ΜΑΡΙΑΣ Σ. ΖΕΡΒΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΗΣ Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

Διὰ ταῦτα

Δικάζον ἐρήμην τοῦ ἐναγομένου Ἰω. Σ. Σκλάβου.

Δέχεται τὴν ἀπὸ 22 Νοεμβρίου 1892 ἀγωγὴν τοῦ ἐνάγοντος ὡς νόμιμον.

Ὑποχρεοῖ τὸν ἐναγόμενον ἵνα διὰ προσωπικῆς του κρατήσεω· πληρώσῃ τῷ ἐνάγοντι διὰ τὴν ἐν τῇ ἀγωγῇ καὶ τῷ ἱστορικῷ τῆς παρούσης ἀναφερομένη αἰτίαν δραχμὰς τέσσαρας χιλιάδας ὀκτακοσίας ὀγδοήκοντα (4880) ἐντόκως ἀπὸ τῆς ἀγωγῆς ἐπὶ μὲν τοῦ κεφαλαίου ἐκ δραχμῶν τεσσάρων χιλιάδων (4000) πρὸς 2 0[0 τὸν μῆνα, ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν πρὸς 9 0[0 ἐτησίως ἀχ ις ἐξοφλήσεως. καὶ

Κηρύσσει τὴν παροῦσαν προσωρινῶς ἐκτελεστήν. καὶ

Καταδικάζει αὐτὸν εἰς τὰ δικαστικὰ τοῦ ἐνάγοντος ἔξοδα μετριαζόμενα εἰς δραχμὰς δέκα ἐννέα (19) καὶ τὰ τέλη.

Ἐκρίθη καὶ ἀπεφασίσθη ἐν Ναυπλίῳ τῇ 30 Ἰανουαρίου 1895.

Ὁ Πρόεδρος
Μ Μελετόπουλος

Ὁ ὑπογραμμ[ατεὺς]
Λ. Σαραντ[...]

Ἐδημοσιεύθη δὲ τῇ ...

προθέσμως μοὶ πληρώσῃ διὰ κεφάλαιον δραχ. 4880. 6.) τοὺς τόκους ... κοῦ κεφαλαίου ἐκ δραχμῶν ... ἀγωγῆς ἐγερθείσης τὴν 22 ... μέχρις σήμερον 2 0[0 κατὰ ... 1096 γ΄.) Τοὺς τόκους ἐπὶ ... 0[0 ἐτησίως ἀπὸ τῆς ἀγωγῆς ... σήμερον ἐκ δραχ. 194 καὶ τὰ ... κὰ ἔξοδα, τὰ τῆς σημάνσεως ... τὸ παρὸν ἀντίγραφον, τὸ ἀπ... φικά, παραγγελίαν σύνταξιν ... συμβουλὴν πρὸς ἐκτέλεσιν δ... ὅλῳ δὲ νὰ μοὶ πληρώσῃ δραχ... ἀπὸ σήμερον κατὰ τὰ ἐκτεθέ...

Ἀντίγραφον δὲ τῆς παρου... θήτω διὰ τῆς ἐνταῦθα ἐκδιδο... ξαρτησία ».

Ναύπλιον τῇ 17 Φεβρουα...

Πληρεξ. Δικηγόρ...
Π. Μητρομάρας

ΜΑΡΙΑΣ Σ. ΖΕΡΒΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΗΣ Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τῆς ὑπ᾿ ἀριθ. 31699 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργ. τῆς Παιδείας τῆς 6 Ὀκτωβρίου 1917

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
46 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ — ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1921

'Αριθ. Πρωτ. 31699
Διεκπ.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 6 Ὀκτωβρίου 1917.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὴν κ. Μαρίαν Ζερβοῦ

Γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι κατ' ἀπόφασιν τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ συμβουλίου ἐνεκρίθη ἡ χρῆσις τῆς ὑφ' ὑμῶν ὑποβληθείσης **Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς** διὰ τὴν Α΄ τάξιν τῶν τετραταξίων γυμνασίων καὶ τὴν ἀντίστοιχον τάξιν τῶν λοιπῶν σχολείων τῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως, διὰ τὸ σχολικὸν ἔτος 1917—1918 καὶ ἐφεξῆς κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. 126 πρᾶξιν αὐτοῦ.

....

Ὁ Ὑπουργὸς
ΔΗΜ. ΔΙΓΚΑΣ

Ν. Δ. ΤΣΙΡΙΜΩΚΟΣ

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τῆς συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ ἐκδότου.

ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΣΙΔΕΡΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΗΣ ΚΑΙ ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΜΖερβοῦ

932

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ Α…

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΙ…

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ…

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1.—Πόσα δένδρα ὑπάρχουσιν εἰς αὐτὴν τὴν δενδροστοιχίαν;

—Πόσους κατοίκους ἔχει τὸ χωρίον αὐτό;

—Πόσα μίλια διήνυσε τὸ τάδε ἀτμόπλοιον, ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ λιμένος Πειραιῶς εἰς τὸν λιμένα Σύρου;

Διὰ ν' ἀπαντήσῃ τις εἰς τὰ ἐρωτήματα ταῦτα, χρειάζεται ἀριθμούς.

2.—Τὸν ἀριθμὸν δὲν ὁρίζομεν. Δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἔννοιαν *ἀριθμοῦ* ἀρχικῶς σχηματίζομεν, ὅταν παρατηροῦντες ὅμοια πράγματα κεχωρισμένα ἀπ' ἀλλήλων πρόκειται ν' ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα: πόσα εἶναι ταῦτα; Π. χ. εἰς τὰς φράσεις ὀκτὼ ἄνθρωποι, ἑκατὸν βιβλία, αἱ λέξεις ὀκτώ, ἑκατὸν ἐκφράζουσιν ἀριθμούς.

3.—Ἡ ταχύτης ἑνὸς πλοίου δυνατὸν νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ· τὰ δένδρα μιᾶς δενδροστοιχίας δυνατὸν νὰ γίνωσι περισσότερα ἢ ὀλιγώτερα· ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος δυνατὸν νὰ λάβωμεν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον κ. ο. κ. Ταῦτα λέγομεν ποσὰ καὶ γενικῶς:

Ποσὸν καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.

4.—Τὰ ζῷα ταῦτα εἶναι δεκαεπτά· τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος τούτου εἶναι δεκαεπτὰ πήχεων. Σύγκρισιν κάμνομεν καὶ τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν φοράν· ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτήν, τὴν ὁποίαν καὶ *μέτρησιν* καλοῦμεν, προέκυψεν εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς δεκαεπτά. Ἔστω ὅτι τὰ ζῷα γίνονται περισσότερα ἀπὸ δεκαεπτά· τότε εὐθὺς μετὰ τὰ δεκαεπτὰ πόσα εἶναι δυνατὸν νὰ γίνωσι, τὸ ὀλιγώτερον; Δεκαοκτώ. Ἔπειτα: δεκαεννέα κ. ο. κ.

Ἡ μέτρησις ἐνταῦθα εἶναι οὕτως εἰπεῖν *ἀπαρίθμησις*.

Ἐνῷ, ἐὰν φαντασθῶμεν αὐξανόμενον τὸ ποσὸν τῶν δεκαεπτὰ πήχεων, δὲν δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι μετὰ τοὺς δεκαεπτὰ πήχεις εὐθὺς ἀμέσως ἔρχεται τὸ ποσὸν τῶν δεκαοκτὼ πήχεων ἢ ἄλλο, διότι καὶ δεκαεπτάμισυ πήχεις ἔχομεν καὶ δεκαεπτὰ καὶ ἓν τέταρτον κ. ο. κ. Διακρίνομεν λοιπὸν ἀμέσως δύο εἴδη ποσῶν.

Πρῶτον· ποσὰ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὁποίων κάμνομεν ἀπαρίθμησιν, ὅπως ἐπὶ παραδείγματι, ὅταν πρόκειται νὰ μετρήσωμεν βιβλία, δένδρα, πρόβατα καὶ ἐν γένει πράγματα κεχωρισμένα ἀπ' ἀλλήλων· καὶ δεύτερον· ποσὰ *συνεχῆ*, ὅπως π. χ. τὸ μῆκος ὑφάσματος, τὸ βάρος σώματος, ὁ χρόνος κ. λ. π.

5.—Τὸ ποσόν, πρὸς ὃ κάμνομεν τὴν σύγκρισιν, ἤτοι τὸ ποσὸν δι' οὗ ἀπαριθμοῦμεν (ἓν ζῷον, ἓν δένδρον) ἢ τὸ ποσὸν δι' οὗ μετροῦμεν πάντα τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ (εἷς πῆχυς, μία ὀκᾶ), λέγεται *μονάς*.

6.—Ἡ ἐπιστήμη ἥτις πραγματεύεται τὰς μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν σχέσεις καλεῖται *Ἀριθμητική*.

Ἀρίθμησις τῶν ἀκεραίων.

7.—Πῶς σχηματίζονται οἱ ἀκέραιοι καὶ πόσοι εἶναι;

Ἡ μονάς, ὅταν θεωρῆται ὡς ἀριθμός, λέγεται *ἓν* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου 1.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς *δύο*, ὅστις παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου 2. Ἐὰν προστεθῇ καὶ ἄλλη ἀκόμη μονάς, σχηματίζεται ὁ *τρία* κ. ο. κ.

Οἱ οὕτω σχηματιζόμενοι ἀριθμοὶ εἶναι *ἀκέραιοι*· ὥστε ἕκαστος ἀκέραιος σχηματίζεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του τῇ προσθήκῃ μιᾶς μονάδος. Ὅθεν ἐξ ἑκάστου ἀκεραίου δύναται νὰ σχηματισθῇ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον πάντοτε ἄλλος ἀκέραιος· δὲν ὑπάρχει λοιπὸν ἀκέραιος τελευταῖος πάντων· ἤτοι οἱ ἀκέραιοι εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος, δι' ὃ καὶ ἐὰν ἠθέλομεν, δὲν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὀνόματα καὶ σύμβολα νέα δι' ἕκαστον νέον ἀκέραιον. Ὡς ἐκ τούτου ἐπενόησαν μέθοδον οἱ ἄνθρωποι, δι' ἧς μὲ ὀλίγας λέξεις καὶ ὀλίγα σύμβολα κατορθώνουν νὰ ὀνομάζωσι καὶ νὰ γράφωσι τὸν τυχόντα ἀριθμὸν (ἀκέραιον).

ΣΗΜ. Εἰς τὰ κατωτέρω μέχρις οὗ συναντήσωμεν τὰ κλάσματα, ὅταν λέγωμεν *ἀριθμόν*, θὰ ἐννοῶμεν πάντοτε ἀκέραιον τοιοῦτον.

8.—Ἡ διδασκαλία τῆς μεθόδου ταύτης, ἤτοι ἡ διδασκαλία περὶ τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν, λέγεται *ἀρίθμησις*.

9.—Εἰς τὸ ἐν χρήσει σύστημα ἀριθμήσεως, ὅπερ *δεκαδικὸν* καλεῖται, μεταχειριζόμεθα πρῶτον τὰ ἑξῆς κατὰ σειρὰν διάφορα ὀνόματα :

Ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα.

Ἀντίστοιχα σύμβολα τούτων ἔχομεν τὰ ἑξῆς :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

τὰ ὁποῖα καλοῦμεν σημαντικὰ ψηφία.

10.—Τὸ *ἓν* λέγεται καὶ *ἁπλῆ* μονὰς ἢ καὶ μονὰς πρώτης τάξεως.

Ὅταν εἰς τὸν ἐννέα προσθέσωμεν ἕν, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν *δέκα*. Τοῦτον θεωροῦμεν ὡς μονάδα δευτέρας τάξεως· τὸν καλοῦμεν δὲ καὶ δεκάδα. Ἵνα γράψωμεν αὐτόν, μεταχειριζόμεθα δύο σύμβολα· τὸ σύμβολον 1 καὶ ἓν ἕτερον σύμβολον, τὸ 0, καλούμενον *μηδέν*, διὰ τοῦ ὁποίου παριστῶμεν τὴν ἔλλειψιν μονάδων· τουτέστι τὸν δέκα θὰ παραστήσωμεν διὰ τοῦ **10**.

Τὸ σύμβολον 1 κατέχει ἐδῶ τὴν δευτέραν πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν ὡς ἀντιπροσωπεῦον μίαν μοναδα δευτέρας τάξεως, ἤτοι γράφοντες 10 ἐννοοῦμεν μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως καὶ καμμίαν πρώτης.

Ὅταν εἰς τὸν δέκα προσθέσωμεν ἕν, ἔχομεν τὸν ἕνδεκα, ὃν παριστῶμεν διὰ τοῦ 11, ἤτοι τὸ 1 τῆς πρώτης ἐκ δεξιῶν θέσεως ἀντιπροσωπεύει μίαν μονάδα πρώτης τάξεως ἢ ἁπλῆν μονάδα, ἐνῷ τὸ 1 τῆς δευτέρας θέσεως ἀντιπροσωπεύει μίαν μονάδα τῆς δευτέρας τάξεως ἢ μίαν δεκάδα. Ὁμοίως προχωροῦντες σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς δώδεκα, δεκατρία . . . δεκαεννέα καὶ τὰ σύμβολα 12, 13. . . 19.

11.—Ὅταν εἰς τὸ δεκαεννέα προσθέσωμεν μίαν μονάδα, ἔχομεν ὅ,τι θὰ εἴχομεν, ἐὰν προσεθέτομεν δέκα καὶ δέκα, ἤτοι δύο μονάδας δευτέρας τάξεως. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον παριστῶμεν διὰ τοῦ 20 καὶ καλοῦμεν *εἴκοσιν*. Ὁμοίως παριστῶμεν διὰ τῶν συμβόλων 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς σχηματιζομένους ἀπὸ δεκάδας τρεῖς, τέσσαρας, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, οὓς καλοῦμεν *τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα.*

12.—Εἰς τὸ εἴκοσι προσθέτοντες τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων μονάδων σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν μεταξὺ εἴκοσι καὶ τριάκοντα ἀριθμῶν. Οὗτοι περιέχουσι δύο δεκάδας καὶ τὰς ὁμοῦ σημειουμένας μονάδας, γράφονται δὲ 21, 22, 23. . . 29.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὀνομάζονται καὶ γράφονται οἱ μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν δεκάδων σχηματιζόμενοι ἀριθμοί.

13.—Οὕτω φθάνομεν μέχρι τοῦ ἐνενήκοντα ἐννέα (99). Ἐὰν εἰς τοῦτον προσθέσωμεν μίαν μονάδα, ἔχομεν ἀριθμὸν συγκείμενον ἀπὸ δέκα δεκάδας, οὕτω δὲ φθάνομεν εἰς μίαν μονάδα τρίτης τάξεως. Καλοῦμεν αὐτὸν *ἑκατὸν* καὶ παριστῶμεν διὰ τοῦ 100. Τοποθετοῦντες τὸ 1 εἰς τὴν τρίτην θέσιν, εἰς δὲ τὰς ἄλλας, πρώτην καὶ δευτέραν, μηδενικὰ συμβολίζομεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις προκύπτει, ἐὰν λάβωμεν δέκα φορὰς τὸ δέκα, ἤτοι δέκα μονάδας δευτέρας τάξεως. Ὁμοίως, ἵνα παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα μονάδας τρίτης τάξεως, ἤτοι ἀπὸ μίαν μονάδα τετάρτης τάξεως, γράφομεν εἰς τὰς τρεῖς πρώτας θέσεις μηδενικά, εἰς δὲ τὴν τετάρτην τὸ 1· ἔχομεν οὕτω τὸν 1000, ὃν καλοῦμεν *χίλια*· ἐπίσης, ἵνα παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα μονάδας τετάρτης τάξεως, ἤτοι ἀπὸ μίαν μονάδα πέμπτης τάξεως, γράφομεν εἰς τὰς τέσσαρας πρώτας θέσεις μηδενικά, εἰς δὲ τὴν πέμπτην τὸ 1 καὶ ἔχομεν οὕτω τὸν 10 000, ὅστις καλεῖται δέκα χιλιάδες. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἔχομεν :

100 000 (ἑκατὸν χιλιάδες),
1 000 000 (ἓν ἑκατομμύριον),
10 000 000 (δέκα ἑκατομμύρια) καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸν ἀριθμὸν 1 000 000 000 καλοῦμεν δισεκατομμύριον· ἐπίσης τὸν 1 000 000 000 000 τρισεκατομμύριον καὶ οὕτω καθεξῆς. Οὕτως ὁ 10 000 000 000 καλεῖται ἁπλῶς δέκα δισεκατομμύρια κλπ.

Τὴν μονάδα, τὴν χιλιάδα, τὸ ἑκατομμύριον κ.λ.π. καλοῦμεν πρωτευούσας μονάδας.

14. —Ὅπως παρεστήσαμεν διὰ τοῦ 100 τὴν μίαν ἑκατοντάδα, οὕτω παριστῶμεν διὰ

200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900

τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς σχηματιζομένους ἀπὸ ἑκατοντάδας δύο, τρεῖς, τέσσαρας, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, οὓς καλοῦμεν :

διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐννεακόσια.

15. — Εἰς τὸ ἑκατὸν προσθέτοντες τὰ ὀνόματα τῶν 99 πρώτων ἀριθμῶν σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν μεταξὺ ἑκατὸν καὶ διακόσια· ἀριθμῶν, γράφομεν δὲ 101, 102, 103, . . . 199. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μηδὲν τῆς δευτέρας θέσεως παριστᾷ ἔλλειψιν δεκάδων, ὡς προηγουμένως παρέστησεν ἔλλειψιν μονάδων τῆς τάξεως εἰς ἣν ἦτο γεγραμμένον. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὀνομάζομεν καὶ γράφομεν τοὺς μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν ἑκατοντάδων ἀριθμούς. Οὕτω φθάνομεν μέχρι τοῦ χίλια.

16. —Ὅπως ἐσχηματίσαμεν ἐκ τῆς μονάδος τοὺς 999 πρώτους ἀριθμούς, οὕτω σχηματίζομεν ἐκ τοῦ χίλια τοὺς ἀριθμοὺς 2 χιλιάδες, 3 χιλιάδες κ.τ.λ. μέχρις 999 χιλιάδες. Εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν προσθέτοντες τοὺς 999 πρώτους σχηματίζομεν τοὺς ἐνδιαμέσους. Καὶ φθάνομεν μέχρι τοῦ ἑκατομμυρίου. Ἡ αὐτὴ ἐργασία συνεχίζεται μὲ τὸ ἑκατομμύριον κ.λ.π.

Ἡ προεκτεθεῖσα ἐργασία μᾶς ἄγει εἰς τοὺς ἑξῆς κανόνας :

17. — *Κανὼν πρῶτος*. Ἡ γραφὴ παντὸς ἀριθμοῦ γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἑξῆς συμφωνίας : *Ὅταν ἓν ψηφίον ἀνέρχεται κατὰ μίαν θέσιν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀντιπροσωπεύει μονάδας δεκάκις περισσοτέρας ἐκείνων τὰς ὁποίας ἀντεπροσώπευεν εἰς τὴν προηγουμένην θέσιν. Τουτέστι γράφομεν τὰ ψηφία τῶν διαφόρων μονάδων εἰς μίαν σειράν, οὕτως ὥστε εἰς τὴν πρώτην πρὸς τὰ δεξιὰ θέσιν νὰ εὑρεθῇ γεγραμμένον τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων, εἰς τὴν δευτέραν τὸ τῶν δεκάδων καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν δὲ ἐλλείπωσι μονάδες τάξεως κατωτέρας τῆς μεγίστης τοῦ ἀριθμοῦ, εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν γράφομεν* 0.

18. — *Κανὼν δεύτερος*. Ἡ ἀπαγγελία ἀριθμοῦ μείζονος τοῦ 100, γεγραμμένου κατὰ τὰ ἀνωτέρω, γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πρωτευουσῶν μονάδων του, ἤτοι : *χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ χίλια· ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὡς γνωρίζομεν ἤδη καὶ προσθέτομεν τὴν ὀνομασίαν τῆς πρωτευούσης μονάδος, ἵνα ἐκφράσωμεν πόσας πρωτευούσας μονάδας ἑκάστου εἴδους περιέχει·* π. χ. τὸν ἀριθμὸν ἑπτὰ ἑκατοντάδες ἑκατομμυρίου, δύο δεκάδες ἑκατομμυρίου, πέντε δεκάδες χιλιάδων, τρεῖς ἁπλαῖ δεκάδες καὶ δύο μονάδες γράφομεν 720 050 032 καὶ ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς : Ἑπτακόσια εἴκοσιν ἑκατομμύρια πεντήκοντα χιλιάδες τριάκοντα δύο.

Ἀσκήσεις.

1). Ποῖον ἔχει ὡς ψηφίον ἑκατοντάδων πᾶς ἀριθμὸς περιλαμβανόμενος μεταξὺ χίλια τριακόσια καὶ χίλια τετρακόσια ;

2). Πόσας δεκάδας περιέχει ἡ χιλιάς, ἡ δεκὰς χιλιάδων, τὸ ἑκατομμύριον ;

3). Πῶς γράφονται οἱ ἀριθμοὶ δεκατρία ἑκατομμύρια καὶ ἑπτὰ μονάδες· τρία ἑκατομμύρια ἑπτὰ χιλιάδες καὶ πέντε μονάδες· δύο τρισεκατομμύρια καὶ πέντε μονάδες ;

4). Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 1001001, 111111, 2222, 123456789.

5). Ποσάκις τὸ ψηφίον 3 θὰ εὑρεθῇ γεγραμμένον εἰς τὸν πίνακα τῶν ἀκεραίων ἀπὸ 1 μέχρι 200 ;

6). Ποίους διψηφίους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ ψηφία 1, 2, 3 ;

7). Πόσα ψηφία ἔχει ἀριθμὸς οὗ τὸ ψηφίον ἀνωτέρας τάξεως δηλοῖ ἑκατοντάδας τρισεκατομμυρίου ;

8). Εἰς πάντα ἀριθμὸν μία μονὰς τῆς ἀνωτέρας τάξεως σημαίνει ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἐκείνου ὅστις σχηματίζεται, ἂν ἀποκοπῇ τὸ πρῶτον ἐξ ἀριστερῶν ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἕτερα συστήματα ἀριθμήσεως.

19. —Ἵνα σχηματίσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, συνεφωνήσαμεν ὅπως δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελῶσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ ὅπως ἓν ψηφίον ἀνερχόμενον κατὰ μίαν θέσιν λαμβάνῃ σημασίαν δεκάκις μείζονα.

20. —Ἂς ἀναχωρήσωμεν ἤδη ἐξ ἄλλης συμφωνίας ἀναλόγου.

«Θεωροῦμεν ὡς μονοψηφίους ἀριθμοὺς τοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6· συμφωνοῦμεν δὲ ἑπτὰ ἁπλαῖ μονάδες νὰ ἀποτελῶσι μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως, ἣν ἂς καλέσωμεν ἑπτάδα, καὶ πάλιν ἑπτὰ ἑπτάδες νὰ ἀποτελῶσι μίαν μονάδα τρίτης τάξεως καὶ οὕτω καθεξῆς». Ἡ συμφωνία αὕτη συνεπάγεται τὴν ἑξῆς : Τὸ ψηφίον 1 τοποθετημένον εἰς τὴν δευτέραν θέσιν νὰ ἀντιπροσωπεύῃ ἑπτὰ μονάδας, εἰς τὴν τρίτην θέσιν ἑπτὰ ἑπτάδας, ἤτοι τεσσαράκοντα ἐννέα μονάδας καὶ οὕτω καθεξῆς· οὕτως ὁ ἀριθμὸς 546 κατὰ τὰς συμφωνίας αὐτὰς σημαίνει τὸ σύνολον ἓξ μονάδων, τεσσάρων ἑπτάδων καὶ πέντε μονάδων τρίτης τάξεως.

Ἔχομεν οὕτω νέον σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν τὸ ἑπτά, τὸ καλούμενον ἑπταδικόν.

Καὶ ἐν γένει :

21. — Ἵνα σχηματίσωμεν σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν ἀριθμόν τινα ν, παριστῶμεν δι' ἁπλῶν ψηφίων τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ ὅστις προηγεῖται τοῦ ν. (Ἂν ὁ ν ὑποτεθῇ πέρα τοῦ δέκα, τότε, διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸν μονοψήφιον δέκα, μεταχειριζόμεθα νέον σύμβολον, ὡς π. χ. τὸ α κλπ.). Συμφωνοῦμεν δὲ ὅπως ν ἁπλαῖ μονάδες ἀποτελῶσι μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως, ν μονάδες δευτέρας τάξεως μίαν μονάδα τρίτης κ. ο. κ. Μεταχειριζόμεθα δὲ τὸ *0* (μηδὲν) ὅπως καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Οὕτως ἔχομεν δυαδικόν, τριαδικόν,... δωδεκαδικόν, δεκατριαδικόν.... κλπ. σύστημα.

ΣΗΜ. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν πῶς τρέπομεν ἀριθμόν τινα ἑνὸς συστήματος εἰς ἀριθμὸν ἄλλου συστήματος.

Ἀσκήσεις.

9). Τίνα βάσιν ἔχει τὸ σύστημα ἐν ᾧ ἡ μονὰς τῆς τρίτης τάξεως ἀντιπροσωπεύει εἴκοσι πέντε μονάδας; τίνα, ὅταν ἐννέα; τίνα, ὅταν δεκαέξ;

10). Ὁ ἀριθμὸς 100 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος ἀπὸ πόσας ἁπλᾶς μονάδας σχηματίζεται;

11). Πόσα ψηφία χρειαζόμεθα εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα;

12). Πόσα ψηφία χρειαζόμεθα εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα;

Ὁρισμοὶ ἰσότητος καὶ ἀνισότητος.

22.—Εἰς ἕκαστον κεφαλαῖον γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου ἀντιστοιχεῖ ἓν μικρὸν καὶ τἀνάπαλιν. Λέγομεν δι' αὐτό, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κεφαλαίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μικρῶν. Δι' ὅμοιον λόγον ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς τοῦ ἀνθρώπου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν τῆς ἀριστερᾶς.

23.—Δύο ἀριθμοὶ λέγονται *ἴσοι*, ὅταν εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχῇ μία μονὰς τοῦ ἑτέρου καὶ τἀνάπαλιν. Ἄλλως λέγονται *ἄνισοι*· καὶ *μεγαλύτερος* λέγεται ὁ ἔχων πλὴν τῶν μονάδων τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰς μονάδας τοῦ ἑτέρου καὶ ἄλλας προσέτι, ὁπότε ὁ ἄλλος λέγεται *μικρότερος*.

Σημεῖα διὰ μὲν τὴν ἰσότητα ἔχομεν τὸ ἑξῆς = (ὅπερ ἀπαγγέλλεται ἴσον), π. χ. $6=6$, διὰ δὲ τὴν ἀνισότητα τὸ ἑξῆς $<$

Ὁ μικρότερος ἀριθμὸς γράφεται πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας· π. χ. $6 < 7$, $14 > 12$.

24. — Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος ἕπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες :

α'.) Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι.

β'.) Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ προκύπτοντες θὰ εἶναι ἴσοι.

γ'.) Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, ὁ μεγαλύτερος ἐξακολουθεῖ ὢν μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου.

25. — *Παρατήρησις*. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἔννοιαν τῆς *τάξεως*, τὴν σχηματιζομένην, ὅταν φαντασθῶμεν τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3. . . . ., τότε μικρότερος τοῦ β λέγεται ὁ ἀριθμὸς α, ἐὰν εὑρίσκεται εἰς τοὺς πρὸ τοῦ β, μεγαλύτερος δέ, ἐὰν εἰς τοὺς κατόπιν· ἄλλαις λέξεσιν ὁ κατώτερος, δηλαδὴ ὁ προηγούμενος, εἶναι μικρότερος.

Ἀσκήσεις.

13) Οἱ διπλάσιοι τῶν ἴσων εἶναι ἴσοι· οἱ τριπλάσιοι ἐπίσης κ. ο. κ.

14) Οἱ διπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶναι ἄνισοι· οἱ τριπλάσιοι ὁμοίως ἄνισοι κ. ο. κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

26. — Πάντα ἀκέραιον δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὡς μίαν συλλογὴν πολλῶν μονάδων. Ὅταν ἑνώνωμεν τὰς μονάδας πολλῶν ἀκεραίων καὶ κάμνωμεν μίαν νέαν συλλογήν, ἕνα νέον ἀριθμόν, λέγομεν τότε, ὅτι *προσθέτομεν* τοὺς ἀκεραίους αὐτούς, τὴν δὲ πρᾶξιν καλοῦμεν *πρόσθεσιν*. Τὸ ἐξαγόμενον καλεῖται *ἄθροισμα*, οἱ δὲ ἑνούμενοι ἀκέραιοι λέγονται *προσθετέοι*.

Σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ $+$, ἀπαγγέλλεται δὲ *σύν*· π. χ. $7+5$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἑπτὰ καὶ πέντε.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

27. — Θεωρήσωμεν ἀριθμόν τινα, ἔστω τὸν 4· ἀποτελεῖται οὗτος ἐκ μονάδων 1, 1, 1, 1. Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν φαντασθῶμεν ὅτι ἑνοῦμεν αὐτὰς πάντοτε θὰ ἔχωμεν τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν 4. ἤτοι :

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν, καθ' ἣν ἑνώνομεν μονάδας τινάς, δὲν ἀλλάσσει ὁ ἀριθμὸς ὅστις θὰ προκύψῃ.

Καὶ γενικῶς. Ἄς ζητήσωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 3, 6. Ἔχομεν νὰ ἑνώσωμεν πέντε μονάδας, τρεῖς μονάδας καὶ ἓξ μονάδας. Δὲν ὑπάρχει ἀνάγκη νὰ προσέξωμεν εἰς τὴν τάξιν καθ' ἣν θὰ τὰς ἑνώσωμεν, ἀρκεῖ νὰ τὰς λάβωμεν ὅλας· ὅθεν ἔχομεν ὅτι :

«*Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν δοθέντας ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς ἄθροισμα*».

Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι θεμελιώδης καὶ λέγεται εἴτε *ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν* εἴτε *ἰδιότης ἀντιμεταθέσεως*.

28. — Κατὰ ταῦτα, ἐὰν τοὺς προσθετέους τοὺς δεδομένους παραστήσωμεν διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, θὰ δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι :

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\gamma+\beta+\alpha+\varepsilon+\delta=\beta+\delta+\alpha+\varepsilon+\gamma \text{ κ.λ.π.}$$

Ἐλάβομεν πέντε προσθετέους, ἀλλ' ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὁσουσδήποτε.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς :

α΄.) Ἔστω ὅτι ἐδόθη τὸ ἄθροισμα $3+5+2$· ὅπως τὸ ἐσημειώσαμεν ἐδῶ σημαίνει νὰ λάβωμεν 3 μονάδας καὶ εἰς αὐτὰς νὰ ἑνώσωμεν 5, ὁπότε εὑρίσκομεν 8· εἰς αὐτὰς δὲ νὰ ἑνώσωμεν 2 μονάδας, ὁπότε εὑρίσκομεν 10. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ὅμως ἰδιότητα ἔχομεν $3+5+2=5+2+3$· ἤτοι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν, ἐὰν ἑνώσωμεν πρῶτον τὰς 5 μονάδας καὶ τὰς 2, ὁπότε εὑρίσκομεν 7, εἰς αὐτὰς δὲ κατόπιν τὰς 3. Ἤτοι τὸ ἄθροισμα 10 δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἄθροισμα δύο προσθετέων, τῶν 7 καὶ 3, εἴτε τῶν 3 καὶ 7, ἤτοι :

$$3+5+2=3+(5+2),$$

ὅπου διὰ τῆς παρενθέσεως ἐννοοῦμεν ὅτι ἐξετελέσαμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν 5 καὶ 2 καὶ ἐθεωρήσαμεν τὸ ἄθροισμα ὡς δεύτερον προσθετέον.

Ἤ, ἐὰν ἀντὶ τῶν 3, 5 καὶ 2 φαντασθῶμεν οἱουσδήποτε ἀκεραίους α, β, γ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι :

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

Τουτέστι· δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν δεύτερον καὶ τρίτον προσθετέον διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Καὶ γενικώτερον :

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε προσθετέους διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

β'.) Φανερὸν εἶναι ὅτι ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον· δηλαδή, ὅπως συνεπτύξαμεν διαφόρους προσθετέους εἰς ἕνα, οὕτω δυνάμεθα καὶ νὰ ἀναπτύξωμεν ἕνα προσθετέον, ἤτοι:

Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν (εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα) *ἕνα προσθετέον δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.*

Κατὰ ταῦτα· $\alpha+(\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$

$\alpha+(\beta+\delta+\varepsilon)+\zeta=\alpha+\beta+\delta+\varepsilon+\zeta$ κ. ο. κ.

Πῶς προστίθεται ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα ;

γ'.) Τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta\cdot$$

ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ἰσοῦται κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα (α'.) καὶ τῷ ἀθροίσματι

$$\alpha+(\beta+\delta)+\gamma\cdot$$

ὅθεν καὶ (§ 24)

$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$. Ἄρα :

Προστίθεται ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα, καὶ ἐὰν προστεθῇ εἰς ἕνα τῶν προσθετέων.

Πῶς προσθέτομεν διάφορα ἀθροίσματα ;

δ΄.) Ἔστω τὸ ἄθροισμα

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\delta + \varepsilon)$$

Τοῦτο κατὰ τὴν ἰδιότητα (β΄) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$(\alpha + \beta + \gamma) + \delta + \varepsilon$$

Καὶ τοῦτο πάλιν πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$

ὥστε :

Προσθέτομεν διάφορα ἀθροίσματα, καὶ ἐὰν σχηματίσωμεν ἓν ἄθροισμα ἐξ ὅλων τῶν προσθετέων.

Κατὰ ταῦτα·

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\delta + \varepsilon) = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon\cdot$$

Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως.

29.—Πῶς θὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 5364 καὶ 237 ;

Θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς δύο ἀθροίσματα $5000 + 300 + 60 + 4$ καὶ $200 + 30 + 7$. Κατὰ τὴν ἰδιότητα (28 δ΄.) ἔχομεν ;

$$5000 + 300 + 60 + 4 + 200 + 30 + 7.$$

Τοῦτο ὅμως κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 28 α΄.) ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$5000 + (300 + 200) + (60 + 30) + (4 + 7) =$$

$$= 5000 + 500 + 90 + 11,$$

ὅπερ εἶναι ἴσον κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 28 β΄.) πρὸς τὸ

$$5000 + 500 + 90 + 10 + 1 =$$

$$= 5000 + 500 + 100 + 1 = 5000 + 600 + 1 = 5601\cdot$$

οὕτως ἐξηγεῖται διατὶ προσθέτομεν διαφόρους ἀριθμοὺς κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα· τουτέστιν :

30.—*Ἵνα προσθέσωμεν ἀκεραίους, γράφομεν συνήθως αὐτοὺς οὕτως ὥστε αἱ μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες ὑπὸ τὰς δεκάδας κ. ο. κ.· προσθέτομεν κατόπιν τὰς μονάδας χωριστά, ὅπως καὶ τὰς δεκάδας, ἑκατοντάδας κ. λ. π. Ὅταν* *τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην· ἐὰν δὲ ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἀκολούθου πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς τελευταίας στήλης τὸ γράφομεν ὁλόκληρον.*

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

31. — *Βάσανος* πράξεώς τινος καλεῖται ἡ δοκιμὴ τὴν ὁποίαν κάμνομεν, ἵνα ἐξελέγξωμεν ἂν ἐγένετο λάθος τι.

Τὴν βάσανον τῆς προσθέσεως κάμνομεν στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος (§ 28). Δηλαδὴ προσθέτομεν τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς κατ' ἄλλην τάξιν. Ἐὰν δὲν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τότε ἐγένετο λάθος ἢ εἰς τὴν πρώτην ἢ εἰς τὴν δευτέραν πρᾶξιν.

Ἀσκήσεις.

15). Ποίας ἰδιότητας ἐφαρμόζομεν διὰ τὰς ἰσότητας :

$$5 + 6 + 2 + 4 + 9 = 5 + 10 + 2 + 9,$$
$$14 + 7 + 32 = 10 + 2 + 4 + 7 + 30.$$

16). Τὸ ἄθροισμα $21 + 12 + 13$ νὰ γραφῇ ὡς ἄθροισμα ἓξ προσθετέων, ὧν οἱ τρεῖς λήγουσιν εἰς 0, οἱ δὲ λοιποὶ ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ δέκα· κατὰ πόσους τρόπους γίνεται τοῦτο ;

17). Διατί ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν καὶ πότε δὲν γίνεται πολυπλοκωτέρα ἡ πρόσθεσις, ὅταν ἀρχίζωμεν ἐξ ἀριστερῶν ;

18). Θεωρουμένων ὡς θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως τῶν ἑξῆς :

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ καὶ } \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ λοιπαί.

19). Πῶς συντομεύεται ἡ πρόσθεσις ὅταν πάντες οἱ προσθετέοι λήγωσιν εἰς μηδενικά.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

32.—Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ 5, ἵνα εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸ 12 ;

Ἡ πρᾶξις ἡ ὁποία θὰ γίνῃ λέγεται *ἀφαίρεσις*, ἤτοι :

Δίδεται τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως δύο ἀριθμῶν, ἔστω α, δίδεται ἐπίσης καὶ ὁ εἷς τῶν ἀριθμῶν, ἔστω β, ζητεῖται δὲ ὁ ἕτερος. Ἡ πρᾶξις ἡ σκοπὸν ἔχουσα τὴν εὕρεσιν τούτου λέγεται *ἀφαίρεσις*.

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως.

Ἵνα εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἐλαττώσωμεν προφανῶς τὸν α κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ β. Ὁ α λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ β *ἀφαιρετέος*· τὸ ἐξαγόμενον *διαφορὰ* ἢ *ὑπόλοιπον*.

Ἐὰν δ καλέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον, σημειοῦται ἡ ῥηθεῖσα ἀφαίρεσις ὡς ἑξῆς : $α - β = δ$. Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως, ἤτοι τὸ —, λέγεται *πλήν*.

33.—Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι δυνατή, μόνον ὅταν ὁ μειωτέος ἔχῃ μονάδας περισσοτέρας τῶν τοῦ ἀφαιρετέου, ἤτοι ὅταν εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ.

Ἵνα λέγωμεν, ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, καὶ ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσοι, θὰ παραδεχθῶμεν τὸ μηδὲν (0) ὡς ἀριθμόν. Δυνάμεθα μάλιστα νὰ ὁρίσωμεν τὸ 0 ὡς διαφορὰν δύο ἴσων ἀριθμῶν.

Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

34.—Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς ἡ ἰσότης $α - β = δ$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $α = β + δ$· καὶ ἀντιστρόφως.

Τοῦτο ἔχοντες ὑπ' ὄψει δυνάμεθα ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἰδιότητας τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον, μεταβάλλεται τὸ ὑπόλοιπον ;

α'.) Ἔστω α — β = δ· ἔχομεν :

$$α = β + δ.$$

Καὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 28 γ'.)

$$α + γ = (β + γ) + δ·$$

ὅθεν

$$(α + γ) - (β + γ) = δ.$$

Ἄρα : *Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται.*

Παρατήρησις. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον μίαν μονάδα, αὐξάνει τὸ ὑπόλοιπον κατὰ μονάδα. (§ 32).

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀφαιρετέον μίαν μονάδα, τὸ ὑπόλοιπον ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα· ἑπομένως :

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον μίαν μονάδα, τὸ ὑπόλοιπον δὲν ἀλλάσσει.

Πῶς ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπὸ ἀθροίσματος ;

β'.) Ἔστω ἡ διαφορά :

$$(α + β) - γ$$

Ἀπὸ οἱονδήποτε προσθετέον καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν μίαν μονάδα, τὸ σύνολον ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα· ἑπομένως :

Ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπὸ ἀθροίσματος, καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑνὸς ἐκ τῶν προσθετέων.

Καὶ ἡ πρότασις αὕτη πηγάζει ἐκ τῆς ἰδιότητος (§ 28. γ'.).

Ἔχομεν τουτέστιν :

$$(α + β) - γ = (α - γ) + β,$$

διότι :

$$[(α - γ) + β] + γ = [(α - γ) + γ] + β = α + β.$$

Πῶς ἀφαιρεῖται ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ ;

γ'.) Ἔστω ἡ διαφορὰ

$$α - (β + γ)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ μιᾶς πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς β μονάδας καὶ ἔπειτα τὰς γ μονάδας· ὅθεν :

Ἀφαιροῦμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον· ἤτοι :

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$$

Ἡ πρότασις αὕτη προκύπτει καὶ ἐκ τῆς (α΄.) ἰδιότητος

Καὶ τῷ ὄντι ἔχομεν :

$$(\alpha - \beta) - \gamma = [(\alpha - \beta) + \beta] - (\gamma + \beta) = \alpha - (\gamma + \beta)$$

ὅθεν :

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$$

Πῶς ἀφαιρεῖται διαφορὰ ἀπὸ ἀριθμοῦ ;

δ΄.) Ἔστω ἡ διαφορὰ

$$\alpha - (\beta - \gamma)$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (α΄.) ἔχομεν :

$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - [(\beta - \gamma) + \gamma] = (\alpha + \gamma) - \beta$$

ὥστε

$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta.$$

ἄρα :

Ἀπὸ ἀριθμοῦ ἀφαιροῦμεν διαφορὰν δύο ἄλλων καὶ ὡς ἑξῆς : Προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον.

Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως.

35.— Ἔστω πρὸς ἀφαίρεσιν ἀπὸ τοῦ 459 ὁ 168. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς ὡς ἀθροίσματα, ὁπότε ἔχομεν :

$$(400 + 50 + 9) - (100 + 60 + 8).$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 34. γ΄.) ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος ἀπὸ τοῦ μειωτέου. Ἀφαιροῦμεν τὸν 8 ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο (§ 34. β΄.) νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 9· μένει 1. Ἔπειτα ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἕτερον προσθετέον 60, ἤτοι τὰς 6 δεκάδας. Ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν 5 δεκάδων τοῦ μειωτέου, θὰ στηριχθῶμεν εἰς τὴν ἰδιότητα (§ 34. α΄.). Προσθέτομεν τουτέστιν εἰς τὸν μειωτέον δέκα δεκάδας, τὰς ὁποίας κατόπιν θὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, καὶ οὕτως αἱ 5 δεκάδες τοῦ μειωτέου μετὰ τὴν πρόσθεσιν γίνονται 15 δεκάδες· δὲν προσθέτομεν ἀμέσως καὶ τὰς δέκα δεκάδας εἰς τὸν ἀφαιρετέον, διότι ἄλλως πάλιν δὲν θὰ ἀφῃροῦντο αἱ δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων τοῦ μειωτέου· ἀφαιροῦμεν τουτέστι προηγουμένως τὰς 6 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 15 τοῦ μειωτέου· μένουν 9 δεκάδες εἰς τὸ ὑπόλοιπον· καὶ κατόπιν προσθέτομεν εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὰς δέκα δεκάδας (τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς προστεθείσας εἰς τὸν μειωτέον), ἤτοι μίαν ἑκατοντάδα, καὶ τότε αἱ ἑκατοντάδες τοῦ ἀφαιρετέου γίνονται 2· ἀφαιροῦμεν ταύτας ἀπὸ τῶν τεσσάρων τοῦ μειωτέου· μένουν 2. Ὅθεν ὁ κανών:

36. — *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, γράφομεν τὸν μικρότερον ὑπὸ τὸν μεγαλύτερον οὕτως ὥστε αἱ μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, αἱ δεκάδες ἐπίσης κ.τ.λ.· ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων τοῦ μειωτέου ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν. Ὅταν ἡ ἀφαίρεσις αὕτη δὲν γίνεται, προσθέτομεν εἰς τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ μειωτέου 10 μονάδας, ἀλλ᾽ ἔπειτα ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου προσθέτομεν εἰς αὐτό, πρὶν τὸ ἀφαιρέσωμεν, μίαν μονάδα.*

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

37. Ἡ βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται, ἐὰν προσθέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸν ἀφαιρετέον. Ἂν ὡς ἄθροισμα εὑρεθῇ ὁ μειωτέος, τότε τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι δὲν ὑπεπέσαμεν εἰς λάθος.

Ἀσκήσεις.

20). Ἵνα προστεθῇ εἰς ἀριθμὸν ἡ διαφορὰ δύο ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον.

21). Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ἴσοι.

22.) Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι.

23.) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων

$$2386-(475-4),\ 2974-(900+70+4)$$

μὲ ἐκτελέσεις πράξεων διαφόρους τῶν σεσημειωμένων.

24). Τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γραφῶσι πάντοτε ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha - 1$, α, $\alpha + 1$.—Ὅθεν τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν προσθετέων ἴσων τῷ μεσαίῳ.

25). Ποῖα λάθη πρέπει νὰ γίνωσιν εἰς τὴν βάσανον τῆς ἀφαιρέσεως καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, ὥστε νὰ νομισθῇ ὅτι ἐγένετο ἡ πρᾶξις ὀρθὴ χωρὶς νὰ ἔχῃ γίνῃ;

26). Ἐὰν τριψηφίου τινος ἀριθμοῦ μεταθέσωμεν ἐναλλὰξ τὰ ψηφία ἑκατοντάδων καὶ μονάδων (ὑποτιθέμενα διάφορα) καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον τριψήφιον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, θὰ εὑρεθῇ διαφορὰ μὲ ψηφίον δεκάδων 9.

27). Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 3003.

28). Ἐὰν ἀπὸ ἀριθμοῦ σχηματιζομένου μὲ τρία διαδοχικὰ ψηφία ἀφαιρέσωμεν τὸν σχηματιζόμενον μὲ τὰ ἴδια ψηφία ἀλλὰ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, εὑρίσκομεν διαφορὰν 198.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

38.—Πρόσθεσις ἐν ᾗ πάντες οἱ προσθετέοι εἶναι ἴσοι ὀνομάζεται καὶ *πολλαπλασιασμός*.

Πολλαπλασιασμὸς λέγεται καὶ ἡ πρᾶξις δι' ἧς ἐκτελοῦμεν συντόμως τοιαύτην πρόσθεσιν.

Εἷς οἱοσδήποτε ἐκ τῶν ἴσων προσθετέων λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων λέγεται *πολλαπλασιαστής*.

Τὸ ἐξαγόμενον (τουτέστι τὸ ἄθροισμα) ἐδῶ λέγεται *γινόμενον*.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι οἱ δύο *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Παριστῶμεν γινόμενον γράφοντες τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν κατὰ σειρὰν καὶ χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ τοῦ $\times$ ἢ διὰ μιᾶς στιγμῆς, ἢ καὶ χωρὶς κανὲν σημεῖον. Τὸ σημεῖον εἶναι ἀπαραίτητον, ὅταν οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἀριθμοί. Εἰς τὴν ἀπαγγελίαν μεταχειριζόμεθα τὸ *ἐπί*.

Κατὰ ταῦτα

$\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha . \beta$ ἢ καὶ $\alpha \beta$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha,$$

ὅπου τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων εἶναι β.

Τὸ 23×12 ἢ 23.12 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα 12 προσθετέων ἴσων πρὸς 23.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

39.—Ἔστω ὅτι ἐτοποθετήσαμεν κατὰ τάξιν τινὰ τρεῖς ἀριθμοὺς

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

καὶ σημειοῦμεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ $\times$, ἤτοι ὅτι γράφομεν

$$\alpha \times \beta \times \gamma \cdot$$

διὰ τούτου θὰ ἐννοῶμεν ὅτι ζητεῖται τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν α ἐπὶ β καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ γ, ἐνῷ

$$\alpha \times \gamma \times \beta$$

σημαίνει τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν α ἐπὶ γ καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ β· ὁμοίως

$$\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta$$

σημαίνει νὰ εὕρωμεν ὡς ἀνωτέρω τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων καὶ κατόπιν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τέταρτον κ. ο. κ.

Κατὰ ταῦτα·

$$3 \times 5 \times 2 = 15 \times 2 = 30 \text{ καὶ } 3 \times 5 \times 2 \times 4 = 30 \times 4 = 120,$$

$$\text{ἐνῷ } 3 \times 5 \times 4 \times 2 = 60 \times 2 = 120.$$

40.—Παρατηροῦμεν ἐντεῦθεν ὅτι ἄλλον τρόπον ἐκτελέσεως πολλαπλασιασμοῦ ἐννοοῦμεν, ὅταν γράφωμεν

$$3 \times 5 \times 2 \times 4$$

καὶ ἄλλον, ὅταν γράφωμεν

$$3 \times 5 \times 4 \times 2.$$

Φθάνομεν ὅμως εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Προκύπτει τὸ ἑξῆς ἐρώτημα : Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν, καθ' οἱανδήποτε τάξιν φαντασθῶμεν ὅτι ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἰδίων παραγόντων ;

Αὐτὴ ἀκριβῶς εἶναι ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅτι :

«*Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν*».

Πρὶν ἢ φθάσωμεν ὅμως εἰς τὸ γενικὸν αὐτὸ συμπέρασμα θὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἀληθὲς τῆς ἰδιότητος ταύτης εἰς μερικὰς περιπτώσεις.

41.—Ἔστω τὸ γινόμενον 5×2. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα $5+5$. Τοῦτο δὲ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως σημαίνει νὰ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἑξῆς πίνακος :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

ἀλλ' ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς προκύπτει, ἐὰν ἑνώσωμεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς πρώτης στήλης, ἔπειτα τὰς τῆς δευτέρας κ. ο. κ. καὶ κατόπιν ἀθροίσωμεν τοὺς οὕτω προκύπτοντας ἀριθμούς, ἤτοι ἐὰν ζητήσωμεν τὸ ἄθροισμα $2+2+2+2+2$. Τοῦτο ὅμως ἰσοῦται μὲ 2×5· ἄρα :

Ἐὰν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ὁ πολλαπλασιαστέος γίνῃ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς πολλαπλασιαστέος, δὲν ἀλλάσσει τὸ ἐξαγόμενον.

42.—Ἔστω ἤδη τὸ γινόμενον

$$8 \times 3 \times 2\cdot$$

ὡς εἶναι γεγραμμένον σημαίνει εἰς τὸν ἑξῆς πίνακα

$$8+8+8$$
$$8+8+8$$

νὰ προσθέσωμεν πρῶτον τὰ 8 τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ ἔπειτα τὰ τῆς δευτέρας, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα. Ἀλλὰ προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν, ἐὰν προσθέσωμεν τὰ 8 κατὰ στήλας, ἤτοι ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον

$$8 \times 2 \times 3$$

Ὅθεν :

Εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντιστρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων.

43.—Ἔστω τὸ γινόμενον

$$6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 \cdot$$

θὰ δείξω ὅτι τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον

$$6 \times 5 \times 9 \times 7 \times 3 \times 8 \times 2$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 39) τὸ πρῶτον ἰσοῦται πρὸς

$$(6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7) \times 8 \times 2,$$

τὸ δὲ δεύτερον πρὸς

$$(6 \times 5 \times 9 \times 7 \times 3) \times 8 \times 2,$$

ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι :

$$6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7 = 6 \times 5 \times 9 \times 7 \times 3.$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται πρὸς

$(6 \times 5 \times 9) \times 3 \times 7$ καὶ τὸ δεύτερον ἰσοῦται πρὸς $(6\times5\times9)\times7\times3$ (§ 39). Ταῦτα ὅμως εἶναι ἴσα (§ 42)· ἄρα :

Ἐὰν ἀνταλλάξωμεν δύο ἐφεξῆς παράγοντας γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων, δὲν ἀλλάσσει τὸ ἐξαγόμενον.

44.—Ἔστω ἤδη τὸ τυχὸν γινόμενον

$$\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \varepsilon \times \zeta \times \eta.$$

Ἂς λάβω τὸν τυχόντα παράγοντα δ· δύναμαι νὰ τὸν φέρω εἰς οἱανδήποτε προηγουμένην θέσιν, π. χ. εἰς τὴν δευτέραν, διότι (§ 43)

$$\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon\times\zeta\times\eta=\alpha\times\beta\times\delta\times\gamma\times\varepsilon\times\zeta\times\eta=$$
$$=\alpha\times\delta\times\beta\times\gamma\times\varepsilon\times\zeta\times\eta.$$

45.—Καὶ γενικῶς δυνάμεθα ὅλους τοὺς παράγοντας νὰ φέρωμεν εἰς ἃς θέσεις θέλομεν· π. χ. τὸ γινόμενον

$$\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon\times\zeta$$

γράφεται καὶ

$$\delta\times\beta\times\zeta\times\gamma\times\alpha\times\varepsilon \text{ διότι :}$$

$$\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon\times\zeta=\delta\times\alpha\times\beta\times\gamma\times\varepsilon\times\zeta\cdot \quad (\S\ 44)$$

καὶ τοῦτο πάλιν ἰσοῦται πρὸς

$$\delta\times\beta\times\alpha\times\gamma\times\varepsilon\times\zeta=\delta\times\beta\times\zeta\times\alpha\times\gamma\times\varepsilon=$$
$$=\delta\times\beta\times\zeta\times\gamma\times\alpha\times\varepsilon.$$

Ἄρα· *«ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν ὁπωσδήποτε τῶν παραγόντων οἱουδήποτε γινομένου, τὸ ἐξαγόμενον δὲν ἀλλάσσει».*

Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγεται εἴτε *ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων* εἴτε *ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως*, ὅπως ὠνομάσθη καὶ ἡ ἀνάλογος εἰς τὴν πρόσθεσιν. Ἔχομεν δὲ καὶ ἐνταῦθα τὰς ἑξῆς ὅλως ἀναλόγους πρὸς τὰς ἐκεῖ ἰδιότητας :

46.—α΄.) *Εἰς πᾶν γινόμενον δύναμαι ν' ἀντικαταστήσω ὁσουσδήποτε παράγοντας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν.*

β΄.) *Εἰς πᾶν γινόμενον δύναμαι ν' ἀντικαταστήσω οἱονδήποτε παράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον.*

γ΄.) *Πολλαπλασιάζεται γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν·* π. χ.

$$(3\times 5\times 7)\times 2=3\times 10\times 7.$$

δ΄.) *Πολλαπλασιάζονται δύο γινόμενα, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων τῶν γινομένων·* π. χ.

$$(2\times 3)\times(5\times 7\times 9)=2\times 3\times 5\times 7\times 9.$$

Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης.

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν ;

47.—Ἔστω :

$$(7+4+5)\times 3$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν :

$$(7+4+5)+(7+4+5)+(7+4+5)$$

ἢ καὶ (§ 28) δ΄.)

$$7+4+5+7+4+5+7+4+5$$

ἢ (§ 28 α΄.) $(7+7+7)+(4+4+4)+(5+5+5)=$

$=(7\times 3)+(4\times 3)+(5\times 3)$ ὅθεν :

«*Πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ὡς ἑξῆς : πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα*».

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος, ἥτις καλεῖται *ἐπιμεριστική*, ἕπονται αἱ ἑξῆς :

α΄.) Πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ὡς ἑξῆς : *Πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ᾿ ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα·*

οὕτως :

$$\alpha\times(\beta+\gamma+\delta)=(\alpha\times\beta)+(\alpha\times\gamma)+(\alpha\times\delta).$$

β΄.) Πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ὡς ἑξῆς : *Πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πρώτου ἐφ᾿ ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα.*

Οὕτως : $(\alpha+\beta+\gamma)\times(\delta+\varepsilon)=$

$$=(\alpha\times\delta)+(\beta\times\delta)+(\gamma\times\delta)+(\alpha\times\varepsilon)+(\beta\times\varepsilon)+(\gamma\times\varepsilon).$$

Ἀσκήσεις.

29.) Νὰ ἐκτελεσθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους ὁ πολλαπλασιασμός :

$$5\times 8\times 3.$$

30.) Νὰ γραφῶσιν ὡς ἀθροίσματα γινομένων τὰ γινόμενα

$$\alpha.(\beta+\gamma).\delta$$

$$(\alpha_1+\alpha_2).(\alpha_3+\alpha_4).(\alpha_5+\alpha_6)$$

ὅπου τὰ α_1, α_2, ... δηλοῦσι διαφόρους ἀριθμούς.

31.) Νὰ γραφῶσιν ὡς γινόμενα δύο παραγόντων τὰ ἀθροίσματα

$$(\alpha\times\delta)+(\beta\times\delta)+(\gamma\times\delta),\ (\alpha+\beta)\times\lambda+(\beta+\gamma)\times\lambda+(\gamma+\alpha)\times\lambda.$$

32.) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$, ὅταν προστεθῶσιν εἰς μὲν τὸν α μία μονάς, εἰς δὲ τὸν β δύο ;

33.) Ἐὰν σχηματίσω ἓξ διψηφίους ἀριθμοὺς λαμβάνων ἐκ τριῶν διαφόρων ψηφίων τὰ δύο, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, καὶ προσθέσω αὐτούς, θὰ εὕρω ὅσον καὶ ἂν ἐπολλαπλασίαζα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ψηφίων ἐπὶ 22. Γενίκευσις (εἰς ἓξ ἀριθμοὺς τριψηφίους μὲ τρία διάφορα ψηφία).

34.) Ἐὰν τριψηφίου ἀριθμοῦ λάβωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον, διπλασιάσωμεν αὐτὸ καὶ προσθέσωμεν 5 εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸ δεύτερον ψηφίον. ἔπειτα δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 10 καὶ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸ τρίτον ψηφίον, ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου τὸν 250, εὑρίσκομεν τὸν ἀρχικῶς δοθέντα τριψήφιον.

35) Ἐὰν $\alpha > \beta$,

τότε καὶ $\alpha\times\gamma > \beta\times\gamma$

Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

48.—Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχάς, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς *μονοψηφίου* ἐπὶ *μονοψήφιον* γίνεται εὐκόλως. Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς πολλαπλασιασμὸς θὰ ἀναχθῇ εἰς τοιοῦτον πολλαπλασιασμόν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης ὅλα τὰ γινόμενα δύο μονοψηφίων.

Ταῦτα περιέχονται εἰς τὸν Πυθαγόρειον πίνακα

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ὅπου, ἵνα εὕρωμεν π. χ. τὸ γινόμενον 5×9, ζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὴν πέμπτην γραμμὴν καὶ εἰς τὴν ἐνάτην στήλην ἢ καὶ ἀντιστρόφως.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

49.—Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον 256×7. Παρατηρῶ ὅτι ἔχομεν (§ 47)

$$(200 + 50 + 6) \times 7 = (200 \times 7) + (50 \times 7) + (6 \times 7)$$

καὶ τοῦτο (§ 46) ἰσοῦται πρὸς

$$(2 \times 100 \times 7) + (5 \times 10 \times 7) + (6 \times 7) =$$

2×7 ἑκατοντάδες $+ (5 \times 7)$ δεκάδες $+ 6 \times 7 =$

(2×7) ἑκ. $+ (5 \times 7)$ δεκ. $+ 42 =$

(2×7) ἑκ. $+ (5 \times 7)$ δεκ. $+ 4$ δεκ. $+ 2 =$

(2×7) ἑκ. $+ 39$ δεκ. $+ 2 =$

(2×7) ἑκ. $+ 3$ ἑκ $+ 9$ δεκ. $+ 2 = 1792.$

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} 256 \\ 7 \\ \hline 1792 \end{array}$$

Προφανῶς δὲ καταλήγομεν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα : *Πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· ἂν τὸ γινόμενον εἶναι διψήφιον, κρατοῦμεν τὰς δεκάδας του διὰ τὸ ἑπόμενον γινόμενον, ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν.*

30.—*Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10, 100, 1000 κ. τ. λ.*, — **Ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κ. τ. λ., ἐὰν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἕν, δύο, τρία, . . . μηδενικά.**

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον.

31.—Ἔστω τὸ γινόμενον 98574×236· γράφομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} 98574 \\ 236 \\ \hline \end{array}$$

Κατὰ τὴν § 47 ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἑξῆς τρία μερικὰ γινόμενα :

$$\begin{array}{lrl} 98574\times 6 = 591444 = & 591444 & \text{μον.} \\ 98574\times 30 = 2957220 = & 295722 & \text{δεκ.} \\ 98574\times 200 = 19714800 = & 197148 & \text{ἑκατ.} \\ \hline & 23263464 & \end{array} \left.\right\} \text{Διάταξις τῆς πράξεως}$$

Ὅθεν ὁ κανών : *Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, γράφομεν δὲ ἕκαστον μερικὸν γινόμενον, οὕτως ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ κεῖται ὑπὸ τὸ ψηφίον ἐφ' ὃ ἐπολλαπλασιάσαμεν καὶ προσθέτομεν ταῦτα ὡς ἐγράφησαν.*

32.—***Παρατήρησις.*** Ἐὰν ὁ εἷς ἢ καὶ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες λήγωσιν εἰς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν χωρὶς αὐτά, τὰ γράφομεν ὅμως εἰς τὸ τέλος τοῦ ὑπολογισθέντος γινομένου.

Π. χ. $3850 \times 4500 = (385 \times 45)\,000 = 17325000$.

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

53. — Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκ νέου, ἀλλὰ κατ' ἄλλην τάξιν, ὁπότε (§ 45) πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Ἀσκήσεις.

36). Νὰ ἐκφρασθῶσι δι' ἰσοτήτων γενικῶς αἱ ἰδιότητες (§ 46 α'. β'. γ'. δ'.).

37). Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο διψηφίων ἐχόντων τὸ αὐτὸ ψηφίον δεκάδων γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς : Προσθέτομεν τὰς μονάδας τοῦ ἑνὸς εἰς τὸν ἄλλον καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ὃν σχηματίζουσιν αἱ δεκάδες ἑνὸς ἐξ αὐτῶν καὶ προσθέτομεν τὸ γινόμενον τῶν μονάδων.

38). Πῶς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 11 δι' ἁπλῆς προσθέσεως ; •

39). Πῶς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 1001 δι' ἁπλῆς προσθέσεως ;

40). Νὰ εὑρεθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ γινομένου

$$37 \times 59 \times 62 \times 2594.$$

41). $1007 \times 1008 = (1000 \times 1000) + (100_0 \times 15) + (7 \times 8)$.

42). Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν θὰ ἔχῃ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἢ ἓν ὀλιγώτερον.

43). Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ 756 ἐπὶ ἀριθμόν τινα εὑρέθη ὡς γινόμενον 20412· ἐλήφθη ὅμως ὡς τελευταῖον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸ 7 ἀντὶ τοῦ 9· πόσον τὸ λάθος καὶ ποῖον τὸ ζητούμενον γινόμενον ;

44). Τὰ τρία τελευταῖα πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία γινομένου εἶναι 652 καὶ τὰ τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶνε 257. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου.

45). Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ μικροτέρου τῶν ἀριθμῶν τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πολλαπλασιάζοντες 10 πενταψηφίους.

46).

$$\begin{array}{r} \ldots \\ 2 \\ \hline 1468 \end{array}$$

Μὲ ποῖα ψηφία πρέπει νὰ ἀντικαταστήσω τὰς στιγμὰς εἰς τὸν σημειωθέντα πολλαπλασιασμόν ;

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

34. — Ἔστω τὸ γινόμενον

$$(8 - 5) \times 3$$

τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$(8 - 5) + (8 - 5) + (8 - 5).$$

Ἂς προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ ἄθροισμα

$$5 + 5 + 5,$$

ὁπότε (§ 28 δ΄ α΄.) λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα

$$[(8-5)+5]+[(8-5)+5]+[(8-5)+5]=8+8+8\cdot$$

ὥστε :

$$(8 - 5) \times 3 + (5 \times 3) = 8 \times 3$$

καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 32) ἔχομεν

$$(8 - 5) \times 3 = (8 \times 3) - (5 \times 3)\cdot$$ ὅθεν :

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον. Ἤτοι :

$$(\alpha - \beta) \times \gamma = \alpha \times \gamma - \beta \times \gamma.$$

Ἀσκήσεις.

47). Πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς συντόμως, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 9 ἢ 99 ἢ 999 κ.τ.λ. ;

48). Πόσον ἐλαττοῦται ἓν γινόμενον, ὅταν εἷς τῶν παραγόντων του ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδας τινὰς καὶ ποῖον παράγοντα πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν μεγαλυτέραν μείωσιν ;

49.) Διατί τὸ γινόμενον 12345679×9 δίδει 111111111 ;

50.) Νὰ ἀναπτυχθῇ τὸ γινόμενον $(\alpha + \beta) \times (\gamma - \delta)$.

51.) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 7694 × 5999 διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἓν ψηφίον μόνον.

52.) Πῶς μεταβάλλεται γινόμενον δύο παραγόντων, ὅταν αὐξήσωμεν τὸν ἕνα καὶ ἐλαττώσωμεν τὸν ἕτερον κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν ;

53.) Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 214 εἰς δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι ὅσῳ τὸ δυνατὸν μεγαλύτερον.

Δύναταί τις εὐκόλως ν' ἀποδείξῃ ὅτι τοιοῦτον γινόμενον θὰ εἶναι τὸ 107 × 107 στηριζόμενος ἐπὶ τῶν ἀσκήσεων 52, 48.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

55.—Δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος. Ζητεῖται δὲ ὁ πολλαπλασιαστής. Ἤτοι :

Δίδεται τὸ ἄθροισμα ἴσων προσθετέων καὶ εἷς ἐξ αὐτῶν, ζητεῖται δὲ τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων.

Π. χ. πόσα 7 ἀθροιζόμενα δίδουσι 35 ; Προφανῶς τόσα, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 7 εἰς τὸν 35, δηλαδὴ 5.

56.—Δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιαστής, ζητεῖται δὲ ὁ πολλαπλασιαστέος· ἤτοι :

Δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων προσθετέων καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν προσθετέων καὶ ζητεῖται ὁ ἐπαναλαμβανόμενος προσθετέος· ἤτοι ἀπὸ πόσας μονάδας ἀποτελεῖται ἕκαστον τῶν ἴσων μερῶν, τουτέστι τὸ μερίδιον ; Π. χ. 35 δραχμαὶ νὰ μερισθῶσιν εἰς 7 ἴσα μέρη· ἔχομεν 7 ἴσους προσθετέους καὶ ἄθροισμα 35· ζητοῦμεν δὲ τὸν ἐπαναλαμβανόμενον προσθετέον.

57.—Καὶ τὰ δύο ἀνωτέρω ζητήματα λύονται διὰ *διαιρέσεως.* Ὥστε :

Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις σκοπὸν ἔχουσα, ὅταν δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν, νὰ εὑρίσκεται ὁ ἕτερος.

Τὸ γινόμενον εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καλοῦμεν *διαιρετέον* καὶ τὸν δεδομένον παράγοντα *διαιρέτην*, τὸ δὲ ζητούμενον *πηλίκον*.

Σημεῖον διαιρέσεως εἶναι τό : ἀπαγγελλόμενον *διά*·

π. χ. $12 : 4 = 3$ διότι $3 \times 4 = 12$.

Ὁρισμοὶ ἀτελοῦς διαιρέσεως.

58.—Δίδονται δύο ἀριθμοί, π. χ. οἱ 38 καὶ 7· ζητῶ ἀκέραιον ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 νὰ δίδῃ 38. Ἐὰν ὑπῆρχε τοιοῦτος, θὰ ἔλεγον αὐτὸν πηλίκον τῆς διαιρέσεως. Τοιοῦτος ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχει. Ζητῶ ἀκέραιον ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 νὰ δίδῃ 37· ἐπίσης δὲν ὑπάρχει· ἔπειτα 36· καὶ πάλιν δὲν ὑπάρχει· τέλος 35· τοιοῦτος ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁ 5· ὥστε, ὅταν τὸν 38 ἐλαττώσω κατὰ τρεῖς μονάδας, εὑρίσκω τὸν 5, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 δίδει τὸν $38-3$. Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται *διαίρεσις*· ὁ 5 λέγεται *πηλίκον* τῆς διαιρέσεως $38 : 7$ καὶ ὁ 3 *ὑπόλοιπον*. Ἤτοι ὁ 7 χωρεῖ 5 φορὰς εἰς τὸ 38 καὶ εἰς τὸ 37 καὶ εἰς τὸ 36 καὶ εἰς τὸ 35. Πηλίκον τουτέστιν εἶναι τὸ αὐτό, οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν λάβωμεν ὡς διαιρετέον. Ὑπόλοιπα ἔχομεν διάφορα.

Καὶ ἀντιστρόφως ἠδυνάμην νὰ ἐργασθῶ· δηλαδὴ ἀπὸ τοῦ 38 ν' ἀφαιρέσω τὸ 7 καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου 31 πάλιν τὸ 7 κ. ο. κ. εὑρίσκω πάλιν ὅτι χωρεῖ 5 φορὰς καὶ περισσεύουν 3· ἤτοι :

$$38 = 7 \times 5 + 3.$$

Καὶ γενικῶς· ἐὰν ἔχω τὴν ἰσότητα

$$\alpha = \beta \times \pi + \upsilon, \qquad (1)$$

ὅπου υ μικρότερον τοῦ β, λέγω ὅτι τὸ $\alpha : \beta$ δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον υ. Τουτέστι :

Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις ἐν ᾗ δοθέντων δύο ἀκεραίων α καὶ β εὑρίσκομεν δύο ἀριθμοὺς π καὶ υ τοιούτους, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα (1), ὅπου υ νὰ εἶναι εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν 0, 1, 2, . . . , (β − 1).

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον $υ=ο$, ἐπαναπίπτομεν εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν.

Προφανῶς δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

59. — *Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις ἐν ᾗ δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β δίδει ἀριθμὸν χωροῦντα εἰς τὸν α·*

π. χ. $59 : 8$· ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 8 δίδει ἀριθμὸν χωροῦντα εἰς τὸν 59 εἶναι ὁ 7, διότι $7\times 8=56$· ἀλλὰ $8\times 8=64$.

Ἀσκήσεις.

54). Ἐὰν καλέσωμεν πηλίκον εἰς τὴν διαίρεσιν $59 : 8$ τὸν 8, τότε πρέπει νὰ ἀφαιρῆται τὸ ὑπόλοιπον ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἵνα εὑρίσκωμεν τὸν διαιρετέον. Ποῖον καλοῦμεν ὑπόλοιπον ; Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ τοῦ πραγματικοῦ ὑπολοίπου. Γενίκευσις.

55). Πότε τὸ πηλίκον διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἐὰν προστεθῇ μία μονὰς εἰς τὸν διαιρετέον ; Καὶ γενικῶς· πόσαι μονάδες τοὐλάχιστον πρέπει νὰ προστεθῶσιν εἰς τὸν διαιρετέον, διὰ νὰ ἀλλάξῃ τὸ πηλίκον ;

56). Ἴσοι διαιρούμενοι δι' ἴσων δίδουσι πηλίκα ἴσα, τῶν διαιρέσεων γινομένων ἀκριβῶς.

57) Ἔστω ὅτι οἱ α καὶ β διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ γ· τότε

$$\text{ἐὰν } α > β$$

θὰ ἔχωμεν καὶ
$$α : γ > β : γ.$$

Ἰδιότητες διαιρέσεως.

Πῶς διαιρεῖται ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ ;

60. — Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(α+β+γ) : δ,$$

ὅπου ὑποθέτομεν ὅτι πάντες οἱ προσθετέοι τοῦ διαιρετέου διαιροῦνται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ δ· παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων

$$(\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$$

πολλαπλασιάσω ἐπὶ δ, εὑρίσκω (§ 47)

$$\alpha + \beta + \gamma \qquad \text{ὅθεν}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) : \delta = (\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta) \qquad \text{ἄρα}$$

Ἄθροισμα διαιρεῖται δι᾽ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος προσθετέος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ προστεθῶσι τὰ πηλίκα, ὅταν πᾶσαι αἱ διαιρέσεις γίνωνται ἀκριβῶς.

Πῶς διαιρεῖται διαφορὰ δι᾽ ἀριθμοῦ;

61. — Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(\alpha - \beta) : \gamma \cdot$$

παρατηροῦμεν ὅτι (§ 54)

$$[(\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma)] \times \gamma = \alpha - \beta \qquad \text{ἄρα}$$

$$(\alpha - \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma) \qquad \text{ὅθεν}$$

Διαφορὰ διαιρεῖται δι᾽ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου τὸ δεύτερον.

Πῶς διαιρεῖται γινόμενον δι᾽ ἀριθμοῦ;

62. — Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(\alpha \times \beta \times \gamma) : \delta,$$

ὅπου ὑποθέτω ὅτι παράγων τις τοῦ διαιρετέου, ἔστω ὁ β, διαιρεῖται διὰ τοῦ δ· παρατηροῦμεν ὅτι (§ 46 γ΄.)

$$[\quad \beta : \delta) \times \gamma] \times \delta = \alpha \times [(\beta : \delta) \times \delta] \times \gamma = \alpha \times \beta \times \gamma$$

$$\text{ὅθεν} \qquad (\alpha \times \beta \times \gamma) : \delta = \alpha \times (\beta : \delta) \times \gamma \qquad \text{ἄρα}$$

Γινόμενον διαιρεῖται δι᾽ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν εἷς παράγων (διαιρούμενος ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ) διαιρεθῇ δι᾽ αὐτοῦ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται καὶ ὅτι, ἵνα διαιρέσωμεν δι᾽ ἑνὸς τῶν παραγόντων του ἓν γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Πῶς διαιρεῖται ἀριθμὸς διὰ γινομένου;

63. — Ἔστω

$$60 : (2\times3\times5),$$

ὅπου ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς· καλέσωμεν π τὸ πηλίκον· ἔχομεν (§ 57)

$$60=2\times3\times5\times\pi.$$

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 2· λαμβάνομεν (§ 62)

$$60 : 2=3\times5\times\pi\cdot$$

διαιροῦμεν διὰ 3 καὶ λαμβάνομεν

$$(60 : 2) : 3=5\times\pi.$$

Τέλος διαιροῦμεν διὰ 5 καὶ λαμβάνομεν

$$[\,(60 : 2) : 3\,] : 5=\pi. \qquad \text{ὅθεν}$$

$$60 : (2\times3\times5)=[\,(60 : 2) : 3\,] : 5.$$

Καὶ γενικῶς·

$$\alpha : (\beta\times\gamma\times\delta)=[\,(\alpha : \beta) : \gamma\,] : \delta. \qquad \text{ἤτοι}$$

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ γινομένου, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου (ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ διαιρέσεις γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς).

Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τί γίνεται τὸ πηλίκον καὶ τί τὸ ὑπόλοιπον;

64.—Ἔστω π τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$· ἔχομεν (§ 58)

$$\alpha=\beta\times\pi+\upsilon$$

ὅθεν (§ 47)·

$$\alpha\times\rho=(\beta\times\pi)\times\rho+\upsilon\times\rho \qquad \text{ἢ (§ 46γ΄.)}$$

$$\alpha\times\rho=(\beta\times\rho)\times\pi+\upsilon\times\rho$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐπειδὴ $\upsilon<\beta$ (§ 58), ἔχομεν

$$\upsilon\times\rho<\beta\times\rho.$$

Ἑπομένως, ἐὰν λάβωμεν διαιρετέον τὸν $\alpha\times\rho$ καὶ διαιρέτην τὸν $\beta\times\rho$, πηλίκον θὰ ἔχωμεν, ὡς ἡ ἀνωτέρω ἰσότης δεικνύει, τὸ π καὶ ὑπόλοιπον τὸ $\upsilon\times\rho$· ἄρα·

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον μὲν δὲν ἀλλάσσει, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Π. χ. ἐκ τοῦ ὅτι ἡ διαίρεσις 9 : 2 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 1, ἐξάγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις 90 : 20 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 10.

Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι·

Ἐὰν διαιρετέος καὶ διαιρέτης λήγωσιν εἰς 0, τὸ ὑπόλοιπον θὰ λήγῃ εἰς 0.

Ἔχομεν ἐπίσης ὅτι·

Ἐὰν εἰς τελείαν διαίρεσιν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, θὰ προκύψῃ πάλιν διαίρεσις τελεία.

Ἀσκήσεις.

58.) Πότε δὲν βλάπτεται τὸ πηλίκον, ἐὰν εἰς τὸν διαιρέτην προσθέσω μίαν μονάδα, πότε δύο κ. ο. κ. ;

59.) Πότε δὲν βλάπτεται τὸ πηλίκον, ἐὰν ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ διαιρέτου μίαν μονάδα ἢ δύο ἢ τρεῖς κλπ. ;

60.) Εἰς πᾶσαν διαίρεσιν δίδουσαν πηλίκον διάφορον τοῦ μηδενὸς ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπολοίπου.

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οὔτε ἴσος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου δύναται νὰ εἶναι ὁ διαιρετέος οὔτε μικρότερος.

61.) Εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μιᾶς διαιρέσεως προσθέτω τὸν αὐτὸν ἀκέραιον. Νὰ εὑρεθῶσι περιπτώσεις καθ' ἃς τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει.

62.) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν αὐξανόμενον κατὰ 10 γίνεται 7130· ἐὰν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι 356, τίς ὁ ἕτερος ;

63.) Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμόν τινα κατ' ἀρχὰς ἐπὶ 6 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 9· τὰ δύο γινόμενα ὑπερβαίνουσιν ἕτερον ἀριθμόν, τὸ μὲν πρῶτον κατὰ 18 μονάδας, τὸ δὲ δεύτερον κατὰ 30. Ποῖον ἀριθμὸν ἐπολλαπλασιάσαμεν ;

64.) Ζητεῖται ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετραπλάσιον ὑπερβαίνει τὸν 12 κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ὁ 12 ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τοῦ ζητουμένου.

65.) Ἀντηλλάγησαν δελτάρια μεταξὺ μαθητῶν τῆς α΄ καὶ β΄ τάξεως. Εἷς μαθητὴς τῆς α΄ τάξεως ἔστειλεν ἀνὰ ἓν δελτάριον εἰς 8 μαθητὰς τῆς δευτέρας· ἐπίσης δεύτερος τῆς πρώτης εἰς 9 τῆς δευτέρας· τρίτος τῆς πρώτης εἰς 10 τῆς δευτέρας κ. ο. κ. καὶ ὁ τελευταῖος εἰς ὅλους τῆς δευτέρας. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταὶ ἑκάστης τάξεως, γνωστοῦ ὄντος ὅτι οἱ μαθηταὶ καὶ τῶν δύο τάξεων ἐν ὅλῳ ἦσαν 73 ;

66.) Διατί δὲν ὑπάρχει τριψήφιος ὅστις διαιρούμενος δι' ἄλλου νὰ δίδῃ πηλίκον 65 καὶ ὑπόλοιπον 41 ;

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ διαιρέτης θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 41.

Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως.

65.—*Πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.* Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$89543 : 28\cdot$$

παρατηροῦμεν ὅτι

$$28000 < 89543 < 280000\cdot$$

ἐπομένως τὸ πηλίκον περιέχεται μεταξὺ 1000 καὶ 10000, ἤτοι εἶνε ἀριθμὸς τετραψήφιος· ὅθεν

Ὅσα μηδενικὰ ἀπαιτεῖται νὰ προσγράψωμεν εἰς τὸν διαιρέτην, ἵνα ὑπερβῶμεν τὸν διαιρετέον, τόσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου.

66.— Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$8239 : 54$$

παρατηροῦμεν ὅτι αἱ διαιρέσεις

$$823 : 5$$

καὶ $$8230 : 50$$

δίδουσι τὸ αὐτὸ πηλίκον· ὑπόλοιπον δὲ τῆς δευτέρας διαιρέσεως εἶναι ἢ τὸ 0 ἢ ἀριθμὸς λήγων εἰς 0 (§ 64)· ἵνα ὅμως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 8230 : 50 αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, χρειάζεται νὰ προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον τοὐλάχιστον ἡ διαφορὰ μεταξὺ διαιρέτου καὶ ὑπολοίπου, ἥτις ἐνταῦθα θὰ εἶναι ἢ 50 ἢ 40 ἢ 30 ἢ 20 ἢ 10· ἐπομένως ἡ διαίρεσις

$$8239 : 50$$

δίδει τὸ αὐτὸ πηλίκον μὲ τὴν 823 : 5· ὅθεν ἕπεται ὅτι καὶ ἡ διαίρεσις

$$8239 : 54$$

δὲν δύναται νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλύτερον τῆς διαιρέσεως 823 : 5· ὅθεν·

Ἐὰν εἰς διαίρεσίν τινα ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ἀποκόψωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, τὸ πηλίκον δὲν ἐλαττοῦται· ὁμοίως ἂν τὰ δύο τελευταῖα, τὰ τρία κ. λ. π.

67.—Εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως διακρίνομεν τέσσαρας περιπτώσεις.

1η. Διαιρέτης καὶ πηλίκον μονοψήφιοι.

Τότε ἡ διαίρεσις γίνεται ἀπὸ μνήμης· π. χ. διὰ τὴν διαίρεσιν

$$59 : 7$$

ἐκ τοῦ πυθαγορείου πίνακος ἀμέσως ἐνθυμούμεθα ὅτι

$$7 \times 8 = 56, \qquad 7 \times 9 = 63$$

ὅθεν πηλίκον εἶναι 8 καὶ ὑπόλοιπον 3·

2α. Διαιρέτης μονοψήφιος καὶ πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ 10 ἢ ἴσον πρὸς αὐτό.

Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$4396 : 8$$

παρατηροῦμεν ὅτι

$$4396 = 43 \times 100 + 96 =$$
$$(40+3)\times 100+96=40\times 100+3\times 100+9\times 10+6=$$
$$8 \times (5 \times 100) + 39 \times 10 + 6 =$$
$$8 \times (5\times 100) + (32 + 7) \times 10 + 6 =$$
$$8 \times (5 \times 100) + 8 \times (4 \times 10) + 7 \times 10 + 6 =$$
$$8 \times (5 \times 100) + 8 \times (4 \times 10) + 76 =$$
$$8 \times (5 \times 100) + 8 \times (4 \times 10) + 8 \times 9 + 4 =$$
$$8 \times (5 \times 100 + 4 \times 10 + 9) + 4 = 8 \times 549 + 4.$$

Διάταξις τῆς πράξεως.

4396	8
39	549
76	
4	

3η. Διαιρέτης πολυψήφιος καὶ πηλίκον μονοψήφιον.

Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$7396 : 985$$

Κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 66) τὸ πηλίκον δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως 73 : 9, ἤτοι τοῦ 8· δοκιμάζομεν ἂν εἶναι τὸ 8· τουτέστι πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 8 τὸ 985· εὑρίσκομεν 7880, ὅπερ ὑπερβαίνει τὸν 7396· δοκιμάζομεν τὸ 7· εὑρίσκομεν 6895· ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 501.

Διάταξις πράξεως.

7396	985
6895	7
501	

4η. Πηλίκον καὶ διαιρέτης πολυψήφιοι.

Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$226238 : 573.$$

Ἐπειδὴ ὁ 2262 διαιρούμενος διὰ 573 δίδει πηλίκον μονοψήφιον, χωρίζω τὸν διαιρετέον ὡς ἑξῆς·

$$2262 \times 100 + 3 \times 10 + 8\cdot$$

εὑρίσκω τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 2262 : 573 κατὰ τὰ προηγούμενα καὶ ἔχω

$$2262 = 573 \times 3 + 543 \qquad \text{ὅθεν}\cdot$$

$$2262 \times 100 = 573 \times 300 + 543 \times 100\cdot$$

προσθέτοντες καὶ τὸ γινόμενον 3×10 ἔχομεν

$$2262 \times 100 + 3 \times 10 = 573 \times 300 + 5433 \times 10\cdot$$

διαιροῦντες ἤδη τὸν 5433 διὰ 573 λαμβάνομεν

$$5433 = 573 \times 9 + 276 \quad \text{ὅθεν}$$

$$5433 \times 10 = 573 \times 90 + 2760$$

καὶ ἐπομένως

$$5433 \times 10 + 8 = 573 \times 90 + 2768.$$

Διαιροῦντες ἤδη τὸν 2768 διὰ 573 λαμβάνομεν

$$2768 = 573 \times 4 + 476 \quad \text{ὅθεν}$$

$$226238 = 573 \times 300 + 573 \times 90 + 573 \times 4 + 476$$

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 226238 & 573 \\ \hline 5433 & 394 \\ 2768 & \\ 476 & \end{array}$$

68.—Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ κανών·

Πρὸς ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος λαμβάνομεν ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα θὰ ἐχρειάζετο, ἵνα τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον· διαιροῦμεν τὸν μερικὸν τοῦτον διαιρετέον διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ εὑρισκόμενον μονοψήφιον πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην· τὸ γινόμενον τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος μερικοῦ διαιρετέου· εἰς τὸ ὑπόλοιπον (πρὸς τὰ δεξιὰ) καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ἐκ τῶν παραλειφθέντων ψηφίων τοῦ διαιρετέου· τὸν σχηματιζόμενον ἀριθμὸν θεωροῦμεν ὡς νέον διαιρετέον καὶ ἐργαζόμεθα καθ᾽ ὅμοιον τρόπον, μέχρις οὗ ληφθῶσι καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀρχικοῦ διαιρετέου.

Παρατηρήσεις. 1η) Ἂν εἷς ἐκ τῶν ὡς ἄνω σχηματιζομένων μερικῶν διαιρετέων εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε γράφομεν 0 δεξιᾷ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου, ἵνα διατηρῆται ἡ ἀξία των· π. χ.

$$\begin{array}{r|l} 23627 & 58 \\ \hline 427 & 407 \\ 21 & \end{array}$$

2α) Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, προφανῶς τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἰσοῦται πρὸς τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου· ἀνάλογα δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν διὰ τὴν διαίρεσιν διὰ 100, 1000 κ. τ. λ.· π. χ. εἰς τὴν διαίρεσιν 47588 : 100 ἔχομεν πηλίκον 475 καὶ ὑπόλοιπον 88.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

69. —Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον. Ἐὰν ἐγένετο ἡ πρᾶξις ὀρθῶς, πρέπει νὰ εὕρωμεν (§ 58) τὸν διαιρετέον.

Ἀσκήσεις.

67.) Νὰ εὑρεθῶσι διαιρέσεις ὅπου ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης δὲν ὑπερβαίνουσι τὸν 1000, πηλίκον δὲ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 27 καὶ ὑπόλοιπον 19· ποία ἐξ αὐτῶν τῶν διαιρέσεων θὰ ἔχῃ τὸν μεγαλύτερον διαιρετέον ;

68.) Ἐὰν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά, παραλείπομεν αὐτὰ ὅπως ἐπίσης καὶ ἰσάριθμα ψηφία ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν· εὑρίσκομεν δὲ οὕτω τὸ πηλίκον· ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον προσγράφομεν εἰς τὸ ἤδη εὑρεθὲν ὑπόλοιπον τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου.

69.) Τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἶναι τόσα, ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα τοῦ διαιρέτου ἢ ἀκόμη ἕν.

70.) Ἐὰν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην δι' ἀριθμοῦ ὅστις νὰ διαιρῇ ἀμφοτέρους, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

71.) Πῶς δύναται νὰ συντομευθῇ ἡ διαίρεσις, ὅταν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι πάντα 9 ;

72.) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ α καὶ β διαιρούμενοι δι' ἄλλου δ δίδωσιν ἴσα ὑπόλοιπα, τότε καὶ τὰ γινόμενα $\rho\alpha$ καὶ $\rho\beta$ (ὅπου ρ τυχὼν ἀκέραιος) διαιρούμενα διὰ $\rho\delta$ δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

73.) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἀκριβῶς δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

Δυνάμεις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

70.—Ὅταν οἱ παράγοντες γινομένου εἶναι πάντες ἴσοι, ὁ πολλαπλασιασμὸς καλεῖται ὕψωσις εἰς δύναμιν· ἤτοι : ὑψοῦμεν τὸν ἀριθμὸν α εἰς δύναμίν τινα, π. χ. τὴν πέμπτην, ὅταν σχηματίζωμεν γινόμενον 5 παραγόντων ἴσων πρὸς τὸ α· σημειοῦται δὲ ὡς ἑξῆς α^5· ὁ α λέγεται *βάσις*, ὁ 5 *ἐκθέτης*, τὸ δὲ ἐξαγόμενον *δύναμις*· π. χ. ὁ 1000 εἶναι τρίτη δύναμις τοῦ 10 ἢ $10^3 = 1000$. Ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *τετράγωνον*, ἡ τρίτη λέγεται καὶ *κύβος*. Καὶ ἐν γένει

Νυοστὴ δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

71.—Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πρὸς ποίαν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἰσοῦται ;

α΄.) Ἔστω τὸ γινόμενον $\alpha^3 \times \alpha^5$· παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 70) ἔχομεν

$$\alpha^3 \times \alpha^5 = (\alpha \times \alpha \times \alpha) \times (\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha) =$$
$$= \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \quad (\S\ 46\ \delta')$$
$$\text{ἢ καὶ} \quad \alpha^3 \times \alpha^5 = \alpha^8 \quad (\S\ 70)$$

ὅθεν

Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\alpha^\mu \times \alpha^\nu \times \alpha^\rho = \alpha^{\mu+\nu+\rho}$$

ὅπου οἱ μ, ν καὶ ρ ὑποτίθενται ἀκέραιοι μεγαλύτεροι τῆς μονάδος.

Ἵνα ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύῃ, καὶ ὅταν ἐκθέτης τοῦ α εἶναι ἡ μονάς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ θεωρῶμεν ὅτι

$$\alpha^1 = \alpha$$

ὁπότε ἐπιτρέπεται νὰ λέγωμεν ὅτι π. χ.

$$\alpha^5 \times \alpha^1 = \alpha^{5+1} = \alpha^6$$

δι' ὅμοιον λόγον δεχόμεθα ὅτι

$$\alpha^0 = 1,$$

ὁπότε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι π. χ.

$$\alpha^0 \times \alpha^3 = \alpha^{0+3} = \alpha^3.$$

Κατὰ ταῦτα

$$2^0 = 1, \qquad 5^0 = 1, \qquad 2^1 = 2, \qquad 5^1 = 5.$$

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πρὸς ποίαν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἰσοῦται ;

β'.) Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$\alpha^8 : \alpha^5$$

παρατηροῦμεν ὅτι

$$\alpha^3 \times \alpha^5 = \alpha^8 \qquad \text{ὅθεν}$$

$$\alpha^8 : \alpha^5 = \alpha^3$$

Καὶ γενικῶς

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}.$$

ὅθεν ὁ κανών·

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν $(\mu > \nu)$.

π. χ. $\quad 2^5 : 2^3 = 2^2 = 4 \quad\quad 7^{12} : 7^9 = 7^3 = 343$

Πῶς ὑψοῦται δύναμις εἰς δύναμιν ;

γ'.) Ἔστω $(\alpha^3)^4$· τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$\alpha^3 \times \alpha^3 \times \alpha^3 \times \alpha^3 = \alpha^{3+3+3+3} = \alpha^{3\times 4} = \alpha^{12}$$

καὶ γενικῶς $\qquad (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\times\nu} \qquad$ ὅθεν

Δύναμις ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἡ βάσις ὑψωθῇ εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

Πῶς ὑψοῦται γινόμενον εἰς δύναμιν ;

δ'.) Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(\alpha \times \beta \times \gamma)^2 = (\alpha \times \beta \times \gamma) \times (\alpha \times \beta \times \gamma) =$$
$$= \alpha \times \alpha \times \beta \times \beta \times \gamma \times \gamma = \alpha^2 \times \beta^2 \times \gamma^2$$

καὶ γενικῶς

$$(\alpha\times\beta\times\gamma)^\nu = \alpha^\nu \times \beta^\nu \times \gamma^\nu. \qquad \text{ὅθεν}$$

Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Π. χ. $(2 \times 5)^4 = 2^4 \times 5^4$

καὶ ἀντιστρόφως·

$$2^7 \times 5^7 = (2 \times 5)^7 = 10^7 \qquad 2^\nu \times 5^\nu = 10^\nu.$$

Ἀσκήσεις.

74.) Εἰς ποῖον ψηφίον λήγει ὁ ἀριθμὸς 2344^{83} ; εἰς ποῖον ὁ ἀριθμὸς 2356^{100} ;

75.) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

76.) Ἔστω εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα (§ 20) ὁ ἀριθμὸς 5326. Πῶς θὰ γραφῇ εἰς τὸ κοινὸν σύστημα, ἤτοι τὸ δεκαδικόν ;

Παρατηροῦμεν (§ 20) ὅτι

$$5326 = 5 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + 2 \times 7 + 6 =$$
$$5 \times 343 + 3 \times 49 + 2 \times 7 + 6 =$$
$$1715 + 147 + 14 + 6 = 1882.$$

Ἀντιστρόφως· ἔστω ὁ ἀριθμὸς 241 τοῦ δεκαδικοῦ· Νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$241 = 5 \times 48 + 1 = 5 \times (5 \times 9 + 3) + 1 =$$
$$5^2 \times 9 + 5 \times 3 + 1 =$$
$$5^2 \times (5 \times 1 + 4) + 5 \times 3 + 1 =$$
$$5^3 \times 1 + 5^2 \times 4 + 5 \times 3 + 1\cdot$$

ἑπομένως (§ 21) ὁ ἀριθμὸς 241 τοῦ δεκαδικοῦ γράφεται εἰς τὸ πενταδικὸν ὡς ἑξῆς· 1431.

Οὕτω δ' ἐξάγομεν εὐκόλως κανόνα τροπῆς ἀριθμοῦ συστήματός τινος εἰς τὸ δεκαδικὸν καὶ τἀνάπαλιν.

77.) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 324 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ καὶ ἀντιστρόφως ὁ 324 τοῦ πενταδικοῦ νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ.

78.) Νὰ τραπῇ

α΄.) ὁ ἀριθμὸς 21011001 τοῦ τριαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ.

β΄.) Ὁ ἀριθμὸς 3α τοῦ ἑνδεκαδικοῦ (§ 21) νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δεκαδικόν.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

72.—Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις α διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἄλλου β, ἤτοι ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς π ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β δίδει τὸν α. Τότε ὁ α λέγεται *διαιρετὸς* διὰ β ἢ ἀκόμη ὁ α λέγεται *πολλαπλάσιον* τοῦ β, διότι σύγκειται ἀπὸ πολλὰ β, ἐνῷ ὁ β λέγεται *διαιρέτης* τοῦ α ἢ καὶ *ὑποπολλαπλάσιον* τοῦ α ἢ καὶ *παράγων* αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, ὅπως ἐπίσης εἶναι πολλαπλάσιον αὐτῶν (θεωρουμένου καὶ τοῦ 24 ὡς πολλαπλασίου τοῦ 24).

Ἀρχαὶ διαιρετότητος.

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ ἄλλους, θὰ διαιρῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ διατί;

73.—Ἔστω ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι πολλαπλάσια ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· π. χ. ὁ 78 καὶ ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 6, ἤτοι εἶναι ἀμφότεροι ἀθροίσματα προσθετέων ἴσων τῷ 6· προφανῶς καὶ τὸ ἄθροισμά των 78+12 εἶναι ἓν ἄλλο ἄθροισμα προσθετέων ἴσων τῷ 6 καὶ γενικῶς·

Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ εἶναι πολλαπλάσια ἑνὸς ἄλλου, καὶ τὸ ἄθροισμά των θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Τοῦτο προέκυπτε καὶ ἀμέσως ἐκ τῆς πρώτης ἰδιότητος τῆς διαιρέσεως (§ 60).

74. —Συνάγομεν ἀμέσως ἐκ τοῦ προηγουμένου ὅτι·

Ἐὰν ἀριθμός τις β διαιρῇ ἕτερον α, θὰ διαιρῇ καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ α.

Π. χ. ὁ 7 ὡς διαιρῶν τὸν 35 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν $35 \times \rho$, ὅπου ρ τυχὼν ἀκέραιος.

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ; καὶ διατί ;

75. —Οἱ ἀριθμοὶ 48 καὶ 32 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 8, ἤτοι

$$48 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8,$$

$$32 = 8 + 8 + 8 + 8 \qquad \text{ὅθεν}$$

καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8, ἤτοι·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ὅταν λοιπὸν ἔχωμεν

$$\alpha - \beta = \gamma$$

τότε, ἐὰν ὁ δ διαιρῇ τὸν α καὶ τὸν β, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν γ. Ἀλλὰ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\alpha = \beta + \gamma \qquad (\S\ 34).$$

Εἶναι λοιπὸν ὁ α ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν β καὶ γ· ἐπομένως δυνάμεθα τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἕτερον προσθετέον.

Π. χ. ὁ 3 διαιρεῖ τὸν 30, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τῶν 12 καὶ 18, διαιρεῖ τὸν 12· ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸν 18.

Τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον προστεθῇ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου ;

76. —Ἔστω ἡ διαίρεσις 68 : 9· ἔχομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 5· ὅθεν (§ 58)

$$68 - 5 = 9 \times 7$$

ἔστω ρ τυχὼν ἀκέραιος· προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος τὸ $9 \times \rho$ ἔχομεν (§ 24)

$$(68 - 5) + 9 \times \rho = 9 \times 7 + 9 \times \rho\cdot$$

ἵνα ὅμως προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς διαφοράν, ἀρκεῖ νὰ τὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον (§34 Παρατ.) ἤτοι·

$$[68+(9\times\rho)]-5=9\times(7+\rho)\cdot \qquad (\S\ 47)$$

ἑπομένως (§ 58) ὁ ἀριθμὸς $68+9\times\rho$ διαιρούμενος διὰ 9 δίδει πάλιν ὑπόλοιπον 5· ὅθεν·

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον;

77.—Κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι·

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὑπόλοιπον δὲν ἀλλάσσει.

Ἀσκήσεις.

79.) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ δὲν διαιρῇ τὸν ἕνα, δὲν θὰ διαιρῇ οὔτε τὸν ἄλλον.

80.) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα ν προσθετέων καὶ τοὺς ν—1 προσθετέους χωριστά, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἀπομένοντα προσθετέον. (§ 28 α'. § 75)

81.) Ἐὰν διαιρέσωμεν δύο ἀριθμοὺς χωριστὰ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς, ἀπὸ δὲ τοῦ γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο ὑπολοίπων, εὑρίσκομεν πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου. (§ 58. § 47 β'.)

82.) Τί γίνεται τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὅταν μόνον τὸν διαιρετέον πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀριθμόν; Εἰς ποίαν περίπτωσιν ὁ νέος διαιρετέος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου;

83.) Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 18 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 5, διαιρούμενος δὲ διὰ 12 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 3. (Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 12 καὶ δίδων ὑπόλοιπον 3 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3).

Χαρακτῆρες διαιρετότητος.

78.—Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἐνδιαφέρῃ ἡμᾶς μόνον τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως, ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης (§ 77) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου· τοῦτο ἐφαρμόζοντες εὑρίσκομεν χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων διὰ διαφόρων ἀριθμῶν· π.χ. τοῦ 2, 3, 5 κ.τ.λ.

79.—*Διαιρέτης 2.*

Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$7239 : 2\cdot$$

ἔχομεν

$$7239 = 723 \times 10 + 9 = 723 \times 5 \times 2 + 9 =$$
$$2 \times (723 \times 5) + 9\cdot$$

ὁ πρῶτος προσθετέος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2 καὶ ἡ ἀφαίρεσίς του δὲν μεταβάλλει τὸ ὑπόλοιπον· ἤτοι

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 2 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του διὰ 2· ὅθεν καί·

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, ἐὰν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2· ἤτοι ἐὰν εἶναι 0, 2, 4, 6, 8.

Τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς καλοῦμεν *ἀρτίους*, τοὺς δὲ μὴ διαιρετοὺς διὰ 2 *περιττούς.*

Κατὰ ταῦτα· Πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν 2ν καὶ πᾶς περιττὸς ὑπὸ τὴν μορφὴν $^{2\nu+1}$. π. χ·

$$26 = 2 \times 13 \text{ καὶ } 15 = 2 \times 7 + 1.$$

80.—*Διαιρέτης 5.*

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του διὰ 5· ὅθεν καί.

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ὅταν λήγῃ εἰς 0 ἢ εἰς 5.

81.—*Διαιρέτης 4 ἢ 25.*

Ἔστω 68957 διαιρετέος· παρατηροῦμεν ὅτι

$$68957 = 689 \times 100 + 57 = 689 \times 25 \times 4 + 57\cdot \quad \text{ἄρα·}$$

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του· ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 4 ἢ 25, ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του σχηματίζωσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25 (καθ' ἣν τάξιν εἶνε γεγραμμένα).

82.—*Διαιρέτης 8 ἢ 125.*

Εὑρίσκομεν, ὅπως καὶ ἀνωτέρω ὅτι

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του· ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 8 ἢ 125, ὅταν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του σχηματίζωσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125 (καθ' ἣν τάξιν εἶναι γεγραμμένα).

Καὶ γενικῶς *ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 2^{ν} ἢ διὰ 5^{ν}, ὅταν τὰ ν τελευταῖα ψηφία του σχηματίζωσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 2^{ν} ἢ διὰ 5^{ν}.*

83.—*Διαιρέτης 9 ἢ 3.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς 58737 ὡς διαιρετέος.

Ἔχομεν : $58737 = 50000 + 8000 + 700 + 30 + 7 =$
$= 5 \times 10000 + 8 \times 1000 + 7 \times 100 + 3 \times 10 + 7 =$
$5\times(9999+1)+8\times(999+1)+7\times(99+1)+3\times(9+1)+7$

Ἀλλὰ $1\times9=9$, $11\times9=99$, $111\times9=999$, κ. ο. κ. ὅθεν

$$58737=5\times1111\times9+5+8\times111\times9+8+7\times11\times9+7+$$
$$+3\times9+3+7=$$
$$(5\times1111+8\times111+7\times11+3)\times9+(5+8+7+3+7)$$

ἄρα· Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 9 λαμβάνομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του.

Ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διαιρῆται διὰ 9 καὶ τότε μόνον.

Ἐπειδὴ ὁ 9 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, ἕπεται ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα εἰς τὸ ὁποῖον κατελήξαμεν γράφεται καὶ ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 3 ηὐξημένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του· ἄρα·

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 3.

84.—*Διαιρέτης 11.*

Ἔστω ὁ τυχὼν διαιρετέος 5378946· οὗτος γράφεται

$$5000000 + 370000 + 8900 + 46$$
$$= 5 \times 10^6 + 37 \times 10^4 + 89 \times 10^2 + 46.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσα ἀρτία δύναμις τοῦ 10 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ μονάδα καὶ τῷ ὄντι

$$10^2 = 100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1,$$
$$10^4 = 10000 = 9999 + 1 =$$
$$9900 + 99 + 1 = 99 \times 101 + 1 =$$
$$9 \times 11 \times 101 + 1 \quad \text{κ. ο. κ.} \quad \text{ἑπομένως:}$$

5378946 = πολλαπλάσιον τοῦ $11 + (5 + 37 + 89 + 46)$· ὅθεν

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 11 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 11, τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν σχηματίζομεν χωρίζοντες αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) καὶ προσθέτοντες αὐτά· ἑπομένως·

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 11, ἐὰν διαιρῆται διὰ 11 ὁ ἀριθμός, ὃν σχηματίζομεν χωρίζοντες αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ προσθέτοντες αὐτά.

85.—***Διαιρέτης 7.*** Ἔστω ὁ τυχὼν διαιρετέος 1654. Ἑκάστη δεκὰς ἰσοῦται πρὸς 7+3· ἑπομένως·

$$1654 = 165 \times 7 + 165 \times 3 + 4\cdot$$

ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 7 συμπίπτει μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 7 τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων. Ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 7.

86.—**α΄. *Διαιρέτης 10, 100,...*** *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 10, ὅταν τελειώνῃ εἰς 0· διὰ 100, ὅταν τελειώνῃ εἰς δύο μηδενικὰ* (§ 68 παρ. 2) κ. ο. κ.

β΄.) Διαιρέτης 6. Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ 6, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 3· διότι, ἐὰν ἀριθμός τις α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6, ἔχομεν $α = 6 \times λ = 2 \times 3 \times λ$· ἤτοι ὁ α διαιρεῖται διὰ 2 καὶ διὰ 3.

Ζητήσωμεν ἤδη, ἂν ἀληθεύῃ τὸ ἀντίστροφον.

Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 3. Ἀφοῦ διαιρεῖται διὰ 3, γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $3 \times ρ = 2 \times ρ + ρ$. Ἀφοῦ ὅμως καὶ ὁ 2 διαιρεῖ τὸ $2 \times ρ + ρ$, διαιρεῖ δὲ ἀφ' ἑτέρου καὶ τὸ $2 \times ρ$, ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ρ (§75)· ἤτοι ὁ ρ θὰ εἶναι ἄρτιος· ἔστω $ρ = 2 \times σ$· τότε ὁ

$$α = 3 \times ρ = 3 \times 2 \times σ = 6 \times σ\cdot$$

ὅθεν ὁ α εἶναι διαιρετὸς διὰ 6· ἄρα·

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3.

γ'. **Διαιρέτης 12.** Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι,

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 12, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4.

δ'. **Διαιρέτης 20.** Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι,

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 20, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 καὶ διὰ τοῦ 5.

ε. Καὶ γενικῶς·

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς δι' ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν.

Π. χ. Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ 7 καὶ 8, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 56 καὶ τότε μόνον.

ϛ'. **Διαιρέτης 15.** Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις α διαιρεῖται δι' ἀμφοτέρων τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5. Ἀφοῦ διαιρεῖται διὰ 5, γράφεται·

$$α = 5 \times ρ = 3 \times ρ + 2 \times ρ$$

Ὁ 3 ὅμως διαιρεῖ τὸν α, ὡς ὑπεθέσαμεν, διαιρεῖ ἀφ' ἑτέρου καὶ τὸν $3 \times ρ$, ἄρα (§ 75) θὰ διαιρῇ καὶ τὸν $2 \times ρ$· ἑπομένως ὁ $2 \times ρ$ θὰ διαιρῆται ὑπὸ τοῦ 6 (β'.)· ἤτοι $2 \times ρ = 6 \times σ$· ὅθεν διαιροῦντες διὰ 2 λαμβάνομεν $ρ = 3 \times σ$· ἄρα

$$α = 5 \times ρ = 5 \times 3 \times σ = 15 \times σ\cdot \text{ ὅθεν}\cdot$$

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 15, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ διὰ 5.

'Ασκήσεις.

84) 'Εκ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20, 25, 100, 125 τίνες εἶναι διαιρέται τοῦ ἀριθμοῦ 24876, τίνες τοῦ 68745, τίνες τοῦ 2439360, τίνες τοῦ 17920 καὶ τίνες τοῦ 352500;

85) Νὰ εὑρεθῶσι τετραψήφιοι τοιοῦτοι ὥστε, ἐὰν γραφῇ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν τὸ ψηφίον 5, νὰ σχηματίζηται πενταψήφιος διαιρετὸς διὰ 11.

86) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 12345679 εὑρίσκεται γινόμενον μὲ πάντα τὰ ψηφία ἴσα.

87) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς διαφορᾶς των, δίδουσιν ὑπόλοιπα ἴσα καὶ πηλίκα διαφέροντα κατὰ μονάδα (§ 76, 77).

88) 'Αριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 20, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶναι 0, τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶναι ἢ 0 ἢ ἄρτιος.

89) 'Αριθμός τις τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ψηφία εἶναι 1 τότε μόνον εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸς διὰ 9. Ἡ αὐτὴ πρότασις ἰσχύει, καὶ ὅταν τὰ ψηφία ὅλα εἶναι 2 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 8.

90) Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων του καὶ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι $10 = 11 - 1$ καὶ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς προτάσεις (§ 54 § 34 δ'.).

91) Διακρίνομεν ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11 καὶ ὡς ἑξῆς· Προσθέτομεν τὰ ψηφία τάξεως περιττῆς (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) καὶ τὰ ψηφία τάξεως ἀρτίας· ἀπὸ δὲ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος (αὐξανομένου ἐν ἀνάγκῃ κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 11) ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον. 'Εὰν ἡ διαφορὰ εἶναι 0 ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11, τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 11 (§ 84, § 77, § 34).

92) 'Αριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, ὅταν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του προστιθέμενον εἰς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν λοιπῶν δίδῃ ἄθροισμα διαιρετὸν διὰ 6.

93) Ἔχομεν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 12, ἐὰν προσθέτοντες εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν σχηματιζόμενον ἐκ τῶν δύο τελευταίων ψη-

φίων τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν λοιπῶν, λαμβάνωμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 12.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο· ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 100, 1000, ... διαιρούμενοι διὰ 12 δίδουσιν ὑπόλοιπον 4.

94) Διακρίνομεν ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 15, καὶ ὡς ἑξῆς· προσθέτομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν σχηματιζόμενον ἐκ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων (κατὰ τὴν τάξιν αὐτῶν λαμβανομένων) τὸ δεκαπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν λοιπῶν· ἐὰν λάβωμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 15, τότε καὶ ὁ δοθεὶς εἶναι διαιρετὸς διὰ 15.

95) Νὰ εὑρεθῶσι χαρακτῆρες διαιρετότητος διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 13, 37. (§ 77).

96) Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν διαιρεῖται διὰ 2, τριῶν διαδοχικῶν διὰ 3, τεσσάρων διαδοχικῶν διὰ 4 καὶ γενικῶς ν διαδοχικῶν διὰ ν (διότι εἷς ἐκ τῶν παραγόντων θὰ διαιρῆται δι' αὐτοῦ).

97) Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν διαιρεῖται διὰ 6.

98) Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· ἐὰν οὐδεὶς τῶν ἀριθμῶν α καὶ β διαιρῆται διὰ τοῦ 3, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἢ ἡ διαφορὰ εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ 3.

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9.

Τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν ἕκαστος προσθετέος ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην ;

87. — Ἔστω ὅτι αἱ διαιρέσεις $\alpha : \delta$, $\beta : \delta$, $\gamma : \delta$ δίδουσι πηλίκα π, π', π'' καὶ ὑπόλοιπα υ, υ', υ''· ἔχομεν (§ 58)

$$\alpha = \delta \times \pi + \upsilon,$$

$$\beta = \delta \times \pi' + \upsilon',$$

$$\gamma = \delta \times \pi'' + \upsilon''.$$

ὅθεν· $\alpha+\beta+\gamma=\delta\times(\pi+\pi'+\pi'')+(\upsilon+\upsilon'+\upsilon'')$·

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα

$$\alpha + \beta + \gamma$$

καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\upsilon + \upsilon' + \upsilon''$$

διαφέρουσι κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου καὶ ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(\alpha + \beta + \gamma) : \delta$$

συμπίπτει μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(\upsilon + \upsilon' + \upsilon'') : \delta \cdot \qquad (\S\ 77)$$

ἄρα· *Τὸ ὑπόλοιπον ἀθροίσματος ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον προσθετέον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην.*

Π. χ. τὸ ἄθροισμα $15+23$ διαιρούμενον διὰ 6 δίδει ὑπόλοιπον ἴσον πρὸς τὸ εὑρισκόμενον ἐκ τῆς διαιρέσεως $(3 + 5) : 6$.

ΣΗΜ. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις (ὅπως καὶ ἄλλαι προηγούμεναι) καλεῖται καὶ *θεώρημα*, καθόσον ὑπάρχει ἀνάγκη συλλογισμῶν τινων, ἵνα γίνῃ φανερὰ ἡ ἀλήθεια αὐτῶν. Οἱ συλλογισμοὶ οὗτοι ἀποτελοῦσι τὴν *ἀπόδειξιν* τοῦ θεωρήματος.

Τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως γινομένου δι᾽ ἀριθμοῦ, ἐὰν ἕκαστος παράγων ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην ;

88. — Ἔστω ὅτι αἱ διαιρέσεις $\alpha : \delta$ καὶ $\beta : \delta$ δίδουσι πηλίκα π καὶ π', ὑπόλοιπα δὲ υ καὶ υ' ἔχομεν·

$$\alpha = \delta \times \pi + \upsilon \text{ καὶ } \beta = \delta \times \pi' + \upsilon'.$$

Ὅθεν·

$$\alpha \times \beta = \delta \times \pi \times \delta \times \pi' + \delta \times \pi \times \upsilon' + \delta \times \pi' \times \upsilon + \upsilon \times \upsilon'$$

Οἱ τρεῖς πρῶτοι προσθετέοι εἶναι προφανῶς πολλαπλάσια τοῦ δ· ὅθεν :

$$\alpha \times \beta = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } \delta + (\upsilon \times \upsilon').$$

Ἑπομένως (§ 77) οἱ ἀριθμοὶ $\alpha \times \beta$ καὶ $\upsilon \times \upsilon'$ διαιρούμενοι διὰ δ δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον· ἄρα·

Τὸ ὑπόλοιπον γινομένου δύο ἀριθμῶν ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν βλάπτεται, ἐὰν ἕκαστον παράγοντα ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην· π. χ. τὸ γινόμενον 394×573 διαιρούμενον διὰ 9 θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον ἴσον πρὸς τὸ διδόμενον ἐν τῇ διαιρέσει

$$(7 \times 6) : 9.$$

89. — Ἐφαρμόζοντες τὰ ἀνωτέρω πρὸς ἐκτέλεσιν δοκιμῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ φθάνομεν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ἐὰν λάβωμεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων διὰ 9 τοῦ πολλαπλασιαστέου, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τοῦ γινομένου καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρῶτα ὑπόλοιπα καὶ τοῦ γινομένου αὐτοῦ λάβωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον.

Ἐννοεῖται ὅτι ἠδύνατο νὰ γίνῃ καὶ μὲ ἄλλον διαιρέτην, π. χ. τὸν 11. Προτιμῶμεν ὅμως τὸν 9, διότι τὰ ὑπόλοιπα εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ διότι διὰ τὴν βάσανον μεταχειριζόμεθα ὅλα τὰ ψηφία τῶν παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου (§ 83).

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν καὶ ὡς ἑξῆς·

	394	ὑπόλ. 7	$7 \times 6 = 42$, ὑπόλ. 6.
	573	ὑπόλ. 6	
	1182		
	2758		
	1970		
Γινόμ.	225762	ὑπόλ. 6	

Παρατηρητέον ὅτι ἡ δοκιμὴ αὕτη παρέχει μόνον πιθανότητα τοῦ ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς.

90. — *Βάσανος τῆς διαιρέσεως διὰ 9.* Ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, πρέπει καὶ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν διαιρετέον· ἑπομένως ἐφαρμόζομεν τὰ προηγούμενα· ἐὰν ὅμως εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον, πρέπει ἡ διαφορὰ διαιρετέου καὶ ὑπολοίπου νὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· ἐπανερχόμεθα τουτέστι πάλιν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

'Ασκήσεις.

99.) Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην.

100.) Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ ἀριθμοῦ 73^{15689}; (§ 88).

101.) Διατί ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ 9 (§ 89) δὲν μᾶς βεβαιώνει διὰ τὸ ὀρθὸν τῆς πράξεως;

102.) Ἐὰν α καὶ β διαιρούμενοι διὰ δ δίδωσιν ὑπόλοιπα υ καὶ υ', τότε ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ διαιρουμένη διὰ δ δίδει ὑπόλοιπον ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν $\upsilon-\upsilon'$, ἐὰν $\upsilon>\upsilon'$.

103.) Νὰ εὑρεθῇ βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως διὰ 9 ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης προτάσεως.

104.) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν διὰ 2 καὶ τὸ πηλίκον διὰ 3, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 2.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἢ ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν θὰ διαιρῆται διὰ 3, ἢ ὁ μὲν εἷς διαιρούμενος διὰ 3 θὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 1, ὁ δὲ ἄλλος 2.

105.) Νὰ δειχθῇ ἐκ τῆς προτάσεως (§ 88), ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha^{\mu}-\beta^{\mu}$ διαιρεῖται διὰ $\alpha-\beta$.

Παρατηροῦμεν ὅτι (ἄσκ. 87) αἱ διαιρέσεις

$$\alpha : (\alpha-\beta) \text{ καὶ } \beta : (\alpha-\beta)$$

δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα. (§ 87, § 88)

106.) Ἐὰν ἀριθμός τις ὑπερβαίνῃ κατὰ μονάδα πολλαπλάσιον ἄλλου, οἱαδήποτε δύναμις τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἄθροισμα τῆς μονάδος καὶ πολλαπλασίου τινὸς τοῦ δευτέρου (§ 88).

107.) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 11, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 11. (§ 87, § 88).

108.) Τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ μὲ ἄρτιον πλῆθος ψηφίων καὶ τοῦ διὰ τῶν αὐτῶν ψηφίων κατ᾿ ἀντίστροφον τάξιν γεγραμμένου ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιον τοῦ 11. (Ἀσκ. 91).

109.) Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ λήγοντες εἰς 0 μὲ ψηφία διάφορα σχηματίζονται διαιρετοὶ διὰ 4 ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

91.—Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

20, 30, 40

Ὁ ἀριθμὸς 2 διαιρεῖ πάντας αὐτοὺς ἀκριβῶς· λέγεται δι᾿ αὐτὸ κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων· ὁμοίως κοινοὶ διαιρέται εἶναι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 10· ὁ μεγαλύτερος δὲ τούτων, ὁ 10, λέγεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* αὐτῶν. Καὶ γενικῶς·

Κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖ πάντας αὐτοὺς ἀκριβῶς. Ὁ μεγαλύτερος δ᾿ ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν λέγεται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Τὸν κοινὸν διαιρέτην παριστῶμεν διὰ κ. δ., τὸν δὲ μέγιστον κοινὸν διαιρέτην διὰ μ. κ. δ.

92.—Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμὸς 6· οὗτος θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ ἑαυτοῦ του, ἐπίσης τοῦ διπλασίου του, ἤτοι τοῦ $2\times6=12$, τοῦ τριπλασίου του 18 κ. ο. κ. Ἂν λάβωμεν ὁσουσδήποτε ἐξ αὐτῶν, π. χ. τοὺς 12, 18, 36, οὗτοι θὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην τὸν 6. Ἐὰν ὅμως ἐλαμβάνομεν καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2, θὰ εὑρίσκομεν μεταξὺ αὐτῶν τοὺς

12, 18, 36,

ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 12, 18, 36 ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην καὶ τὸν 2· τουτέστι δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ δυνατὸν νὰ ἔχωσι πολλοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

93.—*Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος,* ὁπότε λέγομεν ὅτι ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 7, 10 25 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἰδιότητες κοινῶν διαιρετῶν.

Ποῖος εἶναι ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν ὧν ὁ μικρότερος διαιρεῖ τοὺς λοιπούς ;

94. — Ἔστω ὅτι $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ καὶ ὅτι ὁ δ διαιρεῖ τοὺς α, β, γ· τότε ὁ δ εἶναι κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta.$$

Ἄλλος δὲ κοινὸς διαιρέτης μεγαλύτερος τοῦ δ δὲν ὑπάρχει, διότι εἷς ἐκ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι καὶ ὁ δ· ὅθεν

Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν, θὰ ἔχωσιν αὐτὸν ὡς μ. κ. δ.

π. χ. οἱ 6, 12, 18, 48 ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 6.

Τί γίνονται οἱ κ. δ. δύο ἀριθμῶν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου ;

95. — Ἔστω υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν τυχόντα κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha, \quad \beta.$$

Οὗτος ὡς διαιρῶν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν, ἤτοι τὸ υ (§ 75)· ἐπομένως θὰ εἶναι κ. δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν

$$\upsilon, \quad \beta\cdot$$

καὶ ἀντιστρόφως ὁ τυχὼν κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\upsilon, \quad \beta$$

θὰ εἶναι προφανῶς καὶ διαιρέτης τοῦ

$$\beta \times \pi + \upsilon$$

(ἐὰν π καλέσωμεν τὸ πηλίκον), ἤτοι τοῦ α· ὥστε θὰ εἶναι καὶ κ. δ. τῶν

$$\alpha, \quad \beta.$$

ἄρα

Οἱ κοινοὶ διαιρέται δύο ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου.

ὅθεν καὶ

Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος δὲν διαιρεῖ τὸν μεγαλύτερον δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου.

Πῶς γενικεύεται ἡ ἀνωτέρω πρότασις;

96. — Ἔστω ἤδη $\alpha > \beta > \gamma > \delta$· ζητῶ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta\cdot$$

διαιρῶ τοὺς α, β, γ διὰ δ· ἔστωσαν ὑπόλοιπα τὰ υ, υ', υ'', σχηματίζω τότε τὴν σειρὰν

$$\upsilon, \quad \upsilon', \quad \upsilon'', \quad \delta.$$

Πᾶς κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι κ. δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας, ὅπως εἴδομεν (§95), καὶ ἀντιστρόφως πᾶς κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας εἶναι καὶ τῶν τῆς πρώτης (§ 95)· ὅθεν·

Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμέν τινας ἐξ αὐτῶν διὰ τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως αὐτῶν δι' ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς μικροτέρου αὐτῶν.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

$$96, \quad 44, \quad 20$$

ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας μὲ τοὺς

$$16, \quad 4, \quad 20.$$

97. — *Ὁ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτῶν δι' ἑνός ἄλλου (ἐξ αὐτῶν) μικροτέρου των.*

Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν;

98. — Ἃς ζητήσωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 208, 164. Κατὰ τὴν πρότασιν (§ 95) ἀντικαθιστῶμεν τὸν 208 διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως 208 : 164, ἤτοι ἀντὶ τῆς σειρᾶς

$$208, \quad 164$$

λαμβάνω τὴν σειρὰν

44, 164·

διαιρῶ πάλιν τὸ 164 διὰ 44 καὶ ἀντὶ 164 γράφω τὸ ὑπόλοιπον 32 καὶ ἔχω τὴν σειρὰν

44, 32

κ. ο. κ.

Οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστης τῶν σειρῶν αὐτῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν μ. κ. δ. (§ 95).

Προχωρῶ, μέχρις οὗ εὕρω σειρὰν εἰς τὴν ὁποίαν ὁ εἷς διαιρεῖ τὸν ἄλλον, διότι τότε αὐτὸς θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς ταύτης (§ 94).

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	1	3	1	2	1	2
208	164	44	32	12	8	4
44	32	12	8	4	0	

Κανών. *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· ἐὰν εὑρεθῇ ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 0, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ μ. κ. δ.*

Πῶς εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν ;

99. — Στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς § 97 καὶ σκεπτόμενοι ὡς ἐν τῇ § 98 συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν.

Διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν· ἂν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ ἐλάχιστος εἶναι ὁ μ. κ. δ., εἰδεμή, ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὧν τὰ ὑπόλοιπα δὲν εἶναι 0 ἕκαστον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του. Ἔχομεν οὕτω νέαν σειρὰν ἀριθμῶν οἵτινες ἔχουσι τὸν αὐτὸν μ. κ. δ. Εἰς αὐτὴν πράττομεν τὸ αὐτό, μέχρις οὗ εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν ὧν ὁ μικρότερος νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους· οὗτος θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Π. χ. μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

	5628	2596	352	160	εἶναι δ
μ. κ. δ. τῶν	28	36	32	160	
ἢ τῶν	28	8	4	20	
» »	0	0	4	0	ἤτοι δ 4.

Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

Τίνες ἐκ τῶν μικροτέρων τοῦ μ. κ. δ. δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι κοινοὶ διαιρέται τούτων ;

100. — Οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστης σειρᾶς ἐκείνων τὰς ὁποίας σχηματίζομεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας· ἑπομένως ὁ τυχὼν κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι καὶ τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας, ὅθεν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ μ. κ. δ. καὶ ἀντιστρόφως ὁ τυχὼν διαιρέτης τοῦ μ. κ. δ. εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας σειρᾶς, ἄρα καὶ τῆς πρώτης· ὅθεν

Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν·

π. χ. εἰς τὸ παράδειγμα τῆς (§ 99) κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν

5628, 2596, 352, 160

εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ 4, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ

1, 2, 4.

Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν, ποίαν μεταβολὴν πάσχει ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν ;

101. — Ἔστω

(1). $\alpha > \beta > \gamma > \delta$.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τούτων θὰ σχηματίσωμεν (§ 99) ἐκ τῆς σειρᾶς

$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$

ἄλλην σειρὰν ἀριθμῶν, ἔστω τὴν

$\upsilon, \quad \upsilon', \quad \upsilon'', \quad \delta.$

καὶ ἐκ ταύτης ἄλλην κ. ο. κ. Ἔστω δὲ ὅτι ἡ τελευταία σειρὰ εἶναι

$$0, \quad \mu, \quad 0, \quad 0\cdot$$

τότε ὁ μ κατὰ (§ 99) θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν α, β, γ, δ. Ζητήσωμεν ἤδη τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha\times\rho, \quad \beta\times\rho, \quad \gamma\times\rho, \quad \delta\times\rho\cdot$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (1) ἕπονται αἱ ἀνισότητες

$$\alpha\times\rho > \beta\times\rho > \gamma\times\rho > \delta\times\rho. \qquad (\text{ἄσκ. } 35)\cdot$$

διαιροῦντες λοιπὸν διὰ δ×ρ τοὺς α×ρ, β×ρ, γ×ρ πρὸς σχηματισμὸν τῆς νέας σειρᾶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς (§ 64)·

$$\upsilon\times\rho, \quad \upsilon'\times\rho, \quad \upsilon''\times\rho, \quad \delta\times\rho,$$

ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν δευτέραν σειρὰν ἐνταῦθα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ρ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας σειρᾶς τῆς προκυψάσης ἐκ τῶν α, β, γ, δ· ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν τρίτην σειράν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ρ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἀντιστοίχου ἀρχικῆς σειρᾶς κ. ο. κ. ὥστε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ρ τὴν τελευταίαν ἀρχικὴν σειράν, ἤτοι τὴν 0,μ,0,0, θὰ ἔχωμεν τὴν τελευταίαν σειρὰν ἐνταῦθα, ἤτοι τὴν

$$0, \quad \mu\times\rho, \quad 0, \quad 0\cdot$$

ἑπομένως μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha\times\rho, \quad \beta\times\rho, \quad \gamma\times\rho, \quad \delta\times\rho$$

εἶναι ὁ μ×ρ ὅθεν·

Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν·

π. χ. ἐκ τοῦ ὅτι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 75, 125, 625 εἶναι ὁ 25 ἐξάγομεν ὅτι

μ. κ. δ. τῶν 75000, 125000, 625000 εἶναι ὁ 25000.

Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ποίαν μεταβολὴν πάσχει ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν;

102.—Ἔστω δ κοινός τις διαιρέτης τῶν α, β, γ. Καλέσωμεν α΄, β΄, γ΄ τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων α : δ, β : δ, γ : δ· ἔχομεν

$$\alpha=\alpha'\times\delta, \quad \beta=\beta'\times\delta, \quad \gamma=\gamma'\times\delta\cdot$$

ἐὰν ἤδη καλέσωμεν μ' τὸν μ. κ. δ. τῶν

$$\alpha', \beta', \gamma'$$

καὶ μ τὸν μ. κ. δ. τῶν

$$\alpha, \beta, \gamma.$$

κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν θὰ ἔχωμεν $\mu = \mu' \times \delta$· ὅθεν

$$\mu' = \mu : \delta\cdot$$

ἄρα·

Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, καὶ ὁ μ. κ. δ. διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Πολλάκις οὕτως ἐπέρχεται ἁπλοποίησις εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. Ἵνα εὕρωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

18000000, 24000000, 12000000,

διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ 1000.000 καὶ εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

18, 24, 12,

ὅστις εἶναι ὁ 6· ἄρα τῶν δοθέντων εἶναι 6000.000.

Τίνα συμπεράσματα ἐξάγομεν ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ;

103.—1ον). Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, θὰ δώσωσι πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

104.—2ον). Ἐὰν διαιροῦντες ἀριθμούς τινας διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν εὕρωμεν πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ληφθεὶς κοινὸς εἶναι καὶ μέγιστος.

ΣΗΜ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὑπόθεσις ἐν τῇ προτάσει (§ 103) εἶναι συμπέρασμα ἐν τῇ προτάσει (§ 104) καὶ ἀντιστρόφως· διὸ α προτάσεις (§ 103) καὶ (§ 104) λέγονται *ἀντίστροφοι.*

Ἀσκήσεις.

110). Εὑρεῖν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν

360, 164, 280, 96.

111). Εὑρεῖν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν

100, 58200, 35000

112). Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$28\times5,\ 42\times10,\ 63\times20.$$

113). Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 2, τὰ δὲ πηλίκα τῶν γενομένων διαιρέσεων πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ εἶναι 2, 5, 4, 7· τίνες οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί; (§ 98, § 58)

114). Ὁ μ. κ. δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν. (§ 100)

115). Ἐὰν ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ ὁ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθῶσι, τὸ προκῦπτον γινόμενον εἶναι μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$A\times\Gamma,\ B\times\Gamma,\ A\times\Delta,\ B\times\Delta.$$

116). Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν α, β εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν β, $\beta-\upsilon$, ὅπου υ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β. (§ 75).

117). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν Δ, οἱ ἀριθμοὶ $\beta\times\gamma$, $\gamma\times\alpha$, $\alpha\times\beta$ ἔχουσι μ. κ. δ. ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ Δ^2. Πότε ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ἀκριβῶς Δ^2;

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\alpha=\Delta.\,\Pi,\ \beta=\Delta.\Pi',\ \gamma=\Delta.\,\Pi'',$$

ὅπου Π, Π΄, Π΄΄ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 103).

118). Καλέσωμεν Δ, τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ. Ἐὰν ὁ δ διαιρῇ τὰ γινόμενα

$$\alpha\times\lambda,\quad \beta\times\lambda,\quad \gamma\times\lambda,$$

θὰ διαιρῇ καὶ τὸ γινόμενον $\Delta\times\lambda$ (§ 101).

119). Ἔστω Δ ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν α καὶ β· τότε ὁ Δ θὰ εἶναι καὶ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$5\alpha+3\beta \quad 13\alpha+8\beta$$

Παρατηροῦμεν (§ 74, § 73) ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν

$$5\alpha+3\beta,\quad 13\alpha+8\beta$$

εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν

$$5\alpha+3\beta,\quad 8\alpha+5\beta$$

προχωροῦντες οὕτω διὰ διαδοχικῶν ἀφαιρέσεων ἀποδεικνύομεν τὴν πρότασιν.

120.) Ὁ μ. κ. δ. τριῶν ἀριθμῶν

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

ἰσοῦται πρὸς τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta, \quad \Delta',$$

ἐὰν Δ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ γ καὶ Δ′ ὁ μ. κ. δ. τῶν β. καὶ γ. (§ 100)

121.) Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι καὶ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμων

$$\alpha+\beta\gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha+\beta\,(\gamma-1)$$

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο (§ 54 § 34 γ′, δ′.) ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τὸν δεύτερον, εὑρίσκομεν τὸν β.

122.) Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ λ, μ, ν, ρ τοιοῦτοι, ὥστε

$$\lambda\nu-\rho\mu=1.$$

τότε ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι καὶ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\lambda\alpha+\rho\beta, \quad \mu\alpha+\nu\beta.$$

Παρατηροῦμεν (§ 47, § 34 γ′ β′ § 54) ὅτι οἱ ἀριθμοὶ

$$(\lambda\alpha+\rho\beta)\nu \ \text{καὶ} \ (\mu\alpha+\nu\beta)\rho$$

ἔχουσι διαφορὰν τὸν ἀριθμὸν $(\lambda\nu-\rho\mu)\alpha=\alpha$ κτλ.

123.) Ἔστωσαν οἱ πέντε ἀριθμοὶ

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5$$

καὶ μ. κ. δ. αὐτῶν ὁ Δ, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν Κ. οἱ ἀριθμοὶ

$$K-\alpha_1, \quad K-\alpha_2, \quad K-\alpha_3, \quad K-\alpha_4, \quad K-\alpha_5$$

ἔχουσι μ. κ. δ. ἢ τὸν Δ ἢ τὸν $\Delta\times2$ ἢ τὸν $\Delta\times4$.

Πρὸς ἀπόδειξιν παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τεσσάρων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς ἀφαιρέσωμεν τὸ τριπλάσιον τοῦ ὑπολειπομένου, εὑρίσκομεν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ἀριθμοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς· συμπεραίνομεν ἐξ αὐτοῦ ὅτι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς εἶναι καὶ κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

$$4\times\alpha_1, \quad 4\times\alpha_2, \quad 4\times\alpha_3. \quad 4\times\alpha_4, \quad 4\times\alpha_5.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ

105.—Πολλαπλάσια τοῦ 2 εἶναι

$$\left.\begin{array}{ll} \text{οἱ ἀριθμοὶ} & 2,\ 2\times2,\ 2\times3,\ 2\times4,\ldots\ldots \\ \text{τοῦ 3 οἱ ἀριθμοὶ} & 3,\ 3\times2,\ 3\times3,\ 3\times4,\ldots\ldots \\ \text{τοῦ 4 οἱ ἀριθμοὶ} & 4,\ 4\times2,\ 4\times3,\ 4\times4,\ldots\ldots \\ \text{τοῦ 6 οἱ ἀριθμοὶ} & 6,\ 6\times2,\ 6\times3,\ 6\times4,\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \mathrm{A}$$

Ζητήσωμεν ἀριθμοὺς κοινοὺς καὶ εἰς τὰς τέσσαρας σειράς· τοιοῦτοι προφανῶς εὑρίσκονται ἄπειροι, π. χ. ὁ ἀριθμὸς

$$2\times3\times4\times6=144$$

θὰ εὑρεθῇ εἰς ὅλας ὅπως καὶ πᾶν πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Ἐκτὸς ὅμως αὐτῶν καὶ ἄλλος μικρότερος τοῦ 144 εὑρίσκεται ἐνταῦθα π.χ. ὁ 12, ὅστις ἰσοῦται μὲ 2×6, 3×4, 4×3, 6×2.

Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ ὅπως 144,12 κ. τ. λ. λέγονται κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 καὶ 6· ἤτοι

Κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν λέγεται ἕτερος ἀριθμὸς ὅστις εἶναι διαιρετὸς δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον παρίσταται διὰ κ. π.

106.—Ὅταν εὕρωμεν ἓν κ. π. ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ὁσαδήποτε ἄλλα, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ 2, 3, 4, ... Θὰ εἶναι δὲ ταῦτα προφανῶς τὸ ἓν μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου, ὥστε δὲν ὑπάρχει μέγιστον.

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερον ἐκ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων αὐτῶν. Σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ ε. κ. π.

Ἰδιότητες ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

Ποῖον εἶναι τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν ὧν ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν ;

107. — Ἔστωσαν τυχόντες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ μεγαλύτερος ἐξ αὐτῶν νὰ διαιρῆται ὑπὸ τῶν ἄλλων· τότε οὗτος θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον προφανῶς ὅλων. Ἄλλο κοινὸν πολλαπλάσιον μικρότερον αὐτοῦ δὲν ὑπάρχει, διότι ἀριθμός τις δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὡς πολλαπλάσιον ἀριθμὸν μικρότερόν του· ἄρα :

Τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν ὧν ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν εἶναι αὐτὸς οὗτος.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 36, 12, 6, 3 ἔχουσιν ε. κ. π. τὸν 36. 24;

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν ὧν ὁ μεγαλύτερος δὲν διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν ἄλλων ;

108.—Ἂς θεωρήσωμεν π. χ. τοὺς ἐν τῇ (§ 105) δοθέντας ἀριθμοὺς

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 6$$

Τότε θὰ ζητήσωμεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ἐκ τῶν κοινῶν καὶ εἰς τὰς τέσσαρας σειράς (Α). Ἔστω οὗτος ὁ β. δηλαδὴ

$$\beta = 2 \times \lambda = 3 \times \mu = 4 \times \nu = 6 \times \rho$$

ὅπου ἕκαστον τῶν λ, μ, ν, ρ δεικνύει τὴν στήλην ἐν ᾗ εὑρίσκεται τὸ πολλαπλάσιον τοῦτο ἐν τῇ α'., β'., γ'., δ'. σειρᾷ· προφανῶς ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτει ὅτι $\rho < \nu < \mu < \lambda$.

Ὥστε, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6 συμφέρει νὰ ζητήσωμεν αὐτὸ εἰς τὴν τελευταίαν σειράν· ὅθεν·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π. ἀριθμῶν ὧν ὁ μεγαλύτερος δὲν διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν παρατηροῦμεν ἂν τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι κ. π. καὶ τῶν λοιπῶν, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ τὸ ε. κ. π. ὅλων· ἄλλως παρατηροῦμεν τὸ τριπλάσιον κ. ο. κ. Τὸ πρῶτον εὑρεθησόμενον τοιοῦτον κ. π. θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ε. κ. π.

Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα (§ 105) ε. κ. π. εἶναι τὸ 12· ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν 11, 22, 33, 44 εἶναι τὸ $44 \times 3 = 132$.

Τίνες ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ ε. κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια αὐτῶν ;

109. — Ἔστωσαν α, β, γ, δ ἀριθμοί, ὧν ε. κ. π. εἶναι τὸ Ε καὶ ἕτερον τυχὸν κ. π. αὐτῶν τὸ Π· διαιροῦμεν τὸ Π διὰ τοῦ Ε· ἔστω Ρ τὸ πηλίκον καὶ Υ τὸ ὑπόλοιπον· θὰ ἔχωμεν

$$\Pi = E \times P + Y.$$

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι διαιρέται τοῦ Π καὶ τοῦ Ε· ἄρα εἶναι διαιρέται τοῦ Π καὶ τοῦ Ε×Ρ. ἐπομένως καὶ τοῦ Υ (§ 75)· ὅθεν τὸ Υ θὰ ἦτο κ. π. τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ· ἀλλὰ τὸ Υ ὡς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως Π : Ε θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ Ε, ὅπερ ὑπετέθη ε. κ. π.· ἐπομένως τὸ Υ κατ' ἀνάγκην εἶναι 0, διότι ἄλλως θὰ εἴχομεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ Ε ὅστις θὰ ἦτο κ. π. καὶ ἐπομένως ὁ Ε δὲν θὰ ἦτο ε. κ. π., ὡς ὑπετέθη· ὅθεν·

Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

Ἰσχύει δὲ προφανῶς καὶ τὸ ἀντίστροφον· τουτέστιν ὅτι·

Τὸ τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. εἶναι καὶ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν α, β, γ, δ· ἄρα·

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ἄλλων, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

Π. χ., ἵνα εὕρωμεν κ. π. ἀριθμῶν τινων α, β, γ ἐχόντων ὡς ε. κ. π. τὸν ἀριθμὸν 100, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἀριθμὸν λήγοντα εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν.

Τί γίνεται τὸ ε. κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς ἐκ τούτων διὰ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν;

110. — Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

Α, Β, Γ, Δ

καὶ Ε τὸ ε. κ. π. δύο ἐξ αὐτῶν, π. χ. τῶν Α καὶ Β· τότε πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν

Ε, Γ, Δ

εἶναι προφανῶς καὶ κ. π. τῶν δοθέντων.

Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν κ. π. τῶν

Α, Β, Γ, Δ

εἶναι καὶ κ. π. τῶν

Ε, Γ, Δ. (§ 109)

ὅθεν :

Τὰ κοινὰ πολλαπλάσια ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

Ἕτερος τρόπος εὑρέσεως ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

111.—Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τὸ ε. κ. π. δύο ἐξ αὐτῶν καὶ ἀντικαθιστῶμεν τούτους διὰ τοῦ εὑρεθέντος ε. κ. π. αὐτῶν· καὶ πάλιν εἰς τὴν νέαν σειρὰν ἀντικαθιστῶμεν δύο διὰ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν κ. ο. κ.

Π. χ. τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

18, 30, 48

συμπίπτει μὲ τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

90, 48·

ἤτοι εἶναι ὁ 720.

Ἀσκήσεις.

124.) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

120, 125, 230·

ἐπίσης τῶν ἀριθμῶν

12, 24, 48, 96, 984, 328.

125). Τὸ ε. κ. π. δύο διαδοχικῶν περιττῶν εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν. (§ 79. § 108).

126). Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π. τριῶν ἀριθμῶν

α, β, γ

ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

Ε, Ε΄,

ἐὰν Ε εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν α, γ καὶ Ε΄ τὸ ε. κ. π. τῶν β. γ.

127). Θεωρήσωμεν τὰς σειρὰς (Α) τῆς § 105· τότε, ἐὰν ἀπηγορεύετο νὰ ἐργασθῶμεν μὲ τὴν τελευταίαν σειρὰν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π., μὲ ποίαν σειρὰν συνέφερε νὰ ἐργασθῶμεν;

128). Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ οἵτινες διαιρούμενοι διὰ 9, 12, 15 νὰ δίδωσι πάντοτε ὡς ὑπόλοιπον 5, καὶ τίς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ ἐλάχιστος.

129). Τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$1,\quad 2,\quad 3, \ldots\ldots 14$$

εἶναι καὶ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$8,\quad 9,\quad 10, \ldots 14$$

καὶ γενικῶς τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$1,\quad 2,\quad 3, \ldots 2\nu$$

εἶναι καὶ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$\nu+1,\ \nu+2, \ldots\ldots 2\nu$$

Πρὸς ἀπόδειξιν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τυχὼν ἀριθμὸς τῆς πρώτης σειρᾶς θὰ διαιρῇ ἕνα τοὐλάχιστον ἀριθμὸν τῆς δευτέρας.

130). Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 2 δίδει ὑπόλοιπον 1, διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 2 καὶ διὰ 4 δίδει ὑπόλοιπον 3. Ποῖος ὁ ἐλάχιστος;

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 2 εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.

131.) Ἔστω ὅτι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσι μ. κ. δ. διάφορον τῆς μονάδος· τότε θὰ εὑρίσκεται ἀριθμός τις ρ μικρότερος τοῦ γ τοιοῦτος ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $\rho\alpha$ καὶ $\rho\beta$ νὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ γ. Ἔστω Δ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α, β, γ· τότε $\gamma\times\Delta$ θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν $\gamma\times\alpha$, $\gamma\times\beta$, $\gamma\times\gamma$ (§ 101)· ὅθεν (§ 102 § 62) γ θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ· τῶν

$$(\gamma:\Delta)\times\alpha,\quad (\gamma:\Delta)\times\beta,\quad (\gamma:\Delta)\times\gamma.$$

132.) Ἔστωσαν τέσσαρα σημεῖα ὡρισμένα ἐπὶ τεσσάρων περιφερειῶν καὶ ὅτι ἐκ τούτων ἐκκινοῦσι συγχρόνως 4 κινητά. Ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ πρῶτον κάμνει τέσσαρας περιστροφάς, τὸ δεύτερον κάμνει 10, τὸ τρίτον 14 τὸ δὲ τέταρτον 16. Μετὰ πόσας περιστροφὰς τοῦ τρίτου θὰ εὑρεθῶσι πάλιν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἰς τὰ σημεῖα, ἐξ ὧν ἐξεκίνησαν ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον παράγοντα γινομένου, τίνες οἱ κ. δ. αὐτοῦ καὶ τοῦ γινομένου ;

112.—Α΄.) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμός τις Ν εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α καὶ πρὸς τὸν Β. Ζητήσωμεν κοινοὺς διαιρέτας τῶν δύο ἀριθμῶν

$$\text{Ν καὶ } Α \times Β.$$

Ἔστω τοιοῦτος κ. δ. ὁ Δ· οὗτος ὡς διαιρῶν τὸν Ν διαιρεῖ καὶ τὸν $Ν \times Α$, ὥστε ὁ Δ διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς

$$Ν \times Α,\ Β \times Α,$$

ἄρα καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν (§ 100). Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως οἱ ἀριθμοὶ Ν, Β ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν μονάδα· ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ $Ν \times Α$, $Β \times Α$ θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν Α. (§ 101). Ὅθεν ὁ Δ θὰ διαιρῇ τὸν Α (§ 100). Ἀλλὰ τότε οἱ ἀριθμοὶ Ν καὶ Α, οἵτινες ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ εἶχον κ. δ. τὸν Δ· ἄρα $Δ = 1$· ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι·

Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι πρῶτος πρὸς δύο ἄλλους, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἔστω ἤδη ὅτι ἀριθμός τις Ν εἶναι πρῶτος πρὸς τοὺς τρεῖς παράγοντας τοῦ γινομένου $Α \times Β \times Γ$· τότε, ὡς ἀπεδείξαμεν, οἱ ἀριθμοὶ Ν καὶ $Α \times Β$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ οἱ ἀριθμοὶ Ν καὶ Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἄρα ὁ Ν θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον

$$(Α \times Β) \times Γ = Α \times Β \times Γ.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται δι' ὁσουσδήποτε παράγοντας ἡ ἑξῆς πρότασις·

Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς αὐτὸ τὸ γινόμενον.

Π. χ. ὁ 8 εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 9, τὸν 15 καὶ τὸν 27· ἄρα θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον $9\times15\times27$.

Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους αἱ δυνάμεις τίνας κ. δ. ἔχουσιν;

113.—Β΄. Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ α θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν

$$\beta\times\beta\times\ \ldots\ \times\beta=\beta^{\mu} \qquad (\S\ 112)$$

ὅθεν ἕπεται καὶ ὅτι ὁ β^{μ} εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν

$$\alpha\times\alpha\times\ \ldots\ \times\alpha=\alpha^{\nu} \qquad \text{ἄρα·}$$

Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ τυχοῦσαι δυνάμεις εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Π. χ. Ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 25 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ ἀριθμοὶ 2^6 καὶ 25^3, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 64 καὶ 15625, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι διαιρέτης τοῦ γινομένου δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, τί θὰ εἶναι ὡς πρὸς τὸν ἄλλον;

114.—Γ΄. Ἔστω ὅτι ὁ Ν διαιρεῖ τὸ γινόμενον $A\times B$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α. Καλέσωμεν Δ τὸν μ. κ. δ. τῶν Β καὶ Ν· οἱ ἀριθμοὶ

$$B:\Delta=B' \text{ καὶ } N:\Delta=N'$$

θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλὰ οἱ Ν καὶ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἑπομένως καὶ οἱ Ν΄ καὶ Α θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 74). Ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ

$$N' \text{ καὶ } A\times B'$$

θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τὴν μονάδα (§ 112)· ἔχομεν ὅμως ἀφ᾽ ἑτέρου ὅτι ὁ $N'\times\Delta$ διαιρεῖ τὸν $A\times B'\times\Delta$ ἢ καὶ ὅτι ὁ Ν΄ διαιρεῖ τὸν $A\times B'$ (§ 64)· ἑπομένως μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Ν΄ καὶ $A\times B'$ θὰ εἶναι αὐτὸς οὗτος ὁ Ν΄ (§ 94). ὅθεν $N'=1$, ἤτοι $N=\Delta$· ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον.

Π. χ. ὁ 12 διαιρεῖ τὸν 12000, ὅστις ἰσοῦται μὲ 480×25, εἶναι δὲ πρῶτος πρὸς τὸν 25· κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ διαιρῇ τὸν 480.

Τίς ὁ μ. κ. δ. τῶν πηλίκων τῆς διαιρέσεως τοῦ ε. κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν δι' ἑκάστου τούτων ;

115.—Δ'. Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, καὶ Ε τὸ ε. κ. π. αὐτῶν. Διαιρῶ τοῦτο δι' ἑνὸς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, ἤτοι σχηματίζω

τὰ πηλίκα $\left\{ \begin{array}{l} E:A \\ E:B \\ E:\Gamma \end{array} \right.$ Τὰ πηλίκα ταῦτα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι

πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐὰν εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην Δ διάφορον τῆς μονάδος, θὰ ἠλήθευον αἱ ἰσότητες

$$\left. \begin{array}{l} E:A=\Delta\times\Pi \\ E:B=\Delta\times P \\ E:\Gamma=\Delta\times\Sigma \end{array} \right|$$

ὅθεν $E=A\times\Delta\times\Pi=B\times\Delta\times P=\Gamma\times\Delta\times\Sigma$

ἐξ οὗ $E:\Delta=A\times\Pi=B\times P=\Gamma\times\Sigma$ ἤτοι·

ὁ $E:\Delta$ θὰ ἦτο κ. π. τῶν Α, Β, Γ, ἀλλὰ $E:\Delta$ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ Ε, ὅταν $\Delta>1$· θὰ εἴχομεν ἑπομένως καὶ κ. π. τῶν Α, Β, Γ μικρότερον τοῦ ἐλαχίστου, ὅπερ ἄτοπον. Ὅθεν·

Ἐὰν διαιρεθῇ τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, εὑρίσκονται πηλίκα ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Π. χ. τῶν ἀριθμῶν 12, 20 καὶ 36 ε. κ. π. εἶναι ὁ 180. Τὰ πηλίκα $180:12$, $180:20$, $180:36$, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 15, 9, 5, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ποῖον κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν διαιρούμενον δι' αὐτῶν δίδει πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους ;

116.—Ε'. Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις Ε διαιρούμενος ἀκριβῶς διὰ τῶν Α, Β, Γ δίδει πηλίκα Π, Π', Π'' ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους· ἐπειδὴ ὁ Ε εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κ. π. τῶν Α, Β, Γ, θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν Ε΄, ἤτοι·

$$E = E' \times \rho.$$

Ἀλλὰ (§ 115) οἱ ἀριθμοὶ

$$E' : A,\ E' : B,\ E' : \Gamma$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἑπομένως οἱ

$$(E' \times \rho) : A,\ (E' \times \rho) : B,\ (E' \times \rho) : \Gamma,$$

ἤτοι οἱ

$$E : A,\quad E : B,\quad E : \Gamma$$

θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν ρ· ἀλλ᾽ ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἑπομένως ρ=1· τουτέστιν Ε εἶναι τὸ ε. κ. π.· ἄρα·

Ἐὰν κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ, διαιρούμενον διὰ τῶν Α, Β, Γ, δίδῃ πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, τότε τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ε. κ. π.

Π. χ. ὁ 3600 εἶναι κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$720,\quad 900,\quad 1800.$$

Ἐπειδὴ τὰ πηλίκα

$$3600 : 720,\ 3600 : 900,\ 3600 : 1800,$$

ἤτοι τὰ 5, 4, 2, εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ 3600 εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 720, 900, 1800.

. Ἀριθμὸς διαιρετὸς δι᾽ ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν; καὶ διατί;

117.—ϛ΄. Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις Α εἶναι κ. π. δύο ἄλλων Β, Γ πρώτων πρὸς ἀλλήλους. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον Β×Γ διαιρούμενον διὰ τῶν Β, Γ δίδει πηλίκα Γ, Β πρῶτα πρὸς ἄλληλα· ὅθεν (§ 116) εἶναι ε. κ. π. τῶν Β, Γ. Ἑπομένως τὸ Α ὡς κ. π. τῶν Β, Γ θὰ εἶναι (§ 109) πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν, ἤτοι τοῦ Β×Γ· ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμός τις Α διαιρῆται διὰ δύο ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

π. χ. Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ 8 καὶ 15, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 120.

Ἔστωσαν ἤδη τρεῖς ἀριθμοὶ Β, Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Ἐὰν ἀριθμός τις Α διαιρῆται διὰ τῶν Β, Γ, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $B\times\Gamma$, ὡς προηγουμένως εἴδομεν· ἀφ' ἑτέρου ὁ Δ θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ γινόμενον $B\times\Gamma$ (§ 112). Ὥστε, ἐὰν ὁ Α διαιρῆται καὶ διὰ Δ, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(B\times\Gamma)\times\Delta$, ἤτοι τοῦ $B\times\Gamma\times\Delta$. Καὶ γενικῶς·

Ἐὰν ἀριθμός τις Α διαιρῆται δι' ἄλλων Β, Γ, Δ, Ε . . . πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 31500 διαιρεῖται διὰ τῶν 4, 7, 15, οἵτινες εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο· θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ

$$4\times7\times15=420.$$

ΣΗΜ. Ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πολλοὺς χαρακτῆρας διαιρετότητος.

Π. χ. Ἐπειδὴ $18=2\times9$ καὶ 2, 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἕπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 9 διαιρεῖται καὶ διὰ 18.

Σχέσις μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, τοῦ μ. κ. δ. καὶ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

118. — Ἔστωσαν Π, Π′ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν Α, Β διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν Δ. Τότε·

$$A=\Delta\times\Pi \text{ καὶ } B=\Delta\times\Pi' \cdot \text{ ὅθεν·}$$

$$A\times B=\Delta\times\Pi\times B \text{ καὶ } B\times A=\Delta\times\Pi'\times A \cdot \text{ ἑπομένως·}$$

$$(A\times B) : \Delta=\Pi\times B \text{ καὶ } (B\times A) : \Delta=\Pi'\times A.$$

Ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν $(A\times B) : \Delta$ διαιρέσωμεν διὰ Β, εὑρίσκομεν Π, ἐὰν δὲ διὰ Α, εὑρίσκομεν Π′· ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $(A\times B) : \Delta$ διαιρούμενος διὰ τῶν Α, Β δίδει πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους (§ 103)· ὥστε εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν Α, Β (§ 116).

ἤτοι : (1) $(A \times B) : \Delta = E.$ ὅθεν

$$A \times B = \Delta \times E \qquad \text{ἄρα :}$$

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μ. κ. δ. ἐπὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν.

119. — *Ἐφαρμογή.* Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) προκύπτει ὅτι τὸ ε. κ. π. δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν διαιρεθῇ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.

Τέλος του 1ου εξαμήνου

Ἀσκήσεις.

133.) Δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν.

134.) Δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὡς ἐπίσης καὶ δύο περιττοὶ διαδοχικοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

135.) Πάντες οἱ περιττοὶ οἱ μὴ λήγοντες εἰς 5 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς τὸν 10. Ἐξ αὐτῶν δὲ ὅσοι ἔχουσιν ὡς ἄθροισμα ψηφίων ἀριθμὸν μὴ διαιρετὸν διὰ 3 εἶναι πρῶτοι καὶ πρὸς τὸν 30.

136). Νὰ εὑρεθῶσι χαρακτῆρες διαιρετότητος διὰ 21, 30, 63, 105.

137.) Ἐὰν εἷς προσθετέος ἀθροίσματος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν προσθετέων, θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ ὅλον ἄθροισμα.

138.) Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, ... 9 ἐπὶ 7 λαμβάνομεν ἐννέα ἀριθμοὺς λήγοντας εἰς ἐννέα διάφορα ἀπ᾽ ἀλλήλων ψηφία καὶ γενικώτερον τὸ αὐτὸ συμβαίνει, ἂν λάβωμεν ὡς πολλαπλασιαστὴν ἀντὶ τοῦ 7 οἱονδήποτε ἀριθμὸν πρῶτον πρὸς τὸν 10.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸν 10 θὰ λήγῃ εἰς 1 ἢ 3 ἢ 7 ἢ 9

139.) Οἱ ἀριθμοὶ

$$A, \quad A+1, \quad 2A+1$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 75, § 73).

140.) Ἐὰν εἰς δοθέντα περιττὸν προσθέσωμεν τὴν μονάδα, τὸ δὲ ἄθροισμα διαιρέσωμεν διὰ 2, εὑρίσκομεν ἀριθμὸν πρῶτον πρὸς τὸν δοθέντα (§ 79).

141.) Οἱ ἀριθμοὶ

$$A \quad \text{καὶ} \quad AB+1$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς διαιρέτης τοῦ Α εἶναι διαιρέτης τοῦ ΑΒ (§ 74).

142.) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς τὸν 3 δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ 3.

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸν 3 διαιρούμενος διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 1 ἢ 2· κατόπιν δὲ λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὰ θεωρήματα (§ 87 καὶ 88).

143.) Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν, καὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Τῷ ὄντι ἔστω Ε τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$A \quad B \quad \Gamma\cdot$$

οἱ ἀριθμοὶ

$$E:A \quad E:B \quad E:\Gamma$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 115) ἢ καὶ οἱ ἀριθμοὶ

$$\rho E:\rho A \quad \rho E:\rho B \quad \rho E:\rho\Gamma$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὥστε (§ 116) τὸ ρΕ εἶναι ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν $\rho A, \quad \rho B, \quad \rho\Gamma$.

144.) Ὁ μ. κ. δ. τριῶν περιττῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, εἶναι καὶ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$(A+B):2 \quad (B+\Gamma):2, \quad (\Gamma+A):2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι 1) τὰ πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι

($A+B, \quad B+\Gamma, \quad \Gamma+A$ ἄρτιοι)

2) Πᾶς κ. δ. τῶν Α, Β, Γ, εἶναι καὶ κ. δ. τῶν

$$(A+B):2, \quad (B+\Gamma):2 \quad (\Gamma+A):2$$

ὡς διάφορος τοῦ 2 (Α, Β, Γ περιττοὶ § 73 § 114).

3) Πᾶς κ. δ. τῶν $(A+B):2, \ (B+\Gamma):2, \ (\Gamma+A):2$ εἶναι καὶ κ. δ. τῶν Α, Β, Γ.

145.) Ἔστω Μ. ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α καὶ α· Μ' ὁ τῶν Α καὶ β καὶ Μ'' ὁ τῶν Α καὶ γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ Μ. Μ', Μ'' εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τότε τὸ γινόμενον $M \times M' \times M''$ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α καὶ $\alpha \times \beta \times \gamma$.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $A : M$ καὶ $\alpha : M$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 103). Ἑπομένως (§ 117) καὶ ὁ ἀριθμὸς

$$A : (M \times M' \times M'')$$

θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν $\alpha : M$ (§ 74), ἐπίσης θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν $\beta : M'$ καὶ τὸν $\gamma : M''$· ὅθεν (§ 112, 104) ἕπεται ἡ πρότασις :

146.) Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon.$$

Πόσας ἀκεραίας τιμὰς οὐχὶ μεγαλυτέρας τοῦ ε δύναμαι νὰ δώσω εἰς τὸ ρ τοιαύτας ὥστε τὰ γινόμενα

$$\alpha \times \rho, \quad \beta \times \rho, \quad \gamma \times \rho, \quad \delta \times \rho$$

νὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ε ;

(μία τιμὴ τοῦ ρ εἶναι $\varepsilon : \Delta$ ὅπου $\Delta =$ μ. κ. δ. δεδομένων). (Ἄσκ. 131).

147.) Ἐὰν Μ ὁ μ. κ. δ. τῶν Α, Β καὶ Μ' ὁ μ. κ.δ. τῶν Α, Γ, οἱ δὲ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$A, \quad B \times \Gamma$$

εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\qquad M \times M'$.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Μ καὶ Μ' εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 100). Ἑπομένως ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ $M \times M'$, ἤτοι $A = M \times M' \times \Pi$· ἀφ' ἑτέρου $B = M \times \Pi'$ καὶ $\Gamma = M' \times \Pi''$· ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ $A : M$ καὶ Π' εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἑπομένως καὶ οἱ Π,Π' εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁμοίως οἱ Π καὶ Π'' εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ Π καὶ $\Pi' \times \Pi''$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 112)· ὅθεν (§ 104) $M \times M'$ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν Α. καὶ $B \times \Gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε′.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

120. — Ζητήσωμεν τοὺς διαιρέτας τοῦ 6· εἶναι τοιοῦτοι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 6.

Ζητήσωμεν τοὺς διαιρέτας τοῦ 5· εἶναι τοιοῦτοι μόνον οἱ 1, 5. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 6 ἔχει πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος καὶ ἄλλους διαιρέτας, τοὺς 2, 3, ἐνῷ ὁ 5 ἔχει μόνον τοὺς 1, 5. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος αὐτῆς ὁ 5 λέγεται πρῶτος, ἐνῷ ὁ 6 λέγεται σύνθετος· τουτέστι :

Πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ὁ μὴ ἔχων ἄλλους διαιρέτας εἰμὴ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα.

Σύνθετος δὲ λέγεται ὁ ἔχων καὶ ἄλλους διαιρέτας πλὴν αὐτῶν.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 εἶναι πρῶτοι·

οἱ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 εἶναι σύνθετοι.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀριθμοί τινες δυνατὸν νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους χωρὶς νὰ εἶναι πρῶτοι. Π. χ. οἱ ἀνωτέρω σύνθετοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔστω τυχὼν σύνθετος ὁ 15· διαιρέται αὐτοῦ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 5, 15· ὁ 3 εἶναι δεύτερος διαιρέτης τοῦ 15· ἤτοι.

Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ λέγεται ὁ μετὰ τὴν μονάδα διαιρέτης αὐτοῦ.

Ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

121. — Α′.) Ἐκ τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος Α συνθέτου τινὲς εἶναι σύνθετοι, τινὲς πρῶτοι. Θεωρήσωμεν τὸν δεύτερον διαιρέτην τοῦ Α· οὗτος δὲν εἶναι πολλαπλάσιον ἄλλου ἀριθμοῦ γ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει καὶ ὁ Α θὰ ἦτο πολλαπλάσιον αὐτοῦ τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ γ, ἤτοι ὁ Α θὰ εἶχε καὶ διαιρέτην μικρότερον τοῦ ὑποτεθέντος ὡς δευτέρου· ὥστε·

Παντὸς ἀριθμοῦ ὁ δεύτερος διαιρέτης εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι·

α΄.) Πᾶς σύνθετος θὰ ἔχῃ διαιρέτην ἀριθμὸν πρῶτον.

Π. χ. ὁ 77 ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν 7, ὅστις εἶναι πρῶτος.

β΄.) Ἐὰν ἀριθμοί τινες ἔχωσι μ. κ. δ. διάφορον τῆς μονάδος, ἤτοι ἐὰν δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ ἔχωσιν ὡς κ. δ. ἀριθμὸν πρῶτον (§ 100).

122.—Β΄.) Ὁ τυχὼν πρῶτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τοῦ ἑαυτοῦ του ἐπὶ τὴν μονάδα.

Ἔστω ἤδη τυχὼν σύνθετος ἀριθμὸς Α καὶ δεύτερος αὐτοῦ διαιρέτης ὁ δ. Τότε $Α = δ \times π$, ὅπου π θὰ εἶναι ἀκέραιος μικρότερος τοῦ Α· ἐὰν ὁ π εἶναι πρῶτος, τότε ὁ Α ἀνελύθη εἰς γινόμενον δύο πρώτων· ἐὰν ὁ π εἶναι σύνθετος, τότε θὰ ἔχῃ ὡς δεύτερον διαιρέτην ἀριθμόν τινα δ΄, ὅστις πάλιν θὰ εἶναι πρῶτος·

ἤτοι· $π = δ' \times π'$ ὅπου $π' < π$.

Ἐὰν π΄ εἶναι καὶ αὐτὸς πρῶτος, τότε ὁ Α ἀνελύθη εἰς γινόμενον τριῶν πρώτων παραγόντων. Ἄλλως προχωροῦμεν καθ' ὅμοιον τρόπον. Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι οἱ ἀριθμοὶ π, π΄... εἶναι ἀκέραιοι τοιοῦτοι ὥστε $π > π' > \ldots$ Ἀπὸ τοῦ π φθάνομεν εἰς τὸ π΄ καὶ δι' ἀφαιρέσεως μονάδων τινῶν, ὅπως ἐπίσης ἀπὸ τοῦ π΄ εἰς τὸ π΄΄ φθάνομεν πάλιν καὶ δι' ἀφαιρέσεως μονάδων κ. ο. κ.· ἀλλὰ ὁ π εἶναι ἀκέραιός τις πεπερασμένος, δὲν δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ἀφαιρῶμεν ἀδιακόπως ἀπ' αὐτοῦ μονάδας· ἄρα κατ' ἀνάγκην φθάνομεν εἰς ἀριθμόν τινα μὴ ἔχοντα ἄλλον διαιρέτην μικρότερόν του πλὴν τῆς μονάδος καὶ τότε θὰ ἔχωσιν εὑρεθῇ πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες, ὧν γινόμενον εἶναι ὁ Α· ἄρα·

Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Π. χ. $60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

123.— Γ΄.) Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Α, Β, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν εἷς, ἔστω ὁ Α, εἶναι πρῶτος, ὁ δὲ ἕτερος Β δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ Α· τότε οἱ ἀριθμοὶ Α, Β δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην διάφορον τῆς μονάδος, διότι ὁ Α δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, ὅστις ὅμως ἐξ ὑποθέσεως δὲν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς κοινὸς διαιρέτης· ἄρα:

Πᾶς πρῶτος εἶναι πρῶτος πρὸς πάντα μὴ διαιρούμενον δι' αὐτοῦ. Π. χ. ὁ 11 δὲν διαιρεῖ τὸν 100· ἄρα εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 100.

124. — Δ΄. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα· ἔστωσαν δηλαδὴ ἀριθμοὶ

$$Α, Β, Γ, \ldots, Α', Β', Γ', \ldots$$

πρῶτοι καὶ ὅτι

$$Α \times Β \times Γ \times \ldots = Α' \times Β' \times Γ' \ldots$$

Ὁ τυχὼν παράγων Α΄ τοῦ δευτέρου γινομένου, ἐὰν δὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸν Α, δὲν θὰ τὸν διαιρῇ, διότι ὁ Α ὑπετέθη πρῶτος· ἀλλὰ τότε ὁ Α΄ (§ 123) θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α· ὁμοίως φαίνεται ὅτι, ἐὰν ὁ Α΄ δὲν ἦτο ἴσος πρὸς ἄλλον παράγοντα τοῦ πρώτου γινομένου, θὰ ἦτο πρῶτος πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν· ἄρα ὁ Α΄ (§ 112) θὰ ἦτο πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον

$$Α \times Β \times Γ \times \ldots\ldots$$

ὁπότε κατ' ἀνάγκην ὁ Α΄ θὰ ἦτο πρῶτος καὶ πρὸς τὸ ἴσον γινόμενον $Α' \times Β' \times Γ' \times \ldots\ldots$ ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ὁ Α΄ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου γινομένου. Δὲν εἶναι δὲ δυνατὸν τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἔχῃ παράγοντας ἴσους πρὸς τὸ Α΄ περισσοτέρους ἢ ὀλιγωτέρους ἀπὸ τὸ δεύτερον γινόμενον· διότι ἔστω ὅτι τὸ πρῶτον γινόμενον εἶχε τρεῖς παράγοντας ἴσους πρὸς τὸ Α΄· τὸ δὲ δεύτερον δύο τοιούτους· τότε διαιροῦντες τὰ ἴσα γινόμενα διὰ τοῦ $Α' \times Α'$ θὰ ἔχωμεν δύο ἕτερα γινόμενα ἴσα (Ἀσκ. 56), ἐξ ὧν τὸ ἓν θὰ περιεῖχε τὸν πρῶτον παράγοντα Α΄, ἐνῷ τὸ ἕτερον οὐχί· ἄρα:

Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα θὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ ἕκαστον παράγοντα τοσάκις τὸ ἓν ὁσάκις καὶ τὸ ἕτερον· ἤτοι δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων ἴσα θὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ ἐκθέτας τῶν ἴσων παραγόντων τοὺς ἰδίους· π. χ. τὸ γινόμενον

$5^2 \times 7 \times 11$ δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $5 \times 7 \times 11^2$, οὐδὲ τὸ γινόμενον $3^2 \times 7 \times 11^2$ πρὸς τὸ γινόμενον $3 \times 7^2 \times 17$.

125.—Ε'. Ἔστω ὅτι γινόμενόν τι $A \times B \times \Gamma$ διαιρεῖται δι' ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ δ· τότε

$$A \times B \times \Gamma = \delta \times \Pi.$$

Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι ἀναλύομεν τοὺς Α, Β, Γ καὶ Π εἰς πρώτους παράγοντας, θὰ ἔχωμεν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων ἴσα· ἐπομένως (§ 124) ὁ δ πρέπει νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ τῶν πρώτων παραγόντων τοὐλάχιστον ἑνὸς ἐκ τῶν Α, Β, Γ· ὅθεν ὁ δ θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα τῶν παραγόντων Α, Β, Γ· ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα τῶν παραγόντων.

Ἐκ τούτου ἕπεται :

Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἀριθμοῦ, θὰ διαιρῇ καὶ αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματα. Ὁ 3 διαιρῶν τὸ γινόμενον $4 \times 75 = 300$ θὰ διαιρῇ καὶ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων, καὶ πράγματι διαιρεῖ τὸν 75. Ἐπίσης ὁ 5 διαιρῶν τὸ $25^2 = 625$ θὰ διαιρῇ καὶ τὸ 25.

Ἀσκήσεις.

148.) Ἀριθμὸς πρῶτος δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀκεραίων μικροτέρων αὐτοῦ.

149.) Ἐὰν οὐδεὶς ἐκ τῶν παραγόντων γινομένου διαιρῆται διὰ πρώτου τινὸς α, τότε καὶ τὸ γινόμενον δὲν θὰ διαιρῆται δι' οὐδενὸς πολλαπλασίου τοῦ α.

150.) Τὸ ε. κ. π. καὶ ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν Α καὶ Β ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας οὓς καὶ οἱ ἀριθμοὶ Α, Β.

151.) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ προστιθέμενοι δίδωσιν ὡς ἄθροισμα ἀριθμὸν πρῶτον, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

152.) Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν Α καὶ Β εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β εἶναι διαδοχικοί. (Ἀσκ. 75).

153.) Ἐὰν A καὶ B εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε τὸ ἄθροισμα $A+B$ καὶ τὸ γινόμενον AB εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. (§ 121. § 125. § 75).

154.) Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων τῶν μικροτέρων ἑνὸς πρώτου εἶναι διαιρετὸν δι' αὐτοῦ. Γενίκευσις.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $1+2+3+4$· τοῦτο γράφεται καὶ

$$4+3+2+1\cdot$$

ὅθεν τὸ διπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$5+5+5+5=5\times4.$$ ἐντεῦθεν ἡ πρότασις.

155.) Πᾶς πρῶτος μεγαλύτερος τοῦ 3 θὰ εἶναι ἴσος πρὸς πολλαπλάσιον τοῦ 6 ηὐξημένον ἢ ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα, τουτέστι θὰ γράφεται.

ἢ ὑπὸ τὴν μορφὴν $6\nu+1$

ἢ ὑπὸ τὴν μορφὴν $6\nu-1$.

156.) Ἡ προηγουμένη πρότασις μόνον διὰ τοὺς πρώτους ἰσχύει;

157.) Διὰ πάντα ἀριθμὸν A μείζονα τοῦ 4 καὶ ἴσον πρὸς Π^λ, ὅπου Π εἶναι πρῶτος καὶ $\lambda>1$, ἰσχύει ἡ πρότασις ὅτι τὸ γινόμενον

$$1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (A-1)$$

εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ A.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι $A-1>\Pi^{\lambda-1}$, εὐκόλως συνάγομεν τὴν πρότασιν.

158.). Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 3 πρῶτος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἐλαττούμενον κατὰ μονάδα καὶ διαιρούμενον διὰ 8 δίδει ὡς πηλίκον ἀριθμὸν πρῶτον.

Πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς πρῶτος πλὴν τοῦ 3 δὲν διαιρεῖται διὰ 3· ἄρα εἷς ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $(A-1)(A+1)$ διαιρεῖται διὰ 3, ἐὰν A πρῶτος διάφορος τοῦ 3 (Ἄσκ. 98)· ἑπομένως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ A εἶναι τοιοῦτος, ὥστε ἡ διαφορὰ A^2-1 νὰ διαιρῆται διὰ 8, τότε τὸ προκῦπτον πηλίκον διαιρεῖται διὰ 3 (Ἄσκ. 75. § 123, § 114). ὅθεν, ἵνα τὸ πηλίκον αὐτὸ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, πρέπει νὰ εἶναι ἴσον τῷ 3 καὶ ὁ A^2-1 νὰ εἶναι ἴσος τῷ 24· ἐπομένως ὁ $A^2=25$ ἤτοι $A=5$.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

126.—*Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.* Ζητήσωμεν τοὺς πρώτους τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ 1 καὶ 50. Γράφομεν αὐτοὺς κατὰ σειράν. Διαγράφομεν ἐξ αὐτῶν κατ' ἀρχὰς τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2· κατόπιν παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 τινὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2, τουτέστι τὰ

$$2\times 3, \quad 4\times 3, \quad 6\times 3 \cdot \text{ κ. τ. λ.},$$

ἐνῷ τὰ μὴ διαγεγραμμένα εἶναι τὰ

$$3\times 3, \quad 5\times 3, \quad 7\times 3 \text{ κ. τ. λ.}$$

διαγράφω ταῦτα.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 4 εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2. Ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 τὸ πρῶτον μὴ διαγεγραμμένον εἶναι τὸ 5×5· διαγράφομεν τοῦτο ὅπως καὶ ὅσα δὲν ἔχουσιν ἤδη διαγραφῆ. Ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7 τὸ πρῶτον μὴ διαγεγραμμένον εἶναι τὸ 7×7.

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι οἱ ἐναπομείναντες ἐν τῷ πίνακι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι, διότι οὗτοι δὲν θὰ διαγραφῶσιν, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν, καὶ ἐπομένως οὐδενὸς ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσια. Ὁμοίως θὰ ἐργασθῶμεν, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000, ὁπότε ὅμως δὲν θὰ σταματήσωμεν εἰς τὸ 7, ἀλλ' εἰς τὸ 31, διότι, ὅταν διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τῶν πρώτων

$$2, \quad 3, \quad 5, \ldots\ldots . \; 31,$$

τότε τῶν ἀριθμῶν

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots . \; 36$$

ἔχουν διαγραφῆ πάντα τὰ πολλαπλάσια· ὥστε τὸ πρῶτον μὴ διαγραφὲν θὰ ἦτο τὸ 37×37. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ πίνακι ὡς μεγαλύτερον τοῦ 1000. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ μεταξὺ 1 καὶ 100 εἶναι οἱ ἑξῆς·

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,
41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

ΣΗΜ. Ὑπάρχουσι πίνακες τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἐκτεταμένοι. Εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας Dupuis εὑρίσκονται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 μέχρι 10000.

Ἀσκήσεις.

159). Νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ πρῶτοι οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ 100 καὶ 200.

160). Ὁ ἀριθμὸς 1036 εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος;
Ὁ ἀριθμὸς 1409 εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος;

Πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

127.—Ἔστω ὅτι ἐδόθησαν ὁσοιδήποτε πρῶτοι

$$A, \quad B, \quad \Gamma \ldots, \quad K.$$

Πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς καὶ προσθέτομεν τὴν μονάδα· ἔστω

$$A \times B \times \Gamma \times \ldots\ldots \times K + 1 = N\cdot$$

τότε ὁ N ἢ εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος· καί, ἂν μὲν εἶναι πρῶτος, θὰ εἶναι προφανῶς πρῶτος διάφορος τῶν

$$A, \quad B, \quad \Gamma, \ldots\ldots, \quad K\cdot$$

ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ ἔχῃ (§ 121) ὡς δεύτερον διαιρέτην ἀριθμόν τινα πρῶτον, ὃν ἂς καλέσω δ. Οὗτος θὰ εἶναι διάφορος τῶν

$$A, \quad B, \quad \Gamma, \ldots\ldots, \quad K,$$

διότι, ἐὰν π.χ. εἴχομεν $B = \delta$, τότε ὁ δ θὰ διήρει ὄχι μόνον τὸν N ἀλλὰ καὶ τὸν $A \times B \times \Gamma \times \ldots\ldots \times K$, ἑπομένως θὰ διήρει καὶ τὴν διαφοράν των, ἤτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἄτοπον· ὥστε ὁσοιδήποτε πρῶτοι καὶ ἂν δοθῶσιν, εὑρίσκεται πάντοτε νέος πρῶτος· ἄρα·
Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον.

ʼΑσκήσεις.

161.) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμητικὰ παραδείγματα ὅπου ὁ ἀριθμὸς Ν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3.

Νὰ σχηματισθῇ κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοιούτων παραδειγμάτων.

162) Ἔστω π ἀριθμὸς πρῶτος· πῶς πρέπει νὰ ἐκλέγωμεν ἀριθμοὺς πρώτους τοιούτους ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν αὐξανόμενον κατὰ μονάδα νὰ δίδῃ ἀριθμὸν διαιρετὸν ὑπὸ π;

ʼΑνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

128.—Ἔστω π.χ. ὁ 90. ʼΕργαζόμενοι κατὰ τὸν τρόπον τὸν ὑποδεικνυόμενον ἀλλαχοῦ (§ 122) λαμβάνομεν

$$90=2\times45=2\times3\times15=2\times3\times3\times5=2\times3^2\times5.$$

Διατάσσεται δὲ ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ἔστω ἐπίσης πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 924· ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{r|l} 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$924=2^2\times3\times7\times11$$

καὶ γενικῶς·

Διὰ ν᾿ ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν σύνθετον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ δευτέρου του διαιρέτου (§ 121). *Τὸ πηλίκον θεωροῦμεν ὡς νέον διαιρετέον, ἐργαζόμεθα δὲ ὅπως καὶ μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν· καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον τὴν μονάδα.*

Ἡ διάταξις δὲ τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς : *Πάντας τοὺς διαιρετέους γράφομεν κατὰ σειρὰν εἰς μίαν στήλην· δεξιὰ δὲ ταύτης γράφομεν τοὺς ἀντιστοίχους διαιρέτας· τὸ γινόμενον τῶν διαιρετῶν τούτων εἶναι γινόμενον πρώτων παραγόντων ἴσον πρὸς τὸν πρῶτον διαιρετέον.*

Ἐνίοτε συμφέρει ν' ἀναλύωμεν ἀριθμόν τινα σύνθετον εἰς γινόμενα ἄλλων συνθέτων εὐκόλως ἀναλυομένων.

Π. χ. $72000=72\times1000=8\times9\times1000=$

$$2^3\times3^2\times2^3\times5^3=2^6\times3^2\times5^3.$$

Ἐὰν ἀνελύετο ὁ 72000 εἰς πρώτους παράγοντας, κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα θὰ εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ γινόμενον, ὡς ἀμέσως ἕπεται ἐκ τῆς προτάσεως (§ 124), καὶ γενικῶς·

Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς πρώτους παράγοντας πάντοτε τοὺς αὐτοὺς παράγοντας θὰ εὕρωμεν.

Ἐφαρμογαί.

Πολλαὶ ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν καθίστανται προφανεῖς, ὅταν ἔχωμεν αὐτοὺς ἀναλελυμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

Α'. **Πολλαπλασιασμός.**

Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν πρὸς ποῖον γινόμενον πρώτων παραγόντων ἰσοῦται ;

129. — Ἔστω ὅτι

$$A=2^3\times3^5\times7^2$$

καὶ $B=2^2\times3^4\times7^2\times11$

τότε· $A\times B=(2^3\times3^5\times7^2)\times(2^2\times3^4\times7^2\times11)$

Ὅθεν (§ 46, δ'.)·

$$A\times B=2^3\times3^5\times7^2\times2^2\times3^4\times7^2\times11=2^5\times3^9\times7^4\times11$$

(§ 46, α'., 71 α'.).

ἤτοι τὸ γινόμενον $A \times B$, ἰσοῦται πρὸς γινόμενον ἔχον πρώτους παράγοντας πάντας τοὺς πρώτους, τοὺς παρουσιαζομένους εἰς τὰ γινόμενα τὰ ἴσα πρὸς Α καὶ Β καὶ ἐκθέτην εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐκθετῶν ἐν τοῖς Α καὶ Β.

Καὶ γενικῶς·

Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐκθετῶν.

Πῶς ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας ὑψοῦται εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην, . . . νυοστὴν δύναμιν ;

130. — Ἔστω

$$A = 2^3 \times 3^5 \times 7^2 \times 11$$

τότε (§ 129)·

$$A^2 = 2^{3\times2} \times 3^{5\times2} \times 7^{2\times2} \times 11^{1\times2}$$

$$A^3 = 2^{3\times3} \times 3^{5\times3} \times 7^{2\times3} \times 11^{1\times3}$$

. . . .

$$A^\nu = 2^{3\times\nu} \times 3^{5\times\nu} \times 7^{2\times\nu} \times 11^{1\times\nu}$$

ὅθεν :

Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας ὑψοῦται εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην, . . . νυοστὴν δύναμιν ἐὰν οἱ ἐκθέται πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2, 3, . . . ν.

Πῶς διακρίνομεν ἂν ἀριθμός τις ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἢ κύβος ἄλλου κ.τ.λ ;

131. — α΄.) Ἔστω $A = 2^6 \times 3^8 \times 7^4$,

ὅπου πάντες οἱ ἐκθέται εἶναι ἄρτιοι· τότε διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ 2 καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $2^3 \times 3^4 \times 7^2$· τὸ τετράγωνον τούτου (§ 130) εἶναι ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

β΄.) Ἔστω $A = 2^7 \times 3^8 \times 7^4$,

ὅπου δὲν εἶναι πάντες οἱ ἐκθέται ἄρτιοι. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ὑπῆρχεν ἄλλος τις ἀριθμὸς Β τοιοῦτος ὥστε $A=B^2$, τότε ἀναλύοντες εἰς πρώτους παράγοντας τὸν Β καὶ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον θὰ ἐλαμβάνομεν (§ 130) ἐκθέτας ἀρτίους· ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν ὁ B^2 νὰ δώσῃ $2^7\times 3^8\times 7^4$· ἄρα :

Ἀριθμός τις εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν οἱ ἐκθέται ἐν τῷ γινομένῳ τῶν πρώτων παραγόντων εἰς οὓς ἀναλύεται εἶναι ἄρτιοι καὶ τότε μόνον.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι·

Ἀριθμός τις εἶναι κύβος ἄλλου, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3 καὶ τότε μόνον. Καὶ γενικῶς·

Ἀριθμός τις εἶναι νυοστὴ δύναμις ἄλλου, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶναι διαιρετοὶ διὰ ν καὶ τότε μόνον.

Ἀσκήσεις.

163). Ἔστωσαν

$$A=2^3\times 3^5\times 11,\ B=2\times 3^4,\ \Gamma=2^2\times 5\times 23$$

Νὰ παρασταθῇ τὸ γινόμενον

$$A^2\times B^5\times \Gamma^3$$

ἀναλελυμένον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

164). Ἀριθμός τις εἶναι τετράγωνον ἄλλου, διαιρεῖται δὲ διὰ τοῦ 8. Νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 16. (§ 131)

165) Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις Α εἶναι διαιρετὸς διὰ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ καὶ δὲν εἶναι διὰ τοῦ τετραγώνου του· τότε ὁ Α δὲν εἶναι τετράγωνον. (§ 131)

166). Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων, θὰ εἶναι ἢ περιττὸς ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 4 (ἄσκ. 75).

167). Ἐὰν ἀριθμός τις Α εἶναι τετράγωνον ἄλλου, τότε ὁ ἀριθμὸς $A\times\Pi$, ὅπου Π εἶναι οἱοσδήποτε πρῶτος, δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου. (§ 129, 131)

Β'. Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλον.

Πῶς διακρίνομεν ἀμέσως, ὅταν ἔχωμεν δύο ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς πρώτους παράγοντας, ἂν ὁ εἷς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἄλλου;

132. — Ἔστω

$$A=2^5\times3^4\times7^2\times11 \text{ καὶ } B=2^3\times3^4\times11.$$

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ B ἀποτελοῦσιν ἓν μέρος τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ A· οἱ ἐπίλοιποι, οἵτινες εἶναι παράγοντες τοῦ A χωρὶς νὰ εἶναι τοῦ B, σχηματίζουσιν ἀριθμόν τινα Π καὶ ἔχομεν·

$$A=(2^3\times3^4\times11)\times(2^2\times7^2)=B\times\Pi.$$

Ὥστε, ἐὰν οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ B εἶναι καὶ πρῶτοι παράγοντες τοῦ A καὶ μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον, ὁ A διαιρεῖται διὰ τοῦ B.

Ἔστω

$$A=2^5\times3^4\times7^2\times11 \text{ καὶ } B=2\times3\times7^2\times13.$$

Ἐὰν ὁ A διῃρεῖτο διὰ τοῦ B, θὰ εἴχομεν·

$$2^5\times3^4\times7^2\times11=2\times3\times7^2\times13\times\Pi.$$

Ἀπὸ οἱουσδήποτε πρώτους παράγοντας καὶ ἂν ἀποτελῆται ὁ Π, θὰ ἔχωμεν εἰς τὸ δεύτερον γινόμενον τὸν παράγοντα 13 μὴ περιεχόμενον εἰς τὸ πρῶτον· ἑπομένως (§ 124) ἡ ἰσότης αὕτη δὲν εἶναι δυνατή· λοιπὸν ὁ A δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ B. Ἄρα·

Ἵνα ἀριθμός τις A διαιρῆται δι' ἄλλου B, πρέπει νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ B καὶ μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς $3^5\times7\times13^4$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $3^4\times7\times13^2$, δὲν διαιρεῖται δὲ διὰ τοῦ 3^6· ἐπίσης ὁ $2^7\times3\times5^3\times17^2$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $2^5\times3\times5^2\times17$, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 3^2.

'Ασκήσεις.

168). Τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως περιττοῦ δι' ἀρτίου οὐδέποτε εἶναι μηδέν (§ 132).

169.) $A = 2^7 \times 3^5 \times 5^4 \times 7, \; B = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times \beta^\lambda$

ὁ β εἶναι πρῶτος διάφορος τῶν $2, \quad 3, \quad 5.$

Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν β, λ, ἵνα ἡ διαίρεσις $A : B$ εἶναι τελεία.

170). 'Εὰν ἀριθμὸς δὲν διαιρῆται δι' οὐδενὸς ἐκ τῶν πρώτων, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχει, εἶναι πρῶτος. Ἔστω τοιοῦτος ὁ ἀριθμὸς A· ἐὰν ἦτο σύνθετος, θὰ ἀνελύετο εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων (§ 122), ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ A. Ἤτοι, ἐὰν

$$A = \alpha \times \beta \times \ldots,$$

θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, $\alpha^2 > A$, $\beta^2 > A$· καὶ ἑπομένως

$$\alpha^2 \times \beta^2 > A \times A\cdot$$

ἀλλ' ἡ ἀνισότης αὐτὴ δὲν δύναται νὰ συνυπάρχῃ μὲ τὴν ἰσότητα

$$A = \alpha \times \beta \times \ldots$$

171.) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἀριθμὸς

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$$

εἶναι μικρότερος τοῦ 17^2 καὶ ὅτι δὲν διαιρεῖται διὰ 11 καὶ διὰ 13, νὰ δειχθῇ ὅτι οὗτος εἶναι πρῶτος (§ 127).

175). Πῶς εὑρίσκονται πάντες οἱ διαιρέται δεδομένων ἀριθμῶν;

Ἔστω $A = \alpha^\lambda \times \beta^\mu \times \gamma^\nu,$

ὅπου α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι· τότε ἂς λάβωμεν ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^\lambda,$$

ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος

$$1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^\mu$$

καὶ ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος

$$1+\gamma+\gamma^2+\ .\ .\ .\ .\ +\gamma^\nu$$

καὶ ἂς πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς· θὰ ἔχωμεν ἕνα διαιρέτην τοῦ Α. καὶ ἀντιστρόφως πᾶς διαιρέτης τοῦ Α περιλαμβάνεται εἰς τοὺς οὕτω σχηματιζομένους. (§ 132).

Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν ἐνταῦθα ἐσχηματίσαμεν τοὺς διαιρέτας δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν εἶναι

$$(\lambda+1).\ (\mu+1).\ (\nu+1),$$

καὶ γενικῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς πρώτους παράγοντας ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῷ σχηματιζομένῳ μὲ παράγοντας τοὺς ἐκθέτας ηὐξημένους κατὰ μονάδα·

π.χ.· ἐὰν $A=2^3\times3^2\times5^7\times11,$

τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τοῦ Α θὰ εἶναι

$$(3+1)\times(2+1)\times(7+1)\times(1+1)=192.$$

173.) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ μὲ 12 διαιρέτας. (Ἄσκ. 172).

174.) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 7, 11, 13 καὶ ἔχων 12 διαιρέτας. (Ἄσκ. 172).

175.) Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐχόντων 6 διαιρέτας ; (Ἄσκ. 172).

176.) Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι τετράγωνον ἄλλου, ἔχει περιττὸν πλῆθος διαιρετῶν. (Ἄσκ. 172).

177.) Τὸ γινόμενον $\alpha\times(\alpha^2+20)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8, ἐὰν ὁ α εἶναι ἄρτιος (§ 132).

178.) Τὸ γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 24. (§ 117 § 132).

Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. καὶ τοῦ ε. κ. π. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας,

133.—Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, ὅπου

$$A=2^3\times3^2\times5\times7,\quad B=2^2\times3^4\times5^2\times11$$

$$\text{καὶ } \Gamma=2\times3^5\times5\times11^2.$$

Ἔστω κ ὁ τυχὼν κ. δ. αὐτῶν· πρέπει οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ κ νὰ περιέχωνται καὶ εἰς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς (§ 132)· ἄρα δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ὁ κ πρώτους παράγοντας διαφόρους τῶν 2, 3 καὶ 5 οἵτινες εἶναι κοινοί· ἤτοι ὁ κ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$2^{\lambda}\times 3^{\mu}\times 5^{\nu},$$

ὅπου ὁ λ θὰ εἶναι ἢ 0 ἢ 1 (§71, α΄.), ὁ μ ἢ 0 ἢ 1 ἢ 2 καὶ ὁ ν ἢ 0 ἢ 1.

Καὶ ἀντιστρόφως· Πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$2^{\lambda}\times 3^{\mu}\times 5^{\nu}$$

(ὅπου οἱ λ, ν δὲν ὑπερβαίνουσι τὴν μονάδα καὶ ὁ μ τὸν 2) θὰ εἶναι κ. δ. τῶν Α, Β, Γ (§ 132). Ὅθεν ὁ μ. κ. δ. θὰ εἶναι

$$2^{\lambda}\times 3^{\mu}\times 5^{\nu} \text{ ὅπου } \lambda=1,\ \mu=2,\ \nu=1\cdot \qquad \text{ἤτοι·}$$

Ὁ μ. κ. δ. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας ἰσοῦται πρὸς γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην.

134. — Ἂς ζητήσωμεν τὸ ε. κ. π. τῶν ἰδίων ἀριθμῶν. Ἔστω Π τὸ τυχὸν κ. π. αὐτῶν· τὸ Π θὰ περιέχῃ τὸ 2^3, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἦτο διαιρετὸν διὰ τοῦ Α· ὁμοίως θὰ περιέχῃ τὸ 3^5, τὸ 5^2, τὸ 7 καὶ τὸ 11^2 (§ 132), ἤτοι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Pi=2^{\lambda}\times 3^{\mu}\times 5^{\nu}\times 7^{\rho}\times 11^{\kappa}\times \dots, \qquad \text{ὅπου}$$

$$(1) \qquad \lambda\geq 3,\ \mu\geq 5,\ \nu\geq 2,\ \rho\geq 1,\ \kappa\geq 2$$

Καὶ ἀντιστρόφως·

Πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$2^{\lambda}\times 3^{\mu}\times 5^{\nu}\times 7^{\rho}\times 11^{\kappa}\times \dots$$

(ὅπου λ, μ, ν, ρ, κ ἔχουσι τιμὰς ὑπαγομένας εἰς τὰς σχέσεις (1)) εἶναι κ. π. τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ ὥστε τὸ ε. κ π θὰ εἶναι

$$2^3\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11^2\cdot \qquad \text{ἄρα·}$$

Τὸ ε. κ. π. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην.

Ἀσκήσεις.

Δι᾽ ἀναλύσεως εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

179). Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 36, 48, 108, τῶν 15, 612, 351 καὶ τῶν 68, 136, 255.

180). Ἐπίσης τῶν 21, 147, 252, τῶν 63, 315, 567, τῶν 56, 411, 602 καὶ τῶν 8496, 3744, 3696 καὶ 3720.

181). Ἐπίσης τῶν 15, 135, 180, τῶν 116, 281, 435, τῶν 140, 175, 315, τῶν 420, 580, 160, 870 καὶ τῶν 690, 315, 720, 1012.

182). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 15863 καὶ 21489, τῶν 99, 66, 462, 539, 1089, τῶν 225, 255, 289, 1023, 4095, τῶν 732, 428, 144, 86, τῶν 540, 270, 45, 15, καὶ τῶν 8316, 3414, 2366, 3332.

183). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μ. κ. δ. τὸν 12 καὶ ε. κ. π. τὸν 180.

Γενίκευσις.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι, ἐὰν καλέσωμεν α καὶ β δύο τοιούτους ἀριθμούς, ἔχομεν (§ 118)

$$\alpha \times \beta = 12 \times 180$$

καὶ $\alpha = 12 \times \Pi$, $\beta = 12 \times \Pi'$ ὅπου οἱ Π καὶ Π΄ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 103).

Διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας νὰ δειχθῇ ὅτι

184). α΄. Πᾶν κ. π. ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν (§ 134)

185). β΄. Τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν. (§ 134).

186). γ΄. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μ. κ. δ. ἐπὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν καὶ γενικῶς ν᾽ ἀποδειχθῶσιν αἱ ἰδιότητες τοῦ μ. κ. δ. καὶ ε. κ. π. (§ 100, 101, 102 103, 104).

187). Ἐκ τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α καὶ Β νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν A^3 καὶ B^3 (§ 130 § 133).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ὁρισμοί.

135. — Ὅπως, ἐὰν φαντασθῶμεν ἓν πρᾶγμα μοιρασθὲν εἰς δύο ἴσα μέρη, τότε ἕκαστον τῶν ἴσων μερῶν λαμβανόμενον δὶς δίδει τὸ ὅλον πρᾶγμα, οὕτω καὶ παραδεχόμεθα ὅτι ἔχομεν καὶ ἀριθμὸν ὅστις ἐπαναλαμβανόμενος δὶς δίδει τὴν μονάδα 1· τοῦτο καλοῦμεν *ἓν δεύτερον* ἢ καὶ *ἥμισυ* καὶ σημειοῦμεν $\frac{1}{2}$· ὁμοίως καλοῦμεν *ἓν τρίτον* καὶ σημειοῦμεν $\frac{1}{3}$ τὸν ἀριθμὸν διὰ τὸν ὁποῖον παραδεχόμεθα ὅτι ἐπαναλαμβανόμενος τρὶς δίδει τὴν μονάδα 1 κ. ο. κ. Καὶ γενικῶς·

Παριστῶμεν διὰ τοῦ $\frac{1}{\mu}$ τὸν ἀριθμὸν ὅστις παραδεχόμεθα ὅτι ἐπαναλαμβανόμενος μ φορὰς δίδει τὴν μονάδα 1.

Οἱ ἀριθμοὶ

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{\mu}$$

καλοῦνται *κλασματικαὶ μονάδες*. Ἡ δὲ μονὰς 1 λέγεται *ἀκεραία μονάς*. Αἱ κλασματικαὶ αὗται μονάδες καὶ οἱ δι' ἐπαναλήψεως τούτων γινόμενοι ἀριθμοὶ λέγονται *κλασματικοὶ ἀριθμοὶ* ἢ καὶ *κλάσματα* π. χ. ἡ ἐπανάληψις τοῦ $\frac{1}{5}$ τετράκις δίδει τὸ κλάσμα τέσσαρα πέμπτα, ὅπερ σημειοῦται $\frac{4}{5}$. Γενικῶς τὸ σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ δηλοῖ ὅτι τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{\beta}$ ἐπανελάβομεν α φοράς· καὶ ὁ α καλεῖται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ β *παρονομαστὴς* τοῦ κλάσματο ς.

Ἵνα ἀπαγγείλωμεν τὸ κλάσμα, μεταχειριζόμεθα διὰ μὲν τὸν ἀριθμητὴν τὰ ὀνόματα τῶν ἀπολύτων ἀριθμητικῶν, διὰ δὲ τὸν παρονομαστὴν τὰ τῶν τακτικῶν. Ὁ ἀριθμητὴς α δηλεῖ τὸ πλῆθος τῶν ληφθεισῶν κλασματικῶν μονάδων, ἐνῷ ὁ παρονομαστὴς β δεικνύει ποία μονὰς κλασματικὴ ἐπαναλαμβάνεται· ἤτοι· ἐὰν ἐπαναλάβωμεν β φορὰς τὴν ληφθεῖσαν κλασματικὴν μονάδα, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκεραίαν.

Ὅροι κλάσματος λέγονται ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ καὶ ὁ παρονομαστής.

Ἐὰν κλάσμα τι ἔχῃ ὅρους ἴσους, ὅπως $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ . . . . , εἶναι προφανῶς ἴσον τῇ ἀκεραίᾳ μονάδι. Ἐπεκτείνοντες τοὺς ὁρισμοὺς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος (§ 23) ἐπὶ τῶν κλασμάτων τῶν γινομένων δι' ἐπαναλήψεως τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος ἔχομεν ὅτι· κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα.

136. — Ἔχομεν τὸν ἀκέραιον 4 νὰ τρέψωμεν εἰς ἕβδομα. Ἑκάστη ἀκεραία μονὰς ἰσοῦται (§ 135) πρὸς $\frac{1}{7}$ ἑπτάκις λαμβανόμενον· ὅθεν αἱ 4 ἀκέραιαι μονάδες ἰσοῦνται πρὸς τὸ 28πλάσιον τοῦ $\frac{1}{7}$ ἤτοι

$$4 = \frac{4 \times 7}{7}$$

ὅθεν·

Πᾶς ἀκέραιος ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν δοθέντα ἀριθμόν, ἀριθμητὴν δὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἑαυτοῦ του ἐπὶ τὸν ἀριθμόν.

Περὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

137. — Ὁ $3\frac{4}{5}$ σύγκειται ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος· καλεῖται δὲ μικτός.

ὅπως ἐπίσης ὁ $7\frac{2}{9}$ καὶ γενικῶς·

Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος.

Ἔστω ὁ μικτὸς $4\frac{2}{7}$· ἐπειδὴ $4=\frac{4\times7}{7}$ ἔχομεν·

$$4\frac{2}{7}=\frac{4\times7+2}{7}$$

ὅθεν·

Μικτὸς τρέπεται εἰς κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν καὶ προστεθῇ εἰς τὸ γινόμενον ὁ ἀριθμητής, ὑπὸ τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτὸ γραφῇ ὁ αὐτὸς παρονομαστής.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

138. — Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{35}{8}$ τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{8+8+8+8+3}{8}$$

ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εἶχον, ἐὰν ἐπανελάμβανον τὸ $\frac{1}{8}$ πρῶτον 8 φοράς, ὁπότε θὰ εἶχον τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ἔπειτα ἄλλας 8 κ. ο. κ. ὁπότε θὰ εὕρισκον $4\frac{3}{8}$· προφανῶς ὁ ἀκέραιος 4 εἶναι ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως 35 : 8, ὁ δὲ ἀριθμητὴς 3 τὸ ὑπόλοιπον ὅθεν :

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος μείζονος τῆς μονάδος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Τὸ πηλίκον δηλοῖ τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον τὸν περιεχόμενον ἐν τῷ κλάσματι, τὸ δὲ ὑπόλοιπον λαμβάνομεν ὡς ἀρι-

θμητὴν καὶ τὸν διαιρέτην ὡς παρονομαστήν, ἵνα σχηματίσωμεν τὸ ἀπομένον κλάσμα.

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0, τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον.

Ἀσκήσεις.

188). Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοὶ

$$15\frac{2}{3},\quad 113\frac{4}{7},\quad 1043\frac{21}{31},\quad 15433\frac{25}{33},$$

$$121045\frac{106}{113},\quad 18300457\frac{1304}{2081}.$$

189). Ὁμοίως οἱ μικτοὶ

$$14\frac{13}{15},\quad 2003\frac{1}{7},\quad 57\frac{31}{43},$$

$$13\frac{83}{84},\quad 106\frac{119}{851},\quad 17\frac{2605}{2859}$$

190). Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες αἱ περιεχόμεναι εἰς τὰ κλάσματα

$$\frac{41}{9},\quad \frac{311}{12},\quad \frac{767}{224},\quad \frac{472694}{1101},$$

$$\frac{1218}{11},\quad \frac{315489}{187}$$

191). Ποσάκις τὸ $\frac{1}{9}$ περιέχεται εἰς τὸ 6;

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

Πόσον εἶναι τὸ γινόμενον κλάσματός τινος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του;

139. — Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$· τοῦτο κατὰ τὸν ὁρισμὸν (135) εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{1}{5}$· ἂς λάβω 5 φορὰς τὸ $\frac{2}{5}$· ἐπαναλαμβάνω πρῶτον 5 φορὰς τὸ $\frac{1}{5}$· ἀλλὰ πεντάκις ἐπαναλαμβανόμενον τὸ $\frac{1}{5}$ δίδει τὴν μονάδα· ὥστε 2×5 φορὰς θὰ δώσῃ 2 ἀκεραίας μονάδας· ὅθεν $\frac{2}{5}\times5=2$· ἤτοι·

Πᾶν **κλάσμα** *πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον* **τὸν** *ἀριθμητήν του.*

Ἄρα·

Πᾶν **κλάσμα δυνάμεθα** *νὰ θεωρῶμεν ὡς πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ* **τοῦ** *παρονομαστοῦ του.* (§ 58).

Καὶ οὕτως ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀκεραίων γίνεται τελεία, ὅταν διὰ τὸ πηλίκον ἐπιτραπῇ νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ κλασματικοὺς ἀριθμούς· π.χ. τῆς διαιρέσεως 12 : 5 πηλίκον εἶναι

τὸ $\frac{12}{5}$ ἤτοι τὸ $2\frac{2}{5}$·

ὁμοίως πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2 : 3 εἶναι τὸ $\frac{2}{3}$·

Τίνα μεταβολὴν πάσχει ἓν κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀκέραιον τὸν ἀριθμητήν του ἢ διαιρέσωμεν αὐτὸν διά τινος ἀκεραίου.

140. Τὸ $\frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ ἐπαναληφθῇ τρεῖς φορὰς τὸ $\frac{1}{4}$ (§ 135).

Τὸ $\frac{3\times5}{4}$ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν 3×5 φορὰς τὸ $\frac{1}{4}$· εὑρίσκομεν προφανῶς ἀριθμὸν πενταπλάσιον τοῦ προηγουμένου· ἢ καὶ ἀντιστρόφως· τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι πεντάκις μικρότερον τοῦ $\frac{3\times5}{4}$· ὅθεν·

Ἐὰν **ἀριθμητὴς** *κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀκέραιον, τὸ κλάσμα* **πολλαπλασιάζεται** *ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, ἐὰν δὲ διαιρεθῇ δι᾽* **ἀκεραίου** *τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου.*

Ποίαν μεταβολὴν πάσχει ἓν κλάσμα, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπί τινα ἀκέραιον, ἢ διαιρέσωμεν αὐτὸν διά τινος ἀκεραίου ;

141. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{5}{18}$· εἰς μὲν τὸ πρῶτον ἔχομεν τὸ $\frac{1}{6}$ νὰ ἐπαναλάβωμεν πεντάκις, εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἔχομεν τὸ $\frac{1}{18}$ νὰ ἐπαναλάβωμεν πεντάκις. Ἐπειδὴ ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{18}$ εἶναι τρὶς μικροτέρα τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{6}$ (ὡς φαίνεται, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ $\frac{1}{18}$ ἐπαναλαμβανόμενον 18 φορὰς δίδει τὴν μονάδα, ἐνῷ τὸ $\frac{1}{6}$ ἐπαναλαμβανόμενον 6 φορὰς δίδει τὴν μονάδα) τὸ δεύτερον κλάσμα $\frac{5}{18}$ θὰ εἶναι τρὶς μικρότερον τοῦ πρώτου $\frac{5}{6}$ ἢ καὶ ἀντιστρόφως· τὸ πρῶτον θὰ εἶναι τρὶς μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου· ἤτοι·

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀκέραιον, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου, ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ δι᾽ ἑνὸς ἀκεραίου, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.

Μεταβάλλεται ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν ;

142.— Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$ καὶ ρ τυχὼν ἀκέραιος· τότε τὸ

$$\frac{5\times\rho}{9} \text{ ἰσοῦται πρὸς } \frac{5}{9}\times\rho \qquad (\S\ 140)$$

Ἀφ᾽ ἑτέρου ἔχομεν (§ 141)

$$\frac{5\times\rho}{9\times\rho}=\frac{5\times\rho}{9}:\rho=\left(\frac{5}{9}\times\rho\right):\rho=\frac{5}{9}$$

ὅθεν·

Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν ἀλλάσσει, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

ἐπίσης·

Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν ἀλλάσσει, ὅταν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Π. χ. τὰ κλάσματα

$$\frac{12}{30},\ \frac{6}{15},\ \frac{2}{5}$$

ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀξίαν.

Ἀσκήσεις.

192). $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως διενεμήθησαν ἐξ ἴσου εἰς 8 ἀνθρώπους. πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

193). $7\frac{2}{5}$ τοῦ πήχεως διενεμήθησαν εἰς δύο ἀνθρώπους· πόσον ἔλαβεν ἕκαστος ;

194). Νὰ εὑρεθῶσι κλάσματα ἴσα πρὸς τὰ ἡμίση τῶν

$$\frac{7}{8},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6}.$$

195). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν κλασμάτων

$$\frac{2}{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{4}{5}.$$

196). Θεωροῦντες τὴν διαίρεσιν τῶν δύο ἀκεραίων πάντοτε ὡς τελείαν (§ 139) ἔχομεν ὅτι : τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων μένει τὸ αὐτό, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

143. — Λέγομεν ὅτι *ἁπλοποιοῦμεν* ἓν κλάσμα, ὅταν εὑρίσκωμεν ἄλλο ἔχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν ἀλλ' ὅρους μικροτέρους. Εἴδομεν ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\rho}{\beta\times\rho}\qquad (\S\ 142).$$

καὶ ἐπειδὴ ὡς πολλαπλασιαστὴν ρ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱονδήποτε ἀκέραιον, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀπειρίαν κλασμάτων ἰσοδυνάμων τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$ μὲ ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστὰς διαφόρους τῶν ἀρχικῶν.

Ἀντιστρόφως· ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος δι' ἑνὸς ἀκεραίου (κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων) λαμβάνομεν κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ μὲ μικροτέρους ὅρους (§ 142)· ὥστε, ἐὰν δοθῇ κλάσμα μὲ ὅρους μὴ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλο ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ μὲ ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο προφανῶς νὰ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν (§ 103)

π. χ. $$\frac{48}{108}=\frac{4}{9}$$

Προκύπτει ἤδη τὸ ἑξῆς ἐρώτημα· εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ἄλλο κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{4}{9}$ καὶ μὲ ὅρους μικροτέρους τῶν ὅρων αὐτοῦ;

144. — Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τυχὸν κλάσμα ἐκ τῶν ἴσων ἐν γένει τῷ $\frac{4}{9}$ ἤτοι·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{9}$$

Πολλαπλασιάζω ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ 9 καὶ τοῦ δευτέρου ἐπὶ β· θὰ ἔχω (§ 142)

$$\frac{\alpha\times 9}{\beta\times 9}=\frac{4\times\beta}{9\times\beta}$$

τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς, ἄρα (ὡς ἴσα) θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμητὰς (§ 135), ἤτοι·

(1) $$\alpha\times 9=4\times\beta$$

Ὁ ἀριθμὸς $\alpha\times 9$ ὡς ἴσος τῷ $4\times\beta$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4· ἀφ' ἑτέρου εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 9· ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὥστε (§ 117) ὁ $\alpha\times 9$ θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου 4×9· ὅθεν

$$\alpha\times 9=4\times 9\times\pi$$

ἐξ οὗ

$$\alpha=4\times\pi$$

Ἀντικαθιστῶντες ἤδη εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν α διὰ τοῦ ἴσου του $4\times\pi$ λαμβάνομεν

$$4\times\pi\times 9=4\times\beta$$

ὅθεν·

$$\beta=9\times\pi$$

Ἄρα

Ἐὰν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα, τοῦ δὲ ἑνὸς οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἑτέρου κλάσματος θὰ παράγωνται ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται ἀμέσως ὅτι·

145. — *Κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους δὲν ἔχει ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μικροτέρους ὅρους, ἤτοι δὲν ἁπλοποιεῖται πλέον.*

Τὰ κλάσματα τὰ μὴ ἁπλοποιούμενα καλοῦμεν *ἀνάγωγα.*

Προφανὲς εἶναι ὅτι·

Πᾶν κλάσμα ἀνάγωγον θὰ ἔχῃ ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

Ἐκ τῆς αὐτῆς προτάσεως (§ 144) συνάγομεν καὶ τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.

146. — 1ον). Ἔστωσαν δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἴσα πρὸς ἄλληλα·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

τότε (§ 144)·

$$\gamma=\alpha\times\pi, \qquad \delta=\beta\times\pi$$

ἀλλὰ τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον, ἑπομένως οἱ γ καὶ δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅθεν ὁ π θὰ ἰσοῦται τῇ μονάδι καὶ ἔχομεν·

$$\gamma=\alpha, \quad \delta=\beta$$

ἄρα·

Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωσιν ἴσους ἀριθμητὰς καὶ ἴσους παρονομαστάς.

147. — 2ον) *Πᾶν κλάσμα δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δύο ἀνάγωγα διάφορα.*

148. — 3ον) *Πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα παράγονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀναγώγου διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὅρων του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.*

Ἀσκήσεις.

197). Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα

$$\frac{13585}{27690}, \quad \frac{184568}{2189864}, \quad \frac{324}{612},$$

$$\frac{625}{9000}, \quad \frac{10265}{14371}, \quad \frac{128352}{238368}.$$

198). Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{4}{5}$ καὶ ἔχον ὅρους, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 54.

199). Πόσα εἶναι τὰ κλάσματα τὰ ἴσα πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{84}{108}$ καὶ ἔχοντα ὅρους μικροτέρους μὲν τῶν ὅρων αὐτοῦ, μεγαλυτέρους δὲ τῶν ὅρων τοῦ $\frac{14}{18}$;

200). Ὁ μ. κ. δ. δύο ὅρων ἑνὸς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{8}{10}$ εἶναι 34. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος. (§ 148)

201). Τὸ ε. κ. π. δύο ὅρων κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{36}{96}$ εἶναι 240. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος.

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ζητούμενον κλάσμα· τότε (§ 148)·

$$\alpha=3\times\lambda, \quad \beta=8\times\lambda$$

$$\text{καὶ } 240=3\times\lambda\times\rho=8\times\lambda\times\sigma$$

ἐντεῦθεν εὐκόλως συνάγομεν (§ 114) ὅτι

$$\rho=8 \text{ καὶ } \sigma=3, \text{ ὅθεν } \lambda=10.$$

202). Τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha}{15\alpha+1}$ εἶναι ἀνάγωγον, οἱουδήποτε ἀκεραίου ὄντος τοῦ α. Γενίκευσις (§ 74, § 75).

203). Τὸ κλάσμα $\dfrac{17\alpha+1}{18\alpha+1}$ εἶναι ἀνάγωγον οἱουδήποτε ὄντος τοῦ α. Γενίκευσις.

204). Δίδονται δύο κλάσματα $\dfrac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\dfrac{\gamma}{\delta}$ τοιαῦτα, ὥστε

$$\gamma\beta-\alpha\delta=1.$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ἀνάγωγα. [Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς κ. δ. τῶν α, β διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν γβ — αδ.]

205). Τρία κλάσματα $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\gamma}{\delta}$, $\dfrac{\lambda}{\mu}$ εἶναι τοιαῦτα ὥστε

$$\beta\gamma-\alpha\delta=\beta\lambda-\alpha\mu=1.$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἀνάγωγα.

206). Δίδεται δ μ. κ. δ. τῶν ὅρων κλάσματός τινος $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Ζητεῖται πόσα εἶναι τὰ κλάσματα τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὸ $\dfrac{\alpha}{\beta}$ καὶ μὲ μικροτέρους ὅρους. (§ 148).

207). Ἐὰν α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὰ κλάσματα $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ καὶ $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ εἶναι ἀνάγωγα. (Ἄσκ. 153).

208). Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ α τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha+8}{2\alpha-5}$ ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον;

Διὰ νὰ εἶναι τὸ κλάσμα αὐτὸ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν (§ 135)·

$$\alpha+8=2\alpha-5$$

ἢ καὶ $\qquad 8=\alpha-5 \qquad$ (ἄσκ. 21)·

ὅθεν (§ 34 α΄.) λαμβάνομεν $\alpha=13$· εὐκόλως ἐξάγομεν ἐντεῦθεν ὅτι, ἵνα τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον, πρέπει ὁ α νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 13.

209.) Ποίους ἀκεραίους δύναμαι νὰ προσθέσω εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{17}{25}$ χωρὶς νὰ μεταβάλω τὴν ἀξίαν τοῦ κλάσματος ; (§ 148).

210.) Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι $\frac{3}{7}$, τὸ δὲ ε. κ. π. αὐτῶν εἶναι 189. Τίνες οἱ ἀριθμοί ;

211.) Νὰ εὑρεθῶσι δύο κλάσματα ἰσοδύναμα πρὸς τὰ κλάσματα $\frac{16}{130}$, $\frac{9}{474}$ τοιαῦτα ὥστε, ἐὰν προσθέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου, εὑρίσκομεν ἄθροισμα ὅσον καὶ ἐὰν προσθέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου. (§ 148, § 114).

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα

149.— Τὰ κλάσματα τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν λέγονται *ὁμώνυμα*, τὰ δὲ μὴ τοιαῦτα *ἑτερώνυμα*, π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ εἶναι ὁμώνυμα, τὰ δὲ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{9}$ ἑτερώνυμα.

150.— Ἔστωσαν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\gamma}{\delta},\ \frac{\lambda}{\rho}.$$

Πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν κλασμάτων. Εὑρίσκομεν οὕτω κλάσματα ἰσοδύναμα (§ 142) πρὸς τὰ δοθέντα τὰ ἑξῆς·

$$\frac{\alpha\times\delta\times\rho}{\beta\times\delta\times\rho},\quad \frac{\gamma\times\beta\times\rho}{\delta\times\beta\times\rho},\quad \frac{\lambda\times\beta\times\delta}{\rho\times\beta\times\delta}.\qquad \text{ὅθεν·}$$

Ἵνα τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.

Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{7}$, τρέπονται εἰς τὰ

$$\frac{5\times9\times7}{8\times9\times7}, \quad \frac{4\times8\times7}{9\times8\times7}, \quad \frac{3\times8\times9}{7\times8\times9}.$$

151.— Γενικώτερον. Ἔστω π τυχὸν κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων (1). Δύναμαι νὰ σχηματίσω κλάσματα ἰσοδύναμα πρὸς ταῦτα καὶ μὲ παρονομαστὴν π· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσω ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον $\pi : \beta$, ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἐπὶ $\pi : \delta$, κ. ο. κ. ὅθεν·

Πάντοτε δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθέντα κλάσματα ἑτερώνυμα εἰς ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ τυχὸν κ. π. τῶν παρονομαστῶν.

Π. χ. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, καὶ τυχὸν κ.π. τῶν παρονομαστῶν ἔστω ὁ 48· δύναμαι νὰ τρέψω ταῦτα εἰς ἕτερα ἰσοδύναμα μὲ παρονομαστὴν 48 τὰ ἑξῆς· $\frac{5\times8}{6\times8}$, $\frac{1\times6}{8\times6}$, $\frac{3\times12}{4\times12}$.

Ἐγείρεται ἤδη τὸ ζήτημα· ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι διάφορα κλάσματα ;

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα δὲν εἶναι ἀνάγωγα, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν κοινὸν παρονομαστήν, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι κλάσματα ἀνάγωγα ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα. Θεωρήσωμεν λοιπὸν ἀνάγωγα κλάσματα

π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{8}{15}$.

Ἔστωσαν δὲ ὁμώνυμα ἴσα πρὸς ταῦτα τὰ $\frac{\alpha}{\pi}$, $\frac{\beta}{\pi}$, $\frac{\gamma}{\pi}$.

Ἐπειδὴ ἀφ' ἑνὸς μὲν οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 12 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀφ' ἑτέρου δ' ἔχομεν $\frac{7}{12}=\frac{\alpha}{\pi}$ ἔπεται (§144) ὅτι $\pi=12\times\rho$· ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\pi=20\times\rho'$ καὶ $\pi=15\times\rho''$, ὅθεν π εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν 12, 20, 15. Ἐὰν δὲ θέλωμεν ὁ κοινὸς οὗτος παρονομαστὴς π νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν τιμήν, εὐνόητον εἶναι ὅτι πρέπει νὰ εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν

12, 20, 15.

Ἄρα·

Ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι κλάσματα ἑτερώνυμα ἀνάγωγα εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς εἶναι ὁ 60.

Ἀσκήσεις.

212). Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα.

$$\frac{11}{12},\quad \frac{19}{20},\quad \frac{30}{36}.$$

213). Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{12},\quad \frac{7}{16},\quad \frac{31}{24},$$

ὅπως ἐπίσης καὶ τὰ κλάσματα·

$$\frac{11}{12},\quad \frac{108}{142},\quad \frac{57}{71},\quad \frac{140}{1065},\quad \frac{852}{2130}.$$

214). Ἐὰν ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς ἀναγώγων κλασμάτων διαιρεθῇ δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν θὰ δώσῃ πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

215). Τίνες ἄλλοι ἀριθμοί, πλὴν τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν καὶ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν, δύνανται νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς κοινοὶ παρονομασταί;

216). Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τότε ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

217). Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\frac{\delta}{\beta}$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων $\frac{\gamma}{\alpha^\mu}$ καὶ $\frac{\delta}{\beta^\nu}$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν· ἤτοι $\alpha^\mu \times \beta^\nu$ (§ 113)

218). Ἐὰν κοινός τις παρονομαστής, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι κλάσματα ἀνάγωγα, διαιρούμενος διὰ τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων δίδῃ πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, τότε αὐτὸς εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

152. — α) Ἔστω $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$· τοῦτο προφανῶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{3+2+1}{4}=\frac{6}{4}$.

Ὁμοίως

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{2+3+4}{7}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$$

ἄρα·

Ἵνα προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

β) Ἔστω

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{7}{10}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}+\frac{14}{20}=\frac{37}{20}=1\frac{17}{20}$$

ἤτοι :

Ἵνα προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ προσθέτομεν.

γ) Ἔστω

$$7\frac{2}{3}+5\frac{3}{4}=(7+5)+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)=12+\frac{17}{12}=13\frac{5}{12}$$

ἤτοι·

Ἵνα προσθέσωμεν μικτούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα.

Ἠδυνάμεθα, ἐννοεῖται, νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ νὰ ἔχωμεν οὕτω πρόσθεσιν κλασμάτων.

153. — Ἐπειδή, ὡς ἐκ τῶν προλεχθέντων εὐκόλως συνάγεται, ἡ πρόσθεσις κλασμάτων, εἴτε ἀκεραίων καὶ κλασμάτων, ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν ἀκεραίων, ἕπεται ὅτι ἰσχύει γενικῶς ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων (§ 27) καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως αἱ ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσαι.

Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\eta}{\theta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\eta}{\theta}+\frac{\gamma}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}\right) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

154. — *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.* (§ 32).

ἔχομεν

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}$$

ὁμοίως

$$\frac{9}{17}-\frac{5}{17}=\frac{4}{17}.$$

ἄρα·

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἔχομεν

$$\frac{5}{9}-\frac{3}{8}=\frac{40}{72}-\frac{27}{72}=\frac{13}{72}.$$

ὁμοίως $$\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}.$$ ἤτοι·

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν κλάσματα ἑτερώνυμα, τρέπομεν προηγουμένως αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

Ἤδη ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος εἶναι τυχόντες ἀριθμοί· ἀκέραιοι, κλασματικοὶ ἢ μικτοί·

α) $$8-\frac{2}{3}=7\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=7\frac{1}{3}$$

β) $$5\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=5\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=5\frac{1}{12}$$

γ) $$8\frac{5}{9}-4=4\frac{5}{9}$$

δ) $$15-3\frac{3}{4}=14\frac{4}{4}-3\frac{3}{4}=11\frac{1}{4}.$$

ε) $$7\frac{2}{5}-5\frac{3}{5}=6\frac{7}{5}-5\frac{3}{5}=1\frac{4}{5}$$

155. — Διὰ τῶν ἀνωτέρω πράξεων ἡ ἀφαίρεσις ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων καὶ ἑπομένως εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἰσχύουσι καὶ ἐνταῦθα αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων· ἤτοι αἱ ἰσότητες

$$(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\alpha-\beta,$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma,$$

$$\gamma-(\alpha+\beta)=(\gamma-\alpha)-\beta,$$

$$\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta,$$

ἰσχύουσι, καὶ ἐὰν τὰ α, β, γ, δ δὲν εἶναι μόνον ἀκέραιοι.

Ἀσκήσεις.

219). Ἐδαπάνησέ τις κατὰ τὸ ἔτος 1914 τὰ $\frac{3}{10}$ τῆς περιουσίας του· κατὰ τὸ 1915 τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτῆς· ποῖον μέρος τῆς περιουσίας του ἐδαπάνησε κατὰ τὸ 1916 γνωστοῦ ὄντος ὅτι τῷ ἀπέμεινε μετὰ τὸ ἔτος αὐτὸ τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς περιουσίας του ;

220). Προσέλαβέ τις διὰ τὴν ἀντιγραφὴν ἑνὸς ἔργου τέσσαρας γραφεῖς. Ἐκ τούτων ὁ πρῶτος ἠδύνατο μόνος ν' ἀντιγράψῃ αὐτὸ εἰς 15 ἡμέρας, ὁ δεύτερος εἰς 16, ὁ τρίτος εἰς 12 καὶ ὁ τέταρτος εἰς 20 ἡμέρας. Ποῖον μέρος τοῦ ἔργου δύνανται ν' ἀντιγράψωσιν, ἐὰν ἐργασθῶσιν ὅλοι συγχρόνως ἐπὶ δύο ἡμέρας ;

221). Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τοῦ μικροτέρου τῶν κλασμάτων

$$\frac{5}{8},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{7}{15}.$$

222). Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{12}{25},\quad \frac{3}{20},\quad \frac{7}{90},\quad \frac{45}{60}.$$

Ἀθροίζω τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τούτων, χωριστὰ δὲ τὰ δύο ἄλλα. Ποῖον ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερον καὶ κατὰ πόσον ;

223). Ἐκ τεσσάρων κρηνῶν δεξαμενῆς αἱ δύο πρῶται δύνανται νὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν, ἡ μὲν εἰς 15 ὥρας, ἡ δὲ εἰς 24 ὥρας, αἱ δὲ δύο ἄλλαι, δύνανται νὰ κενώσωσι τὴν δεξαμενὴν ἡ μὲν εἰς 20 ὥρας ἡ δὲ εἰς 48. Τῆς δεξαμενῆς οὔσης κενῆς ἀφήνονται καὶ αἱ τέσσαρες ἀνοικταί. Μετὰ τρεῖς ὥρας τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ ἔχῃ πληρωθῇ ;

224). Δύο κλάσματα ἀνάγωγα μὲ παρονομαστὰς διαφόρους προστιθέμενα δὲν δίδουσιν ἀκέραιον. (§ 75, § 114).

225). Τρία κλάσματα ἀνάγωγα ἀθροιζόμενα δὲν δίδουσιν ἀκέραιον, ἐὰν πρῶτος τις παράγων ἑνὸς τῶν παρονομαστῶν δὲν εὑρίσκεται εἰς ἕνα τοὐλάχιστον τῶν ἄλλων δύο παρονομαστῶν.

226). Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον, ἐὰν οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ κοινὸς παρονομαστὴς ὁ ἐλάχιστος. (§ 114, § 75).

227). Τὸ ἄθροισμα ἀναγώγων κλασμάτων μὲ παρονομαστὰς πρώτους πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο δὲν εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Πῶς πολλαπλασιάζεται κλάσμα ἢ μικτὸς ἐπὶ ἀκέραιον ;

156.=Εἴδομεν ὅτι (§ 140, § 141)

$$\frac{7\times5}{10}=\frac{7}{10}\times5 \quad \text{καὶ} \quad \frac{7}{10:5}=\frac{7}{10}\times5$$

ὅθεν καὶ

$$\frac{7}{10}\times5=\frac{7\times5}{10} \quad \text{καὶ} \quad \frac{7}{10}\times5=\frac{7}{10:5}$$

ὥστε·

Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς δι' αὐτοῦ, ἐὰν διαιρῆται.

Ἔστω ἤδη

$$\left(7\frac{2}{3}\right)\times4$$

Ἔχομεν

$$\left(7\frac{2}{3}\right)\times4=\left(7\times4\right)+\left(\frac{2}{3}\times4\right)=28+\frac{8}{3}=30\frac{2}{3}$$

ἢ καὶ

$$\left(7\frac{2}{3}\right)\times4=\frac{23}{3}\times4=\frac{92}{3}=30\frac{2}{3}$$

Ἤτοι·

Πολλαπλασιάζεται μικτὸς ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη αὐτοῦ χωριστὰ καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα, ἢ ἐὰν τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.

Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

157.—Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

α΄) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν αἱ 3 ὀκάδες ; Προφανῶς ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶνε $2^{\text{δρ.}} \times 3$.

β΄.) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2 δραχμάς, πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς ὀκᾶς ;

Ἀφοῦ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 2 δραχμὰς

τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς ὀκᾶς θὰ ἀξίζῃ $\frac{2}{7}$ δρ.

καὶ τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς ὀκᾶς θὰ ἀξίζουν $\frac{2}{7} \times 3$ δρ.

ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἐνταῦθα θὰ κάμωμεν δύο πράξεις. Θὰ μερίσωμεν κατ' ἀρχὰς τὸν 2 εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ θὰ λάβωμεν κατόπιν ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων 3 φοράς.

γ΄.) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει 4 δρ. Πόσον ἀξίζουν οἱ $2\frac{3}{8}$ πήχεις ;

Ἀφοῦ 1 πῆχυς ἀξίζει 4 δρχ. οἱ 2 πήχεις ἀξίζουν $4^{\text{δρ.}} \times 2$.
Ἐπίσης ἀφοῦ 1 πῆχ. ἀξίζει 4 δρχ.

$\frac{1}{8}$ πήχ. ἀξίζει $\frac{4}{8}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ πήχ. ἀξίζουν $\frac{4}{8}^{\text{δραχ.}} \times 3$

ὥστε οἱ $2\frac{3}{8}$ πήχ. θὰ ἀξίζουν δρχ. $4 \times 2 + \frac{4}{8} \times 3$

158. — Καὶ εἰς τὰ τρία ἀνωτέρω προβλήματα δίδεται ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος, ζητεῖται δὲ

εἰς μὲν τὸ πρῶτον ἡ ἀξία πολλῶν ἀκεραίων μονάδων,

εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἡ ἀξία πολλῶν κλασματικῶν μονάδων,

καὶ εἰς τὸ τρίτον ἡ ἀξία πολλῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν μονάδων.

Τὸ πρῶτον ὅμως λύεται προφανῶς διὰ πολλαπλασιασμοῦ.

Συμφωνοῦμεν δι' αὐτὸ αἱ δύο πράξεις δι' ὧν ἐλύσαμεν τὸ δεύτερον νὰ ὀνομασθῶσι *πολλαπλασιασμός*, ὅπως ἐπίσης καὶ αἱ πράξεις δι' ὧν ἐλύσαμεν τὸ τρίτον.

Ὅπως καὶ εἰς τὸ πρῶτον πολλαπλασιαστέος ἦτο ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος,

οὕτω καὶ εἰς τὸ δεύτερον καὶ εἰς τὸ τρίτον θεωροῦμεν πολλαπλασιαστέον πάλιν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος.

Κατόπιν τῆς ἀνωτέρω συμφωνίας δυνάμεθα νὰ λέγωμεν εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ζητουμένου εἶναι τὸ γινόμενον $2\times\frac{3}{7}$ δραχ.· ἤτοι κατὰ τὰ προειρημένα θὰ ἔχωμεν·

$$\frac{2}{7}\times 3=2\times\frac{3}{7}$$

ἢ καὶ

$$2\times\frac{3}{7}=\frac{2}{7}\times 3$$

ὥστε, ὅταν λέγωμεν ὅτι πολλαπλασιάζομεν τὸν 2 ἐπὶ $\frac{3}{7}$, ἐννοοῦμεν ὅτι ἐπαναλαμβάνομεν τὸ ἓν ἕβδομον τοῦ 2 τρεῖς φοράς. Ὁμοίως, ὅταν λέγωμεν ὅτι πολλαπλασιάζομεν τὸν 4 ἐπὶ $2\frac{3}{8}$, ἐννοοῦμεν ὅτι ἐπαναλαμβάνομεν τὸν 4 δύο φορὰς καὶ τὸ ὄγδοον τοῦ 4 τρεῖς φορὰς καὶ σχηματίζομεν οὕτως ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.

Τὰς αὐτὰς σκέψεις θὰ ἐκάμνομεν, καὶ ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος ἦτο κλάσμα ἢ μικτός.

Κατὰ ταῦτα γενικεύεται ὁ πολλαπλασιασμὸς ὡς ἑξῆς·

Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις ἐν ᾗ ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἢ καὶ μέρος τι αὐτοῦ καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.

Πῶς σχηματίζεται τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν;

159. — **Ἐπειδὴ**

α') $2\times4=2+2+2+2$

καὶ $4=1+1+1+1$

β') $2\times\frac{3}{7}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$ (§ 158)

καὶ $\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$

γ') $4\times2\frac{3}{8}=4\times2+4\times\frac{3}{8}=4+4+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}$

καὶ $2\frac{3}{8}=1+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

συνάγομεν ὅτι σχηματίζεται γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ὡς ἑξῆς·

Δι' ἑκάστην ἀκεραίαν μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λαμβάνομεν μίαν φορὰν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ δι' ἑκάστην κλασματικὴν μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἔστω τὴν $\frac{1}{\nu}$, *λαμβάνομεν τὸ νυοστὸν μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ προσθέτομεν τὰ ληφθέντα.*

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀκέραιος ἐπὶ κλάσμα;

160.—Ἔστω $8 \times \frac{2}{9}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν·

$$8 \times \frac{2}{9} = \frac{8}{9} \times 2 = \frac{8 \times 2}{9} \qquad (\S\ 156)$$

ἄρα·

Ἀριθμὸς ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γραφῇ ὁ παρονομαστής.

Πῶς πολλαπλασιάζεται κλάσμα ἐπὶ κλάσμα;

161.—Ἔστω $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 158)

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \left(\frac{3}{4} : 7\right) \times 2 = \frac{3}{4 \times 7} \times 2 \qquad (\S\ 141)$$

ὅθεν·
$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{4 \times 7} \qquad (\S\ 140)$$

ἄρα·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν καὶ γράφομεν τὸ δεύτερον γινόμενον ὑπὸ τὸ πρῶτον.

Πῶς πολλαπλασιάζεται μικτὸς ἐπὶ κλάσμα;

162.—Ἔστω

$$5\frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 158) πρέπει νὰ λάβωμεν κατ' ἀρχὰς τὸ τέταρτον τοῦ $5\frac{7}{8}$.

Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν αὐτὸ ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ποῖος ἀριθμὸς τετράκις λαμβανόμενος δίδει τὸν $5\frac{7}{8}$· παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι, ἐὰν λάβωμεν τὸν $\frac{5}{4}$ τέσσαρας φοράς, εὑρίσκομεν τὸν 5 (§ 139). ὡς ἐπίσης, ἐὰν λάβωμεν τὸν $\frac{7}{8\times4}$ τετράκις, ἔχομεν τὸν $\frac{7}{8}$ (§ 141)· ὥστε, ἐὰν ληφθῇ ὁ $\frac{5}{4}+\frac{7}{8\times4}$ τετράκις, εὑρίσκεται ὁ $5\frac{7}{8}$· ἤτοι τὸ τέταρτον τοῦ $5\frac{7}{8}$ εἶναι $\frac{5}{4}+\frac{7}{8\times4}$· ἑπομένως

$$5\frac{7}{8}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{5}{4}+\frac{7}{8\times4}\right)\times3=\frac{5}{4}\times3+\frac{7}{8\times4}\times3=$$
$$=\frac{5\times3}{4}+\frac{7\times3}{8\times4}=5\times\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\times\frac{3}{4}\quad(\S\ 160,\ \S\ 161).$$ Ἄρα·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἠδυνάμεθα προφανῶς καὶ νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν.

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ μικτόν;

163.—Ἔστω

$$\alpha\times4\frac{2}{9}.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 158) ἔχομεν·

$$\alpha\times4\frac{2}{9}=\alpha\times4+\frac{\alpha}{9}\times2=\alpha\times4+\alpha\times\frac{2}{9}\quad(\S\ 158).$$

Ἄρα·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ μικτόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωρι-

στὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Π. χ. $6\times5\frac{1}{4}=6\times5+6\times\frac{1}{4}=30+\frac{6}{4}=31\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{3}\times5\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\times5+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2\times5}{3}+\frac{2\times1}{3\times4}=3\ \frac{1}{2}$$

$$6\frac{2}{3}\times5\frac{1}{4}=6\frac{2}{3}\times5+6\ \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=$$

$$=6\times5+\frac{2}{3}\times5+6\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=$$

$$=30+\frac{10}{3}+\frac{6}{4}+\frac{2}{12}=35$$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

164.—Ἔστωσαν πρὸς πολλαπλασιασμὸν τὰ κλάσματα (§ 39)

$$\frac{7}{8},\quad\frac{4}{11},\quad\frac{5}{6},\quad\frac{2}{3},$$

καθ' ἣν τάξιν εἶναι γεγραμμένα· τοῦτο θὰ παριστῶμεν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}.$$

ἔχομεν πρῶτον $\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}=\frac{7\times4}{8\times11}$ (§ 161) ὅθεν

$$\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}\times\frac{5}{6}=\frac{7\times4\times5}{8\times11\times6}$$ καὶ ἑπομένως

$$\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{7\times4\times5\times2}{8\times11\times6\times3}$$

ἄρα·

Τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

165.—Ἔστω $5\times\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times2\times\frac{6}{7}$ (§ 39)·

Ἔχομεν·

$$5\times\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times2\times\frac{6}{7}=\frac{5\times3\times8\times2\times6}{4\times9\times7} \qquad (\S\ 160,\ \S\ 161)$$

ἀλλὰ καὶ

$$\frac{3}{4}\times2\times\frac{6}{7}\times5\times\frac{8}{9}=\frac{3\times2\times6\times5\times8}{4\times7\times9}$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα (§ 40) ἕπεται ὅτι

$$5\times\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times2\times\frac{6}{7}=\frac{3}{4}\times2\times\frac{6}{7}\times5\times\frac{8}{9}$$

ἄρα·

Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

166.—Τοὺς ἀκεραίους καὶ κλασματικοὺς καλοῦμεν μὲ ἓν ὄνομα *συμμέτρους*.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἰδιότης τῆς *ἀντιμεταθέσεως* (§ 45) ἰσχύει καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν *συμμέτρων* ἀριθμῶν· ἐπομένως καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσαι.

167.—Εἴδομεν ἀνωτέρω πῶς πολλαπλασιάζεται μικτὸς ἐπὶ ἀριθμόν· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι·

Ἄθροισμα οἱονδήποτε πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ὥστε καὶ ἡ δευτέρα θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τουτέστιν ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης, ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς συμμέτρους ἐν γένει ἀριθμούς, ἐπομένως καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

168.—Ἔστω

$\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{4}{9}$· τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$\left(\frac{3\times7}{5\times7}-\frac{2\times5}{5\times7}\right)\times\frac{4}{9}=\frac{(3\times7)-(2\times5)}{5\times7}\times\frac{4}{9}=$$

$$\frac{(3\times7\times4)-(2\times5\times4)}{5\times7\times9}=\frac{3\times7\times4}{5\times7\times9}-\frac{2\times5\times4}{5\times7\times9}$$

$$=\left(\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}\right)-\left(\frac{2}{7}\times\frac{4}{9}\right)$$

Καὶ γενικῶς·

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)-\left(\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$$

ἤτοι·

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Συμπέρασμα διὰ τὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων.

169.—Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ ἰδιότητες αἱ παριστώμεναι διὰ τῶν ἰσοτήτων

$$\alpha\times\beta\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$$
$$(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times\beta\times(\gamma\times\delta)$$
$$(\alpha\times\beta\times\gamma)\times(\delta\times\varepsilon)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon$$
$$(\alpha+\beta)\times\gamma=(\alpha\times\gamma)+(\beta\times\gamma)$$
$$(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=(\alpha\times\gamma)+(\beta\times\gamma)+(\alpha\times\delta)+(\beta\times\delta)$$
$$(\alpha-\beta)\times\gamma=(\alpha\times\gamma)-(\beta\times\gamma)$$

ἰσχύουσι, καὶ ὅταν τὰ γράμματα παριστῶσιν οἱουσδήποτε συμμέτρους.

Ἀσκήσεις.

228.) Πατήρ τις ἀφήνει εἰς τοὺς 4 υἱούς του περιουσίαν ἐξ 80000 δραχμῶν. Συμφώνως πρὸς τὴν διαθήκην του δέον νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιουσίας· ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου· ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου· ὁ δὲ τέταρτος τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον. Τί μέρος τῆς περιουσίας ἔλαβεν ὁ τέταρτος καὶ ἐκ πόσων δραχμῶν ἀπετελεῖτο ;

229.) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὕψους ἐξ οὗ πίπτει· πεσοῦσα δὲ ἀπὸ ὕψους 7 μέτρων ἀνεπήδησε τρίς· εἰς πόσον ὕψος ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν ;

230.) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha+1}\right)=\frac{1}{\alpha^2-1}$

231.) Πότε τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ; (§ 132).

232.) Ἔστωσαν δύο ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. πότε τὸ γινόμενόν των $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον ;

233.) Τὸ γινόμενον $\frac{1}{\mu}.\frac{1}{\mu+1}$ νὰ γραφῇ ὡς διαφορὰ δύο κλασμάτων μὲ τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς μ καὶ $\mu+1$.

234.) Τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{\mu(\mu+1)}$$

ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ $1-\frac{1}{\mu+1}$ (Ἄσκ. 233)

235.) Τὸ γινόμενον

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\ldots\frac{2\mu-1}{2}$$

ἰσοῦται πρὸς τὸ κλάσμα

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\ldots\ldots(2\mu-1)\,2\mu}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots\ldots\ldots\,\mu.\,2^{2\mu}}$$

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$1.2.3\ldots\ldots \mu.\ 2^{\mu}=(1.2)\,.\,(2.2)\,.\,(3.2)\ldots\ldots(\mu.\ 2)=2\,.\,4\,.\,6\ldots.2\mu$$

καὶ ἐπομένως

$$1.\ 3.\ 5.\ 7\ldots.(2\,\mu-1)\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\mu\,.\,2^{\mu}=$$
$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,.\,.\,(2\mu-1)\,.\,2\mu$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

170.— *Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τρίτον ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον*· ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον*· καὶ ἐκ τῶν δύο δεδομένων ὁ πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος *διαιρέτης*. (§ 57)

1). Διαιρέτης ἀκέραιος.

171.—α') Ἔχομεν· $\frac{2}{5}:7=\frac{2}{5\times7}$ (§ 141)

ἢ καὶ $\frac{6}{7}:2=\frac{6:2}{7}$ (§ 140)

ὅθεν·

Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν δι' αὐτοῦ, ἐὰν γίνεται ἀκριβῶς ἡ διαίρεσις.

172.—β') Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$5\frac{7}{8}:4$$

ἔχομεν· $5\frac{7}{8}:4=\frac{47}{8}:4=\frac{47}{8\times4}$ (§ 171)

ἔχομεν ἐπίσης· $5\frac{7}{8}:4=\frac{5}{4}+\frac{7}{8\times4}$ (§ 162) ἤτοι·

Ἵνα διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, ἢ τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα, ἢ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα, καὶ προσθέτομεν τὰ πηλίκα.

2) *Διαιρέτης κλάσμα.*

173.—Ἔστω

$$\alpha : \frac{4}{9}$$

ὅπου α σύμμετρος· παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{9}$ αὐτοῦ τετράκις, γίνεται α (§ 170) καὶ ἑπομένως τὰ 9 ἔνατα αὐτοῦ ληφθέντα τετράκις γίνονται $\alpha\times 9$, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ πηλίκον ληφθὲν τετράκις γίνεται $\alpha\times 9$· ἄρα ληφθὲν ἅπαξ γίνεται

$$\frac{\alpha\times 9}{4}=\alpha\times\frac{9}{4} \qquad \text{ὅθεν·}$$

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον·

π. χ. $$7\frac{1}{2} : \frac{5}{6}=7\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}=9$$

ἐπίσης $$\frac{13}{14}:\frac{14}{13}=\frac{13}{14}\times\frac{13}{14}=\frac{13^2}{14^2}$$

3) *Διαιρέτης μικτός.*

174.—Ἔστω

$$\alpha : 2\frac{5}{9}$$

ἔχομεν·

$$\alpha : 2\frac{5}{9}=\alpha : \frac{23}{9}=\alpha\times\frac{9}{23} \qquad (\S\ 173)$$

ἄρα·

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ μικτοῦ, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν.

Π. χ. $$4\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}=4\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=2.$$

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

175.— 1) Ἔστω

$$\frac{3}{4}:\frac{2}{7}=\pi$$

τότε

$$\frac{3}{4}=\frac{2}{7}\times\pi \qquad \text{καὶ (§ 169)}$$

$$\frac{3}{4}\times\rho=\left(\frac{2}{7}\times\rho\right)\times\pi\cdot \qquad \text{ὅθεν (§ 170)}$$

$$\left(\frac{3}{4}\times\rho\right):\left(\frac{2}{7}\times\rho\right)=\pi$$

καὶ γενικῶς

$$(\alpha\times\rho):(\beta\times\rho)=\alpha:\beta \qquad \text{Ἄρα·}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.

2) Ὁμοίως καὶ *ἐὰν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει·* ἤτοι·

$$(\alpha:\rho):(\beta:\rho)=\alpha:\beta.$$

Ὅπως διὰ τοὺς ἀκεραίους (§ 60, 61, 62, 63) οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἰσχύουσι καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως αἱ ἰδιότητες αἱ παριστώμεναι διὰ τῶν ἰσοτήτων

3) $(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$

4) $(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)$

5) $(\alpha\times\beta\times\gamma):\delta=\alpha\times(\beta:\delta)\times\gamma$

6) $\alpha:(\beta\times\gamma\times\delta)=[(\alpha:\beta):\gamma]:\delta$

Ἀσκήσεις.

236). Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς $3\frac{1}{2}$ ὥρας, δεύτερος εἰς $2\frac{1}{2}$ καὶ τρίτος εἰς 3 ὥρας· ἕτερος δὲ κρουνὸς δύναται νὰ κενώσῃ τὴν δεξαμενὴν ἐντὸς 2 ὡρῶν. Ἂν ἀνοιχθῶσι καὶ οἱ τέσσαρες κρουνοὶ συγχρόνως εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή ;

237). Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{3}{11}$ τοῦ ὕψους ἐξ οὗ πίπτει· πεσοῦσα δὲ ἀπό τινος ὕψους καὶ ἀναπηδήσασα τετράκις ὑψώθη κατὰ τὴν τετάρτην ἀναπήδησιν εἰς ὕψος $\frac{1}{12}$ τοῦ πήχεως. Πόσον εἶναι τὸ ἀρχικὸν ὕψος ;

238). Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα $10^{\text{χλμ.}}$ καθ' ὥραν· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀναχωρεῖ μετὰ ἓν τέταρτον ἄλλη ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα $12^{\text{χλμ.}}$ καθ' ὥραν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἐκκινήσεως θὰ συναντηθῶσι ;

239). Τέσσαρες ἐργάται πρόκειται νὰ ἐκτελέσωσιν ἔργον τι· ἡ ἐκτέλεσις τούτου, ἐὰν ἔλειπεν ὁ τέταρτος, θὰ ἀπῄτει 8 ἡμέρας, ἐνῷ, ἐὰν ἔλειπεν ὁ τρίτος, θὰ ἀπῄτει 10 ἡμέρας, ἐὰν ὁ δεύτερος, 12 ἡμέρας, καὶ ἐὰν ὁ πρῶτος, 14 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας ἕκαστος ἐκ τούτων μόνος θὰ ἐξετέλει τὸ ἔργον καὶ εἰς πόσας ὅλοι ὁμοῦ ;

240). Τρεῖς γεωργοὶ ἀνοίγουσιν αὔλακα διερχομένην ἀπὸ τὸν ἀγρὸν τοῦ πρώτου εἰς μῆκος 128 μέτρων, ἀπὸ τὸν τοῦ δευτέρου εἰς μῆκος 72 μέτρων καὶ ἀπὸ τὸν τοῦ τρίτου εἰς μῆκος 88. Διὰ τὸ ταχύτερον προσλαμβάνουσι καὶ τέταρτον, εἰς ὃν δίδεται ἀμοιβὴ 90 δραχμῶν. Τί θὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἐκ τῶν τριῶν εἰς τὸν τέταρτον ἐργάτην ;

241). Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ὅπερ διαιρούμενον διὰ τῶν κλασμάτων

$$\frac{18}{48},\ \frac{56}{45},\ \frac{9}{60}$$

δίδει ὡς πηλίκα ἀριθμοὺς ἀκεραίους· ποῖον τὸ μικρότερον ἐξ αὐτῶν ; (§ 143, § 114)

242). Πότε τὸ πηλίκον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ; (§ 132)

243). Πότε τὸ πηλίκον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον ;

ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

176. —Ὅπως $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπου α καὶ β ἀκέραιοι, παριστᾷ τὸ πηλίκον α : β, (§ 139), οὕτω θὰ παριστῶμεν καὶ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε συμμέτρων ἀριθμῶν α καὶ β διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$. Κατὰ ταῦτα·

$$8 : \frac{2}{3} = \frac{8}{\frac{2}{3}}, \qquad 9\frac{3}{7} : 4\frac{5}{6} = \frac{9\frac{3}{7}}{4\frac{5}{6}}$$

Αἱ τοιαῦται παραστάσεις λέγονται *σύνθετα κλάσματα.*

Γενικῶς: ἐὰν τὸ πηλίκον δύο τυχόντων συμμέτρων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ εἷς τοὐλάχιστον δὲν εἶναι ἀκέραιος, παραστήσωμεν ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην, προκύπτει παράστασις ἡ ὁποία λέγεται *σύνθετον κλάσμα.*

ΣΗΜ. Τὰ κλάσματα, ὧν οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καλοῦμεν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συνθέτων, *ἁπλᾶ* κλάσματα.

Ἰδιότητες τῶν συνθέτων κλασμάτων.

177. — Ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$· σχηματίζω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\times\rho}{\beta\times\rho}$, ὅπου ρ τυχὼν σύμμετρος. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν συνθέτων κλασμάτων ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$

καὶ $\frac{\alpha\times\rho}{\beta\times\rho} = (\alpha\times\rho) : (\beta\times\rho)$

ἀλλὰ (§ 175) $\alpha : \beta = (\alpha\times\rho) : (\beta\times\rho)$

ὅθεν καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\times\rho}{\beta\times\rho}$ ἄρα·

Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι συνθέτου κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.

Ἐφαρμογαί.— Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐφαρμόζομεν εἰς τὴν τροπὴν συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν ἰσοδύναμον καὶ εἰς τὴν τροπὴν ἑτερωνύμων συνθέτων εἰς ὁμώνυμα τοιαῦτα.

1) Ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{15}}$· διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ε. κ. π. τῶν 12, 15 εὑρίσκομεν

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{15}}=\frac{\frac{5}{12}\times 60}{\frac{7}{15}\times 60}=\frac{25}{28}.$$

2) Τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$, $\dfrac{\frac{7}{8}}{9}$, $\dfrac{2}{\frac{3}{5}}$ εἶναι προφανῶς ἓν πρὸς ἓν ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὁμώνυμα

$$\frac{\frac{3}{4}\times 9\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}\times 9\times\frac{3}{5}},\quad \frac{\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}{9\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}},\quad \frac{2\times\frac{2}{5}\times 9}{\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times 9}.$$

178.—1) Ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$· ἐὰν καλέσωμεν π τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{3}{4}$ διὰ $\frac{5}{7}$, θὰ εἶναι (§ 170) $\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\pi$· ὅθεν·

$$\frac{3}{4}\times\rho=\frac{5}{7}\times\left(\pi\times\rho\right)$$ (§ 169) καὶ ἑπομένως

$$\frac{\frac{3}{4}\times\rho}{\frac{5}{7}}=\pi\times\rho.$$ ἄρα·

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς συνθέτου κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, καὶ τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

2) Ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\pi$$

προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης

$$\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\left[(\pi:\rho)\times\rho\right]=\frac{5}{7}\times\rho\times\left(\frac{\pi}{\rho}\right)\quad \text{ὅθεν}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}\times\rho}=\frac{\pi}{\rho}\quad \text{ἄρα·}$$

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς συνθέτου κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

3) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι συνάγομεν καὶ τὴν ἀλήθειαν τῆς ἑξῆς ἰδιότητος.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς συνθέτου κλάσματος διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται.

Ἐκ τῶν προειρημένων συνάγομεν ὅτι ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων ἰσχύουσι πᾶσαι αἱ ἐπὶ τῶν ἁπλῶν κλασμάτων ἀποδειχθεῖσαι ἰδιότητες.

Πράξεις ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων.

179.—Ἡ πρόσθεσις τῶν συνθέτων κλασμάτων γίνεται ὅπως καὶ τῶν ἁπλῶν, ἤτοι τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, ἐὰν εἶναι ἑτερώνυμα καὶ προσθέτομεν κατόπιν τοὺς ἀριθμητάς, ὑπὸ δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέτομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν.

Ἐπίσης καὶ ἡ ἀφαίρεσις

180.—Ἔστωσαν τὰ σύνθετα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$· ταῦτα τρεπόμενα εἰς ἁπλᾶ θὰ ἔδιδον ἀριθμούς τινας π καὶ ρ· ὅθεν·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\pi,\ \frac{\gamma}{\delta}=\rho$$

ἢ καὶ (§ 176) $\alpha:\beta=\pi,\quad \gamma:\delta=\rho$·

ἐξ οὗ

$$\alpha=\beta\times\pi$$
$$\gamma=\delta\times\rho$$

ὅθεν (§ 169)

$$\alpha\times\gamma=\beta\times\pi\times\delta\times\rho \quad \text{καὶ} \quad \alpha\times\gamma=(\beta\times\delta)\times(\pi\times\rho)$$

καὶ ἑπομένως (§ 170)

$$\pi\times\rho=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\times\gamma\times\varepsilon}{\beta\times\delta\times\zeta}$$

ἄρα·

Τὸ γινόμενον δύο ἢ καὶ περισσοτέρων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

181.—Ζητήσωμεν ἤδη τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο συνθέτων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἔστω τοῦτο π, θὰ ἔχωμεν

$$\pi\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

ὅθεν

$$\pi\times\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma} \quad \text{ἢ (§ 180)} \quad \pi=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma} \quad \text{ἄρα}$$

Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

Ἀσκήσεις.

244). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ πρότασις ἐδ. 63 καὶ ὅταν αἱ διαιρέσεις δὲν γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς, τουτέστιν ὅτι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκεται τὸ ἀκέραιον πηλίκον (ἐκ τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς Ι. Χατζιδάκι).

245). Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι σημειουμένων πράξεων

α′) $$\frac{2}{5+\cfrac{2}{7+\cfrac{3}{4}}}\times\frac{4}{\left(3+\frac{2}{9}\right):\left(3\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\right)}$$

β′) $$\left(\frac{3\frac{1}{3}}{7}+\frac{2}{10\frac{1}{2}}-\frac{5}{18}\times\frac{4}{7}\right)\times 1\frac{3}{4}$$

γ′) $$\left(3\frac{1}{4}-\frac{5}{6}\times\frac{4}{15}\right):\left(21\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+4\frac{1}{3}\times 5\right).$$

Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.

182.—Ὁ ὁρισμὸς δυνάμεως (§ 70) ἐκτείνεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ α εἶναι κλάσμα.

Π. χ. $$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}.$$

183.—Ἐπειδὴ

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ (§ 164)

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5\times5\times5}{6\times6\times6}=\frac{5^3}{6^3}.$$

ἕπεται ὅτι $$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5^3}{6^3}$$

καὶ γενικῶς $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu=\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}.$$

Ἄρα·

Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

184.—Ἰσχύει λοιπὸν ἐπὶ τῶν δυνάμεων τῶν κλασμάτων ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων (§ 71 α΄.)· ἄρα ἰσχύουσι καὶ αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῶν δυνάμεων (§ 71).

Ἀσκήσεις.

246). Κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἡ μυοστὴ δύναμις ἄλλου κλάσματος, ἐὰν τὸ γινόμενον $\alpha \times \beta^{\mu-1}$ εἶναι ἡ μυοστὴ δύναμις ἀκεραίου.

247). Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἀναγώγου κλάσματος καὶ τοῦ τετραγώνου του εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον, ὅταν ὡς παρονομαστὴς αὐτῆς ληφθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος.

248). Ποία ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα κλάσμα τι ἀνάγωγον ἰσοῦται πρὸς ἕτερον ἔχον ὡς παρανομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ 84 ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

185.—Τὰ κλάσματα $\frac{7}{10}, \frac{9}{100}, \ldots$ καὶ ἐν γένει τὰ ἔχοντα παρονομαστὴν δύναμιν τοῦ 10 λέγονται *δεκαδικὰ κλάσματα*.

Αἱ ἀντίστοιχοι μονάδες $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$ λέγονται *δεκαδικαὶ μονάδες*.

Ὡς ἐλήφθησαν ἐνταῦθα, παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη δεκαδικὴ μονὰς εἶναι δεκάκις μείζων τῆς ἀμέσως ἑπομένης.

Ἀκέραιος καὶ δεκαδικὸν κλάσμα, ἢ καὶ μόνον δεκαδικὸν κλάσμα, καλεῖται *δεκαδικὸς ἀριθμός*.

π. χ. $$7+\frac{3}{10}+\frac{8}{100}+\frac{9}{1000}$$

Τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς λέγομεν καὶ *δεκαδικὰ κλάσματα* πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συνήθων κλασμάτων, ἅτινα καλοῦμεν *κοινά*.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία δεκαδικῶν.

186.—Κατὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων ἡ συμφωνία ἐφ' ἧς ἐβασίσθημεν ἦτο ἡ ἑξῆς·

Ἓν ψηφίον κατέχον θέσιν τινὰ ν' ἀντιπροσωπεύῃ μονάδας δεκάκις ὀλιγωτέρας ἐκείνων τὰς ὁποίας θ' ἀντεπροσώπευεν εἰς τὴν προηγουμένην πρὸς τἀριστερὰ θέσιν.

Ἵνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς συμφωνίας βασιζόμενοι εὕρωμεν θέσεις καὶ διὰ τὰς δεκαδικὰς μονάδας, θέτομεν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ τότε κατὰ τὴν συμφωνίαν τὸ ψηφίον τὸ γραφόμενον πρῶτον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν σημαίνει δέκατα, τὸ δεύτερον ἑκατοστὰ κ. ο. κ.· ὥστε, καὶ ἂν ἀκέραιος δὲν ὑπάρχῃ, γράφομεν 0 ἀντὶ ἀκεραίου, ἵνα *τηρηθῇ ἡ τάξις·*

οὕτω τὸ κλάσμα

$$\frac{256}{10000}=\frac{200}{10000}+\frac{50}{10000}+\frac{6}{10000}=\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{6}{10000}=$$

$$\overset{\text{ἀκέρ.}}{0}+\frac{0}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{6}{10000}=0{,}0256$$

187.—Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν γράφεται δεκαδικὸς ἐννοοῦμεν καὶ πῶς ἀπαγγέλλεται. Δυνάμεθα ν' ἀπαγγείλωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν κατὰ διαφόρους τρόπους·

1) *Ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ἔπειτα τὸν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἀριθμὸν ὡς ἐὰν ἦτο ἀκέραιος προσαρτῶντες μόνον τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστᾷ τὸ τελευταῖον ψηφίον·* π. χ. ὁ 27, 3054 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 27 ἀκέραιος καὶ 3054 δεκάκις χιλιοστά.

Ἢ ἐπίσης, ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὰ δέκατα, χωριστὰ τὰ ἑκατοστὰ κ. ο. κ. Π. χ. ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς· 27 ἀκέραιος, 3 δέκατα, 5 χιλιοστὰ καὶ 4 δεκάκις χιλιοστά. Ἢ καὶ κατὰ τμήματα π. χ. ὁ ἀριθμὸς 4, 7183567 ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς· 4 ἀκέραιος, 718 χιλιοστά, 356 ἑκατομμυριοστά, 7 δεκάκις ἑκατομμυριοστά.

Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς γράφεται καὶ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν ἀκέραιον, ὅστις προκύπτει ἀπαλειφομένης τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικὰ ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ· ἑπομένως δύναται ν' ἀπαγγελθῇ ὅπως καὶ τὸ κοινὸν αὐτὸ κλάσμα· ἤτοι·

Ἀπαγγέλλομεν τὰ ψηφία, ὡς ἐὰν ἐσχημάτιζον ἕνα ἀκέραιον, προσαρτῶμεν δὲ κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Π. χ. ὁ δεκαδικὸς 5,67 ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς· 567 ἑκατοστά.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

188. — α'). Ὁ ἀκέραιος 125 εἶναι δεκάκις μικρότερος τοῦ 1250,

ἐνῷ ὁ 1,25 εἶναι ἴσος πρὸς τὸ 1,250

διότι τὰ ψηφία 1, 2, 5 διατηροῦσι τὴν αὐτὴν θέσιν ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ ἑπομένως τὴν αὐτὴν ἀξίαν· ὅθεν·

Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μένει ἡ αὐτή, ὅταν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ 10, 100, 1000, 10000 κ. τ. λ ;

189.—β'.) Ἂς μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά· π. χ. ἀντὶ τοῦ 17,954 ἂς γράψωμεν 179,54· ἕκαστον ψηφίον ἐν τῷ δευτέρῳ ἀριθμῷ ἔχει ἀξίαν δεκαπλασίαν ἐκείνης ἣν ἔχει ἐν τῷ 17,954· ὅθεν

$$179{,}54 = 17{,}954 \times 10$$

ὁμοίως $1795{,}4 = 17{,}954 \times 100$ κ. τ. λ.

ὅθεν καὶ $179{,}54 : 10 = 17{,}954.$

ἐπίσης $1795{,}4 : 100 = 17{,}954$

ἤτοι·

Πολλαπλασιάζεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἐπὶ 10,100, ... ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς μηδενικά, (τιθεμένων ἐν ἀνάγκῃ μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ).

Διαιρεῖται δὲ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ 10, 100, . . ., ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τἀριστερὰ τόσας θέσεις ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἐφαίνοντο, καὶ ἐὰν ἐγράφομεν τοὺς δοθέντας δεκαδικοὺς ὡς κοινὰ κλάσματα.

’Ασκήσεις.

249). Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει 0,38. Πόσον ἀξίζουν αἱ 1000 ὀκάδες ;

250). Προκειμένου νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα δεκαδικὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ποίαν παρατήρησιν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ὡς πρὸς τὸν κοινὸν παρονομαστήν ;

251). Νὰ παρασταθῶσιν ὡς κοινὰ κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 200 οἱ δεκαδικοὶ 5,72 καὶ 14,9.

252). Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἀνάγωγον ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν 17,365.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

190. — Ἔχομεν

$$5{,}13+2{,}779+47+0{,}3=$$
$$5{,}130+2{,}779+47{,}000+0{,}300=$$
$$=\frac{5130+2779+47000+300}{1000}$$

ἐπειδὴ δὲ

$$5130+2779+47000+300=55209$$

ἔπεται ὅτι

$$5{,}13+2{,}779+47+0{,}3=\frac{55209}{1000}=55{,}209.$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 5{,}13 \\ 2{,}779 \\ 47\phantom{{,}000} \\ 0.3 \\ \hline 55{,}209 \end{array}$$

Ἄρα·

Προσθέτομεν τοὺς δεκαδικοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους· εἰς τὸ ἄθροισμα, ἐννοεῖται, θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· τουτέστιν ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ ἀθροίσματος καὶ αἱ ὑποδιαστολαὶ τῶν προσθετέων εὑρίσκονται εἰς τὸ τέλος τῶν ψηφίων τῆς αὐτῆς στήλης·

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

191. — Ἔχομεν

$$9{,}235-7{,}9685=9{,}2350-7{,}9685=$$

$$\frac{92350}{10000}-\frac{79685}{10000}=\frac{12665}{10000}=1{,}2665. \quad \text{ἄρα·}$$

Ἀφαιροῦμεν τοὺς δεκαδικοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, διὰ δὲ τὴν τοποθέτησιν τῆς ὑποδιαστολῆς εἰς τὴν διαφορὰν παρατηροῦμεν ὅ,τι καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

192. — Ἔστω τὸ γινόμενον

$$3{,}17\times 0{,}0005$$

ἐπειδὴ (§ 189) $317=3{,}17\times 100$ καὶ

$$5=0{,}0005\times 10000$$

ἕπεται ὅτι $317\times 5=(3{,}17\times 0{,}0005)\times 1000000$

ἄρα $3{,}17\times 0{,}0005=(317\times 5):1000000$

ἢ καὶ $3{,}17\times 0{,}0005=0{,}001585\cdot$ ὅθεν

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, χωρίζομεν δ' εἰς τὸ γινόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.

Τοῦτο ἐφαίνετο, καὶ ἐὰν ἐγράφομεν τοὺς παράγοντας ὡς κοινὰ κλάσματα.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

193. — Α'). *Ὁ διαιρέτης ἀκέραιος.*

Ἔστω $97{,}87:6$

τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\frac{9787}{100}:6$$

Ἐπειδὴ διαιροῦντες τὸν 9787 διὰ 6 εὑρίσκομεν πηλίκον 1631 καὶ ὑπόλοιπον 1, ἕπεται ὅτι

$$9787=6\times 1631+1$$

ἄρα·

$$97{,}87 : 6 = \frac{9787}{100} : 6 = \left(\frac{6\times1631}{100} + \frac{1}{100} \right) : 6$$

$$\text{ἤ } 97{,}87 : 6 = \frac{1631}{100} + \left(\frac{1}{100} : 6 \right)$$

$$= 16{,}31 + (0{,}01 : 6) \qquad (K)$$

Ἤτοι·

Ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι᾽ ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὡς ἐὰν ἦτο καὶ ὁ διαιρετέος ἀκέραιος, καὶ ὅσα ψηφία τοῦ πηλίκου προκύπτουσιν ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου σχηματίζουσι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ.

Παρατηροῦμεν δ᾽ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ἀπομένον πρὸς διαίρεσιν διὰ 6, ἤτοι τὸ 1, δηλοῖ μονάδας ὁμοίας μὲ τὰς μονάδας τὰς ὁποίας παριστᾷ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἤτοι εἶναι 0,01.

194. — Ἠδυνάμεθα εἰς τὸ ἄθροισμα (K) ν᾽ ἀντικαταστήσωμεν τὸν προσθετέον 0,01 : 6 μὲ τὸν 0,010 : 6 (§ 188)· ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν

$$0{,}010 : 6 = 0{,}001 + (0{,}004 : 6),$$

ὁπότε τὸ ἄθροισμα (K) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$16{,}31 + 0{,}001 + (0{,}004 : 6) = 16{,}311 + (0{,}004 : 6)\cdot$$

ὅθεν διακρίνομεν ὅτι πηλίκον τῆς διαιρέσεως 97,87 : 6 δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὸ 16,311 ὁπότε ὑπόλοιπον εἶναι τὸ 0,004. Καὶ πάλιν τὸ 0,004 : 6 δυνάμεθα ν᾽ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ 0,0040 : 6 ἢ διὰ τοῦ 0,0006 + (0,0004 : 6), ὁπότε τὸ ἄθροισμα (K) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$16{,}3116 + (0{,}0004 : 6),$$

ὁπότε θεωροῦμεν ὡς πηλίκον τὸ 16,3116 καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸ 0,0004. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν καὶ ὡς πηλίκον τὸ 16,31166 καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸ 0,00004 κ. ο. κ.

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

```
97,87 | 6
      |__________
37     16,31166...
 18
  07
   10
    40
     40
      4
      ⋮
```

195.—Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου· π. χ. ἡ διαίρεσις 9787 : 6 δίδει ὡς πηλίκον 1631, 166...., ὡς εὐκόλως ἐξάγομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω· ὁμοίως ἡ διαίρεσις 3 : 4 γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς :

```
30 | 4
   |______
20  0,75
 0
```

ἤτοι $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Εἰς ἀμφότερα ταῦτα τὰ παραδείγματα λέγομεν ὅτι *ἐτρέψαμεν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν*.

196. — Β'.) *Ὁ διαιρέτης δεκαδικός*. Π. χ. 671,34 : 2,1· πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10, ὁπότε τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ὁ δὲ διαιρέτης (§ 189) γίνεται ἀκέραιος· ἐπανερχόμεθα οὕτως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν διότι ἔχομεν 6713,4 : 21· καὶ γενικῶς·

Ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικὸν διὰ δεκαδικοῦ, πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ δύναμιν τοῦ 10 τοιαύτην ὥστε ὁ διαιρέτης νὰ γίνεται ἀκέραιος, ὁπότε προκύπτει διαίρεσις ἀκεραίου δι' ἀκεραίου ἢ δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

Ὁ κανὼν οὗτος προφανῶς ἠδύνατο νὰ ἐξαχθῇ, καὶ ἐὰν ἐτρέπομεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς κοινὰ κλάσματα.

Ἀσκήσεις.

253.) Ἠγόρασέ τις 12 ᾠὰ ἀντὶ 2,10 δρχ. Πόσα ἔπρεπε ν' ἀγοράσῃ μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα, ἵνα στοιχίζῃ ἕκαστον ᾠὸν 0,025 δρχ. ὀλιγώτερον ;

254.) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμά τι ἀντὶ 359,75 δρχ., μετεπώλησε δ' αὐτὸ ἀντὶ 400,85 δρχ. κερδίσας ἐξ ἑκάστου πήχεως 1,20 δρχ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα;

255.) Ὑπάλληλός τις ἐξώδευσε τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ μισθοῦ του δι' ἀγορὰν ἐνδυμασίας καὶ τὰ 0,19 τοῦ ὑπολοίπου δι' ἀγορὰν ὑποδημάτων· τῷ ἔμειναν δὲ τότε ἐκ τοῦ μισθοῦ 121,50 δρχ. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἠγόρασε τὰ ὑποδήματα;

256.) Ὑπάλληλός τις τοῦ Δημοσίου ἀφήνει εἰς τὸ ταμεῖον λόγῳ συντάξεως τὰ 0,09 τοῦ μισθοῦ του· εἰς δὲ τὸ μετοχικὸν ταμεῖον $5\frac{1}{3}$ δρχ. κατὰ μῆνα. Πληρώνει διὰ χαρτόσημον κατὰ μῆνα 2 δραχμάς, λαμβάνει δὲ διὰ μισθοὺς τριῶν μηνῶν 676,50 δρχ. Ποῖος ὁ μηνιαῖος μισθός του;

257.) Ἀξιωματικὸς διαταχθεὶς νὰ ὁδηγήσῃ 120 στρατιώτας εἴς τι μέρος λαμβάνει ἀναχωρῶν 2700 δραχμ. διὰ νὰ πληρώσῃ 0,15 εἰς ἕκαστον στρατιώτην δι' ἓν χιλιόμετρον. Μερικοὶ ἐξ αὐτῶν ἠσθένησαν· ὁ ἀξιωματικὸς φθάσας εἰς τὸν σκοπόν του πληρώνει πρῶτον τὸ ἥμισυ τοῦ κανονισθέντος εἰς τοὺς ἀσθενεῖς καὶ εἶτα τὸ ὑπόλοιπον μοιράζει ἐξ ἴσου εἰς τοὺς ἄλλους, οἵτινες ἔλαβον τότε 24,75 δραχμὰς ἕκαστος. Ζητεῖται 1) ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιομέτρων ἅτινα διέτρεξαν· 2) ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν οἵτινες ἠσθένησαν.

Προσεγγίσεις.

Ὑπολογισμὸς πηλίκου κατὰ προσέγγισιν δεκαδικήν.

197. — Ἔστω ἡ διαίρεσις 97,87 : 6· ὡς πηλίκον ταύτης δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν (§ 193) τό·

$$16,31+\frac{0,01}{6}=16,31+\frac{1}{6}\times\frac{1}{100} \qquad \text{εἴτε τὸ}$$

$$16,311+\frac{0,004}{6}=16,311+\frac{4}{6}\times\frac{1}{1000}$$

ἢ καὶ

$$16,3116+\frac{0,0004}{6}=16,3116+\frac{4}{6}\times\frac{1}{10000} \quad \text{κ. ο. κ.}$$

Ὥστε, ἐὰν ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης λάβωμεν μόνον τὸ 16,31 παραλείπομεν τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ $\frac{1}{100}$ ἤτοι, ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{100}$, ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ 16,311 παραλείπομεν τὰ $\frac{4}{6}$ τοῦ $\frac{1}{1000}$ ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000}$ κ. ο. κ.

Ἀφ' ἑτέρου παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 16,32 ὑπερβαίνει τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{100}$ ἐπίσης ὁ 16,312 ὑπερβαίνει τὸ αὐτὸ πηλίκον κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{1000}$ κ. ο. κ.

Τὰ πρῶτα πηλίκα (§ 194) καλοῦμεν *πηλίκα τῆς διαιρέσεως* 97,87 : 6 *κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ *κατ' ἔλλειψιν*, ἐνῷ τὰ δεύτερα καλοῦμεν *πηλίκα κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$ *καθ' ὑπεροχήν.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ κανών·

198. — *Ἵνα ὑπολογίσωμεν πηλίκον διαιρέσεώς τινος κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{10^{\nu}}$ *κατ' ἔλλειψιν, προχωροῦμεν εἰς τὴν διαίρεσιν, μέχρις οὗ εὕρωμεν εἰς τὸ πηλίκον δεκαδικὸν ψηφίον τάξεως ν.*

Π. χ. τὸ πηλίκον $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ εἶναι 0,666 κατ' ἔλλειψιν, ἐνῷ καθ' ὑπεροχὴν θὰ ἦτο 0,667.

Ἀσκήσεις.

258). Ἐὰν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα, ὑπολογιζόμενα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\nu}}$ θὰ δίδωσιν ἐξαγόμενα ἴσα, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν.

259). Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,001 τὸ ἄθροισμα

$$7,03826+51,123+0,0124.$$

260). Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τὸ ἄθροισμα

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}.$$

Ὑπολογισμὸς πηλίκου κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

199. — Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} \ldots$ τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν 10 τὰ μὲν $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots \frac{7}{10}$ περιέχονται εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, τὰ δ᾽ ἄλλα οὐχί. Ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{7}{10}$ καλεῖται πηλίκον τῆς διαιρέσεως $3:4$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Γενικῶς καλοῦμεν *πηλίκον τῆς διαιρέσεως* $\alpha:\beta$ *κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{\nu}$ *τὸ μέγιστον ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν* ν *καὶ περιεχομένων εἰς τὸ κλάσμα* $\frac{\alpha}{\beta}$ (§ 197).

Πρὸς εὕρεσιν τοιούτου πηλίκου ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις ρ ἀκέραιος τοιοῦτος ὥστε

$$\frac{\rho}{\nu} \leqq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\rho+1}{\nu} \qquad \text{ἤ}$$

$$\rho \leqq \frac{\alpha\times\nu}{\beta} < \rho+1.$$

Ἐκ τούτων φαίνεται ὅτι ὁ ρ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἐκ τῶν περιεχομένων εἰς τὸν $\frac{\alpha\times\nu}{\beta}$. Ἄρα·

Ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον α : β κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ ν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ β, τοῦ δὲ πηλίκου τούτου τὸ ἀκέραιον μέρος διαιροῦμεν διὰ ν.

Π.χ. Τὸ πηλίκον $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{79}$ εἶναι $\frac{56}{79}$.

Ἀσκήσεις.

261.) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον 97,14 : 12,3 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{21}$.

262.) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἁπλῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ μικροτέρων τοῦ $\frac{8}{17}$.

263.) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς 4,5234 κατὰ προσέγγισιν ἡμίσεος χιλιοστοῦ.

264.) Πῶς ὑπολογίζομεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν κατὰ προσέγγισιν $\frac{\mu}{\nu}$;

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

200.—Εἴδομεν προηγουμένως (§ 195) πῶς τρέπεται κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν.

Ἂς τρέψωμεν ὁμοίως καὶ τὰ κλάσματα $\frac{7}{4}, \frac{7}{3}$ εἰς δεκαδικοὺς θεωροῦντες ταῦτα ὡς πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ των διὰ τοῦ παρονομαστοῦ των.

```
 7      | 4             7       | 3
        |-----                  |--------
30       1,75          10        2,333...
 20                     10
  0                      10
                          1
                          :
```

Παρατηροῦμεν ὅτι χωρὶς ν' ἀλλάξωμεν τὸν ἀριθμητὴν εἰς μὲν τὸ πρῶτον εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον ποτὲ δὲν φθάνομεν εἰς ὑπόλοιπον 0, ἤτοι ἄλλα μὲν κλάσματα τρέπονται, ἄλλα δὲ δὲν τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς.

Ἐντεῦθεν πηγάζει τὸ ἀκόλουθον ζήτημα·

Τίνα κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς;

201.—Τἀνωτέρω παραδείγματα (§ 200) ἄγουσιν ἡμᾶς εἰς τὴν σκέψιν μήπως μόνος ὁ παρονομαστὴς ἀρκεῖ νὰ λύσῃ τὴν ἀπορίαν μας ταύτην.

Ἔστω τυχὸν κοινὸν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$· ἀναλύομεν τὸν παρονομαστὴν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων· διακρίνομεν δύο περιπτώσεις·

α΄) Ὁ β δὲν περιέχει πρώτους παράγοντας διαφόρους τῶν 2 καὶ 5, ἤτοι·

$$\beta = 2^\lambda \times 5^\mu$$

ὅπου ἢ καὶ οἱ δύο ἐκθέται εἶναι ἀκέραιοι ἢ ὁ εἷς ἀκέραιος καὶ ὁ ἄλλος 0.

Ἐὰν λ=μ, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{2^\mu \times 5^\mu} = \frac{\alpha}{(2\times 5)^\mu} = \frac{\alpha}{10^\mu} \cdot \qquad \text{ἤτοι·}$$

τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Ἐὰν λ>μ, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $5^{\lambda-\mu}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{2^\lambda \times 5^\mu} = \frac{\alpha \times 5^{\lambda-\mu}}{2^\lambda \times 5^\mu \times 5^{\lambda-\mu}} \cdot \qquad \text{ἤτοι (§ 71)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times 5^{\lambda-\mu}}{10^\lambda}, \qquad \text{ἤτοι}$$

τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Ἐὰν $\lambda < \mu$, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ $2^{\mu-\lambda}$ καὶ εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{2^\lambda \times 5^\mu} = \frac{\alpha \times 2^{\mu-\lambda}}{2^\lambda \times 5^\mu \times 2^{\mu-\lambda}} = \frac{\alpha \times 2^{\mu-\lambda}}{5^\mu \times 2^{\mu-\lambda+\lambda}}$$

$$\frac{\alpha \times 2^{\mu-\lambda}}{5^\mu \times 2^\mu} = \frac{\alpha \times 2^{\mu-\lambda}}{(5 \times 2)^\mu}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times 2^{\mu-\lambda}}{10^\mu}, \qquad \text{ἤτοι}$$

τρέπεται καὶ πάλιν εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

β'). Ὁ β περιέχει καὶ παράγοντα ἢ παράγοντας διαφόρους τῶν 2 καὶ 5.

Π. χ. $\beta = 2^\lambda \times 5^\mu \times 7^\nu$, ὅπου ὁ ν δὲν εἶναι 0.

Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν α· ἐὰν οὗτος διαιρῆται διὰ 7^ν τότε διαιροῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ 7^ν, καὶ λαμβάνομεν κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $2^\lambda \times 5^\mu$ ὁπότε κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν.

Ἐὰν ὁ α δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ 7^ν, τότε καθιστῶντες τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀνάγωγον (ἐὰν δὲν εἶναι τοιοῦτον) εὑρίσκομεν κλάσμα οὗ ὁ παρονομαστὴς ἔχει τὸν παράγοντα 7,

ἔστω δὲ τοῦτο τὸ $$\frac{K}{2^2 \times 5 \times 7}.$$

Ἐὰν δ' ὑποθέσωμεν ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{K}{2^2 \times 5 \times 7} = \frac{M}{10^\nu}$$

πρέπει (§ 144) $10^\nu = 2^2 \times 5 \times 7 \times \rho$ (ἔνθα ρ ἀκέραιος) ἢ

καὶ $2^\nu \times 5^\nu = 2^2 \times 5 \times 7 \times \rho$

ὅπερ ἄτοπον (§ 124). Τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Ἐκ πάντων τούτων συνάγομεν ὅτι·

Συνθήκη ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία ἵνα κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς εἶναι ἡ ἑξῆς·

Ὁ ἀριθμητὴς νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ τοὺς διαφόρους τῶν 2 καὶ 5 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ὅθεν καὶ

Ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος τρεπομένου ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν δὲν περιέχει πρώτους παράγοντας διαφόρους τῶν 2 καὶ 5.

Ἀσκήσεις.

265). Τίνα ἐκ τῶν κλασμάτων

$$\frac{105}{14},\ \frac{24}{150},\ \frac{6}{18},\ \frac{5}{20}$$

τρέπονται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς;

266). Ἐὰν κλάσμα τι ἀνάγωγον ἔχῃ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $2^\lambda \times 5^\mu$ θὰ τρέπηται εἰς δεκαδικὸν μὲ ψηφία δεκαδικὰ λ τὸ πλῆθος, ἐὰν $\lambda > \mu$.

Ἐὰν κλάσμα τι ἀνάγωγον ἔχῃ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $2^\lambda \times 5^\mu$ θὰ τρέπηται εἰς δεκαδικὸν μὲ δεκαδικὰ ψηφία μ τὸ πλῆθος, ἐὰν $\mu > \lambda$.

267). Ἔστωσαν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὧν τὸ πρῶτον τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς. Πότε τὸ γινόμενον $\frac{\alpha}{\beta}\frac{\gamma}{\delta}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς; (§ 201, § 132)

268). Ἔστωσαν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὧν τὸ πρῶτον τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Πότε τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς;

269). Ἔστωσαν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τὰ ὁποῖα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς. Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς;

Περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα.

202.—Εἴδομεν (§ 201) τίνα κοινὰ κλάσματα δὲν τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά· π. χ. κατὰ τὴν διαίρεσιν 3 : 7 παρέχονται ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία εἰς τὸ πηλίκον· προκύπτει ἤδη τὸ ἐρώτημα·

Τὰ ἄπειρα ταῦτα δεκαδικὰ ψηφία κατὰ τίνα νόμον διαδέχονται ἄλληλα;

Τοῦτο θὰ ἐννοήσωμεν ἀπὸ τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον σχηματίζονται οἱ διαιρετέοι.

Ἕκαστος τούτων σχηματίζεται, ὅταν εἰς τὸ ὑπόλοιπον προσγράψωμεν ἓν μηδενικόν. Ἀλλ' ὡς ὑπόλοιπον ἐνταῦθα, ὅπου ὁ διαιρέτης εἶναι 7, δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ἀκέραιος διάφορος τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6· ἐπομένως *μετὰ ἓξ τὸ πολὺ* διαιρέσεις θὰ παρουσιασθῇ ὑπόλοιπον ἴσον πρὸς ἓν προηγουμένως εὑρεθέν. Ἀλλὰ τότε θὰ προκύψῃ καὶ διαιρετέος ἴσος πρὸς ἄλλον προηγουμένως εὑρεθέντα καὶ ἀφοῦ διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς θὰ ἔχωμεν τὴν αὐτὴν σειρὰν πράξεων νὰ ἐκτελέσωμεν· ἐπομένως τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν·

δηλαδὴ $\frac{3}{7} = 0{,}428571428571....$

```
30 | 7
   |-----------
20   0,42857142...
 60
  40
   50
    10
     30
      2
      :
```

Ἄρα·

Πᾶν κοινὸν κλάσμα μὴ τρεπόμενον ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν παράγει δεκαδικὸν μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία διαδεχόμενα ἄλληλα κατὰ τὸν ἑξῆς νόμον· «Ἀπό τινος ψηφίου καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν».

203.—*Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, ἐν ᾧ ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς τὰ αὐτὰ δεκαδικὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.*

Τὸ σύνολον τῶν ψηφίων τῶν οὕτως ἐπαναλαμβανομένων λέγεται *περίοδος.*

Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα λέγεται *ἁπλοῦν* μέν, ἂν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀπὸ τῶν ψηφίων τῶν δεκάτων,

μικτὸν δέ, ἂν ἡ περίοδος δὲν ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

Π. χ. Τὸ περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα 0,2828.... εἶναι ἁπλοῦν, ἐνῷ τὸ 9,23457457457.... εἶναι μικτόν.

Τὰ πρὸ τῆς πρώτης περιόδου δεκαδικὰ ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ *μὴ περιοδικὸν μέρος.*

Κοινὸν κλάσμα ἐξ οὗ προκύπτει περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.

204.—Ἔστω ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους τὸ 0, 368 368 368 . . . .

Ἂς σχηματίσωμεν δύο ἀκριβεῖς δεκαδικοὺς λαμβάνοντες πρῶτον τὰς τρεῖς περιόδους μὲ ἀκέραιον 0 καὶ ἔπειτα τὸ ἴδιον δεκαδικὸν μέρος ἀλλὰ μὲ ἀκέραιον μίαν περίοδον

τουτέστι
$$0,368\,368\,368$$
$$368,368\,368\,368$$

Ἐὰν τὸν πρῶτον καλέσωμεν α_3, ὁ δεύτερος θὰ εἶναι
$$1000\alpha_3+0,000000368$$
ὅθεν, ἂν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἀφαιρέσωμεν τὸν πρῶτον, λαμβάνομεν
$$999\alpha_3+0,000000368$$
ἀφ' ἑτέρου ὅμως παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν ἀφαιρέσωμεν αὐτοὺς ὡς εἶναι γεγραμμένοι ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, λαμβάνομεν 368· ὅθεν
$$999\alpha_3+0,000000368=368$$
ἢ
$$999\alpha_3+\frac{368}{1000^3}=368.$$

Ὁμοίως ἂν ἐλαμβάνομεν ἐξ ἀρχῆς δεκαδικοὺς μὲ 4 περιόδους καὶ εἰργαζόμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, θὰ εὑρίσκομεν

$$999\alpha_4 + \frac{368}{1000^4} = 368\cdot$$

ἐὰν δὲ μὲ 5 περιόδους, θὰ εὑρίσκομεν

$$999\alpha_5 + \frac{368}{1000^5} = 368 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δεύτερος προσθετέος τοῦ πρώτου μέλους ἀπὸ $\frac{368}{1000^3}$ ἔγινε $\frac{368}{1000^4}$, ἤτοι χιλιάκις μικρότερος κ.ο.κ. καὶ ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ συνεχισθῇ ἡ ἐργασία αὕτη οὕτως ὥστε νὰ ἔχωσι ληφθῇ πᾶσαι αἱ ἀπειροπληθεῖς περίοδοι τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, ὁ δεύτερος προσθετέος θὰ κατήντα μηδὲν καὶ θὰ προέκυπτε

$$999 \times (0,368368....) = 368\cdot$$

ὅθεν ἐξάγομεν, ὅτι ἐὰν ὑπάρχῃ κοινὸν κλάσμα ἐξ οὗ παράγεται τὸ δοθὲν περιοδικόν, τὸ κλάσμα τοῦτο θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{368}{999}$.

Καὶ πράγματι, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ 368000 διαιρούμενος διὰ 999 δίδει πηλίκον 368 καὶ ὑπόλοιπον 368, ἐξάγομεν ὅτι ἐκ τῆς τροπῆς τοῦ κλάσματος $\frac{368}{999}$ θὰ προκύπτῃ τὸ περιοδικὸν 0,368368368......

ἤτοι·

Πᾶν ἁπλοῦν περιοδικὸν ἄνευ ἀκεραίου μέρους προκύπτει ἐκ κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ ἀκέραιον, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9 καὶ τόσα ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος.

ΣΗΜ. Ἁπλοῦ περιοδικοῦ, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι 9, ἂν ληφθῶσιν ὅλαι αἱ μονάδες, συναποτελοῦσιν ἀκέραιον· π. χ. ὁ 17,999.... δίδει τὸν 18.

205.—Ἐπειδὴ $4,7373\ldots = 4 + 0,7373\ldots$

καὶ $0,737373\ldots = \frac{73}{99}$ (§ 204) ἕπεται ὅτι

$$4{,}7373\ldots = 4 + \frac{73}{99} = \frac{4\times 99 + 73}{99} = \frac{4\times(100-1)+73}{99}$$

$$= \frac{400-4+73}{99} = \frac{473-4}{99}.\qquad \text{Ἄρα}$$

Εὑρίσκομεν κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἁπλοῦν περιοδικὸν μετ' ἀκεραίου μέρους ὡς ἑξῆς :

Σχηματίζομεν ἀκέραιον γράφοντες κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ μιᾶς περιόδου, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸ ἀκέραιον μέρος, τὴν δὲ διαφορὰν θεωροῦμεν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος, οὗτινος παρονομαστὴν θέτομεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις προκύπτει ἐκ μιᾶς περιόδου, ὅταν πάντα τὰ ψηφία του γίνωσιν 9.

206.—Ἔστω ἤδη μικτὸν περιοδικὸν τὸ 3,46257257 . . . . παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ παράγῃ τὸ 3,46257257 . . . ., τότε τὸ κλάσμα $\frac{100\times\alpha}{\beta}$ θὰ παράγῃ τὸ 346,257257 . . . ἀλλὰ κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν,

$$100\times\frac{\alpha}{\beta} = \frac{346257-346}{999} \qquad (\S\ 205)$$

ὅθεν
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{346257-346}{99900}$$

ἄρα·

Εὑρίσκομεν κοινὸν κλάσμα ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν ὡς ἑξῆς : Σχηματίζομεν ἀκέραιον γράφοντες κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους, τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους καὶ τῆς πρώτης περιόδου, ὅπως ἐπίσης σχηματίζομεν ἀκέραιον γράφοντες κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ τοῦ μὴ περιοδικοῦ, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ α' σχηματισθέντος ἀκεραίου τὸν β' τοιοῦτον καὶ τὴν διαφορὰν θεωροῦμεν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος οὗτινος παρονομαστὴν θέτομεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις προκύπτει ἐκ μιᾶς περιόδου, ὅταν πάντα τὰ ψηφία της *γίνωσιν 9 ἀκολουθούμενον ὑπὸ τόσων 0, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ μέρους.*

ΣΗΜ. Ἐὰν τὰ περιοδικὰ ψηφία μικτοῦ τινος περιοδικοῦ εἶναι 9, τότε δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὅτι αἱ μονάδες τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ, ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ληφθῶσιν ἅπασαι, θὰ συναπετέλουν ἀριθμὸν δεκαδικόν· π. χ. τοῦ 32,964999.... αἱ μονάδες θὰ ἔδιδον τὸν 32,965.

Ἰδιότητες τῶν κοινῶν κλασμάτων ἐξ ὧν παράγονται δεκαδικὰ περιοδικά.

207.—Ἔστω ὅτι ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ παράγει

1ον) ἁπλοῦν περιοδικόν· π. χ. τὸ 4,535353 . . . .

τότε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{453-4}{99} \qquad (\S\ 205)$$

ὅθεν ὁ 99 θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ β (§ 148).

Ἀλλὰ ὁ 99 δὲν περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5, ἑπομένως ὁ β δὲν δύναται νὰ περιέχῃ οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5 (§ 74)· ἄρα·

Ἐὰν ἀνάγωγον κλάσμα τρέπηται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν, θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν μὴ περιέχοντα οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5.

2ον) μικτὸν περιοδικόν· π. χ. τὸ 7,12683683 . . . .

$$\text{ἔχομεν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{712683-712}{99900} \qquad (\S\ 206).$$

Τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς περιόδου 3 εἶναι διάφορον τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους του, διότι ἄλλως ἡ περίοδος δὲν θὰ ἤρχιζεν ἀπὸ τοῦ τρίτου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ψηφίου· ὅθεν, ὅταν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς τὸν ἀριθμητήν, θὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν μὴ λήγοντα εἰς 0, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{99900}$, ὅπου ὁ Α δὲν λήγει εἰς 0· ἄρα ὁ Α δὲν διαιρεῖται διὰ 10, ἤτοι θὰ εἶναι ἢ τῆς μορφῆς $2^{\varrho}\times\pi$ ἢ τῆς μορφῆς $5^{\varrho}\times\pi$ ἢ ἁπλῶς π, ὅπου ὁ π δὲν περιέχει οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5, ἐνῷ ὁ παρονομαστὴς ἰσοῦται πρὸς $999\times2^2\times5^2$· ὥστε καὶ μετὰ πάσας τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις, εἰς τὸν παρονομαστὴν θὰ μένῃ ἀνέπαφον ἢ τὸ 2^2 ἢ τὸ 5^2 ἢ καὶ τὰ δύο· ἤτοι·

Ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος τρεπομένου εἰς μικτὸν περιοδικὸν περιέχει τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μὴ περιοδικῶν δεκαδικῶν ψηφίων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτουσιν εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα:

1ον) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\lambda}\times5^{\mu}$ τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς (§ 201).

2ον) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ μήτε τὸν 2 μήτε τὸν 5, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν (§ 201, § 202).

3ον) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\lambda}\times5^{\mu}\times\pi$, ὅπου οἱ ἐκθέται λ καὶ μ δὲν εἶναι ἀμφότεροι μηδενικά, ὁ δὲ π εἶναι ἀριθμὸς μὴ διαιρετὸς διὰ 2 μηδὲ διὰ 5, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν (§ 201, § 202).

Ἀσκήσεις.

270). Τίνα ἐκ τῶν κλασμάτων

$$\frac{6}{15}, \frac{6}{36}, \frac{6}{48}, \frac{6}{54}, \frac{12}{30}, \frac{12}{46}, \frac{12}{48}$$

τρέπονται εἰς ἁπλᾶ περιοδικά, τίνα εἰς μικτὰ καὶ τίνα εἰς δεκαδικὰ ἀκριβῶς;

271). Ἔστω τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 42,342342342... ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τἀριστερά, θὰ ἔχωμεν περιοδικὸν ἐν ᾧ ἡ περίοδος θὰ εἶναι 423. Πῶς διακρίνομεν ἐξ αὐτοῦ ὅτι τὸ δοθὲν περιοδικὸν θὰ παράγηται ἐκ κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν 999 καὶ ἀριθμητὴν λήγοντα εἰς μηδέν.

272). Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς β ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν περιέχῃ τοὺς παράγοντας 2,3 καὶ 5 ἡ περίοδος τοῦ ἁπλοῦ περιοδικοῦ εἰς ὃ τρέπεται τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ περίοδος θὰ εἶναι ἀριθμητὴς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἔχοντος παρονομαστὴν διαιρετὸν διὰ 9 (§ 207).

273). Τὸ γινόμενον δύο ἁπλῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων μικροτέρων τῆς μονάδος εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα. (§ 207).

274). Τὸ γινόμενον δύο μικτῶν περιοδικῶν κλασμάτων δὲν εἶναι πάντοτε μικτὸν περιοδικόν. (§ 207)

275). Ἐὰν τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπηται εἰς περιοδικὸν μικτὸν μὲ μ τὸ πλῆθος ψηφία μὴ περιοδικά, τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ τρέπηται εἰς τοιοῦτον μὲ 2μ ψηφία μὴ περιοδικά.

276.) Τὸ ἄθροισμα δύο ἁπλῶν περιοδικῶν κλασμάτων δὲν δίδει ποτὲ μικτὸν περιοδικόν. (§ 207)

277.) Ἀριθμὸς μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2 μηδὲ τὸν 5 διαιρεῖ ἀριθμόν τινα οὗτινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, ἤτοι διαιρεῖ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς μία μονάς, ἤτοι ἀριθμὸν τῆς μορφῆς $10^{\rho}-1$.

Ἔχομεν (§ 207) ὅτι ἀριθμὸς μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2 μηδὲ τὸν 5 δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος τρεπομένου εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν. (§ 204).

278.) Ἔστω ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ τρεπόμενον εἰς ἁπλοῦν περιοδικὸν καὶ ἔστω ν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου· τότε ὁ β διαιρεῖ τὸν $10^{\nu}-1$, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖ τὸν $10^{\rho}-1$, ἐὰν $\rho<\nu$.

279.) Αἱ περίοδοι ἁπλῶν περιοδικῶν παραγομένων ἐκ κλασμάτων ἀναγώγων ὁμωνύμων ἔχουσι τὸ αὐτὸ πλῆθος ψηφίων.

Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

208.—Ἄς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 7,999... καὶ ἄς φαντασθῶμεν ὅτι ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία ὡς ἑξῆς· 7,13579111315... ὅπου εἶναι προφανὴς ὁ νόμος, καθ' ὃν προχωροῦσι τὰ δεκαδικὰ ψηφία· παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 7,135 εἶναι μικρότερος τοῦ 7,999 ὁμοίως ὁ 7,1357 εἶναι μικρότερος τοῦ 7,9999 κ. ο. κ. ὥστε, καὶ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἂν λάβωμεν τοῦ 7,13579111315..., δὲν ὑπερβαίνομεν ἀριθμὸν δοθέντα, ὅπως π. χ. τὸν ἀριθμὸν 7,9999... δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι ὁ 7,13579111315... εἶναι ἀριθμός.

209.—Ὅθεν τοιοῦτον ἄπειρον πλῆθος ἐν ᾧ αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως δὲν εἶναι πλείονες τῶν 9, λαμβάνεται ὡς ἀριθμός, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ σειρὰ τῶν ψηφίων δι' ὧν παρίσταται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως· ἐὰν δὲ τὰ ψηφία ταῦτα δὲν ἐπαναλαμβάνωνται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν (περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα), ἀλλὰ βαίνωσι κατ' ἄλλον τινὰ νόμον, π. χ. ὡς ἐν § 208, τότε λέγεται ὁ ἀριθμὸς *ἀσύμμετρος*· ὥστε *πᾶς ἀσύμμετρος εἶναι ἀριθμὸς ἔχων ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν*· π. χ. ὁ 7,353353335... εἶναι ἀσύμμετρος.

210.—Ἀριθμός τις λέγεται μείζων ἄλλου, ἂν περιέχῃ πλὴν τῶν μονάδων ἐκείνου καὶ ἄλλας,

ὡς π. χ. $7{,}999... > 7{,}353353335...$

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου.

Οἱ ἀριθμοὶ 7,999... καὶ 8 εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς χωρὶς νὰ εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου· π. χ. ὁ ἀριθμὸς $7\frac{237}{238}$, ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ 8 εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ 7,999 (διότι ἡ διαφορὰ $8-7\frac{237}{238}$ εἶναι $\frac{1}{238}$, ἐνῷ ἡ διαφορὰ $8-7{,}999$ εἶναι μόνον $\frac{1}{1000}$) ἑπομένως εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ 7,9999 . . .

Καὶ τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές· πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 7,999... εἶναι τοῦ 8 μικρότερος.

211.—Κατὰ ταῦτα, ἵνα δύο ἀριθμοὶ γεγραμμένοι ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφὴν εἶναι ἴσοι, πρέπει ἢ τὰ ὁμοταγῆ αὐτῶν ψηφία νὰ εἶναι πάντα τὰ αὐτά, ἢ τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία καθ' ἃ διαφέρουσιν ἀλλήλων νὰ ἔχωσι διαφορὰν 1, τὰ δὲ λοιπὰ τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ψηφίον νὰ εἶναι ἄπειρα 9, τοῦ δὲ ἑτέρου 0.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 6,483999...καὶ 6,484 εἶναι ἴσοι

ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ $\left\{\begin{array}{l}4,278...\\4,276...\end{array}\right.$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσοι· διότι ὑπάρχει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 4,276 καὶ μικρότερος τοῦ 4,278....· π. χ. ὁ 4,277, πολὺ δὲ περισσότερον οἱ 4,278... καὶ 4,275 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσοι.

212.—Τὰ δεκαδικὰ περιοδικά, ἂν καὶ ἔχωσιν ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων, ἰσοῦνται πρὸς ἀκεραίους ἢ κλάσματα.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸν τυχόντα ἀσύμμετρον 2,122112211122... ἔστω ὅτι εὑρίσκεται κοινόν τι κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτόν· θὰ εἴχομεν $\frac{\alpha}{\beta}=2,122112211122...$ Ἀφ' ἑτέρου ὅμως τὸ κλάσμα θὰ τρέπηται ἢ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἢ εἰς περιοδικόν, ὁπότε θὰ προέκυπτε ἰσότης μεταξὺ τούτου καὶ τοῦ ἀσυμμέτρου ὅπερ ἄτοπον. (§ 211). Ἄρα

Πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς δὲν ἰσοῦται πρὸς οὐδένα σύμμετρον.

Ἀσκήσεις ἐν γένει ἐπὶ κλασμάτων κοινῶν καὶ δεκαδικῶν.

280.) Ἐκ πίθου περιέχοντος οἶνον ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος· ἔπειτα ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μίγματος καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος καὶ πάλιν ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος. Πόσον μέρος τοῦ ἐν ἀρχῇ οἴνου ἀποτελεῖ ὁ ἀπομείνας καθαρὸς οἶνος εἰς τὸ τελευταῖον κρᾶμα;

281.) Ἀγγεῖόν τι περιέχει α ὀκάδας οἴνου· ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ β ὀκάδας καὶ ἀναπληροῦμεν δι' ὕδατος· ἐκ τοῦ νέου μίγματος ἀφαιροῦμεν β ὀκάδας καὶ ἀναπληροῦμεν καὶ πάλιν δι' ὕδατος· Πόσος καθαρὸς οἶνος ἀπέμεινεν εἰς τὸ ἀγγεῖον; Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή.

282.) Δύο ἀδελφοὶ εἶχον ἐν ὅλῳ κατατεθειμένα εἰς τὴν Τράπεζαν 58000 δραχμάς· ἵνα ὅμως πληρώσωσι κοινόν τι χρέος ἐκ 33000 δραχμῶν, ἀπέσυρεν ὁ πρῶτος τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν καταθέσεών του καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ἰδικῶν του. Ἐκ πόσων δραχμῶν ἀπετελοῦντο αἱ καταθέσεις καὶ τί ποσὸν ἐπλήρωσεν ἕκαστος;

283.) Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 340 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πρώτου καὶ τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ δευτέρου ν' ἀποτελῶσι τὸν ἀριθμὸν 198.

284.) Μοιράζουσιν εἰς στρατιωτικόν τι ἀπόσπασμα συγκείμενον ἐξ ἑνὸς λοχίου, τριῶν δεκανέων καὶ 18 στρατιωτῶν ἀμοιβὴν ἐκ 1000 δραχμῶν διὰ τὴν σύλληψιν ληστοῦ· ἕκαστος δεκανεὺς λαμβάνει τὰ $\frac{9}{5}$ τῶν λαμβανομένων ὑφ' ἑκάστου στρατιώτου· ὁ δὲ λοχίας τὰ $\frac{7}{4}$ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα λαμβάνει ἕκαστος δεκανεύς. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου;

285.) Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ συνδεούσης δύο σημεῖα Α καὶ Β βαδίζουσι δύο ὁδοιπόροι κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν· ὁ πρῶτος διανύει ὁλόκληρον τὴν ὁδὸν εἰς 4,5 ὥρας· ὁ δεύτερος εἰς 7,2 ἐὰν ἀναχωρήσωσι συγχρόνως ἐκ τῶν Α καὶ Β, μετὰ πόσην ὥραν θὰ συναντηθῶσιν;

286.) Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦσιν ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β ἀπεχουσῶν 460 στάδια ἀπ' ἀλλήλων· ἡ πρώτη διατρέχει καθ' ὥραν 52,5 στάδια, ἡ δευτέρα 41. Αὕτη ἀνεχώρησε τὴν 6 π. μ. ἐκ τοῦ Β, ἐνῷ ἡ πρώτη τὴν 8 π. μ. ἐκ τοῦ Α. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α συνηντήθησαν;

287.) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$ προσλαμβάνοντα καὶ 33 μονάδας δίδουσι τὸν ἀριθμὸν 63;

288.) Παιδίον τι φέρει μεθ' ἑαυτοῦ 7 μῆλα, δεύτερον 5 καὶ τρίτον 4· προσέρχεται τέταρτον φέρον 20 καρύδια· δίδει τὰ καρύδια καὶ τρώγει μετ' αὐτῶν τὰ μῆλα. Πόσα καρύδια ἔδωκεν εἰς ἕκαστον;

289.) Τίνα ἡμερομηνίαν φέρει ἡ ἡμέρα τοῦ ἔτους καθ' ἣν τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν παρελθουσῶν ἡμερῶν τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ὑπολειπομένων ἡμερῶν τοῦ ἔτους; (1 ἔτος$=365$ ἡμ.).

290). Ἔστωσαν δύο ἀνάγωγα κλάσματα μὲ παρονομαστὰς 8 καὶ 15 καὶ τρίτον κλάσμα ἀνάγωγον ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὰ δοθέντα δίδει ἐξαγόμενον ἀκέραιον; Ποίους πρώτους παράγοντας δύναται νὰ περιέχῃ ὁ παρονομαστὴς τοῦ τρίτου αὐτοῦ κλάσματος; (§ 114)

291). Δίδονται τὰ κλάσματα $\frac{12}{400}, \frac{70}{216}, \frac{325}{2380}$. Ζητεῖται τὸ μικρότερον τῶν κλασμάτων ἅτινα εἶναι διαιρετὰ καὶ διὰ τῶν τριῶν δοθέντων. (Λέγομεν ὅτι κλάσμα τι εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλου, ὅταν διαιρούμενον δι' αὐτοῦ δίδῃ ὡς πηλίκον ἀριθμὸν ἀκέραιον· π. χ. ὁ $\frac{9}{4}$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ $\frac{3}{8}$ διότι $\frac{9}{4}:\frac{3}{8}=6$). (§ 114).

292). Δίδονται τρία ἀνάγωγα κλάσματα· ζητεῖται ἕτερον κλάσμα διαιροῦν αὐτά, τουτέστιν ἕκαστον τῶν τριῶν δοθέντων διαιρούμενον διὰ τοῦ ζητουμένου νὰ δίδῃ πηλίκον ἀκέραιον.

293). Πόσα ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὰς τοὺς διαφόρους ἀκεραίους τοὺς μεταξὺ 1020 καὶ 1040 τρέπονται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς, πόσα ἐξ αὐτῶν εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ καὶ πόσα εἰς μικτά;

294). Πότε τὸ γινόμενον ἀναγώγου κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον δίδει κλάσμα ἀνάγωγον.

295). Ποίους παρονομαστὰς δύνανται νὰ ἔχωσι κλάσματα ἀνάγωγα τρεπόμενα εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ μὲ 2 ψηφία; (§ 207).

296). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ παρονομασταὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων ἅτινα τρεπόμενα εἰς δεκαδικὰ δίδουσι περιοδικὰ μὲ ἓν ψηφίον μὴ περιοδικὸν καὶ ἓν περιοδικόν (§ 207).

297). Ἔστω ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\lambda}\times 5^{\mu}\times 3^{\rho}\times 7^{\sigma}$· ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου τοῦ περιοδικοῦ εἰς ὃ τρέπεται, θὰ ἔχωμεν $10^{\nu}-1=3^{\rho}\times 7^{\sigma}\times K$. Νὰ γενικευθῇ ἡ πρότασις αὕτη. (§ 207).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

213.—*Τετράγωνον ἀριθμοῦ (§ 70) λέγεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμόν.* Π. χ. τετράγωνον τοῦ 6 εἶναι ὁ 6×6, ἤτοι ὁ 36.

Ἐπίσης τετράγωνον τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι ὁ $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$: ὁ ἀριθμὸς 6 λέγεται *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ 36, ὅπως καὶ ὁ $\frac{2}{3}$ λέγεται τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ καὶ ἐν γένει· ἀριθμός τις β λέγεται *τετραγωνικὴ ῥίζα* ἑτέρου α, ἐὰν ὁ α εἶναι τετράγωνον τοῦ β· ἤτοι·

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ἕτερος ἀριθμὸς ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν πρῶτον. Γράφοντες ὑπὸ τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ ἀριθμόν τινα α ἐννοοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α· π. χ. γράφοντες $\sqrt{49}$ ἐννοοῦμεν τὸν 7· ὁμοίως $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

Τετράγωνον ἀθροίσματος.

214.—Ἔστωσαν δύο ἀκέραιοι α καὶ β· ἔχομεν κατὰ τὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ·

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\times(\alpha+\beta)=\alpha\times\alpha+\alpha\times\beta+\beta\times\alpha+\beta\times\beta$$

(§ 47 β΄).

ἢ $$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2$$ ὅθεν·

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν· π. χ. $(4+3)^2=4^2+2\times4\times3+3^2=49$

215. — Ἐπειδὴ

$$(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\times\alpha+1 \qquad (\S\ 214)$$

ἕπεται ὅτι

$$(\alpha+1)^2-\alpha^2=2\times\alpha+1=\alpha+(\alpha+1). \qquad \text{Ἄρα·}$$

Τὰ τετράγωνα δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων διαφέρουσι κατὰ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

216. — Ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων τὸ σύνολον τῶν δεκάδων ἀριθμοῦ τινος α καὶ μ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· ἤτοι ἔστω

$$\alpha=10\times\delta+\mu.$$

Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$\alpha^2=100\times\delta^2+2\times\delta\times10\times\mu+\mu^2 \qquad (\S\ 214,\ \S\ 71\cdot\ \delta\cdot)$$

Ἐπειδὴ οἱ δύο πρῶτοι προσθετέοι τοῦ δευτέρου μέλους λήγουσιν εἰς 0, ὁ α^2 λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον εἰς ὃ καὶ ὁ μ^2.

Ἄρα·

Τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς ὃ λήγει τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ.

217. — Οὐδεὶς ἐκ τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἔχει τετράγωνον λῆγον εἰς 2, 3, 7, 8· ὅθεν καὶ

Οὐδενὸς ἀκεραίου τὸ τετράγωνον λήγει εἰς 2, 3, 7, 8.

218. — Ἔστω ὅτι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς α λήγει εἰς τρία μηδενικά· τότε διαγράφοντες ταῦτα λαμβάνομεν ἀκέραιον τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον δὲν λήγει εἰς μηδέν· ἑπομένως τὸ τετράγωνον τοῦ α θὰ λήγῃ εἰς 6 μηδενικὰ καὶ ἐν γένει, ὅταν ἀκέραιός τις λήγῃ εἰς ν μηδενικά, τὸ τετράγωνόν του θὰ λήγῃ εἰς 2ν μηδενικά· ὅθεν·

Ἀριθμός τις ἀκέραιος λήγων εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου.

219. — Ὅταν ἀκέραιός τις εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου, λέγεται *τέλειον τετράγωνον*.

Κλάσμα δὲ λέγεται *τέλειον τετράγωνον*, ὅταν εἶναι τετράγωνον ἄλλου κλάσματος, (διότι τὸ τετράγωνον ἀκεραίου εἶναι ἀκέραιος).

Ἀσκήσεις.

298.) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἐλαττούμενον κατὰ μονάδα γίνεται ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4. (§ 214).

299.) Πᾶς περιττὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων. (§ 215).

300.) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀκεραίων διαφερόντων κατὰ 2 μονάδας εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4. (§ 214).

301.) Μεταξὺ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων περιλαμβάνονται 24 ἀκέραιοι ἀριθμοί· τίνες οἱ διαδοχικοὶ ἀκέραιοι; (§ 215).

302.) Ἀκέραιος λήγων εἰς 1 ἢ 4 ἢ 9 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν ἔχῃ ψηφίον δεκάδων περιττόν. (§ 216).

303.) Ἐὰν ἀκέραιός τις ἔχῃ ψηφίον μονάδων 6 καὶ ψηφίον δεκάδων ἄρτιον, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

304.) Ἀκέραιος λήγων εἰς 5 καὶ ὢν τέλειον τετράγωνον θὰ ἔχῃ ὡς ψηφίον δεκάδων 2, ὡς ψηφίον δὲ ἑκατοντάδων 0 ἢ 2 ἢ 6.

305.) Πᾶς ἄρτιος ὅστις εἶναι τέλειον τετράγωνον θὰ διαιρῆται διὰ 4. (ἄσκ. 165).

306.) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου. (ἄσκ. 165).

307.) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀκέραιοι, ὧν τὰ τετράγωνα νὰ διαφέρωσι κατὰ 285 μονάδας. (§ 215).

308.) Τὸ ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ τοῦ τετραγώνου του εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2.

309.) Παντὸς περιττοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένον κατὰ μονάδα. (§ 79).

310.) Τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ εἶναι 240. Τίς ὁ ἀριθμός;

Τετράγωνον γινομένου.

220. — Ὡς γνωρίζομεν, τὸ τετράγωνον γινομένου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τετραγώνων τῶν παραγόντων (§ 71. δ) ὡς ἐπίσης (§ 131) εἴδομεν ὅτι

Ἵνα ἀριθμός τις ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας εἶναι τέλειον τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων νὰ εἶναι ἄρτιοι.

Ἀσκήσεις.

311). Ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 24, συγχρόνως δὲ καὶ τέλεια τετράγωνα, νὰ εὑρεθῇ ὁ μικρότερος.

312). Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν ἑκάτερος αὐτῶν εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ τότε μόνον. (§ 220)

313). Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 2 δὲν δύναται νὰ εἶναι παράγων συγχρόνως δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἢ δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ δύο μονάδας.

314). Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι τέλεια τετράγωνα, τότε ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν.

Τετράγωνον κλάσματος.

Τίνα ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι τέλεια τετράγωνα ;

221. — Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐπειδὴ δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου, θὰ εἶναι τετράγωνον κλάσματος καὶ ἔστω,

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2.$$

Ἄς καλέσωμεν $\frac{\lambda}{\mu}$ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα τὸ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$,

τότε $$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2=\frac{\lambda^2}{\mu^2} \qquad (§\ 183)$$ ἤτοι·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda^2}{\mu^2}$$

καὶ ἑπομένως

$$α=λ^2 \text{ καὶ } β=μ^2 \qquad (\S\ 146)\text{· ἄρα}$$

Ἵνα κλάσμα τι ἀνάγωγον εἶναι τέλειον τετράγωνον, πρέπει ἑκάτερος τῶν ὅρων του νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$ δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου, ἐνῷ τὸ κλάσμα $\frac{18}{32}$, ἤτοι τὸ $\frac{9}{16}$, εἶναι τετράγωνον ἄλλου, τοῦ $\frac{3}{4}$·

Ἀκέραιος μὴ ὢν τετράγωνον ἀκεραίου δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον κλάσματος;

§ **222.** — Ἔστω ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς κλάσματος ἔδιδεν ἀκέραιον, ὅστις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· π. χ. ἔστω ὅτι $\left(\frac{α}{β}\right)^2=5$· τότε, ἐὰν $\frac{λ}{μ}$ καλέσω τὸ ἀνάγωγον τὸ ἴσον πρὸς $\frac{α}{β}$ θὰ ἔχω

$$\left(\frac{λ}{μ}\right)^2=5 \quad \text{ἢ} \quad \frac{λ^2}{μ^2}=5. \qquad (\S\ 183)$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ $\frac{λ}{μ}$ εἶναι ἀνάγωγον, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{λ^2}{μ^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον (§ 113)· ἑπομένως ὁ $μ^2$ δὲν διαιρεῖ τὸν $λ^2$, ὅθεν ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν

$$\frac{λ^2}{μ^2}=5 \text{ ἢ καὶ } \left(\frac{α}{β}\right)^2=5$$

ἄρα·

Τὸ τετράγωνον κλάσματος δὲν εἶναι ἀκέραιος καὶ ἑπομένως·

Ἐὰν ἀκέραιος δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου δὲν εἶναι οὔτε κλάσματος.

Ἀσκήσεις.

315). Κλάσμα τι εἶναι τέλειον τετράγωνον ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ὅρων του εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ τότε μόνον. (§ 220, § 221).

316). Ποῖον κλάσμα αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνόν του γίνεται ἴσον πρὸς τὰ $\frac{33}{4}$ αὐτοῦ ;

317). Ποῖον κλάσμα διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του δίδει ὡς πηλίκον $\frac{28}{63}$;

318). Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2$ καὶ α διάφορον τοῦ β τότε $\gamma^2=\alpha.\beta$

Ὑπολογισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

223.—Ἂς λάβωμεν δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους καὶ ἂς ὑψώσωμεν αὐτοὺς εἰς τὸ τετράγωνον· π. χ. τὸν 6 καὶ τὸν 7, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι 36 καὶ 49. Τοῦ 36 τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι ὁ 6 (§ 213)· τοῦ 49 ὁ 7· πᾶς ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ 36 καὶ τοῦ 49 θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὸν 6· ὅπως π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 37, 38, 48, 37 $\frac{1}{2}$ κ. ο. κ. ἤτοι

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Π. χ. τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 160 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 12, διότι $12^2=144$ καὶ $13^2=169$.

Ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ καλεῖται *ἐξαγωγὴ* τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

224.—Ἔστω πρῶτον δοθεὶς τυχὼν ἀκέραιος μικρότερος τοῦ 100, π. χ. ὁ 75· τότε λαμβανομένου ὑπ' ὄψει ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

εἶναι τὰ ἑξῆς

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 75 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 8 (§ 223).

225.—Ἤδη πρὶν ἢ προχωρήσωμεν εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Ἐὰν α, β, υ εἶναι ἀκέραιοι, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ υ μικρότερος τοῦ 100, τοιοῦτοι δὲ ὥστε

$$\alpha\times100<\beta\times100+\upsilon \qquad (1)$$

τότε ὁ α δὲν ὑπερβαίνει τὸν β, διότι, ἐὰν εἴχομεν

$$\alpha>\beta, \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha=\beta+\rho,$$

ὅπου ρ εἶναι τοὐλάχιστον ἡ μονάς, τότε θὰ ἦτο

$$\alpha\times100=\beta\times100+\rho\times100$$

ὁπότε

$$\beta\times100+\rho\times100>\beta\times100+\upsilon \qquad (\text{διότι } \upsilon<100)$$

ἢ καὶ

$$\alpha\times100>\beta\times100+\upsilon$$

ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν τεθεῖσαν ἀνισότητα (1)·
ὁμοίως, ἐὰν

$$\alpha\times10<\beta\times10+\upsilon \qquad (2)$$

ὅπου $\upsilon<10$, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ α δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν β· ἐπίσης ἂν

$$\alpha\times100>\beta\times100+\upsilon$$

τότε κατ' ἀνάγκην

$$\alpha>\beta.$$

Πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου μεγαλυτέρου τοῦ 100 κατὰ προσέγγισιν μονάδος ;

226.—Ἔστω ἤδη τυχὼν ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ 100· π. χ. ὁ 5436· ζητοῦμεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 223) ἀκέραιόν τινα α, τοιοῦτον ὥστε

$$\alpha^2\leqq5436 \qquad (3)$$

καὶ

$$(\alpha+1)^2>5436 \qquad (4)$$

ἀμέσως φαίνεται ὅτι ὁ α δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ 10· θὰ περιέχῃ ἑπομένως δεκάδας τινὰς δ καὶ μονάδας μ· ὁπότε

$$\alpha=\delta\times10+\mu\cdot$$

κατὰ τὴν πρότασιν (§ 216) ἔχομεν·

$$\alpha^2 = \delta^2 \times 100 + 2 \times \delta \times \mu \times 10 + \mu^2 \qquad (\mathrm{K})$$

ἑπομένως προκύπτει ἐκ τῆς ἀνισότητος (3)

$$\delta^2 \times 100 \leqq 5436 \quad ἢ \quad \delta^2 \times 100 \leqq 54 \times 100 + 36$$

ὅθεν (§ 225)

$$\delta^2 \leqq 54 \qquad (\mathrm{A})$$

ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς μ δὲν ὑπερβαίνει τὸν 9, ἔχομεν ὅτι ὁ $\mu + 1$ δὲν ὑπερβαίνει τὸν 10 καὶ ἑπομένως ὁ $\alpha + 1$ δὲν ὑπερβαίνει τὸν $(\delta \times 10 + 10)$· ὥστε ὁ $(\alpha + 1)^2$ δὲν ὑπερβαίνει τὸν $(\delta + 1)^2 \times 100$· ὅθεν ἐκ τῆς ἀνισότητος (4) ἕπεται ὅτι

$$(\delta + 1)^2 \times 100 > 5436 \quad ἢ \quad (\delta + 1)^2 \times 100 > 54 \times 100 + 36$$

ὅθεν (§ 225) $(\delta + 1)^2 > 54$ (B).

Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (A) καὶ (B) συμπεραίνομεν (§ 223) ὅτι $\delta = 7$· ἤτοι·

Ὁ ἀριθμὸς δ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εὑρίσκεται, ἂν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ζητήσωμεν ἤδη τὸν μ· ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (K) τὸ δ διὰ τοῦ 7 ἔχομεν

$$\alpha^2 = 7^2 \times 100 + 2 \times 7 \times \mu \times 10 + \mu^2$$

καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (3) γράφεται

$$7^2 \times 100 + 2 \times 7 \times \mu \times 10 + \mu^2 \leqq 5436$$

ὅθεν καὶ $2 \times 7 \times \mu \times 10 + \mu^2 \leqq 536$

ἢ

$$2 \times 7 \times \mu \times 10 + \mu^2 \leqq 53 \times 10 + 6 \qquad (\Gamma)$$

ἑπομένως $2 \times 7 \times \mu \times 10 < 53 \times 10 + 6$

καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 225)

$2 \times 7 \times \mu \leqq 53$ ἢ $\mu \leqq \dfrac{53}{2 \times 7}$, ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι *τὸ ψηφίον τῶν μονάδων δὲν ὑπερβαίνει τὸ ψηφίον, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης.*

Κατὰ ταῦτα τὸ ψηφίον τῶν μονάδων δὲν ὑπερβαίνει τὸν 3.

Ἵνα δοκιμάσωμεν ἤδη ἂν $\mu=3$, θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (Γ) ὅπου μ τὸ 3, ἐὰν ἡ σχέσις ἀληθεύῃ, τότε $\mu=3$, ἄλλως δοκιμάζομεν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον. Παρατηρητέον ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος (Γ) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$(2\times7\times10+\mu)\times\mu.$$

ἢ καὶ $(140+\mu)\times\mu$ ὥστε,

διὰ νὰ διακρίνωμεν ἂν $\mu=3$, παρατηροῦμεν ἂν τὸ 143×3 εἶναι μικρότερον τοῦ ὑπολοίπου 536· εὑρίσκομεν οὕτως ἐνταῦθα $\mu=3$.

Τουτέστι, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων σχηματίζομεν ἀριθμὸν μὲ δεκάδας 2×7 καὶ μὲ μονάδας τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 3· πολλαπλασιάζομεν δὲ τοῦτον ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 3· ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι μικρότερον τοῦ ὑπολοίπου 536, ἕπεται ὅτι $\mu=3$· καὶ ἑπομένως τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 5436 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 73· παρατηροῦμεν δ' ὅτι, ἐὰν τὸ γινόμενον 143×3 ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 536, θὰ εὕρωμεν ὅ,τι καὶ ἐὰν ἀφῃροῦμεν ἀπ' εὐθείας τὸ 73^2 ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· καθόσον ἡ διαφορὰ

$$536-(2\times7\times\mu\times10+\mu^2)$$

ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν

$$5436-(7^2\times100+2\times7\times\mu\times10+\mu^2).$$

ὥστε ἐὰν ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς, πρέπει $73^2+107=5436$.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς·

```
 54'36        | 73
 49           |----------
------         143
  536            3
  429         -----
------         429
  107
```

Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 543678· ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς καὶ μ ὁ τῶν μονάδων· κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρίσκομεν τὸ δ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 5436, ἤτοι $\delta=73$· ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ὡς καὶ προηγουμένως $73^2\times100+2\times73\times\mu\times10+\mu^2\leqq543678$·

ἀφαιροῦμεν ὡς καὶ πρότερον τὸ $73^2 \times 100$· ἡ ἀφαίρεσις ὅμως τοῦ $73^2 \times 100$ ἀπὸ τοῦ 543678 γίνεται, καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ 73^2 ἀπὸ τοῦ 5436, εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον προσγράψωμεν τὸ 78· ἀλλ' ὡς παρετηρήσαμεν ἤδη ἡ διαφορὰ $5436 - 73^2$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἤδη εὑρεθὲν ὑπόλοιπον 107· ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ προσγράψωμεν εἰς αὐτὸ 78. Προχωροῦμεν κατόπιν ὅπως καὶ ἀνωτέρω πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ.

Διάταξις τῆς πράξεως

54'36'78	737	
49	143	1467
536	3	7
429	429	10269
10778		
10269		
509		

563487

Κανών·

227. — *Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ ἀκεραίου, (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) χωρίζομεν αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων. Τὸ πρῶτον πρὸς τἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον· τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἥτις θὰ εἶναι καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης. Τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τούτου ψηφίου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος. Δεξιᾷ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ δεύτερον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται ἀριθμός τις, ἀπὸ τοῦ ὁποίου χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον πρὸς τὰ δεξιά. Τὸ πρὸς τἀριστερὰ τμῆμα θεωροῦμεν ὡς διαιρετέον, ὡς διαιρέτην δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ ἀκέραιον πηλίκον, ὅπερ θὰ εὕρωμεν, γράφομεν δεξιᾷ καὶ ὑποκάτω τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν. Ἐὰν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τότε τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιᾷ τοῦ πρώτου, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ. ο. κ. μέχρις οὗ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, ὁπότε ἔχομεν καὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης. Εἰς τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως καταβιβάζομεν καὶ τὸ τρίτον* *διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ. Χωρίζομεν πάλιν ἀπ' αὐτοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, διαιροῦμεν τὸ ἀπομένον τμῆμα διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν εὑρεθέντων ἤδη ψηφίων τῆς ρίζης, προχωροῦμεν δὲ κατόπιν ὅπως καὶ προηγουμένως· τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν μέχρις οὗ καταβιβασθῇ καὶ τὸ τελευταῖον διψήφιον τμῆμα.*

Παραδείγματα.

```
76'78'25 | 876                   257056 | 507
64       |--------------          25     |-------------
-------- |  167   1746            ------ |  10   1007
1278     |    7      6            07056  |          7
1169     | ----   -----            7049  |       -----
-------- | 1169  10476            -----  |       7049
 10925   |                            7  |
 10476   |
-------- |
   449   |

3'78'75 | 194
1       |-----------
------- |  29   384
278     |   9     4
261     | ---   ----
------- | 261   1536
 1775   |
 1536   |
------- |
  239   |
```

Παρατηρήσεις. Δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὅπως εἰς τὸ δεύτερον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, ἓν τῶν πηλίκων νὰ εἶναι 0· τότε καὶ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ρίζης θὰ εἶναι τὸ 0.

Ἐπίσης δυνατόν, ὅπως εἰς τὸ τρίτον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, πηλίκον τι νὰ εἶναι μεῖζον τοῦ 9· τότε ἀρχίζομεν τὴν δοκιμὴν ἀπὸ τοῦ ψηφίου 9.

Ἀσκήσεις.

319). Τὰ ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ρίζης εἶναι τόσα, ὅσα καὶ τὰ τμήματα εἰς ἃ χωρίζεται ἀρχικῶς ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑπταψηφίου θὰ ἔχῃ τέσσαρα ψηφία.

320). Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης.

Καὶ τῳόντι, ἐὰν $\upsilon \geq 2\rho+1$, τότε $\rho^2+\upsilon \geq (\rho+1)^2$(§ 215, § 223).

321). Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀριθμοῦ μὴ ἀκεραίου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους του.

Π. χ. τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 103,25 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ 103· ἤτοι ὁ 10.

322). Τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ οὐδέποτε εἶναι μικρότερον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἐν ᾗ διαιρετέος μὲν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ προκύπτοντος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων τῆς ρίζης ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, διαιρέτης δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ρίζης ηὐξημένον κατὰ μονάδα·
οὕτως ἐπὶ παραδείγματι (σελ. 165) εὑρίσκομεν πρὸ τῆς δοκιμῆς ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 5436 δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ 3.

323). Πόσα τέλεια τετράγωνα περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 56734 ;

Ὑπολογισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ (ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ) κατὰ προσέγγισιν δοθέντος πολλοστημορίου τῆς μονάδος.

228.—Ἔστωσαν δύο ὁμώνυμα κλάσματα μὲ ἀριθμητὰς δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους· π. χ. $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$. Τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι $\frac{25}{49}$, $\frac{36}{49}$. Πᾶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{25}{49}$ ἀλλὰ μικρότερος τοῦ $\frac{36}{49}$ ἔχει ὡς τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$ τὸν $\frac{5}{7}$.

Ὁμοίως πᾶς ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ $\left(\frac{3}{10}\right)^2$ καὶ τοῦ $\left(\frac{4}{10}\right)^2$, ὅπως π. χ. ὁ $\frac{11}{75}$, ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τὸν $\frac{3}{10}$, ἤτοι·

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ *καλεῖται τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν ν καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα περιέχονται εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.*

229.—Ἔστω α ἀριθμός τις τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ζητοῦμεν ἀκέραιόν τινα ρ τοιοῦτον ὥστε

$$\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^2 \leqq \alpha \text{ καὶ } \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^2 > \alpha \text{ ἢ καὶ}$$

$$\frac{\rho^2}{\nu^2} \leqq \alpha \quad \text{καὶ } \frac{(\rho+1)^2}{\nu^2} > \alpha, \qquad \text{ἢ ἀκόμη}$$

$$\rho^2 \leqq \alpha \times \nu^2 \quad \text{καὶ} \quad (\rho+1)^2 > \alpha \times \nu^2$$

ἑπομένως ρ θὰ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν $\alpha \times \nu^2$, ἤτοι ὁ ρ θὰ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha \times \nu^2$ ἄρα·

Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, *πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ* ν^2· *τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ταύτην λαμβάνομεν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν τὸν* ν· π. χ. εὑρίσκομεν οὕτω τοῦ 5 τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$ τὸν ἀριθμὸν $\frac{17}{8}$.

Ἐφαρμογαὶ τοῦ κανόνος τούτου.

230.—Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ παρονομαστὴς εἶναι δύναμις τοῦ 10, ἤτοι ὅταν ζητῶμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος, αἱ πράξεις γίνονται ἁπλούστεραι.

Παραδείγματα. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Κατὰ τὸν κανόνα ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2×100^2, ἤτοι τοῦ 20000, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκω 141 καὶ ταύτην διαιρῶ διὰ τοῦ 100, ἤτοι ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι 1,41.

Ὁμοίως εὑρίσκω ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2,35416 κατὰ προσέγγισιν 0,01 εἶναι 1,53.

Ἀσκήσεις.

324). Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ

$$\sqrt{2500},\quad \sqrt{7543{,}6},\quad \sqrt{25203},\quad \sqrt{252300},$$
$$\sqrt{9302600},\quad \sqrt{8035}$$

ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

325). Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κλάσματος $\frac{7}{\beta^2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\beta}$.

326). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\sqrt{\frac{11}{2^2\times3}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{6}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{11}{2^2\times3}=\frac{11\times3}{(2\times3)^2}$

327). Νὰ ὑπολογισθῶσιν ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$ αἱ

$$\sqrt{19},\quad \sqrt{\frac{16}{49}},\quad \sqrt{\frac{64}{49}},\quad \sqrt{\frac{39}{40}},\quad \sqrt{\frac{7}{25}}.$$

328) Νὰ ὑπολογισθῶσι κατὰ προσέγγισιν 0,1

$$\sqrt{2{,}79864},\quad \sqrt{\frac{3}{4}},\quad \sqrt{12\frac{2}{5}},\quad \sqrt{8{,}33333\ldots}$$

329). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\sqrt{14}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{7}$.

330). Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου τινὸς καθ' οἱανδήποτε προσέγγισιν εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ $\rho + \frac{\upsilon}{2\rho}$, ὅπου ρ δηλοῖ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον τὸ εὑρεθὲν κατὰ τὴν τοιαύτην ἐξαγωγήν.

Ἀρκεῖ πρὸς ἀπόδειξιν νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι (§ 226)

$A = \rho^2 + \upsilon$ καὶ (§ 214) $\left(\rho + \frac{\upsilon}{2\rho}\right)^2 = \rho^2 + \upsilon + \frac{\upsilon^2}{4\rho^2}$.

331). Ἐὰν κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὸ ὑπόλοιπον δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν εὑρεθεῖσαν τετραγωνικὴν ρίζαν, τότε αὕτη εἶναι καὶ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{2}$. (§ 226 § 228).

332). Εἰς μίαν τάξιν σχολείου ὑπάρχουσι τόσα θρανία, ὅσοι οἱ μαθηταὶ οἱ καθήμενοι εἰς ἕκαστον θρανίον. Ἐκ τῶν 69 μαθητῶν τῆς τάξεως ταύτης 5 δὲν κάθηνται εἰς θρανία. Πόσα εἶναι τὰ θρανία ;

333). Δι' ἕκαστον λαχνὸν ἑνὸς λαχείου πληρώνει τις 0,50 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ δι' ὅλους τοὺς λαχνοὺς τοὺς φέροντας ἀριθμὸν ὅστις εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ εὑρίσκεται μεταξὺ 1050 καὶ 1250 ;

334). Ποῖον κλάσμα διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του δίδει κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{2523}{4107}$;

335). Ἐὰν ἀριθμός τις ἄρτιος εἶναι ἄθροισμα 2 τετραγώνων, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

336). Ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4, πλὴν τοῦ 4, εἶναι διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀκεραίων.

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν τεσσάρων βιβλίων.

337). Ἔστω δ κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν α καὶ β, ἔστω δὲ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως α : β. Πῶς ἐκ τῶν τριῶν πηλίκων τῶν διαιρέσεων α : δ, β : δ, α : β εὑρίσκεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως υ : δ ;

338). Τὸ γινόμενον $(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu-1)2\nu$ εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2^ν.

Ἀρκεῖ (ἄσκ. 235) νὰ λάβω ὑπ' ὄψει μου τὴν προφανῆ ἰσότητα

$$(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu-1)\,2\nu=\frac{1.2.3\ldots\nu(\nu+1)\ldots 2\nu}{1.2.3\ldots\nu}$$

339). Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ α ἡ διαίρεσις

$$[(\alpha+5).(\alpha+6)] : 6\alpha$$

εἶναι τελεία ;

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 6 πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν α(α—1) καὶ ὁ α νὰ διαιρῇ τὸν 30

340). Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος διψήφιος ἴσος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων του.

341). Τὸ γινόμενον πέντε διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 1. 2. 3. 4. 5. (§ 117)

342). Τὸ γινόμενον ἓξ διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 1. 2. 3. 4. 5. 6. (§ 117)

343). Τὸ γινόμενον 18 διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι διαιρετὸν διὰ 720^3.

344). Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἀδύνατον ὁ κύβος ἀριθμοῦ νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ κατὰ μονάδα.

345). Τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα 5, τὸ δὲ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν εἶναι 36. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί. (§ 103, § 118)

346). Νὰ εὑρεθῶσιν 6 ἀριθμοὶ ὧν ἕκαστος ἔχει 30 διαιρέτας καὶ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, 5, 7, δι' οὐδενὸς δὲ ἄλλου πρώτου διαιρεῖται. (ἄσκ. 172)

347). Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. ἀριθμοῦ τινος Α καὶ τοῦ γινομένου ἄλλων Β×Γ×Δ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς· εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. τοῦ Α καὶ Β· ἔστω οὗτος ὁ Μ· διαιροῦμεν τὸν Α διὰ Μ καὶ ζητοῦμεν τὸν μ. κ. δ. τοῦ πηλίκου Π καὶ τοῦ Γ· ἔστω οὗτος ὁ Μ΄· διαιροῦμεν τὸ Π διὰ τοῦ Μ΄ καὶ ζητοῦμεν τὸν μ. κ. δ. Μ΄΄ τοῦ πηλίκου Π΄ καὶ τοῦ Δ. Ὁ μ. κ. δ. τῶν Α καὶ Β×Γ×Δ θὰ εἶναι Μ×Μ΄×Μ΄΄.

Ἀποδεικνύομεν ὅτι ὁ Μ×Μ΄×Μ΄΄ διαιρεῖ τὸν ζητούμενον μ. κ. δ. καὶ ἀντιστρόφως ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. διαιρεῖ τὸν Μ×Μ΄×Μ΄΄· ὅθεν ἡ πρότασις·

348). Ἐὰν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι διάφοροι τοῦ 2, ὁ μ. κ. δ. τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ τῆς διαφορᾶς των εἶναι ὁ 2.

349). Ἔστω δ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α, β, καὶ δ΄ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α, β΄· τότε ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ ββ΄ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ δδ΄. (§ 125, 74).

350). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι τριπλάσιος τοῦ δευτέρου καὶ μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ὁ 22. (§ 103)

351). Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε, ὅταν αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν τὸν ἕνα κατὰ μονάδα, νὰ λαμβάνωμεν πολλαπλάσια τοῦ ἄλλου, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

352). Ἐὰν ἀριθμός τις Π. εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α, καὶ εἶναι συγχρόνως κοινὸς διαιρέτης τῶν αδ—βγ καὶ α—γ, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν δ—β.

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$αδ-βγ-β(α-γ)=αδ-αβ$$

353). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε αδ—βγ=1, τότε οἱ ἀριθμοὶ α, β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἐπίσης δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ α—γ, δ—β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

354). Ἐὰν α εἶναι περιττός, τὸ γινόμενον $α(α^2+2)(α^2+7)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 24

355). Ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καὶ οὐχὶ διὰ 4 δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος πρὸς διαφορὰν τετραγώνων δύο ἀκεραίων. (Ἄσκ. 75).

356). Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων περιττῶν ἢ ἀρτίων αὐξανόμενον κατὰ μονάδα γίνεται τέλειον τετράγωνον.

357). Τὸ τετράγωνον παντὸς πρώτου πρὸς τὸν 6 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 24 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι πᾶς πρῶτος πρὸς τὸν 6 θὰ εἶναι ἢ τῆς μορφῆς $6\nu-1$ ἢ τῆς μορφῆς $6\nu+1$. (Ἄσκ. 155)

358). Πότε τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο ;

359). Ἡ διαφορὰ ἀριθμοῦ ἀκεραίου καὶ τοῦ τετραγώνου του εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2.

360). Ἡ τρίτη δύναμις ἀκεραίου εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων.

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῆς ἰσότητος

$$\alpha^2(\alpha+1)^2-\alpha^2(\alpha-1)^2=4\alpha^3.$$

361). Πᾶς ἀκέραιος ὅστις εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἢ θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4, ἢ διαιρούμενος διὰ τοῦ 4 θὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 1.

362). Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν εἶναι πάντοτε ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 8.

363). Ἐὰν δύο περιττοὶ διαδοχικοὶ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου καὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ προστιθέμενα δίδουσιν ὡς ἄθροισμα ἀριθμὸν ἔχοντα ἐν ὅλῳ τέσσαρας διαιρέτας.

364). Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει κοινὸν κλάσμα καθιστώμενον ἴσον πρὸς $\frac{4}{9}$, ὅταν προσθέσωμεν 5 εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ $\frac{2}{3}$ εἰς τὸν παρονομαστήν.

365). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀκέραιοι α καὶ β μικρότεροι τοῦ 15 τοιοῦτοι ὥστε

$$\frac{7}{45}=\frac{\alpha}{15}+\frac{\beta}{15^2}$$

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$\frac{7}{45}=\frac{7}{3^2\times5}=\frac{7\times5}{15^2}=\frac{35}{15^2}=\frac{2}{15}+\frac{5}{15^2}$$

366). Ἐὰν ἴσων κλασμάτων προστεθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι, προκύπτει κλάσμα ἴσον πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν. (§ 148)

367). Ποιμήν τις έχασεν ένεκα επιζωοτίας τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν προβάτων του, ἐπώλησε δὲ τἀπομείναντα 64 πρόβατα ἀντὶ 280 δραχ. Ἐὰν ἐπώλει ὅλον τὸ ποίμνιόν του πρὶν ἢ ἐνσκήψῃ ἡ ἀσθένεια, θὰ ἐπώλει ἕκαστον ζῷον 2 δραχ. περισσότερον. Πόσα θὰ ἐλάμβανε;

368). Δεδομένου κλάσματός τινος, π. χ. τοῦ $\frac{5}{8}$, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν κλάσμα τι $\frac{\gamma}{\delta}$, τοιοῦτον ὥστε τὸ γινόμενον $\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{5}{8}$ καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\gamma}{\delta}:\frac{5}{8}$ νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι. Ποίαν πρὸς τοῦτο ἰδιότητα θὰ ἔχωσιν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{\gamma}{\delta}$;

369). Ἀνταλλάσσει τις $2\frac{1}{2}$ ὀκ. καφὲ μὲ 1 πῆχυν ὑφάσματος· πόσοι πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ἀνταλλάσσονται μὲ $9\frac{3}{5}$ ὀκ. καφέ;

370). Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 9 ὥρας· μία στρόφιγξ δύναται νὰ κενώσῃ αὐτὴν εἰς 12 ὥρας· μόλις πληρωθῇ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς δεξαμενῆς ὑπὸ τοῦ πρώτου κρουνοῦ ἀνοίγεται καὶ ἡ στρόφιγξ ἡ κενοῦσα τὴν δεξαμενήν· μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή;

371). Δύο ὁδοιπόροι βαδίζοντες ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀναχωροῦσιν ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β ἀπεχουσῶν ἀπ' ἀλλήλων 85 χιλιόμετρα καὶ βαίνουσι πρὸς συνάντησιν ἀλλήλων. Ὁ πρῶτος ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α τὴν 10 π. μ., ὁ δεύτερος δ' ἐκ τοῦ Β τὴν 11 π. μ.· ἡ ταχύτης τοῦ μὲν πρώτου εἶναι 7 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, τοῦ δὲ δευτέρου 17. Εἰς ποίαν ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασιν θὰ συναντηθῶσι καὶ κατὰ ποίαν ὥραν;

372). Δύο ταχυδρόμοι ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ δύο τόπων Α καὶ Β διευθυνόμενοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ μὲν μὲ ταχύτητα α, ὁ δὲ μὲ ταχύτητα β, τὸ δὲ μῆκος τῆς ὁδοῦ ἐφ' ἧς βαδίζουσιν εἶναι γ. Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως θὰ συναντηθῶσιν;

373). Ἀτμάμαξά τις, ἔχουσα ταχύτητα α, ἀνεχώρησε τρεῖς ὥρας ὕστερον ἄλλης ἐκ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ διατρέχει τὴν αὐτὴν ὁδόν, ἡ δὲ ταχύτης αὐτῆς εἶναι τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς ταχύτητος τῆς ἄλλης· μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ αὐτήν;

374). Νὰ εὑρεθῶσι τρία κλάσματα, τὰ ἁπλούστερα, ἴσα πρὸς τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{10}{11}$ καὶ τοιαῦτα, ὥστε ὁ παρονομαστὴς τοῦ πρώτου νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ τρίτου.

Τὰ ζητούμενα (§ 148) θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\frac{5\times\pi}{7\times\pi} \quad \frac{8\times\rho}{9\times\rho} \quad \frac{10\times\sigma}{11\times\sigma},$$

ὅθεν ζητοῦμεν νὰ ἔχωμεν $7\times\pi=8\times\rho$ καὶ $9\times\rho=10\times\sigma$.

375). Ἡ διαφορὰ δύο ἀναγώγων κλασμάτων, ὧν οἱ παρονομασταὶ διαφέρουσι, δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

376). Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha(2\alpha+1)(7\alpha+1)}{6}$ ἀνάγεται εἰς ἀκέραιον, διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ α.

377). Τὰ κλάσματα $\frac{\alpha-6}{15}$ καὶ $\frac{\alpha-5}{24}$ δὲν εἶναι δυνατὸν διὰ τὴν αὐτὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ α νὰ εἶναι ἀκέραιοι.

378). Τὸ κλάσμα $\frac{15\alpha^2+8\alpha+6}{30\alpha^2+21\alpha+13}$ εἶναι ἀνάγωγον, τοῦ α ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου.

Πᾶς κ. δ. τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ἤτοι τὸν $15\alpha^2+13\alpha+7$· ἑπομένως θὰ διαιρῇ καὶ τὸν

$$(15\alpha^2+13\alpha+7)-(15\alpha^2+8\alpha+6)=5\alpha+1$$

ὅθεν καὶ τὸν

$$3\alpha.(5\alpha+1)=15\alpha^2+3\alpha$$

ἄρα καὶ τὸν

$$(15\alpha^2+8\alpha+6)-(15\alpha^2+3\alpha)=5\alpha+6$$

ἀλλ' οἱ $5\alpha+6$ καὶ $5\alpha+1$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὅθεν ἡ πρότασις.

379). Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^4+9(9-2\alpha^2)}{64}$ ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον, τοῦ α ὄντος περιττοῦ.

380). Ἔστωσαν ἴσα κλάσματα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}\ldots.$$

καὶ Μ ὁ μ. κ. δ τῶν παρονομαστῶν· καλέσωμεν π, π΄, π΄΄,.... τὰ πηλίκα $\frac{\beta}{M}$, $\frac{\beta'}{M}$, $\frac{\beta''}{M}$ .... Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ α, α΄, α΄΄, ... εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν π, π΄, π΄΄...

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ α διαιρεῖται διὰ τοῦ π, ὁ α΄ διὰ τοῦ π΄ καὶ ὁ α΄΄ διὰ τοῦ π΄΄.

381). Ἀριθμοῦ τινος, π. χ. τοῦ 36, ἂς ἀθροίσωμεν μερικοὺς διαιρέτας, ἔστω τοὺς 2, 3, 4, 9, τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν, ἤτοι τοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, τἀντίστοιχα πηλίκα, ἤτοι 18, 12, 9, 4, καὶ τἀντίστροφα τούτων, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$\frac{2+3+4+9}{18+12+9+4}=\frac{\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$$

Τίς ὁ λόγος δι' ὃν πάντοτε τοῦτο συμβαίνει;

382). Ἂν

$$\frac{\alpha}{A}>\frac{\beta}{B}>\frac{\gamma}{\Gamma}>\frac{\delta}{\Delta}$$

τότε

$$\frac{\alpha}{A}>\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}>\frac{\delta}{\Delta}$$ (Ἄσκ. 366)

383). Ἔστωσαν δύο ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$· ἔστω δὲ Ε τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμητῶν καὶ Δ ὁ μ. κ. δ. τῶν παρονομαστῶν· τὸ κλάσμα $\frac{E}{\Delta}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$· τουτέστι διαιρούμενον δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν δίδει ὡς πηλίκον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Π. χ· Ἂν ἔχωμεν τὰ κλάσματα $\frac{8}{15}$, $\frac{18}{25}$ καὶ σχηματίσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{72}{5}$, εὑρίσκομεν $\frac{72}{5} : \frac{8}{15} = 27$ καὶ

$\frac{72}{5} : \frac{18}{25} = 20$. Γενίκευσις.

384). Ἡ διαφορὰ δύο περιοδικῶν ἁπλῶν εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα. (§ 207)

385). Ποίους παρονομαστὰς δυνατὸν νὰ ἔχωσι κλάσματα ἀνάγωγα τρεπόμενα εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ μὲ τέσσαρα ψηφία περιόδου ;

386). Τὸ πηλίκον δύο ἁπλῶν περιοδικῶν κλασμάτων εἶναι πάντοτε ἁπλοῦν περιοδικόν ;

387). Ἐὰν ἀνάγωγον κλάσμα μὲ παρονομαστὴν ἀριθμὸν πρῶτον πρὸς τὸν 11 παράγῃ περιοδικόν, ἐν ᾧ ἡ περίοδος ἔχει ἄρτιον πλῆθος ψηφίων, τότε ἡ περίοδος αὕτη θὰ εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 11. (§ 207 § 204 § 84)

388). Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τρέπωνται εἰς περιοδικὰ μὲ περιόδους, ὧν τὰ ψηφία εἶναι ἀντιστοίχως ν καὶ ν′, τότε πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα ἔχον ὡς παρονομαστὴν τὸ β.δ θὰ παράγῃ περιοδικὸν μὲ ἀριθμὸν ψηφίων ἴσον πρὸς τὸ ε. κ. π. τῶν ν καὶ ν′, ἐὰν β καὶ δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ἐὰν ὁ μ. κ. δ. εἶναι τῆς μορφῆς $2^\lambda \times 5^\mu$.

Ἔστω

$$\beta = 2^\eta \times 5^\vartheta \times \rho \quad \text{καὶ} \quad \delta = 2^{\eta'} \times 5^{\vartheta'} \times \rho'$$

ὅπου ρ, ρ′ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5. Τότε (ἄσκ. 277)

$$10^\nu - 1 = \rho.\pi \qquad 10^{\nu'} - 1 = \rho'\pi'$$

ἑπομένως, ἐὰν N εἶναι τὸ τυχὸν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ν, ν′, θὰ ἔχωμεν (§ 88)

$$10^N - 1 = \rho\Pi = \rho'\Pi'$$

ὅθεν καὶ (§ 117)

$$10^N - 1 = \rho\rho'\sigma$$

Ὥστε κλάσμα ἀνάγωγον μὲ παρονομαστὴν τὸν ρρ′ θὰ τρέπηται εἰς περιοδικὸν μὲ περίοδον τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων δὲν ὑπερβαίνει τὸ τυχὸν κοινὸν πολλαπλ. τῶν ν, ν′ (ἄσκ. 278), εὐκόλως ἤδη ἐξάγεται ὅτι τὸ $\frac{1}{\rho\rho'}$ τρέπεται εἰς περιοδικὸν μὲ ψηφία περιόδου Ε τὸ πλῆθος, ὅπου Ε=ε. κ. π. τῶν ν, ν'.

389). Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τρέπωνται εἰς ἁπλᾶ περιοδικά, ἔχοντα ἀντιστοίχως ν καὶ ν' ψηφία εἰς τὴν περίοδον, τότε πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸ β. δ παράγει ἁπλοῦν περιοδικόν· καὶ ἂν β καὶ δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου τοῦ τελευταίου τούτου κλάσματος εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν ν καὶ ν'. (Ἀσκ. 388).

390). Ἔστω α ἀριθμός τις πρῶτος πρὸς τὸν 7 ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς τὸν 13. Ἐὰν γ καὶ δ εἶναι οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ἰσοῦνται πρὸς τὰς περιόδους τὰς παραγομένας ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{7}$ καὶ $\frac{\alpha}{13}$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{7}{13}$$

τοῦτο εὐκόλως φαίνεται, ἀφοῦ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ ρ, ἡ καθιστῶσα τὸν $10^{\rho}-1$ διαιρετὸν διὰ τοῦ 7 ἢ 13, εἶναι ὁ 6. (Ἀσκ. 277 § 204)

391). Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου ἀναγώγου κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν 7 καὶ ὡς ἀριθμητὴν ἀριθμὸν πρῶτον πρὸς τὸν 7 εἶναι ὁ 6. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ψηφία τῆς περιόδου θὰ εἶναι πάντοτε 1, 4, 2, 8, 5, 7 κατά τινα τάξιν τοποθετημένα.

Ἀφοῦ 7 εἶναι ὁ διαιρέτης (§ 202), ἓξ θὰ εἶναι τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα, οὐδὲν δ' ἐκ τούτων θὰ παραλειφθῇ ἐνταῦθα, διότι εἶναι 6 τὰ ψηφία τῆς περιόδου· ἐντεῦθεν εὐκόλως ἐξάγεται ἡ πρότασις.

392). Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{1}{\beta}$ τρέπηται εἰς περιοδικόν, οὗτινος ἡ περίοδος ἔχει β—1 ψηφία, τὸ κλάσμα $\frac{2}{\beta}$ θὰ τρέπηται εἰς περιοδικὸν οὗτινος ἡ περίοδος θὰ ἔχῃ τὰ αὐτὰ ψηφία, ἀλλὰ τοποθετημένα οὕτως ὥστε, ἐὰν π. χ. τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων τοῦ δευτέρου περιοδικοῦ συμπίπτῃ μὲ τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν τοῦ πρώτου, τότε τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν τοῦ δευτέρου θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ ψηφίον τῶν δεκάκις χιλιοστῶν τοῦ πρώτου, τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν τοῦ δευτέρου μὲ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάκις χιλιοστῶν τοῦ πρώτου κ. ο. κ. Ἀνάλογος παρατήρησις διὰ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐὰν ὁ α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β. (§ 202)

393). Πᾶς ἀριθμὸς περιττὸς μὴ λήγων εἰς 5 ἔχει πολλαπλάσιον τῆς μορφῆς 111 . . . . 1.

Ἔστω Α τυχὼν περιττὸς μὴ διαιρετὸς διὰ 5· τότε τὸ κλάσμα $\frac{1}{A}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν (§ 207). Ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου, θὰ ἔχωμεν (§ 204)

$$\frac{1}{A}=\frac{\pi}{10^{\nu}-1}$$

ὅπου π ἡ περίοδος. Θὰ ἔχωμεν δὲ προφανῶς καὶ (ἄσκ. 366)

$$\frac{1}{A}=\frac{\pi.10^{8\nu}+\pi.10^{7\nu}+\ldots+\pi.}{10^{9\nu}-1}=\frac{\pi.(10^{8\nu}+10^{7\nu}+\ldots+1)}{10^{9\nu}-1}$$

ὅθεν $$10^{9\nu}-1=A.\,\pi.\,(10^{8\nu}+10^{7\nu}+\ldots+1)$$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι ὁ $(10^{8\nu}+10^{7\nu}+\ldots+1)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 9 (§ 83)· ὅθεν εὐκόλως ἐξάγεται ἡ πρότασις.

394). Θεωρήσωμεν δύο κοινὰ ἀνάγωγα κλάσματα τρεπόμενα εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ καὶ ἔχοντα ἄθροισμα τὴν μονάδα. Ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου τοῦ περιοδικοῦ, τοῦ παραγομένου ἐκ τοῦ ἑνὸς τῶν δοθέντων κλασμάτων, τότε αἱ δύο περίοδοι τῶν περιοδικῶν τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς τὰ δύο δοθέντα κλάσματα ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸν $10^{\nu}-1$.

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{7}$ καὶ $\frac{5}{7}$ ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν μονάδα καὶ τρέπονται εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ μὲ 6 ψηφία περιόδου ἕκαστον· ἐὰν προσθέσωμεν τὰς δύο περιόδους, θὰ εὕρωμεν 10^6-1 ὡς ἄθροισμα, διότι (ἄσκ. 278)

$$\frac{2}{7}=\frac{\alpha}{10^6-1} \qquad \frac{5}{7}=\frac{\beta}{10^6-1}$$

395). Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2+2}{\alpha(\alpha^2-1)}$ διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ α παράγει μικτὸν περιοδικόν

396). Πόσα κλάσματα ἀνάγωγα, μικρότερα τῆς μονάδος μὲ παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ 25, τρέπονται εἰς μικτὰ περιοδικὰ μὲ ἓν ψηφίον μὴ περιοδικὸν καὶ δύο περιοδικά;

397). Τίς ὁ ἐλάχιστος τῶν ἀκεραίων οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ 2060 δίδουσιν ὡς γινόμενα τέλεια τετράγωνα. (§ 220)

398). Εὑρεῖν ἀκεραίας τιμὰς τοῦ α δι' ἃς τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+8}{2\alpha-5}$ εἶναι ἀνάγωγον. Εἴδομεν (ἄσκ. 208) ὅτι ἵνα τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς ἀκέραιον (διάφορον τῆς μονάδος) πρέπει ὁ α νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 13. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἰσότητα

$$2(\alpha+8)-(2\alpha-5)=21$$

βλέπομεν ἀμέσως ὅτι κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος κλάσματος δυνατὸν νὰ εἶναι μόνον οἱ 3 καὶ 7, ὅθεν ἐξάγεται εὐκόλως ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον διὰ $\alpha=3,4,6,13$ δίδει δὲ κλάσμα ἀνάγωγον, ὅταν τὸ α ἀντικατασταθῇ ὑπὸ οἱουδήποτε ἀκεραίου ὅστις νὰ μὴ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ οὐδεμίαν ἐκ τῶν μορφῶν $3\nu+1$ καὶ $7\nu-1$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΩΝ, ΣΤΑΘΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

Μονάδες μήκους.

231.—Ἀρχικὴν μονάδα μήκους μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν μεταχειριζόμεθα καὶ ἐν Ἑλλάδι τὸ *γαλλικὸν μέτρον*, ὅπερ ἐκλήθη καὶ *βασιλικὸς πῆχυς*.

Τοῦτο εἶναι περίπου τὸ $\frac{1}{10000000}$ τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου εἶναι αἱ ἑξῆς :

ἡ παλάμη $=\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου,

ὁ δάκτυλος $=\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης,

ἡ γραμμὴ $=\frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου.

Πολλαπλάσια δὲ τοῦ μέτρου εἶναι τὸ *δεκάμετρον* $=10$ μέτρα, τὸ *ἑκατόμμετρον* $=100$ μέτρα, τὸ *χιλιόμετρον* ἢ *στάδιον* $=1000$ μέτρα, τὸ *μυριάμετρον* $=10000$ μέτρα.

Τὰ πλεονεκτήματα τῶν μονάδων τούτων εἶναι προφανῆ· οἱ ἀριθμοὶ δι' ὧν παρίστανται ποσὰ μεμετρημένα διὰ τῶν τοιούτων μονάδων ὑπάγονται εἰς τοὺς κανόνας τῆς ἀριθμήσεως κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Οὕτως, ἐπὶ παραδείγματι, ὁ ἀριθμὸς $7{,}236^{\mu.}$ δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ τὸν ἀριθμὸν 7 μ. 236 γραμ. ἢ $7^{\mu.}\ 2^{\pi\alpha\lambda.}\ 3^{\delta\alpha\kappa\tau.}\ 6^{\gamma\rho.}$

Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς $9^{\mu.}\ 4^{\pi\alpha\lambda.}$ γράφεται $9^{\mu.}, 4$

Ἀρχικαὶ μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως εἶναι·

Ὁ *τεκτονικὸς πῆχυς*, ἴσος πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, ἤτοι πρὸς 0,75 μ.

Ὁ *μικρὸς πῆχυς* τῆς Κων)πόλεως (ἐνδεζέ), ἴσος πρὸς 0,648 τοῦ μέτρου· οὗτος ὑποδιαιρεῖται εἰς 8 ρούπια. Ὁ μέγας πῆχυς Κων)πόλεως (ἀρσὶν) = 0,669 μ.

Ἡ *ὀργυιά*, (παλαιοτέρα ἀρχικὴ μονὰς μήκους), ἴση πρὸς 1,949 τοῦ μέτρου· αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς 6 πόδας· ἕκαστος δὲ ποῦς εἰς 12 δακτύλους· καὶ ἕκαστος δάκτυλος εἰς 12 γραμμάς.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἡ *ὑάρδα* ἴση πρὸς 0,91440 τοῦ μέτρου· αὕτη διαιρεῖται εἰς 3 πόδας, ἕκαστος δὲ ποὺς εἰς 12 δακτύλους.

Ἐν Ρωσσίᾳ τὸ *ἀρσίν*, ἴσον πρὸς 0,71119 μ.· πολλαπλάσιον τοῦ ἀρσὶν εἶναι τὸ *βέρστιον*, ἴσον πρὸς 1500 ἀρσίν.

Τὸ *ναυτικὸν μίλλιον* = 1852,2 μ.

Τὰ *ἀγγλικὸν μίλλιον* =1760 ὑάρδ.

Ἀσκήσεις.

399). Νὰ τραπῶσιν 75 πήχεις Κωνσταντινουπόλεως εἰς παλάμας.

400). Νὰ τραπῶσιν 100 βέρστια εἰς χιλιόμετρα.

401). Νὰ τραπῶσι 15 μέτρα εἰς μικροὺς πήχεις Κων/πόλεως.

402). Νὰ τραπῶσιν 7 χιλιόμετρα εἰς βέρστια.

403). 55 πήχεις Κων/πόλεως πόσοι τεκτονικοὶ πήχεις εἶναι;

404). Χίλια ναυτικὰ μίλια πρὸς πόσα χιλιόμετρα ἰσοδυναμοῦσι;

405). 1500 βέρστια νὰ τραπῶσι α΄) εἰς ναυτικὰ μίλλια, β΄) εἰς ἀγγλικά.

406). 760 ἀγγλικὰ μίλλια πόσα βέρστια εἶναι;

Μονάδες ἐπιφανείας.

232. — Ὡς μονάδες ἐπιφανείας λαμβάνονται τετράγωνα.

Ἀρχικὴ μονάς. Τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον*· ἤτοι τετράγωνον μὲ πλευρὰν ἑνὸς μέτρου.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἶναι·

1 *τετρ. παλάμη* $= \frac{1}{100}$ τετρ. μ.

1 *τετρ. δάκτυλος* $= \frac{1}{100}$ τετρ. παλ.

Πολλαπλάσια δὲ τοῦ τετρ. μέτρου εἶναι.

τὸ *τετρ. δεκάμετρον* ἢ *ἂρ* (are)=100 τ. μ. (τετράγωνον πλευρᾶς 10 μέτρων)

1 *τετρ. ἑκατόμμετρον* ἢ *ἑκτάριον* (hectare)=10000 τ. μ.

Παρ' ἡμῖν ἐν χρήσει διὰ τὰς ἀγροτικὰς μετρήσεις εἶναι τὸ *βασιλικὸν στρέμμα* = 1000 τ. μ. καὶ τὸ *παλαιὸν στρέμμα* =1270,2 τ. μ.

Διὰ τὰ οἰκόπεδα ἔχομεν τὸν *τεκτονικὸν τετραγ. πῆχυν*, ἤτοι τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς τεκτονικὸς πῆχυς· ὅθεν

1 τετρ. τεκτ. πῆχ. $= \frac{9}{16}$ τ. μ.

Ἀσκήσεις.

407). Νὰ τραπῶσι 1732,4550 τετρ. μέτρα εἰς τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις.

408) Ἔκτασις 94500 τετρ. χιλιομέτρων α') πόσα βασιλικὰ στρέμματα εἶναι ; β') πόσα ἑκτάρια εἶναι ;

409). 16,920 τετρ. τεκτονικοὶ πήχεις πόσα ἄρ εἶναι ;

410). Ἀγρὸς ἐκτάσεως 2 βασιλικῶν στρεμμάτων πρόκειται νὰ πωληθῇ ὡς οἰκόπεδον. Πόσοι τεκτονικοὶ πήχεις εἶναι ;

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

233.—Αἱ μονάδες ὄγκου εἶναι κύβοι.

Ἀρχικὴ μονάς. 1 *κυβικὸν μέτρον*, ἤτοι κύβος μὲ πλευρὰν ἑνὸς μέτρου.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ κ. μ. εἶναι·

1 *κυβ. παλάμη* $= \frac{1}{1000}$ κ. μ.

1 *κυβ. δάκτυλος* $= \frac{1}{1000}$ κ. παλ.

Ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης λέγεται *λίτρον*· λαμβάνεται δὲ συνήθως ὡς μονὰς χωρητικότητος πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν. Παρ' ἡμῖν ὡς καὶ ἐν Τουρκίᾳ χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ *μετρικὴ ὀκᾶ* = 1,281 $^{\text{λίτρ.}}$

Τὸ *ἑκατόλλιτρον* (100 $^{\text{κ. παλ.}}$) ἐκλήθη παρ' ἡμῖν *κοιλόν*· χρησιμεύει ἰδίως διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν.

Διὰ τὴν αὐτὴν μέτρησιν παρ' ἡμῖν καὶ ἐν Τουρκίᾳ χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ *κοιλὸν Κων]πόλεως*=35,37$^{\text{λίτρ.}}$

Ἐν Ἀγγλίᾳ χρησιμοποιεῖται τὸ *κουάρτερ* = 290,942 $^{\text{λίτρ.}}$

$1^{\text{κουόρτερ}} = 8^{\text{μποῦσελ}}$ $1^{\text{μποῦσελ}} = 8^{\text{γαλόνια}}$

Εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας χρησιμοποιεῖται τὸ *μποῦσελ* = 35,239$^{\text{λίτρ.}}$

Διὰ τὴν χωρητικότητα τῶν πλοίων λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ *τόννος τῶν πλοίων* = 2,83$^{\text{κ. μ.}}$

Ἀσκήσεις.

411). Πλοῖόν τι ἔχει χωρητικότητα 4575 τόννων. Πρὸς πόσα κυβικὰ μέτρα ἰσοδυναμεῖ ἡ χωρητικότης αὕτη ;

412). 20536 λίτρ. πρὸς πόσα κοιλὰ Κων)πόλεως ἰσοδυναμοῦσι ;

413). Πρὸς πόσα γαλόνια ἰσοδυναμεῖ ἓν κυβικὸν μέτρον;

414). Πρὸς πόσα γαλόνια ἰσοδυναμεῖ 1 ὀκᾶ ;

415). Εἰς ἔμπορον ἐστάλησαν ἐξ Ἀμερικῆς 2673 μποῦσελ σίτου. Ἠγοράσθη δ' ὁ σῖτος οὗτος ἀντὶ 23400 δραχμῶν. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς ἑκάστου κοιλοῦ Κων)πόλεως ;

Μονάδες βάρους.

234. —Μονὰς βάρους εἶναι τὸ *γραμμάριον* (gramme). Καλεῖται οὕτω τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4° Κελσίου τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον. Πολλαπλάσια αὐτοῦ εἶναι :

Τὸ *χιλιόγραμμον*=(kilogramme)=1000 γραμμάρια.

Ὁ *τόννος*=1000 χιλιόγραμμα.

Ἐν Τουρκίᾳ ὡς καὶ παρ' ἡμῖν μονάδες βάρους ἐν χρήσει εἶναι :

Ἡ *ὀκᾶ*=400 δράμια.

Ὁ *στατὴρ*=44 ὀκάδες.

Ἡ ὀκᾶ ἰσοῦται πρὸς 1281 γραμμάρια. Παρατηρητέον ὅτι ἓν χιλιόγραμμον ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἀπεσταγμένου ὕδατος 4^0 K. τοῦ περιεχομένου εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *ἀγγλικὴ λίτρα*=453,6 γρ. χρησιμοποιουμένη καὶ παρ' ἡμῖν ἐν Ἑπτανήσῳ.

Εἰς τὸ ἐμπόριον τῆς σταφίδος γίνεται χρῆσις καὶ τῆς Ἑνετικῆς λίτρας (=$480^{\text{γραμ.}}$).

$1000^{\text{εν. λίτρ.}}$ = 1 χιλιόλιτρον = 480 χιλιόγραμμα.

Ἀσκήσεις.

416). 75 ἀγγλικαὶ λίτραι πρὸς πόσας ὀκάδας ἰσοδυναμοῦσι;

32 στατῆρες πρὸς πόσας ἀγγλικὰς λίτρας ἰσοδυναμοῦσι;

Τί κλάσμα στατῆρος εἶναι τὸ γραμμάριον;

417). 35,5 δράμια πρὸς πόσα γραμμάρια ἰσοδυναμοῦσι;

Νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ὀκάδας τὸ βάρος τοῦ ἀπεσταγμένου ὕδατος 4^0 K. τοῦ περιεχομένου εἰς 3,5 κυβικὰς παλάμας.

418). Ὀπωροπώλης τις εἶχε 56000 ὀκ. γεωμήλων· ἐκ τούτων τὸ ἥμισυ ἐπώλησε μὲ τὸ κοιλὸν Κων)πόλεως, τὸ δὲ ἕτερον ἥμισυ πρὸς 0,60 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Τὸ βάρος ἑνὸς κοιλοῦ γεωμήλων ἦτο τὸ αὐτὸ μὲ τὸ βάρος ἑνὸς κοιλοῦ ὕδατος. Ὅτε δ' ἐπώλει μὲ τὸ κοιλὸν ὠφελεῖτο 1,50 δραχ. κατὰ κοιλόν. Πόσον ὠφελήθη ἐν ὅλῳ ἀπὸ τὰ κοιλὰ καὶ πόσον εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως;

Μονάδες νομισμάτων.

235.—Ἡ Ἑλλάς, ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία, ἡ Ἑλβετία καὶ τὸ Βέλγιον διὰ συμβάσεως παρεδέχθησαν ὡς *ἀρχικὴν* μονάδα νομισμάτων τὸ *φράγκον*· τοῦτο ἐν Ἑλλάδι καλεῖται καὶ *δραχμὴ* καὶ ἐν Ἰταλίᾳ *λίρα*. Τὸ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς καλεῖται *λεπτόν*. Ὡς ἀρχικὴν μονάδα παρεδέχθησαν τὸ φράγκον καὶ ἄλλα κράτη.

Παρ' ἡμῖν κυκλοφοροῦσι νομίσματα χρυσᾶ, ἀργυρᾶ, νικέλινα καὶ χάλκινα.

Ἀργυρᾶ ἔχομεν τὸ μονόδραχμον, δίδραχμον, πεντάδραχμον, πεντηκοντάλεπτον, εἰκοσάλεπτον.

Νικέλινα· τὸ πεντάλεπτον, δεκάλεπτον, εἰκοσάλεπτον.

Χαλκᾶ τὸ πεντάλεπτον, δεκάλεπτον καὶ εἰς μερικὰ μέρη τῆς Ἑλλάδος καὶ τὸ μονόλεπτον καὶ τὸ δίλεπτον.

Τὰ ἀργυρᾶ τῶν 2 φρ., 1 φρ., 50 λεπτ. καὶ 20 λεπτῶν ἔχουσι βαθμὸν καθαρότητος (τίτλον) 0,835, ἤτοι 0,835 τοῦ ὅλου εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι χαλκός.

Τὰ δὲ λοιπὰ ἀργυρᾶ ὡς καὶ τὰ χρυσᾶ ἔχουσι βαθμὸν καθαρότητος 0,900· ἤτοι τὰ 0,900 εἶναι καθαρὸς ἄργυρος ἢ χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ χαλκός.

Προσέτι ἔχομεν καὶ χαρτονομίσματα τῶν 5, 10, 25, 100, 500, 1000 δραχμῶν.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι *ἡ λίρα στερλῖνα*.

1 λίρα στερλῖνα = 20 *σελλίνια*. 1 σελλίνιον = 12 **πέννας**.

1 πέννα = 4 φαρδ.

Ἐν Ρωσσίᾳ εἶναι τὸ *ρούβλιον*·

1 ρούβλιον = 100 καπίκια.

Ἐν Τουρκίᾳ τὸ *γρόσιον* = 40 παράδες· ἡ λίρα = 100 γρόσ.

Ἐν Γερμανίᾳ τὸ *μάρκον* = 100 πφένιγ.

Ἐν Αὐστρουγγαρίᾳ ἡ *κορῶνα* = 100 χέλλερ·

Ἐν Ἡνωμέναις Πολιτείαις τὸ *δολλάριον* = 100 σέντς·

Ἀσκήσεις.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν :

$1^{\text{λίρ. στερλ.}} = 25{,}23^{\text{φρ.}}$ $1^{\text{μάρκ.}} = 1{,}23^{\text{φρ.}}$ $1^{\text{κορ.}} = 1{,}05^{\text{φρ.}}$

$1^{\text{λίρ. τουρκ.}} = 22{,}78^{\text{φρ.}}$ $1^{\text{δολ.}} = 5{,}18^{\text{φρ.}}$ $1^{\text{ρούβλ.}} = 2{,}66^{\text{φρ.}}$

νὰ ὑπολογίσωμεν :

419). Πόσας λίρας στερλίνας δυνάμεθα ν' ἀγοράσωμεν μὲ 1525 εἰκοσάφραγκα ;

420). Πρὸς πόσα φράγκα ἰσοδυναμοῦσιν αἱ 755 Τουρκικαὶ λίραι· πρὸς πόσα τὰ 535,50 μάρκα· πρὸς πόσα αἱ 1673,4 κορῶναι· πρὸς πόσα τὰ 78,35 δολλάρια καὶ πρὸς πόσα τὰ 937,75 ρούβλια ;

421). Ἡ πέννα τί μέρος τοῦ φράγκου εἶναι ;

422). Πρὸς πόσας λίρας στερλίνας ἰσοδυναμοῦσιν 87500 παράδες ;

423). 763 ρούβλια πόσα μάρκα καὶ πφένιγ εἶναι ;

424). 1000 δολλάρια πόσαι στερλῖναι εἶναι ;

425). 1 γρόσιον πόσα πφένιγ, πόσα χέλλερ καὶ πόσα σέντς ἔχει ;

Ἀσκήσεις ἐν γένει ἐπὶ τῶν μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων.

426). Ἐπωλήθη σταφὶς πρὸς 17 λίρας τὸ χιλιόλιτρον, πρὸς πόσα φράγκα ἐπωλήθη τὸ χιλιόγραμ., ἐὰν 1 λίρ.=25,25 φρ. ;

427). Μὲ τὸν φωτισμὸν διὰ πετρελαίου ἐξοδεύει τις 1 ὀκᾶν ἐξ αὐτοῦ εἰς 3 ἡμέρας, ἐνῷ μὲ τὸν δι' ἀεριόφωτος φωτισμὸν θὰ ἐχρειάζετο 1,250 κ. μ. δι' ἑκάστην ἡμέραν· θὰ ἐπλήρωνε δὲ προσέτι δι' ἐνοίκιον ὡρολογίου κατὰ μῆνα 1,50 δρ. Ποῖος ἐκ τῶν δύο φωτισμῶν εἶναι εὐθηνότερος καὶ κατὰ πόσον ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ πετρελαίου τιμᾶται 1,40 δραχ. καὶ τὸ κυβ. μέτρον τοῦ ἀεριόφωτος 0,26 δρ.

428). Ἀφῆκέ τις διὰ διαθήκης εἰς τοὺς 2 υἱούς του 37950 δραχμὰς καί τινα οἰκόπεδα· κατ' ἐπιθυμίαν του θὰ ἐμοιράζοντο ἐξ ἴσου τὴν κληρονομίαν οἱ δύο κληρονόμοι· ἐκ τῶν οἰκοπέδων ἄλλα ἐτιμῶντο πρὸς 12 δρχ. τὸν τεκτ. τετραγ. πῆχυν καὶ ἄλλα ἐτιμῶντο πρὸς 19 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, ἡ δ' ἔκτασις τῶν δευτέρων ἦτο δεκαπλασία τῆς ἐκτάσεως τῶν πρώτων. Ὁ δεύτερος υἱὸς ἔλαβε μόνον τὰ δεύτερα οἰκόπεδα ὡς μερίδιόν του. Ποία ἡ ἔκτασις τούτων ;

429). Δοχεῖον πλῆρες ἐλαίου ζυγίζει 11 ὀκάδας. Πόση ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου δεδομένου ὅτι μία κυβικὴ παλάμη ἐλαίου ζυγίζει 0,912 χιλιόγραμμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠ᾽ ΑΥΤΩΝ

236. — Λέγοντες ὅτι ὕφασμά τι ἔχει μῆκος 7 πήχ. 3 ρουπ. μεταχειριζόμεθα *ἀριθμὸν συμμιγῆ*, ὅπως ἐπίσης συμμιγὴς εἶναι καὶ ὁ ἀριθμὸς $12^{\sigma\tau.}$ $17^{\delta\kappa.}$ $300^{\delta\rho.}$ ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ

$$3^{\lambda\acute{\iota}\rho.}\ 7^{\sigma\epsilon\lambda.}\ 2^{\pi\acute{\epsilon}\nu.}\ 3^{\varphi\alpha\rho\delta.},\quad 4^{\acute{\upsilon}\alpha\rho\delta.}\ 2^{\pi\acute{o}\delta.}\ 9^{\delta\acute{\alpha}\kappa.}$$

εἶναι συμμιγεῖς καὶ γενικῶς.

Συμμιγὴς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμὸς συγκείμενος ἐξ ἄλλων τῶν ὁποίων αἱ μονάδες ἴδιον ὄνομα ἔχουσαι εἶναι πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος.

Μονάδες χρόνου.

237.—Ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *ἡμέρα* ἴση πρὸς 24 *ὥρας*.

1 ὥρα=60 *πρῶτα λεπτά*. 1 πρῶτ. λεπτὸν=60 *δεύτερα λεπτά*.

Ἔτος=365 ἡμέραι. *Βίσεκτον ἔτος*=366 ἡμέραι.

1 ἔτος=12 *μῆνες*.

Μετροῦντες τὸν χρόνον μὲ τὰς μονάδας αὐτὰς λαμβάνομεν ἀριθμὸν συμμιγῆ· π. χ.

$$3^{\acute{\epsilon}\tau\eta}\ 4^{\mu.}\ 8^{\acute{\eta}\mu.}\ 4^{\acute{\omega}\rho.},\qquad 14^{\acute{\eta}\mu.}\ 9^{\acute{\omega}\rho.}\ 35^{\pi.}\ 18^{\delta.}$$

Διαίρεσις τῆς περιφερείας.

238.—Ἡ περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον λέγεται *μοῖρα*.

1 μοῖρα=60 *πρῶτα λεπτά*, 1 πρῶτον λεπτὸν=60 *δεύτ. λεπτ.*

Καὶ ἐνταῦθα ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ἐκ τῆς μετρήσεως διὰ τῶν ἄνω μονάδων εἶναι ἀριθμὸς συμμιγής· π.χ. 53 μοῖραι, 5 πρῶτα λ. 8 δεύτ. λ., ὅστις σημειοῦται ὡς ἑξῆς :

$$53^{0}\quad 5'\quad 8''$$

Παρατήρησις.—Τὸ 1΄ τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ναυτικὸν μίλλιον (§ 231)

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν.

239. —Νὰ τραπῇ εἰς δεύτερα λεπτὰ ὁ συμμιγὴς 6 ὥρ. 24π. 38δ. Ἔχομεν

$$6 \text{ ὥρ.} = (6 \times 60)^{\pi} = 360^{\pi.}$$

προσθέτοντες καὶ τὰ 24 π. ἔχομεν

$$384\pi. = (384 \times 60)\delta = 23040\delta.$$

προσθέτομεν καὶ τὰ 38δ. ἔχομεν ἐν ὅλῳ 23078δ.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{rlll} 6 \text{ ὥρ.} & 24\ \pi. & 38\ \delta. \\ 60 & & \\ \hline 360 & & \\ 24 & & \\ \hline 384 & & \\ 60 & & \\ \hline 23040 & & \\ 38 & & \\ \hline 23078 & & \end{array}$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν αὐτὸν συμμιγῆ εἰς πρῶτα λεπτά, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι $1\delta. = \frac{1^{\pi}}{60}$· ἑπομένως

$$6^{\text{ὥρ.}} \quad 24^{\pi.} \quad 38^{\delta.} = 384^{\pi.}\frac{38}{60}$$

Ἐὰν δὲ θέλωμεν εἰς ὥρας, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ

$$1\delta. = \frac{1}{3600} \text{ ὥρ.}$$

τὰ $24^{\pi.} \quad 38^{\delta.} = 1478^{\delta.} = \frac{1478^{\text{ὥρ.}}}{3600}$ ὅθεν

$$6^{\text{ὥρ.}} \quad 24^{\pi.} \quad 38^{\delta.} = 6^{\text{ὥρ.}}\frac{1478}{3600}$$ Ἤτοι

Ἵνα τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν ὡρισμένης μονάδος, τρέπομεν τὰ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ὁρισθείσης εἰς μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὰ δὲ μέρη ὧν αἱ μονάδες εἶναι μικρότεραι τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως, τῶν ὁποίων τὸν ἀριθμὸν θέτομεν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα.

Τροπὴ ἁπλοῦ εἰς συμμιγῆ.

240. — Νὰ τραπῶσι 253 ὀκ. $\frac{5}{9}$ εἰς συμμιγῆ.

Ἐξάγομεν ἀπὸ τὰς ὀκάδας τοὺς στατῆρας διαιροῦντες διὰ 44. Λαμβάνομεν 5 στ. 33 ὀκ. Τὰ $\frac{5}{9}$ τῆς ὀκᾶς τρέπομεν εἰς δράμια. Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 400 καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον διὰ τοῦ 9 λαμβάνομεν

$$\frac{5}{9} \text{ ὀκ.} = 222 \text{ δρ. } \frac{2}{9}$$

ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἶναι 5 στ. 33 ὀκ. 222 $\frac{2}{9}$ δρ.

Διάταξις τῆς πράξεως.

253 ὀκ.	44	5 δράμ. 400	
33 ὀκ.	5 στ.	2000 δρ.	9
		20 20 2	222 $\frac{2}{9}$ δρ.

Ἀσκήσεις.

430). Νὰ τραπῶσιν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας αὐτῶν τάξεως οἱ ἑπόμενοι συμμιγεῖς :

10πήχ. 4ρ., 1λίρ. 8σελ. 5πέν. 2φαρδ.

5στ. 28όκ. 305δρ.

1φαρμ. λίτρ. 2 δραχμ. 10κόκ.,

10ἡμ. 7ὧρ. 15π. 20δ.

431). 5ὑάρδ. 2πόδ. 4δάκτ. νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσμα ὑάρδας
4ἡμ. 4ὥρ. 30π. 20δ. » » » ὡρῶν
7στ. 250δρ. » » » στατ.
3λῖρ. 4πέν. 2φαρδ. εἰς σελλίνια καὶ μέρος σελλινίου
8σελ. 3πέν. 1φαρδ· εἰς δεκαδικόν.

432). Πόσαι μοῖραι, πρῶτα λεπτὰ καὶ δεύτερα περιέχονται εἰς τὰ 24325″, εἰς τὰ 238537″ ;

433). Πόσαι ἡμέραι, ὧραι, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ περιέχονται εἰς τὰ $\frac{9}{11}$ τοῦ ἔτους ;

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

241.—Ὅταν προσθέτωμεν δεκαδικούς, ἔχομεν ὑπ' ὄψει ὅτι 10 μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· ὅταν προσθέτωμεν συμμιγεῖς, πρέπει νὰ ἔχωμεν ἑκάστοτε ὑπ' ὄψει τὴν σχέσιν τῶν διαφόρων ὑποδιαιρέσεων τῆς ἀρχικῆς μονάδος πρὸς ἀλλήλας.

Π. χ. ἔστωσαν πρὸς πρόσθεσιν οἱ συμμιγεῖς

	4λῖρ.	7σελ.	11πέν.	3φαρδ.
	2	17		$2\frac{2}{5}$
		4	9	1
προφανῶς τὸ ἄθροισμα εἶναι	7 λῖρ.	9 σελ.	9πέν.	$2\frac{2}{5}$

Ἔστωσαν ἤδη πρὸς ἀφαίρεσιν οἱ συμμιγεῖς

14 πήχ.	$2\frac{1}{4}$ ρούπ.
9	$5\frac{3}{4}$ ρούπ.
4 πήχ.	$4\frac{1}{2}$ ρούπ.

Ἀσκήσεις.

434). Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις :

α΄) $27^0\,30'\,47''+35^0\,12'\,25''+47^0\,48'\,27''$

β΄) $15^{\text{ύάρδ.}}\,2^{\text{πόδ.}}\,7^{\text{δ.}} + 4^{\text{ύάρδ.}}\,1^{\text{π.}}\,9^{\text{δ.}}$

γ΄) $5^{\text{λίρ.}}\,15^{\text{σελ.}}\,7^{\text{φαρδ.}} + 3{,}24^{\text{λίρ.}} + \frac{5}{8}^{\text{λίρ.}}$

435). Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις :

α΄) $12^{\text{στ.}}\,4^{\text{όκ.}}\,200^{\text{δρ.}} - 5^{\text{στ.}}\,18^{\text{όκ.}}\,350^{\text{δρ.}}$

β΄) $25^{\text{ήμ.}}\,10^{\text{ώρ.}}\,45^{\text{π.}}\,20\,\frac{1}{4}^{\text{δ.}} - 7^{\text{ή.}}\,50^{\text{π.}}\,54^{\text{δ.}}$

436). Δοχεῖον κενὸν ζυγίζει 12 ὀκάδας 150 δρμ.· πλῆρες δ' ἐλαίου ζυγίζει $3^{\text{στ.}}\,4^{\text{όκ.}}\,200^{\text{δρ.}}$. Ποῖον τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου ;

437). Ἔχομεν τρία τεμάχια ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος
τὸ α΄ εἶναι $19^{\text{πήχ.}}\,5^{\text{ρούπ.}}$ τὸ β΄ $3^{\text{ύάρ.}}\,2^{\text{πόδ.}}\,6^{\text{δάκ.}}$
καὶ τὸ γ΄ $5^{\text{μέτ.}}\,7^{\text{παλ.}}\,2^{\text{δάκ.}}$

Πόσων μέτρων εἶναι τὸ μῆκος τῶν τριῶν ὁμοῦ τεμαχίων ;

438). Ἡ ἅλωσις τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων ἐγένετο τῇ 29 Μαΐου 1453. Πόσος χρόνος παρῆλθε μέχρι τῆς ἀπελευθερώσεως τῆς Θεσσαλονίκης ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

242.—α΄). *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.*

Πρόβλημα. Εἷς σάκκος καφὲ τιμᾶται 4λιρ. 4 σελ. 8πεν. 3 φ· πόσον τιμῶνται 11 σάκκοι ἐκ τοῦ ἰδίου καφέ ;

Ἡ ἀξία τῶν 11 σάκκων θὰ εἶναι προφανῶς

$$(4^{\lambda.}\quad 7^{\sigma\varepsilon\lambda.}\quad 8^{\pi.}\quad 3^{\varphi.})\times 11.$$

Ὁ πολλαπλασιαστέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα καὶ πολλαπλασιάζομεν ὡς ἑξῆς :

	$(4^{\lambda.}$	$7^{\sigma\varepsilon\lambda.}$	$8^{\pi\acute{\varepsilon}\nu.}$	$3^{\varphi\alpha\rho.}$
				11
(§ 241)	48	5	0	1

ὅθεν·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλα-

σιάζομεν ἕκαστον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν κατωτέραν ὑποδιαίρεσίν του, καὶ ἐκ τῶν μερικῶν, γινομένων, ὁσάκις ἐξάγονται μονάδες ἀνωτέρας τάξεως, ἑνοῦμεν αὐτὰς μὲ τὰς ὁμοίας τάξεως μονάδας τοῦ ἐξαγομένου. (§ 241)

Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

243. — Νὰ διαιρεθῇ εἰς 18 ἴσα μέρη τὸ τόξον $104^{\circ}\ 37'\ 48'',7$.

Ἔχομεν προφανῶς διαίρεσιν ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ

$$\begin{array}{llll|l}
104^{\circ} & 37' & 48'',7 & & 18 \\
\cline{5-5}
14 & & & & 5^{\circ}\ 48'\ 46'',03\frac{16}{18} \text{ τοῦ } 0,01 \\
60 & & & & \\
\cline{1-2}
840 & 877 & & & \\
 & 157 & & & \\
 & 13 & & & \\
 & 60 & & & \\
\cline{1-3}
 & 780 & 828,7 & & \\
 & & 108 & & \\
 & & 0,70 & & \\
\end{array}$$

Ἡ διαίρεσις προφανῶς θὰ ἐγίνετο, καὶ ἂν ἐτρέπομεν τὸν διαιρετέον εἰς ἁπλοῦν ἀριθμόν.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἐννοοῦμεν ὅτι ἔγινε μερισμὸς τοῦ διαιρετέου εἰς 18 ἴσα μέρη· δι' ὃ καὶ τὸ πηλίκον εἶναι συμμιγὴς ἀριθμὸς ὁμοειδὴς τῷ διαιρετέῳ.

Πρόβλημα. Τόξον τι εἶναι 18°· πόσα τόξα ἴσα πρὸς αὐτὸ (τῆς αὐτῆς περιφερείας) ἔχουσιν ἄθροισμα $104^{\circ}\ 37'\ 48'',7$;

Ἐνταῦθα ἔχομεν πρόβλημα μετρήσεως. (§ 55)

Τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἀφῃρημένος ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενος ὁ συγκεκριμένος 18° δίδει τὸν διαιρετέον. Ἵνα γίνῃ τότε εὐκολώτερον ἡ διαίρεσις, τρέπομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην εἰς δεύτερα λεπτά· ἐννοεῖται ὅτι ἠδυνάμεθα νὰ τρέψωμεν ἀμφοτέρους καὶ εἰς πρῶτα λεπτὰ ἢ εἰς μοίρας· ἤτοι τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{376668,7}{64800}=5\frac{526687}{648000}$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου τούτου συμπίπτει πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν εἰς τὸ πηλίκον τῆς προηγουμένης διαιρέσεως.

Ἀσκήσεις.

439). Δίδει τις εἰς ἕκαστον τῶν 4 ἐργατῶν του δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας $70^{\lambda.}$ Ἐξ αὐτῶν ὁ α΄ εἰργάσθη $63^{\text{ὥρ.}}$ $35^{\pi.}$ ὁ β΄ $49^{\text{ὥρ.}}$ ὁ γ΄ $47^{\text{ὥρ.}}$ $45^{\pi.}$ καὶ ὁ δ΄ $38^{\text{ὥρ.}}$ $25^{\pi.}$ Πόσα ἐν ὅλῳ θὰ λάβωσι καὶ οἱ τέσσαρες ἐργάται;

440). Ἐὰν μὲ 15 λίρας ἠγοράσαμεν 35 ὑάρδας, 2 πόδας καὶ 6 δακτύλους ὑφάσματος, πόσον θὰ ἠγοράζομεν μὲ μίαν λίραν;

441). Εἰς μίαν ὥραν ὡρολόγιόν τι προχωρεῖ κατὰ $3^{\pi.}$ $38^{\delta.}$, ἐκανονίσθη δὲ τὴν μεσημβρίαν ἀκριβῶς. Ποίαν ὥραν θὰ δεικνύῃ κατὰ τὴν 9 π. μ. τῆς ἑπομένης;

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτόν.

244.—*Πρόβλημα*. α΄) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται $2^{\text{τάλ.}}$ $3^{\delta.}$ $40^{\lambda.}$, πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως;

Λύσις. Κατὰ τὰ τεθέντα (§ 158) τὸ ζητούμενον ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον

$$(2^{\tau.}\ 3^{\delta\rho.}\ 40^{\lambda.}) \times \frac{3}{4}.$$

Ἀλλ' εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ 1 πῆχυς τιμᾶται $2^{\tau.}\ 3^{\delta.}\ 40^{\lambda.}$

τὸ $\frac{1}{4}$ πήχεως » $\frac{2^{\tau.}\ 3^{\delta.}\ 40^{\lambda.}}{4}$

καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ » τιμῶνται $\frac{2^{\tau.}\ 3^{\delta.}\ 40^{\lambda.}}{4} \times 3$

$$= \frac{(2^{\tau.}\ 3^{\delta.}\ 40^{\lambda.}) \times 3}{4}$$

ὥστε $(2^{\tau.}\ 3^{\delta.}\ 40^{\lambda.})\times\frac{3}{4}=\frac{(2^{\tau.}\ 3^{\delta.}\ 40^{\lambda.})\times 3}{4}$

$$=\frac{8^{\tau\acute{\alpha}\lambda.}\ 20^{\lambda.}}{4}=2^{\tau\acute{\alpha}\lambda.}\ 5^{\lambda.}$$

Ἄρα·

Συμμιγὴς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν οὗτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

Πρόβλημα β'). — Μηχανὴ ἐργοστασίου καίει καθ' ἑκάστην ὥραν $3^{\sigma\tau.}\ 20^{\delta\kappa.}\ 150^{\delta\rho.}$ ἀνθράκων. Πόσους ἄνθρακας θὰ καύσῃ εἰς $10\frac{3}{4}$ ὥρ;

Λύσις. — Τὸ ζητούμενον ἰσοῦται (§ 158) πρὸς τὸ γινόμενον

$$(3^{\sigma\tau.}\ 20^{\delta\kappa.}\ 150^{\delta\rho.})\times 10\frac{3}{4}.$$

Τοῦτο δ' ἰσοῦται προφανῶς πρὸς

$$(3^{\sigma\tau.}\ 20^{\delta\kappa.}\ 150^{\delta\rho.})\times\frac{43}{4}$$

ἢ καὶ πρὸς

$$(3^{\sigma\tau.}\ 20^{\delta\kappa.}\ 150^{\delta\rho.})\times 10+(3^{\sigma\tau.}\ 20^{\delta\kappa.}\ 150^{\delta\rho.})\times\frac{3}{4}\cdot$$ ἤτοι

Πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ προσθέσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ.

245. ***Πρόβλημα.*** Τὰ $\frac{2}{5}$ τεμαχίου ὑφάσματος εἶναι $4^{\pi\acute{\eta}\chi.}\ 6^{\rho.}$ Ποῖον τὸ μῆκος τοῦ ὅλου τεμαχίου;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ εἶναι $4^{\pi\acute{\eta}\chi.}\ 6^{\rho o\acute{\upsilon}\pi.}$

τὸ $\frac{1}{5}$ » $\frac{4^{\pi\acute{\eta}\chi.}\ 6^{\rho.}}{2}$

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ εἶναι $\frac{4^{\pi\acute{\eta}\chi.}\ 6^{\rho.}}{2}\times 5=(4^{\pi\acute{\eta}\chi.}\ 6^{\rho.})\times\frac{5}{2}$ (§ 158).

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον μῆκος πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\frac{2}{5}$ θὰ δίδῃ ὡς γινόμενον τὸν συμμιγῆ $4^{\pi\acute{\eta}\chi\cdot}$ $6^{\varrho o\acute{\upsilon}\pi\cdot}$ θὰ ἔχωμεν

$$4^{\pi\cdot}\ 6^{\varrho\cdot} : \frac{2}{5} = (4^{\pi\cdot}\ 6^{\varrho\cdot}) \times \frac{5}{2} = 11^{\pi\cdot}\ 7^{\varrho\cdot}$$

Πρόβλημα β΄.) Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ὑφάσματός τινος τιμῶνται $2^{\tau\alpha\lambda\cdot}$ $3^{\delta\varrho\cdot}$ $40^{\lambda\cdot}$ Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Ἡ ἀξία τοῦ πήχεως πρέπει πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{5}{8}$ νὰ δίδῃ $2^{\tau\acute{\alpha}\lambda\cdot}$ $3^{\delta\varrho\cdot}$ $40^{\lambda\cdot}$· ἄρα αὔτη εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $2^{\tau\acute{\alpha}\lambda\cdot}$ $3^{\delta\varrho\cdot}$ $40^{\lambda\cdot} : \frac{5}{8}$, εὑρίσκομεν δὲ πάλιν ὅτι τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$(2^{\tau\acute{\alpha}\lambda\cdot}\ 3^{\delta\varrho\cdot}\ 40^{\lambda\cdot}) \times \frac{8}{5} = 4^{\tau\acute{\alpha}\lambda\cdot}\ 1^{\delta\varrho\cdot}\ 44^{\lambda\cdot}$$

Εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω προβλημάτων διαιρέτης εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{5}$ καὶ εἰς τὸ δεύτερον ὁ ἐπίσης *ἀφηρημένος ἀριθμὸς* $\frac{5}{8}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι δι᾽ ἀμφότερα τὰ προβλήματα ταῦτα δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἐδόθη τὸ γινόμενον καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ζητεῖται ὁ πολλαπλασιαστέος· εἶναι προβλήματα *μερισμοῦ*.

Πρόβλημα. Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ᾽ ὥραν $\frac{3^{\delta\varrho\chi\cdot}}{4}$. πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ $20^{\delta\varrho\chi\cdot}$ $30^{\lambda\cdot}$;

Ζητεῖται ἐνταῦθα ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενος ὁ $\frac{3}{4}$ δραχ. νὰ δίδῃ τὸν 20 δρχ. 30 λ. Ἔχομεν ἐνταῦθα πρόβλημα *μετρήσεως* (§ 55).

Ὁ δὲ ἀφηρημένος ἀριθμὸς ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὸ πηλίκον τὸ προκῦπτον ἐκ τῆς μετρήσεως ταύτης εἶναι προφανῶς

$$20\frac{30}{100} : \frac{3}{4} = 20\frac{30}{100} \times \frac{4}{3} = 27\frac{2}{30}$$

ὅθεν τὸ ζητούμενον θὰ εἶναι $27\frac{2}{30}$ ὥρας $= 27^{ὡρ.}\ 4^{π.}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συμπεραίνομεν ὅτι

Ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον· ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις τὸ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος.

Ἀσκήσεις.

442). Ἐπὶ περιφερείας κύκλου τόξον $21^0\ 2'\ 15''$ ἔχει μῆκος 1 μέτρου. Εἰς μῆκος ἴσον πρὸς τὸν τεκτονικὸν πῆχυν πόσαι μοῖραι ἀντιστοιχοῦσι ;

443). Μὲ μίαν λίραν ἀγοράζομεν 5 ὀκάδας καὶ 250 δράμ. καφέ, μὲ $10\frac{2}{5}$ λίρας πόσους στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια θ' ἀγοράσωμεν ;

444). 25 ὀκάδες ἀνθράκων ἐπωλήθησαν ἀντὶ 24 γροσίων καὶ 20 παράδων· πόσαι λῖραι τουρκ. θὰ ἐχρειάζοντο δι' ἕνα στατῆρα ;

445) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος 0,35 τεμαχίου ὑφάσματος μήκους 9 πήχ. 6 ρ.

446). Ἂν 13 ὑάρδαι καὶ 2 πόδες ὑφάσματός τινος ἐπωλήθησαν ἀντὶ 9 λιρῶν, 15 σελλινίων καὶ 10 πεννῶν, πρὸς πόσον ἐπωλήθη ἡ ὑάρδα ;

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

246.—***Πρόβλημα.*** Ἡ ὑάρδα ὑφάσματος τιμᾶται 2 σελ. 4 πέν.· πόσον τιμῶνται 7 ὑάρ. 2 πόδ. ἐξ αὐτοῦ ;

Λύσις. Δι' ἑκάστην ὑάρδαν πληρώνονται 2 σελ. 4 πέν.

διὰ τὰς 7 ὑάρδας » (2 σελ. 4 πέν.)$\times 7$

δι' ἕκαστον πόδα $=\frac{1}{3}$ ὑάρδ. » $\frac{(2 \text{ σελ. } 4 \text{ πέν.})}{3}$

διὰ τοὺς 2 πόδας πληρώνονται

$$\frac{2 \text{ σελ. } 4 \text{ πέν.}}{3}\times 2 = (2 \text{ σελ. } 4 \text{ πέν.})\times\frac{2}{3}$$

(§ 159), ἤτοι τὸ ζητούμενον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον

$$2 \text{ σελ. } 4 \text{ πέν.} \times 7\frac{2}{3} = 17 \text{ σελ. } 10 \text{ πέν. } 2 \text{ φαρδ.} \frac{2}{3}.$$

Ὥστε ὁ *ἀφῃρημένος* ἀριθμὸς $7\frac{2}{3}$, ὅστις δεικνύει *ἀπὸ πόσας ὑάρδας καὶ μέρη* ὑάρδας σχηματίζεται ὁ συμμιγὴς 7 ὑάρδ. 2 πόδ. εἶναι *καθαυτὸ* ὁ πολλαπλασιαστής.

Ἤτοι

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ συμμιγῆ, τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς τάξεως ἐκείνης τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν προκύψαντα μικτὸν ἢ κλάσμα.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

247. — Ὅπως εἰς τὴν δι' ἀκεραίου ἢ κλάσματος διαίρεσιν διακρίνομεν δύο εἴδη προβλημάτων, μερισμοῦ καὶ μετρήσεως, οὕτω καὶ ἐνταῦθα.

α΄) Ἐργάτης τις δι' ἐργασίαν 18 ἡμ. 6 ὡρ. ἔλαβε 4 λίρ. 16 σελ.· πόσον ἐπληρώθη δι' ἑκάστην ἡμέραν, τῆς ἐργασίμου ἡμέρας ὑπολογιζομένης εἰς 8 ὥρας ;

Ἐπειδὴ 18 ἡμ. 6 ὡρ. $= 18\frac{6}{8}$ ἡμ. $= 18\frac{3}{4}$ ἡμ., τὸ πρόβλημα διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐργάτης δι' ἐργασίαν $18\frac{3}{4}$ ἡμ. ἔλαβε 4 λ. 16 σελ.· πόσον ἔλαβε δι' ἑκάστην ἡμέραν ;

Ἀφοῦ εἰς $18\frac{3}{4}$ ἡμ. ἔλαβε 4 λ. 16 σελ.

$$\text{εἰς 1 ἡμ. λαμβάνει } \frac{4 \text{ λ. } 16 \text{ σελ.}}{18\frac{3}{4}}$$

Ἤτοι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει τὸ ὁλικὸν ποσὸν 4 λ. 16 σελ. νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀφῃρημένου ἁπλοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν εἰς ὃν ἐτράπη ὁ συμμιγὴς 18 ἡμ. 6 ὡρ.· τὴν πρᾶξιν ταύτην καλοῦμεν διαίρεσιν τῶν 4λ. 16σελ. διὰ τῶν 18ἡμ. 6ὡρ. ὅθεν·

$$(4\lambda.\ 16\sigma\epsilon\lambda.) : (18\acute{\eta}\mu.\ 6\acute{\omega}\rho.) = (4\lambda.\ 16\sigma\epsilon\lambda.) : 18\frac{3}{4}$$

$$=(4\lambda.\ 16\sigma\epsilon\lambda.)\times\frac{4}{75} = 5\sigma\epsilon\lambda.\ 1\pi\acute{\epsilon}\nu.\ 1\frac{19}{25}\ \varphi\alpha\rho\delta.$$

ἄρα·

Εἰς τὰ προβλήματα μερισμοῦ, ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς μονάδας τῆς τάξεως ἐκείνης τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν τιμὴν καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ προκύψαντος μικτοῦ ἢ κλάσματος.

β'.) Μὲ 1 τάλληρον ἀγοράζει τις 6ὀκ. 100 δρ. πράγματός τινος· πόσον θὰ δώσῃ διὰ ν' ἀγοράσῃ 32 ὀκάδ. 300 δράμ.;

Εἶναι φανερὸν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα τάλληρα θὰ δώσῃ καὶ μέρη ταλλήρου, πρέπει νὰ εὕρωμεν πῶς σχηματίζεται ὁ συμμιγὴς 32 ὀκ. 300 δράμ. ἀπὸ τὸν συμμιγῆ 6 ὀκ. 100 δράμ. καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτοῦ. (§ 158)

Ἐπειδὴ $32\text{ὀκ.}\ 300\text{δρ.} = 32\frac{3}{4}\ \text{ὀκ.} = 13100\ \text{δρ.}$

$$6\ \text{ὀκ.}\ 100\ \text{δρ.} = 6\frac{1}{4}\ \text{ὀκ.} = 2500\ \text{δρ.}$$

ἔχομεν

$$(32\text{ὀκ.}\ 300\text{δρ.}) : (6\ \text{ὀκ.}\ 100\text{δρ.}) = 32\frac{3}{4} : 6\frac{1}{4}$$

ἢ καὶ

$$(32\ \text{ὀκ.}\ 300\text{δρ.}) : (6\text{ὀκ.}\ 100\text{δρ.}) = 13100 : 2500$$

Ἄρα·

Εἰς τὰ προβλήματα μετρήσεως ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου, τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ διαιροῦμεν τὸν ἁπλοῦν ἀριθμὸν εἰς ὃν ἐτράπη ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμοῦ ὃν ἔδωκεν ὁ διαιρέτης. Τὸ εἶδος δὲ τοῦ πηλίκου ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος.

Ἀσκήσεις.

447). Ἔμπορος ἠγόρασε 45 στατῆρας, 25 ὀκάδας, 200 δράμια ἐλαίου πρὸς 5 γρ. 20παρ. τὴν ὀκᾶν. Κατὰ τὴν μεταφοράν του ἐχύθησαν 20 ὀκάδες 200 δρμ.· ἐπώλησεν εἶτα αὐτὸ πρὸς 20 γρ. 10 παρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐκέρδισεν;

448). Ἐὰν 3ὑάρδ.. 2πόδ. καὶ 6δάκτ. ἐπωλήθησαν ἀντὶ 1 λίρ. 10σελ. 4πεν., πρὸς πόσα φράγκα ἐπωλήθη ἡ ὑάρδα;

449). Τὰ συνήθη δοχεῖα ἐκ λευκοσιδήρου δέχονται 14 ὀκάδ. 100 δρμ. κατὰ μέσον ὅρον ἕκαστον. Πόσα τοιαῦτα θὰ μᾶς χρειασθῶσιν, ἵνα μετακομίσωμεν 8στατ. 4ὀκ. καὶ 100 δρμ.;

Μέθοδος ἁπλῶν μερῶν.

248.—***Πρόβλημα*** 1ον). Βαρέλιον πλῆρες ἐλαίου ἔχει βάρος 3 στ. 27 ὀκ. 300 δρ. Πόσον βάρος ἔχουσι 1560 ὅμοια βαρέλια πλήρη ἐλαίου;

Λύσις.— Ἐὰν ἕκαστον βαρέλιον εἶχε βάρος 3 στ., τὰ 1560 βαρέλια θὰ εἶχον βάρος 3 στ.$\times$1560=4680 στ.

Ἐὰν δὲ εἶχε βάρος 22 ὀκ. $= \frac{1^{\sigma\tau}}{2}$, τὰ 1560 θὰ εἶχον βάρος $\frac{1560^{\sigma\tau.}}{2} = 780$ στ.

Ὁμοίως, ἐὰν ἓν βαρέλ. εἶχε βάρος 5 ὀκ. 200 δρ.$= \frac{1}{4}$ τοῦ $\frac{1}{2}$στ. τὰ 1560 βαρέλια θὰ ἐζύγιζον$= \frac{780}{4}$ στ.$=$195 στ.

Ἐὰν δὲ εἶχε βάρος 1 ὀκ., τὰ 1560 θὰ εἶχον βάρος 1 ὀκ.$\times$1560=1560 ὀκ.

Τέλος, ἐὰν εἶχε βάρος 100 δρ. $= \frac{1}{4}$ ὀκ., τὰ 1560 θὰ εἶχον βάρος $\frac{1560}{4}$ὀκ.=8 στ. 38 ὀκ.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$
\begin{array}{lll}
 & & 3^{\sigma\tau.}\ 27^{\grave{o}\kappa.}\ 300^{\delta\rho.} \\
 & & 1560 \\
\hline
 & & 4680 \\
 & 22^{\grave{o}\kappa.} = \frac{1^{\sigma\tau.}}{2} & 780^{\sigma\tau.} \\
27^{\grave{o}\kappa.}\ 300^{\delta\rho.} & 5^{\grave{o}\kappa.}\ 200^{\delta\rho.} = \frac{1}{4} \text{ τοῦ } \frac{1}{2}\text{στ.} & 195^{\sigma\tau.} \\
 & 100^{\delta\rho.} = \frac{1}{4} \text{ τῆς ὀκᾶς} & 8^{\sigma\tau.}\ 38^{\grave{o}\kappa.} \\
\hline
 & & 5663^{\sigma\tau.}\ 38^{\grave{o}\kappa.}
\end{array}
$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀναλύομεν ἕκαστον τῶν μερῶν (πλὴν τοῦ τῆς ἀνωτάτης τάξεως) τοῦ πολλαπλασιαστέου εἰς ἁπλᾶ μέρη τῆς μονάδος τῆς προηγουμένης τάξεως καὶ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἑκάστου τῶν μερῶν τούτων ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.*

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐπεκτείνεται προφανῶς καὶ εἰς ἣν περίπτωσιν ἔχομεν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ ὡς ἐκ τοῦ ἀκολούθου προβλήματος φαίνεται.

Πρόβλημα 2ον. — Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 4 δρ. 60λ.· πόσον θὰ πληρώσῃ τις, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 3 ὀκ. 350 δρ.;

Λύσις. α'.) Διὰ τὰς 3 ὀκ. θὰ πληρώσῃ

πρὸς 4δρ. τὴν ὀκᾶν	$4\delta\rho. \times 3 = 12\delta\rho.$
πρὸς $50\lambda. = \frac{1}{2}^{\delta\rho.}$	$\frac{1}{2}^{\delta\rho.} \times 3 = 1^{\delta\rho.}\ 50^{\lambda.}$
πρὸς $10^{\lambda.} = \frac{1}{10}^{\delta\rho.}$	$\frac{1}{10}^{\delta\rho.} \times 3 = 0^{\delta\rho.}\ 30^{\lambda.}$
Διὰ τὰ $200^{\delta\rho.} = \frac{1}{2}^{\text{ὀκ.}}$ θὰ πληρώσῃ	$\dfrac{4^{\delta\rho.}\ 60^{\lambda.}}{2} = 2^{\delta\rho.}\ 30^{\lambda.}$
Διὰ τὰ $100^{\delta\rho.} = \frac{1}{2}$ τῶν $200^{\delta\rho\mu.}$ »	$\dfrac{2^{\delta\rho.}\ 30^{\lambda.}}{2} = 1^{\delta\rho.}\ 15^{\lambda.}$
Διὰ τὰ $50^{\delta\rho.} = \frac{1}{4}$ τῶν $100^{\delta\rho.}$ »	$\dfrac{1^{\delta\rho.}\ 15^{\lambda.}}{2} = 0^{\delta\rho.}\ 57{,}5$
ἄρα θὰ πληρώσῃ τὸ ὅλον	$17^{\delta\rho.}\ ^{\lambda.}82{,}5$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	$4^{\delta\rho.}$	$60^{\lambda.}$	
	$3^{\text{ὀκ.}}$	$360^{\delta\rho\mu.}$	
ἀξία τῶν 3 ὀκ.	πρὸς $4^{\delta\rho.}$	$12^{\delta\rho.}$	
	πρὸς $50^{\lambda.} = \frac{1}{2}^{\delta\rho.}$	1	$50^{\lambda.}$
	πρὸς $10^{\lambda.} = \frac{1}{10}^{\delta\rho.}$	0	30
ἀξία τῶν 300 δρ.	τῶν$200^{\delta\rho.} = \frac{1}{2}^{\text{ὀκ.}}$	2	30
	τῶν 100	1	15
	τῶν 50	0	57, 5
		$17^{\delta\rho.}$	$82^{\lambda.},5$

'Ασκήσεις.

450). Πόσον τιμῶνται $6^{\pi\dot{\eta}\chi.}$ $7^{\varrho o \acute{v} \pi.}$ ὑφάσματος, ἐὰν ὁ πῆχυς τιμᾶται $9^{\delta\varrho.}$ $50^{\lambda.}$;

451). Κινητόν τι κινούμενον ἐπὶ περιφερείας διατρέχει εἰς 1 ὥραν τόξον $60^0\ 40'\ 50''$. Πόσον τόξον θὰ διατρέξῃ εἰς $7^{\ddot{\omega}\varrho.}$ $30^{\pi.}$ $15^{\delta.}$;

452). 2 ὑάρδαι ὑφάσματός τινος τιμῶνται $1^{\lambda\acute{\iota}\varrho.}$ $9^{\sigma\varepsilon\lambda.}$ $7^{\pi.}$· πόσον τιμῶνται $17^{\acute{v}\acute{\alpha}\varrho\delta.}$ $2^{\pi\acute{o}\delta.}$.

453). 'Ατμόπλοιόν τι διανύει $17^{\mu\acute{\iota}\lambda.}$ εἰς $1^{\ddot{\omega}\varrho.}$ $35^{\pi.}$ $50^{\delta.}$ Εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 85 μίλλια;

454). Ἄνθρωπός τις κάμνει περὶ τὰς 17 εἰσπνοὰς κατὰ δευτερόλεπτον· εἰς ἑκάστην εἰσπνοὴν εἰσέρχονται εἰς τοὺς πνεύμονας $\frac{5}{7}$ λίτρα ἀέρος· ποῖον τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τὸ εἰσερχόμενον εἰς 1 ἑβδομάδα;

(βάρος 1 λίτρου ἀέρος $= 1{,}29$ γραμ.)

455). Ἔμπορος ἀγοράσας βυτίον μὲ 350 ὀκάδας οἴνου πρὸς 0,23 δρχ. τὴν ὀκᾶν ἀπέστειλε τοῦτον σιδηροδρομικῶς εἰς ἄλλο μέρος ἀπέχον 120 χιλ., διὰ τὴν μεταφορὰν δὲ πληρώνει δι' ἕκαστον τόνον καὶ δι' ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου 0,50· τὸ βυτίον ἐστοίχιζε 14 δραχμάς· ἐζύγιζε δὲ κενὸν 16 ὀκ. 200 δρμ.· ἑκάστη ὀκᾶ οἴνου ἐζύγιζε 350 δρμ., ἐπλήρωσε δὲ διὰ φόρον καὶ λοιπὰ 12,30 δι' ἕκαστον ἑκατόλλιτρον. Ὁ οἶνος ἐτέθη εἰς φιάλας τῶν 200 δραμίων, τῶν ὁποίων ἑκάστη κενὴ ἐστοίχιζεν 20 λεπτά· ἑκατὸν δὲ πώματα ἐτιμῶντο 3 δραχμάς· 25 φιάλαι πεπληρωμέναι ἐθραύσθησαν, τὸ δὲ βυτίον κενὸν ἐπωλήθη ἀντὶ 10 δρχ. Ζητεῖται πόσον κοστίζει ἑκάστη φιάλη οἴνου.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Περὶ λόγων.

249.—Ἔστω ἀριθμός τις, π. χ. 3,42· οὗτος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς· $1+1+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}$

Ἔστω ἀφ' ἑτέρου μέγεθός τι· π. χ. μία εὐθεῖα Α. Ἂς κατασκευάσωμεν ἤδη ἑτέραν εὐθεῖαν Β ὡς ἑξῆς: Δι' ἑκάστην ἀκεραίαν μονάδα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ λαμβάνομεν ὁλόκληρον τὴν εὐθεῖαν Α, δι' ἑκάστην δὲ κλασματικὴν μονάδα λαμβάνομεν τὸ ἀντίστοιχον μέρος τῆς εὐθείας Α· π. χ. διὰ τὸ $\frac{1}{10}$ λαμβάνομεν τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς Α. Τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τούτων θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα Β. Λέγομεν τότε ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ μέγεθος Α ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ τὸ προκῦπτον μέγεθος λέγεται γινόμενον τοῦ Α ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 3,42. Ὁ ἀριθμὸς 3,42 λέγεται *λόγος* τοῦ μεγέθους Β πρὸς τὸ ὁμοειδὲς μέγεθος Α.

Ἐὰν ἐδίδοντο τὰ ὁμοειδῆ μεγέθη Α καὶ Β καὶ ἐζητεῖτο ὁ λόγος τοῦ Β πρὸς τὸ Α, θὰ εἴχομεν νὰ μετρήσωμεν τὸ Β διὰ τοῦ Α ἢ καὶ θεωροῦντες τὸ Α ὡς μονάδα νὰ μετρήσωμεν ἁπλῶς τὸ Β. Κατὰ ταῦτα·

Λόγος δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὅπως τὸ πρῶτον μέγεθος γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ἢ καί· *Λόγος δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ προκύπτων ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ πρώτου μεγέθους διὰ τοῦ δευτέρου λαμβανομένου ὡς μονάδος·*

Λόγος δὲ δύο ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμὸς ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζεται ὁ δεύτερος, ἵνα δώσῃ τὸν πρῶτον, ἤτοι τὸ πηλίκον (§ 170) *αὐτῶν.*

Π. χ. λόγος τοῦ ἀριθμοῦ 15 πρὸς τὸν 4 εἶναι $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

Δύο λόγοι λέγονται ἀντίστροφοι, ὅταν τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται τῇ μονάδι.

Π. χ. οἱ λόγοι $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{3}$ εἶναι ἀντίστροφοι.

Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα Α ἔχει μῆκος 21 μέτρων, ἄλλη δ' εὐθεῖα Β ἔχει μῆκος $3\frac{1}{2}$ μέτρων· τουτέστι λόγος τῆς εὐθείας Α πρὸς εὐθεῖάν τινα Γ, ἴσην πρὸς ἓν μέτρον, εἶναι ὁ 21· τῆς δὲ εὐθείας Β πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Γ εἶναι ὁ $3\frac{1}{2}$· ποῖος θὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς Α πρὸς τὴν Β;

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅπως ὁ $3\frac{1}{2}$ λαμβανόμενος ἑξάκις δίδει τὸν 21, οὕτω καὶ ἡ εὐθεῖα Β λαμβανομένη ἑξάκις θὰ δίδῃ τὴν εὐθεῖαν Α· ἤτοι ὁ λόγος τῆς εὐθείας Α πρὸς τὴν εὐθεῖαν Β συμπίπτει πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος τὴν εὐθεῖαν Α πρὸς τὸν ἀντίστοιχον τῆς Β.

Καὶ γενικῶς ἀληθεύει ὅτι· ἐὰν ἔχωμεν δύο μεγέθη ὁμοειδῆ Α καὶ Β καὶ μετρήσωμεν ἕκαστον τούτων διὰ τρίτου τινὸς Γ, λαμβάνομεν δύο ἀριθμοὺς ὧν ὁ λόγος ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν μεγεθῶν, ἤτοι·

Ὁ λόγος δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν οἵτινες προκύπτουσιν, ὅταν μετρήσωμεν τὰ μεγέθη ταῦτα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ὁ λόγος μεγέθους Α πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς Β σημειοῦται Α : Β ἢ καὶ $\frac{A}{B}$· εἶναι δὲ ὁ Α πρῶτος ὅρος τοῦ λόγου καὶ Β ὁ δεύτερος.

Ἔστω $A : B = \frac{3}{4}$ τότε $B : A = \frac{4}{3}$ ὅθεν

Οἱ λόγοι Α : Β καὶ Β : Α εἶναι ἀντίστροφοι.

Ἀσκήσεις.

456). Ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ πρῶτος ἔχει ἡλικίαν 38 ἐτ. 6 μην., ὁ ἕτερος 34 ἐτ. 3 μην. Μετὰ δύο ἔτη τίνα λόγον θὰ ἔχωσιν αἱ ἡλικίαι των ;

457). Δύο ὑφάσματα ἔχουσι μῆκος τὸ μὲν 3 πήχ. 5 ρουπ., τὸ δὲ 4 ὑαρδ. 3 ποδ. Ποῖος ὁ λόγος τοῦ πρώτου μήκους πρὸς τὸ δεύτερον ;

458). Ὁδοιπόρος τις ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α διὰ τὴν πόλιν Β· ἕτερος ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ βαδίζων, ἀλλὰ κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν, ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς Β διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Γ, ἥτις εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ὁδοῦ· συνηντήθησαν οὗτοι εἰς σημεῖόν τι τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τοῦ διανυθέντος διαστήματος ὑφ' ἑκατέρου πρὸς τὸ διάστημα ὅπερ ἔχει ἀκόμη νὰ διανύσῃ νὰ εἶναι ὁ αὐτός. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τοῦ διανυθέντος ὑπὸ τοῦ πρώτου διαστήματος πρὸς τὸ ὅλον ;

459). Πότε τὸ γινόμενον δύο λόγων ἰσοῦται πρὸς ἀριθμὸν ἀκέραιον ;

460). Πότε τὸ πηλίκον δύο λόγων ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον ;

461). Πότε τὸ γινόμενον δύο λόγων ὑπερβαίνει τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν ;

Περὶ ἀναλογιῶν.

250. — Ἡ ἰσότης δύο λόγων λέγεται *ἀναλογία*.

π. χ. $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ἢ καὶ $4 : 6=2 : 3$

Ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶναι μεγέθη, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς λόγους τῶν μεγεθῶν μὲ λόγους ἀριθμῶν (§ 249).

Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ διὰ τῶν ὁποίων γράφεται ἀναλογία τις λέγονται *ὅροι* αὐτῆς.

Ὁ α' καὶ ὁ δ' λέγονται *ἄκροι* ὅροι τῆς ἀναλογίας, ὁ δὲ β' καὶ γ' *μέσοι* ὅροι αὐτῆς. Ἐπίσης οἱ α' καὶ β' λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ γ' καὶ δ' *ἑπόμενοι*.

Ἰδιότητες.

251. — Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ἔχομεν $\frac{α}{β}\times β\times δ=\frac{γ}{δ}\times β\times δ$ ἢ $α\times δ=β\times γ$ ὅθεν.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἄκρων· π.χ. ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$ ἕπεται ἡ ἰσότης

$$3\times 16=6\times 8$$

καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε $α\times δ=β\times γ$, τότε ἔχομεν

$$\frac{α\times δ}{β\times δ}=\frac{β\times γ}{β\times δ} \quad ἢ \quad \frac{α}{β}=\frac{γ}{δ} \quad ἤτοι·$$

οἱ ἀριθμοὶ καθ' ἣν τάξιν εἶναι γεγραμμένοι ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν. Ὅθεν·

Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, οἱ τέσσαρες οὗτοι δύνανται νὰ σχηματίσωσιν ἀναλογίαν, ἀρκεῖ νὰ ληφθῶσι δύο παράγοντες τοῦ ἰδίου γινομένου, εἴτε ὡς ἄκροι εἴτε ὡς μέσοι· π. χ. ἐκ τῆς ἰσότητος

$$8\times 6=12\times 4$$

ἕπεται ἡ ἀναλογία $\frac{8}{12}=\frac{4}{6}$ ἢ $8 : 12=4 : 6$

252. — Κατὰ τὰ προειρημένα, ἐὰν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης

$$α\times δ = β\times γ$$

ἀληθεύει ἡ ἀναλογία

$$α : β = γ : δ$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐπὶ τῶν α, γ, β, δ ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$α\times δ = γ\times β$$

ἕπεται ὅτι $\quad α : γ = β : δ.$

ἢ καὶ $\quad δ : β = γ : α.$

Ἄρα·

Εἰς ἑκάστην ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τοὺς μέσους ὡς ἐπίσης καὶ τοὺς ἄκρους· οὕτως ἡ ἀναλογία

$$\frac{20}{5}=\frac{8}{2} \quad \text{ἢ} \quad 20:5=8:2$$

γράφεται

$$\frac{20}{8}=\frac{5}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{5}=\frac{8}{20}$$

253.—Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$· προσθέτομεν τὴν μονάδα εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

Ὅθεν·

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸ δεύτερον, οἷον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον· π.χ. ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{7}{2}=\frac{21}{6}$ ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\frac{7+2}{2}=\frac{21+6}{6} \quad \text{ἢ} \quad \frac{9}{2}=\frac{27}{6}$$

Ἀσκήσεις.

462). Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου δίδει τὸν ἕτερον τῶν ἄκρων.

463). Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, οἷον ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.

464). Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν, εὑρίσκομεν τέσσαρας ἀριθμοὺς συνιστῶντας ἀναλογίαν.

465). Τὰ τετράγωνα τῶν ὅρων ἀναλογίας σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.

466). Τὰ πηλίκια τῶν ὁμοταγῶν ὅρων δύο ἀναλογιῶν ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.

467). Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἑπομένων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

468). Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἕπεται ἡ ἀναλογία.

$\frac{\lambda\alpha+\rho\gamma}{\lambda\beta+\rho\delta}=\frac{\alpha}{\beta}$, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν λ καὶ ρ.

469). Ἐκ τῆς ἰσότητος.

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$$

ἕπεται ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

470). Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

ἕπεται ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\delta)^2}$

471). Ἐὰν $\frac{\alpha+\beta\chi}{\beta+\gamma\omega}=\frac{\beta+\gamma\chi}{\gamma+\alpha\omega}=\frac{\gamma+\alpha\chi}{\alpha+\beta\omega}$ τότε

ἔχομεν ὅτι $\frac{\alpha+\beta\chi}{\beta+\gamma\omega}=\frac{1+\chi}{1+\omega}$

Μεγέθη εὐθέως καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

254. α΄.) 1 πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 3 δραχμάς.

Τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχ. τιμᾶται 1,50 δρ.,

οἱ 2 πήχεις τιμῶνται 6. δρ. κ. ο. κ.

τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοῦ τῶν πήχεων, ὅπως καὶ τὸ ποσὸν τῶν πήχεων ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοῦ τῶν δραχμῶν.

εἰς τὸν 1 πῆχυν ἀντιστοιχοῦσιν αἱ 3 δραχμαί,

εἰς τὸν $\frac{1}{2}$ » » » 1,50 »

εἰς τοὺς 2 πήχεις » » 6 » κ. ο. κ.

Τὰς τιμὰς «1 πῆχυς, 3 δραχμαὶ» καλοῦμεν ἀντιστοίχους ὡς ἐπίσης καὶ τὰς τιμὰς «$\frac{1}{2}$ πήχ. 1,50 δραχμαὶ» κ. ο. κ.

β') Εἰς 1 ὥραν κινητόν τι διανύει 4 χιλιόμετρα

εἰς $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας διανύει 2 χιλ. κ. ο. κ.

Αἱ τιμαὶ 1 ὥρ., 4 χιλ. εἶναι ἀντίστοιχοι· ὡς ἐπίσης ἀντίστοιχοι εἶναι καὶ αἱ τιμαὶ $\frac{1}{2}$ ὥρ., 2 χιλμ. κ. ο. κ.

Τὸ διανυόμενον διάστημα ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν, ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ ποσὸν τῶν ὡρῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ διανυομένου διαστήματος.

γ') Σῶμά τι πίπτον διανύει κατὰ τοὺς νόμους τῆς Φυσικῆς

εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον 4,90 μέτρα

εἰς τὰ 2 πρῶτα δευτερόλεπτα $4 \times 4{,}90$ μέτρα

εἰς τὰ 3 πρῶτα δευτερόλεπτα $9 \times 4{,}90$ κ. ο. κ.

Ἐνταῦθα ἀντίστοιχοι τιμαὶ εἶναι αἱ

1''	4,90 μ.
2''	$4 \times 4{,}90$ μ.
3''	$9 \times 4{,}90$ μ.

Καὶ ἐνταῦθα τὸ διανυόμενον διάστημα ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου τῆς πτώσεως.

Τὰ ἐν ἑκάστῳ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἀναφερόμενα ποσὰ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων οὕτως ὥστε εἰς *μίαν* τιμὴν τοῦ ἑνὸς ν' ἀντιστοιχῇ *μία* τιμὴ τοῦ ἄλλου. Ἀλλ' ἡ ἀντιστοιχία δὲν εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους εἰς τὸ τρίτον καὶ εἰς τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα· διότι εἰς ἕκαστον τῶν παραδειγμάτων α' καὶ β', ὅταν δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, δίδουσι δύο ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν ποσῶν τούτων. Π. χ. εἰς τὸ α' οἱ 4 πήχ. καὶ αἱ 12 δρ. εἶναι δύο τιμαὶ ἀντίστοιχοι. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 4 πήχ. ἔστω ἐπὶ $\frac{2}{5}$ καὶ τὰς 12 δραχμὰς ἐπὶ $\frac{2}{5}$, θὰ λάβωμεν τὰς τιμὰς $\frac{8}{5}$ πήχ. καὶ $\frac{24}{5}$ δρ. αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι *ἀντίστοιχοι*.

Ἐνῷ εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα, ἐὰν λάβωμεν δύο τιμὰς *ἀντιστοίχους* καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὰ γινόμενα *δὲν* θὰ εἶναι τιμαὶ *ἀντίστοιχοι*· π. χ. δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ εἶναι αἱ 1΄΄ καὶ 4,90 μέτρα· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2, ἔχομεν τὰς τιμὰς 2΄΄ καὶ 9,80 μ., αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἀντίστοιχοι, διότι εἰς τὰ 2΄΄ δὲν διανύει τὸ σῶμα 9,80 μ. ἀλλὰ 19,60.

Ὅταν ποσὰ ἐξαρτῶνται ἀπ᾽ ἀλλήλων οὕτως ὥστε, ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο τυχουσῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτόν, οἱονδήποτε, ἀριθμὸν νὰ δίδῃ *πάντοτε* τιμὰς ἀντιστοίχους, τότε λέγομεν ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι *εὐθέως ἀνάλογα* ἢ ἁπλῶς *ἀνάλογα*. Π. χ. πήχεις καὶ δραχμαὶ εἰς τὸ α΄ παράδειγμα εἶναι εὐθέως ἀνάλογα ποσά· ὅπως ἐπίσης ὧραι καὶ χιλιόμετρα, ἤτοι χρόνος καὶ διάστημα, εἰς τὸ β΄. Ὅθεν καὶ

Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ἐὰν πολλαπλασιαζομένης τιμῆς τινος τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

255. δ΄) Μὲ ὕφασμα πλάτους 1 πήχεως καὶ μήκους 6 πήχεων γίνεται μία ἐνδυμασία. Ἐὰν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος γίνῃ διπλάσιον, ἤτοι 2 πήχ., τότε χρειάζεται ὕφασμα ἔχον μῆκος $\frac{1}{2}$ τοῦ προηγουμένου, ἤτοι 3 πήχ., ἵνα γίνῃ ἡ αὐτὴ ἐνδυμασία. Λοιπὸν

Εἰς τὴν τιμὴν τοῦ πλάτους 1 ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ τοῦ μήκους 6
» » » » » 2 » » » » » 3

Ἐνταῦθα ἔχομεν ποσὰ ἐξαρτώμενα ἀπ᾽ ἀλλήλων τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος.

Παρατηροῦμεν δ᾽ ὅτι, ἐὰν λάβωμεν δύο τυχούσας ἀντιστοίχους τιμὰς αὐτῶν, ὅπως π. χ. τὰς τιμὰς 1 καὶ 6, καὶ τὴν μὲν πρώτην πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τυχόντα ἀριθμόν, π. χ. τὸν 2, τὴν δὲ δευτέραν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2, θὰ προκύψωσι δύο τιμαὶ πάλιν ἀντίστοιχοι· τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος ἐνταῦθα εἶναι ποσὰ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα* ἢ *ἀντίστροφα*· τουτέστιν·

Ὅταν δύο ποσὰ ἐξαρτῶνται ἀπ᾽ ἀλλήλων οὕτως ὥστε, ἐὰν λάβωμεν δύο τυχούσας ἀντιστοίχους τιμὰς αὐτῶν καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὴν μὲν μίαν ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ, τὴν δὲ ἑτέραν ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον αὐτοῦ $\frac{1}{\rho}$, νὰ ἔχωμεν πάλιν τιμὰς ἀντιστοίχους, τότε τὰ δύο ποσὰ εἶναι *ἀντιστρόφως ἀνάλογα* ἢ *ἀντί-*

στροφα· π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἰς ἃς ἐργάτης τις τελειώνει ἓν ἔργον καὶ ὁ τῶν ὡρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας του εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Ὅθεν καί·

Δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα, ἐὰν πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν διαιρεῖται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Τινὰ ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς συναρτήσεως.

256.—Ὅταν ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἐξ ἄλλου οὕτως ὥστε ἡ μεταβολὴ τοῦ δευτέρου νὰ συνεπάγηται τὴν μεταβολὴν τοῦ πρώτου, λέγομεν τὸ πρῶτον *συνάρτησιν* τοῦ δευτέρου.

Π. χ. εἰς τὸ α΄ παράδειγμα (§ 254) τὸ ποσὸν τῶν πήχεων εἶναι συνάρτησις τοῦ ποσοῦ τῶν δραχμῶν καὶ τἀνάπαλιν· εἰς τὸ β΄ τὸ διανυόμενον διάστημα εἶναι συνάρτησις τῶν ὡρῶν, ἤτοι τοῦ χρόνου, καὶ τἀνάπαλιν· εἰς τὸ γ΄ παράδειγμα ἐπίσης τὸ διανυόμενον διάστημα εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ τἀνάπαλιν· τέλος εἰς τὸ δ΄ (§ 255) τὸ μῆκος εἶναι συνάρτησις τοῦ πλάτους καὶ τὸ πλάτος τοῦ μήκους.

257.—Δυνατὸν ὅμως ποσόν τι νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ ποσῶν πλειοτέρων τοῦ ἑνός· π. χ. τὸ διάστημα, τὸ διανυόμενον ὑπὸ ὁδοιπόρου, δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ χρόνου καθ' ὃν τὸ διανύει, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν τὸ διανύει. Τότε τὸ διανυόμενον διάστημα εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ τῆς ταχύτητος, ἤτοι δύο μεταβλητῶν.

***258.**—Θεωρήσωμεν δύο ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα· π. χ. ἔστω ὅτι 3 πήχεις τιμῶνται 8 δρ.

τότε 6 » » 16 δρ.

Εἰς τὰς τιμὰς τῶν πήχεων

3, 6 . . . .

ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τιμαὶ τῶν δραχμῶν

8, 16 . . . .

παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ καὶ ἐν γένει·

Ἔστωσαν δύο ποσὰ α καὶ β τοιαῦτα, ὥστε εἰς μίαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ν' ἀντιστοιχῇ μία τιμὴ τοῦ ἄλλου· ἂς καλέσωμεν

$$\chi_1, \quad \chi_2, \ldots \quad \chi_\nu$$

τοὺς ἀριθμοὺς δι' ὧν ἐκφράζονται τιμαί τινες τοῦ ἑνὸς ποσοῦ. Αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ α τιμαὶ τοῦ ποσοῦ β ἐκφράζονται δι' ἀριθμῶν τινων, ἔστω τῶν

$$y_1, \quad y_2 \ldots \quad y_\nu$$

τότε, ἐὰν τὰ ποσὰ α καὶ β εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, τὸ κλάσμα $\frac{y_1}{\chi_1}$ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{y_2}{\chi_2}$

διότι (§ 254) ἐὰν τὸ χ_2 ἰσοῦται πρὸς τὸ $\rho\chi_1$

τότε τὸ y_2 » » » ρy_1

Ἑπομένως τὸ κλάσμα ἔμεινε τὸ αὐτό. Καὶ γενικῶς·

$$\frac{y_1}{\chi_1}=\frac{y_2}{\chi_2}=\frac{y_3}{y_3}=\ldots=\frac{y_\nu}{y_\nu}.$$

Ἐὰν τὸν κοινὸν αὐτὸν λόγον καλέσωμεν α καὶ ἓν οἱονδήποτε τῶν κλασμάτων αὐτῶν $\frac{y}{\chi}$, θὰ ἔχωμεν $\frac{y}{\chi}=\alpha$ ἢ $y=\alpha\chi$, παριστῶντες διὰ τῶν y καὶ χ δύο ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν δύο ποσῶν.

Ὥστε

Ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, καλέσωμεν δὲ χ καὶ ψ δύο ἀφῃρημένους ἀριθμούς, δι' ὧν ἐκφράζομεν δύο τυχούσας ἀντιστοίχους τιμὰς αὐτῶν, τότε θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς α τοιοῦτος ὥστε $y=\alpha\chi$, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι αἱ ληφθεῖσαι ἀντίστοιχοι τιμαί· τουτέστιν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύνανται ν' ἀλλάσσουν, ἀλλ' ὁ α δὲν ἀλλάσσει.

Ἡ ἰσότης $y=\alpha\chi$ λέγομεν ὅτι ὁρίζει συνάρτησίν τινα y τῆς μεταβλητῆς χ· ἔχομεν ἐνταῦθα τὸν ἁπλούστερον τρόπον ἐξαρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος ἐξ ἄλλης· τουτέστιν ἔχομεν τὴν ἁπλουστάτην συνάρτησιν.

*259.—Θεωρήσωμεν ἤδη τὰ ποσὰ τὰ εἰσερχόμενα ἐν τῷ τρίτῳ παραδείγματι. Εἰς τὰς τιμὰς τοῦ χρόνου

$$1, \quad 2, \quad 3. \ldots$$

ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τιμαὶ τοῦ διανυομένου διαστήματος

$$4{,}90 \quad 4\times4{,}90 \quad 9\times4{,}90 \ldots \text{ ἢ}$$

ἐὰν καλέσωμεν

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3 \cdots \chi_\nu$$

τοὺς ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς τῶν τιμῶν τοῦ χρόνου καὶ

$$y_1, y_2, y_3 \cdots y_\nu$$

τοὺς τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ διαστήματος, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν

$$\frac{y_1}{(\chi_1)^2}=\frac{y_2}{(\chi_2)^2}=\frac{y_3}{(\chi_3)^2}=\ldots=\frac{y_\nu}{(\chi_\nu)^2}=4{,}90$$

ἢ ἐὰν καλέσωμεν y καὶ χ τοὺς ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς δύο τυχουσῶν ἀντιστοίχων τιμῶν ἔχομεν

$$\frac{y}{\chi^2}=4{,}90 \quad \text{ἢ} \quad y=4{,}90\chi^2$$

ἢ ἂν θέσωμεν $4{,}90=\alpha$ ἔχομεν $y=\alpha\chi^2$. παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι εἶναι καὶ ἐνταῦθα τὸ ψ συνάρτησις τοῦ χ, ἀλλ' οὐχὶ ὅπως εἰς τὸ α΄ παράδειγμα.

260.—Ἐν τῇ Φυσικῇ συναντῶνται διαρκῶς παραδείγματα συναρτήσεων διαφόρων π. χ. τὸ μῆκος σιδηρᾶς ῥάβδου εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας. Ἡ θερμοκρασία ἔν τινι τόπῳ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐποχῆς τοῦ ἔτους, ἐκ τῆς ὥρας τῆς ἡμέρας κ.λ.π.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

261.—Μία μέθοδος, τουτέστιν εἷς τρόπος γενικός, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν εἶδός τι προβλημάτων εἶναι καὶ ἡ *μέθοδος τῶν τριῶν*. Εἰς αὐτὴν δίδονται τρεῖς ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο εἶναι ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ὁ τρίτος εἶναι ἑτέρα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ· ζητεῖται δὲ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἑτέρου.

Ποσὰ ἀνάλογα.

28 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 64 δραχμ.· πόσον τιμῶνται οἱ 7 πήχεις ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.

Ἀφοῦ οἱ 28 πήχεις τιμῶνται 64 δρ.

1 » τιμῶνται $\frac{64}{28}$ δρ.

Καὶ οἱ 7 » τιμῶνται $\frac{64}{28}\times 7$ δρ. $=64\times\frac{7}{28}=16$ δραχ.

Χρῆσις ἀναλογιῶν.

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 254).

$$\frac{28}{7}=\frac{64}{\chi} \qquad (\text{ὅθεν § 251})$$

$28\times\chi=64\times 7$· καὶ ἑπομένως $\chi=\frac{64\times 7}{28}=64\times\frac{7}{28}=16$ δρ.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

Ἀτμόπλοιον ὁμαλῶς κινούμενον μὲ ταχύτητα 28 μιλίων καθ' ὥραν διανύει διάστημά τι εἰς 64 ὥρας· ἐὰν ἕτερον ἀτμόπλοιον ἔχῃ ταχύτητα 7 μιλίων, εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ διάστημα;

Ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.

Ὅταν διανύῃ	28 μίλ.	καθ'	ὥραν	χρειάζονται	64 ὥρ.
»	»	1 »	»	»	64×28 ὥρ.
»	»	7 »	»	»	$\frac{64 \times 28}{7}$ ὥρ.

Χρῆσις ἀναλογιῶν.

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἔχομεν (§ 255).

$\frac{28}{7} = \frac{\chi}{64}$ ὅθεν (§ 251) $7 \times \chi = 64 \times 28$.

καὶ ἑπομένως $\chi = \frac{64 \times 28}{7} = 64 \times \frac{28}{7} = 256$ ὥρας.

Ἐὰν διατάξωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἀνωτέρω προβλήματα τὰ δεδομένα, οὕτως ὥστε αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν στίχον καὶ ὁ ἄγνωστος εἰς τὴν β΄ γραμμήν, δηλ. ὡς ἑξῆς·

α΄ πρόβλημα		β΄ πρόβλημα	
28 πήχ.	64 δρχ.	28 μίλ.	64 ὥρ.
7	χ	7	χ

εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν ἀντεστραμμένον μέν, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Γενικὸς τύπος. Ἐὰν διὰ τῶν α καὶ β παραστήσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ διὰ τοῦ γ νέαν τιμὴν τοῦ πρώτου ποσοῦ

θὰ ἔχωμεν διάταξιν δεδομένων τὴν ἑξῆς

α	β
γ	χ

Καὶ γενικὸς τύπος λύσεως ἐὰν μὲν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα θὰ εἶναι:

$$\chi = \beta \times \frac{\gamma}{\alpha}$$

ἐὰν δὲ ἀντίστροφα θὰ εἶναι:

$$\chi = \beta \times \frac{\alpha}{\gamma}$$

Ἀσκήσεις.

472). 5 ὀκάδες 250 δρμ. πράγματός τινος τιμῶνται 5δρχ. 80 λ. πόσον τιμῶνται αἱ 5 ὀκ. 300 δρμ. ;

473). Ἐκκρεμές τι ἐκτελεῖ 145 αἰωρήσεις εἰς 3π. 45δ. πόσας αἰωρήσεις θὰ ἐκτελέσῃ εἰς 14π. 30δ ;

474). Τὸ πλήρωμα ἑνὸς πλοίου ἐν ἀνοικτῇ θαλάσσῃ εὑρισκομένου ἔχει τροφὰς μόνον διὰ 4 ἡμέρας. Πρόκειται νὰ προσορμισθῇ εἰς λιμένα μετὰ 9 ἡμέρας. Πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἵνα ἐπαρκέσωσιν αἱ τροφαί ;

475). Ἀτμόπλοιόν τι πρόκειται νὰ διανύσῃ εἰς 12 ὥρας 130 μίλια. Ἀφοῦ ὅμως διήνυσε τὰ 72 ἐξ αὐτῶν τῶν μιλίων, ἐσταμάτησεν ἐπὶ ἡμίσειαν ὥραν. Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ ὑπολειπόμενον διάστημα, ἵνα συμπληρώσῃ τὸν δρόμον του εἰς τὴν προσδιορισθεῖσαν ὥραν ;

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

262. Ἔστω ὅτι ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἐκ τριῶν ἄλλων, ὅπως π. χ. ὁ ἀριθμός, ὁ παριστῶν τὸ παραγόμενον ἔργον δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ των δι᾽ αὐτὸ ἐργαζομένων ἐργατῶν, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν καθ᾽ ἃς οὗτοι ἐργάζονται καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργασίμων ὡρῶν τῆς ἡμέρας. Τότε εἰς μίαν τριάδα τιμῶν τῶν ποσῶν τούτων, π. χ, εἰς τὴν τριάδα τῶν τριῶν τιμῶν 3 ἐργάται, 17 ἡμέραι, 8 ὧραι, ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ παραγομένου ἔργου, π. χ. $\frac{1}{2}$ ἔργον· εἰς τρεῖς ἄλλας τιμὰς ἀντιστοιχεῖ μία ἄλλη πάλιν τιμὴ τοῦ παραγομένου ἔργου· ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι διατηροῦμεν σταθερὸν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν καὶ ὡρῶν, π. χ. ἀφήνομεν 3 τοὺς ἐργάτας, καὶ 8 τὰς ὥρας τὰς ἐργασίμους τῆς ἡμέρας, μεταβάλλομεν ὅμως τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν· τότε εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ποσοῦ τοῦ παραγομένου ἔργου· ἐπειδή, τῶν ἄλλων ποσῶν (ἐργατῶν καὶ ὡρῶν) μενόντων σταθερῶν, αἱ ἡμέραι καὶ τὸ ἔργον μεταβάλλονται ἀναλόγως (§ 254), λέγομεν ὅτι τὰ

ποσὰ ἡμέραι καὶ ἔργον, ἐνταῦθα εἶναι *εὐθέως ἀνάλογα*. Ὁμοίως σκεπτόμενοι θὰ ἐλέγομεν ὅτι ἡμέραι καὶ ὧραι εἶναι ποσὰ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*.

Πρόβλημα. Ὁδοιπόρος βαδίζων 6 ὥρας καθ' ἑκάστην διατρέχει εἰς 8 ἡμέρας 180 στάδια. Εἰς πόσας ἡμέρας ἄλλος ὁδοιπόρος βαδίζων μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα τοῦ πρώτου, ἀλλὰ 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, θὰ διατρέξῃ 540 στάδια.

Διατάσσονται τὰ δεδομένα ὡς ἑξῆς·

$6^{\text{ὡρ.}}$	$8^{\text{ἡμ.}}$	$180^{\text{στ.}}$
9	χ	540

Λύσις. Εὐκόλως ἀνάγεται τοῦτο εἰς ἕτερα προβλήματα τῆς ἁπλῆς.

Ἐὰν βαδίζῃ 6 ὥρ. καθ' ἑκάστην ἐπὶ 8 ἡμ. διατρέχει 180 στ.
ἐὰν » 9 ὥρ. πόσας ἡμέρας θὰ χρειασθῇ ἵνα διατρέξῃ τὰ 180 στάδια; $\chi = 8 \times \frac{6}{9}$ ἡμέρας.

Ἐὰν βαδίζῃ 9 ὥρ. καθ' ἑκάστην ἐπὶ $8 \times \frac{6}{9}$ ἡμέρας διατρέχει 180 στάδια· εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ 540 στάδια;

$$\chi = 8 \times \frac{6}{9} \times \frac{540}{180} = 16 \text{ ἡμέραι}$$

Κανών. *Ἀφοῦ διατάξωμεν τὰ ποσὰ οὕτως ὥστε αἱ τιμαὶ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ὁ δὲ ἄγνωστος χ εἰς τὴν δευτέραν γραμμήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα σχηματίζουσιν αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ· ἀντιστρέφομεν ὅμως προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἐὰν τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.*

Ἀσκήσεις.

476). Ἀφοῦ 16 ἐργάται εἶχον ἐργασθῇ ἐπὶ 22 ἡμέρας καὶ εἶχον ἐκτελέσει τὸ $\frac{1}{3}$ ἔργου τινός, πέντε ἐξ αὐτῶν ἐγκατέλιπον τὴν ἐργασίαν. Μετὰ πόσας ἡμέρας οἱ ἀπομείναντες ἐργάται θ' ἀποπερατώσωσι τὸ ἔργον;

477). Ὁδοιπόρος βαδίζων 6 ὥρας καθ' ἡμέραν διατρέχει διάστημά τι εἰς δέκα ἡμέρας. Ἐὰν αὐξήσῃ τὴν ταχύτητα αὐτοῦ κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς προηγουμένης, ἐπὶ πόσας ὥρας θὰ βαδίζῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα διατρέξῃ τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς 4 ἡμέρας;

478). Εἴς τι φρούριον εὑρίσκονται 1840 ἄνδρες καὶ ἔχουσι τροφὰς δι' ἕνα μῆνα. Πόσοι ἔπρεπε νὰ ἐξέλθωσι τοῦ φρουρίου ἵνα οἱ ἀπομένοντες περιορίζοντες ἕκαστος τὸ σιτηρέσιόν του εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ προηγουμένου ἔχωσι τροφὰς διὰ δύο μῆνας;

479). Ὑφάσματος πλάτους 1 πήχ. 3 ρουπ. οἱ 25 πήχ. 6 ρούπ. τιμῶνται 206 δραχμ· πόσον τιμῶνται 15,50 μέτρ. ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 1,4 πήχ., δεδομένου ὄντος ὅτι δι' ὕφασμα ἐνδυμασίας ἐκ τοῦ πρώτου θὰ ἐπλήρωνέ τις διπλάσιον τῶν πληρωνομένων δι' ὕφασμα ἐνδυμασίας ἐκ τοῦ δευτέρου;

480). Κρουνὸς χύνων 8ὀκ. 200 δρ. ὕδατος εἰς 1 π. πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 14 ὥρ. 45 π.· εἰς πόσας ὥρας κρουνὸς χύνων 11 ὀκ. 250δρ. ὕδατος εἰς 1 π. θὰ πληρώσῃ δεξαμενήν, ἧς ἡ χωρητικότης εἶναι τὰ $\frac{7}{12}$ τῆς χωρητικότητος τῆς πρώτης;

481). Πατήρ τις καὶ οἱ δύο του υἱοὶ ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς 8 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας ὁ πατὴρ μετὰ τοῦ ἀδελφοῦ του καὶ ἑνὸς ἐκ τῶν υἱῶν του θὰ ἐκτελέσῃ ἔργον τριπλάσιον τοῦ πρώτου, δεδομένου ὄντος ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ πατρὸς ἢ τοῦ ἀδελφοῦ παραγόμενον ἔργον ἔχει λόγον πρὸς τὸ ὑφ' ἑκάστου υἱοῦ παραγόμενον, οἷον λόγον ἔχει ὁ 5 πρὸς τὸν 3;

482). Ὅταν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τρίτον, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἀντίστροφα.

483). Ὅταν ἐκ τριῶν ποσῶν τὸ πρῶτον εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ τρίτον, ἐνῷ τὸ δεύτερον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ τρίτον, τότε τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον εἶναι ἀνάλογα.

Συνεζευγμένη μέθοδος.

263. *Πρόβλημα* 1ον. —Πρὸς πόσας ἀγγλικὰς λίρας ἰσοδυναμοῦσιν 150 λίραι τουρκικαί, ἐὰν 5 τουρκικαὶ λίραι ἰσοδυναμοῦσι πρὸς

114 δραχμάς, 250 δὲ δραχμαὶ πρὸς 10 ἀγγλικὰς λίρας ;

α΄) Εὑρίσκομεν (μεθοδ. τῶν τριῶν) ὅτι αἱ 5 τουρκικαὶ λῖραι δηλ. αἱ 114 δραχ., ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $10 \times \frac{114}{250}$ ἀγγλ. λίρ.

β΄) Ἤδη εὑρίσκομεν ὅτι 150 τουρκ. λῖρ. ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $10 \times \frac{114}{250} \times \frac{150}{5}$ ἀγγλ. λίρ.

Ἡ δὲ διάταξις γίνεται ὡς ἑξῆς·

χ ἀγγλ. λῖρ.	150 λῖρ. τουρκ.
5 λῖρ. τουρκ.	114 δραχ.
250 δραχ.	10 ἀγγλ. λῖρ.

ὅπου $\chi = \frac{150 \times 114 \times 10}{5 \times 250}$. ἤτοι·

τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης στήλης ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας στήλης· ἐπειδὴ δὲ τὸ χ ἐκφράζει λίρας εὑρίσκομεν $\chi = 136$ λιρ. 16 σελ.

Πρόβλημα 2ον.—Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐκ Γαλλίας 500 μέτρα βελούδου πρὸς 8 δρ. τὸ μέτρον· ἐκτελωνίσας δ' αὐτὸ ἐν Πειραιεῖ ἐπλήρωσεν εἰσαγωγικὸν δασμὸν 30 %. Τοῦ ναύλου ὄντος 5% καὶ τοῦ δημοτικοῦ δι' Ἀθήνας φόρου 1 %, πόσας δραχμὰς στοιχίζει ὁ πῆχυς τοῦ ἐμπορίου εἰς Ἀθήνας ;

Διατάσσομεν ὡς ἑξῆς (ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι βελοῦδον ἀρχικῆς ἀξίας 100 δρ. στοιχίζει εἰς Ἀθήνας μετὰ τῶν ἐξόδων 136 δρ.).

χ δρ.	1 πῆχυς
1 πῆχ.	0,648 μ.
1 μ.	8 δραχ.
100 δραχ.	136 δραχ.

$$\chi \times 1 \times 1 \times 100 = 1 \times 0{,}648 \times 8 \times 136$$

$$\chi = \frac{0{,}648 \times 8 \times 136}{100} = 7{,}05$$ δρ. (περίπου).

ΣΗΜ. Ὡς βλέπομεν, τὰ δεδομένα λαμβάνουσιν εἰδικὴν διάταξιν εἰς ἕκαστον πρόβλημα, ἐφ' ἧς δέον νὰ καταβάλληται ἰδιάζουσα ἑκάστοτε προσοχή.

Καὶ εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα εἰργάσθημεν ὅπως καὶ εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἤτοι ἀνελύσαμεν τὸ πρόβλημα εἰς ἄλλα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· ἐνταῦθα ὅμως ἡ κατάταξις γίνεται κατ' ἄλλον τρόπον.

Ἡ μέθοδος δι' ἧς ἐλύσαμεν αὐτὰ λέγεται *συνεζευγμένη*.

Ἀσκήσεις.

484). Ἠγόρασέ τις ἐν Ἀγγλίᾳ ὕφασμα πρὸς 1.15 τὴν ὑάρδαν, δαπανᾷ δὲ διὰ ναῦλον 20 %, διὰ εἰσαγωγικὸν δασμὸν καὶ λοιποὺς φόρους μέχρις Ἀθηνῶν 30 %. Πρὸς πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 60 % ;

485). Προκειμένου ν' ἀναχωρήσῃ τις δι' Ἀμερικὴν θέλει νὰ μετατρέψῃ τὰ χρήματά του ἐκ 2500 τουρκικῶν λιρῶν εἰς δολλάρια. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1 τουρκ. λίρα ἰσοδυναμεῖ πρὸς 22,78 δραχ., τὸ δὲ δολλάριον πρὸς 5,18 δραχ., καὶ ὅτι ἐπλήρωσε δι' ἀμοιβὴν τοῦ ἀργυραμοιβοῦ $\frac{3}{4}$ %· ζητεῖται πόσον θὰ λάβῃ εἰς δολλάρια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

264. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος ὅπερ λαμβάνει τις ἐκ ποσοῦ χρημάτων τὰ ὁποῖα δανείζει· ὁ τόκος εἶναι ποσὸν ἐξαρτώμενον ἐκ τριῶν ἄλλων· 1ον τῆς δανειζομένης ποσότητος, τοῦ *κεφαλαίου*· 2ον τῆς διαρκείας τοῦ δανείου, *τοῦ χρόνου*, καὶ 3ον τοῦ ὁριζομένου τόκου δι' ἑκάστην *μονάδα κεφαλαίου* κατὰ συνθήκην 100 δραχ. δι' ἑκάστην χρονικὴν μονάδα, συνήθως ἔτος, ἤτοι τοῦ *ἐπιτοκίου*. Οὕτως, ἂν κατόπιν συμφωνίας ἕκαστον ἑκατοντάδραχμον κεφαλαίου δι' ἑκάστην χρονικὴν περίοδον φέρει τόκον 3 δρχ., λέγομεν ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 3. Τοῦτο δηλοῦμεν γράφοντες συμβολικῶς 3 % ἀπαγγελλόμενον 3 τοῖς ἑκατόν.

Ὁ τόκος λέγεται *ἁπλοῦς*, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· *σύνθετος* δέ, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα ἀποτελῇ τὸ τοκιζόμενον κεφάλαιον διὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις πρόκειται περὶ τόκου ἁπλοῦ.

Ἐκ τῶν εἰσερχομένων εἰς *τὰ προβλήματα τοῦ τόκου* ποσῶν κεφαλαίου K, χρόνου X, ἐπιτοκίου E, τόκου T, ὅταν δοθῶσι τρία, εὑρίσκομεν τὸ τέταρτον.

Οὕτως ἔχομεν τέσσαρα εἴδη προβλημάτων τόκου, καθ' ὅσον ζητεῖται τὸ K, ὁ X, τὸ E, ὁ T. Ὁ τόκος εἶναι προδήλως πρὸς πάντα τὰ λοιπὰ ἀνάλογος. Πάντα ὅμως τὰ ἄλλα ἀνὰ δύο εἶναι ἀντίστροφα.

Τὰ διάφορα προβλήματα τοῦ τόκου ἀνάγονται εἰς προβλήματα συνθέτου ἢ καὶ ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

α΄) Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 3400 δραχμῶν εἰς 7 ἔτη πρὸς 5 %;

Κατατάσσομεν·

100 δραχ.	1 ἔτ.	5 δρ.
3400	7	T

Κατὰ τὰ ἐν τῇ (§ 262)

$$T=5\times\frac{3400}{100}\times\frac{7}{1}=\frac{5\times3400\times7}{100}=1190 \text{ δραχ.}$$

καὶ γενικῶς $$T=\frac{E.K.X.}{100}.$$

β΄) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 3400 δραχ. τοκιζόμενον πρὸς 5 % φέρει τόκον 1190 δραχ.;

Κατατάσσομεν·

100 $^{\text{δρ.}}$	1 $^{\text{ἔτ.}}$	5 $^{\text{δρ.}}$
3400	X	1190

$$X=1\times\frac{100}{3400}\times\frac{1190}{5}=\frac{1\times100\times1190}{3400\times5}=7 \text{ ἔτη}$$

καὶ γενικῶς $$X=\frac{T.\ 100}{K.\ E}$$

γ΄) Πόσον κεφάλαιον εἰς 2 ἔτη πρὸς 8 % φέρει τόκον 480 δραχμάς;

Κατατάσσομεν·

100 δρ.	1 ἔτ.	8 δρ.
Κ	2	480

$$K=\frac{480\times100}{8\times2}=3000$$

καὶ γενικῶς $$K=\frac{T.\ 100}{E.\ X.}$$

δ΄) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 3000 δραχ. εἰς 3 ἔτη ἔφερε τόκον 720 δραχ.;

Κατατάσσομεν·

3000	3 ἔτ.	720 δρ.
100	1	Ε

$$E=\frac{720\times100}{3000\times3}=8 \text{ δρ.}$$

καὶ γενικῶς $$E=\frac{T.\ 100}{K.\ X.}$$

Γενικοὶ τύποι λύσεως.

265. — Ἔχομεν εὕρει τοὺς ἑξῆς γενικοὺς τύπους·

$$T=\frac{K.E.X.}{100},\quad X=\frac{T.\ 100}{K.E},\quad K=\frac{T.\ 100}{X.E},\quad E=\frac{T.\ 100}{K.X}$$

ὅπου τὸ Χ παριστᾷ ἀριθμὸν ἐτῶν καὶ Ε τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς ἓν ἔτος, ἤτοι ὁ χρόνος πρέπει νὰ μετρῆται μὲ τὴν χρονικὴν μονάδα εἰς ἣν ἀναφέρεται τὸ ἐπιτόκιον· ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει πρῶτον νὰ καταστῇ ὁ χρόνος ὁμοειδὴς πρὸς τὴν μονάδα ταύτην καὶ εἶτα νὰ ἐφαρμοσθῶσιν οἱ τύποι. Π. χ. Ἂν ζητῆται ὁ τόκος Κ δρ. εἰς 8 μῆνας πρὸς Ε %, ὁ α΄ τύπος γίνεται

$$T=\frac{K.E.\frac{8}{12}}{100}\quad \text{ἢ}\quad T=\frac{K.E.8}{1200}.$$

Ἂν δὲ ζητῆται ὁ τόκος εἰς 17 ἡμέρας, ὁ αὐτὸς τύπος γίνεται

$$T = \frac{\text{Κ.Ε.} \dfrac{17}{360}}{100} = \frac{\text{Κ.Ε.}17}{36000}.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐφαρμόζομεν εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας καὶ τοὺς ἄλλους τύπους.

Ἀσκήσεις.

486). Ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ μὲν εἰς τοκίζει 5000 δραχμὰς πρὸς 4,5 %, ὁ δὲ ἕτερος τοκίζει 3000 πρὸς 5 % καὶ 2000 πρὸς 3,5 %. Ποῖος ἐκ τῶν δύο κερδίζει περισσότερα ;

487). Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 310000 δραχμῶν· ἐξοδεύει δὲ δι' ἐπισκευὰς καὶ λοιπὰ κατ' ἔτος 2000 δραχμάς· πόσον πρέπει νὰ τὴν ἐνοικιάσῃ, διὰ νὰ κερδίζῃ 10 % ἐπὶ τῶν χρημάτων του ;

488). Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 6 % φέρει εἰς 5 ἔτη τόσον τόκον ὅσον 4500 δραχμαὶ εἰς 7 ἔτη πρὸς 5 % ;

489). Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 2360 δρ. πρὸς 7 % εἰς 2ἔτ. 4μ. 16ἡμ.

490). Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον πρὸς 6,5 % διπλασιάζεται ;

491). Μετὰ πάροδον 30 μηνῶν κεφάλαιόν τι ηὔξησε κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον εἶχε τοκισθῆ ;

492). Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 8000 δραχμῶν εἰς 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας γίνεται μετὰ τῶν τόκων του 8640 δρ. ;

493). Δανείσας τις πρὸς 6 % χρήματα ἔλαβε μετὰ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνας ὡς κεφάλαιον καὶ τόκον 8720 δραχ.· ποῖον τὸ κεφάλαιον ;

494). Δανείζει τις τὰ μὲν $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 8 %, τὸ δὲ $\frac{1}{3}$ πρὸς 9 % καὶ ἀπολαμβάνει ἐξ ἀμφοτέρων τὴν ἐξαμηνίαν 108 δραχ. Ποῖον τὸ κεφάλαιον ;

495). Εἰς τὰς εἰσιτηρίους διὰ τὸ γυμνάσιον ἐξετάσεις εἶχε δοθῆ πρὸς λύσιν πρόβλημα ἐν ᾧ ἐζητεῖτο ὁ τόκος κεφαλαίου τινὸς πρὸς 4 $^0/_0$ εἰς 73 ἡμέρας. Δὲν εὗρον ὅμως τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ὅσοι τὸ ἔλυσαν ὀρθῶς, διότι ἄλλοι ὑπελόγισαν τὸ ἔτος ὡς ἔχον 360 ἡμέρας καὶ ἄλλοι ὡς 365. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο εὑρεθέντων ἐξαγομένων ἦτο 10 λεπτά. Ποῖον τὸ κεφάλαιον ;

496). Εἰσπράκτωρ τις τοῦ Δημοσίου εἰσέπραξε φόρους 132564 δραχ. λαμβάνει δὲ $\frac{1}{4}$ ἐπὶ τοῖς 100· πόσα πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τῶν εἰσπραχθέντων ; Ἤτοι νὰ εὑρεθῶσι τὰ ποσοστὰ αὐτοῦ.

497). Ποίαν μεσιτείαν ἐπληρώσαμεν πρὸς $\frac{1}{3}$ $^0/_0$ δι' ἐμπόρευμα πληρωθὲν μὲ 285 ἀγγλικὰς λίρας ;

498). Ἐπὶ τίνος ποσοῦ πωλήσεως ἐπληρώθησαν 38,40 φράγ. διὰ μεσιτείαν πρὸς $\frac{1}{2}$ $^0/_0$;

499). Τί θὰ πληρώσωμεν δι' ἀσφάλειαν ἐμπορεύματος 100000 δρχ. ποὸς $\frac{1}{4}$ τοῖς $^0/_0$;

500). Πότε ἔχομεν μεγαλύτερον τόκον· ἐὰν τοκίσωμεν κεφάλαιόν τι πρὸς 3 $^0/_0$ ἐπὶ 97 ἡμέρας ἢ ἐὰν τοκίσωμεν αὐτὸ πρὸς 3 $^1/_4$ $^0/_0$ ἐπὶ 89 ἡμέρας ;

501). Ἀγοράσας τις οἰκίαν ἐπώλησεν αὐτὴν ἀντὶ 43500 δρ., ἐκέρδισε δὲ οὕτω 16 $^0/_0$. Ζητεῖται ἀντὶ πόσου ἠγοράσθη ἡ οἰκία, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ κέρδος ἐλογίσθη ἐπὶ τῆς τιμῆς α') τῆς ἀγορᾶς, β') τῆς πωλήσεως ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

266.—Τὸ ποσὸν καθ' ὃ ἐκπίπτει ἓν χρέος, ὅταν τοῦτο πληρώνεται πρὸ τῆς διορίας του, λέγεται *ὑφαίρεσις*· τὸ ποσὸν ἀντὶ τοῦ ὁποίου προεξοφλεῖται τότε τὸ χρέος λέγεται *παροῦσα ἀξία*.

267.—***Πρόβλημα.*** Γραμμάτιον 5100 δραχμῶν προεξοφλεῖται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 %. Πόσην ὑφαίρεσιν ὑφίσταται ;

Λύσις.—Συνήθως τὴν ζητουμένην ὑφαίρεσιν θεωροῦμεν ὡς τόκον τῶν 5100 δρ. διὰ 4 μῆνας πρὸς 6 %, καὶ ἔχομεν

$$\Upsilon = \frac{5100 \times \frac{4}{12} \times 6}{100} = \frac{5100 \times 2}{100} = 102$$

Ἡ τοιαύτη ὑφαίρεσις καλεῖται *ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις*, (ἢ καὶ *ἐμπορική*)· ὥστε :

Α') *Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καλεῖται ὁ τόκος τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου ποσοῦ διὰ τὸν χρόνον* ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Β') Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἡ ἔκπτωσις εἶναι 102 δρ.· ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι 5100—102=4998 δραχ. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας, δηλαδὴ τῶν 4998 δραχ. εἰς 4 μῆνας, δὲν εἶναι 102 δρ., ἤτοι ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς παρούσης ἀξίας καὶ τῶν τόκων αὐτῆς εἶναι μικρότερον τῶν 5100 δραχμῶν, δηλαδὴ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας.

Ἂν ἀλλάξωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν καταλλήλως, ὥστε ἄθροισμα παρούσης ἀξίας καὶ τόκου αὐτῆς νὰ δίδῃ τὴν ὀνομαστικήν, τότε τὸν τόκον τῆς τοιαύτης παρούσης ἀξίας καλοῦμεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν· ὥστε·

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καλεῖται ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας, ὅταν ὡς τοιαύτη ληφθῇ ποσὸν ὅπερ μετὰ τοῦ τόκου ἀθροιζόμενον δίδει τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν.

Καὶ εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν λαμβάνομεν ὡς *χρόνον* τὸν μεσολαβοῦντα ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἂς ζητήσωμεν ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν· ἂν ἡ παροῦσα ἀξία ἦτο 100 δρ., ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις θὰ ἦτο ὁ τόκος αὐτῆς εἰς 4 μῆνας πρὸς 6 %, ἤτοι 2 δραχ., καὶ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία θὰ ἦτο τότε 102 δραχ.· ὥστε·

Εἰς ὀνομ. ἀξίαν 102 δραχμῶν ἀντιστοιχεῖ ὑφαίρ. ἐσωτερικὴ 2 δραχμῶν.

Εἰς διπλασίαν ὀνομ. ἀξίαν θ' ἀντιστοιχῇ προφανῶς διπλασία ὑφαίρ. ἐσωτερ. κ. ο. κ.· ἤτοι·

Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ἀνάλογος τῆς ὀνομ. ἀξίας.

Καὶ ἑπομένως εἰς ὀνομαστικὴν ἀξίαν 5100 δρ. ἔχομεν ἐσ. ὑφαίρ.

$$\frac{5100 \times 2}{102} = 100 \text{ δραχμαί.}$$

Καὶ γενικῶς ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις υ′ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$υ' = \frac{K.\,τ}{100+τ}$$

ὅπου Κ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ τ ὁ τόκος τῶν 100 δραχμ. διὰ τὸν χρόνον ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἀσκήσεις.

502). Διατί ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις δὲν εἶναι ἀνάλογος οὔτε πρὸς τὸν χρόνον οὔτε πρὸς τὸ ἐπιτόκιον;

503). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία ἐν τῇ ἐσωτερικῇ ὑφαιρέσει δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$Π = \frac{K.\,100}{100+τ}.$$

504). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου καὶ ὁ τόκος αὐτῆς ἔχουσιν ὡς ἄθροισμα τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

505). Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου προεξοφλουμένου 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 %, ἐὰν ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι 4,5 δραχμαί;

506). Γραμμάτιον 2000 δραχμ. λῆγον τὴν 31 Ἰουλίου προεξωφλήθη τὴν 1 Μαΐου πρὸς 6 %. Ζητεῖται ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις.

507). Γραμμάτιον 1500 δρχμ. προεξωφλήθη μὲ ἐξωτερ. ὑφαίρ. 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ δραχμῶν 1470. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις ;

508). Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του προεξωφλήθη γραμμάτιον 1440 δραχ., μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 54 δραχ. πρὸς 9 %.

509). Τίς ἡ ὀνομ. ἀξία γραμματίου προεξοφληθέντος 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐξωτ. ὑφαίρεσιν πρὸς 6 % ἀντὶ δραχμῶν 2955 ;

510). Τίς ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 10200 δραχ. προεξοφληθέντος 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 % καὶ τίς ἡ παροῦσα ἀξία ;

511). Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του προεξωφλήθη γραμμάτιον ἀντὶ 8000 μὲ ἐσωτ. ὑφαίρ. 100 δρ. τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5 % ;

512). Γραμμάτιον 6480 δραχ. προεξωφλήθη $2\frac{1}{2}$ μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐσωτ. ὑφαίρεσιν 80 δραχμ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ὑπελογίσθη ἡ ὑφαίρεσις ;

513). Ἔχει τις δύο γραμμάτια, τὸ μὲν 1500 δρ. λῆγον μετὰ 160 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον, τὸ δὲ 1200 λῆγον μετὰ 7 μῆνας. Θέλει νὰ τὰ ἀντικαταστήσῃ δι' ἑνὸς γραμματίου ὅπερ νὰ λήγῃ μετὰ 190 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον· τίς ἡ ὀνομαστ. ἀξία αὐτοῦ, ἂν ἡ προεξόφλησις γίνῃ α') μὲ ἐξωτερ. ὑφαίρεσιν, β') μὲ ἐσωτερικήν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6 % ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

Ὁρισμός.

268.—Πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 3, 5, 8 ἐπὶ τυχόντα ἀριθμόν, π. χ. τὸν 4. Λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς 12, 20, 32, οἵτινες λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 5, 8, διότι οἱ λόγοι $\frac{12}{3}$, $\frac{20}{5}$, $\frac{32}{8}$ εἶναι ἴσοι.

Γενικῶς οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω .... λέγονται *ἀνάλογοι* πρὸς τοὺς α, β, γ ..., ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὁ α ἵνα δώσῃ τὸν χ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὁ β ἵνα δώσῃ τὸν ψ καὶ ὁ γ ἵνα δώσῃ τὸν ω· κ. ο. κ. ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω... εἶναι *ἀνάλογοι* πρὸς τοὺς α, β, γ,... ἐὰν

$$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\ldots\ldots$$

Ἀσκήσεις.

514). Ἐὰν ἀριθμοί τινες εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ, εἶναι ἀνάλογοι καὶ πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2α, 2β, 2γ, καὶ γενικῶς πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς ρα, ρβ, ργ. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 5, 8, 10 οἵτινες εἶναι ἀνάλογοι τῶν 25, 40, 50 θὰ εἶναι ἀνάλογοι καὶ τῶν ἀριθμῶν 50, 80, 100.

515). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ, τότε καὶ οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω, χ+ψ+ω θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, α+β+γ.

516). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς α, β, γ, καὶ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς χ, ψ, ω.

Ἐκτέλεσις μερισμοῦ.

269.—Ἔστω ἤδη ὅτι δίδονται ἀριθμοί τινες, π. χ. οἱ 6, 9, 10, καὶ ζητοῦνται ἄλλοι χ, ψ, ω, ἀνάλογοι πρὸς αὐτοὺς καὶ μὲ ὡρισμένον ἄθροισμα, π. χ. τὸ 75.

Κατὰ τὰ προηγούμενα ζητοῦμεν νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi}{6}=\frac{\psi}{9}=\frac{\omega}{10},$$

ἢ καὶ

$$\frac{\chi}{6}=\frac{\psi}{9}=\frac{\omega}{10}=\frac{75}{6+9+10},$$

ὅθεν

$$\frac{\chi}{6}=\frac{75}{6+9+10} \quad \text{ἤτοι} \quad \chi=\frac{75\times6}{6+9+10}$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\psi=\frac{75\times9}{6+9+10} \quad \text{καὶ} \quad \omega=\frac{75\times10}{6+9+10}.$$

Ἐμερίσαμεν ἐνταῦθα τὸν ἀριθμὸν 75 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6, 9, 10· τουτέστι

Νὰ μερισθῇ ἀριθμός τις Κ εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν α, β, γ, σημαίνει νὰ εὕρωμεν τρεῖς ἄλλους ἀριθμοὺς ἔχοντας ἄθροισμα τὸν Κ καὶ ἀναλόγους πρὸς τοὺς α, β, γ·

ἤτοι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ χ, ψ, ω θὰ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε

$$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \chi+\psi+\omega=K$$

Ἀλλ' ἔχομεν

$$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{\chi+\psi+\omega}{\alpha+\beta+\gamma}$$

ἢ καὶ $$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}$$ ὅθεν

$$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \frac{\psi}{\beta}=\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \frac{\omega}{\gamma}=\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}$$

καὶ ἐπομένως προκύπτουσιν ὡς γενικοὶ τύποι λύσεως οἱ ἑξῆς·

$$\chi=\frac{K.\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \psi=\frac{K.\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \omega=\frac{K.\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}. \qquad (1)$$

Π. χ. Νὰ μοιρασθῶσι 15000 ὀκάδες σίτου εἰς τρεῖς συνοικισμοὺς ἀναλόγως τοῦ πληθυσμοῦ αὐτῶν· τοῦ πρώτου ὁ πληθυσμὸς εἶναι 600 κατ., τοῦ δευτέρου 450 καὶ τοῦ τρίτου 350. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ τῶν τριῶν συνοικισμῶν οἱ κάτοικοι,

ἤτοι οἱ 1400 θὰ λάβωσι 15000 ὀκ.

ὁ 1 θὰ λάβῃ $\frac{15000}{1400}$

οἱ 600 $\frac{15000\times600}{1400}$

οἱ 450 $\frac{15000\times450}{1400}$

καὶ οἱ 350 $\frac{15000\times350}{1400}$

Τὰ αὐτὰ θὰ εὑρίσκομεν καὶ ἐκ τῶν γενικῶν τύπων.

270.—Οἱ τύποι (1) δεικνύουσιν ὅτι·

α′.) Ἐὰν ἐκ τῶν δεδομένων α, β, γ, Κ ἀλλάξωμεν τὴν τιμὴν τοῦ Κ, ἀλλάσσουν καὶ αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ, ω, ἤτοι αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ, ω εἶναι συναρτήσεις τῶν τιμῶν τοῦ Κ (§ 256). Καὶ μάλιστα, ἐὰν ὁ Κ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ρ, καὶ ὁ χ θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ρ, ἤτοι ὁ Κ καὶ ὁ χ μεταβάλλονται ἀναλόγως· ἐπίσης ὁ Κ καὶ ὁ ψ· ὡς ἐπίσης ὁ Κ καὶ ὁ ω.

β΄.) Ἐὰν ἐκ τῶν α, β, γ, Κ ἀφήσωμεν τὸν Κ ἀμετάβλητον, πολλαπλασιάσωμεν δὲ τὰ α, β, γ ἐπὶ ρ, αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ, ω δὲν μεταβάλλονται, ἤτοι τὰ μερίδια ἅτινα θὰ προκύψωσιν, ὅταν μερίσωμεν τὸν Κ ἀναλόγως τῶν α, β, γ, θὰ προκύψωσι καὶ ὅταν μερίσωμεν τὸν Κ ἀναλόγως τῶν ρα, ρβ, ργ. Ἕνεκα τούτου ἁπλοποιοῦνται πολλάκις αἱ πράξεις.

Π. χ. νὰ μερισθῇ ὁ 30 ἀναλόγως τῶν

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6}.$$

Μερίζομεν αὐτὸν ἀναλόγως τῶν

$$\frac{1}{2}\times 6,\qquad \frac{1}{3}\times 6,\qquad \frac{1}{6}\times 6,$$

ἤτοι ἀναλόγως τῶν 3, 2, 1 καὶ εὑρίσκομεν $\chi=15, \psi=10, \omega=5$.

271.—Νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα Κ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ σημαίνει νὰ μερίσωμεν αὐτὸν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, οἵτινες εἶναι ἀντίστροφοι τῶν δοθέντων.

Ἀσκήσεις.

517). Νὰ μερισθῇ ὁ 96 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$.

518). Νὰ μερισθῇ ὁ 240 ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $3, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$.

519). Νὰ μοιρασθῶσι 4000 δραχμαὶ εἰς 3 ἀνθρώπους οὕτως ὥστε ὁ μὲν α΄ νὰ λάβῃ τὰ τριπλάσια τοῦ β΄, ὁ δὲ γ΄ τὰ διπλάσια τοῦ β΄.

520). Νὰ μοιρασθῶσι 5000 δραχ. εἰς 4 ἀνθρώπους, οὕτως ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ α΄ πρὸς τὸ τοῦ β΄ νὰ ἔχῃ λόγον $\frac{5}{6}$, τὸ μερίδιον τοῦ β΄ πρὸς τὸ τοῦ γ΄ $\frac{12}{13}$ καὶ τὸ τοῦ γ΄ πρὸς τὸ τοῦ δ΄ $\frac{26}{27}$.

521). Πρόκειται νὰ μοιρασθῇ ποσόν τι εἰς 3 ἀνθρώπους, οὕτως ὥστε ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ποσοῦ καὶ 200 δραχμάς, ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὸ τέταρτον τοῦ ποσοῦ καὶ 300 δραχμάς, καὶ ὁ τρίτος τὸ πέμπτον τοῦ ποσοῦ καὶ 800 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Προβλήματα έταιρείας.

272. — Πρόκειται ἐνταῦθα νὰ μερισθῇ κέρδος ἢ ζημία ἐπιχειρήσεως μεταξὺ συνεταίρων ὧν ἕκαστος εἶχε καταβάλει κεφάλαιόν τι ἐπὶ χρόνον τινὰ διὰ τὴν ἐπιχείρησιν.

Α΄. ***Πρόβλημα.*** Νὰ μοιρασθῇ κέρδος 4800 δραχμῶν μεταξὺ τριῶν συνεταίρων οἵτινες κατέβαλον διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ὁ α΄ 2500 δραχμάς, ὁ β΄ 2000 δραχμάς, ὁ γ΄ 1000 δραχμάς.

Λύσις. — Ἐὰν κληθῇ α τὸ εἰς ἑκάστην δραχμὴν τοῦ ἑταιρικοῦ κεφαλαίου ἀντιστοιχοῦν κέρδος, τότε τὰ κέρδη τῶν συνεταίρων θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν $\alpha\times2500$, $\alpha\times2000$, $\alpha\times1000$, ἤτοι εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2500, 2000, 1000. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς 4800 εἶναι εὐνόητον ὅτι πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 4800 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ κεφάλαια. Τὰ ζητούμενα λοιπὸν κέρδη εἶναι:

$$\frac{4800\times2500}{2500+2000+1000}$$

$$\frac{4800\times2000}{2500+2000+1000}, \quad \frac{4800\times1000}{2500+2000+1000},$$

ἤτοι ἐμερίσαμεν τὸ κέρδος εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ κεφάλαια.

Β΄. ***Πρόβλημα.*** Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 20000 δρ., 6 μῆνας βραδύτερον αὐτὸς μὲν κατέθεσεν ἄλλας 12500 δραχμάς, δεύτερος δὲ ἔμπορος κατέθεσε 10000 δραχμάς. Μετὰ τρία ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως ἐμοιράσθησαν κέρδος 60000 δραχμῶν· πόσον τὸ κέρδος ἑκάστου;

Λύσις. — Ἐὰν καλέσωμεν δ τὸ κέρδος ὅπερ φέρει 1 δραχμὴ εἰς 1 μῆνα, θὰ ἔχωμεν ὅτι

αἱ 20000 δρ.	εἰς 36 μῆν.	θὰ φέρωσι κέρδος	$20000\times36\times\delta$
αἱ 12000	εἰς 30 μῆν.	»	$12000\times30\times\delta$
αἱ 10000	εἰς 30 μῆν.	»	$10000\times30\times\delta$

ἐπομένως τὸ ἐξ 60000 δραχμῶν κέρδος θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$20000\times36\times\delta+12000\times30\times\delta+10000\times30\times\delta$$

ἤτοι $(20000\times36+12000\times30+10000\times30)\times\delta=60000$

ἐπομένως $\delta=\dfrac{60000}{20000\times36+12000\times30+10000\times30}$

καὶ ἑπομένως τὸ κέρδος τοῦ α΄ ἐκ τῆς α΄ καταθέσεως ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς $20000 \times 36 \times \delta$ θὰ εἶναι

$$\frac{20000 \times 36 \times 60000}{20000 \times 36 + 12000 \times 30 + 10000 \times 30}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκονται τὸ κέρδος τοῦ α΄ ἐκ τῆς β΄ καταθέσεως καὶ τὸ κέρδος τοῦ β΄.

Ἤτοι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος τῶν 60000 δρχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας χρόνους.

Ἀσκήσεις.

522). Ἐκ τριῶν μαθητῶν ὁ α΄ εἶχεν ἀγοράσει 5 τετράδια, ὁ β΄ 4 καὶ ὁ γ΄ 3· τέταρτος μαθητὴς μὴ προφθάσας ν' ἀγοράσῃ ἐμοιράσθη μετ' αὐτῶν τὰ τετράδια καὶ ἔδωκεν εἰς αὐτοὺς 60 λεπ.· πόσα λεπτὰ θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῶν τριῶν πρώτων ;

523). Ἐκ τεσσάρων ἐμπόρων ὁ πρῶτος κατέθεσε δι' ἐπιχείρησίν τινα τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν κατατεθέντων ὑπὸ τοῦ δευτέρου διὰ τὴν αὐτὴν ἐπιχείρησιν καὶ 6 μῆνας πρὸ αὐτοῦ· ὁ δὲ τρίτος 8 μῆνας μετὰ τὸν δεύτερον κατέθεσε τετραπλάσια τῶν τοῦ τετάρτου, ὅστις εἶχε καταθέσει τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν τοῦ πρώτου καὶ δύο ἔτη μετ' αὐτόν· τὸ προκῦψαν κέρδος μετὰ πάροδον ἑνὸς ἔτους ἀπὸ τῆς προσελεύσεως τοῦ τετάρτου ἦτο 24000 δραχμῶν. Πῶς θὰ τὸ μοιρασθῶσιν ;

524). Καταστηματάρχης ἐμοίρασεν εἰς τρεῖς ὑπαλλήλους 12400 δραχμὰς ἀναλόγως τοῦ χρόνου τῆς ὑπηρεσίας καὶ τῆς ἡλικίας ἑκάστου· ὁ α΄ εἶχεν ὑπηρετήσει ἐπὶ 6 μῆνας, ἦτο δὲ ἡλικίας 27 ἐτῶν· ὁ β΄ εἶχεν ὑπηρετήσει ἐπὶ 10 μῆνας, εἶχε δὲ ἡλικίαν 30 ἐτῶν, καὶ ὁ γ΄ εἶχεν ὑπηρετήσει ἐπὶ 2 ἔτη, εἶχε δὲ ἡλικίαν 40 ἐτῶν. Πόσα ἔδωκεν εἰς ἕκαστον ;

525). Τέσσαρες συνεταῖροι κατέβαλον διά τινα ἐπιχείρησιν, ὁ α΄ 36000 δραχμάς, ὁ β΄ 50000, ὁ γ΄ 64000 καὶ ὁ δ΄ 35000· ἐκ τοῦ κέρδους ἔδωκαν εἰς μὲν τοὺς ὑπαλλήλους τὸ $\frac{1}{45}$, εἰς τὸν διευθυντὴν δὲ τοῦ καταστήματος 3 % ἐπὶ τοῦ κέρδους· ἔλαβε δὲ οὗτος 4050. Πόσον τὸ κέρδος τῶν ὑπαλλήλων καὶ ἑκάστου τῶν συνεταίρων.

526). Τὸ κέρδος μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους εὑρέθη ὅτι ἦτο 72000 δραχ. ὁ διευθύνας τὴν ἐπιχείρησιν ἔλαβε τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ· τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{7}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου προσετέθη εἰς τὰ κεφάλαια· τὰ $\frac{33}{35}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου διενεμήθησαν εἰς τοὺς μετόχους καὶ τὸ ἀπομεῖναν ὑπόλοιπον ἐμοιράσθη εἰς 3 ὑπαλλήλους ἀναλόγως ἀφ' ἑνὸς μὲν τῶν ἐτῶν τῆς ὑπηρεσίας, ἀφ' ἑτέρου δὲ τῆς μισθοδοσίας των. Ἐκ τῶν ὑπαλλήλων τούτων ὁ α' εἶχεν ἓν ἔτος ὑπηρεσίας καὶ 800 δραχμὰς μισθόν, ὁ β' 8 μῆνας ὑπηρεσίας καὶ 600 δραχμὰς μισθὸν καὶ ὁ γ' 6 μῆνας ὑπηρεσίας καὶ 400 δραχμὰς μισθόν. Ποία ἡ ἀμοιβὴ ἑκάστου τούτων καὶ ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου μετόχου· πόσα δὲ ἔλαβεν ὁ διευθύνας τὴν ἐπιχείρησιν;

527). Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν 65000 δραχμὰς δι' ἐπιχείρησίν τινα· τὸ κεφάλαιον τοῦ β' εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ κεφαλαίου τοῦ α' καὶ τὸ τοῦ γ' τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου τοῦ β'. Ὁ γ' κατέβαλε τὸ κεφάλαιόν του ἀμέσως ἐξ ἀρχῆς, ὁ β' μετὰ 6 μῆνας, ὁ δὲ α' 5 μῆνας μετὰ τὸν β'. μετὰ 3 ἔτη δὲ ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εἶχον κέρδος 21312 δραχμάς. Ζητεῖται τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ κέρδος ἑκάστου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ

273. — Α'.) Δίδονται αἱ ποσότητες τῶν ἀναμιγνυομένων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.

Παράδειγμα.—Ἀνέμιξέ τις 320 ὀκάδας οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 40 λεπτά, μὲ 200 ὀκάδας ἄλλου οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λεπτά, καὶ μὲ 120 ὀκάδας ὕδατος· ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

Λυσις. — 320ὀκ. πρὸς 40 λεπ. τιμῶνται 12800 λ.
200 » 80 » 16000 »
120 » 0 » 0 »

ὥστε αἱ 640 ὀκάδες τοῦ μίγματος τιμῶνται 28800 λ. καὶ ἑπομένως ἡ μία ὀκᾶ $\frac{28800}{640}$ λ. $=45$ λ.

Β΄) Δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο ἀναμιγνυομένων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, καὶ ζητεῖται κυρίως ὁ λόγος τῶν ἀναμιγνυομένων ποσοτήτων, ἤτοι, ὅταν λαμβάνεται πρὸς ἀνάμιξιν μία μονὰς ἐκ τοῦ πρώτου, πόσον πρέπει νὰ λαμβάνεται ἐκ τοῦ δευτέρου.

Παράδειγμα. — Ἔμπορος ἔχει δύο εἴδη τεΐου. τοῦ πρώτου τὸ ἓν δράμιον ἀξίζει 6 λεπτά, τοῦ δευτέρου $3\frac{1}{2}$· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 450 δραμίων τοῦ ὁποίου τὸ δράμιον νὰ ἀξίζῃ 4 λεπτά.

Λύσις.—Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν προφανῶς πόσα δράμια ἐκ τοῦ δευτέρου θὰ ἔθετε πρὸς ἀνάμιξιν, ἐὰν ἐκ τοῦ πρώτου ἐλάμβανεν 1 δράμ.

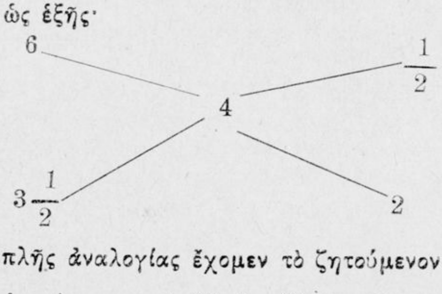
Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι·

1 δράμ. τῶν 6λεπ. πωλούμενον ἀντὶ 4 φέρει ζημίαν 2λεπ., ἐνῷ 1δράμ. τῶν $3\frac{1}{2}$ λεπ. πωλούμενον ἀντὶ 4 λεπ. φέρει κέρδος $\frac{1}{2}$ λεπ.

Λαμβάνων ἑπομένως 1 δράμιον ἐκ τοῦ πρώτου ἔχει νὰ καλύψῃ ζημίαν δύο λεπτῶν· πρὸς τοῦτο θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ δευτέρου προφανῶς τόσα δράμια ὅσας φορὰς χρειάζεται νὰ ἐπαναληφθῇ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ λεπ. διὰ νὰ προκύψωσι τὰ 2 λεπ., ἤτοι εἰς 1 δράμ. ἐκ τοῦ πρώτου θὰ λαμβάνῃ $2 : \frac{1}{2}$ δράμια ἐκ τοῦ δευτέρου, ὁπότε θὰ ἔχῃ κέρδος 2 λεπτά, ἤτοι ὅσην καὶ ζημίαν· ὅθεν ἡ ἀναλογία καθ' ἣν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀνάμιξις εἶναι 1 δράμιον ἐκ τοῦ α΄ εἴδους μὲ 4δράμ. ἐκ τοῦ δευτέρου, ἢ $\frac{1}{2}$ δράμ. ἐκ τοῦ α΄ μὲ 2 δράμ. ἐκ τοῦ β΄,

Διατάσσομεν ὡς ἑξῆς·

α΄)



β΄)

Καὶ νῦν δι' ἁπλῆς ἀναλογίας ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Εἰς $2\frac{1}{2}$ δράμ.μίγματος τὰ 2δράμ. θὰ εἶναι ἐκ τοῦ β΄ καὶ $\frac{1}{2}$

ἐκ τοῦ α΄. διὰ 450 δρμ. μίγματος πόσα δράμ. θὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου ;

Ὅθεν ἐκ τοῦ α΄ θὰ λάβῃ $\frac{1}{2}\times\frac{450}{\frac{5}{2}}=90$ δράμια.

Ἐκ δὲ τοῦ β΄ θὰ λάβῃ $2\times\frac{450}{\frac{5}{2}}=360$ δράμια.

Κράματα.

274.—Ἔστω α τὸ ποσὸν καθαροῦ χρυσοῦ ἢ ἀργύρου περιεχομένου ἐν κράματι καὶ β τὸ ποσὸν τοῦ ὅλου κράματος· τότε ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος ἢ τίτλος αὐτοῦ καὶ ἐκφράζεται συνήθως εἰς χιλιοστά. Π. χ., ἐὰν εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος τὰ 0,850 εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τότε ὁ τίτλος κράματος τοῦ ἀργύρου εἶναι 0,850.

Α΄) Συνεχωνεύθησαν 40 δράμια ἀργύρου τίτλου 0,850 καὶ 60 δράμια ἀργύρου τίτλου 0,900. Ζητεῖται ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

Λυσις.—Εἰς τὸ α΄ κρᾶμα περιέχεται καθαρὸς ἄργυρος

$40\times0,850=34$ δρ.

εἰς δὲ τὸ δεύτερον $60\times0,900=54$ δρ.

ὥστε εἰς τὸ τελικὸν κρᾶμα τὸ ἐξ 100 δραμ. περιέχεται καθαρὸς ἄργυρος 88 δρ.· ἄρα βαθμὸς καθαρότητος αὐτοῦ εἶναι $\frac{88}{100}=0,880$.

Β΄) Ἔχομεν δύο εἴδη χρυσοῦ, τοῦ μὲν α΄ ὁ τίτλος εἶναι 0,800, τοῦ δὲ β΄ 0,910. Ζητεῖται πόσα δράμια τοῦ α΄ μὲ πόσα δράμια τοῦ β΄ πρέπει ν' ἀναμίξωμεν, ἵνα σχηματισθῇ κρᾶμα ἐκ 33 δραμ. τίτλου 0,850.

Λυσις.—Ἕκαστον δράμιον τοῦ α΄ εἴδους εἰσάγει χρυσὸν εἰς τὸ κρᾶμα κατὰ 0,050 δράμ. ὀλιγώτερον τῶν 0,850, ἤτοι τοῦ χρυσοῦ ὅστις θέλομεν νὰ περιέχηται εἰς ἓν δράμιον τοῦ κράματος· ἐνῷ ἕκαστον δράμ. τοῦ β΄ εἰσάγει κατὰ 0,060 δρ. περισσότερα· ὥστε, ἐὰν λάβωμεν 0,060 δράμια ἐκ τοῦ α΄ εἴδους, εἰσάγομεν χρυσὸν ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου $0,060\times0,050$, ἐὰν δὲ λάβωμεν 0,050 δράμια ἐκ τοῦ β΄, εἰσάγομεν περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου $0,050\times0,060$ δράμια· ὥστε ἐὰν λάβωμεν 0,060 δράμ. ἐκ τοῦ α΄ καὶ 0,050 δραμ. ἐκ τοῦ β΄ ὁ τίτλος τοῦ κράματος θὰ εἶναι ἀκριβῶς 0,850, ἤτοι εἰς τὰ 0,060 δράμια ἐκ τοῦ α΄ ἀντιστοιχοῦσιν 0,050 ἐκ τοῦ β΄ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, εἰς τὰ 60 δράμ. ἐκ τοῦ α΄ ἀντιστοιχοῦσι 50 δράμ. ἐκ τοῦ β΄. ὥστε διὰ κρᾶμα 110 δραμ. λαμβάνομεν 60 δράμ. ἐκ τοῦ α΄ καὶ 50 ἐκ τοῦ β΄, διὰ κρᾶμα 33 δραμίων πόσον θὰ λάβω ἐξ ἑκάστου ;

Θὰ λάβω ἐκ μὲν τοῦ α΄ $\frac{60\times33}{110}=18$ δράμια

ἐκ δὲ τοῦ β΄ $\frac{50\times33}{110}=15$ δράμια

Ἀσκήσεις.

528). Σιτέμπορος ἔχει δύο εἴδη σίτου, τοῦ μὲν ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 0,70 δραχ., τοῦ δὲ 0, 85· ἔχει δὲ ἐκ τοῦ α΄ 7 στατῆρας καὶ 32 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ β΄ 1 στατ. 5 ὀκάδας καὶ 200 δράμια· ἂν ἀναμίξῃ τὰς ἄνω ποσότητας, πόσον θὰ στοιχίζῃ ἡ ὀκᾶ ;

529). Οἰνοπώλης ἔχων 250 ὀκάδας οἴνου,οὗ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 0,60 δραχ., ἀναμιγνύει μετ᾽ αὐτοῦ 20 ὀκάδας ὕδατος. Ζητεῖται τίς ἡ νέα τιμὴ τοῦ οἴνου· ἂν δὲ θέλῃ νὰ κερδίσῃ 10 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ οἴνου, πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ μῖγμα.

530). Ἀναλόγως τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἀναμιχθῶσιν οἶνος τιμώμενος πρὸς 70 λεπτὰ κατ᾽ ὀκᾶν μὲ οἶνον τιμώμενον πρὸς 55 λεπτὰ διὰ νὰ σχηματισθῇ μῖγμα οὗ ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 67 λεπ ;

531). Ἔχομεν 210 ὀκάδας οἴνου, οὗ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 0,60 δραχ. θέλομεν νὰ ρίψωμεν ὕδωρ ἐντὸς αὐτοῦ, ὥστε ἡ τιμή του νὰ κατέλθῃ εἰς 0,50· πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν ;

532). Ἔμπορός τις ἀγοράζει ἀντὶ 250 δραχμῶν 300 ὀκάδας οἴνου, πληρώνει δὲ 19 δραχ. δι᾽ ἔξοδα μεταφορᾶς· προσθέτει καὶ 30 ὀκάδας ὕδατος καὶ θέλει νὰ κερδίσῃ 20 $^0/_0$ ἐπὶ τῶν ἐξοδευθέντων χρημάτων. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν ;

533). Ἔχει τις 3 κράματα ἀργύρου τίτλων 0,220, 0,840 καὶ καὶ 0,950· ἂν ἀναμίξῃ αὐτὰ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, τὸ νέον κρᾶμα τίνος τίτλου θὰ εἶναι ;

534). Κατὰ τίνα ἀναλογίαν πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ βάρη δύο κραμάτων ἐχόντων τίτλους 0,840, καὶ 0,720, διὰ νὰ κάμωμεν κρᾶμα 195 γραμμαρίων τίτλου 0,784;

535). Ἔχομεν κρᾶμα χρυσοῦ 1230 γραμμαρίων τίτλου 0,850· πόσον καθαρὸν χρυσὸν πρέπει ν᾽ ἀναμίξωμεν μετ᾽ αὐτοῦ ἵνα ὁ τίτλος ἀνέλθῃ εἰς 0,950 ;

536). Τρία κράματα ἀργύρου, τίτλων 0,980, 0,900 καὶ 0,840, συγχωνεύονται εἰς κρᾶμα 540 γραμμαρίων, τίτλου 0,950. Πόσον ἐλάβομεν ἐξ ἑκάστου, δεδομένου ὄντος ὅτι ἡ ποσότης ἡ ληφθεῖσα ἐκ τοῦ β΄ εἶναι διπλασία τῆς ἐκ τοῦ γ΄;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

275.—Θέλει τις νὰ εὕρῃ τὸ μῆκος μιᾶς ὁδοῦ καὶ μετρεῖ αὐτὴν τρεῖς φοράς· κατὰ τὴν α΄ μέτρησιν εὗρε μῆκος 615 μέτρων, κατὰ τὴν β΄ 612 καὶ κατὰ τὴν γ΄ 621. Ἐὰν ἠθέλομεν τὰ τρία ἐξαγόμενα νὰ τὰ καταστήσωμεν ἴσα, χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ τὸ ἄθροισμά των, ἔπρεπε νὰ λάβωμεν ἕκαστον τῶν ἴσων ἐξαγομένων αὐτῶν ὡς ἴσον πρὸς

$$\frac{615+612+621}{3}$$

ὅπερ λέγεται *μέσος ὅρος* τῶν τριῶν ἀρχικῶν ἐξαγομένων. Ἤτοι ὁ μέσος ὅρος ὁμοειδῶν ποσῶν εὑρίσκεται, ἐὰν προσθέσωμεν τὰ ποσὰ ταῦτα καὶ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων.

276.—Μέσον ὅρον ζητοῦμεν εἰς πλείστας περιστάσεις. Π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας ἢ τοῦ ἔτους εἴς τινα τόπον, ἐπίσης ὅταν ζητῶμεν τὴν μέσην ἐτησίαν εἴσπραξιν τελωνείου ἢ τὸν μέσον ὅρον τῶν γεννήσεων καθ' ἡμέραν εἰς ἕνα μῆνα, εἴς τινα τόπον· κ. ο. κ.

Ἀσκήσεις.

537). Ἐξοδεύει τις τὴν Κυριακήν, α΄ ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος 12 δραχ., τὴν β΄ 7, τὴν γ΄ 8, τὴν δ΄ 5, τὴν ε΄ 7, τὴν ϛ΄ 4, καὶ τὴν τελευταίαν 9· ποία ἡ κατὰ μέσον ὅρον ἡμερησία δαπάνη;

538). Αἱ εἰσπράξεις τελωνείου κατὰ 4 ἔτη συναπτὰ εἶναι 45033 48072, 49060, 54333· τίς ἡ μέση ἐτησία εἴσπραξις κατ' αὐτά ;

539). Μετρήσας τις ὁδὸν εὗρεν ὡς μῆκος αὐτῆς τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς·

35,733 χιλιόμετρα
35,732 »
35,739 »
35,734 »
35,732 »

Ποῖον κατὰ μέσον ὅρον τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ;(Νὰ εὑρεθῇ τρόπος εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ἁπλοποιήσεως τῆς εὑρέσεως τοῦ μέσου ὅρου).

Ἀσκήσεις ἐν γένει ἐπὶ τῶν τριῶν τελευταίων βιβλίων.

540). Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\beta}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}$

541). Δεδομένου ὅτι $\frac{17}{\alpha}=\frac{25}{\beta}=\frac{26}{\gamma}=\frac{30}{\delta}$

καὶ $\alpha\beta\gamma\delta=26851500$

νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$

542). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἑκάστη τῶν δύο ἀναλογιῶν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \text{ καὶ } \frac{\lambda\alpha+\rho\beta}{\kappa\alpha-\mu\beta}=\frac{\lambda\gamma+\rho\delta}{\kappa\gamma-\mu\delta}$$

εἶναι συνέπεια τῆς ἄλλης, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀριθμ. λ,ρ,κ,μ.

543). Ὑπάρχει ἀναλογία τοιαύτη ὥστε, ἂν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τοὺς τέσσαρας ὅρους της, νὰ λάβωμεν νέαν ἀναλογίαν;

544). Ἐὰν τὰ γινόμενα·

$$(\alpha+\beta+\gamma).(\alpha+\beta+\delta) \text{ καὶ } (\gamma+\delta+\alpha).(\gamma+\delta+\beta)$$

εἶναι ἴσα, ἕκαστον τούτων ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2} \quad (\S\ 251, \text{ ἄσκ. } 463)$$

545). Εἶναι προτιμότερον νὰ τοκίσῃ τις 4700 δραχ. πρὸς 4 %, ἢ 3000 δραχ. πρὸς 5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 3 %;

546). Τοκίζει τις τὰ $\frac{2}{3}$ κεφαλαίου πρὸς 5 % καὶ τὸ ἕτερον τρίτον πρὸς 4,5 %· εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἔλαβε 14152,50 δραχμ. διὰ κεφάλαιον καὶ τόκους ὁμοῦ· ποῖον ἦτο τὸ κεφάλαιον;

547). Γραμματίου λήγοντος μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπολογίζεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 5 %· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ λογισθῇ ἡ ἐξωτερική, ἵνα εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐσωτερικήν;

548). Τρεῖς ἔμποροι ἐκέρδισαν 15600 δραχ.· ὁ α΄ εἶχε καταθέσει διὰ τὴν ἐπιχείρησιν 8000 δραχ. ἐπὶ 3 ἔτη· ὁ β΄ 1000 δραχ. ἐπὶ 4 ἔτη καὶ ὁ γ΄ 12000 δραχ. ἐπὶ 2 ἔτη. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου;

549). Ἔχει τις καφὲ ἀξίας 6 δρχ., 9 δρχ., 15 δραχ. τὴν ὀκᾶν· ζητεῖται νὰ σχηματισθῇ μῖγμα 480 ὀκάδων, ἐν ᾧ 60 ὀκάδες νὰ εἶναι ἐκ τοῦ στοιχίζοντος 6 δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσας ὀκάδας θὰ θέσῃ ἐκ τῶν ἄλλων εἰδῶν, ἵνα ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος εἶναι 10 δραχ.;

550). Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)}{\alpha^3}=\frac{(\gamma^2+\delta^2)(\gamma+\delta)}{\gamma^3}$$

ΤΕΛΟΣ

κ, ἀδιαιρέτως διὰ τὴν ἄνω ἐκτιθεῖσαν αἰτίαν δρ. τέσσαρας χιλιάδας ὀκτακοσίας ὀγδοήκοντα (4880) ἐντόκως ἐπὶ μὲν τοῦ κεφαλαίου τῶν δραχμῶν 4000 πρὸς 2 τοῖς 0[0 τὸν μῆνα, ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν δρ. 880 πρὸς 9 0[0 ἐτησίως ἀπὸ τῆς ἀγωγῆς μέχρις ἐντελοῦς ἐξοφλήσεω , νὰ κηρυχθῇ προσωρινῶς ἐκτελεστὴ ἡ ἀπόφασις καὶ νὰ καταδικασθῶσιν οἱ ἀντίδικοι εἰς τὰ ἔξοδα καὶ τέλη. καὶ

Προκειμένης συζητήσεως κατὰ τὴν ἐναρχὴ τῆς παρούσης μνημονευομένην συνεδρίασιν, καθ᾽ ἣν ἐνεφανίσθη μόνον ὁ τοῦ ἐνάγοντος πληρεξούσιος ὅστις διὰ τῶν ἐγγράφων προτάσεών του ἐξῃτήσατο τὰ ἐν τοῖς πρακτικοῖς.

Ἀκούσαν αὐτοῦ καὶ τοῦ Εἰσαγγελεύοντος;

Δ ελθὸν τὴν Δικογραφίαν

Σκεφθὲν κατὰ τὸν Νόμον

Ἐπειδὴ καθὰ προκύπτει ἐκ τοῦ ἀπὸ 28 Νοεμβρίου 1892 ἐπιδοτηρίου τοῦ δικαστικοῦ κλητῆρος Λαζ. Κολέτη, ἡ προκειμένη ἀγωγὴ ἐπεδόθη τακτικῶς καὶ νομίμως πρὸς τὸν ἐναγόμενον, οὗτος δὲ μὴ ἐμφανισθ... σήμερον κ...

Ὁ Πρόεδρος

Μ. Μελετόπουλος Ὁ ὑπογραμματε...

Λ. Σοραντόπ...

Ἐντέλλεται πρὸς πάντα μὲν κλη... ἐκτελέση ζητηθεὶς τὴν παροῦσαν πρ... τα δὲ τοὺς Εἰσαγγελεῖς νὰ ἐνεργή... καθ᾽ ἑαυτοὺς καὶ πρὸς ἅπαντας τοὺς... τὰς καὶ ἄλλους ἀξιωματικοὺς τῆς ... δυνάμεως νὰ δώσωσι χεῖρα βοηθεί... νομίμως ζητηθῶσιν. Πρὸς βεβαίωσι... του ἡ παροῦσα ὑπεγράφη νομίμω...

Ἐν Ναυπλίῳ τῇ 11 Φεβρουαρίο...

Οἱ Δικασταί

Ἰω. Μαρούδης

Ἰ Κυριακόπουλος

Τιμ. Πολυχρονιάδ...

Ὁ Ὑπογραμματεύς

Σ. Νεουδάκης

Ἀριθ. ἀπογρ 154[95

Ὅτι ἀπόγραφον ἐκτελεστό...

Ναύπλιον αὐθημερόν.