Α. ΚΟΝΤΟΜΑΡΗ – Α. ΜΠΑΜΠΑΛΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΜΠΤΗ ΤΑΞΗ
ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ ΕΚΔΟΣΗ

ΕΚΔΟΤΗΣ: ΠΕΤΡΟΣ Κ. ΡΑΝΟΣ
ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5ε – ΑΘΗΝΑΙ
1948

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο ἔχει τὴν ὑπογραφὴ τοῦ ἑνὸς ἢ καὶ τῶν δύο συγγραφέων.

Τύποις: Κ. Σ. ΠΑΠΑΔΟΓΙΑΝΝΗ, Ψαρῶν 41 — Ἀθῆναι

Τί εἶναι ἡ Γεωμετρία

Στὴ φυσικὴ μάθαμε ὅτι ὅλα τὰ πράγματα, ποὺ εἶναι σ' αὐτὸν τὸν κόσμον, χωρίζονται σὲ τρεῖς κατηγορίες· **στερεά, ὑγρὰ** καὶ **ἀέρια**.

Ποιὰ εἶναι στερά, ποιὰ ὑγρά, ποιὰ ἀέρια τὸ μάθαμε στὴ φυσική. Ἂν δὲν τὸ ξέρῃς, ρώτησε τὸ δάσκαλό σου ἢ ἕνα συμμαθητή σου. Ἀπὸ τί εἶναι καμωμένα τὰ διάφορα πράγματα τὸ ἐξετάζουν ἄλλα μαθήματα. Ἡ Γεωμετρία ἐξετάζει μόνον τὸ σχῆμα τους, τὴν ἔκτασή τους καὶ τὸ μέγεθός τους. Ἀλλὰ μόνιμο σχῆμα, ἔκταση καὶ μέγεθος ἔχουν μόνον τὰ **στερεὰ** πράγματα τὰ ὁποῖα στὴ Γεωμετρία τὰ λέμε **σώματα**.

Ἡ Γεωμετρία λοιπὸν εἶναι τὸ μάθημα ποὺ ἐξετάζει τὸ σχῆμα, τὴν ἔκταση καὶ τὸ μέγεθος τῶν στερεῶν σωμάτων.

Σώματα

Κάθε σῶμα ἔχει τὸ **σχῆμα** του, ἔχει τὴν **ἔκτασή** του καὶ τὸ **μέγεθός** του.

Τὰ σώματα ἔχουν διάφορα σχήματα. Ἄλλο σχῆμα ἔχει ἕνα μολύβι καὶ ἄλλο σχῆμα ἔχει ἕνα βιβλίο.

Ἡ ἔκταση τοῦ σώματος δὲν εἶναι σ' ὅλα τὰ σώματα ἡ ἴδια. Ἡ ἔκταση τοῦ σώματος στὴ Γεωμετρία λέγεται **ἐπιφάνεια.** Τὰ σώματα δὲν ἔχουν ὅλα οὔτε τὸ ἴδιο μέγεθος. Τὸ μέγεθος στὴ Γεωμετρία λέγεται **ὄγκος** τοῦ σώματος. Τὸ μέγεθος τοῦ σώματος φαίνεται ἀπὸ τὸ χῶρο ποὺ πιάνει ἕνα σῶμα. Ἄλλα πιάνουν μεγαλύτερο χῶρο καὶ ἄλλα μικρότερο. Ἔτσι ὁ χῶρος ποὺ πιάνουν δείχνει τὸ μέγεθος, τὸν **ὄγκο** δηλαδὴ τοῦ σώματος· ὥστε :

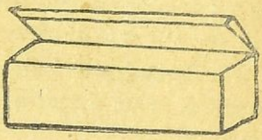
Ὁ χῶρος ποὺ πιάνει κάθε σῶμα λέγεται ὄγκος τοῦ σώματος.

Κάθε σῶμα πιάνει δικό του χῶρο· ἔτσι κάθε σῶμα ἔχει δικό του ὄγκο. Δύο σώματα δὲν χωροῦν στὸν ἴδιο χῶρο.

Τὸ σχῆμα τῶν σωμάτων εἶναι **κανονικό**, ὅπως εἶναι τὸ βιβλίο, ὁ πίνακας, οἱ σωλῆνες τῆς σόμπας, καὶ **ἀκανόνιστο**, ὅπως εἶναι ἡ πέτρα, τὸ δένδρο, τὸ μάρμαρο. Τὰ περισσότερα σώματα εἶναι ἀκανόνιστα· ὁ ἄνθρωπος ὅμως δίνει σ' αὐτὰ σχῆμα κανονικό, ἀνάλογο μὲ ἐκεῖνο ποὺ τοῦ χρειάζεται.

Ἡ ἔκταση τοῦ σώματος, ἡ **ἐπιφάνεια**, δὲν εἶναι σ' ὅλα τὰ σώματα ἡ ἴδια· σ' ἄλλα εἶναι **ὁμαλή**, ὅπως ὁ καθρέπτης, ὁ πίνακας, τὸ βιβλίο· σ' ἄλλα εἶναι **ἀνώμαλη**, ὅπως ἡ πέτρα. Οἱ ἄνθρωποι κάνουν καὶ τὴν ἀνώμαλη ἐπιφάνεια ὁμαλή, ὅταν τοὺς χρειάζεται.

Κάθε σῶμα ἔχει καὶ τὸ ἐσωτερικό του καὶ τὸ ἐξωτερικό του· π.χ. ἔχομε ἕνα μπαοῦλο (σχ. 1).



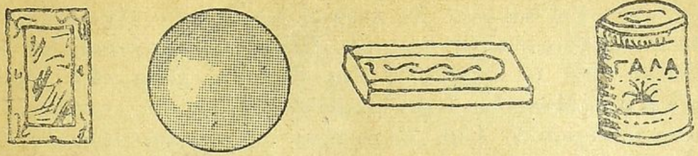
Σχ. 1.

Τὸ ἐξωτερικό του τὸ βλέπομε, τὸ ἐσωτερικό του ὄχι. Αὐτὸ ποὺ βλέπομε σ' ὅλες τὶς μεριὲς εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του. Ἂν προσέξωμε καλὰ θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ μπαοῦλο ἔχει ἕνα μέρος πιὸ μακρὺ ἀπὸ τὰ ἄλλα. Ἡ ἀπόσταση αὐτὴ εἶναι τὸ μάκρος του, τὸ ὁποῖο στὴ Γεωμετρία λέγεται **μῆκος**. Τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μπαούλου εἶναι στενό· ἡ ἀπόσταση αὐτὴ λέγεται **πλάτος** καὶ ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὸ κάτω μέρος τοῦ μπαούλου ὡς τὸ ἐπάνω μέρος λέγεται **ὕψος**. Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσωμε σὲ κάθε σῶμα· ὥστε κάθε σῶμα θὰ ἔχῃ **μῆκος**, **πλάτος** καὶ **ὕψος**.

Τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ **τὸ ὕψος** λέγονται μ' ἕνα ὄνομα **διαστάσεις** τοῦ σώματος.

Ἐπιφάνεια

Τὸ ὄνομά της δείχνει τί εἶναι. Εἶναι ὅλο αὐτὸ ποὺ φαίνεται ἀπ' ἔξω ἀπὸ τὸ σῶμα. Ἂς πάρωμε διάφορα σώματα γιὰ νὰ ἰδοῦμε τὴν ἐπιφάνειά τους (σχ. 2).



Σχ. 2.

Ἂν πάρουμε τὸ α΄ σχῆμα, ποὺ εἶναι ἕνας καθρέπτης καὶ τεντώσωμε ἐπάνω μιὰ κλωστή, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἡ κλωστὴ ἐγγίζει σ᾽ ὅλη τὴν ἐπιφάνεια.

Αὐτὴ ἡ ἐπιφάνεια λέγεται **ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.**

Ἂν πάρωμε τὸ β΄ σχῆμα, εἶναι ἕνα μεγάλο τόπι, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἡ κλωστὴ δὲν ἐγγίζει σχεδὸν πουθενά. Αὐτὴ ἡ ἐπιφάνεια· λέγεται **καμπύλη ἐπιφάνεια ἢ κυρτή.**

Ἂν πάρωμε τὸ γ΄ σχῆμα, ποὺ εἶναι μιὰ ἀνοικτὴ κασετίνα, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἔχει πολλὰ τσακίσματα. Αὐτὴ ἡ ἐπιφάνεια λέγεται **τεθλασμένη ἐπιφάνεια.**

Ἂν πάρωμε τὸ δ΄ σχῆμα, ποὺ εἶναι ἕνα κουτὶ κονσέρβας, θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ ἐπάνω καὶ κάτω μέρος τοῦ κουτιοῦ εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, τὸ δὲ ἄλλο μέρος εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια, ὅπως τοῦ σωλῆνα.

Αὐτὸ τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας λέγεται **μικτὴ ἐπιφάνεια.**

Ἔχουμε καὶ ἕνα εἶδος ἐπιφανείας ποὺ δὲν μοιάζει μὲ καμμιὰ ἀπὸ τὶς ἐπιφάνειες ποὺ εἴπαμε, ἀλλὰ ἔχει πολλὲς καὶ διάφορες ἀνωμαλίες. Αὐτὴ μὲ ἕνα ὄνομα λέγεται **ἀνώμαλη ἐπιφάνεια.**

Νὰ βρῇς μόνος σου σώματα καὶ νὰ γράψῃς στὸ τετράδιό σου τί εἶδος ἐπιφάνεια ἔχει τὸ καθένα.

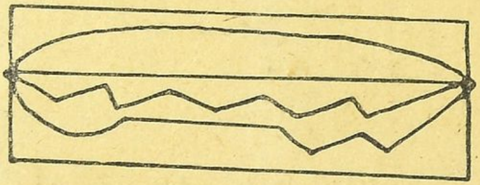
Ἀνάλογο μὲ τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας εἶναι καὶ τὸ σχῆμα κάθε σώματος.

Γραμμαί.

Ἂν πάρωμε μιὰ κόλλα χαρτὶ καὶ τὴν διπλώσωμε σ᾽ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ σχηματίζουμε μιὰ κόψη· αὐτὴ λέγεται **γ ρ α μ μ ή**· ἂν πάρωμε ἕνα σημεῖο στὴν ἄκρη μιᾶς ἐπιφανείας καὶ ἕνα σημεῖο στὴν ἄλλη ἄκρη τῆς ἐπιφανείας καὶ ἑνώσωμε αὐτὰ τὰ σημεῖα μὲ ἕνα νῆμα, τὸ νῆμα αὐτὸ λέγεται **γ ρ α μ μ ή**. Μποροῦμε ἀντὶ νήματος νὰ ἑνώσωμε τὰ σημεῖα καὶ μὲ μιὰ σειρὰ μὲ μολύβι. Αὐτὸ τὸ χάραγμα τοῦ μολυβιοῦ λέγεται **γραμμή**. Ἐὰν ἔχωμε δύο ἐπιφάνειες, π. χ. δύο τζάμια, καὶ τὰ ἑνώσωμε, τὸ μέρος ποὺ γίνεται ἡ ἕνωση λέγεται **γ ρ α μ μ ή**.

Εἴδη γραμμῶν.

Παίρνομε τὴν ἐπάνω ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζιοῦ μας: (σχ. 3).



Σχ. 3.

Ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, ἐκεῖ ποὺ εἶναι τελεία, θέλω νὰ τὰ ἑνώσω μὲ τὸ ἄλλο σημεῖο ποὺ εἶναι στὸ ἄλλο ἄκρο τῆς ἐπιφανείας, ἐκεῖ ποὺ εἶναι ἡ ἄλλη τελεία, μὲ μιὰ γραμμὴ ἢ μὲ διάφορες γραμμὲς χωρὶς νὰ ἐγγίζῃ ἡ μία τὴν ἄλλη. Ἂς δοκιμάσω. Τὰ ἕνωσα μὲ 4 λογιῶν γραμμές. Κάθε γραμμὴ τὴν ὁρίζω μὲ δυὸ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἕνα στὸ ἕνα ἄκρο καὶ ἕνα στὸ ἄλλο. Ἔτσι θὰ γνωρίζωμε τὴ γραμμή.

Ἔτσι βλέπομε πὼς ἔχομε 4 λογιῶν γραμμές, **εὐθεῖα**, **καμπύλη**, **τεθλασμένη** καὶ **μικτή**.

Τώρα μπορεῖς καὶ μόνος σου νὰ γνωρίσῃς τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν, γιατί:

1) **Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ** εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ μᾶς δίνει ἡ τεντωμένη κλωστὴ ἢ σύρμα τοῦ τηλεγράφου.

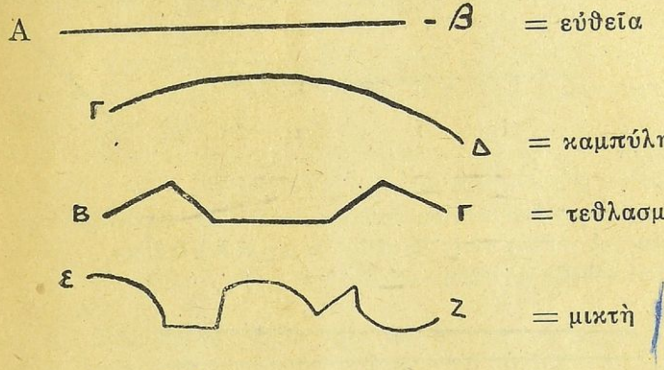
2) **Ἡ καμπύλη γραμμὴ** εἶναι ἐκείνη ποὺ κανένα μέρος της ὁσονδήποτε μικρὸ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

3) **Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ** εἶναι ἐκείνη ποὺ γίνε-

ται ἀπὸ πολλὲς εὐθεῖες χωρὶς νὰ εἶναι ὅλη γραμμὴ εὐθεῖα.

4) Ἡ **μικτὴ γραμμὴ** εἶναι ἐκείνη ποὺ γίνεται ἀπὸ εὐθεῖες καὶ καμπύλες γραμμές.

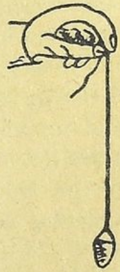
Ἂς ξεχωρίσωμε παρακάτω κάθε εἶδος γραμμῆς ἀπὸ τὶς 4 παραπάνω γραμμές :



Ἰδιότητες γραμμῶν

Οἱ κτίστες ὅταν θέλουν νὰ ἰδοῦν ἂν ὁ τοῖχος ποὺ ἔκτισαν εἶναι εὐθεῖα γραμμή, παίρνουν ἕνα σπάγγο, ποὺ εἰς τὸ κάτω ἄκρο ἔχει ἕνα βάρος γιὰ νὰ μένη τεντωμένο τὸ νῆμα.

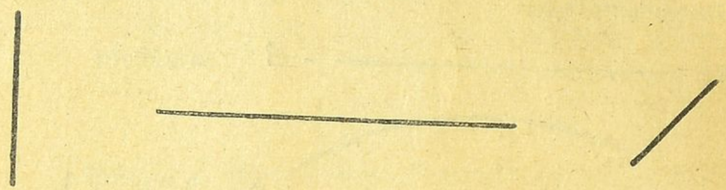
Αὐτὸ λέγεται **νῆμα στάθμης**: (σχ. 4).



Σχ. 4.

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ποὺ σχηματίζεται ὅταν τεντώσωμε τὸ νῆμα τῆς στάθμης λέγεται **γραμμὴ κατακόρυφος**. Ἡ κατακόρυφος γραμμή, ὅπως βλέπεις, εἶναι πάντοτε εὐθεῖα. Ὅλαι αἱ εὐθεῖαι ποὺ ἔχουν τὸ σχῆμα τοῦ νήματος τῆς στάθμης λέγονται κατακόρυφοι. Πάντα ἡ κατακόρυφος γραμμὴ ἔχει διεύθυνση ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω.

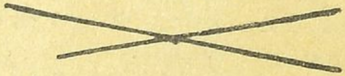
Ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἔχει διεύθυνση ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ὅπως εἶναι ἡ διεύθυνση τοῦ στεκούμενου νεροῦ, λέγεται **ὁ ρ ι ζ ο ν τ ί α** καὶ κάθε σῶμα ποὺ ἔχει αὐτὴ τὴ διεύθυνση λέγεται ὁριζόντιο. Ἡ εὐθεῖα, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφος οὔτε ὁριζοντία, λέγεται **π λ α γ ί α.**



Ὅταν ἔχωμεν δύο εὐθεῖες, ποὺ ὅσο κι᾽ ἂν τὶς ἐκτείνωμεν δὲν συναντῶνται, οἱ εὐθεῖες αὐτὲς λέγονται **π α ρ ά λ λ η λ ο ι.**

Νὰ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι.

Ὅταν ὅμως συναντῶνται, τότε δὲν εἶναι παράλληλοι, ὅπως αὐτές:



Ὅταν ἔχωμεν μίαν κατακόρυφον εὐθεῖαν καὶ τὴν ἑνώσωμεν εἰς ἕνα σημεῖον μὲ μίαν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν, τότε οἱ δύο αὐτὲς εὐθεῖες λέγονται κάθετοι.

Οἱ εὐθεῖες ἔχουν μόνον μῆκος. Τὸ γιατὶ τὸ καταλαβαίνεις μόνος σου. Ὅλες οἱ εὐθεῖες μετροῦνται μὲ τὰ μέτρα μήκους. Θυμήσου ποιὰ εἶναι τὰ μέτρα μήκους καὶ γράψε τα στὸ τετράδιό σου. Θὰ σοῦ χρειασθοῦν.

Ἀπάντησε στὶς παρακάτω ἐρωτήσεις καὶ γράψε τες στὸ τετράδιό σου.

1) Γιὰ ποιὰ σώματα ἐνδιαφέρεται ἡ Γεωμετρία ;

2) Τί εἶναι ὄγκος τοῦ σώματος ;

3) Τί εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ;

4) Πόσων λογιῶν ἐπιφάνειες ἔχομε καὶ προσπάθησε νὰ βρῆς τὰ δύο σώματα γιὰ κάθε εἶδος ἐπιφανείας.

5) Πόσες διαστάσεις ἔχουν τὰ στερεὰ σώματα καὶ ποιές;

6) » » » οἱ ἐπιφάνειες καὶ ποιές;

7) Πόσων λογιῶν γραμμὲς ἔχουμε;

8) Νὰ βρῆς γραμμὲς εὐθεῖες. Νὰ βρῆς παραδείγματα καὶ ἀπὸ τὰ ἄλλα εἴδη τῶν γραμμῶν.

9) Ζωγράφισε τὸ νῆμα τῆς στάθμης καὶ πὲς γιατί χρειάζεται;

10) Πάρε τὸ χάρακά σου καὶ πὲς πότε εἶναι κατακόρυφος, πότε ὁριζόντιος καὶ πότε πλάγιος;

11) Πάρε δύο χάρακες καὶ τοποθέτησέ τους νὰ εἶναι παράλληλοι, νὰ εἶναι κάθετοι, νὰ μὴν εἶναι οὔτε παράλληλοι, οὔτε κάθετοι.

12) Μέτρησε τὸ μῆκος τοῦ θρανίου σου· μέτρησε καὶ τὸ πλάτος του.

13) Μέτρησε τὸ μῆκος τοῦ δωματίου σου, τὸ πλάτος του καὶ τὸ ὕψος του.

14) Μέτρησε τὴ γραμμή, ποὺ ἑνώνει τοὺς δύο τοίχους τοῦ δωματίου σου.

Κύβος.

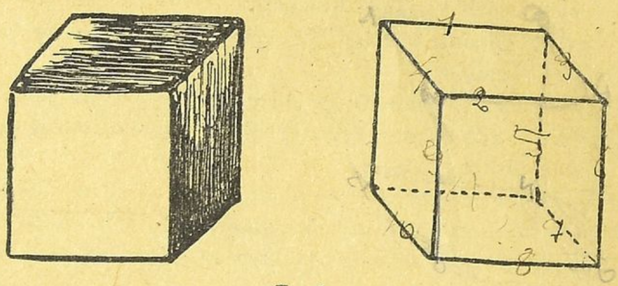
Ἔχεις μπροστά σου αὐτὸ τὸ σῶμα (σχ. 5). Κοίταξέ το καλά. Θὰ ἰδῆς ὅτι ἔχει σχῆμα **κανονικό**. Ἔχει **ὄγκο**, ἀφοῦ πιάνει ἕνα χῶρο. Ἡ ἐπιφάνειά του, ὅπως βλέπεις, εἶναι τεθλασμένη, γιατὶ τσακίζεται. Τὸ τσάκισμα θὰ φανῆ καλὰ σ' ἕνα κύβο, ποὺ εἶναι καμωμένος ἀπὸ χαρτόνι. Κοίταξε καλὰ τὴν ἐπιφάνεια, εἶναι σ' ὅλα τὰ μέρη ὁμαλή.

Ἂν μετρήσωμε τὶς διαστάσεις του, **μῆκος**, **πλάτος** καὶ **ὕψος**, θὰ ἰδοῦμε ὅτι καὶ οἱ τρεῖς εἶναι ἴσες. Δοκίμασε καὶ μέτρησέ τες. Αὐτὸ τὸ σῶμα λέγεται **κύβος**.

Κύβος εἶναι τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ ἔχει καὶ τὶς τρεῖς διαστάσεις του, μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος, ἴσες.

Ἐπιφάνεια τοῦ κύβου. Ἂν προσέξωμε καλὰ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἶναι καμωμένη ἀπὸ 6 ἐπιφάνειες ἐπίπεδες, ὁμαλὲς καὶ κανονικές. Μέτρησέ τες. Πάρε καὶ τὸ μέτρο καὶ κοίταξε ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες. Ἔχουν ὅλες τὸ ἴδιο μῆκος καὶ πλάτος. Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς ἐπιφάνειες αὐτὲς λέγεται ἕ δ ρ α.

Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει ἕξη ἕδρες ἴσες.



Σχ. 5.

Ἂν προσέξωμε καλὰ τὶς ἕδρες τοῦ κύβου, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι κάθε δύο ἀπ᾽ αὐτὲς συναντῶνται σὲ μιὰ γραμμὴ εὐθεῖα. Αὐτὴ ἡ γραμμὴ λέγεται **ἀ κ μ ή**. Μέτρησε τὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου. Ἂν τὶς μετρήσῃς καλὰ θὰ ἰδῇς ὅτι ἔχει 12 ἀκμές.

Ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμὲς ἴσες. Ἂν πάρωμε τὸ μέτρο καὶ μετρήσωμε τὶς ἀκμές, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες.

Ἂν προσέξωμε καλὰ θὰ ἰδοῦμε ὅτι ὁ κύβος ἔχει στὶς ἄκρες σημεῖα μυτερά. Σὲ κάθε τέτοιο σημεῖο συναντῶνται τρεῖς ἕδρες τοῦ κύβου. Πρόσεξε καλὰ νὰ ἰδῇς αὐτὰ τὰ σημεῖα. Μέτρησέ τα. Ἂν τὰ μετρήσῃς καλά, θὰ ἰδῇς ὅτι εἶναι ὀκτώ. Κάθε τέτοιο σημεῖο λέγεται **κ ο ρ υ φ ή**.

Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφές.

Πρόσεξε καλὰ τὴν ἐπάνω ἕδρα καὶ τὴν κάτω ἕδρα τοῦ κύβου. Εἶναι καὶ οἱ δύο **ὁ ρ ι ζ ό ν τ ι ε ς**, γιατὶ ὅπως εἴπαμε ἔχουν τὴ διεύθυνση, ποὺ ἔχει τὸ στεκούμενο νερό. Ὅλες οἱ ἐπιφάνειες ποὺ ἔχουν αὐτὴ τὴ διεύθυνση λέγονται ὁριζόντιες.

Κοίταξε τώρα τὶς 4 ἄλλες ἕδρες τοῦ κύβου, θὰ ἰδῇς ὅτι ὅλες ἔχουν τὴ διεύθυνση, ποὺ ἔχει τὸ νῆμα τῆς στάθμης, γι᾽ αὐτὸ λέγονται **κ α τ α κ ό ρ υ φ ε ς**. Ἔτσι λέγονται ὅλες οἱ ἐπιφάνειες, ποὺ ἔχουν αὐτὴ τὴ διεύθυνση.

Πρόσεξε ἀκόμη δυὸ - δυὸ τὶς ἕδρες τοῦ κύβου. Πρῶτα τὴν ἐπάνω καὶ τὴν κάτω. Ἂν αὐτὲς τὶς δυὸ ἕδρες τὶς προεκτείνωμε στὴν ἴδια διεύθυνση δὲν θὰ συναντηθοῦν ποτέ. Εἶναι λοιπὸν οἱ δυὸ αὐτὲς μεταξύ των **παράλληλες**. Τὸ ἴδιο θὰ συμβῆ μὲ τὴ δεξιὰ καὶ μὲ τὴν ἀριστερή, τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὴν ἐμπρὸς καὶ ὀπίσω. **Ὥστε κάθε δυὸ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι παράλληλες.**

Οἱ τεχνῖτες ποὺ θέλουν νὰ ἰδοῦν ἂν μιὰ ἐπιφάνεια εἶναι κατακόρυφος, ἔχουν **τὸ νῆμα τῆς στάθμης**, φρόντισε νὰ ἰδῆς ἕνα νῆμα στάθμης, ἢ κάμε το καὶ μόνος σου, εἶναι εὔκολο. Ἂν θέλουν νὰ ἰδοῦν ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζοντία ἔχουν ἕνα ἄλλο ἐργαλεῖο, ποὺ λέγεται **ἀλφάδι**. Πρέπει νὰ τὸ ἰδῆς τὸ ἀλφάδι. Παρακάλεσε τὸ δάσκαλό σου νὰ σοῦ δείξη τὸ ἀλφάδι.

Ἂς ἐπαναλάβωμε μὲ λίγα λόγια τὶ εἴπαμε γιὰ τὸν κύβο.

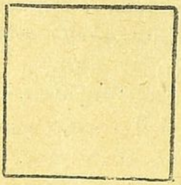
1) Ὁ κύβος εἶναι σῶμα κανονικό.
2) Ἔχει τρεῖς διαστάσεις ἴσες.
3) Ἔχει ἕξη ἕδρες ἴσες.
4) Ἔχει 12 ἀκμὲς ἴσες.
5) Ἔχει 8 κορυφές.
6) Ἡ ἀπάνω καὶ ἡ κάτω ἕδρες εἶναι ὁριζόντιες.
7) Οἱ ἄλλες 4 ἕδρες εἶναι κατακόρυφες.
8) Κάθε δυὸ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι παράλληλες.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ βρῆς σώματα, ποὺ νὰ ἔχουν τὸ σχῆμα τοῦ κύβου.
2) Νὰ κάμης ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύβο.
3) Νὰ βρῆς ἐπιφάνειες ὁριζόντιες.
4) Νὰ βρῆς ἐπιφάνειες κατακόρυφες.
5) Νὰ βρῆς ἐπιφάνειες παράλληλες.
6) Νὰ κάμης ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύβο μὲ διαστάσεις 0,10 τοῦ μέτρου.

Τετράγωνο.

Ἂν πάρωμε ἕνα κύβο ἀπὸ χαρτόνι καὶ κόψωμε τὶς ἕδρες του στὶς ἀκμὲς καὶ τὶς χωρίσωμε, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ὅλα τὰ κομμάτια εἶναι ἴσια καὶ ἔχουν τὸ ἴδιο σχῆμα. Νὰ τὸ σχῆμα μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου (σχ. 6). Τὸ σχῆμα αὐτὸ ἔχει γύρω - γύρω 4 γραμμὲς ἴσες.



Σχ. 6.

Οἱ γραμμὲς αὐτὲς λέγονται **πλευρές**. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **τετράγωνο**. Οἱ 4 πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες. Μέτρησέ τες. Εἶναι ὅμως καὶ κάθετες μεταξύ των. Ἀκόμη οἱ δύο ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι παράλληλες. Ὥστε :

Τετράγωνο εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει 4 πλευρὲς ἴσες, κάθετες μεταξύ των καὶ τὶς δύο ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες.

Οἱ 4 πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, ὅπως βλέπομε, εἶναι γραμμὲς εὐθεῖες καὶ ἴσες. Ἂν μετρήσωμε μία - μία χωριστὰ καὶ ἑνώσωμε κατόπιν τὰ μήκη καὶ τῶν τεσσάρων πλευρῶν θὰ βροῦμε τὸ μῆκος ὅλου τοῦ γύρω - γύρω μέρους τοῦ τετραγώνου. Αὐτό, ποὺ θὰ βροῦμε, λέγεται **περίμετρος τοῦ τετραγώνου**. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ 4 πλευρὲς εἶναι ἴσες μετροῦμε μόνο τὴ μία καὶ τὸ μῆκος της τὸ πολλαπλασιάζουμε ἐπὶ 4. Ὥστε :

Περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν 4 πλευρῶν του.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, ἐπειδὴ εἶναι γραμμὲς ποὺ ἔχουν μόνο μῆκος, χρησιμοποιοῦμε τὰ μέτρα τοῦ μήκους. Ποιὰ εἶναι αὐτὰ τὰ ἔμαθες στὴν Ἀριθμητική. Ἂν τὰ ξέχασες φρόντισε νὰ τὰ θυμηθῇς.

Προβλήματα.

1) Γράψε μὲ μολύβι στὸ τετράδιό σου ἕνα τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχῃ περίμετρο 0,20 μ.

2) Νὰ βρῆς 4 ἄλλα σώματα ποὺ νὰ ἔχουν τὸ σχῆμα τετραγώνου.

3) Κόψε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἡ μία πλευρά του νὰ εἶναι 0,06 μ.

4) Ἕνα οἰκόπεδο τετράγωνο ἔχει πλευρὰ 30 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

5) Μιὰ νοικοκυρὰ ἔχει ἕνα τραπεζομάνδηλο τετράγωνο, ποὺ ἡ μία πλευρά του ἔχει μῆκος 1,20 μ. Θέλει νὰ βάλη γύρω - γύρω δαντέλλα. Πόσα μέτρα θ' ἀγοράση;

6) Ἕνας ἔχει ἕνα κῆπο τετράγωνο· Θέλει νὰ τὸν περιτειχίση. Γιὰ κάθε πλευρὰ τοῦ ζήτησαν νὰ πληρώση 220.000 δραχ. Πόσο θὰ πληρώση γιὰ ὅλο τὸ περιτείχισμα;

7) Ἕνας εἶχε ἕνα χωράφι τετράγωνο καὶ θέλει νὰ σκάψη γύρω γύρω ἕνα βαθὺ αὐλάκι. Τοῦ ζήτησαν γιὰ κάθε μέτρο 5000 δραχμὲς καὶ πλήρωσε γιὰ ὅλο 240.000 δραχμές. Πόσα μέτρα ἦταν ἡ περίμετρός του καὶ πόσα κάθε πλευρά;

Γωνίαι.

Ἂν προσέξωμε καλὰ ἕνα τετράγωνο θὰ παρατηρήσωμε ὅτι κάθε δύο πλευρὲς ἐκεῖ ποὺ συναντῶνται, ἀπ' ἔξω σχηματίζουν ἕνα μυτερὸ σημεῖο, δηλαδὴ μιὰ κορυφή.

Ἀπὸ μέσα ὅμως σχηματίζουν μιὰ γωνία. Παρατηρῆστε καλὰ καὶ ἰδῆτε ὅτι ἀπ' ἔξω τὸ τετράγωνο ἔχει 4 κορυφές, ἐνῶ ἀπὸ μέσα ἔχει 4 γωνίες.

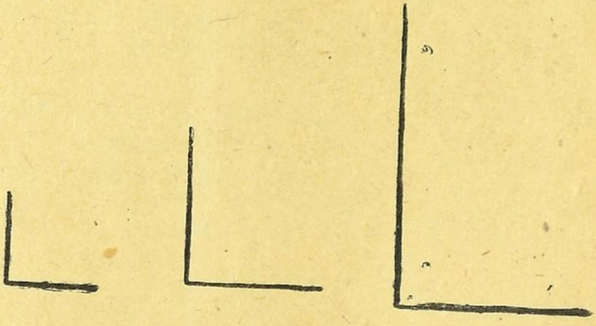
Ἂς πάρωμε δυὸ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου (σχ. 7). Κοιτάζοντας μὲ προσοχὴ τὶς δυὸ αὐτὲς πλευρὲς παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ἡ μία κάθετη εἰς τὴν ἄλλη, γιατὶ οὔτε ἡ μιά, οὔτε ἡ ἄλλη, κλίνει πρὸς τὸ ἕνα μέρος ἢ πρὸς τὸ ἄλλο. Ἡ μία πλευρὰ εἶναι ὁριζοντία, ἡ ἄλλη εἶναι κατακόρυφη καὶ μεταξύ των εἶναι κάθετοι.

Σχ. 7.

Ἀπ' ἔξω οἱ δύο πλευρὲς ἔχουν μιὰ κορυφὴ καὶ ἀπὸ μέσα μιὰ γωνία. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **ὀρθὴ γωνία.** Ὥστε:

Γωνία ὀρθὴ λέγεται ἡ γωνία, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴ συνάντηση δύο εὐθειῶν, ποὺ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες, γιατὶ δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν, μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας. Ἀλλὰ τὸ ἄνοιγμα θὰ εἶναι πάντα τὸ ἴδιο, ἀφοῦ οἱ εὐθεῖες, ποὺ κάνουν τὴ γωνία, εἶναι κάθετοι.

Νὰ τρεῖς γωνίες ὀρθὲς μὲ διάφορο μῆκος πλευρῶν καὶ ὅμως τὸ ἄνοιγμα εἶναι ἴσο:



Τὸ ἴδιο θὰ γίνῃ καὶ μὲ ὅλες τὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου ὅταν τοποθετήσωμε τὴ μία κάθετη στὴν ἄλλη. Ἂν προσέξωμε καλὰ τὸ τετράγωνο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι οἱ πλευρές του σχηματίζουν 4 γωνίες ὀρθές.

Τώρα μποροῦμε νὰ ὁρίσωμε καλύτερα τὸ σχῆμα τοῦ τετραγώνου.

Τετράγωνο εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει 4 πλευρὲς ἴσες, κάθετες μεταξύ των τὶς δύο ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες καὶ 4 γωνίες ὀρθές.

Ἀφοῦ ὅμως τὸ ἄνοιγμα, ποὺ σχηματίζεται εἰς τὸ σημεῖον ποὺ συναντῶνται δύο εὐθεῖες, λέγεται γωνία, δὲν μπορεῖ νὰ ἔχωμεν μόνον γωνίες ὀρθές. Δύο εὐθεῖες μποροῦν νὰ συναντηθοῦν εἰς ἕνα σημεῖον χωρὶς νὰ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Αὐτὸ δὲ συμβαίνει πάντοτε ὅταν ἡ μία ἀπ' αὐτὲς ἢ δύο εἶναι εὐθεῖες πλάγιες.

Σὰν καὶ αὐτὲς ποὺ βλέπετε παρακάτω :

Προσέχοντας αὐτὲς τὶς εὐθεῖες, βλέπουμε ὅτι συναντῶνται εἰς ἕνα σημεῖο, ὅπου σχηματίζεται μία γωνία, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ὀρθὴ γιατὶ οἱ πλευρές της δὲν εἶναι κάθετοι. Ἡ μία ἀπὸ τὶς παραπάνω γωνίες εἶναι πιὸ μικρὴ ἀπὸ τὴν ὀρθή, ἡ ἄλλη εἶναι πιὸ μεγάλη. Αὐτὸ φαίνεται καθαρά. Γιὰ νὰ τὶς γνωρίζωμε, δίνομε σ' αὐτὲς ἕνα ὄνομα. Ἡ πρώτη ποὺ εἶναι μικρότερη τῆς ὀρθῆς λέγεται ὀξεῖα γωνία, ἡ ἄλλη ποὺ εἶναι μεγαλύτερη τῆς ὀρθῆς λέγεται ἀμβλεῖα.

Νὰ καὶ τὰ τρία εἴδη τῶν γωνιῶν στὴ σειρά :

Γιὰ νὰ τὶς γνωρίζωμε πάντα, ὅπου καὶ ἰδοῦμε γωνίες, πρέπει νὰ θυμώμαστε ὅτι :

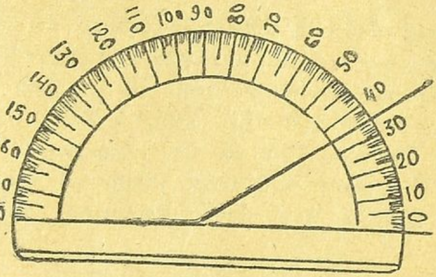
Ὀρθὴ γωνία εἶναι ἐκείνη ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δύο εὐθεῖες κάθετες μεταξύ των. Οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι πάντοτε ἴσες.

Ὀξεῖα γωνία, εἶναι ἡ γωνία ποὺ εἶναι μικρότερη τῆς ὀρθῆς. Οἱ ὀξεῖες γωνίες δὲν εἶναι πάντοτε ἴσες.

Ἀμβλεῖα γωνία εἶναι ἡ γωνία, ποὺ εἶναι μεγαλύτερη τῆς ὀρθῆς. Οἱ ἀμβλεῖες γωνίες δὲν εἶναι πάντοτε ἴσες.

Τὶς πλευρὲς τῶν γωνιῶν τὶς μετροῦμε μὲ τὸ γαλλικὸ μέτρο καὶ δὲν μᾶς ἐνδιαφέρι πόσο μεγάλη εἶναι, ὅταν πρόκειται νὰ μετρήσωμε τὶς γωνίες. Μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας, τὸ ὁποῖο δὲν μποροῦμε νὰ τὸ μετρήσωμε μὲ τὸ μέτρο.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὶς γωνίες ἔχομε ἕνα ἄλλο μέτρο, ποὺ μᾶς λέει πόσες μοῖρες εἶναι τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας. Οἱ γωνίες λοιπὸν μετροῦνται μὲ μοῖρες. Τὶ εἶναι μοῖρα θὰ σοῦ ἐξηγήση ὁ δάσκαλός σου. Αὐτὸ τὸ ὄργανο, ποὺ μετροῦμε τὶς γωνίες, λέγεται **μοιρογνωμόνιο** (σχ. 8) καὶ πουλιέται σ' ὅλα τὰ χαρτοπωλεῖα.



Σχ. 8.

Μ' αὐτὸ μετροῦμε τὶς γωνίες. Πῶς τὶς μετροῦμε θὰ σοῦ δείξη ὁ δάσκαλός σου.

Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι πάντοτε 90 μοιρῶν καὶ γράφεται ἔτσι: 90°. Αὐτὸ τὸ μικρὸ μηδενικὸ δίπλα στὸν ἀριθμὸ σημαίνει μοῖρες.

Ἡ ὀξεῖα γωνία εἶναι πάντα μικρότερη τῆς ὀρθῆς καὶ εἶναι πάντα μικρότερη τῶν 90°.

Ἡ ἀμβλεῖα γωνία εἶναι πάντα μεγαλύτερη τῆς ὀρθῆς καὶ συνεπῶς καὶ μεγαλύτερη τῶν 90°.

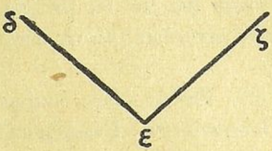
Ἐπειδὴ πολλὲς γωνίες εἶναι ὁλόκληρες μοῖρες καὶ κἄτι, ποὺ νὰ μὴ γίνεται μιὰ ὁλόκληρη μοῖρα, γι' αὐτὸ ἡ 1 μοῖρα διαιρεῖται σὲ 60 μικρότερα κομμάτια ποὺ λέγονται πρῶτα λεπτὰ καὶ γράφονται μὲ μιὰ ὀξεῖα δίπλα στὸν ἀριθμὸ π. χ. $15'$. Καὶ κάθε πρῶτο λεπτὸ διαιρεῖται σὲ $60''$.

Ἂν ἔχωμε π. χ. μία γωνία 70 μοιρῶν, 20 πρώτων λεπτῶν καὶ 30 δευτέρων λεπτῶν θὰ τὴν γράψωμε ἔτσι:

$$70^\circ \quad 20' \quad 30''$$

Κάθε γωνία γιὰ νὰ τὴν ὀνομάσωμε τὴν διαβάζομε μὲ τρία γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου βάζοντας στὴ μέση τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς. Νὰ ἔτσι :

=α.β.γ.

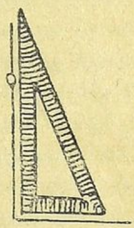


=δ.ε.ζ.

Ἀσκήσεις.

1) Μέτρησε μίαν ὀρθὴ γωνία καὶ πές μας πόσες μοῖρες εἶναι.

2) Κάμε μόνος σου στὸ τετράδιό σου μίαν ὀρθὴ γωνία. Ἐπειδὴ στὴν ὀρθὴ γωνία πρέπει οἱ πλευρὲς νὰ εἶναι κάθετες καὶ μὲ τὸ μάτι εἶναι δύσκολο νὰ τὸ βροῦμε, γι᾽ αὐτὸ χρησιμοποιοῦμε ἕνα ὄργανο ποὺ τὸ λένε **γνώμονα** ἢ **γωνία**· πουλιέται στὰ χαρτοπωλεῖα (Σχ. 9).



3) Δοκίμασε, ἂν ἔχῃς γνώμονα, νὰ κάμῃς δυὸ - τρεῖς γωνίες ὀρθές.

4) Κάμε μία ὀξεῖα γωνία, διάβασε τὸ ὄνομά της καὶ μέτρησέ της γιὰ νὰ μᾶς πῇς πόσων μοιρῶν εἶναι.

5) Κάμε τὸ ἴδιο σὲ μιὰ ἀμβλεῖα γωνία.

6) Φρόντισε νὰ βρῇς σώματα, ποὺ νὰ ἔχουν ὀρθὲς γωνίες καὶ γράψε στὸ τετράδιό σου.

6) Μιὰ γωνία ἔχει ἄνοιγμα 120°. Πές μας ἂν εἶναι μικρότερη ἢ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ καὶ πόσο. Πές μας ἀκόμη τί εἴδους γωνία εἶναι.

8) Μιὰ γωνία ἔχει ἄνοιγμα 75°. Πές μας ἂν εἶναι μικρότερη ἢ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ καὶ πόσο. Πές μας ἀκόμη τί εἴδους γωνία εἶναι.

9) Μιὰ γωνία εἶναι 90°. Πές μας τί εἴδους γωνία εἶναι.

Ἐμβαδὸν τετραγώνου.

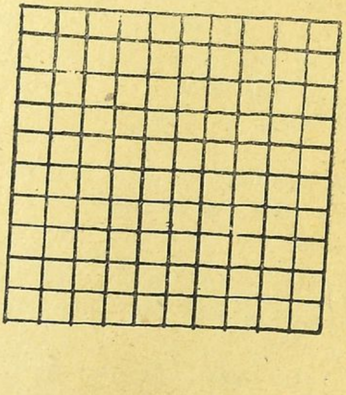
Ἕως τώρα ξέρομε νὰ μετρήσωμε τὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου. Καὶ τὴν μετροῦμε μὲ τὰ μέτρα τοῦ μήκους, ἀφ' οὗ ἔχει μόνον μῆκος.

Τώρα θὰ ἰδοῦμε πῶς μποροῦμε νὰ μετρήσωμε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου. Γνωρίζομε ἀπὸ τὴν ἀριθμητική μας ὅτι τὶς ἐπιφάνειες τὶς μετροῦμε μὲ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο, καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις του, ἢ ἂν εἶναι μεγάλη μὲ τὸ στρέμμα, ἢ μὲ τὸν τεκτονικὸ τετραγωνικὸ πήχη ποὺ μεταχειρίζονται οἱ τεχνῖτες. Θυμήσου καλὰ αὐτὰ τὰ μέτρα, γιατὶ θὰ σοῦ χρειασθοῦν.

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο, ὅπως ξέρομε, εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ κάθε πλευρά του εἶναι ἕνα γαλλικὸ μέτρο. Γιὰ νὰ μετρήσωμε λοιπὸν τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου θὰ τὴν γεμίσωμε μὲ τετραγωνικὰ μέτρα καὶ ὅσα τετραγωνικὰ μέτρα χωρέση, τόσα τετραγωνικὰ μέτρα θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

Παρακάτω ἔχομε ἕνα τετράγωνο, ποὺ κάθε πλευρά του ὑποθέτομε πὼς εἶναι 10 γαλλικὰ μέτρα.

Ἂν τὸ γεμίσωμε μὲ τετραγωνικὰ μέτρα θὰ ἰδοῦμε ὅτι θὰ χωρέση 100 τετραγωνικὰ μέτρα. Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου, ποὺ ἔχει ἡ πλευρά του μῆκος 10 γ. μ. θὰ εἶναι 100 τετρ. μέτρα.



Αὐτὸς ὅμως ὁ τρόπος τοῦ μετρήματος τῆς ἐπιφανείας παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες. Γι' αὐτὸ βρῆκαν ἕνα ἄλλο τρόπο εὐκολώτερο.

Κάθε ἐπιφάνεια, ὅπως ξέρομε, ἔχει δύο διαστάσεις: π λ ά τ ο ς καὶ μ ῆ κ ο ς. Γιὰ νὰ βροῦν πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι μία ἐπιφάνεια μετροῦν 1) πόσα γαλλικὰ μέτρα εἶναι τὸ μ ῆ κ ο ς της, 2) πόσα γαλλικὰ μέτρα εἶναι τὸ πλάτος της καὶ 3) πολλαπλασιάζουν τὸν ἀριθμὸν τοῦ μήκους ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλάτους καὶ τὸ γινόμενον εἶναι τὰ τετραγωνικὰ μέτρα, ποὺ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια. Εἰς τὸ παραπάνω σχῆμα εἴπαμε ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ μήκους του εἶναι 10 γαλλικὰ μέτρα, ἄλλα τόσα θὰ εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ πλάτους του, γιατὶ στὸ τετράγωνο οἱ πλευρὲς εἶναι ἴσες: Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν θὰ εἶναι 10 μ. X 10 π. = 100 τετραγωνικὰ μέτρα. Βλέπεις λοιπὸν ὅτι βρήκαμε τὸ ἴδιο. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς δείχνει πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι μία ἐπιφάνεια λέγεται **ἐμβαδόν**. Στὸ σχῆμα αὐτὸ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 100 τ. μ. Καὶ ἔτσι:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.

Προβλήματα.

1) Τὸ πάτωμα τοῦ δωματίου σου ἔχει σχῆμα τετραγώνου: Ἡ μία πλευρά του εἶναι 3,80 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2) Ἕνας κῆπος τετραγωνικὸς ἔχει περίμετρο 48 γ. μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3) Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος τετραγώνου ἔχει πωληθῆ πρὸς 200.000 δραχμὲς τὸν τεκτονικὸ τετραγωνικὸ πήχη. Ἡ μία πλευρὰ τοῦ οἰκοπέδου ἔχει μῆκος 18,60 γ. μ. Πόσες δραχμὲς ἔπιασε ἀπὸ τὴν πώληση τοῦ οἰκοπέδου ὁ ἰδιοκτήτης;

4) Τὸ ἔδαφος ἑνὸς τετραγωνικοῦ δωματίου ἔχει πλευρὰ 6,5 γ. μ. Θέλομε νὰ τὸ στρώσωμε μὲ τετραγωνικὰ πλακάκια, ποὺ κάθε πλευρά τους ἔχει μῆκος 0,20 γ. μ. Πόσα πλακάκια θὰ μᾶς χρειασθοῦν;

5) Μία πλατεῖα ἔχει σχῆμα τετράγωνο καὶ μὲ πλευρὰ 25 γ. μ. Θέλομε νὰ τὴν δενδροφυτέψωμε καὶ κάθε δένδρο νὰ πιάση χῶρο 10 τ. μ. Πόσα δένδρα θὰ φυτέψωμε;

6) Θέλω νὰ πλακοστρώσω τὴν τετραγωνικὴν αὐλή μου, ποὺ ἡ περίμετρός της εἶναι 48 γ. μ. Πόσο θὰ μοῦ κοστίση ἡ πλακόστρωση ἂν κάθε πλακάκι τετραγωνικὸ μὲ πλευρὰ 0,25 γ. μ. ἔχη 250 δραχμὲς

καὶ ὁ τεχνίτης θέλη νὰ πληρωθῆ γιὰ τὴν ἐργασία του πρὸς 5.000 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο;

7) Ἕνα ἀκαλλιέργητο κτῆμα ἔχει σχῆμα τετραγώνου μὲ πλευρὰ 120 γ. μ. Πωλήθηκε πρὸς 200.000 τὸ στρέμμα. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ ἰδιοκτήτης;

8) Δύο ἀδέλφια εἶχαν πάρει ἀπὸ κληρονομιὰ ἕνα οἰκόπεδο σχήματος τετραγώνου μὲ πλευρὰ 25,60 γ. μ. Τὸ οἰκόπεδο αὐτὸ πωλήθηκε πρὸς 400.000 δραχμὲς τὸν τεκτονικὸ τετραγων. πήχη. Πόσα θὰ πάρη ὁ πρῶτος ἀδελφὸς ποὺ ἐδικαιοῦτο νὰ πάρη $\frac{3}{5}$ καὶ πόσα ὁ ἄλλος;

9) Πές μας πῶς θὰ μετρήσω τὴν πλευρὰ ἑνὸς κτήματος τετραγώνου ποὺ εἶναι 750 γ. μ. Μὲ τὸ μικρὸ γαλλικὸ μέτρο θ' ἀργήση καὶ εἶναι καὶ λιγάκι δύσκολο. Ὑπάρχει κανένα ἄλλο μέτρο ταχύτερο καὶ εὐκολώτερο; Αὐτὸ χρησιμοποιοῦν οἱ τεχνίτες, ὅταν θέλουν νὰ μετρήσουν μεγάλες ἀποστάσεις.

Ἐμβαδὸν Κύβου.

Ἀφοῦ μάθαμε πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι εὔκολο νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύβου.

Ἕως τώρα ξέρομε ὅτι ἐμβαδὸν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς δείχνει πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι μία ἐπιφάνεια. Ξέρομε ἀκόμη ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της, ἐπειδὴ εἰς τὸ τετράγωνο τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος εἶναι τὸ ἴδιο. Ξέρομε ἐπίσης ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 τετράγωνα, ποὺ λέγονται ἕδρες.

Τί θὰ κάμωμε λοιπὸν γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύβου; Ἁπλούστατα. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 6, γιατὶ τόσες εἶναι οἱ ἕδρες του.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύβου πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 6.

Προβλήματα.

1) Τὸ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς κύβου εἶναι 1,20 γ. μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου ;

2) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 0,40 γ. μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του καὶ πόσο τὸ ἐμβαδὸν ὁλόκληρης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου ;

3) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 48 τ. μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας του ;

4) Ἕνας κτηματίας ἔχει ἕνα μεγάλο δοχεῖο τσίγκινο σχήματος κύβου. Ἡ ἀκμή του εἶναι 2,10 γ. μ. Θέλει νὰ τὸ χρωματίσῃ ἐξωτερικῶς. Πόσο θὰ πληρώσῃ, ἐὰν γιὰ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο τοῦ ζητοῦν 15000 δραχμές ;

5) Ἕνα δωμάτιο κυβικὸ θέλουν νὰ τὸ σκεπάσουν μὲ χαρτὶ ταπετσαρίας, τοῦ ὁποίου τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ἔχει 950 δραχμές. Ἡ ἀκμὴ τοῦ δωματίου εἶναι 5,20 γ. μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα χαρτὶ θὰ χρειασθῇ ;

Ὄγκος Κύβου.

Ὁ κύβος, ὅπως εἴπαμε, εἶναι ἕνα στερεὸν σῶμα. Κατέχει κάποιο χῶρο, ἔχει συνεπῶς ὄγκο. Ἕνας κύβος μπορεῖ νὰ εἶναι ἄδειος εἰς τὸ ἐσωτερικό του, ὁπότε μποροῦμε νὰ τὸν γεμίσωμε μὲ ἄλλα σώματα. Τότε λέμε ὅτι ὁ κύβος αὐτὸς χωρεῖ τόσο βάρος ἄλλου σώματος. Στὴν περίπτωση αὐτὴ τὸν μετροῦμε μὲ **τὰ μέτρα χωρητικότητος**. Ποιὰ εἶναι τὰ μέτρα αὐτά, τὰ μάθαμε στὴν Ἀριθμητική μας. Τὸ κυριώτερο μέτρο ἀπ' αὐτὰ εἶναι τὸ **κυβικὸ μέτρο** μὲ τὶς ὑποδιαιρέσεις του. Πρέπει νὰ τὰ θυμηθῇς γιατὶ μᾶς χρειάζονται. Ἐκεῖνο μόνο, ποὺ σοῦ λέω, εἶναι ὅτι τὸ κυβικὸ μέτρο εἶναι ἕνας κύβος, ποὺ κάθε ἕδρα του εἶναι ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο καὶ ὅτι τὸ βάρος του ὑπολογίζεται πάντα μὲ νερὸ ἀποσταγμένο καὶ μὲ θερμοκρασία 4 βαθμῶν, γιατὶ κάθε σῶμα μπορεῖ νὰ ἔχῃ τὸν ἴδιο ὄγκο, ἀλλὰ διάφορο βάρος, π. χ. ἕνα κυβικὸ μέτρο ἂν τὸ γεμίσωμε λάδι θὰ ζυγίζῃ λιγώτερο ἀπὸ ὅ,τι ζύγιζε γεμᾶτο νερό.

Ἂν τὸ γεμίσωμε ζάχαρη, θὰ ζυγίζη περισσότερο, ἀπὸ ὅ,τι ζύγιζε μὲ τὸ νερό. Ἂν τὸ γεμίσωμε σίδερο, θὰ ζυγίζη ἀκόμη περισσότερο. Ἔτσι κάθε σῶμα μπορεῖ νὰ ἔχη τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ ἕνα ἄλλο, ἀλλὰ διάφορο βάρος. Αὐτὸ τὸ μαθαίνομε στὴ φυσική μας, ὅταν θὰ μάθωμε τὸ **εἰδικὸν βάρος τῶν σωμάτων**.

Ὅταν λοιπὸν λέμε ὅτι αὐτὸς ὁ κύβος χωρεῖ τόσα κυβικὰ μέτρα, ἐννοοῦμε νερὸ ἀπεσταγμένο καὶ σὲ θερμοκρασία 4°.

Μπορεῖ ὅμως ἕνας κύβος νὰ μὴν εἶναι ἄδειος, ἀλλὰ νὰ εἶναι ἀπὸ ἕνα σῶμα, μονοκόμματος, συμπαγής. Τότε θὰ τὸν ὑπολογίζωμε μὲ τὰ **μέτρα τοῦ βάρους**. Κι' αὐτὰ τὰ μάθαμε στὴν Ἀριθμητική. Θυμήσου τα, γιατὶ μᾶς χρειάζονται.

Κάμε μόνος σου ἕνα κύβο ἀπὸ χαρτόνι, ποὺ θὰ εἶναι κούφιος καὶ τότε θὰ μποροῦμε νὰ τὸν γεμίσωμε μὲ ἄλλα πράγματα. Κάμε καὶ ἕνα ἄλλον κύβο ἀπὸ ξύλο μονοκόμματο, ὁπότε θὰ χρειασθῆ νὰ ζυγίσουμε τὸ βάρος του. Ἔτσι θὰ καταλάβης τὴ διαφορὰ τοῦ **βάρους** καὶ τῆς **χωρητικότητος**. Τώρα μᾶς μένει νὰ μάθωμε πῶς μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου εἴτε μὲ τὰ μέτρα τοῦ βάρους εἴτε μὲ τὰ μέτρα τῆς χωρητικότητος. Καὶ στὶς δυὸ περιπτώσεις ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι σὲ κυβικὰ μέτρα, γιατὶ αὐτὴ εἶναι ἡ κυριώτερη μονάδα τοῦ ὄγκου.

Ἂν θέλωμε νὰ ἰδοῦμε πόσο χωρεῖ ἕνα δωμάτιο κυβικὸ καὶ δὲν ξέρουμε ἄλλο τρόπο, θὰ τοποθετήσωμε μέσα στὸ δωμάτιο κυβικὰ μέτρα, ἕως ὅτου νὰ γεμίση, ἕως ἐπάνω. Τότε θὰ μετρήσωμε πόσα κυβικὰ μέτρα βάλαμε καὶ αὐτὰ θὰ ἦσαν ὁ ὄγκος τοῦ κύβου. Ὄγκος λοιπὸν τοῦ κύβου εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν μέτρων ποὺ χωρεῖ.

Αὐτὸς ὁ τρόπος ὅμως εἶναι δύσκολος καὶ κουραστικός. Γι' αὐτὸ κάνομε κἄτι ἄλλο, ποὺ μᾶς δίνει τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

Μετροῦμε τὶς τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου, μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος καὶ τὶς πολλαπλασιάζομε. Αὐτὸ ποὺ θὰ βροῦμε ἀπὸ τὸ γινόμενο θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου σὲ κυβικὰ μέτρα. Ἐπειδὴ ὅμως ξέρομε ὅτι αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ίσες, μπορούμε νὰ βροῦμε τὴ μία καὶ νὰ τὴν πολλαπλασιάσωμε 3 φορὲς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.

Π. χ. Ἂν ἔχω ἕνα κύβον τοῦ ὁποίου ἡ μία ἄκρη εἶναι 1,50 γ. μ., ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι 1,50 Χ 1,50 Χ 1,50 = 3,375 κ. μ. **Διὰ νὰ εὕρωμε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου πολλαπλασιάζομε τὴν ἀκμήν του 3 φορὲς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.**

Προβλήματα.

(Πρὶν λύσης τὰ παρακάτω προβλήματα θυμήσου καλὰ ὅλα τὰ μέτρα βάρους καὶ χωρητικότητος, δικά μας καὶ ξένα).

1) Ἑνὸς κύβου ἡ μία διάστασις εἶναι 0,80 γ. μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

2) Τὸ ὕψος μιᾶς κυβικῆς δεξαμενῆς εἶναι 6,20 γ. μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χωρεῖ; καὶ πόσες ὀκάδες εἶναι τὸ νερὸ αὐτό;

3) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου, ποὺ ἡ περίμετρος μιᾶς ἕδρας του εἶναι 8,40 τ. μ.;

4) Ἔχει ἕνας ἕνα σωρὸ σανίδες σὲ σχῆμα κυβικό. Τὸ μῆκος τοῦ κύβου αὐτοῦ εἶναι 3,50 γ. μ. Τὶς πούλησε πρὸς 325.000 δραχμὲς τὸ κυβικὸ μέτρο. Πόσες δραχμὲς πῆρε;

5) Ἕνας ἔφτιασε δίπλα στὸ σπίτι του μιὰ δεξαμενὴ κυβικὴ γιὰ νὰ μαζεύη νερὸ τῆς βροχῆς. Ἡ μία διάστασίς της εἶναι 2,80 γ. μ. Πόσες ὀκάδες νερὸ χωρεῖ;

6) Μιὰ κυβικὴ ἀποθήκη ἔχει βάθος 6 μ. Τὴν γέμισαν μὲ σιτάρι. Πόσους τόννους σιτάρι χώρεσε, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιταριοῦ εἶναι 1,56; (τὸ βάρος εἶναι ἴσον μὲ τὸν ὄγκον ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος).

7) Ἕνας ἐλαιοπαραγωγὸς ἔχει ἕνα μεγάλο δοχεῖο κυβικό, ποὺ τὸ πλάτος του εἶναι 3,20 γ. μ. Πόσες ὀκάδες λάδι χωρεῖ, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ λαδιοῦ εἶναι 0,912;

8) Ἕνα δοχεῖο ἀπὸ ντενεκὲ κυβικὸ ἔχει πλάτος 0,60. Πόσες ὀκάδες νερὸ χωρεῖ; Πόσες ὀκάδες οἰνόπνευμα (εἰδικὸν βάρος οἰνοπνεύματος 0,948); Πόσες ὀκάδες πετρέλαιο (εἰδικὸν βάρος πετρελαίου 0,840); Πόσες ὀκάδες βούτυρο (εἰδικὸν βάρος 0,942); Πόσες ὀκάδες κρασὶ (εἰδικὸν βάρος 0,985);

9) Ένας κυβικὸς σωρὸς ἀπὸ πέτρες μὲ μῆκος 1,80 μ. πόσους τόννους βάρος εἶναι (εἰδικὸν βάρος πέτρας 2,08) ; Πόσες δραχμὲς θὰ πιάση ὁ κύριός του ἂν πουλήση τὸ κυβικὸ μέτρο πρὸς 2.400 δραχμές ;

10) Μία αἴθουσα σχολείου ἔχει σχῆμα κύβου μὲ μῆκος 7,40 μ. Πόσους μαθητὲς χωρεῖ, ἂν γιὰ κάθε μαθητὴ χρειάζωνται 4 κυβικὰ μέτρα ἀέρος ;

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ βρῆς ἐπιφάνειες τετραγωνικές.

2) Νὰ κάμης ἀπὸ μιὰ κόλλα χαρτὶ ἕνα τετράγωνο, χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσης μέτρο.

3) Κάμε ἕνα κύβο ἀπὸ χαρτόνι.

4) Ἂν βρῆς εὐκαιρία κάμε καὶ ἕνα κύβον ἀπὸ πηλό.

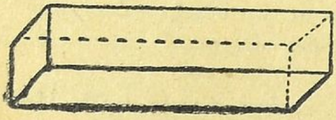
5) Κάμε ἀπὸ χαρτόνι ἢ ἀπὸ σανίδι ἕνα κουμπαρᾶ κυβικό.

6) Πῶς θὰ χαράξωμε μιὰ εὐθεῖα γραμμὴ μεγάλου μήκους ; Ἔτσι κάνουν καὶ οἱ τεχνῖτες. Ὅποιος εἶδε τεχνίτη νὰ κάνη εὐθεῖες γραμμές, θὰ ξέρη.

7) Ἰχνογράφησε ἕνα τετράγωνο καὶ ἕνα κύβον.

Ὀρθογώνιο Παραλληλεπίπεδον.

Ἔχομε μερικὰ σώματα, ποὺ μοιάζουν μὲ τὸν κύβο, δὲν εἶναι ὅμως κύβος (σχ. 10).



Σχ. 10.

Σὰν κι' αὐτὸ εἶναι ἡ κασετίνα σας, τὸ κουτὶ ἀπὸ τὰ σπίρτα, οἱ πλάκες τοῦ σαπουνιοῦ, καὶ ἄλλα.

Θὰ σᾶς δείξη καὶ ὁ δάσκαλός σας τέτοιο σῶμα.

Αὐτὸ τὸ σῶμα, ποὺ ἔχει τέτοιο σχῆμα, λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.**

"Αν τὸ παραβάλωμε μὲ τὸν κύβο θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἔχει τὶς παρακάτω ὁμοιότητες.

1) Ἔχει καὶ αὐτὸ 6 ἕδρες. Μέτρησέ τες.

2) Ἔχει καὶ αὐτὸ 12 ἀκμές. Μέτρησέ τες.

3) Ἔχει καὶ αὐτὸ 8 κορυφές. Μέτρησέ τες.

4) Οἱ ἐπάνω καὶ οἱ κάτω ἕδρες εἶναι ὁριζόντιες.

5) Οἱ ἄλλες 4 εἶναι κατακόρυφες.

6) Κάθε δύο ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι παράλληλες.

7) Οἱ γωνίες του ὅλες εἶναι ὀρθές.

8) Ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι τεθλασμένη.

Ἔχει ὅμως καὶ διαφορές. Πρόσεξέ τες.

1) Οἱ ἕδρες του δὲν εἶναι ὅλες ἴσες, ὅπως τοῦ κύβου. Εἶναι μόνον ἴσες οἱ ἀπέναντι ἕδρες.

2) Οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνα, ἐνῶ στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχουν ἄλλο σχῆμα. Ἔτσι:

Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο εἶναι τὸ σῶμα, ποὺ ἔχει 6 ἕδρες, οἱ ὁποῖες ἀνὰ δύο ἀπέναντι εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες καὶ ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθές.

Ἀσκήσεις.

1) Κατὰ τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ τὸν κύβο ;

2) Νὰ βρῆς μέσα στὸ σχολεῖο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.

3) Νὰ βρῆς στὸ σπίτι σου τέτοια σώματα.

4) Νὰ ἰχνογραφήσῃς στὸ τετράδιό σου ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

5) Κάμε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

6) Κάμε καὶ ἀπὸ ξύλο ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

7) Κάμε καὶ ἀπὸ πηλὸ ἕνα ὀρθογ. παραλληλ. ἂν μπορῇς.

Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ἂν πάρωμε μιὰ ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τὴν ἰχνογραφήσωμε στὸ τετράδιό μας θὰ μᾶς δώση τὸ παρακάτω σχῆμα :

Ἂν παραβάλωμε τὸ σχῆμα αὐτὸ μὲ τὸ τετράγωνο θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἔχει τὶς γωνίες ὀρθές, ὅπως καὶ τὸ τετράγωνο, δὲν ἔχει ὅμως ὅλες τὶς πλευρὲς ἴσες, ἀλλὰ οἱ ἀνὰ δύο ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες. Αὐτὸ τὸ σχῆμα λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο** ἢ **ὀρθογώνιο**.

Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἢ ὀρθογώνιο εἶναι τὸ σχῆμα, ποὺ ἔχει 4 γωνίες ὀρθὲς καὶ τὶς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καὶ παράλληλες.

Τὸ ὀρθογώνιο, ὅπως βλέπεις, εἶναι μιὰ ἐπιφάνεια καὶ σὰν ἐπιφάνεια ἔχει δύο διαστάσεις, **πλάτος** καὶ **μῆκος**, καὶ μετριέται μὲ τετραγωνικὰ μέτρα.

Τὸ ὀρθογώνιο ἔχει γύρω - γύρω 4 γραμμές, οἱ ὁποῖες λέγονται πλευρὲς καὶ σὰν τέτοιες μετριοῦνται μὲ μέτρα μήκους, γαλλικὰ μέτρα. Τὸ μῆκος τῶν 4 πλευρῶν του λέγεται **περίμετρος**.

Πῶς εὑρίσκομε τὴν περίμετρο γρηγορώτερα καὶ εὐκολώτερα εἶναι εὔκολο, ἀφοῦ ξέρομε ὅτι οἱ δύο ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες. Ὅσο μῆκος ἔχει ἡ μία πλευρά, τόσο θὰ ἔχη καὶ ἡ ἀπέναντι. Εἶναι λοιπὸν ἀρκετὸ νὰ μετρήσωμε τὶς δύο καὶ διπλασιάσωμε τὸ μῆκος αὐτό.

Π. χ. : Ἂν ἕνα ὀρθογώνιο ἔχη πλευρὰν μήκους 5 μέτρων ἄλλο τόσο θὰ εἶναι καὶ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης ἀπέναντι πλευρᾶς, δηλαδὴ $5 \times 2 = 10$, ἂν ἔχη ἡ ἄλλη πλευρὰ μῆκος 3 μ. ἄλλο τόσο θὰ εἶναι καὶ ἡ ἀπέναντι, δηλαδὴ $3 \times 2 = 6$. Ἡ περίμετρος λοιπὸν θὰ εἶναι $10 + 6 = 16$.

Προβλήματα.

1) Ἕνα ὀρθογώνιο πάτωμα ἔχει μῆκος 8 μέτρα καὶ πλάτος 5 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ;

2) Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει τὴ μεγάλη πλευρά του μὲ μῆκος 10 μ. καὶ τὴ μικρή του μὲ μῆκος 6 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ;

3) Ἔχομε ἕνα κῆπο σχήματος ὀρθογωνίου. Ἡ μεγάλη πλευρά του ἔχει μῆκος 20 μ. καὶ ἡ μικρή του 8 μ. Θέλομε νὰ τὸ περιφράξωμε μὲ σύρμα. Πόσα μέτρα σύρμα χρειάζονται ;

4) Ἕνας κτηματίας ἔχει ἕνα κτῆμα ὀρθογώνιο, μὲ μῆκος 56 μ. καὶ πλάτος 20 μ. Θέλει νὰ σκάψη γύρω - γύρω ἕνα αὐλάκι καὶ τοῦ ζητοῦν γιὰ κάθε μέτρο 1500 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώση γιὰ ὅλο τὸ αὐλάκι ;

Ἐμβαδὸν Ὀρθογωνίου.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου μετριέται ὅπως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου. Μετροῦμε δηλαδὴ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος καὶ τὰ πολλαπλασιάζομε. Ἡ διαφορὰ εἶναι ὅτι εἰς μὲν τὸ τετράγωνο μετροῦμε μόνον τὸ μῆκος, γιατὶ τὸ πλάτος θὰ εἶναι τὸ ἴδιο, ἀφοῦ ὅλες οἱ πλευρὲς τοῦς τετραγώνου εἶναι ἴσιες. Δὲν μποροῦμε ὅμως νὰ κάνωμε τὸ ἴδιο καὶ στὸ ὀρθογώνιο γιατὶ τὸ μῆκος εἶναι διάφορο ἀπὸ τὸ πλάτος, ἀφοῦ ὅλες οἱ πλευρές του δὲν εἶναι ἴσιες.

Ἔτσι μετροῦμε πρῶτα τὸ μῆκος, κατόπιν μετροῦμε τὸ πλάτος. Πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενο θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου, π.χ. ἔχομε ἕνα ὀρθογώνιο ποὺ τὸ μῆκος του εἶναι 6,40 καὶ τὸ πλάτος του 4,20 μ. Τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $6{,}40 \times 4{,}20 = 26{,}88$ τ. μ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος του.

Προβλήματα.

1) Μέτρησε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας τῆς τάξεώς σου καὶ πές μας: πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2) Μέτρησε τὸν πίνακά σου διὰ νὰ εὕρης τὸ ἐμβαδόν του καὶ πές μας: πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

3) Μέτρησε τὴ θύρα τοῦ δωματίου σου καὶ πές μας τὸ ἐμβαδόν της.

4) Μία αὐλὴ σχήματος ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 8,40 μ. καὶ πλάτος 4,80 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλακάκια τετράγωνα μὲ πλευρὰν 0,20 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν ;

5) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ὀρθογωνίου ἔχει πλάτος 6,20 μ. καὶ πλάτος 4,60 μ. Πόσες σανίδες μήκους 3 μ. καὶ πλάτους 0,10 μ. θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ τὸ πατώσωμεν ;

6) Ἕνα χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 60 μ. καὶ πλάτος 40 μ. Πωλήθηκε πρὸς 300.000 δραχμὲς τὸ στρέμμα. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ ἰδιοκτήτης ;

7) Ἀγόρασε ἕνας ἕνα κτῆμα ἀκαλλιέργητο σχήματος ὀρθογωνίου, ποὺ εἶχε μῆκος 120 μ. καὶ πλάτος 45,50 μ. Θέλει νὰ τὸ κάμη ἀμπέλι καὶ νὰ φυτέψη κλήματα. Πόσα κλήματα θὰ φυτέψη ἂν σὲ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο μπορῇ νὰ φυτέψη 2 κλήματα ;

8) Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος ὀρθογωνίου, ποὺ εἶχε μῆκος 60 μ. καὶ πλάτος 35,40 πουλήθηκε πρὸς 200.000 δραχμὲς τὸν τεκτονικὸ τετραγωνικὸ πήχη. Πόσες δραχμὲς ἔδωσε ὁ ἀγοραστής ;

9) Μία τάξη ἔχει μῆκος 8 μ. καὶ πλάτος 6,80 μ. Πόσους μαθητὲς χωρεῖ, ἂν κάθε μαθητὴς χρειάζεται 0,80 τ. μ. χῶρο ;

10) Κάμε μόνος σου ἕνα ὀρθογώνιο, μέτρησέ το καὶ πές μας τὸ ἐμβαδόν του.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ξέρομε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τεθλασμένη καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν του. Εὔκολο λοιπὸν εἶναι νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του, ἀφοῦ ξέρομε νὰ βρίσκωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας του.

Θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας χωριστὰ καὶ θὰ προσθέσωμε τὰ 6 ἐξαγόμενα. Ἔτσι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας χωριστὰ καὶ προσθέτομε τὰ 6 ἐξαγόμενα.

Ἐπειδὴ ὅμως ξέρομε ὅτι ἀνὰ δύο οἱ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι ἴσες, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἑδρῶν καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ δύο, ἀφοῦ ἄλλο τόσο θὰ εἶναι καὶ τῶν ἄλλων τριῶν ἀπέναντι κάθε μιᾶς ἑδρῶν.

Προβλήματα.

1) Θέλομε νὰ χρωματίσωμε τοὺς 4 τοίχους ἑνὸς δωματίου ὀρθογωνίου. Μέτρησέ τους μόνος σου καὶ πές μας πόσο θὰ πληρώσωμε, ἂν γιὰ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο μᾶς ζητοῦν 1200 δρχ.

2) Θέλω νὰ κάμω ἕνα κιβώτιο μὲ πλάτος 1,20, μῆκος 1,80 καὶ ὕψος 0,80. Πόσες σανίδες θὰ μᾶς χρειασθοῦν μὲ πλάτος 0,20 καὶ μῆκος 3,20 μ.;

3) Μέτρησε μόνος σου τὴν ἐπιφάνεια τοῦ δωματίου σου, ποὺ εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Πές μας πῶς τὴ μέτρησες καὶ πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της.

Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου βρίσκεται ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, ἀφοῦ εἶναι ὅμοια σχεδὸν καθ' ὅλα. Μετροῦμε δηλαδὴ τὶς τρεῖς διαστάσεις καὶ τὶς πολλαπλασιάζομε. Στὸν κύβο, ἐπειδὴ καὶ οἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσες, μᾶς φτάνει νὰ μετρήσωμε μόνο τὴ μία. Στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ὅμως, ἐπειδὴ εἶναι ἄνισες, πρέπει νὰ μετρήσωμε καὶ τὶς τρεῖς, δηλαδὴ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Π. χ. Ἂν ἕνα ὀρθογώνιο ἔχῃ μῆκος 3 μ., πλάτος 2 μ. καὶ ὕψος 1,50 μ., ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $3 \times 2 \times 1,50 = 9$ κυβ. μέτρα. Ὁ ὄγκος καὶ ἡ χωρητικότητα, ὅπως εἴπαμε, μετριέται μὲ κυβικὰ μέτρα. Τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ θὰ χωρῇ 9 κυβικὰ μέτρα νερό.

Ἔτσι: Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζομε τὶς τρεῖς διαστάσεις, δηλαδὴ τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἐπὶ τὸ ὕψος.

Προβλήματα.

1) Τὸ δωμάτιό μας ἔχει μῆκος 6,20 μ., πλάτος 4,50 καὶ ὕψος 1,60 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

2) Ἕνας τσιμεντόλιθος σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 1,60 μ., πλάτος 1,20 μ. καὶ ὕψος 0,80 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του; Πόσων τόννων τὸ βάρος του; (Εἰδικὸν βάρος 2,70).

3) Μία δεξαμενὴ ἔχει μῆκος 3 μ., πλάτος 2,40 καὶ ὕψος 3,80. Πόσες ὀκάδες νερὸ χωράει;

4) Ἕνας πλούσιος ἀπὸ τὴν ἐσοδεία του γέμισε σιτάρι μιὰ ἀποθήκη του, ποὺ εἶχε μῆκος 8 μ., πλάτος 6 καὶ ὕψος 3,80. Πόσους τόννους σιτάρι ἔκαμε; Πόσες ὀκάδες τοῦ ἔμειναν, ἂν ἀπ' αὐτὸ τὸ σιτάρι ἔδωσε στοὺς φτωχοὺς τοῦ χωριοῦ 2400 ὀκάδες; (εἰδικὸν βάρος σίτου 1,56).

5) Ὁ ἴδιος κτηματίας γέμισε ἕνα δοχεῖο μεγάλο λάδι, ποὺ εἶχε μῆκος 5 μ., πλάτος 3,50 καὶ ὕψος 4 μ. Πόσες ὀκάδες λάδι ἔχει μέσα τὸ δοχεῖο; (εἰδικὸν βάρος λαδιοῦ 0,912). Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη ἂν πωλήση τὸ λάδι αὐτὸ μὲ 4500 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ;

6) Σὲ μιὰ ἀποθήκη σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει μῆκος 8,20 μ., πλάτος 6,40 μ. καὶ ὕψος 3,10 μ., θέλουν νὰ βάλουν κιβώτια κονσέρβας. Κάθε κιβώτιο ἔχει μῆκος 0,90 μ., πλάτος 0,50 μ. καὶ ὕψος 0,30 μ. Πόσα κιβώτια θὰ χωρέση ἡ ἀποθήκη;

7) Ἕνα κιβώτιο μὲ μῆκος 1,20 μ., πλάτος 0,60 μ. καὶ ὕψος 0,50 μ. τὸ γέμισαν μὲ πλάκες σαποῦνι. Κάθε πλάκα ἔχει μῆκος 0,08 μ., πλάτος 0,03 μ. καὶ ὕψος 0,04 μ. Μὲ πόσες πλάκες σαποῦνι θὰ γεμίση;

8) Ἕνας θέλει νὰ κτίση μὲ τοῦβλα ἕνα τοῖχο, ποὺ νὰ ἔχη μῆκος 8 μ., πλάτος 0,50 μ. καὶ ὕψος 3,80 μ. Πόσα τοῦβλα θὰ χρειασθῆ ἂν κάθε τοῦβλο ἔχη μῆκος 0,15 μ., πλάτος 0,08 μ. καὶ ὕψος 0,05 μ.;

9) Τὸ δωμάτιο τῆς τάξεώς σας ἔχει μῆκος 7 μ., πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 3,50 μ. Πόσοι μαθητὲς πρέπει νὰ μένουν μέσα, ἂν γιὰ κάθε μαθητὴ χρειάζωνται 4 κυβ. μ. ἀέρος;

10) Μέτρησε τὸ ντεπόζιτο τοῦ σπιτιοῦ ἢ τοῦ σχολείου σου ἂν ἔχῃ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ πές μας : πόσο νερὸ χωρεῖ ;

11) Ἕνας ντενεκὲς τοῦ πετρελαίου νὰ μᾶς πῇς, πόσες ὀκάδες νερὸ χωρεῖ ; Πόσες ὀκάδες οἰνόπνευμα ; Πόσες ὀκάδες πετρέλαιο ; Πόσες ὀκάδες λάδι ; Πόσες ὀκάδες κρασί ; Πόσες ὀκάδες βούτυρο ;

12) Ἕνας θέλει νὰ φτιάσῃ ἕνα τοῖχο ὕψους 4 μ., μήκους 7,50 μ. καὶ πλάτους 0,60 μ. Τοῦ ζητοῦν διὰ κάθε κυβικὸ μέτρο 5.000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώσῃ γιὰ ὅλον τὸν τοῖχο ;

13) Νὰ κάμῃς ἀπὸ χαρτόνι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ποὺ νὰ ἔχῃ μῆκος 0,15 μ., πλάτος 0,10 μ. καὶ ὕψος 0,05 μ. Νὰ τὸ φτιάσῃς καλὸ καὶ νὰ τὸ χαρίσῃς στὸ σχολεῖο σου.

14) Δοκίμασε μόνος σου καὶ μέτρησε κάθε σῶμα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

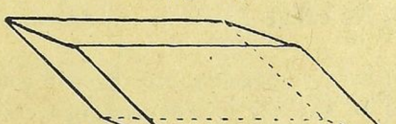
Πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Τὸ ὄνομά του σημαίνει ὅτι δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι οὔτε κύβος οὔτε ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, γιατὶ τὰ δύο αὐτὰ σώματα δὲν εἶχαν τίποτε τὸ πλάγιον.

Γιὰ νὰ ἐννοήσωμε καλὰ τὶ εἶναι τὸ σῶμα αὐτό, παίρνομε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ πιέζομε τὶς στενόμακρες πλευρές του, ὥστε νὰ γύρουν νὰ μὴν εἶναι κατακόρυφοι. Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ κάνωμε καὶ σ' ἕνα κουτὶ ἀπὸ σπίρτα, τὸ ὁποῖο ὅπως εἶναι ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Πιέζομε τὶς πλευρές του καὶ γίνεται πλάγιο παραλληλεπίπεδο.

Νὰ καὶ τὸ σχῆμα του στὸ βιβλίο σου (σχ. 11)

Ἂν τὸ παραβάλωμε μὲ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἔχει ὁμοιότητες καὶ διαφορές.



Σχ. 11.

ΣΗΜ. Εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου ὑπάρχει πίνακας τοῦ εἰδικοῦ βάρους διαφόρων σωμάτων. Μπορεῖς νὰ τὸν συμβουλευθῇς, ὅταν εἶναι ἀνάγκη.

Ὁμοιότητες.

1) Ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι τεθλασμένη, ὅπως τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

2) Ἔχει καὶ αὐτὸ 6 ἕδρες, 12 ἀκμὲς καὶ 8 κορυφές.

3) Οἱ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

Διαφορές.

1) Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει τὶς ἕδρες του ὅλες ὁριζόντιες καὶ κατακόρυφες, ἐνῶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει καὶ ἕδρες πλάγιες.

(Πλάγιο εἴπαμε λέγεται ἕνα σχῆμα, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφο, οὔτε ὁριζόντιο).

3) Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει ὅλες τὶς γωνίες του ὀρθές, ἐνῶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει καὶ ὀξεῖες γωνίες καὶ ἀμβλεῖες.

Πλάγιο λοιπὸν παραλληλεπίπεδο εἶναι τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ ἔχει 6 ἕδρες, 12 ἀκμές, 8 κορυφές, τὶς ἀπέναντι ἕδρες του ἀνὰ δύο ἴσες καὶ παράλληλες καὶ δύο ἐξ αὐτῶν πλάγιες, ἔχει δὲ γωνίες ὀξεῖες καὶ ἀμβλεῖες.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ βρῆς σώματα μὲ σχῆμα πλάγιου παραλληλεπιπέδου.

2) Νὰ κάμης ἀπὸ χαρτόνι ἕνα τέτοιο σῶμα.

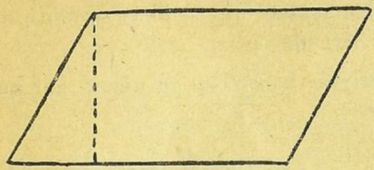
3) Νὰ κάμης ἀπὸ ξύλο καὶ ἀπὸ πηλὸ ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο.

4) Νὰ ἰχνογραφήσης στὸ τετράδιό σου ἕνα τέτοιο σῶμα.

5) Τὰ κορίτσια μποροῦν καὶ νὰ κεντήσουν ἕνα τέτοιο σῶμα.

Πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Ἂν κόψωμε τὶς ἕδρες τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, θὰ μᾶς δώσουν τὶς παρακάτω ἐπιφάνειες μὲ τὸ σχῆμα αὐτό:



Ὅπως βλέπομε, αὐτὸ τὸ σχῆμα δὲν εἶναι τετράγωνο γιατὶ οἱ γωνίες του δὲν εἶναι ὀρθές, οὔτε οἱ πλευρές του ἴσες.

Δὲν εἶναι οὔτε ὀρθογώνιο, γιατὶ οἱ γωνίες του δὲν εἶναι ὀρθές.

Αὐτὸ τὸ σχῆμα ἔχει 4 πλευρές, ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες καὶ 2 γωνίες ὀξεῖες καὶ 2 ἀμβλεῖες.

Αὐτὸ τὸ σχῆμα λέγεται **πλάγιο παραλληλόγραμμο** ἢ μόνο **παραλληλόγραμμο.**

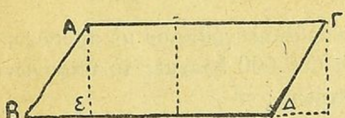
Γράψε καὶ σὺ μερικὰ παραλληλόγραμμα.

Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.

Ἀφοῦ τὸ παραλληλόγραμμο εἶναι ἐπιφάνεια, θὰ ἔχῃ ἐμβαδόν. Πῶς τὸ βρίσκομε; Ἂν προσέξωμε καλὰ τὸ σχῆμα του, θὰ τὸ βροῦμε.

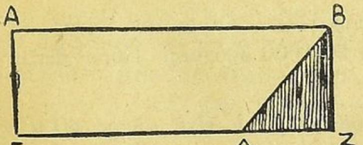
Εἴπαμε ὅτι ὅλα τὰ γεωμετρικὰ σχήματα τὰ ὀνομάζομε μὲ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.

Ἔχομε λοιπὸν τὸ παρακάτω σχῆμα ΑΒΓΔ



Ἂν κόψωμε τὸ περισευάμενο κομμάτι τῆς μιᾶς μεριᾶς, δηλαδὴ τὸ ΑΒΕ καὶ τὸ προσθέσωμε στὴν ἄλλη μεριὰ θὰ σχηματισθῆ τὸ παρακάτω σχῆμα.

Δοκίμασε καὶ σὺ νὰ κόψῃς τὸ ἕνα μέρος καὶ νὰ τὸ κολλήσῃς στὸ ἄλλο.

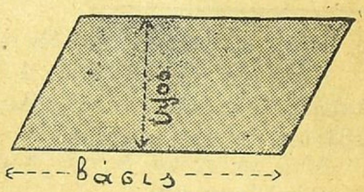


Ἂν προσέξωμε τώρα τὸ νέο σχῆμα, θὰ ἰδοῦμε ὅτι σχηματίσθηκε ἕνα ὀρθογώνιο. Ἀφοῦ ὅμως εἶναι ὀρθογώνιο, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν του πολλαπλασιάζουμε τὶς δύο διαστάσεις του. Τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος του (ἢ ἐπὶ τὸ ὕψος, τὸ ἴδιο εἶναι).

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος μετροῦμε τὴν πλευρὰ τῆς βάσεως. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ πλάτος (ἢ τὸ ὕψος) μετροῦμε τὴν κάθετη γραμμὴ ποὺ ἑνώνει τὴ βάση μὲ τὴν ἀπέναντι πλευρά.

Τὸ παρακάτω σχῆμα μᾶς δείχνει ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος καὶ ποιὸ εἶναι τὸ ὕψος.

Ἀφοῦ μετρήσωμε καὶ βροῦμε τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος, τὰ πολλαπλασιάζομε καὶ τὸ γινόμενο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. Ἔτσι :



Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἂν παραδείγματος χάριν τὸ μῆκος εἶναι 3 μ. καὶ τὸ ὕψος 1,50 μ. τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι 3 × 1,50 = 4,50 τετρ. μέτρα.

Προβλήματα.

1) Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου μὲ πρόσοψη 50 μ. καὶ βάθος 15 μ. πωλήθηκε πρὸς 600.000 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ ἰδιοκτήτης ;

2) Ἕνα χωράφι παραλληλόγραμμο ἔχει μῆκος 75 μ. καὶ πλάτος 45 μ. Πωλήθηκε πρὸς 830.000 δραχμὰς τὸ στρέμμα. Πόση ἦταν ἡ ἀξία του ;

3) Ἕνας κῆπος σχήματος παραλληλογράμμου μὲ μῆκος 25 μ. καὶ πλάτος 15 μ. πωλήθηκε γιὰ 300.000 δραχμές. Πόσο ἄξιζε τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ;

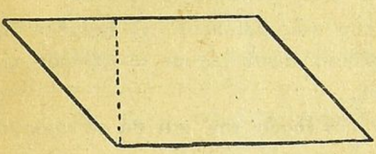
4) Σ' ἕνα κτῆμα παραλληλόγραμμο, ποὺ εἶχε μῆκος 60 μ. καὶ πλάτος 35 μ., ἔκτισεν ὁ ἰδιοκτήτης ἕνα σπιτάκι, ποὺ ἔπιασε 200 τ. μ. Πόσα δένδρα θὰ φυτέψη στὸ ὑπόλοιπο κτῆμα, ἂν γιὰ κάθε δένδρο χρειάζεται χῶρος 3 τ. μ.;

Περίμετρος παραλληλογράμμου.

Περίμετρος, ὅπως εἴπαμε, εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν 4 πλευρῶν τῶν τετραπλεύρων σωμάτων.

Γιὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον τοῦ παραλληλογράμμου θὰ μετρήσωμε τὶς 4 πλευρές του καὶ θὰ προσθέσωμε τὸ μῆκος καὶ τῶν 4 πλευρῶν. Ἐπειδὴ ὅμως εἴπαμε ὅτι οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες, μποροῦμε νὰ μετρήσωμε τὴν μία μεγαλύτερη καὶ νὰ τὴ διπλασιάσωμε, κατόπι νὰ μετρήσωμε τὴ μιὰ μικρότερη καὶ νὰ τὴν διπλασιάσωμε καὶ νὰ προσθέσωμε τὰ δύο ἀθροίσματα.

Ἔχομε τὸ παρακάτω παραλληλόγραμμο· ἡ μία πλευρά του εἶναι 2,40 μ., ἄλλο τόσο θὰ εἶναι καὶ ἡ ἀπέναντι, δηλαδὴ 2,40 μ. Οἱ δύο μαζὶ θὰ εἶναι 4,80 μέτρ. Μετρᾶμε καὶ τὴ μία μικρότερη καὶ εἶναι 1,50 μ. Ἄλλο τόσο θὰ εἶναι καὶ ἡ ἄλλη, δηλαδὴ 1,50. Οἱ δύο μαζὶ θὰ εἶναι 3 μ. Ἔτσι ἡ περίμετρος θὰ εἶναι 4,80+3=7,80 μ.



Ἀσκήσεις.

1) Κάμε μόνος σου στὴν αὐλὴ ἕνα παραλληλόγραμο καὶ μέτρησέ το καὶ πές μας πόση εἶναι ἡ περίμετρός του.

3) Ὁ γείτονάς σου ἔχει ἕνα κῆπο σχήματος παραλληλογράμμου. Θέλει νὰ τὸν φράξῃ μὲ σύρμα. Πές μου τί θὰ κάμῃ γιὰ νὰ λογαριάσῃ πόσο σύρμα τοῦ χρειάζεται γιὰ νὰ τὸν φράξῃ γύρω-γύρω;

4) Ἕνας ἔχει ἕνα κῆπο σὰν τὸν παραπάνω τοῦ γείτονά σου. Ἡ μία μεγάλη πλευρά του ἔχει μῆκος 12 μ. καὶ ἡ μία μικρή του πλευρὰ ἔχει μῆκος 8,20 μ. Θέλει νὰ φυτέψῃ γύρω - γύρω τριανταφυλλιές,

πού ἡ μία ν' ἀπέχη ἀπὸ τὴν ἄλλη 0,80 μ. Πόσες τριανταφυλλιὲς τοῦ χρειάζονται ;

5) Ἕνας κτηματίας ἔχει ἕνα ἀμπέλι παραλληλόγραμμο καὶ θέλει γύρω - γύρω ν' ἀνοίξη ἕνα αὐλάκι γιὰ νὰ χύνωνται τὰ νερὰ τῆς βροχῆς. Τ' ἀμπέλι ἔχει τὴ μεγαλύτερη πλευρὰ μὲ μῆκος 20 μ. καὶ τὴ μικρότερη μὲ 15 μ. Πόσο θὰ πληρώση γιὰ τὸ αὐλάκι, ἂν τοῦ ζητοῦν 500 δραχμὲς τὸ μέτρο ;

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Τώρα καταλαβαίνεις μόνος σου πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἀφοῦ ξέρομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλογράμμου.

Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν ἑδρῶν του καὶ θὰ τὰ προσθέσωμε. Δοκίμασε μόνος σου γιατὶ εἶναι πολὺ εὔκολο.

Ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Εἴπαμε, ὅτι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ἂν τὸ πιέσουμε λιγάκι καὶ κλίνει, γίνεται πλάγιον παραλληλεπίπεδον. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι ὁ ἴδιος. Ἔτσι γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκον τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, κάνομε ὅ,τι καὶ εἰς τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομε δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καθὼς ξέρομε εἶναι τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος. Συνεπῶς ὁ ὄγκος εἶναι μῆκος×πλάτος×ὕψος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκον τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, δηλαδὴ τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἐπὶ τὸ ὕψος.

Προβλήματα.

1) Ένα πλάγιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 4,20 μ., πλάτος 2,40 μ. καὶ ὕψος 1,80 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

2) Ένα πλάγιο παραλληλεπίπεδο έχει ἐμβαδὸν βάσεως 8 τετραγ. μέτρα καὶ ὕψος 1,50 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

3) Μία ἀποθήκη νεροῦ μὲ σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 4,20 μ., πλάτος 2,80 μ. καὶ ὕψος 2,10 μ. Πόσες ὀκάδες νερὸ χωρεῖ ;

4) Ένα μάρμαρο πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 1,70 μ., πλάτος 1,10 μ. καὶ ὕψος 0,80 μ. Πόσων τόννων βάρος ἔχει ;

5) Πές μας τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ;

6) Νὰ βρῆς σώματα, ποὺ ἔχουν σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Πρίσματα.

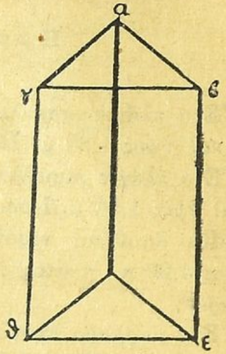
Ἂν πάρωμε ἕνα κύβον, ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἔχουν καὶ τὰ τρία τὶς δύο ἕδρες ἴσες καὶ παράλληλες, οἱ ὁποῖες λέγονται **βάσεις** καὶ τὶς ἄλλες ἕδρες ἢ ἴσες ἢ διάφορες καὶ πάντα παραλληλόγραμμες.

Αὐτὰ τὰ σώματα λέγονται **πρίσματα**. Ὥστε πρῖσμα εἶναι καὶ ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο. Καὶ ἂν μὲν ἔχουν τὶς ἕδρες κάθετες πρὸς τὴ βάση λέγονται **ὄρθια πρίσματα**, ἂν τὶς ἔχουν πλάγιες λέγονται **πλάγια πρίσματα**.

Ἔτσι ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο εἶναι ὄρθια πρίσματα, τὸ δὲ πλάγιο παραλληλεπίπεδο εἶναι πλάγιο πρῖσμα. Ὕψος κάθε πρίσματος εἶναι μιὰ γραμμή, ἡ ὁποία ἑνώνει τὶς δύο βάσεις.

Κάθε πρῖσμα παίρνει ἕνα ὄνομα ἀνάλογο μὲ τὸ σχῆμα τῆς βάσεώς του. Ἐὰν π. χ. ἕνα πρῖσμα, ὅπως τὰ πρίσματα ποὺ μάθαμε ἕως τώρα ἔχουν βάσιν τετράγωνον, λέγονται τετραγωνικὰ πρίσματα, ἂν ἔχουν βάσιν πεντάγωνον, πενταγωνικά, ἂν ἔχουν βάσιν τρίγωνον λέγονται τριγωνικά.

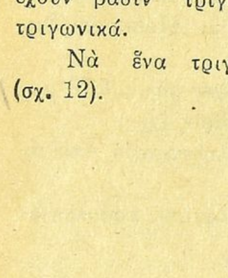
Νὰ ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα (σχ. 12).



Σχ. 12.

Τριγωνικὴ πυραμίς.

Παρατήρησε καλὰ τὸ παρακάτω σῶμα (σχ. 13).



Σχ. 13.

Ὅπως βλέπεις, δὲν μοιάζει μὲ κανένα ἀπὸ τὰ σώματα, ποὺ μάθαμε ἕως τώρα. Ἡ βάση του εἶναι τριγωνικὴ καὶ ἀπὸ κάθε πλευρὰ τῆς τριγωνικῆς βάσεως ὑψώνεται μία ἕδρα πάλιν τριγωνική. Αὐτὲς οἱ τριγωνικὲς ἕδρες ἑνώνονται εἰς ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται **κορυφή.**

Αὐτὸ τὸ σῶμα λέγεται **τριγωνικὴ πυραμίς.**

Τέτοια σώματα εὑρέθησαν στὴν Αἴγυπτο. Εἶναι ἀρχαῖα κτίρια μὲ σχῆμα πυραμίδος. Αὐτὰ τὰ κτίρια λέγονται Πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου. Μέσα στὰ κτίρια αὐτὰ βρέθηκαν οἱ τάφοι τοῦ Φαραώ.

Ἂς γνωρίσωμε τώρα καλύτερα τὴν τριγωνικὴ πυραμίδα. Ὅπως βλέπομε, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 ἕδρες τριγωνικὲς ἐκ τῶν ὁποίων ἡ κάτω ἡ ὁριζοντία εἶναι ἡ **β ά σ η**. Οἱ τρεῖς πλάγιες ἕδρες της ἑνώνονται σὲ μιὰ **κ ο ρ υ φ ή**. Ἐκτὸς τῆς κορυφῆς αὐτῆς ἔχει καὶ τρεῖς ἄλλες κορυφὲς στὴ βάση. Ἔχει 6 **ἀ κ μ έ ς**. Ἔχει 6 δίεδρες γωνίες καὶ 4 στερεές. Ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι τεθλασμένη καὶ οἱ ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της εἶναι πλάγιες πρὸς τὴ βάση. Ὕψος εἶναι ἡ κάθετος γραμμὴ ἀπὸ τῆς κεντρικῆς κορυφῆς στὴ βάση. Ἡ βάση τῆς πυραμίδος μπορεῖ νὰ μὴν εἶναι τριγωνική, ἀλλὰ πολυγωνική. Τότε θὰ λέγεται **π ο λ υ γ ω ν ι κ ὴ π υ ρ α μ ί ς**.

Ἔτσι τριγωνικὴ πυραμὶς λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μία τριγωνικὴ βάση καὶ ἀπὸ τρεῖς τριγωνικὲς ἕδρες, οἱ ὁποῖες ἑνώνονται σὲ μιὰ κορυφή.

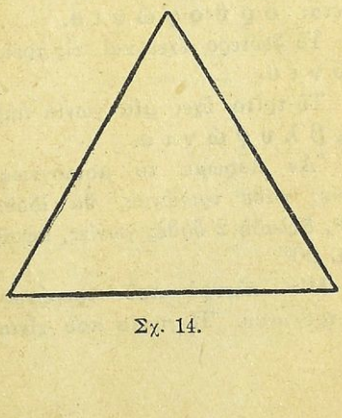
Τ ρ ί γ ω ν α.

Ἂν πάρωμε μιὰ ἕδρα τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος θὰ σχηματισθῇ τὸ παρακάτω σχῆμα (σχ. 14).

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **τ ρ ί γ ω ν ο**, γιατὶ ἔχει τρεῖς πλευρὲς καὶ τρεῖς γωνίες.

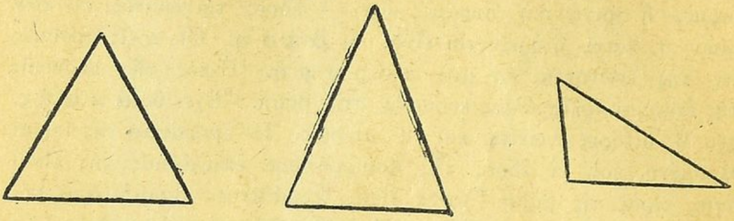
Τρίγωνο εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει 3 πλευρὲς καὶ 3 γωνίες.

Ὅλα τὰ τρίγωνα ἔχουν τρεῖς πλευρὲς καὶ τρεῖς γωνίες, δὲν εἶναι ὅμως ὅλα ὅμοια.



Σχ. 14.

Νὰ π. χ. παρακάτω 3 τρίγωνα ἀνόμοια :



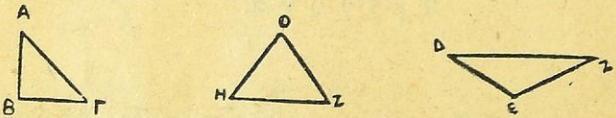
Τὸ πρῶτο τρίγωνο ἔχει καὶ τὶς τρεῖς πλευρὲς ἴσες, γιαυτὸ καὶ λέγεται **ἰσόπλευρο**.

Τὸ δεύτερο ἔχει μόνον τὶς 2 πλευρὲς ἴσες καὶ λέγεται **ἰσοσκελές**.

Τὸ τρίτο δὲν ἔχει καμμιὰ πλευρὰ ἴση μὲ τὴν ἄλλη καὶ λέγεται **σκαληνό**.

Ἔτσι λέμε τὰ τρίγωνα βλέποντας τὶς πλευρές τους.

Μποροῦμε ὅμως νὰ δώσωμε ἕνα ὄνομα στὸ τρίγωνο παρατηρώντας τὶς γωνίες του. Νὰ τὰ παρακάτω τρίγωνα :



Τὸ πρῶτο τρίγωνο ἔχει μιὰ γωνία ὀρθὴ καὶ 2 γωνίες ὀξεῖες καὶ λέγεται **ὀρθογώνιο**.

Τὸ δεύτερο ἔχει καὶ τὶς τρεῖς γωνίες ὀξεῖες καὶ λέγεται **ὀξυγώνιο**.

Τὸ τρίτο ἔχει μία γωνία ἀμβλεῖα καὶ 2 ὀξεῖες καὶ λέγεται **ἀμβλυγώνιο**.

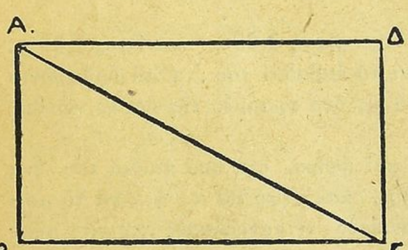
Ἂν πάρωμε τὸ μοιρογνωμόνιο καὶ μετρήσωμε τὶς τρεῖς γωνίες κάθε τριγώνου, θὰ ἰδοῦμε ὅτι καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ εἶναι 180°, δηλαδὴ 2 ὀρθὲς γωνίες, ἀφοῦ, ὅπως μάθαμε, κάθε ὀρθὴ γωνία εἶναι 90°.

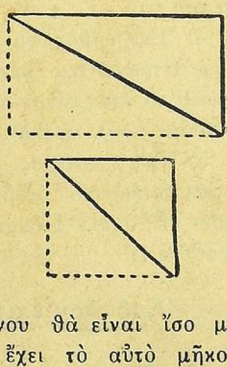
Μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου ὁποιαδήποτε λέγεται **βάση** τοῦ τριγώνου. Ἡ γωνία ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση λέγεται κορυφὴ τοῦ τριγώνου. Ἡ κάθετος, ποὺ φέρομε ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάση, λέγεται ὕ ψ ο ς τοῦ τριγώνου.

1) Κάμε ἕνα τρίγωνο ὀρθογώνιο.
2) » » » ἰσόπλευρο.
3) » » » σκαληνό.
4) » » » ἀμβλυγώνιο.
5) » » » ἰσοσκελές.
6) » » » ὀξυγώνιο.
7) Σὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτὰ φέρε τὸ ὕ ψ ο ς.
8) Μέτρησε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιό σου τὶς γωνίες τῶν τριγώνων ποὺ ἔκαμες καὶ πὲς πόσες μοῖρες εἶναι οἱ γωνίες καθενός.

Ἐμβαδὸν τριγώνου.

Ἂν πάρωμε ἕνα ὀρθογώνιο, ὅπως τὸ παρακάτω, ἢ ἕνα τετράγωνο ἢ ἕνα παραλληλόγραμμο καὶ τὸ κόψωμε στὴ διαγώνιό του θὰ σχηματισθοῦν δύο τρίγωνα. Ἀπ' αὐτὸ συμπεραίνομε ὅτι τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ μισὸ τοῦ τετραπλεύρου. Ἂν πάλι πάρωμε δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑνώσωμε θὰ σχηματίσωμε ἕνα τετράπλευρο.





Ἑπομένως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, ποὺ ἔχει τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ πλάτος. Τώρα εἶναι εὔκολο νὰ καταλάβῃς πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου. Ἀφοῦ γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος (βάση) μὲ τὸ πλάτος (ὕψος) καὶ ἀφοῦ τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ μισὸ τετράπλευρο, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενο θὰ τὸ χωρίσωμε σὲ δύο.

Ἔτσι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου πολλαπλασιάζομε τὴν βάση ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ δύο.

Νὰ καὶ ὁ τύπος γιὰ νὰ τὸν θυμᾶσαι : $\frac{B \times Y}{2}$

Π ρ ο β λ ή μ α τ α.

1) Ἕνα τρίγωνο ἔχει βάση 1,80 μ. καὶ ὕψος 1,20. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2) Ἕνα χωράφι τριγωνικὸ ἔχει βάση 50 μ. καὶ ὕψος 12 μ. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ ὁ ἰδιοκτήτης του ἐὰν τὸ πωλήσῃ πρὸς 80.000 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ;

3) Ὁ γείτονάς σου ἔχει ἀμπέλι τριγωνικὸ μὲ μῆκος 90 μ. καὶ ὕψος 12 μ. Θέλει νὰ ξέρῃ πόσα στρέμματα εἶναι τὸ ἀμπέλι του. Πές του ἐσύ.

4) Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχει βάση 2,80 μ. καὶ ὕψος 1,50 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ; (Στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ ὕψος εἶναι ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ γραμμὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἡ κάθετος πρὸς τὴ βάση).

5) Ἕνας πατέρας πέθανε καὶ ἀφῆκε στὰ δυὸ παιδιά του ἕνα χωράφι τριγωνικὸ μὲ βάση 120 μ. καὶ ὕψος 90 μ. γιὰ νὰ τὸ μοιράσουν ἐξ ἴσου. Πόσους τεκτονικοὺς τετραγωνικοὺς πήχεις πῆρε τὸ καθένα ;

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τριγωνικῆς πυραμίδος.

Ἡ εὕρεση τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι εὔκολη. Ἂν προσέξωμε, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἡ βάση εἶναι τὸ τρίγωνο ἀλλὰ καὶ ὅλες οἱ ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας εἶναι τρίγωνα ἴσα. Ἂν βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν της καὶ προσθέσωμε καὶ τὰ 4 ἐμβαδά, θὰ βροῦμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Ὥστε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος:

1) Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς βάσεώς της. Ξέρομε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

2) Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς ἕδρας τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας. Εἶναι καὶ αὐτὴ τρίγωνο.

3) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιὰ ἕδρας θὰ τὸ τριπλασιάσωμε ἐπὶ 3 ἀφοῦ τρεῖς εἶναι οἱ ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας καὶ εἶναι καὶ οἱ τρεῖς ἴσες.

4) Τὸ γινόμενο τοῦ τριπλασιασμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μιᾶς ἕδρας τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας θὰ τὸ προσθέσωμε μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι τὸ ὅλον ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Ἔχομε π. χ. μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα, ποὺ ἡ βάση της ἔχει μῆκος 2 μ. καὶ πλάτος 1,20 καὶ ὕψος 3,20 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της;

1) Βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης, τὸ ὁποῖο εἶναι $\frac{2 \times 120}{2}$ $= 1{,}20$ τ. μ.

2) Βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς παράπλευρης ἐπιφανείας θὰ εἶναι $\frac{2 \times 3{,}20}{2} = 3{,}20$ τ. μ.

3) Τριπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ $3{,}20 \times 3 = 9.60$ τ. μ.

4) Προσθέτομε τὸ 9,60 μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως 1,20 καὶ θὰ ἔχωμε $9{,}60 + 1{,}20 = 10{,}80$ τ. μ., εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος βρίσκεται κατ' ἄλλον τρόπον εὐκολώτερον.

Ἂν προσέξωμε καλὰ θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι βάσεις τῶν ἑδρῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως, συνεπῶς μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε τὴν περίμετρον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ νὰ διαιρέσωμε διὰ δύο. Σ' αὐτὸ θὰ προσθέσωμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ μᾶς δείχνη τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος:

Π. χ. Ἔχομε μίαν πυραμίδα τριγωνικὴ καὶ θέλομε νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της.

1) Βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ὅπως ξέρομε.

2) Μετροῦμε τὴν περίμετρο τῆς βάσεως καὶ τὴν πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

3) Προσθέτομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας καὶ αὐτὸ εἶναι ὁλόκληρο τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Ἐννοεῖται καὶ οἱ δύο τρόποι ἀναφέρονται εἰς τὸ ἐμβαδὸν κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος. Ἐὰν ἡ πυραμὶς εἶναι ἀκανόνιστος, τότε θὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν χωριστὰ ἑκάστης ἕδρας καὶ θὰ προσθέσωμε τὰ 4 ἐμβαδά.

Προβλήματα.

1) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν μὲ πλάτος 2,40 μ. καὶ μῆκος 3,60 μ. Ἡ βάσις μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της ἔχει μῆκος 3,60 καὶ ὕψος 2,80 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

2) Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 7,20 μ. καὶ τὸ πλάτος της 1,20 μ., τὸ δὲ ὕψος μιᾶς ἕδρας της 1,80 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

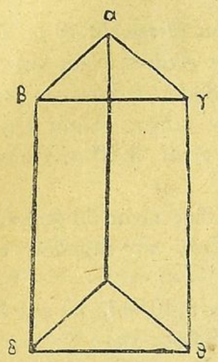
3) Κατασκεύασε μόνος σου μιὰ κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι καὶ κατόπι νὰ βρῇς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της.

Ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδας.

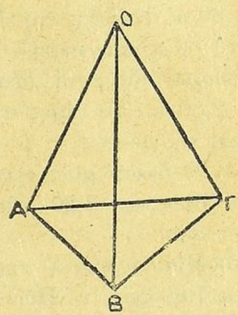
Γιὰ νὰ καταλάβωμε καλύτερα πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας πρέπει νὰ συγκρίνωμε μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα μὲ ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα.

Παίρνομε ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα καμωμένο ἀπὸ χαρτόνι, φτιάνομε καὶ μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι μὲ τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος. Ἂν μπορούσαμε νὰ κόψωμε κανονικὰ τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα θὰ σχηματίζαμε τρεῖς τριγωνικὲς ὅμοιες πυραμίδες. Ἐπειδὴ ὅμως αὐτὸ εἶναι δύσκολο, δοκιμάζομε μὲ ἕνα ἄλλο τρόπο γιὰ νὰ συγκρίνωμε αὐτὰ τὰ δύο σώματα.

Τὰ παρακάτω σχήματα δείχνουν ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα (σχ. 15) καὶ μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα (σχ. 16).



Σχ. 15.



Σχ. 16.

Γεμίζομε τὴν τριγωνικὴ πυραμίδα μὲ ζάχαρη ἢ μὲ ἄμμο, ἀφοῦ τὴν γεμίσωμε τὴν ἀδειάζομε εἰς τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα.

Κάνοντας αὐτὸ θὰ ἰδοῦμε ὅτι γιὰ νὰ γεμίση τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα θὰ χρειασθοῦν 3 γεμᾶτες τριγωνικὲς πυραμίδες. Αὐτὸ μᾶς δείχνει ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 3 φορὲς μικρότερος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Ἂν λοιπὸν ἔχωμε τὸν ὄγκο τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ὁ ὄγκος τῆς ὁμοίας στὴ βάση καὶ στὸ ὕψος τριγωνικῆς πυραμίδος θὰ εἶναι 3 φορὲς μικρότερος.

Τώρα ἀφοῦ ξέρομε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος βρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος θὰ διαιρέσωμε τὸν ὄγκον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος διὰ 3. Ἔτσι :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκον τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος

πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ 3.

Προβλήματα.

1) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 3 τ. μ. καὶ ὕψος 1,20 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

2) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει μῆκος βάσεως 2,40 μ. καὶ πλάτος 1,80 μ. Τὸ ὕψος της εἶναι 2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

3) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο. Τῆς βάσεως αὐτῆς οἱ δύο πλευρὲς ἔχουν μῆκος ἡ μία 4 μ. καὶ ἡ ἄλλη 2,80 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 3,20 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

4) Ὁ ὄγκος μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 36 κυβικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος της 3,20 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ;

5) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὄγκον 8,40 κυβ. μ. καὶ ἐμβαδὸν βάσεως 7,60 τετρ. μ. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος της ;

6) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς μὲ ἐμβαδὸν βάσεως 3,80 τ. μ. καὶ ὕψος 2,40 μ. πόσες ὀκάδες νερὸ χωρεῖ ; Πόσες ὀκάδες λάδι ; Πόσες ὀκάδες οἰνόπνευμα ; Πόσες ὀκάδες πετρέλαιο ;

Εἴδη πυραμίδων.

Εἴπαμε στὰ προηγούμενα μαθήματα ὅτι ἔχομε διαφόρων εἰδῶν πρίσματα ἀνάλογα μὲ τὸ σχῆμα τῆς βάσεως.

Ἔτσι ἔχομε τετραγωνικὸ πρῖσμα, ὀρθογώνιο πρῖσμα, τριγωνικὸ πρῖσμα καὶ ἄλλα.

Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ στὶς πυραμίδες : ἔχομε π. χ.

Τριγωνικὴ πυραμίδα, ἂν ἡ βάση της εἶναι τρίγωνο.

Τετραγωνικὴ πυραμίδα, ἂν ἡ βάση της εἶναι τετράγωνο.

Πενταγωνικὴ πυραμίδα, ἂν ἡ βάση της εἶναι πεντάγωνο, καὶ **πολυγωνικὴ πυραμίδα**, ἂν ἡ βάση της εἶναι πολύγωνο. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῶν διαφόρων πυραμίδων βρίσκεται ὅπως βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος, ποὺ ἔχει ἡ βάση. Ὁ ὄγκος τῶν διαφόρων πυραμίδων βρίσκεται ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, δηλαδὴ πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ 3.

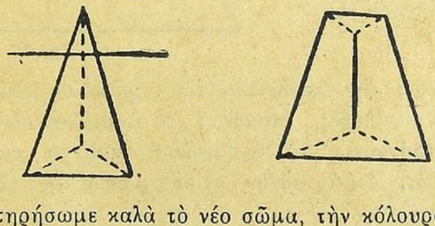
Ἀσκήσεις.

1) Κάμε ἀπὸ χαρτόνι μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα.
2) » » » ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα.
3) » » » ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο.
4) » » » ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο.
5) » » » μιὰν τετραγωνικὴ πυραμίδα.
6) » » » μιὰν πενταγωνικὴ πυραμίδα.
7) Κάμε καὶ ἀπὸ πηλὸ διάφορα εἴδη πυραμίδων.
8) Κάμε ἂν μπορῇς καὶ ἀπὸ ξύλο πυραμίδες.

Μάθαμε τί εἶναι πυραμίς. Μάθαμε ἀκόμη ὅτι ἔχει μόνο μιὰ βάση καὶ ὅτι ἀνάλογα μὲ τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει ἡ βάση της παίρνει καὶ τὸ ὄνομά της ἡ πυραμίς. Π. χ. τριγωνικὴ πυραμίς, τετραγωνικὴ πυραμὶς κ.λ.π.

Κόλουρος πυραμίς.

Ἂν πάρωμε τώρα μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα καὶ τῆς κόψωμε τὴν κυρυφὴ ὁριζοντίως, θὰ ἰδοῦμε ὅτι παρουσιάζεται ἕνα ἄλλο σῶμα. Αὐτὸ τὸ σῶμα λέγεται **κόλουρος πυραμίς...** Νὰ καὶ τὸ σχῆμα της (κόλουρος=κολοβή).



Ἂν παρατηρήσωμε καλὰ τὸ νέο σῶμα, τὴν κόλουρον πυραμίδα, θὰ ἰδοῦμε ὅτι δὲν ἔχει κορυφήν, ὅπως ἡ τριγωνικὴ πυραμίς. Ἀλλὰ ἀντὶ κορυφῆς ἔχει μία ἕδρα τριγωνική. Ἡ ἕδρα αὐτὴ εἶναι παράλληλη μὲ τὴ βάση ἀλλὰ μικρότερη. Τὸ σχῆμα τῶν ἑδρῶν τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας δὲν εἶναι τρίγωνα, ἀλλὰ τετράπλευρα. Ἔχει 5 ἕδρες, 9 ἀκμὲς καὶ 6 κορυφές. Ἔτσι :

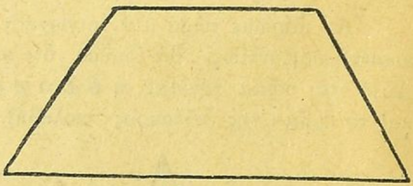
Κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ σῶμα ποὺ δὲν ἔχει κορυφή, εἰς τὴν ὁποίαν ν᾽ ἀπολήγουν ὅλες οἱ ἕδρες. Ἔχει δύο βάσεις τριγωνικὲς ἄνισες παράλληλες, καὶ ἔχει 3 ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας τετράπλευρες.

Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ κάμωμε τετραγωνικὴ κόλουρο πυραμίδα καὶ πενταγωνική. Ἡ ἐπάνω βάση πάντοτε θὰ ἔχη τὸ σχῆμα τῆς κάτω βάσεως. Ἂν ἡ κάτω βάση εἶναι τετράγωνη, θὰ εἶναι καὶ ἡ ἐπάνω, ἀλλὰ μικρότερη.

Τραπέζιον.

Ἂν πάρωμε μία ἕδρα τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδας καὶ τὴν ἰχνογραφήσωμεν, θὰ παρουσιασθῇ τὸ παρακάτω σχῆμα (σχ. 17).

Αὐτὸ τὸ σχῆμα λέγεται **τραπέζιον.** Τὸ σχῆμα αὐτὸ ἔχουν ὅλες οἱ ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.

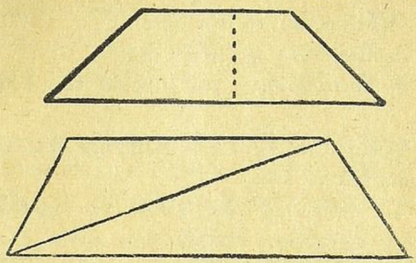


Σχ. 17

Παίρνοντας τὴν περίμετρο τοῦ τραπεζίου βλέπομε ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 πλευρές, ἑπομένως τὸ τραπέζιον εἶναι τετράπλευρο, ὅπως τὸ τετράγωνο, τὸ ὀρθογώνιο καὶ τὸ παραλληλόγραμμο. Διαφέρει ὅμως, διότι μόνον οἱ δυὸ βάσεις του εἶναι παράλληλες. Ὥστε :

Τραπέζιον εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει 4 πλευρὲς

καὶ ἀπὸ τὶς ὁποῖες μόνον οἱ δύο ἀπέναντι πλευρὲς (βάσεις) εἶναι παράλληλες.



Εἰς τὸ τραπέζιον (σχ. 18) **ὕψος** εἶναι ἡ κάθετος ποὺ ἑνώνει τὶς δύο βάσεις. **Διαγώνιος** δὲ ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὶς δύο ἀπέναντι γωνίες.

Σχ. 18.

Ἀσκήσεις

1) Κάμε μίαν τετραγωνικὴν κόλουρον πυραμίδα στὸ τετράδιό σου.

2) Κάμε μίαν τριγωνικὴν κόλουρον πυραμίδα ἀπὸ πηλό.

3) » » » » » » ξύλο.

4) » » » » » » χαρτόνι.

5) Μέτρησε τὶς ἕδρες, τὶς ἀκμές της, τὶς κορυφές της.

6) Πές μας τί εἶναι τραπέζιο.

7) Κάμε τὸ σχῆμα του στὸ τετράδιό σου.

8) Φέρε τὸ ὕψος του καὶ μέτρησέ το.

9) Μέτρησε τὶς δύο βάσεις του.

10) Φέρε τὴ διαγώνιο καὶ πές μας τί εἴδους σχήματα θὰ παρουσιασθοῦν ἂν κόψωμε τὸ τραπέζιο στὴ διαγώνιό του ;

11) Σύγκρινε τὸ τραπέζιο : α΄) μὲ τὸ τετράγωνο β΄) μὲ τὸ ὀρθογώνιο γ΄) μὲ τὸ παραλληλόγραμμο.

Ἐμβαδὸν Τραπεζίου.

Ἂν σὲ κάθε τραπέζιο φέρωμε τὴ διαγώνιο, θὰ χωρισθῇ τὸ τραπέζιο σὲ δύο τρίγωνα. Ἐπειδὴ ὅμως ξέρομε πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, βρίσκομε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τριγώνων καὶ τὰ προσθέτομε. Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

Μποροῦμε ὅμως νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εὐκολώτερα καὶ ταχύτερα.

1) Μετροῦμε τὴ μία βάση.

2) Μετροῦμε τὴν ἄλλη βάση.

3) Τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν δύο βάσεων τὸ διαιροῦμε διὰ δύο.

4) Κατόπιν αὐτὸ ποὺ βρήκαμε ἀπὸ τὴ διαίρεση τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος.

Τὸ γινόμενον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου Π. χ. ἔχω ἕνα τραπέζιο. Μετρῶ τὴν κάτω βάση καὶ βρίσκω ὅτι εἶναι 1,20 μ. Μετρῶ τὴν ἄνω καὶ εἶναι 0,80 μ. Μετρῶ καὶ τὸ ὕψος καὶ εἶναι 0,60 μ. Τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $\frac{1;20+0,80}{2} \times 0,60 =$ 0,60 τ. μ.

Ἑπομένως :

Γιὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου πολλαπλασιάζομε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.

Προβλήματα.

1) Ἕνα Τραπέζιον ἔχει τὴν κάτω βάση μὲ μῆκος 4,20 μ. τὴν ἐπάνω 1,80 μ. καὶ τὸ ὕψος 2,40 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2) Ἕνα τραπέζιον ἔχει τὶς δύο παράλληλες πλευρές του τὴν μὲν μίαν μὲ μῆκος 8 μ., τὴν ἄλλη μὲ μῆκος 3,20 καὶ ὕψος μὲ μῆκος 4 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

3) Ἕνα τραπέζιον ἔχει τὴ μία βάση του 3.60 μ., τὴν ἄλλη 1,40 καὶ ἐμβαδὸν 6,25 τ.μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του ;

4) Ἕνα χωράφι σχήματος τραπεζίου ἔχει μῆκος τῆς μιᾶς βάσεως 78 μ. καὶ τῆς ἄλλης 1,20 μ., καὶ ὕψος 40 μ. Αὐτὸ τὸ χωράφι θέλουν νὰ τὸ μοιράσουν 3 ἀδέλφια. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα θὰ πάρη τὸ καθένα ;

5) Μία αὐλὴ σχήματος τραπεζίου μὲ μῆκος τῶν παραλλήλων πλευρῶν 8,40 καὶ 5,20 μ. καὶ ὕψος 6 μ. θὰ στρωθῆ μὲ πλακάκια τετράγωνα μὲ μῆκος πλευρᾶς 0,10 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν ;

6) Ἕνα ἀμπέλι σχήματος τραπεζίου ἔχει τὴν μία βάση μὲ μῆκος 62 μ. καὶ τὴν ἄλλη μὲ 24 μ. καὶ ὕψος 12,40 μ. Πόσα κλήματα ἔχει, ἂν σὲ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο χωροῦν 3 κλήματα ;

7) Μία στέγη ἔχει σχῆμα τραπεζίου: Ἡ μία βάση της εἶναι 12 μ., ἡ ἄλλη 8 μ. καὶ τὸ ὕψος 6,20 μ. Πόσα κεραμίδια θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ σκεπασθῆ, ἂν σὲ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο χρειάζωνται 60 κεραμίδια ;

8) Ὁ γείτονάς σου ἔχει μιὰ αὐλὴ σχήματος τραπεζίου. Θέλει νὰ ἀγοράση πλακάκια γιὰ νὰ τὴ στρώση. Δὲν ξέρει ὅμως πόσα πρέπει ν' ἀγοράση. Λογάριασέ του σὺ καὶ πές του.

9) Δύο χωρικοὶ θέλουν νὰ μοιράσουν ἕνα κτῆμα σχήματος τραπεζίου, ὥστε ὁ ἕνας νὰ πάρη τὰ 2)5 καὶ ὁ ἄλλος τὸ ὑπόλοιπο. Θέλουν νὰ ξέρουν πόσα τετραγωνικὰ μέτρα θὰ πάρη ὁ καθένας. Δὲν ξέρουν. Πές τους ἐσύ.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας Κολούρου πυραμίδος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν κάθε μιᾶς ἐκ τῶν ἑδρῶν της καὶ κατόπι προσθέτομε τὰ ἐμβαδά. Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος, βρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, κατόπιν τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἑδρῶν τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας της καὶ προσθέτομε τὰ ἐξαγόμενα.

Ἀσκήσεις.

1) Κάμε μόνος σου μιὰ κόλουρο πυραμίδα καὶ προσπάθησε νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της.

2) Νὰ βρῆς διάφορα σώματα, ποὺ νὰ ἔχουν τὸ σχῆμα τῆς κολούρου πυραμίδος.

3) Ἰχνογράφησε μιὰ τριγωνικὴ κόλουρο πυραμίδα καὶ κοντά της μιὰ ἕδρα τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας της.

Συγκεφαλαίωση.

1) Ἰχνογράφησε ὅλα τὰ πολύεδρα σώματα ποὺ ἔμαθες ἕως τώρα καὶ γράψε κάτω ἀπὸ τὸ καθένα τὸ ὄνομά του.

2) Σημείωσε πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκον καθενὸς ἀπ' αὐτά.

3) Γράψε ποιὰ εἶναι τὰ μέτρα τοῦ ὄγκου.

4) Ἰχνογράφησε ὅλες τὶς ἐπιφάνειες, ποὺ ἔμαθες ἕως τώρα καὶ γράψε κάτω ἀπὸ τὸ σχῆμα καθεμιᾶς τὸ ὄνομα.

5) Σημείωσε πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν καθεμιᾶς ἐπιφανείας ἀπ' αὐτές.

6) Σημείωσε πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῶν πολυέδρων σωμάτων.

7) Γράψε μὲ ποιὰ μέτρα μετροῦμε τὶς ἐπιφάνειες.

8) Γράψε πόσων εἰδῶν γραμμὲς ἔχομε καὶ χάραξε ὅλα τὰ εἴδη στὸ τετράδιό σου καὶ σημείωσε κάτω ἀπὸ τὸ καθένα τὸ ὄνομά του.

9) Γράψε ὅλα τὰ εἴδη τῶν Γωνιῶν, ποὺ ξέρεις, καὶ σημείωσε σὲ καθένα τὸ ὄνομά του.

10) Σημείωσε μὲ τί μετροῦμε τὶς γωνίες.

11) Ποιὰ γωνία εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὶς ἄλλες καὶ ποιὰ εἶναι μικρότερη;

Γενικὰ προβλήματα Γεωμετρίας.

1) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 8,25 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

2) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 52,80 μ. Πόσο εἶναι ἡ πλευρά του;

3) Ἕνας κῆπος τετραγωνικὸς τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 25,40 μ. πρόκειται νὰ περιφραχθῇ μὲ συρματόπλεγμα. Πόσο θὰ κοστίσῃ τὸ συρματόπλεγμα ἂν τὸ σύρμα πουλιέται πρὸς 3,500 δραχμὲς τὸ μέτρο;

4) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα τετραγώνου τοῦ ὁποίου ἡ κάθε πλευρὰ εἶναι 4,75 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

5) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 213,60 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

6) Ἕνα τετραγωνικὸ οἰκόπεδο τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 12.50 μ. πουλήθηκε πρὸς 35.000 δραχμὲς τὸ τετρ. μ. Πόσο πουλήθηκε ὅλο τὸ οἰκόπεδο ;

7) Μιὰ τετραγωνικὴ αὐλὴ τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 8,5 μ. πρόκειται νὰ τσιμενταρισθῇ. Πόσο θὰ κοστίσῃ τὸ τσιμεντάρισμα, ἂν γιὰ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο πληρώσουμε 5.000 δρχ.;

8) Οἱ ἀκμὲς ἑνὸς κύβου εἶναι 0,75 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

9) Θέλουμε νὰ ταχυδρομήσουμε ἕνα κυβικὸ κιβώτιο τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,45 μ. Στὸ ταχυδρομεῖο μᾶς ζητοῦν νὰ τὸ ντύσουμε ἀπ᾽ ἔξω μὲ πανί. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα πανὶ χρειαζόμαστε νὰ τὸ ντύσουμε ;

10) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 1,85 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

11) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου εἶναι 1,55 μ. Πόσες κυβικὲς παλάμες εἶναι ὁ ὄγκος του ;

12) Πόσα κυβικὰ μέτρα νερὸ χωράει μιὰ κυβικὴ δεξαμενὴ τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι 3,75 μέτρα ;

13) Πόσες ὀκάδες λάδι χωράει μιὰ κυβικὴ δεξαμενὴ τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι 1,25 μέτρα ; (εἰδικὸν βάρος λαδιοῦ 0.915).

14) Ἕνα χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου μὲ βάσιν 25 μ. καὶ ὕψος 32 μ. πουλήθηκε πρὸς 7.500 δρχ. τὸ τ. μ. Πόσο πουλήθηκε ὅλο τὸ χωράφι ;

15) Μιὰ αὐλὴ σχήματος ὀρθογωνίου μὲ βάσιν 8 μ. καὶ ὕψος 12 μ. πρόκειται νὰ περιφραχθῇ μὲ συρματόπλεγμα. Πόσα μέτρα σύρμα χρειάζεται ;

16) Πόση εἶναι ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει βάσιν 7,5 μ. καὶ ὕψος 10 μέτρα ;

17) Θέλουμε ν᾽ ἀνοίξουμε ἕνα χαντάκι γύρω - γύρω στὸ χωράφι μας, ποὺ ἔχει μῆκος 27 μ. καὶ πλάτος 14 μ. Πόσο μῆκος ἔχει τὸ χαντάκι καὶ πόσα θὰ πληρώσουμε, ἀφοῦ γιὰ κάθε μέτρο μᾶς ζητοῦν 4000 δρχ.; Τὸ χωράφι ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο.

18) Θέλουμε νὰ ἐλαιοχρωματίσουμε μιὰ πόρτα ποὺ ἔχει μῆκος

2,50 μ. καὶ πλάτος 0,90 μ. Μᾶς ζητοῦν 15.000 δρχ. τὸ τ. μ. Πόσο θὰ μᾶς κοστίση ;

19) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 2125 τ. μ. τὸ δὲ μῆκος του 250 μ. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος του ;

20) Ἡ περίμετρρς ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 330,80 μ. τὸ δὲ μῆκος του 135 μ. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος του καὶ πόσον τὸ ἐμβαδόν του ;

21) Θέλουμε νὰ πατώσουμε ἕνα δωμάτιο μὲ σανίδες. Τὸ μῆκος τοῦ δωματίου εἶναι 5,80 μ. καὶ τὸ πλάτος του 4,25 μ. Τῆς δὲ σανίδας τὸ μῆκος εἶναι 3,20 μ. καὶ πλάτος 0,20 μ. Πόσες τέτοιες σανίδες θὰ χρειασθοῦμε ;

22) Μιὰ αὐλὴ ποὺ ἔχει μῆκος 14 μ. καὶ πλάτος 9 μ. πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ πλάκες ποὺ κάθε μιὰ ἔχει μῆκος καὶ πλάτος 0,20 μ. Πόσες τέτοιες πλάκες θὰ χρειασθοῦν ;

23) Τὸ μῆκος ἑνὸς δωματίου εἶναι 6 μ., τὸ πλάτος του 9 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3,75 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων τοίχων του καὶ πόσον θὰ κοστίση ὁ ὑδροχρωματισμός του, πρὸς 2000 δρχ. τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ;

24) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας σας ; (ὁλικὴ ἐπιφάνεια).

25) Πάρτε ἕνα ἀπ᾽ τὰ κιβώτια ποὺ ἔχουν κουτιὰ γάλακτος, μετρῆστε το καὶ βρῆτε πόσο χαρτὶ χρειάζεται γιὰ νὰ τὸ περιτυλίξουμε.

26) Ἕνας τοῖχος ἔχει μῆκος 15 μέτρα, πλάτος 1,50 μ. καὶ ὕψος 3,50 μ. Πόσο κόστισε τὸ κτίσιμό του, ἂν πληρώθηκαν οἱ κτίστες πρὸς 8.000 δρχ. τὸ κυβικὸ μέτρο ;

27) Ἕνα μάρμαρο ἔχει μῆκος 2,40 μ., πλάτος 0,90 μ. καὶ ὕψος 0,40 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του καὶ πόσο τὸ βάρος του ; (εἰδικὸ βάρος μαρμάρου 2,83).

28) Μιὰ ἀποθήκη ἔχει μῆκος 5 μέτρα, πλάτος 3,5 μέτρα καὶ ὕψος 3 μέτρα. Μετρῆστε ἕνα ξύλινο κιβώτιο ἀπ᾽ αὐτὰ ποὺ βάζουν τὰ κουτιὰ τὸ γάλα καὶ βρῆτε, πόσα τέτοια κιβώτια χωράει ἡ ἀποθήκη ;

29) Θέλουμε νὰ στρώσουμε τὴν αὐλή μας μὲ ἄμμο πάχους 0,25 μ.

Ἡ αὐλή μας ἔχει μῆκος 12,5 καὶ πλάτος 8 μ. Πόσα τ. μ. ἄμμο θὰ χρειασθοῦμε ;

30) Τὰ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 42 μ. καὶ τὸ ὕψος του 6,45 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

31) Ἡ βάση ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 2,5 μ. καὶ κάθε μία ἀπὸ τὶς πλευρές του 2 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ;

32) Ἕνα τριγωνικὸ χωράφι ἔχει μῆκος 68,50 μ. καὶ ὕψος 45 μ. Πόσα στρέμματα εἶναι ;

33) Ἕνας τριγ. κῆπος ποὺ ἔχει μῆκος 27,50 μ. καὶ ὕψος 19 μ. πουλήθηκε πρὸς 50.000 δρχ. τὸ τ. μ. Πόσο πουλήθηκε ὅλος ὁ κῆπος ;

34) Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου εἶναι 4,5 μ. καὶ οἱ ἄλλες 6 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

35) Ἡ βάση μιᾶς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 3,5 μ. τὸ δὲ ὕψος της 5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

36) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος εἶναι 15 μ. καὶ τὸ ὕψος της 6,5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

37) Ἕνα χωράφι σχήματος τραπεζίου ἔχει βάσεις 35 μ. καὶ 24 μ. καὶ ὕψος 20 μ., πουλήθηκε πρὸς 25.000 δραχμὰς τὸ τ.μ. Πόσο κόστισε ;

38) Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 45 μ. καὶ 28 μ. καὶ ὕψος 20 μ. πουλήθηκε πρὸς 25.000 δραχμὰς τὸ τ. μ. Πόσο κόστισε ;

39) Θέλουμε νὰ τσιμεντάρουμε μιὰ πλατεῖα ποὺ ἔχει σχῆμα τραπεζίου, μὲ βάσεις 58 μ. καὶ 43 μ. καὶ ὕψος 36 μ. Μᾶς ζητοῦν 3.000 δρχ. κατὰ τ. μ. Πόσο θὰ σᾶς κοστίση ;

40) Ἕνας εἶχε ἕνα χωράφι τετραγωνικὸ ποὺ εἶχε μῆκος 65 μ. καὶ ὕψος 42 μ. καὶ τὸ ἔκαμε ἀνταλλαγὴ μὲ ἕνα ἄλλο χωράφι ποὺ εἶχε σχῆμα τραπεζίου μὲ βάσεις 45 μ. καὶ 35 μ. καὶ ὕψος 21 μ. Δὲν ἤξεραν ὅμως νὰ τὰ μετρήσουν καὶ γιαυτὸ συμφώνησαν νὰ βροῦν ἕνα μορφωμένον νὰ τὰ μετρήση καὶ ὅποιος πῆρε περισσότερο νὰ πληρώση στὸν ἄλλο τὴ διαφορὰ πρὸς 6.000 τὸ τ. μ. Σεῖς ποὺ εἶσθε καλὰ παιδιὰ κάμετέ τους τὴ χάρη νὰ τοὺς βοηθήσετε.

41) Ἕνας ἔχει δυὸ οἰκόπεδα, τὸ ἕνα τετραγωνικὸ ποὺ εἶχε μῆκος 26 μ. καὶ ὕψος 17 μ. καὶ τὸ ἄλλο σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 18 μ. καὶ 21 μ. καὶ ὕψος 24 μ. Τὸ πρῶτο τὄδωσε στὴν κόρη του καὶ τὸ δεύτερο στὸ γυιό του. Ποιὸς πῆρε τὸ μεγαλύτερο οἰκόπεδο;

ΤΕΛΟΣ

Πίναξ εἰδικοῦ βάρους

1) Χρυσὸς	19,258	10) Γάλα	1,030
2) Μολύβι	11,353	11) Κρασὶ	0,985
3) Ἀσῆμι	10,474	12) Λάδι	0,915
4) Χάλκωμα	7,788	13) Πετρέλαιο	0,840
5) Σίδερο	8,788	14) Βούτυρο	0,942
6) Μάρμαρο	2,837	15) Οἰνόπνευμα	0,948
7) Γυαλὶ	2,488	16) Ἀλεύρι	1,035
8) Θειάφι	2,070	17) Ζάχαρι	1,670
9) Πάγος	0,930	18) Σιτάρι	1,56

1510

ΚΟΝΤΟΜΑΡΗ - Α. ΜΠΑΜΠΑΛΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΜΠΤΗ ΤΑΞΗ
ΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΕΚΔΟΤΗΣ: ΠΕΤΡΟΣ Κ. ΡΑΝΟΣ
ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5 - ΑΘΗΝΑΙ