Δημήτριος
Μανός
Πανεπιστημιακή
Λέσχη
Αθηνών

Ἀρ. Πανεπ. 11/1929

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Τακτικοῦ Καθηγητοῦ ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ
καὶ τῇ Σχολῇ τῶν Ν. Δοκίμων

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΑ ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{13144}{7\text{-}5\text{-}19}$ *κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας*

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΕΜΠΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
46, ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1926

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλεψίτυπον.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

Περὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

*Περὶ συναρτήσεων *)*

Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Ἐξισώσεις α' βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ ἀνισοτήτων

Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς

Περὶ ἐκθετικῶν ἐξισώσεων

Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Περὶ τῶν ῥιζῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικοὺς

Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Περὶ ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις β' βαθμοῦ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Περὶ προόδων

Περὶ λογαρίθμων

Περὶ ἀνατοκισμοῦ καὶ χρεωλυσίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Περὶ τῆς θεωρίας τῶν Συνδυασμῶν

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελὶς	54	τὸ	§ 45	εἰς	§ 42
»	192	τοῦ προβλήματος 9, τὸ	*6 ὥρας ὀλιγώτερον*	εἰς	*6 ὥρας*
»	215	τὸ	§ 127	εἰς	§ 137

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Περὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 1. Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.—

α΄) Διὰ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν πᾶσαν πρόσθεσιν, πολλαπλασιασμόν, καὶ διαίρεσιν, ὄχι ὅμως καὶ πᾶσαν ἀφαίρεσιν. Οὕτω π. χ. δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν 3—7, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου. Διότι, δὲν ὑπάρχει οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικός τις ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν 7 δίδει ἄθροισμα τὸν 3.

Θὰ μάθωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν, καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ μετὰ τῶν γνωστῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν δύνανται νὰ προστεθοῦν, νὰ ἀφαιρεθοῦν, νὰ πολλαπλασιασθοῦν καὶ νὰ διαιρεθοῦν· ἀκόμη δέ, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ πᾶσα ἀφαίρεσις.

β΄) Νὰ προσθέσωμεν δύο ἀριθμούς, π. χ. τὸν 9 καὶ 4, σημαίνει καθὼς γνωρίζομεν, νὰ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ 9 καὶ τοῦ 4 καὶ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ οὕτω προκῦπτον πλῆθος τῶν μονάδων. Ἐνίοτε ὅμως εὑρίσκομεν δύο ἀριθμοὺς τοῦ αὐτοῦ μὲν εἴδους, ἀλλὰ μὲ διάφορα γνωρίσματα, οἱ ὁποῖοι κατὰ τὴν τοιαύτην ἕνωσιν τῶν μονάδων αὐτῶν δίδουν ἐξαγόμενον ἴσον μὲ μηδέν. Ἐὰν π. χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 6 δραχμαὶ δώσωμεν τὸ γνώρισμα, ὅτι εἶνε κέρδος ἑνὸς ἀνθρώπου, ἔχωμεν δὲ καὶ ἄλλον ἀριθμὸν 6 δραχμῶν, ὁ ὁποῖος παριστάνει ζημίαν τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου, καὶ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν, καθεμία μονὰς τοῦ κέρδους ἐξουδετερώνει μίαν τῆς ζημίας· καὶ ἀντιστρόφως. Οὕτω τὸ ἐξαγόμενον τῆς τοιαύτης ἑνώσεως εἶνε ἴσον μὲ μηδέν. Ὅμοιόν τι ἔχομεν καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις. Π. χ. ἐὰν διανύσῃ τις ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ, ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς, ἕνα ἀριθμὸν βημάτων πρὸς μίαν φοράν, ἔστω πρὸς βορρᾶν καὶ ἔπειτα τὸ αὐτὸ πλῆθος βημάτων πρὸς νότον, ἀπὸ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασε προηγουμένως, ζητεῖται δὲ πόσον θὰ ἀπέχῃ εἰς τὸ τέλος ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως. Ἐὰν ἓν σῶμα θερμανθῇ μέχρις ὡρισμένου βαθμοῦ, καὶ ἔπειτα ψυχθῇ ἐκ τοῦ βαθμοῦ αὐτοῦ, καθ' ὅσους βαθμοὺς ἐθερμάνθη, ζητεῖται δὲ κατὰ πόσον μετεβλήθη ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος κατὰ τὸ χρονικὸν αὐτὸ διάστημα. Ἐὰν κερδίζῃ τις ἕνα ἀριθμὸν δραχμῶν, καὶ ἔπειτα χάνῃ τὸ αὐτὸ ποσόν. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, οἵτινες ἔχουν τὴν ἀνωτέρω ἰδότητα, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, λέγομεν ὅτι ἔχουν ἴσον πλῆθος μονάδων, ἀλλ' εἶνε *ἀντίθετοι*. Ὥστε,

«ἀντίθετοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἂν ἔχουν ἴσον πλῆθος μονάδων, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ μηδέν».

γ') Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν διὰ συμβόλου τὴν ἀντίθεσιν δύο ἀριθμῶν, γράφομεν πρὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο τὸ σημεῖον $+$ (*σύν*), πρὸ δὲ τοῦ ἄλλου τὸ $-$ (*πλήν*)· καὶ τὸ μὲν $+$ λέγεται ***θετικὸν σημεῖον*** τὸ δὲ $-$ *ἀρνητικὸν σημεῖον*.

Ὥστε δύο ἀντίθετοι ἀριθμοί, καθεὶς τῶν ὁποίων ἔχῃ 6 μονάδας, γράφονται $+6$ καὶ -6, ἀπαγγέλονται δὲ ἀννιστοίχως οὕτω· *σὺν ἕξ*, *πλὴν ἕξ*.

δ') Εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν γνωστῶν (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) ἀριθμῶν ἀντιστοιχοῦν δύο ἀντίθετοι ἀριθμοί.

Π. χ. εἰς τὸν 23 ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀντίθετοι $+23$ καὶ -23

» » $\frac{3}{5}$ » » » $+\frac{3}{5}$ » $-\frac{3}{5}$

» » 6,15 » » » $+6,15$ » $-6,15$.

ε') Ἐν γένει, δύο ἀριθμοὶ λέγονται *ἑτερόσημοι*, ἐὰν ὁ εἷς ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$, ὁ δὲ ἄλλος τὸ $-$. Π. χ. οἱ $+8$ καὶ -3, ἐπίσης οἱ -15 καὶ $+\frac{5}{9}$, οἱ $+2,15$ και $-6\frac{3}{4}$, εἶνε ἑτερόσημοι ἀριθμοί.

Συνήθως παραλείπεται τὸ σημεῖον $+$ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑπομένως, ὅταν εἷς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον, ὑποτίθεται ὅτι ἔχει τὸ σημεῖον $+$.

ϛ') Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν πρὸ αὐτῶν ἓν τῶν δύο σημείων $+$

ἢ — λέγονται *ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί*· καὶ ***θετικοὶ*** μέν, ἂν ἔχουν τὸ $+$, *ἀρνητικοὶ* δέ, ἂν τὸ $-$. Π. χ. οἱ

$$14 \qquad +12\frac{3}{7}, \qquad 2{,}15$$

εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί, ἐνῶ οἱ

$$-3, \qquad -7, \qquad -2{,}13$$ εἶνε ἀρνητικοί.

Ἀριθμοὶ ἔχοντες τὸ αὐτὸ σημεῖον (εἴτε τὸ *σὺν*, εἴτε τὸ *πλὴν*) λέγονται *ὁμόσημοι ἀριθμοί*.

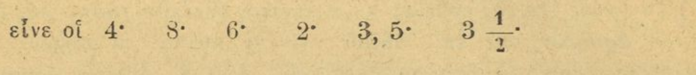
ζ') Καλοῦμεν *ἀπόλυτον ἀριθμόν*, ἢ *ἀπόλυτον τιμήν*, ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ ἀλγεβρικοῦ, ἂν παραλείψωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ, καὶ θεωροῦμεν μόνον τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτου. Κατὰ ταῦτα, οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν

$$4\cdot\ -8\cdot\ -6\cdot\ +2\cdot\ -3{,}5\cdot\ -3\frac{1}{2}$$

εἶνε οἱ $4\cdot\quad 8\cdot\quad 6\cdot\quad 2\cdot\quad 3{,}5\cdot\quad 3\frac{1}{2}\cdot$

§ **2.** *) **Παραστάσεις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν διὰ σημείων.**—

α') Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς δια σημείων μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, τὴν ὁποίαν θὰ καλοῦμεν *εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν*. Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν x' x σχ. (1). Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ἓν σημεῖον, ἔστω Ο, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων νὰ παριστάνῃ τὸ μηδέν. Ἔπειτα λαμβάνομεν πρὸς μίαν φοράν, π. χ. τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x, μῆκος ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἔστω μὲ 1 μ., τὸ ΟΘ. Τὸ σημεῖον **Θ** παριστάνει τὴν θετικὴν μονάδα $+1$. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα, Α, Β, Γ...



(Σχ. 1)

σχ. (1), τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $+2\cdot +3\cdot +4$,.. ἐὰν

*) Τὰ φέροντα ἀστερίσκον δύνανται νὰ παραλείπωνται κατὰ τὴν διδασκαλίαν (ἂν δὲν ἐπαρκῇ ὁ χρόνος) ἀλλὰ τοῦτο μόνον εἰς κλασικὰ Γυμνάσια.

λάβωμεν ἐκ τοῦ Θ πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν Οx μῆκος ἴσον μὲ 2· 3· 4...

Ἐὰν ἐκ τοῦ Ο καὶ πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰν τῆς προηγουμένης, τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x', λάβωμεν ὁμοίως τὸ μῆκος ΟΘ' ἴσον μὲ μίαν μονάδα μήκους, τὸ Θ' θὰ παριστάνῃ τὸ —1. Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ',... τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς — 2· — 3· — 4... σχ. (1).

β') Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἕνα κλασματικὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν $\frac{1}{2}$. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας μῆκος ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν, π. χ. ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος μήκους, καὶ πρὸς τὴν φορὰν Οx μὲν ἀπὸ τοῦ Ο, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε θετικός, πρὸς τὴν Οx' δέ, ἂν εἶνε ἀρνητικός.

γ') Τὸ μέρος Οx τῆς εὐθείας x' x λέγεται *θετικὸν τμῆμα τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν*, καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς. Τὸ Οx' λέγεται *ἀρνητικὸν τμῆμα*, καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Ἡ φορὰ Οx λέγεται *θετική*, ἡ δὲ Οx' *ἀρνητική*, καὶ καθεμία σημειώνεται μὲ ἓν βέλος, καθὼς εἰς τὸ σχ. (1).

δ') Ἐὰν ὁδοιπόρος διατρέξῃ 2 μέτρα ἐπὶ τοῦ Οx ἀπὸ τοῦ Ο, θὰ παριστάνωμεν τὸν δρόμον αὐτὸν διὰ τοῦ τμήματος ΘΑ, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ δύο μονάδας μήκους τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν, καὶ ἂν ἄλλος ὁδοιπόρος διατρέξῃ 2 μ. ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τοῦ Οx'. Ὁ δρόμος αὐτὸς θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΑ'. Οὕτω δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ διὰ τμημάτων τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν. Τὸ μῆκος αὐτῶν μετροῦμεν ἀπὸ τοῦ Ο καὶ εἶνε ἴσον μὲ τόσας μοναδας μήκους, ὅσας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

ε') Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ἓν χρονικον διαστημα, π. χ. μετὰ 2 ἔτη (+ 2 ἔτη), λαμβάνομεν άπο τοῦ σημείου Ο ἓν μῆκος ΟΑ ἴσον μὲ δύο μονάδας μήκους, καὶ τὸ σημεῖον Α παριστάνει τὸν ἀριθμὸν (+ 2), τὸ δὲ μῆκος ΟΑ τὸ διάστημα + 2 ἐτῶν· Ὁμοίως τὸ χρονικὸν διάστημα πρὸ 3 ἐτῶν (— 3 ἔτ.) παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος Ο Β΄. Ἐὰν δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ διευθύνωνται ἀντιθέτως, ὁ μὲν εἷς μὲ ταχύτητα 5 χμ. πρὸς τὴν θετικὴν φοράν, ὁ δὲ ἄλλος πρὸς τὴν ἀρνητικὴν μὲ ταχύτητα 4 χμ., ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΔ, ἴσου μὲ 5 μονάδας μήκους, καὶ κειμένου ἐπὶ τοῦ θετιτμήματος τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου ὑπὸ τμήματος ΟΓ΄, ἀντιθέτου τοῦ πρώτου, καὶ ἔχοντες μῆκος ἴσον μὲ 4 μονάδας μήκους. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὴν παράστασιν τῆς θερμοκρασίας ἄνω ἢ κάτω τοῦ μηδενὸς εἰς τὸ θερμόμετρον.

§ 3. **Σχέσις τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὴν θετικὴν μονάδα.**—

α΄) Γνωρίζομεν ὅτι πᾶς ἀπόλυτος ἢ θετικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν ἴσων μερῶν αὐτῆς, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως. Καθ' ὅμοιον τρόπον, πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος, ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν ἴσων μερῶν αὐτῆς, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως. Οὕτω ὁ -3 γίνεται ἐκ τῆς -1, ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς. ὁ $-\frac{3}{5}$ γίνεται ἐκ τοῦ πέμπτου τῆς -1, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φοράς.

β΄) Ἐπειδὴ ἡ ἀρνητικὴ μονὰς -1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα $+1$, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτῆς, δεχόμεθα ὅτι,

«πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτῆς, καὶ ταύτην ἢ μέρος ταύτης ἐπαναλάβωμεν πολλάκις».

Οὕτω δεχόμεθα ὅτι ὁ -7 γίνεται ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1, καὶ αὐτὴν ἐπαναλάβωμεν ἑπτὰ φοράς· ὁ $-\frac{3}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὴν $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1, καὶ τὸ ὄγδοον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τρίς.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 4. **Ὁρισμοί.**—

α΄) Ὑποθέτομεν ὅτι καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς διατηρεῖται ἡ ἰσχὺς τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων (τοῦ νόμου τῆς ἀντιμεταθέσεως καὶ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου) κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῶν.

β') Ὅταν σημειώνωμεν τὰς πράξεις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν γράφομεν αὐτούς, συνήθως, ἐν παρενθέσει μετὰ τοῦ σημείου αὐτῶν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῶν πράξεων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Π. χ. γράφομεν $(-3)+(+5)$ ὅταν πρόκειται νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς -3 καὶ $+5$

Ὁμοίως γράφομεν $(-3)-(-8)$, ὅταν πρόκειται νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν -3 τὸν -8.

§ 5. Πρόσθεσις.—

α') Πρόσθεσις ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καλεῖται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ἄλλον ἀποτελούμενον ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται ***προσθετέοι***, τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως *ἄθροισμα*, τὸ δὲ σημεῖον τῆς πράξεως εἶνε τὸ $+$ *(σύν)*.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις ἐν τῇ προσθέσει ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, καθόσον οἱ προσθετέοι εἶνε ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

β') Πῶς προθέτομεν ὁμοσήμους ἀριθμούς.

Τὸ ἄθροισμα $(+7)+(+5)$ εἶνε ἴσον μὲ $+12$. Διότι 7 θετικαὶ μονάδες καὶ 5 θετικαὶ κάμνουν 12 θετικάς.

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα $(-7)+(-5)$ εἶνε ἴσον μὲ -12. Διότι 7 ἀρνητικαὶ μονάδες καὶ 5 ἀρνητικαὶ κάμνουν 12 ἀρνητικάς. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν,

$$(-3)+(-2)+(-8)=-13.$$

Ἐπίσης $$(+2)+(+6)+(+10)=+18.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ἔχοντας τὸ αὐτὸ σημεῖον, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς αὐτῶν, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν προσθετέων».

γ') Πῶς προσθέτομεν δύο ἑτεροσήμους ἀριθμούς.

Το ἄθροισμα $(+7)+(-5)$ εἶνε ἴσον μὲ $+2$. Διότι, καθεμία τῶν 5 ἀρνητικῶν μονάδων ἐξουδετερώνεται μὲ μίαν ἀντίστοιχον αὐτῆς θετικὴν ἐκ τῶν 7, καὶ μένουν μόνον δύο θετικαί. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εὑρίσκομεν ὅτι,

$$(-7)+(+5)=-2 \cdot \quad (-10)+(+10)=0,$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\left(+\frac{4}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{1}{4}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἑτεροσήμους ἀριθμούς, ἀφαιροῦμεν τὴν μικροτέραν ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν, καὶ εἰς τὴν διαφορὰν θέτομεν τὸ σημεῖον τοῦ ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν».

δ') Διὰ νὰ προσθέσωμεν περισσοτέρους τῶν δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἔχοντα τὸ σημεῖον + καὶ χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ —. Οὕτω προκύπτουν δύο ἑτερόσημοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν, ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων παριστάνει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Οὕτω διὰ τὸ ἄθροισμα

$$(-3)+(-5)+(+2)+(+3)+(-7)+(+6)$$

ἔχομεν $(-3)+(-5)+(-7)=-15,$

καὶ $(+2)+(+3)+(+6)=+11,$

τέλος $(+11)+(-15)=-4.$

ε'*) Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν (§ 2) Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $(-8)+(+3)$ π. χ., ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ -8, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ $+3$ μονάδας μήκους. Τὸ οὕτω εὑρισκόμενον σημεῖον παριστάνει τὸ ἄθροισμα $(-8)+(+3)=-5$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ἄθροισμα $(+4)+(-8)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ $+4$, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ ὀκτὼ μονάδας μήκους.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα

α') $(+5)+(-3)$. β') $(-9)+(-3)$. γ') $(-15)+3$
δ') $1{\cdot}2+(-83)$. ε') $(-1864)+(+9134)$.

2) Ὁμοίως α') $(-18,1)+13,6$. β') $-9,13+(-29,1)$ γ') $0,13+(-13,4)$.

3) Ὁμοίως α') $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$·

β') $\left(-3\frac{2}{3}\right)+\left(-4\frac{1}{4}\right)$· γ') $\left(-1\frac{1}{5}\right)+(-8,45)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα. α') $12+(-18)+24$. β') $(-29)+(-13)+(-35)$. γ') $(+13,7)+(-1,118)+9,25$.

δ') $8\frac{2}{3}+\left(-17\frac{1}{2}\right)+4\frac{1}{2}$· ε') $\left(-13\frac{1}{5}\right)+26\frac{1}{3}+\left(-1\frac{2}{15}\right)$·

στ') $(-8,3)+7,93+(35,6)-\frac{4}{5}$·

2) Ὁμοίως α') τὸ $-125+\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{6}\right)+14\frac{1}{2}+$ $\left(-3\frac{1}{8}\right)$· β') τὸ $[(-13,5)+(-8,4)]+6,1+(-7,5)$.

Ὁμὰς τρίτη 1) Κερδίζει τις 234 δραχμάς, ἔπειτα χάνει 216,40 δραχμάς, κερδίζει πάλιν 215,70 δραχμὰς καὶ χάνει ἐκ νέου 112 δραχμάς. Ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε τελικῶς καὶ πόσον; (ἐκ. 121,30).

2) Ἔμπορός τις αὐξάνει τὸ ἐνεργητικὸν αὐτοῦ κατὰ 128 δραχμάς, τὸ δὲ παθητικόν του κατὰ 312,40 δραχμάς. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ; (ἐλ. 184,40).

3) Σῶμα θερμανθέν, ἔλαβε θερμοκρασίαν 17,6°· ἔπειτα ἐψύχθη κατὰ 19,1°· καὶ τέλος ἐθερμάνθη κατὰ 3,1°. Ηὐξήθη ἢ ἠλαττώθη ἡ ἀρχική του θερμοκρασία καὶ πόσον; (ἠλ. 1,6°).

§ 6. Ἀφαίρεσις.—

α') Ἀφαίρεσις δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καλεῖται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ἄθροισμα τὸν πρῶτον.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος*, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς *διαφορά*, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε τὸ (—) *πλήν*.

β') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $(+7)-(-5)$, δυνάμεθα, ἀντὶ νὰ **ἀφαιρέσωμεν** ἀπὸ τὰς 7 θετικὰς μονάδας 5 ἀρνητικάς, νὰ προσθέσω**μεν εἰς** τὰς 7 θετικὰς 5 θετικάς.

Ἤτοι θὰ δείξωμεν ὅτι $(+7)-(-5)=(+7)+(+5)$.

Πράγματι ἔχομεν ὅτι $(+7)+(+5)+(-5)=$ μὲ $+7$.

Διότι εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $(+7)+(5)+(-5)$ αἱ 5 θετικαὶ μονάδες καὶ αἱ 5 ἀρνητικαὶ ἐξουδετεροῦνται. Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἄλλον, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

$$(-3)-(-5)=(-3)+(+5)=+2.$$

$$12-(+6)=12+(-6)=+6.$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{2}{9}\right)=\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(+\frac{2}{9}\right)=-\frac{2}{9}$$

γ΄*) Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαφορὰν $(-4)-(+5)=(-4)+(-5)=-9$.

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν (-4) καὶ προχωροῦμεν ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ 5 μονάδας. Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν $(-7)-(-4)=(-7)+(+4)$, προχωροῦμεν ἐκ τοῦ σημείου (-7) κατὰ τέσσαρας μονάδας πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.

§ 7. Ἐκτέλεσις οἱασδήποτε ἀφαιρέσεως.—

Εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε ἀφαίρεσιν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Ἤτοι, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶνε δυνατή, καὶ ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου. Τῷ ὄντι, ἔχομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα π. χ. ὅτι,

$$3-5=3-(+5)=3+(-5)=-2.$$

$10-25=10+(-25)=-15$· $1-24=1-(+24)=$ $1+(-24)=-23$· $0-7==-7$· $0-12=-12$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραί

α΄) $(+8)-(-4)$. β΄) $(-18)-(+19)$. γ΄) $(-14)-(-7)$. δ΄) $(+19)-(-27)$.

2) Ὁμοίως α΄) $(+0{,}9)-(-0{,}13)$. β΄) $2{,}25-(-1{,}65)$.

Ὁμοίως α΄) $2\frac{5}{6}-\left(-3\frac{1}{3}\right)$· β΄) $9\frac{1}{7}-\left(-7\frac{1}{3}\right)$

γ΄) $-16\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{13}\right)$·

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων α΄) $120+19-(-18)$· β΄) $(-17)-(-4)+(+8)$· γ΄) $21{,}4-7{,}14-(-13)$·

δ΄) $\left(-5\frac{1}{2}\right)+\left(-6\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{5}\right)-4\frac{3}{4}$.

2) Ἐπίσης α΄) $(+16)-((+28)+(-8))-3$· β΄) $-20-[-29-(10)]-[(+95)+(-14)]-[(+38)-(-9)]$.

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἑξῆς πράξεων

α΄) $2-7$· β΄) $8-10$· γ΄) $15-22$· δ΄) $15-130$· ε΄) $125-965$·

ς΄) $8{,}41-9{,}04$· ζ΄) $2-3\frac{4}{5}$ · η΄) $14-8-6-19{,}5$.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Αὐξάνει τις τὸ ἐνεργητικόν του καὶ ἐλαττώνει τὸ παθητικόν του κατὰ 384,20 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του; (αὐξ. 76 ,40).

2) Ἐλαττώνει τις τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 84,3 δρχ. καὶ αὐξάνει τὸ παθητικόν του κατὰ 64,70 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του; (ἐλατ. 149).

3) Ἀναχωρεῖ τις ἔκ τινος ὡρισμένου σημείου Α. Βαδίζει ἐπ᾽ εὐθείας ὁδοῦ 238 βήματα πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Β. Πόσα βήματα πρέπει νὰ βαδίσῃ ἐκ τοῦ Β πρὸς τἀριστερά, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον τοῦ Α 3846 βήματα; (4084).

4) Χάνει τις 16,3 δρχ.· πόσα πρέπει νὰ κερδίσῃ διὰ νὰ ἔχῃ 58,65 δρχ. περισσοτέρας τῶν ὅσων εἶχεν ἀρχικῶς; (74,95).

§ 8. **Πολλαπλασιασμός.**—

α΄) *Πολλαπλασιασμὸς δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, σχηματίζεται ἐκ τοῦ πρώτου τρίτος, ὅπως ὁ δεύτερος σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος.*

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *παράγοντες (πολλαπλασιαστέος* καὶ *πολλαπλασιαστής),* ὁ δὲ προκύπτων ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ *γινόμενον*.

β΄) Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἔχομεν ὅτι,

$$(+8).\,(+3) = (+8) + (+8) + (+8) = (+\,24) = 24.$$

Ὁμοίως

$$(-8).\,(+3) = (-8) + (-8) + (-8) = -\,24.$$

γ΄) Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα, π.χ. τοῦ -9 ἐπὶ $\frac{3}{4}$ σημαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ -9, καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἤτοι ἔχομεν

$$(-9).\,\frac{3}{4} = \frac{(-\,9)}{4}\cdot 3 = \frac{(-\,27)}{4} = -\,6\,\frac{3}{4}\,.$$

§ 9. **Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμόν.**—

α΄) Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον

$$(+\,8).\;(-\,3).$$

Τὸ -3, γίνεται ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της -1, καὶ ταύτην ἐπαναλάβωμεν τρὶς (§ 3, β΄)· Ἄρα, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(+\,8).\;(-\,3),$$

θὰ λάβωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ $+8$, δηλαδὴ τὸν (-8), καὶ τοῦτον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρίς, ἤτοι θὰ εἶνε

$$(+8).\,(-3) = (-8).\,3 = (-8) + (-8) + (-8) = -\,24.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν ὅτι,

$$(-8).\,(-3) = (+8).\,3 = 24.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀντίθετον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, θετικῶς λαμβανόμενον».

β΄) Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος φαίνεται, ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων δι᾽ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς (§ 4, α΄). Ἤτοι ὅτι,

«τὸ γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων».

Οὕτω εἶνε $(+8).(-3) = -24$, $-24 = (-3).(+8)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

γ΄) *«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀπολύτους τιμάς των, καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνομεν μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ δύο παράγοντες εἶνε ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δέ, ἂν εἶνε ἑτερόσημοι».*

§ 10. Περὶ τοῦ σημείου τοῦ γινομένου ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.—

α΄) Κατὰ τἀνωτέρω προκειμένου περὶ τοῦ σημείου δύο παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου των, θὰ ἔχωμεν ὅτι,

«τὸ γινόμενον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶνε θετικόν».
«Τὸ γινόμενον δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν εἶνε ἀρνητικόν».

β΄) Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἂν εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν ἐξ αὐτῶν εἶνε περιττὸς ἀριθμός, τὸ γινόμενον θὰ εἶνε ἀρνητικόν. Ἂν δὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιος ἀριθμός, τὸ γινόμενον θὰ εἶνε θετικόν. Π.χ.

$$(-3).(+5).(-2).(-1).(-5) = +150.$$
$$(-3).(-2)(-1).(+5) = -30.$$

§ 11. Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἕν, ἢ ἐπὶ μηδέν.—

α΄) Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα (+1) μὲν σημαίνει αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, ἐπὶ (—1) δὲ τὸν ἀντίθετόν του. Οὕτω θὰ εἶνε

$$(-4).1 = -4. \qquad (+5).\ 1 = +5$$
$$(-5).(-1) = +5. \qquad (+7).(-1) = -7.$$

β΄) Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ μηδὲν σημαίνει, νὰ θέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἴσον μὲ μηδέν. Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$(+3).\ 0=0$. Διότι $(+3).\ 0=0.\ (+3)=0+0+0=0$.
$(-7).\ 0=0.\ (-7)=0.\ 7=0$,
ἐπειδὴ ὁ ἀντίθετος τοῦ μηδὲν εἶνε πάλιν μηδέν.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα
α΄) $(-5).\ (+8)$· β΄) $(+18).\ (-4)$· γ΄) $(-7).\ (+15)$. δ΄) $(-9).\ (-7)$
ε΄) $(+35).\ (-19)$.
2) Ὁμοίως τὰ
α΄) $\left(+1\frac{1}{4}\right).\left(-1\frac{3}{4}\right)$· β΄) $\left(-6\frac{1}{7}\right)$· $(-3,7)$
γ΄) $(-8,4).\ (-6,5)$. δ΄) $(-9,8).\ 8,5.\ (-4,3).\ (-2,3)$.
Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ὁμοίως α΄) $(-3,9).\ (-7,6)$. β΄) $(-9,45).\ 3,5$.
γ΄) $(-9).\ (-7).\ (-3)$. δ΄) $\left(+4\frac{1}{2}\right).\left(-3\frac{1}{6}\right).\ (-6.8)$.
2) Ὁμοίως τὰ α΄) $(-16).\ 14.\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{3}{8}\right)$·
β΄) $(-3,1).\ (+6).\ (+8).\ (-7)$. γ΄) $(+7).\ (-4)\ (+8).\ (+3)$
δ΄) $(0,6).\ [\,(+9,74)-0,9.\ (+7,5)\,].\ 0,3$.

§ 12. Διαίρεσις.—

α΄) *Διαίρεσις ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο τοιούτων ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον, δίδει γινόμενον τὸν πρῶτον.*

Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται *διαιρετέος*, ὁ ἄλλος *διαιρέτης*, καὶ ὁ ζητούμενος *πηλίκον*, τὸ δὲ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ *διὰ* (:).

β΄) Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον $(+8):(+2)$ Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον $+$. Διότι τὸ γινόμενον δύο θετικῶν ἀριθμῶν θὰ εἶνε θετικόν. Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 2, πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον 8. Ἄρα θὰ εἶνε ἴση μὲ $8:2=4$, ἤτοι θὰ εἶνε $(+8):(+2)=+4$.
Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι, $(+8):(-2)=-4$.
Ἐπίσης $(-8):(+2)=-4$· $(-8):(-2)=+4$.
Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«**διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, διαιροῦμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ**

διαιρέτου, καὶ τὸ οὕτω προκῦπτον πηλίκον θὰ εἶνε θετικὸν μέν, ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ὁμόσημοι, ἀρνητικὸν δὲ, ἂν ἑτερόσημοι».

§ 13. Περὶ τοῦ σημείου τοῦ πηλίκου ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.—

α΄) Ὥστε, προκειμένου περὶ τῆς σχέσεως τῶν σημείων τοῦ διαιρετέου τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, θὰ ἔχωμεν ὅτι,

«τὸ πηλίκον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶνε θετικόν».

«Τὸ πηλίκον δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν εἶνε ἀρνητικόν».

β΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ τῶν ἐν (§ 10, α΄) ἕπεται ὅτι,

«τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶνε θετικόν, δύο δ' ἑτεροσήμων ἀρνητικόν».

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα α΄) $(+28):(+4)$. β΄) $(+28):(-7)$. γ΄) $(-45):(+9)$. δ΄) $(-49):9$. ε΄) $(-1543):(-36)$.

2) Ὁμοίως α΄) $(+0{,}95):(-0{,}5)$. β΄) $(-340):1{,}8$. γ΄) $-143{,}5:-32{,}1$.

δ΄) $\left(5\frac{1}{4}\right):(-0{,}6)$. ε΄) $14\frac{1}{6}:\left(-\frac{2}{7}\right)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα α΄) $(-6):(-9).\,15$.

β΄) $3\frac{2}{3}:\left(-1\frac{4}{5}\right):8$. γ΄) $(-9{,}6):(-26):0{,}7.\,6\frac{1}{2}$.

2) Ὁμοίως τὰ α΄) $(-36):[(-9)-8]$. β΄) $-18:9-(-4):2$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος x, ὥστε νὰ εἶνε α΄) $(-40).\,x=16$. β΄) $(-6).\,x=27$. γ΄) $12.\,x=-48$. δ΄) $31{,}4.\,x=-18{,}84$.

§ 14. Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας θετικοὺς καὶ ἀκεραίους ἀριθμούς.—

α΄) Καθὼς (ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ) τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων ἑνὸς ἀριθμοῦ, π.χ. τὸ 3. 3. 3. 3, καλοῦμεν *τετάρτην δύναμιν* τοῦ 3, καὶ παριστάνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ 3^4, οὕτω καὶ τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ, π. χ. τὸ $(-5).(-5)$ καλεῖται *δευτέρα δύναμις* τοῦ (-5) καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ $(-5)^2$. Ὁμοίως τὸ $(-3).(-3)$ λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ -3, καὶ παριστάνεται μὲ $(-3)^2$.

Τὸ $(-7).(-7).(-7) =$ μὲ $(-7)^3$ καὶ λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ -7.

Ἐν γένει, ***«καλοῦμεν δύναμιν ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμόν».***

ϛ') Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου καλεῖται *ἐκθέτης* τῆς δυνάμεως. Ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἔχομεν τὴν δύναμιν λέγεται *βάσις* τῆς δυνάμεως.

Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *τετράγωνον* τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ δὲ τρίτη δύναμις αὐτοῦ καὶ *κύβος* τοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι $(-7)^2 = (-7).(-7) = 49$.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

τὸ $$\alpha^\mu = \underbrace{\alpha\ \alpha \ldots\ldots \alpha}_{\mu \text{ φορὰς}}$$

ὅπου τὸ α φανερώνει ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ μ ἀκέραιον καὶ θετικόν. Τὸ α^μ καλεῖται μυοστὴ (μ^{η}) δύναμις τοῦ α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων.
α') $(-6)^3$. β') $(-9)^2$. γ') $(+8)^5$. δ') $(-3)^3$. ε') $(-7)^5$ ϛ') $(-1)^3$.

2) Δείξατε διὰ παραδειγμάτων, ὅτι πᾶσα δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην ἄρτιον καὶ θετικὸν εἶνε ἀριθμὸς θετικός, περιττὸν δὲ ἔχουσα εἶνε ἀρνητικός.

§ 15. Περὶ τῶν συμβόλων α^1 καὶ α^0.—

α') Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ ἔχομεν ὅτι

$$\alpha^5 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha, \qquad \alpha^4 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha$$

$$\alpha^3 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha, \qquad \alpha^2 = \alpha.\ \alpha.$$

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως τοῦ α ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα, τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ὁρίζει τὴν δύναμιν ταύτην, διαιρεῖται δι' ἑνὸς τῶν ἴσων παραγόντων του. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι $\alpha^{2-1} = \alpha.\ \alpha : \alpha$.

Ἀλλὰ τὸ α^{2-1} ἰσοῦται μὲ α^1, τὸ δὲ $\alpha.\ \alpha : \alpha =$ μὲ α.

Ἄρα εἶνε $\alpha^1 = \alpha$.

Ἤτοι,

«ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν».

β') Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω θὰ λέγωμεν ὅτι,

$\alpha^{1-1} = \alpha : \alpha = 1$. Ἀλλὰ τὸ $\alpha^{1-1} =$ μὲ α^0. Ἄρα εἶνε $\alpha^0 = 1$, ὅταν τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός. Ἤτοι ὅτι,

«τὸ α^0 ὅπου τὸ α εἶνε ἀριθμός τις ἀλγεβρικός, διάφορος τοῦ μηδενός, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα»·

Καὶ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

$$-3)^0 = 1, \quad 45^0 = 1, \quad (-10)^0 = 1, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^0 = 1,$$

$$(-2)^1 = -2, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}, \quad 4{,}3^1 = 4{,}3.$$

§ 16. Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.—

α') Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων».

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ἂν ἡ βάσις εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ δὲ ἐκθέτης θετικὸς καὶ ἀκέραιος. Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον

$\alpha^3 . \alpha^2$, θὰ εἶνε $\alpha^3 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha,$

$\alpha^2 = \alpha.\ \alpha,$

καὶ ἑπομένως $\alpha^3 . \alpha^2$ εἶνε ἴσον μὲ $\alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha = \alpha^5$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $x^4 . x^2 = x^6$,

καί, ἐν γένει, τὸ γινόμενον $\alpha^\mu . \alpha^\nu$,

ὅπου μ καὶ ν εἶνε ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ α ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, ἰσοῦται μὲ $\alpha^{\mu+\nu}$.

Διότι ἔχομεν ὅτι,

$$\alpha^\mu = \overbrace{\alpha.\ \alpha.\ .\ .\ .\ .\ .\ \alpha}^{\mu \text{ φορὰς}}, \qquad \alpha^\nu = \overbrace{\alpha.\ \alpha.\ .\ .\ .\ .\ .\ \alpha}^{\nu \text{ φορὰς}}$$

ἑπομένως εἶνε $\alpha^\mu . \alpha^\nu = \overbrace{\alpha.\ \alpha .....\alpha.}^{\mu \text{ φορὸς}} \quad \overbrace{\alpha.\ \alpha .... \alpha}^{\nu \text{ φορὰς}} =$

$$= \underbrace{\alpha.\ \alpha.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \alpha}_{(\mu+\nu) \text{ φορὰς}} = \alpha^{\mu+\nu}.$$

β΄) Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, τὸ γινόμενον

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\rho} \cdot \ldots \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\mu+\nu+\rho+ \ldots +\lambda},$$

ὅπου τὸ α εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, τὰ δὲ μ, ν, ρ. . . . λ ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

«τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων».

γ΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(2^3)^2$.

Τοῦτο σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων μὲ τὸ 2^3, ἤτοι τὸ $2^3 . \ 2^3$.

Ἀλλὰ τοῦτο ἰσοῦται κατὰ τὰ ἀνωτέρω μὲ

$$2^{3+3} = 2^{3 \cdot 2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε,

$$(\alpha^3)^4 = \alpha^{3 \cdot 4},$$

καί ἐν γένει ὅτι,

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu},$$

ὅπου α μὲν εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, μ καὶ ν δὲ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«ἄν δύναμίς τις ἀριθμοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, προκύπτει δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκέθτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν

α΄) $\left((-2)^2\right)^3$. β΄) $\left((-3)^2\right)^2$. γ΄) $\left((-1)^2\right)^3$. δ΄) $\left((-1)^3\right)^3$.

δ΄) Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι,

«διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον ἀλγεβρικῶν παραγόντων εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν καθένα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν ταύτην, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα».

Πράγματι ἔχομεν ὅτι,

$$(2.3)^2 = (2.3).\ (2.3) = 2.\ 3.\ 2.\ 3 = 2.\ 2.\ 3.\ 3 = 2^2.\ 3^2.$$

$$\big((-5).\ (-3)\big)^3 = (-5).\ (-3).\ (-5).\ (-3).\ (-5).\ (-3).$$

$$= (-5)^3.\ (-3)^3.$$

Καὶ γενικῶς ὅτι,

$$(\alpha\beta\gamma)^\nu = \underbrace{(\alpha\beta\gamma).\ (\alpha\beta\gamma)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha\beta\gamma)}_{\nu\ \text{φορὰς}}$$

$$= \underbrace{\alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ .\ .\ .\ ,\ .\ \alpha.}_{\nu\ \text{φορὰς}}\quad \underbrace{\beta.\ \beta.\ \beta\ .\ .\ .\ .\ \beta.}_{\nu\ \text{φορὰς}}\quad \underbrace{\gamma.\gamma.\gamma.\ .\ .\ .\ .\ .\ \gamma}_{\nu\ \text{φορὰς}}$$

$$= \alpha^\nu\ .\ \beta^\nu\ .\ \gamma^\nu\ .$$

ε΄) Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι,

«κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων του ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην».

Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}.$$

Διότι τὸ,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \overbrace{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\ .\ .\ .\ .\ \frac{\alpha}{\beta}}^{\mu\ \text{φορὰς}} = \frac{\overbrace{\alpha.\ \alpha.\ \alpha\ .\ .\ .\ \alpha}^{\mu\ \text{φορὰς}}}{\beta.\ \beta.\ \beta\ .\ .\ .\ \beta} = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$$

ὅπου τὸ μ φανερώνει ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν, τὸ δὲ α καὶ β ἀριθμοὺς ἀλγεβρικούς.

στ΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῶν δυνάμεων 2^5 καὶ 2^2. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι τὸ πηλίκον τοῦτο $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$. Ἤτοι ὅτι,

«τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου».

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ βάσις τῶν δυνάμεων εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, οἱ ἐκθέται ἀκέραιοι καὶ θετικοί, ἐκ τούτων δὲ ὁ τοῦ διαιρετέου μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω τὸ πηλίκον

$$(-5)^4 : (-5)^2 = \frac{(-5).\ (-5).\ (-5).\ (-5)}{(-5).\ (-5).} = (-5).\ (-5)$$

$$= (-5)^2 = (-5)^{4-2}.$$

Ὁμοίως

$$(-3)^6 : (-3)^3 = \frac{(-3).\ (-3).\ (-3).\ (-3).\ (-3).\ (-3)}{(-3).\ (-3).\ (-3)}$$

$$= (-3).\ (-3).\ (-3) = (-3)^3 = (-3)^{6-3}$$

Ἐν γένει τὸ πηλίκον

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \frac{\overbrace{\alpha.\ \alpha\ .\ .\ .\ \alpha}^{\mu \text{ φορὰς}}}{\underbrace{\alpha.\ \alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ \alpha}_{\nu \text{ φορὰς}}} = \overbrace{\alpha.\ \alpha.\ .\ .\ .\ .\ \alpha}^{\mu-\nu \text{ φορὰς}} = \alpha^{\mu-\nu},$$

ὅπου α παριστάνει ἀλγεβρικόν τινα ἀριθμὸν καὶ μ, ν θετικοὺς καὶ ἀκεραίους, ὁ δὲ μ εἶνε μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ν.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α΄) $x^5 .\ x^3$. β΄) $y^3 .\ y^4$. γ΄) $x^6 .\ x$ δ΄) $(-x^4)^2$. ε΄) $(-6^6)^3$. ϛ΄) $x^2 .\ x^2$
ζ΄) $x^{2\nu} .\ x(-x)^{2\nu}$. η΄) $x^{2\nu-1} .\ x.(-x)$. θ΄) $x^{2\nu} .\ (x^{-3})^5$.

2) Ὁμοίως τὰ α΄) $(4\alpha\beta)^2$. β΄) $(-3xy)^3$. γ΄) $(5x^2)^2$. δ΄) $(-xy\omega)^1$
ε΄) $\left(-\frac{2}{3}x^2 y\right)^2$. ϛ΄) $\left(-\frac{1}{5}xy^2\right)^3$. ζ΄) $\left(-\frac{3}{4}x^2\right)^0$. η΄) $(5x^3y)^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

§ 17. Χρῆσις γραμμάτων· Γενικοὶ ἀριθμοί. Ἀλγεβρικοὶ τύποι.—

α΄) Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ὑπάρχουν πολλὰ προβλήματα ὅμοια μεταξύ των, διαφέροντα μόνον κατὰ τὰς τιμὰς τῶν δεδομένων των, τὰ ὁποῖα λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἢ τὸν αὐτὸν κανόνα. Οὕτω π.χ. τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Αἱ 4 ὀκάδες ἑνὸς πράγματος τιμῶνται 8 δρ.· πόσον τιμῶνται αἱ 6 ὀκ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

2) Οἱ 5 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται 36 δρ.· πόσον τιμῶνται οἱ 30 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Εἰς ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων, καὶ εἰς τὰ ὅμοια πρὸς αὐτά, δίδεται ἡ τιμὴ ἑνὸς πλήθους μονάδων (4 ὀκ., 5 πήχ.) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ἄλλου πλήθους μονάδων (6 ὀκ., 30 πήχ.) Ὡς γνωστόν, πρὸς λύσιν τούτων ἀρκεῖ, νὰ διαιρέσωμεν τὴν τιμὴν τῶν δοθεισῶν μονάδων διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τούτων, καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν τιμήν. Οὕτω διὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα ἔχομεν ὡς ἐξαγόμενον τὸ

$\frac{8}{4} \cdot 6$ δρ., διὰ δὲ τὸ δεύτερον $\frac{36}{5} \cdot 30$ δρ.

β΄) Χάριν γενικότητος καὶ διὰ τὴν συντομίαν ἀντὶ νὰ μεταχειριζώμεθα τὰς ἐκφράσεις «***ἀριθμός τις ὀκάδων, πήχεων κλπ.***» ἔχει μίαν δοθεῖσαν ***τιμήν***, μεταχειριζόμεθα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, διὰ νὰ παραστήσωμεν ποσότητας, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ δὲν εἶνε μὲν ἀμέσως ὡρισμένη, ἀλλ' ἡ ὁποία ὁρίζεται, ὅταν τὰ γράμματα ἀντικατασταθοῦν δι' ὡρισμένων ἀριθμῶν. Οὕτω, ἂν ἀντὶ τῶν ἐν λόγῳ γραμμάτων θέσωμεν διαφόρους ἀριθμούς, λαμβάνομεν διάφορα προβλήματα, διαφέροντα μόνον κατὰ τὰς δεδομένας τιμάς, ἀλλὰ λυόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ κανόνος. Π. χ. ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω δύο προβλημάτων λύομεν τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

«*Ἐὰν α μονάδες (ἀκέραιαι ἢ κλασματικαὶ) ἑνὸς πράγματος τιμῶνται β δρ., πόσον τιμῶνται γ μονάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος*»;

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ λέγομεν·

ἀφοῦ αἱ α μονάδες ἀξίζουν β δρ., διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμᾶται ἡ 1 μονὰς τοῦ αὐτοῦ πράγματος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς β δρ. διὰ τοῦ α. Ἤτοι ἡ μία μονὰς θὰ τιμᾶται $\frac{\beta}{\alpha}$ δρ. Καὶ γ μονάδες θὰ τιμῶνται $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma$ δρ. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος x τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ γ μονάδων, θὰ ἔχωμεν

$$x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma \text{ δρ.}$$

γ') Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, οἱ ὁποῖοι παριστάνονται μὲ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, καὶ δύνανται νὰ εἶνε ἀλγεβρικοί, ἢ καὶ ἀπόλυτοι, λέγονται *γενικοὶ ἀριθμοί.*

δ') Ἡ γραφὴ τοῦ ἀνωτέρω ἐξαγομένου καλεῖται **τύπος**, καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς). Τοιούτους τύπους καὶ τοιαύτας γραφάς, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν κατὰ τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων, μεταχειριζόμενοι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, καλοῦμεν *ἀλγεβρικοὺς τύπους*. Οὕτω εὑρίσκομεν (ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ) διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου Τ, ὅταν γνωρίζωμεν *τὸ ἐπιτόκιον, τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν χρόνον*, παριστάνοντες αὐτὰ ἀντιστοίχως διὰ τῶν γραμμάτων Ε, Κ, Χ, τὸν ἀλγεβρικόν τύπον

$$T = \frac{K.E.X.}{100}.$$

Ἐπίσης διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ χρόνου ἔχομεν,

$$X = \frac{T.\ 100}{K.\ E.} \text{ κ. ο. κ.}$$

§ 18. Ὁρισμὸς καὶ σκοπὸς τῆς Ἀλγέβρας.—

α') Ἡ *Ἄλγεβρα* εἶνε γενικωτέρα τῆς Ἀριθμητικῆς. Σκοπὸς δ' αὐτῆς εἶνε νὰ λύῃ τὰ διάφορα προβλήματα ἐκείνης, καὶ πολλὰ ἄλλα σχετικὰ πρὸς ἐκεῖνα, ἢ καὶ μή, διὰ γενικωτέρου τρόπου καὶ διὰ συλλογισμῶν γενικωτέρων, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν τύπων.

β') Θὰ παριστάνωμεν συνήθως τὸν ἄγνωστον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν εἰς τὰ διάφορα προβλήματα, διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου x, y, ω, φ, . . ., τοὺς δὲ ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὑποτίθενται γνωστοὶ διὰ τῶν γραμμάτων *α, β, γ*. . . .

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὕρετε τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ κεφάλαιον (ἢ τὸ ἐπιτόκιον) Κ (ἢ Ε), ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐπιτόκιον (ἢ τὸ κεφάλαιον) Ε (ἢ Κ) τὸν χρόνον Χ καὶ τὸν τόκον Τ. **)

2) Εὕρετε τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν τιμὴν α μονάδων ἑνὸς πράγματος, ὅταν ἡ μία μονὰς αὐτοῦ τιμᾶται $\frac{\beta}{\gamma}$ δρ.

3) Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ ἀνωτέρω τύπου, ὅταν εἶνε

$$\alpha=\frac{4}{9}\ (\text{ἢ } 3{,}6).\quad \beta=6{,}4\ \left(\text{ἢ } 4\frac{1}{3}\right)^{\cdot}\ \gamma=6\frac{1}{5}\ (\text{ἢ } 7{,}82).$$

4) Ποῖοι τύποι δίδουν τὰ μερίδια x, y, ω, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς Κ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν λ, μ, ν;

5) Εὕρετε τὴν τιμὴν τῶν ἀνωτέρω τύπων, ὅταν εἶνε Κ=38000, λ=4, $\mu=\frac{1}{3}$, $\nu=\frac{6}{7}$.

6) Ποῖος τύπος δίδει τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μ;

7) Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ τύπου τούτου, ὅταν εἶνε

$$\alpha=6{,}8\ \left(\text{ἢ } 4\frac{1}{3}\right),\ \beta=12\ \left(\text{ἢ } 2\frac{3}{4}\right),\ \mu=\frac{1}{5}\ (\text{ἢ } 13{,}3).$$

§ 19. Συμβολικὴ παράστασις πράξεων.—

α΄) Ἐὰν δοθοῦν οἱ γενικοὶ ἀριθμοὶ a, β, γ, καὶ προστεθοῦν οἱ a καὶ β, εἰς τὸ ἄθροισμα δὲ τούτων προστεθῇ ὁ γ, θὰ ἔχωμεν ἐξαγόμενον τὸν τύπον, $(a+\beta)+\gamma$

β΄) Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν a καὶ β ἀφαιρεθῇ ὁ γ, θὰ ἔχωμεν

$$(a+\beta)-\gamma,$$

ὅπου τὸ $(a+\beta)$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν a καὶ β.

γ΄) Ἐν γένει, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν θέλωμεν νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τρίτον, θέτομεν τοὺς δύο πρώτους μὲ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον τοὺς συνδέει, ἐν παρενθέσει ἢ ἐν ἀγκύλαις, καὶ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο συνδέομεν μὲ τὸν τρίτον διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως. Οὕτω ὁ $a-(\beta-\gamma)$ φανερώνει, ὅτι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν a θὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ $(\beta-\gamma)$.

δ΄) Ἄθροισμα ἴσων προσθετέων γράφομεν συντόμως, γράφοντες ἕνα μόνον τῶν προσθετέων, καὶ πρὸ αὐτοῦ ὡς παράγοντα τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, μὲ τὸ σημεῖον σὺν μέν, ἂν οἱ προσθετέοι εἶνε θετικοί, μὲ τὸ πλὴν δέ, ἂν εἶνε ἀρνητικοί. Οὕτω ἀντὶ τοῦ $a+a+a$ γράφομεν $3a$· ἀντὶ τοῦ $(-\beta)+(-\beta)+(-\beta)$ τὸ -3β.

**) Ἀντὶ νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ διατύπωσις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος μὲ διάφορα δεδομένα, γράφομεν πρὸς συντομίαν τὰ νέα δεδομένα ἐν παρενθέσει.

ε΄) Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ μὲν γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν π.χ. τοῦ α καὶ β παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\alpha.\beta$ ἢ τοῦ $\alpha\beta$, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β ὑπὸ τοῦ $\alpha : \beta$ ἢ ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

§ **20. Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.—**

Τὰ διάφορα σύμβολα, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς ἀριθμοῦ, *σὺν* $(+)$ ἢ *πλὴν* $(-)$, τὸ γινόμενον (.), τὸ πηλίκον (:), τὸ ἄθροισμα $(+)$, τὴν διαφορὰν $(\mp)$, τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν $(\sqrt{\ })$ ἀριθμῶν κτλ., καλοῦμεν *ἀλγεβρικὰ σύμβολα*.

§ **21. Ὁρισμὸς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.—**

Ἀλγεβρικὴ παράστασις καλεῖται τὸ σύνολον ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἢ καὶ γραμμάτων, συνδεομένων δι' ἀλγεβρικῶν συμβόλων.

Οὕτω ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις εἶνε αἱ

$$\alpha+\beta, \quad \alpha+\beta-(\gamma+\delta), \quad \alpha, \quad 5\alpha, \quad \beta\gamma, \quad 6\alpha+\beta-8\gamma.$$

Ἐκ τούτων ἡ παράστασις $\alpha+\beta$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β. Ἡ $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β, καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ἀφαιρεθῇ τὸ $\gamma+\delta$. Ἡ παράστασις α παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν α, κτλ.

§ **22. Εἴδη ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.—**

α΄) Ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται *ρητή*, ἐὰν τὰ μόνα σημεῖα τῶν πράξεων, τὰ ὁποῖα εἶνε σημειωμένα ἐπὶ τῶν γραμμάτων της, εἶνε τῆς προσθέσεως, τῆς ἀφαιρέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἢ ὑψώσεως εἰς δύναμιν ἀκεραίαν) ἢ διαιρέσεως, ὄχι δὲ ἐξαγωγῆς ρίζης. Οὕτω αἱ παραστάσεις

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad 3\alpha\sqrt{3}. \quad \frac{\alpha}{\gamma}+\alpha^2\beta. \quad \frac{x}{3\sqrt{13}}+y$$

εἶναι ρηταί, διότι ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχουν, εἶνε σημειωμένη ρίζα τις.

β΄) Παράστασις ἀλγεβρικὴ λέγεται *ἄρρητος*, ἐὰν τοὐλάχιστον ἐπὶ ἑνὸς τῶν γραμμάτων της εἶνε σημειωμένη ρίζα τις. Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$\alpha+\sqrt{\beta}, \qquad \alpha-\sqrt{\alpha^5\beta}, \qquad 6\sqrt{x}+y$$

εἶνε ἄρρητοι.

(Θὰ ἀσχοληθῶμεν κατωτέρω κυρίως μὲ ρητὰς παραστάσεις).

γ΄) Παράστασίς τις λέγεται *ἀκεραία*, ἐὰν δὲν περιέχῃ καμμίαν διαίρεσιν δι' ἑνὸς ἢ καὶ περισσοτέρων τῶν γραμμάτων της. Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$\alpha+\beta, \quad 8\alpha^3-\frac{3}{4}\alpha^2\beta+\gamma, \quad \frac{4}{5}\alpha^2$$

εἶνε ἀκέραιαι, ἐνῶ τοὐναντίον, αἱ

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{12\alpha^2-\beta}{\alpha+\beta}, \quad \frac{3}{5}\alpha^2+\frac{\beta^3}{\alpha^2}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

εἶνε *κλασματικαί*· ἐπειδὴ ἡ πρώτη περιέχει διαίρεσιν διὰ τοῦ β, ἡ δευτέρα διὰ τοῦ $\alpha+\beta$, ἡ τρίτη διὰ τοῦ α^2, κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις.

1) Τίνες ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶνε ῥηταί; Ἄρρητοι; Ἀκέραιαι; Κλασματικαί; Διατί;

α') $9\alpha^2\beta-\alpha\beta^2$. β') $\sqrt{28\alpha^2\beta}$. γ') $8\sqrt{xy}-9\alpha$. δ') $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{19\beta^2}{\gamma}$.

2) Αἱ παραστάσεις α') $\sqrt{\alpha^2}$. β') $\sqrt{(\alpha+\beta)^2}$. γ') $\frac{7\gamma}{\sqrt[3]{\delta^3}}$

εἶνε ῥηταὶ ἢ ἄρρητοι; Διατί;

3) Εὕρετε παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι μόνον φαινομενικῶς εἶνε ἄρρητοι.

4) Αἱ κατωτέρω παραστάσεις εἶνε ἀκέραιαι, ἢ κλασματικαί; Διατί;

α') $\frac{9\alpha^2\beta}{5\alpha}$. β') $\frac{16\alpha(\alpha-\beta)^2}{7(\alpha-\beta)}$. γ') $\frac{6\gamma^2xy^2}{5\gamma xy^2}$.

§ 23. Περὶ μονωνύμων.—

α') «*Μονώνυμον λέγεται παράστασις ἐν τῇ ὁποίᾳ οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις εὑρίσκεται σημειωμένη*».

Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$\alpha, \quad -6xy^2, \quad \frac{3}{7}\alpha\beta\gamma\delta, \quad -\frac{8\alpha\beta}{9\gamma\delta}$$

εἶνε μονώνυμα.

β') *Ἀκέραιον* λέγεται ἓν μονώνυμον, ἐὰν μόνον πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν γραμμάτων του περιέχῃ. Ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ διαίρεσιν, λέγεται *κλασματικόν*. Οὕτω ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων τὰ μὲν τρία πρῶτα εἶνε ἀκέραια, τὸ δὲ τελευταῖον κλασματικόν.

γ') Ἐὰν εἰς τὸ μονώνυμον ὑπάρχῃ ἀριθμητικός τις παράγων, γράφεται οὗτος πρῶτος, καὶ λέγεται *συντελεστὴς* τοῦ μονωνύμου. Οὕτω εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα οἱ συντελεσταὶ εἶνε κατὰ σειρὰν οἱ

$$1, \quad -6, \quad \frac{3}{7}, \quad -\frac{8}{9}.$$

Τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μονωνύμου λέγεται *κύριον ποσὸν* αὐτοῦ, εἶνε δὲ αὐτὰ εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα κατὰ σειρὰ τὰ

$$\alpha, \qquad xy^2, \quad \alpha\beta\gamma\delta, \qquad \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\,.$$

δ′) Εἰς τὰ μονώνυμα, τὰ μὴ ἔχοντα συντελεστήν, ἐννοοῦμεν τοιοῦτον τὴν θετικὴν μονάδα. Π. χ. τοῦ α συντελεστὴς εἶνε ἡ μονάς. Διότι τὸ α δύναται νὰ γραφῇ 1. α, ἐνῶ τοῦ —α εἶνε ὁ —1.

ε′) Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου εἶνε θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἕπεται ὅτι, τὰ μονώνυμα τὰ ἔχοντα θετικὸν συντελεστὴν ἢ μονάδα, θὰ ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον +, τὰ δὲ ἔχοντα ἀρνητικὸν συντελεστὴν τὸ —.

Οὕτω τὰ μονώνυμα

$$\alpha, \qquad -9xy, \qquad 8\,\alpha.\beta.\gamma.\delta, \quad -\frac{2\alpha\beta}{9\gamma\delta}$$

γράφονται καὶ οὕτω

$$(+1).\alpha, \qquad (-9).\ xy,\ (+8).\ \alpha\beta\gamma\delta,\ \left(\frac{-2}{9}\right)\cdot\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\,.$$

Ὥστε, τὸ πρὸ τοῦ μονωνύμου γραφόμενον σημεῖον + ἢ — εἶνε τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ, καὶ δεικνύει τὸ εἶδος αὐτοῦ, τὸ δὲ κύριον ποσὸν τοῦ μονωνύμου θεωρεῖται ὅτι εἶνε θετικόν.

§ 24. Περὶ βαθμοῦ ἀκεραίου μονωνύμου. –

α′) *Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του καλεῖται ὁ ἐκθέτης, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο ἐν τῷ μονωνύμῳ.*

Π. χ. τοῦ μονωνύμου

$$7\ \alpha^3\ \beta,$$

ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ γράμμα α εἶνε 3, ὡς πρὸς δὲ τὸ β ἡ 1· τοῦ

$$\frac{3}{4}\ \alpha^3\ \beta^2\ \gamma$$

ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶνε 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 2, καὶ ὡς πρὸς τὸ γ ὁ 1.

β′) Ἐὰν ἓν μονώνυμον δὲν περιέχῃ γράμμα τι, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ βαθμός του ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτὸ εἶνε μηδέν. Π. χ. τὸ μονώνυμον

$$3\alpha^3$$

εἶνε μηδὲν βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ β. Διότι, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ

$$3\alpha^2 \quad \text{τὸ} \quad 3\alpha^2\beta^0. \qquad \text{Ἐπειδὴ εἶνε} \quad \beta^0=1.$$

Καὶ τῷ ὄντι, εἶνε $3\alpha^2\beta^0=3\alpha^2.\ 1=3\alpha^2$.

γ′) *Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα γράμματά του λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουν τὰ γράμματα ταῦτα ἐν τῷ μονωνύμῳ.*

Π. χ. τὸ μονώνυμον

$$\frac{3}{4}\ \alpha^2\beta^3\gamma$$

εἶνε πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β, τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς β καὶ γ, τρίτου ὡς πρὸς α καὶ γ, καὶ ἕκτου ὡς πρὸς α, β, γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Τίνος βαθμοῦ εἶνε καθὲν τῶν κάτωθι μονωνύμων ὡς α καὶ β, ὡς πρὸς α; ὡς πρὸς β; ὡς πρὸς γ; ὡς πρὸς α, β, γ;

α΄) $13\alpha^2\beta\gamma^8$. β΄) $\frac{11}{32}\alpha^3\delta^2\gamma$. γ΄) $\frac{24}{19}\alpha\beta^5\gamma^2$. δ΄) $-3\alpha^3\beta^2\gamma^5$.

§ 25. Περὶ ἀθροίσματος μονωνύμων.—

Καλοῦμεν ἄθροισμα δοθέντων μονωνύμων τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἄν γράψωμεν τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, καθὲν μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον.

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $9\alpha^2$, $-15\beta^2$, $\frac{6}{\gamma^3}$.

εἶνε τὸ $9\alpha^2-15\beta^2+\frac{6}{\gamma^3}$.

§ 26. Περὶ ὁμοίων μονωνύμων καὶ ἀναγωγῆς αὐτῶν.—

α΄) Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται *ὅμοια*, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν. Οὕτω τὰ μονώνυμα

$$6\alpha, \quad \frac{2}{7}\alpha, \quad -23\alpha$$

εἶνε ὅμοια. Διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν α, διαφέρουν δὲ μόνον κατὰ τὸν συντελεστήν. Ἐπίσης τὰ

$$-\frac{39}{47}\beta, \quad 6\beta, \quad -17\beta$$

εἶνε ὅμοια, ἔχοντα κύριον ποσὸν τὸ β, καθὼς εἶνε ὅμοια καὶ τὰ

$$12\alpha^2\beta, \quad -15\alpha^2\beta, \quad 23\alpha^2\beta, \quad -\alpha^2\beta,$$

ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν $\alpha^2\beta$.

β΄) **«Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶνε μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεσμῶν τῶν δοθέντων»**.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων 3α καὶ 4α. Ἔχομεν

$$3\alpha+4\alpha=(\alpha+\alpha+\alpha)+(\alpha+\alpha+\alpha+\alpha)=7\alpha.$$

Ἐπίσης $-2\alpha+(-3\alpha)=(-\alpha)+(-\alpha)+$
$+(-\alpha)+(-\alpha)+(-\alpha)=-5\alpha.$

Ὁμοίως $8\alpha+(-5\alpha)=3\alpha.$

Τὸ $-3\alpha+4\alpha+\frac{2}{3}\alpha-13\alpha$

$$= 4\alpha + \frac{2}{3}\alpha + (-3\alpha) + (-13\alpha)$$

$$= \frac{14}{3}\alpha + (-16\alpha)$$

$$= \frac{14}{3}\alpha + \left(\frac{-48}{3}\alpha\right) = -\frac{34}{3}\alpha.$$

Τὸ $2\alpha^2\beta + (-6\alpha^2\beta) + 13\alpha^2\beta - \alpha^2\beta = 15\alpha^2\beta - 7\alpha^2\beta = 8\alpha^2\beta$.

γ΄) «***Καλοῦμεν ἀναγωγὴν ὁμοίων μονωνύμων τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν δι᾽ ἑνὸς τοιούτου***».

§ **27. Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.**— Καλοῦμεν *ἀριθμητικὴν τιμὴν* ἀλγεβρικῆς τινος παραστάσεως τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προκῦπτον ἐὰν τὰ ἐν τῇ παραστάσει ὑπάρχοντα γράμματα ἀντικαταστήσωμεν δι᾽ ἀριθμῶν ὡρισμένων καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἵτινες σημειοῦνται ἐν αὐτῇ.

Οὕτω, ἐὰν εἶνε $\alpha = 3$ ἡ παράστασις 4α ἔχει τὴν τιμὴν $4.\ 3 = 12$. Ἡ παράστασις $\alpha^4 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha$, ὅταν εἶνε $\alpha = 3$ ἔχει τὴν τιμὴν $3.\ 3.\ 3.\ 3. = 81$.

Ἐὰν εἶνε $\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\gamma = 7$, ἡ παράστασις $\frac{9}{14}\alpha\beta\gamma$ ἔχει τὴν τιμὴν $\frac{9}{14} 5.\ 6.\ 7. = 135$.

Ἐὰν εἶνε $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 5$, ἡ παράστασις $3\alpha^2 - 5\beta + 2\gamma$ ἔχει τὴν τιμὴν $3(-2)^2 - 5.1 + 2.5 = 12 - 5 + 10 = 17$.

Ἐὰν εἶνε $x = 2$, $y = 3$, $\omega = 4$, ἡ παράστασις $\frac{8x^2y}{3\omega^3}$ ἔχει τὴν $\frac{8.\ 2.\ 2.\ 3.}{3.\ 4.\ 4.\ 4.} = \frac{1}{2}$.

§ **28. Παραστάσεις ἰσοδύναμοι.**—

α΄) Δύο ἢ περισσότεραι παραστάσεις λέγονται *ἰσοδύναμοι*, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν, δι᾽ οἱασδήποτε τιμὰς τῶν γραμμάτων των. Οὕτω αἱ παραστάσεις

$$\alpha^2 + \alpha\beta \quad \text{καὶ} \quad \alpha(\alpha + \beta)$$

εἶνε ἰσοδύναμοι. Διότι, ἂν θέσωμεν π. χ. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὰς δύο τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 10.

β΄) Ἐὰν δύο παραστάσεις εἶνε ἰσοδύναμοι, συνδέονται συνήθως διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος. Οὕτω ἔχομεν

$$3\alpha = \alpha + \alpha + \alpha,$$

$$\alpha^3 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha.$$

$$4\alpha + 5\alpha + (-12\alpha) = -3\alpha.$$

Θέτοντες εἰς καθὲν τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ἀντὶ καθενὸς τῶν γραμμάτων ὡρισμένην τιμήν, ἀλλὰ τὴν αὐτὴν δι' ἓν καὶ τὸ αὐτό, εὑρίσκομεν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμάς.

§ 29. Πῶς κάμνομεν τὴν δοκιμὴν μιᾶς πράξεως.—

Ἐὰν θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν *δοκιμὴν* μιᾶς πράξεως, π. χ. τῆς ἀναγωγῆς ὁμοίων ὅρων, ἀντικαθιστῶμεν τὰ γράμματα δι' ἀριθμῶν τινων ὡρισμένων, καὶ πρέπει αἱ παραστάσεις, αἵτινες συνδέονται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος, νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

α') $\alpha\mu + 4\mu\cdot$ β') $-8\mu + (-6\mu)\cdot$ γ') $-4\mu + 7\mu.$ δ') $5\mu + (-9\mu)\cdot$
ε') $8\alpha + \alpha + 9\alpha\cdot$ στ') $\rho + 7\rho + (6\rho + 3\rho)\cdot$ ζ') $7x + (-8x) + 6x\cdot$
η') $9\alpha + (-6\alpha + \alpha).$ θ') $-\alpha + 9\alpha + [(-3\alpha) + 9\alpha].$

2) Ὁμοίως τὰ α') $-\mu + \mu\cdot$ β') $10\mu - (-\mu)\cdot$ γ') $-9\mu - \mu\cdot$
δ') $-7\mu - (-\mu)\cdot$ ε') $8x - 10x - 6x\cdot$ στ') $-\rho + 15\rho - (-6\rho - 9\rho).$

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ νὰ γίνῃ ἡ δοκιμὴ διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $-6x + 7y + (-3x)$, ὅταν εἶνε $x = -3,\ y = 4.$
β') $-7x + [(-8x) + 4]$, ὅταν εἶνε $x = 0.$
γ') $-9x + (-7y) + (-3y) + (-6x)$, ὅταν εἶνε $x = 3,\ y = -4.$

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν

α') $\alpha^3 - 6\alpha^2\beta + \beta^3$, ὅταν εἶνε $\alpha = 2,\ \beta = 6.$
β') $\dfrac{(\alpha + \beta)(\alpha - 3\beta)}{6\alpha - 2\beta}$, ὅταν εἶνε $\alpha = 2,\ \beta = 5.$
γ') $\alpha(\beta - \gamma) + \beta(\gamma - \alpha)$, ὅταν εἶνε $\alpha = -2,\ \beta = -2,\ \gamma = -1{,}7.$

5) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων

α') $(\alpha + \beta)[\alpha^2 - (\beta^2 - 6\alpha\gamma)]$, ὅταν εἶνε $\alpha = -5,\ \beta = 2,\ \gamma = -3$
β') $\sqrt{\alpha^3 - 2\beta} - 4\gamma - 2\sqrt{4\alpha^2 + \beta}\,(\alpha + \gamma)$, ὅταν εἶνε $\alpha = 9,\ \beta = -4,\ \gamma = 3$

§ 30. Περὶ πολυωνύμων.—

α') *Καλοῦμεν πολυώνυμον τὸ ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων.*

Οὕτω τὰ $3\alpha^2 + 5\alpha\beta\gamma - 13\gamma^2$, $\quad 8\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\gamma^2 - 6\gamma\delta$

εἶνε **πολυώνυμα**, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶνε ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων **μονωνύμων** $\quad 3\alpha^2, \quad 5\alpha\beta\gamma, \quad -13\gamma^2,$

τὸ δὲ δεύτερον τῶν $\quad 8\alpha^2, \quad -2\alpha\beta, \quad 4\gamma^2, \quad -6\gamma\delta.$

β') Καθὲν μονώνυμον πολυωνύμου λέγεται καὶ *ὅρος* αὐτοῦ, θεωρεῖται δὲ θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἂν ὁ συντελεστὴς του ἔχῃ τὸ σημεῖον, $+$ ἢ $-$. Πολυώνυμόν τι λέγεται *διώνυμον*, ἐὰν ἔχῃ δύο ὅρους, ὡς τὰ

$$\alpha + \beta, \quad \alpha^2 + \beta^2, \quad x^2 + \alpha,$$

τριώνυμον δέ, ἐὰν ἔχῃ τρεῖς ὅρους, ὡς τὰ

$$x^2 + \pi x + \kappa, \quad \alpha + \beta - \gamma, \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

§ **31. Βαθμὸς πολυωνύμου.** —

α΄) *Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του λέγεται ὁ μέγιστος τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου.*

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης οὗτος εἶνε 1, 2, 3,.. τὸ πολυώνυμον λέγεται ***πρώτου, δευτέρου, τρίτου***,.., βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Οὕτω τὸ

$$3\,\alpha^2 - 5\,\alpha\beta\gamma - 13\,\gamma^3$$

εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ α, καὶ τρίτου ὡς πρὸς τὸ γ, πρώτου δὲ ὡς πρὸς τὸ β.

β΄) *Βαθμὸς πολυωνύμου τινὸς ὡς πρὸς δύο, τρία,.. γράμματά του καλεῖται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων του ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα.* Οὕτω τὸ πολυώνυμον $3x^2 - 3xy + 2x - 7$ εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ y.

Τὸ $5\alpha^2 - 3\alpha\beta^2\gamma + 13\,\gamma$ εἶνε τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ.

Περὶ συναρτήσεων.

§ **32. Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.**—

α΄) 1) ***Ταξειδεύων τις λαμβάνει μαζύ του 350 δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει καθ' ἡμέραν 8 δραχμάς.***

Ἐὰν ταξειδεύσῃ ἐπὶ 2 ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ 8.2 δρχ· ἐὰν τρεῖς, τέσσαρας, ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ 8.3· 8.4 δραχ...Καὶ ἐὰν ἐπὶ x ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ 8.x δρ,, θὰ τοῦ μείνουν δὲ καὶ 350—8.x δρ.

Καθὼς βλέπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν, ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ἡμέρας διήρκεσε τὸ ταξείδιον. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ y τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ τοῦ μείνουν μετὰ x ἡμέρας, θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$y = 350^{\delta\rho.} - 8.x^{\delta\rho.}$$

καὶ ἐὰν εἶνε

τὸ $x = 5$, τὸ $y = 350 - 8.5 = 350 - 40 = 310$ δρ.

2) ***Εἷς ποδηλάτης διήνυσε 21 χιλιόμ. διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα ὡρισμένον τόπον, ἀπὸ τοῦτον δὲ διήνυε 17 χιλ. καθ' ὥραν.***

Μετὰ x ὥρας διήνυσεν 17. x χμ. ἀπὸ τὸν τόπον, ἀπ' ἀρχῆς δ' ἐν ὅλῳ 21 + 17. x χμ. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ y τὸν διανυθέντα δρόμον, θὰ ἔχωμεν ὅτι,

$$y=21+17.x. \qquad (1)$$

Ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ὥρας ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του ἀπὸ τὸν ὡρισμένον τόπον, δηλαδὴ ἂν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς ἰσότητος (1). Π.χ. ἂν εἶνε τὸ $x=2$, θὰ ἔχωμεν

$$y=21+17.\,2=21+34=55\cdot$$

ἂν εἶνε $x=3$, τότε $y=21+17.\,3=21+51=72$.

Αἱ ποσότητες x καὶ y, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων λέγονται *μεταβληταί*. Ἐνῷ αἱ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς ἓν πρόβλημα λέγονται *σταθεραί*. Π. χ. τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ ταξειδιώτης μαζύ του, ἡ ἀπόστασις τὴν ὁποίαν διήνυσεν ὁ ποδηλάτης κατ' ἀρχάς, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν ὡρισμένον τόπον, εἶνε σταθεραὶ ποσότητες.

β΄) Εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἡ μεταβλητὴ ποσότης y συνδέεται μὲ τὴν x οὕτως, ὥστε ὅταν δώσωμεν εἰς τὴν x τιμήν τινα ὡρισμένην, εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ y. Ἡ μεταβλητὴ x, εἰς τὴν ὁποίαν δίδομεν αὐθαιρέτως τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν θέλομεν, καλεῖται *ἀνεξάρτητος μεταβλητή*, ἡ δὲ y, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς x, καλεῖται *συνάρτησις* τῆς x.

γ΄) Ἐν γένει, *ἐὰν δύο μεταβληταὶ* x *καὶ* y *συνδέωνται μεταξὺ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς καθεμίαν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ* x *νὰ εὑρίσκωμεν ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς* y, *τότε ἡ* y *θὰ λέγεται συνάρτησις τῆς* x, *ἡ δὲ* x *ἀνεξάρτητος μεταβλητή*.

δ΄) Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶνε συνάρτησις τῆς ἀκτῖνός του. Διότι, ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, καὶ διὰ τοῦ y τὸ ἐμβαδὸν του, θὰ ἔχωμεν ὅτι εἶνε,

$$y=\pi x^2,$$

καὶ τὸ μὲν π εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος (ἴσος μὲ 3,141 περίπου) τὸ δὲ y εὑρίσκεται, ὅταν δοθῇ εἰς τὸ x ὡρισμένη τις τιμή. Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος βάσιν ὡρισμένην α, εἶνε συνάρτησις τοῦ ὕψους του. Διότι ἔχομεν ὅτι,

$$y=\frac{1}{2}\,\alpha x,$$

ἂν τὸ x παριστάνῃ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ y τὸ ἐμβαδόν του.

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε παραδείγματα ἐξαρτήσεως δύο ποσῶν, τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τὸν κοινὸν βίον καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶνε συνάρτησις τοῦ ἄλλου (χρόνος, ἐργασία καὶ ἀμοιβή, ἀξία ἐμπορεύματος καὶ βάρος κλπ.).

2) Εὕρετε παραδείγματα συναρτήσεων ἐκ τῆς Φυσικῆς (τὸ διανυόμενον διάστημα καὶ ἡ ταχύτης ἐν τῷ κενῷ, τὸ διάστημα καὶ ὁ χρόνος κλπ.). Ὁμοίως ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

§ 33. Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως.—

α΄) Ἔστω μία συνάρτησις y, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ $13+5x$. Ἤτοι ἔστω ὅτι ἔχομεν,

$$y=13+5x \qquad (1).$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς 0,1,2,3,... δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, ἂν θέσωμεν εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμάς του. Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

ὅταν εἶνε $x=0$, τὸ $y=13+5.0=13$.
ὅταν εἶνε $x=1$, τὸ $y=13+5.1=18$.
ὅταν εἶνε $x=2$, τὸ $y=13+5.2=23$.

Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν

$$y=144-6x$$

ἔχομεν ὅτι,

ὅταν εἶνε $x=0$, $y=144-6.0=144$.
ὅταν εἶνε $x=1$, $y=144-6.1=138$.
ὅταν εἶνε $x=2$, $y=144-6.2=132$.

β΄) Ἐν γένει, ἐὰν δοθῇ μία συνάρτησις π.χ. ἡ y, μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω τῆς x, καὶ διὰ δοθείσας τιμὰς τῆς x γράφωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, καθὼς εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν πίνακα τῶν τιμῶν τούτων τῆς συναρτήσεως ταύτης.

Ἀσκήσεις.

1) Σχηματίσατε τὸν πίνακα τῶν τιμῶν τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς τιμὰς τοῦ

$$x=1\cdot\ 2\cdot\ 3'\ 5'-1\cdot$$

$$x=-2'-3\cdot-\frac{1}{4}$$

α΄) $y=3x+6$. β΄) $y=8x-25$, γ΄) $y=x$, δ΄) $y=-x$

ε΄) $y=\frac{3}{4}x-62$. ϛ΄) $y=\frac{x^2}{2}-3x-7$

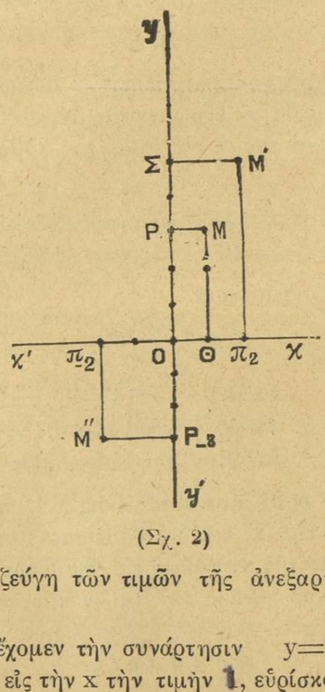
ζ΄) $y=\frac{4}{19}x^2+\frac{3}{8}x+9$. η΄) $y=600-35x^2+\frac{13}{15}x$.

2) Σχηματίσατε τὸν πίνακα τῶν τιμῶν καθεμιᾶς τῶν κάτωθι συναρτήσεων, ὅταν εἶνε $x=0, \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot$

α′) $y=\frac{6x-7}{9x+5}$ · β′) $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{5x+6}+9$. γ′) $y=\frac{1}{x^8+6}$ ·

§ 34. Ἀπεικόνισις τῶν τιμῶν συναρτήσεως.—

α′) Καθὼς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς παριστάνομεν (§ 2) διὰ σημείων τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, οὕτω δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν



(Σχ. 2)

διὰ σημείων τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως.

β′) Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν $y=2.x+1$ (1)

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὴν τιμὴν **1**, εὑρίσκομεν

$$y=2.1+1=3.$$

Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν x′ x καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Θ (ὅπου ΟΘ=1), τό ὁποῖον παριστάνει τὴν τιμὴν x=1. Τὴν τιμὴν τοῦ y θὰ παριστάνωμεν κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον δι᾽ ἑνὸς σημείου μιᾶς ἄλλης εὐθείας y′ y, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν συνήθως κάθετον ἐπὶ τὴν x′x εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ταύτης τὸ μὲν μέρος Οy εἶνε τὸ τμῆμα τῶν θετικῶν τιμῶν τοῦ y, τὸ δὲ Οy′ τὸ τῶν ἀρνητικῶν (σχ. 2)

Οὕτω ἡ τιμὴ τῆς $y=3$ θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου P τῆς Oy. Ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν Oy, καὶ ἐκ τοῦ P πρὸς τὴν Ox, αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ M. Θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον M παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν τοῦ $x=1$, καὶ $y=3$ τῆς συναρτήσεως $y=2x+1$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x=2$, καὶ $y=2.\ 2+1=5$, ἥτις εὑρίσκεται ἐκ τῆς (1), ἂν θέσωμεν ὅπου x τὸ 2. Τοῦτο παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου M΄, τὸ ὁποῖον εἶνε ἡ τομὴ τῆς εὐθείας $\Pi_2 M'$, ἥτις ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν Oy ἐκ τοῦ σημείου Π_2 τῆς $x'x$, παριστάνοντος τὸν ἀριθμὸν $x=2$, καὶ τῆς ΣM΄, ἥτις ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν Ox ἐκ τοῦ σημείου Σ, τοῦ παριστάνοντος τὴν τιμὴν $y=5$.

Διὰ τὴν τιμὴν $x=-2$ ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$y=2.\ (-2)+1=-4+1=-3.$$

Εὑρίσκομεν δὲ τὸ σημεῖον Π_{-2} ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$, τὸ P_{-3} ἐπὶ τῆς $y'y$, καὶ τὸ σημεῖον M΄΄, τομὴ τῆς ἐκ τοῦ Π_{-2} παραλλήλου πρὸς $y'y$, καὶ τῆς ἐκ τοῦ P_{-3} παραλλήλου πρὸς τὴν $x'x$, παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x=-2$, $y=-3$, τοῦ x καὶ τῆς συναρτήσεως (1).

γ΄) Ἐν γένει, καθὲν ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως θὰ παριστάνεται ὑπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εἶνε τομὴ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς εὐθείας $x'x$ καὶ $y'y$. Ἐκ τούτων ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν $y'y$ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου, τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x, ἡ δὲ πρὸς τὴν $x'x$ ἐκ τοῦ σημείου, τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ y.

δ΄) Δυνάμεθα ταχύτερον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ὡς ἑξῆς. Ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x (ἢ τοῦ y) φέρομεν τμῆμα εὐθείας παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y'y$ (ἢ τὴν $x'x$), καὶ ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους ὅση εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ y (ἢ τοῦ x), πρὸς τὰ ἄνω μὲν (ἢ δεξιὰ), ἂν ἡ τιμὴ τοῦ y (ἢ τοῦ x) εἶνε θετική, πρὸς τὰ κάτω δέ (ἢ ἀριστερὰ), ἂν εἶνε ἀρνητική.

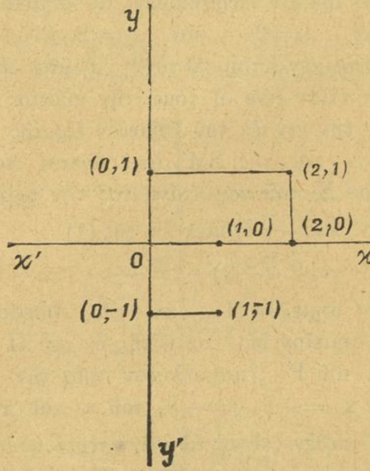
Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $y=2x-3$

διὰ $x=1$ θὰ εἶνε $y=2-3=-1$.

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 1 καὶ — 1 τῆς x καὶ y, ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον τὴν τιμὴν —1 τοῦ y ἐπὶ τοῦ Oy φέρωμεν τμῆμα εὐθείας παραλλήλου τῆς Ox, καὶ ἴσον μὲ 1. Τὸ σημεῖον τοῦτο σημειώνομεν διὰ τοῦ (1,—1) εἰς τὸ σχῆμα (3).

Ὁμοίως διὰ x=2 εἶνε $y=2 . 2-3=+1$. Τὸ σημεῖον (2,1) παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 2 καὶ + 1, κ.ο.κ.

ε') Τὴν εὐθεῖαν x' x καλοῦμεν συνήθως *ἄξονα τῶν* x ἢ *τῶν τετμημένων*, τὴν δὲ εὐθεῖαν y' y *ἄξονα τῶν* y ἢ *τῶν τεταγμένων* τοὺς δύο δὲ ἄξονας μὲ ἕν ὄνομα *ἄξονας τῶν συντεταγμένων* x καὶ



(Σχ. 3)

y. Συνήθως λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν x ὁριζόντιον, τὸν δὲ τῶν y κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον. Τὴν τιμὴν τοῦ x καὶ y καλοῦμεν ἀντιστοίχως *τετμημένην* καὶ *τεταγμένην* τοῦ σημείου, τοῦ παριστάνοντος τὸ ζεῦγος τῶν δύο τούτων τιμῶν, καὶ τὰς δύο δὲ μὲ ἕν ὄνομα *συντεταγμένας* τοῦ σημείου.

Ἀσκήσεις.

Παραστήσατε διὰ σημείων τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τοῦ x

α') $y=x+2$. β') $y=\frac{1}{2}x+1$. γ') $y=\frac{3}{4}x-2$.

δ') $y=\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}x^2$. Ὅταν εἶνε $x=0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot$

ε') $y=\frac{1}{2}x^2-x^5$. ϛ') $y=-\frac{3}{4}x^2+5$. ζ') $y=\frac{x-1}{2}+1$.

η') $y=\frac{x^2}{2}-x+1$. Ὅταν εἶνε $x=0 \cdot -1 \cdot -2, \frac{3}{2}, +2,$

θ') $y=x^4-x+.3$ Ὅταν εἶνε $x=0 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -\frac{1}{3}, 0, 1.$

στ') Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς παρστάσεως ζεύγους τιμῶν μεταχειρίζονται συχνὰ διὰ νὰ συγκρίνουν μεταξύ των πλῆθος παρατηρήσεων. Ἔστω π.χ. ὅτι γνωρίζομεν τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ θερμόμετρον τὴν 8ην πρωϊνὴν ὥραν καθ' ἡμέραν ἐπὶ ἕνα μῆνα. Λαμβάνομεν ἓν ὡρισμένον μῆκος ὡς μονάδα μήκους, ἡ ὁποία θὰ παριστάνῃ τὴν μίαν ἡμέραν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔστω τὸ 0,01 μ. Ἐπίσης ἓν ἄλλο ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἔστω τὸ 0,02 μ., τὸ ὁποῖον θὰ παριστάνῃ τὸν ἕνα βαθμὸν (ἢ περισσοτέρους) τοῦ θερμομέτρου. Ἀφοῦ εὕρωμεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (τῶν ἡμερῶν τοῦ μηνὸς, καὶ τῶν ἀντιστοίχων βαθμῶν τοῦ θερμομέτρου) συνδέομεν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς διὰ τμημάτων εὐθειῶν. Ἡ γραμμὴ, τὴν ὁποίαν οὕτω εὑρίσκομεν, δίδει μίαν εἰκόνα τῶν κυμάνσεων τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὸν θεωρούμενον μῆνα. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται, συνήθως, *γραμμὴ τῆς θερμοκρασίας* τοῦ ἐν λόγῳ μηνὸς.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀπεικονίζομεν τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος ἑνὸς ἀσθενοῦς, παρατηροῦντες αὐτὴν δὶς τῆς ἡμέρας (τὴν πρωΐαν καὶ ἑσπέραν συνήθως) καὶ λαμβάνοντες τὸν μέσον ὅρον των, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν μέσην θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας. Τὴν γραμμὴν, τὴν ὁποίαν οὕτω θὰ εὕρωμεν, καλοῦμεν συνήθως *γραμμὴν τοῦ πυρετοῦ* τοῦ ἀσθενοῦς.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ μέση μηνιαία θερμοκρασία μιᾶς πόλεως εἶνε διὰ πάντας τοὺς μῆνας ἑνὸς ἔτους κατὰ σειρὰν –4°, –2,3°· 3,3°· 6,5°· 13°· 16,6°. 17,8°· 19,5°· 13,9°· 9°· 3,1° –2,6°. Λάβετε ὡς μονάδα μὲν μετρήσεως τοῦ μηνὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ 0,01 μ. Ὡς μονάδα δὲ μετρήσεως ἑνὸς βαθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἐπίσης τὸ 0,01 μ. Εὕρετε τὴν γραμμὴν τῆς θερμοκρασίας τῆς πόλεως.

2) Ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως κατὰ τὸ 1890 ἦτο 54 χιλιάδες καὶ κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 1903 ἦτο 56· 46· 38· 32· 35· 37· 48· 52· 87· 79· 69· 90· 97 χιλιάδες. Λάβετε ὡς μονάδα μήκους πρὸς παράστασιν τοῦ ἔτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς χιλιάδος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y τὸ 0,005 μ. Ἀπεικονίσατε τὴν πορείαν τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως ταύτης.

Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων.

35. Πρόσθεσις πολυωνύμων.—

α') Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς».

Οὕτω π.χ. ἔχομεν ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=\beta+\alpha+\gamma=\gamma+\beta+\alpha=\ldots$

β') Ἐν γένει, ***«ἐὰν ἀλγεβρικοί τινες ἀριθμοὶ συνδέωνται μεταξύ των διὰ προσθέσεως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτοὺς καθ' οἱανδήποτε τάξιν, χωρὶς τὸ ἐξαγόμενον νὰ μεταβληθῇ, ἀρκεῖ, καθεὶς ἐξ αὐτῶν νὰ διατηρῇ τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον».***

Διότι, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν πᾶσαν ἀφαίρεσιν ἀριθμῶν εἰς πρόσθεσιν. Οὕτω ἔχομεν,

$\alpha+\beta-\gamma=\alpha+\beta+(-\gamma)=\alpha+(-\gamma)+\beta=\alpha-\gamma+\beta$. Ὁμοίως ἔχομεν $\alpha-\gamma-\beta=\alpha+(-\gamma)+(-\beta)=(-\beta)+\alpha+(-\gamma)=-\beta+\alpha-\gamma$.

Ἐπίσης ἔχομεν ὅτι, $\alpha+(\beta-\gamma)=\alpha+[\beta+(-\gamma)]=\alpha+\beta+(-\gamma)=\alpha+\beta-\gamma$ καὶ τοῦτο $=\alpha-\gamma+\beta$.

Ὁμοίως $\alpha+(-\beta-\gamma)=\alpha+[(-\beta)+(-\gamma)]=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=\alpha-\beta-\gamma$.

Ἐκ τούτων **συνάγομεν** ὅτι,

γ') ***«διὰ νὰ προσθέσωμεν μονώνυμα, ἀρκεῖ, νὰ γράψωμεν καθ' οἱανδήποτε τάξιν τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο καὶ καθὲν μὲ τὸ σημεῖόν του».***

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων,

$$15\alpha^2x, \quad -3\alpha^2x, \quad 15\alpha^3y, \quad -\alpha^2x, \quad -\alpha^3y$$

εἶνε $15\alpha^2x \quad -3\alpha^2x \quad +15\alpha^3y \quad -\alpha^2x \quad -\alpha^3y$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων $15\alpha^2x$, $-3\alpha^2x$, $-\alpha^2x$ ἀφ' ἑνός, καὶ τῶν $15\alpha^3y$, $-\alpha^3y$ ἀφ' ἑτέρου, εὑρίσκομεν $11\alpha^2x+14\alpha^3y$.

δ') Ἐπειδὴ πᾶν **πολυώνυμον** εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων του, ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ προσθέσωμεν πολυώνυμα, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων τῶν δοθέντων, διατηροῦντες τὸ σημεῖον ἑκάστου ὅρου».

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$3\alpha^2x+\beta^3+6+\alpha^4, \qquad -\beta^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x$$

ἰσοῦται μὲ τὸ **πολυώνυμον**

$$3\alpha^2x+\beta^3+6+\alpha^4-\beta^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x,$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν

$$5\alpha^2x+3\alpha^4-2.$$

Καθ' ὅμοιον **τρόπον διὰ** νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε πολυωνύμων, **σχηματίζομεν** ἓν **πολυώνυμον** ἐκ πάντων τῶν ὅρων τῶν δοθέντων, διατηροῦντες τὰ σημεῖα τῶν ὅρων των.

Λαγκαδινίδιον Κλεινίου Μιανός

§ **36. Ἀφαίρεσις πολυωνύμων.—**

α΄) «*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονώνυμόν τι ἀπὸ δοθεῖσαν παράστασιν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτην τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος*».

Διότι, ὡς γνωστόν, διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν **ἀριθμόν** τινα ἀλγεβρικὸν ἀπὸ ἄλλον, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν **ἀντίθετόν του** εἰς τὸν μειωτέον. Οὕτω, ἡ διαφορὰ τοῦ $—α^2$ ἀπὸ τοῦ $α^3y$ εἶνε $α^3y + α^2$. Ἡ διαφορὰ τοῦ $α^2β$ ἀπὸ τοῦ $3α^2β + 5αβ^2—β^2$ εἶνε

$$3α^2β + 5αβ^2—β^2—α^2β = 2α^2β + 5αβ^2—β^2.$$

β΄) Ἐὰν ζητῆται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν

$$α^3x, \quad —α^2y, \quad α^3$$

νὰ ἀφαιρεθοῦν τὰ μονώνυμα

$$α^2x, \quad —3α^2y^3, \quad —α^4, \quad 2αy^2,$$

εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν **πρώτων** καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν καθὲν τῶν ἄλλων μὲ **ἀντίθετον** σημεῖον. Ἤτοι ἔχομεν

$$α^3x — α^2y + α^3 — α^2x + 3α^2y^3 + α^4 — 2αy^2.$$

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

«***διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθείσης παραστάσεως δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν ἔπειτα αὐτῆς τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου, καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖόν του***».

Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ **πολυωνύμου**

$$3α^2x — 9α^3 x^2 — 6α^2 x^2$$

ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου $9α^2 x + 18α^3 x^2 — α^2 x^2$

εἶνε $9α^2x + 18α^3x^2 — α^2x^2 — 3α^2x + 9α^3x^2 + 6α^2x^2,$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων **εὑρίσκομεν**

$$6α^2x + 27α^3 x^2 + 5α^2 x^2.$$

§ **37. Περὶ χρήσεως παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν.—**

α΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι,

«***ἐὰν πρὸ παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, ἐντὸς τῆς ὁποίας ὑπάρχουν ὅροι, ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον + δυνάμεθα νὰ τὴν παραλείψωμεν, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων· ἐὰν δὲ***

ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον —, τὴν παραλείπομεν ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον καθενὸς τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων».

Οὕτω ἔχομεν $\alpha - (\beta - \gamma + \delta) = \alpha - \beta + \gamma - \delta$.

Διότι, τὸ σημεῖον τὸ πρὸ τῆς παρενθέσεως φανερώνει, νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $\beta - \gamma + \delta$ ἀπὸ τὸ α. Καὶ κατὰ τἀνωτέρω, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ α τοὺς ὅρους τῆς παρενθέσεως, καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖόν του. Ὁμοίως ἔχομεν

$$\alpha - [-(\beta+\gamma) + (\alpha-\beta) - \gamma + \alpha] = \alpha + (\beta+\gamma) - (\alpha-\beta) + \gamma - \alpha$$
$$= \alpha + \beta + \gamma - \alpha + \beta + \gamma - \alpha = -\alpha + 2\beta + 2\gamma.$$

β΄) Τοὐναντίον δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὅρους ἐντὸς παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, θέτοντες τὸ σημεῖον + μὲν πρὸ αὐτῆς, ἂν ἕκαστος ὅρος διατηρῇ τὸ σημεῖόν του ἐντὸς αὐτῆς, τὸ — δέ, ἂν οἱ ὅροι γράφωνται μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖόν των ἐντὸς αὐτῆς. Οὕτω π.χ. ἔχομεν

$$\alpha - \beta - \gamma = \alpha + (-\beta - \gamma) \text{ ἢ } = \text{μὲ } \alpha - (\beta + \gamma).$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ νὰ γίνουν αἱ δοκιμαὶ διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

1) $3x-(6x-4y)$. Δοκιμὴ διὰ $x=y=3$.

2) $7\alpha-8\beta-(19\alpha+3\beta)$. » » $\alpha=\beta=10$.

3) $3x+6y-9\omega+(14x-7y+6\omega)$. » » $x=9, y=3, \omega=4$,

4) $\theta-(\mu-\nu)$, ἐὰν εἶνε $\theta=x+9y-6\omega$, $\mu=4x-7y+2\omega$, $\nu=x+y+\omega$.

Ὁμὰς δευτέρα. Δείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν

1) $3x+9y+(6x-7y) = 8x+6y-(4y-x)$.

2) $3\alpha+2\beta-(4\alpha-\beta) = 2\beta+4\alpha+(\beta-5\alpha)$.

3) $2x-3y-5\omega-(3x+2y-\omega) = 2x+5y+6\omega-(3x+10y+10\omega)$.

Ὁμὰς τρίτη. Ἐκτελέσατε τὰς πράξεις κατωτέρω, ὥστε νὰ ἐξαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι.

1) $(8\alpha-3\beta-\Big[(9\alpha-\gamma)-(6\beta-9\gamma)\Big]$, δοκιμὴ διὰ $\alpha=\beta=\gamma=2$,

2) $(8\alpha-9\gamma)-\Big[[(6\beta-5\gamma)+7\alpha]-2\beta\Big]$ » » »

3) $19-x-\Big(8x-[8-9x-(7-9x)]\Big)$ » » » $x=-3$.

Ὁμὰς τετάρτη. Γράψατε καταλλήλως τὰς κατωτέρω παραστάσεις, ὥστε οἱ ὅροι των ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς νὰ εἶνε ἐν παρενθέσει, ἐχούσῃ τὸ σημεῖον + ἢ τὸ —.

1) $13x-6x^2+19x^3-8\beta-14\alpha+5\gamma$.

2) x^3+7x^2-3x-5.

3) $-5x^4-(3x^3-8x^2)-6x+9$.

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, π.χ. τῶν α καὶ β, αὐξηθῇ κατὰ τὴν διαφοράν των, προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Διατί;

2) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐλαττωθῇ κατὰ τὴν διαφοράν των προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ. Διατί;

3) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, π. χ. τῶν α καὶ β, δὲν μεταβάλλεται, ἂν τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν, κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Διατί;

Ὁμὰς ἕκτη. 1) Ἓν παιδίον εἶνε α ἐτῶν, ὁ δὲ πατήρ του ἔχει τριπλασίαν ἡλικίαν τούτου. Πόσην ἡλικίαν θὰ ἔχουν (ἢ εἶχον) καὶ οἱ δύο μετὰ (ἢ πρὸ) μ ἔτη (ἐτῶν);

$4\alpha+2\mu$, $(4\alpha-2\mu)$.

2) Εἰς τὴν πρώτην τάξιν σχολείου τινὸς φοιτῶσιν α μαθηταί, εἰς τὴν δευτέραν β ὀλιγώτεροι, εἰς δὲ τὴν τρίτην 2β ὀλιγώτεροι τῶν ἐν τῇ πρώτῃ. Πόσους μαθητὰς ἔχουν ἐν ὅλῳ αἱ τρεῖς τάξεις; Πόσους ἔχουν περισσοτέρους αἱ δύο πρῶται τάξεις τῆς τρίτης;

$3(\alpha-\beta)$ · $(\alpha+\beta)$.

3) Ἐκ δύο ἀνθρώπων Α καὶ Β ὁ πρῶτος ἔχει x δραχ., καὶ οἱ δύο ὁμοῦ y δραχ. Ὁ Α δίδει εἰς τὸν Β 3 δρ.· πόσας θὰ ἔχῃ ἕκαστος; $x-3$, $y-x+3$.

4) Ὁ Β ἔχει τριπλασίας δραχ. ἢ ὁ Α. Ὁ Γ διπλασίας τῶν τοῦ Β· ὁ δὲ Α ἔχει μ δραχ. Πόσας ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς; (10μ).

§ 38. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων.—

α΄) Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντας».

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει, καὶ ἂν οἱ παράγοντες εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί (§ 4, α΄). Οὕτω, ἂν διὰ τῶν α, β, γ παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας παράγοντας, θὰ ἔχωμεν,

$$\alpha\beta\gamma=\beta\alpha\gamma=\gamma\alpha\beta=\gamma\beta\alpha=\alpha\gamma\beta,\ldots$$

οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ.

β΄) *Καλοῦμεν γινόμενον μονωνύμων τὸ μονώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει παράγοντας τὰ δοθέντα μονώνυμα.*

γ΄) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $5\alpha^2\beta^2\gamma$, $3\beta\gamma^2$.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶνε τὸ

$$(5\alpha^2\,\beta^3\,\gamma).\ (3\beta\gamma^2)$$

ἢ τὸ

$$5\alpha^2\beta^3\gamma.\ 3\beta\gamma^2.$$

Καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων θὰ ἔχωμεν,

$$5\alpha^2\beta^3\gamma.\ 3\beta\gamma^2 = 5.\ 3.\ \alpha^2.\ \beta^3.\beta.\ \gamma.\ \gamma^2 = 15\alpha^2\beta^4\gamma^3.$$

Ὁμοίως τὸ γινόμενον τῶν

$$-\frac{4}{3}\,\alpha^2\beta^4\gamma,\quad \frac{2}{5}\alpha^3\beta^2\gamma,\quad \frac{1}{6}\beta\gamma^2\delta$$

εἶνε

$$-\frac{4}{3}\,\alpha^2\beta^4\gamma.\ \frac{2}{5}\,\alpha^3\beta^2\gamma.\ \frac{1}{6}\,\beta\gamma^2\delta = \frac{-4}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}\alpha^2\alpha^3\beta^4\beta^2\beta\gamma\gamma\gamma^2\delta$$
$$= -\frac{4}{45}\,\alpha^5\beta^7\gamma^4\delta.$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστάς των, καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου τούτων γράφομεν καθὲν γράμμα, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα, μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους τοῦτο ἔχει εἰς τὰ δοθέντα».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α′) $x^7\,(-x^3).\ y^6\,y^4.$ β′) $(-x^4x).\ \alpha^3.\ \alpha^5.\ \alpha^2.$ γ′) $(x^2)^2.(\beta^3)^4$

δ′) $x^{\nu-2}.\ x^{2\nu}.\ x.$ ε′) $x^{3\nu-1}.\ x.\ x^{2\nu-2}\ x^2.$

ϛ′) $6\alpha x.5\alpha^3x^2.\ (-9x^3)^3.$ ι′) $(-xy\omega).x^2y^2\omega^2.$ ια′) $(-7xy\omega).\ (4x^2y^2)$

ιβ′) $\left(\frac{2}{4}\,x^2\,y\right)2xy^2\left(-\frac{4}{5}\,xy\right)^2.$

§ 39. Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον.—

α′) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta-\gamma).\ \mu,$$

ὅπου τὸ μ παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha+\beta-\gamma).\ \mu = \overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{1\eta} + \overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{2\alpha} + \ldots + \overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{\mu\eta}$$

$$= \left(\overset{1\eta}{\alpha}+\overset{2\alpha}{\alpha}+\ldots\overset{\mu\acute{\eta}}{\alpha}\right)+\left(\overset{1\eta}{\beta}+\overset{2\alpha}{\beta}+\ldots+\overset{\mu\acute{\eta}}{\beta}\right)-\left(\overset{1\eta}{\gamma}+\overset{2\alpha}{\gamma}+\ldots\overset{\mu\acute{\eta}}{\gamma}\right)$$

καὶ τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\alpha.\mu+\beta.\mu-\gamma.\mu$.

Ἤτοι, «***διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα***».

ϐ') Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀληθεύει, καὶ ἂν εἶνε ἀρνητικὸς ὁ μ. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. ἐὰν στηριχθῶμεν εἰς τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 8, α').

Οὕτω π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ $(\alpha+\beta-\gamma).(-\mu)$ εἶνε ἴσον μὲ

$$-(\alpha+\beta-\gamma).\mu=(-\alpha-\beta+\gamma).\mu=-\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu.$$

γ') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2) \text{ ἐπὶ τὸ } 2\alpha.$$

Θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2).2\alpha=[\alpha^2+(-3\alpha\beta)+\beta^2].2\alpha.$$

Καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα εὑρίσκομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ

$$\alpha^2.2\alpha+(-3\alpha\beta).2\alpha+\beta^2.2\alpha=2\alpha^3-6\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2.$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$(5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+7\beta^3).(-3\alpha\beta)=-15\alpha^3\beta^2+9\alpha^2\beta^3-21\alpha\beta^4.$$

Ὥστε «***διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν καθένα τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα***».

δ') Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον μονώνυμον ἐπὶ πολυώνυμον, δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων (θεωροῦντες τὸ πολυώνυμον ὡς ἕνα ἀριθμόν). Οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. Π. χ. τὸ γινόμενον $\alpha.(\beta-\alpha+\gamma)=(\beta-\alpha+\gamma).\alpha$,
καὶ τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\alpha\beta-\alpha^2+\alpha\gamma$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα.

α') $(x^3+9x^2-6x+1).x^2$. β') $7\alpha^2.(\alpha^2-9\beta^2)$.

γ') $3\alpha x.(\alpha^2-4\alpha x+x^2)$. Δοκιμαὶ διὰ $x=-1$, $\alpha=2$, $\beta=-3$.

δ') $5x-3.(x+4)$. ε') $(3\beta-5\alpha).\beta$. ς') $(4\alpha+7\beta)-(9\beta-5\alpha)\beta$.

Δοκιμαὶ διὰ $x=0$, $\alpha=-1$, $\beta=2$.

ζ') $(3\alpha^2+7\beta^2)\alpha\beta-(9\alpha^2-8\beta^2)\alpha\beta$. Δοκιμὴ διὰ $\alpha=-1$, $\beta=-2$.

$\alpha^{\mu}\beta^{\nu}\gamma^{\rho} \ldots \delta^{x} =$

Ὁμὰς δευτέρα. Λύσατε τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἔκ τινος τόπου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ταχυδρόμοι πρὸς ἀντιθέτους διευθύνσεις. Ὁ μὲν πρῶτος διανύει καθ' ἡμέραν $\alpha+\mu$ χιλιόμετρα, ὁ δὲ δεύτερος 2μ χμ. ὀλιγώτερα τοῦ πρώτου. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας ; $(2\alpha\tau)$.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου τινὸς ἀριθμοῦ εἶνε α. Τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶνε μ. Πόσον θὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμός, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του; $(18\mu - 9\alpha)$.

3) Ἔκ τινος τόπου ἀναχωρεῖ ταχυδρόμος διανύων 30 χμ. ἡμερησίως· μ ἡμέρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος, διανύων γ χμ. ἡμερησίως καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου (ἢ τοῦ δευτέρου) ; $30\tau + \gamma(\mu - \tau)$, $(30(\tau+\mu) - \gamma\tau)$.

§ 40. Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμων.—

α') Ἔστω πρῶτον ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta).(\gamma+\delta).$$

Ἐὰν τὸ $(\gamma+\delta)$ παραστήσωμεν διὰ τοῦ Α, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$(\gamma+\delta) = A,$$

θὰ ἔχωμεν ὅτι,

$$(\alpha+\beta).(\gamma+\delta) = (\alpha+\beta).A = \alpha.A+\beta.A = A.\alpha + A.\beta.$$

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ Α θέσωμεν τὸν ἴσον του $(\gamma+\delta)$, ἔχομεν

$$(\alpha+\beta).(\gamma+\delta) = (\gamma+\delta).\alpha + (\gamma+\delta).\beta = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta).(\gamma-\delta) &= [\alpha+(-\beta)]\,[\gamma+(-\delta)]\\ &= \alpha\gamma+(-\beta\gamma)+(-\alpha\delta)+\beta\delta\\ &= \alpha\gamma+\beta\delta-\beta\gamma-\alpha\delta.\end{aligned}$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πάντας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».

β') Ἔστω πολυώνυμόν τι $8x + x^2 + 16$.

Ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος x νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ ὡς κατωτέρω

$$16 + 8x + x^2,$$

λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον *εἶνε διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x*.

Ὁμοίως ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ x νὰ βαίνουν ἐλαττούμενοι, δηλαδὴ ὡς κατωτέρω

$$x^2 + 8x + 16,$$

λέγομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε *διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x.*

γ') Ἐν γένει, λέγομεν *ὅτι πολυώνυμόν τι εἶνε διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματός του, ἐὰν οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τούτου ἐλαττοῦνται ἢ αὐξάνονται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον.*

ϛ') Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, συνήθως διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις **τοῦ** αὐτοῦ γράμματος. Ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν (πρὸς εὐκολίαν ἐν τῇ ἀναγωγῇ τῶν ὁμοίων ὅρων), ὡς φαίνεται εἰς τὰ **κάτωθι** παραδείγματα.

1ον). Ἔστω τὸ γινόμενον

$$(2x^2 - x + 3).(x - 4).$$

Ἔχομεν

$$\begin{array}{lr} & 2x^2 - x + 3 \\ & x - 4 \\ \hline (1) \ldots\ldots & 2x^3 - x^2 + 3x \qquad \\ (2) \ldots\ldots & -8x^2 + 4x - 12 \\ \hline (3) \ldots\ldots & 2x^3 - 9x^2 + 7x - 12. \end{array}$$

Τὰ (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ x, καὶ ἐπὶ — 4, λέγονται δὲ ***μερικὰ γινόμενα***. Τὸ **(3)** προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν **(1)** καὶ **(2)** καὶ λέγεται ***τελικὸν γινόμενον***.

2ον) Ἔστω τὸ γινόμενον

$$(4x^5 - 3x^4 + x^2 - 1).(x^2 - x + 2)$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$
\begin{array}{llllll}
4x^5-3x^4+x^2-1 & & & & & \\
x^3-x+2 & & & & & \\
\hline
4x^8-3x^7 & & +x^5 & -x^3 & (***) & \\
 & -4x^6+3x^5 & & -x^3 & +x & \\
 & & 8x^5-6x^4 & & +2x^2 & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$4x^8-3x^7-4x^6+12x^5-6x^4-2x^3+2x^2+x-2.$$

3ον) Ἐπίσης διὰ τὸ γινόμενον

$$(x^3-3\alpha x^2+\alpha^3).\ (2\alpha x-\alpha^2)$$

ἔχομεν

$$
\begin{array}{l}
x^3-3\alpha x^2+\alpha^3 \\
\quad 2\alpha x-\alpha^2 \\
\hline
2\alpha x^4-6\alpha^2 x^3 \qquad +2\alpha^4 x \\
\qquad -\alpha^2 x^3+3\alpha^3 x^2 \qquad +\alpha^5. \\
\hline
2\alpha x^4-7\alpha^2 x^3+3\alpha^3 x^2+2\alpha^4 x-\alpha^5.
\end{array}
$$

ε΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι,

«ὅταν οἱ δύο παράγοντες εἶνε διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματός των, τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων ἄκρων ὅρων των (πρώτων καὶ τελευταίων) δίδουν τοὺς ἀντιστοίχους ἄκρους ὅρους τοῦ γινομένου (πρῶτον καὶ τελευταῖον), διατεταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα».

Ἀσκήσεις.

Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι πράξεις καὶ τὴν δοκιμὴν διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α΄) $(3x+5y).\ (9x-8y)$. $x=2.$ $y=3.$

β΄) $(4xy+8\gamma\delta).\ (7xy-6\gamma\delta)$. $\gamma=-3.$ $\delta=-1.$

γ΄) $(7\rho^2-6\lambda^2).\ (9\rho^2-3\lambda^2)$. $\rho=-2.$

δ΄) $(6\rho^2-7\rho+5).\ (3\rho+6)$. $\lambda=-3.$

ε΄) $(\mu^2-7\mu\nu+5\nu^2).\ (7\mu^2+3\mu\nu+6\nu^2)$. $\mu=-3.$ $\nu=2.$

(***) Ὁ διδάσκων ἐξηγεῖ, ὅτι πρὸς εὐκολίαν, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος δὲν εἶνε πλῆρες πολυώνυμον, καθὼς τὸ $4x^5-3x^4+x^2-1$, εἰς τὰ μερικὰ γινόμενα ἀφήνομεν ἀντιστοίχως κενὰς θέσεις ἰσαρίθμους πρὸς τοὺς ἐλλείποντας ὅρους.

ς') $(x+1).\ (x+2).\ (x+3)$ $\qquad x=-5.$

ζ') $(3\alpha+4).\ (5\alpha-6).\ (7\alpha+9).$ $\qquad \alpha=-4.$

η') $(xy-3).\ (x^2y^2-4).\ (x^2y^2+9).$ $\qquad x=y=-6.$

θ') $(x^2+x+1).\ (x-2)-(x^2-x+6).\ (x+3).$ $\qquad x=2.$

ι') $(x^3+4x^2+6x-7).\ (x-3)-(x^3-6x^2-5x+9).\ (x-2)$

§ **41. Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.**—

α') Παραστάσεις τῆς μορφῆς

$$(\alpha+\beta)^2,\quad (\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta),\quad (\alpha+\beta)^3,\quad (\alpha-\beta)^3$$

παρουσιάζονται πολὺ συχνά, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε καλὸν νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐὰν εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Οὕτω ἔχομεν

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\ (\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἤτοι,

β') *«τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, σὺν τῷ διπλασίῳ γινομένῳ τῶν ἀριθμῶν, σὺν τῷ τετραγώνῳ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ».*

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι,

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἤτοι,

γ') *«τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, πλὴν τῷ διπλασίῳ γινομένῳ τῶν ἀριθμῶν, σὺν τῷ τετραγώνῳ τοῦ δευτέρου».*

Ἐπίσης εὑρίσκομεν $(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2.$ Δηλαδή,

δ') *«τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφοράν των δίδει γινόμενον τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου πλὴν τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου».*

Ἐπίσης ἔχομεν $\qquad (\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2\ (\alpha+\beta)=$

$$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\ (\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$$

Ἤτοι,

ε') *«Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶνε ἴσος τῷ κύβῳ τοῦ πρώτου, σὺν τῷ τριπλασίῳ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου ἐπὶ*

τὸν δεύτερον, σὺν τῷ τριπλασίῳ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, σὺν τῷ κύβῳ τοῦ δευτέρου».

Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα γράψωμεν $-\beta$ ἀντὶ τοῦ β, προκυπτει

$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3.$$

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι πράξεις καὶ τὴν δοκιμήν των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $(4x+7y)\ (4x-7y)$. β') $(x^2+y^2)\ (x^2-y^2)$, $x=2$, $y=-1$.

γ') $(9x+6y)^2$. δ') $(9xy-xy^2)^2$. ε') $(4\alpha+\beta)^3$. $x=y=-1$, $\alpha=4$, $\beta=3$.

2) Νὰ διατυπώσετε τὸν κανόνα διὰ τὸν τελευταῖον ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων κατ' ἀναλογίαν τῶν ἄλλων.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

α') $(x+y+\omega)^2$. β') $(\alpha x^2+\beta y^2-\gamma\omega^2)^2$. Δοκιμὴ διὰ $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega = 3$.

γ') $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$. δ') $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$. ε') $(\gamma+\delta-\alpha-\beta)^2$.

4) Εὕρετε ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων κανόνα συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος περισσοτέρων τῶν δύο προσθετέων.

5) Ἐπαληθεύσατε ὅτι εἶνε

α') $(\alpha^2+\beta^2)\ (x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2 = (\alpha y-\beta x)^2$.

β') $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ (x^2+y^2+\omega^2) - (\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2 = (\alpha y-\beta x)^2 + (\alpha\omega-\gamma x)^2 + (\beta\omega-\gamma y)^2$. [Αὐταὶ λέγονται ταὐτότητες τοῦ Lagrange].

6) Συμπληρώσατε τὸ $\alpha^2+\beta^2$, ὥστε νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ $(\alpha+\beta)^2$.

7) Ὁμοίως τὸ $\alpha^2+\beta^2$ καὶ τὸ $\alpha^4+\beta^4$, ὥστε νὰ γίνῃ τὸ μὲν ἴσον μὲ $(\alpha-\beta)^2$, τὸ δὲ μὲ τὸ $(\alpha^2+\beta^2)^2$, ἢ μὲ τὸ $(\alpha^2-\beta^2)^2$.

§ 45. Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.—

α') Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμεν διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον».

Οὕτω ἔχομεν ὅτι $(\alpha\beta\gamma\delta) : \beta = \alpha\gamma\delta$.

Διότι εἶνε $(\alpha\gamma\delta) . \beta = \alpha\beta\gamma\delta$.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, καὶ ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀλγεβρικοί.

α') Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ

διεραίσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δὲ οὕτω προκῦπτον πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τοὺς ἄλλους παράγοντας».

Διότι, ἔστω ἡ διαίρεσις $(\alpha\ \beta) : \gamma$.

Λέγω ὅτι εἶνε $(\alpha\ \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) .\ \beta$.

Πράγματι τὸ $(\alpha\ \beta) : \gamma$

μαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ γ δίδει γινόμενον τὸν αβ. Ἀλλὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει ὁ ἀριθμὸς (α : γ). β. Ἐπειδὴ $(\alpha : \gamma) .\ \beta .\ \gamma = (\alpha : \gamma) .\ \gamma .\ \beta = \alpha\ \beta$.

Ἑπομένως εἶνε $(\alpha\ \beta) : \gamma = (\alpha:\gamma) .\ \beta$.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀποδεικνύεται ὁμοίως, καὶ ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶν ἀλγεβρικοί.

γ) Ἐκ τοῦ κανόνος, συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους (§ 1, ϛ'), συνάγομεν ὅτι,

«Ἵνα δύναμίς τις ἀριθμοῦ εἶνε διαιρετὴ διὰ δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πρέπει ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου νὰ εἶνε ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου».

δ') Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου

$$24\ \alpha^7 \quad \text{διὰ τοῦ} \quad 8\ \alpha^5.$$

Ἤτοι ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἓν μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ κλάσματος, ἔχομεν ὅτι,

$$24\ \alpha^7 : 8\ \alpha^5 = \frac{24\alpha^7}{8\alpha^5} = \frac{24}{8}\ \frac{\alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha}{\alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha} = 3\ \alpha^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι,

$$20\ \alpha^5\beta^6 : (-4\ \alpha\beta^5) = \frac{20\alpha^5\ \beta^6}{-4\alpha\ \beta^5} = -\ 5\alpha^4\ \beta.$$

$$-30\alpha^2\beta^3\gamma^4 : (-20\alpha\beta\gamma^3) = \frac{-\ 30\ \alpha^2\ \beta^3\gamma^4}{-\ 20\ \alpha\ \beta\ \gamma^3} = \frac{3}{2}\ \alpha\beta^2\gamma.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«ἵνα γινόμενόν τι εἶνε διαιρετὸν δι' ἄλλου, πρέπει νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ ἄλλου, καὶ καθένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον».

ε′) Προσέτι ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων μονωνύμων, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου γράφομεν τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καθὲν μὲ ἐκθέτην ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν του ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ διαιρέτῃ».

(Ὑποτίθεται ὅτι τὸ μονώνυμον τοῦ διαιρετέου διαιρεῖται διὰ τοῦ μονωνύμου τοῦ διαιρέτου).

§ **43. Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ ἀκεραίου μονωνύμου.—**

α′) Γνωρίζομεν ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι᾽ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀλγεβρικοί.

Πράγματι ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν $(\alpha + \beta - \gamma) : \mu$.
Λέγω ὅτι εἶνε,

$$(\alpha + \beta - \gamma) : \mu = (\alpha : \mu) + (\beta : \mu) - (\gamma : \mu).$$

Διότι τὸ $(\alpha + \beta - \gamma) : \mu$ σημαίνει, νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μ, δίδει τὸ $\alpha + \beta - \gamma$. Ἀλλὰ τὸ

$$(\alpha : \mu) + (\beta : \mu) - (\gamma : \mu)$$

πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ μ δίδει ἐξαγόμενον τὸ $\alpha + \beta - \gamma$.

Ἄρα $(\alpha + \beta - \gamma) : \mu = \alpha : \mu + \beta : \mu - \gamma : \mu$.

β′) Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος, ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμόν τι δι᾽ ἀκεραίου μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα ὅρον του διὰ τοῦ μονωνύμου, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν,

$$(7\,\alpha^2\,\beta^3 + 6\alpha^3\,\beta^2 - 15\,\alpha^3\,\beta^3) : \alpha\,\beta = 7\,\alpha\beta^2 + 6\,\alpha^2\,\beta - 15\,\alpha^2\beta^2.$$

$$(42\,\alpha\,x - 48\,\alpha\,y + 18\,\alpha\,\omega) : (-6\,\alpha) = -7\,x + 8\,y - 3\,\omega.$$

$$(-80\alpha^5 - 24\,\alpha^{10}) : (8\,\alpha^3) = -10\,\alpha^2 - 3\,\alpha^7.$$

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν

α΄) $(14x^3y^2 - 28x^4y^2) : 2x^2y^2$. Δοκιμὴ διὰ $x=2$, $y=-2$.

β΄) $60x^5y^5 : (4x^3y . 4xy^3)$. » » $x=-3$, $y=-2$.

γ΄) $(x+y)(\alpha+\beta) : (x+y)$. » » $x=y=4$, $\alpha=\beta=1$.

δ΄) $(16\alpha^2x^4 : \alpha x) : 9\alpha x^2$. » » $\alpha=2$, $x=-3$.

2) Ὁμοίως τῶν

α΄) $(8\alpha^4\beta^2-16\alpha^3\beta^3+24\alpha^2\beta^4-12\alpha^2\beta^2) : (-4\alpha^2\beta^2)$.

β΄) $(\alpha^5+3\alpha^3+3\alpha^2+\alpha) : \frac{2}{3}\alpha$. Δοκιμὴ διὰ $\alpha=2$.

γ΄) $(x^{\mu+2}y^\nu + 2x^{\mu+1}y^{\nu+1} + x^\mu y^{\nu+2}) : x^\mu y^\nu$.

Δοκιμὴ διὰ $x=4$, $y=1$, $\mu=\nu=-1$.

§ 44. Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.—

α΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1 \text{ διὰ τοῦ } \alpha+1.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου (μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ α), τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον α τοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ δίδῃ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου α^3 (§ 40, ε΄). Ἑπομένως, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου θὰ εἶνε

$$\alpha^3 : \alpha = \alpha^2.$$

Ἀλλὰ τὸ α^2 δὲν δύναται νὰ εἶνε ὁλόκληρον τὸ πηλίκον. Διότι (ἐὰν κάμωμεν τὴν δοκιμὴν εὑρίσκομεν)

$$\alpha^2.(\alpha+1)=\alpha^3+\alpha^2.$$

Τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον δίδει

$$(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1)-(\alpha^3+\alpha^2)=2\alpha^2+3\alpha+1.$$

Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου νὰ προστεθῇ παράστασίς τις ἀκόμη, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $(\alpha+1)$ νὰ δίδῃ

$$2\alpha^2+3\alpha+1.$$

Ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ

$$2\alpha^2+3\alpha+1 \text{ διὰ τοῦ } (\alpha+1).$$

Ἔχομεν πάλιν νὰ διαιρέσωμεν δύο πολυώνυμα. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη εἶνε ἁπλουστέρα τῆς δοθείσης, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος ταύτης εἶνε ἁπλούστερος. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ διὰ τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῆς εἶνε

$$2\,\alpha^2 : \alpha = 2\,\alpha.$$

Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ 2α ἐπὶ τὸν διαιρέτην $(\alpha + 1)$ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον

$$2\,\alpha^2 + 3\,\alpha + 1,$$

εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $\alpha + 1$. Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εὑρέθη ὁλόκληρον τὸ πηλίκον, ἀλλ' ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ $(\alpha + 1)$ διὰ τοῦ $\alpha + 1$.

Ἐπαναλαμβάνομεν πάλιν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως εἶνε 1, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶνε

$$\alpha^2 + 2\,\alpha + 1,$$

τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0.

β') Συνήθως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς κατωτέρω.

Γράφομεν τὸν διαιρετέον δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην κάτωθεν τούτου τὸ πηλίκον, καὶ ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὰ γινόμενα ἑκάστου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ ἀντίθετον σημεῖον, ἵνα γίνεται εὐκόλως ἡ ἀφαίρεσις. Εἰς τὴν αὐτὴν στήλην γράφομεν καὶ τὰ ἑκάστοτε ὑπόλοιπα τῶν ἀφαιρέσεων.

$$\begin{array}{l r|l}
 & \alpha^3 + 3\,\alpha^2 + 3\,\alpha + 1 & \alpha + 1 \\
\cline{3-3}
 & -\,\alpha^3 - \alpha^2 & \alpha^2 + 2\,\alpha + 1 \\
\cline{2-2}
(1) & \ldots\ldots\ 2\alpha^2 + 3\alpha + 1 & \\
 & -\,2\alpha^2 - 2\alpha & \\
\cline{2-2}
(2) & \ldots\ldots\ldots\ \alpha + 1 & \\
 & -\,\alpha - 1 & \\
\cline{2-2}
(3) & \ldots\ldots\ldots\ 0. &
\end{array}$$

Αἱ παραστάσεις (1), (2), (3) εἶνε ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, τὸ δὲ τελευταῖον καὶ τῆς ὅλης διαιρέσεως.

γ') Ἐν γένει, ἀποδεικνύεται ὅτι,

«εἰς τὴν διαίρεσιν πολυωνύμου, διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας (ἢ ἀνιούσας) δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, δι' ἄλλου, ὁμοίως διατεταγμένου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου (διατεταγμένου ὁμοίως), ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου».

*) Διότι, ἔστω $\Delta + \Delta' + \Delta'' + \ldots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου, καὶ $\delta + \delta' + \delta'' + \ldots$ τοῦ διαιρέτου, διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Παριστάνομεν διὰ τοῦ $\Pi + \Pi' + \Pi'' + \ldots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου διαταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἔχομεν ὅτι,

$$\Delta + \Delta' + \Delta'' + \ldots = (\delta + \delta' + \delta'' + \ldots)(\Pi + \Pi' + \Pi'' + \ldots).$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\delta.\ \Pi$, ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος τούτης παριστάνει τὸν ὅρον, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ γράμματος ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ὑπετέθησαν διατεταγμένα τὰ πολυώνυμα (40, ε'). Ἑπομένως θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον Δ τοῦ πρώτου μέλους. Ἤτοι ἔχομεν ὅτι,

$$\delta.\ \Pi = \Delta,$$

ἐξ' οὗ συνάγομεν, ὅτι τὸ Π εἶνε πηλίκον τοῦ Δ διὰ δ.

δ') Ἐπίσης, ἀποδεικνύεται γενικῶς ὅτι,

«μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἀρκεῖ, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὑρεθέντα ὅρον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν διαφορὰν νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διαιρέτου, ἵνα εὕρωμεν τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου».

*) Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ μὲν τοῦ Π τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διὰ δὲ τοῦ Ρ τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ὅρων του, διὰ Δ τὸν διαιρετέον καὶ διὰ Δ' τὸν διαιρέτην, θὰ ἔχωμεν

$$\Delta = \Delta'(\Pi + \mathrm{P}) = \Delta'.\Pi + \Delta'.\mathrm{P},$$

ἢ

$$\Delta - \Delta'.\Pi = \Delta'.\mathrm{P},$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι

$$\mathrm{P} = (\Delta - \Delta'.\Pi) : \Delta'.$$

ε') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 19x - 8$ διὰ τοῦ $x^2 - 4x - 2$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -7x^2 & -19x & -8 & x^2-4x-2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +4x^3 & +2x^2 & & & x^2+2x+3 \\
\cline{1-5}
 & 2x^3 & -5x^2 & -19x & -8 & \\
 & -2x^3 & +8x^2 & +4x & & \\
\cline{1-5}
 & & 3x^2 & -15x & -8 & \\
 & & -3x^2 & +12x & +6 & \\
\cline{1-5}
 & & & -3x & -2. &
\end{array}
$$

Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει παράστασίς τις, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $x^2 - 4x - 2$ νὰ δίδῃ τὸ $-3x-2$, πρέπει νὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν. Ἤτοι,

«ἐὰν τὰ δοθέντα πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν μέχρις ὅτου ὁ βαθμὸς τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου εἶνε μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου (ἢ μηδὲν)».

ϛ΄) Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεώς τινος δὲν εἶνε μηδέν, λέγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις εἶνε ἀτελὴς καὶ τότε ἔχομεν ὅτι,

«ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ».

Ἐνῶ εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ἔχομεν ὅτι,

«ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον».

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἔχομεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων, ὁμοίαν πρὸς τὴν τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ γίνουν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των.

1) $(5\alpha\gamma + 3\beta\gamma - 5\alpha\delta - 3\beta\delta) : (5\alpha + 3\beta)$.

2) $(10x^3 + 21x^2 + 5x - 6) : (3 + 2x)$.

3) $(125\mu^3 + x^3) : (x^2 - 5\mu x + 25\mu^2)$.

4) $(x^3 + \alpha^3) : (x - \alpha)$.

5) $(27x^3 - 8y^3) : (3x - 2y)$.

6) $\left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right) : \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)$.

7) $(\alpha^8 x^4 - 81\beta^{12}) : (\alpha^6 x^3 - 3\alpha^4\beta^3 x^2 + 9\alpha^2\beta^6 x - 27\beta^9)$.

8) $(32\alpha^5 + \beta^5) : (2\alpha + \beta)$. 9 $(x^3 + \alpha^3) : (x + \alpha)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει α ὀκάδας ἐμπορεύματός τινος πρὸς μ δραχμὰς ἑκάστην ὀκᾶν, β ὀκ. πρὸς ν δρχ. ἑκάστην, καὶ γ ὀκ. πρὸς ρ δρχ. ἑκάστην.

Πόσον τῷ κοστίζει ἑκάστη ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον; $\frac{(\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma)}$

Πόσον ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν; $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\rho)}$

2) Ἔμπορός τις ἀναμειγνύει α ὀκ. οἴνου μὲ β ὀκ. ἄλλης ποιότητος καὶ μὲ γ ὀκ. ὕδατος. Ἡ μὲν ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται μ δρχ., τοῦ δὲ δευτέρου ν δρχ. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος; $\frac{(\alpha\mu+\beta\nu)}{(\alpha+\beta+\gamma)}$

Πόσας ὀκάδας μείγματος ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν;

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\mu+\beta\nu)}$$

3) Ἁμαξοστοιχία τις τρέχει α ὥρας μὲ ταχύτητα τ χιλιομέτρων καθ' ὥραν. Ἔπειτα τρέχει β ὥρας μὲ ταχύτητα τ' χιλ. Πόση εἶνε ἡ μέση ταχύτης αὐτῆς καθ' ὥραν; Πόσας ὥρας χρειάζεται κατὰ μέσον ὅρον, ἵνα διατρέξῃ 1 χιλιόμετρον;

$$\frac{(\alpha\tau+\beta\tau')}{(\alpha+\beta)}, \quad \frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha\tau+\beta\tau')}.$$

§ 45. Περὶ τοῦ ὑπολοίπου διαιρέσεως πολυωνύμου, περιέχοντος τὸν x, διὰ τοῦ (x—α).—

α′) «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου τινός, περιέχοντος τὸ x, ***διὰ τοῦ(***x***—α), ἀρκεῖ ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον ἀντὶ τοῦ*** x ***τὸν α».***

Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(x^3 - 3x^2 + 3x + 2) : (x - 1).$$

Ἐὰν διὰ τοῦ ρ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν (§ 44, ϛ′)

$$(x^3 - 3x^2 + 3x + 2) = \rho.(x - 1) + \upsilon. \qquad (1)$$

Τὸ ὑπόλοιπον υ δὲν περιέχει τὸ x εἰς τὰς τοιαύτας διαιρέσεις, διότι ὁ διαιρέτης εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x (§ 44, ε′).

Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ x = 1.

Θέτοντες ἐν αὐτῇ x=1, εὑρίσκομεν,

$$1^3 - 3.1^2 + 3.1 + 2 = \upsilon,$$

ἤτοι
$$\upsilon = 3.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

β′*) Ἐν γένει, ἔστω ὅτι Π (x) παριστάνει τὸν διαιρετέον, ὁ ὁποῖος ὑποτίθεται ὅτι **εἶνε πολυώνυμον**, περιέχον τὸν x, ὅτι τὸ ϱ (x) παριστάνει τὸ πηλίκον **καὶ τὸ υ** τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ $(x-\alpha)$. Λέγω ὅτι τὸ υ εἶνε **ἴσον** μὲ Π (α). Δηλαδὴ μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προκῦπτον, ἐὰν εἰς τὸ **πολυώνυμον** τοῦ διαιρετέου γράψωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ α.

Πράγματι ἔχομεν ὅτι (§ 44, ϛ΄)

$$\Pi\,(x)=\varrho\,(x).\,(x-\alpha)+\upsilon.$$

Ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ α, λαμβάνομεν

$$\Pi\,(\alpha)=\varrho\,(\alpha).\,(\alpha-\alpha)+\upsilon,$$

ἢ

$$\Pi\,(\alpha)=\varrho\,(\alpha).\,0+\upsilon=\upsilon.$$

γ΄) Ἔστω ἡ διαίρεσις $(x^6-\alpha^6):(x+\alpha)$.

Τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἐὰν ἐν τῷ διαιρετέῳ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ $(-\alpha)$. Διότι τὸ $x+\alpha$=μὲ $x-(-\alpha)$. Ὥστε, ἀντὶ τῆς δοθείσης διαιρέσεως ἔχομεν τὴν $(x^6-\alpha^6):(x-(-\alpha))$.

Ἐὰν κάμωμεν τὴν **ἀντικατάστασιν** $x=(-\alpha)$ ἐν τῷ διαιρετέῳ, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(-\alpha)^6-\alpha^6=\alpha^6-\alpha^6=0$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου, περιέχοντος τὸ x, ***διὰ τοῦ*** $x+\alpha$, ***ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ὅπου*** x ***τὸ*** $-\alpha$ ***εἰς τὸ πολυώνυμον».***

Κατὰ τἀνωτέρω τὸ $x^5-\alpha^5$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $x-\alpha$. Διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶνε $\upsilon=\alpha^5-\alpha^5=0$.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^4+\alpha^4):(x-\alpha)$

εἶνε $\alpha^4+\alpha^4=2\alpha^4$.

Τὸ $x^3+\alpha^3$ διαιρεῖται διὰ $x+\alpha$.

Διότι $(-\alpha)^3+\alpha^3=-\alpha^3+\alpha^3=0$.

§ 46. Εὕρεσις πηλίκων τινῶν ἀπὸ μνήμης.—

Ἔστω ἡ διαίρεσις $(x^6-\alpha^6):(x+\alpha)$.

Εἶνε εὔκολον νὰ εὕρωμεν, **πῶς** σχηματίζεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης. Ἐὰν **ἐκτελέσωμεν** τὴν διαίρεσιν, βλέπομεν ὅτι οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τοῦ **πηλίκου** εἶνε

$$x^5-\alpha x^4+\alpha^2x^3$$

Διακρίνομεν ὅτι οἱ ἐκθέται τοῦ x ἐλαττοῦνται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον κατὰ μονάδα, ἐνῷ οἱ τοῦ α αὐξάνονται, πρὸς δὲ ὅτι, τὰ σημεῖα τῶν ὅρων εἶνε ἐναλλὰξ θετικὰ καὶ ἀρνητικά. Ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶνε

$$x^5 - αx^4 + α^2 x^3 - α^3 x^2 + α^4 x - α^5,$$

καθὼς βεβαιούμεθα, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(x^4 - α^4) : (x - α) = x^3 + x^2 α + x α^2 + α^3$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις.
α΄) $(2x^2+x-19):(x-2)$. β΄) $(x^2+αx-3α^2):(x-α)$. γ΄) $(x^2+6x+7):(x+2)$.

2) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων,
α΄) $(x^6+y^6):(x+y)$. β΄) $(x^6-y^6):(x-y)$. γ΄) $(x^3+α^3):(x+α)$.
δ΄) $(x^5+α^5):(x+α)$. ε΄) $(x^7+1):(x+1)$. ϛ΄) $(x^3+α^3):(x-α)$.
ζ΄) $(x^5+y^5):(x-y)$. η΄) $(x^2+9x+6):(x+5)$. θ΄) $(x^3+6x^2-7x+1):(x+3)$,

3) Εὕρετε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(2x^4+17x^3-68x-32) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

χωρὶς νὰ ἐκτελέσετε τὴν πρᾶξιν.

4) Εὕρετε τίνων διαιρέσεων εἶνε τέλεια πηλίκα τὰ κάτωθι
α΄) x^2+x+1. β΄) x^2-x+1. γ΄) x^3+x^2+x+1. δ΄) x^3-x^2+x-1.
ε΄) $α^3+α^2β+αβ^2+β^3$. ϛ΄) $x^4-αx^3+α^2x^2-α^3x+α^4$.

Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

§ 47. Ἀνάλυσις ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων.—

α΄) Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων».

β΄) Ἔστω μονώνυμόν τι ἀκέραιον, π.χ. τὸ $24\,α^2\,β^3\,γ$.

Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 24 ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους του παράγοντας, θὰ εὕρωμεν ὅτι εἶνε $24=2^3.3$. Ἄρα $24α^2β^3γ=2^3.\,3α^2\,β^3\,γ$. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ ἀνωτέρω μονωνύμου εἶνε οἱ 2,3, α,β,γ. Ἡ ἀνάλυσις λοιπὸν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, ἔχοντος συντελεστὴν ἀκέραιον ἀριθμόν, γίνεται εὐκόλως. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν συντελεστήν του εἰς πρώτους παράγοντας. Τουναντίον, ἡ τροπὴ πολυωνύμου τινὸς εἰς γινόμενων παραγόντων κατὰ τρόπον μᾶλλον ἁπλοῦν εἶνε δυνατὴ εἰς ὡρισμένας τινὰς περιπτώσεις. Ἐκ τούτων ἀναφέρομέν τινας κατωτέρω.

γ') Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶνε γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινόν τινα παράγοντα, τρέπεται τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων.

Οὕτω τὸ $\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu=\mu.(\alpha+\beta-\gamma)$.

Ὁμοίως τὸ $\mu\alpha+\mu=\mu.(\alpha+1)$.

Ἐπίσης τὸ $2x^2+6xy=2x(x+3y)$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν, ὅτι θέτομεν τὸ κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Τρέψατε εἰς γινόμενα τὰ

$8\alpha^2\beta-6\alpha^3+4\alpha\beta$, $4x^2y-8xy^2-4xy$.

$8\alpha^3\beta^2\gamma^2-4\alpha^2\beta^3\gamma^3+2\alpha^2\beta^2\gamma^3$, $15\alpha^3x-10\alpha^3y+5\alpha^3\omega$, $\alpha^3\gamma y^3+2\alpha^2\gamma^2y^2-\alpha^2\gamma y^4$.

$3\beta^3\gamma^3+2\beta^2\gamma^2-6\beta\gamma^3$, $x^2y^2\omega^2-x^3y^2\omega^3+x^2y^3\omega$, $\alpha\beta^2\gamma^3-2\alpha^2\beta\gamma+3\alpha^3\beta^2\gamma^2$,

$6\alpha^2-12\alpha^3$, $3x^2-6x$, $8x^2y^2+16xy\omega-24x^2y^2\omega^2$, $\alpha\beta^2-\beta\gamma^2+\beta x$.

δ') Ἐὰν εἶνε δυνατὸν νὰ διαταχθοῦν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, ὥστε εἰς ἑκάστην τούτων νὰ ὑπάρχῃ ὁ αὐτὸς παράγων, τότε τρέπεται τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων.

Π. χ. τὸ πολυώνυμον $\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$
εἶνε ἴσον μὲ

$$(\alpha\gamma+\alpha\delta)+(\beta\gamma+\beta\delta)=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta).$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$3x^3-5x^2-6x+10=(3x^3-5x^2)-(6x-10)=$$
$$=x^2(3x-5)-2(3x-5)=(x^2-2)(3x-5).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις

x^2-x^3+1-x, $x^3-5x^2+2x-10$, $x^3+7x^2+3x+21$, $\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha+x$,

$(x-y)^2+2y(x-y)$, $1+15x^4-5x-3x^3$, $x^3+x-x^2\omega-\omega$.

$\alpha x^4+\beta x^3-\alpha x-\beta$, $2x^3-3x^2-4x+5$, $\alpha^2\beta-\alpha\beta x-\alpha\gamma+\gamma x$.

ε') Ἐὰν τριώνυμόν τι ἰσοῦται μὲ τέλειον τετράγωνον, τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων, ἤτοι, ἐὰν ἕκαστος τῶν δύο ὅρων του εἶνε τέλειον τετράγωνον, ὁ δὲ τρίτος ὅρος εἶνε τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν δύο ἄλλων. Οὕτω τὸ

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = (x+y)(x+y).$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$16\alpha^2 - 24\alpha\beta + 9\beta^2 = (4\alpha - 3\beta)^2 = (4\alpha - 3\beta)(4\alpha - 3\beta).$$

Ἐπίσης τὸ $x^4 - 2x^2y + y^2 = (x^2 - y)^2 = (x^2 - y)(x^2 - y)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις.
$9x^2 + 24xy + 16y^2$, $49x^2 - 28xy + 4y^2$, $1 - 20\beta + 100\beta^2$, $49 - 140\lambda^2 + 100\lambda^4$, $81\alpha^2 + 126\alpha\beta + 49\beta^2$, $\mu^2\nu^2 - 16\mu\nu\alpha^2 + 64\alpha^4$, $4\alpha^2 - 20\alpha x + 25x^2$, $121\alpha^2 + 198\alpha y + 81y^2$, $\alpha^2\beta^4\gamma^6 - 2\alpha\beta^2\gamma^3x^8 + x^{16}$, $49\alpha^2 + 42\alpha\gamma^2 + 9\gamma^4$, $121 + 110x + 25x^2$, $144 + 168\omega + 49\omega^2$, $36x^2 - 60xy + 25y^2$, $y^2 - 50y\omega + 625\omega^2$.

ϛ') Ἐὰν διώνυμόν τι εἶνε διαφορὰ δύο τετραγώνων, τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Οὕτω ἔχομεν ὅτι $16x^2 - 9y^6 = (4x + 3y^3)(4x - 3y^3)$.

Ὁμοίως τὸ $25 - 16\alpha^2 = (5 + 4\alpha)(5 - 4\alpha)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις·
$\alpha^2\beta^2 - 1$, $4\alpha^2 - 49\beta^2$, $121\alpha^2 - 36\beta^2$, $49\alpha^{14} - y^{12}$, $81\alpha^4\beta^4 - \gamma^4$, $4\alpha^2\gamma - 9\gamma^3$, $20\alpha^3\beta^3 - 5\alpha\beta$, $3\alpha^5 - 12\alpha^3\gamma^2$, $1 - 400x^4$, $4x^{16} - y^{20}$, $9x^8 - \alpha^6$, $16x^{17} - 6xy^6$, $25x^{10} - 16\alpha^8x^8$, $121\alpha^2 - 36\beta^2$.

ζ') Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς ὅρους δοθέντος πολυωνύμου καθ' ὁμάδας οὕτως, ὥστε αἱ ὁμάδες αὗται νὰ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς διαφορὰ τετραγώνων δύο παραστάσεων.

Οὕτω ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Π. χ. ἔχομεν ὅτι, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 9\gamma^2 = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) - 9\gamma^2$
$= (\alpha - \beta)^2 - 9\gamma^2 = (\alpha - \beta + 3\gamma)(\alpha - \beta - 3\gamma)$.

Ὁμοίως $12\alpha\beta + 9x^2 - 4\alpha^2 - 9\beta^2 = 9x^2 - (4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2)$
$= 9x^2 - (2\alpha - 3\beta)^2 = (3x - 2\alpha + 3\beta)(3x + 2\alpha - 3\beta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. $\alpha^2 - (3\beta - 2\gamma)^2$, $\beta^2 - (2\alpha + 3\gamma)^2$, $9\alpha^2 - (x - 3\gamma)^2$, $16\alpha^2 - (2y - 3\omega)^2$, $(\alpha + 2\beta - 3\gamma)^2 - (\alpha + 5\gamma)^2$, $(2\alpha + \beta - \gamma)^2 - (\alpha - 2\beta + \gamma)^2$, $(x - 5)^2 - (x + y - 5)^2$, $(2\alpha - 1)^2 - (2\alpha + 1)^2$, $(\alpha + \beta - \gamma)^2 - (\alpha - \beta - \gamma)^2$, $x^2 - (y - \omega)^2$, $(\alpha - 3x)^2 - (3\alpha - 2x)^2$, $1 - (x + 5\beta)^2$.

η') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$$

παρατηροῦμεν ὅτι $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2$

$$=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2$$

$$=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta).$$

Π. χ. τὸ $=x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$

$$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

θ') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2+\beta x+\gamma$$

καὶ τὸ μὲν β εἶνε τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἔστω τῶν ρ καὶ ρ', τὸ δὲ γ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν ὅτι, $\beta=\rho+\rho'$, $\gamma=\rho.\rho$. Ἄρα τὸ $x^2+\beta x+\gamma=x^2+(\rho+\rho')x+\rho\rho'$ $=x^2+\rho x+\rho' x+\rho\rho'=(x^2+\rho x)+(\rho' x+\rho'\rho)$ $=x(x+\rho)+\rho'(x+\rho)=(x+\rho)(x+\rho')$.

Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $x^2+8x+15$,

παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $8=5+3$, καὶ $15=3.5$.

Διὰ τοῦτο τὸ $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$.

Ὁμοίως τὸ $x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$.

Διότι εἶνε $5+6=11$, καὶ $30=5.6$.

ι') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma,$$

δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ τὴν τρέψωμεν εἰς γινόμενον, ἐπαναφέροντες αὐτὴν εἰς τὴν προηγουμένην μορφήν.

Ἔστω π. χ. ἡ παράστασις $3x^2-x-2$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς $\frac{1}{3}(3.3x^2-3x-3.2)$.

Ἐὰν γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $3x$ τὸ ω, δηλαδὴ $3x=\omega$,

ἔχομεν $3x^2-x-2=\frac{1}{3}(\omega^2-\omega-6)$.

Ἀναλύομεν τὸ $\omega^2-\omega-6$ εἰς τὸ $(\omega-3)(\omega+2)$.

Οὕτω ἔχομεν

$$3x^2-x-2=\frac{1}{3}(\omega-3)(\omega+2).$$

Γράφομεν ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἴσον του 3 x καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{3}(3x-3)(3x+2)=\frac{3}{3}(x-1)(3x+2)$$
$$=(x-1)(3x+2).$$

Ἤτοι $3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$.

ια΄) Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε ἄθροισμα ἢ διαφορὰ δύο κύβων, ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ τοῦ $x+\alpha$, ἢ τοῦ $x-\alpha$. Οὕτω π. χ. τὸ $\alpha^3-\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$, καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$.

Ἑπομένως εἶνε $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

Ὁμοίως τὸ $\alpha^3+\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$, καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$. Ἄρα εἶνε $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$.

Κατὰ ταῦτα τὸ $x^6+y^9=(x^2+y^3)(x^4-x^2y^3+y^6)$.

Τὸ $(x-y)^3+\omega^3=(x-y+\omega)[(x-y)^2-(x-y)\omega+\omega^2]$
$=(x-y+\omega)(x^2-2xy+y^2-x\omega+y\omega+\omega^2)$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις.

$9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$, $4x^4-21x^2y^2+9y^4$, $4\alpha^4-29\alpha^2\gamma^2+25\gamma^4$, $4\alpha^4-13\alpha^2+1$.
$4x^4-37x^2y^2+9y^4$, $9\alpha^4-15\alpha^2+1$, $x^4+x^2y^2+y^4$, $\alpha^4+\beta^4$, $\alpha^8+\beta^8$.
$\lambda^4+\lambda^2+1$, $9\alpha^8-15\alpha^4+1$, $16\alpha^4-17\alpha^2+1$, $25x^4+31x^2y^2+16y^4$.

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως αἱ παραστάσεις.

x^2-7x-8, x^2+9x+8, $x^2-3x-18$, $x^2-9x+18$. x^2+4x-5.
$\gamma^2-58\gamma+57$, $\alpha^2\beta^2-13\alpha\beta\gamma+22\gamma^2$, $\alpha^2+17\alpha-390$, $\alpha^2-7\alpha\beta+10\beta^2$.
$\alpha^4-11\alpha^2\beta^3+30\beta^6$, $\alpha^2x^2-3\alpha x-54$, $\omega^2+9\omega y+20y^2$.

Ὁμὰς τρίτη. Ἐπίσης αἱ παραστάσεις.

$6x^2-x-2$, $18x^2+9x-2$, $12x^2+x-1$, $16x^2+x-13x^2-3x-5$.
$3x^2+4x-4$, $6x^2+5x-4$, $4x^2+13x+3$. $6x^2+17x+12$, $11\alpha^2-23\alpha\beta+2\beta^2$.

Ὁμὰς τετάρτη. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις.

x^3+64, x^3y^3-64, $343-x^3$, $\alpha^3\beta^3+243$, $8\alpha^3-\beta^6$, $216\mu^3+\nu^6$.
$x^3y^3-512\omega^3$, $729y^3-64\omega^3$, $(\omega+5)^3-\alpha^3$, $(y-\omega)^3+(y+\omega)^3$.

§ 48. Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.—

Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ἀριθμῶν, ἀναλύομεν ἕκαστον αὐτῶν εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων, καὶ σχηματίζομεν τὸ*** *γινόμενον τῶν κοινῶν παραγόντων των, καθενὸς τούτων λαμβανομένου μὲ τὸν ἐλάχιστον τῶν ἐκθετῶν του».*

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἂν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως, ὅπως (καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ) προκειμένου περὶ ἀριθμῶν.

Οὕτω ὁ μ. κ. δ. τῶν

$$6\alpha^2\beta^3 = 2.\,3.\,\alpha^2\beta^3, \quad 9\,\alpha^3\beta^2, \quad 16\,\alpha^4\beta^3 = 2^4\,\alpha^4\beta^3$$

εἶνε τὸ $\alpha^2\,\beta^2$.

Ὁ μ. κ. δ. τῶν

$$\alpha^2 - \alpha\,\beta = \alpha\,(\alpha - \beta), \quad \alpha^3 - 2\,\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\,(\alpha - \beta)^2$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\,(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

εἶνε τὸ $(\alpha - \beta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν παραστάσεων.

$120\,\alpha^2$ καὶ 168· τῶν $36\,\alpha^3 x$ καὶ $28\,x^3y$· τῶν $36\,x^3$ καὶ $27\,x^4$·

τῶν $(x-1)^2\,(x+2)^3$ καὶ $(x-1)\,(x+3)^3$· τῶν x^2-16 καὶ $(x+4)^2$·

τῶν $35\,x^2\,(\mu+\nu)^2$, $(\mu-\nu)^3$, $20\,x^3\,(\mu+\nu)^2\,(\mu-\nu)^2$, $45\,x^4\,(\mu+\nu)^3\,(\mu-\nu)^3$.

§ 49. Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.—

Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. ἀριθμῶν, ἀναλύομεν ἕκαστον αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν παραγόντων των, ἑκάστου λαμβανομένου μὲ τὸν μέγιστον τῶν ἐκθετῶν του».

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐ. κ. π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἂν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως (ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ) προκειμένου περὶ ἀριθμῶν.

Οὕτω τὸ ἐ. κ. π. τῶν παραστάσεων

$$18\,\alpha^3\beta^2 = 2.\,3^2.\,\alpha^3\beta^2, \quad 9\,\alpha\,\beta^2 = 3^2\,\alpha\,\beta^2, \quad 12\,\alpha\,\beta = 2^2.\,3\,\alpha\,\beta,$$

εἶνε τὸ γινόμενον $2^2.\,3^2.\,\alpha^3.\,\beta^2 = 36\,\alpha^3\,\beta^2$.

Ὁμοίως τῶν $6\,(\alpha+\beta)$, $5\,(\alpha+\beta)^2\,(\alpha-\beta)$, $9\,(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)^2$ τὸ ἐ. κ. π. εἶνε $2^2.\,3^2\,(\alpha+\beta)^2\,(\alpha-\beta)^2 = 36\,(\alpha^2-\beta^2)^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παραστάσεων.

1) $18x(\alpha+2\beta)^3$, $9xy(\alpha+2\beta)^2(\alpha-2\beta)$, $18x^2y^2(\alpha-2\beta)^2$.

2) $(\mu+1)^2$, $(\mu-1)$, $(\mu^2-2\mu+1)$, μ^3-1.

3) (x^5+x^4), (x^5+x), $(x^5-x)^2$.

4) $(3x^4+3x)$, $(5x^3-5x)$, $(10x^2+10x)$.

§ 50. Περὶ κλασματικῶν παραστάσεων.—

α΄) Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«*τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν παρίσταται διὰ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρανομαστὴν τὸν διαιρέτην*».

Οὕτω καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, π. χ. τῶν α καὶ β, παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, τὸ ὁποῖον λέγεται *ἀλγεβρικὸν κλάσμα*. Ἤτοι,

«***ἀλγεβρικὸν κλάσμα καλεῖται τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε ἐν γένει ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, παριστάνει δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του***».

β΄) Ἐπειδή, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ παραστάσεις, οἱ ὅροι τοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος παριστάνουν ἀριθμούς, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσμαια.

«***Ἐὰν τοὺς ὅρους ἀλγεβρικοῦ τινος κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται***».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta\gamma}{\gamma\alpha}$, $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Ὁμοίως $\frac{57\alpha^3\beta\gamma^2}{38\alpha^2\beta^3\gamma^4}=\frac{3.\ 19.\ \alpha^3\beta\gamma^2}{2.\ 19.\ \alpha^2\beta^3\gamma^4}=\frac{3\alpha}{2\beta^2\gamma^2}$.

γ΄) Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθὲν κλάσμα ἀλγεβρικὸν εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ καὶ ἔχον ὅρους ἁπλουστέρους ἢ μὴ τοῦ δοθέντος.

§ 51. Ἁπλοποίησις κλάσματος.—

α΄) Ἁπλοποίησις ἀλγεβρικοῦ κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἄλλο ἰσοδύναμόν του, καὶ ἔχον ὅρους ἁπλουστέρους.

Ἵνα ἁπλοποιήσωμεν ἀλγεβρικὸν κλάσμα, διαιροῦμεν τοὺς ὅρους του διά τινος κοινοῦ διαιρέτου των. Οὕτω τὸ κλάσμα

$$\frac{(\alpha+5)\,(\alpha+3)}{(\alpha+3)\,(\alpha+2)} \text{ τρέπεται εἰς τὸ } \frac{(\alpha+5)}{(\alpha+2)},$$

ἀφοῦ οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος διαιρεθοῦν διὰ τοῦ $(\alpha+3)$.

β΄) *Ἀνάγωγον* καλεῖται κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα. Ἑπομένως ἀνάγωγον κλάσμα δὲν ἁπλοποιεῖται.

γ΄) Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«ἵνα κάμωμεν κλάσμα τι ἀνάγωγον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ μ. κ. δ. των».

Ὁ κανὼν οὗτος ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα καὶ τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως.

Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

$$\frac{4\,\alpha^2\beta^2\gamma}{6\alpha\,\beta^2\,\gamma^3}=\frac{2^2\,\alpha^2\,\beta^2\,\gamma}{2.3\;\alpha\beta^2\gamma^3}=\frac{2\,\alpha}{3\,\gamma^2} \text{ (μ. κ. δ. εἶνε ὁ } 2\,\alpha\,\beta^2\,\gamma).$$

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha}=\frac{(\alpha-1)\,(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{(\alpha+1)}{\alpha} \text{ (μ. κ. δ. εἶνε ὁ } \alpha-1).$$

$$\frac{(x+\alpha)^2-\beta^2}{(x+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{(x+\alpha+\beta)\;(x+\alpha-\beta)}{(x+\beta+\alpha)\;(x+\beta-\alpha)}=\frac{x+\alpha-\beta}{x+\beta-\alpha} \text{ (μ.κ.δ. ὁ } x+\alpha+\beta).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα, ὥστε νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀνάγωγα ἰσοδύναμα πρὸς αὐτά.

α΄) $\frac{16\,\alpha^2\,\beta^2}{18\,\alpha\,\beta^2}$, β΄) $\frac{9\,\alpha\,\beta^2\,\gamma}{45\,\alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2}$, γ΄) $\frac{46\,x^2\,y^3}{36\,x^3\,y^3}$, δ΄) $\frac{98xy-24y^2}{24x^4-32xy}$,

ε΄) $\frac{8x^2+24\alpha x+18\,\alpha^2}{16x^3+54\alpha^3}$, ϛ΄) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$, ζ΄) $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$, η΄) $\frac{x^5-9^4}{x^2-y^2}$.

§ 52. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.—

Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα· 1) ἀναλύομεν τὸν παρονομαστὴν καθενὸς εἰς γινόμενον παραγόντων· 2) εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν γινομένων τούτων· 3) διαιροῦμεν τὸ ἐ. κ. π. διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν· 4) ἐπὶ καθὲν τῶν

πηλίκων τῶν διαιρέσεων τούτων πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους καθενὸς τὸν ἀτιστοίχων κλασμάτων».

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα, διὰ νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα ἀλγεβρικὰ κλάσματα ἢ ἀλγεβρικὰς κλασματικὰς παραστάσεις. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα

$$\frac{\beta}{6\,\alpha},\quad \frac{\alpha}{9\,\beta},\quad \frac{1}{4\alpha^2\beta},\quad \frac{1}{18\,\alpha^2\beta^3}.$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρανομαστῶν εἶνε τὸ $3^2 .\, 2^2 .\, \alpha^2\beta^3$.
Διαιροῦντες αὐτὸ διὰ καθενὸς τῶν παρανομαστῶν, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $\quad 6\,\alpha\,\beta^3,\ 4\,\alpha^2\,\beta^2,\ 9\,\beta^2,\quad 2.$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους καθενὸς τῶν δοθέντων κλασμάτων ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ πηλίκα ταῦτα, εὑρίσκομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{6\,\alpha\,\beta^4}{36\alpha^2\beta^3},\quad \frac{4\,\alpha^3\,\beta^2}{36\,\alpha^2\beta^3},\quad \frac{9\,\beta^2}{36\,\alpha^2\beta^3},\quad \frac{2}{36\,\alpha^2\beta^3}.$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα ἀλλ' οὕτως, ὥστε τὰ νέα νὰ ἔχουν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων.

1) $$\frac{1}{x^2-1},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{x-1},\quad \frac{1}{x+1}.$$

2) $$\frac{\mu}{5\,x^3\,y^2},\quad \frac{\nu}{8\,x\,.y^3},\quad \frac{\rho}{9\,x^4\,y^3},\quad \frac{7}{24\,x^2\,y^4}.$$

3) $$\frac{1}{4\,(\alpha+\beta)^3},\quad \frac{5}{8\,(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)},\quad \frac{9}{5\,(\alpha-\beta)^2}.$$

4) $$\frac{\alpha^2}{(x^2-4)\ (x-1)},\quad \frac{\alpha}{(x+2)\ (x+1)},\quad \frac{3}{x^2-4\,x+4}.$$

5) $$\frac{x^2}{\rho\,(\alpha\mu+\mu^2)},\quad \frac{x}{\rho^2\,(\alpha^2-\alpha\mu)},\quad \frac{1}{\rho^3\,(\alpha^2-\mu^2)}.$$

§ 53. Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος.—

Καλοῦμεν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἀλγεβρικοῦ κλάσματος τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν εἰς τὰ γράμματα τοῦ κλάσματος δώσωμεν ὡρισμένας τιμὰς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ κλάσματος εἶνε συνήθως ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ παρονομαστοῦ του. Π. χ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ κλάσματος

$\frac{\alpha+1}{\alpha-2}$ ὅταν τὸ α = μὲ 4, εἶνε ἴση πρὸς $\frac{4+1}{4-2}=\frac{5}{2}$.

Ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{2\alpha}{3\gamma^2}$ ὅταν εἶνε $\alpha=1$, $\gamma=2$, εἶνε ἴση

$$\text{μὲ } \frac{2.1}{3\,2^2}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

§ 34. Περὶ τῶν παραστάσεων $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{\alpha}{0}$. —

α′) Ἐνίοτε οἱ ὅροι δοθέντος κλάσματος διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος γίνονται ἴσοι μὲ μηδέν. Ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ κλάσματος ἔχει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$. Ἀλλ' ἡ παράστασις αὕτη εἶνε *ἀόριστος*. Διότι, πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδὲν δίδει γινόμενον μηδέν. Διὰ τοῦτο, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος, ἀντικαθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ γράμματος εἰς τὸ κλάσμα, τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ δοθέντος, μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὅρων του. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης θὰ παριστάνῃ τὴν ζητουμένην τιμήν. Οὕτω π. χ. ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$ ὅταν εἶνε $x=\alpha$, δὲν εἶνε ἡ ἀόριστος παράστασις $\frac{0}{0}$, ἀλλ' ἡ 2α, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}=\frac{(x-\alpha)(x+\alpha)}{x-\alpha}=x+\alpha$, ἐὰν τεθῇ ἐν τῷ $x+\alpha$ ἀντὶ τοῦ x τὸ α.

β′) Ἔστω ὅτι ἡ τιμὴ κλάσματός τινος εἶνε $\frac{\alpha}{0}$, ὅπου α παριστάνει ἀριθμόν τινα διάφορον τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι,

«***ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{0}$ οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν, ἢ ὅτι, ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{\alpha}{0}$ εἶνε μεγαλυτέρα παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου***».

Διότι, οὐδεὶς ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν, δύναται νὰ δώσῃ γινόμενον τὸ α. Ἐξ ἄλλου ὅμως, ἂν ὁ παρονομαστὴς εἶνε πολὺ μικρός, ἔστω 0,000. . . . 1, τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha}{0{,}000\ldots1}=\alpha\times\frac{1000\ldots}{1}=1000\ldots\alpha.$$

Δηλαδὴ εἶνε ἀριθμὸς πολὺ μέγας· καὶ ὅσω ὁ παρονομαστὴς ἐλαττώνεται καὶ πλησιάζει νὰ γίνῃ μηδὲν, τόσω τὸ κλάσμα γίνεται μεγαλύτερον καὶ ὑπερβαίνει πάντα ἀριθμόν.

γ') Διὰ τοῦτο, ***«ἐν πάσῃ διαιρέσει πρέπει νὰ ὑποθέτωμεν τὸν διαιρέτην διάφορον τοῦ μηδενός».***

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $\dfrac{x^3+2x^4}{x}$ διὰ $x=0$. β') $\dfrac{y^4-\alpha^4}{(y^2-\alpha^2)}$ διὰ $y=\alpha$.

γ') $\dfrac{x^2-\alpha^2}{x^3-\alpha^3}$ διὰ $x=\alpha$. δ') $\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}$ διὰ $\alpha=\beta$

ε') $\dfrac{(x^2+2\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$. ϛ') $\dfrac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha}$ διὰ $x=\alpha$.

ζ') $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-2x+1}$ διὰ $x=1$. η') $\dfrac{\alpha^3+1}{\alpha^2-1}$ διὰ $\alpha=1$.

θ') $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1}$ διὰ $x=-1$, ι') $\dfrac{x^2-6x+15}{x^2-8x+15}$ διὰ $x=5$.

§ 55. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις κλασμάτων —

Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, 1) ἐὰν μὲν εἶνε ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητάς των, καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστήν των· 2) ἐὰν δ' εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα».

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν πρόσθεσιν ἀλγεβρικῶν κλασματικῶν παραστάσεων, ἀνάλογος δ'εἶνε καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν.

Οὕτω ἔχομεν ὅτι $\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$.

$$\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}=\frac{\alpha\nu+\beta\mu}{\mu\nu}, \quad \frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}.$$

$$\frac{20xy}{9}-\frac{25xy}{9}-\frac{4\,xy}{9}=-\frac{9\,xy}{9}=-xy.$$

$$\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=\frac{4x}{20}-\frac{5x}{20}=-\frac{x}{20}.$$

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

1) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6}$. 2) $\frac{2(x+3)}{9} - \frac{3(x-4)}{4} + \frac{5(x+5)}{12} + \frac{x+2}{21}$.

3) $\frac{2}{2x+5} + \frac{3}{3x+7} - \frac{2(5x+12)}{(2x+5)(3x+7)}$. Δοκιμαὶ διὰ $x = 2$.

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως

1) $\frac{2\alpha+3\beta}{2\alpha-3\beta} - \frac{2\alpha-3\beta}{2\alpha+3\beta} + \frac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{(4\alpha^2-9\beta^2)}$. Δοκιμὴ διὰ $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

2) $\frac{4\alpha}{x^2-4} + \frac{\alpha}{x+2} - \frac{\gamma}{x^2-4x+4}$. 3) $\frac{\alpha}{\alpha x+x^2} + \frac{\beta}{\alpha^2-\alpha x} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-x^2}$.

(Δοκιμὴ διὰ $x = 3, \alpha = \beta = \gamma = -1$).

Ὁμὰς τρίτη. Ὁμοίως τῶν

1) $5x^2 + 3xy + 4y^2 + \frac{x^3+y^3}{x-y}$. (Δοκιμὴ διὰ $x = -1$, $y = 5$).

2) $\frac{1}{2x^2+2x} + \frac{3}{5x^3-5x} - \frac{3}{10x^2-10x}$. (Δοκιμὴ διὰ $x = -3$).

3) $\frac{4x^3}{x^4-16} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$.

4) $\frac{1}{(x-3)(x+5)} + \frac{1}{(5-x)(x-7)} + \frac{1}{(x-7)(3-x)}$. (Δοκιμὴ διὰ $x = 8$).

5) $\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$.

(Δοκιμὴ διὰ $\alpha = 1$, $\beta = 7$, $\gamma = 2$).

§ 56. Πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων.—

α') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$ (ὑποτιθεμένου ὅτι οἱ α, β, γ, δ εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί).

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 8, α') ἐπειδὴ ὁ δεύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ὁ $\frac{\gamma}{\delta}$, γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{\delta}$ αὐτῆς καὶ τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ γ, ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$ σημαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸ $\frac{1}{\delta}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ γ. Ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{\delta}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta\delta}$. Διότι $\frac{\alpha}{\beta.\delta}$ ἐπὶ δ δίδει τὸν $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ὥστε ἔχομεν, $$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta\delta} \cdot \gamma = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

§ 59. Ὁρισμοί.—

α΄) Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἰσότητα $3x = 15$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ x ἔχει τὴν τιμὴν 5. Ἑπομένως, ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν τιμὴν 5, θὰ εὕρωμεν,

$$3 . 5 = 15. \quad \text{Ἤτοι} \quad 15 = 15.$$

Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης δὲν δίδει ἀριθμοὺς ἴσους, ἤτοι δὲν ἀληθεύει. Ὁμοίως ἡ ἰσότης $3x = 12$ ἀληθεύει διὰ μόνην τὴν τιμὴν $x = 4$, καθὼς εὐκόλως βλέπομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸν 4.

Ἐὰν ἐξ ἄλλου εἰς τὴν ἰσότητα

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

ἀντικαταστήσωμεν τὸν α καὶ β δι᾽ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, π. χ. τῶν $\alpha = 1$ καὶ $\beta = 3$, ἢ τῶν $\alpha = 5$ καὶ $\beta = 7$, βλέπομεν ὅτι προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι $4 = 4$, $12 = 12$. Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχουν ἰσότητες ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματά των λάβουν ἁρμοδίας τιμάς, καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των. Τὰς πρώτας καλοῦμεν *ἐξισώσεις* τὰς δ᾽ ἄλλας *ταὐτότητας*. Ὥστε,

β΄) ***Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα αὐτῆς λάβουν ἁρμοδίας τιμάς.***

γ΄) ***Ταὐτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς καθενὸς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχει.***

δ΄) Καλοῦμεν *ἀγνώστους* ἐξισώσεώς τινος τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν ὡρισμένας τιμάς, διὰ νὰ ἀληθεύσῃ ἡ ἐξίσωσις.

ε΄) ***Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων*** λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐξισώσεώς τινος λέγονται καὶ *ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως*.

ς') Συνήθως παριστάνομεν τοὺς ἀγνώστους ἐξισώσεώς τινος διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου x, y, ω, φ, . . . , τοὺς δὲ γνωστοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν α, β, γ,.. .

ζ') *Λύσις ἐξισώσεως* λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, ἢ ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν ταύτης.

η') *Ἰσοδύναμοι* λέγονται δύο ἢ περισσότεραι ἐξισώσεις, ἐὰν επαληθεύωνται δια τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, ἤτοι,

«**1) ἐὰν πᾶσα ρίζα τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε καὶ ρίζα τῆς δευτέρας· 2) πᾶσα ρίζα τῆς δευτέρας εἶνε ρίζα καὶ τῆς πρώτης**».

θ') Αἱ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος παραστάσεις λέγονται *μέλη τῆς ἐξισώσεως (πρῶτον ἢ ἀριστερόν, καὶ δεύτερον ἢ δεξιόν).*

ι') Ἐξίσωσίς τις λέγεται *ἀριθμητική*, ἐὰν οὐδεὶς τῶν ὅρων της περιέχῃ γράμματα ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων· *ἐγγράμματος* δέ, ἂν τοὐναντίον. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $8x + 12x - 3 = 4x$ εἶνε ἀριθμητική, ἐνῶ ἡ $3x - 5\alpha = 8\beta + 2$ εἶνε ἐγγράμματος.

§ 60. Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.—

α') «Ἐὰν εἰς τὰ μέλη ἐξισώσεως προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος».

Πράγματι, ἔστω ἡ ἐξίσωσις $8x = 32$.

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 6, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $8x + 6 = 32 + 6$,
ἡ ὁποία λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Διότι ἡ τιμὴ τοῦ x εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εἶνε ὁ 4, καθὼς εὐκόλως φαίνεται, καὶ εἶνε $8.4 = 32$.

Ἀλλ' ἂν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτουν ἴσοι Ἤτοι θὰ εἶνε καὶ $8.4 + 6 = 32 + 6$. (1)

Ἀντικαθιστῶμεν καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τὸ x διὰ τοῦ 4. Εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους της $8.4 + 6$, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου $32 + 6$. Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἴσα, ὡς εἴδομεν (1). Ὥστε ἡ ρίζα 4 τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε ρίζα καὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως. Καὶ ἀντιστρόφως· ἡ ρίζα τῆς δευτέρας εἶνε καὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως. Διότι, ἐπειδὴ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν 4, θὰ ἔχωμεν, ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ x τὸ 4,

$$8.4 + 6 = 32 + 6.$$

Ἂν δὲ ἀπὸ τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν 6, θὰ ἔχωμεν $8.\,4 = 32$ (2).

Θέτομεν τώρα εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὴν ρίζαν 4 τῆς δευτέρας. Εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς 8. 4, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τὸ 32. Ἀλλ' αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι (2). Ἑπομένως ἡ ρίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εἶνε ρίζα καὶ τῆς πρώτης.

β' *) Ἐν γένει, ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\sigma(x, y, \ldots) = \varphi(x, y, \ldots) \quad (1)$$

ὅπου τὸ σ (x, y, . . .) καὶ φ (x, y, . . .) παριστάνουν τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως, τὰ δὲ x, y, . . . τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς. Λέγω ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\sigma(x, y, \ldots) + \alpha = \varphi(x, y, \ldots) + \alpha \quad (2)$$

ὅπου τὸ α παριστάνει οἱονδήποτε ἀριθμόν, εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἐλύσαμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, καὶ εὕρομεν τὰς τιμὰς $x = \lambda$, $y = \mu$, . . . τῶν ἀγνώστων, θὰ εἶνε

$$\sigma(\lambda, \mu, \ldots) = \varphi(\lambda, \mu, \ldots).$$

Θέτομεν καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τοῦ x, y, . . . τὰ λ, μ, . . , ὅτε ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους εὑρίσκομεν $\sigma(\lambda, \mu, \ldots) + \alpha$, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου $\varphi(\lambda, \mu, \ldots) + \alpha$. Ἀλλ' ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ $\sigma(\lambda, \mu, \ldots)$ καὶ $\varphi(\lambda, \mu, \ldots)$ εἶνε ἴσοι, καὶ οἱ $\sigma(\lambda, \mu, \ldots) + \alpha$, $\varphi(\lambda, \mu, \ldots) + \alpha$ εἶνε ἴσοι. Δηλαδὴ αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶνε ρίζαι καὶ τῆς (2). Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εὑρήκαμεν τὰς τιμὰς $x = \lambda'$, $y = \mu'$, . . . ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2), θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\sigma(\lambda', \mu', \ldots) + \alpha = \varphi(\lambda', \mu' \ldots) + \alpha.$$

Ἂν θέσωμεν καὶ εἰς τὴν (1) $x = \lambda'$, $y = \mu'$, . . θὰ εὕρωμεν ἀπὸ μὲν τὸ πρῶτον μέλος $\sigma(\lambda', \mu', \ldots)$, ἀπὸ δὲ τὸ δεύτερον $\varphi(\lambda', \mu', \ldots)$. Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ $\sigma(\lambda', \mu', \ldots) + \alpha$ εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\varphi(\lambda', \mu', \ldots) + \sigma$, ἕπεται ὅτι καὶ $\sigma(\lambda', \mu', \ldots) = \varphi(\lambda', \mu' \ldots)$.

Δηλαδὴ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶνε ρίζαι καὶ τῆς (1). Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμοι.

γ΄) «***Ἐὰν τὰ μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ μηδενός), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος***».

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $7x = 35.$

Λέγω ὅτι καὶ ἡ $\frac{7x}{3} = \frac{35}{3}$,

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης, ἂν διαιρέσωμεν τὰ μέλη της διὰ τοῦ 3, εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς αὐτήν. Διότι, καθὼς εὐκόλως φαίνεται, ἡ ρίζα τῆς πρώτης εἶνε ἡ $x = 5$. Ἄρα, ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ x τὸν 5 εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔχομεν

$$7.5 = 35.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τὸ x διὰ τοῦ 5. Εὑρίσκομεν ἀπὸ μὲν τὸ πρῶτον μέλος $\frac{7.5}{3}$, ἀπὸ δὲ τὸ δεύτερον $\frac{35}{3}$. Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἴσα. Διότι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 7. 5 καὶ 35, ἀφοῦ τοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 3. Ἑπομένως ἡ ρίζα $x = 5$ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε ρίζα καὶ τῆς δευτέρας. Καὶ ἀντιστρόφως· ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν εὑρεθῇ ἡ ρίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως $\frac{7x}{3} = \frac{35}{3}$, αὐτὴ θὰ εἶνε ρίζα καὶ τῆς πρώτης $7x = 35$. Διότι ἡ ρίζα αὐτὴ εἶνε ἡ 5, καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{7.5}{3} = \frac{35}{3}$.

Ἀλλὰ τότε καὶ 7.5 εἶνε ἴσον μὲ 35. Δηλαδὴ καὶ ἡ πρώτη ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ $x = 5$.

δ΄ *) Γενικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\sigma(x, y, \ldots) = \varphi(x, y, \ldots)$$

εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$\sigma(x, y, \ldots).\varrho = \varphi(x, z, \ldots).\varrho,$$

ὅπου τὸ ϱ εἶνε ἀριθμός τις διάφορος τοῦ μηδενός. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται, καθὼς καὶ ἡ προηγουμένη (β΄*).

ε΄) Ἐπειδή, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος ἐπὶ μηδὲν προκύπτει $0 = 0$, ἡ δὲ διαίρεσις διὰ τοῦ μηδενὸς εἶνε ἀδύνατος (§ 54, γ΄), ἕπεται ὅτι, ***ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δὲν ἀληθεύει, ὅταν ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως εἶνε μηδέν.***

στ') Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε παράστασις, ἡ ὁποία περιέχει γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως, ἡ νέα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν μόνον διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, αἵ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὴν παράστασιν. Π. χ. ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε $\alpha - \beta$, πρέπει τὸ $\alpha - \beta$ νὰ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενὸς (σημειώνομεν δ' αὐτό οὕτω

$$\alpha - \beta \neq 0 \text{ ἢ καὶ } \alpha \neq \beta).$$

Διότι, ἄν εἶνε $\alpha - \beta = 0$, ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, τὴν ὁποίαν ἐξῃρέσαμεν.

ζ') Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε παράστασις, ἔχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶνε πάντοτε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3x = 4$, καὶ ἡ $3x(x-2) = 4(x-2)$ δὲν εἶνε ἰσοδύναμοι. Διότι, ἡ δευτέρα ἔχει τὴν ρίζαν 2 καθὼς φαίνεται ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ 2 εἰς αὐτήν, ἐνῷ ἡ πρώτη δὲν τὴν ἔχει.

§ 61. Μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ τὸ ἕν μέλος ἰσότητος εἰς τὸ ἄλλο.—

α') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x - \beta = \alpha$.

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν β, λαμβάνομεν

$$x - \beta + \beta = \alpha + \beta.$$

Ἐπειδὴ $-\beta + \beta =$ μὲ μηδέν, μένει $x = \alpha + \beta$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προκύπτει, καὶ ἐὰν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν μεταφέρωμεν τὸ $-\beta$ ἐκ τοῦ πρώτου μέλους εἰς τὸ δεύτερον μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖον. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$x + \beta = \alpha, \text{ λαμβάνομεν } x = \alpha - \beta,$$

ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς δοθείσης τὸν β, ἢ ἂν μεταφέρωμεν τὸ β εἰς δεύτερον μέλος μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ὅθεν,

«εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ ἐκ τοῦ ἑνός μέλους εἰς τὸ ἄλλο μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖόν του».

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

«ἂν ὅρος τις ὑπάρχῃ εἰς τὰ μέλη ἐξισώσεως μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον, δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείπωμεν, καὶ ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν».

3 - 5 = 4 - 6

 5 - 3 = 6 - 4.

β') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\gamma - x = \alpha - \beta.$ (1)

Ἐὰν μεταφέρωμεν καθένα ὅρον αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο μέλος ταύτης μὲ **ἀντίθετον** σημεῖον, εὑρίσκομεν

$$\beta - \alpha = x - \gamma, \quad \text{ἢ} \quad x - \gamma = \beta - \alpha. \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) προκύπτει ἐκ τῆς (1) καὶ ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον καθενὸς τῶν ὅρων αὐτῆς. Ὥστε,

«ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων ἐξισώσεως, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος».

γ') Προφανῶς ἔχομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $A = B$ (ὅπου τὸ A καὶ B **παριστάνουν** τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος αὐτῆς) εἶνε ἰσοδύναμος μὲ **τὴν** $A - B = B - B$, ἢ μὲ τὴν $A - B = 0$.

§ 62. Ἀπαλοιφὴ τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως.—

α') *Καλοῦμεν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως τὴν εὕρεσιν ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν ἄνευ παρονομαστῶν.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x-1}{11} = x - 9.$

Ἐὰν τὰ δύο ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 11, δηλαδὴ ἐπὶ 33, καὶ ἁπλοποιήσωμεν, εὑρίσκομεν τὴν

$$11\,x - 3\,x + 3 = 33\,x - 297.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ἀπηλλαγμένη παρονομαστῶν καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν.

β') Ἐν γένει, ***«ἐὰν ἐξίσωσις ἔχῃ ὅρους κλασματικούς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν, ἐὰν 1) εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων· 2) πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ἐ. κ. π.· 3) ἁπλοποιήσωμεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων»***.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x-4}{x-5} - \dfrac{x-5}{x-6} = \dfrac{x-7}{x-8} - \dfrac{x-8}{x-9}.$

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν εἶνε

$$(x-5).\ (x-6).\ (x-8).\ (x-9).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν

$$(x-4)(x-6)(x-8)(x-9) - (x-5)^2(x-8)(x-9)$$
$$= (x-7)(x-5)(x-6)(x-9) - (x-8)^2(x-5)(x-6),$$

ἡ ὁποία εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀπηλλαγμένη παρονομαστῶν.

γ΄) Διὰ συντομίαν, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ μέλη ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν καὶ νὰ ἁπλοποιοῦμεν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάζωμεν καθένα ἀριθμητὴν τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐ. κ. π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὅρου τούτου, καὶ νὰ παραλείπωμεν τοὺς παρονομαστάς. Π. χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{5} - 1 = \frac{2}{3}$$

ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον

$$\underbrace{\frac{3x}{4}}^{15} - \underbrace{\frac{2x-1}{5}}^{12} - \underbrace{\frac{1}{1}}^{60} = \underbrace{\frac{2}{3}}^{20}. \quad (\text{ἐ. κ. π. } 60).$$

Ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ 15, 12, 60, 20 εἶνε τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τοῦ ἐ. κ. π. 60 διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν 4, 5, 1, 3. Ἐπὶ τὰ πηλίκα αὐτὰ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητὰς τῶν ὅρων, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν πλέον τοὺς παρονομαστάς. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν εὑρίσκομεν

$$45x - 24x + 12 - 60 = 40.$$

§ 63. Λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.—

α΄) *Πρώτου βαθμοῦ (ἢ ἁπλῆ)* λέγεται μία ἐξίσωσις ἔχουσα ἕνα ἄγνωστον, ἐὰν μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν αὐτῆς καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, προκύπτῃ ἐξίσωσις εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄγνωστος περιέχεται εἰς πρῶτον βαθμόν.

Οὕτω αἱ ἐξισώσεις $3x - 7 = 14 - 4x$, $\alpha x + \beta = \gamma$ εἶνε πρώτου βαθμοῦ.

β΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x - 7 = 14 - 4x.$$

Ἐὰν τὸν ὅρον $-4x$ μεταφέρωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τὸν δὲ -7 εἰς τὸ δεύτερον, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$3x + 4x = 14 + 7.$$

Ἐκτελοῦντες εἰς αὐτὴν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν $\qquad 7x = 21.$

Ἐὰν τὰ μέλη ταύτης διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ 7 τοῦ x, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $x = 3$, ἥτις εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀληθεύει, ἂν τὸ x γίνῃ ἴσον μὲ 3. Ἄρα καὶ ἡ ρίζα τῆς δοθείσης εἶνε ἡ 3.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$1 - 4(x - 2) = 7x - 3(3x - 1).$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ -4 ἐπὶ $(x - 2)$ καὶ τοῦ -3 ἐπὶ $(3x - 1)$ εὑρίσκομεν,

$$1 - 4x + 8 = 7x - 9x + 3.$$

Εἰς αὐτὴν μεταφέρομεν τοὺς ὅρους τοὺς ἔχοντας τὸν x εἰς τὸ πρῶτον μέλος τοὺς δὲ ἄλλους εἰς τὸ δεύτερον, ὅτε προκύπτει ἡ

$$-4x + 9x - 7x = 3 - 1 - 8,$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων $-2x = -6$.

Διαιροῦντες τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ x εἶνε ἡ $x = \frac{6}{2} = 3$.

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x}{3} - \frac{x - 1}{11} = x - 9.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην, εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν, πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ τὸ ε. κ. π. 3. 11 τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 11, ἢ καθένα τῶν ἀριθμητῶν ἀντιστοίχως ἐπὶ 11· 3· 33· 33 καὶ εὑρίσκομεν

$$11x - 3x + 3 = 33x - 297.$$

Ἐργαζόμενοι ἐπ' αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν $x = 12$.

γ΄) Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον 1) εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν· 2) ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις εἰς τὴν ἰσοδύναμον· 3) χωρίζομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἄγνωστον ἀπό τοὺς μὴ ἔχοντας αὐτόν, ἐν τῇ νέᾳ ἐξισώσει· 4) ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου».

§ **64. Ἐπαλήθευσις ἐξισώσεως.** —

Ἐὰν μετὰ τὴν λύσιν δοθείσης ἐξισώσεως ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν αὐτοῦ, θὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς ἴσους ἢ μίαν ταὐτότητα ὡς πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα, ἐὰν ἔχῃ τοιαῦτα. Ἡ ἐργασία αὐτὴ διὰ τῆς ὁποίας δεικνύομεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἀληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, λέγεται *ἐπαλήθευσις τῆς ἐξισώσεως*. Π. χ. ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x - \alpha}{5} = 2\,\alpha,$$

εὑρίσκομεν $x = 11\,\alpha$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀντὶ τοῦ x τὸ 11 α, εὑρίσκομεν $\frac{11\alpha - \alpha}{5} = 2\,\alpha,$

ἢ $11\,\alpha - \alpha = 10\,\alpha$, ἤ $10\,\alpha = 10\,\alpha$, ἡ ὁποία εἶνε ταὐτότης.

§ **65. Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x - \beta = 0$.** —

α΄) Ἐκ πάσης ἐξισώσεως ἐχούσης ἕνα ἄγνωστον, τὸν x, εἰς πρῶτον βαθμόν, προκύπτει ἰσοδύναμος αὐτῆς τῆς μορφῆς $\alpha x = \beta$, μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν x ἀπὸ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι δὲν τὸν ἔχουν, καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Τὸ α καὶ β θὰ εἶνε ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ διερευνήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x = \beta$, ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς ἑξῆς ἐρωτήσεις· 1) ἡ ἐξίσωσις $\alpha x = \beta$ ἔχει μίαν ρίζαν, ἢ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ περισσοτέρας; 2) τὶ πρέπει νὰ εἶνε τὰ α καὶ β διὰ νὰ ἔχῃ μίαν ρίζαν, καὶ τὶ διὰ νὰ ἔχῃ περισσοτέρας, ἢ καμμίαν;

β΄) Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x = \beta$, εὑρίσκομεν $x = \frac{\beta}{\alpha}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ τιμὴ $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶνε ὡρισμένη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνην ρίζαν, ἢ μίαν μόνην λύσιν.

γ΄) Ἐὰν εἶνε $\alpha = 0$, καὶ $\beta \neq 0$, θὰ ἔχωμεν $0 . x = \beta$, ἢ $0 = \beta$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον, καὶ λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ἀδύνατος, ἢ ὅτι δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν.

δ΄) Ἐὰν εἶνε $\alpha = 0$, καὶ $\beta = 0$, θὰ ἔχωμεν ὅτι $0 . x = 0$, ἢ $0 = 0$ καὶ προφανῶς τὸ x δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν, λέγομεν δέ, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ταὐτότης (59, γ′) καὶ ἔχει ἀπείρους ρίζας το πλῆθος.

ε′) Πρὸς εὐκολίαν παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα τῶν περιπτώσεων τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ α x = β.

Λύσεις τῆς ἐξισώσεως α x = β.
1) Ἂν εἶνε $\alpha \neq 0$ καὶ β οἱονδήποτε ὑπάρχει μία ρίζα, ἡ $x = \frac{\beta}{\alpha}$
2) Ἂν εἶνε $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ δὲν ὑπάρχει καμμία ρίζα.
3) Ἂν εἶνε $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ὑπάρχουν ἄπειροι ρίζαι (ταὐτότης).

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ γίνῃ ἡ λύσις καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἐξισώσεων.

α′) $3(x+4)=(x+2)$. β′) $\frac{x}{2}=3$, $\frac{x-1}{2}=3x-1$, $\frac{x-2}{2}=\frac{x-3}{3}$.

γ′) $\frac{3x}{2}-1=4+\frac{x}{4}$, $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=5$, $\frac{2}{3}=\frac{x-7}{4}$.

δ′) $17x-4(2x-5)=6(3x-5)+5(2x-1)-2$.

ε′) $\frac{3x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}+\frac{5x}{6}=\frac{7x}{12}+238$.

ϛ′) $\frac{2(3x-5)}{5}-\frac{5(5x+10)}{12}=\frac{7(3x+2)}{4}-71$.

ζ′) $x-\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}\right)-\left(\frac{3x}{4}-\frac{4x}{6}\right)-\frac{6x}{7}=66$.

η′) $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x+5)(x-1)$.

θ′) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right)$.

ι′ $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}+\frac{16}{(x-3)(x-4)}=\frac{19}{(x-2)(x-4)}$.

ια′) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2}+\frac{4}{x^2(x-2)}=0$.

ιβ′) $\frac{2x^3}{x^4-16}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-2}$.

ιγ′) $\frac{1}{2x^2+2x}+\frac{1}{5x^3-5x^2}-\frac{1}{2x^2-2x}=0$.

Ὁμὰς δευτέρα. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις.

α′) $(\alpha+\beta)\,x + (\alpha-\beta)\,x = 2\alpha^3$. β′) $\dfrac{x}{\alpha\,\beta} + \dfrac{x}{\alpha\,\gamma} = \dfrac{1}{\beta\,\gamma}$.

γ′) $\alpha\,(\nu\, x-\mu+\beta)=\beta\,(\mu-\nu\, x+\rho)$.

δ′) $\alpha\,(x-\alpha-3) = 2\,(1-x)$.

ε′) $2\,\mu\,(x-\mu)-2\nu\,(\nu-x)=(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2$.

ϛ′) $(x+\alpha)^2-(x+\beta)^2=\beta-\alpha$.

ζ′) $(x+1)^2-\alpha(5-2\alpha-x)=(x-2\alpha)^2+5$.

η′) $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{x}{\alpha+\beta} = 2\,\alpha+\beta$. θ′) $\dfrac{\beta x+\alpha}{2\,\alpha^2\beta} + \dfrac{x-1}{3\,\beta^2} - \dfrac{3\,\beta^2+7\,\alpha^2}{6\alpha^2\,\beta\,(\alpha-\beta)}$.

ι′) $\dfrac{2x+3\beta}{x\,(x-\alpha)} + \dfrac{3\,x-5\,\alpha}{(x-\alpha)\,(x-\beta)} = \dfrac{5}{x-\beta}$.

ια′) $\dfrac{2x+3}{\alpha} + \dfrac{3\,x-2\,\beta+\alpha-1}{3\alpha\,\beta+\alpha^2} = \dfrac{2\,x+1}{\alpha+3\,\beta} + \dfrac{3}{\alpha}$.

ιβ′) $\dfrac{8\,\alpha}{(x+2)^2} + \dfrac{8\,\beta}{(x-2)^2} - \dfrac{(\alpha+\beta)\,x^4}{(x^2-4)^2} = -(\alpha+\beta)$.

66. Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.—

α′) Γνωρίζομεν (§ 17, δ′) ὅτι, ἂν Κ παριστάνῃ κεφάλαιόν τι, Τ τὸν τόκον αὐτοῦ εἰς χρόνον Χ καὶ Ε τὸ ἐπιτόκιον, πρὸς τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$T = \frac{K.\ E.\ X.}{100} \qquad (1).$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν τιμὴν τοῦ Τ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ Κ, Ε, Χ. Ἐὰν ὑποτεθοῦν γνωστὰ τὰ Κ, Ε, Χ, καὶ ἄγνωστον τὸ Τ ὁ (1) εἶνε ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς Τ. Ἐκ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ Κ ἢ τὸ Ε ἢ τὸ Χ, ἐὰν τὰ ἀντίστοιχα τρία ἄλλα ποσὰ εἶνε γνωστά. Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐξισώσεων δυνάμεθα, ἐνίοτε, νὰ λύωμεν διάφορα προβλήματα ἀπὸ ἕνα καὶ μόνον τύπον, ὁ ὁποῖος συνδέει τὰ ποσὰ τῶν προβλημάτων.

β′) Ἐπίσης ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τῇ Φυσικῇ καὶ τῇ Χημείᾳ δυνάμεθα, ἐνίοτε, διὰ τῆς χρήσεως τῶν ἐξισώσεων νὰ λύωμεν διάφορα προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις συνδέεται μὲ τὴν λύσιν σχετικοῦ πρὸς αὐτὰ προβλήματος. Οὕτω π. χ. ἐὰν Ε παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις α καὶ β, ὕψος δὲ υ, θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστόν,

$$Ε = \frac{(α + β) υ}{2}. \qquad (2)$$

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ, τοῦ α, ἢ τοῦ β, ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2), θεωροῦντες καθεμίαν φορὰν τὰς ἄλλας ποσότητας γνωστάς. Οὕτω π. χ. εὑρίσκομεν ὅτι τὸ

$$β = \frac{2 Ε - α υ}{υ}.$$

Ἂν ε εἶνε τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος καὶ ω ὁ ὄγκος αὐτοῦ, τὸ βάρος τούτου β θὰ εἶνε $\quad β = ε\, ω. \qquad (3)$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ε ἢ τὸ ω ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἀντιστοίχως, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς πρὸς ε ἢ ὡς πρὸς ω, θεωροῦντες τὰς ἄλλας ποσότητας ἀντιστοίχως γνωστάς.

Οὕτω ἔχομεν $ε = \frac{β}{ω}$, καὶ $ω = \frac{β}{ε}$.

γ΄) Εἰς πᾶν πρόβλημα διακρίνομεν δεδομένα καὶ ζητούμενα, τὰ ὁποῖα πάντοτε εἶνε ἀριθμοί. Διὰ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα, τὰ ὁποῖα ὡς ἄγνωστα παριστάνομεν συνήθως διὰ τῶν γραμμάτων x, y, ω, ... , τὰ δὲ γνωστὰ δι᾿ ἀριθμῶν, ἢ διὰ τῶν α, β, γ, ...

δ΄) Διὰ νὰ λυθῇ πρόβλημά τι, πρέπει τὰ ζητούμενα αὐτοῦ νὰ πληροῦν ὡρισμένας τινάς ἀπαιτήσεις. Τὰς ἀπαιτήσεις αὐτὰς καλοῦμεν *ὅρους τοῦ προβλήματος*.

ε΄) Ἐκείνους ἐκ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχουν τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα, καλοῦμεν *ἐπιτάγματα*. Τὰ ἐπιτάγματα γίνονται γνωστὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος. Π. χ. εἰς τὸ πρόβλημα

«νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον νὰ τὸν ὑπερβαίνῃ κατὰ 6»,

τὸ ἐπίταγμα εἶνε ὅτι,

«τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε μεγαλύτερον αὐτοῦ κατὰ 6».

Ἑπομένως, ἐὰν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ x, τὸ διπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶνε 2x. Ἐπειδὴ τὸ 2 x θὰ ὑπερβαίνῃ τὸν x κατὰ 6, πρέπει αἱ δύο παραστάσεις 2 x καὶ x + 6 νὰ εἶνε ἴσαι. Οὕτω ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $2x = x + 6$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 6$.

στ΄) Ἐνίοτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστάνει ποσόν τι, τὸ ὁποῖον ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὑπόκειται εἰς ὅρους τινάς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πληροῖ. Τοὺς τοιούτους ὅρους καλοῦμεν *περιορισμούς*. Π. χ. ἂν διὰ τῆς λύσεως προβλήματός τινος ζητῆται τὸ πλῆθος ἀνθρώπων, δυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός.

ζ΄) Ἐν γένει διὰ τὴν λύσιν προβλήματός τινος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

1) Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος. Δηλαδὴ ἐκφράζομεν δι᾽ ἐξισώσεως τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ζητούμενα μὲ τὰ δεδομένα.

1) Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν. Οὕτω εὑρίσκομεν, τὶς εἶνε ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα.

3) Ἐξετάζομεν, ἂν ὁ ἐκ τῆς λύσεως εὑρεθεὶς ἀριθμὸς πληροῖ καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

§ 67. Λύσις ἁπλῶν προβλημάτων.—

Πρόβλημα 1ον). «***Τὸ τετραπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶνε ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐξηθέντα κατὰ 60. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός;***».

Ἔστω ὅτι x εἶνε ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ θὰ ε νε $4x$, τὸ δὲ $x + 60$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ 60.

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶνε τὸ $4x$ ἴσον μὲ $x + 60$. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $4x = x + 60$.

Λύοντες δ᾽ αὐτὴν εὑρίσκομεν $x = 20$.

Πρόβλημα 2ον). «***Ὁ Ἰωάννης ἔχει τετραπλάσια μῆλα ἢ ἡ Μαρία, καὶ οἱ δύο δὲ μαζὺ ἔχουν 45. Πόσα μῆλα ἔχει καθείς;***».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τῆς Μαρίας, τοῦ Ἰωάννου θὰ παρασταθοῦν διὰ τοῦ $4x$, τῶν δύο δὲ μαζὺ διὰ τοῦ $4x + x$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶνε 45. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x + 4x = 45$.

Ἐκ τῆς λύσεως δ᾽ αὐτῆς εὑρίσκομεν $x = 9$.

Ἤτοι ἡ μὲν Μαρία ἔχει 9, ὁ δὲ Ἰωάννης 36 μῆλα.

Πρόβλημα 3ον). *«Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε 25, τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἐλλατωθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου δίδει 150· ποῖοι εἶνε οἱ ἀριθμοί;»*

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μικρότερος θὰ εἶνε 25 — x, τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου 6 x, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου 4 (25 — x). Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἡ διαφορὰ 6 x — 4 (25 — x) εἶνε ἴση μὲ 50, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$6x - 4(25 - x) = 50,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 15$.

Ἄρα οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶνε οἱ 15 καὶ 10.

Πρόβλημα 4ον). *«Ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶνε τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ· πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι τούτων».*

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ, ἡ τοῦ πατρὸς θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ 3 x. Ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ πρὸ 8 ἐτῶν ἦτο x — 8, τοῦ δὲ πατρὸς 3 x — 8. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τὸ 3 x —8 εἶνε τετραπλάσιον τοῦ x — 8. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x - 8 = 4(x - 8),$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 24$. Ἤτοι ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἶνε 24, τοῦ δὲ πατρὸς 72 ἔτη.

Πρόβλημα 5ον). *«Νά εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{7}{11}$ τὸ κάμνει ἴσον μὲ $\frac{1}{4}$».*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{7 + x}{11 + x} = \dfrac{1}{4}$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = -\dfrac{17}{3} = -5\dfrac{2}{3}$.

Πρόβλημα 6ον). *«Ὀρθογωνίου τινὸς ἡ μὲν βάσις εἶνε 4 μ. μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό, τὸ δὲ ὕψος 3 μ. μικρότερον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ».*

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν αὐτοῦ θὰ εἶνε $x \cdot x = x^2$. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου θὰ παρασταθῇ τότε διὰ τοῦ $x + 4$, τὸ δὲ ὕψος τούτου διὰ $x - 3$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ εἶνε $(x+4)\cdot(x-3)$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ ὀρθογώνιον καὶ τὸ τετράγωνον εἶνε ἰσοδύναμα, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(x+4)(x-3)=x^2, \quad \text{ἢ} \quad x^2+4x-3x-12=x^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=12$. Ὥστε ἡ μὲν βάσις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 16 μ., τὸ δὲ ὕψος 9 μ.

Πρόβλημα 7ον). « ***Ὁ Α ἐκτελεῖ ἓν ἔργον εἰς 7 ἡμέρας. Ὁ Β ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς 5 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο μαζύ, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον;*** »

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἰς x ἡμέρας ἐκτελοῦν καὶ οἱ δύο, μαζὺ ἐργαζόμενοι, ὁλόκληρον τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. Ἐξ ἄλλου ἀφοῦ, ὁ Α εἰς 7 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ ἐκτελῇ τὸ $\frac{1}{7}$, ὁ δὲ Β εἰς 1 ἡμ. τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Καὶ οἱ δύο μαζὺ εἰς 1 ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου.

Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ $x=2\frac{11}{12}$. Ὥστε καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι, θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον εἰς $2\frac{11}{12}$ ἡμέρας.

Πρόβλημα 8ον). «***Ἔχει τις 100 οἴνου τῶν 4,5 δρ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον οἶνον τῶν 6 δρ. κατ' ὀκᾶν πρέπει ν' ἀναμείξῃ, διὰ νὰ κοστίζῃ 5 δρ. ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος;***».

Ἔστω x ὀκ. τὸ ζητούμενον ποσὸν τοῦ οἴνου. Τοῦτο θὰ τιμᾶται 6. x δρ. Τὸ μεῖγμα θὰ εἶνε $(100+x)$ ὀκ., θὰ τιμᾶται δὲ $5.(100+x)$ δρχ. Ὁ οἶνος τῶν 100 ὀκ. τιμᾶται 4,5. 100 δρχ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5.(100+x)=4{,}5.100+6.x$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $x=50$. Ἤτοι πρέπει νὰ θέσῃ 50 ὀκ. τῶν 6. δρχ.

Πρόβλημα 9ον). «***Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ δύο τόπων συγχρόνως, κινοῦνται ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως ὥστε νὰ συναντηθοῦν. Τὸ μὲν πρῶτον διανύει 5 χμ. τὴν ὥραν, τὸ δὲ δεύτερον 5,5 χμ. Εἰς***

τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πρῶτον τόπον θὰ συναντηθοῦν, ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τόπων εἶνε 60 χμ»;

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν, τὸ πρῶτον κινητὸν θὰ διανύσῃ αὐτὴν εἰς $\frac{x}{5}$ ὥρας. Τὸ δεύτερον θὰ διανύσῃ (60 — x) χμ. καὶ ταῦτα εἰς $\frac{60-x}{5,5}$ ὥρας. Ἀλλ' αὐτοὶ οἱ χρόνοι εἶνε ἴσοι. Ἄρα ἔχομεν $\frac{x}{5} = \frac{60-x}{5,5}$,

ἐξ ἧς ἕπεται $$x = 28\frac{4}{7} \text{ χμ.}$$

Πρόβλημα 10ον). ***«40 ὀκ. ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχουν 3, 4 ὀκ. ἅλατος. Πόσον καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτὸ, ἵνα 40 ὀκ. τοῦ νέου κράματος περιέχῃ 2 ὀκ. ἅλατος;»***

Ἔστωσαν x αἱ ζητούμεναι ὀκάδες τοῦ ὕδατος. Τὸ νέον κρᾶμα θὰ ἔχῃ (40 + x) ὀκ., καὶ θὰ περιέχῃ τὸ αὐτὸ ἅλας 3,4 ὀκ., τὸ ὁποῖον εἶχε τὸ πρῶτον κρᾶμα. Ἀλλὰ αἱ 40 ὀκ. θὰ περιέχουν ἤδη 2 ὀκ. ἅλατος. Ἄρα αἱ (48 + x) θὰ περιέχουν $\frac{2}{40}$ (40 + x). Τοῦτο δὲ θὰ εἶνε ἴσον μέ 3, 4 ὀκ. Ἤτοι ἔχομεν $\frac{2(40+x)}{40} = 3{,}4$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν x = 28 ὀκάδες.

Πρόβλημα 11ον). ***«Πατήρ τις εἶνε α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱός αὐτοῦ β ἐτῶν· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε ἢ ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;»***

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x, ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς μετὰ x ἔτη θὰ εἶνε α + x, τοῦ δὲ υἱοῦ β + x. Ἐπειδὴ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $$\alpha + x = 3(\beta + x),$$
ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $2x = \alpha - 3\beta$, καὶ $x = \frac{\alpha - 3\beta}{2}$.

Διερεύνησις. Ἐὰν μὲν τὸ α—3 β εἶνε ἀριθμὸς θετικός, τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἐὰν δ' εἶνε ἀρνητικός ἔγινεν εἰς τὸ παρελθόν· καὶ ἂν εἶνε α — 3 β = 0, τὸ x = 0. Ἤτοι ἡ σημερινὴ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶνε τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

Πρόβλημα 12ον). ***«Τὸ μὲν ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε α, ἡ δὲ διαφορά αὐτῶν δ. Ποῖοι εἶνε οἱ δύο ἀριθμοί;»***

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν μικρότερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μεγαλύτερος θὰ παρίσταται διὰ τοῦ $x + \delta$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ $x + x + \delta$. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x + x + \delta = \alpha,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = \frac{\alpha - \delta}{2}$. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ

$$\frac{\alpha - \delta}{2}, \text{ καὶ } \frac{\alpha - \delta}{2} + \delta = \frac{\alpha + \delta}{2}.$$

Πρόβλημα 13ον). «***Ἐργάτις τις τελειώνει ἔργον τι εἰς α ἡμέρας, δεύτερος τις τελειώνει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς β ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουν τὸ ἔργον καὶ οἱ δύο μαζύ ἐργαζόμενοι;***».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἀφοῦ εἰς x ἡμέρας τελειώνουν 1 ἔργον, εἰς 1 ἡμ. τελειώνουν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. Ὁμοίως, ἀφοῦ ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰς α ἡμέρας τελειώνει 1 ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ τελειώνῃ τὸ $\frac{1}{\alpha}$ τοῦ ἔργου, ὁ δὲ δεύτερος τὸ $\frac{1}{\beta}$ αὐτοῦ. Ἑπομένως καὶ οἱ δύο ἐργάται, μαζὺ ἐργαζόμενοι, θὰ τελειώνουν εἰς 1 ἡμ. τὸ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{x}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$. Ἤτοι, καὶ οἱ δύο ἐργάται, μαζὺ ἐργαζόμενοι, τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ ἡμέρας.

Πρόβλημα 14ον). «***Ἀπὸ τοῦ σημείου Α κινεῖται σημεῖόν τι ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα τ μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον κατὰ τὴν φορὰν ΑΓ· δ δευτερόλεπτα βραδύτερον κινεῖται ἀπὸ τοῦ σημείου Β, κειμένου μ μέτρα ὄπισθεν τοῦ Α, ἄλλο σημεῖον ἐπίσης ὁμαλῶς καὶ μὲ ταχύτητα τ′ κατὰ δευτερόλεπτον κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὸ πρῶτον. Πότε θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο κινητά;***».

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν μετὰ x δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως τοῦ πρώτου σημείου. Εἶνε φανερόν, ὅτι τὸ δεύτερον σημεῖον θὰ κινῆται $x - \delta$ δευτερόλεπτα μέχρι τῆς συναντήσεως. Ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ πρῶτον θὰ εἶνε $\tau . x$, ἐκεῖνος δὲ τὸν ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ δεύτερον θὰ εἶνε

$\tau'(x - \delta)$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\tau'(x - \delta) = \tau x + \mu$.

Διότι ὁ δρόμος τοῦ δευτέρου, ὁ $\tau'(x - \delta)$, εἶνε ἴσος μὲ τὸν δρόμον τx, τὸν ὁποῖον διήνυσεν τὸ πρῶτον, ηὐξημένον κατὰ τὴν ἀπόστασιν μ, καθ' ἣν ἦτο ὀπίσω τὸ δεύτερον, ἀφοῦ τοῦτο ἔφθασε τὸ πρῶτον. Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$x = \frac{\mu + \tau'\delta}{\tau' - \tau}.$$

Διερεύνησις. Ἂν τὸ $\tau' - \tau$ εἶνε θετικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἂν τὸ τ' εἶνε μεγαλύτερον τοῦ τ, ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς τὸ μέλλον. Ἂν $\tau' - \tau$ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἂν τὸ τ' εἶνε μικρότερον τοῦ τ, ἡ συνάντησις ἔγινεν εἰς τὸ παρελθόν. Διότι, ἡ τιμὴ τοῦ x θὰ εἶνε ἀρνητικὴ (ὑποτίθεται ὅτι τὸ τ, τ', δ καὶ μ εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί). Ἂν $\tau' - \tau$ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, ἡ συνάντησις δὲν θὰ γίνῃ ποτέ. Διότι, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶνε κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν ἀριθμόν τινα ὡρισμένον, καὶ παρονομαστὴν μηδέν. Ἄρα ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶνε ἀπείρως μεγάλη (54, β').

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ὀκταπλάσιον σὺν 10, ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν 100, ἰσοῦται μὲ 10; 10.

Ἐὰν εἰς τὸ τρίτον $\left(\text{τὸ } \frac{1}{2}\right)$ ἀριθμοῦ προστεθῇ τὸ τέταρτον $\left(\text{τὸ } \frac{1}{5}\right)$ αὐτοῦ καὶ 2 (1) προκύπτει 5 (2). Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; $5\frac{1}{7}$ $\left(1\frac{3}{7}\right)$.

3) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τοὺς 3 (9) καὶ 10 (5), ὥστε νὰ προκύπτουν ἀριθμοὶ ἔχοντες λόγον $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{4}\right)$; $\frac{1}{2}$ $\left(-10\frac{1}{3}\right)$.

4) Ἐὰν διψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 9 (8), αὐξήσωμεν κατὰ 27 (18), λαμβάνομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός. (*Βλέπε σελίδα 44, Ὁμάδα δευτέραν, 2*). 36 (35).

5) Παιδίον λέγει. Ἐὰν προσθέσω τὸ ἥμισυ $\left(\text{τὸ } \frac{1}{3}\right)$, τὸ τρίτον (καὶ 3), τὸ $\frac{1}{4}$ $\left(\text{τὸ } \frac{1}{5}\right)$ τῶν μήλων μου καὶ 20 $\left(\text{καὶ τὸ } \frac{1}{4}\right)$ ἀκόμη θὰ ἔχω 150 (50) μῆλα. Πόσα μῆλα ἔχει τὸ παιδίον; 120 (60).

6) Ἀφοῦ ἐξώδευσέ τις 20 (30) δρχ. ἐκ τῶν χρημάτων αὐτοῦ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ $\left(\frac{5}{8}\right)$ τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ ἔμειναν 10 (3) δρ. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἐξ ἀρχῆς; 60 (38).

7) Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β. Ἔχω 3 (4) πλάσια μῆλα ἢ σύ. Ὁ Β ἀπαντᾷ· δός μου 16 (12) ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, καὶ θὰ ἔχωμεν ἴσον ἀριθμὸν μήλων. Πόσα μῆλα εἶχε καθείς; ὁ Β′ 16 (8).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἴς τινα συναναστροφὴν ἦσαν τριπλάσιοι ἄνδρες ἢ γυναῖκες. Μετὰ τὴν ἀναχώρησιν 4 (3) ἀνδρῶν μετὰ τῶν συζύγων των ἔμειναν πενταπλάσιοι ἄνδρες ἢ γυναῖκες. Πόσοι ἦσαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐξ ἀρχῆς; 24· 8 (18· 6).

2) Χωρικὴ ἐπώλησε τὸ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$ τῶν ᾠῶν, τὰ ὁποῖα εἶχε, καὶ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$ ᾠοῦ, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Ἐπώλησε πάλιν τὸ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$ τῶν ὑπολοίπων καὶ $\frac{1}{2}$ $\left(1 \frac{1}{3}\right)$ τοῦ ᾠοῦ, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν ἐπώλησεν ὁμοίως (τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ $\frac{1}{3}$ ᾠοῦ· τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{2}{3}$ ᾠοῦ). Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς, ἂν τῆς ἔμειναν 1 (8) ᾠά; 31 (49).

3) Ἠρωτήθη τις πόσην ἡλικίαν ἔχει, καὶ ἀπεκρίθη· μετὰ μ (21) ἔτη θὰ εἶνε ν(3) φορὰς μεγαλυτέρα ἐκείνης τὴν ὁποίαν εἶχε πρὸ μ (5) ἐτῶν. Ποία εἶνε ἡ ἡλικία του; $\frac{\mu(\nu+1)}{(\nu-1)}$ (18)

4) Χωρικὴ ἐσκόπευε νὰ πωλήσῃ ὅσα ᾠὰ εἶχε πρὸς 50 (70 λ.) ἕκαστον. Ἐπειδὴ ἐθραύσθησαν 3 (1), ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 60 (80 λ.) καὶ δὲν ἐζημιώθη. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς; 18 (8)

5) Ἔχασέ τις τὰ $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ τῶν χρημάτων του καὶ 1 (3) δρχ. Ἐκέρδισεν ἔπειτα τὰ $\frac{3}{5}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ τῶν ὅσων οὕτω εἶχε καὶ 1 (3) δρχ. Τέλος ἔχασε τὰ $\frac{5}{6}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$ τῶν ὅσων οὕτω εἶχε καὶ 1 (3) δρχ. Οὕτω εἶχεν 8,5 (10) δρ. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς; 108 (54).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ποσὸν 110 (130) δρ. πρόκειται νὰ διανεμηθῇ μεταξὺ τριῶν προσώπων εἰς τρόπον, ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ 30 δρ. ὀλιγωτέρας (περισσοτέρας) τοῦ πρώτου, καὶ ὁ τρίτος διπλάσια τοῦ δευτέρου· πόσα θὰ λάβῃ καθείς; ὁ α′ 50 (10).

2) Τὸ βάρος τῆς οὐρᾶς ἰχθύος ἦτο τὸ $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)$ τοῦ ὅλου βάρους του. Τὸ σῶμά του ἐζύγιζε 5 (11) ὀκ., ἡ δὲ κεφαλή του τὸ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ ὅλου βάρους του. Πόσας ὀκάδας ἐζύγιζεν ὁ ἰχθῦς; 12 (20).

3) Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 3 $\left(3 \frac{1}{2}\right)$ ὥρ. ἄλλος τὴν πληροῖ εἰς 4(4), καὶ τρίτος εἰς 6 $\left(6 \frac{1}{5}\right)$ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας τὴν πληροῦν, ἂν ρέουν καὶ οἱ τρεῖς συγχρόνως; $1 \frac{1}{3}\left(1 \frac{263}{605}\right)$.

4) Βρύσις πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 2 (4,5), δευτέρα εἰς 4 $\left(4 \frac{1}{3}\right)$ καὶ τρίτη εἰς 6(5,5) ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή, ἂν ἀνοίξῃ ἡ πρώτη (δευτέρα), μετὰ μίαν δὲ ὥραν καὶ αἱ ἄλλαι δύο; $1 \frac{6}{11}\left(2 \frac{173}{817}\right)$.

Ὁμὰς τετάρτη (κινήσεως). 1) Ἔκ τινος τόπου ἀνεχώρησε πεζός, διατρέχων 60 (80) χιλ. καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 (3) ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολὴν, νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 8 (6) ἡμ. Πόσα χμ. πρέπει νὰ διανύῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν; 90 (120).

2) Ἐκ δύο τόπων, ἀπεχόντων 575 (216,75) χλ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι, διευθυνόμενοι πρὸς συνάντησίν των. Ἐὰν ὁ εἷς διανύῃ 60 (40,5) χμ., ὁ δὲ ἄλλος 55 (50) χμ. καθ' ἡμέραν, πότε θὰ συναντηθοῦν; 5 (2,39...).

3) Ἀπὸ σημείου Α κινεῖται σῶμά τι, διανῦον 32 (τ) μ. εἰς 4'' (δ) καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ Β. Μετὰ 3'' (ρ) ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α ἄλλο σῶμα πρὸς τὴν φορὰν ΑΒ κινούμενον, καὶ διανῦον 60 (τ') μ. εἰς 5'' (δ')· πότε καὶ ποῦ θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον; $6{\cdot}72 \left(\frac{\delta\rho\tau'}{\delta\tau' - \delta'\tau}\right)$.

4) Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν Β, διανύουσα 30 (45,5 χμ.) καθ' ὥραν· 1 $\left(1 \frac{3}{4}\right)$ ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνομένη πρὸς τὸ Β ἁμαξοστοιχία, διανύουσα 60 $\left(50 \frac{1}{2}\right)$ χμ. καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α θὰ φθάσῃ ἡ δευτέρα τὴν πρώτην;

1 ὥρ. 60 χμ. (15 ὥρ. 55,5')

5) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπό τινος τόπου, διανύων 12 (8,75) χμ. τὴν ὥραν· 3 $\left(2 \frac{1}{3}\right)$ ὥρ. βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τόπου, ἄλλος διανύων 16 (15,5) χμ. τὴν ὥραν· α') πότε θὰ προηγῆται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου 12 $\left(9 \frac{1}{3}\right)$ χμ;

β') πότε θὰ προηγῆται ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου 50 $\left(26 \frac{5}{6}\right)$ χμ.;

$9 \cdot 24{,}5 \left(3 \frac{79}{81},\ 9 \frac{1}{3}\right)$.

6) Τὴν 10 (12) πρωϊνὴν ἀναχωρεῖ ποδηλάτης ἀπὸ τόπου Α, διανύων 12 (15) χμ. καθ' ὥραν· ποίαν ὥραν πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ δεύτερος ἐκ τοῦ Α, ὥστε διανύων 16 (20) χμ. καθ' ὥραν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 3 (2,5) ὥρας; 11 (50').

7) Ἀπὸ δύο τόπων ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ὁδοιπόροι πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου· ὁ εἷς χρειάζεται 7 (5) ὥρ. διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν τόπων, ὁ δὲ δεύτερος 2 ὥρ. ὀλιγώτερον (περισσότερον) τοῦ πρώτου. Πότε θὰ συναντηθοῦν;

2 ὥρ. 55' $\left(2 \frac{11}{12}\right)$.

8) Ἀπὸ σημείου περιφερείας κύκλου ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ διανύουν ἀντιστοίχως α^0 καὶ β^0 $(\alpha > \beta)$ εἰς 1''. Πότε θὰ συναντηθοῦν (διὰ νὴν φοράν); α') ἂν διευθύνωνται ἀντιθέτως. β') πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν; $360:(\alpha \pm \beta)$ · $[360.\ \nu:(\alpha \pm \beta)]$

9) Ἀπὸ σημείου περιφερείας ἀναχωροῦν δύο κινητά, διανύοντα αὐτὴν εἰς χρόνους t_1 καὶ t_2 $(t_1 > t_2)$· πότε θὰ συναντηθοῦν διὰ 1ην, 2αν, ... νὴν φορὰν, ἂν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν ἢ τὴν ἀντίθετον φοράν; $\frac{t_1 t_1}{t_1 \mp t_2} \cdot \nu$

10) Ἀπὸ σημεῖον περιφερείας ἀκτῖνος ρ ἀναχωροῦν δύο κινητὰ μὲ ταχύτητας τ_1 καὶ τ_2· πότε θὰ συναντηθοῦν διὰ νὴν φοράν, ἂν ἔχουν ἀντίθετον ἢ τὴν αὐτὴν φοράν;

$\left(\frac{2\pi\ \rho\nu}{t_1 \pm t_2}\right)$.

11) Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δεῖκται τῶν ὡρῶν καὶ πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου ; $\left(1 \frac{1}{11}\ \text{ὥρ.}\right)$.

12) Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δεῖκται σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν διὰ 1ην, 2αν, 3ην,... φοράν; $\left(\frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \ldots\right)$.

13) Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δεῖκται σχηματίζουν γωνίαν α^0 διὰ 1ην 2αν, 3ην... φοράν ; $\left(\frac{\alpha}{330}, \frac{360-\alpha}{330}\right)$.

14) Πότε μετὰ μεσημβρίαν ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων διὰ πρώτην φοράν ; $\left(1'\ \frac{780''}{1427}\right)$.

15) Κύων διώκει ἀλώπεκα, ἥτις ἀπέχει 60 (40) πηδήματα αὐτῆς. Ὅταν αὕτη κάμνῃ 9 (10) πηδήματα ὁ κύων κάμνει 6 (5). Ἀλλὰ 3 πηδήματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 αὐτῆς. Μετὰ πόσα πηδήματα αὐτοῦ θὰ τὴν φθάσῃ ὁ κύων; 72 (120)

Ὁμὰς πέμπτη. (γεωμετρικά). 1) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ διαφορὰ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶνε 20 (15° 18' 12'')· πόση εἶνε καθεμία τῶν γωνιῶν; 35° (37° 20' 54'

2) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶνε τὸ $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)$ τῶν παρὰ τὴν βάσιν· Πόσαι εἶνε αἱ γωνίαι του; $36^0 \left(51\frac{3}{7}\right)$.

3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν καθεμία εἶνε κατὰ 20^0 (30^0) μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης της. $60^0,\ldots(45^0,\ldots)$.

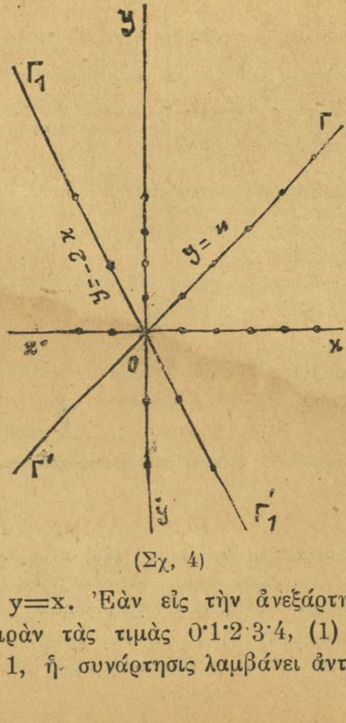
4) Πόσας πλευρὰς ἔχει κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου καθεμία γωνία εἶνε 144^0 (1,5 ὀρθ.); 10 (8).

5) Ποῖαι εἶνε αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν εἶνε μεταξύ των καθὼς οἱ ἀριθμοὶ $1\left(\frac{1}{2}\right) : 2\left(\frac{3}{4}\right) : 3\left(\frac{2}{3}\right) : 4\ (1)$; ἡ α′ 36^0 $\left(\frac{24}{35}\text{ ὀρθ.}\right)$.

§ 68.*) Περὶ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων $y=\alpha\kappa$, $y=\alpha x+\beta$.—

α′) *Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$, παριστάνει πάντοτε μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, διερχομένην διὰ τοῦ Ο.*

Διότι, ἔστω πρῶτον ὅτι τὸ α εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς π.χ. ὁ 1, ὅτε



(Σχ, 4)

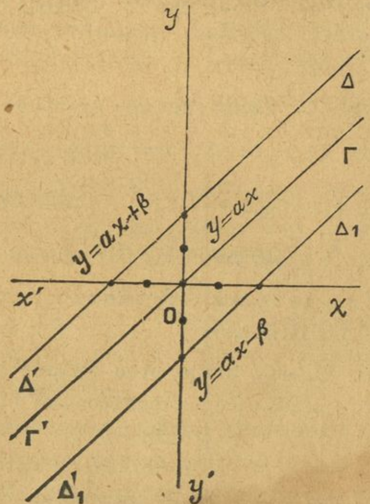
ἡ συνάρτησις εἶνε $y=x$. Ἐὰν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς 0·1·2·3·4, (1) αὐξανομένας κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 1, ἡ συνάρτησις λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς

0·1·2·3, (2) αὐξανομένας κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 1. Ἐὰν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x (σχ. 4) τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς τιμὰς (1) τοῦ x καὶ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα, ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς τιμὰς (2) τοῦ y, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα τὰ παριστάνοντα τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη τῶν τιμῶν (0,0)· (1,1)· (2,2),... κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, τῆς ΟΓ.

Ἐὰν εἰς τὸν x δώσωμεν τὰς τιμὰς —1·—2·—3··
εὑρίσκομεν ὅτι τὸ y λαμβάνει τὰς τιμὰς —1·—2—3···
τὰ δὲ σημεῖα τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη

(—1,—1), (—2,—2),....

κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΓ′, ἡ ὁποία εἶνε προέκτασις τῆς ΟΓ′.



(Σχ. 5)

Ἑπομένως ἡ συνάρτησις y=x παριστάνει τὴν εὐθείαν ΓΓ′ (σχ 4).

β′) Ἔστω ὅτι τὸ α εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, π.χ. ὁ —2. Εὑρίσκομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι ἡ συνάρτησις y=—2x παριστάνει τὴν εὐθεὶαν $Γ_1Γ_1'$ (σχ.4).

γ′) Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν τὸ α ἔχῃ ἄλλην οἱανδήποτε τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις y=αx παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, διερχομένην διὰ τοῦ Ο.

δ′) Τὴν συνάρτησιν y=αx+β

δυνάμεθα ν' ἀπεικονίσωμεν, ἐὰν εἰς τὴν τεταγμένην καθενὸς σημείου τῆς εὐθείας τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ $y=\alpha x$, προσθέσωμεν τὴν ποσότητα β. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει, νὰ μεταφέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$ παραλλήλως πρὸς τὸν ἑαυτόν της ἄνω ἢ κάτω, καθόσον τὸ β εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

Ἑπομένως ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν (βλ. σχ. 5 τὰς εὐθείας $\Delta\Delta'$, $\Delta_1\Delta_1'$).

ε') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὶ παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y=\beta$ παρατηροῦμεν, ὅτι οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ x, καὶ τὸ y ἰσοῦται μὲ β. Ἤτοι, ἡ ἐξίσωσις $y=\beta$ παριστάνει πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τεταγμένην ἴσην μὲ β. Προφανῶς τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἀπεχούσης ἀπόστασιν β ἀπ' αὐτοῦ. Ἑπομένως, καὶ ὅταν τὸ α εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Εὕρετε τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ συναρτήσεις

α') $y=3x$. β') $y=2x+3$. γ') $y=\frac{3}{4}x$. δ') $y=x-\frac{2}{3}$

ε') $y=\frac{x}{2}+5$. στ') $y=-\frac{5x}{6}-\frac{1}{8}$. ζ') $y=+8$. η') $y=-\frac{1}{2}$.

(θέσατε $x=0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot ..$)

§ 69*). Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς ρίζης ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.—

α') Ἔστω μία ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ π.χ. ἡ $3x-6=0$. Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς παραστήσωμεν διὰ τοῦ y, ἔχομεν τὴν συνάρτησιν
$$y=3x-6.$$

Διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, δηλαδὴ τὴν $x=2$, τὸ y εἶνε ἴσον μὲ μηδέν. Τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν (2,0) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ εἰς ἀπόστασιν δύο μονάδων μήκους ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων. Ἐπειδὴ δὲ ὡς εἴδομεν, ἡ συνάρτησις $y=3x-6$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, ἕπεται ὅτι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

β') *«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον τὴν ρίζαν ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ* $\alpha x+\beta=0$, *ἀρκεῖ, νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον* $x=-\frac{\beta}{\alpha}$ *ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν* x, *ἢ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν*

εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$, ***καὶ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν*** x».

§ **70** *) **Κατασκευὴ εὐθείας ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.**—

α΄) Ὑπάρχει σύντομος τρόπος συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha x+\beta$, καὶ ἥτις καλεῖται ἐξίσωσις τῆς εὐθείας. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἡ ἄγνωστος εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ τεταγμένη y εἶνε ἴση μὲ μηδέν. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν τὸν y ἴσον μὲ μηδὲν εἰς τὴν ἐξίσωσιν, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha x+\beta=0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\quad x=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot$

Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $\left(-\frac{\beta}{\alpha},\ 0\right)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

β΄) Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y, ἔχει τετμημένην ἴσην μὲ μηδέν. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὸ μηδὲν, θὰ εὕρωμεν

$$y=\beta.$$

Τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος (o,β) ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, εἶνε ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y.

γ΄) Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εὐθεῖαν, ὅταν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς, θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὸ y=***μὲ 0, καὶ λύομεν τὸ ἐξαγόμενον ὡς πρὸς*** x, ***ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς ὁρίζει τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν*** x· ***θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν*** x=***μὲ 0, καὶ λύομεν τὸ ἐξαγόμενον ὡς πρὸς τὸ*** y, ***οὕτω δ᾽ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν*** y· ***συνδέομεν τὰ δύο οὕτω εὑρεθέντα σημεῖα τῶν ἀξόνων δι᾽ εὐθείας, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη»***.

δ΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\qquad y=3x-5.$

Θέτομεν $y=0$, καὶ ἔχομεν $3x-5=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$x=+\frac{5}{3}\cdot$$

Θέτομεν $x=0$, καὶ μένει $\qquad y=-5.$ $\qquad$ Ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $\left(+\frac{5}{3},\ 0\right)$ τοῦ ἄξονος τῶν x, καὶ τοῦ (0,—5) τοῦ ἄξονος τῶν y. Συνδέοντες τὰ σημεῖα αὐτὰ δι' εὐθείας, ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y=3x-5$.

ε') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε τῆς μορφῆς $y=\alpha x$, π. χ. ἡ ἐξίσωσις $y=2x$, παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $x=0$ εἶνε καὶ τὸ $y=0$. Ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν ἀξόνων. Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ ἓν ἄλλο ἀκόμη σημεῖον αὐτῆς, θέτομεν $x=1$ (ἢ ἄλλην τινὰ τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενὸς) καὶ εὑρίσκομεν $y=2$. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος (1,2) καὶ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶνε ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ διὰ τοῦ σημείου τούτου (1,2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Κατασκευάσατε τὰς εὐθείας τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις, α') $y=9x$. β') $y=3x+1$. γ') $y=-2x$. δ') $y=-7x+1$.

ε') $y=\frac{1}{2}x-1$. στ') $3y-2x=2$. ζ') $\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}x-1=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

§ 71. Ὁρισμοί.—

α') Ἔστωσαν δύο ἐξισώσεις, καθεμία τῶν ὁποίων ἔχει δύο ἀγνώστους x καὶ y, καὶ καθένα εἰς πρῶτον βαθμόν,

αἱ $x+y=10,\qquad x-y=2.$

Αὗται ἀληθεύουν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν καθενὸς τῶν ἀγνώστων $x=6$, $y=4$, καὶ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἐν γένει, *καλοῦμεν σύστημα ἐξισώσεων τὸ σύνολον δύο* ἢ *περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αὐτῶν.*

β') *Καλοῦμεν λύσιν συστήματός τινος ἐξισώσεων τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.*

γ') Δύο (ἢ περισσότερα) συστήματα ἐξισώσεων λέγονται *ἰσοδύναμα,* ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Εἶνε φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς σύστημα ἀντικαταστήσωμεν μίαν (ἢ περισσοτέρας) τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ δι' ἰσοδυνάμων των προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον. Κατὰ ταῦτα τὸ τυχὸν σύστημα

$$A_1 = B_1, \qquad A_2 = B_2, \qquad A_3 = B_3,$$

ὅπου τὰ $A_1, B_1, \ldots$ παριστάνουν τὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεων, εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα

$$A_1 - B_1 = 0, \quad A_2 - B_2 = 0, \quad A_3 - B_3 = 0, \qquad (\S\ 61\ \gamma').$$

§ 72. Ἰδιότητες τῶν συστημάτων.—

α') ***«Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν δύο (ἢ περισσοτέρας) αὐτῶν κατὰ μέλη, καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν προστεθεισῶν διὰ τῆς προκυψάσης, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν».***

Ἔστω τὸ σύστημα

$$(1) \qquad A_1 - B_1 = 0, \qquad A_2 - B_2 = 0, \qquad A_3 - B_3 = 0.$$

Λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$(2) \quad A_1 - B_1 = 0, \quad (A_1 + A_2) - (B_1 + B_2) = 0, \quad A_3 - B_3 = 0,$$

τὸ ὁποῖον προέκυψεν ἐκ τοῦ (1), ἀφοῦ ἐπροσθέσαμεν τὰς δύο πρώτας του ἐξισώσεις κατὰ μέλη, καὶ ἀντεκαταστήσαμεν τὴν δευτέραν αὐτοῦ διὰ τῆς προκυψάσης. Διότι διὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώσνων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ (1), θὰ ἔχωμεν

τιμὴ τοῦ A_1 — τιμὴ τοῦ $B_1 = 0$,
τιμὴ τοῦ A_2 — τιμὴ τοῦ $B_2 = 0$,
τιμὴ τοῦ A_3 — τιμὴ τοῦ $B_3 = 0$.

Ἑπομένως καὶ ἡ τιμὴ τοῦ A_1 — τιμὴ τοῦ $B_1 = 0$
τιμὴ τοῦ $(A_1 + A_2)$ — τιμὴ τοῦ $(B_1 + B_2) = 0$,
τιμὴ τοῦ A_3 — τιμὴ τοῦ $B_3 = 0$.

Ἤτοι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύεται καὶ τὸ (2).

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι, διὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ (2) ἐπαληθεύεται καὶ τὸ (1).

β') ***«Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων μία αὐτῶν εἶνε λυμένη πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων, καὶ ἀντικαταστήσωμεν τοῦτον διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὰς ἄλλας (ἢ εἴς τινας μόνον), εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν».***

Έστω τὸ σύστημα (1) $\begin{cases} x = A_1\,(y, \omega, \ldots) \\ A_2\,(x, y, \omega, \ldots) = 0 \\ A_3\,(x, y, \omega, \ldots) = 0, \end{cases}$

ὅπου τὰ A_1, A_2, A_3 εἶνε μέλη τῶν ἐξισώσεων, περιέχοντα ἐν γένει τοὺς ἀγνώστους x, y, ω, . . Λέγω ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

(2) $\begin{cases} x = A_1\,(y, \omega, \ldots), \\ A_2\,(A_1, y, \omega, \ldots) = A_2' = 0, \\ A_3\,(A_1, y, \omega, \ldots) = A_3' = 0, \end{cases}$

ὅπου τὰ A_2', A_3' παριστάνουν τὰ ἐξαγόμενα τῶν A_2, A_3, ἀφοῦ ἀντεκατεστάθη τὸ x ὑπὸ τοῦ ἴσου του A_1 (y,ω,....).

Πράγματι, ἂν ἀληθεύσῃ τὸ σύστημα (1) ἢ (2), τὸ x καὶ τὸ A_1 θὰ γίνουν ἴσοι ἀριθμοὶ (μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν ἀγνώστων ὑπὸ τῶν τιμῶν των). Ἀλλὰ τότε, καὶ τὸ (2) ἢ τὸ (1) θὰ ἀληθεύσῃ διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Διότι τὸ (2) διαφέρει τοῦ (1) κατὰ τὸ ὅτι, ἀντὶ τοῦ x ἔχει τεθῇ εἰς τὴν θέσιν του τὸ A_1. Ἀλλὰ καὶ τὰ δύο ταῦτα θὰ εἶνε ἴσοι ἀριθμοὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν ἀγνώστων ὑπὸ τῶν ἐν λόγῳ τιμῶν των.

§ 73. Μέθοδοι λύσεως συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.—

Πρὸς λύσιν δοθέντος συστήματος δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους μεταχειριζόμεθα, συνήθως, τὰς ἑξῆς μεθόδους, στηριζομένας ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων.

α΄) Μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης μετασχηματίζομεν τὰς δοθείσας ἐξεισώσεις (ἢ μίαν αὐτῶν) εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου x (ἢ τοῦ y) νὰ εἶνε ἀντίθετοι. Ἀκολούθως προσθέτομεν τὰς νέας ἐξισώσεις, ὥστε νὰ προκύψῃ ἐξίσωσις μὲ ἕνα μόνον τῶν ἀγνώστων. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων. Ταύτην δ᾽ ἀντικαθιστῶντες εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν, ἔχουσαν μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον, τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν, ἐὰν λύσωμεν τὴν τελευταίαν ταύτην.

Ἔστω τὸ σύστημα $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x + 4y = 11, \end{cases} \quad \begin{array}{|r} 3 \\ -2. \end{array}$

Διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν x, πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ 3 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ —2. Οὕτω προκύπτει τὸ

ἰσοδύναμον σύστημα $\begin{cases} 6x + 9y = 24 \\ -6x - 8y = -22. \end{cases}$

Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν y=2. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἢ ἐργαζόμεθα ὁμοίως, ἀπαλείφοντες τὸν y, ἢ θέτομεν εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, π.χ. εἰς τὴν πρώτην, ἀντὶ τοῦ y τὴν τιμὴν αὐτοῦ 2, ὅτε εὑρίσκομεν

$2x + 6 = 8$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x = 1$.

Ἔστω τὸ σύστημα $\begin{cases} \dfrac{x+y}{10} + \dfrac{x+y}{2} = 0, \\ \dfrac{x+y}{5} + \dfrac{x+y}{2} = 1. \end{cases}$

Ἀπαλείφοντες τοὺς παρανομαστὰς καθεμιᾶς τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ ἐκτελοῦντες ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑρίσκομεν

τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $\begin{cases} 12x - 8y = 0, \\ 7x - 3y = 10. \end{cases} \quad \begin{array}{|r} -3 \\ 8 \end{array}$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τούτων ἐπὶ —3, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ 8, καὶ εὑρίσκομεν $-36x + 24y = 0$, $56x - 24y = 80$. Διὰ προσθέσεως τούτων εὑρίσκομεν τὴν $20x = 80$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x = 4$.

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x ἀντικαθιστῶμεν εἰς μίαν τῶν προηγουμένων καὶ λύομεν ὡς πρὸς y, ὅτε εὑρίσκομεν y=6. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ἐπαλήθευσιν, θέτομεν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα ἀντὶ τοῦ x καὶ y τὰς τιμὰς 4 καὶ 6 ἀντιστοίχως, καὶ βλέπομεν ὅτι, καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται.

6') Ἔστω τὸ γενικὸν σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma, \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1. \end{cases} \quad \begin{array}{|r} \alpha_1 \\ -\alpha \end{array}$

Πολλαπλασιάζομεν ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις ἐπὶ α_1 καὶ $-\alpha$, ὅτε οὕτω προκύπτουν

$$\alpha\alpha_1 x + \alpha_1 \beta y = \alpha_1 \gamma,$$
$$-\alpha\alpha_1 x - \alpha\beta_1 y = -\alpha\gamma_1.$$

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1)\, y = \alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1.$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $y = \frac{\alpha_1 \gamma - \alpha \gamma_1}{\alpha_1 \beta - \alpha \beta_1} = \frac{\alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma}{\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta}.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $x = \frac{\gamma \beta_1 - \gamma_1 \beta}{\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta}.$

γ΄) Διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς ἐξισώσεις δοθέντος συστήματος εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶνε ἀντίθετοι, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις ἐπὶ τὰ πηλίκα τοῦ ἐ. κ. π. τῶν συντελεστῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου διὰ καθενὸς ἐξ αὐτῶν. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$12x + 5y = 17, \quad -8x + 7y = -1,$$

τὸ ἐ. κ. π. τῶν 12 καὶ 8 εἶνε τὸ 24. Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ 24:12=2, καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 24:8=3, καὶ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{r|r} 2 & 12x + 5y = 17, \\ 3 & -8x + 7y = -1. \\ \hline & 24x + 10y = 34, \\ & -24x + 21y = -3. \end{array}$$

Διὰ προσθέσεως τούτων προκύπτει $31y = 31$,
ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $y=1$, καὶ ἀκολούθως $x=1$.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος λέγεται συνήθως *μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν, ἢ μέθοδος διὰ τῆς προσθέσεως*.

δ΄) *Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.* Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$2x + 3y = 8, \qquad 3x + 4y = 11. \qquad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως, ἀπομονοῦμεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. τὸν x, ἔστω εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων. Ἤτοι λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς x, θεωροῦντες τὸν y ὡς γνωστόν. Οὕτω λαμβάνομεν

$$x = \frac{8-3y}{2}.$$

Τὴν τιμὴν ταύτην ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθειτῶν ἐξισώσεων (1) καὶ εὑρίσκομεν $3 \cdot \frac{8-3y}{2} + 4y = 11.$

Λύομεν ταύτην ὡς πρὸς y καὶ εὑρίσκομεν $y=2$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀντικαθιστῶμεν τὸ y διὰ τοῦ

2 εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν, ἢ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ $x = \frac{8-3y}{2}$

ὅτε εὑρίσκομεν $x = \frac{8-6}{2} = 1$

ε') *Μέθοδος τῆς συγκρίσεως*. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸ σύστημα

$$2x + 3y = 8, \qquad 3x + 4y = 11.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτὸ διὰ τῆς μεθόδου τῆς **συγκρίσεως**, ἀπομονοῦμεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. τὸν x, εἰς τὴν **πρώτην καὶ** δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ἤτοι, λύομεν καθεμίαν τῶν ἐξισώσεων τούτων ὡς πρὸς τὸν x, θεωροῦντες τὸν y ὡς γνωστόν.

Οὕτω εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $x = \frac{8-3y}{2}$,

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x = \frac{11-4y}{3}$.

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ x πρέπει νὰ εἶνε ἴσαι, ἔχομεν

τὴν ἐξίσωσιν $\frac{8-3y}{2} = \frac{11-4y}{3}$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $y=2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα **παραδείγματα**, καὶ εὑρίσκομεν $x = 1$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ διὰ τῶν τριῶν μεθόδων, καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶν.

α') $4x+2y=81$, $9x+3y=5$.   β') $6x-7y-3=0$, $9x-11y=-7$.   γ') $5x-8y=1$, $3x=21-2y$.

δ') $\alpha x+\beta y=\beta^2$, $\alpha x+2y=\alpha^2$.   ε') $(\alpha-\beta)x=3(\alpha+\beta)-3$, $x+y=4$.   στ') $x+y=\alpha+\beta$, $\beta x+\alpha y=2\alpha\beta$.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου καὶ νὰ γίνῃ καὶ ἡ ἐπαλήθευσίς των.

α') $x+y=15$, $x-y=40$.   β') $x+y=\alpha^2$, $x-y=\beta^2$.   γ') $7x+14y=181$, $7x-14y=-60$.

δ') $x=9y+35$, $x=13y+42$.   ε') $1{,}7x=0{,}8y+35$, $1{,}8x=10y-14{,}5$.   στ') $y=\alpha^2 x+\beta^2$, $y=\beta^2 x+\alpha^2$.

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα

α') $8(x-5)=3(y+7)$, $9(x+6)=4(y+11)$.   β') $3(x+3y)+8(6x+y)=15$, $4(9x-y)+2x+2y=19$.

γ′) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}=6\,\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=9\,\dfrac{1}{3}$.

δ′) $\dfrac{4x-1}{2}+\dfrac{2y-5}{5}=24$, $\dfrac{5x+1}{9}-\dfrac{2-5y}{8}=15$.

ε′) $\dfrac{2x+3y+4}{3x+4y+5}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{3x+7y+5}{4x+9y+22}=\dfrac{1}{2}$.

στ′) $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=\alpha^2\beta$, $\dfrac{x}{\alpha^2}+\dfrac{y}{\beta^2}=-\beta^2$.

ζ′) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{10}{xy}$, $\dfrac{5}{3x}+\dfrac{3}{4y}=\dfrac{49}{12\,xy}$.

η′) $\dfrac{4x+7y}{5x-8y}=\dfrac{25\alpha^2-\beta^2}{15\beta^2-\alpha^2}$, $\dfrac{x+7\alpha^2}{y+8\beta^2}=\dfrac{9\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$.

§ 74 *) Διερεύνησις τοῦ συστήματος τῆς μορφῆς

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma, \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1. \end{cases}$$

α′) Ἐὰν λύσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο διά τινος τῶν ἀνωτέρω μεθόδων, εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς τιμὰς τῶν x καὶ y

$$x=\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta},\quad y=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}\qquad (2)$$

β′) Ἐὰν ὁ κοινὸς παρονομαστὴς $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)$ εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, δηλαδὴ ἂν εἶνε

$$\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0,\quad \text{ἢ}\quad \alpha\beta_1\neq\alpha_1\beta,$$

ἢ καὶ
$$\frac{\alpha}{\alpha_1}\neq\frac{\beta}{\beta_1},$$

τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἐὰν τοὺς ἀνίσους ἀριθμοὺς $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\alpha_1\beta_1$, ὑποτιθεμένου διαφόρου τοῦ μηδενός, αἱ τιμαὶ (2) τῶν x καὶ y εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι. Τότε καθὼς βλέπομεν, τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν, τὴν (2).

γ′) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, ἀλλ᾽ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων (2) διάφοροι τοῦ μηδενός, τὸ σύστημα δὲν ἐπιδέχεται καμμίαν λύσιν. Διότι, ἂν τὰς τιμὰς (2) γράψωμεν οὕτω

$$(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\,x=\gamma\beta_1-\gamma_1\beta,\qquad (\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\,y=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma,$$

θὰ ἔχωμεν
$$0=\gamma\beta_1-\gamma_1\beta,\qquad 0=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma,$$

τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων (2) εἶνε διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἀλλὰ καὶ ἐξ αὐτῶν τῶν τιμῶν (2) τῶν x καὶ y παρατηροῦμεν ὅτι, καθεμία τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας παριστάνουν τὰ κλάσματα (2) εἶνε ἀδύνατος, ἀφοῦ ὁ διαιρέτης εἶνε μηδέν, ὁ δὲ δεύτερος ποσότης ὡρισμένη καὶ διάφορος τοῦ μηδενός. (§54, γ′). Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν κλασμάτων (2) αὐξάνονται εἰς ἄπειρον, ὅταν παρονομαστὴς αὐτῶν τείνῃ νὰ γίνῃ μηδέν, διὰ τοῦτο, θὰ λέγωμεν ὅτι, ὅταν εἶνε

$$\alpha\,\beta_1 - \alpha_1\,\beta = 0, \qquad \gamma\,\beta_1 - \gamma_1\,\beta = 0, \qquad \alpha_1\,\gamma - \alpha_1\,\gamma = 0,$$

τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον, ἢ ὅτι ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἀλλ᾽ αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ὑπερβαίνομεν πάντα ἀριθμὸν ἢ εἶνε ἄπειροι.

δ′) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων (2) καὶ τοὐλάχιστον εἷς τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν εἶνε ἴσος μὲ μηδέν,
δηλαδὴ ἂν εἶνε π.χ. $\alpha\,\beta_1 - \alpha_1\,\beta = 0$, $\gamma\,\beta_1 - \gamma_1\cdot\beta = 0$,
τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος λύσεων.

Διότι ἐκ τῆς $\alpha\,\beta_1 - \alpha_1\,\beta = 0$

ἔχομεν εὐκόλως $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1}$

Ὁμοίως ἐκ τῆς $\gamma\beta_1 - \gamma_1\,\beta = 0$

λαμβάνομεν $\dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$.

Συγκρίνοντες τὰς ἀναλογίας ἔχομεν $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$.

Ἂν τοὺς ἴσους τούτους λόγους παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ, θὰ εἶνε $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1} = \rho$.

Ἄρα $\alpha = \alpha_1\,\rho, \qquad \beta = \beta_1\,\rho, \qquad \gamma = \gamma_1\,\rho$.

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν α, β, γ θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta y = \gamma$ τοῦ συστήματος (1), ὅτε προκύπτει

$$\alpha_1\,\rho\,x + \beta_1\,\rho\,y = \gamma_1\,\rho.$$

Διαιροῦντες διὰ τοῦ ρ (ὑποτιθεμένου διαφόρου τοῦ μηδενὸς) ἔχομεν $\alpha_1\,x + \beta_1\,y = \gamma_1$.

Ἀλλ᾽ αὐτὴ εἶνε ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (1).

Ὥστε τὸ σύστημα (1) περιορίζεται κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha_1\,x + \beta_1 y = \gamma_1$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, δίδομεν εἰς τὸν ἕνα τῶν δύο ἀγνώστων, ἔστω εἰς τὸν y, μίαν οἱανδήποτε τιμήν, π.χ. τὴν $y = 1$, ὅτε ἔχομεν $\alpha_1\,x + \beta_1 = \gamma_1$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x = \dfrac{\gamma_1 - \beta_1}{\alpha_1}$.

Ἐὰν εἰς τὸν y δώσωμεν ἄλλας τιμάς, π,χ. τὰς 0· 2...
θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν x τὰς τιμὰς

$$x = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \qquad \frac{\gamma_1 - 2\,\beta_1}{\alpha_1}, \ldots$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἄπειρον πλῆθος τιμῶν εἰς τὸν y, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν καὶ ἄπειρον πλῆθος ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ x. Διὰ τοῦτο, τὸ δοθὲν σύστημα κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος λύσεων, καὶ θὰ τὸ καλοῦμεν ἀόριστον.

ε′) Ἐὰν εἶνε $\alpha = \alpha_1 = \beta = \beta_1 = 0$, τὰ δὲ γ καὶ γ_1, ἢ ἕν ἐκ τούτων διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.
Διότι, τὰ μὲν πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) γίνονται μηδέν, τὰ δὲ δεύτερα, ἢ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, θὰ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Τέλος, ἐὰν εἶνε καὶ τὰ γ, γ_1 ἴσα μὲ μηδέν, αἱ ἐξισώσεις (1) εἶνε ταὐτότητες, καὶ ἐπαληθεύονται δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν x καὶ y.

στ′) Ἀνακεφαλαιοῦντες τ' ἀνωτέρω ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Λύσις τοῦ συστήματος $\left|\begin{array}{l} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1. \end{array}\right.$

1) ἂν εἶνε $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} \neq \dfrac{\beta}{\beta_1}$, *τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν, τὴν* $x = \dfrac{\gamma\beta_1 - \beta\gamma_1}{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1}$, $\quad y = \dfrac{\alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1}{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1}$.

2) ἂν εἶνε $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} \neq \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$ *τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.*

3) ἂν εἶνε $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$ *τὸ σύστημα εἶνε ἀόριστον.*

4) ἂν εἶνε $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0$, *εἶνε ἀόριστον.*

5) ἂν εἶνε $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 = 0$, *καὶ* γ *ἢ καὶ* $\gamma_1 \neq 0$, *τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.*

ζ′) Ἔστω τὸ σύστημα $\lambda x + y = 2$, $\quad x + y = 2\lambda$, ὅπου τὸ λ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε ποσότης γνωστή. Ἔχομεν $\alpha\,\beta_1 - \alpha_1\,\beta = \lambda - 1$.

Ἑπομένως, ἐὰν τὸ λ εἶνε διάφορον τῆς 1, τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν, τὴν

$$x = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda - 1} = -2, \quad y = \frac{2(\lambda^2 - 1)}{\lambda - 1} = 2(\lambda + 1).$$

Ἐὰν τὸ $\lambda = 1$ τὸ $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, καὶ τὸ σύστημα γίνεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ λ τὸ 1, $x + y = 2$, $x + y = 2$.

Ἤτοι τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην ἐξίσωσιν, καὶ εἶνε ἀόριστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ διερευνηθοῦν διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

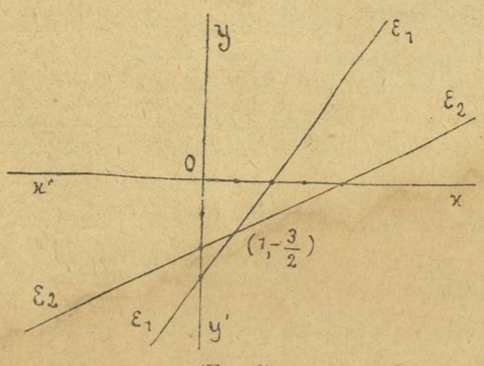
α′) $\lambda x + y = 2$, $x + y = 2\lambda$. β′) $\lambda x - 2y = \lambda$, $(\lambda - 1)x - y = 1$. γ′) $x + (3\lambda - 1)y = 0$, $x + 2y = \lambda - 4$.

δ′) $y = \lambda + x\,2$, $3y - \lambda = x + 3$. ε′) $x + y = \lambda$, $\lambda x + y = 1$. στ′) $(\lambda^2 - 1)x - y = \lambda$, $2x - y = \lambda - 1$.

§ 75.*) Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ῥιζῶν συστήματος δύο ἐξισώσεων.—

Ἔστω τὸ σύστημα $3x - 2y = 6$, $x - 2y = 4$.

Λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν $x = 1, y = -\frac{3}{2}$. Τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$



(Σχ. 6)

κεῖται ἐπὶ καθεμιᾶς τῶν εὐθειῶν E_1, E_2, τὰς ὁποίας παριστάνουν ἀντιστοίχως αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν καθεμίαν τῶν εὐθειῶν τοῦ συστήματος, καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν παριστάνει τὰς ῥίζας τοῦ συστήματος (σχ. 6).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Εὕρετε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν

α′) $4x-5y=1,\ 3x+7y=6.$ β′) $\frac{3}{4}x-9y-5=0,\ x-3y=0.$ γ′) $\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}y-\frac{1}{2}=0,\ x+9y-7=0.$

δ′) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{2},\ x-2y=0.$ ε′) $\frac{x-y}{3}-\frac{x-y}{2}+1=0,\ x-7y=0.$ στ′) $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=\frac{2}{xy},\ x+y=3.$

§ 76. Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους.—

α′) Ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους, π.χ. τὸ

$$(1)\quad \begin{cases} x+2y+3\omega=14, \\ 2x+y+\omega=7, \\ 3x+2y+2\omega=13, \end{cases}$$

δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὸ διὰ μιᾶς τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν. Οὕτω διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν, ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τῶν (1) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|r} 2 & x+2y+3\omega=14, \\ -1 & 2x+y+\omega=7. \\ \hline & 3y+5\omega=21. \end{array}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης τῶν (1) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|r} 3 & x+2y+3\omega=14, \\ -1 & 3x+2y+2\omega=13, \\ \hline & 4y+7\omega=29. \end{array}$$

Λύομεν τὸ $3y+5\omega=21,\quad 4y+7\omega=29$
καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς $\omega=3,\quad y=2.$

Ἐὰν τὰς τιμὰς τῶν ω καὶ y ἀντικαταστήσωμεν εἰς μίαν τῶν (1) εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$.

β′) Τὸ ἀνωτέρω σύστημα λύομεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως ὡς ἑξῆς. Λύομεν τὴν μίαν τῶν (1), ἔστω τὴν πρώτην ὡς πρὸς τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. ὡς πρὸς x, θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ὡς γνωστούς. Οὕτω εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x=14-2y-3\omega. \qquad (2)$$

Ταύτην θέτομεν εἰς τὰς ἄλλας τῶν (1) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους

$$2(14-2y-3\omega)+y+\omega=7,$$
$$3(14-2y-3\omega)+2y+2\omega=13,$$

ἢ μετὰ τὴν διάταξιν $3y+5\omega=21,\ 4y+7\omega=29,$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὴν τοῦ y καὶ ω. Ἀκολούθως τὰς τιμὰς τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

γ') Τὸ δοθὲν σύστημα (1) λύομεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως ὡς ἑξῆς. Ἀπομονοῦμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π.χ. τὸν x, εἰς καθεμίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων (1), θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ἀγνώστους ὡς γνωστούς.

Τὴν πρώτην τῶν οὕτω εὑρισκομένων τιμῶν τοῦ x ἐξισώνομεν μὲ τὴν δευτέραν καὶ τὴν τρίτην, καὶ λαμβάνομεν δύο ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους. Οὕτω ἔχομεν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν, καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὸ y καὶ τὸ ω διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν.

δ') Ἐν γένει, διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα μ ἐξισώσεων μὲ μ ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν, ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν καὶ ἑκάστης τῶν (μ —1) ἄλλων ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον. Οὕτω προκύπτουν (μ—1) νέαι ἐξισώσεις μὲ (μ—1) ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἐργαζόμεθα ὁμοίως, λαμβάνοντες τὰς νέας (μ—1) ἐξισώσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἑξῆς. Οὕτω προκύπτουν (μ—2) ἐξισώσεις μὲ (μ—2) ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Οὕτω προχωροῦντες, θὰ εὕρωμεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν μὲ μ ἐξισώσεις. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἡ τελευταία θὰ ἔχῃ ἕνα ἄγνωστον· ἡ προτελευταία δύο· ἡ πρὸ αὐτῆς τρεῖς· καὶ οὕτω καθεξῆς, ἡ πρώτη θὰ ἔχῃ μ ἀγνώστους. Λύοντες τὴν τελευταίαν, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου. Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν τούτου εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν και λύομεν αὐτήν, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς πρώτης.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα.

α') $3x-5y+6\omega=9,\quad 4x+7y-6\omega=13,\quad 2x+3y-4\omega=12.$

β') $9x+8y+2\omega=30,\quad 8x+3y-9\omega=36,\quad x+2y-9\omega=37.$

γ') $\frac{x}{2}+y=3,\quad \frac{y}{3}-\omega=2,\quad \frac{\omega}{4}+x=7.$

δ') $x + y + \omega = 15,$
$0{,}5\,x + 0{,}3\,y + 0{,}6\,\omega = 8{,}3,$
$0{,}8\,x + 0{,}9\,y + 0{,}6\,\omega = 2.$

ε') $9x + 8y + 8\omega = 38,$
$\frac{3}{5}x + y + 8\omega = 38,$
$x + 9y + 7\omega = 39.$

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως τὰ

α') $\alpha^3 + \alpha^2 x + \alpha y + \omega = 0,$
$\beta^3 + \beta^2 x + \beta y + \omega = 0,$
$\gamma^3 + \gamma^2 x + \gamma y + \omega = 0.$

β') $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \gamma(\alpha + \beta),$
$\frac{x}{\beta} + \frac{\omega}{\gamma} = \alpha(\beta - \gamma),$
$\frac{y}{\gamma} + \frac{\omega}{\alpha} = \beta(\alpha + \gamma).$

γ') $x + y + \omega = 0,$
$(\beta + \gamma)x + (\gamma + \alpha)y + (\alpha + \beta)\omega = 0,$
$\beta\gamma x + \alpha\gamma y + \alpha\beta\omega = 1.$

δ') $x + y + \omega = 1,$
$\alpha x + \beta y + \gamma\omega = k,$
$\alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2\omega = k^2.$

ε') $5x + 3y - 2\omega + \varphi = 9,$
$3x + 4y + 3\omega - 2\varphi = 12,$
$6x + 2y - 4\omega + 3\varphi = 10,$
$2x + 5y - \omega + 4\varphi = 25.$

στ') $6x + 2y + \omega + 7\varphi = 14,$
$9y + 6x + \omega + 3\varphi = 29,$
$8\omega + 6\varphi + y + x = 22,$
$6\varphi + \omega + y + 7x = 35.$

ζ') $\alpha x + \rho(y + \omega + \varphi) = k,$
$\beta y + \rho(\omega + x + \varphi) = \lambda,$
$\gamma\omega + \rho(\varphi + x + y) = \mu,$
$\delta\varphi + \rho(x + y + \omega) = \nu.$

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐνίοτε πρὸς λύσιν συστήματός τινος πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν μεθόδων μεταχειριζόμεθα τεχνάσματά τινα, στηριζόμενα ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ ἰδιοτήτων. Τὸ εἶδος τούτων δὲν εἶνε ὡρισμένον καὶ φανερὸν διὰ καθὲν σύστημα, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συνηθείας καὶ τῆς δεξιότητος τοῦ νοῦ περὶ τὴν λύσιν. Οὕτω π.χ. πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος

$$(1)\quad \begin{cases} x + 6y + 7\omega = 30, \\ x : y : \omega = 6 : 8 : 3, \end{cases}$$

γράφομεν τὴν δευτέραν ὡς ἑξῆς $\quad \frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{\omega}{3}.$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων θὰ εἶνε (καὶ ἕνεκα τῆς πρώτης ἐξισώσεως)

$$\frac{x}{6} = \frac{6y}{48} = \frac{7\omega}{21} = \frac{x + 6y + 7\omega}{75} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}.$$

Ἐπομένως $\quad x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5},\ y = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5},\ \omega = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$

2) Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰ κάτωθι συστήματα

α') $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}\omega = 9,$
$x : y = 7 : 4, \qquad y : \omega = 8 : 17.$

β') $x + y + \omega = \rho,$
$x : y = \alpha : \beta,$
$x : \omega = \gamma : \delta.$

γ') $x + y = 5,$
$y + \omega = 8,$
$\omega + \varphi = 9,$
$\varphi + x = 9.$

δ') $x + y + \omega = \alpha,$
$x + y + \varphi = \beta,$
$x + \omega + \varphi = \gamma,$
$y + \omega + \varphi = \delta.$

ι′) $\mu x = \nu y = \rho \omega$,

$\alpha x + \beta y + \gamma \omega = \delta$.

στ′) $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\varphi}{\delta}$,

$\alpha x + \beta y + \gamma \omega = \frac{\alpha}{\beta}$.

ζ′) $\frac{1}{3x-2y+1} + \frac{1}{x+2y-3} = \frac{5}{12}$,

$\frac{1}{x+2y-3} - \frac{1}{3x-2y+1} = \frac{1}{12}$.

$\left(\begin{array}{l}\text{Θέσατε} \\ x + 2y - 3 = \omega, \\ 3x - 2y + 1 = \varphi.\end{array}\right)$

η′) $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \mu$,

$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \nu$.

θ′) $4\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 12$,

$16x - 25y = 84$.

ι′) $\frac{xy}{x+y} = \frac{12}{7}$,

$\frac{y\omega}{y+\omega} = \frac{19}{5}$,

$\frac{x\omega}{x+\omega} = \frac{39}{25}$.

ια′) $\frac{xy}{\alpha x + \beta y} = \gamma$,

$\frac{x\omega}{\alpha\omega + \gamma x} = \beta$,

$\frac{y\omega}{\beta\omega + \gamma y} = \alpha$.

ιβ′) $xy\omega = \alpha(y\omega - \omega x - xy) = \beta(\omega x - xy - y\omega) = \gamma(xy - y\omega - \omega x)$.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἐξηγήσατε τὴν διερεύνησιν τοῦ συστήματος $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1$, γραφικῶς· ἤτοι α′) τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἄπειρον πλῆθος λύσεων ἢ ὅτι εἶνε ἀδύνατον;

2) Τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους **x** καὶ **y** ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν;

§ 77. Ἁπλᾶ προβλήματα συστημάτων.—

Πρόβλημα 1ον). «***Ἐὰν ὁ Α δώσῃ 10 δρ. εἰς τὸν Β, θὰ ἔχῃ οὗτος τριπλασία τοῦ Α. Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20 δρ. εἰς τὸν Α, θὰ ἔχῃ ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσας δραχμὰς εἶχε καθεὶς;***»

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὰς δραχμὰς τοῦ Α, καὶ διὰ **τοῦ** y τὰς τοῦ Β, δώσῃ δὲ 10 δρχ, ὁ Α εἰς τὸν Β, τὰ μὲν χρήματα τὰ ὁποῖα θὰ μείνουν εἰς τὸν Α θὰ παριστάνωνται διὰ τοῦ $(x - 10)$ τὰ δὲ τοῦ Β διὰ τοῦ $(y + 10)$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν

$$3(x - 10) = y + 10.$$

Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20 δρ. εἰς τὸν Α, θὰ εἶνε $x + 20 = 2(y - 20)$.

Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα
$$y + 10 = 3(x - 10),$$
$$2(y - 20) = x + 20,$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ὅτι $y = 28$ δρ., $x = 44$ δρ.

Πρόβλημα 2ον.) «*Ἐὰν κλάσματός τινος διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, ὁ δὲ παρανομαστὴς ἐλαττωθῇ κατὰ 1, γίνεται ἴσον μὲ* $\frac{1}{2}$. *Ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής, αὐξηθῇ δ' ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ κατὰ 1, γίνεται ἴσον μὲ* $\frac{1}{7}$. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα*».

Ἔστω x ὁ ἀριθμητὴς καὶ y ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος. Ἀφ' ἑνὸς μὲν θὰ ἔχωμεν συμφώνως μὲ τὴν ἐκφώνησιν

$$\frac{2x}{y-1}=\frac{1}{2}, \text{ ἐξ ἄλλου δὲ } \frac{x+1}{2y}=\frac{1}{7},$$

ἤτοι τὸ σύστημα $$\frac{2x}{y-1}=\frac{1}{2}, \quad \frac{x+1}{2y}=\frac{1}{7}.$$

Λύοντες τοῦτο, εὑρίσκομεν $x=5$ καὶ $y=21$.

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶνε τὸ $\frac{5}{21}$.

Πρόβλημα 3ον.) «*Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ θ' ἀπέχουν τὸ ἓν τοῦ ἄλλου 12 μ. μέν, ἐὰν κινηθοῦν ἐπὶ 12'' πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, 204 μ. δέ, ἐὰν πρὸς ἀντιθέτους. Πόση εἶνε ἡ ταχύτης καθενὸς (κινουμένου ὁμαλῶς)*;»

Ἔστω x ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου καὶ y ἡ τοῦ δευτέρου. Μετὰ 12'' τὸ πρῶτον θὰ διατρέξῃ 12x καὶ τὸ δεύτερον 12y μέτρα, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶνε τότε $(12x - 12y)$ μ., ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ $(12x + 12y)$ μ. ἐὰν ἀντίθετον. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ ἑξῆς σύστημα

$$12x-12y=12, \qquad 12x+12y=204,$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = 9$ μ. καὶ $y = 8$ μ.

Πρόβλημα 4ον). «*Ἐὰν εἰς τὸ διπλάσιον ἀριθμοῦ προστεθῇ τὸ τετραπλάσιον ἄλλου, προκύπτει ἄθροισμα 22. Ἐὰν εἰς τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου προστεθῇ τὸ πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου, προκύπτει 29. Ποῖοι εἶνε οἱ δύο ἀριθμοί*;»

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν πρῶτον καὶ διὰ τοῦ y τὸν δεύτερον ἀριθμόν, τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου θὰ εἶνε 2x, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ δευτέρου 4y. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν

$$2x+4y=22.$$

Ἐξ ἄλλου τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου $3x$ καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου $5y$ ἔχουν ἄθροισμα 29. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα

$$2x + 4y = 22, \qquad 3x + 5y = 29,$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = 3$, $y = 4$.

Πρόβλημα 5ον). «***Παιδίον λέγει εἰς ἄλλο· ἐὰν μοῦ δώσῃς τὸ ἥμισυ τῶν μήλων σου, θὰ ἔχω 40 μῆλα. Τὸ ἄλλο ἀπαντᾷ· δός μου τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν ἰδικῶν σου διὰ νὰ ἔχω 35. Πόσα εἶχε τὸ καθέν***;».

Ἐὰν διὰ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τοῦ πρώτου καὶ διὰ y τοῦ δευτέρου, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$x + \frac{y}{2} = 40, \quad y + \frac{x}{2} = 35.$$

Λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $x = 30$ καὶ $y = 20$ μῆλα.

Πρόβλημα 6ον). «***Ἔχει τις δύο εἴδη οἴνου· τῆς μὲν πρώτης ποιότητος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται α δρ., τῆς δὲ δευτέρας β δρ.· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ καθὲν εἶδος, ὥστε νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα μ ὀκάδων καὶ νὰ τιμᾶται ἡ ὀκᾶ γ δρ***· ;»

Ἔστω ὅτι θὰ θέσῃ x ὀκ. ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ y ἐκ τῆς δευτέρας. Θὰ ἔχωμεν προφανως $x + y = \mu$, $\alpha x + \beta y = \gamma\mu$,

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $x = \mu\,\frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}$, $y = \mu\,\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$.

Ἵνα ὑπάρχῃ μία λύσις τοῦ συστήματος, πρέπει νὰ εἶνε $\beta - \alpha \neq 0$, ἢ $\beta \neq \alpha$. Καὶ ἄν εἶνε $\beta > \alpha$, πρέπει καὶ $\beta \geq \gamma$, $\gamma \geq \alpha$, ὥστε αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ y νὰ εἶνε θετικαί, ἢ μηδέν. Ἂν εἶνε $\beta < \alpha$, πρέπει καὶ $\beta \leq \gamma$, $\gamma \leq \alpha$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἂν εἶνε $\beta = \alpha$, τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον, ἐκτὸς ἂν εἶνε καὶ $\beta = \gamma$, ὅτε καταντᾷ ἀόριστον. Ἐν γένει, διὰ νὰ ἐπιδέχεται λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εἶνε $\beta > \gamma > \alpha$, ἢ $\beta < \gamma < \alpha$, δηλαδὴ τὸ γ πρέπει νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν α καὶ β.

Πρόβλημα 7ον). «***Τριψηφίου ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 21· τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων αὐτοῦ εἶνε διπλάσιον τοῦ μεσαίου· ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, ὁ ἀριθμὸς ἐλαττώνεται κατὰ 90. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός***».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ y τῶν δεκάδων καὶ διὰ τοῦ ω τὸ τῶν μονάδων, ὁ ἀριθμὸς παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $100x + 10y + \omega$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$x + y + \omega = 21, \qquad x + \omega = 2y,$$
$$100y + 10x + \omega = 100x + 10y + \omega - 90,$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ὅτι

$$x = 8, \quad y = 7, \quad \omega = 6.$$

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 876.

Πρόβλημα 8ον). «***Ὁ Α καὶ Β μαζὺ ἐργαζόμενοι, τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 5 ἡμ., ὁ Α καὶ Γ εἰς 6 ἡμ., ὁ δὲ Β καὶ Γ εἰς 5, 5 ἡμ., (τὸ αὐτὸ ἔργον). Εἰς πόσας ἡμέρας καθεὶς μόνος τῶν Α, Β, Γ, δύναται νὰ τὸ ἐκτελέσῃ ;***»

Ἔστω ὅτι εἰς x, y, ω ἡμέρας δύναται ἀντιστοίχως ὁ Α, Β, Γ νὰ ἐκτελέσῃ μόνος τὸ ἔργον. Ὁ Α εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ $\frac{1}{x}$ μέρος τοῦ ἔργου, ὁ Β τὸ $\frac{1}{y}$, καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{\omega}$. Ἄρα ὁ Α καὶ Β εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ τοῦ ἔργου. Ἀλλ' αὐτὸ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{1}{5}$. Διότι ἀφοῦ οἱ δύο εἰς 5 ἡμ. ἐκτελοῦν τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε ἔχομεν ὅτι

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον σκεπτόμενοι ἔχομεν τὸ σύστημα

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{2}{11}, \quad \left(\dfrac{1}{5.5} = \dfrac{10}{55} = \dfrac{2}{11}\right). \end{cases}$$

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη καὶ διαιροῦντες διὰ 2, ἔχομεν

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} = \frac{181}{660}.$$

Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτῆς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τῶν (1), εὑρίσκομεν $\frac{1}{\omega} = \frac{49}{660}$. Ἄρα $\omega = \frac{660}{49} = 13\frac{23}{49}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{y} = \frac{71}{660}, \quad y = 9\frac{21}{71}, \quad \frac{1}{x} = \frac{61}{660}, \quad x = 10\frac{50}{61}.$$

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) 2 (3) ὀκ. ζαχάρεως καὶ 3 (4) ὀκ. καφὲ ἐκόστιζον 9,12 (14,94) δρ.· 3 (4) ὀκ. ζαχάρεως καὶ 2 (5) ὀκ. καφὲ τῶν αὐτῶν ποιοτήτων ἐκόστιζον 7,68 (18,92)δρ. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ καθενός; 0,96·2,4. (0,98·3).

2) Ἔχει τις κεφάλαιον 5400 (8100) δρ. καὶ ἄλλο 6500 (3600) δρ., λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 384 (462) δρ. καὶ ἐκ τῶν δύο. Ἐὰν τὸ πρῶτον ἐτοκίζετο πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου, καὶ τοὐναντίον, θὰ ἐλάμβανε 5 $\frac{1}{2}$ (24) δρ. περισσοτέρας (ὀλιγωτέρας) ὡς τόκον ἢ πρίν. Τίνα τὰ ἐπιτόκια; 3,5·3· (4·3,5).

3) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον (ἡ διαφορά), καὶ τὸ πηλίκον (γινόμενον) νὰ εἶνε ἴσα (ὡς 5:3:16). 0,5·—1 (16·4).

4) Ποσὸν 8100 (8600) δρ. νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια τοῦ α' καὶ β' νὰ εἶνε ὡς 2: 3 (2: 3), τοῦ δὲ β' καὶ γ' ὡς 3: 4 (5:6). Ποῖα τὰ μερίδια; 1800· 2700 3600. (2000· 3000· 3600).

5) Ἀγοράζει τις δύο εἴδη ὑφάσματος, ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 5 (8) μ. ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 6 (10) μ. ἀντὶ 122 (132) δρ. Ἐπειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνήλλαξε τὰ δύο εἴδη, ἐζημιώθη (ἐκέρδισεν) ὁ ἀγοραστὴς 2 (6) δρ. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον καθενὸς εἴδους; 10·12(9 6).

6) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶνε 10 (13). Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλυτέρου διὰ τοῦ μικροτέρου εἶνε 2 (3), τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3 (1). Τίνες οἱ ἀριθμοί 17·7 (19·6).

7) Δύο δυνάμεις, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁμορρόπως μέν, ἔχουν συνισταμένην 16 (23) χρ., ἀντιρρόπως δὲ 2 (7) χρ. Πόση εἶνε ἡ ἔντασις καθεμιᾶς τούτων; 9· 7.(15·8)

8) Ἐὰν εἰς τοὺς ὅρους κλάσματός τινος προστεθῇ 1 (2), προκύπτει $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$· ἐὰν ἀφαιρεθῇ 1 (2) προκύπτει $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)$· Ποῖον εἶνε τὸ κλάσμα; $\frac{3}{7}\left(\frac{3}{8}\right)$·

9) Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β· δός μου 10 (20) ἐκ τῶν μήλων σου καὶ θὰ ἔχω $1\frac{1}{2}$ $\left(1\frac{1}{2}\right)$ τῶν ἰδικῶν σου. Ὁ Β ἀπαντᾷ, δός μου 10 (20) ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια τῶν ἰδικῶν σου Πόσα εἶχε καθείς; 20·30. (40·60),

Ὁμὰς δευτέρα (κινήσεως). 1) Ἐκ δύο σημείων, ἀπεχόντων δ (1500) μ. ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητά, ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως κινούμενα. Ὅταν συνηντήθησαν τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει α (300) μ. περισσότερα τοῦ ἄλλου. Τίς ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων των; Διερεύνησις (30:20).

2) Ἀπὸ δύο τόπων ἀπεχόντων $δ_1$ (1500) μ. ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ συναντῶνται μετὰ t_1(10). Ἐὰν ηὐξάνετο ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου κατὰ λ (20)$^0/_0$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου ἠλαττώνετο κατὰ $λ_1$ (20)$^0/_0$, θὰ συνηντῶντο μετὰ t'_2(12'). Τίνες εἶνε αἱ ταχύτητες αὐτῶν; Διερεύνησις (12, 5· 437,5).

3) Ἀπὸ τῶν ἄκρων τόξου κύκλου α^0 (45^0) κινοῦνται ἐπ' αὐτοῦ δύο κινητὰ ἀντιθέτως, καὶ συναντῶνται μετὰ τ_1'' ($3''$). Ἐὰν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, συναντῶνται μετα τ_2'' ($5''$). Πόσων μοιρῶν τόξον διανύει καθὲν κινητὸν εἰς $1''$;

Διερεύνησις (12· 3).

Ὁμὰς τρίτη (γεωμετρικά). 1) Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶνε α (8) μ., β (10) μ., γ (12) μ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὁμοίου αὐτοῦ τριγώνου, ἔχοντος περίμετρον τ (60) μ. ; 16· 20· 24

2) Τρεῖς κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς. Πόσαι εἶνε αἱ ἀκτῖνές των, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων των εἶνε α (4), β (5), γ (8); (3,5·0,5· 4,5).

3) Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου εἶνε ὡς μ:ν (3:4). Ἂν ἡ βάσις του αὐξηθῇ κατὰ α (2), τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ κατὰ β (5), τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνεται κατὰ γ (30). Τίνες αἱ διαστάσεις αὐτοῦ ; $\left(2\frac{14}{23},\ 3\frac{11}{23}\right)$.

4) Δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς (ἐσωτερικῶς) ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶνε 0,30 (4) μ. Πόσαι εἶνε αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, ἐὰν ἔχουν λόγον 2:3 (5:4);

0,12· 0,18· (20·16).

5) Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ βάσις τριγώνου κατὰ 1 (2) μ. καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ κατὰ 2 (2) μ. ἐλαττοῦται (αὐξάνεται) τὸ ἐμβαδὸν του κατὰ 7 (2) μ^2. Ἐὰν ἐλαττωθῇ ἡ βάσις του κατὰ 2 (3) μ., καὶ αὐξηθῇ τὸ ὕψος του κατὰ 3 (2) μ., τὸ ἐμβαδόν του ἐλαττοῦται (ἐλαττοῦται) κατὰ 10 (15) μ^2. Πόση εἶνε ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του ;

38· 64. (12·16).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$ τοῦ τῶν μονάδων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 (15) μεγαλύτερός του. 46 (ἀδύνατον).

2) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, περιεχόμενος μεταξὺ 400 (200) καὶ 500 (300), ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νὰ εἶνε 9 (8). Ἂν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος μὲ $\frac{36}{47}\left(\frac{2}{3}\right)$ τοῦ α'. 423 (ἀδύνατο

3) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶνε $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\right)$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 198 (200) μεγαλύτερος αὐτοῦ 345(ἀδύνατον).

4) Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸν 4 (5), τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶνε 604 (392). Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, εὑρίσκομεν πηλίκον 9 (9) καὶ ὑπόλοιπον 34 (32). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός. 57 (36).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Περὶ ἀνισοτήτων.

§ 78. Ὁρισμοί.—

α') Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοί, π. χ. οἱ 9 καὶ 15, εἶνε ἄνισοι, σημειώνομεν τὴν σχέσιν των αὐτὴν διὰ τοῦ $9<15$. Ὁμοίως, ἄν δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἢ μεγέθη π. χ. α καὶ β εἶνε ἄνισα, καὶ τὸ α εἶνε μεγαλύτερον τοῦ β, σημειώνομε διὰ τοῦ

$$\beta<\alpha, \text{ ἢ } \alpha>\beta.$$

«*Ἡ σχέσις αὕτη καλεῖται ἀνισότης μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἐννοοῦμεν δὲ δι' αὐτῆς, ὅτι ἡ διαφορὰ α—β εἶνε ἀριθμὸς θετικός*».

β') Αἱ ποσότητες α καὶ β λέγονται ὅροι τῶν δύο μελῶν ἢ ἁπλῶς *μέλη τῆς ἀνισότητος*.

γ') Δύο ἀνισότητες τῆς μορφῆς $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, ἢ τῆς μορφῆς $\alpha<\beta$ καὶ $\gamma<\delta$ λέγονται *ὁμοιόστροφοι*, ἐνῶ αἱ $\alpha<\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ *ἑτερόστροφοι*.

δ') Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ προσθέσωμεν, ἀφαιρέσωμεν κλπ. δύο (ἢ περισσοτέρας) ἀνισότητας, θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ προσθέσωμεν, ἀφαιρέσωμεν κλπ. τὰ ἀντίστοιχα πρῶτα καὶ δεύτερα μέλη ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων.

§ 79. Ἰδιότητες ἀνισοτήτων.—

α') «*Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μηδενός πᾶς δ' ἀρνητικός εἶνε μικρότερος τοῦ μηδενός*».

Διότι, ἂν ὁ α εἶνε θετικός, θὰ ἔχωμεν $\alpha - 0 = \alpha =$ θετικός. Ἄρα εἶνε $\alpha>0$.

Ἐνῶ διὰ τὸν ἀρνητικὸν $-\alpha$ θὰ ἔχωμεν,

$$0-(-\alpha)=\alpha= \text{θετικός.} \qquad \text{Ἄρα εἶνε} \quad 0>-\alpha.$$

β') «*Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος αὐξήσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἢ πολλαπλασιάσωμεν (ἢ καὶ διαιρέσωμεν) μὲ τὸν αὐτὸν θετικὸν ἀριθμόν, προκύπτει ἀνισότης ὁμοιόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν*».

Διότι ἔστω ὅτι εἶνε $\alpha>\beta$, ὅτε θὰ εἶνε καὶ $\alpha=\beta+x$, ὅπου x παριστάνει θετικὸν ἀριθμόν, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν μικρότερον β, δίδει ἄθροισμα τὸν α. Ἐὰν τὸ μ παριστάνῃ ἕνα ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστὸν (§ 60, α′)

$$\alpha \pm \mu = \beta + x \pm \mu, \qquad \text{ἄρα} \qquad \alpha \pm \mu > \beta \pm \mu.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκ τῆς $\alpha = \beta + x$, ἔχομεν $\alpha\mu = \beta\mu + x\mu$. Ἐπομένως $\alpha\mu > \beta\mu$, ἐὰν τὸ μ, ἄρα καὶ τὸ μ x εἶνε θετικοί. Ὁμοίως ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος ἔχομεν $\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\beta}{\mu} + \frac{x}{\mu}$, καὶ $\frac{\alpha}{\mu} > \frac{\beta}{\mu}$, ἐὰν μ, ὅτε καὶ $\frac{x}{\mu}$, εἶνε θετικός.

γ′) «***Ἂν προσθέσωμεν δύο ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας (ἢ πολλαπλασιάσωμεν ἂν τὰ μέλη των εἶνε θετικά), προκύπτει ἀνισότης ὁμοιόστροφος προς τὴν δοθεῖσαν***».

Διότι ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, καὶ $\alpha = \beta + x$, $\gamma = \delta + y$, ὅπου x καὶ y παριστάνουν ἀριθμοὺς θετικούς. Ἔχομεν ὡς γνωστὸν (διὰ προσθέσεως τῶν ἰσοτήτων κατα μέλη)

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta + x + y, \qquad \text{ἄρα εἶνε καὶ} \qquad \alpha + \gamma > \beta + \delta.$$

Ἐπίσης ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha = \beta + x$, $\gamma = \delta + y$, ἔπεται (διὰ πολλαπλασιαστοῦ κατὰ μέλη), ὅτι

$$\alpha\gamma = \beta\delta + \beta y + \delta x + xy, \qquad \text{ἄρα εἶνε} \qquad \alpha\gamma > \beta\delta,$$

ὑποτιθεμένου ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ εἶνε θετικοί.

δ′) «***Ἂν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ —1, προκύπτει ἀνισότης ἑτερόστροφος***».

Διότι ἔστω $\alpha > \beta$, καὶ $\alpha = \beta + x$.

Θὰ ἔχωμεν $\alpha(-1) = \beta(-1) + x(-1)$,

ἐξ οὗ ἔπεται καὶ $-\beta = -\alpha + x$, ἄρα $-\alpha < -\beta$.

ε′) Ἄλλαι ἰδιότητες ἀφορῶσαι τὴν ἀφαίρεσιν ἢ διαίρεσιν ἑτεροστρόφων ἀνισοτήτων δύνανται να ἐξαχθοῦν εὐκόλως ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἐπειδὴ καθεμία ἀφαίρεσις ἢ διαίρεσις δύναται να μετατραπῇ εἰς πρόσθεσιν ἢ πολλαπλασιασμὸν ἀντιστοίχως.

Οὕτω, ἐκ τῆς $\alpha > \beta$, καὶ τῆς $\gamma < \delta$ ἔπεται $\alpha - \gamma > \beta - \delta$.

Διότι, ἐκ τῆς $\gamma < \delta$ ἔπεται ἡ $-\gamma > -\delta$,

Ἐκ δὲ τῶν $\alpha > \beta$, $-\gamma > -\delta$, ἔχομεν $\alpha - \gamma > \beta - \delta$

Ὁμοίως ἐκ τῆς $\alpha > \beta$, καὶ $\gamma < \delta$ ἕπεται ἡ $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$, ἐὰν τὰ μέλη τῶν δοθεισῶν εἶνε θετικά. Διότι ἐκ τῆς $\gamma < \delta$ ἕπεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{\gamma}{\gamma\delta}$, ἡ $\frac{1}{\gamma} > \frac{1}{\delta}$. Ἐκ τῶν $\frac{1}{\gamma} > \frac{1}{\delta}$, $\alpha > \beta$ ἔχομεν $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$.

στ´) Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων εὑρίσκομεν ὅτι, ***«ἄν εἴς τινα ἀνισότητα μεταφέρωμεν καθὲν μέλος αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο μὲ ἀντίθετον σημεῖον αὐτοῦ, προκύπτει ἀνισότης ὁμοιόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν»***.

ζ) ***«Δοθείσης ἀνισότητός τινος, ἐχούσης παρονομαστάς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλην ὁμοιόστροφον, ἀπηλλαγμένην παρονομαστῶν»***.

§ 80. Λύσις ἀνισότητος πρώτου βαθμοῦ.—

α´) Καλοῦμεν *ἀνισότητα πρώτου βαθμοῦ* τὴν ἔχουσαν ἕνα ἄγνωστον εἰς πρῶτον βαθμόν.

β´) Λύσις *ἀνισότητος* πρώτου βαθμοῦ λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου, αἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα.

γ´) Διὰ τὴν λύσιν ἀνισότητος πρώτου βαθμοῦ ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὴν λύσιν ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ, ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψιν τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας τῶν ἀνισοτήτων.

Π.χ. δια τὴν ἀνισότητα $(2x + 3) - (x + 1) > 5$,

ἔχομεν $2x + 3 - x - 1 > 5$.

Ἐκ ταύτης μετὰ τὴν μεταφορὰν τῶν 3 καὶ -1 εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγήν, ἔχομεν $x > 3$. Δηλαδὴ πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε μεγαλύτεροι τοῦ 3, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

δ´) Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὰς ἀνισότητας $x + 3 < 4$, $x - 5 > -8$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $x < 1$.

Ὥστε τὴν πρώτην ἐπαναληθεύουν οἱ ἀκέραιοι -1· -2· -3,...

Ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $x > -3$.

Ἤτοι τὴν δευτέραν **ἐπαληθεύουν** οἱ ἀριθμοὶ $-2 \cdot -1 \cdot +1 \cdot +2, ..$

Ἐκ τῆς **συγκρίσεως τῶν λύσεων** συνάγομεν ὅτι οἱ $-1, -2$ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς **δύο δοθείσας ἀνισότητας**.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. **Νὰ εὑρεθοῦν οἱ** ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὰς κάτωθι ἀνισότητας.

α') $7x+5>0,\quad \frac{1}{2}x+6<0.$

β') $-3x>\frac{5}{3},\quad 9x-28>0.$

γ') $-4x-9>0,\quad 9x-13>0\cdot$

δ') $9x+7>0,\quad 9x-13>0\cdot$

ε') $-7x-48>0,\quad -9x+32>0\cdot$

στ') $0{,}6x-5>0{,}25(x-1),\quad 0{,}5x-1<0{,}7x-3.$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) **Ἐὰν ἀπὸ ἰσότητα ἀφαιρέσωμεν** ἀνισότητα, λαμβάνομεν ἀνισότητα ἑτερόστροφον τῆς δοθείσης.

2) Ἐὰν ἀνισότητα **πολλαπλασιάσωμεν** μὲ ἑτερόστροφόν της, ἔχουσαν μέλη ἀρνητικά, προκύπτει ἀνισότης· **ἑτερόστροφος** τῆς **πρώτης**.

3) Ἐὰν ἰσότητα **διαιρέσωμεν μὲ ἀνισότητα**, ἔχουσαν μέλη θετικὰ (ἢ ἀρνητικὰ), προκύπτει ἀνισότης ἑτερόστροφος **(ὁμοιόστροφος)**.

Ὁμὰς τρίτη. 1) **Ἐὰν ἐκ δύο ἀριθμῶν** ὁ α' εἶνε μεγαλύτερος τοῦ β', τὸ ἄθροισμά των εἶνε μεγαλύτερον **τοῦ διπλασίου τοῦ β'**, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ α'.

2) Ἐὰν ἐκ τῶν **τριῶν ἀριθμῶν καθεὶς** εἶνε μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, καὶ οἱ τρεῖς εἶνε **θετικοί**.

3) Ἐὰν ἐκ τριῶν **ἀριθμῶν καθεὶς** εἶνε **μικρότερος** τοῦ **ἀθροίσματος** τῶν δύο ἄλλων, καθεὶς ἐξ αὐτῶν εἶνε **μεγαλύτερος τῆς διαφορᾶς** τῶν δύο ἄλλων.

4) Ἐὰν εἶνε $\alpha>\beta$, **θὰ εἶνε καὶ** $\alpha^2>\alpha\beta$, ἂν τὸ α εἶνε θετικός, καὶ $\alpha^2<\alpha\beta$, ἂν τὸ α εἶνε ἀρνητικός.

5) Ἐὰν εἶνε $\alpha>1$, **θὰ εἶνε καὶ** $\alpha^\mu>1$, ἐὰν μ εἶνε θετικὸς ἀριθμός. Ἂν δ' εἶνε $\alpha<1$ θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu<1$.

Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικούς.

§ 81. Ὁρισμὸς καὶ ἰδιότητες.—

α') Γνωρίζομεν ὅτι εἶνε

$\alpha^4 = \alpha.\alpha.\alpha.\alpha,\quad \alpha^3 = \alpha.\alpha.\alpha,\quad \alpha^2 = \alpha.\alpha$

$\alpha^1 = \alpha^2 : \alpha = \alpha,\quad \alpha^0 = \alpha : \alpha = 1.$ $= \alpha^0 : \alpha^1 = \alpha^{0-1} = \alpha^{-1}$

Διὰ ταῦτα θὰ **λέγωμεν ὅτι τὸ** α^{-1} ἰσοῦται μὲ $1 : \alpha = \frac{1}{\alpha}$

$$\alpha^{-2} = \mu\grave{\varepsilon}\ \frac{1}{\alpha} : \alpha = \frac{1}{\alpha^2},\quad \alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^2} : \alpha = \frac{1}{\alpha^3},\quad \alpha^{-4} = \frac{1}{\alpha^4}$$

καὶ γενικῶς, $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$. $\alpha^{-\nu} = \alpha^0 : \alpha^\nu = \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

Ἤτοι «***δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν παριστάνει τὴν ἀντίστροφον τιμὴν τῆς δυνάμεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον ἐκθέτην τοῦ δοθέντος***».

β′) Αἱ ἰδιότητες, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν διὰ τὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμοὺς ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶνε ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἀκέραιοι. Οὕτω π.χ. ἔχομεν ὅτι

$$\alpha^{-3}.\ \alpha^{-5} = \frac{1}{\alpha^3}.\ \frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^8} = \alpha^{-8} = \alpha^{-3-5}.$$

$$\alpha^{-\mu} : \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\mu} : \frac{1}{\alpha^\nu} = \frac{1}{\alpha^\mu}.\ \alpha^\nu = \alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu} = \alpha^{-\mu-(-\nu)}$$

$$(\alpha\,\beta)^{-\nu} = \frac{1}{(\alpha\beta)^\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu\,\beta^\nu} = \alpha^{-\nu}.\ \beta^{-\nu}$$

γ′) Ἐὰν εἶνε $\alpha > \beta$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu > \beta^\mu$, ἂν οἱ α καὶ β εἶνε θετικοὶ ἀριθμοὶ τὸ δὲ μ καὶ ἀκέραιος.

Διότι, θὰ εἶνε $\alpha^2 > \beta^2$ (§ 79, β′). Ὁμοίως $\alpha^3 > \beta^3$, καὶ γενικῶς $\alpha^\mu > \beta^\mu$.

δ′) Ἐὰν εἶνε $\alpha > \beta$, θὰ εἶνε $\alpha^{-\mu} < \beta^{-\mu}$ ἂν α καὶ β εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ μ καὶ ἀκέραιος.

Διότι τότε θὰ εἶνε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ ἢ $\alpha^{-1} < \beta^{-1}$.

Ὁμοίως $\alpha^{-2} < \beta^{-2}, \ldots, \alpha^{-\mu} < \beta^{-\mu}$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν διὰ $x = 1, -2, -3$, αἱ τιμαὶ τῶν

α′) $5^{x-1} + 7^x + 3^{x-1}$. β′) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$.

2) Ὁμοίως τῶν α′) 2^{-1}, β′) 4^{-2}, γ′) $2^5.\ 2.2^0.\ 2^{-2}$.

δ′) $\left((\alpha^{\nu+1})\right)^0$. ε′) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$. στ′) $\frac{1}{(0,1)^{-3}}$

3) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις καὶ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενά των χωρὶς ἀρνητικοὺς ἐκθέτας,

α′) $\alpha^{-3}.\ \alpha^{-4}.\ \alpha^{0}.\ \alpha^{5}$.   β′) $2^{3}\ 2^{0}.\ 2^{1},\ 2^{-3}$.   γ′) $7^{8}:7^{-9}$.   δ′) $(2\alpha\beta)^{-3}$.
ε′) $5^{3} : 5^{-4}$,   στ′) $x^{\nu}.\ x^{-2\nu} : x^{-\nu}$.   ζ′) $(3\alpha^{-3}\beta^{2}\gamma^{-4})^{-2}$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶνε ἀριθμοὶ θετικοί, καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, προκύπτει ἀνισότης ἑτερόστροφος.

2) Ἐὰν εἶνε $\alpha > 1$ $(\alpha < 1)$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^{\mu} < 1$ $(\alpha^{\mu} > 1)$, ἐὰν τὸ μ εἶνε ἀριθμὸς ἀρνητικός, τὸ δὲ α θετικός.

3) Ἐὰν εἶνε $\alpha > 1$, θὰ εἶνε, $\alpha^{-3} < \alpha^{-2} < \alpha^{-1} < \alpha^{0} < \alpha^{1} < \alpha^{2} < \ldots$

4) Ἐὰν τὸ α εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς 1, θὰ εἶνε καὶ

$$\alpha^{-3} > \alpha^{-2} > \alpha^{-1} > \alpha^{0} > \alpha^{1} > \alpha^{2} > \alpha^{3} > \ldots$$

Περὶ ἐκθετικῶν ἐξισώσεων.

§ 82. Ὁρισμοί.—

α′) Καλοῦμεν *ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν* τὴν ἐξίσωσιν ἐν ᾗ ὁ ἄγνωστος εἶνε ἐκθέτης δυνάμεως, ἐχούσης βάσιν ἀριθμόν τινα ἢ παράστασιν γνωστήν. Π.χ. αἱ ἐξισώσεις

$$5^{x^2-x+2} = 1, \qquad \alpha^{2x+3} = \alpha^{2},$$

εἶνε ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις

Αἱ μέχρι τοῦδε γνωσταὶ ἐξισώσεις λέγονται *ἀλγεβρικαί,* πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν ἐκθετικῶν.

β′) Ἐκθετική τις ἐξίσωσις λέγεται *πρώτου βαθμοῦ*, ἂν ὁ (ἐν τῷ ἐκθέτῃ) ἄγνωστος περιέχεται εἰς πρῶτον βαθμόν. Οὕτω ἡ δευτέρα τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εἶνε πρώτου βαθμοῦ.

γ′) *Λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως* λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου αὐτῆς, αἵτινες τὴν ἐπαληθεύουν.

§ 83. Λύσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.—

α′) Ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται, ἐνίοτε, εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως. Τοῦτο γίνεται, ἄν φέρωμεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς μορφὴν τοιαύτην, ὥστε τὸ μὲν β′ μέλος αὐτῆς νὰ εἶνε ἡ μονάς, τὸ δὲ πρῶτον δύναμις ἀριθμοῦ τινος ἢ παραστάσεως γνωστῆς, διαφόρου τοῦ μηδενός, τῆς ὁποίας ὁ ἐκθέτης περιέχει τὸν ἄγνωστον τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἀκολούθως θέτομεν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ταύτης ἴσον μὲ μηδὲν καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν.

Οὕτω, ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσι $3^{3x} = \frac{1}{27}$

Δίδομεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν $3^{3x}.\ 27 = 1$, ἢ $3^{3x}.\ 3^{3} = 3^{3x+3} = 1$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $3x + 3 = 0$.

Ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι $x = -1$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3^{2x+5} = 2^{2x+5}$

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $3^{2x+5}:2^{2x+5}=1$, ἢ $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+5}=1$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $2x+5=0$, καὶ $x=-2\frac{1}{2}$

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-3}+3^{x-4}$,

Δίδομεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν

$$\frac{2^{x-1}-2^{x-3}}{3^{x-3}+3^{x-4}}=\frac{2^x.2^{-1}-2^x.2^{-3}}{3^x.3^{-3}+3^x.3^{-4}}=\frac{2^x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)}{3^x\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)}=\frac{\frac{3}{8}2^x}{\frac{4}{81}3^x}=1.$$

$$\text{Ἢ}\quad\frac{3.81.2^x}{4.\,8.3^x}=\frac{3^5.2^x}{2^5.3^x}=\frac{2^x.2^{-5}}{3^x.3^{-5}}=\frac{2^{x-5}}{3^{x-5}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}=1,$$

καὶ $x-5=0$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $x=5$.

β΄) Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ἡ λύσις συστήματος ἐκθετικῶν ἐξισώσεων μὲ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀγνώστους ἀνάγεται, ἐνίοτε, εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικοῦ συστήματος ἐξισώσεων.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α΄) $\alpha^{x+\mu}=\alpha^{2\mu}$. β΄) $\alpha^{3x+2}=\alpha^{x+4}$. γ΄) $\gamma^{2-5x}=\gamma^{x+3}$.

δ΄) $\beta^{(2x+1)(3x+4)}=\beta^{(3x+1)(2x+5)}$. ε΄) $(\alpha^{\mu})^{x+3}=\alpha^{x+2\nu}$.

στ΄) $\alpha^{2x+3}.\alpha^{3x+1}=\alpha^{5x+6}$. ζ΄) $2^{2x}=32$.

η΄) $(-2)^x=16$. θ΄) $-2^x=-32$. ι΄) $100^{2x+3}=100$.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα.

α΄) $\mu^x.\mu^y=\mu^8$, $\frac{\mu^x}{\mu^y}=\mu^{-2}$. β΄) $\alpha^{2x}.\alpha^{3y}=\alpha^8$, $\frac{\alpha^{2x}}{\alpha^{3y}}=\alpha^{-6}$. γ΄) $5^{3x}.5^{4y}=(5^6)^3$, $\frac{5^{2x}}{5^{7x}}=5^{-17}$.

Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

§ 84. Ὁρισμοί.—

α΄) Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ $\sqrt{2}$.

Ἐπειδὴ $1^2=1$, καὶ $2^2=4$, συνάγομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2. Ἑπομένως αὕτη θὰ εἶνε ἴση μὲ 1 καὶ μέρος τῆς μονάδος· ἤτοι ἔχει μορφὴν 1,....

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ δέκατα τῆς ῥίζης, ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον τοὺς ἀριθμοὺς 1,1· 1,2· 1,3·. καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ῥίζα περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,4 καὶ 1,5. Διότι εἶνε $(1,4)^2=1,96$· $(1,5)^2=2,25$. Ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 θὰ εἶνε τῆς μορφῆς 1, 4. . . . .

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,41 καὶ 1,42. Ἑπομένως ἔχει τὴν μορφὴν 1,41. . . .

Ὁμοίως προχωροῦντες, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εὑρίσκεται ὡρισμένος τις ἀριθμὸς ὡς τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2, ἀλλ' ὅτι προκύπτει ἀριθμὸς δεκαδικὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, μὴ περιοδικά. Διότι, ἔστω ὅτι προκύπτει ὡς τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 δεκαδικός τις ἀριθμὸς μὲ ὡρισμένον πλῆθος ψηφίων, ἢ περιοδικός. Οὗτος δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἑνὸς κλάσματος ἀναγώγου. Ἔστω τοῦτο τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$· Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον. Διότι ἀφοῦ τὸ λ καὶ μ εἶνε ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\lambda^2}{\mu^2}$ εἶνε ἀνάγωγον. Ἄρα δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 2.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt[3]{3}$, τὴν $\sqrt[4]{3}$ κλπ., παρατηροῦμεν ὅτι αὗται εἶνε ἀριθμοὶ μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς καλοῦμεν *ἀσυμμέτρους ἀριθμούς*.

β') Ἤτοι **«ἀσύμμετρον ἀριθμὸν καλοῦμεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, μὴ περιοδικῶν»**.

γ') Τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς (ἀκεραίους καὶ κλασματικοὺς) ἀριθμοὺς καλοῦμεν *συμμέτρους ἀριθμούς*, πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἀσυμμέτρων.

Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ

8,3415721812. . . . . , 4,35718403. . . . . . .

3,12567149 . . . . . , 6,77178127145. . . .

λέγονται ἀσύμμετροι.

§ **85. Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.**—

α') Ὅταν λέγωμεν ἄθροισμα ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 1,73205 . . . . καὶ 1,41421. . . . . ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Σχηματίζομεν ἀπὸ καθένα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν τὰς προσεγγιζούσας τιμὰς

1·	1,7·	1,73·	1,732·	1,7320·	1,73205·	..
1·	1,4·	1,41·	1,414·	1,4142·	1,41421·	..

Προσθέτομεν τὰς ἀντιστοίχους πρώτας, δευτέρας, τρίτας. . . . . ἀνωτέρω τιμάς καὶ εὑρίσκομεν τοὺς ἀριθμούς, 2· 3,1· 3,14· 3,146· 3,1462· 3,14626 ·.........

παρατηροῦμεν δὲ ὅτι μία ὡρισμένη ὁμὰς ψηφίων μένει ἀμετάβλητος. Οὕτω ἀπὸ τὸν τέταρτον ἀριθμὸν καὶ ἑξῆς δὲν μεταβάλλονται τὰ ψηφία 3· 1· 4· 6· ἀπὸ δὲ τοῦ πέμπτου καὶ ἑξῆς τὰ 3· 1· 4· 6· 2. Τὴν πορείαν αὐτὴν ἀκολουθοῦντες, δυνάμεθα νὰ ὡρίσωμεν ὁσαδήποτε ψηφία, τὰ ὁποῖα δὲν μεταβάλλονται, δηλαδὴ θὰ εὕρωμεν ἀσύμμετρόν τινα ἀριθμόν, καὶ τοῦτον θὰ καλοῦμεν ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

β΄) Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὸ γινόμενον δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἂν πολλαπλασιάζωμεν τὰς προσεγγιζούσας ἀντιστοίχους τιμὰς αὐτῶν.

γ΄) Καλοῦμεν διαφορὰν δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, π. χ. τῶν α καὶ β, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸ β δίδει τὸν α. Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ πηλίκον τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν α καὶ β, ἤτοι τὸ α : β, θὰ εἶνε ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β δίδει γινόμενον τὸν α.

Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζομεν τὴν δύναμιν ἀσυμμέτρου τινὸς ἀριθμοῦ α. Οὕτω τὸ $α^3$ θὰ εἶνε τὸ γινόμενον α. α. α, ἐνῶ τὸ $α^{-3}$ θὰ φανερώνῃ τὸ πηλίκον $\frac{1}{α^3}$·

Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀσυμμέτρων

1,73205. . . . . καὶ 1,41421. . . . . . .

σχηματίζομεν πρῶτον τὰς προσσεγγιζούσας τιμὰς τῶν δοθέντων. Ἀφαιροῦμεν ἀκολούθως ἀντιστοίχως ἀπὸ τῆς πρώτης τὴν δευτέραν, καὶ οὕτω εὑρίσκομεν 0· 0,3· 0,32· 0,318· 0,3168· 0,31784. Λαμβάνομεν ἐκεῖνα τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἐν τῇ πορείᾳ τοῦ λογισμοῦ δὲν μεταβάλλονται. Κατὰ ταῦτα ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε 0,3178. . . . .

δ΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, τὸ ἄθροισμα (ἢ τὸ γινόμενον) ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν διατηρεῖται ἀμετάβλητον, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν προσθετέων (ἢ τῶν παραγόντων). Ἐπίσης εἶνε εὔκολον νὰ διακρίνωμεν, ὅτι αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν δυνάμεων ἰσχύουν καὶ δι' ἀσύμμετρον βάσιν.

§ 86*.) Γεωμετρικὴ παράστασις ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ.—

α΄) Διὰ νὰ παραστήσωμεν ἀσύμμετρόν τινα ἀριθμόν, π. χ. τὸν 2,314379. . . . λαμβάνομεν τὸν σύμμετρον ἀριθμὸν, ὅστις προσεγγίζει περισσότερον τὸν δοθέντα, ἔστω τὸν 2,31437· τὸ σημεῖον, τὰ ὁποῖον παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τοῦτον θὰ λέγωμεν ὅτι παριστάνει τὸν δοθέντα ἀσύμμετρον. Διότι ἐν γένει δὲν εἶνε εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον δοθέντα ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

β') Ἐν τούτοις δι' ὡρισμένους τινὰς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς δυνάμεθα διὰ γεωμετρικῆς τινος κατασκευῆς νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον. Ἐὰν π. χ. κατασκευάσωμεν ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας μὲ 1, ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴση, ὡς εἶνε γνωστόν, μὲ τὴν $\sqrt{2}$. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν $\sqrt{2}$ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O τμῆμα ἴσον μὲ τὴν ἐν λόγῳ ὑποτείνουσαν.

Περὶ τῶν ῥιζῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 87. Ὁρισμοί.—

α') Ὡς γνωστὸν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) καλοῦμεν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον δίδει τὸν δοθέντα.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ***«καλοῦμεν, τρίτην, τετάρτην, . . . , μυοστὴν ῥίζαν ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὅστις, ὑψούμενος εἰς τὴν τρίτην, τετάρτην, . . . , μυοστὴν δύναμιν, δίδει τὸν δοθέντα».***

β') Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α παριστῶμεν

διὰ τοῦ $\sqrt{\alpha}$, ἢ διὰ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2}}$.

Ὁμοίως παριστῶμεν τὴν 3ην, 4ην, . . . , μυοστὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ

α διὰ τοῦ $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\alpha}$, . . . , $\sqrt[\mu]{\alpha}$

ἢ διὰ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{3}}$ $\alpha^{\frac{1}{4}}$, . . . , $\alpha^{\frac{1}{\mu}}$.

γ') Τὸ σύμβολον $\sqrt{}$ λέγεται *ῥιζικόν*, ἡ ὑπ' αὐτὸ ποσότης *ὑπόρριζος ποσότης*, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὅστις δεικνύει τὴν τάξιν τῆς ῥίζης ὑπορρίζου ποσότητος λέγεται δείκτης τῆς ῥίζης. Οὕτω εἰς τὴν παράστασιν $\sqrt[\mu]{\alpha}$ ὑπόρριζος ποσότης εἶνε ἡ α, δείκτης δὲ τῆς ῥίζης ὁ μ.

δ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

«δύναμις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην θετικὴν κλασματικὴν μονάδα, παριστάνει ῥίζαν τῆς βάσεως αὐτῆς, τῆς ὁποίας τὴν τάξιν ὁρίζει ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἐκθέτου».

Οὕτω τὸ $2^{\frac{1}{5}}$ παριστάνει τὴν πέμπτην ῥίζαν τοῦ 2, παριστάνεται δὲ τοῦτο καὶ ὑπὸ τοῦ $\sqrt[5]{2}$, ἤτοι εἶνε $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$.

Ἐν γένει, τὸ $\alpha^{\frac{1}{\mu}}$ παριστάνει τὴν μυοστὴν ῥίζαν τοῦ α, ἤτοι τὸ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ εἶνε $\alpha^{\frac{1}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha}$.

ε΄) Ῥίζα τις ἀριθμοῦ λέγεται *ἀρτίας τάξεως*, ἂν ὁ δείκτης τῆς ῥίζης αὐτοῦ εἶνε ἄρτιος ἀριθμός· *περιττῆς δὲ τάξεως*, ἂν ὁ δείκτης εἶνε περιττός. Οὕτω τὸ $\sqrt[5]{\alpha}$ παριστάνει ῥίζαν περιττῆς τάξεως τοῦ α (τὴν 5ην). Τὸ $\sqrt[8]{\alpha}$ παριστάνει ῥίζαν ἀρτίας τάξεως τοῦ α (τὴν 8ην).

Ἀσκήσεις.

1) Τί σημαίνει $3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4}$, $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $(xy)^{\frac{1}{\mu}}$, $125^{\frac{1}{3}}$, $64^{\frac{1}{6}}$;

2) Γράψατε συμβολικῶς τὸν ἀριθμόν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν τετάρτην (ἢ ἑβδόμην) δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον 18 (ἢ 149).

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\sqrt[1]{2}$, $\sqrt[2]{\alpha^2}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt[1]{\alpha}$, $\sqrt[\mu]{0}$.

4) Ἂν ἀριθμόν τινα ὑψώσωμεν εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν, καὶ τοῦ ἐξαγομένου ἐξαγάγωμεν τὴν νυοστὴν ῥίζαν, εὑρίσκομεν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν ἢ τὸν ἀντίθετόν του. ($\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, ἂν τὸ ν εἶνε περιττός, $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \pm\alpha$, ἂν τὸ ν εἶνε ἄρτιος). Διατί;

5) Εὕρετε τὰ $(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})$, $\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right)$.

6) Τρέψατε τὰς ἑπομένας παραστάσεις εἰς γινόμενα δύο παραγόντων.
α΄) $x-y$. β΄) x^2-y. γ΄) $\alpha^2-2\beta$. δ΄) $4\alpha-25\beta$. ε΄) $16-\alpha$. στ΄) $25-9\beta$.

§ 88. Πλῆθος ῥιζῶν ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.—

α΄) «*Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας ἀρτίας τάξεως ἀντιθέτους (μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικήν)*».

Διότι, θετικὸς ἢ ἀριθμός, ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμὸν (§ 10, β΄). Οὕτω π.χ.

ἡ $\sqrt{25} = \pm 5$. Διότι εἶνε $5^2=25$, $(-5)^2=25$.

Ἡ $\sqrt[4]{16} = \pm 2$. Διότι εἶνε $2^4=16$, $(-2)^4=16$.

β΄) «*Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ῥίζαν περιττῆς τάξεως (θετικήν)*».

Διότι μόνον θετικὸς ἀριθμός, ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν, δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμὸν (§ 10, β'). Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

ἡ $\sqrt[3]{27}=+3$. Διότι εἶνε $(+3)^3=27$. Ἡ $\sqrt[5]{32}=+2$.
Διότι εἶνε $(+2)^5=32$.

*γ') «**Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως (ἀρνητικήν)**».*

Διότι μόνον ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν, δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν (§ 10, β'). Οὕτω π.χ.

ἡ $\sqrt[3]{-8}=-2$. Διότι εἶνε $(-2)^3=-8$. Ἡ $\sqrt[5]{-32}=-2$.
Διότι εἶνε $(-2)^5=-32$.

δ') «***Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει ρίζαν ἀρτίας τάξεως***».

Διότι οὐδεὶς ἐκ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν (θετικὸς ἢ ἀρνητικός), ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν, δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

ε') Ἔστω ἡ $\sqrt[3]{-8}$. Αὕτη = μὲ -2.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\sqrt[3]{8}=2$. Ἄρα $-\sqrt[3]{8}=-2$.

Ἑπομένως εἶνε $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$.

Ἤτοι, «***ἡ ρίζα περιττῆς τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν, τὴν ἔχουσαν τὸν αὐτὸν δείκτην, τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀριθμοῦ***».

§ 89. Ἐξισώσεις διώνυμοι.—

α') Ἐξίσωσίς τις, ἔχουσα ἕνα ἄγνωστον, λέγεται *διώνυμος*, ἂν ἔχῃ δύο ὅρους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἔχει τὴν ἄγνωστον εἴς τινα βαθμόν. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta=0$ εἶνε διώνυμος καὶ πρώτου βαθμοῦ. Ἡ $x^3-27=0$ εἶνε διώνυμος καὶ τρίτου βαθμοῦ.

β') Ἐν γένει, πᾶσα διώνυμος ἐξίσωσις βαθμοῦ μ ἔχει τὴν μορφὴν

$$x^{\mu}=\alpha,$$

ὅπου τὸ μ παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ α ἀλγεβρικόν.

γ') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν διώνυμον ἐξίσωσιν $x^{\mu}=\alpha$ ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς μυοστῆς τάξεως τοῦ α. Διότι ἑκάστη μυοστὴ ρίζα τοῦ α παριστάνει ἀριθμόν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν μυοστὴν δύναμιν δίδει τὸν α. Ἤτοι, αἱ ρίζαι τῆς μυοστῆς τάξεως τοῦ α εἶνε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^{\mu}=\alpha$.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ ἀνωτέρω περὶ τοῦ πλήθους τῶν ριζῶν ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἔχομεν τὸν κατωτέρω πίνακα.

Ρίζαι τῆς διωνύμου ἐξισώσεως $x^{\mu}=\alpha$.

1) ἂν εἶνε α θετικὸς καὶ μ ἄρτιος, ἔχει δύο ρίζας ἀντιθέτους.

2) ἂν εἶνε α θετικὸς καὶ μ περιττός, ἔχει μίαν ρίζαν θετικήν.

3) ἂν εἶνε α ἀρνητικὸς καὶ μ περιττός, ἔχει μίαν ρίζαν ἀρνητικήν.

4) ἂν εἶνε α ἀρνητικός, καὶ μ ἄρτιος, δὲν ἔχει ρίζαν.

δ') Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $x^4=16$ ἔχει δύο ρίζας ἀντιθέτους τὰς $x=+2$ $x=-2$. Ἤτοι εἶνε $x=\sqrt[4]{16}=\pm 2$. Ἡ ἐξίσωσις $\chi^5=-32$, ἔχει μίαν ρίζαν, τὴν $x=-2$. Ἤτοι εἶνε $x=\sqrt[5]{-32}=-2$. Ἐνῷ ἡ ἐξίσωσις $x^2=-25$ δὲν ἔχει ρίζαν.

ε') Ἐν τοῖς ἑξῆς δὲν χρησιμοποιοῦμεν ἀριθμὸν ἀρνητικόν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ρίζα ἀρτίας τάξεως, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει τοιαύτη.

στ') Ἐκ τῶν δύο (ἀντιθέτων) ριζῶν θετικοῦ ἀριθμοῦ θὰ θεωροῦμεν μόνον τὴν θετικήν, ἐν ὅσῳ δὲν ἀναφέρομεν ὅτι θεωροῦμεν καὶ τὰς δύο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν α') $(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$.
β') $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^3}$. γ') $(x^4y^4)^{\frac{1}{4}}$. δ') $(\alpha^6)^{\frac{1}{3}}$. ε') $\sqrt{x^6}$.

2) Ὁμοίως τὰ α') $4^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{4}}$.
β') $(\alpha^4)^{\frac{1}{2}}+4^2-5\sqrt[3]{\alpha^6}$. γ') $\left(\sqrt[3]{\alpha^2}\right)^3 . \left(\sqrt[4]{x:y}\right)^3 . \sqrt[4]{x:y}$.

3) Ἐπίσης τῶν α') $(3+\sqrt{2})\,(3-\sqrt{2})$.
β') $25^{\frac{1}{2}}+16^{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{-27}+\sqrt[3]{-125}$.

4) Τρέψατε εἰς γινόμενα τὰς παραστάσεις

α') $\alpha x^{\frac{1}{3}}+\beta x^{\frac{1}{3}}-\gamma x^{\frac{1}{3}}$.

β΄) $\alpha\sqrt[3]{2}+\alpha\sqrt[3]{3}-\beta\sqrt[3]{2}-\beta\sqrt[3]{3}.$

γ΄) $\alpha\, x^{\frac{1}{\mu}}+\alpha y^{\frac{1}{\nu}}+\beta\sqrt[\mu]{x}+\beta\sqrt[\nu]{y}\,.$

5) Λύσατε τὰς ἐξισώσεις

α΄) $x^4-625=0$. β΄) $x^5=32$. γ΄) $x^6=729$. δ΄) $x^5+1=0$.

ε΄) $\frac{x^3-1}{5}+\frac{x^3+5}{2}=3$. στ΄) $5x^2+10=6\,x^2+1$.

ζ΄) $6\,x^2-\frac{1}{6}=5\,x^2+\frac{11}{9}$. η΄) $\frac{15}{8x}-\frac{7}{2-3x}=8$.

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς.

§ 90. Ὁρισμοί.—

α΄) Ἔστω δύναμις τοῦ α μὲ ἐκθέτην τὸ $\frac{3}{4}$ ἢ $\alpha^{\frac{3}{4}}$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\alpha^{\frac{3}{4}}=\alpha^{3\cdot\frac{1}{4}}=(\alpha^3)^{\frac{1}{4}}$.

Ἀλλὰ $(\alpha^3)^{\frac{1}{4}}$ παραστάνει τὴν τετάρτην ρίζαν τοῦ α^3.

Ἄρα εἶνε $\alpha^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\alpha^3}.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\mu\cdot\frac{1}{\nu}}=(\alpha^\mu)^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}.$

Ἤτοι, «***δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην θετικὸν κλάσμα παριστάνει ρίζαν μὲ δείκτην τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἐκθέτου, ὑπόρριζον δ' ἔχουσαν τὴν βάσιν τῆς δυνάμεως μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἐκθέτου***».

β΄) Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\alpha^{\frac{1}{4}\cdot 3}=\left(\alpha^{\frac{1}{4}}\right)^3=\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^3.$

Ὁμοίως ὅτι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}\cdot\mu}=\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^\mu=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu.$

Ἤτοι, «***δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην θετικὸν κλάσμα παριστάνει δύναμιν ρίζης μὲ δείκτην τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἐκθέτου, ἐκθέτην δι' ἔχουσαν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου***».

γ΄) Κατὰ ταῦτα τὸ $\alpha^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\alpha^3}=\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^3.$

Ὁμοίως τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu.$

Ἤτοι, αἱ παραστάσεις $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ καὶ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu$ εἶνε ἰσοδύναμοι.

δ') Ἔστω ἡ δύναμις $\alpha^{-\frac{5}{6}}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\alpha^{\frac{-5}{6}} = \alpha^{-5 \cdot \frac{1}{6}} = \left(\alpha^{-5}\right)^{\frac{1}{6}}$

Ἀλλ' εἶνε $\alpha^{-5} = \frac{1}{\alpha^5}$ (§ 81, α').

Ἄρα $\alpha^{-\frac{5}{6}} = \left(\alpha^{-5}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{\alpha^5}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{\alpha^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{\alpha^5}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{6}}}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \left(\alpha^{-\mu}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha^\mu}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Ἤτοι, «***δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην ἀρνητικὸν κλάσμα παριστάνει τὴν ἀντίστροφον τιμὴν τῆς δυνάμεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Τί σημαίνει α') $\alpha^{3\frac{1}{2}}$; β') $\alpha^{-4\frac{1}{5}}$; γ') $\alpha^{-\frac{3}{8}}$;

δ') $25^{-\frac{1}{2}}$; ε') $32^{-\frac{1}{4}}$; στ') $64^{-\frac{1}{2}}$;

2) Εὕρετε τὰ α') $\left(3+2^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3-2^{-\frac{1}{2}}\right)$. β') $\left(\alpha+\beta^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha-\beta^{-\frac{1}{2}}\right)$.

γ') $4^{-\frac{1}{2}}+8^{-\frac{1}{3}}-16^{-\frac{1}{4}}$. δ') $3\left(\alpha^4\right)^{-\frac{1}{2}}+4\alpha^{-2}-5\alpha^{-\frac{3}{6}}$.

3) Δείξατε μὲ τὴν βοήθειαν τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν ὅτι, ἡ ῥίζα θετικῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν τὸν ἐκθέτην καὶ δείκτην αὐτῆς πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

§ 91. Ἰδιότητες δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας. —

α') «***Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτας κλασματικοὺς εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων***».

Ἔστω τὸ γινόμενον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}$. Λέγω ὅτι τοῦτο $=$ μὲ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\kappa}{\lambda}}$.

Διότι ἔχομεν ὅτι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\varkappa}{\lambda}}=\alpha^{\frac{\lambda\mu+\varkappa\nu}{\nu\lambda}}=\left(\alpha^{\lambda\mu+\varkappa\nu}\right)^{\frac{1}{\nu\lambda}}$.

Ἀλλὰ τὸ $\left(\alpha^{\lambda\mu+\varkappa\nu}\right)^{\frac{1}{\nu\lambda}}$ παριστάνει τὸν ἀριθμόν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν $\nu\lambda$ δύναμιν δίδει τὸν $\alpha^{(\lambda\mu+\varkappa\nu)}$.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει ὅμως καὶ τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}$.

Διότι ἄν τοῦτο ὑψώσωμεν εἰς τὴν $\lambda\nu$ δύναμιν, ἔχομεν

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}\right)^{\lambda\nu}=\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\lambda\nu}.\left(\alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}\right)^{\lambda\nu}=\alpha^{\lambda\mu}.\alpha^{\varkappa\nu}=\alpha^{\lambda\mu+\varkappa\nu}.$$

Ἑπομένως εἶνε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\alpha^{\frac{\varkappa}{\lambda}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\varkappa}{\lambda}}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας.

β') «*Γινόμενον παραγόντων ὑψοῦται εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην κλασματικόν, ἂν ἕκαστος τῶν παραγόντων ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην*».

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸ $\left(\alpha.\beta\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$. Λέγω ὅτι τοῦτο $=$ μὲ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\beta^{\frac{\mu}{\nu}}$.

Διότι τὸ $\left(\alpha.\beta\right)^{\frac{\mu}{\nu}}=\left(\alpha.\beta\right)^{\mu.\frac{1}{\nu}}=\left((\alpha.\beta)^{\mu}\right)^{\frac{1}{\nu}}=\left(\alpha^{\mu}.\beta^{\mu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$.

Ἀλλὰ τὸ $\left(\alpha^{\mu}.\beta^{\mu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ παριστάνει τὸν ἀριθμόν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν, δίδει τὸ $\alpha^{\mu}.\beta^{\mu}$.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει ὅμως καὶ τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\beta^{\frac{\mu}{\nu}}$.

Διότι, ἂν τοῦτο ὑψωθῇ εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν ἔχομεν

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\beta^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}=\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}.\left(\beta^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha^{\mu}.\beta^{\mu}.$$

Ἄρα εἶνε $\left(\alpha.\beta\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\beta^{\frac{\mu}{\nu}}$.

γ') «Διὰ νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην κλασματικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἐκθέτας».

Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\varkappa}{\lambda}}$. Λέγω ὅτι τοῦτο = μὲ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\varkappa}{\lambda}}$.

Διότι τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\varkappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\varkappa}{\nu\lambda}}$.

Ἀλλὰ τὸ $\alpha^{\frac{\mu\varkappa}{\nu\lambda}}$ παριστάνει τὸν **ἀριθμόν,** ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν $\nu\lambda$ δύναμιν δίδει τὸν $\alpha^{\mu\varkappa}$. Τὴν **ἰδιότητα ταύτην** ἔχει ὅμως καὶ τὸ

$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\varkappa}{\lambda}}$.

Διότι ἂν τοῦτο ὑψώσωμεν πρῶτον εἰς **τὴν λ** δύναμιν ἔχομεν

$$\left[\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\varkappa}{\lambda}}\right]^{\lambda} = \left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\varkappa} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}.\varkappa}.$$

Ἂν δὲ τοῦτο ὑψώσωμεν εἰς τὴν **νυοστὴν** δύναμιν ἔχομεν

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}.\varkappa}\right)^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu\nu}{\nu}\cdot\varkappa} = \alpha^{\mu\varkappa}.$$

Ἄρα εἶνε $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\varkappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\varkappa}{\lambda}}$.

δ') «Διὰ νὰ ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην κλασματικόν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν καθένα τῶν ὅρων αὐτοῦ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην».

Ἔστω τὸ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$. **Λέγω ὅτι τοῦτο** = μὲ $\frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Διότι τὸ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu.\frac{1}{\nu}} = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}\right]^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}\right)^{\frac{1}{\nu}}$.

Ἀλλὰ τὸ $\left(\frac{\alpha\mu}{\beta\mu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ παριστάνει **τὸν ἀριθμόν,** ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν, δίδει τὸν $\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$. Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει

ὅμως καὶ τὸ $\frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$.

Διότι ἂν τοῦτο ὑψώσωμεν εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν, ἔχομεν

$$\left(\frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}\right)^\nu = \frac{\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^\nu}{\left(\beta^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^\nu} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}.\nu}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}.\nu}} = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$$

Ἄρα εἶνε $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$

§ 92. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ριζῶν ἀριθμῶν.—

α΄) Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}$.

Λέγω ὅτι τοῦτο = μὲ $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$.

Διότι τὸ $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta} = \alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\nu}} = (\alpha.\beta)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma} \dots \sqrt[\nu]{\lambda} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}$

Ἤτοι «***τὸ γινόμενον ριζῶν ἀριθμῶν, ἐχουσῶν τὸν αὐτὸν δείκτην, ἰσοῦται μὲ ρίζαν τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, τὴν ἔχουσαν τὸν δείκτην τῶν παραγόντων***».

β΄) Ἔστω τὸ γινόμενον $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\mu]{\beta}$. Λέγω ὅτι τοῦτο=μὲ $\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\mu\beta^\nu}$

Διότι τὸ $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\mu]{\beta} = \alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\mu\nu}}.\beta^{\frac{\nu}{\mu\nu}} = \left(\alpha^\mu.\beta^\nu\right)^{\frac{1}{\mu\nu}} =$

$= \sqrt[\mu\nu]{\alpha^\mu.\beta^\nu}$.

Ἤτοι, «***διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ρίζας ἀριθμῶν, ἐχούσας*** *διαφόρους δείκτας, τρέπομεν αὐτὰς εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους αὐτῶν, ἐχούσας τὸν αὐτὸν δείκτην, καὶ ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν ταύτας».*

γ') Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον $\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\beta}$. Λέγω ὅτι τοῦτο $=$μὲ $\sqrt[\nu]{\alpha:\beta}$.

Διότι τὸ $\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\beta} = \alpha^{\frac{1}{\nu}} : \beta^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}} = (\alpha:\beta)^{\frac{1}{\nu}} =$

$$= \sqrt[\nu]{\alpha:\beta}.$$

Ἤτοι, *«τὸ πηλίκον ῥιζῶν δύο ἀριθμῶν, ἐχουσῶν τὸν αὐτὸν δείκτην, ἰσοῦται μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ πηλίκου τῶν ἀριθμῶν, ἔχουσαν τὸν δείκτην τῶν δοθεισῶν».*

δ') Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον $\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\mu]{\beta}$. Λέγω ὅτι τοῦτο $=$μὲ $\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\mu : \beta^\nu}$.

Διότι, τὸ $\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\mu]{\beta} = \alpha^{\frac{1}{\nu}} : \beta^{\frac{1}{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\mu\nu}} : \beta^{\frac{\nu}{\mu\nu}} = \left(\frac{\alpha^\mu}{\beta^\nu}\right)^{\frac{1}{\mu\nu}} =$

$$= \left(\alpha^\mu : \beta^\nu\right)^{\frac{1}{\mu\nu}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha^\mu : \beta^\nu}$$

Ἤτοι *«διὰ νὰ διαιρέσωμεν ῥίζας δύο ἀριθμῶν, ἐχούσας διαφόρους δείκτας, τρέπομεν αὐτὰς εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους αὐτῶν, ἐχούσας τὸν αὐτὸν δείκτην, καὶ ἀκολούθως διαιροῦμεν ταύτας».*

§ 93. Ἰδιότητες τῶν ῥιζῶν ἀριθμῶν.—

α') *«Δυνάμεθα παράγοντά τινα, ἐκτὸς ῥιζικοῦ κείμενον, νὰ εἰσαγάγωμεν καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ».*

Οὕτω π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ γινόμενον $\alpha.\sqrt[\nu]{\beta}$, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\alpha = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$. Ἄρα ἔχομεν $\alpha.\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}.\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$.

β') *«Δυνάμεθα ἐνίοτε παράγοντά τινα τῆς ὑπορρίζου ποσότητος νὰ γράψωμεν καταλλήλως ὡς παράγοντα ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ».*

Οὕτω π. χ. ἔχομεν ὅτι $\sqrt[3]{\alpha^5}=\sqrt[3]{\alpha^3.\alpha^2}=\left(\alpha^3.\alpha^2\right)^{\frac{1}{3}}=$

$$=\left(\alpha^3\right)^{\frac{1}{3}}.\left(\alpha^2\right)^{\frac{1}{3}}=\alpha^{\frac{3}{3}}.\alpha^{\frac{2}{3}}=\alpha.\alpha^{\frac{2}{3}}=\alpha.\sqrt[3]{\alpha^2}.$$

Ἐπίσης ἔχομεν ὅτι $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{2^3.3}+\sqrt[3]{3^3.3}=$

$$=2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}.$$

γ΄) «***Ἐὰν εἰς τὸν παρονομαστὴν κλάσματος ὑπάρχουν ριζικά, δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον αὐτοῦ μὲ παρονομαστὴν ἀπηλλαγμένον ριζικοῦ***».

Οὕτω ἂν ἔχωμεν **τὸ κλάσμα** $\dfrac{\alpha}{\sqrt[\mu]{\beta}}$ πολλαπλασιάζομεν τοὺς

ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ $\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}$, **ὅτε ἔχομεν** $\dfrac{\alpha}{\sqrt[\mu]{\beta}}=\dfrac{\alpha\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\sqrt[\mu]{\beta}.\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}=$

$$=\frac{\alpha.\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\sqrt[\mu]{\beta^\mu}}=\frac{\alpha.\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\beta}.$$

Π. χ. **τὸ** $\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\alpha.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{\alpha.\sqrt[3]{4}}{2}.$

Ἂν ἔχωμεν **π.χ. τὸ κλάσμα** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

πολλαπλασιάζομεν **τοὺς ὅρους αὐτοῦ** ἐπὶ τὸ $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$
καὶ λαμβάνομεν τὸ **ἰσοδύναμον πρὸς** αὐτὸ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}.$

Τούτου πολλαπλασιάζομεν **τοὺς ὅρους** ἐπὶ $\sqrt{6}$
καὶ εὑρίσκομεν τὸ **ἰσοδύναμον αὐτοῦ**

$$\frac{1}{12}\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right).$$

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ρίζαι εἰς ἰσοδυνάμους αὐτῶν, ἐχούσας τὸν ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην.

α') $\sqrt{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[6]{\alpha}$. β') $\sqrt[4]{\alpha}, \sqrt[6]{\beta}, \sqrt[12]{\gamma}$. γ') $\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt[3]{\gamma}$.

2) Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ριζῶν $\sqrt[4]{64}, \sqrt[6]{48}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[2\mu]{\alpha^{\mu}}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α') $\sqrt{5}.\sqrt{20}$. β') $\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{2}$. γ') $\sqrt[3]{5}.\sqrt[4]{30}$.

δ') $\sqrt[3]{xy}.\sqrt{\frac{x}{y}}$ ε') $\sqrt[3]{\alpha^2}.\sqrt[5]{\alpha}$. στ') $\sqrt{2\alpha}.\sqrt[3]{3\beta}.\sqrt[4]{5\alpha\beta}$.

ζ') $\sqrt{5}.\sqrt[3]{2}$. η') $\sqrt[4]{x}\ \sqrt[3]{y}$ θ') $\sqrt[3]{x}\ \sqrt[5]{y}$.

2) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ

α') $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}\right)^2$. β') $\left(2\sqrt[3]{x}+8\sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt[3]{x}$.

γ') $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[4]{\alpha}\right).\sqrt{\alpha}$. δ') $\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-3^{\frac{1}{3}}\right)$.

ε') $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\pm\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2$. στ') $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)^2$. ζ') $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}-1\right)^2$.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ.

α') $x\sqrt{x-1}$. β') $3\sqrt{5}$. γ') $\alpha\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}$. δ') $2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

2) Τὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα

α') $\sqrt{24}:\sqrt{2}$. β') $\sqrt[3]{7000}:\sqrt[3]{875}$. γ') $\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^3}}$.

δ) $\sqrt{24}:\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$. ε') $\sqrt[3]{6\alpha^4}:\sqrt[3]{2\alpha}$. στ') $\sqrt{\frac{3xy}{\omega}}:\sqrt{\frac{2x^3y}{\omega^3}}$

3) Τρέψατε τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα αὐτῶν μὲ ρητοὺς παρονομαστάς.

α′) $\frac{3}{\sqrt{2}}$. β′) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. γ′) $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}$. δ′) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$. ε′) $\frac{1}{\sqrt{3\sqrt{2}}}$.

στ′) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}$. ζ′) $\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\alpha\sqrt[5]{\alpha}}$. η′) $\frac{\alpha}{\alpha-\sqrt{\alpha}}$. θ′) $\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

§ 94*) Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀσυμμέτρους.—

Νὰ ὑψώσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀσύμμετρον π.χ. $3^{\sqrt{2}}=3^{1,414\ldots}$ σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Σχηματίζομεν τὰς δυνάμεις

$$3^{1,4}=3^{\frac{14}{10}}=3^{\frac{7}{5}}=3^{\frac{5}{5}+\frac{2}{5}}=3.\,3^{\frac{2}{5}}=3\sqrt[5]{3^2}=3.\sqrt[5]{9}=4,\ldots$$

$$3^{1,41}=3^{\frac{141}{100}}=3^{\frac{100}{100}}.\,3^{\frac{41}{100}}=3.\sqrt[100]{3^{41}}=4,7..$$

$$3^{1,414}=3^{\frac{1414}{1000}}=3^{\frac{707}{500}}=3^{\frac{500}{500}}.\,3^{\frac{207}{500}}=3.\sqrt[500]{3^{207}}=4,72\ldots$$

καὶ οὕτω καθεξῆς. Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τοὺς προκύπτοντας ἀριθμοὺς ὡρισμένη ὁμὰς ψηφίων ἀπό τινος καὶ ἑξῆς μένει ἀμετάβλητος. Οὕτω ἐξακολουθοῦντες, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὁσαδήποτε ψηφία, τὰ ὁποῖα διατηροῦνται ἀμετάβλητα· προσδιορίζομεν δηλαδὴ τοιουτοτρόπως ἕνα ἀσύμμετρον ἀριθμόν, καὶ τοῦτον θὰ καλοῦμεν

ὡς $3^{1,414}$ ἢ $3^{\sqrt{2}}$.

95*) Περὶ τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $y=\alpha^x$.—

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha^x$, ὅπου τὸ α εἶνε θετικὸς ἀριθμός.

α′) «*Ἡ συνάρτησις* $y=\alpha^x$, ***αὐξάνεται αὐξανομένου τοῦ*** x, ***ἐὰν τὸ α εἶνε μεγαλύτερον τῆς μονάδος***».

Ἤτοι, ἐὰν εἰς τὴν x δώσωμεν τιμήν τινα θετικὴν μ, καὶ ἄλλην τοιαύτην μ+ν λέγω ὅτι εἶνε $\alpha^{\mu+\nu}>\alpha^{\nu}$, ἐὰν εἶνε $\alpha>1$.

Διότι τότε θὰ εἶνε καὶ $\alpha^{\nu}>1$. Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $α^μ$, εὑρίσκομεν $α^{μ+ν}>α^μ$. Ἐὰν μ,ν εἶνε ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν $α^ν<1$, καὶ $α^{μ+ν}>α^μ$·

Ἤτοι, ἡ δύναμις $α^{μ+ν}$ ἡ ἔχουσα τὸν μικρότερον ἐκθέτην εἶνε μικροτέρα τῆς $α^ν$, ἐχούσης μεγαλύτερον ἐκθέτην.

β΄) «*Ἐὰν εἶνε* $α<1$ *ἡ συνάρτησις* $α^x$ *ἐλαττοῦται, αὐξανομένου τοῦ* x».

Διότι, ἂν εἶνε $α<1$, θὰ εἶνε $α^ν<1$. Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης ἐπὶ $α^μ$, ἔχομεν $α^{μ+ν}<α^μ$, ὑποθέτοντες τοὺς μ, ν θετικούς. Ἐὰν μ καὶ ν εἶνε ἀρνητικοί, θὰ ἔχωμεν $α^ν>1$, καὶ $α^{μ+μ}>α^μ$.

γ΄) Ἂν κάμωμεν τὴν ἀπεικόνισιν τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $y=α^x$ παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς καθεμίαν τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία θετικὴ τιμὴ τοῦ y. Ἀλλὰ καὶ τοὐναντίον, ἂν δοθῇ θετική τις τιμὴ τοῦ y μεγαλυτέρα (ἢ μικροτέρα) τῆς μονάδος ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτὴν μία θετικὴ (ἢ ἀρνητικὴ) τοῦ x.

Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

§ 96. Ὁρισμοί.—

α΄) Ἐὰν θέλωμεν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν ρίζαν ἀρτίας τάξεως, παραδεχόμεθα νέον εἶδος ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους θὰ καλοῦμεν *φανταστικοὺς ἀριθμούς,* τοὺς δὲ μέχρι τοῦδε γνωστοὺς πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τούτων *πραγματικούς.*

β΄) Οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται ὡς ἑξῆς. Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἀρνητικῆς μονάδος θὰ καλοῦμεν *φανταστικὴν μονάδα*, καὶ θὰ τὴν παριστάνωμεν διὰ τοῦ συμβόλου i. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $i=\pm\sqrt{-1}$, καὶ $i^2=-1$.

Ἐκ τῆς φανταστικῆς μονάδος ἢ μέρους αὐτῆς γίνονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοί.

Π.χ. ἔχομεν ὅτι $2i=i+i$, $3i=i+i+i$,

$$\frac{4}{9}i=\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον σχηματίζονται καὶ οἱ ἀρνητικοὶ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τῆς $-i$, ὅπως καὶ οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἐκ τῆς -1. Π.χ. εἶνε $-4i=(-i)+(-i)+(-i)+(-i)$.

γ΄) Οὕτω ἡ ἀρτίας τάξεως ριζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ φανταστικοῦ.

Π.χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -25 γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\sqrt{-25}=\sqrt{(-1).25}=\sqrt{i^2.25}=\pm i\sqrt{25}=\pm 5i.$$

Καὶ γενικῶς θὰ εἶνε $\sqrt{-\alpha^2} = \sqrt{(-1)\cdot\alpha^2} = \sqrt{i^2\alpha^2} = \pm\alpha\,i$.

Οὕτω $\sqrt{-8} = \sqrt{(-1).8} = \sqrt{i^2.8} = \pm i\sqrt{8}$.

δ΄) Καὶ διὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα τῶν ἀριθμῶν δεχόμεθα, ὅτι ἰσχύουν οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι $\alpha\, i.\, \beta = \alpha\,\beta\, i = i\,\alpha\,\beta$.

ε΄) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα φανταστικοῦ καὶ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καλοῦμεν *μιγάδα ἀριθμόν*. Οὕτω οἱ $3-5i$, $-8+4i$, $9-7i$ εἶνε ἀριθμοὶ μιγάδες. Ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ εἶνε $\alpha+\beta i$, ὅπου α καὶ β εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε.

στ΄) Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ λέγονται *συζυγεῖς*, ἐὰν διαφέρουν κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Π.χ. οἱ $7+3i$, $7-3i$ λέγονται συζυγεῖς μιγάδες.

§ 97. Πράξεις ἐπὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.—

α΄) Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις φανταστικῶν ἀριθμῶν δίδε ἐν γένει φανταστικὸν ἀριθμόν. Π.χ. εἶνε $8i + 5i = 13i$.

Ὁμοίως, $-17i-6i=-23i$, $24i-5i=19i$.

β΄) Ὁ πολλαπλασιασμὸς φανταστικῶν ἀριθμῶν δίδει γινόμενον πραγματικὸν ἀριθμόν, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιον. Οὕτω ἔχομεν ὅτι $i.i=i^2=-1$.

$(-i).(-i)=(-i)^2=i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1$.

Γενικῶς $\quad i^{4\nu}=+1$, $i^{4\nu+4}=1$, $i^{4\nu+2}=-1$,

$i^{4\nu+3}=-i$, $\alpha\, i.\,\beta\, i = -\alpha\,\beta$,

ὅπου τὸ ν παριστάνει ἀριθμὸν ἀκέραιον.

γ΄) Ἡ διαίρεσις τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν θεωρεῖται, ὡς συνήθως, ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτω ἔχομεν

$$\alpha i : \beta i = \frac{\alpha i}{\beta i} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha : \beta i = \frac{\alpha i}{\beta i^2} = -\frac{\alpha}{\beta}\, i.$$

δ΄) Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τεσσάρων πραξεων ἐπὶ μιγάδων ἀριθμῶν δίδει ἐξαγόμενα ἐν γένει μιγάδας ἀριθμούς. Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

1) $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i) = \alpha+\gamma+(\beta+\delta)\, i$.

2) $(\alpha-\beta i)-(\gamma+\delta i) = \alpha-\gamma-(\beta+\delta)\, i$.

3) $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i) = \alpha\gamma+\beta\gamma\, i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2 = \alpha\gamma-\beta\delta+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$.

4) $(\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i) = \dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \dfrac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)\, i}{\gamma^2+\delta^2}$

§ 98. Ἰδιότητες φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.—

α΄) «Τὸ ἄθροισμα δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς πραγματικός».

Οὕτω τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\,\alpha$.

β΄) Ἐὰν ζητῆται τὸ γινόμενον τῶν συζυγῶν $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ ἔχομεν $(\alpha+\beta\, i)\,(\alpha-\beta\, i) = \alpha^2+\alpha\beta\, i-\alpha\,\beta\, i-\beta^2\, i^2 = \alpha^2+\beta^2$.

Ἤτοι, ***«τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε πραγματικὸς ἀριθμός, καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς τούτων».***

γ΄) Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta\, i$ καὶ $\gamma+\delta\, i$ εἶνε μεταξύ των ἴσοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta\, i = \gamma+\delta\, i$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει $(\alpha-\gamma) + (\beta-\delta)\, i = 0$ ἢ $(\alpha-\gamma) = (\delta-\beta)\, i$.

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ δύο ἴσα, εὑρίσκομεν

$$(\alpha-\gamma)^2 = (\delta-\beta)^2\, i^2 = -\,(\delta-\beta)^2.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει μόνον, ὅταν εἶνε $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, ὁπότε καὶ τὰ δύο μέλη εἶνε ἴσα μὲ μηδέν, ἐνῶ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν ὅτι θετικός τις ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ ἀρνητικόν.

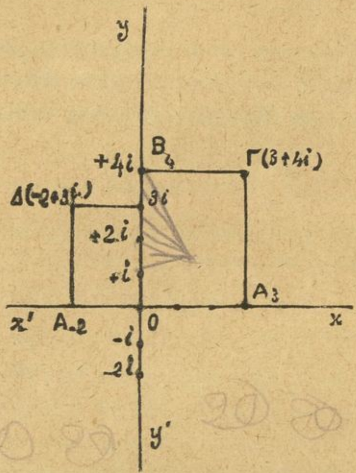
Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ***«ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι μεταξύ των, θὰ εἶνε χωριστὰ ἴσα τὰ πραγματικὰ καὶ τὰ φανταστικὰ μέρη αὐτῶν»*** καὶ ὅτι μία ἰσότης μεταξὺ δύο μιγάδων ἀριθμῶν ἄγει εἰς δύο ἰσότητας μὲ πραγματικοὺς ἀριθμούς.

§ 99*). Γεωμετρικὴ παράστασις μιγάδων.—

α΄) Καθὼς παρεστήσαμεν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς διὰ σημείων τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, οὕτω δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμοὺς διὰ σημείων ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $x'\,x$ (σχ. 7) φέρομεν τὴν κάθετον $y'\,y$ διὰ τοῦ σημείου Ο. Τὸ ἄκρον τμήματος, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, θὰ παριστάνῃ τὴν φανταστικὴν μονάδα i. Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τοὺς ἀριθμοὺς $2i, 3i, \ldots \beta i$, ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ Ο τμῆμα ἴσον μὲ $2, 3, \ldots$ β μονάδας μήκους πρὸς τὴν φορὰν Oy. Ἐὰν λάβωμεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πρὸς τὴν φορὰν Oy', θὰ ἔχωμεν τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν $-i$, $-2i$ $-3\, i, \ldots -\beta i$ (σχ. 7).

β') Διὰ νὰ παραστήσωμεν μιγάδα ἀριθμὸν π.χ. τὸν $3+4i$, εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον A_3 ἐπὶ τῆς $x'x$, τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 3, καὶ τὸ B_4 τὸ παριστάνον τὸν $4i$ ἐπὶ τῆς $y'y$. Ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον $OA_3B_4\Gamma$, καὶ ἡ τετάρτη κορυφὴ αὐτοῦ Γ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν $3+4i$. Καθὼς βλέπομεν τὸ σημεῖον Γ ἔχει τετμη-



(Σχ. 7)

μένην 3 καὶ τεταγμένην 4. Ἐν γένει θὰ λέγωμεν ὅτι, ὁ μιγὰς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β ὡς πρὸς ἄξονας $x'x$, $y'y$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Παραστήσατε διὰ σημείων τοὺς μιγάδας

α') $2-\frac{3}{4}i$. β') $5+3i$. γ') $6-5i$. δ') $-\frac{3}{4}-\frac{5}{8}.i$.

2) Εὕρετε τὰ σημεῖα, τὰ παριστάνοντα τοὺς μιγάδας

') $4+5i$. β') $3-4i$. γ') $-\frac{3}{4}i$. δ') $5+2i$. ε') $6-3i$,

καὶ τἀντίστοιχα ἀθροίσματα, διαφοράς, γινόμενα, πηλίκα αὐτῶν ἀνὰ δύο.

3) Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Τὴν διαφορὰν τῶν γ') καὶ δ').

4) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων, καὶ νὰ παρασταθοῦν αὐτὰ διὰ σημείων.

α') $(5+3i).(7+3i)$. β') $(8+2i).(3-4i)$. γ') $(2-7i).(9-2i)$.
δ') $(6+7i):(6-7i)$. ε') $(11-8i):(11+8i)$. στ') $(14+15i):(14-15i)$.
ζ') $(3+i\sqrt{2})(4-3i\sqrt{2})$. η') $(9-7i\sqrt{3}):(5+4i\sqrt{3})$.
θ') $\sqrt{\alpha+\beta i}.\sqrt{\alpha-\beta i}$. ι') $(1+i)^2$. ια') $(1-i)^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

Περὶ ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

√

§ 100. Ὁρισμοί.—

α΄) Ἐξίσωσίς τις λέγεται *δευτέρου βαθμοῦ* ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον (ἢ περισσοτέρους) ἂν εἶνε ἰσοδύναμος μὲ ἄλλην, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶνε πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον (ἢ τοὺς ἀγνώστους), τὸ δὲ δεύτερον μηδέν.

Π.χ. αἱ ἐξιώσεις $3x^2-4x+6=0$,

$7x^2+6=0$, $\quad 2xy+x^2+1=0$, $\quad \frac{x^2-1}{2}+\frac{5}{3}=0$

εἶνε β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, καὶ x, y.

β΄) *Γενικὴ μορφὴ ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ.* Ἐὰν δοθῇ ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὸν x, καὶ κάμωμεν ἀπαλοιφὴν τῶν παρανομαστῶν αὐτῆς, μεταφορὰν πάντων τῶν ὅρων εἰς τὸ α΄ μέλος τῆς νέας, καὶ ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον μὲ τὴν δοθεῖσαν, ἥτις ἐν γένει ἔχει τὴν μορφὴν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0. \qquad (1)$$

Τὰ α, β, γ παριστάνουν ἀριθμοὺς ἢ παραστάσεις γνωστάς, καὶ καλοῦνται *συντελεσταί,* τὸ δὲ γ καὶ *σταθερὸς ὅρος* τῆς ἐξισώσεως (1) ἢ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, εἶνε δὲ $\alpha \neq 0$.

γ΄) *Μορφαὶ ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ.* Ἐὰν ἐν τῇ (1) οἱ συντελεσταὶ εἶνε διάφοροι τοῦ μηδενός, ἡ ἐξίσωσις λέγεται *πλήρης,* ἐὰν δὲ εἶνε $\beta=0$, ἢ $\gamma=0$, ὅτε θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν

$\alpha x^2+\gamma=0$, ἢ $\alpha x^2+\beta x=0$, λέγεται *μὴ πλήρης.*

δ΄) Αἱ ρίζαι ἐξισώσεως, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἀκριβῶς (ἤτοι εἶνε ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ) καλοῦνται *σύμμετροι,* ἐνῷ αἱ εὑρισκόμεναι κατὰ προσέγγισιν (ὅτε ἰσοῦνται μὲ ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς) *ἀσύμμετροι.* Αἱ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι ρίζαι καλοῦνται μὲ ἓν ὄνομα *πραγματικαί,* πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰς *φανταστικάς,* αἱ ὁποῖαι προκύπτουν, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἔχῃ ὑπόρριζον ποσότητα ἀρνητικήν.

§ 101. Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.—

«Ἐὰν ἐξισώσεως ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἐξίσωσις, ἔχουσα τὰς ρίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς προ-

κυπτούσης ἐκ τῆς δοθείσης, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς».

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A = B$, (1) ὅπου A καὶ B παριστάνουν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν ταύτης ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A^2 = B^2$, (2). Λέγω ὅτι αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A = B$, καὶ τῆς $A = -B$. Τῷ ὄντι, πᾶσαι αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶνε ρίζαι καὶ τῆς (2). Διότι, ἂν ἐν τῇ (1) θέσωμεν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων τὰς ρίζας αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν ὅτι

ἡ τιμὴ τοῦ A = μὲ τὴν τιμὴν τοῦ B.

Ἄρα καὶ (ἡ τιμὴ τοῦ $A)^2$ = μὲ (τὴν τιμὴν τοῦ $B)^2$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ (2) εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$A^2 - B^2 = 0.$$

Αὕτη γράφεται καὶ οὕτω $(A-B)(A+B) = 0$.

Ἵνα αὕτη ἐπαληθεύεται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἷς τῶν παραγόντων $A-B$ καὶ $A+B$ νὰ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν. Ἐὰν εἶνε $A-B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ (1). Ἂν δὲ εἶνε $A+B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ $A = -B$. Ἄρα ἡ $A^2 = B^2$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A = B$ καὶ τῆς $A = -B$.

§ 102. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \gamma = 0$.

α') Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $5x^2 - 48 = 2x^2$. (1)

Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $3x^2 = 48$. Διαιροῦμεν διὰ 3 τὰ δύο ἴσα, ὅτε προκύπτει $x^2 = 16$. Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν δύο ἴσων, καὶ ἔχομεν ὅτι $x = \pm 4$. Δηλαδὴ αἱ ρίζαι εἶνε αἱ 4 καὶ -4.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε περιττὸν νὰ γράψωμεν πρὸ τοῦ x τὸ $\pm$. Διότι τότε θὰ εἴχομεν $\pm x = \pm 4$, δηλαδὴ $+x = +4$, $-x = +4$, καὶ $+x = -4$, $-x = -4$, ἤτοι πάλιν $x = \pm 4$.

β') Ἐν γένει, πρὸς λύσιν τῆς μὴ πλήρους ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \gamma = 0$ μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὅτε προκύπτει $\alpha x^2 = -\gamma$.

Διαιροῦμεν διὰ τοῦ α καὶ ἔχομεν $x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$, ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν δύο μελῶν ἔχομεν

$$x = \pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

γ') Ἐὰν τὸ $-\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶνε ἀριθμὸς θετικός, αἱ ρίζαι θὰ εἶνε πραγματικαί, ἂν δὲ ἀρνητικός, αἱ ρίζαι θὰ εἶνε φανταστικοὶ ἀριθμοὶ συζυγεῖς. Δηλαδή, ἂν τὰς δύο ρίζας τῆς ἐξισώσεως παραστήσωμεν διὰ τῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2 θὰ εἶνε, $\varrho_1 = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, $\varrho_2 = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν

$$\varrho_1 = i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}},\quad \varrho_2 = -i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5x^2 + 25 = 0$.

Μεταφέρομεν τὸ 25 εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὅτε ἔχομεν $5x^2 = -25$. Διαιροῦμεν διὰ τοῦ 5, ὅτε ἔχομεν $x^2 = -5$. Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἔχομεν,

$$x = \sqrt{-5} = \sqrt{(-1)5} = \sqrt{i^2 . 5}, \text{ καὶ } x = \pm i\sqrt{5},$$

$$\text{ἢ } \varrho_1 = i\sqrt{5} \qquad \varrho_2 = -i\sqrt{5}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α') $4x^2-3=x^2+6$. β') $5x^2+6=6x^2+2$. γ') $9x^2-\frac{1}{5}=3x^2+15$.

δ') $\frac{x^2-9}{3}=\frac{x^2-1}{2}$. ε') $\frac{3x^2-5}{6}+\frac{x^2+2}{3}=7$.

στ') $\frac{6}{7x^2}-\frac{4}{9x^2}=\frac{4}{25}$. ζ') $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}$.

η') $\alpha x^2+\beta=\gamma$. θ') $\alpha x^2+\beta=\beta x^2+\alpha$. ι') $x^2+2\lambda x+\mu=\lambda(2x+1)$.

§ 103. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x = 0$.—

α') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2 + 5x = 0$.

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $x(3x+5) = 0$.

Ἵνα τὸ γινόμενον $x(3x+5)$ γίνῃ μηδέν, ἀρκεῖ ὁ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ νὰ γίνῃ ἴσος μὲ μηδέν. Δηλαδὴ θὰ εἶνε ἢ $x = 0$, ἢ $3x+5 = 0$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x = -\frac{5}{3}$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε 0 καὶ $-\frac{5}{3}$.

β') Ἐν γένει, ἔστω ἡ μὴ πλήρης ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x = 0$. Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $x(\alpha x + \beta) = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εἶνε αἱ 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α΄) $6x^2-8x+7x^2=12x^2-8x$. β΄) $\frac{3}{4}x^2=7\frac{x}{3}-\frac{x}{2}$.

γ΄ $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{x}{\beta}=\frac{x^2+\alpha x}{\alpha\beta}$. δ΄) $\frac{x^2}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha+\beta}=\frac{x^2-x}{\alpha-\beta}$.

§ 104. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.—

α΄) Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, καὶ ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς

$$\alpha x^2+\beta x=-\gamma.$$

Προσπαθοῦμεν τώρα νὰ καταστήσωμεν τέλειον τετράγωνον τὸ πρῶτον μέλος ταύτης. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 4α καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὰ τὸ τετράγωνον τοῦ β. Οὕτω λαμβάνομεν $4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$,

ἢ $$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma.$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν μελῶν ταύτης ἔχομεν

$$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

Ἤτοι ἂν καλέσωμεν ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\quad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

β΄) Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους τούτους, εὑρίσκομεν τὰς ρίζας οἱασδήποτε τῶν μορφῶν ἐξισώσεως τοῦ β΄ βαθμοῦ.

Ἔστω π.χ. ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^2-5x+2=0$.

Εἶνε τὸ $\alpha=3$, τὸ $\beta=-5$, τὸ $\gamma=2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους τὰς τιμὰς ταύτας εὑρίσκομεν

$\rho_1=\frac{5+\sqrt{25-24}}{6}$, $\rho_2=\frac{5-\sqrt{25-24}}{6}$. Ἤτοι $\rho_1=1$ καὶ $\rho_2=\frac{2}{3}$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις

α΄) $3x^2-3x=8$. β΄) $3x^2-\frac{2}{3}x=25$. γ΄) $x^2-\frac{3}{4}x=3x+1$.

δ΄) $\frac{7x}{5}-\frac{5}{3x}=\frac{2}{3}$. ε΄) $\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x}=2$. στ΄) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-4}$.

ζ΄) $(x+2)(2x+1)+(x-1)(3x+2)=57$.

η') $\frac{x-5}{x+3}+\frac{x-8}{x-3}=\frac{80}{x^2-9}+\frac{1}{2}$. θ') $\frac{2x+1}{7-x}+\frac{4x+1}{7+x}=\frac{45}{49-x^2}+1$.

ι') $\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{1-x}{x+2}=\frac{2}{5(x-2)}$.

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως τὰς α') $x^2+2\alpha x=3\alpha^2$. β') $2\alpha^2x^2+\alpha x-1=0$.

γ') $\frac{2x^2}{3}+\frac{\alpha x}{4}=11\alpha(x-3\alpha)$. δ') $\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{2\alpha}=\frac{3}{2\alpha^2}$.

ε') $\frac{2\alpha+x}{2\alpha-x}+\frac{\alpha-2x}{\alpha+2x}=\frac{8}{3}$. στ') $\frac{x+\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{\beta-\alpha}{x+\alpha}=2$.

ζ') $\frac{1}{\alpha+\beta+x}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{x}$. η') $\lambda x^2-1=\frac{x(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda\mu}$.

θ') $\frac{x^2}{3\lambda-2\alpha}-\frac{\lambda^2-4\alpha^2}{4\alpha-6\lambda}=\frac{x}{2}$. ι') $\frac{x+3\beta}{8\alpha^2-12\alpha\beta}-\frac{3\beta}{9\beta^2-4\alpha^2}-$

$$-\frac{\alpha+3\beta}{(2\alpha+3\beta)(x-3\beta)}=0.$$

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, προσθέτομεν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς τὸ τετράγωνον τοῦ πηλίκου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2.

Οὕτω διὰ τὴν ἐξίσωσιν $4x^2-23x=-30$, προσθέτομεν τὸ

$\left(\frac{23}{4}\right)^2$ καὶ ἔχομεν $4x^2-23x+\left(\frac{23}{4}\right)^2=\frac{529}{16}-30=\frac{49}{16}$. Ἐξ οὗ ἔχομεν

$\left(2x-\frac{23}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$, καὶ $2x-\frac{23}{4}=\frac{7}{4}$ καὶ $2x-\frac{23}{4}=-\frac{7}{4}$, ἐκ τῶν

ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς δύο ῥίζας $x=3\frac{3}{4}$ καὶ $x=2$.

2) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 νὰ γίνῃ τέλειον τετράγωνον, καὶ ἀκολούθως προχωροῦμεν ὡς ἀνωτέρω. Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $-3x^2+5x=-2$ πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ἐπὶ -3, καὶ ἔχομεν $9x^2-15x=6$, τὴν ὁποίαν λύομεν καὶ κατὰ τἀνωτέρω.

3) Ἐνίοτε λύομεν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ δι' ἀναλύσεως τοῦ τριωνύμου αὐτῆς εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2+7x-60=0$. Ἐπειδὴ τὸ $x^2+7x-60=(x+12)(x-5)$, (§ 47, θ'), ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω $(x+12)(x-5)=0$.

Ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων $x+12$ καὶ $x-5$ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, τὸ γινόμενον γίνεται μηδέν, καὶ ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται. Ἑπομένως, ἂν θέσωμεν καθένα τούτων ἴσον μὲ μηδέν, θὰ ἔχωμεν $x+12=0$ καὶ $x-5=0$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς δύο ῥίζας $x=-12$ καὶ $x=5$.

4) Διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας καὶ ἐξισώσεων ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3 - x^2 - 6x = 0$, γράφομεν $x(x^2 - x - 6) = 0$, ἢ $x(x-3)(x+2) = 0$. Αὐτὴ ἐπαληθεύεται ὅταν εἶνε $x = 0$, $x = 3$, $x = -2$. Ἤτοι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εἶνε 0· 3· —2.

5) Νὰ λυθοῦν διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.
α΄) $x^3 - 8 = 0$. β΄) $x^3 + 8 = 0$. γ΄) $x^4 - 16 = 0$. δ΄) $(3x^3 + 2x^2)(3x+2) = 0$.
ε΄) $x^3 + x^2 - 4(x+1) = 0$. στ΄) $x^3 - 27 - 13(x-3) = 0$.
ζ΄) $x^2 - 4x - 5 = 0$. η΄) $5x^2 - 16x + 11 = 0$. θ΄) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$.
ι΄) $(x-3)\,x\,(\alpha x - 1)(\beta x - 1) = 0$.

§ 105. Περὶ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.—

α΄) Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τἀνωτέρω

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \qquad \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐὰν τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶνε θετικόν, αἱ ρίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Διότι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ποσότητος θετικῆς δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν καὶ εἶνε διπλῆ.

β΄) Ἐὰν τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶνε τέλειον τετράγωνον, αἱ ρίζαι εἶνε σύμμετροι, ἄλλως ἀσύμμετροι.

γ΄) Ἐὰν τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, αἱ δύο ρίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $\frac{-\beta}{2\alpha}$.

δ΄) Ἐὰν τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶνε ἀρνητικόν, αἱ ρίζαι εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς, ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τοῦ ἀρνητικοῦ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς, εἶνε δὲ αὗται αἱ

$$\rho_1 = \frac{-\beta + i\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}, \qquad \rho_2 = \frac{-\beta - i\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}.$$

ε΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Εἶδος τῶν ριζῶν ρ_1 καὶ ρ_2 τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
1) Ἐὰν εἶνε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.
2) Ἐὰν εἶνε $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$.
3) Ἐὰν εἶνε $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Εἶνε $\alpha = 1, \beta = -5, \gamma = 6$ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 24 = 1$.

Ἑπομένως αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2 - 12x + 12 = 0$.

Εἶνε $\alpha = 3, \beta = -12, \gamma = 12$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 144 - 144 = 0$.

Ἄρα αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x^2 - 3x + 4 = 0$

εἶνε $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 4$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 9 - 32 = -23$.

Ἄρα αἱ ρίζαι ταύτης εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν.

α′) $x^2 + 5x - 15 = 0$ β′) $x^2 - 5x + 15 = 0$. γ′) $x^2 + 3x + 9 = 0$.

δ′) $6x^2 - x + 7 = 0$. ε′) $9x^2 + x - 33 = 0$. στ′) $5x^2 + 8x + \dfrac{16}{5} = 0$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις $2\mu x^2 + (5\mu + 2)x + (4\mu + 1) = 0$ ἔχει ρίζας ἴσας.

Εἶνε $\alpha = 2\mu$, $\beta = 5\mu + 2$, $\gamma = 4\mu + 1$. Διὰ νὰ εἶνε αἱ ρίζαι ἴσαι πρέπει νὰ ἔχωμεν $(5\mu + 2)^2 - 8\mu(4\mu + 1) = 0$. Ἐὰν αὐτὴν λύσωμεν ὡς πρὸς μ, εὑρίσκομεν $\mu = 2$ καὶ $\mu = -\dfrac{2}{7}$.

2) Ὁμοίως καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις

α′) $(\mu + 1)x^2 + 2(\mu - 1)x + \mu + 1 = 0$. β′) $(2\mu - 3)x^2 + \mu x + \mu - 1 = 0$.

γ′) $2\mu x^2 + 3\mu x - 6 = 3x - 2\mu - x^2$. δ′) $\mu x^2 + 9x - 10 = 3\mu x - 2x^2 + 2\mu$.

§ 106. Σχέσεις μεταξὺ συντελεστῶν καὶ ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.—

α′) Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ριζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἔχομεν

$$\varrho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \varrho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (1)$$

Ἐὰν τὰς ἰσότητας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ τὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

β′) Ἐὰν τὰς ἰσότητας (1) πολλαπλασιάσωμεν κατὰ τὰ μέλη, ἔχομεν

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right)\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right)}{4\alpha^2}$$

Εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν (—β) καὶ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$.

Τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶνε ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ μὲ

$$\beta^2-\left(\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\right)^2=\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)=4\alpha\gamma.$$

Ἐπομένως ἔχομεν $\quad \varrho_1 . \varrho_2=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$

γ) Ἐὰν τὰς ἰσότητας (1) ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\quad \varrho_1-\varrho_2=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}$

δ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Ἄν ϱ_1, ϱ_2 εἶνε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$,

θὰ εἶνε 1) $\varrho_1+\varrho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, $\quad$ 2) $\varrho_1 \cdot \varrho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

3) $\varrho_1-\varrho_2=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}$

ε') Ἄν ζητῆται νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $(\varrho_1^2+\varrho_2^2)$ τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε ρίζαι αὐτῆς, θὰ εἶνε

$\alpha\varrho_1^2+\beta\varrho_1+\gamma=0, \quad \alpha\varrho_2^2+\beta\varrho_2+\gamma=0.$ (2)

Ἐὰν ταύτας προσθέσωμεν κατὰ τὰ μέλη εὑρίσκομεν

$\alpha(\varrho_1^2+\varrho_2^2)+\beta(\varrho_1+\varrho_2)+2\gamma=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$\varrho_1^2+\varrho_2^2=-\frac{\beta(\varrho_1+\varrho_2)+2\gamma}{\alpha}$. Ἄν ἀντὶ τοῦ $\varrho_1+\varrho_2$ θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτοῦ $\frac{-\beta}{\alpha}$, εὑρίσκομεν $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$.

στ') Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ $(\varrho_1^3+\varrho_2^3)$ πολλαπλασιάζομεν τὰς (2) ἐπὶ ϱ_1 καὶ ϱ_2 ἀντιστοίχως, προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη, καὶ ἀκολούθως λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἰσότητα ὡς πρὸς $\varrho_1^3+\varrho_2^3$, ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $(\varrho_1^2+\varrho_2^2)$ καὶ τὸ $\varrho_1+\varrho_2$ διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν, τὰ ὁποῖα εὑρήκαμεν ἀνωτέρω.

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον, τὴν διαφοράν, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων, τῶν ριζῶν τῆς $x^2 + \pi x + k = 0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

2) Προσδιορίσατε τὸν λ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 + (\lambda - 2)\,x - (\lambda + 3) = 0$ νὰ εἶνε ἴσον μὲ δοθέντα ἀριθμὸν μ.

$\lambda = 1 \pm \sqrt{\mu - 9}$.

3) Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν β καὶ γ, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχουν λόγον λ; $\frac{\beta^2}{\gamma} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}$.

4) Εὕρετε σχέσιν μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἶνε ἀνάλογοι τῶν μ καὶ ν. $\frac{(\mu+\nu)^2}{\mu\nu} = \frac{\beta^2}{\alpha\gamma}$.

5) Προσδιορίσατε τὰ β, γ, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, νὰ εἶνε 4, τῶν δὲ κύβων των 208. $\beta = \pm 8, \gamma = 12$.

6) Προσδιορίσατε τὸ ν, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\alpha - \beta)^2 x^2 + 2(\alpha^2 - \beta)x + {} + \nu = 0$ εἶνε ἴσαι (ἢ ἀντίστροφοι). $(\alpha \pm \beta)^2$.

7) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γ, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 10\,x + \gamma = 0$ εἶνε φανταστικαί. $\gamma > \frac{25}{3}$.

8) Προσδιορίσατε τὸ γ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 8\,x + \gamma = 0$ νὰ πληροῦν τὰς ἑξῆς σχέσεις

α΄) $\rho_1 = \rho_2$. β΄) $\rho_1 = 3\,\rho_2$. γ΄) $\rho_1\rho_2 = \pm 1$. δ΄) $3\rho_1 = 4\rho_2 + 3$.
ε΄) $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 40$. 16· 12· $\pm$ 1· 15· 12.

§ 107. Πῶς εὑρίσκομεν δύο ἀριθμούς, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν.—

Ἔστω β τὸ ἄθροισμα καὶ γ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ἂν καλέσωμεν ϱ_1 καὶ ϱ_2 τοὺς ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν $\varrho_1 + \varrho_2 = \beta$, $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \gamma$. Ἑπομένως τὰ ϱ_1, ϱ_2 εἶνε αἱ ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 εἶνε ἡ μονάς, τοῦ x τὸ $-\beta$, ὁ δὲ σταθερὸς ὅρος εἶνε τὸ γ. Δηλαδὴ τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 - \beta\,x + \gamma = 0.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς.

ΑΣΚΗΣΙΣ. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα 18· 14·5—10·5, γινόμενον δὲ 45·49·—12· 22· 6 ἀντιστοίχως.

§ 108. Τροπὴ διπλῶν τινων ριζικῶν εἰς ἁπλᾶ.—

Δοθείσης παραστάσεως τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

ἐχούσης διπλοῦν ριζικόν, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλην, ἔχουσαν ἁπλᾶ ριζικά, ὅταν τὸ $A^2 - B$ εἶνε τέλειον τετράγωνον.

Ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ καὶ θέσωμεν $A^2 - B = \Gamma^2$

θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}$

Διότι ἂν θέσωμεν $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\psi} + \sqrt{\omega}$

καὶ $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\psi} - \sqrt{\omega}$

θὰ ἔχωμεν, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετάγωνον

$$A + \sqrt{B} = \psi + \omega + 2\sqrt{\psi\omega}$$
$$A - \sqrt{B} = \psi + \omega - 2\sqrt{\psi\omega}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$A = \psi + \omega,$$

ἀφαιροῦντες δὲ αὐτὰς $2\sqrt{B} = 4\sqrt{\psi\omega}$, $\frac{\sqrt{B}}{2} = \sqrt{\psi\omega}$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον

$$\frac{B}{4} = \psi\,\omega.$$

Οὕτω εὑρήκαμεν $\psi + \omega = A$, καὶ $\psi\,\omega = \frac{B}{4}$.

Γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα A καὶ τὸ γινόμενον $\frac{B}{4}$ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ψ καὶ ω. Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶνε ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - A\,x + \frac{B}{4} = 0$.

Αἱ ρίζαι ταύτης εἶνε αἱ $\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$, $\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$.

Ἤτοι ἔχομεν $y = \frac{A+\Gamma}{2}$, $\omega = \frac{A-\Gamma}{2}$ (ἐπειδὴ ὑποτίθεται

$A^2 - B = \Gamma^2$ καὶ $\sqrt{A^2 - B} = \Gamma$).

Ἐπομένως εἶνε $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\psi}+\sqrt{\omega}=\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}}+\sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}$,

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\psi}-\sqrt{\omega}=\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}}-\sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}$$

Ἤτοι $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}$, ἂν εἶνε $\Gamma=\sqrt{A^2-B}$.

Ἔστω π.χ. τὸ $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Ἔχομεν $A=2, B=3. A^2-B=4-3=1, \Gamma=1.$

Ἐπομένως $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Τρέψατε τὰς ἑπομένας παραστάσεις εἰς ἄλλας ἴσας αὐτῶν, ἐχούσας ἁπλᾶ ῥιζικά.

α΄) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$. β΄) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. γ΄) $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

δ΄) $\sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}$. ε΄) $\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$.

στ΄) $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$. ζ΄) $\sqrt{x+xy-2x\sqrt{y}}$

§ 109. Περὶ τοῦ σημείου τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.—

Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ποῖον εἶνε τὸ σημεῖον καθεμιᾶς τῶν ῥιζῶν αὐτῆς, ἂν εἶνε πραγματικαί, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἶνε $\rho_1 . \rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$. καὶ $\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ ἕπεται ὅτι ἔχομεν τὸν ἑξῆς **πίνακα**.

Σημεῖα τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

1) Ἂν εἶνε $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, αἱ ῥίζαι εἶνε ὁμόσημοι· θετικαὶ μέν, ἂν εἶνε καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, ἀρνητικαὶ δέ, ἂν εἶνε καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}<0$.

2) Ἂν εἶνε $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, αἱ ῥίζαι εἶνε ἑτερόσημοι· ἀπολύτως μεγαλυτέρα ἡ θετικὴ μέν, ἂν εἶνε καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, ἡ ἀρνητικὴ δέ, ἂν εἶνε καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}<0$.

3) Ἂν εἶνε $\frac{\gamma}{\alpha}=0$, ἡ μία ῥίζα εἶνε ἴση μὲ μηδέν, ἡ δὲ ἄλλη μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

῎Εστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2+8x+12=0$. Ἔχομεν $\beta^2-4\alpha\gamma = 64-48 =$ θετ. Ἄρα ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε ὁμόσημοι· τὸ $\varrho_1+\varrho_2=-8$, ἑπομένως καὶ αἱ δύο ρίζαι εἶνε ἀρνητικαί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Εὕρετε τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται.

α′) $x^2-8x+12=0$. β′) $5x^2-15x-50=0$. γ′) $7x^2-14x-7=0$.
δ′) $3x^2-6x-12=0$. ε′) $3x^2+12x+4=0$. στ′) $5x^2-15x-1=0$.

§ 110. Τροπὴ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων.—

α′) Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ζητεῖται νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἐλύθη ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Ἔστωσαν ϱ_1 καὶ ϱ_2 αἱ ρίζαι αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ ρίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου. Γνωρίζομεν ὅτι θὰ εἶνε

$$\varrho_1+\varrho_2=-\frac{\beta}{\alpha} \quad (1), \qquad \varrho_1\cdot\varrho_2=\frac{\gamma}{\alpha} \quad (2)$$

Ὑποθέτοντες ὅτι τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, γράφομεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ τὸ ἴσον αὐτοῦ $-(\varrho_1+\varrho_2)$ ἐκ τῆς (1), τὸ δὲ $\frac{\gamma}{\alpha}$ διὰ τοῦ $\varrho_1.\varrho_2$ ἐκ τῆς (2), εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha x^2+\beta x+\gamma$

$$=\alpha\,[x^2-(\varrho_1+\varrho_2)\cdot x+\varrho_1\cdot\varrho_2] \quad =\alpha\,[x^2-\varrho_1.x-\varrho_2.x+\varrho_1\cdot\varrho_2]$$

ἢ $=\alpha\,[(x-\varrho_1).x-\varrho_2.(x-\varrho_1)]=\alpha\,(x-\varrho_1).(x-\varrho_2)$.

Ἤτοι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha.(x-\varrho_1).(x-\varrho_2)$.

β′) Διακρίνομεν ἤδη τὰς ἑξεῖς τρεῖς περιπτώσεις.

1) Ἂν εἶνε ϱ_1, ϱ_2 πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,(x-\varrho_1)\,(x-\varrho_2)$.

2) Ἂν εἶνε $\varrho_1=\varrho_2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,(x-\varrho_1)^2$.

3) Ἂν εἶνε $\varrho_1=\gamma+\delta i$, $\varrho_2=\gamma-\delta i$ (φανταστικαὶ συζυγεῖς), θὰ ἔχωμεν $(x-\varrho_1)=(x-\gamma)-\delta i$, $x-\varrho_2=(x-\gamma)+\delta i$
$(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)=[(x-\gamma)-\delta i][(x-\gamma)+\delta i]=(x-\gamma)^2+\delta^2$.
Ἄρα $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,[(x-\gamma)^2+\delta^2)]$.

γ′) Ἤτοι, *«τὸ τριώνυμον* $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ *τρέπεται εἰς γινόμενον μὲν τοῦ α ἐπὶ δύο πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς* x, *ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως* $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ *εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι· εἰς γινόμενον δὲ τοῦ α ἐπὶ ἓν τέλειον τετράγωνον, ἢ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε ἴσαι, ἢ φανταστικαί».*

Π. χ. διὰ τὸ $2x^2-3x-2$, τοῦ ὁποίου αἱ ρίζαι εἶνε $+2, -\frac{1}{2}$ ἔχομεν $2x^2-3x-2=2(x-2).\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Διὰ τὸ $2x^2-12x+18$, τοῦ ὁποίου αἱ ρίζαι εἶνε ἴσαι μὲ 3, ἔχομεν $2x^2-12x+18=2(x-3)^2$.

§ 111. Πῶς εὑρίσκομεν τριώνυμον β′ βαθμοῦ ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ.—

Ὅταν δοθοῦν αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 ἑνὸς τριωνύμου β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τοῦτο θὰ ἰσοῦται μὲ $(x-\rho_1).(x-\rho_2)=x^2-(\rho_1+\rho_2).x+\rho_1.\rho_2$ πολλαπλασιασμένον τὸ πολὺ ἐπὶ παράγοντά τινα σταθερόν.

Ἤτοι δυνάμεθα τὰ εὕρωμεν τὸ τριώνυμον τοῦτο (παραλειπομένου τοῦ σταθεροῦ παράγοντος) ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ.

Π. χ. τὸ τριώνυμον, τὸ ἔχον ρίζας τὰς 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶνε ἴσον μὲ

$$(x-3).\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-3).\left(\frac{2x-1}{2}\right)=\frac{2x^2-7x+3}{2},$$

τὰ δὲ 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶνε ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2x^2-7x+3=0$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ τριώνυμα
α′) $x^2-9x+18$. β′) x^2+4x+3. γ′) $2x^2+3x-2$.
δ′) $2x^2+12x+18$. ε′) x^2-4x-5. στ′) x^2-5x+6.

2) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα

α′) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. β′) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}$. γ′) $\frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$.

δ′) $\frac{2x^2\ \ 2x-12}{x^2+x-12}$. ε′) $\frac{x^2-6x+5}{3x^2+6x-9}$. στ′) $\frac{x^3-9x+18}{2x^2-12x+18}$

Ὁμὰς δευτέρα. Εὕρετε ἐξίσωσιν β′ βαθμοῦ μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους, ἔχουσαν ρίζας

α′) $3, \frac{1}{2}$· β′) $3+\sqrt{2}$ καὶ $3-\sqrt{2}$. γ′) $4+\frac{2}{\sqrt{5}}$ καὶ $4-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

δ′) $\alpha+\beta, \alpha-\beta$. ε′) $\alpha+\sqrt{\beta}, \alpha-\sqrt{\beta}$, στ′) $\alpha+i\sqrt{\beta}, \alpha-i\sqrt{\beta}$.

ζ′) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha+\beta}$. η′) $2\alpha+\beta, 2\alpha-\beta$. θ′) $\alpha+\sqrt{\alpha}, \alpha-\sqrt{\alpha}$.

§ **112. Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.—**

α΄) Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, καὶ ὅτι τὸ x λαμβάνει πραγματικὰς τιμάς.

Ἂν αἱ ῥίζαι αὐτοῦ ρ_1, ρ_2 εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, (ἔστω δὲ ὅτι εἶνε καὶ $\rho_1 < \rho_2$) θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x-\rho_1).(x-\rho_2)$.

β΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ x εἶνε μικρότερον τοῦ ρ_1, ἑπομένως καὶ τοῦ ρ_2. Τότε τὸ $(x-\rho_1)$ καὶ τὸ $(x-\rho_2)$ εἶνε ἀρνητικά. Τὸ ~~τὸ~~ $(x-\rho_1).(x-\rho_2)$ ὡς γινόμενον ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε θετικόν, τὸ δὲ $\alpha (x-\rho_1)(x-\rho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

γ΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ x εἶνε μεγαλύτερον τοῦ ρ_2, ἑπομένως καὶ τοῦ ρ_1. Τότε τὸ $(x-\rho_1)$ καὶ $(x-\rho_2)$ εἶνε θετικά, ἐπίσης τὸ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶνε θετικόν· τὸ δὲ $\alpha (x-\rho_1).(x-\rho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

δ΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ x εἶνε μεγαλύτερον τοῦ ρ_1, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ ρ_2. Δηλαδή, ἔστω ὅτι κεῖται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν. Τότε τὸ $(x-\rho_1)$ εἶνε θετικόν, τὸ δὲ $(x-\rho_2)$ ἀρνητικόν· τὸ $(x-\rho_1).(x-\rho_2)$ εἶνε ἀρνητικόν, ὡς γινόμενον δύο ἑτεροσήμων παραγόντων· ἄρα τὸ $\alpha (x-\rho_1).(x-\rho_2)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α.

ε΄) Ἂν αἱ ῥίζαι ρ_1, ρ_2 εἶνε ἴσαι ἢ φανταστικαί, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x κειμένην ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Διότι ἂν μὲν εἶνε $\rho_1 = \rho_2$, τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x-\rho_1)^2$.

Ἤτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἂν δὲ αἱ ῥίζαι εἶνε φανταστικαὶ τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἑπομένως ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

στ΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

«ὅταν τὸ x ἔχῃ τιμὴν πραγματικήν, κειμένην ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α, ἐνῷ διὰ τιμὴν τοῦ x κειμένην μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α».

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x τὰ κάτωθι τριώνυμα θὰ ἔχουν τιμὰς θετικάς; ἀρνητικάς; μηδέν;

α΄) $2x^2-16x+24$. β΄) $-2x^2+16x-24$. γ΄) $2x^2-16x+32$.
δ΄) $-2x^2+16x-32$. ε΄) $2x^2-16x+40$. στ΄) $-2x^2+16x-40$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Δοθέντος ἀριθμοῦ πραγματικοῦ λ, νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ ὡς πρὸς καθεμίαν τῶν (πραγματικῶν) ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν διὰ $x=\lambda$, τὸ $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α, τὸ λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2. Μένει νὰ εὕρωμεν, ἂν εἶνε μικρότερον τῆς μικροτέρας ρ_1, ἢ μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ρ_2. Ἂν εἶνε $\lambda<\rho_1$, θὰ εἶνε

$$\lambda<\frac{\rho_1+\rho_2}{2},\ \text{ἢ}\ \lambda<-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Ἂν εἶνε $\lambda>\rho_2$, θὰ εἶνε καὶ $\lambda>\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$, ἢ $\lambda>-\frac{\beta}{2\alpha}$. Ἀντιστρόφως, ἀποδείξατε διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι, ἂν εἶνε $\lambda<-\frac{\beta}{2\alpha}$ τότε εἶνε $\lambda<\rho_1$, καὶ ἂν εἶνε $\lambda>-\frac{\beta}{2\alpha}$ θὰ εἶνε $\lambda>\rho_2$. Ἐκ τούτων ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ λ ὡς πρὸς τὰς ρίζας, καθ' ὅσον εἶνε $\lambda \gtrless -\frac{\beta}{2\alpha}$.

2) Τὶς ἡ θέσις τῶν **1**, $\frac{3}{4}$, 5·—1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων

α') $x^2+3x-2=0$. β') $2x^2+7x-1=0$. γ') $x^2-4x+3=0$.

3) *Εὕρεσις τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως* $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ *κατὰ προσέγγισιν.* Ἐὰν διὰ $x=\lambda_1$, λ_2 (λ_1, λ_2 εἶνε ἀριθμοὶ πραγματικοὶ) τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους, μεταξὺ τῶν λ_1, λ_2 περιέχεται μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (ἐχούσης ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους).

Διότι τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 αἱ ρίζαι.
Διὰ $x=\lambda_1$ γίνεται $\alpha(\lambda_1-\rho_1)(\lambda_1-\rho_2)$.
Διὰ $x=\lambda_2$ γίνεται $\alpha(\lambda_2-\rho_1)(\lambda_2-\rho_2)$. Ἂν λοιπὸν τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἑτερόσημα, τὸ πηλίκον των $\frac{(\lambda_1-\rho_1)(\lambda_1-\rho_2)}{(\lambda_2-\rho_1)(\lambda_2-\rho_2)}$ εἶνε ἀρνητικόν. Ἂν ὁ παράγων $\frac{\lambda_1-\rho_1}{\lambda_2-\rho_1}$ εἶνε <0, ἔστω $\lambda_1-\rho_1>0$, $\lambda_2-\rho_1<0$, τότε $\lambda_1>\rho_1$, $\lambda_2<\rho_1$. Δηλαδὴ $\lambda_1>\rho_1>\lambda_2$. Ἤτοι ἡ ρίζα ρ_1 περιέχεται μεταξὺ τῶν λ_1 καὶ λ_2.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς στηριζόμενοι, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς (πραγματικὰς) ρίζας ἐξισώσεως κατὰ προσέγγισιν. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $8x^2-2x-3=0$. Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x δύο ἀριθμούς, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x εἰς τὸ $8x^2-2x-3$ νὰ εἶνε ἑτερόσημα.

Διὰ $x=0$ εὑρίσκομεν -3, διὰ $x=1$ ἔχομεν $+3$· ἑπομένως μεταξὺ 0 καὶ **1** περιέχεται μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Λαμβάνομεν τώρα τὴν μέσην τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ **1**· δηλαδὴ θέτομεν $x=0{,}5$ ὅτε εὑρίσκομεν $2-4=-2$, ἑπομένως, ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ τοῦ **1**.

Ἡ μέση τιμὴ μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ 1 εἶνε 0,75. Θέτομεν λοιπὸν $x=0{,}75$ καὶ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 0. Ἄρα 0,75 εἶνε ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Διὰ $x=-1$ ἔχομεν $8+2-3=7$. Ἄρα ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ —1. Προσεγγίσατε περισσότερον, ἢ εὕρετε αὐτήν.

§ 113. Λύσις ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ.—

α΄) Καλοῦμεν ἀνισότητα β΄ βαθμοῦ τὴν ἀνισότητα, ἥτις ἔχει τὸν ἄγνωστον αὐτῆς εἰς β΄ βαθμόν.

Πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον, τὸν ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι ἔχει, εἶνε ἐν γένει τῇ μορφῆς

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0, \quad \text{ἢ} \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0,$$

μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρανομαστῶν καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἡ δευτέρα μορφὴ ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων, ὅτε καὶ ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει διεύθυνσιν. Ὥστε πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ θὰ εἶνε τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$,

ὅπου τὸ α δύναται νὰ εἶνε θετικόν ἢ ἀρνητικόν.

β΄) Λύσις τῆς ἀνισότητος $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$

λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶνε θετικόν. Πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τούτων, τὰς ὁποίας θὰ καλοῦμεν *ρίζας τῆς ἀνισότητος*, παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ϱ_1, ϱ_2 εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι $(\varrho_1 < \varrho_2)$ ρίζαι τοῦ τριωνύμου, θὰ εἶνε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\varrho_1).(x-\varrho_2)$. Θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$ εἶνε θετικόν.

γ΄) Ἂν τὸ α εἶνε θετικόν, τὸ ἀνωτέρω γινόμενον γίνεται θετικὸν διὰ $x < \varrho_1$ καὶ $x > \varrho_2$. Ὥστε, ἄν εἶνε τὸ $\alpha > 0$, ρίζαι τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος εἶνε πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τῆς μικροτέρας ρίζης ... εγαλύτεροι τῆς μεγαλυτέρας ϱ_2 τοῦ ἀνωτέρω τριωνύμου.

δ) Ἂν εἶνε $\alpha < 0$, τότε διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2 τὸ γινόμενον $\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, δηλαδὴ θετικόν. Ἑπομένως, ἂν εἶνε $\alpha < 0$, αἱ ρίζαι τῆς ἀνισότητος εἶνε πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2.

ε΄) Ἂν αἱ ρίζαι ϱ_1, ϱ_2 εἶνε ἴσαι, καὶ εἶνε τὸ $\alpha > 0$, τότε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x διάφορον τῆς ρίζης, τὸ γινόμενον $\alpha(x-\varrho_1)^2$ εἶνε θετικόν.

Δηλαδὴ τότε πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε ρίζαι τῆς ἀνισότητος.

Ἂν εἶνε τὸ $\alpha < 0$, ἡ ἀνισότης δὲν ἔχει καμμίαν ρίζαν. Διότι, τότε εἶνε

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x-\varrho_1)^2$ καὶ ἀφοῦ τὸ α εἶνε ἀρνηνικὸν τὸ $\alpha(x-\varrho_1)^2$ εἶνε ἀρνητικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

στ') Ἂν αἱ ρίζαι ϱ_1, ϱ_2 εἶνε φανταστικαί, ἡ ἀνισότης ἔχει ὡς ρίζας πάντα πραγματικὸν ἀριθμὸν μέν, ἂν εἶνε $\alpha > 0$, οὐδεμίαν δέ, ἂν εἶνε $\alpha < 0$. Διότι τὸ τριώνυμον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦτο α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἤτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2 - 3x + 7 > 0$. Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε φανταστικαὶ, τὸ $\alpha = 1 > 0$, ἄρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω ἡ ἀνισότης $x^2 - x - 6 > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε αἱ 2 καὶ —3, τὸ $\alpha = 1 > 0$. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς ἀνισότητος εἶνε αἱ $x < -3$, καὶ $x > 2$,

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνησότητες

α') $x^2 + 3x - 4 > 0$. β') $-x^2 + 3x - 6 > 0$. γ') $\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4} < -2$.

δ') $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} < 1$. ε') $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 2} > 0$. στ') $3 + \frac{1}{3-x} > \frac{1}{5x+1}$

2) Εὕρετε τὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς ἐπαληθευούσας τὰς ἀνισότητας

α') $x^2 - 12x + 32 > 0$, $x^2 - 13x + 22 < 0$, β') $5x^2 - 7x + 1 < 0$, $x^2 - 9x + 30 > 0$. γ') $(x-1)(x^2 - 3x + 2) > 0$, $4x^2 + 5x + 1 < 0$.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

α') $(x-\alpha)(x-\beta).(x-\gamma) > 0$. β') $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) > 0$.

γ') $4x^3 - 10x^2 + 48x < 0$. δ') $3x^3 - 5x^2 + 2x > 0$. ε') $x^3 - x^2 + 4x < 0$, ἂν εἶνε $\alpha < \beta < \gamma < \delta$.

(Γράψατε τὴν γ') π.χ. οὕτω $x(4x^2 - 10x + 48) < 0$).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Μεταξὺ τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ περιέχεται ὁ μ, ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2 + (\mu - 1)x + 2\mu = 0$ ἔχῃ τὰς ρίζας αὐτῆς πραγματικάς, ἴσας φανταστικάς;

2) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, ἵνα ἡ ἀνισότης $x^2 + 2x + \lambda > 10$ ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x;

§ 114.*) Μεταβολὴ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.—

α') Καλοῦμεν *ἀρνητικὸν ἄπειρον*, καὶ παριστάνομεν αὐτὸ μὲ τὸ σύμβολον $-\infty$ τὸν ἀριθμόν, ὅστις εἶνε μικρότερος παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ. Καλοῦμεν *θετικὸν ἄπειρον*, καὶ παριστάνομεν αὐτὸ μὲ τὸ σύμβολον $+\infty$ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις εἶνε μεγαλύτερος παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μεγάλου.

β') Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Θέλομεν νὰ εὕρωμεν πῶς μεταβάλλεται τοῦτο, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$ λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους πραγματικὰς τιμάς. Γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἑξῆς.

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) \\ &= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right] \\ &= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν μὲν εἶνε τὸ $\alpha > 0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία εἶνε ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν· ἂν δ' εἶνε $\alpha < 0$, θὰ ἔχῃ τὸ ἀντίθετον σημεῖον τῆς ἐν ἀγκύλαις ποσότητος.

γ') *Ἔστω ὅτι τὸ α εἶνε θετικόν.* Ὅταν τὸ $x = -\infty$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶνε ἴσον μὲ $+\infty$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς $\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$, μένει πάλιν $+\infty$. Ὥστε διὰ $x = -\infty$ τὸ τριώνυμον γίνεται $+\infty$.

Ἐὰν τὸ x αὐξάνεται, λαμβάνον τιμὰς ἀρνητικὰς ἀλλ' ἀπολύτως μεγαλυτέρας τοῦ $\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶνε ἀρνητικόν, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶνε θετικόν, καὶ ἐλαττοῦται διηνεκῶς.

Ὅταν τὸ x γίνῃ ἴσον μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται ἴσον μὲ μηδέν, τὸ δὲ τριώνυμον μὲ $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \cdot \alpha$. Ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ διηνεκῶς μέχρις ὅτου γίνει $+\infty$, ἡ ποσότης $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶνε θετική, καὶ αὐξάνεται διηνεκῶς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἄρα καὶ τὸ τριώνυμον αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \cdot \alpha$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

δ') *Ἔστω ὅτι τὸ α εἶνε ἀρνητικόν*. Ὅταν τὸ $x = -\infty$ τὸ τριώνυμον εἶνε $-\infty$. Ὅταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ τὸ τριώνυμον ἰσοῦται μὲ $+\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\cdot\alpha$, καὶ διὰ $x = +\infty$ γίνεται πάλιν $=$ μὲ $-\infty$.

Ἤτοι ἐνῶ ὅταν εἶνε τὸ $\alpha > 0$ διὰ $x = -\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$ τὸ τριώνυμον ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἔπειτα αὐξάνεται μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν τὸ εἶνε $\alpha < 0$ διὰ $x = -\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$ αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$, γίνεται ἴσον μὲ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἐλαττοῦται πάλιν μέχρι τοῦ $-\infty$.

ε') Ὅταν μία τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει μεταβλητὴ ποσότης, εἶνε μεγαλυτέρα πασῶν τῶν ἄλλων τιμῶν αὐτῆς, λέγομεν ὅτι αὐτὴ εἶνε *μέγιστον* τῆς μεταβλητῆς. Τοὐναντίον, ἐὰν μία τῶν τιμῶν μεταβλητῆς ποσότητος εἶνε ἡ μικροτέρα τῶν ἄλλων τιμῶν αὐτῆς, καλοῦμεν αὐτὴν *ἐλάχιστον* τῆς μεταβλητῆς.

στ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι,

«ὅταν μὲν τὸ α εἶνε θετικόν, τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ***ἔχει ἐλάχιστον διὰ*** $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, ***ὅταν δὲ τὸ α εἶνε ἀρνητικόν, ἔχει μέγιστον διὰ*** $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ **»**.

Ἔστω π.χ. τὸ τριώνυμον $3x^2 - 6x + 7$.

Τὸ $\alpha = 3 > 0$, ἄρα ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{6} = 1$.

Θέτοντες $x = 1$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐλάχιστον εἶνε 4.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Διὰ καθὲν τῶν κάτωθι τριωνύμων νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ διὰ τίνα τιμὴν τοῦ x εὑρίσκεται τοῦτο.

α') $-x^2 + 4x + 3$. β') $19x^2 - 6x + 3$. γ') $x^2 - 7x + 13$.
δ') $7x^2 - 6x + 3$. ε') $15x^2 + 12x - 7$. στ') $-x^2 + 3x - 6$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἐργαζόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ γίνῃ τὸ τριώνυμον ἴσον μὲ τὸ y, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma - y = 0$. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ῥίζας πραγματικάς, πρέπει νὰ εἶνε $\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y \geq 0$,
ἢ $4\alpha y \geq 4\alpha\gamma - \beta^2$.

Ἑπομένως, ἂν μὲν εἶνε τὸ $\alpha>0$ θὰ ἔχωμεν $y \geq \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Δηλαδὴ τὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἢ τὸ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ εἶνε τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου. Ἂν δὲ εἶνε τὸ $\alpha<0$ τότε εἶνε $y\leq \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Δηλαδὴ τὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, ἢ τὸ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ εἶνε τὸ μέγιστον τοῦ τριωνύμου.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τοῦ $\frac{\beta(\alpha^2+x^2)}{2(\alpha+x)}$.

Θέτομεν $y=\frac{\beta(\alpha^2+x^2)}{2(\alpha+x)}$, (1)

ἢ $\beta x^2-2yx+\alpha(\alpha\beta-2y)=0$. Διὰ νὰ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης πραγματικαί, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$y^2-\alpha\beta(\alpha\beta-2y)\geq 0, \quad \text{ἢ} \quad y^2+2\alpha\beta y-\alpha^2\beta^2\geq 0.$$

Ἐὰν τὴν τελευταίαν αὐτὴν ἀνισότητα λύσωμεν ὡς πρὸς y, ἔχομεν ὅτι

$$y\leq -\alpha\beta(1+\sqrt{2}) \quad \text{καὶ} \quad y\geq \alpha\beta(-1+\sqrt{2}).$$

Ἑπομένως τὸ $y=-\alpha\beta(1+\sqrt{2})$ εἶνε μέγιστον, τὸ δὲ $y=\alpha\beta(-1+\sqrt{2})$ ἐλάχιστον τῆς δοθείσης παραστάσεως. Ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν διαδοχικῶς ἀντὶ τοῦ y τὰς δύο αὐτὰς τιμάς, καὶ λύσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέγιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς $x=-\alpha(1+\sqrt{2})$, τὸ δὲ ἐλάχιστον εἰς $x=\alpha(-1+\sqrt{2})$.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῶν

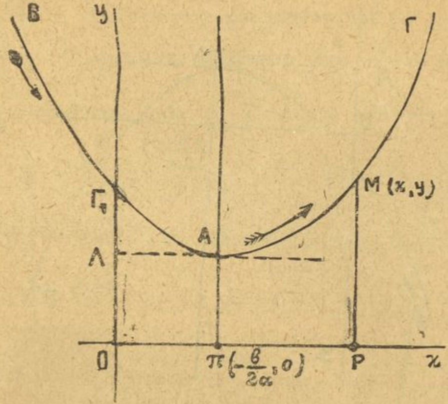
α΄) $\frac{\alpha+x}{\alpha-x}+\frac{\alpha-x}{\alpha+x}$. β΄) $\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}$. γ΄) $\frac{4x^2+1}{x^2-2x+1}$. δ΄) $\frac{1-2x^2}{x^2+4x+4}$.

§ 115*). Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.—

α΄) Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν αὐτοῦ, θέτομεν $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, (1) καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

β΄) *Ὅταν τὸ α εἶνε θετικόν*. Γνωρίζομεν (§ 114) ὅτι, ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ y ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἑπομένως ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1), (ἂν τὰς τιμὰς τοῦ x θεωρήσωμεν ὡς τετμημένας, τὰς δὲ τοῦ y ὡς τεταγμένας σημείων ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $0x$, $0y$), θὰ ἔχῃ ἕνα κλάδον, ὁ ὁποῖος θὰ ἀναχωρῇ ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐν τῇ γωνίᾳ $y0x'$ καὶ εἶνε πολὺ μεμακρυσμένον (ἔχει τετμημένην $-\infty$ καὶ τεταγμένην $+\infty$), διέρχεται δὲ κατερχόμενος διὰ τοῦ σημείου Α, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τεταγμένην $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (Σχ. 8).



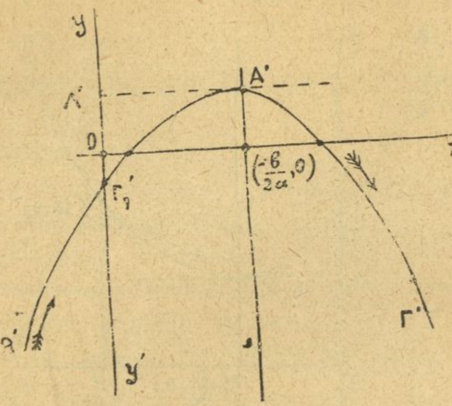
(Σχ. 8)

Ὅταν τὸ x ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ αὐξάνεται εἰς τὸ $+\infty$, ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἄλλον κλάδον τῆς γραμμῆς, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον ἐν τῇ γωνίᾳ x o y, ἔχον τετμημένην καὶ τεταγμένην ἴσας μὲ $+\infty$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ὅταν τὸ α εἶνε θετικὸν παριστάνει τὴν καμπύλην ΒΑΓ (Σχ. 8).

γ') *Ὅταν τὸ α εἶνε ἀρνητικόν.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{-\beta}{2\alpha}$, τὸ y αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἑπομένως, διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἕνα κλάδον, ὁ ὁποῖος ἔρχεται ἀπὸ ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον καὶ κείμενον ἐν τῇ γωνίᾳ x′ o y′, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη εἶνε ἴσαι μὲ $-\infty$, καταλήγει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Α′, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν τετμημένη ἰσοῦται μὲ $\frac{-\beta}{2\alpha}$ ἡ δὲ τεταγμένη μὲ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (Σχ. 9).

Όταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ $\frac{-\beta}{2\,\alpha}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ τριώνυμον, ἄρα καὶ τὸ y, ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{4\,\alpha\,\gamma - \beta^2}{4\,\alpha}$ μέχρι τοῦ $-\infty$, καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς παριστάνει κλάδον καμπύλης γραμ-



(Σχ. 9).

μῆς, ὁ ὁποῖος ἄρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α′ καὶ τελειώνει εἰς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον, κείμενον ἐν τῇ γωνίᾳ x o y′, καὶ ἔχον τετμημένην καὶ τεταγμένην ἴσας μὲ $+\infty$ καὶ $-\infty$ ἀντιστοίχως (Σχ. 9).

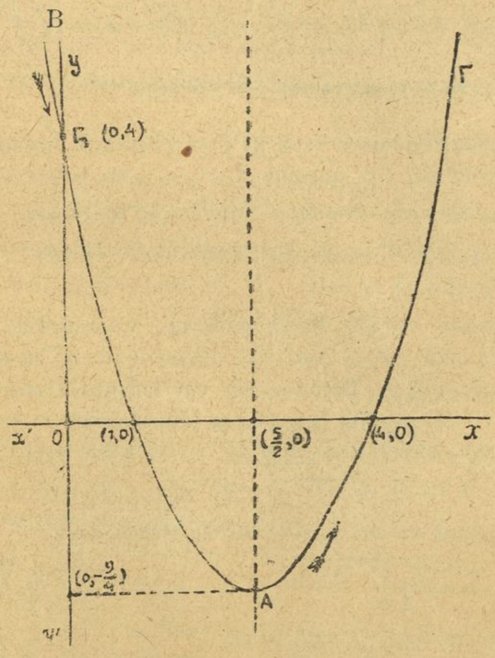
δ′) Διὰ νὰ εὕρωμεν ποῦ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς θὰ ἔχωμεν $x = 0$. Ἀλλ᾿ ἂν θέσωμεν $x = 0$ εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν $y = \gamma$. Ὥστε ἡ καμπύλη τέμνει τὸν y o y′ εἰς τὸ σημεῖον Γ_1 ἢ τὸ Γ'_1, ἔχον τεταγμένην ἴσην μὲ γ. Ἂν ϱ_1, ϱ_2 εἶνε αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου, διὰ $x = \varrho_1$, ϱ_2 ἔχομεν $y = 0$. Ἕπεται ὅτι ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα, τὰ ἔχοντα τετμημένην ϱ_1 καὶ ϱ_2. Ἂν τὰ ϱ_1, ϱ_2 εἶνε φανταστικά, ἡ καμπύλη δὲν τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

ε′) Ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται συνήθως *παραβολή*, τῆς ὁποίας ἡ θέσις ἀλλάσσει μετὰ τοῦ σημείου τοῦ α, καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ τριωνύμου.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $y = x^2 - 5\,x + 4$.

Ἔχομεν $y = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

Όταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{5}{2}$, τὸ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ μηδενός, τὸ δὲ y ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{9}{4}$. Οὕτω ἡ καμπύλη ἔχει κλάδον Β Α (Σχ. 10), ἐρχόμενον ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην καὶ τεταγμένην $-\infty$ καὶ $+\infty$ ἀντιστοίχως καὶ περατούμενον εἰς τὸ σημεῖον Α $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$. Όταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ $\frac{5}{2}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ αὐξάνεται ἀπὸ τὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ δὲ y



(Σχ. 10).

αὐξάνεται ἀπὸ $-\frac{9}{4}$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἡ καμπύλη λοιπὸν ἔχει καὶ δεύτερον κλάδον Α Γ, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Α $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ καὶ ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον μέχρι τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας $+\infty$ καὶ $+\infty$ (Σχ. 10).

Διὰ $x = 0$ τὸ y εἶνε ἴσον μὲ 4. Ἄρα ἡ καμπύλη κόπτει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον Γ_1 (0,4). Ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον (1,0) καὶ (4,0) ἐπειδὴ εἶνε $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ ἐξετασθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῶν

α′) $y = x^2 - x - 3$. β′) $y = 3x^2 - 7x + 3$.

γ′) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x-3}$. δ′) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$. Ἐν τῇ γ′) διὰ $x = -1$ καὶ $x = 3$ τὸ $y = \infty$. Διὰ $1 : x = 0$, ἢ $x = \infty$ τὸ $y = 1$. Αἱ εὐθεῖαι $x = -1$, $x = 3$, $y = 1$ λέγονται *ἀσύμπτωτοι* τῆς γραμμῆς γ′).

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις β′ βαθμοῦ.

§ 116. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.—

α′) Καλοῦμεν ἐξίσωσίν τινα μὲ ἕνα ἄγνωστον διτετράγωνον, ἐὰν μετὰ τὰς ἀγωγὰς ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$. (1)

β′) Πρὸς λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως γράφομεν

$x^2 = y$, ὅτε $x^4 = y^2$, καὶ ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν τὴν

$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$.

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (2) θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ y, καὶ ἔστωσαν αὗται αἱ y_1 καὶ y_2. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τῆς (1), δηλαδὴ τὰς τιμὰς τοῦ x, θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα $x^2 = y$ ὅπου y τὴν τιμὴν αὐτοῦ y_1 καὶ y_2, ὅτε ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2 = y_1$, $x^2 = y_2$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $x = \pm\sqrt{y_1}$, $x = \pm\sqrt{y_2}$

ἢ $x = +\sqrt{y_1}$, $-\sqrt{y_1}$, $+\sqrt{y_2}$, $-\sqrt{y_2}$.

Ἀλλ' αἱ τιμαὶ y_1 καὶ y_2 εἶνε καθὼς γνωρίζομεν

$$y_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \qquad y_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἑπομένως ἂν παραστήσωμεν διὰ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 τὰς ῥίζας τῆς (1) θὰ ἔχωμεν

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \qquad \varrho_2 = -\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$$\varrho_3 = \sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \qquad \varrho_4 = -\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Ἔχομεν $\alpha = 1$, $\beta = -10$, $\gamma = 9$.

$\frac{3+4}{2}$ $\pm 3+\sqrt{3}$

$x = 3+\sqrt{3}$

Ἑπομένως $\dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \dfrac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{10 \pm 8}{2} = 9 \cdot$ ἢ 1

καὶ $\varrho_1 = -3,\ \varrho_2 = -1,\ \varrho_3 = 1,\ \varrho_4 = 3.$

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^4 + x^2 - 12 = 0.$

Εἶνε $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = -12,$

καὶ $\dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = 3$ ἢ $-4.$

Ἑπομένως εἶνε $\varrho_1 = -\sqrt{3},\ \varrho_2 = \sqrt{3},\ \varrho_3 = 2i,\ \varrho_4 = -2i.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α') $x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$ β') $x^4 - 14x^2 = 5.$ γ') $x^4 + 5x^2 = \frac{11}{4}.$

δ') $x^4 - \frac{7x^2}{3} = \frac{2}{3}.$ ε') $3x^4 - 14x^2 = 5.$ στ') $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0.$

ζ') $\alpha^2\beta^2x^4 - (\alpha^4+\beta^4)x^2 + \alpha^2\beta^2 = 0.$ η') $x^4 + 4\alpha\beta x^2 - (\alpha^2-\beta^2)^2 = 0,$

θ') $\gamma^4 x^4 + (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)x^2 - \alpha^2\beta^2 = 0.$ ι') $x^4 + x^2 - 2x^4 + 3 = 0.$

§ 117. Ἀνάλυσις διτετραγώνου τριωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων.—

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma.$

Ἐὰν θέσωμεν $x^2 = y$ τρέπεται αὐτὸ εἰς τὸ $\alpha y^2 + \beta y + \gamma.$ Ἀλλ' ἂν y_1 καὶ y_2 εἶνε αἱ ῥίζαι τούτου, θὰ ἔχωμεν καθὼς γνωρίζομεν ὅτι, $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = \alpha(y-y_1)\cdot(y-y_2).$
Ἐπαναφέροντες ἀντὶ τοῦ y τὸ x^2, εὑρίσκομεν

$$\alpha x^4 + \beta x + \gamma = \alpha(x^2-y_1)(x^2-y_2)$$

ἢ $$= \alpha(x+\sqrt{y_1})(x-\sqrt{y_1})(x+\sqrt{y_2})(x-\sqrt{y_2}).$$

Ἄρα $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)(x-\varrho_3)(x-\varrho_4),$ ὅπου $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ εἶνε αἱ ῥίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ
α') $4x^4 - 17x^2 + 1.$ β') $7x^4 - 35x^2 + 28.$ γ') $x^4 - 13x^2 + 36$

2) Εὕρετε τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ῥίζας τὰς
α') $\pm 3, \pm 1.$ β') $\pm\alpha, \pm\sqrt{\alpha}.$ γ') $\pm 0{,}5, \pm 4i.$ δ') $\pm 3, \pm i.$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εὕρετε τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, ὅταν τὸ x εἶνε ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν του $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ (ἂν εἶνε $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_4$). Δηλαδὴ ἂν $x < \varrho_1$, ἢ $x > \varrho_4$, καὶ ὅταν τὸ x κεῖται μεταξὺ δύο ῥιζῶν, δηλαδὴ ἂν εἶνε $\varrho_1 < x < \varrho_2$, $\varrho_2 < x < \varrho_3$, καὶ $\varrho_3 < x < \varrho_4$. (Διακρίνατε δύο περιπτώσεις ὅταν $\alpha > 0$ καὶ ὅταν $\alpha < 0$).

2) Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2 - (\lambda^2+1)x + (\lambda^2+3) = 0$ τίνα τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, διὰ νὰ διαφέρουν αἱ ῥίζαι αὐτῆς κατὰ 1;

§ 118. Λύσις ἐξισώσεων μὲ ριζικά.—

α') Ἐξίσωσίς τις λέγεται *μὲ ριζικόν*, ἂν ἔχῃ τοὐλάχιστον ἓν ριζικὸν ὑπὸ τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως.

Οὕτω αἱ ἐξισώσεις $\sqrt[3]{2x+6} = 2$, $4 + \sqrt{x^2+5} = x - 1$ λέγονται ἐξισώσεις μὲ ριζικά.

β') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt[3]{2x+6} = 2$.

Διὰ νὰ ἐξαλειφθῇ τὸ ριζικόν, ὑψοῦμεν τὰ ἴσα εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, ὅτε προκύπτει ἡ $2x + 6 = 2^3 = 8$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, εὑρίσκομεν $x = 1$.

Θέτοντες $x = 1$ εἰς τὴν δοθεῖσαν, εὑρίσκομεν $\sqrt[3]{2.1+6} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Ἤτοι ἐπαληθεύεται διὰ $x = 1$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $4 + \sqrt{x^2+5} = x - 1$.

Διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸ ριζικόν, πρῶτον ἀπομονώνομεν αὐτό, δηλαδὴ μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ ριζικὸν εἰς τὸ ἓν μέλος αὐτῆς.

Οὕτω ἔχομεν τὴν $\sqrt{x^2+5} = x - 5$.

Τώρα ὑψοῦμεν τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + 2 = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$, ἢ $10x = 20$, ἥτις δὲν εἶνε, ἐν γένει ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν (§ 101).

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $x = 2$.

Ἐὰν θέσωμεν $x = 2$ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καὶ λάβωμεν μόνον τὴν θετικὴν ρίζαν τοῦ $\sqrt{2^2+5} = \sqrt{9}$, δηλαδὴ μόνον τὸ 3, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν ἐπαληθεύεται. Ἂν ὅμως λάβωμεν καὶ τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν -3 τῆς $\sqrt{9}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ $x = 2$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

γ') «***Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν μὲ ριζικά, ἀπομονώνομεν τὰ ριζικὰ ὥστε, ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς νέας ἐξισώσεως εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν, νὰ προκύπτῃ ἐξίσωσις χωρὶς ριζικά. Ἀκολούθως λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, καὶ δοκιμάζομεν, ἂν αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶνε καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως***».

Ἂν ἔχωμεν π. χ. τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν, ἀφοῦ ἀπομονώσωμεν τὸ ριζικὸν $2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x$.
Ὑψοῦντες πάλιν τὰ ἴσα εἰς ταῦτα τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$4(x+5)(2x+8)=(36-3x)^2$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ τὴν ἀναγωγὴν $x^2-288x+1136=0$.
Αἱ ρίζαι ταύτης εἶνε $x=4$, $x=284$.

Θέτοντες $x=4$ καὶ $x=284$ εἰς τὴν δοθεῖσαν, εὑρίσκομεν ὅτι μόνον ἡ $x=4$ τὴν ἐπαληθεύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1). Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν.

α′) $\sqrt{x+4}=7$. β′) $\sqrt{36+x}=\sqrt{x}+2$. γ′) $x+\sqrt{25-x^2}=7$.

(45 64· 3 καὶ 4).

δ′) $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$. ε′) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{15-x}$.

στ′) $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. (1, 25·9 4).

2) Ὁμοίως αἱ α′) $3.9^{\frac{x}{2}+1,5}-9.9^{\frac{x}{2}}=9.2^{x+3}+5\,9^{\frac{x}{2}+0,5}$

β′) $\sqrt[3]{7^{2x-3}}+\sqrt{7^{2x+3}}=7^3+7^5$ γ′) $\dfrac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha+x}}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}=\sqrt{\beta}$.

δ′) $\dfrac{(1-\alpha x).\sqrt{1+\beta x}}{(1+\alpha x).\sqrt{1-\beta x}}=1$. $\left(\text{Ἀπ. } \dfrac{2\alpha\sqrt{\beta}}{1+\beta},\ \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{2\alpha}{\beta}-1}\right)$.

§ 119. Ἐξισώσεις τριώνυμοι —

α′) Καλοῦμεν ἐξίσωσίν τινα *τριώνυμον,* ἂν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς (ὅταν τὸ δεύτερον εἶνε μηδὲν) ἀποτελῆται ἀπὸ τρεῖς ὅρους. Οὕτω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ β′ βαθμοῦ λέγεται καὶ τριώνυμος. Ἐπίσης καὶ ἡ ἐξίσωσις $x^6-19x^3-216=0$ λέγεται τριώνυμος, ἀλλ' εἶνε ἕκτου βαθμοῦ.

β′) Ἡ λύσις τριωνύμου ἐξισώσεως (ἀνωτέρου τοῦ β′ βαθμοῦ) ἀνάγεται, ἐνίοτε, εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β′ βαθμοῦ.

γ′) Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x^6-19x^3-216=0$.
Πρὸς λύσιν αὐτῆς θέτομεν $x^3=y$, ὅτε $x^6=y^2$.
Οὕτω ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $y^2-19y-216=0$.

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $y = 27$, καὶ $y = -8$.

Ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ y τὸ x^3, θὰ ἔχωμεν $x^3 = 27, x^3 = -8$.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν δύο μόνον ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τοῦ ἕκτου βαθμοῦ τὰς $x = 3$, $x = -2$, ἐνῶ ἔχει ἐν ὅλῳ ἕξ ρίζας.

Διότι ἀποδεικνύεται ὅτι ἐξίσωσίς τις δευτέρου, τρίτου,... βαθμοῦ ἔχει δύο, τρεῖς,... ρίζας (πραγματικὰς ἢ φανταστικάς).

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^8 - 97\,x^4 + 1296 = 0$.

Θέτομεν $x^4 = y$, ὅτε $x^8 = y^2$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$y^2 - 97\,y + 1296 = 0.$$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $y = 81$ καὶ $y = 16$.

Ἑπομένως εἶνε καὶ $x^4 = 81$, $x^4 = 16$.

Ἄρα $x = \pm 3$, $x = \pm 2$

εἶνε αἱ τέσσαρες ρίζαι ἐκ τῶν ὀκτὼ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α') $x^6 + 4\,x^3 = 96$. β') $x^{10} - 12\,x^5 = 56133$. γ') $\alpha\,x^{11} + \beta x^9 + \gamma\,x^7 = 0$.

δ') $\frac{\alpha}{x^4} - \frac{2\beta^9}{x^2} = \frac{3\beta^2}{\alpha}$. ε') $2\,x\sqrt{x^3} = -3\sqrt{x}$. στ') $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x^2} = -18$.

120. Περὶ ἀντιστρόφων ἐξισώσεων.—

α') Ἐξίσωσίς τις (τῆς ὁποίας τὸ μὲν δεύτερον μέλος εἶνε μηδὲν τὸ δὲ πρῶτον εἶνε πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου) λέγεται *ἀντίστροφος, ἂν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων, τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων, εἶνε ἴσοι ἢ ἀντίθετοι (ὅταν τὸ πολυώνυμον δὲν ἔχῃ μεσαῖον ὅρον ἂν εἶνε ἀρτίου βαθμοῦ).*

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\,x^3 + \beta\,x^2 + \beta\,x + \alpha = 0$, καλεῖται ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ, καθὼς καὶ ἡ

$$\alpha\,x^3 + \beta\,x^2 - \beta\,x - \alpha = 0.$$

Ἡ $\alpha\,x^4 + \beta\,x^3 + \gamma\,x^2 + \beta\,x + \alpha = 0$,

καὶ ἡ $\alpha\,x^4 + \beta\,x^3 - \beta\,x - \alpha = 0$

καλοῦνται ἀντίστροφοι τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

β') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν $\alpha\,x^3 + \beta\,x^2 + \beta\,x + \alpha = 0$, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν θέσωμεν $x = -1$ εἰς αὐτήν, ἡ ἐξίσωσις ταυτοποιεῖται. Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος ταύτης διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x+1)$. Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\alpha\,x^3 + \beta\,x^2 + \beta\,x + \alpha$ διὰ τοῦ $x + 1$, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $\alpha\,x^2 + (\beta - \alpha)\,x + \alpha$ (§ 46).

Ἑπομένως ἔχομεν

$\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = (x + 1)[\alpha x^2 + (\beta - \alpha) x + \alpha] = 0.$

Ἡ μὲν μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε προφανῶς ἡ $x = -1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2 + (\beta - \alpha) x + \alpha = 0.$

γ′) Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$, παρατηροῦμεν ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ $x = 1$. Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς διαιρεῖται διὰ $x - 1$. Ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = (x-1)[\alpha x^2 + (\alpha+\beta) x + \alpha]$. Εἶνε φανερόν, ὅτι ἡ μὲν μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε ἡ $x=1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου ρου βαθμοῦ $\alpha x^2 + (\alpha + \beta) x + \alpha = 0.$

δ′) Ἔστω ὅτι θέλομεν να λύσωμεν τὴν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς $\alpha (x^4 - 1) + \beta x (x^2 - 1) = 0,$

ἢ $\alpha (x^2 - 1)(x^2 + 1) + \beta x (x^2 - 1) = 0,$

ἢ $(x^2 - 1)[\alpha (x^2 + 1) + \beta x] = 0,$

Εἶνε φανερὸν ὅτι αἱ μὲν δύο ρίζαι θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 1 = 0$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha (x^2 + 1) + \beta x = 0$. Ἡ πρώτη ἔχει ρίζας τὰς $+1$ καὶ -1.

ε′) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$, (1). Διαιροῦμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ x^2 καὶ εὑρίσκομεν

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\beta}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = 0,$$

ἢ $$\alpha\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \beta\left(x + \frac{1}{x}\right) + \gamma = 0. \qquad (2)$$

Θέτομεν

$x + \frac{1}{x} = y$, ὅτε $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$, ἢ $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2$,

καὶ $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰς τιμὰς τῶν $x^2 + \frac{1}{x^2}$, καὶ $x + \frac{1}{x}$ εὑρίσκομεν $\alpha (y^2 - 2) + \beta y + \gamma = 0$, ἡ ὁποία εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς y.

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, εὑρίσκομεν ἐν γένει δύο τιμὰς τοῦ y, τὰς ὁποίας ἄς παραστήσωμεν διὰ τῶν y_1 καὶ y_2. Ἀντικαθιστῶμεν καθεμίαν τῶν τιμῶν τοῦ y εἰς τὴν $x + \frac{1}{x} = y$, καὶ

ἔχομεν $\quad x + \frac{1}{x} = y_1, \qquad x + \frac{1}{x} = y_2,$

ἢ $\quad x^2 - x\, y_1 + 1 = 0, \qquad x^2 - x\, y_2 + 1 = 0.$

Ἤτοι δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τὰς ὁποίας ἐὰν λύσωμεν, θὰ εὕρωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Π. χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $6\, x^4 - 35\, x^3 + 62\, x^2 - 35\, x + 6 = 0$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Θέτομεν $\quad x + \frac{1}{x} = y,$

ὅτε εὑρίσκομεν $6\,(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0$, ἢ $6\, y^2 - 35\, y + 50 = 0$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶνε αἱ $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{10}{3}$.

Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν, ἐὰν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, καὶ $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$,

ἢ τὰς $\quad 2\, x^2 - 5\, x + 2 = 0 \quad$ καὶ $\quad 3\, x^2 - 10\, x + 3 = 0.$

Αἱ ρίζαι τούτων εἶνε αἱ 2 καὶ $\frac{1}{2}$, 3 καὶ $\frac{1}{3}$.

Ἀνὰ δύο οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶνε ἀντίστροφοι καθὼς βλέπομεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α′) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. β′) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 41$.

γ′) $x^4 + x^3 - 4\, x^2 + x + 1 = 0$. δ′) $3\, x^3 - 13\, x^2 + 13\, x - 3 = 0$.

ε) $2x^3 + 7\, x^3 + 7\, x + 2 = 0$. στ′) $2\, x^4 + 5\, x^3 - 5\, x - 2 = 0$.

2) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πέμπτου βαθμοῦ $\alpha\, x^5 + \beta\, x^4 + \gamma\, x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ ἀνάγεται εἰς τὴν $\alpha\, x^4 + (\beta - \alpha)\, x^3 + (\alpha - \beta)\, x^3 + (\beta - \alpha)\, x + \alpha = 0$, ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα ἐπαληθεύεται διὰ $x = -1$. Πῶς γίνεται τοῦτο;

3) Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 - \gamma x^2 - \beta\, x - \alpha = 0$ ἐπαληθεύεται διὰ $x = 1$, καὶ ἀνάγεται οὕτω εἰς τὴν ἐξίσωσιν,

$$\alpha x^4 + (\alpha + \beta)\, x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\, x^2 + (\alpha + \beta)\, x + \alpha = 0.$$

Πῶς γίνεται τοῦτο; Πῶς εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τοῦ πέμπτου βαθμοῦ;

4) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

α′) $x^5 - 4x^4 + 3\, x^3 + 3\, x^2 - 4\, x + 1 = 0$. β′) $2\, x^5 - 3\, x^4 - 5\, x^3 + 5\, x^2 + 3x - 2 = 0$

§ 121. Συστήματα δευτέρου βαθμοῦ.—

α΄) Ἐνῷ τὴν λύσιν συστημάτων ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀνάγομεν εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, μόνον εἰς περιπτώσεις τινὰς ἀνάγομεν τὴν λύσιν συστήματος β΄ βαθμοῦ εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἤτοι καταντῶμεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, καὶ ἀφοῦ διὰ τῆς λύσεως ταύτης εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου, ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς εἰς τὰς ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν βαθμηδὸν τὰς τιμὰς τῶν ἄλλον ἀγνώστων.

β΄) Τοῦτο συμβαίνει π. χ. ἐὰν ἐκ δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστομς ἡ μία εἶνε πρώτου βαθμοῦ. Διότι, ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου ἐκ τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία ἔχει τοὺς δύο εἰς πρῶτον βαθμόν, εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον εἰς δεύτερον βαθμόν.

γ΄) Τὸ αὐτὸ συμβαίνει ἐπίσης, ἐὰν εἰς δοθὲν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους δευτέρου βαθμοῦ οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Διότι διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ὅρων τούτων προκύπτει ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν.

Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα $3x^2 - 5xy + 4y^2 - 8x + 7y = 8,$

$$9x^2 - 15xy + 12y^2 + 11x - 3y = 32$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐπὶ -3 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 1, προσθέσωμεν δὲ τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $35x - 24y = 8.$

Ἐὰν λύσωμεν ταύτην ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, προκύπτει μία ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγωστον.

δ΄) Ἐὰν καθεμία τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ συστήματος, ἐκτὸς τῶν σταθερῶν ὅρων, περιέχῃ μόνον ὅρους μὲ τὸ x^2 καὶ y^2, διὰ διαιρέσεως λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ἔχουσαν ὡς ἄγνωστον τὸ $\frac{x}{y}$.

Ἐὰν λύσωμεν ταύτην, μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῆς, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καθεμίαν τῶν δοθεισῶν, πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ y.

Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα $x^2 + 3xy - 5y^2 = 208,\ xy - 2y^2 = 16.$

Εκ τούτων διὰ διαιρέσεως τῆς πρώτης διὰ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x^2+3\,xy-5\,y^2}{xy-2\,y^2} = \frac{208}{16} = 13$,

ἐκ τῆς ὁποίας, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρανομαστὴν τοῦ πρώτου μέλους διὰ τοῦ y^2, εὑρίσκομεν τὴν

$$\frac{\frac{x^2}{y^2}+3\,\frac{x}{y}-5}{\frac{x}{y}-2} = 13,$$

ἢ τὴν
$$\frac{x^2}{y^2}+3\,\frac{x}{y}-5 = 13\left(\frac{x}{y}1-2\right),$$

ἢ
$$\frac{x^2}{y^2}-10\,\frac{x}{y}+21 = 0.$$

Θεωροῦντες ὡς ἄγνωστον τὸν λόγον $\left(\frac{x}{y}\right)$ καὶ λύοντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\frac{x}{y} = 7$, καὶ $\frac{x}{y} = 3$,

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει $x = 7\,y$ καὶ $x = 3\,y$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν $5\,y^2 = 16$ καὶ $y^2 = 16$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ y, καὶ ἀκολούθως τὰς τιμὰς τοῦ x.

ε') Ἀξία προσοχῆς εἶνε ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x\,y$, καὶ τὸ $(x+y)$, ἢ τὸ $(x-y)$. Διότι, ἐὰν εὕρωμεν π. χ. ὅτι $x+y=\alpha$, καὶ $x\,y=\beta$, τότε τὸ x καὶ y εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία εἶνε τῆς μορφῆς $\omega^2-\alpha\,\omega+\beta=0$.

Ἐὰν εὕρωμεν ὅτι εἶνε $x-y=\alpha$, καὶ $x\,y=\beta$, τότε τὸ x καὶ $(-y)$ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-\alpha\,\omega-\beta=0$. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $x.(-y) = -\beta$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα.

α') $6\,x\,y-7\,x=184$, $5\,x+6\,y=70$.
β') $3\,x\,y-5\,x=192$, $3\,x-4\,y=8$.
γ') $7\,x^2-3\,y^2=135$, $7\,x-3\,y=27$.

δ') $5\,x^2+3\,y^2=2300$, $3\,x-2\,y=40$.
ε') $\frac{15}{x}+\frac{22}{y}=5$, $x+y=16$.
στ') $\frac{9}{x}-\frac{8}{y}=1$, $2\,x+y=10$.

ζ′) $\dfrac{5x-3y}{2x-y}=\dfrac{20}{9}$, $x^2+y^2=74$. η′) $\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{7}{y^2}=103$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=11$. θ′) $\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{y^2}+33=0$, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+1=0$.

ι′) $x-\sqrt{2y+4}=9$, $3x-2y=3$. ια′) $\dfrac{7x+12y}{12x+7y}=\dfrac{26}{31}$, $7x^2-12y^2=144$. ιβ′) $\dfrac{8}{x}+\dfrac{9}{y}=7$, $3x-y=3$.

Ὁμὰς δευτέρα. (Ἐκ τῆς μιᾶς τῶν δύο ἐξισώσεων εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους).

α′) $9x^2+5x-7y=25$, $(x+y)^2-3(x+y)=10$. β′) $2x^2-3xy+9x=29$, $(x-y)^2+7(x-y)=30$.

γ′) $14x^2-11xy+4y^2=10$, $(2x-3y)^2+4(2x-3y)=5$. δ′) $8x^2-2xy+7y^2=527$, $(3x+y)^2-9(3x+y)-20=0$.

ε′) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=21$, $(x+y+7)(x+y-5)=64$. στ′) $\dfrac{2x+3y}{13}=\dfrac{4}{2x-3y}$, $(12-x+y)(x-y+1)=12(x-y)$.

ζ′) $4x^2-20xy+25y^2-12x+30y=-9$, $5x^2-7xy+4y^2-3x+2y=46$.

η′) $9x^2-12xy+4y^2+12x-8y+4=0$, $3x^2-5xy+y^2+x+y+6=0$.

θ′) $3(8x^2+7y^2-4)=29(5x^2-11y^2+6)$, $\sqrt{27x-36y+4}=6x-8y-3$.

ι′) $7(x-2\sqrt{21x-6y-2})=2(y-25)$, $13x^2-3y^2=4$.

Ὁμὰς τρίτη. (Προσδιορίζεται πρῶτον ὁ λόγος $\left(\dfrac{x}{y}\right)$).

α′) $x^2+y^2=100$, $x:y=3:4$. β′) $x^2-y^2=56$, $x:y=9:5$. γ′) $24y(x-5y)=(x+2y)(5x-28y)$, $5x^2-12y^2=32$.

δ′) $x^2+xy+y^2=76$, $(x+y):(x-y)=5:2$. ε′) $x^2-xy+y^2=91$, $(x+y):(x-y)=8:3$. στ′) $(x+5)^2=xy$, $y^2=(y+9)(x+4)$.

ζ′) $(x^2+y^2)(x+y)=1080$, $(x^2+y^2)(x-y)=540$. η′) $(x^2-y^2)(2x-3y)=192$, $(x^2-y^2)(3x+y)=1344$.

Ὁμὰς τετάρτη. (Θεωρήσατε νέας μεταβλητὰς τὰ $x+y$ καὶ $x-y$).

α′) $x^2-xy=14$, $xy-y^2=10$. β′) $x^2+y^2=73$, $x+y=24$. γ′) $x^2+y^2=97$, $xy=36$. δ′) $x^2+y^2=586$, $x+y=34$.

ε′) $x^2+y^2=125$, $3xy=150$. στ′) $x^2+y^2=585$, $4xy=258$. ζ′) $x^2+y^2=\dfrac{25}{36}$, $6xy=2$.

η′) $x^2+xy+y=121$, $x^2+xy+x=61$. θ′) $x^2-y^2=87$, $x-y=3$. ι′) $x^2+xy=187$, $y^2+xy=102$.

ια′) $\ldots+9y^2=136$, $\ldots-3y=4$. ιβ′) $3(x+y)^2-5(x+y)=50$, $5(x-y)^2+6(x-y)=11$.

Ὁμὰς πέμπτη. (Θεωρήσατε νέας μεταβλητὰς τὰ $x\,y$, x^2+y^2 ἢ τὸ $x\pm y$).

α') $x+y=21-\sqrt{x\,y}$, $x^2+y^2=257$.

β') $2(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=1479$, $3x^2\,y^2-2\frac{1}{2}\,x\,y-275=0$.

γ') $x^2+y^2=\sqrt{x^2\,y^2+273}$, $x:y+y:x=4\frac{1}{4}$.

δ') $x^2-y^2=21(x-y)$, $x-3:y=2\,\frac{xy-1}{xy+2y}$.

ε') $x+y+\sqrt{x+y-2}=14$, $\frac{x^2y^2}{3}-\frac{3\,x\,y}{4}=174$.

στ') $\frac{2(x+y)-7}{5(x+y-4)}=\frac{5}{6}-\frac{2}{x+y}$, $x:y=40\,y:(x+3y)$.

Ὁμὰς ἕκτη. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα.

α') $x^3+y^3=\frac{1}{3}$, $\frac{x+y+5}{2}-\frac{4}{x+y+1}=1$.

β') $x^3-y^3=728$, $\sqrt{\frac{x-y+2}{x-y-1}}+\sqrt{\frac{x-y-1}{x-y+2}}=\frac{5}{2}$.

γ') $x^3+y^3=973$, $(x-y)^2-7(x+y)=90-xy$.

δ') $x^3+y^3=19$, $x+y=4$.

ε') $x^3-y^3=341$, $x-y=11$.

στ') $\sqrt{x}\,(\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3})=273$, $x\sqrt{xy}+y^2=364$.

ζ') $x\,y=72$, $x^2+y^2+\omega^2=289$, $x+y+\omega=29$.

η') $x^2-y\sqrt{xy}=535$, $y^2=x\sqrt{xy}-234$.

θ') $x^2+y^2=40$, $x\,y=\omega$, $x+y=8$.

ι') $y^2+\omega^2-x\,(y+\omega)=25$, $\omega^2+x^2-y\,(\omega+x)=16$, $x^2+y^2-\omega\,(x+y)=9$.

§ 122. Προβλήματα ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.—

Διὰ τὴν λύσιν προβλήματός τινος ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ ἀκολουθοῦμεν τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν καὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Πρὸς ἐφαρμογὴν λύομεν κατωτέρω ἁπλᾶ τινα προβλήματα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Πρόβλημα 1ον). «***Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατὰ 1 ἰσοῦται μὲ 86;***».

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ x εἶνε x^2, τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ θὰ εἶνε $3\,x^2$, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ $2\,x$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $3\,x^2+2\,x+1=86$.

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $x = 5$, $x = -\frac{17}{3}$. Ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 5 ἢ ὁ $-\frac{17}{3}$.

Πρόβλημα 2ον). «***Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 96, ἵνα τὸ πηλίκον ὑπερβαίνῃ κατὰ 4 τὸν διαιρέτην;***».

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν $\frac{96}{x} - x = 4$, ἢ $x^2 + 4x - 96 = 0$.

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $x = 8$.

Πρόβλημα 3ον). «***Τὸ γινόμενον τῶν ὅρων κλάσματος εἶνε 120, οἱ ὅροι θὰ ἦσαν ἴσοι, ἐὰν ἀφηροῦμεν 1 ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν καὶ ἐπροσθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμητήν. Ποῖον εἶνε τὸ κλάσμα;***»

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμητήν, ὁ παρανομαστὴς θὰ εἶνε $\frac{120}{x}$ καὶ θὰ ἔχωμεν $x + 1 = \frac{120}{x} - 1$

ἢ $x(x+2) = 120$ καὶ $x = 10$, $x = -12$.

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα θὰ εἶνε ἢ τὸ $\frac{10}{12}$, ἢ τὸ $\frac{12}{10}$.

Πρόβλημα 4ον). «***Τίς εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{4}$ αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουν 16 διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὸ $\frac{4}{5}$ τοῦ ζητουμένου πλὴν 15;***»

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\left(\frac{3x}{4} + 1\right) = \frac{16}{\left(\frac{4x}{5} - 15\right)}$.

Ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 20$, καὶ $x = -\frac{31}{12}$.

Πρόβλημα 5ον). «***Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ περιττοὶ διαδοχικοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶνε 8000***».

Ἔστωσαν $2x - 1$ καὶ $2x + 1$ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ ἔχωμεν $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 8000$,
ἢ $8x = 8000$, καὶ $x = 1000$.
Ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε 2001, καὶ 1999.

Πρόβλημα 6ον). «*Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶνε ἀνάλογοι τῶν 3·2·5· τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶνε ἴσον μὲ 342· νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί*».

Ἔστωσαν 3 x, 2 x καὶ 5 x οἱ τρεῖς ἀριθμοί. Θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$9x^2 + 4x^2 + 25x^2 = 342,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = \pm 3$. Ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ ± 9· ± 6· ± 15.

Πρόβλημα 7ον). «*Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τούτων*».

Ἔστωσαν $x - 1$, x καὶ $x + 1$ οἱ τρεῖς ἀριθμοί.
Θὰ ἔχωμεν $(x-1).\, x.\, (x+1) = 5\,(x-1 + x + x + 1)$,
ἢ $$(x^2-1).\, x = 15x.$$
Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x = \pm 4$ καὶ $x = 0$. Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ 3·4·5, ἢ οἱ —5·—4·—3, ἢ οἱ—1·0· + 1.

Πρόβλημα 8ον). «*Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀκέραιοι διαδοχικοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ κύβος τοῦ μεγαλυτέρου αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν δύο ἄλλων*».

Ἔστωσαν x, $x + 1$ καὶ $x + 2$ οἱ τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Θὰ ἔχωμεν $(x + 2)^2 = 3[(x + 1)^3 + x^3]$
ἢ $5x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ἡ μία ρίζα εἶνε 1, αἱ δὲ δύο ἄλλαι φανταστικαί. Ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ 1·2·3.

Πρόβλημα 9ον). «*Ἐγευμάτισαν 15 ἄτομα· πάντες οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 36 δρχ. καὶ πᾶσαι αἱ γυναῖκες 36 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα ἐξώδευσε καθεὶς ἐὰν καθεμία γυνὴ ἐδαπάνησε 2 δρχ. ὀλιγώτερον καθενὸς ἀνδρός;*»

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, ὅτε $15 - x$, θὰ εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν. Ἡ δαπάνη καθενὸς ἀνδρὸς θὰ εἶνε $\frac{36}{x}$, καθεμιᾶς δὲ γυναικὸς $\frac{36}{15-x}$· Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $\frac{36}{15-x}=\frac{36}{x}-2$,

ἢ $x^2-51x+270=0$, καὶ $x=\frac{51\pm39}{2}$.

Ἐκ τῶν δύο σημείων ἀπορρίπτεται τὸ $+$, διότι ὅταν $x=\frac{51+39}{2}=45$, θὰ ἔχωμεν 45 ἄνδρας, ἐνῶ ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἦσαν 15. Ὥστε εὑρίσκομεν 6 ἄνδρας καὶ 9 γυναῖκας.

Πρόβλημα 10ον *). «***Σῶμά τι ἐρρίφθη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (ἐν τῷ κενῷ) μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα α. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος υ;***

Τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ t τὸν ζητούμενον χρόνον, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς τύπους, γνωστοὺς ἐκ τῆς Φυσικῆς,

$$\upsilon=\alpha t-g\frac{t^2}{2},\quad \tau=\alpha-gt, \qquad (1)$$

ὅπου τὸ τ παριστάνει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν t, καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν. Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$gt^2-2\alpha t+2\upsilon=0.$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ t.

Διερεύνησις. Ἡ συνθήκη διὰ νὰ εἶνε αἱ ῥίζαι πραγματικαὶ εἶνε $\alpha^2-2g\upsilon\geq0$, ἢ $\upsilon\leq\frac{\alpha^2}{2g}$. Ἑπομένως $\upsilon=\frac{\alpha^2}{2g}$ εἶνε τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ τὸ κινητόν, ἂν ῥιφθῇ μὲ ταχύτητα ἀρχικὴν α. Ἐὰν εἶνε $\upsilon=\frac{\alpha^2}{2g}$ αἱ δύο ῥίζαι εἶνε ἴσαι μὲ $\frac{\alpha}{g}$. Ἑπομένως χρειάζεται $\frac{\alpha}{g}$ χρόνον, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος τὸ κινητόν. Εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ ταχύτητα ἴσην μὲ μηδέν. Ἀντικαθιστῶντες πράγματι εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (1) τὸ t διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{g}$, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον ἴσον μὲ μηδέν. Ἤτοι $\tau=\alpha-\frac{g\alpha}{g}=0$. Ἐὰν εἶνε $\upsilon<\frac{\alpha^2}{2g}$, αἱ δύο ῥίζαι τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων (1) εἶνε πραγματικαί, ἄνισοι καὶ θετικαί, ὁ δὲ ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει αὐτὰ εἶνε ὁ

$$t=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-2g\upsilon}}{g}.$$

Καὶ αἱ δύο αὗται τιμαὶ τοῦ t ἁρμόζουν εἰς τὸ πρόβλημα. Διότι τὸ σῶμα διέρχεται δύο φορὰς διὰ καθενὸς σημείου, κειμένου ἐντὸς τοῦ ὕψους υ, μίαν ἀνερχόμενον καὶ μίαν κατερχόμενον. Αἱ δύο αὗται στιγμαὶ εἶνε ἰσαπεχεῖς ἀπὸ τῆς στιγμῆς $\frac{\alpha}{g}$, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κινητὸν φθάνει εἰς τὸ μέγιστον ὕψος αὐτοῦ. Εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι κατὰ τὰς δύο αὐτὰς στιγμὰς αἱ ταχύτητες εἶνε ἴσαι καὶ ἀντίθετοι.

Ἐὰν τεθῇ $\upsilon = 0$, θὰ ἔχωμεν $t = 0$, καὶ $t = \frac{2\alpha}{g}$.

Τὸ $\frac{2\alpha}{g}$ παριστάνει τὸν χρόνον μετὰ τὸν ὁποῖον τὸ κινητὸν ἐπαναπίπτει εἰς τὸ σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποίου ἀνεχώρησεν. Ὅθεν ὁ χρόνος καθ' ὅν γίνεται ἡ ἀνάβασις ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον καθ' ὅν γίνεται ἡ κατάβασις τοῦ κινητοῦ.

Πρόβλημα 11ον*.) «***Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάθος φρέατος, ἄν ἐπέρασαν*** t ***δεύτερα λεπτά, ἀφ' ὅτου ἀφέθη νὰ πέσῃ λίθος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ, μέχρις ὅτου ἠκούσθη ὁ κρότος, ὁ παραχθεὶς ἐκ τῆς πτώσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραβλέπεται)***».

Παριστάνομεν διὰ τοῦ x τὸ βάθος τοῦ φρέατος, καὶ διὰ τ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.

Ὁ χρόνος t ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη.

1) Ἀπὸ τὸν χρόνον t_1 τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ πέσῃ.
2) Ἀπὸ τὸν χρόνον t_2 τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἦχος διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος εἰς ἀπόστασιν x.

Ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον (ἐκ τῆς Φυσικῆς) $x = \frac{1}{2} g t_1^2$,

ὅστις δίδει τὸ διάστημα διὰ τοῦ χρόνου κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ὁποία εἶνε καὶ ἡ πτῶσις τοῦ λίθου.

Ἐκ ταύτης προκύπτει $t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ (1)

Ἐκ τοῦ τύπου $x = \tau . t_2$, ὅστις δίδει τὸ διάστημα διὰ τῆς ταχύτητος τ καὶ τοῦ χρόνου t_2 κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἤχου, εὑρίσκομεν $t_2 = \frac{x}{\tau}$.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{\tau}=t, \text{ ἢ } \sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{\tau}. \qquad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διατάσσοντες κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x,

$$g\,x^2-2\,\tau\,(g\,t+\tau)\;x+g\,\tau^2\,t^2=0. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ t_1 εἶνε θετικὸν κατὰ τὴν (1) ἢ (2) τὸ ἴσον αὐτοῦ $t-\frac{x}{\tau}$ πρέπει νὰ εἶνε θετικόν, ἤτοι,

$$t-\frac{x}{\tau}>0, \qquad \text{ἢ } x<\tau\,t. \qquad (4)$$

Ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς (3) εἶνε **πραγματικαὶ** καὶ ἄνισοι, πρέπει νὰ εἶνε θετικὸν τὸ $\tau^2\,(\tau+g\,t)^2-g^2\,\tau^2\,t^2$, ἢ τὸ $\tau^3\,(\tau+2\,g\,t)$, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει. Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶνε $t^2\,\tau^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{2\tau\,(g\,\tau+\tau)}{g}$, ἅτινα εἶνε θετικά. Ἑπομένως αἱ δύο ῥίζαι εἶνε θετικαί.

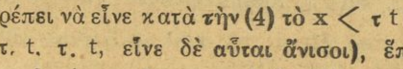
Ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶνε κατὰ τὴν (4) τὸ $x<\tau\,t$ (καὶ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶνε $\tau.\,t.\,\tau.\,t$, εἶνε δὲ αὗται ἄνισοι), ἕπεται ὅτι ἡ μία τῶν ῥιζῶν εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ $\tau.\,t$ καὶ ἡ ἄλλη μικροτέρα, ἥτις καὶ θὰ εἶνε δεκτὴ διὰ τὸ πρόβλημα.

Ἐκ τῆς λύσεως τῆς (4) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμήν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον πλὴν τοῦ ῥιζικοῦ. Ἤτοι ἔχομεν

$$x=\frac{\tau}{g}\left(\tau+g\,t-\sqrt{\tau(\tau+2\,g\,t)}\right).$$

Πρόβλημα (τῆς χρυσῆς τομῆς) 12ον)*. ***«Δοθεῖσαν εὐθεῖαν μήκους α νὰ διαιρέσωμεν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον».***

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὸ μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ διαιρεῖ τὴν (ΑΒ) = α εἰς δύο



(Σχ. 11)

μέρη, τὰ (ΑΓ) = x καὶ (ΓΒ) = α — x, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ x εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν α καὶ α — x, θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{\alpha-x}$

ἢ $x^2+\alpha\,x-\alpha^2=0.$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν

$$x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha(\pm\sqrt{5}-1)}{2}$$

Διερεύνησις. Αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε πραγματικαὶ καὶ μὲ σημεῖα ἀντίθετα, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶνε $-\alpha^2$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\sqrt{5}$ περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3. Ἑπομένως ἡ πρώτη ῥίζα, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σημεῖον σὺν τοῦ ῥιζικοῦ, θὰ εἶνε θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ α, ἄρα δίδει τὴν ζητουμένην λύσιν. Ἡ ἄλλη ῥίζα ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική. Ὥστε ἔχομεν

$x = \frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2}$. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται πέραν τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἀπὸ τοῦ Α, διότι τὸ x ἔχει τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{\alpha}{2}$.

Πρόβλημα 13ον). «***Νὰ μερισθῇ ὁ 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελοῦν 1620***».

Ἐὰν διὰ τοῦ x καὶ y παραστήσωμεν τὰ δύο μέρη, θὰ ἔχωμεν

$$x + y = 27, \qquad 4x^2 + 5y^2 = 1620.$$

Ἀπαλείφοντες τὸν x εὑρίσκομεν $y^2 - 24y + 144 = 0$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως ταύτης $y = 12$. Ἄρα εἶνε $x = 15$ καὶ $y = 12$.

Πρόβλημα 14ον). «***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος εἶνε 17 μ. τὸ δὲ ἐμβαδὸν 120 (μ^2)***».

Ἐὰν διὰ x καὶ y παραστήσωμεν τὰς ζητουμένας διαστάσεις, ἔχομεν $x \cdot y = 120$, $x^2 + y^2 = 17^2 = 289$. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $x = 15$, $y = 8$

Πρόβλημα 15ον). «***Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν διαφορὰν 17 μ.***».

Ἂν διὰ τοῦ x καὶ y παραστήσωμεν τὰς ζητουμένας διαστάσεις, θὰ ἔχωμεν $x - y = 17$, $x^2 + y^2 = 25^2 = 625$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $x = 24$, $y = 7$.

Πρόβλημα 16ον). «***Δίδεται τρίγωνόν τι ΑΒΓ. Νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ὥστε ἂν ἀπὸ τούτου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α πλευρὰν, νὰ διαιρῆται τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα***».

Παριστάνομεν διὰ τοῦ α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ διὰ τὴν x τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν ΑΔ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ (ΔΕ εἶνε παράλληλος τῆς ΓΒ) θὰ εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας. Ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ τούτων θὰ εἶνε ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν. Ἤτοι θὰ εἶνε $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{x^2}{α^2}$.

Ἀλλ' ὁ λόγος αὐτὸς ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος· ἤτοι ἔχομεν $\frac{x^2}{α^2} = \frac{1}{2}$ καὶ $x^2 = \frac{α^2}{2}$, $x = \frac{α\sqrt{2}}{2}$ (ἀπορριπτομένης τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς τοῦ x).

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{5}$ $\left(\frac{1}{11}\right)$ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 80 (16,5); 40 (33).

2) Διὰ τίνος ἀριθμοῦ διαιρούμενος ὁ 147 (384), δίδει τὸ 3 (6)πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ; 7 (8).

3) Τίς ὁ μικρότερος δύο ἀριθμῶν, διαφερόντων κατὰ 3 (7), ἂν ἔχουν γινόμενον 54 (198); 6·—9· (11·—18).

4) Τίς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε κατὰ 29 (55) μικρότερος τοῦ τετραγώνου, τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου αὐτοῦ; 7·—4·(9·—6).

5) Εὕρετε δύο ἀριθμούς, ἔχοντας γινόμενον 2 (1), ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $1\frac{5}{12}$ (2). $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ (1·1).

6) Εὕρετε κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶνε κατὰ 4 (1) μικρότερος (μεγαλύτερος) τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν αὐξηθῇ (ἐλαττωθῇ) ὁ ἀριθμητὴς κατὰ 7 (1) καὶ ἐλαττωθῇ ὁ παρονομαστὴς κατὰ 5 (1) διαφέρει τοῦ προηγουμένου κατὰ $1\frac{1}{15}$ (4). $\frac{11}{15}$ (ἀδύνατον).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Τίς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε κατὰ 29 (55) μικρότερος τοῦ τετραγώνου, τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου αὐτοῦ; 7·—4· (9·—6).

2) Εὕρετε διψήφιον ἀριθμὸν ὅστις, ἂν μὲν προστεθῇ εἰς τὸν 9 (27) νὰ δίδῃ τὸν προκύπτοντα δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων αὐτοῦ· ἂν διαιρεθῇ δὲ διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ νὰ δίδῃ 6 (2). 12 (36).

3) Ἐπλήρωσέ τις 160 (300) δρχ. διὰ καφὲ καὶ 180 (500) δρχ. διὰ τέϊον, ἔλαβε δὲ 40 (60) χρ. καφὲ ἐπὶ πλέον τοῦ τεΐου. Πόσον ἐκόστιζε τὸ χιλιόγραμμον τοῦ καφέ, ἂν τοῦ τεΐου ἐκόστιζε 5 (5) δρχ. ἐπὶ πλέον; 2,5 (2,34).

4) Εἰς ἐκδρομὴν αἱ γυναῖκες ἦσαν 3 (7) ὀλιγώτεραι (περισσότεραι) τῶν ἀνδρῶν. Ἂν οἱ μὲν ἄνδρες ἐπλήρωσαν ἐν ὅλῳ 1750 (1800) δρχ. αἱ γυναῖκες 800 (500) δρχ. πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ αἱ γυναῖκες, ἐὰν καθεὶς τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 50 (100) δρχ. περισσότερον ἢ καθεμία γυνή; 15 ἢ 7 (ἀδύνατον).

5) Εἰς 27 (50) πρόσωπα ἐπληρώθησαν 21 (65,4) δρχ. διὰ τοὺς ἄνδρας καὶ 42 (80) διὰ τὰς γυναῖκας. Πόσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, ἂν καθεμία ἐπληρώνετο 1,50 (2) δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ ἀνδρός; 21 (ἀδύνατον).

6) Εἰς πόσας ὥρας διανύει κινητὸν δρόμον 180 (250) χμ. ἐὰν ἐκέρδιζε (ἔχανε) 40′ (6 ὥρ.), διανῦον 9 (5) χμ. καθ' ὥραν ἐπὶ πλέον (ὀλιγώτερον); 4 (20,78).

7) Ἐπλήρωσαν δι' οἶνον 30 (50) δρχ. Ἐὰν ἡ φιάλη ἐκόστιζε 25 (50) λ. ὀλιγώτερον (περισσότερον) θὰ ἐλάμβανε 4 (2) φιάλας περισσοτέρας (ὀλιγοτέρας.) Πόσας φιάλας ἠγόρασε; 20(ἀδύνατον).

8) Ἐπλήρωσέ τις διὰ τέϊον 224 (350) δρχ. Ἐπειδὴ τὸ χιλιόγρ. ἐκόστιζε 0,6 (1) δρχ. περισσότερον (ὀλιγώτερον) ἢ ὅσον ἐνόμιζεν, ἔλαβε 3 (10) χρ. ὀλιγώτερον (περισσότερον). Πόσον ἐκόστιζε τὸ χιλιόγραμμον; 6,4 (6,44...).

9) Ἔμπορος μετεπώλησεν ἔπιπλον ἀντὶ 144 (39) δρχ, κερδίσας τόσα τοῖς ἑκατόν, ὅσον τὸ ἠγόρασε. Πόσον ἐπλήρωσεν διὰ τὴν ἀγορὰν αὐτοῦ; 80 (30),

10) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα (ἡ διαφορὰ) μὲ (ἀπὸ) τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ εἶνε 282 (1332). 256 (1369).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Κεφάλαιον ἐτοκίσθη πρὸς πρὸς 4 ο/ο κατ' ἔτος. Πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν τόκον αὐτοῦ εἰς 5 μῆνας γίνεται $117041\frac{2}{3}$ · Πόσον ἦτο; 2650

2) Ποσὸν 864 δρχ. πρόκειται νὰ μοιρασθῇ εἰς πτωχούς. Ἐὰν οὗτοι ἦσαν κατὰ 6 ὀλιγώτεροι, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος 2 δρχ. περισσοτέρας. Πόσοι εἶνε οἱ πτωχοί; 54.

3) Δύο ἔμποροι πωλήσαντες ὑφάσματα, ὁ α′ 3 πήχεις ὀλιγώτερον τοῦ β′, ἔλαβον μαζὺ 35 δρχ. Ἂν ὁ α′ ἐπώλει ὅσον ὁ β′, θὰ ἐλάμβανεν 24 δρχ. Ἂν ὁ β′ ἐπώλει ὅσον ὁ α′, θὰ ἐλάμβανε 12,5 δρχ. Πόσους πήχεις ἐπώλησε καθείς; 15 ἢ 5· 18 ἢ 8.

4) Δύο ἔμποροι ἐκέρδισαν ἐξ ἐπιχειρήσεως 660 δρχ. ἐνῷ ὁ α′ εἶχε διαθέσει 600 δρχ. περισσοτέρας τοῦ β′. Πόσας δρχ. εἶχε διαθέσει ὁ α′, ἐὰν ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 3960 δρχ. 3600.

5) Δύο ἔμποροι κατέθεσαν ὁμοῦ 5000 δρχ. δι' ἐπιχείρησιν καὶ ἔλαβεν ὁ μὲν α′ 2544 δρχ. μετὰ 9 μῆνας, ὁ δὲ β′ 2860 δρχ. μετὰ 15 μ. Πόσας δρχ. κατέθεσε καθείς; 2400· 2600.

6) Κεφάλαιον 1300 δρχ. ἐχωρίσθη εἰς δύο ἄνισα μέρη, τὰ ὁποῖα, τοκισθέντα μὲ διάφορα ἐπιτόκια, ἔδιδον τὸν αὐτὸν ἐτήσιον τόκον. Ἐὰν τὸ α′ ἐτοκίζετο μὲ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ β′, θὰ ἔδιδεν ἐτησίως 360 δρχ. ἐὰν τὸ β′ ἐτοκίζετο μὲ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ α′, θὰ ἔδιδε 490 δρχ. Τίνα τὰ ἐπιτόκια; 7 6.

Ὁμὰς τετάρτη. (Γεωμετρικά). 1) Πόσον εἶνε το πλῆθος σημείων μεταξὺ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν 78 (300) εὐθείας, συνδεούσας αὐτὰ ἀνὰ δύο; 13. (25).

2) Ποῖον πολύγωνον ἔχει 104 (189) διαγωνίους; 16· (21).

3) Ἐκ δύο πολυγώνων τὸ α′ ἔχει 6 (4) πλευρὰς ἐπὶ πλέον τοῦ β′ καὶ $3\frac{1}{3}\left(3\frac{8}{9}\right)$ φορὰς περισσοτέρας διαγωνίους· πόσας πλευρὰς ἔχει καθέν; τὸ β′ 9 (6).

4) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραγώνου αὐξηθοῦν κατὰ 3 (2) μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου θὰ εἶνε 2,25 $\left(1\frac{9}{16}\right)$ φορὰς τοῦ ἀρχικοῦ. Πόση εἶνε ἡ πλευρά αὐτοῦ; 6 (8).

5) Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 150 (270) (μ²), ἂν ὁ λόγος τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶνε $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{12}\right)$; 15 20 (15·36).

6) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶνε κατὰ 19 (22) μ. καθὲν δὲ τῶν σκελῶν του κατὰ 8 (9) μέτρα μεγαλύτερον τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Πόση εἶνε ἡ βάσις τούτου; 40 ἢ 24· (40 ἢ 30)

7) Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 192 (91) (μ²), ἂν διαφέρουν κατὰ 4 (ἔχουν ἄθροισμα 20) μ; 16·12·(13·7).

8) Ῥόμβου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 17 (25) μ., αἱ δὲ διαγώνιοι διαφορὰν 14 (34) μ. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ μικροτέρα διαγώνιος αὐτοῦ; 16 (14).

9) Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 12,5 μ., ἂν ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε 17 μ.; 24·7.

10) Εὕρετε τὰς πλευρὰς δύο τετραγώνων, ἐχόντων ἄθροισμα ἐμβαδῶν 8621 (μ²), ἂν τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων αὐτῶν εἶνε 8540. 61· 70.

Ὁμὰς πέμπτη. (Συστημάτων). 1) Δύο βρύσεις τρέχουσαι μαζύ, πληροῦν δεξαμενὴν εἰς $2\frac{2}{5}$ (18) ὥρ. Ἡ β′ (α′) μόνη χρειάζεται 2 (27) ὥρας ἐπὶ πλέον τῆς α′ (β′). Εἰς πόσον χρόνον ἑκάστη τὴν πληροῖ μόνη;

6·4 (54·27).

2) Δύο ἐργάται, ἐργαζόμενοι χωριστά, χρειάζονται 25 ὥρας διὰ νὰ τελειώσῃ ἕκαστος τὸ $\frac{1}{2}$ ἔργου. Ἂν εἰργάζοντο μαζύ, θὰ ἐχρειάζοντο 12 ὥρ. δι᾽ ὁλόκληρον τὸ ἔργον. Πόσον χρόνον ἐχρειάζετο ἕκαστος διὰ τὸ ἔργον;

30·20.

3) Δύο ἐπιχειρηματίαι κατέθεσαν ὁμοῦ 2000 δρχ., ὁ α' διὰ 2 μῆνας καὶ ὁ β' διὰ 8 μ. Ὁ α' ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 1800 δρχ., ὁ δὲ β' 900 δρχ. Πόσα ἐκέρδισεν ἕκαστος; 300· 400.

4) Δύο κεφάλαια ἔχοντα ἄθροισμα 30000 δρχ., ἐτοκίσθησαν πρὸς 6 ο/ο. Τὸ α' ἔμεινε 4 μῆνας ἐπὶ πλέον καὶ ἔδωκε τόκον 1280 δρχ., τὸ δὲ β' 840 δρχ. Τίνα τὰ κεφάλαια; 16000· 14000.

5) Νὰ εὑρεθοῦν 4 ἀριθμοί, ἀποτελοῦντες ἀναλογίαν, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶνε 62,5, ὁ α' ὑπερβαίνῃ τὸν β' κατὰ 4, ὁ δὲ γ' τὸν δ' κατὰ 3, 6·2· 4,5· 1,5.

6) Εὕρετε διψήφιον ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ δίδει $5\frac{1}{3}$, ἐλαττούμενος δὲ κατὰ 9 δίδει τὸν προκύπτοντα δι' ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων αὐτοῦ; 32.

7) Εὕρετε τριψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ β' ψηφίον εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τούτου εἶνε ὡς 124 :7· δι' ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων αὐτοῦ δὲ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς ηὐξημένος κατὰ 594. 248.

8) Εὕρετε τρεῖς ἀριθμούς, ἂν ὁ β' εἶνε μέσος ἀνάλογος τῶν ἄλλων· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 21, τῶν δὲ τετραγώνων τούτων 189. 12·6·3.

9) Εἰς δεξαμενὴν ῥέει τὸ ὕδωρ βρύσεως ἐπὶ $^3/_5$ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἄλλη βρύσις μόνη θὰ τὴν ἐπλήρωνε. Κλείεται ἡ α' βρύσις καὶ ἀνοίγεται ἡ β' μέχρις ὅτου πληρωθῇ ἡ δεξαμενή. Ἐὰν καὶ αἱ δύο ἠνοίγοντο μαζύ, θὰ ἐπληροῦτο εἰς 6 ὥρας ὀλιγώτερον, θὰ ἔτρεχον δ' ἐκ τῆς α' τὰ $^2/_3$ τοῦ ἐκ τῆς β', ἀφ' ὅτου ἐκλείσθη ἡ α'. Εἰς πόσον χρόνον καθεμία βρύσις πληροῖ τὴν δεξαμενήν;

15·10

Ὁμὰς ἐκπ. (Φυσικῆς). 1) Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος διὰ νὰ πέσῃ εἰς τὸν πυθμένα φρέατος βάθους 44,1 μ. ἀφιέμενος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ; 3'.

2) Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος, ριπτόμενος ἄνω κατακορύφως, ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ. κα ἐπαναπέσῃ; 10'.

3) Πόσην ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς λίθον, ἂν ριφθῇ κατακορύφως ἄνω, ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ; 49'.

4) Πότε θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 1460 μ. σφαῖρα, ριπτομένη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἀναχωροῦσα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 185 μ.;

5) Ποίαν πίεσιν ἐξασκεῖ σφαῖρα 41 χιλιογράμμων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐὰν ἰσορροπῇ δύναμιν 9 χιλιογράμμων; 40.

6) Εἰς πόσα δευτερόλεπτα κυλίεται σφαῖρα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κατὰ 39,2 μ. μῆκος καὶ ὕψος 10 μ. ἐκ. τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω; 5, 6''.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Περὶ προόδων.

§ 123. Πρόοδοι ἀριθμητικαί.—

α΄) *Ἀριθμητικὴ πρόοδος* καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

β΄) Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται *ὅροι τῆς προόδου*, ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς καθένα ὅρον δίδει τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, λέγεται *λόγος τῆς προόδου.*

γ΄) Ἀριθμητικὴ πρόοδος λέγεται *αὔξουσα*, ἐὰν ὁ λόγος αὐτῆς εἶνε ἀριθμὸς θετικός, *φθίνουσα* δέ, ἐὰν εἶνε ἀρνητικός.

Οὕτω ἡ σειρὰ 1, 2, 3, 4,. . . . . 48 εἶνε πρόοδος ἀριθμητικὴ αὔξουσα μὲ λόγον 1, καθὼς καὶ

ἡ σειρὰ 1, 3, 5, ... , 53 μὲ λόγον 2,

ἡ δὲ 35, 30, 25, ... , 0 εἶνε πρόοδος ἀριθμητικὴ φθίνουσα μὲ λόγον —5.

δ΄) Ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἀριθμητικῆς τινος προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ δεύτερος ὅρος θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ α + ω, ὁ τρίτος ὑπὸ τοῦ α + 2 ω κ.ο.κ. Ὥστε οἱ ὅροι τῆς προόδου θὰ εἶνε

$$\alpha,\ \alpha+\omega,\ \alpha+2\omega,\ \alpha+3\omega,\ \ldots\ldots \qquad (1)$$

ε΄) Ἐὰν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος ἀριθμητικῆς τινος προόδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οἱονδήποτε ὅρον αὐτῆς.

Πράγματι, ἐὰν α εἶνε ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ω ὁ λόγος τῆς προόδου, θὰ ἔχωμεν ὅτι ὁ 2ος ὅρος εἶνε α + ω, ὁ 3ος ὅρος εἶνε α + 2 ω, ὁ 4ος ὅρος εἶνε α + 3 ω, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα,

«ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς, αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων».

Οὕτω ὁ 30ὸς ὅρος τῆς ἀνωτέρω προόδου ἰσοῦται μὲ α + 29 ω. (1)

στ') Ἐὰν διὰ τοῦ ν παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου καὶ διὰ τοῦ τ τὸν τελευταῖον ὅρον αὐτῆς, οἱ προηγούμενοι τούτου θὰ εἶνε (ν—1) τὸ πλῆθος.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν ὅτι $\tau = \alpha + (\nu - 1)\,\omega$.

Π. χ. ἂν ζητῆται ὁ 13ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶνε 3 καὶ ὁ λόγος 5, ἔχομεν

$$\alpha = 3, \quad \omega = 5, \quad \nu = 13.$$

Ἑπομένως ὁ 13ος $= 3 + (13-1) \cdot 5 = 63$.

ζ') Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ δέκατος ὅρος εἶνε 31 καὶ ὁ εἰκοστὸς 61. Ἔχομεν ὅτι

$$\text{ὁ 10ος} = \alpha + 9\,\omega = 31, \quad \text{ὁ 20ός} = \alpha + 19\,\omega = 61.$$

Ἀφαιροῦντες ἐκ τῆς δευτέρας ἰσότητος τὴν πρώτην, εὑρίσκομεν

$$10\,\omega = 30, \qquad \text{καὶ} \qquad \omega = 3.$$

Ἑπομένως $\alpha = 4$. Ἄρα ἡ πρόοδος εἶνε 4, 7, 10, 13,. . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὸν 10ον ὅρον

α') τῆς προόδου 9·13·17·. . . β') τῆς —3·—1· + 1·. .

2) Εὕρετε τὸν 8ον ὅρον τῆς

$\alpha, \alpha + 3\beta, \alpha + 6\beta, \ldots, (\alpha + 21\beta)$.

124. Ἄθροισμα ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.—

α') Διὰ νὰ εὕρωμεν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, στηριζόμεθα (πρὸς εὐκολίαν) εἰς τὴν ἑξῆς ἰδιότητα,

«ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων, ἴσων ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων».

Πράγματι, ἔστω ἡ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \varkappa, \lambda, \tau,$ (1)

καὶ λόγος αὐτῆς ὁ ω, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ὅρων ταύτης ν.

Ἔχομεν ὅτι $\beta = \alpha + \omega, \quad \gamma = \alpha + 2\,\omega,$

Ἐπίσης ὅτι $\tau = \lambda + \omega, \quad \tau = \varkappa + 2\,\omega,$

Ἑπομένως $\lambda = \tau - \omega, \quad \varkappa = \tau - 2\,\omega,$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς $\beta = \alpha + \omega, \quad \lambda = \tau - \omega,$

Εὑρίσκομεν $\beta + \lambda = \alpha + \tau$.

Ὁμοίως ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\gamma = \alpha + 2\,\omega$, $\varkappa = \tau - 2\,\omega$ εὑρίσκομεν, προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη $\gamma + \varkappa = \alpha + \tau$.

β') Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς (1). Ἄς παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα διὰ τοῦ Σ· ἤτοι ἄς θέσωμεν

$$\Sigma = \alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \varkappa + \lambda + \tau,$$

ἢ

$$\Sigma = \tau + \lambda + \varkappa + \ldots\ldots + \gamma + \beta + \alpha.$$

Ἄν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$2\,\Sigma = (\alpha + \tau) + (\beta + \lambda) + (\gamma + \varkappa) + \ldots\ldots + (\tau + \alpha).$$

Ἐπειδὴ καθὲν τῶν ἐν παρενθέσει ἀθροισμάτων εἶνε ἴσον μὲ $(\alpha + \tau)$, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶνε ὅσον τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, δηλαδὴ ν, ἔχομεν $2\,\Sigma = (\alpha + \tau).\,\nu$ ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\Sigma = \frac{(\alpha + \tau).\,\nu}{2}$. (2)

Ἤτοι, «***τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς, ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν ὅρων αὐτῆς***».

γ') Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\alpha + (\nu - 1).\,\omega$, ὅπου ω παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου, εὑρίσκομεν $\Sigma = \frac{[\alpha + \alpha + (\nu - 1).\,\omega]\nu}{2} = \frac{2\,\alpha + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu$ (3)

Ὁ τύπος αὐτὸς χρησιμεύει, νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἄθροισμα Σ, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον, τὸν λόγον καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου.

Π. χ. ἄν ζητῆται τὸ ἄθροισμα δέκα ὅρων τῆς προόδου

$$2,\ 5,\ 8, \ldots\ldots$$

ἔχομεν $\alpha = 2$, $\omega = 3$, $\nu = 10$. Ἑπομένως ἄν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (4), εὑρίσκομεν

$$\Sigma = \frac{4 + 9.3}{2} \cdot 10 = 155.$$

4+27 / 2 · 10

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Εὕρετε τὰ ἀθροίσματα τῶν προόδων

α') 5·3·1· . . (ἐκ δέκα ὅρων). β') —4·—1·2·. . (ἐξ ἑπτὰ ὅρων).

γ') α, 4 α, 7α, (ἐκ ν ὅρων). δ') $\frac{10}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{4}{15}$, . . (ἐξ 21 ὅρων).

ε') Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν (150). $\frac{\nu(\nu + 1)}{2}$ (11325).

2+270

5 3 1 -1 -3 -5 -7 -9 -11 -13

§ 125. Περὶ παρεμβολῆς ἀριθμητικῶν ὅρων.—

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ αὐτῶν ὁσουσδήποτε ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν διὰ τῶν α καὶ τ παραστήσωμεν τοὺς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ παρεμβληθοῦν, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου, τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν νὰ σχηματίσωμεν θὰ εἶνε $(\nu+2)$. Ὁ τελευταῖος αὐτῆς ὅρος θὰ εἶνε ὁ τ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\tau=\alpha+(\nu+1)\,\omega'$, ὅπου τὸ ω′ παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἔχομεν $\omega'=\frac{\tau-\alpha}{\nu+1}$.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴν ζητουμένην πρόοδον ἀφοῦ γνωρίζομεν τὸν πρῶτον ὅρον, τὸν λόγον καὶ τὸν τελευταῖον ὅρον αὐτῆς.

Ἂν π. χ. ζητῆται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 4 νὰ παρεμβληθοῦν 18 ἀριθμοὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικὴν μετὰ τῶν δοθέντων, ἔχομεν $\alpha=1,\quad \tau=4,\quad \nu=16$.

Ἑπομένως θὰ εἶνε, $\omega'=\frac{4-1}{16+1}=\frac{3}{17}$.

Ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶνε ἡ $1,\ 1\frac{3}{17},\ 1\frac{6}{17},\ldots\ldots 4$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2 (17) νὰ παρεμβληθοῦν 9 (3) ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικήν.
0,1 (5,25).

2) Ὡρολόγιον κτυπᾷ τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης. Πόσα κτυπήματα κάμνει ἐντὸς ἡμερονυκτίου; 156.

3) Πόσον ἀξίζει ἐμπόρευμα, ἂν πληρώνεται εἰς 12 δόσεις, καὶ ἡ α′ δόσις εἶνε 10 δρ., ἡ β′ 15 δρ., ἡ γ′ 20 δρ. κ. ο. κ.; 450.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 300 $(2\nu+1)$. $150^2\ (\nu+1)^2$.

5) Ἂν ὁ 2ος καὶ ὁ 7ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθροισμα 92, ὁ δὲ 4ος καὶ ὁ 11ος 71, τίνες εἶνε οἱ τέσσαρες ὅροι; 54,75·47,75·37,75·23,25.

6) Εὕρετε πρόοδον ἀριθμητικὴν ἐκ 12 ὅρων, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μέσων ὅρων αὐτῆς εἶνε 74, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων 70. (2·5·8 . . . 35).

7) Εὕρετε ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ 3 (11) ὅρων, ἐχόντων ἄθροισμα 33 (176) γινόμενον (διαφορὰν τῶν ἄκρων αὐτῶν) δὲ 1287 (30). 9· 11· . . .(1· 4· . .).

Εὕρετε τοὺς πέντε ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου, ἂν τὸ γινόμενον αὐτῶν (τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν) εἶνε 12320 $\left(\frac{137}{180}\right)$. τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν 40 (45). 2 5,.. (3·6).

9) Νὰ εὑρεθῇ ὁ νος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου

$$1, \frac{\nu-1}{\nu}, \frac{\nu-2}{\nu}, \frac{\nu-3}{\nu}, \ldots \qquad \left[\text{Ἀπ. } \frac{1}{\nu}, \frac{(\nu+1)}{2}\right].$$

10) Νὰ εὑρεθῇ ὁ νος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$\frac{\nu^2-1}{\nu}, \nu, \frac{\nu^2+1}{\nu}, \frac{\nu^2+2}{\nu}, \ldots\ldots \left[\text{Ἀπ. } \frac{\nu^2+(\nu-2)}{\nu}, \frac{(2\nu^2+\nu)-3}{2}\right].$$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων (τῶν κύβων) τῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν.

[Παριστάνομεν διὰ S_1, S_2 τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἀντιστοίχως ἀπὸ 1 μέχρι τοῦ ν.

Ἔχομεν $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.

Θέτομεν $\beta = 1$ ὅτε $(\alpha+1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 . 1 + 3 . \alpha . 1^2 + 1$.

Ἀντικαθιστῶμεν τώρα τὸ α διὰ τῶν 1, 2, 3, ... ν

ὅτε ἔχομεν

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 . 1^2 + 3 . 1 + 1$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 . 2^2 + 3 . 2 + 1$$
$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3 . 3^2 + 3 . 3 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\nu+1)^3 = \nu^3 + 3 . \nu^2 + 3 . \nu + 1.$$

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\nu+1)^3 = 1 + 3 S_2 + 3 S_1 + \nu,$$

ἢ $$(\nu+1)^3 = 1 + 3 S_2 + 3 \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu,$$

ἐξ οὗ προσδιορίζομεν τὸ S_2.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων S_3, θὰ χρησιμοποιήσωμεν καθ' ὅμοιον τρόπον τὸν τύπον $(\alpha+1)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3 . 1 + 6\alpha^2 . 1^2 + 4\alpha . 1^3 + 1^4$ καὶ θὰ εὕρωμεν $(\nu+1)^4 = 1 + 4 S_3 + 6 S_2 + 4 S_1 + \nu$.

2) Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοί, ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 20, καὶ τὸ τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν $1\frac{1}{24}$. 2· 4· 6· 8.

§ 126. Πρόοδοι γεωμετρικαί.—

α΄) Γεωμετρικὴ πρόοδος καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται *ὅροι τῆς προόδου*, ὁ δὲ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὅρος τις, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ λέγεται *λόγος τῆς προόδου*.

β΄) Γεωμετρικὴ πρόοδος λέγεται *αὔξουσα*, ἐὰν ὁ λόγος αὐτῇ εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος, *φθίνουσα* δὲ, ἂν εἶνε μικρότερος αὐτῆς. Κατὰ ταῦτα ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots\ldots, 64$$

ἀποτελεῖ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶνε 2. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\ldots, \frac{1}{64}$

ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἔχουσαν λόγον $\frac{1}{2}$.

γ΄) Ἂν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ δεύτερος ὅρος ταύτης θὰ εἶνε αω. Διότι γίνεται ἐκ τοῦ α διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ω. Ὁ τρίτος ὅρος θὰ παριστάνεται ὑπὸ $α.\ ω.\ ω = α.\ ω^2$, ὁ τέταρτος ὑπὸ τοῦ $αω^3$ κ. ο. κ. Ὥστε ἡ πρόοδος θὰ παριστάνεται οὕτω $α,\ α.ω,\ α\,ω^2,\ α\,ω^3,\ α\,ω^4, \ldots\ldots\ldots$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος γεωμετρικῆς τινος προόδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οἱονδήποτε ὅρον αὐτῆς. Οὕτω ὁ 2ος ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὸν λόγον· ὁ 3ος ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὴν β΄ δύναμιν τοῦ λόγου· ὁ 4ος ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ λόγου κ. ο. κ.

δ΄) Ἐν γένει, ***«ὁ τυχὼν ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου, τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων».***

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν διὰ τοῦ τ παραστήσωμεν τὸν νυοστὸν ὅρον γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης πρῶτον ὅρον τὸν α καὶ λόγον τὸν ω, θὰ ἔχωμεν $τ = α\,ω^{ν-1}$.

Π. χ. ὁ δέκατος ὅρος τῆς προόδου 2, 6, 18, ... εἶνε ὁ 2.3^9.

Ὁ ἑνδέκατος ὅρος τῆς προόδου $9, 3, \frac{1}{3} \ldots$

εἶνε ὁ $9.\frac{1}{3^{10}}$. Διότι εἶνε $α = 9$, $ω = \frac{1}{3}$.

Ὁ ἕκτος ὅρος τῆς προόδου $\frac{13}{10}, \frac{13}{100}, \ldots\ldots$ εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\alpha = \frac{13}{10}$, $\omega = \frac{1}{10}$, θὰ εἶνε $\frac{13}{10} \times \frac{1}{10^5}$.

§ 127. Ἄθροισμα ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.—

α΄) Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \ldots, \alpha\omega^{(\nu-1)}$ ἐκ ν ὅρων. Ἐὰν διὰ Σ παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \ldots + \alpha\omega^{(\nu-1)}$ (1)

Ἐὰν τῆς ἰσότητος ταύτης πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ἐπὶ ω, ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον

$$\Sigma\omega = \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \alpha\omega^3 + \ldots\ldots + \alpha\omega^\nu$$

τὴν (1) (κατὰ μέλη) προκύπτει

$$\Sigma\omega - \Sigma = \alpha\omega^\nu - \alpha, \quad \text{ἢ} \quad \Sigma.(\omega-1) = \alpha\omega^\nu - \alpha,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\Sigma = \frac{\alpha.\omega^\nu - \alpha}{\omega-1} = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha.\omega^\nu}{1-\omega}$ (2).

β΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἶνε φθίνουσα καὶ ὅτι ἔχει ἀπείρους ὅρους.

Τότε ὁ ὅρος αὐτῆς $\alpha\omega^{\nu-1} = \tau$ θὰ εἶνε ἀριθμὸς ἐλάχιστος, ἐὰς τὸ ν εἶνε πολὺ μεγάλος ἀριθμός, καὶ θὰ τείνῃ νὰ γίνῃ ἴσος μὲ τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ν αὐξάνεται ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $\alpha\omega^\nu$ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\alpha\omega^{(\nu-1)}.\omega$, καὶ ἀντὶ τοῦ $\alpha\omega^{(\nu-1)}$ τὸ τ, θὰ ἔχωμεν

$$(3) \quad \Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\tau\omega}{1-\omega}, \quad \text{ἢ} \quad \Sigma = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1} \quad (4).$$

Παραλείποντες ἐν τῷ (3) τὸν $\frac{\tau\omega}{1-\omega}$ ἐπειδὴ εἶνε ἐλάχιστος ἀριθμὸς καὶ τείνει νὰ γίνῃ μηδέν, καθόσον λαμβάνομεν περισσοτέρους ὅρους τῆς φθινούσης προόδου, μένει ὡς ἄθροισμα τὸ

$$\Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega}. \quad (5).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω (4) καὶ (5) συνάγομεν ὅτι,

γ΄) ***«τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν διαφορὰν τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ τελευταίου ὅρου ἐπὶ τὸν λόγον αὐτῆς, παρονομαστὴν δὲ τὸν λόγον ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα».***

δ') ***«Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης ἀπείρους ὅρους, εἶνε ἴσον μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου, παρονομαστὴν δὲ τὴν μονάδα ἠλαττωμένον κατὰ τὸν λόγον τῆς προόδου».***

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots\ldots\ldots$$

εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\omega = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, θὰ εἶνε

$$\Sigma = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων $\frac{25}{100}$, $\frac{25}{100^2}$, ... εὑρίσκομεν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι $\alpha = \frac{25}{100}$, $\omega = \frac{1}{100}$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (5), ὅτε ἔχομεν

$$\Sigma = \frac{25}{100\left(1-\frac{1}{100}\right)} = \frac{25}{99}.$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς προόδου

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots$ εἶνε $\frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$·

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἑκάστης τῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀπείρους ὅρους.

α') $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9} \ldots\ldots$ β') $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\ldots$

γ') $2, -1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$ δ') 0.3686 . . . . . ε') 0,54444 . . . .

2) Εὕρετε τὸν εἰκοστὸν ὅρον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν εἴκοσι ὅρων τῶν προόδων

α') 1, 3, 9, 27, ... β') $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε $\omega = \frac{1}{4}$, $\nu = 6$, $\Sigma = 2730$.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα γεωμετρικῆς προόδου εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\tau = 384$, $\omega = 2$, $\nu = 8$. Ἀπ. 3·765.

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ σειρὰ

$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$ [Γράψατε αὐτὸ ὡς ἑξῆς

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{8} + \ldots\right) \ldots$]

6) Πού τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots \qquad (\text{'Aπ. } 4+3\sqrt{2}).$$

7) Ἂν εἶνε $\alpha > \beta$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν

α') $\alpha^{\nu}+\beta\,\alpha^{\nu-1}+\beta^2\,\alpha^{\nu-2}+\ldots$ β') $\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\ldots$

$$\left(\text{'Aπ. } \frac{\alpha^{\nu+1}}{\alpha-\beta},\ \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}\right).$$

Ὁμὰς δευτέρα 1) Ἐν τετραγώνῳ (ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ) πλευρᾶς α συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν νέον τοιοῦτον. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθεξῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τετραγώνων (τριγώνων).

$$\text{'Aπ. } 2\alpha^2 \left(\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}\right).$$

2) Ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος ρ ἐγγράφομεν τετράγωνον, εἰς τοῦτο κύκλον, εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον κ. ο. κ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων καὶ τῶν τετραγώνων. $2\pi\rho^2,\ 4\rho^2.$

3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἂν ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἡ 4η εἶνε 9πλασία τῆς β'. 9·27·81·243.

4) Νὰ μερισθῇ ὁ 221 εἰς τρία μέρη, ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ τῆς ὁποίας ὁ γ' ὅρος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν α' κατὰ 136. 17·51·153.

5) Τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τριῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶνε 248, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων εἶνε 192. Τίνες οἱ τρεῖς ὅροι; 8·40·200.

6) Δείξατε ὅτι ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ τὸ γινόμενον δύο ὅρων, ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

§ 128. Περὶ παρεμβολῆς γεωμετρικῶν ὅρων.—

Δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β, ζητεῖται δὲ νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ αὐτῶν ν ἄλλους, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν καλέσωμεν ω' τὸν λόγον τῆς προόδου, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων αὐτῆς θὰ εἶνε $(\nu+2)$, ὁ τελευταῖος ὅρος β θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον α ἐπὶ τὴν $(\nu+1)$ δύναμιν τοῦ λόγου ω'. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\beta=\alpha.\omega'^{(\nu+1)}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\omega'^{(\nu+1)}=\frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ἢ } \omega'=\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶνε ἡ

$$\alpha,\ \alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\ \alpha\sqrt[\nu+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2},\ \ldots\ldots,\beta.$$

Π. χ. ἂν ζητῆται νὰ παρεμβληθοῦν 9 ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελέσουν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἔχομεν $\nu = 9$, ἄρα $\omega' = \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}}$.

Ἐπομένως ἡ πρόοδος εἶνε $1, 2^{\frac{1}{10}}, 2^{\frac{2}{10}}, 2^{\frac{3}{10}}, \ldots\ldots 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν 161 (3) καὶ 4347 (243) δύο (τρεῖς) ἀριθμοί, ὥστε νἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

Περὶ λογαρίθμων.

§ 129. Ὁρισμοί.—

α') Ἐὰν ἀριθμός τις εἶνε δύναμις τοῦ 10, ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ταύτης λέγεται *λογάριθμος* τοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10.

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς 100 εἶνε ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ 10, ἤτοι ἔχομεν ὅτι $10^2 = 100$ καὶ ὁ ἐκθέτης 2 λέγεται λογάριθμος τοῦ 100 ὡς πρὸς τὴν βάσιν 10. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $10^3 = 1000$, ὁ 3 λέγεται λογάριθμος τοῦ 1000 ὡς πρός βάσιν 10.

β') Ἐν γένει, ἐὰν δοθείς τις ἀριθμός, ἔστω ὁ Α, εἶνε δύναμίς τις τοῦ 10, π.χ. ἂν εἶνε $10^\alpha = A$, ὁ ἐκθέτης α δυνάμεως ταύτης τοῦ 10 λέγεται λογάριθμος τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν τὸ 10, καὶ σημειώνεται οὕτω λογ. Α = α, ἀπαγγέλλεται δὲ ὡς ἑξῆς

ὁ λογάριθμος τοῦ Α εἶνε ἴσος μὲ α.

γ') Ἐπειδή, καθὼς γνωρίζομεν, εἶνε $10^1 = 10$, καὶ $10^0 = 1$, ἕπεται ὅτι, ***«ὁ λογάριθμος τοῦ 10 (ὡς πρὸς βάσιν 10) εἶνε ἴσος μὲ 1, ὁ δὲ λογάριθμος τῆς μονάδος ἰσοῦται μὲ μηδέν».***

§ 130. Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.—

α') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων ἕπεται ὅτι, οἱ λογάριθμοι ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν ἐκθετῶν δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως. Πράγματι γνωρίζομεν ὅτι,

(1)	$10^\alpha \cdot 10^\beta = 10^{\alpha+\beta}$	(§ 16, α')
(2)	$10^\alpha : 10^\beta = 10^{\alpha-\beta}$	(§) 16, στ')
(3)	$(10^\alpha)^\nu = 10^{\alpha \cdot \nu}$	(§ 16, γ')

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $10^\alpha = A$, $10^\beta = B$, θὰ εἶνε,

α = λογ. Α, β = λογ. Β. Ἄρα α + β = λογ. Α + λογ. Β.

β΄) Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν ὅτι $A.\ B = 10^{\alpha}\ .\ 10^{\beta} = 10^{\alpha+\beta}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται, ὅτι $\lambda o\gamma.\ (A.\ B) = \alpha + \beta = \lambda o\gamma.\ A + \lambda o\gamma.\ B$. Ἤτοι, «***ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων***».

γ΄) Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν ὅτι $A : B = 10^{\alpha} : 10^{\beta} = 10^{\alpha-\beta}$.

Ἤτοι ὅτι, $\lambda o\gamma.\ (A : B) = \alpha - \beta = \lambda o\gamma.\ A - \lambda o\gamma.\ B$.

Ἑπομένως «***ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου***».

δ΄) Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν ὅτι $A^{\nu} = (10^{\alpha})^{\nu} = 10^{\alpha.\nu}$.

Ἤτοι, ὅτι, $\lambda o\gamma.\ (A^{\nu}) = \alpha.\ \nu = \nu.\ \lambda o\gamma.\ A$.

Ἄρα, «***ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως***».

ε΄) Ἡ ἰδιότης β΄) ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους τῶν δύο **παράγοντας**. Π. χ. ἂν θέλωμεν τὸν $\lambda o\gamma.\ (A.\ B.\ \Gamma)$, παρατηροῦμεν ὅτι (θεωροῦντες τὸ γινόμενον $A.\ B$ ὡς ἕνα ἀριθμὸν) ἔχομεν

$$\lambda o\gamma.\ (A.\ B.\ \Gamma) = \lambda o\gamma.\ [(A\ B).\ \Gamma] = \lambda o\gamma.\ (A.\ B) + \lambda o\gamma.\ \Gamma$$
$$= \lambda o\gamma.\ A + \lambda o\gamma.\ B + \lambda o\gamma.\ \Gamma.$$

στ΄) Ἡ ἰδιότης δ΄) ἀληθεύει καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἶνε κλασματικὸς ἢ καὶ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Πράγματι ἂν θέλωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ $A^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ θέσωμεν $\psi = A^{\frac{\mu}{\nu}}$ ὑψώσωμεν δὲ τὰ ἴσα μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης εἰς τὴν ν δύναμιν, θὰ ἔχωμεν $\psi^{\nu} = A^{\mu}$. Ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο τούτων ἴσων, ἔχομεν $\lambda o\gamma.\ \psi^{\nu} = \lambda o\gamma.\ (A^{\mu})$ καὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα δ΄) εἶνε $\nu.\ \lambda o\gamma.\ \psi = \mu.\ \lambda o\gamma.\ A$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma.\ \psi = \frac{\mu}{\nu}\cdot \lambda o\gamma.\ A$.

Ἤτοι $\lambda o\gamma.\left(A^{\frac{\mu}{\nu}}\right) = \frac{\mu}{\nu}.\ \lambda o\gamma.\ A$.

Ἐπίσης ἂν θέλωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ $A^{-\mu}$, παρατηροῦμεν ὅτι (§ 81, α΄) εἶνε $A^{-\mu} = \frac{1}{A^{\mu}}$. Ἑπομένως κατὰ τὴν

ἰδιότητα γ') ἔχομεν λογ. $(A^{-\mu})$ = λογ. $\left(\frac{1}{A^{\mu}}\right)$ = λογ. 1 — λογ. A^{μ}
= 0 — μ. λογ. A = — μ. λογ. A.

ζ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, ***«ὁ λογάριθμος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ»***.

Διότι εἶνε λογ. $\sqrt{A}$ = λογ. $\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$. λογ. A.

η') Ἐν γένει, ***«ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε ρίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, διηρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης»***.

Οὕτω ἔχομεν ὅτι λογ. $\sqrt[\nu]{A}$ = λογ. $\left(A^{\frac{1}{\nu}}\right) = \frac{1}{\nu}$. λογ. A.

Κατὰ τἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι,

λογ. 105 = λογ. (3.5.7) = λογ. 3 + λογ. 5 + λογ. 7.

λογ. $\left(5\frac{2}{3}\right)$ = λογ. $\left(\frac{17}{3}\right)$ = λογ. 17—λογ. 3.

λογ. (81) = λογ. (3^4) = 4. λογ. 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων.

α') λογ. 15 = λογ. 3 + λογ. 5   β') λογ. 55 = λογ. 11 + λογ. 5.

γ') λογ. $2\frac{1}{3}$ = λογ. 7—λογ. 3. δ') λογ. 49 = 2. λογ. 7.

§ 131. Τροπὴ ἀρνητικοῦ λογαρίθμου εἰς ἴσον αὐτοῦ ἔχοντα μόνον τὸν ἀκέραιον ἀρνητικόν. Χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου.—

α') Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $10^0=1$· $10^1=10$· $10^2=100$, ...
ἔχομεν ὅτι, λογ. 1 = 0· λογ. 10 = 1· λογ. 100 = 2, ...

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν, ὡς γνωστὸν (81, α')

$10^{-1} = 0,1$· $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$, ...

Ἄρα εἶνε λογ. 0,1 = — 1· λογ. 0,01 = — 2· λογ. 0,001 = — 3.

β') Ἔστω ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10, π. χ. ὁ 7. Ἐπειδὴ εἰς τὴν τιμὴν y = 7 τῆς συναντήσεως $10^x = y$ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ x (§ 95, γ') ἕπεται ὅτι ὑπάρχει λογάριθμος τοῦ 7, καθὼς καὶ καθενὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ. Εἶνε δὲ οὗτος θετικὸς μέν, ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ἀρνητικὸς δέ, ἂν μικρότερος τῆς μονάδος. Ὁ λογάριθμος τοῦ 7 θὰ εἶνε μεγαλύτερος τοῦ λογαρίθμου τῆς μονάδος καὶ μικρότερος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 10· ἤτοι ὁ λογάριθμος τοῦ 7 θὰ εἶνε μηδὲν σὺν μέρος τι τῆς 1. Ὁμοίως σκεπτόμενοι, ἔχομεν ὅτι ὁ λογάριθμος καθενὸς τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέρχονται

μεταξὺ τῶν 1 καὶ 10 θὰ ἰσοῦται μὲ 0 + μέρος τι τῆς μονάδος,
μεταξὺ τῶν 10 καὶ 100 θὰ ἰσοῦται μὲ 1 + μέρος τι τῆς μονάδος,

. . . .

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν ἀριθμός τις περιέχεται μεταξὺ 0,1 καὶ 1 θὰ ἔχῃ λογάριθμον μεγαλύτερον τοῦ λογαρίθμου τοῦ 0, 1 καὶ μικρότερον τοῦ λογαρίθμου τῆς μονάδος. Δηλαδὴ, ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ θὰ εἶνε — 1 + μέρος τι τῆς μονάδος.

Ὁμοίως ὁ λογάριθμος καθενὸς ἀριθμοῦ περιερχομένου μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 0,01 καὶ 0,1 θὰ εἶνε — 2 + μέρος τι τῆς μονάδος·
μεταξὺ τῶν 0,001 καὶ 0,01 θὰ εἶνε — 3 + μέρος τι τῆς μονάδος

. . . .

Τὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος, τὸ ὁποῖον εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, ἐκφράζεται συνήθως, διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ (κατὰ προσέγγισιν). Ὥστε ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ θὰ εἶνε ἐν γένει, ἀκέραιος ἢ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (κατὰ προσέγγισιν).

γ') Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ ὅλως ἀρνητικόν, εἰς ἄλλον, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἀκέραιον μέρος νὰ εἶνε ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν θετικόν.

Ἔστω π.χ. ὁ ὅλως ἀρνητικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος $-2{,}54327$ ἤτοι ὁ $-2-0{,}54327$.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν προσθέσωμεν τὸν — 1 καὶ τὸν + 1 (τὸ ὁποῖον δὲν μεταβάλλει τὴν ἀξίαν αὐτοῦ), εὑρίσκομεν

$$-3+1-0{,}54327.$$

Ἀφαιροῦντες τὸ δεκαδικὸν μέρος 0,54327 ἀπὸ τῆς μονάδος, εὑρίσκομεν $-3+0{,}45673$.

τὸ ὁποῖον γράφεται, συνήθως, καὶ ὡς ἑξῆς $\overline{3},45673$.

Δηλαδὴ γράφομεν τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον ὑπεράνω τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν ὅτι τοῦτο μόνον εἶνε ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος θετικόν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ τρέψωμεν λογάριθμον ὅλως ἀρνητικὸν εἰς ἄλλον ἴσον αὐτοῦ, ἔχοντα μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὴν ἀπό-

λυτον τιμὴν τοῦ ἀκεραίου τοῦ δοθέντος κατὰ 1, γράφομεν τὸ σημεῖον πλὴν ὑπεράνω τοῦ ἐξαγομένου, δεξιά αὐτοῦ δέ, ὡς δεκαδικὸν τὰ ὑπόλοιπα τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος, τοῦ μὲν τελευταίου, ἀπὸ τοῦ 10, τῶν δ' ἄλλων ἀπὸ τὸ 9».

δ') Τὸ ἀκέραιον μέρος (θετικόν, ἀρνητικόν, ἢ μηδὲν) λογαρίθμου λέγεται *χαρακτηριστικὸν* τοῦ λογαρίθμου τούτου.

ε') Κατὰ ταῦτα, ***«ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος ἀποτελεῖται ἐν γένει ἀπὸ δύο μέρη· ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν (ἀκέραιον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ μηδὲν) καὶ ἀπὸ δεκαδικὸν μέρος, τὸ ὁποῖον εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς ἢ μηδέν».***

Οὕτω εἰς τὸν λογάριθμον 3,52184 τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν εἶνε 3. τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τὸ 0,52184. Εἰς τὸν $\bar{2}$,78256 τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε —2, τὸ δὲ δεκαδικὸν 0,78256.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι,

στ') ***«ἐὰν ἀριθμὸς εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τούτου, ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα».***

ζ') ***«Ἐὰν ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος (γραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν), τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ εἶνε τόσαι ἀρνητικαὶ μονάδες, ὅση εἶνε ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου τούτου, τοῦ κειμένου δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς».***

η') ***«Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου εἶνε ἀριθμὸς θετικός, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμὸς ἔχει τόσα ἀκέραια ψηφία ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν σὺν ἕν».***

θ') ***«Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν δοθέντος λογαρίθμου εἶνε ἀριθμὸς ἀρνητικός, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμός ἔχει ἀκέραιον μηδέν, καὶ τόσα μηδενικὰ μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ὅσας μονάδας (ἀρνητικὰς) ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν πλὴν ἕν».***

Οὕτω τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ. 532,75 εἶνε 2. Διότι τὸ 532,75 εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 100, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 1000. Ἄρα ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ εἶνε 2 + μέρος τι τῆς μονάδος.

Ὁ λογάριθμος τοῦ 5,3275 ἔχει χαρακτηριστικὸν 0. Διότι, ὁ

5,3275 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 1 καὶ μικρότερος τοῦ 10. Ἄρα ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ εἶνε 0 + μέρος τι τῆς 1.

Ὁ λογάριθμος τοῦ 0,045 ἔχει χαρακτηριστικὸν — 2. Διότι ὁ 0,045 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 0,01 καὶ μικρότερος τοῦ 0,1. Ἄρα ἔχει λογάριθμον — 2 + μέρος τι τῆς 1.

Ὁ λογ.0,00652 ἔχει χαρακτηριστικὸν — 3. Ὁ λογ.0,0000732 ἔχει χαρακτηριστικὸν — 5.

ι′) ***«Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοι αὐτῶν διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ χαρακτηριστικὸν αὐτῶν»***.

Πράγματι, ἔστω ἀριθμός τις, π. χ. ὁ 3271 καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ 3, 51468. Ἐὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διαιρέσωμεν διὰ 100 π.χ. θὰ ἔχωμεν 3271: 100 = 32,71. Ὁ λογάριθμος τοῦ 32,71 = λογ. 3271—λογ. 100 (§ 130, γ′). Ἤτοι λογ. 32,71 = 3,51468—2= 1, 51468. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 3271 καὶ 32,71 εἶνε τὸ αὐτό.

Ἐν γένει, ἐὰν ἔχωμεν ὅτι $10^{\alpha} = A$, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ἴσα ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἔστω τὴν 10^3 θὰ ἔχωμεν $10^{\alpha}.10^3 = A.10^3$, ἢ $10^{\alpha+3} = A.10^3$. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι λογ. $(A.10^3) = \alpha + 3$. Ἀλλ' ὁ λογ. $A = \alpha$. Ἑπομένως λογ. $(A.10^3) = \alpha + 3 =$ λογ. $A + 3$. Ὁμοίως, ἂν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 10^2 π. χ. τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $10^{\alpha} = A$, εὑρίσκομεν ὅτι λογ. $(A: 10^2) =$ λογ. $A—2$. Ἤτοι ἐὰν ἀριθμός τις πολλαπλασιασθῇ (ἢ διαιρεθῇ) μὲ τὸ 10· 100· 1000 . . . . , ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ 1·2·3 . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων

α′) λογ. 35 β′) λογ. 4513. γ′) λογ. 0,5. δ′) λογ. 1,37. ε′) λογ. 0,00132. στ′) λογ. $\frac{13}{3}$. ζ′) λογ. 397,452 η′) λογ. $\frac{1}{250}$ · θ′) λογ.62 $\frac{4}{9}$ · ι′) λογ. $2\frac{1}{7}$ ·

§ 132. Πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων.—

α′) Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων γίνονται καθὼς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν μὲ παραλλαγάς τινας, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν.

β') *Πρόσθεσις.* Διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $\overline{2},57834$ καὶ $\overline{1},67943$, τοὺς μὲν δεκαδικοὺς προσθέτομεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν· 1 τὸ κρατούμενον καὶ $2 = 3$ καὶ $-1 = 2$. Οὕτω εὑρίσκομεν ἄθροισμα $\overline{2},25777$.

γ') *Ἀφαίρεσις.* Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ $\overline{5},67893$ τὸν $\overline{8},75928$, τοὺς μὲν δεκαδικοὺς ἀφαιροῦμεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν· 1 τὸ κρατούμενον καὶ -8 ἴσον -7, διὰ τὴν ἀφαίρεσιν γίνεται $+7$ καὶ σὺν $-5 = +2$. Ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $2,91965$.

δ') *Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν $\overline{5},6289$ ἐπὶ 3

Ἔχομεν προφανῶς $\overline{5},62890 = -5.3. + 0,62890.3$
$= -15 + 1,88670 = \overline{14},88670.$

ε') *Διαίρεσις δι' ἀκεραίου.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ $\overline{5},62891$ διὰ τοῦ 3.

Παρατηροῦμεν οτι $\overline{5},62891 : 3 = (-5 + 0,62891) : 3$
$= (\overline{6} + 1,62891) : 3 = -2 + 0,54297 = \overline{2},54297.$

Ὁμοίως διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\overline{4},67831$ διὰ τοῦ 3, ἔχομεν $\overline{4},67831 : 3 = (-4 + 0,67831) : 3$
$= (-6 + 2,67831) : 3 = -2 + 0,89277$, ἢ $\overline{2},89277$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\overline{2},34987 \cdot \overline{6},97852 \cdot 9,82057$.

2) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $\overline{3},9809$ ἀπὸ $\overline{8},30467$· ὁ $\overline{9},93726$ ἀπὸ τὸν $\overline{3},86564$.

3) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\overline{9},30942$ ἐπὶ $3 \cdot 7 \cdot 42$.

4) Νὰ διαιρεθῇ ὁ $\overline{9},93642$ διὰ $8 \cdot 9 \cdot 12$ (μέχρις ὅτου τὰ πηλίκα ἔχουν πέντε δεκαδικὰ ψηφία).

§ 133. Πῶς εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν.—

α') ***Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἢ 0,1 ἢ 0,01.... τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν δύο δυνάμεων τοῦ 10, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀριθμός, καὶ οἵτινες (ἐκθέται) διαφέρουν κατὰ μονάδα, ἢ 0, 1 ἢ 0,01,...»***

Οὕτω ἐὰν ἔχωμεν $10^{\rho} < A < 10^{\rho+1}$ (ἐνῷ τὸ ρ εἶνε ἀκέραιος) τὸ ρ λέγεται λογάριθμος τοῦ α κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ἤτοι τὸ ρ εἶνε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ Α.

Ἂν ἔχωμεν $10^{\frac{\lambda}{10}} < A < 10^{\frac{\lambda+1}{10}}$

τὸ $\frac{\lambda}{10}$ λέγεται λογάριθμος τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν 0, 1.

β') Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν 0,1. Ἂν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ $\frac{x}{10}$ θὰ ἔχωμεν $10^{\frac{x}{10}} < A < 10^{\frac{x+1}{10}}$

Ὑψοῦμεν τὰ ἄνισα εἰς τὴν 10ην δύναμιν καὶ εὑρίσκομεν

$$10^x < A^{10} < 10^{x+1}$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ x εἶνε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ A^{10}.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἂν ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἢ 0,001,...

Ἑπομένως, «***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0, 01, . . ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὴν 10ην, ἢ τὴν 100ὴν, . . δύναμιν, τοῦ ἐξαγομένου νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ καὶ τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10 ἢ 100,..***».

§ 134. Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.—

α') Ἐνῶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ (ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν), ἐν τούτοις ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶνε λίαν μακρὰ καὶ ἐπίπονος. Διὰ τοῦτο ὑπάρχουν πίνακες, οἵτινες λέγονται ***λογαριθμικοὶ πίνακες***, περιέχοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς μέχρι τινός. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εὐκόλως (§ 131, στ', ζ'), διὰ τοῦτο οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουν ἑκάστου λογαρίθμου μόνον τὸ δεκαδικὸν μέρος, συνήθως μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν καὶ πίνακες, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑκάστου λογαρίθμου μὲ ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία ἕκαστον ... καὶ δώδεκα.

β') Συνήθως μεταχειριζόμεθα πίνακας λογαρίθμων πεντοψηφίων, δηλαδὴ περιέχοντας τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων ...ίων τινῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς καὶ ἕκαστον μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία. Ἡ διάταξις αὐτῶν φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος.

γ΄) Αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν εἶνε γραμμέναι εἰς τὴν πρώτην στήλην, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres), αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἰς τὴν ὁριζοντίαν σειρὰν μετὰ τοῦ N. Ὁ λογάριθμος καθενὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
1	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	481	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	627	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	431	740	749
510	757	766	774	783	791	800	809	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003

Ἐπειδὴ πολλοὶ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῶν λογαρίθμων αὐτῶν κοινά, γράφονται ταῦτα ἅπαξ μόνον καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις ὅτου ἀλλαχθοῦν.

δ΄) Ὁ ἀστερίσκος, ὅστις ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ, σημαίνει ὅτι τὰ παραλειπόμενα δύο πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι, λογ. 500 = 2,69897.
λογ. 5000 = 3,69897, λογ. 5017 = 3,70044.
γογ. 5063 = 3,70441, λογ. 5129 = 3,71003.

§ 135. Χρήσεις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.—

α΄) Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας μεταχειριζόμεθα κατὰ τὰ ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

είνε

«*Ὅταν δοθέντος ἀριθμοῦ τινος, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν λογάριθμον αὐτοῦ*».

«*Ὅταν δοθέντος λογαρίθμου τινός, θέλωμεν νὰ ε τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὸν ἀριθμόν*».

β΄) *Περίπ.ωσις πρώτη*. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφία, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καὶ εὑρίσκομεν αὐτό, καθὼς εἴδομεν ἀνωτέρω. Οὕτω ἔχομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, διότι γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ (§131, στ΄, ζ΄).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν 0,003817· 1,141· 0,0845· 107,3. 1203· 13,07· 0,0013· 0,00064124.

γ΄) Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ λογάριθμος ἔχῃ ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, χωρίζομεν τὰ τέσσαρα πρῶτα δι' ὑποδιαστολῆς, ἀφοῦ προηγουμένως εὕρωμεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου αὐτοῦ. Ἐὰν π. χ. ζητῆται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 50735, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶνε 4, χωρίζοντες δὲ τὰ 4 πρῶτα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 5073,5. Ἐπειδή, ὡς γνωστὸν (§ 131, ι΄), τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τοῦ δοθέντος εἶνε τὸ αὐτό, ἕπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5073,5. Ἀλλ' αὐτὸς περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν 5073 καὶ 5074. Ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ 5073,5 θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5073 καὶ 5074. Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o\gamma.\ 5073 = 3{,}70526, \qquad \lambda o\gamma.\ 5074 = 3{,}70535.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων λογαρίθμων εἶνε 9 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ 5073 αὐξηθῇ κατὰ 1 καὶ γίνῃ 5074, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 0,5 διὰ νὰ γίνῃ 5073,5 ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ αὐξηθῇ κατὰ 9.0,5 = 4,5 ἢ κατὰ 5 περί- ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Ὥστε, πρέπει εἰς τὸν λογάριθμον Ἐκ ?6 νὰ προσθέσωμεν 5 ἑκατοστὰ χιλιοστοῦ, ἵνα ἔχωμεν τὸν ιον τοῦ 5073,5. Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν εὑρίσκο-

705

ρι 3,5= 70531. Ἄρα ὁ λογ. 50735=4,70531.

ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε 5,0735 τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ... εἶνε τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 50735 (§ 131, ι'). Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ὅτι λογ. 5,0735=0,70531.

δ') *Περίπτωσις δευτέρα*. Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, εὑρίσκομεν ἀπέναντι αὐτοῦ τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ἔστω π. χ. ὅτι ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶνε ὁ 3,70140. Τὸ δεκαδικὸν μέρος εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 5028. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε 3, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τέσσερα ἀκέραια ψηφία (§ 131, η'): ἄρα εἶνε ἀκριβῶς ὁ 5028. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον $\overline{1},70552$ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,5076. Εἰς τὸν λογάριθμον 0,70995 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5,128.

ε') Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου δὲν ὑπάρχῃ εἰς τοὺς πίνακας, θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. ὅτι δίδεται ὁ λογάριθμος 2,70169 καὶ ζητεῖται ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμός. Τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 0,70165 καὶ τοῦ 0,70174 τῶν ἀριθμῶν 5031 καὶ 5032. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τούτων διαφέρουν, ὡς βλέπομεν, κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουν κατὰ 1. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ 5031, ὁ ὁποῖος εἶνε 3,70165, αὐξηθῇ κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 1. Ἂν ὁ λογάριθμος αὐξηθῇ κατὰ 4 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως καὶ γίνῃ 3,70169 ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μονάδος αὐτῆς, ἤτοι κατὰ 0,44... Ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶνε 0,70169 θὰ εἶνε τὰ 5031,44... Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρ... εἶνε 2, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία. ... εἶνε ὁ 503,144.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ...

α') 95348. β') 6,8372 γ') 0,98629. δ') 968 $\frac{3}{8}$. ε') 3,6598. στ') ...

2) Νὰ εὑρεθοῦν ...

α') λογ. $x = 0{,}63147$. β') λογ. $x = 1{,}72127$. γ') λογ. $x = 0{,}68708$.
δ') λογ $x = \bar{3}{,}92836$. ε') λογ. $x = \bar{4}{,}38221$. στ') λογ. $x = \bar{5}{,}70082$.

§ 136. Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.—

α') Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων (§ 130) δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν εἰς πολλαπλασιασμὸν καί τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης εἰς διαίρεσιν. Πράγματι, ἂν ζητοῦμεν τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ προσθέτομεν αὐτούς· τό ἄθροισμα τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν θὰ εἶνε, ὥς γνωστόν, ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν. Εὑρίσκομεν ἀκολούθως τὸν λογάριθμον αὐτὸν εἰς τοὺς πίνακας (ἢ τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν), καὶ τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοῦτον ἀριθμόν. Οὗτος θὰ παριστάνῃ προφανῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

β') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν, ἐργαζόμεθα ὁμοίως, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.

γ') *Νὰ εὑρεθῇ ὁ* x, *ἐὰν εἶνε* $x = 72{,}214 . 0{,}08203$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν (§ 130, β'),

$$\text{λογ. } x = \text{λογ. } 72{,}214 + \text{λογ. } 8{,}08203.$$

Εὑρίσκοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο παραγόντων, ἔχομεν

$$\text{λογ. } 72{,}214 = 1{,}85862, \quad \text{λογ. } 0{,}08203 = \bar{2}{,}91397.$$

Ἑπομένως, προσθέτοντες εὑρίσκομεν ὅτι λογ. $x = 0{,}77259$, τούτου δι' εὑρίσκοντες τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν, ἔχομεν $x = 5{,}9236$.

δ') *Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον* $-908{,}4 . 0{,}05392 . 2{,}117$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ γινομένου διὰ τοῦ x καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\text{λογ } x = \text{λογ. } 908{,}4 + \text{λογ. } 0{,}05392 + \text{λογ. } 2{,}117.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν ὅτι λογ. $908{,}4 = 2{,}95828$,

$$\text{λογ. } 0{,}05392 = \bar{2}{,}73175, \quad \text{λογ. } 2{,}117 = 0{,}32572.$$

Διὰ προσθέσεως τούτων προκύπτει ὅτι λογ. $x = 2,01575$.

Ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου τούτου εἶνε ὁ 103,69.

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε ἀρνητικὸν (§ 10, α'), ἕπεται ὅτι $x = -103,69$.

ε') *Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον* $x = 5250 : 23,487$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν

λογ. $x =$ λογ. $5250 -$ λογ. $23,487$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

λογ. $5250 = 3,72916$, λογ. $23,487 = 1,37082$.

Δι' ἀφαιρέσεως τοῦ δευτέρου τούτων ἀπὸ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν ὅτι λογ. $x = 2,34933$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι $x = 22353$.

στ') *Νὰ εὑρεθῇ ὁ* x, *ἐὰν εἶνε* $x = \dfrac{7,56.4667.567}{899,1.0,00337.23435}$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, εὑρίσκομεν

λογ. $x =$ λογ. $7,56 +$ λογ. $4667 +$ λογ. 567
$-$λογ. $899,1 -$λογ. $0,00337 -$ λογ. 23435.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

λογ. $7,56 = 0,81852$,	λογ. $899,1 = 2,95381$,
λογ. $4667 = 3,66904$,	λογ. $0,00337 = \bar{3},52763$,
λογ. $567 = 2,75358$,	λογ. $23435 = 4,36986$.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

λογ. $7,56 +$ λογ. $4697 +$ λογ. $567 = 7,30114$,

λογ. $899,1 +$ λογ. $0,00337 +$ λογ. $23435 = 4,85130$.

Δι' ἀφαιρέσεως προκύπτει λογ. $x = 2,44983$.

Εὑρίσκοντες τὸν ἀντίστοιχον τούτου ἀριθμόν, ἔχομεν $x = 281,73$

ζ') *Νὰ εὑρεθῇ τὸ* x *ἐκ τῆς ἰσότητος* $x = 376^3$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, ἔχομεν

λογ. $x = 3.$ λογ. 376.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν λογ. $376 = 2,57519$.

Ἑπομένως λογ. $x = 3.2,57519 = 7,72557$.

Ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει $x = 53159000$.

η') *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ* 0,000043461.

Ἐὰν θέσωμεν $x = \sqrt{0,000043461}$ καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν $λογ.\ x = \frac{1}{2} \cdot λογ.\ 0,000043461$

ἢ $λογ.\ x = \frac{1}{2}\ \overline{5},63989$, ἢ $λογ.\ x = \overline{3},81995$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται ὅτι $x = 0,0066062$.

θ') *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ* x *ἐκ τῆς ἰσότητος* $81^x = 10$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$λογ.\ 81^x = λογ.\ 10,$$

ἢ $$x.\ λογ.\ 81 = λογ.\ 10 = 1.$$

Ἄρα $$x = \frac{1}{λογ.\ 81}.$$

Εἶνε $$λογ.\ 81 = 1,90849.$$

Ἑπομένως καὶ $x = \frac{1}{1,90849} = \frac{1,00000}{1,90849} = 0,52397.$

Ἤτοι $$x = 0,52397.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων διὰ λογαρίθμων

α') $0,4326^3$. β') $12^{\frac{1}{3}}$. γ') $\sqrt[5]{0,07776}$. δ') $13^{\frac{1}{5}}$ $\left(\text{Ἀπ.}\ \begin{matrix}0,0809579\cdot 2,289428\\ 0,6\cdot\ 0,959322\end{matrix}\right)$

ε') $-875,6348.62,82407$. στ') $\frac{\sqrt[15]{25,36496}}{(0,0893462)^8}$. $\left(\text{Ἀπ.}\ \begin{matrix}-55010.95\\ 305498300\end{matrix}\right)$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶνε 2,51075 δ. (7,8875).

3) Νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 12 καὶ 23437500, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος. (ὁ λόγος = 5).

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια πτώσεως σώματος πίπτοντος ἐν τῷ κενῷ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ ὕψους 4810 μ. (τῆς κορυφῆς τοῦ λευκοῦ ὄρους). (31,317'').

127. Λύσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων διὰ τῶν λογαρίθμων.—

Ἐκθετικὰς ἐξισώσεις (σελ. 128) δυνάμεθα, ἐνίοτε, νὰ λύωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3^x = 729$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, ἔχομεν

$x\ λογ.\ 3 = λογ.\ 729$ καὶ $x = \frac{λογ.\ 729}{λογ.\ 3} = \frac{2,86273}{0,47712} = 6,00002...$

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x^2-9x-24} = 4096.$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$(x^2-9x-24).\ \lambda o\gamma.\ 2 = \lambda o\gamma.\ 4096.$$

Ἄρα $$x^2-9x-24 = \frac{\lambda o\gamma. 4096}{\lambda o\gamma.\ 2} = 12.$$

Ἤτοι $$x^2-9x-24 = 12.$$

Λύοντες δ' αὐτὴν εὑρίσκομεν $x = 12$ καὶ $x = -3$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51{,}5.$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$x.\ \lambda o\gamma \left(\frac{3}{4}\right) = \lambda o\gamma.\ 51{,}5.$ Ἐξ οὗ $x = \frac{\lambda o\gamma.\ 51{,}5}{\lambda o\gamma.\ 0{,}75} = -13{,}701.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α′) $3^x = 177147.$ β′) $3^{\frac{x}{2}} = 768.$ γ′) $3^{\sqrt{x}} = 243.$ $\left(\text{Ἀπ.}\ 11{\cdot}12{,}09\ \ 25\right)$

δ′) $24^{3x-2} = 10000.$ ε′) $5^{x^2-3x} = 625.$ (Ἀπ. $1{,}6327{\cdot}4$ καὶ -1).

στ′) $x^{x^2-7x+12} = 1.$

(Ἔχομεν $(x^2-7x+12).\lambda o\gamma.\ x = 0$, ἐξ οὗ ἢ $\lambda o\gamma.\ x = 0$ ἄρα $x = 1$, ἢ $x^2-7x+12 = 0$. Ἤτοι $x = 1$, ἢ 3, ἢ 4).

ζ′) $6^{x^4-18x^2+86} = 7776.$ η′) $\alpha.\ \alpha^3.\alpha^5.\alpha^7 \ldots \alpha^{2x-1} = \nu.$ $\left(\text{Ἀπ}\ 3{\cdot}{-3}, \left(\frac{\lambda o\gamma.\ \nu}{\lambda o\gamma.\ \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$

θ′) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x^4 + y^4 = 641,\ \ \lambda o\gamma.\ (xy)^2 = 2.$ (Ἀπ. $2{\cdot}5$).

§ 138. Λύσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων ἄνευ χρήσεως λογαριθμικῶν πινάκων.—

Δυνάμεθα ἐνίοτε, νὰ λύσωμεν ἐκθετικὰς ἐξισώσεις ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $10^{(5-x)(6-x)} = 100.$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$(x-5).\ (x-6).\ \lambda o\gamma.\ 10 = \lambda o\gamma.\ 100 = \lambda o\gamma.\ 10^2.$

Ἄρα $(x-5).\ (x-6).\ \lambda o\gamma.\ 10 = 2.\ \lambda o\gamma.\ 10.$

ἢ $(x-5).\ (x-6) = 2.$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $x = 7$ καὶ $x = 4$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha^{(\beta-x)x} = \alpha^x$, (ἐνῷ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε α θετικὸν καὶ $\neq 1$) Ἔχομεν $(\beta x - x^2).\ \lambda o\gamma.\ \alpha = x.\ \lambda o\gamma.\alpha$ καὶ $\beta x - x^2 =$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x = 0$ καὶ $x = \beta - 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

α′) $5^{2x} - 7.5^{x} - 450 = 0$. β′) 5. λογ. x — λογ. 288 = 3. λογ. $\frac{x}{2}$.

γ′) $\sqrt[x]{a^x} = a$. δ′) $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$. ('Απ. ± 1·3).

ε′) $2^x + 4^x = 272$. στ′) λογ. x = λογ. 24 — λογ 8. ('Απ. 4·3).

ζ′) 2 λογ. x = λογ. 192 + λογ. $\frac{3}{4}$. η′) $2^{x+1} + 4^x = 80$. ('Απ. 12·3).

2) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

α′) $x^2 + y^2 = 425$, β′) $x + y = 65$,
λογ. x + λογ. y = 2. λογ. (x—y) = 3.

γ′) $5x^2 - 3y^2 = 11300$,
λογ. x + λογ. y = 3. ('Απ. 20·5, 25·40, 20·20).

§ 139*). Περὶ τῶν λογαρίθμων ὡς πρὸς βάσιν οἱανδήποτε.—

α′) *Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν τινά, ἔστω τὴν β, τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ β, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.*

Ἐπειδὴ εἶνε $2^3 = 8$, $3^4 = 81$,
ὁ λογάριθμος τοῦ 8 ὡς πρὸς βάσιν 2 εἶνε τὸ 3· ὁ λογάριθμος τοῦ 81 ὡς πρὸς βάσιν 3 εἶνε τὸ 4.

Ἐν γένει, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $\beta^x = A$,
ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως ταύτης, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τοῦ x, διὰ τὴν ὁποίαν ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις, καλεῖται *λογάριθμος τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν β*, καὶ παριστάνεται συμβολικῶς οὕτω

$$\text{λογ.}_\beta\ A = x.$$

β′) Κατὰ ταῦτα οἱ λογάριθμοι, τοὺς ὁποίους ἐξητάσαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις, ἔχουν βάσιν τὸν 10 καὶ διὰ τοῦτο τὸ σύστημα τῶν λογαρίθμων τούτων καλεῖται *δεκαδικόν*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἄλλου οἱουδήποτε, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλην βάσιν.

γ′) Παρατηρητέον ὅτι ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων πρέπει νὰ εἶνε ἀριθμὸς *διάφορος τῆς μονάδος καὶ θετικός*. Διότι ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $1^x = A$
εἶνε ἀδύνατος διὰ τιμὴν τοῦ Α διάφορον τῆς μονάδος, ἡ δὲ ἐξίσωσις $(-\beta)^x = A$ δὲν ἐπιδέχεται πάντοτε λύσιν, καθὼς π.χ. ἡ

$$(-10)^x = 1000.$$

δ´) *Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος Α ὡς πρὸς βάσιν τινὰ β κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τὸν ἀριθμὸν $\frac{x}{\nu}$ (ὅπου τὸ x εἶνε ἀκέραιος) ἐὰν ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\beta^{\frac{x}{\nu}} < A < \beta^{\frac{x+1}{\nu}}$.*

Ἐὰν ἔχωμεν $\beta^{\frac{x}{\nu}} = A$, τότε τὸ $\frac{x}{\nu} = \lambda o \gamma_\beta . A$.

Ἐὰν τὰ ἀνωτέρω ἄνισα ὑψώσωμεν εἰς τὴν νην δύναμιν εὑρίσκομεν

$$\beta^x \leq A^\nu < \beta^{x+1}.$$

ε´) Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι **«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν β κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν Α εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν, τούτου νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ ν»**.

στ´) Ἐκτὸς τῶν ἰδιοτήτων τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῶν λογαρίθμων (ἰσχύουν δὲ δι᾽ οἱονδήποτε σύστημα καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως), ἔχομεν ἀκόμη τὰς ἑξῆς.

«Οἱ λογάριθμοι ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστρόφους εἶνε ἀντίθετοι».

Ἤτοι λέγω ὅτι $\lambda o \gamma_{1)\beta} . A = - \lambda o \gamma_\beta . A$.

Διότι ἔστω ὅτι ὁ $\lambda o \gamma^\beta . A = x$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $\beta^x = A$.

Ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ β^x τὸ ἴσον αὐτοῦ $\frac{1}{\beta^{-x}}$ ἢ τὸ $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{-x}$ θὰ ἔχωμεν $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{-x} = A$. Ἀλλὰ τοῦτο φανερώνει ὅτι $\lambda o \gamma_{1)\beta} . A = - x$. Ἐπομένως $\lambda o \gamma_\beta . A = - \lambda o \gamma_{1)\beta} . A$.

ζ´) **«Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν εἶνε ἀντίθετοι»**.

Λέγω δηλαδὴ ὅτι $\lambda o \gamma_\beta . A = - \lambda o \gamma_\beta . \frac{1}{A}$.

Διότι ἔστω x ὁ λογάριθμος τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν τὴν β. Θὰ ἔχωμεν τότε $\beta^x = A$ καὶ ἀντιστρέφοντες τοὺς ἴσους τούτους, θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\beta^x} = \frac{1}{A}$ ἢ καὶ $\beta^{-x} = \frac{1}{A}$.

Ἡ ἰσότης αὐτὴ φανερώνει ὅτι $\lambda o \gamma_\beta . \left(\frac{1}{A}\right) = - x$,

ἤτοι $\lambda o \gamma_\beta . \left(\frac{1}{A}\right) = - \lambda o \gamma_\beta . A$.

η') *Ἀλλαγὴ τῆς βάσεως τῶν λογαρίθμων.* Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἔστω τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν β, καὶ ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ ὡς πρὸς ἄλλην βάσιν, ἔστω τὴν β'. Δίδεται δηλαδὴ ὁ $\lambda o\gamma_{\beta}$ Α καὶ ζητεῖται τὸ $\lambda o\gamma_{\beta'}$. Α Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν $\lambda o\gamma_{\beta}$ Α διὰ τοῦ x, ἤτοι, ἂν θέσωμεν $\lambda o\gamma_{\beta}. A = x$, θὰ ἔχωμεν $\beta^{x} = A$. Ἂν τῶν ἴσων τούτων ἀριθμῶν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ὡς πρὸς βάσιν β', θὰ ἔχωμεν, $\lambda o\gamma_{\beta'}(\beta^{x}) = \lambda o\gamma_{\beta'} A$.

Ἀλλ' εἶνε $\lambda o\gamma_{\beta'}(\beta^{x}) = x . \lambda o\gamma_{\beta'} \beta$ (§ 130, δ').

Ἑπομένως ἔχομεν $x . \lambda o\gamma_{\beta'} \beta = \lambda o\gamma_{\beta'} A$.

Ἀντικαθιστῶντες τὸ x διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma_{\beta} A . \lambda o\gamma_{\beta'} \beta = \lambda o\gamma_{\beta'} A.$$

Ἤτοι, «**διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ ὡς πρὸς νέαν βάσιν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν παλαιὰν βάσιν ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς παλαιᾶς βάσεως ὡς πρὸς τὴν νέαν**».

ΑΣΚΗΣΙΣ. Δείξατε ὅτι ὁ $\lambda o\gamma_{\beta'} \beta . \lambda o\gamma_{\beta} \beta' = 1$.

Περὶ ἀνατοκισμοῦ καὶ χρεωλυσίας.

§140. Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ.—

α') Τὰ προβλήματα τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ κεφάλαιον δὲν μένει τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ἀλλ' εἰς τὸ τέλος ὡρισμένου τινὸς χρόνου προστίθεται εἰς αὐτὸ ὁ τόκος αὐτοῦ, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ νέον κεφάλαιον, λέγονται *προβλήματα ἀνατοκισμοῦ ἢ συνθέτου τόκου.* Ἐνῶ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ λέγονται πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τούτων προβλήματα ἁπλοῦ τόκου. Ὥστε, προβλήματα ἀνατοκισμοῦ λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον εἰς τέλος καθεμιᾶς χρονικῆς μονάδος καὶ ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ τὸ κεφάλαιον τῆς ἑπομένης χρονικῆς μονάδος.

β') Πρόβλημα 1ον). «***Δανείζει τις ποσὸν α δραχ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα (εἰς ἓν ἔτος ἢ μίαν ἑξαμηνίαν ἢ μίαν τριμηνίαν, κλπ.) τ δραχ. πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας;***»

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ μία δραχμὴ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα δίδει τόκον τ δραχμάς, αἱ α δραχμαὶ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα θὰ δώσουν τόκον α. τ δραχμάς.

Ἑπομένως τὸ κεφάλαιον α δραχμῶν καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος θὰ εἶνε

$$\alpha + \alpha\ \tau = \alpha.\ (1 + \tau) \text{ δραχμαί.}$$

Ἤτοι τὸ κεφάλαιον α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παράγοντα $(1 + \tau)$, ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κεφάλαιον $\alpha\ (1 + \tau)$ εἰς τὸ τέλος μιᾶς ἀκόμη χρονικῆς μονάδος θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ

$$\alpha\ (1 + \tau).\ (1 + \tau) \text{ ἢ } \alpha\ (1 + \tau)^2.$$

Ὥστε τὸ ἀρχικὸν ποσὸν α δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος.

$$\alpha\ (1 + \tau)^2.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος ν χρονικῶν μονάδων τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α θὰ γίνῃ

$$\alpha.\ (1 + \tau)^\nu\ .$$

Ἂν τὸ ποσὸν τοῦτο παραστήσωμεν διὰ τοῦ Σ θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha\ (1 + \tau)^\nu \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἐκ τῶν Σ, α, ν, τ τῇ βοηθείᾳ καὶ τῶν λογαρίθμων (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), ὅταν γνωρίζωμεν τὰ τρία ἐξ αὐτῶν.

Ἐφαρμογή. **«*Δανείζει τις 1500 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 %, κατ' ἔτος· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ ἓξ ἔτη;*»**

Ἐνταῦθα ἔχομεν $\alpha = 1500$, $\nu = 6$, $\tau = 0{,}04$, διότι αἱ 100 δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουν τόκον 4 δραχμάς, ἄρα ἡ 1 δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 0,04 δραχμάς, ζητεῖται δὲ τὸ Σ.

Ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) ἔχομεν

$$\Sigma = 1500.\ (1{,}04)^6.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν

$$\text{λογ. } \Sigma = \text{λογ. } 1500 + 6.\ \text{λογ. } (1{,}04).$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν λογ. $1500 = 3{,}17609$·
6· λογ. $1{,}04 = 6.0{,}01703 = 0{,}10218$, ἐξ ὧν προκύπτει διὰ προσθέσεως λογ. $\Sigma = 3{,}27827$ καὶ ἐκ τούτου $\Sigma = 1897{,}9$.

Ἤτοι ὁ τοκίσας τὰς 1500 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 4 %, θὰ λάβῃ μετὰ 6 ἔτη ἐν ὅλῳ 1897,90 δρχ.

γ') Πρόβλημα 2ον). «***Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ τις ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 6 %, ἵνα μετὰ 15 ἔτη λάβῃ ἐν ὅλῳ 5000 δραχμάς;***»

Ἔχομεν $\Sigma = 5000$, $\tau = 0{,}06$· $1 + \tau = 1{,}06$, $\nu = 15$, καὶ ζητεῖται τὸ α.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$5000 = \alpha . (1{,}06)^{15}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν λογ. 5000 = λογ. α + 15. λογ. 1,06 ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν λογ. α = λογ. 5000 — 15. λογ. 1,05.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν λογ. 5000 = 3,69897, ἑπομένως εἶνε 15. λογ. 1,06 = 15.0,02531 = 0,37965 καὶ ἐξ αὐτῶν δι' ἀφαιρέσεως λογ. α = 3,31932 ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι,

$$\alpha = 2086 \text{ δραχμαί}.$$

δ') Πρόβλημα 3ον). «***Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 862 δραχμαί, ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος, γίνονται μετὰ 5 ἔτη 1048,70 δραχμαί.***»

Ἔχομεν $\alpha = 862$, $\nu = 5$, $\Sigma = 1048{,}70$ καὶ ζητεῖται τὸ τ.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν $1048{,}70 = 862 . (1 + \tau)^5$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο τούτων ἴσων εὑρίσκομεν λογ. 1048,70 = λογ. 862 + 5. λογ. (1 + τ) ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι, $\text{λογ.}\ (1 + \tau) = \dfrac{\text{λογ. } 1048{,}70 - \text{λογ. } 862}{5}$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν
λογ. 1048,70 = 3,02065, λογ. 862 = 2,93591, ἐκ τῶν ὁποίω[ν]
[ἔχο]μεν λογ. 1048,70 — λογ. 862 = 0,08474
[κα]ὶ λογ. (1 + τ) = 0,08474 : 5 = 0,01695, ἐκ τοῦ
[ὁποίου] ἕπεται ὅτι 1 + τ = 1,0398 καὶ τ = 0,0398.

Αὐτὸς εἶνε ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς 1 ἔτος, ἄρα τὸ ἐπιτόκιον 100 τ. θὰ εἶνε 3,98 δραχμαί.

ε΄) Πρόβλημα 4ον). ***«Μετὰ πόσον χρόνον 12589 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 5⁰/₀ γίνονται 45818 δραχμαί;»***

Ἔχομεν $\alpha = 12589$, $\tau = 0{,}05$, $\Sigma = 45818$

καί ζητεῖται τὸ ν

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν $45818 = 12589.(1{,}05)^{\nu}$ Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, εὑρίσκομεν λογ. $45818 =$ λογ. $12589 + \nu.$ λογ. $1{,}05$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\nu = \dfrac{\text{λογ. } 45818 - \text{λογ. } 12589}{\text{λογ. } 105}$.

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν λογ. $45818 = 4{,}66104$ λογ. $12589 = 4{,}09999$, λογ. $1{,}05 = 0{,}02119$.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶνε 0,56105. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$\nu = \dfrac{0{,}56105}{0{,}02119} = 26$ ἔτη καί τι ἐπὶ πλέον.

στ΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 27ου ἔτους, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 26ου ἔτους αἱ 12589 δραχμαὶ γίνονται $12589.(1{,}05)^{26}$. Ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον αὐτὸ τοκισθῇ μὲ ἁπλοῦν τόκον ἐπὶ η ἡμέρας, θὰ φέρῃ τόκον $\dfrac{12589.(1{,}0)^{26}.\eta.5}{36000}$

(τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμέρας). Ἑπομένως τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον θὰ γίνῃ μετὰ 26 ἔτη καὶ η ἡμέρας

$$12589.(1{,}05)^{26} + 12589.(1{,}05)^{26}\,\frac{\eta.5}{36000}$$

ἢ $12589.(1{,}05)^{26}\left(1 + \dfrac{\eta.5}{36000}\right)$, τοῦτο δὲ εἶνε ἴσον μὲ τὸ 45818·

ἤτοι ἔχομεν $45818 = 12589.(1{,}05)^{26}\left(1 + \dfrac{5.\eta}{36000}\right)$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων ὅτι εἶνε $\eta = 172$

Ἑπομένως τὸ δάνειον διήρκεσε 26 ἔτη καὶ 172 ἡμέρας.

ζ΄) Τὸν ἀριθμὸν η εὑρίσκομεν μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν καὶ ἑξῆς. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν $12589\,(1{,}05)^{26}$ καὶ τὸ[illegible] ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 45818. Ἡ οὕτω προκύπτουσα διαφορὰ πα[illegible] τὸν ἁπλοῦν τόκον τοῦ ποσοῦ τῶν $12589.(1{,}05)^{26}$ δραχμῶν·

εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, λύοντες πρόβλημα ἁπλοῦ τόκου εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ χρόνος.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 4ον εὕρετε τὸ η διὰ τοῦ ἐκτεθέντος τρόπου, λύοντες πρόβλημα ἁπλοῦ τόκου.

2) Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις, ἐὰν ἀνατοκίσῃ κατ' ἔτος 5600 (160,45) δρχ. ἐπὶ 100 (17) ἔτη πρὸς 5 (3,5) %; 736407,2 (287, 95).

3) Πατὴρ κατέθεσεν εἰς τράπεζαν 750 (5876) δρχ. κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 4,5 (4,5) ο/ο. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ υἱός αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ 20 (25) ἔτους τῆς ἡλικίας αὐτοῦ; 1809,85 (17659,95).

4) Πόσην αὔξησιν παθαίνει κεφάλαιον 100000 δρχ. εἰς 8 ἔτη 8 μῆνας, ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4 ο/ο; (40507,55).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ποῖον ἀρχικὸν κεφάλαιον γίνεται μετὰ τῶν τόκων αὐτοῦ ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 3,5 (4,5) ο/ο εἰς 20 (10) ἔτη 3730,85 (14495); 1875,43 (9397,4).

2) Τίς ἡ παροῦσα ἀξία κεφαλαίου 45896 (25130) δρχ., πληρωτέου μετὰ 15 ἔτη καὶ 210 ἡμ. (12,5 ἔτη) ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 8 (4) ο/ο; 13831,7 (15388).

3) Πόσον ποσόν πρέπει νὰ τοκίσωμεν ἐπ' ἀνατοκισμῷ καθ'ἑξαμηνίαν πρὸς 4 ο/ο ἵνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 20000 δρχ.; 9804,4.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος κεφάλαιον 625 (3200) δρχ. ἐπὶ 15 (37) ἔτη καὶ ἔγινε 1166,9 (11427,2) δρ.; 4, 257 (3,5).

2) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν λογαριάζεται ὁ τόκος, ἐὰν 1000 δρχ. εἰς 22 ἔτη γίνωνται 2247, 7 δρ. ἀνατοκιζόμεναι;

3) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ ἓν κεφάλαιον κατ' ἔτος, διὰ νὰ τ... ...ασθῇ μετὰ 31 ἔτη. 4,5 ο/ο.

...ὰς τετάρτη. 1) Εἰς πόσον χρόνον ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος κεφάλαιον ...837), δρχ. πρὸς 4,5 (8) ο/ο γίνεται 56000 (49853 δρχ.); 6 ἔτη 221 ἡμ. (8 ἔτη 193 ἡμ.).

... Πότε κατετέθησαν 630 δρχ. εἰς τράπεζάν τινα ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 ο/ο, ... 1ην Ἀπριλίου 1909 εἶχον γίνει 969,80 δρχ.;

3) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ κατ' ἔτος ποσόν τι πρὸς 3,5o/o διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ ἢ τετραπλασιασθῇ;

20 ἔτη 51 ἡμ. 31 ἔτη 336 ἡμ. 40 ἔτη 103 ἡμ.

4) Ὁ πληθυσμὸς ἑνὸς Κράτους αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ, ὁ πληθυσμὸς αὐτοῦ;

56 περίπου.

5) Μία πόλις ἔχει 8000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἐλαττοῦται κατὰ 160 κατοίκους. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 5000 κατοίκους;

23 περίπου.

§ 141. Προβλήματα ἴσων καταθέσεων.—

α') Πρόβλημα 1ον). «*Καταθέτει τις εἰς τὴν τράπεζαν ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 4 $^1/_2$ °/o ποσὸν 2050 δρχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους. Πόσα θὰ λαβῃ μετὰ 15 ἔτη;*».

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν 2050 δραχμῶν θὰ μείνῃ 15 ἔτη, ἀνατοκιζομένη πρὸς 4, 5°/o. Ἑπομένως θὰ γίνῃ $2050 . (1,045)^{15}$.

Ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους γινομένη κατάθεσις θὰ μείνῃ μόνη 14 ἔτη ἐν τόκῳ· ἄρα θὰ γίνῃ $2050 . (1,045)^{14}$.

Ὁμοίως ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους κατάθεσις θὰ γίνῃ $2050 . (1,045)^{13}$ κ. ο. κ., ἡ δὲ τελευταία θὰ μείνῃ μόνον ἓν ἔτος καὶ θὰ γίνῃ $2050 . (1,045)$.

Ὥστε τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 15 ἐτῶν θὰ εἶνε $2050 . (1,045)^{15} + 2050 . (1,045)^{14} + \ldots + 2050 . (1,045)$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶνε (1,045). Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, (§ 127, γ'), εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ποσὸν Σ, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἶνε

$$\Sigma = \frac{2050 . (1,045)^{15} (1,045) - 2050 (1,045)}{0,045}$$

ἢ $\Sigma = 2050 . (1,045) \dfrac{(1,045)^{15}-1}{0,045}$.

Διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ $(1,045)^{15}$. Πράγματι ἔχομεν, ἐὰν θέσωμεν $x = (1,045)^{15}$

$$\text{λογ. } x = 15 . \text{λογ. } (1,045) = 0,28680,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι, $x = 1.93554$.

Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\Sigma = 2050.\ (1{,}045)\ \dfrac{0.93554}{0{,}045}$

ἢ
$$\Sigma = \frac{2050.\ 1{,}045.\ 935{,}54}{45}.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν

λογ. Σ = λογ. 2050 + λογ. 1,045 + λογ. 935,54 — λογ. 45.

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν λογ. 2050 = 3,31175

λογ. 1,045 = 0,01912

λογ. 935,54 = 2,97107

ἄθροισμα 6,30194

λογ. 45 = 1,65321

καὶ ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν λογ. Σ = 4,64873, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει Σ = 44518· ἤτοι μετὰ 15 ἔτη θὰ λάβῃ 44518 δραχμάς.

β΄) Ἐν γένει, ἐὰν καταθέτῃ τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς εἴς τινα τράπεζαν ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, ζητῆται δὲ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ γίνῃ

$\alpha\,(1 + \tau)^{\nu}$, ἡ δευτέρα $\alpha\,(1 + \tau)^{\nu-1}$

κ. ο. κ. ἡ τελευταία $\alpha\,(1 + \tau)$. Ὥστε εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν μονάδων θὰ λάβῃ $\alpha\,(1 + \tau) + \alpha\,(1 + \tau)^2 + \ldots + \alpha\,(1 + \tau)^{\nu}$. Ἂν παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ διὰ τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν

$\Sigma = \alpha.\ (1 + \tau)\ \dfrac{(1 + \tau)^{\nu} - 1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ἢ τὸ α, ἐὰν δοθῇ τὸ Σ, τὸ τ, καὶ τὸ ν.

γ΄) Πρόβλημα 2ον). ***«Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας;»***

Ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ μείνῃ ἐπὶ (ν—1) χρονικὰς μονάδας. Ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha\,(1 + \tau)^{\nu-1}$. Ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ (ν—2) χρονικὰς μονάδας, ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha\,(1 + \tau)^{\nu-2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς ἡ τελευταία θὰ εἶνε μόνον α. Ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha + \alpha\,(1 + \tau) + \alpha\,(1 + \tau)^2 + \ldots + \alpha\,(1 + \tau)^{\nu-1}$$

ἢ $\Sigma = \dfrac{\alpha\,(1 + \tau)^{\nu} - \alpha}{\tau} = \alpha.\ \dfrac{(1 + \tau)^{\nu} - 1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ τῶν α, τ, ν. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου εὑρίσκομεν εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ α ὅταν γνωρίζωμεν τὰ Σ, ν, τ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ἔμπορός τις καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 350 δρχ. ἐκ τῶν κερδῶν αὐτοῦ εἰς τὴν τράπεζαν ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 4 ο)ο. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 20ου ἔτους; 10835,25.

2) Καταθέτει τις κατ' ἔτος μὲ σύνθετον τόκον 1000 δρχ. πρὸς 5 ο)ο. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λάβῃ 13210 δρχ.; 11 ἔτη.

3) Ἡ διατροφὴ καὶ τὰ ἔξοδα τῶν σπουδῶν τέκνου κατεγράφοντο ὑπὸ τοῦ πατρὸς εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους· ἀνήρχοντο δὲ κατὰ μέσον ὅρον εἰς 2000 δρχ. ἐτησίως. Πόσα θὰ ἐγένοντο αὐτὰ μετὰ 3 ἔτη, ἐὰν ἀνετοκίζοντο κατ' ἔτος πρὸς 3,5 ο)ο;

4) Πατὴρ τις ἀποκτήσας κόρην, θέλει νὰ καταθέτῃ κατ' ἔτος ποσόν τι ὡρισμένον δι' αὐτήν, ἵνα αὐτὰ ἀνατοκιζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 5 ο)ο γίνουν μετὰ 21 ἔτη. 25000 δραχμαί. Πόσα πρέπει νὰ εἶνε ἡ ἐτησία κατάθεσις; 666,57.

§ 142. Προβλήματα χρεωλυσίας.—

α') *Χρεωλυσία* λέγεται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται *χρεωλύσιον*, καὶ χρησιμεύει μέρος μὲν αὐτοῦ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους, τὸ δὲ ἄλλο μέρος διὰ τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Τὸ χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκιζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

β') Πρόβλημα 1ον). **«Ἐδνείσθη τις 18500 δρχ. προς $4^1/_2$ °/ο ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ διὰ 12 ἴσων χρεωλυσίων, τὰ ὁποῖα θὰ πληρώνωνται εἰς το τέλος ἑκάστου ἔτους· πόσον εἶνε τὸ χρεωλύσιον;»**

Τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν 18500 δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔτη $18500.(1,045)^{12}$. Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον χρεωλύσιον, ἡ πρώτη δόσις ἐκ x δραχμῶν θὰ γίνῃ $x.(1,045)^{11}$ μετὰ 11 ἔτη, κατὰ τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται ὅτι ἔμειναν εἰς τὸν τόκον.

Ἡ δευτέρα δόσις θὰ γίνῃ x. $(10,45)^{10}$, ἡ τρίτη x. $(1,045)^{9}$, κ. ο. κ. ἡ τελευταία θὰ μείνῃ x. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν πληρωθέντων ποσῶν μετὰ τῶν τόκων αὐτῶν θὰ εἶνε

$$x + x\,(1,045) + x\,(1,045)^2 + \ldots + x\,(1,045)^{11}$$

ἢ $x.\dfrac{(1.045)^{12}-1}{0,045}$. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ὀφειλόμενον, συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$x.\frac{(1,045)^{12}-1}{0,045} = 18500.\,(1,045)^{12},$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τῶν λογαρίθμων.

γ΄) Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν δύναμιν $(1,045)^{12}$ θέτοντες αὐτὴν ἴσην μὲ τὸ ψ, ὅτε εἶνε $\psi = (1,045)^{12}$ καὶ $\text{λογ.}\ \psi = 12.\ \text{λογ.}\ (1,045) = 0,22944$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\psi = 1,696$.

δ΄) Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ $(1,045)^{12}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ 1,696 εὑρίσκομεν

$$x = \frac{18500.0,045.1696}{696}$$ ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν

$$\text{λογ.}\ x = \text{λογ.}\ 18500 + \text{λογ.}\ 0,045 + \text{λογ.}\ 1696 - \text{λογ.}\ 696.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}
\text{λογ.}\ 13500 &= 4,26717\\
\text{λογ.}\ 0,045 &= \overline{2},65321\\
\text{λογ.}\ 1696 &= 3,22943\\
\hline
\text{ἄθροισμα}\quad & 6,14981
\end{aligned}$$

λογ. 696 = 2,84261. Ἑπομένως λογ. x = 3,30720, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι x = 2028,6 δραχμαί.

ε΄) Ἐν γένει, ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸ δανειζόμενον ποσὸν ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ καθ᾽ ὡρισμένην χρονικὴν μονάδα, διὰ τοῦ τ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν μονάδων, τὸ μὲν κεφάλαιον θὰ γίνῃ $\alpha\,(1+\tau)^{\nu}$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἀξία τῶν ν δόσεων ἐκ x δραχμῶν ἑκάστη θὰ εἶνε $x + x\,(1+\tau) + x\,(1+\tau)^2 + \ldots + x\,(1+\tau)^{\nu-1}$

ἢ $$x\,\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $x \dfrac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau} = \alpha.\ (1+\tau)^\nu$ (1)

ἐκ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

στ΄) Πρόβλημα 2ον). ***«Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 6 ἔτη διὰ ἐτησίου χρεωλυσίου 8000 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 4 %;»***

Ἔχομεν $x = 8000$, $\nu = 6$, $\tau = 0{,}04$

ζητεῖται δὲ τὸ α. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) τὰς τιμὰς τῶν x, ν, τ εὑρίσκομεν $8000.\ \dfrac{(1{,}04)^6 - 1}{0{,}04} = \alpha.\ (1{,}04)^6$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει $\alpha = \dfrac{8000.[(1{,}04)^6 - 1]}{0{,}04.\ (1{,}04)^6}$. Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $(1{,}04)^6$, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων $\alpha = 41900$. δραχμάς.

ζ΄) Πρόβλημα 3ον). ***«Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 20000 δραχμῶν διὰ χρεωλυσίου 1300 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 3 %;»***

Ἔχομεν $\alpha = 20000$, $x = 1300$, $\tau = 0{,}03$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$1300.\ \dfrac{(1{,}03)^\nu - 1}{0{,}03} = 20000.\ (1{,}03)^\nu$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

$$1300.\ (1{,}03)_\nu - 1300 = 0{,}03.20000.\ (1{,}03)_\nu$$

ἢ $$(1{,}03)_\nu\ [1300 - 0{,}03.\ 20000] = 1300$$

καὶ $$(1{,}03)^\nu = \frac{1300}{700} = \frac{13}{7}.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν

ν. λογ. (1,03) = λογ. 13 — λογ. 7, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\nu = 20{,}943$ ἔτη. Ἤτοι ἡ ἐξόφλησις θὰ γίνῃ μετὰ 21 ἔτη, ἀλλ' ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶνε κατά τι μικροτέρα τῶν ἄλλων.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Πόσον εἶνε τὸ χρεωλύσιον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐξοφλεῖται χρέος 100 (200) ἑκατομμυρίων δρχ., ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4 (5) %, ἂν ἐξοφλῆται ἐντὸς 50 (80) ἐτῶν δι' ἴσων δόσεων; 4655000 (4020592).

2) Χρέος ἐξοφλεῖται δι᾽ ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐντὸς 30 (10) ἐτῶν. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν καθεμία δόσις εἶνε 2180 (421,5) δρχ. καὶ τὸ ἐπιτόκιον 4,5 (4,5) ο)ο ; 51800 (3335).

3) Ἔμπορος ἐδανείσθη 450000 δρχ. ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ κατ᾽ ἔτος πρὸς 5 ο)ο. Ἐὰν πληρώνῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 30000 δρχ., μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ τὸ χρέος αὐτοῦ ; 29· ἡ τελευταία δόσις 29655

4) Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνῃ εἰς 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Καθεμία δόσις (ἐτησία) θὰ εἶνε 461300 δρχ. θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικῶς δανεισθὲν ποσόν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 4 1,5 ο)ο ; 4815000.

5) Κράτος ἐδανείσθη ποσόν τι διὰ νὰ κατασκευάσῃ στόλον πρὸς 3,75 ο)ο. Ἡ χρεωλυτικὴ ἐξόφλησίς του ἄρχεται 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου καὶ θὰ πληρώνωνται 158800 δρχ. ἐτησίως ἐπὶ 10 ἔτη. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν ποσόν ; 1167910.

6) Χρέος ἐξ 1,5 ἑκατομμυρίων δρχ. πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ διὰ 15 ἴσων δόσεων ἐτησίων, ἀρχομένων 5 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Πόσον θὰ εἶνε τὸ χρεωλύσιον, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $3\,^3{}_4$ ο)ο ; 169310,9.

7) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ τις χρεωλυτικῶς δάνειον 20000 (10000) διὰ 16 (6) ἐτησίων δόσεων ἐκ 1780,3 δρχ. (1907,62) ἑκάστην ;

(Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) (σελ. 228, ε') εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(1+\tau)^{16}} = \frac{20000}{1780,30} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις περιέχει τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὸν 17ον βαθμόν. Διὰ τοῦτο ἡ λύσις αὐτῆς, ἐν γένει, δὲν εἶνε γνωστή, καὶ καταφεύγομεν εἰς προσεγγίσεις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶνε μεγαλύτερον, ὅσω ὁ τ εἶνε μικρότερος. Ἐὰν ἀντικατασταθῇ τὸ τ διὰ μικροῦ ἀριθμοῦ, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{20000}{1780,30}$.

Θέτοντες π. χ. τ = 0,04 εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{0,04}\left(1 - \frac{1}{1,04^{16}}\right) = 25\left(1 - \frac{1}{1,04^{16}}\right) = 11,652285,$$

ἐνῶ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2) εὑρίσκομεν τὸ 11,234. Θέτομεν λοιπὸν τ = 0,04, ἔπειτα τ = 0,045, τ = 0,0475 κ. ο. κ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Περὶ τῆς θεωρίας τῶν Συνδυασμῶν.

§ 143. Περὶ μεταθέσεων.—

α') Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ν ἐν ὅλῳ ἀντικείμενα ἐκ τῶν ὁποίων καθὲν δύναται νὰ διακρίνεται τῶν ἄλλων· π. χ. 7 φιάλας, 10 μῆλα, τοὺς 9 μονοψηφίους ἀριθμοὺς κ. λ. π. Παριστάνομεν αὐτὰ συμβολικῶς διὰ τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \ldots \alpha_\nu$, καὶ θὰ τὰ καλοῦμεν *στοιχεῖα*. Τὰ ν ταῦτα στοιχεῖα δύνανται νὰ τεθοῦν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου κατὰ πολλοὺς τρόπους. Π. χ. ἂν ἔχωμεν μόνον δύο, τὰ α_1 καὶ α_2, δύνανται νὰ τεθοῦν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_2 \alpha_1$. Ἂν ἔχωμεν τρία, τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ δύνανται νὰ τεθοῦν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3,\ \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2,\ \alpha_2 \alpha_1 \alpha_3,\ \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1,\ \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2,\ \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1.$$

Τὰ διάφορα αὐτὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα, καλοῦμεν μεταθέσεις αὐτῶν.

Ἐν γένει, «***καλοῦμεν μεταθέσεις ν στοιχείων τὰ διάφορα ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐὰν θέσωμεν καὶ τὰ ν στοιχεῖα τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ὥστε νὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ τὴν θέσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου***».

β') Θὰ παριστάνομεν συμβολικῶς τὰς μεταθέσεις ν στοιχείων διὰ τοῦ M_ν ἢ διὰ $\nu\,!$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε $M_\nu = 1.2.3.4 \ldots . \nu$.

γ') Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\nu = 2$, δηλαδὴ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰ δύο στοιχεῖα α_1, α_2. Εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ μεταθέσεις αὐτῶν εἶνε δύο, αἱ $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_2 \alpha_1$. Ἑπομένως $M_2 = 2 = 1.\ 2.$

δ') Ἐὰν εἶνε τὸ $\nu = 3$, δηλαδὴ ἂν ἔχωμεν τὰ τρία στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων αὐτῶν. Λαμβάνομεν τὰς μεταθέσεις τῶν δύο στοιχείων α_1, α_2, τὰς $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_2 \alpha_1$, καὶ εἰς καθεμίαν ἐξ αὐτῶν παραθέτομεν τὸ τρίτον στοιχεῖον α_3 εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις ὡς πρὸς τὰ ἄλλα στοιχεῖα. Οὕτω, ἀπὸ τὴν $\alpha_1 \alpha_2$ θὰ προκύψουν αἱ $\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, ἀφοῦ θέσωμεν τὸ α_3 πρὸ τοῦ α_1, μετὰ τὸ α_1 καὶ μετὰ τὸ α_2. Ὁμοίως ἐκ τῆς $\alpha_2 \alpha_1$ προκύπτουν καθ' ὅμοιον τρόπον αἱ

$$\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1,\ \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1,\ \alpha_2 \alpha_1 \alpha_3.$$

Ἤτοι ἐν ὅλῳ ἕξ. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ ἕξ αὐταὶ μεταθέσεις τῶν τριῶν στοιχείων εἶνε διάφοροι μεταξύ των. Διότι, ὅσαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_1\ \alpha_2$ διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τοῦ τρίτου στοιχείου. Ἐπίσης διαφέρουν ὅσαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_2\ \alpha_1$, συγκρινόμεναι πρὸς αὐτάς. Συγκρινόμεναι δὲ αἱ τελευταῖαι πρὸς ἐκείνας αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_1\ \alpha_2$ εἶνε διάφοροι. Διότι, διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τῶν ἄλλων στοιχείων, τῶν α_1 καὶ α_2. Τέλος παρατηροῦμεν, ὅτι ἐσχηματίσαμεν πάσας τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν στοιχείων διὰ τοῦ ἀνωτέρω τρόπου. Διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη τις, καὶ ἀποκόψωμεν τὸ στοιχεῖον α_3 ἀπ' αὐτῆς, θὰ προκύψῃ μία μετάθεσις τῶν δύο στοιχείων α_1, α_2· ἂν δὲ ἐπαναφέρωμεν τὸ α_3 εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ, εὑρίσκομεν πάλιν τὴν μετάθεσιν τῶν τριῶν στοιχείων. Ἀλλ' αὐτὸ ἀκριβῶς ἐκάμαμεν ἀνωτέρω, δηλαδὴ ἐλάβομεν πάσας τὰς μεταθέσεις τῶν δύο στοιχείων, καὶ ἐθέσαμεν τὸ νέον στοιχεῖον α_3 εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις καθεμιᾶς τῶν δύο· ἐπομένως, καὶ ἡ ὑποτεθεῖσα νέα μετάθεσις τῶν τριῶν στοιχείων ἔχει περιληφθῇ εἰς τὸν πίνακα τῶν σχηματισθεισῶν.

ε') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι, αἱ μεταθέσεις τριῶν στοιχείων προκύπτουν ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν δύο στοιχείων, ἂν εἰσαγάγωμεν τὸ τρίτον στοιχεῖον εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις καθεμιᾶς τῶν δύο στοιχείων. Ὥστε ἐκ τῶν M_2 προκύπτουν $M_2 . 3$ καὶ ἔχομεν $M_3 = M_2 . 3 = 1.2.3.$

στ') Ἐὰν ἔχωμεν $\nu = 4$, δηλαδὴ ἂν ἔχωμεν τὰ στοιχεῖα α_1, α_2, α_3 α_4, λαμβάνομεν τὰς μεταθέσεις

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3,\quad \alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_2,\quad \alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_3,\quad \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_1,\quad \alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_2,\quad \alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1,$$

τῶν τριῶν στοιχείων καὶ εἰς καθεμίαν τούτων θέτομεν τὸ α_4 εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις· δηλαδὴ κατὰ σειρὰν πρὸ τοῦ πρώτου, μεταξὺ πρώτου καὶ δευτέρου, μεταξὺ δευτέρου καὶ τρίτου, τελευταῖον. Οὕτω ἔχομεν ἀπὸ καθεμίαν τῶν τριῶν τέσσαρας τῶν τεσσάρων· ἐπομένως $M_4 = M_3 . 4 = 1.2.3.4.$

ζ') Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$M_5 = M_4 . 5 = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 = 5!$$

$$M_\nu = M_{\nu-1} .\ \nu = 1.\ 2.\ 3.\ 4. \ldots (\nu-1).\ \nu = \nu!$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι αἱ μεταθέσεις τῶν τεσσάρων στοιχείων, αἱ σχηματισθεῖσαι κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, εἶνε διάφοροι μεταξύ των καὶ ὅτι εἶνε πᾶσαι.

2) Νὰ γενικευθῇ ἡ ἀπόδειξις πρὸς σχηματισμὸν τῶν μεταθέσεων ν στοιχείων δηλαδὴ νὰ δειχθῇ α') πῶς σχηματίζονται αὐται ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν $(\nu-1)$ στοιχείων· β') ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι εἶνε διάφοροι μεταξύ των· γ') ὅτε εἶνε πᾶσαι.

3) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παρακαθήσουν 18 ἄτομα περὶ τράπεζαν;

§ 144. Περὶ διατάξεων.—

α΄) Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα διάφορα μεταξύ των, τὰ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ \alpha_\mu.$$

Ἐὰν ἐκ τῶν μ τούτων στοιχείων λάβωμεν ν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα προκύπτουν (καὶ καθὲν τῶν ὁποίων ἔχει πάντοτε ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ) νὰ διαφέρουν μεταξὺ αὐτῶν ἢ κατὰ τὴν φύσιν ἢ κατὰ τὴν θέσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς τῶν στοιχείων των, τότε καλοῦμεν τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ *διατάξεις τῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν λαμβανομένων*.

β΄) Θὰ παριστάνωμεν τὰς διατάξεις μ στοιχείων ἀνὰ ν διὰ τοῦ συμβόλου Δ^μ_ν καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε

$$\Delta^\mu_\nu = \mu.(\mu-1).(\mu-2).\ldots\ldots(\mu-\nu+1).$$

γ΄) Παρατηρητέον, ὅτι πρέπει νὰ εἶνε τὸ ν μικρότερον τοῦ μ. Ἂν εἶνε μ = ν, θὰ ἔχωμεν μεταθέσεις μ στοιχείων.

δ΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε ν = 1. Δηλαδὴ ὅτι τὰ μ στοιχεῖα λαμβάνομεν ἀνὰ ἕν. Εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ διατάξεις εἶνε ὅσα καὶ τὰ στοιχεῖα· ἤτοι αἱ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_\mu$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν ὅτι $\Delta^\mu_1 = \mu$.

ε΄) Ἔστω ὅτι εἶνε ν = 2, δηλαδὴ ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα καὶ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὰς διατάξεις αὐτῶν ἀνὰ δύο. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν μίαν διάταξιν αὐτῶν ἀνὰ ἕν, ἔστω τὴν α_1. Εἰς αὐτὸ τὸ στοιχεῖον αὐτῆς παραθέτομεν καθὲν τῶν ἄλλων $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\mu$. Οὕτω σχηματίζομεν διατάξεις τῶν μ ἀνὰ δύο· τὰς

$\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_1\alpha_\mu$

ἐν ὅλῳ (μ—1). Διότι (μ—1) εἶνε τὰ ἄλλα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα παραθέτομεν εἰς τὸ α_1. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα διὰ καθεμίαν ἄλλην τῶν διατάξεων ἀνὰ ἕν. Οὕτω ἀπὸ τὴν α_2 θὰ σχηματίσωμεν τὰς

$\alpha_2\alpha_1, \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_2\alpha_\mu$, κ. ο. κ. Ἀπὸ τὴν α_μ τὰς

$$\alpha_\mu\alpha_1, \alpha_\mu\alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_\mu\alpha_{\mu-1}.$$

στ΄) Παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι διατάξεις τῶν ἀνὰ δύο εἶνε διάφοροι μεταξύ των. Διότι ὅσαι ἔγιναν ἀπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν διάταξιν τῶν ἀνὰ ἕν διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν τοῦ δευτέρου στοιχείου, ὅσαι δὲ προέκυψαν ἐκ διαφόρων τῶν ἀνὰ ἕν διαφέρουν κατὰ τὸ πρῶτον στοιχεῖον. Εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ οὕτω σχηματισθεῖσαι διατάξεις τῶν ἀνὰ δύο εἶνε πᾶσαι. Διότι, ἂν ὑπῆρχε ἄλλη τις καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον στοιχεῖον αὐτῆς, θὰ προκύψῃ μία τῶν ἀνὰ ἕν. Ἀλλ' ἀκριβῶς ἐλάβομεν πάσας τῶν ἀνὰ ἕν, καὶ παρεθέσαμεν εἰς καθεμίαν τούτων ὅλα τὰ ἄλλα στοιχεῖα. Ἄρα καὶ ἡ ὑποτεθεῖσα νέα διάταξις τῶν ἀνὰ δύο πάντως περιέχεται εἰς τὰς σχηματισθείσας.

ζ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, αἱ διατάξεις τῶν μ ἀνὰ δύο εἶνε ἐν ὅλῳ $\Delta_1^\mu \times (\mu-1)$ ἤτοι $\Delta_2^\mu = \Delta_1^\mu \cdot (\mu-1) = \mu \cdot (\mu-1)$. Διότι, ἀπὸ καθεμίαν τῶν ἀνὰ ἓν προκύπτουν $(\mu-1)$ τῶν ἀνὰ δύο καὶ ἐκ τῶν Δ_1^μ προκύπτουν $\Delta_1^\mu \cdot (\mu-1)$.

η') Καθ' ὅμοιον τρόπον ἂν εἶνε $\nu = 3$, λαμβάνομεν καθεμίαν τῶν ἀνὰ δύο, παραθέτομεν καθὲν τῶν ἄλλων στοιχείων, καὶ σχηματίζομεν τὰς διατάξεις τῶν ἀνὰ τρία. Οὕτω ἐκ τῆς $\alpha_1 \alpha_2$ σχηματίζομεν τὰς $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4$, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5, \ldots\ldots\ldots, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_\mu$ ἐν ὅλῳ $(\mu-2)$. Ὥστε ἀπὸ καθεμίαν τῶν ἀνὰ δύο προκύπτουν $(\mu-2)$ τῶν ἀνὰ τρία καὶ ἐκ τῶν Δ_2^μ προκύπτουν $\Delta_2^\mu \cdot (\mu-2)$. Ὥστε ἔχομεν $\Delta_3^\mu = \Delta_2^\mu \cdot (\mu-2) = \mu \cdot (\mu-1)(\mu-2)$.

θ') Καὶ γενικῶς, προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον, εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta_\nu^\mu = \Delta_{(\nu-1)}^\mu \cdot (\mu-(\nu-1)) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι αἱ διατάξεις τῶν μ στοιχείων ἀνὰ τρία, καθ' ὃν τρόπον ἐσχηματίσθησαν ἀνωτέρω, εἶνε διάφοροι μεταξύ των καὶ πᾶσαι.

2) Γενικεύσατε τὴν ἀπόδειξιν πρὸς εὕρεσιν τῶν διατάξεων μ στοιχείων ἀνὰ ν ἐκ τῶν διατάξεων ἀνὰ $(\nu-1)$· δηλαδὴ δείξατε α') πῶς σχηματίζονται αἱ ἀνὰ ν ἐκ τῶν ἀνὰ $(\nu-1)$· β') ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι εἶνε διάφοροι μεταξύ των· γ') ὅτι εἶνε πᾶσαι.

3) Πόσοι ἀριθμοὶ διψήφιοι ὑπάρχουν, ἔχοντες σημαντικὰ ψηφία διάφορα μεταξύ των; Πόσοι τριψήφιοι;

§ 145. Περὶ συνδυασμῶν.—

α') Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα διάφορα μεταξύ των, τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_\mu$. Καλοῦμεν *συνδυασμοὺς τῶν μ τούτων στοιχείων, ἀνὰ ν λαμβανομένων*, τὰ διάφορα ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐὰν λάβωμεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ν ἐκ τῶν μ, οὕτως ὥστε τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ νὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ τὴν φύσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου.

β') Θὰ παριστάνωμεν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν διὰ τοῦ Σ_ν^μ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε

$$\Sigma_\nu^\mu = \frac{\Delta_\nu^\mu}{M_\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\nu}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν φανταζόμεθα ὅτι ἔχομεν ἕνα συνδυασμὸν τῶν μ ἀνὰ ν. Οὗτος ἔχει ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ (ὑποτίθεται ὅτι εἶνε $\nu < \mu$). Ἂν εἰς τὰ ν αὐτὰ στοιχεῖα κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἐναλλαγὰς μεταξύ των, σχηματίζομεν τὰς μεταθέσεις τῶν ν τούτων στοιχείων, αἱ ὁποῖαι εἶνε M_ν, καθὼς γνωρίζομεν.

Τὸ αὐτὸ φανταζόμεθα ὅτι κάμνομεν εἰς τὰ ν στοιχεῖα καθενὸς συνδυασμοῦ, ὁπότε προκύπτουν ἀπὸ καθένα M_ν ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα μεταξύ των συγκρινόμενα (χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶνε ν ἐκ τῶν μ) εἶνε μεταθέσεις ν ἀντικειμένων. Ἐπειδὴ ἀπὸ καθένα συνδυασμὸν προκύπτουν M_ν τοιαῦτα ἐξαγόμενα, ἀπὸ τοὺς Σ^μ_ν συνδυασμοὺς προκύπτουν $\Sigma^\mu_\nu \cdot M_\nu$ τοιαῦτα. Ἀλλὰ καθὲν τῶν ἐξαγομένων τούτων, συγκρινόμενον πρὸς τὰ μ δοθέντα στοιχεῖα, εἶνε μία διάταξις τῶν μ ἀνὰ ν, ἐπειδὴ εἶνε ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ, τεθειμένα κατά τινα τρόπον. Αἱ διατάξεις αὐταὶ τῶν μ ἀνὰ ν εἶνε διάφοροι μεταξύ των. Διότι, ὅσαι προέκυψαν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν στοιχείων αὐτοῦ διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τῶν στοιχείων τούτων· ὅσαι δὲ προέκυψαν ἀπὸ διαφόρους συνδυασμούς, θὰ διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου. Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ Δ^μ_ν αὐταὶ εἶνε πᾶσαι. Διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη τις, αὐτὴ θὰ εἶχε ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ κατά τινα τάξιν μεταξύ των τεθειμένα. Ἑπομένως, ἡ διάταξις αὐτὴ θὰ προκύπτῃ ἀπὸ συνδυασμόν τινα τῶν μ ἀνὰ ν διὰ μεταθέσεως τῶν στοιχείων αὐτοῦ, καὶ ἐπειδὴ ὅλων τῶν συνδυασμῶν μετεθέσαμεν τὰ στοιχεῖα, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ διάταξις αὐτὴ δὲν εἶνε νέα, ἀλλὰ περιέχεται εἰς τὰς ἤδη σχηματισθείσας.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι εἶνε $\Sigma^\mu_\nu \cdot M_\nu = \Delta^\mu_\nu$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι

$\Sigma^\mu_\nu = \dfrac{\Delta^\mu_\nu}{M_\nu}$ καὶ ἂν ἀντὶ τῶν Δ^μ_ν καὶ M_ν θέσωμεν τὰ ἴσα αὐτῶν

εὑρίσκομεν $\Sigma^\mu_\nu = \dfrac{\Delta^\mu_\nu}{M_\nu} = \dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.\ldots\ldots\ldots\nu}$

γ') Ἐὰν τοῦ τελευταίου αὐτοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον $(\mu-\nu)(\mu-\nu-1)\ldots\ldots 3.\ 2.\ 1$, εὑρίσκομεν

$$\Sigma^{\mu}_{\nu} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)\,(\mu-\nu)\ldots\ldots 3.2.1}{1.\ 2\ldots\nu.\ (\mu-\nu).\,(\mu-\nu-1)\ldots 3.2.1}$$

ἢ $$\Sigma^{\mu}_{\nu} = \frac{1.2.3\ldots.\ (\mu-\nu)\,(\mu-\nu+1)\ldots.(\mu-1).\mu}{1.2.3\ldots.\nu.1.2.3\ldots.\ (\mu-\nu)}$$

ἢ $$\Sigma^{\mu}_{\nu} = \frac{M_{\mu}}{M_{\nu}.\ M_{(\mu-\nu)}} = \frac{\mu!}{\nu!\,(\mu-\nu)!}.$$

δ΄) ***«Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ στοιχείων ἀνὰ (μ—ν)».***

Πράγματι, εὑρήκαμεν ἀνωτέρω ὅτι **εἶνε** $\Sigma^{\mu}_{\nu} = \frac{\mu!}{\nu!\,(\mu-\nu)!}$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς $\Sigma^{\mu}_{\mu-\nu}$ ἀρκεῖ ν᾿ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα τὸ ν διὰ τοῦ (μ—ν), **ὅτε εὑρίσκομεν**

$$\Sigma^{\mu}_{(\mu-\nu)} = \frac{\mu!}{(\mu-\nu)!\,(\mu-(\mu-\nu))!} = \frac{\mu!}{(\mu-\nu)!\,\nu!}$$

Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε τὸ Σ^{μ}_{ν}, ἄρα $\Sigma^{\mu}_{\nu} = \Sigma^{\mu}_{(\mu-\nu)}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὸ πλῆθος **τῶν συνδυασμῶν**

α΄) 7) στοιχείων ἀνὰ 3 — **β΄) 10 στοιχείων ἀνὰ 7.**

γ΄) 25 στοιχείων ἀνὰ 17. — **δ΄) 12 ἀνὰ 6.**

2) Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν τὰ **7 ἡλιακὰ** χρώματα, (προστιθεμένων τοῦ λευκοῦ καὶ τοῦ μέλανος), πρὸς σχηματισμὸν **τριχρώμου** (διχρώμου) σημαίας;

§ 146. Περὶ τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.

α΄) Γνωρίζομεν ὅτι $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$,

$$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3.$$

Ἐὰν τὸ μ εἶνε ἀκέραιός τις καὶ **θετικὸς ἀριθμός**, θὰ δείξωμεν ὅτι

εἶνε $$(x+\alpha)^{\mu} = x^{\mu} + \frac{\mu}{1}x^{\mu-1}\alpha + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-2}\alpha^2 + \ldots.$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\ldots\nu}x^{\mu-\nu}\alpha^{\nu} + \ldots\ldots + \alpha^{\mu}.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν παρατηροῦμεν ὅτι **εἶνε**

$$(x+\alpha)_{\mu} = \underbrace{(x+\alpha)\,(x+\alpha)\ldots.(x+\alpha)}_{\mu\ \text{φορὰς}}.$$

Σχηματίζομεν πρῶτον τὸ γινόμενον **τῶν μ παραγόντων**

$$(x+\alpha),\ (x+\beta),\ (x+\gamma),\ldots\ldots(x+\vartheta),$$

ἤτοι τὸ $$(x+\alpha).\,(x+\beta).\,(x+\gamma).\ldots\ldots(x+\vartheta).$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ γινομένου τούτου εὑρίσκεται, καθὼς γνωρίζομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα $(x+\alpha)$ ἐπὶ τὸν δεύτερον $(x+\beta)$ τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ $(x+\gamma)$ κ. ο. κ. μέχρι τοῦ τελευταίου $(x+\vartheta)$. Ἂν τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον διατάξωμεν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x, θὰ ἔχωμεν προφανῶς πολυώνυμον τοῦ x βαθμοῦ μ. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρώτους ὅρους x τῶν διωνύμων παραγόντων καὶ εὑρίσκομεν x^{μ}. Ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρώτους ὅρους x ἐκ τῶν $(\mu-1)$ διωνύμων παραγόντων, ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ ὑπολειπομένου διωνύμου παράγοντος καὶ εὑρίσκομεν $\alpha x^{\mu-1}$, ἂν ἐκ τοῦ πρώτου διωνύμου παράγοντος λάβωμεν τὸν α καὶ ἐκ τῶν ἄλλων τὸν x· τὸ $\beta x^{\mu-1}$, ἂν ἐκ τοῦ δευτέρου παράγοντος λάβωμεν τὸν β καὶ ἐκ τῶν ἄλλων τὸν x. Ὁμοίως ἔχομεν $\gamma x^{\mu-1}, \ldots, \vartheta x^{\mu-1}$· τὸ δὲ ἄθροισμα τούτων δίδει τὸν ὅρον $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\vartheta)\ x^{\mu-1}$ τοῦ ἐξαγομένου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν x εἰς τὴν $(\mu-1)$ δύναμιν. Ἀκολούθως λαμβάνομεν τὸν x ἀπὸ $(\mu-2)$ διωνύμους παράγοντας, ἀπὸ δὲ τοὺς ὑπολειπομένους δύο παράγοντας τοὺς δευτέρους ὅρους αὐτῶν, καὶ τοῦτο κάμνομεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Οὕτω εὑρίσκομεν

$$(\alpha\beta+\alpha\gamma+\ldots\ldots+\alpha\vartheta+\beta\gamma+\ldots\ldots)\ x^{\mu-2}.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες, εὑρίσκομεν

$$(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ldots\ldots\ldots)x^{\mu-3}$$

. . . .

Τέλος λαμβάνομεν καὶ πολλαπλασιάζομεν μόνον τοὺς δευτέρους ὅρους τῶν διωνύμων, ὅτε εὑρίσκομεν $\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\vartheta$.

Ὥστε εὑρήκαμεν

$$(x+\alpha)\,(x+\beta)\,(x+\gamma)\ldots\ldots(x+\vartheta)$$
$$=x^{\mu}+(\alpha+\beta+\ldots+\vartheta)\,x^{\mu-1}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\ldots\ldots)x^{\mu-2}$$
$$+(\alpha\beta\gamma+\ldots\ldots)x^{\mu-3}+\ldots+\alpha\beta\gamma\ldots\vartheta$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\vartheta$, θὰ ἔχωμεν

$$(x+\alpha)^{\mu}=x^{\mu}+(\alpha+\alpha\ldots\ldots+\alpha)x^{\mu-1}$$
$$+(\alpha^2+\alpha^2+\ldots\ldots)x^{\mu-2}+(\alpha^3+\alpha^3+\ldots\ldots)x^{\mu-3}$$
$$+\ldots\ldots+(\alpha^{\nu}+\alpha^{\nu}+\ldots)\,x^{\mu-\nu}+\ldots\ldots+\alpha^{\mu}.$$

Τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων α τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης εἶνε προφανῶς ὅσοι οἱ συνδυασμοὶ μ στοιχείων ἀνὰ

Ρ3 157 92-101
ἐτ. Π

ἕν, ἤτοι Σ_1^μ. Τὸ πλῆθος τῶν α^2 εἶνε Σ_2^μ, τῶν α_3 εἶνε Σ_3^μ κ. ο. κ. τὸ πλῆθος τῶν α_ν εἶνε Σ_ν^μ. Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι

$$(x+\alpha)^\mu = x^\mu + \Sigma_1^\mu \alpha\, x^{\mu-1} + \Sigma_2^\mu \alpha^2 x^{\mu-2} + \cdots\cdots$$
$$+ \cdots\cdots + \Sigma_\nu^\mu \alpha^\nu x^{\mu-\nu} + \cdots\cdots + \alpha^\mu .$$

Τέλος, ἂν ἀντὶ τῶν Σ_1^μ, $\Sigma_2^\mu, \cdots\cdots \Sigma_\nu^\mu$ γράψωμεν τὰ ἴσα αὐτῶν, εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον τύπον

$$(x+\alpha)^\mu = x^\mu + \frac{\mu}{1} x^{\mu-1}\alpha + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2}\alpha^2 + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots\nu} x^{\mu-\nu}\alpha^\nu + \ldots + \alpha^\mu .$$

Σ, Μ, Δ.

Ἂν εἶνε $\mu = 4$ θὰ ἔχωμεν

$$(x+\alpha)^4 = x^4 + 4x^3\alpha + 6x^2\alpha^2 + 4x\alpha^3 + \alpha^4 .$$

Ἂν εἶνε $\mu = 5$ θὰ ἔχωμεν

$$(x+\alpha)^5 = x^5 + 5x^4\alpha + 10x^3\alpha^2 + 10x^2\alpha^3 + 5x\alpha^4 + \alpha^5 .$$

β′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦ $(x-\alpha)^\mu$, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω γενικὸν τύπον τὸ α διὰ τοῦ (—α). Τότε, ἐπειδὴ αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ (—α) εἶνε ἀρνητικοὶ αἱ δὲ ἄρτιαι θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν

$$(x-\alpha)^\mu = x^\mu - \frac{\mu}{1} x^{\mu-1}\alpha + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2}\alpha^2$$
$$-\cdots\cdots \pm \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots\nu} x^{\mu-\nu}\alpha^\nu$$
$$\mp \cdots\cdots \pm \alpha^\mu .$$

Π. χ. θὰ εἶνε $(x-\alpha)^3 = x^3 - 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 - \alpha^3$.

$(x-\alpha)^4 = x^4 - 4x^3\alpha + 6x^2\alpha^2 - 4x\alpha^3 + \alpha^4$

§ 147. Ἰδιότητες τοῦ διωνύμου.—

α′) «*Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ διωνύμου* $(x+\alpha)^\mu$ *τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων αὐτοῦ εἶνε ἴσοι*».

Πράγματι, οἱ μὲν συντελεσταὶ τῶν ἄκρων ὅρων x^μ καὶ α^μ εἶνε ἴσοι μὲ τὴν μονάδα. Διὰ τοὺς ἄλλους συντελεστὰς παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς εἶνε ἴσοι μὲ

$$\Sigma_1^\mu,\ \Sigma_2^\mu,\ \Sigma_3^\mu, \ldots\ldots \Sigma_\nu^\mu, \ldots\ldots \Sigma_{\mu-2}^\mu,\ \Sigma_{\mu-1}^\mu .$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν συνδυασμῶν (§ 145, δ′) εἶνε

$\Sigma_1^\mu = \Sigma_{\mu-1}^\mu$, $\Sigma_2^\mu = \Sigma_{\mu-2}^\mu, \ldots\ldots\ldots$ ἐξ ὧν ἕπεται ἡ ἰδιότης.

β') Ὁ συντελεστὴς **οἱουδήποτε** ὅρου τοῦ διωνύμου $(x + \alpha)$ εὑρίσκεται, ἐὰν **ὁ συντελεστὴς τοῦ προηγουμένου** αὐτοῦ ὅρου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν **ἐκθέτην τοῦ** x **ἐν αὐτῷ**, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ **ἐκθέτου τοῦ** α **ἐν τῷ ὅρῳ**, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ συντελεστής.

Οὕτω ὁ συντελεστὴς **τοῦ δευτέρου** ὅρου εἶνε $\frac{\mu}{1}$ καὶ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ **συντελεστοῦ** 1 **τοῦ προηγουμένου** αὐτοῦ ὅρου, ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ 1 ἐπὶ **τὸν ἐκθέτην** μ τοῦ x εἰς τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸ γινόμενον **διαιρεθῇ διὰ τοῦ** ἐκθέτου 1 τοῦ α εἰς τὸν δεύτερον ὅρον. Ἐκ **τούτων ἕπεται ὅτι**, οἱ συντελεσταὶ προχωροῦν αὐξανόμενοι μέχρι **τοῦ μέσου ὅρου**, ἐκεῖθεν δὲ ἐπαναλαμβάνονται οἱ αὐτοὶ συντελεσταὶ **κατ' ἀντίθετον** σειράν, ὥστε οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες τῶν ἄκρων νὰ **εἶνε ἴσοι.**

γ') Τὸ πλῆθος **τῶν ὅρων τοῦ** διωνύμου $(x + \alpha)^{\mu}$ εἶνε $(\mu + 1)$. Διότι τὸ ἐξαγόμενον **τοῦ** $(x + \alpha)^{\mu}$ ἔχει πάντας τοὺς ὅρους πολυωνύμου βαθμοῦ μ ὡς **πρὸς τὸ** x, ἢ ὡς πρὸς τὸ α· ἄρα ἔχει $(\mu + 1)$ ὅρους.

Συνδυάζοντες τὴν **ἰδιότητα ταύτην** μὲ τὴν προηγουμένην, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τὸ μ **εἶνε ἀριθμὸς** ἄρτιος, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶνε περιττὸς ἀριθμός, **καὶ ὑπάρχει** εἷς ὅρος, ὁ μεσαῖος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μέγιστον **συντελεστήν.** Ἂν τὸ μ εἶνε περιττὸς ἀριθμός, τὸ πλῆθος τῶν **ὅρων εἶνε** ἄρτιος ἀριθμός, καὶ τότε ὑπάρχουν δύο ὅροι **μεσαῖοι, διαδοχικοὶ** ἴσοι μεταξύ των, οἱ μέγιστοι τῶν συντελεστῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα

$$(x + \alpha)^6,\ (x - \alpha)^5,\ \left(2x - \frac{1}{3}\right)^4,\ (2\alpha - \beta)^5,\ \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^6,\ \left(\frac{2}{3}x - 5\right)^4.$$

§ 148. Περὶ πιθανοτήτων.—

α') Ἂς ὑποθέσωμεν **ὅτι ἔχομεν** 15 κλήρους ἐντὸς κυτίου ἠριθμημένους ἀπὸ 1 μέχρι 15. **Ἐὰν ἐξαγάγωμεν** ἕνα κλῆρον ἐκ **τῶν** 15, θέλομεν νὰ μάθωμεν, **ποία εἶνε ἡ πιθανότης** ὅτι ὁ κλῆρος, τὸν ὁποῖον θὰ ἐξαγάγωμεν, θὰ **φέρῃ τὸν ἀριθμὸν** 7.

Ἐπειδὴ καθεὶς **τῶν 15 κλήρων** ἔχει τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ ἐξαχθῇ, ὅταν **ἐξαγάγωμεν ἕνα,** ἕπεται ὅτι ἡ **πιθανότης** τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς, π. χ. ὁ 7, ὅταν ἐξάγωμεν ἕνα, θὰ εἶνε τὸ ἓν δέκατον πέμπτον τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἤτοι τὸ $\frac{1}{15}$.

β') Ἐὰν ἐκ τῶν 15 κλήρων ἐξαγάγωμεν δύο, ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς ὡρισμένος ἐξ αὐτῶν, π. χ. ὁ 7, θὰ εἶνε προφανῶς $\frac{2}{15}$, ἂν δὲ ἐξαγάγωμεν τρεῖς θὰ εἶνε $\frac{3}{15}$ κ. ο. κ.

γ') Κατὰ ταῦτα λέγομεν ὅτι, «***ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ συμβῇ τι παριστάνεται διὰ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ὑποτιθεμένου, ὅτι πᾶσαι αἱ περιπτώσεις εἶνε ἐξ ἴσου πιθαναί***».

δ') Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐντὸς κυτίου ἔχομεν 15 βώλους τοῦ αὐτοῦ μεγέθους, ἀλλὰ τοὺς μὲν 6 λευκοὺς τοὺς δὲ 9 μαύρους. Θέλομεν νὰ μάθωμεν, ποία εἶνε ἡ πιθανότης, ἂν ἐξαχθῇ κατὰ τύχην εἷς βῶλος ἐκ τοῦ κυτίου, αὐτὸς νὰ εἶνε λευκός.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 15. Διότι τόσοι εἶνε οἱ βῶλοι καὶ καθεὶς ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ ἐξαχθῇ. Ὅταν ἐξαγάγωμεν ἕνα, αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶνε 6. Διότι τόσοι εἶνε οἱ λευκοὶ βῶλοι, ἄρα ἡ πιθανότης εἶνε $\frac{6}{15}$. Ἂν ζητοῦμεν τὴν πιθανότητα τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς μαῦρος βῶλος, αὐτὴ θὰ εἶνε $\frac{9}{15}$.

ε') Ἐὰν ἡ πιθανότης εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα, τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει βεβαιότης τοῦ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον. Ἂν δὲ ἡ πιθανότης παριστάνεται διὰ τοῦ μηδενός, τότε λέγομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει καμμία πιθανότης τοῦ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον, ἢ ὅτι εἶνε ἀδύνατον νὰ συμβῇ

στ') Ἐν γένει, ἐὰν αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις τοῦ νὰ συμβῇ τι εἶνε α τὸν ἀριθμόν, αἱ δὲ περιπτώσεις τοῦ ἐναντίου εἶνε β, ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ συμβῇ τὸ πρῶτον θὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, ἡ δὲ πιθανότης τοῦ ὅτι δὲν θὰ συμβῇ θὰ εἶνε $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

$(\alpha+\beta)^{\nu}$ γ^{1} γ^{5} $\gamma^{3}=\gamma\gamma\gamma\gamma$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν διὰ τοῦ λ τὸν δεύτερον διὰ τοῦ μ, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda + \mu = 1, \quad \lambda = 1 - \mu.$$

ζ') Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν δύο κύβους, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι φέρουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 1· 2· 3· 4· 5· 6. Ἂν ρίψωμεν αὐτοὺς κατὰ τύχην ἐπὶ τῆς τραπέζης, ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖοι θὰ ἔλθουν ἐπάνω θὰ ἔχουν ἄθροισμα 8;

Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 36. Διότι καθεὶς ἀριθμὸς τοῦ ἑνὸς κύβου δύναται νὰ συνδυασθῇ μὲ καθένα τῶν ἀριθμῶν τοῦ δευτέρου κύβου, ἐκ τούτων δὲ ἔχομεν ἄθροισμα 8, ὅταν εἶνε $2+6$· $3+5$· $4+4$· $5+3$· $6+2$. Ἤτοι 5 ἐν ὅλῳ.

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶνε $\frac{5}{36}$.

η') Ἐντὸς κυτίου ἔχομεν δύο μαύρους βώλους καὶ δύο λευκοὺς τοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Ἐξάγομεν κατ' ἀρχὰς ἕνα ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα δεύτερον, χωρὶς νὰ θέσωμεν τὸν ἐξαχθέντα ἐντὸς τοῦ κυτίου. Ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι καὶ οἱ δύο ἐξαχθέντες βῶλοι θὰ εἶνε λευκοί;

Ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ τὴν πρώτην φορὰν ὁ λευκὸς βῶλος εἶνε $\frac{1}{2}$. Ἡ ζητουμένη πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθοῦν καὶ οἱ δύο λευκοὶ μετὰ τὰς δύο ἐξαγωγάς, λέγω ὅτι εἶνε $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ λ_1 καὶ λ_2 τοὺς λευκοὺς βώλους, καὶ διὰ μ_1 καὶ μ_2 τοὺς μαύρους, καὶ σχηματίσωμεν τὰς δυνατὰς περιπτώσεις θὰ ἔχωμεν

$$\lambda_1\lambda_2, \quad \lambda_1\mu_1, \quad \lambda_1\mu_2, \quad \lambda_2\lambda_1, \quad \lambda_2\mu_1, \quad \lambda_2\mu_2$$
$$\mu_1\lambda_1, \quad \mu_1\lambda_2, \quad \mu_1\mu_2, \quad \mu_2\lambda_1, \quad \mu_2\lambda_2, \quad \mu_2\mu_1.$$

Ἤτοι 12 ἐν ὅλῳ ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶνε αἱ πιθαναί, δηλαδὴ ἡ πιθανότης εἶνε $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

$21x = 88$

$x = \frac{88}{21}$

234
234
936
702
468
54756

535
535
2675
1605
2675
286225

535
468
4280
3210

$ax + x = 3a + 1 + 2a^2$