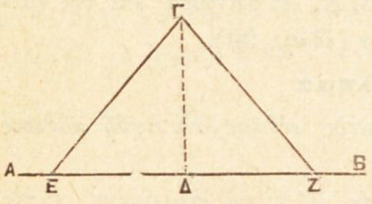
104. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 72) καὶ Γ τὸ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον. Ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν μίαν κόψιν τοῦ κανόνος ΕΖ καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον· ἔπειτα σύρομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ κανόνος, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐφαρμόσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, τότε μεταχειριζόμενοι τὴν πλευρὰν ταύτην ὡς κανόνα, γράφομεν τὴν κάθετον ΓΔ.



Σχ. 72

105. Ὅταν ὅμως ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Εἰς τὸ σημεῖον Γ (σχ. 73) ἐμπήγομεν πασσαλίσκον καὶ προσδένομεν εἰς αὐτὸ τὸ ἄκρον σχοινίου τινὸς μεγαλειτέρου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ· ἔπειτα τανύομεν τὸ σχοινίον κατὰ πλαγίαν διεύθυνσιν, καὶ ἔστω κατὰ τὴν ΓΕ, μέχρις οὗ τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ σχοινίου ἐγγίσῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ε, εἰς ὃ ἐμπήγομεν πασσαλίσκον· ἔπειτα τανύομεν τὸ σχοινίον πρὸς τὸ ἕτερον ἄκρον Β τῆς ΑΒ, μέχρις οὗ πάλιν τὸ ἄκρον τοῦ σχοινίου ἐγγίσῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ζ, καὶ ἐμπήγομεν πασσαλίσκον· οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΓΖ (διότι εἶνε ΓΕ=ΓΖ). Ἑνόνοντες τέλος τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΕΖ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου, προσδιορίζομεν τὴν διεύθυνσιν ΓΔ τῆς ζητουμένης καθέτου.



Σχ. 73.

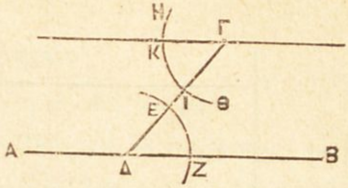
ΣΗΜ. Ὑπάρχουν καὶ ἰδιαίτερα γεωμετρικὰ ὄργανα, δι' ὧν ἄγονται κάθετοι ἐπ' εὐθεῖαν κεχαραγμένην ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἴτε ἐκ σημείου κειμένου ἐπ' αὐτῆς, εἴτε ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

Πρόβλημα

106. *Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ καὶ Γ τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ 74), ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ.

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ σημεῖόν τι Δ καὶ διὰ τοῦ κανόνος ἑνώνομεν τοῦτο μὲ τὸ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου τόξον τι ΕΖ τέμνον τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΓΔΒ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν τὸ τόξον ΘΗ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ι ἀρχόμενοι, ἔνθα τὸ τόξον τέμνει τὴν ΓΔ, λαμβάνομεν ἐπ' αὐτοῦ διὰ τοῦ διαβήτου τὸ τόξον ΙΚ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΖ. Ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Κ μὲ τὸ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΚΓ καὶ προεκβάλλωμεν αὐτὴν ἑκατέρωθεν, αὕτη θέλει εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος τῇ ΑΒ.



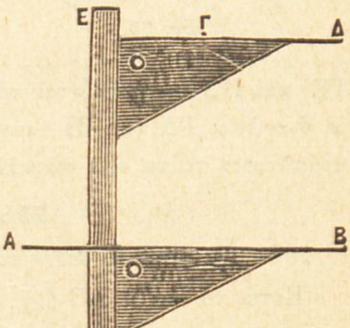
Σχ. 74.

Διότι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΓΔΒ καὶ ΚΓΔ εἶνε ἴσαι ἐκ κατασκευῆς (ἐδάφ. 91), ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΚΓ εἶνε παράλληλοι (ἐδ. 54).

Ἕτερος τρόπος διὰ τοῦ Γνώμονος

107. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ Γ τὸ σημεῖον (σχ. 75), ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἡ παράλληλος.

Ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας τὸν κανόνα ΕΖ. Ἔπειτα σύρομεν τὸν γνώμονα πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κανόνος, τηροῦντες αὐτὸν ἀκίνητον, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος ἐφαρμόσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, τότε μεταχειριζόμενοι τὴν πλευρὰν ταύτην ὡς κανόνα, γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος τῇ ΑΒ.

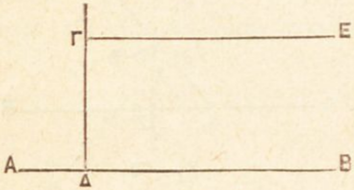


Σχ. 75.

Διότι ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸν κανόνα, ἑπομένως εἶνε παράλληλοι (ἐδ. 56).

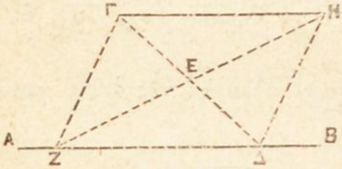
108. Ὅταν ὅμως ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ σημείου Γ (σχ. 76) ἄγομεν τὴν κάθετον ΓΔ κατὰ τὸν τρόπον τοῦ ἐδαφίου 105· ἔπειτα ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγομεν τὴν κάθετον ΓΕ ἐπὶ τὴν ΓΔ κατὰ τὸν τρόπον τοῦ ἐδαφίου 102. Ἡ ΓΕ εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος.



Σχ. 76.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἑνώνομεν διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου τὸ σημεῖον Γ, ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ (σχ. 77) μὲ σημεῖόν τι Δ τῆς ΑΒ, κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β, καὶ εὑρίσκομεν τὸ μέσον αὐτοῦ Ε· ἔπειτα ἑνώνομεν ἕτερον σημεῖον Ζ τῆς ΑΒ, κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α, μὲ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΖΕ λαμβάνομεν τὸ μέρος ΕΗ ἴσον μὲ τὸ ΖΕ. Τέλος ἑνώνομεν τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ Η διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου καὶ ἡ ΓΗ θέλει εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος τῇ ΑΒ.



Σχ. 77.

Διότι ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΖ καὶ ΗΔ σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΓΖΔΗ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΓΔ καὶ ΖΗ τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη, ἄρα τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶνε παραλληλόγραμμον (ἐδάφ. 82 ἐφαρμογή).

Πρόβλημα

109. *Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Ἔστω τὸ τόξον ΑΒ (σχ. 78). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἄγομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν χορδὴν αὐτοῦ ΑΒ καὶ εὑρίσκομεν κατὰ τὸ πρόβλημα τοῦ ἐδαφίου 99 τὴν εἰς τὸ μέσον ταύτης κάθετον ΓΔ, ἥτις θέλει διαιρεῖ καὶ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΕ καὶ ΕΒ (ἐδάφ. 93 παρατήρησις).

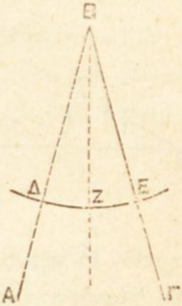
Σχ. 78.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἑκάτερον ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εἰς δύο ἴσα μέρη, τότε τὸ τόξον ΑΒ θὰ διαιρεθῇ εἰς 4 ἴσα μέρη· ἐὰν πάλιν ἕκαστον τῶν τεσσάρων ἴσων μερῶν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ τόξον θὰ διαιρεθῇ εἰς 8 ἴσα μέρη, καὶ οὕτω ἐξακολουθοῦντες δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς 16, 32 κτλ. ἴσα μέρη.

Πρόβλημα

110. *Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ΑΒΓ (σχ. 79). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς Β καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν τόξον κύκλου τέμνον τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Τοῦ τόξου τούτου ΔΕ, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, εὑρίσκομεν διὰ τοῦ προηγουμένου προβλήματος τὸ μέσον Ζ αὐτοῦ καὶ ἑνώνομεν τοῦτο μὲ τὴν κορυφὴν Β διὰ τῆς εὐθείας ΒΖ· οὕτω δὲ ἡ γωνία ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο γωνίας ἴσας, τὰς ΔΒΖ καὶ ΖΒΕ.



Σχ. 79.

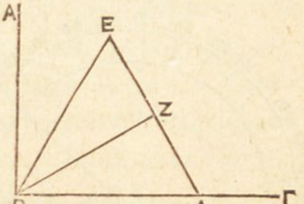
Διότι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΔΒΖ καὶ ΖΒΕ, ὡς ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ ἴσα τόξα ΔΖ καὶ ΖΕ, εἶνε ἴσαι.

ΣΗΜ. Ἐὰν τὸ τόξον ΔΕ διαιρέσωμεν εἰς 4, 8, 16 κτλ. ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τὴν κορυφὴν Β δι' εὐθειῶν, ἡ γωνία ΑΒΓ θέλει διαιρεθῇ εἰς 4, 8, 16 κτλ. ἴσα μέρη.

Πρόβλημα

111. *Νὰ διαιρεθῇ ὀρθὴ γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη.*

Ἔστω ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΒΓ (σχ. 80). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς τρία ἴσα μέρη, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ μέρος τι, καὶ ἔστω τὸ ΒΔ· ἔπειτα διὰ τοῦ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 99 προβλήματος κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς ΒΔ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΕΔ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη γωνία εἶνε τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ὥστε ἡ γωνία ΑΒΕ εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς ὀρθῆς ΑΒΓ, ἤτοι τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς. Ἐὰν τώρα διὰ τοῦ προηγουμένου προβλήματος διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν ΕΒΔ εἰς δύο ἴσα μέρη



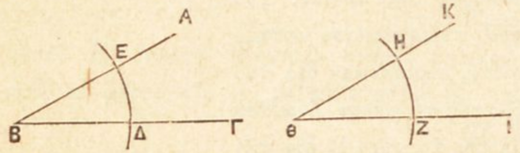
Σχ. 80.

(ὅτε ἕκαστον μέρος θὰ εἶνε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς), ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΒΓ θέλει διαιρεθῆ εἰς τρία ἴσα μέρη, τὰ ΑΒΕ, ΕΒΖ, ΖΒΔ.

Πρόβλημα

112. *Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν καὶ ἔχουσα πλευρὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, κορυφὴν δὲ σημεῖόν τι αὐτῆς.*

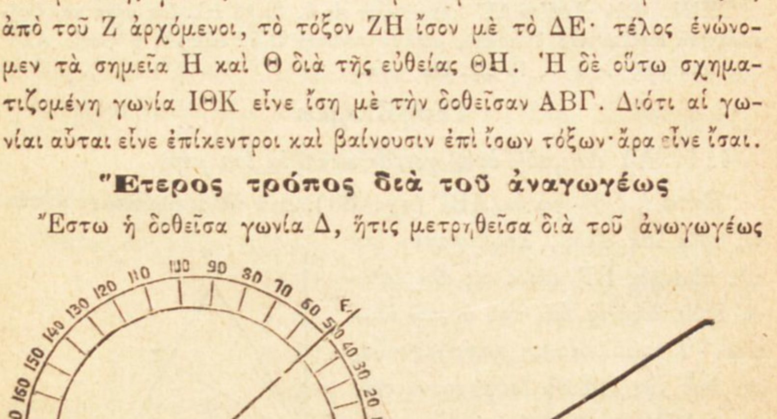
Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ΑΒΓ (σχ. 81) καὶ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΘΙ. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Β τῆς δοθείσης γωνίας καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου τόξον τι τέμνον τὰς πλευρὰς αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Θ τῆς ΘΙ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἕτερον τόξον τέμνον τὴν ΘΙ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· ἔπειτα ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην τόσον, ὅσον εἶνε τὸ τόξον ΔΕ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΒΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τόξου, ἀπὸ τοῦ Ζ ἀρχόμενοι, τὸ τόξον ΖΗ ἴσον μὲ τὸ ΔΕ· τέλος ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Η καὶ Θ διὰ τῆς εὐθείας ΘΗ. Ἡ δὲ οὕτω σχηματιζομένη γωνία ΙΘΚ εἶνε ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν ΑΒΓ. Διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἐπίκεντροι καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων· ἄρα εἶνε ἴσαι.



Σχ. 81

Ἕτερος τρόπος διὰ τοῦ ἀναγωγέως

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία Δ, ἥτις μετρηθεῖσα διὰ τοῦ ἀναγωγέως



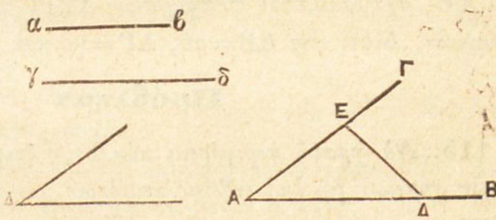
Σχημ. 82

εὑρέθη 50 μοιρῶν, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ καὶ Γ σημεῖόν τι αὐτῆς (σχ. 82). Θέτομεν τὸ κέντρον Κ τοῦ ἀναγωγέως εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ οὕτως, ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ἀναγωγέως νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ· ἔπειτα σημειοῦμεν πλησίον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀναγωγέως τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸν ἀριθμὸν 50 σημεῖόν τι Ε καὶ ἄγομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν εὐθεῖαν ΓΕ. Οὕτω δὲ κατεσκευάσθη ἡ γωνία ΒΓΕ, ἥτις εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ Δ.

Πρόβλημα

113. *Δοθεισῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἔστωσαν αἱ δύο πλευραὶ αϐ καὶ γδ καὶ ἡ δοθεῖσα γωνία Δ (σχ. 83). Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας ΑΒ κατασκευάζομεν διὰ τοῦ προηγουμένου προβλήματος γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Δ, καὶ ἔστω τὴν ΒΑΓ· ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ διὰ τοῦ διαβήτου μέρος τι ἴσον τῇ πλευρᾷ γδ καὶ ἔστω τὸ ΑΔ, ἐπὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν ἕτερον μέρος ἴσον τῇ ἑτέρᾳ πλευρᾷ αϐ καὶ ἔστω τὸ ΑΕ· τέλος ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Δ διὰ τῆς εὐθείας ΕΔ· οὕτω δὲ κατασκευάζεται τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, ὅπερ εἶνε τὸ ζητούμενον.



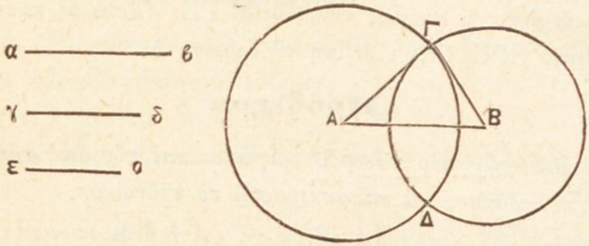
Σχ. 83

Πρόβλημα

114. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.*

Ἔστωσαν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι αϐ, γδ, εο, ἑκάστη τῶν ὁποίων πρέπει νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (ἐδάφ. 61), ἄλλως δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Ἵνα κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον, λαμβάνομεν εὐθεῖαν τινὰ ἴσην μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν, καὶ ἔστω τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν αϐ. Ἔπειτα ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην τόσον, ὅση εἶνε ἡ γδ, καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα τὴν γδ γράφομεν κύκλον· ἔπειτα ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην τόσον, ὅση εἶνε ἡ εο καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν εο γράφομεν ἕτερον κύκλον, οἵτινες τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Γ (ἢ τὸ Δ) μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β διὰ τῶν εὐθειῶν ΓΑ καὶ ΓΒ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ζητούμενον. Διότι εἶνε ΑΒ=αϐ, ΑΓ=γδ καὶ ΒΓ=εο.

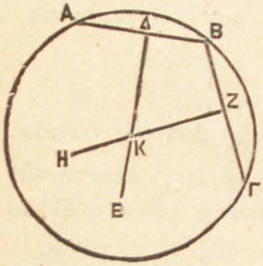


Σχ. 84

Πρόβλημα

115. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἥτις νὰ διέρχηται διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων.*

Ἔστωσαν τὰ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ (σχ. 85) μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, δι' ὧν ζητεῖται νὰ διέλθῃ περιφέρεια. Ἑνώνομεν πρὸς τοῦτο τὰ σημεῖα Α καὶ Β, Β καὶ Γ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ· ἔπειτα διὰ τοῦ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 99 προβλήματος εὑρίσκομεν τὰς εἰς τὸ μέσον αὐτῶν καθέτους ΔΕ καὶ ΖΗ, αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἐὰν τώρα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ ἢ ΚΒ ἢ ΚΓ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ.

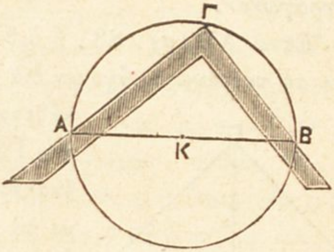


Σχ. 85

Διότι τὸ σημεῖον Κ, ἐπειδὴ εἶνε σημεῖον τῶν καθέτων ΔΕ καὶ ΖΗ τῶν ἠγμένων εἰς τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν ἄκρων αὐτῶν (ἐδ. 76), τουτέστιν αἱ ἀποστάσεις ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ εἶνε ἴσαι· διὰ τοῦτο δὲ καὶ ἡ γραφομένη περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ μίαν τῶν ἀποστάσεων τούτων θὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ.

ΣΗΜ. Διὰ τοῦ προβλήματος τούτου εὑρίσκομεν καὶ τὸ κέντρον δοθέντος κύκλου, πρὸς δὲ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς ἣν ἀνήκει δοθὲν τόξον.

Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκομεν καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἐφαρμόζομεν τὴν κορυφὴν τοῦ γνώμονος εἴς τι σημειον Γ τῆς περιφερείας (σχ. 86)· ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καθ'ἃ αἱ ἐξωτερικαὶ πλευραὶ τοῦ γνώμονος τέμνουσι τὴν περιφέρειαν, διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Τὸ μέσον Κ τῆς ΑΒ εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



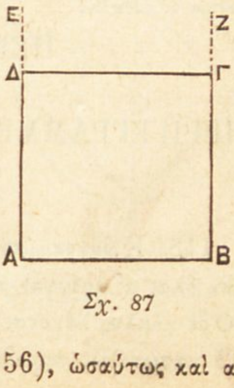
Σχ. 86

Διότι ἡ γωνία Γ τοῦ γνώμονος, ἐπειδὴ εἶνε ὀρθὴ καὶ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, βαίνει ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας (ἐδάφ. 90). Ἄρα ἡ ΑΒ εἶνε διάμετρος καὶ ἑπομένως τὸ μέσον Κ αὐτῆς εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Πρόβλημα

116. *Δοθείσης τῆς πλευρᾶς τετραγώνου νὰ κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον.*

Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα πλευρὰ τοῦ τετραγώνου. Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β αὐτῆς ἄγομεν διὰ τοῦ γνώμονος τὰς καθέτους ΑΕ καὶ ΒΖ ἐπ' αὐτήν· ἔπειτα ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων, καὶ ἔστω ἐπὶ τῆς ΒΖ, λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὸ μέρος ΒΓ ἴσον μὲ τὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγομεν ἐπὶ τὴν ΒΓ τὴν κάθετον ΓΔ· οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



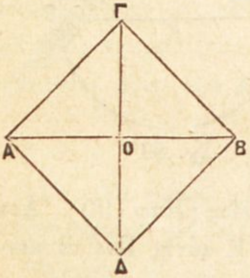
Σχ. 87

*Διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΔ καὶ ΒΓ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶνε παράλληλοι (ἐδάφ. 56), ὡσαύτως καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΓ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ εἶνε παράλληλοι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶνε παραλληλόγραμμον. Ἀλλ᾽ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΓ εἶνε ἴσαι, ἑπομένως καὶ αἱ τέσσαρες πλευραὶ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (ἐδάφ. 79), ἐπειδὴ δὲ ἔχει καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς, ἕπεται ὅτι εἶνε τετράγωνον.

Πρόβλημα

117. *Δοθείσης τῆς διαγωνίου τετραγώνου νὰ κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον.*

Ἔστω ΑΒ (σχ. 88) ἡ δοθεῖσα διαγώνιος. Ἵνα κατασκευάσωμεν τὸ τετράγωνον ἄγομεν διὰ τοῦ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 99 προβλήματος κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, καὶ ἔστω τὴν ΓΔ· ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Ο δύο μέρη ἴσα μὲ τὸ μέρος ΑΟ ἢ ΟΒ· τέλος ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων τούτων δι᾽ εὐθειῶν, τὸ δὲ οὕτω σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΔΒΓ εἶνε τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



Σχ 88

Διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε ἴσαι ἐκ κατασκευῆς καὶ τέμνουσιν ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς (ἐδάφ. 82).

ΣΗΜ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου κατασκευάζομεν ῥόμβον, ὅταν μᾶς δοθῶσιν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Ἤτοι ἄγομεν εἰς τὸ μέσον μιᾶς τῶν διαγωνίων κάθετον, καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς τομῆς λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης δύο μέρη ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαγωνίου· ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων τούτων δι᾽ εὐθειῶν.

ΠΕΡΙ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ
ΚΑΙ
ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Ὁρισμοί

118. Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον* εἰς κύκλον, ἐὰν ὅλαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ σχῆμα τοῦτο. Τὰ κατωτέρω, παραδείγματος χάριν, εὐθύγραμμα σχήματα 89 καὶ

90 εἶνε ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον, ὁ δὲ κύκλος εἶνε περιγεγραμμένος περὶ αὐτά.

Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *περιγεγραμμένον* περὶ κύκλον, ἐὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου. Ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο. Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα 92 τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα εἶνε περιγεγραμμένον εἰς κύκλον, ὁ δὲ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτό.

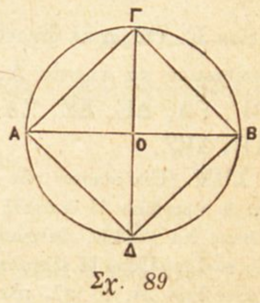
Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα εἰς δοθέντα κύκλον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγραφησομένου εὐθυγράμμου σχήματος, καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως δι' εὐθειῶν· τὸ δὲ οὕτω σχηματιζόμενον εὐθύγραμμον σχῆμα θὰ εἶνε *κανονικόν*. Διότι αἱ μὲν πλευραὶ αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων (ἐδάφ. 92), αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων (ἐδ. 89).

Κέντρον τοῦ κανονικοῦ εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου ἢ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

Πρόβλημα

119. *Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς κύκλον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη· τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς. Γραφομεν δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 89) καθέτους πρὸς ἀλλήλας, οὕτω δὲ διαιρεῖται ἡ περιφέρεια εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη· διότι αἱ περὶ τὸ σημεῖον Ο ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἴσαι, ὡς ὀρθαί, ἑπομένως καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ εἶνε ἴσα. Ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων δι' εὐθειῶν, σχηματίζεται τὸ τετράγωνον ΑΓΒΔ, τὸ ὁποῖον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.



Σχ. 89

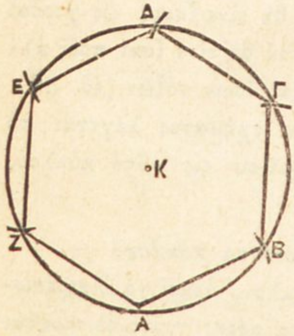
ΣΗΜ. Ἐὰν ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἴσων τόξων διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, ὅτε ἡ περιφέρεια θὰ διαιρεθῇ εἰς 8 ἴσα μέρη, καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, θέλομεν σχηματίσει κανονικὸν ὀκτάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦντες δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον 16, 32, 64 κτλ. πλευρὰς ἢ γωνίας.

Πρόβλημα

120. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*

Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς κύκλον ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶνε ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, διὰ τοῦτο ἐγγράφομεν κανονικὸν ἑξάγωνον ὡς ἑξῆς.

Ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην τόσον, ὅση εἶνε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου· ἔπειτα μὲ κέντρον σημεῖόν τι Α τῆς περιφερείας (σχ. 90) καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τοῦ κύκλου γράφομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας μικρὰ τόξα τέμνοντα αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Β· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν μικρὸν τόξον τέμνον τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Γ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἕτερον μικρὸν τόξον τέμνον τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ· τέλος μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἕτερον μικρὸν τόξον τέμνον τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε. Οὕτω δὲ διῃρέθη ἡ περιφέρεια εἰς 6 ἴσα μέρη· ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ, σχηματίζεται τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ.



Σχ. 90

ΣΗΜ. Ἐὰν ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἴσων τόξων διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, ὅτε ἡ περιφέρεια θὰ διαιρεθῇ εἰς 12 ἴσα μέρη, καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, θέλομεν σχηματίσει κανονικὸν δωδεκάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦντες δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον 24, 48 κτλ. πλευρὰς ἢ γωνίας.

121. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δοθέντα κύκλον, ἀρκεῖ πρῶτον νὰ ἐγγράψωμεν εἰς αὐτὸν ὡς ἀνωτέρω κανο-

νικὸν ἑξάγωνον, ἔπειτα δὲ νὰ ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλὰξ διὰ χορδῶν.

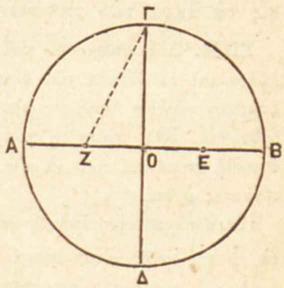
Εἰς τὸ ἀνωτέρω, παραδείγματος χάριν, κανονικὸν ἑξάγωνον θὰ ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ Γ, τὸ Γ μὲ τὸ Ε, καὶ τὸ Ε μὲ τὸ Α· τὸ δὲ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον θὰ εἶνε ἰσόπλευρον.

Πρόβλημα

122. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον καὶ πεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΔΒΓ (σχ. 91) εἰς ὃν ζητεῖται νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν δεκάγωνον καὶ πεντάγωνον. Ἵνα εὕρωμεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, πράττομεν ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν δύο διαμέτρους καθέτους πρὸς ἀλλήλας (κατὰ τὸ ἐδάφιον 99) τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ε τῆς ἀκτῖνος ΟΒ καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων Ε καὶ Γ γράφομεν τόξον τι τέμνον τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Γ καὶ Ζ, ἤτοι ἡ ΓΖ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ ΟΖ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου κανονικοῦ δεκαγώνου. Ἔχοντες ἤδη τὰς πλευρὰς ταύτας, ἐγγράφομεν τὸ κανονικὸν δεκάγωνον καὶ πεντάγωνον, καθ' ὃν τρόπον ἐγγράψαμεν καὶ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον.



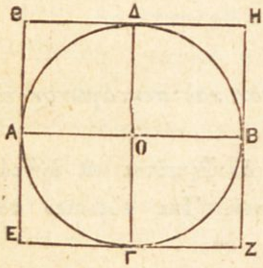
Σχ. 91

Πρόβλημα

123. *Νὰ περιγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*

Ἄγομεν πρὸς τοῦτο δύο διαμέτρους τοῦ κύκλου καθέτους πρὸς ἀλλήλας, τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 92)· ἔπειτα εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν ἄγομεν πάλιν καθέτους καὶ προσεκβάλλομεν αὐτὰς ἑκατέρωθεν μέχρις οὗ συναντηθῶσιν. Οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶνε τετράγωνον καὶ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

* Διότι αἱ κάθετοι ΘΗ καὶ ΕΖ εἶνε ἴσαι μὲ τὴν ΑΒ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ κάθετοι ΘΕ καὶ ΗΖ εἶνε ἴσαι μὲ τὴν ΔΓ. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ διάμετροι ΑΒ καὶ ΔΓ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ΘΗ, ΕΖ, ΘΕ, ΗΖ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ γωνίαι Θ, Η, Ζ, Ε εἶνε ὀρθαὶ ὡς ἴσαι μὲ τὰς ἀπέναντι γωνίας τὰς περὶ τὸ σημεῖον Ο σχηματιζομένας, ἕπεται ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἶνε τετράγωνον. Εἶνε δὲ καὶ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, κάθετοι οὖσαι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων, εἶνε ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου (ἐδάφ. 97).



Σχ. 92

ΣΗΜ. Διὰ κανονικῶν πολυγώνων ἐκ μαρμάρου στρώνουσι πολλάκις τὰ προαύλια καὶ τὰ δάπεδα τῶν οἰκοδομῶν. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν πέριξ σημείου τινός, ὅταν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, εἶνε τέσσαρες ὀρθαὶ (ἐδ. 50), πρέπει ἡ γωνία τῶν κανονικῶν πολυγώνων, δι' ὧν πρόκειται νὰ στρωθῇ ἐπιφάνειά τις, νὰ εἶνε τοιαύτη, ὥστε ἐπαναλαμβανομένη νὰ προκύπτουν τέσσαρες ὀρθαί.

Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία τῶν ἰσοπλεύρων τριγωνικῶν πλακῶν, ἥτις εἶνε τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ὅταν ἐπαναληφθῇ ἓξ φορὰς προκύπτουσι $\frac{12}{3}$ ἤτοι 4 ὀρθαί. Ὡσαύτως ἡ γωνία τῶν τετραγωνικῶν πλακῶν, ἥτις εἶνε μία ὀρθή, ὅταν ἐπαναληφθῇ τέσσαρας φοράς, προκύπτουσι τέσσαρες ὀρθαί. Ὡσαύτως ἡ γωνία τῶν κανονικῶν ἑξαγώνων πλακῶν, ἥτις εἶνε τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ὅταν ἐπαναληφθῇ τρεῖς φορὰς, προκύπτουσι 4 ὀρθαί. Διὰ τοιούτων λοιπὸν κανονικῶν πολυγώνων δυνάμεθα νὰ στρώσωμεν ἐπιφάνειάν τινα, ἐνῷ διὰ κανονικῶν πενταγώνων π.χ. δὲν δυνάμεθα νὰ πράξωμεν τοῦτο· διότι ἡ γωνία αὐτῶν, ἥτις εἶνε τὰ $\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ὅταν ἐπαναληφθῇ ὁσασδήποτε φορὰς, δὲν προκύπτουσι 4 ὀρθαί. Ἐν τούτοις ὅμως διὰ καταλλήλων συνδιασμῶν κανονικῶν τινων πολυγώνων κατορθοῦται καὶ τοῦτο.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΠΟΣΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ

124. *Λόγος* ποσοῦ ἢ μεγέθους πρὸς ἄλλο ποσὸν ἢ μέγεθος ὁμοειδὲς λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ πρώτου, ὅταν τὸ δεύτερον ληφθῇ ὡς μονάς.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, μετρήσωμεν ποσόν τι δι' ἄλλου ὁμοειδοῦς ποσοῦ ληφθέντος ὡς μονάδος καὶ εὕρωμεν αὐτὸ ἑξαπλάσιον, τότε ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον εἶνε ὁ 6. Ἐὰν δὲ εὕρωμεν, ὅτι τὸ πρῶτον εἶνε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ δευτέρου, ὁ λόγος εἶνε $\frac{2}{3}$.

Ὁ λόγος δύο ποσῶν σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ἢ κλασματικῶς. Ἄν, παραδείγματος χάριν, ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ γράμματα Α καὶ Β παριστῶσι δύο ποσά, ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β σημειοῦται ὡς ἑξῆς Α : Β ἢ $\frac{A}{B}$.

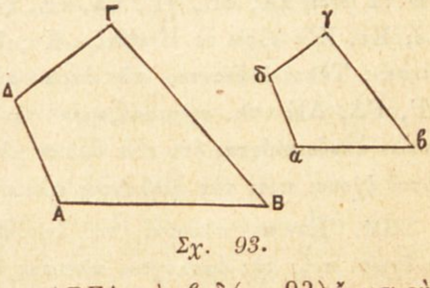
Δύο ἢ περισσότερα ποσὰ λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ποσὰ ἰσάριθμα καὶ ὁμοειδῆ, ἂν ὁ λόγος ἑκάστου ποσοῦ ἐκ τῶν πρώτων πρὸς ἕκαστον ποσὸν ἐκ τῶν δευτέρων κατὰ σειρὰν λαμβανομένων εἶνε ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν τὰ ποσὰ Α, Β καὶ Γ, Δ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Γ εἶνε 3· ὡσαύτως ὁ λόγος τοῦ Β πρὸς τὸ Δ εἶνε 3, ἤτοι εἶνε $\frac{A}{\Gamma}=\frac{B}{\Delta}=3$, τότε τὰ ποσὰ Α καὶ Β λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ ποσὰ Γ καὶ Δ. Καὶ τἀνάπαλιν τὰ ποσὰ Γ καὶ Δ λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ ποσὰ Α καὶ Β· διότι εἶνε $\frac{\Gamma}{A}=\frac{\Delta}{B}=\frac{1}{3}$.

Τὰ ποσὰ Α καὶ Γ, Β καὶ Δ, ἅτινα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, λέγονται *ἀντίστοιχα* ἢ *ὁμόλογα*.

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

125. Δύο εὐθύγραμμα σχήματα λέγονται *ὅμοια*, ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, τὰς δὲ πλευρὰς εἰς ἃς πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι ἀναλόγους.



Σχ. 93.

Αἱ πλευραὶ αὗται, εἰς ἃς πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι, λέγονται *ὁμόλογοι*.

Ἐάν, π.χ., τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ (σχ. 93) ἔχωσι τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν α, τὴν Β ἴσην μὲ τὴν 6, τὴν Γ ἴσην μὲ τὴν γ καὶ τὴν Δ ἴσην μὲ τὴν δ. Προσέτι δὲ καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, ἤτοι $\frac{ΑΒ}{α6}=\frac{ΒΓ}{6γ}=\frac{ΓΔ}{γδ}=\frac{ΔΑ}{δα}$, τότε τὰ τετράπλευρα ταῦτα εἶνε ὅμοια.

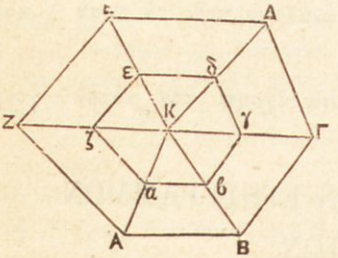
ΘΕΩΡΗΜΑ

126. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν εἶνε ὅμοια. Ἤτοι ἔχουσι καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους.*

Πρόβλημα

127. *Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον μὲ δοθὲν πολύγωνον, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχωσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ δοθέντος λόγον 2.*

Ἔστω τὸ δοθὲν πολύγωνον αβγδεζ (σχ. 94). Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον μὲ αὐτὸ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχωσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ δοθέντος λόγον 2, πράττομεν ὡς ἑξῆς.



Σχ. 94

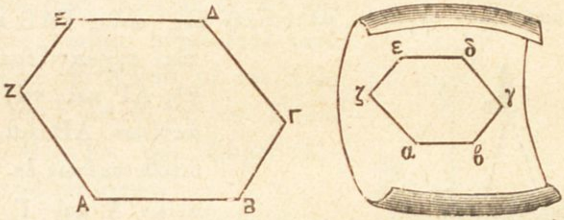
Λαμβάνομεν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου σημεῖόν τι Κ καὶ ἑνώνομεν τοῦτο μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τῶν εὐθειῶν Κα, Κ6, Κγ, Κδ, Κε, Κζ. Ἔπειτα ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῶν λαμβάνομεν τὰ μέρη αΑ, 6Β, γΓ, δΔ, εΕ, ζΖ ἴσα μὲ τὰ Κα, Κ6, Κγ, Κδ, Κε, Κζ· οὕτω δὲ αἱ εὐθεῖαι Κα, Κ6, Κγ κλπ. ἐδιπλασιάσθησαν. Τέλος ἑνώνοντες τὰ ἄκρα αὐτῶν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ κτλ. σχηματίζομεν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται ὅτι εἶνε ὅμοιον μὲ τὸ δοθέν, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἔχουσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ δοθέντος λόγον 2.

ΣΗΜ. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου θέλωμεν νὰ ἔχωσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ δοθέντος λόγον 3, 4, 5 κτλ. τότε πρέπει νὰ τριπλασιάσωμεν, τετραπλασιάσωμεν κτλ.

τὰς εὐθείας Κα, Κϐ, Κγ κτλ. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ ἔχωσι λόγον $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κτλ., τότε πρέπει νὰ λάϐωμεν ἐπ' αὐτῶν, ἐκ τοῦ σημείου Κ ἀρχόμενοι τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ. καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα αὐτῶν δι' εὐθειῶν.

Ὅταν ὅμως τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 95) εἶνε κεχαραγμένον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ὅμοιον αὐτῷ, πράττομεν ὡς ἑξῆς :

Ἐπὶ τεμαχίου χάρτου κατασκευάζομεν ἐν πρώτοις καὶ ἐκ τοῦ προχείρου σχῆμα ὅμοιον περίπου τῷ ΑΒΓΔΕΖ· ἔπειτα μετροῦμεν



Σχ. 95

τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ διὰ τῆς ταινίας ἢ τῆς ἀλύσεως, καθὼς καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ διὰ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου, καὶ ἐπὶ τοῦ προχείρου κατασκευασθέντος πολυγώνου γράφομεν ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς τὸ εὑρεθὲν μῆκος τῆς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὁμολόγου αὐτῆς πλευρᾶς, καθὼς καὶ ἐφ' ἑκάστης γωνίας τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῆς ἀντιστοιχούσης. Ἔπειτα ἐπὶ ἄλλου χάρτου, χάρτου τῆς ἀντιγραφῆς καλουμένου, γράφομεν διὰ τοῦ κανόνος εὐθεῖαν αϐ, ἣν λαμβάνομεν ὁμόλογον τῆς ΑΒ, καὶ ἔχουσαν μῆκος τόσων χιλιοστομέτρων, ὅσων μέτρων εἶνε ἡ ΑΒ, εἰς δὲ τὸ ἄκρον β αὐτῆς κατασκευάζομεν διὰ τοῦ ἀναγωγέως γωνίαν ἴσην τῇ Β καὶ λαμβάνομεν τὴν βγ ἴσην μὲ τόσα χιλιοστόμετρα, ὅσων μέτρων εἶνε ἡ ΒΓ. Ἔπειτα εἰς τὸ ἄκρον γ τῆς ϐγ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Γ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τῆς ζα. Τὸ δὲ οὕτω κατασκευαζόμενον πολύγωνον αϐγδεζ εἶνε ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕΖ.

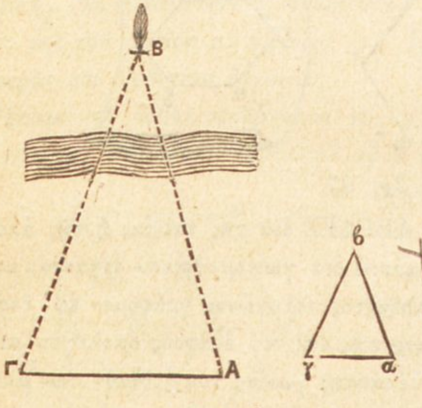
ΣΗΜ. Ὁ λόγος τῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου πλευρᾶς πρὸς τὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὁμόλογον αὐτῆς λέγεται *κλίμαξ*. Ὁ λόγος οὗτος παρίσταται ὑπὸ κλασματικῆς μονάδος, ἐχούσης παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει ποσάκις ἡ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους πλευρὰ εἶνε μεγαλειτέρα τῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου ὁμολόγου της. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ κλίμαξ εἶνε $\frac{1'}{1000}$· διότι 1000 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου (ἤτοι ἓν μέτρον) ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἰσοδυναμοῦν μὲ 1 χιλιοστὸν ἐπὶ τοῦ χάρτου.

Ὡς κλίμαξ δύναται νὰ ληφθῇ καὶ οἱαδήποτε ἄλλη κλασματικὴ μονάς, αἱ συνήθεις ὅμως κλίμακες διὰ τὰ σχεδιαγραφήματα εἶνε αἱ ἑξῆς $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κτλ, καὶ αἱ διπλάσιαι αὐτῶν $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{5000}$ κτλ.

Πρόβλημα

128. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπόστασις, ἐξ ὧν τὸ Β εἶνε ἀπρόσιτον, καθόσον διέρχεται μεταξὺ αὐτῶν ποταμός.*

Πρὸς τοῦτο μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖαν τινὰ ΑΓ, ἔπειτα διὰ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου μετροῦμεν τὰς γωνίας ΓΑΒ καὶ ΑΓΒ τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων ΑΒ καὶ ΓΒ τῶν διευθυνομένων ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Γ πρὸς τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον Β ἀλλ' ὁρατόν. Ἔπειτα γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθεῖαν αγ ἔχουσαν μῆκος τόσων χιλιοστομέτρων, ὅσων μέτρων εἶνε ἡ ΑΓ καὶ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς α καὶ γ κατα-



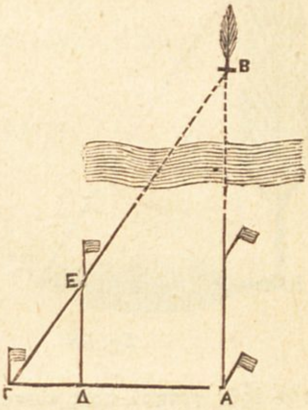
Σχ. 96

σκευάζομεν διὰ τοῦ ἀναγωγέως τὰς γωνίας γαβ καὶ αγβ ἴσας μὲ τὰς ΓΑΒ καὶ ΑΓΒ. Οὕτω δὲ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αβγ, τὸ ὁποῖον εἶνε ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, ὡς ἔχον τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας μὲ τὰς τοῦ ΑΒΓ (ἐδάφ. 126).

Ἐκ τῶν ὁμοίων τούτων τριγώνων ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶνε ἀνάλογοι, ἤτοι εἶνε $\frac{ΑΓ}{αγ}=\frac{ΑΒ}{αβ}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶνε χιλιάκις μεγαλειτέρα τῆς αγ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ΑΒ εἶνε χιλιάκις μεγαλειτέρα τῆς αβ· ὅσων λοιπὸν χιλιοστομέτρων εἶνε ἡ αβ, τόσων μέτρων εἶνε ἡ ΑΒ, ἤτοι ἡ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπόστασις.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ καὶ ἄνευ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου, ὡς ἑξῆς :

Προσδιορίζομεν κατὰ πρῶτον τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 97) δι' ἀκοντίων (κατὰ τὸ ἐδάφιον 45)· ἔπειτα ἄγομεν ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Α τὴν κάθετον ΑΓ (κατὰ τὸ ἐδάφιον 102) καὶ προσδιορίζομεν δι' ἀκοντίων τὴν εὐθεῖαν ΓΒ· ἔπειτα ἐκ σημείου τινὸς Δ τῆς ΑΓ ἄγομεν τὴν κάθετον ΔΕ ἐπ' αὐτήν, ἣν καὶ προσεκβάλλομεν μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ΓΒ εἴς τι σημεῖον Ε. Οὕτω δὲ σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΑΒ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν (ἤτοι τὴν Α ἴσην μὲ τὴν Δ ὡς ὀρθάς, τὴν Γ κοινὴν καὶ τὴν Ε ἴσην μὲ τὴν Β). Ἐκ τῶν ὁμοίων τούτων τριγώνων ἔχομεν



Σχ. 97

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{\Gamma A}{\Gamma \Delta} \text{ ἢ } AB = \frac{\Gamma A \times \Delta E}{\Gamma \Delta}$$

Ὑποθέτοντες τώρα, ὅτι ἡ ΓΑ μετρηθεῖσα εὑρέθη ἴση μὲ 50 μέτρα, ἡ ΔΕ ἴση μὲ 20 μ. καὶ ἡ ΓΔ ἴση μὲ 8 μ. εὑρίσκομεν

$$AB = \frac{50 \times 20}{8} = 125 \text{ μέτρα.}$$

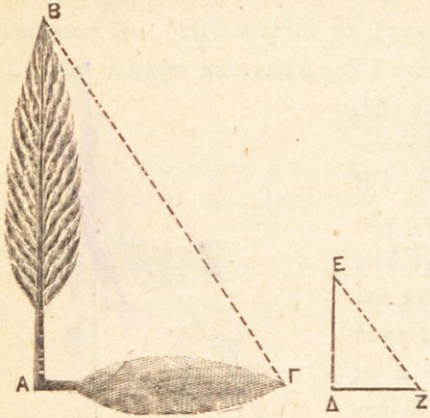
Πρόβλημα

129. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου (ἢ κωδωνοστασίου ἢ πύργου κτλ.) ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ δένδρον ΑΒ, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ὕψος. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐδάφους, ὅπερ ὑποθέτομεν ὁριζόντιον, ἐμπήγομεν κατακορύφως ῥάβδον τινὰ ΔΕ· ἔστω δὲ ἡ σκιὰ τοῦ δένδρου ἡ ΑΓ, ἡ δὲ σκιὰ τῆς ῥάβδου ἡ ΔΖ· οὕτω δὲ ἔχομεν τὰ δύο νοητὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια.

* Διότι ἐπειδὴ αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ΒΓ καὶ ΕΖ ὑποτίθενται παράλληλοι ὡς ἐκ τῆς μεγάλης ἀποστάσεως τοῦ ἡλίου, πρὸς δὲ εἶνε παράλληλοι καὶ αἱ κατακόραφοι ΑΒ καὶ ΔΕ, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία

Β εἶνε ἴση μὲ τὴν Ε (ἐδάφ. 58), ἐπομένως καὶ ἡ γωνία Γ εἶνε ἴση μὲ τὴν Ζ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τούτων τριγώνων ἔχομεν



Σχ. 98

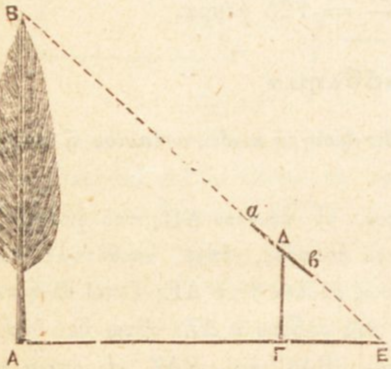
$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \text{ ἢ } AB = \frac{A\Gamma \times \Delta E}{\Delta Z}$$

ὑποθέτοντες τώρα ὅτι ἡ ΑΓ μετρηθεῖσα εὑρέθη ἴση μὲ $5^{\mu},20$, ἡ ΔΕ ἴση μὲ $1^{\mu},50$ καὶ ἡ ΔΖ ἴση μὲ $0^{\mu},65$ εὑρίσκομεν

$$AB = \frac{5,20 \times 1,50}{0,65} = 12 \text{ μέτρα}$$

Ὅταν ὅμως ὁ καιρὸς εἶνε νεφελώδης, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς τρόπον πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὕψους δένδρου ἢ ἄλλου τινὸς ἀντικειμένου.

Ἐμπήγομεν κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ῥάβδον τινὰ ΓΔ, εἰς τὸ ἄκρον Δ τῆς ὁποίας ἔχομεν προηγουμένως ἀνοίξει ῥῆγμα τι καὶ προσαρμόσει ἐντὸς αὐτοῦ μικρόν τινα κανόνα αβ οὕτως, ὥστε νὰ περιστρέφηται οὗτος εὐκόλως περὶ τὸ ῥῆγμα Δ. Ἔπειτα ἱστάμεθα ὄπισθεν τῆς ῥάβδου ΓΔ καὶ σκοπεύομεν διὰ τοῦ κανόνος αβ τὴν κορυφὴν Β τοῦ δένδρου (περιστρέφοντες τὸν κανόνα αβ μέχρις οὗ ἔλθῃ εἰς εὐθυγραμμίαν μὲ τὴν κορυφὴν Β τοῦ δένδρου)· ἔπειτα, ἀφίνοντες τὸν κανόνα ἀκίνητον, ἐρχόμεθα ἔμπροσθεν τῆς ῥάβδου ΓΔ καὶ σκοπεύομεν διὰ τοῦ κανόνος σημεῖόν τι Ε τοῦ ἐδάφους, εἰς ὃ διευθύνεται ὁ κανὼν αβ. Οὕτω δὲ ἔχομεν τὰ δύο νοητὰ τρίγωνα



Σχ. 99

ΒΑΕ καὶ ΔΓΕ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν. Ἐκ τῶν ὁμοίων τούτων τριγώνων ἔχομεν

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{\Gamma E} \text{ ἢ } AB = \frac{AE \times \Gamma\Delta}{\Gamma E}$$

Ὑποθέτοντες τώρα, ὅτι εἶνε ΑΕ=12 μέτρα, $\Gamma\Delta = 1^{\mu},60$ καὶ $\Gamma E = 2^{\mu},40$ εὑρίσκομεν

$$AB = \frac{12 \times 1,60}{2,40} = 8 \text{ μέτρα.}$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Ὁρισμοὶ

130. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, συγκρίνομεν αὐτὰς πρὸς ἄλλην ὡρισμένην ἐπιφάνειαν, ἥτις λαμβάνεται ὡς *μονάς*.

Ὡς μονὰς τῆς ἐπιφανείας λαμβάνεται ἡ τετραγωνικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Καὶ ἂν μὲν ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἕνα μέτρον ἢ πῆχυν, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη λέγεται *τετραγωνικὸν μέτρον* ἢ *τετραγωνικὸς πῆχυς*· ἐὰν δὲ εἶνε ἴση μὲ μίαν παλάμην, λέγεται *τετραγωνικὴ παλάμη*· ἐὰν δὲ εἶνε ἴση μὲ ἕνα δάκτυλον, λέγεται *τετραγωνικὸς δάκτυλος* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως, ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ ἑπομένως τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ τετραγωνικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν καὶ λέγεται αὕτη τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς ([1]).

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μιᾶς ἐπιφανείας λέγεται *ἐμβαδὸν* αὐτῆς.

131. *Βάσις* τοῦ παραλληλογράμμου λέγεται ἑκατέρα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ. *Ὕψος* δὲ ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀγομένη κάθετος.

Τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου βάσις καὶ ὕψος εἶνε αἱ δύο

([1]). Ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Διότι ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, ἑπομένως τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶνε $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ ἤτοι $\frac{9}{16}$.

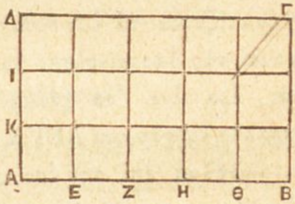
προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ· διότι ἑκατέρα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην. Τοῦ δὲ τραπεζίου βάσεις λέγονται αἱ δύο παράλληλοι αὐτοῦ πλευραί, ὕψος δὲ ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀγομένη κάθετος.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

132. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.*

ΣΗΜ. Λέγοντες «γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του», ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

Ἔστω πρῶτον τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 100), ἂν ληφθῇ ὡς βάσις αὐτοῦ ἡ πλευρὰ ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ΑΔ ἢ ἡ ΒΓ. Ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἡ βάσις ΑΒ μετρηθεῖσα εὑρέθη ἴση μὲ 5 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εὑρέθη ἴσον μὲ 3 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴσον μὲ 5×3 ἤτοι 15 τετραγωνικὰ μέτρα.



Σχ. 100

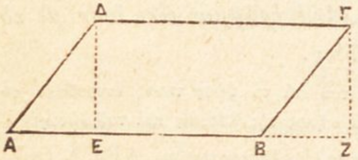
* Ὁ λόγος δι' ὃν εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶνε ὁ ἑξῆς. Διότι ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒ εἰς 5 ἴσα (ὅτε μέρη ἕκαστον μέρος αὐτοῦ θὰ εἶνε ἐξ ὑποθέσεως ἴσον μὲ ἓν μέτρον), τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ, καθ' ἃ διαιρεῖται ἡ βάσις αὐτοῦ ἀχθῶσι κάθετοι ἐπ' αὐτήν· ὡσαύτως καὶ ἐκ τῶν σημείων Ι, Κ, καθ' ἃ διαιρεῖται τὸ ὕψος ΑΔ, ἀχθῶσι κάθετοι ἐπ' αὐτό, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θέλει διαιρεθῇ εἰς 15 τετράγωνα ἴσα ἐκ κατασκευῆς. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 15 εἶνε γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 3 τῶν παριστώντων τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ ὀρθογωνίου.

ΣΗΜ. Ὑπετέθη ἀνωτέρω, ὅτι τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἀλλὰ τοῦτο ἀληθεύει καὶ ὅταν εἶνε οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ (κλασματικοὶ ἢ δεκαδικοὶ ἢ συμμιγεῖς).

133. Ἔστω δεύτερον τὸ πλάγιον ἢ κεκλιμμένον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 101)· ἂν ληφθῇ ὡς βάσις αὐτοῦ ἡ πλευρὰ ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ κάθετος ΔΕ. Ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἡ ΑΒ

μετρηθεῖσα εὑρέθη ἴση μὲ 4 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΔΕ εὑρέθη 3 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε 4×3 ἤτοι 12 τετραγωνικὰ μέτρα.

* Ὁ λόγος πάλιν δι' ὃν εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εἶνε ὁ ἑξῆς· διότι τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον, ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἐκ τῆς ἑτέρας κορυφῆς Γ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΖ ἐπὶ τὴν βάσιν (ἥτις θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς βάσεως), σχηματίζονται τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΒΖΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσας, ἄρα εἶνε ἴσα (ἐδάφ. 69). Ἐὰν τώρα ἀποκόψωμεν ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ τρίγωνον ΑΕΔ καὶ τὸ ἐπιθέσωμεν καταλλήλως ἐπὶ τοῦ ἴσου του τριγώνου ΒΖΓ, μετασχηματίζεται τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΔΕΖΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν ΕΖ, ἥτις εἶνε ἴση μὲ τὴν ΑΒ τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος τὴν ΔΕ, ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου.



Σχ. 101

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἕπεται ὅτι ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τῆς βάσεως ἢ τοῦ ὕψους, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος ἢ τὴν βάσιν αὐτοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

134. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.*

Διότι το τετράγωνον εἶνε ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἡ πλευρὰ τετραγώνου τινὸς εἶνε 0,4 τοῦ μέτρου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 0,4×0,4, ἤτοι 0,16 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου ἢ 16 τετραγωνικαὶ παλάμαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

135. *Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶνε ἰσοδύναμα, ἤτοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.*

Διότι τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν εἶνε γινόμενον τῆς βάσεώς των ἐπὶ τὸ ὕψος των· καὶ ἐπειδὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος αὐτῶν εἶνε ἴσα, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν ἤτοι τὰ ἐμβαδὰ εἶνε ἴσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι εὐκόλως δυνάμεθα να μοιράσωμεν οἰκόπεδόν τι ἢ ἄλλο τι, ἔχον σχῆμα παραλληλογράμμου εἰς ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ εἰς ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τῶν σημείων καθ' ἃ διαιροῦνται αὗται νὰ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου. Διότι τὰ οὕτω σχηματιζόμενα παραλληλόγραμμα θὰ ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σταφιδαμπέλου ἐχούσης σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶνε 80 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη $50^{\mu},80$.

(*Λύσις* 4064 τετρ. μέτρα)

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν χωραφίου, ἔχοντος σχῆμα τετραγώνου τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 162 μέτρα.

(*Λύσις* 26244 τ. μ.)

3) Τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου εἶνε 49,68 τετραγωνικὰ μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε $5^{\mu},40$. Πόση εἶνε ἡ βάσις του ;

(*Λύσις* $9^{\mu},20$)

4) Ἐκ πόσων στρεμμάτων[1] ἀποτελεῖται μία ἄμπελος, ἔχουσα σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 120 μέτρα.

(*Λύσις* ἐκ 14 στρεμ. καὶ 400 τ. μ.)

5) Τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου εἶνε 162 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε 9 μέτρα, καὶ ἡ περίμετρος 65 μέτρα. Πόσον εἶνε ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ ;

(*Λύσις* 18 καὶ $14^{\mu},50$)

---

[1] Τὸ στρέμμα εἶνε ἴσον μὲ 1000 τετρ. μέτρα.

6) Δωμάτιον ἔχον σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 8 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 6, πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ τάπητος ἔχοντος πλάτος $1^{\mu},20$. Πόσα μέτρα χρειάζονται ;

(*Λύσις* 40 μ.)

7) Δωμάτιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 25 τετραγ. πήχεις, ἔχει στρωθῇ διὰ τάπητος ἔχοντος πλάτος 5 ῥούπια. Πόσοι πήχεις ἐχρειάσθησαν ;

(*Λύσις* 40).

8) Προαύλιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 72 τετρ. μέτρα, ἔχει στρωθῇ διὰ πλακῶν ἐχουσῶν σχῆμα ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶνε 0,25 τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος 0,10. Πόσαι πλάκες ὑπάρχουν ;

(*Λύσις*. Ὅσας φορὰς τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν πλακῶν χωρεῖ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προαυλίου, τόσαι πλάκες ὑπάρχουν, ἤτοι 2880).

9) Πρόκειται νὰ πατωθῇ δωμάτιον, ἔχον σχῆμα ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 6 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 5, διὰ σανίδων ἐχουσῶν μῆκος 2 μέτρα καὶ πλάτος $0^{\mu},25$. Πόσαι σανίδες χρειάζονται ;

(*Λύσις* 60)

10) Προαύλιον ἔχει στρωθῇ διὰ 900 τετραγωνικῶν πλακῶν ἐχουσῶν πλευρὰν 0,40 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προαυλίου ;

(*Λύσις* 144 τ. μ.)

11) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τετραγωνικοῦ κήπου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶνε 88 μέτρα ;

(*Λύσις* 284 τ.μ.)

12) Χωραφίου, ἔχοντος σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 6 στρέμματα καὶ 50 τετραγ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε $60^{\mu},50$. Πόση εἶνε ἡ βάσις του ;

(*Λύσις* 100 μ.)

13) Δημοσία ὁδὸς διελθοῦσα διά τινος χωραφίου καὶ ἔχουσα πλάτος 4 μέτρα, κατέλαβεν ἐπ' αὐτοῦ ἔκτασιν 150 μέτρων. Ἐὰν

ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον ἀποζημιωθῇ πρὸς 10 δραχμάς, πόσον θὰ λάβῃ ὁ ἰδιοκτήτης ;

(*Λύσις* 6000 δραχ.)

14) Οἰκόπεδόν τι ἔχον ἐμβαδὸν 225 τετρ. μέτρων, ἐπωλήθη πρὸς 5 δραχμὰς τὸν τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν. Πόση εἶνε ἡ ἀξία αὐτοῦ ;

(*Λύσις* 2000 δρ.)

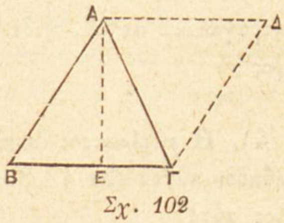
15) Οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶνε 50 τεκτον. πήχεις καὶ τὸ ὕψος 30, ἠγοράσθη ἀντὶ 7500 δραχμῶν. Πόσον κοστίζει τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ;

(*Λύσις* 8^{δρ}, 89)

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

136. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 102). Ἐὰν λάβωμεν ὡς βάσιν αὐτοῦ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ἐπ' αὐτὴν ἀγομένη κάθετος ΑΕ ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς (ἐδάφ. 60). Ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἡ βάσις ΒΓ μετρηθεῖσα εὑρέθη 6 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΑΕ εὑρέθη 7 μέτρα· τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\frac{6\times7}{2}$ ἤτοι 21 τετραγ. μέτρα.



Σχ. 102

* Ὁ λόγος δι' ὃν εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶνε ὁ ἑξῆς. Διότι ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α ἀχθῇ ἡ ΑΔ παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΔ παράλληλος τῇ ΒΑ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 6×7. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς τὰ δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ (ἐδάφ. 78), ἔπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου, ἤτοι $\frac{6\times7}{2}$.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ γινόμενόν τι διαιρεῖται, ἐὰν διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ, διὰ τοῦτο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἢ τὸ ὕψος ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του. Ὥστε, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεώς του ἢ διὰ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους του, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος ἢ τὴν βάσιν αὐτοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

137. *Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶνε ἰσοδύναμα, ἤτοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.*

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

1) Χωραφίου σχήματος τριγώνου ἡ βάσις αὐτοῦ εἶνε 120 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 50, ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται ;

(*Λύσις* Ἐκ 3)

2) Τὸ ἐμβαδὸν τριγωνικοῦ οἰκοπέδου εἶνε 347,60 τετραγων. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε $15^{\mu},8$. Πόση εἶνε ἡ βάσις του ;

(*Λύσις* 44 μ.)

3) Τὸ ἐμβαδὸν τριγωνικῆς ἀμπέλου εἶνε 7 στρέμματα καὶ 200 τετραγωνικὰ μέτρα, ἡ δὲ βάσις εἶνε 180 μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος ;

(*Λύσις* 80 μ.)

4) Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶνε $30^{\mu},60$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 43,86 τοῦ τετραγ. μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος αὐτοῦ ;

(*Λύσις* $8^{\mu},6$)

5) Οἰκόπεδον τριγωνικὸν, ἔχον βάσιν 100 τεκτονικῶν πήχεων καὶ ὕψος 80, ἐπωλήθη ἀντὶ 8000 δραχμῶν. Πόσον ἀξίζει ὁ τετρ. τεκτονικὸς πῆχυς ;

(*Λύσις* 2 δρ.)

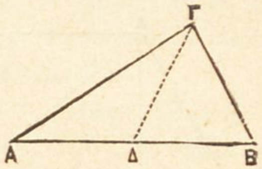
6) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε ἡ μὲν $60^{\mu},30$ ἡ δὲ $20^{\mu},40$. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

(*Λύσις* 615,06 τ. μ.)

7) Νὰ μοιρασθῇ τὸ τριγωνικὸν προαύλιον ΑΒΓ (σχ. 103) εἰς

δύο κληρονόμους ἐξ ἴσου καὶ νὰ ἔχωσι κοινὸν τὸ ἐν τῇ κορυφῇ Γ ὑπάρχον φρέαρ.

Λύσις. Λαμβάνομεν ὡς βάσιν τὴν ΑΒ καὶ εὑρίσκομεν τὸ μέσον Δ αὐτῆς (ὅπερ εὐκόλως κατορθοῦται εἴτε διὰ σχοινίου, εἴτε μετροῦντες πρῶτον αὐτὴν καὶ ἔπειτα λαμβάνοντες τὸ ἥμισυ)· ἔπειτα ἑνώνομεν τὸ μέσον Δ μὲ τὴν κορυφὴν Γ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου. Οὕτω δὲ τὸ προαύλιον διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΓΔΒ ἰσοδύναμα (ἐδάφ. 137).

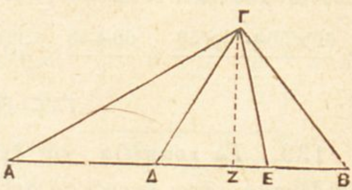


Σχ. 103

ΣΗΜ. Διὰ νὰ μοιράσωμεν τὸ αὐτὸ προαύλιον εἰς 3, 4, 5 κλπ ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ εἰς 3, 4, 5 κλπ. ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τὴν κορυφὴν Γ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου. Ἐὰν ὅμως ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῶν σημείων καθ' ἃ διαιρεῖται ἡ βάσις εἶνε ἀρκετὰ μεγάλη, προσδιορίζομεν τὰς εὐθείας τὰς ἑνούσας τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τὴν κορυφὴν δι' ἀκοντίων.

8) Νὰ μοιρασθῇ τὸ τριγωνικὸν γήπεδον ΑΒΓ (σχ. 104), τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 870 τετρ. μέτρα, εἰς τρία τρίγωνα ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Γ οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 333,75 τ.μ., τὸ δεύτερον 300 καὶ τὸ τρίτον τὸ ὑπόλοιπον 236,25. Τὸ δὲ ὕψος ΓΖ τοῦ τριγώνου εἶνε 30 μέτρα.

Λύσις. Ἡ βάσις τοῦ πρώτου τριγώνου (κατὰ τὴν σημείωσιν τοῦ ἐδαφίου 136) εὑρίσκεται ὅτι εἶνε $22^{\mu},25$, τοῦ δευτέρου 20 καὶ τοῦ τρίτου $15^{\mu},75$. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν βάσιν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀρχόμενοι, εἰς τρία μέρη ἴσα μὲ τὰ μήκη ταῦτα, τὰ ΑΔ, ΔΕ καὶ ΕΖ. Τέλος ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Γ, Ε καὶ Γ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου, καὶ οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς τρία τρίγωνα ἔχοντα ἐμβαδὰ τὰ δοθέντα.



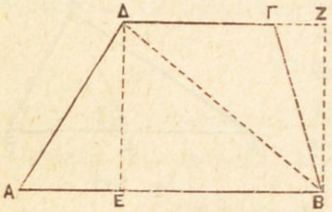
Σχ. 104

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

138. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμε-*

νον τοῦ ἡμίσεως ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 105) καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ βάσεις αὐτοῦ μετρηθεῖσαι εὑρέθησαν ἡ μὲν ΑΒ 60 μέτρα, ἡ δὲ ΑΓ 40 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΔΕ 50 μ. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\frac{60\times40}{2}\times 50$ ἤτοι 2500 τετραγων. μέτρα.



Σχ. 105

*Ὁ λόγος δι' ὃν εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶνε ὁ ἑξῆς. Διότι ἂν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΔΒ διαιρεῖται τὸ τραπέζιον εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ· καὶ τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΔ, ἂν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΑΒ, ἤτοι ἡ μία παράλληλος πλευρὰ τοῦ τραπεζίου, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ΔΕ ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου· τοῦ δὲ τριγώνου ΒΓΔ, ἂν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΓΔ ἤτοι ἡ ἄλλη παράλλ. πλευρὰ τοῦ τραπεζίου, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ΒΖ· ἀλλ' ἡ ΒΖ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΔΕ (ἐδ. 80), ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο ἔχει τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου. Τὸ ἐμβαδὸν τώρα τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶνε $\frac{60\times50}{2}$ τοῦ δὲ ΒΓΔ εἶνε $\frac{40\times50}{2}$· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τούτων ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, ἤτοι εἶνε $\frac{60\times50}{2}+\frac{40\times50}{2}$ ἢ $\frac{60\times50+40\times50}{2}$ ἢ $\frac{60+40}{2}\times50$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

139. *Τὰ τραπέζια τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶνε ἰσοδύναμα, ἤτοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.*

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

Ἀμπέλου τινός, ἐχούσης σχῆμα τραπεζίου, αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε ἡ μὲν μία 180 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 120, τὸ δὲ ὕψος 100. Ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται;

(*Λύσις*. Ἐκ 15)

2) Οἰκοπέδου, ἔχοντος σχῆμα τραπεζίου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε

720 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 20 μέτρα. Ζητοῦνται αἱ βάσεις αὐτοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ μία βάσις εἶνε μεγαλειτέρα τῆς ἄλλης κατὰ 22 μέτρα.

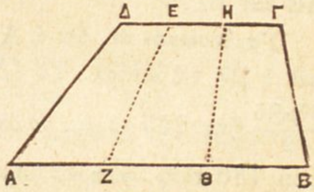
(*Λύσις* 25 καὶ 47 μ.)

3) Χωραφίου ἔχοντος σχῆμα τραπεζίου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 16 στρέμματα καὶ 560 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶνε 368 μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος αὐτοῦ ;

(*Λύσις* 90 μ.)

4) Νὰ μοιρασθῇ τὸ χωράφιον ΑΒΓΔ (σχ. 106), τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα τραπεζίου, εἰς τρεῖς κληρονόμους ἐξ ἴσου.

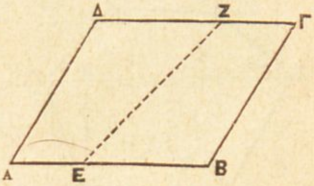
Λύσις. Διαιροῦμεν ἑκατέραν τῶν βάσεων αὐτοῦ εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ ἑνώνομεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως Ε καὶ Ζ, Η καὶ Θ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου (ἢ προσδιορίζομεν τὰς εὐθυγράμμους διευθύνσεις ΕΖ καὶ ΗΘ δι᾽ ἀκοντίων)· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ χωράφιον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα (ἐδάφ. 139).



Σχ. 106

5) Νὰ μοιρασθῇ τὸ προαύλιον ΑΒΓΔ (σχ. 107), ἔχον σχῆμα παραλληλογράμμου εἰς δύο κληρονόμους ἐξ ἴσου, ἔχοντες κοινὴν εἴσοδον εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Λύσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἀρχόμενοι, μῆκός τι ΓΖ ἴσον μὲ τὸ ΑΕ, καὶ ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὰ δύο ἴσα τραπέζια ΑΕΖΔ καὶ ΕΒΓΖ.

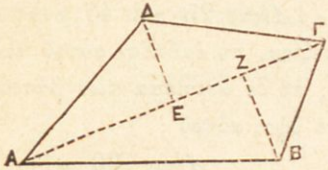


Σχ. 107

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

140. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν πολυγωνικοῦ οἰκοπέδου, χωραφίου κτλ. διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου χωριστά, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

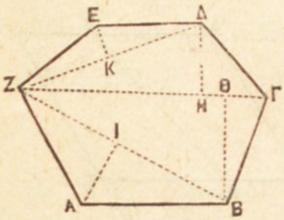
1ον Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 108), τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν. Ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, καὶ ἔστω τῆς Α, ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ (ἐπὶ μικρᾶς μὲν ἀποστάσεως χαράττομεν αὐτὴν διὰ σχοινίου, ἐπὶ μεγάλης δὲ δι' ἀκοντίων)· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα. Ἔπειτα ἐκ τῶν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφῶν Δ καὶ Β ἄγομεν ἐπ' αὐτὴν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΒΖ (κατὰ τὸ ἐδάφ. 105) καὶ μετροῦμεν διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους τὴν διαγώνιον ΑΓ καθὼς καὶ τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΒΖ.



Σχ. 108

Ὑποθέσωμεν δέ, ὅτι ἡ ΑΓ εὑρέθη 30 μέτρα, ἡ ΔΑ 15 μέτρα, καὶ ἡ ΒΖ 12 μέτρα. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ εἶνε $\frac{30 \times 15}{2}$ ἤτοι 225 τ. μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΒ εἶνε $\frac{30 \times 12}{2}$ ἤτοι 180 τετρ. μέτρα. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶνε $225+180$ ἤτοι 405 τετρ. μέτρα.

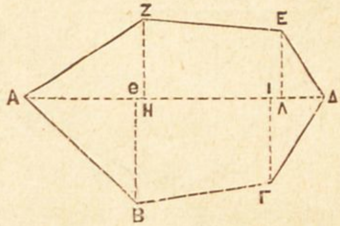
2ον Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 109). Ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, καὶ ἔστω τῆς Ζ, ἄγομεν τὰς διαγωνίους τοῦ πολυγώνου ΖΔ, ΖΓ, ΖΒ· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς 4 τρίγωνα. Ἔπειτα ἐπὶ ἑκάστης τῶν διαγωνίων τούτων ἄγομεν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς της κάθετον, τὰς ΕΚ, ΔΗ, ΒΘ, ΑΙ. Τέλος δὲ μετροῦντες τὰς διαγωνίους καθὼς καὶ τὰς καθέτους, εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, ὧν τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 109

ΣΗΜ. Ἡ διαίρεσις τοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα δύναται νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου σημεῖόν τι καὶ ἑνώνομεν τοῦτο μὲ ὅλας τὰς κορυφὰς αὐτοῦ δι' εὐθειῶν· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

3ον Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εὑρίσκεται συντόμως καὶ ὡς ἑξῆς. Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ (σχ. 110). Ἐκ τῶν μᾶλλον ἀπομεμακρυσμένων κορυφῶν αὐτοῦ Α καὶ Δ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ· ἔπειτα ἐκ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν αὐτῆς ἄγομεν ἐπ' αὐτὴν τὰς καθέτους ΖΗ, ΕΛ, ΒΘ, ΓΙ· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ εἰς τραπέζια, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

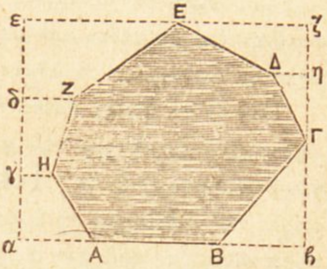


Σχ. 110

Ἐὰν δὲ τὸ πολύγωνον εἶνε κανονικόν, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (1).

4ον Ἐὰν τὸ καταμετρηθησόμενον πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ (σχ. 111) εἶνε λίμνη ἢ ἕλος, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Προεκτείνομεν ἑκατέρωθεν δι' ἀκοντίων μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἔστω τὴν ΑΒ, καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς αβ τὸ ὀρθογώνιον αβζε ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ περιέχηται τὸ πολύγωνον· ἔπειτα ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ἄγομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τὰς καθέτους Ηγ, Ζδ, Δη, καὶ ἀφοῦ εὕρωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχηματιζομένων τραπεζίων καὶ ὀρθογωνίων τριγώνων, ἀφαιροῦμεν ταῦτα ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου αβζε, ἡ δὲ διαφορὰ θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.



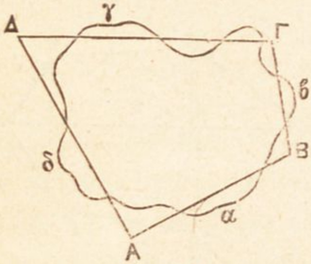
Σχ. 111

5ον Τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας περιοριζομένης ὑπὸ καμπύλης, ὡς

(1). Ὅλαι αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

εἶνε ἡ αβγδ (σχ. 112), εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς συντόμως.

Τέμνομεν τὴν καμπύλην δι' εὐθειῶν, καὶ ἔστω ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ οὕτως, ὥστε ἡ ἐκτὸς τῆς καμπύλης καὶ ἐντὸς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ περιεχομένη ἐπιφάνεια νὰ εἶνε ἴση περίπου μὲ τὴν ἐντὸς τῆς καμπύλης καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου περιεχομένην. Τούτου γενομένου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον θὰ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν περίπου τῆς ὑπὸ τῆς καμπύλης αβγδ περιοριζομένης ἐπιφανείας.



Σχ. 112

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ

141. Ἐὰν φαντασθῶμεν τὴν περιφέρειαν κύκλου τινὸς ἐξελισσομένην ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ μετρήσωμεν αὐτὴν διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Ἐὰν δὲ τὸ μῆκος τοῦτο τῆς περιφερείας διαιρέσωμεν διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, εὑρίσκομεν πάντοτε πηλίκον τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 3,14159... ([1]), τουτέστιν ἡ περιφέρεια περιέχει τὴν διάμετρον τρεῖς φορὰς περίπου. Ὥστε ὁ *λόγος* (ἐδ. 124) *τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον παντὸς κύκλου εἶνε* 3,14159... καὶ παρίσταται οὗτος εἰς τὰ βιβλία ὅλων τῶν Ἐθνῶν διὰ τοῦ Ἑλληνικοῦ γράμματος π, ἤτοι εἶνε $\pi = 3,14159...$ Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι

142. *Τὸ μῆκος πάσης περιφερείας εἶνε γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸν λόγον π.*

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου διὰ τοῦ γράμματος α, ὅτε ἡ διάμετρος αὐτοῦ θὰ εἶνε $2 \times \alpha$, τὸ μῆ-

---

([1]). Ὁ δεκαδικὸς οὗτος ἀριθμὸς ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

κος τῆς περιφερείας του θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω $2 \times \alpha \times \pi$ ἢ $2 \times \pi \times \alpha$. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος, δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας παντὸς κύκλου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ἢ τὴν διάμετρον αὐτοῦ.

143. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ μήκους $2 \times \pi \times \alpha$ τῆς περιφερείας, εὑρίσκομεν τὴν διάμετρον $2 \times \alpha$ ἢ τὴν ἀκτῖνα α τοῦ κύκλου, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του διὰ τοῦ λόγου π ἢ διὰ $2 \times \pi$. Διότι εἶνε $\frac{2 \times \pi \times \alpha}{\pi} = 2 \times \alpha$ καὶ $\frac{2 \times \pi \times \alpha}{2 \times \pi} = \alpha$.

ΣΗΜ. Εἰς τὰς κατωτέρω ἐφαρμογὰς λαμβάνομεν, χάριν συντομίας, τὸν λόγον π ἴσον μὲ τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 3,1415. Ἀλλ' εἶνε γνωστόν, ὅτι ὅσα περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ λαμβάνομεν, τόσον περισσότερον πλησιάζομεν πρὸς τὴν ἀλήθειαν.

Ἔστω ἤδη, ὡς παράδειγμα, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 3 μέτρα· πόση εἶνε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ;

Λύσις. Θέτοντες ἐν τῷ τύπῳ $2 \times \pi \times \alpha$ ἀντὶ τῆς ἀκτῖνος α τὸ ἴσον του 3 καὶ ἀντὶ τοῦ λόγου π τὸ ἴσον του 3,1415 εὑρίσκομεν ὅτι ἡ περιφέρεια εἶνε $2 \times 3{,}1415 \times 3$ ἤτοι $18^{\mu},849$.

Μῆκος τόξου

144. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τόξου τινός, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, καθὼς καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς ὁποίας εἶνε μέρος, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 360.

Διότι ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 15°, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ περιφέρεια εἰς ἣν ἀνήκει εἶνε 60 μέτρα.

Λύσις. Ἀφοῦ αἱ 360° ἔχουσι μῆκος 60 μέτρα

ἡ 1° ἔχει » $\frac{60}{360}$ μέτρα

καὶ αἱ 150° ἔχουσι » $\frac{60 \times 15}{360}$ μέτρα

ἤτοι $2^{\mu},50$.

145. Καὶ τἀνάπαλιν. Γνωρίζοντες τὸ μῆκος τόξου καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας εἶνε μέρος, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν 360 ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας.

Διότι ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Τὸ μῆκος τόξου τινὸς εἶνε $2^{\mu},50$, τὸ δὲ μῆκος τῆς περιφερείας εἶνε 60 μέτρα. Πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον τοῦτο ;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ 60 μέτρα εἶνε 360°

τὸ 1 μέτρον εἶνε $\frac{360}{60}$

καὶ τὰ $2^{\mu},50$ εἶνε $\frac{360\times2,50}{60}$ ἤτοι 15°.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

146. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα του.

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου διὰ α, ὅτε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ θὰ εἶνε $2\times\pi\times\alpha$, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\frac{2\times\pi\times\alpha\times\alpha}{2}$ ἢ $\pi\times\alpha\times\alpha$ ἢ καὶ $\pi\times\alpha^2$, ἤτοι γινόμενον τοῦ λόγου π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος του. Οὗτος λοιπὸν εἶνε ὁ τύπος δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

Ἔστω ἤδη, ὡς παράδειγμα, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 6 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

Λύσις. Θέτοντες ἐν τῷ τύπῳ $\pi\times\alpha^2$ ἀντὶ τοῦ α τὸ ἴσον του 6 καὶ ἀντὶ τοῦ π τὸ ἴσον του 3,1415 εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε $3,1415\times6^2$ ἢ $3,1415\times36$ ἤτοι 113,094 τοῦ τ.μέτρ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ

147. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυκλικοῦ τομέως εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τοῦ τόξου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα.*

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Τὸ τόξον κυκλικοῦ τομέως εἶνε 8 μέτρα, ἡ δὲ ἀκτὶς 5 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

Λύσις. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν $\frac{8 \times 5}{2}$ ἤτοι 20 τετρ. μέτρα.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

1) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶνε 2 μέτρα· πόση εἶνε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. $6^{\mu},283$)

2) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 10 μέτρα· πόση εἶνε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. $62^{\mu},83$)

3) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς εἶνε $20^{\mu},41$· πόση εἶνε ἡ διάμετρος αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. $6^{\mu},49$)

4) Ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς εἶνε $20^{\mu},10$· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου 80^{o} ;

(*Λύσις*. $4^{\mu},46...$)

5) Τὸ μῆκος τόξου τινὸς εἶνε $6^{\mu},30$, ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἰς ὃν ἀνήκει εἶναι 5 μέτρα· πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον τοῦτο ;

(*Λύσις*. $72^{o}\ 11'\ 41''$)

6) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε $5^{\mu},76$· πόσον εἶνε τὸ τόξον 60^{o};

(*Λύσις*. $6^{\mu},031$)

7) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶνε 0,92 τοῦ μέτρου· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου $18^{o}\ 26'$;

(*Λύσις*. $0^{\mu},148$)

8) Κύκλου τινὸς ἡ διάμετρος εἶνε 8 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 50,264 τοῦ τετραγ. μ.)

9) Κύκλου τινὸς ἡ περιφέρεια εἶνε $94^{\mu},20$· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

Λύσις. Ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ εἶνε $\frac{94,20}{2 \times \pi}$ (ἐδ. 143), ἤτοι $14^{\mu},992$

ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $\pi \times \alpha^2$, ἤτοι εἶνε $3,1415 \times (14,992)^2$ τετρ. μέτρα.

10) Ἡ ἀκτὶς ἡμικυκλίου τινὸς εἶνε 3 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 14,136 τοῦ τετρ. μέτρ.)

11) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶνε 18°, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ κύκλου $31^{\mu},40$;

(*Λύσις*. 3,917 τοῦ τετρ. μέτρου)

12) Δύο ὁμοκέντρων κύκλων αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶνε τοῦ μὲν 12 μέτρα, τοῦ δὲ 8· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τῶν δύο τούτων κύκλων περιεχομένης ἐπιφανείας ;

(*Λύσις*. 251,32 τοῦ τετρ. μ.)

13) Εἶνε γνωστόν, ὅτι τὸ ἀλεξικέραυνον δύναται νὰ προφυλάξῃ ἀπὸ τοῦ κεραυνοῦ κυκλικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν κέντρον τὴν βάσιν τοῦ κοντοῦ καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν περίπου τοῦ ὕψους τοῦ κοντοῦ. Ζητεῖται πόσην κυκλικὴν ἐπιφάνειαν δύναται νὰ προφυλάξῃ ἀλεξικέραυνον, οὗ τὸ ὕψος εἶνε $1^{\mu},50$.

(*Λύσις*. 28,2735 τοῦ τ.μ.)

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'

Ὁρισμοὶ

148. Εὐθεῖα λέγεται *κάθετος* ἐπὶ ἐπίπεδον, ἐὰν εἶνε κάθετος ἐπὶ ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ διερχομένων διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ἤτοι διὰ τοῦ σημείου καθ' ὃ αὕτη συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἐπίπεδον λέγεται κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

149. Δύο ἐπίπεδα λέγονται *παράλληλα*, ὅταν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ καὶ ἂν προεκταθῶσι καθ' ὅλα τὰ μέρη αὐτῶν.

Οἱ ἀπέναντι τοῖχοι τῶν δωματίων εἶνε ἐπίπεδα παράλληλα.

Δύο ἐπίπεδα δύο διαφόρους θέσεις θὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα, ἢ θὰ τέμνωνται (προεκτεινόμενα ἐν ἀνάγκῃ) ἢ θὰ εἶνε παράλληλα.

Ὅταν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ τομὴ αὐτῶν εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

150. Πᾶν ἐπίπεδον ἔχον τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου λέγεται *κατακόρυφον ἐπίπεδον*.

Οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων εἶνε κατακόρυφα ἐπίπεδα. Διότι οἱ κτῖσται φροντίζουν κατὰ τὴν κτίσιν νὰ δίδωσιν εἰς αὐτοὺς τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης.

151. Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς κατακορύφου λέγεται *ὁριζόντιον ἐπίπεδον*.

Ἡ ἀτάραχος ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος μικρᾶς ἐκτάσεως εἶνε ἐπίπεδον ὁριζόντιον· ὡσαύτως τὰ πατώματα τῶν δωματίων.

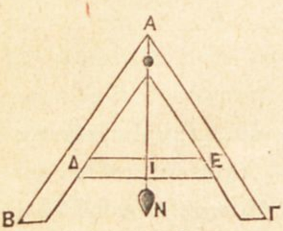
152. Παν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον οὔτε κατακόρυφον εἶνε, οὔτε ὁριζόντιον, λέγεται *πλάγιον* ἢ *κεκλιμένον ἐπίπεδον*.

Διὰ τοιούτων ἐπιπέδων κατασκευάζουσι συνήθως τὴν στέγην τῶν οἰκοδομῶν.

ΑΛΦΑΔΙΟΝ ΚΑΙ ΑΕΡΟΣΤΑΘΜΗ

153. Τὸ σχῆμα 113 παριστᾷ γεωμετρικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἀλφάδιον*, δι' οὗ δοκιμάζουσιν οἱ τεχνῖται ἂν ἐπίπεδόν τι εἶνε ὁριζόντιον.

Τὸ ἀλφάδιον ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων κανόνων ΑΒ καὶ ΑΓ συνδεομένων διὰ τρίτου τινὸς ΔΕ· ἐκ δὲ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ ἐξαρτᾶται τὸ νῆμα τῆς στάθμης ΑΝ. Διὰ νὰ μάθωσι τώρα οἱ τεχνῖται, ἂν ἐπίπεδόν τι εἶνε ὁριζόντιον, πράττουσιν ὡς ἑξῆς.



Σχ. 113

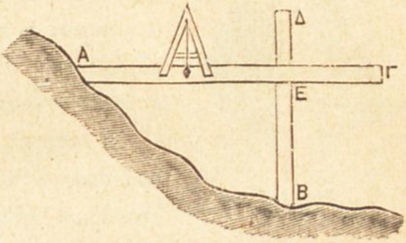
Στηρίζουσι τοὺς πόδας Β καὶ Γ τοῦ ἀλφαδίου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἂν τὸ νῆμα τῆς στάθμης διέρχεται διὰ τῆς ἐν τῷ μέσῳ τοῦ κανόνος ΔΕ κεχαραγμένης ἐντομῆς Ι, συμπεραίνουσιν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε ὁριζόντιον· εἰ δὲ μή, ὑψοῦσιν ἢ ταπεινοῦσι τὰ ἄκρα τοῦ ἐπιπέδου, ἀναλόγως τῶν περιστάσεων, μέχρις οὗ τὸ νῆμα διέλθῃ διὰ τῆς ἐντομῆς. Διὰ τοιούτων δὲ δοκιμῶν κατασκευάζουσι τα πατώματα τῶν οἰκιῶν ὁριζόντια.

Διὰ τὰ ἔχοντα μικρὰς ἐκτάσεις ἐπίπεδα μεταχειρίζονται οἱ τεχνῖται τὴν *ἀεροστάθμην* (σχ. 114), ἤτοι ὄργανον ἀποτελούμενον ἐκ κυλινδρικοῦ ὑελίνου σωλῆνος ΑΒ, κυρτωμένου ὀλίγον πρὸς τὰ ἄνω καὶ πεπληρωμένου οἰνοπνεύματος ἢ αἰθέρος, ἤτοι ὑγρῶν εὐκινητοτέρων τοῦ ὕδατος καὶ μὴ πηγνυομένων εὐκόλως ὡς αὐτό.

Σχ. 114

Ὁ σωλὴν οὗτος, ὅστις περικλείεται καλῶς κατὰ τὰ ἄκρα καὶ ἀφίνεται ἐν αὐτῷ ἐλάχιστος χῶρος κατεχόμενος ὑπὸ ἀέρος παράγοντος μικρὰν φυσαλίδα, προφυλάσσεται ἐντὸς ὀρειχαλκίνου σωλῆνος ΓΔ ἀνοικτοῦ κατὰ τὸ κυρτὸν μέρος ΕΖ τοῦ σωλῆνος, ἵνα φαίνηται ἡ φυσαλίς· κάτωθεν δὲ τοῦ ὀρειχαλκίνου κυλίνδρου προσκολλᾶται ὀρειχαλκίνη πλὰξ ΗΘ. Διὰ νὰ δοκιμάσωσι τώρα διὰ τῆς ἀεροστάθμης ἂν ἐπίπεδόν τι εἶνε ὁριζόντιον, θέτουσιν αὐτὴν εἰς διάφορα μέρη τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἂν ἡ φυσαλὶς εὑρίσκεται πάντοτε ἐν τῷ μέσῳ ΙΚ τοῦ κυρτοῦ σωλῆνος, συμπεραίνουσιν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε ὁριζόντιον· εἰ δὲ μή, ὑψοῦσιν ἢ ταπεινοῦσι τὰ ἄκρα τοῦ ἐπιπέδου, μέχρις οὗ κατορθωθῇ τοῦτο.

Τὸ ἀλφάδιον χρησιμεύει προσέτι καὶ πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους δύο γειτνιαζόντων σημείων Α καὶ Β (σχ. 115). Πρὸς τοῦτο στηρίζομεν καταχορύφως εἰς τὸ χαμηλότερον σημεῖον Β κανόνα τινὰ ΒΔ διῃρημένον εἰς μέτρα καὶ εἰς τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ· εἰς δὲ τὸ ὑψηλότερον σημεῖον Α τοποθετοῦμεν τὸ ἄκρον ἑτέρου κανόνος ΑΓ. Ἔπειτα σύρομεν αὐτὸν διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου Γ καὶ κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος ΒΔ μέχρις οὗ τὸ ἐπ' αὐτοῦ τοποθετούμενον ἀλφάδιον δείξῃ τὴν ὁριζοντιότητα τοῦ κανόνος τούτου. Ἡ διαφορὰ τότε τοῦ ὕψους τῶν δύο σημείων Α καὶ Β εἶνε τὸ μῆκος ΒΕ.



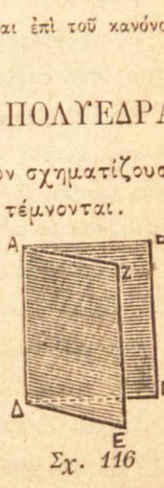
Σχ. 115

ΣΗΜ. Ἀντὶ τοῦ ἀλφαδίου τοποθετοῦσι συνήθως οἱ τεχνῖται ἐπὶ τοῦ κανόνος τὴν ἀεροστάθμην πρὸς μείζονα ἀκρίβειαν.

ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ, ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

154. *Δίεδρος γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα καὶ περατούμενα ἐκεῖ ἔνθα τέμνονται.

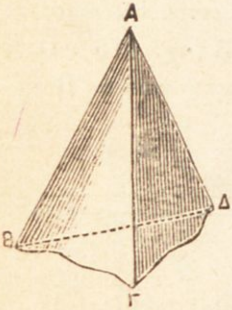
Τὸ σχῆμα 116 παριστᾷ δύο ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ ΑΖΕΔ, τὰ ὁποῖα τέμνονται καὶ περατοῦνται εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν ΑΔ. Τὸ ἄνοιγμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα λέγεται *δίεδρος γωνία*, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΔ καθ' ἣν τέμνονται λέγεται *ἀκμὴ* τῆς διέδρου γωνίας, τὰ δὲ ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ ΑΖΕΔ τὰ σχηματίζοντα τὴν δίεδρον γωνίαν, λέγονται *ἕδραι* αὐτῆς.



Σχ. 116

155. *Στερεὰ γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα, ἀγόμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ περατούμενα εἰς τὴν τομὴν καθ' ἣν τέμνονται ἀνὰ δύο.

Τὸ σχῆμα 117 παριστᾷ στερεὰν γωνίαν. Τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΒΑΔ τὰ σχηματίζοντα τὴν στερεὰν γωνίαν Α λέγονται



Σχ. 117

πάλιν *ἕδραι* (ἐκ τῶν ἑδρῶν τούτων ἡ μὲν ΒΑΔ κεῖται ὄπισθεν, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἔμπροσθεν), αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ καθ' ἃς τέμνονται αἱ ἕδραι ἀνὰ δύο λέγονται πάλιν ***ἀκμαὶ*** ἢ ***πλευραί***, τὸ δὲ σημεῖον Α ἐξ οὗ ἄγονται αἱ ἕδραι λέγεται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Ἡ στερεὰ γωνία λέγεται *τρίεδρος*, *τετράεδρος* κτλ. ἐὰν ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν, τεσσάρων κτλ. ἑδρῶν. Τὸ ἀνωτέρω σχῆμα παριστᾷ τρίεδρον στερεὰν γωνίαν.

156. ***Πολύεδρον*** λέγεται πᾶν στερεὸν σῶμα περιοριζόμενον πανταχόθεν ἀπὸ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἕδραι* τοῦ πολυέδρου.

Παραδείγματος χάριν, ὁ μελανοπίναξ, τὰ δωμάτια τῶν οἰκιῶν εἶνε σώματα πολύεδρα περιοριζόμενα ἀπὸ 6 ἐπίπεδα ἢ ἕδρας.

Τὸ πολύεδρον ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ λέγεται *τετράεδρον*, ***πεντάεδρον***, *ἑξάεδρον* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ ἁπλούστατον τῶν πολυέδρων εἶνε τὸ τετράεδρον, διότι διὰ νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία ἀπαιτοῦνται τοὐλάχιστον τρία ἐπίπεδα (κατὰ τὸν ὁρισμὸν 155), χρειάζεται ὅμως καὶ ἓν ἐπίπεδον ἀκόμη διὰ νὰ κλεισθῇ πανταχόθεν.

Ἀκμαὶ ἢ ***πλευραὶ*** τοῦ πολυέδρου λέγονται πάλιν αἱ εὐθεῖαι καθ' ἃς τέμνονται αἱ ἕδραι αὐτοῦ ἀνὰ δύο.

Κορυφαὶ τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ κοιναὶ κορυφαὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Διαγώνιος τοῦ πολυέδρου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει δύο κορυφὰς μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Ἀσκήσεις

Ποῖον σχῆμα σχηματίζουσιν οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων ἀνὰ δύο συναντώμενοι;

Δείξατε μίαν δίεδρον γωνίαν τοῦ δωματίου. Δείξατε τὰς ἕδρας καὶ τὴν ἀκμὴν αὐτῆς.

Δείξατε μίαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν τοῦ μελανοπίνακος καὶ τοῦ δωματίου. Δείξατε τὰς ἕδρας, τὰς ἀκμὰς καὶ τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

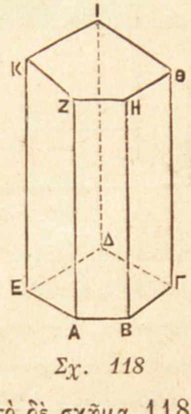
Δείξατε μίαν νοητὴν διαγώνιον τοῦ δωματίου. Πόσαι διαγώνιοι δύνανται νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὸ δωμάτιον;

ΠΕΡΙ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

Ὁρισμοὶ

157. *Πρίσμα* λέγεται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶνε παραλληλόγραμμα.

Τὸ σχῆμα 118 παριστᾷ πρίσμα. Ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ εἶνε αἱ ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ, αἱ δὲ λοιπαὶ ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ, ΓΔΙΘ, ΕΔΙΚ, ΑΕΚΖ εἶνε παραλληλόγραμμα.



Σχ. 118

Ἡ ἐπιφάνεια τῶν παραλληλογράμμων λέγεται ***παράπλευρος ἐπιφάνεια*** τοῦ πρίσματος.

Βάσεις τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ.

Ὕψος τοῦ πρίσματος λέγεται ἡ μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος [1].

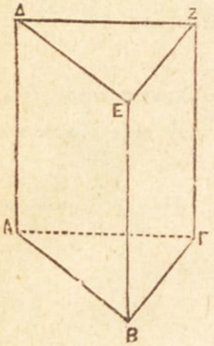
Ἐὰν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶνε τρίγωνον, τετράπλευρον καὶ γενικῶς πολύγωνον, τὸ πρίσμα λέγεται *τριγωνικόν*, *τετραγωνικὸν* καὶ γενικῶς *πολυγωνικόν*.

Τὸ σχῆμα 119 παριστᾷ τριγωνικὸν πρίσμα, τὸ δὲ σχῆμα 118 παριστᾷ πολυγωνικὸν πρίσμα.

---

[1]. Ὅλαι αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει 9 ἀκμάς, 9 διέδρους γωνίας καὶ 6 τριέδρους στερεὰς γωνίας.



Σχ. 119

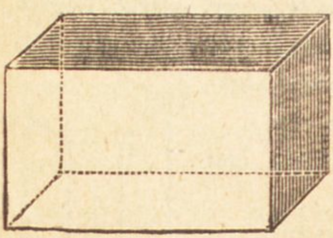
Ἐν γένει δὲ τὸ πρίσμα ἔχει τόσας ἀκμὰς καὶ διέδρους γωνίας, ὅσος εἶνε ὁ τριπλάσιος ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του· στερεὰς δὲ γωνίας ἔχει τόσας, ὅσος εἶνε ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς αὐτῶν.

Τὸ πρίσμα λέγεται *ὀρθόν*, ἐὰν αἱ ἀκμαὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς τῶν βάσεων (καθὼς αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ) εἶνε κάθετοι ἐπὶ τῶν βάσεων· εἰ δὲ μή, λέγεται *πλάγιον*.

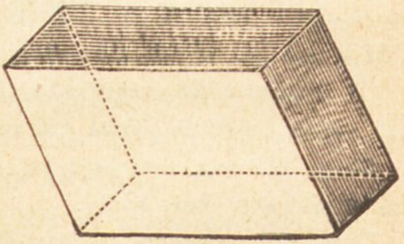
Ἐὰν ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ πρίσματος εἶνε παραλληλόγραμμα, τὸ πρίσμα λέγεται *παραλληλεπίπεδον*. Τοιαῦτα εἶνε τὰ σχήματα 120, 121, 122.

Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει ἐν ὅλῳ 6 ἕδρας.

Ἐὰν καὶ αἱ 6 ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶνε ὀρθογώνια



Σχ. 120



Σχ. 121

παραλληλόγραμμα (ὅτε εἶνε καὶ ὀρθόν), λέγεται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*· τοιοῦτον εἶνε τὸ σχῆμα 120. Ἐὰν δὲ εἶνε τετράγωνα, λέγεται *κύβος* ἢ *κανονικὸν ἑξάεδρον* (διότι τὰ τετράγωνα εἶνε κανονικὰ σχήματα).

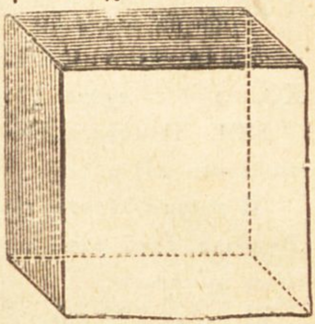
Τὸ σχῆμα 122 παριστᾷ κύβον, τὸ δὲ σχῆμα 121 παριστᾷ πλάγιον παραλληλεπίπεδον (διότι αἱ ἀκμαὶ αὐτοῦ δὲν εἶνε κάθετοι ἐπὶ τῶν βάσεων).

Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι. Τοῦ δὲ κύβου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἀσκήσεις

Ποῖον σχῆμα ἔχει ὁ μελανοπίναξ καὶ τὸ δωμάτιον;

Πόσας ἀκμὰς καὶ πόσας διέδρους γωνίας ἔχει τὸ δωμάτιον;



Σχ. 122

Πόσας ἐπιπέδους γωνίας ἔχει ἑκάστη ἕδρα τοῦ δωματίου καὶ πόσας ὅλον τὸ δωμάτιον;

Πόσας τριέδρους στερεὰς γωνίας ἔχει τὸ δωμάτιον καὶ πόσας κορυφάς;

Πόσας ἀκμάς, πόσας διέδρους γωνίας καὶ πόσας στερεὰς γωνίας ἔχει τὸ πενταγωνικὸν πρίσμα;

Πρίσμα τι ἔχει 24 ἀκμάς, πῶς λέγεται ἐκ τῆς βάσεώς του;

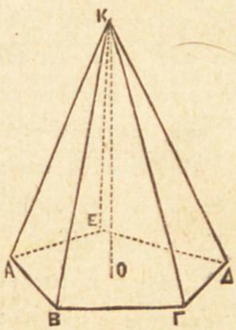
Κατὰ τί ὁμοιάζει καὶ κατὰ τί διαφέρει ὁ κύβος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

Κατὰ τί ὁμοιάζει καὶ κατὰ τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου;

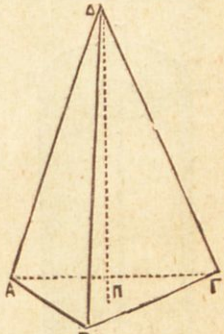
ΠΕΡΙ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

Ὁρισμοὶ

158. *Πυραμὶς* λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶνε οἱονδήποτε εὐθύγραμμον σχῆμα, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶνε τρίγωνα ἔχοντα βάσεις μὲν τὰς πλευρὰς τοῦ εὐθυγράμμου τούτου σχήματος, κορυφὴν δὲ κοινὸν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος.



Σχ. 123



Σχ. 124

Τὸ εὐθύγραμμον τοῦτο σχῆμα λέγεται *βάσις* τῆς πυραμίδος, ἡ δὲ κοινὴ κορυφὴ τῶν τριγώνων λέγεται *κορυφὴ* τῆς πυραμίδος.

Τὰ σχήματα 123 καὶ 124 παριστῶσι πυραμίδας, καὶ εἰς μὲν τὸ σχῆμα 123 βάσις εἶνε τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ κορυφὴ τὸ σημεῖον Κ, εἰς δὲ τὸ σχῆμα 124 βάσις εἶνε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κορυφὴ τὸ σημεῖον Δ.

Ὕψος τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν. Καὶ εἰς μὲν τὸ σχῆμα 123 κάθετος εἶνε ἡ ΚΟ, εἰς δὲ τὸ σχῆμα 124 εἶνε ἡ ΔΠ.

ΣΗΜ. Ἡ κάθετος δύναται νὰ πέσῃ ἢ ἐπὶ τὴν βάσιν ἢ ἐπὶ τὴν προέκτασιν αὐτῆς.

Ἡ πυραμὶς λέγεται *τριγωνική*, *τετραγωνικὴ* καὶ γενικῶς *πολυγωνική*, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶνε τρίγωνον, τετράπλευρον καὶ γενικῶς πολύγωνον.

Τὸ σχῆμα 123 παριστᾷ πολυγωνικὴν πυραμίδα, τὸ δὲ σχῆμα 124 τριγωνικὴν πυραμίδα.

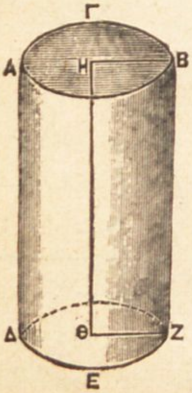
Ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ πέριξ τρίγωνα τῆς πυραμίδος, λέγεται *παράπλευρος* ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος.

Ἡ πυραμὶς λέγεται *κανονική*, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶνε οἱονδήποτε κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα, ἡ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν πίπτει εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως.

ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Ὁρισμοὶ

159. *Κύλινδρος* λέγεται τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν.



Σχ. 125

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΗΘΖΒ (σχ. 125) περιστρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΗΘ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, τότε ἡ μὲν πλευρὰ ΒΖ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται *κυρτὴ ἐπιφάνεια* τοῦ κυλίνδρου, αἱ δὲ πλευραὶ ΗΒ καὶ ΘΖ θὰ γράψωσι τοὺς δύο ἴσους κύκλους ΑΒΓΑ καὶ ΔΕΖΔ, οἵτινες λέγονται *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου. Ἡ δὲ ἀκίνητος πλευρὰ ΗΘ τοῦ ὀρθογωνίου (ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν βάσεων) λέγεται *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου.

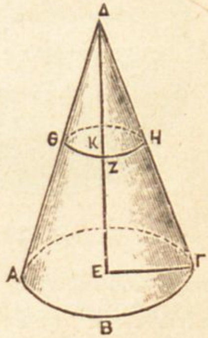
Ὕψος τοῦ κυλίνδρου λέγεται ἡ μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος, καθὼς ἡ ΑΔ, ἡ ΗΘ, ἡ ΒΖ.

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ

Ὁρισμοὶ

160. *Κῶνος* λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΓ (σχ. 126) περιστρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΔΕ μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, τότε ἡ μὲν ὑποτείνουσα ΔΓ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται *κυρτὴ ἐπιφάνεια* τοῦ κώνου, ἡ δὲ πλευρὰ ΕΓ θὰ γράψῃ τὸν κύκλον ΑΒΓΑ, ὅστις λέγεται *βάσις* τοῦ κώνου.



Σχ. 126

Ὕψος ἢ *ἄξων* τοῦ κώνου λέγεται ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΔΕ, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν. *Κορυφὴ* τοῦ κώνου λέγεται τὸ σημεῖον Δ. *Πλευρὰ* τοῦ κώνου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει τὴν κορυφὴν αὐτοῦ Δ μὲ σημεῖον τι τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του· καθὼς ἡ ΔΑ, ἡ ΔΓ. Φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ κώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐὰν ὁ κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει του, καθὼς ὑπὸ τοῦ ΘΖΗ, ἡ τομὴ θὰ εἶνε κύκλος· τὸ δὲ περιλαμβανόμενον μέρος τοῦ κώνου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως λέγεται *κόλουρος κῶνος*· καθὼς τὸ μέρος ΑΒΓΘΖΗ.

Βάσεις τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο αὐτοῦ κύκλοι ΑΒΓΑ καὶ ΘΖΗΘ. *Ὕψος* δὲ ἡ τὰ κέντρα αὐτῶν συνδέουσα εὐθεῖα ΚΕ.

Πλευρὰ δὲ λέγεται τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ περιεχόμενον μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ὅλου κώνου· καθὼς ἡ ΗΓ, ἡ ΘΔ.

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

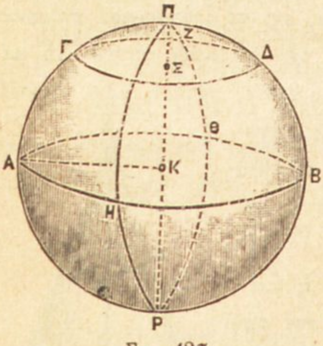
Ὁρισμοὶ

161. *Σφαῖρα* λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον κείμενον ἐντὸς αὐτοῦ, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ.

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τῆς σφαίρας.

Τὸ σχῆμα 127 παριστᾷ σφαῖραν, τὸ δὲ σημεῖον Κ εἶνε τὸ κέντρον αὐτῆς.

Ἡ σφαῖρα παράγεται, ἐὰν ἡμικύκλιον, καθὼς τὸ ΠΒΡ, περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΠΡ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν.



Σχ. 127

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.Καθ ς ἡ ΚΑ, ἡ ΚΠ, ἡ ΚΡ.

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Καθὼς ἡ ΠΡ.

Ὅλαι αἱ διάμετροι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Διότι ἑκάστη εἶνε διπλασία τῆς ἀκτῖνος.

Μέγιστοι καὶ μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας, παράλληλοι κύκλοι, πόλοι, ζώνη κτλ.

Ὁρισμοὶ

162. Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν κόψωμεν σφαῖραν δι' ἐπιπέδου, ἡ γενομένη τομὴ εἶνε κύκλος.

Ἐκ τῶν κύκλων τούτων ἄλλοι μὲν εἶνε μεγάλοι, ἄλλοι δὲ μικροί.

Μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας λέγεται ὁ κύκλος, ὅστις σχηματίζεται, ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Πᾶς μέγιστος κύκλος ἔχει κέντρον τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

Οἱ κύκλοι ΑΗΒΘΑ καὶ ΠΗΡΘΠ (σχ. 127) εἶνε μέγιστοι καὶ ἔχουσι κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὰ τῆς σφαίρας.

Ὅλοι οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἡμισφαίρια*.

Μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας λέγεται ὁ κύκλος, ὅστις σχηματίζεται, ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Πᾶς μικρὸς κύκλος δὲν ἔχει προφανῶς οὔτε τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, οὔτε τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

Ὁ κύκλος ΓΔΖΓ (σχ. 127) εἶνε μικρός.

Ὅσον περισσότερον ἀπέχει τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τόσον μικρότερος εἶνε ὁ διὰ τῆς τομῆς σχηματιζόμενος κύκλος ([1]).

Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται οἱ κύκλοι, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα. Καθὼς οἱ κύκλοι ΑΗΒΘΑ καὶ ΓΔΖΓ.

Πόλοι κύκλου τῆς σφαίρας λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἡ διάμετρος ΠΡ εἶνε κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ΓΔΖΓ, ὅτε θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παραλλήλου αὐτοῦ κύκλου ΑΗΒΘΑ, τὰ ἄκρα Π καὶ Ρ αὐτῆς εἶνε οἱ πόλοι τῶν κύκλων ΓΔΖΓ καὶ ΑΗΒΘΑ.

([1]). Ὁ διδάσκων πρέπει νὰ κόπτῃ ἐνώπιον τῶν μαθητῶν πορτοκάλιον ἢ ἄλλο τι σφαιρικὸν σῶμα, ἵνα κατανοήσωσιν οἱ μαθηταὶ τοὺς μεγίστους καὶ μικροὺς κύκλους τῆς σφαίρας. Καθὼς τοὺς παραλλήλους κύκλους τῆς σφαίρας, τὰς ζώνας κτλ.

Ἑκάτερος τῶν πόλων ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τῆς σφαίρας τοῦ ὁποίου εἶνε πόλος.

Τὰ τόξα, παραδείγματος χάριν, ΠΓ, ΠΔ, ΠΖ εἶνε ἴσα. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ διὰ τὸν ἕτερον πόλον Ρ.

Σφαιρικὴ ζώνη λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων. Καθὼς ἡ ἐπιφάνεια ΑΗΒΑΓΔΖΓ.

Σφαιρικὸν τμῆμα λέγεται τὸ μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων· καθὼς τὸ μέρος ΑΗΒΑΓΔΖΓ. Σφαιρικὸν τμῆμα λέγεται προσέτι καὶ πᾶν μέρος τῆς σφαίρας ἀποκοπτόμενον ἀπ᾽ αὐτῆς δι᾽ ἐπιπέδου· καθὼς τὸ μέρος ΓΔΖΠ.

Βάσεις τῆς ζώνης ἢ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγονται οἱ δύο κύκλοι εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦνται. Ὅταν ὅμως περατοῦνται εἰς ἕνα μόνον κύκλον, τότε ὁ κύκλος οὗτος λέγεται βάσις αὐτῶν.

Ὕψος τῆς ζώνης λέγεται ἡ μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτῆς ἀγομένη κάθετος. Ὅταν ὅμως ἡ ζώνη ἔχῃ μίαν μόνον βάσιν, ὕψος αὐτῆς εἶνε ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ πόλου τῆς βάσεώς της εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως· καθὼς ἡ ΠΣ. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγεται καὶ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ὁρισμοὶ

163. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰ στερεὰ σώματα, συγκρίνομεν αὐτὰ πρὸς ἕτερον ὡρισμένον στερεόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς *μονάς*.

Ὡς μονὰς τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἢ ἡ ἀκμὴ εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Καὶ ἂν μὲν ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου εἶνε ἴση μὲ ἓν μέτρον ἢ πῆχυν, λέγεται *κυβικὸν μέτρον ἢ κυβικὸς πῆχυς*· ἂν δὲ εἶνε ἴση μὲ μίαν παλάμην, λέγεται *κυβικὴ παλάμη*· ἂν δὲ εἶνε ἴση μὲ ἕνα δάκτυλον, λέγεται *κυβικὸς δάκτυλος* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ πήχεως, ὁ δὲ κυβικὸς πῆχυς εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης. Ὥστε ὁ κυβικὸς πῆχυς ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 κυβικὰς παλάμας ἢ 1000000 κυβικοὺς δακτύλους.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως στερεοῦ τινος σώματος λέγεται *ὄγκος* αὐτοῦ.

Ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης λέγεται *λίτρα* καὶ χρησιμεύει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

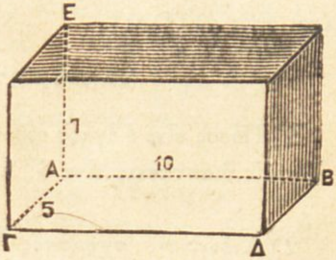
Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ *κοιλόν*, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ δέκατον τοῦ κυβικοῦ πήχεως, ἤτοι περιέχει 100 κυβικὰς παλάμας.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

164. *Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον παντὸς πρίσματος, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του διὰ τῶν γνωστῶν κανόνων καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ πρίσμα εἶνε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 128), ὅτε ἡ βάσις αὐτοῦ ΑΒΓΔ εἶνε ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (ἐδάφ. 157), καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεώς του εἶνε ἡ μὲν ΑΒ 10 μέτρα, ἡ δὲ ΑΓ 5 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του θὰ εἶνε (κατὰ τὸ ἐδάφιον 132) 10×5 ἤτοι 50 τετρ. μέτρα· ἐὰν δὲ τὸ ὕψος ΑΕ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶνε 7 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶνε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα 50×7 ἤτοι 350 κυβικὰ μέτρα.



Σχ. 128

Ἀλλ' αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΕ αἱ συναντώμεναι εἰς τὴν κορυφὴν Α εἶνε αἱ τρεῖς διαστάσεις (ἤτοι τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος) τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ὥστε

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, *πολλαπλασιάζομεν μεταξύ των τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ.*

Ἐπειδὴ τοῦ κύβου καὶ αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν μίαν τῶν διαστάσεων αὐτοῦ καὶ νὰ σχηματίσωμεν γινόμενον ἐκ τριῶν ἀριθμῶν ἴσων μὲ τὸ μῆκος τῆς διαστάσεως ταύτης.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι μία τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου (ἥτις παριστᾷ καὶ μίαν τῶν διαστάσεων αὐτοῦ) μετρηθεῖσα εὑρέθη 5 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶνε $5 \times 5 \times 5$ ἤτοι 125 κυβικὰ μέτρα.

165. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 6 (διότι καὶ αἱ 6 ἕδραι τοῦ κύβου εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας).

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

1) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶνε 6, 5 καὶ 4 μέτρα ;

(*Λύσις*. 120 κυβικὰ μέτρα)

2) Κιβώτιον, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει βάθος $1^{\mu},20$, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς βάσεώς του εἶνε ἡ μὲν μία $1^{\mu},80$ ἡ δὲ ἄλλη $0^{\mu},60$. Πόση εἶνε ἡ χωρητικότης αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 1,296 τοῦ κυβ. μέτρου)

3) Ἀποθήκη σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 8 μέτρα, πλάτος 5 καὶ ὕψος $6^{\mu},70$. Πόσα κοιλὰ σίτου χωρεῖ ; 25000

(*Λύσις*. 2680)

24

3
3525

4) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε $3^{\mu},10$;

(*Λύσις*. 29,791 τοῦ κυβ. μέτρου)

5) Πόση εἶνε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀνωτέρω κύβου ;

(*Λύσις*. 57,66 τετρ. μ.)

6) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 20 τετραγωνικοὺς πήχεις, τὸ δὲ ὕψος του εἶνε 20 πήχεις ;

(*Λύσις*. 400 κ. πήχεις)

7) Ἡ χωρητικότης δωματίου τινὸς εἶνε 428,4 κυβικὰ μέτρα, τὸ δὲ μῆκος του εἶνε 10 μέτρα καὶ τὸ πλάτος του $8^{\mu},4$. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος του ;

(*Λύσις*. $5^{\mu},1$)

8) Ἡ χωρητικότης κιβωτίου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εἶνε 87,75 κυβ. μέτρα, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶνε 19,50 τετρ. μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. $4^{\mu},50$)

9) Πόσαι πλάκες σάπωνος χωροῦν εἰς κιβώτιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε $1^{\mu},20$ τὸ πλάτος $0^{\mu},50$ καὶ τὸ ὕψος $0^{\mu},70$ ἐχούσης ἑκάστης πλακὸς μῆκος $0^{\mu},07$ πλάτος $0^{\mu},05$ καὶ πάχος $0^{\mu},04$;

Λύσις. Ὅσας φορὰς ὁ ὄγκος μιᾶς τῶν πλακῶν χωρεῖ εἰς τὸν ὄγκον τοῦ κιβωτίου, τόσαι πλάκες χωροῦν.

10) Πόση εἶνε ἡ ἀξία τοίχου ἔχοντος μῆκος 12 πήχεων, πλάτος 0,60 καὶ ὕψος 3,20 τοῦ ὁποίου ὁ κυβικὸς πῆχυς ἀξίζει 8 δραχμάς ;

(*Λύσις*. $184^{\delta\rho},32$)

11) Πόσαι ὀπτόπλινθοι (τοῦβλα) χρειάζονται διὰ νὰ κτίσωμεν τοῖχον ἔχοντα μῆκος 6 μέτρα, πάχος $0^{\mu},40$ καὶ ὕψος 5 μέτρα ; Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἑκάστη ὀπτόπλινθος ἔχει μῆκος $0^{\mu},20$ πλάτος 0,10 καὶ πάχος 0,03 (συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς ἀμμονίας).

(*Λύσις*. 2000)

12) Δεξαμενὴ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 6 μέτρα, τὸ

δὲ βάθος τῆς δεξαμενῆς εἶνε $4^{\mu},20$. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ;

Λύσις. Ὁ ὄγκος ἢ ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς εἶνε 151,20 κυβ. μέτρα ἢ 151200 κυβ. παλάμαι ἢ λίτραι. Ἀλλὰ τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος (καθαροῦ καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4 βαθμῶν) εἶνε $312\frac{1}{2}$ ἢ 312,5 δράμια, ἐπομένως τὸ βάρος 151200 λιτρῶν εἶνε $151200 \times 312,5$ δράμια ἢ 118125 ὀκάδας.

13) Κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε $0^{\mu},23$· τὸ δὲ ὕψος $0^{\mu},34$. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας πετρελαίου χωρεῖ.

Λύσις. Ὁ ὄγκος τοῦ κιβωτίου εἶνε 0,017986 τοῦ κυβ. μέτρου ἢ 17,986 κυβ. παλάμαι ἢ λίτραι· ἐὰν ἦτο πλῆρες ὕδατος, τὸ βάρος του θὰ ἦτο $17,986 \times 312,5$ δράμια, ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος [1] τοῦ πετρελαίου εἶνε 0,891 ἕπεται ὅτι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου πετρελαίου θὰ εἶνε $17,986 \times 312,5 \times 0,891$ δράμια ἤτοι 12 ὀκ. 207 δράμια.

14) Δωματίου τινός, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 6 μέτρα, τὸ πλάτος 5 καὶ τὸ ὕψος 5,80 πρόκειται νὰ χρωματισθῶσιν οἱ μὲν τοῖχοι αὐτοῦ πρὸς 40 λεπτὰ τὸ τετραγ. μέτρον, ἡ δὲ ὀροφὴ πρὸς 2 δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται;

(*Λύσις*. 104,04)

15) Κτῖσται τινὲς ἔκτισαν μίαν οἰκίαν ἔχουσαν μῆκος 8 πήχεις, πλάτος 5 καὶ ὕψος 6, τὸ δὲ πάχος τῶν τοίχων εἶνε 0,70. Ἡ οἰκία αὕτη ἔχει 7 παράθυρα καὶ 2 θύρας· ἕκαστον παράθυρον ἔχει ὕψος 1,20 τοῦ πήχεως καὶ πλάτος 0,80· ἑκάστη δὲ θύρα ἔχει ὕψος 2 πήχεις καὶ πλάτος 1,10. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβωσιν, ἂν συνεφώνησαν πρὸς 10 δραχμὰς τὸν πῆχυν (κυβικόν);

(*Λύσις*. 896,56)

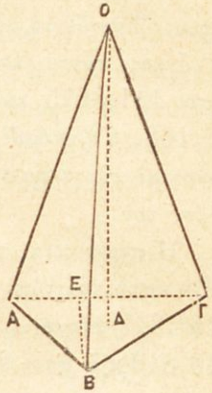
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

166. *Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶνε ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ (σχ.

[1]. Εἰδικὸν βάρος σώματος λέγεται ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ σώματος ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°.

129). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ΑΒΓ, λαμβάνομεν ὡς βάσιν τοῦ τριγώνου μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, καὶ ἔστω τὴν ΑΓ, ὕψος τότε θὰ εἶνε ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΒΕ. Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ βάσις ΑΓ εἶνε 4 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΒΕ εἶνε $2^{\mu},40$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶνε (κατὰ τὸ ἐδάφιον 136) $\frac{4\times 2,40}{2}$ ἤτοι 4,80 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου· ἐὰν δὲ τὸ ὕψος ΟΔ τῆς πυραμίδος ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε 9 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος θὰ εἶνε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\frac{4,80\times 9}{3}$ ἤτοι 14,40 κυβικὰ μέτρα.



Σχ. 129

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

Πυραμίς τις ἔχει βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε $6^{\mu},20$· τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς 10 μέτρα. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτῆς;

(*Λύσις*. 128,13 κ.μ. περίπου)

2) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πυραμίδος εἶνε 26,8 τετραγ. μέτρα, ὁ δὲ ὄγκος αὐτῆς 46,9 κυβικὰ μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος αὐτῆς;

Λύσις. Διαιροῦμεν τὸν ὄγκον διὰ τοῦ τρίτου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ὕψος εἶνε $5^{\mu},25$.

3) Ἡ μεγαλειτέρα πυραμὶς τῆς Αἰγύπτου ἔχει βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε $232^{\mu},75$, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶνε 146 μέτρα. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτῆς;

(*Λύσις*. 2636398 κ. μ. περίπου)

4) Ὁ ὄγκος πυραμίδος τινὸς εἶνε 45 κυβικὰ μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς $4^{\mu},50$. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της;

(*Λύσις*. 30 τ.μ.)

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

167. *Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς εἶνε 3 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς κατὰ τὸν τύπον $\pi \times \alpha^2$ εἶνε $3,1415 \times 3^2$ ἤτοι 28,2735 τοῦ τετραγ. μέτρου. Ἐὰν δὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου ὑποτεθῇ, ὅτι εἶνε 5 μέτρα, ὁ ὄγκος αὐτοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶνε $28,2735 \times 5$ ἤτοι 141,3675 κυβ. μέτρα.

168. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

Ἡ περιφέρεια, παραδείγματος χάριν, τοῦ ἀνωτέρω κυλίνδρου εἶνε κατὰ τὸν τύπον $2 \times \pi \times \alpha$ (ἐδ. 142) $2 \times 3,1415 \times 3$ ἤτοι $18^{\mu},849$ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶνε $18,849 \times 5$ ἤτοι 94,245 τοῦ τετρ. μέτρου.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

1) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς εἶνε 25,20 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 8 μέτρα. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 201,60 κ.μ.)

2) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶνε 10 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 20 ;

(*Λύσις*. 6283 κ. μ.)

3) Στήλη κυλινδρική, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶνε 5 μέτρα, ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεώς της $0^{\mu},80$ πρόκειται νὰ χρωματισθῇ πρὸς 2 δραχμὰς τὸ τετραγ. μέτρον. Πόσον θὰ κοστίσῃ ὁ χρωματισμὸς αὐτῆς ;

(*Λύσις*. $25^{\delta\rho},13$)

4) Πρόκειται νὰ περιτυλίξωμεν ἀγγεῖον κυλινδρικόν, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶνε 0,80 τοῦ μέτρου, ἡ δὲ περιφέρειά του $2^{\mu},50$ μὲ ὕφασμα ἔχον πλάτος 6 ρούπια. Πόσον ὕφασμα χρειαζόμεθα ;

(*Λύσις*. 4 πήχ. 1 ρούπ. περίπου)

5) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ σωλὴν ἐκ λευκοσιδήρου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος νὰ εἶνε 6 μέτρα, ἡ δὲ διάμετρός του 0,40 τοῦ μέτρου. Πόσος λευκοσίδηρος χρειάζεται ;

(*Λύσις*. 7,539 τοῦ τ. μέτρου)

6) Ἀγγεῖον κυλινδρικόν, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶνε 0,80 τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος του 1^{μ},50 ἔχει ἔλαιον μέχρι τοῦ τρίτου τοῦ ὕψους του. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου περιέχει ;

Λύσις. Ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ἐλαίου εἶνε 0,25132 τοῦ κυβ. μέτρου ἢ 251,32 κυβ. παλάμαι ἢ λίτραι· ἐὰν δὲ περιεῖχεν ὕδωρ, τὸ βάρος του θὰ ἦτο 251,32×312,5 δράμια, ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου εἶνε 0,915 ἕπεται ὅτι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐλαίου εἶνε 252,32×312,5×0,915 δράμια ἢ 179 ὀκ. 262 δράμια.

7) Ἐργάται τινὲς ἔκτισαν τὴν καπνοδόχην μηχανουργείου τινὸς ἔχουσαν σχῆμα κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος εἶνε 0^{μ},60 τὸ πάχος τοῦ τοιχώματος 0^{μ},25 καὶ τὸ ὕψος 20 μέτρα. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβωσιν, ἂν συνεφώνησαν πρὸς 40 δραχμὰς τὸ κυβικὸν μέτρον ;

Λύσις. Ὁ ὄγκος τοῦ τοιχώματος εἶνε διαφορὰ δύο κυλίνδρων ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τοῦ μὲν ἑνὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶνε 0^{μ},60, τοῦ δὲ ἄλλου 0,60+0,50 ἢ 1^{μ},10.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ

169. *Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶνε ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶνε 10,50 τετρ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 8 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θὰ εἶνε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\frac{10,50\times 8}{3}$ ἤτοι 28 κυβικὰ μέτρα.

170. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κώνου τινὸς εἶνε 20 μέτρα, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 15, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ θὰ εἶνε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\frac{20\times 15}{2}$ ἤτοι 150 τετρ. μέτρα.

171. *Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται ὑπὸ τοῦ τύπου*

$$\tfrac{1}{3}\times\pi\times\upsilon\ (\mathrm{A}^2+\alpha^2+\mathrm{A}\alpha)$$

ἔνθα π παριστᾷ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, υ τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου, Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ ὕψος κολούρου κώνου εἶνε 5 μέτρα, αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του εἶνε 3 καὶ 2 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{1}{3}\times 3,1415\times 5\times(9+4+6)$ ἤτοι 99,48 κυβ. μέτρα.

172. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιφερειῶν τῶν βάσεών του.*

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ πλευρὰ κολούρου κώνου εἶνε 3 μέτρα, αἱ δὲ περιφέρειαι τῶν βάσεών του εἶνε ἡ μὲν 5 μέτρα, ἡ δὲ 4 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{(5+4)\times 3}{2}$ ἤτοι 30 τετραγ. μέτρα.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

1) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου τινὸς εἶνε $0^{\mu},20$, τὸ δὲ ὕψος του 2 μέτρα. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 0,0837 τοῦ κ.β.)

2) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶνε 6 μέτρα, ἡ δὲ περιφέρεια τῆς βάσεώς του $31^{\mu},4$;

(*Λύσις* 156,45 κ.μ.)

3) Ὁ ὄγκος κώνου τινὸς εἶνε 0,0327 τοῦ κ. μέτρου, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶνε 0,2023 τοῦ τ. μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. $0^{\mu},49$ περίπου)

4) Αἱ δύο περιφέρειαι τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου εἶνε ἡ μὲν μία $6^{\mu},283$, ἡ δὲ ἄλλη $1^{\mu},885$, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε 5 μέτρα. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος του ;

(*Λύσις*. 28,797 τοῦ κ.μ.)

5) Ἡ πλευρὰ κολούρου κώνου εἶνε 4 μέτρα, αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν

βάσεών του εἶνε ἡ μὲν μία 2 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 1 μέτρον. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ;

(*Λύσις*, 37,698 τοῦ τ.μ.)

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

173. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρόν της.*

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας διὰ α, ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς θὰ εἶνε $2\times\pi\times\alpha$, ἡ δὲ διάμετρός της $2\times\alpha$, ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω $2\times\pi\times\alpha\times2\times\alpha$ ἢ $4\times\pi\times\alpha^2$. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας πάσης σφαίρας, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶνε $3^{\mu},5$ τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς θὰ εἶνε $4\times3,1415\times(3,5)^2$ ἤτοι 153,933 τοῦ τετρ. μέτρου.

174. *Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶνε ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα της.*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, τότε ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς θὰ εἶνε $4\times\pi\times\alpha^2$ καὶ ἐπομένως ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶνε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\frac{1}{3}\times4\times\pi\times\alpha^2\times\alpha$ ἢ $\frac{4}{3}\times\pi\times\alpha^3$. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον πάσης σφαίρας, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶνε 2 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶνε $\frac{4}{3}\times3,1415\times2^3$ ἢ $\frac{4}{3}\times3,1415\times8$ ἤτοι 33,509 τοῦ κυβ. μέτρου.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαὶ

1) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶνε $6^{\mu},20$;

(*Λύσις*. 129,759 τοῦ τ.μ.)

2) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἶνε $51^{\mu},496$. Πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ;

(*Λύσις*. $8^{\mu},196$)

3) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἶνε $18^{\mu},849$. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτῆς ;

(*Λύσις*. 113,094 τοῦ κ. μ.)

4) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου τῆς Γῆς εἶνε 40000 χιλιόμετρα. Πόση εἶνε ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς ;

(*Λύσις*. 509 554 000 τετ. χιλιόμ. περίπου)

5) Ἡ ἀκτὶς σιδηρᾶς σφαίρας εἶνε 0,20 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ βάρος αὐτῆς ;

(*Λύσις*. Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶνε 0,033509 τοῦ κυβ. μέτρου ἢ 33,509 τῆς κυβ. παλάμης. Ἐὰν ὁ ὄγκος οὗτος ἦτο ὕδωρ, θὰ εἶχε βάρος $33,509 \times 312,5$ δράμια, ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶνε 7,6 ἕπεται ὅτι τὸ βάρος τῆς σφαίρας εἶνε $33,509 \times 312,5 \times 7,6$ δράμια, ἤτοι 198 ὀκάδες 383 δράμια.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΕΚ ΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΑΥΤΩΝ

175. Ὅταν τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ ὄγκος, δὲν ἔχῃ γνωστὸν γεωμετρικὸν σχῆμα, ὅπως εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ διὰ τῶν γνωστῶν κανόνων, τότε πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν τὸ βάρος τοῦ σώματος, εἰς χιλιόγραμμα ἐκπεφρασμένον, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ σώματος τούτου.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἀγγεῖον πλῆρες πετρελαίου, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶνε 0,891 ζυγίζει 20 χιλιόγραμμα, κενὸν δὲ ζυγίζει δύο χιλιόγραμμα. Πόση εἶνε ἡ χωρητικότης τοῦ ἀγγείου ;

Λύσις. Τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου πετρελαίου εἶνε 18 χιλιόγραμμα· ὅθεν ἡ χωρητικότης τοῦ ἀγγείου εἶνε 18:0,891 ἢ 20,202 τῆς κυβικῆς παλάμης.

ΣΥΛΛΟΓΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ ΤΗΣ ΜΙΞΕΩΣ
ΕΙΣ ΤΑ ΕΜΠΟΡΙΚΑ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

Ἐγκριθεῖσα ἐπὶ πενταετίαν κατὰ τὸν διαγωνισμὸν τοῦ 1901

ΥΠΟ

ΔΙΟΝΥΣ. Ρ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῇ ἐν Ἀθήναις Ἐμπορικῇ Σχολῇ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

ΕΚΔΟΤΗΣ

ΜΙΧΑΗΛ Ι. ΣΑΛΙΒΕΡΟΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΜΙΧΑΗΛ Ι. ΣΑΛΙΒΕΡΟΥ
1901

'Εν 'Αθήναις τῇ 28 Μαΐου 1901.

'Αριθ. { Πρωτ. 9101 / Διεκπ. 8001 }

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τὸ 'Υπουργεῖον τῶν 'Εκκλησιαστικῶν καὶ τῆς Δημοσίας 'Εκπαιδεύσεως

Πρὸς τὸν κ. Δ. Ῥηγόπουλον, καθηγητήν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸν Νόμον ,ΒΤΓ' τῆς 12ης 'Ιουλίου 1895 περὶ διδακτικῶν βιβλίων τῆς Μέσης καὶ δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως καὶ τὸ Β. Διάταγμα τῆς 10ης 'Οκτωβρίου 1895 καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας τῶν κριτῶν τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῶν εἰς τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα εἰσακτέων, γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν γνώμην τῆς ἐπιτροπείας ταύτης, ὅπως τὸ ὑμέτερον σύγγραμμα **Συλλογὴ ἀριθμητικῶν προβλημάτων** τὸ κατὰ τὸν εἰρημένον νόμον ἐγκριθὲν εἰσαχθῇ ἐν τοῖς δημοσίοις, δημοσυντηρήτοις καὶ ἰδιωτικοῖς ἑλληνικοῖς σχολείοις ἐπὶ πέντε σχολικὰ ἔτη ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1901—1902.

'Ο 'Υπουργὸς

Σ. Ε. ΣΤΑΗΣ

Στέφ. Μ. Παρίσης

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἡμετέρων Καταστημάτων.

ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ
ΜΙΧ. Ι. ΣΑΛΙΒΕΡΟΥ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εἰς τὴν παροῦσαν συλλογὴν ἀριθμητικῶν προβλημάτων περιελήφθησαν εἰς 355 ἐδάφια περὶ τὰ 350 προβλήματα. Μεταξὺ τούτων ὑπάρχουσι καί τινα ἀριθμητικὰ ζητήματα χρησιμεύοντα πρὸς ἐπανάληψιν τῶν ἐπὶ τῶν διαφόρων ἀριθμῶν ἐκτελουμένων πράξεων. Ἐπὶ τῶν ζητημάτων δὲ τούτων, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, δὲν σημειοῦνται τὰ ἐξαγόμενα, ὅπως δι᾿ ἐπανειλημμένης ἐργασίας πεισθῇ ἀφ᾿ ἑαυτοῦ ὁ μαθητὴς περὶ τῆς ὀρθότητος τῶν ἐξαγομένων, ἅτινα εὑρίσκει.

Διὰ τῆς παρούσης συλλογῆς προσεπάθησα νὰ στρέψω τὸ πνεῦμα τοῦ μαθητοῦ πρὸς ἐκεῖνα τὰ ζητήματα, ὧν συχνοτάτη χρῆσις γίνεται ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ· τούτου δ᾿ ἕνεκα τὴν συλλογὴν ταύτην ἀποτελοῦσιν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, προβλήματα χρηματιστικῶν καὶ τραπεζιτικῶν ἐργασιῶν καὶ ἐν γένει προβλήματα τοῦ ἐμπορίου, ὅπως ἐξερχόμενος ὁ μαθητὴς εἰς τὴν κοινωνίαν ἔχῃ ἀρκετὰ ἐφόδια πρὸς λύσιν παντὸς ἐν τῷ καθ᾿ ἡμέραν βίῳ ἀπαντῶντος ἀριθμητικοῦ ζητήματος. Πρὸς ἐπιτυχίαν δὲ τοῦ εἰρημένου σκοποῦ καὶ πρὸς εὐκολωτέραν λύσιν πλείστων ὅσων ζητημάτων ἐθεώρησα ἀναγκαιότατον νὰ πραγματευθῶ ἐν παραρτήματι τὸ περὶ τοκαρίθμων καὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων τῆς μίξεως εἰς τὰ ἐμπορικὰ συναλλάγματα.

Τοιαύτη κατὰ γενικωτάτας γραμμὰς ἡ παροῦσα συλλογὴ ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ἥτις εὔχομαι καὶ ἐλπίζω νὰ συντελέσῃ εἰς καταρτισμὸν τῶν μαθητῶν ἱκανῶν πρὸς λύσιν παντὸς ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ ἀπαντῶντος ἀριθμητικοῦ προβλήματος.

Ἔγραφον τῇ 27 Ἰουνίου 1897.

ΔΙΟΝ. Ρ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητὴς τῶν μαθηματικῶν τοῦ Αου
Βαρβακείου γυμνασίου.

ΣΥΛΛΟΓΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς ἀριθμήσεως.

1) Ν' ἀπαγγελθῶσι καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους οἱ ἑξῆς ἀριθμοί :

35,	45607,	57004568,
428,	456700,	257000457,
2576,	1087004,	10570084356.

2) Ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 4357468 ἀπαντήσατε εἰς τὰς ἑξῆς ἐρωτήσεις :

α') πόσας μονάδας περιέχει. (4357468).

β') πόσας δεκάδας καὶ πόσας μονάδας.

(435746 δεκ. καὶ 8 μονάδας).

γ') πόσας ἑκατοντάδας καὶ πόσας μονάδας.

(43574 ἑκ. καὶ 68 μονάδας).

δ') πόσας χιλιάδας, δεκάδας καὶ μονάδας.

(4357 χιλιάδ. 46 δεκάδ. καὶ 8 μονάδας).

ε') πόσας ἑκατοντάδας χιλιάδων, δεκάδας καὶ μονάδας.

(43 ἑκ. χλ. 5746 δεκ. καὶ 8 μονάδας).

ς') πόσας δεκάδας χιλιάδων, πόσας ἑκατοντάδας καὶ πόσας μονάδας.

(435 δεκ. χιλ. 74 ἑκατ. καὶ 68 μονάδας).

3) Εἰς ποίαν τάξιν ἑκατομμυρίων ἀνήκει τὸ τελευταῖον τμῆμα ἀριθμοῦ περιέχοντος δέκα τμήματα ;

(Εἰς τὴν τάξιν τῶν *ὀκτάκις* ἑκατομμυρίων).

4) Ποῖοι ἀριθμοὶ ἔχουσι 357 ἑκατοντάδας καὶ 5 δεκάδας ;
(35750, 35751, 35752,. . . . . 35759)

5) Πόσοι ἀριθμοὶ ἔχουσι 3570 χιλιάδας καὶ 2 ἑκατοντάδας ;
(100 ἀριθμοί).

6) Πόσα τμήματα ἔχει ἀριθμός τις, τοῦ ὁποίου τὸ τελευταῖον τμῆμα πρὸς τἀριστερὰ ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάκις ἑκατομμυρίων ; (12 τμήματα).

Ζητήματα προσθέσεως.

7) Νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ μνήμης τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν :

α′) 8+19+15+39

β′) 45+99+49+38+92

γ′) 248+339+278+450

Παρατήρησις.—Ὅταν ἀριθμός τις λήγῃ εἰς 9, εὐκολυνόμεθα εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης πρόσθεσιν αὐξάνοντες τοῦτον κατὰ μίαν μονάδα, ἂν δὲ λήγῃ εἰς 8, αὐξάνοντες αὐτὸν κατὰ 2, τὰς ὁποίας ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ἐκ τοῦ ἀθροίσματος.

8) Ἄνθρωπός τις ἔδωκεν εἰς τὸν υἱόν του 3500 δραχ., εἰς τὴν κόρην του 4575 δραχ. καὶ εἰς τὴν σύζυγόν του 8010 δραχ. Ζητεῖται πόσα ἔδωκε καὶ εἰς τοὺς τρεῖς ὁμοῦ. (16085 δραχ.).

9) Ἠγόρασέ τις πλοῖον ἀντὶ 60750 δραχ. καὶ μεταπωλῶν αὐτὸ θέλει νὰ κερδήσῃ 12250 δραχ. Ζητεῖται πόσα πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ πλοῖον. (73000 δραχ.).

10) Πωλήσας τις τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 25000 δραχ. ἐζημιώθη 3575 δραχ. Ζητεῖται πόσην ἀξίαν εἶχεν ἡ οἰκία. (28575 δραχ.).

11) Οἰνοπώλης τις ἔχει 4 βαρέλια οἴνου, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον περιέχει 200 ὀκδ. περισσοτέρας τοῦ δευτέρου, τοῦτο δὲ περιέχει 300 ὀκάδ. περισσοτέρας τοῦ τρίτου, τοῦτο δὲ περιέχει 275 ὀκάδας περισσοτέρας τοῦ τετάρτου, τὸ ὁποῖον περιέχει 550 ὀκάδας οἴνου. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας περιέχει ἕκαστον βαρέλιον καὶ πόσας ὀκάδας οἴνου ἔχει ὁ οἰνοπώλης.

(α′ 1325 ὀκ., β′ 1125 ὀκ., γ′ 825 ὀκ., δ′ 550 ὀκ., ὁ δὲ οἰνοπώλης ἔχει 3825 ὀκάδ. οἴνου).

Ζητήματα ἀφαιρέσεως.

12) Νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ μνήμης ἡ διαφορὰ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν :

α'.) 18—9, 20—9, 357—19, 308—49.

β'.) 59—8, 369—15, 4574—469.

Παρατήρησις. Ὅταν ὁ ἀφαιρετέος λήγῃ εἰς 9, εὐκολυνόμεθα εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσιν προσθέτοντες εἰς αὐτὸν μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὴν εὑρεθησομένην διαφοράν. Ὅταν δὲ ὁ μειωτέος λήγῃ εἰς 9, τότε προσθέτομεν μίαν μονάδα εἰς αὐτόν, τὴν ὁποίαν ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἐκ τῆς διαφορᾶς.

13) Πόσον ὑπερτερεῖ ὁ 30007 τὸν ἀριθμὸν 2008 ; (27999).

14) Ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸ 30084 δίδει τὸν ἀριθμὸν 30910 ; (ὁ 826).

15) Δύο ἐργάται ἔλαβον ὁμοῦ 3057 δρχ., ὁ εἷς δὲ τούτων ἔλαβε 1568 δρχ. Ζητεῖται πόσας ἔλαβεν ὁ ἕτερος. (1489 δρχ.).

16) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη τῷ 1821 καὶ ἀπέθανε τῷ 1896. Ζητεῖται πόσων ἐτῶν ἀπέθανε. (75 ἐτῶν).

17) Πόσας δραχμὰς πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἐκ 2050 δραχ. διὰ νὰ μείνουν 1568 δραχμαί ; (482 δρχ.)

18) Οἰνοπώλης τις ἔχει τέσσαρα βαρέλια οἴνου, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον περιέχει 200 ὀκάδας ὀλιγωτέρας τοῦ δευτέρου, τοῦτο δὲ περιέχει 300 ὀκδ. ὀλιγωτέρας τοῦ τρίτου, τοῦτο δὲ περιέχει 275 ὀκδ. ὀλιγωτέρας τοῦ τετάρτου, τὸ ὁποῖον περιέχει 1250 ὀκάδας οἴνου. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας οἴνου περιέχει ἕκαστον βαρέλιον.

(α' 475 ὀκ., β' 675 ὀκ., γ' 975 ὀκ. καὶ τὸ δ' 1250 ὀκ.).

Ζητήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ὁμοῦ.

19) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:

α') 4+5—8—7+4—3+6.

β') 450—229+300—408.

20) Οἰκία τις ἐνῳκιάσθη κατὰ τὸ 1890, 1891, 1892, 1893, ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὸ 1891 ἐνῳκιάσθη 250 δραχ. περισσοτέρας τοῦ 1890, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐνῳκιάσθη 420 δρχ. ὀλιγωτέρας τοῦ 1892, κατὰ τὸ

ὁποῖον ἐνοικιάσθη 100 δρχ. ὀλιγωτέρας τοῦ 1893, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐνοικιάσθη 2400 δραχμάς. Ζητεῖται πόσον ἐνοικιάσθη καθ' ἕκαστον ἔτος καὶ πόσον κατὰ τὰ τέσσαρα ἔτη.

(Τῷ 1890 ἐνοικιάσθη 1880 δρχ. Τῷ 1891 2130 δρχ. Τῷ 1892 2300 δρχ. καὶ τῷ 1893 2400 δρχ., ἐν ὅλῳ δὲ 8710 δρχ.).

21) Πλοίαρχός τις ἔχει τρία πλοῖα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶχε 1000 κοιλῶν χωρητικότητα ὀλιγώτερον τοῦ δευτέρου, τὸ ὁποῖον εἶχε 2500 κοιλῶν χωρητικότητα ὀλιγωτέραν τοῦ τρίτου, τὸ ὁποῖον εἶχε 16000 κοιλῶν χωρητικότητα. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης ἑκάστου πλοίου καὶ ἡ χωρητικότης ὅλων ὁμοῦ τῶν πλοίων.

(α' 12500 κοιλ., β' 13500 κοιλ. γ' 16000 κοιλ. Τὰ δὲ τρία ὁμοῦ 42000 κοιλῶν).

22) Πλοίαρχός τις ὤφειλεν εἰς τὸν ναύκληρόν του 125 δραχ., εἰς ἕνα δὲ τῶν ναυτῶν του 70 δραχ. καὶ εἰς ἕτερον 52 δραχ. Ἔδωκε δὲ εἰς τὸν ναύκληρον ἓν χαρτονόμισμα τῶν 500 δραχ., ὅπως πληρώσῃ τοὺς ναύτας καὶ κρατήσῃ καὶ οὗτος ὅσα δικαιοῦται νὰ λάβῃ. Ζητεῖται πόσα θὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸν πλοίαρχον. (253 δραχμάς).

23) Εἰς τὴν σπονδυλικὴν στήλην τοῦ ἀνθρώπου οἱ *θωρακικοὶ* σπόνδυλοι εἶναι κατὰ 7 περισσότεροι τῶν *ὀσφυϊκῶν*, οὗτοι δὲ εἶναι ἰσάριθμοι μὲ τοὺς τοῦ ἱεροῦ ὀστοῦ, οἵτινες εἶναι κατὰ 2 ὀλιγώτεροι τῶν *τραχηλικῶν* καὶ κατὰ 1 περισσότεροι τῶν *κοκκυγικῶν*, οἵτινες εἶναι 4. Ζητεῖται πόσοι εἶναι οἱ *τραχηλικοί*, οἱ *θωρακικοί*, οἱ *ὀσφυϊκοί*, οἱ τοῦ *ἱεροῦ ὀστοῦ* καὶ οἱ τοῦ *κόκκυγος* σπόνδυλοι καὶ πόσοι ὅλοι ὁμοῦ.

(κόκκυγος 4, ὀσφυϊκοὶ 5, ἱεροῦ ὀστοῦ 5, τραχηλικοὶ 7, θωρακικοὶ 12. Ἐν ὅλῳ 33).

Ζητήματα πολλαπλασιασμοῦ.

24) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀπὸ μνήμης τὰ γινόμενα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:

α'.) 15×9, 9×42, 20×9, 23×9
9×65, 50×9, 145×9.

25) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ πολλαπλασιασμοί:

25000×2000, 3005×80008
45000×3100, 51457×4500001

26) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμῶν :

$2\times6\times8\times10\times11$

$3\times5\times7\times11\times100$

$20\times30\times40\times50\times100\times400\times800$

27) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 5 δραχ. πόσον ἀξίζουν οἱ 15 πήχεις ; (75 δραχ.).

28) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 15 μῆλα, μὲ 8 δραχ. πόσα μῆλα ἀγοράζομεν ; (120).

29) Πόσον ἀξίζουν 24 ὀκάδ. ἐλαίου, ὅταν ἡ ὀκᾶ ἀξίζῃ 2 δραχ.; (48 δραχ.).

Σημείωσις Νὰ μορφώσῃ ἕκαστος τῶν μαθητῶν καὶ νὰ λύσῃ ἀνὰ τρία προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος πράγματός τινος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ ἰδίου πράγματος.

30) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὀκταπλάσιον τῶν 45 δραχμῶν. (360 δραχ.).

31) Νὰ εὑρεθῇ τὸ διπλάσιον τοῦ τριπλασίου τῶν 55 δραχμῶν, (330 δραχ.).

32) Πόσον εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ τριπλασίου τοῦ διπλασίου τῶν 60 δραχμῶν ; (1800 δραχ.).

Σημ. Νὰ μορφώσῃ καὶ νὰ λύσῃ ἕκαστος τῶν μαθητῶν ἀνὰ τρία προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἑνὸς ἀριθμοῦ.

33) Βιβλίον τι ἔχει 30 σελίδας, ἑκάστη σελὶς ἔχει 40 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 50 γράμματα. Ζητεῖται πόσα γράμματα ἔχει τὸ βιβλίον. (60000 γράμ.)

34) Ἓν οἰκοδόμημα περιλαμβάνει 14 κατοικίας, ἑκάστη κατοικία 3 πατώματα, ἕκαστον πάτωμα 4 δωμάτια καὶ ἕκαστον δωμάτιον 4 καθίσματα. Ζητεῖται πόσα δωμάτια ἔχει ὅλον τὸ οἰκοδόμημα καὶ πόσα καθίσματα. (168 δωμάτια καὶ 672 καθίσματα).

Ζητήματα διαιρέσεως.

35) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀπὸ μνήμης τὰ τέλεια καὶ ἀτελῆ πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων.

12:4	45:6	48:6
9:3	54:8	50:7
15:5	65:6	43:8
27:3	56:9	54:9
81:9	69:7	48:5

36) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀπὸ μνήμης τὰ *πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα* τῶν ἑξῆς διαιρέσεων :

4500:10	45786:1000
4870:100	4800:400
5000:1000	7840:200

37) Οἱ 15 πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 75 δραχμάς, πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ; (5 δραχ.)

38) Εἷς σάκκος καφὲ περιέχων 55 ὀκ. ἠγοράσθη ἀντὶ 275 δραχμῶν· πόσον ἠγοράσθη ἡ ὀκᾶ ; (5 δραχ.)

39) Οἱ 25 πήχεις δαντέλλας τιμῶνται 5 δραχ., πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν ; (5 πήχεις)

40) Πόσον τιμᾶται τὸ πορτοκάλλιον, ὅταν διὰ 45 πορτοκάλλια δίδωμεν 270 λεπτά ; (6 λεπτά)

Σημείωσις.—Νὰ μορφώσῃ καὶ νὰ λύσῃ ἕκαστος τῶν μαθητῶν ἀνὰ τρία προβλήματα διαιρέσεως, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ ὁσωνδήποτε μονάδων πράγματός τινος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος τοῦ ἰδίου πράγματος.

41) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ πενταπλάσιον εἶναι 75 ; (ὁ 15)

42) Δι' ἐνδυμασίαν τινὰ ἐδαπάνησέ τις 90 δραχμάς, αὗται δὲ εἶναι τὸ δεκαπενταπλάσιον τῶν ὅσα ἐδανείσθη διὰ νὰ ἀγοράσῃ τὴν ἐνδυμασίαν. Ζητεῖται πόσα ἐδανείσθη. (6 δραχ.)

43) Ἐρωτηθείς τις περὶ τῆς περιουσίας του ἀπεκρίθη, ὅτι τὸ ἑπταπλάσιον αὐτῆς εἶναι 49000 δραχ. Ζητεῖται πόσην περιουσίαν εἶχεν. (7000 δραχ.)

Σημείωσις.—Νὰ μορφώσῃ καὶ νὰ λύσῃ ἕκαστος τῶν μαθητῶν ἀνὰ τρία προβλήματα διαιρέσεως, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κ.τ.λ. ἀγνώστου ἀριθμοῦ καὶ ζητεῖται ποῖος εἶναι ὁ ἄγνωστος οὗτος ἀριθμός.

44) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 5 δραχ., μὲ 150 δραχμὰς πόσους πήχεις ἀγοράζομεν ; (30 πήχεις)

45) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 4 πήχεις πανίου, οἱ 48 πήχεις πανίου τῆς αὐτῆς ποιότητος πόσας δραχμὰς ἀξίζουν ; (12 δραχ.)

46) Πόσα εἰκοσόφραγκα δυνάμεθα ν' ἀγοράσωμεν μὲ 250 δραχ., ὅταν τὸ εἰκοσόφραγκον τιμᾶται 25 δραχμάς ; (10 εἰκ.)

47) Πόσους στατῆρας ἀνθράκων ἀγοράζομεν μὲ 96 δραχ., ὅταν ὁ στατὴρ τιμᾶται 6 δραχμάς ; (16 στατ.)

Σημείωσις.— Νὰ μορφώσῃ καὶ νὰ λύσῃ ἕκαστος τῶν μαθητῶν ἀνὰ τρία προβλήματα διαιρέσεως, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος πράγματός τινος καὶ ζητεῖται πόσας τοιαύτας μονάδας παίρνομεν μὲ ἄλλην δοθεῖσαν τιμήν.

48) Πόσας φορὰς εἶναι μεγαλήτερος ὁ ἀριθμὸς 108 τοῦ 4 ; (27 φοράς)

49) Ποῖον πολλαπλάσιον τοῦ 12 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 60 ; (τὸ 5πλάσιον)

Σημείωσις.—Νὰ μορφώσῃ καὶ νὰ λύσῃ ἕκαστος τῶν μαθητῶν ἀνὰ τρία προβλήματα διαιρέσεως, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ συγκρίνωμεν ἀριθμόν τινα πρὸς ἄλλον.

Ζητήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ὁμοῦ.

\+ 50) Οἱ 25 πήχ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 150 δραχ., πόσον τιμῶνται οἱ 15 πήχεις τοῦ ἰδίου ὑφάσματος ; (90 δραχ.).

\+ 51) Αἱ 150 ὀκάδες ἀχύρου τιμῶνται 25 δραχμάς, αἱ 90 ὀκάδ. πόσον τιμῶνται ; (15 δραχ.).

\+ 52) Πόσας ὀκάδας καφὲ ἀγοράζομεν μὲ 72 δραχμάς, ὅταν μὲ 216 δραχμὰς ἠγοράσαμεν 36 ὀκάδας ; (12 ὀκάδας)

\+ 53) Τὸ τριπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι 84, πόσον εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ; (140)

\+ 54) Τὸ ἐννεαπλάσιον τῆς περιουσίας ἀνθρώπου τινὸς εἶναι 54000 δρχ., πόσον εἶναι τὸ ἑπταπλάσιον αὐτῆς ; (42000 δραχ.)

\+ 55) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον τοῦ τριπλασίου ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 96 ; (ὁ 16)

\+ 56) Ἔμπορός τις ἐκέρδισεν ἐξ ἐπιχειρήσεώς τινος 150000 δραχ., αὗται δὲ εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ κεφαλαίου του, κατέθηκε δ' ἐκ τοῦ κέρδους εἰς τὴν Τράπεζαν ὡς προῖκα τῆς κόρης του τὸ διπλάσιον τοῦ κεφαλαίου του. Ζητεῖται πόσα κατέθηκε. (60000 δραχ.)

Σημείωσις.—Νὰ μορφώσῃ καὶ νὰ λύσῃ ἕκαστος τῶν μαθητῶν ἀνὰ τρία ἐκ τῶν συνθέτων τούτων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα λύονται διὰ διαιρέσεως ἅμα καὶ πολλαπλασιασμοῦ.

Ζητήματα ἐπὶ τῶν κλασμάτων.

57) Ἀπαντήσατε ἐπὶ τῶν κλασμάτων

$\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{15}{23}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{23}{23}$, $\frac{8}{13}$

εἰς τὰς ἑξῆς ἐρωτήσεις (ἰδὲ ἀριθ. Ῥηγ. § 105—§ 116).

α΄) πόσας κλασματικὰς μονάδας ἔχει ἕκαστον.

(3, 2, 5, 6, 4, 15, 5, 4, 9, 15, 23, 8).

β΄) Ἀπὸ ποίαν κλασματικὴν μονάδα γίνεται ἕκαστον ;

γ΄) Πῶς ἄρχονται κατὰ σειρὰν μεγέθους αἱ κλασματικαὶ αὐτῶν μονάδες ;

δ΄) Ποῖα κλάσματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων καὶ πόσας ἕκαστον ;

ε΄) Ποῖα γίνονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κλασματικὴν μονάδα καὶ ἀπὸ ποίαν ;

ϛ΄) Ποῖα γίνονται ἀπὸ διαφόρους κλασματικὰς μονάδας καὶ ἀπὸ ποίας ;

ζ΄) Ποῖα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα ;

η΄) Ποῖα εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ κατὰ πόσας κλασματικὰς μονάδας ;

θ΄) Ποῖα εἶναι μεγαλήτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ κατὰ πόσας κλασματικὰς μονάδας ;

ι΄) Ποῖα ἁπλοποιοῦνται καὶ ποῖα εἶναι ἀνάγωγα ;

58) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 2, 4, 7, 12 καὶ 20 εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα γινόμενα ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{6}$, ὁ δὲ 5 εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα γινόμενα ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, καὶ $\frac{1}{15}$. $\left(\frac{12}{6}, \frac{24}{6}\right.$ κτλ. $\left.\frac{10}{2}, \frac{15}{3}\right.$ κτλ.)

59) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τέλεια πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων :

1:9	8: 3	304:15	28: 5
2:7	15: 4	107:25	1002:23
5:2	25:12	3584: 7	578:45

Ζητήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

60) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις :

α΄) $\frac{2}{3}+4$, $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{2}{6}$, $\frac{2}{5}+2\frac{1}{4}+4\frac{5}{6}$.

β') $3-\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$, $3\frac{2}{5}-\frac{5}{6}$, $3\frac{2}{3}-1\frac{4}{5}$

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{2}{5}.$$

61) Ἐργοστάσιόν τι ἐπρομηθεύθη 10000 ὀκ. γαιανθράκων καὶ τὴν μὲν πρώτην ἑβδομάδα ἔκαυσε τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτῶν, τὴν δὲ δευτέραν τὸ $\frac{1}{5}$, τὴν δὲ τρίτην τὰ $\frac{2}{15}$ καὶ τὴν τετάρτην τὰ $\frac{3}{10}$. Ζητεῖται πόσον μέρος τῶν γαιανθράκων ἔκαυσε τὸ ἐργοστάσιον κατὰ τὰς τέσσαρας ἑβδομάδας. (Τὰ $\frac{24}{30}$)

62) Ποῖον μέρος τῆς μισθοδοσίας ὑπαλλήλου τινὸς εἶναι αἱ 70 δραχμαί, ὅταν αὗται ἰσῶνται πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς μισθοδοσίας του;

("Ολη ἡ μισθοδοσία του καὶ ἀκόμη τά $\frac{17}{60}$ αὐτῆς)

63) Ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν ἀριθμὸν $\frac{2}{3}$ δίδει τὸν ἀριθμὸν $2\frac{5}{6}$. (ὁ $2\frac{1}{6}$)

64) Ἐὰν τὰ $\frac{3}{4}$ τεμαχίου τινὸς ὑφάσματος αὐξηθῶσι κατὰ 4 πήχεις, γίνονται ἴσα πρὸς τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἰδίου τεμαχίου ὑφάσματος. Ζητεῖται ποῖον μέρος τοῦ ὑφάσματος εἶναι οἱ 4 πήχεις. (Τὰ $\frac{1}{12}$)

65) Ὑφάντριά τις θέλουσα νὰ ὑφάνῃ 50 πήχεις πανίου ὑφαίνει τὴν πρώτην ἡμέραν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ, τὴν δευτέραν τὰ $\frac{2}{9}$ καὶ τὴν τρίτην τὸ $\frac{1}{3}$. Ζητεῖται ποῖον μέρος τοῦ ὑφάσματος μένει πρὸς ὕφανσιν.

(Τὰ $\frac{2}{45}$ τῶν 50 πήχεων)

66) Τὸ $\frac{1}{3}$ ἀριθμοῦ τινος αὐξηθὲν κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ὑπερβαίνει αὐτὸν κατὰ 10. Ζητεῖται ποῖον μέρος τοῦ ἀγνώστου ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 10. (Τὰ $\frac{17}{30}$ τοῦ ἀγνώστου)

67) Ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{5}$ δίδει τὸν ἀριθμὸν 5 ; (Ὁ ἀριθμὸς $3\frac{9}{20}$)

68) Ποῖος ἀριθμὸς ἀφαιρούμενος ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{6}$ δίδει τὸν $\frac{2}{3}$; (ὁ ἀριθμὸς $\frac{11}{12}$)

Ζητήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

69) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις·

$$\frac{3}{4}\times 2,\quad \frac{4}{5}\times\frac{5}{6},\quad 3\frac{4}{5}\times 2\frac{1}{3}$$

$$2\frac{2}{3}\times 3,\quad 2\frac{3}{4}\times\frac{2}{3},\quad \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}$$

70) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις.

$$5:9\qquad 2:\frac{3}{4}\qquad 2:2\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{5}:2\qquad \frac{3}{4}:\frac{4}{5}\qquad \frac{3}{4}:2\frac{4}{5}$$

$$3\frac{5}{6}:6\qquad 3\frac{2}{3}:\frac{5}{6}\qquad 3\frac{4}{5}:2\frac{2}{5}$$

71) Πόσον ἀγοράζομεν ἔκ τινος ὑφάσματος μὲ $3\frac{4}{5}$ δραχ., ὅταν μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζωμεν 3 πήχεις ; (11 πηχ. 3 ῥουπ. $\frac{1}{5}$)

72) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται $6\frac{1}{2}$ δραχμάς, πόσον τιμῶνται αἱ $150\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς. (980 δραχ. καὶ 20 λεπτ.)

73) Πόσον ἀξίζουν αἱ 15 πήχεις ὑφάσματός τινος, ὅταν ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζῃ $2\frac{3}{4}$ δραχ. ; (41 δραχ. καὶ 25 λεπτ.)

74) Ἡ μία ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς πόσα δράμια ἔχουσι ; (300 δράμ.)

75) Πόσα ῥούπια κάμνουν τὰ $\frac{15}{24}$ τοῦ πήχεως, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ πῆχυς ἔχει 8 ῥούπια ; (5 ῥούπια)

76) Πόσον εἶναι τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $150\frac{75}{100}$ δραχ. ;

(414 δραχμαὶ 56 λεπτὰ $\frac{1}{4}$)

77) Πόσα εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{3}{4}$; (εἶναι $\frac{1}{2}$)

78) Πόσον εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{4}$ τῶν 240 δραχμῶν ;

(10 δραχμαὶ)

79) Πόσον ἐργάζεταί τις τὴν ἡμέραν, ὅταν ἐργάζηται τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{1}{2}$ τῶν 24 ὡρῶν ; (8 ὥρας)

80) Αἱ $2\frac{3}{8}$ πηχ. ἀξίζουν $\frac{3}{4}$ δραχ., πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ;

(31 λεπτ. $\frac{11}{19}$)

81) Μὲ 5 δραχ. $\frac{2}{5}$ ἀγοράζομεν 15 ὀκάδας πράγματός τινος, ἡ μία ὀκᾶ πόσον ἀξίζει ; (36 λεπτά)

82) Τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 90, ποῖος εἶναι ὅλος ὁ ἀριθμός ;

(ὁ 120)

83) Ἐὰν τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ ποσοῦ τινος δραχμῶν εἶναι 140, πόσον εἶναι τὸ ποσὸν τοῦτο τῶν δραχμῶν ; (50 δραχ.)

84) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι $\frac{1}{7}$; (ὁ $\frac{3}{7}$)

85) Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τῶν ὅσα ἔδωκέ τις εἰς πτωχήν τινα οἰκογένειαν εἶναι 10 δραχμαί, πόσα ἔδωκεν εἰς τὴν πτωχὴν οἰκογένειαν ; (25 δραχ.)

86) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 5 ὀκάδας πράγματός τινος, αἱ $25\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς τοῦ ἰδίου πράγματος πόσον τιμῶνται ;

(5 δραχ. καὶ 15 λεπτ.).

87) Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως, ὅταν οἱ 2 πήχεις ἀξίζουν ἓν τάλληρον ; (1 δραχ. καὶ 56 λεπτ. $\frac{1}{4}$)

88) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται $5 \frac{1}{2}$ δραχ., πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 150 δραχ. $\frac{2}{5}$; $\left(27 \text{ ὀκ. καὶ } \frac{19}{55} \text{ ὀκ.}\right)$

89) Πόσας ὀκάδας κάμνουν 1150 δράμια, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια; $\left(2 \text{ ὀκ.} \frac{7}{8}\right)$

90) Πόσας πήχεις κάμνουν τὰ 37 ῥούπια; $\left(4 \text{ πηχ.} \frac{5}{8}\right)$

91) Ποῖον μέρος τῶν 100 λεπτῶν (ἤτοι τῆς δραχμῆς) εἶναι τὰ 35 λεπτά; $\left(\text{τὰ } \frac{35}{100}\right)$

92) Ποῖον μέρος τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι ὁ $\frac{3}{4}$; $\left(\text{τὰ } \frac{9}{8}\right)$

93) Πλοῖόν τι ἔχει χωρητικότητα 450 κοιλῶν, ἕτερον δὲ πλοῖον ἔχει χωρητικότητα 1520 κοιλῶν. Ζητεῖται ποῖον μέρος τῆς χωρητικότητος τοῦ δευτέρου πλοίου εἶναι τὸ πρῶτον; $\left(\text{τὰ } \frac{45}{152}\right)$

94) Ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς εἶναι 6367000 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος τῆς ἀτμοσφαίρας 60000 μέτρα. Ζητεῖται ποῖον μέρος τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς εἶναι τὸ ὕψος τῆς ἀτμοσφαίρας.

$$\left(\text{τὰ } \frac{60}{6367}, \text{ἤτοι τὸ } \frac{1}{106} \text{ περίπου}\right)$$

95) Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν 30 δραχμῶν ποῖον μέρος εἶναι τῶν 45 δραχμῶν; $\left(\text{τὸ } \frac{1}{3}\right)$

96) Οἱ 2 πηχ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δραχ., οἱ 15 πήχεις τοῦ ἰδίου ὑφάσματος πόσον τιμῶνται; $\left(5\frac{5}{8} \text{ δρχ.}\right)$

97) *Παρατήρησις*. Τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ παρόμοια λύονται ἀναλυόμενα εἰς δύο ἁπλούστερα προβλήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶναι πάντοτε διαιρέσεως (μερισμοῦ), τὸ δὲ δεύτερον πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως (μετρήσεως).

Καὶ δὴ εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τὸ *πρῶτον* εἶναι τὸ ἑξῆς:

Ἐπειδὴ οἱ 2 πήχ. τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δραχμῆς, ὁ εἷς πῆχυς τιμᾶται $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$ δραχμῆς.

Τὸ δὲ δεύτερον πρόβλημα εἶναι τὸ ἑξῆς :

Ἐπειδὴ ὁ εἷς πῆχυς τιμᾶται $\frac{3}{8}$ δραχ., οἱ 15 πήχεις τιμῶνται $\frac{3}{8}\times15$, ἤτοι $\frac{45}{8}$ δραχ.$=5\frac{5}{8}$ δραχμῆς.

ἢ καὶ ἄλλως

Τὸ πρῶτον πρόβλημα εἶναι τὸ ἑξῆς :

Ἐπειδὴ οἱ 2 πήχ. ἀξίζουν $\frac{3}{4}$ δραχ., μὲ μίαν δραχ. ἀγοράζομεν $2:\frac{3}{4}$, ἤτοι $2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ πήχεως.

Τὸ δὲ δεύτερον πρόβλημα εἶναι τὸ ἑξῆς :

Ἐπειδὴ μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν $\frac{8}{3}$ τοῦ πήχεως, οἱ 15 πήχεις ἀξίζουν $15:\frac{8}{3}=15\times\frac{3}{8}=\frac{45}{8}$ δρ.$=5\frac{5}{8}$ δραχ.

Καὶ οὕτω τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἐλύθη κατ' ἀρχὰς διὰ διαιρέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἔπειτα δὲ διὰ δύο διαδοχικῶν διαιρέσεων.

98) Μὲ $15\frac{2}{5}$ δραχ. ἀγοράζομεν 25 ὀκάδας πράγματός τινος, αἱ $4\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς πόσον τιμῶνται; $\left(2 \text{ δραχ. } 84 \text{ λεπτ. } \frac{9}{10}\right)$

99) Αἱ 15 ὀκάδες ζακχάρεως τιμῶνται 40 δραχμάς, μὲ 50 δραχμὰς πόσας ὀκάδας ζακχάρεως ἀγοράζομεν ; (18 ὀκ. καὶ 300 δράμ.)

100) Τὰ $\frac{2}{3}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 150 δραχμαί, πόσα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ; (168 δραχ. καὶ 75 λεπτ.)

101) Τὸ διπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι $\frac{4}{5}$, πόσον εἶναι τὸ τριπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ; $\left(1\frac{1}{2}\right)$

102) Τὸ $\frac{1}{3}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πόσον εἶναι ; $\left(\frac{3}{10}\right)$

103) Σφαῖρα ἐλαστικὴ πεσοῦσα ἀνεπήδησε τρίς, εἰς ἑκάστην δὲ ἀναπήδησιν ἔφθανεν εἰς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ ἔπιπτε, κατὰ δὲ τὴν

τρίτην ἀναπήδησιν ἀνῆλθεν εἰς ὕψος 2 μέτρων. Ζητεῖται τὸ ὕψος, ἐξ οὗ ἀρχικῶς ἔπεσεν ἡ σφαῖρα. $\left(31 \text{ μέτρα καὶ } \frac{1}{4} \text{ μέτρ.}\right)$

Σημείωσις.—Ἐξ ὅλων τῶν εἰδῶν τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς διαιρέσεως, προσέτι δὲ καὶ ἐκ τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων διὰ διαιρέσεως ἅμα καὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἅτινα λύονται καὶ διὰ δύο διαδοχικῶν διαιρέσεων νὰ ὑποχρεωθῇ ἕκαστος τῶν μαθητῶν νὰ μορφώσῃ καὶ νὰ λύσῃ ἀνὰ τρία προβλήματα.

Ζητήματα ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

104) Ν' ἀπαγγελθῶσι καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους οἱ ἐξῆς δεκαδικοὶ ἀριθμοί :

1,5	4,0894	25,20008
3,05	0,00587	15,00056
45,078	4,123456	357,4350082

105) Ἐπὶ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 45,7048 ἀπαντήσατε εἰς τὰς ἐξῆς ἐρωτήσεις :

α') Πόσα περιέχει *δεκάκις χιλιοστὰ* ἐν συνόλῳ.
(457048 δεκάκις χιλιοστὰ)

β') Πόσα περιέχει χιλιοστὰ ἐν συνόλῳ $\left(45704 \frac{8}{10} \text{ χιλ.}\right)$

γ') » » ἑκατοστὰ » » $\left(4570 \frac{48}{100} \text{ ἑκ.}\right)$

δ') » » δέκατα » » $\left(475 \frac{48}{100} \text{ δεκ.}\right)$

ε') Πόσα δέκατα καὶ δεκάκις χιλιοστά.
(457 δεκ. καὶ 48 δεκ. χιλ,)

ς') Πόσα ἑκατοστά, χιλιοστὰ καὶ δεκάκις χιλιοστά.
(4570 ἑκ. 4 χιλ. καὶ 8 δεκ. χιλ.)

ζ') Πόσα ἑκατομμυριοστά. (45704800 ἑκατομ.)

106) Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 250,34007 *τόννος βάρους* νὰ τραπῇ δι' ἀπαγγελίας.

α') Εἰς τόννους $\left(250 \frac{34007}{100000} \text{ τόν.}\right)$

β') Εἰς χιλιόγραμμα. $\left(250340 \frac{7}{100} \text{ τοῦ χιλ.}\right)$

γ΄) Εἰς γραμμάρια (250340070 γραμ.).

107) Πλοῖόν τι εἶναι 2500 τόννων χωρητικότητος. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ δι' ἀπαγγελίας πόσων κοιλῶν εἶναι.

(2500 τόν.=2500,0 τόν., ἤτοι 25000 κοιλά).

108) Ἔχει τις 25,357 τόννους ἐλαίου. Ζητεῖται πόσας λίτρας ἔχει. (25357 λίτρας).

Ζητήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

109) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις :

$$2,5+35,007+0,0008+356,12345$$

$$5-2,205 \qquad 1,5-0,5758 \qquad 1-0,340006.$$

110) Οἰκογένειά τις ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων ἀτόμων, τούτων δὲ τὸ πρῶτον κερδίζει τὴν ἑβδομάδα 25,45 δραχ., τὸ δὲ δεύτερον 18,50 δραχ., τὸ δὲ τρίτον 60 δραχ. καὶ τὸ τέταρτον 40,25 δραχ. Ζητεῖται πόσον κερδίζουσιν ὅλοι ὁμοῦ τὴν ἑβδομάδα. (144,20 δραχ.).

111) Κύριός τις εἰσελθὼν εἰς κατάστημά τι ἠγόρασεν ἕνα πῖλον 15,50 δραχ., ἕνα λαιμοδέτην 5,65 δραχ. καὶ μίαν δωδεκάδα φωκὸλ ἀντὶ 12 δραχ. Ζητεῖται πόσα ἐν ὅλῳ ἐδαπάνησεν. (33,15 δραχ.).

112) Ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν 0,156 δίδει τὸν ἀριθμὸν 15; (14,844)

113) Κατὰ πόσον ὑπερτερεῖ ὁ 8 τὸν ἀριθμὸν 7,523; (κατὰ 0,477).

114) Ὅταν ὁ μειωτέος εἶναι 1,5, ἡ δὲ διαφορὰ 0,6087, ποῖος εἶναι ὁ ἀφαιρετέος ; (ὁ 8,8913)

115) Οἰνοπώλης τις ἔχει τρία βαρέλια πλήρη οἴνου, ἐξ ὧν τὸ ἓν ζυγίζει 150,15 χιλιόγραμμα, τὸ ἕτερον 200 χιλιόγραμμα καὶ τὸ τρίτον 350,150 χιλιόγραμμα. Ζητεῖται πόσον καθαρὸν οἶνον περιέχουσιν ὅλα ὁμοῦ τὰ βαρέλια, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ ἓν βαρέλιον κενὸν ζυγίζει 20 χιλιόγραμμα, τὸ ἕτερον 25,25 χιλιόγραμ. καὶ τὸ τρίτον 30,15 χιλιόγραμμα. (624,900 χιλιόγραμ.)

116) Δι' ἑνὸς χαρτονομίσματος τῶν 100 δραχμῶν πρόκειται νὰ πληρωθῶσι τρεῖς ἐργάται, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς θὰ λάβῃ 15,25 δραχ., ὁ δὲ ἕτερος 45 δραχμὰς καὶ ὁ τρίτος 35,70 δραχ. Ζητεῖται πόσα θὰ ἐπιστραφῶσιν ἐκ τῶν 100 δραχμῶν. (4,05 δρχ.)

Ζητήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

117) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις:

$1,5 \times 1000$	$0,008 : \frac{5}{4}$	$25 : 1,5$
$2,5 \times \frac{4}{5}$	$1,235 : 16$	$3,05 : 2,5$
$0,005 \times 0,0009$	$25,008 : 4$	$\frac{4}{5} : 2,5$

118) Ὑφάντριά τις πληρώνεται καθ' ἑκάστην 3,25 δραχ. πόσα θὰ λάβῃ διὰ 18 ἡμέρας; (58,50 δραχ., ἤτοι 58 δραχ. 50 λεπτ.).

119) Ὁ τόννος ἀνθράκων τιμᾶται 52,75 δραχ., πόσον τιμῶνται οἱ 20,15 τόννοι ; $\left(1062,91\frac{1}{4}\right.$ δρχ., ἤτοι 1062δρχ. 91 λεπ.$\left.\frac{1}{4}\right)$

120) Πόσα εἶναι τὰ 0,25 τῶν 18,75 δραχμῶν ;

$\left(4,68\frac{3}{4}\right.$ δραχ., ἤτοι 4 δραχ. 68 λεπ.$\left.\frac{3}{4}\right)$

121) Πόσα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 175,75 δραχμῶν ; (131,81...δρχ.).

122) Αἱ 15 ὀκάδες τοῦ καφὲ ἠγοράσθησαν ἀντὶ 75,75 δραχ. Ζητεῖται πόσον ἠγοράσθη ἡ ὀκᾶ. (5,05 δρχ., ἤτοι 5 δρ. 5 λεπ.).

123) Αἱ 15 ὀκάδες τοῦ καφὲ ἠγοράσθησαν ἀντὶ 75,75 δραχ. Ζητεῖται πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν ; $\left(\frac{20}{101}\right.$ ὀκ.$\left.\right)$

124) Μὲ 150 δραχμὰς ἠγοράσαμεν 80 ὀκάδας ζακχάρεως. Ζητεῖται πόσον ἠγοράσαμεν τὴν ὀκᾶν.

$\left(1,87\frac{1}{2}\right.$ δρχ., ἤτοι 1 δραχ. 87 λεπτ.$\left.\frac{1}{2}\right)$

125) Τὰ 0,35 ἑνὸς σάκκου ἀλεύρου εἶναι 25 ὀκάδες, πόσας ἔχει ὅλος ὁ σάκκος; $\left(71\right.$ ὀκ. $\left.\frac{15}{35}\right)$

126) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς περιουσίας ἑνὸς ἀνθρώπου εἶναι 5450,75 δραχ., πόση εἶναι ὅλη ἡ περιουσία του ; (7267,66...δραχ.)

127) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 2,50 δραχ. πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 150,75 δραχμάς ; (60,3 πήχ.)

128) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 0,25 τοῦ μέτρου, τὰ 175 μέτρα πόσας δραχμὰς ἀξίζουν ; (700 δραχ.)

129) Ποῖον μέρος τῶν 0,25 εἶναι τὰ 0,16 ; (τὰ 0,64)

130) Ὁ ἀριθμὸς 20,15 ποσάκις περιέχει τὸν 1,20 ;

$\left(16,79\ldots,\right.$ ἤτοι 16 φορὰς καὶ $\frac{79}{100}$ τῆς φορᾶς περίπου$\left.\right)$

131) Πόσας φορὰς μεγαλήτερος τοῦ 12,008 εἶναι ὁ 25,4 ; (2,1...)

132) Μὲ 25,50 δραχ. ἠγόρασέ τις 15 μέτρα ὑφάσματός τινος, μὲ 102 δραχ. πόσα μέτρα ἀγοράζει ; (60 μέτρα)

133) Αἱ 20 ὀκάδες ἀνθράκων τιμῶνται 3,25δραχ. πόσον τιμῶνται αἱ 60 ὀκάδες ; (9,75 δραχ.)

134) Τὰ 2,5 ἀριθμοῦ τινος εἶναι 175, πόσα εἶναι τὰ 0,15 τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ; (10,5)

135) Τὸ 0,01 ἀριθμοῦ τινος εἶναι 5, πόσα εἶναι τὰ 0,015 τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ; (7,5)

Σημείωσις.—Ἐξ ὅλων τῶν εἰδῶν τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων δι᾽ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς διαιρέσεως καὶ προσέτι ἐκ τῶν λυομένων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἅμα καὶ διαιρέσεως, ἅτινα λύονται καὶ διὰ δύο διαδοχικῶν διαιρέσεων νὰ μορφώσῃ ἕκαστος τῶν μαθητῶν καὶ νὰ λύσῃ ἀνὰ δύο προβλήματα.

Ζητήματα ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

136) Νὰ γραφῇ ἕκαστος τῶν συμμιγῶν

2μετρ.	3παλ.	4δακτ.	5γραμ.
2τ. μ.	3τ. παλ.	4τ. δ.	
2κ. μ.	3κ. παλ.	4κ. δακ.	
2τον. χωρ.	3κοιλ.	4λιτρ.	
2τον. βαρ.	15χιλιογρ.	4γραμ.	

ὑπὸ μορφὴν δεκαδικὴν καὶ νὰ ὁρισθῇ δι᾽ ἀπαγγελίας τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἑκάστης τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς ἀρχικῆς μονάδος τοῦ συμμιγοῦς.

137) Νὰ τραπῇ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν

60λεπ., 2δραχ., 3ταλ.
150δραμ., 20ὀκάδ.,
15″, 20′, 4ὧρ.

εἰς ἀριθμὸν γινόμενον ἐκ τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας ἑκάστου μονάδος.

$\left(\frac{60 \text{ δραχ.}}{100}, \frac{2 \text{ ταλ.}}{5}, \frac{3 \text{ εἰκ.}}{4}\right.$ κτλ.$\left.\right)$

138) Νὰ τραπῇ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν

$2^{\text{εἰκ.}}$, $2^{\text{ταλ.}}$, $4^{\text{δραχ.}}$
$2^{\text{στατ.}}$, $15^{\text{όκ.}}$,
$3^{\text{ἡμ.}}$, $8^{\text{ὥρ.}}$, $30'$

εἰς ἀριθμὸν γινόμενον ἐκ τῆς ἀμέσως μικροτέρας ἑκάστου μονάδος.

($8^{\text{ταλ.}}$, $10^{\text{δραχ.}}$, $400^{\text{λεπ.}}$ κτλ.).

139) Νὰ τραπῇ ἕκαστος τῶν συμμιγῶν

$3^{\text{εἰκ.}}$ $2^{\text{ταλ.}}$ $4^{\text{δραχ.}}$ $25^{\text{λεπ.}}$
$2^{\text{στατ.}}$ $15^{\text{όκ.}}$ $250^{\text{δραμ.}}$
$2^{\text{ἡμ.}}$ $3^{\text{ὥρ.}}$ $15'$ $20''$

εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος

140) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀριθμοὶ

$\frac{3}{5}$ εἰκ. , $\frac{2}{8}$ τον. χωρ. , $\frac{15}{8}$ στατ. , $\frac{3}{4}$ ἡμ.

εἰς συμμιγεῖς ἀριθμούς.

Ζητήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

141) Ναύτης τις κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους ὑπηρέτησεν εἰς τρία πλοῖα ὡς ἑξῆς. Εἰς τὸ ἓν τῶν πλοίων τούτων εἰργάσθη $1^{\text{μην.}}$ $2^{\text{ἡμ.}}$ $5^{\text{ὥρ.}}$, εἰς τὸ ἕτερον $2^{\text{μην.}}$ $15^{\text{ἡμ.}}$ $8^{\text{ὥρ.}}$ $40'$ καὶ εἰς τὸ τρίτον $25^{\text{ἡμ.}}$ $11^{\text{ὥρ.}}$ $50'$. Ζητεῖται πόσον χρόνον ἔμεινεν εἰς τὰ τρία πλοῖα καθ' ὅλον τὸ ἔτος. ($4^{\text{μην.}}$ $13^{\text{ἡμ.}}$ $1^{\text{ὥρ.}}$ $30'$)

142) Ἐργάτης τις εἰργάσθη $2^{\text{ἡμ.}}$ $3^{\text{ὥρ.}}$ $25'$, ἕτερος δὲ εἰργάσθη $10^{\text{ἡμ.}}$ $7^{\text{ὥρ.}}$ $50'$ καὶ τρίτος εἰργάσθη $5^{\text{ἡμ.}}$ $6^{\text{ὥρ.}}$ $40'$. Ζητεῖται πόσον χρόνον εἰργάσθησαν καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ. ($18^{\text{ἡμ.}}$ $5^{\text{ὥρ.}}$ $55'$)

143) Ἐργάτης τις εἰργάσθη $2^{\text{ἡμ.}}$ $3^{\text{ὥρ.}}$ $25'$, ἕτερος δὲ εἰργάσθη $10^{\text{ἡμ.}}$ $7^{\text{ὥρ.}}$ $50'$ καὶ τρίτος εἰργάσθη $5^{\text{ἡμ.}}$ $6^{\text{ὥρ.}}$ $40'$. Ζητεῖται πόσον χρόνον εἰργάσθησαν καὶ οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἕκαστος εἰργάζετο 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ($19^{\text{ἡμ.}}$ $1^{\text{ὥρ.}}$ $55'$)

144) Ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς $1895^{\text{ἔτ.}}$ $5^{\text{μην.}}$ $16^{\text{ἡμ.}}$ $14^{\text{ὥρ.}}$ νὰ τραπῇ εἰς χρονολογίαν. (17 Ἰουνίου 1896 τῇ 2 μ. μ.)

145) Ἡ χρονολογία 1896 τῇ 15 Σεπτεμβρίου εἰς τὰς $3^{\text{ὥρ.}}$ μ. μ. νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν, δηλ. εἰς ἀριθμὸν τελείων ἐτῶν, μηνῶν, ἡμερῶν καὶ ὡρῶν. ($1895^{\text{ἔτ.}}$ $8^{\text{μην.}}$ $14^{\text{ἡμ.}}$ $15^{\text{ὥρ.}}$)

146) Ἀνεχώρησέ τις ἐκ τῆς πατρίδος του τῇ 17 Ἰουνίου 1890 εἰς τὰς $6^{\text{ὥρ.}}$ μ. μ. καὶ ἐπανῆλθεν εἰς αὐτὴν μετὰ $2^{\text{ἔτ.}}$ $3^{\text{μην.}}$ $16^{\text{ἡμ.}}$ $19^{\text{ὥρ.}}$ Ζητεῖται κατὰ ποίαν χρονολογίαν ἐπέστρεψε.

Σημείωσις.—Τρέπομεν πρῶτον τὴν δοθεῖσαν χρονολογίαν εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον προσθέτομεν ἔπειτα τὸν ἕτερον συμμιγῆ, τὸ δὲ ἄθροισμα μετατρέπομεν εἰς χρονολογίαν. (1892 τῇ 4 Ὀκτωβρίου εἰς τὴν $1^{\text{ὥρ.}}$ μ.μ.)

147) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη εἰς τὰς 15 Ὀκτωβρίου 1870 τῇ $3^{\text{ὥρ.}}$ μ. μ. καὶ ἀπέθανε τῷ 1891 τῇ 11 Αὐγούστου εἰς τὰς $8^{\text{ὥρ.}}$ π.μ. Ζητεῖται πόσον ἔζησε.

Σημείωσις.—Τρέπομεν τὰς χρονολογίας εἰς συμμιγεῖς καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν. ($20^{\text{ἔτ.}}$ $9^{\text{μην.}}$ $25^{\text{ἡμ.}}$ $17^{\text{ὥρ.}}$)

148) Ἄνθρωπός τις ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς πατρίδος του τῇ 12 Μαΐου 1885 εἰς τὰς $2^{\text{ὥρ.}}$ π. μ. κατευθυνόμενος εἰς Παρισίους, ὅπόθεν ἀνεχώρησε τῇ 16 Ἰουνίου 1890 εἰς τὰς $6^{\text{ὥρ.}}$ μ. μ. καὶ μετὰ $25^{\text{ἡμ.}}$ $3^{\text{ὥρ.}}$ ἐπανῆλθεν εἰς τὴν πατρίδα του. Ζητεῖται ἡ χρονολογία, καθ' ἣν ἔφθασεν εἰς τὴν πατρίδα του.

(Τῇ 11 Ἰουλίου 1890 εἰς τὰς $9^{\text{ὥρ.}}$ μ. μ.)

149) Ἐκ τινος ὑφάσματος 150 πήχεων ἐκόπησαν $12^{\text{πηχ.}}$ $3^{\text{ρουπ.}}$, ἔπειτα ἕτεροι $25^{\text{πηχ.}}$ $7^{\text{ρουπ.}}$ καὶ τέλος $42^{\text{πηχ.}}$ $5^{\text{ρουπ.}}$ Ζητεῖται πόσον ὕφασμα ἔμεινε. ($69^{\text{πηχ.}}$ $1^{\text{ρουπ.}}$)

Ζητήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

150) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται $2^{\text{δραχ.}}$ $25^{\text{λεπ.}}$, πόσον τιμῶνται οἱ 17 πήχεις; ($38^{\text{δραχ.}}$ $25^{\text{λεπτ.}}$)

151) Ὁ στατὴρ ἀνθράκων τιμᾶται $6^{\text{δραχ.}}$ $75^{\text{λεπ.}}$, πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ στατῆρος; $\left(5^{\text{δραχ.}}\ 6^{\text{λεπ.}}\ \frac{1}{4}\right)$

152) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν $2^{\text{πηχ.}}$ $3^{\text{ρουπ.}}$ ὑφάσματός τινος μὲ 3 δραχ. $\frac{75}{100}$ πόσους πήχεις ἀγοράζομεν; $\left(8^{\text{πηχ.}}\ 7^{\text{ρουπ.}}\ \frac{1}{4}\right)$

153) Ἡ μία ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται $6^{\text{δραχ.}}$ $25^{\text{λεπ.}}$, πόσον τιμῶνται οἱ $2^{\text{στατ.}}$ $3^{\text{ὀκ.}}$; ($568^{\text{δραχ.}}$ $75^{\text{λεπτ.}}$)

154) Τὸ δράμιον μετάξης τιμᾶται $40^{\text{λεπτ.}}$, πόσον τιμῶνται αἱ $2^{\text{ὀκ.}}$ 25 δράμια; (330 δραχμάς)

155) Τὸ ῥούπιον ὑφάσματός τινος τιμᾶται $2^{\text{δραχ.}}$, πόσον τιμῶνται οἱ 10 πήχεις ; (160 δραχμάς)

156) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον 400 τετραγωνικῶν μέτρων, ἐπειδὴ δὲ πρόκειται νὰ τὸ πληρώσῃ εἰς τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις, ζητεῖται πόσοι τοιοῦτοι πήχεις εἶναι τὸ οἰκόπεδον.

$\left(711^{\text{τ. τεκ. πηχ.}}\ \frac{1}{9}\right)$

157) Οἱ 1500 τετραγωνικοὶ τεκτονικοὶ πήχεις μὲ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἰσοδυναμοῦσιν; $\left(843^{\text{τ. μ.}}\ \frac{3}{4}\right)$

158) Ἠγόρασέ τις διὰ τὸ πλοῖόν του $25^{\text{όκ.}}$ $150^{\text{δραμ.}}$ ζακχάρεως, ἕτερος δὲ ἠγόρασε τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τούτων. Ζητεῖται πόσην ζάκχαριν ἠγόρασεν οὗτος. ($69^{\text{όκ.}}$ 312 $^1/_2$ δραμ.)

159) Νὰ μετατραπῶσι $15^{\text{όκ.}}$ $300^{\text{δραμ.}}$ εἰς γραμμάρια.

(20160 γραμ.)

160) Πόσα εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν $150^{\text{δραχ.}}$ $75^{\text{λεπ.}}$ $\left(94^{\text{δρ.}}\ 21^{\text{λεπ.}}\ \frac{7}{8}\right)$

161) Οἱ $2^{\text{πηχ.}}$ $3^{\text{ρουπ.}}$ ὑφάσματός τινος τιμῶνται 8 δραχμάς, πόσον ὕφασμα ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν ; $\left(2^{\text{ρουπ.}}\ \frac{3}{8}\right)$

162) Οἱ $2^{\text{πηχ.}}$ $3^{\text{ρουπ.}}$ ὑφάσματός τινος τιμῶνται 8 δραχ., πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ; $\left(3^{\text{δραχ.}}\ 36^{\text{λεπ.}}\ \frac{16}{19}\right)$

163) Ἐργάτης τις εἰργάσθη 24 ὥρας εἰς $3^{\text{ἡμ.}}$ $3^{\text{ὥρ.}}$ Ζητεῖται πόσας ὥρας εἰργάζετο τὸ ἡμερονύκτιον. ($7^{\text{ὥρ.}}$ 40′ 48′′)

164) Οἱ $3^{\text{πηχ.}}$ $5^{\text{ρ.}}$ ὑφάσματός τινος ἠγοράσθησαν $15^{\text{δραχ.}}$ $75^{\text{λεπτ.}}$ Ζητεῖται πόσον ἠγοράσθη ὁ πῆχυς. ($4^{\text{δραχ.}}$ $34^{\text{λεπ.}}$)

165) Οἱ $4^{\text{πηχ.}}$ $7^{\text{ρ.}}$ ὑφάσματός τινος ἠγοράσθησαν ἀντὶ $15^{\text{δραχ.}}$ $75^{\text{λεπ.}}$ Ζητεῖται πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν.

$\left(2^{\text{ρουπ.}}\ \frac{10}{21}\right)$

166) Εἰς τὴν Τράπεζαν Κωνσταντινουπόλεως ἐξηργυρώθησαν $2^{\text{εἰκ.}}$ $3^{\text{ταλ.}}$ ἀντὶ 55 φράγκων. Ζητεῖται πόσα φράγκα ἔχει τὸ τάλληρον (5 φράγκα)

167) Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μισθοῦ ὑπαλλήλου τινὸς εἶναι 127 δρχ. 50 λεπ. πόσον μισθὸν λαμβάνει ; (159 δρχ. 37 λεπ. $\frac{1}{2}$)

168) Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ στατῆρος ἀνθράκων τιμῶνται 4 δρχ. 75 λεπ. Ζητεῖται πόσον τιμᾶται ὁ στατήρ. (6,33 δρχ. $\frac{1}{2}$

169) Τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματός τινος εἶναι 150 εἰκοσόφραγκα. Ζητεῖται πόσον εἶναι τὸ ἐτήσιον αὐτοῦ εἰσόδημα. (52 εἰκ. 3 τάλ. 3 δρχ. 82 λεπ $\frac{6}{17}$)

170) Εἷς ἐργάτης λαμβάνει διὰ μίαν ἡμέραν 4 δρχ. 25 λεπ. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 150 δραχμάς ; (35 ἡμ. 3 ὥρ. $\frac{9}{17}$)

171) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 15 ὀκάδας πράγματός τινος, οἱ 2 στατ. 3 ὀκ. 150 δρμ. πόσον ἀξίζουν ; (6 δρχ., 09...)

172) Νὰ μετατραπῶσιν οἱ 2 τόν. βάρους 40 χιλιόγρομ. 20 γραμμάρ. εἰς ὀκάδας. (1593 ὀκ. 306 δρμ. $\frac{1}{4}$)

173) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 3 φράγκα, πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 15 εἰκοσόφραγκα ; (100 πήχεις).

174) Ποῖον μέρος τῶν 150 δρχ. 50 λεπ. εἶναι αἱ 10 δρχ. καὶ 25 λεπ. ; ($\frac{41}{602}$)

175) Πόσας φορὰς μεγαλήτερος εἶναι ὁ συμμιγὴς 2 πήχ. 3 ρουπ. τῶν 7 ρουπίων ; (2 φορὰς καὶ $\frac{5}{7}$)

176) Οἱ 2 πήχ. 3 ρούπ. τιμῶνται 3 δρχ. 25 λεπ., μὲ 5 δρχ. 75 λεπ. πόσους πήχεις ἀγοράζομεν ; (4 πηχ. 1 ρούπ. $\frac{18}{17}$)

177) Οἱ 5 στατῆρες πράγματός τινος τιμῶνται 85 δρχ. 70 λεπ. πόσον τιμῶνται οἱ 25 στατῆρ. 3 ὀκάδ. ; (35,44 δρχ.)

178) Διὰ 3 ἡμ. 5 ὥρ. ἐργασίαν ἔλαβέ τις 25 δρχ. 75 λεπ. πόσον πρέπει νὰ λάβῃ διὰ 5 ἡμ. 5 ὥρ. ἐργασίαν ; (40 δρχ. 82 λεπ.)

179) Ἐργασθείς τις 3ἡμ. 5ὡρ. ἀνὰ 8ὡρ. τὴν ἡμέραν ἔλαβε 25δρχ. 75λεπ., πόσον ἔπρεπε νὰ λάβῃ, ἂν εἰργάζετο 4ἡμ. 5ὡρ. ἀνὰ 6ὡρ. τὴν ἡμέραν ; (25δρχ. 75λεπ.)

180) Τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος εἶναι 5πηχ. 5ρουπ. πόσον εἶναι τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ ; $\left(2^{\text{πηχ.}}\ 6^{\text{ρουπ.}}\frac{1}{2}\right)$

Σημείωσις.— Ἐξ ὅλων τῶν εἰδῶν τῶν προβλημάτων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν τῶν λυομένων δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς διαιρέσεως, προσέτι δὲ καὶ ἐκ τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων διὰ διαιρέσεως ἅμα καὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἅτινα λύονται καὶ διὰ δύο διαδοχικῶν διαιρέσεων νὰ ὑποχρεωθῇ ἕκαστος τῶν μαθητῶν νὰ μορφώσῃ καὶ νὰ λύσῃ ἀνὰ δύο προβλήματα.

Προβλήματα διάφορα.

181) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 150 ὀκάδες, αἱ δύο δὲ τούτων εἶναι 24όκ. 150δραμ. καὶ 45όκ. 250δρμ., ποῖος εἶναι ὁ ἕτερος; (80 ὀκάδες).

182) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 54575, ὁ εἷς δὲ τούτων εἶναι ὁ ἀριθμὸς 450, ποῖος εἶναι ὁ ἕτερος ; $\left(\text{ὁ } 121\frac{5}{8}\right)$

183) Ἐπώλησέ τις τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς κτηματικῆς του περιουσίας, ἔμεινε δὲ εἰς αὐτὸν κτῆμά τι ἀξίας 500 δραχ., ποίας ἀξίας ἦτο ἡ κτηματικὴ του περιουσία ; (2500 δραχ.)

184) Ἔμπορός τις ἐκ τῆς πωλήσεως ὑφάσματος ἐκέρδησεν 100 δραχ., εἰσέπραξε δὲ ἐν ὅλῳ τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς ἀξίας τοῦ ὑφάσματος, πόσον ἐκόστιζεν εἰς αὐτὸν τὸ ὕφασμα ; (150 δρχ.)

185) Εἷς ἀτμόμυλος πρέπει νὰ παραγάγῃ 150 σάκκους ἀλεύρου εἰς 5 ὥρας, παρήγαγε δὲ κατὰ μὲν τὰς 2 ὥρας 65 σάκκους καὶ $\frac{3}{4}$ τοῦ σάκκου. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ παραγάγῃ καθ' ἑκάστην ὥραν ἐκ τῶν ἐπιλοίπων, διὰ νὰ συμπληρωθῇ τὸ ὁρισθὲν ποσὸν τῶν 150 σάκκων ; $\left(28^{\text{σάκ.}}\ \frac{1}{12}\right)$

186) Φιλανθρωπικόν τι κατάστημα ἔχει τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς περιουσίας του εἰς χρεώγραφα, τὸ $\frac{1}{5}$ εἰς κτήματα, τὸ $\frac{1}{4}$ εἰς ἐνυπόθηκα δάνεια καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ εἰς ἐλαιόδενδρα, ἔχει δὲ καὶ εἰς μετρητὰς 4000 δραχ. Ζητεῖται πόση εἶναι ἡ ὅλη του περιουσία. (80000 δραχ.)

187) Ἠγόρασέ τις ἄνθρακας πρὸς 5,44 δραχ. τὸν στατῆρα, ἐπώλησε δὲ ἔπειτα αὐτοὺς πρὸς 6,50 δραχ. τὰς 25 ὀκάδας καὶ ἐκέρδησε 1500 δρ. Ζητεῖται πόσους στατῆρας ἀνθράκων ἠγόρασε.

(250 στατῆρας)

188) Δύο ἐργάται ἔσκαψαν ἀγρόν τινα εἰς 15 ἡμέρας, ὁ εἷς τῶν ἐργατῶν τούτων θὰ ἔσκαπτε μόνος τὸν ἀγρὸν τοῦτον εἰς 20 ἡμέρας, εἰς πόσας ἡμέρας ὁ ἕτερος τῶν ἐργατῶν ἤθελε σκάψῃ αὐτόν;

(60 ἡμέρας)

189) Ἐὰν εἰς 50 ὀκάδας οἴνου θέσωμεν 15 ὀκάδας ὕδατος, εἰς τὸ παραγόμενον μῖγμα πόσον μέρος θὰ εἶναι καθαροῦ οἴνου καὶ πόσον ὕδατος, καὶ πόσα δράμια ὕδατος θὰ περιέχωνται εἰς ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ μίγματος.

$\left(\frac{3}{13}\right.$ ὕδ., $\frac{10}{13}$ οἰν. καὶ 92 δραμ. $\left.\frac{4}{13}\right)$

190) Πυρασφαλιστική τις ἑταιρεία εἰσπράττει κατὰ μῆνα 30000 δραχ., δαπανᾷ δὲ τὸ ἔτος 100000 δραχ., τὸ κεφάλαιον δὲ αὐτῆς εἶναι 400,000,000 δρχ. εἰς 20000 μετοχάς. Ζητεῖται πόσον μέρισμα δίδει καθ' ἑξαμηνίαν εἰς ἑκάστην μετοχήν. (6,50 δραχ.)

191) Τρεῖς ἐργάται λαμβάνουσιν 150$^{\text{δραχ.}}$, διότι ἔσκαψαν ἀγρόν τινα, ἐκ τῶν ἐργατῶν δὲ τούτων ὁ εἷς μόνος θὰ ἔσκαπτε τὸν ἀγρὸν εἰς 10$^{\text{ἡμ.}}$, ὁ δὲ ἕτερος εἰς 15$^{\text{ἡμ.}}$ καὶ ὁ τρίτος εἰς 20$^{\text{ἡμ.}}$ Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῆς ἐργασίας του.

Λύσις.—Εὑρίσκομεν πρῶτον, ὅτι καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ θὰ σκάψωσι τὸν ἀγρὸν εἰς $4\frac{8}{13}$$^{\text{ἡμ.}}$ καὶ ἐπειδὴ διὰ τὸ σκάψιμον τοῦ ἀγροῦ ἐδόθησαν 150$^{\text{δραχ.}}$, ἄρα ὁ πρῶτος πρέπει νὰ πληρώνηται τὴν ἡμέραν 150$^{\text{δρχ.}}$: 10, ἤτοι 15$^{\text{δραχ.}}$, ὁ ἕτερος 150$^{\text{δραχ.}}$: 15$^{\text{ἡμ.}}$ = 10$^{\text{δραχ.}}$ καὶ ὁ τρίτος 150$^{\text{δρχ.}}$: 20$^{\text{ἡμ.}}$ = 7,50$^{\text{δραχ.}}$, δι' ὃ ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 15$^{\text{δρχ.}}$ $\times 4\frac{8}{13}$ =

$69\frac{3}{13}$ δραχ. ὁ ἕτερος $46\frac{2}{13}$ δραχ. καὶ ὁ τρίτος $34\frac{8}{13}$ δραχμάς.

192) Μίαν ἄμπελον σκάπτει ἐργάτης τις εἰς 10 ἡμέρας, ἕτερος δὲ ἐργάτης σκάπτει τὴν αὐτὴν ἄμπελον εἰς 15 ἡμέρας καὶ τρίτος ἐργάτης εἰς 20 ἡμέρας. Ἐὰν τὴν ἄμπελον ταύτην ἀρχίσῃ νὰ τὴν σκάπτῃ μόνος ὁ πρῶτος, τὴν δὲ δευτέραν ἡμέραν λάβῃ μέρος καὶ ὁ δεύτερος ἐργάτης καὶ τὴν τρίτην καὶ ὁ τρίτος, μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ τοῦ τρίτου ἐργάτου θὰ σκάψωσι τὴν ἄμπελον ;

Λύσις.—Τὴν ἑσπέραν τῆς δευτέρας ἡμέρας ὁ πρῶτος θὰ ἔχῃ σκάψῃ τὰ $\frac{2}{10}$ τῆς ἀμπέλου, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{15}$ καὶ οἱ δύο δὲ ὁμοῦ τὰ $\frac{8}{30}$, ὥστε μένουσι τὰ $\frac{22}{30}$ τῆς ἀμπέλου, καὶ ἐπειδὴ εἰς μίαν ἡμέραν οἱ τρεῖς θὰ σκάψωσι τὰ $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}$, ἤτοι τὰ $\frac{13}{60}$ τῆς ἀμπέλου, ἄρα τὰ $\frac{22}{30}$ τῆς ἀμπέλου θὰ σκάψωσιν εἰς $\frac{22}{30}:\frac{13}{60}$, ἤτοι $\frac{44}{13}$ τῆς ἡμέρας, ἤτοι 3ἡμ. 4ὡρ. $36'\ 55''\frac{5}{13}$.

A

193) Ἠγόρασέ τις 2000 ὀκάδας οἴνου πρὸς 25 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, μετεπώλησε δὲ μέρος τοῦ οἴνου πρὸς 35 λεπ. τὴν ὀκᾶν καὶ εἰσέπραξεν ὅσα εἶχε πληρώσῃ πρὸς ἀγορὰν ὅλου τοῦ οἴνου. Ζητεῖται πόσον οἶνον ἐπώλησε καὶ πόσος τοῦ ἔμεινεν ;

(ἐπώλησε 1428ὀκ. $\frac{4}{7}$ καὶ τοῦ ἔμεινε 571 $\frac{3}{7}$ ὀκ.)

194) Ἠγόρασέ τις 40 φιάλας κονιὰκ πρὸς 5 δραχ. τὴν φιάλην, μετεπώλησε δὲ 25 φιάλας εἰς τοιαύτην τιμήν, ὥστε ἑκάστη ἐκ τῶν ἐπιλοίπων φιαλῶν τοῦ κοστίζει 4 δραχ. Ζητεῖται πρὸς ποίαν τιμὴν ἐπώλησεν ἑκάστην ἐκ τῶν 25 φιαλῶν ; (5,60 δραχ.)

195) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 100 φιάλας οἴνου Καμπανίας πρὸς 6 δραχ. ἑκάστην, κατὰ τὴν μετακόμισιν ὅμως ἐθραύσθησαν 30 φιάλαι. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ πωλῇ ἑκάστην φιάλην διὰ νὰ κερδίσῃ 100 δραχμάς. (10 δραχ. ἑκάστην)

196) Οἰνοπώλης τις εἶχε 500 ὀκάδ. οἴνου καὶ ἐσκόπει νὰ πωλῇ αὐτὸν πρὸς 50 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἀλλὰ τοῦ ἐχύθησαν 100 ὀκ οἴνου. Ζητεῖται κατὰ πόσον πρέπει ν' αὐξήσῃ τὴν τιμὴν τοῦ ἐπιλοίπ

οἴνου κατ᾽ ὀκᾶν, ὥστε νὰ ζημιωθῇ τὸ ἥμισυ τῆς ἀξίας τοῦ χυθέντος οἴνου. $\left(\text{κατὰ } 6^{\text{λεπ.}} \frac{1}{4}, \text{ἤτοι νὰ πωλῇ } 56 \frac{1}{4} \text{ λεπ. τὴν ὀκᾶν}\right)$

197) Ἐμποροϋπάλληλός τις λαβὼν τὸν μισθόν του ἐκ 200 δραχ. ἐπλήρωσε δι᾽ αὐτῶν καὶ τοῦ ἀποταμιεύματός του 250 δραχμὰς εἰς τὸν ῥάπτην του καὶ εἰς τὴν ῥάπτριαν τῆς ἀδελφῆς του, τοῦ ἔμειναν δὲ ἐκ τοῦ ἀποταμιεύματός του τὰ $\frac{2}{3}$. Ζητεῖται πόσον ἀποταμίευμα εἶχε.

Λύσις.—Πληρώσας $250^{\text{δρχ}}$· ἔδωκε 50 δραχμὰς ἐκ τοῦ ἀποταμιεύματός του καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῶν ὅσα εἶχε ἀποταμιεύση τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{2}{3}$, ἄρα αἱ 50 δραχμαί, αἵτινες ἐδόθησαν ἐκ τοῦ ἀποταμιεύματος, εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀποταμιεύματος, ἄρα εἶχεν ἀποταμίευμα 150 δραχμάς.

198) Δέκα ἐργάται διὰ 5 ἡμέρας ἔλαβον ὁμοῦ 50 δραχ., ἐπληρώνοντο δὲ ἕκαστος 25 λεπτὰ τὴν ὥραν, ἐὰν οἱ ἐργάται εἰργάζοντο ἐξ ἴσου, πόσας ὥρας εἰργάζοντο καθ᾽ ἡμέραν; (4 ὥρας)

199) Ἐὰν τὰ $\frac{2}{3}$ ὑφάσματός τινος αὐξηθέντα κατὰ 4 πήχεις γίνωνται ἴσα πρὸς τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὑφάσματος, ἐκ πόσων πήχεων ἀπετελεῖτο τὸ ὕφασμα; (ἐκ 30 πήχεων)

200) Ἔμπορός τις ἔχει 200 ὀκάδας καθαροῦ οἰνοπνεύματος καὶ ἐξήγαγε τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ τὸ ἀνεπλήρωσε δι᾽ ὕδατος, ἔπειτα ἐξήγαγε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μίγματος καὶ τὸ ἀνεπλήρωσε δι᾽ ὕδατος, πόσον καθαρὸν οἰνόπνευμα μένει ἤδη εἰς τὰς 200 ὀκάδας τοῦ μίγματος;

Λύσις.— Ἐπειδὴ τὴν πρώτην φορὰν ἔμειναν τὰ $\frac{3}{4}$ καθαροῦ οἰνοπνεύματος, τὴν δὲ δευτέραν ἐξεβάλομεν τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν $\frac{3}{4}$, ἄρα ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν $\frac{3}{4}$, ἤτοι τὰ $\frac{12}{20}$ τοῦ καθαροῦ οἰνοπνεύματος, ἄρα ταῦτα εἶναι $\frac{12}{20} \times 200^{\text{όκ.}}$, ἤτοι 120 ὀκάδες καθαροῦ οἰνοπνεύματος.

201) Μία ἄμπελος παρήγαγε 15000 ὀκάδας οἴνου. Εἶχον δὲ σκάψῃ ἐν αὐτῇ 100 ἄνδρες ἐπὶ 5 ἡμέρας πληρωθέντες πρὸς 3 δραχ. τὴν ἡμέραν, 50 γυναῖκες ἐπὶ 20 ἡμέρας πληρωθεῖσαι πρὸς 2 δραχ. τὴν ἡμέραν καὶ 50 παῖδες ἐπὶ 10 ἡμέρας πρὸς 1,50 δρχ. τὴν ἡμέραν, ἐπλήρωσε δὲ διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ οἴνου εἰς τὴν ἀποθήκην του 2000 δραχ. Ζητεῖται πόσον τοῦ ἐκόστισεν ἡ ὀκᾶ τοῦ οἴνου.

$\left(0^{\text{δρχ.}}, 41\frac{2}{3}, \text{ ἤτοι } 41^{\text{λεπτ.}}\frac{2}{3}\right)$

202) Ἀτμόπλοιόν τι καταδιώκει ἕτερον ἀτμόπλοιον μὲ ταχύτητα 15 μιλίων τὴν ὥραν, ἔφθασε δὲ τὸ πρῶτον ἀτμόπλοιον μετὰ 3 ὥρας. Ζητεῖται ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου ἀτμοπλοίου, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι εἶχεν ἀναχωρήσῃ 2 ὥρας πρὸ τοῦ δευτέρου ἀτμοπλοίου.

Λύσις.— Ἐπειδὴ τὸ καταδιῶκον ἀτμόπλοιον ἔφθασε τὸ πρῶτον μετὰ πλοῦν 3 ὡρῶν, ἄρα διήνυσε διάστημα 45 μιλίων. Τοῦτο δὲ τὸ διάστημα διήνυσε τὸ πρῶτον ἀτμόπλοιον εἰς 5 ὥρας, ἄρα εἶχε ταχύτητα 9 μιλίων τὴν ὥραν.

203) Ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς ἁμαξοστοιχίαν διὰ νὰ φθάσῃ μετὰ $2^{\text{ὡρ.}}\, 30'$ ἑτέραν, ἡ ὁποία ἀνεχώρησε πρὸ $2^{\text{ὡρ.}}\, 40'$ μὲ ταχύτητα 25 σταδίων τὴν ὥραν ; $\left(51^{\text{σταδ.}}\ 666^{\text{μετρ.}}\frac{2}{3}\right)$

204) Σιδηρόδρομός τις διανύων 30 στάδια καθ' ὥραν ἀνεχώρησεν ἐξ Ἀθηνῶν διευθυνόμενος εἰς πόλιν τινὰ ἀπέχουσαν 350 στάδια. Μετὰ 3 ὥρας ἀνεχώρησεν ἕτερος σιδηρόδρομος διευθυνόμενος πρὸς τὴν αὐτὴν πόλιν μὲ ταχύτητα 75 σταδίων εἰς 2 ὥρας. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον ἀφ' ὅτου φθάσῃ ὁ πρῶτος σιδηρόδρομος θὰ φθάσῃ καὶ ὁ δεύτερος εἰς τὴν αὐτὴν πόλιν. (μετὰ 40′)

Προσθήκη.— Ἐὰν οἱ σιδηρόδρομοι δὲν ἐστάθμευον εἰς τὴν εἰρημένην πόλιν, μετὰ πόσας ὥρας, ἀφ' ὅτου διῆλθον τῆς πόλεως ταύτης, θὰ συνεκρούοντο καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ;

Λύσις.— Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὁ πρῶτος σιδηρόδρομος κατὰ τὰ 40′, ἤτοι τὰ $\frac{2}{3}$ ὡρ., καθ' ἃ προηγήθη τοῦ δευτέρου, θὰ διήνυε $30^{\text{σταδ.}} \times \frac{2}{3}$, ἤτοι 20 στάδια, ὁ δὲ δεύτερος σιδηρόδρομος, ὅτι εἰς ἑκάστην ὥραν πλησιάζει τὸν πρῶτον κατὰ $7\,{}^{1}/_{2}$ στάδια καὶ ἐπομένως διὰ νὰ τὸν πλησιάσῃ κατὰ 20 στάδια καὶ οὕτως ἐπέλθῃ ἡ σύγκρουσις ἀπαιτεῖται χρόνος 20:7 $^{1}/_{2}$, ἤτοι 2ὥρ. 40', ἀφ' ὅτου διῆλθεν ὁ δεύτερος σιδηρόδρομος, ἢ 2ὥρ. 40'+40' ἤτοι 3ὥρ. 20', ἀφ' ὅτου διῆλθεν ὁ πρῶτος σιδηρόδρομος. Θὰ γείνῃ δὲ ἡ σύγκρουσις εἰς ἀπόστασιν 30σταδ.$\times 3\frac{1}{3}$ ὥρας, ἤτοι 100 σταδίων, ἀπὸ τῆς δευτέρας πόλεως.

205) Δύο ἀτμάμαξαι ἀνεχώρησαν ἀντιθέτως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουσι μεταξύ των 350 στάδια, καὶ ἡ μὲν ἀναχωρήσασα ἐκ τῆς Α πόλεως εἶχε ταχύτητα 30 σταδίων τὴν ὥραν, ἡ δὲ ἀναχωρήσασα ἐκ τῆς Β πόλεως εἶχε ταχύτητα 25 σταδίων. Ζητεῖται μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των θὰ συγκρουσθῶσι καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς Α πόλεως.

$\left(6^{\text{ὥρ.}}\frac{4}{11} \text{ καὶ } 190^{\text{σταδ.}}\frac{10}{11}\right)$

Λύσις. Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συγκρούσεως θὰ ἔχωσι καὶ αἱ δύο ὁμοῦ ἀτμάμαξαι διανύσῃ 350 στάδια, ἀλλὰ εἰς μίαν ὥραν καὶ αἱ δύο ὁμοῦ διανύουσι 55 στάδια, ἄρα τὰ 350 στάδια θὰ τὰ διανύσωσιν εἰς 350:50, ἤτοι $6\frac{4}{11}$ ὥρ., οὗτος δὲ ὁ χρόνος εἶναι ὁ ζητούμενος, διότι καὶ αἱ δύο ἀτμάμαξαι εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διέτρεξαν τὰς ἀποστάσεις των μέχρι τῆς συγκρούσεως. Ἡ σύγκρουσις δὲ ἐγένετο εἰς $6\frac{4}{11}\times 30$, ἤτοι 190σταδ.$\frac{10}{11}$.

206) Ὀπωροπώλης τις ἐπώλει πορτοκάλλια πρὸς 25 λεπ. τὰ δύο, ἐπειδὴ ὅμως τοῦ ἐσάπησαν 20 πορτοκάλλια, ἐπώλησε τὰ ἐπίλοιπα πρὸς 15 λεπτὰ ἕκαστον καὶ εἰσέπραξε τὸ αὐτὸ ποσόν. Ζητεῖται πόσα πορτοκάλλια ἐπώλησε πρὸς 15 λεπτὰ ἕκαστον. (100 πορ.)

Λύσις. Ἐπειδὴ ἀπὸ τὰ 20 πορτοκάλλια ἐζημιώθη 250 λεπτά, ἐξ ἑκάστου δὲ τῶν μεινάντων κερδίζει ἐπὶ πλέον 2 $^{1}/_{2}$ λεπτά, ἄρα διὰ νὰ κερδήσῃ ἐπὶ πλέον 250 λεπτά, ὅπως καλύψῃ τὴν ζημίαν, πρέπει νὰ πωλήσῃ πορτοκάλλια 250:2 $^{1}/_{2}$, ἤτοι 100.

207) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον πρὸς 1,15 δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἐπώλησε δὲ μέρος τούτου πρὸς 1,25 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ εἰσέπραξεν, ὅσα εἶχεν ἀγοράσῃ τὸ ὅλον ἔλαιον, τοῦ ἔμειναν δὲ εἰς τὴν ἀποθήκην του ὡς

κέρδος 100 ὀκάδας ἐλαίου. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας ἐλαίου εἶχεν ἀγοράσῃ. (1250 ὀκάδας).

Λύσις. Διὰ τὰς 100 ὀκάδας ἐλαίου αἱ ὁποῖαι τοῦ ἔμειναν ὡς κέρδος εἶχε δώσῃ 1,15δραχ.×100, ἤτοι 115 δραχ.· ἄρα τόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ἐκ τοῦ πωληθέντος ἐλαίου, ἐπειδὴ δὲ ἐκέρδιζεν 0,10 δραχ. κατ' ὀκᾶν, ἄρα διὰ νὰ κερδήσῃ 115δρχ. ἐπώλησε 115:0,10, ἤτοι 1150 ὀκάδας.

208) Τὸ κοιλὸν τοῦ σίτου κοστίζει εἰς Θεσσαλίαν 8 $^1/_2$ δραχμάς, ἠγόρασέ τις δὲ ποσόν τι σίτου καὶ μεταπωλήσας μέρος τοῦ σίτου τούτου πρὸς 8,75 δραχ. τὸ κοιλὸν εἰσέπραξε πλέον τῶν ὅσα ἔδωκε πρὸς ἀγορὰν τοῦ σίτου 150 δραχ., τοῦ ἔμειναν δὲ καὶ 150 κοιλὰ σίτου. Ζητεῖται πόσον σῖτον εἶχεν ἀγοράσῃ. (750 κοιλά).

209) Ὑπάλληλός τις ἐξοδεύει τόσα κατὰ μῆνα, ὥστε τὸν Φεβρουάριον, ὅταν οὗτος ἔχῃ 28 ἡμέρας, ἐξοδεύει 75 λεπτὰ τὴν ἡμέραν περισσότερον ἢ κατὰ τοὺς μῆνας, οἵτινες ἔχουσι 30 ἡμέρας, οὕτω δὲ κατορθώνει νὰ ἐξοδεύσῃ κατὰ μῆνα ὁλόκληρον τὸν μισθόν του. Ζητεῖται πόσος εἶναι ὁ μισθός του.

Λύσις. Κατὰ τὰς 28 ἡμέρας τοῦ Φεβρουαρίου ἐξώδευσε περισσότερον 75λεπ.×28, ἤτοι 2100 λεπτά. Ταῦτα δὲ ἐξώδευε διὰ τὰς 2 ἐπιλοίπους ἡμέρας τῶν μηνῶν, οἵτινες ἔχουσι 30 ἡμέρας, ἄρα κατὰ τοὺς μῆνας τούτους ἐξώδευε καθ' ἑκάστην 1050 λεπ., ἤτοι 10,50 δραχ.· δι' ὃ ὁ μισθός του θὰ εἶναι 10,50×30, ἤτοι 315 δραχ.

210) Ἁμαξοστοιχία τις διανύουσα 60 στάδια τὴν ὥραν ἐξεκίνησε 3 ὥρας μετὰ τὴν ἄλλην ἁμαξοστοιχίαν, διηθύνοντο δὲ ἀμφότεραι εἰς πόλιν ἀπέχουσαν 360 στάδια, εἰς τὴν ὁποίαν ἔφθασαν συγχρόνως. Ζητεῖται πόσας ὥρας ἔκαμε νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα τῶν 360 σταδίων ἡ πρώτη ἁμαξοστοιχία καὶ ποία ἦτο ἡ ταχύτης αὐτῆς.

(9 ὥρας.—40 σταδίων ταχύτης).

211) Ἔμπορος τις κατέθεσεν εἰς τὴν Τράπεζαν τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν κερδῶν τοῦ ἔτους, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ ἐδαπάνησεν. Ἂν ὅμως ἐκέρδιζεν ἀκόμη 300 δρχ., τότε δαπανῶν τὰ αὐτὰ θὰ κατέθετε τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν κερδῶν του. Ζητεῖται πόσα ἐκέρδησεν (2250 δρχ).

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{5}^{\text{κέρδους}}$ $+300^{\text{δρχ.}}$ ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κέρδους, ἄρα αἱ $300^{\text{δρχ.}}$ εἶναι $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$, ἤτοι τὰ $\frac{2}{15}$ τοῦ κέρδους, δι' ὃ τὸ ὅλον κέρδος θὰ εἶναι $300\times\frac{15}{2}$, ἤτοι 2250 δραχμαί.

212) Ποιμήν τις ἐρωτηθεὶς πόσα πρόβατα ἔχει, ἀπεκρίθη· ἐὰν μοῦ δώσητε τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ὅσα ἔχω καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ $\frac{1}{3}$, θὰ μοῦ δώσητε 7 πρόβατα ὀλιγώτερα τῶν ὅσα ἔχω. Ζητεῖται πόσα πρόβατα εἶχε.

(12 πρόβ.)

213) Ἐπώλησέ τις βούτυρον πρὸς $5,25^{\text{δρχ.}}$ τὴν ὀκᾶν καὶ ἀφοῦ ἠγόρασεν ἀγελάδα τῷ ἐπερίσσευσαν 150 δραχμαί, ἐὰν ὅμως ἐπώλει τὸ βούτυρον πρὸς $5^{\text{δρχ.}}$ τὴν ὀκᾶν καὶ ἠγόραζε τὴν ἀγελάδα, θὰ τῷ ἐπερίσσευον $125^{\text{δρχ.}}$ Ζητεῖται πόσας ὀκάδας βουτύρου ἐπώλησε καὶ πόσον ἠγόρασε τὴν ἀγελάδα.

($100^{\text{οκαδ.}}$ βουτύρου καὶ ἠγοράσθη $375^{\text{δρχ.}}$ ἡ ἀγελάς).

214) Ἐδαπάνησέ τις $5000^{\text{δρχ.}}$ πρὸς ἀγορὰν ἴσης ποσότητος ἐλαιῶν, οἴνου καὶ ἐρεβίνθων, καὶ τὰς μὲν ἐλαίας ἠγόρασε πρὸς $20^{\text{λεπ.}}$ τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ οἶνον πρὸς $35^{\text{λεπ.}}$ τὴν ὀκᾶν καὶ τοὺς ἐρεβίνθους πρὸς $45^{\text{λεπ.}}$ τὴν ὀκᾶν. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους καὶ πόσα ἐδαπάνησε δι' ἕκαστον εἶδος.

(ἀπὸ $5000^{\text{οκ.}}$ ἐξ ἑκάστου εἴδους.

(Δι' ἐλαίας $1000^{\text{δρχ.}}$, δι' οἶνον $1750^{\text{δρχ.}}$, δι' ἐρεβίνθους $2250^{\text{δρχ.}}$

215) Ἔμπορός τις ἐπώλησε τοὺς αὐτοὺς πήχεις μεταξωτοῦ καὶ τσόχας, καὶ τὸ μὲν μεταξωτὸν ἐπώλησε $10,50^{\text{δρχ.}}$ τὸν πῆχυν, τὴν δὲ τσόχαν πρὸς $8,75^{\text{δρχ.}}$ τὸν πῆχυν, εἰσέπραξε δὲ ἐκ τῆς πωλήσεως $192,50^{\text{δρχ.}}$, πόσους πήχεις μεταξωτοῦ καὶ πόσους πήχεις τσόχας ἐπώλησε; ('Ανὰ 10 πήχεις)

216) Ἔχει τις δύο ἀμπέλους, ἐξ ὧν τὴν μίαν 3,5 στρέμματα ἠγόρασε πρὸς $400,50^{\text{δρχ.}}$ τὸ στρέμμα, τὴν δὲ ἄλλην 2,25 στρέμματα ἠγόρασε πρὸς $275,75^{\text{δρχ.}}$ τὸ στρέμμα· ἐπώλησε δὲ ταύτας μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν κατὰ στρέμματα καὶ ἐκέρδισε $300^{\text{δρχ.}}$ εἰς ποίαν τιμὴν ἐπώλησε τὸ στρέμμα, ($403,85^{\text{δρχ.}}$)

217) Ἐπώλησέ τις ἀπὸ 15 ὀκάδας καφὲ ἐκ δύο ποιοτήτων καὶ

ἔλαβεν 175,50$^{δρχ.}$ Ὁ καφὲς δὲ τῆς μιᾶς ποιότητος τιμᾶται 5,25$^{δρχ.}$ κατ' ὀκᾶν, πόσον τιμᾶται ὁ τῆς ἄλλης ποιότητος κατ' ὀκᾶν καὶ πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἐξ ἑκάστης τῶν ποιοτήτων τούτων ;
(6,45$^{δρχ.}$ τὴν ὀκᾶν. — ἐκ τῆς α^{ης} 96,75$^{δρχ.}$ — ἐκ τῆς β^{ας} 78,75$^{δρχ.}$

218) Μία μηχανὴ ὑφαίνει εἰς 2$^{ὥρ.}$ ὕφασμα 15$^{πηχ.}$ 4$^{ρουπ.}$, ἑτέρα δὲ μηχανὴ ὑφαίνει ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος 25$^{πηχ.}$ 1$^{ρουπ.}$ εἰς 3$^{ὥρ.}$, εἰς πόσας ὥρας καὶ αἱ δύο μηχαναὶ ὁμοῦ θὰ ὑφάνωσι 48$^{πηχ.}$ 3$^{ρουπ.}$ καὶ πόσον θὰ ὑφάνῃ ἑκάστη ;

(εἰς 3$^{ὥρ.}$ ἡ α' θὰ ὑφάνῃ 23$^{πηχ.}$ 2$^{ρουπ.}$ ἡ β' 25$^{πηχ.}$ 1$^{ρουπ.}$)

219) Ποιμήν τις ἠγόρασεν 120 πρόβατα πρὸς 15,50$^{δρχ.}$ ἕκαστον, ἐξ αὐτῶν δὲ ἀπέθανον 15 πρόβατα, τὰ δὲ ἐπίλοιπα ἐπώλησε πρὸς 20,50$^{δρχ.}$ ἕκαστον. Ζητεῖται πόσα ἐκέρδισε ; (292,50$^{δρχ.}$)

220) Εἰς τὸ ἄνω πάτωμα ξενοδοχείου τινὸς ἀνέρχεταί τις δι' 6 συνεχῶν κλιμάκων· ἑκάστη δὲ τούτων ἔχει 16 βαθμῖδας καὶ ἑκάστη βαθμὶς ἔχει ὕψος 0,158 τοῦ μέτρου. Ζητεῖται πόσον ὕψος ἔχει τὸ ξενοδοχεῖον ἀπὸ τῆς βάσεως τῆς πρώτης κλίμακος μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τελευταίας. (15,168^{μέτρου})

221) Ἠγόρασέ τις 150$^{πηχ.}$ 5$^{ρ.}$ ὑφάσματός τινος ἀντὶ 120,50$^{δρχ.}$, ἐπώλησε δὲ τοὺς 80$^{πηχ.}$ ἀντὶ 80$^{δρχ.}$, ἑτέρους δὲ 40$^{πηχ.}$ 1$^{ρουπ.}$ πρὸς 1,20$^{δρχ.}$ τὸν πῆχυν. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν ἐκ τῶν ἐπιλοίπων, διὰ νὰ κερδίσῃ ἐξ ὅλου τοῦ ὑφάσματος 100$^{δρχ.}$.

(3,02$^{δρχ.}$)

222) Ἐργάτης τις ἐργαζόμενος 10$^{ὥρ.}$ τὴν ἡμέραν πληρώνεται 7,50$^{δρχ.}$ τὴν ἡμέραν, ἕτερος ἐργάτης ἐργαζόμενος 8$^{ὥρ.}$ τὴν ἡμέραν ἐπληρώθη διὰ 3$^{ἡμ.}$ 5$^{ὥρ.}$ δραχμὰς 25,50, τρίτος δὲ ἐργάτης ἐργαζόμενος 6$^{ὥρ.}$ τὴν ἡμέραν ἔλαβε 50$^{δρχ.}$ διὰ 8$^{ἡμ.}$ 5$^{ὥρ.}$ Ζητεῖται ποῖος ἐκ τῶν τριῶν ἐργατῶν πληρώνεται ἀκριβώτερον.

(Ὁ α^{ος} 0,75$^{δρχ.}$ τὴν ὥραν. — Ὁ β^{ος} 0,87...$^{δρχ.}$ καὶ ὁ γ^{ος} 0,94...$^{δρχ.}$ τὴν ὥραν. Ἄρα ὁ τρίτος πληρώνεται ἀκριβώτερον).

223). Ἠγόρασέ τις 50$^{στατ.}$ 22$^{ὀκ.}$ ἀνθράκων, τοὺς ὁποίους μετεπώλησε πρὸς 5,60$^{δρχ.}$ τὸν στατῆρα καὶ ἐκέρδισε 30,30$^{δρχ.}$ Ζητεῖται πόσον ἠγόρασε τὸν στατῆρα τῶν ἀνθράκων. (5$^{δρχ.}$)

Προβλήματα Ἁπλῆς καὶ Συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Σημείωσις.—Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, λύονται τὰ δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς διαιρέσεως λυόμενα προβλήματα, ὡς καὶ τὰ ἀπαιτοῦντα διαίρεσιν ἅμα καὶ πολλαπλασιασμόν, ἅτινα λύονται καὶ διὰ δύο διαδοχικῶν διαιρέσεων.

+224) Ὑπηρέτης τις πληρώνεται διὰ 4μην. 12ἡμ. δραχμὰς 132, πόσον πληρώνεται τὴν ἡμέραν; (1 δραχμήν).

+225) Ὑπηρέτης τις πληρώνεται κατὰ μῆνα 35 δρχ., πόσον θὰ πληρωθῇ διὰ 3μην. 24ἡμ.; (133 δρχ.)

+226) Ὑπάλληλός τις διὰ 5μην. 20ἡμ. ἔλαβε 400δραχ. 50λεπτ., πόσον ἐπληρώθη τὸν μῆνα; (70,67...δραχ.)

+227) Κτίστης τις κτίζει εἰς μίαν ἡμέραν τοῖχον 12 κυβ. μέτρων 25κ. παλ., εἰς πόσας ἡμέρας θὰ κτίσῃ 180κ. μετρ. 375κ. π.; (15 ἡμέρας)

+228) Οἰκόπεδόν τι μετρηθὲν εὑρέθη 250,25 τ. μέτρ. Ζητεῖται πόσων τ. τεκτον. πήχεων εἶναι τὸ οἰκόπεδον. (444,88...τ.τ.πήχ.)

229) Ἐκ 500όκ. 200δραμ. γάλακτος ἐξάγονται 80όκ. 300δράμια βουτύρου, ἐκ 1251όκ. 100δραμ. γάλακτος πόσον βούτυρον θὰ ἐξαχθῇ; (201όκ. 350δρμ.)

230) Κύων τις μὲ 10 πηδήματα διατρέχει 8 μέτρα, τὰ 85,25 τοῦ μέτρου μὲ πόσα πηδήματα διατρέχει; (106,5625 πηδ.)

231) Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος πύργου τινὸς μετροῦμεν τὴν σκιάν του καὶ τὴν εὑρίσκομεν 20πηχ. 7ρουπ., ἡ δὲ σκιὰ μιᾶς ῥάβδου μήκους 2πήχ. ἐχούσης τὴν κλίσιν τοῦ πύργου εἶναι 1πηχ. 2ρουπ. Ζητεῖται τὸ ὕψος τοῦ πύργου. $\left(33^{\text{πηχ.}}\ 3\frac{1}{5}\text{ ῥούπ.}\right)$

232) Οἰκοδομή τις ἔχουσα παρὰ τὴν βάσιν ἄγαλμά τι ὕψους 1,5 τοῦ μέτρου φαίνεται εἰς φωτογραφικὴν πλάκα ὕψους 0,25 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ ἄγαλμα φαίνεται ὕψους 0,05 τοῦ μέτρου· ποίου ὕψους εἶναι ἡ οἰκοδομή; (7,5 μετρ.)

233) Ὁδοιπόρος τις βαδίζων 10 ωρας τὴν ἡμέραν χρειάζεται 20 ἡμέρας διὰ νὰ διατρέξῃ τὸ μεταξὺ δύο πόλεων διάστημα· ἐὰν τὸ διά-

στημα τοῦτο διέτρεχεν εἰς 18 ἡμέρας, πόσας ὥρας θὰ ἐβάδιζε τὴν ἡμέραν ; (11$^{\text{ὥρ.}}$ 6′ 40′′)

234) Πόσα μέτρα ὑφάσματος πλάτους $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἰσοδυναμοῦσι μὲ 30 μέτρα ὑφάσματος πλάτους $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως ;

(36 μέτρα)

235) Δεκαπέντε ὑφαντουργοὶ ὑφαίνουσι 200 μέτρα ὑφάσματος πλάτους $\frac{3}{4}$ πήχ. ἐργαζόμενοι 12$^{\text{ἡμ.}}$ πρὸς 8$^{\text{ὥρ.}}$ τὴν ἡμέραν, 25 ὑφαντουργοὶ πόσα μέτρα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος θὰ ὑφάνωσι πλάτους $\frac{7}{8}$ πηχ. ἐργαζόμενοι 8$^{\text{ἡμ.}}$ πρὸς 10$^{\text{ὥρ.}}$ τὴν ἡμέραν ;

(238$^{\text{μ.}}$,095...)

236) Πλοῖόν τι εἶχε πλήρωμα 30 ἀνδρῶν καὶ τροφὰς 80 ἡμερῶν, ἀλλὰ μετὰ 8 ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πλοίου ἀπέθανον 5 ἄνδρες καὶ ἐχάλασαν 10 ἡμερῶν τροφαί. Ζητεῖται πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν ἀπὸ τοῦ θανάτου τῶν 5 ἀνδρῶν οἱ μείναντες ἄνδρες.

(74 ἡμέρας καὶ μένουν 10 σιτηρ.)

Λύσις.—Ἂν τὸ πρόβλημα τοῦτο λύσωμεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν $\frac{30 \text{ ἀνδρ.}}{25} \; \frac{72 \text{ ἡμ.}}{X}$. Ἂν δὲ διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, τότε εὑρίσκομεν $\frac{30 \text{ ἀνδρ.}}{25} \; \frac{72 \text{ ἡμ.}}{X} \; \frac{2160 \text{ σιτηρ.}}{1860}$.

237) Ἐργαζόμενοι 12 ἐργάται πρὸς 8$^{\text{ὥρ.}}$ τὴν ἡμέραν ἐχρειάσθησαν 15 ἡμέρας διὰ νὰ ἀνεγείρωσι τεῖχος 90 μέτρων μήκους, πόσοι ἐργάται 9$^{\text{ὥρ.}}$ τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι εἰς 18 ἡμέρας ἀνεγείρουσι τοιοῦτον τεῖχος 162 μέτρων ; (16 ἐργάται)

238) Ποῖον τὸ βάρος μαρμάρου Πεντελικοῦ εἰς χιλιόγραμμα, ὅταν τοῦτο ἔχῃ μῆκος 3,357 τοῦ μέτρου, πλάτος 2,1 μετρ. καὶ ὕψος 0,75 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ εἰδικόν του βάρος εἶναι 2,837 ;

Λύσις.—Λαμβάνοντες ὑπ᾿ ὄψιν, ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς τόννου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^{0} Κελσίου εἶναι 1000 χιλιόγραμμα, τὸ δὲ εἰδικόν του βάρος, ὅτι εἶναι ἡ μονὰς (διότι πρὸς τοῦτο συγκρίνεται τὸ βάρος τῶν λοιπῶν σωμάτων) εὑρίσκομεν

$$\frac{1000}{X\,\text{βαρ. χιλ.}}\quad \frac{1}{3{,}357\,\text{μηκ.}}\quad \frac{1}{2{,}1\,\text{πλατ.}}\quad \frac{1}{0{,}75\,\text{ὑψ.}}\quad \frac{1}{2{,}837\,\text{εἰδ. βάρ.}}$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν 14999,999175, ἤτοι 15000 χιλιόγραμμα περίπου.

239) Ἐν ἀγγείῳ 2 μέτρων ὕψους, 3 μέτρων πλάτους πρόκειται νὰ τεθῶσι 5490 λίτραι ἐλαίου, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 0,915. Ζητεῖται ποῖον μῆκος πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ἀγγεῖον, ὅπως πληρωθῇ ἐκ τοῦ ἐλαίου.

Λύσις.— Ἐὰν εἴχομεν ἀγγεῖον 1 μέτρ. ὕψους 1 μ. πλατ. 1 μ. μηκ., τοῦτο θὰ ἐχώρει 1000 λίτρας ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^0 (δηλ. εἰδικοῦ βάρους 1), ἤδη δέ, ὅτε ἔχομεν ἀγγεῖον 2 μ. ὑψ. 3 μ. πλ. καὶ ὅπερ χωρεῖ 5490 λίτρας ἐλαίου τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 0,915, πόσον μῆκος θὰ ἔχῃ τὸ ἀγγεῖον;

$$\frac{1\ \text{μ. ὑψ.}}{2}\quad \frac{1\ \text{μ. πλ.}}{3}\quad \frac{1\ \text{μ. μῆκ.}}{X}\quad \frac{1000\ \text{λίτρ.}}{5490}\quad \frac{1\ \text{εἰδ. βάρ.}}{0{,}915}$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν 1 μέτρον μήκους.

240) Πόσων τετραγωνικῶν μέτρων εἶναι ἀγρὸς σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 126,6 μετρ., τὸ δὲ πλάτος 115,27 τοῦ μέτρου;

Ἂν ἦτο $\frac{1\ \text{μ. μῆκ.}}{126{,}6}\ \frac{1\ \text{μ. πλατ.}}{115{,}27}$, θὰ ἦτο $\frac{1\ \text{τ. μέτρ.}}{X}$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν 14593,182 τετρ. μέτρα, ἤτοι 14 στρέμματα 593 τ. μέτρ. καὶ 182 χιλιοστὰ τοῦ τ. μετρ.

241) Ποῖον εἶναι τὸ βάρος 5 λιτρῶν ἐλαίου, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 0,915;

Λύσις.— Ἐὰν εἶχεν εἰδικὸν βάρος 1, θὰ εἶχε βάρος 5 χιλιογράμμων, ἐπειδὴ δὲ ἔχει 0,915 εἰδ. βάρος, πόσον βάρος θὰ ἔχῃ;

$\frac{1\ \text{εἰδ. βάρ.}}{0{,}915}\quad \frac{5\ \text{χιλιογραμ.}}{X}$ (4,575 χιλιογρ.)

24... ς ἐργοστάσιόν τι ἐργάζονται 8 ἄνθρωποι, οἱ ὁποῖοι καταναλίσκουν εἰς 10 ἡμέρας 216 λίτρας ὕδατος, τὸ ὁποῖον πληροῖ δοχεῖον κυβικόν, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος εἶ... ἀπὸ 0,6 τοῦ μέτρου. Ζητεῖται ποίου πλάτους πρέπει νὰ χεῖα ἔχοντα μῆκος 1,4 τοῦ μέτρου καὶ ὕψος 0,85 τοῦ μέτρου διὰ νὰ πληρωθῶσιν ὕδατος, τὸ ὁποῖον ἀρκεῖ διὰ 50 ἀνθρώπους ἐπὶ 20 ἡμέρας.

$$\frac{8^{\text{ἀνθ.}}}{50}\quad \frac{10^{\text{ἡμ.}}}{20}\quad 216^{\text{λιτ.}}\quad \frac{1^{\text{δοχ.}}}{6}\quad \frac{0,6^{\text{μ. μηκ.}}}{1,4}\quad \frac{0,6^{\text{πλατ.}}}{X}\quad \frac{0,6^{\text{ὕψ.}}}{0,85}$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν 0,378. . . μετρ. πλάτους.

Προβλήματα τοῦ τόσον τοῖς (%) ἢ τοῖς χιλίοις (‰)

Σημείωσις.—Τῆς μεθόδου τοῦ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις γίνεται χρῆσις εἰς πλείστας περιπτώσεις, ὧν τινας ἀναγράφομεν ἀμέσως κατωτέρω καὶ ἐφ' ὧν θέτομεν διαφόρους ἐφαρμογάς.

Αον Κέρδη καὶ ζημίαι.

243) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 4450,50 δρχ., μεταπωλήσας δὲ ταῦτα ἐκέρδισε 10 %, πόσον εἶναι τὸ κέρδος αὐτοῦ;

(445,05 δρχ.)

Παρατήρησις.—Ἐπειδὴ ζητοῦμεν νὰ λάβωμεν 10 % ἐπὶ τῶν 4450,50δρχ. ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὰ 0,10 τῶν 4450,50 δρχ. Τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ τούτοις ὅμοια δύνανται νὰ λυθῶσι καὶ δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

244) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα καὶ ἐκέρδισεν ἐξ αὐτῶν 10 %, τὸ ὅλον του δὲ κέρδος ἦτο 445,05 δραχ. Ζητεῖται πόσον τοῦ ἐκόστιζον τὰ ἐμπορεύματα. (4450,50 δρχ.)

Παρατήρησις.—Ἐπειδὴ ζητοῦμεν τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ἔδωκε κέρδος 445,05 δρχ. πρὸς 10 %, ἤτοι τὸ ποσὸν τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{10}{100}$ εἶναι 445,05 δρχ., διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ παρόμοια δύνανται νὰ λυθῶσι καὶ διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

245) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 4895,55 δρχ. καὶ ἐκέρδισε 10 %, ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς των ἀξίας. Ζητεῖται πόσον ἐκέρδισεν.

$$\left(10\times\frac{4895,55}{110}=445,05\ \text{δραχ.}\right)$$

πορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα καὶ ἐκέρδισε 10 %

4495,55
4450,5
0445,05

ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτῶν, τὸ ὅλον του δὲ κέρδος ἦτο 445,05 δραχ. Πόσον ἐπώλησε τὰ ἐμπορεύματα;

$$\left(110\times\frac{445,05}{10}=4895,55\,\text{δραχ.}\right)$$

247) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 4450,50 δραχ. καὶ θέλει νὰ κερδίσῃ 10 %, πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ αὐτά;

$$\left(110\times\frac{4450,5}{100}=4895,55^{\text{δρχ.}}\text{ ἢ καὶ } 4450,5+4450,5\times0,10\right)$$

248) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 4895,55$^{\text{δρχ.}}$ καὶ ἐκέρδισε 10 % ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς των ἀξίας, πόσον ἐκόστιζον εἰς αὐτὸν τὰ ἐμπορεύματα

$$\left(100\times\frac{4895,55}{110}=4450,50^{\text{δρχ.}}\right)$$

249) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἀντὶ 4895,55$^{\text{δρχ.}}$ ἐμπορεύματα τὰ ὁποῖα εἶχον κοστίσῃ εἰς αὐτὸν 4450,50$^{\text{δρχ.}}$ Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε; (10 %)

250) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα καὶ ἐζημιώθη 10 %, ἡ ὅλη του δὲ ζημία ἦτο 445,05$^{\text{δρχ.}}$ πόσον ἐκόστιζον εἰς αὐτὸν τὰ ἐμπορεύματα;

$$\left(445,05\times\frac{100}{10}=4450,50^{\text{δρχ.}}\right)$$

251) Ἔμπορός τις ἐπώλησε ἐμπορεύματα ἀντὶ 4005,45$^{\text{δρχ.}}$, ἐζημιώθη δὲ ἐκ τῆς ἀξίας των 10 %, πόση ἦτο ἡ ὅλη του ζημία;

Λύσις. Εἰς κάθε 90$^{\text{δρχ.}}$ (ἐκ τῶν 4005,45$^{\text{δρχ.}}$ ἔχει ζημιωθῇ 10$^{\text{δρχ.}}$ εἰς τὰς 4005,45$^{\text{δρχ.}}$ πόσον ἐζημιώθη;

$$\left(10\times\frac{4005,45}{90}=445,05^{\text{δρχ.}}\right)$$

252) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 4005,45$^{\text{δρχ.}}$, ἐζημιώθη δὲ 10 % πόσον ἐκόστιζον εἰς αὐτὸν τὰ ἐμπορεύματα;

$$\left(100\times\frac{4005,45}{90}=4450,50^{\text{δρχ.}}\right)$$

253) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 4450,50$^{\text{δρχ.}}$ συνήνεσε δὲ ἔπειτα νὰ ἐκπέσῃ ἐπ' αὐτῶν 10 %, πόσα δικαιοῦται νὰ λάβῃ;

$$\left(90\times\frac{4450,50}{100}=4005,45^{\text{δρχ.}}\text{ ἢ καὶ } 4450,50-4450,50\times0,10=4005,45^{\text{δρχ.}}\right).$$

254) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα μὲ ζημίαν 10 %, ἡ ὅλη του ζημία ἦτο 445,05. Ζητεῖται πόσα εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως.

Λύσις. Εἰς κάθε 10δρχ. (ἐκ τῶν 445,05δρχ.) θὰ ἀντιστοιχῇ εἴσπραξις 90δρχ., εἰς τὰς 445,05δρχ. πόση εἴσπραξις ἀντιστοιχεῖ;

$$\left(90 \times \frac{445,05}{10} = 4005,45^{\text{δρχ.}}\right)$$

255) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 4005,45δρχ., ἐκόστιζον δὲ εἰς αὐτὸν 4450,50δρχ. πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐζημιώθη;

(10 %)

Λύσις. Ἡ διαφορὰ 4450,50δρχ.—4005,45δρχ., ἤτοι 445,05δρχ., εἶναι ζημία ἐπὶ κεφαλαίου 4450,50δρχ. Ἄρα ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀντιστοιχεῖ ζημία 10 δραχμῶν. $\left(445,05 \times \frac{100}{4450,50} = 10 \text{ δραχμάς}\right)$

Βον Ἔκπτωσις ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων.

Ἡ ἔκπτωσις ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων ἐν Ἑλλάδι καθὼς καὶ εἰς πλείστας ἐμπορικὰς χώρας γίνεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 100, ἐν ᾧ ἀλλαχοῦ, ὡς ἐν Ἀμβούργῳ καὶ Λονδίνῳ, γίνεται ἐκ τοῦ 100 ηὐξημένου κατὰ τὴν ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν συμπεφωνημένην ἔκπτωσιν.

256) Ἠγόρασέ τις ἐμπορεύματα ἀξίας 408δρχ., γίνεται δὲ εἰς αὐτὸν ἔκπτωσις 2 %, πόσα θὰ πληρώσῃ;

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὴν ἔκπτωσιν, ἥτις εἶναι $408 \times 0,02$, ἤτοι 8,16δρχ. Ταύτην δὲ ἀφαιροῦμεν ἐκ τῶν 408δρχ., ὅτε εὑρίσκομεν ὅτι θὰ πληρώσῃ 399,84δρχ. Ἠδυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν ἀπ' εὐθείας τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ πληρώσωμεν καὶ ὅπερ εἶναι $408 \times 0,98$, ἤτοι 399,84δραχμαί. Ἐν Λονδίνῳ ὅμως θὰ ἐπληρώνομεν $100 \times \frac{408}{102}$, ἤτοι 400δρχ.

257) Ἐπληρώσαμεν 399,84δρχ. πρὸς ἀγορὰν ἐμπορευμάτων, ἀφ' οὗ μᾶς ἔκαμον ἔκπτωσιν 2 %. ποία εἶναι ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων;

$$\left(100 \times \frac{399,84}{98} = 408^{\text{δρχ.}}\right)$$

408

Ἐν Λονδίνῳ ὅμως ἡ ἀξία αὐτῶν θὰ εἶναι

$$\left(102\times\frac{399{,}84}{100}=407{,}8364,\text{ ἤτοι } 407^{\text{δρχ.}}\ 84^{\text{λεπ.}} \text{ περίπου}\right)$$

Γον Ἀμοιβὴ ἐπὶ νομισμάτων χρυσοῦ καὶ ἀργύρου.

*258) Τὸ εἰκοσάφραγκον τιμᾶται ἐν τῷ χρηματιστηρίῳ 30,50δρχ· ἔδωκέ τις δὲ 4697,61 δραχ. μετ' ἀμοιβῆς 26,80 δραχ. εἰς ἑκάστην χιλιάδα δραχμῶν. Ζητεῖται πόσα εἰκοσάφραγκα ἠγόρασε.

Λύσις.—Ἐπειδὴ ἐκ τῶν 1026,80 δραχ. θὰ χρησιμοποιήσωμεν 1000 δρ. πρὸς ἀγορὰν εἰκοσαφράγκων, ἐκ τῶν 4697,61 δρ. θὰ χρησιμοποιήσωμεν $1000\times\frac{4697{,}61}{1029{,}80}$, καὶ ἐπειδὴ τὸ εἰκοσάφραγκον τιμᾶται 30,50 δραχ., μὲ τὰς $1000\times\frac{4697{,}61}{1026{,}80}$ θὰ ἀγοράσωμεν εἰσοσάφραγκα $\frac{1000\times4697{,}61}{30{,}50\times1026{,}80}$, ἤτοι 150 εἰκοσάφραγκα.

*259) Πόσον πρέπει νὰ πληρώσωμεν διὰ 185 δράμια ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,900, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ καθαρὸς ἄργυρος τιμᾶται 40 λεπτὰ τὸ δράμιον καὶ ὅτι πληρώνομεν διὰ προμήθειαν 7,50 δραχ. δι' ἑκάστην χιλιάδα δραχμῶν ;

Λύσις.—Καθαρὸς ἄργυρος εἰς τὰ 185 δράμ. εἶναι $185\times0{,}9$, καὶ ἐπειδὴ τὸ δράμιον τιμᾶται 40 λεπτά, ἤτοι 0,40 δραχ., ἄρα ἡ τιμή του θὰ εἶναι $185\times0{,}9\times0{,}40$ δραχ. καὶ ἐπειδὴ διὰ 1000 δραχ. πρέπει νὰ δώσωμεν 1007,50 δραχ., ἄρα διὰ δραχ. $185\times0{,}9\times0{,}40$ θὰ δώσωμεν $\frac{1007{,}50\times185\times0{,}9\times0{,}40}{1000}$, ἤτοι 67,09... δραχ.

Δον Ἀσφάλειαι.

Ἀσφάλιστρον λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνομεν, ὅπως ἐν περιπτώσει καταστροφῆς τοῦ ἀσφαλισθέντος ἀντικειμένου πληρωθῶμεν τὸ ἀσφαλισθὲν ποσόν.

Σημείωσις.—Τὸ ἀσφάλιστρον ὁρίζεται πρὸς τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις ἐπὶ τοῦ ἀσφαλισθέντος ποσοῦ καὶ πληρώνεται καθ' ὡρισμένας ἐποχάς, ἐκτὸς ἐπὶ τῶν θαλασσίων ἀσφαλειῶν, δι' ἃς ὑπογράφεται συνήθως ὑποσχετικόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται μετὰ τὴν καλὴν ἢ κακὴν εἴδησιν, δηλ. τὴν εἴδησιν τῆς ἀφίξεως ἢ τῆς καταστροφῆς. Ἐν τῇ τελευταίᾳ δὲ ταύτῃ περιπτώσει ὁ ἀσφαλιστὴς συμψηφίζει τὸ ὑποσχετικὸν ποσὸν ἀπέναντι τοῦ ἀσφαλισθέντος ποσοῦ.

260) Ἄνθρωπός τις ἠσφάλισε τὰ διάφορα ἔπιπλα τῆς οἰκίας του ἀντὶ 50000$^{δρχ.}$ πρὸς 2,15$^{δρχ.}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις, τὴν δὲ οἰκίαν του ἀντὶ 80000$^{δρχ.}$ πρὸς 0,75$^{δρχ.}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις, πόσον θὰ πληρώσῃ δι' ἀσφάλιστρα ;

(διὰ τὰ ἔπιπλα $2,15 \times \frac{50000}{1000} = 107,50^{δρχ}$ —διὰ τὴν οἰκίαν 60$^{δρχ.}$)

261) Ἐπλήρωσέ τις 10,50$^{δρχ.}$ δι' ἀσφάλιστρα τοῦ καταστήματός του τὸ ὁποῖον εἶχεν ἀσφαλίσῃ ἀντὶ 3000$^{δρχ.}$ πρὸς 1,40$^{δρχ.}$ καθ' ἑξαμηνίαν ἐπὶ τοῖς χιλίοις. Ζητεῖται διὰ πόσα ἔτη ἠσφάλισε τὸ κατάστημά του. (1$^{ἔτ.}$ 3$^{μην.}$)

262) Ἀντὶ πόσου ποσοῦ πρέπει ν' ἀσφαλίσῃ τις τὴν οἰκίαν του πρὸς 1,50$^{δρχ.}$ $^0/_0$. ἵνα ἐν περιπτώσει δυστυχήματος λάβῃ 24625 δραχμάς ;

Λύσις. Ἐπειδὴ εἰς 100$^{δρχ.}$ θὰ λαμβάνῃ 98,50$^{δρχ.}$, ἄρα διὰ νὰ λάβῃ 24625$^{δρχ.}$ πρέπει νὰ ἔχῃ ἀσφαλίσῃ τὴν οἰκίαν του $100 \times \frac{24625}{98,5}$ ἤτοι 25000 δραχμάς.

263) Ἐπλήρωσέ τις δι' ἀσφάλιστρα τοῦ πλοίου του 100$^{δρχ.}$ πρὸς 2,50 $^0/_0$, πόσον εἶχεν ἀσφαλίσῃ τὸ πλοῖόν του ; (4000$^{δρχ.}$)

Ε$^{ον.}$ Ζητήματα ἐπὶ τῶν δημοσίων χρεωγράφων κτλ.

264) Δημόσια χρεώγραφα λέγονται οἱ τίτλοι, δι' ὧν ἡ Κυβέρνησις ἀναγνωρίζει τὸ χρέος της εἰς τοὺς κατέχοντας αὐτούς.

265) Τιμὴ τοῦ δανείου λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον δίδομεν εἰς ἑκάστην ἑκατοντάδα δραχμῶν, τὰς ὁποίας ἀναγνωρίζει, ὅτι ὀφείλει ἡ Κυβέρνησις καὶ ἐφ' ὧν ὑπόσχεται ὡρισμένον τόκον.

Σημείωσις. Ἡ τιμὴ τοῦ δανείου λέγεται, ὅτι εἶναι *ὑπὲρ τὸ ἄρτιον*, ὅταν εὑρίσκωνται πρόσωπα καὶ δίδωσιν ὑπὲρ τὰς 100 δραχ. δι' ἑκάστην ἑκατοντάδα δραχμῶν, τὰς ὁποίας ἀναγνωρίζει, ὅτι ὀφείλει ἡ Κυβέρνησις καὶ ἐφ' ὧν ὑπόσχεται τόκον τινά, λέγεται δὲ ἡ τιμὴ δανείου *ὑπὸ τὸ ἄρτιον*, ὅταν δίδωσιν ὀλιγωτέρας τῶν 100 δραχ., εἰς τὸ *ἄρτιον* δὲ λέγεται, ὅταν δίδωσιν 100 δραχμάς. Οὕτως *ἡ τιμὴ* τῶν δημοσίων χρεωγράφων παρίσταται παρ' ἅπασι τοῖς Ἔθνεσι δι' ἀριθμοῦ μείζονος ἢ ἐλάσσονος τοῦ 100, αἱ δὲ ἀγοραπωλησίαι τῶν πλείστων χρεωγράφων δὲν σημειοῦνται διὰ τοῦ κεφαλαίου των, ἀλλὰ διὰ τοῦ ποσοῦ τοῦ ἐτησίου αὐτῶν εἰσοδήματος τοῦ πληρωνομένου παρὰ τῶν κυβερνήσεων.

266) Ἡ τιμὴ δανείου τινὸς εἶναι 86,25 δρχ., δίδει δὲ τὸ χρεώγραφον 100δρχ. ἐτήσιον εἰσόδημα πρὸς 3 %. Ζητεῖται ποία εἶναι ἡ νῦν ἀξία τοῦ χρεωγράφου.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἰς κάθε 86,25δρχ. θὰ λαμβάνῃ ὁ κάτοχος τοῦ χρεωγράφου παρὰ τῆς κυβερνήσεως 3 δρχ., διὰ νὰ λάβῃ 100 δρχ. πρέπει νὰ δώσῃ διὰ τὸ χρεώγραφον $86,25 \times \frac{100}{3}$, ἤτοι 2875 δραχ.

267) Ἔχει τις χρεώγραφα ἀξίας 15000,50 δρχ., ἡ τιμὴ δὲ τούτων εἶναι 105,50 δρχ., πόσον ἐτήσιον εἰσόδημα λαμβάνει παρὰ τῆς κυβερνήσεως, ὅταν τὸ δάνειον ἔχῃ γείνῃ πρὸς 5 % ;

Λύσις.—Ἐπειδὴ διὰ 105,50 δρχ. θὰ λαμβάνῃ παρὰ τῆς κυβερνήσεως 5 δραχ., διὰ 15000,50 δραχ. θὰ λάβῃ $5 \times \frac{15000,50}{105,50}$, ἤτοι 710,92δραχ...

268) Ποῖον τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν τῶν χρεωγράφων τὰ ὁποῖα τιμῶνται 82,50 πρὸς 5 %.

$$\left(5 \times \frac{100}{82,50}, \text{ ἤτοι } 6,06^{\text{δρχ.}}\ \%\right)$$

296) Εἰς ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἀγοράσῃ τις χρεώγραφα τῶν 8 % ὅταν ἀρκῆται εἰς $6\,^1/_2$ % ;

$$\left(100 \times \frac{8}{6\,^1/_2}, \text{ ἤτοι } 123,07^{\text{δρχ.}}\right)$$

270) Τὸ φράγκον τιμᾶται 1,40 δρχ. χαρτίνας, πόσον τοῖς ἑκατὸν ζημιοῦνται τὰ χάρτινα νομίσματα ;

Λύσις.—Ἐπειδὴ τὸ 1 φράγκον τιμᾶται 1,40 δραχ., ἄρα ἡ μία δραχμὴ τιμᾶται $\frac{1}{1,40}$, ἤτοι $\frac{10}{14}$ τοῦ φράγκου, δι' ὃ ζημιοῦνται τὰ χάρτινα νομίσματα $\frac{4}{14}$ %, ἤτοι 0,35... %, δηλ. εἶναι κατὰ $\frac{4}{14}$ % ὑπὸ τὸ ἄρτιον.

271) Ὅταν τὰ χρυσᾶ νομίσματα λαμβάνωσιν εἰς κράτος τι τιμὴν 200 % ὡς πρὸς τὰ χάρτινα, πόσον τοῖς ἑκατὸν ζημίαν ὑφίστανται τὰ χάρτινα ;

Λύσις.—Ἐπειδὴ δι' 100 δρχ. χρυσᾶς θὰ δώσωμεν ἐπὶ πλέον 200 δρχ. χαρτίνας, ἄρα αἱ 100 δρχ. χρυσαῖ τιμῶνται 300 δρχ. χαρτίνας, δι' ὃ αἱ 100 δραχμαὶ χάρτιναι τιμῶνται $100\times\frac{100}{300}$, ἤτοι $33\frac{1}{3}$ δρχ. χρυσᾶς, ἄρα ζημιοῦνται $66\frac{2}{3}$ % τὰ χάρτινα νομίσματα.

Σημείωσις.—Ὅταν τὰ χρυσᾶ νομίσματα, ὡς πρὸς τὰ χάρτινα, ἔχωσιν ἀξίαν ἐπὶ πλέον 100 %, 200 %, 300 % κτλ., δηλ. διπλασίαν, τριπλασίαν κτλ. τότε τὰ χάρτινα νομίσματα ἔχουσιν ἀξίαν τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ., τῆς εἰς τὸ ἄρτιον ἀξίας των, ἄρα ζημιοῦνται ταῦτα κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ κτλ. τῆς εἰς τὸ ἄρτιον ἀξίας των.

ϛον Ἐμπορικὰ ἔξοδα, μεσιτεία, προμήθεια κτλ.

272) Ποία εἶναι ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων μετὰ τῆς προμηθείας $\frac{3}{4}$ %, τὰ ὁποῖα ἠγοράσθησαν ἀντὶ 3248 δρχ. ἄνευ προμηθείας;

$\left(100\frac{3}{4}\times\frac{3248}{100}=3272,26\right.$ δρχ. ἢ καὶ ἄλλως $\left.3248+\frac{3}{4}\times\frac{3248}{100}\right)$

273) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 23371,26 δρχ. σὺν τῇ προμηθείᾳ 2 %, πόσον κοστίζουν ἄνευ τῆς προμηθείας;

$$\left(100\times\frac{23371,26}{102}=22913 \text{ δρχ.}\right)$$

274) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 22915 δραχ., γίνεται δὲ εἰς αὐτὸν ἔκπτωσις 2 %, πόσα θὰ πληρώσῃ;

($22915\times0,98=22456,70$ δρ. ἢ καὶ ἄλλως $22915-22915\times0,02$)

275) Συναλλαγματική τις ἐξωφλήθη ἀντὶ 1500,75 δρχ. μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ½ % λόγῳ προμηθείας, ποία ἦτο ἡ ἀξία τῆς συναλλαγματικῆς;

$$\left(100\times\frac{1500,75}{99\,^1/_2}=1508,29 \text{ δρχ.}\right)$$

276) Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ τις διὰ φορτίον 45500 χιλιογράμμων πρὸς 46 δρ. τὸν τόννον καὶ ἐπὶ πλέον 10 % λόγῳ ἀβαρίας;

Λύσις. Ἐπειδὴ δι' ἕνα τόννον θὰ πληρώσῃ 46 δρχ. $+46\times0,10$, ἤτοι 50,6 δρχ., ἄρα διὰ τοὺς 45,500 τόννους θὰ πληρώσῃ $45,5\times50,6$, ἤτοι 2302,30 δραχμάς.

277) Ἐπλήρωσέ τις 2302,30 δρχ. διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ φορ-

τίου του, τὸ ὁποῖον εἶχε συμφωνήσῃ 0,46 δραχ. τὸ κοιλόν. Ἀλλὰ διὰ τῶν 2302,30 δρχ. ἐπλήρωσεν ἐπὶ πλέον καὶ 10 $^0/_0$ ἐπὶ τοῦ ὅλου ναύλου διὰ τὰς ζημίας, ἃς ὑπέστη τὸ πλοῖον κατὰ τὸν πλοῦν. Ζητεῖται ἐκ πόσων κοιλῶν συνίστατο τὸ φορτίον.

Λύσις. Ἐπειδὴ δι' ἓν κοιλὸν θὰ πληρώσῃ $0,46^{\text{δρχ.}}+0,46\times0,10$, ἤτοι $0,506^{\text{δρχ.}}$, ἄρα διὰ νὰ πληρώσῃ $2302,30^{\text{δρχ.}}$ θὰ ἦσαν κοιλὰ 2302,30:0,506, ἤτοι 4550 κοιλά, ἤτοι 455 τόννοι.

Ζον Φύρα ἐπὶ τοῦ βάρους τῶν ἐμπορευμάτων.

278) Φύρα λέγεται πᾶσα ἔκπτωσις, τὴν ὁποίαν κάμνομεν ἐκ τοῦ βάρους ἐμπορεύματός τινος, εἴτε λόγῳ τῆς συσκευῆς εἰς ἣν ἐγκλείεται τὸ ἐμπόρευμα εἴτε λόγῳ τῆς κακῆς καταστάσεως τοῦ ἐμπορεύματος.

Σημείωσις. Ἡ φύρα αὕτη ὑπολογίζεται ἐνίοτε πρὸς τόσον τοῖς ἑκατόν.

279) Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος 1562 χιλιογράμμων καὶ 500 γραμμαρίων ἐμπορεύματος, ἐκ τοῦ ὁποίου γίνεται ἔκπτωσις λόγῳ φύρας 2 $^0/_0$;

($1562,5\times0,98 = 1531,250^{\text{χιλ.}}$ ἢ καὶ $1562,500^{\text{χιλ.}} - 1562,5 \times 0,02$).

280) Ποῖον εἶναι τὸ ἀκάθαρτον βάρος ἐλαιῶν, τῶν ὁποίων τὸ βάρος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν 17 $^0/_0$ λόγῳ τοῦ περιεχομένου ἐν αὐταῖς ὕδατος καὶ τῆς συσκευῆς εἶναι 1660 χιλιόγραμμα;

Λύσις. Ἐπειδὴ εἰς 100 χιλιόγραμμα ἀκαθάρτου βάρους ἀντιστοιχοῦσιν 83 χιλιόγραμ. καθαροῦ, εἰς 1660 χιλιογραμ. καθαροῦ βάρους θ' ἀντιστοιχῶσιν $100\times\frac{1660}{83}$, ἤτοι 2000 χιλιόγραμμα.

Ηον Διανομὴ μερισμάτων.

281) Τὰ μερίσματα πτωχεύσεως, καθὼς καὶ τὰ μερίσματα ἑταιρείας ὑπολογίζονται ἐνίοτε πρὸς τόσον τοῖς ἑκατόν.

282) Πτωχεύσας τις ὤφειλεν εἰς διαφόρους πιστωτὰς 120500,50 δρχ., συνεβιβάσθη δὲ 12 $^1/_2$ $^0/_0$, ποία εἶναι ἡ ζημία τῶν πιστωτῶν;

$$\left(87\,{}^1/_2\times\frac{120500.50}{100}=105437,93^{\text{δραχ.}}\right)$$

283) Εἰς πτώχευσίν τινα ἡ ζημία τῶν πιστωτῶν εἶναι 45 %, εἷς δὲ ἐκ τῶν πιστωτῶν ἔλαβεν ἐκ τῶν διαφόρων πιστώσεών του 5500,55 δραχ., πόσον ἦτο τὸ ὁλικὸν ποσὸν τῶν πιστώσεων αὐτοῦ;

$$\left(100\times\frac{5500,55}{55}=10001 \text{ δραχ.}\right)$$

284) Ἑταιρεία τις κατὰ τὴν πρώτην τριμηνίαν ἐκέρδισεν 145475,80 δραχ., ἐξώδευσε δὲ πρὸς συντήρησιν τοῦ προσωπικοῦ κτλ.: 5475,80 δρχ., τὸ δὲ κεφάλαιόν της εἶναι 3,500,000 δρχ. πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν μέρισμα θὰ δώσῃ κατὰ τὴν τριμηνίαν ταύτην;

$$\left(140000\times\frac{100}{3500000}=4 \text{ δρχ. τὴν τριμηνίαν, ἤτοι } 16\,\% \text{ τὸ ἔτος}\right)$$

Προβλήματα τόκου καὶ ὑφαιρέσεως.

285) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 5000 ὀκάδ. σίτου πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ κατ' ὀκᾶν τὸν σῖτον μετὰ 4 μῆνας διὰ νὰ κερδίσῃ 15 %; (42 λεπτά)

286) Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον πρὸς 8 % διπλασιάζεται;

Λύσις.—Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ὁποιονδήποτε κεφάλαιον καὶ ζητοῦμεν τὸν χρόνον, καθ' ὃν δίδει τοῦτο τόκον ἴσον πρὸς τὸ κεφάλαιον.

$$\left(\frac{\text{Κτοκ.}\times 100}{\text{Κκεφ}\times 8\,\%}=12\,^1/_2\right)$$

Κανών.—*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον καθ' ὃν κεφάλαιόν τι διπλασιάζεται, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ 100 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου.*

287) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμενον κεφάλαιόν τι διπλασιάζεται μετὰ 4 ἔτη;

Λύσις.—Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ὁποιονδήποτε κεφάλαιον καὶ ζητοῦμεν τὸ ἐπιτόκιον ὑπὸ τὸ ὁποῖον δίδει τοῦτο τόκον εἰς 4 ἔτη ἴσον πρὸς τὸ ληφθὲν κεφάλαιον.

$$\left(\frac{\text{Κτοκ.}\times 100}{\text{Κκεφ.}\times 4 \text{ ἔτ.}}=25\,\%\right)$$

Κανών.—*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον ὑπὸ τὸ ὁποῖον κεφάλαιόν τι διπλασιάζεται εἰς ὡρισμένον χρόνον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ 100 διὰ τοῦ χρόνου τούτου (εἰς ἔτη).*

288) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἔλαιον, τὸ ὁποῖον μετεπώλησε μετὰ 4 μῆνας καὶ ἐκέρδισε 15 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, κερδίσας οὕτω 30 %. Ζητεῖται πόσον ἠγόρασέ τὸ ἔλαιον. (1,50$^{δραχ.}$)

289) Ἐδανείσθη τις 5500$^{δραχ.}$ πρὸς 8 % καὶ ἐπλήρωσε μετά τινα χρόνον πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ δανείου 7250,50$^{δραχ.}$ πόσον χρόνον διήρκεσε τὸ δάνειον ; (3$^{ἔτ.}$ 11$^{μῆν.}$ 22$^{ἡμ.}$... δηλ. 23$^{ἡμ.}$)

290) Ἐτόκισέ τις 5000$^{δραχ.}$ πρὸς 5 %, ἑτέρας δὲ 4000$^{δραχ.}$ πρὸς 4 $^1/_2$ %. Ζητεῖται πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔπρεπε νὰ τοκίσῃ αὐτὰς ὁμοῦ, διὰ νὰ ἐλάμβανε μετὰ 4 μῆνας τὸν αὐτὸν τόκον.

Λύσις. Εὑρίσκομεν ἐπὶ 4 μῆνας τὸν τόκον τῶν 5000$^{δρχ.}$ πρὸς 5 % καὶ τὸν τόκον τῶν 4000$^{δρχ.}$ πρὸς 4 $^1/_2$ %. Ἔπειτα δὲ ἀθροίζοντες τοὺς τόκους τούτους ζητοῦμεν πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 9000$^{δρχ.}$ ἤθελε δώσῃ τὸν τόκον τοῦτον εἰς 4 μῆνας ;

(4,77...$^{δρχ.}$ %)

291) Πρὸ πόσου χρόνου ἐγένετο ἡ ἐξόφλησις γραμματίου 500$^{δρχ.}$, προεξοφληθέντος μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἀντὶ $480\frac{20}{26}$$^{δρχ.}$ πρὸς 12 %;

(πρὸ 4^{μηνῶν})

292) Πρὸ πόσου χρόνου ἐγένετο ἡ ἐξόφλησις γραμματίου 500$^{δρχ.}$ ὅταν τοῦτο προεξωφλήθη ἀντὶ 480$^{δρχ.}$ πρὸς 12 % μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ; (4 ^{μῆνας})

293) Ἐδανείσθη τις πρὸ 5$^{ἐτ.}$ 4$^{μην.}$ πρὸς 10 % ποσόν τι χρημάτων· ἐπλήρωσε δὲ σήμερον πρὸς ἐξόφλησιν αὐτοῦ 12000$^{δρχ.}$, ἀφ' οὗ τῷ ἐχάρισαν τόκον 10$^{μην.}$ Ζητεῖται πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον.

(8275,86$^{δρχ....}$)

Λύσις. Κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὸ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τόκον 4$^{ἐτ.}$ 6$^{μην.}$ καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἐπὶ τῶν προβλημάτων τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ὅταν ζητῆται ἡ πραγματικὴ ἀξία.

294) Ἐδανείσθη τις 500$^{δρχ.}$ πρὸς 6 % διὰ 4 $^{μην.}$, τοῦ ἐκράτησαν δὲ προκαταβολικῶς ἐκ τῶν 500$^{δρχ.}$ τὸν τόκον αὐτῶν, πόσον τοῖς ἑκατὸν τοῦ ἔρχονται τὰ δανεισθέντα χρήματα ; (6,12$^{δρχ...}$)

295) Ἐτόκισέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτων του εἴς τινα, εἰς ἕτερον

δὲ ἐτόκισεν ἴσον ποσὸν πρὸς 2 % ἐπὶ πλέον, ἔλαβε δὲ ὡς τόκον 80$^{δρχ.}$ διὰ 4$^{μην.}$ περισσοτέρας ἢ ἀπὸ τὸν πρῶτον. Ζητεῖται πόσα χρήματα εἶχε δανείση. (24000$^{δρχ.}$)

Λύσις.—Ζητοῦμεν τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον εἰς 4$^{μην.}$ πρὸς 2 % ἔδωκε τόκον 80$^{δρχ.}$ Τοῦτο δὲ τὸ διπλασιάζομεν.

296) Ἔμπορός τις ἐδανείσθη μὲ 2 ½ % ὀλιγώτερον ἢ πρότερον καὶ ἐπλήρωσε χρέος του, ἤδη δὲ εἰς ἑκάστην ἑξαμηνίαν πληρώνει 100$^{δρχ.}$ ὀλιγώτερον τόκον ἢ πρότερον. Ζητεῖται πόσα ἐδανείσθη (8000$^{δρχ.}$)

297) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ὕφασμα πρὸς 1,60$^{δρχ.}$ τὸν πῆχυν μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς του, ἐκέρδισε δὲ 12 ½ % ἐπὶ τῆς ἀξίας ἑκάστου πήχεως. Ζητεῖται ἡ ἀξία τῶν 100$^{πήχ.}$

(142,22$^{δρχ.}$...)

298) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἢ μεταξὺ τῆς πραγματικῆς ἀξίας καὶ τῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ἐξωτερικῶς 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 % εἶναι 1,25$^{δρχ.}$, ποία εἶναι ἡ ὀνοματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου; (525^{δραχμάς}).

$$\left(\frac{1{,}25^{τοκ.}\times 100}{\frac{5}{12}\times 12\ \%}=25^{ἐσ.ὑφ.}\ \text{ἔπειτα}\ \frac{25^{τοκ.}\times 100}{\frac{5}{12}\times 12\ \%}=500^{πραγ.\ ἀξ.}\ \text{ἄρα}\right.$$

ὀνοματικὴ ἀξία θὰ εἶναι $500+25=525^{δραχ.}$).

299) Ἔχει τις δύο συναλλαγματικάς, τὴν μὲν μίαν ἐκ δραχμῶν 1050 λήγουσαν μετὰ 5 μῆνας, τὴν δὲ ἄλλην ἐκ δραχμῶν 412 λήγουσαν μετὰ 3 μῆνας. Ζητεῖ δὲ ν' ἀνταλλάξῃ ταύτας πρὸς μίαν συναλλαγματικὴν ἐκ δραχμῶν 1050$^{δρχ.}$ + 412$^{δρχ.}$, ἤτοι 1462$^{δρχ.}$, πότε θὰ λήγῃ αὕτη τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 12 %;

Λύσις.—Εὑρίσκομεν πρῶτον τὰς πραγματικὰς ἀξίας τῶν δύο συναλλαγματικῶν, τὰς ὁποίας, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰς 1462$^{δραχ.}$, ἔχομεν τὸν τόκον τῶν πραγματικῶν τούτων ἀξιῶν πρὸς 12 %. Γνωστῆς δὲ οὔσης ἤδη τῆς πραγματικῆς ἀξίας τῶν 1462$^{δρχ.}$ πρὸς 12 % καὶ τοῦ τόκου ταύτης, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸν ζητούμενον χρόνον.

$$\left(\frac{62\times 100}{1400\times 12}=4^{μην.}\frac{3}{7},\ \text{ἤτοι}\ 4^{μην.}\ 13^{ἡμ.}\right).$$

300) Ἔχει τις τρεῖς συναλλαγματικάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἐκ 1000 δραχ. λήγει μετὰ 8 μῆνας, ἡ ἄλλη ἐκ 2000 δραχμῶν λήγει μετὰ 4 μῆνας, καὶ ἡ τρίτη ἐκ 5000 δραχ. λήγει μετὰ 16 μῆνας. Ζητεῖ δὲ νὰ ἐκδώσῃ συναλλαγματικὴν πληρωτέαν μετὰ 1ἔτ. 3μην. πρὸς 8 %, πόσου ποσοῦ θὰ εἶναι ἡ συναλλαγματικὴ αὕτη ;

Λύσις. — Ἐπειδὴ αἱ 1000δρχ. θὰ πληρωθῶσιν 7 μῆνας ἀργότερον, (δηλ. μέχρι τῆς λήξεως τοῦ 1ἔτ. 3μην.) διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πληρώσῃ τὸν τόκον 1000δρχ. διὰ 7μην. πρὸς 8 % καὶ ὅστις εἶναι 46,66δρχ. καὶ οὕτω θὰ γείνῃ 1046,66δρχ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον διὰ τὴν συναλλαγματικὴν τῶν 2000δρχ. πρέπει νὰ πληρώσῃ ἀκόμη τόκον 11μην. πρὸς 8 %, ἤτοι 146,66δρχ. καὶ οὕτω θὰ γείνῃ αὕτη 2146,66δρχ. ἡ δὲ τρίτη συναλλαγματικὴ τῶν 5000δρχ. ἐπειδὴ θὰ λήξῃ μετὰ ἕνα μῆνα, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικήν της ἀξίαν πρὸ 1μην. πρὸ τῆς λήξεώς της πρὸς 8 % καὶ ἥτις εἶναι 4976,88δρχ. Ὥστε ἡ ζητουμένη συναλλαγματικὴ θὰ εἶναι 1046,66δρχ. + 2146,66δρχ. + 4966,88δρχ. ἤτοι 8160,20δρχ.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ τελευταία ὑποδιαίρεσις τῆς δραχμῆς εἶναι τὸ *λεπτόν*, ἤτοι τὸ *ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς*, διὰ τοῦτο καὶ οἱ εἰς τὸ πρόβλημα δεκαδικοὶ ἐλήφθησαν μέχρι τῶν ἑκατοστῶν.

Προβλήματα μερισμοῦ καὶ ἑταιρείας.

301) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 72 εἰς τέσσαρα μέρη, οὕτως ὥστε τὸ πηλίκον τῶν δύο πρώτων νὰ εἶναι $\frac{3}{4}$, τὸ δὲ πηλίκον τῶν δύο τελευταίων $\frac{5}{6}$.

Λύσις. Ἀρκεῖ νὰ μερισθῇ ὁ 72 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5 καὶ 6. (αον 12, βον 16, γον 20, δον 24)

302) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 140 εἰς τέσσαρα μέρη, οὕτως ὥστε τὸ πηλίκον τῶν δύο πρώτων νὰ εἶναι 2 $\left(\text{δηλ. } \frac{2}{1}\right)$, τὸ δὲ πηλίκον τῶν δύο τελευταίων νὰ εἶναι $\frac{1}{3}$.

(αον 40, βον 20, γον 20, δον 60)

303) Νὰ μερισθῇ ὁ $\frac{3}{4}$ εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου νὰ εἶναι $\frac{2}{3}$, τοῦ δὲ δευτέρου διὰ τοῦ τρίτου $\frac{1}{2}$.

Λύσις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου ἴσον μὲ τὰ $\frac{2}{3}$, πρέπει νὰ μερισθῇ ὁ $\frac{3}{4}$ ἀναλόγως τοῦ 2 καὶ 3 καὶ ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦ δευτέρου, ὅστις εἶναι ὁ 3, διὰ τοῦ τρίτου πρέπει νὰ εἶναι $\frac{1}{2}$, ἄρα ὁ τρίτος θὰ εἶναι $3 : \frac{1}{2}$, ἤτοι 6 (διότι, ἂν τὸ $\frac{1}{2}$ λάβωμεν ὡς διαιρέτην, ὁ ἄγνωστος τρίτος θὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ πηλίκον), Ὥστε ἀρκεῖ νὰ μοιρασθῇ ὁ $\frac{3}{4}$ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 6.

$\left(α^{ος}\frac{3}{22},\ β^{ος}\frac{9}{44},\ γ^{ος}\frac{9}{22}\right)$

304) Νὰ μοιρασθῶσι 329^{δρχ}. μεταξὺ τριῶν ἀτόμων, οὕτως ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου εἶναι πρὸς τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου ὡς 3 πρὸς 5 $\left(δηλ. \frac{3}{5}\right)$, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ δευτέρου πρὸς τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου ὡς 4 πρὸς 3 $\left(δηλ. \frac{4}{3}\right)$

(α^{ος} 84^{δρχ}., β^{ος} 140^{δρχ}., γ^{ος} 105^{δρχ}.).

305) Εὑρεῖν δύο μέρη ἀνάλογα τοῦ 100 καὶ τοιαῦτα, ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ 2 καὶ διαιρουμένου τοῦ ἑτέρου διὰ 3 νὰ εὑρίσκηται ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Λύσις. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ μοιράσωμεν τὸν 100 ἀναλόγως δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ διπλάσιον τοῦ ἑνὸς νὰ ἰσῶται μὲ τὸ τρίτον τοῦ ἑτέρου ἤ, ὅπερ ταὐτό, ὁ εἷς νὰ ἰσῶται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ διπλασίου τοῦ ἑτέρου, ἤτοι τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ ἑτέρου. Πρὸς τοῦτο λαμβάνω ἀριθμόν τινα ὁποιονδήποτε, καὶ ἔστω τὸν 2, ὅτε ὁ ἕτερος ἀριθμὸς θὰ εἶναι 2×6, ἤτοι 12, καὶ ἤδη τὸν 100 μοιράζομεν ἀναλόγως τοῦ 2 καὶ 12 καὶ οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ α^{ον} θὰ εἶναι $14\frac{2}{7}$, τὸ δὲ β^{ον} $85\frac{5}{7}$.

306) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 20 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε πολ-

πλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ 4 νὰ δίδῃ τὸ ἕτερον, δηλ. τὸ ἓν νὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἑτέρου.

(Τὸ $α^{ον}$ 4 καὶ τὸ $β^{ον}$ 16)

307) Νὰ μοιρασθῶσι $4000^{δρχ.}$ εἰς τέσσαρα ἄτομα, οὕτως ὥστε τὸ δεύτερον νὰ λάβῃ διπλάσια τοῦ πρώτου, τὸ τρίτον νὰ λάβῃ ὅσα τὰ δύο πρῶτα ὁμοῦ καὶ τὸ τέταρτον νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ τρίτου.

Λύσις. Ἂν τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου παραστήσωμεν διὰ τοῦ 1, τὸ δεύτερον θὰ λάβῃ 2, τὸ τρίτον $1+2$, ἤτοι 3, καὶ τὸ τέταρτον $3\times\frac{2}{5}$, ἤτοι $1\frac{1}{5}$, ὥστε ἀρκεῖ ἤδη τὰς $4000^{δραχ.}$ νὰ μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, $1\frac{1}{5}$.

$\left(α^{ον}\, 555^{δραχ.}\frac{5}{9},\ β^{ον}\, 1111^{δρ.}\frac{1}{9},\ γ^{ον}\, 1666^{δρ.}\frac{2}{3},\ δ^{ον}\, 666^{δρχ.}\frac{2}{3}\right)$

308) Τρεῖς περιηγηταὶ κατέθεσαν εἰς τὴν Τράπεζαν $50000^{δραχ.}$ πρὸς 6 %, ἐκ τούτων δὲ ὁ πρῶτος κατέθηκε $25000^{δραχ.}$, ὁ δεύτερος $7500^{δραχ.}$ καὶ ὁ τρίτος $17500^{δραχ.}$ Μετὰ $3^{ετ.}$ $4^{μην.}$ ἐπιστρέψαντες ἐζήτησαν νὰ μάθωσι πόσον ἔγεινε τὸ κεφάλαιόν των καὶ ἀπὸ πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος.

(Κεφ. $60000^{δρχ.}$, ὁ $α^{ος}$ $30000^{δρχ.}$, ὁ $β^{ος}$ $9000^{δρχ.}$, ὁ $γ^{ος}$ $21000^{δρχ.}$).

309) Πατήρ τις διέταξε νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῆς ἡλικίας τῶν τέκνων του, ἦτο δὲ ἡ μὲν περιουσία $30000^{δρχ.}$, ἡ δὲ ἡλικία τοῦ τρίτου ἦτο τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἡλικίας τοῦ τετάρτου, τοῦ δὲ δευτέρου τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἡλικίας τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου ὁμοῦ, τοῦ δὲ πρώτου ὅση ἦτο ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ὁμοῦ.

Λύσις.—Ἂν παραστήσωμεν τὴν ἡλικίαν τοῦ τετάρτου διὰ 1, ἡ τοῦ τρίτου θὰ εἶναι $1\times\frac{2}{5}$, ἤτοι $\frac{2}{5}$, ἡ τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι $\left(1+\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}$, ἤτοι $\frac{21}{20}$ καὶ ἡ τοῦ πρώτου θὰ εἶναι $\frac{2}{5}+\frac{21}{20}$, ἤτοι $\frac{29}{20}$.

Τὰ δὲ ἀντίστροφα τούτων εἶναι 1, $\frac{5}{2}$, $\frac{20}{21}$ καὶ $\frac{20}{29}$. Ὥστε ἀρκεῖ ἤδη αἱ 30000$^{δρχ.}$ νὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1, $\frac{5}{2}$, $\frac{20}{21}$ καὶ $\frac{20}{29}$ ἤ, ὅπερ ταὐτό, ἀναλόγως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

$$1\times(1\times21\times29),\ \frac{5}{2}\times(2\times21\times29),\ \frac{20}{21}\times(2\times21\times29),$$

$$\frac{20}{29}\times(2\times21\times29),\text{ ἤτοι } 1218,\ 3045,\ 1160,\ 840.$$

$$\left(\frac{30000\times1218}{6263},\ \frac{30000\times3045}{6263},\ \frac{30000\times1160}{6263},\ \frac{30000\times840}{6263}\right)$$

310) Τρεῖς ἐργάται λαμβάνουσιν 150$^{δραχ.}$, διότι ἔσκαψαν ἀγρόν τινα· ἐκ τῶν ἐργατῶν τούτων ὁ εἷς θὰ ἔσκαπτε τὸν ἀγρὸν εἰς 10 ἡμέρας, ὁ δὲ ἕτερος μόνος θὰ τὸν ἔσκαπτεν εἰς 15 ἡμ. καὶ ὁ τρίτος εἰς 20 ἡμέρας, πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῆς ἐργασίας του;

Λύσις.— Ἐπειδὴ ἕκαστος ἐργάτης καθ' ὅσον χρειάζεται ὀλιγώτερον χρόνον διὰ νὰ σκάψῃ τὸν ἀγρόν, ἐπὶ τοσοῦτον εἰργάσθη περισσότερον τῶν λοιπῶν δύο, ὅταν εἰργάζοντο ὅλοι ὁμοῦ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ λάβῃ καὶ περισσότερα τῶν ἄλλων ἐργατῶν ἐκ τῶν 150^{δραχμῶν}. δι' ὃ αὗται πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 10$^{ἡμ.}$ 15$^{ἡμ.}$ καὶ 20$^{ἡμ.}$, ἤτοι ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ καὶ $\frac{1}{20}$.

(α^{ος} 69$^{δρχ.}$ $\frac{3}{13}$, ὁ β^{ος} 46$^{δρχ.}$ $\frac{2}{13}$, ὁ γ^{ος} 34$^{δρχ.}$ $\frac{8}{13}$)

311) Πλοίαρχός τις θέλων νὰ ἐκφορτώσῃ τὸ πλοῖόν του ἐμίσθωσε κατ' ἀρχὰς 10 ἐργάτας, τὴν δευτέραν δὲ ἡμέραν παρέλαβεν ἄλλους 9 ἐργάτας καὶ τὴν τρίτην ἄλλους 4. Ἐγένετο δὲ ἡ ἐκφόρτωσις τοῦ πλοίου εἰς 12 ἡμέρας καὶ ἐπλήρωσεν ὅλους ὁμοῦ ἀντὶ 518 δραχμῶν. Ζητεῖται πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος.

(Ἕκαστος ἐκ τῶν πρώτων θὰ λάβῃ 24$^{δρχ.}$, ἕκαστος ἐκ τῶν β^{ων} 22$^{δρχ.}$ καὶ ἐκ τῶν γ^{ων} 20$^{δραχ.}$).

312) Τρεῖς καρραγωγεῖς μετέφερον ἐμπορεύματά τινος, ὁ μὲν 800 ὀκάδ. κριθῆς ἐξ ἀποστάσεως 8 σταδίων, ὁ δὲ 1000 ὀκάδας κριθῆς ἐξ ἀποστάσεως 5 σταδίων καὶ ὁ τρίτος 2000 ὀκάδ. κριθῆς ἐξ ἀποστάσεως 4 σταδίων. Ἔλαβον δὲ καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ 250 δραχμάς, πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

$\left(\text{ὁ α}^{\text{ος}} 82^{\text{δρχ.}} \frac{46}{97}, \text{ ὁ β}^{\text{ος}} 64^{\text{δρχ.}} \frac{42}{97} \text{ καὶ ὁ γ}^{\text{ος}} 103^{\text{δρχ.}} \frac{9}{97} \right)$

313) Τρεῖς ἔμποροι ἀνέλαβον ἐπιχείρησίν τινα καὶ ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλεν ἐριοῦχον ἀξίας Χ δραχμῶν, ὁ δὲ δεύτερος κατέβαλε 1000 δραχμὰς καὶ ὁ τρίτος Ψ δραχμάς. Ἐκέρδισαν δὲ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως 2000 δραχ., ἔλαβον δὲ ἐκ τοῦ κέρδους ὁ μὲν πρῶτος 800 δρχ., ὁ δὲ τρίτος 700 δραχ. Ζητεῖται πόσα κατέβαλεν ὁ τρίτος, πόσον ἤξιζε τὸ ἐριοῦχον καὶ ποῖον τὸ κέρδος τοῦ δευτέρου.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν $2000^{\text{δρχ.}}$ τοῦ κέρδους ὁ $\text{Α}^{\text{ος}}$ ἔλαβεν 800 δρχ., ὁ δὲ $\text{Γ}^{\text{ος}}$ $700^{\text{δρχ.}}$, ἄρα ὁ $\text{Β}^{\text{ος}}$ ἔλαβε $500^{\text{δρχ.}}$ καὶ ἤδη ἔχομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα. Ἐπειδὴ ὁ $\text{Β}^{\text{ος}}$ καταβαλὼν $1000^{\text{δραχ.}}$ ἔλαβε μέρισμα $500^{\text{δρχ.}}$, πόσας κατέβαλεν ὁ $\text{Α}^{\text{ος}}$ διὰ νὰ λάβῃ μέρισμα 800 δραχ.; Ὁμοίως ἐπειδὴ ὁ $\text{Β}^{\text{ος}}$ καταβαλὼν $1000^{\text{δραχ.}}$ ἔλαβε μέρισμα $500^{\text{δραχ.}}$, πόσας κατέβαλεν ὁ $\text{Γ}^{\text{ος}}$ διὰ νὰ λάβῃ μέρισμα $700^{\text{δραχ.}}$; (ἐριοῦχον $1600^{\text{δραχ.}}$ ὁ $\text{Γ}^{\text{ος}}$ $1400^{\text{δραχ.}}$ ὁ $\text{Β}^{\text{ος}}$ $500^{\text{δραχ.}}$).

Προβλήματα μίξεως καὶ μέσου ὅρου.

314) Ἐντὸς βαρελίου 300 ὀκάδων ὑπάρχουσι 225 ὀκάδες οἴνου τῶν 60 λεπτῶν τὴν ὀκᾶν, ἐὰν συμπληρωθῇ τὸ ἐπίλοιπον μέρος δι' ὕδατος, πόσον πρέπει νὰ τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; (45 λεπτὰ)

315) Πνευματοποιός τις ἔχει 1000 ὀκάδας οἰνοπνεύματος 75 βαθμῶν καὶ 800 ὀκάδας τῶν 40^0, πόσον πρέπει νὰ θέσωμεν ἐκ τοῦ πρώτου οἰνοπνεύματος εἰς $450^{\text{ὀκ.}}$ τοῦ δευτέρου, ἵνα ὁ βαθμός του ἀνέλθῃ εἰς 55^0; ($337^{\text{ὀκ.}}$ $200^{\text{δραμ.}}$)

316) Πόσον καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ ῥίψωμεν ἐντὸς $100^{\text{δραμ.}}$ ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,835, ἵνα ὁ βαθμὸς καθαρότητος αὐτοῦ ἀνέλθῃ εἰς 0,900; (65 δράμια)

317) Ἔμπορός τις ἔχει δύο εἰδῶν καφὲ καὶ τοῦ μὲν πρώτου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται $5{,}60^{\text{δραχ.}}$, τοῦ δὲ δευτέρου $4{,}20^{\text{δραχ.}}$, θέλει δὲ νὰ κάμῃ μῖγμα 12 ὀκάδων καὶ νὰ τιμᾶται $4{,}60^{\text{δραχ.}}$, πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστης ποιότητος;

$\left(\text{ἐκ τῆς α}^{\text{ης}}\ 3^{\text{ὀκ.}} \frac{3}{7}, \text{ ἐκ τῆς β}^{\text{ας}}\ 8^{\text{ὀκ.}} \frac{4}{7} \right)$

318) Ἡ ἀξία ζημίας τινός, τὴν ὁποίαν ὑπέστη πλοῖόν τι, ἐξετιμήθη ὑπὸ τριῶν πραγματογνωμόνων ὡς ἑξῆς· Ὁ πρῶτος ἐξετίμησεν αὐτὴν $405^{\text{δραχ.}}$, ὁ δεύτερος $381^{\text{δραχ.}}$, καὶ ὁ τρίτος $417^{\text{δραχ.}}$ πόσον ἐξετιμήθη ἡ ζημία κατὰ μέσον ὅρον ; ($401^{\text{δραχ.}}$)

319) Ἀγρός τις καταμετρηθεὶς εὑρέθη $3^{\text{στρέμ.}}$ $300^{\text{μέτρων}}$, καταμετρηθεὶς δὲ καὶ ἐκ δευτέρου εὑρέθη $3^{\text{στρέμ.}}$ $360^{\text{μέτρων}}$, καταμετρηθεὶς δὲ καὶ ἐκ τρίτου εὑρέθη $3^{\text{στρεμ.}}$ $276^{\text{μέτρων}}$. Ζητεῖται πόσος εἶναι ὁ ἀγρὸς κατὰ μέσον ὅρον Ευθυμιος ($3^{\text{στρέμ.}}$ $312^{\text{μέτρ.}}$)

Χριστοδουλος

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ ΤΗΣ ΜΙΞΕΩΣ ΕΙΣ ΤΑ ΕΜΠΟΡΙΚΑ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΑ

Ὁρισμοί.

320) Κοινὴ λῆξις δύο ἢ περισσοτέρων συναλλαγμάτων διαφόρων λήξεων λέγεται ἡ ἐποχή, καθ' ἣν δύνανται νὰ πληρωθῶσι τὰ συναλλάγματα ταῦτα συγχρόνως.

321) Κοινὸν ἐπιτόκιον δύο ἢ περισσοτέρων ποσῶν διαφόρων ἐπιτοκίων λέγεται τὸ ἐπιτόκιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν.

322) Τοκάριθμος χρόνου λέγεται τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον (εἰς ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας), καθ' ὃν ἔμεινε τοῦτο ὑπὸ τόκον.

323) Τοκάριθμος ἐπιτοκίου λέγεται τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

Σημείωσις.—Τὴν σημασίαν τῶν τοκαρίθμων ἐξάγομεν εὐκόλως ἐκ παντὸς προβλήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ τόκος.

Σημασία τῶν τοκαρίθμων.

324) Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν τοκαρίθμων ἁπλοποιεῖ πλεῖστα ὅσα προβλήματα. Τὴν δὲ σημασίαν τούτων ἐξάγομεν ἐκ παντὸς προβλήματος τόκου καὶ δὴ ἐκ τοῦ ἑξῆς·

325) Ποῖος εἶναι ὁ τόκος $600^{\text{δραχ.}}$ διὰ $8^{\text{ἡμέρ.}}$ πρὸς $6\ \%$;

Λύσις. Ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι ὁ ἑξῆς·

$$\frac{600^{\text{Κεφ.}} \times 8^{\text{ἡμ.}} \times 6\ \%}{100 \times 360} = 80 \text{ λεπτά.}$$

Ἐντεῦθεν παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος 80 λεπτὰ δὲν μεταβάλλεται, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβάλωμεν τὸ κεφάλαιον τῶν $600^{\text{δραχ.}}$ καὶ τὸν χρόνον τῶν $8^{\text{ἡμ.}}$, ἀρκεῖ τὸ γινόμενόν των νὰ εἶναι 600×8, ἤτοι 4800, δηλ. ἀρκεῖ ὁ τοκάριθμος χρόνου νὰ μένῃ ἀμετάβλητος. Ὥστε τὸν τόκον 80 λεπτὰ δίδουσι καὶ

αἱ	4800 δρχ.	διὰ	1 ἡμ.	πρὸς 6 %	διότι	4800×1=4800
ἡ	1 δρχ.	»	4800 ἡμ.	» 6 %	»	1×4800=4800
αἱ	400 δρχ.	»	12 ἡμ.	» 6 %	»	400×12=4800
»	12 δρχ.	»	400 ἡμ.	» 6 %	»	12×400=4800
»	1600 δρχ.	»	3 ἡμ.	» 6 %	»	1600×3=4800

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος 80 λεπτὰ δὲν μεταβάλλεται, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβάλωμεν τὸ κεφάλαιον 600 δρχ. καὶ τὸ ἐπιτόκιον 6 %, ἀρκεῖ τὸ γινόμενόν των νὰ εἶναι 600×6, ἤτοι 3600, δηλ. ἀρκεῖ ὁ τοκάριθμος ἐπιτοκίου νὰ μένῃ ἀμετάβλητος. Ὥστε τὸν τόκον 80 λεπτὰ δίδουσι καὶ

αἱ	3600 δρχ.	πρὸς	1 %	διὰ 8 ἡμ.	διότι	3600×1=3600
ἡ	1 δρχ.	»	3600 %	» 8 ἡμ.	»	1×3600=3600
αἱ	400 δρχ.	»	9 %	» 8 ἡμ.	»	400×9=3600
»	300 δρχ.	»	12 %	» 8 ἡμ.	»	300×12=3600
»	900 δρχ.	»	4 %	» 8 ἡμ.	»	900×4=3600

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τοὺς ἑξῆς κανόνας.

326) *Ὅταν ὁ τοκάριθμος χρόνου μένῃ ἀμετάβλητος, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος, τότε καὶ ὁ τόκος μένει ὁ αὐτὸς διὰ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον.*

327) *Ὅταν ὁ τοκάριθμος ἐπιτοκίου μένῃ ἀμετάβλητος, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον, τότε καὶ ὁ τόκος μένει ὁ αὐτὸς εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον.*

Π.χ. ὁ τόκος 400 δρχ. διὰ 3 ἔτη πρὸς 10 % εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τόκον.

200 δρχ.	εἰς	6 ἔτη	πρὸς	10 %
100 δρχ.	»	12 ἔτη	»	10 %
300 δρχ.	»	4 ἔτη	»	10 %
600 δρχ.	»	2 ἔτη	»	10 %
200 δρχ.	πρὸς	20 %	εἰς	3 ἔτη
800 δρχ.	»	5 %	»	3 ἔτη
500 δρχ.	»	8 %	»	3 ἔτη

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐφαρμογὴ ἐπὶ τοῦ τόκου.

328) Κεφάλαιόν τι 9000 δραχμῶν πρὸς 9 $^0/_0$ εἰς 70ἡμ. ἔδωκε τόκον τινά, εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 3000δραχ. θὰ δώσῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον τὸν αὐτὸν τόκον ;

Λύσις.—Ἐπειδὴ τὰ κεφάλαια 9000δρχ. καὶ 3000δρχ. ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, διὰ νὰ δίδωσι τὸν αὐτὸν τόκον πρέπει νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν τοκάριθμον χρόνου. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τοκάριθμος χρόνου τῶν 9000 δραχ. διὰ 70ἡμ. εἶναι 630000, τοῦτον δὲ τὸν τοκάριθμον χρόνου πρέπει νὰ ἔχωσι καὶ αἱ 3000δρχ., ἄρα ὁ ἄγνωστος χρόνος δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 630000 διὰ 3000 (ἰδὲ § 182), ὅτε εὑρίσκομεν 210. Ὥστε αἱ 3000δρχ. εἰς 210 ἡμέρας πρὸς 9 $^0/_0$ δίδουσι τόκον, ὁποῖον αἱ 9000δρχ. εἰς 70ἡμ. πρὸς 9 $^0/_0$.

329) Κεφάλαιον 3000δρχ. πρὸς 9 $^0/_0$ εἰς 210ἡμ. ἔδωκε τόκον τινά. Ζητεῖται πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 9000δρχ. εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἤθελε δώσῃ τὸν αὐτὸν τόκον.

Λύσις. — Ἐπειδὴ τὰ κεφάλαια τῶν 3000δρχ. καὶ 9000δρχ., ἔχουσι τὸν αὐτὸν χρόνον λήξεως, ἄρα, διὰ νὰ δίδωσι τὸν αὐτὸν τόκον, πρέπει νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν τοκάριθμον ἐπιτοκίου. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τοκάριθμος ἐπιτοκίου τῶν 3000δραχ. πρὸς 9 $^0/_0$ εἶναι 3000×9, ἤτοι 27000, τοῦτον δὲ τὸν τοκάριθμον ἐπιτοκίου πρέπει νὰ ἔχωσι καὶ αἱ 9000δρχ., ἄρα τὸ ἄγνωστον ἐπιτόκιον τούτων δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 27000 διὰ 9000, ὅτε εὑρίσκομεν 3. Ὥστε αἱ 9000δραχ πρὸς 3 $^0/_0$ εἰς 210ἡμ. δίδουσι τόκον, ὃν αἱ 3000δραχ. πρὸς 9 $^0/_0$ εἰς 210ἡμέρας.

Προβλήματα λυόμενα κατὰ τὰ τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως.

Σημείωσις.—Κατὰ τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως λύονται πολλὰ προβλήματα ἐμπορικῶν συναλλαγμάτων, δημοσίων δανείων, πτωχεύσεων κτλ., εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ κοινὴ λῆξις ἢ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον.

330) Ἔμπορός τις χρεωστεῖ τρία γραμμάτια, τὸ μὲν 10000δρχ. λῆγον μετὰ 4 μῆνας, τὸ δὲ 600δρχ. λῆγον μετὰ 7 μῆνας καὶ τὸ τρίτον 7000δρχ. λῆγον μετὰ 8 μῆνας. Ζητεῖ δὲ νὰ πληρώσῃ ταῦτα συγχρόνως· ποία εἶναι ἡ κοινὴ λῆξις ;

Λύσις.—Προφανῶς αἱ πραγματικαὶ ἀξίαι τῶν εἰρημένων γραμματίων (δηλ. αἱ σημεριναὶ αὐτῶν ἀξίαι), τοκιζόμεναι ἀπὸ σήμερον μέχρι τῆς λήξεως ἑκάστου γραμματίου πρέπει νὰ δίδωσι τόκους τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ ἰσῶται μὲ τὸν τόκον τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ συνόλου τῶν 23000 δραχμῶν τῶν γραμματίων ἀπὸ σήμερον μέχρι τῆς κοινῆς λήξεως. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸ ἐμπόριον ἀντὶ νὰ ζητῶσι τὸν τόκον τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν τῶν γραμματίων (ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν) ζητοῦσι τὸν τόκον τῶν ὀνοματικῶν αὐτῶν ἀξιῶν (ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν), διὰ τοῦτο τὴν ἀνωτέρω σκέψιν θὰ κάμωμεν ἐπὶ τῶν ὀνοματικῶν ἀξιῶν κατὰ τὴν ἀπαίτησιν τοῦ ἐμπορίου. Καὶ δὴ τοκίζομεν ἕκαστον τῶν γραμματίων 10000 δρχ., 6000 δρχ. καὶ 7000 δρχ. ἀπὸ σήμερον μέχρι τῆς λήξεως ἑκάστου πρὸς ἐπιτόκιόν τι καὶ ἀθροίζοντες τοὺς τόκους τούτων ζητοῦμεν εἰς πόσον χρόνον ἀπὸ σήμερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον θὰ ἔδιδον τὸν τόκον τοῦτον αἱ 23000 δρχ. τῶν γραμματίων. Ὁ χρόνος δὲ οὗτος ἀπὸ σήμερον λογιζόμενος εἶναι ὁ *τῆς κοινῆς λήξεως*. Ἵνα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τόκων τῶν εἰρημένων ὀνοματικῶν ἀξιῶν ἰσῶται μὲ τὸν τόκον τῶν 23000 δρχ., ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων χρόνου τῶν 10000 δρχ., 6000 δρχ. καὶ 7000 δρχ. νὰ ἰσῶται μὲ τὸν τοκάριθμον χρόνου τῶν 23000 δρχ. Ὅθεν ἔχομεν :

αἱ	10000 δρχ.	διὰ	4 μήν.	ἔχουσι	τοκάριθμον	40000
»	6000 δρχ.	»	7 μήν.	»	»	42000
»	7000 δρχ.	»	8 μήν.	»	»	56000
	23000 δρχ.					138000

καὶ ἐπειδὴ δέον ὁ ἄγνωστος τοκάριθμος χρόνου τῶν 23000 δρχ. νὰ ἰσῶται μὲ 138000, διὰ τοῦτο λαμβάνοντες τὸν τοκάριθμον 138000 ὡς διαιρετέον καὶ τὰς 23000 δρχ. ὡς διαιρέτην, εὑρίσκομεν τὸν χρόνον τῆς λήξεως τούτων ἀπὸ σήμερον εἰς τὸ πηλίκον, ἤτοι 138000 : 23000=6 μῆνας (διότι καὶ αἱ τῶν ἄλλων γραμματίων λήξεις ἦσαν εἰς μῆνας). Ὥστε ἡ κοινὴ λῆξις τοῦ γραμματίου τῶν 23000 δρχ. εἶναι 6 μῆνας ἀπὸ σήμερον.

Συντομία.—Ἠδυνάμεθα νὰ ἐπιφέρωμεν συντομίαν τινὰ εἰς τὰς πράξεις, λογίζοντες τὴν κοινὴν λῆξιν τῶν γραμματίων οὐχὶ ἀπὸ σήμερον, ἀλλ᾽ ἀπὸ τὴν ἡμέραν καθ᾽ ἣν λήγει τὸ πρῶτον γραμμάτιον.

Π. χ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, λογίζοντες τὸν χρόνον ἀπὸ τῆς λήξεως τοῦ πρώτου γραμματίου τῶν 10000$^{\text{δρχ.}}$ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ 10000$^{\text{δρχ.}}$ θέλουσι 0 μῆνας πρὸς λῆξιν, αἱ 6000$^{\text{δρχ.}}$ θέλουσι 3 μῆνας πρὸς λῆξιν καὶ αἱ 7000$^{\text{δρχ.}}$ θέλουσι 4 μῆνας πρὸς λῆξιν, δι' ὃ

αἱ 10000$^{\text{δρχ.}}$	διὰ	0$^{\text{μην.}}$	ἔχουσι	τοκάριθμον	0
» 6000$^{\text{δρχ.}}$	»	3$^{\text{μην.}}$	»	»	18000
» 7000$^{\text{δρχ.}}$	»	4$^{\text{μην.}}$	»	»	28000
23000$^{\text{δρχ.}}$					46000

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος τοκάριθμος χρόνου τῶν 23000$^{\text{δρχ.}}$ δέον νὰ ἰσῶται μὲ 46000, διὰ τοῦτο ὁ χρόνος τῆς λήξεώς των θὰ εἶναι 46000:23000=2 μῆνας ἀπὸ τῆς λήξεως τοῦ πρώτου γραμματίου, ἤτοι 4$^{\text{μην.}}$+2$^{\text{μην.}}$=6$^{\text{μην.}}$ ἀπὸ σήμερον.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

331) *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κοινὴν λῆξιν δύο ἢ περισσοτέρων ποσῶν διαφόρων λήξεων, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων χρόνου τῶν ποσῶν τ.ύτων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν.*

Παρατήρησις. Ὁ τρόπος οὗτος καθ' ὃν εὑρίσκομεν τὴν κοινὴν λῆξιν, ἂν καὶ εἶναι ὁ μόνος ἐν χρήσει, δὲν δίδει ὅμως τὴν ἀληθῆ κοινὴν λῆξιν, διότι οὕτως ἐξετάζεται, ὡς εἴπομεν, ὁ τόκος τῶν ὀνοματικῶν ἀξιῶν τῶν γραμματίων, ἐνῷ ἔπρεπε νὰ ἐξετάζηται ὁ τόκος τῶν πραγματικῶν αὐτῶν ἀξιῶν.

332) Π.χ. Ἔχει τις δύο συναλλαγματικάς, τὴν μὲν ἐκ 1050$^{\text{δρχ.}}$ λήγουσαν μετὰ 5$^{\text{μην.}}$, τὴν δὲ ἐκ 412$^{\text{δρχ.}}$ λήγουσαν μετὰ 3$^{\text{μην.}}$ Ζητεῖ δὲ ν' ἀνταλλάξῃ ταύτας πρὸς μίαν συναλλαγματικὴν 1050$^{\text{δρχ.}}$+412, ἤτοι 1462$^{\text{δρχ.}}$, πότε θὰ λήγῃ ἡ συναλλαγματικὴ αὕτη τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 12 %;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τοὺς τοκαρίθμους χρόνου, ἤτοι

412δρχ.×3μην.	ἢ χάριν	412δρχ.×0=	0
1050δρχ.×5μην.	συντομίας	1050δρχ.×2μ.=	1100
		1462	2100

Ἔπειτα ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 331) εὑρίσκομεν τὴν κοινὴν λῆξιν, ἤτοι $2100:1462=\frac{2100}{1462}=1^{\text{μην.}}\ 13^{\text{ἡμ.}}\frac{67}{731}$. Ὥστε ἡ κοινὴ λῆξις ἀπὸ σήμερον θὰ εἶναι $3^{\text{μην.}}+1^{\text{μην.}}\ 13^{\text{ἡμ.}}\frac{67}{731}=4^{\text{μην.}}\ 14^{\text{ἡμ.}}$.

Τὸ πρόβλημα ὅμως τοῦτο λυθὲν καὶ εἰς τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως ἔδωκε κοινὴν λῆξιν 4μην. $\frac{3}{7}$, ἤτοι 4μην. 12ἡμ. $\frac{6}{7}$, ἤτοι 4μην. 13ἡμ., ἐν ᾧ ἤδη εὕρομεν *κοινὴν λῆξιν* 4μην. 13ἡμ. $\frac{67}{731}$, ἤτοι 4μην. 14ἡμ.

Τὸ διάφορον δὲ τοῦτο ἐξαγόμενον προέκυψε, διότι ἐκεῖ εἰργάσθημεν, ὡς ἐπὶ τῶν προβλημάτων τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἐν ᾧ ἐνταῦθα εἰργάσθημεν, ὡς ἐπὶ τῶν τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως, διότι αἱ 412δρχ. καὶ αἱ 1050δρχ. ἐφ' ὧν εἰργάσθημεν εἶναι αἱ ὀνοματικαὶ ἀξίαι τῶν γραμματίων, διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ ἐνταῦθα ὡς κοινὴν λῆξιν 4μην. $\frac{3}{7}$, πρέπει νὰ ἐργασθῶμεν, ὡς ἐκεῖ, ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν τῶν γραμματίων καὶ αἵτινες εἶναι 400δρχ. καὶ 1000δρχ. (λαμβάνοντες τὸ ἐκεῖ ληφθὲν ἐπιτόκιον τῶν 12 %), ὅτε εὑρίσκομεν.

400δρχ. × 3μην.	ἢ χάριν	400δρχ. × 0 =	0
1000δρχ. × 5μην.	συντομίας	1000δρχ. × 2μ. =	2000
		1400δρχ.	2000

ὅθεν 2000 : 1400 = 1μην. $\frac{3}{7}$.

Ὥστε ἡ κοινὴ λῆξις ἀπὸ σήμερον θὰ εἶναι

3μην. + 1μην. $\frac{3}{7}$, ἤτοι 4μην. $\frac{3}{7}$ ἢ 4μην. 12ἡμ. $\frac{6}{7}$ ἢ 4μην. 13ἡμ.

Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸ ἐμπόριον καὶ τὰς Τραπεζικὰς ἐν γένει ἐργασίας ἐφαρμόζεται ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις, διὰ τοῦτο ἀκολουθοῦντες τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ ἐμπορίου καὶ οὐχὶ τοῦ δικαίου, θὰ ζητῶμεν τὰς λύσεις τῶν διαφόρων προβλημάτων ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὀνοματικῶν ἀξιῶν τῶν γραμματίων καὶ οὐχὶ τῶν πραγματικῶν αὐτῶν ἀξιῶν.

333) Ἔμπορός τις ἐδανείσθη δι' ἓν ἔτος 10000δρχ. πρὸς 5 %, καὶ 6000δρχ. πρὸς 8 % καὶ 7000δρχ. πρὸς 9 % ποῖον εἶναι τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον ;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τόκων τῶν 10000δρχ. πρὸς 5 %, τῶν 6000δρχ. πρὸς 8 % καὶ τῶν 7000δρχ. πρὸς 9 % δι' ὡρισμένον χρόνον πρέπει νὰ ἰσῶται πρὸς τὸν τόκον τοῦ ἀθροίσματος τῶν 23000δρχ. διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον πρὸς τὸ *κοινὸν ἐπιτόκιον*, διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων ἐπιτοκίου τῶν 10000δρχ., 6000δρχ.

καὶ 7000δρχ· δέον νὰ ἰσῶται μὲ τὸν τοκάριθμον ἐπιτοκίου τῶν 23000 δραχμῶν, ὅτε ἔχομεν

αἱ 10000δρχ·	πρὸς	5 %	ἔχουσι	τοκάριθμον	ἐπιτ.	50000
» 6000δρχ·	»	8 %	»	»	»	48000
» 7000δρχ·	»	9 %	»	»	»	63000
23000δρχ·						161000

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος τοκάριθμος ἐπιτοκίου τῶν 23000δρχ· δέον νὰ ἰσῶται μὲ 161000, διὰ τοῦτο τὸ ἐπιτόκιον τῶν 23000δρχ· θὰ εἶναι 161000:23000, ἤτοι 7 %.

Συντομία. Ἐὰν ἐξ ὅλων τῶν ἐπιτοκίων ἀφαιρέσωμεν τὸ μικρότερον ἐπιτόκιον τῶν 5 %, τότε αἱ πράξεις συντομεύονται, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, καὶ εὑρίσκομεν ὡς κοινὸν ἐπιτόκιον 2 % εἰς τοῦτο δὲ προσθέτοντες καὶ τὸ ἀφαιρεθὲν 5 % εὑρίσκομεν τὸ ἀληθὲς ἐπιτόκιον τῶν 7%.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα

334) *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον δύο ἢ περισσοτέρων κεφαλαίων τῆς αὐτῆς προθεσμίας, ἀλλὰ διαφόρων ἐπιτοκίων, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων ἐπιτοκίου τῶν κεφαλαίων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κεφαλαίων.*

335) Ἔμπορός τις κατέθεσεν εἰς Τραπεζικόν τινα οἶκον 10000 δρχ. πρὸς 5 % διὰ 4 ἔτη, ἑτέρας δὲ 6000 δρχ. πρὸς 8% διὰ 7 ἔτη, 7000 δρχ. πρὸς 9 % διὰ 8 ἔτη. Ζητεῖται ἡ κοινὴ λῆξις καὶ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον τῶν καταθέσεων τούτων.

Λύσις. Πολλαπλασιάζομεν ἑκάστην τῶν καταθέσεων ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιόν της καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον τῆς λήξεως, ὅτε εὑρίσκομεν

10000δρχ·×5%×4ἔτ.	δίδουσι	200000
6000δρχ·×8%×7ἔτ.	»	336000
7000δρχ·×9%×8ἔτ.	»	504000
		1040000

καὶ ἐπειδὴ αἱ 10000δρχ· πρὸς 5% δίδουσιν *εἰς χρόνον τινὰ τόκον* ὅποῖον αἱ 10000δραχ·×5, ἤτοι 50000δραχ· πρὸς 1% εἰς τὸν *αὐτὸν χρόνον* (§ 327), διὰ τοῦτο θεωροῦντες ὡς καταθέσεις τὰς 10000δραχ·×5, 6000δραχ·×8 καὶ 7000δραχ·×9, ἤτοι τὰς 50000δραχ· 48000 δρχ. καὶ $63000^{\text{δραχ.}}$, ἀνάγομεν τὸ πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ζητεῖται ἡ κοινὴ λῆξις ποσῶν τοῦ αὐτοῦ ἐπιτοκίου καὶ διαφόρων λήξεων, ὅτε κατὰ τὸν κανόνα (§ 331) εὑρίσκομεν

$50000^{\text{δρχ.}} \times 4^{\text{ἐτ.}}$	τοκάριθμος χρόνου		200000
$48000^{\text{δρχ.}} \times 7^{\text{ἐτ.}}$	»	»	336000
$63000^{\text{δρχ.}} \times 8^{\text{ἐτ.}}$	»	»	504000
$161000^{\text{δρχ.}}$			1040000

ὅθεν $1040000 : 161000 = \frac{1040}{161} = 6^{\text{ἐτ.}}\ 5^{\text{μην.}}\ 16^{\text{ἡμ.}}$ εἶναι ἡ κοινὴ λῆξις ἀπὸ σήμερον.

Ἀφοῦ εὕρομεν ἤδη τὴν κοινὴν λῆξιν τῶν ποσῶν $10000^{\text{δρχ.}}$, $6000^{\text{δρχ.}}$ καὶ $7000^{\text{δρχ.}}$, τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ζητεῖται τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον τῶν εἰρημένων καταθέσεων, ἤτοι τῶν $10000^{\text{δρχ.}}$ πρὸς 5 %, $6000^{\text{δρχ.}}$ πρὸς 8 % καὶ $7000^{\text{δρχ.}}$ πρὸς 9 %, ὅτε κατὰ τὸν κανόνα (§ 334) εὑρίσκομεν

$10000^{\text{δρχ.}} \times 5\%$	τοκάριθμ. ἐπιτοκ.		50000
$6000^{\text{δρχ.}} \times 8\%$	»	»	48000
$7000^{\text{δρχ.}} \times 9\%$	»	»	63000
$23000^{\text{δρχ.}}$			161000

ὅθεν εὑρίσκομεν.

$161000 : 23000 = \frac{161}{23}\,\% = 7\,\%$ κοινὸν ἐπιτόκιον.

Οὕτως ἡ κοινὴ λῆξις τῶν διαφόρων καταθέσεων εἶναι $6^{\text{ἐτ.}}\ 5^{\text{μην.}}\ 16^{\text{ἡμ.}}$, τὸ δὲ κοινὸν ἐπιτόκιον 7 %.

Παρατήρησις.—Τὰ τοιαῦτα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι διάφοροι καὶ οἱ χρόνοι τῆς λήξεως καὶ τὰ ἐπιτόκια, ἐπιδέχονται διπλῆν λύσιν. Εὑρίσκομεν τὴν μὲν ἢ τὴν δὲ λύσιν, καθ' ὅσον προσδιορίζομεν *πρῶτον τὴν κοινὴν λῆξιν καὶ ἔπειτα τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον ἢ πρῶτον τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον καὶ ἔπειτα τὴν κοινὴν λῆξιν.*

Π. χ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἂν προσδιορίσωμεν πρῶτον τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον καὶ ἔπειτα τὴν κοινὴν λῆξιν, θὰ εὕρωμεν ἄλλην λύσιν.

Καὶ ὄντως πολλαπλασιάζοντες, ὡς ἀνωτέρω, τὰ κεφάλαια ἐπὶ τὰ ἐπιτόκια καὶ ἐπὶ τοὺς χρόνους εὑρίσκομεν

$10000^{\delta\rho\chi.}\times5\%\times4^{\acute{\epsilon}\tau.}$	200000
$6000^{\delta\rho\chi.}\times8\%\times7^{\acute{\epsilon}\tau.}$	336000
$7000^{\delta\rho\chi.}\times9\%\times8^{\acute{\epsilon}\tau.}$	504000
	1040000

καὶ ἐπειδὴ αἱ $10000^{\delta\rho\chi.}$ εἰς $4^{\mu\tilde{\eta}\nu\alpha\varsigma}$ πρὸς ἐπιτόκιόν τι δίδουσι τόκον ὁποῖον αἱ $10000^{\delta\rho\chi.}\times4^{\mu\eta\nu.}$, ἤτοι $40000^{\delta\rho\chi.}$ εἰς $1^{\mu\tilde{\eta}\nu\alpha}$ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον (§ 326), διὰ τοῦτο θεωροῦντες ὡς καταθέσεις τὰς $10000\times4, 6000\times7$ καὶ 7000×8, ἤτοι τὰς $40000^{\delta\rho\alpha\chi.}$, $42000^{\delta\rho\alpha\chi.}$ καὶ $56000^{\delta\rho\chi.}$, τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ζητεῖται τὸ *κοινὸν ἐπιτόκιον* κεφαλαίων διαφόρων ἐπιτοκίων, ὅτε κατὰ τὸν κανόνα (§ 334) εὑρίσκομεν

$40000^{\delta\rho\chi.}\times5\%$	τοκάριθ. ἐπιτοκ.	200000
$42000^{\delta\rho\chi.}\times8\%$	» »	336000
$56000^{\delta\rho\chi.}\times9\%$	» »	504000
$138000^{\delta\rho\chi.}$		1040000

ὅθεν $1040000:138000=\frac{1040000}{138000}=\frac{1040}{138}\%$, ἤτοι $7,54\%$

περίπου κοινὸν ἐπιτόκιον. Ἀφοῦ ἤδη εὕρομεν τὸ *κοινὸν ἐπιτόκιον* τῶν καταθέσεων $10000^{\delta\rho\chi.}$, $6000^{\delta\rho\chi.}$ καὶ $7000^{\delta\rho\chi.}$, τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ζητεῖται ἡ κοινὴ λῆξις τῶν εἰρημένων καταθέσεων, ἤτοι τῶν $10000^{\delta\rho\chi.}$ εἰς $4^{\acute{\epsilon}\tau\eta}$, τῶν $6000^{\delta\rho\chi.}$ εἰς $7^{\acute{\epsilon}\tau.}$ καὶ τῶν $7000^{\delta\rho\chi.}$ εἰς $8^{\acute{\epsilon}\tau\eta}$, ὅτε κατὰ τὸν κανόνα (§ 331) εὑρίσκομεν

$10000^{\delta\rho\chi.}\times4^{\acute{\epsilon}\tau.}$	τοκάριθ. χρόνου	40000
$6000^{\delta\rho\chi.}\times7^{\acute{\epsilon}\tau.}$	» »	42000
$7000^{\delta\rho\chi.}\times8^{\acute{\epsilon}\tau.}$	» »	56000
$23000^{\delta\rho\chi.}$		138000

ὅθεν $138000:23000=\frac{138}{23}=6^{\acute{\epsilon}\tau\eta}$ κοινὴ λῆξις.

Οὕτως εὕρομεν, ὅτι ἡ κοινὴ λῆξις τῶν εἰρημένων καταθέσεων εἶναι $6^{\acute{\epsilon}\tau\eta}$, τὸ δὲ κοινὸν ἐπιτόκιον $7,54\%$ περίπου.

Δοκιμή.—Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τόκων τῶν διαφόρων καταθέσεων ἰσῶται μὲ τὸν τόκον τοῦ ἀθροίσματος τῶν καταθέσεων διὰ τὸν χρόνον τῆς *κοινῆς λήξεως πρὸς τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον*, τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

Π. χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν τόκων τῶν διαφόρων καταθέσεων εἶναι

$$\frac{10000^{\delta\rho.}\times5\times4}{100}+\frac{6000^{\delta\rho.}\times8\times7}{100}+\frac{7000^{\delta\rho.}\times9\times8}{100}=10400^{\delta\rho\chi.}$$

ἤτοι $10400^{\delta\rho\chi.}$ Ὁ δὲ τόκος τοῦ ἀθροίσματος τῶν $23000^{\delta\rho\alpha\chi.}$ τῶν διαφόρων καταθέσεων πρὸς τὸ *κοινὸν ἐπιτόκιον* 7 % καὶ τὴν *κοινὴν λῆξιν* $\frac{1040}{161}$ ἔτους ἢ τὸ *κοινὸν ἐπιτόκιον* $\frac{1040}{138}$ % καὶ τὴν *κοινὴν λῆξιν* $6^{\text{έτη}}$ εἶναι πάλιν $10400^{\delta\rho\chi.}$ Ἄρα τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους καὶ προσέτι ἀμφότεραι αἱ λύσεις τῆς κοινῆς λήξεως καὶ τοῦ κοινοῦ ἐπιτοκίου εἶναι παραδεκταί.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

336) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κοινὴν λῆξιν καὶ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον κεφαλαίων διαφόρου λήξεως καὶ ἐπιτοκίου ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς δύο τρόπων :

$α^{ον}$) *Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν κοινὴν λῆξιν, διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τὰ ἐπιτόκια καὶ ἐπὶ τοὺς χρόνους* (εἰς ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας) *διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τοκαρίθμων ἐπιτοκίου τῶν εἰρημένων κεφαλαίων. Ἔπειτα δὲ εὑρίσκομεν τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον, διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων ἐπιτοκίου τῶν εἰρημένων κεφαλαίων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κεφαλαίων.*

$β^{ον}$) *Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον, διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τὰ ἐπιτόκια καὶ ἐπὶ τοὺς χρόνους* (εἰς ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας) *διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τοκαρίθμων χρόνου τῶν εἰρημένων κεφαλαίων. Ἔπειτα δὲ εὑρίσκομεν τὴν κοινὴν λῆξιν, διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων χρόνου τῶν εἰρημένων κεφαλαίων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κεφαλαίων.*

Ἐφαρμογὴ εἰς τὰ δημόσια δάνεια.

337) Ἑταιρεία τις ἐκδίδει εἰς δημοσίαν ἐγγραφὴν ὁμολογίας πληρωτέας κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον, 150 δραχμαὶ ἅμα τῇ ἐγγραφῇ, 250 δραχ. μετὰ 2 μῆνας, τὰς δὲ λοιπὰς 200 δρχ. ἀνὰ 100 δρχ. κατὰ 3

μῆνας. Ζητεῖται ἡ πραγματικὴ τιμὴ τῆς ἐκδόσεως τῶν ὁμολογιῶν.

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν κοινὸν χρόνον πληρωμῆς ὅλων τῶν δόσεων κατὰ τὸν κανόνα (§ 331), ὅτε ἔχομεν

$150^{δρχ.} \times 0^{μην.}$	τοκάριθ.	χρόνου	0
$250^{δρχ.} \times 2^{μην.}$	»	»	500
$100^{δρχ.} \times 5^{μην.}$	»	»	500
$100^{δρχ.} \times 8^{μην.}$	»	»	800
$600^{δρχ.}$			1800

ὅθεν 1800:600=3 μῆνας κοινὸς χρόνος πληρωμῆς.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ $600^{δρχ.}$ δι' ἑκάστην ὁμολογίαν εἶναι ὡς νὰ κατεβλήθησαν συγχρόνως μετὰ $3^{μην.}$ ἀπὸ τῆς ἐκδόσεως τῶν ὁμολογιῶν εἰς δημοσίαν ἐγγραφήν, (διότι ἡ *κοινὴ λῆξις* εἶναι $3^{μην.}$ ἀπὸ τῆς ἐγγραφῆς), ἄρα ἡ τιμὴ τῆς ἐκδόσεως ἑκάστης ὁμολογίας εὑρίσκεται, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἐκ τῶν $600^{δρχ.}$, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ πληρώσωμεν κατὰ δόσεις, τὸν τόκον αὐτῶν διὰ $3^{μην.}$ πρὸς τὸ νόμιμον ἐπιτόκιον τῶν 9 %, ὅτε εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἀξία τῆς ἐκδόσεως εἰς δημοσίαν ἐγγραφὴν τῶν ὁμολογιῶν εἶναι $586,50^{δρχ.}$

Ἐφαρμογὴ ἐπὶ πτωχεύσεων.

338) Ἔμπορός τις πτωχεύσας συμβιβάζεται μετὰ τῶν πιστωτῶν του νὰ πληρώσῃ 56 % ἐπὶ τῶν ὀφειλομένων ποσῶν ὡς ἑξῆς. Μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ τοῦ συμβιβασμοῦ νὰ πληρώσῃ 15 %, μετὰ 10 δὲ μῆνας νὰ πληρώσῃ 20 % καὶ μετὰ 15 μῆνας νὰ πληρώσῃ 21 % ἄνευ ὑπολογισμοῦ τόκου. Ζητεῖται εἰς πόσον τοῖς ἑκατὸν θὰ κατέλθῃ ὁ συμβιβασμὸς οὗτος, ἐὰν θελήσῃ νὰ πληρώσῃ τὴν ἡμέραν, καθ' ἣν ἐγένετο ὁ συμβιβασμός.

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν κοινὸν χρόνον πληρωμῆς ὅλων τῶν δόσεων κατὰ τὸν κανόνα (§ 331), ὅτε ἔχομεν

$15^{δρχ.} \times 3^{μην.}$	τοκάριθ.	χρόνου	45
$20^{δρχ.} \times 10^{μην.}$	»	»	200
$21^{δρχ.} \times 15^{μην.}$	»	»	315
$56^{δρχ.}$			560

ὅθεν 560:56=$10^{μην.}$ κοινὸς χρόνος πληρωμῆς.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ συμβιβασμὸς τῶν 56 % εἶναι ὡς νὰ ἐγένετο μετα

$10^{\mu\eta\nu.}$, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ $56^{\delta\rho\chi.}$ κατὰ τὸν τόκον των διὰ $10^{\mu\eta\nu.}$ πρὸς τὸ νόμιμον ἐπιτόκιον τῶν 9 %, ὅτε θέλομεν εὕρῃ, ὅτι ὁ συμβιβασμὸς ἐγένετο πρὸς $51,80^{\delta\rho\chi.}$ %.

Σημείωσις. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ προβλήματα, ἅτινα ἐλύθησαν ὡς τὰ τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως, λύονται καὶ προβλήματά τινα, τὰ ὁποῖα δύνανται ν' ἀπολέσωσιν ἴδιον εἶδος.

339) Πλοίαρχός τις ἠγόρασε πλοῖόν τι ἀντὶ $50000^{\delta\rho\chi.}$ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ τὸ ἀντίτιμον μετὰ $8^{\mu\eta\nu.}$, ἀλλὰ μετὰ $2^{\mu\eta\nu.}$ ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς ἠδυνήθη νὰ πληρώσῃ $10000^{\delta\rho\chi.}$ καὶ μετὰ $3^{\mu\eta\nu.}$ ἑτέρας $20000^{\delta\rho\chi.}$ Ζητεῖται πότε δικαιοῦται νὰ πληρώσῃ τὰς ἐπιλοίπους $20000^{\delta\rho\chi.}$

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ τόκος τῶν $50000^{\delta\rho\chi.}$ ἀπό τινος χρόνου καὶ ἔστω ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς τοῦ πλοίου μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν δέον νὰ πληρωθῶσι, πρέπει νὰ ἰσῶται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τόκων τῶν πληρωθέντων ποσῶν $10000^{\delta\rho\chi.}$ καὶ $20000^{\delta\rho\chi.}$ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ χρόνου μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν ἐπληρώθησαν, καὶ τοῦ πληρωτέου ποσοῦ τῶν $20000^{\delta\rho\chi.}$ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ χρόνου μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν δέον νὰ πληρωθῶσι, διὰ τοῦτο ὁ τοκάριθμος χρόνου τῶν $50000^{\delta\rho\chi.}$ διὰ $8^{\mu\eta\nu.}$ δέον νὰ ἰσῶται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων χρόνου τῶν $10000^{\delta\rho\chi.}$ διὰ $2^{\mu\eta\nu.}$, τῶν $20000^{\delta\rho\chi.}$ διὰ $5^{\mu\eta\nu.}$ καὶ τῶν πληρωτέων $20000^{\delta\rho\chi.}$ διὰ τὸν ἄγνωστον χρόνον $K^{\mu\eta\nu.}$ ἤτοι

$10000^{\delta\rho\chi.}\times 2^{\mu\eta\nu.}$	τοκάριθ.	χρόν.	20000
$20000^{\delta\rho\chi.}\times 5^{\mu\eta\nu.}$	»	»	100000
$20000^{\delta\rho\chi.}\times K^{\mu\eta\nu.}$	»	»	. . . . .
$50000^{\delta\rho\chi.}\times 8^{\mu\eta\nu.}$	»	»	400000

ἄρα δέον ὁ ἐλλείπων τοκάριθμος χρόνου τῶν $20000^{\delta\rho\chi.}$ νὰ ἰσῶται (ἰδὲ καὶ § 181) μὲ $400000-(100000+20000)$ ἤτοι 280000 δι' ὃ ὁ χρόνος $K^{\mu\eta\nu.}$ λήξεως τῶν $20000^{\delta\rho\chi.}$ θὰ εἶναι

$$280000 : 20000 = 14^{\mu\tilde{\eta}\nu\varepsilon\varsigma.}$$

Ὥστε αἱ ἐπίλοιποι $20000^{\delta\rho\chi.}$ πρέπει νὰ πληρωθῶσι $14^{\mu\eta\nu.}$ ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς, ἄρα $6^{\mu\eta\nu.}$ ἀπὸ τῆς λήξεως τῶν $8^{\mu\eta\nu\tilde{\omega}\nu.}$

340) Ἔμπορός τις τῇ πρώτῃ Μαρτίου ὑπέγραψε συναλλαγματικὴν $3000^{\delta\rho\chi.}$ πληρωτέαν τῇ 31ῃ Αὐγούστου, ἀλλὰ τῇ 5ῃ Ἰουνίου ἐπλήρωσε $1700^{\delta\rho\chi.}$, ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς 1ης Μαρτίου δικαιοῦται νὰ πληρώσῃ τὰς ἐπιλοίπους $1300^{\delta\rho\chi.}$

Λύσις.— Ἐξετάζομεν πρῶτον τοὺς διαφόρους χρόνους ἀπὸ τῆς 1ης Μαρτίου τῶν διαφόρων ποσῶν, ἤτοι :

Αἱ 3000 δραχ. ἀπὸ 1 Μαρτίου ἕως 31 Αὐγούστου=184ἡμ.
» 1700 » » » » » 5 Ἰουνίου = 97ἡμ.
» 1300 » » » » » τῆς πληρωμῆς = Κἡμ.

Καὶ ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εὑρίσκομεν :

1700δρχ. × 97ἡμ.	τοκάριθ. χρόν.	164900
1300δρχ. × Κἡμ.	» »	......
3000δρχ. ×184ἡμ.	» »	552000

ἄρα ὁ ἐλλείπων τοκάριθμος χρόνου τῶν 1300δρχ. εἶναι 552000—164900, ἤτοι 387100, δι' ὃ ὁ ἄγνωστος χρόνος Κἡμ. τῆς πληρωμῆς τῶν 1300δραχ. θὰ εἶναι 387100:1300=297ἡμ.$\frac{10}{13}$. Ὥστε αἱ 1300 δραχ. πρέπει νὰ πληρωθῶσι τῇ 298ῃ ἡμέρᾳ ἀπὸ 1 Μαρτίου.

341) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 5000δρχ. πληρωτέα μετὰ 15 μῆνας, ἀλλὰ 3750δραχ. ἐπλήρωσε πρὸ τῆς προθεσμίας, τὰς δὲ ἐπιλοίπους 1250δραχ. ἐπλήρωσε μετὰ 2ἔτ. 6μην. ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς ἐπλήρωσε τὰς 3750δρχ.

Λύσις.—Κατὰ τἀνωτέρω ἔχομεν :

3750δρχ. × Κμην.	τοκάριθ. χρόνου	.....
1250δρχ. ×30μην.	» »	37500
5000δρχ ×15μην.	» »	75000

ἄρα δέον ὁ ἐλλείπων τοκάριθμος χρόνου τῶν 3750δρχ. νὰ εἶναι 75000—37500, ἤτοι 37500, δι' ὃ ὁ χρόνος Κμην. τῆς πληρωμῆς τῶν 3750δρχ. θὰ εἶναι 37500:3750, ἤτοι 10μην. ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς τῶν ἐμπορευμάτων.

Προβλήματα λυόμενα κατὰ τὰ τοῦ δευτέρου εἴδους τῆς μίξεως

Σημείωσις.—Κατὰ τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους τῆς μίξεως λύονται προβλήματα ἐμπορικῶν συναλλαγμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ πληρωθῇ συνάλλαγμά τι *ὡρισμένης λήξεως* διὰ συναλλαγμάτων ἢ καταθέσεων διαφόρων λήξεων ἢ νὰ μορφωθῇ συνάλλαγμά τι *ὡρισμένης λήξεως* ἐκ συναλλαγμάτων διαφόρων λήξεων.

342) Ἔμπορός τις ἔχει κατάθεσιν λήγουσαν μετὰ $5^{\text{μην.}}$ ἐξ 102
δρχ., ἑτέραν δὲ ἐξ $104^{\text{δρχ.}}$ λήγουσαν μετὰ $8^{\text{μην.}}$ Ζητεῖ δὲ νὰ μο
πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστης τῶν καταθέσεων τού
διὰ νὰ μορφώσῃ ποσόν τι λῆγον μετὰ $6^{\text{μην}}$ ἀπὸ σήμερον.

Λύσις.—Διατάσσομεν τὰς διαφόρους λήξεις εἰς μίαν στήλην,
δὲ κοινὴν λῆξιν παραπλεύρως ὡς ἑξῆς :

α΄ κατάθ. λήγει μετὰ $5^{\text{μην.}}$
κοινὴ λῆξις $6^{\text{μην.}}$
β΄ » » » $8^{\text{μην.}}$

καὶ ἤδη ἐργαζόμενοι ὡς διὰ τὴν μόρφωσιν τῆς βάσεως τοῦ μίγμα
εὑρίσκομεν, ὅτι ἐξ ἑκάστης καταθέσεως πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ
ποσὰ (ἰδὲ Ἀριθμητ. Ῥηγοπ. § 307. Σημ.)

ἐκ τῆς α΄ 8—6, ἤτοι $2^{\text{δρχ.}}$ λήξεως τῶν $5^{\text{μην.}}$
» » β΄ 6—5 » $1^{\text{δρχ.}}$ » » $8^{\text{μην.}}$
καὶ οὕτως εὑρίσκομεν $3^{\text{δρχ.}}$ » » $6^{\text{μην.}}$

Δοκιμή.—Ἂν τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους, πρέπει τὰ π
τῶν $2^{\text{δρχ.}}$ καὶ $1^{\text{δρχ.}}$ ἀπό τινος χρόνου, καὶ ἔστω ἀπὸ τῆς ἡμέρας
καταθέσεως μέχρι τῆς λήξεως ἑκάστου, νὰ δώσωσι τόκον, ὃν αἱ 3
ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ χρόνου μέχρι τῆς κοινῆς λήξεως τῶν 6 μηνῶν. Π
τοῦτο δὲ ἀρκεῖ ὁ τοκάριθμος χρόνου τῶν $3^{\text{δρχ.}}$ νὰ ἰσῶται μὲ τὸ ἄθρ
σμα τῶν τοκαρίθμων τῶν προσθετέων των, ἤτοι·

$2^{\text{δρχ.}} \times 5^{\text{μην.}}$ τοκαριθ. χρόνου 10
$1^{\text{δρχ.}} \times 8^{\text{μην.}}$ » » 8
$3^{\text{δρχ.}}$ 18

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ τοκάριθμος χρόνου τῶν $3^{\text{δρχ.}}$ διὰ $6^{\text{μην.}}$ εἶναι 1
ἄρα τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

343) Ἔμπορός τις προσέρχεται τῇ $1^{\text{η}}$ Μαΐου καὶ ζητεῖ νὰ πλ
ρώσῃ γραμμάτιον $3500^{\text{δρχ.}}$ λῆγον τῇ $21^{\text{η}}$ Μαΐου, διαθέτει δὲ π
τοῦτο τῇ συγκαταθέσει τοῦ πιστωτοῦ του κεφάλαια κατατεθειμ
εἰς Τράπεζαν καὶ πληρωτέα τῇ $11^{\text{η}}$ Μαΐου καὶ $20^{\text{ῇ}}$ Ἰουλίου. Ζητ
ται ἀπὸ πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ ὁρίσῃ ἐξ ἑκάστης τῶν καταθέσε
τούτων πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ εἰρημένου γραμματίου.

Λύσις.—Κατὰ τἀνωτέρω ἔχομεν :

Ἀπὸ $1^{\text{ης}}$ Μαΐου μέχρις $11^{\text{ης}}$ Μαΐου $10^{\text{ἡμ.}}$
» » » » $21^{\text{ης}}$ » $20^{\text{ἡμ.}}$
» » » » $20^{\text{ῆς}}$ Ἰουλίου $80^{\text{ἡμ.}}$

...θη ἐργαζόμενοι ὡς διὰ τὴν μόρφωσιν τῆς βάσεως τοῦ μίγματος ...ομεν ὅτι (ἰδὲ Ἀριθμητ. Ῥηγοπ. § 307. Σημ.)

ἐκ τῶν τῆς 11 Μαΐου θὰ λάβωμεν 60$^{δρχ.}$
» » » 20 Ἰουλίου » » 10$^{δρχ.}$
καὶ οὕτως ἔχομεν τῆς 21 Μαΐου 70$^{δρχ.}$

... ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

...ὰ 70$^{δρχ.}$ τῆς 21 Μαΐου πρέπει νὰ λάβωμεν 60$^{δρχ.}$ τῆς 11 ..., διὰ 3500$^{δρχ.}$ τῆς 21 Μαΐου πόσας πρέπει νὰ λάβωμεν;»

70$^{δρχ.}$ τῆς 21 Μαΐου 60$^{δρχ.}$ τῆς 11 Μαΐου
3500 » » » X » » »

$X = 60 \times \frac{3500}{70} = 3000^{δρχ.}$ τῆς 11 Μαΐου, ἄρα τῆς 20^{ῆς} Ἰου...
...α λάβῃ τὰς ἐπιλοίπους 3500$^{δρχ.}$—3000$^{δρχ.}$, ἤτοι 500$^{δρχ.}$

...κιμή. Ἂν τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους, πρέπει αἱ 3000 ...αὶ αἱ 500$^{δρχ.}$ ἀπό τινος χρόνου καὶ ἔστω ἀπὸ τῆς 1^{ης} Μαΐου ... τῆς λήξεως ἑκάστης τῶν καταθέσεων, ἐξ ὧν θὰ ληφθῶσι, νὰ ... τόκον, ὅποιον αἱ 3500$^{δρχ.}$ ἀπὸ τῆς 1 Μαΐου μέχρι τῆς 21 ... Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ ὁ τοκάριθμος χρόνου τῶν 3500$^{δρχ.}$ διὰ ... νὰ ἰσῶται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων χρόνου τῶν 3000 ...$^{ἡμ.}$ καὶ τῶν 500$^{δρχ.}$ διὰ 80$^{ἡμ.}$, ἤτοι

3000$^{δρχ.}$ $\times$ 10$^{ἡμ.}$ τοκαριθ. χρον. 30000
500$^{δρχ.}$ $\times$ 80$^{ἡμ.}$ » » 40000
3500$^{δρχ.}$ 70000

...ειδὴ δὲ καὶ ὁ τοκάριθμος χρόνου τῶν 3500$^{δρχ.}$ διὰ 20 $^{ἡμ.}$ εἶναι ...$\times$20, ἤτοι πάλιν 70000, ἄρα τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

Προβλήματα λυόμενα κατὰ τὰ τοῦ τρίτου εἴδους τῆς μίξεως.

...ίωσις. Κατὰ τὸ πρόβλημα τοῦ τρίτου εἴδους τῆς μίξεως λύονται προβλή... ...πορικῶν συναλλαγμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται κατὰ πόσον πρέπει ν' αὐ... ...νάλλαγμα ὡρισμένου ποσοῦ καὶ ὡρισμένης λήξεως, ἐξ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ...ων ποσῶν ἢ συναλλαγμάτων διαφόρου λήξεως, ἵνα ἀποτελεσθῇ ποσόν τι δε... λήξεως.

...) Ἔμπορός τις ἔχει συναλλαγματικὴν 4500$^{δρχ.}$ λήγουσαν Αὐγούστου καὶ ποσόν τι χρημάτων διαθεσίμων τῇ 10^{η} Σε-

πτεμβρίου, ζητεῖ δὲ πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τ
λέσῃ μετὰ τῆς συναλλαγματικῆς αὐτοῦ ἕτερον πο
πτεμβρίου.

Λύσις. Κατὰ τἀνωτέρω ἔχομεν

Ἀπὸ 5 Αὐγούστου μέχρι 5 Αὐγούστου
» » » » 5 Σεπτεμβρ.
» » » » 10 Σεπτεμβρ.

καὶ ἤδη ἐργαζόμενοι ὡς διὰ τὴν μόρφωσιν τῶν π
σεως τοῦ μίγματος (Ἰδὲ Ἀριθμητ. Ῥηγ. § 307
ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν

ἐκ τῶν τῆς 5 Αὐγούστου 5
» » » 10 Σεπτεμβρίου 31

Ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

«Εἰς 5δρχ. τῆς 5 Αὐγούστου πρέπει νὰ θέσωμ
Σεπτεμβρίου, εἰς 4500δρχ. τῆς 5 Αὐγούστου πόσας

$\frac{5\delta\rho.}{4500}$ τῆς 5 Αὐγούστου $\frac{31\delta\rho\chi.}{x}$ τῆς 10
» » » » »

ὅθεν $x = 31 \times \frac{4500}{5} = 27900$ δρχ. τῆς 10 Σεπτεμ

Ὥστε τὸ ποσὸν τὸ λῆγον τῇ 5 Σεπτεμβρίου
λῆται ἐκ τῶν ἑξῆς

αον ἐκ 4500δρχ. τῆς 5 Αὐγ
βον ἐξ 27900δρχ. » 10 Σεπ
32400δρχ.

καὶ οὕτως ἀποτελεῖται ποσὸν 32400δρχ. λήξεως

Σημείωσις. Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὡς εἰς τὰ προβλήματα τοῦ

Προβλήματα διάφορα.

345) Ἔμπορός τις ὀφείλει νὰ ἐξοφλήσῃ τρία
1000 δραχμῶν ἕκαστον. Ἐκ τούτων δὲ τὸ π
Ἰουνίου, τὸ δὲ δεύτερον λήγει τῇ 20ῇ Ἰουνίου
15ῃ Αὐγούστου. Ἐὰν θελήσῃ νὰ ἐξοφλήσῃ καὶ
γματα συγχρόνως ἀντὶ 3000δρχ., πότε πρέπει ν

(μετὰ $31\frac{1}{3}$ ἡμέρας ἀπὸ 1ης Ἰουνίου, ἤτοι

346) Ἔμπορός τις ὀφείλει τρεῖς συναλλαγματ
ἐξ 850δρχ. λήγει τῇ 1ῃ Ἰουνίου, ἡ δὲ ἐκ 150

Ἐν Ἀθήναις τῇ 21 Ἰουνίου 1903

Ἀριθ. Πρωτ. 9733
Διεκπ. 8881

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΚΥΡΙΟΝ

Π. Σ. ΠΑΠΑΝΙΚΗΤΟΠΟΥΛΟΝ

Καθηγητὴν

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸν Νόμον ΒΤΓ' τῆς 12ης Ἰουλίου 1895 περὶ διδακτικῶν βιβλίων τῆς μέσης καὶ δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως καὶ τὸ Β. Διάταγμα τῆς 10ης Ὀκτωβρίου 1895 καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας τῶν κριτῶν τῶν διδακτικῶν βιβλίων, τῶν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ Σχολεῖα εἰσακτέων γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν γνώμην τῆς Ἐπιτροπείας ταύτης, καθ' ἣν τὸ ὑμέτερον σύγγραμμα **Πρακτικὴ Γεωμετρία,** τὸ κατὰ τὸν εἰρημένον Νόμον ἐγκριθέν, εἶνε καλῶς καὶ κατὰ τὸν νόμον ἐκτετυπωμένον, συμφώνως δὲ τῇ γνώμῃ τῆς Ἐπιτροπείας ὁρίζομεν τιμὴν ἑκάστου ἀντιτύπου δραχμὴν μίαν (1).

Ὁ Ὑπουργὸς

ΚΩΝΣΤ. ΣΠΥΡ. ΛΟΜΒΑΡΔΟΣ