

1504

Α. ΚΟΝΤΟΜΑΡΗ, — Α. ΜΠΑΜΠΑΛΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

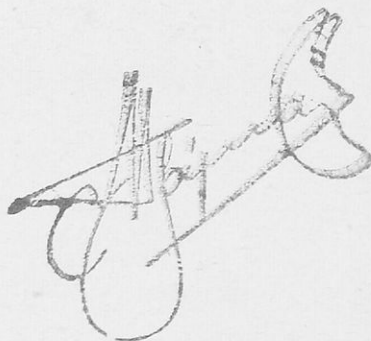
ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΤΗ ΤΑΞΗ
ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ



ΕΚΔΟΤΗΣ: ΠΕΤΡΟΣ Κ. ΡΑΝΟΣ
ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5^α ΑΘΗΝΑΙ
1947

Κάθε γνήσιο αντίτυπο έχει την υπογραφή του ενός ή και
των δύο συγγραφέων.



Περὶ ποσῶν

Α' Τί εἶναι ποσόν.

1. Ἔχεις ἓνα σακκὶ ἀλευρί, πὸν ζυγίζει 50 ὀκάδες. Ἄν βάλῃς ἀκόμη στὸ σακκὶ 10 ὀκάδες, οἱ ὀκάδες θὰ μεγαλώσουν, ἂν βγάλῃς πάλι ἀπὸ τὸ σακκὶ 20 ὀκάδες θὰ λιγοστεύουν.
2. Ἔχεις στὸ πορτοφόλι σου 1000 δραχμές. Ἄπ' αὐτὲς ἔξοδευες τὴς 500. Οἱ δραχμὲς λιγόστεψαν. Ἄν σοῦ δώσῃ ὁ πατέρας σου ἄλλες 1000 δραχμὲς, οἱ δραχμὲς σου θὰ μεγαλώσουν.
3. Τὸ ἴδιο θὰ συμβῆῖ ἂν ἔχῃς 10 καραμέλλες. Ἄν φᾶς τὴς ὅ, οἱ καραμέλλες σου θὰ λιγοστεύουν, ἂν πάλιν ἀγοράσῃς ἄλλες 10 καραμέλλες, οἱ καραμέλλες σου θὰ μεγαλώσουν.

Βλέπεις ὅτι καὶ οἱ ὀκάδες τὸ ἀλευρί μεγάλωσαν καὶ λιγόστεψαν. Τὸ ἴδιο καὶ οἱ δραχμὲς σου, τὸ ἴδιο καὶ οἱ καραμέλλες σου.

Κάθε πρᾶγμα πὸν μπορεῖ νὰ μεγαλώσῃ ἢ νὰ λιγοστεύῃ εἶναι ποσόν.

Νὰ βρῆς διάφορα ποσὰ μόνος σου.

Ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο πρᾶγμα λέγονται *ὁμοειδῆ*, ὅταν εἶναι ἀπὸ διαφορετικὸ πρᾶγμα λέγονται *ἑτεροειδῆ*. Π.χ. Ἔχεις στὸ πορτοφόλι σου 500 δραχμὲς καὶ σὴν τσέπη σου 1000 δραχμὲς. Οἱ δραχμὲς τοῦ πορτοφολιοῦ σου καὶ οἱ δραχμὲς τῆς τσέπης σου εἶναι ποσὰ. Γιατί ;

Ἄλλὰ καὶ τὸ ἓνα ποσὸ εἶναι δραχμὲς καὶ τὸ ἄλλο ποσὸ δραχμὲς. Εἶναι ποσὰ ὁμοειδῆ.

Ἔχεις 10 πέννες, πὸν ἀγόρασες μὲ 500 δραχμὲς. Καὶ οἱ πέννες καὶ οἱ δραχμὲς εἶναι ποσὰ. Γιατί ; Ἄλλὰ τὸ ἓνα ποσὸ εἶναι πέννες καὶ τὸ ἄλλο ποσὸ δραχμὲς. Εἶναι ποσὰ ἑτεροειδῆ.

Νὰ βρῆς μόνος σου ποσὰ ὁμοειδῆ καὶ ποσὰ ἑτεροειδῆ.

B) Τί εἶναι ποσά ἀνάλογα.

Τὰ ποσά στή ζωὴ παρουσιάζονται ζευγάρια.

Π.χ. ἀγοράζεις κρέας, δίνεις χρήματα. Δίνεις τὴν ἐργασία σου σ' ἓνα ἐργοστάσιο, παίρνεις δραχμές.

1. Ἀγοράζεις 2 τετράδια, δίνεις 300 δραχμές. Ἀγοράζεις 4 τετράδια, δίνεις 600 δραχμές. Ἀγόρασες δυὸ φορές περισσότερα τετράδια, ἔδωσες δύο φορές περισσότερες δραχμές.
2. Ἀγοράζεις 4 ὀκάδες σταφύλια, δίνεις 6000 δραχμές. Ἀγοράζεις 2 ὀκ. σταφύλια, δίνεις 3000 δραχ. Ἀγόρασες δυὸ φορές λιγώτερα σταφύλια, ἔδωσες δυὸ φορές λιγώτερες δραχμές.

Καὶ στὰ τετράδια καὶ στὰ σταφύλια βλέπεις ὅτι τὸ ἓνα ποσὸ ἀκολουθεῖ τὸ ζευγάρι του. Μεγαλώνει τὸ ἓνα δυὸ φορές, μεγαλώνει καὶ τὸ ἄλλο δυὸ φορές. Μικραίνει τὸ ἓνα δυὸ φορές, μικραίνει καὶ τὸ ἄλλο δυὸ φορές.

Αὐτὰ τὰ ζευγάρια τῶν ποσῶν λέγονται *ποσά ἀνάλογα*.

Ἀνάλογα λέγονται δύο ποσά, ὅταν ὅσες φορές μεγαλώσῃ τὸ ἓνα, τόσες φορές μεγαλώνει καὶ τὸ ἄλλο ἢ ὅσες φορές μικραίνει τὸ ἓνα, τόσες φορές μικραίνει καὶ τὸ ἄλλο.

Νὰ βρῆς μόνος σου διάφορα ποσά ἀνάλογα.

Γ') Τί εἶναι ποσά ἀντίστροφα.

1. 10 κτίστες ἔκτισαν ἓνα σπίτι σὲ 30 ἡμέρες. Ἐνα ἄλλο σπίτι ὅμοιο σὲ ὅλα ἀνάλαβαν νὰ τὸ κτίσουν 5 κτίστες καὶ τὸ ἔκτισαν σὲ 60 ἡμέρες.

Ἐδῶ λιγότεσαν οἱ κτίστες καὶ ἀυξήθηκαν οἱ ἡμέρες.

2. Ἐνας κτηματίας ἔχει ἓνα χωράφι. Τὴν πρώτη χρονιά πῆρε 6 ἐργάτες καὶ τὸ ἔσκαψαν σὲ 10 ἡμέρες. Τὴ δεύτερη χρονιά δέλοντας νὰ τὸ σκάψῃ γρηγορώτερα πῆρε 12 ἐργάτες καὶ τὸ ἔσκαψαν σὲ 5 μέρες.

Ἐδῶ ἀυξήθηκαν οἱ ἐργάτες καὶ λιγότεσαν οἱ ἡμέρες.

Καὶ στὰ δύο παραδείγματα εἶχαμε ζευγάρια ποσά, πού ὅταν μεγάλωνε τὸ ἓνα, μικραίνει τὸ ἄλλο ἢ ὅταν μικραίνει τὸ ἓνα μεγάλωνε τὸ ἄλλο.

Αὐτὰ τὰ ζευγάρια τῶν ποσῶν λέγονται *ποσὰ ἀντίστροφα*.

*Ἐπίστροφα λέγονται δυὸ ποσά, πού ὅσες φορές μεγα-
λώσει τὸ ἓνα, τόσες φορές μικραίνει τὸ ἄλλο καὶ ὅσες φο-
ρές μικραίνει τὸ ἓνα τόσες φορές μεγαλώνει τὸ ἄλλο.*

Νὰ βρῆς μόνος σου διάφορα ποσὰ ἀντίστροφα.

Ἐπιπλέον μέθοδος τῶν τριῶν.

1. Ἀγοράζεις 5 δεκάδες ζάχαρη καὶ δίνεις 30000 δραχμές. Ἄν ἀγο-
ράζεις 9 δεκάδες ζάχαρη, πόσο θὰ ἔδινες;

Αὐτὸ τὸ πρόβλημα δὲν μποροῦμε νὰ τὸ λύσουμε οὔτε μὲ ἓναν
πολλαπλασιασμό, οὔτε μὲ μιὰ διαίρεση.

Μποροῦμε ὅμως νὰ τὰ λύσουμε μὲ τὴν *ἀναγωγή στὴ μονάδα*.
Εἶναι ὁ τρόπος, πού καταφεύγομε, ὅταν δὲν μποροῦμε νὰ λύ-
σουμε τὰ προβλήματα μ' ἄλλον τρόπο.

Στὸ πρόβλημα ἔχομε τὸ πρῶτο ζευγάρι, πού μᾶς εἶναι γνωστό·
5 δεκάδες, 30000 δραχμές. Στὸ δεύτερο ζευγάρι ἔχομε μόνο τὸ
ἓνα ποσὸ καὶ μᾶς λείπει τὸ ἄλλο. Αὐτὸ θέλομε νὰ βροῦμε·

Γιὰ νὰ λύσουμε τὸ παραπάνω πρόβλημα θὰ πάρωμε γιὰ βάση
τὸ γνωστὸ ζευγάρι τῶν ποσῶν, προσέχοντας νὰ εἶναι δεύτερο
ποσὸ, τὸ ποσὸ πού μοιάζει μὲ τὸ ζητούμενο. Λέμε·

α) 5 δεκάδες ζάχαρη ἔχει 30000 δραχμές.

Τώρα θὰ κατεβῶμε στὴ μονάδα, δηλαδή στὴ μία δεκά, γι' αὐτὸ
καὶ τὸν τρόπο αὐτὸ, τὸν λέμε *ἀναγωγή στὴ μονάδα*.

β) Λέμε· ἢ μιὰ δεκά ζάχαρη, πού εἶναι 5 φορές λιγότερη θὰ
ἔχη καὶ 5 φορές λιγότερες δραχμές ἀπὸ τις 30000, δηλαδή

$30.000 : 5$ ἢ $\frac{30000}{5}$ πού εἶναι τὸ ἴδιο. Γιατί;

γ) Τώρα παίρνομε τις δεκάδες, πού θέλομε νὰ μάθωμε πόσες
δραχμές ἔχουν, δηλαδή τις 9 δεκάδες καὶ λέμε·

Οἱ 9 δεκάδες ζάχαρη, πού εἶναι 9 φορές περισσότερες ἀπὸ τὴ 1
δεκά, θὰ ἔχουν 9 φορές περισσότερες δραχμές, ἀπὸ ἐκεῖνες πού

ἔχει ἡ 1 δεκά· δηλαδή $\frac{30000}{5} \times 9 = \frac{270000}{5} = 54000$ δραχμές.

Κατάστρωσε τώρα τὸ πρόβλημά σου ἀκολουθώντας τις παραπάνω οδηγίες.

$$\begin{array}{r} 5 \text{ δκ.} \quad 30000 \text{ δραχ.} \\ 1 \text{ »} \quad \frac{30000}{5} \text{ δραχ.} \\ 9 \text{ »} \quad \frac{30000}{5} \times 9 = 54.000 \text{ δραχ.} \end{array}$$

Ἄν προσέξουμε ὅμως τὸ ἀποτέλεσμα, θὰ ἴδουμε ὅτι ἐκάμαμε πολλαπλασιασμό τοῦ γνωστοῦ ποσοῦ, πὸν μοιάζει μὲ τὸ ἀγνωστο, ἐπὶ τὸ κλάσμα, πὸν ἔχει ἀριθμητὴ τὸ ποσό, πὸν ἔχει ζευγάρι τὸ ἀγνωστο καὶ παρονομαστὴ τὸ ὁμοειδές του ποσὸ τοῦ γνωστοῦ ζευγαριοῦ. Τὸ ἀγνωστο ποσὸ τὸ γράφομε μ' ἓνα Χ.

Νὰ τὸ πρόβλημά μας:	5 δκ. 30000 δραχ.	}	Καταστρώνοντας τὸ πρόβλημα προσέχομε νὰ εἶναι τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ στὴν ἴδια στήλη. Καὶ κάθε στήλη τὴ θεωροῦμε ὡς ἓνα κλάσμα.
	9 δκ. ×		
	× = 30000 × $\frac{9}{5}$ = 54000 δρα.		

Αὐτὸς ὁ τρόπος λέγεται *ἀπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν*.

Γιατί λέγεται ἔτσι μπορεῖς τώρα νὰ τὸ βρῆς καὶ μόνος σου.

Ἄν δυσκολεύεσαι, παρακάλεσε τὸ δάσκαλό σου νὰ σοῦ τὸ ἐξηγήσει.

Νὰ καὶ ἓνα ἄλλο πρόβλημα:

2. 8 ἐργάτες ἔσκαψαν ἓνα ἀμπέλι σὲ 12 ἡμέρες· 5 ἐργάτες σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι;

Ἄς τὸ λύσωμε πρῶτα μὲ τὴν ἀναγωγή στὴ μονάδα.

$$\begin{array}{r} 8 \text{ ἐργ.} \quad 12 \text{ ἡμ.} \\ 1 \text{ »} \quad 12 \times 8 \\ 5 \text{ »} \quad 12 \frac{\times 8}{5} = \frac{96}{5} = 19\frac{1}{5} \text{ ἡμερ.} \end{array}$$

Προσέχοντας τὸ ἀποτέλεσμα βλέπομε ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸ ὁμοειδές τοῦ ἀγνωστο ποσοῦ γνωστὸ ποσὸ ἐπὶ τὸ κλάσμα πὸν

σχηματίζουν τὰ δύο ἄλλα ὁμοειδῆ γνωστὰ ποσά, ὅπως ἔχει.

Ἐὰς τὸ λύσωμε καὶ μὲ τὴν ἀπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν.

$$\begin{array}{r} 8 \text{ ἔργ.} \quad 12 \text{ ἡμ.} \\ 5 \quad \text{»} \quad \times \quad \text{»} \\ \hline \times = 12 \times \frac{8}{5} = \frac{96}{5} = 19\frac{1}{5} \text{ ἡμερ.} \end{array}$$

Καὶ τὸ πρῶτο πρόβλημα καὶ τὸ δεύτερο τὰ λύσαμε πρῶτα μὲ τὴν ἀναγωγή στὴ μονάδα καὶ κατόπιν μὲ τὴν ἀπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν.

Καὶ στὰ δύο πολλαπλασιάσαμε τὸ ποσὸν ποῦ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἄγνωστο μὲ τὰ δύο ἄλλα γνωστὰ ποσὰ θεωρούμενα σὰν κλάσμα. Στὸ πρῶτο πρόβλημα ποῦ ἦσαν τὰ ποσὰ ἀνάλογα ἀντιστρέψαμε τὸ κλάσμα, στὸ δεύτερο, ποῦ ἦσαν τὰ ποσὰ ἀντίστροφα, τὸ ἀφήσαμε ὅπως εἶναι. Ἔτσι.

Γιὰ νὰ λύσωμε προβλήματα μὲ τὴν ἀπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν, ἐὰν μὲν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποῦ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο μὲ τὸ κλάσμα ποῦ γίνεται ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα ποσὰ ἀντεστραμμένο, ἐὰν δὲ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα μὲ τὸ κλάσμα ὅπως εἶναι.

Προβλήματα

1. Ἐνας ταβερνιάρης ἀγόρασε 650 ὀκάδες κρασί καὶ ἔδωσε 780000 δραχμές. Τὴν ἄλλην ἡμέρα ἀγόρασε ἄλλες 250 ὀκάδες μὲ τὴν ἴδια τιμῆ. Πόσα ἔδωσε γι' αὐτές ;
2. Μία νοικοκυρὰ ἀγόρασε 120 ὀκάδες κάρβουνα καὶ ἐπλήρωσε 84.000 δραχμές. Θέλει ν' ἀγοράσῃ ἀκόμη ἄλλες 200 ὀκάδες κάρβουνα μὲ τὴν ἴδια τιμῆ. Πόσο θὰ δώσῃ ;
3. 12 ἐργάτες τελειώνουν μίαν ἐργασία σὲ 20 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάτες θὰ τελειώσουν τὴν ἴδια ἐργασία σὲ 8 ἡμέρες ;
4. Ἐνας κτηματίας πῆρε 16 ἐργάτες γιὰ νὰ σκάψῃ τ' ἀμπέλι του. Οἱ ἐργάτες αὐτοὶ τὸ ἔσκαψαν σὲ 5 ἡμέρες. Τὸν ἄλλο χρόνον

- ἤθελε νὰ σκάψῃ τ' ἀμπέλι του αὐτὸ σὲ 3 ἡμέρες. Πόσους ἐργάτες θὰ πάρῃ;
5. Ἐνας καπνιστῆς ἔξοδεύει σὲ 20 ἡμέρες γιὰ σιγαρέττα 36.000 δραχμές. Πόσα θὰ ἔξοδεύσῃ στὸ χρόνο;
6. Μιὰ ὑπηρετρία συμφώνησε νὰ παίρνῃ ἀπὸ τὸν κύριό της τὸ χρόνο 80000 δραχμές. Ἐν φύγῃ σὲ 9 μῆνες πόσο πρέπει νὰ πάρῃ;
7. Διὰ νὰ σκεπασθῇ ἓνα μικρὸ σπιτάκι χρειάζονται 2700 κεραμίδια. Πόσο θὰ πληρώσωμε ἂν τὰ κεραμίδια κοστίζουν 1800 δραχ. ἢ χιλιάδα;

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

α') Τί εἶναι σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν; Μπορεῖς νὰ τὸ καταλάβῃς μόνος σου. Ἐν δυσκολεύῃσαι θὰ σοῦ ἐξηγήσῃ ὁ δάσκαλός σου. Ἀπὸ τὸ παρακάτω πρόβλημα θὰ τὸ καταλάβῃς.

1. 4 ἐργάτες ἐργάζονται 6 ὥρες τὴν ἡμέρα καὶ σκάβουν ἓνα κτῆμα σὲ 12 ἡμέρες. Ἐν οἱ ἐργάτες γίνουν 9 καὶ ἐργασθοῦν 8 ὥρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸ κτῆμα;

Κατάστρωσε τὸ πρόβλημά σου, ὅπως μάθαμε·

4 ἐργάτ.	6 ὥρες	12 ἡμερ.
9 »	8 »	X

Γιὰ νὰ τὸ λύσωμε κάνομε ὅ,τι κάναμε καὶ στὴν ἀπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Παίρνομε τὸ ποσοῦ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἀγνωστο καὶ τὸ συγκρίνομε μὲ κάθε κλάσμα χωριστά, πολλαπλασιάζοντας αὐτὸ μὲ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένο, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ μὲ τὸ κλάσμα ὅπως εἶναι ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα. Ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα καὶ στὰ δύο κλάσματα.

Θὰ ἔχομε λοιπόν,

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 4 \text{ ἐργάτ.} & 6 \text{ ὥρες} & 12 \text{ ἡμερ.} \\
 9 \text{ »} & 8 \text{ »} & X
 \end{array} \\
 \hline
 X = 12 \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{288}{72} = 4 \text{ ἡμέρες.}
 \end{array}$$

Προβλήματα.

1. Μὲ 20 πῆγες ὕφασμα, πὸν ἔχει πλάτος 1,80 μ. κάνομε 4 φορέματα. Μὲ 35 πῆγες ὕφασμα, πὸν ἔχει πλάτος 1.20 μ., πόσα φορέματα θὰ κάμωμε;
2. Ἐνα κορίτσι πὸν ἐργάζεται 6 ὥρες τὴν ἡμέρα ὑφαίνει σὲ 8 ἡμέρες 20 πῆγες ὕφασμα. Εἶναι ἀνάγκη ὅμως 32 πῆγες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα νὰ τὸ ὑφάνῃ σὲ 6 ἡμέρες. Πόσες ὥρες θὰ ὑφαίνει τὴν ἡμέρα;
3. Ἐνας θέλει νὰ στρώσῃ τὸ πάτωμά του μὲ σανίδες, πὸν ἔχουν μῆκος 3,60 μ. καὶ πλάτος 0,20 μ. Γι' αὐτὸ πρέπει ν' ἀγοράσῃ 65 σανίδες. Δὲν βρίσκει ὅμως σ' αὐτὰ τὰ μέτρα καὶ ἀναγκάζεται ν' ἀγοράσῃ ἄλλες σανίδες, πὸν ἔχουν μῆκος 4 μέτρα καὶ πλάτος 0,15 μ. Πόσες σανίδες θ' ἀγοράσῃ;
4. Ἀπὸ μιὰ οἰκογένεια 5 ἄτομα ἐργάζονται σ' ἓνα ἐργοστάσιο καὶ παίρνουν τὸ χρονοῦν 15.000.000. Ἐπειτα ἀπὸ 5 μῆνες ἀρρώστησαν οἱ δύο καὶ δούλεψαν μόνον οἱ ἄλλοι. Πόσα θὰ πάρουν οἱ ἄλλοι στὸ τέλος τοῦ χρόνου ;
5. 20 ἐργάτες ἔσκαψαν μιὰ τάφρο, πὸν εἶχε 8 μέτρα βάθος, 6,50 μ. πλάτος, καὶ 7,80 μῆκος σὲ 9 ἡμέρες. Πόσους ἐργάτες θὰ πάρῃ ὁ ιδιοκτήτης, ἂν θέλῃ νὰ κάμῃ σὲ 5 ἡμέρες μιὰ τάφρο, πὸν νὰ ἔχῃ βάθος 6 μέτρα, πλάτος 4,20 μ. καὶ μῆκος 7 μέτρα ;
6. Ἐνας θέλει νὰ πάῃ πεζὸς σὲ μιὰν ἐβδομάδα σὲ μιὰ πόλη, πὸν ἀπέχει ἀπὸ τὸ χωριὸν του 240 χιλιόμετρα. Τὶς πρώτες 2 ἡμέρες βιάδιζε 6 ὥρες τὴν ἡμέρα καὶ πέρασε 70 χιλιόμετρα. Πόσες ὥρες πρέπει νὰ βαδίσῃ τὶς ὑπόλοιπες ἡμέρες γιὰ νὰ φθάσῃ στὴ πόλη, ὅπως θέλει ;

Περὶ ποσοστῶν.

Α') Τί εἶναι ποσοστὸν ;

Ὅλοι οἱ ἔμποροι, πὸν ἐμπορεῦνται διάφορα πράγματα ὑπολογίζουν τὸ κέρδος ἢ τὴ ζημίαν τους ὄχι στὸ ὅλο χρῆμα πὸν πληρώ-

νουν, ἀλλὰ στὶς 100 δραχμὲς ἢ στὶς 1000 δραχμὲς. Γι' αὐτὸ πολλὲς φορὲς ἀκοῦμε ἐκέρδισε τόσα τὰ ἑκατὸ, ἢ τόσο τὰ χίλια, ἢ ἐξημίωσε τόσο τὰ ἑκατὸ ἢ τόσα στὰ χίλια. Αὐτὸ ποὺ κερδίζει ἢ ζημιώνεται στὰ 100 ἢ στὰ 1000 λέγεται *ποσοστὸ*.

Τέτοια προβλήματα ποσοστῶν παρουσιάζονται κάθε μέρα γιὰτὶ καὶ οἱ φόροι, ποὺ παίρνει τὸ Κράτος, μὲ ποσοστὰ στὶς 100 ὑπολογίζονται. Γράφεται δὲ τὸ ποσοστὸν στὸ 100 ἔτσι % καὶ στὰ χίλια ἔτσι ‰.

Ὅλα τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν λύνονται ὅπως τὰ προβλήματα τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἄς λύσωμε ἓνα πρόβλημα :

1. Ἐνας ἔμπορος θέλει νὰ κερδίσῃ 20 % ἀπὸ ἓνα ἐμπόρευμα, ποὺ τοῦ κοστίζει 800.000 δραχμὲς. Πόσο θέλει νὰ κερδίσῃ σὲ ὄλο τὸ ἐμπόρευμα ;

$$\begin{array}{r} \text{Λύση} \qquad \qquad \text{σὲ} \qquad 100 \text{ δραχ.} \qquad \qquad 20 \text{ δραχ. κέρδος} \\ \qquad \qquad \qquad \text{»} \qquad 800.000 \qquad \text{»} \qquad \qquad \qquad \times \\ \hline \times = 20 \times \frac{800000}{100} = \frac{16000000}{100} = 160000 \end{array}$$

Σὲ ὅλα τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Προβλήματα.

2. Ἐνας μεσίτης πώλησε ἓνα σπίτι 350.000.000 δραχμὲς καὶ πῆρε γιὰ μεσιτεία 3 %. Πόσα πῆρε ;
3. Ἐνα σχολεῖο γιὰ νὰ θεωρηθῆται καλὸ δὲν πρέπει ν' ἀφίνη στὴν ἴδια τάξη περισσότερο ἀπὸ 10 % μαθητῆς. Τὸ σχολεῖο μιᾶς κωμόπολης εἶχε 620 μαθητῆς καὶ ἄφησε στὴν ἴδια τάξη 130 μαθητῆς. Εἶναι καλὸ ἢ κακό ;
4. Ἐνας δημόσιος ὑπάλληλος παίρνει 240.000 δραχμὲς τὸ μῆνα καὶ ἀφίνει γιὰ διάφορα ταμεῖα ποσοστὸ 4 %. Πόσο μισθὸ παίρνει καθαρὸ τὸ μῆνα ;

5. Ένας έμπορος πωλεί λιανικῶς τὴ μιὰ πῆχη ἀπὸ ἓνα ὕφασμα 120.000 δραχμῆς. Στὴ χονδρική πώληση ὅμως κάνει ἔκπτωση 15%. Πόσο θὰ πληρώσῃ ἓνας ἀγοραστής, ποὺ ἀγόρασε χονδρικῶς 20 πῆχες ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτό;
6. Ένας ἀσφάλισε τὸ σπίτι του σὲ μιὰ Ἀσφαλιστικὴ Ἐταιρία γιὰ 400.000.000 δραχμῆς καὶ πληρώνει 2% τὸ μῆνα. Πόσα ἀσφάλιστρα πληρώνει στὸ χρόνο;
7. Ένας παραγγελιοδόχος παίρνει ποσοστὰ 12% . Ἔκαμε 8.000.000 δραχμῶν παραγγελίες. Πόσα ποσοστὰ θὰ πάρῃ; Ἀπὸ τὰ ποσοστὰ του θ' ἀφήσῃ 2% γιὰ τὶς Κοινωνικὲς Ἀσφαλίσεις. Τί θὰ πάρῃ καθαρὸ στὰ χέρια του;
8. Ένας παίρνει νοίκια ἀπὸ τὰ σπίτια του 320.000 δραχμῆς τὸ μῆνα. Πληρώνει 10% γιὰ φόρο οἰκοδομῆς τὸ χρόνο· πόσες δραχμῆς καθαρῆς τοῦ μένουν τὸ χρόνο;
9. Ένας ἔμπορος πτώχευσε μὲ χρέος 60.000.000. Συμφώνησε ὅμως μὲ τοὺς δανειστῆς του νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος μὲ ἔκπτωση 40%. Πόσα θὰ πληρώσῃ σ' αὐτούς;
10. Ένας ἔμπορος πουλεῖ τὴ ζάχαρη 8.000 δραχ. τὴν ὀκτὰ καὶ κερδίζει 20%. Πόσο τοῦ κοστίζει ἡ ὀκτὰ;
11. Ἀπὸ τὰ σταφύλια βγαίνει μούστος 50%. Πόσα σταφύλια χρειάζονται γιὰ νὰ κάμωμεν 20.000 ὀκάδες μούστο;
12. Ένας υπάλληλος πληρώνει γιὰ σύνταξη 8% ἀπὸ τὸ μισθὸ του. Παίρνει δὲ τὸ μῆνα καθαρὸ μισθὸ 100 000 δραχμῆς. Πόσος εἶναι ὁ ἀρχικὸς μισθὸς του;
13. Ένας ἐπλήρωσε τὸ χρέος του μὲ ἔκπτωση 15% καὶ ἔδωσε 120.000 δραχμῆς. Πόσο ἦταν τὸ χρέος του;

Τόκος

Τὶ εἶναι ὁ τόκος

Όταν ἓνας ἔχει ἀνάγκη ἀπὸ χρήματα, ἀναγκάζεται νὰ πάῃ νὰ ζητήσῃ ἀπὸ ἓναν ἄλλο δανεικά. Ἄν δὲν βρῆ ἰδιώτην νὰ τοῦ δανείσῃ, ζητάει ἀπὸ μιὰ Τράπεζα, ἂν εἶναι γνωστός. Γιὰ τὸ δάνειο αὐτὸ ὑπογράφει μιὰ ἀπόδειξη σὰν κι' αὐτή.

Ἀπόδειξις Δραχ. 200.000

Ὁ ὑπογεγραμμένος Νικόλαος Γενάρης ἔλαβον σήμερον ὡς δάνειον ἀπὸ τὸν κ. Κώσταν Φλεβάρην δραχμὰς διακοσίας χιλιάδας, τὰς ὁποίας ὑπόσχομαι νὰ ἐπιστρέψω μετὰ 2 ἔτη καὶ νὰ πληρώσω καὶ τὸν τόκον αὐτῶν πρὸς 10%.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 25 Σεπτεμβρίου 1946

Ὁ λαβὼν

Ν. Γενάρης

Στὴν ἀπόδειξη αὐτὴ γράφει 1) ὅτι πῆρε γιὰ δάνειο 200.000 δραχμὲς... *Αὐτὸ λέγεται κεφάλαιο.* 2) Ὅτι θὰ τὰ ἐπιστρέψῃ σὲ 2 χρόνια. Αὐτὸ λέγεται *Χρόνος*. Ὁ χρόνος στὸν τόκο ὑπολογίζεται πάντοτε σὲ χρόνια. 3) Ὅτι θὰ πληρώσῃ 10% τόκον. Αὐτὸ λέγεται *ἐπιτόκιον* καὶ ὑπολογίζεται πάντοτε στὸ χρόνο. Εἶναι δηλαδὴ ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σὲ ἓνα χρόνο. Αὐτὸς ὑπόσχεται ὅτι θὰ πληρώσῃ κάθε 100 δραχμὲς 8 δραχμὲς τόκο στὸ χρόνο. Ἐὰν κάμωμε λογαριασμὸ αὐτὸς θὰ πληρώσῃ γιὰ τόκο ἀρκετὰ χρήματα. Αὐτὸ πού θὰ πληρώσῃ παραπάνω ἀπὸ τὸ κεφάλαιο στὰ δύο χρόνια, λέγεται *τόκος*.

Ἔτσι σὲ κάθε πρόβλημα τόκου θὰ ἔχωμε 4 ποσά. α') *Τὸ κεφάλαιο*. β') *Τὸ χρόνο*. γ') *Τὸ ἐπιτόκιο* καὶ δ') *Τὸν τόκο*.

Ἐὰν ἔχωμε καὶ τὰ 4 ποσὰ γνωστὰ δὲν εἶναι πρόβλημα. Ἐὰν ἔχωμε τρία γνωστὰ καὶ ἓνα ἄγνωστο, τότε εἶναι πρόβλημα, γιατί θὰ σκεφθοῦμε καὶ θὰ ἐργαστοῦμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄγνωστο.

Ὅταν ζητῆται ὁ τόκος

α') ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἔτη

Ἐὰς λύσωμε ἓνα πρόβλημα.

- 1) Ἐνας ἄνθρωπος δανείστηκε 150.000 δραχμὲς γιὰ 3 ἔτη πρὸς 12%. Πόσο τόκο θὰ πληρώσῃ;

Γιὰ νὰ λύσωμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα, θὰ χρησιμοποιήσωμε τὴ μέ-

θοδο τῶν τριῶν. Μ' αὐτὴν λύομε (εἶτε ἀπλῆν, εἶτε σύνθετον) ὅλα τὰ προβλήματα, ποὺ δὲν μπορούμε νὰ λύσωμε μ' ἄλλον τρόπο.

Ἄς κάνωμε πρῶτα τὴν κατάταξη 100 δραχ. 1 ἔτος 12 δρ. τόκο 150000 » 3 » X	Για νὰ τὸ λύσωμε θὰ χρησι- μοποιήσωμε τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν δηλαδὴ
--	---

$$X = 12 \times \frac{150000}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{5400000}{100} = 54000 \text{ δραχ. τόκος.}$$

Τὸ λύσαμε μὲ τὴ γνωστὴ μεθόδὸ μας τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν. Ἄν προσέξωμε ὅμως καλὰ στὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἰδοῦμε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, πολλαπλασιάσαμε τὸ κεφάλαιο 150 000 μὲ τὸ ἐπιτόκιο 12 καὶ μὲ τὸ χρόνο 3 καὶ αὐτὸ ποὺ βρήκαμε 5400000 τὸ διαιρέσαμε διὰ 100. Αὐτὸ θὰ κάνωμε πάντοτε, ὅταν ζητᾶμε τὸν τόκο. Δοκίμασε καὶ μόνος σου μ' ἓνα πρόβλημα τόκου νὰ τὸ λύσης μὲ τὴ μεθόδο τῶν τριῶν. Ἀφοῦ ὅμως βρίσκωμε πάντα αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα γιὰ εὐκολία μας καὶ γιὰ νὰ λύωμε γρηγορώτερα κάθε πρόβλημα τόκου ποὺ ζητεῖται ὁ τόκος.

Πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο ἐπὶ τὸν χρόνο καὶ διαιροῦμε διὰ 100, δηλαδὴ πολλαπλασιάζομε τὰ τρία γνωστὰ ποσὰ καὶ διαιροῦμε διὰ 100.

Ἔτσι, ὅταν θὰ ἔχωμε ἄγνωστο τὸν τόκο, ἄς ἔχωμε στὸ νοῦ μας αὐτὸν τὸν τύπο, γιὰ νὰ θυμόμαστε τὸν κανόνα.

$$X \text{ τόκος} = \frac{K \times E \times X}{100} =$$

Τώρα μπορεῖς νὰ λύσης μόνος σου τὰ παρακάτω προβλήματα καὶ μὲ τὴ μεθόδο τῶν τριῶν καὶ μὲ τὴ μεθόδο τοῦ τόκου.

2. Ἐνας κτηματίας θέλοντας νὰ καλλιεργήσῃ καλὰ τὰ κτήματά του δανείστηκε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 2.500.000 δραχμὲς γιὰ 3 ἔτη μὲ 8%. Πόσο τόκο θὰ πληρώσῃ;
3. Ἐνας ποὺ ἦλθε ἀπὸ τὴν Ἀμερικὴ κατάθεσε στὴν Τράπεζα 80.000.000 δραχμὲς πρὸς 4%. Πόσο τόκο θὰ πάρῃ μετὰ 5 ἔτη;
4. Ἐνας ἔμπορος δανείστηκε ἀπὸ μιὰ Τράπεζα 55.000.000 δραχμὲς καὶ σὲ 4 ἔτη θὰ ἔδινε τὰ χρήματα αὐτὰ καὶ τόκο 6%. Πόσο τόκο θὰ δώσῃ;
5. Ἄν δανεισθῆς 75000 δραχμὲς μὲ 12% καὶ τὴς πληρώσῃς μετὰ 6 ἔτη. Πόσο τόκο θὰ πληρώσῃς;

β') Όταν ο χρόνος είναι μήνες.

Σ' όλα τὰ παραπάνω προβλήματα ο χρόνος ήταν δλόκληρα ἔτη. Εἴπαμε ὅμως παραπάνω ὅτι στὰ προβλήματα τοῦ τόκου ο χρόνος πρέπει νὰ εἶναι πάντοτε ἔτη γιατί καὶ τὸ ἐπιτόκιο ὑπολογίζεται σὲ ἔτη, δηλαδή εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓνα δλόκληρον ἔτος. Τί θὰ συμβῆ ὅμως ἂν ὁ χρόνος εἶναι μήνες; Ἀπλούστατα θὰ κάμωμε τοὺς μήνες κλάσμα τοῦ ἔτους.

Ἄς λύσωμε ἓνα πρόβλημα.

1. Ἐνας δανείστηκε 120000 δραχμὲς πρὸς 8% γιὰ 8 μῆνες. Πόσο τόκο θὰ δώσῃ;

Ἄς λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ πρῶτα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξη:	100 δραχ.	1 ἔτος	8 τόκος
	120000	»	3 μῆνες
			X

Ἄν προσέξουμε καλὰ στὴν κατάταξη αὐτή, θὰ ἰδοῦμε ὅτι στὴ δεύτερη στήλῃ δὲν εἶναι τὰ ποσὰ ὁμοειδῆ. Εἴπαμε ὅμως παραπάνω ὅτι πρέπει σὲ κάθε στήλῃ τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὰ ποσὰ νὰ εἶναι ὁμοειδῆ, γιατί ἂν εἶναι ἑτεροειδῆ τὸ πρόβλημα δὲν λύεται. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν εἶναι ὁμοειδῆ τὰ ποσὰ τῆς δεύτερης στήλης, μποροῦμε ὅμως νὰ τὰ κάνομε ὁμοειδῆ κάνοντάς το ἔτος μῆνες. Ἔτσι θὰ ἔχωμε.

$$\begin{array}{r}
 100 \text{ δραχ.} \quad 12 \text{ μῆνες} \quad 8 \text{ τόκος} \\
 120000 \quad \text{»} \quad 8 \quad \text{»} \quad \text{X} \\
 \hline
 \text{X} = 8 \times \frac{120000 \times 8}{100 \times 12} = \frac{7680000}{1200}
 \end{array}$$

Ἄν προσέξωμε καλὰ τὸ ἀποτέλεσμα, θὰ ἰδοῦμε ὅτι κι' ἐδῶ πολλαπλασιάσαμε τὸ κεφάλαιο μὲ τὸν χρόνον καὶ μὲ τὸ ἐπιτόκιο, δηλαδή τὰ τρία γνωστὰ καὶ διαιρέσαμε διὰ 100×12 (διὰ 1200). Κι' αὐτὸ γιατί ὁ χρόνος ἦταν κλάσμα τοῦ ἔτους, δωδέκατα (δηλαδή μῆνες).

Καὶ τώρα ἄς βγάλωμε τὸν κανόνα.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες πολλαπλασιάζομε τὰ τρία γνωστὰ ποσὰ καὶ διαιροῦμε διὰ 100×12 δηλαδὴ διὰ 1200.

Νὰ καὶ ὁ τύπος:

$$X \text{ τόκος} = \frac{K \times E \times X}{1200}$$

ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες.

Λύσε τώρα μόνος σου τὰ παρακάτω προβλήματα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους· μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν καὶ μὲ τὴ μέθοδο τοῦ τόκου.

1. Ἐάν καταθέσῃ ἕνας σὲ μιὰ τράπεζα 500.000 δραχμὲς μὲ 4% . Πόσο τόκο θὰ πάρῃ σὲ 9 μῆνες ;
2. Ἐνας ἔκτισε ἕνα σπίτι, πού κόστισε 250.000.000. Συμφώνησε ὁμως μὲ τὸν ἐργολάβου νὰ τὰ πληρώσῃ μετὰ 8 μῆνες πρὸς 12% . Πόσο τόκο θὰ πληρώσῃ ;
3. Μιὰ ὑπηρετρία ἔχει καταθέσει στὸ Ταχυδρομικὸ Ταμιευτήριον 800.000 δραχμὲς πρὸς 4% . Μετὰ 6 μῆνες πῆρε τὰ χρήματά της. Πόσο τόκο θὰ τῆς δώσῃ τὸ Ταμιευτήριον ;
4. Πόσο τόκο θὰ πληρώσω μετὰ 10 μῆνες πρὸς 15% γιὰ ἕνα χρέος μου ἀπὸ 350.000 δραχμὲς ;
5. Πῆς εἰς τὸ γείτονά σου πόσο τόκο θὰ πληρώσῃ γιὰ τὸ χρέος του ἀπὸ 900.000 δραχμὲς πρὸς 9% σὲ 7 μῆνες ;

γ') Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες.

Συμβαίνει πολλὰς φορὰς ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἡμέρες. Θὰ κάνωμε κι' ἐδῶ, ὅ,τι κάνωμε καὶ ὅταν ὁ χρόνος ἦταν μῆνες. Θὰ κάνωμε τίς ἡμέρες ἔτη, δηλαδὴ κλάσμα τοῦ ἔτους. Τὸ ἔτος ἔχει 365 ἡμέρες. Στὴν Ἀριθμητικὴν ὁμως ὑπολογίζεται πάντοτε τὸ ἔτος μὲ 360 ἡμέρες. Ἐτσι ἡμέρα εἶναι τὸ $\frac{1}{360}$ τοῦ ἔτους. Ἄς λύσωμε ἕνα πρόβλημα γιὰ νὰ τὸ καταλάβωμε καλύτερα.

1. Πόσο τόκο θὰ πληρώσῃ ἕνας, πού ἔχει ἕνα χρέος 160.000 δραχμῶν σὲ 20 ἡμέρες πρὸς 10% ;
Λύσε μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξη	100 δραχ	1 έτος	10 τόκος
160000		20 ήμέρ.	χ

Τὰ ποσὰ τῆς δεύτερης στήλης εἶναι ἕτεροειδῆ· θὰ τὰ κάμωμε ὁμοειδῆ καὶ ἔτσι θὰ ἔχωμε

100 δραχ.	360 ήμέρ.	10 δρ. τόκος
160000 »	20 »	χ

$$\chi = \frac{10 \times 160000 \times 20}{100 \times 360} = \frac{32000000}{36000}$$

Ἄν προσέξωμε καλά τὸ ἀποτέλεσμα, θὰ ἰδοῦμε ὅτι κι' ἐδῶ πολλαπλασιάζομε τὰ τρία γνωστὰ ποσὰ, δηλαδὴ **κεφάλαιον**, **ἐπιτόκιον** καὶ **χρόνον** καὶ διαιροῦμεν διὰ $100 \times 360 = 36000$.

Ἔτσι :

Ὅταν ἔχωμε χρόνον σὲ ήμέρες καὶ ζητοῦμε τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομε τὰ τρία γνωστὰ, κεφάλαιον, ἐπιτόκιον καὶ χρόνον καὶ διαιροῦμεν διὰ 36000.

Ἦτοι :

$$\text{τόκος σὲ ήμέρες} = \frac{\text{Κ.Ε.Χ.}}{36000}$$

Λύσε καὶ μόνος σου τὰ παρακάτω προβλήματα.

2. Πόσον τόκον φέρουν 25000 δραχ. μὲ ἐπιτόκιον 8 % σὲ 20 ήμέρες ;
3. Ἐνας δανείσθηκε 400000 -δραχμὲς μὲ 12 %. Ἐπέστρεψε τὸ χρέος του μετὰ 2 μῆνες καὶ 20 ήμέρες. Πόσον τόκο θὰ δώσῃ ;
4. Ἐνας κτηματίας πῆρε δάνειο ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 2500000 δραχμῶν μὲ 6 % γιὰ νὰ τὸ πληρώσῃ σὲ 140 ήμέρες. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ ;
5. Ἄν δανεισθῆς 80000 δραχμὲς γιὰ 25 ήμέρες μὲ 15 % τί τόκο θὰ πληρώσῃς ;

Ἐπιτόκιον.

Παραπάνω μάθαμε πῶς βρίσκουμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ήμέρες. Μποροῦμε ὅμως νὰ βροῦμε τὸν τόκο σὲ ήμέρες καὶ μ' ἓνα ἄλλο τρόπο, ποὺ λέγεται **τοκάρειθος**. Τοκάρειθος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου μὲ τὴν ήμέρας.

Για νὰ λύσωμε ἓνα πρόβλημα μὲ τὸν τοκάριθμο·

α') Πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο μὲ τὸν χρόνον σὲ ἡμέρες.
 Αὐτὸ ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι ὁ τοκάριθμος.

β') Διαιροῦμε τὸ 36000 μὲ τὸ ἐπιτόκιο. Αὐτὸ τὸ πηλίκον ποὺ
 θὰ βροῦμε λέγεται σταθερὸς διαιρέτης.

γ') Διαιροῦμε τὸν τοκάριθμο μὲ τὸ σταθερὸ διαιρέτη καὶ αὐτὸ
 ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι ὁ τόκος σὲ ἡμέρες.

Ἄς λύσωμε ἓνα πρόβλημα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους.

1. Πόσον τόκον φέρουν 60000 δραχμὲς πρὸς 8% σὲ 20 μέρες ;

Μὲ τὸν α' τρόπο·

$$T = \frac{60000 \times 8 \times 20}{36000} = \frac{9600000}{36000} = \frac{9600}{36} = 266,66$$

Μὲ τὸν τοκάριθμο·

$$T = \frac{60000 \times 20}{36000 : 8} = \frac{1200000}{4500} = \frac{12000}{45} = 266,66$$

Τὸ ἀποτέλεσμα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους εἶναι τὸ ἴδιο.

Ὅταν λοιπὸν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες εὐρίσκομε τὸν τόκο·

$$\alpha) T = \frac{K \times E \times X}{36000} \quad \text{ἢ} \quad \beta) T = \frac{\text{τοκάριθμος}}{\text{σταθερὸς διαιρέτης}}$$

Προβλήματα (τοκάριθμου)

2. Νὰ βρῆς πόσο τόκο φέρουν 20000 δραχμὲς σὲ 50 ἡμέρες
 πρὸς 9%.

3. Πόσον τόκο θὰ πληρώσω σὲ μιὰ Τράπεζα, ἀπὸ τὴν ὁποία δανεί-
 στηκα 600000 δραχμὲς πρὸς 6% διὰ 75 ἡμέρες ;

3. Νὰ βρῆς τὸν τόκο :

α) 50000 δραχ. πρὸς 10% σὲ 80 ἡμέρες

β) 250000 » » 12% » 45 »

γ) 920000 » » 15% » 100 »

*Αριθμητικὰ προβλήματα Κοντομάρη—Μπάμπαλη, Τάξ. ΣΤ'.

2

Β' Όταν ζητήται τὸ Κεφάλαιο.

α) Ὁ χρόνος σὲ ἔτη.

1. **Πρόβλημα.** Ἐνας ἔμπορος δανείσθηκε ἀπὸ μιὰ Τράπεζα χρήματα με 8%. Μετὰ δύο ἔτη ἐπλήρωσε τὸ χρέος καὶ μαζί μ' αὐτὸ ἐπλήρωσε καὶ 320000 διὰ τόκο. Πόσα εἶχε δανεισθῆ ;

Ἐδῶ μᾶς λείπει τὸ κεφάλαιο.

Ἀφοῦ δὲν ξέρομε ἄλλο τρόπο, καταφεύγομε στὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξη

100 δραχ.	1 ἔτος	8 δραχ. τόκος
X »	2 »	320000 » »

$$X = 100 \times \frac{1 \times 320000}{2 \times 8} = \frac{32000000}{16} = 2000000 \text{ δρ. Κεφ.}$$

Ἄς προσέξωμε κι' ἐδῶ τὸ ἀποτέλεσμα. Βλέπομε ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸν **τόκον** ἐπὶ 100 (τὸ 1 τὸ ἀφίνομε, γιατί ὅπως ξέρομε τὸ ἓνα οὔτε πολλαπλασιάζει, οὔτε διαιρεῖ) καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ **χρόνου** καὶ τοῦ **ἐπιτοκίου**.

Δηλαδή :

Γιὰ νὰ εὑρωμε τὸ κεφάλαιο, όταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμε μετὰ τὸ γινόμενο τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν, τοῦ ἐπιτοκίου δηλ. καὶ τοῦ χρόνου.

Νά καὶ ὁ τύπος :

$$K = \frac{T \times 100}{E \times X}$$

Προβλήματα.

1. Ποιὸ κεφάλαιο μετὰ 4 ἔτη τοκίζόμενο με 12% θὰ δώσει τόκον 36000 δραχ. ;
2. Ἐνας εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα ὅλα τὰ χρήματά του πρὸς 8%.

Μετά τρία ἔτη πῆρε γιὰ τόκους 192000 δραχμές. Πόσα εἶχε καταθέσει ;

3. Ἐνας κτηματίας εἶχε δανεισθῆ ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζα ἕνα ποσὸ γιὰ νὰ καλλιεργήσῃ τὰ κτήματά του μὲ 6%. Μετὰ 2 ἔτη πλήρωσε τόκο γι' αὐτὰ 300000 δραχμές. Πόσα εἶχε δανεισθῆ ;

4. Νὰ βρῆς ποῖο κεφάλαιο σέ :

α) 4 ἔτη πρὸς 9% δίνει τόκο 108000 δραχ.

β) 5 » » 15% » » 300000 »

γ) 2 » » 6% » » 16200 »

Προβλήματα.

β) Ὁ χρόνος σὲ μῆνες.

1. Ποῖο κεφάλαιο σὲ 8 μῆνες πρὸς 8% δίνει τόκο 1600 δραχμές;

Ἄς τὸ λύσωμε μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξη

100 δραχ.	1 ἔτος	8 δραχ.	τόκος
X »	8 μῆνες	1600 δραχ.	»

Στὴν κατάταξη παρατηροῦμε ὅτι τὰ ποσὰ τοῦ χρόνου δὲν εἶναι ὁμοειδῆ. Πρέπει νὰ γίνουιν ὁμοειδῆ. Γίνονται ; κάνοντας καὶ τὸ ἔτος μῆνες ἤτοι 12 μῆνες. Κι ἔτσι θὰ ἔχωμε :

100 δραχ.	12 μῆνες	8 δραχ.
X	8 »	1600 »

$$X = 100 \times \frac{12 \times 1600}{8 \times 8} = \frac{1920000}{64} = 30000$$

Ἄν προσέξωμε θὰ ἰδοῦμε ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκον 1600 ἐπὶ 100×12 , ἤτοι ἐπὶ 1200. Πολλαπλασιάσαμε λοιπὸν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 καὶ διαιρέσαμε μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν ποσῶν, ἐπιτοκίου καὶ χρόνου. Τὸ κεφάλαιο λοιπὸν, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες, βρίσκεται ἔτσι :

$$K = \frac{T \times 1200}{E \times X}$$

2. Ένας είχε καταθέσει στο Ταμειτήριο χρήματα με 4%₀ και πήρε τόκο έπειτα από 9 μήνες 3600 δραχμές. Πόσα είχε καταθέσει;
3. Ποιό κεφάλαιο τοκισζόμενο με 12%₀ δίνει τόκο 18000 δραχμές σε 6 μήνες;
4. Να βρής ποιό κεφάλαιο:
 - α) σε 8 μήνες προς 6%₀ δίνει τόκο 6000
 - β) » 16 » » 8%₀ » » 32000
 - γ) » 3 » » 12%₀ » » 12000

Προβλήματα.

γ') Ο χρόνος σε ημέρες.

1. Ποιό κεφάλαιο σε 20 ημέρες τοκισζόμενο προς 8%₀ δίνει τόκο 400 δραχμές;
Κι' αυτό θα λυθῆ όπως τα παραπάνω προβλήματα με τῆ διαφορά ότι θα πολλαπλασιάσωμε τὸν τόκον με 36000 καὶ ὄχι με 1200. Δηλαδή :

$$K = \frac{T \times 36000}{E \times X} = K = \frac{400 \times 36000}{20 \times 8} = 90000.$$

2. Ποιό κεφάλαιο σε 15 ημέρες προς 8%₀ δίνει τόκο 3600 δραχμές;
3. Ένας τόκισε ένα κεφάλαιο προς 12%₀ και πήρε σε 40 ημέρες 2000 δραχμές τόκο. Ποιό ἦταν τὸ κεφάλαιο ;
4. Να βρής ποιό κεφάλαιο:
 - α) σε 25 ημέρες προς 8%₀ δίνει τόκο 500 δραχ.
 - β) σε 50 » » 6%₀ » » 1500 »
 - γ) σε 80 » » 12%₀ » » 5600 »

Γ'. "Όταν ζητηται τὸ ἐπιτόκιο

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, κάνομε ὅ,τι καὶ ὅταν ζητηται τὸ κεφάλαιο, δηλαδῆ:

- α) "Όταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν

$$\text{Κεφαλαίου καὶ Χρόνου, ἥτοι } E = \frac{T \times 100}{K \times X}.$$

- β) "Όταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1200 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν

$$\text{Κεφαλαίου καὶ Χρόνου, ἥτοι } E = \frac{T \times 1200}{K \times X}.$$

- γ) "Όταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 36000 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων γνω-

$$\text{στῶν Κεφαλαίου καὶ Χρόνου, ἥτοι } E = \frac{T \times 36000}{K \times X}.$$

Προβλήματα

- 1) Μὲ πόσο τοῖς ἑκατὸ κεφάλαιο 80000 σὲ 4 ἔτη ἔδωκε τόκο 25600 δραχμές ;
- 2) Ἀγόρασα ἓνα σπίτι μὲ 50000000 δραχμές. Τὸ ἐνοικίασα γιὰ 3 ἔτη καὶ πῆρα ἐνοίκιο 18000000 δραχμές. Πόσο τοῖς % τοκίζω τὰ χρήματά μου ;
- 3) Ἐνα κεφάλαιον ἀπὸ 600000 δραχμές σὲ 6 μῆνες μᾶς ἔδωσε τόκο 24000 δραχμές. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο τοκίσθηκε ;
- 4) Ἐνα κεφάλαιον 150000 δραχ. σὲ 8 μῆνες μᾶς ἔφερε τόκο 12000 δραχμές. Πρὸς πόσο τοῖς % τοκίσθηκε ;
- 5) Νὰ βρῆς τὸ ἐπιτόκιο στὰ παρακάτω προβλήματα.
 - α) Κεφάλαιο 60000 σὲ 24 ἡμέρες ἔδωσε τόκο 320 δραχμές.
 - β) » 180000 σὲ 25 » » » 1500 »
 - γ) « 400000 σὲ 18 » » » 2500 »

Δ'. Όταν ζητηται ὁ χρόνος

Κι' ἔδῳ κάνομε τὸ ἴδιο. Δηλαδή πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν

$$\text{Κεφαλαίου καὶ Ἐπιτοκίου, ἤτοι } X = \frac{T \times 100}{K \times E}.$$

Προβλήματα

1. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 200000 τοκίζομενο πρὸς 8% δίνει τόκο 64000 δραχ. ;
2. Νὰ βρῆς τὸ χρόνο στὰ παρακάτω προβλήματα.
 - α) Κεφάλαιο 150000 δραχ. 9% τοκίζομενο σὲ πόσο χρόνο θὰ δώσῃ τόκο 40500 δραχ. ;
 - β) Κεφάλαιο 300000 πρὸς 8% δίνει τόκο 120000 δραχ.
 - γ) » 80000 » 24% » » 10000 »
3. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 50000000 τοκίζομενον πρὸς 20% δίνει τόκο 50000000 δραχ. ;
4. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιον 15.000.000 τοκίζομενον πρὸς 12% δίνει τόκο 7.200.000 ;
5. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 20.000.000 τοκίζομενον πρὸς 15% δίνει τόκον 3.000.000 ;

Ἀνακεφαλαίωση.

1. Εύρεση τοῦ Τόκου.

$$\alpha') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ ἔτη} \quad T = \frac{K. E. \times}{100}$$

$$\beta') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ μῆνες} \quad T = \frac{K. E. \times}{1200}$$

$$\gamma') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ ἡμέρες} \quad T = \frac{K. E. \times}{36000}$$

$$\delta') \text{ Μὲ τὸν τοκᾶριθμὸν} \quad T = \frac{\text{Τοκᾶριθμὸς}}{\text{Σταθερὸς διαιρέτης}} \quad \text{---}$$

2. Εύρεση τοῦ Κεφαλαίου.

$$\alpha') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ ἔτη} \quad K = \frac{T \times 100}{E. \times}$$

$$\beta') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ μῆνες} \quad K = \frac{T \times 1200}{E. \times}$$

$$\gamma') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ ἡμέρες} \quad K = \frac{T \times 36000}{E. \times}$$

3. Εύρεση τοῦ ἐπιτοκίου.

$$\alpha') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ ἔτη} \quad E = \frac{T \times 100}{K. \times}$$

$$\beta') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ μῆνες} \quad E = \frac{T \times 1200}{K. \times}$$

$$\gamma') \text{ Ὁ Χρόνος σὲ ἡμέρες} \quad E = \frac{T \times 36000}{K. \times}$$

4. Εύρεση τοῦ Χρόνου.

$$X = \frac{T \times 100}{K. E}$$

Προβλήματα

Τὰ παρακάτω προβλήματα θὰ τὰ λύσης μὲ τὴ μέθοδο τοῦ τόκου. Ὅπου δὲν μπορεῖς θὰ χρησιμοποίησῃς τὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

1. Ἐνας ἔμπορος δανείσθηκε 150000 δραχμὲς μὲ 6%₀. Σὲ καιρὸ πῆγε καὶ πλήρωσε τὸ δάνειό του καὶ πλήρωσε κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ 1680000 δραχ. Πόσο καιρὸ ἔκαμε νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του;
2. Ἐνας κτηματίας πούλησε 480 ὀκάδες λάδι πρὸς 5000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Τὰ χρήματα αὐτὰ τὰ τόκισε πρὸς 12%₀ καὶ πῆρε τόκο 864000 δραχμὲς. Πόσον καιρὸ εἶχε τοκισμένα τὰ χρήματά του;
3. Ἐνας φιλόπυθρος πλούσιος εἶχε καταθέσει σὲ μιὰ Τράπεζα 20000000 δραχμὲς. Ὅλους τοὺς τόκους, ποὺ παίρνει κάθε 6 μῆνες, τοὺς διαθέτει γιὰ νὰ κάνῃ Κυριακάτικο συσσίτιο σὲ 15 φτωχὰ παιδιὰ πληρώνοντας 2500 δραχμὲς γιὰ καθένα. (Οἱ Κυριακὲς ὑπολογίζονται σὲ 24). Πόσο τοῖς %₀ ἐτόκισε τὰ χρήματά του;
4. Ἐνας ὀφειλέτης πλήρωσε γιὰ χρέος 200000 μετὰ 8 μῆνες τόκον 1000 δραχμὲς. Πόσο τοῖς %₀ πλήρωσε;
5. Ἐνας γεωργὸς γιὰ νὰ πληρώσῃ τόκο 9 μηνῶν πρὸς 10%₀ ἔδωσε 20 ὀκάδες σιτάρι πρὸς 1500 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσο ἦταν τὸ χρέος του;
6. Ἐνας πατέρας ξοδεύει γιὰ τὸ παιδί του ποὺ σπουδάζει στὴν Ἀθήνα τὰ ἑξῆς ποσά: α) γιὰ κατοικία 60.000, β) γιὰ τροφὴ 300000 καὶ διὰ ἄλλα ἔξοδα 100.000 δραχμὲς τὸ μῆνα. Αὐτὰ τὰ χρήματα τὰ ξοδεύει δίνοντας τοὺς τόκους ποὺ παίρνει ἀπὸ τὸ κεφάλαιο ποὺ ἔχει καταθέσει στὴν Τράπεζα μὲ 8%₀. Πόσο εἶναι τὸ κεφάλαιό του;
7. Δυὸ ἀδελφία κληρονόμησαν ἀπὸ τὸν πατέρα τους ὁ πρῶτος ἓνα ποσόν, ποὺ τοῦ δίνει στὰ 5 ἔτη τόκο 96000 δραχμὲς πρὸς 6%₀. Ὁ δεῦτερος ἓνα ποσὸ ποὺ τοῦ δίνει στὸν ἴδιο χρόνον μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο τόκο 1440000 δραχμὲς. Πόσες δραχμὲς κληρονόμησεν ὁ καθένας;
8. Ἐνας τοκιστὴς πῆρε τὴν πρώτη Ἰουλίου 1946 γιὰ τὴν ἐξόφληση ἑνὸς χρέους ἀπὸ 500000 δραχμὲς, ποὺ εἶχε τοκίσει πρὸς

12 % , για κεφάλαιο και τόκο μαζί 530000 δραχμές. Πότε είχε τοκίσει τα χρήματα αυτά ;

9. Σε πόσο χρόνο κεφάλαιο 250000 δραχ. τοκίζόμενο προς 20 % τριπλασιάζεται ;

10. Ένας είχε 600000 δραχμές τα $\frac{2}{5}$ αυτών τα έτόκισε προς 10% τα υπόλοιπα προς 15 %. Πόσο τόκο πήρε και από τα δυο σε 3 έτη ;

11. Μία υπηρέτρια κατέθεσε στο ταχ. ταμειντήριο 60000 με 4 % για 4 έτη και στο ταμειντήριο της Τράπεζας άλλα τόσα με 6% για 3 έτη. Από πού πήρε περισσότερους τόκους και πόσους ;

12. Ένας κτηματίας πούλησε 600 δκάδες κρασί προς 1200 δραχ. την δκά. Τα χρήματα τα κατέθεσε σε μια Τράπεζα προς 6 %. Πόσο τόκο θα πάρη μετά 8 μήνες ;

13. Ένας δάνεισε σ' ένα άλλον 400000 δραχ. προς 9 % για 2 μήνες και 20 ημέρες : Πόσο τόκο θα πάρη ; (Νά λυθη και με τοκάριθμο).

14. Ένας έμπορος είχε αγοράσει έμπορεύματα και πλήρωσε 800.000 δραχμές. Τα πούλησε κατόπιν και έκέρδισε 280.000 δραχμές. Εάν υπολογίσουμε το κέρδος με 20 % πόσον χρόνον έκαμε για να πωλήση το έμπόρευμα αυτό ;

15. Ένας αγόρασε ένα σπίτι με 600.000.000 δραχμές και παίρνει νοίκια κάθε εξαμηνία 900 000 δραχμές. Πόσο τοις % τοκίζει τα χρήματά του ;

16. Αγόρασε ένας έμπορος ζάχαρη προς 6.200 δραχμές την δκά. Μετά 8 μήνες την πούλησε προς 8000 δραχμές την δκά. Πόσο τοις % κέρδισε ;

17. Ένας υπηρέτης κατέθεσε 80.000 δραχμές σε μιό Τράπεζα πρό 6 % την πρώτη Φεβρουαρίου και πήρε έπειτα από καιρό κεφάλαιο και τόκο μαζί 83.600 δραχμές. Πότε πήρε τα χρήματά του ;

18. Ένας κτηματίας όταν γεννήθηκε η κόρη του κατέθεσε σε μια Τράπεζα 800.000 προς 6 % για προΐκα της. Όταν πανδρεύθηκε η κόρη πήρε κεφάλαιο και τόκους μαζί 2.000.000. Σε ποιά ηλικία πανδρεύθηκε η κόρη ;

19. Ένας δέν ξέρει τί να προτιμήση. Να καταθέση στην Τράπεζα

60.000.000 δραχμές πού έχει με 6⁰/₁₀₀ ή ν' αγοράση με τὰ χρήματα αὐτὰ ἓνα σπίτι, πού θὰ τοῦ δίνει τὸ μῆνα ἀπὸ νοίκια 600.000 δραχμές ; Τί νὰ κάμη ; Συμβούλευσέ τον σὺ ποιὸ εἶναι καλύτερο.

20. Μιά μοδίστα ἀγόρασε μιὰ ραπτομηχανὴ ἀξίας 1.800.000 δραχμῶν. Συμφώνησε νὰ προσθέσῃ ὁ πωλητὴς καὶ 12⁰/₁₀₀ ἐπὶ πλεόν γιὰ 20 μῆνες καὶ νὰ πληρώσῃ ὅλο τὸ ποσὸ αὐτὸ σὲ 20 μηνιαῖες δόσεις. Πόσο θὰ πληρώνη τὸ μῆνα ;
21. Δανείσθηκα χρήματα πρὸς 8⁰/₁₀₀ καὶ μετὰ 5 ἔτη πλήρωσα τόκο καὶ κεφάλαιο μαζί 490.000 δραχμές. Πόσα δανείσθηκα ;
22. Ἕνας πατέρας κατάρθεσε στὴν Τράπεζα χρήματα πρὸς 5⁰/₁₀₀ γιὰ νὰ τὰ πάρῃ τὸ παιδί του, ὅταν μεγαλώσῃ. Ὑστερα ἀπὸ 12 ἔτη τὸ παιδί πῆρε κεφάλαιο καὶ τόκους μαζί 2.880.000 δραχμές. Πόσα εἶχε καταθέσει ;
23. Ἕνας οἰκογενειάρχης κατάρθεσε σὲ μιὰ Τράπεζα ὅλα τὰ χρήματά του πρὸς 6⁰/₁₀₀ γιὰ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνες. Ἐπειτα πῆρε τὰ χρήματα αὐτὰ μαζί με τοὺς τόκους καὶ ἀγόρασε μ'αὐτὰ 300 πῆχες οἰκόπεδο πρὸς 121.000 δραχμές τὸν πήχη. Πόσες δραχ. εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα ;

Ἀνατοκισμός.

Πολλοὶ ἄνθρωποι καταθέτουν σὲ μιὰ Τράπεζα χρήματα μετὰ τὴν συμφωνία νὰ πάρουν τὸν τόκον μετὰ 6 μῆνες ἢ μετὰ ἓνα ἔτος. Πολλοὶ ὅμως, πού δὲν ἔχουν ἀνάγκη ἀπὸ χρήματα, συμφωνοῦν νὰ προσθέτεται ὁ τόκος, πού θὰ πάρουν σ'τοὺς 6 μῆνες ἢ στὸ ἔτος, στὸ κεφάλαιο κι' ἔτσι νὰ μεγαλώνη τὸ κεφάλαιό τους. Τὸ ἴδιο κάνουν κάθε φορὰ, πού θὰ πάρουν τόκο. Αὐτὸ λέγεται *ἀνατοκισμός*.

Ἄς λύσωμε ἓνα πρόβλημα ἀνατοκισμοῦ.

1. Ἕνας οἰκογενειάρχης κατάρθεσε σὲ μιὰ Τράπεζα 300.000 δραχμὲς γιὰ 5 ἔτη πρὸς 4⁰/₁₀₀ με ἀνατοκισμό κάθε ἔτος. Πόσα θὰ πάρῃ ὅλα μαζί στὰ 5 ἔτη ;

Λύση : Κεφάλαιο πρώτης κατάθεσης Δραχ.

300.000

Βρίσκομε τὸν τόκο του σὲ ἓνα ἔτος ὅπως

ξέρουμε δηλαδή $\frac{300000 \times 4}{100} = 12000$ δραχ.

Τις προσθέτουμε αυτές στο κεφάλαιο		12.000
Και στο δεύτερο χρόνο τὸ κεφάλαιο γίνεται	Δραχ.	312000
Βρίσκουμε τὸν τόκο τοῦ νέου κεφαλαίου γιὰ τὸ		

δεύτερο ἔτος ὅπως ξέρουμε, δηλαδή		$\frac{31200 \times 4}{100} = \text{»}$
		12480

Τις προσθέτουμε αυτές στο κεφάλαιο και γίνεται » 324480
 Τὸ ἴδιο κάνουμε και γιὰ τὰ ὑπόλοιπα 3 ἔτη προσθέτοντας στο νέο κεφάλαιο τοὺς τόκους τοῦ περασμένου ἔτους. Αὐτὸς εἶναι ὁ ἀνατοκισμὸς.

Λύσε τώρα μόνος σου τὰ παρακάτω προβλήματα.

2. Ἐνας μετανάστης κατέθεσε στὴν Τράπεζα μὲ ἀνατοκισμὸ κάθε ἔτος 500000 δραχμὲς διὰ 3 ἔτη μὲ 5^ο%. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ μετὰ 3 ἔτη ; —
3. Δανεῖζεται ἓνας 120000 δραχμὲς μὲ ἀνατοκισμὸ κάθε 6 μῆνες πρὸς 6^ο%. Πόσο χρέος θὰ πρέπει νὰ πληρώσῃ μετὰ 2 ἔτη ;
4. Σὲ μιὰ πόλῃ ὁ πληθυσμὸς εἶναι 40000 κάτοικοι. Πόσους κατοίκους θὰ ἔχῃ ἡ πόλῃ αὐτὴ μετὰ 3 ἔτη, ἂν μεγαλώνη ὁ πληθυσμὸς κάθε ἔτος κατὰ 6^ο%;

Τοκοχρεωλυτικὰ δάνεια

Πολλοὶ δανεῖζονται χρήματα και ἐπειδὴ δὲν μποροῦν νὰ τὰ πληρώσουν ὅλα μαζί στὸν ὀρισμένο χρόνο, συμφωνοῦν νὰ πληρῶνουν κάθε ἔτος ἢ κάθε 6 μῆνες ἓνα ὀρισμένο ποσὸ γιὰ τόκο και γιὰ κεφάλαιο. Αὐτὸ λέγεται **τοκοχρεωλύσιον** και τὰ δάνεια αὐτὰ **τοκοχρεωλυτικὰ**.

Ἐς λύσωμε ἓνα πρόβλημα τοκοχρεωλυτικοῦ δανείου.

- 1) Ἐνας κτηματίας δανείσθηκε ἀπὸ τὴν Τράπεζα 4500000 δραχμὲς γιὰ νὰ καλλιεργήσῃ τὰ κτήματά του μὲ 5^ο% μὲ τὴ συμφωνία νὰ πληρῶνῃ κάθε ἔτος 500000 δραχμὲς. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ δάνειο αὐτό ;

Λύση: Ἀρχικὸ κεφάλαιο δανείου	Δραχ.	4500000
Ὁ τόκος τοῦ 1ου ἔτους εἶναι	»	225000
ὀφείλει δηλαδή στὸ τέλος τοῦ α' ἔτους	»	4725000
Πληρώνει κατὰ τὴν συμφωνία	»	500000
Μένει ὑπόλοιπο ποῦ θὰ τοκισθῇ γιὰ τὸ 2ο ἔτος	»	4225000
Ὁ τόκος τοῦ 2ου ἔτους εἶναι	»	211250
ὀφείλει δηλαδή στὸ τέλος τοῦ 2ου ἔτους	»	4436250
Πληρώνει κατὰ συμφωνία	»	500000
Μένει ὑπόλοιπο ποῦ θὰ τοκισθῇ γιὰ τὸ 3ον ἔτος	»	3936250

Καὶ ἔτσι θὰ ἐξακολουθήσῃ ὥσπου νὰ τὸ ἐξοφλήσῃ.

- 2) Ἐνα δάνειον 800000 δραχμῶν μὲ 10 % ἐξοφλεῖται μὲ χρεωλύσιο δραχ. 100000 κατ' ἔτος. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ ;
- 3) Ἐνα κράτος δανείσθηκε 800000 λίρες πρὸς 4 % μὲ χρεωλύσιον 150000 λίρες κάθε ἔτος. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ δάνειο αὐτό ;
- 4) Νὰ βρῆς μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθοῦν τὰ παρακάτω δάνεια μὲ τοκοχρεωλύσιο.
 - α) Κεφάλ. 3000000 δρ. πρὸς 6% μὲ τοκοχρεωλύσιον 450000 κατ' ἔτος
 - β) » 150000 » » 10% » » 300000 » »
 - γ) » 600000 » » 12% » » 100000 » »

Ἐφαρμογή.

Πολλοὶ ἔμποροι θέλουν νὰ ἀγοράσουν μιὰ μεγάλη ποσότητα ἐμπόρευμα τῆς ἐργασίας τους. Ἐπειδὴ πολλὰς φορὰς δὲν ἔχουν χρήματα νὰ πληρώσουν ὅλη τὴν ἀξία του, δίνουν στὸν πωλητὴ ὅσα χρήματα ἔχουν καὶ τὰ ὑπόλοιπα ὑπόσχονται νὰ τὰ δώσουν ὕστερα ἀπὸ ἓνα χρονικὸ διάστημα.

Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο δανεῖζονται χρήματα καὶ ἀπὸ τὶς Τράπεζες. Ὁ πωλητὴς ὅμως ἢ οἱ Τράπεζες παίρνουν ἀπὸ τὸ δανειζόμενον μιὰ ἀπόδειξη. Αὐτὴ ἢ ἀπόδειξη λέγεται **γραμμάτιο** καὶ γράφει τὰ ἑξῆς :

Γραμμάτιον διὰ δραχμὰς 150.000

Μετὰ 8 μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς διαταγὴν τοῦ Γεωργίου Σταθεροῦ (ἢ τῆς τάδε Τραπεζῆς) τὰς ἄνω δραχμὰς ἑκατὸν πενήνην χιλιάδας, τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς ἔμπορεύματα (ἢ μετρητά).

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἀπριλίου 1946

(ὑπογραφή) Π. Νικολάου

Τὸ ποσὸν αὐτὸ τῶν 150000 ποῦ γράφει τὸ γραμμάτιο λέγεται *ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου. Ἡ χρονολογία ποῦ εἶναι ὑποχρεωμένος ὁ δανειζόμενος νὰ πληρώσῃ τὴν ὀφειλή του, ὅπως ἔδῳ μετὰ 8 μῆνες, δηλαδὴ ἡ 1 Δεκεμβρίου, λέγεται *λῆξις τοῦ γραμματίου*.

Κάμε καὶ σὺ ἓνα γραμμάτιο.

- α) Ἐδάνεισα στὸν Κ. Ε. 100000 γιὰ 6 μῆνες τὴν 15ην Μαΐου καὶ πὲς μου ποιά εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ ποιά εἶναι ἡ λῆξις τοῦ γραμματίου.
- β) Ἐνας ἔμπορος ἀγόρασε τὴν 30ὴν Ἰουνίου 600 ὀκάδες λάδι πρὸς 4500 δραχμὰς τὴν ὀκά μὲ τὴ συμφωνία νὰ τὸ πληρώσῃ μετὰ 5 μῆνες.
Ἐπειδὴ δὲν εἶχε νὰ τὸ πληρώσῃ ἔδωσε ἓνα γραμμάτιο. Κάμε τὸ γραμμάτιο καὶ πὲς ποιά εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του καὶ ποιά ἡ λῆξις του.
- γ) Ἐνας ἔμπορος γιὰ ν' ἀγοράσῃ ἔμπόρευμα δανείστηκε σήμερα ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζα μὲ γραμμάτιο 5000000 δραχμὰς γιὰ 3 μῆνες. Κάμε τὸ γραμμάτιο καὶ πὲς ποιά εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ ποιά ἡ λῆξις του.
- δ) Δανείσου σήμερα ὅσα χρήματα θέλεις ἀπὸ τὸν Ε. Β. καὶ δῶσε του ἓνα γραμμάτιο πληρωτέον σὲ 4 μῆνες. Κάμε τὸ γραμμάτιο, ὑπόγραφέ το καὶ πὲς ποιά εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του καὶ ποιά ἡ λῆξις του.

Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση

Ὅπως εἶπαμε παραπάνω, ἐκεῖνος ποὺ παίρνει τὸ γραμματίο γιὰ τὰ χρήματα ἢ ἐμπορεύματα, ποὺ δίνει, δὲν μπορεῖ νὰ ζητήσῃ τὰ χρήματα αὐτά, δηλαδὴ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, πρὶν ἀπ' τὴ λήξῃ του; Ἄν συμβῆ ὅμως αὐτὸς νὰ ἔχῃ ἐν τῷ μεταξὺ ἀπόλυτη ἀνάγκη ἀπὸ τὰ χρήματα τί θὰ γίνῃ; Θὰ βρῆ τότε ἕναν ἄλλον ἢ μιὰν Τράπεζα καὶ θὰ πουλήσῃ τὸ γραμματίο πρὶν ἀπὸ τὴ λήξῃ του γιὰ νὰ πάρῃ τὰ χρήματά του. Αὐτὸς ὅμως, ποὺ θ' ἀγοράσῃ τὸ γραμματίο, θὰ περιμένῃ νὰ λήξῃ τὸ γραμματίο, γιὰ νὰ πάρῃ τὰ χρήματα. Μπορεῖ νὰ περιμένῃ καὶ ἕνα μῆνα καὶ δύο μῆνες καὶ τρεῖς μῆνες ἢ καὶ περισσότερους. Εἶναι λοιπὸν σωστὸ νὰ κρατήσῃ κι' αὐτὸς τὸν τόκον τῶν χρημάτων, ποὺ δίνει, γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα, ποὺ ἀπομένει ἀπὸ τὴν ἡμέρα, ποὺ ἀγοράζει τὸ γραμματίο ὡς τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Συμφωνοῦν τότε μὲ τὸν πωλητὴ τοῦ γραμματίου νὰ πληρώσῃ τὸν τόκο τῶν χρημάτων τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου μ' ἕνα κανονικὸ ἐπιτόκιο γιὰ τὸ χρονικὸ αὐτὸ διάστημα. Κρατώντας λοιπὸν τὸν τόκο τοῦ ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, δίνει τὰ ὑπόλοιπα. Αὐτὰ τὰ χρήματα, ποὺ δίνει, γιὰ ν' ἀγοράσῃ τὸ γραμματίο λέγεται **παρούσα ἢ πραγματικὴ ἀξία** τοῦ γραμματίου. Γιατὶ λέγεται ἔτσι εἶμαι βέβαιος πῶς τὸ κατάλαβες. Ἄν ὄχι, παρακάλεσε τὸ δάσκαλό σου νὰ σοῦ τὸ ἐξηγήσῃ. Ὁ τόκος ποὺ θὰ κρατήσῃ λέγεται **ὑφαίρεση**. Ἐπειδὴ δὲ αὐτὸς ἐξοφλεῖ τὸ γραμματίο πρὶν λήξῃ, ἢ πράξῃ αὐτὴ λέγεται **προεξόφληση** τοῦ γραμματίου.

Νὰ ἕνα παράδειγμα.

Ἐνα γραμματίο ἐκ δραχμῶν 50000 λήγει τὴν 15 Δεκεμβρίου καὶ προεξοφλεῖται τὴν 15ην Σεπτεμβρίου μὲ τόκον 8%. Ὁ προεξοφλητὴς θὰ κρατήσῃ ἀπὸ τὴς 50000 τὸν τόκον τοὺς πρὸς 8% γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα ἀπὸ 15 Σεπτεμβρίου ἕως 15 Δεκεμβρίου, δηλαδὴ γιὰ 3 μῆνες. Ὁ τόκος τοῦ θὰ εἶναι

$$\frac{50000 \times 3 \times 8}{1200} = 1000 \text{ δραχμές. } \Theta\acute{\alpha} \text{ κρατήσῃ λοιπὸν τὸν τόκον τοῦ } 1000$$

δραχμῆς καὶ θὰ δώσῃ τὰ ὑπόλοιπα δηλαδὴ $50.000 - 1000 = 49000$

δραχμές. Θὰ δώσει 49000 δραχμές, θὰ πάρη τὸ γραμματίο καὶ θὰ περιμένη τὴν 14ην Δεκεμβρίου γὰ νὰ πάρη τὶς 50000 δραχμές. Στὸ γραμματίο αὐτὸ βλέπομε α') *τὴν ὀνομαστικὴν ἀξία* τοῦ 50000 δραχμές. β') *τὴν ὑφαίρεση* 1000 δραχμές, ποὺ εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας μὲ τὸ συμφωνηθὲν ἐπιτόκιον, γὰ τὸ χρονικὸ διάστημα ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως ὡς τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως· καὶ γ') *τὴν παροῦσαν ἢ πραγματικὴν ἀξίαν* τοῦ γραμματίου δραχμές 49000, ποὺ εἶναι τὸ ποσὸν ποὺ μένει, ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸν τόκο ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξία καὶ δ') *τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως* τοῦ γραμματίου, ὅποτε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, γίνεται παροῦσα ἢ πραγματικὴ ἀξία αὐτοῦ. Γιατί; Ὁ τρόπος αὐτός, ποὺ λύσαμε τὸ πρόβλημα λέγεται *ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση*. Ἔτσι σὲ κάθε γραμματίο θὰ ἔχωμε· 1) *τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν*. 2) *τὴν ὑφαίρεση*. 3) *τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως*. καὶ 4) *τὴν παροῦσαν ἢ πραγματικὴν ἀξίαν*. Συνεπῶς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως λύονται ὅπως τὰ προβλήματα τοῦ τόκου.

Προβλήματα ἐξωτ. ὑφαιρέσεως

- 1) Γραμματίον 250000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 4 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6%. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσή του;
- 2) Γραμματίον 500000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8%. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσή του;
- 3) Ἐνα γραμματίον 80000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 25 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 5%. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσή του;
- 4) Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεση ἑνὸς γραμματίου 150000 δραχμῶν ποὺ ἐξαργυρώνεται 20 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 10%;
- 5) Ἐνας ἀγόρασε ἕνα κτῆμα γὰ 800000 δραχμές μὲ γραμματίο, ποὺ λήγει μετὰ 20 μῆνες. Αὐτὸς ὅμως τὸ πλήρωσε ἔπειτα ἀπὸ 6 μῆνες μὲ ἔκπτωση 9%. Πόσα ἐπλήρωσε;
- 6) Ἐνα γραμματίο ποὺ λήγει μετὰ 5 μῆνες προεξοφλεῖται μὲ 9% μὲ ὑφαίρεση 150000 δραχμῶν. Ποία ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ του ἀξία;

- 7) Ποία είναι η ονομαστική αξία γραμματίου, πού προεξοφλείται 75 ημέρες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8^ο/₁₀ με ὑφαίρεση 20000 δραχμῶν ;
- 8) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει ἓνα γραμματίον 450000 δραχμῶν πού προεξοφλείται πρὸς 8^ο/₁₀ με ὑφαίρεση 12000 δραχμῶν ;
- 9) Ἐνα γραμμάτιο προεξοφλεῖται 2 ἔτη πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6^ο/₁₀. Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του εἶναι 500000 δραχμῆς. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσή του καὶ ποία ἡ πραγματικὴ ἀξία του ;
- 10) Ἐνας χροσταίει 600000 δραχμῆς καὶ ὑποχρεοῦται νὰ τὴν πληρῶσῃ μετὰ 8 μῆνες. Ἐὰν τὴν πληρῶσῃ προτιθέτερα τοῦ κάνουν ἔκπτωση 6^ο/₁₀. Τὴν πληρῶσε μετὰ 3 μῆνες. Πόσο θὰ πληρῶσῃ καὶ τί κέρδισε ;
- 11) Προεξοφλεῖται ἓνα γραμμάτιο, πού λήγει μετὰ 4 μῆνες πρὸς 12^ο/₁₀ ἀντὶ 192000 δραχμῶν. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσή του καὶ ποία ἡ ονομαστικὴ του ἀξία ;
- 12) Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεση καὶ ποία ἡ ονομαστικὴ ἀξία ἐνὸς γραμματίου πού ἐξαργυρώθηκε πρὸς 8^ο/₁₀ 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 76800 δραχμῶν ;
- 13) Ἐνα, δανείστηκε τὴν 28ην Μαΐου 250000 δραχμῆς γιὰ νὰ τὴν πληρῶσῃ μετὰ 6 μῆνες. Ἐδωσε ἓνα γραμμάτιο γιὰ τὸ χρέος του. Τὴν ἡμέραν πού ἔληξε τὸ γραμμάτιο, τὸ πληρῶσε. Πόσα ἔδωσε ; Ποία ἡ ονομαστικὴ του ἀξία, ποία ἡ πραγματικὴ του ;
- 14) Πότε ἡ παρούσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι ἴση με τὴν ονομαστικὴν ;
- 15) Ἐνα γραμμάτιο ονομαστικῆς ἀξίας 560000 δραχμῶν πού λήγει μετὰ 9 μῆνες προεξοφλεῖται σήμερον ἀντὶ 534800 δραχμῶν. Με πόσο ^ο/₁₀ ἐξαργυρώθηκε ;
- 16) Ἐνα γραμμάτιο 440000 δραχμῶν λήγει τὴν 25ην Δεκεμβρίου καὶ προεξοφλεῖται τὴν 1ην Ὀκτωβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους πρὸς 8^ο/₁₀. Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεση καὶ πόση ἡ πραγματικὴ ἀξία ;

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις

Εἶδαμε παραπάνω στὰ προβλήματα *ἐξωτερικῆς ὑφαίρεσεως* ὅτι ὁ τόκος ὑπολογίζεται ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου. Αὐτὸ γίνεται γιὰτὶ βρῖσκομε εὐκόλα τὴν *ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση* χρησιμοποιώντας τοὺς κανόνες τῶν προβλημάτων τοῦ *τόκου*. Εἶναι ὅμως ἀδίκη, γιὰτὶ ὁ προεξοφλητὴς κρατᾶει τόκο ἐπὶ τῆς *ὀνομαστικῆς ἀξίας* τοῦ γραμματίου, ἐνῶ δίνει λιγώτερα χρήματα. Ἐπρεπε νὰ κρατῆ τόκο τῶν χρημάτων, ποὺ δίνει, δηλαδὴ τῆς *πραγματικῆς ἀξίας* τοῦ γραμματίου. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ διαφορὰ δὲν εἶναι μεγάλη καὶ συνεπῶς τὸ ἀδικο μικρὸ, χρησιμοποιοῦν ὅλοι στὴν προεξόφληση τῶν γραμματίων τὴν *ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση* γιὰ εὐκολία στὸ λογαριασμό.

Ἐσωτερικὴ λοιπὸν ὑφαίρεση εἶναι ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἐνῶ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου.

Ἄς λύσωμε ἓνα πρόβλημα *Ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσης*.

1) Γραμμάτιο 60000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8%₀. Ποιὰ εἶναι ἡ ἔσωτερικὴ ὑφαίρεση;

Ἄν ζητούσαμε τὴν ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση θὰ τὸ λύσαμε ὅπως μάθαμε, σὰν πρόβλημα τόκου.

Ζητοῦμε ὅμως τὴν *Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση*.

Δύση· α') Βρῖσκομε τὸν τόκο τῶν 100 δραχμῶν στὸν ἴδιο χρόνον μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο· δηλαδὴ:

$$\frac{100 \times 6 \times 8}{1200} = 4 \text{ δραχ. τόκος τῶν 100 δραχμῶν.}$$

β') Τώρα γνωρίζοντας τὸν τόκο τῶν 100 δραχμῶν χρησιμοποιοῦμε τὴν *μέθοδο τῶν τριῶν* καὶ λέμε :

Ἐὰν ἡ ὑφαίρεση εἶναι 4 δραχμὲς ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία θὰ εἶναι $100 + 4 = 104$ δραχμὲς.

Ἀριθμητικὰ προβλήματα Κοντομάρη—Μπάμπαλη, Τάξ. ΣΤ'.

3

Κατάστροση. Όνομ. αξία 104 δρ.	έσωτερ. ύφαίρ. 4 δρ.
» » 60000 »	» » X
$X = 4 \times \frac{60000}{104} = 2317,30 \text{ δρ. έσωτ. ύφ.}$	

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο λύονται τὰ προβλήματα τῆς Ἑσωτερικῆς ύφαιρέσεως.

Τώρα λύσε τὸ ἴδιο πρόβλημα μὲ τὸν τρόπο τῆς ἔξωτερικῆς ύφαιρέσεως γιὰ νὰ ἴδῃς τὴ διαφορά. Ἡ ἔξωτερικὴ ύφαίρεση θὰ εἶναι μεγαλύτερη. Λύσε μόνος σου τὰ παρακάτω προβλήματα μὲ ἔσωτερικὴ ύφαίρεση.

- 2) Ἐνα γραμμάτιον 240000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 18%₀ μὲ ἔσωτερικὴ ύφαίρεση. Ποιὰ εἶναι ἡ ἔσωτερικὴ ύφαίρεση;
- 3) Νὰ βρῆς τὴν ἔσωτερικὴ ύφαίρεση γραμματίου 360000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖο ἔξαργυρώθηκε 8 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ 12%₀.
- 4) Ἐνας ἔμπορος προεξοφλεῖ σὲ μιὰ Τράπεζα μὲ ἔσωτερικὴ ύφαίρεση ἓνα γραμμάτιο 300000 δραχμῶν 4 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6%₀. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ;
- 5) Ἐνας κτηματίας δανείσθηκε ἀπὸ μιὰ Τράπεζα 600000 δραχ. Ἐδωσε γιὰ τὸ δάνειο αὐτὸ ἓνα γραμμάτιο, ποὺ ἔληγε τὴν 15ην Δεκεμβρίου. Κατόρθωσε ὅμως νὰ ἔξοικονομήσῃ τὰ χρήματα ἔνωρίτερα τὴν 20 Ὀκτωβρίου καὶ πῆγε στὴν Τράπεζα νὰ τὸ ἔξοφλήσῃ μὲ ἔσωτερικὴ ύφαίρεση καὶ μὲ 4%₀. Πόσα χρήματα πλήρωσε;

Προβλήματα Ἑσωτερικῆς καὶ Ἐξωτερικῆς ύφαιρέσεως

- 1) Γραμμάτιο ποὺ λήγει μετὰ 9 μῆνες ὀνομαστικῆς αξίας 150000 δραχμῶν προεξοφλεῖται πρὸς 6%₀. Ποιὰ εἶναι ἡ ἔξωτερικὴ ύφαίρεση καὶ ποιὰ εἶναι ἡ ἔσωτερικὴ;
- 2) Ἐνας ἔμπορος προεξοφλεῖ ἓνα γραμμάτιό του 180000 δραχ.

- 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8^ο]. Πόσα θὰ πάρη μὲ ἔσω-
τερικὴ ὑφαίρεση καὶ πόσα μὲ ἔσωτερικῆ;
- 3) Ἐνα γραμματίο προεξοφλεῖται μὲ ἔσωτερικὴ ὑφαίρεση 2 μῆνες
καὶ 10 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 5^ο] ἀντὶ 51850 δραχ.
Ποιὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ του ἀξία;
- 4) Ἐνας ἔμπορος προεξοφλεῖ δύο γραμματία του· τὸ ἕνα ὀνομα-
στικῆς ἀξίας 75000 δραχμῶν 5 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του
πρὸς 8^ο] μὲ ἔσωτερικὴ ὑφαίρεση· τὸ ἄλλο ὀνομαστικῆς ἀξίας
80000 δραχμῶν 3 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του
πρὸς 6^ο] μὲ ἔσωτερικὴ ὑφαίρεση. Πόσα χρήματα πῆρε ἀπὸ
τὰ δύο;
- 5) Νὰ μᾶς πῆς ποιὰ ὑφαίρεση εἶναι δικαιοτέρα καὶ γιατί;
- 6) Νὰ μᾶς πῆς ποιὰ ὑφαίρεση χρησιμοποιοῦν οἱ ἔμποροι καὶ
γιατί;

Μερισμὸς σὲ μέρη ἀνάλογα

Πρόβλημα. Ἄς μοιράσωμε 40 καραμέλλες, σὲ 3 παιδιὰ ἀνάλογα
μὲ τὴν ἡλικία τους· τὸ πρῶτο εἶναι 4 χρόνων, τὸ δεύτερο 6
χρόνων καὶ τὸ τρίτο 10 χρόνων.

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητοῦμε νὰ μοιράσωμε τὶς καραμέλλες
ὥστε ὅταν τὸ πρῶτο παιδί θὰ πάρη 4, τὸ δεύτερο θὰ πάρη 6 καὶ τὸ
τρίτο 10, δηλαδὴ κάθε φορὰ θὰ παίρνουν καὶ τὰ τρία παιδιὰ
 $4+6+10=20$ καραμέλλες. Τώρα θὰ σκεφθοῦμε.

Λύση. Ἄν εἶχαμε 20 καραμέλλες τὸ πρῶτο παιδί θὰ ἔπαιρνε 4
τώρα, ποὺ ἔχομε 40 » » » » θὰ πάρη X;

Εἶναι δηλαδὴ πρόβλημα ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν

Κατάστροφωση. 20 καραμ. 4 καραμ.

α'. παιδί 40 » X

$$X = 4 \times \frac{40}{20} = \frac{160}{20} = 8 \text{ καραμ.}$$

β'. παιδί 20 καραμ. 6 καραμ.

40 » X

$$X = 6 \times \frac{40}{20} = \frac{240}{20} = 12 \text{ καραμ.}$$

$$\begin{array}{r} \gamma'. \text{ παιδί} \quad 20 \text{ καρ.} \quad 10 \text{ καρ.} \\ \quad \quad \quad 40 \quad \text{»} \quad \quad \quad \times \\ \hline \times = 10 \times 40 = \frac{400}{20} = \frac{400}{20} = 20 \text{ καρ.} \end{array}$$

Ἔτσι καὶ τὰ τρία παιδιά θὰ πάρουν $8+12+20=40$.

Ἄν προσέξουμε στὶς παραπάνω πράξεις θὰ ἰδοῦμε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε πόσες θὰ πάρη τὸ πρῶτο παιδί πολλαπλασιάσαμε ὅλο τὸ ποσὸν ἀπὸ τὶς καρτέλλες, ποὺ εἶχαμε, δηλαδὴ τὸ 40 μὲ τὴν ἡλικία τοῦ παιδιοῦ (4) ἀνάλογα μὲ τὴν ὁποία θὰ ἔπαιρνε τὸ μερίδιό του καὶ κατόπιν διαιρέσαμε μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν καὶ τῶν τριῶν παιδιῶν δηλαδὴ 20. $(4+6+10)$. Τὸ ἴδιο κάναμε καὶ γιὰ τὸ δεῦτερο παιδί, τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὸ τρίτο. Σ' ὅλα δηλαδὴ πολλαπλασιάσαμε τὸ ποσὸν ἀπὸ τὶς καρτέλλες ποὺ θὰ μοιράσωμε μὲ τὸν ἀριθμὸν, ἀνάλογα μὲ τὸν ὁποῖο θὰ πάρη τὸ μερίδιό του καὶ τὸ γινόμενον αὐτὸ τὸ διαιρέσαμε μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν, ἀνάλογα μὲ τοὺς ὁποίους δικαιούται τὸ καθένα νὰ πάρη τὸ μερίδιό του.

Ἔτσι,

Γιὰ νὰ μοιράσωμε ἓνα ἀριθμὸν σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸν αὐτὸ μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἄλλους καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων ἀριθμῶν. Αὐτὸς ὁ τρόπος λέγεται μερισμός.

Λύσε τὰ παρακάτω προβλήματα μὲ τὸν κανόνα τοῦ μερισμοῦ.

Προβλήματα

1. Τρεῖς ἐργάτες τέλειωσαν μιὰν ἐργασία καὶ πῆραν 112000 δραχ. Ὁ ἕνας ἐργάσθηκε 3 ἡμέρες καὶ ὁ ἄλλος 5 ἡμέρες καὶ ὁ τρίτος 2 ἡμέρες. Πόσα πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;
2. Ἐνας κτηματίας νοίκιασε τὸ λειβάδι του σὲ 2 τσοπάνους ἀντὶ 75000 δραχμῶν. Ὁ ἕνας βόσκησε σ' αὐτὸ 80 πρόβατα καὶ ὁ ἄλλος 50 πρόβατα. Πόσα θὰ πληρώσῃ ὁ καθένας ἀνάλογα μὲ τὰ πρόβατα ποὺ βόσκει;
3. Τρία ἀδελφία ἀγόρασαν ἓνα κτῆμα 820 στρεμμάτων· ὁ πρῶ-

- τος έδωσε για την αγορά 400000 δραχμές, ο δεύτερος 800000 δραχμές και ο τρίτος 440000 δραχμές. Πόσα στρέμματα θα πάρη ο καθένας;
4. Τρεις κτίστες έκτισαν ένα μανδρότοιχο και πήραν 150000 δραχμές· ο ένας εργάστηκε 3 ήμερες, ο άλλος 5 ήμερες και ο άλλος 2 ήμερες. Πόσα θα πάρη ο καθένας;
 5. Δυο εργάτες εργάστηκαν σε μιάν εργασία 60 ημερομίσθια και ο πρώτος πήρε 192000 δραχμές, ο δεύτερος 288000 δραχμές. Πόσα ημερομίσθια εργάστηκε ο καθένας;
 6. Σ' ένα σχολείο φοιτούν 260 παιδιά. Τα αγόρια είναι διπλάσια από τα κορίτσια. Πόσα είναι τ' αγόρια και πόσα είναι τα κορίτσια;
 7. Ένας πατέρας αφήκε κληρονομιά στα 3 παιδιά του. Στο πρώτο άφησε ένα κτήμα από 15 στρέμματα, στο άλλο ένα κτήμα από 24 στρέμματα και στο τρίτο ένα κτήμα από 20 στρέμματα. Τα παιδιά αυτά έπρεπε να πληρώσουν ένα χρέος του πατέρα τους από 240000 δραχμές. Πόσες δραχμές από το χρέος αναλογούν σε κάθε παιδί;
 8. Ένας χρεωστούσε σε τρεις δανειστές του, στον ένα 200.000 δραχμές, στον άλλον 450000 δραχμές και στον τρίτο 800000 δραχμές. Δεν είχε να τους πληρώση και τους έδωσε τη μόνη περιουσία που είχε, ένα μικρό σπιτάκι, το οποίο πουλήθηκε αντί 600000 δραχμών. Πόσα πρέπει να πάρη κάθε δανειστής;
 9. Μια νοικοκυρά ξέρει ότι για να κάμη ένα γλύκισμα χρειάζονται 300 δράμια ζάχαρη, 150 δράμια βούτυρο και 200 δράμια άμυγαλόψυχα. Πόσο πρέπει να βάλη από κάθε είδος για να κάμη ένα γλύκισμα 6 δκάδων;
 10. Δυο νοικοκυρές που κατοικοῦσαν στο ίδιο σπίτι αγόρασαν ένα ποσό σαποῦνι κι' έπληρωσαν 80000 δραχμές. Η πρώτη πήρε 8 δκάδες σαποῦνι και η άλλη 12 δκάδες. Πόσο πρέπει να πληρώση κάθε μιὰ στο μερίδιό της ;
 11. 4 εργάτες κλάδεψαν τα άμπέλια ενός μεγαλοκτηματία και πήραν για όλα 360.000 δραχμές. Ο πρώτος εργάστηκε 3 ήμερες, ο άλλος 6 ήμερες, ο άλλος 5 ήμερες και ο τέταρτος 10 ήμερες. Πόσα πρέπει να πάρη ο καθένας ;
 12. Ένας πατέρας μετά το θάνατό του άφηκε την περιουσία του,

πού ήταν 3000000 δραχμές στα 3 παιδιά του και ὄριζε νὰ πάρη ὁ δεύτερος τὰ τριπλάσια τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος τὰ τριπλάσια τοῦ δευτέρου. Πόσα θὰ πάρη τὸ καθένα ;

- 13) Τρεῖς ἄνθρωποι ἀγόρασαν 60 ὀκάδες ψάρια πρὸς 4.000 δραχμές τὴν ὀκά. Ὁ πρῶτος κατάθεσε γιὰ τὴν ἀγορὰ 80000 δραχμές, ὁ δεύτερος 60000 δραχμές καὶ ὁ τρίτος 100000 δραχμές. Ἀπὸ τὰ ψάρια αὐτὰ πούλησαν 20 ὀκάδες πρὸς 5000 δραχμές τὴν ὀκά. Τ' ἄλλα βρόμισαν καὶ τὰ πέταξαν. Πόσα ζημιώθηκαν καὶ πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ καθένας γιὰ τὴ ζημιὰ ;
- 14) Μοίρασε ἀνάλογα 800000 δραχμές σὲ τρεῖς ἀνθρώπους ὀικογενειάρχες, πού ἕνας ἔχει οἰκογένειαν ἀπὸ 5 ἄτομα, ὁ ἄλλος ἀπὸ 6 ἄτομα καὶ ὁ ἄλλος ἀπὸ 9 ἄτομα.

Πολλὲς φορές συμβαίνει οἱ ἐργάτες νὰ ἐργάζονται ὄχι μόνον λιγώτερες ἢ περισσότερες ἡμέρες ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλο, ἀλλὰ καὶ περισσότερες ἢ λιγώτερες ὥρες τὴν ἡμέρα. Π. χ. :

- 1) Τρεῖς ἐργάτες πῆραν ἀπὸ μίαν ἐργασίαν 500000 δραχμές. Ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 7 ἡμέρες μὲ 5 ὥρες τὴν ἡμέρα, ὁ δεύτερος 9 ἡμέρες ἐπὶ 6 ὥρες τὴν ἡμέρα καὶ ὁ τρίτος 4 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὥρες τὴν ἡμέρα. Πόσα πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας ;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐπειδὴ ἔχομε διάφορες ἡμέρες καὶ διάφορες ὥρες, θὰ λογαριάσωμε τὶς ὥρες ποῦ ἐργάσθηκε ὁ καθένας καὶ θὰ μοιράσωμε τὶς δραχμές ἀνάλογα μὲ τὶς ὥρες. Ἔτσι ὁ α', $6 \times 5 = 30$ ὥρες, ὁ δεύτερος $9 \times 6 = 54$ ὥρες καὶ ὁ τρίτος $4 \times 8 = 32$ ὥρες. Τώρα ἔχομε νὰ μοιράσωμε τὶς 500.000 δραχ. ἀνάλογα μὲ τὶς ὥρες.

ὁ α' 6 ἡμέρ. $\times 5$ ὥρες = 30 ὥρες

ὁ β' 9 » $\times 6$ » = 54 »

ὁ γ' 4 » $\times 8$ » = 32 »

116

Δηλαδή ὁ α' θὰ πάρη Δραχ.

$$\frac{500.000 \times 30}{116}$$

ὁ β' θὰ πάρη »

$$\frac{500.000 \times 54}{116}$$

ὁ γ' θὰ πάρη »

$$\frac{500.000 \times 32}{116}$$

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο λύομε τὰ προβλήματα ὅταν εἶναι διαφορετικὸς ὁ χρόνος τῆς ἐργασίας.

2. Δυὸ κτίστες ἔκτισαν ἕνα σπίτι καὶ πῆραν 1.800.000 δραχ.
Ὁ ἕνας ἐργάσθηκε 32 ἡμέρες μὲ 8 ὥρες τὴν ἡμέρα, ὁ ἄλλος
20 ἡμέρες μὲ 6 ὥρες τὴν ἡμέρα. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ ὁ
καθένας ;
3. Τρεῖς ἔργατες ἀνοιξαν ἕνα πηγάδι καὶ πῆραν γιὰ τὴν ἐργασία
αὐτὴ 1.500.000 δραχμὲς. Ὁ ἕνας ἐργάσθηκε 10 ἡμέρες μὲ 8
ὥρες τὴν ἡμέρα, ὁ ἄλλος 6 ἡμέρες μὲ 6 ὥρες τὴν ἡμέρα καὶ ὁ
ἄλλος 12 ἡμέρες μὲ 9 ὥρες τὴν ἡμέρα. Πόσα πρέπει νὰ πάρῃ
ὁ καθένας ;
4. Ἐνας εἶχε συμφωνήσει μὲ τρεῖς ξυλουργοὺς νὰ τοῦ φτιάσουν
τὸ πάτωμα τοῦ σπιτιοῦ του ἀντὶ 400.000 δραχμῶν. Ὁ ἕνας
ἀπ' αὐτοὺς ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες μὲ 6 ὥρες τὴν ἡμέρα, ὁ ἄλλος
8 ἡμέρες μὲ 8 ὥρες τὴν ἡμέρα καὶ ὁ τρίτος 9 ἡμέρες μὲ 5 ὥρες
τὴν ἡμέρα. Πόσα πῆρε ὁ καθένας ;
5. Τρία ἀμάξια μετέφεραν στὴν ἀποθήκη ἀπὸ τὰ κτήματα ἐνὸς
κτηματία τὸ σιτάρι του. Τὸ ἕνα ἀμάξι μετέφερε 250 ὀκάδες σι-
τάρι ἀπὸ ἕνα κτῆμα, ποῦ ἦταν σὲ ἀπόσταση 6 χιλιομέτρων,
τὸ ἄλλο ἀμάξι 300 ὀκάδες ἀπὸ ἀπόσταση 4 χιλιομέτρων καὶ τὸ
τρίτο 400 ὀκάδες ἀπὸ ἀπόσταση 8 χιλιομέτρων. Πῆραν δὲ καὶ
τὰ τρία γιὰ τὴν ἐργασία αὐτὴ 850.000 δραχμὲς. Πόσο πρέπει
νὰ πάρῃ τὸ καθένα γιὰ τὴν ἐργασία του ;
6. Τρεῖς κρεοπῶλες εἶχαν ἀγοράσει πρόβατα γιὰ σφάξιμο. Ὁ
ἕνας εἶχε ἀγοράσει 80 πρόβατα, ὁ ἄλλος 70, καὶ ὁ ἄλλος 50.
Ἐπειδὴ ἤθελαν νὰ τὰ κρατήσουν κάμποσο καιρὸ γιὰ νὰ πα-
χύνουν, πλήρωσαν ἕνα βοσκὸ νὰ τὰ βόσκη. Ὁ πρῶτος ἄφησε
τὰ πρόβατά του στὸ βοσκὸ 40 ἡμέρες, ὁ δεύτερος 60 ἡμέρες
καὶ ὁ τρίτος 20 ἡμέρες. Ὁ βοσκὸς ζήτησε γιὰ ἀμοιβή του γιὰ
δλα μαζὶ 1.800.000 δραχμὲς. Πόσα πρέπει νὰ δώσῃ καθένας
στὴν ἀναλογία του ;
7. Τρία ἀδέρφια κληρονόμησαν ἀπὸ τὸν πατέρα τους 7.500.000
δραχμὲς. Ἀπ' αὐτὰ ἔπρεπε νὰ δώσουν 20 % γιὰ φόρο στὸ δη-
μόσιο, τὰ ὑπόλοιπα δὲ νὰ τὰ μοιράσουν μὲ τὴν ἐξῆς ἀναλο-
γία : ὁ πρῶτος νὰ πάρῃ διπλάσια ἀπὸ τὸ δεύτερο καὶ ὁ τρίτος
τριπλάσια ἀπὸ τὸν πρῶτο. Πόσα πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

8. Ένας έμπορος χρεωκόπησε. Οί τρεις δανειστές του έσπευσαν νά τοῦ σφραγίσουν τὸ κατάστημά του, ὅπου βρῆκαν έμπόρευμα αξίας 3000000 δραχμῶν. Συμφώνησαν μεταξύ τους νά πάρη ὁ ένας στήν ἀναλογία του 25%, ὁ ἄλλος 45 % καὶ ὁ τρίτος 30 %. Πόσα θά πάρη ὁ καθένας ;
9. 4 ἄνθρωποι ἄνοιξαν μαζί ἕνα κατάστημα καὶ κατάθεσαν ὅλοι ἴσον ποσὸ χρημάτων. Ὁ πρῶτος ὅμως μάλωσε μὲ τοὺς ἄλλους καὶ πῆρε τὰ χρήματά του ὕστερα ἀπὸ 6 μῆνες, ὁ δεύτερος ἐπίσης καὶ πῆρε τὰ χρήματά του ὕστερα ἀπὸ 2 μῆνες ἀπὸ τὸν πρῶτο, τὸ ἴδιο ἔκαμε καὶ ὁ τρίτος καὶ πῆρε τὰ χρήματά του ὕστερα ἀπὸ 4 μῆνες ἀπὸ τὸν δεύτερο, ὁ τέταρτος κράτησε τὸ μαγαζὶ 16 μῆνες. Ὑστερα λογαριάσθησαν καὶ βρῆκαν ὅτι εἶχαν κερδίσει 800.000 δραχμές. Πόσα πῆρε ὁ καθένας ;

Προβλήματα ἑταιρείας.

Σὲ κάθε τόπο ὑπάρχουν μεγάλα καὶ μικρὰ ἔμπορικά καταστήματα, ὑπάρχουν μεγάλα καὶ μικρὰ ἐργοστάσια, ὑπάρχουν μεγάλες καὶ μικρὲς ἐπιχειρήσεις. Συνήθως τὰ μικρὰ καταστήματα ἢ τὶς μικρὲς ἐπιχειρήσεις τὶς ἔχει ἕνας ἄνθρωπος γιατί δὲν χρειάζονται πολλὰ χρήματα, μπορεῖ ὅμως νά τὶς ἔχουν καὶ δυὸ καὶ τρεῖς ἄνθρωποι. Τὶς μεγάλες ὅμως ἐπιχειρήσεις ποὺ χρειάζονται πολλὰ χρήματα τὶς δημιουργοῦν δυὸ, τρεῖς, τέσσαρες ἢ καὶ περισσότεροι ἄνθρωποι καὶ καθένας καταθέτει σ' αὐτὲς ὅσα χρήματα διαθέτει. Ὄταν δύο, τρεῖς ἢ καὶ περισσότεροι μαζί καταθέσουν τὰ χρήματά τους γιὰ νά γίνη μιὰ ἐπιχείρηση, εἴτε μικρὴ εἶναι εἴτε μεγάλη, λέμε ὅτι κάνουν **Ἑταιρεία**. Ὅσα δὲ προβλήματα ἔχουν σχέση μὲ τὴν **Ἑταιρεία** λέγονται **προβλήματα Ἑταιρείας**. Ἡ Ἑταιρεία μπορεῖ νά ἔχη καὶ κέρδη καὶ ζημιές. Αὐτὰ θά τὰ μοιράσουν οἱ συνεταῖροι ἀνάλογα.

Στὰ προβλήματα τῆς Ἑταιρείας παρουσιάζονται 4 περιπτώσεις.

1. Ὄταν τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων εἶναι ἴσα καὶ μένουν τὸν ἴδιο χρόνο.
2. Ὄταν τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα, μένουν ὅμως διάφορο χρόνο.

3. "Όταν τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ μένουν ἴσον χρόνον.
4. "Όταν τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ ὁ χρόνος διάφορος.

Προβλήματα Ἑταιρείας.

1. Κεφάλαια ἴσα καὶ ἴσος χρόνος.

- 1) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν μὴν Ἑταιρεία καὶ κατάθεσαν ἀπὸ 200 000 δραχμῆς ὁ καθένας. Στὸ χρόνο ἔκαμαν λογαριασμό καὶ βρῆκαν ὅτι κέρδισαν 150.000 δραχμῆς. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας ;
Τὸ πρόβλημα δὲν παρουσιάζει καμμιὰ δυσκολία. Θὰ τὸ λύσωμε μὲ μιὰ διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὸ 150 000 δραχμῆς διὰ 3. Εἶναι ἀπλὸ πρόβλημα διαιρέσεως μερισμοῦ.
- 2) 4 ἄνθρωποι ἀνοῖξαν ἓνα κατάστημα καὶ κατάθεσαν ὅλοι τὰ ἴδια κεφάλαια. Στὸ χρόνο κάνοντας λογαριασμό βρῆκαν ὅτι εἶχαν ζημίαι 120.000 δραχμῶν. Πόση ζημία θὰ πληρώσῃ ὁ καθένας ;
- 3) "Όταν δυὸ ἄνθρωποι καταθέσουν ἴσα κεφάλαια γιὰ ν' ἀνοῖξουν ἓνα μπακάλιο καὶ στὸ τέλος τοῦ χρόνου βροῦν ὅτι κέρδισαν 2.400.000 δραχμῆς, πῶς θὰ τὶς μοιράσουν ;

2. Κεφάλαια ἴσα, διάφορος χρόνος.

- 1) Τρεῖς ἔμποροι κατάθεσαν τὰ ἴδια χρήματα καὶ ἀνοῖξαν ἓνα ὑαλοπωλεῖο, ὁ ἓνας ὅμως πῆρε τὰ χρήματά του μετὰ 3 μῆνες, ὁ ἄλλος μετὰ 6 μῆνες καὶ ὁ τρίτος μετὰ 12 μῆνες. Στὸ τέλος βρῆκαν ὅτι εἶχαν κερδίσει 1.500 000 δραχμῆς. Πόσες θὰ πάρη ὁ καθένας ;
Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε νὰ μοιράσωμε 1.500.000 δραχμῆς σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς τὸν χρόνο τῆς καταθέσεως τῶν χρημάτων, δηλαδὴ πρὸς τοὺς 3 μῆνες, 6 μῆνες καὶ 12 μῆνες. Εἶναι δηλαδὴ καθαρὸ πρόβλημα μερισμοῦ. Λύσε το λοιπὸν μόνος σου.
- 2) Σὲ μὴν ἐπιχείρηση ἦσαν 3 συνεταῖροι καὶ εἶχαν καταθέσει ἴσο ποσὸ χρημάτων. Τοῦ πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 3 ἔτη, τοῦ ἄλλου 5 ἔτη καὶ τοῦ τρίτου 8 ἔτη. Στὰ 8

ἔτη εἶχαν συμφωνήσει νὰ λογαριασθοῦν. Ἐκαμαν τὸ λογαριασμό καὶ βρῆκαν κέρδος 45.000.000 δραχμῶν. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας ;

- 3) Ἐνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση καταθέτοντας ἕνα ποσὸ χρημάτων. Μετὰ 6 μῆνες πῆρε καὶ δεύτερο συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατάθεσε ἴσο ποσό. Μετὰ 3 μῆνες ἀπὸ τὸ δεύτερο πῆρε καὶ ἄλλο συνεταῖρο καὶ κατάθεσε κι' αὐτὸς ἴσο ποσό. Ὑστερα ἀπὸ 14 μῆνες λογαριάσθηκαν καὶ βρῆκαν ὅτι εἶχαν ζημιωθεῖ 160.000 δραχμές. Πόση ζημία θὰ πληρώσῃ ὁ καθένας ;

3. Κεφάλαια διάφορα, ἴσος χρόνος.

- 1) Δυὸ συνεταῖροι ἔκαμαν μιὰν ἐπιχείρηση ὁ πρῶτος κατάθεσε 800.000 δραχμές καὶ ὁ δεύτερος 620.000 δραχμές. Μετὰ ἕν ἔτος λογαριάσθηκαν καὶ βρῆκαν ὅτι εἶχαν κέρδος 500.000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας ;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε νὰ μοιράσωμε τὸ κέρδος 500.000 δραχμῆς ἀνάλογα μὲ τὸ κεφάλαιο καθενός. Κάνομε κι' ἐδῶ ὅ,τι κάναμε στὰ προβλήματα μερισμοῦ. Πολλαπλασιάζομε τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημία μὲ τὸ ποσὸ τῆς καταθέσεως καθενός καὶ διαιροῦμε μὲ τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν κεφαλαίων.

$$\text{Δύση; } \delta \alpha'. \frac{500.000 \times 800.000}{1.420.000} = 281.690,14$$

$$\delta \beta'. \frac{500.000 \times 620.000}{1.420.000} = 218.309,86$$

- 2) Τρεῖς ἔμποροι κατάθεσαν χρήματα γιὰ ν' ἀγοράσουν λάδι. Ὁ πρῶτος κατάθεσε 420.000 δραχμές, ὁ δεύτερος 640.000 δραχμῆς καὶ ὁ τρίτος 840.000 δραχμῆς. Μ' αὐτὰ ἀγόρασαν 500 ὀκ. λάδι, τὸ ὁποῖο πούλησαν μὲ 6400 τὴν ὀκᾶ. Ὑστερα διάλυσαν τὴν ἐταιρεία καὶ μοιράσθηκαν τὰ χρήματα ποὺ πῆραν ἀπὸ τὸ λάδι. Πόσα πῆρε ὁ καθένας ;

- 3) 3 ἄνθρωποι ἔκαμαν συνεταιρικὰ μιὰ ἐπιχείρηση ἀπὸ τὴν ὁποία στὸ χρόνο εἶχαν κερδίσει 6 000.000 δραχμῆς. Πόσα θὰ πάρῃ

- ὁ καθέννας ὅταν ὁ α' εἶχε καταθέσει 1.200.000 δραχμές, ὁ β' 2.400.000 δραχμές καὶ ὁ γ' 4.000.000 δραχμές ;
- 4) Σὲ μιὰν ἐπιχείρηση κατάθεσαν τρεῖς ἄνθρωποι 9.000.000 δραχ., ὁ α' εἶχε καταθέσει τὸ $\frac{1}{3}$ ἀπ' αὐτά, ὁ β' τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ ὁ γ' τὰ ὑπόλοιπα. Εἶχαν ὅμως ζημία ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση 2.500.000 δραχμές. Πόση ζημία θὰ πληρώσῃ ὁ καθέννας ;
- 5) Τρεῖς ἔμποροι ἀνοιξάν ἓνα κατάστημα ὑφασμάτων. Ὁ πρῶτος κατάθεσε 3.500.000 δραχμές, ὁ δεύτερος 5.400.000 καὶ ὁ γ' 1.100.000 δραχμές. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση κέρδισαν 1.600.000. Ἀπ' αὐτὰ πλήρωσαν 20% γιὰ μισθοὺς ὑπαλλήλων, τὰ ἄλλα τὰ ἐμοίρασαν. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθέννας ;
- 6) Δυὸ κτηματίες ἀποφάσισαν ν' ἀγοράσουν μιὰ ἀλωνιστικὴ μηχανή. Ἦλθαν στὴν Ἀθήνα καὶ τὴν ἀγόρασαν ἀντὶ 15.000.000 δραχμῶν, ὁ ἓνας ἔδωσε γιὰ τὴν ἀγορὰ 6.000.000 καὶ ὁ ἄλλος τὰ ὑπόλοιπα. Ἐργάσθησαν μ' αὐτὴν 3 χρόνια καὶ κατόπιν ἔκαμαν τὸ λογαριασμό καὶ βρῆκαν ὅτι εἶχαν καθαρὸ κέρδος 12.500.000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθέννας ;
- 7) Τρεῖς ἀδελφία εἶχαν ἀπὸ κληρονομιά ἓνα πολὺ μεγάλο κτῆμα, ἦταν ὅμως ἀκαλλιέργητο. Ἀποφάσισαν νὰ τὸ καλλιεργήσουν καλὰ καὶ κατάθεσαν γι' αὐτὸ, ὁ μὲν ἓνας 2.500.000 δραχμές, ὁ ἄλλος 1.500.000 δραχμές καὶ ὁ ἄλλος 1.200.000 δραχμές. Τὸ κτῆμα αὐτὸ στα δύο χρόνια τοὺς ἔφερε εἰσόδημα 8.000.000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθέννας ;
- 8) Δυὸ γειτονόπουλα ἔκαμαν μαζὶ ἓνα ἐμπόριο μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἶχαν· ὁ πρῶτος εἶχε 120.000 δραχμές καὶ ὁ ἄλλος 80.000 δραχμές. Ἡ τύχη τοὺς βοήθησε καὶ ἐκέρδισαν 400.000 δραχ. Δὲν ξέρουν νὰ τὶς μοιράσουν. Μοίρασέ τις ἐσύ.

4. Κεφάλαια διάφορα, διάφορος χρόνος.

- 1) Τρεῖς ἄνθρωποι συνεταιρίσθησαν γιὰ μιὰ ἐπιχείρηση καὶ κατάθεσαν ὁ ἓνας 640000 δραχμές, ὁ ἄλλος 960000 δραχμές καὶ ὁ ἄλλος 400000 δραχμές. Ὁ πρῶτος ἄφησε τὰ χρήματά του στὴν ἐπιχείρηση 5 μῆνες, ὁ δεύτερος 4 μῆνες καὶ ὁ τρίτος 8

μήνες. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση αὐτὴ κέρδισαν 1.500.000 δραχμές.
Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας ;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε διαφορετικὰ κεφάλαια καὶ διαφο-
ρετικὸ χρόνον. Γιὰ νὰ τὸ λύσωμε θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ κεφάλαιο
καθενὸς μὲ τὸν χρόνον ποὺ ἔμεινε στὴν ἐπιχείρηση. Κι' αὐτὸ ποὺ
θὰ βροῦμε θὰ τὸ θεωρήσωμε σὰν κεφάλαιο. Ὑστερα εἶναι εὐκο-
λο, γιὰτι θὰ γίνῃ πρόβλημα, ὅπως τὰ προηγούμενά.

$$\begin{array}{r}
 \text{Δύση. } \alpha'. 640000 \times 5 = 3200000 \text{ Αὐτὸ θὰ θεωρηθῇ κεφάλαιο} \\
 \beta'. 960000 \times 4 = 3840000 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \\
 \gamma'. 400000 \times 8 = 3200000 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \\
 \hline
 10240000
 \end{array}$$

Καὶ τώρα θὰ μοιράσωμε τὸ κέρδος 1500000 δραχμές ἀνάλογα
πρὸς τὰ νέα κεφάλαια ποὺ βρήκαμε πολλαπλασιάζοντας τὸ κε-
φάλαιο καθενὸς ἐπὶ τὸν χρόνον. Κι' ἔτσι

$$\begin{array}{r}
 \alpha' \text{ θὰ πάρη} \quad \frac{1500000 \times 3200000}{10240000} \\
 \beta' \text{ θὰ πάρη} \quad \frac{1500000 \times 3840000}{10240000} \\
 \gamma' \text{ θὰ πάρη} \quad \frac{1500000 \times 3200000}{10240000}
 \end{array}$$

- 2) Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μὴ ἐπιχείρηση καταθέτοντας 600000
δραχμές. Ὑστερα ἀπὸ 8 μήνες πῆρε συνεταῖρο ὁ ὁποῖος κα-
τάθεσε 800000 δραχμές. Ἀφοῦ πέρασαν 14 μήνες ἀπὸ τὸ ἄ-
νοιγμα τῆς ἐπιχειρήσεως λογαριάσθησαν καὶ βρῆκαν ὅτι κέρ-
δισαν 1200000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρη καθένας ;
- 3) Τρεῖς συνεταῖροι καταθέτουν ὁ ἕνας 750000 δραχμές καὶ τὶς ἀ-
φίνει στὴν ἐπιχείρηση 3 ἔτη, ἄλλος 1250000 δραχμές καὶ
τὶς ἀφίνει στὴν ἐπιχείρηση 3 ἔτη, ὁ ἄλλος 1000000 δραχμές
καὶ τὶς ἀφίνει 1 ἔτος. Πόσα θὰ πάρη καθένας ἀπὸ τὸ κέρδος
ποὺ ἦταν 5000000 δραχμές;
- 4) Ἕνας ἐργολάβος ἀνάλαβε νὰ κτίσῃ ἓνα σπίτι ἀντὶ 500000000
δραχμῶν. Ἀρχισε τὴν ἐργασία μὲ δικά μου κεφάλαια ἐκ δραχ-
μῶν 200000000. Μετὰ ὀκτῶ μήνες τοῦ χρειάσθησαν καὶ ἄλλα

- χρήματα κι' αναγκάστηκε νά πάρη συνεταίρο, ὁ ὁποῖος κατάθεσε 150000000 δραχμές. Τὸ σπίτι τελείωσε μετὰ 16 μῆνες. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας ἀπὸ τὸ κέρδος ;
- 5) Ὅνας ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση μὲ κεφάλαιο 280000 δραχμῶν. Μετὰ 5 μῆνες πῆρε συνεταίρο, ποὺ κατάθεσε 320000 δραχμές καὶ μετὰ τρεῖς μῆνες ἀπὸ τὸ δεύτερο συνεταίρο πῆρε καὶ τρίτο ποὺ κατάθεσε 600000 δραχμές. Ὑστερα ἀπὸ 2 ἔτη λογαριάσθηκαν καὶ βρῆκαν κέρδος 2400000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρη κάθε συνεταίρος ;
6. Δύο χωρικοὶ καλλιέργησαν ἓνα κτῆμα γιὰ τὸ ὁποῖο ὁ πρῶτος κατάθεσε τὰ χρήματα 6 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὸ δεύτερο. Ἡ καλλιέργεια κράτησε 10 μῆνες. Γιὰ τὴν καλλιέργεια αὐτὴ ὁ ἓνας ξόδευσε 250000 δραχμές καὶ ὁ ἄλλος 450000 δραχμές. Τὸ κτῆμα ἐπειδὴ ὁ καιρὸς δὲν ἦταν καλὸς δὲν ἔδωσε τὸ εἰσόδημα ποὺ ἔπρεπε κι' ἔτσι ζημιώθηκαν 160000 δραχμές Πόση. Ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα ;
- 7) Ὅνας ἄνοιξε ἓνα κατάστημα τροφίμων μὲ 1200000 δραχμές κεφάλαιο. Μετὰ 8 μῆνες πῆρε συνεταίρο, ποὺ κατάθεσε 1800 000 δραχμές καὶ μετὰ τρεῖς μῆνες ἀπὸ τὸ δεύτερο πῆρε καὶ τρίτο συνεταίρο, ποὺ κατάθεσε 1500000 δραχμές. Στὸν 16 μῆνες λογαριάσθηκαν καὶ βρῆκαν κέρδος 6000000 δραχμές. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα ;
- 8) Σ' ἓνα ἀλευρόμυλο εἶναι δύο συνεταῖροι· ὁ ἓνας κατάθεσε 7500 000 δραχμές 5 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὸν ἄλλο. Ὁ ἄλλος κατάθεσε 12 500000 δραχ. Μετὰ 18 μῆνες ἀποφάσισαν νὰ λογαριασθοῦν καὶ βρῆκαν κέρδος 25000000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας ;
- 9) Δυὸ μοδίστρες ἀποφάσισαν νὰ συνεταιρισθοῦν. Συμφώνησαν ὅμως ἢ μιὰ νὰ καταθέσῃ τὰ κεφάλαιά της μετὰ 4 μῆνες, ποὺ θὰ πλουτοῦσε ἓνα κτῆμα. Ἡ μιὰ κατάθεσε 240000 δραχμές καὶ ἡ ἄλλη 160000 δραχμές. Στὸ χρόνο διάλυσαν τὴν Ἑταιρεία γιὰτὶ δὲν εἶχε δουλειές. Λογαριάσθηκαν καὶ βρῆκαν ζημίαν 120000 δραχμῶν. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὴν κάθε μιὰ ;

Τὶ εἶναι μετοχή

Οἱ πολὺ μεγάλες ἐπιχειρήσεις χρειάζονται πολλὰ κεφάλαια, πού δὲν μποροῦν δυὸ—τρεῖς ἄνθρωποι νὰ τὰ καταθέσουν. Βοῆξαν γι' αὐτὸ ἕναν τρόπο, πού μποροῦν νὰ συγκεντρώσουν πολλὰ χρήματα χωρὶς δυσκολία, γιατί μποροῦν καὶ ἐκεῖνοι, πού ἔχουν λίγα χρήματα νὰ γίνουν συνεταιῖροι στὴν ἐπιχείρηση. Αὐτὸ βέβαια εἶναι καλό· α) γιατί ἔτσι συγκεντρώνονται πολλὰ κεφάλαια καὶ γίνονται μεγάλες ἐπιχειρήσεις· β) γιατί μποροῦν καὶ οἱ φτωχοὶ νὰ γίνουν συνεταιῖροι καὶ γ) γιατί ὅσο περισσότεροι εἶναι οἱ συνεταιῖροι, τόσο περισσότερο θὰ εἶναι τὸ ἐνδιαφέρον γιὰ νὰ πάη καλὰ ἡ ἐπιχείρηση. Ὁ τρόπος αὐτὸς εἶναι ὁ ἐξῆς. Λογαριάζουν πόσα κεφάλαια θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὴν ἐπιχείρηση. Τὰ χωρίζουν σὲ μικρὲς μερίδες καὶ γιὰ κάθε μερίδα ἐκδίδουν ἕνα ἔγγραφο πού γράφει ἐπάνω πόσο ἀξίζει. Αὐτὸ τὸ ἔγγραφο λέγεται **μετοχή**. (Παρακάλεσε τὸ δάσκαλό σου νὰ σᾶς δείξη μιὰ μετοχή γιὰ νὰ καταλάβης καλύτερα). Κάθε ἄνθρωπος μπορεῖ ν' ἀγοράσῃ ὅσες μετοχὲς θέλει, τίς ὅποτες μπορεῖ καὶ νὰ πουλήσῃ, ὅταν χρειασθῇ χρήματα. Κάθε χρόνο ἡ ἐπιχείρηση κάνει λογαριασμό καὶ κανονίζει τὸ κέρδος, πού δικαιοῦται νὰ πάρη κάθε μία μετοχή. Τὸ κέρδος αὐτὸ κάθε μετοχῆς λέγεται **μέρισμα**. Νὰ εἶνα παράδειγμα γιὰ νὰ τὸ καταλάβης.

Μιὰ ἐπιχείρηση χρειάζεται 50000000 δραχμὲς. Κανονίζει γιὰ κάθε μετοχή τὸ ποσὸν τῶν 5000 δραχμῶν καὶ ἐκδίδει 10000 ἔγγραφα **μετοχῆς**. Κάθε ἄνθρωπος πληρώνοντας γιὰ κάθε μία μετοχή 5000 δραχμὲς ἀγοράζει ὅσες μετοχὲς μπορεῖ ν' ἀγοράσῃ μὲ τὰ χρήματα, πού διαθέτει.

Στὸ τέλος τοῦ χρόνου γίνεται ὁ λογαριασμὸς τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ τὸ κέρδος, πού θὰ παρουσιασθῇ, τὸ μοιράζει σὲ 10000 ἴσα μερίδια, ὅσες εἶναι οἱ μετοχῆς. Κάθε συνεταιῖρος πηγαίνει καὶ παίρνει τὸ μερίδιό του, τὸ **μέρισμά** του. Αὐτὸ κάνουν ὅλες οἱ μεγάλες ἐπιχειρήσεις, πού λέγονται **Ἀνώνυμες Ἐταιρεῖες**. Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο συγκεντρώνουν τὰ κεφάλαια εὐκόλα, ἂν δὲν πάη καλὰ ἡ ἐπιχείρηση ἢ ζημιά θὰ εἶναι μικρὴ, γιατί θὰ τὴν μοιρασθοῦν πολλοὶ καὶ εἶναι πολλοὶ συνεταιῖροι καὶ ἐπομένως μεγαλύτερο τὸ ἐνδιαφέρον γιὰ τὴν ἐργασία τῆς ἐπιχειρήσεως.

Περισσότερα πάνω στο ζήτημα αυτό θα σου πει ο δάσκαλός σου.

Διάφορα προβλήματα 'Εταιρείας.

Πρὶν λύσωμε τὰ παρακάτω προβλήματα πρέπει νὰ ξέρωμε ὅτι τὰ κεφάλαια τῶν συνεταιρῶν πρέπει νὰ εἶναι ποσὰ ὁμοειδῆ.

Ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ τὰ κάμωμε. Τὸ ἴδιο καὶ ὁ χρόνος.

- 1) Ἐνας φιλόνθρωπος κύριος ἔδωσε στὴ γειτονιά του 640 ὀκάδες ἀλεύρι νὰ τὸ μοιραστοῦν τρεῖς φτωχῆς οἰκογένειες ἀνάλογα μὲ τὰ ἄτομα ποὺ ἔχουν. Ἡ μιὰ ἔχει 4 ἄτομα, ἡ ἄλλη 5 καὶ ἡ ἄλλη 7. Πόσες ὀκάδες ἀλεύρι θὰ πάρη κάθε μιὰ;
- 2) Δύο ἔμποροι κατάθεσαν καὶ οἱ δύο 1.200.000 δραχμὲς γιὰ μιὰ ἐργασία. Ὁ πρῶτος πῆρε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κέρδους καὶ ὁ ἄλλος τὰ ὑπόλοιπα, ποὺ ἦσαν 360.000 δραχμὲς. Τί κέρδος πῆρε ὁ πρῶτος καὶ πόσα κεφάλαια κατάθεσε ὁ καθένας;
- 3) Ἐνας ἄνοιξε ἕνα ὑφαντήριον καὶ ἐξώδευσε 800.000 δραχμὲς. Μετὰ 4 μῆνες πῆρε συνεταιρὸν, ποὺ κατάθεσε 500.000 δραχ. καὶ μετὰ 10 μῆνες ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τοῦ ὑφαντηρίου πῆρε καὶ ἄλλον συνεταιρὸν, ποὺ κατάθεσε ὅσα εἶχαν καταθέσει καὶ οἱ δύο ἄλλοι μαζί. Μετὰ 20 μῆνες βρῆκαν ὅτι εἶχαν κερδίσει 1.800.000 δραχμὲς. Πόσα πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;
- 4) Μιὰ Ἀνόνημη Ἐταιρεία εἶχεν ἐκδώσει 8.000 μετοχὰς πρὸς 5000 δραχμὲς τὴ μιὰ. Στὸ τέλος τοῦ ἔτους τὰ κέρδη τῆς Ἐταιρείας ἦσαν 15.000.000 δραχμὲς. Πόσο μέρος θὰ πάρη ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο μετόχους ποὺ ὁ ἕνας εἶχε 800 μετοχὰς καὶ ὁ ἄλλος εἶχε 1200 μετοχὰς;
- 5) Τρία ἀδελφία κληρονόμησαν 25.000.000 δραχμὲς. Κατὰ τὴ διαθήκη τοῦ πατέρα τους ὁ πρῶτος ἔπρεπε νὰ πάρη τὸ $\frac{1}{5}$, ὁ δεῦτερος τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα. Ἀνάλογα ὁμοίως πρὸς τὰ χρήματα, ποὺ πῆραν ἀπὸ τὴν κληρονομιά, ἔπρεπε νὰ πληρώσουν ἕνα χρέος τοῦ πατέρα ἀπὸ 2.500.000 δραχμὲς. Πόσο χρέος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

- 6) Τρεῖς συνεταῖροι ἄρχισαν μιὰ ἐπιχείρηση καὶ κατάθεσαν ὁ ἕνας 6.500.000 δραχμές, ὁ ἄλλος 1.200.000 δραχμές καὶ ὁ τρίτος 780.000 δραχμές. Μετὰ δύο ἔτη λογαριάσθηκαν καὶ εἶχαν κέρδος 2.500.000 δραχμῶν. Ἐκ τῶν κέρδων πλῆρωσαν 12% γιὰ φόρο καθαρῶς προσόδου καὶ 20% σὲ ἄλλα ἔξοδα. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο;
- 7) Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαμαν μιὰν Ἑταιρείαν ἣν ὁ ἕνας κατάθεσε 650.000 δραχμές, ὁ ἄλλος κατάθεσε 9 λίρες ἀγγλικῆς (τιμὴ λίρας 135,000 δραχμές) καὶ ὁ ἄλλος 840.000 δραχμές. Στὸ χρόνο λογαριάσθηκαν καὶ βρῆκαν κέρδος 1.200.000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας;
- 8) Τρεῖς χωρικοὶ ἀνοίξαν ἕνα μεγάλο κατάστημα τροφίμων στὸ χωριό τους ὁ ἕνας κατάθεσε 400 ὀκάδες λάδι, τὸ ὁποῖον ὑπολογίσθηκε πρὸς 4.200 δραχμές τὴν ὀκά, ὁ ἄλλος 950.000 δραχμές καὶ ὁ ἄλλος 5 βαρέλια τυρὶ, πὺν καθένα εἶχε 50 ὀκ. τὸ τυρὶ ὑπολογίσθηκε 5.000 δραχ. τὴν ὀκά. Στὰ δύο χρόνια, πὺν ἀποφάσισαν νὰ λογαριασθοῦν βρῆκαν κέρδος 3.000.000 δραχμές. Τί κέρδος ἀναλογεῖσθὸν καθένας;
- 9) Δύο συνεταῖροι ἄρχισαν μιὰ ἐπιχείρηση ὁ ἕνας κατάθεσε 1.300.000 δραχμές, ὁ ἄλλος ἐπειδὴ δὲν εἶχε χρήματα, κατάθεσε 200 μετοχὲς ἀπὸ μιὰν Ἀνόνημη Ἑταιρεία ἀξίας 5.000 δραχμῶν ἢ μία. Στὸ χρόνο κέρδισαν 1.400.000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας;
- 10) 4 ἐπιχειρηματίες ἀνοίξαν ἕνα ἐργοστάσιον μεταξωτῶν καὶ κατάθεσαν ὁ πρῶτος 7.500.000 δραχμές, ὁ δεύτερος 12.500.000 δραχμές, ὁ τρίτος διπλάσια τοῦ πρώτου καὶ ὁ τέταρτος ὅσα κατάθεσε ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος μαζί. Μετὰ 5 ἔτη λογαριάσθηκαν καὶ βρῆκαν κέρδος 150.000.000 δραχμές. Ἐκ τῶν κέρδων πλῆρωσαν γιὰ φόρους 15% καὶ γιὰ ἔξοδα προσωπικοῦ 20%. Τὸ ὑπόλοιπο κέρδος τὸ μοίρασαν. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας;

11. Ένας είχε ένα εργοστάσιο κατασκευής παπουτσιών. Ήπειδή δεν είχε κεφάλαια να τὸ κινήσει, βρῆκε δυὸ συνεταίρους οἱ ὁποῖοι κατέθεσαν ὁ ἕνας 80.000.000 δραχμές, ὁ ἄλλος 120.000.000 δραχμές. Γιὰ κεφάλαιο τοῦ πρώτου θεωρήθηκε ἡ ἀξία τοῦ εργοστασίου. Τὸ εργοστάσιο ἐκτιμήθηκε 10.000 δολλάρια (δολλάριο = 5000 δραχμές). Συμφώνησαν ἀκόμη νὰ παίρῃ ὁ πρῶτος ἀπὸ τὰ κέρδη καὶ 20% γιὰ τὴν προσωπική του ἐργασία· στὰ δυὸ χρόνια ποὺ λογαριάσθηκαν βρῆκαν κέρδος 240.000.000 δραχμές. Θέλουν νὰ τὰ μοιραθοῦν. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθένας;
12. Ένας ἔμπορος χρεωκόπησε. Οἱ τρεῖς δανειστὲς του πῆραν ὅ,τι εἶχε μέσα στὸ κατάστημα γιὰ νὰ πληρωθοῦν. Βρῆκαν 50 πῆχες ὕφασμα ἀνδρικό ποὺ τὸ πούλησαν μὲ 250000 δραχμές τὴν πῆχη, 100 πῆχες ὕφασμα γυναικεῖο, ποὺ τὸ πούλησαν πρὸς 60000 δραχμές τὴν πῆχη καὶ 150 πῆχες ἀλατζᾶ, ποὺ τὸν πούλησαν πρὸς 4000 δραχμές τὴν πῆχη. Ἀπὸ τοὺς δανειστὲς τοῦ ὁ ἕνας τὸν εἶχε δανείσει 12.000.000 δραχμές, ὁ ἄλλος 15.000.000 δραχμές καὶ ὁ τρίτος 6.000.000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθένας ἀπὸ τὸ ἐμπόρευμα καὶ πόση ζημία εἶχε ὁ καθένας;
13. Δυὸ συνεταῖροι ἄρχισαν μιὰν ἐπιχείρηση· ὁ ἕνας κατέθεσε 2.500.000 δραχμές, ὁ ἄλλος ἕνα γραμματίο, ὀνομαστικῆς ἀξίας 2500000 ποὺ ἔληγε μετὰ 3 μῆνες καὶ τὸ ὁποῖο ἐξαργύρωσαν πρὸς 8^ο/. Μετὰ 4 μῆνες ἀναγκάσθηκαν νὰ πάρουν καὶ τρίτο συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 50 λίρες ἀγγλικῆς καὶ 1500 δολλάρια. Ὅταν μετὰ 18 μῆνες λογαριάσθηκαν βρῆκαν κέρδος 40.000.000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθένας;
14. Τρεῖς συνεταῖροι ἔκαμαν μιὰν ἐπιχείρηση. Ὁ ἕνας κατέθεσε 200 λίρες ἀγγλικῆς, ὁ ἄλλος 3000 μετοχὲς ἀξίας 10000 δραχμὲς ἢ μία καὶ ὁ τρίτος 2000 δολλάρια. Ἀποφάσισαν νὰ λογαριάζωνται κάθε χρόνο καὶ ἀπὸ τὰ κέρδη ν' ἀφήνουν 30% στὴν ἐπιχείρηση γιὰ τὴν αὔξηση τῶν κεφαλαίων της, τὰ δὲ ὑπόλοιπα νὰ τὰ μοιράζονται. Στὸ πρῶτο ἔτος ἐκέρδισαν 40.000.000 δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ ὁ καθένας;
15. Ένας κτηματίας πούλησε 250 ὀκάδες λάδι πρὸς 5000 δραχ.

τὴν ὀκά, 500 ὀκάδες σιτάρι πρὸς 1500 δραχμὲς τὴν ὀκά καὶ 700 ὀκάδες ἀμύγδαλα ψίχα πρὸς 6000 δραχμὲς. Ἐπ' αὐτὰ εἶχε ξοδέσῃ 200000 δραχμὲς. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ κατάθεσε σὲ μιὰ ἐπιχείρηση πού ἄρχισε μ' ἕναν ἄλλον, ὁ ὁποῖος κατάθεσε 30.000.000 δραχμὲς. Ὅταν λογαριάσθησαν εἶχαν κέρδος 60.000.000 δραχμὲς. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας;

Προβλήματα μίξεως.

Ὅπως ξέρομε, ἀπὸ κάθε ἐμπόρευμα ὑπάρχουν διάφορες ποιότητες. Ἐχομε ἐμπόρευμα α' ποιότητος, β' ποιότητος, γ' ποιότητος. Κάθε ποιότητα ἔχει καὶ διαφορετικὴ τιμὴ. Π.χ. ἔχομε καφέ ἀκριβώτερο καὶ καφέ φθηνότερο· ἔχομε σιτάρι ἀκριβώτερο καὶ σιτάρι φθηνότερο, ἔχομε φασόλια ἀκριβώτερα καὶ φασόλια φθηνότερα, ἔχομε καπνὸ ἀκριβώτερο καὶ καπνὸ φθηνότερο, ἔχομε κρασί ἀκριβώτερο καὶ κρασί φθηνότερο.

Καμμιά φορὰ ὅμως ὁ ἔμπορος δὲν μπορεῖ νὰ πουλήσῃ εὐκόλα τὸ ἀκριβὸ ἐμπόρευμα, γιατί οἱ ἀγοραστὲς δὲν ἔχουν ἀρκετὰ χρήματα ἢ γιατί σὲ ἄλλο κατάστημα τὸ βρίσκουν φθηνότερο. Ἐν κατεβάσῃ τὴν τιμὴν τοῦ θὰ ζημιωθῇ. Βασανίζει τὸ μυαλό του τί νὰ κάμῃ καὶ βρίσκει τὴ λύση· ν' ἀνακατέψῃ τὸ ἀκριβὸ ἐμπόρευμα μὲ τὸ φθηνὸ καὶ ἔτσι νᾶχῃ ἕνα ἐμπόρευμα φθηνότερο. Ἐνακατέβει π.χ. τὸ καλὸ σιτάρι, πού εἶχε 2000 δραχμὲς ἢ ὀκά μὲ τὸ κατώτερο σιτάρι, πού ἔχει 1200 δραχμὲς ἢ ὀκά. Ἐτσι κάνει σ' ὅλα τὰ ἐμπορεύματά του. Στὸ κρασί βάνει καμμιά φορὰ καὶ νερὸ καὶ ἔτσι γίνεται φθηνότερο. Αὐτὸ γίνεται συνήθως σήμερον σ' ὅλα σχεδὸν τὰ ἐμπορεύματα. Αὐτὸ τὸ ἐμπόρευμα, πού βγαίνει ἀπὸ τὸ ἀνακάτεμα λέγεται *μίγμα*, τὸ ἀνακάτεμα λέγεται *μίξις* καὶ τὰ σχετικὰ προβλήματα λέγονται προβλήματα μίξεως.

Στὴ μίξι ἔχομε δυὸ λογίων προβλήματα.

Ἄς ἐξετάσωμε τὸ α' εἶδος.

Α' εἶδος.

1. Ἐνας ἔμπορος ἀνάμειξε 100 ὀκάδες ρύζι πού εἶχε 4000 δρᾶχ. τὴν ὀκά μὲ 70 ὀκάδες ρύζι, πού εἶχε 6000 δραχμὲς τὴν ὀκά.

Πόσο πρέπει να πωλήση την δκα του μίγματος για να πάρη τὰ χρήματά του ;

Ἐς σκεφθοῦμε καὶ θὰ βροῦμε εὐκολα τὴ λύση.

Λύση. Ἐν πωλοῦσε μόνο τις 100 δκ. ρύζι πρὸς 4000 δραχμὲς τὴν δκα θὰ ἔπιανε $100 \times 4000 = 400000$ δραχμὲς. Ἐν πωλοῦσε μόνο τις 70 δκ. ρύζι πρὸς 6000 δραχμὲς τὴν δκα θὰ ἔπιανε $70 \times 6000 = 420000$ δραχμὲς. Θὰ εἰσέπραττε δηλαδὴ καὶ ἀπὸ τὰ δύο εἶδη $100 + 70 = 170$ δκ. τὸ ποσὸ τῶν δραχμῶν $400000 + 420000 = 820000$. Πρέπει τὸ ἴδιο ποσὸ νὰ πιάσῃ τὸ μίγμα τῶν $100 + 70 = 170$ δκάδων. Μὰ ἀφοῦ πρέπει νὰ πιάσῃ 820000 δραχμὲς ἀπὸ 170 δκάδες τοῦ μίγματος εἶναι εὐκολὸ νὰ βροῦμε πόσο θὰ πωλήσῃ τὴν δκα, κάνοντας μιὰ διαιρέση μερισμοῦ. $820000 : 170 = 4823,53$ δραχμὲς τὴν δκα, θὰ πωλήσῃ τὸ μίγμα.

Κατάστρωση τοῦ προβλήματος.

α' εἶδος 100 δκ. \times 4000 δραχ. = 400000 δραχ.

β' » 70 » \times 6000 » = 420000 »

μίγμα 170 » Σύνολον δραχ. 820000

ἄξια δκάς μίγματος = $\frac{820000}{170} = 4823,53$ δραχ.

Ἐν προσέξωμε τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἰδοῦμε ὅτι γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ προσθέσαμε τις δκάδες ἀπὸ τὰ δύο εἶδη τοῦ μίγματος. Προσθέσαμε κατόπιν τὴν ὀλικὴν ἄξια τοῦ πρώτου εἶδους καὶ τὴν ὀλικὴν ἄξια τοῦ δευτέρου εἶδους καὶ διαιρέσαμε τὸ ὀλικὸν ποσὸν τῶν δραχμῶν διὰ τοῦ ὀλικοῦ ποσοῦ τῶν δκάδων τοῦ μίγματος. Τὸ ἴδιο θὰ κάνωμε γιὰ κάθε πρόβλημα μίξεως τοῦ α' εἶδους. Ἐτσι γιὰ νὰ λύσωμε ἕνα πρόβλημα μίξεως τοῦ α' εἶδους.

Πολλαπλασιάζομε τὸ ποσὸν κάθε εἶδους χωριστὰ μὲ τὴν τιμὴν τῆς μονάδας του καὶ κατόπιν προσθέτομε τὰ γινόμενα. Προσθέτομε καὶ τὰ ποσὰ τῶν εἰδῶν τοῦ μίγματος καὶ διαιροῦμε τὸ ὀλικὸν ποσὸν τῶν εἰδῶν μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων τοῦ μίγματος. Ἐκεῖνο ποῦ θὰ βροῦμε εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος τοῦ μίγματος.

Λύσε τώρα μόνος σου τὰ παρακάτω προβλήματα.

2. Ένας μπακάλης ανάμιξε 150 δκάδες βούτυρο, που η δκά του πουλιέται πρὸς 8500 δραχμὲς μὲ 90 δκάδες λίπος, που η δκά του πουλιέται πρὸς 2500 δραχμὲς. Πόσο πρέπει νὰ πουλήσῃ τὴν δκά τοῦ μίγματος γιὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ ;
3. Νὰ βρῆς τὴν τιμὴ τῆς δκάς τοῦ μίγματος στὰ παρακάτω προβλήματα.
 - α) ἄλεύρι 400 δκάδων τῶν 1500 δραχμῶν καὶ ἄλεύρι 300 δκάδων 1800 δραχμῶν.
 - β) Λάδι 250 δκάδων τῶν 4000 δραχμῶν καὶ λάδι 150 δκάδων τῶν 6000 δραχμῶν.
 - γ) σιτάρι 600 δκάδων τῶν 1200 δραχμῶν σιτάρι 400 δκάδων τῶν 1500 δραχμῶν.
4. Ένας ταβερνιάρης ἀνάμιξε 450 δκάδες κρασί, που πουλιέται πρὸς 2400 δραχμὲς ἢ δκά μὲ ἄλλο κρασί 250 δκάδων που πουλιέται πρὸς 1800 δραχ., τὴν δκά. Πόσο πρέπει νὰ πουλιέται ἢ δκά τοῦ μίγματος.
5. Ένας γεωργὸς ἀνάμιξε 120 δκάδες φασόλια τῶν 4500 δραχμῶν κατ' δκά μὲ 180 δκάδες τῶν 3000 δραχμῶν κατ' δκά. Πόσο πρέπει νὰ πουλήσῃ τὴν δκά γιὰ νὰ πιάσῃ τὰ χρήματά του;
6. Νὰ βρῆς πόσον στοιχίζει ἢ δκά τοῦ μίγματος ἂν ἀναμίξῃς
 - α) 500 δκάδες βούτυρο τῶν 8000 δραχμῶν κατ' δκά μὲ 300 δκάδες βούτυρο κατωτέρας ποιότητος τῶν 5000 δραχμῶν κατ' δκά.
 - β) 250 δκάδες καφὲ τῶν 8000 δραχμῶν κατ' δκά μὲ 150 δκάδες τῶν 12000 δραχμῶν κατ' δκά.
 - γ) 600 δκάδες κρασί τῶν 1500 δραχμῶν κατ' δκά μὲ 400 δκάδες τῶν 2000 δραχμῶν κατ' δκά.
7. Ένας ἀνάμιξε 160 δκάδες καφὲ ἄλεσμένον τῶν 15000 δραχμῶν κατ' δκά μὲ 40 δκάδες κριθάρι ἄλεσμένο τῶν 1600 κατ' δκά. Πόσον ἀξίζει ἢ δκά τοῦ μίγματος ;
8. Ένας χωρικός ἀνακάτεψε 150 δκάδες σιτάρι τῶν 1800 δραχμῶν κατ' δκά, 80 δκάδες κριθάρι τῶν 1200 δραχμῶν κατ' δκά καὶ 20 δκάδες καλαμπόκι τῶν 1100 δραχμῶν κατ' δκά. Ὅλα αὐτὰ τὰ ἄλεσε καὶ ἔκαμε ἄλεύρι. Πόσο τοῦ κοστίζει ἢ δκά τὸ ἄλεύρι.
9. Ένας λαδέμπορος ἀνάμιξε 300 δκάδες λάδι τῶν 3000 δραχμῶν

κατ' ὀκτὼ μὲ 200 ὀκάδες λάδι τῶν 4500 δραχμῶν κατ' ὀκτὼ καὶ 100 λάδι τῶν 6000 δραχμῶν κατ' ὀκτὼ. Πόσο πρέπει νὰ πουλήσῃ τὴν ὀκτὼ τοῦ μίγματος γιὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ.

10. Ἐνας ἀνάμειξε 16 δράμια χρυσοῦ πού εἶχε βαθμὸν καθαρότητος 0,800 μὲ 14 δράμια χρυσοῦ πού εἶχε βαθμὸν καθαρότητος 0,750. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ μίγματος ;
11. Ἐχω δύο βραχιόλια χρυσοῦ· τὸ ἓνα ζυγίζει 25 γραμμᾶτια καὶ ἔχει βαθμὸν καθαρότητος 0,600, τὸ ἄλλο ζυγίζει 20 γραμμᾶρια καὶ ἔχει βαθμὸν καθαρότητος 0,700. Ἄν τὰ λυώσω αὐτὰ καὶ κατασκευάσω ἓνα μεγάλο βραχιόλι, ποῖος θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητός του ;
12. Ἐνας οἰνοπνευματοποιὸς ἀνάμειξε 3 εἴδη οἰνοπνεύματος. Ἀπὸ τὸ πρῶτο εἶδος 160 ὀκάδων μὲ βαθμὸν 90°, ἀπὸ τὸ δεύτερο 140 ὀκάδες μὲ βαθμὸν 80° καὶ ἀπὸ τὸ τρίτο 60 ὀκάδες μὲ βαθμὸν 70°. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μίγματος ;
13. Ἐνας γαλατᾶς ἀνάμειξε 60 ὀκάδες γάλα τῶν 2000 δραχμῶν κατ' ὀκτὼ μὲ 100 ὀκάδες γάλα 1600 δραχμῶν τὴν ὀκτὼ. Πρόσθεσε ἀκόμη στὸ μῖγμα 40 ὀκάδες νερό. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκτὼ γιὰ νὰ κερδίσῃ 80000 δραχμῆς ;
14. Ὁ ἴδιος ὁ γαλατᾶς ἀνάμειξε δύο εἴδη βούτυρο· ἀπὸ τὸ πρῶτο, πού στοίχιζε 6000 δραχμῆς τὴν ὀκτὼ πῆρε 70 ὀκάδες καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερο πού στοίχιζε 4500 δραχμῆς ἡ ὀκτὼ πῆρε 80 ὀκάδες. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκτὼ γιὰ νὰ κερδίσῃ 40% ;
15. Ἐνας καπνέμπορος ἀνάμειξε 500 ὀκάδες καπνοῦ Θεσσαλίας, πού εἶχε 4000 δραχμῆς ἡ ὀκτὼ μὲ 300 ὀκάδες καπνοῦ Μακεδονίας. Τὸ μῖγμα τὸ πούλησε μὲ 6000 δραχμῆς τὴν ὀκτὼ. Πόσο τοῦ κόστιζε ἡ ὀκτὼ τοῦ καπνοῦ Μακεδονίας ;
16. Ἐνας εἶχε δύο λογιῶν ρύζι· εἶχε ρύζι Καλαμάτας 120 ὀκάδες, πού στοίχιζε 2000 δραχμῆς τὴν ὀκτὼ καὶ ρύζι Ἀμερικῆς, πού τοῦ στοίχιζε 4500 δραχμῆς ἡ ὀκτὼ. Θέλει νὰ κερδίσῃ ἀπὸ τὴν πώληση τοῦ μίγματος πού ἔκαμε 60%. Πόσο θὰ πωλήσῃ τὴν ὀκτὼ τοῦ μίγματος ;
17. Ἐνας ἀνάμειξε 320 ὀκάδες ζάχαρη Ἀμερικῆς, πού τοῦ κόστιζε 6000 δραχμῆς τὴν ὀκτὼ μὲ 280 ὀκάδες ζάχαρη κρυσταλλῆ πού τοῦ κόστιζε 4500 δραχμῆς ἡ ὀκτὼ. Θέλει νὰ τὴν πωλήσῃ καὶ νὰ

- κερδίση 1500 δραχμές τὴν δκᾶ. Πόσο πρέπει νὰ πωλῆ τὴν δκᾶ ;
18. Ὁ ἴδιος ἀνάμιξε 250 δκάδες φασόλια, πού στοίχιζαν 2500 δραχμές ἢ δκᾶ καὶ 150 δκ. φασόλια πού τοῦ στοίχιζαν 2000 ἢ δκᾶ. Θέλει νὰ τὰ πωλήσῃ καὶ νὰ κερδίσῃ 800 δραχμές τὴν δκᾶ. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν δκᾶ ;
19. Ἐνας ἀνάμιξε 300 δκάδες λάδι τῶν 4000 δραχμῶν μὲ 200 δκ. λάδι τῶν 5000 δραχμῶν. Θέλει νὰ τὸ πωλήσῃ καὶ βρῆκε ἀγοραστή ὁ ὁποῖος τοῦ προσφέρει 4800 δραχμές τὴν δκᾶ. Τὸν συμφέρει νὰ τὸ δώσῃ ; Ἐὰν ναί, πόσα κερδίζει τὴν δκᾶ καὶ πόσα ἀπὸ ὅλο τὸ λάδι ;
20. Ἐνας καφεπώλης ἀνάμιξε 160 δκάδες καφὲ τριμμένο πού ἢ δκᾶ στοίχιζε 12000 δραχμές μὲ 40 δκάδες κριθάρι τριμμένο. Τὸ μίγμα πού ἔκαμε στοίχιζε 9640 δραχμές. Πόσο κόστιζε ἢ δκᾶ τὸ τριμμένο κριθάρι ;

Β' εἶδος.

Προβλήματα

1. Ἐνας ταβερνιάρης ἔχει δυὸ λογιῶν κρασί· τὸ ἓνα εἶναι τῶν 2400 δραχμῶν ἢ δκᾶ καὶ τὸ ἄλλο τῶν 1800 δραχμῶν ἢ δκᾶ· θέλει νὰ κάμῃ ἓνα μίγμα ἀπὸ 400 δκάδες, πού νὰ μπορῆ νὰ τὸ πωλήσῃ 2000 δραχμές τὴν δκᾶ. Πόσες δκάδες θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ ἓνα καὶ πόσες ἀπὸ τὸ ἄλλο ;
- Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν εἶναι σάν τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους. Εἶναι λιγάκι δυσκολώτερο στὴ σκέψη.
- Ἄς δοκιμάσουμε νὰ τὸ λύσωμε.
- Ἡ δκᾶ τοῦ πρώτου κρασιοῦ ἀξίζει 2400 δραχμές. Θέλει νὰ τὴν πωλήσῃ 2000 δραχμές. Πωλώντας τὴν ἔτσι ζημιώνεται 400 δραχμές τὴν δκᾶ.
- Κάθε δκᾶ τοῦ δευτέρου κρασιοῦ ἀξίζει 1800 δραχμές. Ἐτσι κερδίζει 200 δραχμές τὴν δκᾶ. Ὡστε,
- Ἄν πάρῃ 1 δκᾶ ἀπὸ τὸ πρῶτο εἶδος θὰ ζημιωθῆ $1 \times 400 = 400$ δραχμές.
- Ἄν πάρῃ 2 δκάδες ἀπὸ τὸ δεύτερο εἶδος θὰ κερδίσῃ $2 \times 200 = 400$ δραχμές.

Όταν λοιπόν πάρη 1 δκά από τὸ πρῶτο καὶ δύο δκάδες ἀπὸ τὸ δεύτερο οὔτε κερδίζει, οὔτε ζημιώνεται. Ἐν κατασκευάσῃ λοιπὸν μίγμα 3 δκάδων παίρνοντας μιὰ δκά ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ 2 ἀπὸ τὸ δεύτερο κανονίζει τὴν πώλησίν του.

Τώρα ἀπὸ δῶ καὶ πέρα εἶναι εὐκόλη ἡ λύση τοῦ χρησιμοποιώ-
ντας τὴν μέθοδο τοῦ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα. Θὰ μοιράσωμε δη-
λαδὴ τὸ ποσὸν τῶν δκάδων τοῦ μίγματος ποὺ θέλει νὰ κάμη σὲ μέ-
ρη ἀνάλογα τοῦ πρώτου εἴδους 1 καὶ τοῦ δευτέρου εἴδους 2.

Λύση. Παίρνοντας 1 ἀπὸ τὸ πρῶτο εἶδος καὶ 2 ἀπὸ τὸ δεύτερο, πό-
σες δκάδες θὰ πάρη ἀπὸ τὸ καθένα γιὰ νὰ κάμη 400 δκάδες;
Εἶναι σὰν νὰ λέμε νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 400 σὲ μέρη ἀνά-
λογα τοῦ 1 καὶ τοῦ 2.

Ἔτσι θὰ ἔχωμε κατὰ τὸ γνωστὸ κανόνα τοῦ μερισμοῦ.

$$\alpha' \text{ εἶδος } \frac{1 \times 400}{3} = \frac{400}{3} \quad 133,33$$

$$\beta' \text{ εἶδος } \frac{2 \times 400}{3} = \frac{800}{3} \quad 266.67$$

Γιὰ νὰ βρῖσκουν εὐκολώτερα τὶς διαφορὰς κάνουν ἓνα εἶδος μεγά-
λου X ἀνοικτοῦ στὴ μέση καὶ ἐκεῖ γράφουν τὴν τιμὴ τῆς πω-
λήσεως τοῦ μίγματος. Εἰς τὸ ἔπάνω μέρος τῆς ἀριστερῆς γραμμῆς
τοῦ X γράφουν τὴν τιμὴ τοῦ α' εἴδους, εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς
ἀριστερῆς γραμμῆς τοῦ X γράφουν τὴν τιμὴ τοῦ β' εἴδους.

Εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς δεξιᾶς γραμμῆς τοῦ X γράφουν τὴ
διαφορὰ τῆς τιμῆς τοῦ α' εἴδους, εἰς τὸ ἔπάνω μέρος τῆς δεξιᾶς
γραμμῆς τοῦ X γράφουν τὴν διαφορὰ τῆς τιμῆς β' τοῦ εἴδους
καὶ σύμφωνα μὲ τὶς διαφορὰς αὐτὲς ἀντεστραμμένες μοιράζου-
ν ἀνάλογα τὸ ποσὸ τῶν δκάδων τοῦ μίγματος, δηλαδὴ τὴν διαφορὰ
τοῦ πρώτου τὴν λογαριάζομε εἰς τὸ β' εἶδος καὶ τοῦ δευτέρου εἰς
τὸ α' εἶδος.

Ἄς λύσωμε τὸ ἴδιο πρόβλημα μὲ τὸν τρόπο αὐτόν.

α' 2400 τιμὴ
τοῦ α' εἶδους

200 δραχ. διαφορὰ τιμῆς
τοῦ β' εἶδους ἢ ὁποῖα
θὰ θεωρηθῆ ὡς ἀξία
τοῦ α' εἶδους διὰ τὸν
μερισμὸ τοῦ ποσοῦ τοῦ
μίγματος.

2000

β' 1800 τιμὴ
τοῦ β' εἶδους

400 δρ. διαφορὰ τιμῆς
τοῦ α' εἶδους, ἢ ὁποῖα
θὰ θεωρηθῆ ὡς ἀξία
τοῦ β' εἶδους διὰ τὸν
μερισμὸ τοῦ ποσοῦ τοῦ
μίγματος.

Μὲ τὶς διαφορὰς αὐτές, δηλαδή τοῦ α' εἶδους 200 καὶ τοῦ β' εἶδους 400, μοιράζουμε σὲ μέρη ἀνάλογα τὶς 400 ὀκάδες τοῦ μίγματος. Θὰ ἔχωμε λοιπόν.

α' εἶδος	200	μίγμα	400 ὀκάδες
β' εἶδος	400		
	600		

$$\text{ἦτοι } \alpha' \text{ εἶδος } \frac{200 \times 400}{600} = 133,33$$

$$\beta' \text{ εἶδος } \frac{400 \times 400}{600} = 266,67$$

400,00

Μὲ τὸν τρόπο τοῦ Χ συνειθίζου νὰ λύου τὰ προβλήματα τοῦ β' εἴδους τῆς μίξεως σὰν εὐκολώτερο.

Λύσε μόνος σου τὰ παρακάτω προβλήματα.

2. Ἐνας μπακάλης ἔχει δυὸ λογιῶν ζάχαρη· ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς εἶναι 4500 δραχμὲς τὴν ὀκά, ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου εἶναι 7000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Θέλει νὰ κάμη ἓνα μίγμα 500 ὀκάδων καὶ νὰ μπορῇ νὰ τὸ πωλήσῃ 6000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ α' εἶδος καὶ πόσες ἀπὸ τὸ δεύτερο;
3. Ὁ ἴδιος μπακάλης ἀνάμιξε δυὸ λογιῶν λάδι· τὸ ἓνα εἶδος εἶχε 4000 δραχμὲς ἢ ὀκά· τὸ ἄλλο εἶχε 6400 δραχμὲς ἢ ὀκά. Θέλει νὰ κάμη ἓνα μίγμα 500 ὀκάδων, πὺν νὰ μπορῇ νὸ τὸ πωλήσῃ 5800 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ πόσες ἀπὸ τὸ δεύτερο;
4. Πόσες ὀκάδες θὰ πάρω ἀπὸ ἓνα εἶδος καφέ πὺν πουλιέται 14000 δραχμὲς ἢ ὀκά καὶ πόσες ὀκάδες θὰ πάρω ἀπὸ ἓνα ἄλλο εἶδος, πὺν πουλιέται 9000 δραχμὲς ἢ ὀκά γιὰ νὰ κάμω μίγμα 200 ὀκάδων καὶ νὰ μπορῶ νὰ τὸ πωλήσω 12000 δραχμὲς τὴν ὀκά;
5. Σ'ἓνα πὺν ἔχει ἀποθήκη ἀπὸ κρασί παρουσιάσθηκε ἓνας ἀγοραστής καὶ τοῦ ζήτησε 400 ὀκάδες κρασί πρὸς 1800 δραχμὲς τὴν ὀκά. Αὐτὸς δὲν εἶχε κρασί αὐτῆς τῆς τιμῆς, εἶχε ὅμως δυὸ ἄλλα εἶδη κρασιῶν πὺν ἡ τιμὴ τους ἦταν τοῦ ἑνὸς 2600 δραχμὲς ἢ ὀκά καὶ τοῦ ἄλλου 1500 δραχμὲς ἢ ὀκά. Γιὰ νὰ μὴ διώξῃ τὸν ἀγοραστή τοῦ εἶπε νὰ περάσῃ τὴν ἄλλη ἡμέρα νὰ τὸ πάρῃ μὲ τὴν τιμὴ, πὺν πρόσφερε. Ὅταν ἔφυγε ὁ ἀγοραστής σκεπτόταν νὰ κάμη ἓνα μίγμα κ' ἀπὸ τὰ δυὸ κρασιά πὺν νὰ κοστίζῃ ἡ τιμὴ τοῦ μίγματος ὅση ἦταν ἡ τιμὴ, πὺν πρόσφερε ὁ ἀγοραστής. Δὲν ξέρει ὅμως τὴν ἀναλογία. Δὲν τοῦ κάνεις τὴ χάρη νὰ τοῦ πῆς ἐσὺ πόσες ὀκάδες θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ πόσες ἀπὸ τὸ δεύτερο; Εἶσαι καλὸ παιδί καὶ δὲν θὰ δυσκολευθῆς.
6. Ἐχει ἓνας δυὸ λογιῶν οἰνόπνευμα· α' τῶν 80° καὶ β' τῶν 65°. Θέλει νὰ κάμη ἓνα μίγμα· 120 ὀκάδων τῶν 75°. Πόσες ὀκάδες πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;
7. Ἐνας γεωργὸς ἔχει δυὸ λογιῶν σιτάρι· τὸ ἓνα ὑπολογίζει νὰ τὸ πωλήσῃ 2000 δραχμὲς τὴν ὀκά καὶ τὸ ἄλλο σὰν χειρότερο

νά τὸ πωλήσῃ 1400 δραχμὲς τὴν δὐκά. Ἦλθε ἕνας στὸ χωριὸ καὶ ζήτησε ν' ἀγοράσῃ σιτάρι μὲ 1800 δραχμὲς τὴν δὐκά. Ὁ γεωργὸς ποὺ ἔδωσε 800 δὐκάδες, ἀφοῦ ἔκαμε μίγμα ἀπὸ τὰ δυὸ εἶδη σὲ τέτοια ἀναλογία, ὥστε νὰ πιάσῃ τὰ χρήματα ποὺ ὑπελόγησε. Ποιὰ ἦταν ἡ ἀναλογία ;

8. Ἐνας μπακάλης ἀνακάτεψε βούτυρο ἀξίας 8000 δραχμῶν τὴν δὐκά μὲ λίπος 3500 δραχμῶν τὴν δὐκά. Πούλησε ὅλο τὸ μίγμα 120 δὐκάδων πρὸς 6000 δραχμὲς τὴν δὐκά. Ποιὰ ἀναλογία πῆρε ἀπὸ τὸ βούτυρο καὶ ποιὰ ἀπὸ τὸ λίπος ;

Προβλήματα μέσου ὄρου.

1. Ἐνας μαθητὴς πῆρε στὰ μαθήματα τοὺς ἑξῆς βαθμούς.

α')	Στὰ Ἀρχαῖα Ἑλληνικά	16
β')	Στὰ Νέα Ἑλληνικά	18
γ')	Στὰ Μαθηματικά	14
δ')	Στὰ ἄλλα μαθήματα	12

Ποῖος θὰ εἶναι ὁ γενικὸς βαθμὸς του ;

Εἶναι πολὺ εὐκόλα τὰ προβλήματα τοῦ Μέσου ὄρου καὶ σ' ἀφήνω νὰ βρῆς μόνος σου τὴ λύση.

2. Ἐνας λοῦστρος γυαλίζοντας παπούτσια πῆρε στὶς 7 ἡμέρες τῆς ἑβδομάδας τὰ παρακάτω ποσά :

α')	Τὴ Δευτέρα	6000	δραχμὲς.
β')	Τὴν Τρίτη	8500	»
γ')	Τὴν Τετάρτη	9000	»
δ')	Τὴν Πέμπτη	10500	»
ε')	Τὴν Παρασκευὴ	7000	»
ς')	τὸ Σάββατο	16000	»
ζ')	Τὴν Κυριακὴ	20000	»

Πόσον τοῦ ἔρχονται κατὰ μέσον ὄρον τὴν ἡμέρα;

3. Μία μοδίστρα κέρδισε ἀπὸ τὴν ἐργασία της τὰ ἑξῆς :

α')	Τοὺς τρεῖς πρῶτους μῆνες	900000	δραχμὲς
β')	» » δεύτερος »	160000	»
γ')	» » τρίτους »	120000	»
δ')	» » τελευταίους »	180000	»

Πόσα κερδίζει κατὰ μέσον ὄρο τὸ χρόνον ;

4. Σ' ένα σχολείο φοίτησαν τὰ τρία τελευταῖα χρόνια οἱ παρακάτω μαθηταί :
- | | | |
|-----|-----------------|-----|
| α') | Τὸν πρῶτο χρόνο | 232 |
| β') | Τὸν δεύτερο » | 207 |
| γ') | Τὸν τρίτο » | 331 |
- Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν μαθητῶν στὰ τρία τελευταῖα χρόνια ;

Διάφορα προβλήματα

Α'. Ἀπὸ τὴν ζωὴν.

1. Ἐνας νοικοκύρης, ἐπειδὴ φοβόταν μήπως καὶ τὸ σπῆι του ἀπὸ καμμιά πυρκαϊά, ἐπειδὴ ἦταν δίπλα σ' ἕνα φοῦρνο ἀποφάσισε νὰ τὸ ἀσφαλίσῃ. Ἐτρεξε λοιπὸν σὲ μιὰ Ἀσφαλιστικὴ Ἑταιρεία καὶ τὸ ἀσφάλισε γιὰ 800000000 δραχμὲς πληρώνοντας $12\frac{0}{100}$. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώνη τὸ ἔτος ;
2. Ἐνας ἀγόρασε ἕνα οἰκόπεδο τὸ ἔτος 1939 ἐκ 400 πήχων πρὸς 500 δραχμὲς τὴν πήχη. Ἀφοῦ τὸ ἀγόρασε ἐφρόντισε νὰ τὸ περιμανδρώσῃ. Ἐξώδευσε γιὰ τὸ περιμάνδρωμα τὰ ἑξῆς ποσά. α') γιὰ πέτρες 800 δραχμὲς, γιὰ ἀσβέστη 2000 δραχ. καὶ γιὰ ἐργατικά 3200 δραχμὲς. Σήμερα ἀποφασίζει νὰ τὸ πωλήσῃ ὑπολογίζοντας τὰ χρήματά του μετὸν σημερινὸ τιμᾶριθμο τῆς ζωῆς, ὁ ὁποῖος εἶναι 200 φορὲς μεγαλύτερος. Θέλει ὅμως συγχρόνως νὰ κερδίσῃ καὶ 50% . Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν πήχη ;
3. Ἐνας ἔμπορος ἀγόρασε ἀπὸ τὴν Ἀμερικὴ 2800 κιλά ζάχαρη πρὸς 0,50 τοῦ δολλαρίου τὸ κιλό. Ἐπλήρωσε γιὰ ναῦλο 10 λίρες ἀγγλικὲς γιὰ ὅλο τὸ ποσό, ἐπλήρωσε ἀκόμῃ $15\frac{0}{100}$ φόρο σὲ δραχμὲς στὸν Πειραιᾶ καὶ 280000 δραχμὲς γιὰ ἔξοδα μεταφορᾶς ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὸ μαγαζί του. Θέλει νὰ κερδίσῃ 1200 δραχμὲς τὴν ὁκᾶ ἀπὸ τὴν πώλησίν της. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὁκᾶ ;
4. Ἐνας ἔμπορος ὑφασμάτων ἀγόρασε ἀπὸ τὴν Ἀγγλίαν 500 γυάρδες ὑφασμα ἀνδρικό (κασμίρι) με 1 1)2 λίρα τὴ γυάρδα. Πλήρωσε γιὰ ἔξοδα φόρους καὶ λοιπὰ 30000 δραχμὲς τὴν

- πήχη. Θέλει να πωλήση τὸ ὕφασμα αὐτὸ καὶ νὰ κερδίση 40%.
- Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν πήχη ;
5. Ἕνας ἔμπορος τροφίμων ἀγόρασε στὴν Ἀμερικὴ 200 τόννους καφὲ μὲ 90 δολλάρια τὸν τόννο. Πλήρωσε γιὰ διάφορα ἔξοδα 1800000 δραχμῆς. Τὸν ἔφερε στὸ κατάστημα καὶ τὸν ζύγισε. Ἀπὸ τὸ ζύγισμα ἀποδείχθηκε ὅτι ἔλειπαν 120 ὀκάδες. Πόσα πρέπει νὰ πωλήση τὴν ὀκᾶ γιὰ νὰ κερδίση σὲ κάθε ὀκᾶ 2000 δραχμῆς ;
6. Ἕνας εἶχε ἓνα σπίτι τριώροφο. Ἀναγκάσθηκε ὅμως νὰ τὸ ὑποθηκεύσῃ γιὰ νὰ ἀνταποκριθῆ στὶς οἰκογενειακῆς του ἀνάγκες. Ἐβαλε λοιπὸν ἐπάνω στὸ σπίτι ὑποθήκη γιὰ 5 ἔτη καὶ πῆρε 60000000 δραχμῆς μὲ τόκο 12⁰/₀. Ἐπειτα ἀπὸ λίγο καιρὸ ἀναγκάσθηκε νὰ δανεισθῆ χρήματα καὶ νὰ βάλῃ δευτέρη ὑποθήκη 120000000 δραχμῶν γιὰ 4 ἔτη πρὸς 10⁰/₀. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν κατώρθωσε νὰ ἐξοικονομήσῃ ὅλες τὶς ἀνάγκες του ἔβαλε καὶ τρίτη ὑποθήκη ἀπὸ 200.000000 δραχμῆς γιὰ 3 ἔτη πρὸς 8⁰/₀. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν μποροῦσε νὰ πληρώσῃ τὰ χρῆματά του πούλησε τὸ σπίτι γιὰ νὰ τὰ πληρώσῃ. Ἀπὸ τὴν πώληση τοῦ σπιτιοῦ πῆρε 600000000 δραχμῆς. Μ' αὐτῆς ἐξώφλησε τὰ χρῆματά του καὶ μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἀγόρασε ἓνα οἰκόπεδο. Πόσες δραχμῆς πλήρωσε γιὰ τὸ οἰκόπεδο ;
7. Ἕνας ἀγόρασε ἓνα κατάστημα ἀντὶ 240000000 δραχμῶν. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν εἶχε νὰ πληρώσῃ ὅλα τὰ χρήματα, ἔδωσε στὸν πωλητὴ 60⁰/₀ μετρητὰ καὶ γιὰ τὰ ὑπόλοιπα τοῦ ὑπόγραψε γραμματίο, ποῦ ἔληγε μετὰ 8 μῆνες καὶ μὲ τὴν ὑποχρέωση νὰ πληρώσῃ καὶ τὸν τόκο 15⁰/₀. Πόσα πλήρωσε σὲ μετρητὰ καὶ πόσα θὰ πληρώσῃ γιὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ γραμματίο του ;
8. Ἕνας πατέρας ἄφησε διαθήκη στὴν ὁποία παράγγελλε νὰ μοιράσουν τὰ 3 παιδιὰ του τὴν περιουσία του ἀπὸ 320000000 δραχμῆς ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος νὰ πάρῃ τὸ 1)3, ὁ δεῦτερος 5 τὰ 2)5 καὶ ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα. Ὑποχρεώθηκαν ὅμως τὰ παιδιά νὰ πληρώσουν φόρο κληρονομίας 20⁰/₀. Πόσο πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ καθένας γιὰ τὸ φόρο ;
9. Ἕνας ζωέμπορος ἀγόρασε 500 γιδοπρόβατα μὲ 40000 δραχμῆς τὸ ἓνα. Ἐως ὅτου νὰ τὰ φέρῃ ἔδω ψόφησαν 4. Πλήρωσε φόρο καὶ ἔξοδα 1500000 δραχμῆς. Θέλει νὰ τὰ πω-

λήση στους κρεοπῶλες καὶ νὰ κερδίση 40% στὰ χρήματά του.
Πόσο θὰ πωλήση τὸ καθένα;

10. Ἐνας δημόσιος υπάλληλος παίρνει μηνιαῖο μισθὸ 240000 δραχμές. Πόσα πρέπει νὰ ἔξοδεύη τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ φθάνη ὁ μισθὸς του μαζὶ μετὰ τὰ ἔσοδα τῆς πατρικῆς του περιουσίας πού εἶναι 150000 δραχμές τὸ μῆνα;

Β'. Ἀπὸ τὰ μαθήματα.

1. Ἀπὸ τὴ φυσικὴ καὶ χημεία.

- 1) Ἡ σφαῖρα *τρέχει 450 μέτρα* στὸ δευτερόλεπτο. Πόσα δευτερόλεπτα θὰ κάμῃ γιὰ νὰ φθάσῃ στὸν προορισμὸ της, πού εἶναι σὲ ἀπόσταση 5 χιλιομέτρων καὶ 400 μέτρων;
- 2) Πόσο μακριὰ εἶναι ἓνα ὄπλο, πού ἀπὸ τὴ στιγμή πού εἶδαμε τὴ λάμψη του ὥσπου ἀκούσαμε τὸν ἦχο πέρασαν 7 δευτερόλεπτα;
- 3) Εἶδαμε μιὰ λάμψη ἀστραπῆς καὶ ἀκούσαμε τὸν κρότο τῆς βροντῆς ὕστερα ἀπὸ 10 δευτερόλεπτα. Πόσο μακριὰ μας εἶναι τὸ σύννεφο;
- 4) Νὰ μοῦ ἀπαντήσης, πόσες φορὲς εἶναι ταχύτερο τὸ φῶς ἀπὸ τὴ γῆ;
- 5) Πόσο ὀξυγόνο εἶναι στὸν ἀέρα τοῦ δωματίου μας πού ἔχει ὕψος 3,20 μ., πλάτος 6,40 μ. καὶ μῆκος 8,60 μ. ὅταν τὸ ὀξυγόνο εἶναι, ὅπως μάθατε, τὰ 21% τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος;

2. Ἀπὸ τὴ Γεωγραφία.

- 1) Ἐνας γεωγραφικὸς χάρτης εἶναι καμωμένος μετὰ κλίμακα 1 : 500.000. Μετροῦμε πάνω στὸ χάρτη τὸ μῆκος τῶν τριῶν μεγαλυτέρων νησιῶν της, τῆς Κρήτης, τῆς Εὐβοίας καὶ τῆς Κερκύρας. Τὸ μῆκος τῆς Κρήτης στὸ χάρτη εἶναι 0,25 μ., τῆς Εὐβοίας 0,16 καὶ τῆς Κερκύρας 0,05. Πόσο μῆκος σὲ χιλιόμετρα ἔχει κάθε νησί ἀπ' αὐτά;
- 2) Σ' ἓνα χάρτη μετὰ κλίμακα 1 : 1.000.000 ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴ Θεσσαλονίκη εἶναι 0,29 μ., καὶ ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὰ Χανιά 0,26 μ. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴ Θεσσαλονίκη καὶ πόσα ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὰ Χανιά;

- 3) Πόσα χιλιόμετρα κάνει ή γή γύρω από τόν ήλιο τήν ημέρα, πόσα σέ μιάν ώρα, πόσα σέ 1' και πόσα σέ 1'' όταν ή γή σέ ένα έτος (365 ημέρες) κάνει δλόκληρο τò γύρο τοῦ ήλιου, πού είναι 934.000.000 χιλιόμετρα.
- 4) Ἡ διάμετρος τῆς γῆς είναι 1.720 γεωγραφικά μίλια. Πόσα γεωγραφικά μίλια είναι ó ίσημερινός και πόσα χιλιόμετρα ;
- 5) Μιά πόλη έχει βόρειο πλάτος 40°. Μέτρησε, πόσο μακριά είναι από τόν Ἰσημερινό ;

3. Ἀπό τήν Ἱστορία.

- 1) Ἡ ἄλωση τῆς Κων]πόλεως ἀπό τούς Τούρκους γίνηκε στίς 29 Μαΐου τοῦ 1453. Πόσα έτη, μήνες και ημέρες είναι ἔως σήμερα ;
- 2) Ἡ Ἑλληνική Ἐπανάσταση κηρύχθηκε στίς 25 Μαρτίου 1821. Ποιανή ημέρα, ποιό μήνα και ποιό έτος θά γιορτάσωμε τὰ 150 χρόνια ἀπό τότε ;
- 3) Νά φροντίσης νά μάθης πότε ἦλθε ó Ὀθων στήν Ἑλλάδα και πόσα χρόνια, μήνες και ημέρες ἔμεινε βασιλιάς.
- 4) Πόσα χρόνια, μήνες και ημέρες είναι ἀπό τήν ἐποχή, πού πήραμε τή Θεσσαλία ἔως τὰ σήμερα.
- 5) Ὁ πόλεμος ó Βαλκανικός κηρύχθηκε στίς 5 Ὀκτωβρίου 1912. Πόσα χρόνια, μήνες και ημέρες είναι ἔως σήμερα ;

4. Ἀπό τή Γεωμετρία.

1. Ἡ διάμετρος ἑνός κύκλου είναι 8,20 μ. Πόση είναι ή περιφέρειά του ;
2. Πόση είναι ή περιφέρεια ἑνός κύκλου, όταν ή ἀκτίς του είναι 2,40 μ. ;
3. Ἐνα στόμα ἑνός πηγαδιοῦ, πού έχει διάμετρο 2 μέτρων θέλομε νά τò σκεπάσωμε μέ μιὰ χονδρή λαμαρίνα πού έχει μήκος 3,20 μέτρα και πλάτος 1,10 μ. Πόση λαμαρίνα χρειάζεται και πόσα θά πληρώσωμε, ἂν κάθε τετραγωνικό μέτρο λαμαρίνας έχει 5000 δραχμές ;
4. Πόσα μέτρα είναι ή ἀκτίνα τοῦ κύκλου, πού έχει περιφέρεια 5,20 μ. ;

5. Ένας καρποποιός θέλει να φτιάση τις ρόδες ενός κάρρου, να έχουν περιφέρεια 3,40 μ. Πόσο μεγάλα θα φτιάση τα ξύλα τῶν ἀκτίνων του ;
6. Ένα κάρρο, ἔχει ρόδα με διάμετρο 1,80 μ. Πόσες στροφές θα κάμη ἡ ρόδα του γιά να πάη σ' ένα κτήμα, πού εἶναι σέ ἀπόσταση 2 χιλιομέτρων ;
7. Μιά πίστα χοροῦ κυκλική ἔχει διάμετρο 4 μ. Θέλομε να τή στρώσωμε με πλακάκια. Πόσα πλακάκια χρειάζονται, ἂν κάθε πλακάκι εἶναι τετράγωνο με πλευρά 0,10 μ. μήκους ;
8. Ένα νεπόζιτο νεροῦ κυλινδρικό ἔχει διάμετρο 0.80 μ. καί ὕψος 1,20 μ. Πόσα κυβικά νεροῦ χωράει ;
9. Πόση λαμαρίνα θα χρειασθεῖ γιά ένα καπνοδόχο, πού ἔχει διάμετρο 0,20 μ. καί ὕψος 3,40 μ. ; Ἡ λαμαρίνα εἶναι τετράγωνη με πλευρά 2,40 μ.
10. Μέτρησε πόσο ὕψος ἔχει ένα κυπαρίσσι, πού θέλομε να τὸ ἀγοράσωμε γιά κατάρτι ἑνὸς καραβιοῦ, γιὰτὶ πρέπει να ξέρομε ἂν κἀνη γι' αὐτὴ τὴ δουλειά.
Ἐδῶ χρειάζεται κάποια ἰδιαιτέρη σκέψη γιά να τὸ βρῆς. Προσπάθησε. Γιά να σέ βοηθήσω σοῦ λέω μόνο ὅτι μπορούμε να βροῦμε τὸ ὕψος μετρώντας μονάχα τὸν ἴσκιό του.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ

1. Ἡ Ἀριθμητικὴ εἶναι μάθημα σκέψευς. Δὲν μαθαίνεται παπαγαλίστικα. Πρέπει νὰ σκεφθῆς καλὰ, νὰ καταλάβῃς καλὰ τὸ πρόβλημα γιὰ νὰ βρῆς τὸν τρόπο ποὺ θὰ τὸ λύσῃς.
2. Τὰ προβλήματα ἀκονίζουν τὸ μυαλό. Γι' αὐτὸ νὰ προσπαθῆς μόνο σου νὰ βρῆς τὴ λύση. Ἄς εἶναι δύσκολα. Ὅταν σκεφθῆς καλὰ θὰ τὰ λύσῃς. Μὴ ζητᾶς ποτὲ τὴ βοήθεια τῶν ἄλλων, ἢ μὴ ζητᾶς νὰ σοῦ δώσουν οἱ συμμαθηταὶ σου ἔτοιμο λυμένο τὸ πρόβλημα. Αὐτὸ δὲν ἔχει καμμιά ἀξία γιὰ σένα. Ἄν δυσκολευθῆς σὲ κανένα σημεῖο τοῦ προβλήματος συμβουλεύσου τὴν Ἀριθμητικὴ σου καὶ ἂν πάλι ἔξακολουθῆ νὰ εἶναι ἡ δυσκολία, ζήτησε τὴ βοήθεια τοῦ συμμαθητῆ σου ἢ τοῦ δασκάλου σου στὸ σημεῖο, ποὺ δυσκολεύεσαι.
3. Ἡ ζωὴ εἶναι γεμάτη ἀπὸ διάφορα προβλήματα τὰ ὅποια θὰ λύνῃς μόνος σου, ὅταν μεγαλώσῃς.. Συνείθισε λοιπὸν ἀπὸ τώρα.
4. Ἀγάπησε τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς μὲ ὅλη τὴν καρδιά σου, γιὰτὶ θὰ σοῦ εἶναι ὁ σύντροφος τῆς ζωῆς σου. Θὰ σοῦ χρειασθῆ, ὅποιοδῆποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ ἐπάγγελμά σου.

ΚΟΝΤΟΜΑΡΗ - Α. ΜΠΑΜΠΑΛΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΤΗ ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Εκδόθηκε
ΠΕΤΡΟΣ Κ. ΡΑΝΟΣ
ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5 ΑΘΗΝΑΙ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΠΕΤΡΟΥ Κ. ΡΑΝΟΥ

ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5 - ΤΗΛ. 25.175

(ΕΝΑΝΤΙ ΙΟΝΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΗΣ)

ΣΧΟΛΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Α. ΚΟΝΤΟΜΑΡΗ - Α. ΜΠΑΜΠΑΛΗ	Αριθμητικά Προβλήματα Γ' Τάξ.	δρ.	2.000
»	»	Δ'	» » 2.000
»	»	Ε'	» » 3.000
»	»	ΣΤ'	» » 2.000
Ι. ΦΩΚΙΤΟΥ	Leçons Françaises 1ον, 2ον έτ. Γυμν.	»	3.500
»	Lectures	» 3ον, 4ον	» » 3.000
»	45 Leçons Ε'	»	» » 4.000
»	38 » ΣΤ'	»	» » 4.000
»	Grammaire δι' ελας τας τάξεις	»	» 5.000
»	Ίστορία του έμπορίου	»	» 4.000
»	Le Français illustré δια τὰ Δ. Σχ.	»	» 3.000
ΕΥΦΡ. ΛΟΝΤΟΥ	Ύπαντα Παιδικού Θεάτρου	»	» 15.000
»	Κωμωδίες	»	» 2.500
»	Δράματα	»	» 2.500
Ι. ΣΑΡΡΗ - Δ. ΤΡΟΒΑ	Ύδηγίαι: καλών Ύκθέσεων τ. Α'	»	» 5.000
»	»	» τ. Β'	» 5.000
Ι. ΣΑΡΡΗ	Ύποδείγματα Ύκθέσεων τ. Α'	»	» 3.000
Π. ΧΑΤΖΗ	Γνωμικά Μεγ. Άνδρών	»	» 2.000
»	Θέματα Ύκθέσεων	»	» 1.000
Δ. ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΥ	Συνοπτική Παγκόσμιος Ύστορία	»	» 3.000