1513

ΠΑΝΑΓ. Δ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ
ΔΗΜΟΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ
ΤΗΣ Ε' ΚΑΙ ΣΤ' ΤΑΞΕΩΣ
ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

250
250
12500
500
62500

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ

ΔΙΑ ΤΗΣ ΥΠ' ΑΡΙΘ. $\frac{61.452}{12\text{-}6\text{-}1952}$
ΑΠΟΦΑΣΕΩΣ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΔΩΡΕΑ
ΒΑΣΙΛΗ ΛΑΧΑΝΑ
ΚΑΛΛΙΟΠΗΣ ΓΙΟΤΣΑΛΙΤΟΥ - ΛΑΧΑΝΑ

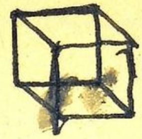
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΠΕΤΡΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.
ΑΘΗΝΑΙ — ΟΔΟΣ ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 9 ΚΑΙ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

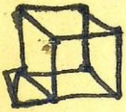
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

Τύποις: Ν. ΑΠΑΤΣΙΔΗ Μενάνδρου 4, Τηλ. 29-193 — Ἀθῆναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής





ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Σώματα.

Ὅταν παρατηρήσωμεν γύρω μας, βλέπομεν διάφορα ἀντικείμενα π. χ καρέκλας, βιβλία, μολύβια κ.λ.π.

Ἐπίσης ἔξω εἰς τὸ ὕπαιθρον βλέπομεν μίαν ἀπέραντον ἔκτασιν, ποὺ τὴν ὀνομάζομεν ***διάστημα.***

Εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ εἶναι σκορπισμένα καὶ τὰ διάφορα ἀντικείμενα τῆς φύσεως, δηλ. ἡ γῆ, ὁ Ἥλιος, ἡ Σελήνη καὶ ἄπειροι ἄλλοι ἀστέρες.

Ὅλα αὐτὰ τὰ ἀντικείμενα λέγονται ***σώματα.***

Ὄγκος καὶ Σχῆμα τῶν σωμάτων.— Κάθε σῶμα καταλαμβάνει εἰς τὸ ἄπειρον αὐτὸ διάστημα ἕνα μέρος, ἕνα χῶρον. Τὸν χῶρον αὐτὸν ὀνομάζομεν ***Ὄγκον τοῦ Σώματος*** Π.χ. ἐὰν ἀφαιρέσωμεν μίαν πέτραν ἀπὸ ἕνα τοῖχον, ἡ ὀπὴ ποὺ θὰ σχηματισθῇ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος (πέτρας).

Κάθε σῶμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ὕλην, ἀπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι κατεσκευασμένον (ξύλον, χαρτί, πέτρα, μέταλλον) καὶ ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν μορφήν του. Ἡ ἐξωτερικὴ αὐτὴ μορφή, ποὺ ἔχει κάθε σῶμα, λέγεται ***σχῆμα τοῦ σώματος.***

Τὸ σχῆμα κάθε σώματος εἶναι διάφορον. Ἄλλο σχῆμα ἔχει δηλ. ἐξωτερικῶς τὸ αὐγόν, ἄλλο ἡ κιμωλία καὶ ἄλλο τὸ μολυβδοκόνδυλον.

Εἰς τὸ χαρτὶ καὶ εἰς τὸν πίνακα παριστάνομεν τὰ σώματα μὲ εἰκόνας ἢ σχέδια, ποὺ τὰ ὀνομάζομεν ***σχήματα.***

Ἡ Γεωμετρία ἐξετάζει μόνον τὸ σχῆμα, ποὺ ἔχουν τὰ σώματα καὶ τὴν ἔκτασίν των, ἀδιαφορεῖ δὲ διὰ τὴν ὕλην, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦνται.

Τὰ σώματα αὐτὰ λέγονται ***Γεωμετρικὰ σώματα.***

Ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων.— Ἐὰν παρατηρήσωμεν ἓν στερεὸν σῶμα ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη του, βλέπομεν μόνον τὸ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ μέρος, δηλ. ὅλα τὰ ἄκρα του.

Τὸ ἐξωτερικὸν αὐτὸ μέρος τοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον βλέπομεν καὶ δυνάμεθα νὰ ἐγγίσωμεν, λέγεται ***ἐπιφάνεια.***

Ὅλα τὰ ἄκρα μιᾶς ἐπιφανείας ἢ ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν ἀποτελοῦν τὴν ***γραμμήν.*** Π.χ. τὰ ἄκρα μιᾶς σελίδος, τὸ ἄκρον ἑνὸς νομίσματος.

Διαστάσεις τῶν σωμάτων.— Ἐὰν παρατηρήσωμεν ἓν σῶμα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

π. χ. ἓν κιβώτιον, βλέπομεν, ὅτι ἐκτείνεται κατὰ τρεῖς διαφόρους διευθύνσεις:

α) Ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ ἀπόστασις αὐτὴ λέγεται ***μῆκος*** τοῦ σώματος.

β) Ἐκ τῶν ἔμπροσθεν πρὸς τὰ ὄπισθεν καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτὴ λέγεται ***πλάτος*** τοῦ σώματος. καὶ

γ) Ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτὴ λέγεται ***ὕψος*** τοῦ σώματος.

Τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος λέγονται ***διαστάσεις τοῦ σώματος.***

Σημ. Εἰς μερικὰ σώματα τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος λέγεται ***πάχος***, ὅπως π. χ. εἰς τὴν σανίδα κ.ἄ. Εἰς ἄλλα, ὅπως π.χ. εἰς τὴν δεξαμενήν, τὴν λίμνην κ. ἄ., λέγεται ***βάθος***.

Ἀσκήσεις.

1. Ὀνομάσατε 2 στερεὰ σώματα.

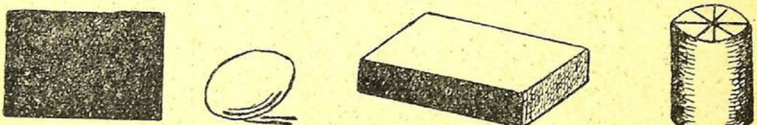
2. Μετρήσατε τὰς τρεῖς διαστάσεις τῆς ἕδρας, τῆς τάξεως, τοῦ βιβλίου, τοῦ κυτίου τῶν κιμωλιῶν.

3. Δείξατέ μου τὰς τρεῖς διαστάσεις τοῦ δωματίου τῆς τάξεώς σας.

2. Εἴδη ἐπιφανειῶν.

Εἴδομεν ὅτι τὸ ἐξωτερικὸν μέρος ἑνὸς σώματος λέγεται ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια, ὅπως βλέπομεν, ἔχει δύο διαστάσεις, μῆκος καὶ πλάτος.

Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τεσσάρων διαφόρων σωμάτων



Σχ. 1.

(σχ. 1.) π. χ. τοῦ πίνακος, τοῦ αὐγοῦ, τῆς κασσετίνας καὶ τοῦ κυτίου τοῦ γάλακτος.

Βλέπομεν ὅτι, ἐὰν τοποθετήσωμεν τὸν κανόνα (χάρακα) ἐπὶ τῆς λείας ἐπιφανείας τοῦ πίνακος καὶ περιστρέψωμεν αὐτὸν πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, ὁ κανὼν ἐγγίζει παντοῦ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πίνακος (σχ. 1). Ἐπίσης, ἐὰν τεντώσωμεν μίαν κλωστὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ πίνακος, βλέπομεν ὅτι ἡ τεντωμένη αὐτὴ κλωστὴ ἐφαρμόζει παντοῦ εἰς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

Ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια λέγεται ***ἐπίπεδος*** ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ***ἐπίπεδον.***

Ἐπίπεδα π. χ. εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βιβλίου, τοῦ καθρέπτου, τοῦ πατώματος, τοῦ τοίχου κτλ., διότι ἐπὶ ὅλων αὐτῶν τῶν ἐπιφανειῶν ἐφαρμόζει ὁ κανὼν ἢ ἡ τεντωμένη κλωστὴ πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐγοῦ, δὲν ἔχει κανὲν μέρος ἐπίπεδον. Ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια λέγεται ***καμπύλη*** ἢ ***κυρτὴ*** ἐπιφάνεια.

Καμπύλας ἐπιφανείας ἔχουν τὰ πορτοκάλια, τὰ μῆλα, τὰ τόπια καὶ γενικῶς ὅλα τὰ στρογγυλὰ σώματα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῶν κυτίων τῶν σπίρτων ἢ τῆς κασσετίνας μας ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα, ἀλλ' ὅλη μαζὶ δὲν ἀποτελεῖ ἓν ἐπίπεδον. Ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια λέγεται ***τεθλασμένη.***

Τὰ κυτία τοῦ γάλακτος ἢ τῶν κονσερβῶν ἔχουν τὴν ἐπάνω καὶ τὴν κάτω ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον καὶ τὴν γύρω καμπύλην.

Ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια λέγεται ***μεικτή***

Παρατηρήσεις:—Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τελειώνουν πάντοτε εἰς γραμμάς, π. χ. ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τοίχου.

Πολύεδρα καὶ στερεὰ ἐκ περιστροφῆς σώματα.—Ὅλα τὰ στερεὰ σώματα, ποὺ ἡ ἐπιφάνειά των ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, λέγονται ***πολύεδρα σώματα.***

Τὰ σώματα, ποὺ ἡ ἐπιφάνειά των ἀποτελεῖται ἀπὸ κυρτὰς ἐπιφανείας, δύνανται νὰ εἶναι στερεὰ ἐκ περιστροφῆς σώματα.

Ἀσκήσεις.

1. Τὶ εἶδος ἐπιφανείας εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραδίου, τοῦ καθρέπτου, τοῦ τοίχου, τοῦ πατώματος;

2. Νὰ ὁρίσετε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας ποὺ ἔχει τὸ τόπι, ὁ σωλὴν τῆς θερμάστρας, ὁ βῶλος.

3. Ὀνομάσατε διάφορα σώματα καὶ νὰ ὁρίσετε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας ἑκάστου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ
ΠΟΛΥΕΔΡΑ ΣΩΜΑΤΑ

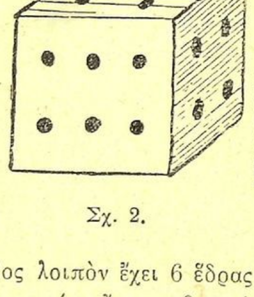
1. Κύβος.

Ἐὰν λάβωμεν τὸ ζάρι εἰς τὸ χέρι μας (σχ. 2) καὶ μετρήσωμεν τὰς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ, δηλ. μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι. Ὅπως εἰς τὸ ζάρι, τοιουτοτρόπως καὶ εἰς ἄλλα σώματα, π. χ. τετράγωνα κιβώτια, κυτία, πελεκημένα μάρμαρα κλπ., αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι.

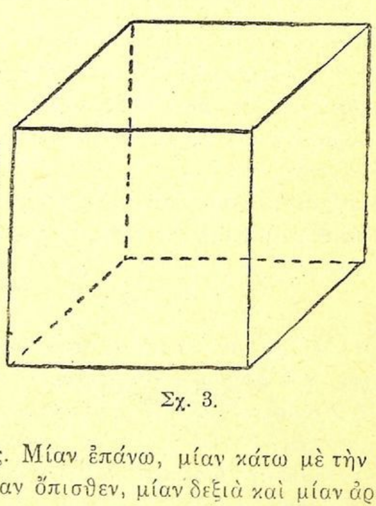
Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ σώματα αὐτὰ λέγεται ***κύβος***.

Τὸ σῶμα ποὺ παριστᾷ τὸ σχ. 3 εἶναι κύβος.

Ἐὰν θέσωμεν τὸν κύβον ἐπάνω εἰς μίαν τράπεζαν, παρατηροῦμεν ὅτι περικλείεται ἀπὸ 6 ἐπιπέδους ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι λέγονται ***ἕδραι***.



Σχ. 2.



Σχ. 3.

Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει 6 ἕδρας. Μίαν ἐπάνω, μίαν κάτω μὲ τὴν ὁποίαν στηρίζεται, μίαν ἔμπροσθεν, μίαν ὄπισθεν, μίαν δεξιὰ καὶ μίαν ἀριστερά.

Ἡ κάτω ἕδρα τοῦ κύβου, ἐπάνω εἰς τὴν ὁποίαν στηρίζεται ὁ κύβος, καθὼς καὶ ἡ ἐπάνω, λέγονται ***βάσεις***, αἱ δὲ ἄλλαι 4 ποὺ εἶναι γύρω ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου.

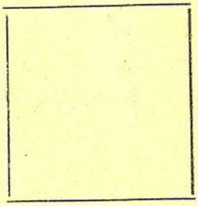
Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὰς ἕδρας τοῦ κύβου, βλέπομεν ὅτι τέμνονται ἀνὰ δύο. Αἱ τομαὶ αὐταὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου λέγονται, ὅπως εἴδομεν, γραμμαί. Αἱ γραμμαὶ αὐταὶ λέγονται καὶ ἀκμαὶ τοῦ κύβου. Αἱ ἀκμαὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ κύβου εἶναι 12 καὶ ὅταν μετρήσωμεν αὐτὰς μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των.

Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου.

Ἐὰν στηρίξωμεν τὸν κύβον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς 6 ἕδρας του ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν γύρω ἀπὸ αὐτήν, θὰ παρατηρήσωμεν, ἅμα σηκώσωμεν τὸν κύβον, ὅτι θὰ σχηματισθῇ μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια (σχ. 4), ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ 4 ἀκμάς, αἱ ὁποῖαι ἑνοῦνται μεταξύ των.



Σχ. 4.

Μετροῦμεν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὰς ἀκμὰς καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι ἴσαι· λέγονται δὲ πλευραί. Τὸ σχ. 4 λέγεται τετράγωνον.

Ἐὰν τώρα στηρίξωμεν τὸν κύβον ἐπὶ τοῦ σχήματος αὐτοῦ μὲ ὅλας κατὰ σειρὰν τὰς ἕδρας του, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὅλαι ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ σχήματος. Αὐτὸ μᾶς δεικνύει ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Μετροῦμεν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον ὅλας τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι.

Ἑπομένως ὁ κύβος ἔχει καὶ τὰς 3 διαστάσεις του ἴσας.

Τὰ σημεῖα ὅπου συναντῶνται ἀνὰ 3 ἕδραι τοῦ κύβου, λέγονται *κορυφαὶ* καὶ εἶναι 8 (4 ἐπάνω καὶ 4 κάτω), ὥστε:

Κύβος λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ 6 ἕδρας ἴσας, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι τετράγωνον.

Ἀσκήσεις.

1. Ὀνομάσατέ μου 5 στερεὰ σώματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν σχῆμα κύβου.

2. Λάβετε ἕνα κύβον εἰς τὰς χεῖράς σας καὶ δείξατε τὰς ἕδρας αὐτοῦ καὶ τὰς ἀκμάς του.

3. Κόψατε ἓν μῆλον ἢ μίαν πατάταν εἰς σχῆμα κύβου.

4. Κόψατε χρωματιστὰ χαρτιὰ ἴσα μὲ τὰς ἕδρας τοῦ κύβου. Συγκρίνατε τὰ χαρτιὰ αὐτὰ μεταξύ των.

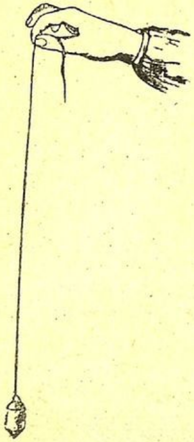
Διεύθυνσις τῶν ἑδρῶν καὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου.

α) Ὁριζόντιος διεύθυνσις.—Τοποθετοῦμεν ἕνα κύβον ἐπάνω εἰς μίαν τράπεζαν. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω ἕδρα του ἔχουν τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τος, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς μίαν λεκάνην ἢ εἰς οἱονδήποτε ἄλλο δοχεῖον.

Αἱ ἕδραι αὐταὶ τοῦ κύβου, ποὺ ἔχουν τὴν διεύθυνσιν αὐτήν, λέγονται ***ὁριζόντιοι ἕδραι ἢ ὁριζόντια ἐπίπεδα.*** Ἐπίσης καὶ αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου ποὺ ἔχουν τὴν διεύθυνσιν αὐτὴν λέγονται ***ὁριζόντιοι ἀκμαί.***



Σχ. 5.

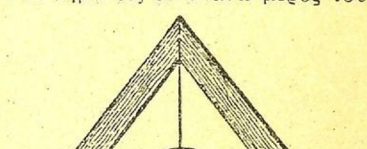
Ὁριζόντια ἐπίπεδα εἶναι συνήθως τὸ πάτωμα, ἢ ὀροφὴ τῶν δωματίων κλπ.

β) Κατακόρυφος διεύθυνσις.—Αἱ ἄλλαι 4 ἕδραι τοῦ κύβου ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον αὐτοῦ ἐπιφάνειαν καὶ ἔχουν τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης (σχ. 5) καὶ λέγονται ***κατακόρυφοι ἕδραι ἢ κατακόρυφα ἐπίπεδα.*** Ἐπίσης καὶ αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου ποὺ ἔχουν τὴν διεύθυνσιν αὐτὴν λέγονται ***κατακόρυφοι ἀκμαί.***

Κατακόρυφα ἐπίπεδα ἀποτελοῦν οἱ ὄρθιοι τοῖχοι τῶν οἰκιῶν καὶ κάθε ἐπιφάνεια, ποὺ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης (σχ. 5).

Νῆμα τῆς στάθμης.—Τοῦτο εἶναι ἓν νῆμα εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου προσδένομεν ἕνα μικρὸν βαρίδι. Μὲ τὸ νῆμα τῆς στάθμης οἱ κτίσται ἐλέγχουν ἂν οἱ τοῖχοι, τοὺς ὁποίους κτίζουν, ἔχουν κατακόρυφον διεύθυνσιν. Πρὸς τοῦτο προσαρμόζουν τὸ νῆμα εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ τοίχου, τὸ ὁποῖον κατέρχεται συρόμενον ἀπὸ τὸ βαρίδι.

Ἀλφάδι.—Οἱ τεχνῖται, ποὺ θέλουν νὰ ἴδουν, ἂν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος ἔχει ὁριζόντιον διεύθυνσιν, μεταχειρίζονται ἓν ἐργαλεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***ἀλφάδι*** (σχ. 6).



Σχ. 6.

Τὸ ἀλφάδι εἶναι ἓν ξύλινον ὄργανον, ποὺ ὁμοιάζει μὲ τὸ κεφαλαῖον Λ. Ἡ μεσαία σανίς, ποὺ ἑνώνει τὰ δύο σκέλη τοῦ Λ, ἔχει εἰς τὸ μέσον ἀκριβῶς χαραγμένον ἕνα αὐλάκι. Τοποθετεῖται εἰς τὸ πάτωμα καὶ ἂν τὸ νῆμα τῆς στάθμης, ποὺ κρέμεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ Λ, πέσῃ εἰς τὸ αὐλάκι, τότε τὸ πάτωμα ἔχει ὁριζόντιον διεύθυνσιν.

Ἀεροστάθμη.—Ἄλλο ὄργανον διὰ τὰς ὁριζοντίους διευθύνσεις εἶναι ἡ ***ἀεροστάθμη*** (σχ. 7).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

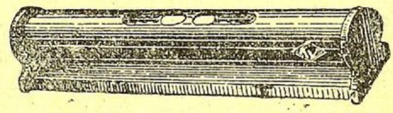
Ἡ ἀεροστάθμη εἶναι ὑάλινος σωλήν, ποὺ δὲν εἶναι καλὰ γεμισμένος μὲ νερὸ καὶ μέσα εἰς αὐτὸν ὑπάρχει φυσαλὶς ἀέρος, ποὺ κινεῖται ἐλευθέρως. Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζόντιος, ἡ φυσαλὶς στέκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ σωλῆνος.

Ἀσκήσεις.

1. *Δείξατε τὰς βάσεις καὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου.*
2. *Πόσας κατακορύφους ἕδρας ἔχει ὁ κύβος;*
3. *Δείξατε τὰς κορυφὰς τοῦ κύβου.*
4. *Κατασκευάσατε ἓν πρόχειρον νῆμα στάθμης.*
5. *Κατασκευάσατε μίαν πρόχειρον ἀεροστάθμην μὲ ἓν σωληνάριον κινίνης.*

Θέσεις τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου.

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου ἀντικρύζουν ἡ μία τὴν ἄλλην, ἡ ἄνω μὲ τὴν κάτω, ἡ δεξιὰ μὲ τὴν ἀριστεράν, ἡ ἔμπροσθεν μὲ τὴν ὄπισθεν. Κάθε ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν, μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.



Σχ. 7.

Ἂν αἱ ἀπέναντι αὐταὶ ἐπιφάνειαι προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν συναντῶνται, ἀλλὰ βαίνουν παραλλήλως ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην.

Αἱ τοιαῦται ἐπιφάνειαι λέγονται ***παράλληλοι*** ἐπιφάνειαι καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ ἐπίπεδοι λέγονται καὶ ***παράλληλα ἐπίπεδα.***

Ἀσκήσεις.

1. *Ποίαν διεύθυνσιν ἔχουν αἱ βάσεις τοῦ κύβου; Ποίαν αἱ παράλληλοι ἕδραι;*
2. *Ποῖαι ἐπιφάνειαι τοῦ κύβου λέγονται παράλληλοι;*
3. *Πόσας ὁριζοντίους καὶ πόσας κατακορύφους ἕδρας ἔχει ὁ κύβος;*

2. Γραμμαί.

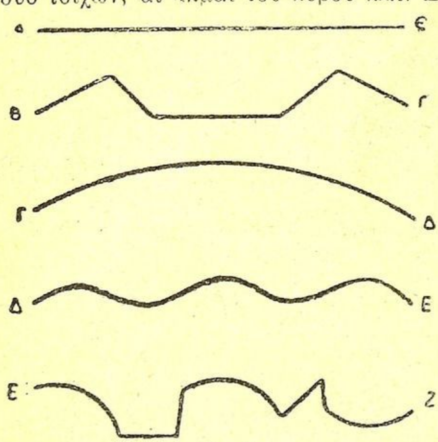
Εἴδη γραμμῶν.—Εἴδομεν ὅτι κάθε ἕδρα τοῦ κύβου τελειώνει εἰς γραμμήν. ***Αἱ ἀκμαὶ δηλαδὴ τοῦ κύβου εἶναι γραμμαί.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ γραμμαὶ εἶναι πολλῶν εἰδῶν.

Εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα (σχ. 8) φαίνονται διάφορα εἴδη γραμμῶν:

Ἡ γραμμὴ ΑΒ τοῦ σχήματος αὐτοῦ ὁμοιάζει μὲ τεντωμένον νῆμα καὶ λέγεται ***εὐθεῖα γραμμή***. Εὐθεῖαι γραμμαὶ εἶναι αἱ κόψεις τοῦ χάρακος, τὰ ἄκρα τοῦ βιβλίου, ἡ τομὴ τῶν ἐσωτερικῶν ἐπιφανειῶν δύο τοίχων, αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου κλπ. Εὐθείας γραμμὰς γράφομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ χάρακος (τῆς ρίγας). Ὅλοι γνωρίζομεν πῶς χαρακώνονται τὰ τετράδιά μας.



Σχ. 8.

Ἡ γραμμὴ ΒΓ τοῦ σχήματος λέγεται ***τεθλασμένη γραμμή***. Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ τμήματα εὐθείας γραμμῆς, ἀλλὰ ὅλα μαζὶ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Τεθλασμένην γραμμὴν ἀποτελεῖ τὸ σχῆμα μερικῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ὅπως π. χ. Τ, Ε, Σ, Κ.

Ἡ γραμμὴ ΓΔ εἶναι ***καμπύλη***. Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας κανένα τμῆμα δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Καμπύλην γραμμὴν ἀποτελοῦν τὰ σύρματα τοῦ τηλεγράφου, ὅταν εἶναι χαλαρωμένα. Ἐπίσης οἱ ποταμοί, αἱ γραμμαὶ τῶν σιδηροδρόμων, οἱ μεγάλοι ἁμαξιτοὶ δρόμοι εἰς τὰ μέρη ὅπου μεταβάλλουν διεύθυνσιν.

Τέλος ***μεικτὴ γραμμὴ*** λέγεται ἐκείνη, ἡ ὁποία δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα, οὔτε καμπύλη, ἀλλὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ τμήματα εὐθείας καὶ τμήματα καμπύλης. Ἡ γραμμὴ ΕΖ τοῦ σχήματος εἶναι μεικτὴ γραμμή.

Μεικτὰς γραμμὰς σχηματίζουν οἱ ἐξοχικοὶ δρόμοι, αἱ σιδηροδρομικαὶ γραμμαί, τὸ σχῆμα τῶν ἀριθμῶν καὶ ἄλλα ἀντικείμενα.

Ἔχομεν λοιπὸν 4 εἰδῶν γραμμάς: ***Εὐθεῖαν***, ***τεθλασμένην***, ***καμπύλην καὶ μεικτήν***.

Τὰ ἄκρα μιᾶς γραμμῆς λέγονται ***σημεῖα***. Μεταξὺ δύο σημείων μόνον μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν ἠμποροῦμεν νὰ φέρωμεν. Ὁσασδήποτε δὲ ἄλλας καὶ ἂν φέρωμεν, αὐταὶ δὲν εἶναι εὐθεῖαι. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λέγεται **ἀπόστασις** τῶν σημείων τούτων καὶ εἶναι ἡ συντομωτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα. Εἰς τὸ ἀπέναντι σχῆμα (σχ. 9) ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ ἀναφερομένη εὐθεῖα γραμμή.

Ἀσκήσεις.

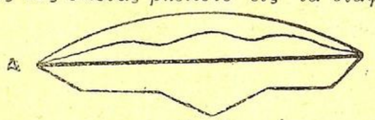
1. Γράψατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

2. Γράψατε μίαν ἐξ ἑκάστου εἴδους τῶν ἄλλων εἰδῶν τῶν γραμμῶν.

3. Ἐξ ἑνὸς σημείου φέρετε εὐθείας πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις·

4. Ὀνομάσατε τὰς γραμμὰς τὰς ὁποίας βλέπετε εἰς τὰ διάφορα ἀντικείμενα τοῦ σχολείου σας.

5. Τί εἴδους γραμμὰς παρατηρεῖτε εἰς τὰ ἀκόλουθα γράμματα καὶ ἀριθμοὺς 3, 4, 2, ζ, ξ, 7, 1.



Σχ. 9.

6. Εἰς ποίους ἀριθμοὺς παρατηροῦμεν εὐθείας γραμμάς, εἰς ποίους τεθλασμένας;

7. Τί γραμμὰς διαγράφει εἰς τὸν οὐρανὸν τὸ πτηνόν, ἡ πέτρα τὴν ὁποίαν ρίπτομεν μὲ τὴν σφενδόνην;

8. Φέρετε μεταξὺ δύο σημείων ὅλα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν.

9. Φέρετε εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι νὰ συναντῶνται εἰς τὸ μέσον αὐτῶν.

10. Γράψατε 4 σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἑνώσατέ τα δι' εὐθειῶν γραμμῶν κατὰ σειρὰν ἤτοι: τὸ Α μὲ τὸ Β, τὸ Β μὲ τὸ Γ καὶ τὸ Γ μὲ τὸ Δ Τί γραμμὴ θὰ σχηματισθῇ;

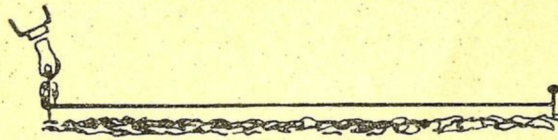
Εὐθεῖα γραμμή.—Εἴδομεν ὅτι ἡ ἁπλουστέρα τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα.

Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν γράφομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος. Διὰ τοῦ κανόνος ὅμως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μόνον μικρὰς εὐθείας ἐπὶ τοῦ τετραδίου μας ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος. Ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ σημαδεύσωμεν μίαν μεγάλην εὐθεῖαν, μεταχειριζόμεθα ἄλλους διαφόρους τρόπους. Οἱ γεωργοὶ π. χ., ὅταν θέλουν νὰ σημαδεύσουν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, μεταχειρίζονται ἓν μακρὺ σχοινίον, τὸ ὁποῖον τεντώνουν εἰς τὰ δύο σημεῖα μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλουν νὰ σημαδεύσουν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν τῶν τοίχων, τῶν χωραφίων των, τῶν χανδάκων κλπ. (σχ. 10).

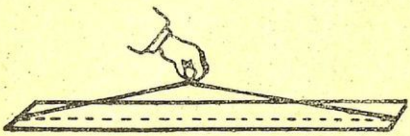
Οἱ ξυλουργοὶ πάλιν καὶ οἱ ἐλαιοχρωματισταί, διὰ νὰ σημαδεύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σουν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, μεταχειρίζονται ἓν ράμμα, τὸ ὁποῖον ἔχουν ποτίσει μὲ χρῶμα (σχ. 11). Κατ' ἀρχὰς τεντώνουν τὸ ράμμα μεταξὺ τῶν σημείων τῆς εὐθείας. Κατόπιν ἀνασηκώνουν μὲ τὸ χέρι των ὀλίγον τὸ ράμμα καὶ τὸ ἀφήνουν ἔπειτα νὰ πέσῃ μὲ δύναμιν ἐπὶ τοῦ ξύλου ἢ τοῦ τοίχου. Τὸ χρῶμα τότε σημειώνει τὴν εὐθεῖαν γραμμήν.



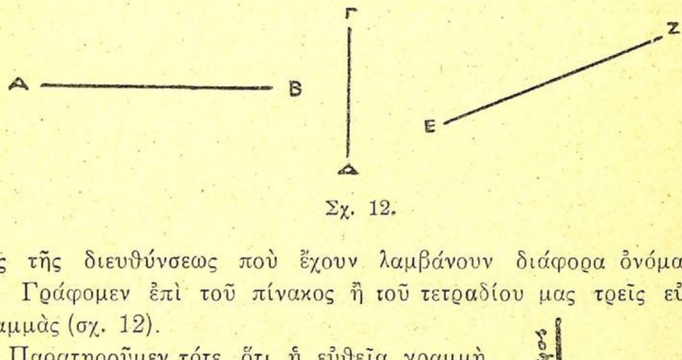
Σχ. 10.



Σχ. 11.

Δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ λέγονται *ἴσαι*, ἐὰν ὅταν θέσωμεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ἐφαρμόσουν τὰ ἄκρα των, ἄλλως λέγονται ***ἄνισοι***.

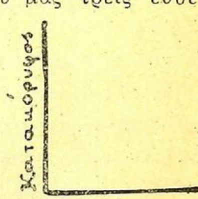
Διεύθυνσις καὶ θέσις εὐθειῶν.—Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀναλόγως τῆς διευθύνσεως ποὺ ἔχουν λαμβάνουν διάφορα ὀνόματα.



Σχ. 12.

Γράφομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ τετραδίου μας τρεῖς εὐθείας γραμμὰς (σχ. 12).

Παρατηροῦμεν τότε, ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ, ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ καθὼς καὶ πᾶσα ἄλλη, ποὺ ἔχει τὴν διεύθυνσιν αὐτήν, λέγεται ***ὁριζόντιος γραμμή***. (Σχ. 12α).



Σχ. 12α.

Αἱ γραμμαὶ τοῦ δωματίου ποὺ ἔχουν τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος εἶναι ὁριζόντιοι γραμμαί.

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ, ὡς καὶ πᾶσα ἄλλη, ποὺ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης (σχ. 5), λέγεται ***κατακόρυφος***. Ἡ τομὴ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δύο τοίχων ἀπὸ ἐπάνω κάτω ἀποτελεῖ κατακόρυφον γραμμὴν (σχ. 12α).

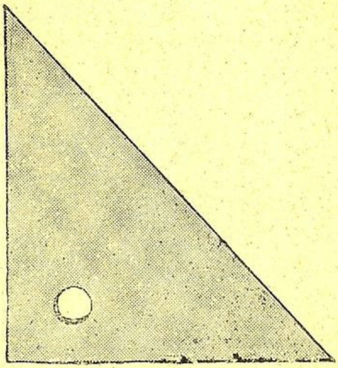
Ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε ὁριζόντιος οὔτε κατακόρυφος, λέγεται ***πλαγία***.

Αἱ ὁριζόντιοι καὶ κατακόρυφοι εὐθεῖαι γίνονται μὲ τὸν γνώμονα (σχ. 13).

Εὐθεῖαι παράλληλοι.—Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 14), δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη των. Αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ λέγονται ***παράλληλοι***

Ὥστε:

Δύο ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι κείμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ὅταν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη των, λέγονται παράλληλοι.



Σχ. 13.

Τὰ πεζοδρόμια τῶν ὁδῶν, αἱ γραμμαὶ τῶν σιδηροδρόμων κλπ., ἀποτελοῦν παραλλήλους γραμμάς.

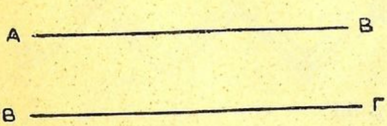
Ἀσκήσεις.

1. Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ὁριζοντίους καὶ κατακορύφους γραμμάς.

2. Γράψατε μίαν ὁριζόντιον γραμμήν.

3. Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος δύο παραλλήλους γραμμάς.

4. Κατασκευάσατε ἓν πρόχειρον νῆμα τῆς στάθμης καὶ ἐξελέγξατε δι' αὐτοῦ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν τῶν τοίχων τῆς τάξεως καὶ ἄλλων ἐπίπλων τοῦ σχολείου.



Σχ. 14.

5. Λάβετε ἕνα σπάγγον, ἀλείψατέ τον μὲ σκόνιν κιμωλίας καὶ μιμηθῆτε τὸν ἐλαιοχρωματιστὴν γράφοντες ὁριζόντιον γραμμὴν ἐπὶ τοῦ πίνακος.

6. Ὀνομάσατε πράγματα, τὰ ὁποῖα νὰ παρουσιάζουν κατακορύφους, ὁριζοντίους καὶ παραλλήλους γραμμάς.

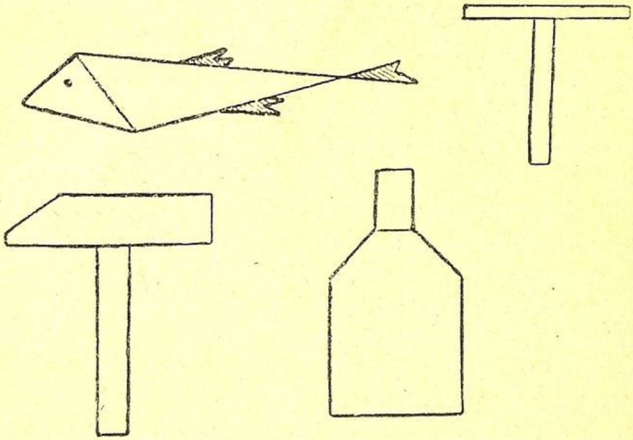
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

7. Τί γραμμὰς παρατηρεῖτε ἐπὶ τῆς ἕδρας, ἐπὶ τοῦ θρανίου, ἐπὶ τοῦ πίνακος τῆς τάξεως;

8. Δείξατε τὰς ὁριζοντίους, τὰς κατακορύφους καὶ τὰς παραλλήλους γραμμὰς τοῦ σχολείου σας.

9. Τί γραμμὰς παρατηρεῖτε εἰς τὸν σταυρόν;

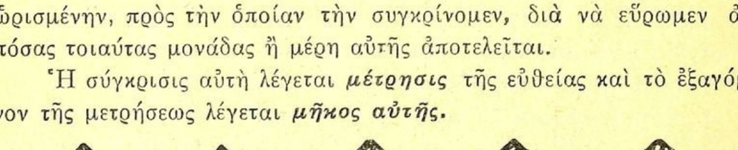
10. Τί γραμμὰς παρατηρεῖτε εἰς τὰ κατωτέρω σχήματα; (σχ. 15).



Σχ. 15.

Μέτρησις εὐθειῶν γραμμῶν.—Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ὡρισμένην, πρὸς τὴν ὁποίαν τὴν συγκρίνομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ πόσας τοιαύτας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται.

Ἡ σύγκρισις αὐτὴ λέγεται ***μέτρησις*** τῆς εὐθείας καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως λέγεται ***μῆκος αὐτῆς.***



Σχ. 16.

Συνηθεστέρα μονὰς μήκους εἶναι ***τὸ γαλλικὸν μέτρον*** ἢ ***βασιλικὸς πῆχυς*** (σχ. 16) καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ.

Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***παλάμαι.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἑκάστη παλάμη διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *δάκτυλοι* ἢ *πόντοι.*

Ἕκαστος δάκτυλος διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *γραμμαί.* Δηλαδή: 1 μέτρον=10 παλάμαι = 100 δάκτυλοι = 1000 γραμμαί.

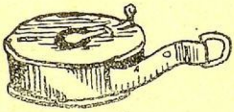
1 παλάμη = 10 δάκτυλοι = 100 γραμμαί.

1 δάκτυλος = 10 γραμμαί.

Ἡ παλάμη λοιπὸν εἶναι τὸ $^1/_{10}$ τοῦ μέτρου. Δι᾽ αὐτὸ λέγεται καὶ δέκατον τοῦ μέτρου. *Ἡ παλάμη* λέγεται καὶ ὑποδεκάμετρον.

Ὁ *δάκτυλος* εἶναι τὸ $^1/_{100}$ τοῦ μέτρου, λέγεται δὲ καὶ ***ἑκαστοτὸν τοῦ μέτρου*** ἢ *πόντος.*

Ἡ *γραμμὴ* εἶναι τὸ $^1/_{1000}$ τοῦ μέτρου, λέγεται δὲ καὶ χιλιοστὸν τοῦ μέτρου.



Σχ. 17.

Πρὸς εὐκολίαν τῶν ὑπολογισμῶν, διήρεσαν τὸ μέτρον εἰς δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά.

Τὰ δέκατα εἶναι παλάμαι, τὰ ἑκατοστὰ δάκτυλοι καὶ τὰ χιλιοστὰ γραμμαί.

Διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδας μήκους τὴν ***ταινίαν*** (κορδέλλα) μὲ μῆκος 10 ἢ 20 μέτρων (σχ. 17), τὸ ***ἑκατόμετρον,*** τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 100 μέτρα, τὸ ***χιλιόμετρον,*** τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 1000 μέτρα καὶ τὸ ***μυριάμετρον*** τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 10.000 μέτρα.

Εἰς τὴν Ἑλλάδα καὶ τὴν Τουρκίαν τὰ ὑφάσματα τὰ μετροῦμεν μὲ τὸν ***πῆχυν,*** ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ 0,64 τοῦ μέτρου. Ὁ πῆχυς διαιρεῖται εἰς 8 ***ρούπια.***

Διὰ τὰς οἰκοδομὰς ἔχομεν ὡς μονάδα μήκους τὸν ***τεκτονικὸν πῆχυν.*** Ὁ πῆχυς αὐτὸς ἰσοῦται πρὸς 0,75 ἢ $^3/_4$ τοῦ μέτρου.

Ἀσκήσεις.

1. Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος δύο εὐθείας γραμμάς. Ἡ μία νὰ εἶναι 9 δακτύλους μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης.

2. Γράψατε δύο εὐθείας γραμμὰς μήκους 45, 50, 62 δακτύλων.

3. Μετρήσατε μὲ τὴν σπιθαμήν σας τὸ μῆκος τοῦ θρανίου σας, μὲ τὸ πέλμα σας τὸ πλάτος τοῦ διαδρόμου τοῦ σχολείου, μὲ τὸ βῆμά σας τὸ μῆκος τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου, τὸ πλάτος τοῦ δρόμου τοῦ σχολείου.

4. Ὑπολογίσατε μὲ τὸ μάτι σας τὸ ὕψος τοῦ σχολείου σας εἰς μέτρα καὶ εἰς πήχεις.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

5. Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος μίαν εὐθεῖαν 80 δακτύλων. Διαιρέσατέ την εἰς 10 ἴσα μέρη.

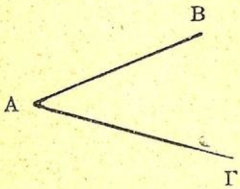
6. Γράψατε εὐθεῖαν 46 δακτύλων. Μετρήσατε καὶ εὕρετε τὸ μέσον αὐτῆς.

7. Λάβετε τὸ μέτρον εἰς τὰς χεῖράς σας καὶ μετρήσατε τὰς διαστάσεις τῆς ἕδρας τοῦ θρανίου.

8. Ὑπολογίσατε εἰς μέτρα τὸ ὕψος τοῦ σχολείου σας, τῆς ἀντικρυνῆς οἰκίας, τῆς ἐκκλησίας τῆς ἐνορίας σας.

9. Μετρήσατε εἰς τὸν δρόμον μίαν ἀπόστασιν 9 πήχεων καὶ 9 μέτρων. Συγκρίνατε τὰς δύο ἀποστάσεις.

10. Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαύτας ἐργασίας.



Σχ. 18.

3. Γωνίαι.

Τί εἶναι γωνίαι.— Τὸ ἔναντι σχῆμα εἶναι γωνία (σχ. 18). Τὸ σχῆμα αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν μὲν ἀπὸ ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ Α, δὲν ἀποτελοῦν ὅμως αἱ δύο μαζὶ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Γωνία λοιπὸν λέγεται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ δὲν ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Αἱ δύο εὐθεῖαι, ποὺ σχηματίζουν τὴν γωνίαν, λέγονται ***πλευραὶ*** τῆς γωνίας αὐτῆς. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας λέγεται ***κορυφὴ*** αὐτῆς.

Τὰς γωνίας ὀνομάζομεν ἢ μὲ ἓν γράμμα, δηλαδὴ μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς, ἢ μὲ τρία γράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεσαῖον εἶναι πάντοτε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς.

Κάθετοι εὐθεῖαι, ὀρθὴ γωνία.

α') Κάθετοι εὐθεῖαι.—Θέτομεν μίαν ἕδραν ἑνὸς κύβου εἰς τὸν πίνακα ἢ εἰς ἓν φύλλον τετραδίου καὶ χαράσσομεν μὲ κιμωλίαν (ἢ μὲ μολύβι) εὐθείας κατὰ μῆκος δύο τεμνομένων πλευρῶν τῆς ἕδρας ταύτης. Ἐὰν ἀποσύρωμεν τὸν κύβον καὶ προεκτείνωμεν τὰς χαραχθείσας εὐθείας πέραν τῆς τομῆς Θ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ σχηματίζουν 4 γωνίας: α, β, γ, δ (σχ. 19).

Ἐὰν ἐπιθέσωμεν μίαν ἐπίπεδον γωνίαν τοῦ κύβου εἰς κάθε μίαν ἀπὸ αὐτὰς παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζει ἀκριβῶς. Ἑπομένως αἱ 4 αὐ-

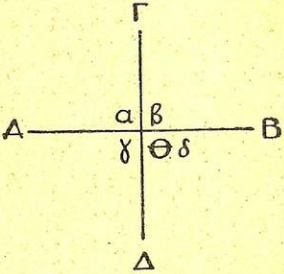
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ταὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ἀπὸ τὰς ὁποίας σχηματίζονται αἱ ἴσαι αὐταὶ γωνίαι, λέγονται ***κάθετοι εὐθεῖαι.***

β) Ὀρθὴ γωνία.—Κάθε μία ἀπὸ τὰς 4 αὐτὰς γωνίας, ποὺ σχηματίζουν δύο εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των, λέγεται ὀρθὴ γωνία. Ὥστε:

Ὀρθὴ γωνία λέγεται ἡ γωνία τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνονται καθέτως.

Διὰ νὰ χαράξωμεν καθέτους εὐθείας (ἢ νὰ γράψωμεν ὀρθὰς γωνίας) μεταχειριζόμεθα τὸν γνώμονα (σχ. 13).



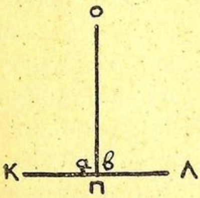
Σχ. 19.

Γνώμων.—Ὁ γνώμων εἶναι ὄργανον ἀπὸ λεπτὴν σανίδα ἢ μέταλλον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι κάθετοι. Τοποθετοῦμεν μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του εἰς μίαν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 19) οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσῃ αὐτή. Κατόπιν γράφομεν κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν μίαν ἕδραν τοῦ κύβου, βλέπομεν ὅτι αἱ 4 ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ κύβου εἶναι ὀρθαί. Ἑπομένως ὁ κύβος ἔχει 24 ἐπιπέδους ὀρθὰς γωνίας.

Ἡ κάθετος δὲν ἔχει ὡρισμένην κατεύθυνσιν, ἀρκεῖ μόνον ὅταν συναντήσῃ ἄλλην νὰ σχηματίζωνται ὀρθαὶ γωνίαι (σχ. 20). Π. χ. ἡ εὐθεῖα ΟΠ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΚΛ καὶ αἱ γωνίαι α καὶ β εἶναι ὀρθαί.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εὐθείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας, μεταχειριζόμεθα τὸν γνώμονα (σχ. 13) τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.



Σχ. 20.

β) Πλάγιαι εὐθεῖαι.—Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ (σχ. 21) δὲν εἶναι κάθετοι μεταξύ των (δηλ. δὲν σχηματίζουν ὀρθὰς γωνίας) τότε λέγονται ***πλάγιαι εὐθεῖαι.*** Αἱ γωνίαι ΕΘΗ καὶ ΗΘΖ δὲν εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

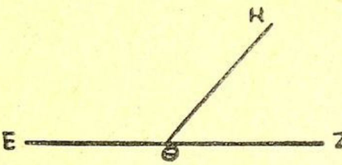
Ἡ γωνία ΗΘΖ συγκρινομένη πρὸς τὴν ὀρθὴν εἶναι μικροτέρα αὐτῆς καὶ δι' αὐτὸ λέγεται ***ὀξεῖα***, ἡ δὲ ΗΘΕ συγκρινομένη πρὸς τὴν ὀρθὴν εἶναι μεγαλυτέρα αὐτῆς καὶ δι' αὐτὸ λέγεται ***ἀμβλεῖα.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄλλα εἴδη γωνιῶν.

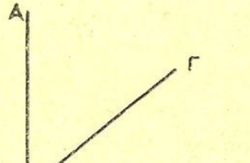
Γωνίαι συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαί.

Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΒΔ λέγονται ***συμπληρωματικαὶ*** (σχ. 22). Αἱ γωνίαι ΕΗΘ και ΘΗΖ που ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς λέγονται ***παραπληρωματικαὶ*** (σχ. 23).

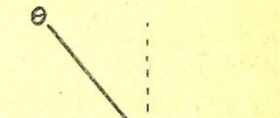


Σχ. 21.

Κατὰ κορυφὴν γωνίαι.—Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰς γωνίας ΑΕΔ καὶ ΓΕΒ (σχ. 24), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν ε, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προέκτασις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Δηλ. ἡ πλευρὰ ΕΒ εἶναι προέκτασις τῆς πλευρᾶς ΑΕ καὶ ἡ πλευρὰ ΕΔ εἶναι προέκτασις τῆς πλευρᾶς ΓΕ. Αἱ γωνίαι αὐταὶ λέγονται ***κατὰ κορυφὴν γωνίαι.*** Ἐπίσης κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι καὶ αἱ ΑΕΓ καὶ ΔΕΒ, ὥστε:

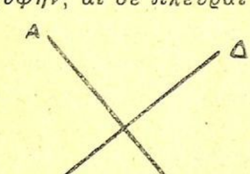


Σχ. 22.

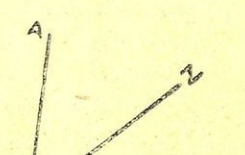


Σχ. 23.

Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἂν ἔχωσι κοινὴν κορυφήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προέκτασις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.



Σχ. 24.



Σχ. 25.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν καταλλήλως τὴν γωνίαν ΑΕΔ ἐπὶ τῆς ΓΕΒ θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι. Ἐπίσης εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι Α Ε Γ καὶ Δ Ε Β.

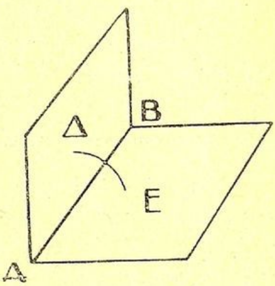
Ἄρα αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι πάντοτε ἴσαι.

Ἐφεξῆς γωνίαι.—Ἂν ἐξετάσωμεν τὰς γωνίας Α Ε Ζ καὶ Ζ Ε Δ (σχ. 25), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὗται ἔχουν κοινὴν τὴν κορυφὴν Ε.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπίσης κοινὴν τὴν πλευρὰν Ε Ζ. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ Α Ε καὶ Ε Δ εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς Ε Ζ. Αἱ τοιαῦται γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς γωνίαι. Ὥστε :

Ἐφεξῆς γωνίαι λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν ἔχωσι κοινὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς των ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς.



Σχ. 25 α.

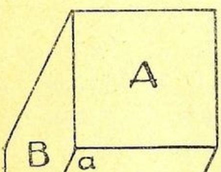
Ἐπίπεδοι γωνίαι — Ὅλαι αἱ γωνίαι ποὺ εἴδομεν καὶ ποὺ γίνονται ἀπὸ εὐθείας γραμμὰς ἐπάνω σὲ ἐπίπεδα λέγονται ***ἐπίπεδοι γωνίαι*** (π. χ. ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἐπὶ τοῦ πίνακος).

Δίεδροι γωνίαι.

Τὸ σχῆμα ποὺ ἀποτελοῦν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα λέγεται δίεδρος γωνία (σχ. 25α). Τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα Δ καὶ Ε, λέγονται ἕδραι τῆς διέδρου γωνίας, ἡ δὲ τομή των Α Β καλεῖται ἀκμὴ αὐτῆς. Δίεδρον γωνίαν σχηματίζουν δύο συνεχόμεναι ἕδραι τοῦ κύβου ἢ συνεχόμενοι τοῖχοι τοῦ δωματίου κλπ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἕδραι τοῦ κύβου συναντῶνται εἰς δώδεκα ἀκμάς, αἱ δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου εἶναι 12.

Τρίεδρος στερεὰ γωνία.

Τὸ σχῆμα ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τρία ἐπίπεδα τεμνόμενα ἀνὰ δύο καὶ διερχόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, λέγεται ***τρίεδρος στερεὰ γωνία.***



Σχ. 25β .

Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν ἐπιπέδων λέγεται ***κορυφὴ*** καὶ ὅλη ἡ γωνία παριστάνεται μὲ ἕνα γράμμα, τὸ γράμμα τοῦ σημείου τῆς κορυφῆς. Τὰ ἐπίπεδα λέγονται ***ἕδραι*** τῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ αἱ τομαὶ τῶν τριῶν ἐπιπέδων ἀνὰ δύο ***ἀκμαὶ αὐτῆς***. Ἡ τρίεδρος γωνία σχηματίζεται στὸ σημεῖον α ἀπὸ τὰ 3 ἐπίπεδα Α, Β, Γ (σχ. 25β). Εἰς τὸν κύβον παρατηροῦμεν 8 τριέδρους στερεὰς γωνίας, ὅσαι δηλ. εἶναι αἱ κορυφαί του.

Ἀσκήσεις

1. *Δείξατε διέδρους καὶ τριέδρους γωνίας τοῦ κύβου.*
2. *Δείξατε μίαν δίεδρον καὶ μίαν τρίεδρον γωνίαν εἰς τὸ δωμά-*

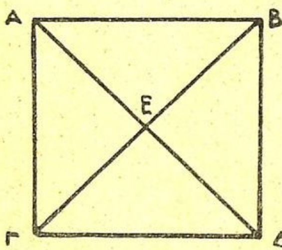
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τιον τῆς τάξεώς σας. Πόσας ἐν ὅλῳ διέδρους γωνίας ἔχει; Πόσας τριέδρους;

3. *Πόσας κορυφὰς ἔχει ὁ κύβος;*

4. Τετράγωνον

Ἐλέγομεν εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι κάθε ἕδρα τοῦ κύβου ἀποτελεῖ τετράγωνον σχῆμα. Τὸ κατωτέρω σχῆμα Α Β Γ Δ εἶναι τετράγωνον, διότι ἠμπορεῖ νὰ ἀποτελέσῃ ἕδραν τοῦ κύβου (σχ. 26). Αἱ πλευραὶ τοῦ σχήματος τούτου εἶναι εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι εἶναι ἀκμαὶ τοῦ κύβου. Τὰ σημεῖα Α Β Γ Δ, ποὺ συναντῶνται αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου λέγονται ***κορυφαὶ*** τοῦ τετραγώνου.



Σχ. 26.

Αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου σχηματίζουν 4 γωνίας. Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς γωνίας αὐτάς, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι ὅλαι εἶναι ὀρθαί. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν καὶ ἐξ ἄλλου λόγου. Τὸ τετράγωνον εἶναι ἕδρα κύβου καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἀκμαὶ κύβου. Αἱ ἀκμαὶ δὲ τοῦ κύβου σχηματίζουν ὀρθὰς γωνίας, διότι ἡ μία εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ὥστε:

Τετράγωνον λέγεται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς 4 πλευράς του ἴσας καὶ τὰς 4 γωνίας του ὀρθάς.

Ἂν ἑνώσωμεν τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τοῦ τετραγώνου μὲ εὐθείας γραμμάς, ἤτοι τὴν Α καὶ Δ καὶ τὴν Γ καὶ Β, αἱ εὐθεῖαι αὗται λέγονται ***διαγώνιοι*** καὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν 4 πλευρῶν τοῦ τετραγώνου λέγεται ***περίμετρος*** τοῦ τετραγώνου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον τοῦ τετραγώνου, ἐπειδὴ καὶ αἱ 4 πλευραί του εἶναι ἴσαι, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸ 4. Π. χ. ἐὰν ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ἔχῃ μῆκος 5 μ., ἡ περίμετρός του θὰ εἶναι $5 \times 4 = 20$ μ.

Ἀσκήσεις.

1. *Διατί αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι;*
2. *Διατί αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαί:*
3. *Πόσαι μοῖραι εἶναι 2, 3, 4, γωνίαι τοῦ τετραγώνου;*
4. *Ὀνομάσατε πράγματα, ποὺ νὰ ἔχουν σχῆμα τετραγώνου.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

5. *Σχηματίσατε εἰς τὸ τετράδιόν σας τετράγωνον μὲ πλευρὰν 15 δακτύλων.*

Προβλήματα.

1. *Εἷς ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τετραγώνου μὲ πλευρὰν 25,60 μ. καὶ θέλομεν νὰ περιφράξωμεν αὐτὸν μὲ συρματόπλεγμα. Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα θὰ χρειασθῶμεν;*

2 *Εἷς τετραγωνικὸς ἀγρὸς ἔχει περίμετρον 116 μέτρα, πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του;*

3. *Κάμετε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα.*

Μετρήσεις ἐπιφανειῶν

Ἐμβαδόν.—Ὅπως διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰς ἀποστάσεις λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ μέτρον καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ, τοιουτοτρόπως διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰς ἐπιφανείας λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως ἄλλην ἐπιφάνειαν ὡρισμένην, πρὸς τὴν ὁποίαν τὴν συγκρίνομεν καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας τοιαύτας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται. Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος λέγεται ***ἐμβαδὸν*** καὶ ὁ ὁποῖος μᾶς φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ μετρηθεῖσα ἐπιφάνεια.

Μονάδες ἐπιφανείας.—Ὡς μονάδα μετρήσεως ἐπιφανειῶν λαμβάνομεν τὸ ***τετραγωνικὸν μέτρον*** (τ. μ.).

Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰς ἑνὸς μέτρου. Διαιρεῖται δὲ εἰς 100 τετράγωνα μὲ πλευρὰν μιᾶς παλάμης ποὺ λέγονται ***τετραγωνικαὶ παλάμαι*** (τ. π.). Κάθε τετραγωνικὴ παλάμη, διαιρεῖται εἰς 100 τετράγωνα μὲ πλευρὰν ἑνὸς δακτύλου ποὺ λέγονται ***τετραγωνικοὶ δάκτυλοι*** (τ. δ.). Κάθε τετραγωνικὸς δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 100 τετραγωνικὰς γραμμὰς (τ. γ.). Ὥστε : 100

1 τ. μέτρον ἔχει 100 τ. παλάμας,
1 τ. παλάμη ἔχει 100 τ. δακτύλους,
1 τ. δάκτυλος ἔχει 100 τ. γραμμάς.

Τὰ τετραγωνικὰ μέτρα γράφονται μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς. Αἱ τ. π. μὲ ἑκατοστὰ τοῦ τ. μ. Οἱ τ. δ. μὲ δεκάκις χιλιοστὰ τοῦ τ. μ. Αἱ τ. γ. μὲ ἑκατομμυριοστὰ τοῦ τ. μ. Π. χ. 5 τ. μ. καὶ 30 τ. π. γράφονται 5,30 τ. μ., 8 τ. γ. γράφονται 0,000008 τ. μ.

Διὰ τὴν μέτρησιν ἀγρῶν, ἀμπέλων κλπ. χρησιμοποιοῦμεν τὸ ***Βασιλικὸν στρέμμα***, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 1000 τ. μ. καὶ τὸ παλαιὸν στρέμμα τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 1270 τ. μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μεγάλων ἐπιφανειῶν μεταχειριζόμεθα α) *τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον*, δηλαδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 10 μέτρα. β) *τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον*, δηλ. τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 100 μέτρα καὶ γ) *τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον*, δηλ. τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 1000 μέτρα καὶ ἔχει 1.000.000 τ. μέτρα.

Μέτρησις οἰκοπέδων.—Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων συνήθως μεταχειριζόμεθα ἄλλην μονάδα, τὸν *τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν*, (τ. τ. π.) δηλαδὴ τετράγωνον μὲ πλευρὰν 3/4 τοῦ μέτρου ἢ 0,75 μ. Ἑπομένως 1 τεκ. τετρ. πῆχυς $=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$ τοῦ $μ^2$ ἢ $0,75\times0,75=$ $0,5625$ $μ^2$ καὶ ἀντιστρόφως 1 τετρ. μέτρον $=\frac{16}{9}$ τοῦ τεκ. τετρ. πήχεως.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑπομένως τ. μ. εἰς τεκτ. τετρ. πήχεις, διαιροῦμεν τὰ τ.μ. διὰ τοῦ 9/16 ἢ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 0,5625. Π. χ. ἓν οἰκόπεδον ἔχει ἔκτασιν 225 τ.μ. Πόσοι τ τ. πήχεις εἶναι ; Ἰσοῦται μὲ 225 : 9/16 $=225\times16/9=3600:9=400$ τ.τ.π. ἢ $225 : 0,5625=400$ τ.τ.π. Καὶ διὰ νὰ τρέψωμεν τ.τ.π. εἰς τ.μ. πολλαπλασιάζομεν τοὺς τ.τ.π. ἐπὶ 9/16 ἢ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 0,5625. Π.χ. 400 τ.τ.π. πόσα τ.μ. εἶναι ; Ἰσοῦται μὲ $400\times9/16=3600/16=225$ τ.μ. ἢ $400\times0,5625=225$ τ.μ.

Ἐπεξήγησις :

Τετραγωνικὸν μέτρον = τ.μ. ἢ $μ^2$

Τετραγωνικὴ παλάμη = τ.μ. ἢ $π^2$

Τετραγωνικὸς δάκτυλος = τ.δ. ἢ $δ^2$

Τετραγωνικὴ γραμμὴ = τ.γ. ἢ $γ^2$

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γραφοῦν μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς α) 8 τ.μ. καὶ 40 τ.π. β) 6 τ.μ., 12 τ.π. καὶ 20 τ.δ. γ) 60 τ.π. καὶ 18 τ.δ.

2. Πῶς τρέπονται τ.μ. εἰς τ.τ. πήχεις καὶ πῶς τ.τ.π. εἰς τ.μ. ;

3. Πόσας τετραγωνικὰς παλάμας ἔχουν τὰ 4 τ.μ.; Πόσας τὰ 20 τ.μ.;

4. Μὲ πόσους τ.τ. πήχεις ἰσοδυναμοῦν 365 τ.μ. ;

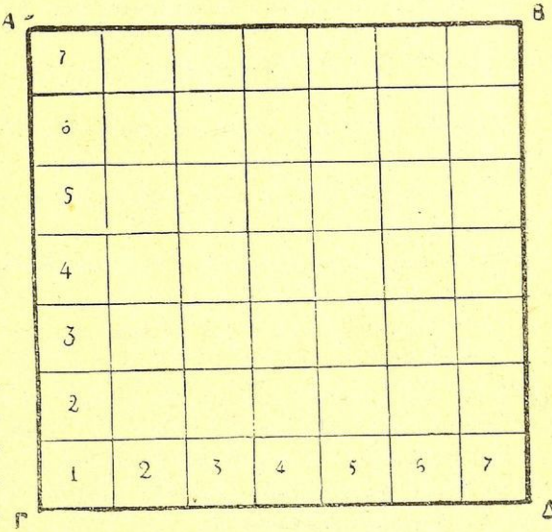
5. Ἓν οἰκόπεδον σχήματος τετραγώνου ἔχει ἐμβαδὸν 854 τ.τ.π. καὶ ἐπωλήθη πρὸς 12.000 δρχ. τὸ τ.μ. Πόσον ἐστοίχισε ; (Σημ. Οἱ πήχεις πρέπει νὰ γίνουν μέτρα).

Ἐμβαδὸν τετραγώνου.—Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὸ κατωτέρω σχῆμα Α Β Γ Δ (σχ. 27) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν του. Νὰ εὕρωμεν δηλαδὴ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον μῆκος ἔχει ἡ πλευρὰ αὐτοῦ Γ Δ, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς βάσιν τοῦ τετραγώνου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι 7 μέτρα. Τότε κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ἠμποροῦμεν νὰ τοποθετήσωμεν 7 τετράγωνα. Τοιουτοτρόπως θὰ ἀποτελεσθῇ μία σειρὰ ἀπὸ 7 τετραγωνικὰ μέτρα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Γ Δ.

Ἐὰν τότε ἐξακολουθήσωμεν νὰ τοποθετῶμεν τοιαύτας σειράς, τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τὴν Α Β, εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ σειραὶ τῶν τετραγώνων θὰ γίνουν 7. Διότι, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, ὅσαι σειραὶ χωροῦν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Γ Δ, τόσαι σειραὶ χωροῦν καὶ ἐπὶ πλευρᾶς Α Γ. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν εἰς ὅλον τὸ τετράγωνον σχῆμα 7 σειρὰς τετραγώνων, ἑκάστη τῶν ὁποίων θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 τετράγωνα. Ὅλα δηλαδὴ τὰ τετράγωνα τοῦ ἑνὸς τ. μ.



Σχ. 27.

τὰ ὁποῖα χωροῦν εἰς τὸ τετράγωνον αὐτὸ σχῆμα θὰ εἶναι 49 καὶ ἐπειδὴ εἴπομεν, ὅτι ἕκαστον τετράγωνον εἶναι ἕνα τετραγωνικὸν μέτρον λέγομεν ὅτι τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 49 τ. μ. Τὸν ἀριθμὸν ὅμως αὐτὸν εὑρίσκομεν ἁπλούστερον ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 7, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς Γ Δ, δηλ. τῆς βάσεως τοῦ τετραγώνου, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 7, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ ὕψος τοῦ τετραγώνου. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ***ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.***

Π. χ. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 4 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ; $=4 \times 4=16$ τ.μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐμβαδὸν ἐπιφανειῶν τοῦ κύβου.—Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 0,80 μ. καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, δηλ. καὶ τῶν 6 ἑδρῶν του.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ μία ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,80 μ. Τὸ ἐμβαδόν της θὰ εἶναι $0,80 \times 0,80 = 0,64$ τ. μ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύβος ἀποτελεῖται ἐξ 6 τετραγώνων πολλαπλασιάζομεν τὸ $0,64 \times 6 = 3,84$ τ. μ. Ὥστε: ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τοῦ κύβου, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς αὐτοῦ ἕδρας καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6.***

Προβλήματα

1. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 1,20 ἢ 0,95 ἢ 1,04 μέτρα;

2. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,83 ἢ 0,76 ἢ 1,20 μέτρα;

3. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι οἰκόπεδον τετραγωνικόν, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 25,600 μέτρα;

4. Τετραγωνικὴ πλατεῖα ἔχει πλευρὰν περίπου 250 μέτρα. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

5. Ἡ ἰδία πλατεῖα πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικοὺς λίθους πλευρᾶς 0,25 μέτρων. Τὴν ἐργασίαν ἐδώσαμεν ἐργολαβικῶς πρὸς 53.000 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ζητεῖται πόσοι λίθοι θὰ χρειασθοῦν διὰ τὴν ἐπίστρωσιν τῆς πλατείας καὶ πόσον θὰ κοστίσῃ ἡ ἐργασία τῆς ἐπιστρώσεως.

6. Οἰκόπεδον τετραγωνικὸν μὲ πλευρὰν 16,80 μέτρα ἐπωλήθη πρὸς δρχ. 23.500 τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσα χρήματα εἰσεπράχθησαν;

7. Ἂν τὸ δωμάτιον τῆς τάξεώς σας εἶναι τετραγωνικὸν εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου αὐτοῦ.

8. Ἐπὶ τετραγωνικοῦ καρτονίου μὲ μῆκος πλευρᾶς 0,38 μέτρα σχηματίζω κύβον. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου τούτου.

9. Εἶχον δύο οἰκόπεδα τετραγωνικά. Τοῦ ἑνὸς ἡ πλευρὰ ἦτο 18,30 μέτρα καὶ τοῦ ἄλλου 23,40 μέτρα. Ἐπώλησα καὶ τὰ δύο πρὸς 23.500 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσα ἔλαβον ἐξ ἑκάστου οἰκοπέδου;

10. Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

5. Μέτρησις τοῦ ὄγκου.

Μονάδες ὄγκου.—Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος τῶν σωμάτων λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ ***κυβικὸν μέτρον***, δηλαδὴ ὡρισμένον κύβον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ἓν μέτρον καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ.

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ κύβος ἔχει τρεῖς διαστάσεις: μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ Κ. Μ. εἶναι:

Ἡ ***κυβικὴ παλάμη*** εἶναι κύβος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ μίαν παλάμην, δηλαδὴ $\frac{1}{1000}$ κ. μ.

Ὁ ***κυβικὸς δάκτυλος*** εἶναι ἄλλος κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ ἕνα δάκτυλον δηλαδὴ $\frac{1}{100000}$ κ. μ.

Ἡ ***κυβικὴ γραμμὴ*** εἶναι ἄλλος κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ ἕνα χιλιοστὸν τοῦ μέτρου δηλ. $\frac{1}{1000000000}$ κ. μ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σχῆμα 28 εἶναι κυβικὸν μέτρον. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι 100 τ.π. (10×10). Ἂν τοποθετήσωμεν ἐπὶ ἑκάστης παλάμης μίαν κυβ παλάμην θὰ ἀποτελεσθῇ μία σειρὰ ἀπὸ 100 κυβ. παλάμας, ὕψους μιᾶς παλάμης. Τὸ ὕψος ὅμως τοῦ κυβ. μέτρου εἶναι 10 παλάμαι καὶ ἂν τοποθετήσωμεν 10 τοιαύτας σειρὰς τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης ἀπὸ 100 κυβ. παλάμας ἑκάστην, θὰ χωρέσῃ συνεπῶς τὸ κυβ. μέτρον ἐν ὅλῳ 1000 κυβ. παλάμας (10×100).

Τὸ αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν καὶ μὲ τὴν κυβ. παλάμην καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι αὕτη θὰ χωρέσῃ 1000 κυβ. δακτύλους ὁμοίως μὲ τὸν κυβ. δάκτυλον καὶ θὰ χωρέσῃ καὶ αὐτὸς 1000 κυβ. γραμμάς. Ὥστε:

1 κ.μ = 1000 κ.π.
1 κ.π = 1000 κ.δ.
1 κ.δ = 1000 κ. γρ. Ἄρα:
1 κ.π = 1000 κ.π = 1000000 κ.δ = 1000000000 κ. γρ.

Ἀπὸ τοὺς παραπάνω πίνακας ἐννοοῦμεν ὅτι: κάθε μονὰς ὄγκου εἶναι 1000 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἑπομένην μονάδα.

Τὰ κυβικὰ μέτρα γράφονται μὲ ἀκεραίας μονάδας, αἱ κυβικαὶ παλάμαι μὲ χιλιοστὰ τοῦ κυβικοῦ μέτρου (1 κ.π.=0,001 κ.μ.), οἱ κυβικοὶ δάκτυλοι μὲ ἑκατομμυριοστὰ τοῦ κυβ. μέτρου (1 κυβ. δάκτ. =0,000001)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Π. χ. Ὁ ὄγκος ἑνὸς σώματος ποὺ εἶναι 5 κυβικὰ μέτρα, 25 κυβ. παλάμαι καὶ 6 κυβ. δάκτυλοι γράφεται οὕτω : 5,025006 κ.μ.

Ἂν μᾶς δοθῇ δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἰς κυβ. μέτρα χωρίζομεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τὰ δεξιὰ τρία-τρία. Τὰ τρία πρῶτα ἀπὸ τὰ δεξιὰ εἶναι κυβικοὶ δάκτυλοι καὶ τὰ ἄλλα τρία κυβικαὶ παλάμαι καὶ συμπληρώνομεν μὲ μηδενικά, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε 6 ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Π.χ. 0,8356 κ.μ. =0,835600 κ.μ.=835 κυβ. παλάμαι καὶ 600 κ. δάκτυλοι.

Ἀσκήσεις.

1. *Ποῖον μέτρον μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου τῶν σωμάτων;*

2. *Ποῖαι εἶναι αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου;*

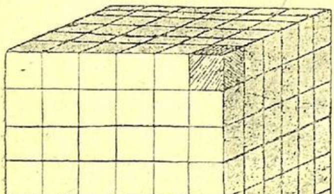
3. *Πόσαι κυβικαὶ παλάμαι εἶναι 5 κυβ. μέτρα; Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι εἶναι 25 κυβ. παλάμαι;*

4. *Πῶς γράφονται τὰ κυβ. μέτρα; Πῶς αἱ κυβ. παλάμαι; Πῶς οἱ κυβ. δάκτυλοι;*

5. *Νὰ γράψετε μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 5 κυβ. μέτρα καὶ 7 κυβ. παλάμας, 38 κυβικὰς παλάμας καὶ 83 κυβ. δακτύλους.*

6. *Χωρίσατε τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,007486 κ.μ. 8,563036 κυβικὰ μέτρα.*

Εὕρεσις τοῦ ὄγκου τῶν κυβικῶν σωμάτων.—Εὕρεσις τοῦ ὄγκου κυβικοῦ σώματος σημαίνει, εὑρίσκομεν πόσα κυβικὰ μέτρα καταλαμβάνει ἢ πόσα κυβικὰ μέτρα χωροῦν ἐντὸς αὐτοῦ.



Σχ. 28.

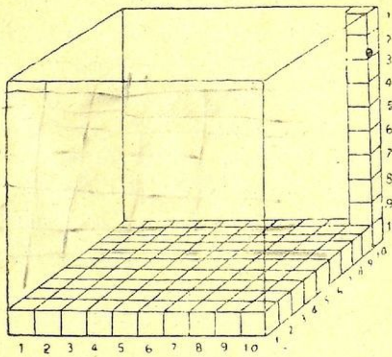
Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς δωματίου κυβικοῦ σχήματος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 6 μέτρα (σχ. 28).

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου τοῦ δωματίου, δηλαδὴ τῆς ἕδρας ποὺ ἀποτελεῖ τὸ δάπεδον τοῦ δωματίου. Ἡ ἕδρα αὐτὴ ἔχει σχῆμα τετραγώνου, διότι, ὅπως γνωρίζομεν, αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνα. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας αὐτῆς πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς της, ποὺ εἶναι 6 μ., ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δαπέδου τοῦ δωματίου, δηλ. τῆς ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι $6 \times 6 = 36$ τ. μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂν τώρα εἰς ἕκαστον τετρ. μέτρον τοῦ δαπέδου τοποθετήσωμεν ἀπὸ ἓν κυβικὸν μέτρον, ὅλον τὸ δάπεδον θὰ χωρέσῃ 36 κυβ. μέτρα ποὺ θὰ ἔχουν ὕψος ἑνὸς μέτρου.

Ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦ δωματίου εἶναι 6 μέτρα, θὰ χωρέσουν 6 σειραὶ ἀπὸ 36 κυβ. μέτρα ἑκάστη, δηλαδὴ $36 \times 6 = 216$ κυβ. μέτρα ποὺ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου.



Σχ. 28α.

Τὸν ἀριθμὸν 216 εὑρίσκω εὐκόλως ἂν πολλαπλασιάσω τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ δωματίου, δηλ. τὸ 6 ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του ($6 \times 6 = 36$) καὶ τὸ γινόμενον πάλιν ἐπὶ τὸ 6 ($36 \times 6 = 216$).

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ τὸ εὑρισκόμενον γινόμενον πάλιν ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς.***

Ἐργασίαι

1. Γράψατε εἰς τὸν πίνακα κύβους μὲ ἀκμὴν 0,42, 0,36, 0,19 μ.

2. Εὕρετε τὸν ὄγκον τοῦ σχολείου σας, τῆς αἰθούσης τῆς τάξεως, τοῦ γραφείου τοῦ σχολείου (ἐὰν δὲν εἶναι σχήματος κύβου ;)

Προβλήματα

1. Κιβώτιον κυβικοῦ σχήματος μὲ ἀκμὴν 1,10 μέτρα εἶναι γεμᾶτο μὲ σάπωνα κυβικοῦ σχήματος καὶ ἀκμῆς 0,07 μέτρων. Πόσοι τοιοῦτοι σάπωνες εἶναι μέσα εἰς τὸ κιβώτιον;

2. Κυβικὴ αἴθουσα κινηματογράφου ἔχει ἀκμὴν 36 μέτρα. Πόσους θεατὰς δύναται νὰ περιλάβῃ, ὅταν ὑπολογίσωμεν ὅτι ἕκαστος θεατὴς χρειάζεται 2,30 κυβικὰ μέτρα ἀέρος;

3. Ἡ ἀποθήκη ἑνὸς πλοίου ἔχει σχῆμα κυβικὸν μὲ ἀκμὴν 14,80 μέτρα. Εὕρετε τὴν χωρητικότητά της.

4. Ἐπὶ οἰκοπέδου τετραγωνικοῦ πλευρᾶς 15,60 ἐκτίσθη κυβικὴ οἰκοδομή. Ποῖος ὁ ὄγκος της;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

5. Καπναποθήκη κυβική, ἀκμῆς 11,90 μέτρων, πόσα κυβικὰ δέματα καπνοῦ ἀκμῆς 0,84 μέτρων δύναται νὰ περιλάβῃ;

6. Ἕκαστον πρόσωπον χρειάζεται εἰς μίαν νύκτα 4,50 κυβικὰ μέτρα ἀέρος διὰ νὰ ἀναπνεύσῃ. Πόσα πρόσωπα δύνανται νὰ κοιμηθοῦν εἰς ἓν δωμάτιον κυβικοῦ σχήματος μὲ ἀκμὴν 4,20 μέτρων;

7. Ἂν τὸ σχολεῖόν σας ἔχῃ σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 12,20 μέτρων καὶ ἡ εἴσοδος καὶ οἱ διάδρομοι καταλαμβάνουν 295 κυβικὰ μέτρα, ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τῶν αἰθουσῶν τοῦ σχολείου;

8. Εἷς καπνεμπορικὸς οἶκος ἐγέμισε τὴν ἀποθήκην κυβικοῦ σχήματος ἑνὸς πλοίου μὲ δέματα καπνοῦ κυβικοῦ σχήματος καὶ ἀκμῆς 0,90 μέτρων καὶ τὰ ἔστειλεν εἰς τὴν Γερμανίαν. Ἐχώρεσαν 1132 δέματα. Ποία ἡ χωρητικότης τῆς ἀποθήκης τοῦ πλοίου;

9. Εὕρετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα.

6. Συνηθέστεραι μονάδες βάρους.

Μονάδες βάρους.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος τῶν σωμάτων μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδας βάρους: Τὸν τόννον, τὸ χιλιόγραμμον καὶ τὸ γραμμάριον.

α) Ὁ Τόννος. Εἶναι ἴσος μὲ τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4° Κελσίου, ποὺ χωρεῖ εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον.

β) Τὸ χιλιόγραμμον. Εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4° Κελσίου, ποὺ χωρεῖ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην.

γ) Τὸ γραμμάριον. Εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4° Κελσίου ποὺ χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον.

Ἑπομένως: 1 τόννος = 1000 χιλιόγραμμα.
1 χιλιόγραμμον = 1000 γραμμάρια

Ἄλλαι μονάδες βάρους αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται κυρίως εἰς τὴν ἀγορὰν εἶναι ἡ ὀκᾶ καὶ τὸ δράμι.

Τὸ δράμι ἰσοδυναμεῖ μὲ 3,2 γραμμάρια.

Ἡ ὀκᾶ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1280 γραμμάρια (δηλ. 400×3,2).

Τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 312,5 δράμια (δηλ. 1000 : 3,2).

Ὁ τόννος (δηλ. 1000×312,5) ἰσοδυναμεῖ μὲ 780 ὀκ. περίπου. (Ὁ τόννος ὑπολογίζεται 780 ὀκάδες).

Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν πλοίων, ἔχομεν ὡς μονάδα τὸν ***ναυτικὸν τόννον***, ὁ ὁποῖος ἰσοδυναμεῖ μὲ 2,83 τόννους.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

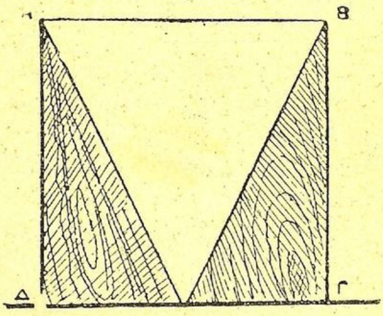
Ἀσκήσεις.

1. *Πῶς τρέπονται οἱ τόννοι εἰς ὀκάδας;*
2. *Πῶς τὰ χιλιόγραμμα εἰς ὀκάδας;*
3. *Πῶς αἱ ὀκάδες εἰς τόννους;*
4. *Πῶς αἱ ὀκάδες εἰς χιλιόγραμμα;*
5. *Πῶς τὰ δράμια εἰς γραμμάρια;*
6. *Πῶς τὰ γραμμάρια εἰς δράμια;*
7. *Πόσα γραμμάρια ἔχει ἡ ὀκᾶ; (400 δράμια).*
8. *Πόσα δράμια ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;*
9. *Πῶς τρέπονται τὰ χιλιόγραμμα εἰς δράμια;*

Σημ. *Εἰς τὴν Κέρκυραν καὶ λοιπὰς Ἰονίους νήσους χρησιμοποιεῖται ἡ λίτρα, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ 144,2 δράμια.*

Ἰχνογράφησις τετραγώνου καὶ κύβου.

Τὸ τετράγωνον τὸ ἰχνογραφοῦμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος. Πρὸς τοῦτο γράφομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Κατόπιν λαμβάνομεν ἐκ τῆς εὐθείας ταύτης ἓν διάστημα τὸ ΓΔ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν. Ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ διαστήματος τούτου φέρομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος καθέτους ἐπὶ τῆς ΓΔ, τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ, ἴσας πρὸς τὴν ΓΔ. Κατόπιν ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων τούτων διὰ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΓΔ, τῆς ΑΒ καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι ἕτοιμον, ὅπως δεικνύει καὶ τὸ παρακείμενον σχῆμα (σχ. 29).



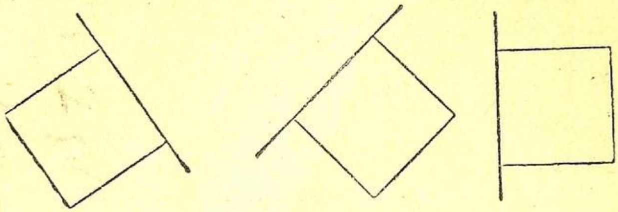
Σχ. 29.

Τὸ ἀνωτέρω τετράγωνον ἐσχηματίσαμεν ἐπὶ ὁριζοντίου εὐθείας. Δυνάμεθα ὅμως νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον καὶ ἐπὶ κατακορύφου εὐθείας, ἐπὶ πλαγίας καὶ οἱασδήποτε ἄλλης διευθύνσεως γραμμῆς, ὅπως δεικνύουν τὰ κατωτέρω σχήματα (σχ. 30).

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν ***κύβον***, ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον δύο τετράγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ τέμνῃ τὸ ἄλλο. Κατόπιν σβήνομεν τὴν κατακόρυφον καὶ τὴν ὁριζόντιον πλευρὰν τοῦ πρώτου τετραγώνου,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἑνώνομεν κατόπιν τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν καὶ τῶν δύο τετραγώνων καὶ ὁ κύβος εἶναι ἕτοιμος, ὅπως δεικνύουν καὶ τὰ κατωτέρω σχήματα

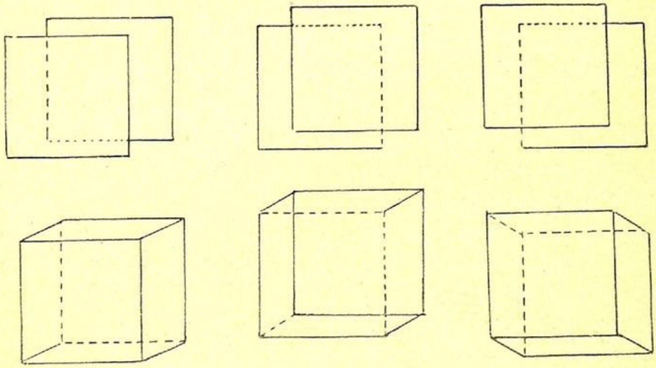


Σχ. 30.

(σχ. 31). Τὰ δύο ἀρχικὰ τετράγωνα δύνανται νὰ ἔχουν ὁποιανδήποτε θέσιν.

Κατασκευὴ Κύβου.

1. Ἀπὸ χαρτόνι.—Ἐὰν ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας ἑνὸς κύβου θὰ σχηματισθῇ τὸ κατωτέρω ἐπίπεδον σχῆμα (σχ. 32). Τοῦ σχήματος τούτου



Σχ. 31.

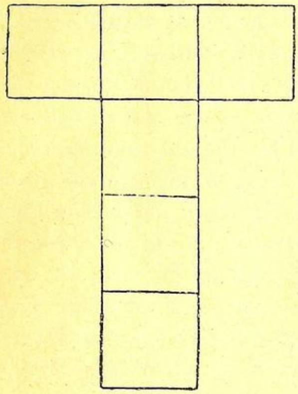
τὰ 4 κάθετα τετράγωνα ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου, τὰ δὲ δύο πλάγια τὴν ἄνω καὶ τὴν κάτω βάσιν αὐτοῦ.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν λοιπὸν κύβον ἐκ χαρτονίου ἰχνογραφοῦμεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου τὸ σχῆμα τοῦτο (σχ. 32). Τὰ τετράγωνα τοῦ σχήματος τούτου πρέπει νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσα μεταξύ των. Τὸ μέγεθος ἑκάστου τετραγώνου εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἕδρας τοῦ κύβου, ποὺ θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν. Κατόπιν χαράσσομεν διὰ μαχαιριδίου τὰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευράς, εἰς τὰς ὁποίας συναντῶνται τὰ τετράγωνα ταῦτα. Κλείομεν τὰ τετράγωνα ταῦτα καὶ κολλοῦμεν τὰς ἄκρας μὲ κόλλαν. Ὁ κύβος εἶναι ἕτοιμος.

2. Ἀπὸ ξύλον.—Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κύβον ἐκ ξύλου ἰχνογραφοῦμεν ἐπὶ τοῦ ξύλου πρῶτον τὰ δύο πλάγια τετράγωνα τοῦ ἀνωτέρω σχήματος χωριστά. Κατόπιν ἰχνογραφοῦμεν τὰ 4 κάθετα τετράγωνα. Ταῦτα ὅμως πρέπει νὰ εἶναι ὀλίγον μικρότερα τῶν δύο πρώτων. Τόσον μικρότερα ὅσον εἶναι τὸ πάχος τοῦ ξύλου. Μὲ ἓν μικρὸν πριόνιον χωρίζομεν τὰ τετράγωνα καὶ κατόπιν κολλῶμεν αὐτὰ μὲ ψαρόκολλαν ἢ καρφώνομεν μὲ λεπτὰ καρφιά. Τὰ 4 κάθετα τετράγωνα θὰ ἀποτελέσουν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου, τὰ δὲ δύο χωριστὰ τὰς βάσεις αὐτοῦ.



Σχ. 32.

3. Ἀπὸ πηλόν.—Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κύβον ἀπὸ πηλόν, ζυμώνομεν πρῶτον τὸν πηλὸν καλῶς. Κατόπιν τοποθετοῦμεν αὐτὸν ἐπὶ μιᾶς ὁριζοντίου σανίδος, ἴσης πρὸς τὴν ἕδραν τοῦ κύβου, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν. Κατασκευάζομεν ἄλλα δύο τετράγωνα καὶ τοποθετοῦμεν αὐτὰ εἰς τὰ δύο πλάγια τοῦ πηλοῦ. Κατόπιν προσθέτομεν πηλόν, μέχρις ὅτου οὗτος φθάσῃ εἰς τὰ ἄνω ἄκρα τῶν τετραγώνων τούτων. Ἀφαιροῦμεν τότε τὰ τετράγωνα καὶ προσαρμόζομεν αὐτὰ εἰς δύο ἄλλα πλάγια τοῦ πηλοῦ. Τοιουτοτρόπως ὁ πηλὸς λαμβάνει κυβικὸν σχῆμα. Ἰσώνομεν τότε τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν τοῦ πηλοῦ καὶ ὁ κύβος εἶναι ἕτοιμος.

Ἐργασίαι.

1. Ἰχνογραφήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος δύο τετράγωνα. Τὸ ἓν νὰ ἔχῃ πλευρὰν 0,12 μέτρα, τὸ ἄλλο νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ πρώτου.

2. Ἐπὶ τῶν δύο τούτων τετραγώνων ἰχνογραφήσατε κύβους.

3. Κατασκευάσατε ἐκ ξύλου κύβον μὲ ἀκμὴν 0,13 μέτρα.

4. Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου κύβον μὲ ἀκμὴν 0,36 μέτρα.

5. Κατασκευάσατε ἐκ πηλοῦ ὅμοιον κύβον.

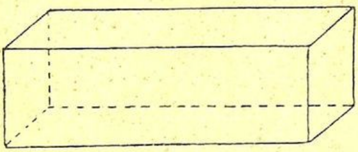
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

7. 'Ορθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Τώρα θὰ μάθωμεν ἓν ἄλλο στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον δεικνύει τὸ κατωτέρω σχῆμα. Τὸ σῶμα αὐτὸ ὀνομάζεται ***ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*** (σχ. 33).

Σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν αἱ ἐπιμήκεις πλάκες τοῦ σάπωνος, ἡ κασσετίνα σας, μερικὰ κουτιὰ καὶ ἄλλα.

Ἂν παραβάλωμεν τὸ σῶμα αὐτὸ πρὸς τὸν κύβον, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὁμοιάζουν. Διότι, ὅπως καὶ ὁ κύβος, τοιουτοτρόπως καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 6 ἕδρας. Εἶναι δηλαδὴ καὶ τοῦτο ἑξάεδρον σχῆμα, ὅπως ὁ κύβος, ἀλλὰ μόνον αἱ ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν μετρήσωμεν καὶ τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ, θὰ εὕρωμεν ὅτι εἶναι 12 ὅσαι δηλαδὴ καὶ αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου. Ἐπίσης καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὅπως καὶ ὁ κύβος, ἔχει ἐπιπέδους γωνίας, διέδρους καὶ τριέδρους καὶ μάλιστα τόσας, ὅσας ἔχει καὶ ὁ κύβος.



Σχ. 33.

Ἐπίσης, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβον, τοιουτοτρόπως καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον αἱ ἕδραι καὶ αἱ ἀκμαὶ εἶναι ὁριζόντιοι καὶ κατακόρυφοι. Καὶ αἱ μὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν δέ. Αἱ γωνίαι λοιπόν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, εἶναι ὀρθαί.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 24 ***ἐπιπέδους ὀρθὰς γωνίας***, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἐκ τῶν ἀκμῶν του. Ἐκεῖ ποὺ συναντῶνται δύο ἀκμαὶ λέγεται ***κορυφή***. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 8 κορυφάς, 12 διέδρους γωνίας καὶ 8 τριέδρους.

Εἰς ὅλα αὐτὰ ὁμοιάζουν ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἔχουν ὅμως μεταξύ των καὶ μίαν οὐσιώδη διαφοράν.

Ἐνῷ δηλαδὴ ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μόνον αἱ ἀπέναντι ἕδραι ἀνὰ δύο εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἑπομένως καὶ αἱ ἀπέναντι ἀκμαί.

Ἐὰν θέσωμεν ἐμπρός μας ἕνα κουτὶ κιμωλίας, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ἐπάνω καὶ ἡ κάτω ἕδρα αὐτοῦ, δηλαδὴ αἱ δύο βάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ ἔχουν ὁριζόντιον διεύθυνσιν. Ἐπίσης καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἀπέναντι ἕδραι, ἡ ἔμπροσθεν καὶ ἡ ὄπισθεν εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἡ ἐπάνω ὅμως καὶ ἡ κάτω ἕδρα δὲν εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ἀριστερὰν οὔτε μὲ τὴν δεξιὰν ἕδραν. Ἐπίσης καὶ ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔμπροσθεν καὶ ἡ ὄπισθεν εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ὄχι ὅμως μὲ τὴν ἀριστερὰν καὶ δεξιάν. Αἱ 4 αὐταὶ ἕδραι ἔχουν κατακόρυφον διεύθυνσιν καὶ ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον αὐτοῦ ἐπιφάνειαν.

Δηλαδὴ μόνον αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι. Εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι, ὥστε:

Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ στερεὸν ἑξάεδρον ἐκεῖνο σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀνὰ δύο ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς γωνίας τῶν ἑδρῶν του ὀρθάς.

Ἀσκήσεις.

1. Ὀνομάσατε τὰς ὁμοιότητας καὶ τὰς διαφορὰς μεταξὺ κύβου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

2. Κάμετε τὸ ἴδιον μεταξὺ τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου.

3. Ὀνομάσατε σώματα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

4. Δείξατε τὰ ὀρθογώνια σχήματα τὰ ὁποῖα παρατηρεῖτε εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σχολείου σας.

5. Δύναται τὸ τετράγωνον νὰ ἐκληφθῇ ὡς ὀρθογώνιον;

Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Ἐὰν στηρίξωμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ μίαν ἕδραν τῆς βάσεως αὐτοῦ καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν γύρω ἀπὸ τὴν ἕδραν ταύτην θὰ γράψωμεν τὸ κατωτέρω ἐπίπεδον σχῆμα ΑΒΓΔ (σχ. 34).

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον*** ἢ ἁπλῶς ***ὀρθογώνιον.***

Σχ. 34.

Ἐὰν παραβάλωμεν τὸ σχῆμα αὐτὸ πρὸς τὸ τετράγωνον, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὁμοιάζει πρὸς αὐτό. Διότι, ὅπως τὸ τετράγωνον, τοιουτοτρόπως καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς. Καὶ ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς, διότι αἱ πλευραί του εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ἐπειδὴ εἶναι ἀκμαὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

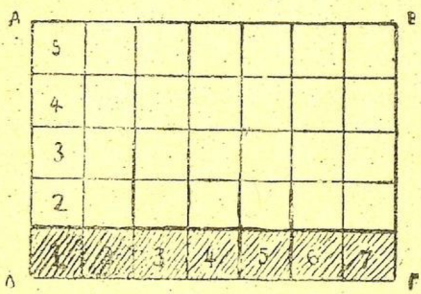
Διαφέρει ὅμως τὸ τετράγωνον ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον κατὰ τοῦτο.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐνῷ τὸ τετράγωνον ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας, τὸ ὀρθογώνιον ἔχει μόνον τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας, διότι εἶναι ἀκμαὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Εἶναι δὲ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ παράλληλοι, ἐπειδὴ πάλιν εἶναι ἀκμαὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ὥστε: ***Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον ἐκεῖνο σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.***

Ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται ***βάσις ἢ μῆκος*** καὶ ἡ μικροτέρα ***πλάτος ἢ ὕψος.***



Σχ. 35.

Τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πλευρῶν του ἀποτελεῖ τὴν ***περίμετρον*** αὐτοῦ.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ λέγονται ***διαγώνιοι*** καὶ εἶναι ἴσαι, τέμνονται δὲ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ εἰς τὸ μέσον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, προσθέτομεν τὸ μῆκος του μὲ τὸ πλάτος καὶ διπλασιάζομεν αὐτό, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας. Π. χ. Ἂν ἕνας ἀγρὸς σχήματος ὀρθογωνίου ἔχῃ μῆκος 30 μέτρα καὶ πλάτος 16 μέτρα, ἡ περίμετρός του θὰ εἶναι $(30+16)\times 2=92$ μέτρα.

Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀνωτέρω ὀρθογωνίου σχήματος ΑΒΓΔ (σχ. 35).

Θὰ κάμωμεν ὅ,τι ἐκάμαμεν καὶ διὰ τὸ τετράγωνον. Λαμβάνομεν δηλαδὴ τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ βλέπομεν πόσας φορὰς χωρεῖ κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου. Βλέπομεν ὅτι χωρεῖ 7 φοράς, ὅπως δεικνύει καὶ τὸ παρακείμενον σχῆμα. Τοιουτοτρόπως ἀποτελεῖται μία σειρὰ ἀπὸ 7 τετραγωνικὰ μέτρα κατὰ μῆκος τῆς ΓΔ. Ἂν τώρα ἐξακολουθήσωμεν νὰ προσθέτωμεν τοιαύτας σειράς, τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τοῦ ὀρθογωνίου, τὴν ΑΒ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι θὰ χωρέσουν 5 σειραί, ὅπως δεικνύει καὶ τὸ ἀνωτέρω σχῆμα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν τώρα μετρήσωμεν ὅλα τὰ τετραγωνικὰ μέτρα, τὰ ὁποῖα ἐχώρεσαν εἰς τὸ ὀρθογώνιον, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι 7+7+7+7+7=35.

Τὸν ἀριθμὸν ὅμως τοῦτον εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 7, δηλαδὴ τὴν βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου, ἐπὶ τὸ 5, δηλαδὴ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (7 × 5 = 35).

Ὥστε : ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.***

Προβλήματα.

1. Μετρήσατε τὸ μῆκος καὶ ὕψος τοῦ διαδρόμου τοῦ σχολείου σας καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

2. Τὸ δάπεδον τῆς τάξεώς σας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Μετρήσατε καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

3. Ἂν δι' ἕκαστον μαθητὴν ὑπολογίσωμεν 1,50 τετρ. μέτρα, πόσοι μαθηταὶ πρέπει νὰ ὑπάρχουν εἰς τὴν τάξιν;

4. Οἰκόπεδον ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου σχήματος, μὲ βάσιν 24,80 μέτρα καὶ ὕψος 16,30 μέτρα ἐπωλήθη πρὸς 18.500 δρχ. ὁ τεκτονικὸς πῆχυς. Πόσα χρήματα ἐπληρώθησαν;

5. Νὰ εὕρετε πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ἀσβετόχρισμα τῶν τοίχων τῆς τάξεώς σας, ἂν ἡ ἐργασία δοθῇ ἐργολαβικῶς πρὸς 6.500 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

6. Πόσα στρέμματα εἶναι ἀγρὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου σχήματος μὲ βάσιν 145 μέτρα καὶ ὕψος 112 μέτρα.

7. Ἀγρὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου σχήματος μὲ βάσιν 169 μέτρα καὶ ὕψος 123 μέτρα, ἐνοικιάσθη πρὸς 30.000 δραχμὰς τὸ στρέμμα κατ' ἔτος. Πόσα χρήματα λαμβάνει ὁ ἰδιοκτήτης του;

8. Ὀρθογωνικὴ πλατεῖα μὲ βάσιν 88 μέτρα καὶ ὕψος 49 πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικοὺς λίθους πλευρᾶς 0,32 μέτρων. Οἱ λίθοι κοστίζουν 122.000 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἡ ἐργασία ἐδόθη ἐργολαβικῶς πρὸς 12.000 δραχμὰς τὸ τετραγ. μέτρον. Λογαριάσατε.

9. Δωμάτιον ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου σχήματος, μὲ βάσιν 4,20 μέτρα καὶ ὕψος 3,80 μ., πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ σανίδας μήκους 3,60 μ. καὶ πλάτους 0,15. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθοῦν;

10. Εὕρετε τὰ ἀκόλουθα:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει :

ράσιν	0,62 μ.	ὕψος	0,33 μ.	ἐμβαδόν ;			
»	1,04 μ.	»	; μ.	»	2,10 μ.		
»	; μ.	»	0,02 μ.	»	0,22 μ.		
»	0,09 μ.	»	1,03 μ.	»	;		

8. Ἀπεικόνισις ἐπιπέδου σχήματος ὑπὸ κλίμακα.

Ὅταν πρόκειται νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ χάρτου ἓν οἰκόπεδον ἢ μίαν πόλιν ἢ μίαν χώραν κλπ., παριστάνομεν ταῦτα πολὺ μικρότερα ἀπὸ ὅ,τι εἶναι δι' ὁμοίων σχημάτων, τὰ ὁποῖα καλοῦνται σχέδια ὑπὸ σμίκρυνσιν καθ' ὡρισμένον λόγον, ὁ ὁποῖος λέγεται ***Κλῖμαξ.***

Ὁ γεωγραφικὸς χάρτης μιᾶς χώρας παριστάνει αὐτὴν πολὺ μικροτέραν ἀπὸ ὅ,τι εἶναι. Ὁ χάρτης αὐτὸς εἶναι σχέδιον ***ὑπὸ σμίκρυνσιν.***

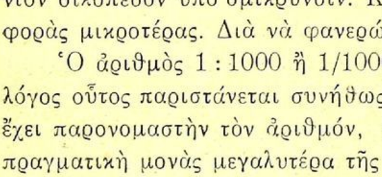
Ὁ μηχανικὸς π. χ. εἰς ἕνα φύλλον χάρτου ἀπεικονίζει ἓν ὀρθογώνιον οἰκόπεδον ὑπὸ σμίκρυνσιν. Κάμνει τὰς διαστάσεις αὐτοῦ π.χ. 1000 φορὰς μικροτέρας. Διὰ νὰ φανερώσῃ τοῦτο γράφει : Κλῖμαξ 1 : 1000.

Ὁ ἀριθμὸς 1 : 1000 ἢ 1/1000 λέγεται ***ἀριθμητικὴ κλῖμαξ.*** Ὁ λόγος οὗτος παριστάνεται συνήθως ὑπὸ κλασματικῆς μονάδος, ἡ ὁποία ἔχει παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δηλοῖ πόσας φορὰς εἶναι ἡ πραγματικὴ μονὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου ἐπὶ τοῦ σχεδίου.

Αἱ συνήθεις κλίμακες εἶναι συνήθως δεκαδικαὶ 1/10, 1/100, 1/1000 κλπ. καὶ αἱ διπλάσιαι τούτων 1/5, 1/50, 1/500 κλπ.

Ἑπομένως, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ πραγματικὸν μῆκος μιᾶς γραμμῆς, ἵνα ὑπολογίσωμεν τὸ ἀντίστοιχον τούτου ἐπὶ τοῦ σχεδίου, διαιροῦμεν τὸ πραγματικὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος. Καὶ ἀντιστρόφως. Ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐπὶ τοῦ σχεδίου, ἵνα εὕρωμεν τὸ πραγματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τῆς κλίμακος.

Ἔχομεν π. χ. ἓν ὀρθογώνιον οἰκόπεδον μὲ διαστάσεις 50 μ. μῆκος καὶ 20 μ. πλάτος καὶ νὰ γραφῇ ὑπὸ σμίκρυνσιν 1 : 1000. Ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ σχέδιον τοῦ οἰκοπέδου ἔχει διαστάσεις 0,05 καὶ 0,02.



Σχ. 36.

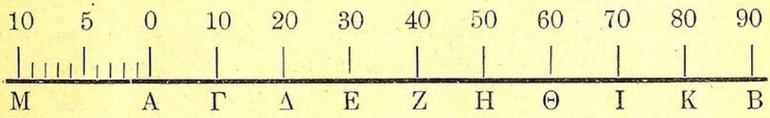
Αἱ πραγματικαὶ διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου εἶναι 0,05 × 1000 = 50μ. καὶ 0,02 × 1000 = 20 μ. Τὸ σχῆμα 36 εἶναι τὸ σχέδιον τοῦ οἰκοπέδου ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000.

Ἀντὶ τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος πρὸς ἀποφυγὴν ὑπολογισμῶν,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεταχειριζόμεθα τὴν ***γραφικὴν κλίμακα,*** δι᾿ ἧς εὑρίσκομεν τὰ πραγματικὰ μήκη, τὰ ἀντίστοιχα ἐπὶ τοῦ διαγράμματος, μὲ ἁπλοῦν ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου.

Τὸ κατωτέρω σχῆμα 36α εἶναι ἡ γραφικὴ κλῖμαξ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ καὶ δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα 1 : 1000. ᾿Αποτελεῖται ἀπὸ μίαν γραμμὴν εὐθεῖαν Α Β (σχ. 36α), τῆς ὁποίας τὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ κλπ. εἶναι ἴσα μήκους 0,01 μ. τὸ κάθε ἕν. Τὸ



Σχ. 36.

κάθε ἓν τμῆμα παριστάνει μῆκος $0{,}01 \times 1000 = 10$ μ. Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς διαιρέσεως αὐτῶν γράφονται κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ 0, 10, 20, 30, 40 κλπ.

Κατόπιν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς γραμμῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α, λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΜ ἴσον πρὸς 0,01 μ., ὅπερ διαιροῦμεν εἰς 10 ἴσα μέρη. Κάθε ἓν ἀπ᾿ αὐτὰ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ΑΓ δηλ. 1 μ. καὶ δι᾿ αὐτὸ ἀριθμοῦνται ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Μ, μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4...... 10 μ.

Μὲ τὴν κλίμακα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ σχέδιον ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους π.χ. 48 μ.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, θέτομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 40 τῆς κλίμακος καὶ τὸ ἄλλο σκέλος εἰς τὴν διαίρεσιν 8 τοῦ τμήματος ΑΜ, τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0. Αὐτὴν τὴν ἀπόστασιν τοῦ διαβήτου μεταφέρομεν εἰς τὸ σχέδιον καὶ μᾶς δίδει τὸ ζητούμενον μῆκος.

῎Αν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ σχέδιον παριστάνεται μὲ ἓν τμῆμα ΑΖ, τότε μὲ τὸν διαβήτην θέτομεν τὸ σκέλος ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῆς κλίμακος εἰς τὸ 0 καὶ τὸ ἄλλο πρὸς τὸ Ζ. ῎Αν τοῦτο πέσῃ ἀκριβῶς εἰς τὴν διαίρεσιν 40, εἶναι, τότε, τὸ ζητούμενον μῆκος 40 μ. ῎Αν δὲ πέσῃ μεταξὺ τοῦ 40 καὶ 50, τότε θέτομεν τὸ ἓν ἄκρον εἰς τὴν διαίρεσιν 40 καὶ τὸ ἄλλο πρὸς τὸ μέρος τοῦ ΑΜ.

῎Αν τοῦτο πέσῃ εἰς τὴν διαίρεσιν π.χ. 8 τοῦ ΑΜ, τότε τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι $40 + 8 = 48$ μ.

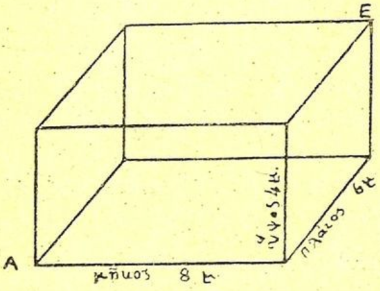
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανειῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν παραπλεύρων αὐτοῦ ἐπιφανειῶν.

Π.χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 37), τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 8 μέτρα, τὸ δὲ πλάτος 6 μ. καὶ τὸ ὕψος 4 μ.

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδόν του, εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν αὐτοῦ ἑδρῶν, τῆς κάτω, τῆς ἐμπροσθίας καὶ τῆς δεξιᾶς καὶ διπλασιάζω τὰ γινόμενα αὐτά. Διὰ νὰ ἔχω καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀντικρυνῆς ἕδρας εὑρίσκω: α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κάτω ἕδρας $8 \times 6 = 48$ τ. μ. καὶ μαζὺ μετὰ τῆς ἄνω $48 \times 2 = 96$ τ. μ.



Σχ. 37.

β) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐμπροσθίας ἕδρας $8 \times 4 = 32$ τ.μ. καὶ μαζὺ μετὰ τῆς ὀπισθίας $32 \times 2 = 64$ τ. μ.

γ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς δεξιᾶς ἕδρας $6 \times 4 = 24$ τ. μ. καὶ μαζὺ μετὰ τῆς ἀριστερᾶς $24 \times 2 = 48$ τ. μ.

Κατόπιν προσθέτω τὰ γινόμενα $(96 + 64 + 48)$ καὶ εὑρίσκω, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 208 τ. μ.

Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τοῦ σχήματος (σχ. 37), τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 8 μ., τὸ πλάτος 6 μ. καὶ τὸ ὕψος 4. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον του κάμνομεν ὅ,τι ἐκάμαμεν καὶ εἰς τὸν κύβον.

Εὑρίσκομεν δηλαδὴ πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κάτω βάσεως. Πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος 8 ἐπὶ τὸ πλάτος 6 καὶ εὑρίσκομεν $(8 \times 6) = 48$ τ.μ.

Ἂν ἐπὶ ἑκάστου τετρ. μέτρου τῆς κάτω ἕδρας τοποθετήσωμεν ἀπὸ ἓν κυβικὸν μέτρον, θὰ χωρέσουν 48 κυβ. μέτρα καὶ θὰ ἔχουν ὕψος ἑνὸς μέτρου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 4 μέτρα, θὰ χωρέσουν ἐν ὅλῳ 4 σειραὶ ἀπὸ 48 κυβ. μέτρα ἑκά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στη ἤτοι 48×4=192 κυβ. μέτρα καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Τὸν ἀριθμὸν ὅμως αὐτὸν εὑρίσκομεν εὐκόλως, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος, ἤτοι 8×6×4 =192 κυβ. μέτρα.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ἢ πολλαπλασιάζομεν τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.***

Ἀσκήσεις.

1. Τὸ δωμάτιον τῆς τάξεώς σας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι 5,80, τὸ πλάτος 4,60 μ. καὶ τὸ ὕψος 4,20 μ. Οἱ τοῖχοι καὶ ἡ ὀροφὴ πρόκειται νὰ ἀσβεσθοχρισθοῦν. Ἡ ἐργασία ἐδόθη πρὸς δρχ. 2.700 τὸ τ. μέτρον· πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ἀσβεστόχρισμα;

2. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μετρήσατε καὶ εὕρετε πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ἀσβεστόχρισμα ὅλων τῶν δωματίων τοῦ σχολείου.

3. Θέλετε νὰ ἐπενδύσετε τὸν διάδρομον τοῦ σχολείου σας καὶ τὴν ὀροφὴν αὐτοῦ μὲ χαρτί. Μετρήσατε καὶ εὕρετε πόσα μέτρα χαρτιοῦ θὰ χρειασθοῦν.

4 Μία δεξαμενὴ ἔχει μῆκος 3,20 μ., πλάτος 2,80 μ. καὶ ὕψος 1,30 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ;

5. Πόσοι στρατιῶται ἠμποροῦν νὰ κοιμηθοῦν εἰς ἕνα θάλαμον μήκους 18 μ., πλάτους 5,20 μ. καὶ ὕψους 4,60 μ., ὅταν ὑπολογίσωμεν ὅτι κάθε στρατιώτης χρειάζεται εἰς μίαν νύκτα 3,80 κ. μέτρα καθαροῦ ἀέρος;

6. Πόσους θεατὰς δύναται νὰ περιλάβῃ αἴθουσα κινηματογράφου μήκους 20 μ. πλάτους 13 καὶ ὕψους 12 μέτρων, ὅταν ἕκαστος θεατὴς πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὴν διάθεσίν του 1,60 κ. μέτρα.

7. Πόσα πακέττα σπίρτων περιέχει ἓν κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 80 ἑκατοστ., τὸ πλάτος 60 ἑκατοστὰ καὶ τὸ ὕψος 70 ἑκατοστά, αἱ δὲ διαστάσεις τοῦ πακέττου εἶναι: μῆκος 5, πλάτος 3 καὶ ὕψος 2 ἑκατοστόμετρα;

8. Εἰς τὰ σαπωνοποιεῖα γεμίζουν κιβώτια ὀρθογωνίου σχήματος μήκους 1,20 μ., πλάτους 0,72 μ. καὶ ὕψους 0,98 μέτρων μὲ πλάκας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σάπωνος. Αἱ πλάκες ἔχουν μῆκος 0,20 μ., πλάτος 0,08 καὶ ὕψος 0,06. Πόσαι πλάκες χωροῦν εἰς ἕκαστον κιβώτιον;

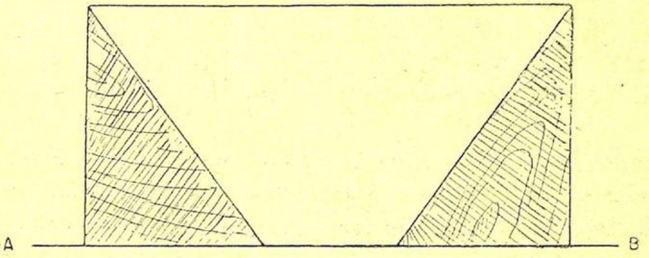
9. Ἐὰν εἰς τὸ σχολεῖον σας ἔχετε ντεπόζιτο νεροῦ, εὕρετε πόσον νερὸ χωρεῖ.

10. Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα.

Ἰχνογράφησις ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ὅπως ἰχνογραφήσαμεν τὸ τετράγωνον, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ ἰχνογραφήσωμεν καὶ τὸ ὀρθογώνιον:

Λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς ἓν διάστημα ἴσον μὲ τὴν βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν. Ἐκ



Σχ. 38.

τῶν ἄκρων Α καὶ Β τοῦ διαστήματος τούτου φέρομεν μὲ τὸν γνώμονα δύο ἴσας καθέτους ἐπὶ τῆς ΑΒ (σχ. 38).

Ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων δι᾽ εὐθείας γραμμῆς καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἕτοιμον.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, κάμνομεν ὅ,τι ἐκάμαμεν καὶ διὰ τὸν κύβον, ἀλλὰ μὲ ὀρθογώνια.

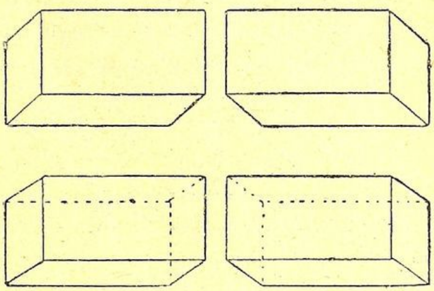
Ἰχνογραφοῦμεν δύο ἴσα ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα νὰ τέμνουν τὸ ἓν τὸ ἄλλο. Σβήνομεν τὰς ἐσωτερικὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου καὶ ἑνώνομεν μὲ εὐθείας τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τῶν δύο ὀρθογωνίων, ὅπως δεικνύουν τὰ κατωτέρω σχήματα (σχ. 39).

Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ χαρτόνι, ξύλον καὶ πηλόν.

Ὅταν λάβωμεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας αὐτοῦ, θὰ λάβῃ τὸ κατωτέρω ἐπίπεδον σχῆμα (σχ. 40).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

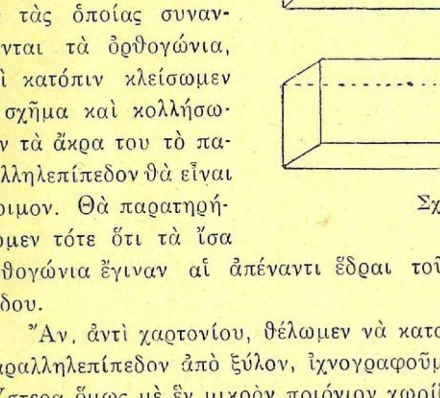
Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν λοιπὸν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ χαρτονίου, ἰχνογραφοῦμεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου τὸ κατωτέρω σχῆμα. Τὰ ὀρθογώνια τοῦ σχήματος τούτου εἶναι ἀνὰ δύο ἴσα. Τὸ Α μὲ τὸ Γ, τὸ Β μὲ τὸ Δ καὶ τὸ Ε μὲ τὸ Ζ.



Σχ. 39.

Ἐὰν χαράξωμεν τὰς γραμμὰς τοῦ σχήματος, εἰς τὰς ὁποίας συναντῶνται τὰ ὀρθογώνια, καὶ κατόπιν κλείσωμεν τὸ σχῆμα καὶ κολλήσωμεν τὰ ἄκρα του τὸ παραλληλεπίπεδον θὰ εἶναι ἕτοιμον. Θὰ παρατηρήσωμεν τότε ὅτι τὰ ἴσα ὀρθογώνια ἔγιναν αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἂν, ἀντὶ χαρτονίου, θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ ξύλον, ἰχνογραφοῦμεν πάλιν τὸ ἴδιον σχῆμα. Ὕστερα ὅμως μὲ ἓν μικρὸν πριόνιον χωρίζομεν τὰ ὀρθογώνια καὶ κατόπιν κολλῶμεν τὰ ἄκρα των μὲ ψαρόκολλαν.



Σχ. 40.

Μὲ πηλὸν κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον κατασκευάζομεν καὶ τὸν κύβον, ὅπως εἴδομεν. Ἀντὶ ὅμως τετραγώνου, κολλῶμεν εἰς τὰ πλάγια τοῦ πηλοῦ ὀρθογώνια.

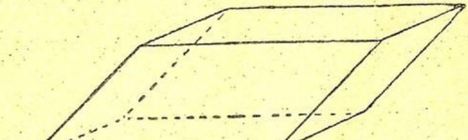
9. Πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Τὸ κατωτέρω σχῆμα (σχ. 41) δεικνύει ἓν τρίτον στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ἕδραι του εἶναι πλάγιαι, λέγεται ***πλάγιον παραλληλεπίπεδον***.

Τὸ σχῆμα τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν συνήθως τὰ τεμάχια τῶν γλυκῶν τοῦ ταψιοῦ. Ἐπίσης καὶ μερικαὶ πλάκες τῶν διαδρόμων καὶ εἰσόδων τῶν οἰκιῶν ἔχουν τὸ σχῆμα τοῦτο.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂν συγκρίνωμεν τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ τὸ ὀρθογώνιον, βλέπομεν ὅτι ὁμοιάζουν. Ἔχει δηλ. καὶ αὐτὸ 6 ἐπιπέδους ἕδρας, 12 ἀκμὰς καὶ 8 κορυφάς. Διαφέρουν, ὅμως, κατὰ τὸ ἑξῆς: Αἱ ἕδραι τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῶν βάσεων, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἀλλ' εἶναι πλάγιαι. Ἐπίσης καὶ αἱ ἀκμαὶ τῶν πλαγίων ἑδρῶν δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῶν βάσεων.



Σχ. 41.

Αἱ ἀντικρυναὶ ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ αἱ γωνίαι ἑκάστης ἕδρας δὲν εἶναι ὀρθαί. Δύο, αἱ ἀντικρυναί, εἶναι ***ὀξεῖαι*** καὶ 2 εἶναι ***ἀμβλεῖαι.***

Ὥστε: ***Πλάγιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀντικρυνὰς ἕδρας ἀνὰ δύο ἴσας καὶ παραλλήλους, ἀλλὰ πλαγίας καὶ τὰς ἀντικρυνὰς γωνίας ἴσας.***

Ἀσκήσεις.

1. Ὀνομάσατε ἀντικείμενα, ποὺ ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

2. Εἰπέτε τὰς ὁμοιότητας καὶ διαφοράς.

3. Μετρήσατε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς ἀπέναντι γωνίας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

4. Σχηματίσατε πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ χαρτόνι ἢ μὲ πηλὸν μὲ διαστάσεις, ποὺ θέλετε.

Πλάγιον παραλληλόγραμμον.

Τὸ κατωτέρω σχῆμα λέγεται πλάγιον ***παραλληλόγραμμον*** ἢ ἁπλῶς ***παραλληλόγραμμον*** (σχ. 42). Γράφεται δὲ τὸ σχῆμα τοῦτο, ἐὰν στηρίξωμεν τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του ἐπὶ τοῦ πίνακος καὶ σύρωμεν γύρω ἀπὸ αὐτὴν τὴν κιμωλίαν.

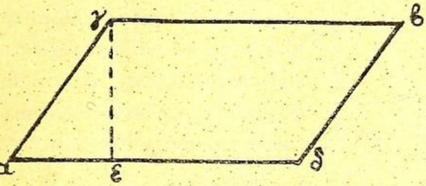
Τὸ τετράπλευρον τοῦτο σχῆμα ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι ὁριζόντιοι καὶ αἱ δύο πλάγιαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

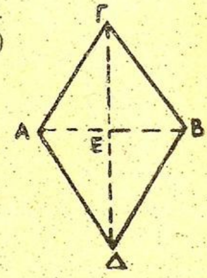
Ἂν μετρήσωμεν τὰς γωνίας τοῦ σχήματος τούτου, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι ἀλλ' ὄχι ὀρθαί. Αἱ ἀντικρυναὶ δύο γωνίαι (α καὶ β) εἶναι ὀξεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι δύο (γ καὶ δ) εἶναι ἀμβλεῖαι. Ὥστε:

Πλάγιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον ἐκεῖνο σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας του ἴσας.

Αἱ δύο μεγαλύτεραι πλευραὶ (αδ καὶ γβ)



Σχ. 42.



Σχ. 43.

λέγονται ***βάσεις*** καὶ ἡ κάθετος ἡ μεταξύ των ἡ (γε) λέγεται ***ὕψος.***

Ῥόμβος ὅταν αἱ 4 πλευραὶ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τότε τὸ σχῆμα λέγεται ***ῥόμβος*** (σχ. 43).

Σχῆμα ῥόμβου ἔχουν τὰ ἐπιγονάτια τῶν κληρικῶν.

Ἀσκήσεις.

1. *Συγκρίνατε τὸ πλάγιον μὲ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ εἰπέτε τὰς ὁμοιότητας καὶ διαφοράς.*
2. *Μετρήσατε τὰς ἀπέναντι γωνίας τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον.*
3. *Ὀνομάσατε πράγματα, ποὺ ἔχουν σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου.*
4. *Κατὰ τί ὁμοιάζει ὁ ῥόμβος μὲ τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον καὶ κατὰ τί διαφέρει;*

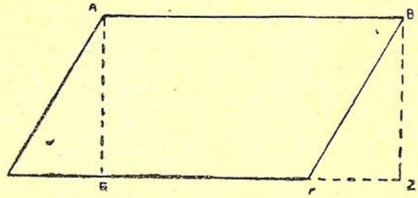
Ἐμβαδὸν πλαγίου παραλληλογράμμου.—Ἔχομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τοῦ κατωτέρω σχήματος (σχ. 44) καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΓ καὶ τῆς προεκβολῆς αὐτῆς, τὰς ΑΕ καὶ ΒΖ.

Θὰ παρατηρήσωμεν τότε ὅτι ἐσχηματίσθησαν δύο τρίγωνα, τὸ ΑΔΕ καὶ τὸ ΒΓΖ. Ἂν ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ παραλλη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λογράμμου τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ τὸ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιά του, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο ἐφαρμόζει ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΒΓΖ. Τοιουτοτρόπως, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετετράπη εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΕ. Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον, διότι καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ ΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου ΔΓ (ἐπειδὴ ΔΕ=ΓΖ) καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἡ ΑΕ, εἶναι καὶ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν καὶ τῶν δύο αὐτῶν σχημάτων εἶναι ἴσον.



Σχ. 44.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τοῦ ὀρθογωνίου, δηλαδὴ ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ καὶ τῶν 6 ἐπιφανειῶν. Δὲν εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὰ ἐμβαδὰ καὶ τῶν ἕξ ἑδρῶν. Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν, δηλ. τῆς μιᾶς βάσεως, τῆς μιᾶς ἐμπροσθίας ἕδρας καὶ τῆς μιᾶς πλαγίας καὶ κάθε φορὰ διαπλασιάζω αὐτό, διὰ νὰ ἔχω καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀντικρυνῆς ἕδρας. Κατόπιν προσθέτω καὶ τὰ τρία αὐτὰ γινόμενα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ἀσκήσεις.

Εὕρετε τὰ κατωτέρω: Πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει:

1. Βάσιν 1,04 μ. πλάτος 0,65 μ. καὶ ὕψος 0,88 μ. Ἐμβαδόν;

2. Βάσιν 5 μ. πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 1,22 μ. Ἐμβαδόν;

Ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Λαμβάνομεν δύο δοχεῖα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, τὸ ἓν ὅμως σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τὸ ἄλλο σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Γεμίζομεν τὰ δύο δοχεῖα μὲ ἄμμον. Κατόπιν ἀνταλλάσσομεν τὸ περιεχόμενον τῶν δοχείων καὶ βλέπομεν ὅτι τὰ δοχεῖα εἶναι γεμᾶτα. Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον ὀρθογω-

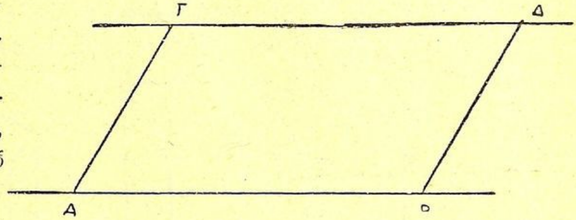
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου **πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ἢ πολλαπλασιάζομεν τὰς τρεῖς διαστάσεις μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος τοῦ ἰσοδυνάμου του ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.** Ἤτοι ὄγκος $=$ Μ $\times$ Π $\times$ Υ.

Προβλήματα.

Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 3,20 μ. καὶ ὕψος 1,10 μ.



Σχ. 45.

1. Πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει διαστάσεις 7, 9, 5 μ., ποῖος ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

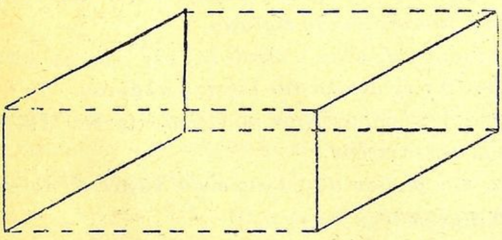
2. Ποῖος ὁ ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχοντος διαστάσεις 6, 4, καὶ 5 μ.

3. Κιβώτιον σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 1,70 μ. 8,75 μ. καὶ 1,11 μ. πρόκειται νὰ γεμίσῃ μὲ μικρὰ παραλληλεπίπεδα διαστάσεων 0,18 μ. 0,12 καὶ 0,14 μ. Πόσα θὰ χωρέσῃ;

4. Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα

Ἰχνογράφησις πλαγίου παραλληλογράμμου καὶ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν παραλληλόγραμμον, λαμβάνομεν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἓν διάστημα ἴσον μὲ τὴν βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἰχνογραφήσωμεν π. χ. ΑΒ.



Σχ. 46.

Ἀπέναντι τῆς εὐθείας ταύτης γράφομεν μίαν παράλληλον πρὸς αὐτὴν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν δύο σημεῖα, τὰ Γ καὶ Δ, τὰ ὁποῖα δὲν πρέπει νὰ εἶναι ἀπέναντι τῶν Α καὶ Β. Ἑνώνομεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ Γ καὶ τὸ Β μὲ τὸ Δ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἔγινε (σχ. 45).

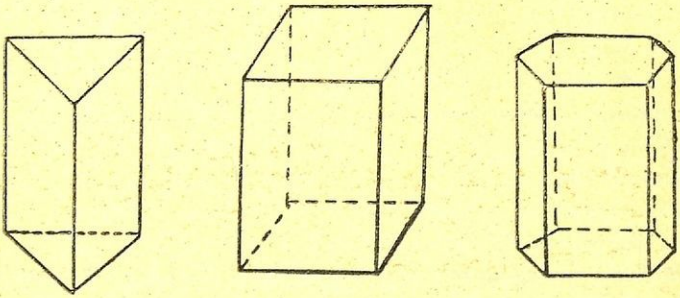
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, ἰχνογραφοῦμεν δύο παραλληλόγραμμα, τὸ ἓν ἀπέναντι τοῦ ἄλλου. Ἑνώνομεν κατόπιν τὰς κορυφὰς τῶν δύο παραλληλογράμμων καὶ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ἕτοιμον (σχ. 46).

10. Πρίσματα.

Τὰ στερεὰ σώματα, ποὺ παριστάνουν τὰ κατωτέρω σχήματα (σχ. 47) περικλείονται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη ἀπὸ ***ἐπίπεδα*** καὶ λέγονται ***πολύεδρα***.

Τὰ πολύεδρα αὐτὰ σώματα βλέπομεν, ὅτι ἔχουν δύο ἕδρας ἴσας



Σχ. 47.

καὶ παραλλήλους καὶ αἱ ἄλλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα. Τὰ πολύεδρα αὐτὰ στερεὰ σώματα λέγονται ***πρίσματα***.

Αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι τοῦ πρίσματος λέγονται ***βάσεις*** αὐτοῦ. Ἡ κάθετος μεταξὺ τῶν βάσεων λέγεται ***ὕψος*** αὐτοῦ.

Τὸ πρῖσμα τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις τριγωνικάς, λέγεται ***Τριγωνικὸν πρῖσμα.*** Ἂν ἔχῃ τετραπλεύρου, λέγεται ***τετραγωνικὸν πρῖσμα,*** ἂν ἔχῃ πολυγώνου, λέγεται ***πολυγωνικὸν πρῖσμα.***

Ὅταν αἱ ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως, τότε τὸ πρῖσμα λέγεται ***ὀρθόν***. Ἂν εἶναι πλάγιαι λέγεται ***πλάγιον.***

Ὀρθὰ εἶναι ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Πλάγια εἶναι τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Κάθε ὀρθὸν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, λέγεται ***κανονικὸν πρῖσμα.***

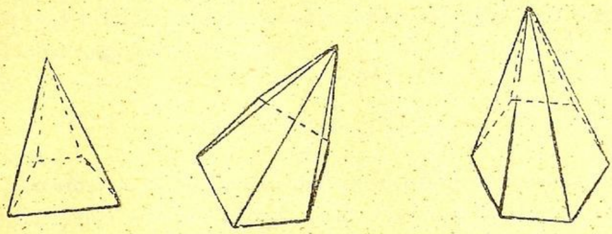
11. Πυραμίδες.

Τὰ κατωτέρω σχήματα παριστάνουν στερεὰ σώματα, ποὺ ἔχουν μίαν μόνον βάσιν τριγωνικὴν ἢ τετραγωνικὴν ἢ πολυγωνικὴν καὶ τὰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

παραπλεύρους ἕδρας τρίγωνα, αἱ ὁποῖαι τελειώνουν εἰς ἓν σημεῖον ἀπέναντι ἀπὸ τὴν βάσιν, ποὺ λέγεται ***κορυφὴ τῆς πυραμίδος***.

Τὰ σώματα αὐτὰ λέγονται ***πυραμίδες***. (σχ. 48).

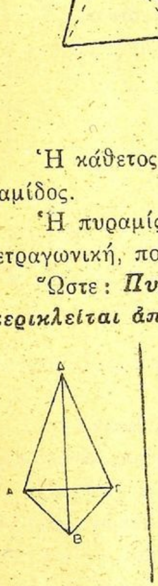


Σχ. 48.

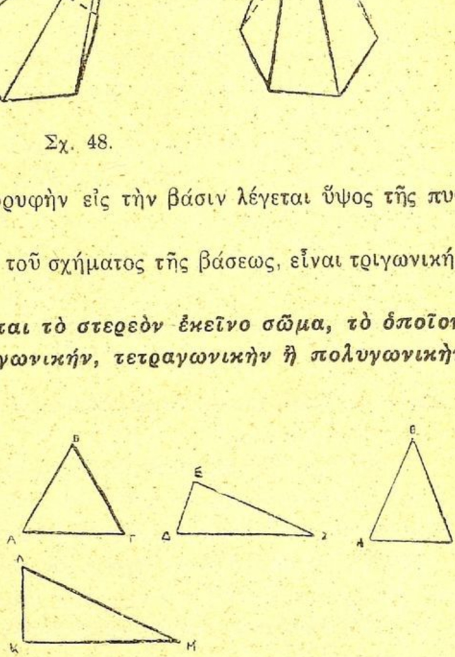
Ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν λέγεται ὕψος τῆς πυραμίδος.

Ἡ πυραμίς, ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῆς βάσεως, εἶναι τριγωνική, τετραγωνική, πολυγωνική.

Ὥστε: ***Πυραμὶς λέγεται τὸ στερεὸν ἐκεῖνο σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν τριγωνικήν, τετραγωνικὴν ἢ πολυγωνικὴν***



Σχ. 49.



Σχ. 50.

ἕδραν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ βάσις καὶ ἀπὸ τριγωνικὰς ἕδρας, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον αὐτοῦ ἐπιφάνειαν, καὶ τελειώνουν εἰς τὴν κορυφήν.

Τριγωνικὴ πυραμίς.

Τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ΑΒΓΔ (σχ. 49) παριστάνει τριγωνικὴν πυραμίδα.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 ἕδρας τριγωνικάς. Ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

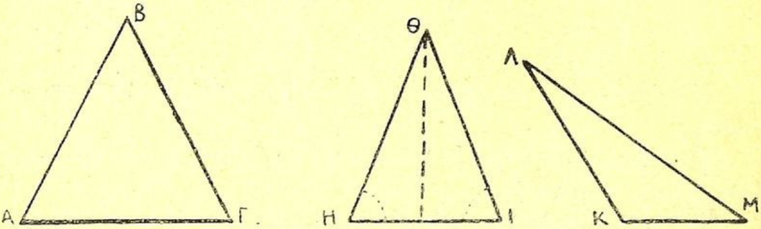
μία εἶναι ἡ βάσις καὶ αἱ ἄλλαι 3 ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον αὐτῆς ἐπιφάνειαν. Ἔχει 6 ἀκμάς, 12 ἐπιπέδους γωνίας, 4 τριέδρους γωνίας καὶ 4 κορυφὰς 3 εἰς τὴν βάσιν καὶ μίαν ἀπέναντί της.

Βάσις τῆς ἀνωτέρω τριγωνικῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ (σχ. 49) εἶναι τὸ σχῆμα ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει 3 γωνίας. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***τρίγωνον.***

Εἴδη τριγώνων.

Τὰ ἀνωτέρω σχήματα δεικνύουν διάφορα εἴδη ***τριγώνων*** (σχ.50).

Τὸ τρίγωνον λαμβάνομεν, ὅταν στηρίξωμεν τὴν πυραμίδα ἐπὶ τοῦ



Σχ. 51.

πίνακος, μὲ ὁποιανδήποτε ἕδραν αὐτῆς καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν γύρω ἀπὸ τὴν ἕδραν αὐτήν.

Ἀναλόγως τῶν πλευρῶν αὐτῶν τὰ τρίγωνα διαιροῦνται:

α) ***Εἰς ἰσόπλευρα,*** ὅταν καὶ αἱ τρεῖς αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ σχήματος εἶναι ἰσόπλευρον (σχ. 51).

β) ***Εἰς ἰσοσκελῆ***, ὅταν ἔχουν τὰς δύο πλαγίας αὐτῶν πλευρὰς ἴσας. Τὸ τρίγωνον ΗΘΙ τοῦ σχήματος εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ

γ) ***Εἰς σκαληνά,*** ὅταν αἱ τρεῖς αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, ὅπως τὸ τρίγωνον ΚΛΜ.

Ἀναλόγως τῶν γωνιῶν αὐτῶν τὰ τρίγωνα εἶναι:

α) ***Ὀρθογώνια,*** ὅταν ἡ μία τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ὀρθή. Ὅπως εἰς τὸ ΠΡΣ τοῦ σχήματος. Ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ ΠΣ, ἡ ὁποία εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν λέγεται ***ὑποτείνουσα*** (σχ. 52).

β) ***Ὀξυγώνια,*** ὅταν καὶ αἱ τρεῖς αὐτῶν γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι, ὅπως τὰ τρίγωνα ΗΘΙ καὶ ΑΒΓ τοῦ σχήματος (σχ. 51).

γ) ***Ἀμβλυγώνια***, ὅταν ἡ μία γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ὅπως τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τοῦ σχήματος (σχ. 52).

Βάσις ἑνὸς τριγώνου καλεῖται μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ π.χ. βάσις τοῦ τριγώνου ΗΘΙ (σχ. 51) εἶναι ἡ πλευρὰ ΗΙ. Ἡ κάθετος

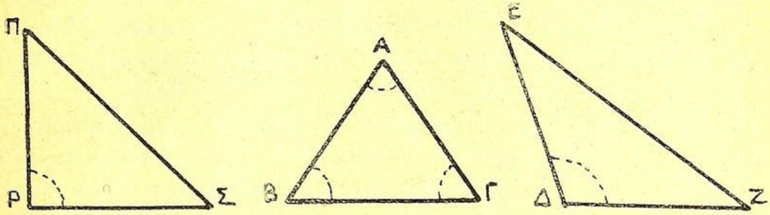
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀπὸ τὴν κορυφὴν Θ εἰς τὴν βάσιν, ΗΙ, λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου.

Γενικῶς, ὕψος τοῦ τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος, ποὺ φέρεται ἀπὸ μίαν κορυφὴν εἰς τὴν ἀπέναντι πλευράν.

Κορυφὴ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως.

Εἰς τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα συνήθως λαμβάνεται ὡς βάσις ἡ πλευρά,



Σχ. 52.

ποὺ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὰς ἄλλας, ὅπως εἰς τὸ ἰσοσκελὲς βάσις εἶναι ἡ ΗΙ, ποὺ εἶναι ἄνισος μὲ τὰς ἄλλας δύο.

Ἀσκήσεις.

1. Γράψατε δύο τρίγωνα ἐξ ἑκάστου εἴδους ἀναλόγως τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

2. Γράψατε ἓν τρίγωνον ἐξ ἑκάστου εἴδους ἀναλόγως τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

3. Γράψατε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ μετρήσατε τὰς γωνίας του.

4. Γράψατε ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία εἶναι 150°.

5. Προσθέσατε καὶ τὰς 3 γωνίας οἱουδήποτε τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

6. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγωνικοῦ ἀγροῦ εἶναι 365,50 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

7. Ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 3 π. καὶ ἡ κάθε μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς του εἶναι 4 π. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

Σχέσις τριγώνου καὶ παραλληλογράμμου.

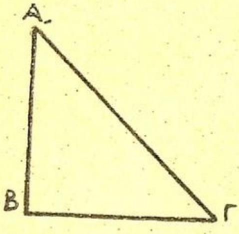
Οἱ μαθηταὶ ἔχουν μεθ᾽ ἑαυτῶν φύλλα χάρτου.

Κόπτομεν ἀπὸ ἓν φύλλον χάρτου ἓν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 53). Μὲ βάσιν αὐτὸ κόπτομεν ἄλλο ἓν τρίγωνον ἴσον ἀκριβῶς μὲ τὸ προηγού-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μενον καὶ τοποθετοῦμεν κατόπιν τὸ ἓν πλησίον τοῦ ἄλλου καὶ σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 54).

Τὸ ἴδιον παρατηροῦμεν, ἂν διπλώσωμεν διαγωνίως ἓν τετράγωνον, ἓν ὀρθογώνιον, ἓν παραλληλόγραμμον, ἀποκόπτομεν τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα καὶ τὰ ἐπιδεικνύομεν εἰς τοὺς μαθητὰς πρῶτον χωρισμένα καὶ ἔπειτα συναρμολογημένα εἰς τετράπλευρα.



Σχ. 53.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ***κάθε τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ παραλληλογράμμου,*** ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

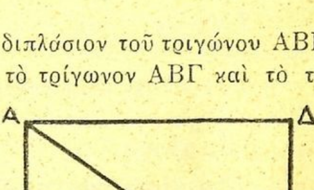
Ἐὰν ἔπειτα ἕκαστον τρίγωνον ἐπιθέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἴσου τριγώνου, διαπιστώνομεν τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τριγώνου καὶ τετραπλεύρου, ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐμβαδὸν τριγώνου. Ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ κατωτέρω σχήματος καὶ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ (σχ. 54).

Ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ ἴσας πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ΑΒ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμον ΑΒΓΔ.

Τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἂν κόψωμεν τεμάχιον χάρτου, ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπ' αὐτοῦ ἀκριβῶς.



Σχ. 54.

Ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς ταύτης διαπιστοῦται ἡ σχέσις, ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ παραλληλογράμμου, ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμου ΑΒΓΔ. Ἡμεῖς γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εὑρίσκομεν, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, ἕπεται ὅτι, ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, πολ-***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ. (τύπος ἐμβ. τριγώνου $= \frac{\beta \times \upsilon}{2}$).

Π. χ. Ἂν ἡ βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι 8 παλάμαι καὶ τὸ ὕψος 5 παλάμαι τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι: $\frac{8 \times 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$ τ. παλάμαι.

Προβλήματα.

1. Τρίγωνον ἔχει βάσιν 0,85 μ. καὶ ὕψος 0,68 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

2. Τρίγωνον ἔχει βάσιν 2,22 μ. καὶ ἐμβαδὸν 3,12 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;

3. Οἰκόπεδον τριγωνικὸν μὲ βάσιν 16,25 μ. καὶ ὕψος 12 μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 9.000 δρχ. τὸ τ. μ. Πόσον ἐκόστισε;

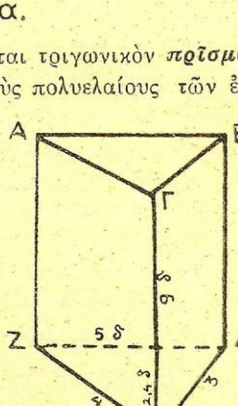
4. Ἄλλο οἰκόπεδον τριγωνικὸν μὲ βάσιν 65,40 μ. καὶ ὕψος 27 μ. ἐμοιράσθη μεταξὺ τριῶν κληρονόμων. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;

Τριγωνικὸν πρῖσμα.

Τὸ κατωτέρω στερεὸν σῶμα (σχ. 55) λέγεται τριγωνικὸν ***πρῖσμα.***

Τριγωνικὰ πρίσματα παρατηροῦμεν εἰς τοὺς πολυελαίους τῶν ἐκκλησιῶν, ὅπου κρέμονται ἄφθονα τριγωνικὰ πρίσματα.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν ἓν τριγωνικὸν πρῖσμα, βλέπομεν ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 ἕδρας, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 2 εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ εἶναι τρίγωνα καὶ ὀνομάζονται ***βάσεις*** τοῦ πρίσματος. Καὶ αἱ ἄλλοι 3, αἱ παράπλευροι ἕδραι του, εἶναι παραλληλόγραμμα. Τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει 5 ἕδρας, 9 ἀκμὰς καὶ 6 κορυφάς. Ὕψος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν ἕως τὴν ἄλλην.



Σχ. 55.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 55) ἔχει πλευρὰς τῆς βάσεως ΕΔΖ=ΔΖ=5δ ΖΕ=4δ καὶ ΔΕ=3δ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΕΔΖ=2,4δ καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ΕΓ =3δ. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο ἴσων τριγωνικῶν βάσεών του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν παραπλεύρων ἑδρῶν του.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του.

α) ἐμβαδὸν κάτω βάσεως ΕΔΖ: $\frac{5 \times 2,4}{2} = \frac{12}{2} = 6$ τ. δ.

β) Ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων ΖΔΕ καὶ ΑΒΓ $= 6 \times 2 = 12$ τ. δ.

Σημ. Τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἄλλως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο πλευρὰς ΔΖ καὶ ΖΕ καὶ τὰς διαιρέσωμεν διὰ 2, διότι τὸ ληφθὲν τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, ἤτοι $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ τ. δ. Συνεπῶς αἱ δύο βάσεις ΖΔΕ καὶ ΑΒΓ θὰ ἔχουν ἐμβαδὸν $6 \times 2 = 12$ τ. δ.

γ) Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως αὐτοῦ ΕΔΖ ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ἤτοι: $(3 + 4 + 5) \times 9 = 108$ τ. δ.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἐμβ. δύο βάσεων 12 τ. δ. + 108 τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας = 120 τ. δ.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ 3 ὀρθογώνια, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται μὲ τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος, ἔχομεν:

$$\begin{aligned} 3 \times 9 &= 27 \text{ τ. δ.} \\ 4 \times 9 &= 36 \text{ τ. δ.} \\ 5 \times 9 &= 45 \text{ τ. δ.} \\ \hline \text{ἐν ὅλῳ} \quad & 108 \text{ τ. δ.} \end{aligned}$$

ἐμβαδὸν δύο βάσεων 12 τ. δ. + 108 τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας = 120 τ. δ.

Εὕρεσις ὄγκου τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ἔχομεν τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα (σχ. 55) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον του.

Εὑρίσκομεν: α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς βάσεως ΕΔΖ ἤτοι: $\frac{5 \times 2,4}{2} = 6$ τ. δ.

β) Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως 6 τ. δ. ἐπὶ τὸ ὕψος 9 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τριγων. πρίσματος εἶναι: $6 \times 9 = 54$ κ. δ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

῞Ωστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τριγωνικοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.***

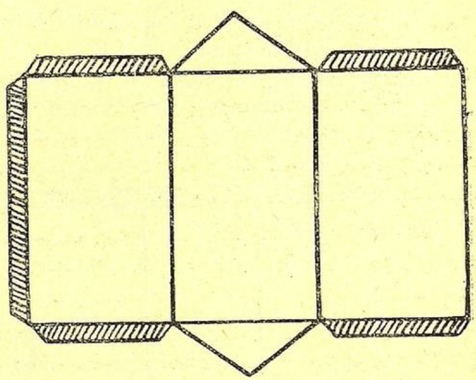
Σημ. ῞Οπως εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τριγωνικοῦ πρίσματος, οὕτω εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον καὶ τῶν λοιπῶν πρισμάτων, δηλ. τετραγωνικοῦ, πενταγωνικοῦ κλπ.

Προβλήματα.

1. Τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει τὴν μίαν πλευρὰν βάσεως 3 παλ. καὶ τὸ ὕψος 4 παλ. Τὸ ὕψος δὲ τοῦ πρίσματος εἶναι 12 παλ. Πόσαι κυβ. παλάμαι εἶναι ὁ ὄγκος του;

2. Ἓν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει τὴν μίαν πλευρὰν βάσεως 6,8 παλ. καὶ ὕψος 2 παλ. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 15 παλ. Πόσαι κυβ. παλάμαι εἶναι ὁ ὄγκος του;

3. Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν τρίγωνον ἰσόπλευρον πλευρᾶς 3,5 μ. καὶ ὕψος 1,9 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.



Σχ. 56.

4. Τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει μῆκος πλευρῶν βάσεως 26 δ., 30 δ. καὶ 34 δ. Τὸ ὕψος τῆς βάσεως εἶναι 28 δ. καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος 58 δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνειά του καὶ ὁ ὄγκος του.

5. Τετραγωνικὸν πρῖσμα ἔχει πλευρὰν βάσεως 4 παλ. καὶ ὕψος 5 παλ. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του καὶ ὁ ὄγκος του;

Ἰχνογράφησις καὶ κατασκευὴ πρισμάτων.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν ἓν πρῖσμα, ἐργαζόμεθα ὅπως εἰργάσθημεν καὶ διὰ τὴν ἰχνογράφησιν τῶν ἄλλων πρισμάτων τοῦ κύβου καὶ τῶν παραλληλεπιπέδων.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἀπὸ χαρτόνι, σχεδιάζομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας του ἐπάνω εἰς τὸ χαρτόνι, ὅπως βλέπομεν εἰς τὰ σχήματα 56 καὶ 57 καὶ κατόπιν χαράσσομεν ἐλαφρὰ μὲ ξυραφάκι τὰς γραμμάς του καὶ διπλώνομεν τὰς ἕδρας του.

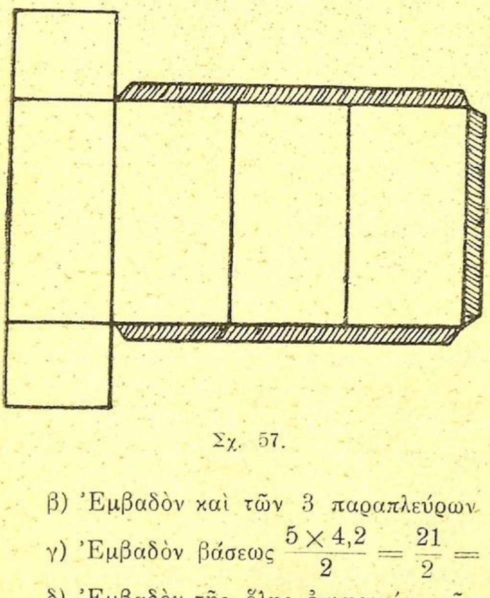
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κολλοῦμεν μὲ κόλλαν τὰς κόψεις του εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τοῦ πρίσματος καὶ τὸ πρῖσμα εἶναι ἕτοιμον.

Διὰ νὰ προσαρμοσθῇ καταλλήλως τὸ κατασκευασθὲν ἀνάπτυγμα, πρέπει νὰ ἔχῃ ἐπὶ τῶν σημείων ποὺ θὰ προσκολληθοῦν ἀρκετὸν περιθώριον, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ ἀνωτέρω ἀναπτύγματα (σχ. 56 καὶ 57), ἐπὶ τῶν ὁποίων θὰ ἐπιτεθῇ ἡ κόλλα πρὸς ἐπικόλλησιν. Τὰ περιθώρια πρὸς διάκρισιν εἶναι σκιασμένα.

Ἐπιφάνεια κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Κανονικὴ λέγεται ἡ πυραμίς, ὅταν τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον αὐτῆς ἐπιφάνειαν εἶναι ὅλα ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ, διότι ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἡ δὲ βάσις της εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.



Σχ. 57.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει πλευρὰν βάσεως 5 παλ. καὶ ὕψος βάσεως 4,2 παλ. καὶ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας 4 παλ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν της εὑρίσκομεν:

α) Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ τ. π.

β) Ἐμβαδὸν καὶ τῶν 3 παραπλεύρων ἑδρῶν $10 \times 3 = 30$ τ. π.

γ) Ἐμβαδὸν βάσεως $\frac{5 \times 4,2}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$ τ. π. καὶ

δ) Ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος: $30 + 10,5 = 40,5$ τ. π.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τριγωνικῆς πυραμίδος, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καὶ πολλαπλασιάζομεν τοῦτο ἐπὶ 3 διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν τριῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της. Κατόπιν εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὰ προσθέτομεν.***

Σημ. 1) Ἐὰν ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς δὲν εἶναι κανονική, εὑρίσκω

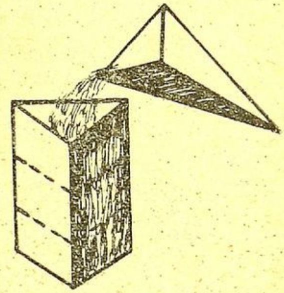
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν τριῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ τὰ προσθέτω.

2) Ἐὰν ἡ πυραμὶς εἶναι τετραγωνική, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας της, ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον.

Ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδος.

Λαμβάνομεν δύο δοχεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἀλλὰ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν νὰ ἔχῃ σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδος, τὸ δὲ ἄλλο σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος (σχ. 58). Ἐὰν γεμίσωμεν τὸ πρισματικὸν δοχεῖον μὲ ἄμμον καὶ τὸ ἀδειάσωμεν εἰς τὸ δοχεῖον τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὸ πρισματικὸν δοχεῖον περιλαμβάνει 3 φορὰς τόσην ἄμμον, ὅσην δύναται νὰ περιλάβῃ τὸ πυραμιδοειδὲς δοχεῖον. Ὁ ὄγκος δηλαδὴ τῆς πυραμίδος, ἰσοῦται μὲ τὸ ἓν τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.



Σχ. 58.

Ἂν μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχῃ ἐμβαδὸν βάσεως 18 τ.δ. καὶ ὕψος 8 δ., ὁ ὄγκος της ἰσοῦται μὲ $\frac{18 \times 18}{3} = \frac{144}{3} = 48$ κ. δ.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τριγωνικῆς πυραμίδος, ὡς καὶ πάσης ἄλλης, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.***

Ἀσκήσεις.

1. Εὕρετε τὸν ὄγκον πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 3,40 τ. μ. καὶ ὕψος 1,20 μ.

2. Πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 3,70 τ. μ. καὶ ὄγκον 4,20 κυβ. μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος της;

3. Εἰς τὴν Αἴγυπτον μία τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει πλευρὰν βάσεως 233 μ. καὶ ὕψος 146 μ. Εὕρετε τὸν ὄγκον της.

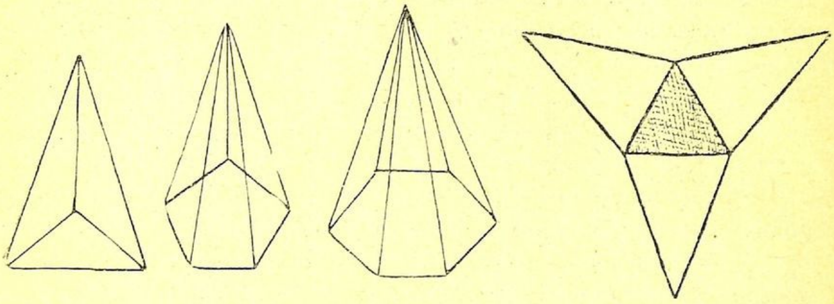
4. Μία πυραμὶς ἔχει βάσιν ὀρθογωνίου μὲ πλευρὰς 4,3 καὶ 2,8 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 6,3 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τετραγωνικὴ πυραμίς.

Ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 ἕδρας ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 4 εἶναι τρίγωνα, καὶ ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτῆς, ἡ δὲ ὑπολειπομένη εἶναι τετράπλευρον καὶ τὴν λαμβάνομεν ὡς βάσιν τῆς πυραμίδος.

Τὸ εἶδος τοῦτο τῶν πυραμίδων ἀπαντᾶται εἰς τὴν Αἴγυπτον. Αἱ πυραμίδες εἶναι μνημεῖα τῆς Ἀρχαίας Αἰγύπτου καὶ ἐχρησίμευον ὡς



Σχ. 59.

τάφος τῶν βασιλέων. Μεγαλυτέρα εἶναι ἡ πυραμὶς τοῦ βασιλέως Χέοπος, ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰν βάσεως 227 μ. καὶ ὕψος 138 μ.

Ἐμβαδὸν τετραγωνικῆς πυραμίδος.—Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς τετραγωνικῆς βάσεως καὶ κατόπιν τὰ ἐμβαδὰ τῶν 4 παραπλεύρων τριγωνικῶν της ἑδρῶν καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν 5 ἑδρῶν.

Ὄγκος τετραγωνικῆς πυραμίδος.—Καὶ ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ 1/3 τετραγωνικοῦ πρίσματος, ἔχοντες τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἑπομένως καὶ ὁ ὄγκος τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἀντικείμενα πυραμοειδῆ.— Πυραμίδες εἶναι τὰ καρφιά, πολλὲς σφῆνες, τὰ καμπαναριὰ πολλῶν ἐκκλησιῶν, αἱ πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου. Ἐπίσης πυραμίδας βλέπομεν εἰς πολλὰ μνημεῖα καὶ ἀναμνηστικὰς στήλας.

Ἰχνογράφησις καὶ κατασκευὴ πυραμίδος.

Γράφομεν πρῶτον τὸ σχῆμα τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος. Κατόπιν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς βάσεως, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς κορυ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φὴν τῆς πυραμίδος, φέρομεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως, ὅπως δεικνύουν καὶ τὰ ἀνωτέρω σχήματα : (σχ. 59).

Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν τριγωνικὴν πυραμίδα ἐκ χαρτονίου, γράφομεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου τὸ ἀνωτέρω σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἡ τριγωνικὴ πυραμίς, ὅταν ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας της. Χαράσσομεν κατόπιν τὰς πλευρὰς τοῦ κεντρικοῦ τριγώνου καὶ κλείομεν τὰς τριγωνικὰς ἕδρας, οὕτως ὥστε νὰ ἑνωθοῦν αἱ κορυφαί των. Ἡ πυραμὶς εἶναι ἑτοίμη.

Ἂν, ἀντὶ χαρτονίου, λάβωμεν ξύλον, ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἴδιον σχῆμα, αἱ ἕδραι ὅμως πρέπει νὰ κοποῦν καὶ νὰ κολληθοῦν κατόπιν ἢ νὰ καρφωθοῦν.

Ἀσκήσεις.

1. *Εὕρετε τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 3,40 τ. μ. καὶ ὕψος 1,20 μ.*

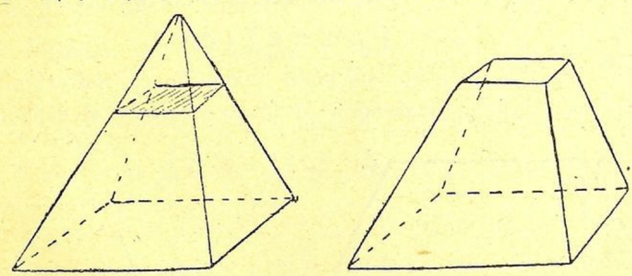
2. *Πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 3,80 τ. μ. καὶ ὄγκον 4,20 κ.μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος αὐτῆς;*

3. *Εἰς τὴν Αἴγυπτον εἶναι μία τετραγωνικὴ πυραμὶς μὲ πλευρὰν βάσεως 233 μ. καὶ ὕψος 146 μ. Εὕρετε τὸν ὄγκον της.*

Κόλουρος Πυραμίς.

Ὁ διδάσκων ἔχει ἑτοίμην πυραμίδα ἀπὸ πηλὸν καί, ἐνώπιον τῶν μαθητῶν, κόπτει τὸ ἐπάνω μέρος τῆς πυραμίδος μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν (σχ. 60).

Ἡ τομὴ α, β, γ, εἶναι σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς καὶ



Σχ. 60.

παράλληλον. Τὸ στερεὸν ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων α. β. γ. καὶ Α.Β.Γ. λέγεται ***κόλουρος πυραμίς.***

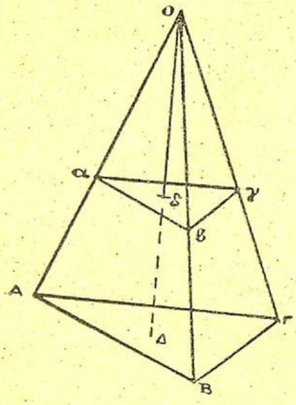
Αἱ δύο βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι πάντοτε τοῦ ἰδίου σχήματος. Εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι ὄχι ὅμως καὶ ἴσαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ κόλουρος πυραμίς, ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῆς βάσεως αὐτῆς, εἶναι τριγωνική, τετραγωνικὴ κλπ.

Σχῆμα κολούρου πυραμίδος ἔχουν αἱ καπνοδόχοι τῶν οἰκιῶν, τῶν ἐργοστασίων, ἀναμνηστικαὶ στῆλαι, σκάφαι κλπ.

Ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς (σχ. 60α) ἔχει 5 ἕδρας. Αἱ 2 εἶναι βάσεις (αβγ καὶ ΑΒΓ) καὶ εἶναι τρίγωνα παράλληλα καὶ ἄνισα καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τετράπλευρα. Ἔχει 9 ἀκμάς, 6 κορυφάς, 9 διέδρους καὶ 6 τριέδρους στερεὰς γωνίας.



Σχ. 60α.

Ἡ κόλουρος τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 6 ἕδρας. Ἤτοι δύο βάσεις τετράγωνα, παράλληλα καὶ ἄνισα καὶ 4 παραπλεύρους ἕδρας. Ἤτοι 6 ἕδρας, 12 ἀκμάς, 8 κορυφάς, 12 διέδρους γωνίας καὶ 8 τριέδρους στερεὰς γωνίας.

Ἑκάστη κόλουρος πυραμὶς ἔχει δύο ἕδρας περισσοτέρας ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, ποὺ λέγει τὸ ὄνομά της.

Ὥστε: ***Κόλουρος πυραμὶς λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις ὁμοίου σχήματος παραλλήλους, ἀλλ' ὄχι ἴσας καὶ τὰς παραπλεύρους ἕδρας τετράπλευρα.***

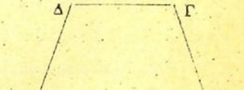
Ἀσκήσεις.

1. Τί διαφέρει τριγωνικὴ πυραμὶς ἀπὸ τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα;

12. Τραπέζιον.

Ἐὰν στηρίξωμεν μίαν κόλουρον πυραμίδα ἐπὶ τοῦ πίνακος διὰ μιᾶς τῶν ἑδρῶν τῆς παραπλεύρου αὐτῆς ἐπιφανείας καὶ σύρωμεν τὴν

Σχ. 61.



Σχ. 62.

κιμωλίαν πέριξ αὐτῆς, θὰ γραφῇ τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ΑΒΓΔ (σχ. 61). Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται ***τραπέζιον***.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ δύο πλευραὶ τοῦ σχήματος τούτου, ἡ ΑΔ καὶ ΒΓ, εἶναι παράλληλοι καὶ ἄνισοι. Αἱ ἄλλαι δύο πλευραί, ἡ ΑΒ καὶ ΔΓ, εἶναι πλάγιαι καὶ δύνανται νὰ εἶναι ἴσαι, ἀλλὰ δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἄνισοι. Ὅταν εἶναι ἴσαι, τὸ τραπέζιον λέγεται ἰσοσκελὲς (σχ. 62).

Ὥστε: ***Τραπέζιον λέγεται τὸ τετράπλευρον ἐκεῖνο σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει μόνον δύο πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἀνίσους.***

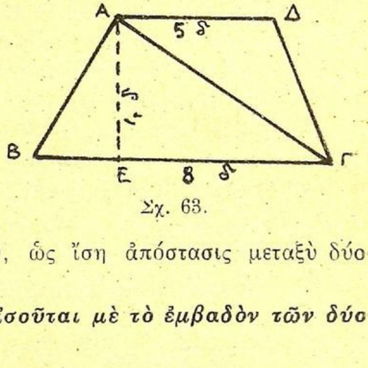
Αἱ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ΑΔ καὶ ΒΓ λέγονται βάσεις τοῦ τραπεζίου. Ὕψος τοῦ τραπεζίου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων δηλαδὴ ἡ ΑΕ.

Ἐμβαδὸν τοῦ Τραπεζίου.

Ἔχομεν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 63) καὶ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν του.

Τοῦ τραπεζίου τούτου ἡ μία βάσις, ἡ ΒΓ, εἶναι 8 δ. καὶ ἡ ἄλλη, ἡ ΑΔ 5 δ. καὶ τὸ ὕψος 4 δ. καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν του.

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ χωρίζομεν τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ. Τοῦ πρώτου τριγώνου βάσις εἶναι ἡ ΒΓ, τοῦ δὲ δευτέρου ἡ ΑΔ. Αἱ δύο αὗται πλευραὶ εἶναι καὶ βάσεις τοῦ τραπεζίου. Ὕψος δὲ καὶ τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων εἶναι ἡ ΑΕ, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τραπεζίου, ὡς ἴση ἀπόστασις μεταξὺ δύο παραλλήλων.



Σχ. 63.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο τριγώνων.

Εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο τριγώνων καὶ προσθέτω αὐτά. Ἤτοι:

α) Εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἔχω $\frac{8 \times 4}{2} =$ 16 τ. δ.

β) Εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ καὶ ἔχω $\frac{5 \times 4}{2} =$ 10 τ. δ.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι 16+10=26 τ. δ.

Τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα ἔχουν τὸ ἴδιον ὕψος καὶ βάσεις τὰς παραλλήλους ἕδρας τοῦ τραπεζίου. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εὑρίσκεται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὐκολώτερον, ἂν πολλαπλασιάσω τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἤτοι:

Μῆκος τῶν βάσεων 8+5=13. 13 : 2=6, 5 δ.

Πολλαπλασιάζω τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων, δηλ. τὸ 6, 5 ἐπὶ τὸ ὕψος 4 καὶ εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, ἤτοι: 6, 5×4=26 τ. δ.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, πολλαπλασιάζω τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.***

Ἀσκήσεις.

1. Τί λέγεται τραπέζιον;

2. Εὕρετε τὰς διαφορὰς τραπεζίου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

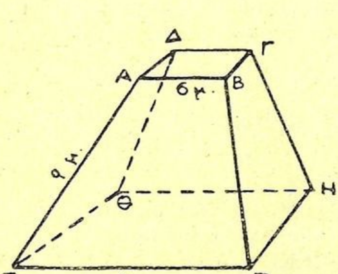
3. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἡ μία 40 μ. καὶ ἡ ἄλλη 120 μ., τὸ δὲ ὕψος 85 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

4. Εἷς ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 386 τ. μ. καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών του εἶναι (29, 8+15, 6)=45,4 μ. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος του;

5. Ἓν οἰκόπεδον σχήματος τραπεζίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 620 τ. μ. καὶ τὸ ὕψος 18 μ. Πόσαι εἶναι αἱ βάσεις του, ἐὰν ἡ μία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης 23 μέτρα;

6. Ἑνὸς σχήματος τραπεζίου αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἡ μία 124 μ. καὶ ἡ ἄλλη 238,6 μ. καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 78 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς τ. μ. ἢ εἰς βασιλικὰ στρέμματα.

Ἐπιφάνεια κολούρου Πυραμίδος.—Ἡ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου Πυραμίδος εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων.



Σχ. 64.

Ὅταν ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, τὰ τραπέζια τῆς παραπλεύρου αὐτῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσα. Ἑπομένως, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου. Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μόνον ἐξ αὐτῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν τραπεζίων.

Π. χ. ἔστω ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 64), ἡ ὁποία

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχει βάσιν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 6 μ. καὶ τὸ ΕΖΗΘ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 8 μ. τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι 9 μ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἄνω βάσεως ΑΒΓΔ εἶναι $6 \times 6 = 36$ τ. μ., τῆς κάτω βάσεως ΕΖΗΘ εἶναι $8 \times 8 = 64$ τ. μ.

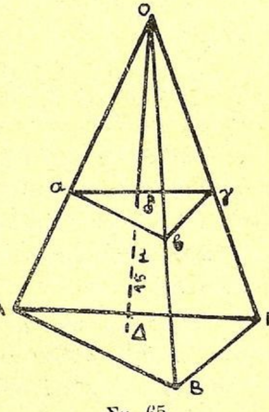
Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τραπεζίου εἶναι $\frac{6 \times 8}{2} \times 9 = 63$ τ. μ.

Τετραπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου (διότι καὶ τὰ 4 εἶναι ἴσα) διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 4 τραπεζίων, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον αὐτῆς ἐπιφάνειαν καὶ ἔχομεν $63 \times 4 = 252$ τ.μ. Προσθέτομεν καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεων καὶ ἔχομεν $252 + 36 + 64 = 352$ τ. μ.

Ὄγκος κολούρου πυραμίδος.

Ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τὸν ὄγκον τῆς ὁλοκλήρου πυραμίδος, ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τῆς ἀποκοπείσης.

Ἔστω ἡ πυραμὶς Ο—ΑΒΓ τῆς ὁποίας ἡ βάσις ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν 9 τ. μ. καὶ ὕψος ΟΔ, 12 μ. Ὁ ὄγκος της ἰσοῦμὲ $1/3 \times 9 \times 15 = 45$ κ. μ. (Σχ. 65).



Σχ. 65.

Κόπτομεν τὴν πυραμία μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν. Ἡ τομὴ αβγ εἶναι σχῆμα ὅμοιον μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ λαμβάνομεν τὴν κόλουρον πυραμίδα ΑΒΓαβγ ὡς καὶ τὴν Οαβγ.

Ὁ ὄγκος τῆς μικρᾶς θὰ εἶναι $1/3 \times$ ἐμβ. βάσεως $\times$ ὕψος. Ἔστω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αβγ=4 τ. μ. καὶ ὕψος Οδ=10 μετ., ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι $1/3 \times 4 \times 10 = 13{,}33$ κ. μ.

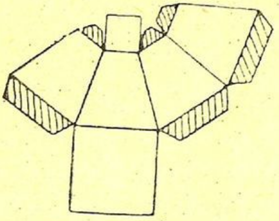
Συνεπῶς, ὁ ὄγκος τῆς κολούρου θὰ εἶναι : $45 - 13{,}33 = 31{,}67$ κ.μ.

Ἰχνογράφησις καὶ κατασκευὴ κολούρου πυραμίδος.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν κόλουρον πυραμίδα, γράφομεν ἓν παραλληλόγραμμον. Ἄνωθεν αὐτοῦ γράφομεν ἄλλο παραλληλόγραμμον μικρότερον. Ἑνώνομεν τὰς κορυφὰς τῶν δύο παραλληλογράμμων καὶ ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἑτοίμη.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κόλουρον πυραμίδα ἐκ χαρτονίου, ἰχνογραφοῦμεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου τὸ κατωτέρω σχῆμα (σχ. 66), τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἡ πυραμίς, ὅταν ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας αὐτῆς. Χαράσσομεν κατόπιν τὰς γραμμάς, κλείομεν τὰς ἕδρας καὶ κολλῶμεν τὰ ἄκρα αὐτῶν. Ἡ πυραμὶς εἶναι ἑτοίμη. Ὅταν, ἀντὶ χαρτονίου, λάβωμεν ξύλον, ἰχνογραφοῦμεν πάλιν τὸ ἴδιον σχῆμα. Αἱ ἕδραι ὅμως ἀποκόπτονται καὶ κατόπιν κολλῶνται ἢ καρφώνονται μὲ λεπτὰ καρφιά.



Σχ. 66.

Ἀσκήσεις.

1. *Ἰχνογραφήσατε μίαν τριγωνικήν, μίαν πενταγωνικὴν καὶ μίαν ἑξαγωνικὴν πυραμίδα.*

2. *Ἰχνογραφήσατε κολούρους πυραμίδας μὲ τὰς ἰδίας βάσεις.*

3. *Ὀνομάσατέ μου σώματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν σχῆμα κανονικῆς καὶ κολούρου πυραμίδος.*

Προβλήματα.

1. *Τραπέζιον ἔχει βάσεις 2,30 μ. καὶ 1,80 μ. καὶ ὕψος 0,96 μ. Εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.*

2. *Τραπέζιον ἔχει βάσεις 3,10 μ. καὶ 1,90 μ. καὶ ἐμβαδὸν 4,80 τ. μ. Ποῖον τὸ ὕψος αὐτοῦ ;*

3. *Οἰκόπεδον σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 62,20 μ. καὶ 18,50 μ. καὶ ὕψος 39 μ. ἐμοιράσθη μεταξὺ τεσσάρων ἀδελφῶν. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος ;*

4. *Ἐπὶ οἰκοπέδου σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 23,15 μ. καὶ 16,30 μ. ἐκτίσθη οἰκία τετραγωνικὴ μὲ πλευρὰν 11,30 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς οἰκίας καὶ πόσον μέρος ἔμεινεν ἄκτιστον ;*

5. *Πλατεῖα σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 78,90 μ. καὶ 52,40 μ. καὶ ὕψος 38,30 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικὰς πλάκας 0,45 μ. Αἱ πλάκες κοστίζουν 92 δρχ. τὸ μέτρον. Πόσον θὰ κοστίσῃ ἡ ἐπίστρωσις ;*

6. *Κόλουρος πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὰ βάσεων 2,85 τ. μ. καὶ 1,09 τ. μ. καὶ ὕψος 4,15 μ. Εὕρετε τὸν ὄγκον αὐτῆς.*

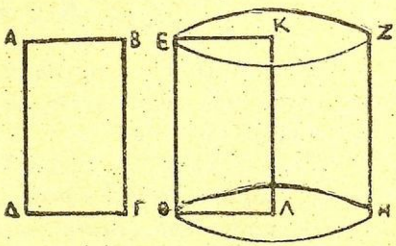
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΕΡΕΑ ΣΩΜΑΤΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

1. Κύλινδρος.

Τὸ στερεὸν σῶμα ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 67 εἶναι σῶμα, τὸ ὁποῖον δὲν ὁμοιάζει μὲ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα ἐδιδάχθημεν εἰς τὰ προηγούμενα μαθήματα. Ἐκεῖνα ἔχουν πολλὰς ἕδρας (πολύεδρα), ἐνῷ αὐτὸ ἔχει μόνον 3 ἕδρας ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 2 εἶναι ἐπίπεδοι, ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ ἡ τρίτη εἶναι κυρτή.

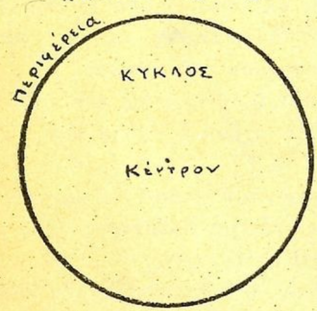


Σχ. 67.

Τὸ στερεὸν αὐτὸ σῶμα λέγεται ***κύλινδρος.***

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους καὶ ἀπὸ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν πολλὰ σώματα, ὅπως π. χ. οἱ σωλῆνες τῆς θερμάστρας, τὰ μολύβια, οἱ κάλυκες τῶν ὀβίδων, κυτία τῶν κονσερβῶν καὶ ἄλλα.



Σχ. 68.

Τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ΕΖΗΘ παριστάνει κύλιδρον (σχ. 67). Τὸ σχῆμα αὐτὸ προκύπτει, ἂν περιστρέψωμεν τὸ ἀνωτέρω ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΔ, ἡ ὁποία νὰ μένῃ ἀκίνητος. Αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒ καὶ ΔΓ κατὰ τὴν περιστροφὴν γράφουν δύο ἴσους καὶ παραλλήλους κύκλους, ἡ πλευρὰ ΒΓ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μεταξὺ τῶν δύο κύκλων.

Αἱ 3 αὐταὶ εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου. Ἀπὸ αὐτὰς αἱ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δύο κυκλικαί, ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω, εἶναι ἐπίπεδα ἴσα καὶ παράλληλα καὶ λέγονται ***βάσεις*** τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν δύο κύκλων εἶναι ***ἡ κυρτὴ*** ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

Ἡ κάθετος ΚΛ, ἡ ὁποία φέρεται μεταξὺ τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων λέγεται ***ὕψος*** ἢ ***ἄξων*** τοῦ κυλίνδρου.

Ὥστε: ***Κύλινδρος εἶναι ἓν στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἐπιπέδους ἐπιφανείας ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του κυρτήν.***

Ἀσκήσεις.

1. *Τί διαφέρει ὁ κύλινδρος ἀπὸ τὰ πολύεδρα σώματα;*
2. *Νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ κυλίνδρους.*

2. Κύκλος.

Ἐὰν στηρίξωμεν τὸν κύλινδρον ἐπὶ τοῦ πίνακος μὲ μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν πέριξ αὐτῆς θὰ γραφῇ τὸ ἀνωτέρω σχῆμα (σχ. 68).

Τὸ σχῆμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον, ὅπως βλέπομεν, περικλείεται ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, λέγεται ***κύκλος***.

Ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία τὸ περικλείει, λέγεται ***περιφέρεια*** τοῦ κύκλου.

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ λέγεται ***κέντρον*** αὐτοῦ.

Κύκλος λοιπὸν λέγεται ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται ὑπὸ μιᾶς καμπύλης γραμμῆς τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον καὶ λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται ***ἀκτίς***. Εἰς τὸ παρακείμενον σχῆμα ἡ εὐθεῖα ΚΑ εἶναι ἀκτὶς (σχ. 69).

Ἡ εὐθεῖα ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ καταλήγει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται ***διάμετρος***. Εἰς τὸ παρακείμενον σχῆμα διάμετρος εἶναι ἡ ΒΚΓ (σχ. 69).

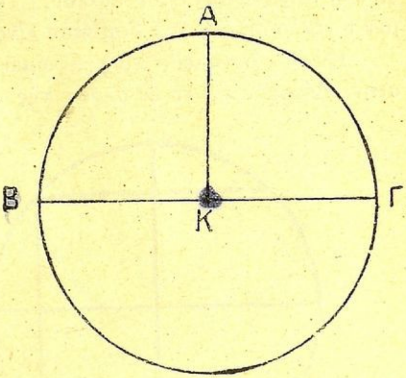
Ἡ ἀκτὶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου, ἡ διάμετρος λοιπὸν ἰσοῦται πρὸς δύο ἀκτῖνας.

Κάθε διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***ἡμικύκλια***. Ἐπίσης κάθε διάμετρος διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται ***ἡμιπεριφέρειαι***.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

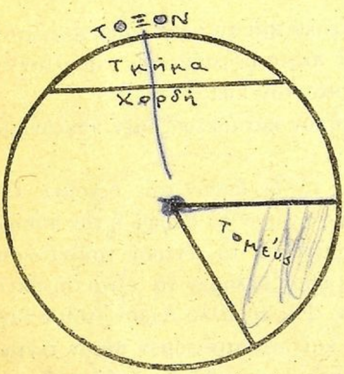
Τόξον τῆς περιφερείας εἶναι ἓν μέρος αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ δύο ἄκρα τοῦ τόξου λέγεται ***χορδὴ*** (σχ. 70 καὶ 71).

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς χορδῆς καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου λέγεται κυκλικὸν ***τμῆμα***.



Σχ. 69.

Τέλος, τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἀκτίνων καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου λέγεται ***τομεὺς*** (σχ. 70 καὶ 71). Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ἂν ἐκ τοῦ μέσου δύο χορδῶν φέρομεν καθέτους πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται αἱ δύο αὐταὶ κάθετοι εἶναι τὸ ***κέντρον*** τοῦ κύκλου, ὅπως δεικνύει καὶ τὸ παρακείμενον σχῆμα. Κάθε κάθετος ἡ ὁποία φέρεται ἐκ τοῦ μέσου οἱασδήποτε χορδῆς πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου θὰ διέλθη ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτοῦ (σχ. 72).



Σχ. 70 καὶ 71.

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου διαιρεῖται, ὅπως γνωρίζομεν, εἰς 360 μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***μοῖραι*** καὶ σημειώνονται μὲ τὸ μικρὸν γράμμα ο (360°). Ἡ 1° ἔχει 60 πρῶτα λεπτὰ (60^{π}) καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δεύτερα (60^{δ}).

Πῶς γράφομεν κύκλους.

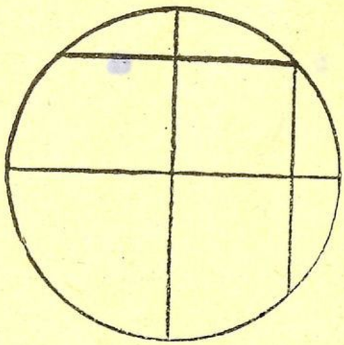
Κύκλους γράφομεν μὲ τὸν διαβήτην (σχ. 73). Ὁ διαβήτης εἶναι ἓν ἁπλοῦν ὄργανον, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσια σκέλη, ξύλινα ἢ μετάλλινα, τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των μὲ ἕνα κοχλίαν (βίδαν).

Τὸ ἓν σκέλος εἶναι μυτερὸν καὶ τὸ ἄλλο καταλήγει εἰς μίαν τρύπαν, εἰς τὴν ὁποίαν προσαρμόζομεν μίαν κιμωλίαν ἢ μολύβι. Ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου τόσον ὅσον θέλομεν νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

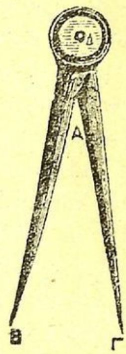
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔπειτα στηρίζομεν τὸ μυτερὸν σκέλος τοῦ διαβήτου ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα ἢ εἰς τὸ χαρτὶ καὶ περιστρέφομεν τὸ ἄλλο σκέλος, μὲ τὴν κιμωλίαν εἰς τὸν πίνακα ἢ μὲ τὸ μολύβι ἐπάνω εἰς τὸ χαρτί, ὥστε νὰ γραφῇ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἐστηρίξαμεν τὸ ἄλλο σκέλος τοῦ διαβήτου εἶναι τὸ ***κέντρον*** τοῦ κύκλου.

Κύκλον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν εἰς τὸν πίνακα καὶ μὲ μίαν κλωστήν. Δένομεν εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς κλωστῆς μίαν κιμωλίαν, τὸ ἄλλο



Σχ. 72.



Σχ. 73.

ἄκρον τὸ στηρίζομεν ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα καὶ τὸ κρατοῦμεν ἀκίνητον. Κατόπιν τεντώνομεν τὴν κλωστὴν καὶ περιστρέφομεν τὴν κιμωλίαν εἰς τὸν πίνακα, ὥστε νὰ γραφῇ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Εἰς τὴν αὐλὴν ἢ τὸν σχολικὸν κῆπον κατασκευάζομεν κύκλους μὲ σπάγγον ὡς ἑξῆς :

Λαμβάνομεν ἕνα σπάγγον καὶ εἰς τὸ ἓν ἄκρον του δένομεν ἕνα καρφὶ ἢ ἕνα πάσσαλον καὶ ἔπειτα καρφώνομεν τὸ καρφὶ ἢ τὸν πάσσαλον εἰς τὴν γῆν, εἰς τὸ σημεῖον ὅπου θὰ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Ὁ σπάγγος θὰ ἔχῃ τόσον μάκρος ὅσον θέλομεν νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ποὺ θέλομεν νὰ γράψωμεν. Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ σπάγγου δένομεν ἄλλον πάσσαλον ἢ καρφὶ καὶ περιστρέφομεν αὐτὸν τεντωμένον γύρω κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ χαραχθῇ καμπύλη γραμμή, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Σχῆμα κύκλου ἔχουν αἱ ἐπιφάνειαι πολλῶν σωμάτων, αἱ σφραγῖδες τῶν διαφόρων ὑπηρεσιῶν, τὰ μεταλλικὰ νομίσματα κ.λ.π.

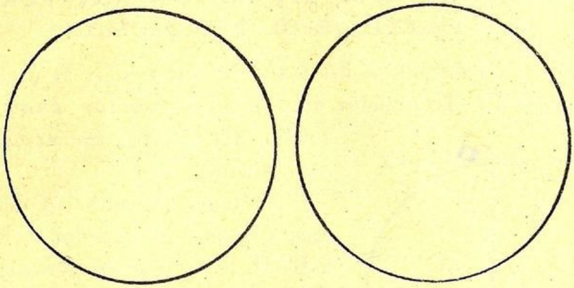
Ἀσκήσεις

1. Νὰ σχηματίσετε κύκλους μὲ τὸν διαβήτην.
2. Νὰ σχηματίσετε κύκλους εἰς τὸν πίνακα μὲ κλωστήν.
3. Ὁμοίως εἰς τὴν αὐλὴν τοῦ σχολείου μὲ σπάγγον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κύκλοι ἴσοι καὶ κύκλοι ὁμόκεντροι

Δύο κύκλοι εἶναι ***ἴσοι*** ὅταν ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας (σχ. 74). Οἱ τροχοὶ τῶν αὐτοκινήτων, τῶν κάρρων, τῶν ποδηλάτων εἶναι ἴσοι. Ὅταν δύο κύκλοι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον ἀλλὰ διαφορετικὰς ἀκτῖ-



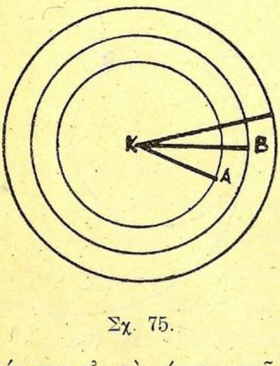
Σχ. 74.

νας λέγονται ***ὁμόκεντροι*** κύκλοι (σχ. 75). Ἡ ἀκτὶς ΚΑ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας ΚΒ καὶ ΚΓ.

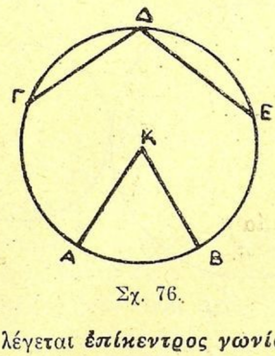
Ὁμοκέντρους κύκλους βλέπομεν εἰς τὸν κορμὸν τῆς δρυός, ἂν τὸν κόψωμεν ὁριζοντίως.

Γωνίαι ἐπίκεντροι καὶ γωνίαι ἐγγεγραμμέναι.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ σχ. 76 βλέπομεν δύο γωνίας. Ἡ γωνία ΑΚΒ ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας, τὴν ΚΑ καὶ τὴν ΚΒ, καὶ ἔχει τὴν



Σχ. 75.



Σχ. 76.

κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου λέγεται ***ἐπίκεντρος γωνία.***

Ἡ γωνία ΓΔΕ ποὺ σχηματίζεται μέσα εἰς τὸν κύκλον (σχ. 76) ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύ-

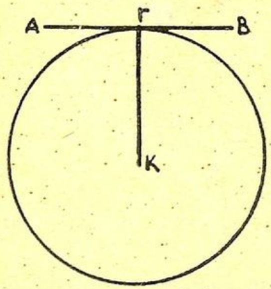
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κλου, αἱ δὲ πλευραί της ΓΔ καὶ ΔΕ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Ἡ γωνία αὐτή, καθὼς καὶ κάθε ἄλλη γωνία, ποὺ ἡ κορυφή της εὑρίσκεται εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραί της εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου, λέγεται ***ἐγγεγραμμένη γωνία*** εἰς κύκλον.

Εὐθεῖα ἐφαπτομένη εἰς περιφέρειαν κύκλου καὶ ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι.

Εἰς τὸ σχ. 77 βλέπομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐγγίζει ἕν σημεῖον τῆς περιφερείας, τὸ Γ. Τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται ***σημεῖον ἐπαφῆς***, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται ***ἐφαπτομένη*** τῆς περιφερείας.

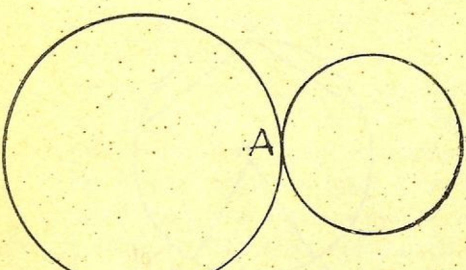


Σχ. 77.

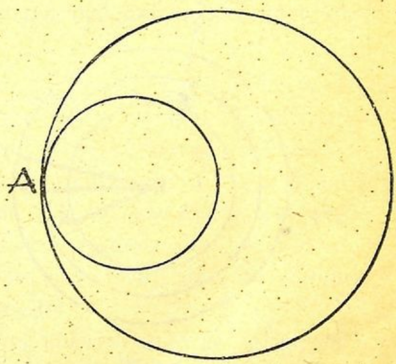
Ἂν τώρα φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΓΚ σχηματίζονται δύο γωνίαι, ἡ ΚΓΑ καὶ ἡ ΚΓΒ. Ἂν μετρήσωμεν τὰς γωνίας αὐτὰς μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον βλέπομεν ὅτι εἶναι ὀρθαί.

Ὥστε : ***Κάθε ἐφαπτομένη εὐθεῖα εἰς περιφέρειαν κύκλου εἶναι πάντοτε κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.***

Ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι.— Δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ ἔχουν ἕν κοινὸν σημεῖον καὶ νὰ εἶναι ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ὁπότε



Σχ. 78.



Σχ. 78α.

λέγομεν ὅτι ἐφάπτονται ἐκτὸς (σχ. 78) ἢ ἐντὸς τῆς ἄλλης, ὁπότε ἐφάπτονται ἐντὸς (σχ. 78α).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3. Πολύγωνα.

Ὅταν ἓν πολύγωνον εὑρίσκεται ἐντὸς κύκλου, ὥστε αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του νὰ ἀκουμβοῦν εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, λέγεται ***ἐγγεγραμμένον***, ὁ δὲ κύκλος ***περιγεγραμμένος*** (σχ. 79).

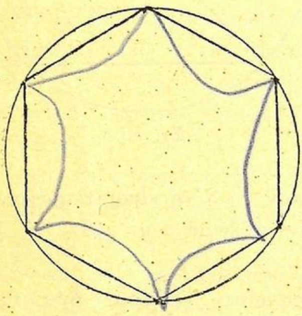
Ὅταν ὅμως τὸ πολύγωνον εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸν κύκλον, ὥστε αἱ πλευραί του νὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, λέγεται ***περιγεγραμμένον***, ὁ δὲ κύκλος ***ἐγγεγραμμένος*** (σχ. 80).

Τὸ πολύγωνον ποὺ ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του καὶ τὰς γωνίας του ἴσας λέγεται ***κανονικὸν πολύγωνον.***

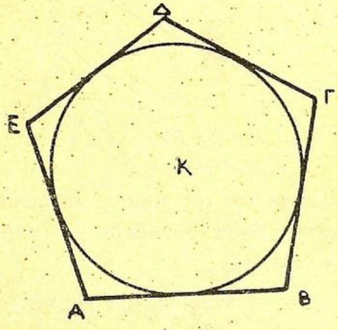
Περίμετρον τοῦ πολυγώνου ἀποτελοῦν ὅλαι μαζὶ αἱ πλευραί του.

Ἐγγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων εἰς τὸν κύκλον.

Ὅταν θέλωμεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσαι εἶναι αἱ



Σχ. 79.



Σχ. 80.

πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν. Κατόπιν ἑνώνομεν τὰ μέρη ταῦτα τῆς περιφερείας μὲ χορδάς. Αἱ χορδαὶ αὗται θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

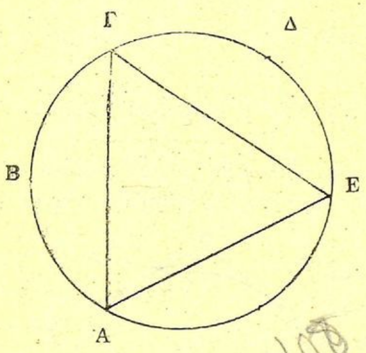
Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 6 ἴσα μέρη. Τοῦτο εἶναι εὔκολον νὰ γίνῃ μὲ διαβήτην, ὅταν ἀνοίξωμεν τὸν διαβήτην ὅσον εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἐὰν τότε ἑνώσωμεν τὰ τόξα ἀνὰ ἓν μὲ χορδάς, θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν ἑξάγωνον.

Ἂν θέλωμεν νὰ ἐγγράψωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς κύκλον,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

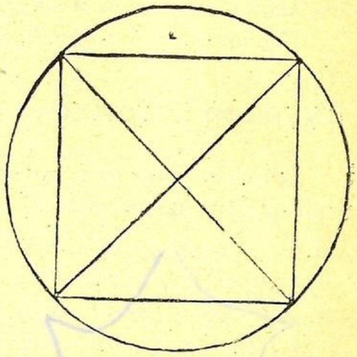
χωρίζομεν τὸν κύκλον μὲ τὸν διαβήτην εἰς 6 ἴσα μέρη, ὅπως ἐκάμαμεν καὶ μὲ τὸ ἑξάγωνον. Κατόπιν ἑνώνομεν ἀνὰ δύο τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τρεῖς χορδάς, ἤτοι : τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ Γ, τὸ Γ μὲ τὸ Ε καὶ τὸ Ε μὲ τὸ Α καὶ οὕτω θὰ σχηματισθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον (σχ. 81).

Καὶ ἂν χωρίσωμεν τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἕκαστον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομὰς θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν δωδεκάγωνον. Καὶ ἂν πάλιν χωρίσωμεν τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ τούτου δωδεκαγώνου ἕκαστον εἰς δύο ἴσα μέρη



Σχ. 81.

108


Σχ. 82.

καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομάς, τὸ δωδεκάγωνον θὰ γίνῃ εἰκοσιτετράγωνον. Τοιουτοτρόπως δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνα μὲ 48, 96, 192 κ.λ.π. πλευράς.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον τετράγωνον, γράφομεν δύο διαμέτρους, μίαν κάθετον καὶ μίαν ὁριζόντιον. Αἱ διάμετροι αὗται θὰ χωρίσουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 4 ἴσα μέρη. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων μὲ εὐθείας γραμμάς, αἱ γραμμαὶ αὐταὶ θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου (σχ. 82).

Ἐὰν χωρίσωμεν τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου τούτου ἕκαστον εἰς ἴσα δύο μέρη, καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομάς, τὸ τετράγωνον θὰ γίνῃ ὀκτάγωνον. Καὶ ἐὰν πάλιν χωρίσωμεν τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ὀκταγώνου ἕκαστον εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομάς, τὸ ὀκτάγωνον θὰ γίνῃ δεκαεξάγωνον. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἠμποροῦμεν νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνα καὶ μὲ 32, 64, 128 κ.λ.π. πλευράς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

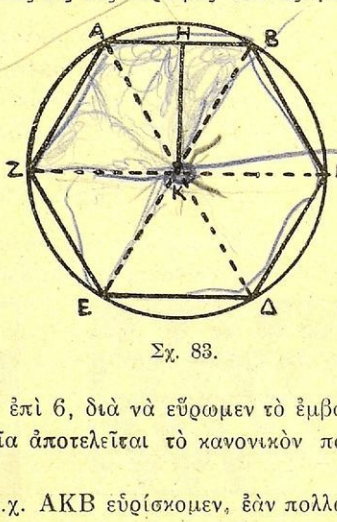
Ἀσκήσεις

1. *Ἐγγράψατε εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ τρίγωνον.*
2. *Ἐγγράψατε κανονικὸν τετράγωνον. Μετατρέψατέ το εἰς ὀκτάγωνον.*
3. *Ἐὰν λάβωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἑξαγώνου ὡς χορδήν, πόσων μοιρῶν θὰ εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τόξον ;*

Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐγγράφομεν εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον, ὅπως δεικνύει καὶ τὸ παρακείμενον σχῆμα *(σχ. 83)*.

Ἐάν, ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου Κ, ποὺ εἶναι καὶ κέντρον τοῦ ἑξαγωνικοῦ πολυγώνου, φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου θὰ σχηματισθοῦν 6 ἴσα τρίγωνα.



Σχ. 83.

Βάσις ἑκάστου ἐκ τῶν τριγώνων εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου καὶ ***ὕψος*** αὐτοῦ εἶναι ἡ κάθετος ἡ φερομένη ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, δηλ. τὴν κορυφὴν τοῦ τριγώνου ΑΚΒ, ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒ (ἡ ΚΗ).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου, π. χ. τοῦ ΑΚΒ, καὶ θὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 6, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 6 τριγώνων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται τὸ κανονικὸν πολύγωνον.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου π.χ. ΑΚΒ εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρέσωμεν διὰ 2. Τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 6 τριγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλα ἴσα, δηλαδὴ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, εἶναι 6 φορὰς περισσότερον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΚΒ.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου ΑΚΒ εἶναι 3 παλάμαι καὶ τὸ ὕψος 2,59 παλάμαι. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ;

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι : 3×2,59 : 2=3,885 τ. π. Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου θὰ εἶναι 3,885×6=23,31 τ. π.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ βάσεις τῶν 6 τριγώνων ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμεν διὰ 2.***

Ἤτοι: Περίμετρος $3 \times 6 = 18^{\mu}$

$$\text{Ἐμβ.} = \frac{18 \times 2{,}59}{2} = \frac{46{,}62}{2} = 23{,}31 \text{ τ. π.}$$

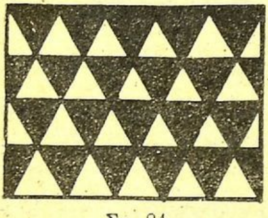
Προβλήματα.

1. Ἓν οἰκόπεδον σχήματος κανονικοῦ ἑξαγώνου ἔχει πλευρὰν 10 μ. καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν του εἶναι 8,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

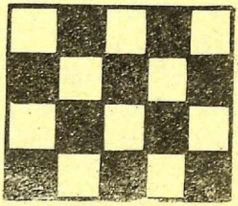
2. Μία ἄμπελος σχήματος κανονικοῦ ὀκταγώνου ἔχει πλευρὰν 18 μ. καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν του εἶναι 21 μ. καὶ πωλεῖται πρὸς 15.000 δραχ. τὸ τ. μ. Πόσον ἀξίζει;

Περὶ ἐπιστρώσεως.

Πρὸς ἐπίστρωσιν τῶν δαπέδων τῶν αἰθουσῶν, μαγειρείων, διαδρόμων, αὐλῶν κ.λ.π. χρησιμοποιοῦμεν πλάκας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν συνήθως σχῆμα κανονικῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.



Σχ. 84.



Σχ. 85.

Γνωρίζομεν ὅτι ἓν τετράγωνον ἔχει ἴσας τὰς γωνίας του, ἐπίσης καὶ τὰς πλευράς του. Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς τὸ τετράγωνον λέγεται ***κανονικὸν σχῆμα.*** Ὁμοίως καὶ ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι κανονικὸν σχῆμα.

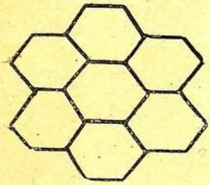
Ὥστε: ***Ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα εἶναι κανονικόν, ὅταν ἔχῃ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας.***

Ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν ποὺ ἔχουν τὰ σχήματα ποὺ ἀπεικονίζουν αἱ πλάκες αὐταὶ λέγονται τριγωνικαί, ὅταν ἔχουν 3 γωνίας, τετραγωνικαί, ὅταν ἔχουν 4 γωνίας, πενταγωνικαί, ὅταν ἔχουν 5 γωνίας κ.λ.π.

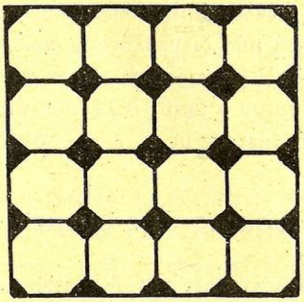
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ τὴν πλακόστρωσιν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τριγωνικὰς (σχ. 84), τετραγωνικὰς (σχ. 85), ἑξαγωνικὰς (σχ. 86) πλάκας.

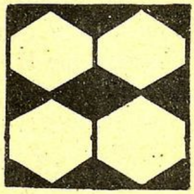
Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ ἐπιστρώσωμεν τελείως μίαν ἐπιφάνειαν μὲ



Σχ. 86.



Σχ. 87.



Σχ. 88.

τὸν συνδυασμὸν περισσοτέρων κανονικῶν πολυγώνων, ἤτοι ὀκταγωνικῶν μὲ τετραγωνικὰς (σχ. 87), ἑξαγωνικῶν μὲ τριγωνικὰς πλάκας (σχ. 88).

Ἀσκήσεις.

Πότε ἓν πολύγωνον καλεῖται κανονικόν ; — Τὸ ἰσόπλευρον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον εἶναι κανονικὰ πολύγωνα ; — Ὁμοίως καὶ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον ; — Διὰ ποίων ἐκ τῶν πλακῶν ποὺ ἔχουν σχῆμα κανονικῶν καὶ ἴσων πολυγώνων δύναται νὰ γίνῃ τελεία ἐπίστρωσις ; — Ὁμοίως καὶ διὰ ποίων συνδυασμῶν πλακῶν ποὺ ἔχουν σχῆμα διαφόρων κανονικῶν πολυγώνων ;

Σχέσις τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον καὶ τὴν ἀκτῖνα.

Ἐὰν μετρήσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου καὶ μετρήσωμεν καὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι 3,14 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν διάμετρον.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος, ἕπεται ὅτι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι 6,28 φορὰς μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα.

Ὅταν λοιπὸν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου διαιροῦμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τοῦ 3,14. Καὶ ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα διαιροῦμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τοῦ 6,28,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅταν πάλιν γνωρίζωμεν τὴν διάμετρον καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸ 3,14. Καὶ ὅταν θέλωμεν ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τὸ 6,28.

Αἱ σχέσεις αὐταὶ μᾶς διευκολύνουν πολὺ καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ κύκλου καὶ εἰς διάφορα προβλήματα σχετικὰ μὲ τὸν κύκλον.

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὁ ἀριθ. 3,14 παριστάνεται μὲ τὸ γράμμα π, ἡ ἀκτὶς μὲ τὸ ρ, ἡ διάμετρος μὲ τὸ δ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μὲ τὸ κεφαλαῖον Π.

Εὕρεσις τῆς διαμέτρου.

Ὁ τύπος διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς διαμέτρου ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι: $\delta = \frac{\Pi}{\pi}$.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διάμετρον ἑνὸς κύκλου, διαιροῦμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τοῦ 3,14.***

Εὕρεσις μήκους περιφερείας.

Ὁ τύπος διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μήκους τῆς περιφερείας εἶναι $\Pi = \delta\,\pi$ ἢ $\Pi = 2\,\rho \times \pi$, ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ἰσοῦται μὲ δύο ἀκτῖνας.

Ὁ ἀριθμὸς 3,14 εἶναι τὸ σταθερὸν πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μήκους τῆς περιφερείας παντὸς κύκλου διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου, δηλαδὴ εἶναι ἡ σχέσις τοῦ μήκους τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν διάμετρον ἐπὶ 3,14. (ἢ $\Pi = 2\rho \times \pi$).***

Ἀσκήσεις.

1. Γράψατε κύκλον μὲ ἀκτῖνα 0,35 μ.

2. Δείξατε τὸ κέντρον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

3. Γράψατε δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν τὸ ἴδιον κέντρον. Τοῦ ἑνὸς κύκλου ἡ ἀκτὶς νὰ εἶναι 0,24 καὶ τοῦ ἄλλου 0,31 μ.

4. Εὕρετε τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου ἐκ τῶν χορδῶν αὐτοῦ.

5. Γράψατε κύκλον καὶ σημειώσατε ἐπ' αὐτοῦ τὸ τόξον, τὴν χορδήν, τὸ τμῆμα, τὸν τομέα.

6. Ἑνὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι 1.20 μ. Ποία εἶναι ἡ ἀκτίς του καὶ ποία ἡ διάμετρός του;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

7. Ἑνὸς κύκλου ἡ διάμετρος εἶναι 0,44 μ. Εὕρετε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὴν περιφέρειαν.

8. Θέλω νὰ γράψω μὲ τὸν διαβήτην κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια νὰ εἶναι 0,88 μ. Πόσον θὰ ἀνοίξω τὸν διαβήτην ;

9. Ἕνας ξυλουργὸς ἤνοιξε τὸν διαβήτην του 0,18 μ. καὶ ἔγραψε κύκλον. Ποία εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου αὐτοῦ ;

10. Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαύτας ἀσκήσεις.

Σχέσις τῆς περιμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Γράφομεν ἕνα κύκλον (σχ. 82) καὶ εἰς αὐτὸν δύο διαμέτρους καθέτους τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης. Αἱ διάμετροι αὗται χωρίζουν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα. Ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν τόξων καὶ σχηματίζεται τοιουτοτρόπως ἓν ***τετράγωνον*** (κανονικὸν πολύγωνον) ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον καὶ παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου φέρομεν ἄλλας δύο διαμέτρους, καθέτους τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, τότε ἕκαστον τῶν 4 τόξων χωρίζεται εἰς 2 ἴσα μέρη καὶ ἑπομένως ἡ ὅλη περιφέρεια χωρίζεται εἰς 8 ἴσα τόξα. Ἑνώνομεν τότε δι' εὐθειῶν τὰ 8 ταῦτα τόξα καὶ σχηματίζεται ***ἓν κανονικὸν ὀκτάγωνον*** ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ περίμετρος τότε τοῦ ὀκταγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου ἀλλὰ μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Μὲ νέαν πάλιν διχοτόμησιν τῶν 8 τόξων εἰς 16 καὶ ἕνωσιν τῶν ἄκρων αὐτῶν θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν δεκαεξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Βλέπομεν πάλιν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ δεκαεξαγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιφερείας τοῦ ὀκταγώνου, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν νὰ ἐγγράφωμεν πολύγωνον μὲ 32 πλευράς, 64, 128 κ.λ.π., θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ περίμετρος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅταν διπλασιάζεται συνεχῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του.

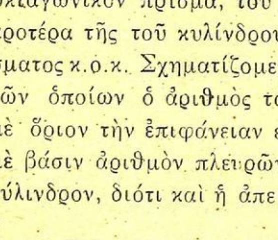
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σχέσις κυλίνδρου καὶ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς κύλινδρον τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐξάνεται ἐπ' ἄπειρον.

Ἐὰν εἰς τὰς δύο βάσεις κυλίνδρου ἐγγράψωμεν τετράγωνα (διὰ παραλλήλων διαμέτρων) καὶ ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς τῶν δύο τετραγώνων, σχηματίζομεν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν σχηματίσωμεν ὀκτάγωνα εἰς ἑκάστην βάσιν καὶ ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς τῶν δύο ὀκταγώνων σχηματίζομεν ὀκταγωνικὸν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ κυλίνδρου καὶ μεγαλυτέρα τῆς τοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος κ.ο.κ. Σχηματίζομεν πρίσματα μὲ βάσεις 16γωνα, 32γωνα κ.λ.π. τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐξάνεται διαρκῶς μὲ ὅριον τὴν ἐπιφάνειαν εὐθείας γραμμῆς, ὁπότε θὰ τείνῃ τὸ πρῖσμα, μὲ βάσιν ἀριθμὸν πλευρῶν τείνοντα εἰς τὸ ἄπειρον, νὰ συμπέσῃ μὲ τὸν κύλινδρον, διότι καὶ ἡ ἀπειρογωνικὴ βάσις θὰ συμπέσῃ μὲ τὸν κύκλον.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἑνὸς κύκλου (σχ. 89) φέρωμεν πολλὰς ἀκτῖνας, θὰ σχηματισθοῦν πολλοὶ τομεῖς. Ἂν ἐξακολουθήσωμεν νὰ διαιροῦμεν τοὺς τομεῖς, τὰ τόξα τῶν νέων τομέων θὰ εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ θὰ ὁμοιάζουν μὲ εὐθείας καὶ συνεπῶς οἱ τομεῖς θὰ ὁμοιάζουν μὲ τρίγωνα.



Σχ. 89.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρέσωμεν διὰ 2.

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν τριγώνων εἶναι καὶ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ἀντὶ νὰ εὕρωμεν χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου, πολλαπλασιάζομεν ὅλα τὰ τόξα του, δηλ. τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ διαιροῦμεν διὰ 2.

Ὥστε :

Διὰ να εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περιφέρειάν του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ διαιροῦμεν διὰ 2.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Π.χ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 3 μέτρα;

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι $2 \times 3 \times 3{,}14 = 18{,}84$ μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν $= 18{,}84 \times \frac{3}{2} = \frac{56{,}52}{2} = 28{,}26$ τ.μ.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου μὲ τὸ γράμμα Π, τὴν ἀκτῖνα μὲ τὸ ρ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ εἶναι: $E = \frac{\Pi \times \rho}{2}$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ περιφέρεια ἑκάστου κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου, ἤτοι τοῦ διπλασίου τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ 3,14. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ διπλασίου τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ 3,14, θὰ ἔχωμεν:

$$E = \frac{2 \times \rho \times 3{,}14 \times \rho}{2} = \rho \times \rho \times 3{,}14.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου μᾶς δίδεται ἡ ἀκτίς, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της καὶ τὸ γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 3,14.

Παράδειγμα 1. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

$E = 5 \times 5 \times 3{,}14 = 78{,}50$ τ. μ., καὶ ἄλλως:

Εὑρίσκομεν: α) τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου $2 \times 5 \times 3{,}14 = 31{,}40$μ.

$$Ἐμβ. = \frac{31{,}40 \times 5}{2} = \frac{157}{2} = 78{,}50 \text{ τ. μ.}$$

Παράδειγμα 2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 18 μ.

Ἡ ἀκτὶς θὰ εἶναι $18 : 2 = 9$ μ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ εἶναι $9 \times 9 \times 3{,}14 = 254{,}34$ τ. μ.

Παράδειγμα 3. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 21,98 μ.

Ἀφοῦ ἡ περιφέρεια εἶναι 21,98 μέτρων, ἡ διάμετρος θὰ εἶναι $21{,}98 : 3{,}14 = 7$ μετ. Καὶ ἡ ἀκτὶς $7 : 2 = 3{,}50$ μ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ εἶναι $3{,}50 \times 3{,}50 \times 3{,}14$.

Ἀσκήσεις.

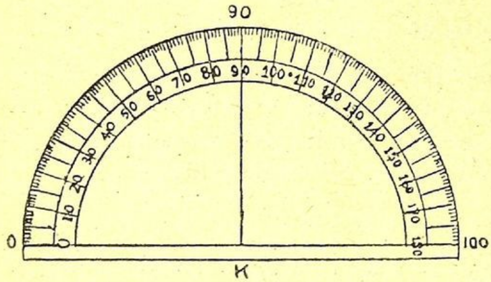
1. *Πῶς εὑρίσκομεν ἐκ τῆς διαμέτρου τὴν ἀκτῖνα;*
2. *Πῶς ἐκ τῆς περιφερείας;*
3. *Κάμετε καὶ ἄλλα προβλήματα μόνοι σας.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μέτρησις τῶν γωνιῶν.—᾿Αναλόγως τοῦ ἀνοίγματος τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν γωνίαν ἔχομεν διάφορα εἴδη γωνιῶν.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας μεταχειριζόμεθα ἓν ἐργαλεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***μοιρογνωμόνιον*** (σχ. 90).

῎Εχομεν μάθει εἰς ἄλλα μαθήματα ὅτι ὁ κύκλος διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται μοῖραι. Τὰς μοίρας αὐτὰς γράφομεν ὡς ἑξῆς: 360^0. Τὰς γωνίας λοιπὸν τὰς ὀνομάζομεν ἀναλόγως τῶν μοιρῶν τοῦ ἀνοίγματος αὐτῶν.



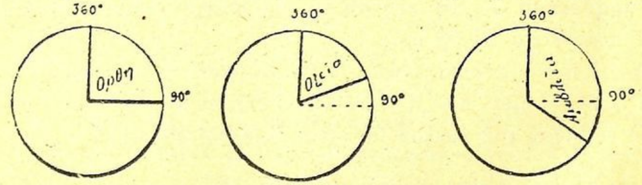
Σχ. 90.

Τὸ μοιρογνωμόνιον εἶναι ἡμικύκλιον (μισὸς κύκλος) μετάλλινον, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 180 μοίρας καὶ σημειώνεται μὲ ἓν μικρὸν (ο) δεξιὰ καὶ εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ (ἀριθμοῦ 180^0).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, τοποθετοῦμεν τὸ μοιρογνωμόνιον κατὰ τοιοῦτον τρόπον ἐπὶ τῆς γωνίας, ὥστε ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον τοῦ μοιρογνωμονίου καὶ ἡ μία πλευρά της νὰ πέσῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν τοῦ μοιρογνωμονίου ΚΟ^0. Μετροῦμεν κατόπιν τὰς μοίρας, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας καὶ ὅσαι εἶναι αἱ μοῖραι αὐταὶ τόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία.

Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον γράφομεν γωνίας ὅσων μοιρῶν θέλομεν.

Εἴδη γωνιῶν.— ῞Οταν ἡ γωνία περιλαμβάνῃ μεταξὺ τῶν πλευ-



Σχ. 91.

ρῶν της τὸ 1/4 τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, δηλαδὴ 90^0, λέγεται ***ὀρθὴ γωνία*** καὶ αἱ πλευραί της εἶναι κάθετοι. ῞Οταν περιλαμβάνῃ ὀλιγωτέρας τῶν 90^0, εἶναι δηλαδὴ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, λέγεται ***ὀξεῖα γω-***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νία καὶ ὅταν περιλαμβάνῃ περισσοτέρας τῶν 90°, εἶναι δηλαδὴ μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας, λέγεται ***ἀμβλεῖα γωνία*** (σχ. 91).

Αἱ γωνίαι λοιπὸν εἶναι τριῶν εἰδῶν : ***Ὀρθαί***, ***ὀξεῖαι*** καὶ ***ἀμβλεῖαι***.

Ἀσκήσεις.

1. Κατασκευάσατε μίαν ἐξ ἑκάστου εἴδους γωνιῶν.

2. Κατασκευάσατε μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Μεταβάλετέ την εἰς ὀξεῖαν, εἰς ἀμβλεῖαν.

3. Κατασκευάσατε μίαν γωνίαν 59°. Τί γωνία εἶναι ; Πόσας μοίρας πρέπει νὰ ἀνοίξουν ἀκόμη αἱ πλευραί της διὰ νὰ γίνῃ ὀρθή ;

4. Κατασκευάσατε γωνίαν 120°. Τί γωνία εἶναι ; Πόσον μεγαλυτέρα εἶναι τῆς ὀρθῆς ;

5. Κατασκευάσατε γωνίαν ἴσην μὲ τὸ $^1/_3$ τῆς ὀρθῆς. Πόσων μοιρῶν θὰ εἶναι ;

6. Γράψατε μίαν ὀξεῖαν, μίαν ὀρθὴν καὶ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν. Μετρήσατε καὶ εὕρετε τὴν διαφορὰν μεταξύ των.

7. Διχοτομήσατε μίαν γωνίαν 140°. Τί γωνίαι θὰ σχηματισθοῦν;

8. Πόσαι μοῖραι εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι ;

9. Προσθέσατε ὀξείας γωνίας, μέχρις ὅτου ἀποτελεσθοῦν δύο ὀρθαί ;

10. Ὅταν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας μεγαλώνει ἡ γωνία, καὶ ὅταν μικρύνωμεν τὰς πλευράς της μικραίνει αὕτη ;

11. Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαύτας ἐργασίας.

Μῆκος τόξου.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 27° περιφερείας κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα 5 μ.

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει 360° καὶ τὸ μῆκος της εἶναι :

$$10 \times 3,14 = 31,40 \text{ μ.}$$

Ἀφοῦ αἱ 360° ἔχουν μῆκος 31,40 μ.

αἱ 27° » » X

$$X = 31,40 \times \frac{27}{360} = \frac{847,80}{360} = 2,355 \text{ μ. ὥστε :}$$

Διὰ νὰ εὕρω τὸ μῆκος τοῦ τόξου, πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καὶ διαιρῶ μὲ τὸ 360°.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου.

Π. χ. ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 24 μ. καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου 8 μ.;

$$\text{Ε τομέως} = \frac{24 \times 8}{2} = 96 \text{ τ. μ.}$$

Προβλήματα.

1. Κυκλικὴ τράπεζα ἔχει ἀκτῖνα 0,72 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

2. Κυκλικὴ πλατεῖα ἔχει περιφέρειαν 42,60 μ. Ποία ἡ ἀκτὶς αὐτῆς καὶ ποῖον τὸ ἐμβαδόν της;

2. Πόσα πρόσωπα δύνανται νὰ καθίσουν πέριξ μιᾶς κυκλικῆς τραπέζης μὲ ἀκτῖνα 0,88 μ., ὅταν ὑπολογίσωμεν δι' ἕκαστον πρόσωπον 0, 92 μ. τῆς περιφερείας;

4. Εἷς χωρικὸς θέλει νὰ στρώσῃ τὸ ἀλώνιόν του, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα 3,35 μ., μὲ τετραγωνικὰς πλάκας πλευρᾶς 0,66 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

5. Εἰς πόσον χρόνον μία ἅμαξα, τῆς ὁποίας οἱ τροχοὶ ἔχουν ἀκτῖνα 0,48 μ., θὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν 8 χιλιομέτρων, ἂν εἰς ἕκαστον λεπτὸν οἱ τροχοί της κάμνουν 8 στροφάς;

6. Δύο ποδηλάται ἐξεκίνησαν συγχρόνως διὰ νὰ διατρέξουν μίαν ἀπόστασιν 18 χιλιομέτρων. Εἰς ἕκαστον λεπτὸν τὰ ποδήλατα κάμνουν 16 στροφάς. Τοῦ ἑνὸς ποδηλάτου ἡ ἀκτὶς εἶναι 0,39 μ. καὶ τοῦ ἄλλου 0,45 μ. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξουν τὰ 18 χιλιόμετρα.

7. Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα;

Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας τῶν κυκλικῶν βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας. Ἂν ἀνοίξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυλίνδρου, θὰ σχηματισθῇ τὸ κατωτέρω ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 92).

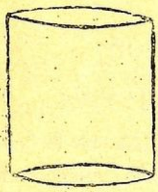
Οἱ δύο κύκλοι οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου παριστῶσι τὰς δύο κυκλικὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

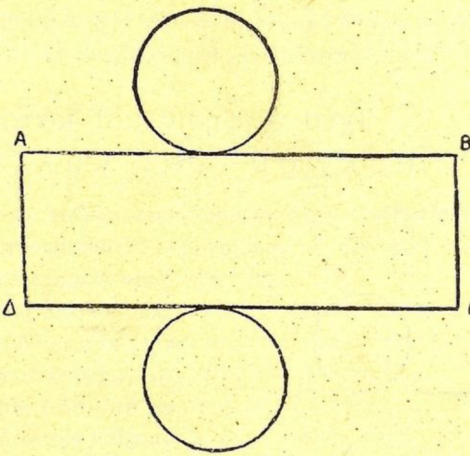
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἔχει ὡς βάσιν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδόν του δὲ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἄρα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο αὐτοῦ





Σχ. 92.

κυκλικῶν βάσεων, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν πῶς νὰ εὑρίσκωμεν, θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ὥστε : ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας καὶ κατόπιν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν του βάσεων καὶ προσθέτομεν αὐτά.***

Παράδειγμα: 1. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 8 μ. καὶ τὸ ὕψος 5 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνολικὴ ἐπιφάνειά του.

Λύσις. Εὑρίσκομεν :

α) τὴν περιφέρειαν κυκλικῆς βάσεως $8 \times 3,14 = 25,12$ μ.

β) ἐμβαδὸν κυκλικῆς βάσεως $\dfrac{25,12 \times 4}{2} = 50,24$ τ. μ.

Ἐμβαδὸν καὶ τῶν 2 κυκλικῶν βάσεων $= 50,24 \times 2 = 100,48$ τ.μ.

γ) ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας $= 25,12 \times 5 = 125,60$ τ. μ.

δ) ἐμβ. ὅλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου $= 100,48 + 125,60 = 226,08$ τ.μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2. Ἕνας κύλινδρος ἔχει ὕψος 3 μ. καὶ ἡ βάσις του ἔχει περιφέρειαν 9,42 μ. Πόση εἶναι ἡ συνολική του ἐπιφάνεια;

α) Εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεως.

Ἡ περιφέρεια τοῦ ἑνὸς κύκλου εἶναι 9,42 μ.

Ἡ διάμετρος $9,42 : 3,14 = 3$ μ. καὶ ἡ ἀκτὶς $3 : 2 = 1,50$ μ.

Ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς κύκλου $= 1,50 \times 1,50 \times 3,14 = 7,065$ τ.μ.

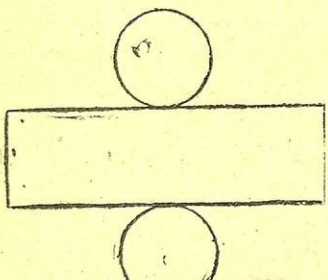
Ἐπιφάνεια δύο κύκλων $= 7,065 \times 2 = 14,13$ τ.μ.

β) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $= 9,42 \times 3 = 28,26$ τ.μ. καὶ

γ) Ἐμβαδὸν συνολικῆς ἐπιφανείας $= 14,13 + 28.26 = 42,39$. τ.μ.

Ἰχνογράφησις καὶ κατασκευὴ κύκλου καὶ κυλίνδρου.

α) ***Κύκλου.***—Διὰ νὰ γράψωμεν κύκλον, στηρίζομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου εἰς ἓν σημεῖον καὶ ἀνοίγομεν τὸ ἄλλο σκέλος τόσον ὅσον θέλομεν νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Περιστρέφομεν τότε τὸν διαβήτην, οὕτως ὥστε τὸ ἐλεύθερον σκέλος νὰ γράψῃ κυκλικὴν γραμμήν. Τὸ σχῆμα ποὺ θὰ γραφῇ θὰ εἶναι κύκλος. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἐστηρίξαμεν τὸν διαβήτην θὰ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ἡ κυκλικὴ γραμμὴ θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ.



Σχ. 93.

β) ***Κυλίνδρου.***— Ἐὰν ἀνοίξωμεν τὰς δύο βάσεις καὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου θὰ προκύψῃ τὸ παρακείμενον σχῆμα (σχ. 93).

Ἐὰν ἰχνογραφήσωμεν τὸ σχῆμα τοῦτο ἐπὶ χαρτονίου καὶ ἀποκόψωμεν αὐτό, κατόπιν δὲ κλείσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τοῦ σχήματος καὶ σκεπάσωμεν τὰς δύο κυκλικὰς βάσεις ὁ κύλινδρος θὰ εἶναι ἕτοιμος.

Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου.

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ κύλινδρος ἰσοδυναμεῖ μὲ πρῖσμα ποὺ ἔχει τὸ ἴδιον ὕψος καὶ τὸ ἴδιον ἐμβαδὸν βάσεως.

Λαμβάνομεν δύο δοχεῖα, τὸ ἓν κυλινδρικὸν καὶ τὸ ἄλλο πρῖσμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Ἂν τὰ γεμίσω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεν ὕδωρ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι καὶ τὰ δύο χωροῦν τὴν αὐτὴν ποσότητα ὕδατος. Ἄρα ἔχουν καὶ τὰ δύο τὸν αὐτὸν ὄγκον.

Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, δηλαδὴ ***πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.***

Παράδειγμα. Ἑνὸς κυλίνδρου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 6 μ. καὶ τὸ ὕψος 2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λύσις. Ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $6 \times 6 \times 3{,}14 = 113{,}04$ τ.μ.

Ὁ ὄγκος $= 113{,}04 \times 2 = 226{,}08$ κυβ. μέτρα.

Προβλήματα.

1. Κυλινδρικὸν δοχεῖον μὲ ἀκτῖνα βάσεως 9,53 μ. καὶ ὕψος 1,20 μ. πόσον ὕδωρ χωρεῖ; (1 κ.μ. χωρεῖ 1 τόννον ὕδατος).

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 6,28 μ. καὶ τὸ ὕψος 1,4 μ.

3. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 0,20 μ. καὶ τὸ ὕψος του 2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

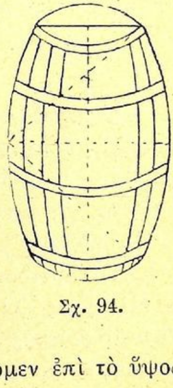
4. Πόσας ὀκάδας ὕδατος θὰ χωρέσῃ κυλινδρικὸν δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει περιφέρειαν βάσεως 2,8 μ. καὶ ὕψος 6 μέτρα;

5. Κορμὸς δένδρου κυλινδρικοῦ μὲ περιφέρειαν βάσεως 2,18 μ. καὶ ὕψος τὸ τετραπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως πόσον ζυγίζει; (Εἰδικὸν βάρος ξύλου 0,50).

6. Μαρμαρίνη κολώνα ὕψους 4,80 μ. καὶ μὲ ἀκτῖνα βάσεως 0,66 μ. πόσον ζυγίζει; (Εἰδικὸν βάρος μαρμάρου 2,7).

7. Ἂν ἡ κολώνα αὐτὴ ἦτο ἐκ σιδήρου, πόσον θὰ ἐζύγιζε; (Εἰδικὸν βάρος σιδήρου 7,79).

Ὄγκος βαρελίου.



Σχ. 94.

Τὸ βαρέλι (σχ. 94) ὁμοιάζει μὲ κύλινδρον, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι εἶναι ἐξωγκωμένον (εἰς τὸ μέσον).

Ὕψος τοῦ βαρελίου εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο βάσεων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ βαρελίου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο βάσεών του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας καὶ προσθέτομεν αὐτά. Κατόπιν λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ βαρελίου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κάτω καὶ μεσαίας βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.***

Ἂν π.χ. ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διάμετρος τῆς κάτω βάσεως τοῦ βαρελίου εἶναι 0,60 μ. καὶ τῆς μεσαίας 0,80 μ. καὶ τὸ ὕψος 2 μ., πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λύσις. Τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο διαμέτρων εἶναι:

$$\frac{0{,}60 + 0{,}80}{2} = 0{,}70 \text{ μ.}$$

Ἐμβαδὸν τῆς βάσεως $0{,}35 \times 0{,}35 \times 3{,}14 = 0{,}3846$ τ. μ.

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ βαρελίου $= 0{,}3846 \times 2 = 0{,}7692$ κ. μ. ἢ 769 κυβικαὶ παλάμαι.

Προβλήματα.

1. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος βαρελίου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 0,85 μ. καὶ τῆς μεσαίας 1,12 μ. καὶ τὸ ὕψος τοῦ βαρελίου 1,90 μ.*

2. *Μία δαμιζάνα χωρεῖ 12 ὀκ. νερὸ καὶ πρόκειται νὰ τὴν γεμίσωμεν μὲ ἔλαιον. Πόσας ὀκάδας θὰ χωρέσῃ;*

3. *Ἓν βαρέλιον ἔχει διάμετρον κάτω βάσεως 0,20 μ. καὶ μεσαίας βάσεως 0,50 μ. καὶ ὕψος 1,30 μ. Πόσας ὀκάδας οἴνου θὰ χωρέσῃ;*

4. *Ἓν βαρέλιον ἔχει ἀκτῖνα κάτω βάσεως 0,40 μ. καὶ ἀκτῖνα μεσαίας βάσεως 0,60 μ. καὶ ὕψος 2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του καὶ πόσον οἶνον χωρεῖ;*

5. *Πόσας ὀκάδας πετρελαίου χωρεῖ κυβικὴ δεξαμενή, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι 5 μέτρα;*

4. Ἔλλειψις.

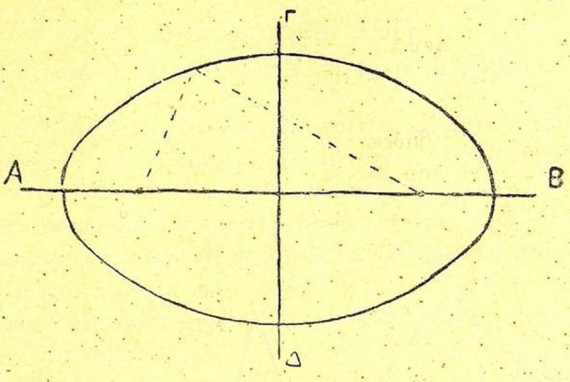
Τὸ κατωτέρω σχῆμα παριστᾷ ἔλλειψιν (σχ. 95). Ὅπως βλέπομεν, ὁμοιάζει μὲ περιφέρειαν κύκλου καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν καμπύλην γραμμήν. Ἐνῷ ὅμως ἡ περιφέρεια εἶναι κυκλική, ἡ ἔλλειψις εἶναι ἐπιμήκης. Αἱ ἀκτῖνες τῆς ἐλλείψεως δὲν εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ὅπως εἰς τὸν κύκλον.

Αἱ διάμετροι ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα λέγονται ἄξονες τῆς ἐλλείψεως. Ὁ μεγαλύτερος ΑΒ λέγεται ***μέγας ἄξων*** τῆς ἐλλείψεως καὶ ὁ μικρότερος ΓΔ λέγεται ***μικρὸς ἄξων*** τῆς ἐλλείψεως.

Διὰ νὰ γράψωμεν ἔλλειψιν εἰς τὸν χάρτην ἢ τὸν πίνακα, καρφώ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νομεν εἰς δύο σημεῖά των ἀπὸ μίαν καρφίτσαν. Τὰ σημεῖα αὐτὰ λέγονται ***ἑστίαι*** τῆς ἐλλείψεως. Κατόπιν δένομεν εἰς αὐτὰ μίαν κλωστήν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ εἶναι μακροτέρα ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο αὐτῶν σημείων. Εἰς τὴν κλωστὴν δίδομεν τόσον μῆκος, ὅσον μῆκος θέλομεν νὰ ἔχῃ ὁ μεγάλος ἄξων τῆς ἐλλείψεως. Ἔπειτα τεντώνομεν τὴν κλωστὴν



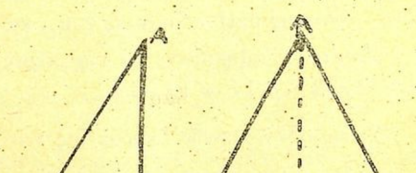
Σχ. 95.

στὴν καὶ περιστρέφομεν αὐτὴν γύρω εἰς τὰ σημεῖα, ὥστε νὰ γράψῃ μὲ τὸ μολύβι ἢ μὲ τὴν κιμωλίαν τὴν καμπύλην γραμμὴν τῆς ἐλλείψεως.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον χαράσσομεν μίαν ἔλλειψιν εἰς τὸ ἔδαφος. Τότε ὅμως μεταχειριζόμεθα σχοινίον, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου δένομεν ἀπὸ ἕνα πάσσαλον καὶ τοὺς καρφώνομεν εἰς τὴν γῆν, ὥστε τὸ σχοινίον νὰ μὴν εἶναι τεντωμένον. Κατόπιν λαμβάνομεν καὶ τρίτον πάσσαλον καὶ μὲ αὐτὸν τεντώνομεν τὸ σχοινίον ὥστε νὰ χαράξῃ τὴν καμπύλην γραμμὴν τῆς ἐλλείψεως.

5. Κῶνος.

Τὸ παραπλεύρως σχῆμα ποὺ βλέπετε (σχ. 96) εἶναι κῶνος. Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΓ, θὰ σχηματισθῇ τὸ κατωτέρω σχῆμα (σχ. 96). Κατὰ τὴν περιστροφὴν ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ τὴν κυκλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Αὐτὸς ὁ κύκλος λέγεται βάσις τοῦ κώνου. Ἡ πλευρὰ ΑΒ θὰ γράψῃ



Σχ. 96.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

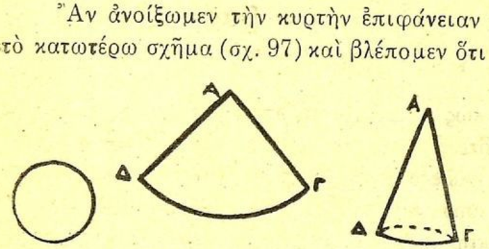
τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΓ τοῦ τριγώνου λέγεται ***ὕψος*** ἢ ***ἄξων τοῦ κώνου*** (ΑΔ). Τὸ ἄκρον Α τοῦ ἄξονος λέγεται ***κορυφὴ*** τοῦ κώνου.

Σχῆμα κώνου ἔχουν μερικαὶ στέγαι οἰκιῶν, αἱ κωνικαὶ σκηναί, τὰ χωνιὰ κ.λ.π.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς αὐτοῦ βάσεως.

Ἂν ἀνοίξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου θὰ σχηματισθῇ τὸ κατωτέρω σχῆμα (σχ. 97) καὶ βλέπομεν ὅτι ἔχει σχῆμα τομέως κύκλου,



Σχ. 97

ἔνθα ὁ τομεὺς ΑΔΓ παριστᾷ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ἡ ἀκτὶς ΑΓ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, τὸ τόξον ΓΔ εἶναι ἴσον κατὰ τὸ μῆκος μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κώνου, τὴν ὁποίαν παριστᾷ εἰς τὸ σχῆμα ὁ κύκλος Ο, ποὺ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως αὐτοῦ. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως τούτου εὑρίσκεται ὅπως ἐμάθαμεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ τόξον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, ἔχοντος ἀκτῖνα βάσεως 2 μ. καὶ πλευρὰν 5 μ.

Λύσις. Εὑρίσκομεν: 1) τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, ἡ ὁποία εἶναι $2 \times 2 \times 3{,}14 = 12{,}56$ μ.

2) ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας $= \dfrac{12{,}56 \times 5}{2} = 31{,}40$ τ. μ. ἢ συντομώτερον $3{,}14 \times 2 \times 5 = 31{,}40$ τ. μ.

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι $(\rho^2 \times \pi) = 2 \times 2 \times 3{,}14 = 12{,}56$ τ. μ.

Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας $= 31{,}40$ τ. μ.

Ἐμβαδὸν ὅλης ἐπιφανείας $= 43{,}96$ τ. μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἑπομένως ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κώνου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας καὶ ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὰ προσθέτομεν.***

Προβλήματα.

1. Πόσα χρήματα θὰ δαπανήσωμεν διὰ νὰ ἐλαιοχρωματίσωμεν τὴν στέγην μιᾶς καλύβης κωνικῆς τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 5,60 μ. καὶ ἡ πλευρά της 3,10 μ., πρὸς 6.000 δρχ. τὸ τετρ. μέτρον ;

Σχέσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν πυραμίδα, ἔχουσαν ὕψος τὸ αὐτὸ καὶ μὲ βάσιν τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν κανονικὸν πολύγωνον.

Ἐγγράφοντες διαδοχικῶς κανονικὰς πολυγωνικὰς πυραμίδας ἐντὸς τοῦ κώνου, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων τῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς διαρκῶς διπλασιάζεται, αὐξάνεται διαρκῶς καὶ τείνει νὰ φθάσῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ὁμοίως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῶν πυραμίδων τείνει νὰ φθάσῃ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

Ὄγκος κώνου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κώνου, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὸν ὡς πολυγωνικὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας ἡ βάσις ἔχει ἀπείρους πλευράς.

Λαμβάνομεν δύο δοχεῖα, ὅπως ἐκάναμεν καὶ διὰ τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, ἀλλὰ τὸ ἕνα νὰ ἔχῃ σχῆμα κώνου, τὸ δὲ ἄλλο τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ἐὰν γεμίσωμεν μὲ ἄμμον τὸ δοχεῖον τοῦ κώνου καὶ χύσωμεν αὐτὴν εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ πρίσματος, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο περιλαμβάνει 3 φορὰς τόσην ἄμμον ὅσην δύναται νὰ περιλάβῃ τὸ δοχεῖον τοῦ κώνου. Ἐξ αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἓν τρίτον ($^1/_3$) τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος, ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Ὥστε : ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, πολλαπλα-***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ λαμβάνομεν τὸ $^1/_3$.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ἀκτῖνα 2,80 μ. καὶ ὕψος 8 μ.

Λύσις. Ἐμβαδὸν βάσεως εἶναι $2{,}80 \times 2{,}80 \times 3{,}14 = 24{,}61$ τ.μ. καὶ ὄγκος κώνου $= 24{,}61 \times \frac{8}{3} = 65{,}62$ κ. μ.

Προβλήματα.

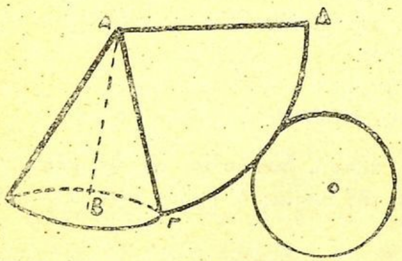
1. Κῶνος ἔχει περιφέρειαν βάσεως 3,40 μ. καὶ ὕψος 2,04 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του καὶ ποῖος ὁ ὄγκος του;

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος βάσεως εἶναι 6 μ. καὶ τὸ ὕψος 6,8 μ.

3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 9 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ 6,28 τ. μ.

Ἰχνογράφησις καὶ κατασκευὴ κώνου.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα κῶνον, σχεδιάζομεν ἐπάνω εἰς ἓν χαρτόνι μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου ἕνα κύκλον μὲ μικρὸν περιθώριον διὰ τὸ κόλλημα, ὅσον μεγάλον θέλομεν, καὶ ἀποκόπτομεν αὐτὸν διὰ ψαλιδίου. Ὁ κύκλος αὐτὸς θὰ ἀποτελέσῃ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.



Σχ. 98.

Κατόπιν σχεδιάζομεν τομέα μὲ ἀκτῖνα ὅση ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου καὶ τόξον ὅση ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου ποὺ θέλομεν νὰ κάμωμεν. Εἰς τὴν μίαν πλευρὰν ἀφήνομεν περιθώριον διὰ τὸ κόλλημα. Ὁ τομεὺς αὐτὸς θὰ ἀποτελέσῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.

Ἀποκόπτομεν καὶ τοῦτον διὰ ψαλιδίου καὶ ἑνώνομεν τὰς δύο ἀκτῖνας του. Τέλος ἐπικολλῶμεν τὴν βάσιν τοῦ κώνου εἰς τὸ ἄνοιγμα τοῦ τομέως καὶ ὁ κῶνος εἶναι ἕτοιμος (σχ. 98).

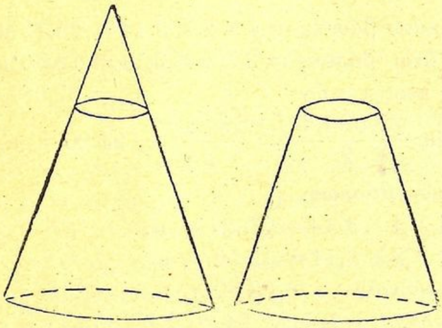
Ἡ κατασκευὴ κώνου ἐκ ξύλου εἶναι δύσκολος. Εὔκολος εἶναι ἡ κατασκευὴ ἐκ πηλοῦ. Γεμίζομεν τὸν χάρτινον κῶνον μὲ πηλὸν καὶ ὅταν ξεραθῇ, σχίζομεν τὸν χάρτινον μὲ προσοχὴν καὶ ὁ πήλινος κῶνος εἶναι ἕτοιμος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κόλουρος κῶνος.

Ἐὰν κόψωμεν ἕνα κῶνον κάτωθι τῆς κορυφῆς μὲ ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του, θὰ σχηματισθῇ ἓν στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον λέγεται ***κόλουρος κῶνος*** (σχ. 99).

Ὁ κόλουρος κῶνος ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν καὶ δύο κυκλικὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας παραλλήλους καὶ ἀνίσους. Αἱ δύο κυκλικαὶ ἐπιφάνειαι εἶναι αἱ βάσεις αὐτοῦ.



Σχ. 99.

Ὕψος τοῦ κολούρου κώνου λέγεται ἡ κάθετος ἡ ὁποία φέρεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν εὐθεῖαν ποὺ ἑνώνει τὰ δύο κέντρα.

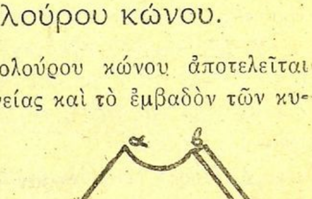
Πλευρὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ποὺ ἑνώνει ἓν σημεῖον τῆς ἄνω περιφερείας μὲ ἓν σημεῖον τῆς κάτω καὶ κεῖται ἐπὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

Σχῆμα κολούρου κώνου ἔχουν διάφορα ἀντικείμενα, ὅπως πολλὰ ποτήρια, ἀνθοδοχεῖα, αἱ γλάστραι τῶν ἀνθέων, ὁ κάδος (κουβᾶς) καὶ ἄλλα.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κολούρου κώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν κυκλικῶν αὐτοῦ βάσεων.

α) ***Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας.*** Σκεπάζομεν μὲ χαρτὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου, κατόπιν ξετυλίγομεν τὸν χάρτην καὶ τὸν ἁπλώνομεν ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Ὁ χάρτης τότε θὰ παρουσιάσῃ τὸ παραπλεύρως ἀνάπτυγμά της (σχ. 100), τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει μὲ τραπέζιον.



Σχ. 100.

Ἡ πλευρὰ αβ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς ἄνω κυκλικῆς βάσεως αὐτοῦ καὶ ἡ πλευρὰ γδ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς κάτω βάσεώς του. Ὕψος δὲ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτοῦ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων. Ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου. Πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιφερειῶν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 2.

Παράδειγμα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς κάτω βάσεως εἶναι 4 μ., τῆς ἄνω 2 μ. καὶ τὸ ὕψος του 5 μέτρα ;

Λύσις. Περιφέρεια κάτω βάσεως $= 4 \times 2 \times 3,14 = 25,12$ μ.
Περιφέρεια ἄνω βάσεως $= 2 \times 2 \times 3,14 = 12,56$ μ.
Σύνολον δύο περιφερειῶν $= 37,68$ μ.

Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας $\dfrac{37,68 \times 5}{2} = \dfrac{188,40}{2} = 94,20$ τ. μ.

β) ***Ἐμβαδὸν κυκλικῶν βάσεων.***
α′ κύκλου $4 \times 4 \times 3,14 = 50,24$ τ. μ.
β′ » $2 \times 2 \times 3,14 = 12,56$ τ. μ.
σύνολον $62,80$ τ. μ.

Προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ καὶ ἔχομεν $94,20 + 62,80 = 157$ τ. μ.

Προβλήματα.

1. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 5 μ. καὶ αἱ περιφέρειαι τῆς μὲν κάτω βάσεως εἶναι 6 μ., τῆς δὲ ἄνω 4 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2 Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς κάτω βάσεως εἶναι 5 μ., τῆς ἄνω 3 μ. καὶ ἡ πλευρὰ 6 μέτρα ;

3. Εἷς κουβᾶς ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου μὲ ἀκτῖνα βάσεων 0,45 μ. καὶ 0,25 μ. καὶ πλευρὰν 0,5 μ. Πόσος τσίγκος ἐχρειάσθη διὰ νὰ γίνῃ καὶ πόσον ἐστοίχισε ἐὰν ὁ τσίγκος τιμᾶται τὸ τετρ. μέτρον δρχ. 8.000 ;

4. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων κολούρου κώνου, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ κάτω βάσις ἔχει ἀκτῖνα 0,50 μ. καὶ ἡ ἄνω 0,25 μ. ;

5. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἰδίου κώνου, ἂν ἡ πλευρά του εἶναι 1,25 ;

Ὄγκος κολούρου κώνου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κολούρου κώνου εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ὄγκον ὁλοκλήρου τοῦ κώνου καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸν ὄγκον τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀποκοπέντος κώνου. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς ὁλοκλήρου κώνου εἶναι 45 κυβ. μέτρα. Ἐὰν ἀποκόψωμεν αὐτὸν κάτωθι τῆς κορυφῆς μὲ μίαν τομὴν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, θὰ σχηματισθῇ εἷς μικρὸς κῶνος, ἡ ἀκτὶς τοῦ ὁποίου μετρηθεῖσα εἶναι 2 μ. καὶ τὸ ὕψος 6,9 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἀποκοπέντος κώνου;

Ὄγκος ἀποκοπέντος κώνου $= \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 2^2 \times 6{,}9 = \frac{3{,}14 \times 4 \times 6{,}9}{3} =$
$= 28{,}888$ κ. μ.

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου $= 45 - 28{,}888 = 16{,}112$ κ.μ.

Προβλήματα.

1. Κόλουρος κῶνος ἔχει ἀκτῖνας βάσεων 0,86 μ. καὶ 0,48 καὶ ὕψος 1,25 μ. Νὰ εὑρεθῇ : α) ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του, β) ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῶν κυκλικῶν αὐτοῦ βάσεων καὶ γ) ποῖος ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

2. Ὑπάρχει μία δεξαμενὴ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 5, 4, 1,30 μ. Χύνομεν ἐντὸς αὐτῆς νερὸ μὲ ἕνα κουβᾶν μὲ ἀκτῖνας βάσεων 0,16 μ. καὶ 0,09 μ. καὶ ὕψος 0,45 μ. Πόσους κουβάδες νερὸ θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή;

3. Πόσον βάρος ἔχει ἡ πέτρα ἑνὸς ἐλαιοτριβείου, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις ἔχουν διάμετρον 0,52 μ. καὶ 0,44 μ. καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 1,30 μέτρα; (Εἰδικὸν βάρος πέτρας 2,7).

Ἀσκήσεις.

1. Γράψατε ἕνα ὄρθιον καὶ ἕνα κόλουρον κῶνον.

2. Δείξατε τὸ ὕψος καὶ τὴν περιφέρειαν τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου.

Κωνικὰ ἀντικείμενα καὶ καταμετρήσεις αὐτῶν.

Σχῆμα κώνου ἔχουν διάφορα χρήσιμα σώματα, π. χ. τὰ χάρτινα χωνιὰ τῶν παντοπωλῶν, χωνιὰ ἀπὸ τενεκὲ χωρὶς σωλῆνα διὰ τὴν μετάγγισιν τῶν ὑγρῶν, διάφοροι σκηναὶ παραθεριζόντων εἰς ἐξοχὰς κατὰ τὸ θέρος, μερικοὶ πύργοι καὶ ἄλλα.

Ἡ καταμέτρησις τῶν διαστάσεων τῶν ἀντικειμένων τούτων γίνεται ὅπως ἐδείχθη προηγουμένως κατὰ τὰς λύσεις σχετικῶν προβλημάτων.

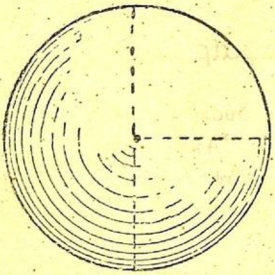
Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κωνικοῦ ἀντικειμένου, ἐπίσης τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοιούτων κωνικῶν ἀντικειμένων, ὡς καὶ τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου ἐπιφανείας κωνικῶν ἀντικειμένων. Ὁμοίως καὶ τὸν ὄγκον ἀντικειμένων κωνικοῦ σχήματος.

6. Σφαῖρα.

Τὸ κατωτέρω σχῆμα παριστάνει σφαῖραν (σχ. 101). Σχῆμα σφαίρας ἔχουν πολλὰ σώματα, ὅπως ἡ ποδόσφαιρα, τὸ πορτοκάλι, τὸ τόπι, ἡ ὑδρόγειος σφαῖρα καὶ ἄλλα.



Σχ. 101.

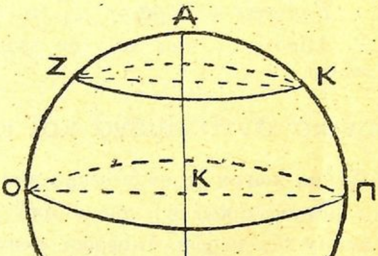
Τὰ σώματα ταῦτα περικλείονται ἀπὸ μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς σφαίρας καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς καὶ λέγεται ***κέντρον τῆς σφαίρας***.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται κάθε εὐθεῖα τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τὸ κέντρον εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτῆς.

Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς καὶ καταλήγει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν περιφέρειαν. Ὅλαι αἱ διάμετροι τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

Κύκλοι τῆς σφαίρας.

Ὅταν κόψωμεν τὴν σφαῖραν μὲ ἓν ἐπίπεδον, ἡ τομὴ ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῇ θὰ εἶναι ***κύκλος***. Ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον της, ὁ κύκλος ποὺ θὰ σχηματισθῇ λέγεται ***μέγιστος κύκλος*** (σχ. 102, ΟΠ). Ὅταν δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον λέγεται ***μικρὸς κύκλος*** (ΖΚ). Οἱ μικροὶ κύκλοι εἶναι ***παράλληλοι*** μὲ τὸν μέγιστον κύκλον. Ὁ μέγιστος κύκλος ποὺ εἶναι κάθετος εἰς τὸν ἄξονα λέγεται ***ἰσημερινός***.



Σχ. 102.

Ὅσον τὸ ἐπίπεδον πλησιάζει πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τόσον ὁ κύκλος τῆς τομῆς γίνεται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεγαλύτερος καὶ ὅσον ἀπομακρύνεται ἀπ' αὐτὸ τόσον γίνεται μικρότερος (σχ. 102).

Ὁ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***ἡμισφαίρια***.

Ἡ διάμετρος ΑΒ μιᾶς σφαίρας Κ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τοὺς παραλλήλους κύκλους ΖΚ, ΟΠ (σχ. 102) λέγεται ***ἄξων*** τοῦ κύκλου τούτου. Τὰ ἄκρα τοῦ ἄξονος Α καὶ Β λέγονται ***πόλοι τῆς σφαίρας***.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας σφαίρας.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας εἶναι πολὺ δύσκολον νὰ κάμωμεν, ὅπως ἐκάμαμεν εἰς τὰ ἄλλα γεωμετρικὰ σώματα. Ἀπὸ μετρήσεις ὅμως ποὺ ἔκαμαν οἱ ἐπιστήμονες εὑρέθη ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς.

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς.***

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της;

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου θὰ εἶναι $2 \times 6{,}28 = 12{,}56$ μ.

Ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου $= \dfrac{12{,}56 \times 2}{2} = 12{,}56$ τ. μ.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $= 12{,}56 \times 4 = 50{,}24$ τ. μ.

Ἀσκήσεις.

1. Ὀνομάσατε σφαιρικὰ σώματα.

2. Δείξατε εἰς τὴν ὑδρόγειον σφαῖραν τοῦ σχολείου σας τὸν Ἰσημερινόν, τοὺς παραλλήλους κύκλους καὶ τοὺς πόλους.

3. Ἰχνογραφήσατε μίαν σφαῖραν καὶ κατασκευάσατε τοιαύτας ἀπὸ πηλόν.

4. Νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,45 μέτρα ἢ διάμετρον 1,62 μ. ἢ περιφέρειαν 2,32 μ.

5. Σφαῖρα μαρμαρίνη ἔχει ἀκτῖνα 0,52 μ. Εὕρετε τὸ βάρος της (εἰδ. βάρος 2,7).

6. Ἕνα τόπι ἔχει ἀκτῖνα 0,8 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

7. Πόσα τετρ. μέτρα ὕφασμα θὰ χρειασθῇ νὰ γίνῃ ἓν σφαιρικὸν ἀερόστατον, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 12 μ.;

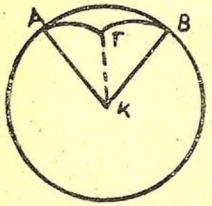
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὄγκος τῆς σφαίρας.

Λαμβάνομεν ἕνα σφαιρικὸν σῶμα, π.χ. ἕνα πορτοκάλι, καὶ χαράσσομεν εἰς τὴν ἐπιφάνειάν του ἓν τρίγωνον (σχ. 103).

Κατόπιν μὲ ἓν λεπτὸν μαχαιράκι βυθίζομεν αὐτὸ εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ποὺ ἐχαράξαμεν, ἕως ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ κέντρον Κ τοῦ πορτοκαλλιοῦ.

Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸ μέρος ΑΒΚΓ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέρος αὐτὸ ἔχει σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ πορτοκαλιοῦ, τὸ ΑΒΓ, καὶ ὕψος ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ΑΚ καὶ κορυφὴ τὸ κέντρον Κ τοῦ πορτοκαλιοῦ - σφαίρας.



Σχ. 103.

Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ κόψωμεν τὸ πορτοκάλι καθὼς καὶ κάθε σφαῖραν εἰς ἀπείρους τριγωνικὰς πυραμίδας, ποὺ κορυφὴν ἔχουν τὸ κέντρον Κ τοῦ πορτοκαλλιοῦ - σφαίρας, ὕψος δὲ τὰς ἀκτῖνάς της καὶ βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πορτοκαλιοῦ - σφαίρας. Ἑπομένως:

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εὑρίσκεται, ἂν ***πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνά της καὶ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ 3.***

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 3 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

Λύσις. Ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου της εἶναι $3 \times 3 \times 3{,}14 = 28{,}26$ τ.μ.

Ἐμβαδ. ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $28{,}26 \times 4 = 113{,}04$ τ. μ.

Ὄγκος τῆς σφαίρας $\dfrac{113{,}04 \times 3}{3} = 113{,}04$ κ. μ.

Προβλήματα.

1. Ἡ διάμετρος σφαίρας εἶναι 4 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.

2. Ὁ μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαίρας ἔχει περιφέρειαν 4,71 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

3. Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 3,10 μ. Εὕρετε τὴν ἐπιφάνειάν της καὶ τὸν ὄγκον της.

4. Ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς εἶναι 40.000 χιλιόμετρα. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος καὶ πόση ἡ ἐπιφάνειά της;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

7. Μέτρησις μὴ γεωμετρικῶν σωμάτων.

Ὅλα τὰ σώματα τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν ἕως τώρα εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο λέγονται ***γεωμετρικά***. Δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν διαστάσεις.

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ σώματα τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὰς τρεῖς διαστάσεις. Π.χ. μία ἀκανόνιστος πέτρα. Τὰ σώματα ταῦτα δὲν εἶναι γεωμετρικά.

Τὸν ὄγκον τῶν σωμάτων τούτων εὑρίσκομεν κατὰ διαφόρους τρόπους. Π.χ.

α) Λαμβάνομεν δοχεῖον κανονικόν, πλῆρες ὕδατος. Θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ ἀκανόνιστον σῶμα, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον. Τὸ σῶμα τοῦτο ἐκτοπίζει ὕδωρ, τὸ ὁποῖον χύνεται ἐντὸς λεκάνης. Ἀφαιροῦμεν τότε τὸ σῶμα ἀπὸ τὸ δοχεῖον καὶ βλέπομεν πόσον μέρος τοῦ δοχείου μένει κενόν. Ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τούτου εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

β) Λαμβάνομεν πάλιν δοχεῖον κανονικὸν καὶ γνωστῆς χωρητικότητος. Θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ σῶμα τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ μετρήσωμεν καὶ γεμίζομεν τὸ δοχεῖον μὲ ἄμμον. Ἀφαιροῦμεν πάλιν τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

8. Διάφοροι ἐφαρμογαί.

1) Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου ἀπὸ τὴν σκιάν του.

Μετροῦμεν εἰς ὡρισμένην στιγμὴν τὴν σκιὰν τοῦ δένδρου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι 3,40 μέτρα. Πλησίον τοῦ κορμοῦ τοῦ δένδρου στηρίζομεν μίαν ὀρθίαν ράβδον ὕψους ἑνὸς μέτρου καὶ μετροῦμεν τὴν σκιάν της. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι 0 65 μ. Τὸ ὕψος τοῦ δένδρου εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἑξῆς ἀναλογίας:

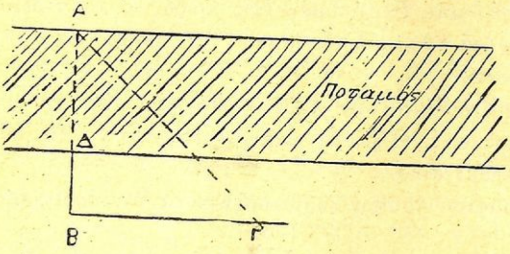
Σκιὰ 0,65 μ. προέρχεται ἀπὸ τὸ ὕψος 1 μέτρου
» 3,40 μ. ἀπὸ πόσον ὕψος θὰ προέλθῃ;

2) Πῶς εὑρίσκομεν τὸ πλάτος ποταμοῦ.

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ξηρᾶς καὶ πλησίον τοῦ ποταμοῦ τὸ σημεῖον Β. Ἔπειτα καθορίζομεν ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ὄχθης τοῦ ποταμοῦ καὶ ἀκριβῶς ἀπέναντι τοῦ σημείου Β τὸ σημεῖον Α. (σχ. 104.)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τῆς φανταστικῆς γραμμῆς ΑΒ, τὴν ΒΓ. Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ὀρθὴ γωνία. Ἂν ἑνώσωμεν φανταστικῶς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ ὑπὸ γωνίαν 45°, τότε ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὴν ΑΓ ἀφαιρέσωμεν τὴν ΒΔ, ἐκεῖνο ποὺ θὰ μείνῃ θὰ εἶναι τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ (σχ. 104).



Σχ. 104.

Διάφορα προβλήματα.

1. *Κατασκευάσατε ἀμβλυγώνιον τρίγωνον μὲ ἀμβλεῖαν γωνίαν 140°.*

2. *Κατασκευάσατε τετράγωνον πλευρᾶς 9,48 μ. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.*

3. *Χωρίσατε ὀρθογώνιον οἰκόπεδον βάσεως 28,50 μ. καὶ ὕψους 12,20 μ. εἰς 3 ἴσα μέρη.*

4. *Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1,30 μ. ἐγγράφεται τετράγωνον. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου;*

5. *Ἐντὸς τετραγώνου πλευρᾶς 3,40 μ. ἐγγράφομεν κύκλον. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τούτου;*

6. *Κυκλικὴ πλατεῖα πλευρᾶς 42 μέτρων πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικοὺς λίθους πλευρᾶς 0,28 μ. Πόσοι θὰ χρειασθοῦν;*

7. *Ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 125 μ. καὶ 89 μ. ἐμοιράσθη ἐξ ἴσου μεταξὺ 4 κληρονόμων. Λογαριάσατε.*

8. *Κυλινδρικὸν δοχεῖον μὲ ἀκτῖνα βάσεως 8,23 μ. καὶ ὕψος 0,88 μ. πόσον γάλα περιλαμβάνει; (Νὰ μάθετε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ γάλακτος).*

9. *Εἷς πηγαδᾶς ἤνοιξε 0,92 μ. τὸν διαβήτην του καὶ ἐσημάδευσε τὸν κύκλον ἑνὸς πηγαδίου, τὸ ὁποῖον ἔσκαψε εἰς βάθος 18 μέτρων. Πόσον ὕδωρ δύναται νὰ περιλάβῃ τὸ πηγάδι ὅταν θὰ εἶναι γεμᾶτο;*

10. *Σφαῖρα σιδηρᾶ ἔχει ἀκτῖνα 0,99. Εὕρετε τὸ βάρος της.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1513

ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ Δ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ
ΔΗΜΟΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ

Γεωμετρία

Ε' κ ΣΤ' Δημοτικού

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΠΕΤΡΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Δ)ΣΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

'Αριθ. Πρωτ. 61.330 — 'Αθῆναι τῇ 20 'Ιουνίου 1952

Πρὸς τὸν κ.
Π. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΝ
Πεσμαζόγλου 9

'Ενταῦθα

'Ανακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ 'Υπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου τῆς 'Εκπαιδεύσεως, ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Γεωμετρίας διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου, συμμορφούμενος πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ 'Εκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Κοινοποίησις :
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

'Εντολῇ 'Υπουργοῦ
'Ο Διευθυντής
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

ΕΚΤΥΠ "Β. ΠΑΠΑΧΡΥΣΑΝΘΟΥ"

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής