Κ. Χ. ΣΤΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΥ — Γ. ΣΑΚΚΑ
Διδασκάλων

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΣΤ' Δημοτικοῦ

Σύμφωνα μὲ τὸ ἐπίσημο Ἀναλυτικὸ Πρόγραμμα καὶ μὲ σύστασιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας ὑπ' ἀριθ. 8953)24-2-49

Β' ΕΚΔΟΣΙΣ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ Ν. ΑΛΙΚΙΩΤΗΣ & ΥΙΟΙ
ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ 6 - ΑΘΗΝΑΙ

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν ἑνὸς ἐκ τῶν συγγραφέων καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ ἐκδότου.

Τὸ βιβλίο ἀκολουθεῖ τὴν ὀρθογραφίαν τῆς ἀπὸ 24)6)47 Προκηρύξεως τοῦ κ. Ὑπ. Παιδείας

Τυπογραφεῖον Ν. ΑΛΙΚΙΩΤΗ & ΥΙΩΝ — Ψαρῶν 2 — Ἀθῆναι

Ἐπανάληψις μαθημάτων τῆς Ε΄ τάξεως

Ἡ ἀριθμητικὴ τῆς ἕκτης τάξεως δὲν εἶναι καθόλου δύσκολη.

Γιὰ νὰ τὴν μάθετε μὲ εὐκολία χρειάζεται νὰ προσέχετε ἀρκετὰ καὶ νὰ μὴν κάνετε τίποτε χωρὶς νὰ σκεφθῆτε καλά. Πρὶν ἀρχίσετε τὰ μαθήματα τῆς ἀριθμητικῆς τῆς ἕκτης τάξεως, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπαναλάβετε μὲ συντομία πολλὰ ἀπὸ τὰ μαθήματα τῆς ἀριθμητικῆς τῆς Ε΄ τάξεως,

Αὐτὸ θὰ σᾶς ὠφελήση πολὺ καὶ θὰ σᾶς διευκολύνη στὴ λύσι πολλῶν προβλημάτων ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴ τῆς ἕκτης τάξεως.

Τὰ μαθήματα αὐτὰ ποὺ πρέπει νὰ ἐπαναλάβετε εἶναι τὰ ἑξῆς:

1) Οἱ ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.
2) Τὸ κεφάλαιο περὶ διαιρετότητος.
3) Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσι τῶν κλασμάτων.
4) Ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.
5) Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ μὲ συντομία μεγάλη.

Μὴν ξεχνᾶτε ὅτι τὸ σπουδαιότερο κεφάλαιο τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι τὰ κλάσματα. Ἂν δὲν ξέρετε πολὺ καλὰ τὰ κλάσματα, νὰ μὴν προχωρήσετε στὴν ἀριθμητικὴ τῆς ἕκτης τάξεως, ἀλλὰ νὰ κάμετε πρῶτα μιὰ καλὴ ἐπανάληψι τῶν κλασμάτων.

Στὴ λύσι τῶν προβλημάτων νὰ προσέχετε πολύ. Ἡ προσοχὴ καὶ ἡ σκέψι σας νὰ δουλεύουν μαζί. Ὅλα τὰ προβλήματα ἔχουν τὴ λύσι των καὶ ὅλα εἶναι εὔκολα. Νὰ μὴν περιορίζεσθε μονάχα στὰ προβλήματα τοῦ βιβλίου, ἀλλὰ νὰ κάνετε καὶ σεῖς δικά σας προβλήματα, ἀπὸ τὴ δική σας ζωή, ἀπὸ τὴ ζωὴ τοῦ τόπου σας καὶ ἀπὸ τὶς ἐργασίες τῶν γονέων σας. Τὰ προβλήματα τοῦ βιβλίου εἶναι σὰν παραδείγματα, ἐνῶ τὰ προβλήματα ποὺ θὰ κάνετε σεῖς, θὰ εἶναι σὰν ζωντανά, γιατὶ θὰ εἶναι ἀπὸ τὴ ζωή σας.

Κεφάλαιον Α΄

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΟΣΩΝ

1. Μονάς, ἀριθμός, ποσόν

Ὅλοι γνωρίζομε τί εἶναι τὸ **ἕνα** καὶ τί εἶναι τὰ **πολλὰ** πράγματα, ὅπως π. χ. ἕνα μῆλο καὶ πολλὰ μῆλα ἢ ἕνα μολύβι καὶ πολλὰ μολύβια ἢ ἕνα θρανίο καὶ πολλὰ θρανία.

Τὸ ἕνα εἶναι ἕνα πρᾶγμα μονάχο του, ξεχωριστό, ποὺ εὔκολα ξεχωρίζεται καὶ διακρίνεται ἀπὸ τὰ πολλὰ ὅμοια σὰν κι' αὐτὸ πράγματα.

Τὰ πολλὰ πράγματα, ποὺ λέγονται καὶ πλῆθος, εὔκολα ξεχωρίζονται καὶ διακρίνονται ἀπὸ τὸ ἕνα.

Ὥστε ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος ἔχομε τὸ **ἕνα** πρᾶγμα καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἔχομε τὸ **πλῆθος** ἀπὸ ὅμοια πράγματα. Γιὰ νὰ τὸ ἀντιληφθῆτε καλύτερα αὐτό, πάρετε πολλὰ μολύβια καὶ βάλετέ τα στὴν ἄκρη τοῦ τραπεζιοῦ. Ἔχετε τώρα μπροστά σας τὸ ἕνα πρᾶγμα καὶ τὰ πολλὰ πράγματα ἢ τὸ πλῆθος.

Θέλομε τώρα νὰ ἰδοῦμε ἀπὸ πόσα μολύβια ἀποτελεῖται τὸ πλῆθος τῶν μολυβιῶν ποὺ ἔχομε. Τί θὰ κάνωμε;

Νὰ τί πρέπει νὰ κάνωμε!

Θὰ πάρωμε ἀπὸ τὸ πλῆθος ἕνα μολύβι καὶ θὰ τὸ βάλωμε στὴν ἄκρη, κατόπιν θὰ πάρωμε ἀπὸ τὸ πλῆθος ἄλλο ἕνα μολύβι καὶ θὰ τὸ βάλωμε καὶ αὐτὸ στὴν ἄκρη κοντὰ στὸ πρῶτο καὶ θὰ εἰποῦμε **δύο** μολύβια.

Ἔπειτα θὰ πάρωμε ἀπὸ τὸ πλῆθος ἄλλο ἕνα μολύβι καὶ θὰ τὸ βάλωμε κοντὰ στὰ δύο ἄλλα, καὶ θὰ εἰποῦμε **τρία** μολύβια.

Τὸ ἴδιο θὰ κάνωμε μέχρις ὅτου τελειώσουν ὅλα τὰ μολύβια τοῦ πλήθους καὶ θὰ λέμε **τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑπτά, ὀκτώ.** Ἐπειδὴ ἐδῶ ἐτελείωσαν τὰ μολύβια τοῦ πλήθους, θὰ εἰποῦμε, ὅτι τὸ πλῆθος αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀκτὼ μολύβια.

Τὸ ἕνα μολύβι λέγεται **μονάς**. Τὰ πολλὰ μολύβια τοῦ πλήθους τὰ ἐπήραμε ἕνα - ἕνα καὶ ἐμετρήσαμε. Ἀπὸ τὴ μέτρησι αὐτὴ εὑρήκαμε ὅτι εἶναι 8. Αὐτὸ τὸ 8 λέγεται **ἀριθμός**.

Ὥστε ἀπὸ τὸ ἕνα πρᾶγμα ἔχομε **τὴν μονάδα**. Ἀπὸ τὸ πλῆθος πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων ἔχομε **τὸν ἀριθμό**.

Ἂς πάρωμε τώρα ἕνα πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων, π. χ. μῆλα. Ἂν στὰ μῆλα αὐτὰ βάλωμε καὶ ἄλλα μῆλα τότε τὸ πλῆθος τῶν μήλων αὐτῶν θὰ αὐξηθῆ. Ἂν ἀπὸ τὰ μῆλα αὐτὰ ἀφαιρέσωμε μερικά, τὸ πλῆθος θὰ ἐλαττωθῆ.

Πάρετε σεῖς στὸ χέρι σας ἕνα πλῆθος τετραδίων. Ἂν σὲ αὐτὸ βάλετε μερικὰ τετράδια ἀκόμη, τὸ πλῆθος θὰ ~~αὐξηθῆ~~. [illegible] Ἂν ἀφαιρέσετε τετράδια, τὸ πλῆθος θὰ ~~ἐλαττωθῆ~~. [illegible]

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἠμποροῦμε νὰ αὐξήσωμε ἢ νὰ ἐλαττώσωμε κάθε πρᾶγμα ἢ πλῆθος πραγμάτων, ὅπως π. χ. ἠμποροῦμε νὰ αὐξήσωμε ἢ νὰ ἐλαττώσωμε τὸ γάλα ποὺ πίνομε τὸ πρωὶ ἢ τὰ χρήματα ποὺ ἔχομε στὴ τσέπη μας ἢ τοὺς βόλους ποὺ ἔχομε καὶ παίζομε. Ἐπίσης ἕνας ἄνθρωπος, ποὺ καπνίζει ἠμπορεῖ νὰ αὐξήση ἢ νὰ ἐλαττώση τὰ τσιγάρα ποὺ καπνίζει σὲ μιὰ ἡμέρα, ἕνας ἐργάτης νὰ αὐξήση ἢ νὰ ἐλαττώση τὶς ὧρες ποὺ δουλεύει, μιὰ νοικοκυρὰ νὰ αὐξήση ἢ νὰ ἐλαττώση τὸ ἀλεύρι ποὺ θὰ ζυμώση ψωμὶ κλπ. Ὥστε κάθε πρᾶγμα ἢ πλῆθος πραγμάτων ἠμπορεῖ νὰ αὐξηθῆ ἢ νὰ ἐλαττωθῆ.

Κάθε πρᾶγμα ποὺ μπορεῖ νὰ αὐξηθῆ ἢ νὰ ἐλλαττωθῆ, λέγεται π ο σ ό ν.

Τὸ ποσὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων, π. χ. ποσὸν δραχμῶν, ποσὸν τετραδίων, ποσὸν ἡμερῶν, ποσὸν ὀκάδων, ποσὸν πήχεων ὑφάσματος, ποσὸν ἀχλαδιῶν καὶ τόσα ἄλλα ποσά.

Θέλομε νὰ ἀγοράσωμε ἕνα ζεῦγος παπούτσια. Δὲν ξέρομε πόσο ἀξίζουν καὶ ρωτᾶμε: Τί ποσὸν δραχμῶν θὰ δώσωμε γιὰ νὰ ἀγοράσωμε τὰ παπούτσια; Ἔχομε ἕνα καλάθι γεμᾶτο μῆλα καὶ μᾶς ρωτοῦν πόσα εἶναι. Τὰ μῆλα, ἔτσι ὅπως εἶναι μέσα στὸ καλάθι, εἶναι ἕνα ποσὸν μήλων. Τὸ ποσὸν αὐτὸ τῶν μήλων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὡρισμένα μῆλα. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν τὰ ἔχομε μετρήσει καὶ δὲν ξέρομε πόσα εἶναι, λέγομε ὅτι ἔχομε ἕνα ποσὸν μήλων. Ὅταν μετρήσωμε τὰ μῆλα καὶ ἰδοῦμε πὼς εἶναι π. χ. 25 μῆλα, τότε θὰ εἰποῦμε ὅτι ἔχομε ἕνα ποσὸν 25 μήλων. Ἂν στὰ 25 αὐτὰ μῆλα προσθέσωμε ἄλλα 10 μῆλα, τότε τὸ ποσὸν τῶν μήλων αὐξάνεται. Ἂν ἀπὸ τὰ 25 μῆλα ἀφαιρέσωμε 15 μῆλα, τότε τὸ ποσὸν τῶν μήλων ἐλαττώνεται.

2. Ποσὰ ὁμοειδῆ

Ἕνας μαθητὴς ἔχει στὴν τσέπη του ἕνα ποσὸν ἀπὸ καρύδια. Δὲ ρωτᾶμε πόσα εἶναι. Ἕνας ἄλλος μαθητὴς ἐπίσης ἔχει στὴν τσέπη του ἕνα ποσὸν ἀπὸ καρύδια. Τὰ δύο αὐτὰ ποσὰ μοιάζουν γιατὶ εἶναι ἀπὸ τὴν ἴδια οὐσία, εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος, ἀπὸ τὸ ἴδιο πρᾶγμα.

Τρεῖς φίλοι ἀγοράζουν κεράσια. Ὁ πρῶτος γεμίζει μιὰ χαρτοσακούλα μὲ κεράσια, τὰ ζυγίζουν καὶ πληρώνει. Ὁ δεύτερος γεμίζει ἕνα μικρὸ καλαθάκι μὲ κεράσια, τὰ ζυγίζουν καὶ πληρώνει. Ὁ τρίτος γεμίζει ἕνα μεγάλο καλάθι μὲ κεράσια, τὰ ζυγίζουν καὶ πληρώνει τὴν ἀξία των. Κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς φίλους αὐτοὺς ἀγόρασε ἕνα ποσὸν κεράσια. Τὰ ποσὰ αὐτὰ διαφέρουν στὸ βάρος, εἶναι ὅμως ὅλα τὸ ἴδιο εἶδος, εἶναι ὅλα κεράσια. Ἡ διαφορὰ τοῦ βάρους δὲν ἔχει σημασία ἐδῶ.

Ἕνας μαθητὴς ἀγοράζει καραμέλες. Καὶ ἕνας ἄλλος μαθητὴς ἀγοράζει καραμέλες. Κάθε μαθητὴς ἀγόρασε ἕνα ποσὸν καραμέλες. Καὶ τὰ δυὸ αὐτὰ ποσὰ εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος.

Ἕνα καλάθι μὲ αὐγὰ εἶναι ἕνα ποσὸν αὐγῶν. Ἕνα ἄλλο καλάθι μὲ αὐγὰ εἶναι καὶ αὐτο ἕνα ποσὸν αὐγῶν. Τὰ δύο αὐτὰ ποσὰ εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος, δηλ. **ὁμοειδῆ**.

Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὰ παραπάνω ποσά.

Ἑπομένως :

Τὰ ποσὰ ποὺ εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο πρᾶγμα, ἀπὸ τὴν ἴδια ὕλη, ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος, λέγονται ὁ μ ο ε ι δ ῆ.

3. Ποσὰ ἑτεροειδῆ

Σὲ ἕνα πιᾶτο ἔχομε ἕνα ποσὸν μῆλα. Σὲ ἕνα ἄλλο πιᾶτο ἔχομε ποσὸν καρύδια. Τὰ δύο αὐτὰ ποσὰ διαφέρουν μεταξύ των, δὲ μοιάζουν γιατὶ εἶναι ἀπὸ διαφορετικὸ εἶδος τὸ καθένα.

Σὲ μιὰ σακούλα ἔχομε ζάχαρι. Σὲ μιὰ ἄλλη σακούλα ἔχομε ρύζι. Αὐτὰ εἶναι δύο ποσά, ἀλλὰ δύο ποσὰ ποὺ δὲ μοιάζουν, γιατὶ τὸ καθένα εἶναι ἀπὸ διαφορετικὴ ὕλη.

Ἕνας κρεοπώλης ἔδωσε ἕνα ποσὸν χρημάτων καὶ ἐπῆρε ἕνα ποσὸν ἀρνιῶν. Αὐτὰ εἶναι ποσὰ ποὺ δὲν μοιάζουν, γιατὶ εἶναι ἀπὸ διαφορετικὸ εἶδος τὸ καθένα.

Ἕνας ἐργάτης ἐργάστηκε κάμποσες ἡμέρες καὶ ἐπῆρε ἕνα ποσὸν χρημάτων. Ἔχομε ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος ἕνα ποσὸν ἐργασίας καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἕνα ποσὸν χρημάτων. Τὰ δύο αὐτὰ ποσὰ δὲ μοιάζουν, δὲν εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος, εἶναι ἑτεροειδῆ.

Ἑπομένως :

Τὰ ποσὰ ποῦ δὲν εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος λέγονται ἑτεροειδῆ.

4. Ποσὰ ἀνάλογα

Ἕνας χαρτοπώλης ἐπώλησε 5 τετράδια καὶ ἐπῆρε 1500 δραχμές.

Τὰ τετράδια καὶ οἱ δραχμὲς εἶναι ποσὰ ἑτεροειδῆ, τὰ ὁποῖα ὅμως ἔχουν σχέσι μεταξύ των, γιατὶ τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν εἶναι ἡ ἀξία τῶν τετραδίων.

Ἐὰν ὁ χαρτοπώλης πωλήση διπλάσια τετράδια, θὰ εἰσπράξη διπλάσιες δραχμές δηλ. ἐὰν πωλήση 10 τετράδια θὰ πάρη 3000 δραχμὲς καὶ ἐὰν πωλήση τριπλάσια τετράδια θὰ εἰσπράξη τριπλάσιες δραχμές.

Βλέπομε ἐδῶ ὅτι, ὅταν διπλασιάζεται ἢ τριπλασιάζεται τὸ ἕνα ποσόν, τότε διπλασιάζεται ἢ τριπλασιάζεται καὶ τὸ ἄλλο ποσόν.

Γιὰ νὰ γίνουν δύο πουκάμισα χρειάζονται 10 πήχες ὕφασμα. Ἐὰν θελήσωμε νὰ κάνωμε ἕνα πουκάμισο θὰ χρειασθοῦμε 5 πήχες ὕφασμα.

Βλέπομε καὶ ἐδῶ ὅτι τὰ δύο αὐτὰ ποσά, πουκάμισα καὶ πήχες ὑφάσματος, ἔχουν σχέσι μεταξύ των, γιατὶ ὅταν μικραίνη τὸ ἕνα ποσόν, μικραίνει ἄλλο τόσο καὶ τὸ ἄλλο ποσόν.

Ἐὰν θελήσωμε νὰ κάμωμε 4 πουκάμισα, θὰ χρειασθοῦμε 30 πῆχες ὕφασμα, δηλ. γιὰ διπλάσια πουκάμισα, θὰ χρειασθοῦμε διπλάσιες πῆχες ὕφασμα.

Γιὰ 4 ὀκάδες ζάχαρι θὰ δώσωμε 40.000 δραχμές.

Ἂν πάρωμε τὶς μισὲς ὀκάδες ζάχαρι, δηλ. 2 ὀκάδες, θὰ δώσωμε τὶς μισὲς δραχμές, δηλ. 20.000 δραχ. Ἂν πάρωμε διπλάσιες ὀκάδες ζάχαρι, θὰ δώσωμε διπλάσιες δραχμὲς καὶ ἂν πάρωμε δεκαπλάσιες ὀκάδες, θὰ δώσωμε δεκαπλάσιες δραχμές.

Σὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἔχομε δυὸ ποσὰ ἑτεροειδῆ. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ ποσὰ αὐτὰ ἔχουν κάποια στενὴ σχέσι μεταξύ των, γιατὶ τὸ δεύτερο ποσὸν ἐκφράζει τὴν ἀξία τοῦ πρώτου ποσοῦ. Καὶ ἀκόμη, γιατὶ ὅσες φορὲς μεγαλώνει τὸ ἕνα ποσόν, ἄλλες τόσες φορὲς μεγαλώνει καὶ τὸ ἄλλο ποσόν.

Ἂς πάρωμε ἕνα ἀκόμη παράδειγμα :

10	ὀκάδες	πατάτες	ἔχουν	20.000	δραχμὲς
20	»	»	»	40.000	»
40	»	»	»	80.000	»
5	»	»	»	10.000	»
1	»	«	»	2,000	»

Καὶ στὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν μεγαλώνη ἢ μικραίνη τὸ ἕνα ποσόν, τότε μεγαλώνει ἢ μικραίνει καὶ τὸ ἄλλο ποσὸν ἄλλες τόσες φορές.

Τὰ ποσὰ αὐτά, ποὺ ἔχουν μεταξύ των τὴ σχέσι αὐτή, λέγονται **ποσὰ ἀνάλογα.**

Ἑπομένως :

Δύο ποσὰ λέγονται ἀ ν ά λ ο γ α, ὅταν ὅσες φορὲς μεγαλώνη ἢ μικραίνη τὸ ἕνα ποσόν, ἄλλες τόσες φορὲς μεγαλώνει ἢ μικραίνει καὶ τὸ ἄλλο ποσόν.

5. Ποσὰ ἀντίστροφα

1ον Παράδειγμα.—Ἕνας κηπουρὸς γιὰ ν' ἀνοίξη ἕνα χανδάκι γύρω ἀπὸ τὸν κῆπο του παίρνει 8 ἐργάτες. Οἱ ἐργάτες αὐτοὶ ἔσκαψαν τὸ χανδάκι σὲ 4 ἡμέρες.

Ἐδῶ ἔχομε δύο ποσὰ ἑτεροειδῆ. Τὸ ἕνα ποσὸν εἶναι οἱ **ἐργάτες,** τὸ ἄλλο ποσὸν εἶναι οἱ **ἡμέρες** ποὺ ἐχρειάσθηκαν οἱ ἐργάτες αὐτοὶ γιὰ νὰ σκάψουν τὸ χανδάκι. Ὅπως βλέπετε, μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ποσῶν ὑπάρχει σχέσις. Οἱ 8 ἐργάτες γιά νὰ σκάψουν τὸ χανδάκι ἐχρειάσθησαν 4 ἡμέρες. Ἂν οἱ ἐργάτες ἐλαττωθοῦν σὲ 4, οἱ 4 ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν 8 ἡμέρες γιὰ νὰ ἐκτελέσουν τὸ ἴδιο ἔργο. δηλ. οἱ μισοὶ ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν διπλάσιες ἡμέρες. Ἂν οἱ ἐργάτες διπλασιασθοῦν, δηλ. ἂν γίνουν 16, οἱ 16 ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν 2 ἡμέρες γιὰ νὰ ἐκτελέσουν τὸ ἴδιο ἔργο, δηλ. θὰ χρειασθοῦν μισὲς ἡμέρες.

2ον παράδειγμα.— Σὲ ἕνα στρατῶνα εἶναι 20 στρατιῶτες καὶ ἔχουν τροφὲς γιὰ νὰ περάσουν 30 ἡμέρες.

Ἐδῶ ἔχομε πάλι 2 ἑτεροειδῆ ποσά. Τὸ ἕνα εἶναι οἱ **στρατιῶτες** καὶ τὸ ἄλλο εἶναι οἱ **ἡμέρες**, δηλ. ὁ χρόνος ποὺ θὰ περάσουν οἱ στρατιῶτες μὲ τὶς τροφὲς ποὺ ἔχουν.

Ἐὰν οἱ στρατιῶτες γίνουν 40, οἱ τροφὲς θὰ φθάσουν γιὰ 15 ἡμέρες, καὶ ἐὰν οἱ στρατιῶτες γίνουν 10, οἱ τροφὲς θὰ φθάσουν γιὰ 60 ἡμέρες.

Καὶ στὰ δύο αὐτὰ παραδείγματα βλέπομε ὅτι τὰ ποσά ἔχουν σχέσι μεταξύ των. Ἡ σχέσις ὅμως αὐτὴ εἶναι ἀντίθετος ἀπὸ τὴ σχέσι ποὺ παρετηρήσαμε στὰ ἀνάλογα ποσά, γιατὶ ἐδῶ ὅσες φορὲς μεγαλώνει τὸ ἕνα ποσὸν ἄλλες τόσες φορὲς μικραίνει τὸ ἄλλο ποσόν. Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται **ἀντίστροφα.**

Ἑπομένως :

Δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα ὅταν, ὅσες φορὲς μεγαλώνη τὸ ἕνα ποσόν, ἄλλες τόσες φορὲς μικραίνει τὸ ἄλλο. Καὶ ἀντιστρόφως : Ὅταν, ὅσες φορὲς μικραίνη τὸ ἕνα ποσόν, ἄλλες τόσες φορὲς μεγαλώνει τὸ ἄλλο ποσόν.

Ἐρωτήσεις : 1) Ποιὰ ποσὰ λέγονται ὁμοειδῆ καὶ ποιὰ ἑτεροειδῆ ;

2) Οἱ πῆχες ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἡ τιμή των τί ποσὰ εἶναι ;

3) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ποὺ κτίζουν ἕνα σπίτι καὶ οἱ ἡμέρες ποὺ κάνουν γιὰ νὰ τὸ κτίσουν, εἶναι ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα ;

4) Μπορεῖτε νὰ εὑρῆτε μόνοι σας παραδείγματα ὁμοειδῶν καὶ ἑτεροειδῶν ποσῶν, ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων ;

Κεφάλαιον Β'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

1. Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν

1ον πρόβλημα.— 3 ὀκάδες μῆλα ἀξίζουν 12.000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν 8 ὀκάδες μῆλα;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν ἄλλων πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων. Δηλαδή, γνωρίζομε πόσο ἔχουν οἱ 3 ὀκάδες καὶ ζητοῦμε νὰ μάθωμε πόσο ἔχουν οἱ 8 ὀκάδες, Πρέπει λοιπὸν πρῶτα νὰ εὕρωμε πόσο ἀξίζει ἡ μία ὀκά.

Στὴν Ε' τάξι ἐμάθαμε νὰ λύωμε τὰ προβλήματα αὐτά μὲ τὴν ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε πρῶτα δύο ποσά, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ τὰ δύο γνωστὰ καὶ ἔχουν σχέσι μεταξύ των, δηλ. ἔχομε τὸ ποσὸν 3 ὀκ. μῆλα καὶ τὴν ἀξία των, ποὺ εἶναι 12.000 δρ. Κατόπιν ἔχομε ἄλλα δύο ποσά. Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ τὸ ἕνα εἶναι γνωστό, δηλ, οἱ 8 ὀκάδες μῆλα, καὶ τὸ ἄλλο ποσόν, δηλ. ἡ ἀξία τῶν 8 ὀκάδων, εἶναι ἄγνωστο. Τὸ ἄγνωστο τὸ παριστάνομε μὲ τὸ κεφαλαῖο γράμμα Χ καὶ μὲ τὸ γράμμα αὐτὸ θὰ τὸ παριστάνωμε ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα. Ἂς κατατάξωμε τὰ ποσὰ αὐτὰ σὲ δύο σειρές. Στὴ μιὰ σειρὰ θὰ βάλωμε τὰ δύο πρῶτα ποσά, δηλαδὴ τὶς 3 ὀκάδες μῆλα καὶ τὴν ἀξία των, ποὺ εἶναι 12.000 δραχμές, καὶ στὴ δεύτερη σειρά θὰ βάλωμε τὰ ἄλλα δύο ποσά, δηλ. τὶς 8 ὀκ. μῆλα καὶ τὸ Χ, δηλαδὴ τὴν ἄγνωστη ἀξία των ποὺ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε. Χωρίζομε τὴ μία σειρὰ ἀπὸ τὴν ἄλλη μὲ μιὰ ὁριζοντία γραμμή.

Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ποὺ εἴπαμε, θὰ ἔχωμε:

3 ὀκάδες = 12.000 δραχμὲς

8 » = Χ πόσες δρχ.;

Μὲ τὴν κατάταξι αὐτὴ βλέπομε ὅτι τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ εἶναι στὴν ἴδια στήλη, δηλ. ὀκάδες μὲ ὀκάδες καὶ δραχμὲς μὲ δραχμές. Βλέπομε ἀκόμη ὅτι, μὲ τὴ γραμμὴ ποὺ ἐτραβήξαμε στὴ μέση, ἐσχηματίσθηκαν δύο κλάσματα, τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἀπὸ τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ τῶν ὀκάδων, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{12000}{X}$ ἀπὸ τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ τῶν δραχμῶν. Μὴ δυσκολευθῆτε ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{12000}{X}$ ἐπειδὴ ὁ παρονομαστής του εἶναι τὸ Χ. Τὸ Χ αὐτὸ εἴπαμε ὅτι ἀντιπροσωπεύει τὸν ἄγνωστο, μέχρι τῆς στιγμῆς αὐτῆς, ἀριθμὸ τῶν δραχμῶν, ποὺ ἀξίζουν οἱ 8 ὀκάδες μῆλα.

Ἂς λύσωμε τώρα τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα, ὅπως ἐμάθαμε στὴν Ε΄ τάξι. Θὰ εἰποῦμε: Ἀφοῦ οἱ 3 ὀκάδες ἀξίζουν 12000 δραχμές, ἡ μιὰ ὀκά, ποὺ εἶναι 3 φορὲς λιγώτερο, θὰ ἀξίζῃ 3 φορὲς λιγώτερο τὸ 12000, δηλαδὴ $\frac{12000}{3}$. Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκὰ ἀξίζει $\frac{12000}{3}$ οἱ 8 ὀκάδες, ποὺ εἶναι 8 φορὲς περισσότερο, ἀπὸ τὴ μία, θὰ ἀξίζουν 8 φορὲς περισσότερο δηλαδή:

$$\frac{12000}{3} \times 8 = \frac{96000}{3} = 32000 \text{ δραχμές.}$$

Ἂν κάνωμε τὴν κατάστρωσι τῆς ἀναγωγῆς θὰ ἔχωμε:

$$3 \text{ ὀκ.} = 12000$$

$$1 \text{ ὀκ.} = \frac{12000}{3}$$

$$8 \text{ ὀκ.} = \frac{12000 \times 8}{3} = \frac{96000}{3} = 32000 \text{ δραχμές.}$$

Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὴ λύσι αὐτὴ μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα, μποροῦμε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα καὶ μὲ ἄλλον τρόπο. Ὁ τρόπος αὐτὸς λέγεται **μέθοδος τῶν τριῶν**. Καὶ λέγεται μέθοδος τῶν τριῶν, γιατὶ στὰ προβλήματα αὐτὰ ἔχομε τρεῖς γνωστοὺς ἀριθμούς, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ζητεῖται νὰ εὑρεθῆ ἕνας τέταρτος, ποὺ εἶναι ἄγνωστος.

Ἂς ἰδοῦμε λοιπόν, πῶς θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Γράφομε πρῶτα τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος σὲ δύο σειρές, ἀκριβῶς ὅπως τὰ κατετάξαμε καὶ πιὸ πάνω, καὶ ἔχομε:

$$\frac{3 \text{ ὀκάδες} = 12.000 \text{ δραχμὲς}}{8 \quad » \quad = \quad X \quad »}$$

Ἐδῶ ἔχομε δύο εἰδῶν ποσά: ὀκάδες καὶ δραχμές. Συγκρίνομε τὰ ποσὰ αὐτὰ καὶ εὑρίσκομε ὅτι εἶναι ἀνάλογα, γιατὶ ἂν διπλασιασθοῦν οἱ ὀκάδες διπλασιάζονται καὶ οἱ δραχμές. Ὅπως εἴπαμε καὶ προηγουμένως, μὲ τὴν κατάταξι αὐτὴ τῶν ποσῶν τοῦ προβλήματος ἐσχηματίσθηκαν δύο κλάσματα, δηλ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τῶν ὀκάδων καὶ τὸ κλάσμα $\frac{12000}{X}$ τῶν δραχμῶν. Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο X, δηλ. τὸ 12000, μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἀντεστραμμένο, δηλ. μὲ τὸ $\frac{8}{3}$. Καὶ πολλαπλασιάζομε τὸ 12000 μὲ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένο, γιατὶ τὰ ποσὰ ὀκάδες καὶ δραχμές, ποὺ ἔχομε ἐδῶ, εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν: $12000 \times \frac{8}{3} = \frac{96000}{3} = 32000$.

Ἂς καταστρώσωμε πάλι τὸ πρόβλημα γιὰ νὰ κάνωμε τὶς πράξεις:

ὀκάδες	δραχμὲς
$\frac{3}{8}$	$\frac{12000}{X}$

ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς $X = 12000 \times \frac{8}{3} = \frac{96000}{3} = 32000$ δραχ.

Ἂν τώρα προσέξωμε, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι καὶ μὲ τὴ λύση αὐτὴ ἐδῶ, καὶ μὲ τὴ λύση μὲ τὴν ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα ποὺ ἐκάναμε προηγουμένως, γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ 12000, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο X, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἀντεστραμμένο, δηλ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{3}$.

Πρόβλημα.— 10 ἐργάτες σκάβουν ἕναν κῆπο σὲ 8 ἡμέρες, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸν ἴδιο κῆπο 16 ἐργάτες;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴ εἰς τὴν μανάδα. Θὰ εἰποῦμε: Ἀφοῦ οἱ 10 ἐργάτες χρειάζονται 8 ἡμέρες γιὰ νὰ σκάψουν τὸν κῆπο, ὁ 1 ἐργάτης, γιὰ νὰ σκάψη τὸν κῆπο θὰ χρειασθῆ 10 φορὲς περισσότερες ἡμέρες, δηλ. $8 \times 10 = 80$ ἡμέρες. Ἀφοῦ τώρα ὁ 1 ἐργάτης θὰ σκάψη τὸν κῆπο σὲ 80 ἡμέρες οἱ 16 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸν κῆπο σὲ 16 φορὲς λιγώτερες ἡμέρες ἀπ' ὅσες θὰ τὸν σκάψη ὁ ἕνας ἐργάτης, δηλ. $\frac{80}{16}$ ἡμέρες = σὲ 5 ἡμέρες.

Ἂς καταστρώσωμε τώρα τὸ πρόβλημα :

10 ἐργ. σὲ 8 ἡμέρες
1 » » 8×10 »
16 » » $\frac{8 \times 10}{16} = \frac{80}{16} = 5$

Ἂς λύσωμε τώρα τὸ πρόβλημα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε τὰ ποσά : ἐργάτες καὶ ἡμέρες. Ἂν συγκρίνωμε τὰ ποσὰ αὐτά, θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἶναι ἀντίστροφα, γιατὶ ἂν οἱ 10 ἐργάτες χρειάζωνται 8 ἡμέρες γιὰ νὰ σκάψουν τὸν κῆπο, οἱ διπλάσιοι ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν μισὲς ἡμέρες γιὰ τὴν ἴδια ἐργασία. Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

ἐργάτες	ἡμέρες
10	8
16	X

$$X = 8 = \frac{10}{16} = \frac{80}{16} = 5 \text{ ἡμέρες.}$$

Μὲ τὴν παραπάνω κατάστρωσι τοῦ προβλήματος σχηματίσθηκαν δύο κλάσματα. Αὐτὸ γίνεται σὲ κάθε κατάστρωσι προβλήματος ποὺ λύεται μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Μετὰ τὴν κατάστρωσι ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμὸ 8, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο X μὲ τὸ κλάσμα $\frac{10}{16}$ ὅπως ἔχει (δηλ. ὄχι ἀντεστραμμένο), γιατὶ τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ ἡμέρες εἶναι, ὅπως εἴπαμε, ποσὰ ἀντίστροφα.

Μετὰ τὴν κατάταξι προχωροῦμε στὴ λύσι, λέγοντας αὐτὰ τὰ λόγια : «Ὁ ἄγνωστος X ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν 8 ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν $\frac{10}{16}$, ὅπως ἔχει γιατὶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα ».

Ἄρα ἔχομε : $X = 8 \times \frac{10}{16} = \frac{80}{16} = 5$ ἡμέρες.

Ἂν παρατηρήσετε τὴ λύσι αὐτὴ μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν καὶ τὴ λύσι μὲ τὴν ἀναγωγή, θὰ ἰδῆτε ἀριστερά, πὼς καὶ μὲ τὶς δύο λύσεις, ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο Χ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{10}{16}$ ὅπως ἔχει, γιατὶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Ὅπως, βλέπετε, ἡ λύσι προβλημάτων μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν εἶναι πολὺ εὔκολη. Κάνομε πρῶτα τὴν κατάστρωσι, βάζοντας στὴν ἴδια στήλη τὰ ὁμοειδῆ ποσά. Κατόπιν κάνομε τὴ σύγκρισι τῶν ποσῶν, γιὰ νὰ ἴδοῦμε ἂν εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Ἔπειτα πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο Χ, ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἀντεστραμμένο μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Ἑπομένως :

Γιὰ νὰ λύσωμε προβλήματα μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἀντεστραμμένο μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Προβλήματα

1. Ἕνα κυπαρίσσι ὕψους 4 μέτρων κάνει ἴσκιο μήκους 12 μέτρων. Ἕνα ἄλλο κυπαρίσσι ποὺ ἔχει ὕψος 7 μέτρων, πόσα μέτρα ἴσκιο θὰ κάνη τὴν ἴδια στιγμή ;

Λύσις.— Τὰ ποσὰ ἐδῶ εἶναι ἀνάλογα, γιατὶ ἂν τὸ ὕψος τοῦ κυπαρισσιοῦ διπλασιασθῆ, θὰ διπλασιασθῆ καὶ ὁ ἴσκιος του. Ἄρα θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν ἀντεστραμμένο. Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

ὕψος μέτρα	μῆκος σκιᾶς μέτρα
$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{X}$

$$X = 12 \times \frac{7}{4} = \frac{84}{4} = 21 \text{ μέτρα ἴσκιο.}$$

2. Μὲ 8 πήχες ὕφασμα ποὺ ἔχει πλάτος 1,2 μέτρα, κάνομε ἕνα

φόρεμα. Ἀπὸ ἕνα ἄλλο ὕφασμα ποὺ ἔχει πλάτος 2 μέτρα, πόσες πήχες θὰ χρειασθοῦμε γιὰ τὸ ἴδιο φόρεμα;

Λύσις.— Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, γιατὶ ἂν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος θὰ διπλασιασθῆ, θὰ χρειασθοῦμε τὶς μισὲς πῆχες γιὰ τὸ ἴδιο φόρεμα. Ὥστε θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν ὅπως ἔχει. Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

πῆχες	πλάτος
$\frac{8}{X}$	$\frac{1,2}{2}$

$$X = 8 \times \frac{1,2}{2} = \frac{9,6}{2} = 4,8 \text{ πῆχες.}$$

3) Σὲ μιὰ κατασκήνωσι εἶναι 32 πρόσκοποι καὶ ἔχουν τροφὲς γιὰ 18 ἡμέρες. Ἐὰν οἱ πρόσκοποι γίνουν 48, γιὰ πόσες ἡμέρες θὰ φθάσουν οἱ τροφές;

4) Ἕνας κτηνοτρόφος ἔχει 12 ἀγελάδες καὶ χρειάζεται γι' αὐτὲς 96 ὀκάδες χόρτο τὴν ἡμέρα. Πόσες ὀκάδες χόρτο τὴν ἡμέρα θὰ χρειασθῆ ἕνας ἄλλος κτηνοτρόφος ποὺ ἔχει 30 ἀγελάδες;

5) Ἕνας ἐργάτης, γιὰ νὰ τελειώση ἕνα ἔργο ἔπρεπε νὰ ἐργασθῆ 6 ὧρες τὴν ἡμέρα ἐπὶ 14 ἡμέρες. Ἐπειδὴ ὅμως ἤθελε νὰ τελειώση τὸ ἔργο σὲ λιγώτερες ἡμέρες, ἐργάσθηκε 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες ἡμέρες ἐτελείωσε τὸ ἔργο;

6) Γιὰ νὰ στρωθῆ μιὰ αὐλή, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 36 τετρ. μέτρα, ἐχρειάσθηκαν 24 σακιὰ τσιμέντο. Πόσα σακιὰ τσιμέντο θὰ χρειασθοῦν γιὰ μιὰ ἄλλη αὐλὴ ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 54 μέτρα;

7) 20 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 12 ἡμέρες. Τὴν ἑβδόμη ἡμέρα οἱ ἐργάτες ἔγιναν 30. Σὲ πόσες ἡμέρες οἱ 30 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ ὑπόλοιπο ἀμπέλι.

8) Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει μὲ ταχύτητα 32 χιλιομέτρων τὴν ὥρα καὶ διανύει μιὰ ἀπόστασι σὲ 7,5 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ διανύση τὴν ἴδια ἀπόστασι ἂν τρέξη μὲ ταχύτητα 40 χιλιομέτρων τὴν ὥρα;

9) Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει τὸ μῆνα σὲ (30 ἡμέρες) 870.000 δρ. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη σὲ 13 ἡμέρες;

10) Μιὰ ὑφάντρα ἐργάζεται 5 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὑφαίνει ἕνα ὕφασμα σὲ 18 ἡμέρες. Πόσες ὧρες τὴν ἡμέρα πρέπει νὰ ἐργασθῆ γιὰ νὰ ὑφάνη τὸ ἴδιο ὕφασμα σὲ 15 ἡμέρες;

2. Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν

1ον Πρόβλημα.— Σὲ μιὰ κατασκήνωσι εἶναι 40 μαθητὲς ποὺ χρειάζονται γιὰ 6 ἡμέρες 120 ὀκάδες ψωμί. Ἐὰν θὰ εἶναι 60 μαθητές, σὲ 8 ἡμέρες πόσες ὀκάδες ψωμὶ θὰ χρειασθοῦν;

Γιὰ νὰ κατατάξωμε τὸ πρόβλημα θὰ εἰποῦμε: 40 μαθητὲς σὲ 6 ἡμέρες θέλουν 120 ὀκάδες ψωμί. 60 μαθητὲς σὲ 8 ἡμέρες πόσες ὀκάδες ψωμὶ θέλουν;

Θὰ ἔχωμε λοιπὸν τὴν ἑξῆς κατάταξι:

μαθητὲς	ἡμέρες	ὀκάδες
40	6	120
60	8	X

Καὶ πρῶτα θὰ συγκρίνωμε τὰ ποσὰ γιὰ νὰ ἰδοῦμε ἂν εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Κάθε ποσὸν θὰ τὸ συγκρίνωμε μὲ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου. Ἐδῶ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου εἶναι οἱ ὀκάδες. Θὰ εἰποῦμε λοιπόν: Οἱ 40 μαθητὲς σὲ 6 ἡμέρες χρειάζονται 120 ὀκάδες ψωμί, διπλάσιοι μαθητές, στὶς ἴδιες ἡμέρες χρειάζονται διπλάσιες ὀκάδες ψωμί. Ἄρα τὰ ποσὰ μαθητὲς καὶ ὀκάδες εἶναι ἀνάλογα. Συνεχίζομε τὴ σύγκρισι καὶ λέμε: Σὲ 6 ἡμέρες, οἱ 40 μαθητὲς χρειάζονται 120 ὀκ, ψωμί. Σὲ διπλάσιες ἡμέρες, οἱ ἴδιοι μαθητὲς χρειάζονται διπλάσιες ὀκάδες ψωμί. Ἄρα καὶ τὰ ποσὰ ἡμέρες καὶ ὀκάδες εἶναι ἀνάλογα. Ἑπομένως, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ θὰ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο μὲ τὰ κλάσματα τῶν ἄλλων ποσῶν ἀντεστραμμένα.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

μαθητὲς	ἡμέρες	ὀκάδες
$\frac{40}{60}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{120}{X}$

$$X = 120 \times \frac{60}{40} \times \frac{6}{8} = \frac{57600}{240} = 240 \text{ ὀκάδες.}$$

Ἂν λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα θὰ ἰδοῦμε ὅτι καὶ μὲ τὴ λύσι αὐτὴ πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο X, ἐπὶ τὰ κλάσματα τῶν ἄλλων ποσῶν ἀντεστραμμένα.

Θὰ ἔχωμε:

40 μαθητ.	σὲ	6 ἡμ.		120	ὀκάδες
1	»	»	6 »	$\frac{120}{40}$	»
60	»	»	6 »	$\frac{120 \times 60}{40}$	»
60	»	»	1 »	$\frac{120 \times 60}{40 \times 6}$	»
60	»	»	8 »	$\frac{120 \times 60 \times 8}{40 \times 6}$	»

$$X = \frac{120 \times 60 \times 8}{40 \times 6} = \frac{57600}{240} = 240 \text{ ὀκάδες.}$$

Τὸ ἴδιο πρόβλημα ἠμποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε καὶ μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν. Στὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου ἔχομε πάντοτε δύο εἰδῶν ποσά, π.χ. ὀκάδες καὶ δραχμὲς ἢ ἐργάτες καὶ ἡμέρες. Στὸ παραπάνω πρόβλημα ἔχομε τριῶν εἰδῶν ποσά, ἤτοι τὰ ποσά: μαθητές, ἡμέρες καὶ ὀκάδες. Ἐπειδὴ ἐδῶ ἔχομε τριῶν εἰδῶν ποσά, γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο, πρέπει νὰ τὸ ἀναλύσωμε — δηλαδὴ νὰ τὸ χωρίσωμε — σὲ δύο προβλήματα.

Στὸ πρῶτο πρόβλημα θὰ εἰποῦμε: Οἱ 40 μαθητὲς σὲ 6 ἡμέρες χρειάζονται 120 ὀκάδες ψωμί. Οἱ 60 μαθητὲς στὶς ἴδιες ἡμέρες, πόσες ὀκάδες ψωμὶ θὰ χρειασθοῦν; Δηλαδὴ θὰ ἔχωμε:

μαθητὲς	ἡμέρες	ὀκάδες
40	6	120
60	6	X

$$X = 120 \times \frac{60}{40}$$

Ἤτοι οἱ 60 μαθητὲς στὶς 6 ἡμέρες χρειάζονται $120 \times \frac{60}{40}$

Στὸ δεύτερο πρόβλημα θὰ εἰποῦμε: Ἀφοῦ οἱ 60 μαθητὲς στὶς 6 ἡμέρες χρειάζονται $120 \times \frac{60}{40}$ ὀκάδες ψωμί, οἱ ἴδιοι μαθητὲς στὶς 8 ἡμέρες, πόσες ὀκάδες ψωμὶ θὰ χρειασθοῦν; Δηλαδὴ θὰ ἔχωμε:

μαθητὲς	ἡμέρες	ὀκάδες
$\frac{60}{60}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{120 \times \frac{60}{40}}{X}$

$$X = 120 \times \frac{60}{40} \times \frac{6}{8} = \frac{57600}{240} = 240 \text{ ὀκάδες}$$

Ὅπως βλέπετε, τὸ πρόβλημα ἀνελύθη εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου καὶ ἐλύθη. Τὰ προβλήματα αὐτὰ ποὺ ἀναλύονται σὲ δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου, λέγονται **προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.**

Στὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου ἔχομε τριῶν ἢ περισσοτέρων εἰδῶν ποσά, ἐνῶ στὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου ἔχομε πάντοτε δύο εἰδῶν ποσά.

Ἂς λύσωμε τώρα καὶ μερικὰ ἄλλα προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου. Φυσικά, γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα αὐτά, δὲν θὰ τὰ ἀναλύσωμε. Θὰ τὰ λύσωμε ἀπ' εὐθείας, ὅπως ἀκριβῶς ἐλύσαμε στὴν ἀρχὴ τὸ παραπάνω πρόβλημα. Ἔτσι λύονται ὅλα τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

2ον Πρόβλημα.— 20 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 18 ἡμέρες. 30 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι;

Θὰ συγκρίνωμε τὰ ποσὰ καὶ θὰ εἰποῦμε: Οἱ 20 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, σκάβουν τὸ ἀμπέλι σέ 18 ἡμέρες. Διπλάσιοι ἐργάτες, ἐργαζόμενοι τὶς ἴδιες ὧρες, θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ μισὲς ἡμέρες. Ἄρα τὰ ποσά, ἐργάτες καὶ ἡμέρες, εἶναι ἀντίστροφα. 20 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ 18 ἡμέρες. Οἱ ἴδιοι ἐργάτες, ἐργαζόμενοι διπλάσιες ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ μισὲς ἡμέρες. Ἄρα καὶ τὰ ποσὰ ὧρες καὶ ἡμέρες εἶναι ἀντίστροφα. Ἑπομένως, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὰ κλάσματα τῶν ἄλλων ποσῶν ὅπως ἔχουν.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

ἐργάτες	ὧρες	ἡμέρες
$\frac{20}{30}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{18}{X}$

$$X = 18 \times \frac{20}{30} \times \frac{6}{9} = \frac{2160}{270} = 8 \text{ ἡμέρες.}$$

3ον πρόβλημα.— 12 ἐργάτες σὲ 8 ἡμέρες σκάβουν 20 στρέμματα χωράφι. 18 ἐργάτες σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν 30 στρέμματα χωράφι;

Συγκρίνομε τὰ ποσά. Εἴδαμε καὶ προηγουμένως, ὅτι τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ ἡμέρες εἶναι ἀντίστροφα. Τὰ ποσὰ στρέμματα καὶ ἡμέρες εἶναι ἀνάλογα, γιατί: 12 ἐργάτες σκάβουν 20 στρέμματα σὲ 8 ἡμέρες. Οἱ ἴδιοι ἐργάτες τὰ διπλάσια στρέμματα θὰ τὰ σκάψουν σὲ διπλάσιες ἡμέρες. Ἑπομένως, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο X ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν ἀναλόγων ποσῶν ἀντεστραμμένο καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν ἀντιστρόφων ποσῶν ὅπως ἔχει.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

ἐργάτες	ἡμέρες	στρέμματα
$\frac{12}{18}$	$\frac{8}{X}$	$\frac{20}{30}$

$$X = 8 \times \frac{12}{18} \times \frac{30}{20} = \frac{2880}{360} = 8 \text{ ἡμέρες.}$$

Ἡ λύσι τῶν προβλημάτων μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν εἶναι ἁπλῆ καὶ εὔκολη. Φθάνει νὰ συγκρίνωμε τὰ ποσὰ καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο X ἐπὶ τὸ κλάσμα κάθε ἄλλου ποσοῦ ἀντεστραμμένο, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ὅπως ἔχει, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Ἑπομένως:

Γιὰ νὰ λύσωμε προβλήματα μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὰ κλάσματο τῶν δύο ἄλλων ποσῶν ἀντεστραμμένα, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ὅπως ἔχουν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Παοβλήματα.— 1) Ἕνας ἐργάτης ἐργάζεται 6 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ σὲ 14 ἡμέρες παίρνει 112.000 δραχμές. Ἐὰν ἐργασθῆ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα σὲ 27 ἡμέρες πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ;

2) Μιὰ σιδερένια πλάκα μήκους 2 μέτρων, πλάτους 0,7 τοῦ μέτρου καὶ πάχους 0,05 τοῦ μέτρου ζυγίζει 136 ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες

θὰ ζυγίζῃ μιὰ ἄλλη σιδερένια πλάκα, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 2,7 μέτρων πλάτος 0,3 τοῦ μέτρου καὶ πάχος 0,1 τοῦ μέτρου ;

3) Μιὰ λάμπα πετρελαίου μένει κάθε βράδυ ἀναμμένη 5 ὧρες καὶ σὲ 12 βράδυα καίει 1800 δράμια πετρέλαιο. Πόσες ὧρες, κάθε βράδυ πρέπει νὰ μείνῃ ἀναμμένη ἡ ἴδια λάμπα, γιὰ νὰ κάψῃ σὲ 18 βράδυα 5400 δράμια πετρέλαιο ;

4) Μὲ 30 πῆχες ὕφασμα πλάτους 2 μέτρων, κάνομε 8 φορέματα. Μὲ 40 πῆχες ὕφασμα, πλάτους 1,5 τοῦ μέτρου, πόσα φορέματα θὰ κάνωμε ;

5) Σὲ ἕνα στρατῶνα εἶναι 3000 στρατιῶτες καὶ ἔχουν τροφὲς γιὰ 24 ἡμέρες. Ἐπειδὴ ὅμως ἔφυγαν ἀμέσως 750 στρατιῶτες, πόσες ἡμέρες θὰ περάσουν οἱ ὑπόλοιποι μὲ τὶς ἴδιες τροφές ;

6) 14 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, σκάβουν σὲ μιὰ ἡμέρα ἕνα χανδάκι μήκους 20 μέτρων καὶ πλάτους 2 μέτρων. 30 ἐργάτες, ἐργαζόμενοι 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, πόσα μέτρα χανδάκι θὰ σκάψουν σὲ μιὰ ἡμέρα ἐὰν τὸ χανδάκι ἔχῃ πλάτος 2,5 μέτρα καὶ βάθος τὸ ἴδιο μὲ τὸ προηγούμενο ;

7) Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 54 τετραγ. μέτρα, ἐχρειασθήκαμε 45 σανίδες, ποὺ ἔχουν ἐμβαδὸν 1,2 τετρ. μέτρα. Ἐὰν θὰ ἔχωμε νὰ κατασκευάσωμε τὸ πάτωμα ἑνὸς ἄλλου δωματίου, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 81 τετρ. μέτρα καὶ χρησιμοποιήσωμε σανίδες, ποὺ ἔχουν ἐμβαδὸν 0,9 μέτρα, πόσες τέτοιες σανίδες θὰ χρειασθοῦμε ;

8) 16 ἐργάτες, ἂν ἐργασθοῦν ἐπὶ 8 ἡμέρες, θὰ πάρουν 1.184.000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρουν 28 ἐργάτες σὲ 3 ἡμέρες ;

Κεφάλαιον Γ΄

ΠΕΡΙ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

1. Τί εἶναι κέρδος καὶ τί εἶναι ζημία

Γνωρίζομε, βέβαια, ὅτι τὰ μολύβια, τὶς πένες καὶ ὅλα τὰ πράγματα ποὺ πωλεῖ ὁ χαρτοπώλης ἢ ὁ μικροπωλητὴς δὲν τὰ κατασκευάζει ὁ ἴδιος. Ὅλα αὐτὰ τὰ κατασκευάζουν στὰ διάφορα ἐργοστάσια. Γιατί ὅμως τὰ ἔχει καὶ τὰ πωλεῖ ὁ χαρτοπώλης ;

Ἀσφαλῶς γνωρίζετε, ὅτι ὁ χαρτοπώλης τὰ ἀγοράζει ἢ ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιο, ὅπου τὰ κατασκευάζουν ἢ ἀπὸ μεγάλα καταστήματα.

Ὅλα αὐτά, δηλ. τὰ μολύβια, τὰ τετράδια κ.λ.π., τὰ ἀγοράζει ὁ χαρτοπώλης σὲ μιὰ ὡρισμένη τιμὴ καὶ τὰ πωλεῖ στὰ παιδιὰ μὲ λίγο μεγαλύτερη τιμὴ ἀπὸ ἐκείνη ποὺ τὰ ἀγόρασε. Ἂν π. χ. ἕνα τετράδιο τὸ ἀγόρασε 250 δραχμές, τὸ πωλεῖ 300 καὶ ἔτσι κερδίζει 50 δραχμές.

Ὁ χαρτοπώλης ἀγοράζει πολλὰ μολύβια, τετράδια κ.λ.π. καὶ λέμε ὅτι ἀγοράζει **χονδρικῶς** καὶ τὰ πωλεῖ ἕνα - ἕνα ἢ δύο - δύο. Ἡ πώλησι αὐτὴ λέγεται **λιανικὴ** πώλησι. Ὁ χαρτοπώλης ποὺ ἀγοράζει ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιο ἢ ἀπὸ μεγάλα καταστήματα, γιὰ νὰ πωλήση στὰ παιδιά, λέμε ὅτι κάνει **ἐμπόριο**. Ἐμπόριο δηλ. κάνει ἐκεῖνος ποὺ ἀγοράζει διάφορα πράγματα καὶ τὰ πωλεῖ σὲ ἄλλους γιὰ νὰ κερδίση. Ἐκεῖνος ποὺ κάνει ἐμπόριο λέγεται **ἔμπορος**. Ἐκεῖνος ποὺ ἀγοράζει ἀπὸ τὸν ἔμπορο ἕνα ὁποιοδήποτε πρᾶγμα λέγεται **ἀγοραστὴς** ἢ **πελάτης**. Τὸ πρᾶγμα ποὺ πωλεῖ ὁ ἔμπορος, λέγεται **ἐμπόρευμα** καὶ οἱ δραχμὲς ποὺ κερδίζει ἀπὸ τὴν πώλησι λέγονται **κέρδος**.

Ἔτσι λοιπόν, ὁ χαρτοπώλης εἶναι ἔμπορος, ὁ μαθητὴς ποὺ ἀγοράζει τὸ τετράδιο ἢ τὸ μολύβι εἶναι πελάτης, τὸ τετράδιο ἢ τὸ μολύβι εἶναι ἐμπόρευμα καὶ οἱ δραχμὲς ποὺ κερδίζει ὁ χαρτοπώλης ἀπὸ τὴν πώλησι εἶναι κέρδος. Ἡ ἀξία τοῦ τετραδίου ἢ τοῦ μολυβιοῦ ποὺ πληρώνει ὁ χαρτοπωλης στὸ ἐργοστάσιο, λέγεται **κόστος** τοῦ ἐμπορεύματος.

Κάθε ἐμπόρευμα ἔχει **τιμὴ κόστους** καὶ **τιμὴ πωλήσεως**. Ἂν τὸ τετράδιο ἀγοράστηκε ἀπὸ τὸν χαρτοπώλη 250 δραχμές, αὐτὲς εἶναι τὸ κόστος τοῦ τετραδίου, δηλ. τόσο στοιχίζει στὸν χαρτοπώλη. Ἂν πωλήση τὸ τετράδιο 300 δραχμές, αὐτὲς εἶναι ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως. Ἂν ἀπὸ τὴν τιμὴ τῆς πωλήσεως ἀφαιρέσωμε τὸ κόστος, τὸ ποσὸν ποὺ μένει εἶναι τὸ κέρδος ποὺ κερδίζει ὁ ἔμπορος.

Ἔμπορος δὲν εἶναι μόνο ὁ χαρτοπώλης, ἀλλὰ ὁποιοσδήποτε ἀγοράζει ἐμπορεύματα, γιὰ νὰ τὰ πωλήση στοὺς πελάτες καὶ νὰ κερδίση. Ἔμπορος εἶναι κι' ἐκεῖνος ποὺ πωλεῖ ζάχαρι, λάδι, τρόφιμα, ὑφάσματα, παπούτσια κ.λ.π.

Πολλὲς φορές, ἕνας ἔμπορος ἀναγκάζεται γιὰ διαφόρους λόγους, νὰ πωλήση τὸ ἐμπόρευμά του σὲ τιμὴ κατώτερη τοῦ κόστους, δηλ. λιγώτερο ἀπὸ ὅσο τὸ ἀγόρασε. Τότε ὁ ἔμπορος αὐτὸς δὲν κερδίζει, ἀλλὰ ζημιώνεται. Π. χ. ἕνας λαχανοπώλης ἀγόρασε πεπόνια μὲ 3000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἠμπόρεσε νὰ τὰ πωλήση ἀμέσως καὶ τὰ πεπόνια πρόκειται νὰ σαπίσουν, ἀναγκάζεται νὰ τὰ πωλήση λιγώτερο γιὰ νὰ τὰ ξοδεύση γρήγορα. Ἂν τὰ πωλήση 2000 δραχμ. τὴν ὀκά, θὰ ζημιωθῆ 1000 δρχ. τὴν ὀκά. Οἱ 1000 δραχμὲς λέγονται **ζημία.**

Ἕνας ἔμπορος γιὰ νὰ κανονίση τὸ κέρδος ποὺ πρέπει νὰ κερδίση ἀπὸ ἕνα ἐμπόρευμα, προσθέτει στὴν τιμὴ τῆς ἀγορᾶς, τὰ μεταφορικὰ ποὺ ἐχρειάσθηκαν γιὰ νὰ ἔλθη τὸ ἐμπόρευμα στὸ μαγαζί του, ἀπὸ τὸ μέρος ποὺ τὸ ἀγόρασε. Προσθέτει ἀκόμα καὶ ἕνα ποσὸν γιὰ τὰ ἔξοδα τοῦ ἐνοικίου τοῦ μαγαζιοῦ του, τοῦ φόρου ποὺ πληρώνει στὸ Δημόσιο, τοῦ φωτισμοῦ τοῦ μαγαζιοῦ του, τοῦ μισθοῦ τῶν ὑπαλλήλων του κ.λ.π. Ὅλα αὐτὰ τὰ ἔξοδα αὐξάνουν τὴν τιμὴ τοῦ κόστους τοῦ ἐμπορεύματος. Π. χ. ἐὰν ὁ χαρτοπώλης ἀγόρασε τὸ κάθε μολύβι 600 δρ., ὑπολογίζει καὶ 100 δρχ. γιὰ ἔξοδα μεταφορικῶν, γιὰ φόρο, γιὰ ἐνοίκιο καὶ φωτισμὸ κ.λ.π.

Ἔτσι ὑπολογίζει, ὅτι τὸ κάθε μολύβι τοῦ στοιχίζει 700 δρ. Ἐπάνω στὶς 700 αὐτὲς δραχμές, προσθέτει καὶ 300 δραχμὲς γιὰ κέρδος του καὶ πωλεῖ τὸ ἕνα μολύβι 1000 δραχμές.

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ κέρδους δὲν γίνεται σὲ ὅλο τὸ χρῆμα ποὺ δίδει ὁ ἔμπορος γιὰ νὰ ἀγοράση τὰ ἐμπορεύματα, δηλ. νὰ εἰπῆ, θὰ κερδίσω 5000 δραχμὲς σ' αὐτό τὸ ἐμπόρευμα ποὺ μοῦ στοιχίζει 28.000 δραχμές.

Τὸ κέρδος ὑπολογίζεται στὶς 100 ἢ στὶς 1000 δραχμές. Καὶ λέγει ὁ ἔμπορος : **Ἂν τὰ ἐμπορεύματά μου μαζὶ μὲ τὰ ἔξοδα στοιχίζουν, ἄς ποῦμε, 100 δραχμές, ἐγὼ πρέπει νὰ κερδίσω 30 δραχμές, δηλ. 30 στὰ 100.**

Αὐτὸ τὸ 30 στὰ ἑκατὸ γράφεται ἔτσι : 30%. Στὶς 1000 δραχμές, ἂν θέλη νὰ κερδίση 150, τότε λέγει : **θὰ κερδίσω 150 στὰ χίλια**, καὶ αὐτὸ γράφεται ἔτσι : 150 ‰. Ἑπομένως, ἂν μιὰ πένα στοιχίζη στὸν χαρτοπώλη 100 δραχμές, πρέπει νὰ τὴν πωλήση 130. Ἂν ἕνας λαχανοπώλης πωλήση ντομάτες μὲ ζημία 20 % καὶ τοῦ στοιχίζουν 500 δραχμὲς ἡ ὀκά, πρέπει νὰ τὶς πωλήση 400 δραχμὲς τὴν ὀκά, ἀφοῦ σὲ κάθε 100 δραχμὲς θὰ ζημιώνεται 20 δραχμές.

Αὐτὰ τὰ πόσο τοῖς ἑκατό, ποὺ ὑπολογίζονται γιὰ κέρδος ἢ γιὰ ζημία στὴν τιμὴ τοῦ κόστους κάθε ἐμπορεύματος λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα **ποσοστά**.

Σὲ ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ ἢ ἐπὶ τοῖς χιλίοις ὑπολογίζονται οἱ φόροι ποὺ εἰσπράττει τὸ Δημόσιο ἀπὸ τοὺς πολῖτες, ἡ πληρωμὴ τῆς μεσιτείας ποὺ κάνουν οἱ μεσῖτες καὶ πολλὲς ἄλλες δοσοληψίες ποὺ γίνονται ἀπὸ τοὺς ἀνθρώπους στὴν ἀγορά.

Τὰ ποσοστὰ εἶναι πολὺ χρήσιμα γιὰ τὶς καθημερινὲς συναλλαγὲς τῶν ἀνθρώπων καὶ γι᾽ αὐτὸ εἶναι ἀνάγκη νὰ μάθωμε νὰ λύωμε τὰ προβλήματα ποσοστῶν. Τὰ προβλήματα αὐτὰ εἶναι πολὺ εὔκολα καὶ λύονται μὲ τὴ **μέθοδο τῶν τριῶν**,

Πρὶν λύσωμε μερικὰ τέτοια προβλήματα, πρέπει νὰ σᾶς εἰποῦμε, ὅτι σὲ **ὅλα** τὰ προβλήματα **ποσοστῶν** τὰ ποσὰ **εἶναι** πάντοτε **ἀνάλογα**.

1ον Πρόβλημα.—Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἕνα βαρέλι λάδι καὶ ἔδωσε 600.000 δραχμές. Κατόπιν τὸ ἐπώλησε καὶ ἐκέρδισε 120.000 δρ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐκέρδισε;

Θὰ κάνωμε τὴν κατάταξι τοῦ προβλήματος καὶ τὴ λύσι, σύμφωνα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

στὶς 600.000 δραχ. κερδίζει 120 000 δραχ.

100 — X

$$X = 120.000 \times \frac{100}{600000} \text{ ἁπλοποιοῦμε καὶ ἔχομε :}$$

$$X = 120.000 \times \frac{1}{6000} = \frac{120000}{6000} = \frac{120}{6} = 20\%$$

2ον πρόβλημα.—Ἕνα τσουβάλι ζάχαρι κοστίζει σὲ ἕναν ἔμπορο 480.000 δραχ. καὶ θέλει νὰ τὸ πωλήση μὲ κέρδος 15 %. Πόσο θὰ κερδίση ἀπὸ ὅλη τὴ ζάχαρι;

Λύσις.—Ἀφοῦ στὶς 100 δραχ. θέλει νὰ κερδίση 15 δραχμές, στὶς 480.000 δραχμὲς πόσο πρέπει νὰ κερδίση;

100 δραχ. — 15 δραχ. κέρδος

480.000 » — X » »

$$X = 15 \times \frac{480000}{100} = 15 \times \frac{4800}{1} = 72000 \text{ δραχ. κέρδος.}$$

3ον Πρόβλημα.— Μία πήχη ὕφασμα στοιχίζει στὸν ἔμπορο 8000 δραχμές. Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν πήχη γιὰ νὰ κερδίση 25 %;

Λύσις.—Ἂν ἡ πήχη τοῦ ὑφάσματος εἶχε 100 δραχ., γιὰ νὰ κερδίση 25 % ἔπρεπε νὰ τὴν πωλήση 125 δραχ. Ἀφοῦ ὅμως ἡ πήχη στοιχίζει 8000 δραχμές, πόσο πρέπει νὰ τὴν πωλήση γιὰ νὰ κερδίση 25 % ;

Ὥστε θὰ ἔχωμε:

στὶς 100 δρχ. θὰ πωλήση 125
» 8000 » » » Χ

$$X = 125 \times \frac{8000}{100} = 125 \times \frac{80}{1} = 10.000 \text{ δρ.}$$

Θὰ πωλήση λοιπὸν τὴν πήχη μὲ 10.000 δρχ.

4ον Πρόβλημα.—Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε ἕνα ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 20 % καὶ ἐκέρδισε 30.000 δραχμές. Πόσο ἐκόστισε στὸν ἔμπορο τὸ ἐμπόρευμα αὐτό ;

Λύσις.—Ἂν ἐκέρδιζε 20 δραχμές, τὸ ἐμπόρευμά του θὰ ἐκόστιζε 100 δραχμές. Ἀφοῦ ὅμως ἐκέρδισε 30.000 δραχ., πόσο ἐκόστιζε τὸ ἐμπόρευμα ποὺ ἐπώλησε.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

Στὶς 100 δραχ. ἔχει 20 δρχ. κέρδος
Χ » » 30.000 » »

$$X = 100 \times \frac{3000}{20} = \frac{300000}{2} = 150.000 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε τὸ ἐμπόρευμα ἐκόστισε 150.000 δραχμές.

5ον Πρόβλημα.—Ἕνας μεσίτης ἐπώλησε ἕνα σπίτι ἀξίας 45.000.000 δραχμῶν κι' ἐπῆρε γιὰ μεσιτεία 1.125.000 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ὑπολογίζεται ἡ μεσιτεία του ;

Λύσις.—Ἀφοῦ στὶς 45.000.000 δραχμὲς ἐπῆρε 1.125.000 δραχ. γιὰ μεσιτεία, στὶς 100 δραχμὲς πόσο ἐπῆρε:

Θὰ ἔχωμε:

Στὶς 45.000.000 δρχ. 1.125.000 μεσιτεία
» 100 » Χ »

$$X = 1.125.000 \times \frac{100}{45.000.000} = \frac{1125}{450} = 2,5\ \%$$

ήταν 1948 ......

Προβλήματα

1) Ἕνας γεωργὸς ἐπῆρε τὸ ἔτος 1947 ἀπὸ τὰ χωράφια του 9400 ὀκάδες σιτάρι. Τὸ 1948 ἠθέλησε νὰ καλυτερεύσῃ τὴν καλλιέργεια τῶν χωραφιῶν του κι' ἐχρησιμοποίησε λιπάσματα. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ ἡ ἐσοδεία τῶν χωραφιῶν του κατὰ τὸ 1948 ἦταν 23 % περισσότερο ἀπὸ τὴν ἐσοδεία τοῦ 1947. Πόσες ὀκάδες σιτάρι ἦταν ἡ ἐσοδεία τοῦ 1948;

2) Ἕνα βενζινόπλοιο μεταφέρει 12.500 ὀκ. ζάχαρι. Ἐπειδὴ ὅμως κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ ταξιδιοῦ ἔγινε τρικυμία, ὁ πλοίαρχος ἀναγκάσθηκε νὰ ρίξῃ στὴ θάλασσα 30 % ἀπὸ τὴ ζάχαρι. Πόση ζάχαρι ἔρριξε στὴ θάλασσα;

3) Ἕνας ἔμπορος πληρώνει στὸ Δημόσιο γιὰ φόρους τῶν κερδῶν του 3,5 % τὸ χρόνο. Τὸ ἔτος 1948 ὁ ἔμπορος αὐτὸς ἐπλήρωσε γιὰ φόρους στὸ Δημόσιο 2.660.000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἦταν τὰ κέρδη του;

4) Ἕνας οἰνοπώλης ἐπώλησε 780 ὀκάδες κρασί, νοθευμένο μὲ νερό. Τὸ νερὸ ποὺ εἶχε μέσα τὸ κρασὶ αὐτὸ ἦταν 8 %. Πόσες ὀκάδες νερὸ εἶχαν αὐτὲς οἱ 780 ὀκάδες νοθευμένο κρασί;

5) Ἕνας ἔμπορος αὐγῶν ἀγόρασε αὐγὰ καὶ ἔδωσε ἐν ὅλῳ 650.000 δραχμές. Ἐπειδὴ ὅμως κατὰ τὴν μεταφορὰ ἔσπασαν πολλὰ αὐγά, ὁ ἔμπορος αὐτὸς ἐζημιώθηκε 14 %. Πόσες δραχμὲς ἐζημιώθηκε ἐν ὅλῳ;

6) Ἕνας μεσίτης ἐπώλησε ἕνα οἰκόπεδο ἀξίας 2.700.000 δραχ. καὶ ἐπῆρε γιὰ μεσιτεία 62.100 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ὑπελόγισε τὴ μεσιτεία του;

7) Ἕνα κατάστημα πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ἔκπτωσι 15 %. Ἐὰν ἀγοράσωμε ἐμπορεύματα ἀξίας 1.250.000 δραχ. πόσο πρέπει νὰ πληρώσωμε;

8) Ἕνας ἀντιπρόσωπος ραδιοφώνων παίρνει γιὰ προμήθειά του ἀπὸ κάθε ραδιόφωνο 12 %. Ἐὰν πωλήσῃ 5 ραδιόφωνα, καθένα τῶν ὁποίων ἀξίζει 960.000 δραχμές, πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ προμήθεια (δηλ. μεσιτεία);

9) Στὰ σχολεῖα μιᾶς πόλεως ἐφοίτησαν κατὰ τὸ σχολικὸν ἔτος 1947 — 1948 2925 μαθητές. Ἐξ αὐτῶν κατὰ τὶς ἐξετάσεις ἀπερρίφθησαν τὰ 8 %. Πόσοι μαθητὲς ἀπερρίφθησαν ἐν ὅλῳ;

10) Ἕνας ἔμπορος εἶχε στὴν ἀποθήκη του 14.000 ὀκ. πατάτες. Ἀπὸ αὐτὲς ἐσάπισαν τὰ 7 % καὶ τὶς ὑπόλοιπες τὶς ἐπώλησε πρὸς 1900 δραχ. τὴν ὀκά. Πόσα χρήματα ἐπῆρε;

25

Κεφάλαιον Δ΄

ΤΟΚΟΣ

Οἱ ἄνθρωποι ἔχουν διάφορα ἐπαγγέλματα. Ἄλλοι εἶναι ἔμποροι, ἄλλοι δημόσιοι ὑπάλληλοι, ἄλλοι ἐργάτες, ἄλλοι κτηματίες, ἄλλοι ἐπιστήμονες κ.λ.π. Πολλὲς φορὲς οἱ ἄνθρωποι εὑρίσκονται στὴν ἀνάγκη νὰ δανεισθοῦν χρήματα γιὰ νὰ κάμουν διάφορες δουλειές των. Χρήματα δανείζουν οἱ Τράπεζες, οἱ Συνεταιρισμοί, διάφοροι ἄνθρωποι ποὺ ἔχουν πολλὰ χρήματα κ.λ.π. Στὴν τάξι σας ὑπάρχουν παιδιά, ποὺ ἔχουν γονεῖς κτηματίας ἢ ἐμπόρους. Ἂν αὐτὰ τὰ παιδιά, ρωτήσουν τοὺς γονεῖς των, θὰ μάθουν ὅτι πολλὲς φορὲς δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὶς Τράπεζες ἢ ἀπὸ τοὺς Συνεταιρισμούς, γιὰ νὰ ἀγοράσουν ἐμπορεύματα ἢ γιὰ νὰ καλλιεργήσουν τὰ κτήματά των. Κάθε ἄνθρωπος εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ στὴν ἀνάγκη νὰ δανεισθῇ χρήματα γιὰ κάποιαν ἐπείγουσα ἐργασία του.

Τὰ δανεικὰ χρήματα ποὺ παίρνουν οἱ ἄνθρωποι ἀπὸ τὶς Τράπεζες, ἀπὸ τοὺς Συνεταιρισμοὺς κ.λ.π., τὰ παίρνουν ἀφοῦ πρῶτα γίνουν ὡρισμένες διατυπώσεις. Γιὰ νὰ πληροφορηθῇ ἡ τάξι σας ποιὲς εἶναι αὐτὲς οἱ διατυπώσεις, ποὺ γίνονται γιὰ νὰ δοθοῦν δανεικὰ χρήματα, ἂς ἀναλάβουν νὰ ρωτήσουν τὸν πατέρα των δυὸ παιδιὰ τῆς τάξεώς σας. Ν' ἀναλάβῃ ἕνας ποὺ ἔχει πατέρα μικρέμπορον καὶ δανείζεται χρήματα ἀπὸ τὴν Τράπεζα καὶ ἕνας ποὺ ἔχει πατέρα κτηματία καὶ δανείζεται χρήματα ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα ἢ ἀπὸ τὸν Συνεταιρισμό.

Οἱ πληροφορίες ποὺ θὰ πάρουν οἱ μαθητές, θὰ εἶναι οἱ ἑξῆς:

1) Ὅταν δανείζεσαι χρήματα λέμε ὅτι παίρνεις **δάνειο**.

2) Ἐκεῖνος ποὺ δανείζει λέγεται **δανειστὴς** κι' ἐκεῖνος ποὺ δανείζεται λέγεται **ὀφειλέτης**. Ὁ ὀφειλέτης δίδει ἀπόδειξι στὸν δανειστὴ γιὰ τὰ χρήματα ποὺ δανείζεται.

3) Τὰ χρήματα ποὺ δανείζεσαι λέγονται **κεφάλαιο**.

4) Τὸ κεφάλαιο ποὺ δανείζεσαι εἶσαι ὑποχρεωμένος νὰ τὸ ἐπιστρέψῃς ἔπειτα ἀπὸ ὡρισμένον καιρό, ποὺ ἐσυμφώνησες μὲ τὸν δανειστή, π. χ. ἔπειτα ἀπὸ 6 μῆνες ἢ ἕνα ἢ δύο ἢ περισσό-

τερα χρόνια. Ὁ καιρὸς αὐτός, ποὺ θὰ μείνῃ τὸ κεφάλαιο στὰ χέρια σου δανεισμένο, λέγεται **χρόνος**.

5) Ὅταν δανείζεσαι, κάνεις συμφωνία μὲ τὸν δανειστή, ὅτι τὴν ἡμέρα ποὺ θὰ τοῦ ἐπιστρέψῃς τὸ κεφάλαιο, θὰ τοῦ δώσῃς παραπάνω, ὡς κέρδος, καὶ ἕνα ὡρισμένο ποσὸν χρημάτων. Τὸ ποσὸν αὐτὸ ποὺ θὰ δώσῃς παραπάνω ὡς κέρδος, λέγεται **τόκος**.

6) Ἂν δανεισθῇς π. χ. 200.000 δραχμὲς γιὰ 5 χρόνια, ὁ τόκος γιὰ τὸ κεφάλαιο αὐτὸ δὲν θὰ ὁρισθῇ καὶ γιὰ τὰ 5 χρόνια, ἀλλὰ θὰ συμφωνηθῇ τόκος γιὰ 100 δραχμὲς κεφάλαιο σὲ ἕνα χρόνο. Ἂν συμφωνήσετε δηλ. γιὰ τόκο 15 %, αὐτό, σημαίνει ὅτι γιὰ τὸ κεφάλαιο ποὺ ἐδανείσθηκες, θὰ πληρώνῃς σὲ ἕνα χρόνο τόκο 15 δραχμὲς γιὰ κάθε 100 δραχμὲς τοῦ κεφαλαίου. Τὴ στιγμὴ ποὺ παίρνεις τὸ δάνειο, κάνεις ἀπαραιτήτως μὲ τὸν δανειστὴ συμφωνία γιὰ τὸν τόκο ποὺ θὰ πληρώνῃς σὲ κάθε 100 δραχμὲς τοῦ κεφαλαίου γιὰ ἕνα χρόνο. Ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σὲ ἕνα χρόνο λέγεται **ἐπιτόκιο.**

Στὰ προβλήματα τοῦ τόκου ὑπάρχουν λοιπὸν 4 ποσά: 1) τὸ κεφάλαιο, 2) ὁ **χρόνος**, 3) ὁ **τόκος** καὶ 4) τὸ **ἐπιτόκιο.**

Στὰ προβλήματα τοῦ τόκου μᾶς δίδονται 3 ποσὰ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ τέταρτο. Τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται μὲ τὴν μέθοδο τῶν τριῶν.

1. Προβλήματα ὅπου ζητεῖται ὁ τόκος

α) Ὁ τόκος, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἔτη

1ον Πρόβλημα.— Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 150.000 δραχμῶν σὲ 4 ἔτη μὲ ἐπιτόκιο 8 %;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμε:

100 δρ. κεφ.	1 ἔτος	8 δρ. τόκον
150000 » «	4 »	X »

$$X = 8 \times \frac{150.000 \times 4}{100 \times 1} = \frac{4800000}{100} = 48.000$$

Ὥστε ὁ τόκος τῶν 150.000 δρχ. εἰς 4 ἔτη θὰ εἶναι 48.000.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, συγκρίνομε πρῶτα τὰ ποσὰ καὶ λέμε :

Ἀφοῦ οἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίνουν τόκο 8 δραχ , οἱ διπλάσιες δραχμὲς στὸν ἴδιο χρόνο θὰ δίνουν τόκο διπλάσιο. Ἑπομένως, τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα. Τώρα, ἀφοῦ οἱ 100 δρ. εἰς 1 ἔτος δίνουν τόκο 8 δρ., οἱ ἴδιες δραχμὲς εἰς 2 ἔτη θὰ δίνουν τόκο διπλάσιο. Ἄρα καὶ τὰ ποσὰ χρόνος καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα. Ἑπομένως θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο Χ ἐπὶ τὰ κλάσματα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν ἀντεστραμμένα. Ὅπως βλέπετε, ἡ λύσις τοῦ πρρβλήματος εἶναι πολὺ εὔκολη.

Ἂς πάρωμε ἕνα ἄλλο πρόβλημα.

2ον Πρόβλημα.—Ἕνα κεφάλαιο 400.000 δραχμῶν ποὺ τοκίζεται γιὰ 5 ἔτη πρὸς 12 %, πόσον τόκον θὰ δώση ;

Λύσις.—Ἀφοῦ οἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίνουν τόκο 12 δραχμές, οἱ 400.000 δρχ. εἰς 4 ἔτη πόσο τόκο θὰ δώσουν ;

Θὰ κάνωμε τὴν κατάταξι :

100 δρχ.	1 ἔτος	12 τόκο
400.000 »	5 »	Χ »

$$X = 12 \times \frac{400.000 \times 5}{100 \times 1}$$ ἁπλοποιοῦμε καὶ ἔχομε :

$$X = 12 \times \frac{400.000 \times 5}{100 \times 1} = 12 \times \frac{4000 \times 5}{1 \times 1} = 240.000 \text{ δρχ. τόκος.}$$

Καὶ στὰ δύο αὐτὰ προβλήματα ἐζητούσαμε νὰ εὕρωμε τὸν τόκο. Τὰ ποσὰ κεφάλαιο, χρόνος καὶ ἐπιτόκιο ἦταν γνωστά. Παρατηρήσετε καλὰ καὶ στὰ δυὸ προβλήματα καὶ θὰ ἰδῆτε, ὅτι ὁ τόκος εὑρέθηκε, ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ ἐδιαιρέσαμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 100. Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσετε ἂν λύσετε ὁσαδήποτε προβλήματα θελήσετε, στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἔτη. Θὰ πολλαπλασιάσετε τὰ τρία γνωστὰ ποσὰ ποὺ ἔχετε, δηλ, κεφάλαιο, χρόνο καὶ ἐπιτόκιο, καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν θὰ τὸ διαιρέσετε διὰ τοῦ 100.

Γιὰ συντομία, θὰ παραστήσωμε κάθε ποσὸν μὲ τὸ ἀρχικὸ γράμμα τοῦ ὀνόματός του, δηλ. τόκος = Τ, κεφάλαιο = Κ, ἐπιτόκιο = Ε, χρόνος = Χ. Γιὰ νὰ λύσωμε λοιπὸν ἕνα πρόβλημα στὸ ὁποῖο ζητεῖται ὁ τόκος εἰς ἔτη, θὰ εἰποῦμε: Ὁ τόκος Τ εἶναι ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιο Κ, ἐπὶ τὸν χρόνο Χ, ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο Ε, διὰ 100, δηλ. θὰ σχηματίσωμε αὐτὸν τὸν τύπο:

$$T = \frac{K \cdot X \cdot E}{100}$$

Τὸν τύπο αὐτὸ θὰ τὸν χρησιμοποιοῦμε σὲ κάθε πρόβλημα ὅπου ζητεῖται ὁ τόκος εἰς ἔτη, χωρὶς νὰ ἔχωμε ἀνάγκη νὰ κάνωμε πρῶτα κατάταξι τοῦ προβλήματος. Ἂς πάρωμε ἕνα πρόβλημα:

Πόσον τόκο φέρει κεφάλαιο 500.000 δρ. εἰς 6 ἔτη μὲ ἐπιτόκιο 9 %;

Σύμφωνα μὲ τὸν προηγούμενο τύπο, θὰ λύσωμε ἀμέσως τὸ πρόβλημα καὶ θὰ ἔχωμε:

$$T = \frac{K \cdot X \cdot E}{100}, \text{ ἄρα } T = \frac{500.000 \times 6 \times 9}{100} = 27.000 \text{ δραχ. τόκος.}$$

Ἂς λύσωμε τώρα τὸ ἴδιο πρόβλημα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν γιὰ νὰ ἰδοῦμε ἂν θὰ εὕρωμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

Κεφ. 100 δρ.	1 ἔτ.	9 τοκ.
500.000 »	6	Χ

$$X = \frac{9 \times 500.000 \times 6}{100 \times 1} = \frac{27.000.000}{100} = 270.000 \text{ δραχ. τόκος.}$$

Ἀντὶ λοιπὸν νὰ κάνωμε ὅλην αὐτὴ τὴν κατάταξι, ποὺ μπορεῖ καμιὰ φορὰ νὰ μᾶς μπερδέψη, εἶναι προτιμότερο νὰ λύωμε κάθε πρόβλημα μὲ τὸν τύπο:

$$T = \frac{K \cdot X \cdot E}{100}$$

Ἑπομένως:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸν χρόνο, ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο, καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ 100, Δηλ. $T = \frac{K \cdot X \cdot E}{100}$

Προβλήματα

1) Ἕνας ἄνθρωπος ἐπώλησε τὰ κτήματά του ἀντὶ 7.000.000 δρα-

χμῶν. Τὰ χρήματα αὐτὰ τὰ κατέθεσε στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα γιὰ 5 ἔτη, μὲ ἐπιτόκιο 4 %. Πόσον τόκο θὰ πάρῃ μετὰ 5 ἔτη;

2) Ἕνας ἄλλος ἄνθρωπος γιὰ νὰ ἀποτελειώσῃ τὸ κτίσιμο τοῦ σπιτιοῦ του, ἐδανείσθηκε 32.000.000 δραχμὲς γιὰ 7 ἔτη, μὲ ἐπιτόκιο 12 %. Πόσον τόκο θὰ πληρώσῃ;

3) Ἕνας κηπουρὸς ἤθελε νὰ κάμῃ στὸν κῆπο του ἐγκαταστάσεις ὑδρεύσεως. Γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτὸν ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 14.000.000 δραχμὲς γιὰ 2 ἔτη, μὲ ἐπιτόκιο 9,5 %. Πόσον τόκο θὰ πληρώσῃ;

4) Ἕνας κτηνοτρόφος εἰσέπραξε ἀπὸ τὰ εἰσοδήματά του ἑνὸς ἔτους 23.500.000 δραχμές. Τὰ χρήματα αὐτὰ τὰ ἐτόκισε σὲ ἕναν ἔμπορο γιὰ 4 ἔτη, μὲ ἐπιτόκιο 14 %. Πόσον τόκο θὰ πληρώσῃ ὁ ἔμπορος;

5) Ἕνας ἄνθρωπος ἔλαβε ἀπὸ τὸν ἀδελφό του, ποὺ εἶναι στὴν Ἀμερική, 2.500 δολάρια. Τὰ δολάρια τὰ ἐπώλησε πρὸς 12.500 δραχ. τὸ ἕνα. Ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε ἀπὸ τὴν πώλησι τῶν δολαρίων, ἐκράτησε τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ κατέθεσε στὴν Τράπεζα γιὰ 4 ἔτη, μὲ ἐπιτόκιο 3 %. Πόσα χρήματα κατέθεσε καὶ πόσον τόκο θὰ πάρῃ μετὰ 4 ἔτη;

6) Ἕνας κτηματίας ἐπώλησε 14.500 ὀκάδες σταφύλια πρὸς 1.600 δρ. τὴν ὀκά, καὶ 3.600 ὀκάδες μῆλα πρὸς 3.500 δραχμὲς τὴν ὀκά. Ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε, ἔδωσε τὸ $\frac{1}{4}$ γιὰ νὰ πληρώσῃ τὰ ἔξοδα καλλιεργείας τῶν κτημάτων του καὶ τὰ ὑπόλοιπα νὰ ἐτόκισε γιὰ 5 ἔτη μὲ ἐπιτόκιο 8,6 %. Πόσον τόκο θὰ πάρῃ;

β) Ὁ τόκος, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς μῆνες

1ον Πρόβλημα.— Πόσον τόκο φέρει κεφάλαιον 80.000 δραχμῶν σὲ 6 μῆνες μὲ ἐπιτόκιο 9 %;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου 80.000 δραχ. Τὸ κεφάλαιο αὐτὸ ἐτοκίσθηκε γιὰ 6 μῆνες. Ὁ τόκος ὅμως τῶν 100 δραχμῶν, δηλ. τὸ ἐπιτόκιο 9 %, φανερώνει τὸν τόκο σὲ ἕνα ἔτος. Ἂν κατατάξωμε τὸ πρόβλημα ὅπως εἶναι, θὰ ἔχωμε:

100 δρχ.	εἰς 1 ἔτος	9 δρ.	τόκο
80.000 »	» 6 μῆνες	X »	»

Παρατηροῦμε ὅτι στὴ στήλη ποὺ φανερώνει τὸν χρόνο, εἶναι δυὸ ποσὰ ἑτεροειδῆ, δηλ. ἔτη καὶ μῆνες, ἐνῶ ξέρομε, ὅτι σὲ κάθε στήλη πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδῆ τὰ ποσά. Πῶς θὰ γίνῃ λοιπόν; Δὲν εἶναι καθόλου δύσκολο νὰ τὸ εὔρωμε. Γνωρίζομε ὅτι 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνες. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ γράψωμε 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος φέρουν τόκο 9 δρχ., θὰ γράψωμε 100 δραχ. σὲ 12 μῆνες φέρουν τόκο 9 δρχ.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

100 δρχ.	12 μῆνες	6 δρχ.
80.000 »	6 »	Χ »

$$Χ = 9 \times \frac{80.000 \times 6}{100 \times 12} = \frac{4.320.000}{1200} = 3.600 \text{ δραχ. τόκος}$$

2ον Πρόβλημα.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος κεφαλαίου 36.000 δραχμῶν σὲ 8 μῆνες μὲ ἐπιτόκιο 10 %.

Κι' ἐδῶ θὰ κάνωμε τὴν ἴδια λύσι. Ἀφοῦ οἱ 100 δραχμὲς σὲ 12 μῆνες φέρουν τόκο 10 δραχ., οἱ 36.000 σὲ 8 μῆνες πόσον τόκο θὰ φέρουν;

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

100 δρ.	12 μῆνες	10 δρ.
36.000 »	8 »	Χ »

$$Χ = 10 \times \frac{36.000 \times 8}{100 \times 12} = \frac{2.880.000}{1200} = 2400 \text{ δραχμὲς τόκος.}$$

Ἂν προσέξωμε τὴ λύσι καὶ τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων, θὰ ἰδοῦμε ὅτι γιὰ νὰ εὔρωμε τὸν τόκο σὲ μῆνες, ἐπολλαπλασιάσαμε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ ἐπὶ τὸν χρόνο, καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν τὸ ἐδιαιρέσαμε διὰ 1200. Ἐνῶ, ὅταν ἐζητούσαμε τὸν τόκο σὲ ἔτη, ἐπολλαπλασιάσαμε τὰ τρία αὐτὰ γνωστὰ ποσὰ καὶ τὸ γινόμενο τὸ ἐδιαιρέσαμε διὰ 100. Ἐκεῖ εἴχαμε $100 \times 1 = 100$, γιατὶ ὁ χρόνος ἦταν πάντοτε 1 ἔτος. Ἐδῶ ἔχομε $100 \times 12 = 1200$, γιατὶ ἔχομε τὸν χρόνο σὲ μῆνες, καὶ 1 ἔτος κάνει 12 μῆνες. Γι' αὐτὸ λοιπόν, ὅταν ζητοῦμε τὸν τόκο σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὰ τρία γνωστὰ ποσὰ καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 1.200.

Ὥστε τώρα ὁ τύπος τοῦ τόκου σὲ μῆνες θὰ εἶναι αὐτός:

$$Τ = \frac{Κ \,.\, Χ \,.\, Ε}{1200}$$

Ἂς λύσωμε μὲ τὸν τύπο αὐτὸ ἕνα πρόβλημα ὅπου ζητεῖται ὁ τόκος σὲ 6 μῆνες :

Πόσον τόκο φέρει κεφάλαιο 750.000 δραχμῶν σὲ 7 μῆνες πρὸς 6 % ;

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο θὰ ἔχωμε :

$$T = \frac{K.X.E}{1200} \text{ ἄρα } T = \frac{750.000 X 7 X 6}{1200} = \frac{31.500.000}{1200} = 26.250 \text{ δρ.}$$

Ἑπομένως :

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ Χρόνος δίδεται εἰς μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὰ τρία γνωστὰ ποσὰ καὶ διαιροῦμε τὸ γινάμενο διὰ 1200. Δηλ. $T = \frac{K.X.E}{1200}$

Προβλήματα

1) Πόσον τόκο φέρει κεφάλαιο 250.000 δραχμῶν σὲ 7 μῆνες, μὲ ἐπιτόκιο 12 %;

2) Ἕνας συνεταιρισμὸς ἐδάνεισε στοὺς συνεταίρους του κεφάλαιο 280.000.000 δραχμῶν γιὰ 16 μῆνες, μὲ ἐπιτόκιο 5 %. Πόσον τόκο θὰ πάρῃ ὁ συνεταιρισμός ;

3) Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε 1.600.000 δραχμὲς γιὰ $1\frac{1}{2}$ ἔτη, μὲ ἐπιτόκιο 10 %. Πόσον τόκο θὰ πληρώσῃ; $\left(1\frac{1}{2} \text{ ἔτη} = 18 \text{ μῆνες}\right)$.

4) Ἕνας ἄνθρωπος κατέθεσε στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα κεφάλαιο 480.000 δραχμῶν γιὰ 15 μῆνες, μὲ ἐπιτόκιο $3\frac{3}{4}$ %. Πόσον τόκο θὰ πληρώσῃ ;

5) Ἕνας κτηματίας ἐπῆρε ἀπὸ τὰ εἰσοδήματά του 6.400.000 δρχ. Τὰ $\frac{3}{4}$ ἐξ αὐτῶν τὰ κατέθεσε στὴν Τράπεζα Ἀθηνῶν γιὰ 8 μῆνες, μὲ ἐπιτόκιο 4 %. Τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἐδάνεισε σ' ἕναν ἔμπορο γιὰ 14 μῆνες μὲ ἐπιτόκιο 9 %. Πόσον τόκο θὰ πάρῃ ἐν ὅλῳ ;

6) Ἕνας μικρέμπορος ἐπῆρε μὲ πίστωσι ἐμπορεύματα ἀξίας δρχ. 3.200.000. Τὸ χρέος αὐτὸ θὰ τὸ ἐξοφλήσῃ μετὰ 5 μῆνες, μὲ ἐπιτόκιο 14 %. Πόσον τόκο θὰ πληρώσῃ ;

7) Ἕνας ἐτόκισε τὰ ἑξῆς κεφάλαια : α) 720.000 δραχ. ἐπὶ 11 μῆνες μὲ ἐπιτόκιο 8 %. β) 350.000 δρ. γιὰ 14 μῆνες μὲ ἐπιτόκιο 12 %. γ)

480.000 δρ. γιὰ 27 μῆνες, μὲ ἐπιτόκιο $9\frac{2}{5}$ %. Πόσον τόκο θὰ πάρῃ ἀπ' ὅλα αὐτὰ τὰ κεφάλαια;

8) Ἕνας ζωέμπορος ἐπὶ 8 μῆνες ἐμπορεύθηκε κεφάλαιο 2.500.000 δραχμῶν. Ὑπελόγισε τὰ κέρδη του καὶ εἶδε ὅτι ἦταν σὰν νὰ ἐτόκισε τὰ χρήματά του μὲ 24%. Πόσα ἦταν τὰ κέρδη του;

γ) Ὁ τόκος, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρες

Μέχρι τώρα ἐλύσαμε προβλήματα στὰ ὁποῖα ἐζητούσαμε τὸν τόκο σὲ ἔτη ἢ σὲ μῆνες. Ἐπειδὴ ὅμως συμβαίνει συχνὰ νὰ τοκίζεται ἕνα κεφάλαιο γιὰ ὡρισμένες μόνο ἡμέρες ἢ γιὰ ἔτη, μῆνες καὶ ἡμέρες, εἶναι ἀνάγκη νὰ μάθωμε πῶς εὑρίσκεται ὁ τόκος σὲ ἡμέρες. Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι ζητοῦμε τὸν τόκο ἑνὸς κεφαλαίου ποὺ ἐτοκίσθηκε γιὰ 25 ἡμέρες ἢ τὸν τόκο ἑνὸς ἄλλου κεφαλαίου ποὺ ἐτοκίσθηκε γιὰ 3 μῆνες καὶ 7 ἡμέρες πρὸς 10%. Τί πρέπει νὰ γίνῃ, ἀφοῦ τὸ ἐπιτόκιο φανερώνει πάντοτε τὸν τόκο τῶν 100 δρχ. σὲ ἕνα ἔτος; Εἶναι ἁπλούστατο: Θὰ τρέψωμε τὸ ἔτος σὲ ἡμέρες καί, ἀντὶ νὰ εἰποῦμε π. χ. ἕνα κεφάλαιο 100 δραχμῶν σὲ ἕνα ἔτος φέρει τόκο 10 δραχ., θὰ εἰποῦμε ἕνα κεφάλαιο 100 δραχ. σὲ 360 ἡμέρες φέρει τόκο 10 δραχ. Στὸν τόκο τὸ ἔτος ὑπολογίζεται ὅτι ἔχει 360 ἡμέρες καὶ ὄχι 365, ὅπως ἔχει τὸ ἡμερολογιακὸ ἔτος. Ἐπίσης κάθε μῆνας ὑπολογίζεται ὅτι ἔχει 30 ἡμέρες.

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι ἔχομε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα: Πόσον τόκο φέρει κεφάλαιο 40.000 δραχ. σὲ 25 ἡμέρες πρὸς 10%;

Θὰ εἰποῦμε: Ἀφοῦ οἱ 100 δραχμὲς σὲ 360 ἡμέρες φέρουν τόκο 10 δραχμές, οἱ 40.000 δραχμὲς σὲ 25 ἡμέρες πόσον τόκο θὰ φέρουν;

Θὰ κάνωμε τὴν κατάταξι:

100 δρ.	360 ἡμέρες	10 δρ. τόκος
40.000 »	25 »	x » »

$$x = 6 \times \frac{40.000 \times 25}{100 \times 360} = \frac{10.000.000}{36.000} = 277,7 \text{ δρχ. τόκος}$$

2ον Πρόβλημα.—Πόσον τόκο φέρουν 290.000 δραχ. σὲ 2 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες πρὸς 6%;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου 290.000 δραχ. σὲ 2 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες. Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ τρέψωμε τοὺς 2 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες σὲ ἡμέρες. Θὰ ἔχωμε λοιπὸν 2 μῆνες=60 ἡμέρες καὶ ἄλλες 15 ἡμέρες = 75 ἡμέρες. Ἑπομένως θὰ εἰποῦμε: Ἀφοῦ οἱ 100 δρχ. σὲ 360 ἡμέρες φέρουν τόκο 6 δραχμές, οἱ 290.000 δραχμὲς σὲ 75 ἡμέρες πόσον τόκο θὰ φέρουν;

Κάνομε τὴν κατάταξι καὶ τὴν λύσι τοῦ προβλήματος:

100 δρ.	360 ἡμέρ.	7 δρ. τόκος
290.000 »	75 »	X » »

$$X = 6 \times \frac{290\,000 \times 75}{100 \times 300} = \frac{130.500.000}{36.000} = \frac{130.500}{36} = 3.625 \text{ δρ. τόκος}$$

3ον Πρόβλημα.—Ἕνα κεφάλαιο 300.000 δραχμῶν πόσον τόκο φέρει σὲ ἕνα ἔτος, 2 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες, μὲ ἐπιτόκιο 8 %;

Θὰ τρέψωμε πρῶτα τὸ 1 ἔτος, 3 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες σὲ ἡμέρες καὶ θὰ ἔχωμε:

1 ἔτος	=	360 ἡμέρες
3 μῆνες	=	90 »
10 ἡμέρες	=	10 »
Σύνολον		460 »

Θὰ κάνωμε τὴν κατάταξι καὶ τὴν λύσι τοῦ προβλήματος:

100 δρ.	360 ἡμέρ.	8 δρ. τόκος
300.000 »	460 »	X » »

$$X = 8 \times \frac{300.000 \times 460}{100 \times 360} = \frac{1.104.000.000}{36.000} = \frac{1.104.000}{36} = 30.666 \text{ δρ. τόκος}$$

Ἂν παρατηρήσωμε τὴν λύσι καὶ τῶν τριῶν παραπάνω προβλημάτων, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸν χρόνο καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο κ᾽ ἐδιαιρέσαμε τὸ γινόμενο διὰ 36.000. Τὸ 36.000 εὑρέθηκε γιατὶ ὁ χρόνος ἐδῶ εἶναι ἡμέρες καὶ ἕνα ἔτος ἔχει 360 ἡμέρες, ὥστε 100×360=36.000. Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ τόκος σὲ ἡμέρες εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμε τὰ τρία γνωστὰ ποσά, δηλ. κεφάλαιο, χρόνο καὶ ἐπιτόκιο καὶ διαιρέσωμε διὰ 36.000, μποροῦμε νὰ λύσωμε κάθε τέτοιο πρόβλημα μὲ τὸν τύπο:

Τόκος ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρες: $T = \frac{K. X. E}{36.000}$

Ἂς λύσωμε ἕνα πρόβλημα μὲ τὸν τύπο αὐτό:

Πρόβλημα.—Πόσον τόκο φέρει κεφάλαιο 300.000 δραχμῶν σὲ 20 ἡμέρες μὲ ἐπιτόκιο 12 %;

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὰ τρία γνωστὰ ποσὰ καὶ θὰ διαιρέσωμε διὰ 36.000. Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

Τόκος σὲ ἡμέρες: $T = \frac{K \cdot X \cdot E}{36.000} = T = \frac{300.000 \times 20 \times 12}{36.000} = 2.000$ δρχ.

Ἑπομένως:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρες, πολλαπλασιάζομε τὰ τρία γνωστὰ ποσά, δηλ. κεφάλαιο, χρόνο καὶ ἐπιτόκιο καὶ διαιροῦμε διὰ 36.000.

Προβλήματα

1) Πόσον τόκο φέρουν 160.000 δραχμὲς σὲ 9 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες μὲ ἐπιτόκιο 15 %;

2) Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα 70.000 δραχμὲς γιὰ 90 ἡμέρες πρὸς 12 %. Πόσον τόκο θὰ πληρώση;

3) Ἕνας ἄνθρωπος ἐπώλησε 750 ὀκάδες λάδι πρὸς 6.400 δρχ. τὴν ὀκὰ καὶ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε τὰ ἐτόκισε πρὸς 16 % γιὰ 1 ἔτος καὶ 15 ἡμέρες. Πόσον τόκο θὰ πάρη;

4) Ἕνας ἄνθρωπος ἐκέρδισε τὸν πρῶτο ἀριθμὸ τοῦ λαχείου καὶ ἐπῆρε 60.000.000 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς ἐδάνεισε τὰ $\frac{4}{5}$ γιὰ 80 ἡμέρες πρὸς 14 % καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ κατέθεσε στὴν Τράπεζα γιὰ 2 ἔτη, 4 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες μὲ ἐπιτόκιο 4 %. Πόσον τόκο θὰ πάρη ἐν ὅλῳ;

5) Ἕνας ἔμπορος ἐκέρδισε ἀπὸ τὸ κατάστημά του σὲ ἕνα ἔτος 24.000.000 δραχμές. Ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{1}{6}$ τὸ ἐτόκισε γιὰ 3 ἔτη πρὸς 15 %. Τὰ $\frac{5}{8}$ τὰ κατέθεσε στὴν Τράπεζα γιὰ 5 ἔτη καὶ 8 μῆνες πρὸς 4 % καὶ τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἐδάνεισε γιὰ 64 ἡμέρες πρὸς 20 %. Πόσον τόκο θὰ πάρη ἐν ὅλῳ;

6) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῶν ἑξῆς κεφαλαίων:

α)	600.000 δραχ.	εἰς	9 ἔτη	πρὸς	$3\frac{1}{2}$ %
β)	50.000	»	15 »	»	6 %
γ)	320.000	»	20 μῆνες	»	9 %
δ)	680.000	»	43 »	»	5 %

ε)	2.700.000 δραχ.	εἰς	105 ἡμέρες	πρὸς	7 %
στ)	300.000	»	» 230	»	» 15 %
ζ)	60.000	»	» 125	»	» 24 %
η)	180.000	»	» 3 ἔτη, 2 μῆν.	»	8 %

Ἀνακεφαλαίωσις

Συμφώνως μὲ ὅσα εἴπαμε στὴν λύσι τῶν προβλημάτων στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος, γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ τόκου ἔχομε αὐτοὺς τοὺς τρεῖς τύπους:

1) $T = \frac{K.X.E}{100}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη*

2) $T = \frac{K.X.E}{1.200}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς μῆνες*

3) $T = \frac{K.X.E}{36.000}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες.*

Καὶ στοὺς τρεῖς αὐτοὺς τύπους παρατηροῦμε, ὅτι γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ τόκου πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸν χρόνο καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 100 ἂν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, διὰ τοῦ 1.200 ἂν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες καὶ μὲ τὸ 36.000 ἂν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες.

Ἀπὸ τὴν παρατήρησι αὐτὴ βγάζομε τὸν παρακάτω γενικὸν κανόνα γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ τόκου:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν τόκο, πολλαπλασιάζομε τὰ τρία γνωστὰ ποσὰ (κεφάλαιο, χρόνο, ἐπιτόκιο) καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 100, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, διὰ 1.200, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς μῆνες καὶ διὰ 36.000, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες.

2. Ὁ Τοκάριθμος

Τὰ προβλήματα τοῦ τόκου ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες ἠμποροῦμε νὰ τὰ λύσωμε καὶ μὲ τὸν *τοκάριθμο*.

Τὸ γινόμενο τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὶς ἡμέρες λέγεται *τοκάριθμος*.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ ἐπιτοκίου λέγεται *στα-*

θερὸς διαιρέτης. Ἂν διαιρέσωμε τὸν τοκάριθμο διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου, εὑρίσκομε τὸν τόκο σὲ ἡμέρες, δηλαδή :

$$\text{Τόκος σὲ ἡμέρες :} \quad T = \frac{\text{τοκάριθμος}}{\text{σταθερὸς διαιρέτης}}$$

Πρόβλημα.—Πόσον τόκον φέρουν 72.000 δραχμὲς σὲ 15 ἡμέρες πρὸς 10 %;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὸν τοκάριθμο καὶ θὰ ἔχωμε :

$$T = \frac{72.000 \times 15}{36.000 : 10} = \frac{10.800}{36} = 300 \text{ δραχ. τόκο.}$$

Θὰ λύσωμε τώρα τὸ πρόβλημα μὲ τὸν τύπο : $T = \frac{K . X . E}{36.000}$

Θὰ ἔχωμε : $T = \frac{72.000 \times 15 \times 10}{36.000} = \frac{10.800}{36} = 300$ δραχ. τόκο.

Παρατηρήσατε τώρα γιὰ νὰ ἀντιληφθῆτε τί γίνεται στὶς δύο αὐτὲς λύσεις, γιατὶ δὲν πρόκειται γιὰ σπουδαῖο πρᾶγμα.

Στὴν λύσι μὲ τὸν τύπο : $T = \frac{K . X . E}{36.000}$ πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος $\frac{72.000 \times 15 \times 10}{36.000}$ ἐπὶ 10, δηλ. ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.

Στὴν λύσι μὲ τὸν τοκάριθμο δὲν πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ ἐπὶ 10, ἀλλὰ διαιροῦμε τὸν παρονομαστὴ διὰ 10, δηλαδή :

$$\frac{72.000 \times 15}{36.000 : 10}$$

Εἶναι τὸ ἴδιο πρᾶγμα, γιατὶ γνωρίζομε ὅτι : ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, ἠμποροῦμε νὰ διαιρέσωμε τὸν παρονομαστὴ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ καὶ νὰ ἔχωμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

$$\text{Δηλαδή :} \quad \frac{4 \times 2}{8} = \frac{8}{8} \text{ καὶ } \frac{4}{8 : 2} = \frac{4}{4} \text{ καὶ } \frac{8}{8} = \frac{4}{4}$$

Ὥστε στὸ προηγούμενο πρόβλημα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὶς ἡμέρες καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο 10, διαιροῦμε τὸ 36.000, δηλ. τὸν παρονομαστὴ διὰ τοῦ ἐπιτοκίου 10 καὶ εἶναι τὸ ἴδιο πρᾶγμα.

$$\text{Δηλαδή, ἀντὶ νὰ ἔχωμε :} \quad \frac{72.000 \times 15 \times 10}{36.000} = 300$$

$$\text{ἠμποροῦμε νὰ ἔχωμε :} \quad \frac{72.000 \times 15}{36.000 : 10} = 300$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ λύσωμε καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα:
«Πόσον τόκο φέρουν 20.000 δρχ. σὲ 30 ἡμέρες πρὸς 12 %;»

1) Λύσις μὲ τὸν τύπο: $\frac{K.X.E}{36.000}$

$$T = \frac{20.000 \times 30 \times 12}{36.000} = \frac{20 \times 30}{3} = 200 \text{ δρχ. τόκος}$$

2) Λύσις μὲ τὸν τοκάριθμο: $T = \frac{\text{τοκάριθμος}}{\text{σταθερὸς διαιρέτης}}$

$$T = \frac{20.000 \times 30}{36.000 : 12} = \frac{20 \times 20}{3} = 200 \text{ δρχ. τόκος.}$$

Ἑπομένως, στὴν λύσι μὲ τὸν τοκάριθμο ἔχομε τὸν ἑξῆς κανόνα:

> **Γιὰ νὰ εὕρωμε μὲ τὸν τοκάριθμο τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρες, διαιροῦμε τὸν τοκάριθμο διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.**

Προβλήματα

1) Πόσον τόκο φέρουν 80.000 δραχμὲς σὲ 40 ἡμέρες πρὸς 12 %;

2) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε μὲ πίστωσι ἐμπορεύματα 340.000 δρχ. καὶ ὑπεσχέθη νὰ πληρώση τὴν ἀξία των σὲ 35 ἡμέρες μὲ ἐπιτόκιο 10 %. Πόσον τόκο θὰ πληρώση;

3) Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὴν Τράπεζα 750.000 δραχμὲς γιὰ 76 ἡμέρες μὲ ἐπιτόκιο 8 %. Πόσον τόκο θὰ πληρώση:

4) Νὰ εὑρεθῆ μὲ τὸν τοκάριθμο ὁ τόκος τῶν ἑξῆς κεφαλαίων:

α)	40.000	δραχ.	πρὸς	8 %	εἰς	80	ἡμέρες
β)	120.000	»	»	12 %	»	25	»
γ)	120.000	»	»	10 %	»	40	»
δ)	600.000	»	»	6 %	»	10	»
ε)	600.000	»	»	9 %	»	32	»
στ)	900.000	»	»	4 %	»	64	»
ζ)	900.000	»	»	6 %	»	72	»
η)	450.000	»	»	8 %	»	20	»

3. Προβλήματα ὅπου ζητεῖται τὸ Κεφάλαιο

α) Τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἔτη

Πρόβλημα.—Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 4 ἔτη μὲ ἐπιτόκιο 8 % φέρει τόκο 76.800 δραχμές;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσὰ χρόνος, ἐπιτόκιο, τόκος, καὶ εἶναι ἄγνωστο τὸ κεφάλαιο. Θὰ κάνωμε τὴν κατάταξι καὶ θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Θὰ ἔχωμε:

100 δραχ.	1	ἔτος	8 δρ.	τόκος
X »	4	»	76.800 »	»

$$X = 100 \times \frac{1 \times 76.800}{4 \times 8} = \frac{7.680.000}{32} = 240.000 \text{ δραχ. κεφάλαιο.}$$

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, ἐκάναμε πρῶτα τὴν σύγκρισι τῶν ποσῶν. Εἴχαμε ἐδῶ νὰ συγκρίνωμε τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ τόκος καὶ κεφάλαιο καὶ χρόνος. Γνωρίζομε ὅτι τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα. Ἀλλὰ τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα, γιατὶ τὸ κεφάλαιο 100 δραχ. σὲ ἕνα ἔτος θὰ φέρη τόκο 8 δραχ. Τὸν ἴδιο τόκο, διπλάσιο κεφάλαιο, δηλ. 200 δραχ. θὰ τὸν φέρη σὲ μισὸ ἔτος. Δηλαδή, ὅταν μεγαλώνει τὸ κεφάλαιο, ὁ χρόνος μικραίνει ἄλλες τόσες φορές. Ἑπομένως, γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ χρόνου ὅπως ἔχει καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ τόκου ἀντεστραμμένο.

Πρόβλημα.—Ἕνας κτηματίας ἐδανείσθηκε χρήματα ἀπὸ τὸν συνεταιρισμὸ γιὰ 2 ἔτη πρὸς 9%. Μόλις ἐπέρασαν τὰ δυὸ χρόνια ἐπλήρωσε γιὰ τόκο 10.800 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἐδανείσθηκε ὁ κτηματίας αὐτός;

Καὶ ἐδῶ ἔχομε γνωστὰ τὰ ποσὰ χρόνο, ἐπιτόκιο καὶ τόκο καὶ ζητοῦμε τὸ κεφάλαιο. Θὰ κάνωμε τὴν κατάστρωσι καὶ θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα. Δὲν ξεχνοῦμε ὅτι τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα καὶ τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

100 δραχ.	1	ἔτος	9 δρ.	τόκος
X »	2	»	10.800 »	»

$$X = 100 \times \frac{1 \times 10.800}{2 \times 9} = \frac{10.800.000}{18} = 600.000 \text{ δραχ. κεφάλαιο}$$

Προσέξατε τὴν λύσι καὶ τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων. Θὰ ἀντιληφθῆτε ὅτι γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ κεφάλαιο, ἐπολλα-

$\frac{5}{3}$ $\frac{3}{5} + \frac{4}{8} = \frac{24}{40} + \frac{20}{40} = \frac{44}{40}$ $1\frac{4}{40}$

πλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ ἐδιαιρέσαμε μὲ τὸ γινόμενο τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, δηλ. μὲ τὸ γινόμενο τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο. Σύμφωνα μὲ τὴν παρατήρησι αὐτὴ ποὺ θὰ κάνωμε, ἠμποροῦμε νὰ εἰποῦμε: Τὸ (κεφάλαιο) Κ, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν (τόκο) Τ ἐπὶ 100 καὶ διαιρέσωμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ (χρόνου) Χ ἐπὶ τὸ (ἐπιτόκιο) Ε. Δηλ. θὰ ἔχωμε τὸν τύπο:

$$K = \frac{T \cdot 100}{E \cdot X}$$

Ἂς λύσωμε ἕνα πρόβλημα σύμφωνα μὲ τὸν τύπο:

Πρόβλημα.— Νὰ εὑρεθῆ τὸ κεφάλαιο ποὺ σὲ 3 ἔτη τοκιζόμενο πρὸς 4% φέρει τόκο 90.000 δραχ.

Θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο καὶ θὰ ἔχωμε:

$$K = \frac{T \cdot 100}{E \cdot X} \quad \text{Δηλ.} \quad K = \frac{90.000 \times 100}{3 \times 4} = \frac{9.000.000}{12} = 750.000 \text{ δρ. κεφ.}$$

Ἑπομένως:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Προβλήματα

1) Ποιὸ κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 4% σὲ 6 ἔτη φέρει τόκο 45.000 δραχμές;

2) Ἕνας ἔμπορος ἐδάνεισε χρήματα πρὸς 12% καὶ σὲ 3 ἔτη ἐπῆρε τόκο 324.000 δραχμές. Πόσα χρήματα ἐδάνεισε;

3) Ἕνας ἄνθρωπος κατέθεσε στὴν Τράπεζα τὰ χρήματά του μὲ ἐπιτόκιο 4% γιὰ 6 ἔτη καὶ ἐπῆρε τόκο 108.000 δραχ. Πόσα χρήματα κατέθεσε;

4) Ποιὸ κεφάλαιο φέρει τόκο 30.000 δραχμὲς σὲ 2 ἔτη πρὸς 8%;

5) Ποιὸ κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 12% σὲ 2 ἔτη φέρει τόκο 800.000 δραχμές;

6) Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὴν Τράπεζα χρήματα γιὰ 3 ἔτη πρὸς 7% καὶ ἐπλήρωσε τόκο 90.000 δραχμές. Πόσα χρήματα ἐδανείσθηκε;

7) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε ἐμπορεύματα μὲ πίστωσι γιὰ 2 ἔτη καὶ ἐπλήρωσε τόκο 600.000 δραχ. μὲ ἐπιτόκιο 10%. Πόσο ἄξιζαν τὰ ἐμπορεύματα;

8) Νὰ εὕρετε τὰ ἑξῆς κεφάλαια:

α) Ποιὸ κεφάλαιο	εἰς	3 ἔτη	πρὸς	8 %	φέρει τόκο		48.000 δραχ.
β) »	»	» 5	»	» 3 %	»	»	30.000 »
γ) »	»	» 2	»	» 9 %	»	»	36.000 »
δ) »	»	» 8	»	» 4 %	»	»	64.000 »

β) Τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς μῆνες

Πρόβλημα.—Ἕνα κεφάλαιο ἐτοκίσθη πρὸς 6 % καὶ σὲ 9 μῆνες ἔδωσε τόκο 27.000 δραχ. Πόσες δραχμὲς ἦταν τὸ κεφάλαιο;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε ὅτι ἕνα κεφάλαιο 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος φέρει τόκο 6 δραχμὲς καὶ ζητοῦμε νὰ μάθωμε ποιὸ κεφάλαιο σὲ 9 μῆνες φέρει τόκο 27.000 δραχμές. Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι ὁ χρόνος τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου εἶναι σὲ μῆνες. Ἑπομένως, γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἰποῦμε τὰ ἑξῆς: Κεφάλαιο 100 δραχ. σὲ 12 μῆνες φέρει τόκο 6 δραχ. Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 9 μῆνες θὰ φέρῃ τόκο 27.000 δραχμές;

Μὴν ξεχάσετε ὅτι τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα, ἐνῶ τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα. Θὰ κάνωμε τὴν κατάταξι καὶ θὰ ἔχωμε:

100 δραχ.	σὲ 12 μῆνες		6 δραχ.	τόκος
Χ »	» 9	»	27.000 »	»

$$Χ = 100 \times \frac{12 \times 27.000}{9 \times 6} = \frac{1.200 \times 27.000}{9 \times 6} = \frac{32.400.000}{54} = 600.000 \text{ κεφ.}$$

Στὴν λύσι αὐτὴ παρατηροῦμε ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 1.200 κ' ἐδιαιρέσαμε μὲ τὸ γινόμενο τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 100. Ἐδῶ ποὺ ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 1.200, γιατὶ πολλαπλασιάζεται τὸ 100 ἐπὶ 12, δηλ. ἐπὶ τοὺς 12 μῆνες καὶ δίδει τὸ γινόμενο 12.000.

Ὥστε, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 1.200 καὶ τὸ γινόμενο διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν. Ἑπομένως καὶ ὁ τύπος τῆς εὑρέσεως τοῦ κεφαλαίου, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, θὰ εἶναι αὐτός:

$$Κ = \frac{Τ \cdot 1.200}{Χ \cdot Ε}$$

Πρόβλημα.— Ποιὸ κεφάλαιο, τοκιζόμενο πρὸς 8 %, σὲ 15 μῆνες φέρει τόκο 10.000;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὸν τύπο $K = \frac{T \cdot 1.200}{X \cdot E}$ καὶ θὰ ἔχωμε:

$$K = \frac{10.000 \times 1.200}{15 \times 8} = \frac{12.000.000}{120} = 100.000 \text{ κεφάλ.}$$

Ἐπομένως:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1.200 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (χρόνου καὶ ἐπιτοκίου).

Προβλήματα

1) Ἕνας ἄνθρωπος ἔχει καταθέσει ἕνα κεφάλαιο πρὸς 9% καὶ σὲ κάθε 6 μῆνες παίρνει τόκο 22.500 δραχ. Πόσο εἶναι τὸ κεφάλαιο;

2) Ἕνα κεφάλαιο σὲ 8 μῆνες, πρὸς 15%, φέρει τόκο 120.000 δραχ. Πόσο εἶναι τὸ κεφάλαιο;

3) Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε ἕνα κεφάλαιο καὶ σὲ 18 μῆνες ἐπλήρωσε τόκο 360.000 μὲ ἐπιτόκιο 12%. Πόσες δραχμὲς ἐδανείσθηκε;

4) Νὰ εὕρετε τὸ κεφάλαιο στὰ παρακάτω προβλήματα:

α) Ποιὸ	κεφάλαιο	σὲ 4	μῆνες	πρὸς	12%	δίδει	τόκο 280.000	δραχ.
β) »	»	» 9	»	»	7%	»	» 84.000	»
γ) »	»	» 16	»	»	10%	»	» 120.000	»
δ) »	»	» 20	»	»	9%	»	» 120.000	»
ε) »	»	» 14	»	»	9%	»	» 140.000	»

γ) Τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρες

Πρόβλημα.— Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὴν Τράπεζα ἕνα κεφάλαιο πρὸς 12% καὶ σὲ 20 ἡμέρες ἐπλήρωσε γιὰ τόκο 10.000 δραχ. Ποιὸ ἦταν τὸ κεφάλαιο;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες. Γι' αὐτὸ καὶ τὸν τόκο τῶν 100 δραχ. σὲ 1 ἔτος θὰ τὸν ὑπολογίσωμε σὲ ἡμέρες καὶ θὰ εἴπουμε: Οἱ 100 δραχμὲς σὲ 360 ἡμέρες φέρουν τόκο 12 δραχ. Πόσες δραχμὲς σὲ 20 ἡμέρες φέρουν τόκο 10.000 δραχμές; Θὰ κάνωμε τὴν κατάστρωσι καὶ θὰ ἔχωμε:

100 δραχ.	εἰς 360 ἡμέρ.	12 δρ. τόκο
X »	» 20 »	10.000 » »

$$X = 100 \times \frac{360 \times 10.000}{20 \times 12} = \frac{36.000 \times 10.000}{20 \times 12} = \frac{360.000.000}{240} = 1.500.000$$

Στὴν λύσι αὐτὴ παρατηροῦμε ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 καὶ ἐδιαιρέσαμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 100, ὅταν εἶναι σὲ μῆνες πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 1.200 καὶ ἐδῶ ποὺ ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 36.000, γιατὶ πολλαπλασιάζομε τὸ 100 ἐπὶ 360, δηλ. ἐπὶ 360 ἡμέρες καὶ δίδει γινόμενο 36.000 (διότι $100 \times 360 = 36.000$).

Ὅταν λοιπὸν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες, πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (χρόνου καὶ ἐπιτοκίου).

Ἑπομένως, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες, ὁ τύπος τῆς εὑρέσεως τοῦ κεφαλαίου θὰ εἶναι αὐτός:

$$K = \frac{T \cdot 36.000}{X \cdot E}$$

Πρόβλημα.—Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 18 ἡμέρες πρὸς 10% φέρει τόκο 3.000 δραχμές;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὸν τύπο: $K = \frac{T \cdot 36.000}{X \cdot E}$

καὶ θὰ ἔχωμε:

$$K = \frac{3.000 \times 36.000}{18 \times 10} = \frac{108.000.000}{180} = 600.000 \text{ κεφάλαιον.}$$

Ἑπομένως:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (χρόνου καὶ ἐπιτοκίου).

Ἀνακεφαλαίωσις

Σύμφωνα μὲ τὰ ὅσα εἴδαμε στὰ προηγούμενα προβλήματα, γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ κεφαλαίου ἔχομε τρεῖς τύπους:

1) $K = \frac{T \cdot 100}{X \cdot E}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη.*

2) $K = \frac{T \cdot 1.200}{X \cdot E}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς μῆνες.*

3) $K = \frac{T \cdot 36.000}{X \cdot E}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες.*

Καὶ στοὺς τρεῖς αὐτοὺς τύπους παρατηροῦμε ὅτι πολλα-

πλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο διαιρεῖται πάντοτε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο. Ἀπὸ τὴν παρατήρησι αὐτὴ βγάζομε τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα:

Ὅταν ζητῆται τὸ κεφάλαιο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, ἐπὶ 1.200 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς μῆνες καὶ ἐπὶ 36.000 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες. Τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (δηλ. χρόνου καὶ ἐπιτοκίου).

Μία περίπτωσις κεφαλαίου καὶ τόκου

1ον Πρόβλημα.— Ἕνας ἄνθρωπος κατέθεσε στὴν Τράπεζα ἕνα κεφάλαιο πρὸς 8 %. Μετὰ 3 ἔτη ἔλαβε γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ 248.000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἦταν τὸ κεφάλαιο;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς λέγει ὅτι τὸ κεφάλαιο ποὺ ἐτοκίσθη γιὰ 3 ἔτη πρὸς 8 % ἔγινε μαζὶ μὲ τὸν τόκο 248.000 δραχ. Ἀπὸ αὐτὲς τὶς 248.000 δραχ. πόσες εἶναι τὸ κεφάλαιο καὶ πόσες ὁ τόκος; Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι: Οἱ 100 δραχ. κεφάλαιο, σὲ 1 ἔτος, θὰ γίνουν μαζὶ μὲ τὸν τόκο 108 δραχ. Σὲ τρία χρόνια ὁ τόκος τῶν 100 δραχ. θὰ εἶναι $3 \times 8 = 24$ δραχ. Ἐπομένως, οἱ 100 δραχ. κεφάλαιο, σὲ 3 ἔτη, θὰ γίνουν μαζὶ μὲ τὸν τόκο 124 δραχμές. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ κεφάλαιο 100 δραχ. σὲ 3 ἔτη θὰ γίνη 124 δραχ., ποιὸ κεφάλαιο σὲ τρία ἐπίσης χρόνια θὰ γίνη 248.000 δραχμές;

Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα. Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Θὰ ἔχωμε:

100 δρχ. θὰ γίνουν 124 δρχ.
Χ » » » 248.000 »

$$X = 100 \times \frac{24.000}{124} = \frac{24.800.000}{124} = 200.000 \text{ δραχ.}$$

Ἄρα τὸ κεφάλαιο ἦταν 200.000 δραχ.

2ον Πρόβλημα.— Ἕνα κεφάλαιο ποὺ ἐτοκίσθη γιὰ 5 ἔτη πρὸς 12 % ἔγινε, μαζὶ μὲ τὸν τόκο, 128.000 δραχ. Πόσες δραχμὲς εἶναι ὁ τόκος;

Αὐτὸ τὸ πρόβλημα εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ προηγούμενο, μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι ζητεῖται ὁ τόκος. Θὰ εἰποῦμε: Οἱ 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος θὰ γίνουν, μαζὶ μὲ τὸν τόκο, 112 δρ. Σὲ πέντε ἔτη, ὁ τόκος τῶν 100 δραχ. θὰ εἶναι 5 × 12 = 60 δραχμές. Ἑπομένως, οἱ 100 δραχ. σὲ πέντε ἔτη θὰ γίνουν, μαζὶ μὲ τὸν τόκο, 160 δραχ. Ἀφοῦ λοιπὸν στὶς 160 δραχ., κεφάλαιο καὶ τόκο μαζί, ὁ τόκος εἶναι 60 δραχμὲς σὲ πέντε ἔτη, στὶς 128.000 δραχμές, κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ σὲ πέντε ἐπίσης ἔτη, πόσες δραχμὲς εἶναι ὁ τόκος; Θὰ ἔχωμε:

Στὶς · 160 δρ. 60 δρ. τόκος
» 128.000 » Χ » »

$$X = 60 \times \frac{128.000}{160} = \frac{7.680.000}{160} = 48.000 \text{ δρχ. τόκος.}$$

Προβλήματα

1) Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 4 ἔτη, πρὸς 9 %, θὰ γίνη μαζὶ μὲ τὸν τόκο 108.800 δραχμές;

2) Πόσες δραχμὲς εἶναι ὁ τόκος τοῦ παραπάνω κεφαλαίου;

3) Ἕνας ἐργάτης σὲ 15 ἡμέρες παίρνει 120.000 δραχμές. Ποιὸ κεφάλαιο, στὶς ἴδιες ἡμέρες, πρὸς 12 %, δίνει τόκο τὰ χρήματα αὐτὰ ποὺ παίρνει ὁ ἐργάτης σὲ 15 ἡμέρες;

4) Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει τὸν μῆνα 400.000 δραχμές. Ποιὸ κεφάλαιο, τοκιζόμενο πρὸς 14 %, γιὰ ἕνα μῆνα, δίνει τὸ ἴδιο εἰσόδημα;

5) Ἕνα κεφάλαιο ἐτοκίσθηκε γιὰ 24 ἡμέρες πρὸς 10 % καὶ ἔδωσε τόκο 10.000 δραχ. Πόσες δραχμὲς ἦταν τὸ κεφάλαιο;

6) Ποιὸ κεφάλαιο, σὲ 20 ἡμέρες, πρὸς 9 %, φέρει τόκο 38.500 δρχ.;

7) Ποιὸ κεφάλαιο, σὲ 50 ἡμέρες, πρὸς 10 %, φέρει τόκο 22.500 δραχ.;

8) Ποιὸ κεφάλαιο, σὲ 10 μῆνες καὶ 6 ἡμέρες, πρὸς 5 %, φέρει τόκο 25.500 δραχ.;

9) Ποιὸ κεφάλαιο, σὲ 15 ἡμέρες, πρὸς 8 %, φέρει τόκο 9.000 δραχ.;

10) Ποιὸ κεφάλαιο, σὲ 72 ἡμέρες, πρὸς 8 %, φέρει τόκο 800 δραχ.;

4. Προβλήματα ὅπου ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο

α) Τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἔτη

1ον Πρόβλημα.— Κεφάλαιο 90.000 δραχμῶν ἐτοκίσθη γιὰ 3 ἔτη καὶ ἔδωσε τόκο 21.600 δραχ. Ποιὸ ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὸ κεφάλαιο, τὸν χρόνο καὶ τὸν τόκο, καὶ δὲν γνωρίζομε τὸ ἐπιτόκιο. Ὅπως ξέρομε, ἐπιτόκιο εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος. Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι: Οἱ 90.000 δραχ. κεφάλαιο, σὲ 3 ἔτη, φέρουν τόκο 21.600 δραχ. Οἱ 100 δραχμὲς κεφάλαιο, σὲ 1 ἔτος, πόσον τόκο φέρουν ; Δηλαδὴ ποιὸ εἶναι τὸ ἐπιτόκιο ;

Θὰ κάνωμε τὴν κατάταξι καὶ θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα. Θὰ ἔχωμε :

90.000 δρχ.	3 ἔτη	21.600 δρχ. τόκο
100 »	1 »	X » »

$$X = 21.600 \times \frac{100 \times 1}{90.000 \times 3} = \frac{2.160.000}{90.000 \times 3} = \frac{216}{27} = 8\,\%$$

Ἄρα τὸ ἐπιτόκιο ἦταν 8 %.

Τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα. Τὰ ποσὰ χρόνος καὶ τόκος εἶναι ἐπίσης ἀνάλογα. Ἑπομένως, στὴν λύσι τοῦ προηγουμένου προβλήματος πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὰ κλάσματα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν ἀντεστραμμένα.

2ον Πρόβλημα.—Μὲ πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐτοκίσθη κεφάλαιο 200.000 δραχμῶν ποὺ σὲ πέντε ἔτη ἔδωσε τόκο 60.000 δραχμές ;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ὅπως καὶ τὸ παραπάνω.

Ὅλα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα. Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

200.000 δρ.	5 ἔτη	60.000 δρ. τόκο
100 »	1 »	X » »

$$X = 60.000 \times \frac{100 \times 1}{200.000 \times 5} = \frac{6.000.000}{1.000.000} = \frac{1}{6} = 6\,\%\ \text{ἐπιτόκιο.}$$

Ἂν παρατηρήσωμε τὴν λύσι καὶ τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων, θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ ἐπιτόκιο εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (δηλ. κεφαλαίου καὶ χρόνου). Ἠμποροῦμε λοιπὸν νὰ εἰποῦμε ὅτι : Τὸ ἐπιτόκιο Ε, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸν τόκο Τ ἐπὶ 100 καὶ διαιρέσωμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου Κ ἐπὶ τὸν χρόνο Χ. Δηλαδὴ θὰ ἔχωμε τὸν τύπο :

$$E = \frac{T.\,100}{K.\,X} \quad \text{Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη.}$$

3ον Πρόβλημα.—Ποιὸ εἶναι τὸ ἐπιτόκιο κεφαλαίου 140.000 δραχ. ποὺ ἐτοκίσθη γιὰ 4 ἔτη καὶ ἔφερε τόκο 39.200 δραχμές.

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὸν τύπο καὶ θὰ ἔχωμε :

$$E = \frac{T\,.\,100}{K\,.\,X} \ \text{ἄρα}\ E = \frac{39.200 \times 100}{140.000 \times 4} = \frac{3.920.000}{560.000} = \frac{392}{56} = 7\,\%\ \text{ἐπιτόκιο.}$$

Ἑπομένως :

Αἰγυπτιάδες

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Προβλήματα

1) Ἕνας κτηματίας ἐδανείσθη 750.000 δραχμὲς γιὰ 2 ἔτη κ' ἐπλήρωσε τόκο 150.000 δραχμές. Πόσο ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

2) Ἕνας μικρέμπορος εἶχε κεφάλαιο 50.000.000 δραχμῶν, ἐμπορεύθηκε μὲ αὐτὸ 3 ἔτη καὶ ἐκέρδισε 30.000.000 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐκέρδισε;

3) Ποιὸ εἶναι τὸ ἐπιτόκιο κεφαλαίου 450.000 δραχμῶν ποὺ ἐτοκίσθη γιὰ 2 ἔτη καὶ ἔδωσε τόκο 72.000 δραχμές;

4) Ἕνας κτηματίας ἐξώδευσε σὲ 1 ἔτος γιὰ τὴν καλλιέργεια τῶν κτημάτων του 7.300.000 δραχμὲς καὶ ἀπὸ τὰ εἰσοδήματα τοῦ ἔτους αὐτοῦ τοῦ ἔμεινε καθαρὸ κέρδος 1.480.000 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐκέρδισε;

5) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐπιτόκιο στὰ ἑξῆς προβλήματα:

α)	Κεφάλαιο	300.000	δραχ.	εἰς 3	ἔτη	φέρει	τόκο	72.000	δρχ. Χ %
β)	»	200.000	»	» 4	»	»	»	40.000	» »
γ)	»	180.000	»	» 6	»	»	»	129.600	» »
δ)	»	92.000	»	» 7	»	»	»	64.400	» »
ε)	»	120.000	»	» 2	»	»	»	36.000	» »

β) Τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς μῆνες

Πρόβλημα.—Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 200.000 δραχμῶν καὶ ἔδωσε σὲ 6 μῆνες τόκο 8.000 δραχμές;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὸν τόκο ποὺ φέρει τὸ κεφάλαιο σὲ 6 μῆνες καὶ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε ποιὸ εἶναι τὸ ἐπιτόκιο. Δηλαδή, ζητοῦμε τὸν τόκο τῶν 100 δραχμῶν σὲ ἕνα ἔτος. Ἐπειδὴ ὅμως στὸ πρόβλημα αὐτὸ ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, θὰ ζητήσωμε τὸν τόκο τῶν 100 δραχ., δηλ. τὸ ἐπιτόκιο, ὄχι σὲ ἔτη, ἀλλὰ σὲ 12 μῆνες. Θὰ εἰποῦμε: Ἀφοῦ οἱ 200.000 δραχ. σὲ 6 μῆνες φέρουν τόκο 8.000 δραχμές, οἱ 100 δραχμές, σὲ 12 μῆνες, πόσον τόκο φέρουν;

Μὴν ξεχνᾶτε ὅτι τὰ ποσὰ τόκος μὲ χρόνο καὶ τόκος μὲ κεφάλαιο εἶναι ἀνάλογα.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

200.000 δρχ.	6 μῆνες	8.000 δρχ. τόκο
100 »	12 »	Χ » »

$$X = 8.000 \times \frac{100 \times 12}{200.000 \times 6} = \frac{8.000 \times 1.200}{1.200.000} = \frac{8 \times 12}{12} = 8\ \%\ \text{ἐπιτόκιο.}$$

Στὴν λύσι αὐτὴ παρατηροῦμε ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 120 κ' ἐδιαιρέσαμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνο. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 100. Ἐδῶ ποὺ ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 1.200, γιατὶ πολλαπλασιάζεται τὸ 100 ἐπὶ 12, δηλ. ἐπὶ 12 μῆνες καὶ δίνει γινόμενο $100 \times 12 = 1.200$.

Ὥστε στὴν εὕρεσι τοῦ ἐπιτοκίου, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 1.200 καὶ τὸ γινόμενο διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου. Ἐπομένως καὶ ὁ τύπος τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐπιτοκίου, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, θὰ εἶναι αὐτός:

$$E = \frac{T \cdot 1.200}{K \cdot X}$$

Πρόβλημα.— Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 120.000 δραχμῶν ποὺ ἔδωσε σὲ 3 μῆνες τόκο 3.600 δραχμές;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὸν τύπο καὶ θὰ ἔχωμε:

$$E = \frac{T \cdot 1200}{K \cdot X} \quad \text{ἄρα} \quad E = \frac{3.600 \times 1.200}{120.000 \times 3} = \frac{36}{3} = 12\,\%\ \text{ἐπιτόκιο.}$$

Ἐπομένως:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1.200 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Προβλήματα

1) Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε 1.500.000 δραχμὲς γιὰ 7 μῆνες καὶ ἐπλήρωσε τόκο 35.000 δραχμές. Πόσο ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

2) Ἕνας μικροπωλητὴς ἐργάσθηκε 8 μῆνες μὲ κεφάλαιο 1.800.000 δραχμὲς καὶ ἐκέρδισε 288.000 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐκέρδισε;

3) Ἕνας ἄνθρωπος κατέθεσε στὴν Τράπεζα 800.000 δραχμὲς καὶ σὲ 15 μῆνες ἐπῆρε τόκο 100.000 δραχμές. Ποιὸ ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

4) Ἕνας ἔμπορος ἐδάνεισε σ' ἕνα μικροπωλητὴ 4.500.000 δραχμὲς καὶ σὲ 8 μῆνες ἐπῆρε τόκο 360.000 δραχμές. Πόσο ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

5) Ἕνας κτηματίας ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὸν συνεταιρισμὸ 1.200.000 δραχμὲς καὶ σὲ 9 μῆνες ἐπλήρωσε τόκο 63.000 δραχμές. Πόσο ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

6) Νὰ εὕρετε τὸ ἐπιτόκιο στὰ παρακάτω προβλήματα:

α)	600.000	δρχ. κεφάλ.	εἰς	2	μῆνες	φέρει τόκο	15.000	δρχ.	τόκο	Χ%
β)	2.900.000	»	»	6	»	»	216.000	»	»	»
γ)	5.000.000	»	»	8	»	»	400.000	»	»	»
δ)	3.600.000	»	»	18	»	»	540.000	»	»	»
ε)	7.000.000	»	»	30	»	»	700.000	»	»	»

γ) Τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρες

Πρόβλημα.— Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐτοκίσθηκαν 700.000 δραχμὲς ποὺ σὲ 18 ἡμέρες ἔδωσαν τόκο 2.800 δραχμές;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὸν τόκο ποὺ φέρει τὸ κεφάλαιο σὲ 18 ἡμέρες καὶ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε ποιὸ εἶναι τὸ ἐπιτόκιο σὲ 1 ἔτος, δηλ. σὲ 360 ἡμέρες. Θὰ εἰποῦμε: Ἀφοῦ οἱ 700.000 δραχμὲς σὲ 18 ἡμέρες φέρουν τόκο 2.800 δραχμές, οἱ 100 δραχμές, σὲ 360 ἡμέρες, πόσον τόκο φέρουν; Δηλαδή, ποιὸ εἶναι τὸ ἐπιτόκιο; Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ γνωστή μας μέθοδο τῶν τριῶν καὶ θὰ ἔχωμε:

700.000 δραχ.	18 ἡμέρ.	2.800 δρχ. τόκο
100 »	360 »	Χ » »

$$Χ = 2.800 \times \frac{100 \times 360}{700.000 \times 18} = \frac{2.800 \times 36.000}{700.000 \times 18} = \frac{28 \times 36}{7 \times 18} = \frac{4 \times 2}{1 \times 1} = 8\,\%$$

ἐπιτόκιο.

Στὴν λύσι αὐτὴ παρατηροῦμε ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 κ' ἐδιαιρέσαμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνο. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 1.200 καὶ ἐδῶ ποὺ ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 36.000, γιατὶ πολλαπλασιάζεται τὸ 100 ἐπὶ 360, δηλ. ἐπὶ 360 ἡμέρες καὶ δίδει γινόμενο $100 \times 360 = 36.000$.

Ὅταν λοιπὸν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες, πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Ἑπομένως, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες, ὁ τύπος τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐπιτοκίου θὰ εἶναι αὐτός:

$$Ε = \frac{Τ \,.\, 36.000}{Κ \,.\, Χ}$$

Πρόβλημα.—Κεφάλαιο 450.000 δραχμῶν ἐτοκίσθη γιὰ 72 ἡμέρες καὶ ἔδωσε τόκο 8.100 δραχμές. Ποιὸ ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὸν τύπο καὶ θὰ ἔχωμε:

$$Ε = \frac{Τ \,.\, 36.000}{Κ \,.\, Χ} \text{ ἄρα } Ε = \frac{8.100 \times 36.000}{450.000 \times 72} = \frac{810 \times 1}{45 \times 2} = \frac{810}{90} = 9\,\%$$ ἐπιτόκιο.

Ἑπομένως:

> **Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ χρόνου).**

Προβλήματα

1) Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε 10.800.000 δραχμὲς γιὰ 20 ἡμέρες κ' ἐπλήρωσε τόκο 60.000 δραχμές. Πόσο ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

2) Ἕνας κτηματίας ἐδανείσθηκε 5.200.000 δραχμές. Σὲ 24 ἡμέρες ἐπέστρεψε τὰ χρήματα καὶ ἐπλήρωσε τόκο 36.400 δραχμές. Ποιὸ ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

3) Ἕνας κηπουρὸς ἐπώλησε 200 ὀκάδες μῆλα μὲ 4.000 δρχ. τὴν ὀκά. Τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε τὰ ἐδάνεισε γιὰ 48 ἡμέρες κ' ἐπῆρε τόκο 32.000 δρχ. Ποιὸ ἦταν τὸ ἐπιτόκιο;

4) Νὰ εὕρετε τὸ ἐπιτόκιο στὰ ἑξῆς προβλήματα:

α)	Κεφάλ.	200.000	δρχ.	εἰς	18	ἡμ.	φέρουν τόκο	800	δρχ. Χ;
β)	»	300.000	»	»	40	»	» »	4.000	» »
γ)	»	150.000	»	»	90	»	» »	4.500	» »
δ)	»	3.000.000	»	»	15	»	» »	15.000	» »
ε)	»	5.000.000	»	»	12	»	» »	15.000	» »

Ἀνακεφαλαίωσις

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε, στὴν λύσι τῶν προβλημάτων στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο, γιὰ τὴν εὕρεσί του ἔχομε τρεῖς τύπους:

1) $E = \frac{T \,.\, 100}{K \,.\, X}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη*

2) $E = \frac{T \,.\, 1.200}{K \,.\, X}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς μῆνες*

3) $E = \frac{T \,.\, 36.000}{K \,.\, X}$ *Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες*

Καὶ στοὺς τρεῖς αὐτοὺς τύπους παρατηροῦμε ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ 100 ἢ ἐπὶ 1.200 ἢ ἐπὶ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο διαιρεῖται πάντοτε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Ἀπὸ τὴν παρατήρησι αὐτὴ βγάζομε τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐπιτόκιο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, ἐπὶ 1.200 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς μῆνες καὶ ἐπὶ 36.000 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρες. Τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (δηλ. τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου).

5. Προβλήματα όπου ζητείται ο χρόνος

1ον Πρόβλημα.—Σὲ πόσον χρόνο κεφάλαιο 150.000 δρχ., τοκιζόμενο πρὸς 8 %, φέρει τόκο 36.000 δρχ.;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε ἐπὶ πόσο χρόνο ἐτοκίσθηκε τὸ κεφάλαιο 150.000 δρχ. ποὺ ἔδωσε 36.000 δρχ. τόκο, μὲ ἐπιτόκιο 8 %.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι: Ἀφοῦ οἱ 100 δρχ. φέρουν τόκο 8 δρχ. σὲ 1 ἔτος, σὲ πόσα ἔτη οἱ 150.000 δρχ. φέρουν τόκο 36.000 δρχ.; Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα, ἐνῶ τὰ ποσὰ τόκος καὶ χρόνος εἶναι ἀνάλογα. Γιατί; Κάμετε τὴν σύγκρισι καὶ θὰ ἰδῆτε.

Θὰ κάμωμε τὴν κατάταξι καὶ θὰ ἔχωμε:

100 δρχ.	8 δρχ. τόκο	1 ἔτος	
150.000 »	36.000 »	»	Χ »

$$X = 1 \times \frac{100 \times 36.000}{150.000 \times 8} = \frac{100 \times 36}{150 \times 8} = \frac{3.600}{1.200} = 3 \text{ ἔτη}$$

Ὥστε τὸ κεφάλαιο 150.000 δρχ. ἔδωσε τόκο 36.000 δρχ. σὲ 3 ἔτη.

2ον Πρόβλημα.—Σὲ πόσον χρόνο κεφάλαιο 100.000 δραχμῶν πρὸς 9 % ἔδωσε τόκο 3.750 δρχ.;

Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε τὸν χρόνο. Παρατηρήσατε καὶ θὰ ἀντιληφθῆτε, ὅτι ἐδῶ τὸ κεφάλαιο τῶν 100.000 δρχ. ἐτοκίσθηκε σὲ χρόνο λιγώτερο ἀπὸ ἕνα ἔτος, γιατὶ ἂν ἐτοκιζόταν ἕνα ἔτος, οἱ 100.000 δρχ. θὰ ἔφεραν τόκο 9.000 δρχ. Γιὰ νὰ μᾶς δώση ὅμως τὸ κεφάλαιο αὐτὸ τόκο 3.750 δρχ., δηλ. λιγώτερο ἀπὸ 9.000 δρχ., σημαίνει ὅτι πράγματι τὸ κεφάλαιο ἐτοκίσθηκε γιὰ χρόνο λιγώτερο τοῦ ἑνὸς ἔτους. Γιὰ τὸν λόγο αὐτό, στὴν κατάταξι τοῦ προβλήματος θὰ ὑπολογίσωμε τὸν τόκο τῶν 100 δραχμῶν σὲ 12 μῆνες καὶ θὰ ἔχωμε:

100 δρχ.	9 δρχ. τόκο	12 μῆνες	
100.000 »	3.750 »	»	Χ »

$$X = 12 \times \frac{100 \times 3.750}{100.000 \times 9} = \frac{1.200 \times 3.750}{100.000 \times 9} = \frac{12 \times 375}{100 \times 9} = \frac{4.500}{900} = 5 \text{ μῆνες.}$$

Ὥστε τὸ κεφάλαιο τῶν 100.000 δρχ. ἔδωσε τόκο 3.750 δρχ. σὲ 5 μῆνες.

3ον Πρόβλημα.—Σὲ πόσον χρόνο κεφάλαιο 900.000 δραχμῶν πρὸς 12 % φέρει τόκο 6.000 δρχ.;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ παρατηροῦμε ὅτι ὁ τόκος τῶν 6.000 δρχ. εἶναι πολὺ μικρὸς ἐν συγκρίσει μὲ τὸ κεφάλαιο ποὺ εἶναι 900.000 δρχ.

Ἂν λογαριάσωμε νοερῶς, θὰ ἰδοῦμε ὅτι οἱ 100.000 δρχ., σὲ ἕνα ἔτος, πρὸς 12 %, φέρουν τόκο 12.000 δρχ. καὶ σὲ ἕνα μῆνα φέρουν τόκο 1.200 δρχ., ἄρα οἱ 900.000 δρχ. σὲ ἕνα μῆνα θὰ φέρουν 9 φορὲς περισσότερον τόκο ἀπὸ ὅ,τι φέρουν οἱ 100.000 δρχ., δηλ. 1.200 × 9 = 10.800 δρχ. Ἐμεῖς ὅμως ἔχομε ἐδῶ τόκο 6.000 δρχ. Ἄρα οἱ 900.000 ποὺ λέει τὸ πρόβλημα ἐτοκίσθηκαν σὲ χρόνο λιγώτερο τοῦ ἑνὸς μηνός. Γιὰ τὸν λόγο αὐτό, στὴν κατάταξι τοῦ προβλήματος θὰ ὑπολογίσωμε τὸν τόκο τῶν 100 δραχμῶν σὲ 360 ἡμέρες καὶ θὰ ἔχωμε:

100 δρχ.	12 δρχ. τόκο	360 ἡμ.
900.000 »	6.000 » »	Χ »

$$X = 360 \times \frac{100 \times 6.000}{900.000 \times 12} = \frac{36.000 \times 6.000}{900.000 \times 12} = \frac{36 \times 60}{9 \times 12} = \frac{4 \times 5}{1 \times 1} = 20 \text{ ἡμ.}$$

Ὥστε οἱ 900.000 δρχ. ἔδωσαν τόκο 6.000 δρχ. σὲ 20 ἡμέρες.

Ἂς κάνωμε τώρα μερικὲς παρατηρήσεις στὰ τρία προηγούμενα προβλήματα:

Στὸ πρῶτο πρόβλημα ὑπελογίσαμε σὲ ἔτη τὸν χρόνο στὸν ὁποῖον ἐτοκίσθη τὸ κεφάλαιον. Γι' αὐτό, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν λύσι τοῦ προβλήματος, ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 100 κ' ἐδισιρέσαμε μὲ τὸ γινόμενο τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Στὸ δεύτερο πρόβλημα ὑπελογίσαμε τὸ χρόνο σὲ μῆνες καὶ γι' αὐτό, ὅπως βλέπετε στὴν λύσι τοῦ προβλήματος, ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 1.200 κ' ἐδιαιρέσαμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Στὸ τρίτο πρόβλημα ὑπελογίσαμε τὸν χρόνο σὲ ἡμέρες καὶ γι' αὐτό, ὅπως βλέπετε στὴν λύσι τοῦ προβλήματος, ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 κ' ἐδιαιρέσαμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Ἐπομένως, στὴν λύσι τῶν προβλημάτων γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ χρόνου, ἠμποροῦμε νὰ ἔχωμε τοὺς παρακάτω τρεῖς τύπους:

1) $X = \frac{T . 100}{K . E}$ Ὅταν ὁ χρόνος ὑπολογίζεται εἰς ἔτη

2) $X = \frac{T . 1.200}{K . E}$ Ὅταν ὁ χρόνος ὑπολογίζεται εἰς μῆνες.

3) $X = \frac{T . 36\,000}{K . E}$ Ὅταν ὁ χρόνος ὑπολογίζεται εἰς ἡμέρες.

Θὰ ἔχωμε λοιπὸν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν χρόνο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 ἂν θὰ ὑπολογίσωμε τὸν χρόνο εἰς ἔτη, ἐπὶ 1.200 ἂν τὸν ὑπολογίσωμε εἰς μῆνες καὶ ἐπὶ 36.000 ἂν τὸν ὑπολογίσωμε εἰς ἡμέρες. Τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Πιθανὸν τώρα ἕνα παιδὶ νὰ κάμη αὐτὴ τὴν ἐρώτησι:

«Σὲ ἕνα πρόβλημα ὅπου ζητεῖται ὁ χρόνος εἶναι πάντοτε εὔκολο νὰ ὑπολογίσωμε μὲ ἀκρίβεια ἂν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη ἢ σὲ μῆνες ἢ σὲ ἡμέρες; Δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ λάθος καὶ νὰ ὑπολογίσωμε ἐμεῖς τὸν χρόνο σὲ μῆνες καὶ νὰ εἶναι σὲ ἔτη;»

Ἠμπορεῖ βέβαια νὰ γίνῃ αὐτό, ἀλλὰ δὲν ἔχει καμμιὰ σημασία. Πάρετε τὸ πρῶτο ἀπὸ τὰ παραπάνω προβλήματα, ὅπου ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη καὶ τὸν ὑπελογίσατε σὲ μῆνες.

Θὰ ἔχετε: $X = \frac{T . 1.200}{K . E}$

ἄρα: $X = \frac{36.000 \times 1.200}{150.000 \times 8} = \frac{36 \times 120}{15 \times 8} = \frac{36 \times 120}{120} = 36$ μῆνες.

Στὴν λύσι αὐτὴ εὑρήκατε 36 μῆνες ἀντὶ γιὰ 3 ἔτη. Ἡ λύσι τοῦ προβλήματος εἶναι σωστή, γιατὶ 36 μῆνες κάνουν 3 ἔτη. Ἂν λοιπόν, στὴν λύσι ἑνὸς προβλήματος, θὰ δυσκολευθῆτε νὰ ὑπολογίσετε τὸν χρόνο, ἂν εἶναι ἔτη ἢ μῆνες ἢ ἡμέρες, νὰ μὴν τὰ χάσετε. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν χρόνο σὲ ἡμέρες καί, ἂν θὰ εὕρετε π.χ. 720 ἡμέρες, θὰ τρέψετε τὶς ἡμέρες αὐτὲς σὲ μῆνες: (720 : 30 = 24 μῆνες) καὶ σὲ ἔτη: (720 : 360 = 2 ἔτη).

Προβλήματα

1) Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὸν Συνεταιρισμὸ 2.400.000 δρχ. πρὸς 9 % καὶ ἔπειτα ἀπὸ μερικοὺς μῆνες ἐπλήρωσε τόκο 108.000 δρχ. Πόσον χρόνο ἔκαμε νὰ ἐπιστρέψῃ τὸ κεφάλαιο ὁ γεωργὸς αὐτός;

2) Ἕνας κτηματίας ἐξώδευσε γιὰ τὴν καλλιέργεια τῶν κτημάτων του 4.200.000 δρχ. Ἀπὸ τὴν πώλησι τῶν εἰσοδημάτων ἀφήρεσε τὰ ἔξοδα καὶ τοῦ ἔμειναν 700.000 δραχμές. Ἐὰν ἐτόκιζε τὸ κεφάλαιο τῶν 4.200.000 δρχ. πρὸς 24 %, σὲ πόσον χρόνο θὰ ἔπαιρνε τόκο 700.000 δρχ.

3) Ἐτοκίσαμε 800.000 δρχ. πρὸς 25 % κ' ἐπήραμε τόκο καὶ κεφάλαιο μαζὶ 850.000 δρχ. Πόσον χρόνο ἐτοκίσαμε τὰ χρήματά μας;

4) Ἕνας ἔμπορος γιὰ μιὰ ἐργασία του διέθεσε κεφάλαιο 7.200.000 δρχ. κ' ἐκέρδισε σὲ λίγες ἡμέρες 96.000 δρχ. Ἐὰν ὑπολογίσωμε τὸ κέρδος πρὸς 24 %, πόσες ἡμέρες ἐτοκίσαμε τὸ κεφάλαιο αὐτό;

5) Ἕνας ἔλαβε ἀπὸ τὴν Ἀμερικὴ 3.240 δολλάρια καὶ τὰ ἐπώλησε πρὸς 12.500 δρχ. τὸ ἕνα. Τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε τὰ ἐτόκισε πρὸς 12% καὶ ἐπῆρε τόκο 14.980.000. Πόσον χρόνο ἐτόκισε τὰ χρήματα;

Προβλήματα ὅλων τῶν εἰδῶν

1) Ἕνας βοσκὸς ἐπώλησε 96 πρόβατα πρὸς 75.000 δρχ. τὸ ἕνα. Τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε τὰ ἐτόκισε πρὸς 12 % γιὰ 2 ἔτη καὶ 7 μῆνες. Πόσον τόκο θὰ πάρη;

2) Ἕνας κηπουρὸς καλλιεργεῖ τὸν κῆπο του ἐπὶ 8 μῆνες καὶ ἐξοδεύει 3.600.000 δρχ. Ἀπὸ τὴν πώλησι τῶν εἰσοδημάτων του ἐκέρδισε 576.000 δρχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐκέρδισε;

3) Ἕνας ἄνθρωπος καταθέτει σὲ μιὰ ἐπιχείρησι κεφάλαιο δρχ. 12.500.000 καὶ σὲ κάθε 6 μῆνες παίρνει κέρδος 125.000 δρχ. Πρὸς πόσο τοῖς ἑκατὸ ἔχει τοκίσει τὰ χρήματά του;

4) Πόσον τόκο φέρει κεφάλαιο 7.500.000 δρχ. σὲ 8 μῆνες πρὸς 15 %;

5) Ἐὰν τὸ παραπάνω κεφάλαιο μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο ἔδωσε τόκο 2.250.000 δρχ. πόσον χρόνον ἐτοκίσθηκε;

6) Ἕνας κτηματίας ἐπώλησε 4.750 ὀκάδες σιτάρι μὲ 2.000 δραχ. τὴν ὀκά. Ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε κατέθεσε στὴν Τράπεζα τὰ $\frac{3}{4}$ γιὰ 2 ἔτη μὲ ἐπιτόκιο $4\frac{1}{2}$ %. Πόσον τόκο θὰ πάρη;

7) Ἕνας ἄνθρωπος, προτοῦ νὰ φύγη γιὰ μακρυνὸ ταξίδι στὴν Ἀσία, κατέθεσε στὴν Τράπεζα 6.400.000 δρχ. πρὸς 9 %. Ὅταν ἐπέστρεψε ἀπὸ τὸ ταξίδι του ἐπῆρε κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ 7.264.000. Πόσον χρόνο ἔλειψε στὸ ταξίδι του;

8) Ἕνας ἐμποροϋπάλληλος παίρνει τὸν χρόνο 7.200.000 μισθό. Ποιὸ κεφάλαιο στὸν ἴδιο χρόνο μὲ ἐπιτόκιο 12 % δίνει τὸν τόκο αὐτό;

9) Ἕνας ἄνθρωπος ἐδάνεισε ἕνα κεφάλαιο πρὸς 8 % καὶ ἔπειτα ἀπὸ 3 ἔτη ἐπῆρε κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ 1.488.000 δρχ. Ποιὸ ἦταν τὸ κεφάλαιο;

10) Ἕνας ἄνθρωπος ἀγόρασε ἕνα σπίτι καὶ ἔδωσε 64.000.000 δρχ. Τὸ σπίτι αὐτὸ τὸ ἐνοίκιασε μὲ 280.000 δρχ. τὸν μῆνα. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἔχει τοκίσει τὰ χρήματά του;

11) Ἕνας ὀπωροπώλης ἐργάζεται μὲ κεφάλαιο 9.250.000 δρχ. Σὲ 3 μῆνες κερδίζει 550.000 δρχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ πρέπει νὰ τοκίση τὰ χρήματά του γιὰ νὰ πάρη τὸν ἴδιο τόκο;

12) Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθηκε 1.400.000 δρχ., πρὸς 8 %, γιὰ 6 μῆνες. Γιὰ τὸ χρέος αὐτό, μαζὶ μὲ τὸν τόκο, ἔδωσε 728 ὀκάδες σιτάρι. Πόσες δραχμὲς ὑπολογίζεται ἡ ὀκὰ τοῦ σιταριοῦ;

6. Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ

Στὴν προπολεμικὴ ἐποχὴ οἱ περισσότεροι ἄνθρωποι δὲν ἐξώδευαν ὅλα τὰ χρήματα ποὺ ἐκέρδιζαν ἀπὸ τὴν ἐργασία τους. Ἐξώδευαν ἕνα μέρος ἀπὸ αὐτὰ γιὰ τὴν συντήρησι τῆς οἰκογενείας των καὶ ἐκεῖνα ποὺ τοὺς ἐπερίσσευαν τὰ κατέθεταν στὴν Τράπεζα ἢ στὸ Ταχυδρομικὸ Ταμιευτήριο καὶ ἔπαιρναν τόκο. Τὴν σημερινὴ ἐποχὴ λίγοι ἄνθρωποι ἠμποροῦν νὰ κάνουν οἰκονομίες καὶ νὰ τὶς καταθέτουν στὴν Τράπεζα, γιατὶ ἡ ζωὴ εἶναι ἀκριβή. Εἶναι πολὺ καλὸ πρᾶγμα νὰ ἀποκτήση κάθε ἄνθρωπος τὴν συνήθεια νὰ μὴν ἐξοδεύη ὅλα τὰ χρήματα ποὺ κερδίζει, ἀλλὰ νὰ φροντίζη νὰ κάνη οἰκονομίες καὶ νὰ τὶς καταθέτη στὴν Τράπεζα. Πολλοὶ ἄνθρωποι καταθέτουν στὴν Τράπεζα τὰ χρήματα ποὺ τοὺς περισσεύουν, ὄχι γιὰ ἕνα ἔτος, ἀλλὰ τὰ καταθέτουν γιὰ πολλὰ ἔτη καὶ κάνουν τὴν συμφωνία κάθε 6 μῆνες ἢ κάθε ἕνα χρόνο ὁ τόκος νὰ προστίθεται στὸ κεφάλαιο καὶ νὰ παίρνη καὶ ὁ τόκος αὐτὸς νέο τόκο. Ἔτσι μεγαλώνει τὸ κεφάλαιο. Ἂν π. χ. ἕνας ἄνθρωπος καταθέση στὴν Τράπεζα 100.000 δρχ. γιὰ 3 χρόνια πρὸς 4 % καὶ κάνη τὴν παραπάνω συμφωνία, τὸ κεφάλαιο αὐτό, μόλις περάση ὁ ἕνας χρόνος, θὰ δώση τόκο 4.000 δρχ. Ὁ τόκος αὐτὸς προστίθεται στὸ κεφάλαιο τῶν 100.000 δρχ. καὶ ἔτσι τὸ κεφάλαιο γίνεται 104.000 δρχ. καὶ θὰ εἶναι ὁ τόκος αὐτὸς 4.160 δρχ. Ὁ νέος αὐτὸς τόκος προστίθεται στὸ κεφάλαιο τῶν 104.000 καὶ τὸ κεφάλαιο θὰ γίνη τώρα 108.160 δρχ. Στὸ τέλος τοῦ τρίτου χρόνου ὁ τόκος θὰ ὑπολογισθῆ στὸ νέο κεφάλαιο τῶν 108.160 δρχ. καὶ θὰ εἶναι 4.326,40 δρχ. Τὸν τόκο αὐτὸν τὸν προσθέτομε στὸ κεφάλαιο τῶν 108.160 δρχ. κ' εὑρίσκομε ὅτι ὁ ἄνθρωπος αὐτὸς στὸ τέλος τοῦ τρίτου χρόνου θὰ εἰσπράξη γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ 112.486,40 δρχ.

Βλέπομε λοιπὸν ἐδῶ, ὅτι μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ ὁ τόκος προστίθεται στὸ κεφάλαιο καὶ δίνει καὶ αὐτὸς νέον τόκο. Αὐτὸ λέγεται *ἀνατοκισμός*.

Ὁ ἀνατοκισμὸς ὠφελεῖ τὸν καταθέτη γιὰ δυὸ λόγους: 1) γιατὶ ἡ κατάθεσις τοῦ κεφαλαίου γίνεται γιὰ πολλὰ χρόνια καὶ ἔτσι ὁ καταθέτης δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀποσύρῃ τὰ χρήματά του ὅποτε θέλει καὶ νὰ τὰ ξοδεύῃ καὶ 2) γιατὶ μὲ τὸν ἀνατοκισμὸ ὁ τόκος γίνεται κεφάλαιο στὸ τέλος κάθε χρόνου καὶ δίνει καὶ αὐτὸς νέον τόκο. Ἂς λύσωμε τώρα ἕνα πρόβλημα ἀνατοκισμοῦ.

Πρόβλημα. — Ἕνας ἄνθρωπος καταθέτει στὴν Τράπεζα μὲ ἀνατοκισμὸ κάθε ἔτος κεφάλαιο 5.000.000 δρχ. γιὰ 3 ἔτη πρὸς 8 %. Πόσο θὰ πάρῃ μετὰ 3 ἔτη;

Λύσις. — 1) Κεφάλαιο τοῦ α' ἔτους δρχ. 5.000.000

Τόκος τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ στὸ α' ἔτος . . . . $T = \frac{5.000.000 \times 1 \times 8}{100} = 400.000 +$

2) προσθέτομε. Τὸ κεφάλαιο γιὰ τὸ β' ἔτος καὶ γίνεται: δρχ. 5.400.000

Τόκος τοῦ νέου κεφαλαίου $T = \frac{5.400.000 \times 1 \times 8}{100} = 432.000 +$

3) προσθέτομε. Τὸ κεφάλαιο γιὰ τὸ γ' ἔτος καὶ γίνεται: δρχ. 5.832.000

Τόκος τοῦ νέου κεφαλαίου $T = \frac{5.832\,000 \times 1 \times 8}{100} = 466.560 +$

4) προσθέτομε. Ἔλαβε στὸ τέλος τοῦ γ' ἔτους . . . . δρχ. 6.298.560

Προβλήματα

1) Μιὰ ὑπηρέτρια κατέθεσε στὴν Τράπεζα μὲ ἀνατοκισμὸ κάθε ἔτος, κεφάλαιο 2.000.000 δρχ. γιὰ 3 ἔτη πρὸς 10 %. Πόσο θὰ πάρῃ μετὰ 3 ἔτη;

2) Ἕνα κεφάλαιο 800.000 δρχ. ἐτοκίσθηκε μὲ ἀνατοκισμὸ κάθε ἔτος γιὰ 2 ἔτη πρὸς 15 %. Πόσο θὰ γίνῃ μετὰ 2 ἔτη;

3) Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθηκε 20.000.000 δραχ. μὲ ἀνατοκισμὸ κάθε 6 μῆνες, πρὸς 8 %, γιὰ 2 ἔτη. Πόσο θὰ πληρώσῃ μετὰ 2 ἔτη;

4) Ὁ πληθυσμὸς τῆς Θεσσαλονίκης εἶναι σήμερα 400.000 κάτοικοι. Ὁ πληθυσμὸς αὐτὸς αὐξάνει κάθε χρόνο 5 %. Πόσος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμὸς αὐτὸς μετὰ 4 ἔτη;

5) Πόσος εἶναι περίπου ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως ἢ τοῦ χωριοῦ σας; Ἂν ὁ πληθυσμὸς αὐτὸς αὐξάνῃ κάθε ἔτος κατὰ 8 %, πόσος θὰ εἶναι μετὰ 2 ἔτη καὶ πόσος μετὰ 5 ἔτη;

6) Ἕνας ἄνθρωπος κατέθεσε στὴν Τράπεζα γιὰ τὴν κόρη του μὲ ἀνατοκισμὸ κάθε ἔτος 1.000.000 δρχ., γιὰ 5 ἔτη, πρὸς 10 %. Πόσα θὰ γίνουν τὰ χρήματα αὐτὰ μετὰ 5 ἔτη;

Κεφάλαιον Ε΄

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

1. Δάνεια—Γραμμάτια

Στὰ μαθήματα περὶ τόκου εἴδαμε, ὅτι πολλοὶ ἄνθρωποι καταθέτουν τὰ χρήματά των στὶς Τράπεζες γιὰ νὰ πάρουν τόκο καὶ ὅτι ἄλλοι ἄνθρωποι, γιὰ νὰ κάμουν τὶς δουλειές των, δανείζονται χρήματα καὶ πληρώνουν τόκο. Συνήθως οἱ ἔμποροι δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα ἢ ἀπὸ ὁποιαδήποτε ἄλλη Τράπεζα. Ἡ Ἀγροτικὴ Τράπεζα δανείζει χρήματα στοὺς κτηματίες καὶ στοὺς ἀγρότες τὴν ἐποχὴ τῆς καλλιεργείας, μὲ τὸ σκοπὸ νὰ τοὺς διευκολύνη γιὰ νὰ καλλιεργήσουν τὰ κτήματά των. Οἱ Συνεταιρισμοὶ δανείζουν καὶ αὐτοὶ χρήματα στοὺς συνεταίρους των, γιὰ νὰ τὰ χρησιμοποιήσουν στὴν καλλιέργεια τῶν κτημάτων των.

Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ διευκολύνονται οἱ ἔμποροι στὴν ἐργασία των καὶ οἱ κτηματίες στὰ ἔξοδα καλλιεργείας τῶν κτημάτων. Οἱ Τράπεζες δίνουν δάνεια καὶ σὲ ἄλλους ἀνθρώπους ποὺ δὲν εἶναι ἔμποροι, ἀλλὰ ποὺ ἔχουν ἀνάγκη χρημάτων γιὰ νὰ ἀποτελειώσουν π. χ. τὸ κτίσιμο ἑνὸς σπιτιοῦ κλπ. Ἐπίσης τέτοια δάνεια δίνει τὸ Ταχυδρομικὸ Ταμιευτήριο καὶ διάφορα ἄλλα Ταμεῖα. Ὅλα αὐτά, δηλ. Τράπεζες, Συνεταιρισμοί, Ταχυδρομικὰ Ταμιευτήρια, Ταμεῖο Παρακαταθηκῶν καὶ Δανείων κλπ. λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα ***Πιστωτικὰ Ἱδρύματα.***

Γιὰ νὰ σοῦ δώσουν δάνειο τὰ Ἱδρύματα αὐτὰ πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ εἶσαι ἔμπορος ἢ κτηματίας καὶ νὰ ἔχης δικά σου κτήματα, π. χ. χωράφια, ἀμπέλια κλπ. ἢ νὰ ἔχης ἄλλη ἀκίνητη περιουσία, δηλ. σπίτι, οἰκόπεδο κλπ. Ἂν δὲν ἔχης κάτι ἀπ᾽ ὅλα αὐτά, δὲν σοῦ δίνουν δάνειο. Ἠμπορεῖ ὅμως καὶ ἕνας ἄνθρωπος ποὺ δὲν ἔχει περιουσία ἢ ποὺ δὲν εἶναι ἔμπορος νὰ δανεισθῆ χρήματα ἀπὸ ἕνα φίλο του. Ἔτσι λοιπόν, μὲ τὰ δάνεια, διευκολύνονται στὶς ὑποθέσεις των πολλοὶ ἄνθρωποι, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνοι ποὺ δανείζουν παίρνουν τόκο καὶ ὠφελοῦνται καὶ αὐτοί. Φαντασθῆτε τί ἠμπορεῖ νὰ κερδίζη μιὰ Τράπεζα ποὺ δίνει σὲ δάνεια πολλὰ δισεκατομμύρια δραχμὲς τὸν χρόνο. Ἴσως ἐδῶ νὰ μοῦ κάμετε τὴν ἐρώτησι: «Ποῦ τὰ εὑρίσκει ἡ Τράπεζα τόσα πολλὰ χρήματα ;» Ἡ Τράπεζα ἔχει δικό της ἕνα πολὺ μεγάλο κεφάλαιο χρημάτων. Τὸ κεφάλαιο αὐτὸ μεγαλώνει πιὸ πολὺ ἀπὸ τὶς καταθέσεις χρημάτων ποὺ κάνουν διάφοροι ἄνθρωποι. Στὶς καταθέσεις αὐτὲς ἡ Τράπεζα πληρώνει τόκο 3 % ἢ 4 %. Τὰ χρήματα τῶν καταθέσεων αὐτῶν, μαζὶ μὲ τὰ δικά της χρήματα, τὰ δανείζει ἡ Τράπεζα στοὺς ἐμπόρους μὲ τόκο 12 % ἢ καὶ περισσότερο. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ ἡ Τράπεζα κερδίζει.

Μὲ ὅσα εἴπαμε μέχρις ἐδῶ, ἀσφαλῶς καταλάβατε γιὰ ποιὸ λόγο γίνεται ἕνα δάνειο καὶ ἀπὸ ποῦ ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ πάρῃ δάνειο.

Ἂς ἰδοῦμε τώρα ποιὲς διατυπώσεις πρέπει νὰ γίνουν γιὰ νὰ πάρῃ δάνειο ἕνας ἄνθρωπος.

Ἕνας ἔμπορος δανείζεται χρήματα ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα ἢ παίρνει ἐμπορεύματα μὲ πίστωσι ἀπὸ ἕνα μεγάλο κατάστημα. Τὴ στιγμὴ ποὺ θὰ πάρῃ τὰ χρήματα ἢ τὰ ἐμπορεύματα θὰ γίνῃ συμφωνία γιὰ τὰ ἑξῆς πράγματα :

1) Θὰ ὁρισθῇ ἡ ἡμέρα ποὺ ὁ ἔμπορος θὰ ἐπιστρέψῃ τὰ χρήματα ποὺ δανείζεται ἢ τὴν ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ποὺ παίρνει μὲ πίστωσι. 2) Θὰ ὁρισθῇ τὸ ἐπιτόκιο καὶ θὰ ὑπολογισθῇ ὁ τόκος ποὺ πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ ἔμπορος γιὰ ὅλο τὸ ποσὸν τοῦ δανείου καὶ γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα ποὺ θὰ διαρκέσῃ τὸ δάνειο. Ὁ τόκος αὐτὸς θὰ προστεθῇ ἀμέσως στὸ κεφάλαιο. 3) Ὁ ἔμπορος θὰ δώσῃ στὴν Τράπεζα μιὰ ἀπόδειξι γιὰ τὰ χρήματα ποὺ παίρνει. Ἡ ἀπόδειξις αὐτὴ γράφεται σὲ χαρτόσημο καὶ λέγεται ***Γραμμάτιο***.

Ἂς πάρωμε ἕνα παράδειγμα :

Ὁ ἔμπορος Π. Γεωργίου, ἐξ Ἀθηνῶν, τὴν 1 Μαρτίου 1948 ἐπῆρε ἀπὸ τὸν ἔμπορο Γρ. Ἰωαννίδη ἐμπορεύματα μὲ πίστωσι ἀξίας 500.000 δρχ. ἢ ἐδανείσθηκε ἀπὸ αὐτὸν σὲ μετρητὰ 500.000 δρχ. Ἐσυμφώνησαν νὰ πληρωθῇ τὸ χρέος αὐτὸ μετὰ 6 μῆνες καὶ μὲ ἐπιτόκιο 12 %.

Προτοῦ γραφῇ τὸ γραμμάτιο, εὑρέθηκε ὁ τόκος τῶν 500.000 δραχμῶν σὲ 6 μῆνες πρὸς 12 %. Ὁ τόκος αὐτὸς εἶναι :

$$T = \frac{500.000 \times 6 \times 12}{1.200} = 30.000 \text{ δρχ.}$$

Ὁ τόκος αὐτὸς προσετέθη ἀμέσως στὸ κεφάλαιο τῶν

500.000 δρχ. καὶ ἔγινε κεφάλαιο καὶ τόκος μαζὶ 530.000 δραχ. Τὸ ποσὸν αὐτὸ τῶν 530.000 δρχ. εἶναι τὸ χρέος ποὺ ὀφείλει νὰ πληρώση ὁ ἔμπορος Γεωργίου μετὰ 6 μῆνες. Τὸ ποσὸν τοῦ χρέους γράφεται πρῶτο στὸ γραμμάτιο.

Ἔπειτα ἀπὸ αὐτό, τὸ γραμμάτιο ἔγινε ὡς ἑξῆς :

Διὰ δραχμὰς 530.000

Μετὰ ἓξ (6) μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Γρηγ. Ἰωαννίδην ἢ εἰς διαταγήν του δραχμὰς πεντακοσίας τριάκοντα χιλιάδας (ἀριθ. 530.000), τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς ἐμπορεύματα (ἢ εἰς μετρητά).

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Μαρτίου 1948

(ὑπογραφὴ) **Π. Γεωργίου**

Παρατηρήσατε καὶ θὰ ἀντιληφθῆτε, ὅτι στὸ γραμμάτιο αὐτὸ ξεχωρίζουν δύο σπουδαῖα πράγματα. Αὐτὰ εἶναι τὰ ἑξῆς :

1) Τὸ χρηματικὸ ποσὸν τῶν 530.000 δρχ. ποὺ ὀφείλει καὶ ὑπόσχεται νὰ πληρώση ὁ ὀφειλέτης στὸν δανειστή. Τὸ ποσὸν αὐτὸ λέγεται *ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου.

2) Ἡ ἡμέρα κατὰ τὴν ὁποία εἶναι ὑποχρεωμένος ὁ ὀφειλέτης νὰ πληρώση τὸ χρέος του στὸν δανειστή. Λέγει ὅτι, ὑπόσχεται νὰ πληρώση μετὰ 6 μῆνες, δηλ. τὴν 1 Σεπτεμβρίου 1948. Τὴν ἡμέρα αὐτὴ λήγει τὸ γραμμάτιο καὶ πρέπει ὁ Γεωργίου νὰ πληρώση τὸ χρέος του τῶν 530.000 δρχ. στὸν Ἰωαννίδη.

Ἡ ἡμέρα αὐτὴ ποὺ λήγει τὸ γραμμάτιο λέγεται *λῆξις τοῦ γραμματίου*.

Θὰ προσέξετε ἀκόμη, ὅτι στὸ γραμμάτιο ὑπάρχουν οἱ λέξεις *εἰς διαταγήν του*. Αὐτὸ γράφεται γιατὶ ὁ δανειστὴς ἠμπορεῖ νὰ πωλήση τὸ γραμμάτιο πρὸ τῆς λήξεώς του, ὁπότε ὁ ὀφειλέτης ὑποχρεοῦται νὰ πληρώση τὸ χρέος του σ' ἐκεῖνον ποὺ θὰ ἀγοράση τὸ γραμμάτιο.

Κάμετε τώρα καὶ σεῖς τὰ παρακάτω γραμμάτια :

1) Ὁ ἔμπορος Γ. Παύλου τὴν 8 Μαΐου ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὴν Τράπεζα Ἀθηνῶν 1.500.000 δρχ. γιὰ 3 μῆνες πρὸς 10 %. Πῶς θὰ γραφῇ τὸ γραμμάτιο αὐτό ; Ποιὰ θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του καὶ ποιὰ ἡ ἡμέρα τῆς λήξεώς του ;

2) Ὁ Γεώργιος Πάττας τὴν 4 Φεβρουαρίου ἐδάνεισε στὸν

κτηματία Δημ. Ἀγγουρᾶ 4.250.000 δρχ. γιὰ 5 μῆνες πρὸς 9 %. Γράψετε σεῖς τὸ γραμμάτιο ποὺ θὰ δώσῃ ὁ Δημ. Ἀγγουρᾶς.

3) Ὁ ἔμπορος Β. Θεοδώρου τὴν 20 Μαΐου ἐπῆρε ἀπὸ τὸ κατάστημα Κ. Πετροπούλου ἐμπορεύματα ἀξίας 6.500.000 δρχ. Θὰ τὰ πληρώσῃ μετὰ 7 μῆνες πρὸς 12 %. Πῶς θὰ γίνῃ τὸ γραμμάτιο;

2. Προεξόφλησις γραμματίων-ὑφαίρεσις ἐξωτερική

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, ἐκαταλάβατε ὅτι ὁ δανειστὴς δὲν ἠμπορεῖ νὰ ζητήσῃ ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη τὴν ἐξόφλησι τοῦ χρέους ἐνωρίτερα ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Ἂν ὅμως ὁ δανειστὴς εὑρεθῇ στὴν ἀνάγκη νὰ χρειασθῇ χρήματα ἐνωρίτερα ἀπὸ τὴν λῆξι τοῦ γραμματίου, τί πρέπει νὰ κάμῃ; Νὰ δανεισθῇ καὶ αὐτὸς ἀπὸ ἄλλον ἢ νὰ πωλήσῃ τὸ γραμμάτιο στὴν Τράπεζα ἢ σὲ ἕναν ἔμπορο.

Ἂς πάρουμε ἕνα παράδειγμα γιὰ νὰ ἰδοῦμε καλύτερα τί γίνεται στὴν περίπτωσι αὐτή.

Ὁ Δημ. Κορμπάκης τὴν 10ην Ἰανουαρίου δανείζει στὸν ἔμπορο Ἰωάν. Καρβέλα 900.000 δρχ. γιὰ 6 μῆνες, πρὸς 12 %.

Ὁ τόκος τῶν 900.000 δρχ. σὲ 6 μῆνες, πρὸς 12 %, εἶναι:

$$T = \frac{900.000 \times 6 \times 12}{1.200} = 54.000 \text{ δρχ.}$$

Ὁ τόκος αὐτὸς προστίθεται στὸ κεφάλαιο τῶν 900.000 δρχ. καὶ ἔχομε: $900.000 + 54.000 = 954.000.$

Ἑπομένως ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου θὰ εἶναι 954.000 δρχ. καὶ ἡ λῆξις μετὰ 6 μῆνες, δηλ. τὴν 10 Ἰουλίου.

Ὁ δανειστὴς δὲν ἔχει δικαίωμα νὰ ζητήσῃ ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη τὴν ἐξόφλησι τοῦ χρέους ἐνωρίτερα ἀπὸ τὴν 10 Ἰουλίου.

Ἀλλὰ 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, δηλ. τὴν 10 Μαΐου, ὁ δανειστὴς εὑρίσκεται σὲ μεγάλη ἀνάγκη χρημάτων καὶ ἀναγκάζεται νὰ πωλήσῃ τὸ γραμμάτιο σὲ ἄλλον ἔμπορο ἢ στὴν Τράπεζα καὶ νὰ πάρῃ τὰ χρήματά του.

Ἡ πώλησις αὐτὴ λέγεται ***προεξόφλησις*** τοῦ γραμματίου, γιατὶ τὸ γραμμάτιο ἐξοφλεῖται πρὸ τῆς λήξεώς του. Ὅταν γίνεται ἡ προεξόφλησις, ὁ πωλητὴς τοῦ γραμματίου ὑπογράφει ἐπάνω στὸ γραμμάτιο, ὅτι τὸ προεξώφλησε καὶ τὸ παραδίδει στὸν προεξοφλητή. Ὁ ὀφειλέτης εἶναι τώρα ὑποχρεωμένος τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως νὰ πληρώση τὸ χρέος του στὸν νέο κάτοχο τοῦ γραμματίου, π.χ. στὴν Τράπεζα ποὺ ἀγόρασε τὸ γραμμάτιο. Ἡ Τράπεζα ὅμως ποὺ προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιο δὲν πρέπει νὰ κερδίση; Βέβαια πρέπει νὰ κερδίση, γιατί τὰ χρήματα ποὺ πληρώνει γιὰ τὴν προεξόφλησι θὰ τὰ πάρη ἀργότερα, δηλαδὴ τὴν ἡμέρα ποὺ θὰ λήξη τὸ γραμμάτιο. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ γίνεται συμφωνία μὲ τὸν πωλητὴ τοῦ γραμματίου καὶ ὁρίζεται τὸ ἐπιτόκιο, μὲ τὸ ὁποῖο θὰ γίνη ἡ προεξόφλησις. Μὲ βάσι τὸ ἐπιτόκιο αὐτό, ὑπολογίζεται ὁ τόκος ποὺ θὰ κρατήση ἡ Τράπεζα. Ὁ τόκος αὐτὸς ὑπολογίζεται ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου καὶ γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα ποὺ μεσολαβεῖ ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἂν λοιπὸν τὸ παραπάνω γραμμάτιο τὸ πωλήση ὁ Δημ. Κορμπάκης στὴν Τράπεζα 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του, μὲ ἐπιτόκιο 9 %, θὰ γίνουν οἱ ἑξῆς λογαριασμοί:

1) Θὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, δηλ. ὁ τόκος τῶν 954.000 δρχ., γιὰ 2 μῆνες, πρὸς 9 %. Ὁ τόκος αὐτὸς εἶναι:

$$T = \frac{954.000 \times 2 \times 9}{1.200} = 14.310 \text{ δρχ.}$$

2) Ὁ τόκος αὐτὸς θὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ θὰ κρατηθῇ ἀπὸ τὴν Τράπεζα γιὰ τὴν προεξόφλησι τοῦ γραμματίου, δηλ. θὰ ἔχωμε:

$$954.000 - 14.310 = 939.690 \text{ δρχ.}$$

3) Μετὰ τὴν ἀφαίρεσι τοῦ τόκου, θὰ εὑρεθῇ ὅτι ἡ μὲν Τράπεζα ἐπῆρε γιὰ τόκο προεξοφλήσεως 14.310 δρχ., ὁ δὲ πωλητὴς τοῦ γραμματίου ἐπῆρε 939.690 δρχ. Ὁ τόκος αὐτὸς ποὺ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου λέγεται ***ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις***.

Τὸ ποσὸν ποὺ παίρνει ὁ πωλητὴς τοῦ γραμματίου μετὰ τὴν ἀφαίρεση τῆς ὑφαιρέσεως λέγεται ***παροῦσα*** ἢ ***πραγματικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου.

Ὁ χρόνος ποὺ μεσολαβεῖ ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου λέγεται ***χρόνος προεξοφλήσεως***.

Σύμφωνα μὲ αὐτά, στὸ παραπάνω γραμμάτιο ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 14.310 δρχ., ἡ δὲ πραγματικὴ ἀξία εἶναι 939.690 δρχ. καὶ ὁ χρόνος προεξοφλήσεως εἶναι 2 μῆνες. Τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, δηλ. τὴν 10 Ἰουλίου, ἡ Τράπεζα θὰ εἰσπράξῃ ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη Ἰωάν. Καρβέλαν 954.000 δρχ., τὴν ἡμέρα αὐτὴ ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου θὰ εἶναι 954.000 δρχ., δηλ. ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου τὴν ἡμέρα τῆς λήξεώς του γίνεται πραγματικὴ ἀξία.

Ἂς πάρωμε τώρα μερικὰ παραδείγματα:

1ον Πρόβλημα.—Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 340.000 δρχ. ὀνομαστικῆς ἀξίας, τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται 15 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 %;

Λύσις.— Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται ἡ ὑφαίρεσις, δηλ. ὁ τόκος τῶν 340.000 δραχμῶν σὲ 15 μῆνες πρὸς 6 %.

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν ζητεῖται ὁ τόκος σὲ μῆνες, γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο ποὺ ἐμάθαμε γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ τόκου, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, δηλ. τὸν τύπο:

$T = \frac{K \cdot X \cdot E}{1200}$. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ τόκος τῆς προεξοφλήσεως λέγεται ὑφαίρεσις, ἀντὶ νὰ βάλωμε τὸ γράμμα Τ, ποὺ σημαίνει τόκος, θὰ βάλωμε τὸ γράμμα Υ, ποὺ σημαίνει ὑφαίρεσις.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

$$Y = \frac{340.000 \times 15 \times 6}{1200} = \frac{3.400 \times 15}{2} = 15.500 \text{ δρχ. ὑφαίρεσις}$$

Ἑπομένως, ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 15.500 δρχ. Θὰ τὴν ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὶς 340.000 δρχ. καὶ θὰ ἔχωμε:

$$340.000 - 15.500 = 324.000 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου θὰ εἶναι 324.500 δρχ.

2ον Πρόβλημα.—Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφλησις γραμματίου 280.000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 8 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ ἔδωσε ὑφαίρεσι 22.400 δρχ.;

Λύσις.—Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα τόκου, στὸ ὁποῖο ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο. Ἐπειδὴ ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο: $E = \frac{T \cdot 1.200}{K \cdot X}$ καὶ θὰ ἔχωμε:

$$E = \frac{22.400 \times 1.200}{280.000 \times 8} = \frac{224 \times 3}{28 \times 2} = \frac{672}{56} = 12\,\%\ \text{ἐπιτόκιο.}$$

3ον Πρόβλημα.— Γραμμάτιο 350.000 δρχ. ἐπωλήθη 4 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ ἔδωσε πραγματικὴν ἀξία 339.500 δρχ. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐπωλήθη ;

Λύσις.—Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο. Δὲν μᾶς δίδεται ἐδῶ ἡ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου, δηλ. ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τῶν 350.000 δρχ. Ἐπειδὴ ὅμως μᾶς δίδεται ἡ πραγματικὴ ἀξία καὶ ἡ ὀνομαστικὴ τοῦ γραμματίου, ἠμποροῦμε νὰ εὕρωμε τὴν ὑφαίρεσι. Κάνομε τὴν ἀφαίρεσι καὶ ἔχομε :

350.000 — 339.500 = 10.500 δρχ. ὑφαίρεσις.

Θὰ ἐφαρμόσωμε τώρα τὸν τύπο :

$$E = \frac{T \cdot 1.200}{K \cdot X}\ \text{καὶ θὰ ἔχωμε :}$$

$$E = \frac{10.500 \times 1.200}{350.000 \times 4} = \frac{105 \times 3}{35} = 9\,\%\ \text{ἐπιτόκιο.}$$

4ον Πρόβλημα.— Γραμμάτιο 400.000 δρχ. προεξωφλήθηκε πρὸς 4 % καὶ ἔδωσε ὑφαίρεσι 2.400 δρχ. Πόσον χρόνο πρὸ τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

Λύσις.— Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα τόκου, στὸ ὁποῖο ζητεῖται ὁ χρόνος. Θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο :

$$X = \frac{T \cdot 36.000}{K \cdot E}$$

καὶ θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα. Θὰ ἔχωμε :

$$X = \frac{2.400 \times 36.000}{400.000 \times 4} = \frac{24 \times 9}{4} = 6 \times 9 = 54\ \text{ἡμέρες.}$$

5ον Πρόβλημα.— Ποιὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου ποὺ προεξωφλήθη 2 ἔτη πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 5 % καὶ ἔδωσε ὑφαίρεσι 58.000 δρχ. ;

Λύσις.— Ὅπως βλέπετε, τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα τόκου, στὸ ὁποῖο ζητεῖται τὸ κεφάλαιο. Ἐπειδὴ ἐδῶ ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο : $K = \frac{T \cdot 100}{X \cdot E}$

$$K = \frac{58.000 \times 100}{2 \times 5} = \frac{5.800.000}{10} = 580.000\ \text{δραχ.}$$

6ον Πρόβλημα.— Γραμμάτιο 450.000 δρχ. προεξοφλεῖται 9 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 %. Ποιὰ εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ ;

Λύσις.— Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου. Ἀλλὰ γνωρίζομε, ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀξία εὑρίσκεται ἐὰν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία ἀφαιρέσωμε τὴν ὑφαίρεσι, δηλ. τὸν τόκο. Γιὰ νὰ λύσωμε λοιπὸν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εὕρωμε τὴν ὑφαίρεσι. Κατόπιν θὰ ἀφαιρέσωμε τὴν ὑφαίρεσι ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ θὰ εὕρωμε τὴν πραγματικὴ ἀξία ποὺ θέλει τὸ πρόβλημα.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

$$Υ = \frac{450.000 \times 9 \times 12}{1.200} = 4.500 \times 9 = 40.500 \text{ ὑφαίρεσις.}$$

Θὰ ἀφαιρέσωμε τώρα τὴν ὑφαίρεσι ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ θὰ εὕρωμε τὴν πραγματικὴ ἀξία.

Θὰ ἔχωμε : 450.000 — 40.500 = 409.500 δρχ.

Ἄρα ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 409.500 δραχ.

Προσέξατε τώρα νὰ κάνωμε μερικὲς παρατηρήσεις :

Ὅλα τὰ προηγούμενα προβλήματα εἶναι προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως. Τὰ προβλήματα αὐτὰ τὰ ἐλύσαμε μὲ τὸν τρόπο ποὺ λύομε τὰ προβλήματα τοῦ τόκου. Στὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως ἔχομε 4 ποσά :

1) Ὑφαίρεσι, δηλ. τόκο, 2) ὀνομαστικὴ ἀξία, δηλ. κεφάλαιο, 3) χρόνο καὶ 4) ἐπιτόκιο.

Τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ὑφαίρεσις, τὰ λύομε ὅπως τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος. Τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, τὰ λύομε ὅπως τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιο. Καὶ τέλος τὰ προβλήματα, στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιο, τὰ λύομε ὅπως τὰ προβλήματα τοῦ τόκου στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιο. Ἀπὸ ὅλα αὐτὰ ποὺ εἴπαμε, βγάζομε τὸ ἑξῆς συμπέρασμα :

Τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου.

Προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως

1) Ἕνας ἔμπορος προεξώφλησε γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 410.000 δραχμῶν 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του, πρὸς 8 %. Ποιὰ εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποιὰ ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

2) Ἕνα γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 840.000 δρχ. ἔληξε στὸ τέλος Ἰουνίου καὶ προεξωφλήθη στὶς 15 Ἀπριλίου πρὸς 12 %. Νὰ εὑρεθῆ ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ.

3) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα καὶ γιὰ τὴν ἀξία των ἔδωσε γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 1.250.000 δρχ. Ἐὰν ὁ ἴδιος πληρώση τὸ γραμμάτιο αὐτὸ 4 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 %, πόσο θὰ κερδίση ἀπὸ τὸ χρέος του ;

4) Ἕνας ἄνθρωπος ὀφείλει δύο γραμμάτια. Τὸ ἕνα εἶναι ὀνομαστικῆς ἀξίας 530.000 δρχ. καὶ τὸ ἄλλο 940.000 δρχ. Ἐὰν πληρώση τὰ γραμμάτια αὐτὰ 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς των, πρὸς 6 %, πόσο θὰ κερδίση ;

5) Ποιὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη πρὸς 10%, 45 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ ἔδωσε ὑφαίρεσι 10.800 δραχ. ;

6) Ἕνας γεωργὸς ἀγόρασε ἕνα χωράφι καὶ γιὰ τὴν ἀξία του ἔδωσε γραμμάτιο. Τὸ γραμμάτιο αὐτὸ προεξωφλήθη 2 ἔτη πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8% καὶ ἔδωσε ὑφαίρεσι 672.000 δρχ. Ποιὰ ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ ;

7) Γραμμάτιο 540.000 δρχ. προεξοφλεῖται 72 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ὑφαίρεσι 16.200 δραχ. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

8) Γραμμάτιο 530.000 δρχ. προεξωφλήθη 90 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ πραγματικῆς ἀξίας 522.050 δρχ. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

9) Ἕνας κτηματίας ὀφείλει στὸν Συνεταιρισμὸ 840 000 δρχ. Ἐὰν πληρώση ἐνωρίτερα θὰ τοῦ κάμουν ἔκπτωσι 12 %. Ἐπλήρωσε λοιπὸν ἐνωρίτερα καὶ ἐκέρδισε 21.000 δρχ. Πόσες ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου ἐπλήρωσε ;

10) Ἕνα γραμμάτιο 410.000 δρχ. προεξοφλεῖται πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8% ἀντὶ 393.600 δρχ. πραγματικῆς ἀξίας. Πόσους μῆνες πρὸ τῆς λήξεως ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

11) Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑνὸς γραμματίου εἶναι 680.000 δραχ. Ἐὰν πληρωθῆ τὸ γραμμάτιο αὐτὸ ἐνωρίτερα πρὸς 9 % καὶ κερδίση ὁ ὀφειλέτης 76.500 δρχ., πόσους μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του γίνεται ἡ ἐξόφλησις ;

12) Ἕνας κτηματίας ἀγόρασε ἐργαλεῖα γεωργικὰ καὶ ἔδωσε γραμμάτιο. Ὁ ἔμπορος τῶν γεωργικῶν ἐργαλείων ἐπώλησε τὸ γραμμάτιο 4 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9% καὶ τοῦ ἐκρατήθη ὑφαίρεσις 3.600 δρχ. Ποιὸ ποσὸν θὰ πληρώση ὁ κτηματίας τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου ;

3. Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις

Στὰ προηγούμενα μαθήματα ἐμάθαμε καλὰ τί εἶναι ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ πῶς λύομε προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως. Θὰ μάθωμε τώρα γιὰ τὴν *ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσι* καὶ θὰ ἀποδείξωμε ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ζημιώνει τὸν πωλητὴ τοῦ γραμματίου. Ἂς πάρωμε ἕνα παράδειγμα :

Ὁ Π. Νικολάου δανείζει σ' ἕνα φίλο του 500.000 δρχ. γιὰ 6 μῆνες πρὸς 12 %. Ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ, γιὰ 6 μῆνες, πρὸς 12 %, εἶναι: $T = \frac{500.000 \times 6 \times 12}{1.200} = 30.000$. Γίνεται λοιπὸν γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 530.000 δρχ., τὸ ὁποῖον ὑπογράφει ὁ ὀφειλέτης καὶ τὸ παραδίδει στὸν δανειστή. Τὴν ἴδια ὅμως ἡμέρα ποὺ ἔγινε τὸ δάνειο, ὁ Π. Νικολάου λαμβάνει ἔξαφνα ἀνάγκην χρημάτων καὶ πωλεῖ τὸ γραμμάτιο σὲ ἕναν ἔμπορο πρὸς 12 %, δηλ. μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο ποὺ ἔγινε τὸ γραμμάτιο.

Ἂς ἰδοῦμε λοιπὸν ποιὰ εἶναι ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου αὐτοῦ τῶν 530.000 δρχ. γιὰ 6 μῆνες πρὸς 12 %. Θὰ ἔχωμε: $\frac{530.000 \times 6 \times 12}{1.200} = 33.800$ ἐξ. ὑφαίρεσις.

Ὁ ἔμπορος ποὺ ἀγοράζει τὸ γραμμάτιο θὰ κρατήση τὶς 33.800 δρχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπο θὰ τὸ δώση στὸν Π. Νικολάου, δηλ. θὰ τοῦ δώση: $530.000 - 33.800 = 496.200$ δρχ.

Ὁ Π. Νικολάου ζημιώνεται ἐδῶ 3.800 δρχ., γιατὶ τὸ σωστὸ ἦταν νὰ πάρη τὰ χρήματά του, δηλ. τὶς 500.000 δρχ. ἀκέραιες, ἐφ' ὅσον ἐπώλησε τὸ γραμμάτιο μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο τὴν ἴδια ἀκριβῶς ἡμέρα ποὺ ἐδάνεισε τὸν φίλο του.

Γιατί ὅμως ἔγινε αὐτό ; Γιατί ὁ Νικολάου, δηλ. ὁ πωλητὴς τοῦ γραμματίου, ζημιώνεται ; Ζημιώνεται γιατὶ κατὰ τὴν προεξόφλησι τοῦ γραμματίου, ὁ τόκος, δηλ. ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις, ὑπελογίσθηκε ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ποὺ εἶναι 530.000 δρχ. Ἂν ἡ ὑφαίρεσις ὑπελογίζετο ἐπὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, δηλ. ἐπὶ τῶν 500.000 δραχ., τότε ὁ προεξοφλητὴς θὰ ἔπαιρνε 30.000 δρχ. γιὰ ὑφαίρεσι καὶ ὁ πωλητὴς 500.000 δρχ., δηλ. τὰ χρήματά του. Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ βλέπομε ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ἄδικη καὶ ζημιώνει τὸν πωλητὴ τοῦ γραμματίου. Εἶναι δὲ ἄδικη, ἐπειδὴ ὁ τόκος ὑπολογίζεται ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου.

Τὸ ἴδιο ἀκριβῶς ἔγινε στὸ προηγούμενο παράδειγμα, ποὺ ὁ Νικολάου, ἐνῶ εἶχε δανείσει 500.000 δρχ., ἐπλήρωσε τόκο προεξοφλήσεως, δηλ. ὑφαίρεσι, ἐπὶ 530.000 δρχ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ζημία ποὺ κάνει ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι πολὺ μικρή, γι' αὐτό, σήμερα, στὴν προεξόφλησι τῶν γραμματίων χρησιμοποιοῦν ὅλοι τὴν ὑφαίρεσι αὐτή.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ***ἐξωτερικὴ*** ὑφαίρεσι ἔχομε καὶ τὴν ***ἐσωτερικὴ*** ὑφαίρεσι. Ἡ ὑφαίρεσις αὐτὴ ὑπολογίζεται ἐπὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου καὶ γι' αὐτὸ δὲν εἶναι ἄδικη καὶ δὲν ζημιώνει κανένα.

Στὸ παραπάνω παράδειγμα γνωρίζομε ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 500.000 δρχ. Ἂν λοιπὸν στὴν προεξόφλησι ὑπολογίσωμε τὸν τόκον ἐπὶ τῆς πραγματικῆς αὐτῆς ἀξίας τῶν 500.000 δρχ. γιὰ 6 μῆνες πρὸς 12 %, θὰ εὕρωμε:

$$T = \frac{500.000 \times 6 \times 12}{1.200} = 30.000 \text{ ἐσωτερ. ὑφαίρεσις.}$$

Ἔτσι λοιπόν, ὁ προεξοφλητὴς θὰ κρατήσῃ ἀπὸ τὴν ὀνομ. ἀξία τῶν 530.000 δρχ. τὶς 30.000 δρχ. καὶ θὰ δώσῃ στὸν πωλητὴ τὶς 500.000 δρχ. Μὲ τὴν ὑφαίρεσι αὐτὴ βλέπομε, ὅτι δὲν ζημιώνεται κανένας. Ὥστε ***ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος ποὺ ὑπολογίζεται ἐπὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου.*** Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις σπανίως χρησιμοποιεῖται σήμερα. Ἂς ἰδοῦμε τώρα, πῶς λύονται τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

Πρόβλημα.—Γραμμάτιο 630.000 δρχ. προεξοφλεῖται 5 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Λύσις.—Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ ὑπολογίσωμε τὸν τόκο ἐπὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου. Ποιὰ ὅμως εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία; Ἐπειδὴ δὲν τὴν γνωρίζομε, θὰ εὕρωμε τὸ τόκο τῶν 100 δρχ. στὸν ἴδιο χρόνο καὶ μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο, δηλ. τὸν τόκο τῶν 100 δρχ. εἰς 5 μῆνες πρὸς 12 %. Θὰ ἔχωμε: $T = \frac{100 \times 5 \times 12}{1.200} = 5$ δρχ. τόκος. Τὸν τόκο αὐτὸ τῶν 5 δρχ. τὸν προσθέτομε στὶς 100 δρχ. καὶ ἔχομε: Σὲ πραγματικὴ ἀξία 100 δραχμῶν ἔχομε ὀνομαστικὴ ἀξία 105 δρχ. Ἐὰν προεξοφλήσωμε τὸ γραμμάτιο αὐτό, ποὺ ἔχει πραγματική ἀξία 100 δρχ., θὰ εὕρωμε, γιὰ 5 μῆνες, πρὸς 12 %, ἐσωτ. ὑφαίρεσι 5 δρχ.

Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ 105 δρχ. ὀνομαστικὴ ἀξία εἰς 5 μῆνες, πρὸς 12 %, ἔχουν ἐσωτ. ὑφαίρεσι 5 δρχ., οἱ 630.000 δρχ., στὸν ἴδιο χρόνο, πόση ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσι ἔχουν;

Θὰ καταστρώσωμε καὶ θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα:

ὀνομ. ἀξίας δρχ. 105 ἐσωτ. ὑφ. δρχ. 5
» » » 630.000 » » » X

$$X = 5 \times \frac{630.000}{105} = 30.000$$ ἐσωτ. ὑφαίρεσι.

Ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 30.000 δρχ. Ἠμποροῦμε ὅμως νὰ εὕρωμε καὶ τὴν πραγματικὴν ἀξία τοῦ γραμματίου. Θὰ εἰποῦμε: Ἀφοῦ στὶς 105 δρχ. ὀνομ. ἀξίας, ἡ πραγματικὴ ἀξία εἶναι 100 δρχ., στὶς 630.000 δρχ. ὀνομ. ἀξίας, πόση εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία;

Θὰ ἔχωμε:

ὀν. ἀξία 105, πραγμ. ἀξία 100
» » 630.000, » » X

$$X = 100 \times \frac{130.000}{105} = 600.000$$ πραγματικὴ ἀξία.

Ἀφαιροῦμε: 630.000 ὀν. ἀξία—600.000 πραγ. ἀξ.=30.000 ἐσωτ. ὑφαίρεσις.

Προβλήματα

1) Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ἡ πραγματικὴ ἀξία γραμματίου 624.000 δρχ., ποὺ προεξωφλήθη 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 %;

2) Ἕνα γραμμάτιο 1.284.000 δρχ. προεξωφλήθη 7 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

3) Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 918.000 δρχ., ποὺ προεξωφλήθη 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 %;

Κεφάλαιον ΣΤ΄

Μερισμός σέ μέρη ἀνάλογα

Πρόβλημα.—Τρεῖς ἐργάτες ἐργάσθηκαν μαζί κ' ἐθέρισαν ἕνα χωράφι. Ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 3 ἡμέρες, ὁ δεύτερος ἐργάσθηκε 4 ἡμέρες καί ὁ τρίτος ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες. Γιά τήν ἐργασία τους αὐτή ἐπῆραν 120 ὀκάδες σιτάρι. Πόσες ὀκάδες σιτάρι πρέπει νά πάρη κάθε ἐργάτης, ἀναλόγως μέ τίς ἡμέρες πού ἐργάσθηκε;

Λύσις.—Ὅλες οἱ ἡμέρες πού ἐργάσθηκαν οἱ τρεῖς αὐτοί ἐργάτες ἦταν $3+4+5=12$. Ἐάν γιά τήν ἐργασία τους αὐτή ἔπαιρναν 12 ὀκάδες σιτάρι καί τό ἐμοίραζαν ἀναλόγως μέ τίς ἡμέρες πού ἐργάσθηκε καθένας, θά ἔπαιρναν: Ὁ πρῶτος 3 ὀκάδες, ὁ δεύτερος 4 ὀκάδες καί ὁ τρίτος 5 ὀκάδες, δηλαδή: $3+4+5=12$ ὀκάδες. Ἑπομένως, ὁ πρῶτος ἐργάτης στίς 12 ὀκ. θά πάρη 3 ὀκ., ὁ δεύτερος ἐργάτης στίς 12 ὀκ. θά πάρη 4 ὀκάδες καί ὁ τρίτος ἐργάτης στίς 12 ὀκ. θά πάρη 5 ὀκάδες. Ἀφοῦ ὅμως τό σιτάρι πού ἐπῆραν οἱ ἐργάτες αὐτοί εἶναι 120 ὀκάδες, δηλ. τό δεκαπλάσιο τοῦ 12, ποιό πρέπει νά εἶναι τό μερίδιο τοῦ κάθε ἐργάτη;

Φυσικά, πρέπει νά εἶναι δεκαπλάσιο ἀπό τό μερίδιο πού παίρνουν ὅταν τό σιτάρι εἶναι 12 ὀκάδες. Ἄρα, ἀπό τίς 120 ὀκ. ὁ πρῶτος θά πάρη 30 ὀκ., ὁ δεύτερος θά πάρη 40 ὀκ. καί ὁ τρίτος θά πάρη 50 ὀκ., δηλ. $30+40+50=120$ ὀκάδες.

Ἄς εὕρωμε τώρα τό μερίδιο τοῦ κάθε ἐργάτη μέ τήν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν. Θά ἔχωμε:

Ὁ 1ος ἐργάτης στίς 12 ὀκ. παίρνει 3 ὀκ.
» 120 » » X »

$$X=3\times\frac{120}{12}=\frac{360}{12}=30 \text{ ὀκάδες.}$$

Ὁ 2ος ἐργάτης στίς 12 ὀκ. παίρνει 4 ὀκ.
» 120 » » X »

$$X=4\times\frac{120}{12}=\frac{480}{12}=40 \text{ ὀκάδες.}$$

Ὁ 3ος ἐργάτης στίς 12 ὀκ. παίρνει 5 ὀκ.
» 120 » » X »

$$X=5\times\frac{120}{12}=\frac{600}{12}=50 \text{ ὀκάδες.}$$

Καὶ μὲ τὴν λύσι αὐτὴ εὑρήκαμε ὅτι ὁ α΄ ἐργάτης παίρνει 30 ὀκ., ὁ β΄ ἐργάτης 40 ὀκ. καὶ ὁ γ΄ ἐργάτης 50 ὀκάδες, δηλ. $30 + 40 + 50 = 120$. Τὸ μερίδιο τοῦ κάθε ἐργάτη εἶναι δίκαιο καὶ σωστό, γιατὶ εἶναι ἀνάλογο μὲ τὶς ἡμέρες ποὺ ἐργάσθηκε.

Προσέξατε τώρα νὰ κάνωμε μερικὲς παρατηρήσεις. Οἱ ἡμέρες ἐργασίας τῶν ἐργατῶν αὐτῶν εἶναι: $3 + 4 + 5 = 12$. Δηλαδὴ ὅλα τὰ ἡμερομίσθια εἶναι 12. Τὸ σιτάρι ποὺ ἐπῆραν οἱ ἐργάτες αὐτοὶ γιὰ πληρωμὴ τῶν 12 ἡμερομισθίων των εἶναι 120 ὀκάδες.

Σύμφωνα μὲ τὴν λύσι τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὁ πρῶτος ἐργάτης παίρνει $\frac{3 \times 120}{12} = \frac{360}{12} = 30$ ὀκ. Παρατηρήσατε καὶ θὰ ἰδῆτε ὅτι, τὸ μερίδιο αὐτὸ εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ 120 ποὺ ἔχομε νὰ μερίσωμε (δηλ. νὰ μοιράσωμε) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 3 ποὺ εἶναι οἱ ἡμέρες ἐργασίας τοῦ ἐργάτου αὐτοῦ καὶ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 12, δηλ. μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἡμερῶν ἐργασίας ὅλων τῶν ἐργατῶν.

Ὁ δεύτερος ἐργάτης παίρνει $\frac{4 \times 120}{12} = \frac{480}{12} = 40$ ὀκ. Καὶ ἐδῶ πολλαπλασιάζεται ὁ μεριστέος ἀριθμὸς 120 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 4 τῶν ἡμερῶν τῆς ἐργασίας αὐτοῦ τοῦ ἐργάτη καὶ διαιρεῖται τὸ γινόμενο διὰ 12.

Ὁ τρίτος ἐργάτης παίρνει $\frac{5 \times 120}{12} = \frac{600}{12} = 50$ ὀκ. Καὶ ἐδῶ βλέπομε ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ μεριστέος ἀριθμὸς 120 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 5 τῶν ἡμερῶν τῆς ἐργασίας αὐτοῦ τοῦ ἐργάτη καὶ διαιρεῖται τὸ γινόμενο διὰ 12.

Ἂς τὰ εἰποῦμε ὅλα αὐτὰ καὶ μὲ ἄλλα λόγια:

Οἱ 120 ὀκάδες σιτάρι εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ πρέπει νὰ μερισθῇ. Οἱ ἡμέρες ἐργασίας ὅλων τῶν ἐργατῶν μαζὶ εἶναι 12. Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς 120 πρέπει νὰ μερισθῇ σὲ 12 μερίδια, δηλ. ὅσα εἶναι τὰ ἡμερομίσθια τῶν τριῶν ἐργατῶν. Θὰ διαιρέσωμε λοιπὸν τὸν ἀριθμὸ 120 διὰ τοῦ 12, δηλ. θὰ ἔχωμε:

$$120 : 12 = \frac{120}{12}$$

Τὸ $\frac{120}{12}$ εἶναι ἡ πληρωμὴ ἢ τὸ μερίδιο γιὰ μιὰ ἡμέρα ἐργασίας κάθε ἐργάτη.

Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ α΄ ἐργάτης ἐργάσθηκε 3 ἡμέρες, θὰ πάρη

$3 \times \frac{120}{12} = 30$ ὀκ. Ὁ β' ἐργάτης, ἐπειδὴ ἐργάσθηκε 4 ἡμέρες, θὰ πάρῃ $4 \times \frac{120}{12} = 40$ ὀκ. Καὶ ὁ γ' ἐργάτης, ποὺ ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες, θὰ πάρῃ $5 \times \frac{120}{12} = 50$ ὀκ. Ἂν θέλωμε, ἠμποροῦμε νὰ κάνωμε καὶ αὐτό: $120 : 12 = 10$. Ἑπομένως ὁ α' ἐργάτης παίρνει $3 \times 10 = 30$, ὁ β' ἐργάτης παίρνει $4 \times 10 = 40$ καὶ ὁ γ' ἐργάτης παίρνει $5 \times 10 = 50$. Εἶναι τὸ ἴδιο, γιατὶ $\frac{120}{12} = 10$.

Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται *μερισμὸς σὲ μέρη ἀνάλογα.*

Μὲ ἄλλα λόγια:

Μερισμὸς σὲ μέρη ἀνάλογα λέγεται ἡ πρᾶξις κατὰ τὴν ὁποία ἕναν ἀριθμὸ τὸν μοιράζομε σὲ κομμάτια ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν.

Ἂς πάρωμε τώρα ἕναν ἄλλον ἀριθμὸ νὰ τὸν μερίσωμε σὲ μέρη ἀνάλογα.

«6.000 δρχ. νὰ μοιρασθοῦν σὲ 3 ἀνθρώπους, ἀναλόγως μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 5.»

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, πρέπει νὰ μερίσωμε τὸν ἀριθμὸ 6.000 σὲ $2 + 3 + 5 = 10$ ἴσα μέρη.

Ἀπὸ αὐτά, ὁ α' ἄνθρωπος θὰ πάρῃ 2 μέρη, ὁ β' θὰ πάρῃ 3 μέρη καὶ ὁ γ' θὰ πάρῃ 5 μέρη. Θὰ διαιρέσωμε λοιπὸν τὸ 6.000 διὰ τοῦ 10 καὶ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ πηλίκον ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 5.

Ἑπομένως, θὰ ἔχωμε: $6.000 : 10 = \frac{6.000}{10}$

Ὁ α' ἄνθρωπος $\frac{6.000 \times 2}{10} = \frac{12.000}{10} = 1.200$ δρχ.

Ὁ β' ἄνθρωπος $\frac{6.000 \times 3}{10} = \frac{18.000}{10} = 1.800$ δρχ.

Ὁ γ' ἄνθρωπος $\frac{6.000 \times 5}{10} = \frac{30.000}{10} = 3.000$ δρχ.

Προσθέτομε τὰ μερίδια καὶ ἔχομε:

$1.200 + 1.800 + 3.000 = 6.000$ δρχ.

Τὸ ἴδιο εἶναι, ἂν ὁ μερισμὸς γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομε πρῶτα τὸ πηλίκον $6.000 : 10 = 600$ καὶ ἔχομε:

ὁ α'	παίρνει	$600 \times 2 = 1.200$	δρχ.
ὁ β'	»	$600 \times 3 = 1.800$	»
ὁ γ'	»	$600 \times 5 = 3.000$	»
	Σύνολον	6.000	»

Δηλαδὴ διαιροῦμε τὸν μεριστέο ἀριθμὸ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων ἀριθμῶν (ὅπως 6.000 : 10 = 600). Κατόπιν πολλαπλασιάζομε τὸ πηλίκον μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς στοὺς ὁποίους πρέπει νὰ μερίσωμε τὸν μεριστέο. Φυσικά, ὁ τρόπος αὐτὸς εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν προηγούμενο, γιατὶ ἐκεῖ μὲν παίρνομε τὸ πηλίκον σὲ κλάσμα $\frac{6.000}{10}$, ἐδῶ δὲ παίρνομε τὸ πηλίκον σὲ ἀκέραιο 6.000 : 10 = 600. Ἀλλὰ γνωρίζομε ὅτι $6.000 : 10 = \frac{6.000}{10}$ καὶ $\frac{6.000}{10} = 600$.

Εἶναι δὲ τὸ $\frac{6.000}{10}$ ἴσο μὲ τὸ 600 $\left(\text{διότι } \frac{6.000}{10} = 600\right)$. Ἑπομένως καὶ μὲ τοὺς δυὸ παραπάνω τρόπους κάνομε τὸ ἴδιο πρᾶγμα.

Πρόβλημα.—Τέσσερα παιδιὰ ἐμοιράσθησαν 180 βώλους, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 καὶ 8. Πόσους βώλους θὰ πάρη τὸ κάθε παιδί;

Λύσις.— Οἱ 180 βῶλοι ἔγιναν 2 + 3 + 5 + 8 = 18 μερίδια. Ὁ ἀριθμὸς 180 θὰ μοιρασθῇ λοιπὸν σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 καὶ 8. Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, θὰ ἔχωμε:

Τὸ α΄ παιδὶ $\frac{180 \times 2}{18} = \frac{360}{18} = 20$ βώλους

Τὸ β΄ » $\frac{180 \times 3}{18} = \frac{540}{18} = 30$ »

Τὸ γ΄ » $\frac{180 \times 5}{18} = \frac{900}{18} = 50$ »

Τὸ δ΄ » $\frac{180 \times 8}{18} = \frac{1440}{18} = 80$ »

Τὰ 4 παιδιά: 20 + 30 + 50 + 80 = 180 βώλους.

Ἀπὸ τὴν λύσι τῶν προηγουμένων προβλημάτων βλέπομε ὅτι ἕναν ἀριθμὸ τὸν μερίζομε σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν, ἐὰν τὸν πολλαπλασιάσωμε μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ ἀθροίσματός των.

Ἑπομένως:

Γιὰ νὰ μερίσωμε ἕναν ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἔχομε καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Νά τώρα καί ένα άλλο πρόβλημα:

«Τρεῖς ἐργάτες ἐργάσθηκαν σ' ἕνα ἐργοστάσιο κ' ἐπῆραν 472.000 δρχ. Ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, ὁ δεύτερος 7 ἡμέρες ἐπὶ 6 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὁ τρίτος 9 ἡμέρες ἐπὶ 4 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ποιὸ πρέπει νὰ εἶναι τὸ μερίδιο τοῦ κάθε ἐργάτη ἀπὸ τὶς 472.000 δρχ. ;»

Λύσις.—Στὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν ἔχομε μόνο τὶς ἡμέρες ἐργασίας κάθε ἐργάτη, ἀλλὰ ἔχομε καὶ τὶς ὧρες ποὺ ἐργαζόταν καθένας τὴν κάθε ἡμέρα. Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμε πόσες ὧρες ἐν ὅλῳ ἐργάσθηκε ὁ κάθε ἐργάτης κατὰ τὴ διάρκεια ὅλων τῶν ἡμερῶν τῆς ἐργασίας του. Ἡ διανομὴ τῶν χρημάτων θὰ γίνη ἀνάλογα μὲ τὶς ὧρες ἐργασίας τοῦ καθενός.

Ἔχομε λοιπόν :

Ὁ α' ἐργάτης	ἐργάσθηκε	5 ἡμ.	ἐπὶ	8 ὥρ.,	δηλ.	$5 \times 8 = 40$ ὧρες
ὁ β' »	»	7 »	»	6 »	»	$7 \times 6 = 42$ »
ὁ γ' »	»	9 »	»	4 »	»	$9 \times 4 = 36$ »
					Σύνολον	118

Ἑπομένως, οἱ 472.000 δραχμὲς πρέπει νὰ μοιρασθοῦν σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 40, 42 καὶ 36. Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ποὺ ἐμάθαμε προηγουμένως, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν μεριστέο ἀριθμὸ 472.000 μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 40, 42 καὶ 36 καὶ θὰ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 118, δηλ. μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 40, 42 καὶ 36. Ἢ ἠμποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ πηλίκον 472.000 : 118=4.000 μὲ καθένα ἐκ τῶν ἀριθμῶν 40, 42 καὶ 36.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

Ὁ α' ἐργάτης παίρνει :

$$\frac{472.000 \times 40}{118} = 160.000 \text{ ἢ } 4.000 \times 40 = 160.000$$

Ὁ β' ἐργάτης παίρνει :

$$\frac{472.000 \times 42}{118} = 168.000 \text{ ἢ } 4.000 \times 42 = 168.000$$

Ὁ γ' ἐργάτης παίρνει :

$$\frac{472.000 \times 36}{118} = 144.000 \text{ ἢ } 4.000 \times 36 = 144.000$$

472.000

Προβλήματα

1) Τέσσερα ἀδέλφια ἀγόρασαν ἕνα ἀγρόκτημα ἐκτάσεως 120 στρεμμάτων κ' ἔδωσαν 720 λίρες. Ὁ α' ἀδελφὸς ἐπῆρε 28 στρέμματα, ὁ β' ἐπῆρε 40 στρέμματα, ὁ γ' ἐπῆρε 30 στρέμματα καὶ ὁ δ' ἐπῆρε 22 στρέμματα. Πόσες λίρες ἐπλήρωσε ὁ καθένας;

2) Ἕνας πατέρας ἐμοίρασε στὴ θυγατέρα του καὶ στοὺς δύο γυιούς του 24.000.000 δρχ. Στὸ κορίτσι ἄφησε τὸ $\frac{1}{6}$ τῶν χρημάτων αὐτῶν. Τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἐμοίρασε στοὺς γυιούς του, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 6. Πόσο εἶναι τὸ μερίδιο τοῦ καθενός;

3) Σ' ἕνα σχολεῖο φοιτοῦν 360 παιδιά. Ἡ ἀναλογία τῶν κοριτσιῶν εἶναι 4 καὶ τῶν ἀγοριῶν 5. Πόσα εἶναι τὰ ἀγόρια καὶ πόσα τὰ κορίτσια;

4) Τέσσερες κτίστες ἔκτισαν τὸν τοῖχο ἑνὸς σπιτιοῦ κ' ἐπῆραν 2.170.000 δρχ. Ὁ α' κτίστης ἐργάσθηκε 12 ἡμέρες ἐπὶ 7 ὧρες τὴν ἡμέρα, ὁ β' 15 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, ὁ γ' 14 ἡμέρες ἐπὶ 5 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὁ δ' 20 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Πόσο πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας;

5) Τρεῖς κτηνοτρόφοι εἶχαν ὁ α' 145 πρόβατα, ὁ β' 232 πρόβατα καὶ ὁ γ' 183 πρόβατα. Μέσα σ' ἕνα χρόνο ἐκέρδισαν ἀπὸ ὅλα αὐτὰ τὰ πρόβατα 67.200.000 δρχ. Πόσο πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας, ἀνάλογα μὲ τὰ πρόβατα ποὺ ἔχει;

6) Οἱ ἴδιοι κτηνοτρόφοι ἐνοικίασαν ἕνα λειβάδι γιὰ βοσκὴ τῶν προβάτων των κ' ἐπλήρωσαν 2.800.000 δρχ. Πόσο πρέπει νὰ πληρώσῃ καθένας, ἀνάλογα μὲ τὰ πρόβατά του;

7) Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε τρία βαρέλια λάδι συνολικοῦ καθαροῦ βάρους 252 ὀκάδων. Τὸ δεύτερο βαρέλι εἶχε διπλάσιο λάδι ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ τὸ τρίτο βαρέλι εἶχε τριπλάσιο ἀπὸ τὸ πρῶτο. Πόσες ὀκάδες λάδι εἶχε τὸ κάθε βαρέλι; Τὸ λάδι τοῦ α' καὶ β' βαρελιοῦ τὸ ἐπώλησε πρὸς 17.600 δρχ. τὴν ὀκὰ καὶ τὸ λάδι τοῦ γ' βαρελιοῦ πρὸς 18.000 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ; (Τὸ λάδι κάθε βαρελιοῦ εὑρίσκεται ἐὰν τὸ 252 μερισθῇ σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3.)

8) Πέντε φίλοι ἐταξίδευσαν ἀπὸ τὰς Ἀθήνας στὴν Ἀρχαία Ὀλυμπία γιὰ νὰ ἐπισκεφθοῦν τὶς ἀρχαιότητες. Στὸ ταξίδι τους αὐτὸ ἐξώδευσαν 946.000 δρχ. Γιὰ εἰσιτήρια τοῦ σιδηροδρόμου ἐπλήρωσαν τετραπλάσια ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ ἐπλήρωσαν στὸ ξενοδοχεῖο ὕπνου τῆς Ὀλυμπίας ὅπου ἔμειναν μερικὲς ἡμέρες καὶ γιὰ φαγητὸ καὶ ἄλλα μικροέξοδα ἐπλήρωσαν ἑξαπλάσια τοῦ ὕπνου. Πόσο ἐπλήρωσαν γιὰ ὕπνο, πόσο γιὰ εἰσιτήρια, καὶ πόσο γιὰ φαγητὸ μαζὶ μὲ τὰ μικροέξοδα;

9) Τὸ ἄθροισμα τῆς ἡλικίας τριῶν παιδιῶν εἶναι 36 ἔτη. Ἡ ἡλικία τοῦ α' παιδιοῦ εἶναι 1,5 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἡλικία τοῦ β'

παιδιοῦ καὶ ἡ ἡλικία τοῦ γ' παιδιοῦ εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν ἡλικία τοῦ β' παιδιοῦ. Πόσο χρονῶν εἶναι κάθε παιδί; (Μερισμὸς τοῦ 36 εἰς μέρη ἀνάλογα τοῦ 1, 1,5 καὶ τοῦ 2.)

Κεφάλαιον Ζ'

Προβλήματα Ἑταιρείας

Οἱ ἐμπορικὲς ἐργασίες ποὺ κάνουν οἱ ἄνθρωποι εἶναι πολλὲς καὶ διάφορες. Ἂν ρίξετε μιὰ ματιὰ στὰ καταστήματα τοῦ τόπου σας, θὰ ἀντιληφθῆτε πολλὰ πράγματα. Ὑπάρχουν πολλὰ καταστήματα ποὺ καθένα ἀπ' αὐτὰ ἀνήκει εἰς ἕνα ἔμπορο. Π.χ. «Βιβλιοπωλεῖον Ι. Καρβέλα» ἢ «Ἐμπορικὸν Κατάστημα Β. Ἀντωνίου» καὶ ἄλλα. Στὰ καταστήματα αὐτὰ ἰδιοκτήτης εἶναι ἕνας μόνον ἄνθρωπος καὶ ἑπομένως τὰ κέρδη τοῦ καταστήματος ἀνήκουν μόνο σ' αὐτόν.

Ὑπάρχουν ὅμως καταστήματα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς 2, 3 ἢ καὶ περισσοτέρους ἀνθρώπους. Κοιτάξετε τὸ κάτω μέρος τοῦ ἐξωφύλλου τοῦ βιβλίου τῆς ἀριθμητικῆς σας. Γράφει :

«Ἐκδοτικὸς οἶκος Ν. Ἀλικιώτης καὶ Υἱοί.»

Ἐκδοτικὸς οἶκος σημαίνει ἕνα μεγάλο κατάστημα, ποὺ ἐκδίδει βιβλία. Τὸ κατάστημα αὐτό, στὸ ὁποῖο τυπώθηκε τὸ βιβλίο τῆς Ἀριθμητικῆς σας, ἀνήκει στὸν κ. Ν. Ἀλικιώτην καὶ στοὺς γυιούς του. Δηλαδή, οἱ ἄνθρωποι αὐτοὶ ἔβαλαν ὁ καθένας ἕνα ὡρισμένο κεφάλαιο χρημάτων καὶ ἔκαμαν τὸ κατάστημα αὐτὸ ποὺ ἐκδίδει βιβλία.

Κοιτάξετε στὴν ἀγορὰ τοῦ τόπου σας. Θὰ ἰδῆτε π.χ. «Παντοπωλεῖον Ν. Ἠλιοπούλου καὶ Α. Βασιλείου». Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ Ἠλιόπουλος καὶ ὁ Βασιλείου ἔβαλαν, ἂς ὑποθέσωμε, ἀπὸ 25 ἑκατομ. δρχ. ὁ καθένας καὶ ἄνοιξαν τὸ παντοπωλεῖο αὐτό. Ὅσα κερδίσουν ἀπὸ τὸ κατάστημα αὐτὸ εἰς 6 μῆνες ἢ εἰς ἕνα ἔτος, θὰ τὰ μοιρασθοῦν στὴ μέση, γιατὶ καθένας ἔβαλε τὸ ἴδιο κεφάλαιο χρημάτων. Ἂν ζημιωθοῦν, τὴ ζημιὰ θὰ τὴν πληρώσουν μὲ ἴση ἀναλογία ἀπὸ τὸ κεφάλαιό των. Ὁ Ἠλιόπουλος καὶ ὁ Βασιλείου, ποὺ ἔχουν μαζὶ τὸ κατάστημα αὐτό, λέγονται ***συνεταῖροι***.

Κάθε ἐμπορικὴ ἐργασία λέγεται μὲ ἕνα ἄλλο ὄνομα *ἐπιχείρησις*. Ἂν γιὰ μιὰ ἐπιχείρησι συνεταιρισθοῦν 2, 3 ἢ περισσότεροι ἄνθρωποι, λέμε ὅτι οἱ ἄνθρωποι αὐτοὶ ἔκαμαν *ἑταιρεία*. Καθένας συνεταῖρος βάζει ἕνα κεφάλαιο γιὰ τὴν ἵδρυσι τῆς ἑταιρείας. Τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των, ἠμπορεῖ ὅμως καὶ νὰ μὴ εἶναι ἴσα. Π. χ. *Τρεῖς ἄνθρωποι βάζουν τὰ κεφάλαιά τους καὶ κάνουν ἕνα μεγάλο κατάστημα ὑφασμάτων. Ὁ πρῶτος βάζει κεφάλαιο 120 ἑκατομ. δρχ. Ὁ δεύτερος βάζει κεφάλαιο 90 ἑκατομ. δρχ. Ὁ τρίτος βάζει κεφάλαιο 70 ἑκατομ. δρχ. Καὶ τὰ τρία κεφάλαια μαζὶ εἶναι 280 ἑκατομ. δρχ. Οἱ 280 ἑκατομ. δρχ. λέγονται ἑταιρικὸ κεφάλαιο.*

Τὰ κέρδη ποὺ θὰ πραγματοποιηθοῦν ἀπὸ τὸ κατάστημα αὐτὸ θὰ μοιρασθοῦν στοὺς τρεῖς συνεταίρους ἀνάλογα μὲ τὸ κεφάλαιο ποὺ ἔβαλε ὁ καθένας.

Δύο φίλοι συνεταιρίζονται γιὰ νὰ κάνουν μιὰ ἐπιχείρησι. Ὁ ἕνας βάζει 25 ἑκατομ. δρχ. καὶ ὁ ἄλλος 15 ἑκατομ. δρχ., δηλ. τὸ ἑταιρικὸ κεφάλαιό των εἶναι 40 ἑκατομ. δρχ. Ἐπειδὴ ὅμως θέλουν νὰ μεγαλώσουν τὴν ἐπιχείρησί των, ἔπειτα ἀπὸ 8 μῆνες παίρνουν καὶ ἄλλο συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος καταθέτει κεφάλαιο 20 ἑκατ. δρχ. Ἀπὸ τὴν ἡμέρα αὐτὴ τὸ ἑταιρικὸ κεφάλαιο γίνεται 60 ἑκατ. δρχ. καὶ οἱ συνεταῖροι εἶναι τρεῖς.

Οἱ ἐπιχειρήσεις εἶναι πολλὲς καὶ διάφορες. Τὰ ἐργοστάσια, οἱ ἀλευρόμυλοι, τὰ ἑστιατόρια, τὰ διάφορα καταστήματα τροφίμων, ἐνδυμάτων, ὑποδημάτων κλπ. εἶναι ἐπιχειρήσεις. Στὶς μικρὲς ἐπιχειρήσεις οἱ συνεταῖροι εἶναι 2, 3 ἢ 4. Τὸ ἑταιρικὸ κεφάλαιο τῶν μικρῶν ἐπιχειρήσεων εἶναι σχετικῶς μικρό. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ μεγάλες ἐπιχειρήσεις, στὶς ὁποῖες τὸ ἑταιρικὸ κεφάλαιο εἶναι πολὺ μεγάλο. Στὶς ἐπιχειρήσεις αὐτὲς οἱ συνεταῖροι εἶναι πολλοὶ καὶ ἔχουν ἄλλο ὄνομα: λέγονται *μέτοχοι*.

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι μία τέτοια μεγάλη ἑταιρεία ἔχει κεφάλαιο 500 ἑκατομ. δρχ. Τὸ κεφάλαιο αὐτὸ διαιρεῖται σὲ ὡρισμένα ἴσα μέρη, π. χ. σὲ 1.000 ἴσα μέρη. Κάθε μέρος θὰ εἶναι λοιπὸν 500.000 δρχ. Γιὰ κάθε 500.000 δρχ., δηλ. γιὰ κάθε μέρος ἀπὸ τὰ 1.000 ἴσα μέρη τοῦ κεφαλαίου, ἐκδίδουν μιὰ ἀπόδειξι ποὺ λέγεται *μετοχή*.

Ἕνας ἄνθρωπος ποὺ θέλει νὰ γίνῃ μέτοχος (δηλ. συνεταῖρος) στὴν ἑταιρεία αὐτή, ἀγοράζει μία, δύο ἢ καὶ περισσότερες μετοχές. Ἂν ἡ ἑταιρεία κερδίσῃ σὲ ἕνα ἔτος π. χ. 80 ἑκατομ. δρχ., τὸ κέρδος αὐτὸ θὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου στὶς 1.000 μετοχές, δηλ. θὰ πάρῃ κάθε μετοχὴ κέρδος 80.000 δρχ. Τὸ κέρδος αὐτὸ τῆς μετοχῆς λέγεται *μέρισμα*. Ἐπειδὴ στὴν ἑταιρεία αὐτὴ οἱ μέτοχοι εἶναι πολλοί, ἡ ἑταιρεία λέγεται ***Ἀνώνυμος Ἑταιρεία.***

Τί σημαίνει Ἀνώνυμος Ἑταιρεία; Στὸν Ἐκδοτικὸ οἶκο «Ν. Ἀλικιώτης καὶ Υἱοὶ» οἱ συνεταῖροι εἶναι 4, δηλ. ὁ Ν. Ἀλικιώτης καὶ τὰ 3 παιδιά του: Τὸ ὄνομα «Ν. Ἀλικιώτης καὶ Υἱοὶ» λέγεται *φίρμα* τῆς ἑταιρείας ἢ ἀλλοιῶς ***ἐπωνυμία.*** Στὴ φίρμα τῆς παραπάνω μεγάλης ἑταιρείας δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γραφοῦν τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν μετόχων. Γι᾿ αὐτὸ βάζουν στὴν ἑταιρεία ἕνα ὄνομα, δηλ. ἕνα τίτλο καὶ τὰ γράμματα: Α. Ε., ποὺ σημαίνουν: «***Ἀνώνυμος Ἑταιρεία***». Ἂν ἡ παραπάνω ἑταιρεία εἶναι π. χ. μία ἐπιχείρησις ποὺ ἔχει ἀλευρομύλους, ἠμπορεῖ νὰ πάρῃ τὴν ἐπωνυμία: «***Ἀλευρόμυλοι ἡ Δήμητρα Α. Ε.***». Κοιτάξετε ἕνα ἄδειο κουτὶ ἀπὸ τσιγάρα Παπαστράτου. Γράφει: «Καπνοβιομηχανία Παπαστράτου Α. Ε.». Δηλ. τὴν ἑταιρεία αὐτὴ τὴν ἵδρυσε ὁ Παπαστράτος καὶ ὅποιος ἀγοράζει μετοχές της γίνεται μέτοχος, δηλ. συνεταῖρος.

Κάθε ἐπιχείρησις, δηλ. κατάστημα, ἐργοστάσιο κλπ. ἐργάζεται γιὰ νὰ κερδίσῃ. Ἀπὸ τὸ κέρδος ἀφαιροῦνται τὰ ἐνοίκια καὶ ὁ φωτισμὸς τοῦ καταστήματος, οἱ μισθοὶ τῶν ὑπαλλήλων καὶ ὅλα τὰ ἄλλα ἔξοδα. Ἐκεῖνο ποὺ μένει εἶναι καθαρὸ κέρδος καὶ μοιράζεται στοὺς συνεταίρους, ἀνάλογα μὲ τὸ κεφάλαιο καθενὸς καὶ μὲ τὸ χρονικὸ διάστημα ποὺ εἶναι συνεταῖρος στὴν ἐπιχείρησι.

Τὰ προβλήματα ποὺ ἔχουν σχέσι μὲ τὰ κέρδη ἢ μὲ τὶς ζημίες τῆς ἑταιρείας, μὲ τοὺς συνεταίρους καὶ μὲ τὸ κεφάλαιο τῶν συνεταίρων, λέγονται ***προβλήματα ἑταιρείας***. Στὰ προβλήματα αὐτὰ θὰ συναντήσωμε 4 περιπτώσεις, τὶς ἑξῆς:

Α΄ περίπτωσις. — Ὅταν τὰ κεφάλαια ποὺ καταθέτουν οἱ συνεταῖροι εἶναι ἴσα καὶ μένουν ὅλα στὴν ἑταιρεία τὸ ἴδιο χρονικὸ διάστημα.

Β' περίπτωσις. — Όταν τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα, μένουν ὅμως στὴν ἑταιρεία διαφορετικὸ χρονικὸ διάστημα τὸ καθένα.

Γ' περίπτωσις. — Όταν τὰ κεφάλαια ποὺ καταθέτουν οἱ συνεταῖροι εἶναι διάφορα, ἀλλὰ μένουν στὴν ἑταιρεία ἴσο χρόνο.

Δ' περίπτωσις. — Όταν καὶ τὰ κεφάλαια καὶ ὁ χρόνος εἶναι διαφορετικά.

Προβλήματα

Α' Περίπτωσις: Κεφάλαια ἴσα καὶ ὁ χρόνος ἴσος

1ον Πρόβλημα.—Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρεία καὶ ἄνοιξαν κατάστημα ὑφασμάτων. Κατέθεσαν καθένας ἀπὸ 8 ἑκατομμύρια δρχ. Σὲ ἕνα ἔτος ἔκαναν λογαριασμὸ καὶ εἶδαν ὅτι τὸ καθαρὸ κέρδος των ἦταν 6.900.000 δρχ. Πόσο πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας;

Λύσις.—Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἶναι πολὺ εὔκολη. Ἀφοῦ κάθε συνεταῖρος κατέθεσε τὸ ἴδιο κεφάλαιο καὶ γιὰ τὸν ἴδιο χρόνο, τὸ κέρδος πρέπει νὰ μοιρασθῇ σὲ τρία ἴσα μέρη, δηλαδή: 6.900.000 : 3 = 2.300.000 δρχ.

2) Πέντε ἄνθρωποι κατέθεσαν τὸ ἴδιο κεφάλαιο καὶ ἔκαμαν μιὰ ἐπιχείρησι. Μετὰ 8 μῆνες διέλυσαν τὴν ἑταιρεία καὶ ἐμοίρασαν τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ἦταν 12 400.000 δρχ. Πόσο θὰ πάρῃ καθένας;

3) Δύο φίλοι κατέθεσαν τὸ ἴδιο κεφάλαιο καὶ ἐμπορεύθηκαν καρπούζια. Ἐζημίωσαν ὅμως 980.000 δρχ. Πόση εἶναι ἡ ζημία τοῦ καθενός;

4) Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἔβαλαν μαζὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ προβάτων. Μετὰ 5 μῆνες ἐμοίρασαν τὸ κέρδος τοῦ τυριοῦ καὶ τοῦ βουτύρου, ποὺ ἦταν 8.400.000 δρχ. Μετὰ 7 μῆνες ἐμοίρασαν καὶ ἄλλο κέρδος ποὺ ἦταν 6.300.000 δρχ. Πόσο θὰ πάρῃ στὸ μερίδιό του κάθε κτηνοτρόφος ἐν ὅλῳ;

Β' Περίπτωσις: Κεφάλαια ἴσα σὲ χρόνο διαφορετικὸ

1ον Πρόβλημα.—Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν ἴσο κεφάλαιο καθένας καὶ ἔκαμαν ἐμπόριο. Ὁ πρῶτος συνεταῖρος ἔμεινε στὴν ἑταιρεία 3 μῆνες, ὁ β' ἔμεινε 5 μῆνες καὶ ὁ γ' ἐξηκολούθησε ἐργαζόμενος μέχρι τέλους τοῦ 8ου μηνός. Κατόπιν ἔγινε λογαριασμὸς καὶ εἶδαν ὅτι εἶχαν κερδίσει 7.200.000 δραχμές. Πόσο πρέπει νὰ πάρῃ καθένας;

Λύσις.—Ἀφοῦ ὅλοι εἶχαν καταθέσει τὸ ἴδιο κεφάλαιο, ἔπρεπε νὰ μοιράσουν τὸ κέρδος ἐξ ἴσου, ἂν καὶ οἱ τρεῖς ἄφηναν τὸ κεφάλαιό των στὴν ἐπιχείρησι 8 μῆνες. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἔγινε αὐτό, πρέπει τὸ κέρδος νὰ μοιρασθῇ ἀνάλογα μὲ τὸ χρόνο ποὺ ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι τὸ κεφάλαιο τοῦ καθενός. Ὁ α' ἔμπορος θὰ πάρη ἀνάλογο κέρδος γιὰ 3 μῆνες, ὁ β' θὰ πάρη γιὰ 5 μῆνες καὶ ὁ γ' θὰ πάρη γιὰ 8 μῆνες.

Δηλαδὴ τὸ πρόβλημα ἐδῶ εἶναι πρόβλημα μερισμοῦ. Τὸ κέρδος θὰ μοιρασθῆ σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 5 καὶ 8

Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

3+5+8=16	7.200.000 : 16=450.000	
Κέρδος τοῦ α'	450.000×3=1.350.000	δραχ.
» » β'	450.000×5=2.250.000	»
» » γ'	450.000×8=3.600.000	»
	Σύνολον 7.200.000	»

2ον Πρόβλημα.—Ἕνας ἔμπορος διέθεσε ἕνα κεφάλαιο καὶ ἔκαμε μιὰ ἐπιχείρησι. Ἔπειτα ἀπὸ 5 μῆνες ἐπῆρε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο κεφάλαιο. Μετὰ 4 μῆνες ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἐπῆρε τὸν πρῶτο συνεταῖρο, παίρνει καὶ ἄλλον συνεταῖρο μὲ τὸ ἴδιο κεφάλαιο. Μετὰ $1\frac{1}{2}$ ἔτος ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησις, ἔκαμαν λογαριασμὸ καὶ εἶδαν ὅτι εἶχαν κερδίσει 36.000.000 δραχμές. Πόσο πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;

Λύσις.—Τὰ χρήματα τοῦ πρώτου ἐμπόρου ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι $1\frac{1}{2}$ ἔτος, δηλ, 18 μῆνες. Ὁ δεύτερος ἔμπορος ἔγινε συνεταῖρος μετὰ 5 μῆνες. Ἄρα τὰ χρήματά του ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 13 μῆνες. Ὁ τρίτος συνεταῖρος ἐμπῆκε στὴν ἐπιχείρησι 4 μῆνες μετὰ τὸν δεύτερο, δηλ. 9 μῆνες ἔπειτα ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησις. Ἄρα τὰ χρήματά του ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 9 μῆνες.

Ἑπομένως, τὸ κέρδος θὰ μοιρασθῆ ἀνάλογα μὲ τὸν χρόνο ποὺ ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι κάθε κεφάλαιο, δηλ. 18 μῆνες, 13 μῆνες καὶ 9 μῆνες.

Γιὰ νὰ λύσωμε λοιπὸν τὸ πρόβλημα, θὰ μοιράσωμε τὸ κέρδος ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 18, 13 καὶ 9.

Κάμετε σεῖς τὶς πράξεις, γιὰ νὰ εὕρετε τὸ κέρδος κάθε συνεταίρου.

3ον Πρόβλημα.—Ἕνας βιβλιοπώλης ἔπειτα ἀπὸ μερικοὺς μῆνες ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄνοιξε τὸ κατάστημά του ἐπῆρε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο μ' αὐτὸν κεφάλαιο. Μετὰ ἕνα ἔτος ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἔγινε τὸ κατάστημα ἐλογαριάσθησαν καὶ εἶδαν ὅτι ἐκέρδισαν 6.400.000 δραχμές. Τὸ κέρδος τοῦ δευτέρου συνεταίρου ἦταν 2.560.000 δραχμὲς γιὰ ὅσους μῆνες ἦταν στὴν ἐπιχείρησι. Πόσους μῆνες ἀργότερα ἐμπῆκε στὴν ἐπιχείρησι ; Πόσο ἦταν τὸ κέρδος τοῦ πρώτου ;

Λύσις.—Ἐὰν ἀπὸ τὸ ὅλο κέρδος ἀφαιρέσωμε τὸ κέρδος τοῦ δευτέρου, θὰ μείνῃ τὸ κέρδος τοῦ πρώτου, δῆλαδὴ 6.400.000—2.560.000=3.840.000. Τὰ χρήματα τοῦ πρώτου ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι ἕνα ἔτος (δηλ. 12 μῆνες) καὶ ἔδωσαν κέρδος 3.840.000 δρχ. Πόσον χρόνο πρέπει νὰ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι τὰ χρήματα τοῦ δευτέρου, ἀφοῦ ἔδωσαν κέρδος 2.560.000 δραχ. ; Θὰ τὸ εὕρωμε μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν.

Θὰ ἔχωμε :

στοὺς	12	μῆνες	3.840.000	κέρδος
»	Χ	»	2.560.000	»

$$Χ = 12 \times \frac{2.560.000}{3.840.000} = \frac{12 \times 256}{384} = 8 \text{ μῆνες}$$

Ἀφοῦ τὸ κεφάλαιο τοῦ β΄ συνεταίρου ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι 8 μῆνες, ὁ ἄνθρωπος αὐτὸς ἐμπῆκε στὴν ἐπιχείρησι μετὰ 4 μῆνες.

4) Τέσσαρες ἔμποροι ἔκαμαν ἐπιχείρησι μὲ ἴσο κεφάλαιο ὁ καθένας. Ὁ α΄ ἦταν στὴν ἐπιχείρησι 4 μῆνες, ὁ β΄ ἦταν 7 μῆνες, ὁ γ΄ ἦταν 12 μῆνες καὶ ὁ δ΄ ἦταν 15 μῆνες. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ἐζημιώθηκαν 1.900.000 δραχμές. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα ;

5) Ἕνας ἄνθρωπος ἄνοιξε παντοπωλεῖο. Μετὰ μερικοὺς μῆνες ἐπῆρε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο κεφάλαιο. Μετὰ 10 μῆνες ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 10.200.000 δραχμές. Τὸ κέρδος τοῦ πρώτου ἦταν 6.800.000 δραχμές. Πόσο εἶναι τὸ κέρδος τοῦ β΄ καὶ μετὰ πόσους μῆνες ἐμπῆκε στὴν ἐπιχείρησι ;

Γ΄ Περίπτωσις : Κεφάλαια διάφορα, χρόνος ἴσος

1ον Πρόβλημα.—Δύο ἔμποροι διέθεσαν ὁ ἕνας 5.000.000 δραχ. καὶ ὁ ἄλλος 9.000.000 δραχ. γιὰ μιὰ ἐμπορικὴ ἐργασία καὶ ἐκέρδισαν 8.400.000 δραχμές. Πόσο θὰ πάρῃ καθένας ;

Λύσις.—Τὸ κέρδος 8.400.000 δραχμὲς θὰ μοιρασθῆ ἀνάλογα μὲ τὸ κεφάλαιο κάθε συνεταίρου, δηλ. ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 5.000.000 καὶ 9.000.000.

Ἂς τὰ γράψωμε ὅλα στὴ σειρά.

Κεφ. τοῦ α΄ 5.000.000+κεφ. τοῦ β΄ 9.000.000=14.000.000

εταιρικό κεφάλαιο. Κέρδος τῶν κεφαλαίων 8.400.000 δραχ.

Σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα τοῦ μερισμοῦ, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν μεριστέον ἀριθμὸ 8.400.000 μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους ἀριθμοὺς—δηλ. 5.000.000 καὶ 9.000.000—καὶ θὰ διαιρέσωμε διὰ 14.000.000.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

Ὁ α′ θὰ πάρῃ:

$$\frac{8.400.000 \times 5.000.000}{14.000.000} = \frac{8.400.000 \times 5}{14} = 3.000.000 \text{ δραχ.}$$

Ὁ β′ θὰ πάρῃ:

$$\frac{8.400.000 \times 9.000.000}{14.000.000} = \frac{8.400.000 \times 9}{14} = 5.400.000 \text{ δραχ.}$$

Σύνολον 8.400.000 δραχ.

2ον Πρόβλημα.—Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρεία καὶ κατέθεσαν τὰ ἑξῆς κεφάλαια: Ὁ α′ 20 ἑκατομμύρια δραχμές, ὁ β′ 40 ἑκατομ. δραχ. καὶ ὁ τρίτος 60 ἑκατομ. δραχ. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι ποὺ ἔκαμαν ἐκέρδισαν 36 ἑκατομμύρια δραχμές. Πόσο θὰ πάρῃ ὁ καθένας;

Λύσις.—Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸ κέρδος τῶν 36 ἑκατ. δραχ. πρέπει νὰ μοιρασθῇ ἀνάλογα μὲ τὸ κεφάλαιο ποὺ κατέθεσε καθένας. Βλέπομε ὅτι τὸ κεφάλαιο τοῦ β′ εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ κεφάλαιο τοῦ α′. Καὶ τὸ κεφάλαιο τοῦ γ′ εἶναι τριπλάσιο ἀπὸ τὸ κεφάλαιο τοῦ α′. Ἑπομένως τὸ κέρδος πρέπει νὰ μοιρασθῇ ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2 καὶ 3 (δηλ. μονό, διπλάσιο καὶ τριπλάσιο, ἄρα καὶ μονό, διπλάσιο καὶ τριπλάσιο μερίδιο κέρδους).

Θὰ ἔχωμε λοιπὸν νὰ κάνωμε πρᾶξι ἁπλοῦ μερισμοῦ:

$1 + 2 + 3 = 6$ $36 : 6 = 6$ ἑκατομ.

Ἑπομένως ὁ α′ θὰ πάρῃ $6 \times 1 = 6$ ἑκατομ. δραχ.

ὁ β′ » » $6 \times 2 = 12$ » »

ὁ γ′ » » $6 \times 3 = 18$ » »

Σύνολον 36

3ον Πρόβλημα.—Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἔβαλαν ὁ α′ 60 πρόβατα, ὁ β′ 96 πρόβατα καὶ ὁ γ′ 124 πρόβατα καὶ ἔκαμαν ἑταιρεία. Μετὰ ἕνα ἔτος ἐκέρδισαν ἀπὸ τὴν πώλησι τῶν προϊόντων 36.400.000 δρχ. Πόσο πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας;

Λύσις.—Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸ κεφάλαιο κάθε συνεταίρου δὲν εἶναι δρχ., ἀλλὰ εἶναι πρόβατα. Εἶναι τὸ ἴδιο πρᾶγμα. Τὸ κέρδος θὰ μοιρασθῇ ἀναλόγως μὲ τὰ πρόβατα ποὺ ἔχει στὴν ἑταιρεία κάθε κτηνοτρόφος. Τὰ πρόβατα εἶναι:

$$60 + 96 + 124 = 280$$

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα μερισμοῦ καὶ θὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 36.400.000 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 60, 96 καὶ 124.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

$60 + 96 + 124 = 280$ $\qquad$ $36.400.000 : 280 = 130.000$

Ὁ α΄ θὰ πάρη	$130.000 \times 60 =$	7.800.000 δρχ.
Ὁ β΄ » »	$130.000 \times 96 =$	12.480.000 »
Ὁ γ΄ » »	$130.000 \times 124 =$	16.120.000 »
	Σύνολον	36.400.000 »

4) Δύο γεωργοὶ ἐνοικίασαν ἕνα ἀγρόκτημα. Γιὰ ἔξοδα καλλιεργείας καὶ ἐνοίκιο ἔδωσαν 2.400.000 δρχ. Ἀπὸ αὐτὲς ὁ α΄ γεωργὸς διέθεσε 1.600.000 δρχ. καὶ ὁ β΄ 800.000 δρχ. Σὲ ἕνα ἔτος ἐκέρδισαν ἀπὸ τὰ προϊόντα 7.200.000 δρχ. Πόσο θὰ πάρη ὁ καθένας;

5) Τρεῖς συνεταῖροι ἀγόρασαν μιὰ ἀλωνιστικὴ μηχανὴ καὶ ἔδωσαν ὁ α΄ 75 λίρες, ὁ β΄ 32 λίρες καὶ ὁ γ΄ 45 λίρες. Ἀπὸ τὸν ἀλωνισμὸ τῶν σιτηρῶν ποὺ ἔκαναν σὲ ἕνα καλοκαῖρι, ἐπῆραν 12.160 ὀκάδες σιτάρι. Πόσο σιτάρι πρέπει νὰ πάρη ὁ κάθε συνεταῖρος;

6) Δύο παιδάκια τῆς στ΄ τάξεως ἔκαμαν ἑταιρεία κ' ἐπωλοῦσαν φροῦτα τὸ καλοκαῖρι. Τὸ ἕνα διέθεσε 350.000 δρχ. καὶ τὸ ἄλλο διέθεσε 230.000 δρχ. Ἀπὸ τὴν ἐργασία τους αὐτὴ ἐκέρδισαν 1.740.000 δρχ. Πόσο πρέπει νὰ πάρη τὸ καθένα;

7) Τρία ἀδέλφια ἀγόρασαν ἕνα ἐλαιοτριβεῖο. Ὁ α΄ διέθεσε 8 ἑκατομμύρια δρχ., ὁ β΄ 3 ἑκατομμύρια καὶ ὁ γ΄ 5 ἑκατομ. δρχ. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ἐκέρδισαν σὲ ἕνα ἔτος 1.440 ὀκάδες λάδι. Πόσο λάδι θὰ πάρη ὁ καθένας.

Δ΄ Περίπτωσις: Κεφάλαιο καὶ χρόνος διάφορα

Πρόβλημα.— Ἕνας ἔμπορος ἄνοιξε κατάστημα ψιλικῶν καὶ διέθεσε γι' αὐτὸ 100 λίρες. Μετὰ 4 μῆνες παίρνει συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος διέθεσε 175 λίρες καὶ μετὰ 2 μῆνες ἀκόμη παίρνει καὶ ἄλλον συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος διέθεσε 125 λίρες. Μετὰ ἕνα ἔτος ἀπὸ τότε ποὺ ἄνοιξε τὸ κατάστημα ἔκαναν λογαριασμὸ καὶ εἶδαν ὅτι ἐκέρδισαν 268 λίρες. Πόσο πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;

Λύσις.— Στὸ πρόβλημα αὐτὸ βλέπομε ὅτι εἶναι διάφορα καὶ τὰ κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι ποὺ ἔμειναν τὰ κεφάλαια αὐτὰ στὴν ἐπιχείρησι. Τὸ κεφάλαιο τῶν 100 λιρῶν τοῦ α' ἐμπόρου ἔμεινε ἕνα ἔτος, δηλ. 12 μῆνες. Ὁ ἄλλος ἔμπορος ἔγινε συνεταῖρος μετὰ 4 μῆνες. Ἄρα οἱ 175 λίρες ποὺ διέθεσε ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 8 μῆνες. Ὁ τρίτος ἔμπορος ἔγινε συνεταῖρος μετὰ 2 μῆνες ἀκόμη, δηλ. μετὰ 6 μῆνες ἀργότερα ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄνοιξε τὸ κατάστημα. Ἄρα οἱ 125 λίρες ποὺ διέθεσε ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 6 μῆνες. Τὸ κέρδος τοῦ καταστήματος αὐτοῦ σὲ 12 μῆνες εἶναι 268 λίρες. Τὸ κέρδος αὐτὸ πρέπει νὰ μοιρασθῆ ἀνάλογα μὲ τὰ κεφάλαια καὶ μὲ τὸν χρόνο ποὺ κάθε κεφάλαιο ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, θὰ χωρίσωμε τὸ κέρδος τῶν 268 λιρῶν σὲ μερίδια. Θὰ ὑποθέσωμε ὅτι 1 λίρα κεφάλαιο ἔχει σὲ 1 μῆνα κέρδος ἕνα μερίδιο.

Ὁ πρῶτος ἔμπορος κατέθεσε στὴν ἐπιχείρησι 100 λίρες. Θὰ πάρη λοιπὸν σὲ 1 μῆνα 100 μερίδια. Ἐπειδὴ ὅμως κατέθεσε 100 λίρες σὲ 12 μῆνες, θὰ πάρη $100 \times 12 = 1.200$ μερίδια. Ὁ δεύτερος ποὺ κατέθεσε 175 λίρες σὲ 8 μῆνες θὰ πάρη $175 \times 8 = 1.400$ μερίδια. Καὶ ὁ τρίτος θὰ πάρη $125 \times 6 = 750$ μερίδια. Ἑπομένως τὸ κέρδος τῶν 268 λιρῶν θὰ χωρισθῆ σὲ $1.200 + 1.400 + 750 = 3.350$ μερίδια. Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ 3.350 μερίδια εἶναι 268 λίρες, τὸ 1 μερίδιο θὰ εἶναι $268 : 3.350 = \frac{268}{3.350}$ λίρες.

Εὑρήκαμε λοιπὸν ὅτι τὸ 1 μερίδιο εἶναι $\frac{268}{3.350}$ λίρες. Ὁ πρῶτος εἴπαμε ὅτι θὰ πάρη 1.200 μερίδια, δηλ. $\frac{268}{3.350} \times 1.200$· ὁ δεύτερος θὰ πάρη 1.400 μερίδια, δηλ. $\frac{268}{3.350} \times 1.400$· καὶ ὁ τρίτος θὰ πάρη 750 μερίδια, δηλ. $\frac{268}{3.350} \times 750$. Τὸ πρόβλημα ἐλύθηκε.

Θὰ κάνωμε τὶς πράξεις καὶ θὰ εὕρωμε πόσες λίρες θὰ πάρη ὁ καθένας.

Ἂς καταστρώσωμε τώρα τὸ πρόβλημα ἀπὸ τὴν ἀρχή.

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε προηγουμένως, θὰ ἔχωμε:

Κέρδος 268 λίρες.

Ὁ α′ ἔμπορος	$100 \times 12 = 1.200$	μερίδια	
Ὁ β′ »	$175 \times 8 = 1.400$	»	
Ὁ γ′ »	$125 \times 6 = 750$	»	
Σύνολον	3.350	»	

Τὸ κέρδος 268 λίρες γίνεται 3.350 μερίδια, δηλαδὴ $268 : 3.350 = \frac{268}{3.350}$ εἶναι τὸ 1 μερίδιο. Ἑπομένως:

Τὸ κέρδος τοῦ α′ ἐμπόρου εἶναι $\frac{268 \times 1.200}{3.350} = \frac{321.600}{3.350} = 96$ λίρες.

» » » β′ » » $\frac{268 \times 1.400}{3.350} = \frac{375.200}{3.350} = 112$ »

» » » γ′ » » $\frac{268 \times 750}{3.350} = \frac{201.000}{3.350} = 60$ »

Συνολικὸ κέρδος 268

Προβλήματα

1) Ἕνα παιδὶ διέθεσε 350.000 δρχ. καὶ ἔκανε ἐμπόριο σταφυλιῶν τὸ καλοκαίρι. Μετὰ 2 μῆνες ἐπῆρε γιὰ συνεταῖρο ἕνα ἄλλο παιδὶ ποὺ διέθετε 700.000 δρχ. Στοὺς 6 μῆνες ἐκέρδισαν 2.450.000 δρχ. Πόσο πρέπει νὰ πάρῃ κάθε παιδί;

2) Τρεῖς σωφὲρ διέθεσαν τὰ ἑξῆς ποσὰ καὶ ἀγόρασαν αὐτοκίνητα: Ὁ α′ διέθεσε 240 λίρες, ὁ β′ 190 λίρες καὶ ὁ γ′ 150 λίρες. Ἡ ἑταιρεία αὐτὴ ἐργάσθηκε 5 χρόνια καὶ κατόπιν διελύθη. Ὁ πρῶτος σωφὲρ ἔμεινε στὴν ἑταιρεία 4 χρόνια. Οἱ ἄλλοι δύο ἔμειναν 5 χρόνια. Τὰ κέρδη τῆς ἑταιρείας σὲ 5 χρόνια ἦταν 66.500.000 δρχ. Πόσο θὰ πάρῃ ὁ καθένας;

3) Δύο κτηνοτρόφοι συνεταιρίσθηκαν καὶ ἔβαλαν ὁ α′ 170 πρόβατα καὶ ὁ β′ 240 πρόβατα. Μετὰ 1 ἔτος ἐπῆραν καὶ τρίτο συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος εἶχε 320 πρόβατα. Στὰ 3 χρόνια ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄρχισε ὁ συνεταιρισμός των ἐλογαριάσθηκαν καὶ εὑρῆκαν ὅτι ἐκέρδισαν 74.800.000 δρχ. Πόσο θὰ πάρῃ ὁ καθένας;

4) Ἕνας ἔμπορος διέθεσε 65.000.000 δρχ. καὶ ἄνοιξε κατάστημα ὑφασμάτων. Μετὰ 1 ἔτος ἐπῆρε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος διέθεσε 43.000.000 δρχ. Μετὰ 4 ἔτη ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄνοιξε τὸ κατάστημα εἶχαν ζημιωθῆ 27.000.000 δρχ. Πόσο ἀναλογεῖ στὸν καθένα ἡ ζημία αὐτή;

5) Τρεῖς ἐργάτες ἐργάσθησαν μαζὶ κ' ἐπῆραν 1.032.000 δρχ. Ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 8 ἡμέρες ἐπὶ 9 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ὁ δεύτερος 12 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὁ τρίτος 15 ἡμέρες ἐπὶ 6 ὧρες τὴν ἡμέρα. Πόσο θὰ πάρῃ ὁ καθένας;

6) Δύο βοσκοὶ ἐνοικίασαν ἕνα λιβάδι κ' ἔδωσαν 1.155.000 δρχ. Ὁ α′ βοσκὸς ἐβόσκησε 160 πρόβατα ἐπὶ 5 μῆνες. Ὁ δεύτερος βοσκὸς

ἐβόσκησε 230 πρόβατα ἐπὶ 7 μῆνες. Πόσο θὰ πληρώση ὁ καθένας;

7) Δύο φίλοι διέθεσαν ὁ πρῶτος 350 λίρες καὶ ὁ δεύτερος 280 λίρες καὶ ἔκαμαν μιὰ ἐπιχείρησι. Μετὰ 1,5 ἔτος ἐπῆραν καὶ ἄλλον συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος διέθεσε 420 λίρες. Σὲ πέντε χρόνια ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἔδωσε κέρδη 1.155 λίρες. Πόσο θὰ πάρη ὁ καθένας;

Ἀνακεφαλαίωσις

Τὰ προβλήματα ἑταιρείας τὰ διαιρέσαμε σὲ 4 περιπτώσεις:

Στὴν πρώτη περίπτωσι τὰ κεφάλαια καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἴσα. Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα αὐτὰ διαιροῦμε τὸ κέρδος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνεταίρων. Π. χ. 20.000 δρχ. κέρδος σὲ 4 συνεταίρους: 20.000 : 4 = 5.000.

Στὴ δεύτερα περίπτωσι τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα καὶ ὁ χρόνος διάφορος. Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα αὐτὰ μερίζομε τὸ κέρδος σὲ μέρη ἀνάλογα μὲ τὸν χρόνο.

Στὴν τρίτη περίπτωσι τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἴσος. Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τῆς περιπτώσεως αὐτῆς μερίζομε τὸ κέρδος σὲ μέρη ἀνάλογα μὲ τὰ κεφάλαια.

Στὴν τετάρτη περίπτωσι τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ ὁ χρόνος εἶναι διάφορος. Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τῆς περιπτώσεως αὐτῆς πολλαπλασιάζομε κάθε κεφάλαιο ἐπὶ τὸν χρόνο ποὺ ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι. Ἔτσι τὸ πρόβλημα γίνεται πρόβλημα τρίτης περιπτώσεως καὶ γι᾽ αὐτὸ μερίζομε τὸ κέρδος σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν ποὺ εὑρίσκομε, ὅταν θὰ πολλαπλασιάσωμε κάθε κεφάλαιο ἐπὶ τὸν χρόνο.

Κεφάλαιον Η΄

Προβλήματα μέσου ὅρου

1ον Πρόβλημα.—Ἕνα παιδὶ ἐργάζεται σ᾽ ἕνα κουρεῖο γιὰ νὰ μάθη τὴν τέχνη. Ὅπως ξέρετε, τὸ παιδὶ κάθε κουρείου ξεσκονίζει στὸ τέλος τοὺς πελάτες μὲ τὴ βούρτσα κι αὐτοὶ τοῦ δίδουν ὀλίγα χρήματα γιὰ φιλοδώρημα. Ἀπὸ τὰ φιλοδωρήματα αὐτὰ τὸ παιδὶ τοῦ κουρείου σὲ μιὰ ἑβδομάδα εἰσέπραξε τὰ ἑξῆς χρηματικὰ ποσά: Τὴ Δευτέρα 1.850 δρχ., τὴν Τρίτη 2.800 δρχ., τὴν Τετάρτη 3.950 δρχ., τὴν

Πέμπτη 3.100 δρχ., τὴν Παρασκευὴ 2.350 δρχ. καὶ τὸ Σάββατο 6.350 δρχ. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε τὸ παιδὶ αὐτὸ σ' αὐτὲς τὶς 6 ἡμέρες; Τὰ χρήματα αὐτὰ πόσο ἀναλογοῦν σὲ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς 6 ἡμέρες;

Λύσις.—Θὰ προσθέσωμε τὰ ποσὰ ποὺ ἐπῆρε τὸ παιδὶ σὲ ὅλες τὶς ἡμέρες τῆς ἑβδομάδος γιὰ νὰ ἰδοῦμε πόσα χρήματα εἶναι.

Ἔχομε:

Δευτέρα	1.850	δρχ.
Τρίτη	2.800	»
Τετάρτη	3.950	»
Πέμπτη	3.100	»
Παρασκευὴ	2.350	»
Σάββατο	6.350	»
	20.400	»

Στὶς 6 ἡμέρες τὸ παιδὶ ἐπῆρε 20.400 δρχ. Στὴ μιὰ ἡμέρα πόσες δρχ. ἀναλογοῦν; Θὰ κάνωμε διαίρεσι.

$$20.400 : 6 = 3.400 \text{ δρχ.}$$

Τὸ παιδὶ αὐτὸ ἐργάσθηκε 6 ἡμέρες. Ἀπὸ τὰ φιλοδωρήματα τῶν 6 αὐτῶν ἡμερῶν ἐπῆρε 20.400 δρχ. Ὅπως βλέπετε, τὸ ποσὸν ποὺ ἔπαιρνε κάθε μέρα δὲν εἶναι τὸ ἴδιο. Τὴ μιὰ ἡμέρα ἐπῆρε 1.850 δρχ., τὴν ἄλλη 2.800 δρχ. κλπ. καὶ στὶς 6 ἡμέρες ἐπῆρε 20.400 δρχ. Τὸ ποσὸν αὐτὸ τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, δηλ. διὰ τοῦ 6, καὶ εὑρήκαμε ὅτι τὸ παιδὶ ποὺ ἐπῆρε στὶς 6 ἡμέρες 20.400 δρχ. ἦταν σὰν νὰ ἔπαιρνε 3.400 δρχ. τὴν ἡμέρα.

Τὸ ποσὸν αὐτὸ τῶν 3.400 δρχ. λέγεται ***μέσος ὅρος*** τῶν εἰσπράξεων τοῦ παιδιοῦ σὲ 6 ἡμέρες.

Ἂν ἕνα ἄλλο παιδὶ ποὺ ἐργάζεται σὲ κουρεῖο θὰ πάρη στὶς 6 ἡμέρες 37.200 δρχ., ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσπράξεων τοῦ παιδιοῦ αὐτοῦ θὰ εἶναι 6.200 δρχ. τὴν ἡμέρα, γιατὶ

$$37.200 : 6 = 6.200 \text{ δρχ.}$$

2ον Πρόβλημα.—Ἕνας οἰκογενειάρχης γιὰ τὴν συντήρησι τῆς οἰκογενείας του ἐξώδευσε σὲ ἕνα μῆνα τὰ ἑξῆς ποσά: Τὴν 1 τοῦ μηνὸς 8.700 δρχ., τὴν 2 τοῦ μηνὸς 15.000 δρχ., τὴν 3 τοῦ μηνὸς 12.500 δρχ. κτλ. Τὸ βράδυ τῆς 30 τοῦ μηνὸς ἔκαμε λογαριασμὸ καὶ εὑρῆκε ὅτι εἶχε ἐξοδεύσει 435.000 δρχ. Ποιὸς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν ἐξόδων τοῦ ἀνθρώπου αὐτοῦ σὲ μιὰ ἡμέρα;

Λύσις.—Ἀφοῦ στὶς 30 ἡμέρες ποὺ ἔχει ὁ μῆνας τὰ ἔξοδα ἦσαν 435.000 δρχ., στὴ μιὰ ἡμέρα τί ποσὸν ἀναλογεῖ ; Θὰ κάνωμε διαίρεσι. Θὰ ἔχωμε :

435.000 : 30 = 14.500 δρχ.

Ἄρα ὁ μέσος ὅρος τῶν ἐξόδων εἶναι 14.500 δρχ. τὴν ἡμέρα.

3ον Πρόβλημα. — Ἕνας μαθητὴς τῆς τάξεώς σας ἐπῆρε τοὺς ἑξῆς βαθμοὺς στὸ τέλος τοῦ ἔτους : Ἑλληνικὰ 8, Ἀριθμητικὴ 10, Θρησκευτικὰ 9, Ἱστορία 8, Φυσικὴ 10, Γεωγραφία 10, Φυσ. Πειραματικὴ 9, Χειροτεχνία 9, Ἰχνογραφία 8, Καλλιγραφία 8, Ὠδικὴ 10 καὶ Γυμναστικὴ 9. Ποιὸς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ ;

Λύσις.—Θὰ προσθέσωμε τοὺς βαθμοὺς τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ καὶ θὰ διαιρέσωμε τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ φανερώνει πόσα εἶναι ὅλα τὰ μαθήματα.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

$$8 + 10 + 9 + 8 + 10 + 10 + 9 + 9 + 8 + 8 + 10 + 9 = 108.$$

Τὰ μαθήματα εἶναι 12, ἑπομένως : 108 : 12 = 9 μέσος ὅρος.

Ἂς κάνωμε τώρα μερικὲς παρατηρήσεις : Στὸ α΄ πρόβλημα ἔχομε τὰ ποσὰ τῶν χρημάτων ποὺ παίρνει τὸ παιδὶ τοῦ κουρείου στὶς 6 ἡμέρες. Ἐπροσθέσαμε τὰ ποσὰ τῶν χρημάτων καὶ διαιροῦμε τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσ[illegible]ως αὐτῆς εἶναι ὁ μέσος ὅρος ποὺ ζητοῦμε.

Στὸ β΄ πρόβλημα ἔχομε τὸ συνολικὸ ποσὸν τῶν χρημάτων ποὺ ἐξοδεύει ὁ ἄνθρωπος αὐτὸς σὲ 30 ἡμέρες. Διαιροῦμε τὸ ποσὸν αὐτὸ διὰ τοῦ 30 καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ὁ μέσος ὅρος ποὺ ζητοῦμε.

Στὸ γ΄ πρόβλημα προσθέτομε τοὺς βαθμοὺς καὶ διαιροῦμε τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων. Τὸ πηλίκον εἶναι ὁ μέσος ὅρος ποὺ ζητοῦμε. Δηλαδή, στὰ προβλήματα αὐτὰ ἔχομε 2 ἢ περισσότερα ὁμοειδῆ ποσά. Προσθέτομε τὰ ποσὰ αὐτὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὁμοειδῶν ποσῶν. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς λέγεται μέσος ὅρος αὐτῶν τῶν ὁμοειδῶν ποσῶν.

Τὰ προβλήματα τοῦ μέσου ὅρου εἶναι πολὺ χρήσιμα γιὰ τὴν ζωή.

Προβλήματα

1) Ἕνας μαθητὴς στὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς ἐπῆρε 7 στὰ

γραπτὰ καὶ 8 στὰ προφορικά. Ποιὸς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας του στὸ μάθημα αὐτό ;

2) Ἕνα ἐργοστάσιο καλτσῶν στοὺς 3 πρώτους μῆνες τοῦ ἔτους κατεσκεύασε 9.600 ζεύγη κάλτσες. Στοὺς 5 ἄλλους μῆνες 1.680 ζεύγη καὶ στοὺς ὑπόλοιπους 4 μῆνες 9.800 ζεύγη. Πόσα ζεύγη κάλτσες κατὰ μέσον ὅρον βγάζει τὸν μῆνα τὸ ἐργοστάσιο αὐτό ;

3) Ἕνας γεωργὸς εἶχε τρία χωράφια. Ἀπὸ τὸ ἕνα ποὺ ἦταν 12 στρέμματα ἔκαμε 1.800 ὀκ. σιτάρι. Ἀπὸ τὸ ἄλλο ποὺ ἦταν 7 στρέμματα ἔκαμε 840 ὀκ. σιτάρι καὶ ἀπὸ τὸ τρίτο ποὺ ἦταν 4 στρέμματα ἔκαμε 488 ὀκάδες σιτάρι. Πόσες ὀκάδες σιτάρι κατὰ μέσον ὅρο ἔκαμε ἀπὸ κάθε στρέμμα ὅλων αὐτῶν τῶν χωραφιῶν ;

4) Ἕνας ἐργάτης τὴν α' ἡμέρα παίρνει ἡμερομίσθιο 35.000 δρχ., τὴν β' ἡμέρα παίρνει 28.000 δρχ. καὶ τὴ γ' ἡμέρα παίρνει 42.000 δρχ. Πόσο εἶναι τὸ ἡμερομίσθιο τοῦ ἐργάτη αὐτοῦ κατὰ μέσον ὅρον στὶς ἡμέρες αὐτές ;

5) Ἕνας αὐγοπώλης ἐπώλησε 38 αὐγὰ μὲ 650 δραχ. τὸ ἕνα, 25 αὐγὰ μὲ 750 δρχ. τὸ ἕνα καὶ 4 αὐγὰ μὲ 900 δρχ. τὸ ἕνα. Πόσα χρήματα ἐπῆρε ἀπὸ ὅλα τὰ αὐγὰ καὶ ποιὸς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς τιμῆς πωλήσεως τοῦ ἑνὸς αὐγοῦ ;

6) Σὲ μιὰ πόλι ἐγεννήθηκαν στοὺς 3 πρώτους μῆνες τοῦ ἔτους 247 παιδιά, στοὺς ἄλλους 7 μῆνες 475 παιδιὰ καὶ στοὺς τελευταίους 2 μῆνες 178 παιδιά. Πόσα παιδιὰ κατὰ μέσον ὅρον ἐγεννήθηκαν τὸν μῆνα ;

Κεφάλαιον Θ'

Προβλήματα μίξεως

Ὁ Νῖκος πηγαίνει μὲ τὸν πατέρα του στὸ παντοπωλεῖο γιὰ νὰ ἀγοράσουν λάδι. Ὁ πατέρας ἐρωτᾷ τὸν μπακάλη: «*Ἔχετε καλὸ λάδι ;*» Ὁ μπακάλης ἀπαντᾷ : «*Μάλιστα, ἔχομε. Τὸ λάδι τῆς πρώτης ποιότητος ἔχει 9.600 δρχ. ἡ ὀκὰ καὶ τὸ λάδι τῆς δευτέρας ποιότητος ἔχει 8.400 δρχ. ἡ ὀκά. Ἀπὸ ποιὸ θέλετε, κύριε ;*» Ὁ πατέρας ἀγοράζει 2 ὀκάδες λάδι δευτέρας ποιότητος πρὸς 8.400 δρχ τὴν ὀκά, πληρώνει, τὸ παίρνουν καὶ φεύγουν.

Ὅταν ἔφυγαν ἀπὸ τὸ μαγαζί, ἐρώτησε ὁ Νῖκος τὸν πατέρα του : «*Γιατί, πατέρα, ἐπροτιμήσαμε τὸ λάδι ποὺ ἔχει 8.400 δρχ. ἡ ὀκὰ καὶ δὲν ἐπήραμε ἀπὸ τὸ ἄλλο; Γιατί ὑπάρχει αὐτὴ ἡ διαφορὰ στὴν τιμή ;*»

Ὁ πατέρας ἀπαντᾷ : «*Δὲν ἐπήραμε ἀπὸ τὸ λάδι τῆς α'* *ποιότητος, γιατὶ εἶναι πολὺ ἀκριβό. Τῆς β' ποιότητος εἶναι φθηνότερο καὶ γι' αὐτὸ ἐπήραμε ἀπὸ αὐτό.»*

Ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς εἶναι γιατὶ τὸ ἕνα λάδι εἶναι καλύτερο ἀπὸ τὸ ἄλλο, δηλ. ὑπάρχει διαφορὰ ποιότητος καί, ὅταν ὑπάρχει διαφορὰ ποιότητος, ὑπάρχει διαφορὰ καὶ στὴν τιμή. Τὸ φθηνότερο ἐξοδεύεται εὐκολώτερα ἀπὸ τὸ ἀκριβώτερο.

Σὲ ὅλα τὰ ἐμπορεύματα ὑπάρχει διαφορὰ στὴν ποιότητα καὶ ἑπομένως καὶ διαφορὰ στὴν τιμή. Π. χ. ὑπάρχει καφὲς ἁγνός, πρώτης ποιότητος. Ὑπάρχει ὅμως καὶ καφὲς ποὺ ἔχει μέσα σιτάρι ἢ ρεβίθι. Ὁ καφὲς αὐτὸς εἶναι κατωτέρας ποιότητος καὶ γι' αὐτὸ εἶναι φθηνότερος. Ἐπίσης ὑπάρχει βούτυρο ἁγνό, πρώτης ποιότητος καὶ βούτυρο δευτέρας ποιότητος, ποὺ ἔχει μέσα ἀρκετὸ λίπος. Ἐπίσης ὑπάρχει τυρὶ ἁγνό, ὁλόπαχο. Αὐτὸ εἶναι πρώτης ποιότητος. Ὑπάρχει ὅμως καὶ τυρὶ δευτέρας καὶ τρίτης ποιότητος, ποὺ δὲν εἶναι ὁλόπαχο. Τὸ ἐμπόρευμα τῆς καλῆς, τῆς πρώτης ποιότητος, εἶναι ἀκριβώτερο καὶ δύσκολα τὸ ἐξοδεύει ὁ ἔμπορος. Τὸ ἐμπόρευμα ὅμως τῆς δευτέρας ἢ τρίτης ποιότητος εἶναι φθηνότερο κ' ἐξοδεύεται εὔκολα.

Πολλὲς φορὲς οἱ ἔμποροι, ἐπειδὴ δὲν ἠμποροῦν εὔκολα νὰ ἐξοδεύσουν τὸ ἐμπόρευμα τῆς πρώτης ποιότητος, γιατὶ εἶναι ἀκριβό, τὸ ἀνακατώνουν μὲ ἐμπόρευμα κατωτέρας ποιότητος, ποὺ εἶναι φθηνότερο καὶ τὸ πωλοῦν σὲ ἀνάλογη τιμὴ καὶ δὲν ζημιώνουν. Π. χ. ἕνας ἔμπορος ἔχει 10 ὀκάδες βούτυρο α' ποιότητος ποὺ ἀξίζει 38.000 δρχ. ἡ ὀκά. Ἐπειδὴ δὲν ἠμπορεῖ νὰ τὸ ἐξοδεύσῃ, τὸ ἀνακατώνει μὲ ἄλλες 10 ὀκάδες βούτυρο κατωτέρας ποιότητος ποὺ ἔχει 22.000 δρχ. ἡ ὀκά.

Τὸ βούτυρο τώρα ἔγινε 20 ὀκάδες. Οἱ 10 ὀκάδες τοῦ πρώτου βουτύρου ἀξίζουν 38.000 × 10 = 380.000 δρχ. καὶ οἱ 10 ὀκάδες τοῦ ἄλλου βουτύρου ἀξίζουν 22.000 × 10 = 220.000 δρχ., δηλαδὴ ἐν ὅλῳ 380.000 + 220.000 = 600.000 δρχ. Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ 20 ὀκάδες ἀνακατωμένο βούτυρο ἀξίζουν 600.000 δραχμές, πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴ μία ὀκὰ ὁ ἔμπορος;

Κάνομε διαίρεσι κ' εὑρίσκομε 600.000 : 20 = 30.000 δρχ. ὅτι πρέπει νὰ πωληθῇ ἡ μία ὀκὰ τοῦ ἀνακατωμένου βουτύρου.

Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸ ἡ τιμὴ κατεβαίνει καὶ τὸ ἐμπόρευμα πωλεῖται εὐκολώτερα, χωρὶς νὰ ζημιωθῇ ὁ ἔμπορος. Ὁ ἀνωτέρω ἔμπορος ἀνακάτωσε δύο εἴδη βουτύρου. Ἀπὸ τὸ ἀνακάτωμα αὐτὸ ἔγινε μιὰ νέα ποιότης βουτύρου. Τὸ ἀνακάτωμα αὐτὸ λέγεται *μῖξις*. Τὸ ἀνακατωμένο αὐτὸ ἐμπόρευμα λέγεται *μῖγμα*. Τὰ προβλήματα ποὺ εἶναι σχετικὰ μὲ τὴ μῖξι λέγονται *προβλήματα μίξεως*.

Τὰ προβλήματα μίξεως διαιροῦνται σὲ δύο εἴδη.

1. Πρῶτο εἶδος

Πρόβλημα.—Ἕνας παντοπώλης ἔχει δύο ποιότητες λάδι. Ἡ α' ποιότης εἶναι 80 ὀκάδες καὶ ἀξίζει 9.600 δρχ. ἡ ὀκά. Ἡ β' ποιότης εἶναι 120 ὀκάδες καὶ ἀξίζει 8.000 ἡ ὀκά. Τὸ λάδι αὐτὸ τὸ ἀνέμιξε. Πόσο ἀξίζει ἡ μιὰ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

Λύσις.— Οἱ 80 ὀκάδες λάδι τῆς α' ποιότητος πρὸς 9.600 δρχ. τὴν ὀκὰ κάνουν: $80 \times 9.600 = 768.000$ δρχ. Οἱ 120 ὀκάδες λάδι τῆς β' ποιότητος πρὸς 8.000 δρχ. τὴν ὀκὰ κάνουν: $120 \times 8.000 = 960.000$ δρχ. Ὅλο τὸ λάδι εἶναι $80 + 120 = 200$ ὀκάδες καὶ κάνει δρχ.:

$$768.000 + 960.000 = 1.728.000$$

Ἀφοῦ οἱ 200 ὀκάδες τοῦ μίγματος κάνουν 1.728.000 δρχ., ἡ μιὰ ὀκὰ τοῦ μίγματος πόσο κάνει; Θὰ κάνωμε διαίρεσι μερισμοῦ καὶ θὰ εὕρωμε ὅτι: $1.728.000 : 200 = 8.640$ δρχ. ἡ ὀκά.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἠμποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε ὅπως λύομε καὶ τὰ προβλήματα τοῦ μέσου ὅρου. Θὰ εἰποῦμε:

80 ὀκ. τῆς α' ποιότ. πρὸς 9.600 δρχ. ἀξίζουν	$80 \times 9.600 =$	768.000 δρχ.
120 » » β' » » 8.000 » »	$120 \times 8.000 =$	960.000 »
Οἱ 200 ὀκάδες τοῦ μίγματος ἀξίζουν ἐν ὅλῳ		1.728.000 δρχ.

Ἀφοῦ οἱ 200 ὀκάδες τοῦ μίγματος ἀξίζουν 1.728.000 δρχ., ἡ μία ὀκὰ ἀξίζει $1.728.000 : 200 = 8.640$ δρχ.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐκάναμε τὰ ἑξῆς πράγματα:

1) Εὑρήκαμε τὴν ὁλικὴ τιμὴ κάθε εἴδους (ποιότητος) χωριστά.

2) Ἐπροσθέσαμε ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος τὰ ποσὰ τῶν δύο εἰδῶν, δηλ. τὶς ὀκάδες καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἐπροσθέσαμε τὴν τιμὴ κάθε εἴδους. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκάδων εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ μί-

γματος. Τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν εἶναι ἡ ὁλικὴ τιμὴ τοῦ μίγματος.

3) Διαιρέσαμε τὴν ὁλικὴ τιμὴ διὰ τοῦ ποσοῦ τῶν ὀκάδων τοῦ μίγματος. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

Ἐπομένως :

Γιὰ νὰ λύσωμε προβλήματα μίξεως τοῦ α' εἴδους εὑρίσκομε πρῶτα χωριστὰ τὴν ὁλικὴ τιμὴ κάθε εἴδους. Κατόπιν προσθέτομε χωριστὰ τὰ ποσὰ τῶν εἰδῶν καὶ χωριστὰ τὶς τιμές των καὶ διαιροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν εἰδῶν. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος τοῦ μίγματος.

Προβλήματα

1) Ἕνας ἀλευρέμπορος ἀνέμιξε 180 ὀκάδες ἀλεύρι ἀξίας 3.500 δρχ. τὴν ὀκά, μὲ 120 ὀκάδες ἀλεύρι ἀξίας 4.500 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν μιὰ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

2) Ἕνας γεωργὸς ἀνέμιξε 200 ὀκάδες σιτάρι μὲ 100 ὀκάδες κριθάρι. Τὸ σιτάρι ἔχει 1.800 δρχ. ἡ ὀκὰ καὶ τὸ κριθάρι 1.200 δρχ. ἡ ὀκά. Πόσο ἀξίζει ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

3) Ἕνας ἔμπορος ἀνέμιξε 18 ὀκάδες βούτυρο μὲ 25 ὀκάδες λίπος. Τὸ βούτυρο ἀξίζει 35.000 δρχ. ἡ ὀκά. Τὸ λίπος ἀξίζει 12.000 δρχ. ἡ ὀκά. Πόσο ἀξίζει ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

4) Ἕνας οἰνοπώλης ἀνέμιξε 250 ὀκάδες κρασὶ ἀξίας 2.000 δρχ. τὴν ὀκά, μὲ 350 ὀκάδες κρασὶ ἀξίας 1.400 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν ὀκὰ τοῦ μίγματος;

5) Ἕνας οἰνοπνευματοποιὸς ἀνέμιξε 150 ὀκάδες οἰνόπνευμα 80° (βαθμῶν) μὲ 240 ὀκάδες οἰνόπνευμα 70°. Πόσων βαθμῶν θὰ εἶναι τὸ μῖγμα;

6) Ἕνας ἔμπορος εἶχε 120 ὀκάδες λάδι τῶν 7.500 δρχ. τὴν ὀκὰ καὶ 180 ὀκάδες λάδι τῶν 8.500 δρχ. τὴν ὀκά. Εἶχε ἐπίσης 100 ὀκάδες σπορέλαιο τῶν 6.000 δρχ. τὴν ὀκά. Ὅλα αὐτὰ τὰ λάδια τὰ ἔκαμε μῖγμα. Τὴν ὀκὰ τοῦ μίγματος τὴν ἐπώλησε 425 δρχ. ἐπὶ πλέον ἀπὸ τὴν ἀξία της. Πόσο ἀξίζει ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

7) Ἕνας γαλατὰς ἀνέμιξε 40 ὀκάδες γάλα ἀξίας 4.500 δρχ. τὴν ὀκά, μὲ 50 ὀκάδες γάλα ἀξίας 3.200 δρχ. τὴν ὀκά. Στὸ μῖγμα αὐτὸ ἔβαλε καὶ 10 ὀκάδες νερό. Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν ὀκὰ τοῦ μίγματος;

8) Ἕνας καφεπώλης σὲ 40 ὀκάδες καφὲ ἀλεσμένον, ἀξίας 45.000 δρχ. τὴν ὀκά, ἔβαλε 8 ὀκάδες κριθάρι καβουρδισμένο καὶ ἀλεσμένο

ἀξίας 2.500 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκὰ τοῦ μίγματος;

2. Δεύτερο εἶδος

Πρόβλημα.—Ἕνας ἔμπορος ἔχει δύο εἰδῶν ἀλεύρι. Τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκὰ ἀξίζει 5.600 δρχ. καὶ τοῦ δευτέρου εἴδους ἡ ὀκὰ ἀξίζει 3.200 δρχ. Θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 225 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ νὰ ἀξίζῃ 4.000 δρχ. Πόσες ὀκάδες πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος;

Λύσις.—Ἂν πωλήσῃ 1 ὀκὰ τοῦ α΄ εἴδους, θὰ πάρῃ 4.000 δρχ., δηλαδὴ θὰ χάσῃ 1.600 δρχ. Ἂν πωλήσῃ 1 ὀκὰ τοῦ β΄ εἴδους, θὰ πάρῃ ἐπίσης 4.000 δρχ., δηλαδὴ θὰ κερδίσῃ 800 δρχ. Καὶ ἂν πωλήσῃ 2 ὀκ. τοῦ β΄ εἴδους, θὰ κερδίσῃ $2 \times 800 = 1.600$ δρχ. Ὥστε ἂν πάρῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος 1 ὀκὰ καὶ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος 2 ὀκάδες, οὔτε κερδίζει οὔτε ζημιώνεται.

Ἂν λοιπὸν θὰ κάνῃ μῖγμα 3 ὀκάδων, πρέπει νὰ πάρῃ 1 ὀκὰ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος καὶ 2 ὀκάδες ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος. Ἑπομένως, γιὰ κάθε μῖγμα πρέπει νὰ πάρῃ 1 μερίδιο ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος καὶ 2 μερίδια ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος καί, ἐπειδὴ θέλει νὰ κάνῃ μῖγμα 225 ὀκάδων, πρέπει τὰ μερίδια νὰ εἶναι 1 καὶ 2. Δηλαδὴ πρέπει νὰ μερίσωμε τὸν ἀριθμὸ 225 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν, σύμφωνα μὲ ὅσα ἐμάθαμε στὸ κεφάλαιο περὶ μερισμοῦ:

Μερίδια $1 + 2 = 3$ Μῖγμα 225 ὀκάδες

Ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος $\frac{225 \times 1}{3} = \frac{225}{3} = 75$ »

» » β΄ » $\frac{225 \times 2}{3} = \frac{450}{3} = 150$ »

Σύνολον 225

Εὐκολώτερα, τὸ πρόβλημα αὐτό, ὅπως καὶ κάθε πρόβλημα τοῦ β΄ εἴδους, ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο:

1) Κάνομε ἕνα μεγάλο τετράγωνο, ὅπως δείχνει τὸ παρακάτω σχῆμα. Στὴ μέση τοῦ τετραγώνου γράφομε τὴν τιμὴ τοῦ μίγματος.

2) Στὴν ἐπάνω ἀριστερὴ γωνία γράφομε τὴν τιμὴ τοῦ α΄ εἴδους. Στὴν κάτω ἀριστερὴ γωνία γράφομε τὴν τιμὴ τοῦ β΄ εἴδους.

3) Στὴν ἐπάνω δεξιὰ γωνία γράφομε τὴ διαφορὰ τῆς τιμῆς τοῦ β΄ εἴδους καὶ στὴν κάτω δεξιὰ γωνία γράφομε τὴ διαφορὰ τῆς τιμῆς τοῦ α΄ εἴδους. Δηλαδὴ τὶς διαφορὲς τῶν τιμῶν τὶς γράφομε ἀντεστραμμένες.

4) Ὅταν γίνη τὸ σχῆμα αὐτὸ καὶ γραφοῦν οἱ τιμὲς καὶ οἱ διαφορὲς τῶν τιμῶν στὶς θέσεις ποὺ εἴπαμε, μερίζομε τὸ ποσὸν τῶν ὀκάδων τοῦ μίγματος εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν διαφορῶν τῶν τιμῶν. Προσέξετε ὅμως! Τὶς διαφορὲς τῶν τιμῶν θὰ τὶς πάρωμε ἀντίστροφα γιὰ κάθε εἶδος. Δηλαδὴ γιὰ τὸ α΄ εἶδος θὰ πολλαπλασιάσωμε μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ β΄ εἴδους καὶ γιὰ τὸ β΄ εἶδος θὰ πολλαπλασιάσωμε μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ α΄ εἴδους.

Ἑπομένως: Γιὰ νὰ εὕρωμε ποιὸ ποσὸν ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος θὰ βάλωμε στὸ μῖγμα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν μεριστέον ἀριθμὸ (δηλ. τὶς ὀκάδες τοῦ μίγματος) ἐπὶ τὴν διαφορὰν τοῦ β΄ εἴδους καὶ νὰ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαφορῶν. Καὶ γιὰ νὰ εὕρωμε ποιὸ ποσὸ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος θὰ βάλωμε στὸ μῖγμα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν μεριστέον ἀριθμὸ ἐπὶ τὴν διαφορὰν τοῦ α΄ εἴδους καὶ νὰ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαφορῶν.

Ἂς κάνωμε λοιπὸν ὅλα αὐτὰ ποὺ εἴπαμε, γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα:

Τιμὴ α΄ εἴδους 5.600 δρ.		800 δρ. διαφορὰ τιμῆς τοῦ β΄ εἴδους
	4.000 τιμὴ τοῦ μίγματος	
Τιμὴ β΄ εἴδους 3.200 δρ.		1.600 δρ. διαφορὰ τιμῆς τοῦ α΄ εἴδους

Ἂς κάνωμε τώρα τὶς πράξεις. Θὰ ἔχωμε:

Ποσὸν μίγματος 225 ὀκ. — Ἄθροισμα διαφορῶν $800 + 1.600 = 2.400$

ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος $\frac{225 \times 800}{2.400} = \frac{225}{3} = 75$ ὀκάδες

ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος $\frac{225 \times 1.600}{2.400} = \frac{3.600}{24} = 150$ »

225 ὀκάδες μῖγμα.

Προβλήματα

1) Ἕνας οἰνοπώλης ἔχει δύο εἰδῶν κρασί. Τοῦ α΄ εἴδους ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς εἶναι 2.600 δρχ. Τοῦ β΄ εἴδους ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς εἶναι 1.600

δραχμές. Ἀπὸ τὸ κρασὶ αὐτὸ θέλει νὰ κάνη μῖγμα 650 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ μία ὀκὰ νὰ ἀξίζη 2.000 δραχμές. Πόσες ὀκάδες πρέπει νὰ βάλη ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος;

(Θὰ εὕρετε α΄ 260 καὶ β΄ 390.)

2) Ἕνας ἐλαιοπαραγωγὸς εἶχε λάδι β΄ ποιότητος, τοῦ ὁποίου ἡ μιὰ ὀκὰ ἄξιζε 7.600 δρχ. Γιὰ νὰ βελτιώση τὴν ποιότητα τοῦ λαδιοῦ αὐτοῦ, τὸ ἀνέμιξε μὲ λάδι ἀρίστης ποιότητος, τοῦ ὁποίου ἡ μιὰ ὀκὰ ἄξιζε 9.200 δρχ. Τὸ μῖγμα ποὺ ἔκαμε ἦταν 380 ὀκάδες καὶ ἄξιζε 8.000 δρχ. ἡ ὀκά. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος ἔβαλε;

(Θὰ εὕρετε α΄ ποιότ. 95, β΄ ποιότ. 285.)

3) Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ βούτυρο ἁγνὸ πρὸς 36.000 δρχ. τὴν ὀκά. Ἕνας πελάτης ἐζήτησε ν' ἀγοράση 42 ὀκάδες ἀπὸ τὸ βούτυρο αὐτό, ἀλλὰ τὸ ἐζήτησε μὲ 30.000 δρχ. τὴν ὀκά. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν συνέφερε στὸν ἔμπορο νὰ δώση τὸ βούτυρο μὲ τὴν τιμὴ αὐτή, ἔκαμε ἕνα μῖγμα ποὺ ἦταν πράγματι 42 ὀκάδες, ἀλλὰ εἶχε μέσα καὶ λίπος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ ἄξιζε 12.000 δραχμές. Τὸ μῖγμα αὐτὸ τὸ ἔδωσε στὸν πελάτη μὲ 30.000 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες ἁγνὸ βούτυρο καὶ πόσες ὀκάδες λίπος εἶχε τὸ μῖγμα;

(Θὰ εὕρετε βούτ. $31\frac{2}{4}$ ὀκ., λίπος $10\frac{2}{4}$ ὀκ.)

4) Ἕνας γεωργὸς ἀνέμιξε ἀλεύρι σιταριοῦ τοῦ ὁποίου ἡ μία ὀκὰ ἀξίζει 3.600 δραχμὲς καὶ ἀλεύρι κριθαριοῦ τοῦ ὁποίου ἡ μία ὀκὰ ἀξίζει 1.200 δρχ. καὶ ἔκαμε μῖγμα 180 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ ἄξιζε 2.800 δρχ. Πόσες ὀκάδες ἔβαλε ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος;

(Θὰ εὕρετε σιτ. 120, κριθ. 60.)

5) Ἕνας οἰνοπνευματοπώλης ἔχει οἰνόπνευμα 80° καὶ 60° καὶ θέλει ἀπὸ αὐτὰ νὰ κάνη μῖγμα 240 ὀκάδων ποὺ νὰ εἶναι 75°. Πόσο θὰ πάρη ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος;

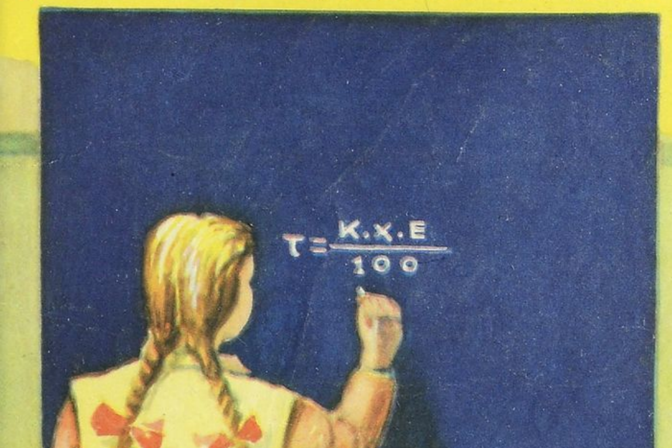
6) Ἕνας οἰνοπώλης εἶχε κρασὶ ἀρίστης ποιότητος τοῦ ὁποίου ἡ μία ὀκὰ ἄξιζε 3.000 δρχ. Ἐπειδὴ βιαζόταν νὰ τὸ πωλήση, ἀπεφάσισε νὰ τοῦ βάλη νερὸ γιὰ νὰ τὸ πωλήση φθηνότερο χωρὶς νὰ ζημιώση. Ἤθελε νὰ κάνη μῖγμα 750 ὀκάδων καὶ νὰ πωλήση τὴ μία ὀκὰ πρὸς 2.400 δρχ. Μπορεῖτε σεῖς νὰ εὕρετε πόσο κρασὶ καὶ πόσο νερὸ θὰ ἔχη τὸ μῖγμα αὐτό;

7) Ἕνας ἔμπορος ἀνέμιξε ζάχαρι ἀξίας 10.000 δρχ. τὴν ὀκὰ μὲ ζάχαρι ἀξίας 7.500 δρχ. τὴν ὀκὰ καὶ ἔκαμε μῖγμα 800 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ μία ὀκὰ ἄξιζε 8.400 δρχ. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος ἔχει τὸ μῖγμα;

ΤΕΛΟΣ

Κ. Χ. ΣΤΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΥ - Γ. ΣΑΚΚΑ

ΡΙΘΜΗΤΙΚΗ κ ΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ Ν. ΑΛΙΚΙΩΤΗΣ & ΥΙΟΙ
ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ 6 - ΑΘΗΝΑΙ

ΕΚΤΥΠ. "Β. ΠΑΠΑΧΡΥΣΑΝΘΟΥ.